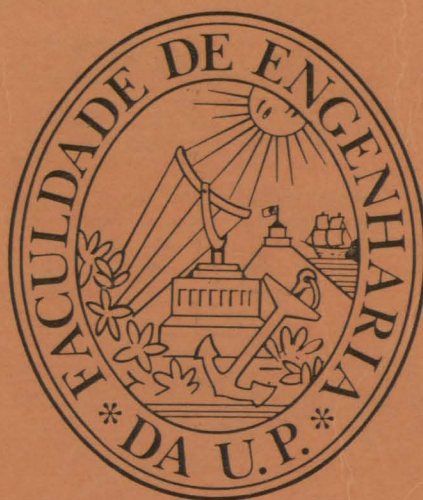




**RUI DE SOUSA CAMPOSINHOS**

**LAJES PRÉ-ESFORÇADAS  
POR CABOS NÃO ADERENTES**

*Um guia de dimensionamento e projecto*

Dissertação apresentada à Faculdade  
de Engenharia da Universidade do Porto  
para obtenção do grau de Mestre  
em Construção de Edifícios.

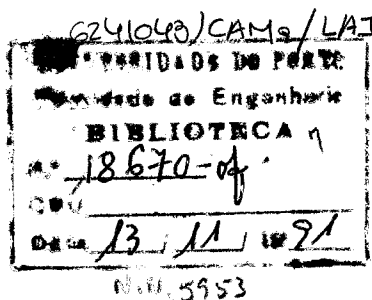
**PORTO, 1991**

RUI DE SOUSA CAMPOSINHOS

**LAJES PRÉ-ESFORÇADAS  
POR CABOS NÃO ADERENTES**

*Um guia de dimensionamento e projecto*

Dissertação apresentada à  
Faculdade de Engenharia da  
Universidade do Porto para  
obtenção do grau de Mestre em  
Construção de Edifícios.



PORTO, 1991

043 M  
C 218 L

*À Susana.*  
*À Denise, à Cristiana e ao Rui Pedro.*

O autor agradece:

Ao Professor *Manuel de Azeredo* o ter despertado o gosto por esta questão, o amparo em todos os passos ao longo da preparação da dissertação e a disponibilidade que sempre manifestou. A luz que se fez sobre muitas questões, só foi conseguida depois de acesas e inúmeras horas de discussão.

Ao *Adelino Granja*, amigo e colega, pelo trabalho e primor que teve na execução dos desenhos, obtidos depois de muitas horas à frente do computador.

Ao Dr<sup>o</sup> *Pinho de Sousa*, da Caixa Geral de Depósitos, responsável pelas facilidades que esta Instituição me proporcionou tanto durante a parte escolar do curso como durante a preparação deste trabalho.

## ÍNDICE

|                                                                                                                                    |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1. INTRODUÇÃO                                                                                                                      | 1  |
| 1.1 PRINCIPAIS VANTAGENS DO PRÉ-ESFORÇO EM LAJES                                                                                   | 2  |
| 1.2 PRÉ-ESFORÇO NÃO ADERENTE                                                                                                       | 3  |
| 1.3 LAJES PRÉ-ESFORÇADAS POR CABOS NÃO ADERENTES                                                                                   | 4  |
| 1.4 GRAU DE PRÉ-ESFORÇO EM LAJES                                                                                                   | 5  |
| 2 SISTEMAS ESTRUTURAIS DE LAJES                                                                                                    | 8  |
| 2.1 LAJES ARMADAS NUMA SÓ DIRECÇÃO                                                                                                 | 12 |
| 2.2 LAJES ARMADAS EM CRUZ                                                                                                          | 15 |
| 2.2.1 COMPENSAÇÃO BIDIRECCIONAL DE CARGA                                                                                           | 18 |
| 2.3 LAJES FUNGIFORMES                                                                                                              | 21 |
| 2.3.1 COMPORTAMENTO DAS LAJES FUNGIFORMES                                                                                          | 22 |
| 2.3.1.1 COMPENSAÇÃO DE CARGAS                                                                                                      | 26 |
| 2.3.1.2 DISPOSIÇÃO DOS CABOS EM ALÇADO                                                                                             | 35 |
| 2.3.1.3 DISPOSIÇÃO DOS CABOS EM PLANTA                                                                                             | 37 |
| 2.3.1.4 REGRAS DE DISPOSIÇÃO DOS CABOS                                                                                             | 44 |
| 3. CONCEPÇÃO E PROCEDIMENTOS DE CÁLCULO                                                                                            | 48 |
| 3.1 CÁLCULO DOS ESFORÇOS                                                                                                           | 48 |
| 3.1.1 I- ANÁLISE ELÁSTICA                                                                                                          | 51 |
| 3.1.2 II- ANÁLISE PLÁSTICA                                                                                                         | 51 |
| 3.1.3 III - ANÁLISES APROXIMADAS                                                                                                   | 53 |
| 3.1.3.1 LAJES COM APOIOS CONTÍNUOS                                                                                                 | 53 |
| 3.1.3.2 LAJES FUNGIFORMES                                                                                                          | 61 |
| 3.1.4 REDISTRIBUIÇÃO DE MOMENTOS                                                                                                   | 66 |
| 3.2 GARANTIA DA EFICÁCIA DO PRÉ-ESFORÇO                                                                                            | 70 |
| 3.2.1 CARACTERIZAÇÃO DA FENDILHAÇÃO POR IMPEDIMENTO DA DEFORMAÇÃO AXIAL                                                            | 70 |
| 3.2.2 COMPORTAMENTO DAS LAJES PRÉ-ESFORÇADAS NA AUSÊNCIA DE COMPRESSÃO                                                             | 71 |
| 3.2.3 PROCEDIMENTOS E RECOMENDAÇÕES PARA MINORAR A FENDILHAÇÃO POR RESTRIÇÃO À DEFORMAÇÃO AXIAL E EVITAR A DISPERSÃO DA COMPRESSÃO | 80 |
| 3.3 PRÉ-DIMENSIONAMENTO                                                                                                            | 82 |
| 3.3.1 CARGAS A COMPENSAR                                                                                                           | 85 |
| 3.3.2 DEFINIÇÃO PRELIMINAR DO VALOR DO PRÉ-ESFORÇO                                                                                 | 86 |
| 3.4 VALORES E PERDAS DE PRÉ-ESFORÇO                                                                                                | 87 |
| 3.4.1 PERDAS INSTANTÂNEAS                                                                                                          | 88 |
| 3.4.2 PERDAS DIFERIDAS                                                                                                             | 93 |

|                                                            |            |
|------------------------------------------------------------|------------|
| <b>4. ESTADOS LIMITES DE UTILIZAÇÃO</b>                    | <b>95</b>  |
| 4.1 FENDILHAÇÃO                                            | 95         |
| 4.2 DEFORMAÇÃO                                             | 104        |
| 4.2.1 FLECHAS INSTANTÂNEAS EM FASE NÃO FENDILHADA          | 105        |
| 4.2.1.1 LAJES COM APOIOS CONTÍNUOS                         | 106        |
| 4.2.1.2 LAJES FUNGIFORMES                                  | 110        |
| 4.2.2 FLECHAS INSTANTÂNEAS EM FASE FENDILHADA              | 115        |
| 4.2.3 FLECHAS A LONGO PRAZO                                | 116        |
| 4.3 OUTROS ESTADOS LIMITES DE UTILIZAÇÃO                   | 118        |
| <b>5. ESTADOS LIMITES ÚLTIMOS</b>                          | <b>120</b> |
| 5.1 RESISTÊNCIA À FLEXÃO                                   | 120        |
| 5.1.1 AUMENTO DE TENSÃO NOS CABOS                          | 122        |
| 5.1.1.1 REGULAMENTAÇÃO AMERICANA (ACI)                     | 128        |
| 5.1.1.2 REGULAMENTAÇÃO INGLESA (BS)                        | 130        |
| 5.1.2 COMPARAÇÃO ENTRE AS VÁRIAS ABORDAGENS                | 132        |
| 5.2 ESFORÇOS TRANSVERSOS E PUNÇOAMENTO                     | 133        |
| 5.3 TENSÕES A ABSORVER NAS ANCORAGENS                      | 136        |
| 5.3.1 VERIFICAÇÃO DA PRESSÃO LOCAL NO BETÃO                | 137        |
| 5.3.2 TENSÕES DE TRACÇÃO A ABSORVER                        | 138        |
| 5.4 RESISTÊNCIA AO FOGO                                    | 141        |
| 5.4.1 RESULTADOS E RECOMENDAÇÕES DE EXPERIÊNCIAS BELGAS    | 143        |
| 5.4.2 DETERMINAÇÃO POR VIA ANALÍTICA DA SEGURANÇA          | 145        |
| 5.4.3 REGRAS PRÁTICAS PARA A VERIFICAÇÃO DA SEGURANÇA      | 150        |
| <b>6. RECOMENDAÇÕES DE PROJECTO E EXECUÇÃO, SISTEMAS E</b> |            |
| <b>    CARACTERÍSTICAS</b>                                 |            |
| <b>    DOS MATERIAIS DE PRÉ-ESFORÇO</b>                    | <b>153</b> |
| 6.1 PROCEDIMENTOS EM OBRA                                  | 153        |
| 6.1.1 COFRAGENS                                            | 154        |
| 6.1.2 COLOCAÇÃO DOS CABOS                                  | 155        |
| 6.1.3 BETONAGEM                                            | 157        |
| 6.1.4 APLICAÇÃO DO PRÉ-ESFORÇO                             | 158        |
| 6.2 CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS DE ALGUNS SISTEMAS            | 161        |
| <b>BIBLIOGRAFIA</b>                                        | <b>169</b> |

## ÍNDICE DE QUADROS

|                                                                                                       |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Tabela 1.1 - Coeficientes para momentos negativos em lajes apoiadas nos 4 bordos                      | 58  |
| Tabela 1.2 - Coeficientes para momentos positivos em lajes apoiadas nos 4 bordos (cargas permanentes) | 59  |
| Tabela 1.3 - Coeficientes para momentos positivos em lajes apoiadas nos 4 bordos (acções variáveis)   | 60  |
| Tabela 1.4 - Distribuição de cargas nos bordos de lajes contínuas                                     | 61  |
| Relações vão/espessura para pré-dimensionamento de lajes fungiformes                                  | 84  |
| Ábaco para pré-dimensionamento de lajes fungiformes                                                   | 85  |
| Coeficientes de atrito para armaduras não aderentes                                                   | 90  |
| Tensões admissíveis no betão (Concrete Society)                                                       | 97  |
| Tensões admissíveis no betão (ACI)                                                                    | 98  |
| Valores para tensões de tracção em função do tipo de betão                                            | 100 |
| Estado limite de fendilhação (abertura de fendas) (valores adaptados)                                 | 103 |
| Espessuras mínimas de recobrimento de cabos (FIP)                                                     | 118 |
| Ábaco de distribuição de temperaturas no interior de lajes (Resistência ao fogo)                      | 146 |
| Espessuras mínimas de recobrimento de cabos em lajes maciças (Resistência ao fogo)                    | 152 |
| Tolerâncias de posicionamento dos cabos em alçado                                                     | 156 |
| Características técnicas de sistemas de pré-esforço (CCL - Systems)                                   | 166 |
| Características técnicas de sistemas de pré-esforço (CIPEC)                                           | 167 |
| Características técnicas de sistemas de pré-esforço (FREYSSINET)                                      | 167 |
| Características técnicas de sistemas de pré-esforço (VSL)                                             | 167 |
| Características técnicas de sistemas de pré-esforço (DYWIDAG)                                         | 168 |

## 1 INTRODUÇÃO

A utilização de lajes pré-esforçadas, pós-tensionadas por cabos não aderentes, tem-se mostrado uma solução económica e eficaz em grande parte dos sistemas de pavimentos de estruturas realizados por todo o mundo. O número crescente de obras efectuadas nos Estados Unidos, Austrália, Médio Oriente e Europa falam por si [20,38].

Em Portugal esta tecnologia de construção tem tido ocorrências muito pontuais. Para isso terá contribuído o facto de haver pouca informação disponível que ao dar a conhecer as potencialidades do sistema, permita aos projectistas uma análise adequada e aos construtores o aproveitamento das suas vantagens.

Pretende-se com este trabalho, contribuir para o estudo da aplicação desta tecnologia em lajes, de forma que os interessados e projectistas tomem conhecimento das particularidades do projecto, dimensionamento e execução deste tipo de pavimentos na construção de edifícios.

### 1.1 PRINCIPAIS VANTAGENS DO PRÉ-ESFORÇO EM LAJES

Numa laje convencional de betão armado e na presença de grandes vãos, a utilização racional de níveis adequados para as armaduras ordinárias impõe que se trabalhe com tensões elevadas. A estas associam-se sempre tensões de fendilhação no betão, acabando por comprometer o objectivo funcional dos pavimentos. Mesmo no sistema mais utilizado entre nós, lajes de vigotas pré-esforçadas, fica-se sempre condicionado aos sistemas armados numa só direcção desprezando na maior parte dos casos o efeito da armação em cruz.

Em lajes pós-tensionadas, embora o pré-esforço não seja na maioria dos casos suficiente para anular a fendilhação, a largura da fissuras é muito menor; portanto, além de se aumentar a resistência à flexão e a esforços transversos, a rigidez da laje será menos afectada e simultaneamente podem, com a compensação de parte das cargas, consequentemente utilizar-se espessuras inferiores.

Dever-se-á ter presente que a relação altura/vão da laje repercute-se no peso próprio de toda a estrutura, no nº de pilares e dimensões das fundações, na altura total do edifício e eventualmente no nº de pisos.

A localização dos cabos, excêntrica em relação ao centro de gravidade da laje tem um papel fundamental para a contribuição na redução das tensões de tracção no betão. O pré-esforço excêntrico induz flechas que numa disposição adequada de cabos, são contrárias às flechas resultantes das acções permanentes e variáveis a que

a laje está sujeita. Variando a posição e em certos casos o valor do pré-esforço, consegue-se compensar uma determinada parte dos esforços e deformações introduzidos pelas acções exteriores e peso próprio.

São frequentes os casos de flechas a longo prazo, surgidas em lajes de betão armado, devidas à fluência do betão que podem ser evitadas pela acção do pré-esforço [5].

## 1.2 PRÉ-ESFORÇO NÃO ADERENTE

No actual Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-esforçado não é feita qualquer referência ao betão pré-esforçado por armaduras não aderentes. Todas as considerações e disposições respeitantes a pré-esforço são apenas aplicáveis para o caso de haver aderência das armaduras ao betão.

Nas disposições regulamentares, admite-se sempre que não há qualquer movimento relativo entre o aço e o betão sem transmissão de esforços na sua interface.

Estão naturalmente neste caso os elementos pré-esforçados por armaduras pré-tensionadas. Enquadram-se também aqui as armaduras embainhadas que são injectadas com ligante depois de tensionadas, ficando impedidas de se moverem relativamente ao betão.

Contudo, quando se utilizam em elementos de betão pós-tensionado, armaduras em que cada cordão é embainhado com um produto anticorrosivo e lubrificante, antes da aplicação do pré-esforço e normalmente na fábrica, não dando lugar a qualquer injeção posterior, ou ainda nos casos de pré-esforço externo em que a armadura fica exposta, embora protegida, o referido deslocamento relativo entre o betão e as armaduras passa a existir, ao longo das peças, a não ser nas ancoragens.

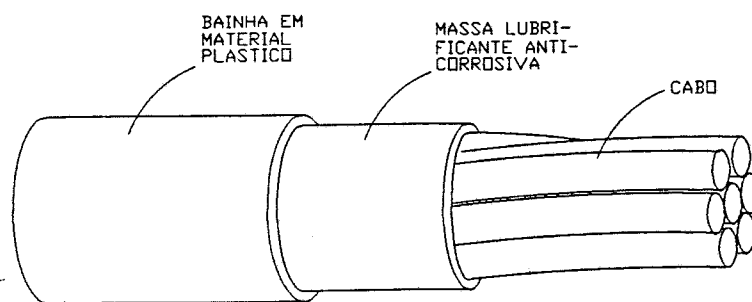
Como consequência o alongamento das armaduras é distribuído por todo o comprimento entre ancoragens, em vez de se concentrar nas fissuras como acontece com o betão pré-esforçado com armaduras aderentes.

Quando se dá a rotura, o aumento das tensões e extensões, numa armadura não aderente é inferior ao de uma armadura aderente, verificando-se que a tensão final no aço é pouco superior à inicialmente instalada pela aplicação do pré-esforço [3,4,11].

A rotura neste caso é caracterizada por um pequeno número de fendas largas, cujo crescimento causa uma concentração de compressões na área de betão reduzida pela fissuração, ultrapassando a sua capacidade resistente [3,4,7].

### 1.3 LAJES PRÉ-ESFORÇADAS POR CABOS NÃO ADERENTES

A utilização betão pré-esforçado sem aderência remonta a 1936. Contudo nas últimas décadas, desenvolveu-se uma tecnologia de embainhamento de armaduras em que cada cordão é revestido por uma massa lubrificante e anticorrosiva. Esta operação é normalmente feita imediatamente após o fabrico das armaduras, com bainhas à base de polietileno ou polipropileno. O cabo<sup>1</sup> assim formado (fig. 1.1) veio mostrar-se particularmente vantajoso para aplicação em lajes.



Representação esquemática de um cabo não aderente

fig.1

Este método de construção iniciou-se nos Estados Unidos da América, tendo-se divulgado pela Austrália, Hong-Kong, Singapura chegando à Europa durante a década de 70, revelando-se aqui com algumas vantagens técnicas e de interesse económico relevante quando aplicado em lajes. Comparado com outros sistemas afirma-se haver uma redução considerável nos consumos de material, de mão de obra e de tempos de execução [3,5,6].

Pode-se adiantar as principais vantagens da solução quando comparada com o sistema de armaduras embainhadas aderentes:

- possibilita a utilização de excentricidades maiores devido ao pequeno diâmetro das bainhas, na maior parte dos casos não superior a 15 mm;
- As armaduras ficam protegidas contra a corrosão desde o seu fabrico;
- O assentamento dos cabos é simples e rápido;
- As perdas de atrito são bastante inferiores quando comparadas

<sup>1</sup> Designa-se, ao longo do texto, por "cabo" o conjunto constituído pela armadura (cordão), pela bainha protectora e pelo produto de protecção (massa anticorrosiva lubrificante).

com o pré-esforço com bainhas injectáveis;

-A operação de injeção é eliminada (vantagem importante, dado o grande número de cabos);

-pode permitir, mediante disposições adequadas, o reajuste do pré-esforço em qualquer instante da vida da estrutura

-O equipamento de aplicação do pré-esforço é muito ligeiro e portátil.

Por outro lado o sistema de armaduras aderentes embainhadas com injeção tem as vantagens de:

-Para a mesma percentagem de aço numa dada secção a resistência à rotura por flexão ser superior.

-Depois da injeção o pré-esforço não fica apenas dependente das ancoragens.

-Em caso de avaria o seu efeito é localizado.

-Em termos de cálculo as peças armadas com pré-esforço aderente integram-se numa teoria unificada de betão armado pré-esforçado.

#### 1.4 GRAU DE PRÉ-ESFORÇO EM LAJES

Na sequência do que foi dito, pode-se afirmar que, o controlo da fendilhação não fica assegurado, com a utilização de armaduras não aderentes.

Embora no REBAP<sup>1</sup> [art.68.2], seja referido que a verificação da segurança à fendilhação vise fundamentalmente a protecção das armaduras contra a corrosão, para o caso vertente não seria de colocar esta questão, dadas as características deste sistema de pré-esforço não aderente.

Há questões que se levantam relacionadas com a resistência das peças pré-esforçadas com cabos não aderentes. Uma vez que a rotura das armaduras não aderentes se traduz na perda de capacidade resistente ao longo de todo o comprimento entre ancoragens, originando a rotura frágil das secções, existem recomendações que estipulam que uma parte da capacidade resistente seja assegurada por armaduras aderentes [12,13,14].

---

<sup>1</sup> Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-esforçado

Estas armaduras têm também o papel de controlar a fendilhação uma vez que se constata que, à presença isolada de armaduras não aderentes, está associado o aparecimento de fendas largas e espaçadas [3,4,14].

Por estas e outras razões que adiante se referirão, é essencial que se projecte uma parte da armadura como ordinária. Definindo o grau de pré-esforço<sup>1</sup>,  $\gamma$ , como a relação entre a resistência da armadura pré-esforçada e a resistência da armadura total [4] :

$$\gamma = \frac{A_p \cdot f_p}{A_p \cdot f_p + A_s \cdot f_s} \quad 1.1$$

$A_p$  = Área da armadura de pré-esforço

$f_p$  = Tensão na Armadura de pré-esforço

$A_s$  = Área da Armadura passiva

$f_s$  = Tensão na Armadura ordinária

esta grandeza pode tomar qualquer valor entre zero e um. Contudo, no caso das armaduras de pré-esforço não aderente, mesmo que a condição determinante obrigue a manter o betão não traccionado, tomam-se sempre para este índice valores inferiores à unidade.

O valor de pré-esforço que conduz a uma solução económica depende muito da relação entre as acções variáveis e as acções permanentes. As aplicações mais vantajosas são aquelas em que se utilizam grandes vãos e acções variáveis pequenas comparadas com as acções permanentes.

Para grandes vãos e acções variáveis ligeiras, é adequada a utilização de uma percentagem de armadura de pré-esforço elevada comparada com a armadura passiva que terá sempre de se colocar [13].

Soluções com vãos menores e acções variáveis importantes podem ser económicas também, mas as grandes diferenças entre os valores característicos das acções de cálculo, provenientes de cada combinação, limitarão o valor do pré-esforço e, ou, da excentricidade dos cabos para que não se excedam as tensões limites admitidas no betão.

Por outro lado, para pequenos vãos com acções exteriores variáveis

---

<sup>1</sup> Não existe uma definição, universalmente aceite, de grau de pré-esforço. Este termo aplica-se com outros significados. Por exemplo, quando a armadura é pós-tensionada com um esforço inferior ao máximo admissível, ou ainda quando, para os estados limites de utilização, se admite a descompressão da secção nas fibras extremas, são situações que alguns autores definem como correspondentes a um grau de pré-esforço parcial.

importantes, a percentagem de armadura passiva aumentará por diminuição da armadura activa do pré-esforço.

De qualquer modo a solução mais económica tenderá para a utilização do maior pré-esforço possível de forma a manter as tensões no betão dentro de limites admissíveis.

É referido [12], salvo em casos excepcionais, que o facto de se admitir que as peças, neste caso as lajes, sejam parcialmente pré-esforçadas, permitindo a descompressão ou a fendilhação do betão, pode traduzir uma economia nas secções quer em betão quer em aço, quando comparadas com as soluções de pré-esforço total <sup>1</sup> ou de betão armado convencional.

Por outro lado as flechas descendentes são menores do que nas lajes convencionais de betão armado e as ascendentes, quando da aplicação do pré-esforço, são também menores do que nas peças completamente pré-esforçadas. É assim dada ao projectista a possibilidade de controlar flechas e curvaturas, por exemplo na presença de lajes adjacentes com grande diferença de vãos.

Refira-se que as armaduras passivas têm o papel duplo de contribuir para a resistência à rotura e de controlar a formação e espessura de fendas.

Para os casos correntes, as lajes dos edifícios situam-se em ambientes pouco agressivos. Assim, e atendendo às características especiais de protecção dos cabos não aderentes, poder-se-á considerar adequado que os estados limites de fendilhação a considerar interessem unicamente as armaduras ordinárias.

Nestas circunstâncias, considerando o estipulado no REBAP, a largura de fendas correspondente, estaria na maior parte dos casos limitada a um valor característico de 0.3 mm., com a vantagem de ficar, em quaisquer condições de utilização, dispensada a verificação do estado limite de descompressão.

---

<sup>1</sup> Subentende-se a não existência de tensões de tracção

## 2 SISTEMAS ESTRUTURAIS DE LAJES

Uma superfície plana, ao funcionar como piso ou tecto, configura-se estruturalmente numa laje. Na sua forma mais comum, é uma placa de espessura constante, consideravelmente inferior ao seu comprimento e largura.

As lajes de betão são executadas das mais diversas maneiras: totalmente ou parcialmente pré-fabricadas, com ou sem pré-esforço apresentando as mais diferentes formas estruturais, isto é, maciças, aligeiradas, nervuradas.

Embora a forma como se apoiam seja determinante no seu comportamento estrutural, podem ter qualquer geometria plana, sendo os esquemas de implantação em malhas rectangulares os mais correntes. Os seus bordos podem estar completamente ou parcialmente apoiados, e aqui, as condições podem ir desde simples apoio até haver encastramento total.

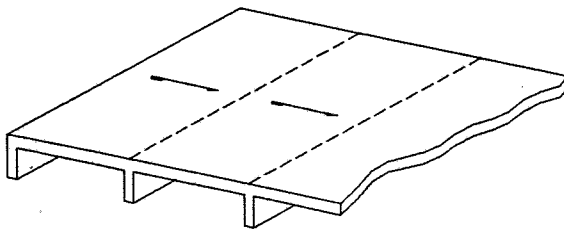
Os apoios, situados ou não ao longo dos bordos, podem ser em vigas de betão geralmente solidarizadas com a laje, em vigas metálicas, directamente em pilares, em paredes ou em outros sistemas estruturais de suporte, sendo a sua localização, na maior parte dos casos, regida por necessidades funcionais e estéticas.

A maior parte dos edifícios apresentam uma disposição em planta dos pilares segundo uma malha, quase, se não exactamente, rectangular. Assim, as lajes dos pisos, quer sejam ou não apoiadas directamente por vigas, podem ser convenientemente divididas em painéis rectangulares, e além disso, como as cargas se assumem quase sempre uniformemente distribuídas, muitas normas e regulamentos de cálculo, apresentam tabelas para o cálculo dos esforços necessários ao projecto.

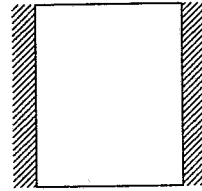
A concepção do traçado das armaduras está directamente relacionada com a maneira como as lajes se apoiam. É natural, que ao conceber as principais armaduras o projectista lhes associe um vão, dito de cálculo, podendo por exemplo, armar uma laje circular em todas ou só numa direcção, ou até, por absurdo ou por imposição arquitectónica, armar uma laje francamente rectangular segundo o maior vão.

Não se pretende aqui, face a estas considerações, fazer uma classificação sistematizada dos diversos tipos de lajes, mas realça-se que a designação utilizada, refere-se fundamentalmente à concepção das armaduras, com especial destaque para as lajes fungiformes, que são armadas na maior parte dos casos, segundo duas direcções principais, normalmente ortogonais. Sumariamente tem-se:

- As lajes apoiadas em vigas ou paredes em 2 bordos opostos (fig.2.1) são estruturalmente consideradas como armadas numa só direcção. Elas constituem casos especiais de vigas de largura muito grande em relação à altura, havendo que dar particular atenção à presença de cargas concentradas importantes, e aos bordos livres.



(a)

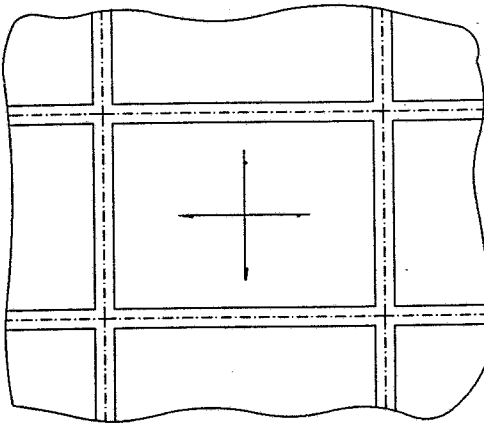


(b)

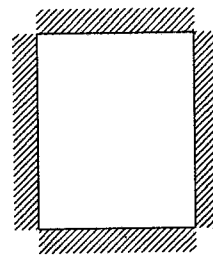
Laje armadas numa direcção

fig.2.1

- Se se tem apoio contínuo em 3 ou 4 bordos (fig.2.2), é aconselhável a utilização de armadura em duas direcções pelo que são consideradas e armadas em cruz. Quando a relação entre o lado maior e o menor é superior a 2, a maior parte da carga é assegurada pelo menor vão pelo que o efeito de haver apoios numa só direcção pode ser assumido.



(a)



(b)

Laje armada em duas direcções.

(a) Destaque em planta de um painel de laje com continuidade nos 4 bordos apoiados em vigas; (b) Representação esquemática.

fig.2.2

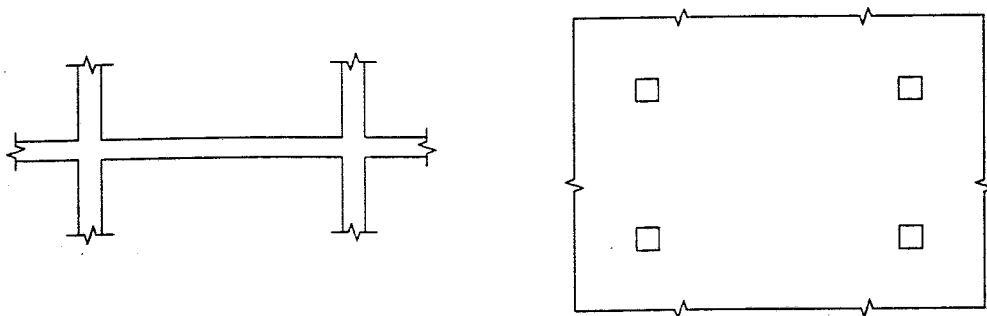
- As lajes fungiformes, em que basicamente, os apoios são constituídos apenas por pilares, podem apresentar-se com algumas variantes (figuras 2.3):

lajes maciças completamente planas;

lajes maciças com capiteis salientes;

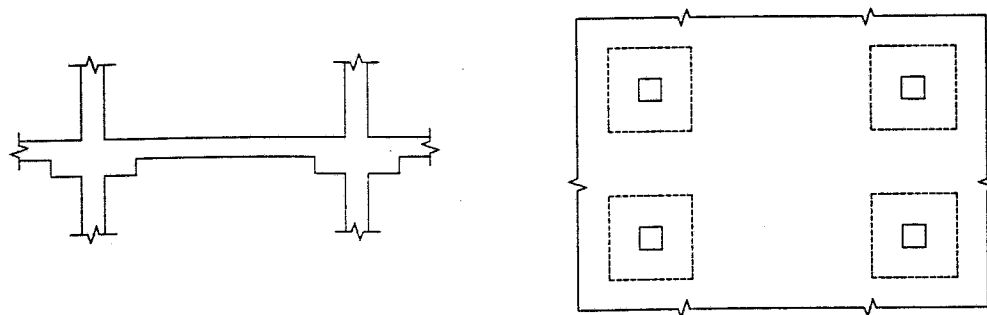
lajes alijeiradas, nervuradas numa ou nas 2 direcções, de altura total constante e normalmente maciçada na zonas dos apoios;

lajes maciças apresentando nervuras numa ou nas 2 direcções principais, apenas nas linhas de eixo dos pilares.



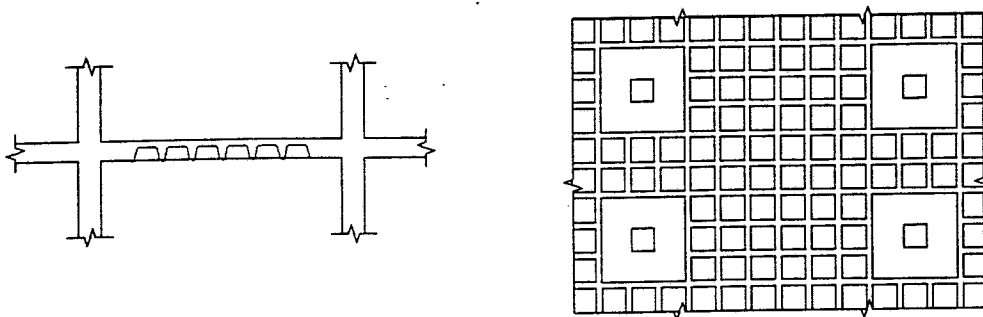
Laje fungiforme maciça sem capiteis

fig 2.3 (a)



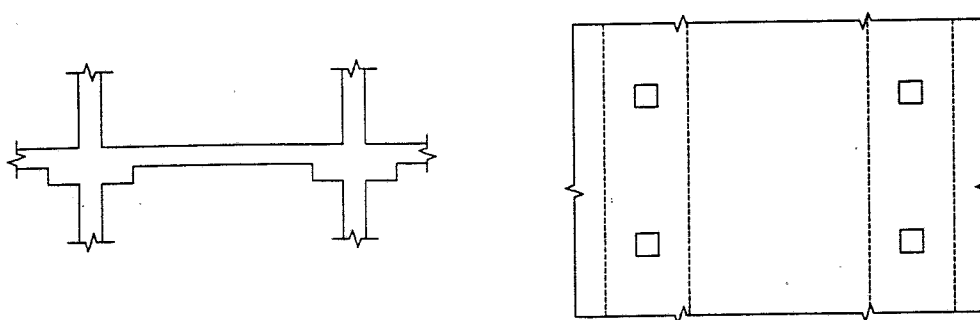
Laje maciça com capiteis

fig.2.3 (b)



Laje aligeirada ou alveolada maciça nos apoios

fig.2.3 (c)



Laje com nervuras ao longo do alinhamento de pilares numa direcção

fig.2.3 (d)

Com vista à obtenção de um aligeiramento, as lajes fungiformes podem apresentar a face inferior alveolada. Os espaços vazios são dispostos segundo uma malha rectangular que permita a utilização de moldes na maior parte dos sistemas recuperáveis (plásticos ou metálicos).

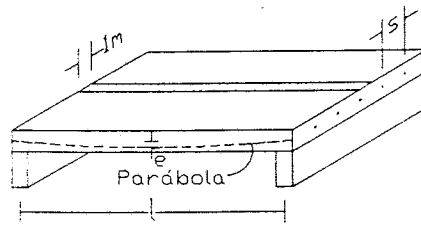
Geralmente estes vazios são preenchidos juntos dos apoios, funcionando como capiteis embebidos na espessura da laje, para se conseguir resistência à concentração de esforços que aí surgem.

Para as situações em que estes esforços são predominantes, estes capiteis, podem ter uma espessura superior à da laje, tornando-se aparentes.

Dos vários sistemas descritos, dada a possibilidade de com o pré-esforço, compensar em grande parte a flexão, as lajes em que se utiliza pré-esforço não aderente, são na maior parte dos casos fungiformes, portanto sem a utilização de vigas. Mesmo assim descrevem-se os principais aspectos relacionados com a aplicação do pré-esforço nos vários tipos de lajes descritos.

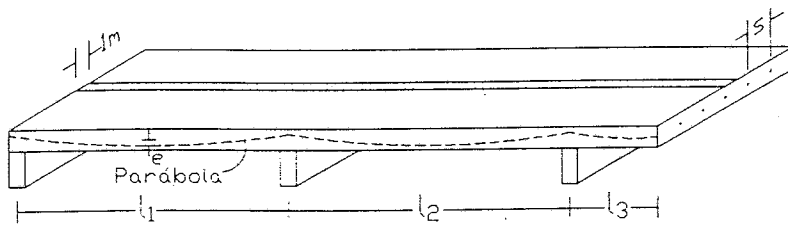
## 2.1 LAJES ARMADAS NUMA SÓ DIRECÇÃO

Como foi focado, para este tipo de lajes, as principais funções estruturais desenvolvem-se na direcção perpendicular aos apoios, pelo que os cabos de pré-esforço serão colocados paralelamente a esta direcção (figs. 2.4). Será necessário como se referiu dispôr de armaduras passivas aderentes de forma a garantir uma reserva de resistência e controlar a fendilhação.



Simplesmente apoiada

fig. 2.4 (a)



Laje contínua

fig. 2.4 (b)

De acordo com o princípio da compensação de cargas, normalmente uniformemente distribuídas, o traçado dos cabos será parabólico. Estes exercem acções, que geram forças e deformações, de sinal contrário às introduzidas pelas cargas gravíticas. Assim os momentos flectores e correspondentes tensões ficam em parte compensados pela acção do pré-esforço. O elemento pós-tensionado, só necessitará de ser reforçado para uma parte das acções de flexão, sendo a restante parte equilibrada pela acção dos cabos.

Além disso, através das ancoragens, é introduzido um esforço de compressão, normalmente axial, que vai reduzir ainda mais as tensões de tracção devidas à flexão não compensada pela excentricidade do pré-esforço.

Para lajes contínuas de 2 ou mais vãos, com pré-esforço não aderente e armadas continuamente numa só direcção, numa dada condição de acidente, por exemplo fogo, a eventual rotura dos cabos, causará a perda de pré-esforço e capacidade resistente nos vãos adjacentes. Tal facto deverá ser considerado, dadas as consequências catastróficas para todo o sistema estrutural. Pela sua importância dedica-se uma secção a este problema. Refere-se desde já que existem regras [14] que quantificam percentagens adequadas de armaduras passivas aderentes e que limitam o comprimento dos cabos, aumentando o número de ancoragens.

Como habitualmente são também dispostas armaduras de distribuição na direcção secundária, paralelamente aos apoios, para controlar a fendilhação, a retracção do betão ou as variações de temperatura no caso de serem impedidas, mas sobretudo para atender à distribuição de cargas concentradas. A utilização destas armaduras não evitará a fendilhação de todo, mas assegura que as fissuras sejam estreitas e muito próximas, de forma a não comprometer a funcionalidade da laje.

Como alternativa, à armadura de distribuição ordinária poder-se-á dispôr de cabos de pré-esforço, coincidentes com o centro de gravidade da secção, paralelos aos apoios, de forma a introduzir uma compressão axial e uniforme nessa direcção. Esta solução tem-se mostrado vantajosa para lajes de largura considerável [3]. Adicionalmente, por efeito de Poisson, verifica-se uma redução, embora não muito importante, nas perdas associadas ao encurtamento elástico e de fluência do betão, na direcção principal [3].

O comportamento à flexão de lajes armadas numa só direcção, para cargas inferiores às de fendilhação, é linear e elástico e as deformações podem-se calcular utilizando as características da secção no seu todo.

A fendilhação, devida a tensões de tracção elevadas, reduz localmente a rigidez e por isso o cálculo de deformações não pode ser baseado nas características iniciais das secções. Uma aproximação bilinear para a determinação das flechas traduz razoavelmente o comportamento de peças, assumindo que a flecha total pode ser calculada como sendo a soma da flecha elástica até ao momento da fendilhação e uma parcela adicional correspondente à flecha depois da fissuração, tendo em conta a correspondente diminuição da rigidez.

Se para peças isostáticas, esta hipótese é adequada, uma vez que é possível prever as secções em que ocorre a fendilhação, para lajes contínuas, o seu comportamento é dependente da situação, fendilhada ou não de duas ou mais secções

críticas e das condições de carga nos diferentes vãos. Os momentos máximos são em geral função de três configurações de carga, isto é, carga em todos os vãos, e cargas em vãos alternados (2 casos). Uma vez que estas situações podem ocorrer por qualquer ordem e em qualquer momento da vida da estrutura, é recomendado [5] que a laje deva ser considerada à partida fendilhada nas secções de apoio e a meio dos vãos, onde os valores de cálculo das resistências à tracção no betão são ultrapassados.

De uma maneira geral as lajes maciças armadas numa só direcção estão sujeitas a esforços transversos pouco importantes quando comparados com os valores de cálculo resistentes. Em comparação com vigas em T ou com o caso de aligeiramento, a área de corte é bastante superior, e os valores correntes das tensões de corte são inferiores aos valores admissíveis. Para o caso de haver esforços consideráveis, como por exemplo os devidos a cargas concentradas importantes, além do previsto no artº103 do REBAP, recomenda-se [5] que os cabos sejam dispostos com uma configuração compatível, com a máxima altura útil na zona carregada, de forma a maximizar esforço transversal absorvido pelos cabos.

Raramente o cálculo destas lajes é condicionado pelas forças cortantes, embora se deva verificar a sua resistência como se se tratasse de uma viga. A secção crítica situa-se a uma distância  $h/2$  do apoio, sendo  $h$  a espessura da laje.

O dimensionamento deste tipo de lajes é quase sempre governado pela flexão ou pela deformação. No cálculo desta, é a parte não compensada pelo pré-esforço (normalmente as acções variáveis) que é determinante. Para o cálculo, o momento de inércia em secção não fendilhada só poderá ser usado se as tensões de tracção no betão forem inferiores aos correspondentes valores de cálculo regulamentados. Em caso contrário, dever-se-ão aplicar os métodos disponíveis, cujo objectivo é reflectir a diminuição da rigidez provocada pelas fendas. As normas Americanas por exemplo adoptaram a utilização de um momento de inércia equivalente,  $I_e$ , proposto por Branson [3]:

$$I_e = \left[ \frac{M_{cr}}{M} \right]^3 \times I_u + \left[ 1 - \left( \frac{M_{cr}}{M} \right)^3 \right] \times I_{cr} \quad 2.1$$

onde:

$M$  = Momento de cálculo

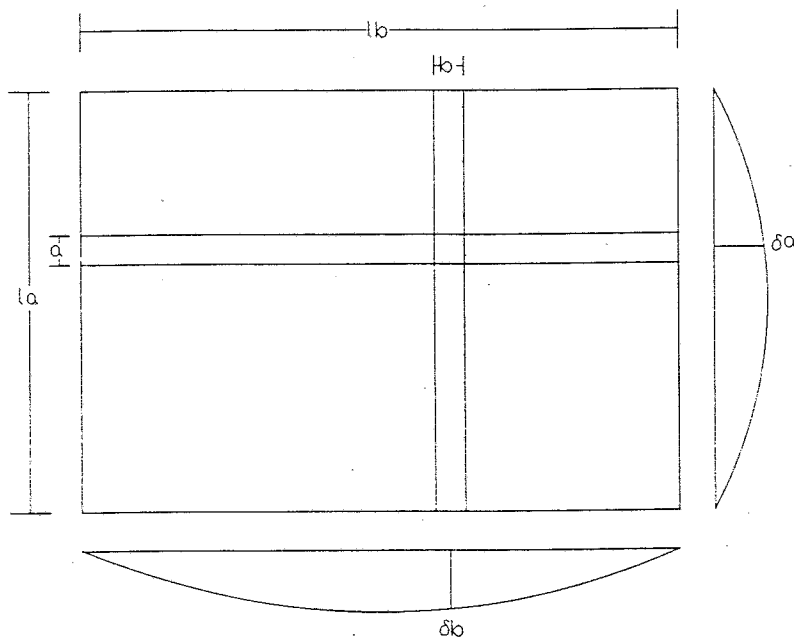
$M_{cr}$  = Momento de fendilhação

$I_u$  = Momento de inércia da secção não fendilhada

$I_{cr}$  = Momento de inércia da secção fendilhada

## 2.2 LAJES ARMADAS EM CRUZ

Embora as lajes armadas numa só direcção se deformem segundo uma superfície cilíndrica<sup>1</sup>, as lajes armadas em 2 direcções perpendiculares aos apoios, deformam-se segundo uma superfície de dupla curvatura, pelo que existem momentos nas 2 direcções principais. Os cabos de pré-esforço são colocados nas 2 direcções, paralelamente aos apoios, e a cada um dos 2 conjuntos é transmitida uma parte das cargas actuantes.



Representação esquemática de faixas. Laje armada em cruz

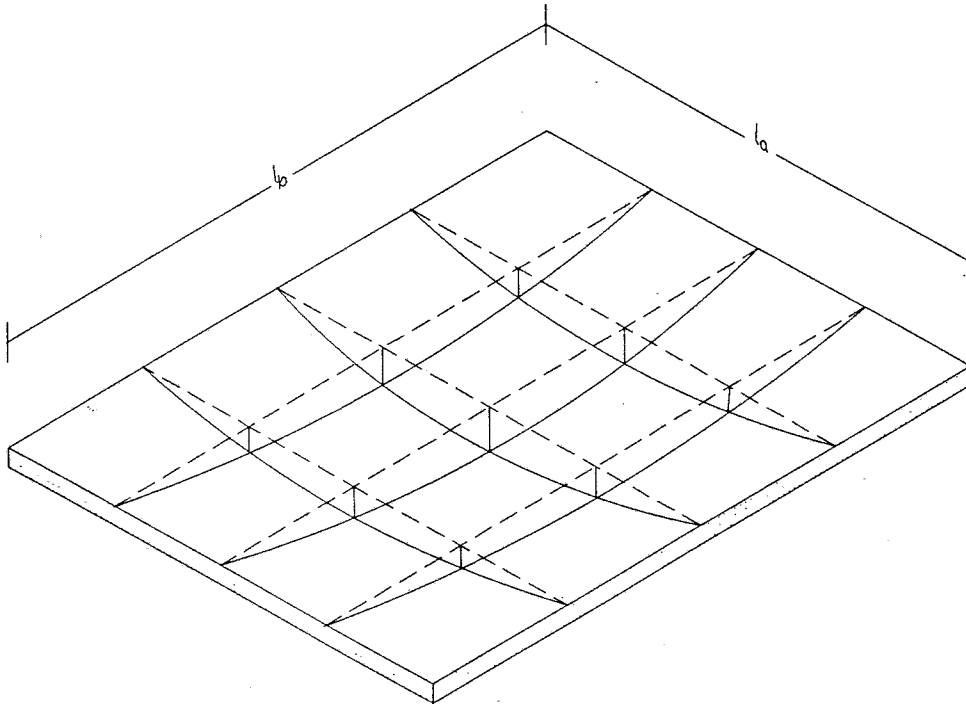
fig. 2.5

Efectivamente para o caso de uma laje rectangular (fig.2.5) idealizando-se uma faixa de largura  $\alpha$ , esta será "aliviada" por uma faixa similar  $b$  que lhe é perpendicular; uma vez que se  $l_a < l_b$  as tensões são maiores no sentido de  $\alpha$ , visto que no cruzamento das 2 faixas ortogonais, as flechas  $\delta_b$  e  $\delta_a$  são as mesmas, e portanto

<sup>1</sup> Ver figura 2.6 (b)

as curvaturas menores no sentido  $\alpha$  do que no sentido  $b$  <sup>1</sup>.

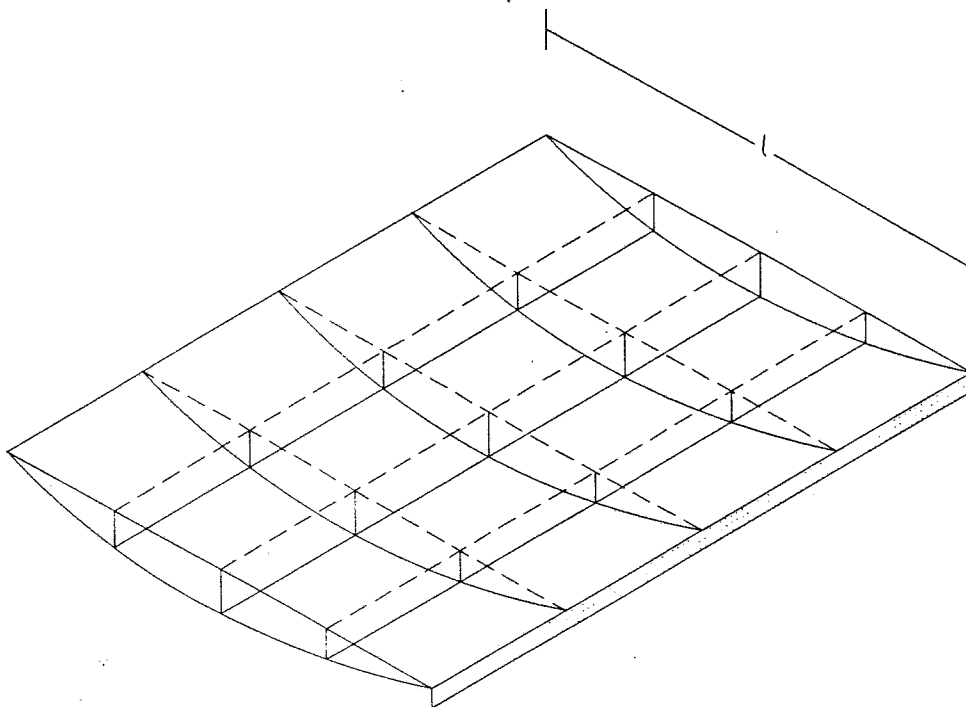
Como facilmente se compreende (fig.2.6 (a)), a curvatura da parte central da laje segundo a menor dimensão é maior do que a da maior dimensão. Uma vez que o momento flector é proporcional à curvatura, conclui-se que o momento flector na menor dimensão é maior.



laje apoiada em 4 bordos

fig. 2.6 (a)

<sup>1</sup> se  $l_a \ll l_b$ , a compatibilização de flechas entre a faixa  $\alpha$  e as sucessivas faixas  $b$  exige que a primeira tenha curvaturas muito pequenas, portanto quase isenta de flexão participando por isso na resistência num grau muito reduzido.



laje apoiada em 2 bordos

fig. 2.6 (b)

Além disso, para a mesma direcção a curvatura é também menor juntos dos apoios do que no centro da laje. Consequentemente existe uma considerável redução de momentos à medida que se caminha para os apoios paralelamente a um dos bordos. As cargas aplicadas a uma laje nestas condições produzem por outro lado momentos torsores; uma observação cuidada da figura deixará entender que ao idealizarmos faixas de laje nas direcções referidas estas estarão sujeitas a uma torção que compatibilize as rotações, das faixas na direcção perpendicular, diminuindo os momentos flectores. Para o caso de haver simetria, exceptuam-se as 2 faixas centrais.

O betão armado com ou sem pré-esforço, não é um material homogêneo e isotrópico como se admite na teoria da análise linear das lajes. As propriedades do betão, não são constantes, mas sim aleatórias por natureza e sobretudo pelo aparecimento de fendas em certas direcções e pela adopção de diferentes percentagens de armadura com diferentes alturas úteis nas duas direcções, sem falar nas propriedades do aço que quando se ultrapassam os limites elásticos são de difícil definição.

Depreende-se assim, que o cálculo exacto dos esforços e deformações é complexo, mesmo nos sistemas mais simples.

Embora haja soluções com base na teoria da elasticidade, os casos reais

mesmo adoptando a hipótese de isotropia tornam-se ainda complicados por várias razões, designadamente devido à continuidade das lajes em um ou mais apoios, às deformações das linhas de apoio, às relações das dimensões dos vários painéis e hipóteses de carga etc.

Normalmente recorre-se a métodos simplificados que têm em conta as variáveis mais importantes.

### 2.2.1 COMPENSAÇÃO BIDIRECCIONAL DE CARGA

O conceito de compensação de carga, é útil para a análise e dimensionamento de lajes pré-esforçadas armadas em cruz, apoiadas nos 4 bordos ou fungiformes. O princípio do método da compensação de cargas, reduz-se a encontrar a carga equivalente, que produza o mesmo efeito que a acção do pré-esforço.

