



Universidade do Porto
Faculdade de Engenharia
FEUP



César Miguel de Almeida Vasques

Modelização do Controlo Activo de Vibrações de Vigas com Sensores e Actuadores Piezoeléctricos

FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial

**MODELIZAÇÃO DO CONTROLO ACTIVO
DE VIBRAÇÕES DE VIGAS COM
SENSORES E ACTUADORES PIEZOELÉCTRICOS**

César Miguel de Almeida Vasques

Licenciado em Engenharia Mecânica
pela Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto



Dissertação para Mestrado apresentada à
Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica

Dissertação realizada sob a supervisão
do Professor Doutor José Fernando Dias Rodrigues
do Departamento de Engenharia Mecânica
da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Porto, Dezembro de 2002

621(043)/VAsc/Mod

UNIVERSIDADE DO PORTO
Faculdade de Engenharia
BIBLIOTECA 11
N.º <u>67124</u>
CDU <u>621(043)</u>
Data <u>14</u> / <u>5</u> / 20 <u>03</u>

“Na aprendizagem, acumulamos.

No *tau*, reduzimos.

Estando vazios, ainda podemos vir a estar cheios.

Estando cheios, permanecemos vazios.

A abundância está no interior do vazio.”

Provérbio Chinês



A quem sempre me incentivou...

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. José Fernando Dias Rodrigues, pelo acompanhamento e orientação prestados ao longo do desenvolvimento deste trabalho, cujo apoio e incentivo foram fundamentais na realização desta dissertação.

Ao Prof. Dr. Jorge Humberto Oliveira Seabra, pela confiança depositada e apoio prestado, assim como pela oportunidade e condições de trabalho proporcionadas no Centro de Tribologia e Manutenção Industrial.

Ao colega Rui Moreira, pela ajuda prestada na preparação da componente experimental deste trabalho.

Aos colegas e amigos da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Instituto de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial e Centro de Tribologia e Manutenção Industrial.

Finalmente, um agradecimento muito especial à minha família e amigos, que me acompanharam nesta caminhada pelo conhecimento, muitas vezes difícil e tempestuosa, porém muito gratificante.

Resumo

Neste trabalho de dissertação apresenta-se um estudo numérico e experimental realizado sobre o controlo activo de vibrações de vigas com sensores e actuadores piezoeléctricos. Apresenta-se uma revisão sobre os materiais *inteligentes*, com particular destaque para os materiais piezoeléctricos, identificando-se as suas leis constitutivas. Uma formulação teórica rigorosa de uma viga *inteligente* com sensores e actuadores piezoeléctricos é apresentada. O modelo teórico estabelecido é discretizado pelo método dos elementos finitos. Para o modelo mecânico considera-se na sua formulação a teoria *layerwise* para a aproximação do campo de deslocamentos da viga e das camadas piezoeléctricas. Um modelo eléctrico para diferentes condições de fronteira eléctricas é considerado, nomeadamente camadas com eléctrodos em circuito fechado ou circuito aberto, respeitando a condição de área equipotencial e diferença de potencial eléctrico prescrito, e camadas sem eléctrodos. Utilizando uma formulação variacional, o efeito piezoeléctrico directo, para as diferentes condições de fronteira eléctricas, é incorporado no modelo mecânico através de aproximações fisicamente adequadas para o campo eléctrico na direcção axial e transversal. Assim, um modelo de elementos finitos de viga que considera uma teoria electromecânica acoplada através de parâmetros de rigidez efectivos, para diferentes condições de fronteira eléctricas, é proposto. As teorias de controlo por *feedback* do deslocamento ou velocidade, a ganho ou amplitude constantes, e as teorias de controlo óptimo LQR e LQG são apresentadas e avaliadas na capacidade de controlar a vibração. Para a análise da acção estática dos actuadores piezoeléctricos, funções de resposta em frequência e controlo activo de vibrações, em regime livre e forçado, de vigas com camadas piezoeléctricas contínuas ou segmentadas são apresentados diversos casos de estudo e as soluções obtidas pelo modelo de elementos finitos proposto. A comparação com soluções analíticas aproximadas e numéricas disponíveis na literatura demonstra a robustez e a fiabilidade da teoria desenvolvida em aplicações de vigas finas e espessas. Finalmente, é apresentado um estudo experimental, com comparação entre resultados numéricos e experimentais, da acção estática dos actuadores piezoeléctricos e do controlo activo de vibrações por *feedback* da velocidade, através de um transdutor *laser*, e do deslocamento, numa viga com actuadores e sensores piezoeléctricos.

Résumé

Dans cette dissertation on présente une étude numérique et expérimentale sur le contrôle actif des vibrations de poutres avec capteurs et actionneurs piézoélectriques. Une révision sur les matériaux intelligents, en particulier les piézoélectriques, est présentée en identifiant leurs lois constitutives. Une formulation théorique rigoureuse de la poutre intelligente avec capteurs et actionneurs est aussi présentée. Le modèle théorique établi est discretisé par la méthode des éléments finis. Pour le modèle mécanique on considère dans sa formulation la théorie layerwise pour l'approximation du champ des déplacements de la poutre et des couches piézoélectriques. Un modèle électrique pour des différentes conditions aux limites est considéré, notamment couches avec les électrodes en circuit fermé ou circuit ouvert, en respectant la condition d'aire equipotentielle et différence de potentiel électrique imposée, et couches sans électrodes. En utilisant une formulation variationnelle, l'effet piézoélectrique direct, pour les différentes conditions électriques, est incorporé dans le modèle mécanique à travers des approximations physiquement adéquates pour le champ électrique dans les directions axial et transversal. Ainsi donc, un modèle d'éléments finis de poutre qui considère une théorie electromécanique couplée à travers des paramètres de rigidité effectifs, pour les différentes conditions électriques, est proposé. Les théories de contrôle par feedback du déplacement et de la vitesse, avec gain ou amplitude constants, ainsi que les théories du contrôle optimal, telles que le LQR et le LQG, sont présentées et évaluées dans leur capacité de contrôler la vibration. Pour l'analyse de l'action statique des actionneurs piézoélectriques, des fonctions de réponse en fréquence et du contrôle actif des vibrations, en régime libre et forcé, de poutres avec des couches piézoélectriques continues ou segmentées sont présentés plusieurs cas d'étude et les résultats obtenus avec le modèle développé. La comparaison avec des solutions analytiques approchées et numériques disponibles dans la littérature valide et démontre la fiabilité de la théorie et de l'élément développés dans des applications de poutres minces et épaisses. Finalement, une étude expérimentale est présentée sur l'action statique des actionneurs piézoélectriques et du contrôle actif des vibrations par feedback de la vitesse, avec un capteur laser, et du déplacement, en comparant les résultats expérimentaux et numériques pour une poutre avec des actionneurs et capteurs piézoélectriques.

Abstract

In this dissertation a numerical and experimental study about active control of vibrations of beams with piezoelectric sensors and actuators is presented. A revision about intelligent materials focusing the piezoelectric materials is realized and their constitutive laws identified. A precise theoretical formulation of an intelligent beam with piezoelectric sensors and actuators is also presented. The established theoretical model is discretized by the finite element method. The layerwise theory is considered in the formulation of the mechanical model in order to approximate the displacement field of the beam and piezoelectric layers. An electric model for different electric boundary conditions is considered, namely, electroded layers with the electrodes left open or closed, with the equipotential area condition insured and electric potentials prescribed, and non-electroded layers. Using a variational formulation, the direct piezoelectric effect, for the different electric boundary conditions considered, is incorporated into the beam theory via suitable approximations for the axial and transverse electric fields. In that way, a finite element model of a beam taking into account the electromechanical coupling by means of effective stiffness parameters is proposed. The displacement or velocity feedback control theories at constant amplitude or constant gain, and the optimal control theories LQR and LQG, are presented and evaluated on their ability to control the vibration. For the analysis of the free and forced response of the static action of piezoelectric actuators, frequency response functions and active control of vibrations of beams with continuous or segmented piezoelectric layers, several case studies and solutions obtained with the proposed finite element model are presented. Comparisons with numerical and approximated analytical solutions have shown the reliability and robustness of the developed theory in applications with thin and thick beams. Finally, an experimental study of the static action of the piezoelectric actuators and active control of vibrations with velocity feedback, using a laser transducer to measure the velocity, or displacement feedback, using a piezoelectric sensor, is presented and a comparison with numerical results is performed for a beam with piezoelectric sensors and actuators.

Índice

Índice de Figuras	xv
Índice de Tabelas	xxi
Nomenclatura	xxiii
1 Introdução	1
1.1 Motivações.....	1
1.2 Revisão Bibliográfica	6
1.3 Objectivos.....	8
1.4 Organização da Dissertação.....	9
2 Sistemas Estruturais Inteligentes	11
2.1 Introdução	11
2.2 Estruturas Inteligentes	11
2.3 Materiais Inteligentes	13
2.3.1 História da Piezoelectricidade	14
2.3.2 Materiais Piezoeléctricos	15
2.3.2.1 Origens da Polarização Eléctrica.....	16
2.3.2.2 Cristal Biónico.....	17
2.3.2.3 Cerâmicas Ferroeléctricas.....	20
2.3.2.4 Polímeros.....	27
2.3.3 Outros Materiais Inteligentes.....	28
2.3.3.1 Shape Memory Alloys.....	29
2.3.3.2 Materiais Electro/Magnetostrictivos.....	32
2.3.3.3 Fluidos Electro/Magnetoreológicos.....	36
2.4 Equações Constitutivas dos Materiais Piezoeléctricos.....	37
2.4.1 Equações Constitutivas Unidimensionais.....	38
2.4.1.1 Polarização.....	38
2.4.1.2 Piezoelectricidade	39
2.4.2 Equações Constitutivas Gerais.....	41
2.4.2.1 Termodinâmica	41
2.4.2.2 Piezoelectricidade Linear	44
3 Formulação Teórica	49
3.1 Introdução	49
3.2 Análise Dinâmica da Viga Layerwise - Formulação.....	49
3.2.1 Campo de Deslocamentos.....	49
3.2.2 Campo de Deformações.....	51

3.3	Leis de Comportamento dos Materiais	53
3.4	Potencial e Campo Eléctrico das Camadas Piezoeléctricas	55
3.4.1	Diferença de Potencial Eléctrico Prescrita	59
3.4.2	Densidade de Carga Eléctrica Superficial Prescrita	59
3.4.3	Carga Eléctrica Total Prescrita	61
3.4.4	Potencial Eléctrico e Campo Eléctrico em Função da Espessura	62
3.5	Formulação Variacional	65
3.5.1	Trabalho Virtual das Forças Electromecânicas Internas	66
3.5.1.1	Diferença de Potencial Eléctrico Prescrito	69
3.5.1.2	Densidade de Carga Eléctrica Prescrita	75
3.5.2	Trabalho Virtual das Forças de Inércia	77
3.5.3	Trabalho Virtual das Forças Exteriores	78
3.5.4	Equações do Movimento e Condições de Fronteira	80
4	Discretização por Elementos Finitos	83
4.1	Introdução	83
4.2	Aproximação Local do Método dos Elementos Finitos	83
4.2.1	Elemento de Viga Piezoeléctrico	84
4.2.2	Matriz de Rigidez Elementar	88
4.2.3	Matriz de Massa Elementar	91
4.2.4	Vector de Forças Exteriores Mecânicas e Eléctricas Elementar	92
4.3	Aproximação Global do Método dos Elementos Finitos	93
4.4	Análise Modal	94
4.4.1	Redução Modal	97
4.4.2	Análise Modal com Amortecimento	98
5	Controlo Activo de Vibrações	101
5.1	Introdução	101
5.2	Sensores e Actuadores Estruturais	101
5.3	Actuadores Distribuídos e Controlo de Vibrações por Feedback	103
5.3.1	Feedback da Velocidade com Amplitude Constante	104
5.3.2	Feedback da Velocidade com Ganho Constante	105
5.3.3	Feedback do Deslocamento com Ganho Constante	105
5.4	Transformação para Variáveis de Estado	106
5.4.1	Sistema Global Acoplado	106
5.4.2	Sistema Reduzido Desacoplado	108
5.5	Controlo Óptimo Quadrático	110
5.5.1	Teoria de Controlo Óptimo	110
5.5.2	Regulador Quadrático Linear (LQR)	112
5.5.3	Regulador Quadrático Linear Estacionário	115
5.5.4	Escolha da Matriz de Ponderação dos Estados	117
5.5.5	Limitações do Ganho de Controlo	118
5.5.6	Observação	120
5.5.6.1	Observador de Estados	121
5.5.6.2	Filtro de Kalman Bucy	122
5.5.7	Controlador Quadrático Linear Gaussiano (LQG)	124
5.6	Controlabilidade e Observabilidade	125
5.7	Implementação Digital	127

6 Aplicações	129
6.1 Introdução	129
6.2 Validação do Modelo de Elementos Finitos.....	129
6.2.1 Análise da Acção Estática dos Actuadores.....	130
6.2.1.1 Validação do Elemento.....	130
6.2.1.2 Efeito Piezoeléctrico Directo	136
6.2.2 Análise da Acção Estática dos Sensores.....	141
6.2.2.1 Viga com Sensores Piezoeléctricos Contínuos.....	141
6.2.2.2 Viga com Sensores Piezoeléctricos Segmentados.....	147
6.2.3 Análise Modal.....	152
6.2.3.1 Análise para Diferentes Modelos Mecânico e Eléctrico	152
6.2.3.2 Área Equipotencial e Espessura Relativa das Camadas Piezoeléctricas	155
6.2.3.3 Campo eléctrico ou deslocamento eléctrico axial nulo	158
6.3 Controlo Activo de Vigas com Actuadores e Sensores Piezoeléctricos.....	162
6.3.1 Feedback do Deslocamento	163
6.3.2 Feedback da Velocidade	166
6.3.3 LQR	172
6.3.4 LQG	174
6.4 Resultados Experimentais.....	179
6.4.1 Introdução	179
6.4.2 Montagem Experimental.....	180
6.4.3 Análise da Acção Estática dos Actuadores.....	181
6.4.3.1 Resultados.....	181
6.4.4 Controlo Activo de Vibrações com Feedback da Velocidade	182
6.4.4.1 Resultados - Função de Resposta em Frequência.....	184
6.4.4.2 Resultados - Resposta em Regime Livre.....	194
6.4.5 Controlo Activo de Vibrações com Feedback do Deslocamento	200
6.4.5.1 Resultados - Função de Resposta em Frequência.....	202
6.4.5.2 Resultados - Resposta em Regime Livre.....	208
7 Conclusões	211
7.1 Conclusões do Trabalho	211
7.2 Originalidades da Tese	213
7.3 Sugestões para Trabalho Futuro	214
Anexo A Simetria na Matriz de Acoplamento Piezoeléctrico	221
Anexo B Matrizes Elementares	225
Anexo C Propriedades dos Materiais	233

Índice de Figuras

Fig. 1.1 - Mecanismo de amortecimento por revestimento com e sem camada de restrição	2
Fig. 1.2 - Definição de uma estrutura inteligente	3
Fig. 1.3 - Mecanismo de amortecimento híbrido (activo/passivo)	4
Fig. 1.4 - Representação dos mecanismos de acção por extensão e corte	5
Fig. 2.1 - Componentes de um smart structural system.....	13
Fig. 2.2 - Origens da polarização	16
Fig. 2.3 - Estrutura do cristal CdS	17
Fig. 2.4 - Célula elementar do PXE (estrutura perovskite): a) malha cúbica (sobre a temperatura de Curie); b) malha tetragonal (abaixo da temperatura de Curie)	21
Fig. 2.5 - Momentos dipolares eléctricos nos domínios de Weiss: a) antes da polarização; b) durante a polarização; c) depois da polarização	22
Fig. 2.6 - Parte superior da figura: histerese dieléctrica do PXE 52 (o deslocamento eléctrico $D(E)$ é obtido pela adição de $\epsilon_0 E$ à polarização $P(E)$ de acordo com (2.16)); Parte inferior da figura: deformações mecânicas $S_3 = S_{zz}$ (na direcção da polarização), $S_1 = S_{xx}$ e $S_2 = S_{yy}$ em função do campo eléctrico (a curva de S_1 é baseada em medições e S_3 é dado por $S_3 = -2S_1 = -2S_2$) (Waanders, 1991)	23
Fig. 2.7 - Deformações mecânicas S_{xx} e S_{yy} normais à direcção de polarização em função do deslocamento eléctrico para o PXE 52 (Waanders, 1991)	24
Fig. 2.8 - Efeito piezoeléctrico num corpo cerâmico piezoeléctrico cilíndrico	25
Fig. 2.9 - PVDF unidireccional e bidireccional	28
Fig. 2.10 - Curva típica de transformação martensítica em função da temperatura (tensão constante)	30
Fig. 2.11 - Shape memory effect.....	32
Fig. 2.12 - Pseudo-elasticidade	33
Fig. 2.13 - Material magnetostrictivo pré-carregado	34
Fig. 2.14 - Curvas deformação/campo magnético para o $Tb_{0.3}Dy_{0.7}Fe_{1.93}$ (Moffett et al., 1991).....	35
Fig. 2.15 - Piezoelectricidade (PZT) / Electrostrictão (PMN) (Piefort, 2001).....	35
Fig. 2.16 - Alinhamento das partículas devido ao campo aplicado (Piefort, 2001).....	36
Fig. 2.17 - Cargas eléctricas num condensador plano dieléctrico	38
Fig. 2.18 - Relações entre as propriedades térmicas, eléctricas e mecânicas de um cristal.....	42
Fig. 3.1 - Cinemática da viga sandwich (teoria layerwise).....	51
Fig. 3.2 - Deslocamento e campo eléctricos transversais numa camada piezoeléctrica genérica.....	56
Fig. 3.3 - Deslocamento e campo eléctricos axiais numa camada piezoeléctrica genérica.....	57
Fig. 3.4 - Deslocamento e campo eléctricos numa camada piezoeléctrica genérica (sem eléctrodos).....	60

Fig. 4.1 - Elemento finito de viga piezoeléctrico	85
Fig. 5.1 - Diagrama de blocos de um sistema linear genérico	106
Fig. 5.2 - Representação das entradas e saídas de um sistema genérico	112
Fig. 5.3 - Algoritmo iterativo para o cálculo do ganho de controlo óptimo com limitação da entrada	120
Fig. 5.4 - Diagrama de blocos do sistema e observador de estados	121
Fig. 5.5 - Sistema de controlo quadrático linear gaussiano (LQG).....	124
Fig. 5.6 - Conversão A/D, tratamento digital e conversão D/A	127
Fig. 6.1 - Viga encastrada-livre com actuadores e sensores piezoeléctricos montados na superfície	130
Fig. 6.2 - Flecha da viga encastrada-livre induzida por actuação piezoeléctrica	131
Fig. 6.3 - Curva de convergência da flecha da extremidade livre da viga	131
Fig. 6.4 - Flecha na extremidade livre em função da espessura dos actuadores	133
Fig. 6.5 - Desvio da flecha na extremidade livre em função da espessura dos actuadores....	133
Fig. 6.6 - Flecha na extremidade livre para diversos comprimentos dos actuadores	134
Fig. 6.7 - Desvio da flecha na extremidade livre em função do comprimento dos actuadores.....	135
Fig. 6.8 - Flecha na extremidade livre em função da posição dos actuadores	135
Fig. 6.9 - Desvio da flecha na extremidade livre da viga para diversas posições dos actuadores	136
Fig. 6.10 - Viga simplesmente apoiada com actuadores e/ou sensores piezoeléctricos montados na superfície.....	136
Fig. 6.11 - Flecha da viga simplesmente apoiada por actuação piezoeléctrica	137
Fig. 6.12 - Distribuição do potencial eléctrico na espessura em $x = L/2$	138
Fig. 6.13 - Distribuição do potencial eléctrico na direcção axial	139
Fig. 6.14 - Distribuição do deslocamento eléctrico D_z na direcção da espessura em $x = L/2$	139
Fig. 6.15 - Flecha relativa no meio da viga simplesmente apoiada em função da espessura relativa.....	140
Fig. 6.16 - Flecha da viga simplesmente apoiada para diferentes condições de fronteira eléctricas (resultados analíticos vs. numéricos)	142
Fig. 6.17 - Flecha da viga simplesmente apoiada para diferentes condições de fronteira eléctricas (resultados numéricos vs. numéricos de referência)	143
Fig. 6.18 - Distribuição do potencial eléctrico na espessura a meio da viga para as diferentes condições de fronteira eléctricas.....	144
Fig. 6.19 - Distribuição do potencial eléctrico na direcção axial para diferentes condições de fronteira eléctricas (centro: $z_p = 0$; topo: $z_p = 2.5$)	145
Fig. 6.20 - Distribuição do deslocamento eléctrico na direcção da espessura a meio do comprimento da viga.....	146
Fig. 6.21 - Flecha relativa no meio da viga simplesmente apoiada para várias condições de fronteira eléctricas em função da espessura relativa do núcleo.....	147
Fig. 6.22 - Deslocamentos axial e transversal induzidos por uma força de tracção a uma viga com sensores segmentados ou contínuos	148
Fig. 6.23 - Diferença de potencial eléctrico induzida por uma força de tracção a uma viga com sensores segmentados ou contínuos	149
Fig. 6.24 - Deslocamento axial e transversal induzidos por uma força transversal a uma viga com sensores segmentados ou contínuos	150

Fig. 6.25 - Diferença de potencial eléctrico induzida por uma força transversal a uma viga com sensores segmentados ou contínuos.....	150
Fig. 6.26 - Deslocamento axial e transversal induzidos por um momento a uma viga com sensores segmentados ou contínuos.....	151
Fig. 6.27 - Diferença de potencial eléctrico induzida por um momento a uma viga com sensores segmentados ou contínuos.....	152
Fig. 6.28 - Viga de alumínio encastrada-livre com uma camada piezoeléctrica colada na superfície (dimensões em mm).....	153
Fig. 6.29 - Razão das frequências naturais da viga piezoeléctrica de duas camadas simplesmente apoiada.....	157
Fig. 6.30 - Influência da espessura relativa do núcleo na razão das frequências naturais da viga simplesmente apoiada	158
Fig. 6.31 - Razões das frequências naturais das vigas fina e espessa para diferentes espessuras relativas do núcleo para a condição de eléctrodos em circuito fechado (CF)	159
Fig. 6.32 - Razões das frequências naturais das vigas fina e espessa para diferentes espessuras relativas do núcleo para a condição de eléctrodos em circuito aberto (CA)	160
Fig. 6.33 - Razões das frequências naturais das vigas fina e espessa para diferentes espessuras relativas do núcleo para a condição de camadas sem eléctrodos (SE)	161
Fig. 6.34 - Viga encastrada-livre com actuadores e sensores piezoeléctricos montados na superfície.....	162
Fig. 6.35 - Lugar geométrico das raízes do sistema em malha fechada com controlo por feedback do deslocamento para ganhos $G_p \in [0, +\infty]$	164
Fig. 6.36 - Função de resposta em frequência do tipo receptância (medida na extremidade livre da viga) dos sistemas em malha aberta e fechada com feedback do deslocamento	164
Fig. 6.37 - Resposta em regime livre e tensão de controlo da viga em malha aberta e malha fechada para diferentes ganhos de controlo proporcional.....	166
Fig. 6.38 - Lugar geométrico das raízes do sistema em malha fechada com controlo por feedback da velocidade com ganho constante para ganhos $G_d \in [0, +\infty]$	167
Fig. 6.39 - Função de resposta em frequência do tipo receptância (na extremidade livre da viga) dos sistemas em malha aberta e fechada com feedback da velocidade com ganho constante.....	168
Fig. 6.40 - Resposta em regime livre da viga em malha aberta e fechada para diferentes ganhos derivativos constantes.....	169
Fig. 6.41 - Tensão de controlo aplicada à viga em malha fechada para diferentes ganhos derivativos constantes.....	169
Fig. 6.42 - Resposta em regime livre da viga em malha aberta e fechada para diferentes amplitudes constantes	170
Fig. 6.43 - Tensão de controlo aplicada à viga em malha fechada para diferentes amplitudes constantes	170
Fig. 6.44 - Função de resposta em frequência do tipo receptância (medida na extremidade livre da viga) dos sistemas em malha aberta e fechada (LQR).....	172
Fig. 6.45 - Resposta em regime livre da viga em malha aberta e fechada (LQR).....	173
Fig. 6.46 - Tensão de controlo aplicada à viga em malha fechada (LQR)	173
Fig. 6.47 - Resposta em regime livre da viga em malha aberta e fechada (LQR e LQG) com uma densidade espectral do ruído de saída $S_v = 10^3$	175

Fig. 6.48 - Tensão de controlo aplicada à viga em malha fechada (LQR e LQG) com uma densidade espectral do ruído de saída $S_v = 10^3$	175
Fig. 6.49 - Resposta em regime livre da viga em malha aberta e fechada (LQR e LQG) com uma densidade espectral do ruído de saída $S_v = 10^{-3}$	176
Fig. 6.50 - Tensão de controlo aplicada à viga em malha fechada (LQR e LQG) com uma densidade espectral do ruído de saída $S_v = 10^{-3}$	176
Fig. 6.51 - Resposta em regime livre da viga em malha aberta e fechada (LQR e LQG) com uma densidade espectral do ruído de saída $S_v = 10^{-6}$	177
Fig. 6.52 - Tensão de controlo aplicada ao actuador em malha fechada (LQR e LQG) com uma densidade espectral do ruído de saída $S_v = 10^{-6}$	177
Fig. 6.53 - Resposta em regime forçado da viga em malha aberta e fechada a uma perturbação mecânica do tipo ruído branco aplicada na extremidade livre	178
Fig. 6.54 - Tensão de controlo aplicada ao actuador em malha fechada (LQG) para uma perturbação mecânica do tipo ruído branco aplicada na extremidade livre	179
Fig. 6.55 - Montagem experimental da viga encastrada-livre inteligente utilizada na análise da acção estática dos actuadores	180
Fig. 6.56 - Montagem das cerâmicas piezoeléctricas: vista de lado e vista de cima.....	180
Fig. 6.57 - Transdutor de deslocamento capacitivo (Phillips - PR6423)	181
Fig. 6.58 - Flecha da viga em função da tensão aplicada: resultados numéricos vs. experimentais	182
Fig. 6.59 - Montagem experimental da viga inteligente utilizada no controlo activo de vibrações e ponto de medição do transdutor laser.....	183
Fig. 6.60 - Equipamento utilizado no ensaio: a) Amplificador operacional ; b) Analisador dinâmico de sinal (Brüel & Kjær - 2035) e controlador do transdutor laser (Polytec - OFV 3001) ; c) Unidade de medição do transdutor laser (Polytec - OFV 303) ; d) Osciloscópio digital (LeCroy - 9450A) e filtro (KROHN-HITE - 3550)	183
Fig. 6.61 - Esquema representativo da montagem experimental do sistema de controlo por feedback da velocidade	184
Fig. 6.62 - Função de resposta em frequência entre a velocidade (medida em $x = 385$ mm) e a tensão do actuador em malha aberta.....	185
Fig. 6.63 - Coerência da função de resposta em frequência experimental em malha aberta .	185
Fig. 6.64 - Lugar geométrico das raízes do sistema em malha fechada com feedback da velocidade para ganhos compreendidos no intervalo $[-\infty, 0]$	186
Fig. 6.65 - Lugar geométrico das raízes do sistema em malha fechada com feedback da velocidade para ganhos compreendidos no intervalo $[0, +\infty]$	187
Fig. 6.66 - Lugar geométrico das raízes do sistema em malha fechada com feedback da velocidade filtrada para ganhos compreendidos no intervalo $[0, +\infty]$	188
Fig. 6.67 - Função de resposta em frequência entre a velocidade filtrada (medida em $x = 385$ mm) e a tensão do actuador em malha fechada para um ganho $G = 80$	188
Fig. 6.68 - Função de resposta em frequência entre a velocidade filtrada (medida em $x = 385$ mm) e a tensão do actuador em malha fechada para um ganho $G = 160$	189
Fig. 6.69 - Função de resposta em frequência entre a velocidade filtrada (medida em $x = 385$ mm) e a tensão do actuador em malha fechada para um ganho $G = 240$	189

Fig. 6.70 - Função de resposta em frequência entre a velocidade filtrada (medida em $x = 385$ mm) e a tensão do actuador em malha fechada para um ganho $G = 400$	190
Fig. 6.71 - Função de resposta em frequência entre a velocidade filtrada (medida em $x = 385$ mm) e a tensão do actuador em malha fechada para um ganho $G = 560$	190
Fig. 6.72 - Função de resposta em frequência entre a velocidade filtrada (medida em $x = 385$ mm) e a tensão do actuador em malha fechada para um ganho $G = 800$	191
Fig. 6.73 - Razão de amortecimento modal obtida com o modelo experimental	191
Fig. 6.74 - Razão de amortecimento modal obtida com o modelo numérico	192
Fig. 6.75 - Função de resposta em frequência entre a velocidade (medida em $x = 385$ mm) e a tensão do actuador em malha fechada para um ganho $G = 160$	193
Fig. 6.76 - Função de resposta em frequência entre a velocidade (medida em $x = 385$ mm) e a tensão do actuador em malha fechada para um ganho $G = -160$	193
Fig. 6.77 - Função de resposta em frequência entre a velocidade (medida em $x = 385$ mm) e a tensão do actuador em malha fechada para um ganho $G = 400$	194
Fig. 6.78 - Função de resposta em frequência entre a velocidade (medida em $x = 385$ mm) e a tensão do actuador em malha fechada para um ganho $G = -400$	194
Fig. 6.79 - Resposta em regime livre do sistema em malha aberta determinada com o modelo experimental e numérico	195
Fig. 6.80 - Resposta em regime livre (numérica e experimental) e tensão de controlo (numérica) do sistema em malha fechada filtrado para os valores de ganho	196
Fig. 6.81 - Resposta em regime livre (numérica e experimental) e tensão de controlo (numérica) do sistema em malha fechada filtrado para os valores de ganho $G = 240, 400$	197
Fig. 6.82 - Resposta em regime livre (numérica e experimental) e tensão de controlo (numérica) do sistema em malha fechada filtrado para os valores de ganho $G = 560, 800$	198
Fig. 6.83 - Razão de amortecimento da resposta em regime livre dos modelos experimental e numérico em malha fechada para os diferentes ganhos de controlo	198
Fig. 6.84 - Tempo de estabelecimento a 2 % das respostas em regime livre dos modelos experimental e numérico em malha fechada para os diferentes ganhos de controlo	199
Fig. 6.85 - Resposta em regime livre (numérica e experimental) e tensão de controlo (numérica) do sistema em malha fechada para os valores de ganho $G = 160, 200$ e 240	200
Fig. 6.86 - Esquema representativo da montagem experimental do sistema de controlo por feedback do deslocamento	201
Fig. 6.87 - Martelo de impacto Brüel & Kjær - 8203	201
Fig. 6.88 - Função de resposta em frequência mobilidade directa (a 15 mm da extremidade livre da viga) do sistema em malha aberta: 1º modo	202
Fig. 6.89 - Função de resposta em frequência mobilidade directa (a 15 mm da extremidade livre da viga) do sistema em malha aberta: 2º modo	202
Fig. 6.90 - Lugar geométrico das raízes do sistema em malha fechada com feedback do deslocamento para ganhos compreendidos no intervalo $[-\infty, 0]$	203
Fig. 6.91 - Lugar geométrico das raízes do sistema em malha fechada com feedback do deslocamento para ganhos compreendidos no intervalo $[0, +\infty]$	204

Fig. 6.92 - Função de resposta em frequência mobilidade directa (a 15 mm da extremidade livre da viga) do sistema em malha fechada: 1º modo - resultados experimentais.....	205
Fig. 6.93 - Função de resposta em frequência mobilidade directa (a 15 mm da extremidade livre da viga) do sistema em malha fechada: 1º modo - resultados numéricos	205
Fig. 6.94 - Função de resposta em frequência mobilidade directa (a 15 mm da extremidade livre da viga) do sistema em malha fechada: 2º modo - resultados experimentais.....	206
Fig. 6.95 - Função de resposta em frequência mobilidade directa (a 15 mm da extremidade livre da viga) do sistema em malha fechada: 2º modo - resultados numéricos	206
Fig. 6.96 - Razão de amortecimento do 1º modo do sistema em malha fechada com feedback do deslocamento (resultados experimentais vs. numéricos).....	207
Fig. 6.97 - Razão de amortecimento do 2º modo do sistema em malha fechada com feedback do deslocamento (resultados experimentais vs. numéricos).....	207
Fig. 6.98 - Resposta em regime livre (numérica e experimental) e tensão de controlo (numérica) do sistema em malha fechada filtrado para os valores de ganho $G_p = 5,10$	209
Fig. 6.99 - Resposta em regime livre (numérica e experimental) e tensão de controlo (numérica) do sistema em malha fechada filtrado para os valores de ganho $G_p = 20,30$	210
Fig. 6.100 - Razão de amortecimento da resposta em regime livre do sistema em malha fechada com feedback do deslocamento para os diferentes ganhos de controlo.....	210

Índice de Tabelas

Tab. 2.1 - Propriedades materiais típicas do PZT e PVDF	27
Tab. 2.2 - Alguns efeitos em materiais (acoplamento fora da diagonal → materiais inteligentes).....	29
Tab. 2.3 - Propriedades típicas das shape memory alloys	29
Tab. 2.4 - Comparação das propriedades típicas dos fluídos ER e MR	37
Tab. 2.5 - Notação matricial	44
Tab. 6.1 - Frequências naturais da viga de alumínio encastrada-livre com uma camada piezoelétrica colada na superfície [Hz]	154
Tab. 6.2 - Frequências naturais da viga piezoelétrica de duas camadas simplesmente apoiada [Hz].....	156
Tab. 6.3 - Amortecimentos modais e tempo de estabelecimento a 2% dos sistemas em malha aberta e fechada com feedback do deslocamento	165
Tab. 6.4 - Amortecimentos modais e tempo de estabelecimento a 2% dos sistemas em malha aberta e fechada com feedback da velocidade com ganho constante	168
Tab. 6.5 - Tempo de estabelecimento a 2, 5 e 10% dos sistemas em malha aberta e fechada com feedback da velocidade com amplitude constante.....	171
Tab. 6.6 - Amortecimentos modais e tempo de estabelecimento a 2% dos sistemas em malha aberta e fechada com feedback da velocidade com ganho constante e LQR	173
Tab. 6.7 - Frequências naturais do sistema em malha aberta [Hz]	186

Nomenclatura

Índices

- k índice das camadas da viga ($k = 1, 2, 3$)
 n índice do núcleo da viga ($n \equiv 2$)
 p índice das camadas piezoeléctricas da viga ($p = 1, 3$)
 $(\bullet)^D$ valores a deslocamento eléctrico constante
 $(\bullet)^E$ valores a campo eléctrico constante
 $(\bullet)^S$ valores a deformação constante
 $(\bullet)^T$ valores a tensão constante
 $(\bullet)^{(\phi)}$ valores para diferença de potencial eléctrico prescrita
 $(\bullet)^{(r)}$ valores para densidade de carga eléctrica prescrita
 $(\bullet)^{(Q)}$ valores para carga eléctrica total prescrita
 $(\bullet)_a$ termos relativos aos actuadores
 $(\bullet)_s$ termos relativos aos sensores

Propriedades Geométricas

- A_k área da secção recta
 A_p^e área do eléctrodo
 b largura da viga
 h_k espessura
 $\bar{I}_k$ momento estático
 I_k momento de segunda ordem
 k_c factor de correcção de corte
 L comprimento da viga

S_p^e superfície do eléctrodo

V_k volume

Propriedades dos Materiais

c_{11}^{*k} rigidez longitudinal modificada

$\bar{c}_{11}^{*p}$ rigidez efectiva

$\bar{c}_{55}^p$ rigidez transversal efectiva

$[c], [s]$ matrizes constitutivas elásticas

e_{31}^{*p} constante piezoeléctrica modificada

$[e], [d], [g], [h]$ matrizes constitutivas piezoeléctricas

$[\varepsilon], [\beta]$ matrizes constitutivas dieléctricas

ε_{33}^{*p} constante dieléctrica modificada

ρ_k massa volúmica

Grandezas Escalares

C, C_0 capacitância

D_x^p deslocamento eléctrico na direcção axial

D_z^p deslocamento eléctrico na direcção transversal

E_x^p campo eléctrico axial

E_z^p campo eléctrico transversal

$\bar{E}_x^p$ campo eléctrico axial induzido

$\bar{E}_z^p$ campo eléctrico transversal induzido

F_x^k, F_z^k forças volúmicas axiais e transversais

G ganho de controlo

G_d ganho de controlo derivativo

G_p ganho de controlo proporcional

$\mathcal{H}$ entalpia eléctrica

H função Hamiltoniana do sistema

J, J_∞ função de custo

J^*	função de custo aumentada
$\mathcal{L}$	função Lagrangeana do sistema
M_k	momentos
Q_p	carga eléctrica total
S_{xx}^k	deformação axial
S_{xz}^k	deformação de corte transverso
S_m^k	deformação de membrana
S_{mf}^p	deformação de membrana/flexão
S_f^k	deformação de flexão
S_c^k	deformação de corte
$\mathcal{T}$	energia cinética
T_{xx}^k	tensão axial
T_{xz}^k	tensão de corte transverso
$\mathcal{U}$	energia de deformação interna
u_0	deslocamento axial do plano médio
u_k	deslocamento axial
$\mathcal{W}$	trabalho realizado pelas forças electromecânicas exteriores
w_k, w_0, w	deslocamento transversal
X_k, Z_k	forças axiais e transversais
$\bar{z}_p$	termo geométrico relativo ao acoplamento membrana/flexão
z_p^*	termo geométrico relativo à flexão
γ_k	ângulo de corte
$\delta\mathcal{H}$	trabalho virtual realizado pelas forças electromecânicas internas
$\delta\mathcal{H}_{uu}^k$	componente mecânica do trabalho virtual realizado pelas forças electromecânicas internas
$\delta\mathcal{H}_{u\phi}^p, \delta\mathcal{H}_{ur}^p$	componente piezoeléctrica do trabalho virtual realizado pelas forças electromecânicas internas

$\delta\hat{\mathcal{H}}_{u\phi}$	componente piezoelétrica do trabalho virtual realizado pelas forças electromecânicas internas com igual diferença de potencial eléctrico
$\delta\tilde{\mathcal{H}}_{u\phi}$	componente piezoelétrica do trabalho virtual realizado pelas forças electromecânicas internas com diferenças de potencial eléctrico simétricas
$\delta\bar{\mathcal{H}}_{u\phi}^p, \delta\bar{\mathcal{H}}_{ur}^p$	componente piezoelétrica induzida do trabalho virtual realizado pelas forças electromecânicas internas
$\delta\mathcal{H}_{\phi\phi}^p, \delta\mathcal{H}_{\tau\tau}^p$	componente dielétrica do trabalho virtual realizado pelas forças electromecânicas internas
$\delta\bar{\mathcal{H}}_{\phi\phi}^p, \delta\bar{\mathcal{H}}_{\tau\tau}^p$	componente dielétrica induzida do trabalho virtual realizado pelas forças electromecânicas internas
$\delta\hat{\mathcal{H}}_{ur}^p, \delta\hat{\mathcal{H}}_{tu}^p$	componente piezoelétrica do trabalho virtual realizado pelas forças electromecânicas internas
$\delta\hat{\mathcal{H}}_{\tau\tau u}^p, \delta\hat{\mathcal{H}}_{\tau\tau u}^p$	componentes dielétrica do trabalho virtual realizado pelas forças electromecânicas internas
$\delta\mathcal{T}$	trabalho virtual realizado pelas forças de inércia
$\delta\mathcal{W}$	trabalho virtual realizado pelas forças electromecânicas exteriores
$\delta\mathcal{W}_u$	trabalho virtual realizado pelas forças mecânicas exteriores
$\delta\mathcal{W}_\phi$	trabalho virtual realizado pela carga eléctrica superficial
θ_k	rotação
ξ	razão de amortecimento
φ_p	potencial eléctrico
ϕ_p	diferença de potencial eléctrico
w	frequência
w_d	frequência natural amortecida
w_n	frequência natural não amortecida

Grandezas Vectoriais e Matriciais

A	matriz de sistema
----------------	-------------------

B	matriz de controlo
B_u	matriz de controlo mecânica
B_φ	matriz de controlo eléctrica
$[B_u^k]$	matriz das deformações mecânicas
$[B_\phi^p], [B_{\phi z}^p]$	matriz das deformações eléctricas
$[\bar{B}_\phi^p]$	matriz das deformações eléctricas induzidas
$[\bar{B}_{\phi x}^p], [\bar{B}_{\phi z}^p]$	matriz das deformações eléctricas induzidas nas direcções axial e transversal
$[B_{uxx}^p]$	matriz das deformações mecânicas axiais
$[B_{uf}^p], [B_{uc}^p]$	matrizes das deformações mecânicas de flexão e corte
C	matriz de saída de estados
C	matriz de controlabilidade
D	matriz de saída de controlo
$\{D\}$	vector deslocamento eléctrico
$[D_{uu}]$	matriz de amortecimento viscoso
e	erro do observador de estados
$\{E\}$	vector campo eléctrico
$\{F_u\}$	vector de forças mecânicas global
$\{F_\phi\}$	vector de forças eléctricas global
$\{f\}$	vector de forças mecânicas do elemento
$[H_k]$	matriz de acoplamento dos graus de liberdade mecânicos
K_g	matriz de ganho de controlo
K_g[*]	matriz de ganho de controlo óptimo
K_e	matriz de ganho do observador de estados
$[K_{uu}]$	matriz de rigidez mecânica global
$[K_{uu}^*]$	matriz de rigidez mecânica global condensada
$[K_{u\phi}], [K_{\phi u}]$	matriz de rigidez electromecânica global

$[K_{\phi\phi}]$	matriz de rigidez eléctrica global
$[k_{uu}]$	matriz de rigidez mecânica do elemento
$[\bar{k}_{uu}]$	matriz de rigidez mecânica induzida do elemento
$[k_{u\phi}], [k_{\phi u}]$	matriz de rigidez electromecânica do elemento
$[k_{\phi\phi}]$	matriz de rigidez eléctrica do elemento
$[L_u^k], [L_\phi^p]$	operadores diferenciais
$[L_{um}^k]$	operador diferencial - esforços de membrana
$[L_{umf}^k]$	operador diferencial - esforços de membrana/flexão
$[L_{uf}^k]$	operador diferencial - esforços de flexão
$[L_{uc}^k]$	operador diferencial - esforços de corte
$[M_{uu}]$	matriz de massa global
$[m_{uu}]$	matriz de massa do elemento
$[N_u], [N_\phi]$	matrizes de funções de forma
O	matriz de observabilidade
$P, P^\infty, \bar{P}$	matrizes de soluções
Q	matriz de ponderação dos estados
$\{Q\}$	vector de cargas eléctricas global
$\{q\}$	vector de cargas eléctricas do elemento
R	matriz de ponderação do controlo
r	vector de entradas
S_v	densidade espectral do ruído de saída
S_w	densidade espectral do ruído de entrada
$\{S\}$	vector das deformações mecânicas
$\{T\}$	vector das tensões mecânicas
u	vector de controlo
$\{\bar{U}\}$	vector de amplitudes de vibração

$\{u\}$	vector de deslocamentos generalizados
$\{\bar{u}_e\}$	vector de graus de liberdade mecânicos do elemento
$\{\bar{u}\}$	vector de graus de liberdade mecânicos global
V	matriz de covariância do ruído de saída
v	ruído de saída
W	matriz de covariância do ruído de entrada
w	ruído de entrada
x	vector de estados
y	vector de saídas
$\{\eta\}$	vector de coordenadas modais
λ	multiplicador de Lagrange
$[\Phi]$	matriz modal
$\{\phi\}$	vector de diferenças de potencial eléctrico generalizadas
$\{\bar{\phi}_e\}$	vector de graus de liberdade eléctricos do elemento
$\{\bar{\phi}\}$	vector de graus de liberdade eléctricos global
$[\Psi]$	matriz modal normalizada
$[\hat{\Psi}]$	matriz modal normalizada truncada
$[w_n^2]$	matriz dos valores próprios

Operações Matemáticas

$(\bullet)'$	derivada relativamente à direcção x , $\partial(\bullet)/\partial x$
$\dot{(\bullet)}$	derivada relativamente ao tempo t , $\partial(\bullet)/\partial t$
$\delta(\bullet)$	variação virtual da quantidade $(\bullet)$

Abreviaturas

AP	acoplamento piezoeléctrico
CA	circuito aberto
CF	circuito fechado
LQG	<i>linear quadratic gaussian</i>

LQR.....	<i>linear quadratic regulator</i>
PAP.....	pequeno acoplamento piezoelétrico
PT	presente teoria
SE	sem eléctrodos
TD.....	teoria desacoplada

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivações

As vibrações estruturais podem tornar-se bastante indesejáveis em certas situações, pois elas podem originar vários tipos de problemas, tais como fadiga estrutural, transmissão de vibrações a outros sistemas, perturbações sonoras no ambiente de trabalho, etc. No entanto, é possível limitar os seus efeitos, fundamentalmente graças a três tipos de técnicas de redução de vibrações. A primeira é a técnica da anulação, sobretudo utilizada para eliminar o ruído provocado pela vibração, e não a vibração em si, e concretiza-se através da criação duma fonte de ruído secundária que emite o negativo do ruído primário, a fim de se conseguir uma anulação das duas fontes. A segunda é o isolamento, que consiste em eliminar a transmissão de vibrações de um sistema para outro, sem no entanto eliminar as vibrações do sistema emissor. Finalmente, o terceiro grupo de técnicas, ditas de atenuação, é utilizado para diminuir as amplitudes de vibração de um sistema. As técnicas de atenuação consistem em reduzir as amplitudes das vibrações estruturais quando as frequências de excitação se encontram próximas das frequências naturais de vibração da estrutura. Em geral, elas podem ser classificadas de técnicas passivas, activas ou híbridas.

As técnicas passivas de amortecimento de vibrações estruturais recorrem à integração de novos materiais ou sistemas na estrutura, os quais possuem qualidades dissipadoras de energia. Quando esses sistemas ou materiais são acoplados à estrutura, eles introduzem um maior amortecimento na estrutura, originando assim um amortecimento passivo, isto é, sem nenhuma intervenção exterior adicional. Os revestimentos constituídos por materiais poliméricos viscoelásticos constituem tratamentos bastante eficientes na redução das amplitudes de ressonância das estruturas em vibração. Esses materiais possuem a característica de passar de um estado de baixa rigidez, a temperaturas elevadas e baixas frequências, para um outro mais rígido, na situação oposta. Assim, na região de transição

entre estes dois estados, onde as suas propriedades variam rapidamente, estes materiais são capazes de transformar a energia de deformação em energia térmica, permitindo assim dissipar na forma de calor a energia vibratória da estrutura na qual os revestimentos são aplicados. Este tipo de revestimento foi demonstrado ser bastante mais eficiente (Nashif *et al.*, 1985; Moreira, 1996) quando eles são cobertos por uma camada elástica de rigidez superior, permitindo assim que deformações de corte sejam criadas, o que dá lugar a uma maior dissipação de energia (fig. 1.1). Esse tipo de revestimento é denominado por revestimento passivo com camada de restrição.

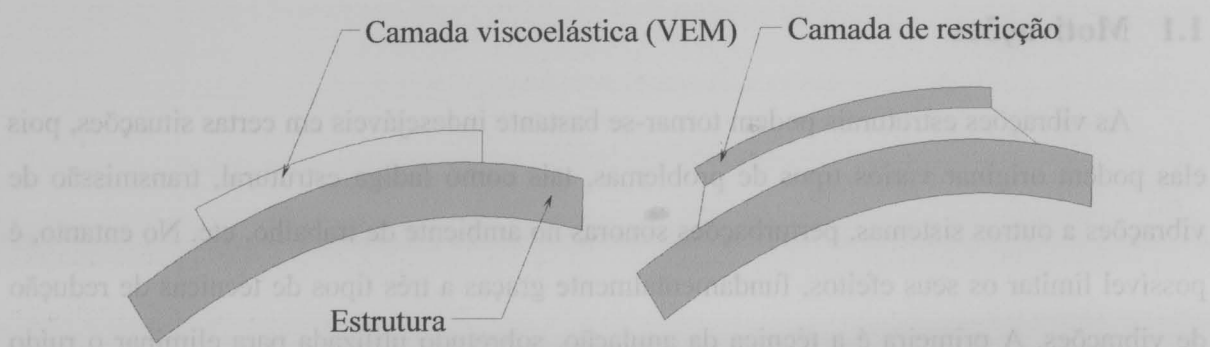


Fig. 1.1 - Mecanismo de amortecimento por revestimento com e sem camada de restrição

As técnicas activas permitem controlar a vibração em cada instante, recorrendo a actuadores que agem sobre a estrutura segundo uma lei de comando de forma a minimizar e controlar o índice de vibração medido em determinado(s) ponto(s) da estrutura. É o princípio do controlo activo de vibrações. Essas medições são baseadas numa referência, ou são fornecidas recorrendo a sensores que são integrados na estrutura. No primeiro caso, o sistema é designado por *feedforward*, enquanto que no segundo é designado por *feedback*, em que este último se deve ao feedback das medições efectuadas na estrutura sobre a forma de uma acção de controlo de vibrações (Preumont, 1997).

Uma estrutura contendo actuadores e sensores colados ou integrados e relacionados por um sistema de controlo (fig. 1.2) é dita *inteligente* ou adaptativa. De facto, as medições efectuadas pelos sensores são tratadas por um sistema de controlo apropriado, que em seguida transmite aos actuadores um sinal capaz de modificar o comportamento da estrutura, adaptando-a a um comportamento pretendido.

Existem diversas formas de construir uma estrutura *inteligente* a partir de uma estrutura base. Essa concepção consiste em escolher os actuadores, sensores e sistemas de controlo.

Os actuadores e sensores são normalmente fabricados a partir de materiais ditos *inteligentes*, capazes de produzir uma acção distribuída, obtida pela relação natural entre as suas deformações ou tensões e diversos factores externos como o campo eléctrico, magnético, temperatura, etc. De entre os materiais ditos *inteligentes*, os mais utilizados na área das estruturas são os cerâmicos e polímeros piezoeléctricos.

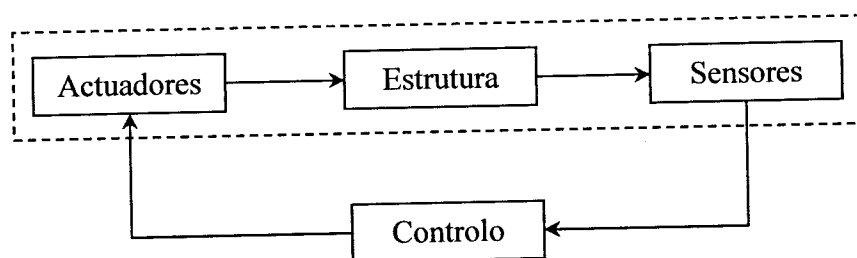


Fig. 1.2 - Definição de uma estrutura inteligente

Os actuadores construídos a partir de cerâmicas piezoeléctricas à base de Chumbo, Zircónio e Titânio (PZT) deformam-se logo que lhes é aplicada uma determinada diferença de potencial eléctrico (efeito inverso), e induzem uma diferença de potencial eléctrico quando são deformados (efeito directo). Esses actuadores fazem parte de uma família de actuadores distribuídos que, contrariamente aos actuadores pontuais, actuam através de forças distribuídas sobre a sua superfície. Esses materiais podem também funcionar como sensores, fornecendo em cada instante um valor médio das deformações da região da estrutura em contacto com a superfície do sensor. No entanto, outros sensores podem ser utilizados, nomeadamente os ditos sensores discretos do tipo acelerómetro ou óptico. O interesse dos actuadores e sensores distribuídos prende-se com o facto de que eles permitem controlar uma banda de frequência larga através de um sistema de controlo que é integrado na estrutura, o que implica um menor atravancamento, uma vez que eles são integrados na estrutura, apenas necessitando de cabos de conexão com o controlador. Nessa classe de controlo existem vários sistemas de controlo integrados que diferem em função da configuração sensor/actuador/estrutura.

A necessidade de sistemas de controlo fiáveis e robustos, como o controlo passivo, e eficazes e comandáveis, como o controlo activo, motivou muito recentemente o desenvolvimento de sistemas de controlo híbrido activo-passivo (fig. 1.3), utilizando-se no mesmo tratamento materiais viscoelásticos (técnicas passivas) e piezoeléctricos (técnicas activas). O primeiro assegura a fiabilidade e a robustez, pois em caso de mau funcionamento do controlo activo o sistema permanece amortecido, enquanto que o segundo permite

melhorar as performances do sistema para as frequências mais baixas. Os dois sistemas de controlo agem assim em complementaridade.

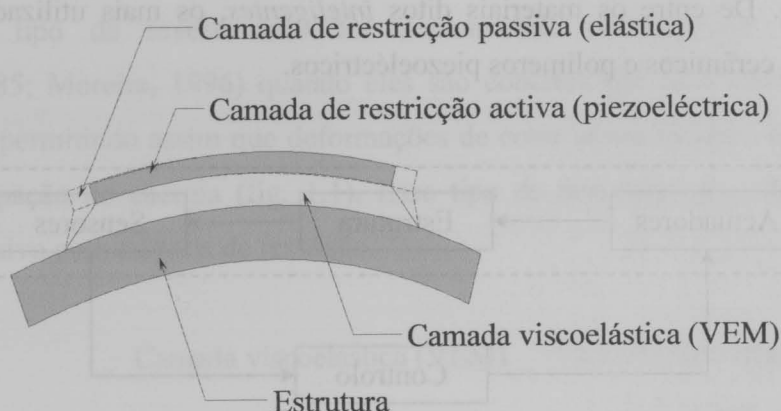


Fig. 1.3 - Mecanismo de amortecimento híbrido (activo/passivo)

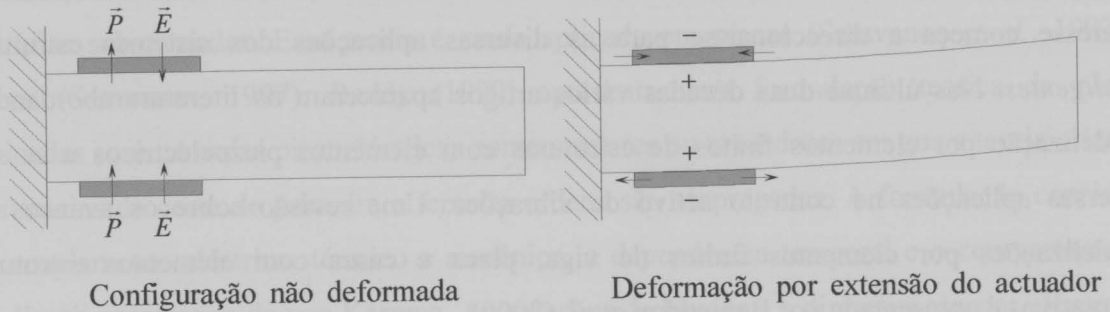
Os actuadores piezoelétricos considerados até aqui são colados sobre a superfície das estruturas produzindo deformações de membrana logo que eles são accionados por uma diferença de potencial eléctrico. Nessa configuração, o campo eléctrico imposto e a polarização do material piezoelétrico têm a mesma direcção (transversal), e o acoplamento electromecânico dá-se pela constante piezoelétrica e_{31} . Esse mecanismo, denominado mecanismo de acção por extensão (fig. 1.4a), constitui a maioria das aplicações dos actuadores piezoelétricos no controlo de vibrações. No entanto, diversas configurações dos actuadores e sensores são apresentadas na literatura a fim de se estudar a interacção entre eles e a estrutura base.

Porém, o progresso na fabricação de compósitos suscitou um grande interesse pelos actuadores integrados. Assim, são também utilizados actuadores integrados no controlo de vibrações recorrendo à utilização de fibras piezoelétricas (Sun e Tong, 2001). No entanto, é conhecido que os actuadores por extensão têm uma melhor performance quando eles estão colocados numa posição mais afastada do plano médio da estrutura, introduzindo momentos mais importantes na estrutura. Nesse caso eles ficam mais susceptíveis à rotura uma vez que eles ficam sujeitos a tensões e deformações mais elevadas.

Recentemente, começam a surgir na literatura (Sun e Zhang, 1995; Benjeddou *et al.*, 1999) aplicações em que é proposta a utilização de actuadores por efeito de corte. Esses actuadores, contrariamente aos de extensão, são polarizados longitudinalmente por forma a induzirem deformações de corte quando são accionados por um campo eléctrico transversal.

Dessa forma, o acoplamento electromecânico dá-se pela constante piezoelétrica e_{15} (fig. 1.4b).

a) Mecanismo de acção por extensão



b) Mecanismo de acção por corte

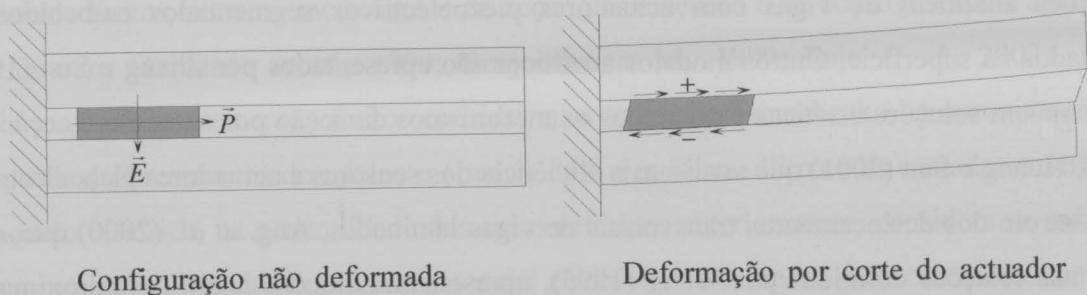


Fig. 1.4 - Representação dos mecanismos de acção por extensão e corte

A utilização deste tipo de acção no controlo activo de vibrações tem sido objecto de estudo (Trindade *et al.*, 1999; Raja *et al.*, 2002), onde o mecanismo de acção por corte se mostra uma alternativa eficiente. Um estudo estático comparativo, com um código de elementos finitos comercial, de uma viga encastrada-livre, utilizando os modos de corte e de extensão de um actuador piezoelétrico mostrou que a acção de corte, para frequências elevadas e pequenas amplitudes, pode tornar-se mais eficaz que a acção por extensão (Sun e Zhang, 1995). Essas conclusões viriam a ser verificadas mais tarde por uma solução analítica apresentada por Zhang e Sun (1996). Foi demonstrado que as tensões nas interfaces da estrutura, relativamente ao actuador por extensão, são mais baixas com o actuador por corte, o que pode trazer vantagens no impedimento da delaminação e da rotura do material piezoelétrico.

1.2 Revisão Bibliográfica

Desde os anos 70 vários modelos de elementos finitos foram propostos para a análise de estruturas com elementos piezoelétricos. Esses modelos, até ao início dos anos 90, foram principalmente dedicados aos transdutores ultra-sónicos. No entanto, no final dos anos 80, o interesse começa a direccionar-se para as diversas aplicações dos sistemas estruturais *inteligentes*. Nas últimas duas décadas vários artigos apareceram na literatura abordando a modelização por elementos finitos de estruturas com elementos piezoelétricos e as suas diversas aplicações no controlo activo de vibrações. Uma revisão sobre os avanços nas modelizações por elementos finitos de viga, placa e casca com elementos estruturais adaptativos é apresentada por Benjeddou *et al.* (2000).

Um dos primeiros trabalhos apresentando a utilização de actuadores piezoelétricos como elementos estruturais *inteligentes* deve-se a Crawley e de Luis (1987) que apresentaram soluções analíticas de vigas com actuadores piezoelétricos segmentados embebidos ou montados na superfície. Outros modelos analíticos são apresentados por Zhang e Sun (1996) que expõem soluções estáticas para ambos os mecanismos de acção por extensão e acção por corte, Huang e Sun (2001) que analisam a eficiência dos sensores e actuadores piezoelétricos no controlo dos deslocamentos transversais de vigas laminadas, Ang. *et al.* (2000) que, com base nas relações definidas por Wang (1995), apresentam soluções analíticas aproximadas, assentes na solução apresentada por Gaudenzi e Borboni (1999) para vigas com actuadores por deformação segundo a teoria de Euler-Bernoulli, a vigas segundo a teoria de Timoshenko.

No início deste desenvolvimento, a teoria de mais baixa ordem era utilizada na aproximação do campo eléctrico, não levando em consideração a influência das deformações mecânicas. Os modelos resultantes eram então idênticos na sua forma às equações que governam o comportamento estrutural sob a acção de tensões térmicas. Alguns exemplos são os trabalhos de Lee (1992) e Tzou (1993). A incorporação de teorias de ordem mais elevada na aproximação do potencial eléctrico foi efectuada por Tiersten (1993), Rogacheva (1994) e Yang (1999), mas restringida a aplicações com uma única camada piezoelétrica. Aplicações em vigas sandwich, com núcleo ou peles piezoelétricas, com o potencial eléctrico aproximado por teorias de segunda ordem foram analisadas, por exemplo, por Benjeddou *et al.* (1997) e Yang (1999).

Modelos mais generalizados permitindo melhores representações dos efeitos intralaminares e inter-laminares localizados, com teorias de deformações de corte de primeira ordem, são apresentados por Robbins e Reddy (1991) em que a teoria layerwise é aplicada na

análise de uma viga laminada com camadas piezoeléctricas, sem no entanto considerar o efeito do acoplamento electromecânico. Saravanos e Heyliger (1995) modificam a teoria de Robbins e Reddy (1991) para uma teoria electromecânica acoplada em que uma distribuição linear do potencial eléctrico é considerada. Tal teoria, no entanto, é capaz de reflectir uma distribuição não-linear do potencial eléctrico subdividindo as camadas piezoeléctricas em múltiplas sub-camadas. Essa teoria é ainda aplicada em placas (Saravanos *et al.*, 1997) e cascas (Saravanos, 1997). Reddy (1999) apresenta uma formulação teórica de placas laminadas com camadas piezoeléctricas como sensores ou actuadores em que a teoria clássica e as teorias de corte de primeira e terceira ordens são empregadas. A formulação considera um acoplamento eléctrico, térmico e mecânico, a dependência temporal e o comportamento não-linear geométrico de von Kármán. As soluções de Navier e a discretização por elementos finitos são apresentadas.

Diversas análises comparativas, assentes em formulações variacionais e modelos de elementos finitos, entre os mecanismos de acção por extensão e de acção por corte aparecem na literatura (Trindade *et al.*, 1999; Benjeddou *et al.*, 1999; Raja *et al.*, 2002). Essas modelizações por elementos finitos consideram a teoria de Timoshenko na aproximação do campo de deslocamentos do núcleo e a teoria de Euler-Bernoulli para as camadas exteriores. O modelo eléctrico, na generalidade dos casos referidos anteriormente, considera no máximo uma aproximação quadrática para o potencial eléctrico das camadas piezoeléctricas, sem que os efeitos do campo eléctrico induzido na direcção axial sejam considerados. Krommer e Irschik (1998) apresentam uma solução analítica em que incorporam o efeito piezoeléctrico directo no acoplamento electromecânico através de aproximações das componentes axial do campo ou deslocamento eléctricos, e transversal do campo eléctrico. Os efeitos do corte e da inércia de rotação são também levados em consideração, e a teoria de Timoshenko para uma única camada equivalente é considerada na análise estática e modal de vigas *inteligentes*. Um outro estudo é realizado por Krommer (2001) em que diferentes condições de fronteira eléctricas, nomeadamente camadas piezoeléctricas com diferença de potencial eléctrico ou carga eléctrica total prescrita nos eléctrodos ou camadas sem eléctrodos, são analisadas numa viga segundo a teoria de Euler-Bernoulli. No entanto, o seu estudo fica limitado a soluções analíticas unidimensionais que são validadas por comparação com resultados bidimensionais obtidos com códigos de elementos finitos comerciais. Outros estudos analíticos são apresentados por Irschik e Krommer (1998), que incorporam os efeitos piroeléctrico e piezoeléctrico directo na teoria das vigas através de parâmetros efectivos de rigidez, e que analisam as deformações induzidas por efeitos térmicos e as frequências naturais. Irschik *et*

al. (1998, 1999) analisam a influência da forma dos sensores e actuadores piezoelétricos nas vibrações transversais de vigas *inteligentes* assentes em formulações analíticas dos modelos mecânico, eléctrico e térmico, mais precisas.

Um considerável trabalho de investigação tem sido realizado na área do controlo activo/híbrido de vibrações nos últimos anos. Sobre o controlo activo de vibrações, Preumont (1997) apresenta um texto abrangente abordando o tema estruturas e materiais *inteligentes*, em que apresenta diferentes estratégias de controlo. Anderson e Hagood (1994) apresentam um estudo efectuado numa viga com actuação e sensorização piezoelétrica simultânea em que, assentes numa formulação pelo método de Rayleigh-Ritz, a modelização e implementação (numérica e experimental) do controlo estrutural são investigadas. Fenómenos não lineares no controlo estrutural são analisados por Pai *et al.* (1998) e Yishai e Pinhas (2000).

Estudos sobre a determinação das localizações óptimas dos actuadores e sensores no controlo estrutural são estudadas por Hiramoto *et al.* (2000), Wang e Wang (2001), Ribeiro *et al.* (2000) e Barboni *et al.* (2000)

Modelizações do controlo híbrido de vibrações são apresentadas por Baz e Ro (1995), Baz (1998) e Trindade *et al.* (2000, 2001a, 2001b).

1.3 Objectivos

A aquisição de conhecimento geral na área dos materiais e estruturas *inteligentes* e a sua aplicação no controlo activo de vibrações é um objectivo fundamental neste trabalho.

Outro objectivo será a definição de uma metodologia que permita a formulação, por elementos finitos, de estruturas *inteligentes*, assente em modelos mecânicos e eléctricos precisos. Dessa forma, a formulação de um elemento finito de viga *inteligente* com três camadas que permita incorporar, com rigor, os efeitos do acoplamento electromecânico, para diferentes condições de fronteira eléctricas, em análises estáticas e dinâmicas, é pretendida.

A identificação, modelização e implementação, e uma análise criteriosa de possíveis algoritmos de controlo em aplicações de controlo activo de vibrações é igualmente um objectivo.

Finalmente, um último objectivo é a implementação em ambiente MATLAB® do elemento de viga *inteligente* por forma a conceber um programa para análises estáticas e dinâmicas que permita a análise e concepção de sistemas de controlo para o estudo do controlo activo de vibrações.

1.4 Organização da Dissertação

Por forma a cumprir os objectivos estipulados, esta dissertação é organizada em sete capítulos e três anexos. O capítulo 1 é apresentado como introdução ao trabalho realizado, em que as motivações, os objectivos do trabalho e a organização da tese são apresentados juntamente com uma revisão bibliográfica.

O capítulo 2 encontra-se dividido em três secções. Começa-se numa primeira secção por abordar o tema *estruturas inteligentes*, nomeadamente a sua definição e o seu enquadramento temporal. De seguida, uma descrição geral dos *materiais inteligentes* mais comuns nos dias de hoje é feita para, por fim, e dada a especial importância dos materiais piezoeléctricos na realização deste trabalho, se caracterizar com pormenor as equações constitutivas desses mesmos materiais.

No capítulo 3, a formulação teórica das equações do movimento, equações de equilíbrio electrostático e condições de fronteira de uma viga sandwich piezoeléctrica com três camadas é apresentada. Para a definição do campo de deslocamentos é considerada a teoria *layerwise* em que se admite o efeito de corte transversal em cada uma das camadas. Em seguida, as leis constitutivas dos materiais piezoeléctricos standard são descritas com base nas simplificações tipicamente efectuadas nas vigas. O campo eléctrico exterior a que as camadas piezoeléctricas são sujeitas e as diferentes hipóteses para as condições de fronteira eléctricas são também discutidas. Finalmente, e por forma a obter as equações do movimento e as respectivas condições fronteira, é aplicado o princípio de Hamilton com base nos trabalhos virtuais realizados pelas forças electromecânicas internas, externas e de inércia.

No capítulo 4, o modelo analítico apresentado no capítulo 3 é discretizado pelo método dos elementos finitos. Um elemento finito de viga de três camadas com camadas piezoeléctricas com dez graus de liberdade mecânicos e dois graus de liberdade eléctricos por elemento é apresentado.

As teorias de controlo óptimo (LQR e LQG) e de controlo por *feedback* (do deslocamento ou da velocidade) são apresentadas no capítulo 5. Dada a existência de uma limitação do campo eléctrico máximo admissível pelos actuadores, um algoritmo iterativo proposto por Trindade (2000) é considerado, por forma a permitir regular o ganho de controlo óptimo às limitações dos actuadores. O conceito de observador óptimo dos estados e os conceitos de controlabilidade e observabilidade são também apresentados.

O capítulo 6 é dedicado à validação do modelo de elementos finitos do capítulo 4. O modelo de elementos finitos foi implementado em ambiente MATLAB® e diversos exemplos

de vigas *inteligentes* foram analisados no controlo activo de vibrações. Começa-se por validar o modelo de elementos finitos na sua acção estática e modal para, em seguida, se analisarem as performances dos diferentes algoritmos de controlo apresentados no capítulo 5. Finalmente, os resultados da acção estática e controlo activo de vibrações de uma viga *inteligente*, obtidos experimentalmente, são apresentados.

No capítulo 7 são apresentadas as conclusões com o objectivo de resumir os principais resultados apresentados, sublinhar as originalidades da dissertação e definir perspectivas de continuação do trabalho aqui apresentado.

Capítulo 2

Sistemas Estruturais Inteligentes

2.1 Introdução

Este capítulo encontra-se dividido em três secções. Começa-se numa primeira secção por abordar o tema *estruturas inteligentes*, nomeadamente a sua definição e o seu enquadramento temporal. De seguida, faz-se uma descrição geral dos *materiais inteligentes* mais comuns nos dias de hoje para, por fim, e dada a especial importância dos materiais piezoeléctricos na realização deste trabalho, se caracterizar com pormenor as equações constitutivas desses mesmos materiais.

2.2 Estruturas Inteligentes

Uma *estrutura inteligente* pode ser vista como uma estrutura ou um componente estrutural nos quais podem ser colocados actuadores ou sensores, cujas acções são coordenadas por um sistema de controlo permitindo à estrutura responder espontaneamente a estímulos exteriores (exercidos na estrutura), por forma a compensar efeitos indesejados ou melhorar os efeitos desejados (Anderson *et al.*, 1992).

Nas últimas duas décadas, o tema *estruturas e materiais inteligentes* sofreu um grande crescimento em termos de investigação e desenvolvimento. Inúmeras conferências, *workshops* e jornais dedicados aos materiais e estruturas *inteligentes* são uma testemunha do seu crescimento. O tema em si é de natureza altamente interdisciplinar, o que justifica a vasta literatura existente sobre o tema. Físicos, matemáticos, engenheiros aeroespaciais, químicos, civis, electrotécnicos, de materiais e mecânicos estão todos envolvidos em alguma parte do desenvolvimento e investigação das estruturas e materiais *inteligentes*.

A investigação deste tema estimulou a imaginação de numerosos investigadores que compreenderam o vasto potencial que as estruturas *inteligentes* possuem para o

desenvolvimento de uma nova geração de produtos e sistemas que podem encontrar aplicação em veículos modernos como sejam aviões, helicópteros, veículos terrestres, submarinos, vaivéns espaciais, sistemas de armamento e maquinaria industrial. Em particular, quando o conceito de estrutura *inteligente* é combinado com materiais estruturais compósitos avançados pode ser possível criar uma asa de um avião moderno com a particularidade de ser uma peça única com uma relação espessura comprimento extremamente reduzida.

Em pleno séc. XXI está-se a entrar na geração seguinte das estruturas e materiais *inteligentes*. Antevendo essa nova geração, pensa-se que ela permitirá caracterizar os acoplamentos entre os efeitos térmicos, eléctricos e mecânicos, as funcionalidades, o conceito de *inteligência* e a miniaturização (até à escala microscópica) deste tipo de sistemas. Com o advento dessa nova geração de materiais *inteligentes*, a confiança e a integrabilidade desses sistemas tornam-se questões fundamentais.

Esses sistemas operam sobre variadíssimas condições de funcionamento percorrendo todo o espectro de condições de funcionamento magneto-electro-termo-mecânicas. Essas condições de funcionamento podem variar desde as baixas às altas temperaturas, das baixas às altas pressões, dos níveis de carga baixos até aos altos, das pequenas às grandes deformações e dos campos eléctricos e magnéticos baixos até aos altos. Esses tipos de condições de funcionamento colocam sérios problemas no projecto e manutenção dos sistemas estruturais *inteligentes*. Investigações experimentais de ambos os temas (materiais *inteligentes* e sistemas estruturais *inteligentes*) são proibitivamente caros, devendo ser complementados com uma análise teórica.

A expressão *sistema estrutural inteligente* refere-se a uma vasta variedade de materiais activos e sistemas estruturais passivos. A literatura contém muitas definições de estruturas *inteligentes*. No entanto, considera-se que as estruturas com sensores e actuadores montados na superfície ou embebidos na estrutura com a capacidade de sentir e tomar uma acção correctiva são referidas como *estruturas inteligentes*. Os circuitos de *feedback* ligando os sensores com os actuadores são externos aos componentes dos actuadores e sensores. De facto, é precisamente isso que, na literatura anglo-saxónica, distingue os chamados *smart structural systems* dos *intelligent structural systems* (Reddy, 1999). *Intelligent structural systems* envolvem componentes *inteligentes* em que as funções desempenhadas pelos sensores, controlo por feedback e actuadores, estão todas integradas no componente *inteligente*. Este tipo de sistema encontra aplicação em asas de avião, rotores de helicóptero, etc. No entanto, os denominados *smart structural systems* diferem dos anteriores uma vez que eles funcionam como unidades multifuncionais (fig. 2.1), possuindo uma parte material

passiva de suporte primário da carga (eléctrica, térmica, magnética ou mecânica) e uma parte material activa que realiza as operações dos sensores e actuadores. Por exemplo, as amplitudes de vibração de uma placa flexível podem ser suprimidas recorrendo às capacidades dos sensores e actuadores piezoeléctricos se estes forem ligados à superfície da placa. À medida que a placa se deforma devido às cargas externas aplicadas, o filme piezoeléctrico (sensor) também se deforma. Devido ao seu comportamento constitutivo ele desenvolve uma carga eléctrica superficial proporcional à carga aplicada. A carga eléctrica pode então ser processada por um sistema de controlo fornecendo uma voltagem apropriada ao filme piezoeléctrico (actuator) o qual, por conveniência, induz uma deformação oposta à da placa por forma a diminuir as amplitudes de vibração.

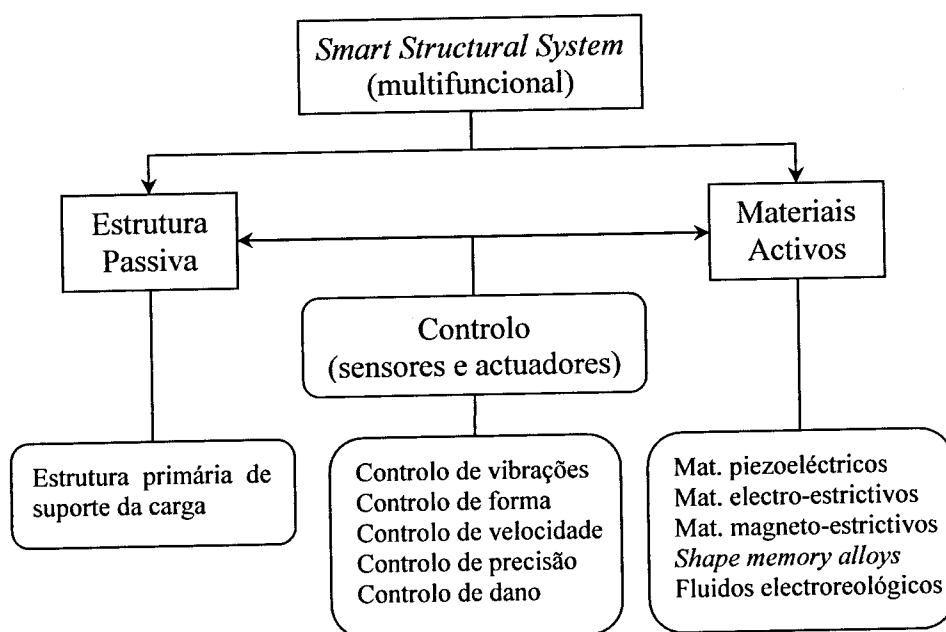


Fig. 2.1 - Componentes de um smart structural system

2.3 Materiais Inteligentes

Materiais piezoeléctricos, electrostrictivos, magnetostrictivos, *shape memory alloys* (SMA's), fluidos electrorreológicos e magnetoreológicos são apenas alguns dos materiais *inteligentes* disponíveis nos dias de hoje. De entre os sensores e actuadores disponíveis, os mais pequenos são da ordem de grandeza de alguns milímetros. No entanto, o progresso para as estruturas *inteligentes* requer que nós sejamos capazes de desenvolver sistemas estruturais *inteligentes* da ordem de grandeza de apenas alguns microns. A redução no tamanho traz

benefícios tecnológicos tremendos. No entanto, um claro entendimento da confiança por eles esperada e da integridade do sistema são aspectos vitais para o uso eficiente e óptimo desses materiais.

2.3.1 História da Piezoelectricidade

Há alguns séculos atrás já os nativos da Índia e Ceilão repararam numa propriedade muito peculiar dos cristais de Turmalina. Quando atirados para a fogueira esses materiais começavam inicialmente por atrair as cinzas quentes e uns momentos depois começavam a repeli-las. Essa experiência chegou à Europa com o início das importações de Turmalina pelos negociantes holandeses no início do séc. XVIII. A turmalina era então chamada de íman do Ceilão (*Ceylan magnet*).

Em 1756 a origem eléctrica desse comportamento foi demonstrada pelo físico alemão Aepinus (inventor da capacitância eléctrica)¹. Esse comportamento foi denominado por *piroelectricidade* pelo físico escocês D. Brewster em 1824. O efeito piroeléctrico pode ser definido como uma polarização induzida pela absorção de energia térmica em que essa polarização induzida é proporcional à variação de temperatura. A propriedade inversa, de muito menor amplitude, é denominada de *efeito electrocalórico*.

O efeito piezoeléctrico foi primeiramente mencionado em 1817 pelo mineralogista francês René Just Haüy² e primeiramente demonstrado por Pierre e Jacques Curie em 1880. As suas experiências levaram-nos a elaborar a teoria inicial da piezoelectricidade. Essa teoria foi mais tarde complementada pelos trabalhos realizados por G. Lippman³, W. G. Hankel⁴, Lord Kelvin e W. Voigt (no início do séc. XX).

Até ao início do séc. XX, a piezoelectricidade não deixou os laboratórios. As primeiras aplicações apareceram durante a primeira guerra mundial com o *sonar* em que o material piezoeléctrico Quartz foi utilizado na produção de ondas ultra-sónicas (P. Langevin) e na construção de sensores. Nos anos 20, o uso do Quartz no controlo das frequências de ressonância de osciladores foi proposto pelo físico americano W. G. Cady. Foi durante o período da primeira guerra mundial que a maioria das aplicações piezoeléctricas com que nós estamos hoje em dia familiarizados (microfones, acelerómetros, transdutores ultra-sónicos,

¹ Primeira observação da polarização eléctrica do cristal de turmalina devido à variação da temperatura

² Primeira observação da presença de cargas eléctricas na superfície de um cristal de turmalina deformado

³ Dedução matemática do efeito piezoeléctrico inverso, confirmado experimentalmente por P. & J. Curie (1881)

⁴ Introduziu o termo *piezoelectricidade*

etc.) foram concebidas. No entanto, os materiais disponíveis na altura limitavam a performance dos dispositivos. O desenvolvimento da electrónica, especialmente durante a segunda guerra mundial, e a descoberta das cerâmicas ferroelétricas aumentaram a utilização dos materiais piezoelétricos.

O *efeito piezoelétrico directo* consiste na capacidade que certos materiais cristalinos possuem para gerar uma carga eléctrica proporcional a uma força mecânica exteriormente aplicada. O efeito piezoelétrico directo tem sido extensivamente usado no desenvolvimento de transdutores (acelerómetros, transdutores de pressão e força, etc.). De acordo com o *efeito piezoelétrico inverso*, um determinado campo eléctrico aplicado induz uma determinada deformação ao material piezoelétrico, tendo sido utilizado no desenvolvimento de actuadores.

O uso de materiais piezoelétricos como actuadores e sensores no controlo de vibrações e ruído tem sido extensivamente demonstrado nos últimos anos. Existem duas classes de materiais piezoelétricos usados no controlo de vibrações, os cerâmicos e os polímeros. O piezocerâmico mais conhecido é o *Lead Zirconate Titanate* (PZT) que tem uma deformação recuperável de 0.1% e é vastamente utilizado como actuador e sensor numa grande banda de frequência, incluindo aplicações ultra-sónicas e aplicações de grande precisão. Os piezopolímeros são normalmente utilizados como sensores e o mais conhecido de todos é o *Polyvinylidene Fluoride* (PVDF). O PVDF foi primeiramente estudado por Kawai (fim dos anos 60) e foi disponibilizado comercialmente no início dos anos 80.

2.3.2 Materiais Piezoelétricos

Os efeitos piezoelétricos podem ser vistos como uma transferência entre energias eléctricas e mecânicas. Tal transferência apenas pode ocorrer se o material for composto por partículas carregadas electricamente e se ele puder ser polarizado. Para que um material exiba uma propriedade anisotrópica como a piezoelectricidade, a sua estrutura cristalina não pode ter centro de simetria (Randeraat e Settrington, 1974). 21 estruturas cristalinas em 32 não possuem centro de simetria. Um cristal sem centro de simetria possui um ou mais eixos direccionais cristalográficos únicos. Todas as 21 classes cristalinas, excepto uma, demonstram um efeito piezoelétrico ao longo dos eixos direccionais. De entre as 20 classes piezoelétricas, 10 delas possuem apenas um eixo direccional. Tais cristais são denominados por cristais polares (*polar crystals*) uma vez que eles demonstram uma polarização espontânea em que o valor dessa polarização depende da temperatura. É o chamado *efeito*

piroeléctrico. Os cristais piroeléctricos para os quais a magnitude e direcção da polarização espontânea pode ser invertida por um campo eléctrico exterior são ditos demonstrar um *comportamento ferroeléctrico*.

A maioria dos materiais piezoeléctricos são sólidos cristalinos. Eles podem ser monocristalinos, formados natural ou sinteticamente, ou materiais policristalinos. Um exemplo disso são as cerâmicas ferroeléctricas, as quais através de um processo de polarização podem ser tornadas piezoeléctricas (sujeitando-as a um campo eléctrico elevado próximo da temperatura de Curie - ver §2.3.2.3) e que possuem à escala macroscópica uma simetria do tipo monocristalina. O efeito piezoeléctrico pode também aparecer em cristais compostos apenas por um tipo de elemento e, nesse caso, a polarização deve-se a uma distorção na distribuição electrónica. Certos polímeros também podem ser feitos piezoeléctricos através de um estiramento sob o efeito de um campo eléctrico.

2.3.2.1 Origens da Polarização Eléctrica

Um material que pode ser polarizado por um campo eléctrico a ele aplicado é dito *dieléctrico*. Três origens para a polarização macroscópica de um material dieléctrico podem ser distinguidas (fig. 2.2).

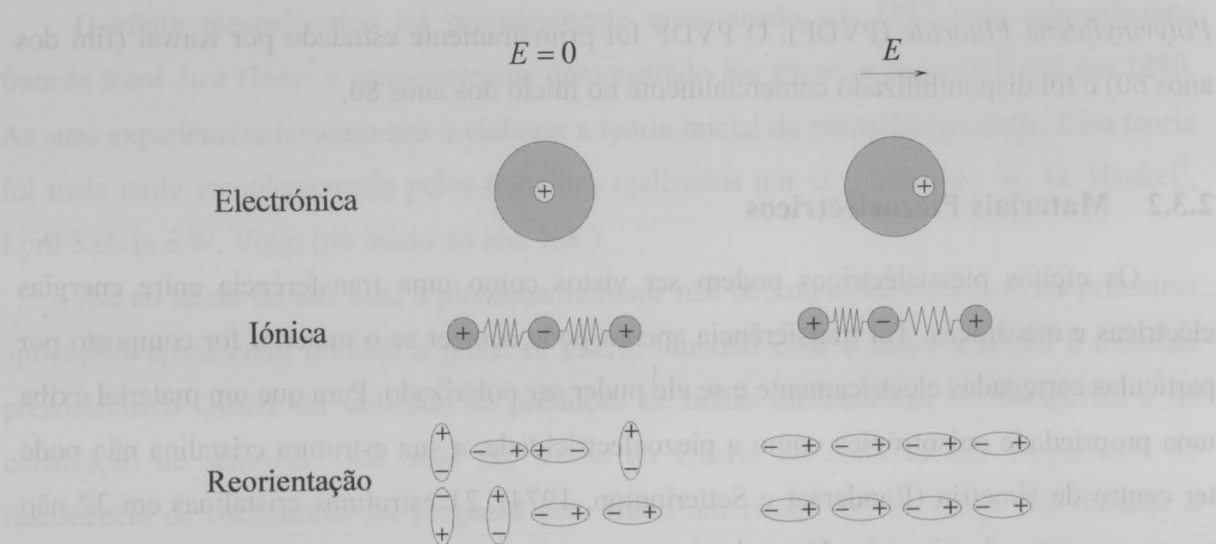


Fig. 2.2 - Origens da polarização

- **Polarização electrónica:** Quando um campo eléctrico é aplicado, as nuvens de electrões deformam-se criando um dipolo macroscópico;
- **Polarização iónica:** Quando um campo eléctrico é aplicado, os aniões são atraídos pelo ânodo e os catiões pelo cátodo criando dipolos;

- Reorientação dos dipolos: Um material macroscópico não polarizado pode ser constituído por muitos domínios polarizados. Um campo eléctrico a ele aplicado fará com que os domínios se reorientem, induzindo uma polarização global.

