

28  
ANTÓNIO AUGUSTO GUIMARÃIS TEIXEIRA RÊGO

# DA HIDRÁULICA

UMA CIÊNCIA EXPERIMENTAL E TEÓRICA

PÔRTO — 1944

# DA HIDRÁULICA

UMA CIÊNCIA EXPERIMENTAL E TEÓRICA

ANTÓNIO AUGUSTO GUIMARÃIS TEIXEIRA RÊGO

ENGENHEIRO CIVIL (U. P.)

ASSISTENTE DA FACULDADE DE ENGENHARIA DO PÔRTO

VOGAL DO CONSELHO SUPERIOR DE OBRAS PÚBLICAS

# DA HIDRÁULICA

UMA CIÊNCIA EXPERIMENTAL E TEÓRICA

DISSERTAÇÃO PARA DOUTORAMENTO  
EM ENGENHARIA CIVIL, NA FACULDADE  
DE ENGENHARIA DO PÔRTO

|                                  |
|----------------------------------|
| UNIVERSIDADE DO PÔRTO            |
| Faculdade de Engenharia          |
| Departamento de Engenharia Civil |
| Nº 4210                          |
| Classe 622                       |

13.6.946

PÔRTO — 1944

3430

R 267d

ex. 2

TIPOGRAFIA PORTO MÉDICO, L.<sup>DA</sup>  
Praça da Batalha, 12 - A - PORTO

À MEMÓRIA DE MEU PAI

## PRELIMINARES

Para iniciar este trabalho, vamos buscar ao prefácio do conhecidíssimo tratado de Hidráulica de Flamant, obra que fez a sua época e que ainda hoje representa uma clara e sugestiva visão desta ciência, a seguinte e extensa citação da obra «Principes d'hydraulique» de Du Buat, escrita em 1786.

«Sabe-se que até agora os nossos conhecimentos de hidráulica são extremamente limitados; ainda que grandes génios se lhe tenham dedicado, em diferentes épocas, estamos ainda, desde tantos séculos, numa ignorância quasi absoluta das verdadeiras leis que regem o movimento da água; apenas, há cento e cinquenta anos, se descobriu, com a ajuda da experiência, qual a duração, o caudal e a velocidade de escoamento da água por um orifício qualquer».

«Tudo o que diz respeito ao curso uniforme das águas que banham a superfície da terra nos é desconhecido; e, para termos uma idéia do pouco que sabemos, basta lançarmos os olhos sobre o que não sabemos».

«É necessário saber-se a velocidade dum rio de que se conhece a largura, a profundidade e a inclinação; determinar a altura a que esse rio elevará o nível se receber no seu leito, as águas doutro rio; prever de quanto abaixará o mesmo nível, se uma parte da sua água fôr desviada; fixar a inclinação que convém a um aqueduto, para dar às suas águas uma velocidade

conveniente ou a capacidade do leito que lhe convém, para conduzir a uma cidade, com uma inclinação dada, uma quantidade de água que chegue para as necessidades; traçar as margens dum rio de forma a estabilizar a corrente; calcular o caudal dum tubo de aducção cujo comprimento, diâmetro e carga se conhecem; determinar quanto uma ponte, um açude ou uma adufa farão elevar a água dum rio; marcar até que distância o regôlfo se fará sentir e prever se a região não ficará sujeita a inundações; calcular o comprimento e as dimensões dum canal destinado a drenar pântanos inúteis para a agricultura; projectar a forma mais conveniente para a entrada dos canais, para a confluência ou para o estuário dos rios; determinar a forma mais vantajosa a dar aos navios e aos barcos, para cortarem a água com o mínimo esforço; calcular a força precisa para mover um corpo flutuante; todos estes pontos e uma infinidade doutros, do mesmo género, são ainda insolúveis».

«Custa a acreditar? Quási que ainda se ignora qual é o valor do choque da água, quando bate directamente contra um obstáculo plano e ainda, com mais forte razão, quando se move contra superfícies convexas de qualquer espécie».

«Todos raciocinam sôbre hidráulica, mas poucos a compreendem».

Esta longa citação, tão interessante e tão pitoresca, resume, segundo Flamant, o programa dum curso de hidráulica, e mostra bem quão modernos são os estudos desta ciência, quão grandes os progressos realizados e qual a distância que nos separa do empirismo que caracterizava o conhecimento do movimento dos líquidos.

Foi a hidráulica uma das ciências físicas que mais se desenvolveu, nestes dois últimos séculos.

São sobejamente conhecidos os nomes dos autores a quem se deve o desenvolvimento dos estudos da hidráulica moderna, para serem citados neste trabalho sem pretensões de investigação histórica.

Sendo esta ciência o estudo físico do movimento dos líquidos, dependendo portanto, principalmente, da observação directa dos fenómenos naturais ou da experiência, nunca deixou

de se estender pelo campo puramente especulativo da física matemática.

O estudo da hidráulica tem interessado principalmente, aos engenheiros, com o fim de tirarem d'êles conhecimentos de aplicação directa e immediata, servindo-se portanto, de resultados de aproximação relativa mas sufficiente para o fim em vista.

Foi esta a característica principal dos trabalhos de alguns autores francezes do fim do século passado, como Chezy, Darcy, Bazin e tantos outros, cujas fórmulas e resultados ainda hoje são de uso corrente e generalizado.

Porém, não é com esta forma de investigação que a ciência pode atingir o nível necessário para o conhecimento profundo dos fenómenos naturais.

Assim, por exemplo, fixando-nos na fórmula de Darcy, para o cálculo dos tubos, deduzida empiricamente a partir de cerca de 200 experiências, feitas com tubos novos de diâmetros variáveis entre 0<sup>m</sup>,16 e 0<sup>m</sup>,50, verifica-se que o resultado final é uma fórmula grosseira, não homogénea, de campo de aplicação muito restricto e que, de forma alguma, pode servir para, fisicamente, interpretar o movimento da água nos tubos.

No entanto, o seu rigor é em geral sufficiente, nos casos vulgares da prática do engenheiro que somente deseja obter resultados aproximados, que lhe permitam projectar, com maior ou menor eficiência, obras de interesse restricto.

De facto, o autor dum projecto de distribuição de água, pode empregar a fórmula citada e obter resultados bons. Em primeiro lugar, porque os diâmetros utilizados estão dentro do campo de aplicação da fórmula, e em segundo, porque o líquido considerado é a água, porque a sua temperatura é normal, porque os tubos são cilíndricos, porque o movimento é francamente turbulento, sem que o número de Reynolds atinja valores excessivos; porque a água é praticamente incompressível, porque o movimento é uniforme e não há grandes causas de perturbação a considerar, como o choque hidráulico; porque a água tem uma viscosidade pequena, etc.

Além disso, as hipóteses feitas antes da aplicação da fórmula de que estamos a tratar, já são de tão grande sim-



plificação, que tornam desnecessário o emprego de fórmula de maior rigor.

Com efeito, sendo o movimento variado, segundo uma lei de variação desconhecida, nunca se poderia empregar qualquer fórmula como a de Darcy, deduzida para casos de movimento uniforme.

Foi necessário admitir uma lei de variação uniforme do caudal, ao longo do tubo, não só no espaço como no tempo. Esta hipótese que nunca chega a realizar-se, por estar muito longe da verdade, não pôde deixar de ser introduzida, para ser possível a resolução do problema.

A prática tem mostrado que, dentro do rigor exigido pela viabilidade da construção e exploração das redes de distribuição urbana, as hipóteses feitas são suficientes e que o emprego da fórmula de Darcy não só é admissível, como até, aconselhável.

Escolhemos o exemplo do cálculo das redes de distribuição, por ser um dos problemas mais vulgares e mais importantes da técnica do engenheiro.

Não vale a pena citar outros casos, também de grande interesse, que são resolvidos duma maneira mais ou menos perfeita, com fórmulas de rigor comparável ao da fórmula de Darcy.

Fórmulas como esta enchem os tratados de Hidráulica, que tomam um aspecto dogmático e irracional, característico das ciências ainda não iluminadas pelo génio creador dos grandes espíritos.

Chega a ser inadmissível, ainda no caso dos tubos, que um mesmo tratado registre meia dúzia de fórmulas, de aspecto inteiramente diferente, com campos de aplicação idênticos e cujos resultados surpreendem pela disparidade de valores obtidos.

Quere isto dizer que a ciência hidráulica dificilmente se pode livrar do empirismo a que se ligou tão intimamente.

Foi desta forma que progrediu, apesar de tudo. Inúmeros observadores coligiram resultados de experiências conduzidas com cuidados e critérios diversos, quasi sempre com mira em aplicações práticas e assim, obtiveram fórmulas empíricas mais

ou menos rigorosas, mas de aplicação corrente na técnica da engenharia.

É correntíssimo, nos nossos tempos, o recurso aos laboratórios para a determinação de diversos problemas que não puderam ainda ser resolvidos duma forma geral, com o auxílio de teorias bem fundamentadas e já consagradas, como entre muitos casos, o da regularização dos estuários dos rios, do carreamento de materiais arenosos pelas correntes, a forma dos cascos dos navios, etc.

Estes problemas de grande interesse imediato, apenas recebem, por este meio, soluções particulares, por vezes desvirtuadas pela influência de variáveis que se deixaram de considerar e ainda, pela imperfeição das escalas que é necessário adoptar e que não podem, por incompatibilidade, atender senão à influência da causa predominante do movimento.

Assim, a constância de número de Froude, determina as escalas das grandezas, quando a acção predominante é a da gravidade; a constância do número de Reynolds terá de verificar-se quando a acção retardadora do movimento é devida à viscosidade.

É porém impossível fixar, simultaneamente, os dois números, o de Reynolds e o de Froude, o que significa que não poderá atender-se completamente à viscosidade, quando se considere o movimento produzido pela gravidade, e este caso é geral na natureza, em que todos os líquidos ou gases são pesados e mais ou menos viscosos.

Daí, como dizíamos, há pouco, a imperfeição das relações de semelhança e a impossibilidade da fixação duma escala rigorosa entre o modelo e o objecto a estudar, no laboratório.

Nos casos correntes, no entanto, a precisão atingida é, em geral, suficiente para o projecto das obras em questão, se bem que, freqüentemente, seja necessário recorrer a laboratórios diversos e a modelos em escalas variáveis, para assim se poderem cotejar observações e interpretações diversas, como acontece com a previsão de obras marítimas importantes.

A técnica laboratorial virá a ser duma utilidade muito maior do que a presente, quando as séries de experiências forem consideráveis e susceptíveis de serem generalizadas.

Essa generalização poderá ser feita, quer por indução, quer por aplicação de métodos estatísticos, parecendo-nos preferível o primeiro dos processos, pois que conjuntamente com os resultados duma série de experiências do mesmo fenómeno, poderá o espírito daquelle que realiza a indução, ser levado a interpretar outros fenómenos, aparentemente diversos daquelles que foram objecto da série de ensaios laboratoriais.

Pelo que fica exposto, é difícil, mesmo nos laboratórios modernos de Hidráulica Experimental, chegar-se a equações gerais, fazendo intervir tôdas as grandezas de que dependem os fenómenos.

Raras vezes se consegue mais do que estudar o comportamento duma determinada obra ou o conhecimento de coefficients de fórmulas já estabelecidas.

O laboratório é acima de tudo um magnífico auxiliar do investigador, que a êle tem forçosamente, de recorrer, para comprovar as suas teorias e para lhe orientar as idéias, mostrando objectivamente, conclusões de ordem prática, que podem ser pontos firmes de hipóteses mais ou menos audaciosas.

O recurso a môdelos em escalas reduzidas é relativamente moderno e não foi por êste processo que os autores do século passado estabeleceram as fórmulas empíricas, ainda de uso corrente. Êsses autores limitaram-se a fazer experiências directas, que interpretaram seguidamente, por meios gráficos ou analíticos.

Tanto o processo da experiência directa, como o que modernamente se utiliza por meio das experiências com môdelos reduzidos, são pouco fecundos.

A interpretação dos fenómenos é sempre duma grande dificuldade e apenas acessível ao espírito dalguns que por vezes, estão bem longe do laboratório e muito menos pensam na aplicação directa dos resultados.

Não quer isto dizer que nos deveremos colocar num campo puramente abstracto e procurar, por exemplo, na física matemática, a explicação completa dos fenómenos.

De maneira nenhuma, e o resultado pode ver-se bem, nas abstracções engenhosas de Saint-Venant, por exemplo.

Nunca nos devemos afastar da idéia de que a hidráulica é uma ciência física e que como tal deve ser tratada, tendo em vista a aplicação à arte do engenheiro.

O progresso duma ciência é sempre muito complexo e é necessário lançar mão de todos os meios. Quantas descobertas são devidas ao acaso!

\*  
\*   \*  
\*

É incontestável que a ciência hidráulica tem progredido desmedidamente, desde os fins do século XIX, principalmente depois dos trabalhos de O. Reynolds.

Foi nessa altura que foi abandonado o método da investigação directa que conduzia forçosamente ao empirismo e que começaram a despontar audaciosas teorias, baseadas em hipóteses mais ou menos arrojadas.

A experiência vinha depois, confirmar ou refutar, os raciocínios e conclusões tiradas dessas teorias.

A imaginação teve o seu campo aberto no espírito dos creadores que assim conseguiram ir, pouco a pouco, firmando marcos definitivos no domínio desta ciência, tão revêssa e tão áspera.

O conjunto de conhecimentos foi formando os elos duma cadeia sòlidamente ancorada, em solo bastante firme.

Foram os princípios da homogeneidade e da semelhança, talvez os melhores guias desta rápida ascensão.

