



FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO

Mestrado em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário

Ano letivo 2018/2019

Relatório de estágio

Relações surpreendentes entre determinados números transcendententes e alguns números inteiros e irracionalidade de alguns números

Raquel Alexandra Pereira Barbosa

Orientador científico: Professor António Carlos Henriques Guedes de Oliveira

Orientador cooperante: Professora Marília Rosário



FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO

Relatório de estágio

Raquel Alexandra Pereira Barbosa

Índice

Introdução	1
I – Análise crítica das atividades desenvolvidas no âmbito da PES	2
II – Parte didática	12
III – Parte científica	26
Bibliografia.....	44

Introdução

O presente trabalho consiste no relatório de estágio, realizado como parte integrante e conclusivo do Mestrado em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

O estágio tem como principal objetivo complementar a formação académica de forma a proporcionar ao estudante universitário a oportunidade de um primeiro contacto com a futura profissão, assim como a oportunidade de praticar os conhecimentos e os conteúdos adquiridos da licenciatura e do mestrado. Nesse sentido, um dos principais objetivos deste relatório é descrever as atividades desenvolvidas no âmbito da Prática de Ensino Supervisionada e os desafios que surgiram no decorrer do ano letivo.

Assim, o relatório encontra-se estruturado em três capítulos: uma análise crítica, uma parte didática e uma parte científica.

No primeiro capítulo efetua-se uma análise crítica que consiste na descrição das atividades e trabalhos executados durante o período de estágio, um retrato de tudo aquilo que aprendi e ainda uma reflexão sobre todos estes aspetos.

No segundo capítulo apresenta-se um texto, que poderia fazer parte de um manual de 12º ano, sobre *Números complexos*, ou simplesmente poderia servir de material de apoio ao estudo para o exame nacional de 12º ano. Aqui encontram-se os conteúdos de forma resumida juntamente com exercícios de aplicação.

Por último, no terceiro capítulo encontra-se o desenvolvimento de um tema científico mais avançado sobre *Relações surpreendentes entre determinados números transcendentos e alguns números inteiros e irracionalidade de alguns números*.

Análise crítica das atividades desenvolvidas no âmbito da PES

O estágio decorreu na Escola Secundária de Tomaz Pelayo (ESTP), Escola Sede do Agrupamento de Escolas Tomaz Pelayo, que se situa no concelho de Santo Tirso no distrito do Porto. Este teve a duração de nove meses (de início de setembro até final de maio).

O estágio foi orientado pela professora Marília Rosário e o núcleo de estágio, onde estive inserida todo o ano letivo, era formado pelas estudantes estagiárias Ana Fernandes, Elisabete Silva e por mim, Raquel Barbosa.

Desde muito cedo, no início do mês de setembro, o núcleo de estágio reuniu-se com a orientadora Marília Rosário para a conhecer, para conhecer as instalações e para sermos apresentadas ao diretor e subdiretora da escola, de forma a iniciar o ano letivo já adaptadas a um novo ambiente. Aqui, foi também decidido qual o método de trabalho que iríamos adotar e ficou definido que usaríamos o *Google Drive* como ferramenta de trabalho. Além disso, fomos exigido logo de início bastante trabalho de leitura e análise de documentos estruturantes de orientação escolar que a orientadora nos facultou, como por exemplo os Decretos-Lei 54/2018 e 55/2018, o Perfil do aluno à saída da escolaridade obrigatória, os Programas e metas e as Aprendizagens Essenciais, pois seriam úteis para as futuras reuniões. Este choque de ter que imediatamente perceber como funcionam os documentos legais e como funcionam os documentos que futuramente iríamos ter de alterar causou um grande impacto no que idealizava ser professora. Sempre imaginei que ser professora implicava imenso trabalho para além de lecionar, mas nunca pensei que exigisse todo este trabalho prévio. Este foi um momento de me aperceber da realidade e de prever que o ano de estágio fosse bastante trabalhoso.

Posteriormente houve uma reunião com o Departamento de Matemática e Ciências Experimentais onde fiquei a conhecer toda a legislação recentemente editada, nomeadamente as Portarias 223-A/2018, 226-A/2018 e 235-A/2018 e as implicações que teriam na elaboração dos Critérios de Avaliação. Mais uma vez, esta situação exigiu que lesse estes documentos e que os analisasse de forma séria e consciente.

De seguida reuniu-se apenas o Grupo Disciplinar de Matemática onde fomos apresentadas a todos os professores de matemática daquela escola. Nesta reunião, como já tido lido antecipadamente os documentos estruturantes de orientação escolar, assim como as minhas colegas, o núcleo de estágio teve oportunidade de dar o seu parecer e participar na análise detalhada desses documentos. Nesta reunião foi também discutida e elaborada a Planificação Anual para o 7º ano do ano letivo 2018/2019 de acordo com as Aprendizagens Essenciais e o Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória nos quais o núcleo de estágio também contribuiu. Foi ainda discutido e elaborado o projeto para a Oficina de Matemática segundo o Decreto-Lei 54/2018 e o Decreto-Lei 55/2018. Neste seguimento o núcleo de estágio, além de ter participado nestas discussões e ajustes de acordo com os documentos estruturantes de orientação escolar já referidos, também elaborou e partilhou com o Grupo de Matemática grelhas de observação e de autoavaliação dos alunos. Todo este trabalho colaborativo fez com que a nossa integração na escola fosse mais facilitada e criasse um bom ambiente entre as estudantes estagiárias e os professores de matemática. Portanto, de um modo geral fiz uma boa integração na escola e criei uma boa relação tanto com professores como com os funcionários.

Após tudo isto, o núcleo de estágio ficou a conhecer as turmas que teriam ao seu encargo e qual o seu horário. Esta decisão foi exclusivamente feita pela escola e ficou então estabelecido que ficaríamos com o 7ºA, 9ºA, 9ºG e o 2ºI. Daqui resultou que o núcleo de estágio teria de estar presente nos concelhos de turma destas turmas.

O primeiro concelho de turma em que estive presente foi o concelho de turma do 9ºG. Esta turma era constituída por 23 alunos, algo que me surpreendeu visto que estava à espera de turmas maiores. Contudo, nesta reunião encontrei a justificação para serem tão poucos alunos, esta turma englobava uma aluna que necessitava de medidas educativas especiais. Outro aspeto que me surpreendeu foi a quantidade de informações que os professores tinham de cada aluno, isto é apontaram bastantes detalhes a ter em conta na sala de aula para que não houvessem distúrbios. Desta reunião concluí que a turma do 9ºG era uma turma formada maioritariamente por meninas com bastantes dificuldades e com alguns elementos problemáticos. Além de tudo isto era uma turma com bastantes problemas familiares o que também não ajudaria no desenvolvimento escolar.

O segundo concelho de turma em que estive presente foi do 2ºI, uma turma do ensino profissional que corresponde ao 11º ano. Nesta reunião, observei que a turma era constituída por 20 alunos, maioritariamente constituída por meninas e algumas já maiores de idade. Para além disto, nesta turma havia elementos que estariam a ter apoio psicológico, devido a problemas familiares e escolares, e também necessitariam de medidas educativas especiais.

O terceiro concelho de turma em que estive presente foi o do 9ºA. Pela primeira vez não ouvi informações negativas sobre os alunos. Esta turma era constituída por 27 alunos, era uma turma mista e era constituída por alunos que tinham excelentes resultados.

O quarto e último concelho de turma foi do 7ºA em que não tive oportunidade de estar presente. No entanto, as informações foram-me transmitidas pela orientadora Marília Rosário. Esta turma era formada por 25 alunos e era uma turma mista. Desta reunião foi de salientar que quatro alunos eram repetentes, por isso seriam os quatro casos a ter em atenção na sala de aula.

De todos estes concelhos de turma verifiquei que é extremamente importante analisar os alunos e ter registos de diversas ocorrências para que essas informações possam ser partilhadas com os colegas de forma a melhorar a interação com os alunos dentro e fora da sala de aula.

Ainda antes do início da atividade letiva, o núcleo de estágio compareceu a uma formação orientada pelo professor Eusébio André com o objetivo de aprender a trabalhar com as ferramentas do Google, visto ser a nossa futura ferramenta de trabalho. O professor Eusébio André iniciou a formação fazendo uma breve introdução onde realçou que comunicar é a competência mais importante a ter numa escola. De seguida explicou o que era uma conta Google, nomeadamente onde se encontravam as principais aplicações desta ferramenta, e destacou o Google Drive e o Google Classroom como as aplicações que mais teriam interesse. Daqui seguiu para a explicação do Google Drive onde explicou e demonstrou alguns elementos incluídos nesta aplicação. Para terminar esta formação fez uma pequena síntese onde referiu a importância e a facilidade das aplicações do Google. Esta formação foi bastante importante para todo o estágio, pois a partir do Google Drive elaborei as minhas aulas e obtive feedback da orientadora mesmo a longa distância. Além desta utilidade, com esta ferramenta construí, em conjunto com as minhas colegas estudantes estagiárias, todos os testes e fichas de trabalho mesmo estando as três em locais distintos. Além disso foi a partir do Google

Classroom que se disponibilizou documentos de estudo aos alunos, ou seja esta aplicação serviu como plataforma de trabalho colaborativo e de comunicação com os alunos. Neste seguimento, durante os três períodos, o núcleo de estágio também elaborou diversos questionários no Google Classroom que serviram para avaliar o conhecimento adquirido pelos alunos ou funcionou como um instrumento de revisões para o teste. De um modo geral, penso que os alunos aceitaram estes questionários de uma forma muito positiva e, devido à melhoria das classificações, grande parte deles viram estes questionários como uma mais-valia para o seu estudo. Das três turmas em que se implementou estes questionários, uma pequena percentagem dos alunos não aderiu facilmente, que do meu ponto de vista talvez seja por necessitar obrigatoriamente de internet. Esta necessidade talvez tenha sido a grande barreira para estes alunos, pois penso não terem internet nem casa nem no telemóvel.

Após o início do ano letivo, o núcleo de estágio assessorou as aulas de 7^º, 9^{ºs} anos e ensino profissional de 11^º ano, de maneira a conhecermos melhor cada um dos alunos, quais as suas dificuldades e as estratégias mais adequadas para os apoiar.

Até ao final de novembro, o meu desempenho na escola dentro da sala de aula baseou-se em esclarecer dúvidas aos alunos durante as aulas nos momentos dedicados à resolução de exercícios e problemas. Inicialmente pensei que os alunos não fossem tão recetivos a terem outras professoras a ajudá-los, no entanto para eles era algo novo, era outra forma de trabalhar e até reconheço que estavam bastante curiosos em saber como seria a nossa prestação. Foi o meu primeiro contato com os alunos e todos eles me receberam de forma positiva e, ao contrário do que esperava, sempre que achavam necessário solicitavam o meu apoio. Com o passar dos dias os alunos conseguiram perceber que era uma grande vantagem terem-nos dentro da sala de aula e isso foi notório na grande maioria, pois eram eles que nos procuravam e insistiam em esclarecer as dúvidas. As melhorias nas classificações dos testes foram outra grande consequência do nosso apoio e ver que conseguimos ter impacto na vida de alguém foi, para mim, uma das grandes motivações para conseguir fazer mais e melhor durante todo o estágio.

Para além disto, todas as semanas, o núcleo de estágio trabalhou em sessões de apoio com pequenos grupos de alunos do 7^ºA. Aqui os alunos eram propostos a aparecer e a maioria deles compareciam de livre vontade. Este grupo de alunos que eram assíduos nestas sessões de apoio eram alunos que apresentavam muitas dificuldades de aprendizagem e que necessitavam de um apoio mais individualizado. Todos eles tiveram uma recetividade bastante positiva a este tipo de trabalho e na maioria dos casos observou-se melhoria nas classificações, o que demonstra que estes alunos aproveitaram o nosso apoio de forma responsável e séria.

O trabalho realizado em colaboração com a orientadora foi concretizado em reuniões semanais. Nestas reuniões construíram-se fichas de trabalho e instrumentos de avaliação e respetivos critérios de classificação, assim como aplicamos os critérios de classificação nos instrumentos de avaliação. Para além disso foi nestas reuniões que se construíram os materiais para os reforços dos 9^{ºs} anos e para a oficina de matemática do 7^º ano. É de salientar que, desde o início do estágio, o núcleo de estágio participou ativamente nas construções de todos os materiais, como por exemplo as fichas de trabalho, fichas de avaliação, entre outros materiais.

Para além de tudo isto, em concordância com a orientadora, o núcleo de estágio elaborou uma tarefa exploratória. Esta tarefa foi realizada no âmbito da unidade curricular Investigação e Prática Profissional do Mestrado em Ensino de Matemática no 3^º Ciclo do

Ensino Básico e no Secundário da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. O projeto englobou apenas a análise da turma do 9ºA, no entanto a tarefa foi resolvida no 9ºA e no 9ºG e tinha como objetivo analisar o uso do feedback pelo professor como instrumento de autorregulação e avaliação das aprendizagens dos alunos na disciplina de matemática. A tarefa foi resolvida em grupos e era uma tarefa de duas fases. Ambas as turmas tiveram uma receptividade bastante boa a este tipo de trabalho, no entanto obtivemos diferentes resultados. A turma do 9ºA foi a turma com mais soluções corretas, no entanto a maioria respondeu de forma incompleta. Esta turma demonstrou grandes dificuldades em construir argumentos que justificassem a solução encontrada, visto que era um dos parâmetros a completar na tarefa. A segunda fase incluía completar a primeira resposta de acordo com o feedback dado pelo núcleo de estágio ou, para os casos completamente corretos, teriam de resolver uma segunda tarefa. Por fim, observou-se que nesta turma os grupos que inicialmente não conseguiram explicar os raciocínios que tiveram para obter a solução ao problema, nesta segunda fase continuam sem saber justificar as suas respostas mostrando assim que não conseguiram melhorar as suas produções e que o feedback fornecido não “ajudou”. Quanto aos grupos que estavam num bom caminho, estes conseguiram terminar e justificar todas as condições do problema. Nestes casos, o feedback parece ter resultado de uma forma muito positiva. Os grupos que realizaram a primeira fase com sucesso conseguiram responder à segunda tarefa, no entanto apenas um deles respondeu corretamente. Quanto à turma do 9ºG houve bastantes soluções corretas mas todas elas estavam incompletas. Aqui a grande dificuldade, para além de terem demonstrado grandes dificuldades em construir argumentos que justificassem a solução encontrada, foi não terem conseguido controlar o tempo. Numa segunda fase, o objetivo também era completar a primeira resposta de acordo com o feedback dado pelo núcleo de estágio e aqui a maioria conseguiu completar, mostrando assim que o feedback “ajudou”. Contudo, existiu uma pequena percentagem de alunos que nem sequer tentou melhorar na segunda fase. Do meu ponto de vista, como eram alunos com extremas dificuldades, não possuíam capacidades cognitivas para que conseguissem responder à tarefa daí nem terem tentado.