2.3.2.2 Cristal Biónico

A natureza molecular da piezoelectricidade e dos coeficientes de acoplamento é introduzida no que se segue através de um exemplo unidimensional muito simples: o cristal biónico CdS (Piefort, 2001). A estrutura cristalina CdS pode ser vista como uma montagem de filas idênticas compostas por sub-estruturas (fig. 2.3) em que os catiões Cd (carga $+q$) e aniões S (carga $-q$) alternam. As forças interatómicas de coesão são modelizadas por molas ideais de diferente rigidez, k_1 e k_2 , com diferentes distâncias entre consecutivos pares de átomos.

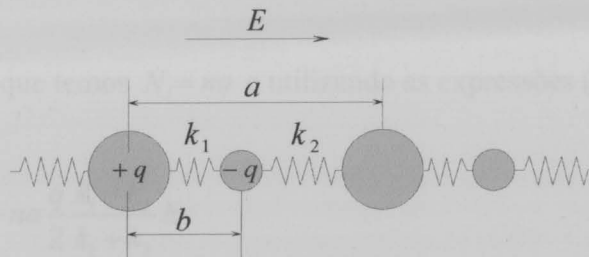


Fig. 2.3 - Estrutura do cristal CdS

Se o cristal for composto por n elementos básicos de comprimento a , como mostrado na fig. 2.3, com dois dipolos eléctricos $\frac{q}{2}(a-b)$ e $-\frac{q}{2}b$, a polarização global livre será dada por

$$P_0 = n \frac{q}{2} (a - 2b) \quad (2.1)$$

Para um cristal constrangido (ao longo do eixo de alinhamento), as distâncias interatómicas modificam-se e uma polarização P é induzida, o denominado *efeito piezoeléctrico directo*.

$$P = \Delta P_0 = n \frac{q}{2} (\Delta a - 2\Delta b) \quad (2.2)$$

Reciprocamente, quando um campo eléctrico E é aplicado ao longo do mesmo eixo, os iões deslocam-se e uma deformação global é induzida, o denominado *efeito piezoeléctrico inverso*. A equação de equilíbrio estático para cada ião pode ser escrita

$$qE + k_1 \Delta b - k_2 \Delta (a - b) = 0 \quad (2.3)$$

A polarização induzida relaciona-se com o campo eléctrico e deslocamento atómico por

$$P = n \frac{q}{2} \left(\frac{2q}{k_1 + k_2} E + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \Delta a \right) \quad (2.4)$$

que pode ser escrita

$$P = \chi_{\text{ião}} E + eS \quad (2.5)$$

em que

$$\chi_{\text{ião}} = n \frac{q}{2} \frac{2q}{k_1 + k_2} \quad (2.6)$$

é a chamada polarizabilidade iónica (*ionic polarizability*) do cristal,

$$S = \frac{\Delta a}{a} \quad (2.7)$$

é a deformação, e

$$e = na \frac{q}{2} \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \quad (2.8)$$

é a constante piezoeléctrica. O deslocamento eléctrico (polarização induzida) pode ser escrito

$$D = eS + \varepsilon^S E \quad (2.9)$$

em que a permitividade a deformação constante, ε^S , é dada por

$$\varepsilon^S = \varepsilon_0 + \chi_{\text{ião}} \quad (2.10)$$

e ε_0 é a permitividade do vácuo.

A tensão induzida numa secção unitária perpendicular ao eixo considerado, assumindo-se um número total de linhas N numa secção unitária e um igual número de molas dos tipos k_1 e k_2 em cada secção, é dada por

$$T = \frac{N}{2} k_1 \Delta b + \frac{N}{2} k_2 \Delta (a - b) \quad (2.11)$$

Considerando-se que temos $N = na$ e utilizando as expressões (2.3) e (2.7) temos

$$T = na^2 k_2 \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} S - na \frac{q}{2} \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} E \quad (2.12)$$

que pode ser escrito na forma

$$T = c^E S - eE \quad (2.13)$$

em que

$$c^E = na^2 k_2 \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \quad (2.14)$$

é a rigidez mecânica a campo eléctrico constante e e é a constante piezoeléctrica dada pela expressão (2.8). Note-se que c^E está relacionado com a rigidez das duas molas k_1 e k_2 ligadas em série e que a constante piezoeléctrica e é nula se as molas tiverem igual rigidez. As equações (2.9) e (2.13) são então as equações constitutivas piezoeléctricas.

No entanto, os iões nunca estão conectados por molas ideais. Na maioria dos casos, essas molas não são lineares ($F = k\Delta + k'\Delta^2$) e uma fracção da tensão induzida é independente da direcção do campo eléctrico aplicado, ficando

$$T = c^E S - eE - e^* E^2 \quad (2.15)$$

Este efeito é o denominado *efeito electrostrictivo* e e^* é o coeficiente electrostrictivo (ver §2.3.3.2).

2.3.2.3 Cerâmicas Ferroeléctricas

Estrutura cristalina e polarização

Além dos cristais naturais referidos anteriormente, como sejam a turmalina, o quartz e outros, um importante grupo de materiais piezoeléctricos são as cerâmicas piezoeléctricas, das quais o PXE é um exemplo (Waanders, 1991). Esses são materiais policristalinos ferroeléctricos com a estrutura cristalina *perovskite*, uma estrutura tetragonal/romboédrica muito próxima da cúbica (fig. 2.4). Esses materiais têm uma fórmula geral do tipo $A^{2+}B^{4+}O_3^{2-}$ em que A denota um ião metálico bivalente grande, como seja o *Ba* ou *Pb*, e B denota um ião metálico tetravalente, como seja o *Ti* ou *Zr*.

Por forma a compreender o efeito piezoeléctrico em materiais ferroeléctricos (ver Randeraat e Settingington, 1974; Uchino, 2000) tem-se primeiro que considerar o comportamento do material à escala macroscópica.

Materiais como o PXE podem ser considerados como uma massa de pequenos cristais. Sobre uma temperatura, conhecida como *temperatura de Curie*, esses cristais exibem uma simetria cúbica, na qual a célula elementar está representada na fig. 2.4a. Essa estrutura possui centro de simetria com locais de carga negativa e positiva coincidentes, de forma que não hajam momentos dipolares presentes no material. Abaixo dessa temperatura, o material sofre uma mudança de fase para uma estrutura mais complexa sem centro de simetria, como se pode observar na fig. 2.4b. Nesta fase, o cristal apresenta um dipolo eléctrico natural (*piezoelectricidade*) que pode ser invertido (*ferroelectricidade*) e ainda trocado em certas direcções permitidas, através da aplicação de um campo eléctrico suficientemente elevado. Esses materiais são chamados *ferroeléctricos* porque este comportamento eléctrico apresenta uma analogia física com o comportamento magnético dos materiais ferromagnéticos. Eles não contêm necessariamente o ferro como um constituinte importante. A analogia de facto pode

ser levada mais longe uma vez que, em certa medida, a polarização dos materiais ferroeléctricos exhibe histerese e as suas constantes dieléctricas são muito elevadas e dependentes da temperatura (da mesma forma que as permeabilidades dos materiais ferromagnéticos).

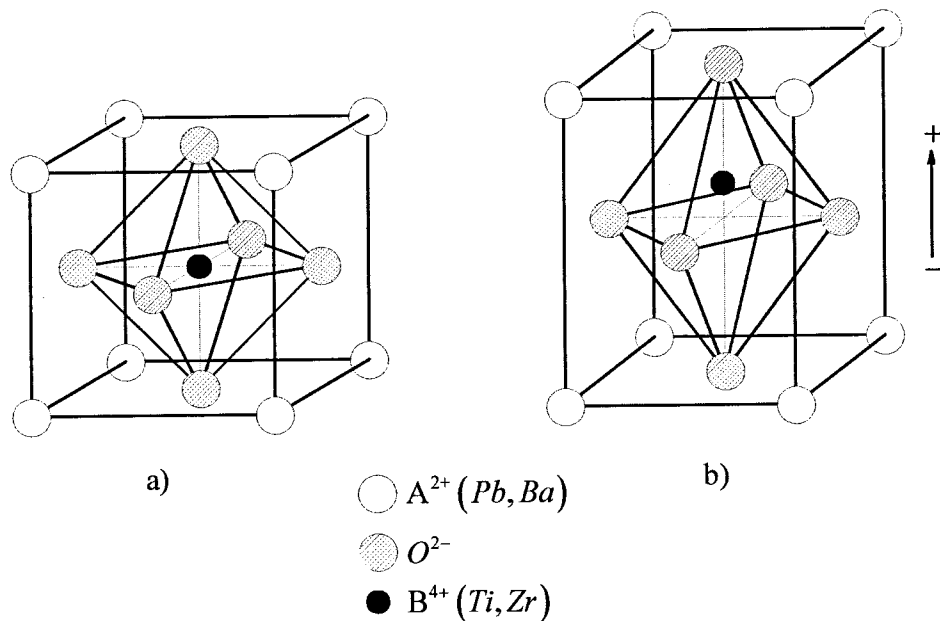


Fig. 2.4 - Célula elementar do PXE (estrutura perovskite): a) malha cúbica (sobre a temperatura de Curie); b) malha tetragonal (abaixo da temperatura de Curie)

Os dipolos ao longo do material não estão orientados aleatoriamente. Dipolos vizinhos alinham uns com os outros por forma a criar regiões de alinhamento local conhecidas como *domínios de Weiss*. Dentro de um desses domínios todos os dipolos estão alinhados originando uma rede de momentos dipolares no domínio e consequentemente uma polarização da rede (momento dipolar por unidade de volume).

As direcções de polarização entre domínios de Weiss vizinhos dentro de um cristal podem diferir 90° ou 180° e devido à distribuição aleatória dos domínios de Weiss ao longo do material (fig. 2.5a) nenhuma polarização global (ou efeito piezoeléctrico) é exibida.

A cerâmica pode ser feita piezoeléctrica em qualquer direcção escolhida através de um tratamento de polarização que envolve a sua exposição a um campo eléctrico elevado a uma temperatura ligeiramente abaixo da temperatura de Curie (fig. 2.5b). Sob a acção deste campo eléctrico os domínios mais proximamente alinhados com o campo eléctrico crescerão em detrimento de outros diminuirão. O material também alongará na direcção do campo eléctrico. Quando o campo é retirado (fig. 2.5c), os dipolos permanecem presos num

alinhamento aproximado dando ao material cerâmico uma polarização residual (*remnant polarization*) e uma deformação permanente tornando-o anisotrópico. O tratamento de polarização é normalmente o tratamento final das cerâmicas ferroelétricas.

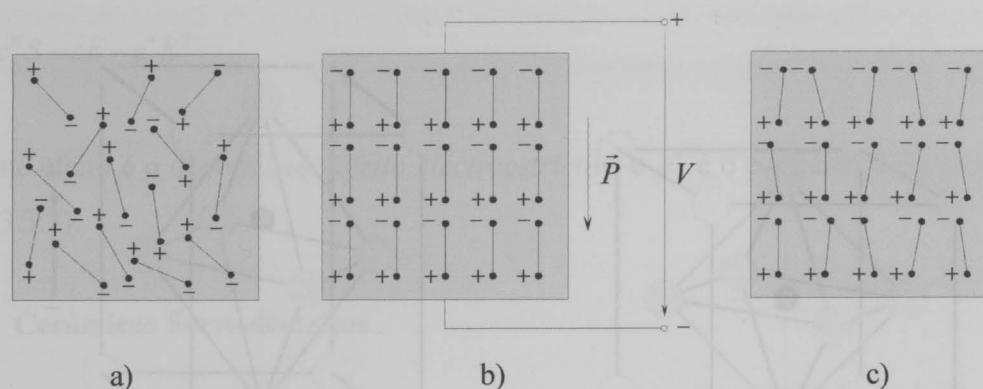


Fig. 2.5 - Momentos dipolares eléctricos nos domínios de Weiss: a) antes da polarização; b) durante a polarização; c) depois da polarização

Histerese dielétrica

O campo eléctrico E e a polarização P estão relacionados num meio dielétrico pela relação

$$D = \epsilon_0 E + P \quad (2.16)$$

em que ϵ_0 é a permissividade do espaço livre no vácuo e D é o deslocamento eléctrico. Para um material ferroelétrico como por exemplo o PXE, P é por si próprio uma função de E como se pode observar na fig. 2.6.

O efeito da histerese, familiar aos materiais ferromagnéticos, é bastante evidente na fig. 2.6. Se uma amostra não polarizada de PXE for sujeita a um campo eléctrico crescente a uma temperatura ligeiramente abaixo do ponto de Curie, os dipolos tornam-se progressivamente alinhados com o campo e a polarização segue a curva inicial mostrada na fig. 2.6. Quando o campo já aumentou para além de um determinado valor, mais nenhum incremento da polarização será observado uma vez que os dipolos estão por essa altura completamente alinhados com o campo eléctrico. O material é então dito ter atingido a sua *polarização de saturação* P_s . Se o campo for então reduzido progressivamente até zero, os dipolos ficam ligeiramente desalinhados, uma vez que na ausência de um campo eléctrico externo eles ficam orientados em certas direcções preferenciais dentro dos cristais individuais.

No entanto, eles não regressam ao seu alinhamento original (i.e. o alinhamento antes do campo ser aplicado) uma vez que existem várias direcções preferenciais dentro do cristal e os dipolos permanecem naquelas mais proximamente alinhadas com o campo eléctrico original. Uma vez que ainda existe um grau de alinhamento bastante grande (como pode ser observado na fig. 2.5c), a polarização não cai de volta para zero mas sim para um valor um pouco inferior que a polarização de saturação, conhecida como polarização residual (*remnant polarization*) P_r .

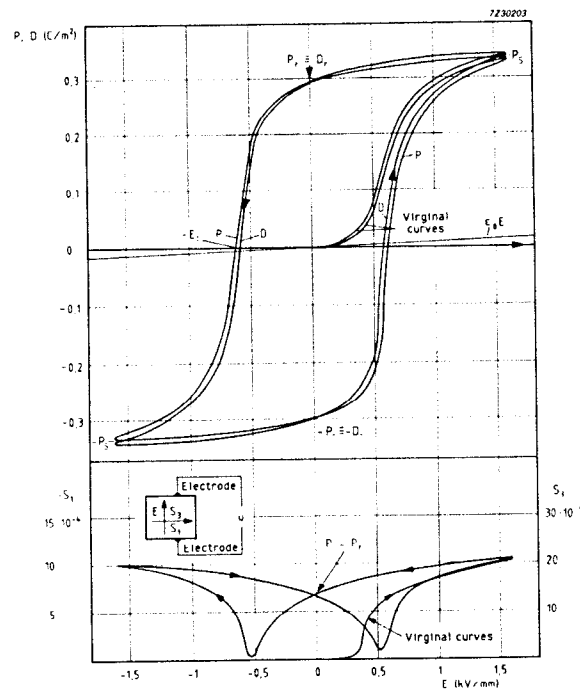


Fig. 2.6 - Parte superior da figura: histerese dieléctrica do PXE 52 (o deslocamento eléctrico $D(E)$ é obtido pela adição de $\epsilon_0 E$ à polarização $P(E)$ de acordo com (2.16)); Parte inferior da figura: deformações mecânicas $S_3 = S_{zz}$ (na direcção da polarização), $S_1 = S_{xx}$ e $S_2 = S_{yy}$ em função do campo eléctrico (a curva de S_1 é baseada em medições e S_3 é dado por $S_3 = -2S_1 = -2S_2$) (Waanders, 1991)

Se o campo for agora aumentado na direcção oposta, a polarização da amostra cai inicialmente para zero e em seguida aumenta na direcção negativa até atingir uma polarização de saturação $-P_s$. Se o campo for novamente reduzido até zero a polarização diminui até à polarização residual $-P_r$ e finalmente, se o campo for de novo aumentado na direcção positiva, a polarização descerá até zero e depois eventualmente regressará para P_s .

A curva então traçada é conhecida como *curva de histerese*. A sua forma varia para os diferentes materiais ferroeléctricos (a fig. 2.6 refere-se ao PXE 52) mas a polarização residual é geralmente cerca de 0.3 C/m^2 para os materiais PXE.

A variação do deslocamento eléctrico D em função da intensidade do campo eléctrico segue muito de perto a curva da polarização. Por exemplo, no pico da curva de histerese ($E = 1.6 \text{ kV/mm}$) D é apenas cerca de 0.014 C/m^2 maior que P . Para $E = 0$, D e P são iguais e, por conseguinte, $D_r = P_r$.

A parte inferior da fig. 2.6 mostra a variação da deformação S_{zz} (na direcção da polarização) com o campo eléctrico e pode ser observado que o efeito de histerese também aparece, correspondendo exactamente ao efeito observado na polarização. Uma vez que o volume da amostra de material se mantém de forma grosseira constante, um relativo aumento (ou diminuição) em S_{zz} será acompanhado por uma relativa diminuição (ou aumento) nas direcções da amostra perpendiculares ao campo eléctrico (S_{xx} e S_{yy}), igual a cerca de metade da variação de S_{zz} (escala à esquerda na parte inferior da fig. 2.6). Isso também será verdade para tensões de compressão ou tracção exercidas pela amostra.

Finalmente, a fig. 2.7 apresenta a variação de S_{xx} em função do deslocamento eléctrico e o efeito de histerese é novamente evidente.

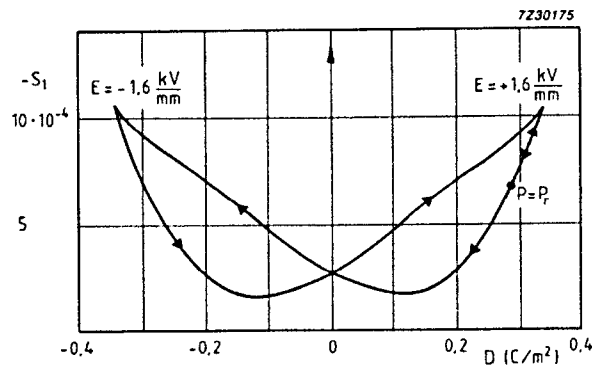


Fig. 2.7 - Deformações mecânicas S_{xx} e S_{yy} normais à direcção de polarização em função do deslocamento eléctrico para o PXE 52 (Waanders, 1991)

Comportamento básico de um corpo cerâmico

A fig. 2.8 ilustra o comportamento de um cilindro polarizado ao longo do seu eixo. Por forma a tornar a interpretação mais clara a magnitude do efeito foi exagerada.

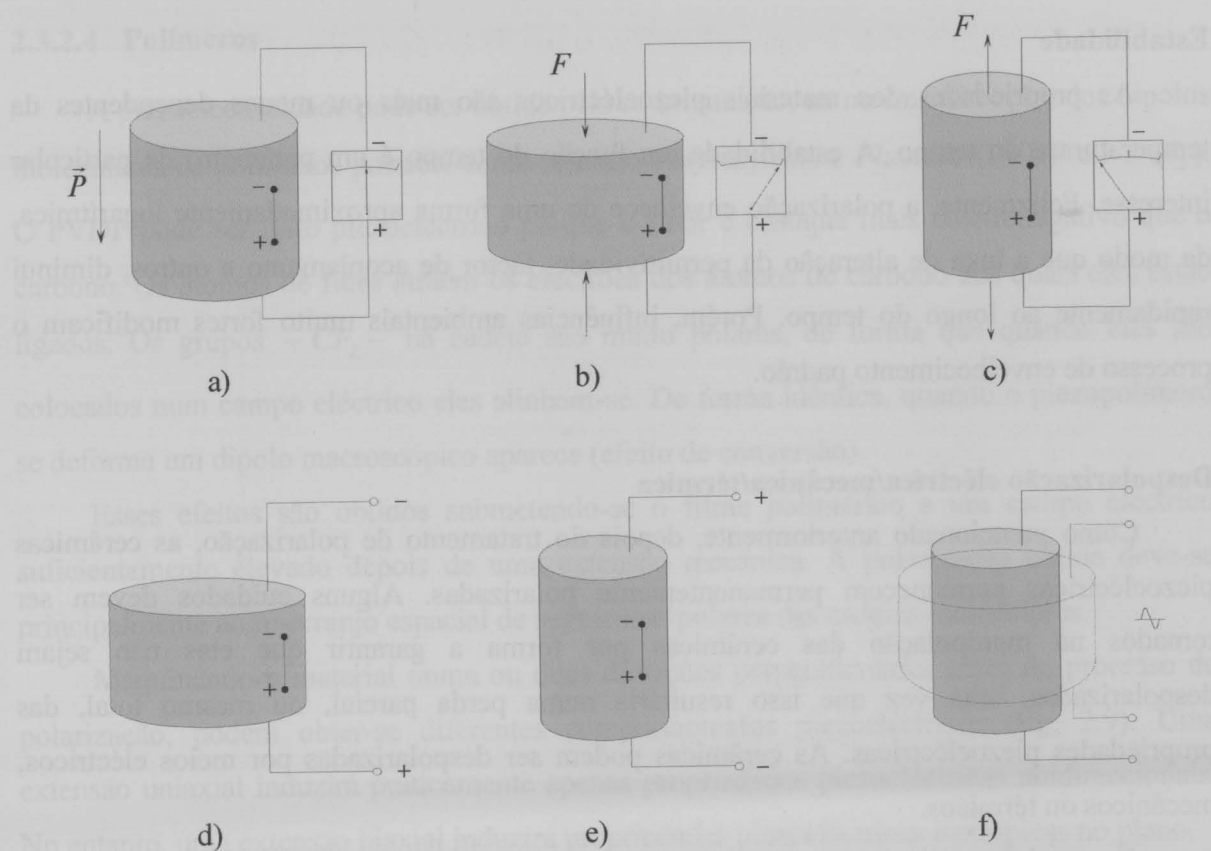


Fig. 2.8 - Efeito piezoelétrico num corpo cerâmico piezoelétrico cilíndrico

A fig. 2.8a mostra o cilindro sem nenhuma carga aplicada. Se uma força externa produzir uma tensão de compressão ou tracção no material, a resultante alteração no momento dipolar faz com que uma voltagem apareça entre os eléctrodos. Se o cilindro for comprimido, por forma a que ele regresse à sua forma original antes da polarização, a voltagem terá a mesma polaridade que a voltagem de polarização (fig. 2.8b). Se o cilindro for alongado, a voltagem entre os eléctrodos terá uma polaridade oposta à voltagem de polarização (fig. 2.8 c). Esses são exemplos da *acção de gerador* (*generator action*) que consiste na conversão de energia mecânica em energia eléctrica. Exemplos de acções de gerador piezoeléctricas induzidas podem ser encontrados em *pick-ups* de guitarras, microfones, etc.

Se uma voltagem de polaridade oposta à voltagem de polarização for aplicada aos eléctrodos, o cilindro encolherá (fig. 2.8d) enquanto que se ela tiver a mesma polaridade o cilindro alongará (fig. 2.8e). Finalmente, se uma voltagem alternada for aplicada aos eléctrodos, o cilindro alongará e encolherá à mesma frequência da voltagem alternada aplicada (fig. 2.8f). Esses são exemplos de *acção de motor* (*motor action*) que consiste na conversão de energia eléctrica em energia mecânica.

Estabilidade

As propriedades dos materiais piezoelétricos são mais ou menos dependentes da temperatura e do tempo. A estabilidade em função do tempo é um parâmetro de particular interesse. Felizmente, a polarização envelhece de uma forma aproximadamente logarítmica, de modo que a taxa de alteração da permitividade, factor de acoplamento e outros, diminui rapidamente ao longo do tempo. Porém, influências ambientais muito fortes modificam o processo de envelhecimento padrão.

Despolarização eléctrica/mecânica/térmica

Como mencionado anteriormente, depois do tratamento de polarização, as cerâmicas piezoelétricas permanecem permanentemente polarizadas. Alguns cuidados devem ser tomados na manipulação das cerâmicas por forma a garantir que elas não sejam despolarizadas, uma vez que isso resultaria numa perda parcial, ou mesmo total, das propriedades piezoelétricas. As cerâmicas podem ser despolarizadas por meios eléctricos, mecânicos ou térmicos.

A exposição a um campo eléctrico elevado de polaridade oposta ao campo eléctrico de polarização despolarizará o elemento piezoelétrico. A intensidade do campo necessária à despolarização do material depende, entre outras coisas, da classe do material, do tempo de exposição e da temperatura. Para campos eléctricos estáticos o valor está tipicamente compreendido entre 200 e 500 V/mm. Um campo eléctrico alternado terá também o efeito de despolarização durante os meios ciclos em que ele se opõe ao campo de polarização.

A despolarização mecânica ocorre quando a tensão mecânica no elemento piezoelétrico se torna suficientemente elevada para perturbar as orientações dos domínios e dessa forma destruir o alinhamento dos dipolos. Os limites de segurança dependem muito da classe do material em questão.

Se um elemento piezoelétrico for aquecido até à temperatura de Curie, os domínios tornam-se desordenados e o elemento fica completamente despolarizado. Dessa forma, um elemento piezoelétrico pode funcionar por um largo período de tempo sem que a despolarização ocorra desde que trabalhe a temperaturas abaixo do ponto de Curie. A temperatura de trabalho aconselhada será cerca de metade do intervalo entre 0 °C e o ponto de Curie.

2.3.2.4 Polímeros

A piezoelectricidade pode ser obtida pela re-orientação, na mesma direcção, dos dipolos moleculares de polímeros polares, como sejam o *Polyvinyledene Fluoride* (PVDF ou PVF₂). O PVDF pode ser feito piezoelétrico porque o flúor é bastante mais electronegativo que o carbono. Os átomos de flúor atraem os electrões dos átomos de carbono aos quais eles estão ligados. Os grupos $-CF_2-$ na cadeia são muito polares, de forma que quando eles são colocados num campo eléctrico eles alinham-se. De forma idêntica, quando o piezopolímero se deforma um dipolo macroscópico aparece (efeito de conversão).

Esses efeitos são obtidos submetendo-se o filme polimérico a um campo eléctrico suficientemente elevado depois de uma extensão mecânica. A polarização obtida deve-se principalmente ao re-arranjo espacial de segmentos polares das cadeias moleculares.

Maquinando o material numa ou duas direcções perpendiculares antes do processo de polarização, podem obter-se diferentes comportamentos piezoelétricos (fig. 2.9). Uma extensão uniaxial induzirá praticamente apenas propriedades piezoelétricas unidireccionais. No entanto, uma extensão biaxial induzirá propriedades piezoelétricas isotrópicas no plano.

A tab. 2.1 apresenta uma comparação entre as propriedades típicas do PVDF e do PZT.

Tab. 2.1 - Propriedades materiais típicas do PZT e PVDF

PROPRIEDADES	PZT	PVDF	
		uniaxial	Biaxial
Const. piezoelétricas (10^{-12} C/N ou m/V)			
d_{33}	300	-25	-25
d_{31}	-150	15	3
d_{32}	-150	3	3
Permitividade relativa ϵ/ϵ_0 ($\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m)	1800	12	12
Módulo de Young (GPa)			
Y_1	50	3	3
Y_2	50	1	3
Y_3	50	10	10
Tensão de tracção máx. (MPa)			
direcção 1	80	200	200
direcção 2	80	40	200
Temp. de funcionamento máx. (°C)	140	90	90
Campo eléct. máx. (V/m)	1×10^6	500×10^6	500×10^6
Densidade (Kg/m ³)	7600	1800	1800

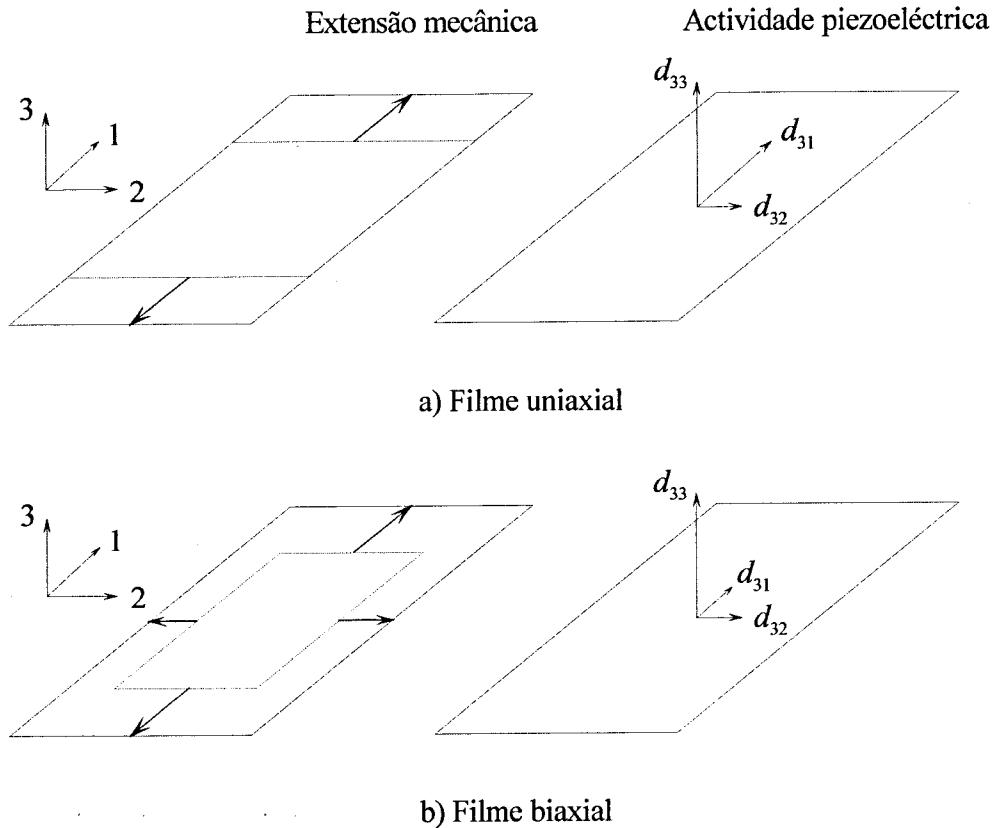


Fig. 2.9 - PVDF unidireccional e bidireccional

2.3.3 Outros Materiais Inteligentes

De entre os materiais *inteligentes*, os mais conhecidos são certamente os materiais piezoelétricos, mais precisamente os materiais piezocerâmicos. No entanto, existem muitos outros tipos de materiais *inteligentes*. A tab. 2.2 sumariza os diferentes efeitos e acoplamentos existentes nos diversos materiais, considerando os diferentes campos físicos conjugados, classicamente relacionados. São considerados na tab. 2.2 os efeitos que relacionam os *inputs*, tensão, campo eléctrico, indução magnética, calor e luz, com os *outputs*, deformação, corrente eléctrica, campo magnético, temperatura e luz.

O que é que caracteriza um material activo ou *inteligente*? Os acoplamentos que se encontram fora da diagonal na tab. 2.2 são tipicamente os responsáveis pelo denominado comportamento *inteligente* dos materiais. Um material pode ser considerado *inteligente* se um dos seus acoplamentos é (ou pode ser feito) suficientemente importante para ser utilizado em dispositivos activos. Nas próximas secções serão apresentados dois tipos de materiais *inteligentes* (*shape memory alloys* e *materiais magneto/electrostrictivos*) e um material *semi-inteligente* (*fluidos magneto/electroreológicos*).

Tab. 2.2 - Alguns efeitos em materiais (acoplamento fora da diagonal → materiais inteligentes)

OUTPUT INPUT	Actuação		Sensorização		
	Deformação	Corrente eléctrica	Campo magnético	Temperatura	Luz
Tensão	Elasticidade	Piezoelectricidade	Magneto-estricção inversa		Foto-elasticidade
Campo eléctrico	Piezoelectricidade inversa	Permitividade Condutividade	Efeito electro-magnético	Efeito electro-calórico	Efeito electro-óptico
Indução magnética	Magnetoestricção	Efeito magneto-eléctrico	Permeabilidade	Efeito magneto-calórico	
Calor	Expansão térmica <i>Shape memory</i>	Piroelectricidade		Calor específico	
Luz	Fotoestricção	Efeito fotovoltaico			Índice de refacção

2.3.3.1 Shape Memory Alloys

O *shape memory effect* é um efeito no qual o material, aparentemente deformado plasticamente, recupera a sua forma inicial não deformada após um aquecimento. Ele inicia-se na mudança de fase sólida que ocorre nos metais, mais precisamente na transformação martensítica. Existem dois tipos de ligas que exibem um forte efeito de memória da forma: ligas de Cobre (*Cu-Zn-Al* e *Cu-Al-Ni*) e *Nitinols* (*Ni-Ti*). As suas características típicas fundamentais estão listadas na tab. 2.3. A principal vantagem deste tipo de ligas é a sua capacidade de alcançarem movimentos complexos com muito poucos elementos, e isso, com uma pequena variação da temperatura.

Tab. 2.3 - Propriedades típicas das *shape memory alloys*

Propriedades	Unidades	<i>Cu-Zn-Al</i>	<i>Cu-Al-Ni</i>	<i>Ni-Ti</i>
Módulo de Young	GPa	70 a 100	80 a 100	80 a 90
Temperatura de transformação	°C	-200 a 120	-200 a 170	-220 a 110
Histerese ($A_s - A_f$)	°C	10 a 20	20 a 30	30 a 50
Deformação recuperável	%			
SME simples		5	6	8
SME dupla				
p/ 10^2 ciclos		1	1.2	6
p/ 10^5 ciclos		0.8	0.8	4
Deformação pseudo-elástica	%	10	10	10

Transformação martensítica induzida por efeito térmico

Algumas ligas, depois de um tratamento térmico, possuem propriedades muito interessantes. Considere-se uma liga binária sem nenhuma tensão aplicada. A uma temperatura elevada essa liga apresenta uma estrutura do tipo β . Depois de um rápido arrefecimento (processo de têmpera), ela manterá a sua estrutura num equilíbrio meta-estável com a estrutura β' . Chame-se então, por analogia com o ferro, a β e β' , estrutura austenítica e martensítica respectivamente.

A transformação martensítica entre estruturas austeníticas e martensíticas nas *shape memory alloys* (SMA's) ocorre sem nenhuma difusão atômica, por pequenos deslocamentos sucessivos. Esse processo induz mudanças na forma cristalina elementar. No entanto, nenhuma mudança macroscópica é observada devido à existência de 24 variantes de martensite (apenas 1 para a austenite) e portanto as alterações da forma são compensadas dentro de cada grão do material. Quando uma amostra é arrefecida os seus cristais transformam-se de uma estrutura austenítica β para uma martensítica β' sem que nenhuma deformação macroscópica ocorra. Essa transformação é caracterizada por duas temperaturas: M_s (início da martensite), à qual a transformação se inicia e M_f (final da martensite), à qual toda a austenite foi transformada em martensite. Quando re-aquecida, todas as variantes martensíticas β' voltam a transformar-se na mesma estrutura austenítica β . Essa transformação é caracterizada por duas temperaturas: A_s (início da austenite), à qual a transformação se inicia e A_f (final da austenite), à qual toda a martensite foi transformada de volta em austenite (fig. 2.10).

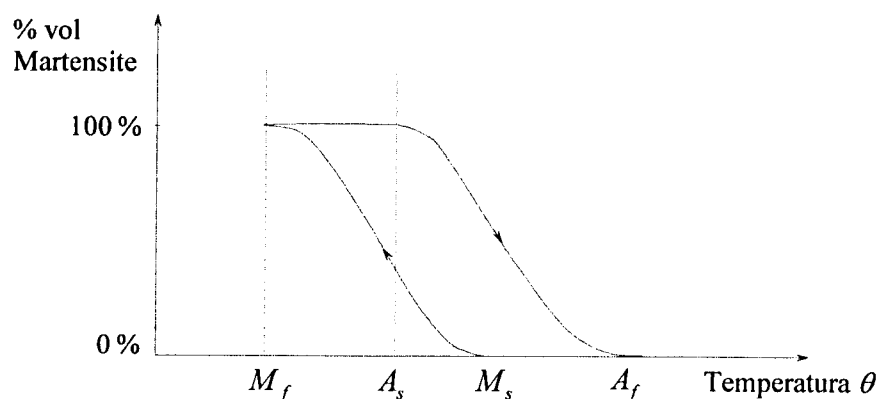


Fig. 2.10 - Curva típica de transformação martensítica em função da temperatura (tensão constante)

Transformação martensítica induzida por uma tensão mecânica

Quando uma SMA a uma temperatura superior a M_s (austenite pura) é sujeita a uma campo de tensões, a transformação martensítica ocorre a uma temperatura superior. Essa é a transformação martensítica induzida por uma tensão mecânica. A característica mais importante dessa transformação é que as diferentes variantes deixam de ter a mesma hipótese de aparecer. As variantes em que se obtém um estado mínimo de tensão serão favorecidas e, dessa forma, a martensite induzida por uma tensão mecânica estará orientada.

As quatro temperaturas características da transformação térmica em martensite M_s , M_f , A_s e A_f estão representadas na fig. 2.10.

Efeitos associados

- Rubber effect: quando uma SMA a uma temperatura abaixo de M_f (consistindo em diferentes variantes da martensite) é submetida a uma campo de tensões, as variantes melhor orientadas crescerão à custa de outras (transformação $\beta' \rightarrow \beta'$). Quando se retira a tensão a uma temperatura abaixo de M_f , a martensite induzida por uma tensão mecânica é estável. O material recupera a sua deformação elástica e uma fracção da martensite reorienta-se, dando uma recuperação extra da deformação. Esse é o denominado *efeito borracha (rubber effect)* da ordem de 1 a 2%;
- Memory effect: depois de se elevar a temperatura de uma SMA deformada plasticamente acima de A_f , toda a martensite se transforma de volta em austenite e o material recupera a sua *forma morna (warm shape)*. Se arrefecido de novo abaixo de M_f , não se observa mais nenhuma mudança de forma uma vez que todas as variantes da martensite se podem desenvolver equivalentemente. Esse é o *simple memory effect* (fig. 2.11);
- Education: se durante a fase de arrefecimento o material for forçado a uma *forma fria (cold shape)* e o processo for repetido algumas vezes, começam a aparecer deslocamentos e um estado de tensão residual, favorecendo a formação de certas variantes de martensite. O material ganhou o *efeito de memória dupla (double memory effect)* e toma espontaneamente a sua forma *cold* ou *warm* dependendo da temperatura. A liga com memória de forma é então de certa forma *educada*;
- Pseudo-elasticidade: a martensite induzida por uma tensão a uma temperatura sobre A_f volta a transformar-se em austenite quando lhe é retirada a tensão, dando à SMA

um comportamento super-elástico (fig. 2.12). A utilização da pseudo-elasticidade (ou super-elasticidade) permitiu então a introdução de uma variedade de produtos no mercado que tiram proveito dessa mesma propriedade.

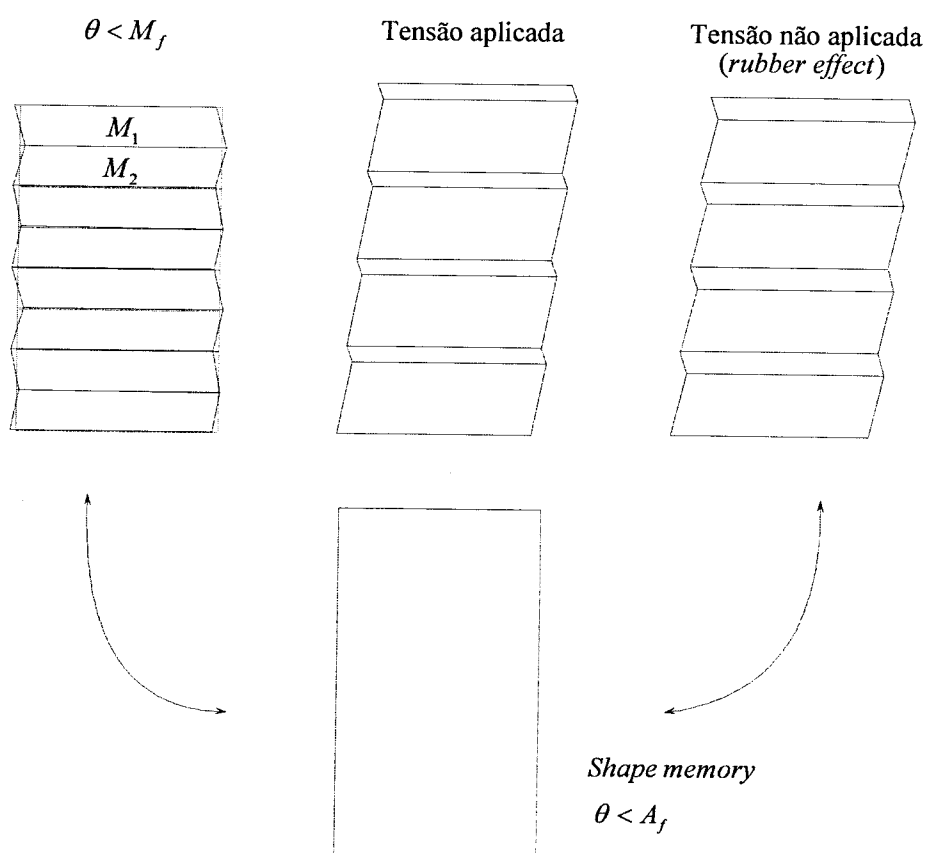


Fig. 2.11 - Shape memory effect

2.3.3.2 Materiais Electro/Magnetostrictivos

A *magnetoestricção* é um processo no qual um material ferromagnético na presença de um campo magnético muda de uma forma para outra⁵. A maioria dos materiais ferromagnéticos exibe alguma magnetoestricção mensurável. Reciprocamente, se uma força externa produzir uma deformação num material magnetostrictivo, o estado magnético do material sofrerá alterações⁶. Este acoplamento magneto-mecânico bidireccional de um material magnetostrictivo faz com que o material possa funcionar como um transdutor, podendo ser utilizado em dispositivos de actuação e/ou sensorização.

⁵ A descoberta da magnetoestricção é atribuída a J. Joule - séc. XIX

⁶ Esse efeito recíproco é conhecido como efeito de Villari

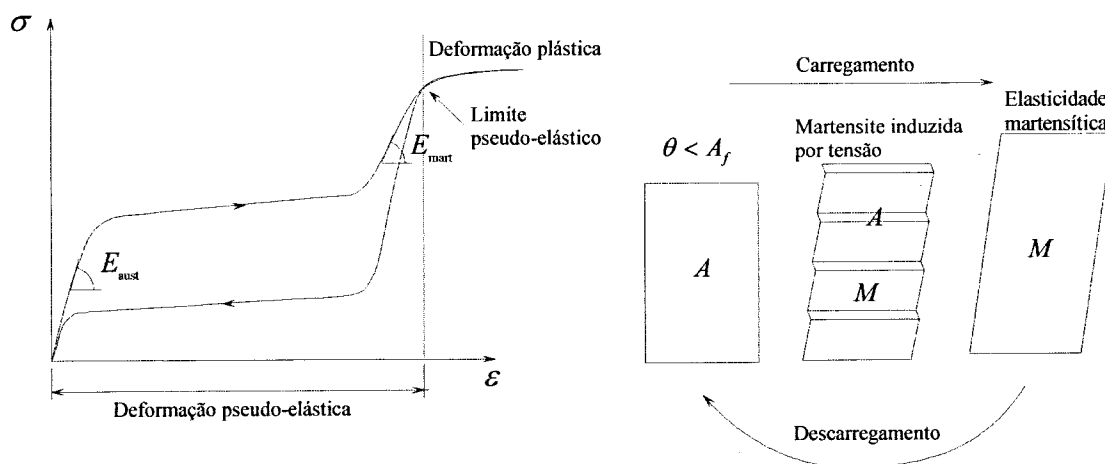


Fig. 2.12 - Pseudo-elasticidade

Este fenómeno de estado sólido é o resultado da rotação de pequenos domínios magnéticos que causam deformações internas no material e induzem uma expansão na direcção do campo. À medida que o campo é aumentado, mais domínios tendem a alinhar com o campo magnético até que a saturação magnética ocorra. Se o campo for invertido, a direcção dos domínios é também invertida mas as deformações continuam a ser expansões. Uma vez que a magnetoestricção tem uma origem molecular, a resposta é bastante rápida (apenas alguns μs).

Os materiais magnetostrictivos em operação normal são tipicamente materiais sensíveis a influências de parâmetros mecânicos. Aplicando-se uma carga compressiva ao material, os domínios estruturais, devido ao acoplamento magneto-elástico, são forçados a orientarem-se perpendicularmente à força aplicada. De seguida, quando o campo magnético é introduzido, os domínios estruturais rodam produzindo a deformação máxima possível no material (fig. 2.13). O valor máximo da magnetoestricção de um elemento puro à temperatura ambiente não excede os 60 microstrain (Cobalto). Combinando elementos de liga, é então possível atingir uma magnetoestricção gigante sobre o efeito de campos magnéticos relativamente pequenos. O Terfenol-D⁷ (ligas da forma $Tb_xDy_{1-x}Fe_2$) exhibe os maiores efeitos magnetostrictivos de todos os materiais comerciais disponíveis. Ele sofre à temperatura ambiente uma deformação de cerca de 2000 microstrain para um campo magnético de 2 kOe ($1 \text{ A/m} = 4\pi 10^{-3} \text{ Oe}$).

⁷ O nome Terfenol-D deriva do Térbio (Tb), Fe , do Naval Ordnance Laboratory (foi inicialmente descoberto nos anos 70 por um grupo de investigadores liderado por Clark do Naval Surface Warfare Center em Silver Spring, Md) e do Disprósio (Dy)

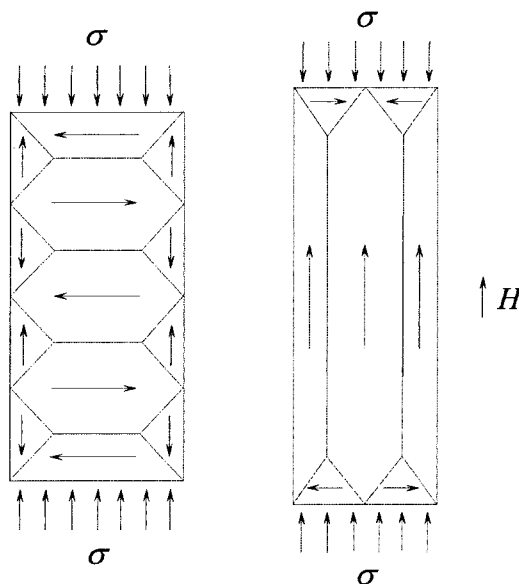


Fig. 2.13 - Material magnetostrictivo pré-carregado

As propriedades magnetostrictivas do Terfenol-D são fortemente dependentes das condições magnéticas e mecânicas. A fig. 2.14 mostra as curvas deformação/campo magnético para diferentes condições de pré-tensão. À medida que a pré-tensão de compressão é aumentada, o campo aplicado necessário para obter o mesmo valor de deformação será superior. O factor de acoplamento diminui com o aumento das influências magnéticas e eléctricas. A níveis de transmissão elevados ocorre a saturação e o factor de acoplamento torna-se independente das condições exteriores.

A *electrostricticção* consiste na dependência do estado de deformação de um material ferroelétrico do campo eléctrico aplicado (principalmente o de segunda ordem). Essa é uma propriedade universal de todos os dieléctricos mas só pode ser observada em materiais com coeficientes dieléctricos elevados como seja o PMN (*Lead Magnesium Niobate*) o qual exhibe uma deformação electrostrictiva até 0.1% (fig. 2.15). As relações constitutivas são

$$D = dT + \epsilon E \quad (2.17)$$

$$S = sT + dE + d^* E^2 \quad (2.18)$$

em que D é o deslocamento eléctrico, E o campo eléctrico, S as deformações, T as tensões, d a constante piezoeléctrica, s a flexibilidade e d^* o coeficiente electrostrictivo (o termo dE neste caso é normalmente desprezado).

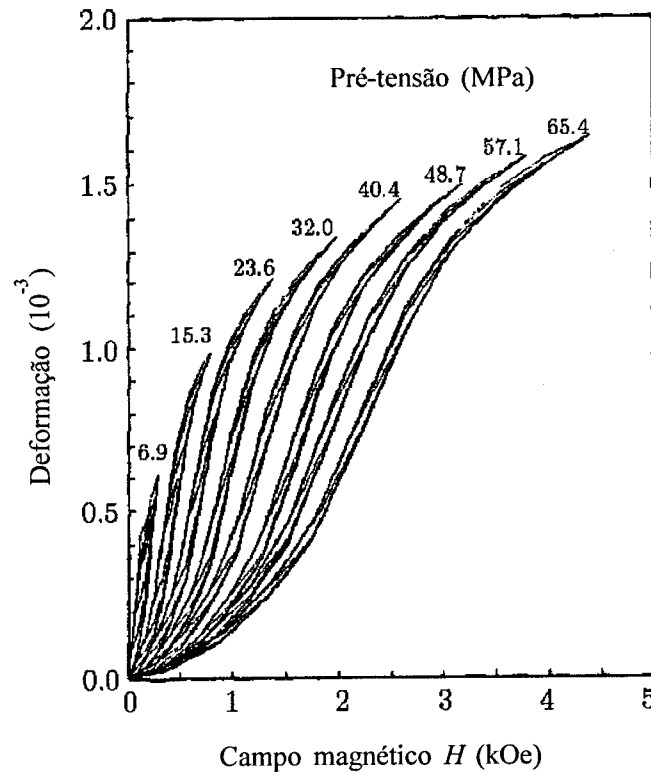


Fig. 2.14 - Curvas deformação/campo magnético para o $Tb_{0.3}Dy_{0.7}Fe_{1.93}$ (Moffett et al., 1991)

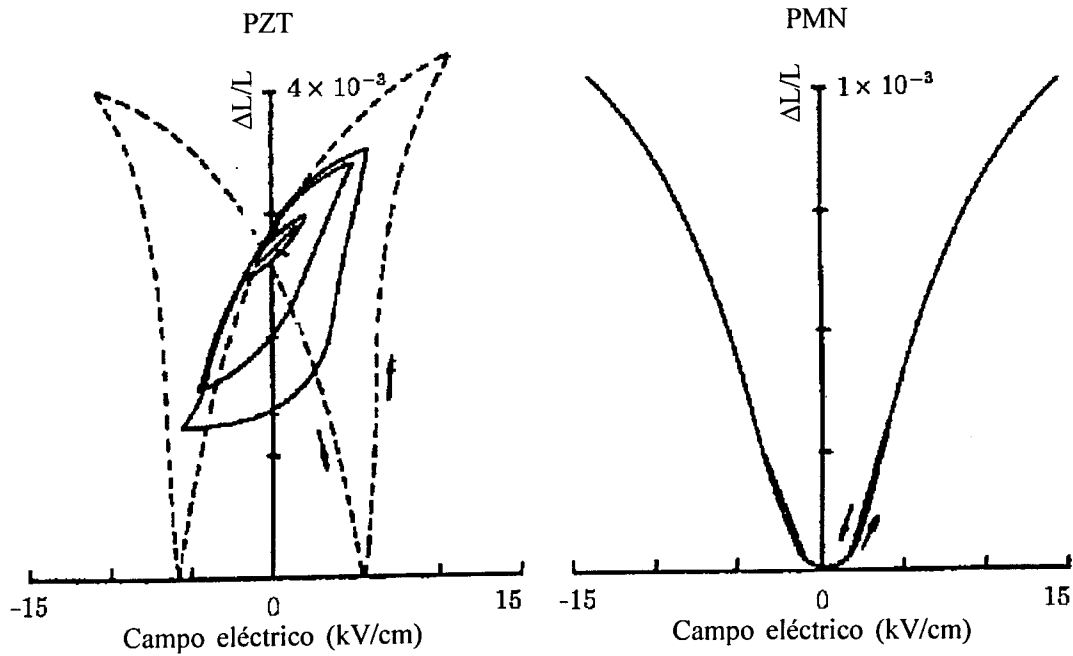


Fig. 2.15 - Piezoelectricidade (PZT) / Electroestricção (PMN) (Piefort, 2001)

2.3.3.3 Fluidos Electro/Magnetoreológicos

Os fluidos magnetoreológicos (MR) e electoreológicos (ER) são materiais que respondem a um campo magnético ou eléctrico modificando o seu comportamento reológico. Esse efeito é um comportamento *semi-inteligente* no sentido de que o campo, eléctrico ou magnético, apenas actuará na constante de viscosidade sem a possibilidade de haver um efeito recíproco.

Esses fluidos são suspensões não coloidais de pequenas partículas polarizáveis (alguns μm). A sua característica essencial é a sua capacidade, quando expostos a um campo magnético ou eléctrico, para mudar de um líquido viscoso linear para um semi-sólido com uma tensão de cedência controlável em apenas alguns milisegundos. Na ausência de um campo aplicado, esses fluidos controláveis são razoavelmente aproximados como líquidos Newtonianos (Stanway *et al.*, 1996).

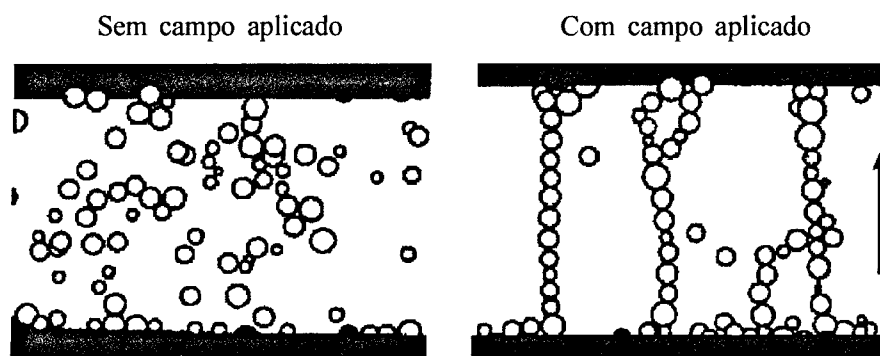


Fig. 2.16 - Alinhamento das partículas devido ao campo aplicado (Piefort, 2001)

A resposta magnetoreológica resulta de uma polarização induzida nas partículas suspensas devido à aplicação de um campo externo. A interacção entre os resultantes dipolos induzidos faz com que as partículas se alinhem e formem um género de estrutura em cadeias paralelas ao campo aplicado (fig. 2.16).

Esse género de estruturas em cadeias restringem o movimento do fluido, incrementando assim a sua viscosidade aparente. A energia mecânica necessária para quebrar esse género de cadeias aumenta com o campo aplicado. Para a maioria das aplicações em engenharia o modelo plástico simples de Bingham (2.19) é suficiente para descrever as características essenciais do fluido em função do campo (Stanway *et al.*, 1996; Yalcintas e Dai, 1999). Nesse modelo a tensão de corte total é dada por

$$\tau = \tau(H)\text{sign}(\dot{\gamma}) + \eta_p \dot{\gamma} \quad (2.19)$$

em que $\tau(H)$ é a tensão de cedência causada pelo campo eléctrico ou magnético aplicado H , $\dot{\gamma}$ é a velocidade de deformação e η_p é a viscosidade plástica que é independente do campo aplicado e que se define como o declive da recta que relaciona a tensão de corte medida com a taxa de deformação de corte.

O interesse pelos fluídos controláveis deve-se à sua capacidade de fornecer interfaces simples, de rápida resposta, entre o controlo electrónico e o sistema mecânico. De facto, a capacidade dos fluídos controláveis serem directamente utilizados como válvulas de rápida actuação, sem partes móveis, em controlo de sistemas semi-activos de vibrações foi uma das maiores motivações para o seu desenvolvimento.

As características típicas dos fluídos magneto/electroreológicos estão apresentadas na tab. 2.4. Note-se que a máxima tensão de corte obtida usando os fluídos MR é cerca de 20 vezes superior à obtida com os fluídos ER.

Tab. 2.4 - Comparação das propriedades típicas dos fluídos ER e MR

Propriedades	Fluídos ER	Fluídos MR
Tensão de cedência τ (c/ campo)	2-5 kPa (3-5 kV/mm)	50-100 kPa (150-250 kA/mm)
Viscosidade η (s/ campo)	0.2-0.3 Pa.s a 25 °C	0.2-0.3 Pa.s a 25 °C
Temperatura de funcionamento	- 25 a 125 °C	- 40 a 150 °C
Tempo de resposta	ms	ms
Densidade	1-2 g/cm ³	3-4 g/cm ³

2.4 Equações Constitutivas dos Materiais Piezoeléctricos

Nesta secção as equações constitutivas unidimensionais, segundo o ponto de vista electrostático, são estabelecidas. Na secção seguinte, e segundo as leis da termodinâmica, as equações constitutivas termopiezoeléctricas gerais são obtidas. As equações constitutivas piezoeléctricas lineares e as simplificações das matrizes de acoplamento devido às simetrias cristalinas são apresentadas em seguida.

2.4.1 Equações Constitutivas Unidimensionais

2.4.1.1 Polarização

A carga eléctrica $\pm Q$ que aparece em duas placas condutoras paralelas separadas pelo vácuo relaciona-se com a voltagem aplicada ϕ_0 através da capacitância do sistema, $C_0 = Q/\phi_0$. Substituindo o vácuo por um material isolante e suprimindo simultaneamente a fonte eléctrica, observa-se uma voltagem $\phi < \phi_0$ (experiência de Faraday, 1837). No entanto, a carga eléctrica total nas placas continua inalterada, o que implica que a capacitância do sistema tenha aumentado: $C = Q/\phi > C_0 = Q/\phi_0$.

A capacitância relaciona-se com a área A das placas e a distância h entre elas na forma $C_0 = \epsilon_0 A/h$, com a permissividade do vácuo $\epsilon_0 = (36\pi 10^9)^{-1}$ F/m. De forma semelhante, tem-se, para um dieléctrico ideal, $C = \epsilon A/d$, definindo-se a permissividade absoluta $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ e a relativa ϵ_r .

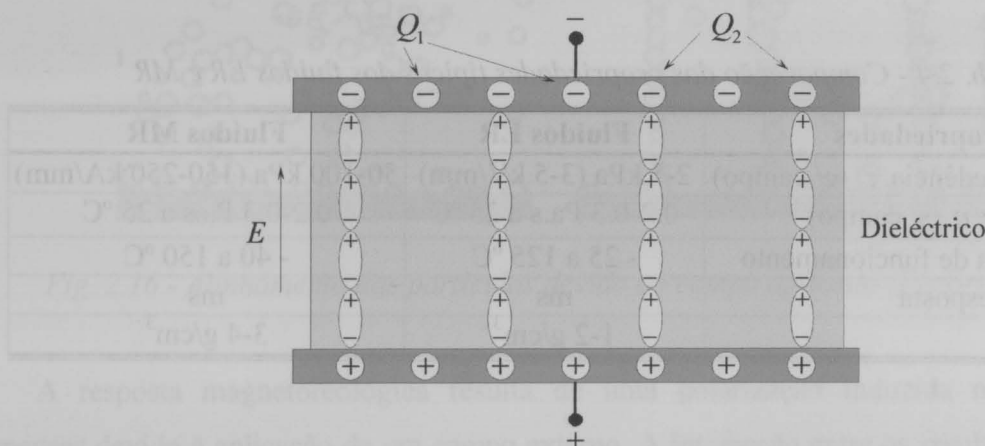


Fig. 2.17 - Cargas eléctricas num condensador plano dieléctrico

Por forma a explicar a experiência de Faraday foi colocada a seguinte hipótese: *Num material dieléctrico ideal a polarização é induzida apenas pelo campo eléctrico aplicado.* Aplicando-se uma voltagem ϕ_0 , um campo eléctrico uniforme E é induzido e a carga eléctrica resultante é $\pm Q = \pm \tau A$ (τ é a densidade de carga eléctrica na superfície). Quando o dieléctrico é inserido ele é polarizado sob a acção do campo electrostático. Dois tipos de cargas podem ser distinguidos (fig. 2.17): cargas livres Q_1 e cargas ligadas Q_2 .

As cargas ligadas, sendo localmente compensadas pelas cargas de polarização dentro do dieléctrico, fazem com que apenas as cargas livres Q_1 contribuam para a voltagem ϕ ,

$$\phi = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{\epsilon_r C_0} = \frac{Q_1}{C_0} \quad (2.20)$$

A carga total e a densidade de carga são dadas por

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{Q}{\epsilon_r} + Q \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) \quad (2.21)$$

$$\tau = \frac{\tau}{\epsilon_r} + \tau \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) \quad (2.22)$$

Defina-se então o seguinte:

$$D = \tau \quad \text{Deslocamento eléctrico} \quad (2.23)$$

$$P = \tau \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) \quad \text{Polarização} \quad (2.24)$$

$$E = \frac{\phi}{h} = \frac{Q}{\epsilon_r C_0} \frac{1}{h} = \frac{\tau}{\epsilon_r \epsilon_0} = \frac{\tau}{\epsilon} \quad \text{Campo eléctrico} \quad (2.25)$$

o que conduz a

$$D = \epsilon E = \epsilon_0 E + P \quad (2.26)$$

$$P = (\epsilon - \epsilon_0) E \quad (2.27)$$

2.4.1.2 Piezoelectricidade

O deslocamento eléctrico D (carga por unidade de área C/m^2) num meio dieléctrico unidimensional não esforçado relaciona-se com o campo eléctrico E (V/m) e a polarização P (C/m^2) pela expressão (2.26).

De forma semelhante, num corpo elástico unidimensional com um campo eléctrico nulo, a tensão T (N/m^2) e a deformação S relacionam-se por

$$T = cS \quad (2.28)$$

em que c é a rigidez do material (módulo de Young).

Para um material piezoeléctrico, as equações constitutivas mecânicas e eléctricas estão acopladas. Uma deformação S do material induz uma polarização eS devido ao efeito piezoeléctrico directo. A polarização induzida total é dada por

$$P = (\epsilon - \epsilon_0)E + eS \quad (2.29)$$

Reciprocamente, uma campo eléctrico E tende a alinhar os dipolos internos, induzindo tensões $-eE$ no material devido ao efeito piezoeléctrico inverso. As equações acopladas tomam então a forma

$$T = c^E S - eS \quad (2.30)$$

$$D = eS + \epsilon^S E \quad (2.31)$$

Na equação (2.30) a constante piezoeléctrica e relaciona, na ausência de deformação mecânica, a tensão T com o campo eléctrico E , e c^E refere-se à rigidez quando o campo eléctrico é constante. Na equação (2.31) e relaciona a carga eléctrica por unidade de área D (deslocamento eléctrico) com a deformação S sob a acção de um campo eléctrico nulo (eléctrodos em curto circuito). A constante piezoeléctrica e expressa-se em $\text{NV}^{-1}\text{m}^{-1}$ ou C/m^2 e ϵ^S é a permissividade a deformação constante.

As equações (2.30) e (2.31) são, respectivamente, o ponto de partida para a formulação das equações do actuador e do sensor piezoeléctricos.

Na próxima secção as equações constitutivas gerais para um meio termopiezoeléctrico são estabelecidas a partir de princípios termodinâmicos simples. Em seguida, as equações constitutivas lineares para um material piezoeléctrico são apresentadas, introduzindo a notação tensorial habitual em engenharia.

2.4.2 Equações Constitutivas Gerais

2.4.2.1 Termodinâmica

O princípio da conservação de energia para o meio contínuo piezoelétrico linear segue a primeira lei da termodinâmica, em que três contribuições distintas para a variação da energia interna são consideradas: o trabalho realizado pelas forças exteriores, pelo campo eléctrico aplicado e pela energia térmica do sistema,

$$d\mathcal{U} = T_{ij}dS_{ij} + E_i dD_i + \Theta d\zeta \quad (2.32)$$

onde T_{ij} e S_{ij} são, respectivamente, os tensores das tensões e das deformações, E_i e D_i são, respectivamente, os vectores campo eléctrico e deslocamento eléctrico, $\Theta = \Theta_0 + \theta$ a temperatura (Θ_0 é a temperatura de referência e $\theta \ll \Theta_0$ uma pequena variação de temperatura), ζ a entropia e $\mathcal{U}$ é a densidade de energia armazenada pelo meio piezoelétrico.

Escrevam-se então as equações constitutivas utilizando $\{S\}$, $\{E\}$ e θ como variáveis independentes, obtendo-se

$$dT_{ij} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial S_{kl}} dS_{kl} + \frac{\partial T_{ij}}{\partial E_m} dE_m + \frac{\partial T_{ij}}{\partial \theta} d\theta \quad (2.33)$$

$$dD_i = \frac{\partial D_i}{\partial S_{kl}} dS_{kl} + \frac{\partial D_i}{\partial E_m} dE_m + \frac{\partial D_i}{\partial \theta} d\theta \quad (2.34)$$

$$d\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial S_{kl}} dS_{kl} + \frac{\partial \zeta}{\partial E_m} dE_m + \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} d\theta \quad (2.35)$$

donde se definem os seguintes efeitos (ver fig. 2.18)

$\frac{\partial T_{ij}}{\partial S_{kl}}$ Elasticidade	$\frac{\partial T_{ij}}{\partial E_m}$ Piezoelect. inversa	$\frac{\partial T_{ij}}{\partial \theta}$ Tensão térmica
$\frac{\partial D_i}{\partial S_{kl}}$ Piezoelect. directa	$\frac{\partial D_i}{\partial E_m}$ Permittividade	$\frac{\partial D_i}{\partial \theta}$ Piroelectricidade
$\frac{\partial \zeta}{\partial S_{kl}}$ Efeito piezocalórico	$\frac{\partial \zeta}{\partial E_m}$ Efeito electrocalórico	$\frac{\partial \zeta}{\partial \theta}$ Capacidade calorífica

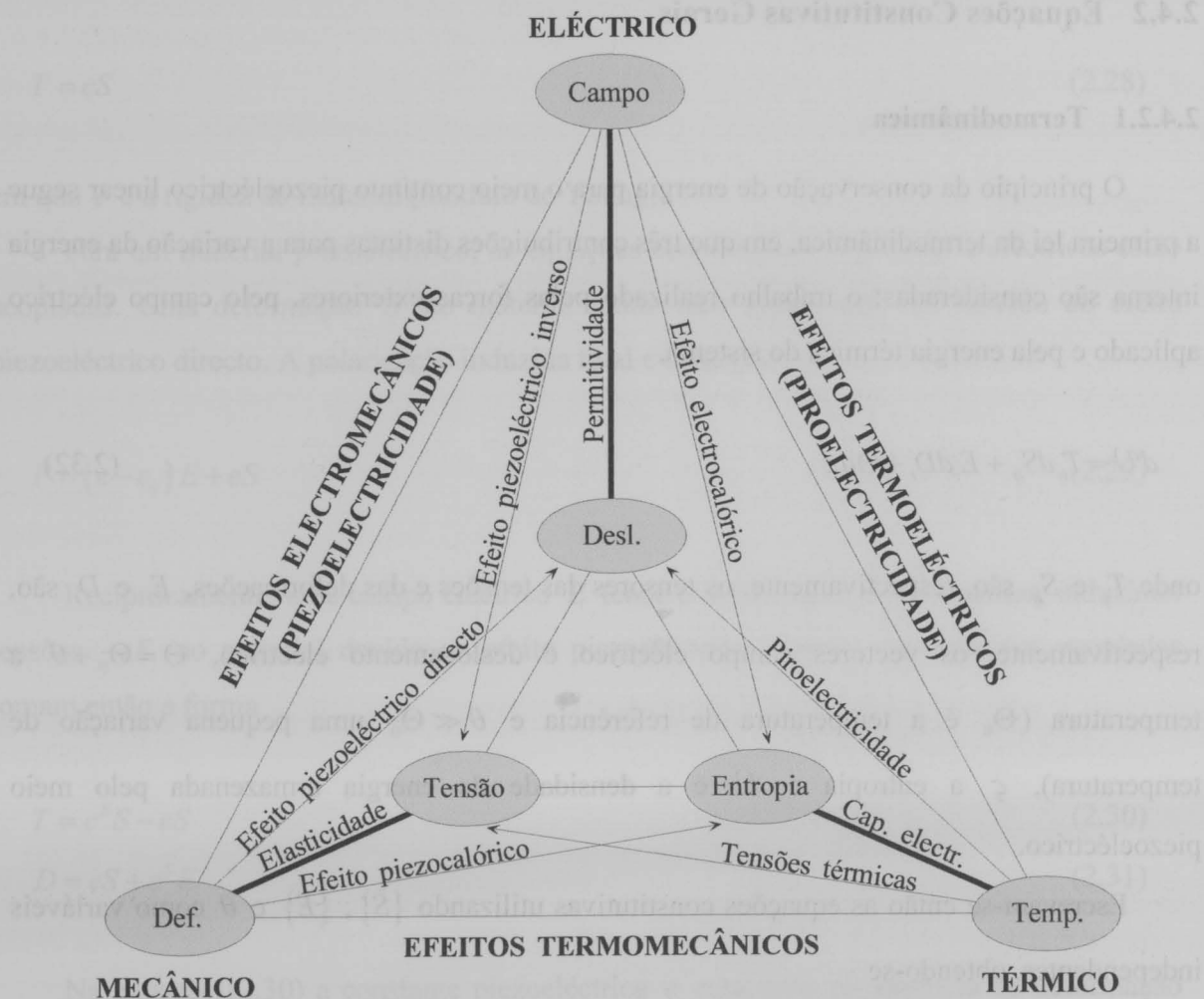


Fig. 2.18 - Relações entre as propriedades térmicas, eléctricas e mecânicas de um cristal

Por forma a descrever o comportamento do meio contínuo termopiezoelectrico como um sistema termodinâmico, introduz-se a função termoelétrica de Gibbs (ou energia livre) G definida por

$$G = U - E_i D_i - \Theta \zeta \quad (2.36)$$

Das equações (2.32) e (2.36) resulta

$$dG = T_{ij} dS_{ij} - D_i dE_i - \zeta d\theta \quad (2.37)$$

e, por conseguinte,

$$T_{ij} = \frac{\partial G}{\partial S_{ij}} \quad (2.38)$$

$$D_i = -\frac{\partial G}{\partial E_i} \quad (2.39)$$

$$\zeta = -\frac{\partial G}{\partial \theta} \quad (2.40)$$

Derivando uma segunda vez obtém-se

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial E_m} = \frac{\partial D_m}{\partial S_{ij}} \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial \theta} = \frac{\partial \zeta}{\partial S_{ij}} \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial D_i}{\partial \theta} = \frac{\partial \zeta}{\partial E_i} \quad (2.43)$$

estabelecendo-se, a partir de (2.41) que os coeficientes relativos ao efeito directo e inverso são iguais. Definindo

$\frac{\partial T_{ij}}{\partial S_{kl}} = c_{ijkl}$	$\frac{\partial T_{ij}}{\partial E_m} = e_{ijm}$	$\frac{\partial T_{ij}}{\partial \theta} = \lambda_{ij}$
$\frac{\partial D_i}{\partial S_{kl}} = e_{kli}$	$\frac{\partial D_i}{\partial E_m} = \epsilon_{im}$	$\frac{\partial D_i}{\partial \theta} = p_i$
$\frac{\partial \zeta}{\partial S_{kl}} = \lambda_{kl}$	$\frac{\partial \zeta}{\partial E_m} = p_m$	$\frac{\partial \zeta}{\partial \theta} = \alpha$

e considerando um comportamento linear, G pode ser descrito por

$$G = \frac{1}{2} c_{ijkl}^E S_{ij} S_{kl} - e_{kij} E_k S_{ij} - \frac{1}{2} \epsilon_{ij}^S E_i E_j - \frac{1}{2} \alpha \theta^2 - \lambda_{ij} S_{ij} \theta - p_i \theta E_i \quad (2.44)$$

onde c_{ijkl}^E , e_{kij} , λ_{ij} , ϵ_{ij}^S , p_i e α são, respectivamente, os coeficientes de elasticidade, piezoelétricos, de expansão térmica, as constantes dielétricas, piroelétricas e o calor

específico. Das equações (2.44) e (2.38)-(2.40) resultam as equações constitutivas termopiezoelétricas

$$T_{ij} = c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij} E_k - \lambda_{ij} \theta \quad (2.45)$$

$$D_m = e_{mkl} S_{kl} + \varepsilon_{mk}^S E_k + p_i \theta \quad (2.46)$$

$$\zeta = \lambda_{kl} S_{kl} + p_k^S E_k + \alpha \theta \quad (2.47)$$

2.4.2.2 Piezoelectricidade Linear

Quando comparados com outros materiais *inteligentes*, os materiais piezoelétricos possuem uma característica importante: o seu comportamento linear dentro de uma certa gama de valores. Nesta secção, a notação utilizada é a mesma do standard de piezoelectricidade (IEEE std) em que apenas o acoplamento piezoelétrico é considerado (o termo termoelétrico não é considerado). Na piezoelectricidade linear as equações da elasticidade linear estão acopladas à equação de equilíbrio electrostático através das constantes piezoelétricas. Tirando vantagem da simetria dos tensores mecânicos, uma notação matricial comprimida é introduzida em lugar da notação tensorial. Esta notação matricial consiste em substituir os índices ij ou kl por p ou q de acordo com a tab. 2.5 (os termos não diagonais do tensor das deformações são duplicados) obtendo-se as identificações

$$c_{ijkl} \equiv c_{pq} \quad (2.48)$$

$$e_{ikl} \equiv e_{iq} \quad (2.49)$$

$$T_{ij} \equiv T_p \quad (2.50)$$

$$S_{ij} \equiv S_p \quad \text{quando } i = j \quad (2.51)$$

$$2S_{ij} \equiv S_p \quad \text{quando } i \neq j \quad (2.52)$$

Tab. 2.5 - Notação matricial

ij ou kl	p ou q
11	1
22	2
33	3
23 ou 32	4
13 ou 31	5
12 ou 21	6

As equações constitutivas podem ser definidas por

$$\{T\} = [c^E] \{S\} - [e]^T \{E\} \quad (2.53)$$

$$\{D\} = [e] \{S\} + [\varepsilon^S] \{E\} \quad (2.54)$$

ou (formas alternativas para diferentes escolhas das variáveis independentes)

$$\{S\} = [s^E] \{T\} + [d]^T \{E\} \quad (2.55)$$

$$\{D\} = [d] \{T\} + [\varepsilon^T] \{E\} \quad (2.56)$$

$$\{S\} = [s^D] \{T\} + [g]^T \{D\} \quad (2.57)$$

$$\{E\} = -[g] \{T\} + [\beta^T] \{D\} \quad (2.58)$$

$$\{T\} = [c^D] \{S\} - [h]^T \{D\} \quad (2.59)$$

$$\{E\} = -[h] \{S\} + [\beta^S] \{D\} \quad (2.60)$$

em que $\{T\} = \{T_{11} \ T_{22} \ T_{33} \ T_{23} \ T_{13} \ T_{12}\}^T$ é o vector das tensões, $\{S\}$ o vector das deformações, $\{E\}$ o vector campo eléctrico, $\{D\}$ o vector deslocamento eléctrico, $[c]$ e $[s]$ as matrizes constitutivas elásticas, $[\varepsilon]$ e $[\beta]$ as matrizes constitutivas dieléctricas e $[d]$, $[e]$, $[g]$ e $[h]$ as matrizes constitutivas piezoeléctricas. Os índices D, E, S e T indicam que os valores das matrizes constitutivas se referem a condições em que o respectivo campo é constante.

O elemento d_{ij} de $[d]$ representa o acoplamento entre o campo eléctrico na direcção i (se uma polarização ocorrer, a sua direcção é tomada como a direcção 3) e a deformação na direcção j ($S_j = d_{ij} E_i$). As seguintes relações entre as constantes dieléctricas, elásticas e piezoeléctricas são verificadas

$$[c^E][s^E] = [c^D][s^D] = [I_6] \quad (2.61)$$

$$[\beta^S][\varepsilon^S] = [\beta^T][\varepsilon^T] = [I_3] \quad (2.62)$$

$$[c^D] = [c^E] + [e]^T [h] \quad (2.63)$$

$$[s^D] = [s^E] - [d]^T [g] \quad (2.64)$$

$$[\varepsilon^T] = [\varepsilon^S] + [d]^T [e] \quad (2.65)$$

$$[\beta^S] = [\beta^T] - [g]^T [h] \quad (2.66)$$

$$[e] = [d][c^E] \quad (2.67)$$

$$[d] = [\varepsilon]^T [g] \quad (2.68)$$

$$[g] = [h][s^D] \quad (2.69)$$

$$[h] = [\beta^S][e] \quad (2.70)$$

Devido às simetrias cristalinas, as matrizes de acoplamento piezoelétrico $[d]$ e $[e]$ podem ter apenas alguns elementos não nulos (Nye, 1957). As simetrias nas matrizes de acoplamento piezoelétrico para todas as classes cristalinas são descritas no anexo A.

Nos capítulos que se seguem, a notação referida anteriormente na tab. 2.5 para os índices dos termos do vector das tensões T_{pq} e das deformações S_{pq} , não será a adoptada. Em sua substituição são utilizadas as letras x, y e z , relativas às coordenadas espaciais, para designar as direcções 1, 2 e 3, respectivamente. Além disso, por uma questão de simplificação da representação, os índices de c^E e ε^S serão omitidos nos capítulos seguintes.

De seguida, alguns exemplos de matrizes de acoplamento piezoelétrico de alguns materiais piezoelétricos são apresentados.

$$\text{Quartz} \quad [d]_{\text{Quartz}} = \begin{bmatrix} -2.3 & -2.3 & 0 & -0.67 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.67 & 4.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} 10^{-12} \text{ m/V}$$

$$\text{PZT} \quad [d]_{\text{PXE5}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 515 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 515 & 0 & 0 \\ -175 & -175 & 362 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} 10^{-12} \text{ m/V}$$

$$\text{PVF}_2 \quad [d]_{\text{Solef}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 23 & 3 & -33 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 10^{-12} \text{ m/V}$$

(Solef mono-orientado 130 μm)

Capítulo 3

Formulação Teórica

3.1 Introdução

Neste capítulo é apresentada a formulação teórica de uma viga de três camadas com camadas piezoelétricas. Para a definição do campo de deslocamentos é considerada a teoria *layerwise*, em que se admite o efeito de corte transversal em cada uma das camadas. Em seguida, as leis constitutivas dos materiais piezoelétricos standard, com base nas simplificações tipicamente efectuadas nas vigas, são formuladas. As diferentes hipóteses para as condições de fronteira eléctricas são também discutidas. Finalmente, e por forma a obter as equações do movimento, equações de equilíbrio electrostático e as respectivas condições de fronteira electromecânicas, é aplicado o princípio de Hamilton com base nos trabalhos virtuais realizados pelas forças electromecânicas internas, externas e de inércia.

3.2 Análise Dinâmica da Viga Layerwise - Formulação

3.2.1 Campo de Deslocamentos

Considere-se uma viga com três camadas conforme ilustrado na fig. 3.1. O campo de deslocamentos axiais e transversais de cada camada segundo a teoria *layerwise* define-se por

$$\begin{aligned}
 &\text{Camada 1} \\
 u_1(x, t) &= \underbrace{\left(u_0(x, t) - \frac{h_2}{2} \theta_2(x, t) - \frac{h_1}{2} \theta_1(x, t) \right)}_{\text{translação}} + \underbrace{z_1 \theta_1(x, t)}_{\text{rotação}} \\
 &= u_0(x, t) - \frac{h_2}{2} \theta_2(x, t) + \left(z_1 - \frac{h_1}{2} \right) \theta_1(x, t)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$w_1(x, t) = w_0(x, t) \quad (3.2)$$

Camada 2

$$u_2(x, t) = \underbrace{u_0(x, t)}_{\text{translação}} + z_2 \underbrace{\theta_2(x, t)}_{\text{rotação}} \quad (3.3)$$

$$w_2(x, t) = w_0(x, t) \quad (3.4)$$

Camada 3

$$u_3(x, t) = \underbrace{\left(u_0(x, t) + \frac{h_2}{2} \theta_2(x, t) + \frac{h_3}{2} \theta_3(x, t) \right)}_{\text{translação}} + z_3 \underbrace{\theta_3(x, t)}_{\text{rotação}} \quad (3.5)$$

$$= u_0(x, t) + \frac{h_2}{2} \theta_2(x, t) + \left(z_3 + \frac{h_3}{2} \right) \theta_3(x, t)$$

$$w_3(x, t) = w_0(x, t) \quad (3.6)$$

Generalizando as expressões para o campo de deslocamentos das três camadas temos

Camada k

$$u_k(x, t) = \underbrace{\left(u_0(x, t) \pm \frac{h_2}{2} \theta_2(x, t) \pm \frac{h_k}{2} \theta_k(x, t) \right)}_{\text{translação}} + z_k \underbrace{\theta_k(x, t)}_{\text{rotação}} \quad (3.7)$$

$$= u_0(x, t) \pm \frac{h_2}{2} \theta_2(x, t) + \left(z_k \pm \frac{h_k}{2} \right) \theta_k(x, t)$$

$$w_k(x, t) = w_0(x, t) = w(x, t) \quad (3.8)$$

em que $k = 1(-), 2(+, -), 3(+)$ é o número da camada e h_k é a espessura da camada. Note-se que a continuidade do campo de deslocamentos nas interfaces é garantida, conduzindo assim a termos de acoplamento nos deslocamentos axiais u_k das camadas. O deslocamento transversal $w = w_k$ é considerado constante ao longo da espessura da viga e independente do número da camada.

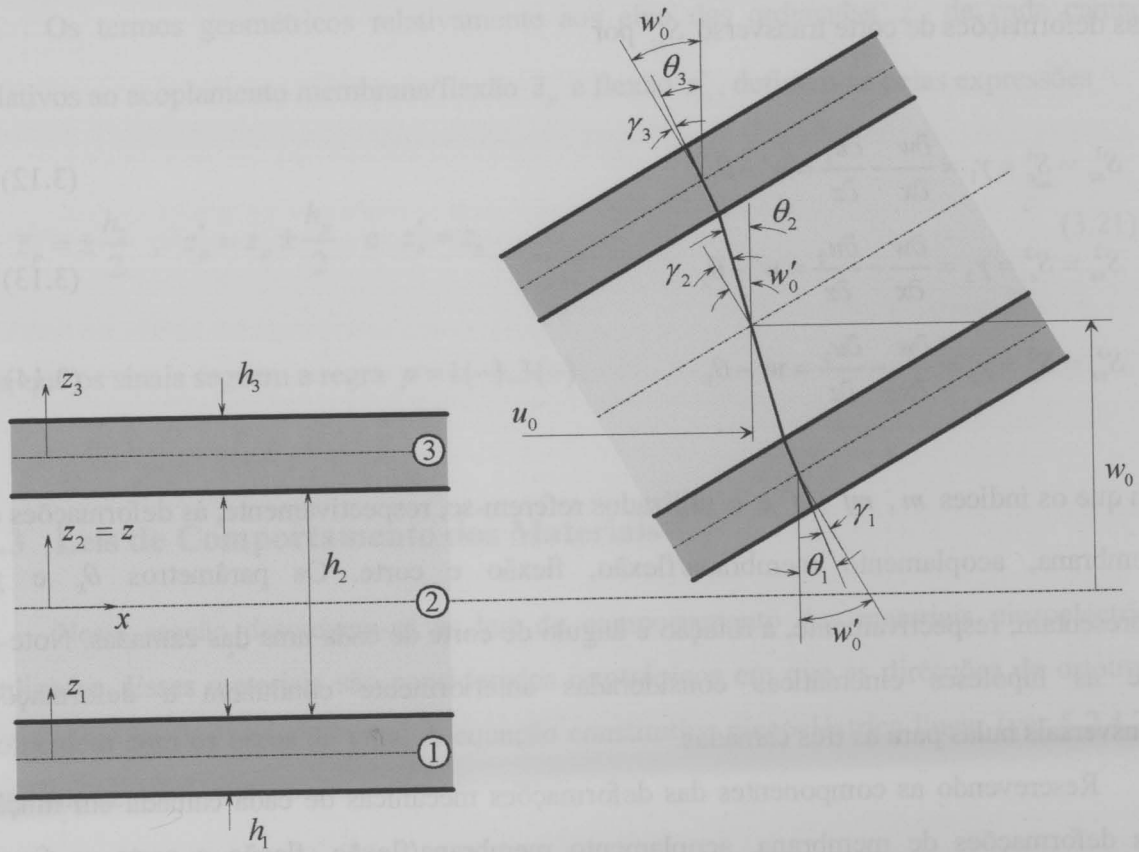


Fig. 3.1 - Cinemática da viga sandwich (teoria layerwise)

3.2.2 Campo de Deformações

De acordo com o campo de deslocamentos (3.7) e (3.8), as deformações mecânicas axiais S_{xx}^k para cada camada k definem-se por

$$S_{xx}^1 = \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{h_2}{2} \frac{\partial \theta_2}{\partial x} + \left(z_1 - \frac{h_1}{2} \right) \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \quad (3.9)$$

$$= S_m^1 + \bar{z}_1 S_{mf}^1 + z_1^* S_f^1$$

$$S_{xx}^2 = \frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z_2^* \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \quad (3.10)$$

$$= S_m^2 + z_2^* S_f^2$$

$$S_{xx}^3 = \frac{\partial u_3}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{h_2}{2} \frac{\partial \theta_2}{\partial x} + \left(z_3 + \frac{h_3}{2} \right) \frac{\partial \theta_3}{\partial x} \quad (3.11)$$

$$= S_m^3 + \bar{z}_3 S_{mf}^3 + z_3^* S_f^3$$

e as deformações de corte transversal S_{xz}^k por

$$S_{xz}^1 = S_c^1 = \gamma_1 = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial z} = w' - \theta_1 \quad (3.12)$$

$$S_{xz}^2 = S_c^2 = \gamma_2 = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial z} = w' - \theta_2 \quad (3.13)$$

$$S_{xz}^3 = S_c^3 = \gamma_3 = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u_3}{\partial z} = w' - \theta_3 \quad (3.14)$$

em que os índices m , mf , f e c utilizados referem-se, respectivamente, às deformações de membrana, acoplamento membrana/flexão, flexão e corte. Os parâmetros θ_k e γ_k representam, respectivamente, a rotação e ângulo de corte de cada uma das camadas. Note-se que as hipóteses cinemáticas consideradas anteriormente conduzem a deformações transversais nulas para as três camadas.