É sempre — já tivemos ocasião de o afirmar — o espírito generalizador de alguns cérebros predestinados, que dá aos resultados a sua verdadeira interpretação e o seu verdadeiro conceito, e é, muitas vezes, a aplicação de teorias bem pouco fundamentadas, que conduz a resultados surpreendentes. Assim, por exemplo, a moderna teoria da camada limite, cujas premissas em que assenta, são bastante vagas e discutíveis, conduz a resultados que se podem bem classificar de exactos, principalmente

no que diz respeito à distribuição das velocidades nas secções das condutas.

Outras vezes, a síntese bem feita e bem compreendida da observação dos fenómenos naturais, pode conduzir a métodos fecundos de investigação.

Poderemos referir-nos, por exemplo, à interessantíssima aplicação das funções de variável imaginária, ao estudo dos movimentos irrotacionais planos.

Julgamos, no que fica exposto, ter feito as necessárias considerações preliminares àcerca da matéria que pretendemos tratar e que nos leva a analisar alguns processos e métodos empregados na Hidráulica Geral.

## II

### CONHECIMENTOS DE AQUISIÇÃO EXPERIMENTAL DIRECTA

A hidráulica baseia-se nos conceitos fundamentais da hidrostática e da hidrodinâmica e é a estes capítulos da mecânica que vai buscar as noções teóricas de equilíbrio, movimento, fluído, viscosidade, pressão, etc. Assim por este meio, são estabelecidas as equações fundamentais do movimento, da continuidade e de estado, que nos determinam as 3 componentes da velocidade dum ponto, a pressão e a massa específica do fluído.

Este método, no caso do movimento permanente dos líquidos perfectos, sujeitos à acção da gravidade apenas, e desprezando a acção das forças da viscosidade, permite estudar o movimento dum filête fluído, mas mais nada.

Tôdas as vezes que queiramos estudar qualquer caso de aplicação prática, este método deixa de ter valor e os resultados a que conduz chegam a não ter qualquer interesse.

Assim, o teorema de Bernoulli, na sua forma primitiva não considera as perdas de cargas e apenas define a carga. Ora, no caso do movimento uniforme dos líquidos reais, a perda de carga tem de ser igual à carga.

Além disso, a desigualdade das velocidades, dentro da mesma secção dum líquido real, não permite a aplicação do teorema a toda a secção.

Do que precede, se vê que os princípios fundamentais da

hidrostática e da hidrodinâmica, applicados à hidráulica, apenas poderão servir de orientação para o estudo físico complementar, dos fenómenos. Esse estudo é feito através da observação directa experimental, guiada pela necessidade de applicação dos princípios abstractos da mecânica racional.

O theorema de Bernoulli, de que atraz falámos, e cuja dedução se faz teòricamente a partir de noções abstractas, teve de sofrer diversas transformações para poder interpretar, com aproximação sufficiente, os casos da prática.

O conceito de velocidade média appareceu então, conjuntamente com o de perda de carga, para que o referido theorema tivesse o seu campo de applicação generalizado aos casos reais das condutas e dos líquidos naturais.

A noção de velocidade média, derivada de facto dos líquidos serem mais ou menos viscosos, o que leva immediatamente à consideração de extractos de velocidades diferentes, conduziu à introdução do coeficiente de Coriolis, cujo valor depende da lei de distribuição das velocidades na secção.

O estudo da variação da velocidade foi feito experimentalmente, por diversos autores que obtiveram uma grande variedade de fórmulas empíricas, e assim, o valor do coeficiente de Coriolis apparece-nos, na hidráulica clássica, com valores vagos e mal determinados, por insufficiência de interpretação de resultados particulares.

Modernamente é possível, à luz de theorias físicas bem conduzidas, chegar a valores aceitáveis, de acordo com a precisão necessária dos resultados.

A noção de perda de carga, também necessária para a applicação prática do theorema de Bernoulli, foi talvez, o maior auxiliar que teve o desenvolvimento da ciência hidráulica, e que a fez tomar um caminho definitivamente diverso da hidrodinâmica.

É de facto, esta, uma noção intimamente ligada com a de líquido real e é ela que, associada com a de resistência ao movimento, de atrito interno, de viscosidade, permite estudar os diversos casos da prática.

Quási que se pode fazer a affirmação de que qualquer pro-

blema de hidráulica, se resume a determinar, entre outras grandezas, a resistência ao movimento ou a perda de carga.

Estamos já num domínio inteiramente diferente do da hidrodinâmica pura, cujas equações já não podemos pensar em aplicar a qualquer problema de hidráulica.

Está introduzido na hidráulica, o método físico da observação e interpretação dos fenómenos, e assim justificada a falta de generalidade dos resultados, e o grau de aproximação das fórmulas práticas, ao contrário das leis gerais e precisas, deduzidas dos princípios da mecânica.

Traçado o novo caminho, isto é, a criação de equações físicas, de natureza experimental, introduzidas para tornar aplicáveis aos casos reais, as equações abstractas da mecânica, appareceram concomitantemente métodos diversos, desigualdade de resultados e graves dificuldades de interpretação de fenómenos.

Poiseuille e Hagen estudaram o movimento laminar e determinaram a variação da perda de carga, em função da viscosidade do fluido e da primeira potência de velocidade média, no caso dos tubos.

No movimento turbulento, nos tubos, quer se considere a viscosidade, ou não, a perda de carga varia com o quadrado da mesma velocidade.

Aparece naturalmente, a necessidade da distinção dos dois movimentos de características tão diversas, e a noção extremamente fecunda de número de Reynolds, cujo valor crítico marca bem a passagem dum regimen para o outro.

Quando em 1883, Osborne Reynolds, levado inteiramente por considerações de ordem física, definiu aquêlê número, tinha lançado as bases duma nova orientação dos conhecimentos da hidráulica, que mais a afastaria do caminho que chegou a seguir, da pura abstracção matemática.

A importância do número de Reynolds, que não chegou a ser atingida por aquêlê físico, é de tal ordem que é possível demonstrar que qualquer fórmula que interprete um movimento dum fluido viscoso deverá exprimir a resistência ao movimento em função do número de Reynolds, e que essa é uma condição necessária para a perfeita interpretação dos fenómenos.



Sem se verificar esta condição, a equação deduzida, pode assentar em bases falsas e é natural que não seja homogênea, portanto de aplicação restricta, como veremos no capítulo seguinte.

Uma outra noção de natureza física e ainda muito difícil de sintetizar, nas deduições de fórmulas práticas, é a de rugosidade.

A sua importância é tão grande, que o facto de lhe attribuir um valor impreciso pode falsear os resultados duma maneira completa.

Qualquer fórmula prática de uso corrente, contém explícita ou implicitamente a noção de rugosidade, e assim, por exemplo no caso do movimento da água nos tubos, a fórmula de Darcy, tem o seu campo de aplicação limitado a certas categorias de tubos, novos ou usados de materiais bem definidos.

No caso dos canais, dada a natureza muito variável das suas paredes, foi necessário, desde há muito, introduzir coeficientes práticos que exprimem a influência da rugosidade.

Foi este o caminho seguido por Bazin, etc.

Modernamente tem-se tentado definir, duma maneira já bastante precisa, a noção física de rugosidade.

A observação directa dos casos de interesse prático e a sua interpretação por meio de fórmulas empíricas foi bem uma das características da hidráulica que nos ensinaram.

Foi este um processo simples e valioso, de resultados certos e que conduzia a aplicações imediatas.

Algumas obras modernas de hidráulica, como por exemplo, o bellissimo tratado de Hidráulica, de Forchheimer, estão infestadas de fórmulas empíricas. É interessante vêr a quantidade invulgar de fórmulas que o mesmo livro contém para o estudo dos descarregadores.

Essas fórmulas são de aplicação restricta e os resultados são por vezes contraditórios.

Tudo isto resulta do próprio método seguido nas deduições, que a maior parte das vezes se referem a casos particulares, por um lado, e, pelo outro, da dificuldade quasi intransponível da consideração de tôdas as variáveis que intervêm nas experiências.

São de facto tantas as grandezas a medir e a relacionar,

se quizermos obter fórmulas precisas e de larga aplicação, que se torna impossível estudar a sua variação simultânea e se torna necessário simplificar os fenómenos, deixando de considerar as grandezas que menos influem e estudar casos particulares, para que o erro cometido seja limitado entre valores aceitáveis.

A experiência directa e a sua interpretação immediata não conduz pois a resultados de grande generalidade.

É este o grande inconveniente dos estudos feitos em laboratórios de hidráulica experimental, cujo campo de investigação quasi se tem de limitar ao estudo de obras hidráulicas de características bem definidas, como obras marítimas, estuários de rios, câmaras de carga, descarregadores, etc.

É de notar que os processos experimentais de investigação podem ser orientadores de idéias creadoras e que estabeleçam possibilidades de sínteses profundas, que, embora afastando-se das experiências iniciais, venham depois a tomar contacto com a realidade, por meio de confirmações directas.

Os métodos analíticos podem vir em ajuda do investigador que assim terá o seu raciocínio entregue à técnica das operações matemáticas.

Por vezes, por impotência dos métodos analíticos, quando se pretende uma generalização mais ou menos perfeita, é-se lançado no domínio da hipótese forçada e simplificadora e daí a imperfeição dos resultados obtidos.

Para exemplificar estas considerações é interessante citar a curiosa teoria de Boussinesq, sobre os descarregadores de crista delgada.

Seja como fôr, o que é facto é que, mesmo lançando mão de tão imperfeitos meios de investigação, a hidráulica foi progredindo, embora lentamente, mas sempre duma maneira regular e continua.

É difficil condenar em absoluto qualquer método ou processo de raciocínio, pois que todos elles são necessários para o progresso das ciências.

Quantas vezes, dum raciocínio deficiente ou mesmo dum erro grosseiro, se tiram conclusões proveitosas?

\*  
\*   \*

Postas estas considerações julgamos ter mostrado a necessidade de procurar forma de orientar os esforços dos investigadores de maneira a obterem-se resultados gerais e de proveito interessante para a ciência hidráulica, cujo carácter é bem diferente do das outras ciências.

É fácil ir procurar esse desenvolvimento nos trabalhos dos cientistas dos três últimos decénios e ver quais as idéias orientadoras que os guiaram, caracterizando assim o progresso sentido nestes tempos.

Nem os métodos próprios de análise, nem os da física, foram postos de parte. Pelo contrário, o uso que deles se faz é cada vez maior, simplesmente o que se tem verificado é uma melhor compreensão dos fenómenos hidráulicos devida, sem dúvida, a um maior adiantamento dos conhecimentos actuais, como ao abandono de idéias e processos cujos resultados, a experiência mostrou serem deficientes.

A análise presta-se principalmente para determinar relações entre grandezas já definidas, e, no caso de hidráulica, em que o número de variáveis é muito grande, conduz a cálculos demasiado complexos que dificultam as conclusões. É, quasi sempre, necessário recorrer às hipóteses simplificadoras cujos inconvenientes já ficaram apontados.

Os métodos puramente experimentais, sem uma orientação própria, característica da ciência hidráulica, também vimos, conduzem a fórmulas empíricas, mal adaptadas e pouco gerais.

Sem um carácter de generalidade absoluta, que é difícil de estabelecer, pode-se, no entanto, encontrar dentro das doutrinas expostas no capítulo seguinte, um método que, sem ser particular da hidráulica, conduz a resultados certos, de aplicação immediata, com generalidade bastante e de frutuozos resultados.

Poderemos ainda, dentro de processos puramente fisicos, recorrer a métodos estatísticos, de resultados seguros, cuja aproximação se pode levar tão longe quanto quisermos.

Foi este o processo por que Gebelein <sup>(1)</sup> determinou as equações da hidrodinâmica a partir da física estatística.

Os processos gráficos também se prestam bem à interpretação e compreensão dos fenómenos físicos e facilitam a aplicação do método dos quadrados mínimos cuja vantagem é bem conhecida.

Embora os métodos gráficos sejam, em geral, de aplicação restricta (aferição de molinetes, curvas de caudais, etc.), são susceptíveis, no entanto, de generalizações e facultam aplicações curiosas, como, por exemplo, a da curva teórica de caudais, segundo Cougtane, em que o autor, pela comparação de diversas curvas obtidas experimentalmente, foi levado a admitir para curva teórica de caudais, uma curva parabólica, a partir da qual se tiram definições e conclusões interessantes para o estudo dos rios.

Como processo expedito e fértil para a obtenção de resultados provenientes da experiência, os métodos gráficos são de aplicação constante, embora as conclusões careçam, em geral, de generalidade.

Para exemplificar, apresentamos a seguir, um método que vimos ensinando aos alunos do curso prático de Hidráulica Aplicada da Faculdade de Engenharia, já há alguns anos, e susceptível de diversas aplicações à Hidráulica, principalmente no traçado de curvas de caudais, a partir das curvas de altura.

A construção foi-nos sugerida por um processo apresentado no livro de Otto Streckt «Problemas de Hidráulica Aplicada» (Barcelona, 1933).

Pretendemos dar generalidade a essa construção e ao mesmo tempo apresentá-la sob uma forma prática, sem possibilidade de confusão ou sobreposição de traçados.

Sejam as funções

$$x(u) \quad \text{e} \quad u(t)$$

representadas graficamente.

(1) Gebelein — «Turbulenz», Berlim, 1935. Op. cit. por Bakhmeteff, in «The Mechanics of Turbulent Flow», Princeton University Press, 1936.

Pretendemos traçar a curva  $x(t)$ , o que equivale a eliminar gráficamente a variável  $u$ .

