Relações entre os pontos notáveis do triângulo e outras construções

2018/2019

Elisabete Conceição Costa Silva

Mestrado em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário

Orientador FCUP:

António Guedes de Oliveira

Orientador Cooperante:

Marília Rosário

Índice

Introdução

Este relatório de estágio é constituído por três partes: análise crítica das atividades desenvolvidas na Prática de Ensino Supervisionada, uma parte didática e uma parte científica.

Na parte da análise crítica das atividades desenvolvidas na PES pode ler-se a descrição do meu percurso, durante este ano letivo, no estágio na Escola Secundária Tomaz Pelayo.

A segunda parte, de teor didático, é um género de capítulo de um manual. Este capítulo é sobre Lugares geométricos e Pontos Notáveis de um triângulo, refente ao 9º ano de escolaridade.

Por fim, na última parte, desenvolvo um tema científico sobre *Relações entre os pontos notáveis do triângulo e outras construções*

Análise crítica das atividades desenvolvidas na PES

O meu percurso, como professora estagiária, começou na primeira semana de setembro juntamente com a professora estagiária Ana Machado e a professora estagiária Raquel Barbosa.

A integração e adaptação na Escola Secundária de Tomaz Pelayo (ESTP) foi muito boa, desde a receção da orientadora cooperante, Marília Rosário, ao diretor e vice-diretora como os funcionários da escola.

Tivemos quatro turmas: uma de 7º ano, duas de 9º ano e uma de 11º ano, do ensino profissional.

A turma de 7º ano era uma turma mediana, tinha alguns alunos com bom aproveitamento, contudo havia um elevado número de alunos com repetições, de dois e três anos.

As turmas de nono ano, o 9ºA e o 9ºG, tinham níveis de aproveitamentos muito discrepantes. O 9ºA tinham bastantes alunos com níveis de excelência e com métodos de estudo eficientes. Já no 9ºG as notas eram baixas, com alunos alheios ao contexto escolar.

Com a turma do profissional tivemos pouco tempo. Tinham aulas de 90 minutos, semanalmente, à quarta-feira, o que nos impediu de estarmos com eles, tanto durante o primeiro período como quando tínhamos reuniões na faculdade.

Ainda assim, consegui perceber, dentro dos possíveis, o funcionamento da turma. Eram alunos com muitas dificuldades e com poucos conhecimentos. Por exemplo, para eles, marcarem coordenadas num referencial cartesiano era uma tarefa complicada.

As minhas primeiras atividades como professora estagiária foram as reuniões iniciais, antes das atividades letivas começarem. Participei nas reuniões em que se discutiu os documentos estruturantes de orientação curricular, como: Decretos-Leis 54/2018 e 55/2018, Perfil do aluno à saída da escolaridade obrigatória, Programas e Aprendizagens Essenciais.

Participamos na discussão e no ajuste, juntamente com o Grupo de Matemática, das planificações e dos critérios de avaliação, com base nos documentos anteriormente referidos, quer para a disciplina de matemática do 7º e 9 ano, quer para a oficina de matemática de 7º ano.

Elaboramos e partilhamos, com o Grupo Disciplinar, as grelhas de observação e de autoavaliação dos alunos.

Este período, antes do início das aulas, foi inesperado na medida que, apesar de ter conhecimento de que o ano letivo tem que ser preparado antecipadamente, não sabia de todo este trabalho "burocrático". Contudo, apesar de ser trabalhoso e árduo, foi importante para o nosso futuro, como professoras, perceber como funciona esta preparação prévia para arranque do ano letivo.

Participamos em todas as reuniões inicias – concelhos de turmas. Nestas reuniões, os diretores de turma dão-nos a conhecer alguns aspetos importantes da turma em questão, tal como o comportamento ou o aproveitamento. No entanto, na minha opinião, as informações que nos dão não deviam ser tão específicas, isto é, quando nos definem o aluno a nossa opinião fica, parcialmente, pré-definida.

Houve alguns casos em que a descrição dos alunos nessas reuniões e a minha perceção deles, durante o ano, não corresponderam.

Ainda dentro do tema *Reuniões,* além das do Grupo de Matemática, das de departamento e das de concelhos de turma também fui às reuniões de avaliação de finais de período.

Ainda antes do início do ano letivo, participei numa sessão de formação para conhecermos e aprendermos a utilizar o *Google Drive* e, em particular, a *App Classroom*, de modo a melhorarmos a comunicação e organização do Núcleo de Estágio, bem como das práticas de ensino e aprendizagem. Este instrumento de trabalho permitiu-nos elaborar, ao longo do primeiro e segundo períodos, questionários na *App Classroom.* Estes questionários possibilitou-nos avaliar o conhecimento adquirido pelos alunos.

Já o *Google Drive* funcionou como plataforma de trabalho cooperativo e colaborativo e como comunicação com os alunos.

Desde o começo das aulas que assessoramos as aulas de 7º, 9º e 11º (ensino profissional), sempre que solicitado e necessário. Esta forma de intervir na sala de aula foi essencial, quer para me ambientar, quer para conhecer melhor cada um dos alunos, quer as suas dificuldades e as melhores estratégias para os apoiar.

Ainda nesta fase, de assessoria, aplicamos uma tarefa de avaliação, no âmbito da disciplina de *Investigação e Prática Profissional.* A realização desta tarefa, que consistia na resolução de problemas, foi feita em duas fases. A fase inicial era realizada em grupos e sem qualquer tipo de auxílio, por parte das professoras. A segunda fase era realizada consoante o feedback dado à primeira resolução.

Esta tarefa foi realizada nas duas turmas de nono ano, contudo o entusiasmo, a organização e o empenho foi bastante discrepante. O nono A é metódico, organizado e dedicado, enquanto que no nono G isso não acontece.

E é inegável que, para um professor, é muito motivador observar atitudes e comportamentos do tipo do nono A.

Depois, iniciei a prática letiva, apresentando sempre as planificações atempadamente e as respetivas aulas que iria lecionar. Aqui, foi importante as reuniões semanais onde analisava e discutia as metodologias de ensino, conjuntamente com a orientadora cooperante.

O começo da prática letiva foi quase no fim do 1º período, com apenas duas aulas. Estas aulas permitiram-me perceber como as turmas funcionavam quando era apenas eu a conduzir a aula. As turmas têm diferentes dinâmicas de aprendizagem, diferentes comportamentos, entre pares e também entre turmas, e diferentes níveis de conhecimento. Isto obriga, a qualquer professor, a fazer adaptações, portanto tive que passar da teoria para a prática e gerir estas variáveis da melhor forma, para poder fazer um bom trabalho. Por exemplo, nas turmas de nono ano: numa funcionava bem o trabalho a pares, na outra não era possível fazê-lo; numa turma era fácil de chegar a eles, onde bastava um exemplo ilustrativo, na outra eram necessário mais.

Posto isto, ao longo dos 46 tempos (de 45 minutos) que lecionei, considero que houve uma evolução positiva.

Ainda que só tenha dado aulas nos 7º, 9º e 11º anos também observei aulas de Matemática Aplicada às Ciências Sociais do 11º Ano e de Matemática A do 12º ano. Este pequeno contacto com o secundário do ensino regular foi essencial, porém não foi suficiente para tomarmos consciência do que é ter à nossa responsabilidade uma turma do secundário, no ensino regular.

Ao longo do ano letivo elaboramos, para cada uma das turmas de 7º e 9º anos, de forma autónoma, testes, tarefas individuais de avaliação e critérios de classificação, assim como a respetiva correção.

Ainda que a realização destes instrumentos de trabalho seja trabalhosa, o mais difícil é a correção. Por muito que tentemos prever os erros cometidos e os respetivos critérios de correção, os alunos conseguem sempre "inventar" outros.

O núcleo de estágio realizou, na íntegra, as quartas fichas de avaliação e os respetivos critérios. Aqui, percebemos a realidade e a dificuldade de criar uma ficha de avaliação, os respetivos critérios e corrigir, sem cometer injustiças.

No ensino profissional, realizamos uma tarefa de avaliação em pares, com guião e a grelha com os parâmetros de avaliação. Tendo em conta o rendimento dos alunos e o aproveitamento escolar, o núcleo de estágio e a orientadora cooperante concordou que seria um instrumento de avaliação adequado.