Rescrevendo as componentes das deformações mecânicas de cada camada em função das deformações de membrana, acoplamento membrana/flexão, flexão e corte na forma vectorial temos

$$\{S^p\} = \begin{Bmatrix} S_{xx}^p \\ S_{xz}^p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_m^p + \bar{z}_p S_{mf}^p + z_p^* S_f^p \\ S_c^p \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

$$\{S^n\} = \begin{Bmatrix} S_{xx}^n \\ S_{xz}^n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_m^n + z_n^* S_f^n \\ S_c^n \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

com

$$S_m^k = \frac{\partial u_0}{\partial x} \quad (3.17)$$

$$S_{mf}^p = \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \quad (3.18)$$

$$S_f^k = \frac{\partial \theta_k}{\partial x} \quad (3.19)$$

$$S_c^k = \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_k \quad (3.20)$$

Os termos geométricos relativamente aos eixos das ordenadas z_k de cada camada, relativos ao acoplamento membrana/flexão $\bar{z}_p$ e flexão z_p^* , definem-se pelas expressões

$$\bar{z}_p = \pm \frac{h_p}{2}, \quad z_p^* = z_p \pm \frac{h_p}{2} \quad \text{e} \quad z_n^* = z_n \quad (3.21)$$

em que os sinais seguem a regra $p = 1(-), 3(+)$.

3.3 Leis de Comportamento dos Materiais

Nesta secção descrevem-se as leis de comportamento dos materiais piezoelétricos utilizados. Esses materiais são considerados ortotrópicos em que as direcções de ortotropia coincidem com os eixos da viga. A equação constitutiva piezoelétrica linear (ver § 2.4.2.2) exprime-se por

$$\{T\} = [c]\{S\} - [e]^T \{E\} \quad (3.22)$$

$$\{D\} = [e]\{S\} + [\epsilon]\{E\} \quad (3.23)$$

em que $\{T\}$ é o vector das tensões, $[c]$ a matriz de elasticidade, $\{S\}$ o vector das deformações, $[e]^T$ a transposta da matriz das constantes piezoelétricas, $\{E\}$ o vector do campo eléctrico, $\{D\}$ o vector de deslocamentos eléctricos e $[\epsilon]$ a matriz das constantes dielétricas.

Os materiais utilizados para as camadas piezoelétricas ($p = 1, 3$) são ortotrópicos e polarizados na direcção do eixo dos zz . A sua lei de comportamento é aquela dos materiais piezoelétricos standard com as propriedades de simetria de um cristal ortorrômbico da classe $mm2$ (ver anexo A). Uma vez que os campos de deslocamentos considerados são independentes de yy e nulos segundo essa direcção, temos

$$S_{yy}^p = S_{xy}^p = S_{yz}^p = 0 \quad (3.24)$$

e admitindo-se que $T_{zz}^p = 0$ (EPT) vem

$$S_{zz}^p = \frac{1}{c_{33}^p} (e_{33}^p E_z^p - c_{13}^p S_{xx}^p) \quad (3.25)$$

Assim, levando em conta (3.24) e substituindo a expressão (3.25) da deformação transversal em (3.22) e (3.23), as leis de comportamento para as camadas piezoelétricas tomam a seguinte forma reduzida

$$\begin{Bmatrix} T_{xx}^p \\ T_{xz}^p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^{*p} & 0 \\ 0 & c_{55}^p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{xx}^p \\ S_{xz}^p \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & e_{31}^{*p} \\ e_{15}^p & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x^p \\ E_z^p \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

$$\begin{Bmatrix} D_x^p \\ D_z^p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & e_{15}^p \\ e_{31}^{*p} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{xx}^p \\ S_{xz}^p \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^p & 0 \\ 0 & \epsilon_{33}^{*p} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x^p \\ E_z^p \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

com

$$c_{11}^{*p} = c_{11}^p - \frac{c_{13}^{p2}}{c_{33}^p}; \quad e_{31}^{*p} = e_{31}^p - \frac{c_{13}^p}{c_{33}^p} e_{33}^p; \quad \epsilon_{33}^{*p} = \epsilon_{33}^p + \frac{e_{33}^{p2}}{c_{33}^p} \quad (3.28)$$

A modificação das constantes c_{11}^p , e_{31}^p e ϵ_{33}^p deve-se à hipótese de a tensão transversal ser desprezável ($T_{zz}^p \approx 0$). As componentes T_{xx}^p e T_{xz}^p do vector das tensões, e as componentes D_z^p e D_x^p do vector dos deslocamentos eléctricos, foram as únicas consideradas, uma vez que as componentes T_{yy}^p , T_{xy}^p e T_{yz}^p não contribuem significativamente para a energia electromecânica do sistema. O campo eléctrico E_y^p não foi considerado em (3.26) e (3.27) uma vez que, no caso da viga, a sua contribuição para a energia electromecânica do sistema é desprezável. No caso de se considerarem as camadas piezoelétricas como actuadores, os campos eléctricos só são impostos na direcção da espessura, e no caso de se considerarem como sensores, os campos eléctricos induzidos nas direcções xx e yy são cada vez mais pequenos, relativamente aos induzidos na direcção zz , à medida que a espessura das camadas piezoelétricas diminui (Trindade, 2000). Como se pode verificar na expressão (3.26), o acoplamento electromecânico verifica-se entre as componentes da deformação axial e de corte transversal e o campo eléctrico transversal e longitudinal, respectivamente. Essa propriedade

caracteriza os sensores e actuadores por extensão. Além disso, também se pode verificar na equação (3.27) que a deformação de corte transversal S_{xz}^p induz um determinado deslocamento eléctrico D_x^p na direcção longitudinal.

Note-se que a lei constitutiva reduzida foi desenvolvida para o material das camadas piezoeléctricas. No entanto, dada a sua generalidade, ela pode também ser utilizada na caracterização do material do núcleo ($n=2$) se os termos relativos às variáveis eléctricas forem eliminados, obtendo-se a seguinte lei constitutiva para o material do núcleo

$$\begin{Bmatrix} T_{xx}^n \\ T_{xz}^n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^{*n} & 0 \\ 0 & c_{55}^n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{xx}^p \\ S_{xz}^p \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

3.4 Potencial e Campo Eléctrico das Camadas Piezoeléctricas

O efeito de conversão piezoeléctrico é utilizado quando as camadas piezoeléctricas funcionam como actuadores e o efeito directo quando elas funcionam como sensores. Um tipo de modelização, em que a influência do efeito directo no comportamento mecânico não é considerada, foi denominada por Tiersten (1969) como formulação com pequeno acoplamento piezoeléctrico (*small piezoelectric coupling*). Nesse tipo de modelização, a componente transversal do campo eléctrico dos actuadores é considerada como o negativo do quociente entre a diferença de potencial eléctrico dos eléctrodos superior e inferior e a espessura da camada. Dessa forma, o campo eléctrico toma um valor constante ao longo da espessura. Esse tipo de modelização é caracterizado pela aproximação de mais baixa ordem para o campo eléctrico.

No presente trabalho, é utilizada uma teoria formalmente mecânica (Krommer e Irschik, 1999) que leva em consideração o efeito piezoeléctrico directo para diferentes condições de fronteira eléctricas. Dessa forma, esta teoria representa uma extensão à formulação considerada por Tiersten (1969).

As equações constitutivas relacionando o deslocamento eléctrico, campo eléctrico e deformações mecânicas podem ser escritas na forma

$$\begin{Bmatrix} D_x^p \\ D_z^p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^p & 0 \\ 0 & \epsilon_{33}^{*p} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x^p - \bar{E}_x^p \\ E_z^p - \bar{E}_z^p \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

em que os campos eléctricos induzidos devido às deformações mecânicas $\bar{E}_x^p$ e $\bar{E}_z^p$ se definem por

$$\bar{E}_x^p = -\frac{e_{15}^p}{\epsilon_{11}^p} S_{xz}^p = -\frac{e_{15}^p}{\epsilon_{11}^p} (w' - \theta_p) \quad (3.31)$$

$$\bar{E}_z^p = -\frac{e_{31}^{*p}}{\epsilon_{33}^{*p}} S_{xx}^p = -\frac{e_{31}^{*p}}{\epsilon_{33}^{*p}} \left[u_0' \pm \frac{h_2}{2} \theta_2' + \left(z_p \pm \frac{h_p}{2} \right) \theta_p' \right] \quad (3.32)$$

Frequentemente, na literatura técnica, a componente longitudinal do campo eléctrico E_x^p ou do deslocamento eléctrico D_x^p costuma ser desprezada (Krommer e Irschik, 1999). Dessa forma, numa discussão preliminar dessas duas possibilidades, a lei de Gauss é utilizada. Considere-se uma camada piezoeléctrica genérica da fig. 3.2 com os eléctrodos em circuito fechado ($\phi_p = 0$) ou com os eléctrodos em circuito aberto ($\phi_p \neq 0$).

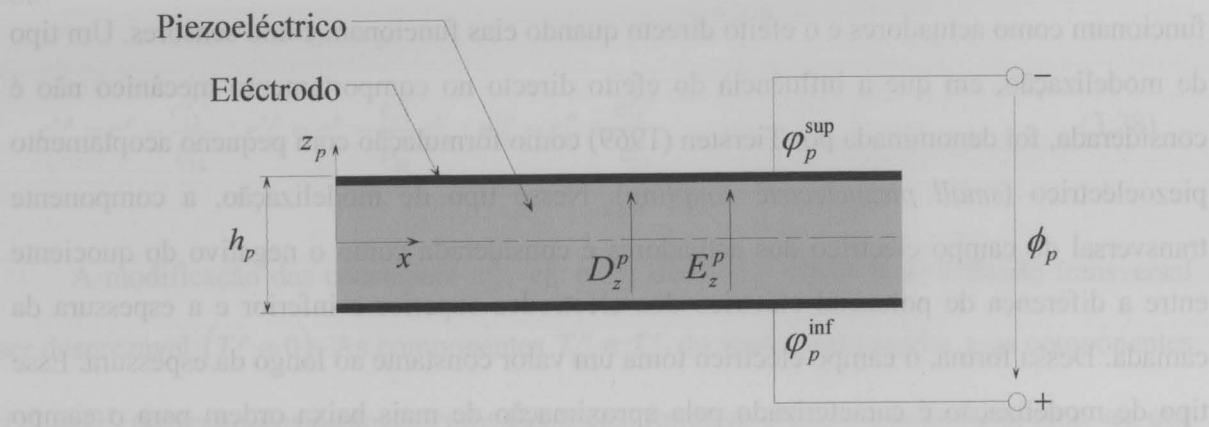


Fig. 3.2 - Deslocamento e campo eléctricos transversais numa camada piezoeléctrica genérica

A carga eléctrica total Q_p no eléctrodo superior ($z_p^{\text{sup}} = h_p/2$) pode ser determinada pela lei de Gauss

$$Q_p \Big|_{z_p^{\text{sup}}} = \oint_{S_p^e} \vec{D}^p d\vec{S}_p^e = \int_{A_p^e} D_z^p \Big|_{z_p^{\text{sup}}} dA_p^e \quad (3.33)$$

O integral de superfície estende-se pela superfície S_p^e do eléctrodo em que A_p^e representa a área efectiva do eléctrodo. Uma vez que para a condição dos eléctrodos em curto

circuito, a corrente eléctrica, definida pela derivada temporal da carga eléctrica total, é a mesma em ambos os lados da camada, e que para os eléctrodos em circuito aberto a corrente eléctrica é nula, as cargas eléctricas totais nos eléctrodos superior e inferior tem que ser iguais em grandeza mas opostas em sinal, obtendo-se que

$$\int_{A_p^e} \left(D_z^p \Big|_{z_p^{\sup}} - D_z^p \Big|_{z_p^{\inf}} \right) dA_p^e = \int_{A_p^e} \int_{z_p^{\inf}}^{z_p^{\sup}} D_{z,z}^p dz_p dA_p^e = \int_{A_p^e} \int_{z_p^{\inf}}^{z_p^{\sup}} D_{x,x}^p dz_p dA_p^e = 0 \quad (3.34)$$

em que a integração por partes foi utilizada e a equação de equilíbrio electrostático foi colocada na forma

$$D_{x,x}^p + D_{z,z}^p = 0 \quad (3.35)$$

Assumindo-se que a relação espessura/comprimento da camada é muito pequena, E_x^p é normalmente assumido de magnitude desprezável. Considerando-se as expressões (3.30)-(3.32) somos então conduzidos à condição

$$\int_{A_p^e} e_{15}^p \int_{z_p^{\inf}}^{z_p^{\sup}} S_{xz,x}^p dz_p dA_p^e = 0 \quad (3.36)$$

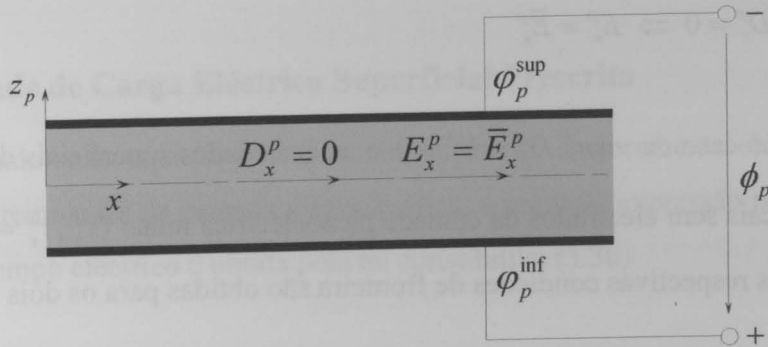


Fig. 3.3 - Deslocamento e campo eléctricos axiais numa camada piezoelétrica genérica

A equação (3.36) só é satisfeita se e_{15}^p for nulo, se a influência da deformação de corte for desprezada, ou se os carregamentos transversos exteriores e as forças de inércia não forem consideradas na teoria de Timoshenko ($S_{xz,x}^p = 0$). Sob condições mais gerais, a não verificação da equação (3.36) depende da espessura da viga e consequentemente do valor da

deformação de corte. Alternativamente, D_x^p pode ser considerado desprezável e, nesse caso, a equação é satisfeita de forma trivial (fig. 3.3).

Com o objectivo de obter uma apropriada aproximação, ambas as hipóteses, desprezar o campo eléctrico E_x^p ou o deslocamento eléctrico longitudinal D_x^p , são consideradas no seguinte princípio variacional eléctrico (Tiersten, 1969)

$$\int_{V_p} D_i^p \delta E_i^p dV_p = \int_{S_p} \tau_i^p \delta \varphi_p dS_p \quad (3.37)$$

que, após desenvolvimento, fica

$$\begin{aligned} & \int_{V_p} (D_x^p \delta E_x^p + D_y^p \delta E_y^p + D_z^p \delta E_z^p) dV_p \\ & - \int_b \int_{h_p} \tau_x^p \delta \varphi_p dy dz_p \Big|_{x=(0,L)} - \int_L \int_{h_p} \tau_y^p \delta \varphi_p dx dz_p \Big|_{y=\pm b/2} - \int_L \int_b \tau_z^p \delta \varphi_p dx dy \Big|_{z=(z_p^{\text{inf}}, z_p^{\text{sup}})} = 0 \end{aligned} \quad (3.38)$$

O potencial eléctrico em cada camada é designado por φ_p e o vector campo eléctrico obtém-se por $E_i^p = -\varphi_{p,i}$ ($i = x, y, z$). As densidades de carga eléctrica superficial são designadas por τ_i^p . Utilizando a equação (3.38) para ambas as hipóteses

$$E_x^p = 0 \quad \text{ou} \quad D_x^p = 0 \Rightarrow E_x^p = \bar{E}_x^p \quad (3.39)$$

e considerando, no caso da viga, $D_y^p = E_y^p = 0$ e as densidades superficiais de carga eléctrica nas secções verticais sem eléctrodos da camada piezoeléctrica nulas ($\tau_x^p, \tau_y^p = 0$), as seguintes expressões com as respectivas condições de fronteira são obtidas para os dois casos

$$\begin{aligned} D_{z,z}^p = 0 \quad \text{com} \quad \varphi_p \Big|_{z_p^{\text{inf}}} = \varphi_p^{\text{inf}}, \quad \varphi_p \Big|_{z_p^{\text{sup}}} = \varphi_p^{\text{sup}} \\ \text{ou} \quad D_z^p \Big|_{z_p^{\text{inf}}} = -\tau_z^{p,\text{inf}}, \quad D_z^p \Big|_{z_p^{\text{sup}}} = \tau_z^{p,\text{sup}} \end{aligned} \quad (3.40)$$

em que $\tau_z^{p,\text{inf}}, \tau_z^{p,\text{sup}}$ e $\varphi_p^{\text{inf}}, \varphi_p^{\text{sup}}$ são respectivamente as densidades de carga eléctrica e os potenciais eléctricos impostos nas superfícies inferior e superior da camada piezoeléctrica. A

equação (3.40) pode então ser utilizada para a determinação do campo eléctrico E_z^p necessário para as equações constitutivas.

3.4.1 Diferença de Potencial Eléctrico Prescrita

Assumindo-se que a diferença de potencial eléctrico da camada piezoeléctrica é prescrita, pode observar-se pela equação (3.40) que a componente transversal do deslocamento eléctrico toma um valor constante ao longo da espessura da camada. Dessa forma, a equação (3.40) pode ser reformulada para

$$D_z^p = \frac{1}{h_p} \int_{z_p^{\text{inf}}}^{z_p^{\text{sup}}} \varepsilon_{33}^{*p} (E_z^p - \bar{E}_z^p) dz_p = \varepsilon_{33}^{*p} \left(-\frac{\phi_p}{h_p} - \frac{1}{h_p} \int_{z_p^{\text{inf}}}^{z_p^{\text{sup}}} \bar{E}_z^p dz_p \right) \quad (3.41)$$

em que $\phi_p = \varphi_p^{\text{sup}} - \varphi_p^{\text{inf}}$ é a diferença de potencial eléctrico na camada piezoeléctrica. Recorrendo à lei constitutiva piezoeléctrica (3.30), a expressão para o campo eléctrico transversal toma a forma

$$E_z^p = -\frac{\phi_p}{h_p} + \left(\bar{E}_z^p - \frac{1}{h_p} \int_{z_p^{\text{inf}}}^{z_p^{\text{sup}}} \bar{E}_z^p dz_p \right) \quad (3.42)$$

3.4.2 Densidade de Carga Eléctrica Superficial Prescrita

Considerando-se na equação (3.40) a componente do deslocamento eléctrico transversal prescrita nas extremidades da camada piezoeléctrica, a seguinte expressão para a componente transversal do campo eléctrico é obtida pela lei constitutiva (3.30)

$$E_z^p = \frac{\tau_p}{\varepsilon_{33}^{*p}} + \bar{E}_z^p \quad (3.43)$$

em que $\tau_p = \tau_z^{p,\text{sup}} = -\tau_z^{p,\text{inf}}$ corresponde à densidade de carga eléctrica prescrita na face superior da camada. Para camadas sem eléctrodos a densidade de carga τ_p é considerada nula (fig. 3.4).

Essa consideração reflecte o facto de que a permissividade eléctrica do meio envolvente, por exemplo o ar, ser muito inferior aquela da camada piezoeléctrica (Krommer e Irschik, 1999). Para o caso de camadas com eléctrodos, é então possível prescrever ou o potencial eléctrico ou a carga total do eléctrodo. Se a diferença de potencial eléctrico for prescrita, pode ser comprovado por (3.42) que, em contraste com o caso do pequeno acoplamento piezoeléctrico (*small piezoelectric coupling*), um campo eléctrico quadrático é induzido na direcção da espessura para camadas com os eléctrodos em curto circuito ($\phi_p = 0$). Esse é o reflexo da influência do efeito piezoeléctrico directo no caso do potencial eléctrico ser prescrito e representa a mencionada extensão da presente teoria electromecânica acoplada.

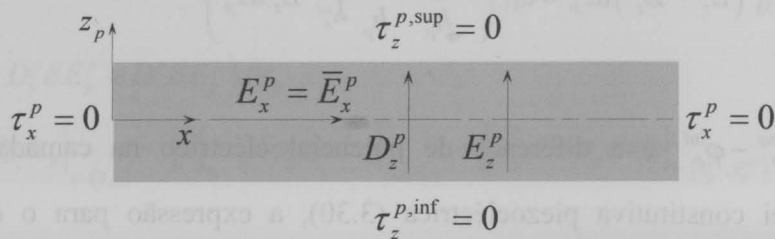


Fig. 3.4 - Deslocamento e campo eléctricos numa camada piezoeléctrica genérica (sem eléctrodos)

Por outro lado, se a carga eléctrica total for prescrita, a densidade de carga eléctrica pode ser considerada aproximadamente igual ao quociente entre a carga eléctrica total e a área dos eléctrodos. No entanto, essa consideração apenas será válida em condições limitadas, isto é, quando o campo eléctrico induzido for constante relativamente à área dos eléctrodos. Sob condições gerais de aplicação, esta aproximação não deverá ser utilizada, uma vez que a condição de equipotencialidade da área dos eléctrodos não será satisfeita.

No que se segue será demonstrado que é possível reformular (3.42) por forma a que apenas a carga eléctrica total e o campo eléctrico induzido estejam presentes na expressão da componente transversal do campo eléctrico E_z^p e que, adicionalmente, a condição de área equipotencial seja satisfeita. Dessa forma, torna-se óbvio que diferentes condições de fronteira eléctricas resultam em distintas aproximações para o campo eléctrico. Levando essas aproximações em consideração no modelo mecânico da viga com camadas piezoeléctricas, diferentes modelos podem ser obtidos em função das condições de fronteira eléctricas.

3.4.3 Carga Eléctrica Total Prescrita

Com o objectivo de formular o campo eléctrico em termos da carga eléctrica total dos eléctrodos, uma relação entre a carga eléctrica total e a diferença de potencial eléctrico deverá ser tomada em consideração.

Reduzindo o integral de superfície da expressão (3.33) a uma integração na área dos eléctrodos, a carga eléctrica total do eléctrodo superior é obtida por

$$\begin{aligned}
 Q_p &= \int_{A_p^e} D_z^p dA_p^e \\
 &= \int_{A_p^e} \epsilon_{33}^{*p} \left(-\frac{\phi_p}{h_p} - \frac{1}{h_p} \int_{z_p^{\text{inf}}}^{z_p^{\text{sup}}} \bar{E}_z^p dz_p \right) dA_p^e \\
 &= -\frac{\epsilon_{33}^{*p} A_p^e}{h_p} \phi_p - \int_{A_p^e} \epsilon_{33}^{*p} \frac{1}{h_p} \int_{z_p^{\text{inf}}}^{z_p^{\text{sup}}} \bar{E}_z^p dz_p dA_p^e
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

(note-se que a expressão (3.41) foi utilizada na derivação de (3.44)). Levando em consideração a definição de capacitância $C_p = \epsilon_{33}^{*p} (A_p^e / h_p)$, a pretendida relação entre a diferença de potencial e a carga eléctrica total pode ser escrita na forma

$$Q_p + C_p \phi_p = - \int_{A_p^e} \epsilon_{33}^{*p} \frac{1}{h_p} \int_{z_p^{\text{inf}}}^{z_p^{\text{sup}}} \bar{E}_z^p dz_p dA_p^e \tag{3.45}$$

A equação (3.45) representa a relação desejada e é normalmente utilizada em aplicações com sensores. No entanto, a sua influência no comportamento mecânico é normalmente negligenciada. A equação (3.45) é então introduzida em (3.42) de forma a que a seguinte relação para a componente transversal do campo eléctrico seja obtida

$$\begin{aligned}
 E_z^p &= -\frac{\phi_p}{h_p} + \left(\bar{E}_z^p - \frac{1}{h_p} \int_{z_p^{\text{inf}}}^{z_p^{\text{sup}}} \bar{E}_z^p dz_p \right) \\
 &= \frac{Q_p}{\epsilon_{33}^{*p} A_p^e} + \bar{E}_z^p - \frac{1}{h_p} \left[\int_{z_p^{\text{inf}}}^{z_p^{\text{sup}}} \bar{E}_z^p dz_p - \frac{1}{A_p^e} \int_{A_p^e} \int_{z_p^{\text{inf}}}^{z_p^{\text{sup}}} \bar{E}_z^p dz_p dA_p^e \right]
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Até este ponto, e em função da condição de fronteira eléctrica, três aproximações foram obtidas para a componente transversal do campo eléctrico. Essas aproximações serão, no que se segue, necessárias para a formulação da teoria electromecânica acoplada.

3.4.4 Potencial Eléctrico e Campo Eléctrico em Função da Espessura

As equações (3.42), (3.43) e (3.46) reflectem a influência do campo eléctrico induzido no campo eléctrico transversal devido ao efeito piezoeléctrico directo. Note-se que as designações de campo eléctrico induzido (3.31) e (3.32) foram utilizadas com o objectivo de manter a formulação mais geral em vez de utilizar a definição dos campos eléctricos induzidos em termos das deformações mecânicas. Dessa forma, outros efeitos, como sejam efeitos térmicos de condução de calor ou então a utilização de teorias de ordem superior, podem ser tratados pela mesma formulação, apenas contabilizando a sua influência nos campos eléctricos induzidos.

Desprezar a influência dos campos eléctricos induzidos implica que não haja nenhuma diferença no campo eléctrico devido ao tipo de condição de fronteira imposta. No caso de condições de fronteira triviais, como por exemplo, eléctrodos em curto circuito ($\phi_p = 0$), camadas sem eléctrodos ($\tau_p = 0$) ou camadas com eléctrodos abertos ($Q_p = 0$), a resposta mecânica da viga será exactamente igual nas três situações. De facto, resultados obtidos usando modelos de elementos finitos com acoplamento electromecânico (Saravanos e Heyliger, 1995; Saravanos *et al.*, 1997) demonstram que diferentes condições de fronteira eléctricas resultam em diferentes respostas mecânicas. No presente modelo de viga esses resultados poderão facilmente ser obtidos recorrendo às expressões (3.31), (3.32), (3.42), (3.43) e (3.46) para a definição do campo eléctrico.

Como se pode constatar, existe uma relação muito próxima entre as expressões (3.43) e (3.46). De facto, como foi referido anteriormente, se a densidade de carga eléctrica estiver uniformemente distribuída pela área do eléctrodo ($\tau_p = Q_p / A_p^e$), o campo eléctrico induzido terá que ser constante relativamente ao comprimento da viga. Esta condição implica que o termo entre parêntesis rectos da expressão (3.46) seja nulo, tornando assim as expressões (3.43) e (3.46) iguais.

Finalmente, a distribuição do potencial eléctrico é obtida pela integração da componente transversal do campo eléctrico na espessura da camada (note-se que a definição do campo eléctrico corresponde ao negativo do gradiente do potencial eléctrico $E_i^p = -\phi_{p,i}$). Nas

relações seguintes é assumido que à face inferior da camada é imposto um potencial eléctrico nulo.

$$\varphi_p = +\frac{\phi_p}{h_p}(z_p - z_p^{\text{inf}}) - \left[\int_{z_p^{\text{inf}}}^z \bar{E}_z^p dz_p - \frac{(z_p - z_p^{\text{inf}})}{h_p} \int_{z_p^{\text{inf}}}^{z_p^{\text{sup}}} \bar{E}_z^p dz_p \right] \quad (3.47)$$

$$\varphi_p = -\frac{\tau_p}{\epsilon_{33}^*} (z_p - z_p^{\text{inf}}) - \int_{z_p^{\text{inf}}}^z \bar{E}_3^p dz_p \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} \varphi_p = & -\frac{Q_p}{\epsilon_{33}^* A_p^e} (z_p - z_p^{\text{inf}}) - \int_{z_p^{\text{inf}}}^{z_p} \bar{E}_3^p dz_p \\ & + \frac{(z_p - z_p^{\text{inf}})}{h_p} \left[\int_{z_p^{\text{inf}}}^{z_p^{\text{sup}}} \bar{E}_3^p dz_p - \frac{1}{A_p^e} \int_{A_p^e} \int_{z_p^{\text{inf}}}^{z_p^{\text{sup}}} \bar{E}_3^p dz_p dA_p^e \right] \end{aligned} \quad (3.49)$$

Nas equações (3.47) e (3.49) é possível observar-se que o potencial eléctrico se anula na superfície inferior da camada ($z = z_p^{\text{inf}}$), toma um valor constante na superfície superior ($z = z_p^{\text{sup}}$), e que a condição de área equipotencial dos eléctrodos é satisfeita em ambos os casos. Na equação (3.48) a condição de área equipotencial apenas é satisfeita na superfície inferior mas, em geral, não é satisfeita na superior. Esta é a razão pela qual não é possível assumir $\tau_p = Q_p / A_p^e$ como a generalidade das situações. No caso de camadas com eléctrodos, este tipo de modelização apenas pode ser utilizado se as cargas eléctricas estiverem uniformemente distribuídas pela área dos eléctrodos. Geralmente, só as camadas sem eléctrodos é que podem ser modelizadas com a equação (3.48) para $\tau_p = 0$.

Substituindo os campos eléctricos induzidos nas direcções transversal (3.32) e longitudinal (3.31) nas expressões dos campos e potenciais eléctricos (3.39), (3.42)-(3.43), (3.46) e (3.47)-(3.49) e integrando na espessura, obtemos as seguintes expressões para os campos eléctricos transversais e longitudinais e potencial eléctrico para as diferentes condições de fronteira eléctricas:

▪ Diferença de potencial eléctrico prescrita

$$\begin{aligned} E_z^{p(\phi)} = & -\frac{\phi_p}{h_p} - \frac{e_{31}^*}{\epsilon_{33}^*} \theta'_p \left[z_p - \frac{(z_p^{\text{inf}} + z_p^{\text{sup}})}{2} \right] \\ = & -\frac{\phi_p}{h_p} - \frac{e_{31}^*}{\epsilon_{33}^*} \theta'_p (z_p - z_p^{\text{med}}) = -\frac{\phi_p}{h_p} - \frac{e_{31}^*}{\epsilon_{33}^*} (z_p - z_p^{\text{med}}) S_f^p \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\phi_p^{(\phi)} = \frac{\phi_p}{h_p} (z_p - z_p^{\text{inf}}) + \frac{1}{2} \frac{e_{31}^{*p}}{\epsilon_{33}^{*p}} \theta'_p \left[z_p^2 - z_p (z_p^{\text{inf}} + z_p^{\text{sup}}) + z_p^{\text{inf}} z_p^{\text{sup}} \right] \quad (3.51)$$

▪ **Densidade de carga eléctrica prescrita**

$$E_z^{p(\tau)} = \frac{\tau_p}{\epsilon_{33}^{*p}} - \frac{e_{31}^{*p}}{\epsilon_{33}^{*p}} \left[u'_0 \pm \frac{h_2}{2} \theta'_2 + \left(z_p \pm \frac{h_p}{2} \right) \theta'_p \right] = \frac{\tau_p}{\epsilon_{33}^{*p}} - \frac{e_{31}^{*p}}{\epsilon_{33}^{*p}} S_{xx}^p \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \phi_p^{(\tau)} = & -\frac{\tau_p}{\epsilon_{33}^{*p}} (z_p - z_p^{\text{inf}}) + \frac{e_{31}^{*p}}{\epsilon_{33}^{*p}} \left(u'_0 \pm \frac{h_2}{2} \theta'_2 + \frac{h_p}{2} \theta'_p \right) (z_p - z_p^{\text{inf}}) \\ & + \frac{1}{2} \frac{e_{31}^{*p}}{\epsilon_{33}^{*p}} z_p \theta'_p (z_p^2 - z_p^{\text{inf}^2}) \end{aligned} \quad (3.53)$$

▪ **Carga eléctrica total prescrita**

$$\begin{aligned} E_z^{p(Q)} = & \frac{Q_p}{\epsilon_{33}^{*p} A_p^e} - \frac{e_{31}^{*p}}{\epsilon_{33}^{*p}} z_p \theta'_p (z_p - z_p^{\text{med}}) \\ & - \frac{1}{A_p^e} \int_{A_p^e} \left\{ \frac{e_{31}^{*p}}{\epsilon_{33}^{*p}} \left(u'_0 \pm \frac{h_2}{2} \theta'_2 + \frac{h_p}{2} \theta'_p \right) + \frac{e_{31}^{*p}}{\epsilon_{33}^{*p}} z_p \theta'_p z_p^{\text{med}} \right\} dA_p^e \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \phi_p^{(Q)} = & -\frac{Q_p}{\epsilon_{33}^{*p} A_p^e} (z_p - z_p^{\text{inf}}) + \frac{e_{31}^{*p}}{\epsilon_{33}^{*p}} z_p \theta'_p \left[\frac{(z_p^2 - z_p^{\text{inf}^2})}{2} - z_p^{\text{inf}} \frac{(z_p^{\text{inf}} + z_p^{\text{sup}})}{2} \right] \\ & + \frac{1}{A_p^e} \int_{A_p^e} \left\{ \left[\frac{e_{31}^{*p}}{\epsilon_{33}^{*p}} \left(u'_0 \pm \frac{h_2}{2} \theta'_2 + \frac{h_p}{2} \theta'_p \right) + \frac{e_{31}^{*p}}{\epsilon_{33}^{*p}} z_p \theta'_p z_p^{\text{med}} \right] (z_p - z_p^{\text{inf}}) \right\} dA_p^e \end{aligned} \quad (3.55)$$

Os índices ϕ , τ e Q foram utilizados para definir os campos e potenciais eléctricos para as condições de fronteira eléctricas diferença de potencial eléctrico prescrito, densidade de carga eléctrica superficial prescrita e carga eléctrica total prescrita, respectivamente.

▪ **Campo eléctrico axial**

$$E_x^p = -\frac{e_{15}^p}{\epsilon_{11}^p} (w' - \theta_p) = -\frac{e_{15}^p}{\epsilon_{11}^p} S_c^p \quad (3.56)$$

3.5 Formulação Variacional

As equações do movimento de um meio piezoelétrico podem ser obtidas pelo princípio de Hamilton no qual a Lagrangeana e o trabalho virtual das forças exteriores são convenientemente adaptados por forma a incluir as contribuições eléctricas e mecânicas (Allik e Hughes, 1970; Lerch, 1990; Tzou e Tseng, 1990). A densidade de energia potencial de um material piezoelétrico inclui então as contribuições da energia de deformação interna e da energia electrostática (Tiersten, 1967).

O princípio de Hamilton é definido por

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt + \delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{W} dt = 0 \quad (3.57)$$

em que t_0 e t_1 definem o intervalo de tempo (todas as variações se devem anular para $t = t_0$ e $t = t_1$), $\mathcal{L}$ é a Lagrangeana de um dado sistema e $\mathcal{W}$ denota o trabalho realizado pelas forças mecânicas e eléctricas exteriores. A Lagrangeana de um dado volume piezoelétrico genérico V é definida pela soma da energia cinética $\mathcal{T}$ e da entalpia eléctrica $\mathcal{H}$ (piezoelectricidade linear) na forma

$$\mathcal{L} = \int_V (\mathcal{T} - \mathcal{H}) dV \quad (3.58)$$

Note-se que no caso de se pretender contabilizar os efeitos piroelétricos a energia livre de Gibbs (equação (2.36), $\mathcal{G} = \mathcal{H} - \Theta \zeta$) deveria ter sido utilizada (ver §2.4.2.1).

A entalpia eléctrica $\mathcal{H}$ é definida por

$$\mathcal{H} = \mathcal{U} - E_i D_i \quad (3.59)$$

onde $\mathcal{U}$ representa a energia de deformação interna.

O princípio da conservação da energia para o meio piezoelétrico linear segue a primeira lei da termodinâmica (equação (2.32))

$$d\mathcal{U} = T_{ij} dS_{ij} + E_i dD_i \quad (3.60)$$

que quando combinada com as equações (3.59) e (3.60) resulta em

$$d\mathcal{H} = T_{ij} dS_{ij} - D_i dE_i \quad (3.61)$$

e, por conseguinte,

$$T_{ij} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial S_{ij}} \quad (3.62)$$

$$D_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial E_i} \quad (3.63)$$

Substituindo a Lagrangeana (3.58) no princípio de Hamilton (3.57) obtém-se

$$\delta \int_0^1 (T - \mathcal{H} + \mathcal{W}) dt = 0 \quad (3.64)$$

Essas três quantidades, nomeadamente o trabalho virtual realizado pelas forças de inércia δT , electromecânicas internas $\delta \mathcal{H}$ e externas $\delta \mathcal{W}$, serão no que se segue expressadas em termos das cinco variáveis principais dos deslocamentos, agrupadas no vector de deslocamentos generalizados

$$\{u\} = \{u_0, w, \theta_1, \theta_2, \theta_3\}^T \quad (3.65)$$

e das duas variáveis eléctricas independentes, nomeadamente as diferenças de potencial eléctrico em cada uma das camadas, agrupadas também por uma razão de conveniência no vector das diferenças de potencial eléctrico

$$\{\phi\} = \{\phi_1, \phi_3\}^T \quad (3.66)$$

3.5.1 Trabalho Virtual das Forças Electromecânicas Internas

A entalpia eléctrica $\mathcal{H}$ de um meio piezoeléctrico contínuo (Tiersten, 1969) define-se por

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \{S\}^T [c] \{S\} - \{S\}^T [e]^T \{E\} - \frac{1}{2} \{E\}^T [\varepsilon] \{E\} \quad (3.67)$$

Efectuando a sua variação relativamente aos deslocamentos e potenciais eléctricos e considerando um meio piezoeléctrico genérico de volume V obtém-se o trabalho virtual $\delta\mathcal{H}$ realizado pelas forças electromecânicas internas pela expressão

$$\delta\mathcal{H} = \int_V \{ \delta S \}^T [c] \{ S \} - \{ \delta S \}^T [e]^T \{ E \} - \{ S \}^T [e]^T \{ \delta E \} - \{ \delta E \}^T [\varepsilon] \{ E \} dV \quad (3.68)$$

No entanto, ele também pode ser considerado como a soma das contribuições de cada camada

$$\delta\mathcal{H} = \sum_k \delta\mathcal{H}^k, \quad k=1,2,3 \quad (3.69)$$

Decompondo a expressão (3.68) nos sub-termos representativos das componentes mecânicas $\delta\mathcal{H}_{uu}^k$ para todas as camadas, piezoeléctricas $\delta\mathcal{H}_{u\phi}^p$ e $\delta\mathcal{H}_{\phi u}^p$ e dieléctricas $\delta\mathcal{H}_{\phi\phi}^p$ para as camadas piezoeléctricas, obtém-se

$$\delta\mathcal{H}^p = \delta\mathcal{H}_{uu}^p - \delta\mathcal{H}_{u\phi}^p - \delta\mathcal{H}_{\phi u}^p - \delta\mathcal{H}_{\phi\phi}^p \quad (3.70)$$

$$\delta\mathcal{H}^n = \delta\mathcal{H}_{uu}^n \quad (3.71)$$

em que a contribuição das camadas piezoeléctricas é assinalada pelo índice $p=1,3$ e a do núcleo pelo índice $n \equiv 2$. As contribuições dos termos das expressões (3.70) e (3.71) definem-se por

$$\delta\mathcal{H}_{uu}^k = \int_{V_k} \{ \delta S^k \}^T [c^k] \{ S^k \} dV_k \quad (3.72)$$

$$\delta\mathcal{H}_{u\phi}^p = \int_{V_p} \{ \delta S^p \}^T [e^p]^T \{ E^p \} dV_p \quad (3.73)$$

$$\delta\mathcal{H}_{\phi u}^p = \int_{V_p} \{ \delta E^p \}^T [e^p] \{ S^p \} dV_p \quad (3.74)$$

$$\delta\mathcal{H}_{\phi\phi}^p = \int_{V_p} \{ \delta E^p \}^T [\varepsilon^p] \{ E^p \} dV_p \quad (3.75)$$

Substituindo as expressões do vector das deformações $\{S^k\}$ e do campo eléctrico $\{E^p\}$ considerados nas leis constitutivas das camadas (3.26) e (3.29) e as correspondentes matrizes constitutivas obtém-se

$$\delta \mathcal{H}_{uu}^k = \int_{V_k} \left(\delta S_{xx}^k c_{11}^{*k} S_{xx}^k + \delta S_{xz}^k c_{55}^k S_{xz}^k \right) dV_k \quad (3.76)$$

$$\delta \mathcal{H}_{u\phi}^p = \int_{V_p} \left(\delta S_{xx}^p e_{31}^{*p} E_z^p + \delta S_{xz}^p e_{15}^p E_x^p \right) dV_p \quad (3.77)$$

$$\delta \mathcal{H}_{\phi u}^p = \int_{V_p} \left(\delta E_z^p e_{31}^{*p} S_{xx}^p + \delta E_x^p e_{15}^p S_{xz}^p \right) dV_p \quad (3.78)$$

$$\delta \mathcal{H}_{\phi\phi}^p = \int_{V_p} \left(\delta E_x^p \varepsilon_{11}^p E_x^p + \delta E_z^p \varepsilon_{33}^{*p} E_z^p \right) dV_p \quad (3.79)$$

Escrevendo as expressões anteriores em função das deformações de membrana (3.17), membrana/flexão (3.18), flexão (3.19) e corte (3.20), e supondo-se as três camadas simétricas relativamente às suas linhas médias z_k obtém-se para o núcleo e camadas piezoeléctricas

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{H}_{uu}^p = & \int_0^L \left\{ c_{11}^{*p} \left(A_p \delta S_m^p S_m^p + \bar{z}_p^2 A_p \delta S_{mf}^p S_{mf}^p + 4I_p \delta S_f^p S_f^p \right) + c_{55}^p A_p \delta S_c^p S_c^p \right\} dL \\ & + \int_0^L \left\{ c_{11}^{*p} \left(\bar{z}_p A_p \left(\delta S_m^p S_{mf}^p + \delta S_{mf}^p S_m^p \right) + \bar{I}_p \left(\delta S_m^p S_f^p + \delta S_f^p S_m^p \right) \right) \right. \\ & \left. + \bar{z}_p \bar{I}_p \left(\delta S_{mf}^p S_f^p + \delta S_f^p S_{mf}^p \right) \right\} dL \end{aligned} \quad (3.80)$$

$$\delta \mathcal{H}_{uu}^n = \int_0^L c_{11}^{*n} \left(A_n \delta S_m^n S_m^n + I_n \delta S_f^n S_f^n \right) + c_{55}^n A_n \delta S_c^n S_c^n dL \quad (3.81)$$

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{H}_{u\phi}^p = & \int_{V_p} \left[\delta \left(S_m^p + \bar{z}_p S_{mf}^p + z_p^* S_f^p \right) e_{31}^{*p} E_z^p + \delta S_c^p e_{15}^p E_x^p \right] dV_p \\ = & \int_{V_p} \delta S_m^p e_{31}^{*p} E_z^p dV_p + \int_{V_p} \bar{z}_p \delta S_{mf}^p e_{31}^{*p} E_z^p dV_p \\ & + \int_{V_p} z_p^* \delta S_f^p e_{31}^{*p} E_z^p dV_p + \int_{V_p} \delta S_c^p e_{15}^p E_x^p dV_p \end{aligned} \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{H}_{\phi u}^p = & \int_{V_p} \left[\delta E_z^p e_{31}^{*p} \left(S_m^p + \bar{z}_p S_{mf}^p + z_p^* S_f^p \right) + \delta E_x^p e_{15}^p S_c^p \right] dV_p \\ = & \int_{V_p} \delta E_z^p e_{31}^{*p} S_m^p dV_p + \int_{V_p} \bar{z}_p \delta E_z^p e_{31}^{*p} S_{mf}^p dV_p \\ & + \int_{V_p} z_p^* \delta E_z^p e_{31}^{*p} S_f^p dV_p + \int_{V_p} \delta E_x^p e_{15}^p S_c^p dV_p \end{aligned} \quad (3.83)$$

$$\delta \mathcal{H}_{\phi\phi}^p = \int_p \delta E_x^p \epsilon_{11}^p E_x^p dV_p + \int_p \delta E_z^p \epsilon_{33}^{*p} E_z^p dV_p \quad (3.84)$$

em que b é a largura da viga, $A_k = bh_k$ é área da secção recta da camada, $\bar{I}_p = \pm \frac{bh_p^2}{2}$ é o momento estático e $I_k = \frac{bh_k^3}{12}$ o momento de 2ª ordem.

3.5.1.1 Diferença de Potencial Eléctrico Prescrito

Substituindo as expressões para o campo eléctrico transversal $E_z^{p(\phi)}$ (3.50) e campo eléctrico longitudinal E_x^p (3.56), considerando-se como condição de fronteira eléctrica a diferença de potencial eléctrico, nas expressões dos termos piezoeléctricos (3.82) e (3.83) e dieléctrico (3.84) obtém-se

$$\delta \mathcal{H}_{u\phi}^p = \delta \mathcal{H}_{u\phi}^{p(\phi)} - \delta \bar{\mathcal{H}}_{u\phi}^{p(\phi)} \quad (3.85)$$

com

$$\delta \mathcal{H}_{u\phi}^{p(\phi)} = - \int_0^L \frac{e_{31}^{*p}}{h_p} \delta \left(A_p S_m^p + \bar{z}_p A_p S_{mf}^p + \bar{I}_p S_f^p \right) \phi_p dL \quad (3.86)$$

e

$$\delta \bar{\mathcal{H}}_{u\phi}^{p(\phi)} = \int_0^L \left(\frac{e_{31}^{*p2} I_p}{\epsilon_{33}^p} \delta S_f^p S_f^p - \frac{e_{15}^{p2} A_p}{\epsilon_{11}^p} \delta S_c^p S_c^p \right) dL \quad (3.87)$$

Por conseguinte, o segundo termo piezoeléctrico em (3.83) fica na forma

$$\delta \mathcal{H}_{\phi u}^p = \delta \mathcal{H}_{\phi u}^{p(\phi)} - \delta \bar{\mathcal{H}}_{u\phi}^{p(\phi)} \quad (3.88)$$

com

$$\delta \mathcal{H}_{\phi u}^{p(\phi)} = -\frac{e_{31}^{*p}}{h_p} \int_0^L \delta \phi_p \left(A_p S_m^p + \bar{z}_p A_p S_{mf}^p + \bar{I}_p S_f^p \right) dL \quad (3.89)$$

Da mesma forma, para o termo dieléctrico em (3.84) obtém-se

$$\delta \mathcal{H}_{\phi\phi}^p = \delta \mathcal{H}_{\phi\phi}^{p(\phi)} + \delta \bar{\mathcal{H}}_{\phi\phi}^{p(\phi)} \quad (3.90)$$

com

$$\delta \mathcal{H}_{\phi\phi}^{p(\phi)} = \int_0^L \frac{\varepsilon_{33}^{*p} A_p}{h_p^2} \delta \phi_p \phi_p dL \quad (3.91)$$

e

$$\delta \bar{\mathcal{H}}_{\phi\phi}^{p(\phi)} = \int_0^L \left(\frac{e_{31}^{*p2} I_p}{\varepsilon_{33}^{*p}} \delta S_f^p S_f^p + \frac{e_{15}^{p2} A_p}{\varepsilon_{11}^p} \delta S_c^p S_c^p \right) dL \quad (3.92)$$

Nas equações anteriores os termos induzidos $\delta \bar{\mathcal{H}}_{u\phi}^{p(\phi)}$, $\delta \bar{\mathcal{H}}_{\phi u}^{p(\phi)}$ e $\delta \bar{\mathcal{H}}_{\phi\phi}^{p(\phi)}$ aparecem apenas em função das deformações mecânicas aumentando a rigidez consoante o tipo de condição de fronteira eléctrica considerada. Dessa forma, a expressão (3.80) de $\delta \mathcal{H}_{uu}^p$ juntamente com os termos induzidos toma a forma

$$\delta \mathcal{H}_{uu}^{p(\phi)} = \delta \mathcal{H}_{uu}^p + 2\delta \bar{\mathcal{H}}_{u\phi}^{p(\phi)} - \delta \bar{\mathcal{H}}_{\phi\phi}^{p(\phi)} \quad (3.93)$$

obtendo-se, após substituição,

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{H}_{uu}^{p(\phi)} = \int_0^L & \left\{ c_{11}^{*p} \left(A_p \delta S_m^p S_m^p + \bar{z}_p^2 A_p \delta S_{mf}^p S_{mf}^p \right) + \left(4c_{11}^{*p} + \frac{e_{31}^{*p2}}{\varepsilon_{33}^{*p}} \right) I_p \delta S_f^p S_f^p \right. \\ & \left. + \left(c_{55}^p + \frac{e_{15}^{p2}}{\varepsilon_{11}^p} \right) A_p \delta S_c^p S_c^p \right\} dL \\ & + \int_0^L \left\{ c_{11}^{*p} \left[\bar{z}_p A_p \left(\delta S_m^p S_{mf}^p + \delta S_{mf}^p S_m^p \right) + \bar{I}_p \left(\delta S_m^p S_f^p + \delta S_f^p S_m^p \right) \right] \right. \\ & \left. + \bar{z}_p \bar{I}_p \left(\delta S_{mf}^p S_f^p + \delta S_f^p S_{mf}^p \right) \right\} dL \end{aligned} \quad (3.94)$$

Finalmente, o trabalho virtual das forças electromecânicas internas das camadas piezoelétricas $\delta\mathcal{H}^{p(\phi)}$ (levando em consideração a condição de fronteira eléctrica diferença de potencial eléctrico prescrita e os termos induzidos) é dado por

$$\delta\mathcal{H}^{p(\phi)} = \delta\mathcal{H}_{uu}^{p(\phi)} - \delta\mathcal{H}_{u\phi}^{p(\phi)} - \delta\mathcal{H}_{\phi u}^{p(\phi)} - \delta\mathcal{H}_{\phi\phi}^{p(\phi)} \quad (3.95)$$

em que

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{H}_{uu}^{p(\phi)} = & \int_0^L \left\{ c_{11}^{*p} \left(A_p \delta S_m^p S_m^p + \bar{z}_p^2 A_p \delta S_{mf}^p S_{mf}^p \right) + \bar{c}_{11}^{*p} I_p \delta S_f^p S_f^p + \bar{c}_{55}^p A_p \delta S_c^p S_c^p \right\} dL \\ & + \int_0^L \left\{ c_{11}^{*p} \left[\bar{z}_p A_p \left(\delta S_m^p S_{mf}^p + \delta S_{mf}^p S_m^p \right) + \bar{I}_p \left(\delta S_m^p S_f^p + \delta S_f^p S_m^p \right) \right] \right. \\ & \left. + \bar{z}_p \bar{I}_p \left(\delta S_{mf}^p S_f^p + \delta S_f^p S_{mf}^p \right) \right\} dL \end{aligned} \quad (3.96)$$

$$\delta\mathcal{H}_{u\phi}^{p(\phi)} = - \int_0^L \frac{e_{31}^{*p}}{h_p} \delta \left(A_p S_m^p + \bar{z}_p A_p S_{mf}^p + \bar{I}_p S_f^p \right) \phi_p dL \quad (3.97)$$

$$\delta\mathcal{H}_{\phi u}^{p(\phi)} = - \int_0^L \frac{e_{31}^{*p}}{h_p} \delta \phi_p \left(A_p S_m^p + \bar{z}_p A_p S_{mf}^p + \bar{I}_p S_f^p \right) dL \quad (3.98)$$

$$\delta\mathcal{H}_{\phi\phi}^{p(\phi)} = \int_0^L \frac{\varepsilon_{33}^{*p} A_p}{h_p^2} \delta \phi_p \phi_p dL \quad (3.99)$$

Note-se que as constantes de rigidez $\bar{c}_{11}^{*p(\phi)} = 4c_{11}^{*p} + \left(e_{31}^{*p^2} / \varepsilon_{33}^{*p} \right)$ e $\bar{c}_{55}^p = c_{55}^p + \left(e_{15}^{p^2} / \varepsilon_{11}^p \right)$ são introduzidas na expressão (3.96). Elas correspondem às modificações de rigidez que se verificam devido ao potencial eléctrico quadrático e ao campo eléctrico axial induzidos. A primeira modificação afecta apenas a rigidez de flexão e a segunda a rigidez de corte.

NOTA: Uma situação interessante de ser analisada é a acção das camadas piezoelétricas ($p = 1, 3$) representada por

$$\delta\mathcal{H}_{u\phi}^{(\phi)} = \sum_p \delta\mathcal{H}_{u\phi}^{p(\phi)} \quad (3.100)$$

Considerando a expressão (3.100) e substituindo os termos geométricos definidos na expressão (3.21) e os valores dos momentos estáticos $\bar{I}_p$ de cada camada obtemos

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{H}_{u\phi}^{(\phi)} = & -\int_0^L \frac{e_{31}^{*1}}{h_1} \delta \left(A_1 S_m^1 - \frac{h_2}{2} A_1 S_{mf}^1 - \frac{bh_1^2}{2} S_f^1 \right) \phi_1 dL \\ & -\int_0^L \frac{e_{31}^{*3}}{h_3} \delta \left(A_3 S_m^3 + \frac{h_2}{2} A_3 S_{mf}^3 + \frac{bh_3^2}{2} S_f^3 \right) \phi_3 dL \end{aligned} \quad (3.101)$$

Para o caso em que as camadas são idênticas, a expressão (3.101) é modificada para

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{H}_{u\phi}^{(\phi)} = & -\int_0^L \frac{e_{31}^{*p}}{h_p} \left[A_p \delta S_m^p (\phi_1 + \phi_3) - \frac{h_2}{2} A_p \delta S_{mf}^p (\phi_1 - \phi_3) - \frac{bh_p^2}{2} (\delta S_f^1 \phi_1 - \delta S_f^3 \phi_3) \right] dL \end{aligned} \quad (3.102)$$

Assim, dois casos particulares podem ser considerados: valores da diferença de potencial eléctrico aplicada às camadas piezoeléctricas iguais ou simétricos.

- No primeiro caso, $\phi_1 = \phi_3 = \phi_p$ e (3.102) é modificada para

$$\delta \widehat{\mathcal{H}}_{u\phi}^{(\phi)} = -\int_0^L \frac{e_{31}^{*p}}{h_p} \left[2A_p \delta S_m^p \phi_p - \frac{bh_p^2}{2} \phi_p (\delta S_f^1 - \delta S_f^3) \right] dL \quad (3.103)$$

Efectuado a integração obtém-se

$$\delta \widehat{\mathcal{H}}_{u\phi}^{(\phi)} = -2be_{31}^{*p} \phi_p [\delta u_0]_0^L + \frac{bh_p^2}{2} e_{31}^{*p} \phi_p \left([\delta \theta_1]_0^L - [\delta \theta_3]_0^L \right) \quad (3.104)$$

Neste caso, $\delta \widehat{\mathcal{H}}_{u\phi}^{(\phi)}$ pode ser interpretado como o trabalho virtual realizado pelas forças, na fronteira das camadas piezoeléctricas, induzidas pelas diferenças de potencial eléctrico aplicadas. Assim, verifica-se que a rotação do núcleo θ_2 é nula e apenas as rotações das camadas piezoeléctricas θ_1 e θ_3 e o deslocamento axial u_0 podem ser produzidos. Dessa forma, apenas uma deformação de membrana pode ser imposta ao núcleo.

- No segundo caso $\phi_1 = -\phi_3 = \phi_p$ e (3.102) é modificada para

$$\delta \tilde{\mathcal{H}}_{u\phi}^{(\phi)} = - \int_0^L \frac{e_{31}^{*p}}{h_p} \left[-h_2 A_p \delta S_{mf}^p \phi_p - \frac{bh_p^2}{2} \phi_p (\delta S_f^1 + \delta S_f^3) \right] dL \quad (3.105)$$

Efectuado a integração obtém-se

$$\delta \tilde{\mathcal{H}}_{u\phi}^{(\phi)} = bh_2 e_{31}^{*p} \phi_p [\delta \theta_2]_0^L + \frac{bh_p}{2} e_{31}^{*p} \phi_p \left([\delta \theta_1]_0^L + [\delta \theta_3]_0^L \right) \quad (3.106)$$

Novamente, $\delta \tilde{\mathcal{H}}_{u\phi}^{(\phi)}$ pode ser interpretado como o trabalho virtual realizado pelas forças, na fronteira das camadas piezoelétricas, induzidas pelas diferenças de potencial eléctrico aplicadas. Desta vez, verifica-se que o deslocamento axial u_0 é nulo e que apenas as rotações do núcleo θ_2 e das camadas piezoelétricas θ_1 e θ_3 podem ser produzidas. Uma vez que as três rotações têm o mesmo sinal, apenas a flexão da viga pode ser produzida.

Por forma a exprimir o trabalho virtual das forças electromecânicas internas das camadas piezoelétricas e mecânicas do núcleo, em função das variáveis u_0 , w , θ_1 , θ_2 e θ_3 , as definições das deformações generalizadas (3.17)-(3.20) são substituídas nas expressões (3.95) e (3.71) obtendo-se para as camadas piezoelétricas

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{H}^{p(\phi)} = & \int_0^L \delta u'_0 \left(c_{11}^{*p} A_p u'_0 + c_{11}^{*p} \bar{z}_p A_p \theta'_2 + c_{11}^{*p} \bar{I}_p \theta'_p + \frac{e_{31}^{*p}}{h_p} A_p \phi_p \right) dL \\ & + \int_0^L \delta \theta'_2 \left(c_{11}^{*p} \bar{z}_p A_p u'_0 + c_{11}^{*p} \bar{z}_p^2 A_p \theta'_2 + c_{11}^{*p} \bar{z}_p \bar{I}_p \theta'_p + \frac{e_{31}^{*p}}{h_p} \bar{z}_p A_p \phi_p \right) dL \\ & + \int_0^L \delta \theta'_p \left(c_{11}^{*p} \bar{I}_p u'_0 + c_{11}^{*p} \bar{z}_p \bar{I}_p \theta'_2 + \bar{c}_{11}^{*p} I_p \theta'_p + \frac{e_{31}^{*p}}{h_p} \bar{I}_p \phi_p \right) dL \\ & + \int_0^L \delta \theta_p \left(\bar{c}_{55}^p A_p \theta_p - \bar{c}_{55}^p A_p w' \right) dL \\ & + \int_0^L \delta w' \left(\bar{c}_{55}^p A_p w' - \bar{c}_{55}^p A_p \theta_p \right) dL \\ & + \int_0^L \delta \phi_p \left(\frac{e_{31}^{*p}}{h_p} A_p u'_0 + \frac{e_{31}^{*p}}{h_p} \bar{z}_p A_p \theta'_2 + \frac{e_{31}^{*p}}{h_p} \bar{I}_p \theta'_p - \frac{\varepsilon_{33}^{*p} A_p}{h_p^2} \phi_p \right) dL \end{aligned} \quad (3.107)$$

e para o núcleo

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{H}^n = & \int_0^L \delta u'_0 \left(c_{11}^{*n} A_n u'_0 \right) dL + \int_0^L \delta \theta'_n \left(c_{11}^{*n} I_n \theta'_n \right) dL \\ & + \int_0^L \delta w' \left[c_{55}^n A_n (w' - \theta_n) \right] dL + \int_0^L \delta \theta_n \left[c_{55}^n A_n (\theta_n - w') \right] dL\end{aligned}\quad (3.108)$$

Integrando por partes, obtém-se para as camadas piezoelétricas

$$\delta\mathcal{H}^{p(\phi)} = \delta\mathcal{H}^{p(\phi)cf} + \delta\mathcal{H}^{p(\phi)ee} \quad (3.109)$$

com

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{H}^{p(\phi)cf} = & \left\{ \delta u_0 \left(c_{11}^{*p} A_p u'_0 + c_{11}^{*p} \bar{z}_p A_p \theta'_2 + c_{11}^{*p} \bar{I}_p \theta'_p + \frac{e_{31}^{*p}}{h_p} A_p \phi_p \right) \right. \\ & + \delta \theta_2 \left(c_{11}^{*p} \bar{z}_p A_p u'_0 + c_{11}^{*p} \bar{z}_p^2 A_p \theta'_2 + c_{11}^{*p} \bar{z}_p \bar{I}_p \theta'_p + \frac{e_{31}^{*p}}{h_p} \bar{z}_p A_p \phi_p \right) \\ & + \delta \theta_p \left(c_{11}^{*p} \bar{I}_p u'_0 + c_{11}^{*p} \bar{z}_p \bar{I}_p \theta'_2 + \bar{c}_{11}^{*p} I_p \theta'_p + \frac{e_{31}^{*p}}{h_p} \bar{I}_p \phi_p \right) \\ & \left. + \delta w \left(\bar{c}_{55}^p A_p w' - \bar{c}_{55}^p A_p \theta_p \right) \right\} \Bigg|_0^L\end{aligned}\quad (3.110)$$

e

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{H}^{p(\phi)ee} = & - \int_0^L \delta u_0 \left(c_{11}^{*p} A_p u''_0 + c_{11}^{*p} \bar{z}_p A_p \theta''_2 + c_{11}^{*p} \bar{I}_p \theta''_p + \frac{e_{31}^{*p}}{h_p} A_p \phi'_p \right) dL \\ & - \int_0^L \delta \theta_2 \left(c_{11}^{*p} \bar{z}_p A_p u''_0 + c_{11}^{*p} \bar{z}_p^2 A_p \theta''_2 + c_{11}^{*p} \bar{z}_p \bar{I}_p \theta''_p + \frac{e_{31}^{*p}}{h_p} \bar{z}_p A_p \phi'_p \right) dL \\ & - \int_0^L \delta \theta_p \left(c_{11}^{*p} \bar{I}_p u''_0 + c_{11}^{*p} \bar{z}_p \bar{I}_p \theta''_2 + \bar{c}_{11}^{*p} I_p \theta''_p + \bar{c}_{55}^p A_p \theta_p - \bar{c}_{55}^p A_p w' + \frac{e_{31}^{*p}}{h_p} \bar{I}_p \phi'_p \right) dL \\ & - \int_0^L \delta w \left(\bar{c}_{55}^p A_p w'' - \bar{c}_{55}^p A_p \theta'_p \right) dL \\ & + \int_0^L \delta \phi_p \left(\frac{e_{31}^{*p}}{h_p} A_p u'_0 + \frac{e_{31}^{*p}}{h_p} \bar{z}_p A_p \theta'_2 + \frac{e_{31}^{*p}}{h_p} \bar{I}_p \theta'_p - \frac{e_{33}^{*p} A_p}{h_p^2} \phi_p \right) dL\end{aligned}\quad (3.111)$$

Para o núcleo vem

$$\delta\mathcal{H}^n = \delta\mathcal{H}^{n cf} + \delta\mathcal{H}^{n ee} \quad (3.112)$$

com

$$\delta \mathcal{H}^{nef} = \left\{ \delta u_0 \left(c_{11}^{*n} A_n u_0' \right) + \delta \theta_n \left(c_{11}^{*n} I_n \theta_n' \right) + \delta w \left[c_{55}^n A_n (w' - \theta_n) \right] \right\} \Big|_0^L \quad (3.113)$$

e

$$\delta \mathcal{H}^{nee} = - \int_0^L \left\{ \delta u_0 \left(c_{11}^{*n} A_n u_0'' \right) + \delta \theta_n \left[c_{11}^{*n} I_n \theta_n'' + c_{55}^n A_n (\theta_n - w') \right] + \delta w \left[c_{55}^n A_n (w'' - \theta_n') \right] \right\} dL \quad (3.114)$$

3.5.1.2 Densidade de Carga Eléctrica Prescrita

Uma outra condição de fronteira eléctrica, nomeadamente a densidade de carga eléctrica prescrita, pode ser considerada na definição do campo eléctrico transversal $E_z^{p(\tau)}$ (3.52). Assim, perante essa consideração, as expressões dos termos piezoeléctricos (3.82) e (3.83) são reformuladas obtendo-se

$$\delta \mathcal{H}_{ur}^p = \delta \hat{\mathcal{H}}_{ur}^{p(\tau)} - \delta \bar{\mathcal{H}}_{ur}^{p(\tau)} \quad (3.115)$$

$$\delta \mathcal{H}_{ru}^p = \delta \hat{\mathcal{H}}_{ru}^{p(\tau)} - \delta \bar{\mathcal{H}}_{ru}^{p(\tau)} \quad (3.116)$$

com

$$\delta \hat{\mathcal{H}}_{ur}^{p(\tau)} = \int_0^L \frac{e_{31}^{*p}}{h_p} \delta \left(A_p S_m^p + \bar{z}_p A_p S_{mf}^p + \bar{I}_p S_f^p \right) \tau_p dL \quad (3.117)$$

$$\delta \hat{\mathcal{H}}_{ru}^{p(\tau)} = \int_0^L \frac{e_{31}^{*p}}{h_p} \delta \tau_p \left(A_p S_m^p + \bar{z}_p A_p S_{mf}^p + \bar{I}_p S_f^p \right) dL \quad (3.118)$$

$$\delta \bar{\mathcal{H}}_{ur}^{p(\tau)} = \int_0^L \left(\frac{e_{31}^{*p2}}{\epsilon_{33}^p} \int_{A_p} \delta S_{xx}^p S_{xx}^p dA_p + \frac{e_{15}^{p2}}{\epsilon_{11}^p} \int_{A_p} \delta S_c^p S_c^p dA_p \right) dL \quad (3.119)$$

Da mesma forma, para o termo dieléctrico (3.84) obtém-se

$$\delta \mathcal{H}_{rr}^p = \delta \mathcal{H}_{rr}^{p(\tau)} - \delta \hat{\mathcal{H}}_{rrru}^{p(\tau)} - \delta \hat{\mathcal{H}}_{rrur}^{p(\tau)} + \delta \bar{\mathcal{H}}_{rr}^{p(\tau)} \quad (3.120)$$

com

$$\delta \mathcal{H}_{\tau\tau}^{p(\tau)} = \int_0^L \frac{A_p}{\epsilon_{33}^{*p}} \delta \tau_p \tau_p dL \quad (3.121)$$

$$\delta \hat{\mathcal{H}}_{\tau\tau u}^{p(\tau)} = \int_0^L \frac{e_{31}^{*p}}{\epsilon_{33}^{*p}} \left[\int_{A_p} \delta \tau_p S_{xx}^p dA_p \right] dL \quad (3.122)$$

$$\delta \hat{\mathcal{H}}_{\tau u \tau}^{p(\tau)} = \int_0^L \frac{e_{31}^{*p}}{\epsilon_{33}^{*p}} \left[\int_{A_p} \delta S_{xx}^p \tau_p dA_p \right] dL \quad (3.123)$$

$$\delta \bar{\mathcal{H}}_{\tau\tau}^{p(\tau)} = \int_0^L \left[\frac{e_{31}^{*p^2}}{\epsilon_{33}^{*p}} \int_{A_p} \delta S_{xx}^p S_{xx}^p dA_p + \frac{e_{15}^{p^2}}{\epsilon_{11}^p} \int_{A_p} \delta S_c^p S_c^p dA_p \right] dL \quad (3.124)$$

Nas equações anteriores aparecem os termos induzidos $\delta \bar{\mathcal{H}}_{u\tau}^{p(\tau)}$, $\delta \bar{\mathcal{H}}_{\tau u}^{p(\tau)}$ e $\delta \bar{\mathcal{H}}_{\tau\tau}^{p(\tau)}$, expressos apenas em função das deformações mecânicas. Assim, a expressão (3.70) é modificada para a forma

$$\delta \mathcal{H}^p = \delta \mathcal{H}_{uu}^p - \delta \mathcal{H}_{u\tau}^p - \delta \mathcal{H}_{\tau u}^p - \delta \mathcal{H}_{\tau\tau}^p \quad (3.125)$$

Substituindo-se as expressões (3.115), (3.116) e (3.120) em (3.125) obtém-se

$$\delta \mathcal{H}^p = \delta \mathcal{H}_{uu}^{p(\tau)} - \delta \mathcal{H}_{u\tau}^{p(\tau)} - \delta \mathcal{H}_{\tau u}^{p(\tau)} - \delta \mathcal{H}_{\tau\tau}^{p(\tau)} \quad (3.126)$$

com

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{H}_{uu}^{p(\tau)} &= \delta \mathcal{H}_{uu}^p + 2\delta \bar{\mathcal{H}}_{u\tau}^{p(\tau)} - \delta \bar{\mathcal{H}}_{\tau\tau}^{p(\tau)} \\ &= \int_0^L \left(\bar{c}_{11}^{*p(\tau)} \int_{A_p} \delta S_{xx}^p S_{xx}^p dA_p + \bar{c}_{55}^p \int_{A_p} \delta S_c^p S_c^p dA_p \right) dL \end{aligned} \quad (3.127)$$

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{H}_{u\tau}^{p(\tau)} &= \delta \hat{\mathcal{H}}_{u\tau}^{p(\tau)} - \delta \hat{\mathcal{H}}_{\tau\tau u}^{p(\tau)} \\ &= \int_0^L e_{31}^{*p} \left(\frac{1}{h_p} - \frac{1}{\epsilon_{33}^{*p}} \right) \left[\int_{A_p} \delta S_{xx}^p \tau_p dA_p \right] dL \end{aligned} \quad (3.128)$$

$$\delta \mathcal{H}_{\tau u}^{p(\tau)} = \delta \hat{\mathcal{H}}_{\tau u}^{p(\tau)} - \delta \hat{\mathcal{H}}_{\tau\tau u}^{p(\tau)} = \delta \mathcal{H}_{u\tau}^{p(\tau)} \quad (3.129)$$

$$\delta \mathcal{H}_{\tau\tau}^{p(\tau)} = \int_0^L \frac{A_p}{\epsilon_{33}^{*p}} \delta \tau_p \tau_p dL \quad (3.130)$$

Para a presente condição de fronteira eléctrica, pode verificar-se pela expressão (3.127) que o termo relativo ao trabalho virtual realizado pelas forças electromecânicas se mantém com uma expressão idêntica à expressão puramente mecânica (3.76). A rigidez de corte, da mesma forma que na secção anterior, foi modificada para $\bar{c}_{55}^p$. No entanto, a constante de rigidez $\bar{c}_{11}^{*p(\tau)} = c_{11}^{*p} + \left(e_{31}^{*p^2} / \epsilon_{33}^{*p} \right)$, desta vez, não modifica apenas a rigidez de flexão, mas sim a rigidez extensional (membrana, membrana/flexão e flexão).

No caso da densidade de carga eléctrica prescrita ser nula ($\tau = 0$), os termos piezoeléctricos (3.128) e (3.129) e dieléctrico (3.130) são nulos, apenas se verificando as modificações da rigidez anteriormente referidas. Essa situação é normalmente utilizada para a modelização de camadas sem eléctrodos e pode ser facilmente implementada através de uma simples alteração dos valores de rigidez, suficiente para a correcta modelização. Essa será a metodologia adoptada neste trabalho para essa situação.

3.5.2 Trabalho Virtual das Forças de Inércia

A energia cinética da viga com três camadas ($k = 1, 2, 3$) e volume V define-se por

$$T = \sum_k \frac{1}{2} \int_{V_k} (\rho_k \dot{u}_k \dot{u}_k + \rho_k \dot{w}_k \dot{w}_k) dV_k \quad (3.131)$$

Considerando a sua variação relativamente aos deslocamentos, obtém-se o trabalho virtual das forças de inércia definido por

$$\delta T = - \sum_k \int_{V_k} (\delta u_k \rho_k \ddot{u}_k + \delta w_k \rho_k \ddot{w}_k) dV_k \quad (3.132)$$

em que ρ_k representa a densidade volúmica de cada uma das camadas. Assim, substituindo as expressões do campo de deslocamentos generalizados (3.7) e (3.8), e considerando as três camadas simétricas relativamente às suas linhas médias z_k , as seguintes expressões são obtidas para as camadas piezoeléctricas e núcleo

$$\begin{aligned} \delta T_p = - \int_{V_p} \left\{ \delta u_0 \left[\rho_p \left(\ddot{u}_0 + \bar{z}_p \ddot{\theta}_2 + z_p^* \ddot{\theta}_p \right) \right] + \delta \theta_2 \left[\rho_p \left(\bar{z}_p \ddot{u}_0 + \bar{z}_p^2 \ddot{\theta}_2 + \bar{z}_p z_p^* \ddot{\theta}_p \right) \right] \right. \\ \left. + \delta \theta_p \left[\rho_p \left(z_p^* \ddot{u}_0 + \bar{z}_p z_p^* \ddot{\theta}_2 + z_p^{*2} \ddot{\theta}_p \right) \right] + \delta w \left(\rho_p \ddot{w} \right) \right\} dV_p \end{aligned} \quad (3.133)$$

$$\delta T_n = - \int_{V_n} \left\{ \delta u_0 \left[\rho_n \left(\ddot{u}_0 + z_n \ddot{\theta}_n \right) \right] + \delta \theta_n \left[\rho_n \left(z_n \ddot{u}_0 + z_n^2 \ddot{\theta}_n \right) \right] + \delta w \left(\rho_n \ddot{w} \right) \right\} dV_n \quad (3.134)$$

Efectuando a integração na secção transversal tem-se

$$\begin{aligned} \delta T_p = - \int_0^L \left\{ \delta u_0 \left[\rho_p \left(A_p \ddot{u}_0 + \bar{z}_p A_p \ddot{\theta}_2 + \bar{I}_p \ddot{\theta}_p \right) \right] + \delta \theta_p \left[\rho_p \left(\bar{I}_p \ddot{u}_0 + \bar{z}_p \bar{I}_p \ddot{\theta}_2 + I_p \ddot{\theta}_p \right) \right] \right. \\ \left. + \delta \theta_2 \left[\rho_p \left(\bar{z}_p A_p \ddot{u}_0 + \bar{z}_p^2 A_p \ddot{\theta}_2 + \bar{z}_p \bar{I}_p \ddot{\theta}_p \right) \right] + \delta w \left(\rho_p A_p \ddot{w} \right) \right\} dL \end{aligned} \quad (3.135)$$

$$\delta T_n = - \int_0^L \left\{ \delta u_0 \left(\rho_n A_n \ddot{u}_0 \right) + \delta \theta_n \left(\rho_n I_n \ddot{\theta}_n \right) + \delta w \left(\rho_n A_n \ddot{w} \right) \right\} dL \quad (3.136)$$

3.5.3 Trabalho Virtual das Forças Exteriores

O trabalho virtual das forças exteriores $\delta \mathcal{W}$ é definido pelo trabalho virtual realizado pelas forças mecânicas exteriores $\delta \mathcal{W}_u$ e pela carga eléctrica superficial $\delta \mathcal{W}_\phi$ na forma

$$\delta \mathcal{W} = \delta \mathcal{W}_u - \delta \mathcal{W}_\phi \quad (3.137)$$

Dois tipos de forças mecânicas exteriores são consideradas em cada camada da viga, nomeadamente, as forças volúmicas axiais F_x^k e transversais F_z^k . O trabalho virtual realizado por essas forças em cada uma das camadas $\delta \mathcal{W}_u^k$ é definido por

$$\delta \mathcal{W}_u^k = \int_{V_k} \left(F_x^k \delta u_k + F_z^k \delta w_k \right) dV_k \quad (3.138)$$

Substituindo as expressões do campo de deslocamentos generalizados (3.7) e (3.8) obtém-se

$$\delta \mathcal{W}_u^k = \int_{V_k} \left\{ F_x^k \left[\delta u_0 \pm \frac{h_2}{2} \delta \theta_2 + \left(z_k \pm \frac{h_k}{2} \right) \delta \theta_k \right] + F_z^k \delta w \right\} dV_k \quad (3.139)$$

Efectuando a integração na secção transversal obtém-se

$$\delta \mathcal{W}_u^p = \int_L \left\{ X_p \left[\delta u_0 \pm \frac{h_2}{2} \delta \theta_2 \pm \frac{h_p}{2} \delta \theta_p \right] + M_p \delta \theta_p + Z_p \delta w \right\} dL \quad (3.140)$$

$$\delta \mathcal{W}_u^n = \int_L \{ X_n \delta u_0 + M_n \delta \theta_2 + Z_n \delta w \} dL \quad (3.141)$$

em que

$$X_k = \int_{A_k} F_x^k dA_k \quad (3.142)$$

$$M_k = \int_{A_k} F_x^k z_k dA_k \quad (3.143)$$

$$Z_k = \int_{A_k} F_z^k dA_k \quad (3.144)$$

Somando a contribuição das três camadas obtém-se $\delta \mathcal{W}_u = \sum_k \delta \mathcal{W}_u^k$ na forma

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{W}_u = \int_L \left\{ \delta u_0 (X_1 + X_2 + X_3) + \delta w (Z_1 + Z_2 + Z_3) + \delta \theta_1 \left(M_1 - X_1 \frac{h_1}{2} \right) \right. \\ \left. + \delta \theta_2 \left[M_2 + \frac{h_2}{2} (X_3 - X_1) \right] + \delta \theta_3 \left(M_3 + X_3 \frac{h_3}{2} \right) \right\} dL \end{aligned} \quad (3.145)$$

O trabalho virtual $\delta \mathcal{W}_\phi$ realizado pela densidade de carga eléctrica superficial define-se por

$$\delta \mathcal{W}_\phi = \sum_p \int_{A_p^e} \tau_p \delta \varphi_p dA_p^e \quad (3.146)$$

em que A_p^e é a área superficial dos eléctrodos, φ_p o potencial eléctrico e τ_p a densidade de carga eléctrica superficial das camadas piezoeléctricas. Uma vez que $\varphi_p|_{A_p^e, \text{inf}} = 0$ tem-se que

$\phi_p = \varphi_p|_{A_p^e, \text{sup}}$. Considerando as duas camadas piezoeléctricas temos

$$\delta \mathcal{W}_\phi = \int_{A_1^e} \tau_1 \delta \phi_1 dA_1^e + \int_{A_3^e} \tau_3 \delta \phi_3 dA_3^e \quad (3.147)$$

Efectuando a integração na largura das camadas obtém-se

$$\delta \mathcal{W}_\phi = \int_L b \tau_1 \delta \phi_1 dL + \int_L b \tau_3 \delta \phi_3 dL \quad (3.148)$$

3.5.4 Equações do Movimento e Condições de Fronteira

As equações do movimento, equações de equilíbrio electrostático e condições de fronteira electromecânicas da viga são obtidas a partir da formulação variacional (3.64), substituindo as expressões dos trabalhos virtuais das forças electromecânicas internas (3.109) e (3.112), de inércia (3.135) e (3.136), e externas mecânicas e eléctricas (3.137).

Uma vez que as variações δu_0 , δw , $\delta \theta_1$, $\delta \theta_2$, $\delta \theta_3$, $\delta \phi_1$ e $\delta \phi_3$ são independentes e arbitrárias no intervalo $[0, L]$, a equação resultante da combinação dos termos relativos a essas variações não tem outra solução que não a trivial, obtendo-se as seguintes equações:

▪ Equações do movimento

δu_0 :

$$\begin{aligned} & \left(c_{11}^{*1} A_1 + c_{11}^{*2} A_2 + c_{11}^{*3} A_3 \right) u_0'' + \left(c_{11}^{*1} \bar{I}_1 \right) \theta_1'' + \left(c_{11}^{*1} \bar{z}_1 A_1 + c_{11}^{*3} \bar{z}_3 A_3 \right) \theta_2'' + \left(c_{11}^{*3} \bar{I}_3 \right) \theta_3'' \\ & + \left(\frac{e_{31}^{*1}}{h_1} A_1 \right) \phi_1' + \left(\frac{e_{31}^{*3}}{h_3} A_3 \right) \phi_3' + (X_1 + X_2 + X_3) = (\rho_1 A_1 + \rho_2 A_2 + \rho_3 A_3) \ddot{u}_0 \\ & + (\rho_1 \bar{I}_1) \ddot{\theta}_1 + (\rho_1 \bar{z}_1 A_1 + \rho_3 \bar{z}_3 A_3) \ddot{\theta}_2 + (\rho_3 \bar{I}_3) \ddot{\theta}_3 \end{aligned} \quad (3.149)$$

δw :

$$\begin{aligned} & \left(\bar{c}_{55}^1 A_1 + \bar{c}_{55}^2 A_2 + \bar{c}_{55}^3 A_3 \right) w'' - \left(\bar{c}_{55}^1 A_1 \right) \theta_1' - \left(\bar{c}_{55}^2 A_2 \right) \theta_2' - \left(\bar{c}_{55}^3 A_3 \right) \theta_3' \\ & + (Z_1 + Z_2 + Z_3) = (\rho_1 A_1 + \rho_2 A_2 + \rho_3 A_3) \ddot{w} \end{aligned} \quad (3.150)$$

$\delta \theta_1$:

$$\begin{aligned} & \left(c_{11}^{*1} \bar{I}_1 \right) u_0'' - \left(\bar{c}_{55}^1 A_1 \right) w' + \left(\bar{c}_{11}^{*1(\phi)} I_1 \right) \theta_1'' + \left(\bar{c}_{55}^1 A_1 \right) \theta_1 + \left(c_{11}^{*1} \bar{z}_1 \bar{I}_1 \right) \theta_2'' \\ & + \left(\frac{e_{31}^{*1}}{h_1} \bar{I}_1 \right) \phi_1' + \left(M_1 - X_1 \frac{h_1}{2} \right) = (\rho_1 \bar{I}_1) \ddot{u}_0 + (\rho_1 I_1) \ddot{\theta}_1 + (\rho_1 \bar{z}_1 \bar{I}_1) \ddot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (3.151)$$

$\delta\theta_2 :$

$$\begin{aligned} & \left(c_{11}^{*1} A_1 + c_{11}^{*3} A_3 \right) u_0'' - \left(c_{55}^2 A_2 \right) w'' + \left(c_{11}^{*1} \bar{I}_1 \right) \theta_1'' + \left(c_{11}^{*1} \bar{z}_1 A_1 + c_{55}^2 A_2 + c_{11}^{*3} \bar{z}_3 A_3 + c_{11}^{*2} I_2 \right) \theta_2'' \\ & + \left(c_{11}^{*3} \bar{I}_3 \right) \theta_3'' + \left(\frac{e_{31}^{*1}}{h_1} A_1 \right) \phi_1' + \left(\frac{e_{31}^{*3}}{h_3} A_3 \right) \phi_3' + \left[M_2 + \frac{h_2}{2} (X_3 - X_1) \right] \\ & = \left(\rho_1 \bar{z}_1 A_1 + \rho_3 \bar{z}_3 A_3 \right) \ddot{u}_0 + \left(\rho_1 \bar{z}_1 \bar{I}_1 \right) \ddot{\theta}_1 + \left(\rho_1 \bar{z}_1^2 A_1 + \rho_2 I_2 + \rho_3 \bar{z}_3^2 A_3 \right) \ddot{\theta}_2 + \left(\rho_3 \bar{z}_3 \bar{I}_3 \right) \ddot{\theta}_3 \end{aligned} \quad (3.152)$$

$\delta\theta_3 :$

$$\begin{aligned} & \left(c_{11}^{*3} \bar{I}_3 \right) u_0'' - \left(\bar{c}_{55}^3 A_3 \right) w' + \left(\bar{c}_{11}^{*3(\phi)} I_3 \right) \theta_3'' + \left(\bar{c}_{55}^3 A_3 \right) \theta_3 + \left(c_{11}^{*3} \bar{z}_3 \bar{I}_3 \right) \theta_2'' \\ & + \left(\frac{e_{31}^{*3}}{h_3} \bar{I}_3 \right) \phi_3' + \left(M_3 + X_3 \frac{h_3}{2} \right) = \left(\rho_3 \bar{I}_3 \right) \ddot{u}_0 + \left(\rho_3 \bar{z}_3 \bar{I}_3 \right) \ddot{\theta}_2 + \left(\rho_3 I_3 \right) \ddot{\theta}_3 \end{aligned} \quad (3.153)$$

▪ Equações de equilíbrio electrostático

$\delta\phi_1 :$

$$\left[\left(e_{31}^{*1} \right) u_0' + \left(\frac{e_{31}^{*1} h_1}{2} \right) \theta_1' + \left(e_{31}^{*1} \bar{z}_1 \right) \theta_2' \right] - \left(\frac{\varepsilon_{33}^{*1}}{h_1} \right) \phi_1 = -\tau_1 \quad (3.154)$$

$\delta\phi_3 :$

$$\left[\left(e_{31}^{*3} \right) u_0' + \left(e_{31}^{*3} \bar{z}_3 \right) \theta_2' + \left(\frac{e_{31}^{*3} h_3}{2} \right) \theta_3' \right] - \left(\frac{\varepsilon_{33}^{*3}}{h_3} \right) \phi_3 = -\tau_3 \quad (3.155)$$

▪ Condições de fronteira electromecânicas

$\delta u_0 : x = 0, L$

$$\begin{aligned} & \left(c_{11}^{*1} A_1 + c_{11}^{*2} A_2 + c_{11}^{*3} A_3 \right) u_0' + \left(c_{11}^{*1} \bar{I}_1 \right) \theta_1' + \left(c_{11}^{*1} \bar{z}_1 A_1 + c_{11}^{*3} \bar{z}_3 A_3 \right) \theta_2' \\ & + \left(c_{11}^{*3} \bar{I}_3 \right) \theta_3' + \left(\frac{e_{31}^{*1}}{h_1} A_1 \right) \phi_1 + \left(\frac{e_{31}^{*3}}{h_3} A_3 \right) \phi_3 = 0 \end{aligned} \quad (3.156)$$

$\delta w : x = 0, L$

$$\left(\bar{c}_{55}^1 A_1 + c_{55}^2 A_2 + \bar{c}_{55}^3 A_3 \right) w' - \left(\bar{c}_{55}^1 A_1 \right) \theta_1 - \left(c_{55}^2 A_2 \right) \theta_2 - \left(\bar{c}_{55}^3 A_3 \right) \theta_3 = 0 \quad (3.157)$$

$\delta\theta_1 : x = 0, L$

$$\left(c_{11}^{*1} \bar{I}_1 \right) u_0' + \left(\bar{c}_{11}^{*1(\phi)} I_1 \right) \theta_1' + \left(c_{11}^{*1} \bar{z}_1 \bar{I}_1 \right) \theta_2' + \left(\frac{e_{31}^{*1}}{h_1} \bar{I}_1 \right) \phi_1 = 0 \quad (3.158)$$

$\delta\theta_2: x=0, L$

$$\begin{aligned} & \left(c_{11}^{*1} \bar{z}_1 A_1 + c_{11}^{*3} \bar{z}_3 A_3 \right) u'_0 + \left(c_{11}^{*1} \bar{z}_1 \bar{I}_1 \right) \theta'_1 + \left(c_{11}^{*3} \bar{z}_3 \bar{I}_3 \right) \theta'_3 \\ & + \left(c_{11}^{*1} \bar{z}_1^2 A_1 + c_{11}^{*2} I_2 + c_{11}^{*3} \bar{z}_3^2 A_3 \right) \theta'_2 + \left(\frac{e_{31}^{*1}}{h_1} \bar{z}_1 A_1 \right) \phi_1 + \left(\frac{e_{31}^{*3}}{h_3} \bar{z}_3 A_3 \right) \phi_3 = 0 \end{aligned} \quad (3.159)$$

 $\delta\theta_3: x=0, L$

$$\left(c_{11}^{*3} \bar{I}_3 \right) u'_0 + \left(c_{11}^{*3} \bar{z}_3 \bar{I}_3 \right) \theta'_2 + \left(\bar{c}_{11}^{*3(\phi)} I_3 \right) \theta'_3 + \left(\frac{e_{31}^{*3}}{h_3} \bar{I}_3 \right) \phi_3 = 0 \quad (3.160)$$

As equações (3.149)-(3.160) constituem o modelo analítico electromecânico da viga com camadas piezoeléctricas e no capítulo seguinte são discretizadas pelo método dos elementos finitos.

