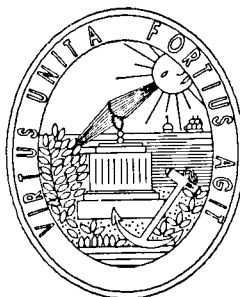


EFEITOS DE 2ª ORDEM EM ESTRUTURAS TRIDIMENSIONAIS

DISSERTAÇÃO APRESENTADA À
FACULDADE DE ENGENHARIA
DA UNIVERSIDADE DO PORTO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU
DE MESTRE EM ESTRUTURAS
DE ENGENHARIA CIVIL

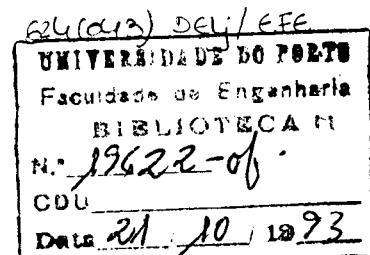
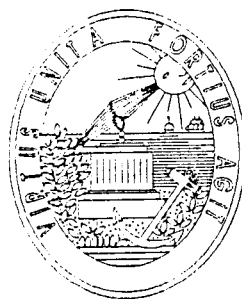


J O R G E M O R E N O D E L G A D O

EFEITOS DE 2ª ORDEM EM ESTRUTURAS TRIDIMENSIONAIS

DISSERTAÇÃO APRESENTADA À
FACULDADE DE ENGENHARIA
DA UNIVERSIDADE DO PORTO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU
DE MESTRE EM ESTRUTURAS
DE ENGENHARIA CIVIL

PORTO, JUNHO 1993



043 M
D392 e

J O R G E M O R E N O D E L G A D O

BOLSEIRO DA J.N.I.C.T.

Aos meus Pais

"

I BELIEVE

*In the dignity of labor, whether with head or hand;
That the world owes no man a living but that it
owes every man an opportunity to make a living "*

John. D. Rockefeller. Jr.

AGRADECIMENTOS

No momento da conclusão deste trabalho não posso deixar de expressar os meus mais sinceros agradecimentos, a todos os que com a sua sabedoria e amizade colaboraram na sua realização.

De um modo muito especial ao Professor Manuel de Azeredo que com o seu exemplo de interesse e espírito científico me incentivou para este trabalho, e cuja forma amiga e disponibilizada com que acompanhou a sua realização excederam em muito as suas funções de orientador de uma tese de mestrado.

Ao Raimundo pelos inúmeros ensinamentos e inextinguível carinho fraterno de vinte e seis anos, que tornam poucas todas as palavras para objectivar o meu agradecimento.

Ao Professor Manuel Matos Fernandes que enquanto coordenador do Curso de Mestrado sempre evidenciou a grande competência, interesse e amizade que o caracterizam.

Aos Engenheiros Joaquim Figueiras e José Carlos Lino pelas muito importantes facilidades concedidas e pela confiança em mim depositada.

Ao Engº Carlos Quinaz pelas muitas horas de trabalho que passámos juntos, durante as quais o espírito solidário esteve sempre presente.

A todos os colegas de mestrado com um destaque muito especial para os Engenheiros Aires Camões e Manuel Trigo, pela estreita relação de amizade que permitiu uma grande troca de ideias e de insubstituíveis palavras de encorajamento.

Ao Engº Nelson Vila Pouca cuja Tese de Mestrado foi de grande utilidade para a realização este trabalho.

Aos colegas de curso e amigos Engenheiros João Pedro Matos Fernandes, Patrício Rocha e Rui Cunha, com quem durante cinco anos de grande convivência e estudo muito aprendi.

Ao Sr. Olegário Manuel Carvalho pela competência e disponibilidade amiga com que realizou os trabalhos de processamento e arranjo gráfico desta tese.

À D. Maria Vitória e à D. Elvira pelo excelente apoio de secretaria sempre realizado com um simpático sorriso.

À minha mãe pelos ensinamentos, exemplo e possibilidades proporcionadas.

Às minhas irmãs, irmãos, cunhadas e cunhado pela solideriade, incentivo e apoio incondicional que sempre me ofereceram.

A todos os amigos, especialmente os de Viana do Castelo, por o terem sido.

SUMÁRIO

O principal objectivo desta tese é o estudo dos efeitos de 2ª ordem em estruturas reticuladas - tridimensionais, com particular incidência na determinação de cargas críticas e configurações de instabilidade associadas.

Tendo sido desenvolvido um modelo elástico de cálculo automático, cujas características permitem modelar com grande rigor e realismo as estruturas de edificios correntes, e que foi posteriormente adaptado para a determinação de esforços incluindo os efeitos de 2ª ordem, cargas críticas e respectivos modos de encurvadura, foi possível avaliar, no contexto da verificação da segurança ao estado limite último de encurvadura, as consequências da habitual e regulamentar substituição de uma análise global das estruturas por uma análise em duas direcções independentes.

A generalizada utilização de programas de pórticos planos motivou a concepção de um método simplificado, que apoiado em modelos deste tipo, permite calcular a carga crítica de uma estrutura, associada a configurações de instabilidade que envolvem a torção dos edificios, assim como a posição do centro de rotação que caracteriza essa configuração.

O estudo tridimensional efectuado permitiu, estudar modos de encurvadura por torção, analisando a sua importância na quantificação da carga crítica de uma estrutura e a sua influência no cálculo dos efeitos de 2ª ordem nos elementos verticais, e estabelecer a comparação entre os resultados obtidos com os modelos exactos desenvolvidos e com as metodologias que servem de base à regulamentação existente.

Apesar do carácter geral dos princípios que serviram de base a este trabalho, este foi desenvolvido tendo sempre presente a aplicação destas ideias às estruturas de edificios de betão armado.

ABSTRACT

This thesis aims at the study of the 2nd order effects in tridimensional concrete frames, with particular emphasis on determined critical loads and associated instability configuration.

Developing an automatic elastic model, whose features allow forming, with great rigour and realism, the current structural buildings, which was later adapted to determinate strains including 2nd order effects, critical loads and respective instability configurations, it was, therefore, possible to evaluate, in the context of the assessment of safety with regard to the ultimate limit state of buckling, the consequences of frequent and regulamentar replacement of a global analysis of the structures by an analysis in two independent directions.

The current use of plane frame programs led to the conception of a simplified method, that supported by this kind of models, allows to calculate the structural critical load, associated to instability configurations involving buildings torsion as well as the rotational center position that defines these configurations.

The tridimensional study allowed, to study instability configurations by torsion, analysing its importance in the quantification of structural critical loads and its influence in computation of vertical elements 2nd order effects, and to establish the comparision between the obtain results with the exact models developed and with methodologies that support the actual codes.

Despite the general characteristics of the main principles of this work, it was developed never overlooking the application of these ideas to reinforced concrete structures.

ÍNDICE GERAL

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

1.1 - INTRODUÇÃO	1.1
1.2 - DESCRIÇÃO DO CONTEÚDO DOS CAPÍTULOS	1.2

CAPÍTULO 2 - EFEITOS DE 2ª ORDEM - ASPECTOS GERAIS

2.1 - INTRODUÇÃO	2.1
2.2 - ASPECTOS GERAIS DA REGULAMENTAÇÃO PORTUGUESA E EUROPEIA EXISTENTE	2.1
2.2.1 - Metodologia apresenta no REBAP	2.2
2.2.2 - Principais enovações com a regulamentação europeia actual - EC2 e MC90	2.4
2.3 - TENTATIVAS DE DESENVOLVIMENTO DA REGULAMENTAÇÃO EXISTENTE	2.5
2.3.1 - Classificação das estruturas quanto à mobilidade	2.6
2.3.2 - Quantificação dos esforços de 2ª ordem	2.8
2.4 - IMPORTÂNCIA DE UMA ANÁLISE TRIDIMENSIONAL	2.10
2.4.1 - Distribuição da rigidez em planta	2.11

2.4.2 - Distribuição das cargas em planta	2.14
---	------

CAPÍTULO 3 - CÁLCULO TRIDIMENSIONAL ELÁSTICO DE ESTRUTURAS - GRETRI1

3.1 - INTRODUÇÃO	3.1
3.2 - MODELO DE CÁLCULO	3.2
3.2.1 - Modelação dos pisos - Grelhas	3.3
3.2.2 - Pilares - Elementos de ligação entre pisos	3.4
3.2.3 - Acções	3.8
3.3 - VANTAGENS DO MODELO	3.8
3.3.1 - Boa representação da realidade	3.8
3.3.2 - Vantagens relativamente a outros modelos	3.9
3.4 - PROGRAMA GRETRI1 - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO	3.10

CAPÍTULO 4 - MODELO TRIDIMENSIONAL INCLUINDO OS EFEITOS DE 2ª ORDEM; DETERMINAÇÃO DE CARGAS CRÍTICAS E MODOS DE ENCURVADURA

4.1 - INTRODUÇÃO	4.1
4.2 - MODELO TRIDIMENSIONAL INCLUINDO OS EFEITOS DE 2ª ORDEM - GRETRI2	4.1

4.2.1 - Inclusão da não-linearidade geométrica - Metodologia geral	4.1
4.2.1.1 - Matriz de rigidez completa das vigas	4.2
4.2.1.2 - Matriz de rigidez completa dos pilares	4.2
4.2.1.3 - Determinação dos esforços nas barras	4.4
4.2.2 - Necessidade de um processo iterativo - GRETRI2	4.5
4.2.3 - Exemplos de aplicação	4.6
4.3 - DETERMINAÇÃO DE CARGAS CRÍTICAS E MODOS DE ENCURVADURA ASSOCIADOS - GRETRI3	4.8
4.3.1 - Conceito geral de carga crítica e modo de encurvadura	4.8
4.3.2 - Determinação de cargas críticas e modos de encurvadura - Metodologia geral	4.9
4.3.3 - Método iterativo de determinação de cargas críticas - GRETRI3	4.9
4.3.3.1 - Determinação do valor próprio mais baixo e respectivo vector próprio - Carga crítica da estrutura	4.10
4.3.3.2 - Determinação de modos de encurvadura de ordem superior ao primeiro	4.11
4.3.4 - Exemplos de aplicação	4.12

CAPÍTULO 5 - MÉTODO SIMPLIFICADO PARA A DETERMINAÇÃO DA CARGA CRÍTICA DE UMA ESTRUTURA INCLUINDO OS EFEITOS TRIDIMENSIONAIS

5.1 - INTRODUÇÃO	5.1
5.2 - FUNDAMENTOS DO MÉTODO	5.1

5.2.1 - Pórtico plano de 1 andar e n pilares. Instabilidade para fora do seu plano de desenvolvimento	5.2
5.2.1.1 - Instabilidade por translação pura - Centro de Rotação $\underline{Q}$ no infinito	5.9
5.2.1.2 - Consideração da rigidez à torção dos elementos verticais	5.10
5.2.1.3 - Caso particular. Pórtico de um andar e 2 pilares	5.11
5.2.2 - Determinação do centro de rotação	5.13
5.2.3 - Exemplos de aplicação	5.17
5.3 - GENERALIZAÇÃO DO MÉTODO A ESTRUTURAS RETICULADAS-TRIDIMENSIONAIS	5.22
5.3.1 - Determinação da carga crítica global	5.22
5.3.2 - Determinação do centro de rotação 0	5.28
5.3.3 - Resumo do método	5.30
5.3.4 - Exemplo de aplicação	5.32
5.3.4.1 - Aplicação do Programa GRETRI3	5.33
5.3.4.2 - Aplicação do Método Simplificado	5.34
5.3.4.3 - Comparação de resultados	5.38

CAPÍTULO 6 - FACTORES PREPONDERANTES NO APARECIMENTO DE MODOS DE ENCURVADURA POR TORÇÃO

6.1 - INTRODUÇÃO	6.1
------------------	-----

6.2 - DISTRIBUIÇÃO DA RIGIDEZ EM PLANTA	6.1
6.3 - DISTRIBUIÇÃO DE CARGAS VERTICAIS EM PLANTA	6.3
6.4 - INFLUÊNCIA DA CONSIDERAÇÃO DA RIGIDEZ À TORÇÃO DOS ELEMETOS VERTICAIS	6.5
6.4.1 - Estrutura com mobilidade uni-direccional	6.6
6.4.2 - Estrutura tridimensional - mobilidade bi-direccional	6.8
6.5 - ESTRUTURA TRIDIMENSIONAL - VARIAÇÃO DA CONFIGURAÇÃO TIPO DO 1º MODO DE ENCURVADURA	6.11

CAPÍTULO 7 - INFLUÊNCIA DA ENCURVADURA POR TORÇÃO EM ESTRUTURAS DE BETÃO ARMADO

7.1 - INTRODUÇÃO	7.1
7.2 - CLASSIFICAÇÃO DE MOBILIDADE DE ESTRUTURAS DE BETÃO ARMADO	7.1
7.2.1 - Critérios de classificação	7.1
7.2.1.1 - REBAP - (Critério 1)	7.1
7.2.1.2 - Consideração da estrutura na sua globalidade. Rotação dos pisos impedida - (Critério 2)	7.3
7.2.1.3 - Consideração da estrutura na sua globalidade. Rotação dos pisos permitida - (Critério 3)	7.3
7.2.2 - Exemplo de aplicação	7.4
7.3 - EFEITOS DE 2ª ORDEM EM ESTRUTURAS DE BETÃO ARMADO	7.7
7.3.1 - Metodologias de cálculo	7.7

7.3.1.1 - MC90	7.7
7.3.1.2 - GRETRI2	7.10
7.3.2 - Exemplos de Aplicação	7.11
7.3.2.1 - Acção horizontal na direcção YY - Imperfeições geométricas - Inclinação global na direcção YY	7.12
7.3.2.1.1 - Estrutura Simétrica - Acção horizontal na direcção YY - Imperfeições geométricas - Rotação no plano horizontal XY	7.15
7.3.2.2 - Estrutura Não Simétrica- Acção horizontal na direcção YY - Imperfeições geométricas - Inclinação global na direcção YY	7.16
7.3.2.3 - Estrutura Simétrica - Acção horizontal na direcção XX - Imperfeições geométricas - Inclinação global na direcção XX	7.19

CAPÍTULO 8 - CONCLUSÕES E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

8.1 - CONCLUSÕES	8.1
8.2 - DESENVOLVIMENTOS FUTUROS	8.2

REFERÊNCIAS

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 - INTRODUÇÃO

Uma das principais fases da realização de um projecto de estruturas é a verificação dos elementos verticais ao estado limite último de encurvadura. Esta fase é tanto mais importante quanto nos apercebemos de uma tendência generalizada para a optimização do cálculo estrutural que, associado ao emprego de materiais de alta resistência, conduz naturalmente à concepção de estruturas cada vez mais esbeltas e por consequência mais sensíveis aos efeitos de 2ª ordem.

Estes efeitos são particularmente importantes quando se tratam estruturas de nós móveis, sendo também nestes casos que a sua quantificação levanta maiores dificuldades.

A regulamentação portuguesa existente é extremamente simplista, no que diz respeito à verificação da segurança ao estado limite último de encurvadura, verificando-se ser especialmente desajustada e irrealista a sua aplicação para a determinação de esforços de 2ª ordem em estruturas de nós móveis. Sente-se contudo que os regulamentos europeus actuais, EC2 e MC90 para estruturas de betão armado, EC3 para estruturas metálicas, evidenciam uma grande preocupação no sentido de melhorar as metodologias de determinação destes efeitos, procurando por um lado, uma classificação das estruturas mais pormenorizada e por outro, a definição de métodos simplificados que permitam a quantificação de esforços de 2ª ordem de uma forma mais realista.

O crescente interesse por esta área de trabalho, na perspectiva de um crescente entendimento do fenómeno da instabilidade, tem motivado a realização de diversos trabalhos de investigação ([6],[9],[14],[21] e [23]) visando a análise crítica da actual regulamentação e a definição de vias alternativas para a quantificação dos efeitos de 2ª ordem.

As habituais metodologias de cálculo de efeitos de 2ª ordem baseiam-se no estudo das estruturas em duas direcções independentes, ignorando a sua configuração tridimensional. No sentido de esclarecer algumas das consequências da aplicação de uma filosofia simplificada deste tipo, desenvolveu-se um modelo de cálculo automático, cujas características garantem uma modelação bastante realista e rigorosa das estruturas de edifícios correntes, permitindo a determinação de esforços elásticos, esforços incluindo efeitos de 2ª ordem e modos de encurvadura em estruturas reticuladas-tridimensionais.

Dando principal relevo ao cálculo de modos de encurvadura e factores de carga associados, foi possível discutir a importância do estudo de configurações de instabilidade por torção global das estruturas, analisando-se, em especial, os factores preponderantes no seu aparecimento e as variações do valor da carga crítica por eles motivados.

No sentido de proporcionar a análise modos de encurvadura envolvendo a torção dos edifícios, utilizando modelos planos de cálculo, propõe-se um método simplificado que, a partir dos pórticos planos resistentes existentes em cada uma das direcções, possibilita o cálculo da carga crítica de uma estrutura e a determinação da posição do respectivo centro de rotação global.

Estando as parcelas de esforço de 2ª ordem, a adicionar nos diferentes elementos comprimidos, dependentes do esforço axial instalado, da carga crítica da estrutura e da configuração de instabilidade que lhe está associada, foi efectuado um estudo comparativo dos resultados obtidos com três metodologias distintas respectivamente baseadas no REBAP, no MC90 e na aplicação do modelo de cálculo automático tridimensional exacto, permitindo, com particular interesse, analisar, para um conjunto de exemplos, a influência dos modos de encurvadura de torção na quantificação dos efeitos de 2ª ordem.

1.2 - DESCRIÇÃO DO CONTEÚDO DOS CAPÍTULOS

O presente trabalho é constituído por 8 capítulos. Além da presente introdução a organização dos restantes capítulos foi estabelecida da seguinte forma:

No Capítulo 2 faz-se uma abordagem geral aos problemas relacionados com os efeitos de 2ª ordem, analisando-se a actual regulamentação portuguesa e europeia, e dando pistas no sentido de avaliar a importância de uma análise tridimensional.

Os Capítulos 3 e 4 são constituídos pela descrição do modelo de cálculo que serviu de base aos estudos efectuados, nas suas variantes elástica, não linear geométrica e de determinação de cargas críticas e modos de encurvadura.

No Capítulo 5 apresentam-se os fundamentos do método simplificado proposto para o cálculo de cargas críticas e modos de encurvadura, a sua generalização para aplicação a estruturas de edifícios correntes, e a sua validação por comparação com os resultados obtidos com o modelo exacto.

O Capítulo 6 é constituído pela exposição dos principais factores que influenciam o aparecimento de modos de encurvadura por torção, efectuando-se uma análise de sensibilidade das estruturas a estes factores.

O Capítulo 7 é especialmente direccionado para o estudo de estruturas de betão armado. É abordada a sua classificação de mobilidade e apresentado um conjunto de exemplos de cálculo de esforços de 2ª ordem utilizando, a filosofia do REBAP, uma metodologia baseada no MC90 e os modelos tridimensionais exactos, permitindo a comparação de resultados obtidos pelas três diferentes vias.

No Capítulo 8 são reunidas as conclusões mais importantes resultantes deste trabalho e são indicadas as fundamentais vias para desenvolvimentos futuros.

CAPÍTULO 2

EFEITOS DE 2ª ORDEM - ASPECTOS GERAIS

2.1 - INTRODUÇÃO

A encurvadura, é tratada de forma objectiva e específica nos códigos e regulamentos associados aos diferentes tipos de estruturas. Para estruturas reticuladas de betão armado, em particular, a verificação da segurança em relação ao estado limite último de encurvadura constitui um capítulo importante da regulamentação portuguesa [1], sendo tratada de forma igualmente destacada nos diferentes códigos internacionais [2], [3], [4].

A determinação dos esforços de 2ª ordem nos elementos comprimidos é, geralmente, feita de forma independente em duas direcções distintas, procedimento este que se enquadra na metodologia geral da análise das estruturas correntes. Estas, apesar da sua configuração real ser quase sempre reticulada-tridimensional, são por simplicidade discretizadas em pórticos planos orientados segundo duas direcções fundamentais, nas quais assenta a determinação dos esforços e dimensionamento das peças que os constituem. A natureza eminentemente tridimensional das estruturas não pode todavia ser ignorada. Do ponto de vista da análise da encurvadura, pretende discutir-se, de forma sucinta, alguns aspectos e situações em que esta natureza pode ser determinante.

2.2 - ASPECTOS GERAIS DA REGULAMENTAÇÃO PORTUGUESA E EUROPEIA EXISTENTE

A verificação de segurança em relação ao estado limite último de encurvadura, implica a consideração dos efeitos de 2ª ordem nas estruturas reticuladas em que estes não possam ser desprezados.

Os modelos de cálculo mais rigorosos, em particular para as estruturas de betão armado, terão para esse efeito que permitir incluir dois tipos de não linearidade:

- não linearidade geométrica - efeitos de 2ª ordem traduzindo a importância da configuração deformada na determinação dos esforços;
- não linearidade física - traduzindo a não linearidade das relações momentos-curvaturas das secções, e correspondente variação de rigidez das peças.

Um modelo que contemple estes dois tipos de não linearidade, implica que o carregamento da estrutura seja feito de forma incremental. Através da inclusão da matriz de rigidez geométrica global do sistema é possibilitada uma análise de 2ª ordem em regime elástico perfeito, sendo procurado para cada incremento de carga, e de forma iterativa, o equilíbrio da estrutura. A passagem a um novo incremento de carga será feito após o reajuste das características de rigidez das peças.

Modelos deste tipo, tendo por base o Método dos Elementos Finitos, foram já desenvolvidos e explorados por diversos autores [13]. Trata-se no entanto de modelos demasiado complexos e, por isso mesmo, pouco ajustados às aplicações práticas de projecto. Os regulamentos [1], [2], [3] e [4], preconizam métodos simplificados que permitem de uma forma mais prática contabilizar estes efeitos.

Nos pontos que se seguem far-se-á uma descrição sumária da metodologia adoptada pelo REBAP, e das principais diferenças e inovações encontradas nos regulamentos europeus mais recentes.

2.2.1 - Metodologia apresentada no REBAP

O Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-Esforçado - REBAP [1] apresenta como primeiro aspecto a ter em consideração, a classificação das estruturas relativamente à mobilidade. A maior ou menor sensibilidade às acções ou efeitos, que conduzem ao aparecimento de deslocamentos horizontais relativos dos pisos, permite classificar as estruturas como de nós móveis ou nós fixos. Associadas a estes dois tipos de mobilidade estão configurações de instabilidade distintas, que correspondem a uma configuração de instabilidade global da estrutura (Fig. 2.1.a), ou a uma instabilização local dos elementos verticais (Fig. 2.1.b).

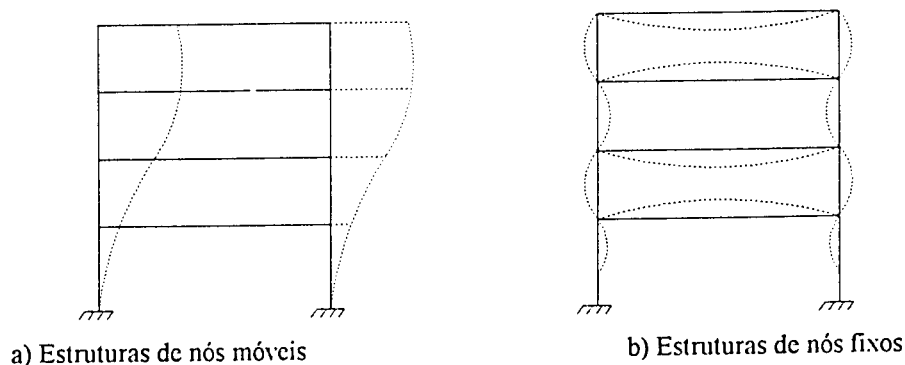


Fig. 2.1 - Configurações de instabilidade tipo.

Sendo o comprimento efectivo de encurvadura dos diferentes elementos verticais um dos parâmetros fundamentais para o estudo da encurvadura, e definindo-se este como a distância entre pontos de inflexão das suas deformadas associadas à configuração de instabilidade, resulta que as metodologias a seguir no caso de estruturas de nós móveis ou nós fixos terão de ser naturalmente distintas.

Após a classificação global da estrutura, a verificação da segurança passa a ser efectuada individualmente para cada elemento vertical, com base nas suas características geométricas, nível de carga e condições de ligação. Para a quantificação dos esforços de 2ª ordem é necessária a determinação do comprimento efectivo de encurvadura (l_0) e do correspondente coeficiente de esbelteza (λ_e) para cada um dos pilares.

O coeficiente de esbelteza deverá obrigatoriamente assumir valores inferiores ao chamado limite de esbelteza, implicando em situação contrária a redefinição da secção da peça, e controla, por outro lado, as situações em que a dispensa de verificação de segurança em relação à encurvadura é permitida.

Os métodos simplificados que permitem a determinação dos esforços de 2ª ordem, pressupõem o conhecimento do comprimento de encurvadura. Uma vez que a sua avaliação correcta implica a determinação da configuração deformada de instabilidade da estrutura em regime não linear, com toda a complexidade que lhe está subjacente, os regulamentos permitem a utilização de expressões simplificadas para o cálculo deste comprimento. No caso geral de uma barra integrando uma estrutura reticulada, a determinação de l_0 dependerá fundamentalmente da classificação da mesma relativamente à mobilidade, das condições de ligação da barra ao exterior e ainda das características dos elementos que concorrem nos seus nós.

O método simplificado preconizado no REBAP [1] é usualmente designado por Método da Excentricidade Adicional [14]. Este método avalia o momento adicional de 2ª ordem, como resultante do produto do esforço axial N_{sd} instalado na barra por uma excentricidade e , correspondente ao somatório de três excentricidades distintas:

- e_a : excentricidade acidental;
- e_2 : excentricidade de 2ª ordem;
- e_c : excentricidade de fluência.

(Note-se que em rigor, a parcela que diz respeito à excentricidade acidental deveria ser considerada de 1ª ordem.)

O momento de 2ª ordem adicional será então dado por:

$$M_{sd}^{II} = N_{sd}(e_a + e_2 + e_c) \quad (2.1)$$

A secção da barra onde se deve considerar actuante este momento de 2ª ordem está directamente ligada ao tipo de mobilidade da estrutura. No caso de estruturas classificadas de nós móveis a secção crítica coincidirá com as extremidades da barra, enquanto que nas estruturas de nós fixos, a mesma se encontrará sensivelmente a meio da barra. Esta definição é importante, tendo em conta que o momento de 2ª ordem M_{sd}^{II} deve ser adicionado ao momento de 1ª ordem M_{sd}^I . Uma vez que, no caso geral, os momentos máximos de 1ª ordem se encontram nas extremidades dos pilares, o REBAP [1] indica que no caso de estruturas de nós móveis os dois momentos devem ser adicionados directamente, enquanto que apresenta, para estruturas de nós fixos, uma ponderação dos momentos nas extremidades para determinar o momento de 1ª ordem a adicionar ao de 2ª ordem.

Uma vez encontrado o momento total $M_{sd}^{tot} = M_{sd}^I + M_{sd}^{II}$, o dimensionamento das secções críticas dos elementos verticais será feito através de uma verificação do estado limite último de resistência por flexão com compressão em cada uma das direcções, sendo complementado por uma verificação simultânea interessando as duas direcções, quando for caso disso.

2.2.2 - Principais inovações com a regulamentação europeia actual - EC2 e MC90

A actual regulamentação europeia EC2 [3] e MC90 [4] apresenta relativamente à portuguesa diferenças de grande importância, na perspectiva de melhorar e conceder maior realismo à forma de incluir os efeitos de 2ª ordem nas estruturas de betão armado.

Como primeiro aspecto, surge uma classificação inicial das estruturas em contraventadas e não contraventadas. Esta classificação, associada à existência ou inexistência de elementos de contraventamento (definidos como capazes de receber no seu conjunto mais de 90% das acções horizontais), implica desde logo caminhos distintos para a análise da encurvadura. Poderão inclusive, no caso de estruturas classificadas de contraventadas, serem dados tratamentos diferentes aos elementos de contraventamento e aos restantes pilares.

Contudo, a inovação fundamental na filosofia destes dois códigos reside em que, no caso de estruturas de nós móveis, deixa de ser possível o estudo dos elementos verticais como pilares isolados, passando a ser exigido o recurso a métodos globais de análise de 2ª ordem.

Apesar da grande diferença entre as instabilidades associadas aos dois tipos de mobilidade, o REBAP conduz o estudo dos pilares de estruturas de nós móveis de forma idêntica aos das estruturas de nós fixos, o que leva a situações pouco lógicas e na maior parte dos casos irrealistas.

As estruturas contraventadas de nós móveis constituem uma excepção à necessidade de um método geral de 2ª ordem, devendo apenas os elementos de contraventamento ser analisados por um método deste tipo, e sendo os restantes pilares estudados como pilares isolados pertencentes a uma estrutura de nós fixos.

A consideração das imperfeições geométricas aparece com um novo aspecto. A excentricidade adicional e_o , referida no REBAP [1] e apenas considerada nos pilares quando a verificação à encurvadura não é dispensada, é substituída pela consideração, em todos os casos, da estrutura numa posição deformada inicial. Este efeito é simulado através da inclusão de forças horizontais em correspondência com a deformação inicial admitida[21].

Refira-se ainda que para estruturas classificadas de nós móveis, é preconizado, em comentário no MC90 [4], um método simplificado de determinação dos efeitos de 2ª ordem, válido dentro de certos limites, e que se pode entender como uma forma particular do método P- Δ . Este método simplificado conduz à determinação de um factor de ampliação das forças horizontais associadas à deformação inicial da estrutura, sugerindo que o dimensionamento das secções se possa fazer com base nos resultados obtidos com as forças horizontais corrigidas. A inclusão da não linearidade material é considerada à custa de uma redução de 50% da rigidez de todos os elementos constituintes da estrutura, para efeito da determinação do referido factor de ampliação das forças horizontais.

2.3 - TENTATIVAS DE DESENVOLVIMENTO DA REGULAMENTAÇÃO EXISTENTE

Apesar do carácter sintético e meramente qualitativo da abordagem geral à análise da encurvadura efectuada nos pontos anteriores, ficou claro que todo o processo de verificação de segurança assenta em métodos e pressupostos extremamente simplificados. A já referida complexidade de uma análise correcta deste efeito, e a sua inadequação às exigências práticas de projecto, constituem as razões fundamentais para as opções tomadas neste domínio pelos regulamentos da especialidade.

Ao elaborar estes métodos, foi necessário garantir que os resultados com eles obtidos fossem seguros quando comparados com os resultados exactos. Todavia, dado o elevado

número de simplificações, regra geral os resultados obtidos são excessivamente conservativos, podendo mesmo, em alguns casos, ser completamente irrealistas e ilógicos. A insatisfação face aos resultados obtidos com estes métodos simplificados tem conduzido à realização de diversos trabalhos tendo em vista o melhoramento dos mesmos.

2.3.1 - Classificação das estruturas quanto à mobilidade

A regulamentação portuguesa para estruturas de betão armado, define como estruturas de nós fixos aquelas cujos deslocamentos horizontais sejam desprezáveis quando sujeitas às acções de cálculo, sendo os deslocamentos assim entendidos quando tiverem valor desprezável os efeitos de 2ª ordem a eles devidos. Como elementos resistentes apenas são contabilizados os elementos verticais (pilares) integrantes da estrutura. Desta forma, e na análise independente em cada uma das direcções, a estrutura é vista como uma consola vertical, cuja rigidez à flexão é igual à soma da rigidez de todos os pilares existentes.

De uma forma mais rigorosa, define-se que uma estrutura será de nós fixos quando os momentos de 2ª ordem na base dessa consola forem inferiores ou iguais a 10% dos momentos de 1ª ordem. Utilizando uma expressão proposta por Timoshenko e Gere [5], que permite com muito boa aproximação determinar os momentos de 2ª ordem numa barra, a partir do momento de 1ª ordem e da razão entre o valor da carga actuante e da carga crítica, e considerando ainda uma redução da rigidez de 30% para ter em conta o funcionamento do betão em fase fendilhada, foi estabelecida uma expressão de fácil aplicação, que permite fazer a classificação das estruturas quanto à mobilidade[22].

As estruturas serão de nós fixos quando se verificar :

$$h_{tot} \sqrt{\frac{\sum N}{\sum EI}} \leq \eta \quad (2.2)$$

sendo:

h_{tot} - altura da estrutura acima das fundações;

$\sum N$ - somatório das acções verticais ao nível das fundações, não afectado dos coeficientes de majoração.

$\sum EI$ - somatório da rigidez à flexão em regime elástico de todos os elementos verticais na direcção em estudo. Deverá adoptar-se uma rigidez equivalente no caso de esta variar em altura.

η - parâmetro definido por

$$\eta = 0,2 + 0,1n \quad \text{se} \quad n < 4$$

$$\eta = 0,6 \quad \text{se} \quad n \geq 4$$

n - nº de andares da estrutura

Uma metodologia deste tipo, em que apenas se consideram como elementos resistentes os elementos verticais, conduz necessariamente a resultados muito conservativos. De facto a existência de vigas de ligação entre os diversos elementos verticais, fazendo parte integrante dos pórticos resistentes em cada uma das direcções, contribui de forma significativa para a redução da mobilidade transversal da estrutura.

Vila Pouca [6] apresentou um trabalho em que esta questão é posta em evidência, demonstrado que em muitos casos a consideração da contribuição das vigas permite classificar como de nós fixos estruturas que de outra forma seriam de nós móveis. No seu estudo, mantendo a metodologia geral, quantifica-se uma rigidez à flexão EI de uma consola vertical equivalente, que tenha em consideração a rigidez das vigas à flexão.

Apoiado em sugestões de outros autores como Kordina [7] e Hage [8], definiu coeficientes de redução de rigidez para vigas e pilares, de forma a ter em linha de conta o seu funcionamento em fase fendilhada para valores de carga próximas da carga crítica. Tendo analisado as relações entre a deformada devido a uma acção horizontal de estruturas tipo pórtico e de uma consola vertical, propôs um método que permite quantificar a rigidez equivalente a considerar para a aplicação da expressão (2.2).

Este método permite determinar a rigidez equivalente, a partir do nível de carga existente em cada piso, e dos deslocamentos horizontais dos pisos calculados para uma acção horizontal qualquer, aplicada a uma associação em comboio de todos os pórticos resistentes em cada uma das direcções.

Esta é pois uma forma mais realista de tratar o problema da classificação da mobilidade, que se revela tanto mais importante quanto menos elementos de contraventamento do tipo parede, ou caixas de escadas ou elevadores, existirem, e tiverem os pórticos de desempenhar estas funções.

2.3.2 - Quantificação dos esforços de 2ª ordem

Em última análise, o objectivo do estudo da encurvadura é quantificar, quando for caso disso, os momentos de 2ª ordem adicionais a incluir no dimensionamento dos elementos verticais. O método da excentricidade adicional apresentado na regulamentação portuguesa baseia-se, como referido, no cálculo de uma excentricidade para cada uma das barras verticais da estrutura, que quando multiplicada pelo valor do esforço axial instalado nos permite obter o momento de 2ª ordem com que a barra deve ser afectada.

O cálculo destas excentricidades é feito de forma independente para cada um dos elementos comprimidos, a partir da determinação do seu comprimento de encurvadura. Dependendo este comprimento, fundamentalmente, da maior ou menor rigidez das ligações das extremidades da barra ao exterior ou a outros elementos estruturais, podem por esta via, em particular para estruturas de nós móveis, encontrar-se pilares existentes a um mesmo nível com excentricidades completamente distintas, entre as quais não existe qualquer tipo de relação. Este aspecto é um dos mais controversos deste método, uma vez que, de uma forma geral, existem diafragmas materializados pelos pisos constituintes da estrutura, que estabelecem a ligação entre as extremidades das diferentes barras que se encontram a um mesmo nível.

É notório que uma compatibilização entre as excentricidades de todas as barras a um dado nível implicará sempre uma análise global da estrutura. Todavia, seria desejável que, pelo menos para cada pórtico individual, existisse algum tipo de relação entre a excentricidade dos seus pilares a uma mesma cota.

Azeredo, M.[18] apoiado no Método do Pilar Padrão, realizou um trabalho sobre instabilidade de grupos de colunas, onde é proposto um método de determinação dos esforços incluindo os efeitos de 2ª ordem, garantindo a compatibilização entre as excentricidades (e_2) dos diferentes pilares. O método referido, envolvendo os diagramas momentos-curvaturas do conjunto de pilares associados, permite quantificar uma excentricidade máxima correspondente à rotura por capacidade de carga das secções, e verificar ainda, se para valores inferiores desta excentricidade ocorre uma situação de rotura por instabilidade global do conjunto de colunas associadas.

Uma outra metodologia com vista a estabelecer alguma relação entre as excentricidades a adoptar para o cálculo dos momentos de 2ª ordem, foi proposta por Delgado, R. e Caetano, E. [9]. Estes admitem como princípio fundamental, que a configuração de instabilidade no instante da rotura coincide com aquela que se obtém em regime elástico, ou seja com o modo de encurvadura correspondente à carga crítica da estrutura. Adaptando um programa de pórticos planos, de forma a poder determinar as cargas críticas e modos de

encurvadura associados, e fazendo o estudo em cada uma das direcções, é possível conhecer a configuração de instabilidade global da estrutura. Esta configuração é determinada a menos de um factor de escala, sendo necessário estabelecer um critério para determinar a amplitude da deformada. Este critério tem por base a lei de comportamento do material utilizado. No caso de mais interesse de estruturas de betão armado, o critério utilizado é o de admitir que a rotura de uma secção ocorre quando nesta se verificarem extensões de $1,5\text{‰}$ no aço e de $3,5\text{‰}$ no betão. Este mesmo princípio, adoptando ainda um factor correctivo, é estabelecido no REBAP [1] no seu artigo 63º. Para completar este critério é estabelecido que, ao nível de cada andar, a situação limite se atinge quando o primeiro elemento vertical atingir a curvatura de rotura associada às extensões definidas.

Uma vez determinado o factor de escala, fica definida a deformada de rotura por instabilidade que, em conjunto com os esforços axiais instalados, permite quantificar os momentos de 2ª ordem M_{sd}^e com que devemos afectar os pilares da estrutura.

M_{sd}^e - Momento de cálculo de 2ª ordem, não incluindo as parcelas devidas às excentricidades de fluência e accidental.

Na sequência do que foi apresentado até aqui, os mesmos autores, caminhando no sentido inverso ao preconizado na regulamentação portuguesa, determinam a excentricidade de 2ª ordem, e_2 , e o comprimento efectivo de encurvadura associados a cada uma das barras.

$$M_{sd}^e = N_{sd} \cdot e_2 \quad (2.3)$$

$$e_2 = M_{sd}^e / N_{sd} \quad (2.4)$$

e sendo

$$e_2 = \frac{l_0}{10} \cdot \frac{1}{r} \quad (2.5)$$

$$l_0 = e_2 \cdot 10 \times \frac{1}{1/r} \quad (2.6)$$

A determinação do comprimento efectivo da encurvadura, tem especial interesse para a quantificação da excentricidade accidental, e_a , e para a definição dos critérios de dispensa da verificação à encurvadura.