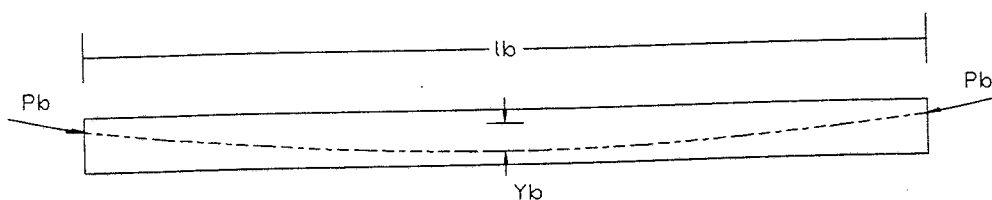
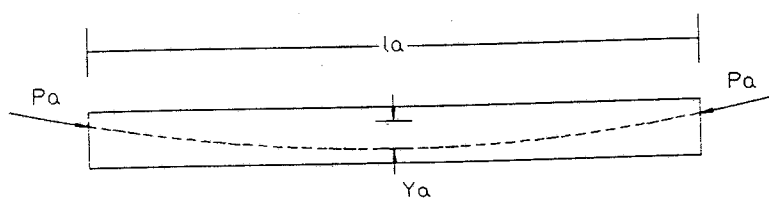
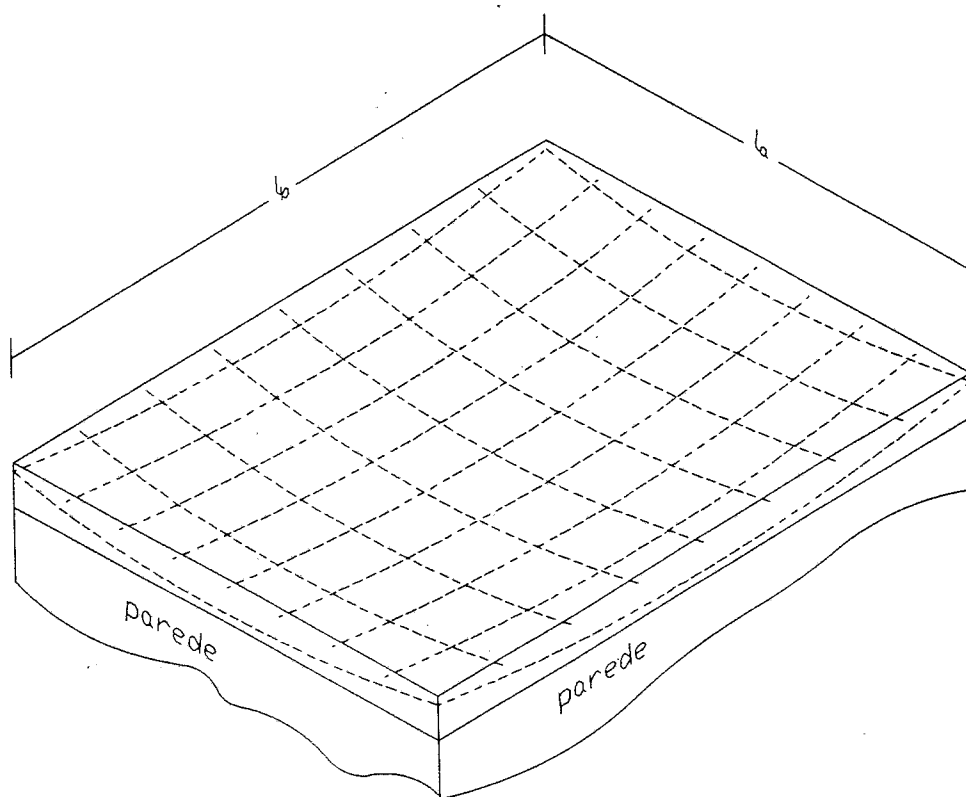
No caso vertente das lajes, tal como em vigas, será determinar uma acção vertical <sup>1</sup> ascendente para anular uma determinada parte da carga actuante. Para esta carga específica, a laje ficará única e simplesmente sujeita a uma compressão uniforme no seu próprio plano, devida à compressão nas ancoragens, não havendo quaisquer esforços ou deformações de flexão e torção a considerar. A sua análise ficará assim bastante facilitada.

Uma compensação de cargas nas 2 direcções para lajes, difere de uma compensação linear nas vigas, no facto de a carga equivalente ser distribuída nas duas direcções. A porção de carga a ser compensada em cada uma das direcções é mais ou menos arbitrária, tendo como é obvio de haver equilíbrio estático com a carga a compensar.

Normalmente, a carga a ser "anulada" é a correspondente às acções permanentes podendo incluir-se uma parte das acções variáveis. O facto de ser geralmente uniformemente distribuída, leva-nos naturalmente a um traçado parabólico dos cabos para ambas as direcções.

Para uma laje simplesmente apoiada nos 4 bordos (fig.2.7), e numa estrita compensação de cargas, a excentricidade dos cabos é nula nos apoios. Neste exemplo, ao longo do menor vão, a carga equivalente  $w_{pa}$  é ascendente e uniformemente distribuída, por unidade de superfície:

<sup>1</sup> A acção é efectivamente radial, para um cabo de traçado parabólico, mas dada a pequena curvatura deste, pode-se considerar a simplificação.



Disposição dos cabos numa laje simplesmente apoiada nos 4 bordos

fig 2.7

$$w_{pa} = \frac{8P_a \cdot y_a}{l_a^2}$$

2.2

$P_a$  = valor efectivo do pré-esforço;

$l_a$  = vão na direcção  $\alpha$ ;

$y_a$  = excentricidade dos cabos.

Da mesma forma na direcção  $l_b$ , os cabos produzem uma carga ascendente equivalente a:

$$w_{pb} = \frac{8P_b \cdot y_b}{l_b^2} \quad 2.3$$

A soma das 2 cargas equivalentes deverá ser igual a carga a ser compensada  $w_c$ :

$$w_c = w_{pa} + w_{pb} \quad 2.4$$

podendo os valores de pré-esforço ser determinados para cada uma das direcções.

Vários valores para  $P_a$  e  $P_b$  satisfazem a equação (2.3). Para painéis rectangulares a escolha mais económica, consiste em equilibrar a maior parte da carga na direcção de menor vão, contudo é desejável manter uma precompressão mínima ( $\sim 0.7$  Mpa) [3] na outra direcção com vista a controlar os efeitos da retracção e, ou, variações eventuais de temperatura. Este valor pode ser usado para reduzir o pré-esforço na menor direcção no valor  $w_{pb}$  da equação (2.2).

Sob a acção dos pré-esforços  $P_a$  e  $P_b$  e da carga aplicada  $w_o$ , a laje ficará sob um estado de compressão uniforme  $P_a / (b \cdot h)$ ,  $P_b / (b \cdot h)$  nas direcções correspondentes, sendo  $h$  a espessura da laje e  $b$  a largura unitária nas unidades consideradas.

Teóricamente a laje, sob estas acções apresentaria uma superfície perfeitamente plana; na prática, tal não acontece em virtude da incerteza relacionada com as perdas de pré-esforço e a sua interdependência ao longo do tempo com as deformações.

Para um acréscimo de carga a partir da carga compensada, os momentos daí resultantes podem ser determinados por métodos convencionais.

Em regime elástico, as tensões resultantes são calculadas por soma da tensão uniforme de compressão da parte compensada com as tensões de flexão devidas aos momentos originados pelas cargas por compensar:

- na direcção de  $l_a$ :

$$\sigma_1 = \frac{P_a}{b \cdot h} + M_a \cdot \frac{h}{2 \cdot I_c} \quad 2.5$$

$$\sigma_2 = \frac{P_a}{b \cdot h} - M_a \cdot \frac{h}{2 \cdot I_c}$$

- na direcção  $l_b$  :

$$\sigma_1 = \frac{P_b}{b \cdot h} + M_b \cdot \frac{h}{2 \cdot I_c} \quad 2.6$$

$$\sigma_2 = \frac{P_b}{b \cdot h} - M_b \cdot \frac{h}{2 \cdot I_c}$$

onde  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  são as tensões nas fibras superior e inferior, respectivamente,  $M_a$  e  $M_b$  são os momentos associados às cargas não compensadas nas direcções  $l_a$  e  $l_b$  respectivamente, por faixa unitária de laje, e  $I_c$  é o momento de inércia da secção de uma faixa unitária, não fendilhada.

Quando em serviço ou quando da aplicação do pré-esforço, as tensões podem ser assim calculadas e comparadas com os valores recomendados para a classe de betão correspondente.

## 2.3 LAJES FUNGIFORMES

Os sistemas de pisos que usam estas lajes, são os mais adequados para a utilização de betão pré-esforçado. A sua aplicação tem sido cada vez maior em edifícios de escritórios, de apartamentos, hotéis e edifícios públicos. Para este tipo de edifícios e para os valores correntes de cargas e vãos, pode-se explorar com vantagem a aplicação destes sistemas de pavimentos.

Efectivamente os custos com cofragens são menores, dada a ausência de vigas. A aplicação de cofragens com uma superfície lisa, facilita e reduz substancialmente os custos de acabamento dos tectos. As espessuras podem ser reduzidas ao mínimo com ganhos significativos nas paredes exteriores e interiores, nos sistemas de climatização, tubagens, cabos eléctricos, etc. [28].

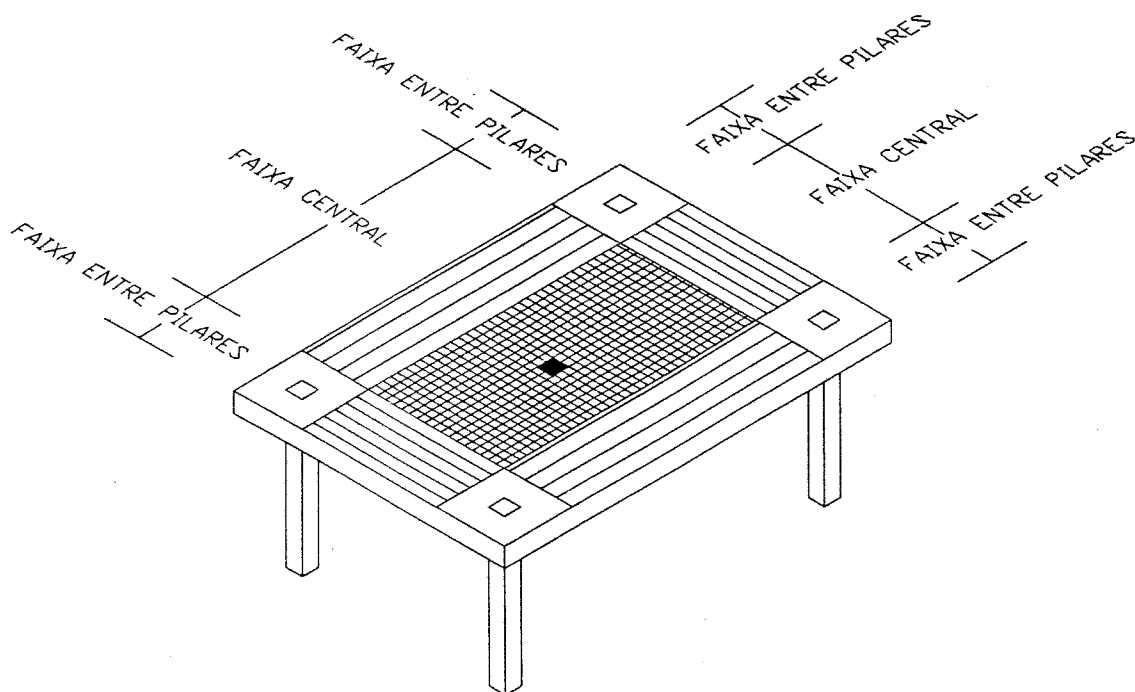
O projecto de lajes fungiformes é geralmente definido com base numa disposição regular dos pilares, em que estes se encontram dispostos segundo uma malha rectangular. Contudo, pode-se dispôr de pisos com este sistema de lajes com uma

implantação irregular de pilares. Os esforços podem também ser determinados por métodos expeditos, com base na triangularização dos painéis de laje que se podem sempre idealizar [6].

Um outro tipo de solução é descrito em [22], onde os painéis de laje são divididos também em bandas de 2 tipos, definidos como bandas de vigas e bandas de lajes. As bandas de vigas apoiam-se entre 2 pilares e as bandas de laje entre 2 bandas de vigas. As cargas aplicadas a uma banda de laje são transmitidas às bandas de vigas e estas por sua vez transmitem-nas aos pilares. As cargas aplicadas directamente às bandas de viga são por elas directamente transferidas para os pilares. As bandas de laje não necessitam de ser paralelas e podem apresentar os vãos orientados em qualquer direcção, apoiando-se entre as bandas tipo viga. Duas bandas de laje podem até sobrepor-se partilhando uma determinada carga. Desta forma uma carga associada a uma banda tipo laje é contabilizada 2 vezes, uma pela banda tipo laje e outra pela banda tipo viga, enquanto que a carga aplicada directamente sobre uma banda tipo viga é considerada só uma vez. Os momentos em cada banda são considerados uniaxialmente, isto é numa só direcção.

### **2.3.1 COMPORTAMENTO DAS LAJES FUNGIFORMES**

Embora para estas lajes não existam vigas de apoio entre pilares, as faixas com centro nas direcções de alinhamento destes desempenham o papel das vigas inexistentes. (fig.2.8)



Laje fungiforme. Representação de faixas.

fig 2.8

Quando a carga é aplicada, pelas acções exteriores ou pela acção dos cabos de pré-esforço, a laje deforma-se numa superfície de dupla curvatura, com os momentos principais actuando segundo as direcções paralelas ao alinhamento dos pilares.

Uma carga localizada no centro da laje, realçada a negro na figura, será distribuída pelas faixas centrais, ao longo dos vãos na maior e menor direcção do painel, que se destacaram na figura. Esta distribuição, depende da relação entre as dimensões do painel e das suas condições de extremidade.

Ao funcionar como vigas embebidas, as faixas ou bandas de laje, com eixo coincidente com o alinhamento de pilares receberão a parte de carga correspondente ao vão do painel perpendicular à sua direcção.

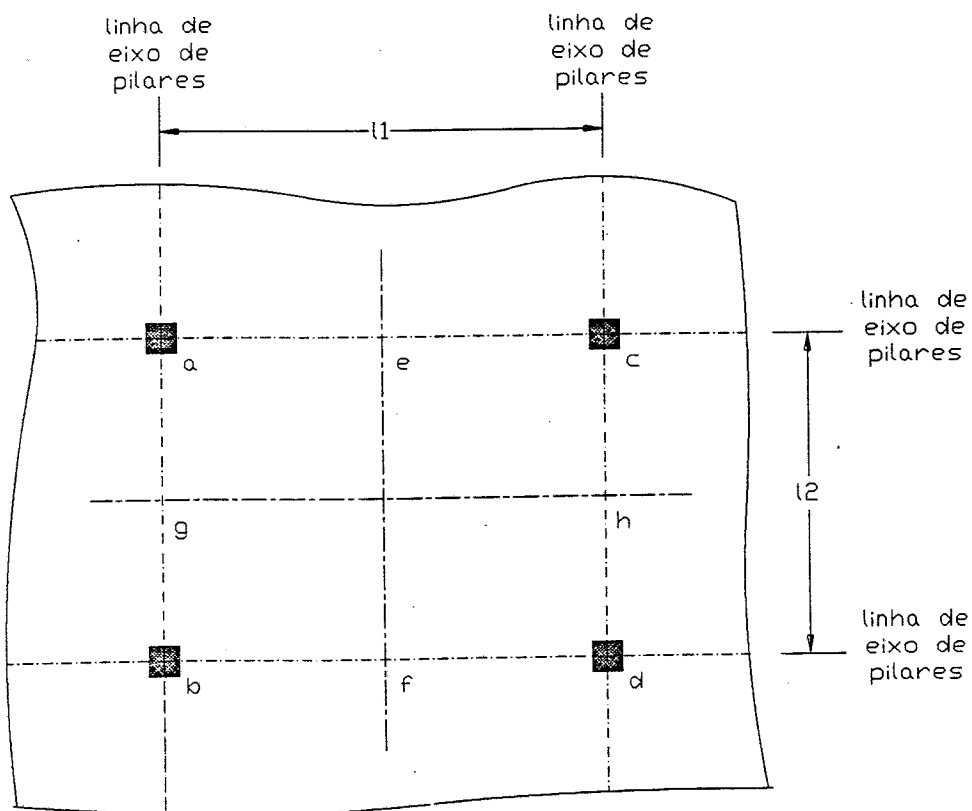
Repare-se que a parte da carga que é transmitida pela faixa central ao longo da maior direcção é recebida pelas faixas entre pilares ao longo da menor direcção do painel. Esta parcela da carga mais a que é transmitida directamente na menor direcção pela faixa central totalizará 100% da carga aplicada ao painel.

Da mesma forma, e ao longo da menor direcção, a correspondente faixa central, transmite a sua parte da carga para as faixas dos pilares com vão na maior

direcção. Esta carga mais a que é transmitida directamente pela faixa central na maior dimensão corresponde igualmente a 100% da carga aplicada.

Verifica-se portanto, que será necessário considerar independentemente para cada direcção, a totalidade da carga.<sup>1</sup>

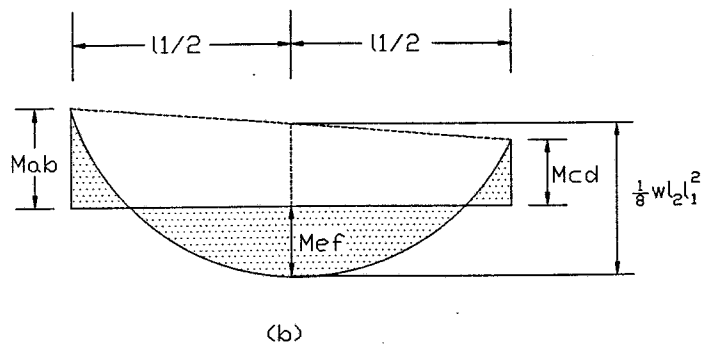
Na figura 2.9 (a) mostra-se em planta parte de um pavimento fungiforme apoiado nos pilares *a, b, c* e *d*, onde está aplicada uma carga uniforme *w*. Na direcção *l<sub>1</sub>*, a laje pode ser considerada como uma viga de largura *l<sub>2</sub>* cuja carga por unidade de comprimento é *w l<sub>2</sub>*.



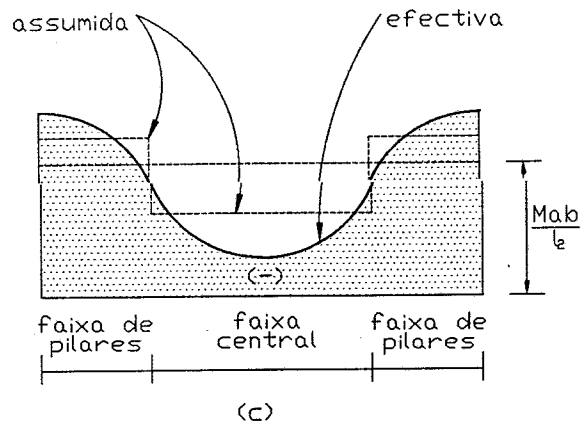
(a)

Planta.  
fig. 2.9

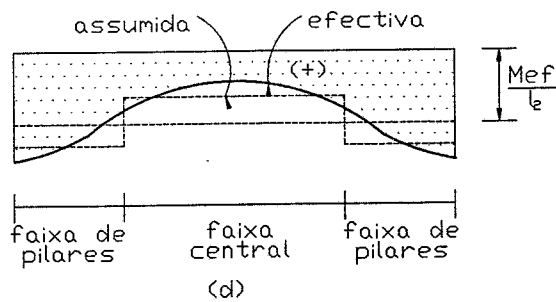
<sup>1</sup> De notar que esta conclusão não está em contradição com a secção 2.2.1, pois não se considerou aí, naturalmente, a carga que incide directamente nos apoios.



(b) Momentos totais ao longo da direcção  $l_1$ .  
fig. 2.9



(c) Variacção de momentos unitários ao longo da linha  $ab$ .  
fig. 2.9



(d) Variacção de momentos unitários ao longo da linha  $ef$ .  
fig. 2.9

Assim como em qualquer vão de uma viga contínua, a soma do momento positivo a meio vão com a média dos momentos negativos nos apoios, é igual ao correspondente momento a meio vão de uma viga simplesmente apoiada, para a laje em questão pode-se escrever que:

$$\frac{(M_{ab} + M_{cd})}{2} + M_{ef} = \frac{w l_2 l_1^2}{8} \quad 2.7$$

e da mesma forma na direcção perpendicular:

$$\frac{(M_{ac} + M_{bd})}{2} + M_{gh} = \frac{w l_1 l_2^2}{8} \quad 2.8$$

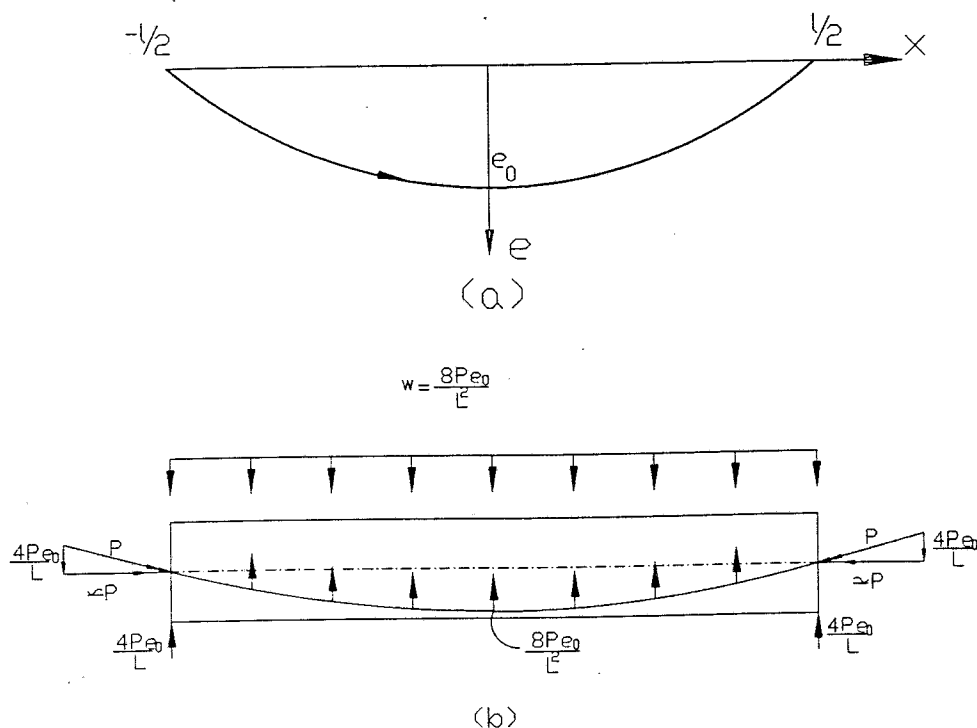
Os momentos ao longo da largura das secções críticas, tais como ao longo de  $ab$  ou  $ef$ , não são constantes. No enfiamento dos pilares onde as curvaturas são maiores os momentos são também maiores, ao passo que ao longo de uma linha central do painel as curvaturas não são tão pronunciadas e portanto os momentos serão menores. Para fins de cálculo será conveniente dividir o painel em cada direcção em travessas ou faixas: faixas centrais e faixas que interceptam os pilares, para as quais se assume que os momentos são constantes na sua largura.

Fica claro que considerando esta distribuição lateral de momentos, a melhor solução para a distribuição dos cabos de pré-esforço corresponde a uma maior concentração destes ao longo das faixas que ligam os pilares.

As lajes pré-esforçadas fungiformes são particularmente críticas no que se refere a esforços de corte ou transversos. Quando lajes são directamente apoiadas em pilares, há uma grande concentração de tensões de corte na vizinhança dos pilares, que muitas vezes governam o seu dimensionamento, facto que é referido por diversos autores. Esta questão será retomada mais tarde.

### 2.3.1.1 COMPENSAÇÃO DE CARGAS

Num sistema isostático, por exemplo uma viga simplesmente apoiada, (fig 2.10), com um cabo de pré-esforço parabólico de excentricidades,  $e_0$ , a meio do vão e nula nos apoios, o momento flector, devido ao pré-esforço, a uma distância  $x$  é dado por,  $M_{(x)} = -Pe = -Pe_0(1 - 4x^2/L^2)$ , uma vez que  $e = e_0(1 - (2x/L)^2)$ .



(a) Traçado geométrico do cabo. (b) Compensação de carga para uma viga simplesmente apoiada.

fig. 2.10

Para introduzir um diagrama de momentos igual e de sinal contrário, será necessário aplicar uma carga uniformemente distribuída de intensidade  $w = 8Pe_0/L^2$ . Assim, se o pré-esforço  $P$  for considerado constante ao longo do vão, poder-se-á dizer que compensa esta carga, dita equivalente.

Quando ambos, o pré-esforço e esta carga actuam, fica apenas instalada uma compressão uniforme.

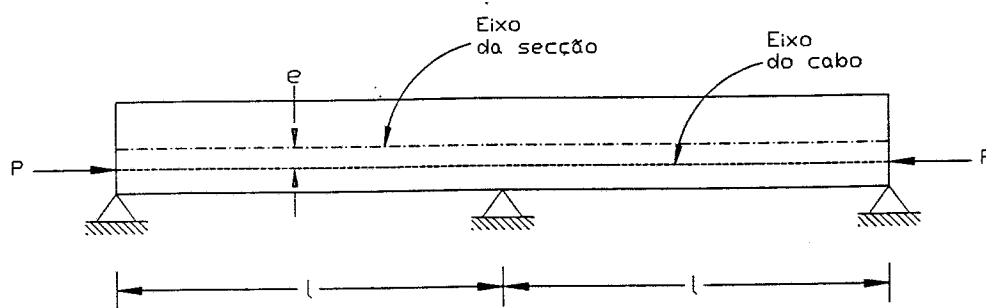
Para uma viga hiperestática, a análise pode ser mais complicada, pois o diagrama de momentos associado ao pré-esforço depende, não só da excentricidade dos cabos mas também das reacções hiperestáticas que surgem. Estas reacções, dão origem a momentos com diagrama linear, ditos hiperestáticos<sup>1</sup>, que se sobrepõem aos momentos que resultam apenas da excentricidades dos cabos.

Enquanto que num sistema isostático a resultante do diagrama de tensões numa secção qualquer, em regime elástico, coincide com o centro de

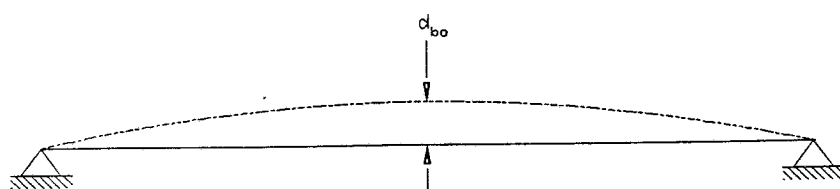
<sup>1</sup> Este momentos são referidos na terminologia inglesa como "secondary moments" ou na terminologia francesa como "moments parasites".

gravidade da armadura de pré-esforço, num sistema hiperestático, na presença de momentos hiperestáticos, a resultante do diagrama de tensões, numa secção, desvia-se do centro de gravidade dos cabos, numa distância proporcional ao valor do momento hiperestático.

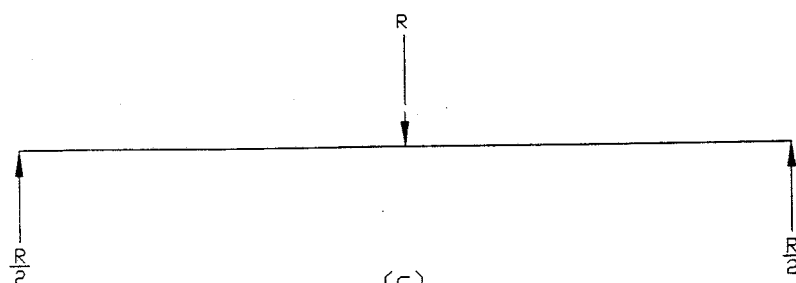
O efeito secundário dos momentos hiperestáticos é ilustrado na fig 2.11, onde uma viga contínua de 2 vãos iguais é sujeita a um pré-esforço de excentricidade constante. O apoio central introduz uma reacção de apoio que impede a existência da flecha que surgiria se este apoio fosse retirado. Por consequência surgem também nos apoios extremos 2 reacções iguais de sinal contrário que equilibram a reacção a meio vão.



(a)



(b)



(c)



(d)

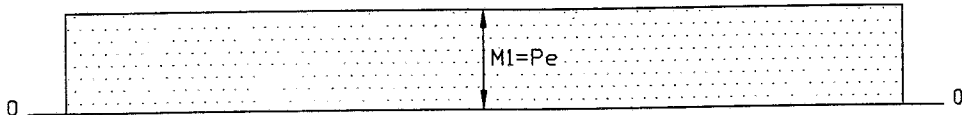
Forças e deformações numa viga hiperestática. (a) Viga com cabo de excentricidade constante. (b) Deformada se o apoio central fosse retirado. (c) Reacção nos apoios devido ao pré-esforço. (d) Deformada efectiva devido ao pré-esforço.

fig. 2.11

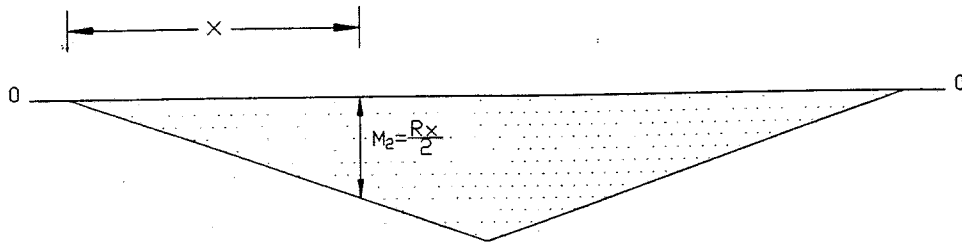
Os momentos flectores ao longo da viga podem ser encontrados pela soma dos momentos devidos à excentricidade geométrica do pré-esforço

(diagrama rectangular) e aos momentos hiperestáticos introduzidos pelas reacções de apoio, (diagrama triangular); (fig 2.12).

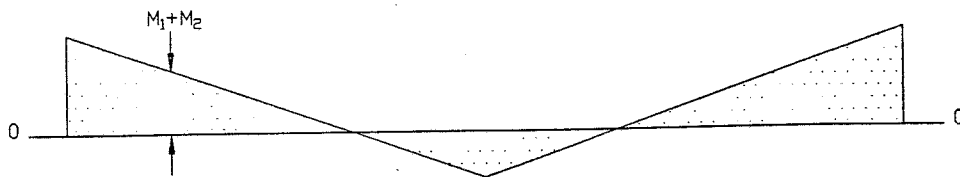
Repare-se que, uma vez em regime elástico, os momentos finais são sempre proporcionais ao valor do pré-esforço, pois também o são os devidos unicamente à excentricidade dos cabos, que por sua vez determinam a intensidade das reacções de apoio, responsáveis pelos momentos secundários.



(a)



(b)



(c)

Momentos na viga hiperestática.

(a) Momentos isostáticos (devido à excentricidade do cabo).

(b) Momentos hiperestáticos devido às reacções de apoio. (c) Momentos totais devido ao pré-esforço.

fig. 2.12

O conceito de carga equivalente torna-se prático e de fácil aplicação no projecto e cálculo, pois o momento flector total é determinado directamente. Os momentos hiperestáticos podem então, se necessário, ser encontrados

deduzindo aos momentos provenientes da carga equivalente, os momentos primários que resultam da excentricidade geométrica dos cabos em relação ao centro de gravidade das secções.

O método da carga equivalente introduzido por T.Y.Lin, baseia-se na determinação de forças verticais que se desenvolvem quando há uma mudança de inclinação dos cabos de pré-esforço. Estas forças produzem momentos, como qualquer outro sistema de cargas, devendo as tensões resultantes desses momentos ser associadas às tensões da compressão axial uniforme  $P / A_c$ .

As forças verticais <sup>1</sup> equivalentes correspondentes a um determinado traçado geométrico da armadura de pré-esforço podem ser facilmente encontradas, analisando-se a estrutura sob o efeito destas cargas equivalentes, usando qualquer método de resolução de estruturas hiperestáticas: métodos matriciais, de distribuição de momentos, etc.

Se a carga equivalente devida ao pré-esforço for exactamente igual à carga aplicada, então as acções verticais são anuladas, não haverá momentos flectores e só existirão as tensões de compressão produzidas pela componente horizontal do pré-esforço.

Assim, uma vez cancelada uma determinada parte da carga, a laje ficará sujeita a um estado uniforme de compressão, não apresentando praticamente qualquer flecha. Se a acção exterior for então aumentada, apenas os efeitos desta última parte deverão ser associados ao estado de compressão referido.

É evidente que para o estado limite último, esta sobreposição deixa de ser válida, e o cálculo da resistência da laje deve ser encontrado, para as secções críticas, afectando as acções com os respectivos coeficientes de combinação para cada caso. Existe alguma controvérsia, sobre se devam ou não considerar-se os momentos hiperestáticos devidos ao pré-esforço. É por exemplo referido [2,3] que segundo as normas do ACI<sup>2</sup> a existência destes momentos devam ser considerados com um factor  $\gamma_f = 1$ , e nestas circunstâncias só os momento negativos devidos às acções gravíticas poderão ser redistribuídos. Nas recomendações da FIP<sup>3</sup> (1980), o pré-esforço é considerado como uma acção permanente, com valores para  $\gamma_f = 0.9$  ou  $\gamma_f = 1.2$  conforme o seu efeito seja ou não favorável, mas mais tarde as recomendações de cálculo de (1982) referem que "o estado de tensão (hiperestático) introduzido pelo pré-esforço tende a desaparecer em

---

<sup>1</sup> É de notar que, num cabo parabólico por exemplo, para que as forças equivalentes, correspondam apenas a uma carga uniformemente distribuída, não poderá haver excentricidades nos apoios extremos, quando aí não há qualquer grau de encastramento.

<sup>2</sup> American Concrete Institute

<sup>3</sup> Federation Internationale de la Précontrainte

estado limite último: por isso, neste caso o pré-esforço é só considerado no que diz respeito à tensão previamente instalada nas armaduras, mas não sob o ponto de vista de uma acção."

Em concordância com este último critério a CS<sup>1</sup> [5] recomenda que todas as tensões determinadas numa análise elástica e introduzidas pelo pré-esforço sejam ignoradas.

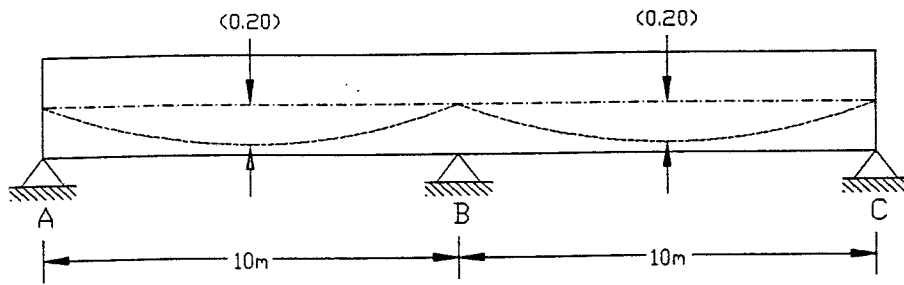
O REBAP, no caso da determinação dos esforços resistentes últimos refere simplesmente que, *sic* "os pré-esforços devem ter sido em conta através dos estados de coacção que provocam."

Pode ser demonstrado [3,16] que desde que se mantenha a forma básica do traçado geométrico dos cabos, ao aplicar uma transformação linear ao seu perfil, não se alteram os valores dos momentos totais, isto é, os devidos à sua excentricidade e os hiperestáticos. As reacções induzidas pelo pré-esforço serão diferentes para cada traçado, como o são obviamente os devidos à excentricidade, contudo os momentos finais são os mesmos.

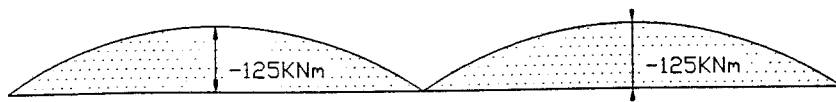
Por exemplo nas figura 2.13 e 2.14, apresenta-se a mesma viga contínua com traçados geométricos das armaduras relacionados entre si através de transformação linear, resultando o mesmo diagrama de momentos flectores. Para o traçado usado na fig. 2.14, verifica-se que não existem quaisquer momentos secundários, pois não há reacções de apoio devidas ao pré-esforço. Neste traçado, o cabo apresenta uma excentricidade proporcional ao diagrama de momentos flectores finais. Um cabo nestas condições é designado por cabo concordante.

---

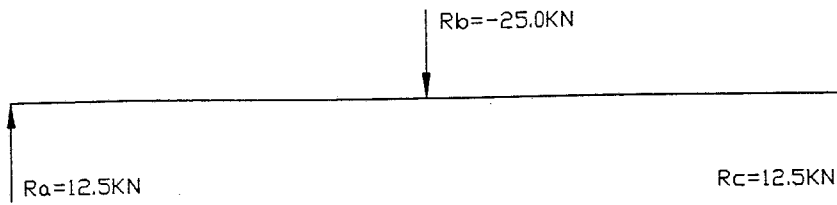
<sup>1</sup> Concrete Society (U.K.)



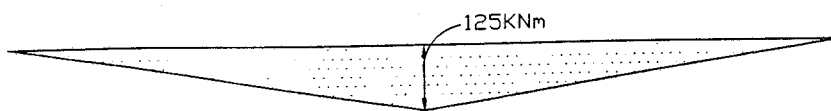
(a) - Cabo não concordante



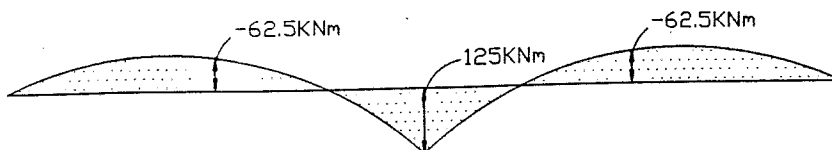
(b) Momentos isostáticos



(c) Reações hiperestáticas

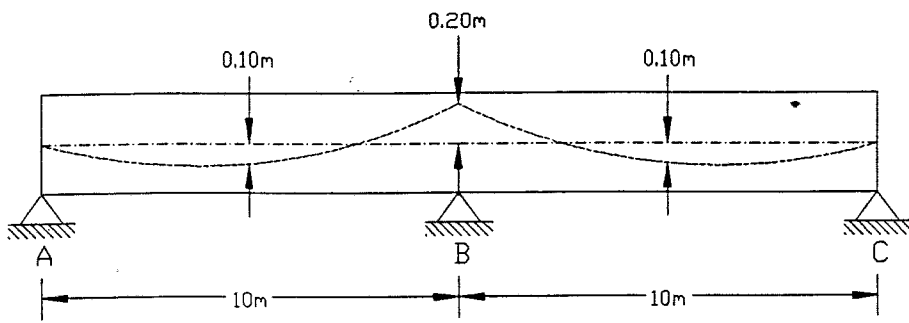


(d) Momentos hiperestáticos ou secundários

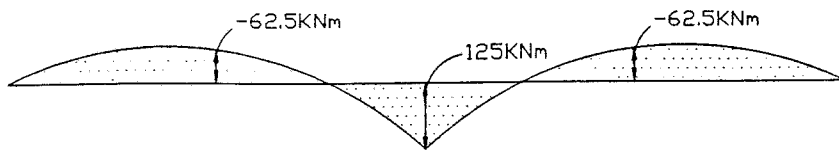


(e) Momentos totais

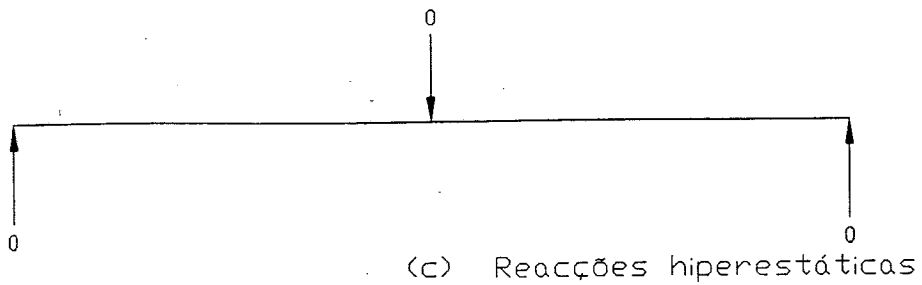
fig 2.13



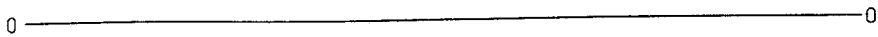
(a) - Cabo concordante



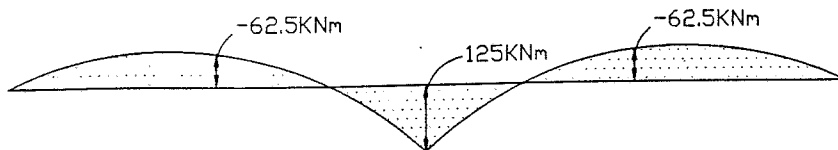
(b) Momentos isostáticos



(c) Reações hiperestáticas



(d) Momentos hiperestáticos ou secundários



(e) Momentos totais

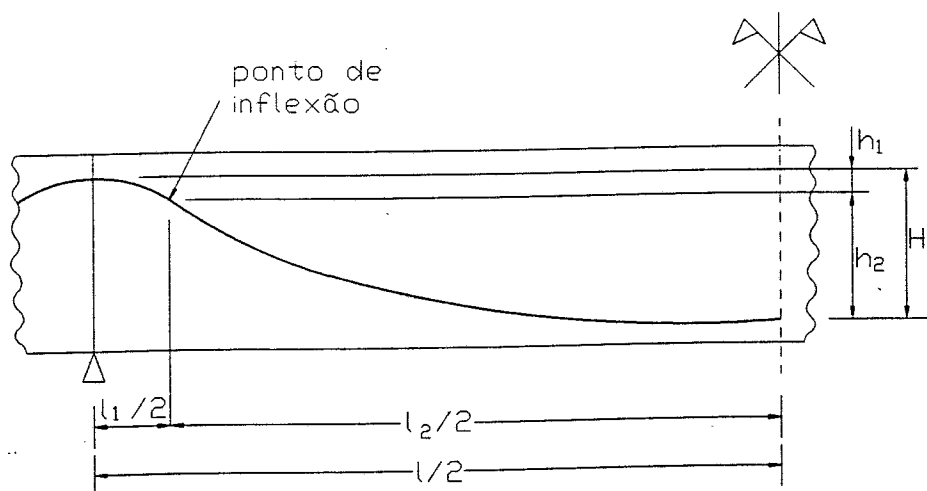
fig 2.14

Repare-se que para um qualquer sistema de cargas, numa viga contínua por exemplo, o diagrama de momentos flectores é condicionado pelo facto de não haver deslocamentos verticais nos apoios. Se se calculassem as flechas nos pontos de apoio, a partir de um diagrama de momentos que lhe fosse compatível, essas flechas seriam evidentemente nulas. Portanto se um cabo tiver ao longo dessa viga excentricidades que produzam por si, um diagrama de momentos nestas condições, então não haverá lugar a reacções de apoio e por isso também não haverá momentos hiperestáticos. Para tal, um cabo para ser concordante, tem de ter um traçado com excentricidades proporcionais às ordenadas do diagrama total ou final de momentos flectores.

### 2.3.1.2 DISPOSIÇÃO DOS CABOS EM ALÇADO

A utilização de cabos concordantes, pelo menos no caso presente, não traz grande interesse prático, pois, naturalmente interessa é maximizar as excentricidades tanto a meio dos vãos como sobre os apoios de forma a conseguir as maiores cargas equivalentes possíveis, procurando-se portanto aproveitar ao máximo a altura disponível da laje.

Como não é possível realizar uma mudança brusca na inclinação dos cabos, sendo necessária uma transição gradual que se consegue com curvatura de sinal contrário, (fig. 2.15), numa extensão em que  $l_1/L$  varia geralmente entre 0.20 e 0.05 [2,5]. Os pontos de inflexão por condições geométricas ficam definidos:  $h_1/h_2 = l_1/l_2$ . O comprimento da curva de transição depende da flexibilidade dos cabos e das bainhas.



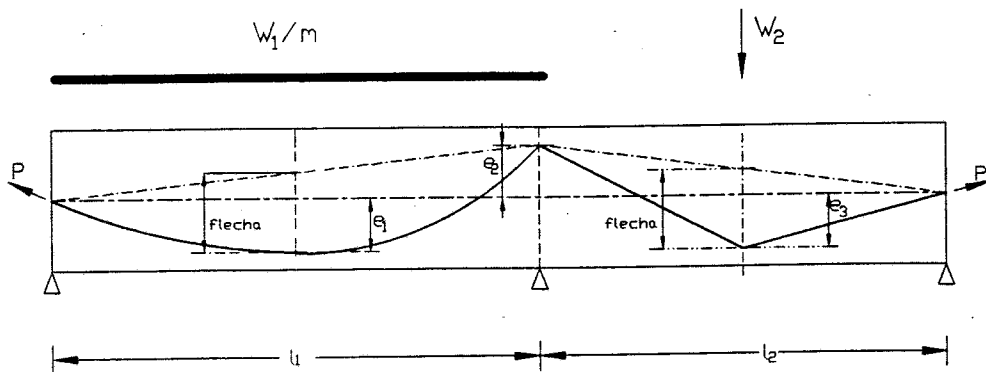
Perfil e traçado real de um cabo

fig. 2.15

É referido [3] ser muito pequena a diferença que se encontra ao calcular as cargas equivalentes, entre um traçado que tivesse um pico sobre os apoios e um traçado real. A capacidade resistente à flexão não virá afectada, embora se verifique que o comportamento para cargas de serviço seja ligeiramente diferente.

Ao longo das faixas de laje definidas, pode-se otimizar o perfil dos cabos, tendo em consideração as condições de recobrimento, normalmente impostas pelas necessidades de protecção das armaduras para a resistência ao fogo. O perfil dos cabos é definido acompanhando a forma do diagrama de momentos flectores<sup>1</sup>, isto é, superiormente sobre os apoios e na parte inferior das secções a meio do vão.

As figuras 2.16, 2.17 e 2.18, mostram alguns traçados típicos, com as respectivas cargas equivalentes em função das excentricidades de cada traçado. As escalas em altura foram aumentadas para facilitar a leitura dos desenhos.



Exemplo de um traçado para 2 vãos.

Vão 1

$$\text{flecha} = e_1 + e_2 / 2$$

$$\text{carga equivalente: } w_1 = 8P \times \text{flecha} / l_1^2$$

Vão 2

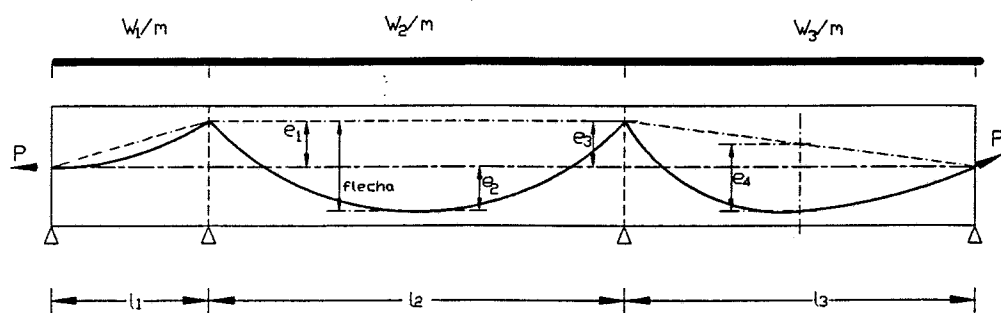
$$\text{flecha} = e_3 + e_2 / 2$$

$$\text{carga equivalente: } w_2 = 4P \times \text{flecha} / l_2$$

Notar que o centro de gravidade do cabo coincide com o centro de gravidade das secções extremas, uma vez que nos apoios não há encastramento.

fig 2.16

<sup>1</sup> correspondentes às acções exteriores e na convenção usual da "Resistência de Materiais".



Exemplo de um traçado com 3 vãos sendo um em consola

Vão 1

Vão 2

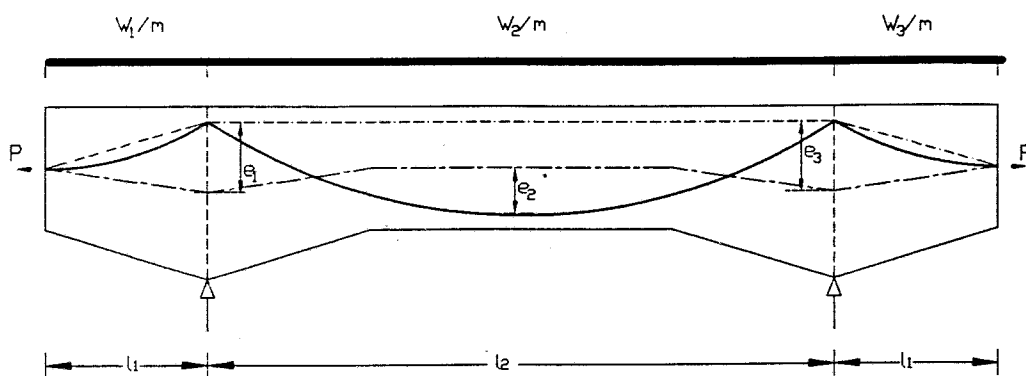
Vão 3

$$P((e_1 + e_3)/2 + e_2) = w_2 l_2^2 / 8$$

$$P e_1 = w_1 l_1^2 / 2$$

$$P(e_3/2 + e_4) = w_3 l_3^2 / 8$$

fig. 2.17



Exemplo de um traçado numa laje de inércia variável com 2 vãos em consola

Vão 1

Vão 2

Vão 3

$$w_2 = 8P((e_1 + e_3)/2 + e_2) / l_2^2$$

$$w_1 = 2P e_1 / l_1^2$$

$$w_3 = 2P e_3 / l_3^2$$

Notar que neste caso, para se obter uma acção equivalente perfeitamente uniforme, o traçado do cabo não é exactamente parabólico.

fig 2.18

### 2.3.1.3 DISPOSIÇÃO DOS CABOS EM PLANTA

Assim, um primeiro conjunto de cabos - dito primário-, numa ou ambas as direcções exercem uma acção ascendente na quase totalidade da superfície da laje e acções descendentes, entre os pontos de inflexão ao longo das linhas de apoio entre pilares. Estas acções descendentes são absorvidas, nos sistemas convencionais por vigas ou paredes. No caso presente das lajes fungiformes, há

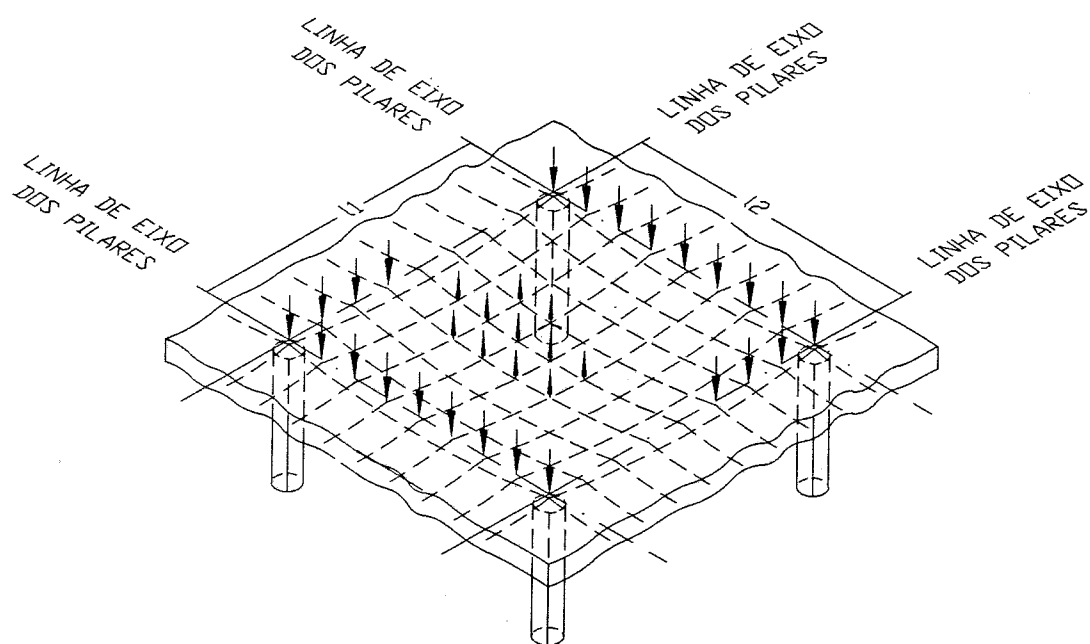
que dispôr ao longo destas linhas de um novo conjunto de cabos (dito secundário) capaz de transferir aquelas acções para os pilares

Frisando que estas forças descendentes do sistema de cabos primários se desenvolvem numa pequena extensão sob a curvatura invertida dos cabos e que a única reacção disponível, o pilar, tem uma área de suporte pequena, comparada com a laje, torna-se óbvio que o sistema secundário dos cabos deverá ser concentrado nas bandas de enfiamento dos pilares.