Dinamizamos um concurso *Postais de Natal,* com ligação à Matemática para as turmas de 9ºano e uma de 7º ano. Este concurso tinha como principal objetivo sensibilizar os alunos para o envolvimento no espírito Natalício, desenvolver e valorizar a criatividade e aplicação de conhecimentos matemáticos no quotidiano e na época que se celebrava. Os alunos aderiram, quase na totalidade, e criaram postais de Natal muito interessantes.

Contribui para a preparação do concurso *Matemáticas na Raia.* Este concurso foi organizado pela pela Asociación Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA) conjuntamente com a Associação de Professores de Matemática (APM) de Portugal.

Foi apresentado às duas turmas de nono ano, contudo a turma do nono A foi a única que participou. Esta turma, ao contrário da do G, é competitiva e metódica e criava estratégias interessante e adequadas, que lhes permitiu ficar num meritório 2º lugar.

Contribuí ainda para a preparação dos alunos para os concursos Olimpíadas da Matemática e Canguro Matemático.

Trabalhamos, semanalmente, em sessões de apoio com pequenos grupos de alunos do 7º ano que apresentavam muitas dificuldades de aprendizagem. Os alunos gostavam destes apoios semanais. Era um grupo pequeno de alunos e, como estávamos quatro professoras, funcionava quase como apoio individual. Daí, a recetividade dos alunos foi muito boa.

No fim do segundo período, na Mostra da Escola, orientamos os alunos, na planificação de duas aulas destinadas aos encarregados de educação das respetivas turmas, professores e outros elementos da comunidade educativa. Os temas destas aulas foram, no 9º A, "Esculturas do MIEC (Museu Internacional de Escultura Contemporânea) e Matemática" e no 9ºG "Curiosidades Matemáticas".

Nesta última atividade, os alunos não fizeram um trabalho prévio para as apresentações, sendo pouco empenhados e irresponsáveis, quer numa turma como noutra, deixando a maioria do trabalho à nossa responsabilidade.

Na apresentação, ao contrário do que se esperava, o nono G teve melhor prestação. Na minha opinião, o tema das apresentações foi o motivo de isto ter acontecido, uma vez que o tema da turma G envolve "charadas" e truques matemáticos.

Ainda em contexto *Mostra Escolar,* criamos um desafio "Estima com pinta" para a sala da matemática, que estava aberta a toda a comunidade escolar.Estes desafios, "Estima com pinta", foram utilizados, mais tarde, na *Mostra Concelhia*.

Também no segundo período, no dia 8 de março, dinamizamos uma Oficina *Construção de testes e questionários no Google Forms* no Fórum Educa, com a duração de três horas e meia.

Este Fórum Educa foi uma ação de formação acreditada pelo Conselho Científico Pedagógico da Formação contínua e destinada a Educadores e Professores do Concelho de Santo Tirso, organizada pelo Centro de Formação de professores Sebastião da Gama-Santo Tirso e Valongo e pela Câmara de Santo Tirso.

A participação neste Fórum foi devido ao convite da orientadora cooperante. Inicialmente, pensei que só iria auxiliar na preparação da formação e estaria lá como participante, porém colaborei em toda a formação.

Embora inicialmente tenha ficado apreensiva com o facto de estar a dialogar e a demonstrar os conteúdos do tema da formação para professores, mais velhos e com muita experiência, considero que correu bem e o feedback foi muito positivo, por parte dos professores participantes.

Por fim, uma das últimas atividades que tive foi a preparação da prova final do 3º ciclo para os alunos com necessidades educativas especiais e os respetivos critérios. Para a elaboração desta prova, tivemos que ter em conta o nível de dificuldade dos exercícios. Tínhamos que elaborar uma prova que incluísse as adaptações necessárias para todos os alunos, com necessidades educativas especiais, que a iriam realizar.

Por fim, penso que fui uma professora estagiária participativa e empenhada em todas as tarefas que me foram propostas. Foi um percurso agradável de percorrer e isso deve-se, também, ao facto de ter um bom núcleo de estágio e uma orientadora que nos desafiava, constantemente, a sermos cada vez melhores profissionais.

Geometria

Lugares Geométricos

- Lugares Geométricos
- Pontos Notáveis de um triângulo

Lugares Geométricos

Como já sabes, lugar geométrico é o conjunto de pontos que satisfazem uma propriedade.

Circunferência e círculo

No nosso dia a dia encontramos inúmeros exemplos de uso dos conceitos de circunferência e círculo.

Exemplo:

Um sistema de rega giratório tem um alcance máximo de 5 metros. É colocado num ponto O de um relvado, como sugere a figura.

Qual é a região do relvado regada quando o sistema é colocado no ponto O?

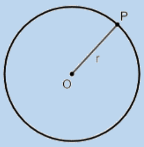
Tal como sugere a figura, essa região é o conjunto de todos os pontos do solo cuja distância ao ponto O não ultrapassa $5\,m$.

Corresponde, em termos geométricos, a um círculo de centro O e raio $5\,m$.

A linha que limita esse círculo é constituída por todos os pontos cuja distância ao ponto O é $5\,m$, isto é, a circunferência de centro O e raio $5\,m$.

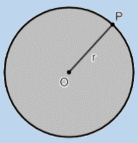
Circunferência de centro O e raio r é o conjunto de todos os pontos do plano cuja distância ao ponto O é r.

$$\overline{OP} = r$$



Círculo de centro O e raio r é o conjunto de todos os pontos do plano cuja distância ao ponto O é não superior a r.

$$\overline{OP} \leq r$$



Nota: Se pretendermos representar um círculo sem a fronteira (sem a circunferência), esta deve ser representada a tracejado.

1. Marca um ponto O. Representa o lugar geométrico dos pontos do plano que:

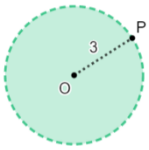
1.1. Distam no máximo $4\,cm$ do ponto O.

1.2. Distam mais de $4\,cm$ do ponto O.

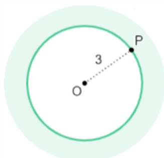
2. O Rodrigo prendeu a Nasa, a sua cadela, a uma árvore com uma trela de $3\,m$ de comprimento.
Qual é, em metros quadrados, a área da região onde a Nasa pode brincar?

3. Para cada caso, indica uma condição que caracterize o conjunto de pontos, representados a verde.

3.1.



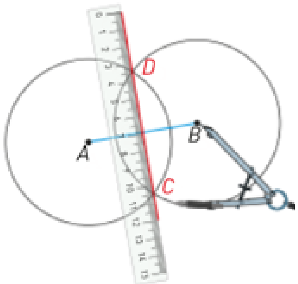
3.2.



Mediatriz

Mediatriz de um segmento de reta [AB] é o conjunto de todos os pontos P do plano equidistantes de A e de B.

$$\overline{PA} = \overline{PB}$$



Construção da mediatriz:

Considerando um segmento de reta [AB] e usando régua e compasso:

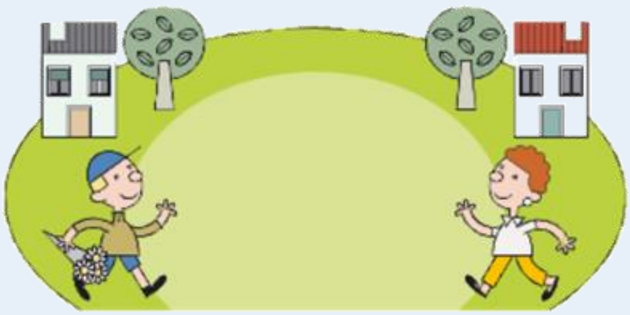
- Com centro em A e em B traçam-se duas circunferências com o mesmo raio, de modo a intersetarem-se.
- A interseção das duas circunferências são os pontos C e D que pertencem à mediatriz de [AB], por seres equidistantes de A e de B.

A reta CD é a mediatriz do segmento de reta [AB].

Propriedade: A mediatriz de um segmento de reta [AB] é a reta perpendicular a esse segmento que passa no seu ponto médio.

Exercício

Um encontro traído pela matemática



A Maria e o Manel moram na mesma aldeia e são namorados.

Ambos têm uma arvore nos seus jardins. Um dia, combinaram que se encontrariam no local situado à mesma distância das duas árvores.

Os dois cumpriram o acordo e, à hora marcada, deslocaram-se para o local.

No entanto a Maria zangou-se com o Manel por ele não ter aparecido e o Manel zangou-se porque ele não tinha faltado, ao contrário dela.