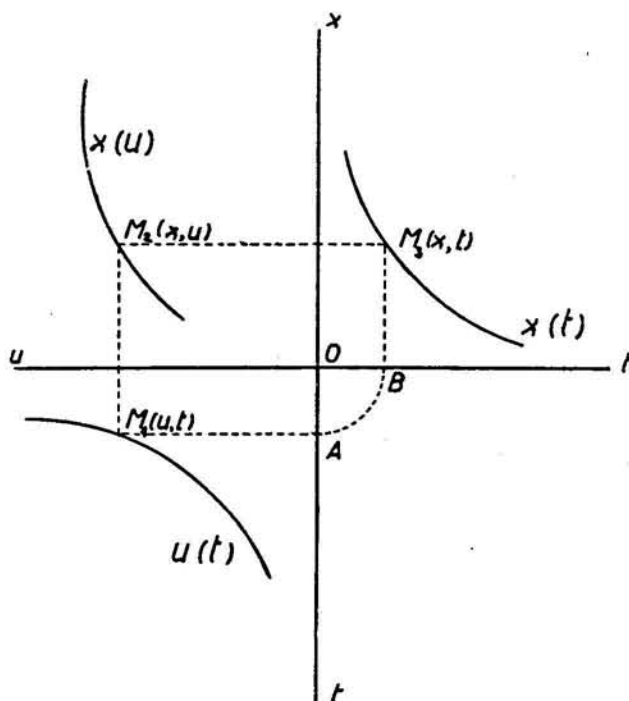
A função  $x(u)$  representa no plano  $(x,u)$ , uma curva que é a intersecção duma superfície cilíndrica de geratrizes paralelas ao eixo  $ot$ , com o próprio plano  $x,u$ .

Da mesma forma, a função  $u(t)$  é a intersecção duma superfície cilíndrica de geratrizes paralelas ao eixo  $ox$ , com o plano  $(u,t)$ .

Essas duas superfícies cilíndricas que têm as geratrizes normais, intersectam-se, por sua vez, numa curva cuja projecção sobre o plano de perfil  $xot$  é a curva pedida  $x(t)$ .

Daqui resulta a construção que vamos indicar.

Com os sistemas de eixos ortogonais orientados, da figura junta, traça-se, por pontos,  $u(t)$ ; procede-se da mesma forma com  $x(u)$ .



Para obter qualquer ponto da curva  $x(t)$ , basta, por um ponto  $M_1(u, t)$ , da curva  $u(t)$ , levantar uma perpendicular ao eixo *ou* até encontrar em  $M_2(x, u)$ , a curva  $x(u)$ . Pelos pontos  $M_1$  e  $M_2$ , traçam-se paralelas ao eixo *ou*. Pelo ponto  $A$ , com centro em  $O$ , descreve-se um arco de círculo, que determina no eixo *ot*, o ponto  $B$ . A perpendicular a este eixo, levantada por  $B$ , intercepta a paralela ao mesmo eixo, já traçado por  $M_2$ , no ponto  $M_3(x, t)$ , pertencente à curva  $x(t)$ .

Na figura, para facilidade de exposição, representámos apenas partes de curvas, com valores positivos de ambas as variáveis correspondentes.

Esta construção generaliza-se, para valores positivos ou negativos e pode aplicar-se a funções algébricas ou transcendentess, com pontos singulares.

Este curioso processo de eliminação gráfica, que tem aplicação immediata no caso da Hidráulica, permite traçar a curva dos caudais classificados, a partir da curva das alturas classificadas, referentes à secção dum rio, do qual existe um certo número de medições de caudal, referidas à escala das alturas consideradas.

De facto teremos, para curva das alturas classificadas

$$h = f(t),$$

para os caudais,

$$Q = f(h).$$

Pretendemos a curva

$$Q = f(t).$$

Este exemplo é bem típico. O método gráfico foi apenas um processo expedito de determinar uma nova relação entre

grandezas cuja variação já se conhecia. É, pois, sob o ponto de vista formal, um método analítico.

Só a síntese, ou melhor, a indução, cujos cânones rígidos foram estabelecidos por Stuart Mill, baseado na idéia de que uma lei exprime sempre uma relação de causa e efeito, pode fazer com que o espírito atinja as regiões do desconhecido.

O eminente físico Norman Campbel, no seu livro «Physics, The Elements» <sup>(1)</sup>, após uma profunda análise, critica os cânones de St. Mill, para chegar à conclusão, de que os mesmos cânones, alicerçados, principalmente, nos métodos da concordância e da diferença, não são duma rigidez absoluta e que as regras estabelecidas por St. Mill, induzem muitas vezes, em graves erros.

É que é difícil realizar uma indução perfeita, se não se destrinçam bem as causas e os sucessivos efeitos a que a experiência conduz.

A experiência, ou melhor as séries de experiências, não podem ser conduzidas ao acaso para seguidamente, se fazer a indução.

É necessário, pelo contrário, uma idéia pre-estabelecida, uma orientação, que só pode provir do pensamento criador e esse não admite cânones, é uma iluminação, talvez um dote divino ou uma identificação com o pensamento criador.

Qual foi o método seguido por Newton quando descobriu a lei de atracção?

Foi, essa lei, deduzida da experiência?

Trata-se duma indução?

A experiência só foi possível após a descoberta. Então foi fácil realizar tôda a espécie de verificações e de determinações, pela aplicação de raciocínio dedutivo, regido pelas regras da lógica formal.

Daqui resulta a justificação do facto das conclusões gerais tiradas de experiências laboratoriais, serem bem poucas.

É que são quási sempre experiências dedutivas em que, a maior parte das vezes, o fim a atingir é demasiado restrito e

(1) Cambridge-University Press, 1920, Trad. francesa, Felix Alcan, 1929.

não permite induções, que só podem ser levadas a efeito ou pela potência do génio, ou, por métodos estatísticos, a partir de inúmeros ensaios bem orientados, para o fim em vista.

Infelizmente, bem poucas vezes tem sido aplicado à Hidráulica o método estatístico, cujo emprêgo é tão freqüente em Sociologia e em Biologia, e cujos resultados são tão férteis.

Para explicar a possibilidade do génio creador, podem admitir-se três processos diferentes, o teológico, o evolucionista e o psicológico, mas qualquer dêstes processos é susceptível de ser orientado e receber o auxílio de processos já criados, também, pelo génio dos cientistas.

Sem dúvida que a lógica formal é um dêsses preciosos auxiliares, mas quanto à sua completa eficácia, julgamos já ter dito o suficiente, no que diz respeito à indução, pois que é este o verdadeiro raciocínio creador.

É curioso o exemplo apresentado por Poincaré (*La Science et l'Hypothèse*), a respeito das criações de Maxwell, em que é salientada a falta de lógica e o emaranhado dos raciocínios dêste genial sábio. No entanto, é escusado salientar a importância capital das conclusões *indutivas* da teoria electro-magnética da luz.

Sòmente qualquer dos três processos apontados, o teológico, o evolucionista, ou o psicológico, pode explicar tão grande anomalia.

Temos encarado a Hidráulica como uma ciência física, e é como tal que deve ser estudada. Vimos, já, a impossibilidade de seguir o caminho analítico, característico das matemáticas.

É necessária a experiência, a hipótese, a teoria, a interpretação, a controvérsia.

De maneira nenhuma, poderemos pôr de parte a Física Matemática, pois que ela tem contribuído muito para o progresso da Hidráulica (Newton, Euler, Lagrange, Boussinesq, Prandtl, Von Mises, etc.), porém, temos de procurar na observação, pròpriamente dita, a génese das novas teorias desta ciência.

A origem das teorias da Hidráulica deve ser sempre procurada dentro do espírito creador dos investigadores, que ante-



-vendo a explicação dos fenómenos se serviram depois, de todo e qualquer processo de justificação que lhes satisfizesse o seu espírito.

Daí a forma acentuadamente matemática de certas teorias (Helmoltz, Lord Kelvin, Lamb, Prandtl, etc.).

Dizíamos acima, que havia processo de orientar, ou melhor, de facilitar a indução.

Essa afirmação será, julgamos, completamente demonstrada, no capítulo seguinte, ao estudarmos a intervenção da Análise Dimensional e do Princípio da Semelhança.

### III

## A HOMOGENEIDADE E A SEMELHANÇA, COMO PRINCÍPIOS GERAIS ORIENTADORES

Temos, nos dois capítulos precedentes, visto a extraordinária importância que têm, na Hidráulica, os princípios da Homogeneidade e da Semelhança, resultantes da aplicação da Análise Dimensional.

Os trabalhos de Lord Rayleigh e de Buckingham, sobre este importantíssimo ramo das ciências físicas, podem ser pormenorizados em qualquer monografia, particularmente, nas seguintes obras: *Dimensional Analysis* de Bridgman (Yale University Press, 1937); *Fluid Mechanics for Hydraulic Engineers*, de H. Rouse (Mac-Graw-Hill, Inc. New York, 1938) e *Hydraulics and the Mechanics of Fluids*, de E. Lewitt (Isac Pitman - Londres, 1941).

Com o propósito de não alongarmos este despretencioso trabalho, dispensamo-nos de efectuar uma exposição completa destes assuntos, já sobejamente conhecidos dos que estudam a ciência hidráulica e que, desde 1936 vimos divulgando, na Faculdade de Engenharia, através de prelecções, conferências e em lições professadas nesse estabelecimento <sup>(1)</sup>.

---

(1) T. Rego, *A Semelhança em Hidráulica*, Rev. da Fac. de Eng., Abril, 1940.  
— T. Rego, *Hidráulica Geral*, Lições de 1943-1944, Ed. dos alunos Velez Grilo e José Júlio Afonso.

Recordemos, apenas, algumas noções fundamentais, estritamente necessárias ao prosseguimento do nosso estudo.

Teremos primeiramente os seguintes princípios:

1.º *A razão dos números que exprimem as medidas de duas grandezas homólogas (dois comprimentos, por ex.) é independente da unidade escolhida.*

2.º *Quaisquer grandezas, que satisfaçam à condição precedente, podem ser tomadas como grandezas fundamentais, dum sistema de medidas.*

(No caso de hidráulica, como parte da hidrodinâmica, as grandezas fundamentais são três, apenas).

3.º *Qualquer expressão matemática do movimento dum fluido, para poder exprimir físicamente, duma maneira completa, esse fenómeno, deverá ser dimensionalmente homogênea.*

São êstes os princípios fundamentais que permitem introduzir a Análise Dimensional no estudo da Hidráulica.

As grandezas fundamentais do sistema de medidas, geralmente adoptado, são um comprimento (L), o tempo (T) e a massa (M); mas esta escolha, é puramente convencional, visto poderem-se escolher outras três, como, por exemplo, comprimento, força e tensão superficial, como foi mostrado por Newton. Esta propriedade tem uma importância capital, no estudo da Hidráulica.

É essencial ainda, mostrar que a equação dimensional da expressão analítica dum fenómeno, pode tomar uma forma tal que, as unidades fundamentais entrem sempre como produtos de potências.

Para isso, e não nos servindo da demonstração proposta por Bridgman (*op. cit.*) por a acharmos pouco adaptada ao caso da Hidráulica e por não a encontrarmos suficientemente clara, vamos procurar uma forma mais concreta de raciocínio.

Consideremos, como grandezas fundamentais,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

Qualquer outra grandeza se pode exprimir, em função daquelas, sob a forma

$$f(\alpha, \beta, \gamma)$$

Consideremos duas grandezas homólogas, diferentes. Essas grandezas têm medidas diferentes e assim teremos, para a 1.<sup>a</sup>:

$$G_1 = f(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1);$$

e, para a 2.<sup>a</sup>:

$$G_2 = f(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2).$$

Evidentemente que,

$$\alpha_2 = \alpha_1 + h$$

$$\beta_2 = \beta_1 + k$$

$$\gamma_2 = \gamma_1 + l.$$

Teremos, para a expressão da  $G_2$ , desenvolvida em série e limitando-nos às 1.<sup>as</sup> potências de  $h, k, l$ :

$$f(\alpha_1 + h, \beta_1 + k, \gamma_1 + l) = f(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) + h \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} + k \frac{\partial f}{\partial \beta_1} + l \frac{\partial f}{\partial \gamma_1}.$$

Ou seja,

$$\frac{G_2}{G_1} = \frac{f(\alpha_1 + h, \beta_1 + k, \gamma_1 + l)}{f(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)} = 1 + \frac{h}{f} \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} + \frac{k}{f} \frac{\partial f}{\partial \beta_1} + \frac{l}{f} \frac{\partial f}{\partial \gamma_1}$$

Como a relação das medidas, das duas grandezas  $G_1$  e  $G_2$ , é independente das unidades, será

$$\frac{G_2}{G_1} = \text{const.}$$

ou,

$$\frac{h}{f} \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} + \frac{k}{f} \frac{\partial f}{\partial \beta_1} + \frac{l}{f} \frac{\partial f}{\partial \gamma_1} = C.$$

Equação linear, às derivadas parciais, que integramos, depois de fazermos as seguintes considerações.

Como a equação anterior exprime que  $\frac{G_2}{G_1} = \text{const.}$ , as medidas adoptadas para  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , podem ser quaisquer. Escolheremos medidas tais que,

$$\alpha_1 = h \quad \beta_1 = k \quad e \quad \gamma_1 = l.$$

Teremos assim :

$$\frac{\alpha_1}{f} \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} + \frac{\beta_1}{f} \frac{\partial f}{\partial \beta_1} + \frac{\gamma_1}{f} \frac{\partial f}{\partial \gamma_1} = C.$$

As equações a integrar, serão pois :

$$\frac{d\alpha_1}{\alpha_1} = \frac{d\beta_1}{\beta_1} = \frac{d\gamma_1}{\gamma_1} = \frac{Cdf}{f}.$$

A função

$$f = k \alpha^a \beta^b \gamma^c,$$

em que,  $k$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  são constantes, é um integral da equação proposta.

Desta forma, se vê que a grandeza expressa por  $f(\alpha, \beta, \gamma)$  se pode exprimir como um produto de potências.

Baseando-nos no princípio de que qualquer expressão matemática do movimento dum fluido, deve ser homogênea, creamos, assim, um processo de, quando conhecemos, de *ante-mão*, as grandezas de que depende o movimento, determinar a forma da sua expressão analítica.