Uma outra via para a determinação dos esforços de 2ª ordem, de uma forma mais global, abandonando a análise individual de cada um dos elementos verticais, é a da inclusão da matriz de rigidez geométrica dos pilares nos programas de cálculo automático habitualmente utilizados para o cálculo estrutural. De facto, e como será mostrado no Capítulo 4 para o caso tridimensional, no campo das pequenas deformações, este procedimento é de grande facilidade, permitindo obter directamente esforços e deformações que incluem já os efeitos de 2ª ordem.

No entanto, para que se consiga uma análise não linear correcta, de forma a utilizar os resultados encontrados para dimensionamento, existem mais aspectos a ter em consideração.

Em primeiro lugar é necessário encontrar uma forma de incluir a não linearidade física. O MC90 [4] apresenta como solução possível, dentro de certos limites, a redução de 50% da rigidez de todos os elementos constituintes da estrutura. Em segundo lugar é preciso um meio de simular possíveis imperfeições geométricas da estrutura, que não sendo importantes do ponto de vista de uma análise de 1ª ordem, poderão ser determinantes numa análise de 2ª ordem. Mais uma vez o MC90, aponta como uma hipótese de solucionar este problema a simulação das imperfeições a partir da inclusão de forças horizontais a elas associadas.

No Capítulo 7 serão apresentados alguns resultados obtidos com um modelo tridimensional não linear geométrico e com base numa filosofia deste tipo.

2.4 - IMPORTÂNCIA DE UMA ANÁLISE TRIDIMENSIONAL

Ao discretizar uma estrutura em pórticos planos, há normalmente que recorrer a procedimentos complementares que façam intervir a configuração tipicamente tridimensional da generalidade das estruturas.

Exemplo claro deste procedimento, onde os efeitos tridimensionais (ainda que parcialmente) são contabilizados, é o cálculo de um edifício às acções horizontais seguindo a metodologia preconizada no R.S.A.[19], em que a determinação das forças a aplicar a cada um dos pórticos que o constituem é realizado em duas fases que se complementam.

Em primeiro lugar, e para cada direcção independente, é feita uma distribuição da força global (vento ou sismo) a aplicar ao edifício proporcionalmente à rigidez dos diferentes pórticos. Em segundo lugar, é determinado o centro de rigidez da estrutura a partir da disposição dos diferentes elementos de rigidez em planta, sendo feita uma correcção de torção

às forças previamente determinadas, com base na avaliação da excentricidade existente entre o ponto de aplicação da força global e o centro de rigidez referido.

Na análise à encurvadura, a regulamentação existente aponta também para um estudo em duas direcções independentes. Contudo, apesar da referência meramente qualitativa para a necessidade de a distribuição dos elementos de rigidez em planta garantir suficientemente rigidez à torção dos edifícios, não são neste caso indicados quaisquer tipo de correcções que permitam avaliar as consequências resultantes da tridimensionalidade.

Desta forma, é admitida para cada uma das direcções, e no caso de mais interesse para estruturas de nós móveis, uma configuração de instabilidade caracterizada por uma translação relativa entre os vários pisos. Esta hipótese de mobilidade implica considerar, que a possibilidade dos pilares mais afastados da carga crítica travarem os mais próximos da mesma é independente das suas posições relativas em planta. Contudo, e como se mostrará no Capítulo 4 utilizando um modelo tridimensional, à configuração de instabilidade da estrutura pode estar associada uma torção global do edifício, sendo a carga crítica global correspondente bem mais baixa do que a obtida quando se impede a rotação dos pisos, deixando claro que o erro cometido com uma simplificação deste tipo é do lado da insegurança.

Metodologias como a apresentada no REBAP [1], dado o seu elevado número de simplificações, conduzem a resultados de tal forma conservativos que o erro cometido não é regra geral comprometedor, porém, propostas como as apresentadas em 2.3.1 e 2.3.2 em que se procura fazer um apuramento parcial desta metodologia, diminuem significativamente as margens de segurança dos resultados obtidos, podendo a simplificação relativa à configuração de instabilidade admitida ser determinante.

Nos pontos que se seguem, serão expostos dois dos aspectos fundamentais de que depende a configuração real de instabilidade, e que se tratam da forma como se distribuem em planta a rigidez dos elementos verticais e as cargas verticais.

2.4.1 - Distribuição da rigidez em planta

As metodologias simplificadas habitualmente utilizadas, não entram em linha de conta com a distribuição em planta, dos elementos com diferentes características de rigidez. De facto, admite-se que uma possível configuração de instabilidade do tipo nós móveis numa dada direcção surgirá, de tal forma que os pisos de ligação entre os diferentes elementos verticais sofram apenas translações.

Está nestas condições a filosofia adoptada pelo REBAP [1] no que diz respeito à classificação de mobilidade, em que se simula a globalidade da estrutura através de uma única consola vertical cuja rigidez será equivalente ao somatório da rigidez de todos os elementos verticais, independente da posição que cada um deles ocupa em planta, e cuja configuração é do tipo da apresentada na Figura 2.2

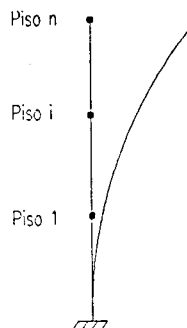


Fig. 2.2 - Configuração de instabilidade - REBAP [1].

Métodos do tipo do preconizado por Vila Pouca,[6] que pretendem integrar a rigidez das vigas constituintes dos pórticos no estudo da mobilidade, implicam a criação de uma estrutura tipo comboio, em que é garantido igual deslocamento ao nível de um dado piso para os nós dos elementos verticais que a ele ligam (Fig. 2.3).

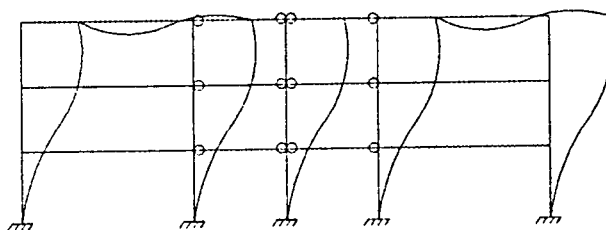


Fig. 2.3 - Configuração de instabilidade - Nelson Vila Pouca.

Qualquer um destes procedimentos, fazendo intervir de forma mais ou menos conveniente a rigidez dos diferentes elementos estruturais, permite simular a possibilidade de os elementos mais rígidos, e mais afastados de uma situação de instabilidade, travarem ou contraventarem os elementos menos rígidos mais próximos da instabilização, fazendo-o porém independentemente das suas relações posicionais em planta.

Na perspectiva de dar realce à importância da distribuição dos elementos de diferente rigidez em planta, atente-se na seguinte situação em que se analisa a encurvadura na direcção yy.

Considere-se uma estrutura constituída apenas por dois elementos verticais, pilares P1 e P2 vencendo um único piso, e ligados entre si por uma barra de rigidez infinita no plano do piso, simulando a existência de uma laje. Admita-se ainda que os esforços axiais instalados em cada uma das barras é igual à unidade, e que a rigidez à flexão de P1 na direcção yy é 10 vezes superior à de P2. Analisem-se agora as Figuras 2.4.a, 2.4.b e 2.4.c, que simulam três diferentes posicionamentos relativos entre eles.

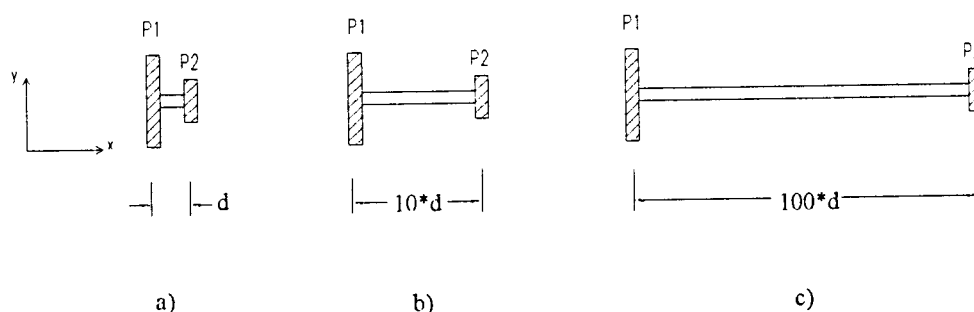


Fig. 2.4 - Estrutura constituída por dois pilares P1 e P2 - Três posições relativas em planta.

À luz das metodologias usuais, impondo como configuração de instabilidade uma translação pura do conjunto dos dois pilares na direcção yy, a carga crítica global da estrutura é igual para os casos a), b) e c), e terá um valor intermédio entre as cargas críticas individuais dos pilares P1 e P2, reflectindo a possibilidade de o pilar mais robusto travar o mais flexível.

Não pode contudo deixar de se sentir que, admitindo a possibilidade de se verificar uma rotação do piso de ligação entre pilares, e à medida que se caminha de uma situação do tipo a) para c), o crescente afastamento entre P1 e P2 vai diminuindo a possibilidade de interacção entre os dois pilares, e por consequência baixando o valor da carga crítica global. No limite, e se imaginarmos uma distância infinita entre P1 e P2, cada um deles funcionaria de forma independente e a carga crítica global seria igual à de P2, isto é, a menor possível.

Este exemplo pretende pôr em evidência que a diferença de rigidez entre os diferentes elementos constituintes de uma estrutura, pode conduzir ao aparecimento de uma configuração de instabilidade associada a uma torção dos pisos que a constituem. Este efeito tem tanto mais pertinência quanto se sabe que as estruturas correntes, em particular para edifícios altos, são

regra geral constituídas por elementos de muito diferente rigidez à flexão, surgindo pilares associados a paredes, caixas de escadas e de elevadores. Assim o posicionamento dos elementos mais rígidos é muito importante, não sendo de estranhar que devido à sua localização pontual, a configuração de instabilidade seja caracterizada por uma torção global da estrutura em torno de um ponto que lhes seja próximo (ver Fig. 2.5), obtendo-se valores da carga crítica bem mais baixos do que os obtidos com modelos em que apenas é admitida uma translação pura dos pisos. Estas mesmas conclusões se poderão tirar dos exemplos analisados nos capítulos 4, 5, 6 e 7.

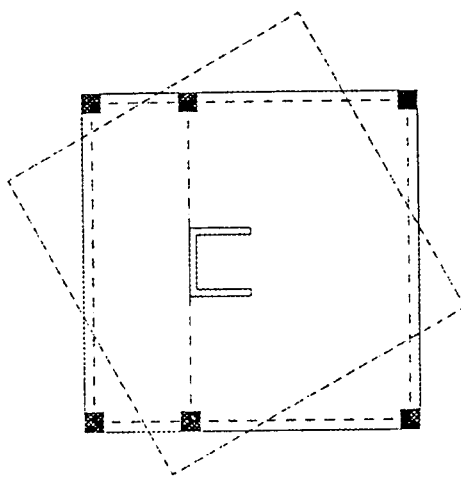


Fig. 2.5 - Modo de Encurvadura global tipo - Planta.

2.4.2 - Distribuição das cargas em planta

Ao falar no carregamento crítico de uma estrutura pressupõe-se uma determinada distribuição das cargas em planta e alçado. Na prática, o que é realmente procurado é um factor de carga habitualmente designado por λ_g , que representa o valor pelo qual se deverá multiplicar a distribuição inicialmente definida, de forma a que se obtenha uma situação de instabilidade. No conjunto de todos os elementos verticais existentes, salvo casos particulares, verifica-se que os esforços axiais instalados, quando multiplicados por λ_g , serão superiores ao valor da carga crítica individual em algumas barras e inferiores nas restantes. Este facto representa o efeito de travamento efectuado pelos pilares mais afastados da carga crítica, aos pilares cuja carga crítica individual já foi excedida.

É na relação entre o esforço instalado e a carga crítica de uma dada barra que reside a sua maior ou menor capacidade de colaborar no contraventamento de uma estrutura.

Neste contexto, atente-se na seguinte situação. Imagine-se uma estrutura idêntica à apresentada em 2.4.1 (Fig. 2.4b) mas em que os esforços axiais instalados em P1 e P2 são iguais às respectivas cargas críticas (Fig. 2.6).

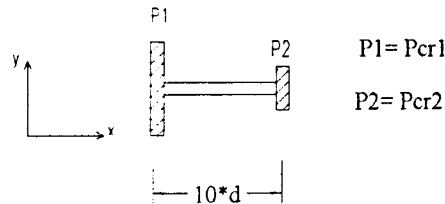


Fig. 2.6 - Conjunto de dois pilares solicitados pelas respectivas cargas críticas.

Nesta situação, ambos os pilares estão no limite da sua capacidade de resistência, encontrando-se a estrutura na eminência da instabilidade, sendo o factor de carga global igual à unidade, $\lambda_g = 1$. Este facto deixa claro que mesmo sendo a rigidez à flexão de P1 dez vezes superior à de P2, não existe qualquer possibilidade de P1 lhe servir de elemento de contraventamento. Poderia inclusive passar-se o contrário, (isto é, P2 contraventar P1), se a carga de P2 fosse diminuída.

Tal como no ponto anterior, levanta-se a questão da configuração de instabilidade que é admitida. Mais uma vez o que está em causa é a capacidade, e possibilidade, de os elementos mais afastados de uma situação crítica travarem os mais próximos da mesma e de, por esta razão, surgirem por vezes configurações de instabilidade mobilizando a torção dos pisos constituintes da estrutura.

Retomem-se os três casos sugeridos na parte 2.4.1 (Fig. 2.4a), b) e c)), introduzindo as seguintes alterações: os pilares têm agora igual secção, mas o esforço axial instalado em P2, é dez vezes superior ao de P1 (Fig. 2.7).

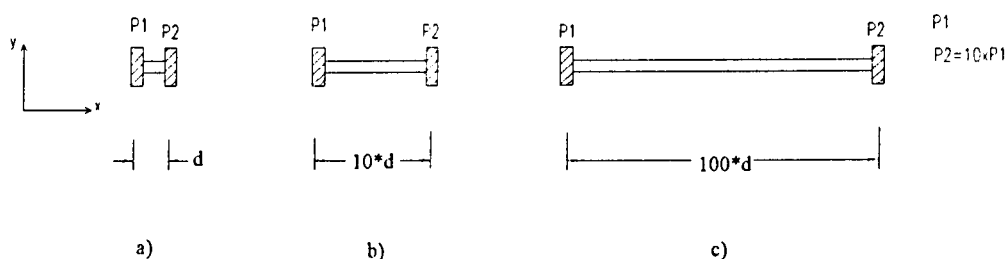


Fig. 2.7 - Estrutura constituída por dois pilares P1 e P2 - Três posições relativas em planta.

O valor de λ_g global da estrutura terá um valor compreendido entre os λ_{gj} de P1 e P2 calculados como elementos isolados. A determinação exacta de λ_g global está dependente da possibilidade de P1 travar P2, que como se compreende será tanto menor quanto caminhar-mos de uma situação do tipo a) para uma situação do tipo c).

Como nota final refere-se uma situação prática de projecto, onde este problema se pode colocar com uma certa importância.

A existência de varandas, ou zonas do interior habitável de um edifício incluindo a respectiva parede exterior de fachada, em consola, é uma situação corrente de projecto. Situações deste tipo implicam elevadas cargas nos pórticos extremos, com o consequente elevado nível de esforço axial nos pilares que o constituem. Em contrapartida o nível de esforço axial instalado em elementos de grande rigidez como paredes, caixas de escadas ou de elevadores é pequeno quando comparado com as suas capacidades resistentes. Ao impôr como configuração de instabilidade uma translação pura dos pisos, admite-se que a possibilidade dos elementos de grande rigidez travarem os de menor rigidez e com elevado nível de carga é muito grande. Verificando-se ainda que, regra geral, os elementos de grande rigidez se encontram localizados na zona central da estrutura, não será difícil prever que, a verificar-se uma situação de instabilidade esta ocorrerá assistindo-se a uma torção dos diferentes pisos, em torno de um ponto próximo dos elementos de grande rigidez. Neste caso a capacidade destas peças contribuir para o contraventamento da estrutura, não depende da sua grande rigidez à flexão, mas antes da sua rigidez à torção que em muitos casos não é significativa.

CAPÍTULO 3

CÁLCULO TRIDIMENSIONAL ELÁSTICO DE ESTRUTURAS - GRETRI1

3.1 - INTRODUÇÃO

O enorme desenvolvimento do cálculo automático de estruturas, veio fazer com que os métodos expeditos e simplificados fossem sendo aos poucos abandonados. De facto, os projectistas de estruturas não dispensam hoje ferramentas de cálculo automático, para levarem a cabo com maior eficiência e qualidade os projectos que se propõem realizar, garantindo que o seu trabalho seja executado em tempo útil e com custos ajustáveis às exigências do mercado actual.

De uma forma geral, as estruturas são concebidas de tal modo que a sua análise possa ser efectuada com base em modelos planos de cálculo. Estes modelos são aplicados aos planos onde se desenvolvem os elementos resistentes que, no seu conjunto, formam o que habitualmente se designa por pórticos planos.

A utilização generalizada de modelos deste tipo, prende-se fundamentalmente com a sua simplicidade de aplicação e com a facilidade de interpretação dos resultados obtidos, tornando-os assim particularmente acessíveis aos projectistas.

Porém, a configuração eminentemente tridimensional das estruturas reais não pode ser ignorada, em particular no caso da actuação de forças horizontais sobre a estrutura, acção do vento ou sismo, e ainda, como se procurará demonstrar ao longo do presente trabalho, no caso da análise dos efeitos de encurvadura. A existência de pisos rígidos, de ligação entre os diferentes elementos verticais, é responsável por esta necessidade de analisar a estrutura como um todo, possibilitando, no caso das acções horizontais a distribuição das forças horizontais pelos diferentes elementos resistentes, e no caso da encurvadura o desenvolvimento de forças de interacção entre os mesmos, traduzindo a possibilidade de se estabelecer a sua estabilização global.

Na prática, o problema a resolver surge da impossibilidade de contabilizar, a partir da análise individual de cada pórtico plano, a existência de eventuais torções globais da estrutura provocadas pelas acções horizontais ou pelo fenómeno de instabilidade.

Se relativamente ao fenómeno da instabilidade, este efeito tem vindo a ser ignorado nas diversas metodologias propostas, o mesmo não acontece no que diz respeito às acções horizontais, onde esta questão é colocada de forma relevante.

Para este efeito, e no sentido de evitar o recurso a meios mais complexos e dispendiosos em que se faça a análise da totalidade da estrutura, têm sido propostos diversos métodos simplificados tendo por base os pórticos planos. Dos métodos mais simples

habitualmente utilizados, destaque-se aquele em que a distribuição das acções horizontais é feita, numa primeira fase e a partir de uma associação em comboio, proporcionalmente à rigidez dos pórticos existentes na direcção em estudo, sendo em seguida efectuada uma correcção de torção reflectindo a sua distribuição em planta [10]. Métodos mais elaborados, habitualmente designados por Modelos - Três Graus de Liberdade por Piso, têm também sido desenvolvidos [11] e [12]. Estes permitem estabelecer uma relação, associada aos 3 graus de liberdade de cada piso, entre as deformadas dos pórticos existentes nas duas direcções, garantindo-se assim a intervenção parcial do carácter tridimensional da estrutura, sem que no entanto se considere toda a deformabilidade presente, e sem que seja obtida a completa compatibilização da deformada dos elementos verticais que pertencem simultaneamente a mais do que um pórtico.

No presente modelo tridimensional a que corresponde o programa de cálculo automático GRETRI1, elaborado no âmbito deste trabalho, a estrutura é representada na sua globalidade através de grelhas no plano dos pisos, ligados entre si por elementos verticais nas posições dos pilares existentes.

As grelhas, por definição constituídas por barras indeformáveis no seu plano, representam com eficácia os pisos dos edificios correntes, cuja distorção se encontra impedida pela existência de lajes. Em cada grelha é acrescentado um nó adicional que aqui se vai designar por *nó de piso*, e ao qual estão associados três graus de liberdade, correspondentes aos movimentos de corpo rígido da grelha no seu plano.

Os pilares de ligação entre grelhas são incluídos, mobilizando-se integralmente a sua deformabilidade associada a 6 graus de liberdade por cada extremidade. Destes 6 graus de liberdade, 3 são condicionados pelo correspondente nó da grelha a que ligam, e os restantes 3 pelo *nó de piso*.

Um modelo deste tipo permite elaborar uma análise muito rigorosa e realista de edificios tridimensionais, e apresenta, entre outras, a vantagem de o conseguir com cerca de metade do número de graus de liberdade necessários com modelos do tipo pórtico espacial.

3.2 - MODELO DE CÁLCULO

O presente modelo de cálculo procura evidenciar os elementos fundamentais constituintes de uma estrutura: os pisos constituídos por vigas em forma de grelha, que recebem através da lajes as acções verticais, e os pilares que estabelecem a ligação entre os

pisos dos diferentes níveis, assegurando a transmissão das cargas verticais às fundações e constituindo em associação com as vigas os elementos resistentes às acções horizontais.

3.2.1 - Modelação dos pisos - Grelhas

Os pisos são modelados através de grelhas, sendo os graus de liberdade dos nós das vigas que as constituem os correspondentes a uma translação vertical, uma flexão da viga no seu plano vertical e uma torção em torno do seu eixo. A Figura 3.1 apresenta de forma esquemática estes graus de liberdade, os quais permitem definir a matriz de rigidez das vigas bem conhecida dos modelos de grelhas planas, e que se apresenta em (3.1).

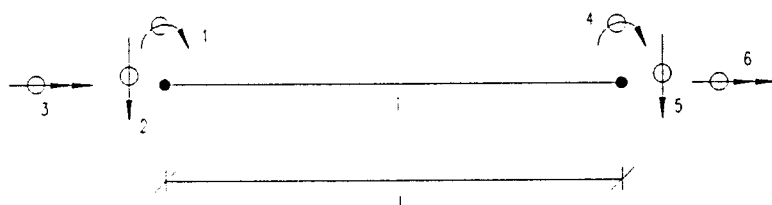


Fig. 3.1 - Graus de liberdade para a barra i pertencente a uma grelha.

$$[K_e]_{vig} = \begin{bmatrix} 4EI/L & 6EI/L^2 & 0 & 2EI/L & -6EI/L^2 & 0 \\ 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 0 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 0 \\ 0 & 0 & GI_t/L & 0 & 0 & -GI_t/L \\ 2EI/L & 6EI/L^2 & 0 & 4EI/L & -6EI/L^2 & 0 \\ -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 0 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 0 \\ 0 & 0 & -GI_t/L & 0 & 0 & GI_t/L \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

É a consideração de apenas estes graus de liberdade para as vigas que torna a grelha indeformável no seu plano, hipótese adequada ao caso de edifícios em que as lajes impedem qualquer deformação no plano horizontal.

Por outro lado, os pisos sofrem no seu plano movimentos de corpo rígido que podem ser definidos através dos 3 deslocamentos, duas translações e uma rotação, que vão associar-se a um nó adicional designado por *nó de piso*.

Os movimentos de corpo rígido associados a este nó especial, condicionam os deslocamentos das extremidades dos pilares no plano horizontal. Por esta razão, e apesar de o nó de piso ser referido como um nó adicional da grelha, este encontra-se directamente associado aos elementos verticais que concorrem no respectivo piso.

Como nota final, refira-se que neste modelo a disposição das vigas constituintes das grelhas poderá ser qualquer, não necessitando de obedecer a nenhum tipo de regularidade.

3.2.2 - Pilares - Elementos de ligação entre pisos

A inclusão dos pilares no modelo apresentado é feita considerando a completa deformabilidade dos mesmos. Assim os pilares são tomados como barras de um pórtico espacial com 6 graus de liberdade por nó, a que corresponde uma matriz de rigidez de 12×12 elementos.

Na Figura 3.2 representam-se de forma esquemática os graus de liberdade de uma barra nas condições referidas, aos quais está associada a matriz de rigidez apresentada em (3.2)[17].

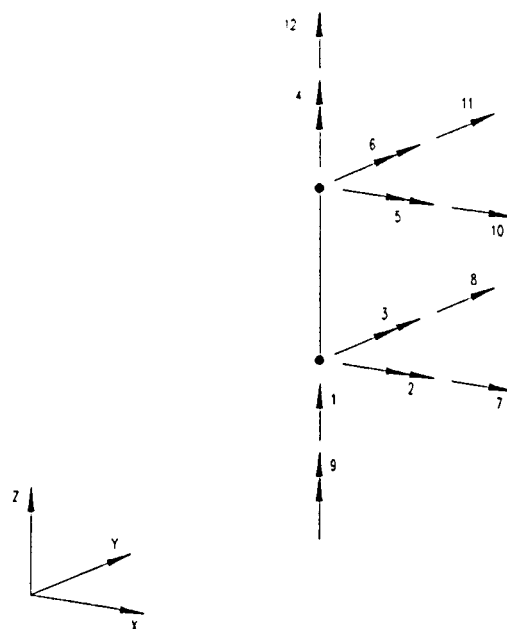


Fig. 3.2 - Barra de pórtico espacial - graus de liberdade no referencial local.

$$[K]_{pw} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4EI_x/L & 0 & 0 & 2EI_x/L & 0 & 0 & -6EI_x/L^2 & 0 & 0 & 6EI_x/L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4EI_y/L & 0 & 0 & 2EI_y/L & 0 & 0 & -6EI_y/L^2 & 0 & 0 & 6EI_y/L^2 \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2EI_x/L & 0 & 0 & 4EI_x/L & 0 & 0 & -6EI_x/L^2 & 0 & 0 & 6EI_x/L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2EI_y/L & 0 & 0 & 4EI_y/L & 0 & 0 & -6EI_y/L^2 & 0 & 0 & 6EI_y/L^2 \\ 0 & 0 & 6EI_y/L^2 & 0 & 0 & 6EI_x/L^2 & 12EI_y/L^3 & 0 & 0 & -12EI_y/L^3 & 0 & 0 \\ 0 & -6EI_x/L^2 & 0 & 0 & -6EI_x/L^2 & 0 & 0 & 12EI_x/L^3 & 0 & 0 & -12EI_x/L^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & GI_t/L & 0 & 0 & -GI_t/L \\ 0 & 0 & -6EI_y/L^2 & 0 & 0 & -6EI_y/L^2 & -12EI_y/L^3 & 0 & 0 & 12EI_y/L^3 & 0 & 0 \\ 0 & 6EI_x/L^2 & 0 & 0 & 6EI_x/L^2 & 0 & 0 & -12EI_x/L^3 & 0 & 0 & 12EI_x/L^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -GI_t/L & 0 & 0 & GI_t/L \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Este pilar tipo tem contudo de ser adaptado ao modelo global tridimensional. A indeformabilidade das lajes de ligação entre pilares, implica que 3 dos seus graus de liberdade por nó estejam condicionados pelo movimento de corpo rígido dos pisos.

Estes 3 graus de liberdade, duas translações no plano horizontal e uma rotação em torno de um eixo vertical, terão de sofrer uma transformação que permita associá-los aos graus de liberdade do já referido *nó de piso*.

A Figura 3.3 representa os referenciais correspondentes a um pilar, antes e depois da transformação.

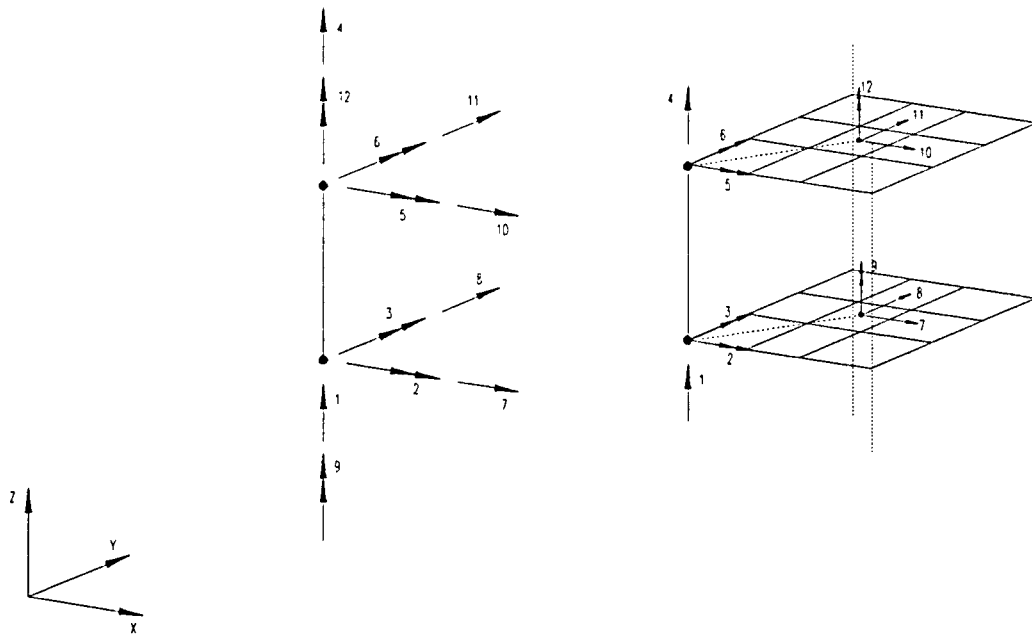


Fig. 3.3 - Referenciais de um pilar antes e depois da transformação.

Como se verifica da comparação entre os dois referenciais, esta transformação irá afectar os graus de liberdade designados por 7, 8, 9, 10, 11 e 12.

A Figura 3.4 apresenta em planta, para uma das extremidades do pilar, as grandezas geométricas que permitem obter a matriz de transformação do referencial local no nó do pilar para o referencial localizado no *nó de piso*.

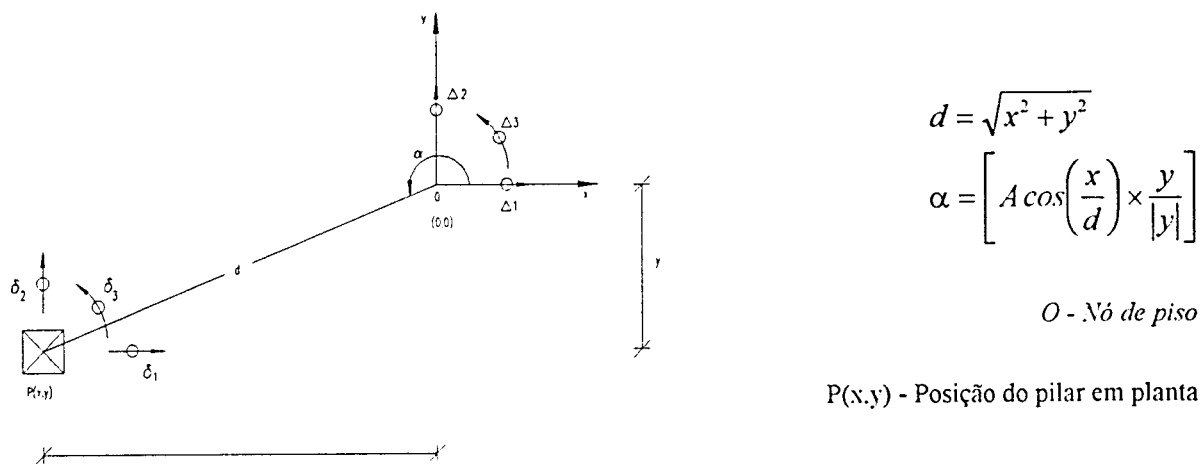


Fig. 3.4 - Graus de liberdade de movimento de corpo rígido do piso. Relações geométricas entre referenciais associados ao nó de pilar e ao *nó de piso*.

A matriz de transformação $[\bar{T}]$ do referencial Δ para δ será assim definida por :

$$[\bar{T}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -d \sin \alpha \\ 0 & 1 & d \cos \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

A matriz de transformação global $[T]$, para os doze graus de liberdade do pilar poderá então ser construída a partir de $[\bar{T}]$, surgindo:

$$[T] = \begin{bmatrix} I & & & \\ & I & & \\ & & \bar{T} & \\ & & & \bar{T} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

onde I é a matriz de identidade de 3x3 elementos.

Uma vez estabelecidas as relações entre os graus de liberdade nos dois referenciais, podem determinar-se com facilidade as transformações a efectuar ao nível das forças (vector solicitação) e matriz de rigidez.

Notações gerais dos dois referenciais

REF1		REF2
Δ	Deslocamentos	δ
F	Forças	f
K	Matriz de rigidez	k

sendo $\delta = T\Delta$, o Teorema da Contra-Gradiência assegura que: $F = T' f$.

A equação de equilíbrio associada ao método dos deslocamentos será:

$$k\delta = f$$

$$kT\Delta = f$$

$$T' kT\Delta = T' f$$

$$K\Delta = F$$

Resultando no referencial Δ que:

$$\text{Vector solicitação} \quad F = T' f$$

$$\text{Matriz de rigidez} \quad K = T' kT$$

Obtém-se assim a partir do clássico pilar de 2 nós e 6 graus de liberdade por nó (referencial 2), e utilizando a matriz de transformação [T], as relações entre deslocamentos, forças e matriz de rigidez de cada elemento vertical no referencial pretendido (referencial 1).

É de notar que deste modo, os pilares inicialmente elementos de 2 nós e 6 graus de liberdade por nó, se podem agora considerar como barras de 4 nós cada um com 3 graus de liberdade.

O agrupamento do vector solicitação e da matriz de rigidez dos diferentes elementos verticais não levanta qualquer dificuldade procedendo-se do modo habitual, com a particularidade de corresponderem a cada pilar 4 nós, sendo 2 os nós de ligação às grelhas superior e inferior, e os restantes 2 os correspondentes *nós de piso*.

3.2.3 - Acções

Este modelo permite de forma muito prática a inclusão de qualquer tipo de acção.

As vigas constituintes dos pisos, podendo receber qualquer solicitação típica de grelha, garantem, em particular, a fácil inclusão das acções verticais.

As acções horizontais, do tipo sismo e vento, poderão ser incluídas globalmente nos *nós de piso*, à custa da aplicação nestes nós de forças horizontais em uma ou duas direcções e ainda, quando necessário, de um momento em torno de um eixo perpendicular ao plano dos pisos.

3.3 - VANTAGENS DO MODELO

3.3.1 - Boa representação da realidade

O modelo descrito representa de um modo muito conveniente, a realidade de funcionamento das estruturas correntes do tipo reticulado tridimensional. De forma sucinta irão agora apresentar-se algumas das razões que o justificam.

i) Indeformabilidade dos pisos no seu plano.

A modelação dos pisos através de grelhas garante por si só a impossibilidade de distorções no seu plano, hipótese que se ajusta à realidade dada a existência de lajes de ligação entre as diferentes vigas que os constituem.

ii) Mobilização integral da deformabilidade das vigas, permitida pelas lajes de piso.

Mais uma vez dada a simulação dos pisos através de grelhas, as secções das vigas apenas poderão sofrer deformação por corte ou flexão no plano vertical e torção em torno do eixo da própria viga. A ligação das faces laterais das vigas às lajes de piso não permite de facto o aparecimento de outro tipo de deformações.

iii) Mobilização integral da deformabilidade dos pilares.

A mobilização da deformabilidade associada aos 6 graus de liberdade por nó de todos os elementos verticais, está garantida neste modelo.

iv) Compatibilização integral da deformabilidade entre os diferentes elementos verticais.

É conseguido neste modelo, de uma forma directa, a compatibilização da deformabilidade dos diferentes elementos verticais, imposto pela ligação das suas extremidades a pisos rígidos no seu plano.

3.3.2 - Vantagens relativamente a outros modelos

Relativamente a outros modelos, que pretendem simular um funcionamento o mais aproximado possível da realidade, podem referir-se algumas vantagens.

Os modelos simplificados construídos a partir de estruturas planas implicam, na tentativa de simular a tridimensionalidade dos edifícios, o recurso à compatibilização das várias estruturas analisadas previamente de forma independente. Este objectivo não é na maioria dos casos integralmente conseguido, garantindo-se apenas a compatibilização dos graus de liberdade mais relevantes. Por outro lado, e uma vez que estes modelos se apoiam em elementos resistentes planos, não é garantida a mobilização da completa deformabilidade das barras, aspecto que se coloca com maior importância relativamente aos elementos verticais.

A título de exemplo, verifique-se o que acontece em modelos habitualmente designados por "Modelos de Três Graus de Liberdade por piso", muito utilizados no âmbito da Dinâmica de Estruturas. Imagine-se que se pretende simular um edifício com planta quadrada, constituído por quatro pórticos (ver Fig. 3.5), sob a acção de um momento torsor no plano do piso.

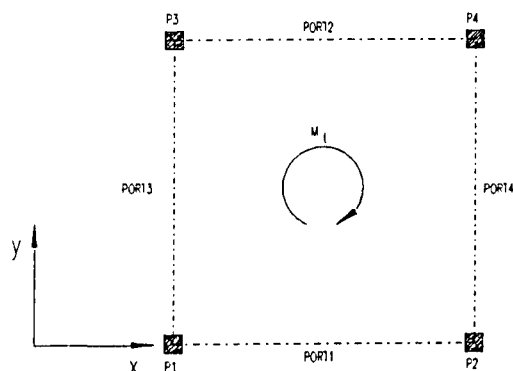


Fig. 3.5 - Planta genérica de um edifício.

Um método deste tipo permite que, de uma forma directa, os 4 pórticos sejam mobilizados na resistência à acção aplicada. Verifica-se no entanto, que a rigidez à torção dos elementos verticais não é contabilizada, e que não é garantida a compatibilização dos deslocamentos verticais para os nós dos pilares que pertencem simultaneamente a dois pórticos, podendo mesmo como no caso deste exemplo, ser de sinal contrário em cada um deles.

Comparado com modelos tridimensionais de 6 graus de liberdade por nó, o modelo exposto neste capítulo apresenta a vantagem de reduzir sensivelmente a metade o número de variáveis, uma vez que usa apenas três graus de liberdade por nó, necessitando apenas de mais um nó por cada piso existente. Por outro lado, não é necessária a introdução de barras suplementares ou a adopção de características especiais para os materiais constituintes dos mesmos, de forma a conseguir simular a indeformabilidade dos pisos no seu plano.

De facto, o presente modelo apresenta uma grande coerência de análise, a par da sua simplicidade e rigor. Torna-se por isso, indicado para a análise de estruturas sob a acção de acções horizontais de sismos ou vento, apresentando-se também como uma excelente ferramenta para analisar os efeitos da encurvadura, uma vez incluído o efeito não linear geométrico que a caracteriza.

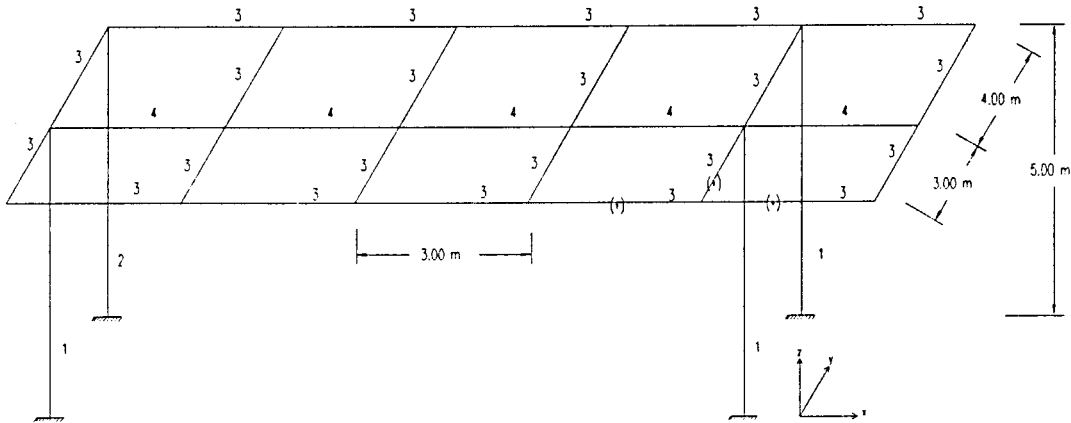
3.4 - PROGRAMA GRETRI1 -EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

O programa GRETRI1, que se desenvolveu em primeiro lugar, tem como base o modelo acabado de descrever, tendo sido incluídas subrotinas gráficas para facilitar a interpretação de resultados. Diga-se ainda que foi este programa que serviu de base aos que se descrevem no Capítulo 4 (pontos 4.2 e 4.3), e que permitem calcular uma estrutura incluindo os efeitos de 2ª ordem e determinar os modos de encurvadura e respectivas cargas críticas.