Existem fundamentalmente dois modos de distribuição destes 2 sistemas, primário e secundário, de cabos:

i. No primeiro método os cabos do sistema primário são distribuídos uniformemente em cada uma das direcções cujas reacções são transmitidas ao sistema secundário constituído pelos cabos que se dispõem no enfiamento dos pilares em cada direcção.

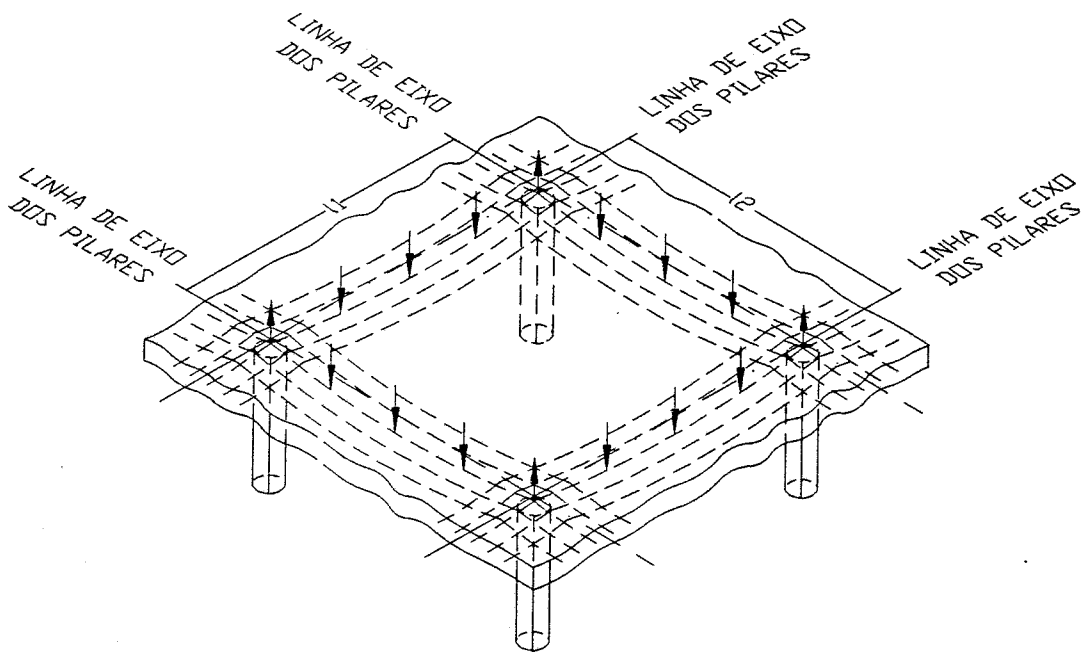
Nas figuras 2.19, destaca-se um painel interior de uma laje fungiforme onde se mostram separadamente os dois sistemas de cabos. A carga uniformemente distribuída a ser compensada é equilibrada por uma malha rectangular de cabos parabólicos igualmente espaçada e distribuída em cada uma das direcções paralelas aos bordos do painel, onde se assume que este está continuamente apoiado. A percentagem de carga, a ser compensada pelo sistema primário em cada direcção, pode ser arbitrariamente definida, como para as lajes convencionais com apoios ao longo dos bordos. Suponha-se que no caso presente se considera que 60% da carga é assegurada pelos cabos primários na menor direcção. Esta carga é transmitida aos cabos secundários que se estendem ao longo das linhas definidas pelos pilares na maior direcção. Se 40% da carga, é assegurada pelos cabos primários na maior direcção, então pode concluir-se, como já referido, que a cada direcção se tem de associar a totalidade da carga.



(a)

Compensação de cargas (1º método)  
Cabos distribuídos, sistema primário.

fig. 2.19 (a)



(b)

Compensação de cargas (1º método)  
Cabos concentrados, sistema secundário.

fig. 2.19 (b)

Esta disposição é de certa forma análoga aos sistemas de lajes convencionais armadas nas duas direcções, uma vez que os cabos secundários se dispõem entre os pilares desempenhando o papel das vigas.

Uma análise diferente, mas que leva a uma distribuição similar dos cabos pode ser feita admitindo que os painéis de laje constituem um sistema de vigas de grande largura, a largura dos painéis. Atendendo ao facto, de que 100% da carga deverá ser considerada independentemente para cada direcção e como é sabido que a distribuição lateral dos momentos flectores não é uniforme ao longo da largura dos painéis, mas tende a concentrar-se nas faixas de enfiamento dos pilares, resulta que o projectista será levado a uma colocação compatível com esta distribuição.

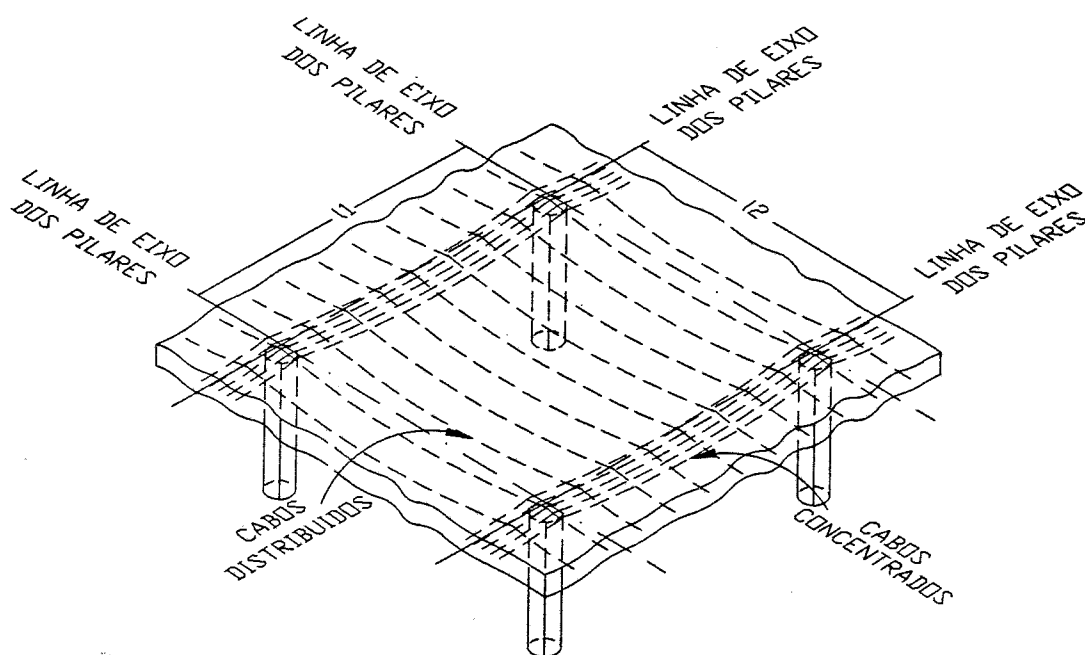
Por ser mais prático, em obra, e facilitar os cálculos o perfil do traçado dos cabos é igual ao longo da largura dos painéis, na mesma direcção. Para lajes fungiformes maciças, cuja relação entre lados dos painéis seja inferior a 1.33, as recomendações do ACI indicam que se deve colocar 65-75% dos cabos nas faixas

entre pilares e a restante parte nas faixas centrais. A largura da faixa entre pilares corresponde a 0.25 de  $L$  para cada lado das linhas que definem os eixos dos pilares, onde  $L$  é a dimensão do menor dos lados dos painéis.

ii. Num segundo modo de distribuição, (fig.2.20) os cabos são dispostos uniformemente numa das direcções (sistema primário) e concentrados nos pilares na direcção transversal (sistema secundário).

Referencia-se que [2,3] segundo testes efectuados para lajes fungiformes pré-esforçadas por cabos não aderentes, não se torna necessário concentrar os cabos nas faixas dos pilares em ambas as direcções; a resistência à flexão destas lajes, segundo diversos autores, parece depender mais da resistência e do traçado das armaduras de pré-esforço, do que da sua distribuição. Além disso é referido que quando há transferência de momentos para os pilares, caso de estes serem muito robustos ou curtos, consegue-se uma maior resistência e rigidez concentrando as armaduras numa largura igual à do pilar acrescida de 1.5 vezes a espessura da laje para cada lado deste [2].

Note-se que nas recomendações do ACI para elementos pré-esforçados por cabos não aderentes [14], se indica que: "Embora seja importante que alguns cabos (do sistema primário) se localizem no perímetro de corte sobre os pilares, a distribuição dos cabos nas restantes zonas não é crítica e qualquer método de distribuição que satisfaça o equilíbrio e seja racional pode ser usado." Contudo afirma-se que, este método de distribuir uniformemente os cabos numa direcção e concentrá-los em faixas junto aos pilares na outra, é preferível por simplificar a colocação em obra, sendo por isso mais rentável em mão de obra.



2º Método de distribuição. Sistema primário (cabos distribuídos numa só direcção) e sistema secundário (cabos concentrados na direcção ortogonal).

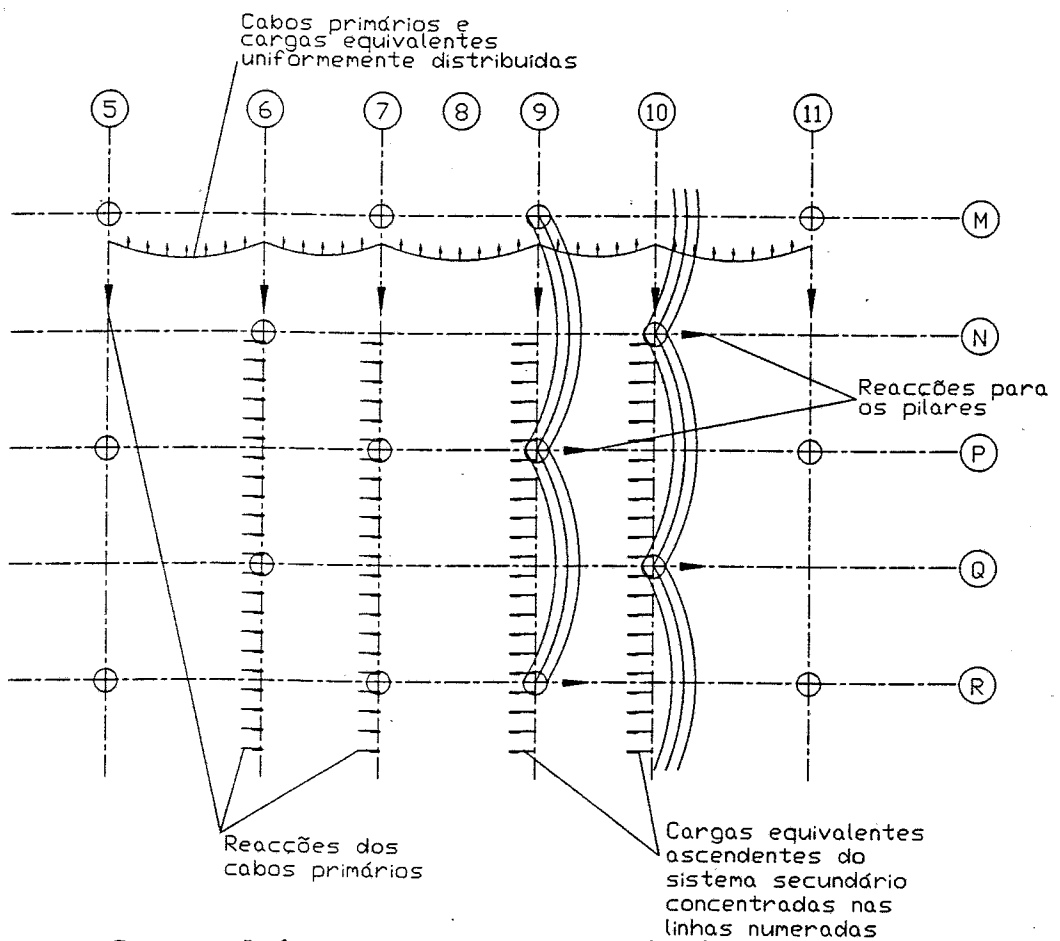
fig 2.20

É interessante verificar que há, nesta distribuição, analogia com as lajes convencionais armadas numa só direcção em que o sistema secundário de cabos com forte concentração ao longo dos pilares desempenha o papel das vigas. A eficácia desta distribuição, confirmada por testes, indica que qualquer disposição dos cabos será válida desde que satisfeito o equilíbrio das cargas compensadas. Parece óbvio contudo, que, como é afirmado em [3], uma laje sujeita a uma densidade de carga exactamente igual à carga equivalente obtida dos cabos de pré-esforço com uma distribuição nestas condições, apresentará uma deformação que se desvia mais da situação teórica de indeformabilidade do que numa distribuição como a referida no primeiro método.

Na referência [5], a "Concrete Society" privilegia também esta solução afirmando que os cabos correspondentes ao sistema secundário deverão ser colocados sobre a largura dos pilares ou numa faixa correspondente a essa largura mais meia altura da laje para cada lado.

O segundo método evidencia as possibilidades de uma análise feita com base na compensação de cargas, nomeadamente quando os pilares não estão alinhados segundo uma malha regular.

Por exemplo no caso da laje representada na fig. 2.21, que apresenta uma distribuição irregular de pilares, o sistema primário de cabos pode ser desenhado paralelamente às linhas definidas pelas letras, independentemente da localização dos pilares. É contudo necessário que os pontos mais elevados dos cabos se situem na intersecção das linhas numeradas, onde a curvatura é invertida e as acções exercidas pelos cabos são descendentes. Este sistema é equilibrado pelo sistema secundário de cabos colocado na posição das linhas numeradas transmitindo as cargas aos pilares por inversão da sua curvatura sobre estes.



Compensação de cargas numa laje com distribuição irregular dos pilares

fig. 2.21

Como é referido em [2] a concentração dos cabos sobre os pilares otimiza especialmente a capacidade resistente aos esforços transversos, disponibilizando uma "reacção" mais concentrada às forças transmitidas pelos cabos distribuídos na direcção perpendicular.

Para as lajes alveoladas, o espaçamento dos cabos fica condicionado à geometria e distância entre nervuras. Nas recomendações da CS [5] aconselha-se a maior concentração possível dos cabos junto dos pilares. De qualquer modo neste tipo de lajes é sempre difícil conseguir uma disposição igual à das lajes maciças, onde o nº possível de cabos a concentrar nas faixas dos pilares numa só direcção é sempre maior. No entanto, como já foi referido, desde que satisfeito o equilíbrio estático das cargas, poder-se-á sempre optar por uma distribuição mais uniformizada nas duas direcções.

Embora as recomendações da F.I.P [9] não façam referência à distribuição dos cabos em lajes aligeiradas, apontam para uma solução que se torna mais adequada para este tipo de lajes pois indica que, dependendo da relação entre as acções variáveis e permanentes e da distribuição das cargas pelos painéis da laje, obtem-se uma disposição adequada se, para cada direcção, 50% ou mais dos cabos forem colocados nas linhas dos pilares e os restantes uniformemente distribuídos. Esta distribuição é equivalente à da figura 2.19.

#### 2.3.1.4 REGRAS DE DISPOSIÇÃO DOS CABOS

Resumem-se em seguida algumas regras definidas para a distribuição dos cabos não aderentes, bem como regras que definem armaduras convencionais a usar.

Realça-se que as recomendações aqui transcritas estão sumarizadas e são especialmente concebidas para lajes maciças.

##### Recomendações CS [5,13]

Em qualquer direcção o espaçamento máximo dos cabos é de 6 vezes a espessura da laje. Para cabos aderentes recomenda-se 8 vezes a espessura da laje. Os cabos podem ser agrupados desde que horizontalmente não podendo exceder 4 por grupo.

A distância mínima de cabos é limitada ao maior dos valores seguintes:

- dobro da largura dos cabos agrupados;

- 7.5 cm.

Nas zonas superiores dos apoios independentemente das tensões no betão dever-se-á dispôr de uma armadura mínima convencional  $A_s = 0.15bh/100$  onde  $b$  e  $h$  são respectivamente a largura da faixa definida na secção 2.3.1.3<sup>1</sup> e  $h$  a espessura da laje.

O espaçamento máximo destes varões é de 30 cm com um diâmetro mínimo de 12 mm e deverão ser dispostos numa extensão  $1/6 l$  para cada lado do eixo do pilar.

As tensões de tração no betão estão limitadas a um valor máximo de  $0.45\sqrt{f_{ck}}$  MPa igualmente para os momentos positivos ou negativos. Aqui  $f_{ck}$  é a tensão característica do betão à compressão referida a provetes cúbicos. Dever-se-ão verificar as tensões no momento da transferência do pré-esforço e para as cargas de serviço, atendendo para isso à resistência do betão no momento de aplicação do pré-esforço. Só é dispensada a utilização de armaduras convencionais nas regiões de momentos positivos onde a tensão de tracção não é superior a  $1/3$  do valor máximo permitido. A armadura deverá ser dimensionada para resistir a força de tracção no betão. Esta força,  $F_t$ , pode ser obtida da área do diagrama linear de tensões na secção em estudo. A área da armadura é calculada a partir da equação:

$$A_s = \frac{F_t}{0.58} f_{syk}$$

onde  $f_{syk}$  é a tensão característica de cedência em MPa do aço utilizado.

#### Recomendações ACI [14]

O espaçamento de cabos ou grupos de cabos na direcção segundo a qual se encontram distribuídos, não deve exceder 8 vezes a espessura da laje nem 15 cm. O espaçamento deve garantir um tensão de compressão média não inferior a 0.86 MPa após perdas. Em cada direcção o perímetro crítico de corte nos pilares deve ser atravessado no mínimo por 2 cabos.

Uma área mínima de armaduras convencionais aderentes, deverá ser aplicada em cada direcção junto dos pilares, na região de momentos negativos. Deverá ser utilizado um mínimo de 4 varões em cada direcção e dispostos numa largura igual à do pilar mais para cada

<sup>1</sup> A largura do pilar acrescida de duas vezes a espessura da laje para cada lado deste.

lado, onde  $l$  é o comprimento do vão na direcção considerada e  $h$  a espessura da laje

O espaçamento máximo destes varões é de 30.5 cm (12") e o comprimento mínimo é de  $1/6 l$  para cada lado das faces do pilar.

Quando eventuais tensões de tração no betão na região de momentos positivos, ultrapassarem  $0.17 \sqrt{f_{ck}}$  MPa deverá ser adoptada uma armadura mínima  $A_s = N_c / 0.5 f_{sy}$  onde  $N_c$ ,  $f_{ck}$  e  $f_{sy}$  são respectivamente a força de tração no betão devido às acções permanentes e variáveis não majoradas, a resistência característica à compressão do betão aos 28 dias referida a provetes cilíndricos e a tensão de cedência do aço utilizado, que não deve ser tomada com valor superior a 414 MPa (60000 psi). O comprimento destes varões, não deverá ser inferior a  $1/3$  do vão, sendo localizados com centro na região dos momentos positivos.

Quando forem utilizadas armaduras convencionais, para complementar a resistência aos estados limites últimos de flexão, além de contribuir no controlo da fendilhação, estas deverão ser projectadas de acordo com as disposições regulamentares no que se refere a comprimentos de amarração como para as lajes sem pré-esforço.

#### **A F.I.P [9] apresenta as seguintes recomendações:**

No que concerne a espaçamento dos cabos, como regra geral indica, para cabos agrupados ou não, o valor máximo de 6 vezes a espessura da laje. Na presença de suficiente armadura convencional, para controle da fendilhação, este espaçamento pode ser aumentado e os cabos poderão ser totalmente concentrados nas "linhas" dos pilares.

No que respeita a armadura convencional estabelece um mínimo de 0.075% da secção total da laje a ser colocada nas zonas dos pilares e sobre estes em cada direcção. O espaçamento destes varões não deverá ser superior a 30 cm, com um mínimo de 4 varões, em cada direcção, e de comprimento não inferior a um terço do vão.

#### **Recomendações Australianas**

Tem interesse referir as disposições definidas em [22] onde se recomenda que para um controlo efectivo das flechas os cabos devem ser colocados em função da distribuição dos momentos, da relação entre o vão e a

espessura da laje, e do tipo de betão.

Indica-se que para betões com resistência característica da ordem dos 27.6 MPa (4000 psi) e para as seguintes relações vão/espessura:

$$55 \geq \frac{l}{h} > 45$$

- Considera-se necessário distribuir os cabos o mais perto possível da distribuição dos momentos.

$$45 \geq \frac{l}{h} > 35$$

- Recomenda-se uma distribuição ao longo da secção dos painéis entre 65% + 35% a 80% + 20%, para painéis quadrangulares. Para painéis rectangulares, a distribuição pode variar em qualquer direcção, desde que a média das duas distribuições esteja dentro dos limites definidos para os painéis quadrangulares. Como alternativa pode-se usar uma distribuição de 75% + 25% em cada direcção.

$$35 \geq \frac{l}{h} > 25$$

- Pode-se optar por qualquer distribuição entre 90% + 10% a 50% + 50%

$$25 \geq \frac{l}{h} > 10$$

- Qualquer tipo de distribuição entre 100% + 0% a 50% + 50%.

Para betões de classe superior é considerada uma distribuição que permita uma maior concentração dos cabos, nas linhas de pilares evidentemente.

### 3 CONCEPÇÃO E PROCEDIMENTOS DE CÁLCULO

Como na generalidade dos casos, o projecto e dimensionamento de lajes pré-esforçadas consiste, além de questões de ordem económica, na verificação da segurança feita sempre em relação a diversos estados limites e utilizando coeficientes de segurança que são quantificados no **RSA**.

O procedimento mais prático consiste normalmente em seguir o seguinte processo de cálculo:

i. Com base em verificações preliminares definir a implantação dos elementos estruturais verticais, o tipo de betão a utilizar e a espessura da laje.

ii. Decidir qual a quantidade das acções verticais a compensar, determinando o valor do pré-esforço e consequentemente o número e localização dos cabos. Esta determinação depende essencialmente de 3 aspectos:

- capacidade dos cabos;
- número de cabos;
- curvatura que lhes é possível imprimir no interior da laje, respeitando

os recobrimentos necessários.

iii. Efectuar a análise estrutural no sentido de determinar os esforços, designadamente, momentos flectores, esforços transversos e de punção.

iv. Verificar a segurança em relação aos estados limites de utilização e aos estados limites de resistência.

Pela sua importância, no processo de cálculo, dedicam-se à fase iv. dois capítulos separados, apresentando-se nas secções seguintes deste capítulo o modo de proceder para o cálculo dos esforços, concepção estrutural, pré-dimensionamento e para a determinação das perdas de pré-esforço.

A análise de alguns destes aspectos transcende o âmbito do presente trabalho pelo que se lhes faz uma referência considerada essencial desenvolvendo-se os que se afiguram de maior interesse prático.

#### 3.1 CÁLCULO DOS ESFORÇOS

A determinação dos esforços visa a verificação da segurança em relação aos estados limites definidos no **RSA**<sup>1</sup> (estados limites últimos e estados limites de

---

<sup>1</sup> REGULAMENTO DE SEGURANÇA E ACÇÕES [25].

utilização).

As cargas equivalentes, definidas no capítulo 2, são determinadas a partir de um valor do pré-esforço que se considera constante ao longo do vão. Esta hipótese é válida em regime elástico e neste caso uma parte das acções gravíticas ficam automaticamente "calculadas". É, neste caso, para a parte das acções que se desviam da carga equivalente que se deve fazer a análise, por métodos que são gerais, isto é, aplicáveis mesmo sem pré-esforço.

A utilização do método de compensação de cargas não é adequada na verificação da resistência, pois quando as acções introduzem esforços que ultrapassam o regime elástico a sobreposição de tensões, que é implícita quando se substitue a acção do pré-esforço por uma acção exterior equivalente, deixa de ser válida.

Ao tratar-se da verificação da segurança, para os estados limites últimos, a eventual consideração de uma acção externa equivalente à do pré-esforço teria que entrar em linha de conta com o aumento da tensão nos cabos, aderentes ou não, dependente da sua localização ao longo do vão e do estado de fendilhação do betão; procedimento que envolveria uma dificuldade de análise considerável [3].

O procedimento mais adoptado, consiste em considerar os esforços resultantes da totalidade das acções exteriores e compará-los, em cada combinação, com a capacidade resistente da secção em estudo, onde o valor da extensão nas armaduras de pré-esforço é contado a partir do valor da extensão nestas armaduras correspondente ao valor característico do pré-esforço mecanicamente instalado.

Há que ter ainda em consideração os efeitos "secundários" do pré-esforço nas estruturas hiperestáticas. Para estes casos, os momentos podem ser encontrados com base numa análise elástica ou considerando a possibilidade de alguma capacidade de rotação nas secções, assumindo-se um comportamento de certa forma plástico. A análise plástica admite a formação de *rótulas* nas secções de momento crítico, e nestes caso o grau de hiperestaticidade é diminuído até que a formação de um sistema hipostático origine o colapso.

Ao primeiro caso (comportamento elástico) ou ao comportamento plástico perfeito é normalmente preferido um estado ou comportamento intermédio a que corresponde alguma redistribuição dos momentos elásticos.

Na definição de uma combinação de acções, quando estas são afectadas pelos correspondentes coeficientes de combinação a presença dos momentos hiperestáticos, deve ser tratada como uma acção permanente, cujo efeito, favorável ou não, deve ser

considerado.

O tratamento dado a esta "acção" tem sido tema de discussão. No regulamento do ACI em 1971 os efeitos hiperestáticos do pré-esforço eram ignorados ao determinar os esforços de cálculo, uma vez que se considerava, tal como a FIP, que a redistribuição dos esforços que se verifica para os estados limites últimos, diminuía o grau de hiperestacidade das estruturas com consequente desaparecimento gradual dos momentos hiperestáticos. Contudo neste mesmo regulamento, o comportamento estrutural podia ser determinado com base numa análise elástica com uma ligeira redistribuição de momentos. Este procedimento era sem dúvida inconsistente e em alguns casos menos seguro. Os momentos hiperestáticos geralmente continuam a actuar, à medida que as acções aumentam e podem influenciar os momentos em todas as secções da estrutura até que se dê a ruína [1,3].

As únicas circunstâncias compatíveis com o desaparecimento dos momentos hiperestáticos, ocorrem quando uma redistribuição eficaz é possível, garantida através da formação de rótulas com suficiente capacidade de rotação.

No actual regulamento do ACI a consideração dos momentos hiperestáticos é considerada com um coeficiente  $\gamma_f = 1$ , embora, em muitos casos práticos os momentos hiperestáticos reduzam os momentos das acções exteriores em algumas secções, o que devia levar a adopção de coeficientes diferentes da unidade.

É esta a linha de orientação do CEB<sup>1</sup> e também o caso do REBAP e RSA, artigos 47º e 9º respectivamente, em que os coeficientes a adoptar serão:  $\gamma_f = 1.0$  e  $\gamma_f = 1.2$  consoante o seu efeito seja ou não favorável, embora como é referido por Sarmiento, J.R. as acções do pré-esforço são definidas no artº 34 do REBAP com insuficiente clareza quando se trata de distinguir "*o pré-esforço como acção quando em serviço e apenas os seus efeitos na criação do estado de coacção quando em estado limite último de resistência*" [39].

Em face destas observações e dos comentários referidos na secção 2.3.1.1 poder-se-á ou não considerar os efeitos hiperestáticos do pré-esforço. Este assunto será retomado na secção 3.1.1.

As lajes pré-esforçadas podem ser calculadas como as lajes em betão armado, com base nas teorias da elasticidade ou da plasticidade [2].

Assim, preconiza o REBAP, a verificação da segurança pode ser feita numa

---

<sup>1</sup> COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BETON

análise plástica desde que satisfeitos os condicionalismos do artigo 48º (*limitação da percentagem de armadura de tracção em função da profundidade da linha neutra da secção etc.*), ou em regime de elasticidade perfeita, com alguma redistribuição dos momentos flectores máximos nos apoios (artigos 49º e 50º).

Para uma análise mais rigorosa, seria indicado, como se comenta no REBAP, ter presente as não linearidades físicas e geométricas do betão pré-esforçado, permitindo "seguir" o comportamento das lajes, no que respeita, entre outros aspectos, às variações de rigidez e às redistribuições de momentos, para sucessivos aumentos de carga. No entanto destacam-se aqui 3 abordagens diferentes de cálculo dos esforços, que para o caso vertente a generalidade dos autores e recomendações consideram satisfatoriamente adequados:

- I. Determinação dos esforços segundo a teoria da elasticidade;
- II. Determinação segundo a teoria da plasticidade.
- III. Métodos aproximados.

Aos dois primeiros casos, bem conhecidos e estudados faz-se uma breve referência. Do último seleccionaram-se alguns métodos que se consideram de grande utilidade prática.

### 3.1.1 I- ANÁLISE ELÁSTICA

Nestes métodos, os esforços são obtidos a partir da teoria elástica das placas delgadas, sendo as equações diferenciais que se obtêm resolvidas com recurso a métodos numéricos (métodos dos elementos finitos, diferenças finitas).

Quando se trata da verificação dos estados limites de utilização, isto é, fendilhação e deformação, os valores dos esforços correspondem a um comportamento que pode considerar-se elástico perfeito dos materiais, sendo o pré-esforço equiparado à carga exterior equivalente.

Existem, publicadas por diversos autores, tabelas para a determinação dos esforços, que resolvem os casos mais vulgares, cujas soluções baseiam-se na teoria da elasticidade, considerando geralmente lajes apoiadas nos 4 bordos. Em regra referem-se a cargas uniformemente distribuídas.

### 3.1.2 II- ANÁLISE PLÁSTICA

A hipótese fundamental do comportamento plástico perfeito consiste em admitir que, quando numa dada secção é atingido o esforço de cedência ou de

plastificação, se verifica a deformação da secção sem alteração do valor do esforço. Deste modo, num elemento sujeito à flexão, quando numa secção se atinge a plastificação, o valor do momento mantém-se constante, iniciando-se deformações plásticas. Nestes pontos tudo se passa como se aí existissem rótulas que permitem uma rotação relativa, desde que atingido o valor do momento de plastificação.

No caso das lajes, admite-se a existência de linhas de rotura ou charneiras, nas quais o momento flector iguala o momento de plastificação. A laje fica assim dividida em partes consideradas rígidas e planas, articuladas entre si nas linhas de rotura que são, em consequência, linhas rectas, ocorrendo o colapso quando se forma um sistema de linhas de rotura que transforma a laje num mecanismo deformável sob carga constante.

A aplicabilidade deste método das linhas de rotura pressupõe a satisfação das hipóteses do artigo 48º do REBAP, designadamente no que diz respeito à ductilidade que a laje deverá apresentar para que as linhas de rotura se formem.

Na referência [33], encontra-se convenientemente explicada e exemplificada a aplicação do método das linhas de rotura em lajes de betão armado. Para lajes fungiformes, afirma-se, o método é mais adequado pois não está ainda generalizado ao caso de lajes apoiadas em vigas, considerando a deformabilidade destas (interacção laje-viga).

Em [38] apresenta-se o método em que a carga correspondente a cada mecanismo de rotura é determinado com base no princípio dos trabalhos virtuais, onde para um dado deslocamento virtual, a soma dos trabalhos produzidos pelas forças exteriores com os produzidos pelas forças interiores é igual a zero. Nestes casos a carga última  $(g + q)_u$ , refere-se, pode ser determinada com boa aproximação.

As recomendações da FIP e da CS, admitem a análise plástica das lajes pré-esforçadas por cabos não aderentes, para os estados limites ultimos de flexão<sup>1</sup>.

Por se considerar não haver ainda análise experimental suficiente, têm-se levantado dúvidas [3] quanto à aplicabilidade deste método mesmo nas lajes de betão armado, uma vez que a capacidade de rotação plástica das secções é fundamental e esta poder-se-á não disponibilizar adequadamente em lajes

---

<sup>1</sup> Repare-se que, para as hipóteses admitidas neste método, é implícita a não existência de momentos hiperestáticos de pré-esforço, uma vez que a análise é efectuada sobre uma estrutura não hiperestática.

pré-esforçadas. O aço de pré-esforço é menos dúctil do que o aço convencional e os elementos de betão pré-esforçado apresentam menores rotações nas secções críticas em fase de rotura do que nos elementos de betão armado. Segundo a linha de orientação do CEB e do ACI tem sido preferido admitir uma análise elástica dos momentos, seguida de uma redistribuição que é dependente da ductilidade das secções. Na secção 3.1.4 desenvolve-se com maior detalhe esta questão.

### 3.1.3 III - ANÁLISES APROXIMADAS

Na maior parte dos edifícios os pilares são dispostos segundo malhas rectangulares. Por outro lado as lajes dos pisos estão sujeitas a cargas consideradas uniformemente distribuídas. Na presença destas particularidades, a maior parte dos regulamentos e normas de cálculo apresentam métodos e regras de simples aplicação para a sua análise.

Estes métodos simplificados tem sido desenvolvidos ao longo de vários anos, aliando à prática, desenvolvida em obra, o resultado de análises em regime elástico ou com base no método das linhas de rotura (análise plástica) e o resultado de testes e experiências em modelos [2].

#### 3.1.3.1 LAJES COM APOIOS CONTÍNUOS

Se a carga aplicada a uma laje, cujos painéis se apoiam ao longo dos seus bordos, se desviar da carga compensada pelo pré-esforço, a laje apresentará flechas positivas ou negativas, e os momentos terão de ser determinados atendendo à hiperestaticidade, mesmo nos casos mais simples, como o de um painel simplesmente apoiado nos 4 bordos. Em geral, os esforços em serviço terão que ser calculados para a parte não compensada e os valores majorados da totalidade das cargas para a verificação da segurança à rotura.

Encontram-se publicadas tabelas contendo soluções para um grande número placas, relativas a diferentes formas, condições de apoio e tipo de cargas. Poder-se-á portanto recorrer a tais tabelas para a determinação dos esforços nas lajes.

Um destes métodos, bastante divulgado e de fácil aplicação é o indicado no *ACI Building Code 318-63*, que aqui se reproduz embora se encontre

resumido no MANUAL DE BETÃO ARMADO [33], publicado pelo L.N.E.C.<sup>1</sup>. Neste Manual as tabelas apresentadas não contemplam todas as hipóteses de carga e condições de apoio.

Os valores das cargas a considerar são as respeitantes à parte não compensada e as tensões obtidas, em regime elástico, terão de ser adicionadas à compressão introduzida pelo pré-esforço.

Este método aplica-se às lajes apoiadas nos 4 bordos por paredes ou por vigas com suficiente rigidez. A relação entre os lados de um painel pode variar em 1.0 e 0.5. As lajes que apresentam uma relação inferior a 0.5 comportam-se como sendo armadas numa só direcção. As condições de apoio consideradas são de apoio simples (resistência à torção desprezável) e de bordos com continuidade ou com encastramento. Nove hipóteses de apoio distintas estão contempladas.

Dependendo destas condições, são dados coeficientes que permitem o cálculo directo dos momentos, determinados com base numa análise elástica, mas que têm também em conta uma certa redistribuição de momentos. Os momentos de cálculo nas duas direcções são obtidos a partir das expressões:

$$\begin{aligned} M_a &= C_a \cdot \omega \cdot l_a^2 \\ M_b &= C_b \cdot \omega \cdot l_b^2 \end{aligned} \quad 3.3$$

onde:

$C_a$  e  $C_b$  são os coeficientes tabelados;

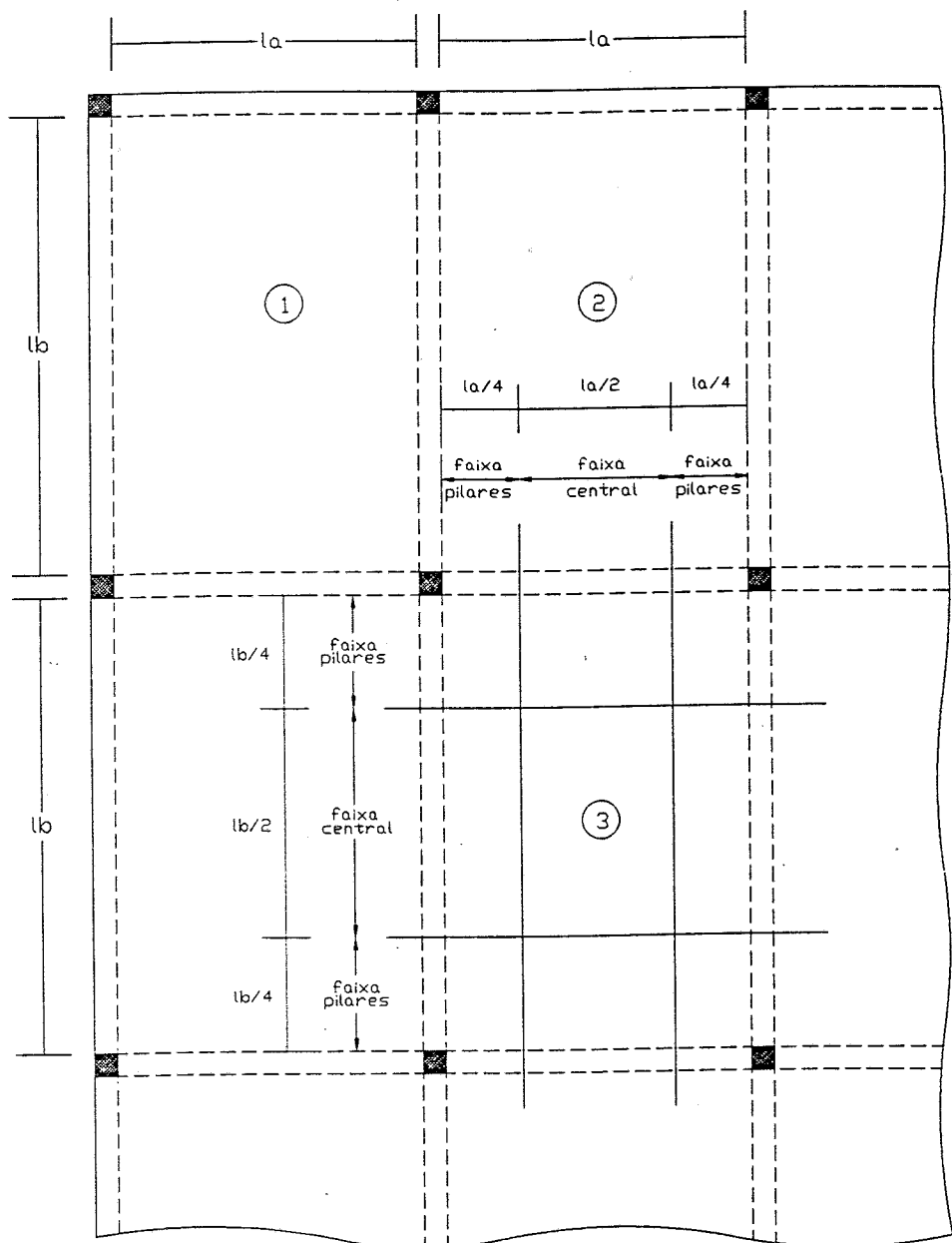
$\omega$  = carga uniforme por unidade de superfície;

$l_a$  e  $l_b$  = dimensão dos vãos na maior e menor direcções respectivamente;

$M_a$  e  $M_b$  = Momentos flectores máximos por unidade de largura das faixas centrais nas direcções respectivas.

---

<sup>1</sup> LABORATÓRIO NACIONAL DE ENGENHARIA CIVIL



Laje armada em duas direcções apoiada em vigas

fig. 3.1

Para a aplicação destes coeficientes, é necessário que cada painel seja dividido, em ambas as direcções, paralelas aos bordos, numa faixa central, cuja largura é metade da do painel e em duas faixas laterais adjacentes aos pilares com  $1/4$  da largura do painel.

Os valores tabelados correspondem às faixas centrais e nas faixas laterais devem ser considerados momentos flectores com o valor de  $2/3$  dos

momentos correspondentes aquelas.

A fig. 3.1 mostra uma parte de uma laje de piso apoiada num sistema ortogonal de vigas, onde se destacam as referidas faixas no painel 3. A figura ilustra algumas possibilidades das condições de apoio dos bordos dos painéis. O painel 1 por exemplo tem 2 bordos descontínuos adjacentes enquanto os outros bordos são contínuos. O painel 2 tem um bordo descontínuo e três bordos contínuos. O painel 3 tem os 4 bordos contínuos. As tabelas que aqui se apresentam reproduzidas do ACI "Code" de 1963, dão os coeficientes para os momentos e esforços transversos para os painéis das lajes apoiadas em duas direcções ortogonais. Nas tabelas os efeitos das acções permanentes estão diferenciados dos das variáveis. As acções permanentes estão sempre presentes em todos os painéis da laje, enquanto que as acções variáveis devem ser posicionadas procurando que o seu efeito seja máximo.

A tabela 1.1 dá os coeficientes para os momentos negativos nos bordos contínuos, obtidos quando ambos os painéis adjacentes a um determinado bordo estão carregados com a totalidade das cargas permanentes e variáveis. O momento deve ser calculado para esta carga total.

Este processo prevê que para os momentos negativos nos bordos sem continuidade se considere  $1/3$  dos momentos positivos na mesma direcção, para atender a alguma rigidez torsional da viga ou da parede no bordo livre.

Para os momentos positivos, considera-se que a rotação dos bordos contínuos, com os painéis idênticamente carregados, é pequena, porque as cargas nos painéis adjacentes produzem rotações de sinal contrário tendendo a anular as produzidas pela carga do painel em consideração. Assim os bordos contínuos são considerados fixos e os respectivos coeficientes encontram-se na tabela 1.2. Note-se que os painéis devem ter vãos semelhantes entre si. Para situações particulares em que a irregularidade dos vãos é considerável, estas hipóteses deixam de ser válidas.

Por outro lado, os momentos máximos positivos para as acções variáveis são obtidos quando estas actuam alternadamente nos restantes painéis com excepção dos adjacentes. Aqui existirá alguma rotação dos bordos contínuos. Como aproximação considera-se que a restrição à rotação é de 50%, e para o cálculo destes momentos, os respectivos coeficientes encontram-se na tabela 1.3.

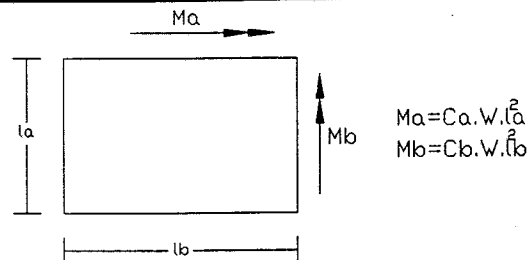
Por último, para o cálculo dos esforços transversos ou para a determinação das reacções de apoio, a tabela 1.4 fornece os coeficientes a aplicar à carga total  $W$  para obter a quota parte desta que é transmitida em cada uma das duas direcções ortogonais.

**TABELA 1.1 COEFICIENTES PARA OS MOMENTOS NEGATIVOS EM LAJES**

(Paineis todos carregados)

*Para obter os momentos máximos negativos aplicar a carga uniforme total das acções permanentes e variáveis.*

| TABELA 1.1 |         | caso 1                                                                            | caso 2                                                                            | caso 3                                                                            | caso 4                                                                            | caso 5                                                                            | caso 6                                                                              | caso 7                                                                              | caso 8                                                                              | caso 9                                                                              |
|------------|---------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| la/lb      |         |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1.00       | Ca,neg. |                                                                                   | 0.045                                                                             |                                                                                   | 0.050                                                                             | 0.075                                                                             | 0.071                                                                               |                                                                                     | 0.033                                                                               | 0.061                                                                               |
|            | Cb,neg. |                                                                                   | 0.045                                                                             | 0.076                                                                             | 0.050                                                                             |                                                                                   |                                                                                     | 0.071                                                                               | 0.061                                                                               | 0.033                                                                               |
| 0.95       | Ca,neg. |                                                                                   | 0.050                                                                             |                                                                                   | 0.055                                                                             | 0.079                                                                             | 0.075                                                                               |                                                                                     | 0.038                                                                               | 0.065                                                                               |
|            | Cb,neg. |                                                                                   | 0.041                                                                             | 0.072                                                                             | 0.045                                                                             |                                                                                   |                                                                                     | 0.067                                                                               | 0.056                                                                               | 0.029                                                                               |
| 0.90       | Ca,neg. |                                                                                   | 0.055                                                                             |                                                                                   | 0.060                                                                             | 0.080                                                                             | 0.079                                                                               |                                                                                     | 0.043                                                                               | 0.068                                                                               |
|            | Cb,neg. |                                                                                   | 0.037                                                                             | 0.070                                                                             | 0.040                                                                             |                                                                                   |                                                                                     | 0.062                                                                               | 0.052                                                                               | 0.025                                                                               |
| 0.85       | Ca,neg. |                                                                                   | 0.060                                                                             |                                                                                   | 0.066                                                                             | 0.082                                                                             | 0.083                                                                               |                                                                                     | 0.049                                                                               | 0.072                                                                               |
|            | Cb,neg. |                                                                                   | 0.031                                                                             | 0.065                                                                             | 0.034                                                                             |                                                                                   |                                                                                     | 0.057                                                                               | 0.046                                                                               | 0.021                                                                               |
| 0.80       | Ca,neg. |                                                                                   | 0.065                                                                             |                                                                                   | 0.071                                                                             | 0.083                                                                             | 0.086                                                                               |                                                                                     | 0.055                                                                               | 0.075                                                                               |
|            | Cb,neg. |                                                                                   | 0.027                                                                             | 0.061                                                                             | 0.029                                                                             |                                                                                   |                                                                                     | 0.051                                                                               | 0.041                                                                               | 0.017                                                                               |
| 0.75       | Ca,neg. |                                                                                   | 0.069                                                                             |                                                                                   | 0.076                                                                             | 0.085                                                                             | 0.088                                                                               |                                                                                     | 0.061                                                                               | 0.078                                                                               |
|            | Cb,neg. |                                                                                   | 0.022                                                                             | 0.056                                                                             | 0.024                                                                             |                                                                                   |                                                                                     | 0.044                                                                               | 0.036                                                                               | 0.014                                                                               |
| 0.70       | Ca,neg. |                                                                                   | 0.074                                                                             |                                                                                   | 0.081                                                                             | 0.086                                                                             | 0.091                                                                               |                                                                                     | 0.068                                                                               | 0.081                                                                               |
|            | Cb,neg. |                                                                                   | 0.017                                                                             | 0.050                                                                             | 0.019                                                                             |                                                                                   |                                                                                     | 0.038                                                                               | 0.029                                                                               | 0.011                                                                               |
| 0.65       | Ca,neg. |                                                                                   | 0.077                                                                             |                                                                                   | 0.085                                                                             | 0.087                                                                             | 0.093                                                                               |                                                                                     | 0.074                                                                               | 0.083                                                                               |
|            | Cb,neg. |                                                                                   | 0.014                                                                             | 0.043                                                                             | 0.015                                                                             |                                                                                   |                                                                                     | 0.031                                                                               | 0.024                                                                               | 0.008                                                                               |
| 0.60       | Ca,neg. |                                                                                   | 0.081                                                                             |                                                                                   | 0.089                                                                             | 0.088                                                                             | 0.095                                                                               |                                                                                     | 0.080                                                                               | 0.085                                                                               |
|            | Cb,neg. |                                                                                   | 0.010                                                                             | 0.035                                                                             | 0.011                                                                             |                                                                                   |                                                                                     | 0.024                                                                               | 0.018                                                                               | 0.006                                                                               |
| 0.55       | Ca,neg. |                                                                                   | 0.084                                                                             |                                                                                   | 0.092                                                                             | 0.089                                                                             | 0.096                                                                               |                                                                                     | 0.085                                                                               | 0.086                                                                               |
|            | Cb,neg. |                                                                                   | 0.007                                                                             | 0.028                                                                             | 0.008                                                                             |                                                                                   |                                                                                     | 0.019                                                                               | 0.014                                                                               | 0.005                                                                               |
| 0.50       | Ca,neg. |                                                                                   | 0.086                                                                             |                                                                                   | 0.094                                                                             | 0.090                                                                             | 0.097                                                                               |                                                                                     | 0.089                                                                               | 0.088                                                                               |
|            | Cb,neg. |                                                                                   | 0.006                                                                             | 0.022                                                                             | 0.006                                                                             |                                                                                   |                                                                                     | 0.014                                                                               | 0.010                                                                               | 0.003                                                                               |

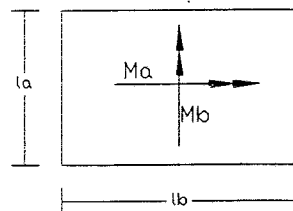


**TABELA 1.2 COEFICIENTES PARA OS MOMENTOS POSITIVOS-CARGAS PERMANENTES EM LAJES**

(Paineis todos carregados)

Para obter os momentos máximos positivos aplicar esta tabela às acções permanentes e adicionar a Tabela 1.3 aplicada às acções variáveis.