Capítulo 4

Discretização por Elementos Finitos

4.1 Introdução

Hoje em dia, o método dos elementos finitos é uma das técnicas mais poderosas e populares na engenharia moderna que permite o projecto e análise de estruturas complexas.

Em geral, os modelos experimentais estão limitados pelo tamanho, custo e outros factores laboratoriais. No entanto, os modelos teóricos podem ser mais generalistas mas as suas soluções estão limitadas a geometrias e condições de fronteira relativamente simples. Dessa forma, o desenvolvimento de elementos finitos torna-se bastante importante na análise e modelização de estruturas com sensores e actuadores piezoeléctricos.

Neste capítulo, o modelo analítico apresentado no capítulo anterior será discretizado pelo método dos elementos finitos, dando origem a um elemento com dez graus de liberdade mecânicos $\{\bar{u}_e\}$, aproximados por funções de forma lineares de continuidade C^0 , e dois graus de liberdade eléctricos $\{\bar{\phi}_e\}$, nomeadamente a diferença de potencial eléctrico em cada uma das camadas piezoeléctricas, considerada constante ao longo do elemento.

4.2 Aproximação Local do Método dos Elementos Finitos

Sob o ponto de vista local o método dos elementos finitos (MEF) baseia-se na escolha de funções de forma nodais para a aproximação dos graus de liberdade do elemento e na propriedade da aditividade da integração (Gmür, 1997). De facto, essas funções de forma locais desde que devidamente escolhidas, quando *assembladas*, permitem efectuar uma aproximação global do sistema através da divisão do domínio em pequenos sub-domínios (elementos). A aproximação é então efectuada inicialmente ao nível elementar assegurando-se que as funções de forma escolhidas garantem os critérios de continuidade nas interfaces dos

elementos finitos, constituem uma base completa, por forma a poder avaliar correctamente os estados de deformação constante e os modos rígidos, e que são suficientemente diferenciáveis por forma a garantir que as suas derivadas espaciais possam ser adicionadas.

Dessa forma, o elemento finito desenvolvido e as correspondentes matrizes e vectores elementares são apresentados em seguida.

4.2.1 Elemento de Viga Piezoeléctrico

Por forma a obter as relações matriciais piezoelásticas para um elemento finito de viga *layerwise* piezoeléctrico de dois nós, os vectores dos deslocamentos $\{u\}$ e a diferença de potencial eléctrico das camadas piezoeléctricas $\{\phi\}$ serão definidos em função dos vectores de graus de liberdade mecânicos $\{\bar{u}_e\}$ e eléctricos $\{\bar{\phi}_e\}$ através das matrizes de funções de forma $[N_u]$ e $[N_\phi]$

$$\{u\} = [N_u] \{\bar{u}_e\} \quad (4.1)$$

$$\{\phi\} = [N_\phi] \{\bar{\phi}_e\} \quad (4.2)$$

em que

$$\{u\} = \{u_0, w, \theta_1, \theta_2, \theta_3\}^T \quad (4.3)$$

$$\{\phi\} = \{\phi_1, \phi_3\}^T \quad (4.4)$$

$$\{\bar{u}_e\} = \{\bar{u}_1, \bar{w}_1, \bar{\theta}_{11}, \bar{\theta}_{12}, \bar{\theta}_{13}, \bar{u}_2, \bar{w}_2, \bar{\theta}_{21}, \bar{\theta}_{22}, \bar{\theta}_{23}\}^T \quad (4.5)$$

$$\{\bar{\phi}_e\} = \{\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_3\}^T \quad (4.6)$$

$$[N_u] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$[N_\phi] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

As funções de forma N_1 e N_2 utilizadas na interpolação dos deslocamentos são funções de forma lineares de continuidade C^0 e definem-se por

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L_e} ; N_2 = \frac{x}{L_e} \quad (4.9)$$

A diferença de potencial eléctrico das camadas piezoeléctricas $\{\phi\}$ foi aproximada por funções de forma constantes (4.8) dando origem a uma distribuição constante ao longo do elemento. Desta forma, o elemento finito de viga piezoeléctrico desenvolvido possui 2 nós com 5 graus de liberdade mecânicos por nó e dois graus de liberdade eléctricos por elemento, conforme definido nas expressões (4.5) e (4.6).

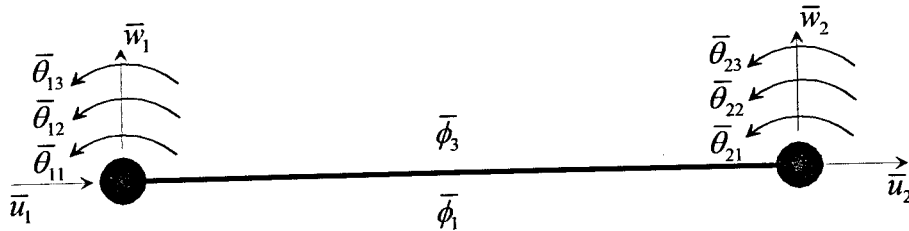


Fig. 4.1 - Elemento finito de viga piezoeléctrico

O vector das deformações de cada camada $\{S^k\}$ é definido pela derivada espacial do vector dos deslocamentos $\{u\}$ através do operador diferencial matricial $[L_u^k]$ definido por

$$[L_u^k] = [L_{um}^k] + [L_{umf}^k] + [L_{uf}^k] + [L_{uc}^k] \quad (4.10)$$

Os operadores $[L_{um}^k]$, $[L_{umf}^k]$, $[L_{uf}^k]$ e $[L_{uc}^k]$ referem-se aos esforços de membrana, membrana/flexão, flexão e corte, respectivamente, e são definidos da seguinte forma

$$[L_{um}^k] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$[L_{umf}^p] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \bar{z}_p \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$[L_{uf}^1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & z_1^* \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$[L_{uf}^2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & z_2 \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$[L_{uf}^3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & z_3^* \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$[L_{uc}^1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$[L_{uc}^2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

$$[L_{uc}^3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Escrevendo as deformações $\{S^k\}$ de cada camada temos

$$\{S^k\} = [B_u^k] \{\bar{u}_e\} \quad (4.19)$$

em que a matriz das deformações mecânicas $[B_u^k]$ é definida por

$$[B_u^k] = [L_u^k] [N_u] \quad (4.20)$$

O campo eléctrico transversal das camadas piezoeléctricas, para as três condições de fronteira, é definido pelas expressões (3.50), (3.52) e (3.54), e o campo eléctrico induzido na

direcção longitudinal pela expressão (3.56). Escrevendo o vector campo eléctrico das camadas piezoeléctricas $\{E^p\}$ para as duas primeiras condições de fronteira eléctricas (camadas com eléctrodos com diferença de potencial eléctrico prescrita ou camadas sem eléctrodos ($\tau = 0$)) em termos das variáveis nodais obtém-se

$$\{E^p\} = \begin{Bmatrix} E_x^p \\ E_z^{p(\phi, \tau)} \end{Bmatrix} = -[B_\phi^p]\{\bar{\phi}_e\} - [\bar{B}_\phi^p]\{\bar{u}_e\} \quad (4.21)$$

em que

$$[B_\phi^p] = [B_{\phi z}^{p(\phi, \tau)}] \quad (4.22)$$

$$[\bar{B}_\phi^p] = \begin{Bmatrix} [\bar{B}_{\phi x}^p] \\ [\bar{B}_{\phi z}^{p(\phi, \tau)}] \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

O primeiro termo da expressão (4.21) representa a parcela do campo eléctrico que é exteriormente imposta e o segundo termo a parcela induzida pelas deformações mecânicas.

Por forma a definir uma relação entre a diferença de potencial eléctrico imposta às camadas piezoeléctricas e o vector campo eléctrico daí resultante, um operador $[L_\phi^p]$ é introduzido. Esse operador considera uma distribuição do campo eléctrico constante ao longo da espessura da camada (distribuição linear do potencial eléctrico) e é definido por

$$[L_\phi^1] = \frac{1}{h_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$[L_\phi^3] = \frac{1}{h_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Assim, as matrizes de "deformação eléctrica" são escritas na forma

$$[B_{\phi z}^{p(\phi)}] = [L_\phi^p][N_\phi] \quad (4.26)$$

e para a segunda condição de fronteira ($\tau = 0$)

$$\left[B_{\phi z}^{p(\tau)} \right] = [0] \quad (4.27)$$

Relativamente aos termos induzidos $\left[\bar{B}_{\phi x}^p \right]$ e $\left[\bar{B}_{\phi z}^{p(\phi, \tau)} \right]$ da expressão (4.23), representando respectivamente os efeitos dos campos eléctricos induzidos na direcção longitudinal xx e transversal zz , eles são definidos por

$$\left[\bar{B}_{\phi x}^p \right] = \frac{e_{15}^p}{\epsilon_{11}^p} \left[B_{uc}^p \right] \quad (4.28)$$

$$\left[\bar{B}_{\phi z}^{p(\phi)} \right] = \frac{e_{31}^{*p}}{\epsilon_{33}^{*p}} z_p \left[B_{uf}^p \right] \quad (4.29)$$

$$\left[\bar{B}_{\phi z}^{p(\tau)} \right] = \frac{e_{31}^{*p}}{\epsilon_{33}^{*p}} \left[B_{uxx}^p \right]$$

em que $\left[B_{uxx}^p \right]$, $\left[B_{uc}^p \right]$ e $\left[B_{uf}^p \right]$ representam, respectivamente, as aproximações efectuadas ao nível elementar das deformações axiais S_{xx}^p , de corte S_c^p e de flexão S_f^p , definidas por

$$\left[B_{uc}^1 \right] = \begin{bmatrix} 0 & N_1' & -N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2' & -N_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

$$\left[B_{uc}^3 \right] = \begin{bmatrix} 0 & N_1' & 0 & 0 & -N_1 & 0 & N_2' & 0 & 0 & -N_2 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

$$\left[B_{uf}^1 \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_1' & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2' & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

$$\left[B_{uf}^3 \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & N_1' & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2' \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

$$\left[B_{uxx}^1 \right] = \begin{bmatrix} N_1' & 0 & z_1^* N_1' & \bar{z}_1 N_1' & 0 & N_2' & 0 & z_1^* N_2' & \bar{z}_1 N_2' & 0 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

$$\left[B_{uxx}^3 \right] = \begin{bmatrix} N_1' & 0 & 0 & \bar{z}_3 N_1' & z_3^* N_1' & N_2' & 0 & 0 & \bar{z}_3 N_2' & z_3^* N_2' \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

4.2.2 Matriz de Rigidez Elementar

A variação da entalpia eléctrica $\delta \mathcal{H}^k$, representativa do trabalho virtual realizado pelas forças electromecânicas e mecânicas internas de cada camada da viga, é definida pelas

expressões (3.70) e (3.71). Substituindo as expressões das aproximações efectuadas para o vector das deformações mecânicas (4.19) e campo eléctrico (4.21) somos então conduzidos à seguinte expressão para a variação da entalpia eléctrica de cada camada

$$\begin{aligned}
 \delta \mathcal{H}^k = & \int_k \left[\left\{ \begin{aligned} & \left[B_u^k \right]^T \left[c^k \right] \left[B_u^k \right] + \left[B_u^k \right]^T \left[e^k \right]^T \left[\bar{B}_\phi^k \right] \\ & + \left[\bar{B}_\phi^k \right]^T \left[e^k \right] \left[B_u^k \right] - \left[\bar{B}_\phi^k \right]^T \left[\varepsilon^k \right] \left[\bar{B}_\phi^k \right] \end{aligned} \right\} \{ \bar{u}_e \} dV_k \right]^T \delta \{ \bar{u}_e \} \\
 & + \int_k \left[\left\{ \begin{aligned} & \left[B_u^k \right]^T \left[e^k \right]^T \left[B_\phi^k \right] - \left[\bar{B}_\phi^k \right]^T \left[\varepsilon^k \right] \left[B_\phi^k \right] \end{aligned} \right\} \{ \bar{\phi}_e \} dV_k \right]^T \delta \{ \bar{u}_e \} \\
 & + \int_k \left[\left\{ \begin{aligned} & \left[B_\phi^k \right]^T \left[e^k \right] \left[B_u^k \right] - \left[B_\phi^k \right]^T \left[\varepsilon^k \right] \left[\bar{B}_\phi^k \right] \end{aligned} \right\} \{ \bar{u}_e \} dV_k \right]^T \delta \{ \bar{\phi}_e \} \\
 & - \int_k \left[\left[B_\phi^k \right]^T \left[\varepsilon^k \right] \left[B_\phi^k \right] \{ \bar{\phi}_e \} dV_k \right]^T \delta \{ \bar{\phi}_e \}
 \end{aligned} \quad (4.36)$$

A variação da entalpia eléctrica (4.36) foi generalizada para todas as camadas. No entanto, quando $k = 2$, camada correspondente ao núcleo, os termos piezoeléctricos são omitidos.

Somando a variação da entalpia eléctrica de cada camada (4.36) é então possível definir o sistema homogéneo de equações estáticas

$$\left(\left[k_{uu} \right] + \left[\bar{k}_{uu} \right] \right) \{ \bar{u}_e \} + \left[k_{u\phi} \right] \{ \bar{\phi}_e \} = 0 \quad (4.37)$$

$$\left[k_{\phi u} \right] \{ \bar{u}_e \} + \left[k_{\phi\phi} \right] \{ \bar{\phi}_e \} = 0 \quad (4.38)$$

em que

$$\left[k_{uu} \right] = \sum_k \int_k \left[B_u^k \right]^T \left[c^k \right] \left[B_u^k \right] dV_k \quad (4.39)$$

$$\left[\bar{k}_{uu} \right] = \sum_p \int_p \left(\left[B_u^p \right]^T \left[e^p \right]^T \left[\bar{B}_\phi^p \right] + \left[\bar{B}_\phi^p \right]^T \left[e^p \right] \left[B_u^p \right] - \left[\bar{B}_\phi^p \right]^T \left[\varepsilon^p \right] \left[\bar{B}_\phi^p \right] \right) dV_p \quad (4.40)$$

$$\left[k_{u\phi} \right] = \sum_p \int_p \left[B_u^p \right]^T \left[e^p \right]^T \left[B_\phi^p \right] dV_p \quad (4.41)$$

$$\left[\bar{k}_{u\phi} \right] = - \sum_p \int_p \left[\bar{B}_\phi^p \right]^T \left[\varepsilon^p \right] \left[B_\phi^p \right] dV_p = [0] \quad (4.42)$$

$$\left[k_{\phi u} \right] = \left[k_{u\phi} \right]^T \quad (4.43)$$

$$\left[\bar{k}_{\phi u} \right] = \left[\bar{k}_{u\phi} \right]^T = [0] \quad (4.44)$$

$$[k_{\phi\phi}] = - \sum_p \int_{V_p} [B_\phi^p]^T [\varepsilon^p] [B_\phi^p] dV_p \quad (4.45)$$

A expressão (4.40) representa o acréscimo de rigidez que se verifica devido aos efeitos dos campos eléctricos longitudinal e transversal induzidos. Essa matriz de rigidez depende das condições de fronteira eléctricas e dá origem a um aumento da rigidez de flexão e de corte. As matrizes (4.42) e (4.44) não produzem nenhum efeito uma vez que têm valor nulo. As matrizes de rigidez elementar (4.39)-(4.45), decompostas nas contribuições de cada camada, são apresentadas no anexo B.

Por forma a contrariar o efeito do bloqueamento de corte (*shear-locking*), uma integração reduzida dos termos de ordem superior da matriz de rigidez de corte foi efectuada. Adicionalmente, um factor de correcção de corte $k_c = 5/6$ foi introduzido.

Segundo a teoria de Timoshenko, as deformações axiais e de corte transversal assim como o campo eléctrico longitudinal e transversal, correspondem aos termos considerados nos vectores das deformações mecânicas (4.19) e campos eléctricos (4.21), respectivamente. Desprezar a componente axial do campo eléctrico ($E_x^p = 0$) ou desprezar a componente axial do deslocamento eléctrico ($D_x^p = 0$), são duas hipóteses distintas em que a segunda se revela a mais realista. Relativamente à formulação variacional, as duas hipóteses conduzem basicamente às mesmas formulações, em que a diferença é relevante apenas na rigidez ao corte. A primeira hipótese conduz a uma matriz de rigidez de corte nula (teoria desacoplada) e a segunda a uma matriz não nula, que contabiliza o aumento de rigidez devido ao campo eléctrico induzido na direcção longitudinal (efeito piezoeléctrico directo). Segundo Krommer e Irschik (1999), a segunda hipótese aproxima-se mais da realidade, sendo mais significativa à medida que a espessura da camada piezoeléctrica aumenta.

Duas condições podem ser impostas aos eléctrodos: eléctrodos em circuito fechado (curto circuito), em que a corrente eléctrica, definida pela derivada temporal da carga eléctrica total, é a mesma em ambos os eléctrodos, e eléctrodos em circuito aberto, em que as cargas eléctricas totais do eléctrodo superior e inferior são iguais em valor absoluto mas opostas em sinal. Para a condição de eléctrodos em curto circuito, a influência do acoplamento electromecânico é muito reduzida, uma vez que a diferença de potencial eléctrico é forçada a ser nula. No entanto, o potencial eléctrico dentro da camada não é nulo, seguindo uma distribuição quadrática. Dessa forma, a solução aproxima-se mais da teoria desacoplada. Na

condição de eléctrodos em circuito aberto, o acoplamento torna-se mais importante uma vez que neste caso a diferença de potencial induzida não é nula.

4.2.3 Matriz de Massa Elementar

A expressão (3.132) do trabalho virtual das forças de inércia é definida em termos da derivada temporal do deslocamento axial u_k e transversal w_k de cada camada. Dessa forma, e segundo a aproximação efectuada para o campo de deslocamentos (4.1), esses deslocamentos podem exprimir-se na forma matricial por

$$\begin{Bmatrix} u_k \\ w_k \end{Bmatrix} = [H_k][N_u]\{\bar{u}_e\} \quad (4.46)$$

em que uma matriz de acoplamento $[H_k]$ entre os graus de liberdade de cada camada é utilizada na forma

$$[H_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & z_1^* & \bar{z}_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

$$[H_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

$$[H_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \bar{z}_3 & z_3^* \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

Modificando a expressão (3.132) para uma representação vectorial obtemos

$$\delta \mathcal{T} = - \sum_k \int_{V_k} \rho_k \begin{Bmatrix} \delta u_k \\ \delta w_k \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \ddot{u}_k \\ \ddot{w}_k \end{Bmatrix} dV_k \quad (4.50)$$

Derivando duas vezes no tempo a expressão (4.46) e substituindo na expressão (4.50), obtemos a matriz de massa $[m_{uu}]$ definida por

$$[m_{uu}] = \sum_k \int_{V_k} \rho_k ([H_k][N_u])^T [H_k][N_u] dV_k \quad (4.51)$$

em que as inércias de translação e rotação de cada uma das camadas são consideradas. As matrizes de massa elementares de cada camada $[m_{uu}^k]$ são apresentadas no anexo B.

4.2.4 Vector de Forças Exteriores Mecânicas e Eléctricas Elementar

O trabalho virtual $\delta\mathcal{W}_u$ das forças mecânicas exteriores (3.145), considerando a aproximação efectuada para os deslocamentos (4.1), exprime-se por

$$\delta\mathcal{W}_u = \{f\}^T \{\delta\bar{u}_e\} \quad (4.52)$$

em que o vector de forças elementar $\{f\}$ se define por

$$\{f\} = \int_0^{L_e} [N_u]^T \left\{ \begin{array}{c} X_1 + X_2 + X_3 \\ Z_1 + Z_2 + Z_3 \\ M_1 - X_1 \frac{h_1}{2} \\ M_2 + \frac{h_2}{2} (X_3 - X_1) \\ M_3 + X_3 \frac{h_3}{2} \end{array} \right\} dL_e \quad (4.53)$$

Da mesma forma, o trabalho virtual $\delta\mathcal{W}_\phi$ realizado pela densidade de carga eléctrica superficial (3.146) fica

$$\delta\mathcal{W}_\phi = \{q\}^T \{\delta\bar{\phi}_e\} \quad (4.54)$$

em que a excitação eléctrica elementar $\{q\}$ é definida por

$$\{q\} = \int_{L_e} b [N_\phi]^T \left\{ \begin{array}{c} \tau_1 \\ \tau_3 \end{array} \right\} dL_e \quad (4.55)$$

4.3 Aproximação Global do Método dos Elementos Finitos

Contabilizando todas as parcelas dos trabalhos virtuais em que aproximações ao nível do elemento finito, para o campo de deslocamentos e campo eléctrico, foram efectuadas, somos conduzidos às seguintes equações do movimento e de equilíbrio electrostático elementares

$$[m_{uu}]\{\ddot{u}_e\} + ([k_{uu}] + [\bar{k}_{uu}])\{\bar{u}_e\} + [k_{u\phi}]\{\bar{\phi}_e\} = \{f\} \quad (4.56)$$

$$[k_{\phi u}]\{\bar{u}_e\} + [k_{\phi\phi}]\{\bar{\phi}_e\} = \{q\} \quad (4.57)$$

Efectuada a *assemblagem* das matrizes elementares, somos conduzidos às matrizes e vectores globais. O sistema de equações resultante, na forma matricial, é definido por

$$[M_{uu}]\{\ddot{u}\} + [K_{uu}]\{\bar{u}\} + [K_{u\phi}]\{\bar{\phi}\} = \{F_u\} \quad (4.58)$$

$$[K_{\phi u}]\{\bar{u}\} + [K_{\phi\phi}]\{\bar{\phi}\} = \{Q\} \quad (4.59)$$

em que as matrizes globais são obtidas pela assemblagem das matrizes elementares da seguinte forma

$$[M_{uu}] = \hat{\sum} [m_{uu}] \quad (4.60)$$

$$[K_{uu}] = \hat{\sum} ([k_{uu}] + [\bar{k}_{uu}]) \quad (4.61)$$

$$[K_{u\phi}] = \hat{\sum} [k_{u\phi}] \quad (4.62)$$

$$[K_{\phi u}] = [K_{u\phi}]^T \quad (4.63)$$

$$[K_{\phi\phi}] = \hat{\sum} [k_{\phi\phi}] \quad (4.64)$$

$$\{F_u\} = \hat{\sum} \{f\} \quad (4.65)$$

$$\{Q\} = \hat{\sum} \{q\} \quad (4.66)$$

Note-se que $\sum^{\wedge}$ significa a *assemblagem* das matrizes e vectores elementares. Refira-se igualmente que o aumento de rigidez devido ao efeito piezoeléctrico directo foi contabilizado na expressão (4.61). A representação combinada das matrizes globais toma a forma

$$\begin{bmatrix} [M_{uu}] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\bar{u}} \\ \ddot{\bar{\phi}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{uu}] & [K_{u\phi}] \\ [K_{\phi u}] & [K_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{\phi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_u \\ Q \end{Bmatrix} \quad (4.67)$$

Nesta formulação $\{\bar{\phi}\}$ não contribui para as componentes de derivada superior (aceleração e velocidade). No entanto, as componentes de acoplamento podem ser modificadas pelos algoritmos de controlo.

Note-se que as letras minúsculas representam as matrizes e vectores elementares (rigidez, massa, amortecimento, forças mecânicas e eléctricas) e que as letras maiúsculas representam as respectivas matrizes e vectores globais.

4.4 Análise Modal

O principal objectivo do controlo activo de vibrações é introduzir amortecimento no sistema com o objectivo de dissipar parte da energia vibratória existente na estrutura. Quando excitada, a estrutura apresenta modos preferenciais de vibração, cuja amplitude depende do conteúdo espectral da excitação. Dessa forma, existe então uma grande vantagem na transformação das equações do sistema na base generalizada para o seu equivalente na base modal.

As frequências naturais não amortecidas e as correspondentes formas naturais de vibração podem ser obtidas através da redução das matrizes globais do sistema ao problema generalizado de valores e vectores próprios. Para a análise dos valores próprios, o seguinte sistema de equações homogéneas sem amortecimento, obtido pelo método dos elementos finitos, é utilizado

$$[M_{uu}]\{\ddot{\bar{u}}\} + [K_{uu}]\{\bar{u}\} + [K_{u\phi}]\{\bar{\phi}\} = 0 \quad (4.68)$$

$$[K_{\phi u}]\{\bar{u}\} + [K_{\phi\phi}]\{\bar{\phi}\} = 0 \quad (4.69)$$

(Note-se que na análise dos valores próprios todas as forças exteriores são nulas). Por forma a melhorar a eficiência, os potenciais eléctricos não especificados podem ser condensados nas matrizes globais do sistema (circuito aberto). Assim, a equação (4.69) pode ser condensada na equação (4.68) obtendo-se

$$[M_{uu}]\{\ddot{\bar{u}}\} + [K_{uu}^*]\{\bar{u}\} = 0 \quad (4.70)$$

com

$$[K_{uu}^*] = [K_{uu}] - [K_{u\phi}][K_{\phi\phi}]^{-1}[K_{\phi u}] \quad (4.71)$$

No caso de os eléctrodos estarem em circuito fechado, a expressão (4.71) fica reduzida apenas à matriz de rigidez mecânica, uma vez que a diferença de potencial entre os eléctrodos será nula. No entanto, o potencial eléctrico quadrático induzido não é nulo, tendo sido já anteriormente contabilizado pela modificação da rigidez mecânica.

Assumindo-se para a equação (4.70) uma solução harmónica com frequência ω , e considerando-se o sistema global capaz de vibrar a essa mesma frequência, $\{\bar{u}(t)\}$ toma a forma

$$\{\bar{u}(t)\} = \{\bar{U}\} e^{i\omega t} \quad (4.72)$$

em que $\{\bar{U}\}$ são as amplitudes de vibração de cada grau de liberdade.

Substituindo-se a equação (4.72) em (4.70) obtém-se

$$([K_{uu}^*] - \omega^2 [M_{uu}])\{\bar{U}\} e^{i\omega t} = 0 \quad (4.73)$$

Assim, para uma solução não trivial da equação (4.73), o determinante da matriz dos coeficientes deverá ser nulo e a expressão pode ser reduzida à forma generalizada da equação de valores e vectores próprios

$$[K_{uu}^*]\{\bar{U}\} = \omega^2 [M_{uu}]\{\bar{U}\} \quad (4.74)$$

Os valores próprios fornecem os n valores das frequências naturais não amortecidas $(w_1^2, w_2^2, \dots, w_n^2)$, e os vectores próprios do sistema as correspondentes formas naturais de vibração $(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n)$. Pode demonstrar-se que os vectores próprios $(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n)$ da equação (4.74) apresentam propriedades de ortogonalidade em relação às matrizes de massa $[M_{uu}]$ e de rigidez $[K_{uu}^*]$. Mais ainda, os vectores próprios representativos das formas naturais de vibração podem ser agrupados numa matriz $[\Phi] = [\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n]$ designada por matriz modal.

Enquanto que a matriz $[w_n^2]$ dos valores próprios é única e característica de um dado sistema, a matriz modal é sujeita a um factor de escala indeterminado que afecta apenas a amplitude da forma natural de um determinado modo, não afectando a sua forma. De entre os vários processos de escalonamento ou normalização, aquele que é mais relevante na análise modal é a normalização para massas modais unitárias. Assim, a matriz modal normalizada e designada por $[\Psi]$ possui a seguinte propriedade particular

$$[\Psi]^T [M_{uu}] [\Psi] = [I] \quad (4.75)$$

em que $[I]$ corresponde à matriz identidade. Consequentemente obtém-se

$$[\Psi]^T [K_{uu}^*] [\Psi] = [w_n^2] \quad (4.76)$$

As duas relações anteriores traduzem a propriedade de ortonormalidade dos vectores modais em relação às matrizes de massa e de rigidez.

Geralmente, as matrizes $[K_{uu}^*]$ e $[M_{uu}]$ resultantes de uma discretização por elementos finitos apresentam uma estrutura em forma de banda que representa o acoplamento entre os vários graus de liberdade. No entanto, devido à propriedade de ortogonalidade dos vectores modais, é possível seleccionar um sistema de coordenadas independentes, designadas por coordenadas modais ou naturais, em que as equações do movimento são desacopladas e, em consequência, independentes e idênticas à equação canónica do sistema com um grau de liberdade, constituindo o designado modelo modal. Dessa forma, em vez de se utilizar o modelo espacial do sistema para a sua caracterização, pode ser utilizado o modelo modal mais

conveniente do ponto de vista computacional e mais interessante para analisar a contribuição dos modos naturais de vibração para a resposta do sistema.

Os vectores próprios são linearmente independentes devido à sua propriedade de ortogonalidade. Assim, eles formam uma base do espaço de dimensão n . Isto significa que qualquer possível configuração arbitrária do sistema $\{\bar{u}(t)\}$ pode ser representada por uma combinação linear dos vectores próprios

$$\{\bar{u}(t)\} = \sum_{i=1}^n c_i [\Psi]_i \quad (4.77)$$

em que c_i são constantes representativas da contribuição desse modo para a resposta global do sistema.

4.4.1 Redução Modal

Usando a propriedade de ortogonalidade dos vectores próprios, relativamente à matriz de massa e de rigidez, o vector de deslocamentos modais $\{\eta\}$ é introduzido na forma

$$\{\bar{u}(t)\} = [\Psi] \{\eta(t)\} \quad (4.78)$$

Quando se pretende controlar as vibrações numa dada estrutura, apenas se actua ao nível das amplitudes máximas de vibração. Na maioria dos casos práticos, apenas os primeiros modos terão uma contribuição significativa na resposta global do sistema, por serem os de menor energia e mais facilmente excitáveis. Assumindo-se que a resposta do sistema é regulada apenas pelos primeiros r modos, o vector dos deslocamentos $\{\bar{u}\}$ pode ser aproximado por

$$\{\bar{u}\} = \sum_{i=1}^r [\Psi]_i \{\eta\}_i = [\hat{\Psi}] \{\eta\} \quad (4.79)$$

em que $[\hat{\Psi}]$ é a matriz modal truncada

$$[\hat{\Psi}] = [\Psi_1, \dots, \Psi_r] \quad (4.80)$$

Desta forma, a dimensão do sistema na base modal ou natural não é mais o número total de graus de liberdade do modelo de elementos finitos, mas sim o número de modos escolhidos para a sua modelização.

Geralmente, o modelo obtido pelo método dos elementos finitos possui um elevado número de graus de liberdade. Quando se projecta um controlador, pode optar-se entre um modelo completo do sistema, e consequentemente um esforço computacional elevado, e um modelo reduzido do sistema, que exige um esforço computacional menor. Dessa forma, a transformação das equações do sistema para o seu equivalente na base modal reduzida apresenta-se como uma boa alternativa para a modelização do sistema. A principal desvantagem é que os modos de ordem superior a r são ignorados. Apesar da sua contribuição não ser significativa na resposta global do sistema, existe sempre o perigo que o sinal de controlo excite os modos a altas frequências, degradando a performance do sistema ou originado instabilidades. Esse fenómeno é conhecido como *spillover*.

4.4.2 Análise Modal com Amortecimento

Com o objectivo de introduzir os efeitos do amortecimento, a equação (4.58) pode ser modificada para a forma

$$[M_{uu}]\{\ddot{\bar{u}}\} + [D_{uu}]\{\dot{\bar{u}}\} + [K_{uu}]\{\bar{u}\} + [K_{u\phi}]\{\bar{\phi}\} = \{F_u\} \quad (4.81)$$

em que $[D_{uu}]$ é a matriz de amortecimento viscoso, que é introduzida com a finalidade de aproximar a energia dissipada durante a resposta do sistema. Para a definição da matriz de amortecimento, é assumido que o amortecimento total da estrutura corresponde à soma dos amortecimentos individuais de cada modo (Ewins, 1984)

$$[\Psi]_i^T [D_{uu}] [\Psi]_j = 2\omega_i \xi_i \delta_{ij} \quad (4.82)$$

em que ξ_i é o amortecimento modal e δ_{ij} a função de Kronecker. A matriz de amortecimento na base modal toma a seguinte forma diagonal

$$[\hat{\Psi}]^T [D_{uu}] [\hat{\Psi}] = [2w_n \xi] = \begin{bmatrix} 2w_1 \xi_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 2w_r \xi_r \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

No caso de alguns valores do amortecimento modal serem conhecidos, a matriz de amortecimento pode ser explicitamente determinada. Assumindo-se o amortecimento de Rayleigh tem-se

$$[D_{uu}] = \alpha [M_{uu}] + \beta [K_{uu}^*] \quad (4.84)$$

em que α e β são os parâmetros de amortecimento a serem determinados, com base nos dois coeficientes de amortecimento já conhecidos, correspondentes a duas frequências naturais de vibração distintas. Substituindo a expressão (4.84) em (4.82) e levando em consideração as relações (4.75) e (4.76) obtém-se

$$\alpha + \beta w_i^2 = 2w_i \xi_i \quad (4.85)$$

A expressão anterior pode ser utilizada na determinação da matriz de amortecimento, resolvendo-se as equações em ordem a α e β . Quando os valores da razão de amortecimento forem conhecidos para mais do que duas frequências, α e β podem ser determinados recorrendo-se a valores médios.

No entanto, um outro método mais complicado pode ser utilizado para a determinação da matriz de amortecimento. Dados l coeficientes de amortecimento ξ_i ($i=1,2,\dots,l$), é possível demonstrar que a matriz de amortecimento, obedecendo à expressão (4.82), pode ser obtida através das séries de Caughey (Bathe, 1982)

$$[D_{uu}] = [M_{uu}] \sum_{s=0}^{l-1} a_s \left[[M_{uu}]^{-1} [K_{uu}^*] \right]^s \quad (4.86)$$

em que os coeficientes a_k são determinados pela solução do sistema de l equações

$$\xi_i = \frac{1}{2} \left(\frac{a_0}{w_i} + a_1 w_i + a_2 w_i^3 + \dots + a_{l-1} w_i^{l-3} \right) \quad (4.87)$$

No caso de $l = 2$, o amortecimento de Rayleigh definido anteriormente é obtido.

Na maioria das aplicações, a utilização do amortecimento viscoso proporcional é adequada. Uma das vantagens inerentes a essa consideração, é que os modos naturais de vibração se mantêm semelhantes aos do sistema não amortecido. Mais especificamente, as formas naturais são iguais e as frequências naturais de vibração são modificadas para

$$w_d = w_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (4.88)$$

em que w_d corresponde à frequência natural amortecida.

Dessa forma, as equações (4.58) e (4.59) do modelo espacial, com base nas relações (4.75), (4.76) e (4.79) dão origem ao modelo modal reduzido na forma

$$\{\ddot{\eta}\} + [2w_n \xi] \{\dot{\eta}\} + [w_n^2] \{\eta\} + [\hat{\Psi}]^T [K_{u\phi}] \{\bar{\phi}\} = [\hat{\Psi}]^T \{F_u\} \quad (4.89)$$

$$[K_{\phi u}] [\hat{\Psi}] \{\eta\} + [K_{\phi\phi}] \{\bar{\phi}\} = \{Q\} \quad (4.90)$$

Capítulo 5

Controlo Activo de Vibrações

5.1 Introdução

Este capítulo tem como objectivo a apresentação das teorias de controlo por *feedback* do deslocamento ou da velocidade e de controlo óptimo, LQR e LQG. Uma vez que os actuadores são piezoeléctricos, torna-se necessário levar em consideração o campo eléctrico máximo admissível. Assim, um algoritmo iterativo, simples de utilizar e de convergência bastante rápida, foi considerado. Esse algoritmo permite obter um ganho de controlo óptimo que leva em consideração as limitações dos actuadores. O conceito de observador óptimo de estados é também apresentado, com a finalidade de permitir estimar as variáveis de estado não mensuráveis. Finalmente, os conceitos de controlabilidade e observabilidade são apresentados e uma breve caracterização da implementação digital é efectuada.

5.2 Sensores e Actuadores Estruturais

Os elementos piezoeléctricos podem ser utilizados na caracterização experimental do comportamento estrutural (sensores), através do efeito piezoeléctrico directo, ou então como elementos de controlo activo (actuadores), através do efeito piezoeléctrico de conversão.

Nesta secção as equações dos sensores estruturais são formuladas. Uma vez assembladas todas as contribuições elementares é então possível desacoplar as equações eléctricas das mecânicas da seguinte forma

$$[M_{uu}]\{\ddot{\bar{u}}\} + [D_{uu}]\{\dot{\bar{u}}\} + [K_{uu}^*]\{\bar{u}\} = \{F_u\} + \{F_\phi\} \quad (5.1)$$

$$\{\bar{\phi}\} = [K_{\phi\phi}]^{-1} [\{Q\} - [K_{\phi u}]\{\bar{u}\}] \quad (5.2)$$



com

$$[K_{uu}^*] = [K_{uu}] - [K_{u\phi}][K_{\phi\phi}]^{-1}[K_{\phi u}] \quad (5.3)$$

$$\{F_\phi\} = -[K_{u\phi}][K_{\phi\phi}]^{-1}\{Q\} \quad (5.4)$$

em que: $[M_{uu}]$, $[D_{uu}]$, $[K_{uu}]$ e $[K_{uu}^*]$ são matrizes de dimensão $(n \times n)$; $[K_{u\phi}]$, $[K_{\phi\phi}]$ e $[K_{\phi u}]$ são, respectivamente, matrizes de dimensão $(n \times m)$, $(m \times m)$ e $(m \times n)$; $\{F_u\}$, $\{F_\phi\}$, $\{Q\}$ e $\{\bar{u}\}$ são, respectivamente, vectores de dimensão $(n \times 1)$, $(n \times 1)$, $(m \times 1)$ e $(n \times 1)$.

Note-se que existem dois vectores de forças na equação (5.1), $\{F_u\}$ e $\{F_\phi\}$. O primeiro corresponde a uma excitação mecânica e o segundo a uma força mecânica de controlo, induzida por uma excitação eléctrica de feedback.

As diferenças de potencial eléctrico (5.2) correspondem aos sinais eléctricos induzidos nos sensores piezoeléctricos, utilizados na caracterização estrutural. Geralmente, esses sinais sofrem um determinado condicionamento e em seguida são, por um esquema de *feedback*, aplicados aos actuadores, por forma a possibilitar o controlo activo de vibrações. Note-se que o sinal de saída do sensor apenas contabiliza a contribuição dos deslocamentos mecânicos $\{\bar{u}\}$, uma vez que não é aplicada nenhuma carga eléctrica exterior aos sensores piezoeléctricos ($\{Q\} = 0$). Além disso, o sinal do sensor deverá ser uma média das contribuições dos sinais de todos os elementos adjacentes, em que uma separação finita dos eléctrodos superficiais foi necessária.

Separando-se os graus de liberdade do actuador dos do sensor, a força de controlo por feedback $\{F_\phi\}_a$ é definida por

$$\begin{Bmatrix} \{F_\phi\}_a \\ \{F_\phi\}_s \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} [K_{u\phi}]_a [K_{\phi\phi}]_a^{-1} & [0] \\ [0] & [K_{u\phi}]_s [K_{\phi\phi}]_s^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{Q\}_a \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (5.5)$$

ou alternativamente por

$$\begin{Bmatrix} \{F_\phi\}_a \\ \{F_\phi\}_s \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} [K_{u\phi}]_a & [0] \\ [0] & [K_{u\phi}]_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{\phi}\}_a \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (5.6)$$

em que: $[K_{u\phi}]_a$, $[K_{\phi\phi}]_a$, $[K_{u\phi}]_s$ e $[K_{\phi\phi}]_s$ são, respectivamente, matrizes de dimensão $(n-q) \times (m-p)$, $(m-p) \times (m-p)$, $(q \times p)$ e $(p \times p)$; $\{F_\phi\}_a$, $\{F_\phi\}_s$ e $\{Q\}_a$ são, respectivamente, vectores de dimensão $(n-q) \times 1$, $(q \times 1)$ e $(m-p) \times 1$. Note-se que os índices a e s denotam, respectivamente, os graus de liberdade associados com a camada do actuador e sensor piezoeléctricos.

O sinal e magnitude da tensão eléctrica de *feedback* são fundamentais no controlo activo de vibrações. Dessa forma, a carga eléctrica externa $\{Q\}_a$ aplicada ao actuador necessita de ser convenientemente controlada, por forma a produzir forças e momentos de controlo adequados. Usando a equação (5.2), a diferença de potencial eléctrico induzida é dada por

$$\begin{Bmatrix} \{\bar{\phi}\}_a \\ \{\bar{\phi}\}_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{\phi\phi}]_a^{-1} & [0] \\ [0] & [K_{\phi\phi}]_s^{-1} \end{bmatrix} \left\{ \begin{Bmatrix} \{Q\}_a \\ \{Q\}_s \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} [K_{\phi u}]_a & [0] \\ [0] & [K_{\phi u}]_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{u}\}_a \\ \{\bar{u}\}_s \end{Bmatrix} \right\} \quad (5.7)$$

em que $\{\phi\}_a$ e $\{\phi\}_s$ são vectores com dimensão $(m-p) \times 1$ e $(p \times 1)$, respectivamente.

5.3 Actuadores Distribuídos e Controlo de Vibrações por Feedback

Nesta secção dois algoritmos de controlo por feedback, nomeadamente o *feedback do deslocamento* e o *feedback da velocidade*, são apresentados. No *feedback* do deslocamento, o sinal do sensor é amplificado e aplicado ao actuador piezoeléctrico. Note-se que o sinal do sensor é proporcional às deformações que, por sua vez, são expressas em termos dos deslocamentos. Dessa forma, o convencional *feedback* do "deslocamento" é utilizado. No *feedback* da velocidade, o sinal do sensor é diferenciado, amplificado e depois aplicado ao actuador. Note-se que o sinal utilizado no *feedback* da velocidade relaciona-se com a variação das deformações por unidade de tempo. Uma vez que as deformações são expressas em termos dos deslocamentos, a derivada temporal dos deslocamentos é a velocidade. Dessa forma, a habitual designação *feedback da velocidade* é utilizada.

A magnitude da tensão de controlo é escolhida a maior possível, dentro da gama admissível (abaixo da tensão de saturação). Assim, o ganho de controlo por *feedback* deverá ser adequadamente escolhido por forma a aumentar a magnitude e atribuir a correcta polaridade ao sinal de controlo. Note-se que os ganhos não necessitam de ser iguais. Assuma-se então que $G_1, G_2, \dots, G_i$ representam os diferentes valores dos ganhos de controlo.

Uma vez que a carga eléctrica aplicada ao sensor é nula, a tensão induzida no sensor exprime-se por

$$\{\bar{\phi}\}_s = -[K_{\phi\phi}]_s^{-1} [K_{\phi u}]_s \{\bar{u}\}_s \quad (5.8)$$

Dessa forma, considerando os sinais eléctricos de feedback impostos aos actuadores como

$$\{\bar{\phi}\}_{a,i} = -G_i \{\bar{\phi}\}_{s,i} \quad (5.9)$$

o vector carga eléctrica dos actuadores é dado por

$$\{Q\}_{a,i} = -G_i [K_{\phi\phi}]_{a,i} \{\bar{\phi}\}_{s,i} \quad (5.10)$$

5.3.1 Feedback da Velocidade com Amplitude Constante

No controlo por *feedback* da velocidade (derivada temporal da tensão eléctrica induzida) com amplitude constante, a amplitude do *feedback* é constante e o sinal é o oposto ao da velocidade. Dessa forma, através das expressões (5.5), (5.8), (5.9) e (5.10), a força de controlo exprime-se por

$$\{F_{\phi}\}_{a,i} = -G_i [K_{u\phi}]_{a,i} [K_{\phi\phi}]_{s,i}^{-1} [K_{\phi u}]_{s,i} \operatorname{sgn}\left(\{\dot{\bar{u}}\}_{s,i}\right) \quad (5.11)$$

em que a função "sgn" é definida da seguinte forma

$$\text{sgn}(u) = \begin{cases} -1 & , \text{ se } u < 0 \\ 0 & , \text{ se } u = 0 \\ +1 & , \text{ se } u > 0 \end{cases} \quad (5.12)$$

Note-se que o índice , i identifica o número do actuador, para o caso de se usarem múltiplos actuadores no sistema de controlo.

5.3.2 Feedback da Velocidade com Ganho Constante

No controlo por feedback da velocidade com ganho constante, a força de controlo é definida por

$$\{F_e\}_{a,i} = -G_i [K_{u\phi}]_{a,i} [K_{\phi\phi}]_{s,i}^{-1} [K_{\phi u}]_{s,i} \{\dot{\bar{u}}\}_{s,i} \quad (5.13)$$

O controlo por *feedback* da velocidade com amplitude constante é não-linear e descontínuo. No entanto, o controlo por *feedback* da velocidade com ganho constante é linear e contínuo e a tensão de controlo diminui à medida que a velocidade de vibração diminui.

5.3.3 Feedback do Deslocamento com Ganho Constante

Neste caso, a força de controlo é proporcional aos deslocamentos e é definida por

$$\{F_e\}_{a,i} = -G_i [K_{u\phi}]_{a,i} [K_{\phi\phi}]_{s,i}^{-1} [K_{\phi u}]_{s,i} \{\bar{u}\}_{s,i} \quad (5.14)$$

Este tipo de controlo é também contínuo e linear e a tensão de controlo diminui à medida que a tensão induzida no sensor diminui. Relativamente ao *feedback* da velocidade, este esquema de controlo tem a vantagem de não necessitar de um pós-processamento do sinal do sensor, pois neste caso não será necessário efectuar a diferenciação que, por vezes, devido a efeitos de ruído, pode originar erros consideráveis.

5.4 Transformação para Variáveis de Estado

5.4.1 Sistema Global Acoplado

O método das variáveis de estado é a base da teoria de controlo moderno. Neste método a caracterização dos processos é efectuada por equações diferenciais em vez de funções de transferência. A representação por variáveis de estado é altamente recomendável no projecto e análise de sistemas de controlo. A principal vantagem desta representação está relacionada com a maior facilidade de representação de sistemas com um elevado número de *inputs* e *outputs*, e ainda com a possibilidade de se poder representar sistemas transientes não-lineares. Um diagrama de blocos, representativo de um sistema linear, é apresentado na fig. 5.1.

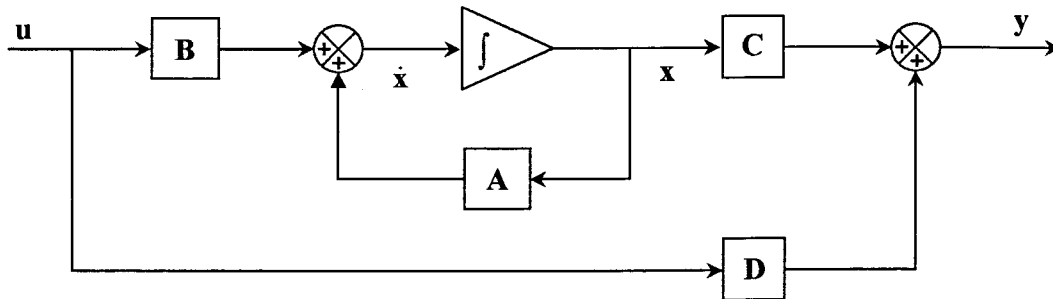


Fig. 5.1 - Diagrama de blocos de um sistema linear genérico

Nesta secção, o sistema de equações (4.67) é modificado para o domínio das variáveis de estado (*state space approach*). As variáveis de estado definem-se por

$$\mathbf{x}_1 = \{\bar{u}\} \quad (5.15)$$

$$\mathbf{x}_2 = \{\dot{\bar{u}}\} \quad (5.16)$$

Note-se que os símbolos a negrito são utilizados nas transformações das variáveis de estado.

No caso de um sistema em malha aberta, o sistema é representado por um conjunto de duas equações diferenciais matriciais de primeira ordem em termos das variáveis de estado $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$.

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2 \quad (5.17)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = -[M_{uu}]^{-1}[K_{uu}^*]\mathbf{x}_1 - [M_{uu}]^{-1}[D_{uu}]\mathbf{x}_2 + [M_{uu}]^{-1}[\{F_u\} + \{F_\phi\}] \quad (5.18)$$

Rescrevendo na forma matricial temos

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M_{uu}]^{-1}[K_{uu}^*] & -[M_{uu}]^{-1}[D_{uu}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] \\ [M_{uu}]^{-1} \end{bmatrix} [\{F_u\} + \{F_\phi\}] \quad (5.19)$$

$$\begin{bmatrix} \{\bar{\phi}\}_s \\ \{\dot{\bar{\phi}}\}_s \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} [K_{\phi\phi}]^{-1}[K_{\phi u}]_s & [K_{\phi\phi}]^{-1}[K_{\phi u}]_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

Usando uma notação matricial mais compacta, as equações de estado (5.19) e (5.20) podem escrever-se na forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Br} \quad (5.21)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} \quad (5.22)$$

em que $\mathbf{x}$ é o vector de estado de dimensão $(2n \times 1)$, $\mathbf{A}$ é a matriz de sistema de dimensão $(2n \times 2n)$, $\mathbf{B}$ é a matriz de controlo de dimensão $(2n \times n)$, $\mathbf{r}$ é o vector de *input* de dimensão $(n \times 1)$, $\mathbf{y}$ um vector de *output* de dimensão $(p \times 1)$ e $\mathbf{C}$ é a matriz de *output* de dimensão $(p \times 2n)$. Os vectores e matrizes referidos anteriormente definem-se por

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M_{uu}]^{-1}[K_{uu}^*] & -[M_{uu}]^{-1}[D_{uu}] \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} [0] \\ [M_{uu}]^{-1} \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

$$\mathbf{r} = [\{F_u\} + \{F_\phi\}] \quad (5.26)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \{\bar{\phi}\}_s \\ \{\dot{\phi}\}_s \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

$$\mathbf{C} = - \left[\begin{bmatrix} K_{\phi\phi} \end{bmatrix}_s^{-1} \begin{bmatrix} K_{\phi u} \end{bmatrix}_s \quad \begin{bmatrix} K_{\phi\phi} \end{bmatrix}_s^{-1} \begin{bmatrix} K_{\phi u} \end{bmatrix}_s \right] \quad (5.28)$$

Note-se que a força electromecânica $\{F_\phi\}$ aparece nas equações anteriores como um carregamento eléctrico exterior independente do sistema (sistema em malha aberta). No entanto, num sistema de controlo em malha fechada ela é usada como uma força de controlo e $\mathbf{r} = \{F_u\}$. Considerando-se então um sistema em malha fechada, em que $\mathbf{u}$ representa a força de controlo com dimensão $(n \times 1)$, é possível definir as equações de estados na forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (5.29)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (5.30)$$

em que uma matriz $\mathbf{D}$ de *output*, relacionando o *output* com a força de controlo, é introduzida. No entanto, na aplicação em questão essa matriz é considerada nula ($\mathbf{D} = [0]$).

A lei convencional de controlo por *feedback* permite definir a força de controlo na forma

$$\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{K}_g \mathbf{x} \quad (5.31)$$

em que $\mathbf{K}_g$ representa a matriz de ganho do *feedback* e é definida pelos algoritmos de controlo. Nesse caso, o vector de *input* apenas contempla a excitação mecânica ($\mathbf{r} = \{F_u\}$) e a força de controlo aparece associada ao segundo termo da equação ($\{F_\phi\}_a = -\mathbf{K}_g \mathbf{x}$).

5.4.2 Sistema Reduzido Desacoplado

As equações (4.89) e (4.90) do sistema desacoplado, obtidas devido à propriedade de ortogonalidade dos modos naturais de vibração, representam o modelo modal do sistema. Assim, as variáveis de estado do modelo modal reduzido definem-se por

$$\mathbf{x}_1 = \{\eta\} \quad (5.32)$$

$$\mathbf{x}_2 = \{\dot{\eta}\} \quad (5.33)$$

A representação do sistema em malha aberta toma então a forma

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[w_n^2] & -[2w_n\xi] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] \\ [\hat{\Psi}]^T \end{bmatrix} \{F_u\} + \begin{bmatrix} [0] \\ [\hat{\Psi}]^T [K_{u\phi}]_a \end{bmatrix} \{\bar{\phi}\}_a \quad (5.34)$$

$$\begin{bmatrix} \{\bar{\phi}\}_s \\ \{\dot{\bar{\phi}}\}_s \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} [K_{\phi\phi}]_s^{-1} [K_{\phi u}]_s [\hat{\Psi}] & [0] \\ [0] & [K_{\phi\phi}]_s^{-1} [K_{\phi u}]_s [\hat{\Psi}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

em que as matrizes de estados são modificadas para

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[w_n^2] & -[2w_n\xi] \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

$$\mathbf{B}_u = \begin{bmatrix} [0] \\ [\hat{\Psi}]^T \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{B}_\phi = \begin{bmatrix} [0] \\ [\hat{\Psi}]^T [K_{u\phi}]_a \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

$$\mathbf{C} = - \begin{bmatrix} [K_{\phi\phi}]_s^{-1} [K_{\phi u}]_s [\hat{\Psi}] & [0] \\ [0] & [K_{\phi\phi}]_s^{-1} [K_{\phi u}]_s [\hat{\Psi}] \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

No sistema em malha fechada, a tensão de controlo é definida de acordo com o esquema de feedback utilizado.

$$\{\bar{\phi}\}_a = -\mathbf{K}_g \mathbf{x} \quad (5.39)$$

Dessa forma, a matriz de ganho $\mathbf{K}_g$ para os diferentes algoritmos de controlo é dada por:

▪ **Controlo por Feedback da Velocidade com Amplitude Constante**

$$\mathbf{K}_{g,i} = - \begin{bmatrix} 0 & G_{i,d} \text{med} \left\{ \begin{bmatrix} K_{\phi\phi} \end{bmatrix}_{s,i}^{-1} \begin{bmatrix} K_{\phi u} \end{bmatrix}_{s,i} \begin{bmatrix} \hat{\Psi} \end{bmatrix} \text{sgn}(\cdot) \right\} \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

▪ **Controlo por Feedback da Velocidade com Ganho Constante**

$$\mathbf{K}_{g,i} = - \begin{bmatrix} 0 & G_{i,d} \text{med} \left\{ \begin{bmatrix} K_{\phi\phi} \end{bmatrix}_{s,i}^{-1} \begin{bmatrix} K_{\phi u} \end{bmatrix}_{s,i} \begin{bmatrix} \hat{\Psi} \end{bmatrix} \right\} \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

▪ **Controlo por Feedback do Deslocamento com Ganho Constante**

$$\mathbf{K}_{g,i} = - \begin{bmatrix} G_{i,p} \text{med} \left\{ \begin{bmatrix} K_{\phi\phi} \end{bmatrix}_{s,i}^{-1} \begin{bmatrix} K_{\phi u} \end{bmatrix}_{s,i} \begin{bmatrix} \hat{\Psi} \end{bmatrix} \right\} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

Note-se que a notação $\text{med}\{\cdot\}$ foi utilizada para representar que a tensão eléctrica induzida no sensor corresponde à média das tensões induzidas em cada elemento individual, em que uma separação finita dos eléctrodos foi necessária.

5.5 Controlo Óptimo Quadrático

5.5.1 Teoria de Controlo Óptimo

Considere-se o seguinte sistema definido por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (5.43)$$

com o vector das variáveis de estado $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ e o vector de controlo $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$. O problema geral de optimização consiste em encontrar o vector de controlo $\mathbf{u}(t)$ que minimiza uma determinada função de custo

$$J(t_0) = \int_{t_0}^t L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) dt \quad (5.44)$$

sujeita às restrições da equação (5.43). Recorrendo aos multiplicadores de Lagrange é então possível definir uma função de custo aumentada J^* da forma seguinte

$$J^* = \int_0^1 \left\{ L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T [\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) - \dot{\mathbf{x}}] \right\} dt \quad (5.45)$$

Assim, o problema de optimabilidade colocado pela equação (5.44), sujeita às restrições (5.43), pode ser convertido num problema de optimização sem restrições, de maior dimensão, pela aplicação da teoria de Lagrange, obtendo-se uma equação J^* equivalente (Lewis, 1986; Burl, 1999).

A Hamiltoniana $H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t)$, por razões de conveniência, é definida por

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) = L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (5.46)$$

Por conseguinte, a expressão da função J^* pode então ser definida em função da Hamiltoniana na forma

$$J^* = \int_0^1 \left\{ H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) - \boldsymbol{\lambda}^T \dot{\mathbf{x}} \right\} dt \quad (5.47)$$

O mínimo de J^* é obtido quando $dJ^* = 0$ se d^2J^* tomar um valor positivo. Recorrendo ao princípio de Leibniz (Lewis, 1986), a derivada de J^* escreve-se

$$dJ^* = \left[(H - \boldsymbol{\lambda}^T \dot{\mathbf{x}}) \delta t \right]_{t_0}^{t_1} + \int_0^1 \left[\frac{\partial H^T}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} + \frac{\partial H^T}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} - \boldsymbol{\lambda}^T \delta \dot{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} - \dot{\mathbf{x}} \right)^T \delta \boldsymbol{\lambda} \right] dt \quad (5.48)$$

Integrando por partes, por forma a eliminar o termo em $\delta \dot{\mathbf{x}}$, obtém-se

$$dJ^* = \left[\left(\frac{\partial H^T}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right) \delta t - \boldsymbol{\lambda}^T \delta \mathbf{x} \right]_{t_0}^{t_1} + \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial H^T}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}} \right)^T \delta \mathbf{x} + \frac{\partial H^T}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + \left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} - \dot{\mathbf{x}} \right)^T \delta \boldsymbol{\lambda} \right] dt \quad (5.49)$$

Admitindo-se que a escolha de $\lambda(t)$ pode ser feita de forma a que as variações $\delta\lambda$, $\delta\mathbf{x}$ e $\delta\mathbf{u}$ sejam independentes, o sistema de equações seguinte, correspondente aos coeficientes dessas variáveis, deverá ser respeitado

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\lambda} = 0 \quad (5.50)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0 \quad (5.51)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = 0 \quad (5.52)$$

em que a equação (5.52) corresponde à equação de estados (5.43). As duas primeiras equações do sistema são denominadas *equação de estados complementares* (5.50) e *condição de estacionaridade* (5.51). Na secção que se segue, esta teoria geral, será aplicada no controlo activo de vibrações.

5.5.2 Regulador Quadrático Linear (LQR)

Considere-se estacionário e invariante no tempo, o sistema de equações de estados representado pelas equações (5.29) e (5.30). A partir de um vector de controlo $\mathbf{u}$, correspondente à força de controlo aplicada aos actuadores, e de uma perturbação $\mathbf{r}$, correspondente às forças mecânicas aplicadas ao sistema estrutural, esse mesmo sistema fornece como *output* a tensão eléctrica induzida nos sensores (fig. 5.2). O vector de *output* $\mathbf{y}$ é função do vector de estados reduzido $\mathbf{x}$ através da matriz de saída $\mathbf{C}$, e por sua vez, a dinâmica dos estados $\mathbf{x}$ é obtida pelas matrizes de sistema $\mathbf{A}$ e controlo $\mathbf{B}$.

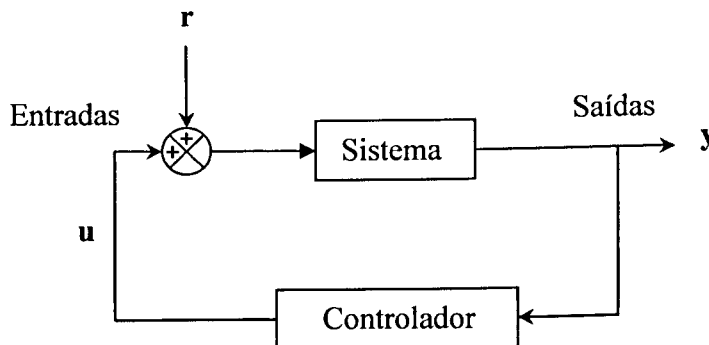


Fig. 5.2 - Representação das entradas e saídas de um sistema genérico

Considere-se um tipo de controlo óptimo quadrático, em que a função de custo J é quadrática, com a seguinte forma

$$J(t_0) = \frac{1}{2} \int_0^t (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \quad (5.53)$$

O primeiro termo do integral, $(1/2)\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$, pode ser interpretado como uma medida da energia do sistema e o segundo termo, $(1/2)\mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}$, da energia de controlo. As matrizes $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$ são matrizes simétricas, semidefinida positiva e definida positiva, respectivamente, e são escolhidas em função da energia que se pretende minimizar. Elas podem também ser interpretadas como aceleradores de convergência do vector de estados ($\mathbf{x} \rightarrow 0$), ou então da força de controlo ($\mathbf{u} \rightarrow 0$).

Utilizando-se a metodologia de controlo óptimo apresentada anteriormente, e considerando as perturbações mecânicas nulas ($\mathbf{r} = 0$), a Hamiltoniana do sistema é escrita na forma

$$H = \frac{1}{2} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}) \quad (5.54)$$

Assim, a equação de estados complementar, a condição de estacionaridade e a equação de estados, também denominadas como equações de Euler, escrevem-se da seguinte forma

$$\mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} + \dot{\boldsymbol{\lambda}} = 0 \quad (5.55)$$

$$\mathbf{R} \mathbf{u} + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (5.56)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (5.57)$$

Considerando-se um controlo proporcional aos estados, $\mathbf{u} = -\mathbf{K}_g^* \mathbf{x}$, o multiplicador de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ deverá ser também proporcional aos estados, i.e., $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{P} \mathbf{x}$. Substituindo-se a expressão de $\mathbf{u}$ (5.56) na equação de estados (5.57), pré-multiplicando a mesma por $\mathbf{P}$ e considerando a expressão de $\boldsymbol{\lambda}$, as equações de Euler dão origem a

$$\mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} = -\dot{\mathbf{P}} \mathbf{x} - \mathbf{Q} \mathbf{x} - \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (5.58)$$

$$\mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (5.59)$$

Para que essas equações se verifiquem para todo o valor de $\mathbf{x}$, é necessário que a equação seguinte, denominada equação de Riccati, seja verificada.

$$-\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{Q} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (5.60)$$

Para um sistema em malha aberta, com um controlo $\mathbf{u}$ nulo, a equação (5.60) dá origem à equação de Lyapunov

$$-\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{Q} \quad (5.61)$$

Se a solução for assintoticamente estável, demonstra-se em seguida que a função de custo (5.53) minimizada apenas é função da matriz $\mathbf{P}(t_0)$ e das condições iniciais.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{d}{dt} (\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}) dt &= \int_0^1 \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \dot{\mathbf{P}} \mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} dt \\ &= \int_0^1 (\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T + \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T) \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \dot{\mathbf{P}} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \dot{\mathbf{P}} (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}) dt \\ &= \int_0^1 \mathbf{x}^T (\dot{\mathbf{P}} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}) \mathbf{x} - \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} dt \\ &= \int_0^1 -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} - \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} dt \end{aligned} \quad (5.62)$$

As expressões (5.57), (5.56) e (5.60), foram utilizadas no desenvolvimento do primeiro, segundo e terceiro passo, respectivamente. Dessa forma, obtém-se

$$\frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_1) \mathbf{P}(t_1) \mathbf{x}(t_1) - \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_0) \mathbf{P}(t_0) \mathbf{x}(t_0) = -\frac{1}{2} \int_0^1 (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \quad (5.63)$$

em que, para que a solução seja assintoticamente estável, $\lim_{t_1 \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t_1) = 0$. Por consequência,

$$J(t_0) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_0) \mathbf{P}(t_0) \mathbf{x}(t_0) \quad (5.64)$$

permitindo assim avaliar a função custo resultante a partir das condições iniciais, antes mesmo de calcular a resposta do sistema. Assim, uma vez calculada a solução da equação de Riccati (5.60), é possível definir o ganho de controlo óptimo $\mathbf{K}_g^*$ da seguinte forma

$$\mathbf{K}_g^* = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t) \quad (5.65)$$

5.5.3 Regulador Quadrático Linear Estacionário

Mesmo para um sistema invariante no tempo, o ganho de controlo óptimo $\mathbf{K}_g^*$ é função do tempo, o que torna necessário o conhecimento de toda a sequência de valores óptimos do ganho $\mathbf{K}_g^*(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, por forma a poder determinar o vector de controlo $\mathbf{u}(t)$. No entanto, os ganhos de feedback do regulador quadrático linear tipicamente estabilizam em torno de um valor estacionário à medida que o tempo se aproxima do valor final. Assim, por forma a evitar o cálculo de toda a sequência de ganhos de controlo $\mathbf{K}_g^*$, em aplicações em que o sistema de controlo esteja projectado para operar por períodos de tempo relativamente longos quando comparados com o período de tempo transiente do ganho óptimo, a hipótese de ignorar os ganhos transientes em função dos estacionários mostra-se bastante razoável (Burl, 1999). O uso de ganhos estacionários simplifica consideravelmente o projecto do controlador, uma vez que só se tornam necessários amplificadores de ganho fixo para a sua implementação analógica, eliminando-se também a necessidade de armazenar os ganhos transientes no caso da implementação digital. O valor estacionário do ganho de controlo $\mathbf{K}_g$ é então calculado por

$$\mathbf{K}_g = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}^\infty \quad (5.66)$$

em que $\mathbf{P}^\infty$ corresponde ao valor de equilíbrio $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(t)$. Substituindo-se então esse ganho, que não será necessariamente o óptimo, no sistema de equações de estado (5.29) e (5.30), o custo resultante no intervalo de tempo $[t_0, t_1]$ será

$$\bar{J}(t_0) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_0) \bar{\mathbf{P}}(t_0) \mathbf{x}(t_0) \quad (5.67)$$

em que $\bar{\mathbf{P}}$ corresponde à solução de

$$-\dot{\bar{\mathbf{P}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK}_g)^T \bar{\mathbf{P}} + \bar{\mathbf{P}} (\mathbf{A} - \mathbf{BK}_g) + \mathbf{Q} + \mathbf{K}_g^T \mathbf{R} \mathbf{K}_g \quad (5.68)$$

Essa equação corresponde à equação de Lyapunov do sistema em malha fechada $\mathbf{A} - \mathbf{BK}_g$, uma vez conhecido $\mathbf{K}_g$. Pode ainda ser demonstrado que o custo $\bar{J}(t)$, correspondente ao ganho de controlo $\mathbf{K}_g$, é igual ou superior aquele correspondente ao ganho de controlo óptimo $\mathbf{K}_g^*(t)$. No entanto, os valores no limite $\bar{\mathbf{P}}(\infty)$ e $\mathbf{P}^\infty = \mathbf{P}(\infty)$ são iguais, e, portanto, o custo J_∞ para o intervalo de tempo $[t_0, \infty]$ é o mesmo. Isso significa que quanto maior for o intervalo de tempo considerado, mais razoável será a utilização de um ganho de controlo constante. O custo J_∞ será então

$$J_\infty = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(0) \mathbf{P}^\infty \mathbf{x}(0) \quad (5.69)$$

Uma vez que a matriz $\mathbf{P}^\infty$ é constante, segundo (5.60), ela é também solução da equação de Riccati

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P}^\infty + \mathbf{P}^\infty \mathbf{A} + \mathbf{Q} - \mathbf{P}^\infty \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}^\infty = 0 \quad (5.70)$$

Essa lei de controlo, diferente da solução óptima, a ganho constante, será a adoptada para o que se segue.

A metodologia de concepção do controlo quadrático óptimo apresentado anteriormente pode ser resumida nas seguintes etapas:

1. Definição das matrizes de ponderação $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$ por forma a obter a performance desejada para o esforço de controlo disponível;
2. Cálculo da matriz $\mathbf{P}^\infty$, solução da equação algébrica de Riccati (5.70), a partir das matrizes de sistema, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, e de ponderação $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$;
3. Cálculo da matriz de ganho (constante) $\mathbf{K}_g$ a partir de $\mathbf{P}^\infty$ (5.66).

Recorrendo às equações de estados (5.29) e (5.30), considerando a força de controlo $\mathbf{u} = -\mathbf{K}_g \mathbf{x}$ e introduzindo o carregamento mecânico, obtemos então o seguinte sistema controlado

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK}_g) \mathbf{x} + \mathbf{r} \quad (5.71)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} \quad (5.72)$$

Fica então claro que a matriz de ganho $\mathbf{K}_g$ controla o sistema através da modificação da matriz de sistema $\mathbf{A}$, que modifica para $(\mathbf{A} - \mathbf{BK}_g)$. Dessa forma, a lei de controlo permite estabilizar os modos de vibração do sistema aumentando o amortecimento modal (os modos iniciais de $\mathbf{A}$ transformam-se nos modos mais amortecidos de $\mathbf{A} - \mathbf{BK}_g$).

5.5.4 Escolha da Matriz de Ponderação dos Estados

O objectivo do controlo óptimo consiste em minimizar a energia de vibração do sistema, representada pelo termo $(1/2)\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$, com uma grande dependência da matriz $\mathbf{Q}$. Por conseguinte, a sua escolha determina a performance do amortecimento das vibrações do sistema.

Sendo o vector de estados constituído pelos deslocamentos modais η , e velocidades modais $\dot{\eta}$, a matriz $\mathbf{Q}$ pode então ser dividida na forma

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\eta\eta} & \mathbf{Q}_{\eta\dot{\eta}} \\ \mathbf{Q}_{\dot{\eta}\eta} & \mathbf{Q}_{\dot{\eta}\dot{\eta}} \end{bmatrix} \quad (5.73)$$

Para simplificar a interpretação, considere-se $\mathbf{Q}_{\dot{\eta}\eta} = \mathbf{Q}_{\eta\dot{\eta}} = \mathbf{0}$. A questão será então como escolher $\mathbf{Q}_{\eta\eta}$ e $\mathbf{Q}_{\dot{\eta}\dot{\eta}}$. Considerem-se então quatro casos práticos:

- O primeiro será o controlo de todos os modos considerados na análise. Nesse caso, a matriz de ponderação $\mathbf{Q}_{\eta\eta}$ será equivalente à matriz identidade $\mathbf{Q}_{\eta\eta} = \mathbf{I}$ e $\mathbf{Q}_{\dot{\eta}\dot{\eta}} = \mathbf{Q}_{\eta\dot{\eta}}$. No entanto, isso não implica que todos os modos sejam igualmente amortecidos activamente, mas sim, que eles sejam optimizados com a mesma ponderação. Como a

controlabilidade dos modos não será a mesma, eles serão amortecidos de formas diferentes;

- Um segundo caso consiste em controlar apenas alguns dos modos. Suponha-se que apenas se pretende controlar os modos $i = 1, \dots, n$. A matriz de ponderação $\mathbf{Q}_{\eta\eta} = \mathbf{Q}_{\dot{\eta}\dot{\eta}}$ poderá então ser decomposta, e a matriz $\mathbf{Q}_n$ é escolhida em função da ponderação de cada um dos modos em questão;

$$\mathbf{Q}_{\eta\eta} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.74)$$

- Com a finalidade de minimizar a energia do sistema pode também considerar-se um terceiro caso em que

$$\mathbf{Q}_n = \begin{bmatrix} w_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & w_n^2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{Q}_{\dot{\eta}\dot{\eta}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.75)$$

- Finalmente, um quarto caso prático é definido pelo controlo do vector de *output* $\mathbf{y}$. Nesse caso, a quantidade a minimizar será $(1/2)\mathbf{y}^T \mathbf{Q}_{yy} \mathbf{y}$. No entanto, uma vez que $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$, a relação entre as matrizes de ponderação de entrada escreve-se

$$\mathbf{Q} = \mathbf{C}^T \mathbf{Q}_{yy} \mathbf{C} \quad (5.76)$$

Nesse caso, $\mathbf{Q}$ não é geralmente diagonal e $\mathbf{Q}_{\eta\eta} \neq \mathbf{Q}_{\dot{\eta}\dot{\eta}}$. No entanto, essa situação é muito prática. uma vez que as variáveis a controlar são as que efectivamente sabemos medir e observar.

5.5.5 Limitações do Ganho de Controlo

Na secção anterior, os critérios para a escolha da matriz de ponderação dos estados $\mathbf{Q}$ foram apresentados. No entanto, a relação dessa matriz com o ganho de controlo não é linear (veja-se a equação de Riccati (5.70)). Por conseguinte, a partir da matriz $\mathbf{Q}$ não é possível determinar directamente se o ganho de controlo necessário para a obtenção de um

determinado comportamento é admissível. De facto, para uma aplicação de controlo activo com actuadores piezoeléctricos, torna-se necessário levar em consideração os campos eléctricos de despolarização do material piezoeléctrico em questão. No caso de controlo de vibrações transientes, o campo eléctrico aplicado ao actuador pode ter uma direcção oposta à polarização remanescente do material, e, nesse caso, se o campo eléctrico for da mesma ordem de grandeza da polarização remanescente, pode mesmo anulá-la e despolarizar o material que se torna não piezoeléctrico.

Dessa forma, torna-se então necessário, no projecto do controlador, controlar o campo eléctrico máximo aplicado ao material piezoeléctrico. No entanto, essa operação apresenta algumas dificuldades, uma vez que a tensão eléctrica de controlo depende da excitação mecânica e/ou das condições iniciais da estrutura a controlar ($\{\phi(t)\} = \mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_g \mathbf{x}(t)$).

Assim, um algoritmo iterativo será utilizado para o cálculo do ganho de controlo, levando em conta, na concepção do controlo óptimo, o campo eléctrico máximo admissível (Trindade, 2000). O algoritmo pode ser utilizado quando as condições de operação, por exemplo o valor inicial das variáveis de estado $\mathbf{x}(0)$, forem conhecidas. O algoritmo iterativo está representado na fig. 5.3 e assenta nas seguintes etapas:

1. Consideram-se as matrizes de ponderação dos estados $\mathbf{Q}$ e de ponderação dos inputs $\mathbf{R} = \gamma \bar{\mathbf{R}}$, em que $\bar{\mathbf{R}}$ é uma matriz de ponderação dos inputs inicial, com a mesma forma que $\mathbf{R}$, e γ um factor de multiplicação variável, por forma a adaptar $\mathbf{R}$ às restrições impostas;
2. A partir de um factor inicial de multiplicação γ_0 calcula-se $\mathbf{K}_g$ pelo algoritmo LQR para o sistema descrito pelas equações (5.29) e (5.30) com $\mathbf{R}_0 = \gamma_0 \bar{\mathbf{R}}$;
3. Com $\mathbf{K}_g$ calculado, calcula-se em seguida $\mathbf{x}(t)$ da equação (5.71) para uma excitação mecânica $\mathbf{r}(t)$ conhecida, e de seguida determina-se $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_g \mathbf{x}(t)$;
4. O passo seguinte consiste em comparar $u^{\max} = \max(|\mathbf{u}(t)|)$ com a tensão máxima admissível para o material piezoeléctrico em questão, e na correcção do factor γ em função dessa comparação até à convergência $u^{\max} \approx \phi^{\max}$;
5. Finalmente, quando o valor convergir para o admissível, estará encontrada a matriz de ganho adequada.

Esta é uma estratégia que se torna necessária por forma a conceber uma lei de controlo exequível, mais próxima da realidade. Nos exemplos que irão ser apresentados neste trabalho, a tensão máxima admissível, correspondente a um campo eléctrico inferior ao de saturação do material piezoeléctrico, tipicamente compreendido entre 200 e 500 V/mm (Waanders, 1991), será de 250 V. Dessa forma, o algoritmo apresentado, de convergência bastante rápida (Trindade, 2000), permite obter a melhor performance possível dentro da região admissível.

Porém, uma vez que a relação entre γ e $u^{\max}$ não é linear, um aumento de γ não provoca necessariamente um aumento de $u^{\max}$ e a convergência do algoritmo, devido a certas condições iniciais, pode ser instável. Para remediar esse problema, uma estratégia de diminuição do passo foi considerada.

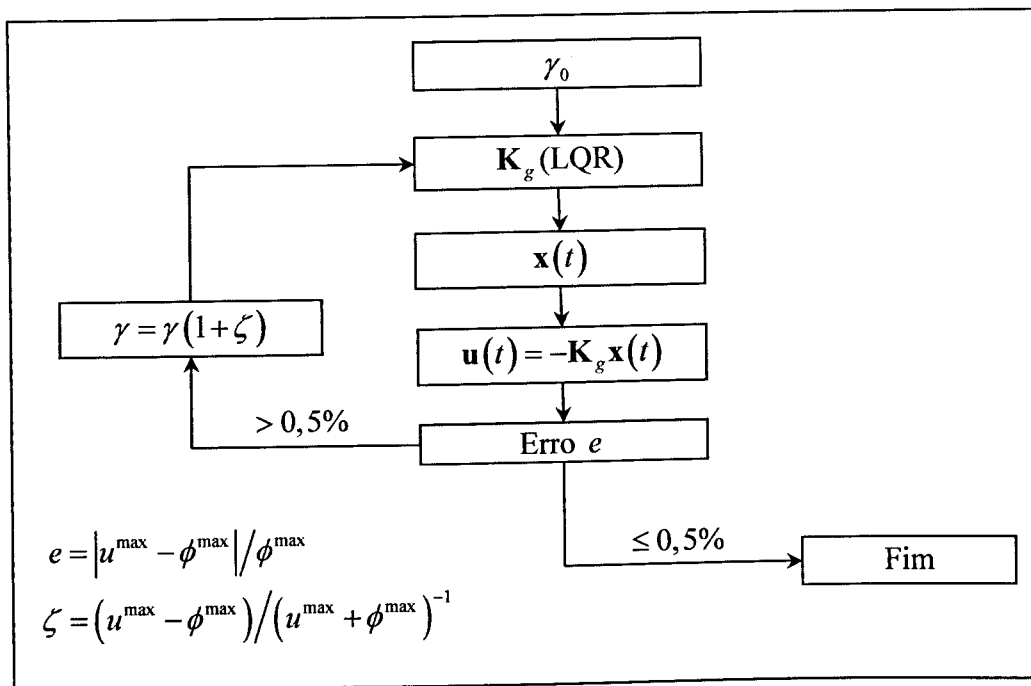


Fig. 5.3 - Algoritmo iterativo para o cálculo do ganho de controlo óptimo com limitação da entrada

5.5.6 Observação

Nas secções anteriores considerou-se que no esquema de controlo LQR todas as variáveis de estado eram conhecidas para o feedback. No entanto, será mais realista considerar que apenas as saídas y serão à partida conhecidas, e não todos os estados x . De facto, para se medir todos os estados seria necessário uma grande quantidade de sensores e, mesmo assim, algumas variáveis de estado seriam difíceis ou até mesmo impossíveis de medir.

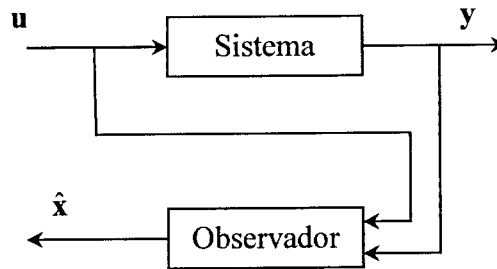


Fig. 5.4 - Diagrama de blocos do sistema e observador de estados

Nesse caso, por forma a poder fornecer a informação dos estados ao sistema de controlo, será necessário, a partir de um modelo do sistema e dos seus *outputs*, reconstruir toda a informação relativa aos estados. Essa reconstrução é normalmente efectuada recorrendo a um observador de estados (fig. 5.4).

5.5.6.1 Observador de Estados

Um observador de estados tem a finalidade de reconstruir completamente todas as variáveis de estado, mesmo aquelas que foram medidas. Considere-se o observador seguinte, denominado de Luenberger (Burl, 1999)

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{r} + \mathbf{K}_e(\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}) \quad ; \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = 0 \quad (5.77)$$

em que $\hat{\mathbf{x}}$ corresponde ao vector de estados estimado e $\mathbf{K}_e$ ao ganho do observador. Essa última equação simula, por um lado, o sistema real, e, por outro lado, penaliza a diferença entre as saídas medidas $\mathbf{y}$ e as saídas reconstruídas $\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}$. Subtraindo essa equação à equação (5.29), e substituindo $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$ na equação (5.77), obtém-se

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\mathbf{e} \quad (5.78)$$

em que a expressão do erro $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ representa a diferença entre os estados reais e os estimados, denominado erro de reconstrução, com o valor inicial $\mathbf{e}(0) = \mathbf{x}(0)$. Como se pode observar na equação (5.78), o erro será assintoticamente estável se os valores próprios de $\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$, ditos pólos do observador, possuírem partes reais negativas. Se o sistema for

completamente observável, os pólos do observador poderão ser escolhidos livremente. Em geral, eles deverão ser colocados (no plano complexo) bem à esquerda dos pólos do sistema, de forma a que o erro do observador amortea mais rapidamente que o próprio sistema. Para isso, os valores de K_e deverão ser bastante elevados. No entanto, a expressão (5.77) indica que, se a medida das saídas for bastante ruidosa, ganhos K_e elevados amplificarão também o ruído da saída. Dessa forma, torna-se necessário estabelecer uma relação de compromisso entre o ruído introduzido no sistema e a velocidade a que o observador se deve aproximar dos estados reais.

Um observador que minimiza o efeito dos ruídos brancos, que afectam a leitura das saídas e a evolução dos estados, é denominado de *filtro de Kalman Bucy*. Esses ruídos brancos são uniformemente distribuídos na banda de frequência e não são correlacionados.