No mês de dezembro lecionei pela primeira vez. Todas as aulas foram preparadas com antecedência e com muito pormenor. Consultei as aprendizagens essenciais e os programas e metas para complementar a aula. Utilizei os recursos tecnológicos que a escola disponibilizou e elaborei fichas de trabalho para que os alunos pudessem compreender melhor os conteúdos. Nestas aulas o nervosismo estava bem presente, o que fez com que não tivesse tanto cuidado com a linguagem matemática nem conseguisse controlar bem o tempo de aula. Os alunos também se demonstraram um pouco nervosos e inquietos, pois era uma situação bastante diferente do que estavam habituados. No entanto, até ao final do primeiro período, de um modo geral, os alunos aceitaram bem as aulas e participaram de forma positiva, solicitaram sempre que necessário para esclarecer dúvidas e demonstraram interesse em aprender.

Sendo dezembro o mês do Natal, o núcleo de estágio dinamizou um concurso de *Postais de Natal* com ligação à disciplina de matemática. O concurso foi orientado por um regulamento criado pelo núcleo de estágio e foi proposto ao 7º ano e aos 9ºs anos. Houve uma grande participação dos alunos e todos eles se demonstraram entusiasmados e curiosos com o facto de poder relacionar a matemática com o Natal. Este concurso teve como objetivo a descoberta da matemática ligada ao Natal, fator que para alguns foi bastante difícil de encontrar. No entanto, para outros a internet ajudou e descobriram conteúdos matemáticos

bastante interessantes, como por exemplo o triângulo de Pascal, exponenciais e logaritmos, linguagem binária, equações matemáticas, entre outras bastante curiosas. Acredito que os alunos não tenham conseguido compreender o que usaram nos postais, no entanto demonstraram grande autonomia e criatividade e apresentaram postais muito interessantes. Depois da entrega de todos os postais, o núcleo de estágio convidou um professor de Educação Visual e a coordenadora do Departamento de Matemática para se reunirem à nossa orientadora e ao núcleo de estágio para que se formasse um júri de avaliação dos postais. Após estarem decididos os vencedores, o núcleo de estágio anunciou quem eram os vencedores, sendo apenas um de cada turma, e entregou um diploma de felicitação juntamente com um pequeno brinde. Desta atividade, pude observar que a maioria dos alunos não consegue interligar a matemática com o mundo fora da escola. Do meu ponto de vista este é um dos grandes motivos pelos quais os alunos não gostam de matemática, pois não vêem nela qualquer utilidade. Nesse sentido, penso que futuramente será um aspeto que tencionarei trabalhar e melhorar com os meus alunos.

Após terminado o primeiro período, o núcleo de estágio esteve presente nas reuniões finais de cada turma onde se atribuiu uma classificação final a cada aluno. Todas estas classificações foram previamente discutidas juntamente com a orientadora Marília Rosário, ou seja o núcleo de estágio teve oportunidade de dar o seu parecer relativamente a cada nota final tanto da disciplina de matemática como da oficina de matemática. Foi uma experiência muito enriquecedora, pois mostrou o quanto é importante fazer observações dos alunos durante as aulas para, no final de cada período, ter informações suficientes para argumentar o porquê da classificação escolhida. Nesse sentido, as grelhas de observação tornaram-se uma ferramenta imprescindível. Por outro lado, notei que usar estas grelhas requer perder algum tempo da aula e requer que as observações sejam espaçadas de umas para as outras de forma a verificar se o aluno evoluiu ou não. Do meu ponto de vista, este preenchimento das grelhas de observação tem de ser algo bastante pensado e planeado para que não atrapalhe o bom funcionamento das aulas.

O segundo período começou de forma atribulada, pois o núcleo de estágio foi informado que seria durante este período a realização de diversas atividades, como por exemplo a Mostra da escola, que é uma das mais importantes de todo o ano letivo. Nesse sentido, seria de esperar que fosse pedida a contribuição do núcleo de estágio.

A Escola Secundária de Tomaz Pelayo disponibilizou dois dias para se realizar a Mostra da escola à comunidade de Santo Tirso. Nesse sentido, o núcleo de estágio decidiu dinamizar uma atividade em que englobasse os encarregados de educação. Portanto, orientamos os alunos na planificação de uma aula para os encarregados de educação, professores e outros elementos da comunidade educativa a ser apresentada na Mostra da escola. Esta atividade foi proposta no 9ºA e no 9ºG com diferentes temas para cada turma. Os temas do 9ºG foram as “Curiosidades Matemáticas” e no 9ºA foram as “Esculturas do MIEC e a Matemática”, onde MIEC se refere ao Museu Internacional de Escultura Contemporânea. Ambos os temas tinham como objetivo mostrar aos alunos, mas em especial aos encarregados de educação, que a matemática é divertida e se encontra em qualquer lugar. Um dos pontos fulcrais foi trazer os pais à escola de forma a inclui-los na comunidade escolar dos seus filhos. Além disso foram os alunos os mais beneficiados, e do meu ponto de vista foi o momento em que mais se divertiram aprendendo matemática. Esta atividade fez com que conhecessem truques matemáticos, que surpreenderiam qualquer um, e permitiu também a divulgação e

conhecimento das esculturas do MIEC com grandes ligações à matemática. De um modo geral todos os alunos gostaram de participar e, do meu ponto de vista, deveu-se ao facto de poderem mostrar aos seus familiares que são capazes de falar e explicar conteúdos matemáticos.

A Mostra da escola também incluiu diversas salas dedicadas a várias disciplinas e uma delas era a de matemática. Nesse sentido o núcleo de estágio criou uma atividade para expor na sala da matemática – *Estima com Pinta*. Esta atividade consistia em os alunos darem, num minuto, uma estimativa do número de M&M's que estavam presentes na imagem. Caso acertassem, com erro inferior ou igual a 10, por exemplo, ganhavam um M&M. Foi uma das atividades com mais adesão por parte dos alunos, no entanto penso que terá sido apenas pela curiosidade em conhecer o trabalho das “professoras novas” e por causa dos M&M's com certeza. Estive presente durante algum tempo nesta sala da matemática e pude observar que a matemática não é assim tão odiada pela comunidade. Deparei-me com a visita de imensos alunos que procuraram esta sala por vontade própria simplesmente por serem curiosos e quererem aprender coisas novas. Nesse sentido, expliquei e demonstrei a estes alunos algumas das atividades e truques que estavam expostos.

O núcleo de estágio também propôs a participação dos 9^{os} anos no concurso *Matemáticas na Raia*. Este concurso é um concurso de resolução de problemas que se realiza na Galiza e na Região Norte de Portugal e é organizado pela Asociación Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA) e pela Associação de Professores de Matemática de Portugal (APM). Nesse sentido, durante as aulas de reforço, o núcleo de estágio contribuiu para a preparação dos alunos dos 9^{os} anos tanto a nível estratégico como a nível de resolução de problemas. Para isso o núcleo de estágio assessorou os alunos enquanto eles resolviam problemas dos concursos dos anos anteriores e contribuiu com estratégias de organização da turma para a distribuição de tarefas para que no dia da prova as turmas conseguissem responder corretamente a todos os problemas. Contudo, apenas a turma do 9^aA quis participar, pois a outra turma do 9^o ano não tinha disponibilidade de horário para participar no concurso. No fim do concurso, a turma do 9^aA ficou num honroso 2^o lugar com 87 pontos, ficando atrás do 1^o lugar que obteve 90 pontos. Do meu ponto de vista, foi uma grande vitória, tanto para os alunos como para a escola, e mais uma vez foram estas situações que me concederam mais motivação e orgulho no trabalho que fiz com os alunos. Este resultado no concurso, de certo modo, também foi muito importante para os alunos, pois mostrou-lhes que eles têm grandes capacidades e são capazes de atingir enormes objetivos e ainda que o trabalho em grupo também traz vantagens, ou seja que juntos conseguem muito mais.

Neste seguimento, o núcleo de estágio também contribuiu para a preparação dos alunos nos concursos das Olimpíadas de Matemática e no Canguru Matemático. Esta preparação decorreu nos reforços do 9^o ano ou na oficina de matemática do 7^o ano e consistiu na resolução de provas dos anos anteriores. Nestes concursos poucos elementos de cada turma participaram, no entanto o núcleo de estágio, em trabalho colaborativo com a orientadora Marília Rosário, utilizou este tipo de trabalho para praticar a resolução de problemas de forma a promover o raciocínio lógico e desenvolver o pensamento crítico de cada aluno. Contudo, não obtivemos um feedback positivo por parte dos alunos, pois a maioria não conseguiu resolver este tipo de problemas, o que do meu ponto de vista a resolução de

problemas é algo que deve ser trabalhado futuramente para que os alunos consigam desenvolver um bom raciocínio lógico.

O núcleo de estágio também dinamizou uma Oficina *Construção de testes/questionários no Google Forms* no Fórum Educa, com a duração de três horas e meia. O Fórum Educa é um curso de formação acreditada pelo Conselho Científico-Pedagógico da Formação contínua de Professores e destinada a educadores e professores do concelho de Santo Tirso, organizada pelo Centro de Formação de Professores Sebastião da Gama - Santo Tirso e Valongo - e pela Câmara de Santo Tirso. Esta formação foi dirigida pela orientadora de estágio e foi assessorada pelo núcleo de estágio. Nesta formação o objetivo foi explicar e demonstrar tudo o que sabíamos sobre os questionários do Google, algo que para mim foi bastante assecível visto que era uma ferramenta muito usada no meu dia-a-dia. Contudo, o nervosismo esteve sempre presente mas nunca influenciou a minha prestação. Pela primeira vez trabalhei diretamente com outros professores e fiquei muito agradada com a seriedade que todos eles tiveram para com o nosso trabalho. Demonstraram-se interessados e curiosos com esta ferramenta que poderia funcionar como um instrumento de avaliação. De um modo geral, penso que, tanto eu como as minha colegas estagiárias, conseguimos que a informação chegasse a cada um dos presentes, pois no final da formação todos eles conseguiram construir pelo menos um questionário. Esta experiência foi bastante enriquecedora, pois, além de me ajudar a lidar com os nervosismo, permitiu que compreendesse como funciona o planeamento e funcionamento de uma formação de professores. Além de tudo isto, dias após à formação, fomos felicitadas via e-mail por alguns formandos pelo nosso bom desempenho nesta formação, o que demonstrou o contentamento dos professores com o nosso trabalho.

Durante o segundo período lecionei de forma mais continuada às diversas turmas. Todas as aulas foram planeadas atempadamente por mim sempre com o auxílio dos programas e metas curriculares assim como as aprendizagens essenciais. Para cada aula construí um plano de aula detalhado e bem organizado, assim como também construí fichas de trabalho de apoio às aulas. Aqui revelei uma grande melhoria na gestão do tempo e em controlar o sistema nervoso. Outra grande melhoria que senti foi no rigor da linguagem oral e escrita, assim como também melhorei em termos de questionamento promotor de aprendizagens e pensamento crítico. Contudo, melhorar não foi fácil. A correção da linguagem matemática, tanto oral como escrita, foi algo que batalhei em todo o estágio. Para a melhorar recorri à orientadora para me direcionar neste assunto e também recorri à escola virtual de forma a complementar. Com estas melhorias notei que a participação e o interesse em aprender dos alunos aumentaram, o que mostra que a segurança em comunicar e a satisfação em dar as aulas são sentidas no desempenho dos alunos. Por isso, penso que um bom professor deve gostar do que faz e mostrar contentamento em toda a sua atividade de forma a cativar os alunos. De um modo geral, em todo o estágio lecionar foi o que mais me agradou e também foi o mais desafiante, pois foi algo que me desencadeou curiosidade em aprender mais e em procurar novas formas de lecionar certos conteúdos.

Além de tudo isto, as quartas fichas de avaliação de cada turma foram construídas autonomamente pelo núcleo de estágio, assim como os respetivos critérios de classificação. Esta tarefa consistiu em elaborar cinco fichas de avaliação, estando incluídas as fichas de avaliação do 9ºA, do 9ºG e do 7ºA e as fichas de avaliação adaptadas para o 9º G e 7ºA. Foi uma tarefa que exigiu muito do nosso tempo e exigiu um grande planeamento do que iríamos

incluir em cada ficha de avaliação. Esta dificuldade decorreu do facto de termos duas turmas do 9º ano bastante diferentes a nível cognitivo, o que exigiu da nossa parte uma escolha de exercícios de níveis de dificuldade bastante diferentes. A elaboração da ficha de avaliação do 7ºA foi a mais acessível de elaborar. No entanto, achei mais complicado construir a ficha de avaliação adaptada, pois, do meu ponto de vista, a ficha de avaliação original já estava bastante simples o que dificultou adaptá-la de forma a ficar mais acessível aos alunos com muitas dificuldades. Quanto aos critérios de classificação não houve grandes dúvidas em atribuir as cotações. Nesse sentido, acho que neste aspeto o núcleo de estágio funcionou sempre em consonância. Quanto às classificações dos alunos fui totalmente surpreendida. As classificações dos alunos dos 9ºs anos, que estava à espera que descessem devido ao elevado grau de dificuldade, na maioria dos casos subiram. Por outro lado, as classificações do 7ºA desceram bastante ao contrário do que eu esperava, pois na minha opinião a ficha de avaliação estava demasiado acessível. Estes resultados mostraram-me que os alunos podem sempre surpreender-nos e mesmo quando nós pensamos que a turma está a compreender bem os conteúdos pode acontecer que na realidade não é mesmo isso que está a acontecer. No caso do 7ºA, penso que o erro talvez tenha sido não se ter feito uma tarefa individual atempadamente para analisar se a turma adquiriu ou não os conhecimentos.