Como foi possível ter acontecido esta situação?

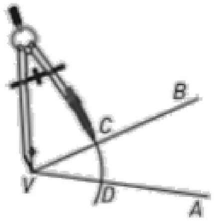
Bissetriz

A **bissetriz de um ângulo** é a semirreta que o divide em dois ângulos geometricamente iguais.

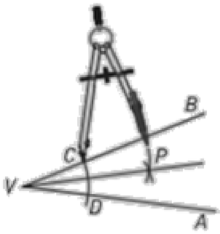
<u>Construção da bissetriz de um ângulo:</u>

Seja AVB um ângulo convexo:

- Com o centro em V, traça-se um arco de circunferência que interseta os lados do ângulo em C e D.

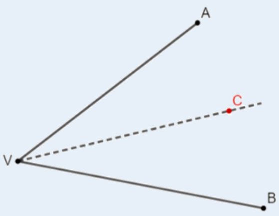


- Determina-se em seguida um ponto P equidistante de C e D.
  A semirreta $\dot{V}P$ é a bissetriz do ângulo AVB.



Exercício

Considera um ângulo convexo AVB, um ponto P da respetiva bissetriz e os pontos R e S, pés das perpendiculares traçadas de P, respetivamente, para VA e VB.



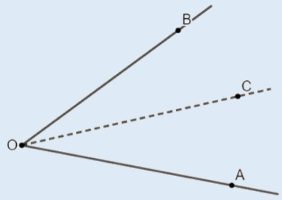
a) Justifica que os triângulos $[RVP]$ e $[SVP]$ são iguais.

b) Justifica que $\overline{RP} = \overline{SP}$ e conclui que os pontos da bissetriz de um ângulo convexo são equidistantes das retas suporte dos lados do ângulo.

Adaptado de Caderno de Apoio 3º ciclo

4. Com a ajuda de um transferidor, constrói um ângulo com 60° de amplitude. Utilizando material de desenho, constrói a bissetriz do ângulo referido.

5. O ângulo AOB tem 38° de amplitude.



A semirreta $\dot{O}C$ é a bissetriz do ângulo AOB. Qual é a amplitude do ângulo AOC ?

Aplica

1. Pretende-se construir um supermercado que sirva as cidades A, B e C, representadas no mapa da figura. Esse supermercado deve ficar à mesma distância das cidades A e B, e a menos de $2\,km$ da cidade C.

Recorrendo a material de desenho, assinala todos os pontos do mapa onde o supermercado pode ser construído.

2. Considera os pontos A, B e C, de coordenadas $(-4,4)$, $(-3,-4)$ e $(4,8)$, respetivamente.

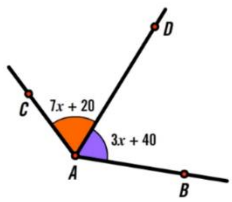
2.1. Constrói, num referencial cartesiano, o triângulo $[ABC]$.

2.2. Assinala o lugar geométrico dos pontos do triângulo equidistantes dos pontos B e C.

Assinala o lugar geométrico dos pontos que distanciam mais de 3 unidades do ponto A.

3. Na imagem está representado o ângulo BAC.

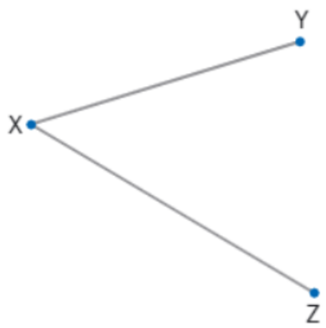
Sabendo que $\dot{A}D$ é a bissetriz do ângulo, determina o valor de x.



4. Numa localidade estão situadas três fábricas, X, Y e Z, e existem duas estradas que se ligam as fábricas X a Y e Y a Z, como está representado na figura. Semanalmente são transportados os resíduos industriais das fábricas para um centro de reciclagem. Sabe-se que o centro de reciclagem fica à mesma distância as fábricas X e Z e a $7\,km$ da fábrica Y.

Assinala, no esquema, um dos locais onde se pode situar o centro de reciclagem.

Não apagues as construções auxiliares.



Escala $1:1000$

Pontos Notáveis de um triângulo

Circuncentro

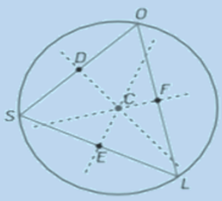
Exercício

Num treino de futebol, o treinador Xavier pediu ao André, ao Bernardo e ao Cláudio que se posicionassem em três pontos quaisquer do campo de jogos (não poderiam ficar em linha reta) e pediu ao Lucas, o craque de futebol que se posicionasse num ponto à mesma distância dos três amigos, para realizarem um exercício de circulação de bola.

Determina o ponto onde se deve posicionar o Lucas. Apresenta todos os desenhos que efetuares.

O **circuncentro** é ponto de interseção das mediatrizes dos lados de um triângulo.

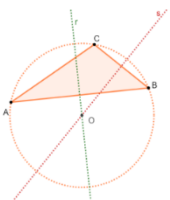
Circunferência circunscrita a um triângulo é a circunferência que passa pelos três vértices do triângulo.



O **circuncentro** é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.

Demonstração:

Consideremos o triângulo $[ABC]$.

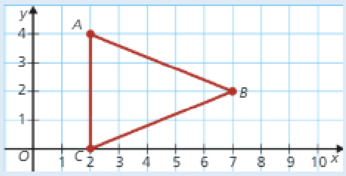


As retas r e s são mediatrizes dos lados $[AB]$ e $[AC]$ do triângulo, respetivamente.

O ponto O é o ponto de interseção das retas r e s.

O ponto O pertence à mediatriz de $[AB]$, então é equidistante dos pontos A e B.

6. Observa a figura.



Determina as cordenadas de O centro da circunferência que circunscreve o triângulo $[ABC]$.

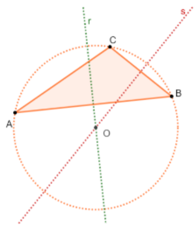
O ponto O pertence à mediatriz de $[BC]$, então é equidistante dos pontos B e C.

Portanto, o ponto O é equidistante dos pontos A, B e C.

Como O é equidistante de A e C, pertence à mediatriz $[AC]$.

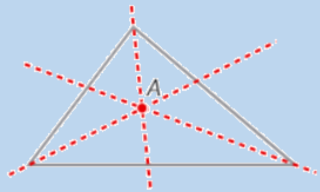
Logo, as três mediatrizes do triângulo intersetam-se no mesmo ponto, O.

Como $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$, O é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo $[ABC]$.

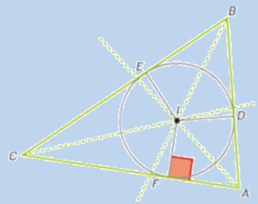


Incentro

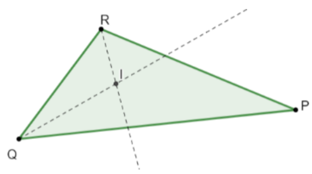
Incentro de um triângulo é o ponto de interseção das bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo.



Circunferência inscrita a um triângulo é a circunferência com centro no incentro e tangente aos lados do triângulo.



Demonstração:

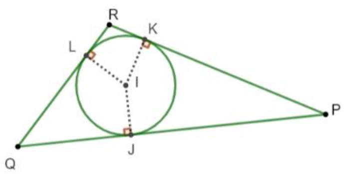


Consideremos o triângulo $[PQR]$ e as bissetrizes dos ângulos internos PQR e QRP. O ponto I é o ponto de interseção das duas bissetrizes.

Como I pertence à bissetriz do ângulo PQR, então é equidistante das retas QP e QR.

Como o ponto I também pertence à bissetriz do ângulo QRP, então é equidistante das retas RQ e RP.

Portanto, podemos concluir que I também é equidistante das retas QP e RP, logo pertence à bissetriz do ângulo RPQ.



Considerando que o ponto I pertence às três bissetrizes dos ângulos internos do triângulo, então, sendo, J, K e L, respetivamente, os pés das perpendiculares traçadas de I para cada um dos lados do triângulo, $\overline{IJ} = \overline{IK} = \overline{IL}$.

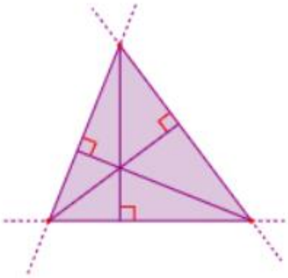
Logo I é o centro da circunferência que contém os pontos J, K e L.