| TABELA 1.2 |          | caso 1                                                                            | caso 2                                                                            | caso 3                                                                            | caso 4                                                                            | caso 5                                                                            | caso 6                                                                            | caso 7                                                                              | caso 8                                                                              | caso 9                                                                              |
|------------|----------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| la/lb      |          |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1.00       | Ca.perm. | 0.036                                                                             | 0.018                                                                             | 0.018                                                                             | 0.027                                                                             | 0.027                                                                             | 0.033                                                                             |                                                                                     | 0.033                                                                               | 0.061                                                                               |
|            | Cb.perm. | 0.036                                                                             | 0.018                                                                             | 0.027                                                                             | 0.027                                                                             | 0.018                                                                             |                                                                                   | 0.071                                                                               | 0.061                                                                               | 0.033                                                                               |
| 0.95       | Ca.perm. | 0.040                                                                             | 0.020                                                                             | 0.021                                                                             | 0.030                                                                             | 0.028                                                                             | 0.075                                                                             |                                                                                     | 0.038                                                                               | 0.065                                                                               |
|            | Cb.perm. | 0.033                                                                             | 0.016                                                                             | 0.025                                                                             | 0.024                                                                             | 0.015                                                                             |                                                                                   | 0.067                                                                               | 0.056                                                                               | 0.029                                                                               |
| 0.90       | Ca.perm. | 0.045                                                                             | 0.022                                                                             | 0.025                                                                             | 0.033                                                                             | 0.029                                                                             | 0.079                                                                             |                                                                                     | 0.043                                                                               | 0.068                                                                               |
|            | Cb.perm. | 0.029                                                                             | 0.014                                                                             | 0.024                                                                             | 0.022                                                                             | 0.013                                                                             |                                                                                   | 0.062                                                                               | 0.052                                                                               | 0.025                                                                               |
| 0.85       | Ca.perm. | 0.050                                                                             | 0.024                                                                             | 0.029                                                                             | 0.036                                                                             | 0.031                                                                             | 0.083                                                                             |                                                                                     | 0.049                                                                               | 0.072                                                                               |
|            | Cb.perm. | 0.026                                                                             | 0.012                                                                             | 0.022                                                                             | 0.019                                                                             | 0.011                                                                             |                                                                                   | 0.057                                                                               | 0.046                                                                               | 0.021                                                                               |
| 0.80       | Ca.perm. | 0.056                                                                             | 0.026                                                                             | 0.034                                                                             | 0.039                                                                             | 0.032                                                                             | 0.086                                                                             |                                                                                     | 0.055                                                                               | 0.075                                                                               |
|            | Cb.perm. | 0.023                                                                             | 0.011                                                                             | 0.020                                                                             | 0.016                                                                             | 0.009                                                                             |                                                                                   | 0.051                                                                               | 0.041                                                                               | 0.017                                                                               |
| 0.75       | Ca.perm. | 0.061                                                                             | 0.028                                                                             | 0.040                                                                             | 0.043                                                                             | 0.033                                                                             | 0.088                                                                             |                                                                                     | 0.061                                                                               | 0.078                                                                               |
|            | Cb.perm. | 0.019                                                                             | 0.009                                                                             | 0.018                                                                             | 0.013                                                                             | 0.007                                                                             |                                                                                   | 0.044                                                                               | 0.036                                                                               | 0.014                                                                               |
| 0.70       | Ca.perm. | 0.068                                                                             | 0.030                                                                             | 0.046                                                                             | 0.046                                                                             | 0.035                                                                             | 0.091                                                                             |                                                                                     | 0.068                                                                               | 0.081                                                                               |
|            | Cb.perm. | 0.016                                                                             | 0.007                                                                             | 0.016                                                                             | 0.011                                                                             | 0.005                                                                             |                                                                                   | 0.038                                                                               | 0.029                                                                               | 0.011                                                                               |
| 0.65       | Ca.perm. | 0.074                                                                             | 0.032                                                                             | 0.054                                                                             | 0.050                                                                             | 0.036                                                                             | 0.093                                                                             |                                                                                     | 0.074                                                                               | 0.083                                                                               |
|            | Cb.perm. | 0.013                                                                             | 0.006                                                                             | 0.014                                                                             | 0.009                                                                             | 0.004                                                                             |                                                                                   | 0.031                                                                               | 0.024                                                                               | 0.008                                                                               |
| 0.60       | Ca.perm. | 0.081                                                                             | 0.034                                                                             | 0.062                                                                             | 0.053                                                                             | 0.037                                                                             | 0.095                                                                             |                                                                                     | 0.080                                                                               | 0.085                                                                               |
|            | Cb.perm. | 0.010                                                                             | 0.004                                                                             | 0.011                                                                             | 0.007                                                                             | 0.003                                                                             |                                                                                   | 0.024                                                                               | 0.018                                                                               | 0.006                                                                               |
| 0.55       | Ca.perm. | 0.088                                                                             | 0.035                                                                             | 0.071                                                                             | 0.056                                                                             | 0.038                                                                             | 0.096                                                                             |                                                                                     | 0.085                                                                               | 0.086                                                                               |
|            | Cb.perm. | 0.008                                                                             | 0.003                                                                             | 0.009                                                                             | 0.005                                                                             | 0.002                                                                             |                                                                                   | 0.019                                                                               | 0.014                                                                               | 0.005                                                                               |
| 0.50       | Ca.perm. | 0.095                                                                             | 0.037                                                                             | 0.080                                                                             | 0.059                                                                             | 0.039                                                                             | 0.097                                                                             |                                                                                     | 0.089                                                                               | 0.088                                                                               |
|            | Cb.perm. | 0.006                                                                             | 0.002                                                                             | 0.007                                                                             | 0.004                                                                             | 0.001                                                                             |                                                                                   | 0.014                                                                               | 0.010                                                                               | 0.003                                                                               |



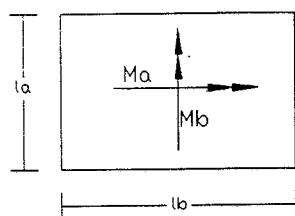
$$M_a = C_a \cdot W \cdot l_a^2$$

$$M_b = C_b \cdot W \cdot l_b^2$$

**TABELA 1.3 COEFICIENTES PARA OS MOMENTOS POSITIVOS-AÇÕES VARIÁVEIS EM LAJES**

Carga uniforme total das ações variáveis (painéis carregados alternadamente)

| TABELA 1.3 |         | caso 1 | caso 2 | caso 3 | caso 4 | caso 5 | caso 6 | caso 7 | caso 8 | caso 9 |
|------------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| la/lb      |         |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| 1.00       | Ca,var. | 0.036  | 0.027  | 0.027  | 0.032  | 0.032  | 0.035  | 0.032  | 0.028  | 0.030  |
|            | Cb,var. | 0.036  | 0.027  | 0.032  | 0.032  | 0.027  | 0.032  | 0.035  | 0.030  | 0.028  |
| 0.95       | Ca,var. | 0.040  | 0.030  | 0.031  | 0.035  | 0.034  | 0.038  | 0.036  | 0.031  | 0.032  |
|            | Cb,var. | 0.033  | 0.025  | 0.029  | 0.029  | 0.024  | 0.029  | 0.032  | 0.027  | 0.025  |
| 0.90       | Ca,var. | 0.045  | 0.034  | 0.035  | 0.039  | 0.037  | 0.042  | 0.040  | 0.035  | 0.036  |
|            | Cb,var. | 0.029  | 0.022  | 0.027  | 0.026  | 0.021  | 0.025  | 0.029  | 0.024  | 0.022  |
| 0.85       | Ca,var. | 0.050  | 0.037  | 0.040  | 0.043  | 0.041  | 0.046  | 0.045  | 0.040  | 0.039  |
|            | Cb,var. | 0.026  | 0.019  | 0.024  | 0.023  | 0.019  | 0.022  | 0.026  | 0.022  | 0.020  |
| 0.80       | Ca,var. | 0.056  | 0.041  | 0.045  | 0.048  | 0.044  | 0.051  | 0.051  | 0.044  | 0.042  |
|            | Cb,var. | 0.023  | 0.017  | 0.022  | 0.020  | 0.016  | 0.019  | 0.023  | 0.019  | 0.017  |
| 0.75       | Ca,var. | 0.061  | 0.045  | 0.051  | 0.052  | 0.047  | 0.055  | 0.056  | 0.049  | 0.046  |
|            | Cb,var. | 0.019  | 0.014  | 0.019  | 0.016  | 0.013  | 0.016  | 0.020  | 0.016  | 0.013  |
| 0.70       | Ca,var. | 0.068  | 0.049  | 0.057  | 0.057  | 0.051  | 0.060  | 0.063  | 0.054  | 0.050  |
|            | Cb,var. | 0.016  | 0.012  | 0.016  | 0.014  | 0.011  | 0.013  | 0.017  | 0.014  | 0.011  |
| 0.65       | Ca,var. | 0.074  | 0.053  | 0.064  | 0.062  | 0.055  | 0.064  | 0.070  | 0.059  | 0.054  |
|            | Cb,var. | 0.013  | 0.010  | 0.014  | 0.011  | 0.009  | 0.010  | 0.014  | 0.011  | 0.009  |
| 0.60       | Ca,var. | 0.081  | 0.058  | 0.071  | 0.067  | 0.059  | 0.068  | 0.077  | 0.065  | 0.059  |
|            | Cb,var. | 0.010  | 0.007  | 0.011  | 0.009  | 0.007  | 0.008  | 0.011  | 0.009  | 0.007  |
| 0.55       | Ca,var. | 0.088  | 0.062  | 0.080  | 0.072  | 0.063  | 0.073  | 0.085  | 0.070  | 0.063  |
|            | Cb,var. | 0.008  | 0.006  | 0.009  | 0.007  | 0.005  | 0.006  | 0.009  | 0.007  | 0.006  |
| 0.50       | Ca,var. | 0.095  | 0.066  | 0.088  | 0.077  | 0.067  | 0.078  | 0.092  | 0.076  | 0.067  |
|            | Cb,var. | 0.006  | 0.004  | 0.007  | 0.005  | 0.004  | 0.005  | 0.007  | 0.005  | 0.004  |



$$M_a = C_a \cdot W \cdot l_a^2$$

$$M_b = C_b \cdot W \cdot l_b^2$$

**TABELA 1.4 DISTRIBUIÇÃO DA CARGA W SEGUNDO AS DIRECÇÕES la e lb NOS APOIOS**

| TABELA 1.4 |    | caso 1                                                                            | caso 2                                                                            | caso 3                                                                            | caso 4                                                                            | caso 5                                                                            | caso 6                                                                             | caso 7                                                                              | caso 8                                                                              | caso 9                                                                              |
|------------|----|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| la/lb      |    |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1.00       | Wa | 0.50                                                                              | 0.50                                                                              | 0.17                                                                              | 0.50                                                                              | 0.83                                                                              | 0.71                                                                               | 0.29                                                                                | 0.33                                                                                | 0.67                                                                                |
|            | Wb | 0.50                                                                              | 0.50                                                                              | 0.83                                                                              | 0.50                                                                              | 0.17                                                                              | 0.29                                                                               | 0.71                                                                                | 0.67                                                                                | 0.33                                                                                |
| 0.95       | Wa | 0.55                                                                              | 0.55                                                                              | 0.20                                                                              | 0.55                                                                              | 0.86                                                                              | 0.75                                                                               | 0.33                                                                                | 0.38                                                                                | 0.71                                                                                |
|            | Wb | 0.45                                                                              | 0.45                                                                              | 0.80                                                                              | 0.45                                                                              | 0.14                                                                              | 0.25                                                                               | 0.67                                                                                | 0.62                                                                                | 0.29                                                                                |
| 0.90       | Wa | 0.60                                                                              | 0.60                                                                              | 0.23                                                                              | 0.60                                                                              | 0.88                                                                              | 0.79                                                                               | 0.38                                                                                | 0.43                                                                                | 0.75                                                                                |
|            | Wb | 0.40                                                                              | 0.40                                                                              | 0.77                                                                              | 0.40                                                                              | 0.12                                                                              | 0.21                                                                               | 0.62                                                                                | 0.57                                                                                | 0.25                                                                                |
| 0.85       | Wa | 0.66                                                                              | 0.66                                                                              | 0.28                                                                              | 0.66                                                                              | 0.90                                                                              | 0.83                                                                               | 0.43                                                                                | 0.49                                                                                | 0.79                                                                                |
|            | Wb | 0.34                                                                              | 0.34                                                                              | 0.72                                                                              | 0.34                                                                              | 0.10                                                                              | 0.17                                                                               | 0.57                                                                                | 0.51                                                                                | 0.21                                                                                |
| 0.80       | Wa | 0.71                                                                              | 0.71                                                                              | 0.33                                                                              | 0.71                                                                              | 0.92                                                                              | 0.86                                                                               | 0.49                                                                                | 0.55                                                                                | 0.83                                                                                |
|            | Wb | 0.29                                                                              | 0.29                                                                              | 0.67                                                                              | 0.29                                                                              | 0.08                                                                              | 0.14                                                                               | 0.51                                                                                | 0.45                                                                                | 0.17                                                                                |
| 0.75       | Wa | 0.76                                                                              | 0.76                                                                              | 0.39                                                                              | 0.76                                                                              | 0.94                                                                              | 0.88                                                                               | 0.56                                                                                | 0.61                                                                                | 0.86                                                                                |
|            | Wb | 0.24                                                                              | 0.24                                                                              | 0.61                                                                              | 0.24                                                                              | 0.06                                                                              | 0.12                                                                               | 0.44                                                                                | 0.39                                                                                | 0.14                                                                                |
| 0.70       | Wa | 0.81                                                                              | 0.81                                                                              | 0.45                                                                              | 0.81                                                                              | 0.95                                                                              | 0.91                                                                               | 0.62                                                                                | 0.68                                                                                | 0.89                                                                                |
|            | Wb | 0.19                                                                              | 0.19                                                                              | 0.55                                                                              | 0.19                                                                              | 0.05                                                                              | 0.09                                                                               | 0.38                                                                                | 0.32                                                                                | 0.11                                                                                |
| 0.65       | Wa | 0.85                                                                              | 0.85                                                                              | 0.53                                                                              | 0.85                                                                              | 0.96                                                                              | 0.93                                                                               | 0.69                                                                                | 0.74                                                                                | 0.92                                                                                |
|            | Wb | 0.15                                                                              | 0.15                                                                              | 0.47                                                                              | 0.15                                                                              | 0.04                                                                              | 0.07                                                                               | 0.31                                                                                | 0.26                                                                                | 0.08                                                                                |
| 0.60       | Wa | 0.89                                                                              | 0.89                                                                              | 0.61                                                                              | 0.89                                                                              | 0.97                                                                              | 0.95                                                                               | 0.76                                                                                | 0.80                                                                                | 0.94                                                                                |
|            | Wb | 0.11                                                                              | 0.11                                                                              | 0.39                                                                              | 0.11                                                                              | 0.03                                                                              | 0.05                                                                               | 0.24                                                                                | 0.20                                                                                | 0.06                                                                                |
| 0.55       | Wa | 0.92                                                                              | 0.92                                                                              | 0.69                                                                              | 0.92                                                                              | 0.98                                                                              | 0.96                                                                               | 0.81                                                                                | 0.85                                                                                | 0.95                                                                                |
|            | Wb | 0.08                                                                              | 0.08                                                                              | 0.31                                                                              | 0.08                                                                              | 0.02                                                                              | 0.04                                                                               | 0.19                                                                                | 0.15                                                                                | 0.05                                                                                |
| 0.50       | Wa | 0.94                                                                              | 0.94                                                                              | 0.76                                                                              | 0.94                                                                              | 0.99                                                                              | 0.97                                                                               | 0.86                                                                                | 0.89                                                                                | 0.97                                                                                |
|            | Wb | 0.06                                                                              | 0.06                                                                              | 0.24                                                                              | 0.06                                                                              | 0.01                                                                              | 0.03                                                                               | 0.14                                                                                | 0.11                                                                                | 0.03                                                                                |

### 3.1.3.2 LAJES FUNGIFORMES

Quando as lajes fungiformes são sujeitas a acções diferentes da carga equivalente resultante da aplicação do pré-esforço, surgirão naturalmente flechas e curvaturas e consequentemente momentos. Quando se trata dos estados limites de utilização, as tensões resultantes das cargas de serviço podem ser determinadas para a parte não compensada, devendo sobrepôr-se a estas, a compressão uniforme instalada pelo pré-esforço, para obter as tensões efectivas

instaladas.

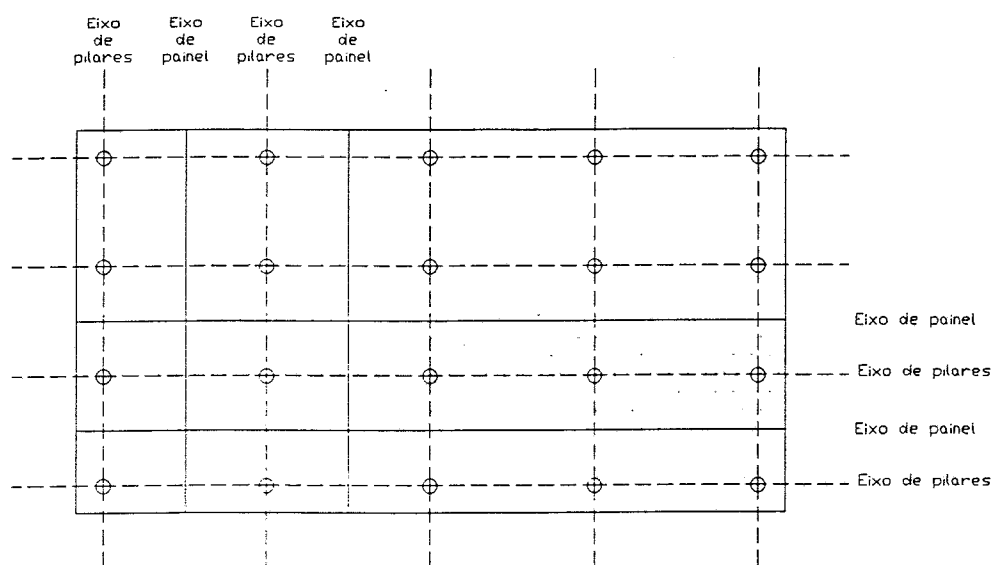
Para os estados limites últimos, as combinações de carga a considerar, devem englobar **todas** as acções exteriores, uma vez que o pré-esforço é considerado nas resistências, dimensionando-se as secções com capacidade resistente compatível.

O método aproximado, para a determinação dos esforços nas lajes fungiformes, mais correntemente utilizado é o chamado método dos pórticos equivalentes. O **REBAP**, nomeadamente no artº 119, encaminha circunstancialmente o projectista para esta solução.

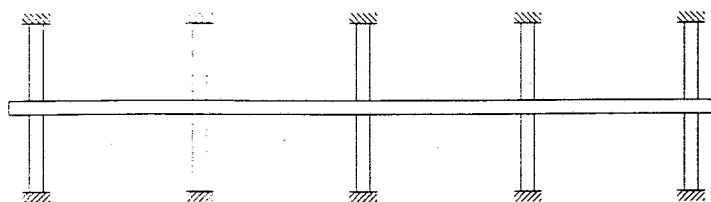
A sua aplicação prática contudo é tratada de forma sucinta. Em [40] apresentam-se estudos comparativos dos esforços obtidos pelo método dos pórticos equivalentes com base nas disposições do **REBAP** com os esforços obtidos por um método mais rigoroso baseado em elementos finitos. Daí pode-se constatar que algumas das recomendações estrangeiras apresentam regras que se aproximam mais do método dos elementos finitos do que as do **REBAP**, nomeadamente na repartição lateral dos momentos entre faixas, nos momentos de transferência para os pilares e na própria divisão das faixas. Atentas as observações aí produzidas<sup>1</sup> transcrevem-se algumas considerações sobre a aplicação do método segundo o **ACI** tal como comentadas por (Nilson, A.H.) em [3]. A estrutura é analisada depois de dividida em pórticos contínuos com centro no alinhamento dos pilares e definidos quer longitudinalmente quer transversalmente, como se mostra na fig 3.2 pelas bandas sombreadas em planta.

---

<sup>1</sup> Se bem que, (subentende-se) só estejam em causa lajes não pré-esforçadas.



(a)



(b)

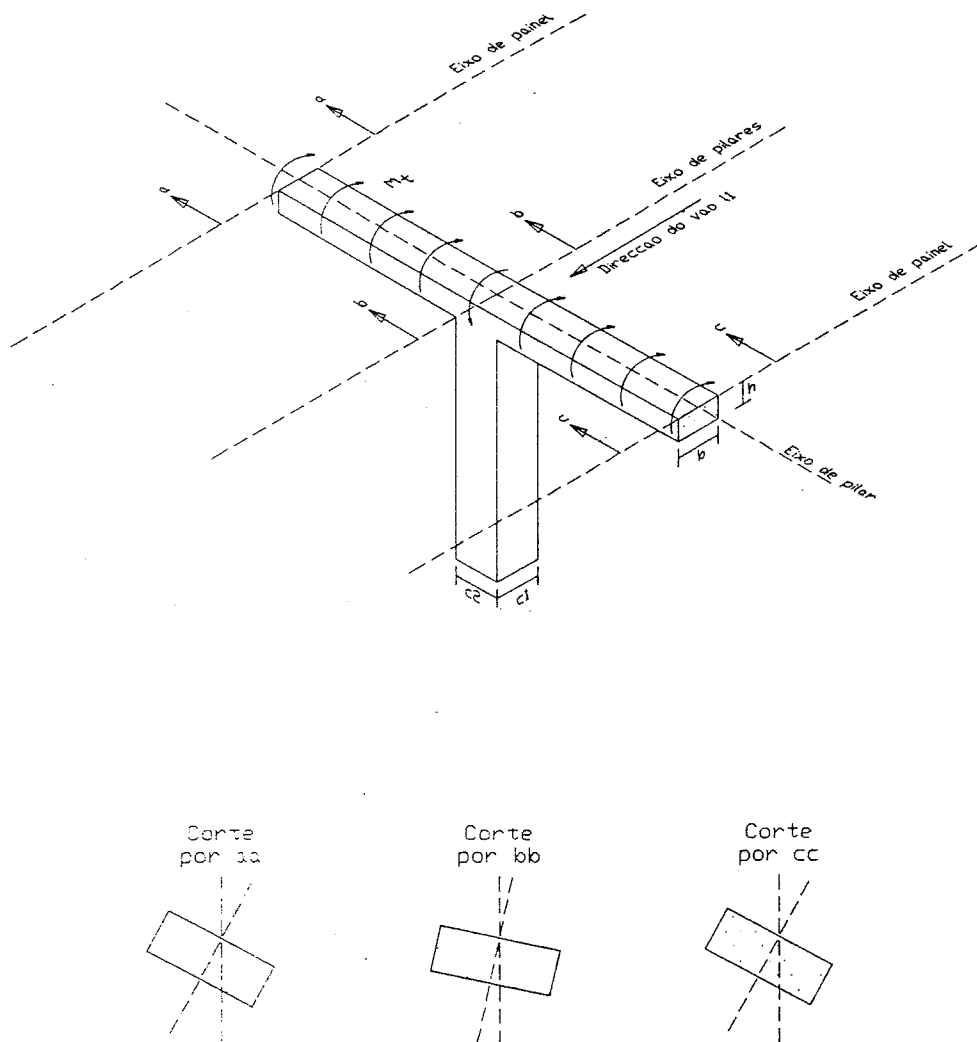
Pórtico equivalente, planta e alçado

fig 3.2

Cada pórtico é composto por uma linha de pilares e por uma viga larga cuja secção é dada pela altura da laje e pela distância entre centros dos painéis adjacentes ao pilar.

Para cargas verticais, cada piso pode ser analisado isoladamente e os pilares podem ser considerados encastrados nos pisos imediatamente superior e inferior. Naturalmente como já referido, a totalidade da carga deve ser contabilizada independentemente e em cada direcção. Para maximizar o efeito das acções variáveis, estas devem ser posicionadas nos vãos procurando as alternâncias mais desfavoráveis para as secções críticas. O ACI dispensa esta condição se a acção variável não ultrapassar  $3/4$  da acção permanente.

Quando os pilares são relativamente flexíveis, ou quando a sua ligação à laje não é feita de forma suficientemente rígida, o que pode suceder por exemplo com pilares metálicos, a sua rigidez é desprezada e a laje é tratada como um conjunto de "vigas contínuas equivalentes".



Definição de pilar equivalente, considerando a rigidez à torção da laje

fig 3.3

Para outros casos, considera-se a rigidez dos pilares. A fig. 3.3 mostra as condições de apoio para um pilar interior com o vão da laje a desenvolver-se segundo a direcção  $l_1$ <sup>1</sup>. Considera-se que o apoio da laje se faz numa travessa virtual de largura  $b$  igual à dimensão do pilar na direcção para o qual se calculam

<sup>1</sup>  $l_1$  é o comprimento do vão na direcção segundo a qual os momentos são calculados e  $l_2$  é o comprimento do vão na direcção transversal.

os momentos flectores e de altura  $h$  igual à espessura da laje. O grau de restrição da rotação do apoio não é apenas definido em função da rigidez do pilar, mas também em função da rigidez à torção da referida travessa virtual. Com o momento de torção, aplicado pela laje à travessa virtual,  $m_t$ , e o momento de reacção  $M_t$ , desenvolvido pelo pilar, os extremos da travessa apresentarão maiores rotações do que a parte central face a deformação desta por torção. Para ter este facto em consideração, o pilar e a travessa são substituídos por um pilar equivalente de tal forma que a flexibilidade deste (inversa da rigidez) é igual à soma das flexibilidades do pilar e da travessa virtual

Assim:

$$\frac{1}{K_{op}} = \frac{1}{\sum K_p} + \frac{1}{K_t} \quad 3.4$$

onde:

$K_{op}$  = rigidez à flexão do pilar equivalente;

$\sum K_p$  = soma da rigidez à flexão dos pilares superior e inferior;

$K_t$  = rigidez à torção da travessa virtual.

A rigidez à flexão pode ser calculada pelas equações usuais. Para barras de secção constante é  $4E_c I / l$ .

A rigidez à torção da travessa pode ser calculada com a expressão

$$K_t = \sum \frac{9E_c C}{l_2 \left(1 - \frac{c_2}{l_2}\right)^3} \quad 3.5$$

onde  $c_2$  = dimensão transversal do pilar (fig 3.3)

$C$  = constante que depende da secção da travessa

Este somatório ( $K_t$ ) diz respeito às duas travessas que existem nos casos dos pilares serem interiores. A constante  $C$  pretende reflectir a rigidez torsional da secção da travessa sendo definida por:

$$C = (1 - 0.63x/y)x^3y/3;$$

onde  $x$  é a maior das dimensões da secção rectangular da travessa ( $h$  ou  $b$ , fig. 3.3.) e  $y$  a outra dimensão.

Com os valores da rigidez assim obtidos o pórtico equivalente pode ser analisado por qualquer método de distribuição de momentos, ou por recurso aos programas informáticos correntes para estruturas planas.

Depois de calculados os momentos totais positivos e negativos nas secções críticas, levanta-se a questão da distribuição destes ao longo da largura da "viga" do pórtico equivalente. Com este objectivo o ACI recomenda a divisão da laje em faixas, as que contêm pilares e as intermédias. A faixa dos pilares tem por largura para cada lado do pilar  $1/4$  da menor das dimensões do painel  $l_1$  ou  $l_2$ . As faixas intermédias ficam delimitadas pelas faixas dos pilares.

Para lajes **pré-esforçadas**, o ACI recomenda a seguinte distribuição de momentos:

**vãos simples:** 55 a 60% para a faixa dos pilares e 45 a 40% para a intermédia;

**vãos contínuos:** 65 a 75% para a faixa dos pilares e 35% a 25% para a faixa intermédia.

Uma vez que os momentos negativos, obtidos no cálculo, são referidos a eixos de apoios que não estão efectivamente materializados (trata-se de faixas de apoio na direcção transversal), devem-se considerar valores inferiores para estes momentos. O valor considerado no cálculo é referido à secção correspondente ao alinhamento da face dos pilares, e numa distância nunca superior a  $0.175 l_1$ .

Uma análise mais rigorosa é sempre recomendada por diversos autores e regulamentações estrangeiras para casos em que as cargas principais não são uniformemente distribuídas ou quando há uma disposição irregular de pilares. Nesses casos o método dos pórticos equivalentes não é adequado devendo recorrer-se ao método dos elementos finitos, ou das diferenças finitas como sugerido pelo "ACI-ASCE Committee 423" [14].

### 3.1.4 REDISTRIBUIÇÃO DE MOMENTOS

O fenómeno da redistribuição de momentos, carece ainda de investigação, mesmo nos casos em que as armaduras de pré-esforço sejam aderentes [1]. Os regulamentos internacionais mais conhecidos não apresentam clarificada esta questão quando as armaduras de pré-esforço não são aderentes.

Existe no entanto consenso sobre alguns pontos que favorecem a

redistribuição [1]:

1. Percentagens baixas de armadura.
2. A utilização de armaduras passivas em elementos que utilizam pré-esforço não aderente.
3. Nas secções críticas, onde os momentos são elevados, deve ser evitado o aparecimento da fendilhação excessiva devida a esforços transversos, uma vez que as fendas inclinadas reduzem a resistência à flexão e a capacidade de rotação das secções.

Verifica-se, quer analiticamente, quer experimentalmente, que as secções de betão pré-esforçado com quantidades relativamente pequenas de armadura aderente apresentam rotações plásticas consideráveis. O ACI faz depender o aumento ou a redução dos momentos elásticos da percentagem mecânica das armaduras e do tipo de betão.

Definindo (figura 3.4):

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{\rho f_{syd}}{f_{ck}} \text{ onde } \rho = \frac{A_s}{bd} \\ \omega' &= \frac{\rho' f_{syd}}{f_{ck}} \text{ onde } \rho' = \frac{A'_s}{bd} \\ \omega_p &= \frac{\rho_p f_{ps}}{f_{ck}} \text{ onde } \rho_p = \frac{A_p}{bd_p}\end{aligned}\tag{3.6}$$

nestas equações  $f_{ps}$  é a tensão instalada na armadura de pré-esforço quando se atinge a rotura da secção e as tensões características de compressão do betão são referidas a provetes cilíndricos.

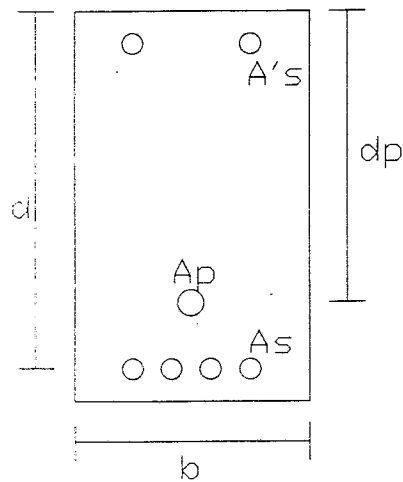


fig 3.4

Os valores percentuais correspondentes ao aumento ou redução dos momentos negativos aplicáveis a vigas ou lajes é definido para as secções rectangulares:

$$\frac{100 \Delta M}{M} = 20 \left( 1 - \frac{\left( w_p + \frac{d}{d_p} (\omega - \omega') \right)}{0.36 \beta_1} \right) \quad 3.7$$

devendo ser verificada a condição:

$$\omega_p + \frac{d}{d_p} (\omega - \omega') < 0.24 \beta_1$$

nesta equação  $\beta_1$  é dada pela tabela seguinte e significa a relação entre a altura do diagrama rectangular de compressões da secção e a profundidade da linha neutra. Este parâmetro depende do tipo de betão podendo ser aplicados os seguintes valores:

|              |        |        |        |        |        |               |
|--------------|--------|--------|--------|--------|--------|---------------|
| $f_{ck}$ MPa | 21     | 28     | 34     | 41     | 48     | $\geq 55$     |
| (psi)        | (3000) | (4000) | (5000) | (6000) | (7000) | $\geq (8000)$ |
| $\beta_1$    | 0.85   | 0.85   | 0.8    | 0.75   | 0.70   | 0.65          |

A aplicação desta(s) formula(s) é utilizada pelo **PTI**<sup>1</sup> num exemplo de cálculo [36] para uma laje fungiforme com cabos não aderentes e uma vez que  $f_{ps}$  é inferior resulta que a redistribuição permitida é superior à que se obteria com cabos aderentes pois  $w_p$  é menor com cabos não aderentes. Constatase que a aplicação destas equações resulta numa redução máxima de 20%.

A redistribuição dos momentos assim obtida pode ser efectuada desde que a secção apresente armaduras passivas com uma área  $A_s = 0.004 A$  onde  $A$  é a área da secção compreendida entre a fibra mais tracionada e o seu centro de gravidade [3].

No que respeita a redistribuições de momentos, obtidos por métodos elásticos, a CS e a FIP em [9,13], sem distinguir se se trata de armaduras aderentes ou não aderentes, admite uma redução máxima de 15% dos momentos negativos, considerando os valores correspondentes à face interior dos apoios [13].

Na linha do CEB, o **REBAP** apresenta condições que pretendem traduzir a influência dos principais factores na ductilidade necessária à redistribuição de esforços. O factor  $x/d$ , relação entre a profundidade da linha neutra e a altura útil da secção deve ser inferior a 0.25, quando a segurança é feita em termos de acções (análise plástica). Nestas condições as tensões no betão são baixas, a rotura dá-se sempre pelo aço (aderente), a ductilidade é assegurada e a secção plastifica. No caso das lajes contínuas é admitida uma redistribuição aumentando ou diminuindo de 25% os momentos nos apoios obtidos na hipótese de comportamento elástico (vide artºs 48º e 50º).

A rotura efectiva das armaduras não aderentes como se sabe é praticamente improvável e como as secções devem ser armadas com armaduras passivas, não se vê que a aplicabilidade do articulado do **REBAP** possa ser posta em causa desde que verificados os condicionalismos descritos no parágrafo anterior.

Não será demais repetir, que para os elementos pré-esforçados uma total redistribuição dos momentos através de uma perfeita formação de rótulas plásticas não parece poder ser assegurada [1,3], pelo que será mais coerente considerar a existência dos momentos hiperestáticos de pré-esforço ao determinar os momentos totais afectando-os depois das redistribuições para obter os momentos de cálculo  $M_{sd}$ . Ignorar a sua existência seria o mesmo que assumir uma redistribuição com o

---

<sup>1</sup> POST-TENSIONING INSTITUTE (U.S.A.)

valor desses momentos: poderia suceder que essa redistribuição não fosse compatível com os critérios de redistribuição definidos.

Assim, embora o valor dos momentos hiperestáticos seja de difícil definição em estado limite último, fica-se do lado da segurança ao considerá-los, com um factor 1.0 segundo o ACI ou 1.2 segundo o REBAP, pelo menos nas secções em que a sua acção seja desfavorável.

Quando a sua acção tende a reduzir o valor de cálculo do momento solicitante devido às acções exteriores<sup>1</sup>, assumir a não existência dos momentos hiperestáticos é uma atitude demasiado conservadora, uma vez que se trata de uma acção permanente, será portanto mais razoável afectá-los de um coeficiente  $\leq 1.0$ .

### 3.2 GARANTIA DA EFICÁCIA DO PRÉ-ESFORÇO

Uma questão importante, a ter particularmente em conta no projecto das lajes pré-esforçadas, é garantir que o pré-esforço actue e exerça a sua acção sem interferências que comprometam os objectivos para os quais este é dimensionado.

Em Leonhart [19], pode ler-se: "Pré-esforçar significa comprimir o betão. Esta compressão, só poderá existir quando o encurtamento for possível, por isso há que ter a certeza de que a estrutura possa "encurtar" na direcção do pré-esforço."

Quando os pilares ou as paredes têm uma considerável rigidez na direcção do pré-esforço, pode ocorrer que este seja parcialmente absorvido por aqueles elementos. Mais ainda, esta restrição ao encurtamento associada a valores elevados de retracção pode causar fendilhação quer na laje quer nos elementos de suporte.

Antes de referir algumas regras práticas de concepção das lajes tem interesse aprofundar um pouco mais esta questão, a que se dedicam os números seguintes.

#### 3.2.1 CARACTERIZAÇÃO DA FENDILHAÇÃO POR IMPEDIMENTO DA DEFORMAÇÃO AXIAL

Num estudo recente sobre esta questão [35] é feita uma caracterização pormenorizada da fendilhação provocada pela restrição à deformação axial das lajes pré-esforçadas por cabos não aderentes.

As características principais da fendilhação nestas lajes (sem armaduras ordinárias) quando comparadas com as de lajes convencionais, são:

---

<sup>1</sup> Os efeitos dos momentos hiperestáticos consiste, regra geral, em aumentar os momentos negativos nas zonas dos apoios interiores e diminuir os momentos no vão [36].

i. Em vez do aparecimento de fendas estreitas e próximas em grande número, surgem fendas em número muito reduzido.

ii. As fendas são geralmente mais largas atingindo profundidades superiores na espessura da laje. Nas lajes convencionais de betão armado o espaçamento entre fendas é da ordem de grandeza da espessura da laje, enquanto que neste tipo de lajes o espaçamento médio entre fendas depende mais dos vãos e é geralmente superior a  $1/4$  do vão na menor dimensão.

iii. As fendas são normalmente extensas e contínuas, atingindo por vezes os vãos adjacentes. Na lajes convencionais as fendas são geralmente localizadas e relativamente curtas.

iv. Normalmente estas fendas, porque resultam essencialmente de uma retracção impedida, não coincidem com as zonas onde os momentos virão a ser maiores, isto é, não se desenvolvendo necessariamente na face inferior a meio vão ou na face superior sobre os apoios.

v. As fendas aparecem em regiões onde a resistência axial é menor, isto é, juntas de construção, faixas de ligação, secções com percentagens baixas de armadura aderente, linhas de descontinuidade devidas a aberturas na laje, e nas zonas onde a compressão axial induzida pelo pré-esforço é reduzida.

Note-se que a concentração num pequeno número de fendas não resulta apenas da não aderência dos cabos de pré-esforço. É característica da própria natureza da acção, deformação impedida, em que já se manifesta um maior espaçamento e largura das fendas do que nos casos de acções directas (aplicação de forças) [43,44]. A não aderência dos cabos vem agravar esta tendência.

### **3.2.2 COMPORTAMENTO DAS LAJES PRÉ-ESFORÇADAS NA AUSÊNCIA DE COMPRESSÃO**

A afirmação de Leonhart destacada no início da secção 3.2 refere-se naturalmente aos sistemas pré-esforçados em geral. No caso presente, tem interesse tecer algumas considerações sobre o papel do pré-esforço nestas lajes com cabos não aderentes, onde a acção exercida pelas ancoragens, pode ser parcialmente absorvida por outros elementos estruturais pondo em causa a transferência da compressão para as lajes. Para isso, e seguindo de perto o estudo já referido [35],

interessa analisar a função do pré-esforço no que respeita a: (i) compensar acções verticais; (ii) aplicar uma compressão axial através das ancoragens; (iii) contribuir para a resistência das secções.

i. A compensação de cargas, como se sabe, depende simplesmente do traçado e da tensão instalada nos cabos. Admitir que as ancoragens não introduzem compressões na laje, não afecta o valor das acções ascendentes correspondentes a uma determinada carga compensada.

ii. A existência de uma compressão uniforme, sempre favorável, tende a reduzir a fendilhação. Uma laje não fendilhada ou fracamente fendilhada apresenta sempre menores flechas, melhor resistência aos esforços transversos, permitindo uma maior protecção das armaduras.

iii. A discussão da contribuição do pré-esforço para a resistência última é representada esquematicamente nas figuras 3.5 (a) e (b). Na primeira apresenta-se um modelo de secção rectangular em que as ancoragens são fixas em maciços rígidos e independentes, impedindo que a laje beneficie de qualquer compressão. Pretende-se comparar a resistência deste modelo para uma carga limite  $F_{u1}$ , com um segundo modelo com as mesmas características geométricas e físicas, onde as ancoragens reagem livremente contra a laje, garantindo a existência de compressão e cuja carga limite é  $F_{u2}$ .

Em ambas as situações parte-se de um estado de compensação de carga

$$F_{compens.} + F_0 = 0$$

e não se considera, por simplicidade, a existência de armaduras passivas.

Pretende-se determinar, nas secções a meio vão, no 1º e no 2º modelo, os acréscimos de força  $\Delta F_1 = F_{u1} - F_{compens.}$  e  $\Delta F_2 = F_{u2} - F_{compens.}$  necessários para que se atinja a rotura.

É necessário distinguir e caracterizar a rotura que é bem diferente nos dois modelos considerados.

A figura 3.5 representa os diagramas de tensões na secção transversal e as respectivas resultantes, nas situações de compensação de cargas, de início de fendilhação e de rotura.

No primeiro modelo, na situação de compensação de cargas não há quaisquer tensões no betão, uma vez que a força de ancoragem é absorvida pelos maciços independentes da laje, sendo o efeito do pré-esforço apenas o de, por desvio do cabo, equilibrar a força vertical aplicada.

Um aumento da força  $F$  provoca na laje um comportamento de peça não armada, gerando-se um diagrama de tensões com tracções e compressões cujo limite corresponde a atingir-se a tensão de rotura por tracção na fibra inferior. A fenda formada, não encontrando qualquer mecanismo que se lhe oponha, progride até à face superior havendo separação das duas metades da laje. Note-se que esta separação é possível uma vez que, não sendo aderente a armadura de pré-esforço, as duas metades podem deslizar livremente (admite-se a não existência de atrito).

A rotura no primeiro modelo corresponde, assim, ao estado de formação de fendas, e é, naturalmente uma rotura frágil.

Note-se que a rotura, neste caso, não corresponderá ao colapso mas sim à formação de um mecanismo constituído por duas metades agregadas ou "penduradas" no cabo, mas sem qualquer contribuição resistente do betão. O mecanismo resistente modifica-se. O funcionamento como laje cessa passando o cabo passa a suportar, por si, as cargas aplicadas<sup>1</sup>.

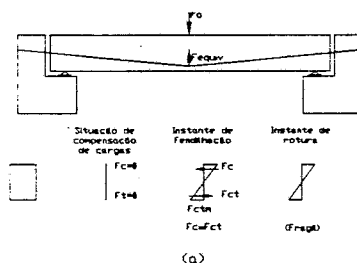


fig. 3.5 (a)<sup>2</sup>

Nos cálculos que se seguem considera-se a tensão no cabo constante. É uma simplificação justificável conforme já tem vindo a ser referido.

Do diagrama de tensões correspondente ao estado limite último definido

<sup>1</sup> Esta questão é abordada na secção 5.1 onde se refere um estudo suíço conclusivo sobre este tipo de comportamento.

<sup>2</sup> Por razões de leitura as figuras 3.5 encontram-se ampliadas na página 75(a).

para o primeiro modelo, obtém-se facilmente que o acréscimo de momento em relação à situação de cargas compensadas é:

$$\Delta M_{fiss,1} = \Delta M_1 = \frac{b h^2 f_{ctm}}{6}$$

e o correspondente acréscimo de força:

$$\Delta F_{fiss,1} = \Delta F_1 = \frac{2 b h^2 f_{ct}}{3 l}$$

Se, como habitualmente, fôr desprezada a resistência do betão à tracção ( $f_{ct} = 0$ ) vem

$$\Delta F_1 = 0$$

ou seja, o primeiro modelo, embora isento de tensões para a força  $F_{compens.}$  não é capaz de suportar qualquer acréscimo de carga, se não se admitir a resistência à tracção.

Numa outra leitura pode dizer-se que o primeiro modelo se comporta como uma estrutura de betão simples para cargas diferentes da de compensação<sup>1</sup>. A função do betão resume-se a garantir o posicionamento do cabo.

No segundo modelo já é possível contar com a força de pré-esforço  $F_p$  que na situação de carga compensada introduz uma tensão constante de compressão no betão  $\sigma_m$ .

Do diagrama de tensões correspondente à formação de fendas obtém-se:

$$\Delta M_{fiss,2} = \frac{b h^2}{6} (f_{ctm} + |\sigma_m|)$$

$$\Delta F_{fiss,2} = \frac{2}{3} b h^2 \frac{(f_{ctm} + |\sigma_m|)}{l}$$

A relação entre os dois acréscimos de força correspondentes à formação de fendas é:

$$\frac{\Delta F_{fiss,2}}{\Delta F_{fiss,1}} = \frac{f_{ctm} + |\sigma_m|}{f_{ctm}}$$

<sup>1</sup> Note-se que um decréscimo na força aplicada terá igualmente como consequência a rotura frágil, agora a partir da face superior.

para valores correntes em lajes pré-esforçadas por cabos não aderentes, esta relação toma valores próximos de 2.

Para avaliar a carga última neste segundo modelo, considerando a não variação da força  $F_p$  no cabo, pode-se, com base no momento último, exprimir aproximadamente:

$$M_{u2} = 0,95d_p F_p = 0,95d_p \sigma_m b h$$

$$F_{u2} = \frac{4M_u}{l} = \frac{4 \times 0,95d_p \sigma_m b h}{l}$$

Como, no caso presente, por condições geométricas

$$F_{compens.} = \frac{4F_p(d_p - 0,5h)}{l}$$

onde  $d_p$  é a profundidade do cabo na secção a meio vão, vem que:

$$\Delta F_{u2} = F_{u2} - F_{compens.} = 4 \times 0,95d_p \frac{F_p}{l} - 4F_p \frac{(d_p - 0,5h)}{l}$$

$$\Delta F_{u2} = F_p \frac{2h - 0,2d_p}{l}$$

e

$$\frac{F_{u2}}{F_{compens.}} = \frac{3,8d_p}{4d_p - 2h}$$

por exemplo para um valor de  $d_p = 0,75h$  vem:

$$\frac{F_{u2}}{F_{compens.}} = 2,85 \approx 3$$

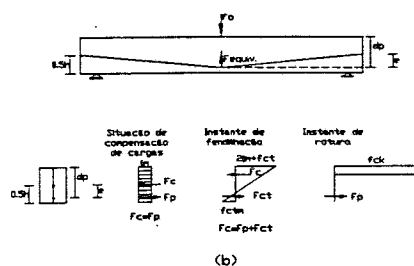
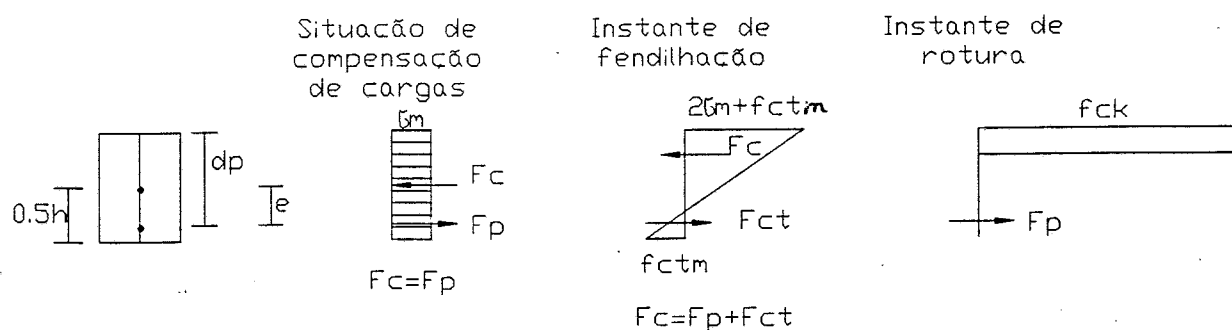
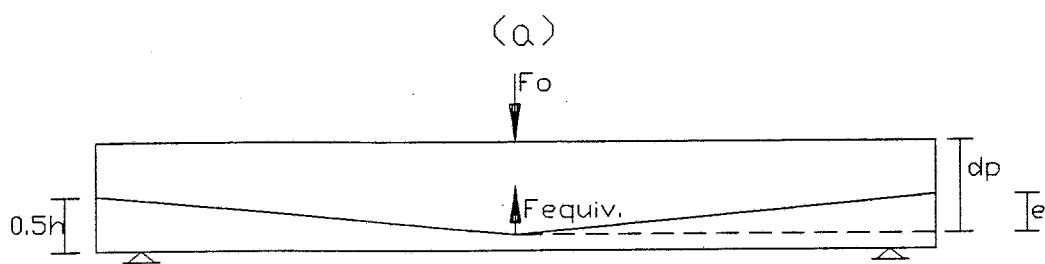
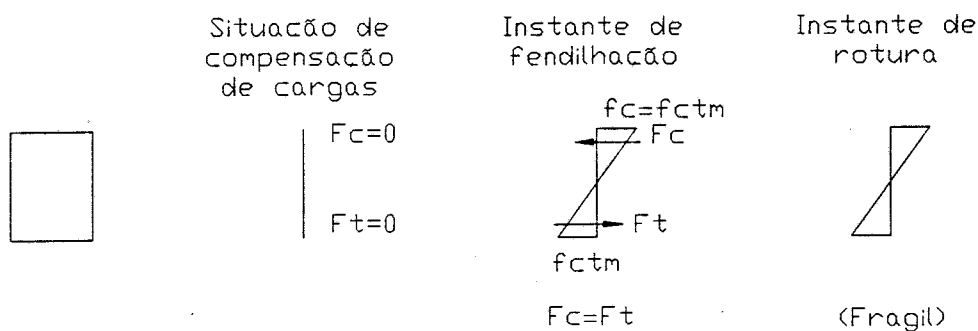
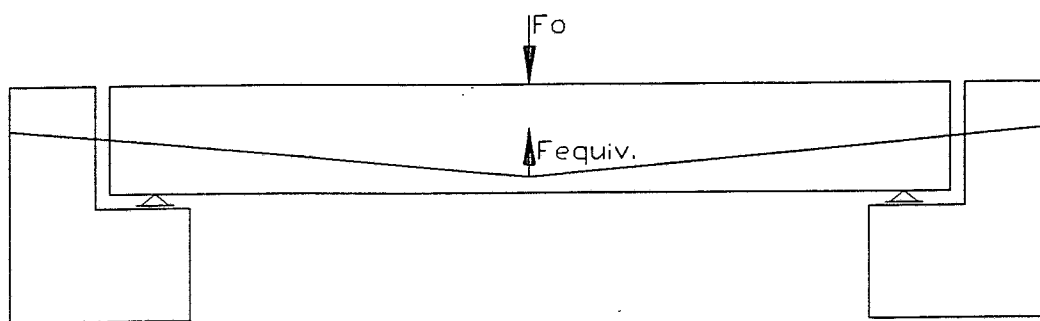


fig 3.5 (b)

Verifica-se assim que a compressão instalada na laje neste segundo modelo é efectivamente responsável pela existência de capacidade para receber cargas para além da compensada e em última análise pela própria segurança,



(b)  
**Figuras 3.5**

inexistente no primeiro caso.

Porém, ao contrário daquele já não é possível invocar um acréscimo de resistência entre a rotura convencional e o colapso propriamente dito, uma vez que o início da rotura arrasta as ancoragens que, não sendo fixas, inviabilizam a formação de um sistema estrutural de cabos.

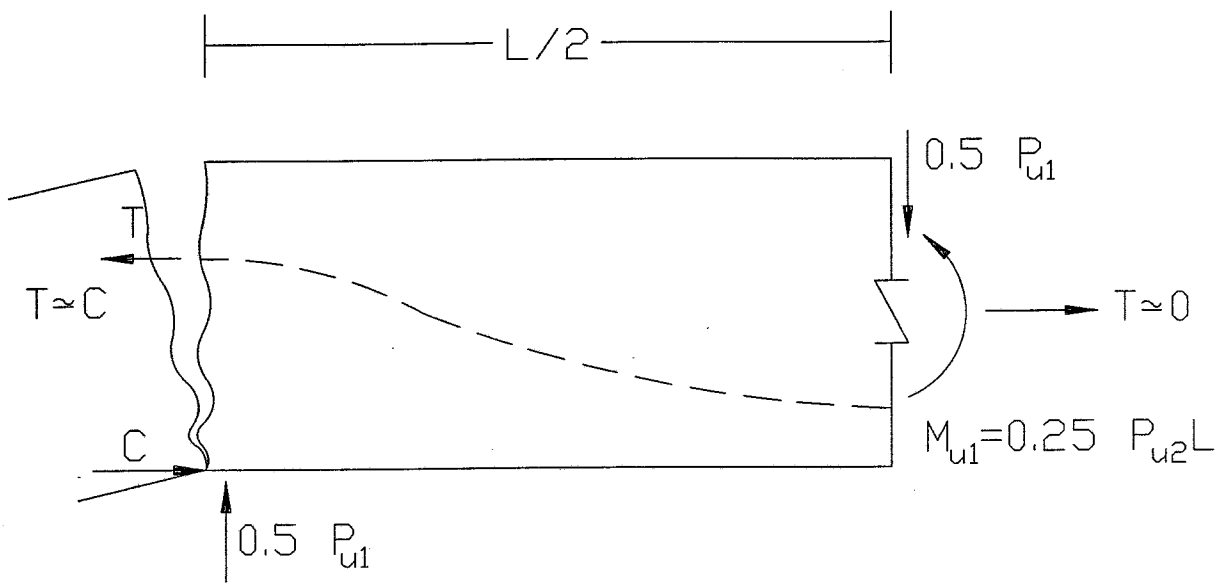
Aalami, B.O. e Barth, F.G., no estudo referido [35] idealizam modelos semelhantes para abordar esta questão.