Devido ao grande interesse do núcleo de estágio em conhecer o funcionamento das turmas do ensino secundário, houve professoras que se dispuseram a aceitar a nossa presença nas suas aulas. Nesse sentido, observei aulas de Matemática Aplicada às Ciências Sociais e de 12º ano de Matemática A. Não poderia terminar o estágio sem estar presente nestas aulas. Observei uma dinâmica de aula bastante diferente, pois a professora explicou alguns conteúdos em pouco tempo e de seguida funcionou apenas a aplicação dos conhecimentos adquiridos onde o apoio dado pela professora era quase individualizado. Além disso a maioria dos alunos eram bastante autónomos e demonstraram ter um estudo regular, algo que no ensino básico pouco se encontra. É certo que gostei muito de lecionar no ensino básico, talvez devido ao facto de os alunos terem uma relação mais próxima com os professores e talvez porque sempre irão precisar de uma professora que os acompanhe tanto em trabalho de aula como no estudo. No entanto, depois de assistir a estas aulas do ensino secundário, penso que também gostarei muito de lecionar no ensino secundário, pois os alunos já têm mais maturidade e encaram a escola com mais seriedade, permitindo assim que o nosso trabalho como professoras seja mais valorizado.

Algo de novo também começou no segundo período - as aulas do ensino profissional do 2ºI. Aqui o núcleo de estágio teve oportunidade de assessorar as aulas e acompanhar toda a avaliação que foi feita a esta turma. Inicialmente, a orientadora optou pela mesma dinâmica do ensino regular, ou seja explicou os conteúdos à turma e de seguida disponibilizou exercícios de aplicação. No entanto, não se obteve feedback positivo dos alunos, pois sendo uma turma de ensino profissional os alunos não estavam interessados numa aula expositiva. Mais tarde, decidiu-se mudar de estratégia e então definiu-se grupos de trabalho onde, cada estudante estagiária, ficaria responsável por um grupo. Eram apenas quatro grupos de trabalho e foram definidos de acordo com as classificações obtidas pelos alunos na primeira ficha de avaliação. Aqui foi pedido aos alunos que utilizassem o *Geogebra* no telemóvel de forma a poderem visualizar melhor o que era pedido. Todos eles reagiram com muito entusiasmo a esta ferramenta, pois, do meu ponto de vista, a maioria nunca pensou que o telemóvel dispusesse de ferramentas matemáticas e que seriam úteis nas aulas de matemática. Neste seguimento, o

papel de cada estudante estagiária era explicar os conteúdos aos elementos do grupo e de seguida ajudá-los na resolução de exercícios e problemas. Na minha opinião foi uma boa decisão usar a tecnologia, pois reconheço que os alunos ficariam mais motivados e só conseguiriam aprender os conteúdos se compreendessem e visualizassem através da aplicação do *Geogebra*, dando assim significado aos problemas. Nesse sentido, tive oportunidade de trabalhar com diferentes grupos e constatei que este método funciona e realmente os alunos ficam mais cativados e interessados em saber muito mais. Contudo, o facto de apenas terem uma aula por semana não facilitou o nosso trabalho, pois os alunos facilmente esqueceram o que lhes foi ensinado. Adotou-se então uma nova estratégia que consistia em fazer um trabalho de pares como uma tarefa de avaliação em que englobasse uma apresentação à turma. Assim faria com que os grupos tivessem de trabalhar a longo prazo e portanto esquecer o que aprenderam recentemente não podia ser uma escolha. Nesse sentido, o núcleo de estágio elaborou autonomamente um guião de trabalho, os parâmetros de avaliação e a tarefa de avaliação para cada par. Os alunos aceitaram muito bem esta proposta de trabalho e foi notório em todas as aulas o empenho dos grupos. Mostraram-se curiosos e verdadeiramente interessados e nas apresentações a maioria dos alunos correspondeu às expectativas. Além disso o núcleo de estágio e a orientadora Marília Rosário tiveram oportunidade de fazer perguntas no final de cada apresentação e todos os grupos responderam à altura, o que demonstra que entenderam o trabalho que elaboraram. Do meu ponto de vista esta foi a estratégia que os mais cativou e que os fez compreender realmente a matemática.

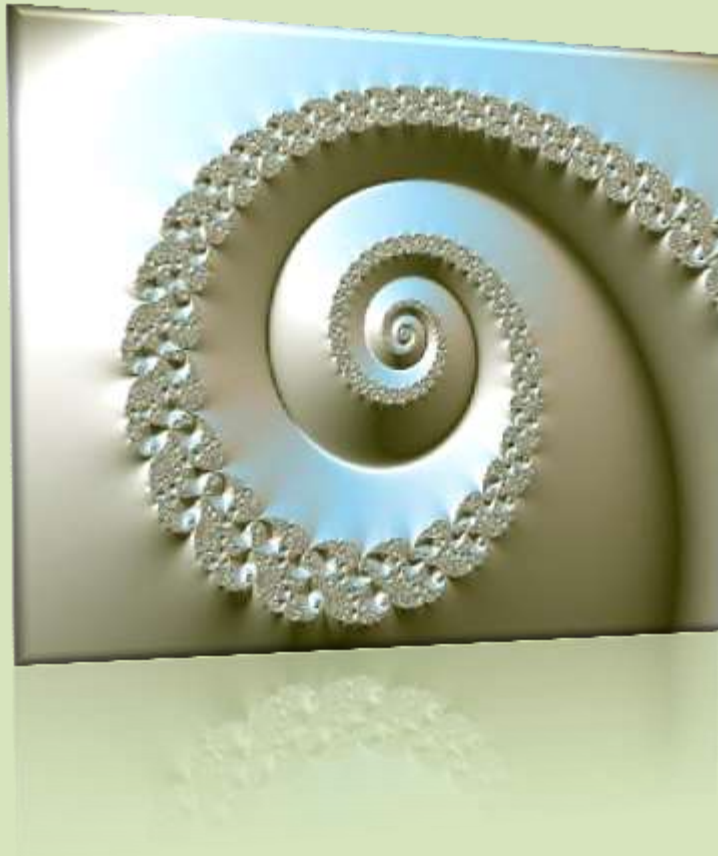
No decorrer do terceiro período continuei a lecionar e senti que as melhorias foram evidentes, pois demonstrei uma grande capacidade de comunicação e de interação com os alunos e acima de tudo manifestei segurança ao nível dos conteúdos lecionados, tendo correspondido integralmente às solicitações e questões colocadas pelos alunos. Mais uma vez foi notório o meu empenho e dedicação em melhorar.

Para além disto, o núcleo de estágio contribuiu para a elaboração da Prova Final de 3º ciclo NEE, isto é Prova Final de 3º ciclo para alunos com Necessidades Educativas Especiais. Aqui propusemos exercícios para a prova, assim como as cotações para cada pergunta. De um modo geral, foi uma tarefa acessível visto que esta prova teria um funcionamento semelhante às fichas de avaliação adaptadas que nos eram familiares. Posto isto, o núcleo de estágio também contribuiu para a elaboração dos critérios gerais de classificação da Prova Final de 3º ciclo NEE. A construção deste documento foi mais complexa, pois há todo um modelo que se deve seguir, nomeadamente há que se ter em conta todo o tipo de resposta que os alunos poderão dar e aí terá de ser definido qual a cotação atribuída. Contudo, apesar de reconhecer que é uma tarefa acessível, penso que deve ser sempre uma tarefa atribuída a pelo menos duas pessoas, pois facilita o facto de encontrar todas as possibilidades de resposta para cada pergunta.

Em suma, lecionei um total de 46 aulas, o que corresponde a 34 horas e meia, demonstrando sempre grandes melhorias com o decorrer do estágio e revelando sempre sentido de responsabilidade, sendo este um dos principais fatores que contribuiu para o cumprimento de todas as tarefas estabelecidas. Considero ainda que demonstrei grande rigor na assiduidade e pontualidade, o que me permitiu viver todas estas experiências. Trabalhar em equipa com as minhas colegas estudantes estagiárias também foi determinante para que, durante todo o estágio, se ultrapassassem todas as dificuldades que nos apareceram no processo, funcionando assim como um apoio emocional.

I – Análise crítica

Concluindo, o estágio permitiu uma constante aprendizagem e crescimento profissional. Além disso possibilitou que tivesse uma maior aproximação com a realidade escolar, tanto a nível de conceitos como de procedimentos que poderemos tomar quando iniciarmos a nossa prática profissional. Nesse sentido, o estágio permitiu-me ter uma visão mais realista daquilo que encontrarei ao longo desta profissão.



Números Complexos

Introdução

O corpo dos números complexos

Representação dos números complexos na forma $z = a + bi$

Forma trigonométrica de um número complexo

Raízes n-ésimas de números complexos

Introdução

Historicamente, raízes de números negativos não surgiram como solução de equações do 2º grau mas sim com a procura das soluções das equações do 3º grau. A descoberta mais significativa foi produzida por Leonhard Euler (1707-1783) que introduziu pela primeira vez a notação i , a unidade imaginária, que representa $\sqrt{-1}$.

Desta forma nasce um novo conjunto, o **conjunto dos números complexos**, representado por \mathbb{C} .

O corpo dos números complexos

Definição

Designa-se por corpo dos números complexos - \mathbb{C} , o conjunto \mathbb{R}^2 munido das seguintes operações:

- Operação aditiva: $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$
- Operação multiplicativa: $(a,b) \times (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$ com $(a,b), (c,d) \in \mathbb{R}^2$.

As operações “+” e “×”, definidas em \mathbb{R}^2 , têm as seguintes propriedades:

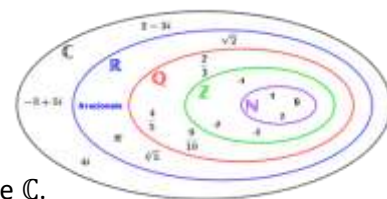
- São associativas e são comutativas.
- $(0,0)$ é o elemento neutro de “+” e $(1,0)$ é o elemento neutro de “×”.
- “×” é distributiva em relação a “+”.

\mathbb{R} como subconjunto de \mathbb{C}

Seja $x \in \mathbb{R}$, então associa-se a x o elemento $(x,0) \in \mathbb{C}$. Dados dois reais a, c , tem-se que $(a,0)$ e $(c,0)$ pertencem a \mathbb{C} e:

- $(a,0) + (c,0) = (a+c,0)$
- $(a,0) \times (c,0) = (a \times c - 0, a \times 0 + 0 \times c) = (ac,0)$

Deste modo, \mathbb{R} pode ser identificado como um subconjunto de \mathbb{C} .



A unidade imaginária $i = (0,1)$

Designa-se por **unidade imaginária**, e representa-se por i , o número complexo $(0,1)$.

Propriedade: $i^2 = -1$.

$$i^2 = i \times i = (0,1) \times (0,1) = (0 \times 0 - 1 \times 1, 0 \times 1 + 1 \times 0) = (-1,0) = -1$$

Representação dos números complexos

Um número complexo z diz-se representado na **forma algébrica** quando se encontra expresso na forma $z = a + bi$.

Definição

Dado um número complexo $z = a + bi$ com $a, b \in \mathbb{R}$:

- a designa-se por **parte real** de z e representa-se por $\text{Re}(z)$;
- b designa-se por **parte imaginária** de z e representa-se por $\text{Im}(z)$.

Propriedades

Seja z um número complexo.

- z é um número real $\Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0$;
- z é um número imaginário puro $\Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0 \wedge \text{Im}(z) \neq 0$.

Igualdade de números complexos

Seja $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, então: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$.

Exemplo:

- Seja k um número real e $z_1 = (k - i)(3 - 2i)$ um número complexo. Qual é o valor de k para que z_1 seja um número imaginário puro?

Resolução:

$$z_1 = (k - i)(3 - 2i) = 3k - 2ki - 3i + 2i^2 = (3k - 2) + (-2k - 3)i$$

Para que z_1 seja um número imaginário puro tem de satisfazer o seguinte: $\text{Re}(z_1) = 0 \wedge \text{Im}(z_1) \neq 0$. Então tem-se:

$$3k - 2 = 0 \wedge -2k - 3 \neq 0 \Leftrightarrow k = \frac{2}{3} \wedge k \neq -\frac{3}{2}$$

Logo, $k = \frac{2}{3}$.

Exercícios de Aplicação

1. Completa a tabela:

z	$\text{Re}(z)$	$\text{Im}(z)$
$2 - i$		
$-3 + 3i$		
$-1 + 4i$	-1	
	5	-5

2. Determina o valor real k de modo a que z seja imaginário puro:

2.1. $(2 - k) + (k - 1)i$

2.2. $(k^2 - 1) - (3k - 3)i$

3. Considera o número:

$$z = 3x^2 + xi^5 + 2(xi)^2 + i(1 + i^5)$$

Determina $x \in \mathbb{R}$ de modo a que:

3.1. z seja um número real

3.2. z seja um imaginário puro

4. Determina os valores reais x e y para os quais:

4.1. $(2x - 1) + (3y)i = 2 - 4xi$

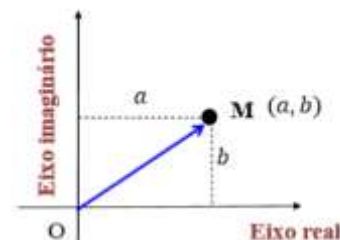
4.2. $(3x - y) + 2(x - 1)i = 0$

O plano complexo. Ponto afixo de um número complexo

Dado um plano munido de um referencial ortonormado direto e dados $a, b \in \mathbb{R}$, designa-se por **afixo** do número complexo $z = a + bi$ o ponto M de coordenadas (a, b) .