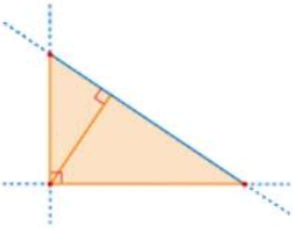
Ortocentro

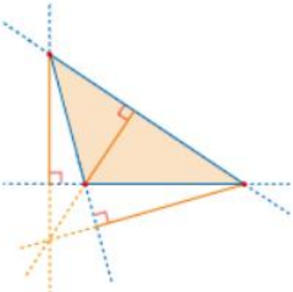
Recorda

A altura de um triângulo relativamente a um dos lados (designado por «base») é o segmento de reta que une o vertice oposto à base com o pé da perpendicular traçada desse vértice para a reta que contém a base.

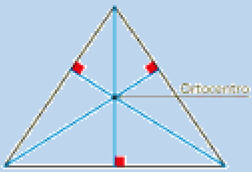
Nas figuras seguintes estao marcadas as alturas de um triângulo acutângulo, de um triângulo retângulo e de um triângulo obtusângulo.



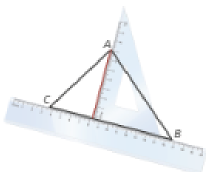




Ortocentro de um triângulo é o ponto de interseção das retas suporte das alturas do triângulo.



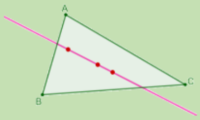
Nota: Para determinar, por construção, o ortocentro de um triângulo, basta traçar duas alturas desse triângulo (recorrendo a uma régua e um esquadro).



Baricentro

História

Leonhard Euler (1707-1783), matemático suíço, demonstrou que o baricentro, o ortocentro e o circuncentro de qualquer triângulo são colineares, isto é, pertencem a uma mesma reta.



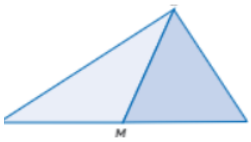
Esta reta ficou conhecida como a **reta de Euler**.

Nota:

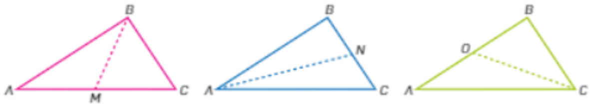
O baricentro é o centro de massa de um triângulo (ponto de equilíbrio). É usual assinalar com a letra G.

Desenha um triângulo numa cartolina e marca o seu baricentro. Recorta-o e, com um fio, suspende-o pelo baricentro. Verás que o triângulo ficara equilibrado horizontalmente.

Mediana de um triângulo é o segmento de reta que une um vértice do triângulo ao ponto médio do lado oposto.



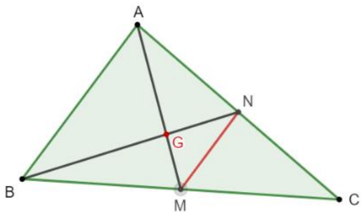
Um triângulo tem três vértices e três lados que se lhes opõem. Por isso, tem três medianas.



Exercício:

Na figura está representado um triângulo $[ABC]$.

Os pontos M e N são os pontos médios dos lados $[BC]$ e $[AC]$, respetivamente.



a) Mostra que $[AB]$ e $[MN]$ são segmentos de reta paralelos.

b) Considera os triângulos [MNG] e [ABG]. Justifique que são semelhantes.

c) Mostra que a razão de semelhança que transforma $[MNG]$ em $[ABG]$ é 2.

d) Completa:

i) $\overline{BG} = \_\_ \times \overline{GN}$

ii) $\overline{BN} = \_\_ \times \overline{GN}$

iii) $\overline{AG} = \_\_ \times \overline{GM}$

iv) $\overline{AM} = \_\_ \times \overline{GM}$

e) Mostra que $\overline{BG} = \frac{2}{3}\overline{BN}$ e que $\overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AM}$

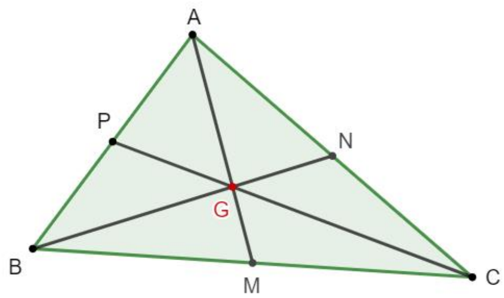
Duas medianas quaisquer de um triângulo intersetam-se num ponto a uma distância de cada um dos vértices igual a $\frac{2}{3}$ do comprimento da respetiva mediana.

O ponto nessas condições é o ponto de interseção das medianas, que se designa **baricentro** ou **centróide do triângulo.**

Na figura seguinte, M, N e P são os pontos médios dos respetivos lados do triângulo $[ABC]$. $[MA]$, $[NB]$ e $[PC]$ são as respetivas medianas.

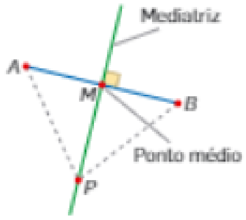
G é o baricentro do triângulo e tem-se:

$$\overline{GC} = \frac{2}{3}\overline{PC}\ ,\ \ \overline{GA} = \frac{2}{3}\overline{MA}\ \text{ e }\ \overline{GB} = \frac{2}{3}\overline{NB}$$

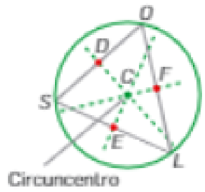


Síntese

O lugar geométrico dos pontos à mesma distância de dois pontos fixos é a **mediatriz do segmento de reta**, com extremos nesses pontos.

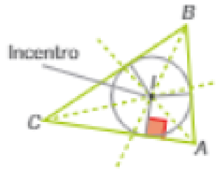


Circuncentro de um triângulo: é o ponto do plano à mesma distância dos três vértices do triângulo. E, ao ponto de interseção das mediatrizes dos lados do triângulo.

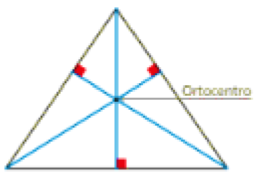


Circunferência circunscrita de um triângulo: é a circunferência à qual pertencem os três vértices do triângulo. Tem centro no circuncentro do triângulo e o comprimento do raio é a distância do circuncentro aos vértices.

Bissetriz de um ângulo: é o lugar geométrico dos pontos do ângulo equidistantes aos seus lados.
Ao ponto de interseção das bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo chama-se **incentro.**

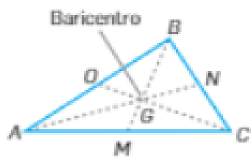


Circunferência inscrita num triângulo: é a circunferência tangente aos três lados do triângulo. O centro de uma circunferência inscrita num triângulo é o incentro desse triângulo.



O ponto de interseção das retas suporte das alturas de um triângulo designa-se **ortocentro do triângulo.**

Duas quaisquer medianas de um triângulo intersetam-se num ponto a uma distância de cada um dos vértices igual a $\frac{2}{3}$ do comprimento da respetiva mediana.



O ponto nessas condições é o ponto de interseção das medianas, que se designa **baricentro.**

Aplica

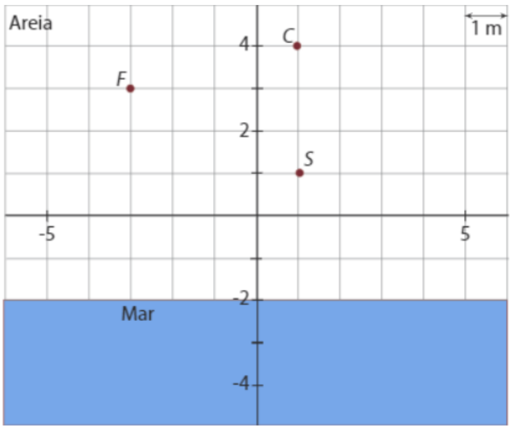
1. Três barcos aproximam-se da costa, tendo como referência um farol que não está assinalado no mapa.

O farol encontra-se sobre a circunferência que circunscreve o triângulo com vértices nos três barcos. Situa, no mapa, as possíveis localizações do farol.