5.5.6.2 Filtro de Kalman Bucy

Considere-se a equação do observador de Luenberger (5.77) aumentada pelos termos relativos aos ruídos de entrada w e de saída v

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B(u + w) + r + K_e(Cx + v - C\hat{x}) \quad ; \quad \hat{x}(0) = 0 \quad (5.79)$$

em que w e v são supostos ruídos brancos com valores médios esperados $E[w] = 0$ e $E[v] = 0$, e matrizes de covariância W e V . As matrizes de covariância definem-se por

$$W = BS_wB^T \quad (5.80)$$

$$V = S_v \quad (5.81)$$

em que S_w e S_v são, respectivamente, as densidades espectrais do ruído de entrada e saída definidas por

$$E[w(t)w^T(t+\tau)] = S_w\delta(\tau) \quad (5.82)$$

$$E[v(t)v^T(t+\tau)] = S_v\delta(\tau) \quad (5.83)$$

Da mesma forma, subtraindo a equação (5.79) à primeira equação (5.29) obtém-se a seguinte expressão do erro

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e \mathbf{C}) \mathbf{e} + \mathbf{B} \mathbf{w} - \mathbf{K}_e \mathbf{v} \quad (5.84)$$

O objectivo será então encontrar o ganho $\mathbf{K}_e$ que minimiza a seguinte função de custo quadrático (Preumont, 1997)

$$J_e = \mathbf{h}^T \mathbf{P} \mathbf{h} \quad (5.85)$$

em que $\mathbf{P} = E[\mathbf{e} \mathbf{e}^T]$ e $\mathbf{h}$ é um vector arbitrário. O ganho $\mathbf{K}_e$ que minimiza J_e para todo o valor de $\mathbf{h}$ escreve-se

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{P} \mathbf{C}^T \mathbf{V}^{-1} \quad (5.86)$$

A matriz $\mathbf{P}$, denominada matriz de covariância do observador óptimo, é solução da equação de Riccati seguinte

$$\mathbf{A} \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}^T + \mathbf{W} - \mathbf{P} \mathbf{C}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{P} = 0 \quad (5.87)$$

Comparando a equação de Riccati do observador (5.87) com a do controlador (5.70), constata-se que as matrizes de covariância $\mathbf{W}$ e $\mathbf{V}$ são equivalentes às matrizes de ponderação $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$. Assim, uma dualidade entre os dois tipos de problemas é observada. Dessa forma, os ganhos óptimos de Kalman e do LQR possuem funções de custo idênticas com as seguintes correspondências

$$\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{A}^T \quad (5.88)$$

$$\mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{C}^T \quad (5.89)$$

$$\mathbf{K}_g \Leftrightarrow \mathbf{K}_e \quad (5.90)$$

$$\mathbf{Q} \Leftrightarrow \mathbf{W} \quad (5.91)$$

$$\mathbf{R} \Leftrightarrow \mathbf{V} \quad (5.92)$$

No entanto, a matriz V penaliza o ganho do observador através do termo $K_e v$, de forma a limitar a amplificação do ruído de saída (leitura), e a matriz W , para entradas ruidosas, aumenta o ganho do observador, a fim de amortecer rapidamente o erro produzido por esse ruído.

5.5.7 Controlador Quadrático Linear Gaussiano (LQG)

Relativamente ao LQR, o controlador LQG ultrapassa a necessidade de se ter que medir o valor de todas as variáveis de estado, uma vez que elas são estimadas pelo filtro de Kalman Bucy. Os estados estimados são então posteriormente utilizados no controlador LQR. Dessa forma, o controlador LQG é uma combinação de um LQR e de um filtro de Kalman Bucy (fig. 5.5). Esta separação do controlador LQG em duas componentes, conhecida como *princípio da separação*, uma vez que permite projectar independentemente as duas componentes, simplifica a análise e o projecto do controlador.

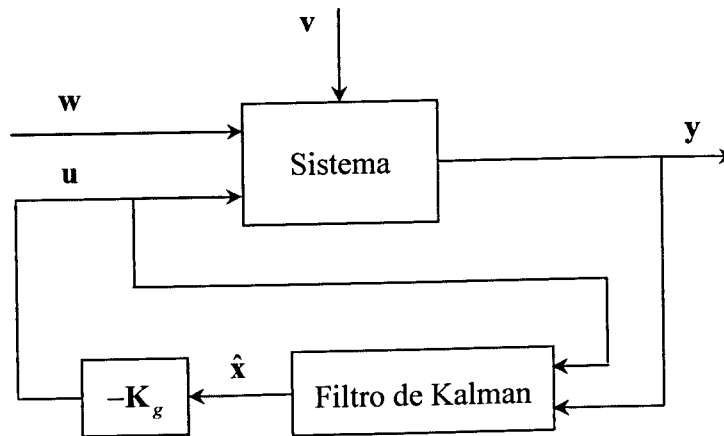


Fig. 5.5 - Sistema de controlo quadrático linear gaussiano (LQG)

Assim, considerando a expressão do erro do filtro de Kalman (5.84), juntamente com a lei de controlo $u = -K_g \hat{x}$ e a expressão (5.29), obtém-se o seguinte sistema acoplado

$$\begin{Bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{e} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK_g & BK_g \\ 0 & A - K_e C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ B & -K_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ v \end{Bmatrix} \quad (5.93)$$

Uma vez que o sistema acoplado (5.93) apresenta uma forma triangular por blocos, devido ao princípio da separação, os valores próprios dos sub-sistemas em malha fechada

estão desacoplados. Isso permite executar a concepção do sistema de controlo e observação em duas etapas diferentes. Porém, a estabilidade do sistema acoplado, em malha fechada, depende da estabilidade dos dois sub-sistemas.

5.6 Controlabilidade e Observabilidade

O conceito de controlabilidade permite, para uma determinada disposição dos actuadores, medir a capacidade de controlar todas as variáveis de estado. Da mesma forma, o conceito de observabilidade quantifica a capacidade de, a partir de uma disposição específica dos sensores, reconstruir toda a informação dos estados do sistema.

Dessa forma, diz-se que um dado sistema é *completamente controlável* quando o valor dos estados pode ser modificado num determinado tempo finito, desde um estado inicial até um outro estado qualquer, através de uma acção de controlo $\mathbf{u}$. Se o sistema não for completamente controlável, ele pode ainda ser *estabilizável*, o que significa que todas as variáveis de estado instáveis são controláveis, i.e., que o sub-espço não controlável é estável.

Por outro lado, um dado sistema diz-se *completamente observável* se, a partir do valor das suas saídas durante um intervalo de tempo finito, os estados puderem ser totalmente determinados. Em caso contrário, o sistema é *detectável* se, pelo menos, as variáveis de estado instáveis puderem ser observadas (se o sub-espço não observável for estável).

Admita-se um sistema sob a forma das expressões (5.29) e (5.30), de dimensão n , com as condições iniciais $\mathbf{x}(0)$ e $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Com o objectivo de mostrar a noção de controlabilidade, procura-se o controlo $\mathbf{u}$ que transfere o sistema do estado inicial $\mathbf{x}(0)$ ao estado final $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$. Da expressão (5.29) podem determinar-se os estados no instante t da forma seguinte

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (5.94)$$

Substituindo as condições finais $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ na expressão anterior fica

$$\mathbf{x}(0) = - \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (5.95)$$

em que a expansão em série da exponencial de $-A\tau$ se escreve

$$e^{-A\tau} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau) A^k \quad (5.96)$$

Logo, temos que

$$\mathbf{x}(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} A^k \mathbf{B} \beta_k(\tau) \quad ; \quad \beta_k = \int_0^{\tau} \alpha_k(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (5.97)$$

No entanto, a expressão (5.97) pode também ser escrita da forma seguinte

$$\mathbf{x}(0) = -\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{Bmatrix} \quad (5.98)$$

Para que um sistema seja completamente controlável, deverá existir uma solução β para todas as condições iniciais $\mathbf{x}(0)$, e por conseguinte, a matriz de controlabilidade C seguinte deverá ter rank n

$$C = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (5.99)$$

Nesse caso, o par $(A \ B)$ é dito controlável. Esse resultado pode ser modificado para a observabilidade, definindo-se a matriz de observabilidade O da forma seguinte

$$O = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (5.100)$$

Da mesma forma, o par $(A \ C)$ é dito observável se a matriz de observabilidade tiver rank n .

5.7 Implementação Digital

A concepção dos sistemas de controlo e de observação apresentados anteriormente admitia que os sinais de entrada e saída seriam analógicos (contínuos). Na prática, esses sistemas são geralmente implementados recorrendo a computadores, microcontroladores ou ainda a DSP's (processadores digitais de sinal).

Graças à elevada velocidade dos processadores actuais é actualmente possível desenvolver algoritmos digitais com um comportamento muito semelhante aos algoritmos contínuos apresentados anteriormente. No entanto, as transformações analógico/digital e digital/analógico requerem algumas considerações especiais.

Um esquema representativo da conversão de um sinal de saída contínuo, proveniente de um determinado sensor, num sinal digital, o seu tratamento pelo algoritmo de controlo e a sua reconversão para um sinal de controlo contínuo analógico, está representado na fig. 5.6.

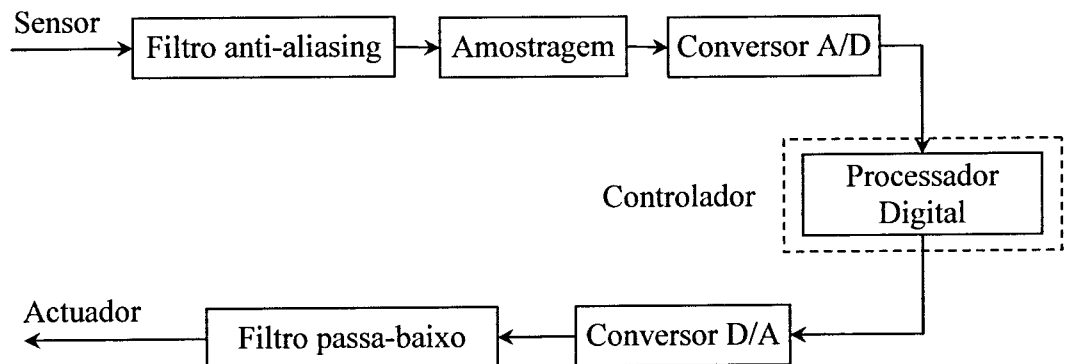


Fig. 5.6 - Conversão A/D, tratamento digital e conversão D/A

Um aspecto importante a reter neste processo, em que o processador recebe e envia sinais discretos (digitais), será a velocidade a que esses sinais deverão ser discretizados. O teorema da amostragem, denominado *teorema de Shannon*, demonstra que a frequência de amostragem deverá ser duas vezes superior à frequência máxima da banda considerada. Porém, as componentes de frequência fora da banda considerada aparecerão como componentes de frequência inferior, provocando o fenómeno de *aliasing*. Para evitar esse fenómeno, um filtro para as componentes a frequências superiores à frequência máxima da banda em análise, dita de Nyquist, deverá ser utilizado antes da amostragem. Note-se que esse corte da banda induz um retardamento da fase da frequência de corte. Em seguida, as frequências da amostragem são transformadas numa função escalar. Essa função é então

transformada num sinal digital de dimensão finita (por exemplo 16 bits) representando a banda do sinal analógico em que um erro de aproximação existe. Ele é de uma ordem de $2^{-N} R_E$, em que N é o comprimento da palavra digital e R_E a largura de banda do sinal de entrada analógico. Da mesma forma, à saída do sinal digital do processador, um erro de ordem $2^{-N} R_S$ é produzido, em que R_S é a largura de banda do sinal analógico de saída. Depois da conversão do sinal de controlo digital num sinal analógico, e antes de enviar o sinal analógico ao actuador, torna-se também conveniente filtrar as componentes de alta frequência que podem ser produzidas durante o tratamento do sinal.

Capítulo 6

Aplicações

6.1 Introdução

Neste capítulo apresentam-se aplicações de modelização de vigas com sensores e actuadores piezoeléctricos utilizando o modelo de elementos finitos apresentado no capítulo 4. O modelo foi implementado em ambiente MATLAB® e diversos exemplos de vigas foram analisados. Começa-se por validar o modelo de elementos finitos na sua acção estática e dinâmica (análise modal) para, em seguida, se analisar a performance dos diferentes algoritmos de controlo apresentados no capítulo 5. Finalmente, são apresentados e discutidos os resultados experimentais da acção estática e do controlo activo de vibrações por feedback da velocidade e do deslocamento numa viga encastrada-livre.

6.2 Validação do Modelo de Elementos Finitos

Nesta secção, o modelo de elementos finitos é validado, recorrendo para isso a comparações com resultados analíticos e numéricos publicados na literatura. Começa-se por analisar a acção estática dos actuadores e sensores de uma viga com actuadores ou sensores piezoeléctricos montados na sua superfície. Em seguida, é efectuada uma análise modal.

Duas variantes do presente modelo de elementos finitos (PT) são consideradas. A primeira variante (PAP), considera uma aproximação linear do potencial eléctrico das camadas piezoeléctricas, e o efeito piezoeléctrico directo não é levado em consideração (formulação denominada por Tiersten (1969) de pequeno acoplamento piezoeléctrico). Na segunda variante (AP), o acoplamento piezoeléctrico é considerado. Uma aproximação quadrática do potencial eléctrico é utilizada, e é igualmente considerado o aumento de rigidez devido aos campos eléctricos induzidos nas direcções longitudinal $\bar{E}_x^p$ e transversal $\bar{E}_z^p$.

6.2.1 Análise da Acção Estática dos Actuadores

6.2.1.1 Validação do Elemento

Considere-se a configuração da viga encastrada-livre da fig. 6.1 com actuadores e sensores piezoeléctricos montados na superfície. Neste caso, e por forma a avaliar a acção estática dos actuadores piezoeléctricos, as camadas piezoeléctricas funcionam apenas como actuadores. Com a finalidade de validar o modelo proposto, os resultados numéricos são comparados com os resultados analíticos apresentados por Zhang e Sun (1996) para o caso dos actuadores serem contínuos ao longo da viga ($L = L_p$). No caso deles serem segmentados ($L > L_p$), são utilizados resultados analíticos apresentados por Ang *et al.* (2000).

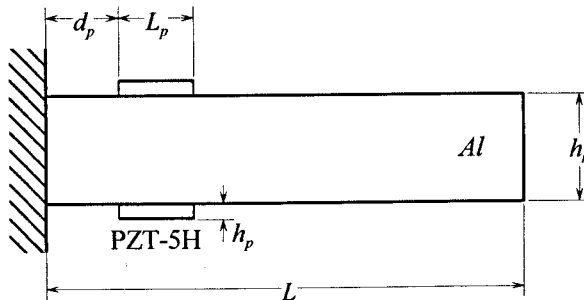


Fig. 6.1 - Viga encastrada-livre com actuadores e sensores piezoeléctricos montados na superfície

Considere-se então uma configuração geométrica (fig. 6.1) com actuadores contínuos em que $L = L_p = 100$, $d_p = 0$, $h_n = 16$ e $h_p = 1$ mm. As propriedades do material do núcleo (Alumínio) e das camadas piezoeléctricas (PZT-5H) utilizadas, idênticas às utilizadas por Zhang e Sun (1996), são apresentadas no anexo C. A viga está encastrada em $x = 0$ e livre em $x = L$. Com o objectivo de flectir a viga, uma diferença de potencial $\phi_p = 10$ V é aplicada aos actuadores piezoeléctricos. Numa primeira análise, e com o objectivo de analisar a convergência do elemento finito proposto, a flecha da viga para o caso dos actuadores contínuos, com os actuadores a cobrirem inteiramente o comprimento da viga, é avaliada e comparada com os resultados analíticos de referência (Zhang e Sun, 1996). Nesta primeira análise foram utilizados apenas quatro elementos finitos e a comparação com os resultados analíticos demonstrou uma boa concordância entre os dois resultados (fig. 6.2).

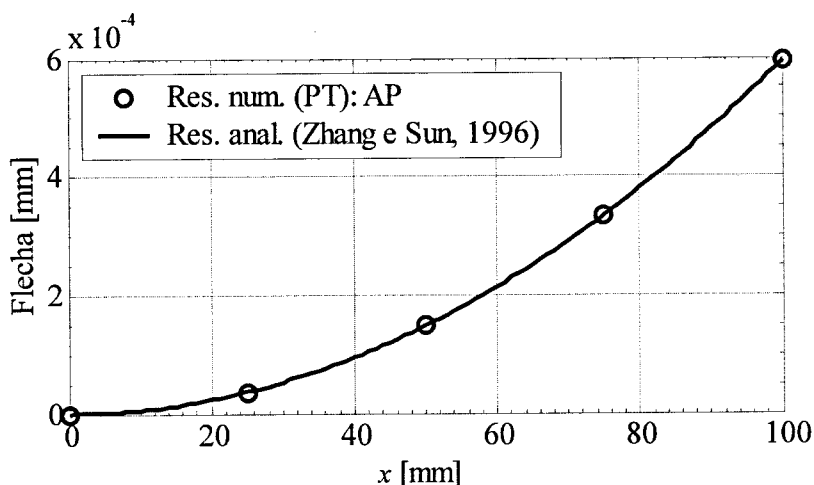


Fig. 6.2 - Flecha da viga encastrada-livre induzida por actuação piezoelétrica

Em seguida, a convergência do elemento finito é apresentada na fig. 6.3 para as variantes AP e PAP, tomando como referência o valor da flecha na extremidade livre da viga, e comparada com a obtida por Trindade (2000).

A solução analítica de referência (Zhang e Sun, 1996) considera a teoria de Timoshenko para o núcleo e a teoria de Euler-Bernoulli para as camadas piezoelétricas, e o efeito piezoelétrico directo não é considerado (PAP). O elemento finito proposto por Trindade (2000), considera as mesmas teorias que a solução analítica de referência. No entanto, o campo eléctrico transversal induzido é considerado na formulação do elemento.

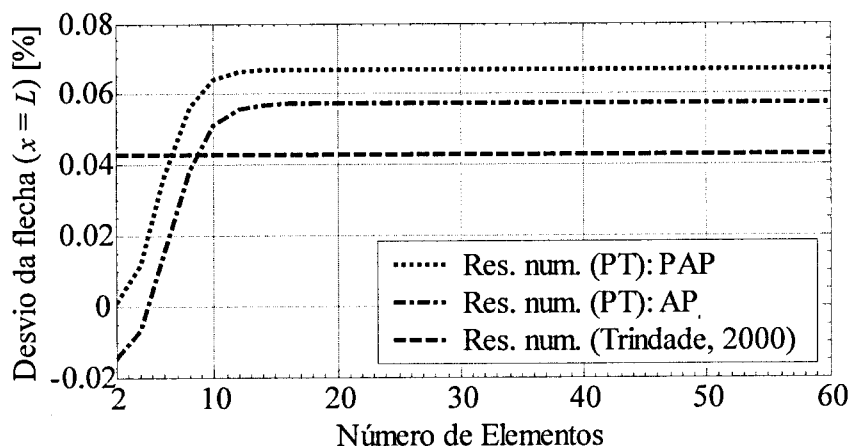


Fig. 6.3 - Curva de convergência da flecha da extremidade livre da viga

Dessa forma, observa-se na fig. 6.3 que o elemento finito proposto é bastante preciso, mesmo para um número de elementos bastante reduzido ($|\text{desvio}| < 0.02\%$ (PT-AP) e 0.001% (PT-PAP) para 2 elementos). Porém, para um número de elementos crescente, o valor do

desvio estabiliza para cerca de 15 elementos, com valores do desvio menores que 0.065% na variante PT-PAP e 0.055% na PT-AP. Essa estabilização deve-se ao facto que, com o aumento do número de elementos, e uma vez que as camadas piezoeléctricas são relativamente finas em relação ao núcleo, a teoria de Timoshenko e, consequentemente, o bloqueamento de corte (*shear locking*) é melhorado devido ao aumento da relação entre a espessura das camadas piezoeléctricas e o comprimento dos elementos (*aspect ratio*). Um outro efeito que é observado entre as duas variantes é que a PT-AP apresenta uma maior rigidez relativamente à PT-PAP, devido ao aumento da rigidez provocado pelos campos eléctricos induzidos, resultando assim num desvio menor relativamente à flecha de referência.

A curva de convergência apresentada por Trindade (2000) permite verificar que o seu elemento finito não é sensível ao aumento do número de elementos, pois as camadas piezoeléctricas são modelizadas segundo a teoria de Euler-Bernoulli e o *aspect ratio* do núcleo é elevado (o núcleo no exemplo considerado é bastante espesso quando comparado com as camadas piezoeléctricas). Por outro lado, verifica-se uma maior proximidade desses resultados com os da variante PT-AP, pois em ambos os casos, o efeito do campo eléctrico transversal induzido foi considerado.

Assim, a confiança na presente teoria é demonstrada e admite-se que a variante PT-AP, com uma formulação mais precisa que as apresentadas por Zhang e Sun (1996) e Trindade (2000), corresponde a uma modelização mais correcta, justificando-se assim os desvios obtidos relativamente às referências.

A flecha na extremidade livre, para espessuras dos actuadores compreendidas no intervalo [0.1-10] mm e um número de elementos igual a 20 (suficiente para garantir boa precisão dos resultados - ver fig. 6.3), é analisada e comparada com a solução analítica de referência (fig. 6.4). Como se pode observar, uma vez que a diferença de potencial foi mantida constante ($\phi_p = 10$ V), o efeito do aumento de rigidez devido ao aumento da espessura dos actuadores é superior ao aumento da capacidade de actuação.

Por forma a analisar as limitações das hipóteses de Euler-Bernoulli para as camadas piezoeléctricas e, por outro lado, o efeito do *shear locking*, são apresentados na fig. 6.5 os desvios da flecha na extremidade livre, relativamente à referência, obtidos pelas duas variantes da modelização e por Trindade (2000). A fig.6.5 permite verificar que os resultados obtidos por Trindade (2000) se assemelham aos obtidos com a variante PT-PAP. No entanto, na PT-AP verifica-se que, à medida que a espessura aumenta, o desvio torna-se cada vez maior. Da comparação das duas variantes da modelização conclui-se que, como seria de esperar, os efeitos dos campos eléctricos induzidos, e consequentemente o aumento de

rigidez, tornam-se mais significativos à medida que a espessura aumenta. Por outro lado, da comparação com os resultados numéricos de Trindade (2000) constata-se que existe uma variação da rigidez devido às tensões de corte, mais significativas para espessuras maiores (teoria de Timoshenko), que, por sua vez, são as responsáveis pelo campo eléctrico induzido na direcção longitudinal.

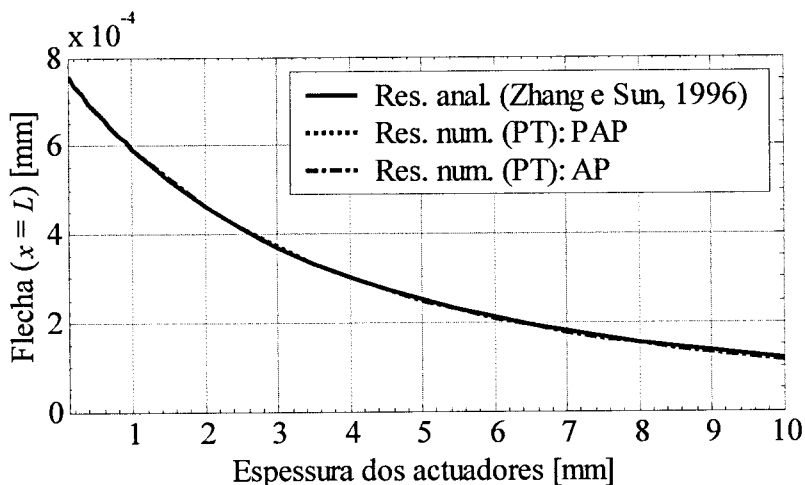


Fig. 6.4 - Flecha na extremidade livre em função da espessura dos actuadores

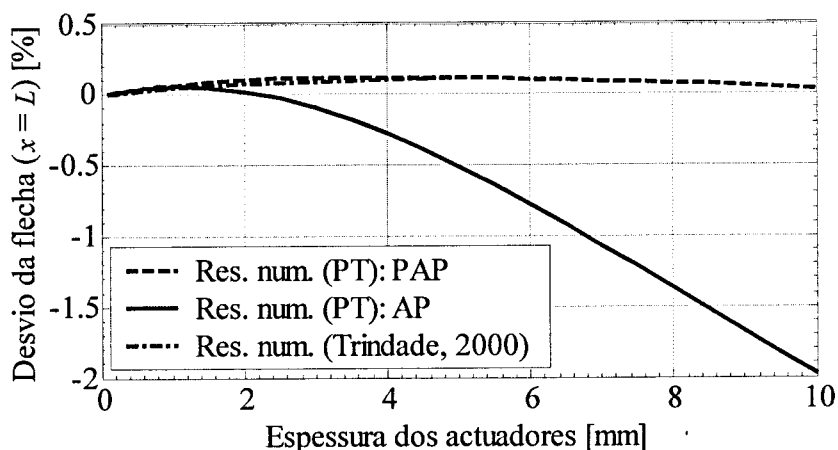


Fig. 6.5 - Desvio da flecha na extremidade livre em função da espessura dos actuadores

Um outro caso em que os actuadores são segmentados foi também analisado e comparado com outra solução analítica aproximada de referência (Ang *et al.*, 2000). Considere-se novamente a viga da fig. 6.1 com o mesmo carregamento eléctrico e as mesmas dimensões. Numa primeira análise, a variação da flecha na extremidade livre em função do comprimento L_p dos actuadores, compreendido no intervalo [10-90] mm, para um valor de

$d_p = 0$, foi analisada. A solução analítica de referência considera a teoria de Timoshenko para o núcleo, e o efeito do carregamento eléctrico é considerado como um momento distribuído ao longo do comprimento do actuador, sem, porém, considerar a rigidez do actuador.

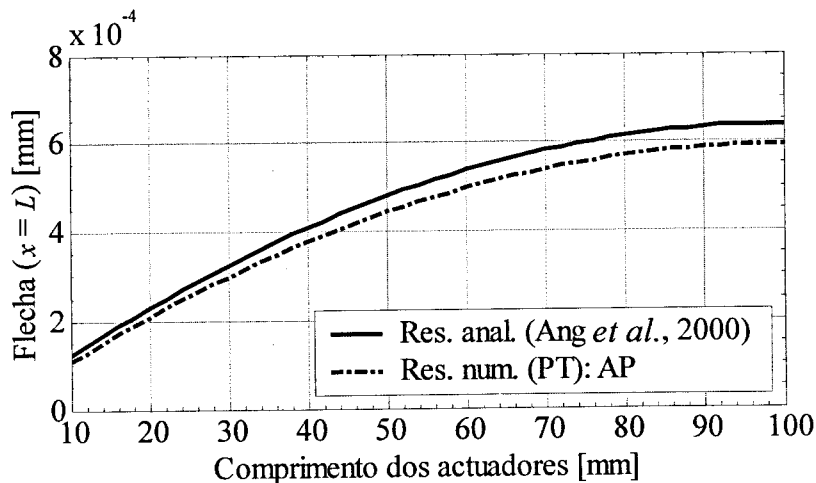


Fig. 6.6 - Flecha na extremidade livre para diversos comprimentos dos actuadores

A flecha na extremidade livre da viga, determinada com a variante PT-AP (tomada como a mais correcta aproximação) e a solução analítica de referência, é apresentada na fig. 6.6. As duas soluções apresentam um comportamento semelhante, demonstrando que a variação da flecha com o comprimento dos actuadores não varia de forma linear. Da mesma forma que a solução analítica de referência, a presente teoria demonstra que o aumento do comprimento dos actuadores aumenta a capacidade de actuação e que, o aumento de rigidez, devido ao maior comprimento dos actuadores, atenua a capacidade de actuação. Dessa forma, constata-se que, a partir de determinado ponto (quando o comprimento dos actuadores se aproxima do comprimento da viga), a variação da flecha é praticamente insensível à variação do comprimento dos actuadores.

O desvio relativamente à flecha de referência é apresentado na fig. 6.7. É possível observar-se que o desvio aumenta com o comprimento dos actuadores, com uma sensibilidade maior para os comprimentos menores, pois a rigidez dos actuadores é mais significativa nas zonas de maior curvatura, que se verificam junto ao encastramento.

Com o objectivo de analisar o efeito da posição do actuador d_p na capacidade de actuação das camadas piezoeléctricas, faz-se variar a posição no intervalo [1-90] mm. Para esse efeito, a viga da fig. 6.1, com um comprimento dos actuadores $L_p = 10$ mm fixo, foi novamente considerada.

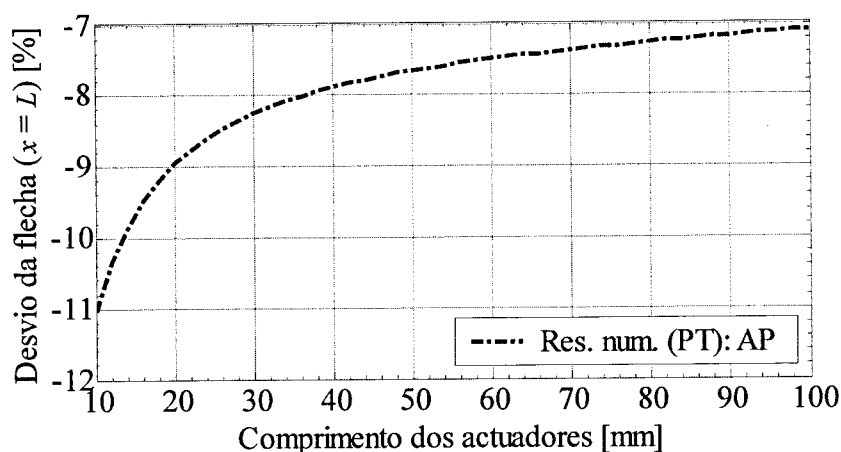


Fig. 6.7 - Desvio da flecha na extremidade livre em função do comprimento dos actuadores

Na fig. 6.8 são apresentadas as flechas na extremidade livre, para a variante PT-AP e referência (Ang *et al.*, 2000). Da análise da fig. 6.8 conclui-se que a capacidade de actuação diminui à medida que a posição dos actuadores se afasta do encastramento (as duas soluções evidenciam esse facto). Da mesma forma que no caso anterior, a solução numérica subestima a flecha da viga, mas, desta vez, como o comprimento do actuador é constante, o desvio verificado entre as duas soluções mantém-se constante, uma vez que a alteração da rigidez global em função da posição do actuador dá-se sempre da mesma forma.

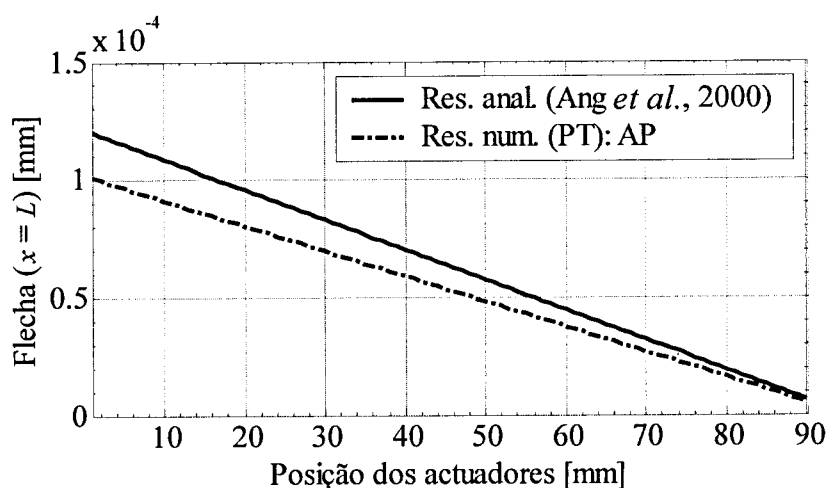


Fig. 6.8 - Flecha na extremidade livre em função da posição dos actuadores

O desvio da flecha na extremidade livre, relativamente à flecha de referência, é apresentado na fig. 6.9.

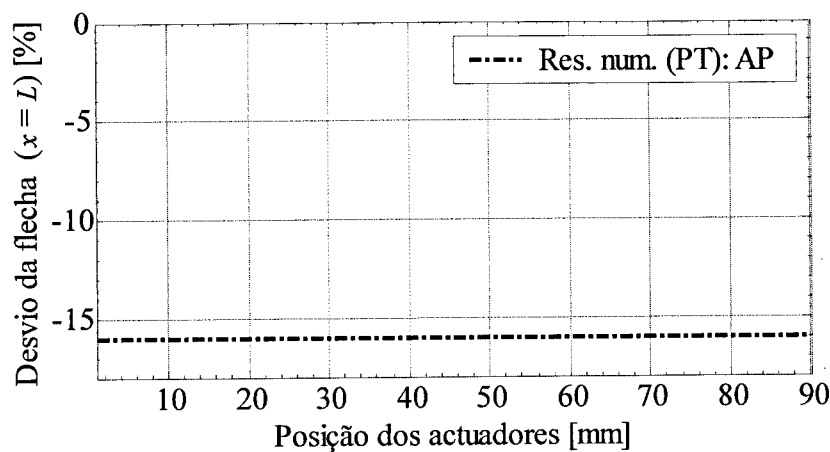


Fig. 6.9 - Desvio da flecha na extremidade livre da viga para diversas posições dos actuadores

A análise da fig. 6.9 evidencia que o elemento finito proposto, face às soluções analíticas aproximadas para aplicações com actuadores segmentados, apresenta um comportamento idêntico, evidenciando a sua fiabilidade e robustez nesse tipo de aplicação.

6.2.1.2 Efeito Piezoeléctrico Directo

Um outro exemplo é considerado por forma a demonstrar os efeitos da consideração do efeito piezoeléctrico directo no comportamento estático de uma viga. Para isso recorre-se à comparação com a solução analítica (formulação unidimensional) e numérica (Abaqus®, elemento finito bidimensional CPS4E com acoplamento electromecânico para estado plano de tensão) apresentadas por Krommer (2001). Para esse estudo comparativo é considerada a viga simplesmente apoiada da fig. 6.10.

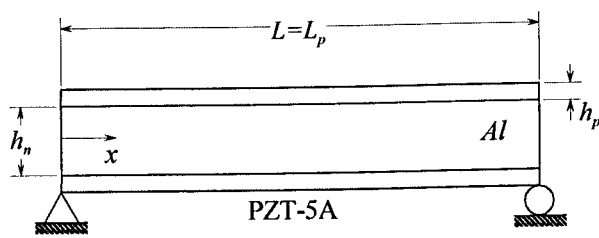


Fig. 6.10 - Viga simplesmente apoiada com actuadores e/ou sensores piezoeléctricos montados na superfície

Numa primeira análise, considera-se uma espessura nula para o núcleo ($h_n = 0$) com apenas as duas camadas piezoeléctricas presentes. As camadas piezoeléctricas são na sua

totalidade cobertas pelos eléctrodos e um potencial nulo é imposto aos eléctrodos nas interfaces das camadas. A viga tem um comprimento $L = L_p = 400$ mm e uma espessura total das duas camadas piezoeléctricas $2h_p = 10$ mm. As propriedades do material piezoeléctrico utilizado (PZT-5A), idênticas às utilizadas por Krommer (2001), são apresentadas no anexo C.

Um potencial eléctrico de 10000V é então imposto aos eléctrodos exteriores. A flecha da viga é apresentada na fig. 6.11, onde pode observar-se que existe uma excelente concordância entre os resultados fornecidos pelo elemento proposto e os resultados analíticos e numéricos de referência.

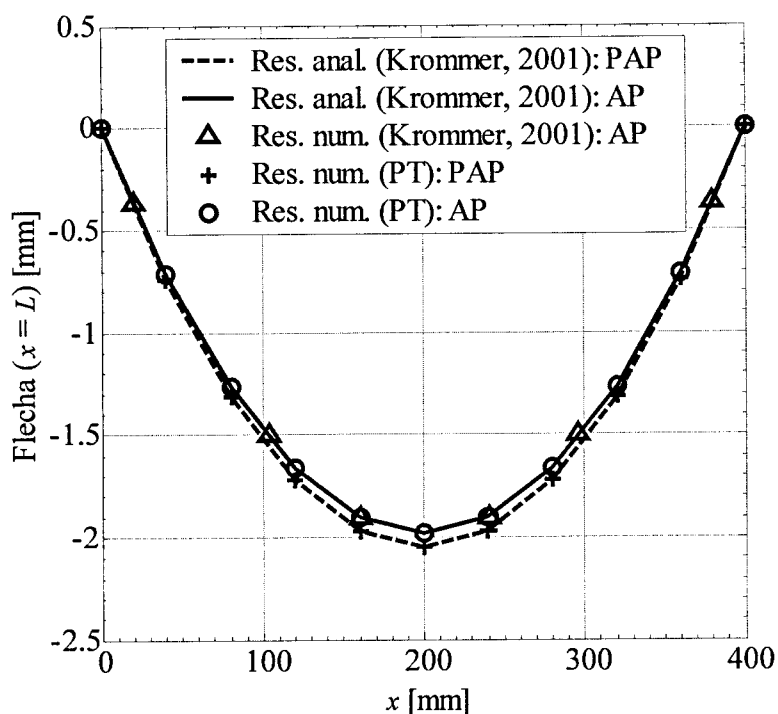


Fig. 6.11 - Flecha da viga simplesmente apoiada por actuação piezoeléctrica

A distribuição dos potenciais eléctricos total e induzido da camada piezoeléctrica superior, a meio da viga ($x = L/2$), é apresentada na fig. 6.12. Uma boa concordância, entre os resultados numéricos da presente teoria e os analíticos de referência, foi obtida para os potenciais total e induzido. O potencial eléctrico total corresponde à soma do potencial externo aplicado (10000 V) e do potencial induzido. Note-se que, em ambos os resultados numéricos e analíticos, a influência do efeito piezoeléctrico directo origina um potencial eléctrico induzido com uma distribuição quadrática na direcção da espessura. Distribuições semelhantes podem ser encontradas na literatura (Saravanos *et al.*, 1995).

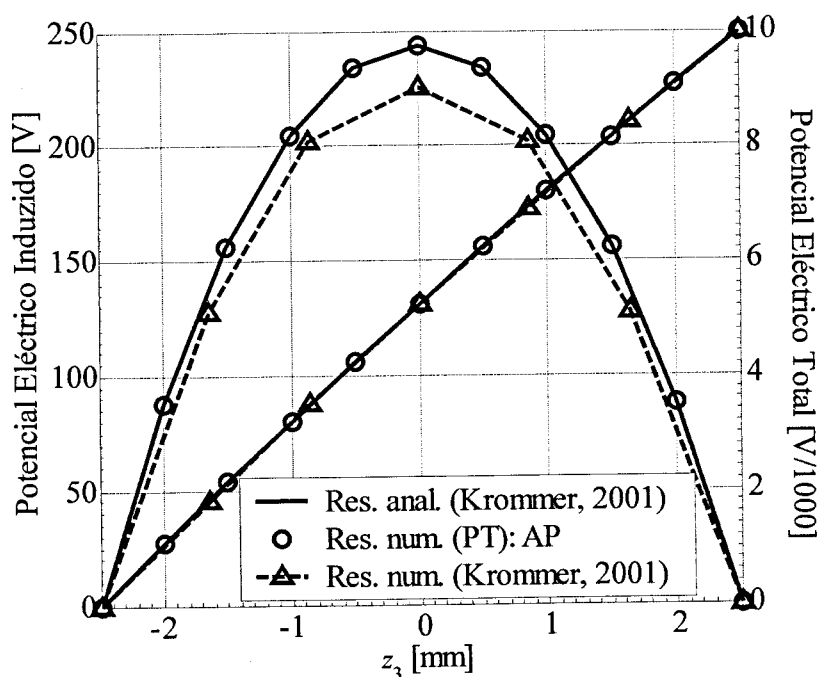


Fig. 6.12 - Distribuição do potencial eléctrico na espessura em $x = L/2$

Quando comparadas com o resultado numérico de referência, ambas as teorias unidimensionais, referência analítica e PT-AP, sobrestimam o potencial induzido. No entanto, a sua influência no potencial total não é muito significativa. A discordância entre os valores do potencial induzido resulta das diferentes considerações mecânicas relativamente ao estado de tensão (estado plano de tensão para a referência numérica e estado uniaxial de tensão para a referência analítica e PT-AP).

A distribuição do potencial eléctrico no plano médio da camada piezoeléctrica superior ao longo da direcção axial é apresentada na fig. 6.13. Adicionalmente, o potencial aplicado ao eléctrodo superior é também incluído na fig. 6.13. Pode ser observado na referida figura que os valores do potencial eléctrico no plano médio são praticamente idênticos, mas possuem um valor ligeiramente superior a 5000V, o que demonstra a influência das deformações mecânicas na distribuição do potencial eléctrico.

A distribuição da componente transversal do deslocamento eléctrico é analisada na fig. 6.14. Uma ligeira diferença do valor do deslocamento eléctrico é verificada entre as teorias que consideram estados uniaxiais de tensão e as que não consideram. No capítulo 2, as soluções para o potencial eléctrico foram obtidas assumindo-se que $D_{z,z}^p = 0$. Assim, os

resultados permitem concluir que a consideração $D_{z,z}^p = 0$ é respeitada em todas as análises (numéricas e analíticas).

A capacidade da presente teoria de fornecer respostas mecânicas e eléctricas, comparáveis às soluções numéricas bidimensionais e analíticas unidimensionais, foi demonstrada nestes exemplos.

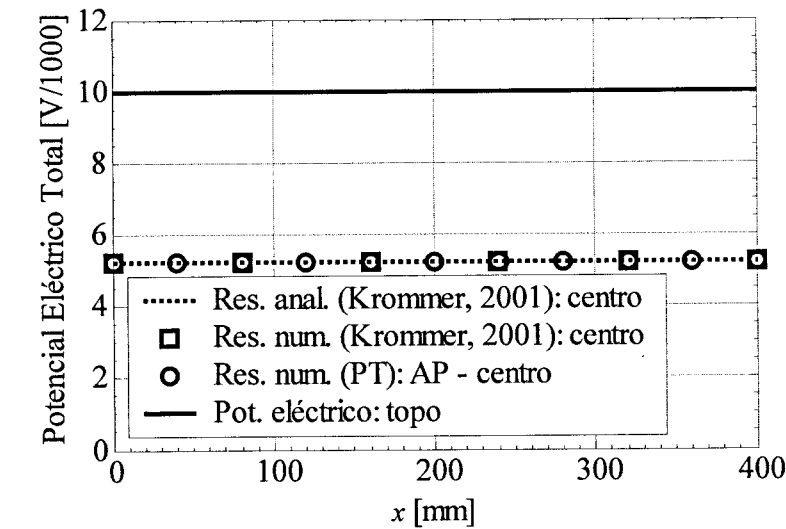


Fig. 6.13 - Distribuição do potencial eléctrico na direcção axial

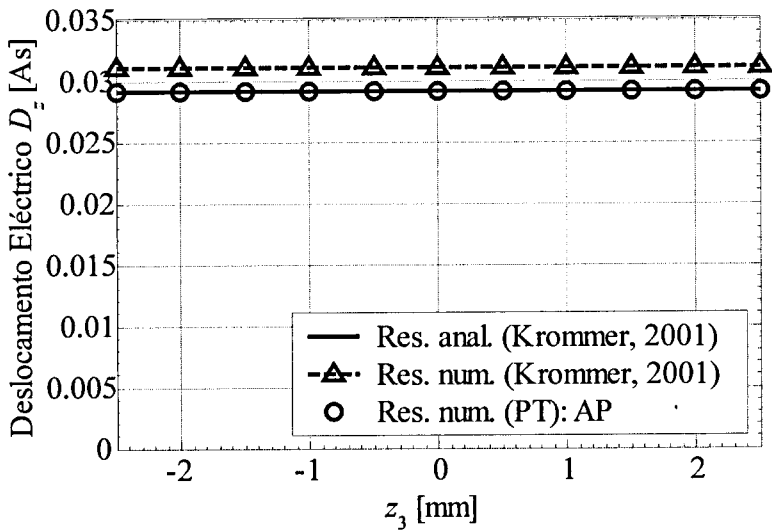


Fig. 6.14 - Distribuição do deslocamento eléctrico D_z na direcção da espessura em $x = L/2$

No sentido de demonstrar a influência da espessura relativa das camadas piezoeléctricas na resposta mecânica da viga, foi igualmente considerada a viga de três camadas, com o núcleo metálico entre duas camadas piezoeléctricas (fig. 6.10). As flechas relativas, obtidas

entre as duas variantes (PT-AP/PT-PAP), em função da espessura relativa h_n/h_t , em que h_t é a espessura total, são comparadas na fig. 6.15 com os resultados de referência. Dessa forma, o efeito do acoplamento electromecânico é avaliado.

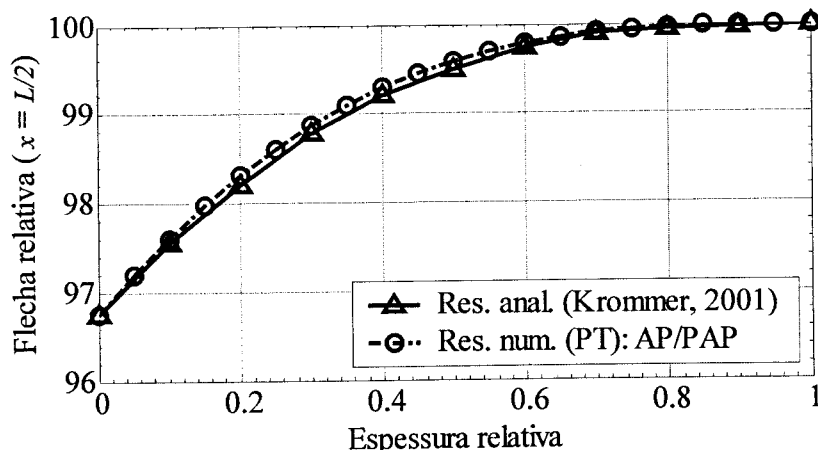


Fig. 6.15 - Flecha relativa no meio da viga simplesmente apoiada em função da espessura relativa

Como se pode observar na fig. 6.15, os resultados obtidos com a presente teoria apresentam uma boa correspondência com os resultados de referência. A ligeira diferença observada deve-se ao facto de terem sido consideradas diferentes teorias na aproximação do campo de deslocamentos (teoria layerwise face à teoria de Euler-Bernoulli) e torna-se mais significativa quando as propriedades do material do núcleo se distinguem das propriedades do material das camadas piezoelétricas (maior heterogeneidade material). Na fig. 6.15 também pode ser observado que a influência do efeito piezoelétrico directo diminui com o aumento da espessura relativa do núcleo, pois a razão entre as flechas nas variantes AP e PAP diminui. Esta influência, embora reduzida, mas no entanto significativa, é normalmente negligenciada na literatura. No entanto, na opinião de Krommer (2001), ela deveria ser considerada, uma vez que o acoplamento electromecânico pode ser facilmente incorporado no modelo mecânico da viga através de parâmetros efectivos de rigidez.

Assim, conforme foi demonstrado nos exemplos anteriores, o elemento proposto e a presente teoria que lhe deu origem apresentam capacidade para modelizar, com rigor, as respostas mecânica e eléctrica de vigas com actuadores piezoelétricos.

6.2.2 Análise da Acção Estática dos Sensores

6.2.2.1 Viga com Sensores Piezoelétricos Contínuos

Considere-se a viga da fig. 6.10 actuada estaticamente por um carregamento mecânico transversal uniformemente distribuído de intensidade 100000 Nm^{-1} . As faces exteriores das camadas piezoelétricas são consideradas com os eléctrodos em curto circuito ou circuito aberto, ou sem eléctrodos. No que se segue, a viga simplesmente apoiada nas extremidades é analisada para diferentes condições de fronteira eléctricas. As respostas mecânica e eléctrica são analisadas e comparadas com a solução analítica de referência (Krommer, 2001) para uma viga de duas camadas piezoelétricas idênticas com $L = L_p = 400 \text{ mm}$ e uma espessura total $h_t = 2h_p = 10 \text{ mm}$. A influência da espessura relativa das camadas piezoelétricas na flecha máxima da viga, para o caso de uma viga com três camadas, é também analisada para uma razão entre a espessura total e o comprimento total de 0.025.

Viga com Duas Camadas Piezoelétricas

A flecha da viga sob a acção do carregamento transversal uniformemente distribuído é apresentada nas fig. 6.16 e 6.17, para valores da coordenada axial da viga compreendidos no intervalo [140-260] mm.

Na fig. 6.16 é efectuada uma comparação com os resultados analíticos de referência. Os valores da flecha são apresentados para o caso dos eléctrodos em circuito fechado (CF), circuito aberto (CA) e camadas sem eléctrodos (SE). Como pode ser observado, os resultados analíticos de referência e os numéricos apresentam uma boa concordância para os casos PAP, AP-CF e AP-SE. No caso dos eléctrodos em circuito aberto (AP-CA), note-se que os resultados PT, apesar de demonstrarem uma tendência semelhante de diminuição da rigidez (relativamente a SE), não coincidem exactamente com os de referência. A justificação da ligeira diferença observada na solução analítica entre CA e SE deve-se ao facto de que terem sido considerados nas relações constitutivas os denominados *termos não-locais* (Krommer, 2001), por forma a assegurar a condição de área dos eléctrodos equipotencial. Essa condição, na presente teoria, foi assegurada através de uma condensação estática dos graus de liberdade eléctricos média. Dessa forma, a diferença de potencial eléctrico induzida média (entre elementos adjacentes) é utilizada para a condição CA, garantindo-se a equipotencialidade da área dos eléctrodos. Note-se que se a condensação for realizada da forma habitual, considerando a diferença de potencial induzida em cada elemento, somos

conduzidos à mesma solução que SE (situação normalmente utilizada para a modelização CA). No entanto, como se verifica nas fig. 6.16 e 6.17, existe na realidade uma diferença de comportamento para estas duas condições de fronteira eléctricas (CA e SE).

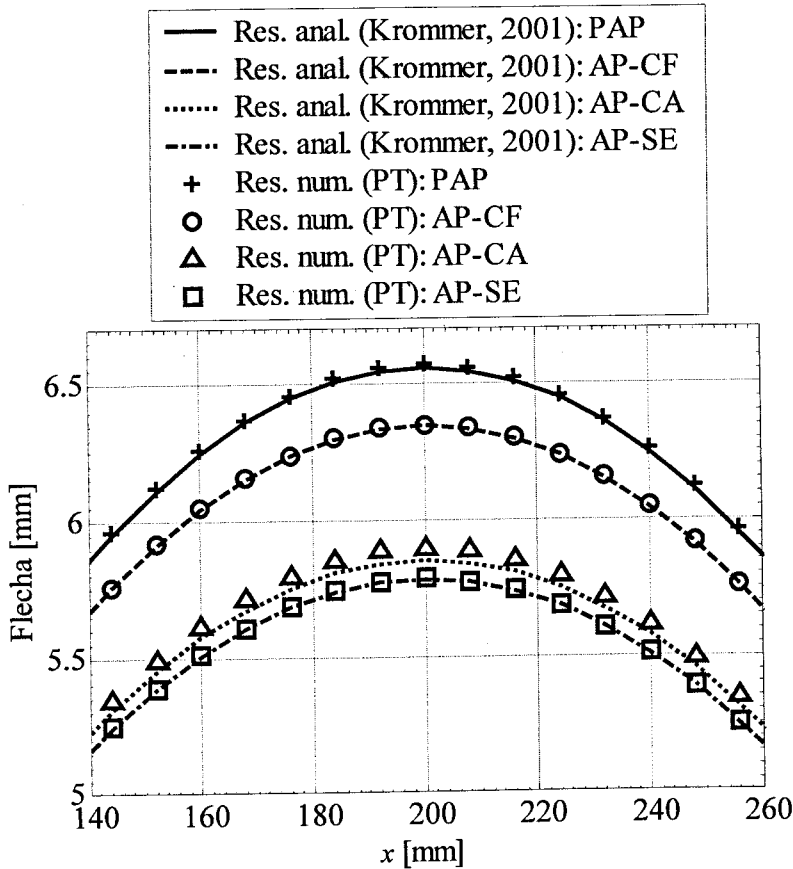


Fig. 6.16 - Flecha da viga simplesmente apoiada para diferentes condições de fronteira eléctricas (resultados analíticos vs. numéricos)

Da fig. 6.16 também se pode concluir que a consideração do acoplamento piezoeléctrico (AP) é devidamente levada em consideração. Obviamente, a sua consideração provoca uma redução na flecha da viga, resultante do aumento dos parâmetros de rigidez devido ao acoplamento. Para o caso dos eléctrodos em curto-circuito (CF), em que a diferença de potencial é forçada a desaparecer, a influência do acoplamento é menos significativa. Em contraste, para o caso dos eléctrodos em circuito aberto (CA) ou sem eléctrodos (SE), em que uma diferença de potencial eléctrico é produzida devido às deformações mecânicas, a diminuição da flecha da viga é mais significativa. Note-se também que, a consideração da condição de área equipotencial dos eléctrodos para os eléctrodos em circuito aberto, conduz a uma flecha da viga ligeiramente superior ao caso sem eléctrodos. Dessa forma, essa

modelização conduz a resultados mais precisos relativamente à modelização mais comum desse tipo de condição fronteira eléctrica encontrada na literatura, e que considera $\tau^p = 0$.

Por forma a validar a condição CA, os resultados numéricos obtidos com a presente teoria foram também comparados (fig. 6.17) com os numéricos obtidos por Krommer (2001), utilizados na validação do modelo analítico (*non-local theory*), em que a condição CA foi assegurada através de uma equação adicional impondo um potencial eléctrico constante nos nós que definem os eléctrodos.

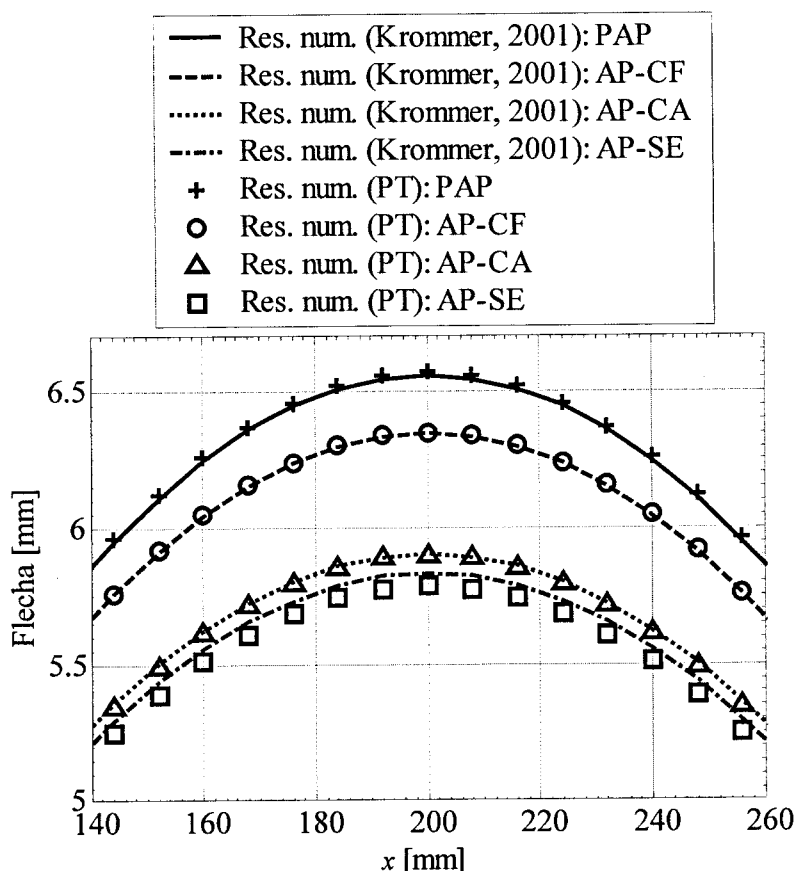


Fig. 6.17 - Flecha da viga simplesmente apoiada para diferentes condições de fronteira eléctricas (resultados numéricos vs. numéricos de referência)

Como se pode observar na fig. 6.17, os resultados da presente teoria PAP, AP-CA e AP-CF, apresentam uma boa concordância com os numéricos de referência. No entanto, para a condição AP-SE verifica-se um ligeiro desvio.

A distribuição do potencial eléctrico na espessura da camada para as diferentes condições de fronteira eléctricas é apresentada na fig. 6.18 para $x = L/2$. Uma boa concordância é observada para as três condições de fronteira eléctricas. Note-se que, da

condição CF apenas resulta um distribuição quadrática na espessura, enquanto que, nos outros casos, o potencial eléctrico resulta da soma da distribuição linear com a quadrática.

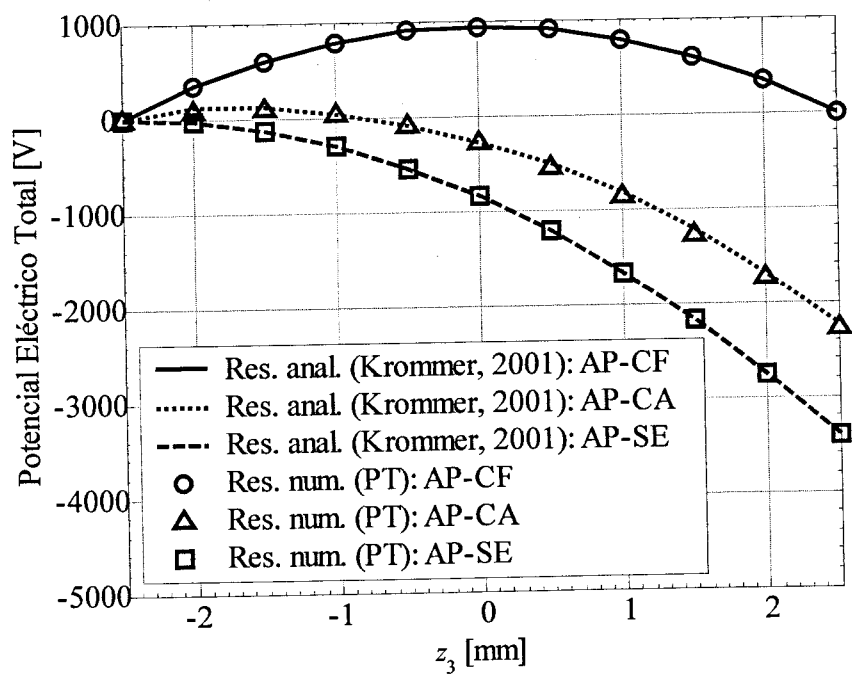


Fig. 6.18 - Distribuição do potencial eléctrico na espessura a meio da viga para as diferentes condições de fronteira eléctricas

Na fig. 6.19 é apresentada a distribuição do potencial eléctrico na direcção axial para dois valores da coordenada transversal da camada piezoeléctrica. Os resultados obtidos para os potenciais eléctricos revelam uma boa concordância com os analíticos. Note-se que, para a condição CA a condição de área equipotencial no eléctrodo é satisfeita nas duas soluções. No entanto, os resultados PT para a condição CA, no topo e centro da camada, apresentam, nas extremidades da camada, um comportamento diferente da referência. Esse efeito, de reduzida importância, deve-se a efeitos de bordo do modelo de elementos finitos resultantes do processo de condensação, em que a curvatura das camadas nos apoios da viga simplesmente apoiada, devido à condição de área equipotencial, não é nula.

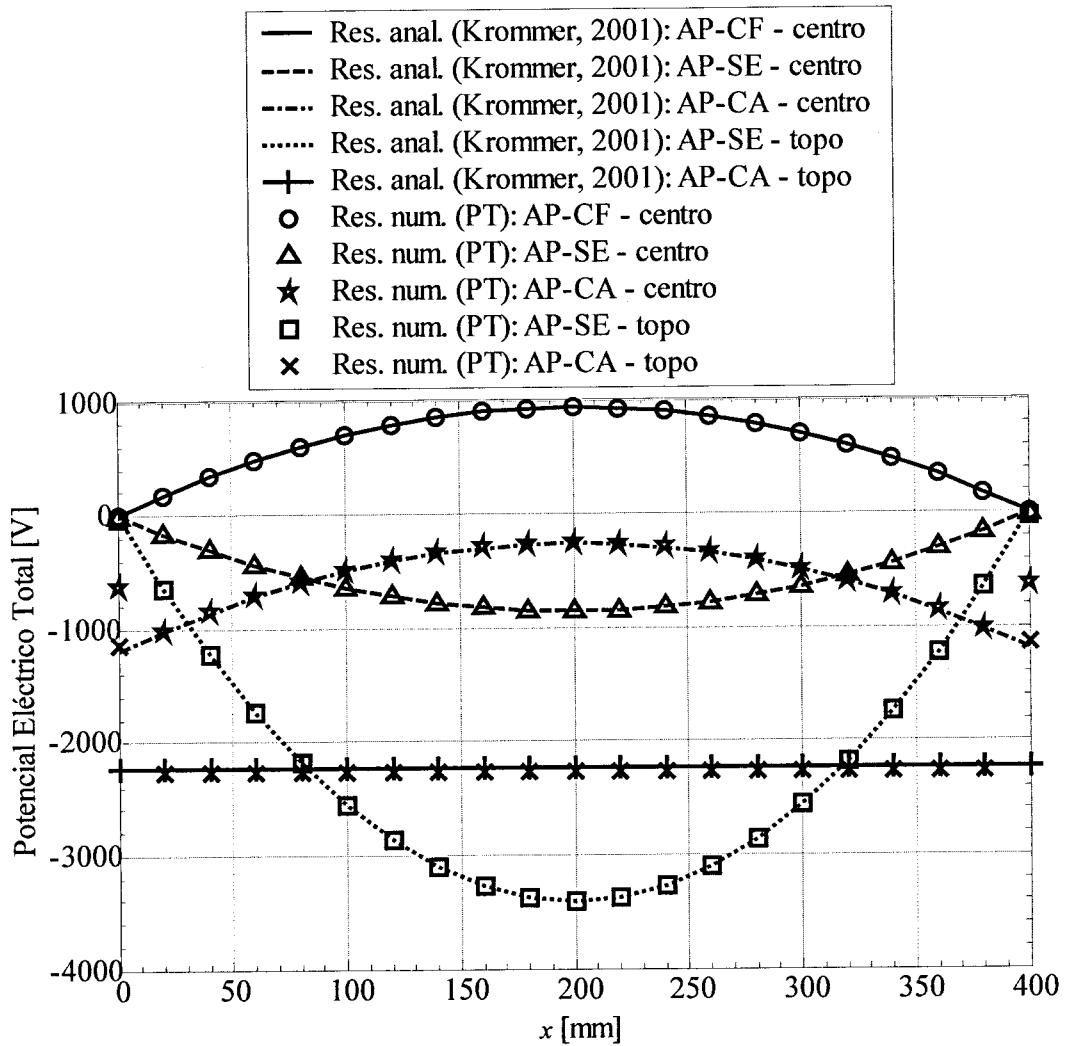


Fig. 6.19 - Distribuição do potencial eléctrico na direcção axial para diferentes condições de fronteira eléctricas (centro: $z_p = 0$; topo: $z_p = 2.5$)

Finalmente, a componente transversal do deslocamento eléctrico, para as diferentes condições de fronteira eléctricas, a meio do comprimento da viga, é apresentada na fig. 6.20.

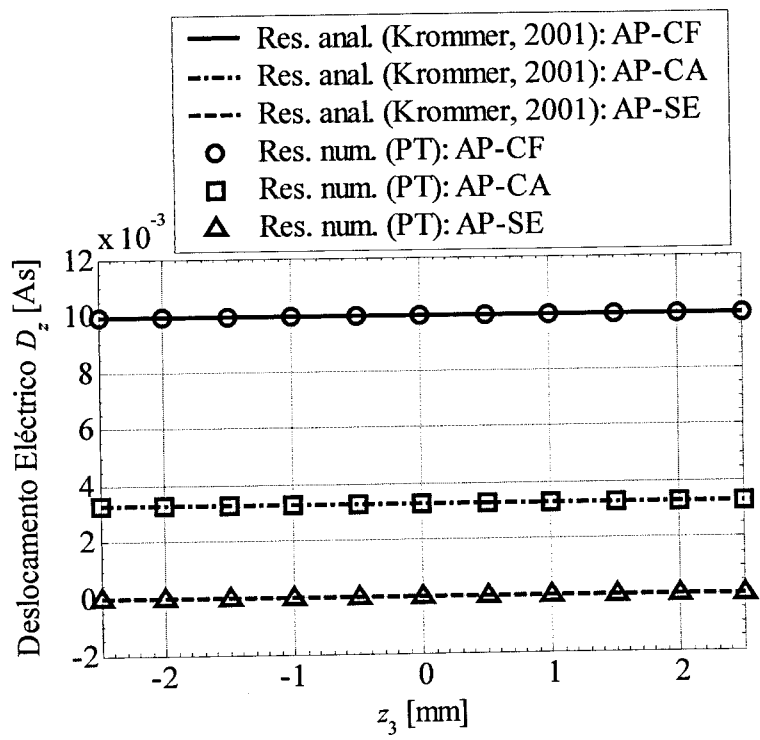


Fig. 6.20 - Distribuição do deslocamento eléctrico na direcção da espessura a meio do comprimento da viga

Uma vez mais, uma boa concordância entre os resultados é obtida para as três condições de fronteira eléctricas. Note-se que é nulo o deslocamento eléctrico para o caso sem eléctrodos (SE).

Viga com Núcleo Metálico e Camadas Piezoeléctricas

Da mesma forma que no exemplo anterior (carregamento eléctrico), por forma a analisarem-se as influências do acoplamento electromecânico e da espessura relativa do núcleo na flecha relativa da viga (AP/PAP), uma viga de três camadas, com o núcleo entre camadas piezoeléctricas, foi analisada. Os resultados obtidos, para as diferentes condições de fronteira eléctricas, são apresentados na fig. 6.21 e comparados com a flecha relativa de referência (Krommer, 2001). Como se pode observar na fig. 6.21, uma boa concordância com a flecha de referência foi obtida. Como seria de esperar, o acoplamento electromecânico é mais significativo para as condições SE e CA. Além disso, a condição CF demonstra uma menor sensibilidade à espessura relativa do núcleo.

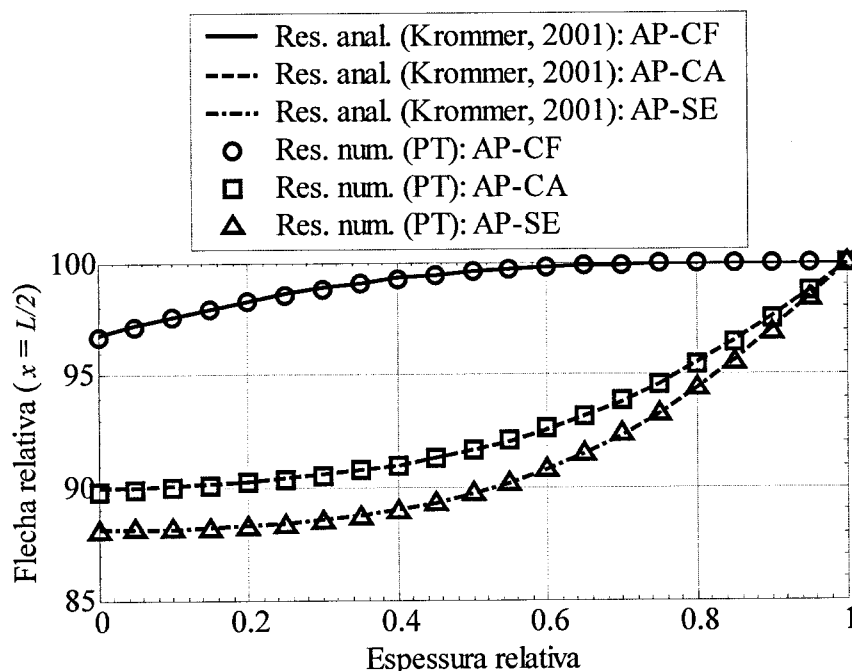


Fig. 6.21 - Flecha relativa no meio da viga simplesmente apoiada para várias condições de fronteira eléctrica em função da espessura relativa do núcleo

Assim, os resultados obtidos nos exemplos anteriores demonstram que a presente teoria e o elemento desenvolvido apresentam capacidade de modelizar, com rigor, as respostas mecânica e eléctrica de vigas com sensores piezoeléctricos.

6.2.2.2 Viga com Sensores Piezoeléctricos Segmentados

Nesta secção, a atenção é direccionada para os sensores piezoeléctricos segmentados, geralmente utilizados para medir as deformações dinâmicas da estrutura na qual eles são colocados. Nesse caso, os campos eléctricos nas camadas piezoeléctricas não são impostos, como para o caso dos actuadores, mas sim desconhecidos. Os seus valores serão determinados para diversos tipos de carregamento mecânico (axial, transversal e momentos) utilizando o presente modelo de elementos finitos. Por forma a evidenciar o efeito da condição de área equipotencial (CA), as respostas mecânica e eléctrica são comparadas com as obtidas para o caso dos sensores serem contínuos. Os resultados são obtidos para o caso da condição de equipotencialidade da área dos eléctrodos ser respeitada (CA) e para o caso em que essa condição não é respeitada, situação essa que é equivalente à modelização sem eléctrodos (SE).

Considere-se a viga encastrada-livre da fig. 6.1 com as dimensões $L = 400$, $L_p = 30$, $d_p = 5$, $h_n = 2$, $h_p = 1$, e largura $b = 15$ mm (no caso dos sensores serem contínuos o

comprimento $L_p = L$). As propriedades utilizadas para os materiais do núcleo (Alumínio) e das camadas piezoeléctricas (PXE5) são apresentadas no anexo C.

Carregamento axial

Considere-se uma força axial $X = 10\text{ N}$ aplicada na extremidade livre da viga. Na fig. 6.22 são apresentados os deslocamentos axiais e transversais induzidos pelo carregamento mecânico da viga, para os casos dos sensores segmentados e contínuos. Como se pode verificar na fig. 6.22, o modelo conduz, nos dois casos (sensores segmentados ou contínuos), a deslocamentos axiais muito próximos para as duas condições de fronteira eléctricas (CA e SE).

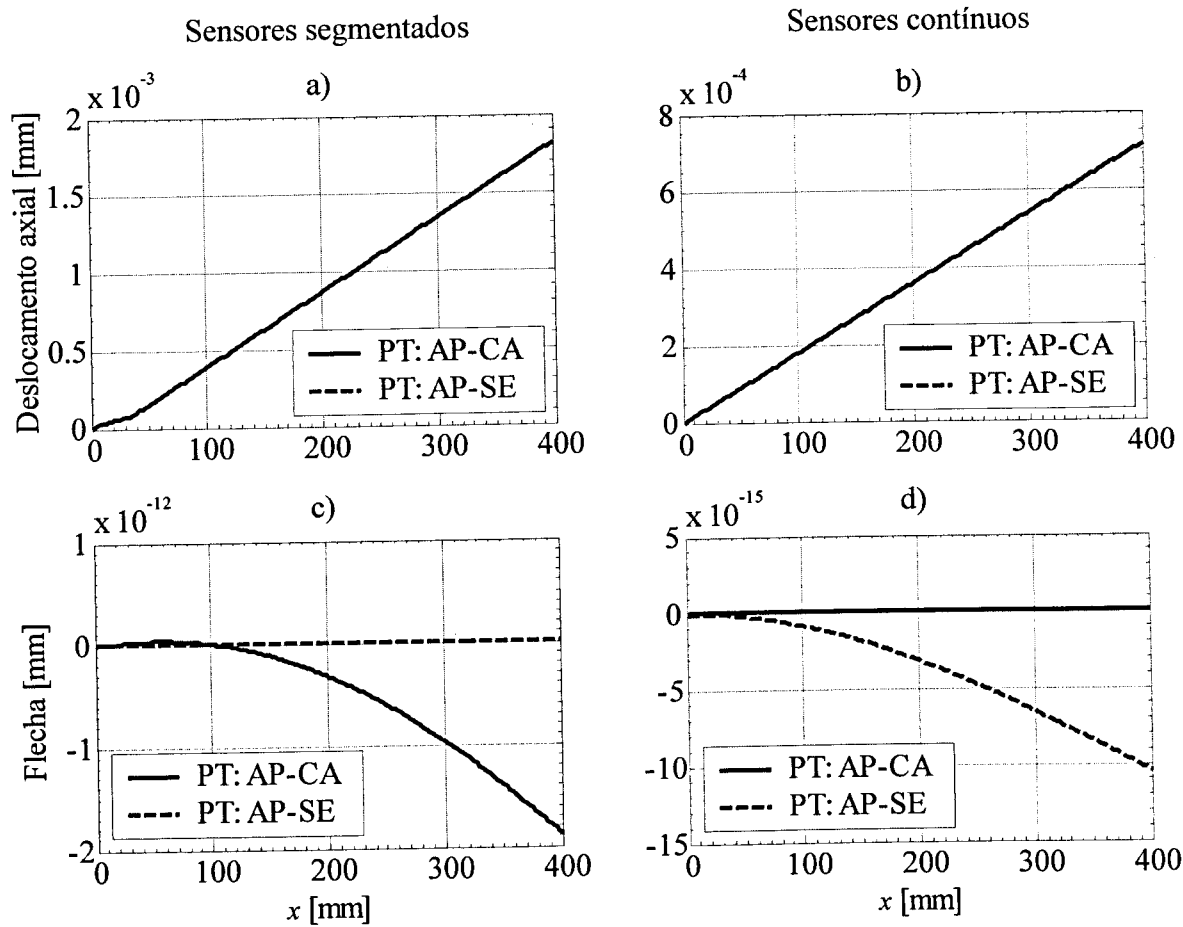


Fig. 6.22 - Deslocamentos axial e transversal induzidos por uma força de tracção a uma viga com sensores segmentados ou contínuos

Para este tipo de carregamento, a diferença de potencial eléctrico induzida (ver fig. 6.23) para o caso SE assemelha-se a uma superfície equipotencial. Note-se também que,

como seria de esperar, o deslocamento transversal do plano médio do núcleo, devido à simetria existente, deveria ser nulo. No entanto, devido a erros numéricos, o seu valor, para os dois casos, é de uma ordem de grandeza máxima de 10^{-12} mm, isto é, praticamente zero, pouco significativa para o deslocamento axial que é de uma ordem de grandeza várias vezes superior. O valor da diferença de potencial eléctrico induzida nos sensores, uma vez que não foram impostas condições de continuidade de tensão entre elementos, toma valores discretos para cada elemento. No entanto, o valor médio da diferença de potencial dos elementos, para este tipo de carregamento, aproxima satisfatoriamente a condição de equipotencialidade da área dos eléctrodos (CA).

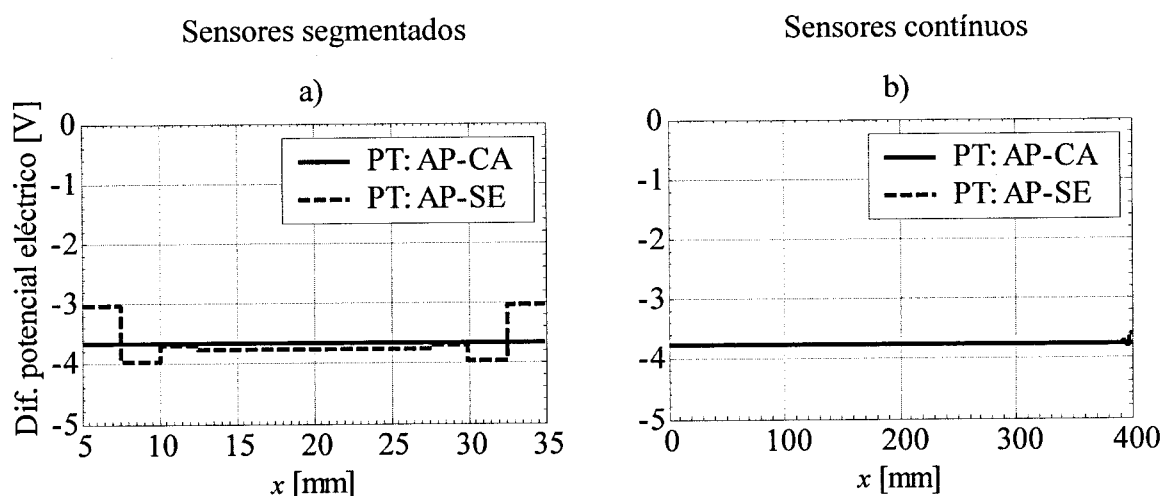


Fig. 6.23 - Diferença de potencial eléctrico induzida por uma força de tracção a uma viga com sensores segmentados ou contínuos

Carregamento transversal

Considere-se uma força transversal $Z = 1$ N aplicada na extremidade livre da viga. Na fig. 6.24 são apresentados os deslocamentos axial e transversal induzidos pelo carregamento mecânico da viga, para os casos dos sensores segmentados e contínuos. Como se pode verificar na fig. 6.24, o modelo numérico conduz, no caso dos sensores segmentados, a deslocamentos transversais muito próximos para as condições CA e SE. Esse facto deve-se à diferença de potencial eléctrico induzida (ver fig. 6.25a) que, para este tipo de carregamento, toma valores muito distintos entre as condições SE e CA. No entanto, à medida que o comprimento dos sensores aumenta (fig. 6.25b), a variação da diferença de potencial induzida (proporcional à curvatura) relativamente à condição CA é mais significativa, conduzindo a uma maior diferença entre as duas modelizações (fig. 6.24d).

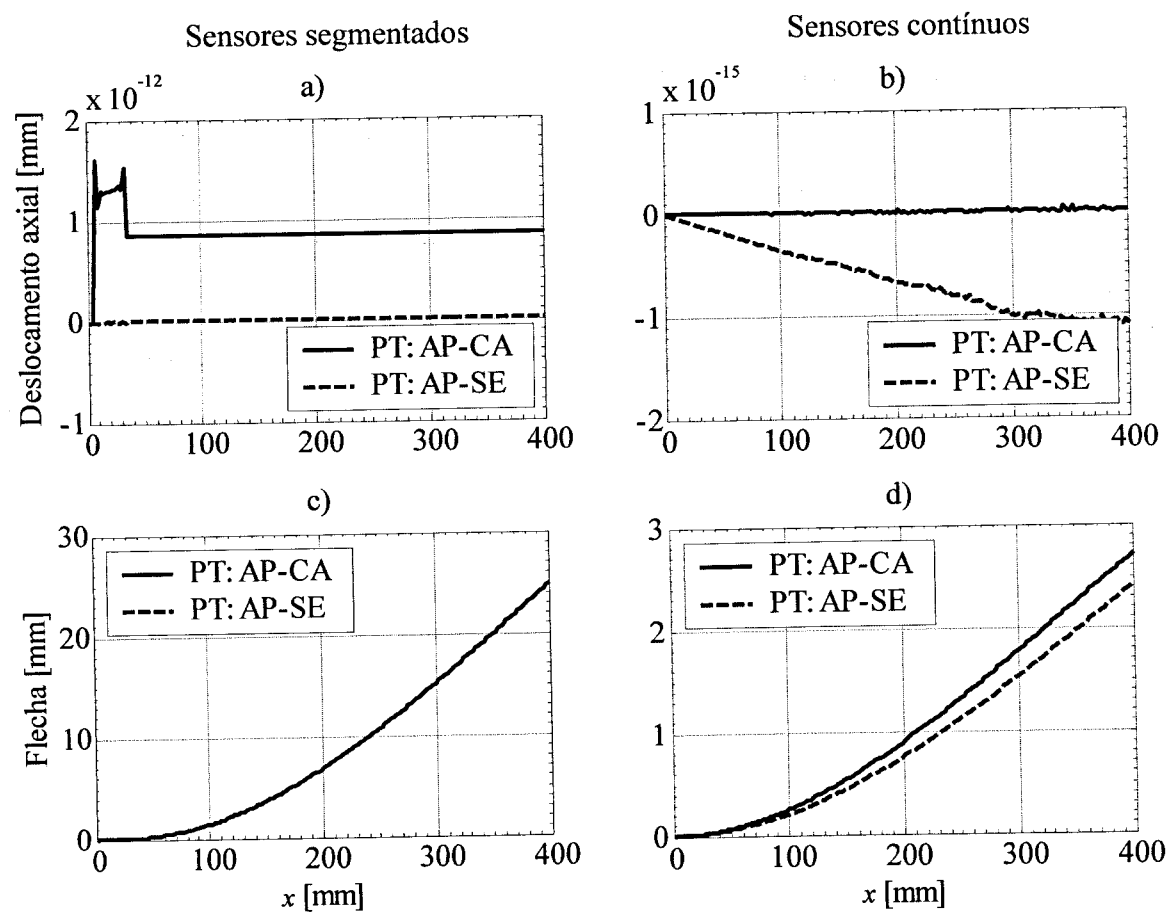


Fig. 6.24 - Deslocamento axial e transversal induzidos por uma força transversal a uma viga com sensores segmentados ou contínuos

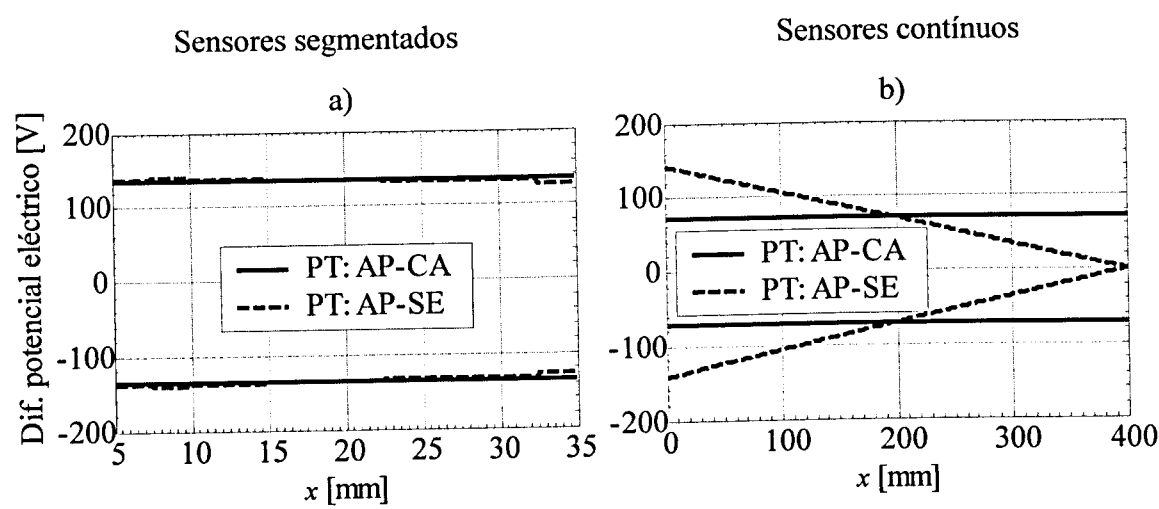


Fig. 6.25 - Diferença de potencial eléctrico induzida por uma força transversal a uma viga com sensores segmentados ou contínuos

Carregamento de flexão

Considere-se um momento $M = 0.1$ Nm aplicado na extremidade livre da viga. Na fig. 6.25 estão representados os deslocamentos axiais e transversais induzidos pelo carregamento de flexão. Contrariamente ao carregamento transversal, no carregamento de flexão, uma vez que a diferença de potencial eléctrico obtida, proporcional à curvatura (constante num carregamento de flexão), é aproximadamente constante na área do eléctrodo (ver fig. 6.27a e 6.27b) para os casos segmentado e contínuo, não se observa uma diferença significativa nos deslocamentos transversais. Dessa forma, a condição de área equipotencial dos eléctrodos perde a sua relevância. Note-se também que, para os casos de carregamentos transversal e de flexão, a consideração da condição de área equipotencial no caso dos sensores segmentados provoca uma deformação localizada na zona dos sensores por forma a garantir a área equipotencial. Por outro lado, no caso dos actuadores contínuos, onde não existem descontinuidades de rigidez na viga, os deslocamentos axiais da viga com a condição CA são inferiores aos do caso SE em que a condição de equipotencialidade não é respeitada.