Neste contexto, designa-se:

- o plano por **plano complexo** ou plano de Argand.
- o eixo das abcissas por **eixo real**.
- o eixo das ordenadas por **eixo imaginário**.



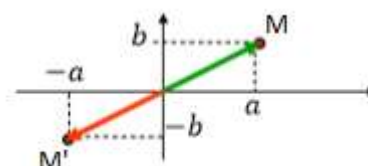
Operações com números complexos na forma $z = a + bi$

Simétrico

Dado um número complexo $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, designa-se por **simétrico** de z o número complexo $-a - bi$ e representa-se por $-z$.

Dois números simétricos têm partes reais simétricas e partes imaginárias simétricas.

O ponto afixo de $-z$, que é $M'(-a, -b)$, é a imagem pela reflexão central de centro O do ponto afixo de z , que é $M(a, b)$.



Exemplos:

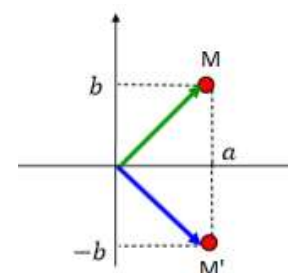
- Seja $z_1 = 4 + 5i$. Então $-z_1 = -4 - 5i$.
- Seja $z_2 = -10i$. Então $-z_2 = 10i$.

Conjugado

Dado um número complexo $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, designa-se por **conjugado** de z o número complexo $a - bi$ e representa-se por \bar{z} .

Dois números complexos conjugados têm partes reais iguais e partes imaginárias simétricas.

O ponto afixo de \bar{z} , que é $M'(a, -b)$, é a imagem pela reflexão de eixo real do ponto afixo de z , que é $M(a, b)$.

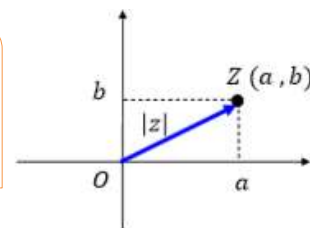


Exemplos:

- Seja $z_1 = 4 + 5i$. Então $\bar{z}_1 = \overline{4 + 5i} = 4 - 5i$.
- Seja $z_2 = -10i$. Então $\bar{z}_2 = \overline{-10i} = 10i$.
- Seja $z_3 = 9$. Então $\bar{z}_3 = \overline{9} = 9$.

Módulo

Dado um número complexo $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, designa-se por **módulo** de z a medida da distância, no plano complexo, entre a origem e o ponto afixo de z . Representa-se por $|z|$.



Propriedade

Dado um número complexo $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, tem-se que $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$.

Exemplos:

- Seja $z_1 = 4 + 5i$. Então $|z_1| = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$.
- Seja $z_2 = -10i$. Então $|z_2| = \sqrt{0^2 + (-10)^2} = \sqrt{100} = 10$.

Adição e multiplicação

Dados $a + bi, c + di \in \mathbb{C}$ tem-se que:

- $(a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i$
- $(a + bi) \times (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Exemplos:

- $(4 + 5i) + (3 + 8i) = 4 + 3 + 5i + 8i = 7 + 13i$.
- $(4 + 5i) \times (3 + 8i) = 12 + 32i + 15i + 40i^2 = 12 + 47i - 40 = -28 + 47i$

Exercícios de Aplicação

5. Sendo $z_1 = 2 - 3i$,

$$z_2 = \frac{1}{2} - i \text{ e } z_3 = -5i,$$

determina:

- 5.1. $z_1 + z_2$
- 5.2. $z_2 - z_3$
- 5.3. $z_1 + z_3 - z_2$
- 5.4. $z_1 \times (z_2 + z_3)$

Inverso de um número complexo não nulo

Dado um número complexo z , não nulo, existe um e um só número z' tal que $zz' = 1$.

Representa-se esse número por $\frac{1}{z}$ e designa-se por **inverso** de z .

O inverso de z é **único** e tem-se: $\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z}$.

Divisão

Dado dois números w e z , $z \neq 0$, designa-se por **quociente** de w por z o número complexo pelo qual se tem de multiplicar z para obter w e representa-se por $\frac{w}{z}$.

Propriedade

Dados dois números w e z , $z \neq 0$, tem-se que: $\frac{w}{z} = w \times \frac{1}{z} = w \times \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Exemplo:

$$\begin{aligned} \frac{4+5i}{3+8i} &= \frac{(4+5i)(3-8i)}{(3+8i)(3-8i)} = \frac{12-32i+15i-40i^2}{9-64i^2} = \\ &= \frac{12+40-17i}{9+64} = \frac{52-17i}{73} = \frac{52}{73} - \frac{17}{73}i \end{aligned}$$

Exercícios de Aplicação

6. Calcula:

6.1. $\frac{3+i}{6-2i}$

6.2. $\frac{i}{2} + (1+2i)^{-1}$

Nota:

No caso particular de no quociente de w por z , z ser um imaginário puro, basta multiplicar

w e z por i : $\frac{1+2i}{3i} = \frac{(1+2i)i}{(3i)i} = \frac{i+2i^2}{3i^2} = \frac{-2+i}{-3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}i$.

Propriedades relativas ao módulo e ao conjugado de números complexos

$\overline{\bar{z}} = z$	$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$	$\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$	$\overline{\left(\frac{w}{z}\right)} = \frac{\bar{w}}{\bar{z}}$
$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$	$\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$	$ z ^2 = z\bar{z}$	$ z = \bar{z} $
$ z+w \leq z + w $	$ zw = z w $	$\left \frac{w}{z}\right = \frac{ w }{ z }$	$\frac{1}{z} = \frac{1}{ z ^2} \bar{z}$

Exercícios de Aplicação

7. Sejam $z = 3 - i$ e $w = 2i\bar{z} + 3(z\bar{z} - z)$.
Determina w .

8. Seja z um número complexo não nulo tal que:

$$\overline{3i(z+2i) + 3i\bar{z}} = -6.$$

Mostra que z é um número imaginário puro.

9. Seja $z = -3 - 4i$ e $w = 2 + 5i$. Determina:

9.1. $|\operatorname{Re}(w) + \operatorname{Im}(z)i|$

9.2. $(|z| + 3\bar{w})^2$

10. Calcula:

10.1. $\left|\frac{12-5i}{3+4i}\right|$

10.2. $\left|\frac{2+9i}{6-7i}\right|$

11. Considera, para $x \in \mathbb{R}$, o número complexo $z = \frac{3+5i}{x-i}$. Determina x sabendo

que $|z| = \sqrt{2}$.

Adaptado do Caderno de Apoio 12ºano

Potenciação

Começa-se por convencionar que $i^0 = 1$.

Observa-se que:

$$\begin{array}{llll} i^0 = 1 & i^4 = 1 & \dots & i^{4n} = 1, n \in \mathbb{N}_0 \\ i^1 = i & i^5 = i & \dots & i^{4n+1} = i, n \in \mathbb{N}_0 \\ i^2 = -1 & i^6 = -1 & \dots & i^{4n+2} = -1, n \in \mathbb{N}_0 \\ i^3 = -i & i^7 = -i & \dots & i^{4n+3} = -i, n \in \mathbb{N}_0 \end{array}$$

Propriedade

Seja $n \in \mathbb{N}_0$.

$i^n = i^r$, sendo r o resto da divisão inteira de n por 4.

Exercícios de Aplicação

12. Calcula:

12.1. i^{35}

12.2. i^{1268}

12.3. i^{2365}

12.4. i^{8n+1}

13. Determina na forma algébrica:

$$\frac{i^{43} + 4i^{32}}{1 - (2i)^5}$$

Forma trigonométrica de um número complexo

Complexos de módulo 1

Um número complexo z diz-se **unitário** se tem módulo 1.

Exercícios de Aplicação

14. Dos complexos seguintes identifica, justificando, se são ou não unitários.

14.1. $z = -2 + 3i$

14.2. $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

14.3. $z = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Propriedade

Dado um número complexo z , z é **unitário** se e só se existir um número real α tal que $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$.

α designa-se por um **argumento** de z .

Nota:

Se α é um argumento de z , então $\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ também é um argumento de z , pois:

$$\cos(\alpha + 2k\pi) + i \sin(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha + i \sin \alpha, k \in \mathbb{Z}.$$

Propriedade

Dados dois números complexos unitários $z_1 = \cos \alpha + i \sin \alpha$ e $z_2 = \cos \beta + i \sin \beta$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tem-se que:

a) $z_1 z_2 = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$

b) $\frac{z_1}{z_2} = \cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)$.

Demonstração de a) e b):

a) $z_1 z_2 = (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) =$
 $= \cos \alpha \cos \beta + i \cos \alpha \sin \beta + i \sin \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta =$
 $= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + i(\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$

b) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{\cos \beta + i \sin \beta} = \frac{(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta - i \sin \beta)}{(\cos \beta + i \sin \beta)(\cos \beta - i \sin \beta)} =$
 $= \frac{\cos \alpha \cos \beta - i \cos \alpha \sin \beta + i \sin \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}{\cos^2 \beta + \sin^2 \beta} =$
 $= (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) + i(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) = \cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)$

Definição

Um número complexo $\cos \theta + i \sin \theta$ com $\theta \in \mathbb{R}$, representa-se por $e^{i\theta}$.
 Esta expressão designa-se por **exponencial complexa de $i\theta$** .

Utilizando esta forma e a regra da multiplicação de potências com a mesma base obtém-se:

$$e^{i\theta} e^{i\beta} = e^{i\theta+i\beta} = e^{i(\theta+\beta)} \text{ e } \frac{e^{i\theta}}{e^{i\beta}} = e^{i\theta-i\beta} = e^{i(\theta-\beta)},$$

ou seja, obtém-se resultados equivalentes aos da propriedade anterior.

Definição

Dado um número complexo $z \neq 0$, a sua representação na forma $|z|e^{i\theta}$, onde θ é um argumento de z , designa-se por **forma trigonométrica** ou **forma polar** de z .

Igualdade de números complexos escritos na forma trigonométrica

Dois números complexos não nulos, z e z' , de argumentos respetivamente iguais a θ e θ' , são **iguais** se têm módulos iguais e a diferença dos argumentos é da forma $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$z = z' \Leftrightarrow |z| = |z'| \wedge \theta = \theta' + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Argumento principal

Dado um número complexo $z \neq 0$, ao argumento de z que pertence ao intervalo $]-\pi, \pi]$ chama-se **argumento principal** de z e representa-se por $Arg(z)$.

Propriedade

Dado um número complexo não nulo $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, θ é um argumento do número z se

e só se: $\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ e $\sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Nesse caso, se $a \neq 0$, $tg \theta = \frac{b}{a}$.

Exemplos:

- $Arg(-2) = \pi$
- $Arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$
- $Arg(-1-i) = -\frac{3\pi}{4}$, pois $Arg(z) \in]-\pi, \pi]$ e:

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \text{ e } \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Exercícios de Aplicação

15. Determina o argumento principal dos seguintes números complexos:

15.1. $z = 4$

15.2. $z = 2 + 2i$

15.3. $z = 5i$

15.4. $z = 1 - \sqrt{3}i$

Passagem de um número complexo escrito na forma algébrica para a forma trigonométrica

Para se passar de um número complexo na forma algébrica $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, para a forma trigonométrica $z = |z|e^{i\theta}$ deve proceder-se da seguinte forma:

Representar o afixo de z no plano complexo.

Se o afixo de z não está sobre nenhum eixo:

determinar o módulo de z :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

determinar um argumento de z :

utilizando as duas razões trigonométricas (seno e cosseno), ou utilizando apenas uma razão trigonométrica (tangente), e ainda a informação do quadrante a que pertence o afixo do número complexo.

Se o afixo de z está sobre um dos eixos:

a determinação do módulo e de um dos seus argumentos é imediata por observação geométrica de z .

Passagem de um número complexo escrito na forma trigonométrica para a forma algébrica

Para se passar de um número complexo na forma trigonométrica $z = |z|e^{i\theta}$, para a forma algébrica $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, deve-se proceder da seguinte forma:

- 1º Substituir $e^{i\theta}$ por $\cos \theta + i \sin \theta$.
- 2º Efetuar os cálculos necessários e apresentar na forma $a + bi$.

Exemplo:

- Escreve na forma trigonométrica o número complexo $z = -1 - \sqrt{3}i$ usando o argumento principal de z .

Resolução:

Módulo de z :

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

Argumento principal de z : como o afixo de z se encontra no 3º quadrante, conclui-se que $\theta \in 3^\circ Q$. Além disso $\theta \in]-\pi, \pi]$. Então:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{-\sqrt{3}}{-1} \wedge \theta \in 3^\circ Q \wedge \theta \in]-\pi, \pi]$$

Daqui conclui-se que $\theta = \frac{4\pi}{3} - 2\pi = -\frac{2\pi}{3}$.

Assim, $z = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

Exercícios de Aplicação

16. Escreve na forma trigonométrica os seguintes números complexos:

16.1. $z = -2$

16.2. $z = -\sqrt{3} + i$

16.3. $z = -2i$

16.4. $z = -1 - \sqrt{3}i$

17. Escreve na forma algébrica os seguintes números complexos:

17.1. $z = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

17.2. $z = \sqrt{7}e^{i\frac{\pi}{2}}$



Erro típico na resolução do exemplo anterior

- Módulo de z : $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3}i)^2} = \sqrt{1-3} = \sqrt{-2}$

ERRADO

É de notar que na definição de módulo de $z = a + bi$ só intervêm os valores a e b .