Se a grandeza  $F$  depende de um certo número de grandezas  $G_1 G_2 G_3 \dots G_m$ , que por sua vez dependem das dimensões  $\alpha, \beta, \gamma$ , a sua expressão dimensional deverá ser

$$F = K \alpha^a \beta^b \gamma^c$$

e por isso, deverá ser, evidentemente,

$$(1) \quad F = K G_1^{n_1} G_2^{n_2} G_3^{n_3} \dots G_m^{n_m}$$

para que  $a, b, c$  sejam respectivamente as somas dos expoentes, das dimensões fundamentais homólogas, que figuram em  $G_1 G_2 G_3 \dots$ .

Os valores de  $n_1, n_2, n_3 \dots$ , podem determinar-se, igualando os expoentes de  $\alpha, \beta, \gamma$ , nos dois membros da equação (1), depois de introduzidas as dimensões de  $G_1, G_2 \dots$  e resolvendo o sistema obtido.

Como o número de grandezas fundamentais é de 3, a determinação dos expoentes só se pode efectuar, quando o número de grandezas  $G$ , de que depende o movimento, é também de 3. Caso contrário, se depende de  $m$  grandezas  $G_1$ , o resultado final vem expresso nos  $m-3$  expoentes restantes.

Antes de prosseguir, deveremos recordar o chamado *teorema dos  $\pi$* , primeiramente demonstrado, em 1915 por Buckin-

gham, e cujo enunciado, aplicado ao caso da hidráulica, de haver sômente 3 grandezas fundamentais independentes,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , se pode assim exprimir:

A função

$$F = K G_1^{n_1} G_2^{n_2} G_3^{n_3} \dots G_m^{n_m}$$

é susceptível de tomar a forma

$$\varphi(\pi_1, \pi_2, \pi_3 \dots \pi_{m-3}) = 0$$

em que

$$\pi_1, \pi_2, \pi_3 \dots \pi_{m-3}$$

são números sem dimensões, e em que, em cada um dos  $\pi$ , figuram 4 variáveis, sendo 3 comuns e só uma diferente, em cada  $\pi$ .

Remetemos o leitor aos livros já citados, para a demonstração dêste teorema. Para a aplicação prática deverão observar-se as seguintes regras (Lewitt):

- 1.º Escolher três grandezas  $G$ , que contenham as três variáveis  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .
- 2.º Formar grupos contendo as três variáveis  $G$  escolhidas, mais cada uma das  $(m - 3)$  restantes, em separado.
- 3.º Atribuir os expoentes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  apenas às 3 grandezas  $G$  escolhidas. A outra grandeza pode ter um expoente qualquer (de ordinário  $-1$ ).

Apliquemos estas três regras a um caso muito geral, na Hidráulica, estudado por Rouse, em que o movimento depende

de 11 grandezas  $G$ , e em que as grandezas fundamentais são  $L$ ,  $M$ ,  $T$ .

Este exemplo é sugestivo e mostra bem as possibilidades d'êste método, de resultados tão profundos e tão férteis.

Suporemos, no caso presente, que o movimento se dá numa secção de características geométricas  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  (tôdas grandezas lineares), com um fluido de pêsso específico  $\gamma$ , massa específica  $\rho$ , viscosidade absoluta  $\mu$ , tensão superficial  $\sigma$  e módulo de elasticidade  $e$ . Suporemos ainda, que a velocidade média é  $U$  e que a variação de pressão é  $dp$ .

A equação que procuramos será de forma

$$F(a, b, c, d, \gamma, \rho, \mu, \sigma, e, U, dp) = 0$$

A aplicação das 3 regras enunciadas, leva-nos a escrever, adoptando como grandezas escolhidas  $a$ ,  $\rho$ ,  $U$ :

$$\varphi(a^{x_1}, \rho^{y_1}, U^{z_1}, b^{-1}, a^{x_2}, \rho^{y_2}, U^{z_2}, c^{-1}, a^{x_3}, \rho^{y_3}, U^{z_3}, d^{-1}, \\ a^{x_4}, \rho^{y_4}, U^{z_4}, \gamma^{-1}, a^{x_5}, \rho^{y_5}, U^{z_5}, \mu^{-1}, a^{x_6}, \rho^{y_6}, U^{z_6}, \sigma^{-1}, \\ a^{x_7}, \rho^{y_7}, U^{z_7}, e^{-1}, a^{x_8}, \rho^{y_8}, U^{z_8}, dp^{-1}) = 0$$

Como cada um dos termos da função  $\varphi$  deve ter dimensões nulas, e introduzindo o sistema  $L$ ,  $M$ ,  $T$ , vem, para o 1.º grupo de 4 grandezas:

$$L^{x_1} (M L^{-3})^{y_1} (L T^{-1})^{z_1} L^{-1} = 0.$$

Para determinar  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , teremos:

$$\begin{cases} x_1 - 3y_1 + z_1 - 1 = 0 \\ y_1 = 0 \\ z_1 = 0 \end{cases}$$



cujas soluções são :

$$x=1; y=z=0.$$

Teremos pois :

$$\pi_1 = \frac{a}{b}.$$

Da mesma forma se determinavam

$$\pi_2 = \frac{a}{c},$$

e

$$\pi_3 = \frac{a}{d}.$$

Para determinar  $\pi_4$ , teremos :

$$L^x \cdot (M L^{-3})^y \cdot (L T^{-1})^z \cdot (M L^{-2} T^{-2})^{-1} = 0.$$

Donde o sistema :

$$\begin{cases} x_4 - 3y_4 + z_4 + 2 = 0 \\ y_4 - 1 = 0 \\ -z_4 + 2 = 0 \end{cases}$$

cujas soluções são :

$$\begin{cases} x_4 = -1 \\ y_4 = 1 \\ z_4 = 2 \end{cases}$$

donde,

$$\pi_4 = \frac{\rho U^2}{\gamma a} = \frac{U^2}{ag} = F \text{ (n.º de Froude).}$$

Para determinar  $\pi_5$ , teremos:

$$L^x \cdot (M L^{-3})^y \cdot (L T^{-1})^z \cdot (M L^{-1} T^{-1})^{-1} = 0.$$

Donde:

$$\begin{cases} x_5 - 3 y_5 + z_5 + 1 = 0 \\ y_5 - 1 = 0 \\ -z_5 + 1 = 0 \end{cases}$$

cujas soluções são:

$$\begin{cases} x_5 = 1 \\ y_5 = 1 \\ z_5 = 1 \end{cases}$$

será pois,

$$\pi_5 = \frac{a \rho U}{\mu} = \frac{a U}{\nu} = R \text{ (n.º de Reynolds),}$$

sendo,

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}.$$

Da mesma forma, se poderiam obter os restantes  $\pi$  e, assim, teríamos :

$$\pi_6 = \frac{U^2 a Q}{\sigma} = W \text{ (n.º de Weber);}$$

$$\pi_7 = \frac{U^2 Q}{e} = C \text{ (n.º de Cauchy);}$$

$$\pi_8 = \frac{U^2 Q}{dp} = \frac{U^2}{g} \cdot \frac{\gamma}{dp} = \frac{U^2}{gh},$$

porque,

$$\frac{dp}{\gamma} = h.$$

Finalmente, a expressão procurada será :

$$\varphi \left( \frac{a}{b}, \frac{a}{c}, \frac{a}{d}, F, R, W, C, \frac{U^2}{gh} \right) = 0$$

ou, sob a forma explícita,

$$\frac{U^2}{gh} = Cf \left( \frac{a}{b}, \frac{a}{c}, \frac{a}{d}, F, R, W, C \right).$$

Esta expressão, muito geral do movimento, obtida por aplicação do teorema dos  $\pi$ , mostra a importância da aplicação da análise dimensional à hidráulica.

Obtivemos, assim, uma relação entre quantidades sem dimensões, que exprimem a forma como as grandezas, de que depende o movimento, devem figurar na equação.

Assim, a acção de pêsso, da viscosidade, da tensão superficial e da elasticidade, devem figurar por intermédio dos números  $F$ ,  $R$ ,  $W$  e  $C$ .

A equação deduzida é muito geral e os casos da prática, que interessam ao engenheiro, não podem fazer intervir, simultaneamente, tôdas as grandezas encaradas.

Vulgarmente, as grandezas lineares reduzem-se a uma só (nos tubos, o diâmetro), e as acções da viscosidade, tensão superficial, elasticidade (esta última só interessa para velocidades supersónicas), não são consideradas.

O teorema dos  $\pi$  não nos dá a forma da função  $\varphi$ , mas diz-nos quais as combinações de grandezas dimensionais, com uma forma adimensional, que devem intervir na expressão do movimento.

A indicação, que nos é fornecida, já é duma importância capital, não só pelas conclusões interessantíssimas que se podem derivar, como ainda, por estabelecer, duma maneira muito completa, a lei da semelhança. Sobre este ponto, mais adiante voltaremos ao assunto.

Por agora, vejamos como poderemos atingir, a expressão matemática dum fenómeno hidráulico. Para isso, devemos:

- 1.º Estudar o fenómeno e fixar quais as grandezas  $G$  que intervêm, duma maneira mais acentuada.
- 2.º Formar a função

$$F = K (G_1^n, G_2^n, G_3^n, \dots).$$

- 3.º Identificar os expoentes das potências das 3 grandezas fundamentais, em ambos os membros, determinando 3 dos expoentes  $n$ , em função dos  $m - 3$  restantes.

- 4.º A experiência determina os  $m - 3$  expoentes e o valor de  $K$ .

5.º A fórmula final deverá contar  $m-3$  grandezas adimensionais  $\pi$ , características das acções consideradas.

Esta última propriedade diz-nos que a fórmula determinada satisfaz ao princípio da semelhança.

Tomemos um exemplo: Seja o caso dum pequeno orifício, em que queremos determinar a pressão, na secção contraída, supondo que aquela depende das seguintes grandezas: o diâmetro do orifício, a massa específica do líquido, o peso, a viscosidade, e a velocidade média, na secção contraída.

A expressão da pressão será da forma:

$$p = K D^{n_1} \rho^{n_2} \gamma^{n_3} \mu^{n_4} U^{n_5},$$

Fazendo intervir as dimensões, teremos:

$$\begin{aligned} M L^{-1} T^{-2} &= (L)^{n_1} (M L^{-3})^{n_2} (M L^{-2} T^{-2})^{n_3} \\ &\quad (M L^{-1} T^{-1})^{n_4} (L T^{-1})^{n_5}. \end{aligned}$$

Determinemos os expoentes de  $D$ ,  $\gamma$ ,  $U$ , em função dos outros ( $n_2$  e  $n_4$ ). Teremos o sistema de equações

$$\begin{cases} n_1 - 3n_2 - 2n_3 - n_4 + n_5 = -1 \\ n_2 + n_3 + n_4 = 1 \\ -2n_3 - n_4 - n_5 = -2 \end{cases}$$

cujas soluções serão:

$$\begin{cases} n_1 = 1 - n_2 - 2n_4 \\ n_3 = 1 - n_2 - n_4 \\ n_5 = 2n_2 + n_4. \end{cases}$$

A equação proposta será, pois :

$$p = K D^{1-n_1-2n_2} \rho^{n_3} \gamma^{1-n_1-n_2} \mu^{n_4} U^{2n_2+n_4},$$

que pode tomar a forma

$$p = K \left( \frac{\rho U^2}{D \gamma} \right)^{n_2} \left( \frac{\mu U}{\gamma D^2} \right)^{n_4} \gamma D,$$

ou,

$$\frac{p}{\gamma D} = K \left( \frac{U^2}{g D} \right)^{n_2} \left( \frac{\nu}{D U} \right)^{n_4} \left( \frac{U^2}{g D} \right)^{n_4};$$

e, finalmente :

$$\frac{p}{\gamma D} = K F^{n_2+n_4} \left( \frac{1}{R} \right)^{n_4}.$$

Será esta, a forma que deve ter a equação do escoamento.

É necessário determinar experimentalmente as 3 quantidades  $K$ ,  $n_2$ ,  $n_4$ .

Esta equação é homogênea e contém 3 grandezas adimensionais, o que a torna coerente com o teorema dos  $\pi$ , que poderia ter sido empregado para a sua dedução.

O exemplo precedente e a matéria exposta, mostram como é possível conduzir as experiências laboratoriais, duma maneira orientada.

As fórmulas obtidas têm a generalidade e o campo de aplicação que se desejar.

Já tivemos ocasião de abordar, neste trabalho, a questão

da Semelhança em Hidráulica, princípio basilar principalmente no que respeita à obtenção de fórmulas experimentais e muito especialmente, ao estudo dos modelos reduzidos.

Se, como vimos, as grandezas físicas, que intervêm no estudo das equações da Hidráulica, figuram nessas equações com relações adimensionais, é necessário, evidentemente, que entre o modelo e o protótipo, se mantenham as mesmas relações adimensionais.

Exemplifiquemos, primeiramente, com um caso simples, que corresponde à maior aplicação prática.

O movimento que queremos estudar, depende, apenas, do peso específico.

Desejamos determinar a relação que deve existir, entre o modelo e o protótipo.

O termo adimensional, correspondente à acção do peso específico, é o número de Froude.

Este termo deve ser constante, o que determina as escalas

$$\left(\frac{V^2}{Lg}\right)_p = \left(\frac{V^2}{Lg}\right)_m ;$$

Dada a constância de  $g$ , no local da experiência e se a relação geométrica fôr

$$\frac{L_p}{L_m} = \lambda,$$

teremos

$$\frac{V_p^2}{V_m^2} = \sqrt{\frac{L_p}{L_m}} = \sqrt{\lambda},$$

que nos determina a relação entre as velocidades.