---

2. A Francisca e a Sara estão na praia. A Francisca decidiu pregar uma partida à sua amiga e escondeu-lhe a toalha.

No esquema da figura, estão assinalados o guarda-sol da Francisca (F), um caixote do lixo (C) e o guarda-sol da Sara (S).
A Sara só sabe que a toalha está escondida a $2m$ do seu guarda-sol, a $3m$ do guarda-sol da Francisca e que está mais próximo do caixote do lixo do que do mar.



Assinala o lugar onde a Sara deve procurar a sua toalha.

---

3. Indica as afirmações falsas.

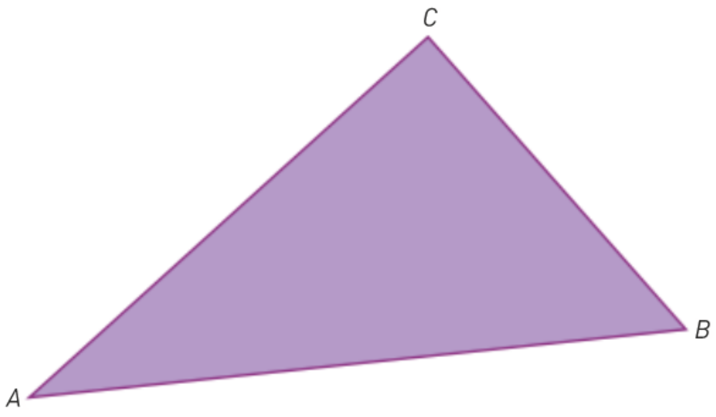
a) O incentro e o circuncentro podem ser exteriores à circunferência.

b) O incentro é o centro da circunferência tangente aos lados da circunferência.

c) Em triângulos retângulos o incentro e o circuncentro coincidem.

d) O incentro é equidistante aos vértices de um triângulo

4. Considera o triângulo $[ABC]$ representado na figura.



4.1. Recorrendo a material de desenho e medição, identifica o ponto I, incentro do triângulo.

4.2. Assinala, na figura, todos os pontos do triângulo que se encontram mais próximos do ponto B do que do incentro I.

---

5. Indica as afirmações verdadeiras.

A Joana, a Maria e a Rita assinalaram num mapa as suas casas, como está representado na imagem. Quiseram saber qual a localização do ponto do mapa que está à mesma distância de cada uma das casas.

Joana: "Vamos determinar o incentro deste triângulo!".

A Rita discordou: "Não, temos é que determinar o circuncentro do triângulo!".

a) A Joana é que tem razão pois como o incentro é o ponto obtido pela interseção das bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo, encontra-se a igual distância de cada um dos seus vértices.

b) A Rita é que tem razão pois o circuncentro é o ponto obtido pela interseção das mediatrizes dos lados do triângulo.

c) A Rita não tem razão pois a interseção das bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo não é o ponto pretendido.

d) Nenhuma das amigas tem razão.

6. Na figura está representado um mapa de um jardim zoológico onde estão assinalados os locais de residência de alguns animais.
O jardim zoológico vai receber um casal de coalas.
O local de residência dos coalas, no jardim zoológico, verifica as condições seguintes:

- Fica à mesma distância da Árvore das Aves exóticas e da Encosta dos Felinos.
- A sua distância à Baia dos Gosfinhos é igual à distância entre a Aldeia dos macacos e o Lago das Focas.

Assinala esse ponto com a letra C.
Não apagues as linhas auxiliares.

Adaptado do Exame Nacional de Matemática – 3º Ciclo – 2ª chamada – 2010

Relações entre os pontos notáveis do triângulo e outras construções

Lema A: Considerando três pontos de uma circunferência A, B e C de tal modo que B está entre A e C e $\widehat{AC} < 180^{\circ}$. Então $\overline{AB} < \overline{AC}$.

<u>Demonstração:</u>

Consideremos apenas três pontos da circunferência A, B e C, tal que $C\hat{O}B$ e $C\hat{O}A$ seja menor que 180°.

Então, se $\overline{AB} < \overline{AC} \Leftrightarrow d(A,B) < d(A,C)$

$\Leftrightarrow$ A está do mesmo lado que B no semiplano definido pela mediatriz $\overline{CB}$.

Portanto, $\overline{AB} < \overline{AC}$.

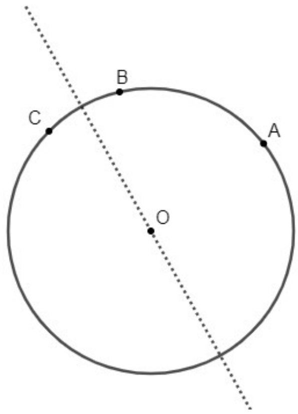


Figura 1

□

Lema B: Se duas cordas de uma circunferência subtendem diferentes ângulos inscritos, o menor ângulo pertence à menor corda.

<u>Demonstração:</u>

Pelo lema anterior, basta provar que ao menor ângulo corresponde o menor arco.

Mas um ângulo inscrito tem metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados.

□

Lema C: Sejam A, B, C e D quatro pontos distintos, desalinhados três a três.

Se $B\hat{D}C = B\hat{A}C$, então os quatro pontos estão sobre uma mesma circunferência.

<u>Demonstração:</u>

Seja α a circunferência definida por A, B e C.

Como $B\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$ e $B\hat{A}C = B\hat{D}C$, $B\hat{D}C = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$.

Então $D \in \alpha$.

□

Teorema: Qualquer triângulo que tenha duas bissetrizes de ângulos iguais (cada uma medida de um vértice para o lado oposto) é isósceles.

Em vez de provar o teorema anterior provamos que:

Se num triângulo $ABC, A\hat{B}C \neq B\hat{C}A$ então $BM \neq CN$

sendo M e N os pontos de interseção das bissetrizes de $\measuredangle\, ABC$ e $\measuredangle\, BCA$ com os lados opostos, respetivamente.

(que é uma consequência imediata do Lema D)

Lema D: Se num triângulo tiver dois ângulos diferentes, o ângulo menor terá a bissetriz interna mais longa.

<u>Demonstração</u>:

Considere-se o triângulo ABC, com $A\hat{B}C < B\hat{C}A$ e BM em que CN bisseta os ângulos $A\hat{B}C$ e $B\hat{C}A$, respetivamente.

Pretende-se provar que $BM > CN$. Toma-se M' em BM tal que $M'\hat{C}N = \frac{1}{2} A\hat{B}C$.

Como $M'\hat{C}N$ é igual a $M'\hat{B}N$,pelo lema C, os quatro pontos: N, B, C e M' estão numa circunferência.

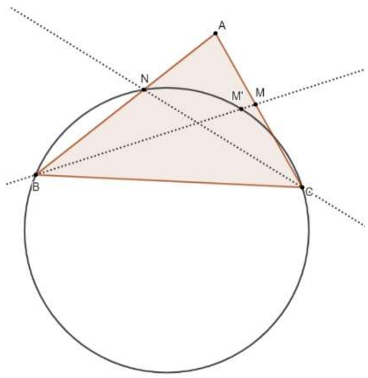


Figura 2

Então, temos que:

$$A\hat{B}C < \tfrac{1}{2}\left(A\hat{B}C + B\hat{C}A\right) < \tfrac{1}{2}\left(C\hat{A}B + A\hat{B}C + B\hat{C}A\right), \measuredangle\, CBN < \measuredangle\, M'CB < 90°$$

Pelo Lema A, $CN < M'B$.

Daí $BM > BM' > CN$.

□

Triângulos de Napoleão

Teorema: Sejam três triângulos erguidos um em cada lado de um triângulo T qualquer, em que a soma dos ângulos "remotos" [1] desses três triângulos é $180°$. Então as circunferências dos três triângulos têm um ponto em comum.

Demonstração:

São dados os triângulos PCB, CQA, e BAR erguidos no triângulo ABC, como podemos observar na figura 3.

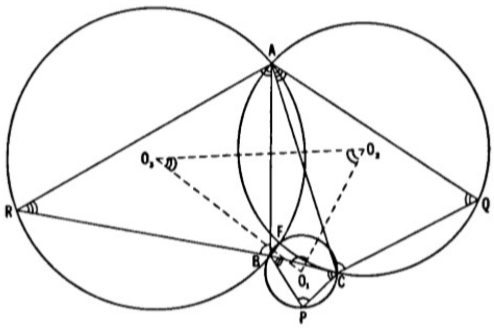


Figura 3

Sabe-se que os ângulos satisfazem a relação $\hat{P}+\hat{Q}+\hat{R}=180^{\circ}$

As circunferências que circunscrevem os triângulos PCB e CQA encontram-se, não tangencialmente em C e, consequentemente, noutro ponto, que denotamos por F.