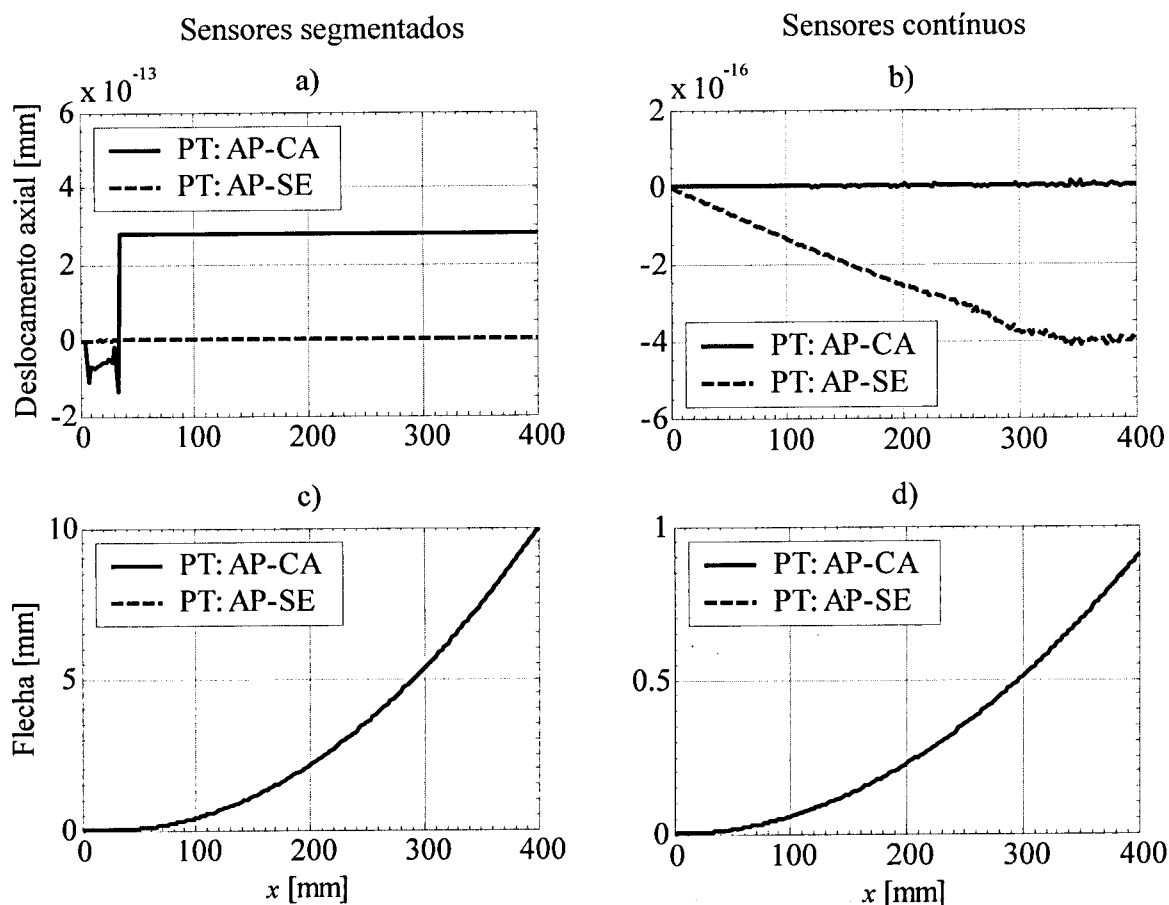


Fig. 6.26 - Deslocamento axial e transversal induzidos por um momento a uma viga com sensores segmentados ou contínuos

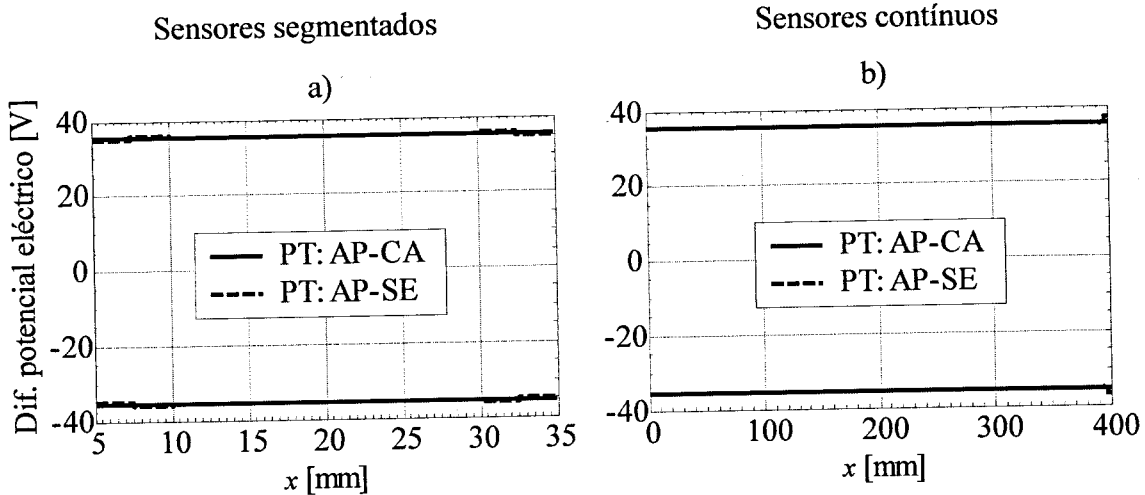


Fig. 6.27 - Diferença de potencial eléctrico induzida por um momento a uma viga com sensores segmentados ou contínuos

Assim, é demonstrado que a solução com condição de equipotencialidade respeitada (CA) corresponde a uma modelização mais rigorosa que SE, principalmente em carregamentos transversais, uma vez que o relaxamento dessa condição, nesse tipo de carregamento, conduz a uma maior variação da diferença de potencial eléctrico induzida entre elementos.

6.2.3 Análise Modal

Com o objectivo de validar a modelização proposta, as frequências naturais de vibração de exemplos apresentados na literatura são avaliadas e comparadas. Numa primeira análise, é avaliada a influência do efeito piezoeléctrico directo, para diferentes tipos de modelos mecânico e eléctrico e diferentes condições de fronteira eléctricas, numa viga encastrada-livre. Em seguida, a condição de fronteira eléctrica CA é avaliada numa viga *inteligente* de três camadas simplesmente apoiada, para diferentes espessuras relativas do núcleo. Finalmente, a influência das diferentes hipóteses relativas ao campo eléctrico axial são analisadas para diferentes condições de fronteira eléctricas, diferentes espessuras relativas das camadas piezoeléctricas e diferentes razões entre a espessura e o comprimento.

6.2.3.1 Análise para Diferentes Modelos Mecânico e Eléctrico

Considere-se a viga de alumínio encastrada-livre com uma camada piezoeléctrica colada na superfície superior com as dimensões representadas na fig. 6.28. As propriedades dos materiais utilizados (piezoeléctrico, adesivo e alumínio) são apresentadas no anexo C. Note-se

que o material piezoelétrico apresentado foi o utilizado na modelização de Robbins e Reddy (1991) em que o acoplamento electromecânico foi negligenciado e consequentemente, a permitividade eléctrica ϵ_{33}^* não foi especificada. Assim, o valor apresentado corresponde ao utilizado por Saravanos e Heyliger (1995) no estudo comparativo dos seus resultados com os de Robbins e Reddy (1991).

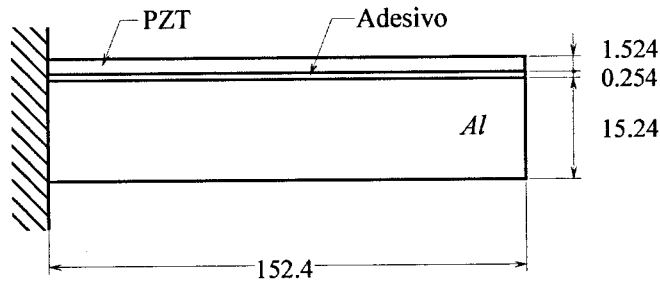


Fig. 6.28 - Viga de alumínio encastrada-livre com uma camada piezoelétrica colada na superfície (dimensões em mm)

Robbins e Reddy (1991) desenvolveram elementos finitos baseados nos deslocamentos para quatro teorias distintas de viga, todas elas derivadas da teoria generalizada de placas laminadas de Reddy. Considerando-se o deslocamento transversal constante na espessura da viga, foi demonstrado por Robbins e Reddy (1991) que as frequências mais baixas das teorias de primeira ordem, que consideram uma única camada equivalente (FSDT), e *layerwise* são muito semelhantes. A influência do acoplamento electromecânico não foi considerada por Robbins e Reddy (1991).

Saravanos e Heyliger (1995) modificaram a teoria de Robbins e Reddy para uma teoria electromecânica acoplada em que apenas consideram uma distribuição linear do potencial eléctrico na espessura das camadas piezoelétricas. Tal teoria, no entanto, deverá ser capaz de reflectir uma distribuição não-linear do potencial eléctrico, subdividindo a camada piezoelétrica em múltiplas sub-camadas.

Trindade (2000) apresenta uma formulação por elementos finitos em que considera, na formulação do campo de deslocamentos das camadas, a teoria de Timoshenko para o núcleo e a teoria de Euler-Bernoulli para a camada piezoelétrica. No modelo eléctrico considera uma aproximação quadrática para o potencial eléctrico, e o campo eléctrico axial induzido não é considerado.

Krommer e Irschik (1998) apresentam uma solução analítica em que consideram o efeito piezoelétrico directo no acoplamento electromecânico através de aproximações razoáveis das componentes axial do campo eléctrico ou do deslocamento eléctrico, e

transversal do campo eléctrico. Os efeitos do corte e da inércia de rotação da secção recta são também levados em consideração, e a teoria de Timoshenko para uma única camada equivalente (FSDT) é considerada.

Tab. 6.1 - Frequências naturais da viga de alumínio encastrada-livre com uma camada piezoeléctrica colada na superfície [Hz]

Modos	1º	2º	3º	4º	5º
Teoria desacoplada (TD)					
RR	537.800	3196.00	7577.00	8340.00	15016.0
IK	538.580	3210.90	7580.30	8394.63	15139.2
IK-AB	539.580	3200.30	7584.70	8326.40	14922.0
PT	538.410	3203.83	7579.63	8363.75	15046.6
Desvio (ref. RR) [%]	0.11	0.24	0.03	0.28	0.20
Circuito fechado (AP)					
SH	538.100	3199.00	7580.00	8350.00	15039.0
IK	538.600	3211.00	7580.30	8394.86	15139.5
IK-AB	539.600	3200.40	7584.70	8326.70	14922.0
TR	538.430	3206.67	7584.04	8388.22	15143.3
PT	538.430	3203.96	7579.63	8364.10	15047.3
Desvio (ref. SH) [%]	0.06	0.15	- 0.005	0.16	0.05
Circuito aberto (AP)					
SH	544.100	3232.00	7614.00	8428.00	15167.0
IK	544.100	3241.79	7611.03	8469.41	15262.7
IK-AB	543.810	3223.30	7608.70	8378.90	15004.0
TR	543.340	3234.35	7613.47	8454.78	15252.6
PT-CA/SE	544.428	3237.24	7613.62	8442.71	15176.1
Desvio (ref. SH) [%]	0.06	0.16	- 0.005	0.17	0.06
Circuito aberto - área equipotencial (AP)					
PT-CA	542.090	3210.98	7608.14	8368.54	15052.7
Desvio (ref. SH) [%]	- 0.22	- 0.65	- 0.07	- 0.70	- 0.75

Na tab. 6.1 são apresentadas as cinco primeiras frequências naturais de vibração da viga considerada, obtidas pela presente teoria (PT), Robbins e Reddy (1991) (RR), Saravanos e Heyliger (1995) (SH), Trindade (2000) (TR) e Krommer e Irschik (1998) (KI). Foram consideradas teorias desacopladas (TD) e teorias com acoplamento piezoeléctrico (AP), com os eléctrodos em circuito aberto, respeitando ou não a condição de área equipotencial dos eléctrodos (CA ou CA/SE) que, nesse caso, conduz à mesma solução que o caso sem eléctrodos (SE) (Krommer, 2001), e com os eléctrodos em circuito fechado (CF). Krommer e Irschik (1998) apresentam também resultados numéricos obtidos com o código de elementos finitos Abaqus® (IK-AB), em que o comprimento da viga foi dividido em 90 elementos com 12 sub-camadas para o núcleo e 4 sub-camadas para o adesivo e para a camada piezoeléctrica.

Na presente teoria (PT) e nos resultados analíticos (KI) utilizou-se um factor de correcção de corte $k_c = 1$.

Como se pode observar na tab. 6.1 existe uma boa concordância entre os resultados numéricos obtidos com a presente teoria (PT) e os de referência (RR para o caso TD e SH no caso AP). Note-se ainda que os resultados obtidos com o modelo proposto aproximam-se mais dos de referência do que os obtidos por Trindade (2000) (TR). Para a condição dos eléctrodos em circuito fechado (CF), a influência do acoplamento electromecânico é muito reduzida, uma vez que a diferença de potencial eléctrico é forçada a ser nula. No entanto, o potencial eléctrico não é nulo e apresenta uma distribuição quadrática na espessura, apenas afectando a rigidez de flexão. Esse facto pode ser comprovado pela terceira frequência natural, que é identificada como a primeira frequência extensional de vibração, em que o seu valor não se altera da teoria desacoplada (TD) para a teoria acoplada com os eléctrodos em curto circuito (AP-CF). Para o caso dos eléctrodos em circuito aberto (CA), o acoplamento torna-se mais importante, uma vez que a diferença de potencial induzida não é nula. Note-se também que, se a condição de área equipotencial dos eléctrodos for respeitada, a rigidez é menor e as frequências naturais são inferiores, pelo que a relaxação dessa condição conduz a frequências sobrestimadas. O coeficiente e_{15} , responsável pelo aumento da rigidez de corte, não foi especificado nesta comparação, pelo que o seu valor foi considerado nulo. Por essa razão, os resultados são os mesmos para a hipótese de considerar o campo eléctrico axial ou o deslocamento eléctrico axial nulos. Com o objectivo de analisar essas diferentes suposições, um outro exemplo será apresentado mais à frente.

6.2.3.2 Área Equipotencial e Espessura Relativa das Camadas Piezoeléctricas

Por forma a avaliar a influência da espessura relativa do núcleo nas frequências naturais de vibração, para as diferentes condições de fronteira eléctricas, é considerada a viga simplesmente apoiada de três camadas da fig. 6.10. Começa-se por analisar as frequências naturais de vibração para uma viga de duas camadas piezoeléctricas de dimensões $L = L_p = 400$ mm e uma espessura total $h_t = 2h_p = 10$ mm. O material piezoeléctrico considerado é o mesmo utilizado por Krommer (2001) (KR) na obtenção da solução analítica e numérica de referência. As seis primeiras frequências naturais de vibração obtidas com a presente teoria (PT) são comparadas com os resultados numéricos (KR-AB) e analíticos (KR) de referência apresentados na tab. 6.2. Na fig. 6.29 estão representadas as razões entre as frequências naturais de vibração para as condições de fronteira eléctricas circuito fechado

(CF), circuito aberto com área equipotencial dos eléctrodos (CA) e camadas sem eléctrodos (SE), e as frequências para o caso de pequeno acoplamento piezoeléctrico (PAP).

Como pode ser observado na tab. 6.2, existe uma boa concordância para a primeira frequência entre os resultados analíticos (KR) e numéricos (KR-AB). No entanto, com o aumento do número do modo, os resultados analíticos apresentam-se superiores aos numéricos (KR-AB). Uma explicação desse comportamento é que, embora a viga seja fina, $h_i/L = 0.025$, existe uma ligeira influência do corte nos modos mais altos dos resultados numéricos do Abaqus® (KR-AB), resultando em frequências mais baixas quando comparadas com os resultados analíticos (KR), que não levam em consideração a influência do corte.

Quanto às frequências naturais obtidas com a presente teoria (PT), estas apresentam uma boa concordância em todos os modos com as frequências de referência (KR-AB), uma vez que a inércia de rotação e a influência do corte foram consideradas, obtendo-se valores das frequências com desvios muito baixos compreendidos no intervalo $[- 0.65,0.10] \%$.

Tab. 6.2 - Frequências naturais da viga piezoeléctrica de duas camadas simplesmente apoiada [Hz]

Modos	1°	2°	3°	4°	5°	6°
Pequeno acoplamento piezoeléctrico (PAP)						
KR	79.8	319.4	718.6	1277.6	1996.2	2874.5
KR-AB	79.9	318	712.0	1257.0	1946.0	2770.0
PT	79.4	316.6	708.4	1249.9	1934.5	2754.5
Desvio (ref. KR-AB) [%]	- 0.63	- 0.44	- 0.50	- 0.56	- 0.59	- 0.56
Circuito fechado (AP-CF)						
KR	81.2	324.8	730.7	1299.0	2029.8	2922.9
KR-AB	81.1	323.0	724.0	1277.0	1977.0	2816.0
PT	80.7	321.8	720.0	1270.1	1965.3	2797.6
Desvio (ref. KR-AB) [%]	- 0.49	- 0.37	- 0.55	- 0.54	- 0.59	- 0.65
Circuito aberto - área equipotencial (AP-CA)						
KR	84.3	324.8	733.9	1299.0	2033.0	2922.9
KR-AB	83.9	323.0	726.0	1277.0	1979.0	2815.0
PT	83.8	321.8	723.1	1270.1	1968.3	2797.6
Desvio (ref. KR-AB) [%]	- 0.12	- 0.37	- 0.40	- 0.54	- 0.54	- 0.62
Sem eléctrodos (AP-SE)						
KR	85.1	340.4	765.8	1361.5	2127.3	3063.4
KR-AB	84.7	337.0	754.0	1329.0	2054.0	2919.0
PT	84.6	337.0	753.7	1328.8	2054.6	2922.2
Desvio (ref. KR-AB) [%]	- 0.12	0.00	- 0.04	- 0.02	0.03	0.10

Note-se que, para os modos pares, os diferentes resultados obtidos (PT, KR, KR-AB) para as frequências naturais apresentam os mesmos valores para os eléctrodos em curto

circuito (CF) ou circuito aberto (CA) (ver tab. 6.2 e fig. 6.29). Na fig. 6.29 representa-se a razão entre as frequências naturais obtidas para pequeno acoplamento piezoeléctrico e acoplamento piezoeléctrico (AP/PAP).

A concordância entre os resultados obtidos pela presente teoria e os de referência é bastante boa para o caso dos eléctrodos em circuito aberto e circuito fechado em que, especialmente para a condição dos eléctrodos em circuito aberto, o comportamento dos modos pares é mais evidenciado. No caso de camadas SE, os resultados não apresentam uma concordância tão boa e o acoplamento, relativamente aos resultados numéricos de referência, é sobrestimado. No entanto, os resultados para a condição SE, obtidos com a presente teoria, evidenciam, contrariamente aos analíticos (KR), a mesma tendência que a solução numérica de referência (KR-AB) para os modos mais altos.

Assim, os resultados apresentados demonstram que a presente teoria incorpora o comportamento para as diferentes condições de fronteira eléctricas.

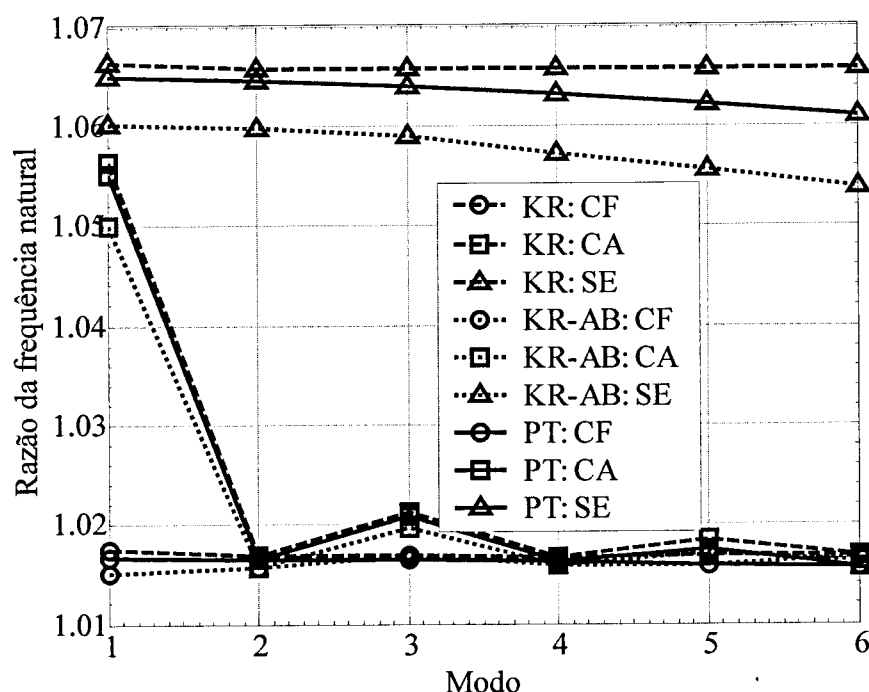


Fig. 6.29 - Razão das frequências naturais da viga piezoeléctrica de duas camadas simplesmente apoiada

Viga com Núcleo Metálico e Camadas Piezoeléctricas

A influência da espessura relativa das camadas piezoeléctricas para uma viga simplesmente apoiada de três camadas com núcleo metálico e camadas exteriores piezoeléctricas é analisada no que se segue, para uma razão $h_i/L = 0.025$. Na fig. 6.30 é apresentada a razão entre as frequências naturais obtidas com as duas variantes da presente

teoria (AP/PAP), para as condições CF, SE e CA, em função da razão entre a espessura do núcleo e a espessura total. A razão da frequência natural para os eléctrodos em curto circuito e camadas sem eléctrodos é independente do número do modo mas, para eléctrodos em circuito aberto, isso já não se verifica.

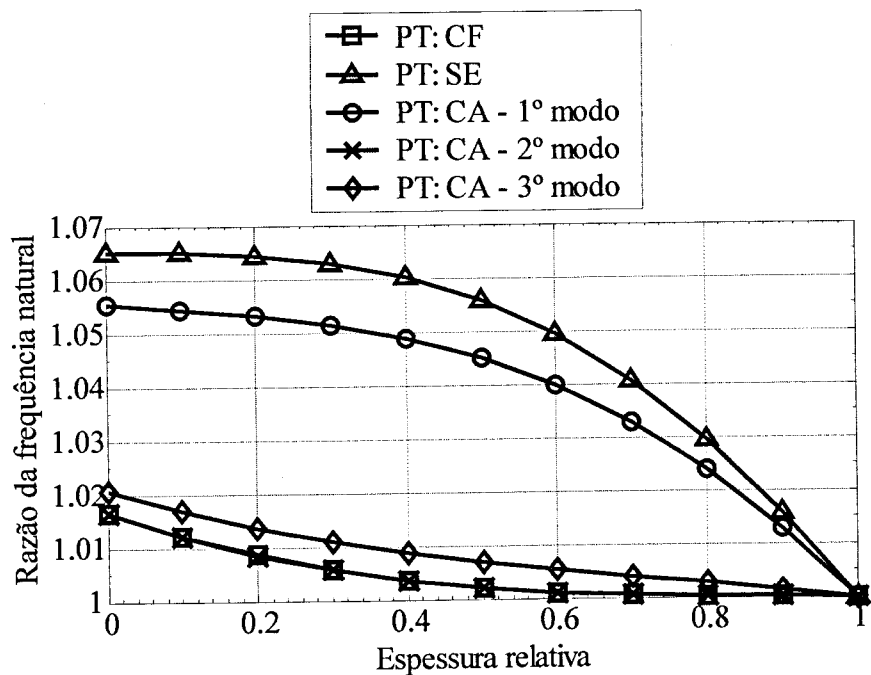


Fig. 6.30 - Influência da espessura relativa do núcleo na razão das frequências naturais da viga simplesmente apoiada

Na fig. 6.30 é possível constatar-se que para a condição CF a influência do acoplamento é mínima e que para a condição SE a influência é máxima. No entanto, o comportamento para os eléctrodos em circuito aberto é bastante diferente. Pode ser observado que a razão da segunda frequência natural é idêntica à razão para os eléctrodos em curto circuito, um comportamento que se mantém para os modos pares mais elevados. Adicionalmente, constata-se que as razões para os modos ímpares possuem uma tendência para se aproximarem da razão com os eléctrodos em curto circuito, à medida que o número do modo considerado é mais elevado.

6.2.3.3 Campo eléctrico ou deslocamento eléctrico axial nulo

Como último exemplo considere-se a viga simplesmente apoiada da fig. 6.10 embebida entre duas camadas piezoeléctricas idênticas. As propriedades dos materiais utilizados para o núcleo (Alumínio) e para as camadas piezoeléctricas (PZT-5A) podem ser consultadas no anexo C. A influência do efeito piezoeléctrico directo nas frequências naturais de vibração é

analizada para as condições de fronteira eléctricas: eléctrodos em curto-circuito (CF), eléctrodos em circuito aberto com condição de área equipotencial dos eléctrodos respeitada (CA) e camadas sem eléctrodos (SE). Adicionalmente, as duas condições $E_x = 0$ ou $D_x = 0$, relativas à componente axial do campo eléctrico induzido, são comparadas.

A primeira dessas condições conduz a razões de frequências idênticas às obtidas com a teoria desacoplada (TD igual a PAP), uma vez que, nesse caso, a rigidez de corte é a mesma. Por outro lado, a segunda condição implica uma aumento de rigidez de corte devido ao campo eléctrico induzido na direcção axial. Por forma a comparar as duas condições é analisada uma viga fina com uma razão $h_t/L = 0.025$ e dimensões $L = L_p = 400$ e $h_t = h_n + 2h_p = 10$ mm, e uma viga espessa com uma razão $h_t/L = 0.25$ e dimensões $L = L_p = 400$ e $h_t = h_n + 2h_p = 100$ mm, em função da espessura relativa do núcleo.

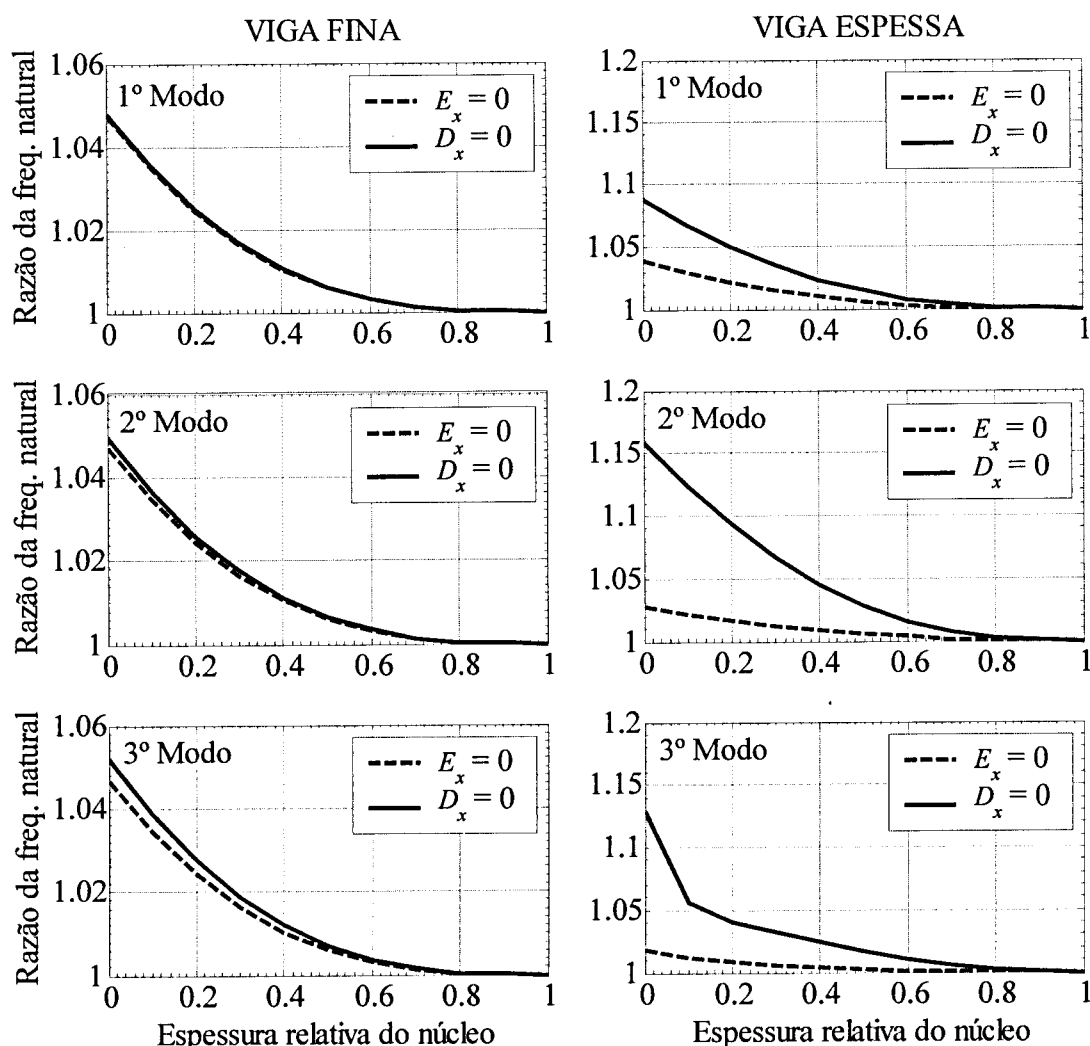


Fig. 6.31 - Razões das frequências naturais das vigas fina e espessa para diferentes espessuras relativas do núcleo para a condição de eléctrodos em circuito fechado (CF)

As razões das frequências naturais entre as teorias acoplada e pequeno acoplamento piezoeléctrico (AP/PAP) para os três primeiros modos transversais, diferentes condições de fronteira eléctricas e diferentes condições para o campo eléctrico axial, são apresentadas para as vigas fina e espessa nas fig. 6.31, 6.32 e 6.33.

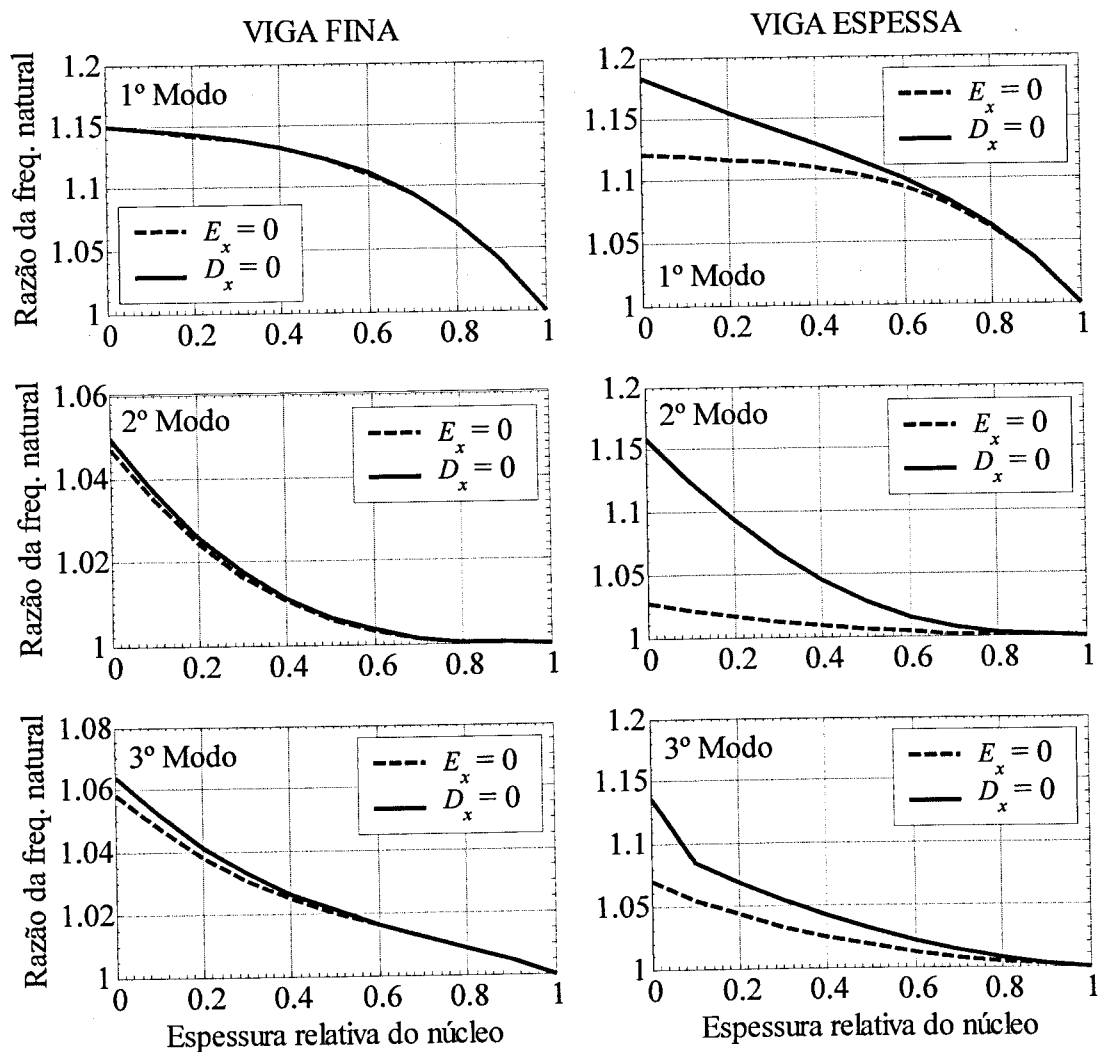


Fig. 6.32 - Razões das frequências naturais das vigas fina e espessa para diferentes espessuras relativas do núcleo para a condição de eléctrodos em circuito aberto (CA)

Da análise das figuras constata-se que a influência do acoplamento electromecânico é mais pronunciada para a condição de camadas sem eléctrodos (SE), situação semelhante à condição de eléctrodos em circuito aberto sem a condição de área equipotencial dos eléctrodos respeitada. Para a condição dos eléctrodos em circuito aberto (CA), o efeito do acoplamento é ligeiramente menos pronunciado que para SE mas, no entanto, mais significativo que para CF.

Uma vez que as duas condições relativas ao campo eléctrico axial apenas diferem na definição da rigidez de corte, a razão das frequências naturais da viga fina é praticamente idêntica para as duas condições, em que a influência do corte pode ser desprezada. No entanto, uma significativa diferença das razões de frequências é obtida no caso da viga espessa. Também pode ser observado nas fig. 6.31, 6.32 e 6.33 que a razão das frequências naturais para a condição do deslocamento eléctrico axial nulo ($D_x = 0$) aumenta com o aumento do número do modo considerado. Este comportamento pode ser explicado pelo facto de que a rigidez de corte para o caso acoplado é maior que no caso desacoplado. Em contraste, para a condição de campo eléctrico axial nulo ($E_x = 0$), a rigidez de corte é a mesma que na teoria desacoplada e pode ser observado nas fig. 6.31 e 6.32 que a razão das frequências naturais diminui ligeiramente com o aumento do número do modo considerado.

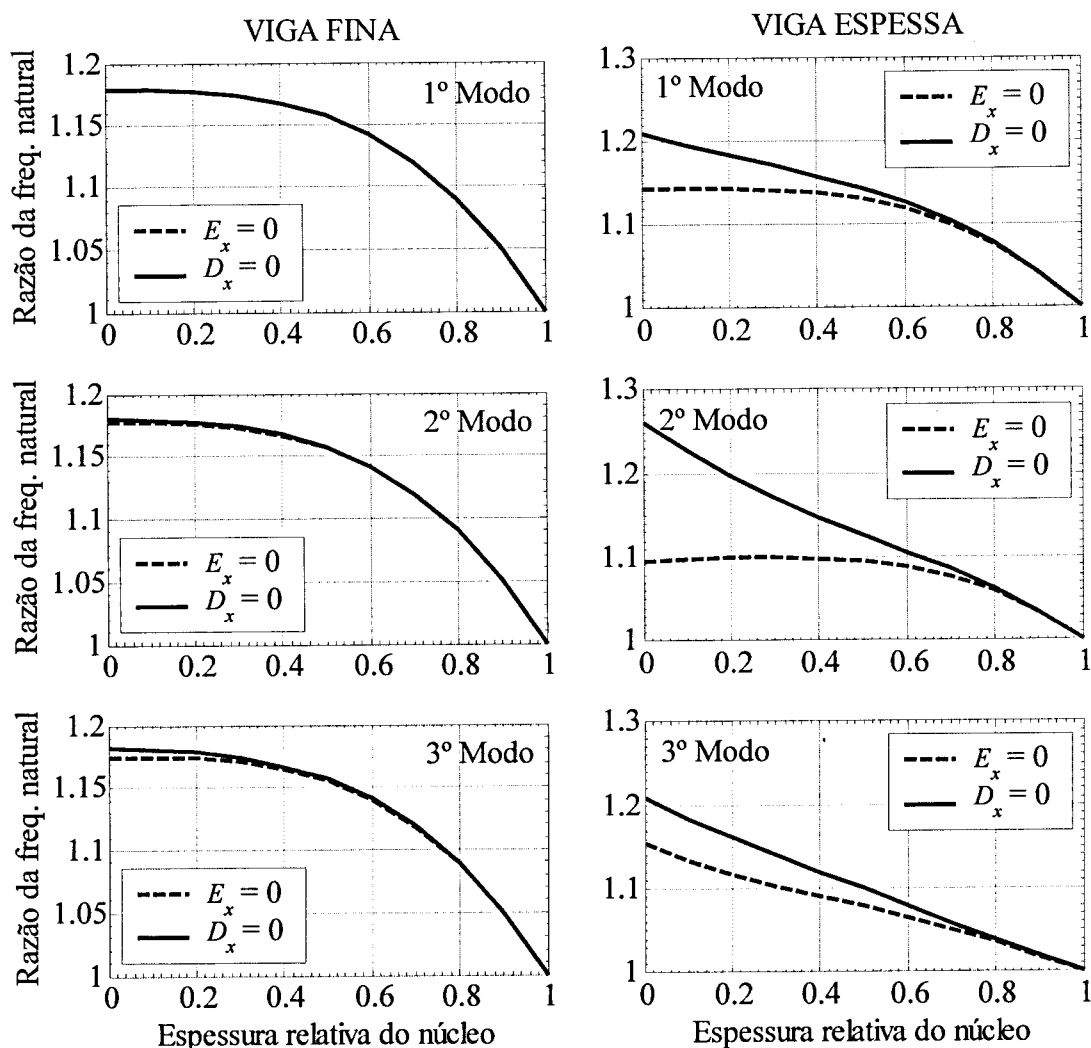


Fig. 6.33 - Razões das frequências naturais das vigas fina e espessa para diferentes espessuras relativas do núcleo para a condição de camadas sem eléctrodos (SE)

6.3 Controlo Activo de Vigas com Actuadores e Sensores Piezoeléctricos

Nesta secção, o controlo activo de vibrações de vigas com actuadores e sensores piezoeléctricos montados na superfície é analisado para a viga encastrada-livre da fig. 6.34. As propriedades do material da viga (Alumínio) e dos elementos piezoeléctricos (PZT-5H) são apresentados no anexo A. A viga analisada tem dimensões $L = 240$, $L_p = 50$, $d_p = 10$, $h_n = 3$, $h_p = 0.5$ e $b = 25$ mm. Para o estudo dinâmico do controlo activo de vibrações considera-se que uma das camadas piezoeléctricas funciona como sensor e a outra como actuador. A viga é sujeita a um campo de deslocamento inicial correspondente à actuação de uma força transversal concentrada aplicada na extremidade livre da viga, em que a sua intensidade é escolhida por forma a que a flecha máxima seja igual a $h_n/2 = 1.5$ mm. Nesta análise foi considerado um amortecimento modal do tipo viscoso $\xi = 1\%$ tanto em malha aberta como em malha fechada.

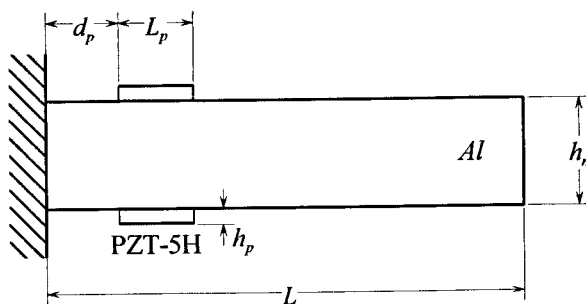


Fig. 6.34 - Viga encastrada-livre com actuadores e sensores piezoeléctricos montados na superfície

No que se segue são considerados algoritmos de controlo por *feedback*. Dois algoritmos de controlo por *feedback*, nomeadamente o *feedback do deslocamento* e o *feedback da velocidade*, são implementados e avaliados na sua eficiência de controlo. No *feedback do deslocamento* o sinal do sensor é amplificado e aplicado ao actuador piezoeléctrico. No presente contexto o sinal do sensor é proporcional às deformações, as quais são expressas em termos dos deslocamentos. Dessa forma, a designação convencional *feedback do deslocamento* é utilizada. No *feedback da velocidade*, o sinal do sensor é diferenciado, amplificado e depois aplicado ao actuador. Aqui, o sinal utilizado no *feedback da velocidade* relaciona-se com a velocidade de deformação. Uma vez que as deformações são expressas em termos dos deslocamentos, a derivada temporal dos deslocamentos é a velocidade de

deformação. Dessa forma, a designação convencional *feedback da velocidade* é igualmente utilizada.

Os algoritmos de controlo óptimo LQR e LQG apresentados no capítulo 5 são também implementados. O principal inconveniente do algoritmo de controlo LQR é a necessidade de medir todas as variáveis de estado por forma a efectuar o controlo óptimo proporcional. Dessa forma, as teorias de controlo por *feedback* surgem como uma alternativa mais simples, em que não é necessário a medição de todas as variáveis de estado. No entanto, a eficiência das teorias de *feedback* é menor que a de controlo óptimo (LQR). Porém, a utilização de observadores de estado, em que os estados são estimados apenas a partir das variáveis de saída medidas (LQG), permite realizar um controlo mais robusto que as teorias de *feedback*. No que se segue são apresentados exemplos utilizando-se os diferentes algoritmos de controlo expostos. Para isso, o modelo de elementos finitos e os algoritmos de controlo foram implementados no ambiente de programação MATLAB[®].

6.3.1 Feedback do Deslocamento

No *feedback* do deslocamento o sinal do sensor piezoeléctrico é directamente utilizado no sistema de controlo em malha fechada. Assim, o *feedback* da tensão eléctrica induzida com ganho constante é considerado, e a tensão aplicada ao actuador é definida por $\phi_a = G_p \phi_s$, em que G_p é o ganho de controlo proporcional e ϕ_s a tensão eléctrica induzida no sensor (ver §5.3.3).

Na fig. 6.35 está representado o lugar geométrico das raízes $s = -\sigma + jw_d$ do sistema em malha fechada com *feedback* do deslocamento, para ganhos proporcionais $G_p \in [0, +\infty]$. O tempo de estabelecimento a 2% de cada modo, $t_s = 4/|\sigma|$ (Burl, 1999), e o amortecimento modal $\xi = \sigma / \sqrt{w_d^2 + \sigma^2}$, que para $\xi \ll 1$ é aproximado por $\xi = \text{Re}(s)/\text{Im}(s)$, fornecem as indicações do tempo que cada modo demora a decair para zero e da oscilação efectuada durante esse decaimento, respectivamente. Na fig. 6.35 pode ser observado que o aumento do ganho de controlo proporcional G_p desloca os pólos $p = -\sigma + jw_d$ em malha aberta na direcção dos zeros. É possível observar-se que a presente lei de controlo, para o valor máximo admissível do ganho proporcional ($G_p = 8$), sem que ocorra a saturação dos sensores piezoeléctricos não permite amortecer significativamente os modos. No entanto, valores do ganho proporcional crescentes até ao infinito não são suficientes para desestabilizar os cinco primeiros modos.

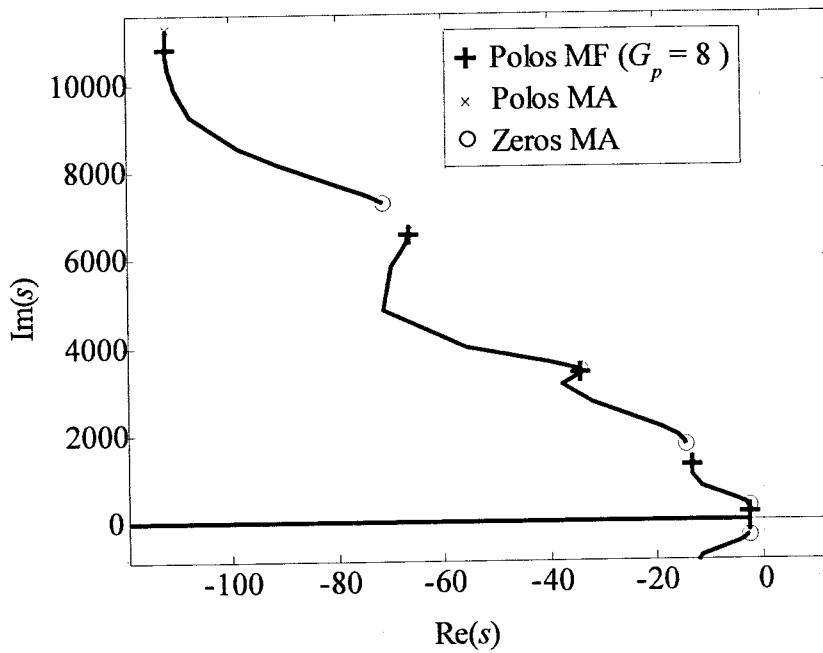


Fig. 6.35 - Lugar geométrico das raízes do sistema em malha fechada com controlo por feedback do deslocamento para ganhos $G_p \in [0, +\infty]$

A função de resposta em frequência directa (na extremidade livre) do tipo receptância para os dois ganhos proporcionais considerados ($G_p = 4$ e 8) é apresentada na fig. 6.36.

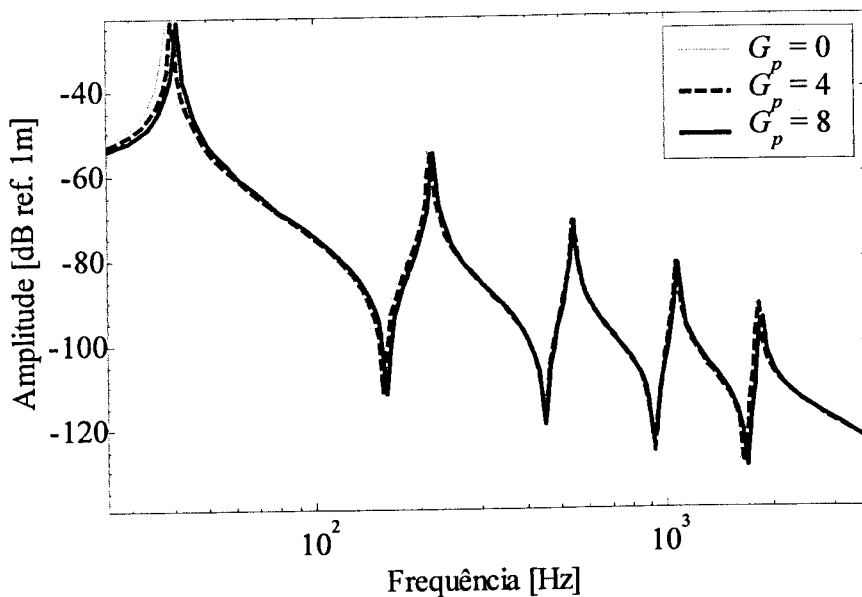


Fig. 6.36 - Função de resposta em frequência do tipo receptância (medida na extremidade livre da viga) dos sistemas em malha aberta e fechada com feedback do deslocamento

A análise da figura evidencia que, efectivamente, esta lei de controlo não permite amortecer significativamente a totalidade dos modos relativamente ao sistema em malha aberta ($G_p = 0$). No entanto, as frequências naturais amortecidas w_d em malha fechada apresentam um significativo desvio relativamente às frequências em malha aberta, principalmente nos modos 1, 2 e 5.

Na tab. 6.3 são apresentados os valores do amortecimento modal e tempo de estabelecimento a 2% obtidos para os sistemas em malha fechada (para os dois ganhos proporcionais considerados) e malha aberta.

Tab. 6.3 - Amortecimentos modais e tempo de estabelecimento a 2% dos sistemas em malha aberta e fechada com feedback do deslocamento

	$\xi_1[\%]$	$\xi_2[\%]$	$\xi_3[\%]$	$\xi_4[\%]$	$\xi_5[\%]$	$t_s[s]$
$G_p = 0$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.605
$G_p = 4$	1.06	1.02	1.00	1.01	1.02	1.592
$G_p = 8$	1.16	1.05	1.00	1.02	1.04	1.592

A resposta em regime livre para um campo de deslocamento inicial da viga da fig. 6.34 em malha aberta (MA) e malha fechada (MF) é apresentada nas fig. 6.37 para dois ganhos de controlo proporcional ($G_p = 4$ e 8). A tensão de controlo aplicada ao actuador em malha fechada é também apresentada. Como se pode observar na fig. 6.37, a resposta em regime livre do sistema em malha fechada é muito pouco amortecida ($\xi \approx 1.16\%$), mesmo para o ganho proporcional mais elevado ($G_p = 8$). Note-se que a tensão de controlo para o ganho mais elevado não excedeu a tensão de saturação das camadas piezoeléctricas (250 V), e que uma duplicação do ganho mais baixo, e consequentemente um esforço de controlo superior, não originou um aumento significativo no amortecimento ($\Delta\xi \approx 0.10\%$).

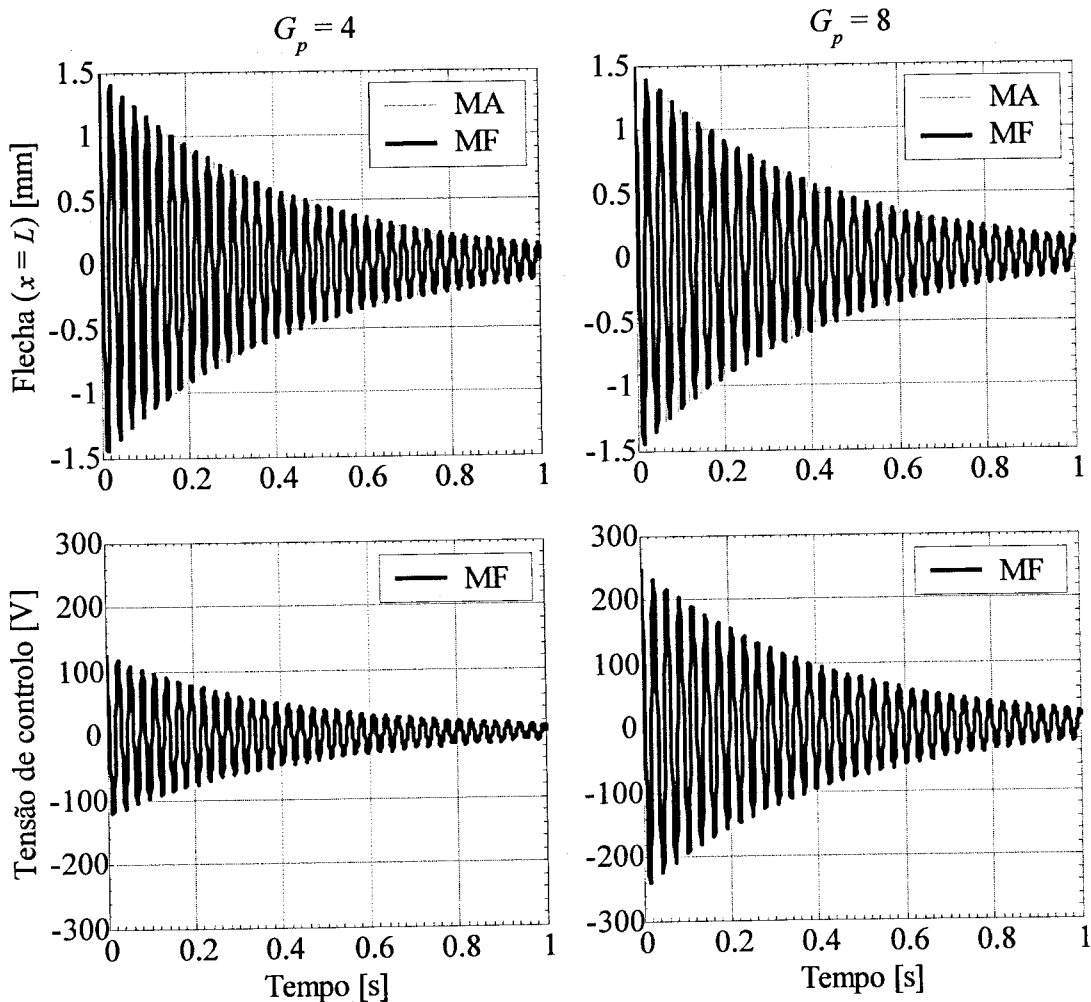


Fig. 6.37 - Resposta em regime livre e tensão de controlo da viga em malha aberta e malha fechada para diferentes ganhos de controlo proporcional

6.3.2 Feedback da Velocidade

No caso do *feedback* da velocidade são analisadas duas alternativas distintas: controlo por *feedback* da velocidade com ganho constante, em que a tensão aplicada ao actuador é definida por $\phi_a = G_d \dot{\phi}_s$, sendo G_d o ganho de controlo derivativo e $\dot{\phi}_s$ a derivada temporal da tensão eléctrica induzida no sensor (ver §5.3.2), ou controlo por *feedback* da velocidade com amplitude constante, em que a tensão aplicada ao actuador é definida por $\phi_a = G_d \text{sgn}(\dot{\phi}_s)$. A função $\text{sgn}(\square)$ é utilizada para representar o sinal da velocidade da tensão induzida (ver §5.3.1).

Na fig. 6.38 está representado o lugar geométrico das raízes do sistema em malha fechada com *feedback* da velocidade para ganhos derivativos constantes $G_d \in [0, +\infty]$. É

possível observar-se que todos os modos são amortecidos para valores de ganho G_d baixos. No entanto, para valores de ganho muito elevados o quinto modo é desestabilizado. Quanto ao terceiro modo, os seus pólos em malha fechada são muito pouco controláveis, de forma que o aumento do seu amortecimento é muito baixo. Porém, o primeiro, o segundo, o quarto e o quinto modos podem ser mais amortecidos. Os pólos dos primeiros quatro modos em malha fechada, para um ganho $G_d = 0.04$, estão igualmente representados na fig. 6.38. Relativamente ao quinto modo, os seus pólos situam-se na parte negativa do eixo real ($\text{Im}(s) = 0$), fora da escala da fig. 6.38 e, consequentemente, o quinto modo é sobre-amortecido pelo controlador.

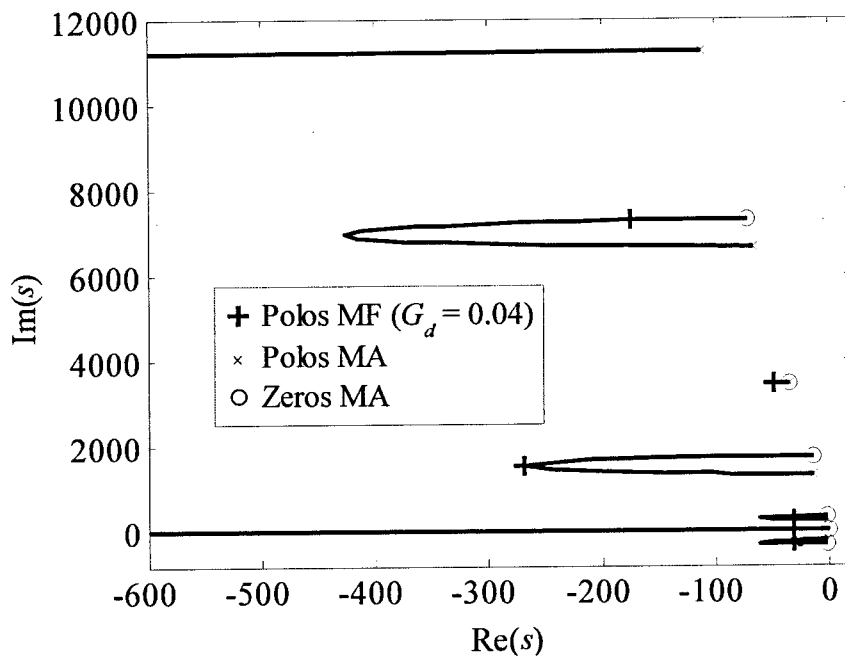


Fig. 6.38 - Lugar geométrico das raízes do sistema em malha fechada com controlo por feedback da velocidade com ganho constante para ganhos $G_d \in [0, +\infty]$

Na fig. 6.39 são apresentadas as funções de resposta em frequência directas (na extremidade livre da viga), do tipo receptância, do sistema em malha aberta e fechada com feedback da velocidade com ganho constante, para três ganhos de controlo distintos. Como previsto pela fig. 6.38, todos os modos são amortecidos para todos os ganhos de controlo considerados. A fig. 6.39 mostra que as ressonâncias dos modos 1, 2 e 5 são quase totalmente eliminadas, que o quarto modo é ligeiramente amortecido, e que o terceiro modo é muito pouco amortecido pelo sistema de controlo. A justificação desse comportamento do sistema de controlo por feedback da velocidade prende-se com o facto de que a localização dos

sensores e actuadores na viga condiciona muito significativamente a eficácia deste tipo de controlo.

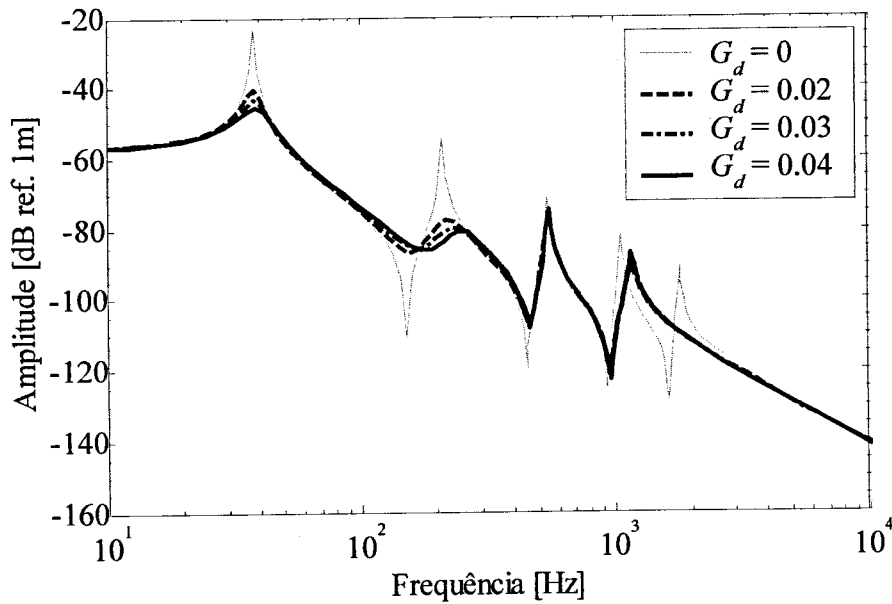


Fig. 6.39 - Função de resposta em frequência do tipo receptância (na extremidade livre da viga) dos sistemas em malha aberta e fechada com feedback da velocidade com ganho constante

Na tab. 6.4 são apresentados os valores dos amortecimentos modais e tempo de estabelecimento a 2% dos sistemas em malha aberta e fechada com feedback da velocidade com ganho constante. Note-se que o tempo de estabelecimento para o ganho derivativo mais alto (0.11 s) é substancialmente menor que o obtido com o maior ganho proporcional no caso do feedback do deslocamento (1.592 s).

Tab. 6.4 - Amortecimentos modais e tempo de estabelecimento a 2% dos sistemas em malha aberta e fechada com feedback da velocidade com ganho constante

	$\xi_1[\%]$	$\xi_2[\%]$	$\xi_3[\%]$	$\xi_4[\%]$	$\xi_5[\%]$	$t_s[s]$
$G_d = 0$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.61
$G_d = 0.02$	6.98	14	1.52	3.73	100	0.21
$G_d = 0.03$	9.85	16.8	1.47	2.86	100	0.16
$G_d = 0.04$	12.6	17.1	1.41	2.40	100	0.11

As respostas em regime livre e a tensão de controlo para o campo de deslocamento inicial aplicado, são apresentadas nas fig. 6.40 e 6.41, respectivamente. Pode-se constatar que,

relativamente ao *feedback* do deslocamento, o *feedback* da velocidade conduz a uma resposta transitória que se atenua muito mais rapidamente.

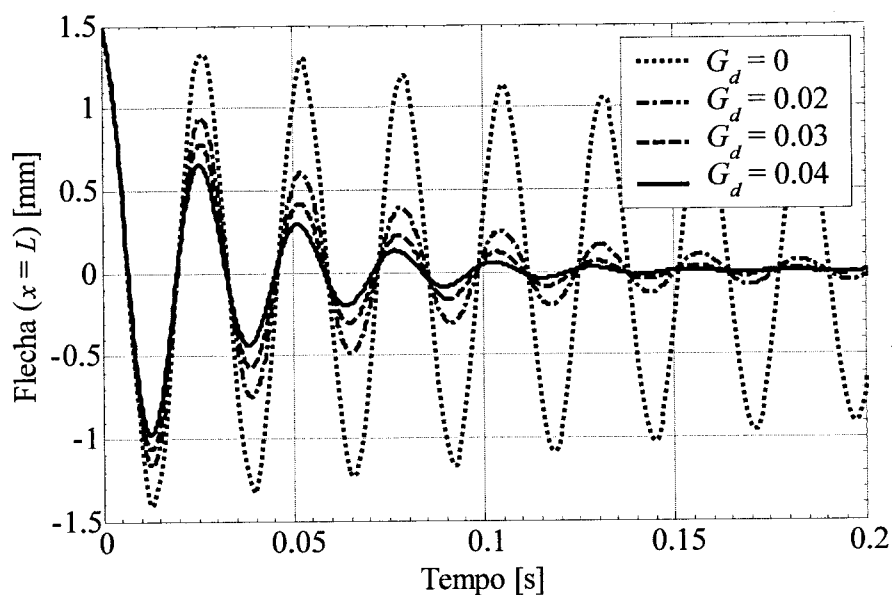


Fig. 6.40 - Resposta em regime livre da viga em malha aberta e fechada para diferentes ganhos derivativos constantes

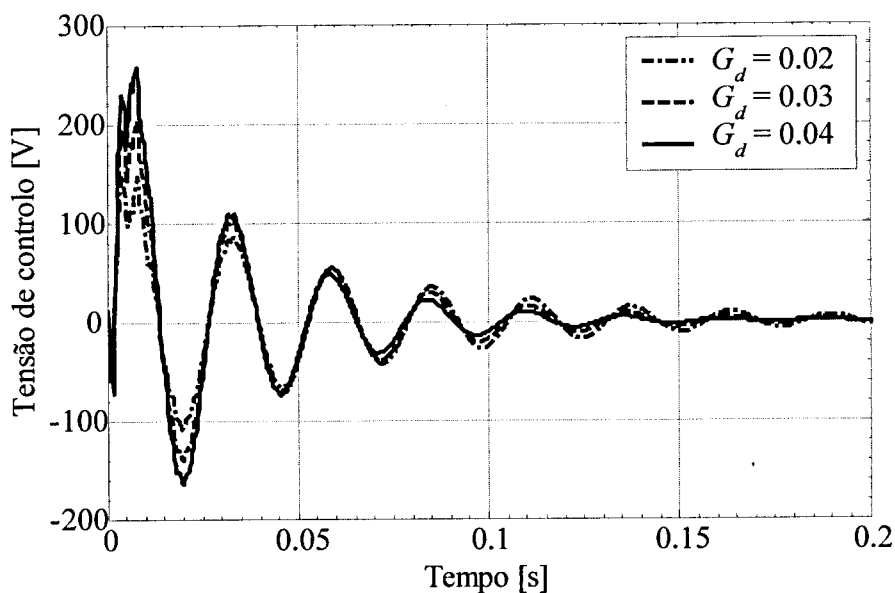


Fig. 6.41 - Tensão de controlo aplicada à viga em malha fechada para diferentes ganhos derivativos constantes

No caso de se considerar o *feedback* da velocidade com amplitude constante, a tensão de controlo de *feedback* é mantida com uma amplitude constante e com o mesmo sinal da

velocidade. Note-se que, contrariamente ao *feedback* da velocidade com ganho constante, em que a tensão de controlo é linear e contínua, neste caso ela é não-linear e descontínua.

Na fig. 6.42 é apresentada a resposta da viga para um campo de deslocamento inicial aplicado, em malha aberta e fechada para várias amplitudes de controlo $G_d = 50, 100$ e 200 .

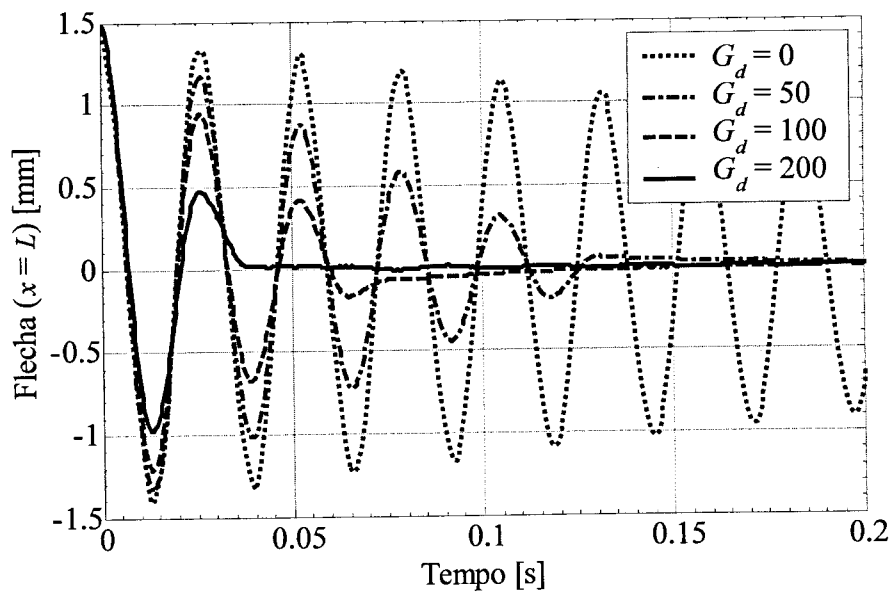


Fig. 6.42 - Resposta em regime livre da viga em malha aberta e fechada para diferentes amplitudes constantes

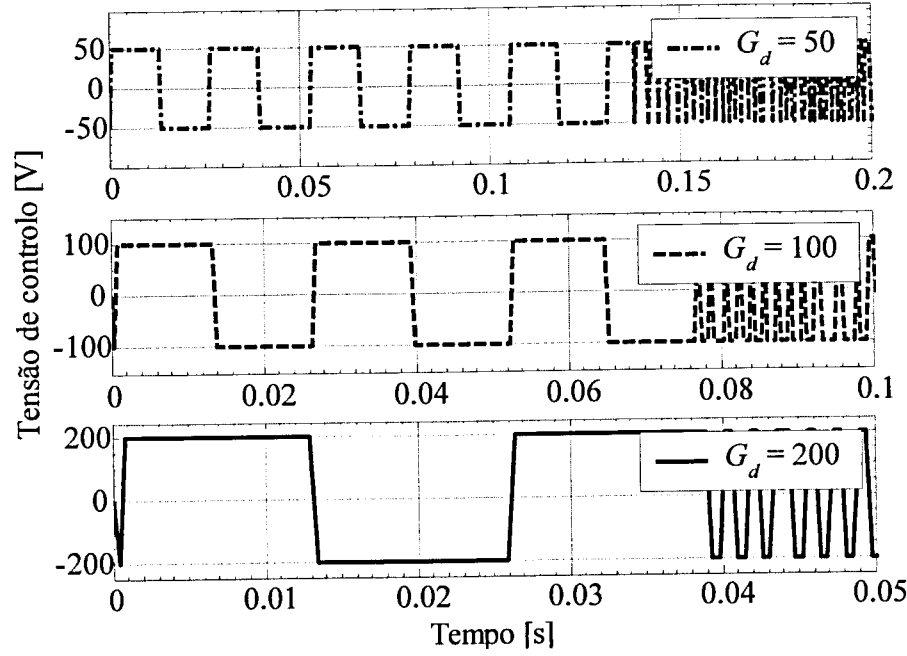


Fig. 6.43 - Tensão de controlo aplicada à viga em malha fechada para diferentes amplitudes constantes

As tensões de controlo em malha fechada são apresentadas na fig. 6.43. Neste caso, uma vez que a oscilação da viga se deve maioritariamente à contribuição do primeiro modo, considerou-se que o *feedback* da velocidade a amplitude constante tomaria como referência apenas o sinal da velocidade do primeiro modo, que, fisicamente, poderia ser implementado por um filtro passa-baixo (limitado ao primeiro modo) aplicado ao sinal de saída do sensor piezoeléctrico.

Pode ser observado na fig. 6.42 que o *feedback* com amplitude constante controla mais eficientemente a oscilação da viga, relativamente ao caso do *feedback* com ganho constante (fig. 6.40). No entanto, o esforço de controlo é superior. Na tab. 6.5 são apresentados os valores dos tempos de estabelecimento a 2, 5 e 10% dos sistemas em malha aberta e fechada com *feedback* da velocidade com amplitude constante. Note-se que o tempo de estabelecimento a 2% obtido com o ganho mais alto ($G_d = 0.04$), no caso do *feedback* da velocidade a ganho constante ($t_s = 0.11$), é cerca de três vezes maior que o obtido a amplitude constante com ganho $G_d = 200$, e duas vezes maior que o obtido com ganho $G_d = 100$. Para o valor do ganho $G_d = 50$ a situação inverte-se, sendo o *feedback* a ganho constante mais eficiente. Note-se também que, para tempos de estabelecimento a 5 e 10%, o controlo a amplitude constante para os dois ganhos mais elevados consegue manter sensivelmente os mesmos tempos de estabelecimento.

Tab. 6.5 - Tempo de estabelecimento a 2, 5 e 10% dos sistemas em malha aberta e fechada com *feedback* da velocidade com amplitude constante

	$G_d = 0$	$G_d = 50$	$G_d = 100$	$G_d = 200$
$t_s[s](2\%)$	1.605	0.165	0.059	0.036
$t_s[s](5\%)$	1.236	0.110	0.058	0.035
$t_s[s](10\%)$	0.947	0.109	0.057	0.033

Os resultados obtidos demonstraram que o controlo por *feedback* da velocidade se mostra mais eficaz que o controlo por *feedback* do deslocamento. No entanto, as instabilidades que podem surgir nalguns modos fazem com que a concepção do sistema de controlo seja bastante dependente das posições dos actuadores e sensores. Uma outra alternativa ao *feedback* a ganho constante, nomeadamente o *feedback* a amplitude constante, mostrou-se mais eficiente no amortecimento do primeiro modo. No entanto, o esforço de controlo é mais elevado e a sua aplicação ficará limitada a situações em se pretenda controlar

os modos separadamente, limitações essas que em certas situações podem não ser admissíveis.

6.3.3 LQR

Com o objectivo de controlar os três primeiros modos, é utilizado o algoritmo de controlo LQR apresentado no capítulo 5, em que as matrizes de ponderação são definidas por $\mathbf{Q} = 10^{10} \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2, 0, \dots, 0)$ e $\mathbf{R} = \gamma \bar{\mathbf{R}}$. Na fig. 6.44 é apresentada a função de resposta em frequência directa (na extremidade livre da viga), do tipo receptância, dos sistemas em malha aberta e fechada. Pode observar-se na fig. 6.44 que o sistema em malha fechada apenas amortece os três primeiros modos e deixa o amortecimento dos dois últimos modos inalterados. O aumento do valor do amortecimento é mais pronunciado nos dois primeiros modos uma vez que, como visto anteriormente, o terceiro modo é pouco controlável.

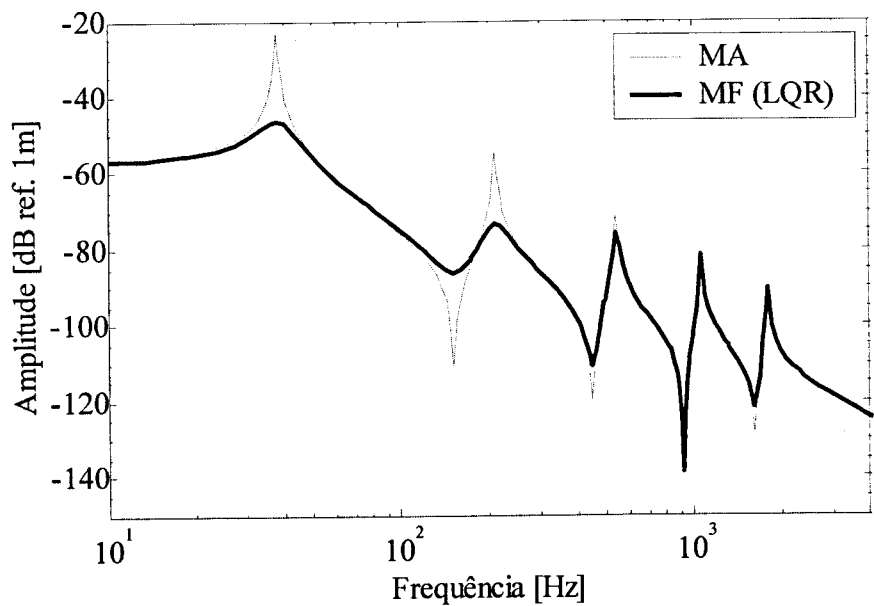


Fig. 6.44 - Função de resposta em frequência do tipo receptância (medida na extremidade livre da viga) dos sistemas em malha aberta e fechada (LQR)

Na tab. 6.6 são apresentados comparativamente os valores dos amortecimentos modais e tempo de estabelecimento a 2% dos sistemas em malha aberta e fechada com *feedback* da velocidade com ganho constante e LQR

Tab. 6.6 - Amortecimentos modais e tempo de estabelecimento a 2% dos sistemas em malha aberta e fechada com feedback da velocidade com ganho constante e LQR

	$\xi_1[\%]$	$\xi_2[\%]$	$\xi_3[\%]$	$\xi_4[\%]$	$\xi_5[\%]$	$t_s[s]$
MA	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.61
$G_d = 0.04$	12.6	17.1	1.41	2.40	100	0.11
LQR	13.3	9.02	1.81	1.00	1.00	0.11

As respostas em regime livre em malha aberta (MA) e fechada (MF), e a tensão de controlo, são apresentadas nas fig. 6.45 e 6.46, respectivamente.

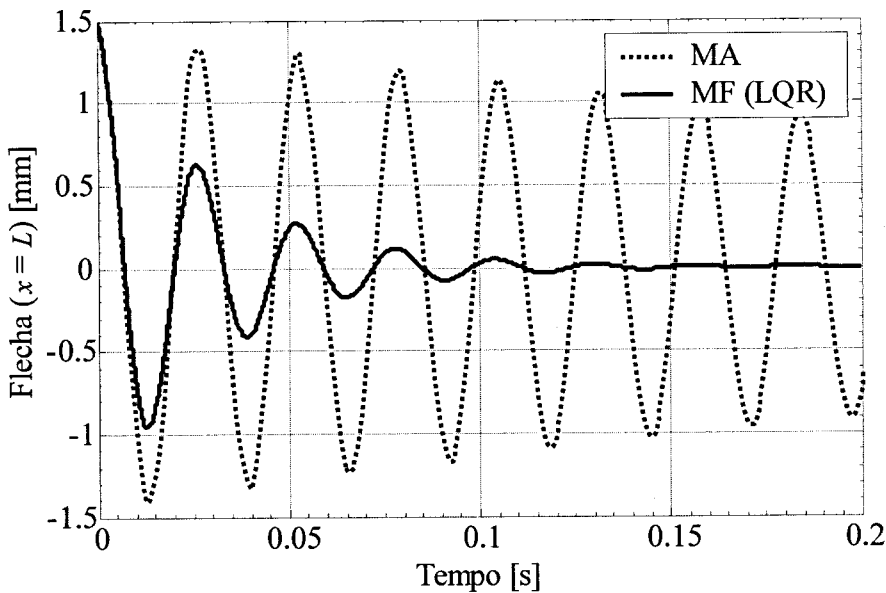


Fig. 6.45 - Resposta em regime livre da viga em malha aberta e fechada (LQR)

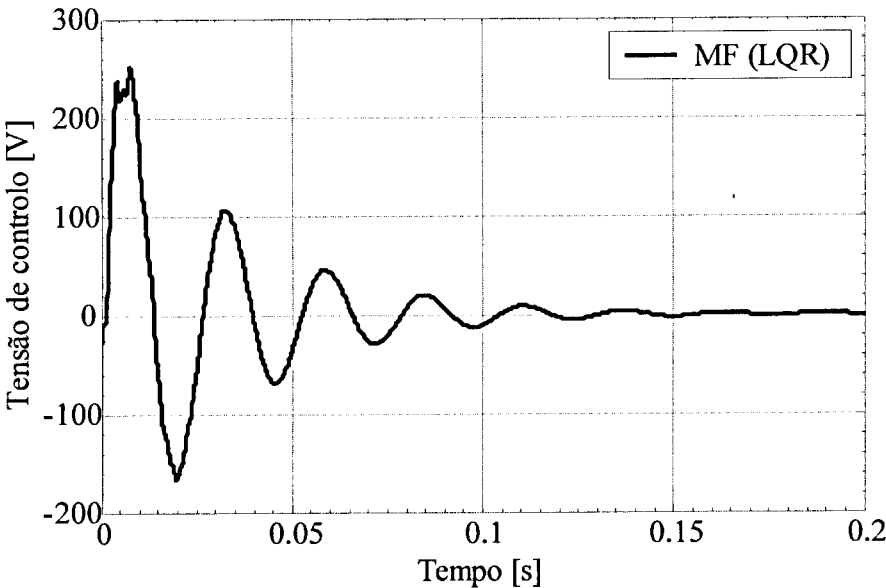


Fig. 6.46 - Tensão de controlo aplicada à viga em malha fechada (LQR)

Pode constatar-se que relativamente ao *feedback* da velocidade, a resposta transitória da extremidade livre da viga é ligeiramente mais atenuada. A tensão de controlo é muito semelhante, mas uma vez que com o algoritmo LQR o esforço de controlo foi limitado aos três primeiros modos, a tensão de controlo é ajustada por forma a amortecer esses modos, enquanto que no caso do *feedback* da velocidade essa possibilidade não pode ser considerada.

6.3.4 LQG

Nesta secção é utilizada a teoria dos observadores de estado apresentada no capítulo 5. O interesse dos observadores é o de permitir efectuar um controlo optimizado, mais robusto que o controlo por *feedback* da velocidade apresentado anteriormente, em que apenas as saídas y (que neste caso representa apenas a tensão induzida no sensor) são medidas. Assim, utilizando-se o princípio da separação (ver §5.5.7), o controlo LQR é primeiramente analisado e depois acoplado ao observador de estados, dando origem ao algoritmo LQG. A principal dificuldade introduzida pelo observador é o acoplamento da sua própria dinâmica com a do sistema mecânico. Uma vez que o observador não conhece à partida as condições iniciais, o erro de observação inicial é $e(0) = x(0)$. Dessa forma, torna-se óbvio que enquanto o erro do observador não se anular, o controlador não será capaz de controlar convenientemente a estrutura. No entanto, se as condições iniciais forem conhecidas pelo observador ($e(0) = 0$), a resposta em malha fechada é rigorosamente igual à obtida com um controlo LQR, supondo-se que todas as variáveis de estado são conhecidas.

Considerando-se o caso mais realista, em que as condições iniciais são desconhecidas, as respostas do sistema com o controlador LQG são comparadas com as do sistema com o controlador LQR e o sistema não controlado, para diferentes velocidades do observador de estados. A densidade espectral do ruído de entrada é fixada a $S_w = 10^{-5}$, e faz-se variar a do ruído de saída S_v entre 10^{-10} e 10^3 . Para $S_v = 10^3$, as fig. 6.47 e 6.48 mostram que o erro do observador é amortecido mais lentamente que o sistema em malha fechada. Dessa forma, o controlador não consegue seguir a resposta do sistema e, consequentemente, o controlo não é possível. Esse facto deve-se ao valor relativamente elevado de S_v , correspondendo a uma medida ruidosa, que induz um ganho de controlo baixo. De facto, uma vez que $u = -K_g \hat{x} = -K_g (x - e)$, em que K_g é o ganho de controlo óptimo calculado pelo algoritmo LQR iterativo, e que a estimação dos estados não é possível, a resposta do sistema em malha

fechada coincide com a resposta em malha aberta (fig. 6.47), e a tensão de controle é nula (fig. 6.48).

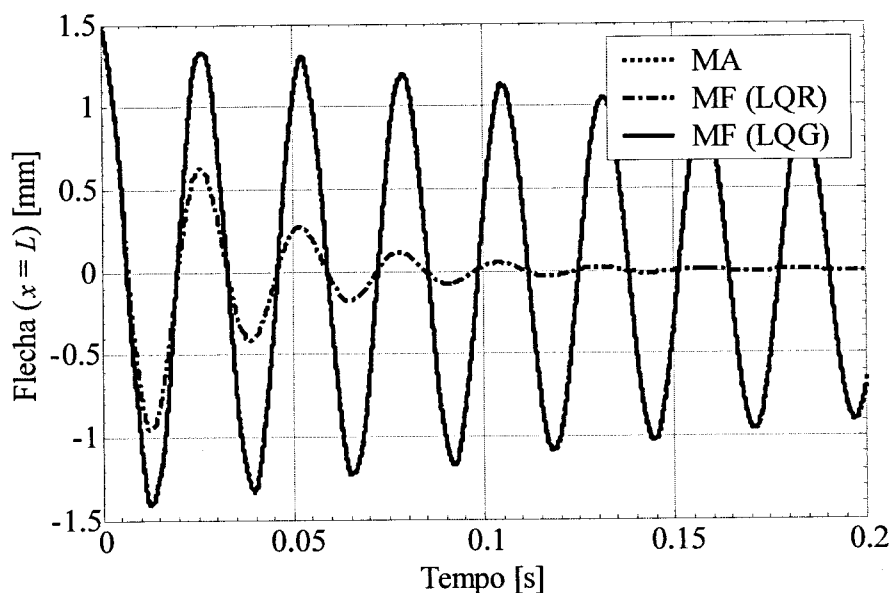


Fig. 6.47 - Resposta em regime livre da viga em malha aberta e fechada (LQR e LQG) com uma densidade espectral do ruído de saída $S_v = 10^3$

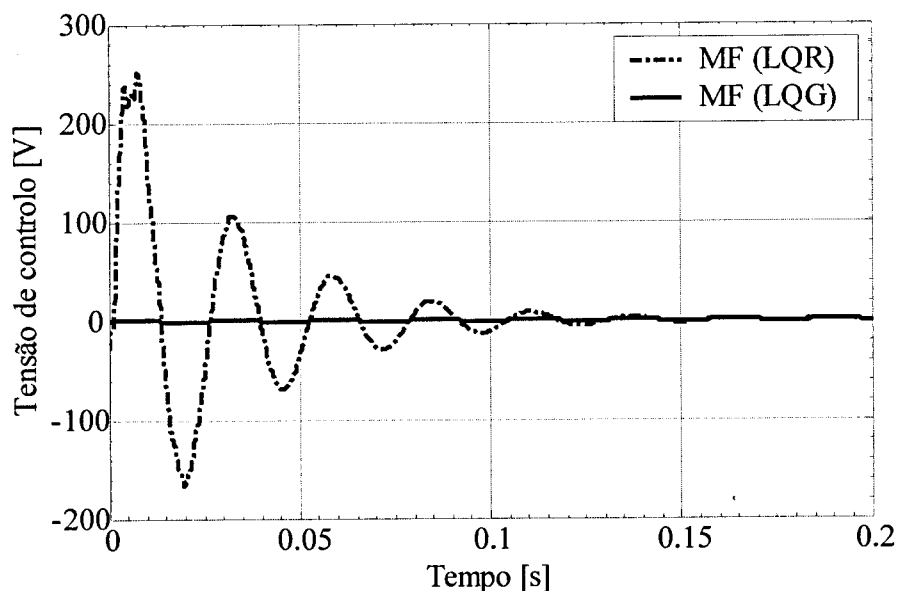


Fig. 6.48 - Tensão de controle aplicada à viga em malha fechada (LQR e LQG) com uma densidade espectral do ruído de saída $S_v = 10^3$

Reduzindo-se a densidade espectral do ruído de saída para $S_v = 10^{-3}$, o erro do observador converge rapidamente para zero e o sistema é estimado antes de ser amortecido (fig. 6.49).

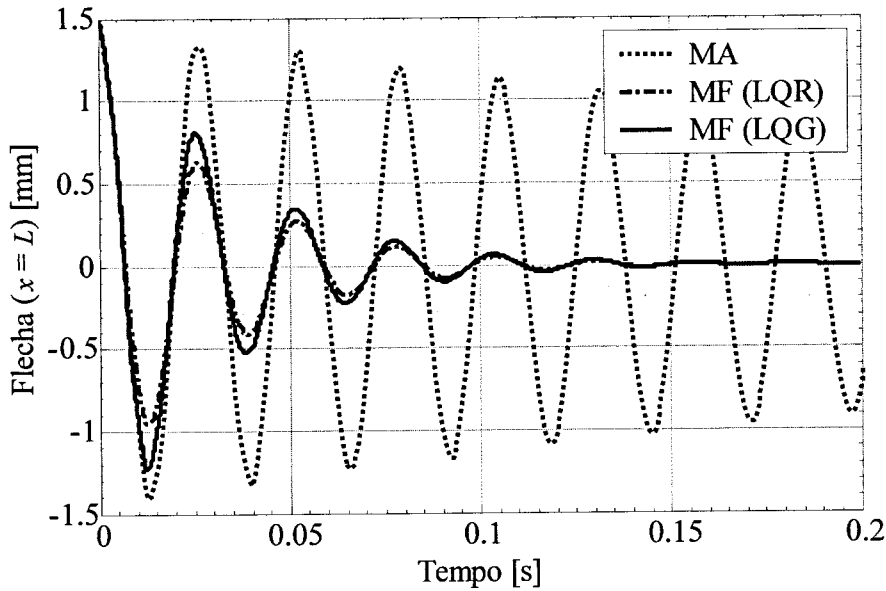


Fig. 6.49 - Resposta em regime livre da viga em malha aberta e fechada (LQR e LQG) com uma densidade espectral do ruído de saída $S_v = 10^{-3}$

No entanto, para uma performance semelhante, a tensão de controlo do sistema controlador-observador (fig. 6.50) é menos elevada no instante inicial e mais elevada nos instantes de tempo seguintes que a tensão obtida considerando-se que todas as variáveis de estado eram conhecidas (LQR). Esse facto deve-se à resposta transitória da viga controlada estimada pelo observador, que converge menos rapidamente que o aumento da tensão de controlo.