- Argumento principal de z : $\operatorname{tg} \theta = \frac{-\sqrt{3}}{-1} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \theta = \sqrt{3}$, logo conclui-se que $\theta = \frac{\pi}{3}$.

ERRADO

O valor da razão trigonométrica é por si só insuficiente para determinar o valor do argumento principal de z . Portanto, é fundamental ter em conta a informação do quadrante a que pertence o afixo de z e que $\theta \in]-\pi, \pi]$.

Exemplos:

▪ Escreve na forma trigonométrica o número complexo $z = -5e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Resolução:

$$z = -5e^{i\frac{2\pi}{3}} = 5e^{i\left(\pi + \frac{2\pi}{3}\right)} = 5e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

▪ Escreve na forma trigonométrica o número complexo $z = \sqrt{2} \cos \alpha - i\sqrt{2} \sin \alpha$.

Resolução:

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{2} \cos \alpha - i\sqrt{2} \sin \alpha \\ &= \sqrt{2} (\cos \alpha - i \sin \alpha) = \\ &= \sqrt{2} (\cos \alpha + i \sin(-\alpha)) = \\ &= \sqrt{2} (\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)) = \sqrt{2} e^{i(-\alpha)} \end{aligned}$$



Erro típico

Um erro frequente neste exemplo é considerar que $-5e^{i\frac{2\pi}{3}}$ está escrito na forma trigonométrica.

É de notar que -5 é um número negativo, logo nunca poderia ser o módulo de um número complexo. Portanto, o número $-5e^{i\frac{2\pi}{3}}$ deve ser associado ao simétrico de $5e^{i\frac{2\pi}{3}}$ que é $5e^{i\left(\pi + \frac{2\pi}{3}\right)}$.



Erro típico

Um erro frequente neste exemplo é considerar que $z = \sqrt{2} (\cos \alpha - i \sin \alpha)$ está escrito na forma trigonométrica.

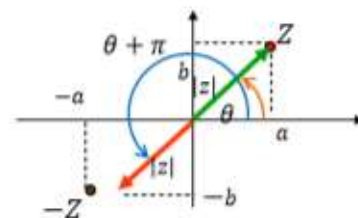
No entanto, $\cos \alpha - \sin \alpha$ não representa $e^{i\alpha}$.

Operações com números complexos na forma trigonométrica

Simétrico

Seja z um número complexo de módulo $|z|$ e um argumento θ : $-(|z|e^{i\theta}) = |z|e^{i(\pi+\theta)}$.

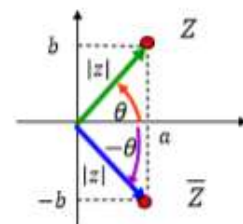
O simétrico de um número complexo não nulo representado na forma trigonométrica tem módulo igual ao de z e um dos seus argumentos é a soma de π com um dos argumentos de z .



Conjugado

Seja z um número complexo de módulo $|z|$ e um argumento θ : $\overline{|z|e^{i\theta}} = |z|e^{i(-\theta)}$.

O conjugado de um número complexo não nulo representado na forma trigonométrica tem módulo igual ao de z e argumento simétrico ao argumento de z .

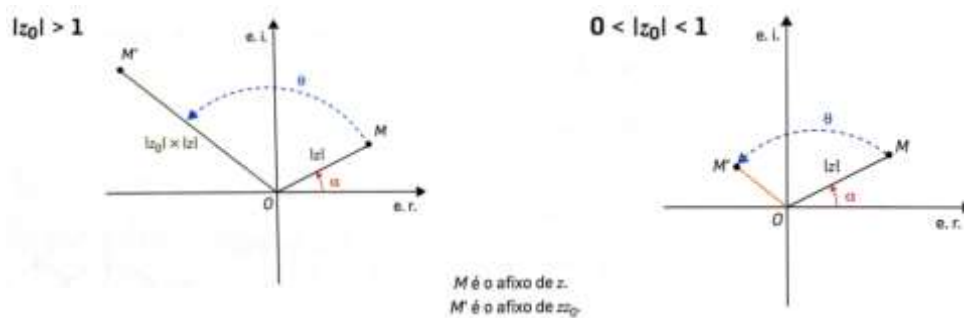


Multiplicação

Dados dois números complexos z_1 e z_2 , não nulos, $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$ e $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$, tem-se que: $z_1 z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

Interpretação geométrica da multiplicação de um número complexo por outro na forma $|z_0|e^{i\theta}$

Dado um número complexo z_0 não nulo, de argumento θ e um número complexo z de afixo M , tem-se que o afixo do número complexo $z_0 z$ é a imagem de M pela rotação de centro O e amplitude θ , composta com a homotetia de centro O e razão $|z_0|$.



Divisão

Dados dois números complexos z_1 e z_2 , não nulos, $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$ e $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$, tem-se que: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$.

Interpretação geométrica da divisão de um número complexo por outro na forma $|z_0|e^{i\theta}$

Dado um número complexo z_0 não nulo, de argumento θ e um número complexo z de afixo M , tem-se que o afixo do número complexo $\frac{z}{z_0}$ é a imagem de M pela rotação de centro O

e amplitude $-\theta$, composta com a homotetia de centro O e razão $\frac{1}{|z_0|}$.



Potenciação – Fórmula de De Moivre

Dado $\theta \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, tem-se que: $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$.

Exercícios de Aplicação

18. Considera os seguintes números complexos:

$$z_1 = \frac{4}{3} e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$z_2 = 1 - \sqrt{3}i$$

$$z_3 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

Determina na forma trigonométrica:

18.1. $z_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} z_2$

18.2. $z_1 \times 3z_3$

18.3. $z_2 \times z_3$

19. Apresenta o resultado na forma trigonométrica:

19.1. $\frac{e^{i\pi}}{2e^{i\frac{\pi}{5}}}$

19.2. $\frac{-\sqrt{2} - \sqrt{2}i}{\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{3}}}$

20. Determina o menor número natural n de modo que:

20.1. $\left[3e^{i\frac{\pi}{6}} \times 2e^{i\frac{\pi}{3}} \right]^n$ seja um imaginário puro.

20.2. $\left(\frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} + \sqrt{3}i} \right)^n$ seja um número real positivo.

21. Seja $z_1 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ resolve, em \mathbb{C} , a equação $z_1 \times z + i^{51} = 0$

Raízes n-ésimas de números complexos

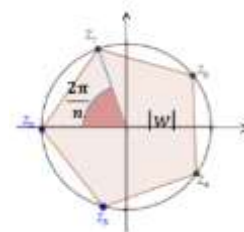
Soluções das equações da forma $z^n = w, n \in \mathbb{N}, w \in \mathbb{C}$

Dado um número complexo $w \neq 0$ e um número natural $n \geq 2$, chama-se **raiz n-ésima** de w ou **raiz de ordem n** de w a qualquer número complexo z tal que $z^n = w$.

Propriedade (Fórmula de Moivre generalizada)

Dado um número complexo $w \neq 0$ e um número natural $n \geq 2$, tem-se que a equação $z^n = w$ tem exatamente n soluções

$$z_k = \sqrt[n]{|w|} e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, k = 0, 1, \dots, n-1, \text{ onde } \alpha \text{ é um argumento de } w.$$



Raízes em \mathbb{C} de polinómios do segundo grau de coeficientes reais

Dados $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$, se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, então as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, em

\mathbb{C} , são dadas por $z_1 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$ e $z_2 = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$.

Exemplo:

- Determinar as raízes quartas de -4 , isto é encontrar as soluções da equação $z^4 = -4$.

Resolução:

Seja z um número complexo, não nulo, $z = |z|e^{i\theta}$.

$$w = -4 = 4e^{i\pi}$$

Pretende-se descobrir os valores de $|z|$ e θ que satisfazem a equação $(|z|e^{i\theta})^4 = 4e^{i\pi}$.

$$(|z|e^{i\theta})^4 = 4e^{i\pi} \Leftrightarrow |z|^4 e^{i4\theta} = 4e^{i\pi}$$

$$\Leftrightarrow |z|^4 = 4 \wedge 4\theta = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow |z| = \sqrt[4]{4} \wedge \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow |z| = \sqrt{2} \wedge \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

$$k = 0 \rightarrow z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$k = 1 \rightarrow z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$k = 2 \rightarrow z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

$$k = 3 \rightarrow z_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

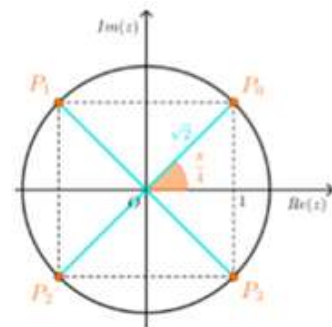
Logo, tem-se $C.S. = \left\{ \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}} \right\}$.

! Conclusões do exemplo:

- Os afixos dos números z_0, z_1, z_2 e z_3 pertencem à circunferência centrada na origem do referencial e de raio $\sqrt{2}$, pois z_0, z_1, z_2 e z_3 têm módulo igual a $\sqrt{2}$.

- Os argumentos das raízes quartas estão em progressão aritmética de razão $\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{4}$.

- As raízes quartas de -4 dividem a circunferência em quatro arcos iguais e portanto são vértices de um quadrado – polígono regular de quatro lados.



Exercícios de Aplicação

22. Resolva, em \mathbb{C} , as seguintes equações:

22.1. $(2-i)z = 5+i$

22.2. $z^3 - 4z^2 + 5z = 0$

Adaptado do Caderno de Apoio 12ºano

23. Determina analiticamente, em \mathbb{C} , as raízes do polinómio $z^3 - 3z^2 + 6z - 4$, sabendo que 1 é uma das suas raízes.

24. Determina as raízes cúbicas de $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$.

25. Considera o número complexo

$z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{5}}$. Sabe-se que z_1 é uma das raízes de ordem 4 de um número complexo w .

25.1. Indica as outras raízes de ordem 4 de w .

25.2. Determina w .

25.3. Calcula a medida da área do polígono que tem como vértices os afixos das raízes de ordem 4 de w .

Testar conhecimentos

1. Em \mathbb{C} considera:

$$z_1 = \frac{1+i}{i} + \frac{i}{1+i} - i^9 \text{ e } z_2 = \frac{(1+i)^{10}}{\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^6} - \frac{2}{(1+2i)^4}.$$

1.1. Determina z_1 na forma trigonométrica sem recorrer à calculadora.

1.2. Prova que $z_2 = \frac{2514}{625} - \frac{48}{625}i$.

2. Em \mathbb{C} considera $z_1 = -\sqrt{3} - 3i$.

Resolve a equação $z \times z_1 = \left(\frac{1}{i}\right)^3$.

3. Considera os números complexos $z_1 = e^{i\frac{5\pi}{7}}$ e $z_2 = -\sqrt{6} - \sqrt{2}i$.

3.1. Sem recorrer à calculadora, determina na forma algébrica o complexo

$$z = \left(\frac{z_1}{i^{39}}\right)^7 + \frac{2-4i}{1+5i}.$$

3.2. Determina o conjunto-solução da equação $z^3 = 2i \times \bar{z}_2$.

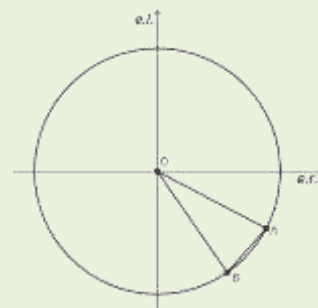
3.3. Seja n um número natural.

Considera o complexo $w = (-z_1)^n$. Determina o menor valor de n de modo que w seja um número negativo.

4. Na figura seguinte encontram-se representados, sobre uma circunferência, os pontos A e B que são afijos de dois números complexos w_1 e w_2 , respetivamente (não está desenhada à escala).

Sabe-se que:

- o número complexo $w_2 = 3e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$
- A e B são afijos das raízes de índice 13 de um número complexo z .



4.1. Determina z na forma algébrica.

4.2. Indica, justificando, o módulo e o argumento do complexo w_1 .

5. Considera o polinómio $P(z) = z^4 + z^3 + 24z^2 - 26z$ e o complexo $w = 2 - 3i$.

5.1. Determina os zeros de $P(z)$, sabendo que 1 é um dos zeros.

5.2. Determina, na forma algébrica, os números complexos $z = a + bi$ que verificam a condição $z + 3\bar{z} = w^2 + 2zi$.

Relações surpreendentes entre determinados números transcendentos e alguns números inteiros e irracionalidade de alguns números

Introdução

A transcendência dos números foi um tema que fascinou os matemáticos desde o século XVIII.

Os números algébricos em toda a história foram os números mais fáceis de identificar, por isso o que tornou tão desafiador e surpreendente no estudo dos números transcendentos foi conseguir desenvolver a capacidade de exibir exemplos ou algum tipo de classificação para este tipo de números.

Neste trabalho não se estuda a transcendência de nenhum número. Contudo irão demonstrar-se algumas relações entre determinados números transcendentos e alguns números inteiros. Além disto irá demonstrar-se a irracionalidade de certos números de acordo com um matemático chamado Ivan Niven. Finalmente ir-se-á ver alguns resultados surpreendentes.

Estes resultados aparentam ser bastante simples, contudo se se estudar os seus elementos e as suas características pode-se observar consequências inesperadas e surpreendentes, como, por exemplo, apesar de ser

$$e^{i\pi} = 1 + i\pi + \frac{(i\pi)^2}{2!} + \frac{(i\pi)^3}{3!} + \dots = \left(1 - \frac{\pi^2}{2!} + \frac{\pi^4}{4!} - \dots\right) + i\left(\pi - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} - \dots\right)$$

pode-se provar que $e^{i\pi} = -1$.

Números irracionais

O facto de o número π ser irracional foi conjecturado por Aristóteles quando afirmou que a razão entre o perímetro de qualquer circunferência e o seu diâmetro não são comensuráveis, isto é a razão entre eles não é um número racional.

