

JOÃO PAULO MOREIRA GONÇALVES

**CONTRIBUIÇÕES PARA A ANÁLISE NUMÉRICA E
EXPERIMENTAL DO COMPORTAMENTO DE JUNTAS DE
SOBREPOSIÇÃO SIMPLES**

FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA E GESTÃO INDUSTRIAL
PORTO, 2000

João Paulo Moreira Gonçalves

**CONTRIBUIÇÕES PARA A ANÁLISE NUMÉRICA E
EXPERIMENTAL DO COMPORTAMENTO DE JUNTAS DE
SOBREPOSIÇÃO SIMPLES**

Dissertação para Doutoramento em Engenharia Mecânica

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial
Porto, 2000

621(042)/60N1/60N

UNIVERSIDADE DO PORTO
Faculdade de Engenharia
BIBLIOTECA M
N.º <u>50890</u>
CDU _____
Data <u>21 10 6 2022</u>

cat

AGRADECIMENTOS

A realização do trabalho apresentado nesta dissertação não teria sido possível sem a colaboração de várias pessoas e instituições, a quem desejo expressar o meu agradecimento.

Agradeço aos Professores Paulo Tavares de Castro e António Augusto Fernandes, meu orientador e co-orientador, respectivamente, por terem proposto a realização deste trabalho e pelo apoio e disponibilidade que sempre demonstraram.

Agradeço ao Engenheiro Fernando de Oliveira, director do Laboratório de Ensaios Tecnológicos do Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial, pelo acompanhamento e partilha dos seus conhecimentos, principalmente em termos experimentais.

Agradeço ao Professor Marcelo Moura, em colaboração com quem foi desenvolvido grande parte do trabalho numérico aqui apresentado, pela extraordinária dedicação e interesse demonstrados.

Agradeço ao Professor António Magalhães, pelo inextinguível apoio na execução do trabalho experimental e por todas as trocas de ideias.

Agradeço ao Engenheiro Lucas Silva, pela excelente colaboração na execução de várias tarefas relacionadas com o estudo de juntas rebitadas e pela disponibilização de muitos elementos do seu trabalho.

Agradeço ao Engenheiro Miguel Figueiredo, pelo extraordinário apoio na resolução de vários problemas que surgiram ao longo deste trabalho.

Agradeço a todas as outras pessoas que de alguma forma contribuíram para a execução deste trabalho. Em particular, expresso a minha gratidão aos Professores Renato Jorge e Pedro Camanho, e ao Engenheiro José Reina, pelas conversas e ajudas valiosas.

Agradeço ao Instituto de Engenharia Mecânica (IDMEC) pela disponibilização do equipamento SPATE.

Por último, agradeço à Fundação para a Ciência e a Tecnologia (anteriormente Junta Nacional de Investigação Científica e Tecnológica) pelo apoio financeiro.

SIMBOLOGIA

a	- profundidade máxima de fenda de penetração parcial ou comprimento de fenda de penetração total
$a(x)$	- profundidade local de fenda de penetração parcial
a_0	- comprimento inicial de fenda
A	- energia livre de Helmholtz
B	- largura da viga
b	- metade da largura de placa
C_{ijkl} ($i, j, k, l = x, y, z$)	- componentes do tensor das constantes elásticas
C_e	- calor específico a deformação constante
C_σ	- calor específico a tensão constante
c_σ	- calor específico por unidade de massa a tensão constante
c	- metade do comprimento de fenda de penetração parcial
D	- factor de resposta do sensor de infravermelhos
$\mathbf{D}$	- matriz dos parâmetros de rigidez
d_i ($i = s, t, n$)	- parâmetros de rigidez
E	- módulo de elasticidade
e	- emissividade da superfície
$\mathbf{e}_p$	- três colunas da matriz de identidade respeitantes ao nó (p)
$\mathbf{e}_j$	- três colunas da matriz de identidade respeitantes ao nó (j)
F	- factor de calibração
FN	- factor de intensidade de tensão normalizado
F_i ($i = x, y, z$)	- componentes da força de volume por unidade de massa
$\mathbf{F}$	- vector de forças nodais aplicadas
$\mathbf{F}_e$	- vector das forças nodais do elemento
G	- módulo de elasticidade transversal
g	- valor máximo da escala do sistema analógico
G_{ic} ($i = I, II, III$)	- taxa crítica de libertação de energia de deformação em modo I, II ou III
G_i ($i = I, II, III$)	- taxa de libertação de energia de deformação em modo I, II ou III
h	- metade da altura de placa
I	- momento de inércia da secção
$\mathbf{I}$	- matriz identidade
K_m	- constante termoelástica
K_i ($i = I, II, III$)	- factor de intensidade de tensão em modo I, II ou III
$\mathbf{K}$	- matriz de rigidez