A relação, entre forças homólogas, seria :

$$\frac{F_p}{F_m} = \lambda^3,$$

e, entre as caudais :

$$\frac{Q_p}{Q_m} = \lambda^{5/2}.$$

Vê-se que, é possível, fixar uma das escalas, por exemplo, a dos comprimentos.

Outro exemplo :

Queremos agora estudar um fenómeno que depende apenas da viscosidade.

O termo adimensional, correspondente, é o número de Reynolds, que deverá ser constante :

$$\left(\frac{LV}{\nu}\right)_p = \left(\frac{LV}{\nu}\right)_m.$$

Fixando a escala geométrica  $\lambda$ , teremos para relação entre as velocidades :

$$\frac{V_p}{V_m} = \frac{\frac{\nu_p}{\nu_m}}{\lambda}.$$

É, pois, possível determinar relações entre grandezas homólogas, desde que seja fixada a escala geométrica e conhecidos os líquidos do protótipo e do modelo.



Por exemplos semelhantes, ver-se-ia que poderíamos determinar relações, entre grandezas homólogas, no caso das acções das forças de elasticidade ou de tensão superficial, considerando a constância dos números de Cauchy ou de Weber.

A aplicação destes princípios de semelhança, tem sido dum emprêgo freqüente e fértil, em todos os laboratórios de hidráulica.

No entanto, é bom salientar-se que só é possível, a semelhança, quando se considera, em separado, para cada caso, a constância apenas duma relação adimensional,  $F$ ,  $R$ ,  $W$  ou  $C$ , isto é, quando se estudam fenómenos que dependem apenas duma acção (gravidade, viscosidade, tensão superficial, elasticidade, etc.).

Se o fenómeno depender de 2 ou mais acções simultâneas, é necessário estudar apenas a acção predominante e estabelecer, a partir dela, as relações entre as grandezas homólogas; pois, se procedêssemos d'outra maneira, as relações obtidas seriam contraditórias.

Poderemos, no entanto, considerar certos casos especiais, como por exemplo, o que vamos apontar.

Um fenómeno depende simultâneamente do pêso específico e da viscosidade. Poder-se-á determinar uma relação entre a viscosidade e massa específica que torne possível a semelhança?

Tomemos por exemplo as duas escalas das velocidades:

1.<sup>a</sup> Acção predominante do pêso específico

$$\frac{V_p}{V_m} = \lambda^{1/2}.$$

2.<sup>a</sup> Acção predominante de viscosidade

$$\frac{V_p}{V_m} = \frac{\frac{v_p}{v_m}}{\lambda}.$$

Para que as relações das velocidades se mantenham, deverá ser:

$$\lambda^{1/2} = \lambda^{-1} \frac{v_p}{v_m}$$

$$\frac{v_p}{v_m} = \lambda^{3/2}$$

ou,

$$\frac{\frac{\mu_p}{\mu_m}}{\frac{\rho_p}{\rho_m}} = \lambda^{3/2}.$$

Isto é, a semelhança é possível se o quociente das escalas das viscosidades absolutas e das massas específicas, dos dois líquidos, fôr igual a  $\lambda^{3/2}$ .

Outros casos particulares se poderiam considerar.

Ainda é, a propósito da semelhança, necessário acentuar bem, como já fizemos noutro trabalho (*A Semelhança em Hidráulica*), que o facto da fixação de escalas correctas não é suficiente para o completo estudo dos modelos.

Muitas causas podem desvirtuar, completamente, as relações entre o protótipo e o modelo, e assim pode acontecer que as leis, que regem um e outro, sejam inteiramente diferentes. O efeito da tensão superficial pode ser desprezável no primeiro e não o ser no segundo; sem se ter considerado, para a fixação das escalas, o número de Weber, por que estas foram estabelecidas, geralmente, pela constância do número de Froude, ou mais raramente pela do número de Reynolds.

Sendo assim, as leis que regem o modelo, são inteiramente diferentes das do protótipo.

Um certo protótipo, de movimento acentuadamente turbulento (número de Reynolds elevado), determina um modelo, cuja escala pode ser estabelecida, a partir da constância do número de Froude.

Acontece, muitas vezes, que o movimento, referente ao modelo, é acentuadamente laminar.

Neste caso, a perda de carga do protótipo é proporcional a  $U^2$  e a do modelo a  $U$ .

Ainda, neste caso, a semelhança é desvirtuada.

O emprêgo necessário de escalas geométricas diferentes, para os comprimentos e alturas, conduz a coeficientes, de rugosidade diferentes e a dificuldade de realizar materiais de transporte (areias, vasas, etc.), relacionados pelas escalas dos comprimentos e das forças, ainda mais dificultam a possibilidade duma semelhança completa, razão pela qual, em muitos casos, principalmente no que diz respeito a obras fluviais e marítimas, se não possam tirar conclusões de valor prático apreciável.

Os resultados laboratoriais, nestes casos, são quando muito qualitativos e, mesmo assim, é costume recorrer a laboratórios diferentes, e ao confronto das conclusões respectivas, que muitas vezes são contraditórias.

As razões destas divergências ficaram apontadas nas linhas precedentes.

Estas considerações não significam que a teoria da semelhança tenha um valor limitado. Esta afirmação estava em desacôrdo com a importância extraordinária desta tão profunda teoria, cujo emprêgo é cada vez maior e tem permitido, tanto no domínio da hidráulica, como no da aerodinâmica, as maiores realizações.

A semelhança é um instrumento de que se serve o investigador. Êsse instrumento não é perfeito, não dispensa o emprêgo doutros instrumentos, mas, a-pesar de tudo, as operações que se podem realizar, com a sua utilização, são vastíssimas e da maior confiança.

Não desejamos desenvolver êste assunto desmedidamente, porque o nosso intuito é apenas o de procurar a forma como a experiência pode ser facilitada, orientada e interpretada por

métodos tão simples, e de tão grande alcance científico, que quasi eliminaram da hidráulica, o recurso às fórmulas empíricas, que, como dissemos, infestavam os tratados do século passado.

Vejamos a seguir, a título de curiosidade, como um físico, sem conhecimentos especiais de hidráulica, sabendo apenas as definições de grandezas já definidas na Física e tendo desenvolvimento intelectual suficiente para orientar os seus conhecimentos para a interpretação dos fenómenos hidráulicos, poderia, duma maneira rápida, deduzir, a partir da análise dimensional, as fórmulas fundamentais da Hidráulica.

As experiências a realizar, para a obtenção das constantes, seriam duma determinação fácil.

Assim, vejamos em primeiro lugar, o escoamento por orifícios, da forma mais elementar que se pode pôr, isto é, quando consideramos um orifício de pequenas dimensões, sob pequena carga. A existência da secção contraída é verificada por simples observação. É a velocidade nessa secção, que vamos determinar, em função das outras grandezas que influem no movimento e que são : a carga  $h$ , o peso específico e a massa específica :

$$U = f(h, \rho, \gamma)$$

ou :

$$U = K h^a \rho^b \gamma^c .$$

Considerando as dimensões :

$$L T^{-1} = L^a (M L^{-3})^b (M L^{-2} T^{-2})^c ,$$

donde as equações,

$$\begin{cases} a - 3b - 2c = 1 \\ b + c = 0 \\ -2c = -1 \end{cases}$$

cujas soluções são :

$$a = \frac{1}{2}; \quad b = -\frac{1}{2}; \quad c = \frac{1}{2}.$$

Donde

$$U = K h^{1/2} \left( \frac{\gamma}{\rho} \right)^{1/2} = K \sqrt{gh}.$$

A obtenção de  $K$  dependeria, apenas, *duma experiência*, cuja realização se depreende da fórmula anterior.

A fórmula indica, como não poderia deixar de ser, que  $F = \text{const.}$  que é o único termo  $\pi$ , de que depende o movimento.

A seguir estudaria, o nosso físico, o caso dos descarregadores. Procuraria o volume escoado, na unidade de tempo, isto é, o caudal.

Se o descarregador fôsse triangular, rectângulo, a largura do descarregador estaria relacionada com a altura, que seria a própria carga, pela relação

$$l = 2h.$$

Teríamos, neste caso :

$$Q = f(h, l, \rho, \gamma)$$

ou :

$$Q = f(h, 2h, \rho, \gamma);$$

ou, simplesmente :

$$Q = f(h, \rho, \gamma).$$

e, ainda:

$$Q = K h^a \rho^b \gamma^c.$$

Considerando as dimensões:

$$L^3 T^{-1} = L^a (M L^{-3})^b (M L^{-2} T^{-2})^c.$$

$$\begin{cases} a - 3b - 2c = 3 \\ b + c = 0 \\ -2c = -1 \end{cases}$$

$$a = \frac{5}{2}; \quad b = -\frac{1}{2} \quad c = \frac{1}{2}.$$

Donde:

$$Q = K h^{5/2} \left( \frac{\gamma}{\rho} \right)^{1/2}$$

ou:

$$Q = K h^2 \sqrt{gh}.$$

Uma experiência apenas, determinaria o valor de K.

O caso do descarregador rectangular appareceria, ao nosso fisico, como um pouco mais complicado, pela impossibilidade de relacionar a largura do descarregador com a carga, o que obriga ao apparecimento de duas grandezas lineares.

Essa dificuldade poderia desaparecer, pela consideração do caudal por unidade de largura.

Teríamos, então :

$$\frac{Q}{l} = f(h, g, \gamma),$$

ou :

$$\frac{Q}{l} = K h^a g^b \gamma^c.$$

Considerando as dimensões :

$$L^2 T^{-1} = (L)^a (M L^{-3})^b (M L^{-2} T^{-2})^c$$

$$\begin{cases} a - 3b - 2c = 2 \\ b + c = 0 \\ -2c = -1 \end{cases}$$

$$a = \frac{3}{2}; \quad b = -\frac{1}{2}; \quad c = \frac{1}{2};$$

donde :

$$\frac{Q}{l} = K h^{3/2} g^{1/2}$$

ou,

$$\frac{Q}{l} = K l h \sqrt{gh}.$$

A determinação de K depende, apenas, duma experiência.  
A dificuldade apontada, do aparecimento de duas grandezas,

com as mesmas dimensões, seria levantada, pela aplicação das regras dos grupos de 4 (*Teorema dos  $\pi$* ):

$$\varphi(h, Q, l, q, \gamma) = 0.$$

Tomemos, como grandezas fundamentais,  $h, Q, q$ .

O 1.º grupo será:

$$\varphi_1(h^a, Q^b, q^c, l) = 0,$$

que nos dá:

$$L^a (L^3 T^{-1})^b (M L^{-3})^c L = 0$$

$$\begin{cases} a + 3b - 3c + 1 = 0 \\ c = 0 \\ -b = 0 \end{cases}$$

$$a = -1; \quad b = 0; \quad c = 0.$$

O grupo adimensional será:

$$\frac{l}{h}.$$

Formemos o outro grupo

$$\varphi_2(h^a, Q^b, q^c, \gamma) = 0.$$



Teremos

$$L^a (L^3 T^{-1})^b (M L^{-3})^c M L^{-2} T^{-2} = 0$$

$$\begin{cases} a + 3b - 3c - 2 = 0 \\ c + 1 = 0 \\ -b - 2 = 0 \end{cases}$$

$$a = 5; \quad b = -2; \quad c = -1.$$

O grupo adimensional será, pois:

$$\frac{h^5}{Q^2} \frac{\gamma}{\varrho} = \frac{gh^5}{Q^2}.$$

A função procurada será da forma

$$\varphi \left( \frac{l}{h}, \frac{gh^5}{Q^2} \right) = 0,$$

ou:

$$\frac{gh^5}{Q^2} = K_1 \frac{l}{h}$$

que dá:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{K_1 l}} h^3 \sqrt{g}$$

ou

$$Q = \frac{1}{\sqrt{K_1}} \frac{\sqrt{h^3}}{\sqrt{13}} l h \sqrt{gh}.$$

Esta fórmula é idêntica à anteriormente obtida, porque poderemos fazer

$$K = \frac{1}{\sqrt{K_1}} \frac{\sqrt{h^3}}{\sqrt{13}}.$$

Estudados os casos dos orifícios, o nosso físico investigaria o movimento nos tubos. Primeiramente, o caso do movimento laminar e, em seguida, o do movimento turbulento.

Sobre o primeiro destes casos, teria já idéias bem concretas, pelo estudo que d'ele fizera, na Física; no entanto, desejaria confirmar os resultados, pelo método que vimos seguindo, e, assim, escreveria que a diferença de pressão, por unidade de comprimento a que chamaria *perda de pressão unitária*, entre os dois topos, dum tubo de diâmetro  $D$ , variaria com a viscosidade e com a velocidade:

$$\frac{dp}{l} = F(D, U, \mu)$$

ou,

$$\frac{dp}{l} = K D^a U^b \mu^c$$

$$M L^{-2} T^{-2} = L^a (L T^{-1})^b (M L^{-1} T^{-1})^c$$

$$\begin{cases} a + b - c = -2 \\ c = 1 \\ -b - c = -2 \end{cases}$$

$$a = -2; \quad b = 1; \quad c = 1,$$

donde

$$\frac{dp}{l} = K \frac{\mu U}{D^2}.$$

Esta equação é idêntica à de Poiseuille:

$$J = \frac{32 \mu U}{\gamma D^2}$$

Bastaria, para o verificar, que, inicialmente, fôsse considerada, em vez da quantidade

$$\frac{dp}{l},$$

de dimensões

$$M L^{-2} T^{-2},$$

a quantidade sem dimensões:

$$\frac{1}{\gamma} \frac{dp}{l} = J$$

a que chamaria *perda de carga unitária*. A partir da experiência, seria determinado o valor de  $K$ .

A equação mostra que, no caso do movimento laminar, a perda de carga é proporcional à velocidade.