Apresentam-se em seguida dois exemplos de aplicação do modelo GRETRI1, que conduziram a valores exactos dos esforços e deslocamentos, quando comparados com os obtidos com um modelo tridimensional de seis graus de liberdade por nó, em que se simulou a indeformabilidade dos pisos.

i) Cobertura isolada - (COB1)

Nas figuras 3.6, 3.6a) e 3.6b), representam-se para além das características geométricas, secções e acções de uma cobertura isolada, uma perspectiva e uma planta da deformada obtida.



Secções: $E = 29 \text{ GPa}$

Pilares	$b_x(\text{m})$	$b_y(\text{m})$	Vigas	$b(\text{m})$	$h(\text{m})$
1	0.30	0.30	3	0.30	0.90
2	0.40	0.40	4	0.20	0.40

Acções: $\text{Ps}_d = 60 \text{ Kn/m}$ nas vigas assinaladas com (*).
 $\text{Ps}_d = 20 \text{ Kn/m}$ nas restantes.

Fig. 3.6 - Cobertura isolada (COB1) - Geometria, secções e acções.

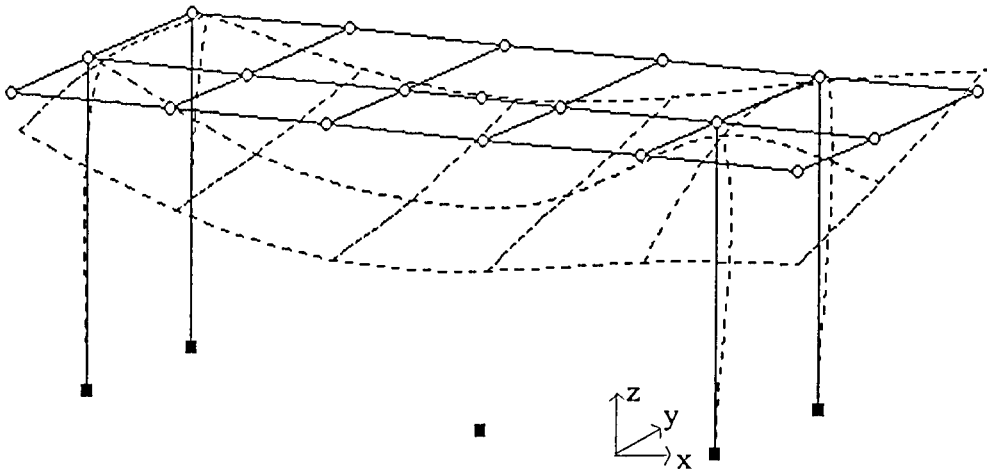


Fig. 3.6a - Cobertura isolada (COB1) - Deformada em perspectiva.

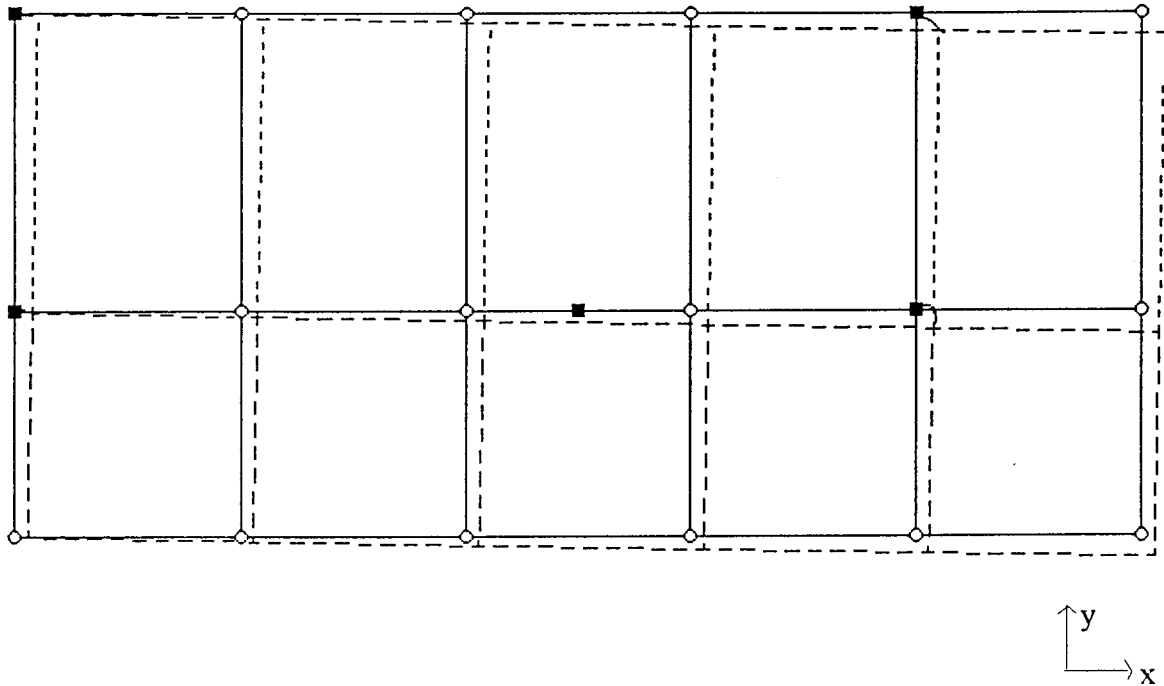


Fig. 3.6b - Cobertura isolada (COB1) - Deformada em planta.

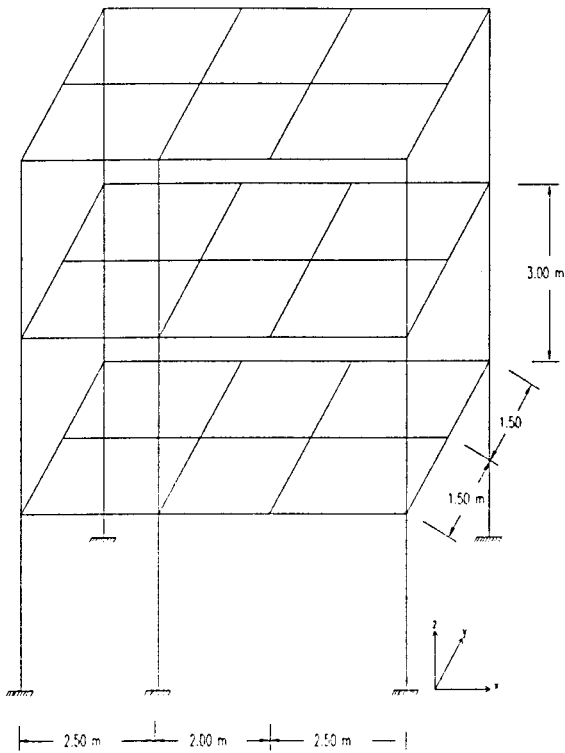
Pretende-se com este exemplo evidenciar, que uma distribuição não simétrica de cargas, associada à existência de um elemento resistente vertical mais rígido colocado na posição descrita, conduzem a uma rotação do plano horizontal da cobertura apesar de esta se encontrar unicamente sujeita a acções verticais.

Para este exemplo os deslocamentos globais da cobertura referidos ao seu centro geométrico foram:

$$dx = 0.45 \text{ cm} \quad dy = -0.32 \text{ cm} \quad \text{rotz} = -.02^\circ$$

ii) Edifício tipo - (ED1)

Nas figuras 3.7, 3.7a) e 3.7b), representam-se para além das características geométricas, secções e acções de um edifício tipo, uma perspectiva e uma planta da deformada obtida.



Acções: $P_{sd} = 50 \text{ KkN/m}$ em todas as vigas.

Acção horizontal aplicada nos nós de piso:

Piso	F_x (kN)	F_y (kN)	M_z (kN.m)
1	100	0	0
2	200	0	0
3	100	0	0

Secções: $E = 29 \text{ GPa}$

Pilares	b_x (m)	b_y (m)	Vigas	b (m)	h (m)
	0.30	0.30		0.30	0.50

Fig. 3.7 - Edifício tipo (1) - (ED1) - Geometria, secções e acções.

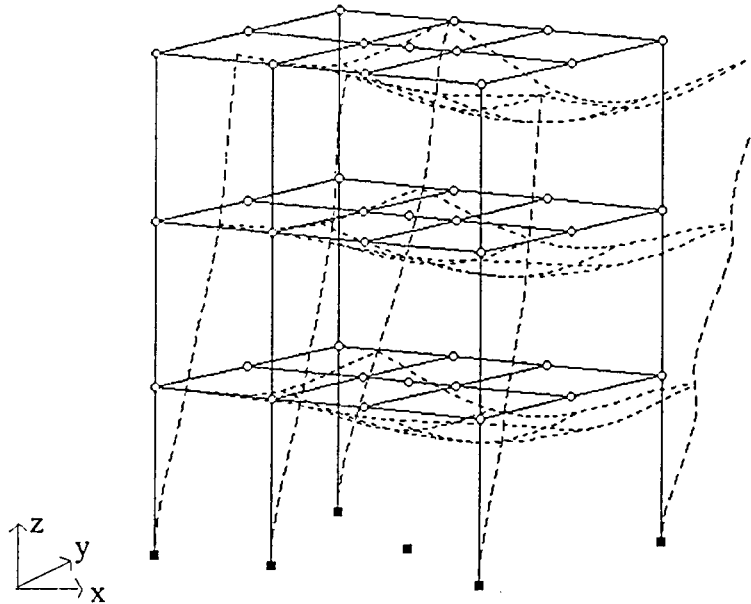


Fig. 3.7a - Edifício tipo (1) - (ED1) - Deformada elástica em perspectiva.

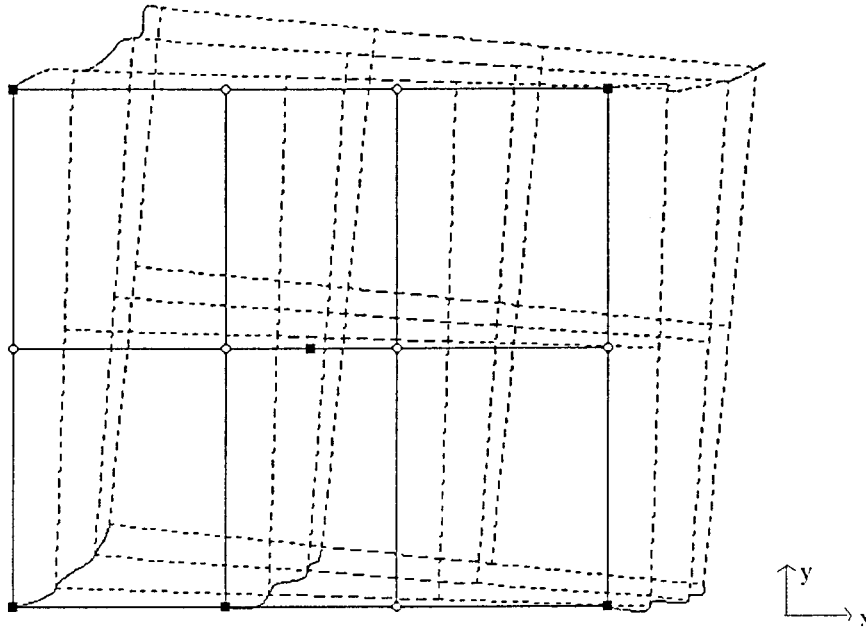


Fig. 3.7b - Edifício tipo (ED1) - Deformada elástica em planta.

Verifica-se neste exemplo, que um carregamento vertical simétrico associado a uma acção horizontal aplicada em altura e de forma centrada no edifício, conduz pela distribuição não simétrica dos elementos verticais em planta, a uma torção considerável do edifício.

Os deslocamentos obtidos no piso superior referidos ao seu centro geométrico foram:

$$dx = 2.87 \text{ cm} \quad dy = 1.19 \text{ cm} \quad \text{rotz} = -0.12^\circ$$

CAPÍTULO 4

MODELO TRIDIMENSIONAL INCLUINDO OS EFEITOS DE 2ª ORDEM; DETERMINAÇÃO DE CARGAS CRÍTICAS E MODOS DE ENCURVADURA

4.1 - INTRODUÇÃO

No Capítulo 3 foi apresentado um modelo de cálculo tridimensional elástico, que se adapta com simplicidade e realismo ao cálculo das estruturas correntes. Será então de todo o interesse poder utilizar este modelo na análise estrutural, fazendo intervir os efeitos de 2ª ordem na avaliação dos esforços e deslocamentos de uma qualquer estrutura, bem como na determinação da sua carga crítica e configuração de instabilidade ou modo de encurvadura associados.

4.2 - MODELO TRIDIMENSIONAL INCLUINDO EFEITOS DE 2ª ORDEM - GRETRI2

4.2.1 - Inclusão da não linearidade geométrica - Metodologia geral

O modelo tridimensional elástico apresentado neste trabalho foi formulado com base no método dos deslocamentos. Desta forma, a determinação dos esforços e deslocamentos de uma estrutura sujeita a um conjunto de forças é conseguida à custa da resolução de um sistema de equações de equilíbrio global da estrutura, cuja forma é:

$$[k_e] \cdot \{u\} = \{f\} \quad (4.1)$$

sendo

$[k_e]$ - matriz de rigidez elástica global da estrutura;

$\{u\}$ - vector dos deslocamentos global da estrutura;

$\{f\}$ - vector das forças global da estrutura.

A inclusão dos efeitos de 2ª ordem implica fazer intervir nas equações de equilíbrio (4.1) as forças e deslocamentos que resultam nos elementos comprimidos, pela consideração da sua própria deformação. Este objectivo será conseguido [15], a partir da substituição da matriz de rigidez elástica global da estrutura $[k_e]$, pela matriz de rigidez completa global $[k_c]$. As equações de equilíbrio passam então a ter a seguinte forma:

$$[k_c] \{u\} = \{f\} \quad (4.2)$$

A matriz de rigidez global de uma estrutura é obtida a partir da determinação, transformação e espalhamento das matrizes de rigidez, também completas, de cada uma das suas barras.

No presente modelo existem dois tipos fundamentais de barras, vigas (pertencentes a elementos de grelha) e pilares, sendo portanto com base na definição da matriz de rigidez completa de cada uma delas que se constituirá $[k_c]$.

4.2.1.1 - Matriz de rigidez completa das vigas

As vigas constituintes da estrutura, por serem associadas a elementos de grelha, são idealizadas sem deformação axial, não estando por isso sujeitas aos efeitos de 2ª ordem.

Por esta razão, a matriz de rigidez completa de uma viga será igual à sua matriz de rigidez elástica, $[k_c]_{vig} = [k_e]_{vig}$, não surgindo portanto qualquer tipo de alteração ao modelo elástico inicial.

4.2.1.2 - Matriz de rigidez completa dos pilares

A matriz de rigidez completa de uma barra é obtida por [15]:

$$[k_c^l] = [k_e^l] + [k_{lg}^l] \quad (4.3)$$

sendo:

$[k_e^l]$ - matriz de rigidez elástica da barra, no referencial local l

$[k_{lg}^l]$ - matriz de rigidez geométrica da barra, no referencial local l

Para um pilar, a matriz de rigidez elástica $[k_e^l]_{pil}$, no referencial indicado na Fig. 4.1, foi já estabelecida no Capítulo 3, expressão (3.2).

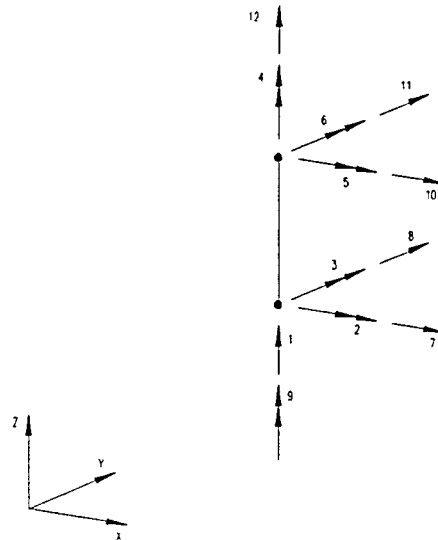


Fig. 4.1 - Pilar - referencial local de 12 graus de liberdade

A matriz de rigidez geométrica, no mesmo referencial, obtém-se generalizando a bem conhecida matriz de rigidez geométrica de um elemento de barra de pórtico plano [15], que se apresenta em (4.4), para uma convenção de graus de liberdade do tipo dos indicados na figura (4.2).

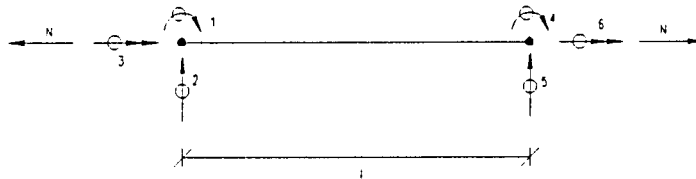


Fig. 4.2 - Barra de pórtico plano - referencial local de 6 graus de liberdade.

$$[k_{lg}] = \frac{N}{L} \begin{bmatrix} .4/3 & -.10L & 0 & -.10/3 & .10L & 0 \\ -.10L & 1.2 & 0 & -.10L & -1.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -.10/3 & -.10L & 0 & .4/3 & .10L & 0 \\ .10L & -1.2 & 0 & .10L & 1.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Sendo os efeitos de 2ª ordem independentes, em cada um dos planos principais de deformação dos elementos verticais, é imediata a definição da matriz de rigidez geométrica de um pilar de 6 graus de liberdade por nó no referencial apresentado na figura 4.1.

$$[k_{ig}]_{pil} = \frac{N}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .4/3 & 0 & 0 & -.10/3 & 0 & 0 & -.10L & 0 & 0 & .10L & 0 \\ 0 & 0 & .4/3 & 0 & 0 & -.10/3 & .10L & 0 & 0 & -.10L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -.10/3 & 0 & 0 & .4/3 & 0 & 0 & -.10L & 0 & 0 & .10L & 0 \\ 0 & 0 & -.10/3 & 0 & 0 & .4/3 & .10L & 0 & 0 & -.10L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .10L & 0 & 0 & .10L & 1.2 & 0 & 0 & -1.2 & 0 & 0 \\ 0 & -.10L & 0 & 0 & -.10L & 0 & 0 & 1.2 & 0 & 0 & -1.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.10L & 0 & 0 & -.10L & -1.2 & 0 & 0 & 1.2 & 0 & 0 \\ 0 & .10L & 0 & 0 & .10L & 0 & 0 & -1.2 & 0 & 0 & 1.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

A matriz de rigidez completa de um pilar no seu referencial local $[k_c]_{pil}$, é finalmente obtida adicionando as matrizes (3.2) e (4.5):

$$[k_c^I]_{pil} = [k_e^I]_{pil} + [k_{ig}^I]_{pil} \quad (4.6)$$

Definida esta matriz, a sua transformação para o referencial geral da estrutura e o seu espalhamento na matriz de rigidez global, executam-se de forma análoga ao efectuado no modelo elástico.

4.2.1.3 - Determinação dos esforços nas barras

Os esforços instalados numa barra, são obtidos à custa do conhecimento dos deslocamentos dos seus nós e da sua matriz de rigidez. Para que esses esforços incluam os efeitos de 2ª ordem bastará que os deslocamentos utilizados sejam os resultantes da resolução

do sistema de equações de equilíbrio com a matriz de rigidez completa da estrutura e que, a matriz de rigidez utilizada seja a sua matriz de rigidez completa.

4.2.2 - Necessidade de um processo iterativo - GRETRI2

Como se evidenciou no ponto anterior, a transformação de um modelo de cálculo elástico num modelo onde os efeitos de 2ª ordem sejam incluídos é conseguida, adicionando as matrizes de rigidez elástica e geométrica de cada uma das barras constituintes da estrutura.

Este procedimento, formalmente simples, arrasta consigo uma dificuldade do ponto de vista prático da estruturação de um programa de cálculo automático. A dependência entre o valor do esforço axial instalado em cada pilar e a sua matriz de rigidez geométrica implica que um algoritmo de resolução directa, do tipo do formulado no modelo elástico, seja abandonado. Terá assim de se estabelecer um processo iterativo para a determinação dos esforços e deslocamentos finais da estrutura. Efectuando um cálculo elástico inicial pode determinar-se uma distribuição de esforços axiais pelos pilares. Utilizando estes valores para a quantificação da matriz de rigidez geométrica de cada barra e recalculando a estrutura será obtida uma nova distribuição de esforços. Poderá agora repetir-se o processo, actualizando a matriz de rigidez geométrica e efectuando um novo cálculo da estrutura, tantas vezes quantas as necessárias até se obterem em duas iterações consecutivas resultados cujas diferenças sejam inferiores a uma tolerância fixada.

Verifica-se que, normalmente, os efeitos de 2ª ordem não afectam de forma significativa a distribuição dos esforços axiais, resultando por isso que o processo converge muito rapidamente. Esta relativa independência entre os efeitos de 2ª ordem e a distribuição dos esforços axiais é ainda mais notória em estruturas de edifícios para as quais o modelo GRETRI foi concebido, já que estes últimos dependem fundamentalmente do valor e da posição das cargas verticais.

Neste contexto, e com o modelo tridimensional apresentado (GRETRI2), verificou-se serem apenas necessárias duas iterações, que para as estruturas analisadas conduziram a muito bons resultados.

4.2.3 - Exemplos de aplicação

Dispensando-se uma exposição exaustiva dos resultados obtidos com o programa GRETRI2, irá apresentar-se, recorrendo aos exemplos utilizados no Capítulo 3, uma comparação entre as deformadas elásticas e não linear geométrica obtidas.

As características geométricas, secções e acções actuantes dos exemplos utilizados, encontram-se já definidas nas figuras 3.6 e 3.7, apresentando-se em seguida, para cada um deles, duas vistas do conjunto das duas deformadas.

i) Cobertura isolada (COB1)

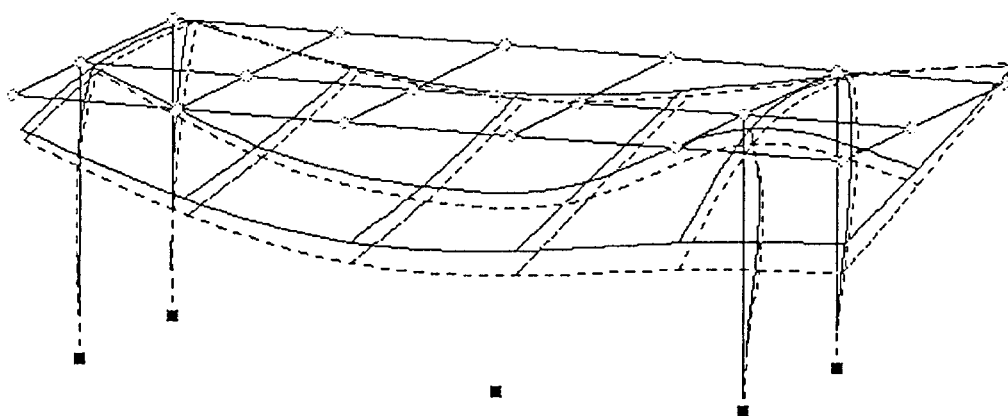


Fig. 4.3a - Cobertura isolada - Deformadas elástica e não linear geométrica - Perspectiva.

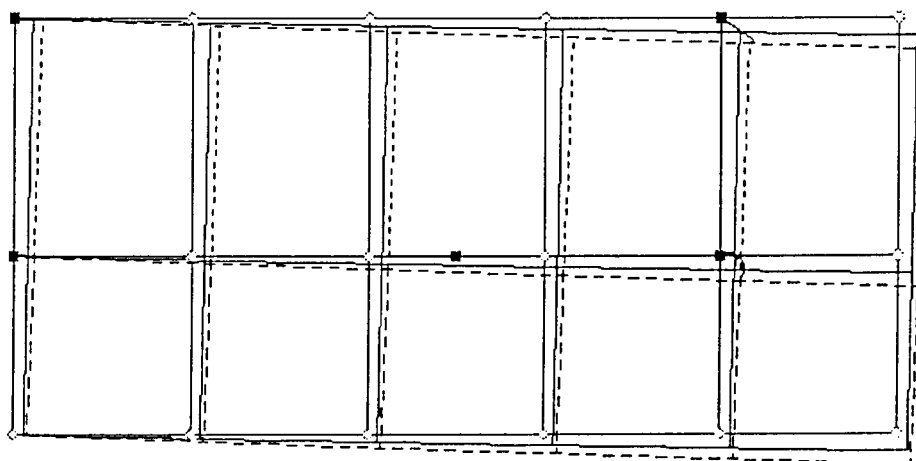


Fig. 4.3b - Cobertura isolada - Deformadas elástica e não linear geométrica - Planta.

Valores dos deslocamentos encontrados, relativos ao centro geométrico da cobertura :

$$dx=0.48 \text{ cm}$$

$$dy=-0.34 \text{ cm}$$

$$\text{rotz}=-0.042^\circ$$

Não existindo neste caso uma direcção preponderante de deformação horizontal, verifica-se que a inclusão dos efeitos de 2ª ordem conduz a um aumento médio de 6% dos deslocamentos, quando comparados com os resultados elásticos.

ii) Edifício tipo (1) (ED1)

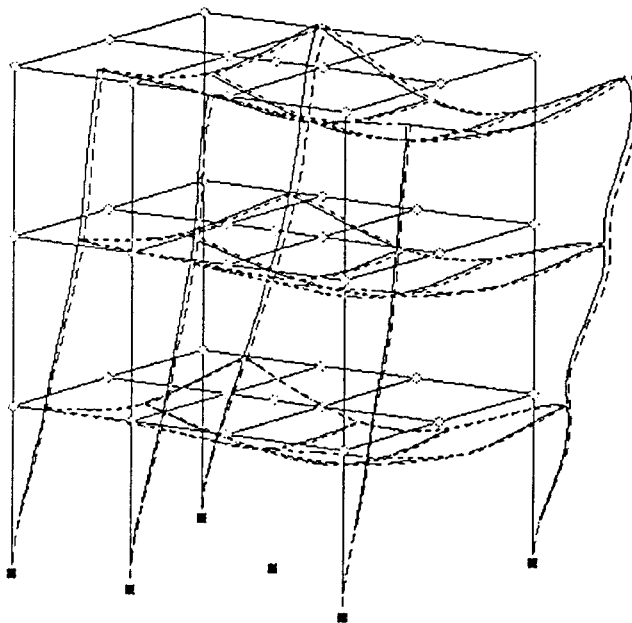


Fig. 4.4a - Edifício tipo (1) - Deformadas elástica e não linear geométrica - Perspectiva.

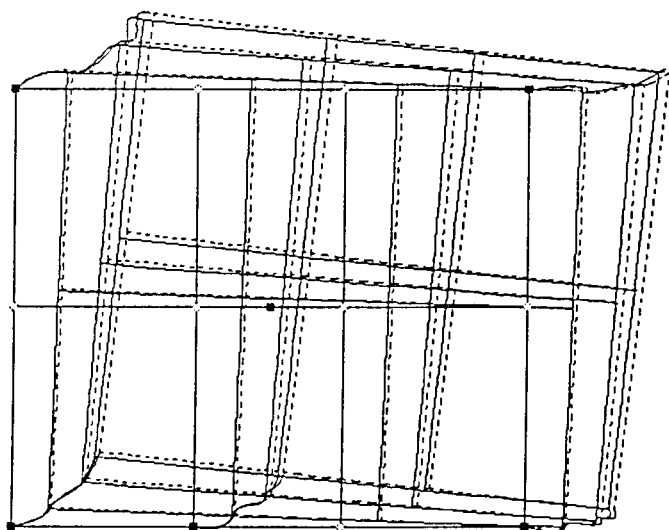


Fig. 4.4b - Edifício tipo (1) - Deformadas elástica e não linear geométrica - Planta.

Valores dos deslocamentos encontrados, relativos ao centro geométrico do último piso:

$$dx=3.08 \text{ cm}$$

$$dy=1.26 \text{ cm}$$

$$\text{rotz}=-0.13^\circ$$

Efectuando uma comparação com os resultados elásticos obtidos no Capítulo 3, verifica-se, tal como no exemplo anterior, um agravamento global da deformada da estrutura que neste caso atinge um valor médio de 7%.

4.3 - DETERMINAÇÃO DE CARGAS CRÍTICAS E MODOS DE ENCURVADURA ASSOCIADOS - GRETRI3

4.3.1 - Conceito geral de carga crítica e modo de encurvadura

Os estados de equilíbrio possíveis, de uma qualquer estrutura reticulada sujeita a um determinado carregamento global, são habitualmente designados por: estável, indiferente e instável. Estes três estados caracterizam-se pelas diferentes respostas da estrutura a uma perturbação exterior instantânea que a retire da sua posição inicial de equilíbrio.

- i) Equilíbrio estável: uma vez eliminada a perturbação a estrutura retoma a sua posição de equilíbrio inicial;
- ii) Equilíbrio indiferente: uma vez eliminada a perturbação a estrutura encontra-se em equilíbrio mas na posição que resultou daquela perturbação;
- iii) Equilíbrio instável: após a introdução da perturbação é possível encontrar uma posição de equilíbrio.

Considere-se uma estrutura e uma solicitação global associada. A sua carga crítica será o maior valor da solicitação para o qual ainda é possível atingir o equilíbrio. Encontrar-se-á neste caso uma situação de equilíbrio indiferente, cuja configuração deformada se define a menos de um factor de escala e se designa por modo de encurvadura.

4.3.2 - Determinação de cargas críticas e modos de encurvadura - Metodologia geral

A determinação da carga crítica e modo de encurvadura associado de uma qualquer estrutura pode ser efectuada, a partir de um modelo incluindo os efeitos de 2ª ordem do tipo do descrito em 4.2 (GRETRI2). Para tal, bastará adaptar as equações de equilíbrio que lhe servem de base com vista a traduzir uma situação de equilíbrio indiferente.

Admitindo um carregamento inicial da estrutura, vai procurar determinar-se um factor de carga λ_g que, multiplicado pela solicitação inicial, traduzirá a carga crítica da estrutura.

Uma vez que a matriz de rigidez geométrica depende linearmente dos valores do esforço axial instalado em cada uma das barras, uma situação de equilíbrio indiferente será expressa à luz do método dos deslocamentos por [16]:

$$\left[[k_e] + \lambda_g [k_{lg}] \right] \cdot \{u\} = 0 \quad (4.7)$$

Soluções não nulas desta equação só poderão ser obtidas se:

$$\det([k_e] + \lambda_g [k_{lg}]) = 0 \quad (4.8)$$

Por esta via encontra-se um problema clássico de determinação de valores e vectores próprios associados a $[k_e]$ e $[k_{lg}]$. Sendo n o número de graus de liberdade da estrutura, serão $n \times n$ o número de elementos constituintes destas matrizes e ter-se-á portanto, n valores e vectores próprios associados caracterizando igual número de modos de encurvadura da estrutura.

O factor de carga λ_g , correspondente à carga crítica da estrutura, será o mais baixo dos valores próprios encontrados, representando o respectivo vector próprio a sua configuração de instabilidade.

4.3.3 - Método iterativo de determinação de cargas críticas - GRETRI3

Em alternativa ao método geral de determinação dos n modos de encurvadura, descrito no ponto 4.2, foi utilizado no modelo tridimensional GRETRI3 um processo simplificado construído com base na iteração matricial de Stodola [9], [16].

Este método permite determinar, em primeiro lugar, o valor próprio λ_g mais baixo e o respectivo vector próprio. Esta possibilidade reveste o método de particular interesse para a análise da encurvadura, uma vez que são precisamente os modos de valor próprio mais baixo que caracterizam uma situação de instabilidade. É ainda possível calcular tantos modos adicionais quantos os desejados, associados a valores de λ_g sucessivamente crescentes.

4.3.3.1 - Determinação do valor próprio mais baixo e respectivo vector próprio - carga crítica da estrutura

A equação (4.7), representando uma situação de equilíbrio indiferente, pode ser reescrita com a forma:

$$[k_e] \cdot \frac{1}{\lambda_g} \{u\} = [k_{lg}] \{u\} \quad (4.9)$$

Esta equação será satisfeita se λ_g corresponder ao valor próprio mais baixo, para um vector $\{u\}$ que traduzirá a configuração de instabilidade da estrutura.

Uma vez determinados os esforços elástico resultantes da solicitação aplicada, e definida a matriz de rigidez global da estrutura, o processo iterativo inicia-se arbitrando um vector de deslocamentos inicial $\{u_0\}$. Pode agora entender-se a resolução do sistema de equações de equilíbrio (4.9) como um caso elástico normal, admitindo como vector solicitação,

$$\{f^0\} = [k_{lg}] \{u^0\} \quad (4.10)$$

e obtendo-se, como resultado, o vector de deslocamentos:

$$\{\bar{u}^1\} = \left(\frac{1}{\lambda_g} \{u^0\} \right) \quad (4.11)$$

Se o vector $\{u^0\}$ arbitrado fosse o correcto, a relação entre qualquer dos n componentes dos vectores de deslocamentos $\{u^0\}$ e $\{\bar{u}^1\}$, em correspondência com os graus de liberdade da estrutura, seria constante,

$$\frac{\bar{u}_i^1}{u_i^0} = \frac{1}{\lambda_g} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4.12)$$

e o valor de λ_g ficaria automaticamente determinado.

Na prática como isto não acontece, tem-se para cada componente i uma diferente relação entre deslocamentos e, por consequência, n valores para λ_g , sabendo-se no entanto que o seu real valor estará compreendido entre o máximo e o mínimo valor obtido.

Uma primeira aproximação para λ_g resulta de se efectuar uma ponderação pela matriz de rigidez geométrica, vindo:

$$\lambda_g^1 = \frac{\{\bar{u}^1\}^T [k_g] \{u^0\}}{\{\bar{u}^1\}^T [k_g] \{\bar{u}^1\}} \quad (4.13)$$

A correcção do valor de λ_g^1 agora determinado, no sentido de se obter uma melhor aproximação, poderá ser conseguida repetindo os passos até aqui dados, substituindo-se o vector de deslocamentos iniciais arbitrado $\{u^0\}$ pelo vector determinado $\{\bar{u}^1\}$, multiplicado por λ_g^1 .

$$\{u^1\} = \lambda_g^1 \{\bar{u}^1\} \quad (4.14)$$

Este processo iterativo será repetido tantas vezes quantas as necessárias para encontrarmos, em iterações consecutivas, valores de λ_g e $\{u\}$ cujas diferenças sejam inferiores a uma dada tolerância admitida. Verifica-se, que utilizando este método, λ_g^i converge para o menor valor próprio e $\{u^i\}$ para o correspondente vector próprio

4.3.3.2 - Determinação de modos de encurvadura de ordem superior ao primeiro

Como foi já referido é possível calcular, utilizando este método iterativo, o número desejado de modos de encurvadura superiores ao primeiro, para valores sucessivamente crescentes de λ_g .

A metodologia a seguir [16] apoia-se na condição de serem mutuamente ortogonais os diferentes vectores próprios definidos pela equação (4.7). Seguindo este princípio, para que dois vectores deslocamento, $\{u_I\}$ e $\{u_{II}\}$, correspondam a modos de encurvadura distintos terá de verificar-se a seguinte condição:

$$\{u_I\}^T [k_{lg}] \{u_{II}\} = 0 \quad (4.15)$$

Uma vez que o processo iterativo indicado converge para o modo de encurvadura de valor próprio mais baixo deverá, para a determinação de um modo mais elevado, partir-se em cada iteração de um vector $\{u^i\}_{pur}$ desde logo ortogonal a todos os modos já determinados. Há, assim, a necessidade de no início de cada iteração i , "purificar" o vector $\{u^i\}$ de arranque, tendo em vista garantir aquela ortogonalidade.

A purificação do vector deslocamento na iteração i , para a determinação do modo de encurvadura j , é efectuada através de [16]:

$$\{u^i\}_{pur} = \left(I - \frac{\{u^I\}\{u^I\}^T [k_{lg}]}{\{u^I\}^T [k_{lg}] \{u^I\}} - \frac{\{u^{II}\}\{u^{II}\}^T [k_{lg}]}{\{u^{II}\}^T [k_{lg}] \{u^{II}\}} - \dots - \frac{\{u^{j-1}\}\{u^{j-1}\}^T [k_{lg}]}{\{u^{j-1}\}^T [k_{lg}] \{u^{j-1}\}} \right) \cdot u^i \quad (4.16)$$

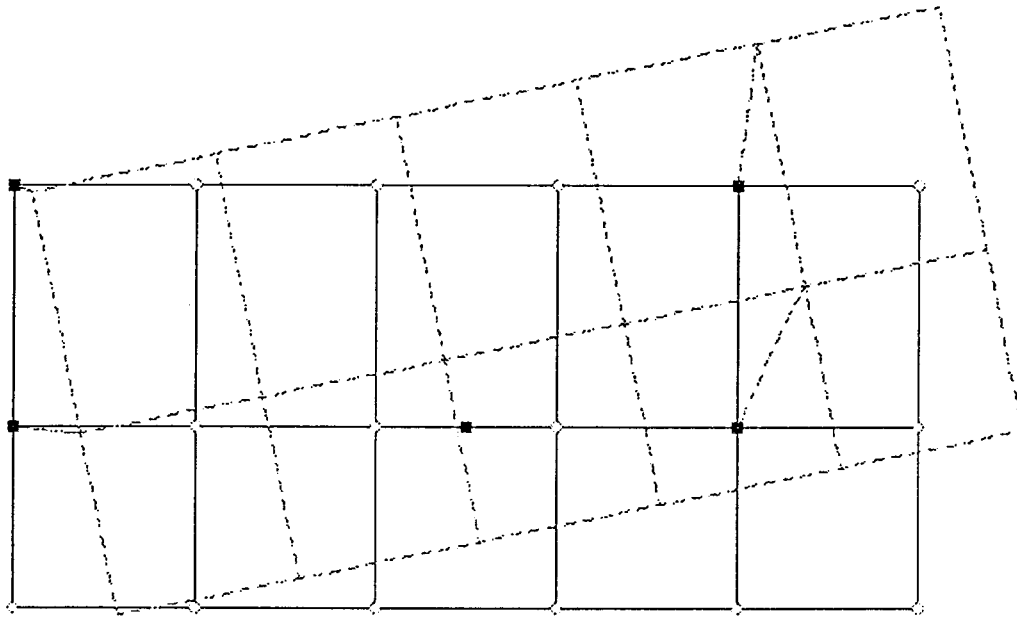
sendo

$u^I, u^{II}, \dots, u^{j-1}$ os modos de encurvadura de ordem inferior já determinados, e I a matriz identidade ($n \times n$).