Contudo, contrariamente à caracterização da fendilhação já descrita, referem em relação ao modelo 1 que as fendas originadas, pela deformação impedida, nos casos reais, são suficientemente estreitas para que num estado limite de rotura por flexão, se possa dar o seu fechamento nas zonas dos apoios e do vão, fechamento que permite desenvolver, por efeito de arco, uma compressão equivalente à proporcionada pelas ancoragens. Com esta observação concluem que a fendilhação como eventual consequência da ausência de compressão não diminui sensivelmente a capacidade resistente das secções.

Este fechamento é ilustrado na figura que se reproduz (fig. 3.6) e onde os autores consideram que a rotação das partes rígidas da laje, tendendo a fechar a parte inferior da fenda junto aos apoios, mobilizam a compressão  $C$  referida.

É evidente que, para investigar a influência da fendilhação na resistência última à flexão destas lajes pré-esforçadas por cabos não aderentes, será necessário considerar outros aspectos para além do simples equilíbrio de esforços nas secções, no entanto parece ser pouco defensável contar com o aparecimento de compressões benéficas que, se existirem, têm carácter aleatório: não há qualquer garantia e possibilidade de determinar efectivamente a rotação das secções, nem, sobretudo, possibilidade de determinar com suficiente rigor a largura das fendas e o esforço que se desenvolve após o seu eventual fechamento.

Mais duvidosa ainda parece ser a possibilidade de a compressão mobilizada por efeito de arco vir a tornar-se tão importante como aquela que seria introduzida pelo próprio pré-esforço.



**figura 3.6**  
(reproduzido de [35])

Admitam-se agora os mesmos modelos das figuras 3.5 (a) e (b) em que se dispõem armaduras passivas de secção  $A_s$  suficiente para que não plastifiquem no momento da ocorrência das fendas. Este valor mínimo de  $A_s$  pode determinar-se considerando o valor característico superior da tensão de rotura à tracção do betão (correspondente ao quantilho de 95%)  $\approx 1.3 f_{ctm}$ .

Para avaliar a carga última na presença de armaduras aderentes, admite-se que nestas as tensões de cedência são atingidas, facto que tem sido comprovado em vários testes [36,45], tem-se:

No primeiro modelo

$$\Delta M_{u1} = 0,95 F_s d_s = \frac{\Delta F_{u1} l}{4}$$

$$\Delta F_{u1} = 3,8 \frac{F_s d_s}{l}$$

onde  $d_s$  é a profundidade da armadura passiva<sup>1</sup>.

Para valores correntes das profundidades das armaduras,  $d_p \approx 0,75h$  e  $d_s \approx 0,9h$ , encontra-se:

$$\frac{F_1}{F_{compens.}} = \frac{3,42 F_s}{F_p} + 1$$

No segundo modelo tem-se:

$$M_{u2} = 0,95(F_s d_s + F_p d_p) = \frac{F_{u2} l}{4}$$

$$F_{u2} = 3,8 \frac{F_s d_s + F_p d_p}{l}$$

$$\Delta F_{u2} = F_{u2} - F_{compens.} = \frac{3,8 F_s d_s - 0,2 F_p d_p + F_p h}{l}$$

Para os mesmos valores das profundidades das armaduras tem-se:

$$\frac{F_{u2}}{F_{compens.}} = 2,85 + 3,42 \frac{F_s}{F_p}$$

$$\frac{F_{u2}}{F_{u1}} = \frac{F_p d_p + F_s d_s}{F_s d_s} = 1 + \frac{F_p d_p}{F_s d_s}$$

<sup>1</sup> Tratando-se de baixas percentagens de armadura passiva e uma vez que o cabo não oferece impedimento à deformação da secção o eixo neutro situa-se muito próximo da face superior pelo que se tomaram braços resistentes  $z_s = 0,95d_s$  e  $z_p = 0,95d_p$

Considerando  $d_p \approx 0,75h$  e  $d_s \approx 0,9h$ , como  $F_p$  constante  $= \sigma_m b h$  vem:

$$\frac{F_{u2}}{F_{u1}} = 1 + \frac{0,8\sigma_m b h}{f_{sy}} A_s$$

ao considerar, um valor mínimo próximo do recomendado para a percentagem geométrica das armaduras passivas,  $\rho = A_s / b h = 0.2\%$  virá:

$$\frac{F_{u2}}{F_{u1}} = 1 + \frac{400\sigma_m}{f_{sy}}$$

Da análise destas expressões pode concluir-se que a presença de armadura aderente melhora um pouco a situação do modelo 1, sem no entanto colocar a sua eficiência ao nível do modelo 2.

Quanto maior a percentagem de armadura aderente e ou maior a tensão de rotura da armadura passiva menor a relação entre  $F_{u2} / F_{u1}$ , facto evidente uma vez que a esta situação, no limite, corresponde um grau de pré-esforço reduzido.

**Com Leonhart se conclui, ser realmente importante a pré-compressão introduzida pelo pré-esforço.**

Uma questão fundamental reside, como se viu, no facto de a não disposição de armaduras aderentes, pôr, em causa a capacidade resistente.

Para garantia da não plastificação das armaduras antes da rotura por tracção do betão, no projecto da norma Model Code CEB-FIP 1990 e do Eurocode 2 é exigida uma armadura mínima, mesmo para os elementos convencionais de betão armado, nas seguintes condições:

$$A_s = K_c K f_{ct} A_{ct} / \sigma_s$$

em que:

$K_c$  é um factor que toma o seguinte valor:

1 para a tracção simples;

0,4 para a flexão simples;

0 para a flexão composta com compressão com a secção inteiramente comprimida para as combinações raras de acções.

$K$  é um coeficiente que toma um valor compreendido entre 0,5 e 0,8 em função da altura da secção, quando esta varia entre 0,30m e 0,80m.

$f_{ct}$  é a resistência à tracção do betão correspondente ao quantilho superior

de 5%.

$A_{ct}$  é a área de betão na zona da traccionada antes da fendilhação.

$\sigma_s$  é a máxima tensão admissível na armadura ( $0,9 f_{(syk)}$ ).

Considere-se para os casos das lajes de secção rectangular em que  $h \leq 0,30m$ ,  $A_{ct}$  aproximadamente igual à área compreendida entre o centro de gravidade da secção e a fibra mais traccionada,  $f_{ct} = 5.0 \text{ MPa}$  (correspondente a um betão de elevada resistência, por exemplo B50),  $K_c = 0,4$ ,  $K = 0,8$  e  $0,9 f_{(syk)} = 400 \text{ MPa}$  vem:

$$A_s = 0,004 A_{ct}$$

Esta expressão corresponde à armadura mínima passiva que o código do ACI exige para as zonas de momentos positivos nos elementos armados por cabos não aderentes e que se aplica às lajes armadas em duas direcções, excepto quando as tensões de tracção são inferiores a  $0,17 \sqrt{f_{cck}} \text{ MPa}$  (valores que em média correspondem a 1/2 da tensão característica de rotura do betão à tracção).

Repare-se que esta armadura, aproximadamente igual a 0,2%, é a referida em 3.1.4 e 4.1 para ter em conta o controlo da fendilhação e para se poder considerar alguma redistribuição de momentos, é considerada indispensável nas lajes armadas numa só direcção.

Em resumo pode concluir-se que, para se poder contar com a existência da compressão na laje, será indispensável garantir que não haja impedimentos na sua transferência. Nos casos em que os elementos de suporte apresentem considerável rigidez, deve-se determinar os esforços correspondentes, compatibilizando os deslocamentos nos pontos de ligação determinando qual a compressão efectiva que se transfere.

Mais do que nas estruturas pré-esforçadas por armaduras aderentes, ressalta, da análise feita, a importância que assume o controlo da fendilhação devido às deformações impedidas nestas lajes pré-esforçadas por cabos não aderentes.

Além da disposição de armaduras passivas, que ao controlar a fendilhação permitem o eventual refechamento de fendas cujos efeitos favoráveis não são, apesar de tudo, de considerar, faz-se em seguida uma compilação sumária das principais indicações e disposições de concepção consideradas adequadas para que se possa no cálculo entrar em linha de conta com a contribuição da compressão.

### 3.2.3 PROCEDIMENTOS E RECOMENDAÇÕES PARA MINORAR A FENDILHAÇÃO POR RESTRIÇÃO À DEFORMAÇÃO AXIAL E EVITAR A DISPERSÃO DA COMPRESSÃO

A maioria dos autores que tratam o assunto sugerem a criação de juntas cujo objectivo é precisamente criar painéis livres de se deformar e indicam limites para a distância entre elas em função do pré-esforço médio<sup>1</sup>.

Nos casos gerais, isto é, em edifícios com geometria regular, os valores recomendados, para a distância máxima entre juntas, situam-se entre 40 m a 60 m quando o pré-esforço médio varia entre 2.0 MPa e 1.0 MPa respectivamente.

Não é contudo o valor do pré-esforço que mais influência tem na fendilhação, uma vez que o encurtamento depende essencialmente da retracção do betão.

Os principais factores que causam o encurtamento de uma laje são:

- i. Retracção do betão
- ii. Fluência no betão devido à pré-compressão
- iii. Encurtamento elástico devido à pré-compressão
- iv. Abaixamento de temperatura

Num trabalho de observação recente, [35] verificou-se que em condições ambientais normais (humidade e temperatura)<sup>2</sup> a retracção contribuiu em cerca de 2/3 para o encurtamento das lajes de um edifício destinado a estacionamento automóvel. Apenas 1/6 do encurtamento foi consequência directa do pré-esforço (fluência e encurtamento elástico).

O aparecimento de fendilhação por deformação impedida é mais relevante em lajes extensas, de muitos vãos contínuos ou de grande largura, se bem que para edifícios com vários pisos, os efeitos mais significativos se fazem sentir nos primeiros pisos [36] onde a restrição à deformação é geralmente maior.

A questão fundamental reside na maior ou menor compatibilidade entre as deformações: de encurtamento, na laje e de flexão nos elementos verticais de suporte. Quanto mais distante estiver, um elemento estrutural vertical, do centro da laje, maior será a deformação por flexão que este deverá apresentar para que as tensões de tracção induzidas na laje não ultrapassem as tensões de rotura do

<sup>1</sup> Razão entre o pré-esforço total após perdas e a secção da laje.

<sup>2</sup> 70% humidade relativa e  $\Delta t_{med.} \approx 7^\circ C$

betão.

Para limitar estes efeitos, convirá tanto quanto possível observar as seguintes disposições referentes a:

#### a) IMPLANTAÇÃO DOS ELEMENTOS DE SUPORTE

O procedimento preventivo mais eficaz para minorar o impedimento à deformação baseia-se numa localização adequada para os pilares, paredes ou outros elementos de contraventamento. Os elementos de grande rigidez devem ser dispostos o mais centralmente possível de forma a reduzir a formação de fendas, permitindo que a laje se deforme sem grandes restrições.

Os restantes elementos verticais devem ser dimensionados com relativa flexibilidade para minimizar as forças reactivas ao encurtamento.

#### b) JUNTAS DE SEPARAÇÃO ESTRUTURAL

As lajes com geometria irregular são particularmente susceptíveis de fissurar. Nos edifícios em cunhal, com caixas de escadas ou elevadores localizadas lateralmente, ou ainda quando as lajes são constituídas por partes que se destacam da laje principal, como no caso figura 3.7 convém criar juntas de separação, dividindo a estrutura em partes independentes, impedindo que o encurtamento que venha a ocorrer fendilhe as zonas que ficariam ligadas por um comprimento reduzido constituindo uma região particularmente sensível.

Para lajes muito extensas, com a maior dimensão superior a 100 m é recomendável também a disposição de separações estruturais em que a aplicação do pré-esforço seja efectuada por partes [35].

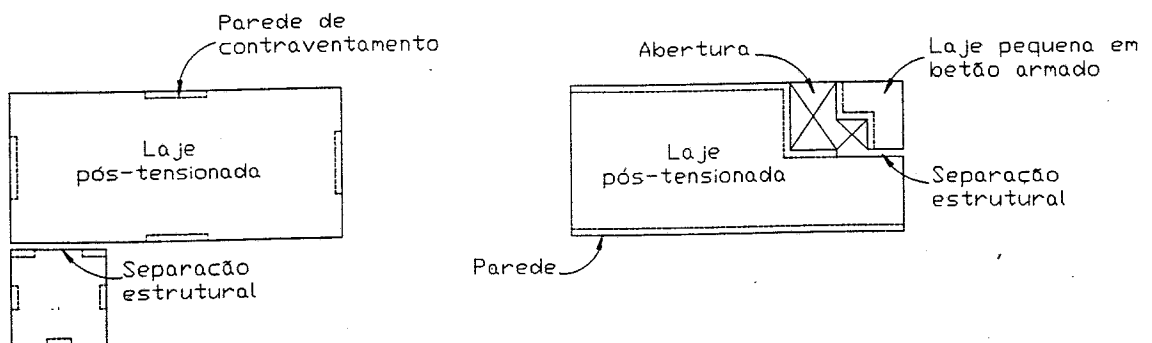


fig. 3.7

### c) FAIXAS DE BETONAGEM POSTERIOR E JUNTAS TEMPORÁRIAS

Uma faixa de betonagem posterior ou faixa de fechamento retardado, ("closure strip"), consiste numa separação temporária de aproximadamente 0.8 m (considerada suficiente para se poder manobrar o equipamento de pré-esforço) entre duas partes, ao longo de uma das dimensões da laje. Estas partes são betonadas em separado podendo o pré-esforço ser aplicado, também separadamente.

Neste caso, tanto o pré-esforço como a betonagem da faixa, (com betão de baixa retracção) devem ser realizados após um período que se considere suficiente para que haja ocorrido uma grande parte da retracção, normalmente 30 a 60 dias<sup>1</sup>. Este procedimento é recomendado para lajes extensas em que a maior dimensão é superior a 70 m [35].

Estas faixas devem ser localizadas, a 1/4 do vão entre duas linhas de apoio, onde os momentos são menores e dimensionadas com armaduras passivas de ligação.

Um outro procedimento consiste na disposição de juntas temporárias, durante a construção, dividindo as lajes extensas em áreas de betonagem.

Para minorar os efeitos do encurtamento, cada betonagem é intervalada por um período de 3 a 7 dias, podendo, através de ancoragens intermédias, aplicar-se o pré-esforço, nomeadamente quando os cabos são muito compridos e portanto as perdas por atrito são maiores.

### 3.3 PRÉ-DIMENSIONAMENTO

As relações vão/espessura são, regra geral, um ponto de partida conveniente para o pré-dimensionamento das lajes.

Nas lajes pré-esforçadas apoiadas em vigas, valores na ordem de 30 a 40 são comuns para vãos simplesmente apoiados e para lajes contínuas encontram-se frequentemente valores entre 45 e 50.

Como já se referiu a utilização do pré-esforço não aderente é muito mais utilizada em lajes fungiformes do que em lajes apoiadas em vigas.

---

<sup>1</sup> Aproximadamente 50% [36]

Assim, atendendo a este facto apresentam-se algumas considerações sobre a aplicação, dimensões dos vãos e espessuras deste tipo de lajes, seguindo a linha de orientação apresentada em [23]:

As lajes maciças com ou sem capiteis são as mais frequentemente utilizadas para edifícios de habitação, escritórios, hospitais, hotéis, etc., onde os vãos sejam idênticos nas duas direcções. Vãos da ordem dos 5-8 m são económicos. Para vãos superiores até cerca de 14 m será necessário dispôr de capiteis salientes.

As lajes nervuradas por bandas, numa só direcção e no alinhamento dos pilares, são frequentemente usadas em parques de estacionamento, escolas, etc. onde os vãos são predominantes numa das direcções, ( $l \leq 15$  m).

As lajes alveoladas são mais usadas em edifícios cujas cargas são elevadas, isto é, bibliotecas, parques de veículos pesados, etc. e quando os vãos são idênticos nas duas direcções. Dependendo das cargas os vãos variam entre 10 a 20 m. As lajes nervuradas numa só direcção são um caso particular destas e utilizam-se mais quando os vãos são predominantes numa direcção.

Para a decisão inicial sobre a espessura da laje, indica-se que para lajes maciças contínuas com pelo menos 2 vãos em cada direcção, a relação vão/espessura não deve ultrapassar em princípio 42 para lajes de piso e 48 para lajes de tecto [13]. Estes limites podem contudo ser excedidos desde que justificado por cálculo um comportamento aceitável em termos de deformações e vibrações. Relações mais baixas aplicam-se muitas vezes a lajes cujas acções variáveis são muito superiores às acções permanentes. Para as lajes alveoladas a relação vão/espessura não deve em geral ser superior a 35.

Como guia podem considerar-se do seguinte quadro as relações mais correntes em função do tipo de laje e do valor das sobrecargas [5 adaptado]:

**RELAÇÕES VÃO:ESPESSURA**

| Tipo de laje                  | Acção variável | Vão/espessura | Sobrecarga<br>KN/m <sup>2</sup> |
|-------------------------------|----------------|---------------|---------------------------------|
| Lajes<br>alveoladas           | Normal         | 26 a 32       | 2.5 a 4.0                       |
|                               | Elevada        | 20 a 28       | 4.0 a 6.0                       |
| Lajes<br>maciças <sup>1</sup> | Ligeira        | 40 a 48       | 1.5 a 2.5                       |
|                               | Normal         | 34 a 42       | 2.5 a 4.0                       |
|                               | Elevada        | 28 a 36       | 4.0 a 6.0                       |

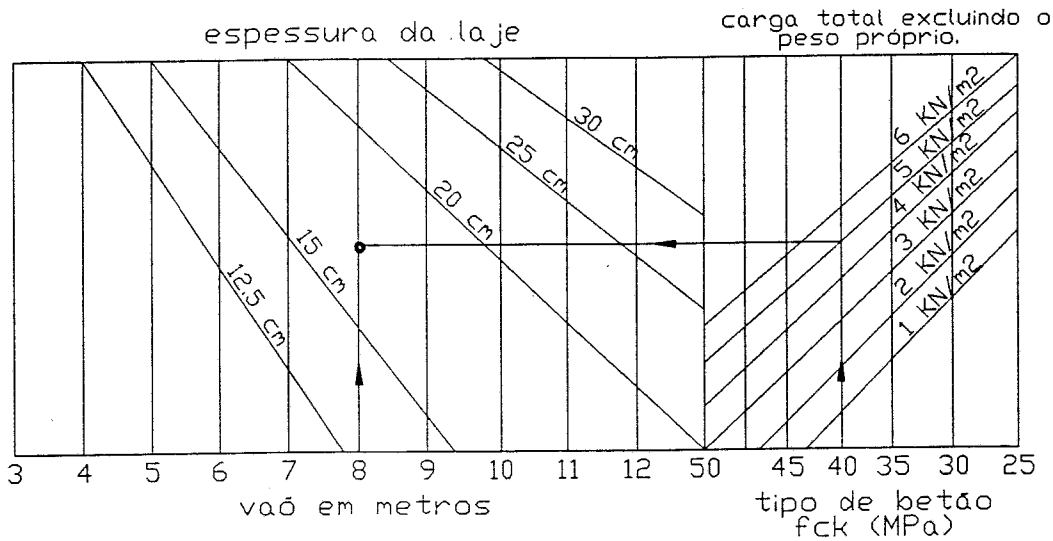
A divisão das acções variáveis em 3 categorias é pouco precisa, fazendo-se por isso uma comparação com os valores prescritos no artº 35.1.1 do RSA: as sobrecargas normais como sendo as correspondentes a escritórios em geral etc. e as elevadas como as correspondentes a escritórios com maiores necessidades de arquivo e a armazens.

A espessura da laje depende também do tipo de betão utilizado. Poderá haver interesse em comparar soluções em que se entre em linha de conta com o custo do betão utilizado. Uma laje com menor espessura requer que se utilizem betões de classe superior que por sua vez pode ter um custo superior a outra com maior espessura em que se utilize um betão de classe inferior.

As classes de betão mais usadas variam entre C25 a C35 [26] ou seja B30 a B40. Embora existam diversas alternativas poder-se-á por tentativas chegar à solução mais económica, contudo é muito prático para uma 1ª determinação da espessura económica o abaco que em seguida se reproduz, permitindo relacionar a espessura da laje maciça com a carga total, (exceptuando o peso próprio) com o tipo de betão e com o vão. Este abaco pode ser aplicado às lajes alveoladas desde que as zonas de momentos negativos sejam maciçadas.

---

<sup>1</sup> As espessuras podem ser reduzidas em 20% se forem utilizados capiteis



reproduzido de Concrete Society Technical Report Nº25 CS (U.K.)

Para lajes fungiformes é aconselhável nesta fase do cálculo fazer uma verificação preliminar ao punçoamento que pode consistir em [5]:

$$\frac{V_s}{uh} \leq 1.00 \text{ MPa} \quad (h < 0.20 \text{ m})$$

$$\frac{V_s}{uh} \leq 0.85 \text{ MPa} \quad (h \geq 0.20 \text{ m})$$

onde:

$V_s$  = valor do esforço de punçoamento actuante;

$u$  = perímetro do contorno crítico de punçoamento;

$h$  = espessura da laje.

### 3.3.1 CARGAS A COMPENSAR

Embora pareça lógico compensar a totalidade das acções permanentes, pode suceder que o valor de pré-esforço necessário seja elevado. Uma vez que são permitidas flechas para as lajes convencionais de betão armado, é razoável e coerente admitir alguma deformação ascendente para as lajes pré-esforçadas. Deve-se ter presente que estas flechas tendem a aumentar devido à fluência do betão e por isso o valor inicial das flechas nestes casos deve ser reduzido [36]. É natural admitir deformações da mesma ordem de grandeza das flechas

descendentes.

Quando as acções variáveis são muito superiores às acções permanentes poderá ser conveniente compensar uma parte das acções variáveis além das acções permanentes. Um procedimento usual interessante consiste em compensar as acções permanentes e  $1/2$  das acções variáveis. Para estes casos, uma laje estará isenta de flexão, apenas quando metade da acção variável estiver presente. Assim, será necessário considerar um valor igual a  $1/2$  da acção variável, actuando em sentido ascendente quando esta não está presente e metade no sentido contrário quando a totalidade da acção variável actua [36].

Se a acção variável em causa resulta de uma combinação de acções correspondentes a estados limites de curta ou muito curta duração esta ideia de compensar  $1/2$  das acções variáveis pode resultar em flechas acedentes, consideráveis e inconvenientes, durante a maior parte de vida da estrutura e com um agravamento injustificável no seu custo.

Ao decidir qual o valor da carga a compensar, dever-se-á ter presente qual a combinação das acções em causa.

Para as combinações quase permanentes e quando a acção variável é consideravelmente superior à permanente o projectista deve ponderar a parte a compensar, fazendo uso do bom senso e atendendo às verificações posteriores do cálculo, tais como os limites a satisfazer para as tensões instaladas no betão, para o controlo da fendilhação e verificação da segurança à rotura. Não será este o caso para a maioria das situações, uma vez que, para os estados limites de longa duração (combinações quase permanentes) as acções variáveis são quantificadas pelos seus valores quase permanentes ( $\psi_2 Q_k$ ) em que os valores de  $\psi_2$  são naturalmente reduzidos.

É fácil concluir que, salvo casos especiais, o valor do pré-esforço mais adequado corresponda a uma acção equivalente tão próxima quanto possível da acção que resulta da quantificação das acções para estados limites de longa duração, isto é, para combinações quase permanentes.

### 3.3.2 DEFINIÇÃO PRELIMINAR DO VALOR DO PRÉ-ESFORÇO

Devido a resistência por atrito ao longo dos cabos, o pré-esforço, e consequentemente a sua componente vertical, não é constante. Para a determinação da carga equivalente pode-se considerar um valor médio, entre os apoios, sem introduzir erros significativos na determinação da acção equivalente [5,36].

Se o pré-esforço aplicado a uma laje for  $P_0$ , então o pré-esforço inicial instalado após as perdas instantâneas será  $\alpha P_0$ , enquanto que após as perdas diferidas será  $\beta P_0$ . Embora hajam muitos factores que afectam as perdas de pré-esforço, numa fase inicial do cálculo, é útil ter uma ideia aproximada do valor das perdas iniciais e totais. Podem-se tomar os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  respectivamente iguais a 0.90 e 0.75 [16].

Nos Estados Unidos da América é frequente a utilização de valores tabelados para as perdas de pré-esforço nas aplicações correntes. Os valores para estas perdas consideram a utilização de betões com características, níveis de pré-esforço e condições ambientais de valores normais e excluem as perdas por atrito e recuo das ancoragens. Para o caso das lajes com cabos de relaxação normal ou de baixa relaxação os valores aproximados são respectivamente 207 MPa (30 000 psi) e 103 MPa (15 000 psi) [36].

O valor mais exacto do pré-esforço efectivamente instalado pode ser determinado numa fase posterior, quando se possuem dados mais pormenorizados sobre as armaduras do pré-esforço.

### 3.4 VALORES E PERDAS DE PRÉ-ESFORÇO

Assim como nas armaduras pré-esforçadas aderentes, as forças instaladas são variáveis quer ao longo da sua extensão quer no tempo.

Por tal facto distinguem-se, [15] normalmente, o pré-esforço inicial  $P_0(x)$  e o pré-esforço final  $P_\infty(x)$ .

O pré-esforço inicial corresponde ao pré-esforço aplicado depois de deduzidas as perdas instantâneas e as que se produzem antes e durante a transferência das forças dos macacos para os dispositivos de amarração existentes.

O pré-esforço final corresponde ao pré-esforço existente ao fim de um intervalo de tempo considerado suficiente para que se possa assumir que se processaram a totalidade das perdas diferidas.

O articulado do REBAP, (artigo 36º) especifica o valor máximo do pré-esforço na origem  $P_0$ , estipulando que a correspondente tensão na armadura não deve ser superior a 0,75 do valor característico da tensão de rotura,  $f_{pu,k}$ , nem exceder 0.85 do valor característico da tensão limite convencional de proporcionalidade a 0,1%,  $f_{0,1k}$ , ou seja:

$$\sigma_{p0} \leq 0,75 f_{puk}$$

3.8

$$\sigma_{p0} \leq 0,85 f_{p0,1k}$$

Apesar de estes valores se referirem a armaduras aderentes, estes limites nas recomendações específicas a armaduras não aderentes não são sensivelmente diferentes:

- Nas recomendações Americanas, [14] admite-se que a tensão inicial possa ultrapassar  $0,70 f_{puk}$  para compensar uma parte das perdas por atrito.

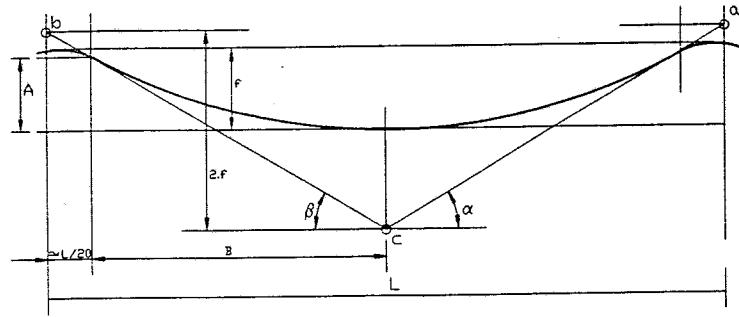
- Nas recomendações Inglesas, [5,13] podem-se ler as mesmas considerações, limitando-se contudo a tensão máxima de aplicação do pré-esforço a  $0,80 f_{puk}$ .

### 3.4.1 PERDAS INSTANTÂNEAS

#### Perdas devidas a atritos ao longo das armaduras

Nos elementos pós-tensionados, quando da aplicação do pré-esforço desenvolvem-se forças de atrito entre os cordões de pré-esforço e a superfície interior das bainhas. O valor destas perdas depende não só do coeficiente de atrito entre a armadura e a bainha, mas também do seu traçado. Há dois mecanismos básicos que produzem atrito. Um é a curvatura dos cabos de forma a configurar um determinado traçado e outro é o inevitável desalinhamento entre os eixos dos cabos e das bainhas. O efeito da variação entre os eixos das armaduras e das bainhas, conhecido como "wobble friction" é geralmente tratado como um desvio angular parasita por unidade de comprimento.

A expressão apresentada no **REBAP** para o cálculo das perdas de tensão por atrito ao longo das armaduras encontra-se deduzida por diversos autores. Pode no entanto ter aqui mais interesse prático utilizar uma expressão equivalente que em vez de se considerar o valor absoluto dos ângulos de desvio, que são pequenos para as lajes, considerar [5,38] um desvio angular médio por unidade de comprimento  $\beta'$ .



Traçado em alçado do perfil de um cabo para cargas uniformemente distribuídas  
fig. 3.8

Da fig. 3.8 e considerando  $B = 0,9 \times L/2$  e  $A = 0,9 \times f$ , uma vez que os traçados são basicamente parabólicos teremos que:

$$\alpha = \arctg \frac{2f}{L/2}$$

para o vão  $L$  a soma dos valores absolutos em radianos dos ângulos de desvio é  $= 2\alpha + 2\beta$  e portanto:

$$\beta' = \frac{4 \times 2 \times f}{L/2 \times L} = 16 \frac{f}{L^2} \quad 3.9$$

O valor do pré-esforço a uma distância  $x$  do ponto de aplicação pode ser calculado utilizando a equação simplificada:

$$P_x = P_0 \cdot e^{-(\mu\beta' + K)x} \quad 3.10$$

onde:

$P_0$  = pré-esforço na origem;

$P_x$  = valor do pré-esforço à distância  $x$ ;

$\mu$  = coeficiente de atrito entre a armadura de pré-esforço e a bainha

$K$  = desvio angular parasita por unidade de comprimento.

Para o caso das armaduras não aderentes onde o emprego de lubrificantes está implícito e em que cada cabo é normalmente constituído por um cordão de no máximo 7 fios, a bibliografia indica valores normais para  $K$  e  $\mu$ .

Transcrevemos aqui os valores apontados pelo CEB [26], CS [5] e pelo ACI [14]:

**COEFICIENTES DE ATRITO PARA ARMADURAS NÃO ADERENTES**

|     | $\mu$       | $K$               |
|-----|-------------|-------------------|
| CEB | 0.05 a 0.10 | 0.004/m a 0.008/m |
| CS  | 0.05 a 0.12 | 0.003/m           |
| ACI | 0.07        | 0.003/m           |

As perdas por atrito são relativamente reduzidas, como se pode constatar, comparando estes valores com os valores médios dos coeficientes para os cabos injectados de um só cordão em que  $\mu \approx 0.25$  e  $K \approx 0.01 / \text{m}$  [15] e além disso, os desvios angulares são pequenos, na maioria dos casos  $(\mu\beta' + k)x < 0.20$  podendo no lugar da expressão (3.8) usar-se a aproximação:

$$P_x = P_o(1 - x(\mu\beta' + k)) \quad 3.11$$

Uma simplificação usada [38] no cálculo destas perdas, para o sistema em questão, considera um valor global de 2,5% de perda de tensão por cada 10 metros de cabo, afirmando-se que diversos ensaios justificam este procedimento.

**Perdas nos dispositivos de amarração (penetração das cunhas)**

Nos elementos pós-tensionados, após a aplicação do pré-esforço, a tensão no aço é transferida para o betão pelos dispositivos de ancoragem. No caso presente as ancoragens são realizadas por autoencravamento de cunhas cónicas que penetram na ancoragem apertando o cabo impedindo o seu escorregamento.

A esta transferência estão associadas perdas de tensão devidas principalmente à penetração das cunhas na ancoragem e à própria deformação desta.

Uma vez conhecido o valor do escorregamento das cunhas, normalmente fornecido pelo fabricante, mas que para o caso dos sistemas não aderentes correntes

em lajes varia entre 4 e 8 mm, pode-se determinar fácilmente a perda de tensão no cabo  $\Delta\sigma_{anc.}$  a partir da expressão:

$$\Delta\sigma_{anc.} = \frac{\Delta l}{l} E_p \quad 3.12$$

onde:

$\Delta l$  = valor do escorregamento ou recuo;

$l$  = comprimento do cabo;

$E_p$  = módulo de elasticidade do aço de pré-esforço.

Esta equação admite a hipótese de que o escorregamento da cunha se faz reflectir em todo o cabo, desprezando o atrito que se desenvolve em sentido contrário, evitando, eventualmente, que esta perda se repercutisse por todo o comprimento do cabo. Esta abordagem simplificada é válida para os casos de pré-esforço externo, ou quando as armaduras são pré-tensionadas.

No caso presente, em que as armaduras não aderentes se encontram suficientemente lubrificadas e tanto os coeficientes de atrito como os desvios angulares dos cabos são reduzidos, considera-se [3] a aproximação adequada.

Para um cálculo mais rigoroso, considerando o atrito, podem usar-se as seguintes expressões:

$$P_1 = P_0 - 2xm \quad x < d$$

$$d = \sqrt{\frac{\Delta A_p E_p}{m}} \quad 3.13$$

onde:

$P_0$  = valor do pré-esforço aplicado;

$P_1$  = valor do pré-esforço na ancoragem após aplicação;

$\Delta$  = penetração das cunhas;

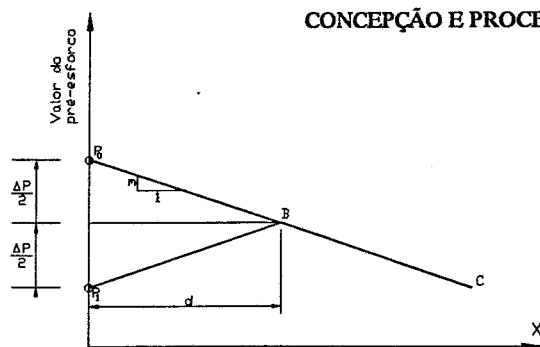
$m$  = perda de atrito por metro;

$d$  = distância a partir da qual a perda não se faz sentir;

$E_p$  = módulo de elasticidade do aço de pré-esforço.

$A_p$  = área da armadura de pré-esforço.

Na fig. 3.9 representam-se esquematicamente os valores de  $P_0$ ,  $P_1$  e  $x$ .



Distribuição do pré-esforço antes e após o recuo das cunhas

fig 3.9

### Perdas instantâneas devidas à deformação do betão.

Quando o pré-esforço é transmitido ao betão ocorre uma deformação elástica por compressão deste.

Para elementos pré-tensionados a transferência do pré-esforço é feita por aderência do betão ao longo das armaduras. As extensões são iguais no betão e no aço, podendo as perdas de tensão no aço e a compressão no betão ser calculadas no momento da transferência.

Para elementos pós-tensionados em que cada cabo é constituído por um só cordão, como no caso presente, a deformação elástica do betão ao dar-se no instante da aplicação é automaticamente compensada nas ancoragens activas, uma vez que a transferência do macaco para as cunhas é feita após a deformação do betão. No entanto, a contabilização deste tipo de perdas, nas armaduras pós-tensionadas deve ser feita para os casos em que cada cabo é constituído por mais do que um cordão. A aplicação do pré-esforço num cordão introduz perdas de tensão nos cordões anteriormente tensionados do mesmo cabo.

No caso vertente, embora os cabos sejam do tipo "monocordão", deverá ser considerada a interferência da aplicação do pré-esforço nos cabos vizinhos [15] pois a aplicação do pré-esforço não é feita simultaneamente em todos os cabos mas sim sequencialmente. Assim, o valor da tensão instalada num cabo é reduzido pela subsequente aplicação do pré-esforço no cabo seguinte. Só o ultimo cabo a ser pré-esforçado não terá perdas devido ao encurtamento elástico do betão.

Este fenómeno depende muito da proximidade das ancoragens. Encontram-se muito próximos nomeadamente nas zonas de enfiamento dos pilares onde há uma maior concentrações de cabos. A expressão genérica apresentada pelo ACI para elementos pós-tensionados por cabos não aderentes em que o pré-esforço é aplicado sequencialmente e com o mesmo valor em todos os cabos é a seguinte:

$$\Delta \sigma_{po,e} = \frac{1}{2} \frac{E_s}{E_{cj}} \sigma_{ca} \quad 3.14$$

onde:

$\Delta \sigma_{po,e}$  = perda de tensão devido ao encurtamento elástico do betão;

$E_s$  = módulo de elasticidade do aço;

$E_{cj}$  = módulo de elasticidade do betão com a idade que tem no momento da aplicação do pré-esforço;

$\sigma_{ca}$  = tensão de compressão média no betão ao longo do comprimento e ao nível do centro de gravidade do conjunto de cabos no momento da transferência do pré-esforço no último cabo.

### 3.4.2 PERDAS DIFERIDAS

As perdas devidas à retracção e fluência do betão e à relaxação de armaduras estão definidas no **REBAP**. No caso presente e para as situações usuais tem apenas interesse calcular estas perdas a tempo infinito. Nestas circunstâncias, as expressões simplificadas apresentadas no **REBAP** [art.42º] são adequadas para a determinação das perdas diferidas.

Em geral a totalidade das perdas diferidas varia entre 10% e 12% da tensão inicial [38] podendo ser determinadas da seguinte forma:

#### Perdas devidas à fluência do betão.

Como o pré-esforço é dimensionado para compensar, na maioria dos casos, as acções permanentes, as tensões de compressão a que a laje está sujeita são relativamente reduzidas. Para os valores correntes entre 1,0 e 2,5 MPa as perdas associadas à fluência são ligeiras podendo ser estimadas a partir da expressão:

$$\Delta \sigma_{p\infty c} = \epsilon \cdot E_p = \phi_{t,\infty} \cdot \frac{\sigma_c}{E_c} \cdot E_p \quad 3.15$$

com o significado usual para as variáveis.

Os valores para o coeficiente de fluência  $\phi_{t,\infty}$  dependem da idade do betão e da humidade relativa do ambiente e os seus valores podem ser obtidos do **REBAP** [art.42º]. Tem-se verificado que em geral estas perdas situam-se entre 2 a 4% do valor inicial do pré-esforço.

#### Perdas devidas à retracção do betão.

As perdas devidas à retracção são directamente proporcionais ao coeficiente de retracção específico  $\epsilon_{cs}$  que se considerar e podem ser avaliadas a partir da expressão simples:

$$\Delta_{\sigma p \infty, s} = \epsilon_{cs} \cdot E_p \quad 3.16$$

Estas perdas representam em geral 5% da tensão inicial.

**Perdas devidas à relaxação das armaduras.**

As perdas de tensão devidas à relaxação das armaduras depende fundamentalmente não só das suas características, mas também da tensão inicial instalada e da temperatura média a que estão sujeitas. Os aços correntemente utilizados hoje em dia no pré-esforço apresentam valores de relaxação baixos.

Para os casos correntes, temperatura de 20° C e uma tensão inicial de 0.7 da tensão característica de rotura estimam-se as perdas em 3% do pré-esforço inicial.

## 4 ESTADOS LIMITES DE UTILIZAÇÃO

A verificação da segurança em relação aos estados limites de utilização é geralmente efectuada em termos de parâmetros. Os valores dos parâmetros que definem os estados limites são comparados com os valores que eles assumem devido às acções, combinadas e quantificadas segundo regras estabelecidas pelo **RSA**.

Assim, o **REBAP** define regras de verificação de segurança para os seguintes estados limites de utilização:

- Fendilhação
- Deformação

Para os estados limites de fendilhação nas estruturas de betão pré-esforçado, a questão fundamental reside na protecção das armaduras aderentes de pré-esforço, por isso, a fixação destes estados limites depende da agressividade do ambiente, da sensibilidade das armaduras à corrosão e da permanência das acções que provocam a fendilhação.

Para os estados limites de deformação a verificação da segurança é limitada a uma flecha igual a  $1/400$  do vão, para combinações frequentes de acções, cujo valor não poderá ser superior a 1.5 cm se a fendilhação de paredes divisórias, eventualmente existentes, estiver em causa.

Esta verificação é dispensada se forem observadas as condições expressas no artº 102º que se resumem a limitar valores entre vãos e espessuras, não contemplando, de forma alguma, as lajes pré-esforçadas.

### 4.1 FENDILHAÇÃO

A maioria das especificações para estruturas de betão pré-esforçado impõe limites para as tensões no betão e no aço em instantes particulares, nomeadamente quando da aplicação e transferência do pré-esforço e quando a estrutura se encontra em serviço. O objectivo destes limites é de além de garantir que durante a fase de construção se evite a danificação dos elementos de construção (caso da tensão máxima nos cabos), se possa assegurar níveis de tensão no betão tendo em conta a dispensa ou a verificação dos estados limites de fendilhação.

Refere-se nomeadamente, nos comentários do artº 70º do **REBAP**, relativo ao estado limite de largura de fendas, que a verificação da segurança em relação a este estado limite fica *"em geral satisfeita se o valor da tensão de tracção na fibra extrema da*

secção não exceder o valor característico da tensão de *rotura do betão à tracção simples*", tensão que pode ser calculada em fase não fendilhada admitindo comportamento elástico perfeito dos materiais.

Por outro lado, visando obviar a fendilhação longitudinal do betão ou a deformação excessiva devida à fluência, o **REBAP** obriga à verificação da tensão máxima de compressão no betão, nomeadamente, antes dos 28 dias de idade, quando se dá a transferência do pré-esforço.

Ao considerar, por exemplo, os estados limites de fendilhação para elementos pré-esforçados, as normas Inglesas **BS8110** [10], apresentam 3 classes distintas de elementos estruturais definindo tensões admissíveis dependentes das características do betão. Para o caso das lajes pré-esforçadas por cabos não aderentes o assunto é alvo de recomendações específicas [5,13].

Um procedimento similar é adoptado pelas normas Americanas do **ACI**. Para o caso específico das armaduras não aderentes existem também recomendações específicas [14].

Apresentam-se em seguida as tensões admitidas, pelo **ACI** e pela **CS**, para as lajes em causa, bem como as disposições e considerações do **REBAP** para os instantes em que se aplica o pré-esforço e para as condições de serviço, pese embora o facto de no **REBAP** não haver valores específicos quanto a tensões limite de tracção no betão.

## Recomendações da Concrete Society (U.K.)

| CONDIÇÃO<br>(tensões máximas) <sup>1</sup>                            | Em compressão<br>(MPa) | Em tracção (MPa)           |                           |
|-----------------------------------------------------------------------|------------------------|----------------------------|---------------------------|
|                                                                       |                        | Com armaduras<br>passivas. | Sem armaduras<br>passivas |
| Na aplicação do<br>pré-esforço:<br>Zonas de<br>momentos<br>positivos. | $0.33 f_{cki}$         | $0.45 \sqrt{f_{cki}}$      | $0.15 \sqrt{f_{cki}}$     |
| Na aplicação do<br>pré-esforço:<br>Zonas de<br>momentos<br>negativos. | $0.24 f_{cki}$         | $0.45 \sqrt{f_{cki}}$      | 0                         |
| Em serviço. Zonas<br>de momentos<br>positivos.                        | $0.33 f_{ck}$          | $0.45 \sqrt{f_{ck}}$       | $0.15 \sqrt{f_{ck}}$      |
| Em serviço. Zonas<br>de momentos<br>negativos.                        | $0.24 f_{ck}$          | $0.45 \sqrt{f_{ck}}$       | 0                         |

A utilização de armaduras passivas nunca é dispensada nas zonas de momentos negativos sobre os apoios. Em qualquer caso e desde que as tensões  $0.45 \sqrt{f_{cki}}$  ou  $0.45 \sqrt{f_{ck}}$  sejam admitidas é necessário dispôr de armaduras passivas, vide secção 2.3.1.4.

<sup>1</sup>  $f_{cki}$  = tensão característica de rotura à compressão referida a provetes cúbicos no instante da aplicação do pré-esforço (i dias).  
 $f_{ck}$  = tensão característica de rotura à compressão do betão aos 28 dias de idade, referida a provetes cúbicos.

## Recomendações do American Concrete Institute (U.S.A.)

| CONDIÇÃO<br>(tensões máximas) <sup>1</sup>                                    | Em compressão<br>(MPa) | Em tração (MPa)            |                           |
|-------------------------------------------------------------------------------|------------------------|----------------------------|---------------------------|
|                                                                               |                        | Com armaduras<br>passivas. | Sem armaduras<br>passivas |
| Aplicação do<br>pré-esforço:<br>Zonas de<br>momentos positivos<br>e negativos | $0.60 f_{cck}$         | $0.50 \sqrt{f_{cck}}$      | $0.25 \sqrt{f_{cck}}$     |
| Em serviço: Zonas<br>de momentos<br>positivos                                 | $0.45 f_{cck}$         | $0.50 \sqrt{f_{cck}}$      | $0.17 \sqrt{f_{cck}}$     |
| Em serviço: Zonas<br>de momentos<br>negativos                                 | $0.30 f_{cck}$         | $0.50 \sqrt{f_{cck}}$      | 0                         |

Na secção 2.3.1.4 encontram-se igualmente as condições para o dimensionamento das armaduras passivas.

O ACI faz uma chamada especial de atenção para os sistemas armados numa só direcção, especificando que neste caso, dadas as consequências catastróficas de uma acção de acidente (por exemplo fogo) que originasse a perda de pré-esforço em todos os vãos, dever-se-á adoptar uma armadura complementar passiva com uma área igual a 0.04% da parte da secção entre a face traccionada e o centro de gravidade da secção aparente. Esta armadura deve ser uniformemente distribuída sobre a zona traccionada previamente comprimida pelo pré-esforço, o mais próximo da face traccionada. Deverá ter um comprimento igual a 1/3 do vão na zona de momentos positivos e na zona de momentos negativos deve-se estender para cada lado dos apoios num comprimento igual a 1/6 dos vãos adjacentes.

<sup>1</sup>  $f_{cck}$  = tensão característica de rotura à compressão referida a provetes cilíndricos no instante da aplicação do pré-esforço (i dias).  
 $f_{cck}$  = tensão característica de rotura à compressão do betão aos 28 dias de idade, referida a provetes cilíndricos.

Esta quantidade de reforço convencional é aproximadamente igual à percentagem mínima requerida para as lajes convencionais no REBAP e é, por outro lado considerada adequada para limitar a largura de fendas e controlar a fendilhação [14].

O seu objectivo principal, contudo, é o de proporcionar um sistema alternativo resistente na presença de uma acção de acidente, devendo por isso ser verificadas as condições de aderência e comprimentos de amarração. Os esforços resistentes, calculados com base em coeficientes de segurança unitários relativos às propriedades dos materiais resultantes devem ser superiores aos esforços de cálculo resultantes da seguinte combinação de acções:  $G + 0.25 Q$ .

Para o caso das lajes armadas em duas direcções as acções de acidente que provoquem a perda de pré-esforço numa das direcções, não são consideradas críticas, uma vez que as armaduras de pré-esforço na outra direcção e nos vãos adjacentes verificam em geral a condição atrás referida [14].

#### Disposições e observações do REBAP

| CONDIÇÃO                                                           | Compressão <sup>1</sup><br>(MPa) | Tracção <sup>2</sup><br>(MPa)                                                                      |
|--------------------------------------------------------------------|----------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Aplicação do pré-esforço: Zonas de momentos positivos e negativos. | $0.67 f_{ck,i}$                  |                                                                                                    |
| Em serviço: Zonas de momentos positivos e negativos.               | $0.67 f_{ck}$                    | $f_{ctk} \approx 0.21 f_{ck}^{2/3}$ (valor característico da tensão de rotura à tracção do betão). |

A determinação das tensões é feita considerando como é óbvio o comportamento elástico dos materiais (artºs 69º 70º e 71º do REBAP).

No quadro comparativo que se segue apresentam-se os valores das tensões de tracção admissíveis, em MPa, resultantes das expressões indicadas aplicáveis para os estados limites de duração considerável, uma vez que a regulamentação estrangeira

<sup>1</sup> artº 71º

<sup>2</sup> A verificação da segurança em relação ao estado limite de larguras de fendas não é efectivamente dispensada para o caso de armaduras de pré-esforço, pelo que não se trata de uma disposição mas sim de uma observação feita no artº 70º.

utiliza o termo "service loadings". O valor correspondente à tensão de tracção "admissível" pelo **REBAP**,  $f_{ctk}$  é manifestamente inferior aos admitidos pelo **ACI**,  $0.50\sqrt{f_{cck}}$  e pela **CS**,  $0.45\sqrt{f_{ck}}$ .

Para comparação destes valores insere-se no quadro os valores médios para a tensão de rotura do betão à tracção simples (28 dias).

**VALORES PARA TENSÕES DE TRACÇÃO EM FUNÇÃO DO TIPO DE  
BETÃO  
(MPa)**

| Betão | $f_{cck}$ | $f_{ctm}$ | REBAP<br>$f_{ctk}$ | CS<br>$0,45 \sqrt{f_{ck}}$ | ACI<br>$0,50 \sqrt{f_{cck}}$ |
|-------|-----------|-----------|--------------------|----------------------------|------------------------------|
| B25   | 20        | 2.21      | 1.55               | 2.25                       | 2.24                         |
| B30   | 25        | 2.56      | 1.80               | 2.46                       | 2.50                         |
| B35   | 30        | 2.90      | 2.03               | 2.66                       | 2.74                         |
| B40   | 35        | 3.21      | 2.25               | 2.85                       | 2.96                         |
| B45   | 40        | 3.51      | 2.46               | 3.02                       | 3.16                         |
| B50   | 45        | 3.80      | 2.66               | 3.18                       | 3.35                         |
| B55   | 50        | 4.07      | 2.85               | 3.34                       | 3.54                         |

Verifica-se que as tensões, correspondentes às recomendações Americanas e Inglesas, não deixam de ser conservadoras se comparadas com as tensões correspondentes a um estado limite de formação de fendas, que corresponderia a atingir na fibra mais extrema das secções o valor médio da resistência do betão à tracção.

A razão para considerar valores inferiores prende-se com o facto de os métodos de cálculo, geralmente seguidos para a determinação de esforços, serem aproximados. Refere-se por exemplo que o método dos pórticos equivalentes, quando comparado com métodos mais rigorosos, apresenta valores para os momentos negativos inferiores [2].

Para as tensões máximas de compressão, os valores do **REBAP** são ligeiramente superiores, facto que se compreende, uma vez que a limitação se refere apenas às combinações raras de acções.

Para as situações em que estes limites (**ACI** ou **CS**) das tensões de tracção são ultrapassados, as lajes são consideradas fendilhadas. Nestas circunstâncias a segurança em relação ao estado limite de largura de fendas e de descompressão deve ser observado.

Um cabo de pré-esforço em que a armadura fica livre de se mover sem atrito com o betão, pode ser realizado, isto é fabricado de diversas formas.

No caso vertente o cabo é constituído por um cordão de fios embebidos em produtos inibidores da corrosão que por sua vez são envolvidos por um "tubo" ou bainha plásticos.

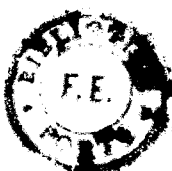
Nos Estados Unidos da América os cabos revestidos por bainhas plásticas foram largamente utilizados até 1985 sem que houvesse recomendações e especificações sobre o seu fabrico e utilização tendo em vista a protecção contra a corrosão.

Como é sabido, um dos principais problemas das estruturas de betão armado ou pré-esforçado é a corrosão das armaduras, particularmente para os casos em que estas se encontram em ambientes agressivos.

O aparecimento das armaduras não aderentes e protegidas, surgiu associado à ideia de evitar o contacto destas com o "meio" envolvente de forma a evitar a sua corrosão. Os primeiros sistemas usados limitavam-se a impregnar as armaduras em massas lubrificantes que depois eram envolvidas por papel enrolado em fita. O desenvolvimento comercial deste sistema foi evoluindo até ao aparecimento das bainhas plásticas, aplicadas por extrusão.