Depois de determinada a equação do movimento laminar, seria levado ao caso mais importante do movimento turbulento,

em que, a influência da viscosidade, se pode considerar desprezável, e escreveria, para este caso,

$$\frac{dp}{l} = \varphi(D, U, \varrho),$$

ou:

$$\frac{dp}{l} = K D^a U^b \varrho^c$$

$$M L^{-2} T^{-2} = L^a (L T^{-1})^b (M L^{-3})^c$$

$$\begin{cases} a + b - 3c = -2 \\ c = 1 \\ -b = -2 \end{cases}$$

$$a = -1; \quad b = 2; \quad c = 1.$$

Donde

$$\frac{dp}{l} = K \frac{\varrho U^2}{D}.$$

Como

$$\frac{dp}{l} = \gamma J,$$

vem:

$$J = K \frac{U^2}{D} \frac{\varrho}{\gamma} = K \frac{U^2}{D g}$$

ou

$$J = K F.$$

A perda de carga é, neste caso, proporcional ao quadrado da velocidade. O valor de  $K$  seria determinado pela experiência.

O nosso físico verificaria que as fórmulas clássicas do movimento de água nos tubos, satisfazem a relação agora deduzida, e seria, ainda, levado a investigar quais as condições que determinam a passagem do movimento laminar para o movimento turbulento, o que faria, naturalmente, igualando as perdas de carga dadas pelas duas fórmulas, a que chegou.

Teria, então :

$$\frac{32 \mu U}{\gamma D^3} = K \frac{U^3}{Dg},$$

ou seja,

$$\frac{\gamma UD}{\mu g} = \frac{32}{K};$$

e, ainda :

$$\frac{UD}{\nu} = \frac{32}{K} = R.$$

O 1.º membro representa o número de Reynolds, o que nos indica que é o valor dêste número que determina a passagem do regimen laminar ao turbulento.

Pela experiência, determinaria que o valor crítico dêsse número é de cêrca de 2500.

A seguir, ainda procuraria a lei do movimento dum fluído diferente da água, influenciado pela acção da massa específica e da viscosidade, e escreveria, neste caso :

$$\frac{dp}{l} = \varphi (D, U, \varrho, \mu)$$

ou,

$$\frac{dp}{l} = K D^a U^b \rho^c \mu^d$$

$$M L^{-2} T^{-2} = L^a (L T^{-1})^b (M L^{-3})^c (M L^{-1} T^{-1})^d$$

$$\begin{cases} a + b - 3c - d = -2 \\ c + d = 1 \\ -b - d = -2 \end{cases}$$

donde:

$$\begin{aligned} a &= -1 - d \\ b &= 2 - d \\ c &= 1 - d \end{aligned}$$

virá pois:

$$\frac{dp}{l} = K D^{-1-d} U^{2-d} \rho^{1-d} \mu^d = K \left( \frac{\mu}{DU\rho} \right)^d \frac{\rho U^2}{D}$$

mas, como,

$$\frac{1}{\gamma} \frac{dp}{l} = J$$

vem:

$$J = K \left( \frac{\mu}{DU\rho} \right)^d \frac{U^2}{D} \frac{\rho}{\gamma}$$

e, finalmente,

$$J = K \left( \frac{1}{R} \right)^d F.$$

Seriam necessárias, para a obtenção dos valores de  $d$  e  $K$ , duas experiências, e chegaria a uma equação do tipo da de Blasius :

$$J = 0,0395 \left( \frac{1}{R} \right)^{1/4} F.$$

Já o nosso físico tinha chegado a conhecimentos bastante profundos de hidráulica, que o tinham levado a conclusões muito diferentes das que caracterizavam as aquisições, puramente empíricas, da maioria dos autores antigos.

Caberia, agora, a vez de fazer intervir, no estudo dos tubos, a influência da rugosidade.

O nosso físico compreenderia, conhecedor como é da observação dos fenómenos físicos, a dificuldade do problema.

Tentaria determinar um termo  $\pi$ , característico da rugosidade, e escolheria, naturalmente, a *rugosidade proporcional*, isto é, a relação entre a altura média das asperezas e o diâmetro :

$$s = \frac{\varepsilon}{D}.$$

Era fácil, pela análise dimensional, atingir a equação do movimento. Bastava escrever :

$$\frac{dp}{l} = \varphi \left( D, U, \rho, \mu, \frac{\varepsilon}{D} \right),$$

e prosseguir a análise.

Porém, um simples raciocínio levá-lo-ia a pôr de parte este caminho. É que, a rugosidade, não pode ser definida desta maneira, visto que a forma das asperezas e a sua distribuição, ao longo da parede interna do tubo, terão, forçosamente, uma influência importante.

Como definir um parâmetro característico da rugosidade?

Ainda hoje, os Hidráulicos não podem responder, duma maneira concreta e precisa, a esta pergunta.

Resta, pois, o processo da determinação das constantes adimensionais, a partir de categorias, bem definidas, de tubos (ferro fundido, aço, fibro-cimento).

É o que se faz geralmente, embora, haja outros métodos.

Seria, nesta altura, a ocasião do estudo do movimento da água nos canais.

Para efeito do estudo da resistência ao movimento, portanto da perda de carga, o nosso físico, num primeiro estudo, verificaria que a pressão, à superfície do canal, era a pressão atmosférica. Em seguida encontraria uma grande dificuldade na definição geométrica de todos os tipos de secções. Pretendendo deduzir fórmulas aplicáveis a quaisquer secções, ver-se-ia levado a introduzir um ou mais parâmetros lineares, que melhor ou pior definissem uma dada secção.

Se o nosso físico tivesse a sorte de se lembrar da relação da secção para o perímetro molhado, isto é, do *raio médio*, o problema estava reduzido a um caso análogo ao dos tubos, e as fórmulas a que chegava eram idênticas, com a diferença de que onde, nos tubos, figurava o diâmetro, aparecia, no caso dos canais, o raio médio.

Não vale a pena continuar, porque os casos que se poderiam estudar, a partir da análise dimensional e da observação elementar dos fenómenos, eram muitos, o que prolongaria imensamente este capítulo.

\*

\* \*

A matéria exposta, é suficiente para nos elucidar acerca do grande valor das teorias da Homogeneidade e da Semelhança.

A Hidráulica é, segundo a muito conhecida frase de Lagrange, « rebelde aos cálculos », o que equivale a dizer que até àquêlê genial investigador pouco se alcançara, pela apli-



cação dos métodos da análise matemática, nos domínios desta ciência.

Mesmo, após Lagrange, no século passado, o nível dos conhecimentos obtidos, por esse processo, tão fecundo nas outras ciências físicas, ficou muito abaixo do que era de esperar.

A maior parte das aquisições veio de experiências directas e de conclusões mais ou menos bem formuladas, de dedução directa ou indirecta, tirada a partir daquelas.

Vimos, no capítulo II, de que males enfermavam as leis empíricas, tão frequentes na Hidráulica.

Parece estarmos agora seguros dum método de resultados apreciáveis, que não só permite idealizar a forma de executar as experiências, como ainda permite obter imediatamente, e quasi sempre, a forma da lei que se pretende, além doutras e muito valiosas conclusões.

Para melhor investigarmos quais as razões que explicam o garantido e tão perfeito êxito da aplicação destas teorias à Hidráulica, teremos, ainda, de nos deter um pouco nos assuntos dêste capítulo.

Quando queremos deduzir a lei dum fenómeno, a partir da lei de homogeneidade, como procedemos?

a) Primeiramente, a *partir dum conhecimento superficial do fenómeno, fixamos as grandezas de que elle depende;*

b) Seguidamente, a *análise dimensional encarrega-se da determinação da expressão analítica, como sabemos;*

c) Finalmente, resta determinar, pela experiência, o valor de constantes, cujo número é reduzido.

São estas as três operações fundamentais, das quais a primeira representa o mesmo papel que uma hipótese, que pode formular-se, com maior ou menor fundamento, conforme o grau de conhecimentos prévios que se têm do fenómeno encarado, ou doutros fenómenos análogos.

Em geral, não é muito difícil de reconhecer quais as grandezas que intervêm, porque o seu número é limitado. Assim, num exemplo apontado nas linhas precedentes, em que se estuda uma lei muito complexa, cujo campo de aplicação excede muito

o costumado, o número de grandezas é de 11, sendo 4 puramente geométricas.

Quási sempre as grandezas lineares reduzem-se a uma só e teremos de encarar apenas a velocidade ( $U$ ), a resistência ao movimento ( $R$ , ou  $J$ , ou  $\frac{J}{T}$ ) e a acção das fôrças actuantes, (gravidade, viscosidade, tensão superficial, elasticidade, etc.).

Das quatro grandezas representativas das fôrças, existe quási sempre uma delas, cuja influência predomina de tal forma que é possível desprezar a acção das outras três.

Em vários exemplos, atrás apontados, vimos que o número total de grandezas é geralmente de 4 ou 5.

É, pois, *fácil* a formulação da hipótese contida na 1.<sup>a</sup> operação.

Quanto à 2.<sup>a</sup> operação, o seu princípio fundamental baseia-se, principalmente, na afirmação de que uma grandeza é independente do tamanho das grandezas fundamentais que serviram para a medir, princípio cuja justificação se torna desnecessária.

A 3.<sup>a</sup> operação é puramente experimental e refere-se à determinação dum número limitado de medidas de grandezas determinadas.

Em síntese, a investigação da lei dum fenómeno, pelo método que estamos a considerar, baseia-se no raciocínio (1.<sup>a</sup> operação) e na experiência (3.<sup>a</sup> operação). A homogeneidade intervem, apenas, com um processo automático de ligação entre a hipótese e a experiência (2.<sup>a</sup> operação).

Se a experiência foi correctamente executada, e se a lei não exprime correctamente o fenómeno, é que a hipótese não foi bem formulada.

Esta afirmação poucas restricções pode sofrer, pois que, quanto à 2.<sup>a</sup> operação, estas baseiam-se em que nem todos os fenómenos físicos são susceptíveis de se considerarem como produtos de potências, como os casos de grandezas descontínuas, e ainda certas grandezas que se devem considerar como resultantes de vectores de natureza diferente, etc.

À parte estas restricções, que põem de parte a aplicação

do princípio de homogeneidade, em tôda a sua generalidade, é bom notar-se que, por vezes, o próprio critério da homogeneidade elimina, automaticamente, hipóteses mal formuladas.

Assim, por exemplo, se quizermos determinar o tempo  $t$ , de oscilação dum pêndulo de comprimento  $l$  e massa  $m$ , sujeito à acção da gravidade, e tomarmos como hipótese:

$$t = \varphi(l, m, g)$$

ou,

$$t = K l^a m^b g^c,$$

verificamos, imediatamente, ao escrever as dimensões das grandezas, que  $t$  é independente de  $m$ , o que nos veio *acertar* a nossa hipótese, mal formulada.

\*  
\*      \*

Estamos de posse dum método que tem possibilidades desmedidas de aplicação.

As três operações indicadas conduzem, por um processo simples, sem necessidade de desvios, a um objectivo certo.

A análise dimensional, como vimos, teve um papel fundamental, na ligação da hipótese à experiência e, foi ela que permitiu criar o método.

É, portanto, a essa análise que deveremos ir buscar a explicação do resultado destes processos, cuja introdução na hidráulica é bastante recente.

Parece que a lei de homogeneidade é qualquer coisa que se liga com a própria essência dos fenómenos e daí o seu significado esotérico que certos físicos lhe atribuem.

Extraímos do já citado livro de Bridgman, a seguinte passagem: « It is by many considered that a dimensional formula

has some exoteric significance connected with the *ultimate nature* of an object, and that we are in some way getting at the ultimate nature of things in writing their dimensional formulas. Such a point of view sees something absolute in a dimensional formula and attaches a meaning to such phrases as « really » independent, as in Riabouchinsky's comments of Lord Rayleigh's analysis of a certain problem in heat transfer. For this point of view it becomes important to find the « true » dimensions, and when the « true » dimensions are found, it is expected that something new will be suggested about the physical proprieties of the system ».

A busca duma lei, como fórmula que exprime relações constantes entre fenómenos, envolve uma generalização ou uma indução. Ora ambas estas operações são vagas; a generalização por envolver o conjunto de factos homólogos, sujeitos à má observação e interpretação; a indução, tantas vezes empregada na matemática, não é de fácil aplicação nas ciências físicas e mesmo, está sujeita a críticas, como a que lhe faz Poincaré, de ser « irreductível ao princípio da contradição ».

A descoberta duma lei é quasi sempre devida a dotes extraordinários dos investigadores, que após um trabalho consciente, ou subconsciente, por processos próprios do espírito, ainda não descobertos, atingem a própria essência das coisas.

Ora, se nós quisermos colocar o princípio da homogeneidade na própria essência das coisas, este é uma lei geral, que temos de admitir, e, assim, poderemos explicar, porque a aplicação da Análise Dimensional, às ciências físicas, pode encaminhar o cientista para a senda da verdade.

A verdade é qualquer coisa de absoluta que nem se induz nem se deduz. Provém dos factos, mas existe neles.

Ora o método, de que estamos a tratar, nem é dedutivo, nem indutivo, utiliza os factos, mas explica-os, atingindo a verdade.

Antes de terminar este assunto, desejamos registar a interessantíssima opinião de Pierre Delbet (*La Science et la Réalité* — Flammarion), acerca da aplicação do princípio da homogeneidade à matemática: « la notion d'homogénéité évite la

série fastidieuse, interminable, des raisonnements par récurrence, qu'il faut recommencer de nombre en nombre et sans qu'ils prouvent rien » ; e ainda : « De l'homogénéité, on peut tirer toutes les propriétés des nombres, qui par la même prennent aussi le caractère de nécessité absolue ».

O carácter que, como se vê, certos autores não têm relutância em considerar como de *absoluto, esotérico, ultimate nature*, das fórmulas deduzidas pelo emprêgo de Análise Dimensional, torna o emprêgo dêste recurso, nas ciências físicas, como a hidráulica, bem diferente do das matemáticas, cujo papel, fica bem definido através das seguintes citações de Edmond Bouty, no seu livro, *La vérité scientifique* (Flammarion).