Vejamos que:

$$B\hat{F}C=180^{\circ}-C\hat{P}B \quad \text{e} \quad C\hat{F}A=180^{\circ}-C\hat{Q}A$$

e também

$$A\hat{F}B=360^{\circ}-(B\hat{F}C+C\hat{F}A)$$

$$=360^{\circ}-(180^{\circ}-C\hat{P}B+180^{\circ}-C\hat{Q}A)$$

$$=C\hat{P}B+C\hat{Q}A=180^{\circ}-B\hat{R}A$$

[1] Isto é, ao ângulo oposto ao lado de T no triângulo erigido sobre este.

Conclui-se, então, que F se encontra na circunferência do triângulo BAR, assim como nas circunferências que circunscrevem os triângulos PCB e CQA.

□

Teorema de Napoleão: Se triângulos equiláteros são erguidos externamente nos lados de um triângulo qualquer, então os seus centros formam um triângulo equilátero.

<u>Demonstração:</u>

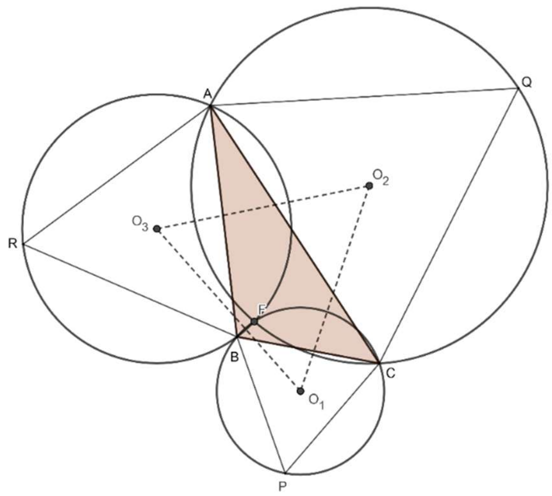


Figura 4

Os triângulos PCB, CQA, e BAR, que foram erguidos externamente nos lados do triângulo ABC, são equiláteros.

Pelo lema anterior, temos $C\hat{P}B = B\hat{R}A = A\hat{Q}C = 60°$.

Seja F o ponto comum às três circunferências, sabemos que $\measuredangle BFC$ está inscrito num arco de $240°$, então $B\hat{F}C = 120°$.

O mesmo acontece com o ângulo AFC e, portanto, $A\hat{F}C = 120°$.

Daqui resulta que $A\hat{F}B = 120°$, logo $\measuredangle AFB$ está inscrito num arco de $240°$.

Por isso, F pertence à circunferência de centro em O_3 e raio $\overline{O_3A}$.

Pretende-se, agora, mostrar que $\hat{O}_1 = C\hat{P}B$.

Vou denotar por $\widehat{O_3F}$, por exemplo, o arco da circunferência de centro O_1 delimitada por $\dot{O}_1F$ e por $\dot{O}_1O_2$.

Sabendo que $\widehat{CF} = 2\widehat{O_2F}$ e $\widehat{BF} = 2\widehat{O_3F}$, então:

$$B\hat{P}C = \frac{\widehat{CF} + \widehat{BF}}{2} = \widehat{O_2F} + \widehat{O_3F} = O_2\hat{O}_3F + O_3\hat{O}_1F = O_2\hat{O}_1O_3$$

Concluímos, então que $B\hat{P}C = O_2\hat{O}_1O_3$. Logo $O_2\hat{O}_1O_3 = 60^{\circ}$.

O mesmo raciocínio é válido para $\widehat{O_2}$ e $\widehat{O_3}$.

Como $\widehat{O_1} = \widehat{O_2} = \widehat{O_3} = 60°$ concluímos que o triângulo $O_1O_2O_3$ é equilátero.

□

No entanto, poderíamos demonstrar o teorema seguinte que é mais geral, usando uma demonstração muito parecida.

Teorema: Se triângulos semelhantes PCB, CQA, BAR forem construídos externamente nos lados de qualquer triângulo ABC, seus circuncentros formam um triângulo semelhante aos três triângulos.

De forma análoga, se triângulos equiláteros forem construídos internamente nos lados do triângulo ABC, como na Figura 7, os seus centros são os vértices do triângulo interno de Napoleão $N_1N_2N_3$. Assim:

Teorema: O triângulo interno de Napoleão é equilátero.

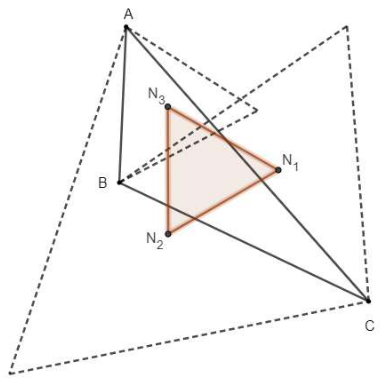


Figura 5 – Triângulo Interno de Napoleão

Demonstração:

Sendo O_1, O_2 e O_3 os centros dos triângulos equiláteros erguidos externamente podemos concluir que os ângulos $O_3\hat{A}B$ e $C\hat{A}O_2$ tem uma amplitude de 30°.

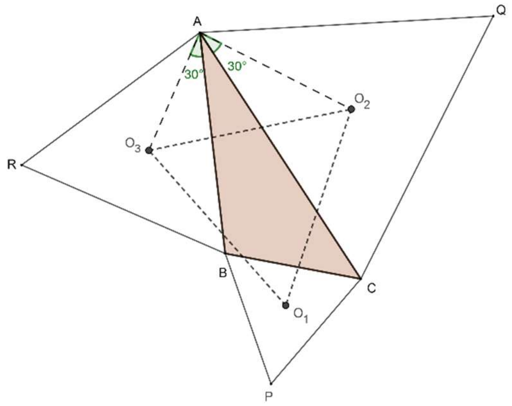


Figura 6

Daqui resulta que, observando o triângulo O_1AO_2, da *Figura 8*, podemos determinar $O_3\hat{A}O_2 = 60° + B\hat{A}C.$

Nesse caso, aplicando a Lei dos Cossenos,

temos:

$$\overline{\mathrm{O_2O_3}}^2 = \overline{\mathrm{AO_2}}^2 + \overline{\mathrm{AO_3}}^2 - \overline{\mathrm{AO_2}}^2\overline{\mathrm{AO_3}}^2 \cos(60° + B\hat{A}C)$$

Mas, como $\overline{\mathrm{AO_2}}$ é o circumraio de um triângulo equilátero do lado $\overline{\mathrm{CA}} = \mathrm{b}$ (e, portanto $\overline{CB} = a$ e $\overline{AB} = c$) vamos ter:

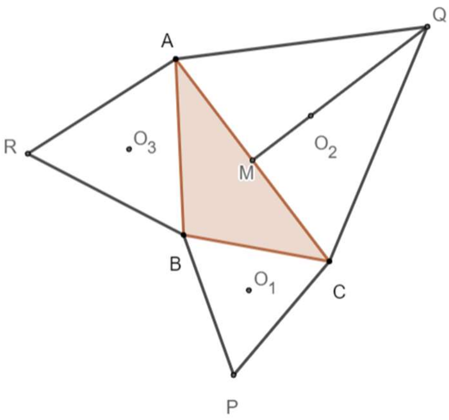


Figura 7

Como o triângulo AQC é equilátero $\overline{\mathrm{CA}} = \overline{\mathrm{AQ}} = \overline{\mathrm{QC}} = \mathrm{b}$ e, como M é ponto médio do segmento de reta AC, $\overline{\mathrm{MC}} = \frac{b}{2}$.

Então

$$\overline{\mathrm{QC}}^2 = \overline{\mathrm{MC}}^2 + \overline{\mathrm{MQ}}^2 \Leftrightarrow \overline{\mathrm{MC}}^2 = b^2 - \frac{b^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \overline{MC} = \sqrt{\frac{3b^2}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{MC} = \frac{\sqrt{3}b}{2}$$

Como O_2 é o baricentro do triângulo CAP temos que $\overline{\mathrm{AO_2}} = \frac{2}{3}\overline{\mathrm{QM}} = \frac{b}{\sqrt{3}}$.