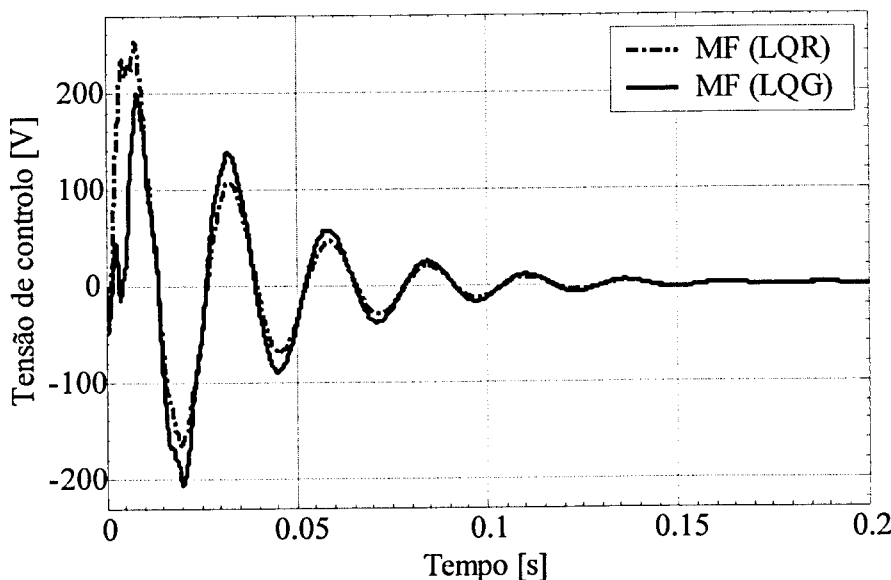


Fig. 6.50 - Tensão de controlo aplicada à viga em malha fechada (LQR e LQG) com uma densidade espectral do ruído de saída $S_v = 10^{-3}$

Com o objectivo de acelerar a estimação dos estados, a densidade espectral é reduzida para $S_v = 10^{-6}$. Assim, como pode ser observado nas fig. 6.51 e 6.52, mesmo que a estimação seja mais rápida, a performance do controlador degrada-se e a tensão limite do actuador é ultrapassada, sem que a resposta da viga seja significativamente melhorada. Pode então concluir-se que o aumento excessivo do ganho do observador pode conduzir à degradação do sistema de controlo, sem que a atenuação da tensão de controlo seja melhorada.

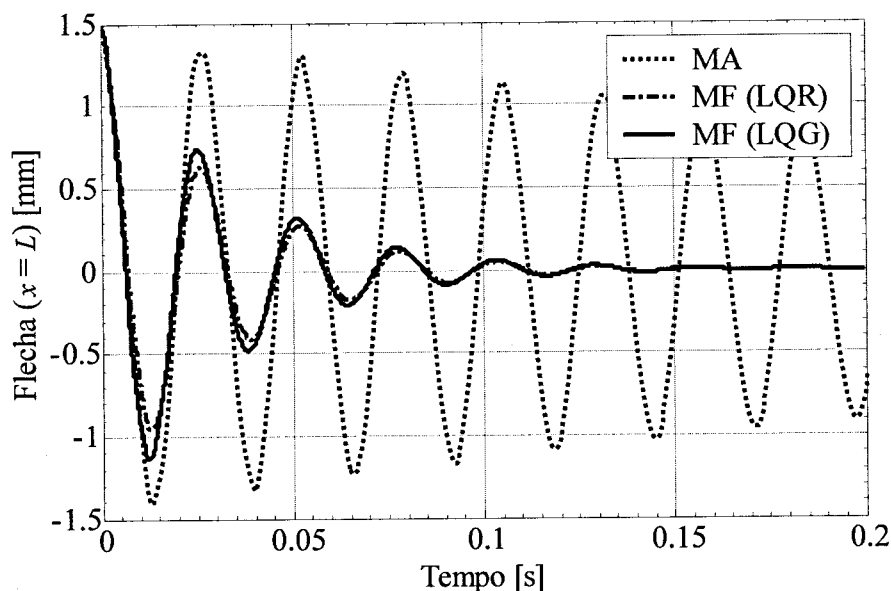


Fig. 6.51 - Resposta em regime livre da viga em malha aberta e fechada (LQR e LQG) com uma densidade espectral do ruído de saída $S_v = 10^{-6}$

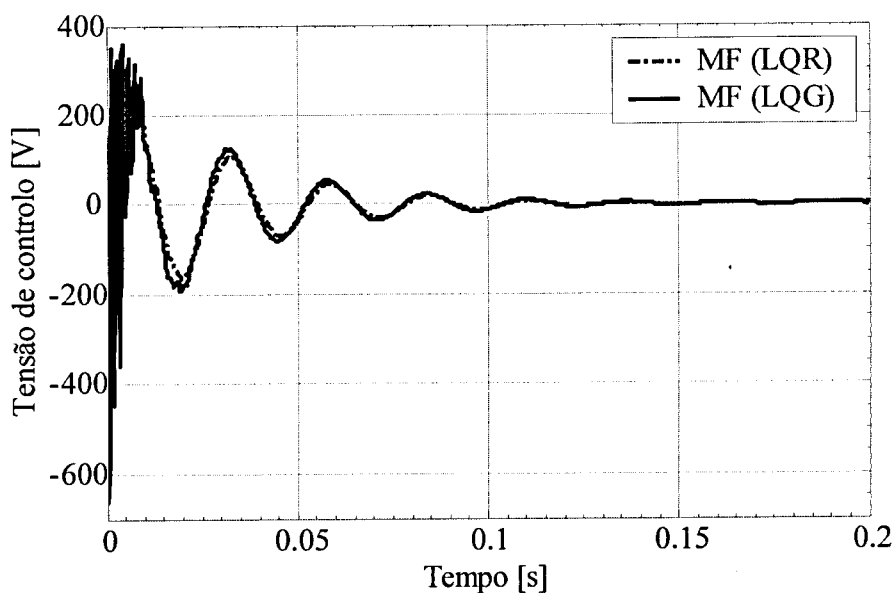


Fig. 6.52 - Tensão de controlo aplicada ao actuador em malha fechada (LQR e LQG) com uma densidade espectral do ruído de saída $S_v = 10^{-6}$

Note-se que a utilização de observadores de estado aumenta a dimensão das matrizes do sistema acoplado controlador-observador. No entanto, graças ao princípio da separação, a concepção do observador não afecta a do controlador. Uma das vantagens do sistema acoplado controlador-observador LQG, para o caso analisado, é o facto de que a tensão de controlo para o melhor caso do LQG ($S_v = 10^{-3}$) é inferior à do LQR, com uma performance de controlo bastante satisfatória. Porém, uma vez que a densidade espectral do ruído de saída não é um parâmetro do sistema, mas sim, uma quantidade relacionada com o tratamento de sinal, ela não pode ser escolhida livremente.

Por forma a avaliar a eficiência do controlador, uma perturbação mecânica (força transversal), do tipo ruído branco com covariância unitária, é aplicada na extremidade livre da viga. As respostas em regime forçado em malha aberta e fechada (LQG) da viga são apresentadas na fig. 6.53. A correspondente tensão de controlo aplicada ao actuador em malha fechada é apresentada na fig. 6.54.

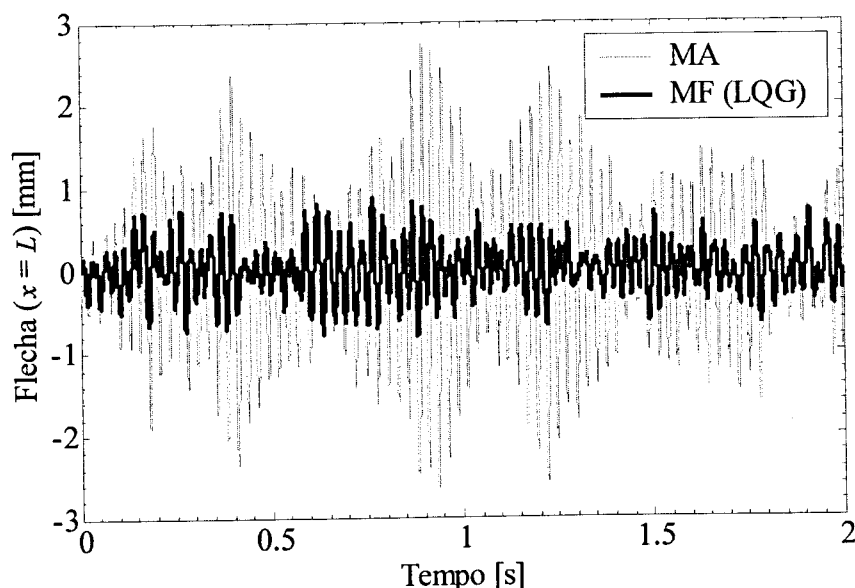


Fig. 6.53 - Resposta em regime forçado da viga em malha aberta e fechada a uma perturbação mecânica do tipo ruído branco aplicada na extremidade livre

Constata-se na fig. 6.53 que a resposta em malha fechada tem uma amplitude máxima dos picos cerca de três vezes menor que a resposta em malha aberta e que a tensão de controlo (para uma covariância da perturbação mecânica unitária) se mantém abaixo da tensão de saturação do actuador piezoeléctrico. Este resultado ilustra a robustez do algoritmo de controlo LQG.

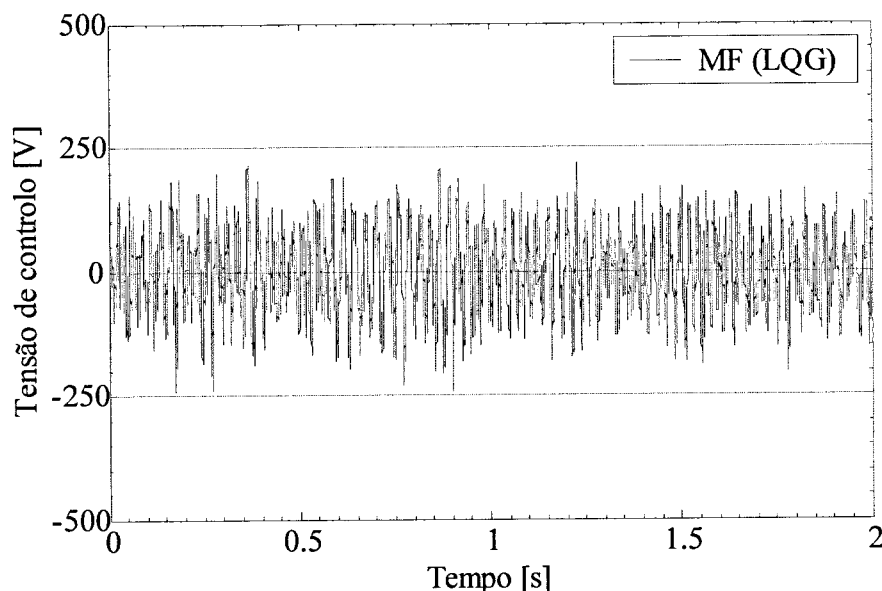


Fig. 6.54 - Tensão de controlo aplicada ao actuador em malha fechada (LQG) para uma perturbação mecânica do tipo ruído branco aplicada na extremidade livre

6.4 Resultados Experimentais

6.4.1 Introdução

Por forma a adquirir alguma sensibilidade experimental na área do controlo activo de vibrações de vigas com sensores e actuadores piezoeléctricos, três ensaios experimentais foram realizados numa viga *inteligente*. No primeiro ensaio avalia-se a acção estática dos actuadores piezoeléctricos. No segundo ensaio, utilizando, como sensor de velocidade, um transdutor *laser* e um actuador piezoeléctrico, é avaliada a performance de um sistema de controlo por *feedback* da velocidade. Finalmente, no terceiro ensaio implementa-se um sistema de controlo por *feedback* do deslocamento utilizando um sensor e um actuador piezoeléctricos. Os resultados experimentais são discutidos e comparados com os resultados numéricos fornecidos pelo modelo proposto.

Para os ensaios foi utilizada uma viga de Alumínio, encastrada-livre, com 400 mm de comprimento, 15 mm de largura e 2 mm de espessura. Como actuadores e sensores foram utilizadas duas cerâmicas piezoeléctricas (PLT 30/15/1-PX5-N - Philips Components) com 30 mm de comprimento, 15 mm de largura e 1 mm de espessura, que são fixadas em ambas as faces da viga, a uma distância de 5 mm do encastramento. As propriedades do material da viga e dos elementos piezoeléctricos (PXE-5) são apresentadas no anexo C.

6.4.2 Montagem Experimental

A montagem experimental da viga encastrada-livre foi realizada sobre uma base de apoio materializada por uma mesa anti-vibratória da marca Newport (fig. 6.55).

No que concerne à materialização das condições de fronteira da viga encastrada-livre, foi utilizado um suporte rígido que restringe completamente o movimento de translação e de rotação da extremidade encastrada da viga. Na montagem houve o cuidado de garantir uma elevada rigidez da estrutura de suporte.

As cerâmicas piezoelétricas foram fixadas na viga através de um adesivo não condutor à base de Cianocrilato (LOCTITE - Supercola3). Por forma a permitir a aplicação de diferenças de potencial eléctrico às cerâmicas, foram soldados fios de conexão aos dois eléctrodos de cada cerâmica (fig. 6.56).

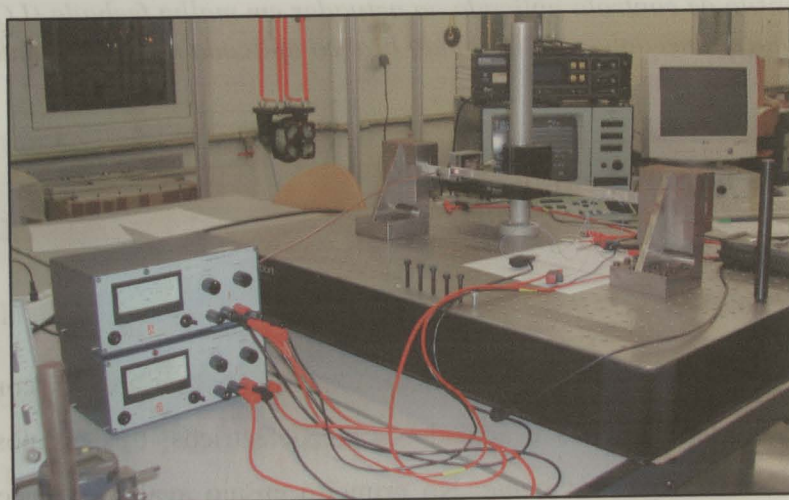


Fig. 6.55 - Montagem experimental da viga encastrada-livre inteligente utilizada na análise da acção estática dos actuadores

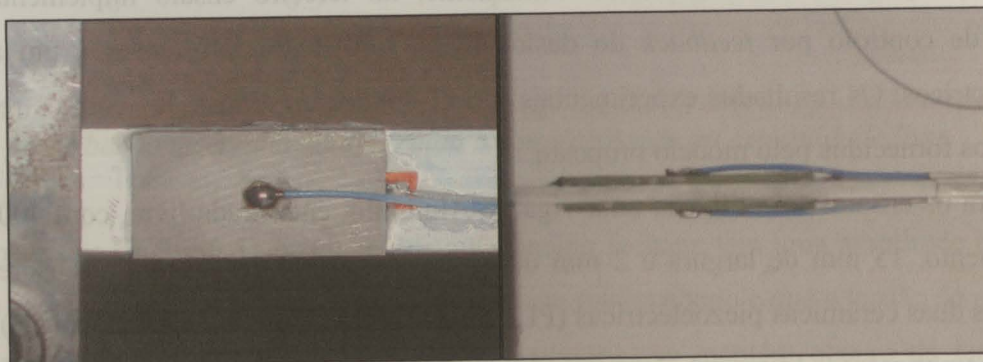


Fig. 6.56 - Montagem das cerâmicas piezoelétricas: vista de lado e vista de cima

6.4.3 Análise da Acção Estática dos Actuadores

Para a aplicação da tensão eléctrica aos actuadores piezoeléctricos foram utilizadas duas fontes de alimentação com uma tensão máxima de 300 V (DC). A medição do deslocamento foi efectuada por um transdutor de deslocamento capacitivo (Phillips - PR6423), com uma gama de medição de 1 mm e uma resolução de 1 μm (fig. 6.57).

Por forma a determinar a sensibilidade do transdutor para o Alumínio, foi efectuada previamente uma calibração experimental do transdutor, obtendo-se um valor da sensibilidade de 13.62 V/mm.

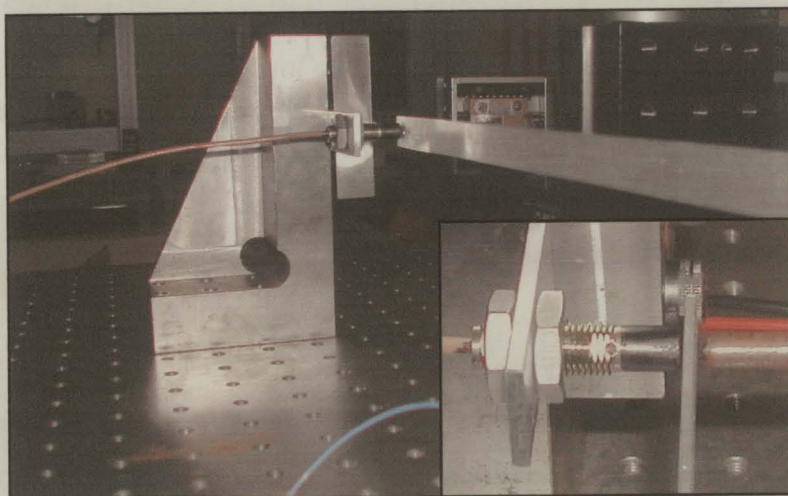


Fig. 6.57 - Transdutor de deslocamento capacitivo (Phillips - PR6423)

Para a leitura dos valores fornecidos pelo transdutor de deslocamento capacitivo, proporcionais ao deslocamento medido, foi utilizado um multímetro digital (APPA-69) com uma resolução de 1 mV.

6.4.3.1 Resultados

A flecha da viga encastrada-livre sob a acção estática simultânea dos dois actuadores piezoeléctricos, fixados em ambos os lados da viga, é apresentada na fig. 6.58. A flecha foi medida pelo transdutor capacitivo (fig. 6.56) a 5 mm da extremidade livre da viga para diferentes valores da tensão eléctrica aplicada aos dois actuadores.

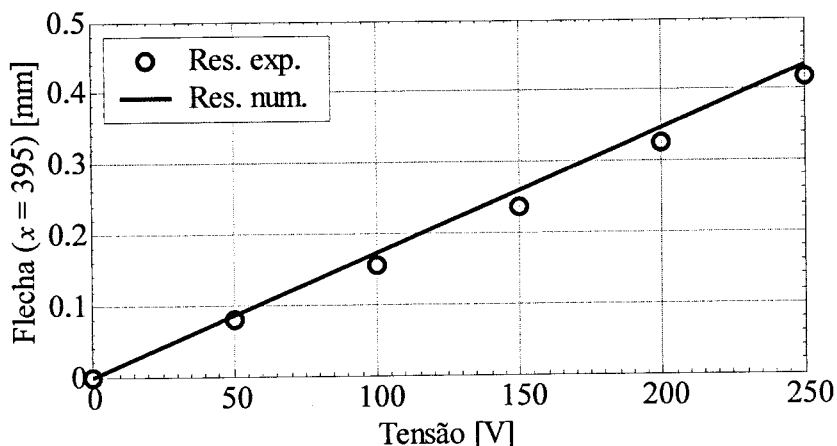


Fig. 6.58 - Flecha da viga em função da tensão aplicada: resultados numéricos vs. experimentais

Como se pode verificar na figura, os resultados numéricos apresentam uma boa concordância com os experimentais validando-se assim, por via experimental, o modelo proposto. O desvio máximo da flecha é de 4.1% para a tensão de 250 V. Note-se que os resultados experimentais subestimam os numéricos. Esse facto deve-se à colagem dos actuadores piezoeléctricos na viga, em que uma perfeita transmissibilidade de esforços nas interfaces com a viga não é, normalmente, assegurada. Dessa forma, o procedimento de montagem dos elementos piezoeléctricos, em particular a colagem, revela-se fundamental em todo o procedimento experimental.

6.4.4 Controlo Activo de Vibrações com Feedback da Velocidade

Por forma a implementar experimentalmente um sistema de controlo por *feedback*, com base nas medições da velocidade, foi utilizado um transdutor *laser* (Polytec - OFV 303 e 3001) na medição da resposta dinâmica em regime livre e em regime forçado. Para a aquisição de dados foi utilizado um analisador dinâmico de sinal de dois canais (Brüel & Kjær - 2035).

A montagem experimental e o equipamento utilizado são apresentados nas fig. 6.59 e 6.60, respectivamente.

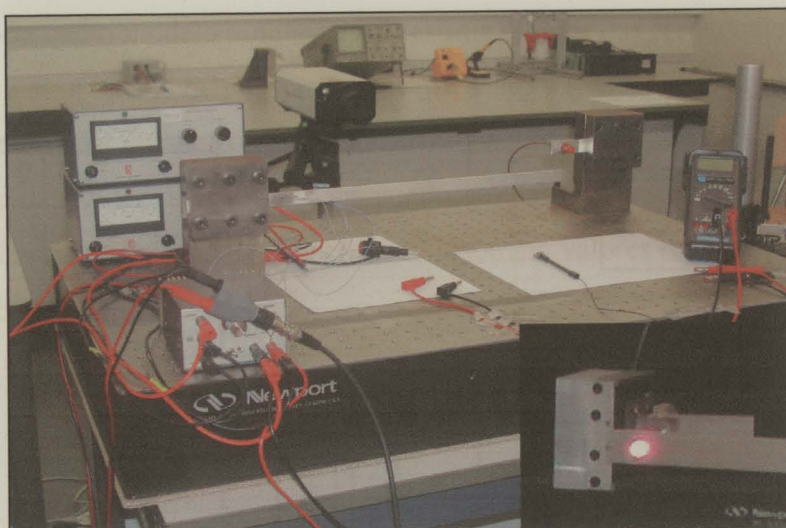


Fig. 6.59 - Montagem experimental da viga inteligente utilizada no controlo activo de vibrações e ponto de medição do transdutor laser

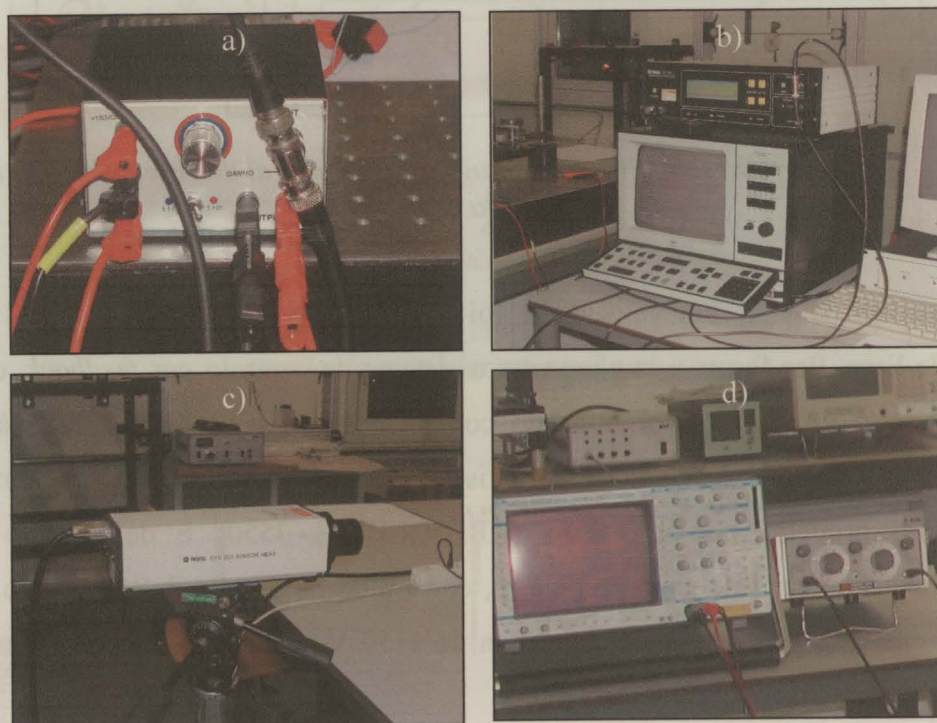


Fig. 6.60 - Equipamento utilizado no ensaio: a) Amplificador operacional ; b) Analisador dinâmico de sinal (Brüel & Kjær - 2035) e controlador do transdutor laser (Polytec - OFV 3001) ; c) Unidade de medição do transdutor laser (Polytec - OFV 303) ; d) Osciloscópio digital (LeCroy - 9450A) e filtro (KROHN-HITE - 3550)

A excitação em regime livre foi aplicada através de um deslocamento inicial aplicado na extremidade livre da viga. Em regime forçado, a excitação foi aplicada por via das duas cerâmicas piezoeléctricas (actuador) através de um sinal em tensão produzido por um gerador de sinal e condicionado por um amplificador de potência, conforme representado na fig. 6.61.

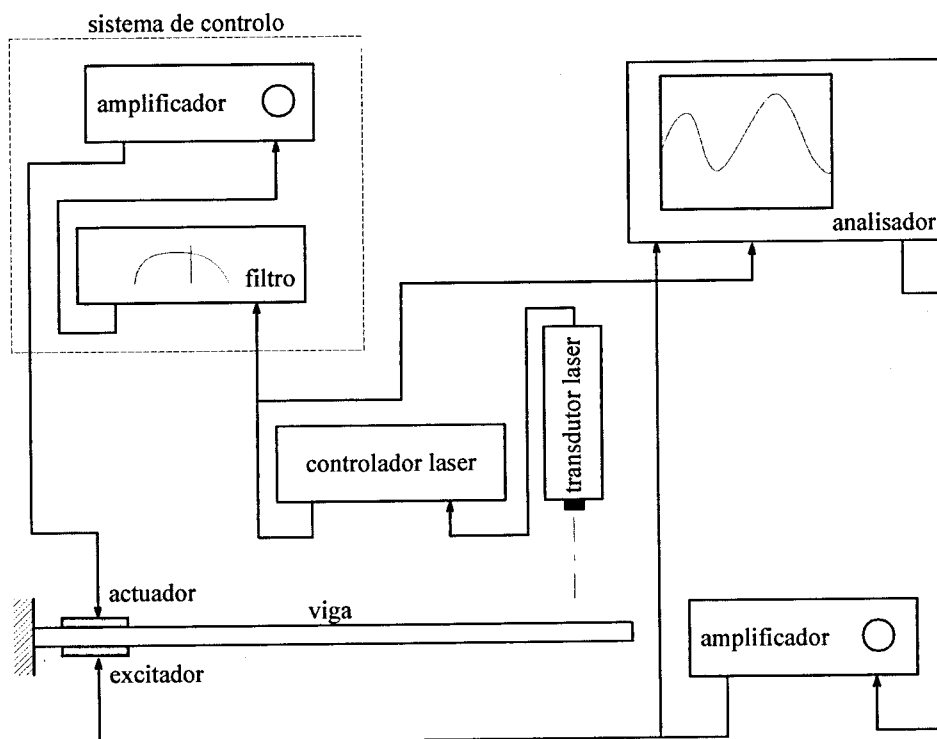


Fig. 6.61 - Esquema representativo da montagem experimental do sistema de controlo por *feedback* da velocidade

A resposta da viga, em velocidade, foi medida pelo transdutor *laser*, a 15 mm da extremidade livre. Por forma a implementar o sistema de controlo por *feedback*, o sinal do transdutor *laser* (velocidade) foi utilizado como tensão de controlo a aplicar à segunda cerâmica piezoelétrica (actuador). Para isso, o sinal produzido pelo transdutor é condicionado, primeiro por um filtro (KROHN-HITE - 3550) e de seguida por um amplificador operacional de ganho regulável, construído no âmbito deste trabalho, com um ganho máximo de 101 e uma tensão máxima de ± 150 V, antes de ser enviado ao actuador piezoelétrico.

6.4.4.1 Resultados - Função de Resposta em Frequência

A função de resposta em frequência em malha aberta obtida entre a velocidade, medida a 15 mm da extremidade livre da viga, e a tensão aplicada ao excitador é apresentada na fig. 6.62. Como se pode constatar na figura, existe uma boa semelhança entre os resultados experimentais e numéricos, em que o modelo numérico, na zona das ressonâncias, apresenta praticamente as mesmas amplitudes. As frequências de ressonância dos dois primeiros modos apresentam desvios reduzidos, e o desvio máximo de 4.75% é encontrado no quarto modo

(tab. 6.7). Note-se que o modelo numérico sobrestima o valor das frequências de ressonância. Esse facto deve-se à colagem das cerâmicas piezoeléctricas, que dada a dificuldade em garantir uma transmissibilidade completa dos esforços nas interfaces com a viga, dá origem a uma diminuição da rigidez da estrutura, mantendo, no entanto, a sua massa inalterada. Dessa forma, as frequências de ressonância experimentais tomam valores inferiores aos numéricos.

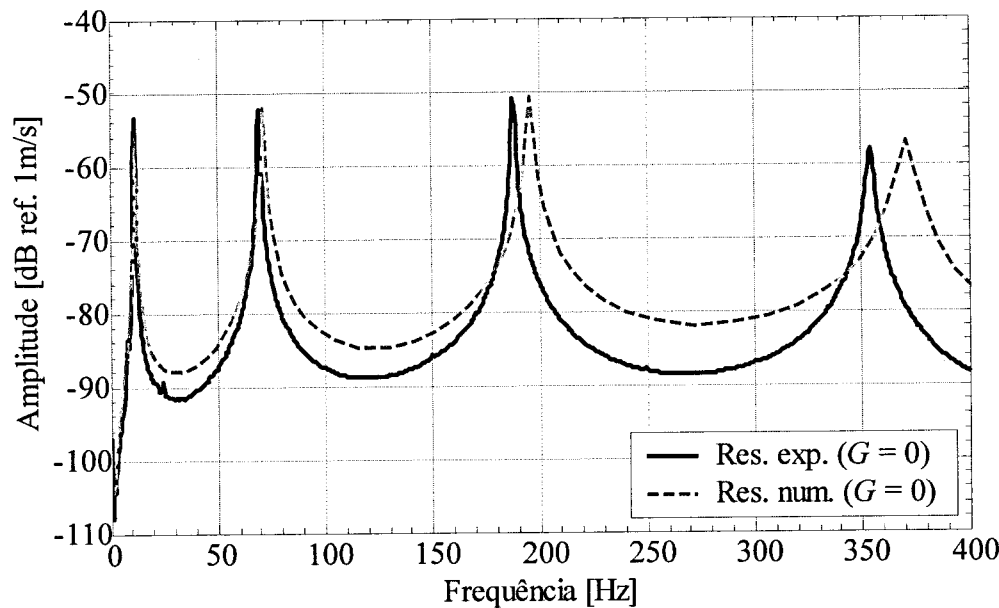


Fig. 6.62 - Função de resposta em frequência entre a velocidade (medida em $x = 385$ mm) e a tensão do actuador em malha aberta

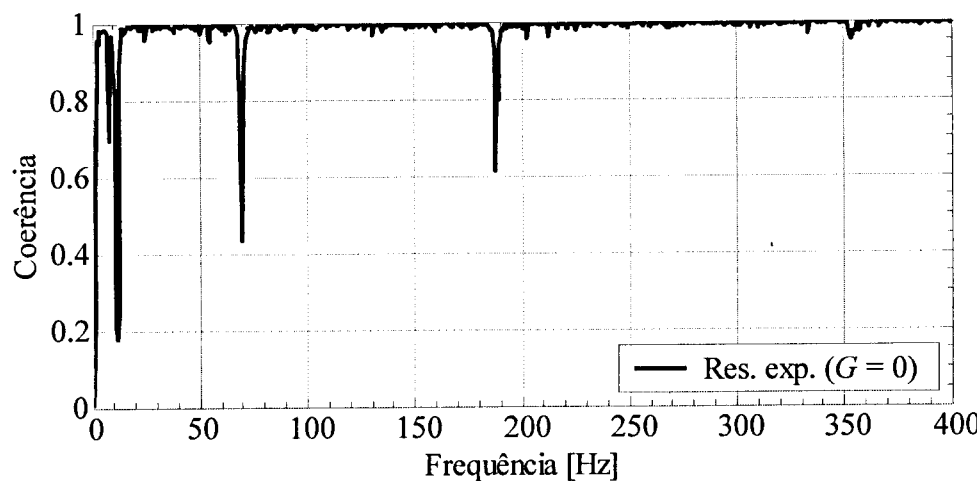


Fig. 6.63 - Coerência da função de resposta em frequência experimental em malha aberta

Tab. 6.7 - Frequências naturais do sistema em malha aberta [Hz]

Modos	1º	2º	3º	4º
Res. exp.	11.50	69.50	188.0	354.0
Res. num.	11.71	71.75	195.9	370.8
Desvio [%]	1.83	3.24	4.20	4.75

Na fig. 6.63 é apresentada a coerência da função de resposta em frequência em malha aberta. Como se pode constatar, a função coerência evidencia uma boa eficiência do actuador piezoeléctrico na excitação da estrutura, revelando igualmente uma elevada razão sinal/ruído e reflectindo uma relação de causalidade entre a resposta e a excitação.

Para o sistema em malha fechada com controlo por *feedback* da velocidade, o lugar geométrico das raízes determinado numericamente, para ganhos compreendidos nos intervalos $[-\infty, 0]$ e $[0, +\infty]$, é apresentado nas fig. 6.64 e 6.65, respectivamente.

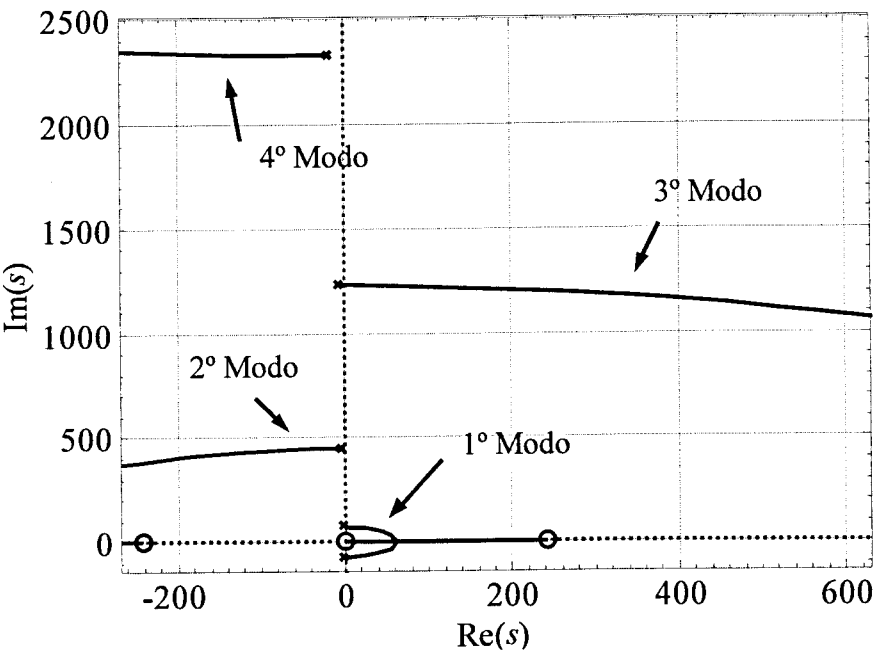


Fig. 6.64 - Lugar geométrico das raízes do sistema em malha fechada com *feedback* da velocidade para ganhos compreendidos no intervalo $[-\infty, 0]$

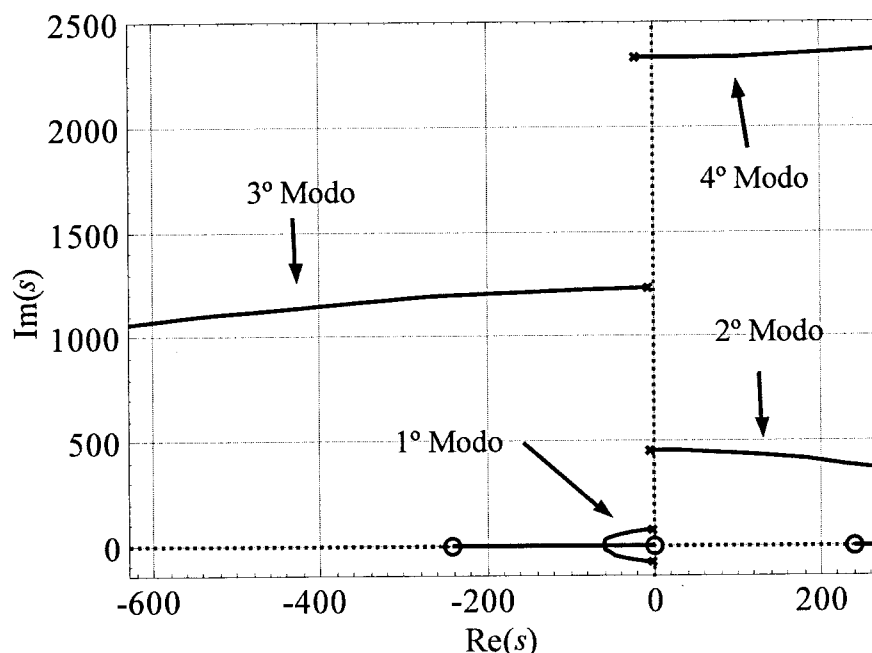


Fig. 6.65 - Lugar geométrico das raízes do sistema em malha fechada com feedback da velocidade para ganhos compreendidos no intervalo $[0, +\infty]$

Da análise destes gráficos constata-se que existe uma simetria de comportamento consoante o sinal do ganho escolhido. Assim, para valores positivos do ganho, os modos pares são facilmente excitados, mesmo para valores de ganho relativamente baixos. Ao contrário, para ganhos negativos, um comportamento oposto é obtido e os modos ímpares são facilmente excitados. Dessa forma, com o objectivo de amortecer o primeiro modo, o valor do ganho, que afecta todos os modos, teria que ser limitado ao ganho máximo admissível sem excitar o segundo e o quarto modos. Porém, nestas condições, o controlo obtido seria muito ineficiente. Uma alternativa é considerar, na definição da tensão de controlo, um valor de velocidade com apenas a contribuição do primeiro modo. Essa situação foi materializada através de um filtro passa-baixo aplicado à velocidade medida. Assim, por forma a amortecer o primeiro modo (modo fundamental), o valor do ganho pode ser escolhido livremente, apenas limitado pela tensão de saturação dos actuadores piezoeléctricos, sem haver o risco de excitar os modos pares. O correspondente lugar geométrico das raízes é apresentado na fig. 6.66.

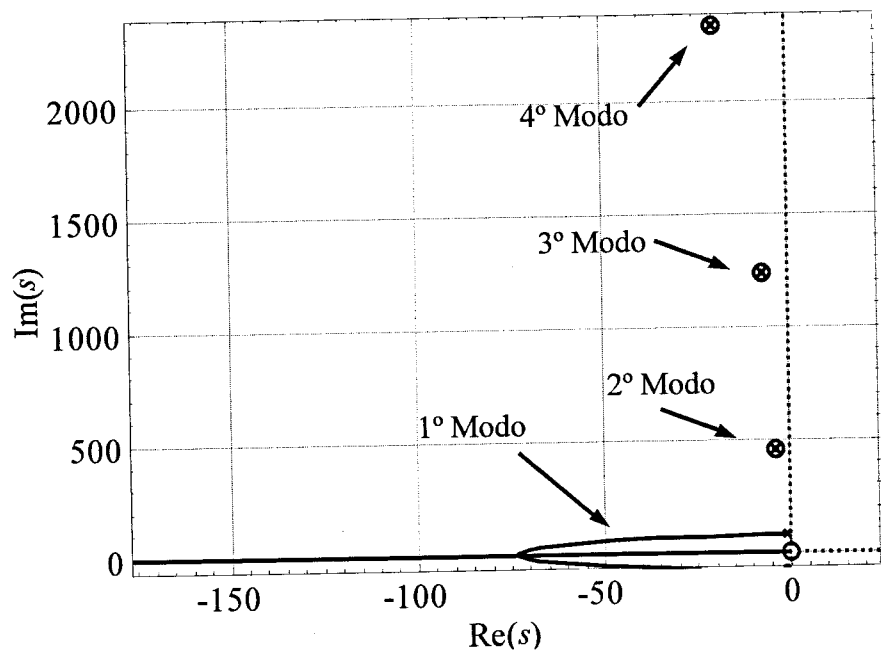


Fig. 6.66 - Lugar geométrico das raízes do sistema em malha fechada com feedback da velocidade filtrada para ganhos compreendidos no intervalo $[0, +\infty]$

As funções de resposta em frequência numéricas e experimentais em malha fechada, obtidas para diferentes valores do ganho, são apresentadas nas fig. 6.67-6.72.

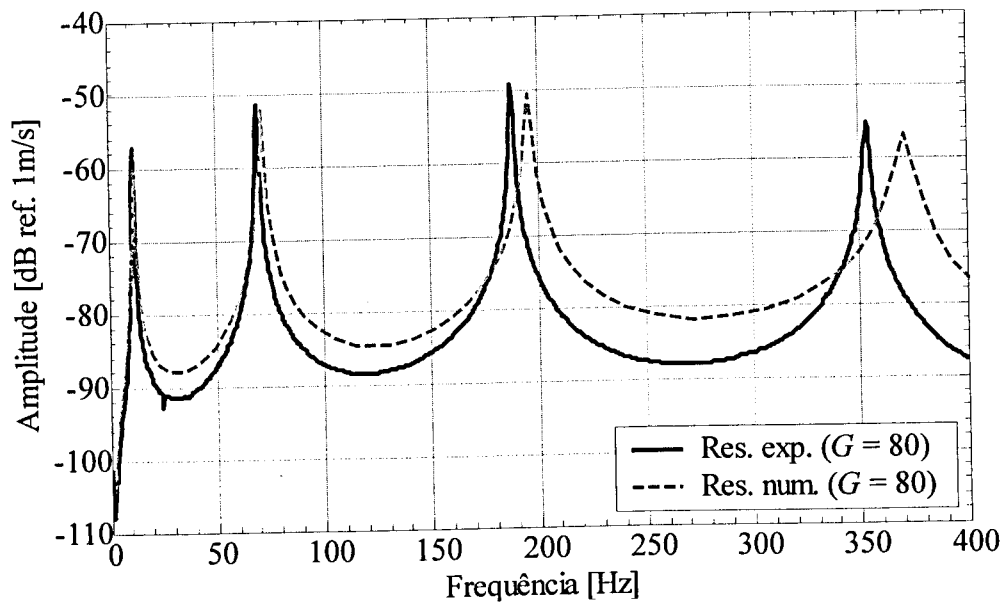


Fig. 6.67 - Função de resposta em frequência entre a velocidade filtrada (medida em $x = 385 \text{ mm}$) e a tensão do actuador em malha fechada para um ganho $G = 80$

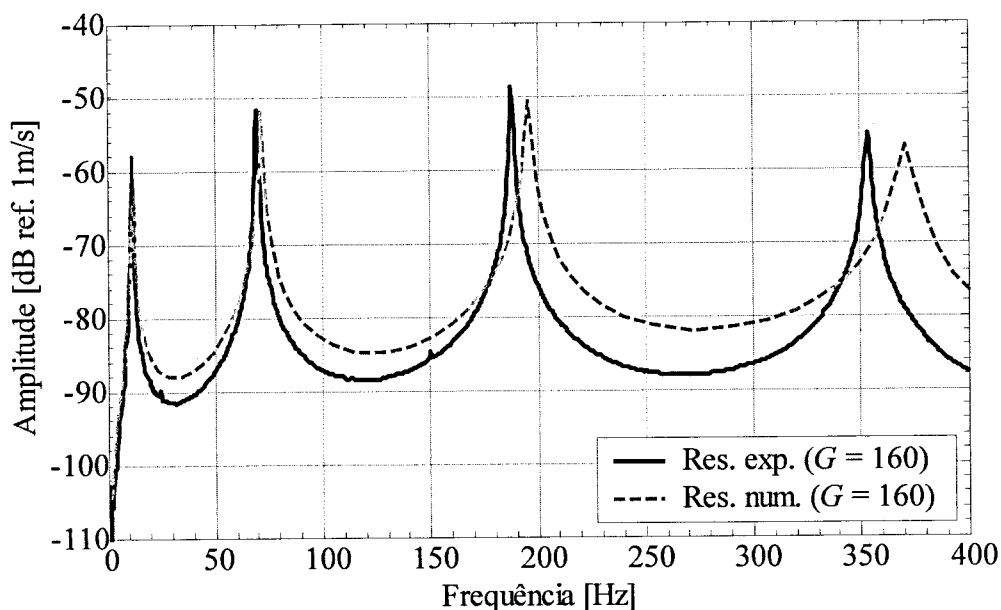


Fig. 6.68 - Função de resposta em frequência entre a velocidade filtrada (medida em $x = 385$ mm) e a tensão do actuador em malha fechada para um ganho $G = 160$

Como se pode observar nas figuras, para valores crescentes do ganho, apenas o primeiro modo é amortecido. Ambos os resultados, experimentais e numéricos demonstram esse facto.

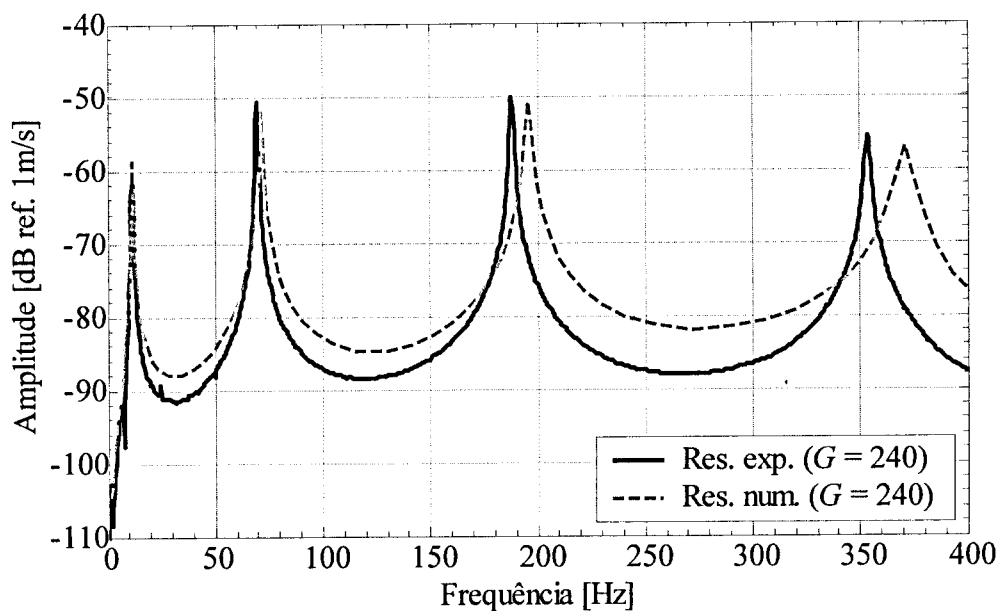


Fig. 6.69 - Função de resposta em frequência entre a velocidade filtrada (medida em $x = 385$ mm) e a tensão do actuador em malha fechada para um ganho $G = 240$

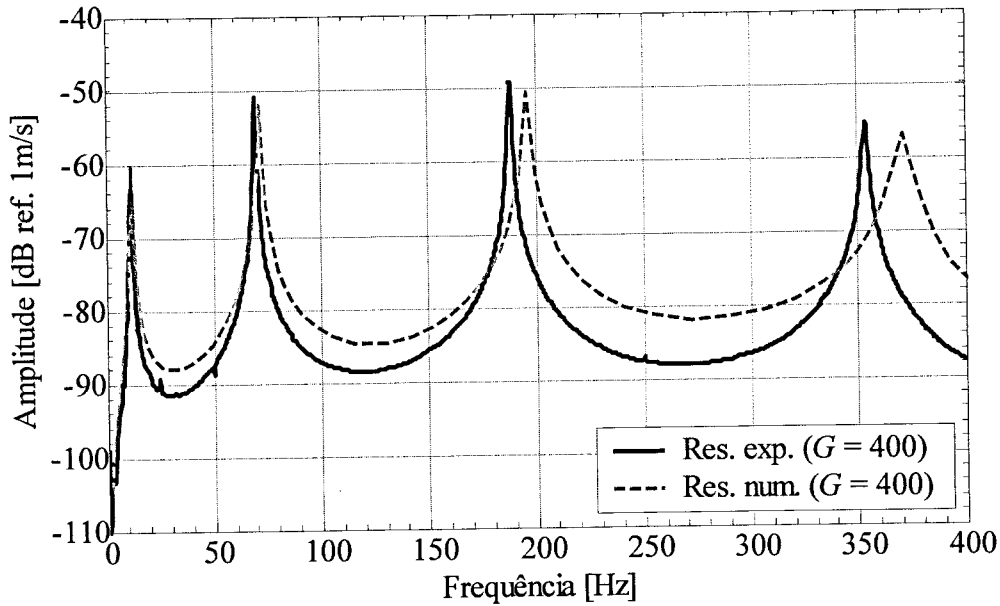


Fig. 6.70 - Função de resposta em frequência entre a velocidade filtrada (medida em $x = 385$ mm) e a tensão do actuador em malha fechada para um ganho $G = 400$

A concordância entre ambos os resultados é bastante boa. A amplitude do primeiro modo em malha aberta (fig. 6.61), com um valor médio entre os resultados experimentais e numéricos de -55 dB, desce para cerca de -65 dB em malha fechada (fig. 6.71), com um valor do ganho $G = 800$ ($G = G_{\text{amp.}} \times \text{sensibilidade}_{\text{laser}}$).

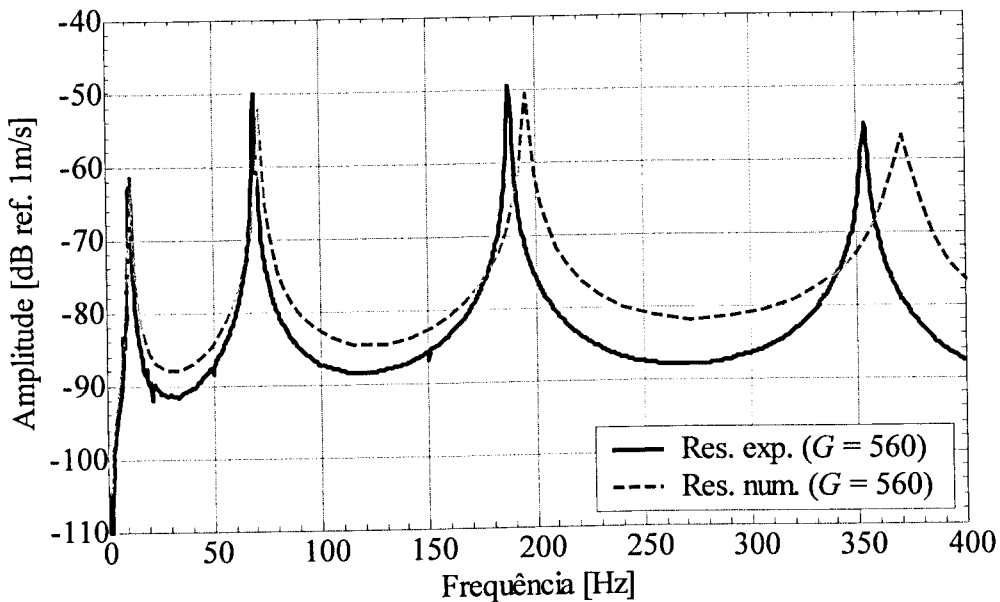


Fig. 6.71 - Função de resposta em frequência entre a velocidade filtrada (medida em $x = 385$ mm) e a tensão do actuador em malha fechada para um ganho $G = 560$

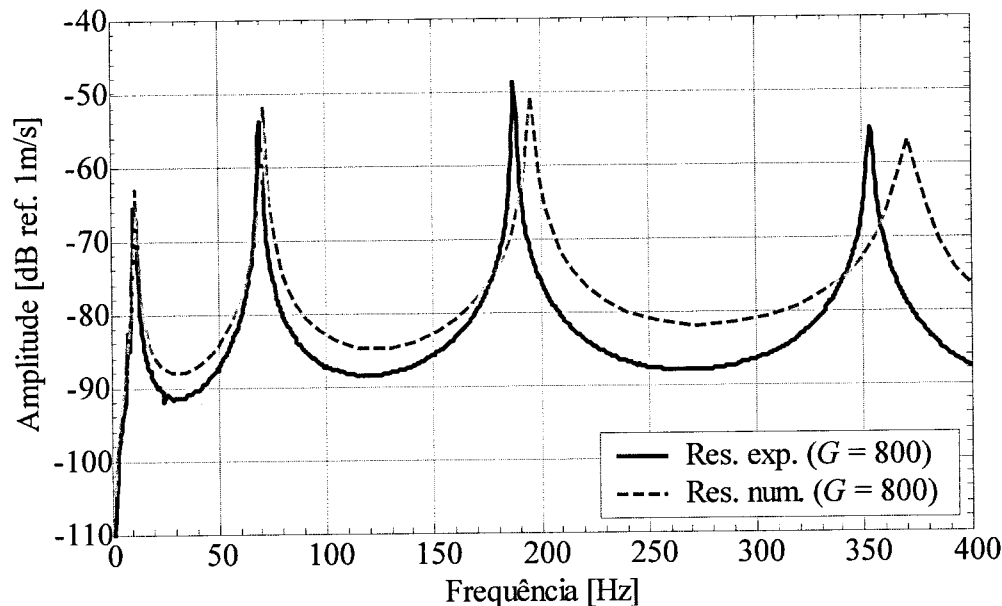


Fig. 6.72 - Função de resposta em frequência entre a velocidade filtrada (medida em $x = 385 \text{ mm}$) e a tensão do actuador em malha fechada para um ganho $G = 800$

As razões de amortecimento dos quatro primeiros modos, determinadas pelo método dos 3dB para os resultados experimentais e numéricos, para diferentes valores de ganho, são apresentadas nas fig. 6.73 e 6.74, respectivamente.

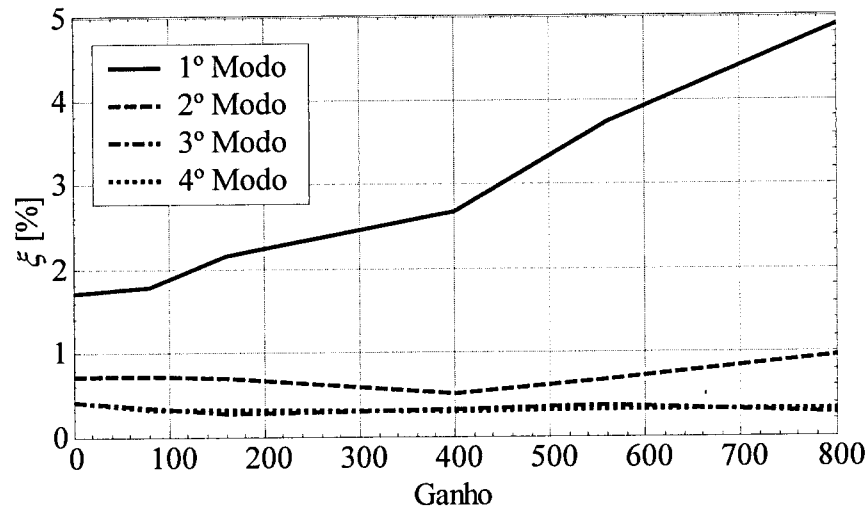


Fig. 6.73 - Razão de amortecimento modal obtida com o modelo experimental

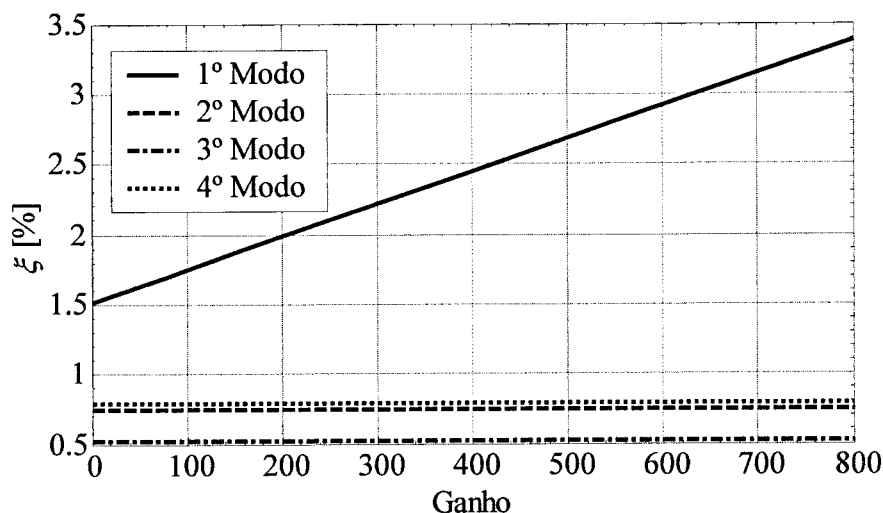


Fig. 6.74 - Razão de amortecimento modal obtida com o modelo numérico

Constata-se que o comportamento da razão de amortecimento determinada com o modelo numérico é idêntico ao obtido com o modelo experimental. Em ambos os modelos os três últimos modos permanecem com uma razão de amortecimento aproximadamente constante. Assim, uma vez que o filtro passa-baixo foi regulado a 12 Hz, apenas o primeiro modo é amortecido. No entanto, apesar de se observar a mesma tendência entre os modelos, o modelo numérico subestima a razão de amortecimento. Esse facto deve-se à limitada resolução do analisador dinâmico de sinal que, para uma banda de frequência de 400 Hz, conduz a resultados pouco precisos nas zonas próximas das frequências de ressonância. Dessa forma, a determinação da razão de amortecimento pelo método dos 3dB, fortemente dependente do valor de pico das frequências de ressonância, sobrestima o valor efectivo da razão de amortecimento.

Como referido anteriormente, e por forma a poder otimizar o amortecimento do primeiro modo sem excitar os modos pares, torna-se necessário filtrar o sinal de *feedback*. Nas fig. 6.75-6.78 são apresentadas as funções de resposta em frequência do sistema em malha fechada, para valores do ganho distintos, sem recorrer à filtragem do sinal de *feedback*.

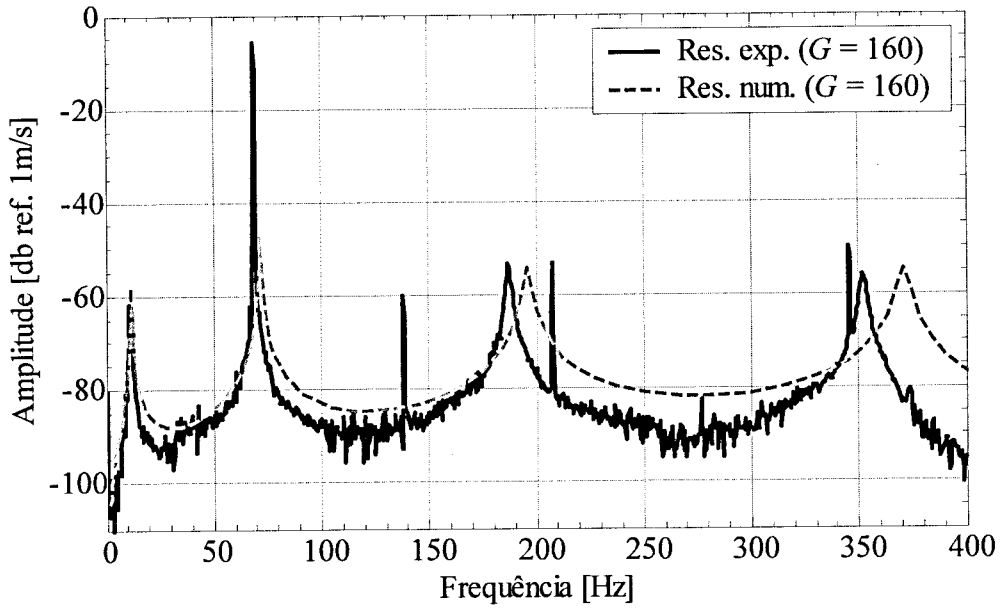


Fig. 6.75 - Função de resposta em frequência entre a velocidade (medida em $x = 385$ mm) e a tensão do actuador em malha fechada para um ganho $G = 160$

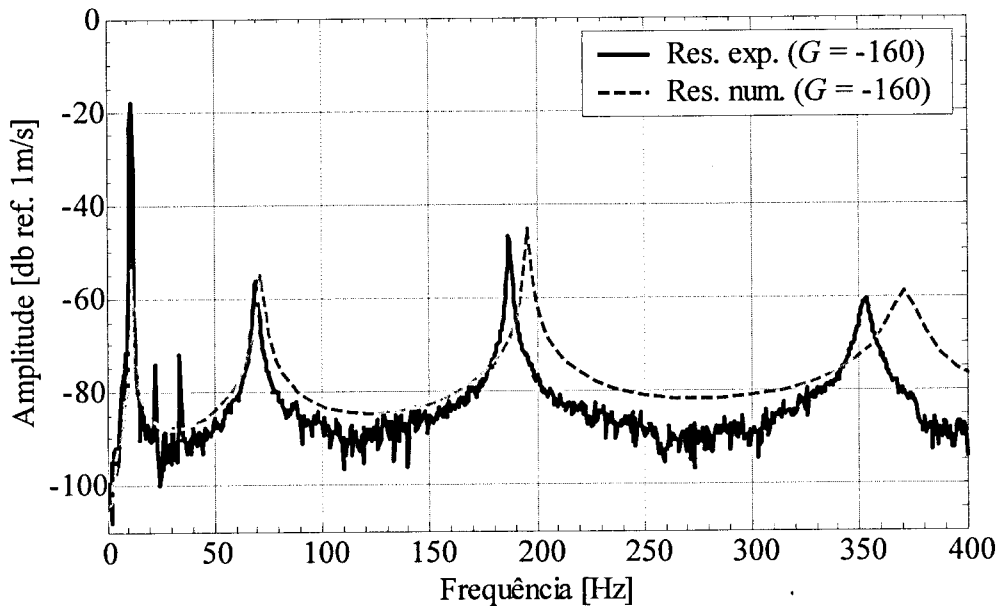


Fig. 6.76 - Função de resposta em frequência entre a velocidade (medida em $x = 385$ mm) e a tensão do actuador em malha fechada para um ganho $G = -160$

Ambos os resultados numéricos e experimentais demonstram que, para valores de ganho positivos crescentes, os modos pares são excitados e os ímpares amortecidos (fig. 6.75 e 6.77). Ao contrário, quando o valor do ganho é negativo, o comportamento oposto é observado (fig. 6.76 e 6.78), confirmando-se, assim, as indicações fornecidas pelo lugar geométrico das raízes do sistema em malha fechada.

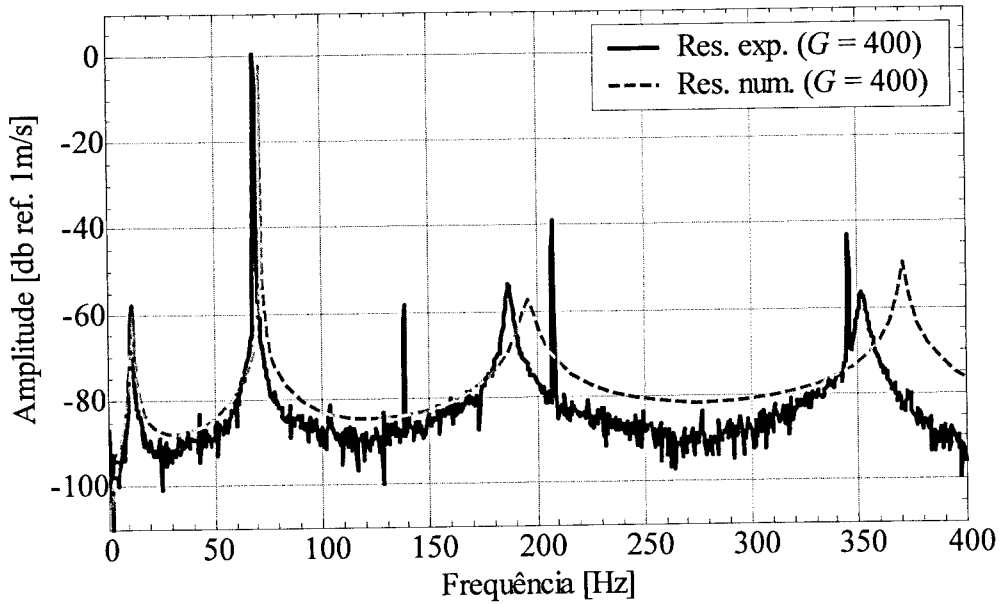


Fig. 6.77 - Função de resposta em frequência entre a velocidade (medida em $x = 385$ mm) e a tensão do actuador em malha fechada para um ganho $G = 400$

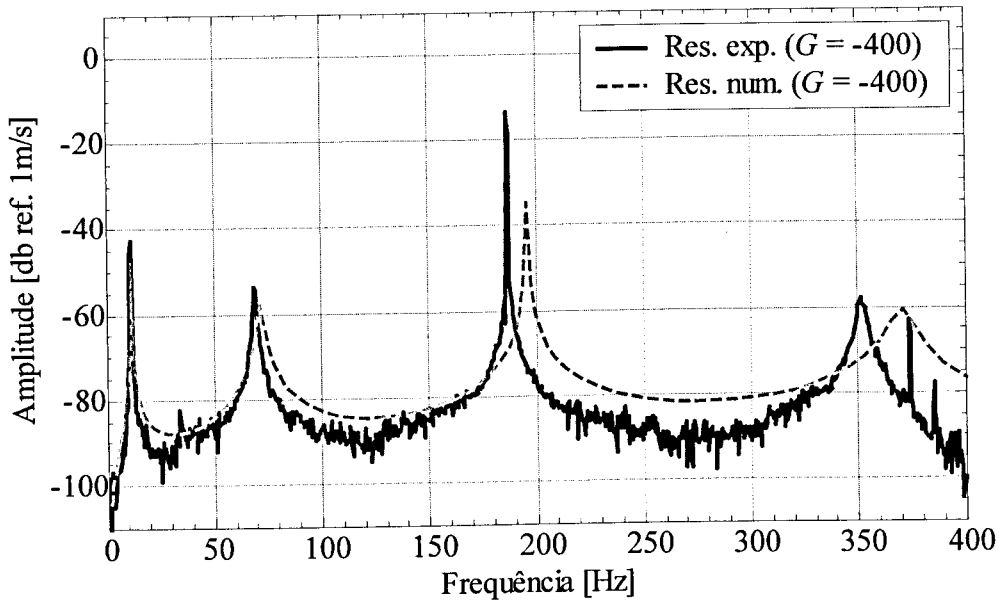


Fig. 6.78 - Função de resposta em frequência entre a velocidade (medida em $x = 385$ mm) e a tensão do actuador em malha fechada para um ganho $G = -400$

6.4.4.2 Resultados - Resposta em Regime Livre

As respostas (velocidade) em regime livre, medidas a 15 mm da extremidade livre, para um campo de deslocamento inicial correspondente a uma flecha de 5 mm da viga no ponto de medição do transdutor laser, são apresentadas nas fig. 6.79-6.82. Na fig. 6.79 é apresentada a

resposta em malha aberta determinada com o modelo experimental e numérico. Os dois resultados apresentam uma boa concordância entre si.

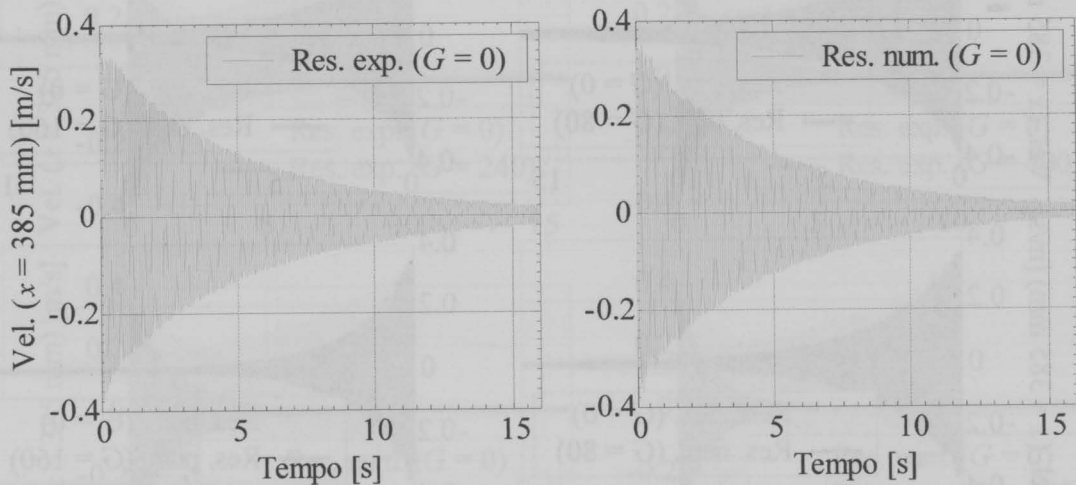


Fig. 6.79 - Resposta em regime livre do sistema em malha aberta determinada com o modelo experimental e numérico

Da mesma forma que na secção anterior, um filtro passa-baixo, regulado a 12 Hz, foi utilizado no modelo experimental e numérico de controlo. As respostas em malha fechada, obtidas para diferentes valores do ganho, são apresentadas nas fig. 6.80, 6.81 e 6.82. As tensões de controlo para os diferentes valores de ganho, determinadas numericamente, são também apresentadas nessas figuras.

Para os diferentes valores de ganho é observada uma pequena diferença entre as respostas experimentais e numéricas. Essa diferença, independente do valor do ganho, deve-se à implementação do filtro passa-baixo. Por um lado, no modelo experimental, a eficiência do filtro não é perfeita, e o corte das componentes harmónicas do sinal de *feedback* superiores a 12 Hz é realizado de uma forma aproximada. No entanto, no modelo numérico, esse filtro é modelizado de uma forma exacta. Dessa forma, o modelo numérico reflecte condições óptimas de funcionamento, difíceis de obter experimentalmente. Porém, para os mesmos valores de ganho de controlo, ambos os modelos apresentam comportamentos idênticos.

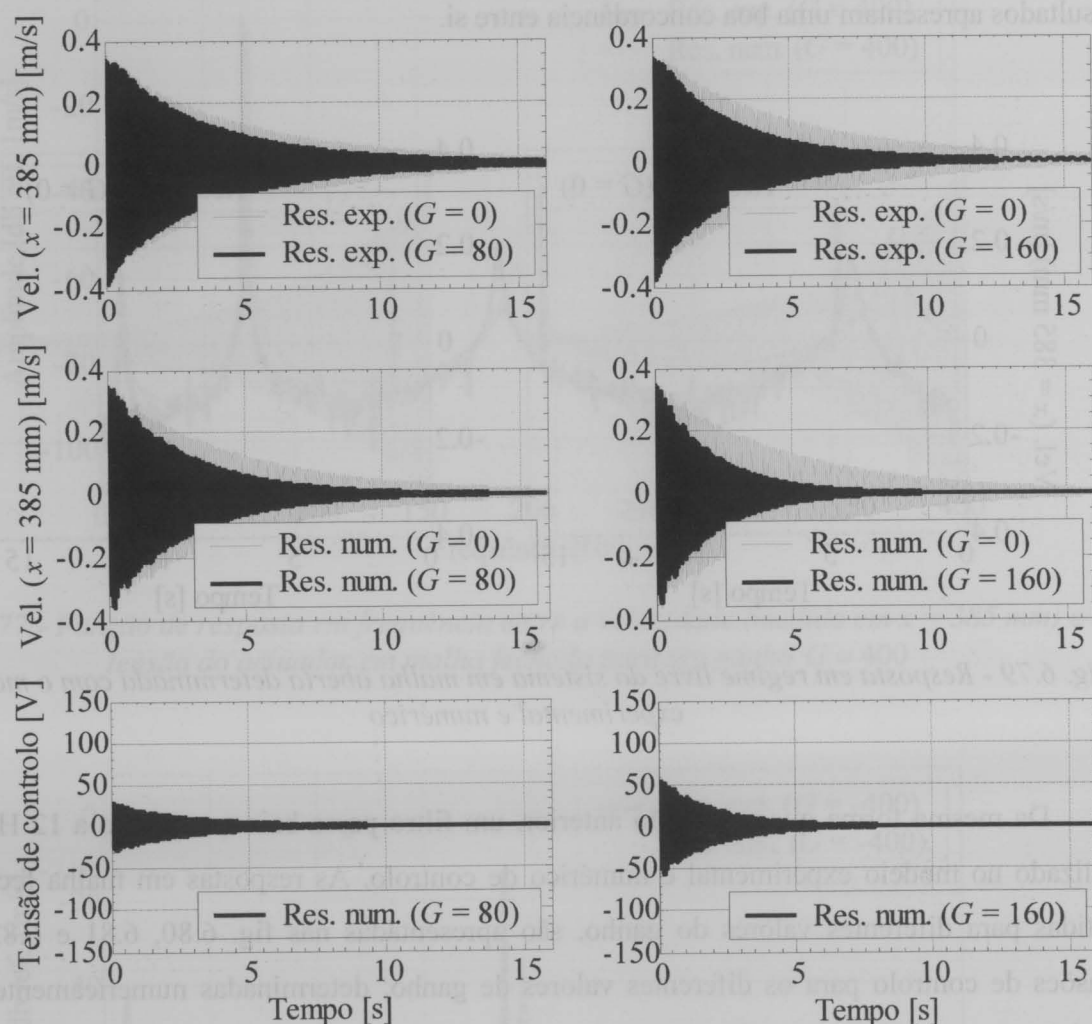


Fig. 6.80 - Resposta em regime livre (numérica e experimental) e tensão de controle (numérica) do sistema em malha fechada filtrado para os valores de ganho $G = 80, 160$

Note-se que a tensão de controle, proporcional à velocidade da viga no ponto de medição, aumenta com o valor do ganho. No ensaio experimental, a tensão de alimentação, limitada pela tensão máxima do amplificador (± 150 V), foi regulada para ± 120 V. No entanto, para valores de ganho inferiores a cerca de 300, a tensão de controle não ultrapassa o valor regulado. Porém, para valores superiores do ganho, o modelo numérico, sem limitação da tensão de controle, sobrestima o comportamento real, sem que diferenças muito significativas sejam encontradas.

As razões de amortecimento das respostas obtidas com os modelos experimental e numérico, determinadas através do decremento logarítmico para os diferentes valores do ganho de controle, são apresentadas na fig. 6.83.

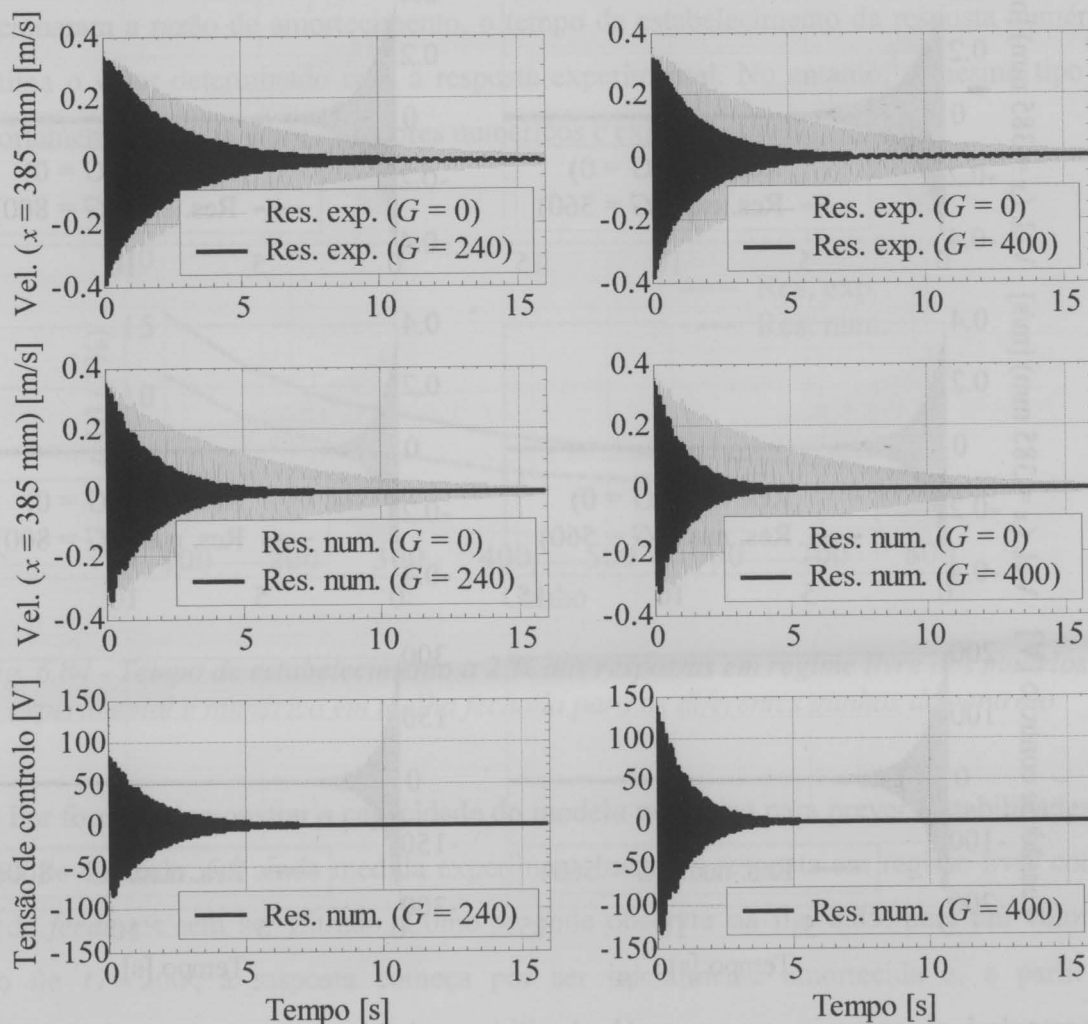


Fig. 6.81 - Resposta em regime livre (numérica e experimental) e tensão de controlo (numérica) do sistema em malha fechada filtrado para os valores de ganho $G = 240, 400$

Pelas razões referidas anteriormente, por um lado a limitação da tensão de controlo e, por outro, a implementação do filtro, em regime livre o modelo numérico sobrestima a razão de amortecimento. Neste caso, a resolução não será um parâmetro tão importante como na função de resposta em frequência, e os resultados são mais influenciados pela implementação experimental do filtro passa-baixo. Com efeito, na obtenção da resposta do modelo experimental foi considerada uma banda de frequência do analisador de 100 Hz, considerada com suficiente resolução para a correcta definição da resposta no tempo. Um comportamento aproximadamente linear, semelhante ao determinado com o modelo numérico, foi obtido com o modelo experimental (fig. 6.83).

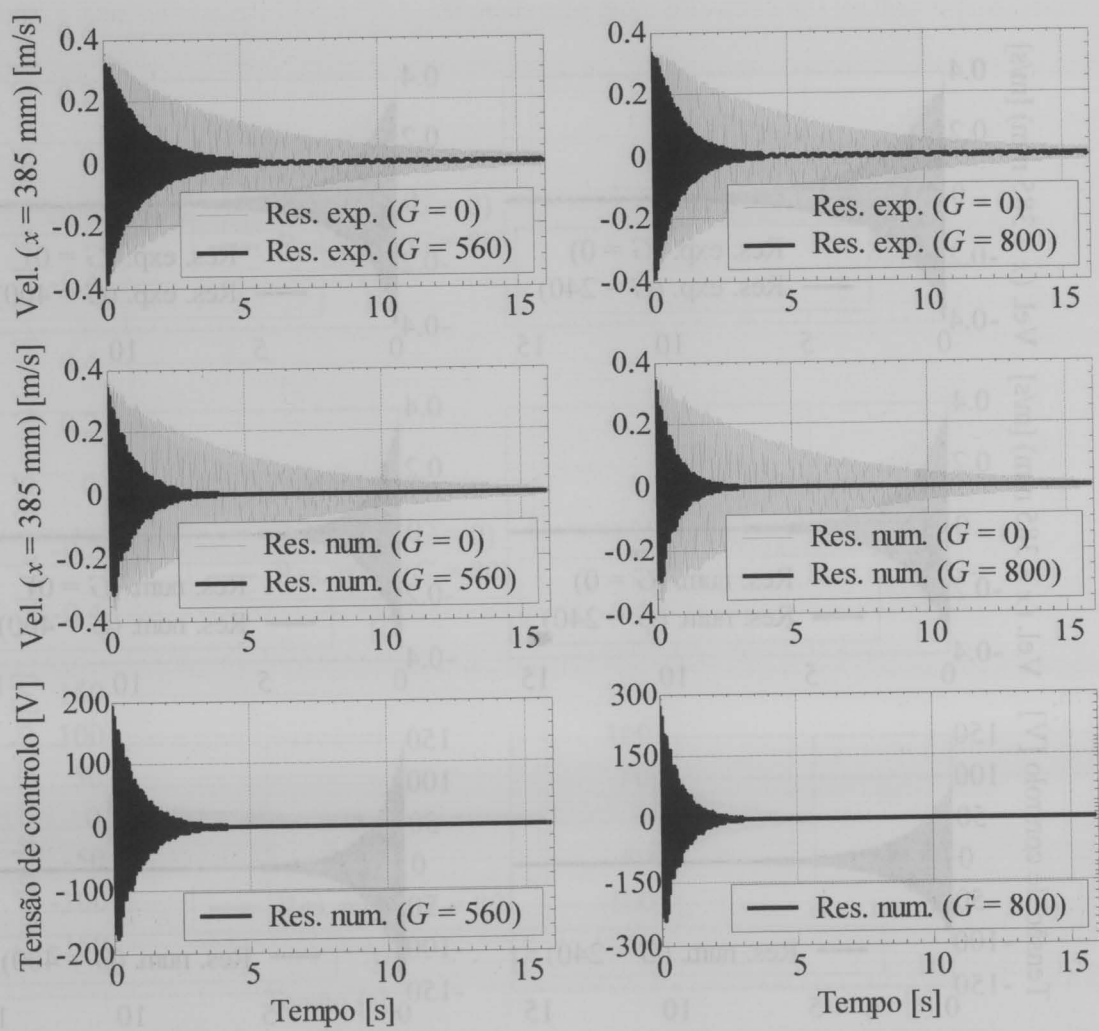


Fig. 6.82 - Resposta em regime livre (numérica e experimental) e tensão de controle (numérica) do sistema em malha fechada filtrado para os valores de ganho $G = 560, 800$

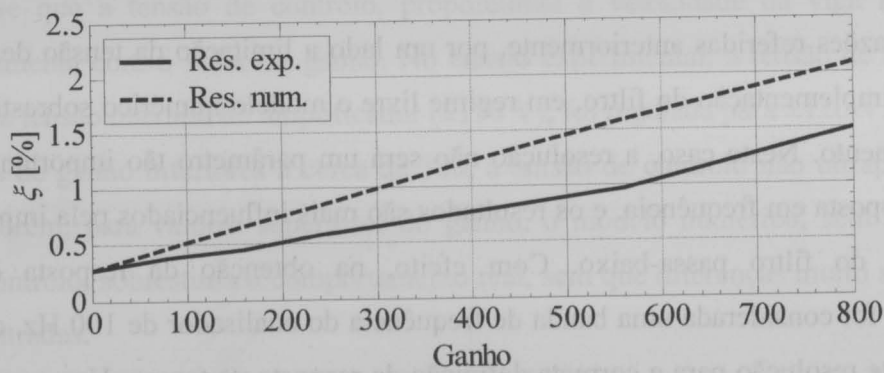


Fig. 6.83 - Razão de amortecimento da resposta em regime livre dos modelos experimental e numérico em malha fechada para os diferentes ganhos de controle

O tempo de estabelecimento a 2% da resposta em regime livre de ambos os modelos, em função do ganho de controlo, é apresentado na fig. 6.84. Pelas mesmas razões que condicionaram a razão de amortecimento, o tempo de estabelecimento da resposta numérica subestima o valor determinado com a resposta experimental. No entanto, o mesmo tipo de comportamento é obtido entre os valores numéricos e experimentais.

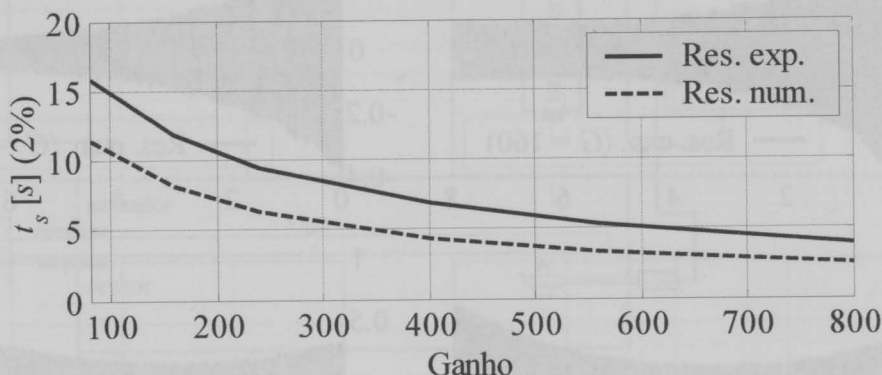


Fig. 6.84 - Tempo de estabelecimento a 2 % das respostas em regime livre dos modelos experimental e numérico em malha fechada para os diferentes ganhos de controlo

Por forma a demonstrar a capacidade do modelo numérico para prever instabilidades no sistema de controlo, foi ainda medida experimentalmente a resposta em regime livre com o sinal de *feedback* sem ser filtrado. Como se pode observar na fig. 6.85, para um valor de ganho de $G = 200$, a resposta começa por ser inicialmente amortecida e, a partir de determinado instante, começa a ser desestabilizada. Uma vez que o campo de deslocamento inicial aplicado excita fundamentalmente o primeiro modo, a resposta, na fase inicial, corresponde maioritariamente à contribuição do primeiro modo. Assim, ao mesmo tempo que o primeiro modo começa a ser amortecido, o segundo modo, menos controlável (ver fig. 6.65), começa a ser excitado, até que a viga entra em ressonância para o segundo modo. Da mesma forma, para valores de ganho superiores, o primeiro modo é amortecido, mas mais rapidamente o segundo modo é desestabilizado. Uma vez que a tensão de controlo não pode crescer indefinidamente (limitada a ± 120 V), note-se na fig. 6.85 que a resposta experimental para o valor de ganho $G = 240$, contrariamente à resposta numérica, estabiliza com uma amplitude de cerca de 0.75 m/s.