A pág. 152, diz : « Ainsi, les mathématiques sont, pour le physicien, un outil très parfait, très fidèle. Mais il ne doit jamais se laisser aller à y voir autre chose qu'un outil. Le moule ne contient ni plus ni moins que ce qu'on y a versé ».

« Au reste, une formule mathématique est, *par elle-même*, impuissante à suggérer des expériences vraiment distinctes de celles qui ont servi à l'établir et qu'elle résume ».

Mais adiante, a pág. 154 : « Les mathématiques ne sont qu'un langage, et les lois d'un langage parfait doivent être telles qu'il n'ajoute et ne retranche rien au contenu d'une proposition une fois formulée ».

Bouty acentua bem, o carácter das matemáticas, quando empregadas em raciocínios físicos, e através das suas palavras, aqui registadas, se vê bem a diferença que existe entre as fórmulas matemáticas e as fórmulas dimensionais.

Quando queremos estudar um fenómeno hidráulico, por intermédio da matemática, temos de o simplificar e de considerar casos ideais, irrealizáveis na prática, e assim nos vemos obrigados a estudar os líquidos perfeitos, em vez dos líquidos reais.

Além disso, o emprêgo do raciocínio matemático conduz, muitas vezes, a obstáculos intransponíveis, donde resultam as necessárias hipóteses simplificadoras e conseqüentes fórmulas inexactas.

## IV

# CONHECIMENTOS DERIVADOS DAS MATEMÁTICAS OU DE TEORIAS FÍSICAS

Vimos, no que precede, como foi possível aplicar à hidráulica as equações deduzidas na hidrodinâmica.

Pela introdução de coeficientes ou sucessivos ajustamentos, de ordem prática, as conclusões desta ciência, para os líquidos perfeitos, foram adaptadas aos líquidos reais e às superfícies rugosas.

Estes trabalhos, que algumas vezes representam esforços consideráveis dos investigadores, foram realizados, principalmente, no século passado, simultaneamente com o grande desenvolvimento empírico-experimental da hidráulica.

Os caminhos seguidos, bastante sinuosos para o progresso dos conhecimentos dos fluídos reais, não têm, ultimamente, tido a utilização característica dos tempos passados.

Sem dúvida alguma que a hidrodinâmica é um valiosíssimo ponto de apoio dos novos conhecimentos, simplesmente tem de ser considerada como uma ciência abstracta, cujos resultados nem sempre podem interpretar, com correcção, os fenómenos naturais, pois estes fazem intervir grandezas que não foram consideradas, além de muitas outras causas de perturbação, cuja natureza é difícil de investigar.

A completíssima obra *Hydrodynamics* de Sir Horace Lamb (Cambridge-University Press, 6.<sup>a</sup> Ed., 1932), é um exemplo admirável do que pode alcançar o espírito humano no domínio de tão abstracta ciência.

Nêste nosso tão modesto trabalho, não podemos, nem é nosso desejo, aprofundar o assunto, queremos apenas exemplificar como a hidrodinâmica, em certos casos, pode explicar correctamente os fenómenos hidráulicos.

Como exemplo, vejamos como se pode efectuar o estudo dos movimentos irrotacionais planos, a partir do estudo das funções de variável complexa <sup>(1)</sup>.

A deslocação duma partícula inserida numa massa fluída, em movimento, pode exprimir-se pelas equações:

$$x_1 = x + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dt + (\beta z - \gamma y) dt$$

$$y_1 = y + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dt + (\gamma x - \alpha z) dt$$

$$z_1 = z + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dt + (\alpha y - \beta x) dt$$

Estas equações exprimem que a deslocação duma partícula fluída, numa deformação infinitamente pequena, se compõe:

### 1.º duma translação, de componentes

x

y

z

---

(1) Lamb, *Hydrodynamics*, op. cit. — Escande, *Hydraulique Générale*, Ed. Privat, Toulouse, 1943. — L. Prandtl, *Précis de Mécanique des Fluides*, Trad. française, Dunod, 1940.

2.º — duma deformação, de componentes

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dt$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} dt$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} dt.$$

3.º — duma rotação, em torno dum eixo, de velocidade angular  $\omega$  ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ).

As componentes do vector  $\omega$  (*vector turbilhão*) são dadas por

$$\alpha = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\beta = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Resulta que o movimento dum fluído se distingue do dum sólido indeformável, pelo facto de, simultâneamente, com as componentes duma translação e duma rotação, haver uma deslocação própria, proveniente duma deformação derivada dum potencial de velocidades, representado pela função  $\varphi$  (*função de deformação*).

Poderemos agora definir *movimento regular* como sendo



aquêle em que, as componentes da velocidade, num ponto, são dadas por:

$$u = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$v = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$w = \frac{\partial f}{\partial z}$$

Neste caso, é fácil de verificar que, as componentes do vector turbilhão são nulas e que o movimento é, portanto, *irrotacional*.

É este o caso vulgar do movimento permanente da água nos descarregadores, tubos, canais, etc.

A função  $f(x, y, z) = C$  permite traçar uma família de curvas, correspondentes aos diversos valores atribuídos à constante.

Teremos assim definidas as *linhas equipotenciais cinéticas*.

As *trajectórias*, cujas equações se obtêm por integração do sistema:

$$\frac{dx}{dt} = u(x, y, z, t)$$

$$\frac{dy}{dt} = v(x, y, z, t)$$

$$\frac{dz}{dt} = w(x, y, z, t),$$

não podem, em geral, coincidir com as *linhas de corrente*, para

as quais, num determinado instante, o vector velocidade representa a tangente num ponto, isto é :

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}.$$

Nestas equações, o tempo, ao contrário das equações das trajectórias, não é uma coordenada espacial, mas um parâmetro.

Conhecida a lei do movimento, o tempo é suficiente para fixar a posição do móvel, na trajectória.

No caso das linhas de corrente, quando varia o tempo, variam simultaneamente a posição do móvel, e, também, o caminho que este segue, em relação ao instante anterior.

Parece haver, nestas definições, uma certa confusão, o que é aparente e que uma simples imagem faz desaparecer.

Suponhamos que uma automotora, em movimento uniforme, percorre um determinado trajecto, materializado por um determinado trôço de via férrea.

A via férrea é a trajectória e o tempo é suficiente para fixar a posição da automotora.

Agora, por abstracção, poderemos imaginar que durante o trajecto, se faz sentir um abalo de terra de grande duração, e que, a automotora ideal segue o seu caminho, sem descarrilar.

A via férrea sofre deformações contínuas, apresentando configurações mais ou menos onduladas.

O tempo já não é agora uma coordenada espacial, e não é possível dizer, no instante  $t$ , qual é a posição da automotora, pois a via está continuamente a mudar de configuração.

As linhas de corrente serão então materializadas pelas diversas posições da via férrea, nos diversos instantes  $t$ .

Passando da imagem, para o caso da hidráulica, vê-se que só no movimento permanente, as trajectórias coincidem com as linhas de corrente.

\*  
\*      \*

Consideremos um movimento plano, com potencial de velocidades, portanto irrotacional.

Teremos:

$$u = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{e} \quad v = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

As linhas equipotenciais cinéticas serão dadas por

$$f(x, y) = C.$$

Por sua vez, as linhas de corrente poderão ser expressas por

$$F(x, y) = K,$$

expressão que se obtém por integração da expressão

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v},$$

ou

$$(1) \quad -v dx + u dy = 0,$$

esta equação é uma diferencial total visto ter de verificar-se a equação da continuidade

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

A expressão (1) deverá ser pois idêntica à que resulta de diferenciar a função

$$F(x, y) = K,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0.$$

Resulta então:

$$v = - \frac{\partial F}{\partial x}$$

$$u = \frac{\partial F}{\partial y};$$

e, finalmente:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = - \frac{\partial F}{\partial x}.$$

Estas relações são fundamentais para a introdução das funções analíticas na Hidráulica, como vamos ver.

Consideremos a função:

$$W = f(x, y) + i F(x, y).$$

Sabe-se da análise, que esta função admite derivada, finita e bem determinada, se se verificarem as seguintes relações

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = - \frac{\partial F}{\partial x} \end{cases}$$

Estas conclusões são idênticas às relações, anteriormente obtidas, características dos movimentos irrotacionais planos.

Qualquer função analítica é, pois, susceptível de representar um movimento com potencial de velocidades, em que:

$$f(x, y) = C$$

representa as linhas equipotenciais cinéticas e

$$F(x, y) = K,$$

as linhas de corrente.

Multiplicando as equações (2), obtem-se

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

que mostra a ortogonalidade das linhas equipotenciais cinéticas

e das linhas de corrente e ainda, também, a possibilidade da permuta das linhas

$$f(x, y) = C$$

com

$$F(x, y) = K.$$

Resulta, daqui, que qualquer função analítica pode representar dois possíveis movimentos irrotacionais planos.

As equações (2) permitem introduzir, no estudo da Hidráulica, a *representação conforme*, porque são as condições de transformação da função

$$W = f(x, y) + i F(x, y)$$

numa outra expressão, algébrica ou transcendente, da variável  $z = x + i y$ , isto é, em

$$\varphi(z) = \varphi(x + i y).$$

Será, pois:

$$W = \varphi(z).$$

De facto, como

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = i,$$

formando as derivadas parciais de  $W$  em ordem a  $y$  e a  $x$ , temos:

$$\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{dW}{dz} \frac{\partial z}{\partial y} = i \frac{dW}{dz}$$

e

$$i \frac{\partial W}{\partial x} = i \frac{dW}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = i \frac{dW}{dz}$$

Como os 2.<sup>os</sup> membros são iguais, vem

$$\frac{\partial W}{\partial y} = i \frac{\partial W}{\partial x}$$

ou,

$$\frac{\partial f}{\partial y} + i \frac{\partial F}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x}.$$

Desta igualdade, resultam as condições (2).

O valor da derivada  $\frac{dW}{dz}$  é independente da relação  $\frac{dy}{dx}$ , e pode pois considerar-se como um operador que transforma o vector  $\overline{dW}$  noutro vector  $\overline{dz}$ .

As figuras obtidas por meio desta transformação, não alteram os ângulos dos elementos infinitesimais.

A derivada  $\frac{dW}{dz}$  permite obter as componentes da velocidade, porque

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial x} = u - i v.$$

A representação conforme permite transformar o movimento expresso simbolicamente, pela função

$$W = f(x, y) + i F(x, y)$$

representada geomêtricamente no plano  $(f, F)$ , noutro movimento transformado, no plano  $(x, y)$ , correspondente a

$$\varphi(z) = \varphi(x + i y).$$

Daqui resulta a importância do que vimos expondo.

Podem, por êste método, deduzir-se as propriedades dum escoamento, a partir doutro conhecido, desde que se fixe a relação de transformação a empregar.

Êste método tem sido usado freqüentemente com excelentes resultados; é, porém, no traçado das asas dos aviões, ou das pás das hélices que a sua utilização é mais interessante, pois que é possível transformar o escoamento de encontro a um perfil aerodinâmico de asa <sup>(1)</sup>, noutro escoamento de encontro a um perfil circular, cujo estudo é mais fácil.

Helmoltz, Kirchhoff, Von Mises, e outros, estudaram a partir dêste interessantíssimo método, diversos problemas de escoamento por fendas e orifícios.

São muitos os casos que se podem tratar, embora seja, em geral, muito difícil encontrar funções analíticas que sejam susceptíveis de poderem representar casos interessantes de escoamento.

Ê êste um processo puramente analítico de estudar fenómenos hidráulicos e, por isso mesmo, é necessário ter em atenção a facilidade com que rapidamente se pode fugir dos domínios da hidráulica e cair na pura abstracção matemática.

---

(1) Perfil de Kutta-Joukowski.



É, porém, possível a utilização de processos físicos de investigação que podem ser conjugados com o método de que vimos tratando.

Assim, no caso dos descarregadores, pode-se, por intermédio da construção de Prasil, baseada na ortogonalidade das linhas equipotenciais cinéticas e das trajectórias, traçar, mediante a utilização de dados experimentais, o perfil de jusante, mais conveniente.

Outro processo curioso é o método das analogias eléctricas, cujo fundamento se baseia nas considerações seguintes.

A equação da continuidade, para o caso dos movimentos planos

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 ,$$

se houver potencial de velocidades (*movimento irrotacional*), isto é; se

$$u = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{e} \quad v = \frac{\partial f}{\partial y} ,$$

escrever-se-á

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 .$$

A expressão obtida é a equação de Laplace, válida para a parte dos campos electrostáticos onde não há cargas.

Neste caso, a função  $f$  desempenha o papel de função potencial  $V$ .

Daqui a possibilidade de assemelhar os escoamentos planos a casos estudados na electricidade e a possibilidade de traçar

as linhas de corrente experimentalmente, a partir de campos electrostáticos (1).

Este processo ainda se pode tornar mais eficiente se considerarmos um condutor plano, que pode ser constituído por um vaso rectangular, contendo uma ténue camada duma solução condutora. Sòmente duas paredes opostas do vaso são condutoras e sujeitas a uma diferença de potencial constante; as duas outras paredes e o fundo são isoladores.

O obstáculo é realizado por uma placa isoladora, com a forma desejada, mergulhada na solução.

No caso do condutor plano, ainda se verifica a equação de Laplace, de forma que as linhas de igual potencial eléctrico da solução condutora, figuram as linhas equipotenciais cinéticas, às quais as linhas de corrente são ortogonais.

Estamos em presença dum método de características quasi exclusivamente abstractas, cuja aplicação tende a ser cada vez maior, dadas as suas possibilidades.

Porém, como todos os métodos analíticos, carece de verificação experimental, para utilização dos seus resultados.