Da mesma forma, se conclui o mesmo para os centros $\mathrm{O_1}$ e $\mathrm{O_3}$ logo

$$\overline{\mathrm{AO_1}} = \frac{c}{\sqrt{3}} \text{ e } \overline{\mathrm{BO_3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Então,

$$\overline{O_2O_3}^2 = \overline{AO_2}^2 + \overline{AO_3}^2 - \overline{2AO_2}^2\overline{AO_3}^2 \cos(60° + B\hat{A}C) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{O_2O_3}^2 = \tfrac{1}{3}b^2 + \tfrac{1}{3}c^2 - \tfrac{2}{3}bc\cos(60° + B\hat{A}C)$$

Sejam N_1, N_2 e N_3 os vértices do triângulo interno de Napoleão, que podem ser obtidos de 0_1, 0_2 e O_3 por reflexão nas linhas CA, CB e AB, respetivamente, e note-se que

$$\measuredangle N_3AN_2 = B\hat{A}C - 60°$$

temos também

$$\overline{N_2N_3}^2 = \frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{3}c^2 - \frac{2}{3}bc\cos(B\hat{A}C - 60°)$$

Por subtração,

$$\overline{O_2O_3}^2 - \overline{N_2N_3}^2 = \frac{2}{3}bc\left[\cos\left(B\hat{A}C - 60°\right) - \cos\left(B\hat{A}C + 60°\right)\right]$$

$$= \tfrac{2}{3}bc\left[\cos B\hat{A}C\cos 60° + \sin B\hat{A}C\sin 60° - \cos B\hat{A}C\cos 60° + \right.$$

$$\left.\sin B\hat{A}C\sin 60°\right]$$

$$= \tfrac{2}{3}bc[2\sin A \times \tfrac{\sqrt{3}}{2}]$$

$$= \tfrac{2\sqrt{3}}{3}bc\sin A$$

$$= \tfrac{4}{\sqrt{3}}\, Área_{\triangle ABC}\,.$$

Nota: $Área_{\triangle ABC} = \dfrac{c \times \sin A \times b}{2}$

Então como $2 \times Área_{\triangle ABC} = bc\sin A$ temos que:

$$\tfrac{2\sqrt{3}}{3}bc\sin A = \tfrac{2\sqrt{3}}{3} \times 2 \times (ABC) = \tfrac{4}{\sqrt{3}}\, Área_{\triangle ABC}\,.$$

De forma análoga, obtemos

$$\overline{O_1O_2}^2 - \overline{N_1N_2}^2 = \overline{O_3O_1}^2 - \overline{N_3N_1}^2 = \frac{4}{\sqrt{3}} \, Área_{\triangle ABC} \, ,$$

Já se sabe do teorema anterior que $\overline{O_2O_3} = \overline{O_3O_1} = \overline{O_1O_2}$, então deduz-se:

$$\overline{N_2N_3} = \overline{N_3N_1} = \overline{N_1N_2}$$

Portanto, o triângulo interior de Napoleão é equilátero.

□

Lembrando que a área de um triângulo equilátero é $\frac{\sqrt{3}}{4}$ vezes o quadrado do seu lado $^{(*)}$ podemos provar o seguinte:

Teorema: A diferença entre as áreas dos triângulos externo e interno de Napoleão é igual à área do triângulo inicial.

Demonstração:

Ora, já sabemos que:

$$\overline{O_1O_2}^2 - \overline{N_1N_2}^2 = \frac{4}{\sqrt{3}} \, Área_{\triangle ABC}$$

Se multiplicarmos ambos os membros por $\frac{\sqrt{3}}{4}$ obtemos:

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \, \overline{O_1O_2}^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \overline{N_1N_2}^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \, Área_{\triangle ABC} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} \, \overline{O_1O_2}^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \, \overline{N_1N_2}^2 = Área_{\triangle ABC}$$

$$\Leftrightarrow Área_{\triangle O_1O_2O_3} - Área_{\triangle N_1N_2N_3} = Área_{\triangle ABC} \, .$$

□

(*)

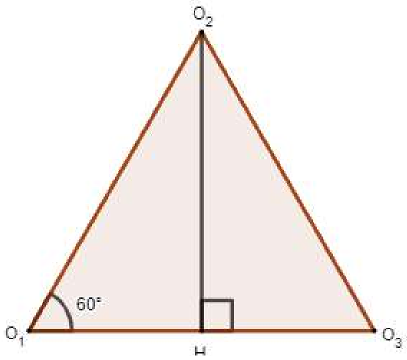


Figura 8

Como $\overline{O_1O_3} = 2\overline{O_1H}$

$$\sin 60° = \frac{\overline{O_2H}}{\overline{O_1O_2}} \Leftrightarrow \overline{O_2H} = \overline{O_1O_2}\sin 60°$$

$$\Leftrightarrow \overline{O_2H} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{O_1O_2}$$

Então:

$$Área_{\triangle O_1O_2O_3} = \frac{\overline{O_1O_3} \times \overline{O_2H}}{2} \Leftrightarrow Área_{\triangle O_1O_2O_3} = \frac{\overline{O_1O_2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{O_1O_2}}{2} \Leftrightarrow Área_{\triangle O_1O_2O_3} = \frac{\sqrt{3}}{4}\overline{O_1O_2}^2$$

Reta de Euler

Teorema: Num triângulo qualquer, o Ortocentro H, o baricentro G e o Circuncentro O estão sobre uma mesma linha reta, conhecida por Reta de Euler, e a distância do Ortocentro ao Baricentro é o dobro da distância do Baricentro ao Circuncentro.

<u>Demonstração:</u>

Considere-se um triângulo ABC qualquer e o seu triângulo medial $A'B'C'$.

Note-que que:

1. Seja G o baricentro do triângulo ABC Então podemos considerar que $A' = h(A)$, $B' = h(B)$ e $C' = h(C)$ para uma homotetia de centro G e razão $-\frac{1}{2}$.

   Note-se que a imagem de uma altura do triângulo ABC é uma altura do triângulo $A'B'C'$ porque a homotetia preserva a perpendicularidade e os lados do triângulo $A'B'C'$ são, respetivamente, paralelos aos do triângulo ABC.

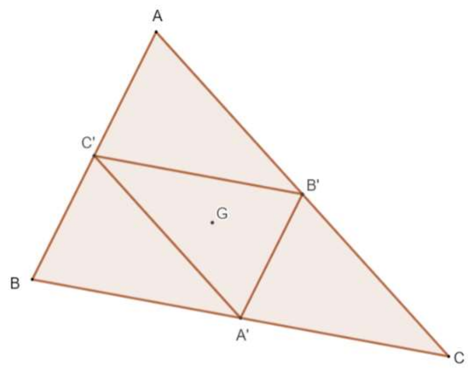


Figura 9

2. Cada mediatriz de um lado de ABC contém uma altura de $A'B'C'$.

   Por exemplo, a mediatriz do lado AB passa pelo ponto C' e é perpendicular ao lado oposto, $A'B'$, porque $A'B' \parallel AB$.

   Isto significa que o ortocentro H'do triângulo medial é o circuncentro O do triângulo original.

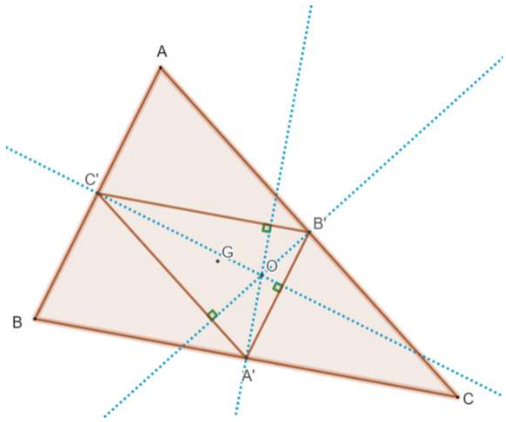


Figura 10

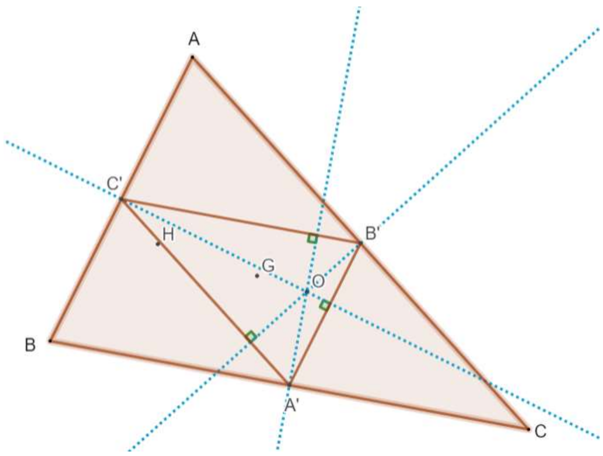


Figura 11

Portanto, como $h(H) = H' = O$ tiramos que H, G e O são colineares e que $\overline{HG} = 2\overline{OG}$