4.3.4 - Exemplos de aplicação

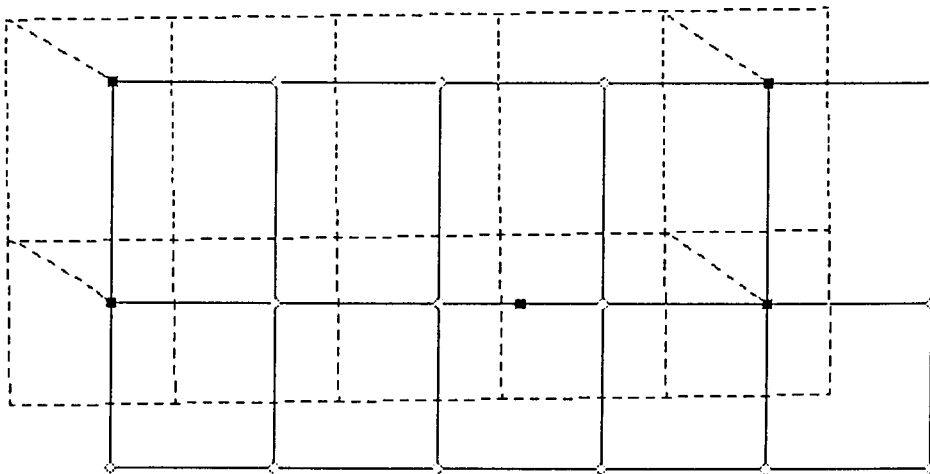
Utilizando ainda como exemplos de aplicação do programa GRETRI3 os representados na figuras 3.6 e 3.7, apresentam-se em seguida os seus dois primeiros modos de encurvadura e factores de carga λ_j associados.

i) Cobertura isolada (COB1)



$$\lambda_1 = 9.82$$

Fig. 4.5a- Cobertura isolada - 1º Modo de Encurvadura - Configuração deformada em Planta



$$\lambda_2 = 20.13$$

Fig. 4.5b - Cobertura isolada - 2º Modo de Encurvadura - Configuração deformada em Planta

Da análise das figuras 4.5a e 4.5b, verifica-se que os dois primeiros modos se caracterizam respectivamente, por uma rotação do plano da cobertura em torno de um ponto próximo do elemento vertical mais rígido, e por duas translações nas direcções principais de desenvolvimento da cobertura, com ligeira preponderância da direcção xx.

Foram ainda calculados, introduzindo as condições de apoio convenientes, os factores de carga para uma configuração de instabilidade por translação pura em cada uma das direcções independentes (λ_x e λ_y).

	1º modo	2º modo	Dir.xx	Dir.yy
λ	9.82	20.13	20.68	21.96

Dos quatro valores obtidos, que se apresentam em resumo no quadro anterior, pode observar-se que:

a) O valor da carga crítica obtida com o 1º modo de encurvadura, corresponde aproximadamente a 50% do determinado na hipótese de translação em qualquer das direcções xx ou yy.

b) O 2º modo determinado aproxima-se muito do modo de translação pura na direcção xx.

ii) Edifício tipo (1) (ED1)

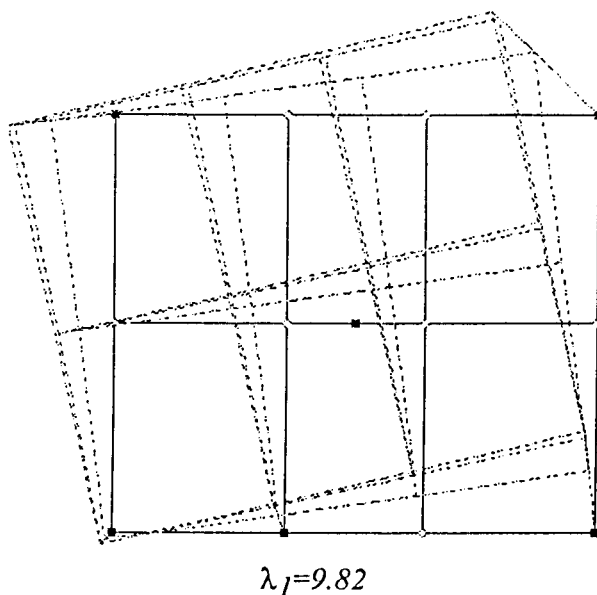
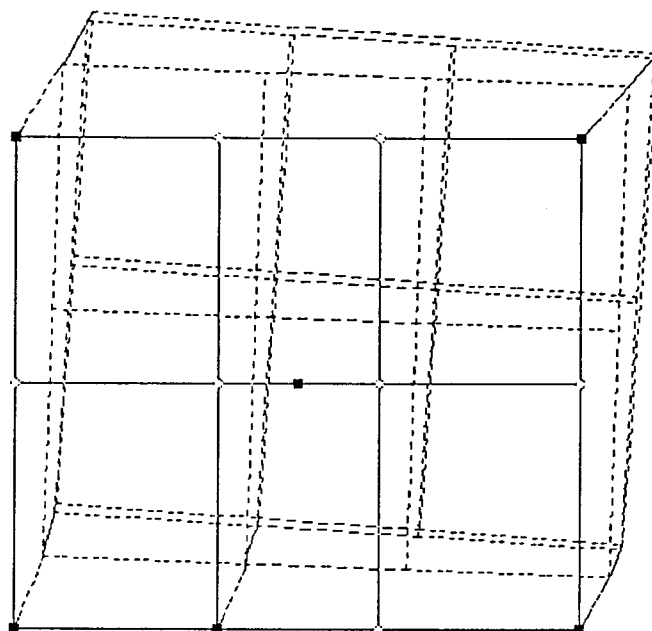


Fig. 4.6 - Edifício tipo (1) - 1º Modo de Encurvadura - Configuração deformada em Planta.



$$\lambda_2 = 13.20$$

Fig. 4.6b - Edifício tipo (1) - 2º Modo de Encurvadura - Configuração deformada em Planta.

No caso do edifício ED1, também já anteriormente analisado, uma vez que os elementos verticais têm igual secção, a estrutura apresenta um 1º modo de encurvadura, como aliás seria de esperar, caracterizado por uma rotação em torno de um ponto próximo dos pilares menos solicitados. O 2º modo tal como no exemplo anterior, exibe uma deformação horizontal dos pisos fundamentalmente de translação e cuja direcção preponderante é neste caso a yy, apesar de exibir uma componente importante de translação segundo xx e ainda uma ligeira rotação dos seus pisos.

Tendo sido calculados os factores de carga para modos de encurvadura de translação pura nas direcções xx e yy, que se apresentam no quadro resumo que se segue, pode concluir-se que:

	1º modo	2º modo	Dir.xx	Dir.yy
λ	11.16	13.20	14.10	13.40

a) O valor da carga crítica obtida com o 1º modo de encurvadura, corresponde aproximadamente a 80% da calculada na hipótese de translação em qualquer das direcções.

b) O 2º modo determinado, em termos de carga crítica, aproxima-se muito do modo de translação pura na direcção yy.

CAPÍTULO 5

MÉTODO SIMPLIFICADO PARA A DETERMINAÇÃO DA CARGA CRÍTICA DE UMA ESTRUTURA INCLUINDO OS EFEITOS TRIDIMENSIONAIS

5.1 - INTRODUÇÃO

No contexto da análise da instabilidade de uma estrutura, a carga crítica surge como uma grandeza de grande importância. A sua sensibilidade à distribuição de rigidez e cargas em planta, tal como foi exposto até aqui e se poderá confirmar pelos resultados do estudo apresentado no Capítulo 6, sugere como desejável que a sua obtenção seja feita considerando a estrutura na sua globalidade.

A adopção deste princípio, contrário à habitual determinação da carga crítica em duas direcções independentes impondo como única possibilidade de mobilidade a translação pura dos pisos, implica a análise da estrutura num modelo tridimensional do tipo do apresentado no Capítulo 4 deste trabalho (GRETRI3).

Contudo, a aplicação de um modelo de cálculo automático deste tipo às aplicações práticas de projecto, não se ajusta à tendência generalizada de utilização de modelos do tipo pórticos planos.

Assim sendo, procurou-se uma via que, utilizando os habituais modelos planos de cálculo, permitisse a determinação da carga crítica de uma qualquer estrutura incluindo os efeitos tridimensionais. O método simplificado proposto, que se apresenta nos pontos seguintes, pretende dar resposta a este objectivo.

5.2 - FUNDAMENTOS DO MÉTODO

Tendo em vista uma maior facilidade de exposição e compreensão dos fundamentos do método simplificado proposto, irá fazer-se, em primeiro lugar, a sua dedução para o caso particular de rigidez uni-direccional de todos os elementos resistentes. No ponto 5.3 apresenta-se a sua generalização para o caso geral, em que se admite a possibilidade de existirem direcções de rigidez distintas para os diferentes elementos resistentes, situação em que se enquadram a generalidade das estruturas correntes.

5.2.1 - Pórtico plano de 1 andar e n pilares. Instabilidade para fora do seu plano de desenvolvimento

Considere-se um pórtico constituído por um único piso e n pilares, cuja mobilidade no seu plano se encontra impedida pela existência de um apoio horizontal, como se representa na Fig. 5.1.

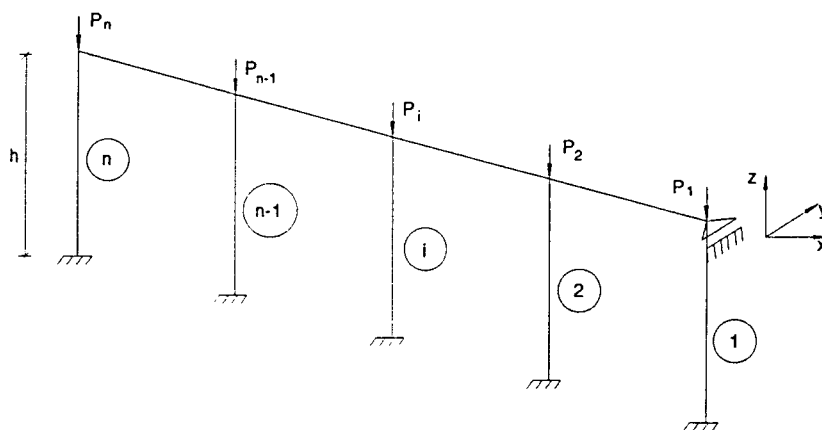


Fig. 5.1 - Estrutura plana - 1 andar - n pilares.

Admita-se ainda que a viga de ligação entre pilares tem rigidez à flexão infinita no plano horizontal, e que os pilares i ($i=1, \dots, n$) se encontram sujeitos à acção de cargas axiais P_i .

O valor do factor de carga λ , que multiplicando o carregamento global conduz a uma situação de instabilidade, quantifica a carga crítica da estrutura. Nestas circunstâncias, o fenómeno da encurvadura acontecerá para um valor λP_i do esforço axial nos pilares, e caracterizando-se por uma rotação da estrutura em torno de um ponto O , que se irá designar por Centro de Rotação.

Desprezando a rigidez à torção dos pilares, as forças envolvidas no equilíbrio da estrutura, quando se atinge a carga crítica, encontram-se esquematicamente representadas na Fig. 5.2. Nesta figura, as forças F_i correspondem às forças de interacção (contraventamento) entre os diferentes elementos resistentes, transmitidas por esforço transversal através da viga de ligação entre pilares.

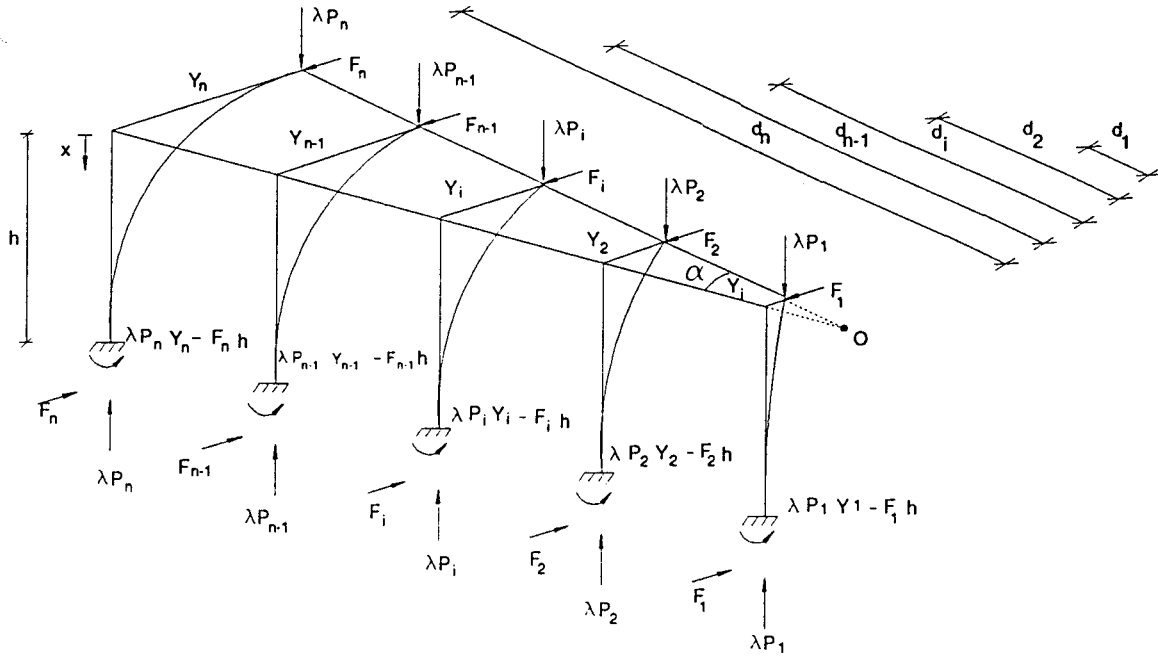


Fig. 5.2 - Estrutura plana - Forças envolvidas numa situação de instabilidade, desprezando a rigidez à torção dos elementos verticais.

As condições de equilíbrio global da estrutura implicam que sejam nulos o somatório das forças horizontais, e dos momentos por estas provocados relativamente ao ponto O .

Assim sendo:

$$\sum F_i = 0 \Leftrightarrow F_1 + F_2 + \dots + F_i + \dots + F_{n-1} + F_n = 0 \quad (5.1)$$

$$\sum M_i = 0 \Leftrightarrow F_1 d_1 + F_2 d_2 + \dots + F_i d_i + \dots + F_{n-1} d_{n-1} + F_n d_n = 0 \quad (5.2)$$

As equações diferenciais de cada um dos elementos verticais, para uma situação de encurvadura, deverão ser verificados simultaneamente quando se atingir o factor de carga λ , e terão a seguinte forma:

$$\lambda P_i y_i - F_i x - E_i I_i y_i'' = 0 \quad (5.3)$$

devendo F_i ser considerado com o respectivo sinal algébrico.

Admitindo de forma aproximada que as configurações deformadas dos pilares são sinusoidais, e uma vez que se está numa situação de instabilidade, pode imaginar-se um carregamento equivalente ao real, constituído unicamente por um conjunto de cargas verticais P_i' aplicadas nos pilares. Estas forças deverão, para as respectivas excentricidades Y_i , provocar

na base de cada um dos pilares um momento igual ao do carregamento real, e correspondem por definição à carga crítica individual de cada um deles.

A Figura 5.3 apresenta, para o pilar genérico i , a equivalência de acções referida.

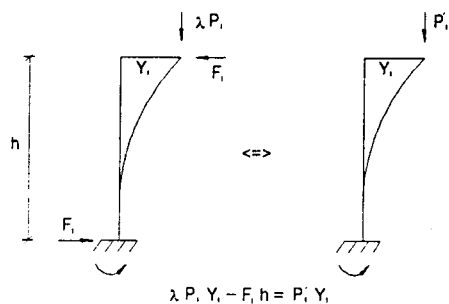


Fig. 5.3 - Equivalência de acções numa situação de instabilidade.

Esta equivalência de forças traduz-se por:

$$P'_i Y_i = \lambda P_i Y_i - F_i h \quad (5.4)$$

ou ainda

$$P'_i = \lambda P_i - F_i \frac{h}{Y_i} \quad (5.5)$$

Neste contexto, pode atribuir-se às forças horizontais F_i uma função correctora dos momentos provocados pelas cargas verticais, de tal modo que, mantendo as excentricidades Y_i , se obtenham momentos na base equivalentes a uma situação de encurvadura individual e simultânea de todos os pilares i .

Sendo P'_i a carga crítica individual de cada um dos pilares, pode ser definida à custa da carga P_i inicialmente instalada e do factor de carga λ_i que os conduz individualmente a uma situação de instabilidade.

$$P'_i = P_{CR_i} = \frac{\pi^2 E_i I_i}{L_{oi}^2} = \lambda_i P_i \quad (5.6)$$

Desta forma substituindo (5.6) em (5.5) virá:

$$\lambda_i P_i = \lambda P_i - F_i \frac{h}{Y_i} \quad (5.7)$$

Evidenciando F_i e uma vez que $Y_i = \alpha d_i$, surge:

$$F_i = \lambda P_i d_i \frac{\alpha}{h} - \lambda_i P_i d_i \frac{\alpha}{h} \quad (5.8)$$

As equações de equilíbrio de momentos e forças, (5.2) e (5.1), poderão agora ser traduzidas por:

$$\sum F_i d_i = \left(\lambda \sum P_i d_i^2 - \sum \lambda_i P_i d_i^2 \right) \frac{\alpha}{h} = 0 \quad (5.9)$$

$$\sum F_i = \left(\lambda \sum P_i d_i - \sum \lambda_i P_i d_i \right) \frac{\alpha}{h} = 0 \quad (5.10)$$

o que permite obter as seguintes duas expressões para a determinação de λ .

$$\lambda = \frac{\sum \lambda_i P_i d_i^2}{\sum P_i d_i^2} \quad (5.11a)$$

e

$$\lambda = \frac{\sum \lambda_i P_i d_i}{\sum P_i d_i} \quad (5.11b)$$

Qualquer destas duas expressões permite determinar a carga crítica global da estrutura, através do parâmetro de carga λ , a partir da carga crítica individual de cada um dos pilares, definida também pelos λ_i correspondentes, e do conhecimento do Centro de Rotação O .

Definem-se em seguida um conjunto de relações geométricas que permitirão dar um novo aspecto às expressões (5.11a) e (5.11b) que, como se verá, se revelam mais convenientes para a sistematização da aplicação deste método.

A Figura 5.4 representa, em planta, uma estrutura plana em condições idênticas às da Fig. 5.2.

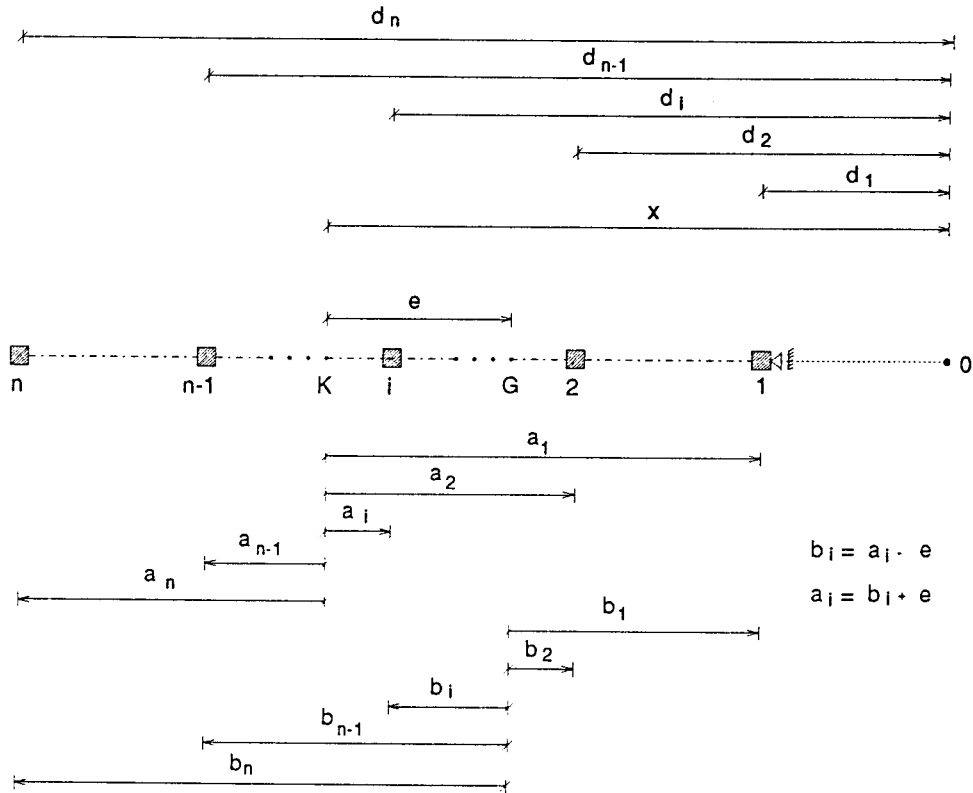


Fig. 5.4 - Estrutura plana em planta. Relações geométricas.

Os pilares constituintes da estrutura encontram-se representados pela sua secção transversal à distância d_i do ponto O (Centro de Rotação da estrutura).

O ponto G representa o centro de gravidade de todas as cargas P_i aplicadas, podendo com maior generalidade designar-se por Centro de Massa.

De igual forma, mas calculando agora o centro de gravidade das cargas críticas do conjunto dos elementos verticais resistentes, define-se o ponto K . Note-se que, sendo a carga crítica de cada um dos pilares individuais dada por:

$$P_{CR_i} = \frac{\pi^2 EI_i}{\eta_i^2 h_i^2} \quad (5.12)$$

onde $\eta_i h_i$ é o comprimento de encurvadura do pilar i , e no caso de estes comprimento serem iguais para todos os pilares virá,

$$P_{CR_i} = const. \cdot EI_i$$

podendo por isto concluir-se que, neste caso, o centro de gravidade das cargas críticas será coincidente com o Centro de Rigidez da estrutura.

A determinação destes dois pontos G e K , permite finalmente definir quatro grandezas geométricas, x , e , a_i e b_i , com os seguintes significados:

x - distância do ponto K ao centro de rotação O ;

e - distância do ponto K ao ponto G ;

a_i - distância do ponto K a cada um dos pilares;

b_i - distância ao ponto G a cada um dos pilares;

Fazendo intervir as relações geométricas definidas, podem ser conferidos novos aspectos às parcelas constituintes da expressão (5.11a).

$$\lambda = \frac{\sum \lambda_i P_i d_i^2}{\sum P_i d_i^2} \quad (5.11a)=(5.13)$$

Uma vez que,

$$d_i = x - a_i \quad (5.14)$$

virá para o numerador:

$$\sum \lambda_i P_i d_i^2 = \sum \lambda_i P_i (x - a_i)^2 \quad (5.15)$$

$$\sum \lambda_i P_i d_i^2 = x^2 \sum \lambda_i P_i - 2x \sum \lambda_i P_i a_i + \sum \lambda_i P_i a_i^2 \quad (5.16)$$

Sendo K por definição o centro de gravidade dos $\lambda_i P_i$,

$$\sum \lambda_i P_i a_i = 0 \quad (5.17)$$

o que conduz a:

$$\sum \lambda_i P_i d_i^2 = x^2 \sum P_{CR_i} + \sum P_{CR_i} a_i^2 \quad (5.18)$$

Efectuando um raciocínio semelhante para o denominador e utilizando agora a relação,

$$a_i = b_i + e \quad (5.19)$$

ter-se-á:

$$\sum P_i d_i^2 = \sum P_i (x - b_i - e)^2 \quad (5.20)$$

$$\sum P_i d_i^2 = P_i [(x - e)^2 + b_i^2 - 2b_i(x - e)] \quad (5.21)$$

Da mesma forma sendo G o centro de gravidade dos P_i ,

$$\sum P_i b_i = 0 \quad (5.22)$$

que resulta finalmente em:

$$\sum P_i d_i^2 = (x - e)^2 \sum P_i + \sum P_i b_i^2 \quad (5.23)$$

A expressão de determinação de λ (5.11a) poderá então ser reescrita com o seguinte aspecto:

$$\lambda = \frac{x^2 \sum P_{CRi} + \sum P_{CRi} a_i^2}{(x - e)^2 \sum P_i + \sum P_i b_i^2} \quad (5.24)$$

No intuito de conferir às constantes envolvidas nesta equação algum significado físico, e efectuar simultaneamente uma simplificação na escrita da mesma, estabeleceram-se algumas definições:

$N = \sum P_i$ - somatório das cargas verticais;

$J = \sum P_i b_i^2$ - momento de inércia das cargas relativamente a G ;

$\Omega = \sum P_{CRi}$ - somatório das cargas críticas;

$I = \sum P_{CRi} a_i^2$ - momento de inércia das cargas críticas relativamente a K ;

Assim sendo, (5.24) será convertida em:

$$\lambda = \frac{x^2 \Omega + I}{(x - e)^2 \cdot N + J} \quad (5.25a)$$

Procedendo de forma idêntica em relação à expressão (5.11b) obtém-se:

$$\lambda = \frac{x\Omega}{(x-e) \cdot N} \quad (5.25b)$$

Estas duas expressões, equivalentes a (5.11a) e (5.11b), revestem-se de particular interesse, uma vez que permitem avaliar a carga crítica global da estrutura, a partir das cargas críticas dos pilares isolados. Os exemplos ensaiados para avaliação dos resultados obtidos, demonstraram que as simplificações admitidas conduzem a uma muito boa aproximação dos valores exactos.

Como notas finais refira-se que:

- i) a utilização destas expressões implica o conhecimento da localização do centro de rotação O , já que se faz intervir a distância x entre este e o ponto K . O procedimento a seguir para a sua determinação será exposto no ponto 5.2.2.
- ii) por razões que se apresentam no ponto 5.2.2, e apesar da sua maior complexidade, será aconselhável para a aplicação deste método simplificado, utilizar a expressão (5.25a) (ou (5.11a)) na determinação do factor de carga λ .

5.2.1.1 - Instabilidade por translação pura - Centro de Rotação O no infinito

A determinação da carga crítica, associada a uma configuração de instabilidade caracterizada por uma translação pura das extremidades dos elementos verticais, pode ser conseguida adaptando a expressão geral para o cálculo de λ deduzida anteriormente (5.11a).

Uma vez que a translação referida pode ser comparada a uma rotação em torno de um ponto localizado no infinito, as distâncias d_i de cada um dos elementos resistentes a esse ponto podem considerar-se,

$$d = d_1 \cong d_2 \cong \dots \cong d_i \cong \dots \cong d_{n-1} \cong d_n = \infty \quad (5.26)$$

e a expressão (5.11a) passará a ter a forma,

$$\lambda = \frac{d^2 \sum \lambda_i P_i}{d^2 \sum P_i} \quad (5.27)$$

que é o mesmo que:

$$\lambda = \frac{\sum \lambda_i P_i}{\sum P_i} = \frac{\Omega}{N} \quad (5.28)$$

5.2.1.2 - Consideração da rigidez à torção dos elementos verticais

A inclusão da rigidez à torção dos elementos verticais, introduz uma alteração nas equações de equilíbrio global apresentadas em (5.1) e (5.2). A necessidade de acrescentar na equação de equilíbrio de momentos os momentos torsões reactivos na base dos pilares, faz com estas apareçam agora com o seguinte aspecto:

$$\sum F_i = 0 \Leftrightarrow F_1 + \dots + F_i + \dots + F_n = 0 \quad (5.29)$$

$$\sum M_i - \sum M_{t_i} = 0 \Leftrightarrow F_1 d_1 + \dots + F_i d_i + \dots + F_n d_n - M_{t_1} - \dots - M_{t_i} - \dots - M_{t_n} = 0 \quad (5.30)$$

Nestas circunstâncias, não sofrendo a equação de equilíbrio de forças (5.29) alterações, a expressão (5.11b) de determinação de λ permanece válida.

Contrariamente, uma vez que agora

$$\sum F_i d_i \neq 0 \quad (5.31)$$

será necessário redefinir (5.11a), que foi obtida a partir da equação de equilíbrio de momentos.

De acordo com (5.30) pode estabelecer-se a seguinte igualdade:

$$\sum F_i d_i = \sum M_{t_i} \quad (5.32)$$

Uma vez que

$$M_{t_i} = \frac{GI_{p_i}}{h_i} \cdot \alpha_i \quad (5.33)$$

sendo

G - módulo de elasticidade transversal do material utilizado;

I_{p_i} - inércia polar da secção transversal do pilar i ;

h_i - comprimento do pilar i (neste caso $h_i=h$);

α_i - rotação relativa das secções extremas do pilar i em torno de um eixo vertical (neste caso $\alpha_i=\alpha$);

teremos então que:

$$\sum F_i d_i = \sum \frac{GI_{p_i}}{h_i} \alpha_i \quad (5.34)$$

ou ainda:

$$\sum F_i d_i = \left(\sum GI_{p_i} \right) \cdot \frac{\alpha}{h} \quad (5.35)$$

Finalmente, substituindo (5.35) em (5.9) e evidenciando λ surgirá,

$$\lambda = \frac{\sum \lambda_i P_i d_i^2 + \sum GI_{p_i}}{\sum P_i d_i^2} \quad (5.36)$$

expressão que permite, uma vez conhecido o centro de rotação O , avaliar a carga crítica da estrutura incluindo a rigidez à torção dos elementos resistentes intervenientes.

5.2.1.3 - Caso particular. Pórtico de um andar e 2 pilares

Vai agora ser tratado o caso especial de uma estrutura semelhante à representada na Figura 5.1, mas constituída por dois únicos pilares, e em relação à qual serão evidenciados alguns resultados particulares.

Em primeiro lugar analisem-se as equações de equilíbrio global, características de uma situação em que a rigidez à torção dos pilares é desprezada. De acordo com (5.1) e (5.2) virá,

$$F_1 + F_2 = 0 \quad (5.37)$$

$$F_1 d_1 + F_2 d_2 = 0 \quad (5.38)$$

e consequentemente para que estas se verifiquem simultaneamente, qualquer que seja o valor de d_1 e d_2 :

$$F_1 = F_2 = 0 \quad (5.39)$$

Este resultado traduz a impossibilidade de interacção entre os dois pilares, e permite concluir que, ao aumentar proporcionalmente o carregamento global da estrutura, a instabilidade virá a acontecer ao atingir-se a carga crítica do primeiro pilar, sem que o outro, apesar de estar ainda numa situação estável, colabore no equilíbrio global. Desta forma, o Centro de Rotação coincidirá com a posição em planta do pilar mais afastado da situação crítica. Designando por d a distância entre os pilares, o cálculo de λ utilizando por exemplo a expressão geral (5.11) será:

$$\lambda = \frac{\lambda_1 P_1 \cdot 0 + \lambda_2 P_2 d}{P_1 \cdot 0 + P_2 d} = \lambda_2 \quad (5.40)$$

Evidenciado mais uma vez que, neste caso, λ global da estrutura será igual a λ_2 do pilar mais próximo da instabilidade, e que a expressão geral (5.11b) se adapta correctamente a este caso particular.

Em seguida vão apresentar-se duas situações em que, existindo apenas dois pilares, se conseguem estabelecer forças de interacção entre eles.

O 1º caso resulta da consideração da rigidez à torção dos pilares. Nestas condições as equações de equilíbrio global passarão a ser de acordo com (5.29) e (5.30):

$$F_1 + F_2 = 0 \quad (5.41)$$

$$F_1 d_1 + F_2 d_2 - M_{t_1} - M_{t_2} = 0 \quad (5.42)$$

que podem já ser verificadas para,

$$F_1 = -F_2 \neq 0 \quad (5.43)$$

traduzindo a possibilidade de interacção entre os pilares.

Como 2º caso admite-se a existência de um apoio horizontal do pórtico, que funcionará obrigatoriamente como Centro de Rotação numa situação de instabilidade. Uma situação deste tipo encontra-se esquematizada na Figura 5.5.

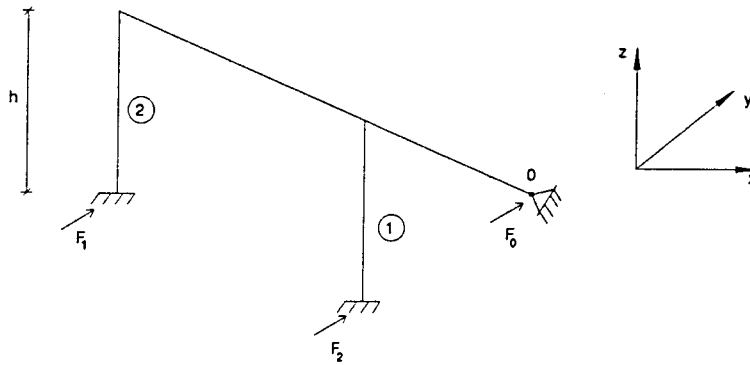


Fig. 5.5 - Pórtico com 1 andar e 2 pilares e com apoio duplo no plano horizontal.

Neste caso, mesmo desprezando a rigidez à torção dos pilares, é possível estabelecer uma interacção entre os pilares 1 e 2, pelo facto de surgir no apoio O uma força F_0 . Neste caso as equações de equilíbrio global serão dadas por:

$$F_1 + F_2 + F_0 = 0 \quad (5.44)$$

$$F_1 d_1 + F_2 d_2 = 0 \quad (5.45)$$

que podem ser verificadas simultâneamente, para valores de F_1 e F_2 diferentes de zero.

5.2.2 - Determinação do centro de rotação

A quantificação da carga crítica a partir do valor de λ utilizando as expressões deduzidas no ponto 5.2.1 implica, como aí ficou claro, o conhecimento da posição do centro de rotação associado à configuração de instabilidade da estrutura.

Tendo sido estabelecidas duas expressões (5.25a) e (5.25b) para a determinação de λ , nas quais x , distância entre o centro de gravidade das cargas críticas e o centro de rotação, é a única variável desconhecida, poderá pela simples igualdade entre elas determinar-se a posição de O . Assim :

$$\frac{x^2 \Omega + I}{(x - e)^2 \cdot N + J} = \frac{x \Omega}{N \cdot (x - e)} \quad (5.46)$$

que resulta em:

$$N\Omega ex^2 + (NI - J\Omega e^2)x - Nie = 0 \quad (5.47)$$

Esta equação de 2º grau tem no caso geral duas soluções. Substituindo cada um dos valores de x encontrados na equação (5.25a) ou (5.25b) obtém-se dois valores de λ , correspondendo a carga crítica da estrutura ao menor deles. O valor de x que conduz ao menor λ define a posição do ponto O em torno do qual se verificará uma rotação da estrutura, numa situação de instabilidade.

Analise-se agora o significado de uma avaliação errada da localização do centro de rotação O , e as suas consequências no cálculo de λ , utilizando cada uma das expressões individualmente.

Uma definição incorrecta da posição de O , corresponderá a admitir uma configuração de instabilidade que, não sendo a natural, só poderia ser conseguida à custa da introdução de um apoio horizontal, fixando a estrutura e obrigando-a a rodar em torno desse ponto. Uma situação deste tipo, apesar do carácter particular dos seus objectivos, aparece representada na figura 5.5.

Nestas circunstâncias, admitindo a existência desse apoio, surgiria uma força de fixação F_O no centro de rotação imposto. Com o aparecimento desta força a equação de equilíbrio global de momentos (5.2) relativamente ao ponto O permanece válida, mas a equação de equilíbrio de forças (5.1) deveria ser acrescentada F_O .

Assim sendo, e uma vez que as expressões de determinação de λ , (5.25a) e (5.25b), resultaram respectivamente das equações de equilíbrio de momentos e de equilíbrio de forças (na ausência de qualquer apoio horizontal), pode concluir-se que:

- a) Para uma correcta localização do ponto O , qualquer das expressões (5.25a) ou (5.25b), conduz ao valor de λ correcto.
- b) Para uma incorrecta localização do ponto O :
 - i) A expressão (5.25a) permite calcular um valor de λ , que traduz o factor de carga global de uma estrutura igual à real, mas admitindo a existência de um apoio horizontal de fixação no ponto imposto como centro de rotação.
 - ii) A expressão (5.25b) conduz a um valor de λ que não tem significado físico, uma vez que a equação de equilíbrio que lhe serve de base deixa de ser válida.

O que acaba de ser referido pode ser com maior facilidade apreendido analisando o exemplo apresentado na figura 5.6, e na qual se indicam, para cada um dos elementos verticais que o constituem, o valor do esforço axial aplicado (N_i), e o valor do factor de carga crítica individual (λ_i).

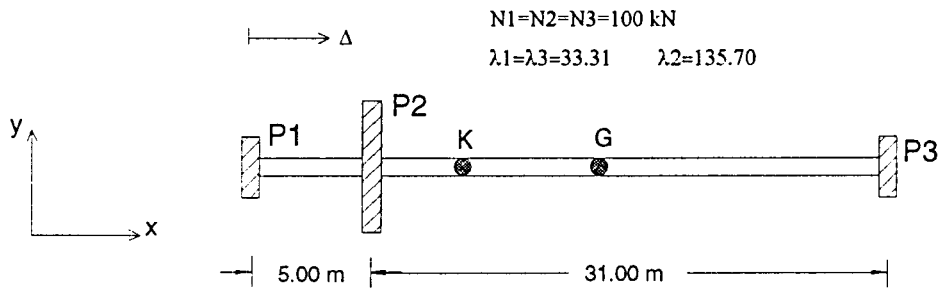


Fig. 5.6 - Exemplo de aplicação - Pórtico com um piso e três pilares.

Utilizando o modelo de cálculo automático GRETRI3, calcularam-se o valor real do factor de carga global λ e a posição exacta do centro de rotação, tendo-se obtido os seguintes resultados.

$$\lambda = 33.31$$

$$\Delta = 5.00 \text{ m}$$

Em seguida e arbitrando posições sucessivamente diferentes para O , foram calculados os valores de λ aplicando:

i) a expressão (5.25a) ou (5.11a)

ii) a expressão (5.25b) ou (5.11b)

Estes resultados permitiram a construção de duas curvas de valores de λ , que se apresentam na figura 5.7, em que se representa igualmente o valor de λ obtido pela expressão (5.28) traduzindo uma configuração de instabilidade de translação pura.