A primeira prova deste facto fundamental foi realizada por Johann Heinrich Lambert em 1766.

A prova que será apresentada mais à frente foi concebida por Ivan Niven em 1947 e é uma prova extremamente elegante onde se usa apenas cálculo elementar.

Contudo, o método de Niven teve antecessores, como por exemplo Charles Hermite em 1873, que foi o primeiro a estabelecer que e é um número transcendente, ou seja, que e não é uma raiz de um polinómio de coeficientes racionais.

Antes de se falar do número π vai-se tratar do número e e provar que é um número irracional.

e é irracional

O número e pode ser representado e calculado utilizando a série de Taylor para e^x quando $x = 1$:

$$e = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots$$

Demonstração de “ e é irracional”:

Inicialmente assume-se que e é um número racional positivo, ou seja que pode ser escrito na forma $e = \frac{a}{b}$ com a e b inteiros e $a, b > 0$. Daqui resulta:

$$e = \frac{a}{b} \Leftrightarrow be = a \Leftrightarrow n!be = n!a, \forall n \geq 0.$$

Como $e = \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) + \left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots\right)$ então tem-se:

$$n!be = n!a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n!b \left[\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) + \left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots\right) \right] = n!a$$

$$\Leftrightarrow n!b \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) + b \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+2)(n+1)} + \frac{1}{(n+3)(n+2)(n+1)} + \dots\right) = n!a$$

$$\Leftrightarrow b \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+2)(n+1)} + \frac{1}{(n+3)(n+2)(n+1)} + \dots\right) = n!a - n!b \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$$

Como $n!b \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$ é uma parte inteira e $n!a$ é um inteiro então

$n!a - n!b \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$ também é inteiro.

Relembrando a progressão geométrica tem-se que:

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+2)(n+1)} + \dots < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots = \frac{1}{n} < 1$$

Logo, para n suficientemente grande tem-se:

$$\frac{b}{n+1} < b \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+2)(n+1)} + \frac{1}{(n+3)(n+2)(n+1)} + \dots\right) < \frac{b}{n} < 1$$

Mas isto é um absurdo, pois é impossível ter um número inteiro positivo menor do que 1. Logo, o absurdo foi supor que e seria racional. Portanto, e é um número irracional.

□

De modo muito semelhante prova-se que e^2 é um número irracional.

Utilizando o teorema de Legendre, que não será abordado neste trabalho, prova-se por um método não muito diferente que e^4 também é um número irracional.

Para provar que e^3 , e^5 , etc. são irracionais é necessário um pouco mais de cálculos, e de uma nova ideia.

A chave para provar que estes números são irracionais está escondida no seguinte lema.

Lema: Seja, para algum $n \geq 1$, $f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$.

(i) A função $f(x)$ é um polinómio da forma $f(x) = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{2n} c_i x^i$ onde os coeficientes c_i são inteiros.

(ii) Para $0 < x < 1$ temos $0 < f(x) < \frac{1}{n!}$.

(iii) Os valores das derivadas $f^{(k)}(0)$ e $f^{(k)}(1)$ são inteiros qualquer que seja $k \geq 0$.

Demonstração do Lema:

(i) $f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!} = \frac{1}{n!} x^n (1-x)^n = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{2n} c_i x^i$.

(ii) Como $0 < x < 1$ então tem-se que $0 < 1-x < 1$. Além disso tem-se que $0 < x^n < 1$ e $0 < (1-x)^n < 1$. Como o produto de dois números entre 0 e 1 resulta num número entre 0 e 1, então tem-se que $0 < x^n(1-x)^n \leq 1$. Daqui resulta que $0 < \frac{x^n(1-x)^n}{n!} < \frac{1}{n!}$.

Portanto, tem-se que $0 < f(x) < \frac{1}{n!}$.

(iii) Considerando $k < n$ sendo $f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$ então $f'(x) = \frac{nx^{n-1}(1-x)^n - nx^n(1-x)^{n-1}}{n!}$.

Daqui resulta que em $f^{(k)}$ o monómio de menor grau tem grau maior do que 1. Logo, $f^{(k)}(0) = 0$, que é inteiro. Considerando $n \leq k \leq 2n$, em $f^{(k)}$ o monómio de menor grau tem grau 0. Logo, $f^{(k)}(0) = \frac{k!}{n!} c_k$, que também é inteiro. Considerando $k > 2n$, $f^{(k)}(x) = 0$. Logo $f^{(k)}(0) = 0$, que é inteiro. Concluindo, $f^{(k)}(0)$ é inteiro $\forall k \geq 0$.

A partir de $f(x) = f(1-x)$ tem-se que $f^{(k)}(x) = (-1)^k f^{(k)}(1-x)$, para todo o x . Consequentemente, $f^{(k)}(1) = (-1)^k f^{(k)}(0)$. Como já foi demonstrado que $f^{(k)}(0)$ é inteiro $\forall k \geq 0$, então fica provado que $f^{(k)}(1)$ também é inteiro $\forall k \geq 0$.

e^r é irracional $\forall r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

Para provar que e^r é um irracional $\forall r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ vai usar-se o lema anterior.

Além disso assumimos que $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ e que esta série converge

para todos os valores (reais) de x . Em particular, tem-se que $\sum_{n \geq 0} \frac{as^{2n+1}}{n!}$ converge

$\left(ae^{s^2} = \sum_{n \geq 0} \frac{as^{2n+1}}{n!} \right)$. Então $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{as^{2n+1}}{n!} = 0$ e portanto existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{as^{2n+1}}{n!} < 1$, facto

que não será provado neste trabalho mas irá ser usado mais à frente.

Demonstração de “ e^r é irracional $\forall r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ”:

É suficiente mostrar que e^s não pode ser um número racional para um inteiro positivo s (se $e^{\frac{s}{t}}$ fosse racional então $(e^{\frac{s}{t}})^t = e^s$ também seria racional). Nesse sentido, assume-se que

$e^s = \frac{a}{b}$ com a e b inteiros e $a, b > 0$ e com n suficientemente grande para que $n! > as^{2n+1}$.

Então define-se:

$$F(x) := s^{2n} f(x) - s^{2n-1} f'(x) + s^{2n-2} f''(x) - s^{2n-3} f'''(x) \pm \dots + f^{(2n)}(x),$$

onde $f(x)$ é a função do lema anterior, ou seja $f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$.

Daqui pode-se observar que o polinómio $F(x)$ satisfaz a identidade $F'(x) = -sF(x) + s^{2n+1} f(x)$. Desta derivada vem que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [e^{sx} F(x)] &= se^{sx} F(x) + e^{sx} F'(x) = se^{sx} F(x) + e^{sx} [-sF(x) + s^{2n+1} f(x)] = \\ &= se^{sx} F(x) - se^{sx} F(x) + e^{sx} s^{2n+1} f(x) = e^{sx} s^{2n+1} f(x) \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} N := b \int_0^1 e^{sx} s^{2n+1} f(x) dx &= b [e^{sx} F(x)]_0^1 = b [e^{s \times 1} F(1) - e^{s \times 0} F(0)] = \\ &= be^s F(1) - bF(0) = aF(1) - bF(0), \text{ pois } e^s = \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

Este resultado é um inteiro, pois o ponto (iii) do lema implica que $F(0)$ e $F(1)$ sejam inteiros. No entanto, o ponto (ii) do lema estima um tamanho para N , por baixo e por cima:

$$0 < N = b \int_0^1 e^{sx} s^{2n+1} f(x) dx < bs^{2n+1} e^s \frac{1}{n!} = \frac{as^{2n+1}}{n!} < 1,$$

o que mostra que N não pode ser um inteiro. Chega-se então a uma contradição. Logo, e^r é um número irracional para qualquer $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

□

π^2 é irracional

Como o método anterior foi bem-sucedido vai se usar novamente para provar que π^2 é irracional.

Demonstração de “ π^2 é irracional” :

Inicialmente assume-se que π^2 é um número racional, ou seja pode ser escrito na forma $\pi^2 = \frac{a}{b}$ com a e b inteiros e $a, b > 0$.

De seguida usa-se o seguinte polinómio:

$$F(x) := b^n \left(\pi^{2n} f(x) - \pi^{2n-2} f^{(2)}(x) + \pi^{2n-4} f^{(4)}(x) \mp \dots \right),$$

que satisfaz $F''(x) = -\pi^2 F(x) + b^n \pi^{2n+2} f(x)$.

Usando o ponto (iii) do lema provado anteriormente obtém-se que $F(0)$ e $F(1)$ são inteiros.

Das regras de diferenciação vem que:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left[F'(x) \sin(\pi x) - \pi F(x) \cos(\pi x) \right] = \\ & = F''(x) \sin(\pi x) + F'(x) \pi \cos(\pi x) - \left[\pi F'(x) \cos(\pi x) + \pi F(x) (-\pi \sin(\pi x)) \right] = \\ & = F''(x) \sin(\pi x) + F'(x) \pi \cos(\pi x) - \pi F'(x) \cos(\pi x) + \pi^2 F(x) \sin(\pi x) = \\ & = \sin(\pi x) \left[F''(x) + \pi^2 F(x) \right] = \\ & \text{Substituir } F''(x) \quad \hookrightarrow \quad = \sin(\pi x) \left[-\pi^2 F(x) + b^n \pi^{2n+2} f(x) + \pi^2 F(x) \right] = \\ & = b^n \pi^{2n+2} f(x) \sin(\pi x) = b^n \pi^{2n} \pi^2 f(x) \sin(\pi x) = \\ & = a^n \pi^2 f(x) \sin(\pi x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi^2 = \frac{a}{b} & \Leftrightarrow a = \pi^2 b \\ a^n = (\pi^2 b)^n & \Leftrightarrow a^n = \pi^{2n} b^n \end{aligned}$$

e daqui obtém-se:

$$\begin{aligned} N := \pi \int_0^1 a^n f(x) \sin(\pi x) dx & = \left[\frac{F'(x) \sin(\pi x) - \pi F(x) \cos(\pi x)}{\pi} \right]_0^1 = \\ & = \left[\frac{1}{\pi} F'(x) \sin(\pi x) - F(x) \cos(\pi x) \right]_0^1 = \\ & = \frac{1}{\pi} F'(1) \sin(\pi) - F(1) \cos(\pi) - \frac{1}{\pi} F'(0) \sin(0) + F(0) \cos(0) = F(1) + F(0) \end{aligned}$$

que é um inteiro.

Além disso, N é positivo desde que se defina como um integral de uma função positiva (exceto na fronteira). Contudo, se se escolher n suficientemente grande tal que $\frac{\pi a^n}{n!} < 1$, então a partir do ponto (ii) do lema provado anteriormente obtém-se:

$$0 < N = \pi \int_0^1 a^n f(x) \sin(\pi x) dx < \frac{\pi a^n}{n!} < 1,$$

e chega-se a uma contradição, pois foi dito anteriormente que N era inteiro, no entanto não há inteiros entre 0 e 1. Daqui resulta que π^2 não pode ser um número racional.

Concluindo, fica provado que π é um número irracional.

□

π é irracional

A prova que se segue foi realizada por Ivan Niven em 1947.

Demonstração de “ π é irracional”:

Inicialmente assume-se que π é um número racional positivo, ou seja que pode ser escrito na forma $\pi = \frac{a}{b}$ com a e b inteiros e $a, b > 0$. De seguida definem-se os seguintes polinómios:

- $f(x) = \frac{x^n (a - bx)^n}{n!}$
- $F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \dots + (-1)^n f^{(2n)}(x)$

onde o inteiro positivo n é especificado mais à frente.

Se $n!f(x)$ tiver coeficientes inteiros e termos em x com grau não inferior a n , $f(x)$ e as suas derivadas $f^{(i)}(x)$ têm valores inteiros para $x = 0$, assim como para $x = \pi = \frac{a}{b}$ uma

vez que $f(x) = f\left(\frac{a}{b} - x\right)$. Por cálculos elementares tem-se:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} [F'(x) \sin(x) - F(x) \cos(x)] = \\ & = F''(x) \sin(x) + F'(x) \cos(x) - [F'(x) \cos(x) + F(x) (-\sin(x))] = \\ & = F''(x) \sin(x) + F'(x) \cos(x) - F'(x) \cos(x) + F(x) \sin(x) = \\ & = [F''(x) + F(x)] \sin(x) = f(x) \sin(x) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x) \sin(x) dx &= [F'(x) \sin(x) - F(x) \cos(x)]_0^\pi = & (1) \\ &= F'(\pi) \sin(\pi) - F(\pi) \cos(\pi) - F'(0) \sin(0) + F(0) \cos(0) = F(\pi) + F(0). \end{aligned}$$

$F(\pi) + F(0)$ é um inteiro, desde que $f^{(i)}(\pi)$ e $f^{(i)}(0)$ sejam inteiros. Mas para $0 < x < \pi$ tem-se $0 < f(x)\sin(x) < \frac{\pi^n a^n}{n!}$, logo o integral anterior em **(1)** é positivo, mas arbitrariamente pequeno para n suficientemente grande tal que $\frac{\pi^n a^n}{n!} < 1$.

Portanto, a igualdade **(1)** é falsa assim como também a suposição inicial é falsa, pois não existe nenhum número inteiro entre 0 e 1.

Concluindo, π é irracional.

□

Alguns resultados surpreendentes

Nesta secção serão demonstrados alguns resultados e algumas das suas consequências.

Estes resultados aparentam ser bastante simples, contudo vão ser analisadas as suas características, o que levar-nos-á a consequências inesperadas e surpreendentes.

Série de Euler

É sabido de antemão que a série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ não converge. No entanto, a série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, apesar de ser muito lentamente e converge para um valor muito interessante, como se irá ver de seguida.

$$\boxed{\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}} \quad (2)$$

Este é um resultado clássico, famoso e importante de Leonhard Euler de 1734 onde afirma que o somatório anterior resulta num número irracional.