Ao longo das secções anteriores, por comparação entre os resultados numéricos e experimentais, demonstrou-se que o modelo numérico proposto permite modelizar os sistemas de controlo com um considerável rigor. O modelo numérico proposto constitui, assim, uma ferramenta particularmente interessante na antevisão e resolução de eventuais

instabilidades, permitindo, numa fase de concepção do sistema de controlo, analisar e definir a melhor solução para o controlo activo de vibrações. Dessa forma, a implementação experimental é facilitada e a sua performance melhorada.

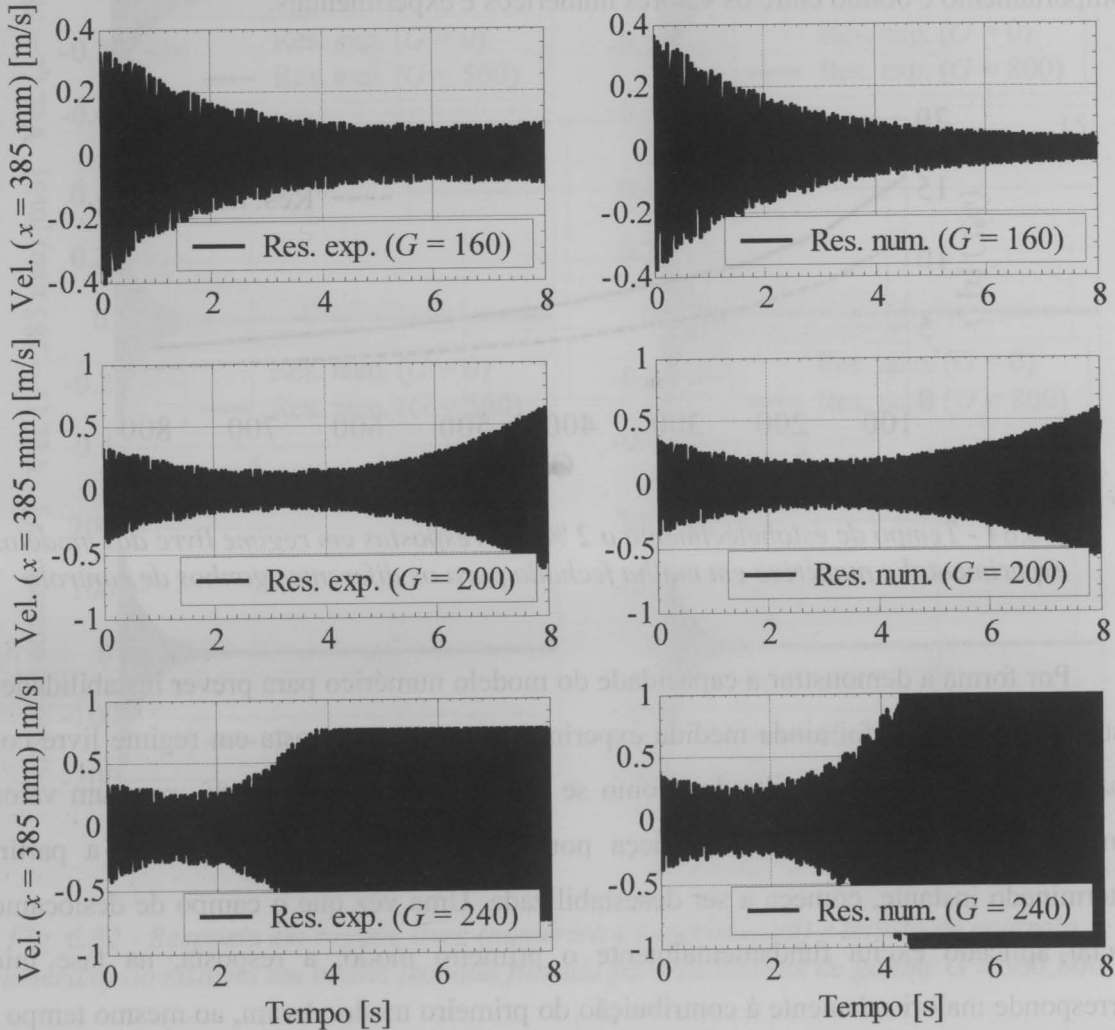


Fig. 6.85 - Resposta em regime livre (numérica e experimental) e tensão de controlo (numérica) do sistema em malha fechada para os valores de ganho $G = 160, 200$ e 240

6.4.5 Controlo Activo de Vibrações com Feedback do Deslocamento

Para a implementação experimental do sistema de controlo com *feedback* do deslocamento, uma das cerâmicas piezoeléctricas foi utilizada como sensor e a outra como actuador. Assim, o sinal induzido no sensor é utilizado como sinal de *feedback*. Esse sinal, proporcional às deformações e/ou deslocamentos mecânicos, é filtrado e amplificado antes de ser aplicado ao actuador (ver fig. 6.86).

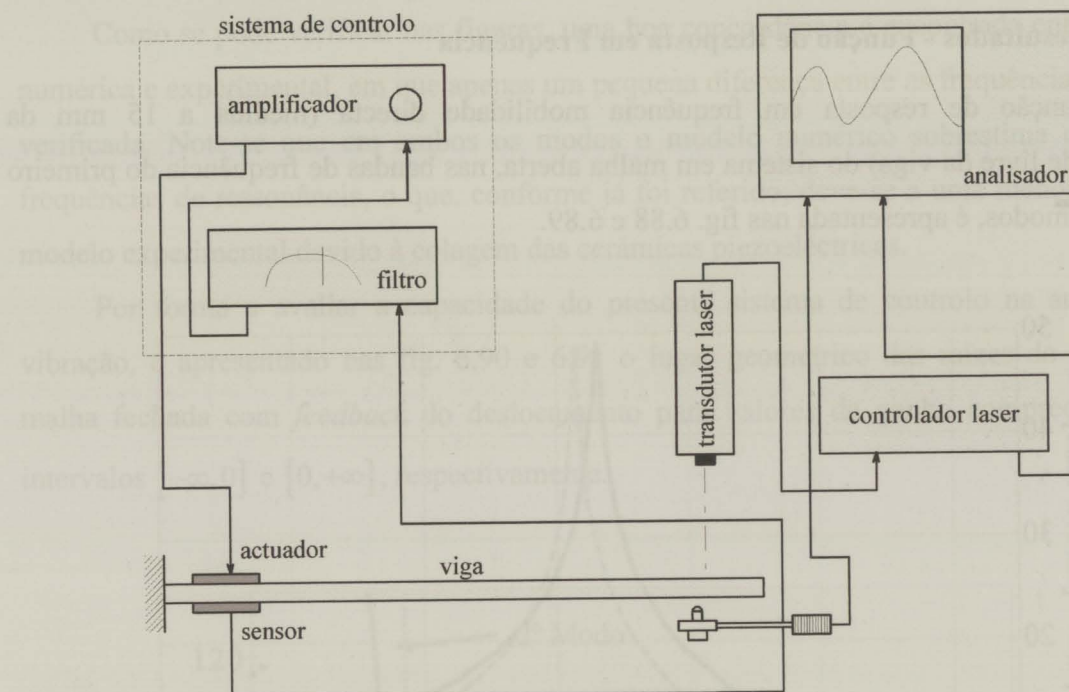


Fig. 6.86 - Esquema representativo da montagem experimental do sistema de controlo por feedback do deslocamento

O equipamento utilizado no ensaio é o mesmo que foi referido nas secções anteriores (fig. 6.60). No entanto, no sistema de controlo com *feedback* da velocidade, as duas cerâmicas piezoeléctricas eram utilizadas como actuadores, em que uma excitava a viga e a outra era utilizada no controlo activo de vibrações. Neste caso, uma vez que uma das cerâmicas funciona como sensor e a outra como actuador, é utilizado um martelo de impacto Brüel & Kjær - 8203 (fig. 6.87) para a excitação da estrutura em regime forçado.

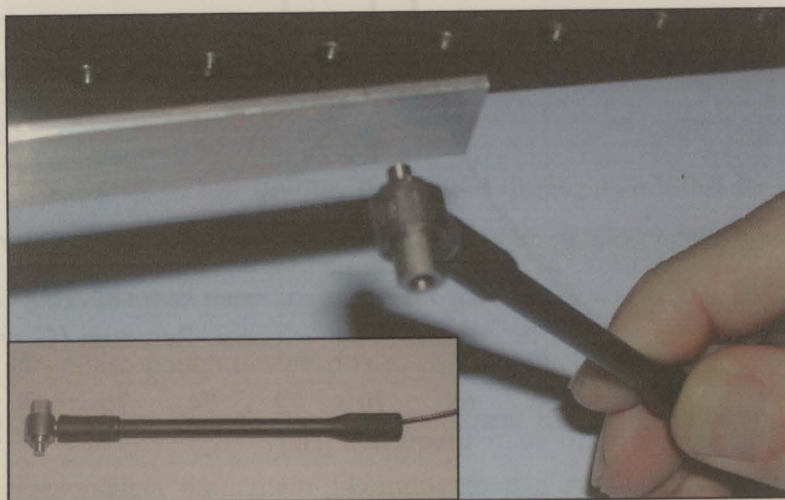


Fig. 6.87 - Martelo de impacto Brüel & Kjær - 8203

6.4.5.1 Resultados - Função de Resposta em Frequência

A função de resposta em frequência mobilidade directa (medida a 15 mm da extremidade livre da viga) do sistema em malha aberta, nas bandas de frequência do primeiro e segundo modos, é apresentada nas fig. 6.88 e 6.89.

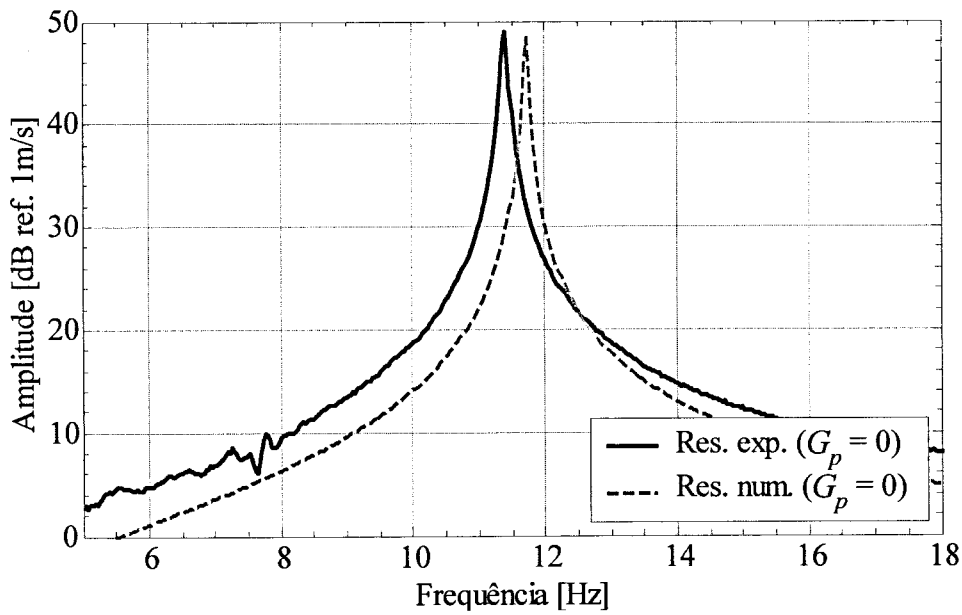


Fig. 6.88 - Função de resposta em frequência mobilidade directa (a 15 mm da extremidade livre da viga) do sistema em malha aberta: 1º modo

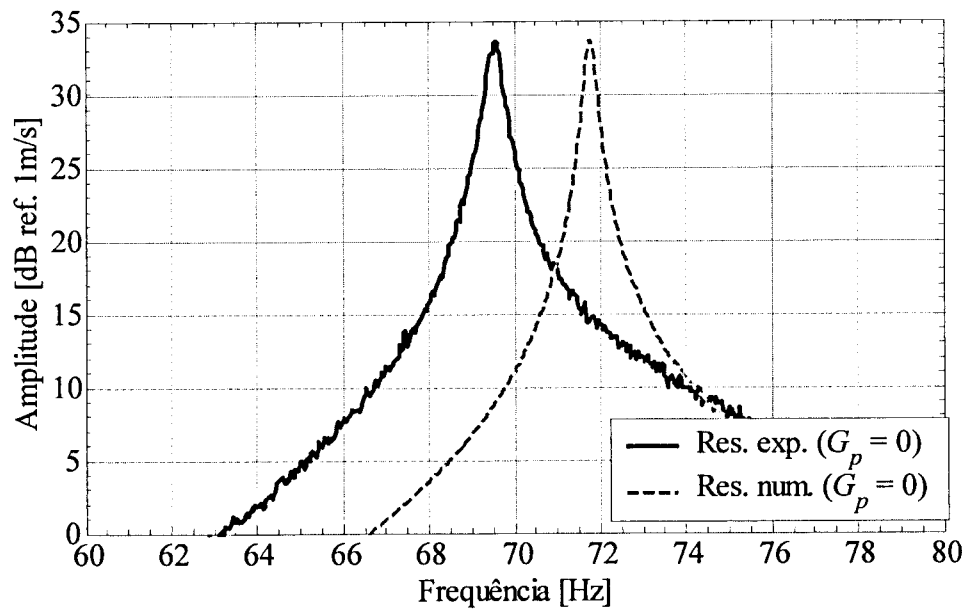


Fig. 6.89 - Função de resposta em frequência mobilidade directa (a 15 mm da extremidade livre da viga) do sistema em malha aberta: 2º modo

Como se pode verificar nas figuras, uma boa concordância é encontrada entre a função numérica e experimental, em que apenas uma pequena diferença entre as frequências naturais é verificada. Note-se que em ambos os modos o modelo numérico sobrestima o valor das frequências de ressonância, o que, conforme já foi referido, deve-se a uma menor rigidez do modelo experimental devido à colagem das cerâmicas piezoelétricas.

Por forma a avaliar a capacidade do presente sistema de controlo na supressão da vibração, é apresentado nas fig. 6.90 e 6.91 o lugar geométrico das raízes do sistema em malha fechada com *feedback* do deslocamento para valores de ganho compreendidos nos intervalos $[-\infty, 0]$ e $[0, +\infty]$, respectivamente.

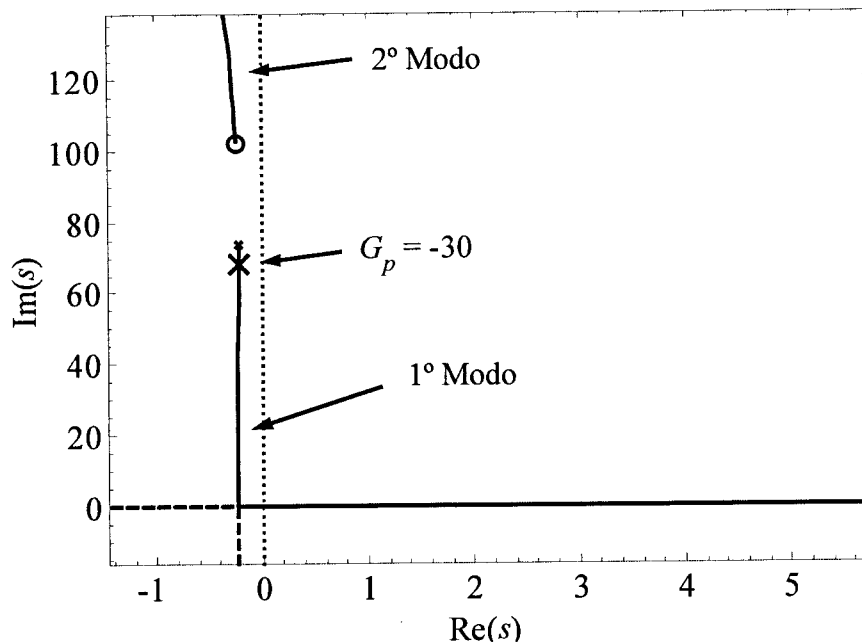


Fig. 6.90 - Lugar geométrico das raízes do sistema em malha fechada com *feedback* do deslocamento para ganhos compreendidos no intervalo $[-\infty, 0]$

Como se pode verificar nas figuras, o segundo modo, para todos os valores do ganho, nunca é desestabilizado. Porém, para valores elevados de ganho negativo, o primeiro modo é desestabilizado. Note-se que, para um valor do ganho $G_p = -30$, os pólos do sistema em malha fechada são muito pouco deslocados e, conseqüentemente, a razão de amortecimento aumenta muito pouco e as frequências de ressonância diminuem. Porém, para $G_p = 30$ as frequências de ressonância aumentam ligeiramente e a razão de amortecimento, embora diminua, é muito pouco alterada.

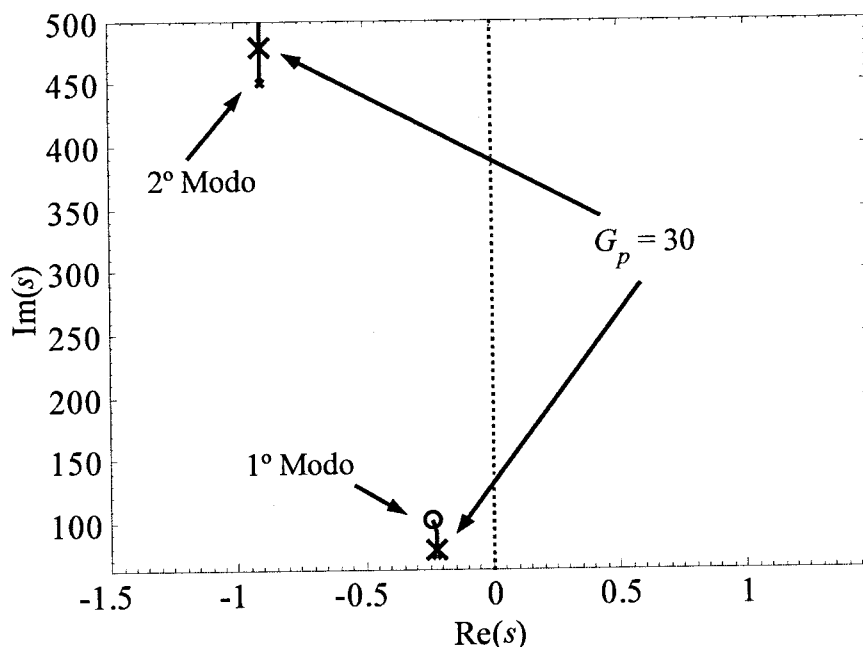


Fig. 6.91 - Lugar geométrico das raízes do sistema em malha fechada com feedback do deslocamento para ganhos compreendidos no intervalo $[0, +\infty]$

Este sistema de controlo, como referido anteriormente (ver §6.3.1), é pouco eficiente no controlo activo de vibrações. Os seus principais efeitos são a alteração do valor das frequências de ressonância sem que uma significativa diferença da razão de amortecimento seja observada. No entanto, no ensaio experimental realizado, um considerável aumento da razão de amortecimento foi observado.

No ensaio experimental a análise incidiu apenas sobre os dois primeiros modos, limitando-se a banda de frequência a 100 Hz. Para o primeiro modo, o filtro passa-baixo foi regulado a 12 Hz, e para o segundo, o filtro passa-banda foi regulado para 65-75 Hz. Os resultados numéricos e experimentais obtidos são apresentados nas fig. 6.90-6.93.

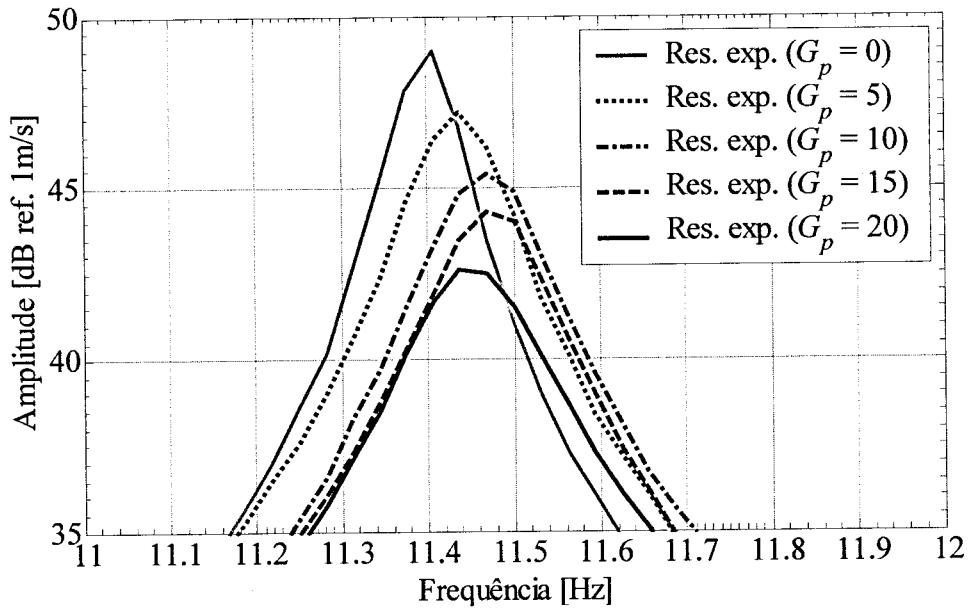


Fig. 6.92 - Função de resposta em frequência mobilidade directa (a 15 mm da extremidade livre da viga) do sistema em malha fechada: 1º modo - resultados experimentais

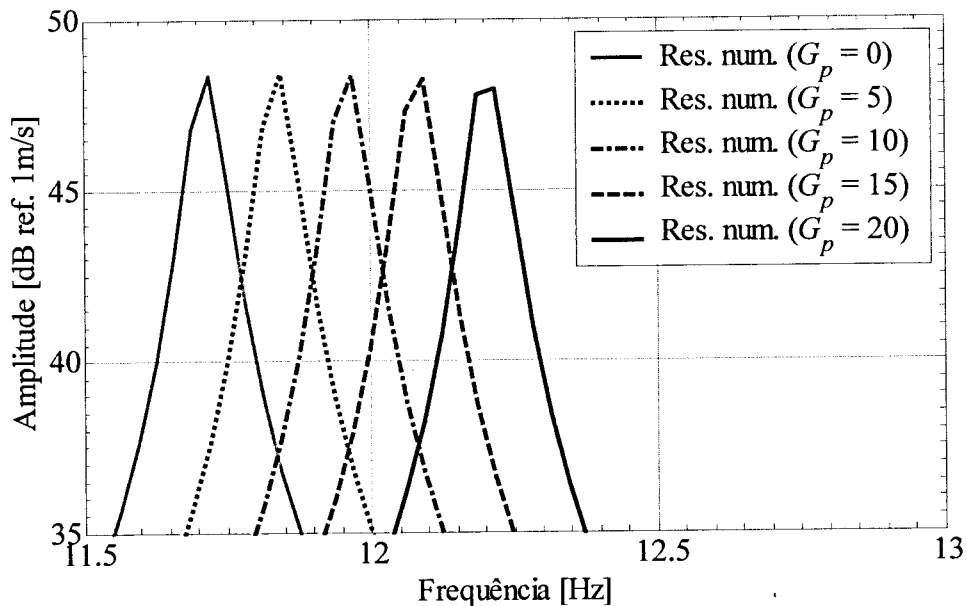


Fig. 6.93 - Função de resposta em frequência mobilidade directa (a 15 mm da extremidade livre da viga) do sistema em malha fechada: 1º modo - resultados numéricos

Como se pode observar nas fig. 6.92 e 6.93, ambos os resultados experimentais e numéricos demonstram que com o aumento do ganho (positivo) as frequências de ressonância do 1º modo aumentam.

No ensaio experimental verificou-se que a polaridade inversa do sinal de *feedback* resultava num maior amortecimento do segundo modo. Assim, foi utilizada uma polaridade

inversa à utilizada para o primeiro modo na obtenção dos resultados experimentais e numéricos para o segundo modo. Contrariamente ao primeiro modo, verifica-se em ambos os resultados (fig. 6.94 e 6.95) uma diminuição das frequências de ressonância com o aumento do ganho (negativo).

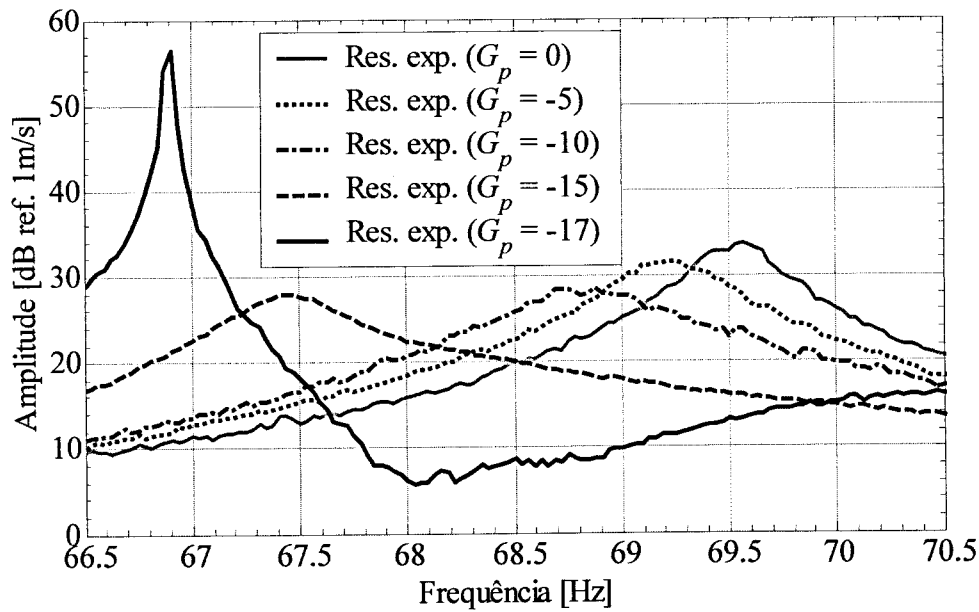


Fig. 6.94 - Função de resposta em frequência mobilidade directa (a 15 mm da extremidade livre da viga) do sistema em malha fechada: 2º modo - resultados experimentais

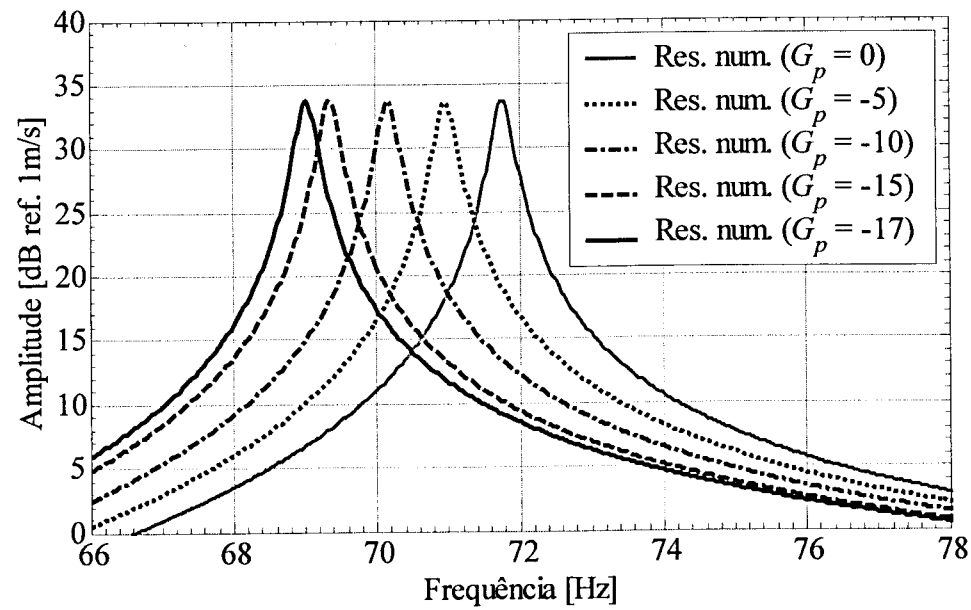


Fig. 6.95 - Função de resposta em frequência mobilidade directa (a 15 mm da extremidade livre da viga) do sistema em malha fechada: 2º modo - resultados numéricos

Assim, da comparação dos resultados experimentais e numéricos constata-se que a alteração das frequências de ressonância é observada nos dois modelos, conforme previsto pelo lugar geométrico das raízes do sistema em malha fechada. Porém, a razão de amortecimento do modelo numérico subestima consideravelmente a do modelo experimental (fig. 6.96 e 6.97) para ambos os modos.

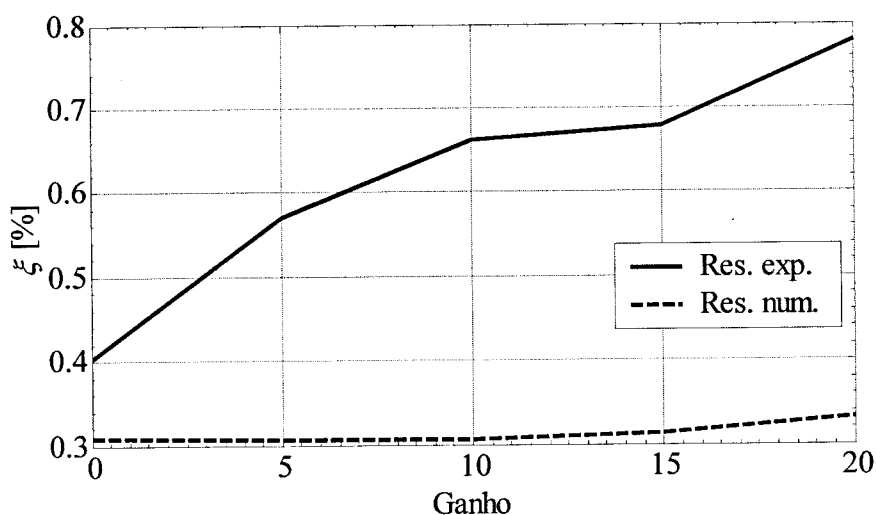


Fig. 6.96 - Razão de amortecimento do 1º modo do sistema em malha fechada com feedback do deslocamento (resultados experimentais vs. numéricos)

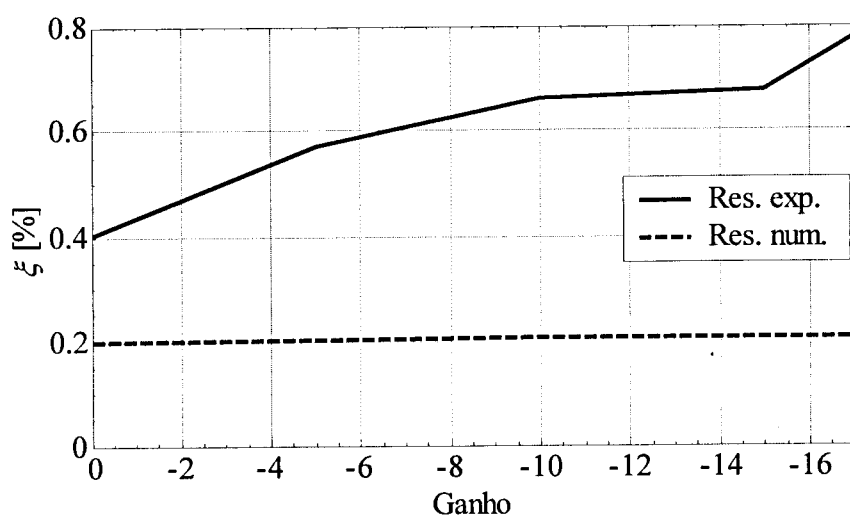


Fig. 6.97 - Razão de amortecimento do 2º modo do sistema em malha fechada com feedback do deslocamento (resultados experimentais vs. numéricos)

A justificação desse facto prende-se, por um lado, com o efeito do filtro passa-baixo, e por outro, com a limitação da tensão de controlo aplicada, regulada a ± 120 V. Com efeito,

durante a realização do ensaio experimental verificou-se uma grande sensibilidade dos resultados ao ajuste da frequência de corte do filtro. Note-se igualmente que neste sistema de controlo a energia despendida no controlo é bastante elevada. Dessa forma, durante os intervalos de tempo em que a tensão de controlo solicitada é superior a ± 120 V, o amplificador utilizado fornece ao actuador um sinal contínuo de valor ± 120 V. Esses dois efeitos mostraram, na aplicação em causa, serem os responsáveis pela introdução de amortecimento no sistema, não contemplada no modelo numérico. No entanto, apesar de se terem obtido resultados experimentais convenientes, a sua justificação assenta nalguma incerteza do funcionamento do filtro passa-baixo e do amplificador, uma vez que quando o sistema de controlo é considerado sem o filtro, são obtidos resultados semelhantes aos do modelo numérico.

6.4.5.2 Resultados - Resposta em Regime Livre

A resposta em regime livre com o sistema em malha fechada, obtida para diferentes valores do ganho e com o filtro passa baixo regulado a 12 Hz, é apresentada nas fig. 6.98 e 6.99. A tensão de controlo para os diferentes valores de ganho, determinada numericamente, é também apresentada nessas figuras.

Da mesma forma que na resposta em frequência, a resposta experimental em regime livre apresenta um significativo amortecimento face à numérica. Refira-se que a tensão de controlo, mesmo para o valor de ganho mais baixo, ultrapassa a tensão de controlo limite (fig. 6.98), atingindo para o valor de ganho $G_p = 30$ um valor máximo de cerca de 750 V (fig. 6.99), situação essa que é incomportável experimentalmente. Dessa forma, o algoritmo de controlo experimental efectivo é desconhecido, e uma correspondência entre os dois resultados não pode ser efectuada uma vez que se trata de algoritmos distintos.

Na fig. 6.100 é apresentada a razão de amortecimento do sistema em malha fechada para os vários ganhos de controlo. As razões de amortecimento dos resultados numéricos sofrem apenas uma alteração mínima e as dos experimentais aumentam significativamente. No entanto, relativamente às razões de amortecimento obtidas com o *feedback* da velocidade, o seu valor é inferior enquanto que o esforço de controlo é superior.

Finalmente, refira-se que também na análise em regime livre se verificou uma grande sensibilidade dos resultados experimentais ao ajuste da frequência de corte do filtro passa-baixo. Assim, e dada a ausência de resultados experimentais publicados, o efeito do filtro na eficiência deste sistema de controlo por *feedback* do deslocamento constitui um aspecto a necessitar de maior aprofundamento.

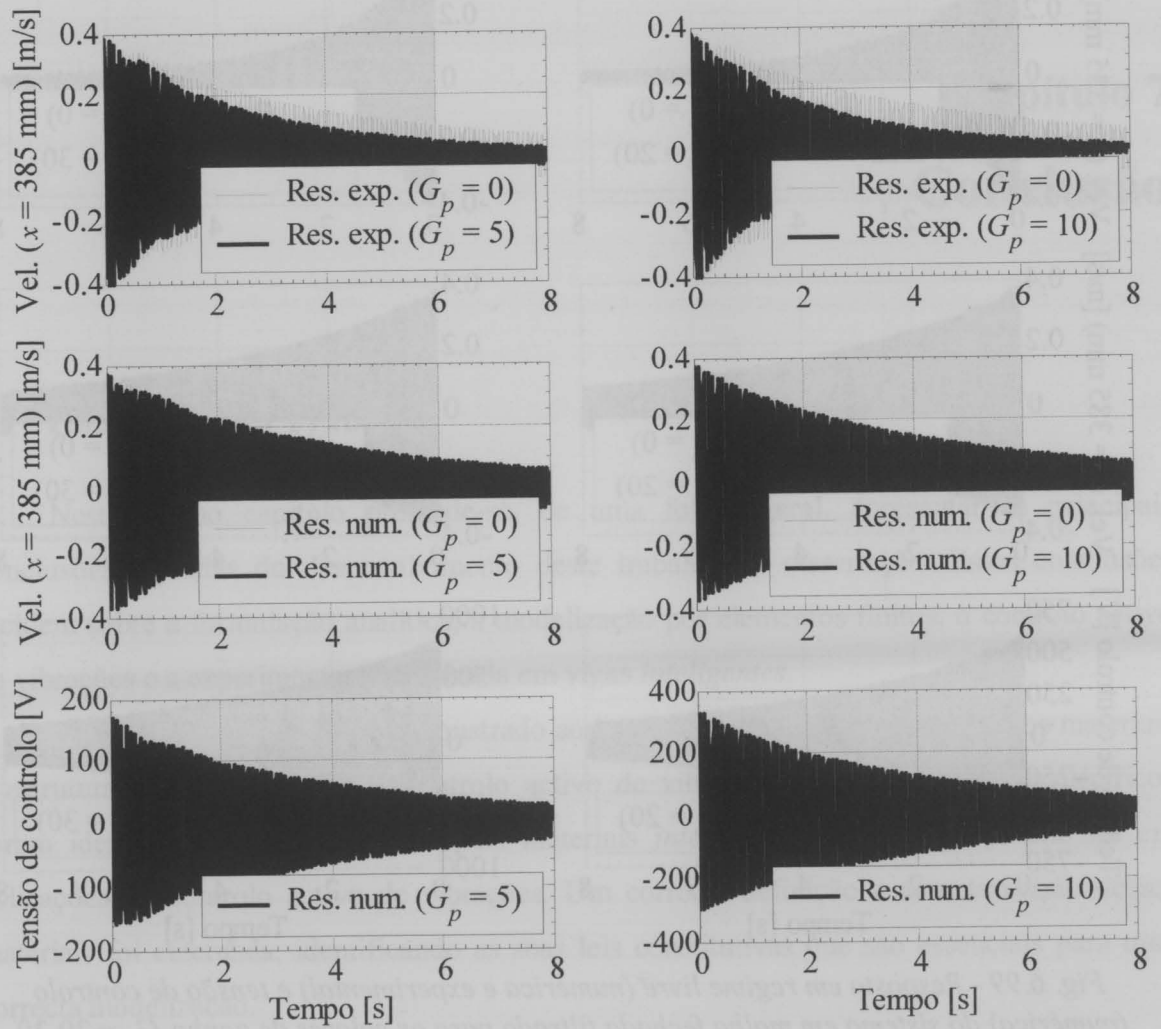


Fig. 6.98 - Resposta em regime livre (numérica e experimental) e tensão de controle (numérica) do sistema em malha fechada filtrado para os valores de ganho $G_p = 5, 10$

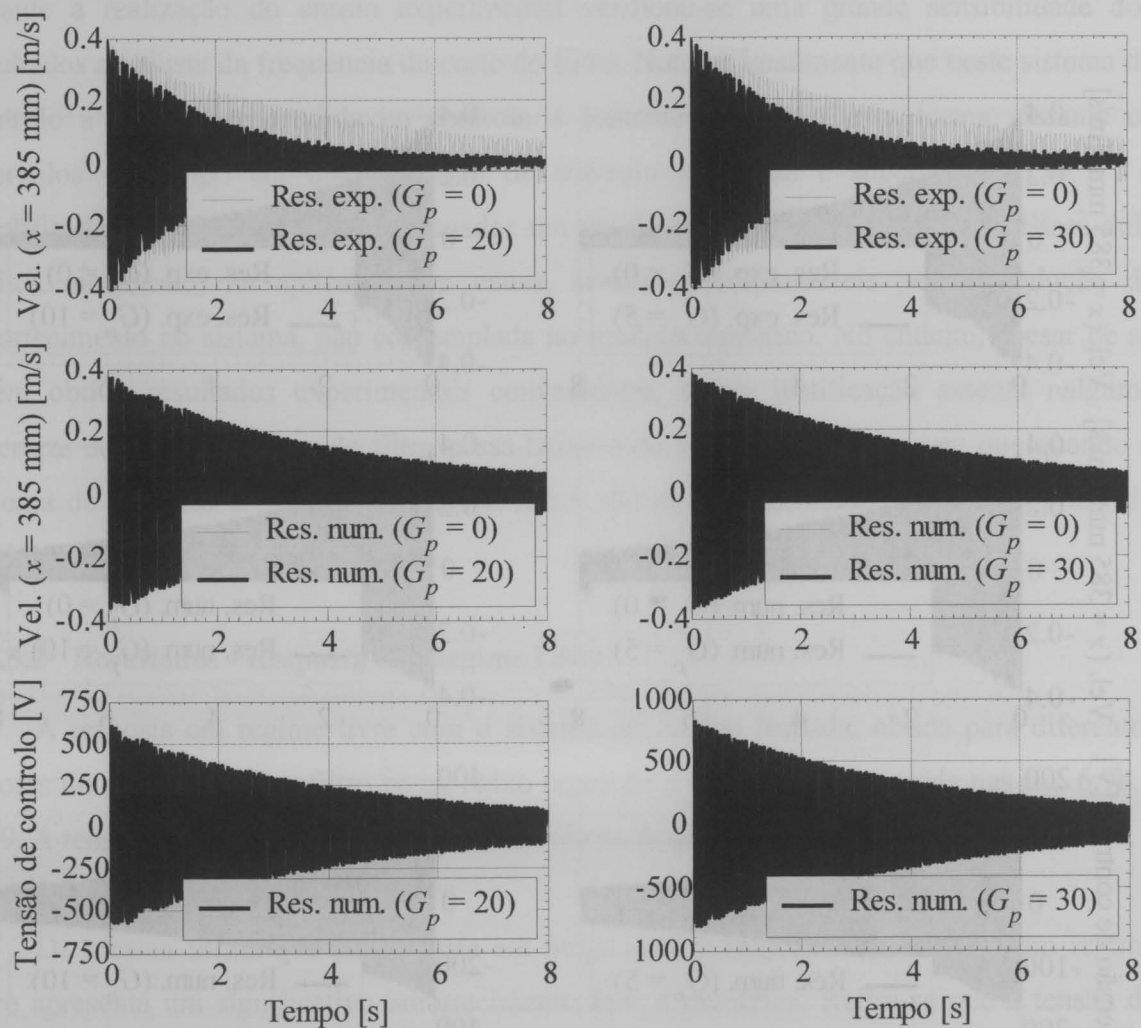


Fig. 6.99 - Resposta em regime livre (numérica e experimental) e tensão de controle (numérica) do sistema em malha fechada filtrado para os valores de ganho $G_p = 20, 30$

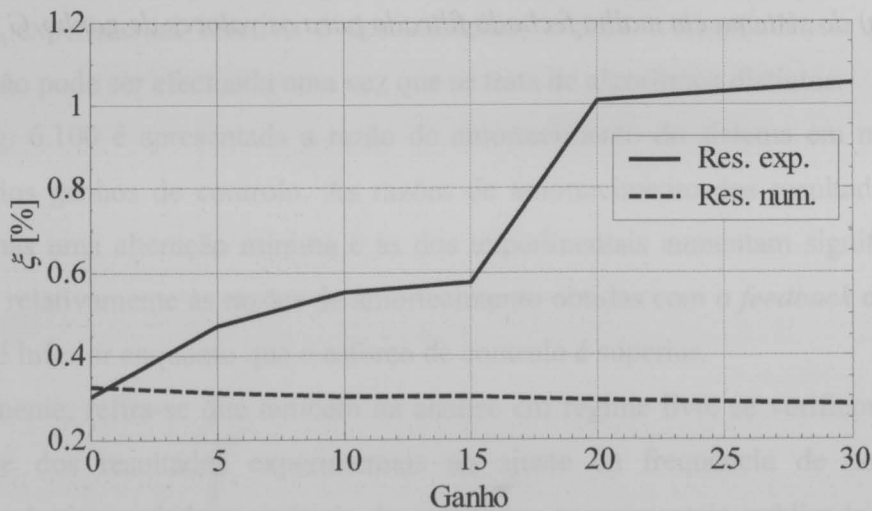


Fig. 6.100 - Razão de amortecimento da resposta em regime livre do sistema em malha fechada com feedback do deslocamento para os diferentes ganhos de controle

Capítulo 7

Conclusão

7.1 Conclusões do Trabalho

Neste último capítulo pretende-se, de uma forma geral, apresentar as principais conclusões retiradas do desenvolvimento deste trabalho de dissertação. Essas conclusões incidem sobre a formulação analítica, a modelização por elementos finitos, o controlo activo de vibrações e a experimentação realizada em vigas *inteligentes*.

De um modo geral, ficou demonstrado ao longo deste trabalho o interesse dos materiais e estruturas *inteligentes* para o controlo activo de vibrações. Os materiais piezoeléctricos foram identificados como os principais materiais *inteligentes* utilizados hoje em dia em aplicações de controlo activo de vibrações. Uma correcta definição e caracterização desses materiais foi efectuada, identificando as suas leis constitutivas que são essenciais para uma correcta modelização.

Uma formulação teórica de uma viga *inteligente* de três camadas com duas camadas piezoeléctricas foi apresentada, a qual permitiu identificar as alterações de rigidez devidas ao efeito piezoeléctrico directo para diferentes condições de fronteira eléctricas: camadas com eléctrodos em circuito fechado e circuito aberto, e camadas sem eléctrodos. Constatou-se que essas alterações de rigidez podem ser facilmente incluídas no modelo mecânico através de parâmetros efectivos de rigidez, sendo o acoplamento piezoeléctrico considerado de forma rigorosa. Além disso, verificou-se que a condição de eléctrodos em circuito fechado é pouco influenciada pelo acoplamento electromecânico, ao contrário das outras condições de fronteira eléctricas.

O elemento finito apresentado demonstrou, através da comparação de resultados publicados na literatura e de resultados experimentais, uma elevada robustez e fiabilidade na obtenção das respostas mecânica e eléctrica de vigas *inteligentes* com diferentes condições de fronteira eléctricas e mecânicas. Foi demonstrado que, contrariamente à forma como aparece

normalmente referido na literatura, existe uma diferença significativa nas respostas mecânica e eléctrica entre as condições de fronteira eléctricas com eléctrodos em circuito aberto e sem eléctrodos. A condição de área equipotencial dos eléctrodos foi respeitada e resultados mais precisos foram obtidos para a condição de eléctrodos em circuito aberto. A influência do campo eléctrico axial induzido, normalmente desprezada na literatura, foi também considerada e a sua relevância demonstrada. Dessa forma, o elemento finito apresentado contabiliza na sua formulação, de forma rigorosa, os efeitos electromecânicos em vigas com sensores e actuadores contínuos ou segmentados.

Os algoritmos de controlo por *feedback* do deslocamento e da velocidade apresentados revelaram-se bastante interessantes no controlo activo de vibrações, embora a sua eficácia seja muito condicionada pela localização dos sensores e actuadores. O *feedback* do deslocamento mostrou-se menos eficiente no controlo activo de vibrações, apenas alterando as frequências de ressonância sem que um amortecimento significativo seja introduzido. No entanto, o tratamento do sinal de *feedback* é mais simples, uma vez que não requer a diferenciação do sinal do sensor piezoeléctrico para a determinação da velocidade.

Duas situações foram consideradas no *feedback* da velocidade. A primeira, a ganho constante, mostrou-se bastante eficaz numa banda larga de frequência com um esforço de controlo relativamente reduzido. Porém, a segunda, a amplitude constante, mostrou-se mais eficiente quando as condições de operação são conhecidas (em aplicações específicas), embora com a agravante do esforço de controlo ser superior.

Os algoritmos de controlo óptimo demonstraram ser mais robustos e mais generalistas que os algoritmos por *feedback*. Além disso, estes algoritmos permitem controlar os modos de vibração independentemente, conferindo uma maior versatilidade ao sistema de controlo. No entanto, problemas como o *spillover* podem tornar-se inconvenientes neste tipo de algoritmos. Além disso, para o seu funcionamento, estes algoritmos necessitam de um modelo do sistema. Por forma a contornar a necessidade do conhecimento de todas as variáveis de estado, necessárias para o funcionamento do LQR, foi implementado o LQG, sendo apenas necessário, para a reconstrução dos estados, efectuada por um filtro de Kalman Bucy, o conhecimento das variáveis de saída e da força de controlo. Os resultados obtidos demonstraram, efectivamente, que os controladores LQR e LQG são mais eficazes que o *feedback* da velocidade. Além disso, para o caso estudado, foi obtida com o controlador LQG, com uma tensão de controlo inferior, uma performance de controlo idêntica à do LQR.

Da análise experimental verificou-se que a colagem das cerâmicas piezoeléctricas condiciona fortemente o desempenho do sistema *inteligente*. Uma correcta colagem deverá

ser efectuada por forma a garantir uma boa transmissibilidade de esforços nas interfaces com a viga. No entanto, uma vez que se torna necessário conectar um fio condutor ao eléctrodo na interface, uma solução para diminuir o afastamento das duas faces foi encontrada através da utilização de uma placa condutora de reduzida espessura que permite uma menor separação das interfaces. Da análise estática concluiu-se que a capacidade de actuação das cerâmicas piezoeléctricas apresenta uma boa concordância com a obtida com o modelo numérico desenvolvido. O sistema de controlo por *feedback* da velocidade, utilizando um transdutor *laser* como sensor, mostrou-se mais eficiente que o controlo com *feedback* do deslocamento. Refira-se que este esquema de controlo permite modificar facilmente o ponto de medição da velocidade para o controlo, ao contrário do sensor piezoeléctrico que se mantém fixo. Além disso, constitui uma solução interessante em certas aplicações em que o contacto com a estrutura não é possível. Com este esquema de controlo, razões de amortecimento consideráveis foram introduzidas na estrutura para um esforço de controlo admissível, quer em regime livre quer em regime forçado. Porém, os resultados numéricos e experimentais mostraram que elevados ganhos de controlo podem desestabilizar os modos superiores. Para evitar este fenómeno pode recorrer-se à filtragem do sinal, por forma a controlar especificamente um determinado modo, tendo sido demonstrado, na aplicação em causa, que esse tipo de controlo é bastante eficiente no amortecimento do primeiro modo.

Além disso, verificou-se ainda nos ensaios experimentais que a implementação desses algoritmos de controlo requer um elevado conhecimento do equipamento utilizado, por forma a assegurar a correcta implementação do algoritmo de controlo. Esse foi o caso do *feedback* do deslocamento que, nas condições experimentais em que foi realizado, apesar de tudo, conseguiu introduzir amortecimento no sistema com uma performance razoável, mas, no entanto, com um esforço de controlo elevado.

Finalmente, o modelo numérico desenvolvido mostrou-se constituir uma ferramenta fiável e precisa na modelização do comportamento electromecânico e na simulação de sistemas de controlo activo de vibrações de vigas com sensores e actuadores piezoeléctricos.

7.2 Originalidades da Tese

As condições de fronteira eléctricas, camadas piezoeléctricas com eléctrodos em circuito aberto e camadas piezoeléctricas sem eléctrodos, são distinguidas e, pela primeira vez, que seja do conhecimento do autor, levadas em consideração na caracterização do modelo eléctrico de elementos finitos de estruturas *inteligentes*. Da mesma forma, a inclusão

de uma forma rigorosa e clara do campo eléctrico induzido pelas deformações de corte no modelo eléctrico, normalmente negligenciada na literatura, constitui outro aspecto inovador deste trabalho. Assim, o modelo de elemento finito de viga *inteligente* apresentado, assente num modelo eléctrico mais refinado, constitui uma novidade na obtenção das respostas mecânica e eléctrica de vigas *inteligentes*.

7.3 Sugestões para Trabalho Futuro

O estudo de técnicas híbridas de controlo de vibrações é uma sugestão bastante interessante para trabalho futuro uma vez que, aliadas a controlabilidade das técnicas activas e a eficiência das técnicas passivas, as técnicas híbridas apresentariam uma maior eficácia e fiabilidade no controlo de vibrações.

No campo da optimização, a integração e implementação de métodos de pesquisa evolucionária para a optimização paramétrica do controlo activo de vibrações constitui uma sugestão extremamente útil, pois permitiria, por exemplo, seleccionar a localização óptima dos sensores e actuadores, e a obtenção de performances melhoradas.

No campo experimental, mais ensaios poderiam ser realizados por forma a validar o modelo de elementos finitos. Novas alternativas de controlo poderiam também ser investigadas com o modelo de elementos finitos apresentado, e testadas experimentalmente. Além disso, a implementação experimental dos algoritmos de controlo LQR e LQG é uma sugestão bastante atractiva.

A divisão das camadas do elemento desenvolvido em sub-camadas com propriedades materiais diferentes permitiria a análise do comportamento electromecânico de laminados com camadas piezoeléctricas.

Por fim, a generalização das teorias e análises efectuadas a outro tipo de estruturas *inteligentes* do tipo placa e casca constitui-se como uma sugestão obrigatória para trabalho futuro.

Referências

- Allik, H. e Hughes, T. J. R., 1970. Finite element method for piezoelectric vibration. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **2**: 151-157.
- Anderson, G. L., Crowson, A. e Chandra, J., 1992. Introduction to Smart Structures. *Intelligent Structural Systems*, ed. H. S. Tzou e G. L. Anderson, Dordrecht: Kluwer, pp. 1-8.
- Anderson, E. H. e Hagoog, N. W., 1994. Simultaneous piezoelectric sensing/actuation: analysis and application to controled structures. *J. Sound Vibr.*, **174**(5): 617-639.
- Ang, K. K., Reddy J. N. e Wang, C. M., 2000. Displacement control of Timoshenko beams via induced strain actuators. *Smart Mater. Struct.*, **9**(6): 981-984.
- Barboni, R., Mannini, A., Fantini, E. e Gaudenzi, P., 2000. Optimal placement of PZT actuators for the control of beam dynamics. *Smart Mater. Struct.*, **9**(1): 110-120.
- Bathe, K., 1982. Finite Element Procedures in Engineering Analysis. Prentice-Hall Inc.
- Baz, A. e Ro, J., 1995. Optimum design and control of active constrained layer damping. *J. Vibr. Acoust.*, **117**(B): 135-144.
- Baz, A., 1998. Robust controlo of active constrained layer damping. *J. Sound Vibr.*, **211**(3): 467-480.
- Benjeddou, A., Trindade, M. A. e Ohayon, R., 1997. A unified beam finite element model for extension and shear piezoelectric actuation mechanisms. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, **8**(12): 1012-1025.
- Benjeddou, A., Trindade, M. A. e Ohayon, R., 1999. New shear actuated smart structure beam finite element. *AIAA J.*, **37**(3): 378-383.

- Benjeddou, A., 2000. Advances in piezoelectric finite element modelling of adaptive structural elements: a survey. *Comp. & Struct.*, **76**(1-3): 347-363.
- Burl, J. B., 1999. *Linear Optimal Control*. Addison Wesley Longman, Inc.
- Crawley, E. F. e de Luis, J., , 1987. Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures. *AIAA J.*, **25**(10): 1373-1385.
- Ewins, D. J., 1984. *Modal Testing: Theory and Practice*. John Wiley & Sons Inc.
- Gaudenzi, P. e Barboni, R., 1999. Static adjustment of beam deflections by means of induced strain actuators. *Smart Mater. Struct.*, **8**(2): 278-283.
- Gmür, T., 1997. *Dynamique des Structures: Analyse Modale Numérique*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne.
- Hiramoto, K., Doki, H. e Obinata, G., 2000. Optimal sensor/actuator placement for active vibration control using explicit solution of algebraic Riccati equation. *J. Sound Vibr.*, **229**(5): 1057-1075.
- Huang, D. e Sun, B., 2001. Approximate analytical solutions of smart composite Mindlin beams. *J. Sound Vibr.*, **244**(3): 379-394.
- Irschik, H. e Krommer, M., 1998. Flexural vibrations of smart beams taking into account the influence of shear, rotatory inertia and coupling to the electric field. *Proc. SPIE 5th Annual Int. Symp. on Smart Structures and Materials, Mathematics and Control in Smart Structures* (San Diego, California), ed. V. V. Varadan, vol. 3323, pp. 180-189.
- Irschik, H., Krommer, M., Belyaev, A. K. e Schlacher, K., 1998. Shaping of piezoelectric sensors/actuators for vibrations of slender beams: coupled theory and inappropriate shape functions. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, **9**(7): 546-554.
- Irschik, H. e Krommer, M. e Pichler, U., 1999. Shaping of distributed piezoelectric sensor for flexural vibrations of smart beams. *Proc. SPIE 6th Annual Int. Symp. on Smart Structures and Materials, Mathematics and Control in Smart Structures* (Newport Beach, California), ed. V. V. Varadan, vol. 3667, pp. 418-426.
- Krommer, M. e Irschik, H., 1999. On the influence of the electric field on free transverse vibrations of smart beams. *Smart Mater. Struct.*, **8**(3): 401-410.
- Krommer, M., 2001. On the correction of the Bernoulli-Euler beam theory for smart

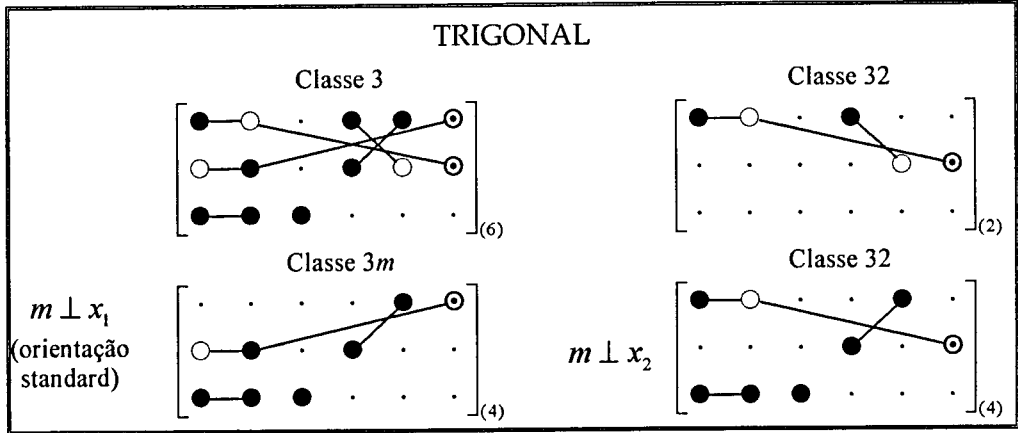
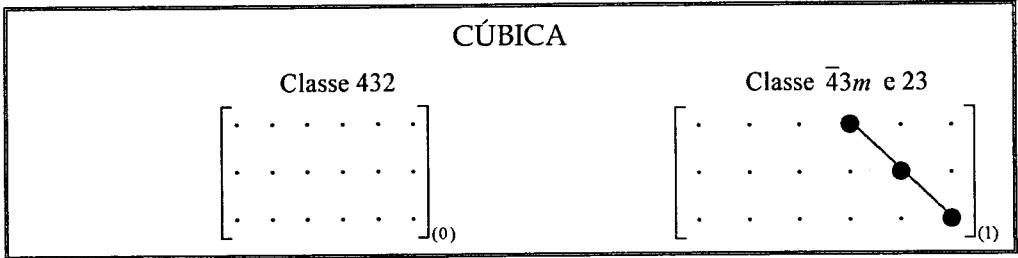
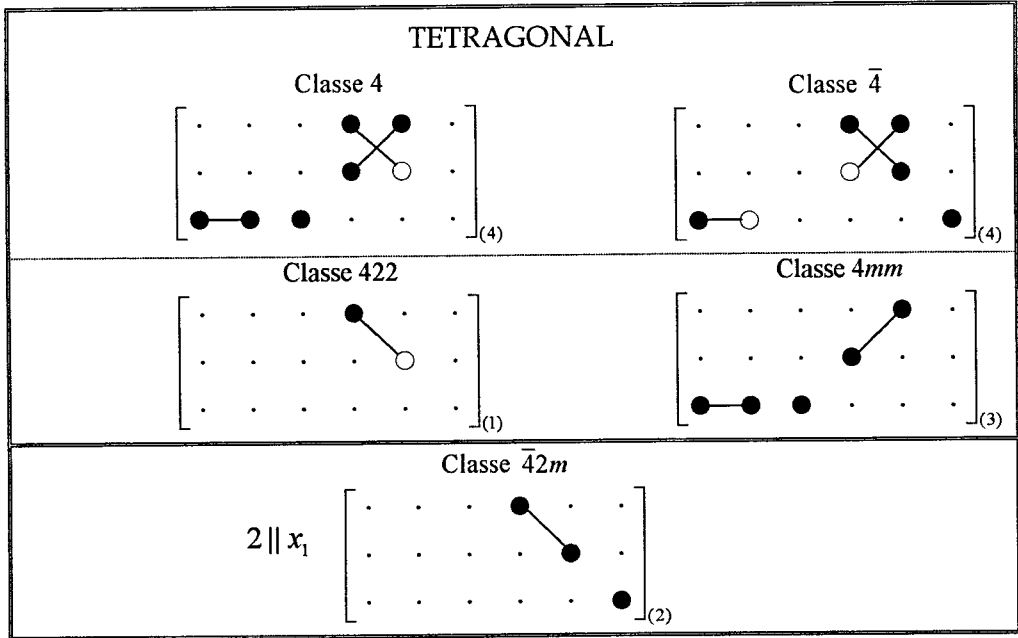
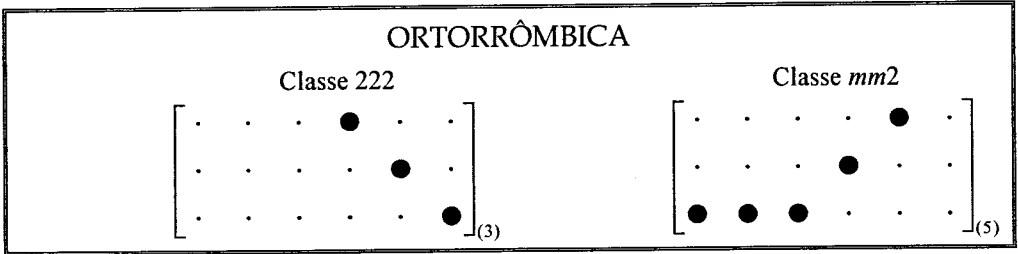
- piezoelectric beams. *Smart Mater. Struct.*, **10**(4): 668-680.
- Lee, C. -K., 1992. Piezoelectric laminates: theory and experiments for distributed sensors and actuators. *Intelligent Structural Systems*, ed. H. S. Tzou e G. L. Anderson, Dordrecht: Kluwer, pp. 75-167.
- Lerch, R., 1990. Simulation of piezoelectric devices by two- and three-dimensional finite elements. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, **37**(3): 233-247.
- Lewis, F. L., 1986. *Optimal Control*. John Wiley & Sons.
- Mitchell, J. A. e Reddy, J. N., 1995. A refined hybrid plate theory for composite laminates with piezoelectric laminae. *Int. J. Solids Struct.*, **32**(16): 2345-2367.
- Moffett, M. B., Clark, A. E., Wun Fogle, M., Linberg, J., Teter, J. P. e Mc Laughlin, E. A., 1991. Characterization of Terfenol-D for magnetostrictive transducers. *Journal of the Acoustical Society of America*, **89**(3): 1448-1445.
- Moreira, R. A. S., 1996. Análise do Comportamento Dinâmico de Placas com Tratamento Passivo por Amortecimento Viscoelástico. Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- Mura, T., 1991. *Micromechanics of Defects in Solids*, 2nd Edition. Dordrecht: Kluwer.
- Nashif, A., Jones, D. e Henderson. J., 1985. *Vibration Damping*. John Wiley & Sons, New York.
- Nye, J. F., 1957. *Physical Properties of Crystals: Their Representation by Tensors and Matrices*, Clarendon Press, Oxford (ed. 1985).
- Pai, P. F., Wen, B., Naser, A. S. e Schulz, M. J., 1998. Structural vibration control using PZT patches and non-linear phenomena. *J. Sound Vibr.*, **215**(2): 273-296.
- Piefort, V., 2001. *Finite Element Modelling of Piezoelectric Active Structures*, Tese de Doutorado, Faculty of Applied Sciences, Université Libre de Bruxelles.
- Preumont, A., 1997. *Vibration Control of Active Structures: An Introduction*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (The Netherlands).
- Raja, S., Prathap, G. e Sinha, P. K., 2002. Active vibration control of composite sandwich beams with piezoelectric extension-bending and shear actuators. *Smart Mater. Struct.*,

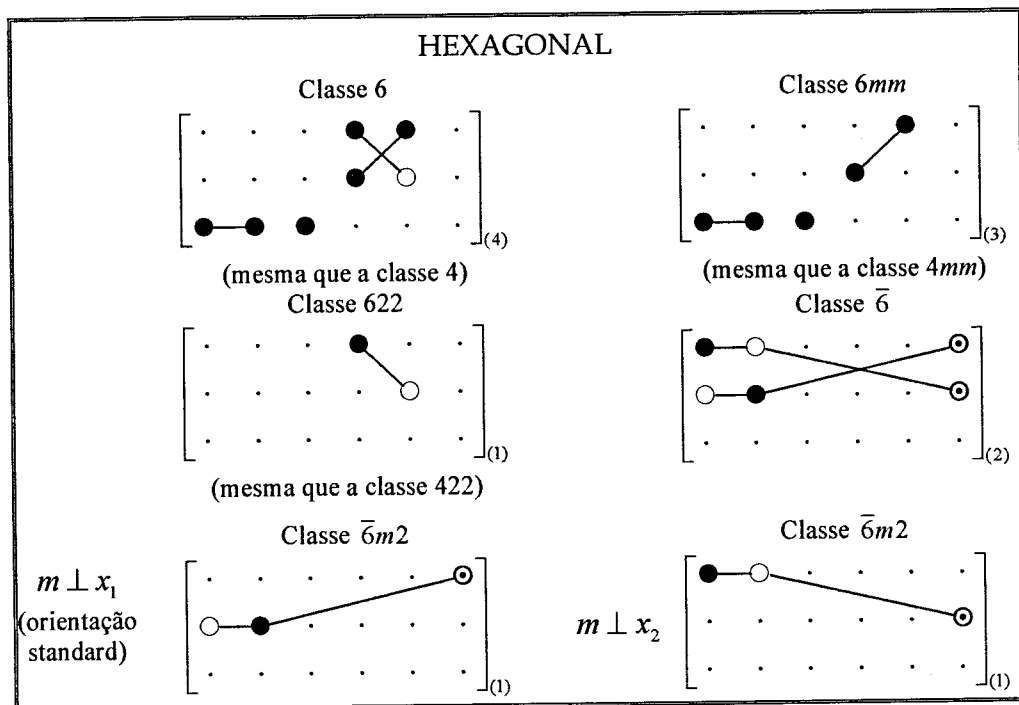
11(1): 63-71.

- Reddy, J. N., 1999. On laminated composite plates with integrated sensors and actuators. *Eng. Struct.*, **21**(7): 568-593.
- Ribeiro, R., Silva, S. D. M., Rodrigues, J. D. e Vaz, M. A., 2000. Genetic algorithms for optimal design and control of adaptive structures. *Proc. SPIE 7th Annual Int. Symp. on Smart Structures and Materials, Mathematics and Control in Smart Structures* (Newport Beach, California), ed. V. V. Varadan, vol. 3984, pp. 268-278.
- Robbins, D. H. e Reddy, J. N., 1991. Analysis of piezoelectrically actuated beams using a layerwise displacement theory. *Comp. Struct.*, **41**: 265-279.
- Rogacheva, N. N., 1994. *The Theory of Piezoelectric Shells and Plates*. Boca Raton, FL: CRC Press. (ref. Krommer, 2001)
- Saravanos, D. A. e Heyliger, P. R., 1995. Coupled layerwise analysis of composite beams with embedded piezoelectric sensors and actuators. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, **6**(3): 350-363.
- Saravanos, D. A., Heyliger, P. R. e Hopkins, D. A., 1997. Layerwise mechanics and finite element for the dynamic analysis of piezoelectric composite plates. *Int. J. Solids Struct.*, **34**(3): 359-378.
- Saravanos, D. A., 1997. Mixed laminate theory and finite element for smart piezoelectric composite shell structures. *AIAA J.*, **35**(8): 1327-1333.
- Schlacher, K., Kugi, A. e Irschik, H., 1996. H_∞ control of nonlinear beam vibrations. *Proc. 3rd Int. Conf. on Motion and Vibration Control (Tokyo-Chiba)*, Vol. 3.
- Stanway, R., Sproston, J. L. e El-Wahed, A. K., 1996. Applications of electro-rheological fluids in vibration control: a survey. *Smart Mater. Struct.*, **5**(4): 464-482.
- Sun, C. T. e Zhang, X. D., 1995. Use of thickness-shear mode in adaptive sandwich structures. *Smart Mater. Struct.*, **4**(3):202-206.
- Sun, D.C. e Tong, L., 2001. Sensor/actuator equations for curved piezoelectric fibers and vibration control of composite beams using fiber modal actuators/sensors. *J. Sound Vibr.*, **241**(2): 297-314.
- Tiersten. H. F., 1969. *Linear Piezoelectric Plate Vibrations*. New York: Plenum.

- Tiersten, H. S., 1993. Equations for the extension and flexure of relatively thin electroelastic plates undergoing large electric field. *Mechanics of Electromagnetic Materials and Structures*, ed. J. S. Lee, G. A. Maugin e Y. Shindo, New-York: ASME, AMD 161, MD 42, pp. 21-34.
- Trindade, M. A., Benjeddou, A. e Ohayon, R., 1999. Parametric analysis of the vibration control of sandwich beams trough shear-based piezoelectric actuation. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, **10**(5): 377-385.
- Trindade, M. A., 2000 *Contrôle Hybride Actif-Passif des Vibrations de Structures par des Matériaux Piézoélectriques et Viscoélastiques: Poutres Sandwich/Multicouches Intelligentes*. Tese de Doutorado, Conservatoire National des Arts et Métiers, França.
- Trindade, M. A., Benjeddou, A. e Ohayon, R., 2000. Modeling of frequency-dependent viscoelastic materials for active-passive vibration damping. *J. Vibr. Acoust.*, **122**(2): 169-174.
- Trindade, M. A., Benjeddou, A. e Ohayon, R., 2001a. Finite element modeling of hybrid active-passive vibration damping of multilayer piezoelectric sandwich beams. Part 1: formulation. *J. Numer. Methods Eng.*, **51**(7): 835-854.
- Trindade, M. A., Benjeddou, A. e Ohayon, R., 2001b. Finite element modeling of hybrid active-passive vibration damping of multilayer piezoelectric sandwich beams. Part 2: system analysis. *J. Numer. Methods Eng.*, **51**(7): 855-864.
- Tzou, H. S. e Tseng, C. I., 1990. Distributed piezoelectric sensor/actuator design for dynamic measurement/control of distributed parameter systems: a piezoelectric finite element approach. *J. Sound Vibr.*, **138**(1): 17-34.
- Tzou, H. S., 1993. *Piezoelectric Shells - Distributed Sensing and Control of Continua*. Dordrecht: Kluwer.
- Tzou, H. S. e Bao, Y., 1995. A theory of anisotropic piezothermoelastic shell laminates with sensor/actuator applications. *J. Sound Vibr.*, **184**(3): 453-473.
- Uchino, K., 2000. *Ferroelectric Devices*. Marcel Dekker Inc., New York.
- van Randeraat, J. e Setterington, R. (editores), 1974. *Piezoelectric Ceramics*. Mullard Ltd. London, UK, 2nd Edition.

- Waanders, J. A., 1991. Philips Ceramics, Properties and Applications. Philips Components.
- Wang, C. M., 1995. Timoshenko beam-bending solutions in terms of Euler-Bernoulli solutions. *J. Eng. Mech. ASCE*, **121**(6): 763-765.
- Wang, Q. e Wang, C. M., 2001. A controllability index for optimal design of piezoelectric. *J. Sound Vibr.*, **242**(3): 507-518.
- Yalcintas, M. e Dai, H., 1999. Magnetorheological and electrorheological materials in adaptive structures and their performance comparison. *Smart Mater. Struct.*, **8**(5): 560-573.
- Yang, J. S., 1999. Equations for thick elastic plates with partially electroded piezoelectric actuators and higher order electric fields. *Smart Mater. Struct.*, **8**(1): 73-82.
- Yishai, R. e Pinhas, Z. B.-Y., 2000. Space-time spectral elements for nonlinear static and dynamics modeling of piezoelectric composite laminated plates. *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS 2000* (Barcelona, Espanha).
- Zhang, X. D. e Sun, C. T. Formulation of an Adaptive Sandwich Beam. *Smart Mater. Struct.*, **5**(6):814-823, 1996.





Tab. A.1- Simetria na matriz de acoplamento piezoelétrico $[d]$ para todas as classes cristalinas (Nye, 1957)

Anexo B

Matrizes Elementares

B.1 Rigidez Mecânica

$$[k_{uu}] = [k_{uu}^n] + \sum_p [k_{uu}^p] \quad (\text{B.1})$$

$$[k_{uu}^n] = [k_{uum}^n] + [k_{uuf}^n] + [k_{uuc}^n] \quad (\text{B.2})$$

$$[k_{uu}^p] = \sum_p ([k_{uum}^p] + [k_{uumf}^p] + [k_{uuf}^p] + [k_{uuc}^p] + [k_{uucac}^p]) \quad (\text{B.3})$$

Membrana

$$[k_{uum}^k] = \frac{A_k c_{11}^{*k}}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

simétrica

Membrana/Flexão

$$[k_{uumf}^p] = \frac{\bar{z}_p^2 A_p c_{11}^{*p}}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

simétrica

Corte

$$[k_{uuc}^1] = \frac{k_c A_1 c_{55}^1}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & L/2 & 0 & 0 & 0 & -1 & L/2 & 0 & 0 \\ & & L^2/4 & 0 & 0 & 0 & -L/2 & L^2/4 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 1 & -L/2 & 0 & 0 \\ & & & & & & & L^2/4 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad \text{simétrica} \quad (\text{B.9})$$

$$[k_{uuc}^2] = \frac{k_c A_2 c_{55}^2}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & L/2 & 0 & 0 & -1 & 0 & L/2 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & L^2/4 & 0 & 0 & -L/2 & 0 & L^2/4 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 1 & 0 & -L/2 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & L^2/4 & 0 \\ & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad \text{simétrica} \quad (\text{B.10})$$

$$[k_{uuc}^3] = \frac{k_c A_3 c_{55}^3}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & L/2 & 0 & -1 & 0 & 0 & L/2 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & L^2/4 & 0 & -L/2 & 0 & 0 & L^2/4 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 1 & 0 & 0 & -L/2 \\ & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & L^2/4 \end{bmatrix} \quad \text{simétrica} \quad (\text{B.11})$$

Acoplamento

$$[k_{uuac}^1] = \frac{c_{11}^{*1}}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{I}_1 & \bar{z}_1 A_1 & 0 & 0 & 0 & -\bar{I}_1 & -\bar{z}_1 A_1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & \bar{z}_1 \bar{I}_1 & 0 & -\bar{I}_1 & 0 & 0 & -\bar{z}_1 \bar{I}_1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & -\bar{z}_1 A_1 & 0 & -\bar{z}_1 \bar{I}_1 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & \bar{I}_1 & \bar{z}_1 A_1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 & \bar{z}_1 \bar{I}_1 & 0 \\ & & & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (B.12)$$

simétrica

$$[k_{uuac}^3] = \frac{c_{11}^{*3}}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \bar{z}_3 A_3 & \bar{I}_3 & 0 & 0 & 0 & -\bar{z}_3 A_3 & -\bar{I}_3 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & \bar{z}_3 \bar{I}_3 & -\bar{z}_3 A_3 & 0 & 0 & 0 & -\bar{z}_3 \bar{I}_3 \\ & & & & 0 & -\bar{I}_3 & 0 & 0 & -\bar{z}_3 \bar{I}_3 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & \bar{z}_3 A_3 & \bar{I}_3 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (B.13)$$

simétrica

B.2 Rigidez Mecânica Induzida

$$[\bar{k}_{uu}] = \sum_p ([\bar{k}_{uuf}^p] + [\bar{k}_{uuc}^p]) \quad (B.14)$$

Flexão

$$[\bar{k}_{uuf}^1] = \frac{I_1 e_{31}^{*1 2}}{L \varepsilon_{33}^{*1}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (B.15)$$

simétrica

$$[\bar{k}_{uuf}^3] = \frac{I_3 e_{31}^{*32}}{L \varepsilon_{33}^{*3}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (B.16)$$

simétrica

Corte

$$[\bar{k}_{uuc}^1] = \frac{k_c A_1 e_{15}^{12}}{L \varepsilon_{11}^1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & L/2 & 0 & 0 & 0 & -1 & L/2 & 0 & 0 \\ & & L^2/4 & 0 & 0 & 0 & -L/2 & L^2/4 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 1 & -L/2 & 0 & 0 \\ & & & & & & & L^2/4 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (B.17)$$

simétrica

$$[\bar{k}_{uuc}^3] = \frac{k_c A_3 e_{15}^{32}}{L \varepsilon_{11}^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & L/2 & 0 & -1 & 0 & 0 & L/2 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & L^2/4 & 0 & -L/2 & 0 & 0 & L^2/4 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 1 & 0 & 0 & -L/2 \\ & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & L^2/4 \end{bmatrix} \quad (B.18)$$

simétrica

B.3 Rigidez Electromecânica

$$[k_{u\phi}] = \sum_p ([k_{u\phi m}^p] + [k_{u\phi mf}^p] + [k_{u\phi f}^p]) \quad (\text{B.19})$$

Membrana

$$[k_{u\phi m}^1] = \frac{A_1 e_{31}^{*1}}{h_1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.20})$$

$$[k_{u\phi m}^3] = \frac{A_3 e_{31}^{*3}}{h_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.21})$$

Membrana/Flexão

$$[k_{u\phi mf}^1] = \frac{\bar{z}_1 A_1 e_{31}^{*1}}{h_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.22})$$

$$[k_{u\phi mf}^3] = \frac{\bar{z}_3 A_3 e_{31}^{*3}}{h_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.23})$$

Flexão

$$[k_{u\phi f}^1] = \frac{\bar{I}_1 e_{31}^{*1}}{h_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.24})$$

$$[k_{u\phi f}^3] = \frac{\bar{I}_3 e_{31}^{*3}}{h_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.25})$$

B.4 Rigidez Eléctrica

$$[k_{\phi\phi}] = \sum_p [k_{\phi\phi}^p] \quad (\text{B.26})$$

$$[k_{\phi\phi}^1] = \frac{A_1 L \varepsilon_{33}^{*1}}{h_1^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.27})$$

$$[k_{\phi\phi}^3] = \frac{A_3 L \varepsilon_{33}^{*3}}{h_3^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.28})$$

B.5 Massa

$$[m_{uu}] = \sum_k [m_{uu}^k] \quad (\text{B.29})$$

$$[m_{uu}^1] = \rho_1 A_1 L \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{h_1}{6} & -\frac{h_2}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & -\frac{h_1}{12} & -\frac{h_2}{12} & 0 \\ & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{I_1}{3A_1} & \frac{h_1 h_2}{12} & 0 & -\frac{h_1}{12} & 0 & \frac{I_1}{6A_1} & \frac{h_1 h_2}{24} & 0 \\ & & & \frac{h_2^2}{12} & 0 & -\frac{h_2}{12} & 0 & \frac{h_1 h_2}{24} & \frac{h_2^2}{24} & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{h_1}{6} & -\frac{h_2}{6} & 0 \\ & & & & & & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & \frac{I_1}{3A_1} & \frac{h_1 h_2}{12} & 0 \\ & & & & & & & & \frac{h_2^2}{12} & 0 \\ & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

simétrica

(B.30)

$$[m_{uu}^2] = \rho_2 A_2 L \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{I_2}{3A_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_2}{6A_2} & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & \frac{I_2}{3A_2} & 0 \\ & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

simétrica

(B.31)

$$\left[m_{uu}^3 \right] = \rho_3 A_3 L$$

simétrica

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{h_2}{6} & \frac{h_3}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{h_2}{12} & \frac{h_3}{12} \\ & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{h_2^2}{12} & \frac{h_3 h_2}{12} & \frac{h_2}{12} & 0 & 0 & \frac{h_2^2}{24} & \frac{h_3 h_2}{24} \\ & & & & \frac{I_3}{3A_3} & \frac{h_3}{12} & 0 & 0 & \frac{h_3 h_2}{24} & \frac{I_3}{6A_3} \\ & & & & & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{h_2}{6} & \frac{h_3}{6} \\ & & & & & & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & \frac{h_2^2}{12} & \frac{h_3 h_2}{12} \\ & & & & & & & & & \frac{I_3}{3A_3} \end{bmatrix}$$

(B.32)

Anexo C

Propriedades dos Materiais

C.1 Materiais Metálicos

C.1.1 Alumínio

- Constante elástica: $c_{11}^* = 70 \text{ GPa}$
- Coeficiente de Poisson: $\nu = 0.3$
- Densidade: $\rho = 2710 \text{ Kg m}^{-3}$

C.1.2 Alumínio (ref.: Zhang e Sun, 1996)

- Constante elástica: $c_{11}^* = 70.3 \text{ GPa}$
- Coeficiente de Poisson: $\nu = 0.345$
- Densidade: $\rho = 2690 \text{ Kg m}^{-3}$

C.1.3 Alumínio (ref.: Krommer, 2001)

- Constante elástica: $c_{11}^* = 72.2 \text{ GPa}$
- Densidade: $\rho = 2700 \text{ Kg m}^{-3}$

C.1.4 Alumínio (ref.: Robbins e Reddy, 1991)

- Constante elástica: $c_{11}^* = 68.97 \text{ GPa}$
- Constante de corte: $c_{35} = 27.59 \text{ GPa}$
- Densidade: $\rho = 2769 \text{ Kg m}^{-3}$

C.2 Materiais Piezoelétricos

C.2.1 PZT-5H (ref.: Zhang e Sun, 1996)

- Matriz constitutiva elástica:

$$[c^E] = \begin{bmatrix} 12.6 & 7.95 & 8.41 & 0 & 0 & 0 \\ & 12.6 & 8.41 & 0 & 0 & 0 \\ & & 11.7 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2.3 & 0 & 0 \\ & sim & & & 2.3 & 0 \\ & & & & & 2.3 \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ N m}^{-2}$$

- Matriz constitutiva piezoelétrica:

$$[e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 \\ -6.5 & -6.5 & 23.3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ C m}^{-2}$$

- Matriz constitutiva dielétrica:

$$[\varepsilon^S] = \begin{bmatrix} 1.503 & 0 & 0 \\ 0 & 1.503 & 0 \\ 0 & 0 & 1.3 \end{bmatrix} \times 10^{-8} \text{ F m}^{-1}$$

- Densidade: $\rho = 7500 \text{ Kg m}^{-3}$

C.2.2 PZT-5H (ref.: Krommer, 2001)

- Constante elástica: $c_{11}^* = 60.98 \text{ GPa}$
- Constante piezoelétrica: $e_{31}^* = -10.427 \text{ C m}^{-2}$
- Constante dielétrica: $\varepsilon_{33}^* = 1.327 \times 10^{-8} \text{ F m}^{-1}$
- Densidade: $\rho = 7750 \text{ Kg m}^{-3}$

C.2.3 PZT (ref.: Robbins e Reddy, 2001)

- Constante elástica: $c_{11}^* = 68.97 \text{ GPa}$
- Constante piezoelétrica: $e_{31}^* = -8.41 \text{ C m}^{-2}$
- Constante dielétrica: $\varepsilon_{33}^* = 1.05 \times 10^{-8} \text{ F m}^{-1}$
- Densidade: $\rho = 7600 \text{ Kg m}^{-3}$

C.2.4 PXE5

- Matriz constitutiva elástica:

$$[c^E] = \begin{bmatrix} 13.1 & 7.98 & 8.44 & 0 & 0 & 0 \\ & 13.1 & 8.44 & 0 & 0 & 0 \\ & & 12.3 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2.6 & 0 & 0 \\ & sim & & & 2.6 & 0 \\ & & & & & 2.6 \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ N m}^{-2}$$

- Matriz constitutiva piezoelétrica:

$$[e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 13.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13.2 & 0 & 0 \\ -3.16 & -3.16 & 25.3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ C m}^{-2}$$

- Matriz constitutiva dielétrica:

$$[\epsilon^S] = \begin{bmatrix} 0.913 & 0 & 0 \\ 0 & 0.913 & 0 \\ 0 & 0 & 0.460 \end{bmatrix} \times 10^{-8} \text{ F m}^{-1}$$

- Densidade: $\rho = 7800 \text{ Kg m}^{-3}$

C.2.5 PZT-5A

- Matriz constitutiva elástica:

$$[c^E] = \begin{bmatrix} 12.0 & 7.52 & 7.51 & 0 & 0 & 0 \\ & 12.0 & 7.51 & 0 & 0 & 0 \\ & & 11.1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2.1 & 0 & 0 \\ & sim & & & 2.1 & 0 \\ & & & & & 2.3 \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ N m}^{-2}$$

- Matriz constitutiva piezoelétrica:

$$[e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 12.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12.3 & 0 & 0 \\ -5.35 & -5.35 & 15.8 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ C m}^{-2}$$



- Matriz constitutiva dielétrica:

$$[\varepsilon^s] = \begin{bmatrix} 0.813 & 0 & 0 \\ 0 & 0.813 & 0 \\ 0 & 0 & 0.732 \end{bmatrix} \times 10^{-8} \text{ F m}^{-1}$$

- Densidade: $\rho = 7750 \text{ Kg m}^{-3}$

C.3 Outros Materiais

C.3.1 Adesivo (ref.: Robbins e Reddy, 2001)

- Constante elástica: $c_{11}^* = 6.90 \text{ GPa}$
- Constante de corte: $c_{55} = 2.46 \text{ GPa}$
- Densidade: $\rho = 1662 \text{ Kg m}^{-3}$



FACULDADE DE ENGENHARIA

UNIVERSIDADE DO PORTO

BIBLIOTECA



0000067124