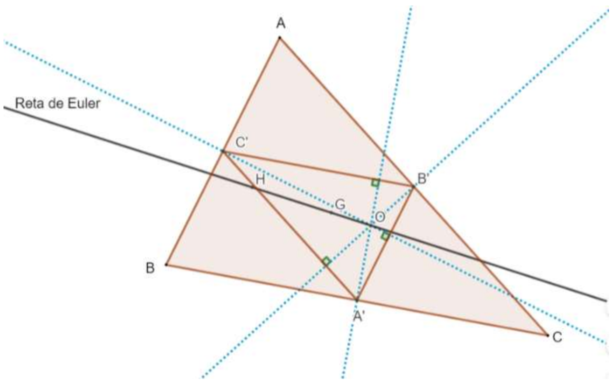


Figura 12

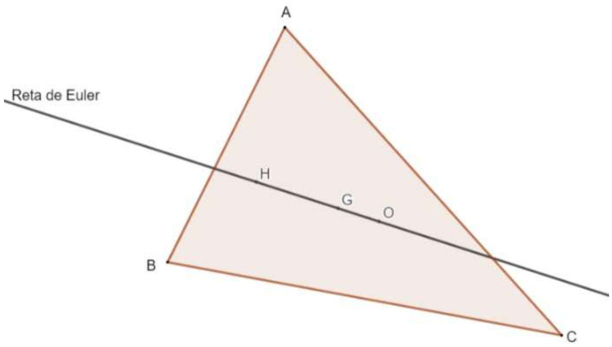


Figura 13

□

Circunferência de nove pontos do triângulo

Teorema: Os pés das três alturas de qualquer triângulo, os pontos médios dos três lados e os pontos médios dos segmentos das alturas entre o ortocentro e cada vértice, pertencem todos à mesma circunferência.

Demonstração:

Seja:

- A, B e C os vértices do triângulo;
- A', B' e C' pontos médios dos lados BC, AC e AB;
- D, E e F são os pés das alturas relativas aos lados BC, AC e AB;
- O circuncentro;
- Sendo H o ortocentro:
  - K é o ponto médio do segmento AH;
  - L é o ponto médio do segmento BH;
  - M é o ponto médio do segmento CH;
  - N é o ponto médio do segmento HO.

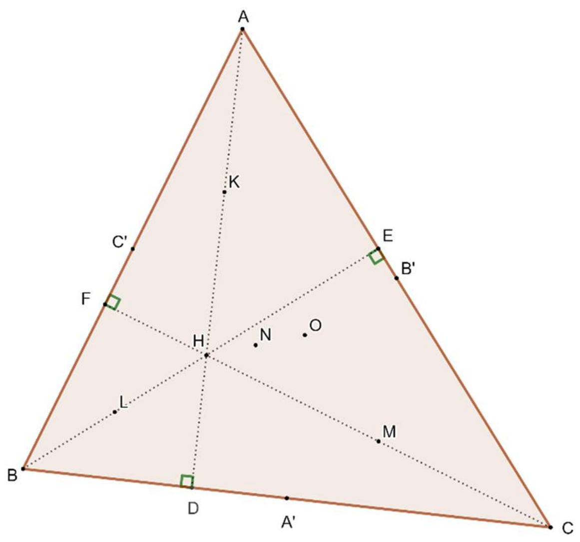


Figura 14

Note-se que K, L e M são os pontos médios dos segmentos AH, BH, CH, respetivamente, e estão contidos nas três alturas do triângulo.

Como BC é um lado comum aos triângulos ABC e HBC, e, B', C' e L, M, respetivamente, são pontos médios dos outros lados, ambos os segmentos $C'B'$ e LM são paralelos a BC.

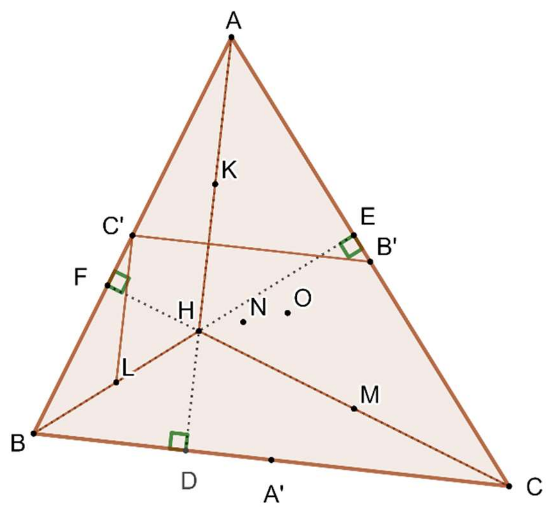


Figura 15

Assim, $B'C'LM$ é um paralelogramo e, como $BC \perp AH$, $B'C'LM$ é um retângulo.

Da mesma forma, $A'B'KL$ é um retângulo, tal como $C'A'MK$, por exemplo, que se pode inscrever numa circunferência. Um dos diâmetros dessa circunferência é $A'K$, que também é um diâmetro da circunferência que circunscreve o retângulo $C'A'MK$.

Portanto, as circunferências coincidem.

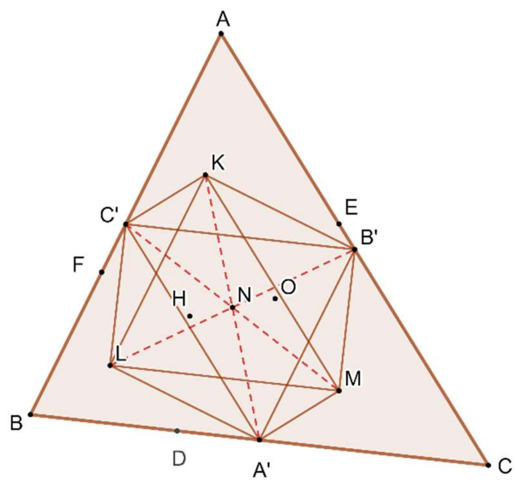


Figura 17

Note-se que $N = h_{G,-\frac{1}{2}}(O)$. Logo é o circuncentro do triângulo medial $A'B'C'$.

Desta forma, conseguimos desenhar uma circunferência que passa nos pontos A', B', C', L, M e K, com centro em N.

Como $A'\widehat{D}K$ é um ângulo reto e a circunferência tem diâmetro $A'K$, passa por D e por K. Da mesma forma, passa por E e F.

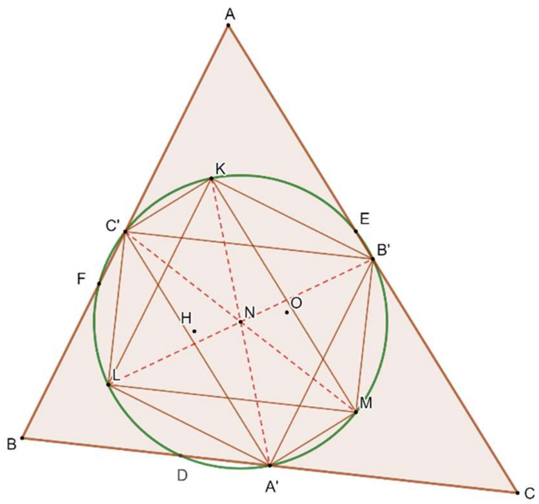


Figura 17

□

Bibliografia

- Coxeter, H. S., & Greitzer, S. L. (Vol. 19). *Geometry Revisited.* Anneli Lax New Mathematical Library.

- Fernandes, Andreia José Pires Casas – *Conjugação Isogonal*. Universidade do Minho, 2012. Dissertação de Mestrado.
- Vasconcelos, Laercio (2018). *Círculo dos 9 pontos - Tópicos de Geometria.* Acedido em: 13 de abril 2019, em: *https://www.youtube.com/watch?v=Qg_I4HShM5g*