Como $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots$ nada indicaria que esta soma infinita de racionais resultaria numa potência de π e por isso este resultado torna-se bastante surpreendente.

Demonstração de (2):

A prova consiste em duas avaliações diferentes do seguinte integral duplo:

$$I := \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy .$$

Para a primeira avaliação expande-se $\frac{1}{1-xy}$ como uma série geométrica, decompondo as somas em produtos e de seguida integra-se:

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n \geq 0} (xy)^n dx dy = \sum_{n \geq 0} \int_0^1 \int_0^1 x^n y^n dx dy = \sum_{n \geq 0} \left(\int_0^1 x^n dx \right) \left(\int_0^1 y^n dy \right) =$$

$$= \sum_{n \geq 0} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \left[\frac{y^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} \frac{1}{n+1} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}.$$

Esta avaliação também mostra que o integral duplo é finito.

A segunda maneira de avaliar I vem de uma mudança de variáveis: nas novas coordenadas, que são dadas por $u := \frac{y+x}{2}$ e $v := \frac{y-x}{2}$, o domínio da integração é o quadrado do comprimento lateral $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, que foi obtido do antigo domínio rodando 45° e encolhendo-o através de um fator $\sqrt{2}$.

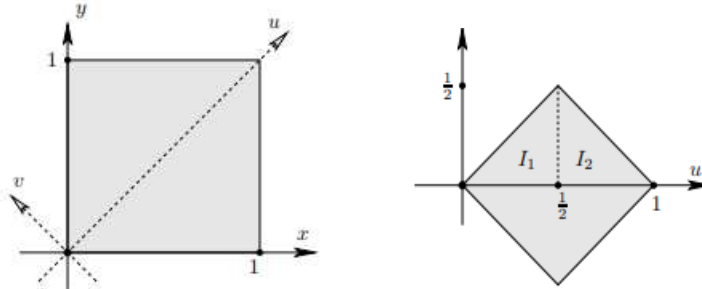


Ilustração 1 Transformação do domínio de integração.

Substituindo $x = u - v$ e $y = u + v$ obtém-se:

$$\frac{1}{1-xy} = \frac{1}{1-(u-v)(u+v)} = \frac{1}{1-(u^2-v^2)} = \frac{1}{1-u^2+v^2}$$

Para calcular um integral $\int_S f(x, y) dx dy$ pode-se fazer uma mudança de variáveis onde $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$, se a correspondência de $(u, v) \in T$ para $(x, y) \in S$ for bijetiva e continuamente diferenciável. Então:

$$\int_S f(x, y) dx dy = \int_T f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right| du dv,$$

onde $\frac{d(x, y)}{d(u, v)}$ é o determinante de Jacobi e $\frac{d(x, y)}{d(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} \end{pmatrix}$.

Portanto, para transformar o integral I tem de se substituir $dx dy$ por $2 du dv$, para compensar o facto da transformação de coordenadas reduzir áreas por uma constante 2 (determinante de Jacobi).

$$x = u - v \text{ e } y = u + v \Rightarrow \frac{d(x, y)}{d(u, v)} = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \times 1 - (-1) \times 1 = 1 + 1 = 2.$$

O novo domínio de integração e a função que se vai integrar são simétricas em relação ao eixo u , então tem de se calcular duas vezes o integral sobre o domínio da metade superior, isto é, naturalmente separa-se em duas partes:

$$I = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^u \frac{2}{1-u^2+v^2} dv \right) du + 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_0^{1-u} \frac{2}{1-u^2+v^2} dv \right) du =$$

$$= 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^u \frac{1}{1-u^2+v^2} dv \right) du + 4 \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_0^{1-u} \frac{1}{1-u^2+v^2} dv \right) du .$$

Usando $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$ e sabendo que $a^2 = 1-u^2 \Leftrightarrow a = \sqrt{1-u^2}$ vem

que: $I = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du + 4 \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du .$

Aqui calcula-se a derivada de $g(u) := \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)$ que é $g'(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ e

calcula-se a derivada de $h(u) := \arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{(1-u)^2}}{\sqrt{1^2-u^2}}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{(1-u)}}{\sqrt{(1+u)}}\right)$

que é $h'(u) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$.

Assim pode-se usar $\int_a^b f'(x) f(x) dx = \left[\frac{1}{2} f(x)^2 \right]_a^b = \frac{1}{2} f(b)^2 - \frac{1}{2} f(a)^2$ e obtém-se

então que:

$$I = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} g'(u) g(u) du + 4 \int_{\frac{1}{2}}^1 -2h'(u)h(u) du = 4 \left[\frac{1}{2} g(u)^2 \right]_0^{\frac{1}{2}} - 8 \left[\frac{1}{2} h(u)^2 \right]_{\frac{1}{2}}^1 =$$

$$= 2 \left[g(u)^2 \right]_0^{\frac{1}{2}} - 4 \left[h(u)^2 \right]_{\frac{1}{2}}^1 = 2g\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2g(0)^2 - 4 \left[h(1)^2 - h\left(\frac{1}{2}\right)^2 \right] =$$

$$= 2g\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2g(0)^2 - 4h(1)^2 + 4h\left(\frac{1}{2}\right)^2 =$$

$$= 2 \left[\arctan\left(\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}\right) \right]^2 - 2 \left[\arctan(0) \right]^2 - 4 \left[\arctan(0) \right]^2 + 4 \left[\arctan\left(\frac{1-\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}\right) \right]^2 =$$

$$= 2 \left[\arctan\left(\frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}}\right) \right]^2 - 0 - 0 + 4 \left[\arctan\left(\frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}}\right) \right]^2 =$$

$$= 2 \left[\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \right]^2 + 4 \left[\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \right]^2 = 6 \left[\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \right]^2 = 6 \times \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 = 6 \times \frac{\pi^2}{6^2} = \frac{\pi^2}{6} . \quad \square$$

Esta prova retira o valor da série de Euler a partir de um integral com mudança de variáveis.

Uma prova engenhosa deste tipo do mesmo resultado, em que há uma mudança de variáveis não trivial, foi descoberta mais tarde por Beukers, Calabi e Kolk. O ponto de partida para essa prova baseou-se em separar a soma $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ em termos pares e termos ímpares.

Claramente a soma dos termos pares $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(2k)^2}$ é $\frac{1}{4} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ e a soma dos

termos ímpares $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2}$ é $\frac{3}{4} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.

Portanto, daqui resulta que o teorema da série de Euler é equivalente a:

$$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad (3)$$

Demonstração de (3):

Considera-se o seguinte integral duplo que é igual ao somatório referido em cima, isto é:

$$J = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-x^2y^2} dx dy = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Agora tem de se calcular este integral J . E para isso Beukers, Calabi e Kolk propuseram novas coordenadas:

$$u := \arccos \left(\sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2y^2}} \right) \text{ e } v := \arccos \left(\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2y^2}} \right).$$

Para calcular o integral duplo pode-se ignorar a fronteira do domínio e considerar-se $0 < x < 1$ e $0 < y < 1$. Aqui u, v vão ficar no triângulo $u > 0, v > 0, u + v < \frac{\pi}{2}$. Então a

transformação das coordenadas pode ser convertida explicitamente, o que leva à seguinte substituição: $x = \frac{\sin(u)}{\cos(v)}$ e $y = \frac{\sin(v)}{\cos(u)}$. Aqui verificar-se que estas fórmulas definem uma

transformação bijetiva de coordenadas entre o interior de um quadrado $S = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$ e o interior de um triângulo $T = \{(u, v) : u, v \geq 0, u + v \leq \frac{\pi}{2}\}$.

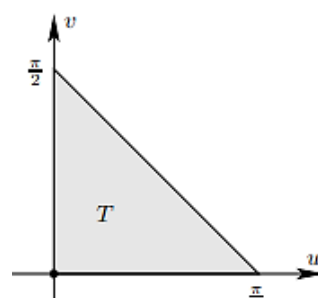
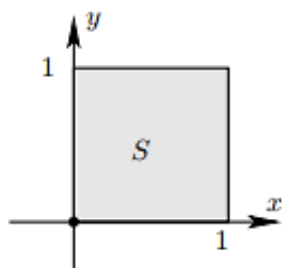


Ilustração 2 Quadrado $S = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$. Ilustração 3 Triângulo $T = \{(u, v) : u, v \geq 0, u + v \leq \frac{\pi}{2}\}$.

Agora tem de se calcular o determinante de Jacobi da transformação de coordenadas, o que acaba por ser:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} \frac{\cos(u)}{\cos(v)} & \frac{\sin(u)\sin(v)}{\cos^2(v)} \\ \frac{\sin(u)\sin(v)}{\cos^2(u)} & \frac{\cos(v)}{\cos(u)} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\cos(u)}{\cos(v)} \times \frac{\cos(v)}{\cos(u)} - \frac{\sin(u)\sin(v)}{\cos^2(v)} \times \frac{\sin(u)\sin(v)}{\cos^2(u)} = 1 - \frac{\sin^2(u)\sin^2(v)}{\cos^2(v)\cos^2(u)} = \\ &= 1 - \frac{\sin^2(u)}{\cos^2(v)} \times \frac{\sin^2(v)}{\cos^2(u)} = 1 - x^2y^2. \end{aligned}$$

Com isto, o integral que se pretende calcular é transformado em:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}-u} 1 \, dvdu = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [v]_0^{\frac{\pi}{2}-u} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - u\right) du = \left[\frac{\pi}{2}u - \frac{u^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{2} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} - 0 = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{8} = \frac{2\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{8}, \end{aligned}$$

o que significa que é exatamente a área do triângulo T , isto é: $A_{\Delta} = \frac{b \times a}{2} = \frac{\frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi^2}{8}$, como se pretendia demonstrar. □

Fórmula de Euler

Este resultado foi descoberto por Leonhard Euler em 1740 e mostra uma surpreendente relação entre as funções trigonométricas e a função exponencial. A fórmula é dada por:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

onde θ é o argumento (em radianos) e representa um ponto no círculo unitário para um argumento θ como ilustra a seguinte figura.

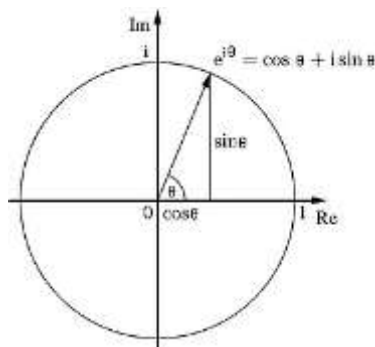


Ilustração 4 Interpretação geométrica da fórmula de Euler.

Demonstração da fórmula de Euler:

Recorda-se que $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ e que esta série converge para todos os valores (reais) de x . Colocando x igual a um valor real θ , esta soma infinita de números horizontais é vista da seguinte forma:



Ilustração 5 Série e^θ em \mathbb{C} com $\theta \in \mathbb{R}$.

Para encontrar $e^{i\theta}$ retoma-se a série de potências e substitui-se x por $i\theta$ onde se obtém $e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \dots$. Como se pode observar na figura seguinte, em $e^{i\theta}$, em vez de os termos terem todos a mesma direção, cada termo faz um ângulo com o termo anterior, produzindo assim uma espécie de espiral.

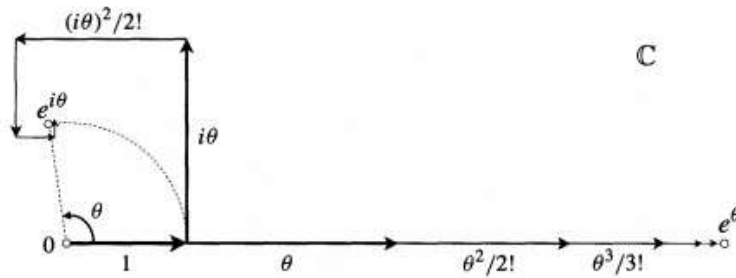


Ilustração 6 Série e^θ e série $e^{i\theta}$ em \mathbb{C} com $\theta \in \mathbb{R}$.

Agora separa-se $e^{i\theta}$ em duas partes, a parte real e a parte imaginária, onde se obtém $e^{i\theta} = C(\theta) + iS(\theta)$, onde $C(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots$ e $S(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots$.

Neste ponto poder-se-ia obter a fórmula de Euler aplicando o Teorema de Taylor onde mostra que $C(\theta)$ e $S(\theta)$ são as séries de potências do $\cos(\theta)$ e do $\sin(\theta)$, respetivamente. Contudo, pode-se obter o resultado através de um argumento elementar que não é requerido no Teorema de Taylor. Portanto, pretende-se mostrar duas coisas sobre $e^{i\theta} = C(\theta) + iS(\theta)$:

- i. Tem norma um.
- ii. Tem argumento θ .

Para isso, primeiro é necessário notar que as derivadas das séries de potências C e S são: $C' = -S$ e $S' = C$, onde estas derivadas são relativas a um argumento θ .

Para demonstrar i. pode-se observar que:

$$\frac{d}{d\theta} |e^{i\theta}|^2 = (C^2 + S^2)' = 2(CC' + SS') = 2(-SC + SC) = 0,$$

o que significa que a norma de $e^{i\theta}$ não depende de θ . Como $e^{i0} = 1$, deduz-se que $|e^{i\theta}| = 1$ para qualquer θ .

Para demonstrar ii. tem de se mostrar que $\Theta(\theta) = \theta$, onde $\Theta(\theta)$ define o argumento de $e^{i\theta}$. Portanto, tem-se $\tan \Theta(\theta) = \frac{S(\theta)}{C(\theta)}$.