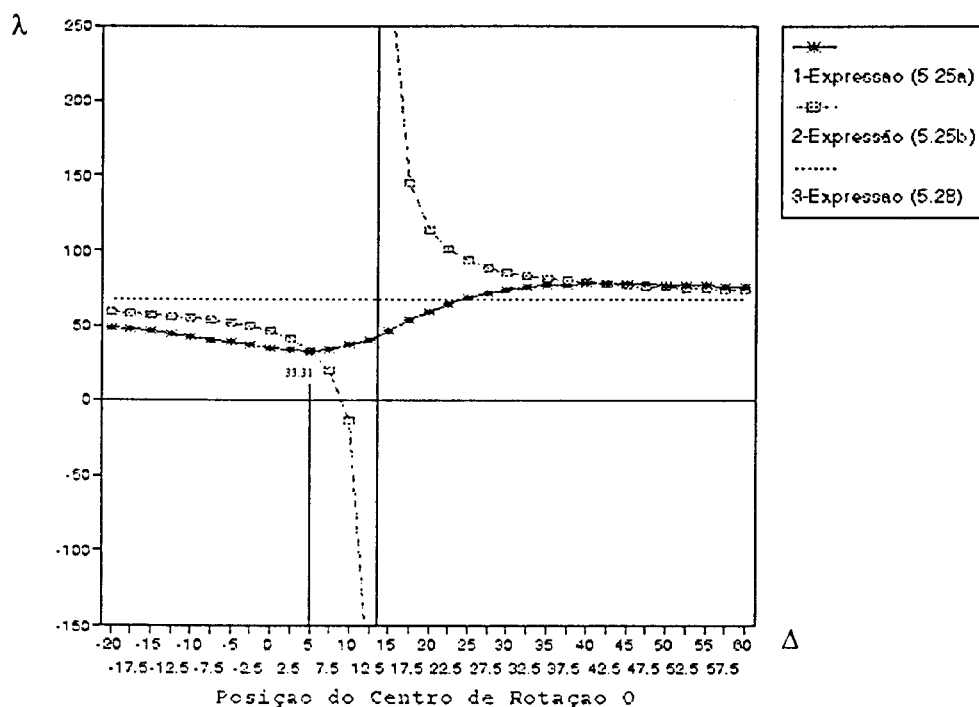


Fig. 5.7 - Valores de λ para diferentes posições de O . Utilização das expressões (5.25a), (5.25b) e (5.28)

A observação destas curvas permite reforçar algumas das ideias até aqui expostas e evidenciar algumas situações particulares:

- À medida que a posição do centro de rotação se distancia da estrutura em qualquer dos sentidos, as curvas 1 e 2 convergem para a curva 3 relativa à configuração de instabilidade por translação pura.
- Como foi já referido, a igualdade entre as expressões (5.25a) e (5.25b) permite obter duas soluções para a posição de O , que se encontram aqui representadas pelos pontos de cruzamento das curvas 1 e 2
- O menor dos valores de λ , associado às duas posições de O determinadas, corresponde à carga crítica da estrutura: $\lambda = 33.31$; $\Delta = 5.00m$ (idêntico ao obtido com GRETRI3).

- iv) O valor da carga crítica da estrutura e da correspondente posição do centro de rotação, coincidem com o mínimo da expressão (5.25a). Este resultado, já esperado, traduz o facto de que uma configuração de instabilidade caracterizada por uma rotação em torno de um ponto diferente deste só poderá ser conseguida à custa da introdução de uma condição de apoio adicional, conferindo à estrutura maior estabilidade e conduzindo portanto a valores de λ superiores ao crítico.
- v) Do que ficou dito em iv) conclui-se que a posição do centro de rotação poderá ser obtida a partir da determinação do mínimo da expressão (5.25a):

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{d\left(\frac{x^2\Omega + I}{(x-e)^2 \cdot N + J}\right)}{dx} = 0 \quad (5.48)$$

que seguindo as regras da derivação e efectuando as simplificações possíveis, conduz à equação de 2º grau já definida em (5.47)

$$N\Omega ex^2 + (NI - J\Omega e^2)x - Nie = 0 \quad (5.47)=(5.49)$$

Como nota final refira-se que, quando o centro de rotação for determinado de forma aproximada, será aconselhável na aplicação deste método utilizar a expressão (5.25a) para o cálculo de λ , já que esta é menos sensível a uma imprecisão na sua determinação.

5.2.3 - Exemplos de aplicação

Neste ponto irão ser apresentadas duas variantes de um mesmo exemplo de aplicação (Figura 5.8), através das quais se pretende evidenciar a simplicidade de aplicação do método, e a qualidade dos resultados obtidos quando comparados com os resultantes da aplicação de um modelo de cálculo exacto.

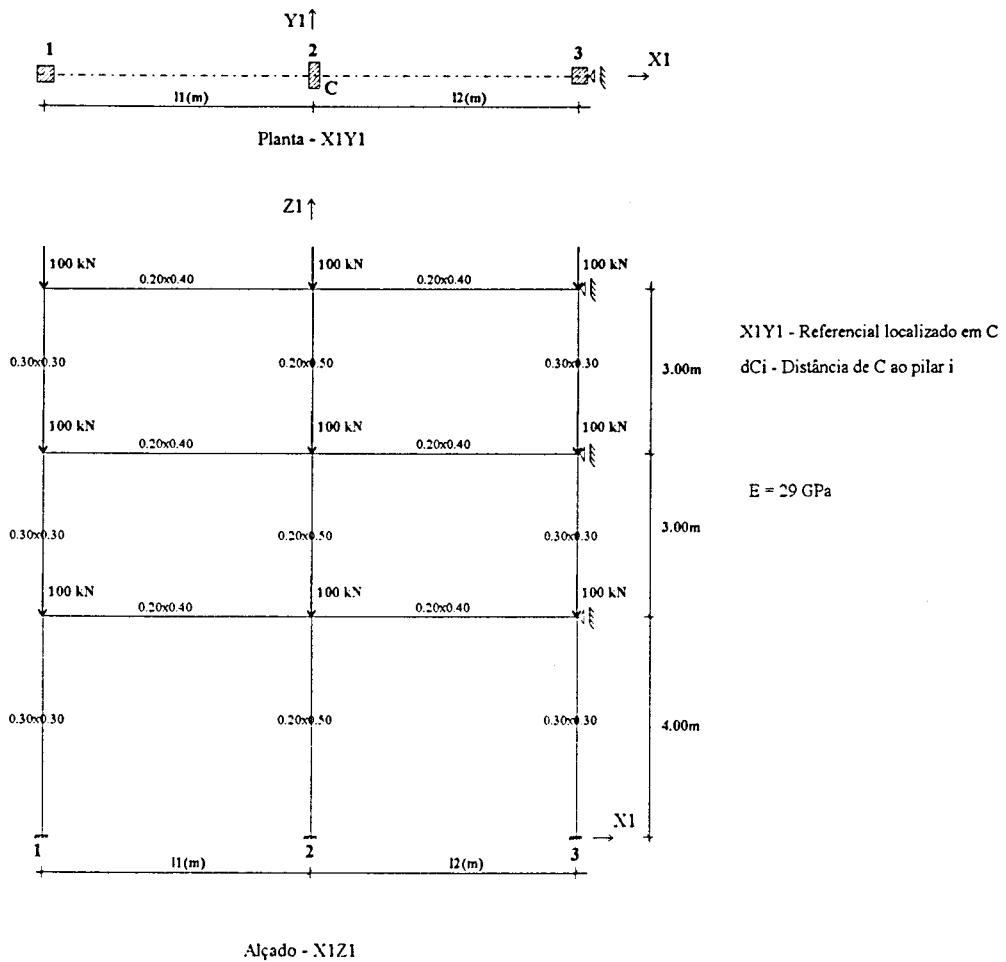


Fig.5.8 - PORT1 - Exemplo de aplicação.

i) Pórtico Simétrico de vãos $l_1=l_2=5.00\text{m}$.

• Cálculo de P_i , λ_i , e P_{CRi}

Pilar	P_i (kN)	λ_i (*)	$P_{CRi}=\lambda_i \cdot P_i$ (kN)
1	$3 \times 100 = 300$	3.075	922.5
2	300	9.491	2847.3
3	300	3.075	922.5

(*) λ_i - Calculado com GRETRI3, mas poderia ter sido utilizado um método simplificado

$$N = \sum P_i = 900\text{kN} \quad \Omega = \sum P_{CRi} = 4692.3$$

• Determinação do centro de gravidade das cargas verticais - G

Dada a simetria da estrutura e de carregamento:

$$XG_1 = 0.0\text{ m}$$

•Determinação do centro de gravidade das cargas críticas - K

Também dada a simetria da estrutura e de carregamento:

$$XK_1 = 0.0 \text{ m}$$

•Excentricidade e - (Distância entre K e G)

Sendo os pontos K e G coincidentes:

$$e = 0.0 \text{ m}$$

•Cálculo de : distâncias b_i e a_i , J e I

$$b_i = dC_i - XG_1 ; a_i = dC_i - XK_1;$$

Pilar	dC_i (m)	b_i (m)	$P_i b_i^2$	a_i (m)	$P_{CRi} a_i^2$
1	-5.00	-5.00	7500	-5.00	23062.5
2	0.00	0.00	0	0.00	0
3	5.00	5.00	7500	5.00	23062.5
			$J = \sum P_i b_i^2 = 1500 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$		$I = \sum P_{CRi} a_i^2 = 46125 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$

•Determinação do Centro de Rotação O :

De acordo com (5.47), e substituindo as grandezas até aqui determinadas:

$$900 \cdot 4692.3 \cdot 0 \cdot x^2 + (900 \cdot 46125 - 15000 \cdot 4692.3 - 900 \cdot 4692.3 \cdot 0^2) \cdot x - 900 \cdot 46125 \cdot 0 = 0$$

que é verificada para $x = 0$

Este caso particular de uma estrutura simétrica tem uma única solução, que define a posição de O .

•Cálculo de λ (5.25a):

$$\lambda = \frac{0^2 \cdot \Omega + I}{(0-0)^2 N + J} = \frac{I}{J} = \frac{46125}{15000} = 3.075$$

ii) Pórtico não Simétrico de vãos $l_1=3.0$ m ; $l_2=7.00$ m.

- Cálculo de P_j , λ_j , P_{CRj} , N e Ω

(idêntico ao caso i))

- Determinação do centro de gravidade das cargas verticais - G

$$XG_1 = \frac{-3 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2 + 7 \cdot P_3}{N} = 1.333m$$

- Determinação do centro de gravidade das cargas críticas - K

$$XK_1 = \frac{-3 \cdot P_{CR1} + 0 \cdot P_{CR2} + 7 \cdot P_{CR3}}{\Omega} = 0.786m$$

- Excentricidade e - (Distância entre K e G)

$$e = XG_1 - XK_1 = 1.333 - 0.786 = 0.547m$$

- Cálculo de : distâncias b_i e a_i , J e I

$$b_i = dC_i - XG_1 ; a_i = dC_i - XK_1;$$

Pilar	dC_i (m)	b_i (m)	$P_j b_i^2$	a_i (m)	$P_{CRj} a_i^2$
1	-3.00	-4.333	5633.3	-3.786	13225.7
2	0.00	-1.333	533.3	-0.786	1760.9
3	7.00	5.667	9633.5	6.210	35616.7
$J = \sum P_j b_i^2 = 15800 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$				$I = \sum P_{CRi} a_i^2 = 50603 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$	

- Determinação do Centro de Rotação O :

De acordo com (5.47), e substituindo as grandezas até aqui determinadas:

$$900 \cdot 4692.3 \cdot 0.547 \cdot x^2 + (900 \cdot 50603 - 15800 \cdot 4692.3 - 900 \cdot 4692.3 \cdot 0.547^2) \cdot x - 900 \cdot 50603 \cdot 0.547 = 0$$

Esta equação de 2º grau tem duas soluções :

$$X_a = -0.7864 \text{ m}$$

$$X_b = 13.7360 \text{ m} \quad (\text{Relativos ao ponto K})$$

•Cálculo de λ (5.25a):

Substituindo cada um dos valores de x encontrados, em (5.25a):

$$\lambda_a = \frac{-0.7864^2 \cdot \Omega + I}{(-0.7864 - 0.547)^2 N + J} = 3.0749$$

$$\lambda_b = \frac{13.7136^2 \cdot \Omega + I}{(13.7136 - 0.547)^2 N + J} = 5.430$$

Verifica-se então que o factor de carga global da estrutura será, $\lambda = 3.0749$, e o centro de rotação localizado em $x = -0.7864$ (Referencial em K), coincidindo praticamente, como era de esperar, com a posição do pilar mais rígido em planta.

Apresenta-se ainda, para as duas variantes deste exemplo, um quadro resumo dos resultados obtidos com:

1) Método simplificado.

2) Modelo GRETRI3.

3) Modelo GRETRI3 - Impondo um modo de encurvadura por translação na direção yy.

	λ Mét. Simplificado	λ GRETRI3 (Rotação)	λ GRETRI3(Translação)
i) Estrutura Simétrica	3.0750	3.0750	5.2140
ii) Estrutura Não Simétrica	3.0749	3.0750	5.2140

Como nota final, refira-se que os valores encontrados reflectem a qualidade dos resultados obtidos com este método simplificado, o que foi uma constante no vasto conjunto de exemplos ensaiados.

5.3 - GENERALIZAÇÃO DO MÉTODO A ESTRUTURAS RETICULADAS-TRIDIMENSIONAIS

5.3.1 - Determinação da carga crítica global

A concepção das estruturas reticuladas-tridimensionais assenta, geralmente na definição de elementos resistentes planos em duas direcções fundamentais. Estes elementos, habitualmente designados por pórticos, desempenham em associação com paredes e caixas de escadas as funções de resistência, estabilidade e funcionalidade da globalidade da estrutura.

O método que se propõe, tem como objectivo a determinação de cargas críticas globais a partir da análise individual de cada um dos elementos planos que constituem a estrutura.

A Figura 5.9 representa em planta o conjunto de pórticos resistentes constituintes de uma estrutura genérica com um único piso.

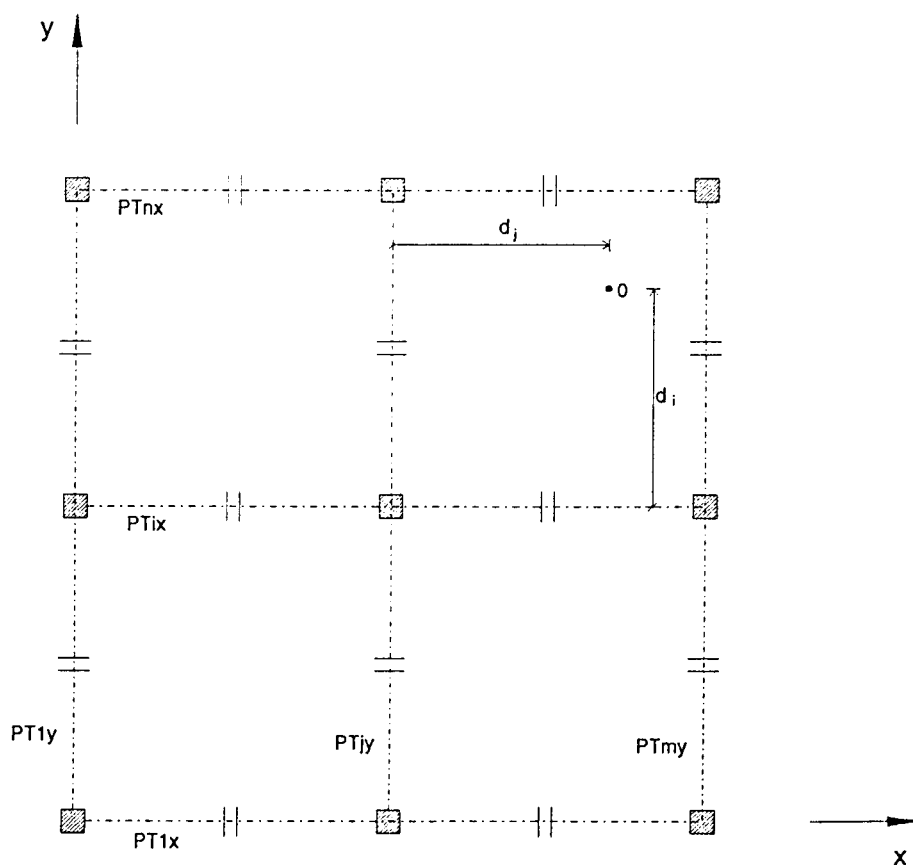


Fig. 5.9 - Estrutura tridimensional genérica - Distribuição em planta dos elementos planos resistentes.

Pretende-se calcular a sua carga crítica global, sabendo que a configuração de instabilidade se caracteriza por uma rotação em torno de um ponto θ , que se supõe conhecido, também representado na Figura 5.9.

Tendo em vista a aplicação de uma filosofia semelhante à utilizada no ponto 5.2, cada um dos pórticos irá ser substituído, de forma aproximada, por um único pilar cuja carga crítica e esforço axial serão, respectivamente, iguais à carga crítica e ao somatório das cargas verticais aplicadas no pórtico (incluindo as cargas verticais transmitidas pelos pórticos transversais que se cruzam com este).

Define-se então

P_{ix} - somatório das cargas verticais aplicadas no pórtico PT_{ix} (incluindo as cargas verticais transmitidas pelos pórticos transversais (yy) que se cruzam com este)($i=1,...n$)

P_{jy} - somatório das cargas verticais aplicadas no pórtico PT_{jy} (incluindo as cargas verticais transmitidas pelos pórticos transversais (xx) que se cruzam com este)($j=1,...m$)

λ_{ix} - Factor de carga do pórtico PT_{ix}

λ_{jy} - Factor de carga do pórtico PT_{jy}

$P_{CRix} = \lambda_{ix} \cdot P_{ix}$ Carga crítica do pórtico PT_{ix}

$P_{CRjy} = \lambda_{jy} \cdot P_{jy}$ Carga crítica do pórtico PT_{jy}

A estrutura inicial será então substituída por uma estrutura equivalente, constituída por tantos pilares quantos os pórticos existentes, localizados a distâncias d_i e d_j do ponto θ , tal como se representa na Figura 5.10.

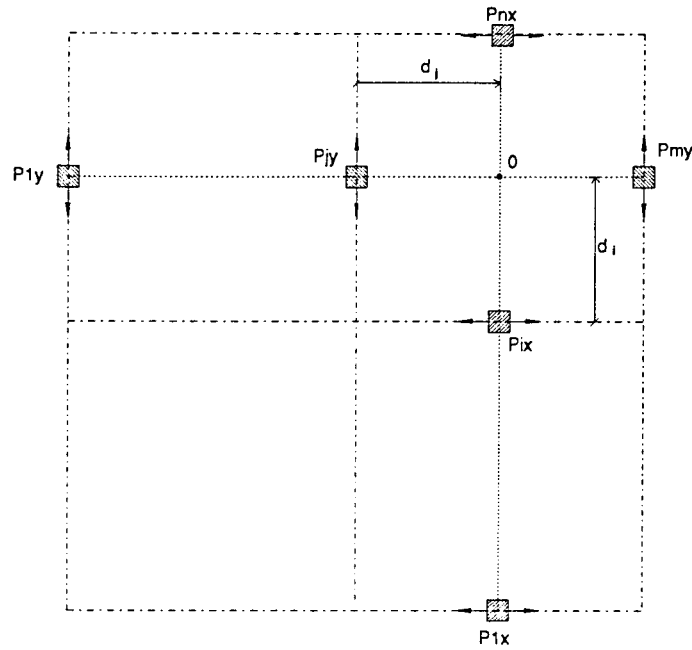


Fig. 5.10 - Estrutura equivalente - Planta esquemática.

Admitindo que os pilares se encontram ligados por um diafragma rígido horizontal, e que para uma rotação do piso em torno do ponto 0 estes se deslocam na direcção do plano de desenvolvimento do pórtico que representam, podem estabelecer-se, à imagem do que foi feito no ponto 5.2, equações de equilíbrio para cada um dos elementos verticais, correspondentes a uma situação de instabilidade do tipo da representada na Figura 5.11.

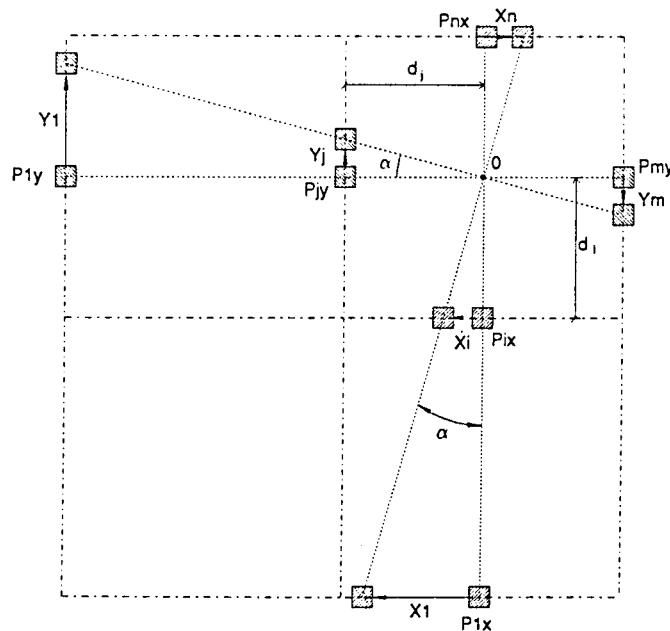


Fig. 5.11 - Configuração da instabilidade global - Planta esquemática.



UNIVERSIDADE DO PORTO
FACULDADE DE ENGENHARIA
BIBLIOTECA

FRD (FOLHA DE RECOLHA DE DADOS)

N.º ENTRADA: _____

DATA: 93.11.02

FORMA DE ENTRADA:

1 - D.L.

2 - COMPRA

③ - OFERTA

4 - PERMUTA

5 - TROCAS INT.

DOCUMENTO: a - monografia b - série c - cartografia d - estampa e - cartaz
f - manuscrito g - fonograma h - videograma i - microforma j - postal
k - medalha l - desenhos m - fotografia n - reg. santo o - braille

TIRAGEM: _____

TIPOGRAFIA: _____

LOCALIZAÇÃO: G - geral R - reservado E - espólio I - iconografia
C - cartografia N - numismática M - microformas A - audiovisuais

OBSERVAÇÕES: _____

COTA 19622 subvulg 2093M D392e

ETIQUETA DE REGISTO:

Estado do reg.: n

Tipo de reg.: a

Nível bibliogr.: m

Cód. nível hierárq.: b

Nível de codif.: b

Forma de descr.: k

ISBN	010		\$a	ISSN	011		\$a
D. Legal	021		\$a	\$b			

DADOS GERAIS DE PROCESSAMENTO (100):

Tipo de data: d

Datas do public.: 1993 bbb

Cód. de audiência: KUB

Publ. governo.: y

Cód. reg. modif.: o

Alfab. do tit.: ba

Língua	101	0	\$a por	País	102		\$a PT
Título e menção de responsabilidade	200	1	\$a Exibitor de 2ª ordem com estruturas tridimensionais de Jorge Moreno Delgado				
Edição	205		\$a				
Dados Matemá.	206		\$a				

Numeração	207		\$a
Publicação	210		\$a Porto \$c Ed. do A. \$d 1953 \$e \$g \$h
Colação	215		\$a x11, [128] f. ; \$d 29c \$c \$c
Colecção	225		\$a
Notas	328		\$a Dissertações para obtenção do grau de Mestre em Estruturas de Engenharia Civil apresentada à Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
Entradas Relac.	4		\$l
Títulos Relac.	5		\$a
Indexação	605		\$a
CDU	675		\$a
Entradas Princip./ Secund.	700	1	\$a Delgado, At Jorge Moreno

As equações de equilíbrio de cada um dos elementos resistentes serão idênticas a (5.7), resultando para cada uma das direcções:

Direcção XX:

$$\lambda P_{ix} = \lambda_{ix} P_{ix} + F_{ix} \frac{h}{X_i} \quad (5.50a)$$

Direcção YY:

$$\lambda P_{jy} = \lambda_{jy} P_{jy} + F_{jy} \frac{h}{Y_j} \quad (5.50b)$$

e tendo λ , F_{ix} e F_{jy} significados idênticos aos atribuídos a λ e F_i no caso uni-direccional.

Procedendo de forma análoga ao efectuado em 5.2, evidenciando F_{ix} , F_{jy} , e substituindo $X_i = \alpha d_i$ e $Y_j = \alpha d_j$ virá:

$$F_{ix} = \lambda P_{ix} d_i \frac{\alpha}{h} - \lambda_{ix} P_{ix} d_i \frac{\alpha}{h} \quad (5.51a)$$

$$F_{jy} = \lambda P_{jy} d_j \frac{\alpha}{h} - \lambda_{jy} P_{jy} d_j \frac{\alpha}{h} \quad (5.51b)$$

As equações de equilíbrio global da estrutura definem-se agora por,

$$\sum M_{ix} + \sum M_{jy} = \sum F_{ix} d_i + \sum F_{jy} d_j = 0 \quad (5.52)$$

$$\sum F_{ix} = 0 \quad (5.53)$$

$$\sum F_{jy} = 0 \quad (5.54)$$

Substituindo (5.51a) e (5.51b) em cada uma das equações de equilíbrio, obtêm-se três expressões que permitem, uma vez conhecida a posição do centro de rotação, calcular o valor de λ .

$$\lambda = \frac{\sum \lambda_{ix} P_{ix} d_i^2 + \sum \lambda_{jy} P_{jy} d_j^2}{\sum P_{ix} d_i^2 + \sum P_{jy} d_j^2} \quad (5.55a)$$

$$\lambda = \frac{\sum \lambda_{ix} P_{ix} d_i}{\sum P_{ix} d_i} \quad (5.55b)$$

$$\lambda = \frac{\sum \lambda_{jy} P_{jy} d_j}{\sum P_{jy} d_j} \quad (5.55c)$$

Tal como no caso uni-direccional, definem-se agora um conjunto de relações geométricas e pontos especiais, com o objectivo de conferir às expressões determinadas um aspecto que se verificará ser mais conveniente para a sistematização da aplicação do método.

Atente-se na Figura 5.12:

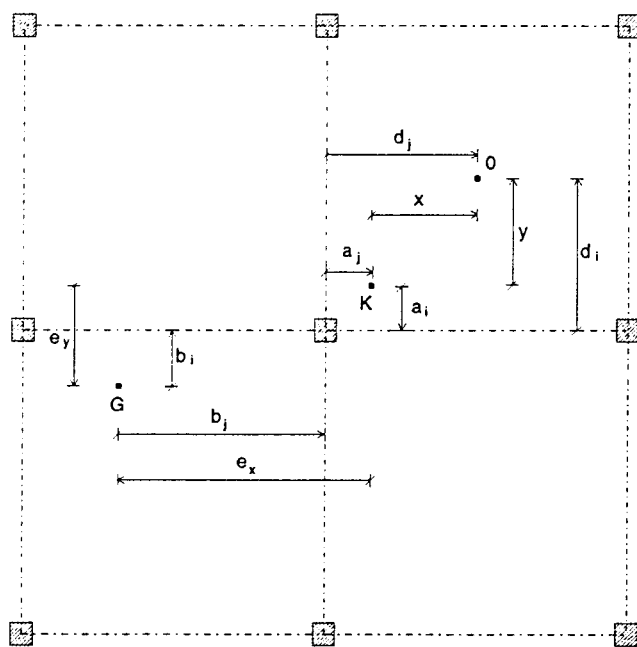


Fig. 5.12 - Estrutura genérica - Relações geométricas.

Os pontos K e G representados correspondem, respectivamente aos centros de gravidade das cargas críticas dos pórticos e das cargas verticais nestes aplicadas. As relações geométricas estabelecidas têm um significado análogo ao atribuído às da Fig. 5.4, convenientemente adaptados para o caso bi-direccional.

Assim, de forma semelhante ao realizado no ponto 5.2, definindo:

$N = N_y = N_x = \sum P_{ix} = \sum P_{jy}$ - somatório das cargas verticais aplicadas à estrutura ;

$J_x = \sum P_{ix} b_i^2$ - momento de inércia das resultantes das cargas aplicadas em cada pórtico PT_{ix} , relativamente a um eixo paralelo a xx passando em G;

$J_y = \sum P_{jy} b_j^2$ - momento de inércia das resultantes das cargas aplicadas em cada pórtico PT_{jy} , relativamente a um eixo paralelo a yy passando em G;

$\Omega_x = \sum P_{CRix}$ - somatório das cargas críticas dos pórticos PT_{ix} ;

$\Omega_y = \sum P_{CRjy}$ - somatório das cargas críticas dos pórticos PT_{jy} ;

$I_x = \sum P_{CRix} \cdot a_i^2$ - momento de inércia das cargas críticas dos pórticos PT_{ix} relativamente a um eixo paralelo a xx passando em K;

$I_y = \sum P_{CRjy} \cdot a_j^2$ - momento de inércia das cargas críticas dos pórticos PT_{jy} relativamente a um eixo paralelo a yy passando em K;

torna-se possível conferir às expressões (5.55a),(5.55b) e (5.55c) um novo aspecto.

$$\lambda = \frac{(y^2 \Omega_x + I_x) + (x^2 \Omega_y + I_y)}{\left((y - e_y)^2 N_x + J_x \right) + \left((x - e_x)^2 N_y + J_y \right)} \quad (5.56a)$$

$$\lambda = \frac{y \Omega_x}{N(y - e_y)} \quad (5.56b)$$

$$\lambda = \frac{x \Omega_y}{N(x - e_x)} \quad (5.56c)$$

Estabelecem-se assim três expressões para o cálculo da carga crítica da estrutura, evitando o recurso a um programa de cálculo automático tridimensional preparado para o efeito. A importância deste resultado é tanto maior quanto se verifica que a quantificação de λ poderá ser feita à custa da análise individual de cada um dos pórticos planos existentes. Para cada um deles será suficiente o conhecimento da totalidade das cargas verticais aplicadas e do

factor de carga crítica individual λ_{ix} (ou λ_{iy}). Refira-se ainda que a determinação destes últimos poderá ser feita utilizando modelos planos de cálculo de cargas críticas, ou métodos simplificados, de que é exemplo o preconizado por Vila Pouca, N. S.[6], apoiados nos clássicos programas de pórticos planos elásticos.

Como nota final, aconselha-se a utilização da expressão (5.56a) na aplicação deste método simplificado, uma vez que esta se revela menos sensível, a uma imprecisão na localização do centro de rotação (tal como a expressão (5.25a) no caso uni-direccional).

5.3.2 - Determinação do centro de rotação 0

As três expressões para o cálculo do factor de carga λ , estabelecidas no ponto 5.3.1, são dependentes das coordenadas x, y (relativas ao centro de gravidade das cargas críticas K) do Centro de Rotação O . A determinação destas coordenadas poderá ser efectuada, a partir da resolução do sistema de equações resultante da igualdade entre as diferentes expressões (5.56a), (5.56b) e (5.56c).

$$(5.56a)=(5.56b) \Leftrightarrow \frac{(y^2\Omega_x + I_x) + (x^2\Omega_y + I_y)}{((y-e_y)^2 N_x + J_x) + ((x-e_x)^2 N_y + J_y)} = \frac{y\Omega_x}{N_x(y-e_y)} \quad (5.57)$$

$$(5.56a)=(5.56c) \Leftrightarrow \frac{(y^2\Omega_x + I_x) + (x^2\Omega_y + I_y)}{((y-e_y)^2 N_x + J_x) + ((x-e_x)^2 N_y + J_y)} = \frac{x\Omega_y}{N_y(x-e_x)} \quad (5.58)$$

$$(5.56b)=(5.56c) \Leftrightarrow \frac{y\Omega_x}{N_x(y-e_y)} = \frac{x\Omega_y}{N_y(x-e_x)} \quad (5.59)$$

No sistema que se acaba de definir verifica-se existirem três equações e apenas duas incógnitas, resultado de (5.59) ser linearmente dependente das restantes. Eliminado (5.59) e fazendo as simplificações possíveis obtem-se:

$$(-\Omega_x N_x e_x) y^2 + [\Omega_x (N_x e_x^2 + N_y e_y^2 + J_x + J_y) - N_x (I_x + I_y)] y + (N_x e_x \Omega_y) x^2 + (\Omega_x N_y - \Omega_y N_x) x^2 y - 2(\Omega_x N_y e_x) xy + N_x e_x (I_x + I_y) = 0 \quad (5.60)$$

$$(-\Omega_y N_y e_x) x^2 + [\Omega_y (N_x e_x^2 + N_y e_y^2 + J_x + J_y) - N_y (I_x + I_y)] x + (N_y e_x \Omega_x) y^2 + (\Omega_x N_y - \Omega_y N_x) xy^2 - 2(\Omega_y N_x e_x) xy + N_y e_x (I_x + I_y) = 0 \quad (5.61)$$

Dos quatro pares de valores (x,y) que verificam simultaneamente estas equações, a posição do Centro de Rotação O , será definida por aquele que conduzir ao menor valor de λ .

A resolução deste sistema de equações, que se revela algo complexa por uma via analítica, poderá ser conseguida de forma simples e prática utilizando um método numérico. Nesta perspectiva, sugere-se como boa solução de arranque para um método deste tipo o par de valores (x_1, y_1) determinado da seguinte forma:

i) determinação de x_1 admitindo um funcionamento independente do conjunto dos pórticos existentes na direcção yy .

ii) determinação de y_1 admitindo um funcionamento independente do conjunto dos pórticos existentes na direcção xx .

Nesta hipótese, tratar-se-ia de resolver dois problemas do tipo uni-direccional apresentados em 5.2, sendo as equações de determinação de x_1 e y_1 dadas (de forma idêntica a (5.47)) por:

$$N_y \Omega_y e_x x_1^2 + (N_y I_y - J_y \Omega_y - N_y \Omega_y e_x^2) \cdot x_1 - N_y I_y e_x = 0 \quad (5.62)$$

$$N_x \Omega_x e_y y_1^2 + (N_x I_x - J_x \Omega_x - N_x \Omega_x e_y^2) \cdot y_1 - N_x I_x e_y = 0 \quad (5.63)$$

A partir destas duas equações de 2º grau obtêm-se quatro pares de valores para (x_1, y_1) . O par de valores a utilizar como solução de arranque, deve ser aquele que substituído na equação (5.56a) conduza desde logo ao menor valor de λ .

Verifica-se que, num grande número de casos, esta primeira aproximação para a posição do centro de rotação permite obter para o factor de carga λ uma muito boa aproximação do valor exacto.

Finalmente refira-se que, tal como no caso uni-direccional, a posição do centro de rotação poderia ser procurada através do cálculo do mínimo valor de λ dado por (5.56a) (resultante da equação de equilíbrio de momentos). Para tal seria suficiente determinar:

$$\frac{d \left(\frac{(y^2 \Omega_x + I_x) + (x^2 \Omega_y + I_y)}{\left((y - e_y)^2 N_x + J_x \right) + \left((x - e_x)^2 N_y + J_y \right)} \right)}{dx} = 0 \quad (5.64)$$

$$\frac{d \left(\frac{(y^2 \Omega_x + I_x) + (x^2 \Omega_y + I_y)}{\left((y - e_y)^2 N_x + J_x \right) + \left((x - e_x)^2 N_y + J_y \right)} \right)}{dy} = 0 \quad (5.65)$$

que seguindo as regras usuais da derivação, e efectuando as simplificações possíveis, se transformam respectivamente em (5.60) e (5.61).

5.3.3 - Resumo do método

Visando, por um lado, uma clarificação e sistematização do método proposto para a determinação da carga crítica global de uma estrutura reticulada-tridimensional, e por outro, realçar a sua simplicidade, apresenta-se agora um resumo dos passos a seguir para a sua aplicação.

Admita-se uma estrutura genérica, do tipo da representada na Figura 5.9.

- 1) Calcular para cada pórtico plano resistente nas direcções xx e yy:
 - i) o somatório das cargas verticais (incluindo as transmitidas pelos pórticos transversais que com ele se cruzem): P_{ix} e P_{iy} .
 - ii) o factor de carga crítica, λ_{ix} e λ_{iy} , utilizando programas de cálculo automático de estruturas planas, que o permitam fazer de forma directa ou iterativa, ou ainda, utilizando métodos aproximados do tipo do proposto por Nelson Vila Pouca [6].
 - iii) a carga crítica equivalente: $P_{CRix} = \lambda_{ix} P_{ix}$ e $P_{CRiy} = \lambda_{iy} P_{iy}$.
- 2) Calcular o centro de gravidade das cargas críticas de todos os pórticos : K .
- 3) Calcular o centro de gravidade das cargas verticais (Centro de Massa) : G .

4) Calcular as excentricidades entre K e G : e_x e e_y .

5) Calcular o somatório das cargas verticais aplicadas na estrutura:

$$N = N_x = N_y = \sum P_{ix} = \sum P_{iy}$$

6) Calcular o momento de inércia das resultantes das cargas verticais aplicadas em cada um dos pórticos relativamente a G , para cada uma das direcções independentes

$$J_x = \sum P_{ix} \cdot b_i^2$$

$$J_y = \sum P_{iy} \cdot b_j^2$$

7) Calcular o somatório das cargas críticas equivalentes para cada uma das direcções independentes

$$\Omega_x = \sum P_{CRix}$$

$$\Omega_y = \sum P_{CRiy}$$

8) Calcular o momento de inércia das cargas críticas relativamente a K , em cada uma das direcções independentes

$$I_x = \sum P_{CRix} \cdot a_i^2$$

$$I_y = \sum P_{CRiy} \cdot a_j^2$$

9) Calcular a posição do centro de rotação θ - Determinar as distâncias x, y entre este e o ponto K , através da resolução do sistema de equações (5.60) e (5.61), obtendo-se 4 pares de valores (x, y) .

10) Para cada par de valores (x, y) obtidos em 9) calcular

$$\lambda = \frac{(x^2 \Omega_x + I_x) + (y^2 \Omega_y + I_y)}{\left((x - e_x)^2 N_x + J_x\right) + \left((y - e_y)^2 N_y + J_y\right)}$$

11) Ao menor dos 4 valores obtidos está associada a carga crítica da estrutura, definindo o par de coordenadas x, y para o qual este foi obtido a posição do Centro de Rotação θ relativamente a K .

Apesar do aparentemente elevado volume de cálculo subjacente à aplicação deste método, deve dizer-se que se trata de operações muito simples resolvidas com grande eficiência e rapidez através da utilização de qualquer "folha de cálculo" disponível em microcomputadores.

5.3.4 - Exemplo de aplicação

Como complemento da exposição do método simplificado de cálculo de cargas críticas efectuada no ponto anterior, apresenta-se um exemplo de aplicação, que se pretendeu o mais geral possível de forma a evidenciar a aplicabilidade do método às estruturas de edifícios correntes.

Na Figura 5.13 representa-se em planta a geometria, secções e acções, de uma estrutura com 3 pisos de igual altura, $h=3.00\text{m}$.

Como acção global aplicada optou-se, para maior simplicidade de exposição, por um carregamento constituído por um conjunto de forças verticais, directamente aplicadas nos pilares ao nível do 3º piso, sendo importante ressaltar que este tipo de solicitação não confere qualquer particularidade ao problema.