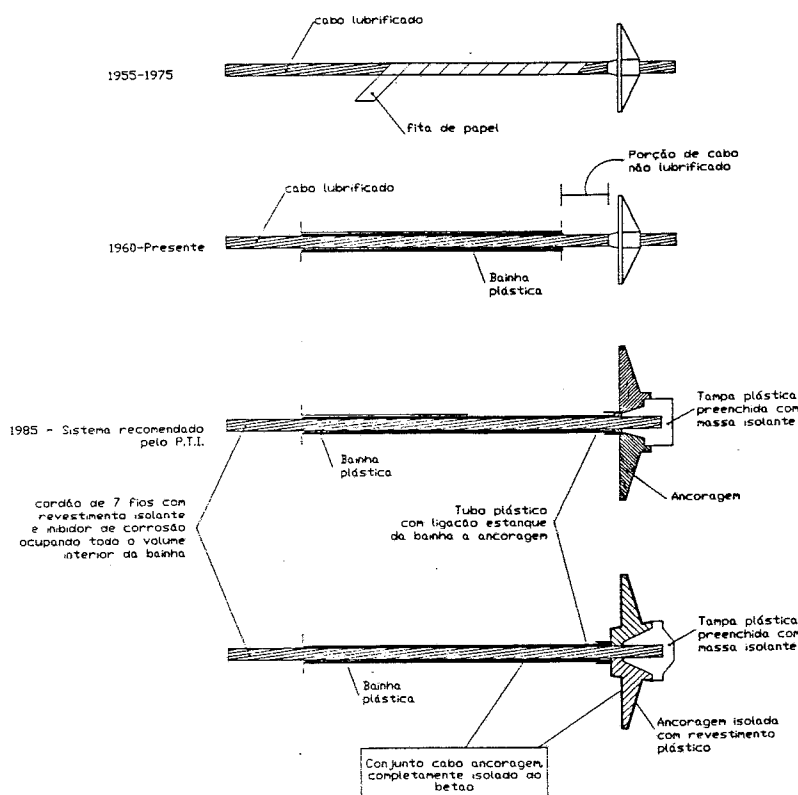
O desempenho dos sistemas iniciais foi inadequado tendo surgido problemas de corrosão não só resultantes da insuficiente protecção das armaduras, mas também devido à fraca e inadequada qualidade do betão envolvente das ancoragens. As primeiras aplicações de bainhas plásticas também tiveram problemas, principalmente na ligação das ancoragens onde a armadura ficava exposta, embora numa pequena extensão, e no enchimento da massa anticorrosiva que inicialmente era efectuado após o embainhamento das armaduras [53].

Hoje em dia, nos sistemas internacionais comerciais de cabos não aderentes, as bainhas são aplicadas por extrusão imediatamente após e á saída das fieiras. As suas



características preenchem os requisitos estipulados nas exigências prescritas pelo **PTI** "Specification for Unbonded Single-Strand Tendons" [47] de 1985 na América ou pela **FIP** "Recommendations for corrosion protection of unbonded tendons" [52] de 1986.

Na figura 4.1 apresentam-se esquematicamente os vários sistemas usados na América desde 1955.



Evolução dos sistemas de protecção

fig. 4.1

Segundo observações efectuadas em várias obras por Schupack, Morris [53] os problemas de corrosão podem ser evitados desde que:

- i. As especificações do **PTI** sejam rigorosamente cumpridas;
- ii. A colocação dos cabos seja efectuada com precaução de forma a evitar estragos no sistema de protecção;
- iii. Os recobrimentos dos cabos estejam dentro das tolerâncias normalmente admitidas (vide secção 4.3);
- iv. As ancoragens se encontrem devidamente protegidas pelo betão envolvente;

v. Para os ambientes agressivos se disponha de um conjunto cabo ancoragem completamente isolado evitando contacto eléctrico com as armaduras passivas (ver fig 4.1).

Nestes pressupostos e atendendo às características actuais dos sistemas de cabos não aderentes é de defender que a segurança em relação ao estado limite de largura de fendas seja orientada para as armaduras passivas.

O quadro que se segue foi, assim, adaptado do **REBAP** para a verificação do estado limite de fendilhação para lajes pré-esforçadas por cabos não aderentes.

| Ambiente                | Combinação de acções | Largura de fendas | Protecção das ancoragens. |
|-------------------------|----------------------|-------------------|---------------------------|
| Pouco Agressivo         | Frequentes           | 0.3 mm            | sem isolamento plástico   |
| Moderadamente Agressivo | Frequentes           | 0.2 mm            | sem isolamento plástico   |
| Muito Agressivo         | Raras                | 0.1 mm            | com isolamento plástico   |

A verificação do estado limite de descompressão fica assim sempre dispensada e a verificação do estado limite de largura de fendas deve ser efectuada quando as tensões, admitidas pelo **ACI** ou pela **CS**, forem ultrapassadas, para as combinações de acções em causa (frequentes e raras).

Repare-se que nos casos correntes de edifícios, com a compensação de uma grande parte das acções e para os estados limites de longa duração - combinações quase permanentes, as tensões (de tracção), obtidas em regime elástico<sup>1</sup> não ultrapassam os valores admissíveis atrás referidos.

A determinação, do valor característico de largura de fendas, indispensável quando os valores limite para as tensões de tracção são ultrapassados, pode ser

<sup>1</sup> São portanto aplicáveis as expressões apresentadas no capítulo 2.

efectuada, com base nas expressões do **REBAP** (artº70) considerando-se apenas, como é evidente, no que respeita a armaduras a parte correspondente ao desempenho das armaduras passivas.

## 4.2 DEFORMAÇÃO

Em termos de deformação as lajes pré-esforçadas diferem das convencionais, uma vez que, para uma parcela das acções verticais, as flechas podem ser praticamente eliminadas. Através do valor e posição do pré-esforço, é possível controlar flechas, podendo-se utilizar secções de menor altura, e ou, maiores vãos, sem comprometer o desempenho e funcionalidade das lajes.

Nas situações correntes, em que se procura compensar, além do peso próprio, uma parte da acção variável, no instante da aplicação do pré-esforço no seu valor máximo, ao mobilizar a totalidade do peso próprio, origina o aparecimento de flechas negativas (ascendentes).

Os efeitos da retracção e fluência do betão e da relaxação das armaduras, tendem a diminuir gradualmente o valor do pré-esforço, que, por sua vez reduz, as flechas negativas a ele associadas. Contudo, a fluência do betão faz-se também sentir no sentido oposto: as extensões devidas às tensões de compressão aumentam, aumentando também a curvatura das secções e como tal as flechas.

Por outro lado as acções exteriores produzem flechas positivas (descendentes) que se vão somar às anteriores e, para estas, o efeito da fluência também se faz sentir nos dois sentidos. A determinação das flechas não é portanto fácil, com excepção de uma situação, estabilizada a longo prazo, de compensação de acções, em que se obtem uma tensão de compressão uniforme, quer haja fluência ou não, correspondendo em termos práticos à inexistência de flechas.

Assim, como na generalidade dos elementos de betão pré-esforçado, não é fácil determinar com exactidão o estado de deformação das lajes, uma vez que há numerosos parâmetros em jogo: os coeficientes de fluência e retracção do betão, a presença de armaduras ordinárias, o estado de fendilhação do betão, a variação do pré-esforço com o tempo e, finalmente, para não se falar de outros, a história e variabilidade das acções exteriores.

A não aderência do pré-esforço, não impede a utilização dos critérios estabelecidos e as disposições definidas no **REBAP** e, para os casos correntes que são objecto deste trabalho, a segurança em relação à deformação pode ser feita para as

combinações frequentes das acções, de acordo e atendendo aos limites, já referidos, 1,5 cm ou 1/400 do vão, consoante a fendilhação de paredes esteja ou não em causa, definidos nos artºs 72º e 73º do REBAP.

Os limites propostos para o Eurocode nº2 e para o CEB-FIP Model Code 1990 são menos conservadores e apontam para valores de flechas  $f \leq l/250$  em situações normais e para combinações frequentes de acções ou  $f \geq -l/250$  quando o pré-esforço é determinante. Quando as flechas podem provocar avarias em divisórias, revestimentos, e outros elementos secundários da construção o valor das flechas é limitado a 1/500 do vão [24,26].

O CEB-FIP Model Code 1990 [26] propõe para relações vão/espessura, para a dispensa da verificação da deformação para lajes sem qualquer compressão axial, valores que se situam entre 30 e 20. Contudo, para as lajes fungiformes, como aí se indica, as flechas devem ser sempre verificadas.

No caso presente, a adopção de limites vão/espessura, para a dispensa da verificação da segurança à deformação, é de difícil concretização, uma vez que a influência do pré-esforço no controle das flechas é determinante. Contudo, as relações apresentadas em 3.3, quando adoptadas, permitem, nos casos correntes, a verificação destas condições de segurança.

Interessa finalmente distinguir as flechas a curto e a longo prazo, em ambos os casos dependentes de as secções se encontrarem ou não em fase fendilhada.

Nas secções 4.2.1 e 4.2.2 descreve-se o modo de proceder para a determinação das flechas a curto prazo consoante se trate de lajes apoiadas nos bordos ou de lajes fungiformes.

A avaliação das flechas a longo prazo é abordada separadamente no número 4.2.3

#### 4.2.1 FLECHAS INSTANTÂNEAS EM FASE NÃO FENDILHADA

A utilização do pré-esforço compensando aproximadamente as acções quase permanentes, como se tem sugerido, faz prever que em muitas situações de verificação da segurança em relação à deformação, para as acções a considerar não haja fendilhação (as tensões de tracção no betão são inferiores ao valor médio da tensão de rotura por tracção,  $f_{ctm}$  (ver quadro na secção 4.1).

Considerando que a laje se encontra dimensionada para a compensação

de uma determinada parte das acções, interessa, como é óbvio, apenas determinar a flecha resultante da diferença entre estas e o total das combinações frequentes das acções.

Nestas condições, a avaliação das flechas não oferece dificuldades podendo fazer-se uso das equações gerais da resistência dos materiais admitindo comportamento elástico dos materiais. O recurso a programas informáticos, com base no método dos deslocamentos, de utilização cada vez mais vulgarizada, permitem nesta situação, obter directamente os valores das flechas, com bastante rigor.

O facto de se tratar aqui de lajes, cujo comportamento elástico é ainda assim complexo, referem-se com algum detalhe, métodos aproximados, nos casos de lajes apoiadas em vigamentos cruzados e fungiformes, fazendo uso e dando continuidade aos procedimentos descritos no número 3.1 para a determinação dos momentos flectores.

#### **4.2.1.1 LAJES COM APOIOS CONTÍNUOS**

Para estes sistemas estruturais de lajes os métodos de cálculo clássicos têm alguma limitação uma vez que as condições de apoio dos painéis não se assumem nem como rótulas perfeitas nem como encastramentos perfeitos, mas sim apresentam algum grau de encastramento dependendo das condições de carga dos painéis adjacentes e da rigidez à torção das vigas ou paredes de suporte.

Pode-se contudo estimar o valor das flechas, fazendo uso dos valores aproximados dos momentos calculados com base no método apresentado na secção 3.1.3.1. Esta aproximação não deixa de ser válida, e é justificável, uma vez que o que está em questão é a determinação da flecha resultante das acções não compensadas. Como se pretende, normalmente, calcular a flecha máxima no centro de um painel, os coeficientes para a determinação dos momentos máximos positivos a ter em conta são os que correspondem à tabela 1.3.

Recorda-se que nesta tabela se obtêm os momentos positivos quando nos painéis adjacentes só actuam as acções permanentes e considerando um grau de encastramento parcial de 50%.

Este procedimento, proposto por Nilson, A.H, consiste

fundamentalmente em admitir que, para uma determinada faixa central de um painel de laje, o diagrama de momentos seja parabólico e a partir deste avaliar a flecha máxima correspondente.

Considere-se a fig. 4.2, correspondente a um painel interior típico de uma laje, onde se destaca uma faixa de largura unitária segundo a maior direcção. Admitindo que o diagrama de momentos correspondente às acções uniformemente distribuídas não compensadas é parabólico, a soma do momento positivo com a média dos momentos negativos é igual a  $M_{nc} = \omega_{nc} l_b^2 / 8$ <sup>1</sup>. Uma vez que se admitiu um grau de encastramento de 50%, o diagrama de momentos a considerar e a partir do qual se calculam as flechas, encontra-se representado na figura onde:

$$M_{nc}^+ = \frac{2}{3} M_{nc} \quad 4.1$$

$$M_{nc}^- = \frac{1}{3} M_{nc}$$

são respectivamente os momentos positivo a meio vão e negativos nos apoios, correspondentes às acções não compensadas,  $\omega_{nc}$

---

<sup>1</sup> Utiliza-se o índice *nc* para referir que se tratam de esforços ou acções não compensados.

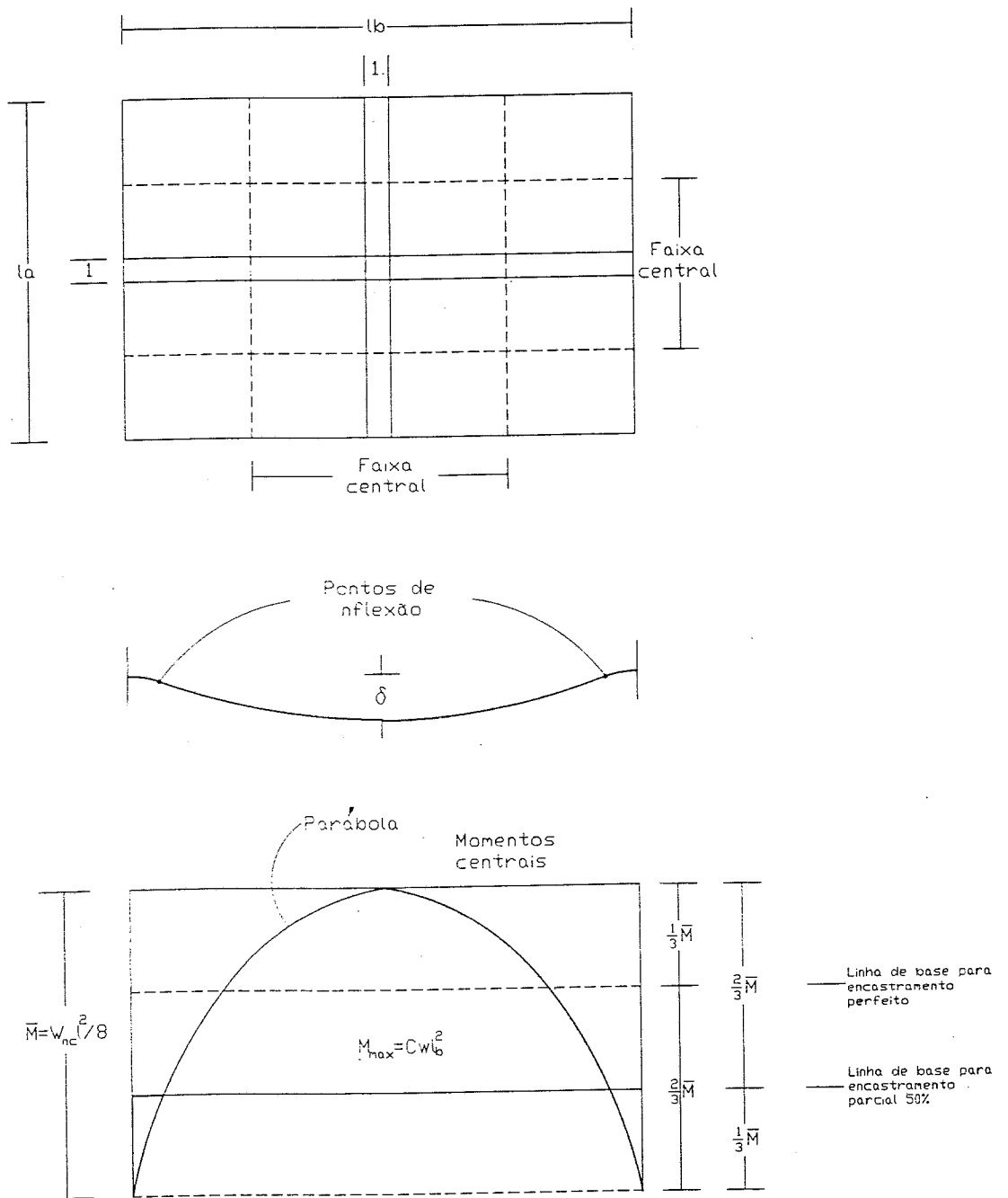


fig. 4.2

A flecha a meio vão,  $\delta$ , para a faixa central é neste caso dada por:

$$\delta = \frac{3}{32} \frac{M_{nc}^+ l_b^2}{E_c I_c} \quad 4.2$$

em que  $M_{nc}^+$  é obtido directamente através dos coeficientes dados pela tabela 1.3 atrás referida e,  $E_c$  e  $I_c$  são, respectivamente, o módulo de elasticidade e o momento de inércia do betão por unidade de largura.

Note-se que, quando o valor da acção ascendente produzida pelo pré-esforço é superior ao valor resultante da combinação frequente das acções, as flechas serão negativas uma vez que a acção por compensar inverte os sinais dos momentos.

Embora a equação 4.2 seja baseada numa faixa unitária com vão na maior dimensão, um cálculo equivalente poderia ser efectuado para a mesma flecha segundo o menor vão. O resultado seria praticamente equivalente, sendo de esperar ligeiras diferenças dada a forma aproximada para o cálculo dos momentos [3].

A equação 4.2 foi encontrada para um painel interior, com momentos de encastramento iguais em cada um dos extremos da faixa. Expressões equivalentes podem ser deduzidas para outros casos de apoio, quando um ou mais bordos não têm continuidade. Será necessário ter presente que, de acordo com as simplificações assumidas no método de cálculo dos momentos, os momentos negativos nos bordos livres são tomados com um valor correspondente a 1/3 do momento positivo no vão na mesma direcção. Para o caso especial em que todos os bordos se encontram simplesmente apoiados, uma laje apoiada em paredes de alvenaria por exemplo, a flecha a meio vão é:

$$\delta = \frac{5}{48} \frac{M_{nc}^+ l^2}{E_c I_c} \quad 4.3$$

Para os casos em que os painéis se encontrem apoiados em vigas com flechas significativas, Nilson, A.H., propõe que se adicionem estas às flechas obtidas para a laje, procurando-se o maior valor das seguintes somas:

- soma resultante da flecha da viga com vão na maior direcção e da flecha da laje com vão na menor direcção;
- soma resultante da flecha da viga com vão na menor direcção e da

flecha da laje com vão na maior direcção.

No projecto de norma **CEB-FIP Model Code 1990** considera-se contudo suficiente verificar o valor das flechas segundo o menor vão das lajes.

Esta questão de tomar a maior ou menor direcção deve ser analisada tendo em conta que:

1º Para lajes francamente rectangulares, a flecha devida à deformação do painel é efectivamente condicionada pela direcção com menor vão. Neste caso, se os apoios da laje são indeformáveis, não há necessidade de qualquer outra consideração.

Quando há deformações consideráveis das linhas de apoio, os valores máximos devem ser procurados, sendo difícil de prever qual a direcção determinante.

2º Para as lajes quadrangulares, ou quase, é indiferente tomar uma ou outra direcção e nestes casos, a deformabilidade das linhas de apoio (vigas) é geralmente idêntica numa ou noutra direcção, devendo ser considerada na determinação da flecha máxima do painel.

#### 4.2.1.2 LAJES FUNGIFORMES

Na secção 3.1.3.2 o método de pórticos equivalentes permite, de uma forma considerada satisfatoriamente adequada, a partir da distribuição de momentos, estimar o valor das flechas.

Apresenta-se aqui um método desenvolvido por **Nilson, A.H.**, que se baseia no método dos pórticos equivalentes e da respectiva divisão da laje em bandas.

O cálculo da deformação de um painel limitado pelo alinhamento de pilares, figura 4.3(a), é efectuado considerando, para cada direcção, que o painel se encontra apoiado em linhas indeformáveis na direcção transversal à considerada. Assim, como se ilustra na figura 4.3(a), a laje é analisada como se fosse uma viga de grande largura, a do painel,  $l_y$ , e com o vão  $l_x$ .

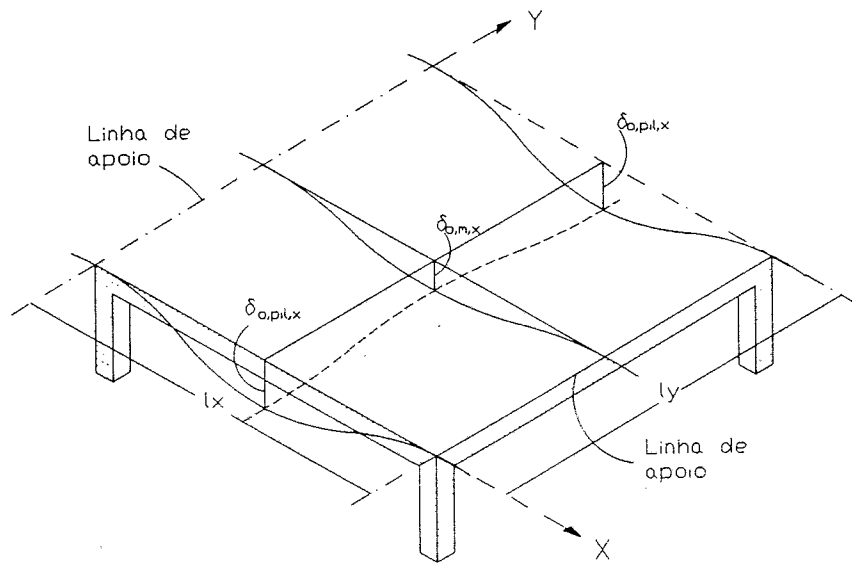


fig. 4.3 (a)

Repare-se que todas as faixas na direcção  $x$ , se deformam de maneira diferente, devido à variação de momentos ao longo da largura da laje.

Similarmente a laje é analisada na outra direcção. Assim na figura 4.3 (b) representa-se esquematicamente a deformada da laje na direcção  $y$ , assumindo-se que as supostas linhas de apoio ( $y = 0$  e  $y = l_y$ ) são indeformáveis.

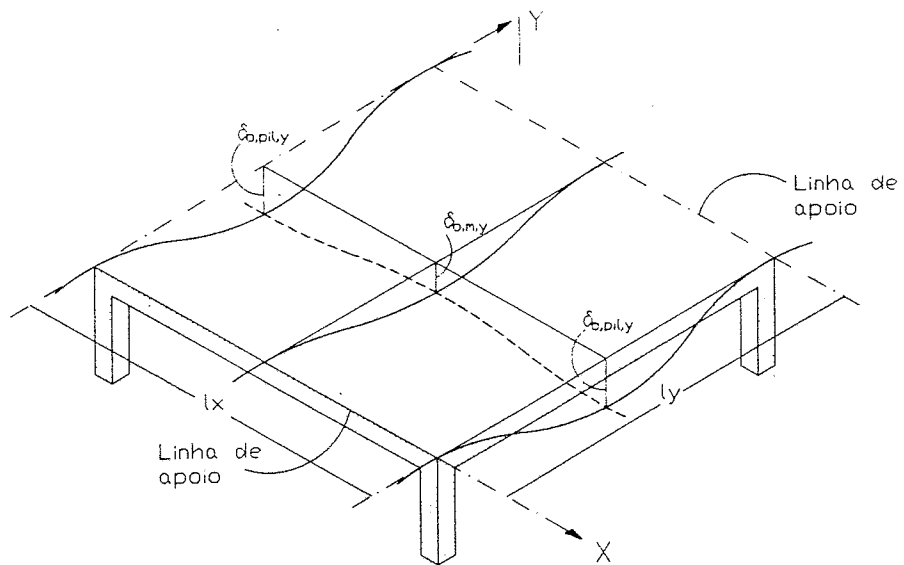


fig. 4.3 (b)

A flecha no centro do painel pode ser aproximadamente calculada como sendo a soma da flecha a meio vão da faixa de pilares numa direcção com a flecha para a faixa entre pilares na outra direcção, como se ilustra na figura 4.3 (c).

$$\delta'_{\max} \approx \delta_{pil.x} + \delta_{med.y}$$

ou

$$\delta''_{\max} \approx \delta_{pil.y} + \delta_{med.x}$$

4.3

Os índices *pil* e *med* referem-se à faixa dos pilares e intermédias respectivamente. Os valores de  $\delta'$  e  $\delta''$  como na secção anterior são próximos.

Para determinar as várias parcelas que intervêm nas relações anteriores é necessário, atender à diferente repartição lateral de momentos e em seguida determinar as correspondentes flechas nas faixas centrais e de pilares (fig. 4.4). Estas flechas podem, uma vez obtidos os momentos das faixas correspondentes, determinar-se através da soma de 3 parcelas: A flecha do painel considerado perfeitamente encastrado e as duas flechas resultantes da rotação de cada uma das linhas de apoio.

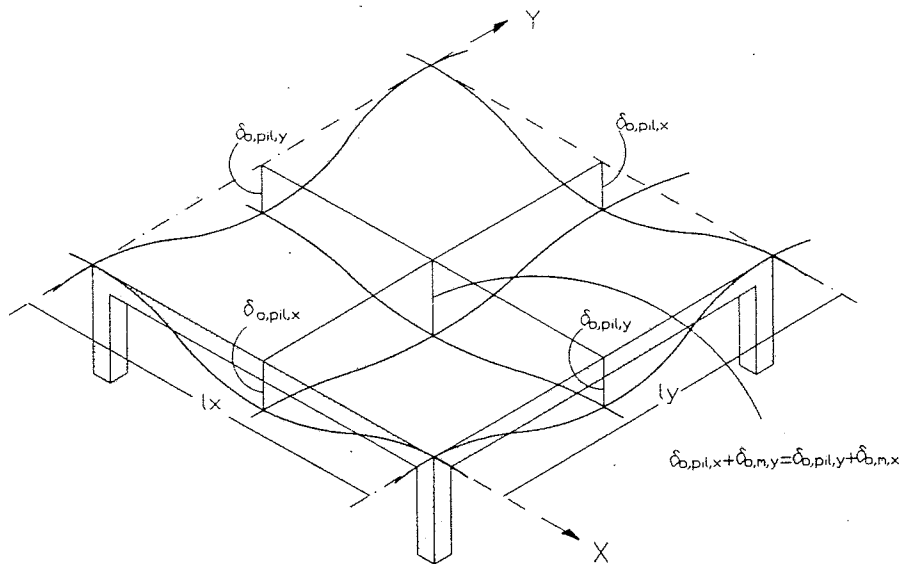


fig. 4.3 (c)

A divisão dos painéis e a distribuição de momentos ao longo da direcção transversal ao vão é considerada da mesma forma que na secção 3.1.3.2 considerando-se 55% a 60% ou 65% a 75% dos momentos afectos a faixa dos pilares consoante se trate de lajes com um ou mais vãos respectivamente. A parte remanescente é, obviamente atribuída às faixas intermédias.

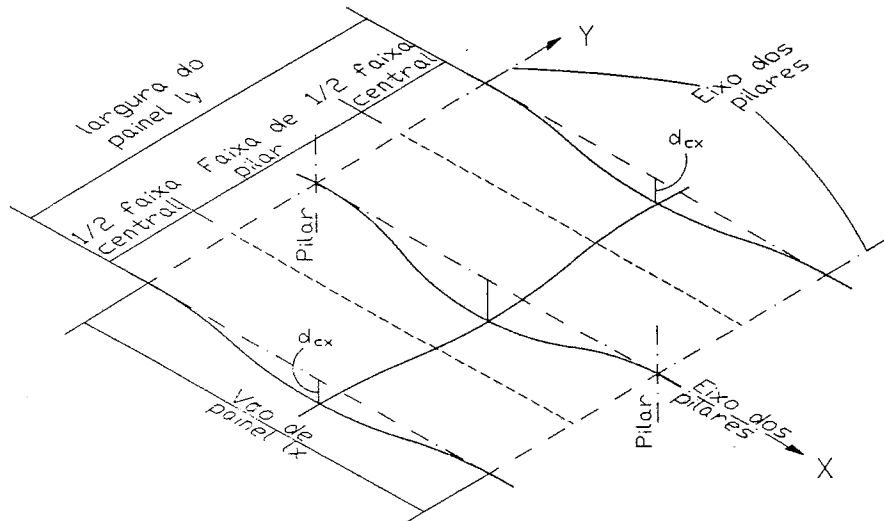


fig. 4.4

O procedimento a adoptar em cada uma das direcções é então o seguinte:

Considera-se uma flecha de referência como sendo a correspondente à de uma viga equivalente perfeitamente encastrada e sujeita a uma carga uniformemente distribuída.

$$\delta_{ref} = \frac{w_{nc} l^4}{384 E_c I_{painel}}$$

onde:

$w_{nc}$  Acção não compensada por unidade de comprimento para toda a largura do painel;

$l$  Comprimento do vão na direcção considerada;

$I_{painel}$  Momento de inércia correspondente a toda a largura do painel;

$E_c$  Módulo de elasticidade do betão.

Esta equação implica uma distribuição lateral de momentos, uniforme ao longo da largura do painel, como se a laje se deformasse segundo uma superfície cilíndrica.

Para atender à diferente distribuição lateral de momentos e para ter em conta as diferenças na largura das faixas que se definirem para o pórtico equivalente em cada direcção, esta flecha de referência é proporcionalmente reduzida em função da relação entre os momentos flectores e de inércia do painel e da faixa em estudo:

$$\delta_{0, pil} = \delta_{ref} \cdot \frac{M_{pil}}{M_{painel}} \cdot \frac{I_{painel}}{I_{pil}}$$

4.4

$$\delta_{0, med} = \delta_{ref} \cdot \frac{M_{med}}{M_{painel}} \cdot \frac{I_{painel}}{I_{med}}$$

Repare-se que a relação entre os momentos é apenas o factor, de distribuição lateral destes, na largura do painel, já definido na análise anterior para os momentos flectores.

Torna-se agora necessário entrar em linha de conta com as rotações do pórtico equivalente nos apoios, que até ao momento se consideraram perfeitamente encastrados. A rotação num pilar corresponde à razão entre o momento que lhe é transmitido e a sua rigidez:

$$\theta = \frac{\Delta M}{K_{ec}}$$

onde:

$\theta$  rotação em radianos;

$\Delta M$  diferença de momentos, na laje à esquerda e à direita do pilar;

$K_{ec}$  rigidez do pilar equivalente (ver secção 3.1.3.2, equação 3.4).

Uma vez conhecida esta rotação, a correspondente flecha a meio vão do pórtico equivalente pode ser obtida:

$$\delta_{\theta} = \frac{\theta l}{8}$$

Assim a flecha total a meio vão para uma faixa correspondente a pilares ou para faixas intermédias numa dada direcção, pode ser obtida pela soma das 3 parcelas:

$$\delta_{pil} = \delta_{0, pil} + \delta_{\theta esq.} + \delta_{\theta dir.}$$

4.5

$$\delta_{med} = \delta_{0, med} + \delta_{\theta esq.} + \delta_{\theta dir.}$$

Chega-se assim a dois pares de valores, um para cada direcção, cujas somas cruzadas (equações 4.3) fornecem valores aproximados para a flecha máxima, que, como se referiu, não devem diferir muito entre si.

Embora se esperem valores aproximadamente iguais há também recomendações no sentido de que a determinação das flechas seja efectuada tendo por base a maior direcção [26].

Dever-se-á por isso considerar a soma da flecha correspondente à faixa dos pilares na maior direcção com a flecha dada para a faixa intermédia na menor direcção, uma vez que a contribuição maior é devida à faixa entre pilares na maior direcção, quando as dimensões em planta dos painéis são sensivelmente diferentes.

#### 4.2.2 FLECHAS INSTANTÂNEAS EM FASE FENDILHADA

A fase fendilhada pode, convencionalmente, considerar-se atingida quando o valor da tensão no betão iguala o valor médio da tensão de rotura por tracção,  $f_{ctm}$ . Nas secções em que esta situação ocorre há uma diminuição de rigidez e as expressões para a determinação das deformadas são obtidas por métodos aproximados, uma vez que é difícil, se não impossível, conhecer os valores efectivos dos momentos de inércia de cada secção fendilhada e das regiões que lhe são adjacentes.

A expressão geral que relaciona a curvatura  $1/r$  a uma distância  $x$  ao longo de um elemento e a correspondente flecha  $y$  é:

$$1/r = \frac{d^2 y}{dx^2} \quad 4.6$$

Para se determinar a flecha num dado ponto será necessário integrar a relação 4.6 duas vezes, integração que é obtida com recurso a métodos numéricos, uma vez que as curvaturas em cada ponto podem ser obtidas pela expressão:

$$1/r = \frac{\epsilon_c - \epsilon_s}{d} \quad 4.7$$

em que  $\epsilon_c$  e  $\epsilon_s$  são, respectivamente, a extensão no betão ao nível da fibra mais comprimida da secção e a extensão na armadura aderente mais traccionada (ou menos comprimida), consideradas com os respectivos sinais e determinadas admitindo comportamento elástico perfeito dos materiais, uma vez que para combinações frequentes de acções não há, em geral, plastificação.

Esta expressão é válida quer haja ou não fendilhação, mas nas zonas fendilhadas, isto é, quando o valor de tensão de tracção no betão é superior ao valor médio da sua tensão de rotura, é considerada a resistência à tracção do betão entre fendas, ao substituir a extensão  $\epsilon_s$  pelo valor  $\epsilon_{sm}$  calculado de acordo com o artº 70.2 do REBAP e que representa a extensão média da armadura.

Um outro processo para determinar a curvatura numa secção fendilhada, utilizado pelo ACI e apontado por vários autores [1,3,16] considera que, na expressão usual se substitui o momento de inércia da secção não fendilhada pelo momento de inércia equivalente,  $I_e$ , dado pela equação 2.1, (ver secção 2.1) vindo então:

$$1/r = \frac{M}{E \cdot I_e} \quad 4.8$$

Recorrendo à integração numérica dos valores das curvaturas associadas ao diagrama de momentos ao longo de uma determinada direcção pode obter-se o valor da flecha.

Finalmente, esta flecha deve ser corrigida tendo em atenção o movimento dos apoios tal como se fez na secção anterior.

#### 4.2.3 FLECHAS A LONGO PRAZO

Em geral, as flechas a longo prazo manifestam-se para as acções com carácter de maior permanência. Assim, ao adoptar o critério de compensar as acções

quase permanentes, a fluência provocará essencialmente variações de comprimento e perdas no pré-esforço não introduzindo quaisquer flechas. Mesmo assim seguem-se algumas indicações para a determinação de flechas diferidas.

A curvatura total ao fim do tempo  $t$ , devida a acções permanentes e variáveis, pode ser calculada pela soma da curvatura elástica, correspondente ao instante em que são aplicadas as acções, e das curvaturas devidas à fluência do betão. Esta determinação apresenta dificuldades, uma vez que, como se referiu seria necessário um conhecimento adequado dos numerosos parâmetros que influenciam o fenómeno.

É frequente, para o cálculo aproximado da flecha final a longo prazo, utilizar a seguinte expressão que se encontra desenvolvida em [3]:

$$\delta = -\delta_{pe} - \frac{\delta_{pi} + \delta_{pe}}{2} \phi + \delta_g (1 + \phi) + \delta_q \quad 4.9$$

que considera, simplifadamente, o efeito da fluência para as acções permanentes e, para o pré-esforço, um valor constante igual à média do pré-esforço inicial,  $P_i$ , e final,  $P_e$  onde:

$\delta_{pe} = \delta_{pi} P_e / P_i$  flecha instantânea inicial que se obtinha se o pré-esforço actuasse com um valor constante igual ao valor final após perdas;

$\delta_{pi}$  flecha instantânea devida à actuação isolada do pré-esforço com o seu valor inicial, sem considerar o peso próprio;

$\delta_g$  flecha instantânea devida à actuação isolada das acções permanentes;

$\delta_q$  flecha instantânea devida à actuação isolada das acções variáveis;

$\phi$  coeficiente de fluência.

Numa abordagem ainda mais simplificada, frequentemente utilizada para avaliar a flecha a longo prazo, considera-se a seguinte expressão:

$$\delta = (1 + \phi) \delta_e \quad 4.10$$

em que  $\delta_e$  é a flecha inicial calculada nas secções anteriores. Em princípio conduzirá a valores por excesso uma vez que o efeito diferido não resulta da totalidade da combinação frequente considerada.

Os valores a utilizar para o coeficiente de fluência do betão, em que se utiliza cimento de endurecimento normal, para a temperatura ambiente de 20 ° C

com humidade relativa entre 55% a 75% e para idades de carregamento usuais, encontram-se no **REBAP**. No entanto o seu valor mais corrente situa-se entre 2,0 e 3,0.

#### 4.3 OUTROS ESTADOS LIMITES DE UTILIZAÇÃO

Além dos estados limites de fendilhação e de deformação há por vezes que considerar outros estados limites de utilização, como por exemplo os estados limites de durabilidade e de vibração, o primeiro dos quais, com experiência acumulada em obras de betão armado e pré-esforçado, tem ganho importância cada vez maior.

O tratamento da questão da durabilidade é um assunto que comporta vários aspectos. Em termos de projecto têm sido essencialmente definidas regras de protecção das armaduras, especificando espessuras de recobrimento em função da qualidade e controle do betão e da agressividade dos ambientes. Para as armaduras aderentes o assunto transcende o âmbito deste trabalho, como aliás as múltiplas questões relacionadas com a durabilidade, pelo que importa apresentar os valores de recobrimento mínimo a adoptar para as bainhas dos cabos pré-esforçados aqui tratados.

Neste caso, o recobrimento dos cabos é geralmente condicionado tendo em conta a protecção das lajes para verificar a segurança em relação à acção fogo, pelo que esta questão será retomada em 5.4.

No entanto, e na ausência de regulamentação específica, indicam-se as espessuras para os recobrimento mínimos a adoptar em lajes:

| RECOBRIMENTO EM BETÃO - ESPESSURAS MÍNIMAS (cm) |                 |             |             |
|-------------------------------------------------|-----------------|-------------|-------------|
| AMBIENTE                                        | CLASSE DE BETÃO |             |             |
|                                                 | B25             | B30,B35,B40 | B45,B50,B55 |
| Pouco Agressivo                                 | 1,5             | 1,5         | 1,5         |
| Moderadamente Agressivo                         | 2,5             | 2,0         | 1,5         |
| Muito Agressivo                                 | 3,5             | 3,0         | 2,5         |

(Adaptado de FIP / Recommendations for the design of flat slabs [9])

É de notar que a excepcional protecção conferida às armaduras não aderentes pela bainha hermética e pela valvulina lubrificante e anticorrosiva dispensa, relativamente às armaduras ordinárias, cuidados adicionais em termos de recobrimentos.

A outra questão que se levanta, diz respeito à vibração de lajes, fenómeno que assume particular importância, quando muito esbeltas. Os limites máximos para relações vão/espessura recomendados em 3.3, têm em atenção este facto. Quando aqueles limites forem ultrapassados, haverá que ter em conta o comportamento das lajes sob este ponto de vista. Devido à especificidade da questão e ao limitado interesse prático na utilização de lajes extremamente delgadas, sobretudo em pavimentos industriais, não se vê interesse no desenvolvimento do assunto, sendo certo que se trata de um problema de dinâmica para o qual a existência de armaduras não aderentes não levanta especificidades.

## 5 ESTADOS LIMITES ÚLTIMOS

Para as lajes convencionais e na maioria dos sistemas estruturais em betão armado, as condições determinantes do projecto, passam numa 1ª fase pela verificação da segurança em relação aos estados limites últimos. A verificação para os estados limites de utilização constitui uma fase complementar do cálculo, muitas vezes dispensado por adopção de regras regulamentares.

Nas lajes pós-tensionadas, como se indicou no início do capítulo 3 **CONCEPÇÃO E PROCEDIMENTOS DE CÁLCULO** a verificação da segurança para os estados limites últimos constitui, regra geral, uma fase final do cálculo.

A verificação da segurança, em relação aos estados limites últimos, para as lajes dos edifícios, não envolve em geral perda de equilíbrio ou fadiga. Nestas circunstâncias, a verificação da segurança é, normalmente, feita em termos de esforços e para estados limites de resistência.

Assim, e nestes pressupostos, as secções seguintes são dedicadas à verificação da segurança, com maior destaque para os aspectos onde a questão da não aderência dos cabos de pré-esforço assume particular importância.

### 5.1 RESISTÊNCIA À FLEXÃO

As tensões que se desenvolvem num cabo de pré-esforço para cargas próximas da rotura, dependem fundamentalmente da aderência deste com o betão. Quando há uma aderência perfeita a extensão no cabo é a mesma que no betão envolvente. Geralmente, as extensões nas armaduras são superiores às extensões correspondentes ao limite de elasticidade e são determinadas assumindo as hipóteses convencionais para a determinação do valor de cálculo dos esforços resistentes dos elementos de betão armado:

De acordo com REBAP essas hipóteses são:

- i. As secções mantêm-se planas na deformação;
- ii. O betão não resiste à tracção;
- iii. As relações tensões-extensões de cálculo, do betão e ou das armaduras passivas, são fixadas em articulado específico a partir dos valores característicos dos materiais;
- iv. A extensão máxima de encurtamento no betão é limitada a 0,35%;

v. A extensão máxima de alongamento das armaduras é limitada a 1%, valor este, contado a partir do valor da extensão correspondente ao valor característico do pré-esforço instalado.

Estas hipóteses admitem, implicitamente, que tanto as armaduras convencionais, como as de pré-esforço, sejam aderentes ao betão, de forma que a extensão das armaduras acompanha a do betão adjacente.

No caso de haver armaduras aderentes todas se mantem com excepção da primeira e da última, ambas no que diz respeito apenas ao cabo.

Desprezando o atrito, muito reduzido nos cabos não aderentes, o escorregamento da armadura dentro das bainhas, faz com que o aumento da extensão, deixe de ser localizado na secção crítica e se "distribua" por todo o comprimento do cabo. Esta situação implica que a tensão,  $f_{ps}$ , instalada no cabo, quando da rotura da secção, seja inferior à que se encontra nas armaduras aderentes.

Fundamentalmente tem-se que, numa armadura de pré-esforço não aderente, a extensão, e, conseqüentemente, a tensão não podem ser deduzidas com base na proporcionalidade do diagrama linear de extensões da secção.

O comportamento dos elementos armados, unicamente por cabos não aderentes, pode ser comparado ao de um arco atirantado de flecha reduzida. Este efeito foi observado em testes efectuados em peças isostáticas, sujeitas à flexão. No caso das lajes, elementos hiperestáticos em geral, em que o pré-esforço não é muito elevado, este efeito é menos significativo [45].

Convém referir que em termos conceptuais o estado limite de rotura é definido, convencionalmente, para valores ou parâmetros que quando ultrapassados se diz ter sido esgotada a capacidade resistente da secção. No caso das armaduras aderentes, o colapso dá-se para valores superiores aos de projecto como é evidente. Em ensaios para cargas sucessivamente crescentes, a ruína dá-se ou por cedência das armaduras aderentes ou por esmagamento das zonas comprimidas do betão, enquanto as deformações aumentam continuamente sob carga constante.

Em testes efectuados na Suíça por Thurlimann et al. em lajes quadrangulares, com cabos não aderentes, após a formação de linhas de rotura, características da formação de um mecanismo, para posteriores aumentos de carga, os modelos ensaiados responderam como um sistema estrutural diferente, análogo a uma rede de cabos. Para este novo sistema o colapso só foi atingido para cargas 3 a 4 vezes superiores às consideradas como a capacidade última de resistência à flexão [45].

Embora estes resultados tenham, em termos de cálculo, pouco interesse prático, é relevante a existência de uma reserva substancial de resistência para acções gravíticas, sem que se dê o colapso efectivo das lajes. Para tal há que ter a garantia da não cedência das ancoragens, facto que pode ser melhorado se uma grande parte dos cabos se situarem na vizinhança ou intersectem os pilares [45].

O momento resistente numa secção é igual ao produto da força interna de tensão (ou de compressão) pelo braço do binário correspondente. A profundidade da linha neutra  $x$  pode ser encontrada a partir do equilíbrio das forças resultantes dos esforços de compressão  $C$  e de tracção  $T$ ; por exemplo numa secção rectangular de largura  $b$  e considerando, para simplificação, um bloco rectangular de tensões no betão e armaduras passivas  $A_s$  e  $A'_s$  tem-se:

$$0,85 f_{cd} 0,8 x b + A'_s f'_s = A_{ps} f_p + A_s f_s \quad 5.1$$

O momento resistente é:

$$M_{rd} = A_{ps} f_p (d_p - 0,4 x) + A_s f_s (d_s - 0,4 x) \quad 5.2$$

Estas relações permitem a determinação do eixo neutro e em seguida a capacidade resistente. A dificuldade reside na determinação da tensão no cabo,  $f_{ps}$  no instante da rotura. Dedica-se a esta questão o número seguinte.

### 5.1.1 AUMENTO DE TENSÃO NOS CABOS

A questão de determinar a tensão de cálculo num cabo não aderente  $f_{ps}$  na resistência à rotura por flexão de uma secção é tratada por vários autores e recomendações estrangeiras, podendo distinguir-se 3 abordagens distintas:

- a) Não considerando qualquer aumento de tensão;
- b) Admitindo uma flecha limite para o instante da rotura;
- c) Utilizando fórmulas empíricas ou semi-empíricas.

#### a) NÃO CONSIDERANDO AUMENTO DE TENSÃO

No caso de não se considerar qualquer aumento de tensão na armadura não aderente, o momento resistente,  $M_{rd}$  pode ser determinado a partir do equilíbrio da secção, como habitualmente, partindo do valor de  $f_{ps}$  igual ao valor do pré-esforço final. No caso de  $M_{rd} < M_{sd}$  a resistência da secção deve ser complementada com armaduras passivas cuja profundidade, regra geral, é maior que a da armadura de pré-esforço.

A contribuição das armaduras aderentes dá-se regra geral, como

demonstrado por vários testes [1,3,17,36,38,45], para extensões superiores ao valor correspondente ao limite de elasticidade pelo que:

$$M_{rd} = A_p f_{ps} (d_p - 0,4x) + A_s f_{syd} (d_s - 0,4x) \quad 5.1$$

$$f_{ps} = f_{p\infty}$$

onde:

$A_p$  área da armadura de pré-esforço;

$A_s$  área da armadura passiva;

$d_p$  profundidade do centro de gravidade da armadura não aderente;

$d_s$  profundidade do centro de gravidade da armadura aderente;

$f_{p\infty}$  tensão instalada na armadura após a totalidade das perdas;

$0,4x$  distância à fibra superior do centro de gravidade do bloco rectangular simplificado de compressões no betão.

#### b) ADMITINDO UMA DEFORMAÇÃO LIMITE

Em estado limite último o cálculo de um eventual aumento de tensão, é geralmente abordado através de simples relações geométricas admitindo um valor convencional para deformação do elemento no instante convencional de rotura. Para esta situação, correspondente à formação de rótulas plásticas e consequentes mecanismos de rotura, adoptam-se flechas limites no vão que variam entre  $L/40$  a  $L/50$  [9,38].

Pode-se avaliar o aumento de tensão na armadura de pré-esforço, calculando o aumento de comprimento no cabo para acompanhar a deformação correspondente a formação do mecanismo de rotura.

Suponha-se, como se representa na figura 5.1, um elemento de vão  $l$  com um cabo de traçado parabólico de flecha  $f$  e de comprimento  $L_1$  antes da deformação<sup>1</sup>:

---

1 A expressão resulta da parametrização da equação geral da parábola

$$y = -\frac{4f}{l^2} \left( x^2 - \frac{l^2}{4} \right)$$

em que o comprimento do arco entre os pontos  $x = \pm l/2$  vem dado por:

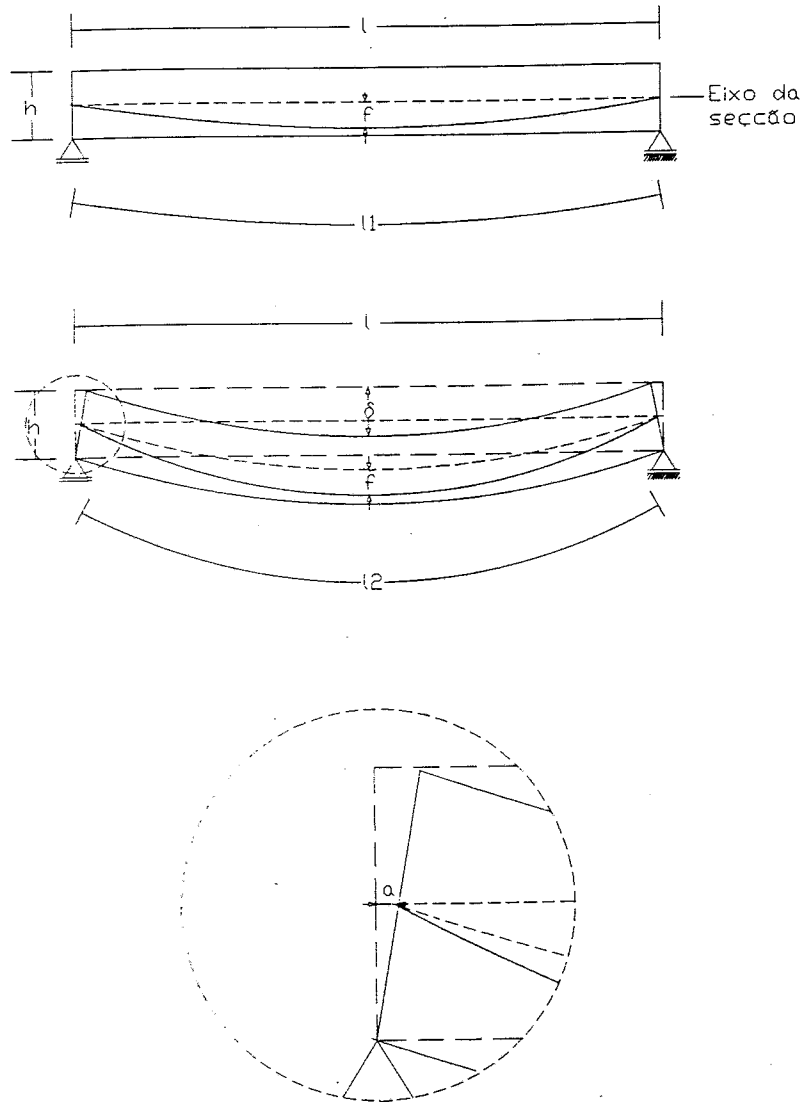
$$\int_{-l/2}^{l/2} \sqrt{1 + \frac{64f^2}{l^4} x^2} dx$$

O cálculo deste integral pode ser efectuado com suficiente aproximação, desenvolvendo a função integranda em série de Maclaurin, até à ordem 4, resultando a expressão apresentada.

$$L_1 = l \left( 1 + \frac{8f^2}{3l^2} - \frac{32f^4}{5l^4} + \dots \right)$$

donde

$$L_1 - l \approx \frac{8f^2}{3l} = \frac{2,66f^2}{l}$$



Alongamento do cabo tendo em atenção a rotação dos apoios

fig 5.1

Com a formação do mecanismo, a parábola tem uma flecha igual a  $f + \delta$ , figura 5.1 e o seu comprimento  $L_2$  será:

$$L_2 \approx l \left( 1 + \frac{8(f + \delta)^2}{3l^2} \right)$$

donde

$$L_2 - l \approx \frac{8(f + \delta)^2}{3l}$$

o aumento de comprimento  $L_2 - L_1$  pode ser escrito:

$$L_2 - L_1 \approx \frac{8(f + \delta)^2}{3l} - \frac{8f^2}{3l} = \frac{16f\delta + 8\delta^2}{3l}$$

É, ainda necessário atender ao deslocamento das ancoragens, que situadas, por exemplo, a meia altura  $h$  da laje se deslocarão, cada uma, para o interior do vão numa distância:

$$\alpha = \frac{2\delta h}{l} = \frac{h\delta}{l}$$

para

$$\delta = \frac{l}{50} \Rightarrow \alpha = \frac{h}{50}$$

o alongamento do cabo  $\Delta L$  é então:

$$\Delta L = \frac{16fl/50 + 8(l/50)^2}{3l} - \frac{2h}{50} = \frac{8f}{75} + \frac{2l}{1875} - \frac{h}{25}$$

a extensão  $\epsilon = \Delta L / L \approx \Delta L / l$  é assim calculada:

$$\epsilon = \frac{8f}{75l} + \frac{2}{1875} - \frac{h}{25l} \quad 5.2$$

Para valores correntes de  $1/120$  e  $40$  para  $f/l$  e  $l/h$ , respectivamente tem-se aproximadamente:

$$\epsilon = 8,89 \times 10^{-4} + 1,07 \times 10^{-3} - 1,0 \times 10^{-3} = 9,6 \times 10^{-4}$$

vindo então:

$$\Delta f_p = \epsilon E_p$$

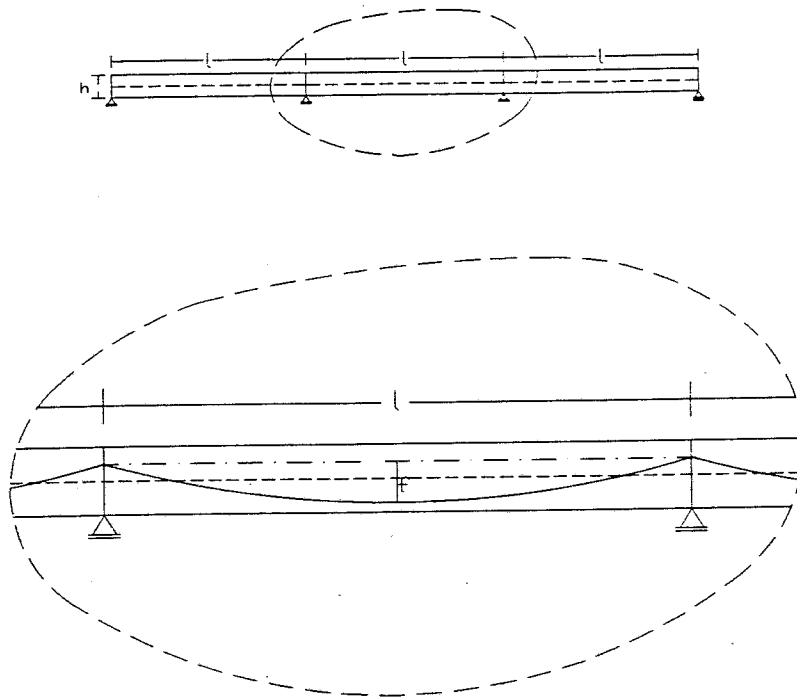
$$\Delta f_p = 200000 \times 9,6 \times 10^{-4} \approx 190 \text{ MPa}$$

ou seja, aproximadamente 14% do pré-esforço inicial tomado com o valor corrente de 1400 MPa.