Como já é sabido que $C^2 + S^2 = 1$, encontra-se facilmente a derivada do primeiro membro da equação $\tan \Theta(\theta) = \frac{S(\theta)}{C(\theta)}$ que é:

$$[\tan \Theta(\theta)]' = (1 + \tan^2 \Theta) \Theta' = \left(1 + \frac{S^2}{C^2}\right) \Theta' = \frac{\Theta'}{C^2}$$

e a derivada do segundo membro que é:

$$\left(\frac{S}{C}\right)' = \frac{S'C - C'S}{C^2} = \frac{CC - (-S)S}{C^2} = \frac{C^2 + S^2}{C^2} = \frac{1}{C^2}.$$

Daqui resulta que $\frac{d\Theta}{d\theta} = \Theta' = 1$, o que implica que $\Theta(\theta) = \theta + \text{constante}$. Usando o argumento de $e^{i0} = 1$ conclui-se que $\Theta = \theta$.

Com isto pode-se concluir que $C(\theta)$ e $S(\theta)$ são as séries de potências do $\cos(\theta)$ e do $\sin(\theta)$, respetivamente. Logo, tem-se que $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ – série de Euler.

□

Uma simples, mas importante, consequência da fórmula de Euler é que o seno e o cosseno podem ser construídos a partir da função exponencial.

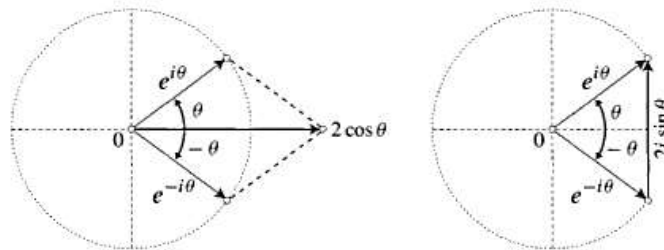


Ilustração 7 Seno e cosseno segundo a fórmula de Euler.

Da figura anterior pode-se observar que $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos(\theta)$ e $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin(\theta)$ ou equivalente: $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ e $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Além disto existem outras consequências surpreendentes.

Já é sabido que $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ e também já foi provado que π é um número irracional. Portanto, se se substituir x por $i\pi$ o que seria de esperar?

Substituindo x por $i\pi$ obtém-se:

$$e^{i\pi} = (e^\pi)^i = \left(1 + \pi + \frac{\pi^2}{2!} + \frac{\pi^3}{3!} + \dots\right)^i \text{ ou } e^{i\pi} = 1 + i\pi + \frac{(i\pi)^2}{2!} + \frac{(i\pi)^3}{3!} + \dots$$

No entanto, pela fórmula de Euler obtém-se algo surpreendente:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1 + i \times 0 = -1.$$

Outro exemplo semelhante é:

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + i \times 1 = i.$$

Todos estes resultados são aparentemente simples mas inesperadas consequências da fórmula de Euler.

Integral gaussiana

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (4)$$

Este integral aparece diversas vezes quando se está a lidar com a distribuição de Gauss (distribuição normal) em probabilidade e estatística.

É um resultado bastante especial, pois não se pode calcular diretamente o integral considerando apenas uma variável. Então ir-se-á usar um integral duplo.

Demonstração de (4):

O gráfico da função definida por $f(x) = e^{-x^2}$ encontra-se representado na seguinte figura.

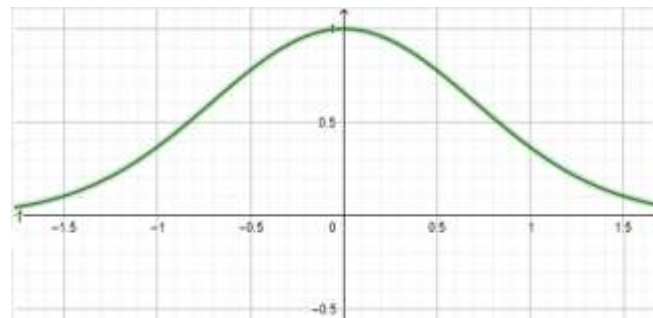


Ilustração 8 Gráfico de $f(x)$.

Pretende-se então mostrar que a área entre a função $f(x)$ e o eixo das abcissas é $\sqrt{\pi}$, isto é, que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Note-se que o gráfico de $f(x)$ é simétrico em relação ao eixo das ordenadas. Logo, pretende-se calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$. Nesse sentido, é de notar que, pelo Teorema de Fubini, sendo $f(x, y) = g(x)h(y)$, então $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \left[\int_a^b g(x) dx \right] \left[\int_c^d h(y) dy \right]$.

Tendo em conta este facto começa-se então por definir o seguinte:

$$I := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

De seguida aplica-se o quadrado a ambos os membros:

$$I^2 = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right]^2 = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right] \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right] = \left[2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right] \left[2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right].$$

Contudo, pode-se reescrever o segundo membro da igualdade mudando uma das incógnitas x para y . Então tem-se:

$$I^2 = \left[2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right] \left[2 \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \right] = 4 \left[\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right] \left[\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \right].$$

Aqui usa-se então o Teorema de Fubini e obtém-se:

$$I^2 = 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy = 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy = 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

O próximo passo será converter as coordenadas cartesianas para as coordenadas polares.

Considera-se $x := \rho \cos(\theta)$ e $y := \rho \sin(\theta)$. Aqui $\rho \geq 0$ e, como ambas as coordenadas x e y variam entre 0 e $+\infty$, então θ irá variar entre 0 e $\frac{\pi}{2}$. Com isto tem de se calcular o determinante de Jacobi da transformação de coordenadas:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{dx}{d\rho} & \frac{dx}{d\theta} \\ \frac{dy}{d\rho} & \frac{dy}{d\theta} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) \end{pmatrix} = \rho \cos^2(\theta) + \rho \sin^2(\theta) = \rho(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = \rho.$$

Com isto retoma-se as igualdades e sabendo que $x^2 + y^2 = \rho^2 \cos^2(\theta) + \rho^2 \sin^2(\theta) = \rho^2$ obtém-se:

$$\begin{aligned} I^2 &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^2} d\rho d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{e^{-\rho^2}}{-2} \right]_0^{+\infty} d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{e^{-\rho^2}}{-2} - \frac{e^{-0^2}}{-2} \right) d\theta = \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 + \frac{1}{2} d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} d\theta = 4 \left[\frac{1}{2} \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4 \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot 0 \right] = 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi. \end{aligned}$$

Resumindo, tem-se $I^2 = \pi$. Como a função e^{-x^2} é positiva então o integral também será positivo. Logo, $I = \sqrt{\pi}$.

$$\text{Concluindo, } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

□

arctan(1) + arctan(2) + arctan(3) = π

Por último irá ser demonstrado este surpreendente resultado, claramente sem o uso da calculadora.

Esta soma é bastante elegante, no entanto não tem um desfecho tão óbvio como seria de esperar.

Para se compreender melhor como é que $\arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3)$ resulta num número irracional serão apresentadas três admiráveis demonstrações: demonstração geométrica, demonstração analítica usando números complexos e demonstração analítica usando a tangente da soma.

Demonstração geométrica:

Esta prova é a mais elegante das três provas e usa-se uma imagem constituída por três triângulos retângulos no interior de um retângulo de 2×3 .

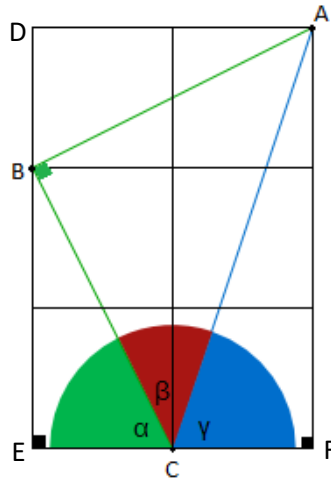
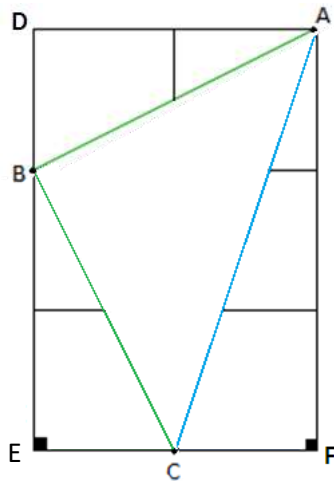


Ilustração 9 Representação geométrica.

Note-se que o triângulo $[BEC]$, o triângulo $[AFC]$ e o triângulo $[ADB]$ são triângulos retângulos, pois \widehat{BEC} , \widehat{AFC} e \widehat{ADB} são ângulos internos do retângulo $[DEFA]$, logo $\widehat{BEC} = \widehat{AFC} = \widehat{ADB} = \frac{\pi}{2}$.



Daqui resulta que:

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= 1^2 + 2^2 \Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{5} \\ \overline{BC}^2 &= 2^2 + 1^2 \Rightarrow \overline{BC} = \sqrt{5} \\ \overline{AC}^2 &= 3^2 + 1^2 \Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{10}. \end{aligned}$$

Falta verificar que o triângulo $[ABC]$ é um triângulo retângulo. Para isso temos de verificar se $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$. Então:

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 \Leftrightarrow (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 = (\sqrt{10})^2 \Leftrightarrow 5 + 5 = 10 \Leftrightarrow 10 = 10.$$

Daqui resulta que o triângulo $[ABC]$ é um triângulo retângulo.

Como os triângulos são triângulos retângulos pode-se então usar as razões trigonométricas, neste caso a tangente. Portanto, analisando a figura obtém-se:

$$\tan(\alpha) = \frac{2}{1} \Leftrightarrow \alpha = \arctan(2)$$

$$\tan(\beta) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \beta = \arctan(1)$$

$$\tan(\gamma) = \frac{3}{1} \Leftrightarrow \gamma = \arctan(3)$$

Como $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ daqui resulta que:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \Leftrightarrow \arctan(2) + \arctan(1) + \arctan(3) = \pi$$

$$\Leftrightarrow \arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3) = \pi .$$

□

Demonstração analítica usando números complexos:

Consideremos $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 + 2i$ e $z_3 = 1 + 3i$. Graficamente tem-se:

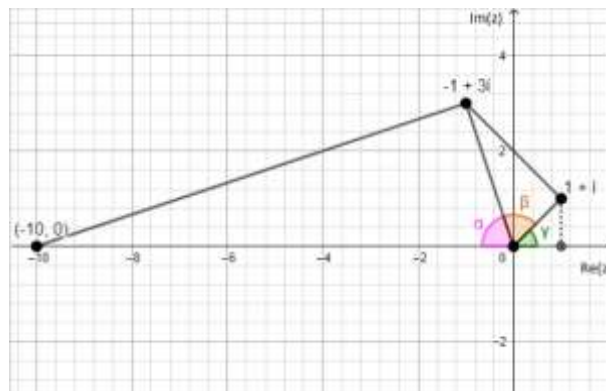


Ilustração 10 Representação gráfica.

$$\begin{aligned} z_1 \times z_2 \times z_3 &= (1+i)(1+2i)(1+3i) = (1+2i+i+2i^2)(1+3i) = \\ &= (1+3i-2)(1+3i) = (-1+3i)(1+3i) = -1-3i+3i+9i^2 = -1-9 = -10 \end{aligned}$$

Como $z = x + iy = re^{i\theta}$, onde $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{|z|} \\ \text{sen}(\theta) = \frac{y}{|z|} \end{cases}$, então:

$$|z_1 \times z_2 \times z_3| = \sqrt{(-10)^2 + 0^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ e } \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{-10}{10} = -1 \\ \text{sen}(\theta) = \frac{0}{10} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \pi .$$

Logo, $z_1 \times z_2 \times z_3 = 10e^{i\pi}$. Analogamente, $z_1 \times z_2 \times z_3 = |z_1||z_2||z_3|e^{(\alpha+\beta+\gamma)i} = 10e^{i\pi}$.

Concluindo, $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, ou seja $\arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3) = \pi$.

□

Demonstração analítica usando a tangente da soma:

Sabe-se que $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. Portanto só falta demonstrar que $\arctan(2) + \arctan(3) = \frac{3\pi}{4}$.

Começa-se então por calcular $\tan(\arctan(2) + \arctan(3))$. Da tangente da soma sabe-se que $\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$. Portanto tem-se:

$$\tan(\arctan(2) + \arctan(3)) = \frac{\tan(\arctan(2)) + \tan(\arctan(3))}{1 - \tan(\arctan(2))\tan(\arctan(3))} = \frac{2+3}{1-2 \times 3} = \frac{5}{-5} = -1.$$

Aqui pretende-se descobrir qual o quadrante a que pertence o ângulo cuja tangente é igual a -1 . Para isso tem de se avaliar $\arctan(2) + \arctan(3)$. Sabe-se que $\frac{\pi}{4} < \arctan(2) < \frac{\pi}{2}$ e que $\frac{\pi}{4} < \arctan(3) < \frac{\pi}{2}$, logo tem-se que:

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} < \arctan(2) + \arctan(3) < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} < \arctan(2) + \arctan(3) < \pi$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \tan(\arctan(2) + \arctan(3)) = -1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \arctan(2) + \arctan(3) = \frac{3\pi}{4}, &\text{ pois } \frac{3\pi}{4} \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[. \end{aligned}$$

Concluindo, tem-se $\arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3) = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \frac{4\pi}{4} = \pi$.

□

Bibliografia

- AIGNER, Martin; M. ZIEGLER, Günter. *Proofs from THE BOOK*. 2 ed. Berlin, Heidelberg: Springer, 2001
- NEEDHAM, Tristan. *Visual Complex Analysis*. United States: Clarendon Press - Oxford, 1997
- NIVEN, Ivan. *A simple proof that π is irrational*. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1947, p. 509
- YouTube. *Gaussian Integral 1 Polar Coordinates*. 01/02/2019. [vídeo] Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=HcneBkidSDQ>
- YouTube. *3 Elegant Proofs that $\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi$* . 16 Julho 2018. [vídeo] Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=1Xp-h13cvY0>
- YouTube. *IMPORTANT Prove Sum of Tan Inverse of 1 2 and 3 is 180 $\arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3) = 180$* . 19/11/2016. [vídeo] Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=ncJK77mReT4>