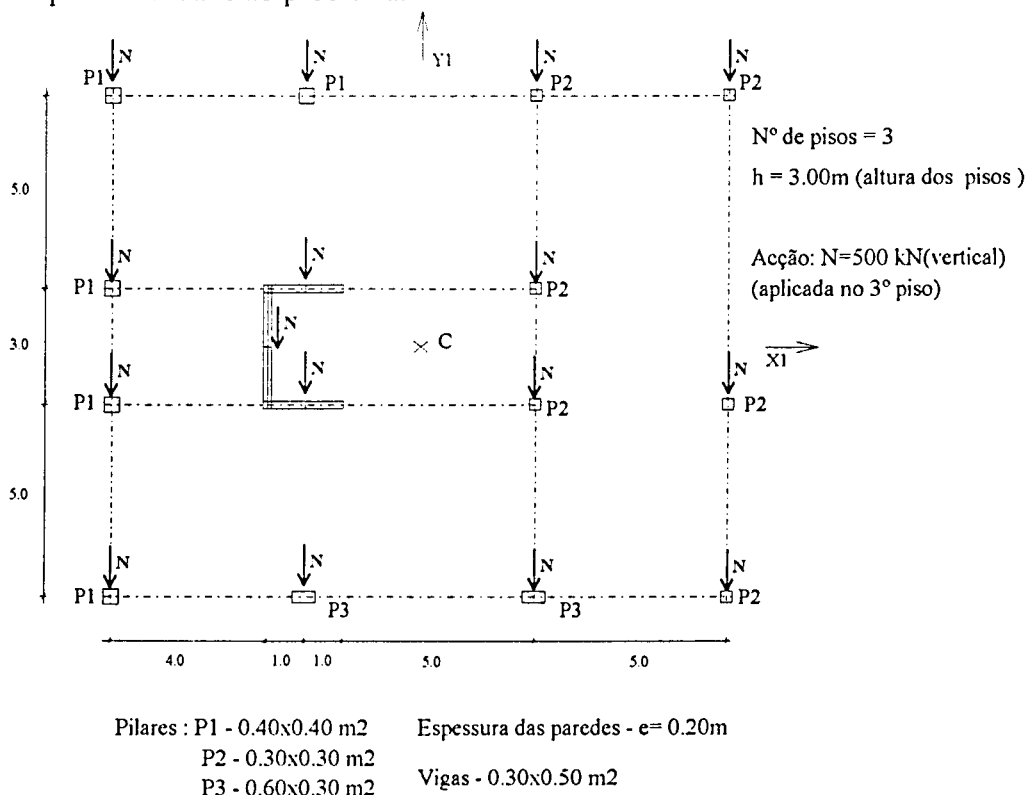


Fig. 5.13 - Edifício com 3 pisos. Aplicação do Método Simplificado de cálculo de cargas críticas

5.3.4.1 - Aplicação do Programa GRETRI3

Antes de apresentar os resultados obtidos com o programa GRETRI3, será conveniente explicar a modelação que foi efectuada da caixa de escadas constituinte da estrutura.

A opção tomada, uma das possíveis, consistiu em substituir cada uma das três paredes que a constituem por pilares coincidentes com os respectivos eixos verticais, e definir vigas de "rigidez infinita" que se desenvolvem ao longo dos comprimentos das paredes em planta. Este esquema estrutural apresenta-se em planta na Figura 5.14.

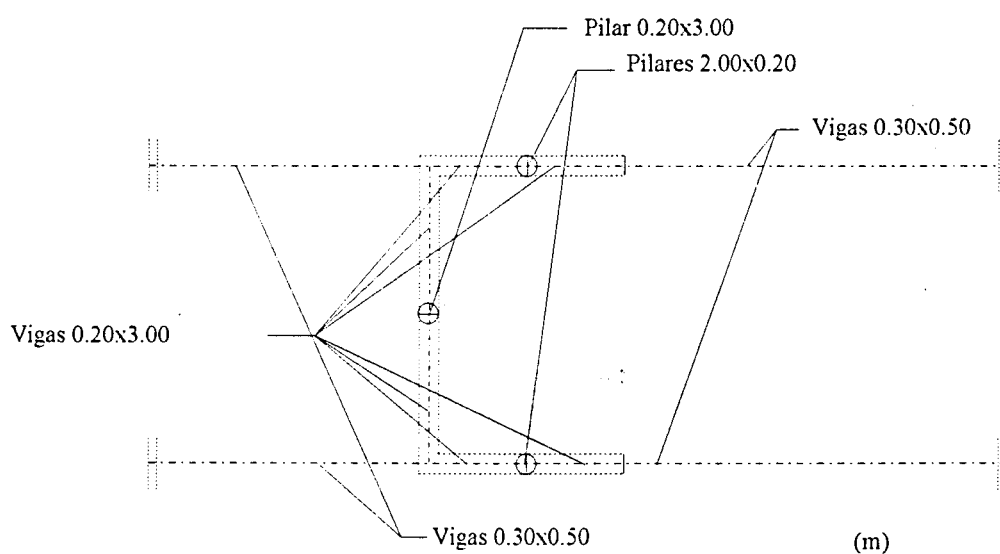


Fig 5.14 - Modelação da caixa de escadas para aplicação ao programa GRETRI3

Uma vez esclarecida esta questão, apresentam-se em seguida os resultados obtidos com o programa de cálculo de cargas críticas e modos de encurvadura GRETRI3:

$$\lambda = 49.80$$

$$\text{Centro de Rotação } O : X_1 = -5.20 \text{ m}$$

$$Y_1 = -0.85 \text{ m}$$

5.3.4.2 - Aplicação do Método Simplificado

Para a aplicação deste método, descritizou-se o edifício num conjunto de estruturas planas resistentes (pórticos ou pilares individuais) nas direcções xx e yy, da forma que se indica na Figura 5.15.

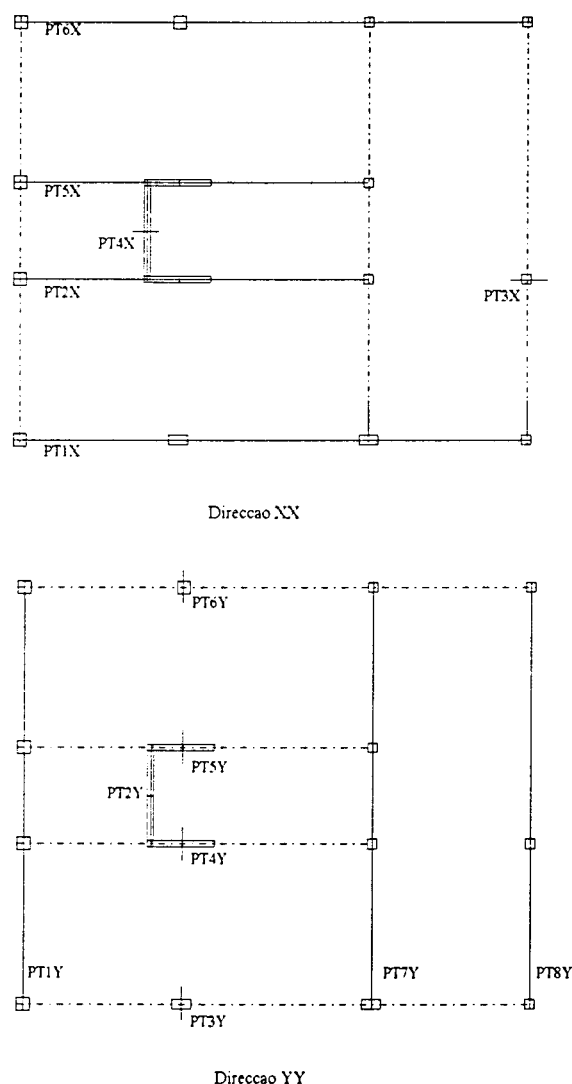


Fig 5.15 - Descritização do edifício em estruturas planas

A geometria e secções das estruturas planas resistentes definidas em planta, serão as resultantes das barras existentes no edifício nos seus planos de desenvolvimento. Convirá apenas referir que a caixa de escadas se encontra representada, fundamentalmente através do conjunto de pórticos PT2X, PT5X e PT2Y, existindo nos dois primeiros um pilar central com $0.20 \times 2.00 \text{ m}^2 (\text{bxh})$ e troços rígidos de ligação deste com as vigas dos pisos, e sendo o último uma única consola vertical com a secção da parede que representa, isto é, $0.20 \times 3.00 \text{ m}^2 (\text{bxh})$.

Uma vez definido o conjunto de estruturas planas que servirão de suporte ao método, indicam-se os passos seguidos para a sua aplicação.

- Cálculo de P_{ix} , P_{jy} , λ_{ix} , λ_{jy} , P_{CRix} e P_{CRjy}

Pórtico	P_{ix} (kN)	λ_{ix} (*)	$P_{CRix}=\lambda_{ix}*P_{ix}$ (kN)	Pórtico	P_{jy} (kN)	λ_{jy} (*)	$P_{CRjy}=\lambda_{jy}*P_{jy}$ (kN)
PT1X	2000	80.2	160400	PT1Y	2000	73.3	146600
PT2X	1500	194.0	291000	PT2Y	500	795	397500
PT3X	500	1.2	600	PT3Y	500	2.4	1200
PT4X	500	3.5	1750	PT4Y	500	2.4	1200
PT5X	1500	194	291000	PT5Y	500	2.4	1200
PT6X	2000	49.1	98200	PT6Y	500	3.8	1900
				PT7Y	2000	36.4	72800
				PT8Y	1500	29.5	44250
	$N = N_x = \sum P_{ix} = 8000$		$\Omega_x = \sum P_{CRix} = 842950$		$N = N_y = \sum P_{jy} = 8000$		$\Omega_y = \sum P_{CRjy} = 666650$

(*) λ_i - Calculado com GRETRI3, mas poderia ter sido utilizado um método simplificado

- Determinação do centro de gravidade das cargas verticais - G

$$XG_1 = -0.75m$$

$$YG_1 = -0.10m$$

- Determinação do centro de gravidade das cargas críticas - K

$$XK_1 = -3.30m$$

$$YK_1 = -0.48m$$

- Excentricidades e_x , e_y - (Distâncias entre K e G)

$$e_x = XG_1 - XK_1 = -0.75 + 3.30 = 2.55m$$

$$e_y = YG_1 - YK_1 = -0.10 + 0.48 = 0.38m$$

•Cálculo de : - distâncias b_i , a_i , b_j , a_j , : J_x e I_x : J_y e I_y

$$b_i = dC_i - XG_1 ; a_i = dC_i - XK_1;$$

Portico	dCi (m)	b _i (m)	$P_{ix}b_i^2$	a _i (m)	$P_{CRix}a_i^2$
PT1X	-6.50	-6.40	82080.1	-6.00	5811622
PT2X	-1.50	-1.40	2966.3	-1.00	302345.3
PT3X	-1.50	-1.40	988.8	-1.00	623.4
PT4X	0.00	0.10	4.46	0.50	404.4
PT5X	1.50	1.60	3810.1	2.00	1141635
PT6X	6.50	6.60	86955.1	7.00	4785293
			$J_x = \sum P_{ix}b_i^2$ $= 176805 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$		$I_x = \sum P_{CRix}a_i^2$ $= 12042238 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$

$$b_j = dC_j - XG_1 ; a_j = dC_j - XK_1;$$

Portico	dCj (m)	b _j (m)	$P_{jy}b_j^2$	a _j (m)	$P_{CRjy}a_j^2$
PT1Y	-8.00	-7.25	105125	-4.70	3224033
PT2Y	-4.00	-3.25	5281.3	-0.70	189012.4
PT3Y	-3.00	-2.25	2531.3	0.30	115.6
PT4Y	-3.00	-2.25	2531.3	0.30	115.6
PT5Y	-3.00	-2.25	2531.3	0.30	115.6
PT6Y	-3.00	-2.25	2531.3	0.30	183.1
PT7Y	3.00	3.75	28125	6.30	2899010
PT8Y	8.00	8.75	114844	11.30	5660721
			$J_y = \sum P_{jy}b_j^2$ $= 263500 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$		$I_y = \sum P_{CRjy}a_j^2$ $= 11973306 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$

•Determinação do Centro de Rotação O e cálculo de λ global.

De acordo com o sugerido em 5.3.2, irá começar-se por determinar uma solução aproximada do centro de rotação, utilizando as expressões (5.62) e (5.63). Resolvendo estas duas equações de 2º grau surge:

$$X_a = -1.765 \text{ m}, X_b = 10.175 \text{ m e}, Y_a = -0.672 \text{ m}, Y_b = 21.561 \text{ m}$$

(Coordenadas relativas ao ponto K)

Para cada par de valores (X,Y) , utilizando (5.56a), teremos os seguintes valores de λ :

$$(X_a, Y_a) - \lambda = 44.1983$$

$$(X_a, Y_b) - \lambda = 99.8869$$

$$(X_b, Y_a) - \lambda = 102.3016$$

$$(X_a, Y_b) - \lambda = 107.9903$$

Os resultados obtidos indicam que a solução de arranque para um método iterativo, tendo em vista a resolução do sistema de equações (5.60)(5.61), para a determinação da posição do centro de rotação, seria a constituída pelo par de valores (X_a, Y_a) .

Utilizando a solução exacta fornecida pelo programa GRETRI3, viria:

$$X = X_1 - XK_1 = -5.20 + 3.30 = -1.90 \text{ m}$$

$$Y = Y_1 - YK_1 = -0.85 + 0.48 = -0.37 \text{ m}$$

a que corresponde um valor de λ (5.56a):

$$\lambda = 43.94$$

Finalmente, ilustrando graficamente as posições relativas do conjunto de pontos envolvidos na aplicação deste método, e evidenciando-se com particular interesse a localização do centro de rotação do modo de encurvadura associado à carga crítica da estrutura, apresenta-se a Figura 5.16.

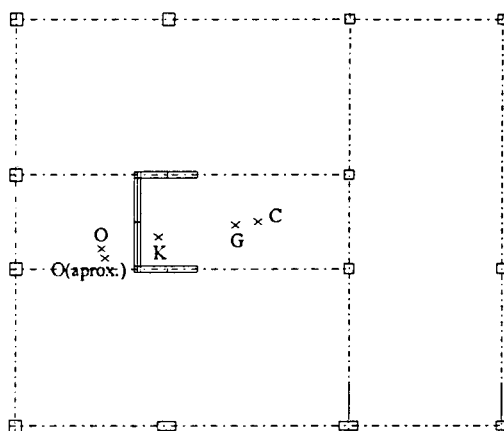


Fig. 5.16 - Posições relativas do conjunto de pontos envolvidos na aplicação do método

5.3.4.3 - Comparação de resultados

No quadro resumo que se segue apresentam-se os valores de λ obtidos da seguinte forma:

- 1- Método simplificado - Centro de rotação aproximado (X_a, Y_a)
- 2- Método simplificado - Centro de rotação exacto (X, Y)
- 3- Programa GRETRI3 - (Sem restrições) - Modo de encurvadura por torção
- 4- Programa GRETRI3 - (Impedindo rotação dos pisos e deslocamentos na direcção YY) - Modo de encurvadura de translação Direcção XX
- 5- Programa GRETRI3 - (Impedindo rotação dos pisos e deslocamentos na direcção XX) - Modo de encurvadura de translação Direcção YY

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
$\lambda =$	44.20	43.94	49.88	105.37	83.33

Do conjunto de resultados obtidos pode concluir-se que:

- i) O modo de encurvadura mais baixo é o de torção, correspondendo, quando comparado com os tradicionais modos de translação pura característicos de uma análise em duas direcções independentes, a uma redução do valor da carga crítica de :
 - Direcção XX : Redução de 52.7%
 - Direcção YY : Redução de 40.1%
- ii) O método simplificado conduz a um valor de λ cujo erro é de aproximadamente 12%, sendo todavia do lado da segurança. Este erro , ainda que pequeno tendo em conta as simplificações envolvidas, resulta da coexistência de elementos resistentes do tipo pórtico e do tipo parede, cujas deformadas por instabilidade são claramente distintas (deformação tipo corte / deformação tipo flexão), não garantindo o método simplificado a compatibilização dos deslocamentos dos diferentes pilares em todos os pisos mas apenas nas suas extremidades superiores. Desta forma, não é possível com o método simplificado traduzir o efeito de interacção entre eles, que de forma sucinta se resume à possibilidade de os elementos tipo parede contrariarem nos pisos inferiores a tendência de deformação dos elementos do tipo pórtico (e o contrário nos pisos superiores), reduzindo por isso a carga crítica da estrutura.
- iii) A solução aproximada determinada para $O (X_a, Y_a)$ não difere, neste caso, muito da solução exacta, situação que se verifica com uma certa frequência em estruturas de edifícios deste tipo. A diferença encontrada para o valor de λ , utilizando estes dois pontos, correspondeu a um erro de 1% que não tem neste contexto qualquer significado.

CAPÍTULO 6

FACTORES PREPONDERANTES NO APARECIMENTO DE MODOS DE ENCURVADURA POR TORÇÃO

6.1 - INTRODUÇÃO

Do ponto de vista do cálculo da carga crítica de uma estrutura a substituição de uma análise em duas direcções independentes por uma análise global, fazendo intervir simultaneamente todos os elementos resistentes, pode conduzir, como se verifica do que foi já exposto nos capítulos anteriores, a configurações de instabilidade que não são habitualmente estudadas, caracterizadas por torções globais da estrutura e reduzindo de forma significativa a carga crítica da mesma.

Pretende-se, neste capítulo, analisar alguns dos factores que podem levar ao aparecimento de modos de encurvadura fundamentais diferentes dos de translação pura, efectuando-se para esse efeito o estudo da variação do modo fundamental aplicado a alguns casos simples, mas cujos resultados se podem facilmente generalizar para estruturas de edifícios correntes.

6.2 - DISTRIBUIÇÃO DA RIGIDEZ EM PLANTA

A avaliação da carga crítica de uma estrutura está intimamente ligada com a possibilidade de interacção entre os diferentes elementos resistentes que a constituem. O seu valor dependerá da capacidade de os elementos de maior rigidez e individualmente mais afastados de uma situação de instabilidade, travarem os mais próximos da mesma. Este efeito não é de modo algum independente das posições relativas entre eles, podendo ser encontrados, para um mesmo conjunto de elementos verticais, variando as suas posições em planta, cargas críticas muito diferentes.

Esta situação, já identificada em exemplos apresentados em capítulos anteriores, será agora estudada para um caso simples de mobilidade uni-direccional mas cujas conclusões são extrapoláveis para as estruturas de edifícios correntes.

Considere-se então uma estrutura simétrica constituída por quatro pilares igualmente solicitados, e dos quais se despreza a rigidez à torção. As suas posições em planta e cargas críticas individuais, definidas pelos factores de carga λ_i , encontram-se representadas na Figura 6.1.

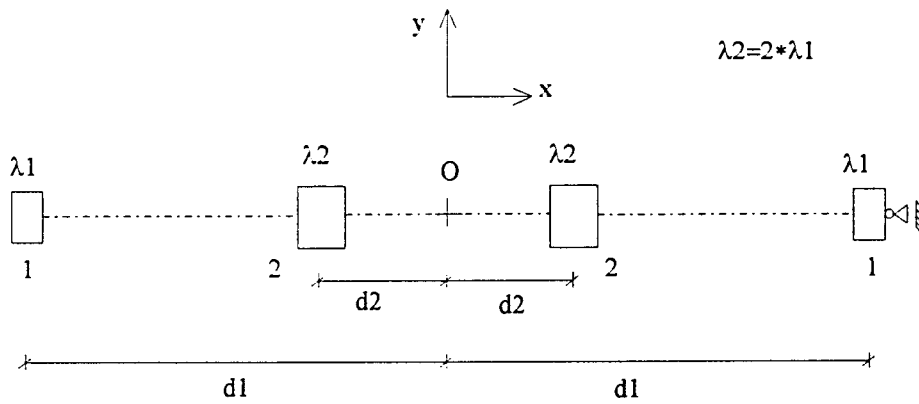


Fig. 6.1 - Estrutura de mobilidade uni-direccional. - Análise da distribuição de rigidez em planta.

Como se verifica na Figura 6.1 a estrutura é constituída por quatro pilares, sendo a rigidez à flexão dos pilares centrais (tipo2) dupla da rigidez dos de extremidade (tipo 1). Pretende-se avaliar a influência da variação das suas posições relativas, no valor do factor de carga global λ .

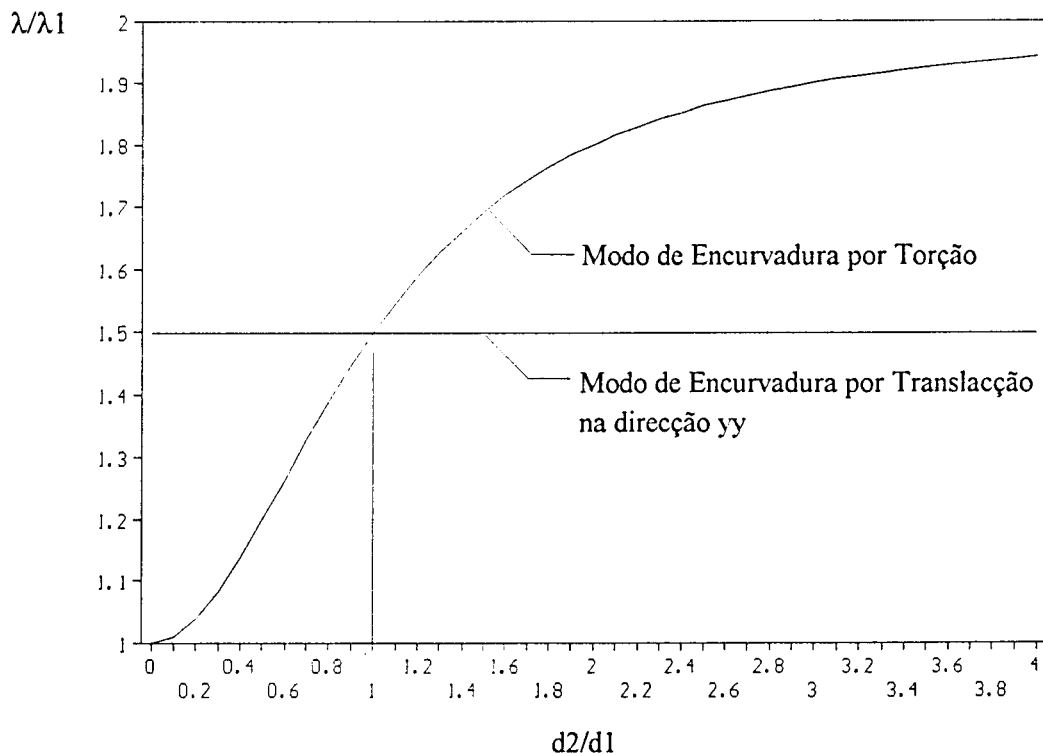


Fig. 6.2 - Influência da distribuição de rigidez em planta no cálculo de λ .

No gráfico da Figura 6.2 representa-se, para valores sucessivamente crescentes da relação entre d_2 e d_1 , os valores do factor de carga global λ , calculado para configurações de instabilidade de translação pura, e de rotação em torno do ponto O (centro geométrico da estrutura).

Da análise dos resultados obtidos pode concluir-se que:

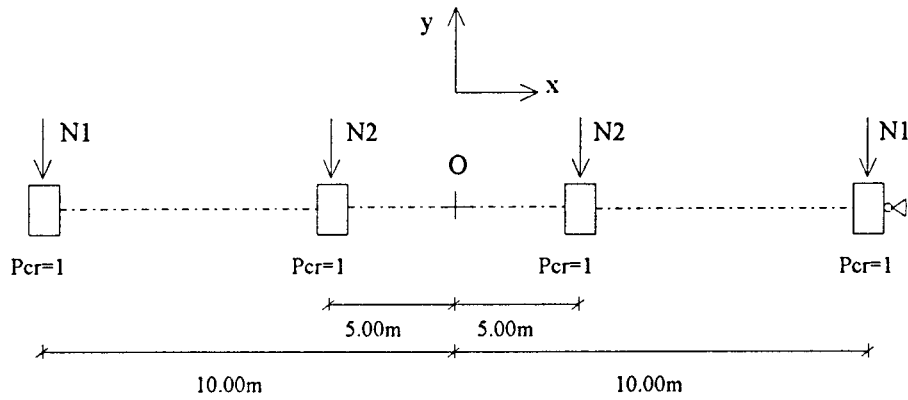
- i) Para $d_2=0$, os pilares de maior rigidez não contribuem para a estabilização da estrutura, e a carga crítica global será igual à dos pilares mais flexíveis.
- ii) Para valores de $d_2 \neq 0$, mas inferiores a d_1 , o valor da carga crítica vai aumentando, traduzindo a crescente possibilidade de os pilares 2 travarem os pilares 1.
- iii) A partir do momento em que os dois pilares 2 coincidem com os pilares 1, ou passam a estar mais distantes do centro geométrico da estrutura que estes últimos, o modo de encurvadura por torção aparece como um modo de ordem superior, passando a carga crítica da estrutura a ser constante, e igual à carga crítica obtida por translação pura.

6.3 - DISTRIBUIÇÃO DE CARGAS VERTICAIS EM PLANTA

O esforço axial instalado nos diferentes elementos verticais é, em última análise, o factor preponderante no estudo da instabilidade, estando a carga crítica de uma estrutura, quando avaliada em duas direcções distintas, apenas dependente do nível de carga vertical aplicado. Todavia, quando se parte para uma análise da globalidade da estrutura fazendo intervir simultaneamente os elementos resistentes nas duas direcções, o seu valor passará a ser influenciado de forma determinante pela distribuição das cargas em planta.

Para ilustrar esta dependência e discutir a sua importância, recorreu-se a um exemplo simples que permite com maior facilidade isolar o efeito que se pretende estudar.

Considere-se então a estrutura representada na Figura 6.3, constituída por quatro pilares de igual secção, cuja rigidez à torção foi desprezada, e encontrando-se impedida a sua mobilidade na direcção xx.



$$N1+N2=Cte.=2$$

Fig. 6.3- Estrutura de mobilidade uni-direccional - Análise da influência da distribuição de cargas em planta.

Tal como se indica na Figura 6.3 os pilares interiores encontram-se solicitados por cargas verticais $N2$, e os de extremidade por cargas verticais $N1$. Para avaliar a sensibilidade da carga crítica da estrutura à distribuição de cargas em planta, efectuou-se uma variação da relação entre $N2$ e $N1$ mantendo constante o somatório da totalidade das cargas aplicadas. Os resultados obtidos com esta variação apresentam-se, para uma mais fácil interpretação, na Figura 6.4.

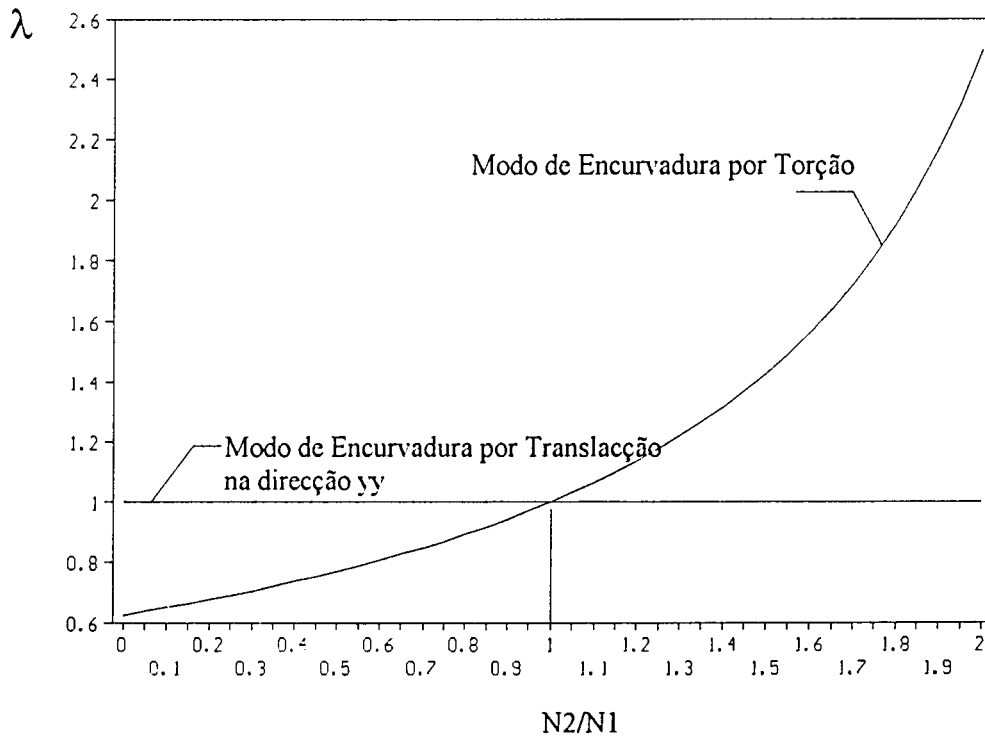


Fig. 6.4 - Influência da distribuição de cargas verticais em planta no cálculo de λ .

Da análise da curva definida no gráfico da figura anterior podem retirar-se algumas conclusões:

- i) Como é já sabido o modo de encurvadura por translação é independente da distribuição de cargas verticais em planta, sendo neste exemplo o valor do factor de carga λ constante e igual à unidade.
- ii) Sendo os pilares de igual secção, para valores de N_2/N_1 inferiores à unidade, o que corresponde a uma maior concentração de carga na zona periférica da estrutura, o modo de encurvadura fundamental é de torção, e corresponde-lhe um valor de λ inferior à unidade, ou seja, inferior ao determinado para o modo de translação yy .
- iii) Quando o esforço axial é igual em todos os pilares $N_2/N_1=1$, encontra-se uma situação particular em que a configuração de instabilidade poderá surgir indistintamente por torção ou por translação. Neste caso a instabilidade será atingida sem qualquer tipo de interacção entre os elementos verticais.
- iv) Para uma concentração de carga nos pilares interiores, $N_2/N_1>1$, os pilares de extremidade ficam com a possibilidade de lhes servirem de elementos de contraventamento, e dada a sua posição geométrica em planta conduzem a valores de λ associados ao modo de torção superiores à unidade, sendo por isso a configuração de instabilidade a correspondente ao modo de translação.

De forma resumida, pode concluir-se que uma concentração de carga na periferia da estrutura cria condições para o aparecimento de modos de encurvadura por torção, para valores do factor de carga λ inferiores aos associados a modos de translação. Na situação inversa, os modos de translação serão os condicionantes e o valor do factor de carga global será definido independentemente da distribuição de cargas em planta.

6.4 - INFLUÊNCIA DA CONSIDERAÇÃO DA RIGIDEZ À TORÇÃO DOS ELEMENTOS VERTICAIS

A rigidez à torção de uma dada estrutura é garantida por dois tipos de efeitos que se podem descrever como:

- i) - rigidez à torção devida à flexão dos diferentes elementos planos resistentes (pórticos) que a constituem.

ii) - rigidez individual à torção das peças constituintes da estrutura.

Esta última tem sido na generalidade dos casos deprezada ao longo deste trabalho, sem que até aqui se tenha feito uma análise das consequências de uma simplificação deste tipo. Neste ponto pretende avaliar-se, para estruturas com comportamento uni-direccional e tridimensionais, a influência da inclusão da rigidez à torção das vigas e pilares no cálculo da sua carga crítica.

6.4.1 - Estrutura com mobilidade uni-direccional

Considere-se uma estrutura constituída por quatro pilares, com mobilidade uni-direccional, interligados por uma viga, cujas geometria, secções e carregamento se indicam na Figura 6.5.

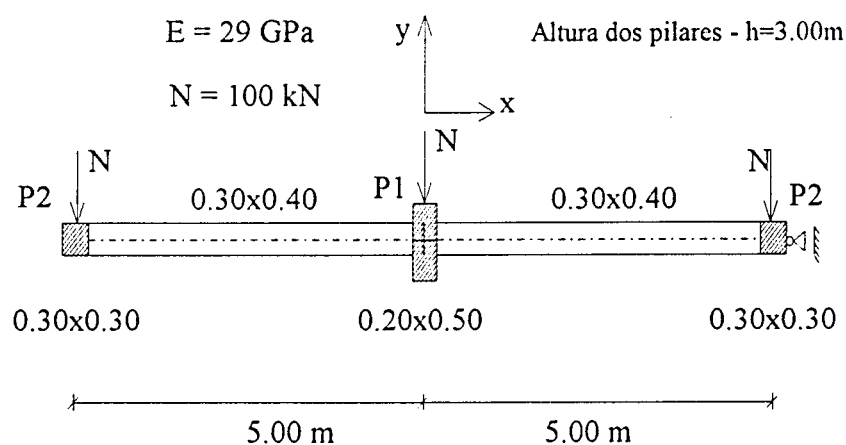


Fig 6.5 - Estrutura com mobilidade uni-direccional - Influência da inclusão da rigidez à torção das barras.

Fazendo variar a percentagem de rigidez elástica teórica à torção dos pilares, da viga, ou simultaneamente dos pilares e viga que a constituem, foram calculados os respectivos factores de carga λ associados ao modo de encurvadura por torção, que permitem por comparação entre eles e com o modo de encurvadura por translação avaliar a importância da inclusão desta rigidez. Os resultados obtidos encontram-se representados graficamente na Figura 6.6, permitindo assim a sua mais fácil interpretação.

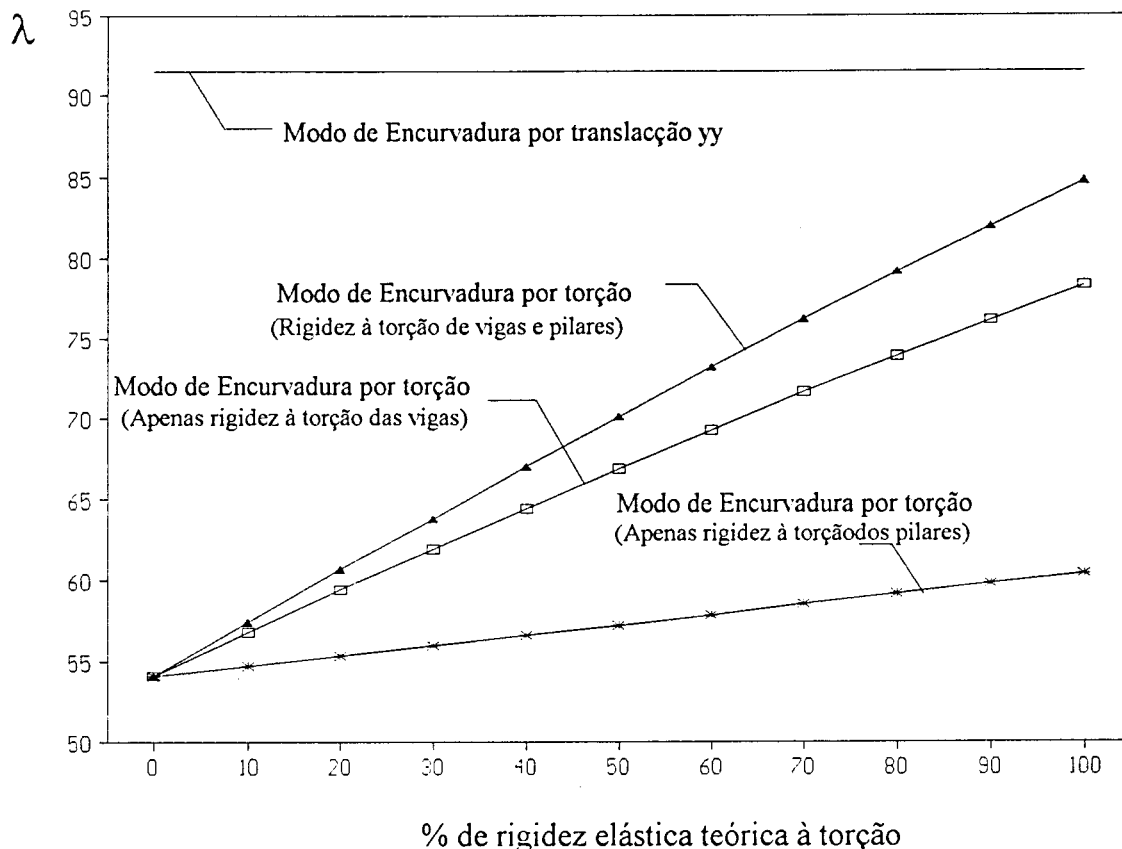


Fig. 6.6 - Influência da inclusão da rigidez à torção das barras no cálculo de λ .

Da análise da Figura 6.6 podem retirar-se algumas conclusões que se apresentam em seguida:

- i) A existência de um pilar central (P1) mais rígido que os de extremidade, uma vez que eles se encontram igualmente solicitados, implica que qualquer que seja a percentagem de rigidez à torção incluída, o modo de encurvadura por translação seja sempre um modo de ordem superior, não correspondendo portanto à carga crítica da estrutura.
- ii) O acréscimo do factor de carga λ varia linearmente com a percentagem de rigidez à torção das peças individuais incluída, verificando-se que neste caso a rigidez das vigas é aquela que se revela mais importante.

- iii) Numa estrutura deste tipo a resistência à torção por flexão dos elementos verticais, é apenas garantida pelos pilares individuais que funcionam como consolas verticais isoladas. A sua modesta capacidade resistente à flexão, confere à rigidez de torção individual das diferentes barras um papel importante na resistência global à torção da estrutura, podendo neste caso conduzir, como se verifica da leitura do gráfico da Figura 6.6, a um acréscimo do factor de carga λ que pode atingir os 56%.

Em resumo poderá concluir-se que, para estruturas com mobilidade uni-direccional deste tipo, a rigidez à torção individual das peças deverá ser convenientemente introduzida uma vez que conduz a um aumento significativo da resistência global da estrutura à torção. Apesar de tal não se verificar no exemplo exposto, poderá inclusive assistir-se a uma troca do modo fundamental de encurvadura da estrutura, passando a carga crítica a estar associada a um modo de translação. Para tal bastaria que se alterassem as secções dos pilares de tal forma que, mantendo as suas características de rigidez à flexão na direcção yy , se aumentassem as suas resistências individuais à torção.

Note-se porém, como se verificará da leitura do ponto 6.4.2, que para o caso de mais interesse de estruturas de edificios correntes, este efeito perde a importância que aqui assume, uma vez que o contraventamento global da estrutura à torção é fundamentalmente garantido pela rigidez à flexão dos pórticos que a constituem.

6.4.2 - Estrutura tridimensional - mobilidade bi-direccional

Para a análise da influência da inclusão da rigidez à torção das barras, no cálculo da carga crítica de uma estrutura tridimensional, optou-se por apresentar o estudo de um exemplo duplamente simétrico com carregamento igualmente simétrico, que permitirá isolar mais facilmente o efeito que se pretende estudar.

A estrutura em causa, constituída por um único piso, e cuja geometria, secções e carregamento se indicam na Figura 6.7, foi intencionalmente concebida de forma a obter como modo de encurvadura fundamental o de torção.