Uma dedução equivalente pode ser feita para lajes com vários vãos.

Para um vão interior pode-se desprezar a parcela correspondente ao deslocamento das ancoragens nos vãos extremos, mas por outro lado o comprimento do cabo é consideravelmente maior.

Suponha-se, a título de exemplo, o caso da figura 5.2 em que os 3 vãos são iguais e que se pretende determinar o acréscimo de tensão no cabo quando no vão central a deformação limite é, como anteriormente,  $L/50$ .



Alongamento do cabo desprezando a rotação dos apoios

fig. 5.2

Admitindo agora, como é natural, que a flecha inicial do cabo seja o dobro da do caso anterior, uma vez que há excentricidade sobre os apoios, isto é,  $f/l = 1/60$  vem:

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L_{\text{ancor.}}} \approx \frac{\Delta L}{3l} = \frac{8}{75 \times 180} + \frac{2}{1875 \times 3} \approx 9,5 \times 10^{-4} \quad 5.3$$

$$\Delta f_p = \epsilon E_p$$

$$\Delta f_p = 200000 \times 9,5 \times 10^{-4} \approx 190 \text{ MPa}$$

A tensão de cálculo  $f_{ps}$  a considerar na determinação do momento resistente da secção é então dada:

$$f_{ps} = f_{pe} + \Delta f_p < \frac{f_{pyk}}{1,15}$$

A determinação do acréscimo de tensão, no cabo não aderente, assumindo uma flecha limite para a situação de rotura, é sugerida pela **FIP** nas recomendações de cálculo para lajes fungiformes publicadas em 1980 [9]. A partir desta situação pode-se, como se viu, determinar este acréscimo. Numa abordagem mais simplificada, algumas regulamentações estrangeiras adoptaram um cálculo simplificado do momento resistente limitando o acréscimo de tensão no cabo. A norma alemã **DIN 4227** [4] permite um cálculo simplificado do momento resistente último através da expressão:

$$f_{ps} = f_{pe} + \Delta f_p = f_{pe} + 137 \text{ MPa} < f_{p1\%}$$

Por outro lado **Fuentes, Albert** refere que na regulamentação francesa **B.P.E.L.** o acréscimo de tensão é limitado a 150 MPa, embora segundo várias regulamentações estrangeiras este aumento pode atingir 200 MPa [29].

Para os aços correntemente utilizados, nestes cabos, este acréscimo:

$$\frac{\Delta f_p}{\Delta f_p + f_{pe}}$$

tomando  $f_{pe} \approx 0,75 \times 0,75 f_{puk}$  varia, para  $f_{puk} = 1750 \text{ MPa}$  e  $\Delta f_p = 200 \text{ MPa}$  ou para  $f_{puk} = 1900 \text{ MPa}$  e  $\Delta f_p = 150 \text{ MPa}$  aproximadamente entre 12% e 17%.

### c) UTILIZANDO FÓRMULAS EMPÍRICAS OU SEMI-EMPÍRICAS

A determinação da tensão nas armaduras não aderentes no instante da rotura tem sido objecto de diversos estudos e testes [1,3,11,17,19]. Dos resultados obtidos, tem sido propostas diversas fórmulas para o valor  $f_{ps}$ .

Das principais conclusões que se têm obtido, são de salientar os seguintes parâmetros, mais determinantes, na capacidade resistente dos elementos sujeitos à flexão [1,3]:

1. O valor efectivo do pré-esforço instalado;
2. A relação vão/espessura;
3. As características dos materiais usados nos elementos;
4. O tipo de "carga", isto é, a forma do diagrama dos

momentos flectores;

5. O traçado geométrico ou perfil dos cabos;

6. O atrito entre a armadura e a bainha;

7. A percentagem de armaduras passivas aderentes.

### 5.1.1.1 REGULAMENTAÇÃO AMERICANA (ACI)

Tem sido verificado nos diversos ensaios efectuados que a relação vão/espessura dos elementos é um dos parâmetros mais determinantes pelo que o código **ACI**, apresenta duas expressões para o cálculo da tensão nas armaduras não aderentes, conforme aquela relação:

elementos em que  $l/h \leq 35$ :

$$f_{ps} = f_{pe} + 70 \frac{f'_c}{100\rho_p} \text{ MPa}$$

$$f_{ps} < f_{py}$$

$$f_{ps} < f_{pe} + 410 \text{ MPa}$$

5.4

elementos em que  $l/h > 35$ , caso mais frequente ns lajes:

$$f_{ps} = f_{pe} + 70 \frac{f'_c}{300\rho_p} \text{ MPa}$$

$$f_{ps} < f_{py}$$

$$f_{ps} < f_{pe} + 205 \text{ MPa}$$

5.5

nestas equações:

$\rho_p$  é a percentagem geométrica da armadura de pré-esforço;

$f_{pe}$  é o valor médio, da tensão instalada após a totalidade das perdas, ao longo do elemento nas zonas de momentos negativos e positivos;

$f'_c$  tensão característica de rotura do betão à compressão referida a provetes cilíndricos;

Na presença de armaduras passivas considera-se que esta, quando do lado das tracções, contribui para a resistência actuando com uma tensão constante igual à tensão de cedência  $f_y$ .

Para elementos com secção rectangular (ou secções em T ou I, onde

a profundidade do bloco de compressões se situa no banzo) o momento de cálculo  $M_{rd}$  é igual a:

$$M_{rd} = \phi \left( A_p f_{ps} \left( d_p - \frac{a}{2} \right) + A_s f_y \left( d_s - \frac{a}{2} \right) \right)$$

onde:

$\phi = 0,9$  (factor de redução de resistência)<sup>1</sup>;

$$a = \frac{A_{ps} f_{ps} + A_s f_y}{0,85 f'_c b}$$

Para os casos em que  $a > h_f$ , espessura do banzo das secções I ou T, a força total de compressão é dividida em 2 partes. A primeira, correspondente à compressão nas duas metades do banzo salientes da espessura da alma, figura 5.3, é equilibrada por uma parcela:

$$A_{pb} f_{ps} = 0,85 f'_c (b - b_w) h_f$$

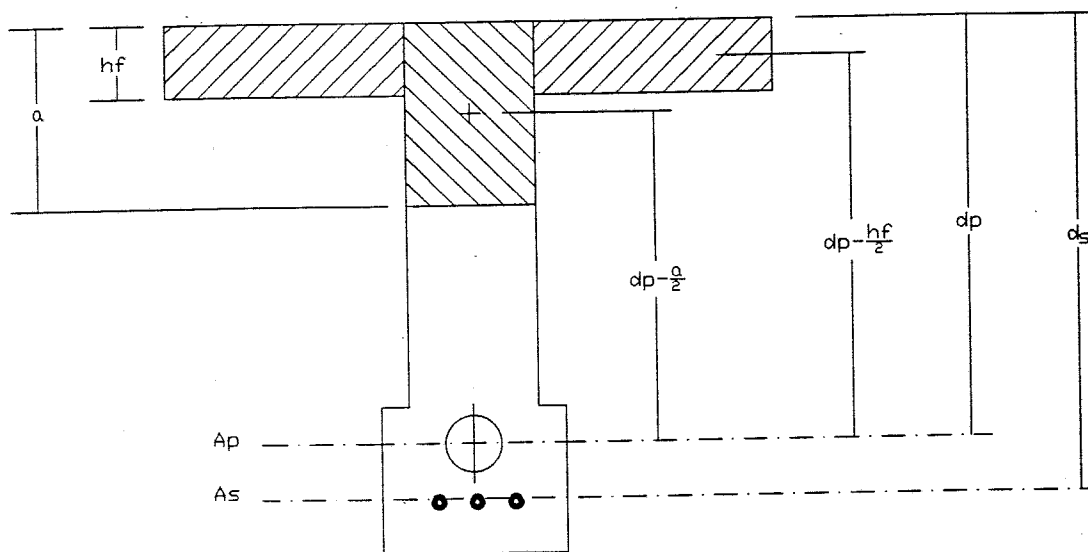


fig. 5.3

A esta força de compressão corresponde um momento cujo braço tomado em relação ao centro da armadura de pré-esforço é  $(d_p - h_f/2)$ . A restante parte da força de tensão nas armaduras é equilibrada pela compressão

<sup>1</sup> A filosofia de segurança do ACI é diferente da europeia. Utilizam-se aqui as expressões do ACI, sugerindo-se no final a respectiva conversão.

do betão correspondente à área central do banzo e a uma parte da alma,  $A_{pa} f_{ps}$ , de maneira que:

$$A_{pa} f_s = A_p f_{ps} + A_s f_y - A_{pb} f_{ps}$$

A força de compressão na alma, igual a esta quota parte da força total de tensão tem um braço, medido em relação ao centro da armadura de pré-esforço, igual a  $(d_p - \alpha/2)$  onde:

$$\alpha = \frac{A_{pa} f_{ps}}{0,85 f'_c b_w}$$

O momento de cálculo resistente é então dado tomando as forças resistentes em relação ao centro da armadura de pré-esforço:

$$M_{rd} = \phi \left( A_{pa} f_{ps} \left( d_p - \frac{\alpha}{2} \right) + A_s f_y (d_s - d_p) + A_{pb} f_{ps} \left( d_p - \frac{h_f}{2} \right) \right)$$

Estas equações podem ser adaptadas, não considerando o factor de redução  $\phi$  e considerando os valores de cálculo definidos no REBAP para as tensões de rotura do betão e das armaduras passivas, substituindo-se nas expressões apresentadas:

$f'_c$  por  $f_{cd}$

$f_{py}$  por  $f_{pyd} = f_{py} / 1,15$

$f_y$  por  $f_{syd}$

$\phi = 0,9$  por  $\phi = 1$

### 5.1.1.2 REGULAMENTAÇÃO INGLESA (BS)

Um método aproximado para obter o momento resistente das secções, foi deduzido de acordo com as hipóteses habitualmente admitidas, já referidas no início da secção 5.1, mas que para atender à não aderência das armaduras têm em consideração as seguintes novas hipóteses:

- i. Os elementos pré-esforçados com cabos não aderentes permanecem em regime elástico excepto numa zona de plastificação, compreendendo a secção crítica;
- ii. A extensão do betão ao nível das armaduras traccionadas e nas zonas elásticas é desprezável quando comparada com a da zona plastificada;
- iii. A eventual variação de tensão por atrito entre a armadura e a bainha é desprezada;

iv. O alongamento das armaduras de pré-esforço é igual ao alongamento da zona plastificada tomada com comprimento igual a 10 vezes a profundidade da linha neutra. A este alongamento corresponde uma distribuição uniforme de extensões por todo o comprimento do cabo.

Estas hipóteses são admitidas com base em vários testes referenciados por Rowe, R.E. em [18], efectuados em elementos com várias características e relações vão/espessura<sup>1</sup>

Assim, a extensão,  $\epsilon_{ps}$ , na armadura não aderente pode ser deduzida:

$$\epsilon_{ps} = \epsilon_{pe} + 0,0035 \frac{(d_p - x)}{x} 10 \frac{x}{L} = \epsilon_{pe} + 0,035 \frac{d_p}{L} \left( 1 - \frac{x}{d_p} \right)$$

a correspondente tensão no cabo vem dada por:

$$f_{ps} = f_{pe} + (0,035 E_p) \left( 1 - \frac{x}{d_p} \right) \frac{d_p}{L}$$

onde:

$x$  profundidade da linha neutra;

$L$  comprimento do cabo entre ancoragens;

$\epsilon_{pe}$  extensão no cabo correspondente à tensão  $f_{pe}$  definida da mesma forma que na regulamentação americana;

$E_p$  módulo de elasticidade do aço das armaduras de pré-esforço;

$d_p$  profundidade da armadura de pré-esforço.

A norma Inglesa BS8110, apresenta duas expressões que permitem determinar aproximadamente o momento resistente e a profundidade da linha neutra numa secção considerando:

$$f_{ps} = f_{pe} + (0,035 E_p) \left( 1 - \frac{x}{d_p} \right) \frac{d_p}{L} \leq 0,7 f_{pu}$$

$$\text{fazendo } 0,85 f_{cd} \approx 0,45 f_{cu}$$

em que  $f_{cu}$  é a resistência característica do betão referida a provetes cúbicos e considerando um bloco rectangular de tensões de altura igual a  $0,9x$  vem:

$$A_p f_{ps} = 0,45 f_{cu} b (0,9x)$$

<sup>1</sup> Refere-se que em testes efectuados por Tam, A. e Pannel, F.N. [17], o valor médio encontrado para o comprimento da zona plastificada foi de  $10,4x$ .

equação que pode ser escrita na seguinte forma:

$$x = 2,47 \left( \frac{f_{pu} A_p}{f_{cu} b d_p} \right) \left( \frac{f_{ps}}{f_{pu}} \right) d_p = 2,47 \frac{A_p f_{ps}}{b f_{cu}} \quad 5.6$$

substituindo o valor de  $x$  na equação anterior e tomando  $E_p = 200$  GPa e como aproximação  $f_{ps}/f_{pu} \approx 0,7$  vem:

$$f_{ps} = f_{pe} + \frac{7000}{L/d_p} \left( 1 - 1,7 \frac{f_{pu} A_p}{f_{cu} b d_p} \right) < 0,7 f_{pu} \quad 5.7$$

Estas expressões para o cálculo de  $x$  e de  $f_{ps}$  encontram-se na norma Inglesa, não podendo o valor da tensão no cabo ultrapassar  $0,7 f_{pu}$ .

O momento resistente de cálculo  $M_{rd}$  é dado para secções rectangulares por:

$$M_{rd} = A_p f_{ps} \left( d_p - \frac{x}{2} \right)$$

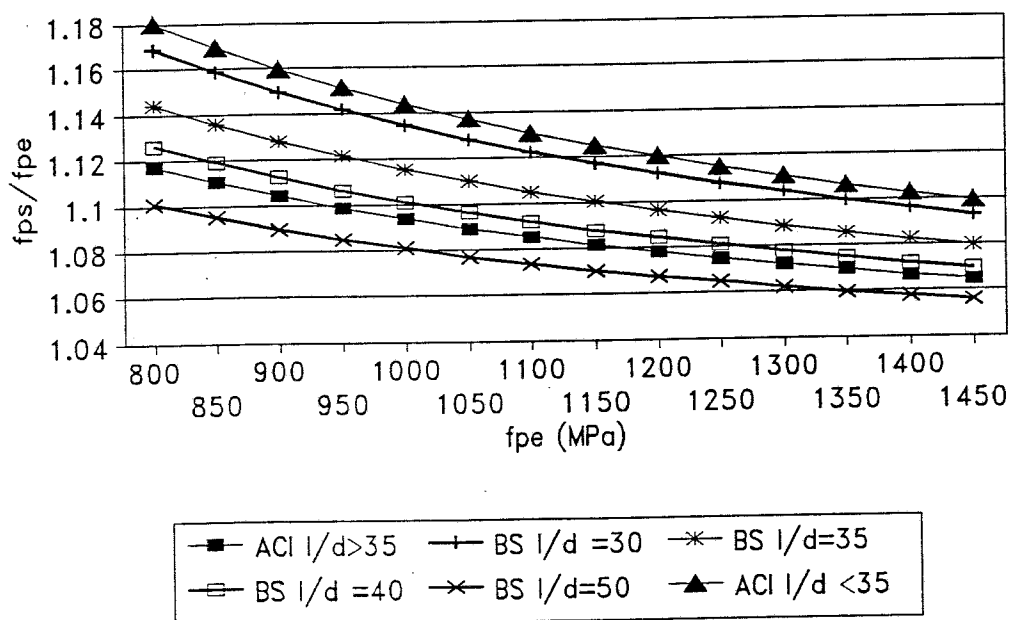
A contribuição de armaduras não aderentes pode ser avaliada pelos procedimentos usuais; Rowe, R.E. refere que para armaduras com uma tensão característica de rotura de 460 MPa e para profundidades da linha neutra  $x \leq 0,636 d_p$  se atinge em geral as tensões de cedência.

### 5.1.2 COMPARAÇÃO ENTRE AS VÁRIAS ABORDAGENS

Tem interesse comparar a tensão nos cabos não aderentes quando se utilizam as expressões Americanas ou as Inglesas. Verifica-se de uma forma geral uma grande compatibilidade de valores, encontrando-se, como era de esperar, aumentos de tensão, quando a relação  $l/d$  diminui e quando a tensão instalada  $f_{pe}$  é menor.

O gráfico que se apresenta, a título de exemplo, ilustra a relação  $f_{ps}/f_{pe}$  para vários valores de  $l/d$  e  $f_{pe}$ . Neste caso considerou-se um betão B35 e um aço cuja tensão característica de rotura  $f_{puk} = 1860$  MPa tem uma percentagem geométrica de 0,4%.

$A_p/bd = 0.4\%$   $f_{puk} = 1860$  MPa  
Betão B35



Os valores encontrados na secção 5.1.1 através de considerações geométricas situam-se próximo dos referidos por aquelas normas.

## 5.2 ESFORÇOS TRANSVERSOS E PUNÇOAMENTO

A não aderência dos cabos de pré-esforço não levanta quaisquer especificidades na determinação da capacidade resistente em relação à resistência aos esforços transversos e ao punçoamento. Ainda assim referem-se sucintamente as regras aplicáveis ao pré-esforço em geral.

A verificação da resistência aos esforços transversos e punçoamento, efectuada apenas para os estados limites últimos, deve ser sempre efectuada tendo em atenção que:

i. Em lajes com linhas de apoio contínuas, vigas ou paredes, a verificação ao punçoamento só tem cabimento quando a laje se encontra sujeita a cargas concentradas importantes. Nos casos correntes, basta uma simples verificação dos valores de cálculo dos esforços transversos actuantes e resistentes.

ii. A verificação ao punçoamento é normalmente determinante nas lajes fungiformes; para cargas uniformemente distribuídas as reacções de apoio nos pilares para cargas últimas definem uma superfície de rotura, inclinada, que depende especialmente das dimensões em planta e da localização dos pilares.

O articulado do REBAP, apresenta as regras de determinação dos valores de cálculo do esforço transverso resistente e do esforço resistente de punçoamento, artigos 53º e 54º. D'Arga e Lima, *et. al.*, numa publicação relativamente recente [48] vem complementar algumas das questões que são tratadas no REBAP de forma sucinta.

Nesta publicação encontram-se adequadamente explicadas e pormenorizadas as questões relacionadas com a determinação dos esforços resistentes de punçoamento e transversos, fazendo uso das mais recentes orientações e expressões preconizadas pelo CEB, pelo que não se considera necessário, fazer aqui, um desenvolvimento destas questões.

Importa, sim, abordar duas questões que mais directamente se prendem com as lajes pré-esforçadas, que são, o efeito favorável, da compressão e o da componente vertical do pré-esforço com cabos inclinados nas zonas críticas.

#### a) CONTRIBUIÇÃO DA PRÉ-COMPRESSÃO PARA OS ESFORÇOS RESISTENTES

Na definição do esforço transverso resistente,  $V_{Rd}$  a expressão geral toma a seguinte forma:

$$V_{Rd} = V_{cd} \left( 1 + \frac{M_o}{M_{Sd}} \right) + V_{wd} \quad \frac{M_o}{M_{Sd}} < 1 \quad 5.8$$

nesta expressão:

$M_o$  é o momento de descompressão na secção em estudo;

$M_{Sd}$  é o momento de cálculo actuante na mesma secção;

os outros termos tem o significado habitual conhecido.

O momento de descompressão é o momento que aplicado à secção, anularia a tensão de compressão resultante do esforço normal actuante de cálculo devido ao pré-esforço considerado com o seu valor final, calculado na fibra extrema da secção

que, por acção exclusiva de  $M_{sd}$ , ficaria traccionada.

Para cálculo do momento de descompressão, admite-se comportamento elástico perfeito dos materiais e considera-se o betão em fase não fendilhada pelo que:

$$M_0 = \sigma_m W$$

onde:

$\sigma_m$  é o pré-esforço médio instalado a longo prazo;

$W$  é o módulo de flexão da secção.

Para secções rectangulares tem-se:

$$M_0 = \sigma_m \frac{bh^2}{6}$$

Nos casos em que:

$$V_{sd} \leq 0,6(1,6-d)V_{cd} \left( 1 + \frac{M_0}{M_{sd}} \right)$$

é dispensada a existência de armaduras mínimas de esforço transversal, devendo o factor  $(1,6-d)$ , com  $d$  expresso em metros, ser tomado inferior à unidade.

Na determinação do valor de cálculo do esforço resistente de punção  $v_{Rd}$  tem-se que:

$$v_{Rd} = \eta \tau_1 d \left( 1 + \frac{M_0}{M_{sd}} \right)$$

$$\eta = (1,6-d) > 1 \qquad \frac{M_0}{M_{sd}} < 1 \qquad 5.9$$

na determinação do factor  $\eta$ ,  $d$  deve ser igualmente expresso em metros.

## b) EFEITO DA COMPONENTE VERTICAL DO PRÉ-ESFORÇO NOS CABOS INCLINADOS

Quando um cabo inclinado atravessa o perímetro crítico de corte a componente vertical dos cabos transfere uma determinada parte das cargas através deste perímetro sem que o betão participe nesta transferência.

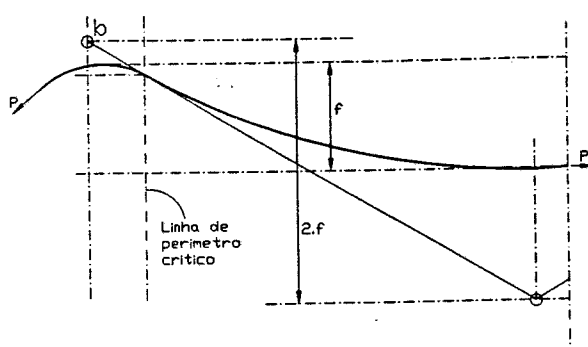


fig. 5.4

O traçado geométrico mais correntemente utilizado, é, como se ilustra na figura 5.4, parabólico com um ponto de inflexão, onde a inclinação é maior e, muitas vezes, praticamente coincidente com o alinhamento do perímetro crítico.

É pois, uma questão simples, determinar a carga que cada cabo, ao atravessar o perímetro crítico, transfere directamente ao apoio.

Com referência à figura 5.4 tem-se:

$$V_P = P \sin \left( \arctan \left( \frac{2f}{l/2} \right) \right) \approx P \frac{4f}{l} \quad 5.10$$

onde:

$V_P$  é a parcela transferida pelo cabo onde se toma o pré-esforço com o seu valor final;

$f$  é a flecha geométrica do cabo do pré-esforço no vão;

$l$  é o vão da laje.

Os valores actuates de cálculo, do esforço transversal ou da força de punçoamento, podem ser corrigidos, tendo em atenção o número de cabos que atravessam o perímetro de corte, deduzindo-lhes a parcela correspondente à componente vertical do pré-esforço, em que  $\gamma_p = 1$ , já que se trata de uma acção permanente favorável:

$$V_{Sd, corrig.} = V_{Sd} - \gamma_p V_P \quad 5.11$$

### 5.3 TENSÕES A ABSORVER NAS ANCORAGENS

As zonas das lajes onde as ancoragens transmitem o pré-esforço estão sujeitas a forças concentradas importantes, devendo por isso ser objecto de verificações específicas.

O REBAP, nos seus artigos 138º a 141º, estipula as regras e condições a

satisfazer nos casos em que as forças actuam numa só face segundo a normal a esta e com distribuição sensivelmente uniforme na zona directamente carregada.

A segurança é garantida tendo em conta dois aspectos distintos:

- a limitação da pressão local exercida no betão;
- a colocação de armaduras para fazer face às tensões de tracção transversais a que as forças concentradas dão origem.

### 5.3.1 VERIFICAÇÃO DA PRESSÃO LOCAL NO BETÃO

A segurança em relação ao esmagamento do betão, é um aspecto que no caso das lajes pré-esforçadas por cabos não aderentes, assume particular importância, uma vez que da fixação das ancoragens depende fundamentalmente a garantia do pré-esforço para toda a vida e ao longo de toda a estrutura, ao contrário do pré-esforço aderente em que a eventual cedência da ancoragem posterior à injeccção pode não acarretar quaisquer consequências.

A qualidade do betão, ou melhor da betonagem na zona envolvente das ancoragens, deve ser especialmente observada, de forma a evitar vazios, ninhos de brita, ou outros inconvenientes, que ponham em causa a resistência à compressão do betão.

Segundo o REBAP, (art. 139º) a condição de verificação local de compressão é:

$$F_{Sd} \leq p_{cRd} A_0 \quad 5.12$$

onde:

$F_{Sd}$  - valor de cálculo da força concentrada;

$p_{cRd}$  - valor de cálculo da pressão local a que o betão pode resistir;

$A_0$  - área sobre a qual se exerce directamente a força, ou seja, a área da placa de transmissão da ancoragem.

Interessa que esta condição de segurança seja efectuada para o instante da aplicação do pré-esforço, considerado-o portanto, com o seu valor total, isto é,  $P_0$ , sem dedução de quaisquer perdas. Virá então, atendendo aos coeficientes de segurança do artº 47.2 do REBAP, que:

$$F_{Sd} = \gamma_p P_0 = 1,35 P_0 \quad 5.13$$

Por outro lado tem-se que:

$$p_{cRd} = \frac{f_{ck,j}}{1,5} \sqrt{\frac{A_1}{A_0}} \quad p_{cRd} < 2,2 f_{ck,j}$$

onde:

$A_1$  - maior área delimitada por um contorno fictício contido no contorno da peça e com o mesmo centro de gravidade de  $A_0$ ; no caso de várias forças, as respectivas áreas  $A_1$  não devem sobrepor-se. (No caso das lajes maciças, as ancoragens, geralmente rectangulares, encontram-se centradas, tomando esta área um valor, a cuja altura máxima corresponde a espessura da laje,  $e$ , a largura mínima a da ancoragem.);

$f_{ck,j}$  - valor característico da tensão de rotura do betão à compressão, referido a provetes cilíndricos, determinado para a idade  $j$  no instante em que o pré-esforço é aplicado.

### 5.3.2 TENSÕES DE TRACÇÃO A ABSORVER

As placas das ancoragens transmitem o pré-esforço numa área concentrada originando tensões localizadas elevadas que se dispersam por um determinado comprimento. Ao longo deste comprimento, dito de regularização ou de transmissão, surgem tensões transversais de tracção significativas, segundo as direcções perpendiculares ao cabo.

Se as ancoragens estão localizadas em zonas relativamente delgadas é indispensável dispôr de armaduras passivas para absorver estes esforços de tracção.

Segundo o artigo 140º do REBAP devem ser dispostas armaduras em planos normais à direcção de actuação da força e segundo as duas direcções ortogonais. As forças de tracção a absorver são dadas pela expressão:

$$F_{t1, sd} = 0,3 F_{sd} \left( 1 - \frac{\alpha_0}{\alpha_1} \right)$$

ou da mesma forma que na secção anterior,

$$F_{sd} = \gamma_p P_0 = 1,35 P_0.$$

$$F_{t1, sd} \approx 0,4 P_0 \left( 1 - \frac{\alpha_0}{\alpha_1} \right) \quad 5.14$$

Nestas expressões  $\alpha_0, \alpha_1$  são as dimensões, para cada direcção considerada, das áreas  $A_0$  e  $A_1$  definidas na secção anterior.

Em cada direcção, a secção de armadura,  $A_s$ , deve ser determinada pela expressão:

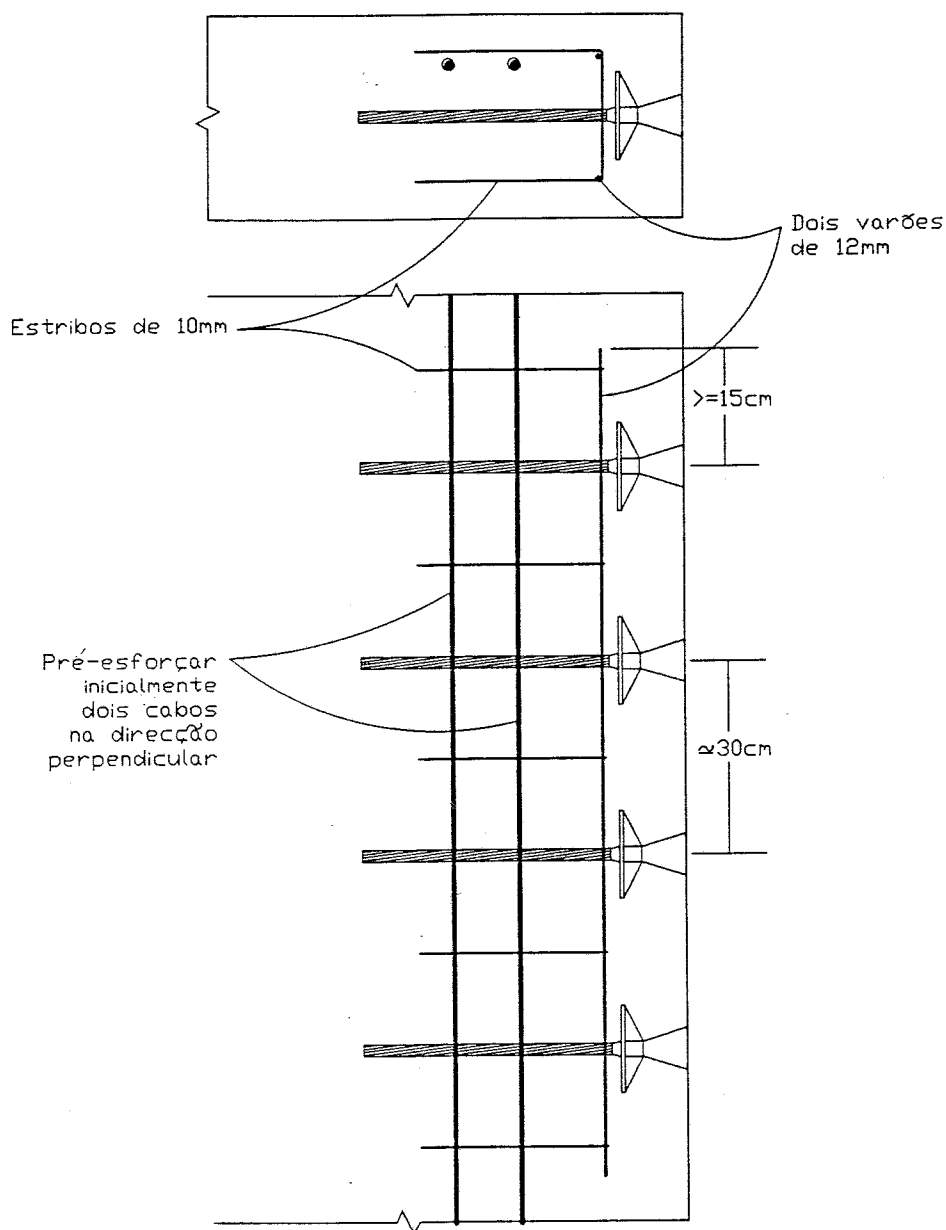
$$A_s = \frac{F_{t1, Sd}}{f_{syd}} \qquad f_{syd} \leq 270 \text{ MPa}$$

As regras para a distribuição destas armaduras encontram-se definidas nos artigos 140º do REBAP, devendo, em cada direcção, ficar contidas num prisma de base  $A_1$  e altura  $\alpha_1$  e ser repartidas em profundidade, entre as cotas  $0,1\alpha_1$  e  $0,4\alpha_1$ .

Quando as forças concentradas se distribuem ao longo de uma dimensão do elemento de modo que as suas linhas de acção passem pelo centro de gravidade das zonas correspondentes ao diagrama de tensões normais, caso mais corrente nas lajes, bastará considerar prismas elementares relativos a cada força, os quais terão larguras iguais às larguras daquelas zonas (artigo 141.4).

Por interessarem directamente os elementos pré-esforçados por cabos não aderentes transcrevem-se de [36] as recomendações do PTI baseadas em testes efectuados na Universidade do Texas (Austin).

*"As zonas de ancoragem e onde se utilizam betões de densidade normal, quando se agrupam 6 ou mais cabos não aderentes de 1/2" de diâmetro e em que a distância entre ancoragens é inferior ou igual a 12" (30 cm), devem ser armadas de acordo com a figura 5.5 ou de uma forma idêntica utilizando estribos fechados.*



Disposição de armaduras mínimas na zona das ancoragens  
(Recomendação do PTI)

fig. 5.5

*Uma armadura equivalente deve ser utilizada para as ancoragens que se situem a uma distância inferior ou igual a 12" (30 cm) dos cantos da laje.*

*Pelo menos 2 dos cabos junto a cada um dos bordos das lajes e perpendiculares à direcção dos cabos agrupados, devem ser tensionados antes da*

*aplicação do pré-esforço nos cabos agrupados, de forma a pré-comprimir transversalmente as zonas das ancoragens passivas e activas correspondentes aos cabos agrupados.*

Os testes referidos, foram efectuados quando o betão apresentava uma resistência à compressão entre 17 e 20 MPa, utilizando cabos cuja tensão mínima de rotura é de aproximadamente 1860 MPa e cujo diâmetro nominal é de 1/2". Para diâmetros maiores, isto é, 0,6" (15 mm) ou para betões com resistência inferior, a quantidade e espaçamento das armaduras deverá ser convenientemente ajustada para ter em conta o correspondente aumento nas forças concentradas ou para atender a valores inferiores da resistência do betão [36].

#### 5.4 RESISTÊNCIA AO FOGO

A verificação da segurança das estruturas de betão armado e pré-esforçado em relação à acção do fogo não constam ainda da regulamentação portuguesa. No entanto, na linha de orientação do CEB, Guedes Coelho, A. em 1986 [41] e recentemente, o LNEC [51], publicaram trabalhos onde a questão está pormenorizadamente tratada e onde se podem encontrar meios e processos de simples aplicação que permitem a verificação da segurança para alguns dos casos mais frequentes.

Torna-se porém necessário, referir, embora em linhas gerais, a filosofia da verificação da resistência ao fogo de elementos de construção:

Os parâmetros que permitem qualificar os elementos de construção, sob este ponto de vista, têm directamente a ver com três funções distintas:

- i. A estabilidade ao fogo, que consiste na aptidão de um elemento manter a função mecânica, como elemento estrutural resistente.
- ii. A função de para-chamas, que consiste na aptidão que se exige aos elementos que se opõem à propagação do fogo e dos gases de combustão.
- iii. A função de corta-fogo, aplicável aos elementos que além de para-chamas devem garantir um certo isolamento térmico.

Atendendo a cada uma destas funções os elementos classificam-se em três classes de resistência ao fogo, classes: EF (estabilidade ao fogo), PC (para-chamas) e CF (corta fogo). Dentro de cada classe, são ainda definidos vários escalões de tempo, conforme o tempo, em minutos, durante o qual satisfazem as exigências próprias.

Os critérios de esgotamento da capacidade resistente, de estanquidade às chamas e aos gases e de isolamento térmico encontram-se definidos [49], bem como o regime de temperaturas a seguir nos ensaios<sup>1</sup>.

A consideração da resistência, isto é, da estabilidade ao fogo, é definida para que, uma estrutura ou um elemento desta, tenha capacidade resistente suficiente para as acções, incluindo as temperaturas, cargas e deformações impostas, durante um determinado período de tempo de exposição.

Em certos casos poderá ser necessário, considerar o aspecto da reutilização ou da possibilidade de reparação dos danos causados, pelo que medidas de segurança especiais terão que ser consideradas no projecto. Por vezes as exigências em termos de estados limites são aumentadas de forma a implicitamente assegurar a reparabilidade e ou a reutilização de um edifício. Esta questão pode eventualmente ser quantificada com respeito a uma definição de limitação das avarias [49].

As lajes dos edifícios, de uma forma geral, devem apresentar características que satisfaçam cumulativamente os três requisitos, situação que não se põe no caso das vigas ou dos pilares em que só o critério de resistência é considerado, ou, no caso de paredes divisórias em que este último não é aplicável.

Para resolver o problema da verificação da segurança será necessário determinar por via experimental ou analítica o comportamento da laje, ou de uma estrutura, em termos dos parâmetros em que são expressos os estados limites relativos a cada uma destas funções ou requisitos.

Note-se contudo e finalmente, que a verificação da segurança pode ser substituída pela satisfação de regras práticas, que foram estabelecidas de modo a satisfazer os critérios formais da verificação da segurança [49,51].

A especificidade das armaduras não aderentes, embora com algumas particularidades, não levanta diferenças significativas, podendo os critérios gerais de segurança ser adoptados, seguindo a linha de orientação e tendo em conta os principais aspectos de verificação da segurança para os elementos com armaduras aderentes [14,20,30,36].

---

<sup>1</sup> Quanto ao regime de crescimento de temperatura adopta-se a curva de temperatura da norma ISO 834 - temperatura normalizada, dada pela expressão:

$$T = T_0 + 345 \log(8t + 1)$$

em que:

$t$  - tempo em minutos;

$T_0$  - temperatura inicial em graus Celsius;

$T$  - temperatura no instante  $t$  em graus Celsius.

Assim, pode-se abordar esta questão de acordo com as disposições existentes para as armaduras aderentes, mas tendo presente, quando necessário, a particularidade dos cabos em causa.

#### **5.4.1 RESULTADOS E RECOMENDAÇÕES DE EXPERIÊNCIAS BELGAS**

Faz-se aqui referência a uma série de ensaios efectuados em 9 modelos representativos de lajes fungiformes, em que a deformação axial não se encontrava impedida, todos com espessura de 18 cm, pré-esforçados por cabos não aderentes, reforçados com diferentes percentagens de armaduras passivas e utilizando betões com diferentes inertes, siliciosos e calcáreos.

Estes testes foram realizados na Bélgica, na Universidade de Ghent, seguindo as normas nacionais e de acordo com a norma ISO 834. Dos seus resultados e da análise efectuada concluiu-se fundamentalmente que não é suficiente prescrever espessuras de recobrimento dos cabos para garantir uma determinada classe de resistência ao fogo<sup>1</sup> [32].

---

<sup>1</sup> Segundo se refere o problema envolve mais parâmetros, devendo ser analisado de uma forma integrada abrangendo simultaneamente o desempenho e comportamento do betão, das armaduras passivas e dos cabos.

Desse trabalho extraem-se as principais recomendações que se consideram de interesse prático:

### RECOMENDAÇÕES PARA RECOBRIMENTOS E ARMADURAS PASSIVAS

| Classe de Resistência ao fogo            | 30 min. | 60 min. | 90 min. | 120 min. | 180 min. |
|------------------------------------------|---------|---------|---------|----------|----------|
| Recobrimento do cabo                     | 2 cm    | 3 cm    | 4 cm    | 5 cm     | 6 cm     |
| % de armaduras passivas na face inferior | 0%      | 0,1%    | 0,1%    | 0,2%     | 0,2%     |

Estas espessuras de recobrimento são aplicáveis em lajes maciças desde que as armaduras passivas não estejam em contacto com os cabos. As armaduras passivas devem ser distribuídas nas duas direcções por toda a superfície inferior das lajes e o seu recobrimento deve situar-se entre 1,5 cm e 2,5 cm.

Recomenda-se também a disposição de armaduras passivas superiormente nas zonas dos apoios e numa distância de 1/4 do vão para cada lado destes. A secção destas armaduras pode ser livremente arbitrada.

Nas armaduras passivas, devem ser utilizados varões de pequeno diâmetro e quando a distância destes aos cabos for pequena deve-se interpôr um isolante à base de amianto para evitar o seu contacto. A qualidade do aço utilizado não é um factor importante.

Como aproximação para a avaliação da classe de resistência ao fogo de lajes fungiformes com cabos não aderentes e cuja espessura seja de 18 cm é proposta, no trabalho referido, a seguinte expressão:

$$RF = 9,3\alpha + 55\rho - (0,1\alpha^2 + 0,8\rho\alpha + 149)$$

em que:

$RF$  = Resistência ao fogo em minutos;

$\alpha$  = recobrimento do cabo não aderente em milímetros de betão;

$\rho$  = valor em percentagem, da armadura passiva na face inferior da laje a meio vão.

Em virtude de não haver resultados para outras espessuras a fórmula

apresentada não é aplicável senão para este valor de 18 cm, e quando as armaduras passivas não estão em contacto com os cabos. A sua apresentação aqui tem como finalidade fornecer uma indicação quanto a esta questão.

#### 5.4.2 DETERMINAÇÃO POR VIA ANALÍTICA DA SEGURANÇA EM RELAÇÃO AO FOGO

Não há, como já referido, diferenças notáveis nos princípios de cálculo da capacidade resistente das secções para uma dada classe de resistência ao fogo, quer se trate de armaduras com cabos aderentes ou sem injeção.

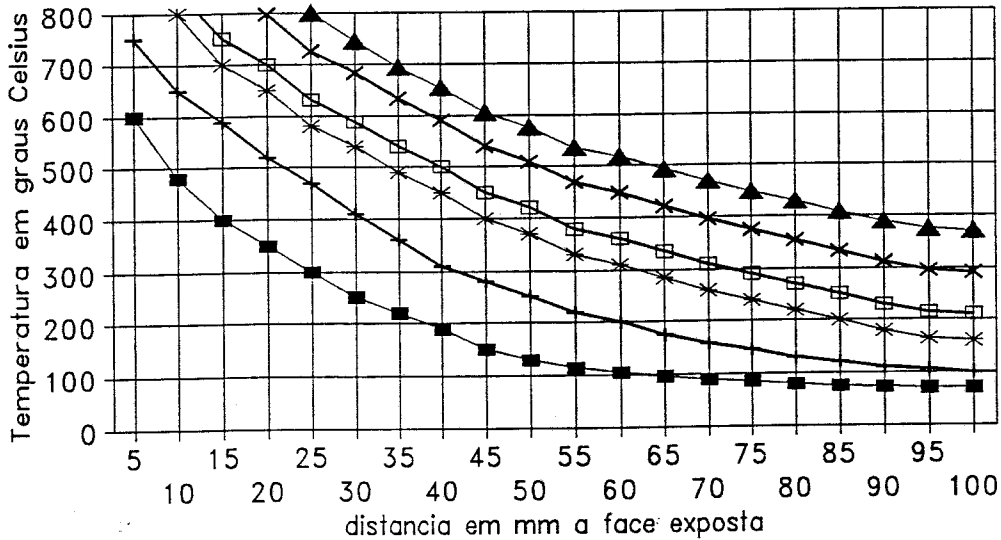
As principais etapas destes cálculos podem ser sumariamente enunciadas:

- i. Fixação da classe de resistência ao fogo;
- ii. Cálculo da temperatura no betão e nas armaduras passivas e activas, resultantes da aplicação do fogo normalizado ISO;
- iii. Definição da secção de betão resistente, tendo em conta que o betão exposto a temperaturas superiores a 500°C, não comparticipa na resistência;
- iv. Determinação da tensão limite para os aços em função da temperatura;
- v. Determinação da resistência à compressão do betão em função da temperatura;
- vi. Cálculo do momento resistente da secção considerada, que deverá ser igual ou maior ao momento actuante de cálculo.

Para a determinação do momento resistente os coeficientes de segurança relativos aos materiais,  $\gamma_m$ , devem ser tomados iguais a 1,2 e 1,0 para o betão e para o aço respectivamente [41].

Como acção de acidente, a acção do fogo é tomada com o seu valor nominal, pelo que para a determinação do momento actuante, as acções devem ser combinadas tomando, as acções permanentes e a acção variável de base com os seus valores característicos e as restantes acções variáveis com os seus valores quase-permanentes,  $\psi_2 Q_k$ .

Para a determinação das temperaturas no betão e nos aços, reproduz-se um gráfico que permite encontrar aquelas temperaturas em função da duração do fogo e da distância à face exposta, para betões de densidade normal ( $24 \text{ kN/m}^3$ ).

DISTRIBUICAO DA TEMPERATURA  
NO INTERIOR DE LAJES DE BETÃO

As propriedades mecânicas dos materiais, nomeadamente as resistências à compressão do betão e da resistência à tracção dos aços, são afectadas de modo significativo. Na bibliografia que se tem vindo a referenciar sobre este assunto [20,36,41,49,50,51] encontram-se gráficos que permitem relacionar com a temperatura estas resistências. Trata-se de curvas que representam coeficientes de enfraquecimento, ou seja, da relação entre a resistência à compressão do betão à temperatura  $\theta$  e à temperatura normal,  $f_{c,\theta}/f_c$  e do mesmo modo para a tensão de rotura ou do limite elástico dos aços para betão pré-esforçado ou armado,  $f_{puk,\theta}/f_{puk}$ ,  $f_{syk,\theta}/f_{syk}$ .

A determinação analítica da resistência dos elementos em relação ao fogo é geralmente feita para os casos de compressão e flexão simples, por não se dispôr ainda de métodos que permitam resolver os casos relativos a outros tipos de esforços, tais como o esforço transversal, pelo que se tecem algumas considerações sobre os procedimentos de cálculo dos casos respeitantes à flexão:

Para os elementos isostáticos, não há introdução de momentos devido à elevação de temperatura, e a capacidade resistente depende, essencialmente no caso das lajes, da tensão limite nos aços que por sua vez depende da temperatura a que se encontram e do tipo de aço utilizado, laminado a quente ou endurecido a frio.

Para os elementos contínuos, hiperestáticos portanto, o aumento diferencial de temperatura, nas faces inferiores e superiores para o caso das lajes, introduz momentos que devem ser considerados.

No caso das armaduras aderentes, as que se encontram localizadas na face superior menos aquecida, têm resistência, num dado instante, maior que a das armaduras inferiores.

Quando se utilizam armaduras não aderentes, a tensão  $f_{ps,\theta}$ , da armadura, correspondente a uma determinada temperatura  $\theta$  deve ser considerada constante independentemente da sua posição na laje [36]. A temperatura a considerar é, obviamente, a correspondente à distância mínima do cabo à face exposta.

A tensão num cabo não aderente para uma dada temperatura pode, como sugerido pelo PTI [36], ser estimada a partir da expressão:

$$\frac{f_{ps,\theta}}{f_{ps}} = \frac{f_{puk,\theta}}{f_{puk}} \quad 5.15$$

onde:

$f_{ps}$  é a tensão de cálculo definida na secção 5.1;

$f_{puk,\theta} / f_{puk}$  é a variação da tensão de rotura do aço da armadura de pré-esforço,  $f_{puk}$ , com a temperatura  $\theta$ , que pode ser obtida dos ábacos já mencionados.

Assim, atendendo ao modo de exposição, começa por traçar-se a isotérmica de 500° C, para o intervalo de tempo requerido, determinando-se as dimensões reduzidas da secção, excluindo o betão das zonas a temperatura superior a 500° C.

Em seguida calculam-se as temperaturas das armaduras e as correspondentes tensões nos diagramas apropriados.

Por fim, com base nas dimensões reduzidas da secção, nas áreas das armaduras e nos respectivos diagramas de tensões, calcula-se o momento de rotura da secção. Comparando este valor com o esforço actuante de cálculo, verifica-se a

estabilidade da laje.

Adoptando por simplificação, o diagrama rectangular limitado para a distribuição de tensões na zona comprimida do betão, obtem-se, em flexão simples, por condições de equilíbrio a seguinte expressão:

$$F_c + F'_s = 0,8 x b' f_{cd, \theta} + A' f'_{syd, \theta} =$$

$$= F_s + F_p = A_s f_{syd, \theta} + A_p f_{ps, \theta}$$

O momento flector resistente é:

$$M_{Rd, \theta} = A_p f_{ps, \theta} (d'_p - 0,4x) + A_s f_{syd, \theta} (d'_s - 0,4x) \quad 5.16$$

em que:

$A_s$  área da secção da armadura passiva de tracção;

$A'_s$  área da secção da armadura passiva de compressão;

$d'_s$  e  $d'_p$  alturas úteis das armaduras de tracção passivas e não aderentes respectivamente;

$f_{cd, \theta}$  valor de cálculo da tensão de rotura à compressão do betão quando se considera a acção do fogo.

Para lajes contínuas expostas ao fogo na face inferior e com cabos atravessando a região dos momento negativos e dos momentos positivos continuamente o valor de  $f_{ps, \theta}$ , como se referiu deve ser o mesmo. A tensão em qualquer ponto ao longo do comprimento de um cabo não aderente, é limitada pela tensão limite no ponto onde a temperatura do aço é mais elevada.