Os movimentos, estudados assim, são puramente abstractos e teóricos. Não se consideraram acções, que muitas vezes, são preponderantes, como as da rugosidade e as das forças de viscosidade, etc.

\*  
\*      \*

É, como já vimos, nos capítulos anteriores, necessário recorrer a dados experimentais, para completar os conhecimentos imperfeitamente adquiridos pelas abstrações dos cientistas.

É desta forma que a Hidráulica recorre, mais do que nunca, às teorias físicas, quer como complemento das aquisições da Hidrodinâmica, quer como teorias que se bastam a si mesmo.

Vejamos, em primeiro lugar, como poderemos completar o estudo abstracto dos movimentos planos, servindo-nos apenas

---

(1) V. Rouse, *op. cit.*, e Lamb, *op. cit.*

dum exemplo, que vamos buscar à teoria da circulação das águas subterrâneas.

Seja o caso da filtração dos líquidos pelos interstícios dos materiais arenosos.

Neste caso, dada a pequena dimensão transversal dos canalículos, o movimento é caracteristicamente laminar e a influência principal, que se faz sentir, é a da viscosidade.

A equação do movimento será pois do tipo da de Poiseuille, em que a queda da pressão é proporcional à primeira potência da velocidade.

No movimento a duas dimensões, será pois:

$$u = -K \frac{\partial p}{\partial x}; \quad v = -K \frac{\partial p}{\partial y}.$$

Como o movimento é permanente, deverá ser

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

ou,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0.$$

Esta equação mostra que a pressão desempenha, neste caso, o mesmo papel que desempenhava a função  $f(x, y)$ , nos movimentos planos irrotacionais, o que permite aplicar agora, *mutatis mutandis*, as conclusões já obtidas.

De facto, nos movimentos irrotacionais planos, a equação da continuidade escrever-se-á, como sabemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Este processo aplicado, por exemplo, ao caso do estudo da distribuição das pressões no interior duma barragem de terra, presta valiosíssimos serviços, pois que do facto da linha de corrente (ou de infiltração) superior dever ter uma pressão igual à atmosférica e pela ortogonalidade das linhas de pressão e das de corrente, poderemos, por uma construção análogo à de Prasil, efectuar o traçado dessas duas espécies de linhas.

\*

\*      \*

Resta-nos, não querendo prolongar mais o estudo que vimos fazendo, considerar um exemplo duma teoria física característica, e entre muitas escolhemos a da *película laminar*, de Prandtl <sup>(1)</sup>.

Quando um fluido se move numa conduta, em movimento turbulento, a camada imediatamente junta às paredes internas da conduta está animada dum movimento laminar.

É nesta película que se verificam as grandes tensões de viscosidade, e as sucessivas camadas, desde a parede da conduta têm velocidades crescentes de zero até um valor máximo, junto ao núcleo do líquido animado de movimento turbulento.

As maiores diferenças de velocidade verificam-se na película laminar.

Daqui resulta que, numa conduta, o movimento do conjunto do fluido se pode considerar como a sobreposição de dois movimentos: *a)* o movimento duma camada muito tênue, aderente às paredes da conduta, onde predominam os efeitos da viscosidade; *b)* o movimento turbulento da restante massa fluída do interior da conduta.

---

(1) Prandtl, *op. cit.* — Rouse, *op. cit.* — Lewitt, *op. cit.* — Ettore Scimeni, *Lezioni di Idraulica*, Pádua, 1938. — Daugherty, *Hydraulics*. McGraw-Hill C.º - Inc. New York, 1937. — Mattioli, *Teoria Dinamica dei Regimi Fluidi Turbolenti*, Cedam, Pádua, 1937.

Quanto à camada periférica, a resistência ao movimento, por unidade de superfície, segue a lei de Newton e será

$$T_1 = \mu \frac{du}{dy}$$

em que  $\mu$  é o coeficiente de viscosidade absoluta e  $\frac{du}{dy}$  o gradiente da velocidade, em relação à direcção normal à do movimento.

Quanto à camada interior, de movimento turbulento, como há partículas com movimentos em direcções desordenadas, e portanto velocidades que não são paralelas, torna-se impossível fixar, da maneira habitual, a grandeza da velocidade média, na direcção do movimento.

Considerando a velocidade individual de cada partícula, é pois necessário decompor essa velocidade em duas direcções, a do eixo da conduta — componente  $u$  —; e a normal ao mesmo eixo — componente  $v$  —.

Considerando camadas sucessivas, os valores das componentes  $u$  são influenciados pelo valor das componentes  $v$  correspondentes, donde resulta a variação da grandeza de  $u$ , de camada para camada.

A essa variação chamaremos  $u'$ .

As partículas, no seu movimento, penetram nas camadas sucessivas e vão afectar as velocidades respectivas.

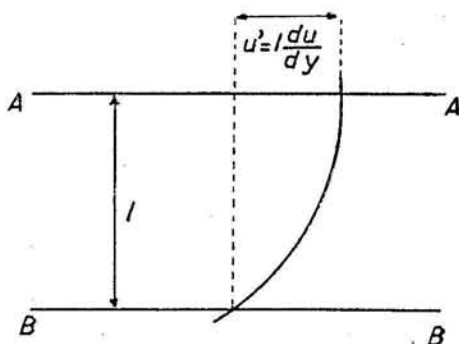
Suponhamos que a distância  $l$  (*percurso de mistura*) corresponde a uma distância em que há possibilidade de, pelo seu movimento transversal, as partículas de duas camadas influenciarem os movimentos dessas duas camadas.

Se o percurso de mistura fôr suficientemente pequeno, para que a curva de variação das velocidades se possa considerar como rectilínea, teremos (v. fig.),

$$u' = l \frac{du}{dy}$$

Quanto ao valor de  $v'$ , variação das velocidades transversais, Prandtl, por considerações de que a sua ordem de grandeza deve ser a de  $u'$ , foi levado a escrever

$$v' = l \frac{du}{dy}$$



Esta hipótese, necessária para o prosseguimento do raciocínio, não tem tido uma justificação fácil, mesmo para espíritos bem esclarecidos como o de B. Bakhmeteff <sup>(1)</sup>, no entanto, a sua aceitação é geral, dados os bons resultados práticos a que conduz.

A tensão superficial, entre duas camadas de líquido em movimento, é originada pela velocidade transversal, ou melhor, pela quantidade de movimento das partículas duma camada que atingem a outra.

No tempo  $t$ , a massa de partículas que, dum estrato passa para outro, é, por unidade de superfície e supondo que as partículas penetram com as mesmas velocidades,  $\rho v' t$ .

A quantidade de movimento será, no tempo  $t$  e por unidade de superfície,  $\rho v' u' t$ .

Daqui resulta que a tensão longitudinal, será, pelo teorema da quantidade de movimento, dada por <sup>(2)</sup>

$$T_2 = \rho v' u' .$$

Introduzindo, agora, nesta equação os valores, já atrás

<sup>(1)</sup> Bakhmeteff, *op. cit.*

<sup>(2)</sup> Equação que já fôra determinada por Reynolds.

determinados, das variações de velocidade, resultará a seguinte equação de Prandtl

$$T_z = \varrho l^2 \left( \frac{du}{dy} \right)^2 .$$

O valor da tensão longitudinal, considerando o movimento da película laminar e do núcleo turbulento, será pois

$$T = \mu \frac{du}{dy} + \varrho l^2 \left( \frac{du}{dy} \right)^2 .$$

Esta lei justifica porque a resistência ao movimento nem sempre é proporcional ao quadrado da velocidade, e quando a turbulência é pequena, é mesmo proporcional à primeira potência da velocidade.

À equação de Prandtl, é costume dar outra forma, fazendo intervir o valor da tensão longitudinal  $T_o$ , junto à parede.

Supondo uma conduta circular de raio  $r_o$ , consideremos um estrato à distância  $y$  da parede. Admitindo a distribuição linear das tensões longitudinais, teremos

$$T = T_o \frac{r_o - y}{r_o} = T_o \left( 1 - \frac{y}{r_o} \right) .$$

Este valor introduzido na equação de Prandtl, dá

$$l \frac{du}{dy} = \sqrt{\frac{T_o}{\varrho}} \sqrt{1 - \frac{y}{r_o}} .$$

Como o primeiro radical do 2.º membro têm as dimensões duma velocidade, faremos

$$u_* = \sqrt{\frac{T_o}{\rho}},$$

a que chamaremos *velocidade de atrito*, e virá

$$\frac{l}{u_*} \frac{du}{dy} = \sqrt{1 - \frac{y}{r_o}},$$

em que ambos os membros não têm dimensões.

Nikuradse determinou, experimentalmente, o valor de  $l$ , dado pela equação acima, em diversos casos de condutas.

Procurando uma lei da variação da velocidade, von Kármán, introduzindo a velocidade máxima  $u_m$  na conduta, determinou:

$$\frac{u_m - u}{u_*} = -\frac{1}{k} \left[ \ln \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{y}{r_o}} \right) + \sqrt{1 - \frac{y}{r_o}} \right].$$

Prandtl, por sua vez, encontrou:

$$\frac{u_m - u}{u_*} = \frac{1}{k} \cdot \ln \frac{r_o}{y}$$

ou, ainda,

$$\frac{u_m - u}{u_*} = 5,75 \log \frac{r_o}{y}.$$



As duas equações, a de von Kármán e a de Prandtl, equivalem à determinação de

$$\frac{u_m - u}{u_*} = K f\left(\frac{y}{r_0}\right).$$

Não indicamos o caminho analítico por que o primeiro destes autores chegou à sua equação final, por ser demasiado artificioso e por ter sido abandonado numa das últimas publicações desse cientista.

As primitivas bases em que assentou a determinação das fórmulas teóricas da variação da velocidade não foram, portanto, baseadas em raciocínios bem firmes, não só pelas hipóteses feitas, como ainda pela pouca consistência de ordem matemática das deduções feitas.

As experiências de Nikuradse e doutros, vieram, no entanto, mostrar que os resultados expressos pelas fórmulas finais são de grande valor e, assim, têm tido aceitação geral.

As dificuldades analíticas, encontradas por von Kármán e Prandtl, na dedução da equação

$$\frac{u_m - u}{u_*} = K f\left(\frac{y}{r_0}\right),$$

podem ser removidas por considerações de análise dimensional, que, mais uma vez, vem penetrar na própria essência dos fenómenos.

Assim, se tomarmos a equação fundamental

$$\frac{1}{u_*} \frac{du}{dy} = \sqrt{1 - \frac{y}{r_0}}$$

escrita sob a forma

$$\frac{du}{u_*} = \frac{dy}{l} \sqrt{1 - \frac{y}{r_0}} \quad .$$

em que ambas as fracções e o radical não têm dimensões, e se fizermos

$$du = u_m - u \quad , \quad \text{e} \quad \frac{dy}{l} = K ;$$

a equação obtida será :

$$\frac{u_m - u}{u_*} = K \sqrt{1 - \frac{y}{r_0}} \quad ,$$

ou, ainda,

$$\frac{u_m - u}{u_*} = K f \left( \frac{y}{r_0} \right)$$

equação, esta, que pode exprimir, fisicamente, a lei procurada, visto ser homogénea.

O valor de K deve ser determinado pela experiência.

## LISTA DOS AUTORES CITADOS

AFONSO (José) — 27.  
BAKHMETEFF — 21, 79.  
BAZIN — 9, 18.  
BERNOULLI — 15, 16.  
BLASIUS — 56.  
BOUSSINESQ — 19, 25.  
BOUTY (Edmond) — 62.  
BRIDGMAN — 27, 28, 60.  
BUCKINGHAM — 27, 31.  
CAMPBELL (Norman) — 24.  
CAUCHY — 36, 42.  
CHEZY — 9.  
CORIOLIS — 16.  
COUTAGNE — 21.  
DARCY — 9, 10, 18.  
DAUGHERTY — 77.  
DELBET (Pierre) — 61.  
DU BUAT — 7.  
ESCANDE — 62, 64.  
EULER — 25.  
FLAMANT — 7, 8.  
FORCHHEIMER — 18.  
FROUDE — 11, 35, etc.  
GEBELEIN — 21.  
GRILO (Velez) — 27.  
HAGGEN — 17.  
HELMOLTZ — 26, 73.

JOUKOWSKY — 73.  
KIRCHHOFF — 73.  
KUTTA — 73.  
LAGRANGE — 25, 27.  
LAMB — 26, 64, 75.  
LAPLACE — 74.  
LEWITT — 27, 32, 77.  
LORD KELVIN — 26.  
LORD RAYLEIGH — 27, 61.  
MATTIOLI — 77.  
MAXWELL — 25.  
NEWTON — 24, 78.  
NIKURADSE — 81, 82.  
POINCARÉ (Henri) — 25, 61.  
POISEUILLE — 17, 52, 76.  
PRASIL — 74, 77.  
PRANDTL — 25, 26, 64, 77, 79, 80, 82.  
REGO (T.) — 27, 43.  
REYNOLDS — 9, 11, 13, 17, 35, etc.  
ROUSE — 27, 32, 75, 77.  
SAINT VENANT — 12.  
SCIMENI — 77.  
STRECKT (Otto) — 21.  
VON KARMAN — 81, 82.  
VON MISES — 25, 73.  
WEBER — 36, 42, 43.

## INDICE

|   | PAG. |
|---|------|
| I — Preliminares ... ..   | 7    |
| II — Conhecimentos de aquisição experimental directa ... ..               | 15   |
| III — A homogeneidade e a semelhança, como princípios gerais orientadores | 27   |
| IV — Conhecimentos derivados das matemáticas ou de teorias físicas ...    | 63   |
| Lista dos autores citados ... ..  | 85   |



FACULDADE DE ENGENHARIA

UNIVERSIDADE DO PORTO

BIBLIOTECA



0000065157