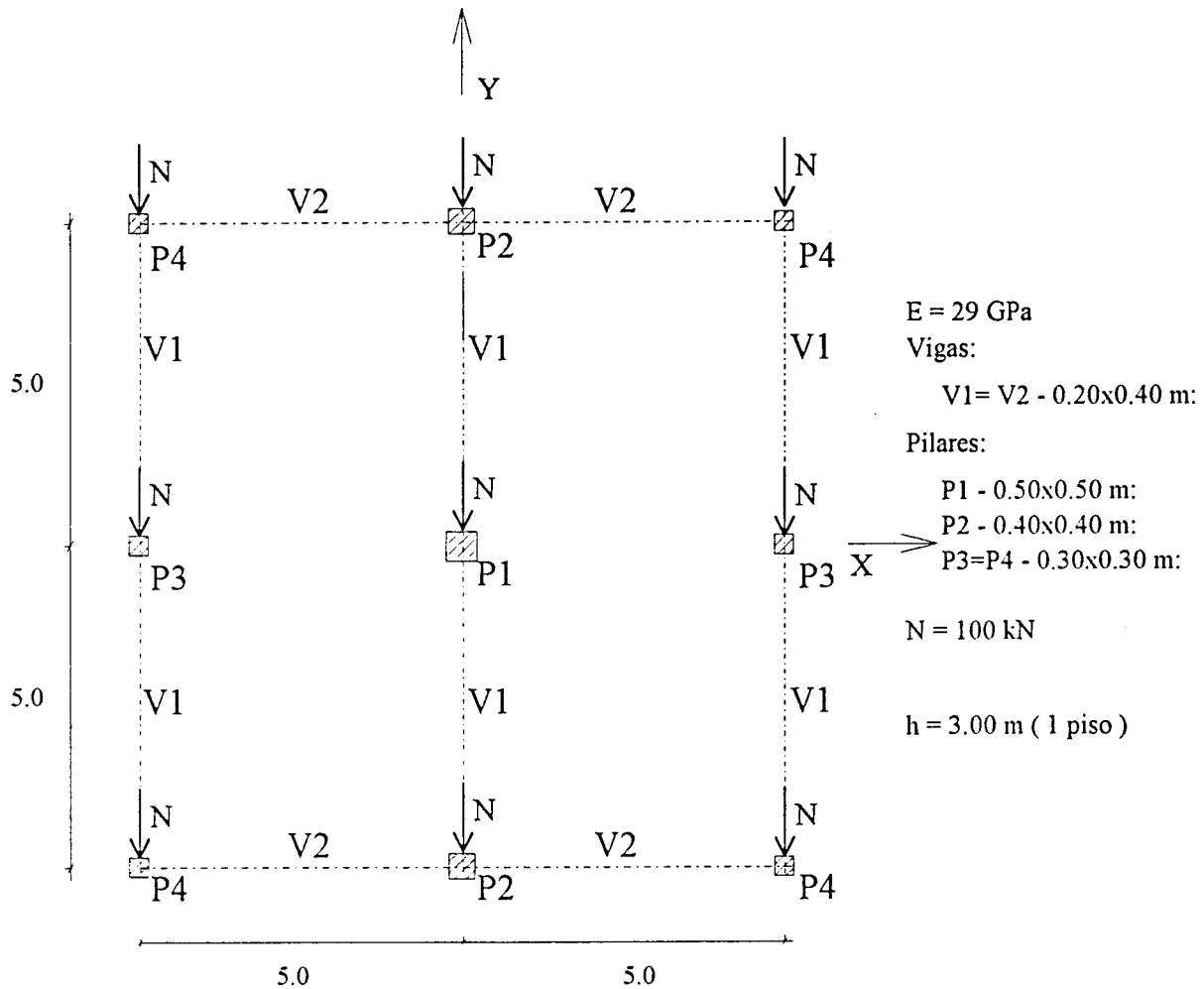


Fig. 6.7 - Estrutura Tridimensional - Influência da inclusão da rigidez à torção das barras no cálculo de λ

Foram então calculados os valores do factor de carga λ , para os modos de encurvadura por torção, translacção XX e translacção YY, fazendo variar a percentagem de rigidez elástica à torção de todas as barras (vigas e pilares) simultaneamente.

Os resultados obtidos apresentam-se no gráfico da Figura 6.8, garantindo-se assim a sua mais fácil interpretação, permitem concluir que:

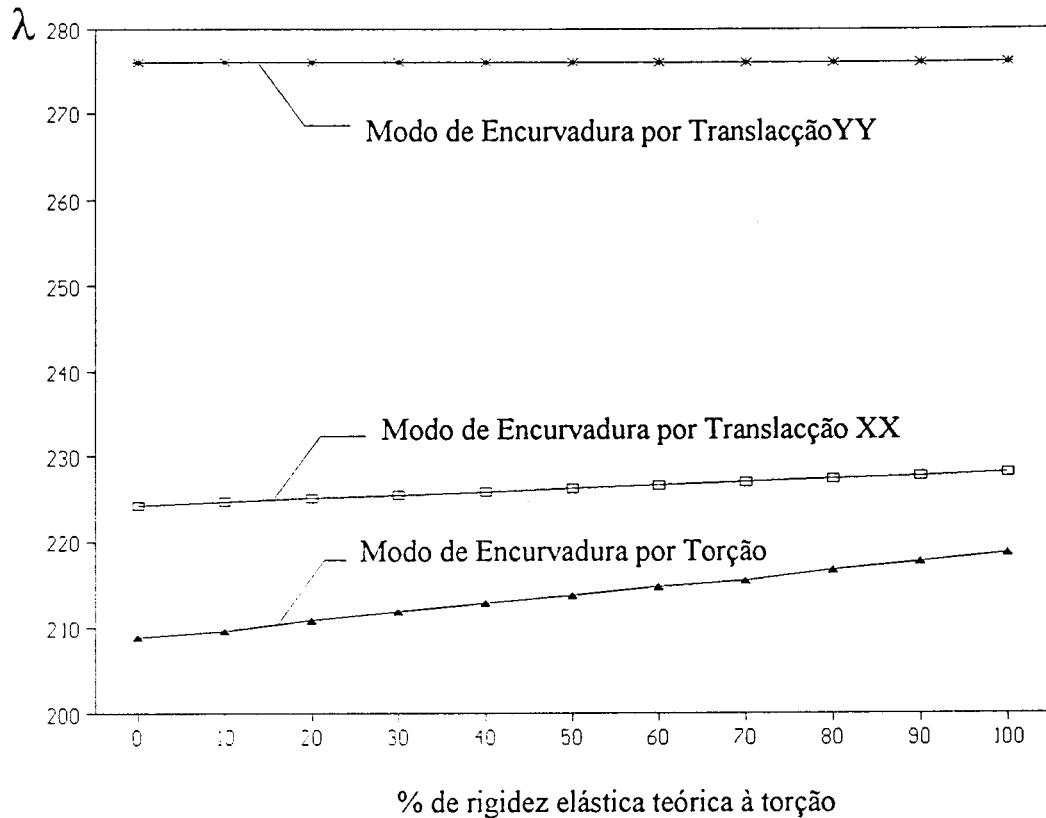
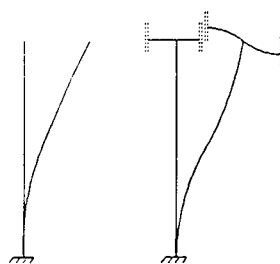


Fig. 6.8 - Influência da inclusão da rigidez à torção das barras no cálculo de λ .

- i) O modo de translação XX, ainda que de forma pouco relevante, é sensível à variação da percentagem de rigidez elástica à torção incluída. Uma vez que para um mesmo deslocamento horizontal nesta direcção, a rotação das extremidades dos pilares pertencentes a pórticos e daqueles que nesta direcção não têm qualquer viga de ligação são diferentes (Figura 6.9), as vigas V1 veem mobilizada a sua rigidez à torção, afectando por isso o valor de λ global da estrutura.



Pilar isolado Pilar inserido em pórtico

Fig. 6.9 - Rotação das extremidades dos pilares: isolado; inserido em pórtico.

- ii) O modo de translação YY é praticamente independente da rigidez à torção da barras. Uma vez que nesta direcção todos os pilares se enquadram em pórticos, para um dado deslocamento horizontal segundo esta direcção, as rotações das extremidades dos pilares ligados a V2 não exibem grandes diferenças. Esta situação leva a que a rigidez à torção das vigas V2 não seja significativamente mobilizada, mantendo-se consequentemente o valor λ praticamente constante .
- iii) O modo de encurvadura fundamental é o de torção. Observa-se neste caso, que o valor da carga crítica a ele associado depende da rigidez à torção dos pilares e vigas existentes, mas a sua inclusão conduz a um acréscimo máximo de λ inferior a 5%.

Este exemplo pretende ilustrar que, na generalidade das estruturas de edifícios correntes, a rigidez à torção das vigas e pilares que os constituem não é determinante no cálculo da sua carga crítica. A principal razão para que tal se verifique, particularmente quando o modo de encurvadura fundamental é de torção, prende-se com o facto de a resistência à torção da globalidade da estrutura ser fundamentalmente garantida por flexão dos pórticos, ocupando um lugar secundário a rigidez à torção individual das diferentes barras.

Note-se ainda que, no caso particular de estruturas de betão armado , a percentagem de rigidez elástica à torção a incluir deverá ser objecto de estudo ponderado , já que as peças não são por sistema dimensionadas para este tipo de esforço, facto que ainda reduz a importância deste efeito.

Como nota final refira-se que, desprezando ou subestimando o valor desta rigidez, se obtêm valores de cargas críticas inferiores aos reais, sendo portanto o erro cometido do lado da segurança.

6.5 - ESTRUTURA TRIDIMENSIONAL - VARIAÇÃO DA CONFIGURAÇÃO TIPO DO 1º MODO DE ENCURVADURA

Uma vez efectuadas, nos pontos anteriores, algumas considerações sobre os três factores mais directamente ligados com os modos de encurvadura por torção, apresenta-se agora um exemplo tridimensional cujo estudo permitirá solidificar a sensibilidade para as causas do aparecimento dos diferentes modos de encurvadura tipo em estruturas de edifícios.

O exemplo que irá ser tratado será o mesmo que foi utilizado no ponto 6.4.2 (Fig.6.7). Esta estrutura por ser simétrica em geometria, secções e carregamento, exhibe modos de

encurvadura por torção, translacção xx e translacção yy , puros (assim designados pelo facto dos deslocamentos dos pisos serem unicamente desse tipo), que se obtêm sem ser necessário recorrer à introdução de condições de apoio suplementares, e cujas configurações tipo se representam nas Figuras 6.10a, 6.10b e 6.10c.

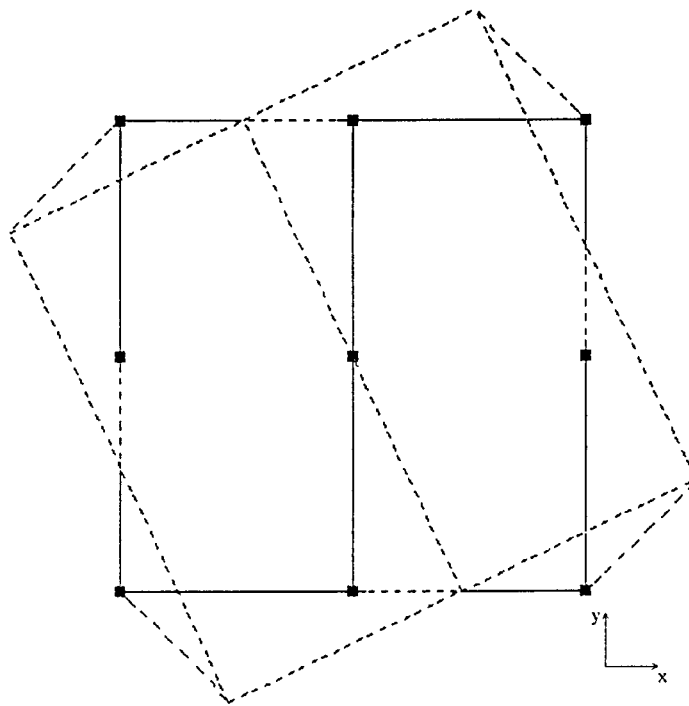


Fig. 6.10a - Modo de encurvadura por torção - Planta.

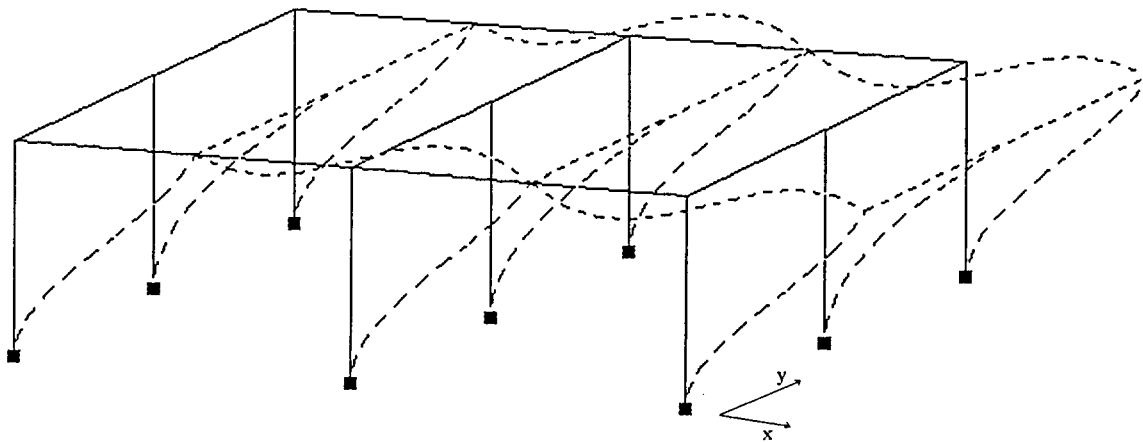


Fig. 6.10b - Modo de encurvadura por translacção xx - Perspectiva.

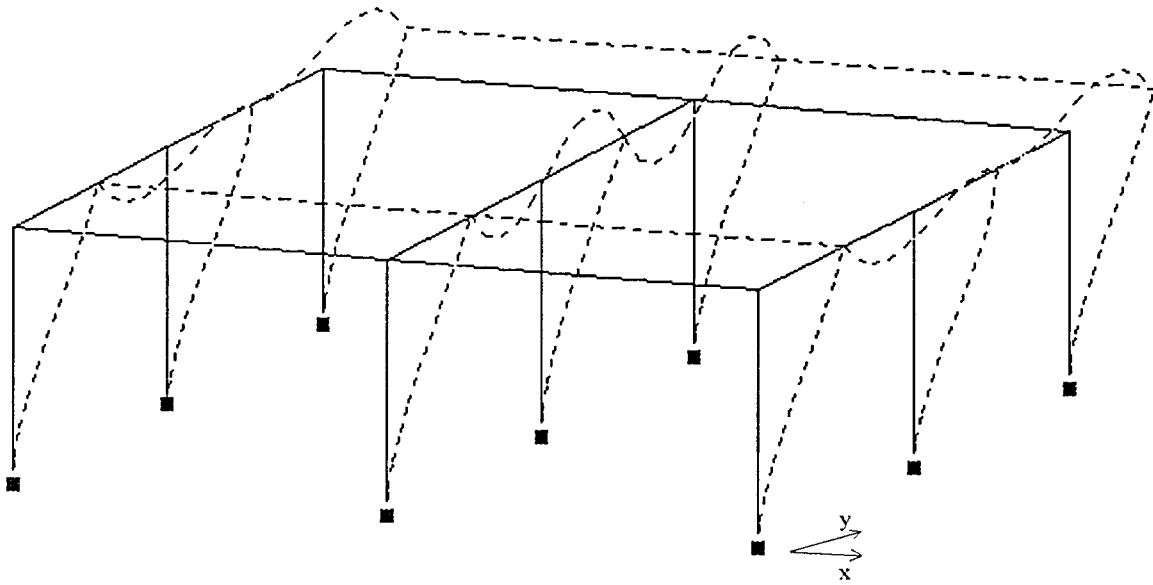


Fig. 6.10c - Modo de encurvadura por translação yy - Perspectiva.

Como se sabe, o mais baixo dos factores de carga λ associados a cada um destes modos de encurvadura corresponde à carga crítica da estrutura. Fazendo variar a secção de algumas vigas e aumentando o carregamento de alguns pilares foram calculados, desprezando a rigidez à torção de todas as barras, os valores de λ correspondentes aos três modos de encurvadura tipo. O principal interesse deste estudo prende-se com a possibilidade de se assistir, mantendo a secção dos pilares, à variação da carga crítica da estrutura, e ainda à possível alteração da configuração do modo de encurvadura fundamental.

Em primeiro lugar procedeu-se ao aumento progressivo da secção das vigas V2 inseridas nos pórticos orientados segundo xx. Assim, para valores sucessivamente crescentes da altura h da secção, e mantendo a sua largura, calcularam-se os valores de λ para os três modos de encurvadura, tendo-se obtido os resultados que se apresentam graficamente na Figura 6.11.

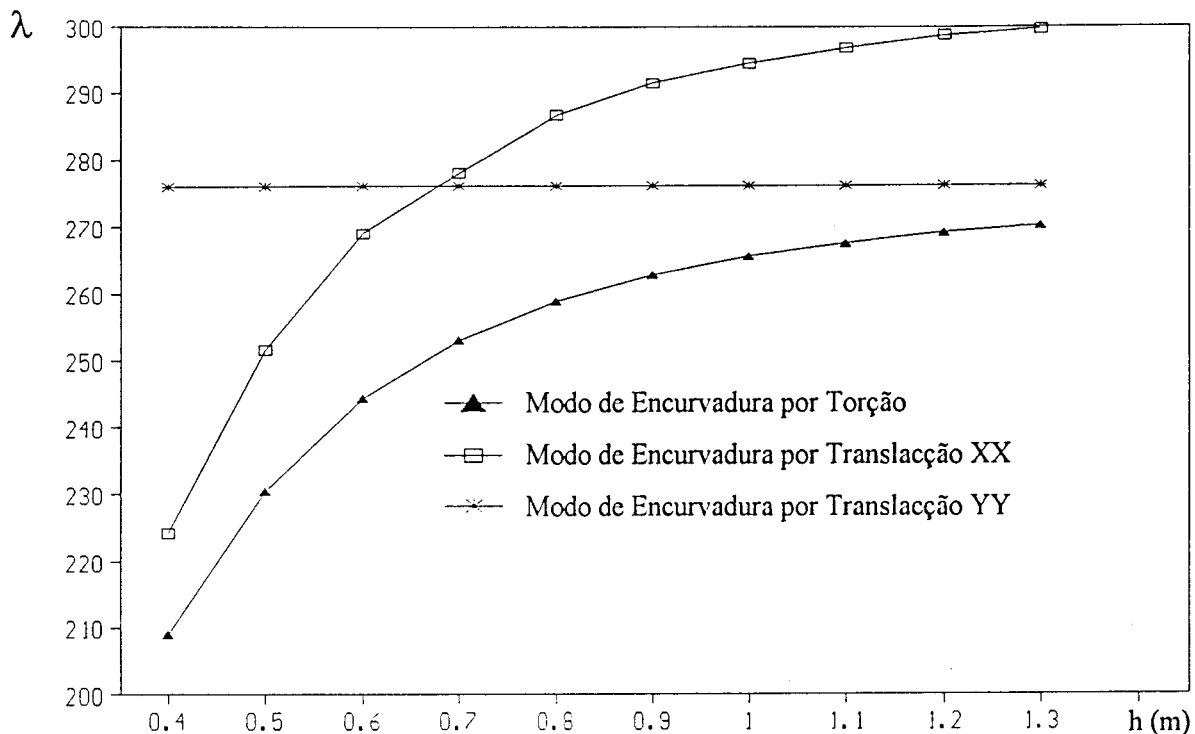


Fig. 6.11 - Modos de torção, translação xx, e translação yy - Variação da secção das vigas V2.

Como se verifica da leitura do gráfico agora apresentado, o aumento da secção das vigas V2, rigidificando os pórticos orientados segundo xx, implica que:

- i) Os valores de λ associados ao modo de translação xx aumentem significativamente, assistindo-se todavia uma certa estabilização do seu valor a partir de $h=1.20\text{m}$. Esta situação reflecte que o aumento da estabilidade nesta direcção deixa de ser possível através do aumento da secção das vigas mas, se pretendido, só poderá ser conseguido à custa do aumento das secções dos pilares.
- ii) O modo de encurvadura de translação yy mantém-se constante, já que o aumento da secção das vigas na direcção xx só poderia introduzir alguma alteração no valor de λ se a rigidez à torção das mesmas fosse incluída.
- iii) O modo de encurvadura por torção, envolvendo os pórticos das duas direcções e sendo por isso influenciado pelo aumento da secção das vigas V2, vê o valor de λ aumentado, ainda que de forma menos acentuada que o modo de translação xx.

- iv) A análise conjunta dos três modos, permite verificar que o modo de torção é sempre o correspondente à configuração de instabilidade, verificando-se porém à medida que h aumenta, a sua aproximação do modo de translacção yy. A interferência directa nos pórticos orientados segundo xx, fez com que o modo de translacção xx, com um valor do factor de carga inicialmente modesto e próximo do modo de torção, passe a ser o modo de ordem mais alta, inclusive superior ao de translacção yy.

Partindo da última situação calculada, isto é, mantendo a secção da vigas V2 do exemplo da Figura 6.7 com $h=1.30\text{m}$, procedeu-se à variação do carregamento da estrutura. Sendo os pilares inicialmente solicitados por uma carga axial de valor $N=100\text{kN}$, irão agora ser aumentadas, as forças aplicadas nos pilares P1 e P3 com sucessivos incrementos de $\Delta N=50\text{kN}$.

Os resultados obtidos apresentam-se na Figura 6.12.

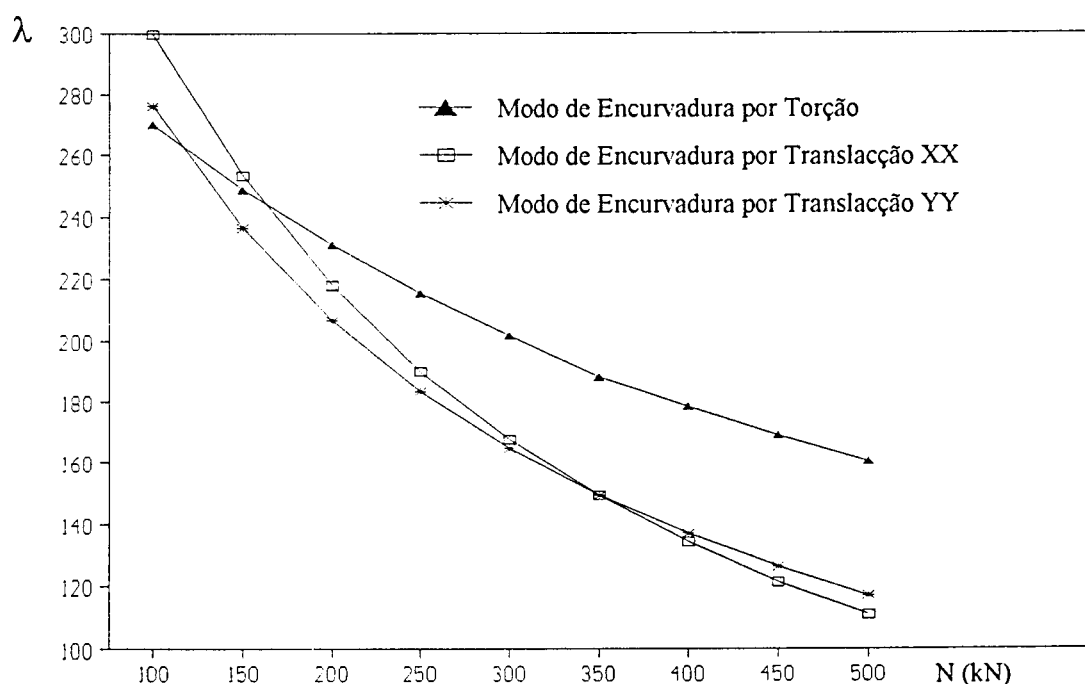


Fig. 6.12 - Modos de torção, translacção xx, e translacção yy- Aumento de carga nos pilares P1 e P3.

Do gráfico da Figura 6.12 pode concluir-se que:

- i) O aumento do carregamento conduz naturalmente a uma redução do factor de carga λ em todos os modos de encurvadura .

- ii) O modo de encurvadura por translacção xx é mais sensível do que o yy , situação que se justifica pelo facto de os pilares que veem aumentada a sua solicitação não de encontrarem inseridos em pórticos na direcção xx .
- iii) O modo de encurvadura por torção é o menos sensível ao aumento de carga. De facto o aumento da carga de P1 afecta qualquer um dos modos de translacção, mas não introduz, pelo facto de este pilar coincidir com o centro de rotação, qualquer agravamento para o modo de torção, ficando a diminuição de λ a ele associado apenas dependente do aumento de carga nos pilares P3.
- iv) Analisando os três modos globalmente assiste-se a duas mudanças do modo de encurvadura fundamental, ou seja daquele a que corresponde a carga crítica da estrutura. Sendo este modo inicialmente o modo de torção, após um pequeno acréscimo de carga passará a sê-lo o modo de translacção yy . Para um aumento de sensivelmente três vezes e meia o carregamento inicial dos pilares P1 e P3, o modo de translacção yy deixa de ser a configuração de instabilidade passando o modo de translacção xx a desempenhar esse papel.

CAPÍTULO 7

INFLUÊNCIA DA ENCURVADURA POR TORÇÃO EM ESTRUTURAS DE BETÃO ARMADO

7.1 - INTRODUÇÃO

As estruturas de betão armado são, presentemente, aquelas que de forma mais sistemática se deparam aos projectistas estruturais. Será então de todo interesse analisar a influência das considerações efectuadas nos capítulos anteriores, no contexto da verificação da segurança ao estado limite último de encurvadura de estruturas deste tipo.

Esta abordagem, ainda que sintética e não muito aprofundada, pretende dar algum contributo no sentido de clarificar as consequências do aparecimento de modos de encurvadura por torção, por um lado na classificação de mobilidade das estruturas e, por outro, na quantificação dos esforços de 2ª ordem a incluir nos seus pilares.

7.2 - CLASSIFICAÇÃO DE MOBILIDADE DE ESTRUTURAS DE BETÃO ARMADO

7.2.1 - Critérios de classificação

7.2.1.1 - REBAP - (Critério 1)

O REBAP apresenta no seu artigo 58º, em forma de comentário, uma expressão que estabelece um critério de classificação de mobilidade. Segundo este, uma dada estrutura será classificada de nós fixos se:

$$h_{tot} \sqrt{\frac{\sum N}{\sum EI}} \leq \eta \quad (7.1)$$

Esta expressão foi já apresentada no Capítulo 2, tendo sido indicados no seu ponto 2.3.1 os significados das grandezas nela envolvidas.

A sua obtenção resultou de um conjunto de considerações que se podem resumir a :

- i) Desprezando a rigidez à flexão das vigas na deformabilidade da estrutura esta é substituída por uma consola vertical, com uma rigidez à flexão igual ao somatório da rigidez de todos os pilares da estrutura.
- ii) A consola é solicitada pela resultante das cargas verticais aplicadas em cada piso ao nível dos mesmos.
- iii) Considera-se que a estrutura é de nós fixos se o momento total incluindo os efeitos de 2ª ordem M_{tot}^{II} , na base dessa consola, não ultrapassar em mais de 10% o momento de 1ª ordem M^I , obtido nessa mesma secção, para as acções actuantes de cálculo.

Utilizando uma expressão proposta por Timoshenko e Gere [5] que permite calcular, com muito boa aproximação, o momento total de 2ª ordem a partir do momento de 1ª ordem, do conhecimento do esforço axial instalado N_{sd} , e da carga crítica da consola P_{CR} ,

$$M_{tot}^{II} = \frac{1}{1 - \frac{N_{sd}}{P_{CR}}} \cdot M^I \quad (7.2)$$

é possível escrever o critério de mobilidade $M_{tot}^{II} \leq 1.1M^I$ da seguinte forma:

$$\frac{N_{sd}}{P_{CR}} \leq \frac{1}{11} \quad (7.3)$$

Uma vez substituído o valor de P_{CR} pela habitual carga crítica de Euler, calculada para uma rigidez à flexão do pilar equivalente de apenas 70% da rigidez elástica simulando o funcionamento do betão em fase fendilhada, considerando como comprimento de encurvadura da consola 1,12 vezes a sua altura total, o que corresponde a admitir a totalidade da carga vertical aplicada uniformemente em altura, e substituindo N_{sd} por $1,5 \times N$ fazendo assim intervir as cargas verticais não afectadas dos coeficientes de majoração, a condição (7.3) seria transformada em (7.1) para um valor de $\eta=0,58$ [22].

Recorrendo à definição de factor de carga,

$$\lambda = \frac{P_{CR}}{N_{sd}} \quad (7.4)$$

e substituindo-a em (7.3), o critério de mobilidade poderá ser definido como:

Uma dada estrutura será classificada de nós fixos se,

$$\lambda \geq 11 \quad (7.5)$$

sendo λ o factor de carga de uma consola vertical, com uma rigidez EI igual a 70% da soma da rigidez elástica de todos os pilares, e solicitada ao nível dos pisos da estrutura pelas resultantes das cargas verticais de cálculo neles aplicadas.

7.2.1.2 - Consideração da estrutura na sua globalidade. Rotação dos pisos impedida - (Critério 2)

Um segundo critério que irá ser explorado, mantendo a filosofia de análise da mobilidade em duas direcções independentes, e continuando a classificar como estruturas de nós fixos aquelas em que se verificar $\lambda \geq 11$, consistirá em contabilizar na deformabilidade da estrutura os pilares e vigas que constituem, enquadrados no conjunto de pórticos resistentes em cada uma das direcções.

Para o cálculo dos factores de carga em cada uma das direcções foi utilizado o modelo de cálculo GRETRI3, acrescentando condições de apoio impedindo os pisos de rodar e de se deslocarem numa direcção diferente da direcção em estudo.

Este mesmo critério poderia ter sido estudado utilizando um método simplificado apoiado em programas de pórticos planos elásticos, de que é exemplo o proposto por Vila Pouca [6], e que foi já referido no Capítulo 2.

Finalmente refira-se que, para entrar em linha de conta com o funcionamento do betão em fase fendilhada, se considerou, apoiado nas sugestões do MC90 neste domínio, a rigidez de todas as barras (pilares e vigas) reduzida a 50% da sua rigidez elástica.

7.2.1.3 - Consideração da estrutura na sua globalidade. Rotação dos pisos permitida - (Critério 3)

Como terceiro e último critério abandona-se a análise em duas direcções independentes, procurando-se a configuração de instabilidade fazendo intervir simultaneamente os elementos resistentes nas duas direcções, sem impôr qualquer tipo de restrições aos deslocamentos dos pisos da estrutura.

O valor da carga crítica, eventualmente associada a um modo de encurvadura por torção da estrutura, determinada utilizando o modelo de cálculo GRETRI3 ou o método simplificado exposto no Capítulo 5, permitirá efectuar a classificação de mobilidade, mantendo-se como condição para que uma estrutura seja de nós fixos que $\lambda \geq 11$.

Tal como no critério anterior, também neste caso se optou por efectuar uma redução de 50% da rigidez à flexão de todas as barras, para simular o funcionamento do betão em fase fendilhada.

7.2.2 - Exemplo de aplicação

Os três critérios de classificação definidos apresentam uma condição comum, função do valor de λ , para a classificação de mobilidade de uma dada estrutura. As suas principais diferenças residem na inclusão ou exclusão da contribuição das vigas para a sua deformabilidade, e na configuração de instabilidade admitida. Este último aspecto prende-se fundamentalmente com a opção entre efectuar uma análise em duas direcções independentes ou uma análise global envolvendo simultaneamente os elementos resistentes nas duas direcções.

Estando a classificação de mobilidade dependente do valor de λ , a aplicação destes três critérios a um exemplo será de alguma forma redundante com o já efectuado no Capítulo 6, onde se estudou a influência de alguns parâmetros no valor de λ e na configuração de instabilidade associada. Todavia, a importância deste estudo reside no facto de que estando a sua exposição direccionada para a classificação de mobilidade, e sendo esta um dos aspectos mais importantes da filosofia de verificação de segurança ao estado limite último de encurvadura preconizado na regulamentação portuguesa, permitirá avaliar as diferenças, em alguns casos significativas, resultantes da aplicação destes três critérios de classificação.

A estrutura analisada tem a sua geometria e secções definidas na Figura 7.1. Considerou-se a estrutura solicitada por uma carga uniformemente distribuída em todos os pisos $q_{sd} = 15 \text{ kN/m}^2$, que foi aplicada nas vigas dos pórticos orientados segundo yy proporcionalmente às suas áreas de influência. A rigidez à torção das vigas e pilares foi para este efeito desprezada.

O pilar central, indicado com secção $b \times h$, constituindo um núcleo mais rígido, pretende simular a eventual existência de uma caixa de escadas ou de elevadores. No estudo que se segue, fazendo variar as dimensões deste núcleo, vão analisar-se as diferenças encontradas

para o valor de λ calculado de acordo com os três critérios definidos, afectando directamente a classificação de mobilidade da estrutura.

Os resultados obtidos encontram-se representados no gráfico da Figura 7.2 .

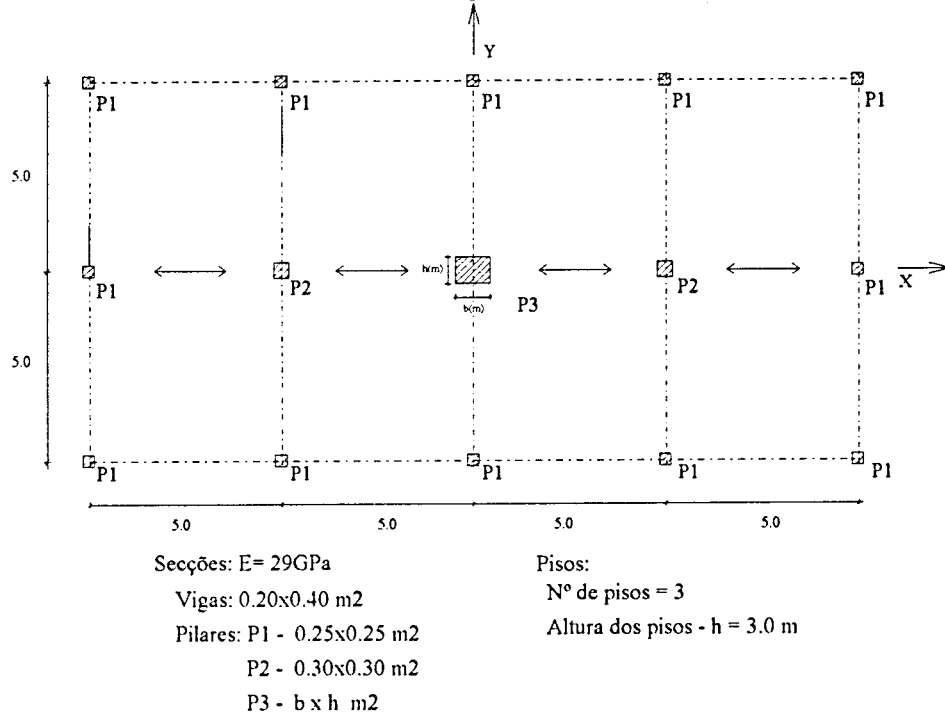


Fig. 7.1 - Edifício regular - Classificação de mobilidade

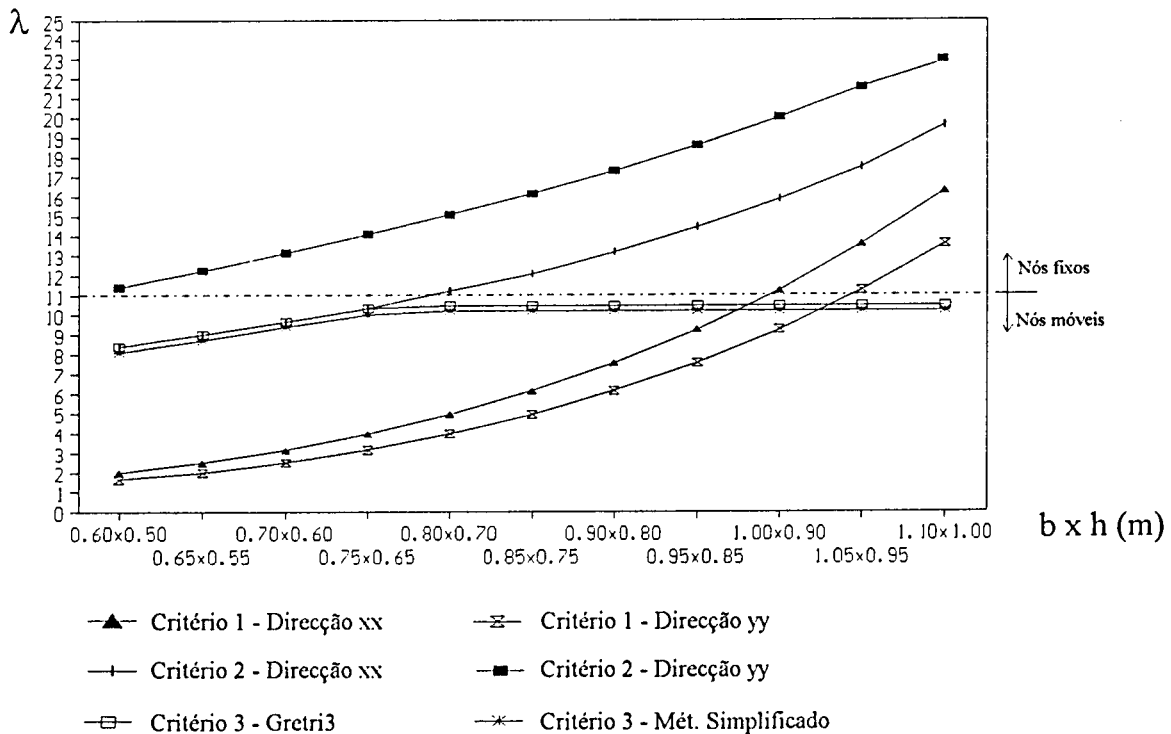


Fig. 7.2 - Critérios de classificação de mobilidade - Resultados

Do gráfico da Figura 7.2 podem retirar-se algumas conclusões que em seguida se apresentam:

- i) O primeiro critério, preconizado no REBAP, desprezando a rigidez das vigas, conduz na maioria dos casos a classificar as estruturas como de nós móveis. Apesar de tudo neste exemplo, dado que a deformabilidade da estrutura é muito dependente da deformabilidade da secção do pilar central, esta pode ser classificada como de nós fixos na direcção xx a partir da secção 1.00x0.90, e nas duas direcções para dimensões ligeiramente superiores.
- ii) O segundo critério, fazendo intervir a rigidez das vigas à flexão, apresenta valores de λ bastante mais elevados do que o primeiro, assistindo-se porém a uma aproximação dos valores obtidos com estes dois critérios, à medida que se vai aumentando a secção do pilar central. Este resultado reflecte o papel cada vez mais importante deste elemento no contraventamento da estrutura, para configurações de instabilidade caracterizadas por translações puras dos pisos. Verifica-se que de acordo com este critério a estrutura se pode considerar sempre de nós fixos na direcção yy, sendo de nós móveis na direcção xx apenas para as primeiras quatro secções assinaladas no gráfico.
- iii) O terceiro critério envolvendo de forma global toda a estrutura, apresenta como modo de encurvadura crítico o modo de translação na direcção xx até à secção 0.75x0.65. A partir desta secção a configuração de instabilidade passa a ser de torção em torno do pilar central, mantendo-se constante o valor de $\lambda=10.47$ e deixando clara a independência desta configuração relativamente à secção do pilar central. Os resultados obtidos com o programa GRETRI3 e com o método simplificado são muito próximos, e deles se pode concluir que utilizando este critério a estrutura será de nós móveis para qualquer secção do pilar central.
- iv) O critério 1 é extremamente conservativo deixando claro que a rigidez das vigas não deve ser desprezada na análise de mobilidade. Todavia, um apuramento parcial desta metodologia, como o que serve de base ao critério 2, incluindo as vigas mas mantendo a condição dos modos de encurvadura serem de translação, pode introduzir erros na avaliação do factor de carga da estrutura, que a comparação com o critério 3 evidenciam ser consideravelmente do lado da insegurança.

7.3 - EFEITOS DE 2ª ORDEM EM ESTRUTURAS DE BETÃO ARMADO

O estudo que neste ponto se apresenta pretende estabelecer a comparação dos resultados do cálculo de esforços de 2ª ordem em estruturas de nós móveis, obtidos com três metodologias distintas que se baseiam respectivamente no REBAP, MC90, e no modelo de cálculo GRETRI2 apresentado no Capítulo 4.