No caso de o momento resistente de cálculo ser inferior ao momento actuante, o projecto deverá ser revisto, apresentando-se várias opções de forma a aumentar a capacidade resistente:

- i. aumentar o recobrimento de betão na zona de momentos positivos ou aplicar isolamentos térmicos incombustíveis, de forma a reduzir as temperaturas;
- ii. reforçar as secções críticas com armaduras passivas;
- iii. aumentar o número de cabos de pré-esforço;

É evidente que existem outras soluções, tais como o uso de espessuras superiores, betões de inertos leves, ou a aplicação de tectos à prova de fogo. A solução mais adequada depende essencialmente de factores de custo, porém, muitas

vezes o reforço com armaduras passivas é mais utilizado pois além de aumentar a resistência ao fogo, como a resistência em geral, melhora a ductilidade das secções [14].

Um outro problema que importa analisar é o das lajes contínuas com cabos também contínuos em que a perda de pré-esforço num dos vãos, devido a uma acção de acidente, implica a perda de pré-esforço em todos os vãos que os cabos afectados atravessam.

O código do ACI exige que neste caso esteja previsto um sistema alternativo resistente com armaduras aderentes com capacidade resistente suficiente para as acções de carácter permanente e 25% da acções variáveis.

É um facto que no caso dos cabos não aderentes, as regiões directamente afectadas por uma acção de acidente como o fogo, não são passíveis de qualquer recuperação, através da substituição por reembainhamento de novos cordões, uma vez que as temperaturas de fusão das bainhas plásticas são relativamente baixas (130 °C [20]). A utilização de outro tipo de bainhas que não plásticas, só existem para armaduras pré-esforçadas com injeção, aderentes portanto e sem possibilidades de reembainhamento. Porém, mesmo as zonas que não foram directamente sujeitas à acção do fogo, ficam afectadas, já que aí deixou de haver pré-esforço, mas, nessas zonas as bainhas continuam utilizáveis, sendo esta uma vantagem assinalável, que permite a recuperação desses vãos adjacentes à região de incêndio.

É para esta situação transitória que importa considerar, tendo em conta a verificação da segurança, aquela segurança adicional garantida só por armaduras aderentes.

A recomendação do CEB, para estas situações de verificação de segurança de carácter accidental e transitório apresenta a expressão que se transcreve do RSA para a determinação do valor de cálculo do esforço actuante:

$$S_d = \sum_{i=1}^m S_{Gik} + \psi_{11} S_{Q1k} + \sum_{j=2}^n \psi_{2j} S_{Qjk}$$

No caso referido, pretende-se apenas garantir a segurança suficiente durante o período correspondente à substituição dos cordões e ancoragens, que possibilitará a reposição da(s) laje(s) não afectadas directamente pelo fogo, numa situação de exploração normal.

Haverá portanto que, em todos os painéis de laje e em edifícios cuja

compartimentação ou dimensões em planta façam prever zonas que possam estar isoladamente sujeitas à acção do fogo, verificar a segurança admitindo que o pré-esforço numa das direcções, a mais desfavorável, deixe de actuar.

Como é evidente, o valor de cálculo das resistências são os correspondentes aos valores característicos das propriedades dos materiais em que os coeficientes de segurança são tomados com valor unitário.

Nos casos mais correntes em que a acção de base é apenas a correspondente à sobrecarga nos pavimentos, para a definição dos esforços actuantes ter-se-á a seguinte combinação de acções:

$$S_d = G_m + \psi_1 Q_k + \sum \psi_2 Q_k$$

o que corresponde a um estado limite de curta duração - combinações frequentes, onde intervêm as acções permanentes quantificadas pelos seus valores médios ( $G_m$ ), a acção de base quantificada pelo seu valor frequente ( $\psi_1 Q_k$ ) e eventualmente outras acções variáveis quantificadas pelos seus valores quase permanentes ( $\psi_2 Q_k$ ).

### 5.4.3 REGRAS PRÁTICAS PARA A VERIFICAÇÃO DA SEGURANÇA

A acção do fogo sobre as lajes, traduz-se fundamentalmente por uma redução das suas funções, que além de suporte, são também de compartimentação.

No que respeita às funções de suporte, destacaram-se, nas duas secções anteriores, alguns aspectos particulares, tendo em conta a particularidade dos cabos não aderentes, permitindo, com suporte nas recomendações já existentes, para o caso das armaduras aderentes, verificar a segurança.

Um outro aspecto particular, diz respeito a lajes extensas em que a acção do fogo é localizada a uma área interior. Em diversos ensaios efectuados nestas circunstâncias [36], verificou-se que a parte não afectada da laje desenvolve reacções que restringem a expansão da zona sujeita ao fogo. Estas forças são consideráveis e suficientemente elevadas para aumentar a capacidade resistente da área afectada, mesmo para temperaturas superiores à crítica no aço<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>A temperatura crítica é convencionalmente, a que corresponde à tensão no aço quando se dá o colapso, tensão crítica.

No caso das lajes, a função de compartimentação, corresponde como no caso das paredes à verificação de dois estados limites, o da estanquidade às chamas e o de isolamento térmico<sup>2</sup>.

A verificação destes estados limites é independente do tipo de laje, quer esta seja pré-esforçada ou não.

Com base em numerosos ensaios referidos na bibliografia específica, verificou-se que a segurança das lajes pré-esforçadas por cabos não aderentes ou não, no que respeita quer às funções de compartimentação ou de suporte, pode ser satisfeita através do cumprimento de regras práticas, que se traduzem em exigências relativas à sua espessura e ao recobrimento das armaduras.

Reproduz-se em seguida da publicação do CEB [49] uma das tabelas que dão as dimensões mínimas para a espessura de lajes maciças e recobrimento das armaduras. Os valores tabelados têm em consideração o tipo de laje. Para o caso das lajes vazadas a espessura a considerar é uma espessura equivalente  $h_e$ , tal que:

$$h_e = \frac{V_c}{A_c}$$

Para o caso de lajes alveoladas ou nervuradas, tabelas idênticas podem ser encontradas na publicação do CEB [49] ou do LNEC [51]. É de salientar que, quer a bibliografia Inglesa [13] como a Americana [36], apresentam valores muito próximos dos apresentados.

---

<sup>1</sup> O estado limite de estanquidade corresponde ao início da passagem de chamas, observada na face da laje não exposta.  
<sup>2</sup> O de isolamento térmico corresponde a uma elevação de temperatura da face não exposta de 140 °C em valor médio, ou de 180 °C em pontos localizados.

## LAJES MACIÇAS

| Classes<br>de resistência<br>ao fogo | Valores<br>mínimos<br>da<br>espessura | Valores mínimos de recobrimento (cm) |                                |                               |                    |               |
|--------------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|--------------------|---------------|
|                                      |                                       | h (cm)                               | Lajes simplesmente apoiadas    |                               | Lajes<br>contínuas |               |
|                                      |                                       |                                      | armadas<br>numa só<br>direcção | armadas nas duas<br>direcções |                    |               |
|                                      |                                       |                                      |                                | $l_y/l_x \leq 1,5$            |                    | $l_y/l_x > 2$ |
| CF(minutos)                          |                                       |                                      |                                |                               |                    |               |
| 30                                   | 6                                     | 1,0                                  | 1,0                            | 1,0                           | 1,0                |               |
| 60                                   | 8                                     | 2,5                                  | 1,0                            | 2,5                           | 1,0                |               |
| 90                                   | 10                                    | 3,5                                  | 1,5                            | 3,5                           | 1,5                |               |
| 120                                  | 12                                    | 4,5                                  | 2,0                            | 4,5                           | 2,0                |               |
| 180                                  | 15                                    | 6,0                                  | 3,0                            | 6,0                           | 3,0                |               |
| 240                                  | 18                                    | 7,0                                  | 4,0                            | 7,0                           | 4,0                |               |

## **6 RECOMENDAÇÕES DE PROJECTO E EXECUÇÃO, SISTEMAS E CARACTERÍSTICAS DOS MATERIAIS DE PRÉ-ESFORÇO.**

Neste capítulo dão-se algumas indicações sobre procedimentos e processos de construção que são particulares das lajes pré-esforçadas com cabos não aderentes. Igualmente dão-se algumas informações de carácter geral sobre a inspecção e fiscalização técnica nos aspectos que mais se prendem com a utilização de cabos não aderentes.

Considera-se que a especificidade de cada sistema comercial deverá, em primeiro lugar, ser tida em conta nomeadamente no que se refere aos procedimentos de manuseamento do equipamento de pré-esforço.

Finalmente, na secção 6.2 descrevem-se as principais características dos sistemas comerciais, referindo alguns e ilustrando de uma forma genérica o conjunto cabo/ancoragens. Fornecem-se, dos principais sistemas com representação em Portugal, alguns elementos necessários ao cálculo.

### **6.1 PROCEDIMENTOS EM OBRA**

Uma das principais vantagens das lajes pré-esforçadas por cabos não aderentes é a rapidez que se pode obter na construção em comparação com as lajes convencionais ou até com as lajes pré-esforçadas por cabos injectados.

De facto, imediatamente após a aplicação do pré-esforço (habitualmente 4 a 5 dias após a betonagem [23,36], em função das condições climatéricas e da resistência do betão) a laje, em si, não necessitará de quaisquer escoramentos podendo efectuar-se desde logo o descimbramento.

Em geral, após esta operação será necessária a colocação de algumas escoras para suportar a construção da laje ou das lajes nos pisos superiores. Estas escoras são normalmente colocadas nos dois pisos imediatamente abaixo do piso que se encontra em construção [23].

A seguinte sequência de operações é frequentemente utilizada:

- 1º. Betonagem do piso (i);
- 2º. Aplicação de 50% do pré-esforço quando o betão atinge metade da resistência necessária à aplicação da totalidade deste ( $\approx 3$  dias);
- 3º. Descimbramento de forma a reutilizar os moldes mantendo 50% das escoras. Iniciar a cofragem no piso (i + 1);
- 4º. Aplicação do pré-esforço no piso (i) a 100% quando o betão atinge a

necessária resistência. Reajustamento das escoras;

5º. Finalização da cofragem e montagem de armaduras seguindo-se a betonagem no piso (i+1);

6º. Aplicação no piso (i+1), tal como no piso (i), de 50% do pré-esforço. Descimbramento, retirando 50% das escoras;

7º. Colocação das escoras no piso (i+2) iniciando a cofragem;

8º. Aplicação do pré-esforço no piso (i+1) a 100% quando o betão atinge a resistência necessária. Reajustar escoras. Retirar as restantes escoras do piso (i), completar a cofragem e armaduras no piso (i+2) e betonar;

Esta sequência é ciclicamente levada a efeito tendo sempre presente que um piso deve estar escorado pelos dois imediatamente inferiores.

Este procedimento pode ser calibrado nos cálculos, considerando uma combinação de acções de carácter transitório em que o peso próprio da laje, (incluindo cimbres e escoras  $\approx 1,5 \text{ KN/m}^2$ ), em construção num piso superior é repartido por duas (ou mais) lajes que a suportam [5].

De forma a garantir a eficiência do pré-esforço nos pontos mais críticos, é usual limitar o comprimento dos painéis de betonagem a cerca de 30 metros numa ou nas duas direcções, utilizando-se para isso ancoragens intermédias. Para os casos em que é possível aplicar o pré-esforço nas duas extremidades do cabo, o comprimento entre ancoragens (ambas activas) não deverá ultrapassar 60 metros [5].

Para lajes extensas com várias fases de betonagem, o cabo é normalmente fornecido enrolado e com o comprimento total em que as ancoragens intermédias podem já estar posicionadas.

### 6.1.1 COFRAGENS

A utilização de moldes recuperáveis, mesmo nas lajes maciças é um factor de economia considerável que não envolverá em princípio grandes investimentos, uma vez que o ciclo de repetição é curto. Nas lajes fungiformes, sem capiteis é frequente a utilização de painéis de contraplacado (reutilizáveis) assentes em andaimes rolantes e de fácil montagem e desmontagem, permitindo um vão variável e altura ajustável. As tábuas laterais que confinam cada betonagem devem ser perfuradas de acordo com as dimensões e sistemas de ancoragem utilizados, de forma permitir a fixação dos seus componentes. Os andaimes são montados para uma área superior à de betonagem de forma a criar espaço de manobra do

equipamento, necessário à aplicação do pré-esforço.

Para lajes extensas deve-se programar uma sequência que permita a rotação da cofragem tendo em conta os tempos de endurecimento do betão.

### 6.1.2 COLOCAÇÃO DOS CABOS

A posição em alçado dos cabos é, como se viu uma questão fundamental.

Para isso, especial cuidado deve ter-se no projecto aonde deverão ser marcados, em planta e em alçado, a posição e comprimento de cada cabo ou conjunto de cabos bem como a posição e o tipo das ancoragens e a sequência de colocação. A normalização da identificação e das designações a utilizar nos desenhos é conveniente, sugerindo-se a utilização de símbolos ou cores que facilitem o trabalho de inspecção antes da betonagem [5,36].

As armaduras passivas correspondentes à face inferior das lajes devem ser as primeiras a ser colocadas, seguindo-se o posicionamento dos cabos.

Os cabos são geralmente fornecidos, para a obra, em rolos com cerca de 1,5 m de diâmetro. Estes rolos encontram-se atados e convenientemente identificados de acordo com a sua posição na obra.

Os rolos devem ser colocados nos painéis a betonar de acordo com a ordem e sequência indicada no projecto. Cada rolo deve ser posicionado no bordo contrário ao da aplicação do pré-esforço. Com este na posição vertical, procede-se ao desenrolamento ao longo da trajectória até à sua posição final. No caso de o(s) cabo(s) atravessarem várias fases de betonagem, o desenrolamento deverá ser efectuado por partes e em conformidade. Depois de todos os cabos correspondentes à primeira direcção terem sido desenrolados, procede-se de igual modo com a segunda direcção.

Para lajes de grandes dimensões e de forma a evitar o manuseamento de grandes rolos, que pesam entre 20 a 30 KN, utilizam-se ligadores que permitem a união e transmissão do pré-esforço a um cabo já ancorado.

A tolerância no desvio vertical da sua posição é de cerca de 6 mm para lajes de espessura inferior 20 cm e de 9 mm a 13 mm para lajes de espessura superior [36]. A FIP [9] apresenta nas suas recomendações valores mais exigentes e que dependem directamente da espessura,  $h$ , da laje:

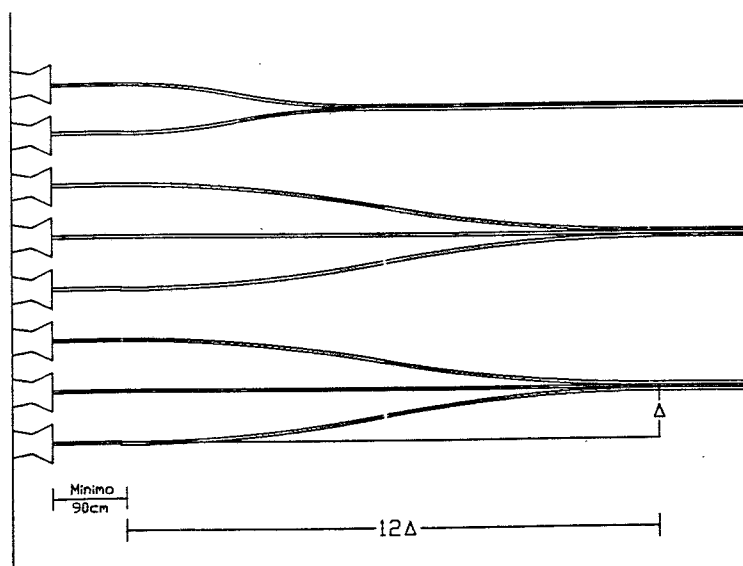
## TOLERÂNCIAS DO POSICIONAMENTO DOS CABOS

| Espessura<br>$h$    | TOLERÂNCIA        |                    |
|---------------------|-------------------|--------------------|
|                     | vertical          | horizontal         |
| $\leq 20\text{ cm}$ | $\pm h / 40$      | $\pm 20\text{ mm}$ |
| $> 20\text{ cm}$    | $\pm 5\text{ mm}$ | $\pm 20\text{ mm}$ |

Da precisão do posicionamento dos cabos depende directamente a acção do pré-esforço, pelo que será conveniente seguir estas últimas recomendações.

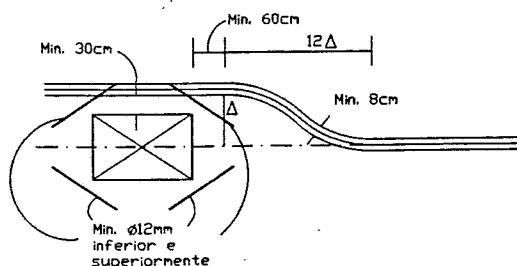
Os desvios horizontais que se tornem inevitáveis devido a aberturas na laje devem ter um raio de curvatura superior a 6,5 metros. A distância entre os cabos e as aberturas nas lajes não deve ser inferior a 15 cm. É conveniente nestes casos dispôr armaduras passivas para fazer face às tensões localizadas que aí se desenvolvem [36].

O mesmo sucede nos cabos agrupados que se abrem em leque junto à zona das ancoragens que devem ser dispostas como se referiu em 5.3



Disposição das amarrações em cabos agrupados

fig. 6.1



Armaduras passivas mínimas em zonas com aberturas

fig 6.2

A garantia do rigor do traçado dos cabos é conseguida amarrando-os a estribos ou cavaletes que se colocam em pontos devidamente previstos no projecto. Estes pontos situam-se para o caso de cabos curtos (menos flexíveis) em intervalos de aproximadamente 1,2 m e para cabos muito compridos, em intervalos que não devem ultrapassar 3,0 m. As amarrações aos suportes, normalmente realizadas com arames de ligação, devem ser suficientemente eficientes para evitar desvios durante a betonagem, sem que, no entanto, as bainhas sejam feridas durante o seu aperto [46]

É absolutamente indispensável que o conjunto da ancoragem onde se aplica o pré-esforço, ancoragem activa, esteja perfeitamente ajustado à tábua lateral de cofragem e em posição perpendicular a esta [46]. Este conjunto, como se verá na secção 6.2 é constituído por uma parte reutilizável (copo) para evitar que o betão penetre e fique em contacto com o cordão, e que é destacada após a betonagem.

As ancoragens passivas, isto é, onde não se aplica pré-esforço, devem ser posicionadas em cavaletes ou estribos não devendo ser amarradas às tábuas de cofragem [46].

### 6.1.3 BETONAGEM

A inspecção do sistema de pré-esforço é uma tarefa essencial, que deve ser sempre efectuada pelo projectista e na presença do construtor. Só então verificados todos os aspectos pode ser autorizada a betonagem. Transcrevem-se por isso as principais recomendações do PTI [46]:

1. Verificar se as cunhas das ancoragens passivas estão adequadamente colocadas;
2. Verificar se os cabos, placas de transmissão, cunhas e outros componentes metálicos não apresentam sinais de corrosão;
- 3 Confirmar se as bainhas plásticas se encontram em bom estado e se o cabo está protegido na sua totalidade;
4. Confirmar se os pontos de posicionamento do cabo e se o seu traçado corresponde aos de projecto e dentro das tolerâncias admitidas;
5. Confirmar se as ancoragens activas estão convenientemente fixadas às tábuas laterais da cofragem e se os copos plásticos estão convenientemente ajustados a esta impedindo a penetração do betão;
6. Garantir que todos os cabos foram instalados;
7. Verificar se as armaduras passivas correspondentes às forças concentradas nas ancoragens estão de acordo com o projecto;
8. Verificar se os desvios horizontais dos cabos não são excessivos.

Da mesma forma e para a colocação do betão devem ser observados os seguintes procedimentos [46]:

1. A betonagem só deve ser efectuada depois de autorizada pelo projectista;
2. A colocação do betão deve ser efectuada de tal forma que não desvie a posição dos cabos, se tal acontecer a sua posição deve ser imediatamente corrigida;
3. Um cuidado especial deve ser observado na colocação e vibração do betão nas zonas das ancoragens:

A vibração deve ser suficientemente eficiente para garantir a inexistência de vazios, mas não tão excessiva que ponha em causa a estanquidade das ancoragens.

#### **6.1.4 APLICAÇÃO DO PRÉ-ESFORÇO**

As operações de aplicação do pré-esforço devem ser efectuadas por pessoal especializado e normalmente são da responsabilidade do fornecedor do sistema de pré-esforço utilizado.

As recomendações seguintes são extraídas, de forma abreviada, da bibliografia norte-americana [36,46], onde este sistema se encontra mais experimentado e cuja leitura completa é aconselhável:

As tábuas laterais que confinam a espessura da laje e os "copos" plásticos que criam as concavidades para a entrada dos dentes do macaco devem ser retirados logo que o betão tenha ganho suficiente presa, permitindo que estas concavidades possam ser desimpedidas e limpas libertando o cabo de qualquer calda que eventualmente tenha penetrado no interior da ancoragem activa.

Quando o pré-esforço não é aplicado pelo fabricante, todo o equipamento que se utilize deve ser fornecido por aquele, uma vez que não há em geral compatibilidade entre os vários sistemas comerciais.

Quando o betão atinge a resistência (confirmada por ensaios em provetes - geralmente 60% a 80% da resistência característica, [36]) para que foi prevista a aplicação do pré-esforço, este, deve ser aplicado logo que possível.

O pré-esforço deve ser controlado da seguinte maneira: Pela leitura no manómetro do macaco obtem-se a força instalada no cabo na ancoragem<sup>1</sup>. O correspondente alongamento teórico no cabo pode ser calculado usando a fórmula:

$$\Delta L = \frac{PL}{AE} \quad 6.1$$

onde naturalmente:

$P$  = valor do pré-esforço no cabo;

$L$  = comprimento do cabo;

$A$  = área da secção da armadura;

$E$  = módulo de elasticidade do aço.

Este valor deve ser comparado com o alongamento efectivamente conseguido.

Alternativamente pode-se, utilizando a mesma equação (6.1), comparar o valor teórico da força, correspondente ao alongamento observado, com a força obtida por leitura do manómetro

Para o tipo de cabo em questão, monocórdão de 7 fios em geral, o módulo de elasticidade pode ser tomado igual ao de projecto, 200 GPa, ou ao fornecido

---

<sup>1</sup> Esta informação é geralmente obtida do fabricante do equipamento através de tabelas de conversão [36].

pelo fabricante considerando-se aceitável que a diferença encontrada para a força no cabo a partir da medição do seu alongamento não se desvie em mais 7% da obtida pela medição directa da força aplicada [36].

Para o cálculo do alongamento esperado, a comparar com efectivamente observado deverão ser consideradas as perdas de atrito. Uma diferença de até 7% é considerada aceitável [46]. Para a medição do alongamento devem ser efectuadas marcas visíveis no cabo antes e depois da aplicação do pré-esforço, sendo a tolerância permitida nas medições de aproximadamente 3 mm [46].

Se houver discrepâncias, fora da tolerância referida, a ponta saliente do cabo não deve ser cortada sem autorização do projectista, convindo para isso ter em conta que:

- a) As marcações ou as medições podem ter sido mal efectuadas;
- b) As medições no manómetro ou os cálculos do alongamento esperado podem ter sido mal efectuados;
- c) O equipamento pode não estar em boas condições de funcionamento ou não estar devidamente calibrado;
- d) No caso de alongamentos inferiores aos esperados ter em consideração que em princípio se desenvolveram forças de atrito no cabo devido a uma eventual penetração de calda do betão nas ancoragens ou no interior da bainha;
- e) Alongamentos superiores aos esperados significam, em princípio, que o cabo está sobretensionado, ou houve cedência nos dispositivos de ancoragem devendo neste caso ser retirado o pré-esforço, e em seguida corrigidas as anomalias encontradas.

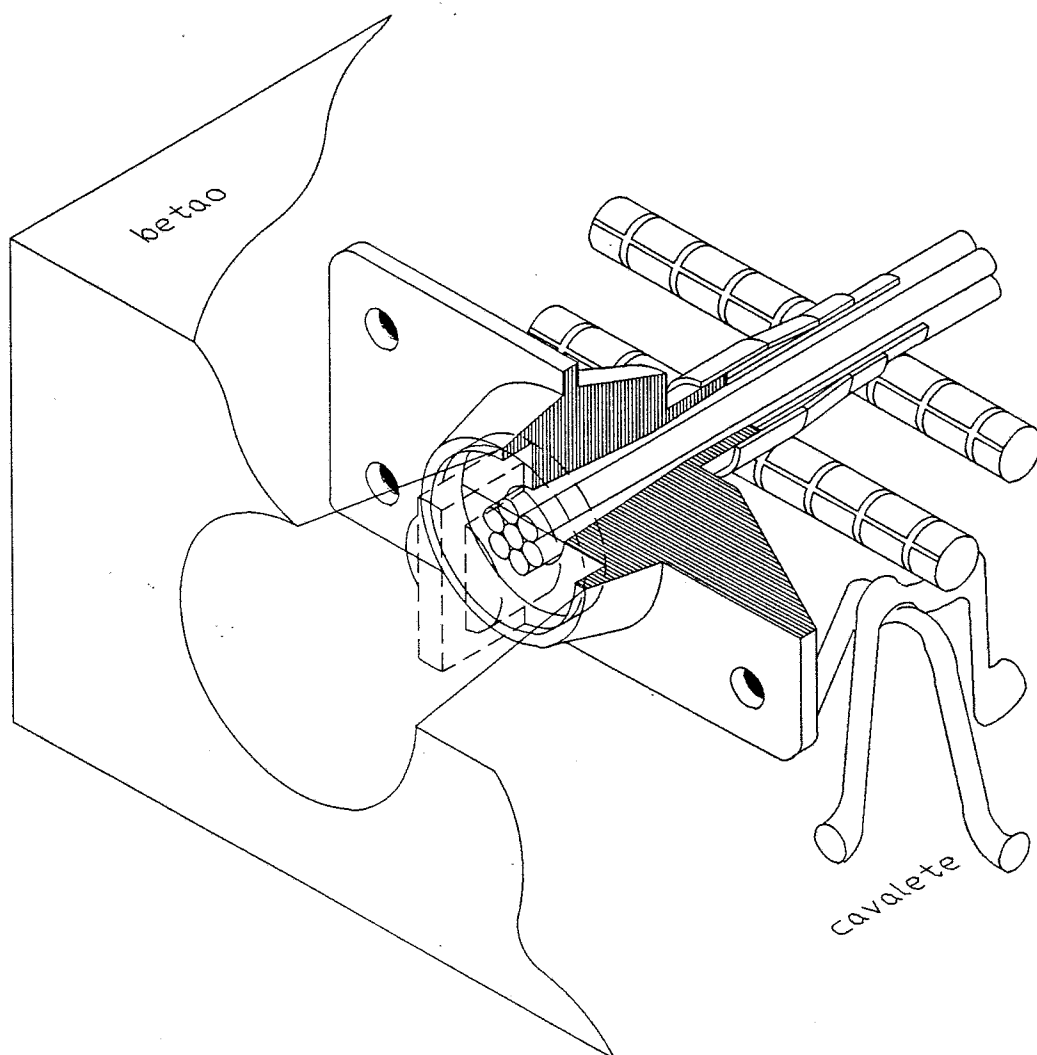
Para cada cabo deverão ficar registados os valores obtidos no manómetro do macaco bem como o alongamento obtido.

Após o tensionamento ter sido aceite o cabo deve ser cortado, deixando-se um comprimento para as pontas entre 2,0 cm e 2,5 cm, permitindo o enroscamento de uma cápsula de protecção, cujo volume deve ser previamente preenchido com massa anticorrosiva.

Em seguida, a concavidade criada no betão pelo molde plástico (copo) deve ser preenchida com argamassa. Para aumentar a aderência entre as superfícies do betão e da argamassa de preenchimento é aconselhável [46] a aplicação de resinas ou outros produtos específicos para esse fim.

## **6.2 CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS DE ALGUNS SISTEMAS**

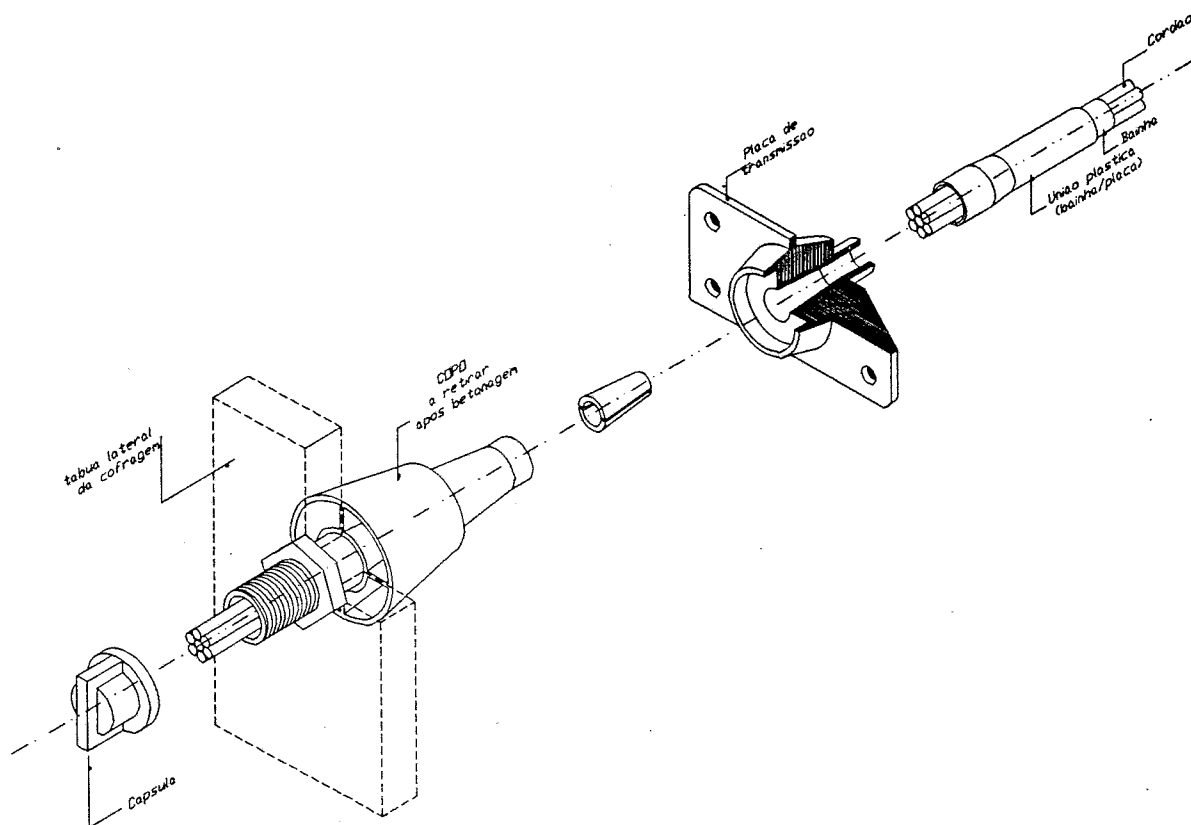
A maioria das empresas que fabricam estes sistemas de pré-esforço, têm representações em Portugal. As características das ancoragens, cunhas e equipamento para aplicação do pré-esforço variam de marca para marca seguindo contudo as recomendações da FIP [52] e, ou, as especificações do PTI [47]. Nas figuras 6.3 apresentam-se esquemas típicos de um cabo e os componentes respectivos para os três tipos de ancoragem.



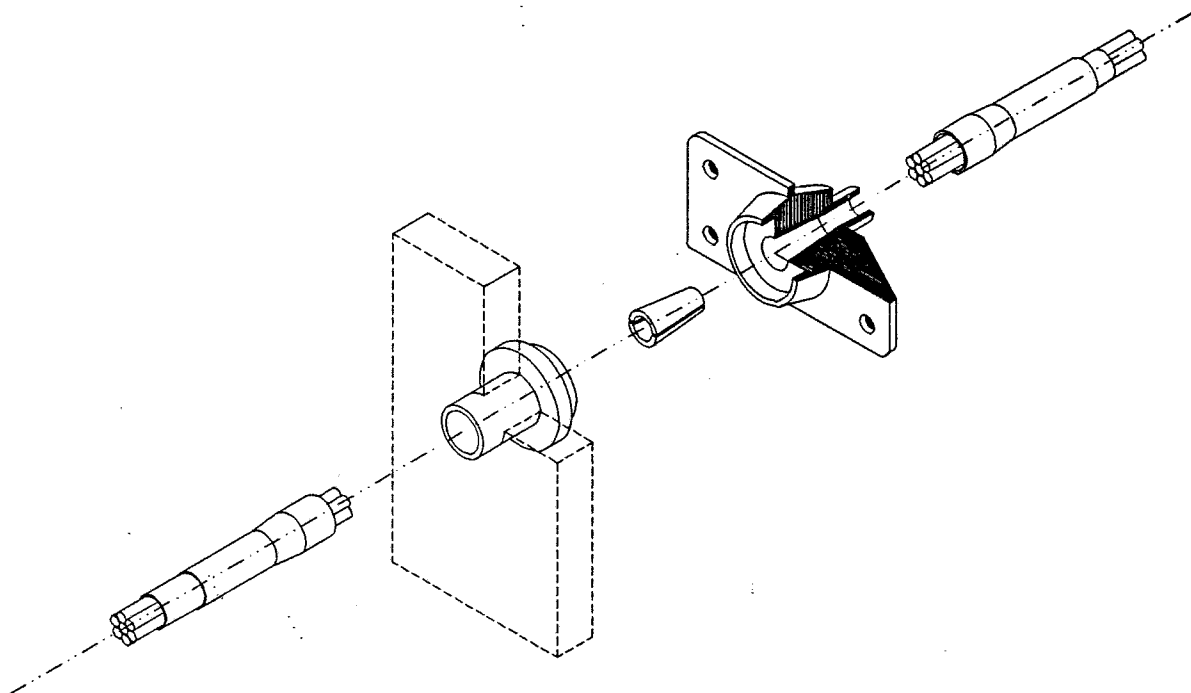
Posição da ancoragem e cabo após tensionamento.

fig.6.3 (a)

## ESQUEMAS DE MONTAGEM

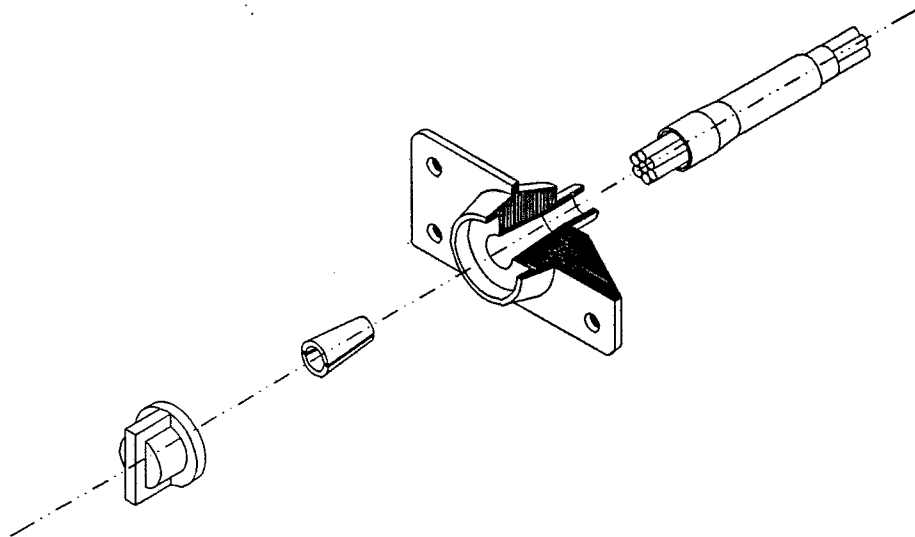


**Ancoragem activa.**  
**fig.6.3 (b)**



Ancoragem intermédia.

fig.6.3 (c)



Ancoragem passiva.

fig.6.3 (d)

Cada fabricante dispõe sempre de macacos ligeiros e compressores portáteis com a massa de aproximadamente 25 Kg. Existem pelo menos dois tipos de macacos: de um só êmbolo para pré-esforço em ancoragens terminais e de dois êmbolos para pré-esforço em ancoragens intermédias (o cabo neste caso passa entre os dois êmbolos).

Os cordões são sempre formados por 7 fios com aços cuja tensão característica de rotura apresenta dois grupos de valores distintos: cerca de 1700 MPa e cerca de 1900 MPa. Os diâmetros nominais dos cordões quando constituídos por 7 fios apresentam geralmente dois valores diferentes 0,5" (12,7 mm) e 0,6" (15,2 mm) aproximadamente.

O diâmetro exterior da bainha varia entre 15 e 20 mm com espessuras da parede de 1 mm a 1,2 mm.

Encontram-se ligeiras variações de fabricante para fabricante.

Os valores percentuais correspondentes à relaxação dos aços também se podem agrupar em duas categorias distintas consoante se trate de aços de relaxação normal ou de baixa relaxação. Os índices mais correntes para a relaxação máxima às

1000 horas, em função da tensão inicial (60% a 80% da tensão de rotura) são de 4,5% a 12% e de 1,0% a 4,5% consoante se trate de aços de relaxação normal ou de baixa relaxação respectivamente.

A ancoragem a utilizar depende, como é obvio do tipo de cabo. A placa de transmissão, geralmente rectangular, com secção cuja altura varia entre 6 cm e 7,5 cm e cuja largura varia entre 11 cm e 15 cm, transmite ao betão, na aplicação do pré-esforço tensões de compressão que se situam entre 15 e 25 MPa na maioria dos casos.

Apresentam-se em seguida as principais características de alguns dos sistemas de pré-esforço mais divulgados na Europa e com representação em Portugal.

A cada sistema compete naturalmente fornecer dados técnicos completos<sup>1</sup>.

No entanto é de salientar a grande semelhança entre as características das várias marcas.

CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS E MECÂNICAS DE CABOS  
(CCL SYSTEMS)

| Diâmetro<br>do<br>cordão | Secção<br>do<br>cordão | Dimensões da<br>ancoragem<br>(b)*(h) | Tensão<br>característica<br>de rotura | Força<br>característica<br>de rotura |
|--------------------------|------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------|
| mm                       | mm <sup>2</sup>        | (mm)*(mm)                            | MPa                                   | KN                                   |
| 15,2                     | 139                    | 130*70                               | 1670                                  | 232                                  |
| 12,5                     | 93                     | 110*60                               | 1760                                  | 164                                  |
| 15,7                     | 150                    | 130*70                               | 1770                                  | 265                                  |
| 12,9                     | 100                    | 110*60                               | 1860                                  | 186                                  |
| 15,2                     | 165                    | 130*70                               | 1820                                  | 300                                  |

<sup>1</sup> Nos quadros apresentados agruparam-se as características técnicas mais importantes que se julgam suficientes para o dimensionamento. Não foi possível obter, de todos os sistemas, outros dados que permitissem uma sistematização mais pormenorizada.

**CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS E MECÂNICAS DE CABOS  
(CIPEC)**

| Diâmetro<br>do<br>cordão | Secção<br>do<br>cordão | Dimensões da<br>ancoragem<br>(b)*(h) | Tensão<br>característica<br>de rotura | Força característica<br>de rotura |
|--------------------------|------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|-----------------------------------|
| mm                       | mm <sup>2</sup>        | (mm)*(mm)                            | MPa                                   | KN                                |
| 12,5                     | 93                     | 110*58                               | 1860                                  | 173                               |
| 12,9                     | 100                    | 110*58                               | 1860                                  | 186                               |
| 15,2                     | 139                    | 136*70                               | 1770                                  | 246                               |
| 15,7                     | 150                    | 136*70                               | 1770                                  | 265                               |

**CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS E MECÂNICAS DE CABOS  
(FREYSSINET)**

| Diâmetro<br>do<br>cordão | Secção<br>do<br>cordão | Dimensões da<br>ancoragem<br>(b)*(h) | Tensão<br>característica<br>de rotura | Força característica<br>de rotura |
|--------------------------|------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|-----------------------------------|
| mm                       | mm <sup>2</sup>        | (mm)*(mm)                            | MPa                                   | KN                                |
| 12,4                     | 93                     | 130*70                               | 1860                                  | 173                               |
| 12,7                     | 100                    | 130*70                               | 1860                                  | 186                               |
| 15,2                     | 139                    | 130*70                               | 1770                                  | 248                               |
| 15,7                     | 150                    | 130*70                               | 1770                                  | 279                               |

**CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS E MECÂNICAS DE CABOS  
(VSL)**

| Diâmetro<br>do<br>cordão | Secção<br>do<br>cordão | Dimensões da<br>ancoragem<br>(b)*(h) | Tensão<br>característica<br>de rotura | Força característica<br>de rotura |
|--------------------------|------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|-----------------------------------|
| mm                       | mm <sup>2</sup>        | (mm)*(mm)                            | MPa                                   | KN                                |
| 12,5                     | 93                     | 127*57                               | 1774                                  | 165                               |
| 12,8                     | 99                     | 127*57                               | 1860                                  | 184                               |
| 15,2                     | 139                    | 127*57                               | 1755                                  | 244                               |
| 15,2                     | 140                    | 127*57                               | 1864                                  | 261                               |

**CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS E MECÂNICAS DE CABOS  
(DYWIDAG)**

| Diâmetro<br>do<br>cordão | Secção<br>do<br>cordão | Dimensões da<br>ancoragem<br>(b)*(h) | Tensão<br>característica<br>de rotura | Força<br>característica<br>de rotura |
|--------------------------|------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------|
| mm                       | mm <sup>2</sup>        | (mm)*(mm)                            | MPa                                   | KN                                   |
| 12,7                     | 99                     | 127*57                               | 1860                                  | 184                                  |
| 12,7                     | 99                     | 132*62                               | 1860                                  | 184                                  |
| 15,2                     | 140                    | 140*67                               | 1860                                  | 261                                  |

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Libby, James R. "Modern Prestressed Concrete", 4th ed., Van Nostrand Reinhold, New York, 1990.
- [2] Cope, R.J. and Clark, L.A., *Concrete Slabs / Analysis and Design*, Elsevier Applied Science Publishers, London and New York, 1984.
- [3] Nilson, Arthur H., *Design of Prestressed Concrete*, 2<sup>o</sup> edition., WIE, New York, Feb. 1987.
- [4] Pfeil, W., *CONCRETO PROTENDIDO, Dimensionamento à flexão*, LTC, Rio de Janeiro, Maio 1984.
- [5] "Post-tensioned flat-slab design Handbook", CONCRETE SOCIETY TECHNICAL REPORT No. 25, London, Jan. 1984.
- [6] Wiesinger, F. P., *Design of Flat Plates with Irregular Column Layout*, A.C.I. Journal, Feb. 1973, pp.117-123.
- [7] Pfeil, W., *CONCRETO PROTENDIDO, Introdução*, LTC, Rio de Janeiro, Maio 1984.
- [8] Guerrin, A., *TRAITÉ DE BÉTON ARMÉ - Tome IV - Calculo das Lajes*, pp. 295-363, 1978
- [9] "Recommendations for the design of flat slabs in post-tensioned concrete (using unbonded and bonded tendons)", F.I.P./ Cement and Concrete Association, Slough (U.K.), May 1980.
- [10] "Structural use of concrete", Part 1. Code of practice for design and construction., Bs 8110, 1985.
- [11] Mojtahedi, S. and Gamble, W. L., "Ultimate Steel Stresses in Unbonded Prestressed Concrete," J. Structural Division, ASCE, Vol. 104, No. ST7, Jul. 1978, pp. 1159-1165.
- [12] "Partial prestressing", CONCRETE SOCIETY TECHNICAL REPORT No. 23, London, May 1983.
- [13] "Flat slabs in post-tensioned concrete with particular regard to the use of unbonded tendons - design recommendations, CONCRETE SOCIETY TECHNICAL REPORT No. 17, London, Jul. 1979.
- [14] "Recommendations for Concrete Members Prestressed with Unbonded Tendons, ACI-ASCE Joint Committee 423, *Concrete International*, Vol. 5, No. 7, Jul 1983, pp. 61-76.
- [15] *REGULAMENTO DE ESTRUTURAS DE BETÃO ARMADO E PRÉ-ESFORÇADO*, Decreto-Lei nº 349-C/83, Imprensa Nacional- Casa da Moeda, Lisboa, 1984.
- [16] Hurst, M. K., *Prestressed Concrete Design*, Chapman and Hall, New York, 1988.
- [17] Tam, A. and Pannell, F. N., "The ultimate moment of resistance of unbonded partially prestressed reinforced concrete beams", *Magazine of Concrete Research* : Vol. 28, No. 97, pp. 203-208, Dec. 1976.
- [18] Rowe, R.E. et al., *Handbook to British Standard BS8110: 1985 Structural Use of Concrete*, Viewpoint, London 1987.
- [19] Leonhart, F., "Design of Prestressed Concrete", W.EENST 2nd ed., 1967.
- [20] Schor, H., *Pós-esforço do tipo monocórdão lubrificado, dentro de bainha plástica, na construção de pavimentos de betão armado*, 1<sup>o</sup> Encontro Nacional sobre estruturas pré-esforçadas, Lisboa, Out. 1986.
- [21] "La Précontrainte des Planchers par Post-tension", Freyssinet, Paris, 1989.
- [22] Brotchie, J.F., *On the design of prestressed Flat Plates*, Commonwealth Scientific and Industrial Research Organization, Australia, 1974.
- [23] Andrew, Arthur. E., *Unbonded tendons in post-tensioned construction*, Thomas Telford, London.
- [24] *Presentation et Discussion du projet d'Eurocode 2 = Constructions en Béton*, Première et Deuxième parties, ANNALES de L'Institute Technique du Batiment et des Travaux Publics, N<sup>os</sup> 489,490 Dec 1989, Jan 1991.
- [25] *REGULAMENTO DE SEGURANÇA E ACCÕES PARA ESTRUTURAS DE EDIFÍCIOS E PONTES*, Decreto-Lei nº 235/83 de 31 de Maio, Edições Lopes da Silva, Porto, 1983.
- [26] *CEB-FIP MODEL CODE 1990*, Bulletins d'Information n<sup>os</sup> 190a-190b, First Predraft 1988, CEB-Lausanne, Jul 1988.

- [27] Ferreira, Cruz A. *et.al.*, *Lajes Planas com Pré-esforço não Aderente - "Mono Cordão"*, 2º Encontro Nacional de Estruturas Pré-esforçadas -Lisboa, Tema D pp.131-142.
- [28] Domel, A., Jr. and Ghosh, S.K., *"Economical Floor Systems for Multi-story Residential Buildings"*, CONCRETE INTERNATIONAL, Magazine of ACI nº 9 Vol 12, Sep.(1990), pp. 37-40.
- [29] Fuentes, A., *Calcul Pratique d'un Plancher Précontrainte par Armatures Non-adhérentes*, ANNALES de L'Institut Technique du Batiment et des Travaux Publics, Nº 465, Jun 1988.
- [30] Arnous, J.P.; Chaussin, R.; Lacroix, C.; Fargeot, B.; Schor, H.; Fuentes, A.; Boutonnet, L., *Utilisation de la Précontrainte dans le Bâtiment, possibilités et développements*, ANNALES de L'Institut Technique du Batiment et des Travaux Publics, Nº 463, Mar.Avr. 1988.
- [31] Rapin G.M. *et* Zenobi, G.V., *Flat slabs in support strips with long spans and heavy loads*, FIP Notes, 1987/1.
- [32] Herberghen, P. and Damme, M., *Fire Resistance of Post-Tensioned Continuous Flat Floor Slabs with Unbonded Tendons (U.T.)*, FIP Notes 1983/4.
- [33] D'Arga e Lima, J., *et.al.*, *MANUAL DE BETÃO ARMADO*, LNEC, Lisboa, 1973.
- [34] Aalami, Bijan O., *et.al.*, *EARTHQUAKE PERFORMANCE OF UNBONDED POST-TENSIONING BUILDINGS*, San Francisco earthquake - 1989, Post-Tensioning Institute - PTI, Phoenix, August, 1990.
- [35] Aalami, Bijan O., Barth, F.G., *RESTRAINT CRACKS AND THEIR MIGRATION IN UNBONDED POST-TENSIONED BUILDING STRUCTURES*, Post-Tensioning Institute - PTI, Phoenix, (presented at 1986 ACI Convention Baltimore, Maryland).
- [36] *POST-TENSIONING MANUAL*, 5th ed., Post-Tensioning Institute, Phoenix, 1990.
- [37] Azeredo, Manuel de; Camposinhos, R., *"The Influence of the Compression in Postensioned Members"*, 1991 (enviado para publicação).
- [38] *"Le béton précontraint dans le bâtiment"*, DALLS PRÉCONTRAINTE, LOSINGER VSL International, Berne / Suisse, Jan. 1981.
- [39] Sarmento, J.R., *"Comentários ao REBAP"*, Jornadas sobre a aplicação da nova regulamentação de estruturas, Gabinete de Estruturas F.E.U.P. 1º Volume 1988, pp. 3.183 - 3.188.
- [40] Juvandes, L.F.P., Figueiras J.A., *"Determinação de Esforços em Lajes Fungiformes Análise Comparativa de Dois Métodos de Cálculo"*, Jornadas sobre a aplicação da nova regulamentação de estruturas, Gabinete de Estruturas F.E.U.P. 1º Volume 1988, pp. 3.225 - 3.240.
- [41] Guedes Coelho, A. *"Protecção das Estruturas Contra Incêndios"* Boletim nº 39 do Gabinete de Estruturas Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Abril 1986.
- [42] Bijan, O. Aalami, *"Load Balancing: A comprehensive Solution to Post-Tensioning"*, ACI Structural Journal Nov/Dec 1990.
- [43] Câmara, J.N., Appleton, J.S., *"Dimensionamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-Esforçado às Deformações Impostas"*, 2o ENCONTRO NACIONAL SOBRE ESTRUTURAS PRÉ-ESFORÇADAS, Porto, Nov. 1988.
- [44] Câmara, J.N., *"Dimensionamento das Estruturas de Betão Armado e Pré-Esforçado às Deformações Impostas"*, Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas No 30, pp. 35-42, LNEC, Jan 1990.
- [45] *Design of Post-Tensioned Slabs*, Post-Tensioning Institute, 2nd ed., Phoenix, 1987.
- [46] *Field Procedures Manual for Unbonded Single Strand Tendons*, Post-Tensioning Institute, Phoenix, 1989.
- [47] *Specifcation for Unbonded Single Strand Tendons*, Prestresses Concrete Institute Journal, Vol. 30, No 2, Mar/Apr 1985.
- [48] D'Arga e Lima, J., Monteiro, V., Pipa, M., *Esforços Transversos de Torção e de Punçãoamento. (REBAP-83)* Laboratório de Engenharia Civil, Lisboa 1989.
- [49] CEB, BULLETIN D'INFORMATION Nº174, Model Code for Fire Design of Concrete Structures, Lausanne, Fev 1987.

[50] MÉTHODE DE PRÉVISION PAR LE CALCUL DU COMPORTEMENT AU FEU DES STRUCTURES EN BÉTON, DTU, Centre Scientifique Et Technique Du Batiment, Paris, Abr. 1980. Lausanne, Fev 1987.

[51] VERIFICAÇÃO DA SEGURANÇA DE ESTRUTURAS DE BETÃO ARMADO E PRÉ-ESFORÇADO EM RELAÇÃO À ACÇÃO DO FOGO, Laboratório de Engenharia Civil, Lisboa 1990.

[52] *FIP Recommendations: "Corrosion Protection of Unbonded Tendons"* FIP, 1986.

[53] *"Corrosion Protection for Unbonded Tendons"*, Schupack, M., Concrete International, Vol. 13, No.2, Feb. 1991, pp. 51-57.





FACULDADE DE ENGENHARIA  
UNIVERSIDADE DO PORTO

BIBLIOTECA



0000005953