Os principais aspectos que irão ser discutidos centram-se na discussão da qualidade dos resultados obtidos com o REBAP, na avaliação da aplicabilidade do método simplificado baseado no MC90 e, ainda, no estudo das consequências da substituição de uma análise em duas direcções independentes por um análise global da estrutura.

7.3.1 - Metodologias de cálculo

No Capítulo VIII do REBAP, que trata da verificação da segurança em relação ao estado limite último de encurvadura, encontra-se definida a metodologia a seguir para a quantificação dos esforços de 2ª ordem em estruturas de betão armado, não necessitando a sua aplicação neste Capítulo qualquer tipo esclarecimento. Reserva-se assim às duas restantes metodologias (MC90 e GRETRI2) a prestação de alguns esclarecimentos sobre a forma de aplicação e princípios gerais que lhes servem de base.

7.2.1.1 - MC90

O MC90 sugere um método simplificado, desenvolvido e sistematizado por Azeredo, M.[23], válido dentro de certos limites, para o cálculo de esforços de 2ª ordem em estruturas planas de nós móveis.

Considere-se então um pórtico plano solicitado por cargas verticais P_{sdi} uniformemente distribuídas nas vigas e por forças horizontais W_i (por exemplo a acção do vento) aplicadas ao nível dos pisos, tal como representado na Figura 7.3.

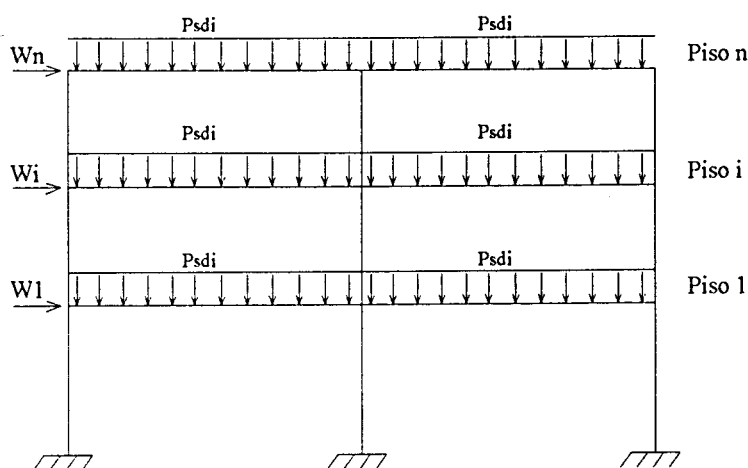


Fig. 7.3 - Pórtico plano - Solicitação global

Para a sistematização da aplicação deste método a uma estrutura plana genérica, do tipo da apresentada na Figura 7.3, apresenta-se o conjunto de passos que deverão ser seguidos [23].

- i) Admite-se que o pórtico se encontra numa posição deformada inicial, traduzindo a possibilidade de existirem imperfeições geométricas. Este efeito, análogo à consideração da excentricidade acidental e_a do REBAP, é aqui incluído pela imposição de uma inclinação global da estrutura (Figura 7.4), constante em altura, definida por[4]:

$$\alpha_a = \frac{1}{100\sqrt{h}} \leq \frac{1}{200} \quad (7.6)$$

h - altura total da estrutura

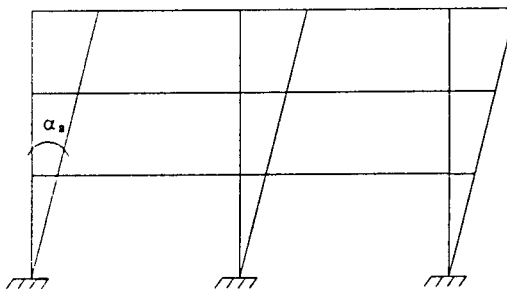


Fig. 7.4 - Pórtico plano - Inclinação global simulando as imperfeições geométricas

- ii) O efeito provocado pela actuação das forças verticais numa estrutura com a inclinação definida em i), poderá ser simulado adicionando às forças já existentes um conjunto de forças horizontais cujo valor por piso será definido por [4]:

$$H_i = \alpha_a \cdot \sum P_{SDi} \quad (7.7)$$

$\sum P_{SDi}$ - Somatório das cargas verticais aplicadas ao nível do piso i.

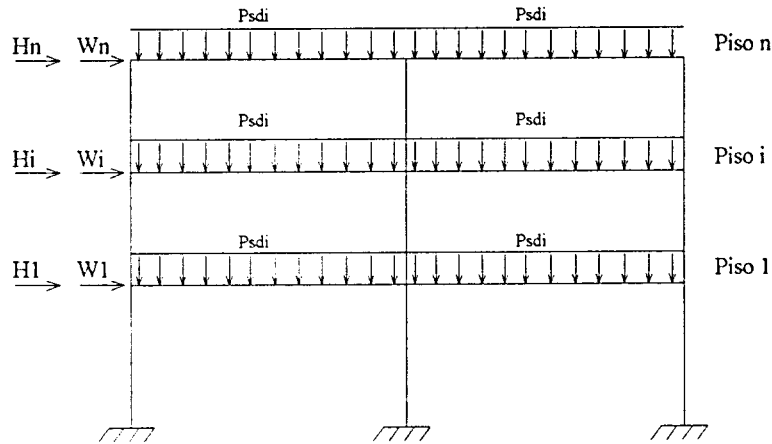


Fig.7.5 - Pórtico plano - Solicitação global incluindo as forças adicionais H_i

- iii) Uma vez definido o carregamento global, que conduziria a esforços que se podem ainda considerar elásticos, será agora necessário efectuar o cálculo de um factor β de ampliação das forças horizontais, que permitirá obter esforços incluindo os efeitos de 2ª ordem, e que se define por [23],

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{a_a}{\alpha_a h}} \quad (7.8)$$

sendo,

a_a - Flecha elástica do topo do pórtico, calculada para uma solicitação constituída unicamente pelas forças horizontais H_i , considerando a rigidez de todas as barras igual a 50% da sua rigidez elástica.

Este factor desempenha ainda duas funções de grande importância. Em primeiro lugar permite classificar a estrutura quanto à mobilidade, considerando-se que esta será de nós móveis unicamente para valores de β superiores a 1.1, em segundo lugar define o limite de aplicabilidade deste método simplificado, sendo apenas aconselhável a sua aplicação para estruturas de nós móveis cujo valor de β seja inferior a 1.25.

- iv) Uma vez calculado β deverá recalcular-se a estrutura para uma solicitação composta pelas forças:

$$\begin{aligned} & - P_{SDi} \\ & - \beta \cdot W_i \\ & - \beta \cdot H_i \end{aligned}$$

- v) Os esforços obtidos, já incluindo os efeitos de 2ª ordem, deverão ser utilizados para o dimensionamento da estrutura

Este método pressupõe uma análise em duas direcções independentes. A sua aplicação a um edifício implica a constituição de uma associação em combóio em cada uma das direcções, permitindo efectuar a distribuição das forças horizontais (W_i e H_i) proporcionalmente à rigidez dos pórticos que os constituem, e efectuando posteriormente as correcções de torção adequadas. Do ponto de vista da correcção de torção, e apesar do MC90[4] e Azeredo, M. [23] nada referirem a este respeito já que apenas tratam estruturas planas isoladas, considerou-se razoável considerar as forças H_i aplicadas no centro de gravidade das cargas verticais aplicadas em cada um dos pisos.

Como nota final refira-se que a não linearidade física encontra-se incluída de forma simplificada na determinação do factor β , uma vez que o seu valor é obtido no pressuposto de uma redução de 50% da rigidez elástica das barras que constituem a estrutura.

7.3.1.1 - GRETRI2

O modelo de cálculo automático GRETRI2, apresentado no Capítulo 4, permite obter, para uma dada estrutura e solicitação, um conjunto de esforços que incluem desde logo os efeitos de 2ª ordem. A sua aplicação a estruturas de betão armado implica todavia que:

- i) As estruturas sejam calculadas admitindo como módulo de elasticidade de todas as barras um valor de 50% do módulo de elasticidade elástico, tendo em vista a simulação da não linearidade física.
- ii) A inclusão das imperfeições geométricas seja efectuada de forma análoga ao referido para o método apresentado em 7.3.1.1, através da inclusão de forças horizontais H_i em correspondência com uma deformação inicial admitida.

7.3.2 - Exemplos de Aplicação

Apesar de não ter sido efectuado um estudo aprofundado da melhor via para a determinação dos esforços de 2ª ordem em estruturas tridimensionais, considerou-se importante apresentar os resultados obtidos com a aplicação das três metodologias expostas no ponto 7.3.1, a um conjunto de quatro variantes da estrutura representada na Figura 7.1, fixando a dimensão do núcleo central em 0.75x0.65m.

Para cada uma das situações estudadas indicam-se os valores dos esforços elásticos e de 2ª ordem obtidos com cada uma das três metodologias, sendo feita, sempre que necessário, uma explicação dos pressupostos que lhe serviram de base.

Pretende-se com este estudo evidenciar que os aspectos mais importantes, do ponto de vista do cálculo dos efeitos de 2ª ordem, serão o valor da carga crítica da estrutura directamente relacionada com a configuração de instabilidade que lhe está associada, a relação entre esta configuração e a deformação imposta pela solicitação aplicada à estrutura e, ainda, a deformação inicial admitida para simulação das imperfeições geométricas da estrutura.

Para que a estrutura fosse de nós móveis por qualquer dos critérios de classificação de mobilidade, optou-se por aumentar de 1.5 vezes o valor das cargas verticais aplicadas. Para esta solicitação ($q_{sdi} = 1.5 \times 15 = 22.5 \text{ kN/m}^2$ em todos os pisos), os valores de λ obtidos pelos três critérios anteriores serão:

$$\text{Critério 1 - Direcção XX} - \lambda = 3.94/1.5 = 2.63 < 11$$

$$\text{Critério 1 - Direcção YY} - \lambda = 3.14/1.5 = 2.10 < 11$$

$$\text{Critério 2 - Direcção XX} - \lambda = 10.35/1.5 = 6.90 < 11$$

$$\text{Critério 2 - Direcção YY} - \lambda = 14.10/1.5 = 9.40 < 11$$

$$\text{Critério 3 - GRETRI3} - \lambda = 10.35/1.5 = 6.90 < 11$$

Para cada uma das situações estudadas apresenta-se uma descrição sumária dos aspectos mais importantes que estiveram na base da aplicação do método baseado no MC90, e da utilização do modelo de cálculo GRETRI2.

7.3.2.1 - Estrutura Simétrica - Acção horizontal na direcção YY

- Imperfeições geométricas - Inclinação global na direcção YY

Considere-se a estrutura representada na Figura 7.1 com dimensões do núcleo central de 0.75x0.65m, e com cargas verticais aplicadas em todos os pisos $q_{sdi} = 22.5 \text{ kN/m}^2$. Simulando a acção do vento na direcção YY foram introduzidas, ao nível dos três andares e de forma centrada no edifício, forças horizontais W_i ($i=1,3$).

$$W_1 = 50 \text{ kN (Piso 1)}$$

$$W_2 = 50 \text{ kN (Piso 2)}$$

$$W_3 = 25 \text{ kN (Piso 3)}$$

- MC90

. Inclinação inicial α_a

$$\alpha_a = \frac{1}{100\sqrt{h}} = \frac{1}{300}$$

. Forças horizontais equivalentes - H_i

$$H_i = \frac{1}{300} \cdot 22.5 \cdot 10 \cdot 20 = 15 \text{ kN / Piso}$$

. Factor β

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{0.28744E - 2}{\frac{1}{300} \cdot 9}} = 1.106 > 1.1 \Rightarrow \text{Nós Móveis}$$

. As forças $\beta(W_i + H_i)$ foram distribuídas proporcionalmente à rigidez dos pórticos.

- GRETRI2

A utilização deste modelo de cálculo levanta como questão fundamental a forma de incluir os efeitos provocados pelas imperfeições geométricas iniciais. Para esse efeito foram consideradas, por analogia com o método baseado no MC90, forças horizontais $H_i = 15 \text{ kN}$ em todos os pisos simulando uma inclinação inicial global da estrutura.

Do conjunto de resultados obtidos escolheram-se, como mais significativos os momentos flectores referentes às secções inferiores dos três troços dos pilares P1, P2 e P3 indicados em planta na Figura 7.6

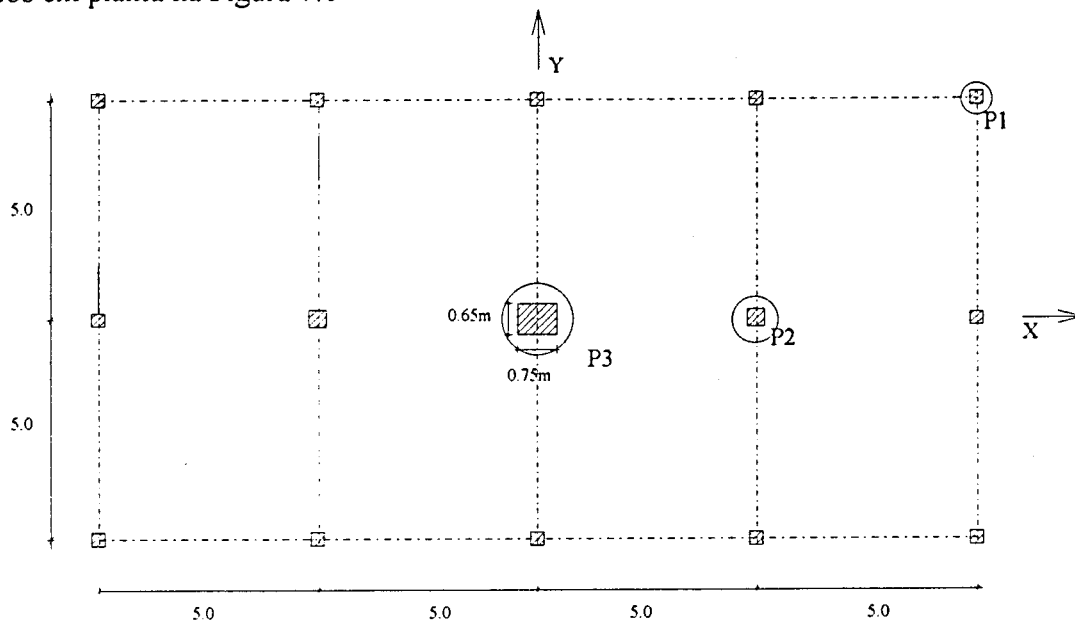


Fig.7.6 - Estrutura Simétrica - Pilares Analisados

Quadro 7.1 - Momentos Flectores Elásticos

		Pórticos Planos (1)	GRETRI1 (2)
P1	1	21.7	21.4
	2	46.1	46.1
	3	46.7	47.0
P2	1	15.5	15.4
	2	13.4	13.5
	3	7.4	7.4
P3	1	264.6	266.5
	2	14.0	12.5
	3	40.7	41.2

Quadro 7.2- Momentos Incluindo Efeitos de 2ª ordem

		REBAP (1)	MC90 (2)	GRETRI2 (3)
P1	1	37.6	22.5	22.3
	2	57.3	46.7	46.8
	3	51.4	47.1	47.4
P2	1	60.9	17.2	16.4
	2	48.7	14.9	15.0
	3	26.7	8.2	8.4
P3	1	307.0	293.7	293.5
	2	843.3	15.5	16.9
	3	235.5	45.2	47.1

Quadro 7.3- Percentagem de Momentos de 2ª ordem

		MC90 (%) (1)	GRETRI2 (%) (2)
P1	1	3.9	4.2
	2	1.30	1.5
	3	0.80	0.85
P2	1	9.7	6.5
	2	10.4	11.1
	3	10.8	13.5
P3	1	11.0	10.1
	2	10.7	35.2
	3	11.1	14.3

Do conjunto de resultados obtidos podem retirar-se algumas conclusões que em seguida se apresentam:

- i) A análise do Quadro 7.1 permite verificar que os esforços elásticos obtidos com os pórticos planos e com o modelo GRETRI1 apresentam uma muito boa concordância, o que se deve, certamente, ao facto de a simetria da estrutura e de carregamento não mobilizarem o efeito tridimensional.
- ii) Os esforços incluindo os efeitos de 2ª ordem obtidos pela filosofia preconizada no REBAP são extremamente conservativos, atingido, em algumas secções estudadas, valores perfeitamente irrealistas.

- iii) Dadas as características da solicitação admitida, a configuração deformada, em regime elástico, da estrutura tem forma idêntica ao modo de encurvadura de translação na direcção YY. De acordo com o valor de λ que caracteriza esta configuração, próximo do limite $\lambda=11$, seriam de esperar percentagens de acréscimos dos momentos de 2ª ordem próximas de 10%. Assiste-se porém a um aumento progressivo destas percentagens do pilar P1 para o pilar P3, assumindo valores bastante inferiores a 10% no pilar P1 e bastante superiores no pilar P3. Este efeito de contraventamento, dos pilares mais robustos aos mais flexíveis, é neste caso possível, uma vez que a deformada imposta pelas acções horizontais aplicadas se caracteriza, como se disse, por uma translação pura dos diferentes pisos na direcção YY.

7.3.2.1.1 - Estrutura Simétrica - Acção horizontal na direcção YY

- Imperfeições geométricas - Rotação no plano horizontal XY

Uma vez que o valor de λ associado ao modo de encurvadura por torção é mais baixo do que o de translação YY, será interessante analisar as diferenças encontradas, para os efeitos de 2ª ordem, resultantes da substituição da inclinação inicial admitida como imperfeição geométrica por uma rotação dos diferentes pisos em torno do pilar central, que mobiliza desde logo aquele modo.

Correspondendo a inclinação $\alpha_a = \frac{1}{300}$ admitida no ponto 7.3.2.1 a um deslocamento

do topo da estrutura de $\delta = \frac{1}{300} \cdot 9 = 0.03m$, admitiu-se que este mesmo valor para caracterizar o deslocamento relativo entre os pórticos extremos da estrutura segundo YY (Figura 7.7).

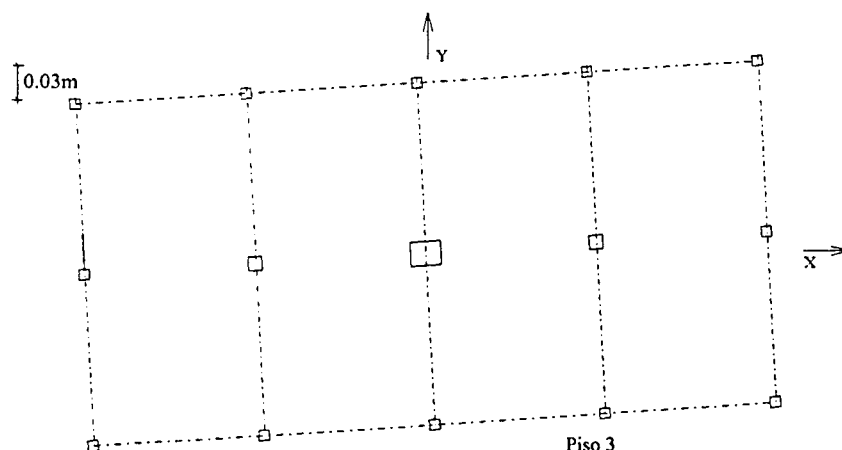


Fig.7.7 - Estrutura Simétrica - Imperfeições geométricas caracterizadas por uma rotação da estrutura.

Esta imperfeição pode ser simulada aplicando um momento torsor, igual em todos os pisos, de valor $Mt_i = 345kN \cdot m / \text{Piso}$ nos respectivos nós de piso.

O conjunto de forças aplicadas q_{sdi} , W_i e Mt_i conduziram, utilizando apenas os modelos de cálculo GRETRI1 e GRETRI2, a um conjunto de esforços que em seguida se apresentam.

Quadro 7.4 - Momentos Elásticos (1)

- Momentos Incluindo Efeitos de 2ª ordem (2)

- Percentagens de momentos de 2ª ordem (3)

		GRETRI1 (1)	GRETRI2 (2)	(%) (3)
P1	1	34.9	38.1	9.2
	2	51.7	53.1	2.7
	3	49.2	49.6	1.0
P2	1	27.7	30.5	10.0
	2	17.9	20.2	12.0
	3	8.6	9.8	13.9
P3	1	194	214.0	10.0
	2	6.5	8.8	35.3
	3	32.7	37.1	13.4

Os resultados obtidos evidenciam fundamentalmente que a consideração das imperfeições geométricas, com características que impõem à estrutura uma deformada do tipo do modo de encurvadura por torção, cujo valor de λ é inferior ao da translacção segundo YY, conduz a um acréscimo das percentagens de momentos de 2ª ordem nos pilares P1 e P2, mantendo sensivelmente constantes estas mesmas percentagens no pilar central, quando comparadas com as obtidas no ponto 7.3.2.1(Quadro 7.3).

7.3.2.2 - Estrutura Não Simétrica- Acção horizontal na direcção YY

- Imperfeições geométricas - Inclinação global na direcção YY

Baseado na estrutura da Figura 7.1 apresenta-se agora o estudo de uma estrutura semelhante, mas em relação à qual se alterou a posição em planta do pilar central, tal como se representa na Figura 7.8.

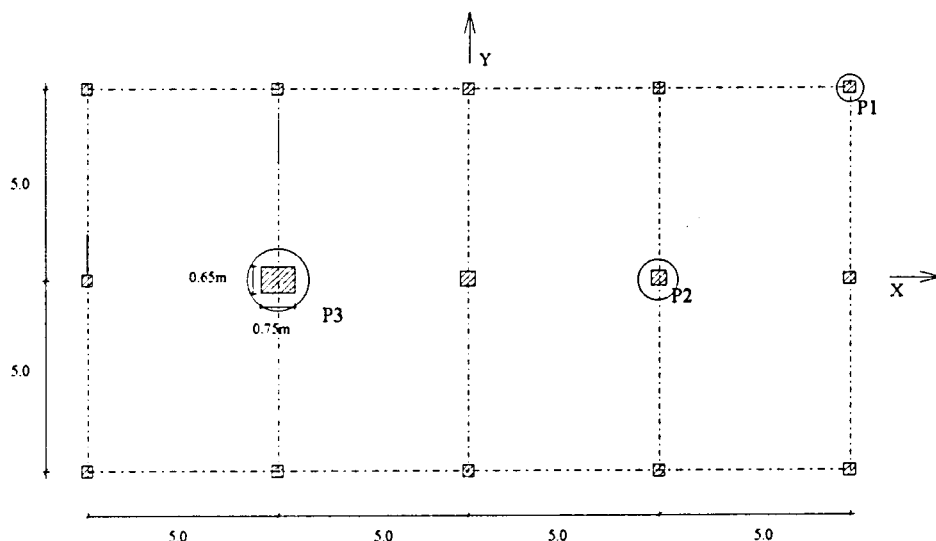


Fig.7.8 - Estrutura Não Simétrica - Pilares Analisados

As acções aplicadas foram as mesmas do ponto 7.3.2.1, tendo sido levada a cabo a distribuição das forças W_i para aplicação do REBAP e das forças W_i e H_i para aplicação do método baseado no MC90, proporcionalmente à rigidez dos diferentes pórticos, e efectuada as adequadas correcções de torção em função das suas posições em planta..

Os momentos flectores elásticos, incluindo os efeitos de 2ª ordem e as percentagens de esforços de 2ª ordem nas secções inferiores dos três troços dos pilares indicados na Figura 7.8, apresentam-se nos quadros resumos que se seguem.

Quadro 7.5 - Momentos Flectores Elásticos

		Pórticos Planos (1)	GRETRI1 (2)
P1	1	30.2	28.3
	2	46.9	46.7
	3	45.5	46.0
P2	1	26.1	24.4
	2	14.7	14.2
	3	6.3	6.1
P3	1	209.5	222.0
	2	18.1	21.3
	3	35.1	30.8

Quadro 7.6- Momentos Incluindo Efeitos de 2ª ordem

		REBAP (1)	MC90 (2)	GRETRI2 (3)
P1	1	68.8	32.0	31.1
	2	57.9	47.6	47.7
	3	50.4	45.7	46.2
P2	1	68.8	28.9	25.6
	2	47.9	16.3	16.3
	3	27.9	7.0	6.7
P3	1	209.6	232.6	243.2
	2	835.0	20.13	25.8
	3	231.8	38.9	34.8

Quadro 7.7- Percentagem de Momentos de 2ª ordem

		MC90 (%) (1)	GRETRI2 (%) (2)
P1	1	5.4	9.9
	2	1.5	2.14
	3	0.04	0.04
P2	1	10.5	4.9
	2	10.4	14.8
	3	10.6	9.8
P3	1	11.2	9.5
	2	10.8	21.1
	3	11.1	13.0

A análise dos resultados obtidos permite verificar que:

- i) Uma vez mais, os resultados obtidos com o REBAP evidenciam a má prestação desta metodologia, de cálculo de esforços de 2ª ordem, em estruturas de nós móveis.

- ii) A não simetria da estrutura implica que a solicitação aplicada origine uma deformada com uma componente de torção global, conduzindo a uma diminuição da capacidade do pilar P3 contraventar a estrutura e por consequência a uma diminuição das suas percentagens de momentos de 2ª ordem quando comparadas com as obtidas no ponto 7.3.2.1(Quadro 7.3). Em contrapartida assiste-se a um acréscimo destas mesmas percentagens relativamente aos momentos calculados nos pilares P1 e P2 agora mais afastados do centro de rotação, ou seja, do pilar mais robusto P3.
- iii) O método baseado no MC90 apesar de apresentar valores dos momentos finais próximos dos obtidos com GRETRI2, conduz a percentagens de momentos de 2ª ordem que se afastam já um pouco dos obtidos com o modelo tridimensional.

7.3.2.3 - Estrutura Simétrica - Acção horizontal na direcção XX

- Imperfeições geométricas - Inclinação global na direcção XX

Retoma-se neste ponto a estrutura do ponto 7.3.2.1 sendo estudados os esforços nos mesmos pilares e secções, mas admitindo agora a estrutura solicitada por um conjunto de forças horizontais W_i ($i=1,3$) simulando a acção do vento na direcção XX.

$$W_1 = 20\text{kN (Piso 1)}$$

$$W_2 = 20\text{kN (Piso 2)}$$

$$W_3 = 10\text{kN (Piso 3)}$$

O interesse deste estudo prende-se com a avaliação do acréscimo de momentos devidos aos efeitos de 2ª ordem, para uma solicitação que induz à estrutura uma deformação em correspondência com o modo de encurvadura por translação XX, cujo valor de λ é bastante mais baixo do que o associado à translação YY.

- MC90

Como pórticos resistentes na direcção xx consideraram-se os dois pórticos de extremidade, e um pórtico central constituído pelos pilares aí existentes interligados por um conjunto de bielas ao nível dos pisos.

. Inclinação inicial α_a

$$\alpha_a = \frac{1}{100\sqrt{h}} = \frac{1}{300}$$

. Forças horizontais equivalentes - H_i

$$H_i = \frac{1}{300} \cdot 22.5 \cdot 10 \cdot 20 = 15 \text{ kN} / \text{Piso}$$

. Factor β

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{0.41298E - 2}{\frac{1}{300} \cdot 9}} = 1.159 > 1.1 \Rightarrow \text{Nós Móveis}$$

. As forças $\beta(W_i + H_i)$ foram distribuídas proporcionalmente à rigidez dos pórticos .

- GRETRI2

Tal como no ponto 7.3.2.1 apenas se levanta a questão da inclusão das imperfeições geométricas iniciais, tendo sido para esse efeito, e por analogia com o método baseado no MC90, aplicadas as forças $H_i = 15 \text{ kN}$ ao nível dos três pisos da estrutura.

Do conjunto de resultados obtidos, analisaram-se os momentos flectores referentes às secções inferiores dos três troços dos pilares P1, P2 e P3 indicados em planta na Figura 7.6

Quadro 7.8 - Momentos Flectores Elásticos

		Pórticos Planos (1)	GRETRI1 (2)
P1	1	4.5	4.9
	2	4.9	6.4
	3	4.0	6.3
P2	1	6.0	6.0
	2	.70	.65
	3	.87	.90
P3	1	203.6	203.9
	2	23.6	22.1
	3	29.7	30.6

Quadro 7.2- Momentos Incluindo Efeitos de 2ª ordem

		REBAP (1)	MC90 (2)	GRETRI2 (3)
P1	1	20.2	5.3	5.5
	2	15.4	5.7	7.2
	3	7.6	4.6	7.1
P2	1	(*)	6.9	6.1
	2	(*)	.82	.67
	3	(*)	1.0	.96
P3	1	(*)	236.1	231.0
	2	(*)	27.6	30.1
	3	(*)	34.5	35.6

(*) - Dada a inexistência de vigas de ligação nas extremidades destes troços de pilares, não é possível a aplicação directa do REBAP.

Quadro 7.3- Percentagem de Momentos de 2ª ordem

		MC90 (%) (1)	GRETRI2 (%) (2)
P1	1	16.1	12.2
	2	15.9	12.5
	3	15.0	11.9
P2	1	16.1	1.1
	2	17.1	3.1
	3	16.1	6.6
P3	1	16.0	13.3
	2	17.0	36.2
	3	10.2	16.3

Do conjunto de resultados obtidos podem retirar-se algumas conclusões que em seguida se apresentam:

- i) A metodologia baseada no MC90 conduz a percentagens de momentos de 2ª ordem, praticamente iguais em todas as secções estudadas, de valor médio de 16%.

- ii) O modelo GRETRI2 evidencia que os principais elementos de contavento da estrutura são o pilar central P3, e os pórticos de extremidade, sendo por isso os pilares P1 e P3 aqueles que apresentam maiores percentagens de momento de 2ª ordem. A ordem de grandeza desta percentagens, quando comparadas com as obtidas no ponto 7.3.2.1(Quadro 7.3), reflectem também o menor valor da carga crítica da estrutura nesta direcção e por consequência um aumento da importância dos efeitos de 2ª ordem.

CAPÍTULO 8

CONCLUSÕES E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

8.1 - CONCLUSÕES

As situações analisadas com os modelos de cálculo tridimensional de estruturas desenvolvidos, e que serviram de base a este trabalho, permitiram, no contexto do estudo do fenómeno da instabilidade, dar algum contributo no sentido de estabelecer metodologias cada vez mais realistas e rigorosas para a verificação ao estado limite último de encurvadura.

Confrontados com o habitual estudo da encurvadura de uma dada estrutura em duas direcções independentes, procurou analisar-se a influência da sua análise global do ponto de vista do cálculo da sua carga crítica, identificação da configuração de instabilidade associada, e na determinação dos esforços de 2ª ordem nos pilares que a constituem.

Os modelos tridimensionais revelaram-se como excelentes ferramentas de cálculo, permitindo uma boa modelação e um bom entendimento do real funcionamento das estruturas de edifícios correntes, em particular no que diz respeito à análise dos efeitos de 2ª ordem

O método simplificado proposto para a determinação de cargas críticas e centros de rotação associados, apresenta-se, na ausência de um modelo global, como uma excelente alternativa para a quantificação destas grandezas, tendo-se verificado, por comparação com o modelo tridimensional exacto, conduzir a muito bons resultados.

Como principais conclusões deste trabalho podem referir-se:

- 1) Confirmou-se o facto de o REBAP conduzir a resultados demasiado conservativos no que diz respeito à mobilidade da estruturas. Ao adaptar a sua filosofia de base à quantificação de cargas críticas verificou-se conduzir a valores excessivamente baixos, quando comparados com o modelo tridimensional, o que se deve à não consideração da contribuição das vigas na deformabilidade da estrutura.
- 2) A consideração das vigas constituintes dos pórticos resistentes de uma estrutura, admitindo como única possibilidade de mobilidade dos seus pisos uma translação pura, faz com que o valor da carga crítica assuma, em alguns casos, valores superiores aos reais, situação particularmente delicada pelo facto de o erro cometido ser do lado da insegurança.
- 3) No âmbito de uma filosofia de análise tridimensional, verifica-se ser fundamental o conhecimento da distribuição de cargas e posições dos diferentes elementos resistentes em planta, para o cálculo da carga crítica de uma estrutura. Neste contexto, os modos de

encurvadura por torção serão tanto mais importantes, quanto maiores forem a concentração de rigidez na zona central da estrutura e a concentração de carga na periferia da estrutura.

4) Com excepção das estruturas simétricas, as configurações de instabilidade terão sempre componentes de torção podendo esta componente ser a preponderante, caracterizando um modo de encurvadura por torção propriamente dito, ou constituir apenas uma parcela adicional dos deslocamentos de translação.

5) Em qualquer dos casos referidos em 4), o valor da carga crítica da estrutura será sempre inferior à calculada no pressuposto da impossibilidade de rotação dos seus pisos.

6) A determinação de esforços de 2ª ordem em estruturas de nós móveis utilizando as três filosofias apresentadas no Capítulo 7 deixou claro que, o REBAP conduz, na generalidade dos casos, a situações perfeitamente irrealistas, surgindo o método simplificado baseado no MC90 como uma boa alternativa a ser explorada, uma vez que os resultados com ele obtidos comparam bastante bem com os do modelo exacto padrão GRETRI2. A boa prestação deste método simplificado é particularmente notória, nas situações em que as componentes que caracterizam a configuração de instabilidade são fundamentalmente de translação.

7) Estando as parcelas de esforços de 2ª ordem directamente dependentes do valor da carga crítica da estrutura e da configuração de instabilidade que a caracteriza, é possível concluir que a substituição de uma análise em duas direcções independentes por uma análise global, poderá aumentar essas parcelas por se verificar uma diminuição da carga crítica, e afectar de forma desigual os elementos verticais existentes, em função das suas posições relativamente ao centro de rotação da configuração de instabilidade. Uma metodologia coerente e sistemática para a determinação dos esforços de 2ª ordem exigiria contudo um aprofundamento destas ideias.

8.2 - DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

A vasta área de trabalho em que esta tese se enquadra, em grande parte justificada pela incipiente regulamentação existente, deixa em aberto inúmeros caminhos no sentido de um crescente conhecimento e quantificação dos efeitos de 2ª ordem em estruturas reticuladas tridimensionais.

Ao finalizar este trabalho indicam-se sugestões para possíveis desenvolvimentos futuros, em grande parte resultantes das dificuldades sentidas na sua realização.

1) A adaptação dos modelos de cálculo desenvolvidos tendo em vista a inclusão da não linearidade material, principalmente no que diz respeito à sua aplicação a estruturas de betão armado. Esta adaptação permitirá um melhor conhecimento do real funcionamento das estruturas e poderia criar condições para o estabelecimento de regras simples que permitam uma melhor simulação deste tipo de não linearidade nas habituais ferramentas de cálculo elástico, já que a solução adoptada de reduzir, indiscriminadamente, a rigidez dos elementos estruturais a metade, conforme sugere o MC90, se considera excessivamente simplista.

2) Um estudo aprofundado de identificação das condições mais desfavoráveis para o cálculo de esforços de 2ª ordem em estruturas reticuladas tridimensionais. Como vertentes preponderantes de um estudo deste tipo surgem, o estabelecimento de regras para a definição do tipo de imperfeições geométricas a incluir em cada caso concreto, e a análise das formas de realizar uma distribuição racional dos efeitos de 2ª ordem pelos diferentes elementos verticais, tendo em conta a relação entre a deformada imposta pela solicitação exterior e a configuração de instabilidade da estrutura.

3) De alguma maneira relacionada com a anterior linha de desenvolvimento, há que estabelecer critérios de rotura por instabilidade das estruturas de betão armado, ou seja definir de um modo mais preciso o estado limite último de resistência por encurvadura. O conceito de carga crítica, que se considera importante, não é usado na regulamentação actual, nem existe uma relação directa entre o seu valor e os efeitos de 2ª ordem.



REFERÊNCIAS

REFERÊNCIAS

- [1] REBAP - Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-Esforçado. Imprensa Nacional - Casa da Moeda, E.P., Lisboa 1986.
- [2] Comité Euro International du Béton, Fédération International de la Pré-Contrainte. Ceb-Fip. Bulletin d'Information N° 137.
- [3] EC2 - Eurocode N°2. Design of Concrete Structure. Final Draft. December 1991.
- [4] MC90 - Bulletin d'Information N° 204. Model Code 1990. Final Draft. July 1991.
- [5] Timoshenko, S.P. and Gere, J.M., Theory of Elastic Stability, Second ed., Macgraw Hill, New York, 1961.
- [6] Vila Pouca, N.S., Mobilidade das Estruturas de Betão Armado na Análise à Encurvadura, Tese de Mestrado, Porto, Janeiro 1992.
- [7] Kordina, K., Discussion N°3 - Cracking and Crack Control, Proceeding International Conference on Planning and Design of Tall Buildings, Vol III, Aug. 1972.
- [8] Hage, Structural Design of Tall Concrete and Masonry Buildings, American Society of Civil Engineers. ASCE, Vol. CB, 1978.
- [9] Delgado, R.M. e Caetano E., A Encurvadura em Pórticos de Betão Armado, Jornadas sobre a Aplicação da Nova Regulamentação de Estruturas, Gabinete de Estruturas, FEUP, Porto, 1988.
- [10] Delgado, R. M. e Costa, A., Acção dos Sismos - Curso sobre a Nova Regulamentação de Estruturas, Gabinete de Estruturas, FEUP, Porto, 1987.
- [11] Azevedo, A. V. - Análise Estática e Dinâmica de Estruturas de Edifícios, Tese LNEC, Lisboa, 1986.

- [12] Gomes, J. M. Cálculo Integrado de Estruturas de Edifícios - Análise Estática e Dinâmica em Modelo Tridimensional, Tese de Mestrado, FEUP, Porto 1989.
- [13] Aas - Jakobsen, K., Design of Slender Reinforced Concrete Frames, Institut Für Baustalk Eth Zurich, Switzerland, Nov, 1973.
- [14] Oliveira, M. M. de O., Encurvadura em Estruturas Porticadas de Betão Armado, Tese de Doutoramento, Universidade Técnica de Lisboa, Abril, 1991.
- [15] Przemieniecki, J. S., Theory of matriz Structural Analysis, MacGraw Hill, U.S.A., 1968
- [16] Bathe, K.J. and, Wilson, E. L., Numerical Methods in Infinite Elements Analysis, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- [17] Gere, J.M. and William, W. Jr., Analysis of Framed Structures, The University Series in Civil Engineering and Applied Mechanics, D. Van Nostrand Company, Inc.
- [18] Azeredo, M., Estabilidade de Grupos de Colunas Usando o Método do Pilar Padrão.
- [19] Regulamento de Segurança e Acções para Estruturas de Edifícios e Pontes, R.S.A., Imprensa Nacional - Casa da Moeda, E. P., Lisboa, 1986.
- [20] CEB - Design Manual of Buckling - Comité Euro International du Béton, Bulletin d'Information N° 123, 1977.
- [21] Bártolo, A., Camara, J.N. da e Vinagre, J., Disposições Regulamentares Relativas ao Dimensionamento de Estruturas de Betão Armado, Lisboa, 1992.
- [22] CEB - Compléments au Code-Modèle CEB-FIP 1978", Bulletin d'Information N° 139, Jul., 1981.
- [23] Azeredo, M., Estado Limite Último Induzido por Deformação Estrutural (Encurvadura), Relatório Interno do Gabinete de Estruturas da FEUP, Porto, 1993.