K_e	- matriz de rigidez do elemento
k	- factor do momento flector
L	- metade do comprimento da viga
l	- comprimento de sobreposição
M_0	- momento flector na extremidade da zona de sobreposição
M^∞	- momento flector por unidade de comprimento
$M(x)$	- momento flector local
m	- número de pontos utilizados na definição do deslocamento do ponto (s)
N^∞	- força de membrana por unidade de comprimento
N_i	- função de forma para nó i
$N(x)$	- força de membrana local
N_i	- matriz de funções de forma para nó i
n_i ($i = x, y, z$)	- componentes do vector normal à superfície
$\mathbf{n}$	- vector normal à superfície
$\mathbf{n}_k$	- vector unitário normal à superfície que contém o ponto (s)
P	- força aplicada
$R_{p0.2}$	- tensão limite convencional de proporcionalidade a 0,2%
R_M	- tensão de rotura à tracção
Q	- factor de forma para uma elipse
Q_v	- taxa de geração de calor por unidade de volume
q_i ($i = x, y, z$)	- componentes do vector fluxo de calor
$\mathbf{q}$	- vector fluxo de calor
R	- raio de furo
r	- factor de correcção de temperatura
S	- entropia específica (por unidade de volume)
S_j	- superfície de dano no final do incremento de carga j
s	- sinal detectado
s, t, n	- coordenadas em referencial local
T	- temperatura absoluta
t	- espessura
U	- energia interna por unidade de volume
$\mathbf{U}$	- vector deslocamento
$\mathbf{U}_e$	- vector dos deslocamentos nodais do elemento
$\mathbf{U}_{sup}$	- vector deslocamentos nodais da face superior do elemento
$\mathbf{U}_{inf}$	- vector deslocamentos nodais da face inferior do elemento
$\mathbf{U}_p$	- vector deslocamento do nó (p)
$\mathbf{U}_s$	- vector deslocamento do nó (s)
u_i ($i = x, y, z$)	- componentes do vector deslocamento

u_i ($i = s, t, n$)	- componentes do vector deslocamento em referencial local
V	- energia de deformação
V_s, V_t, V_n	- versores das direcções locais
v_i ($i = x, y, z$)	- componentes do vector velocidade
v	- vector velocidade
W	- energia potencial das forças aplicadas
W_λ	- radiação espectral ou poder emissivo espectral
W_i	- factor de peso do ponto de integração i
x, y, z	- coordenadas cartesianas
α	- coeficiente de expansão térmica linear
α_{kl} ($i, j = x, y, z$)	- componentes do tensor dos coeficientes de expansão térmica
α_j	- conjunto de funções de interpolação
Δ	- flecha
δ	- deslocamento relativo
$\delta(x)$	- deslocamento relativo das faces de fenda de penetração parcial
$\delta_{i,0}$ ($i = s, t, n$)	- deslocamento relativo correspondente ao início da relaxação
δ_i ($i = s, t, n$)	- componentes do vector deslocamento relativo
$\delta_{n,max}$ ($i = s, t, n$)	- deslocamento relativo correspondente ao fim da relaxação
$\bar{\delta}_{i,j}$ ($i = s, t, n$)	- intersecção da superfície de dano S_j com o eixo i
δ	- vector deslocamento relativo
ε	- parâmetro de penalidade
ε_{max}	- deformação máxima
ε_r	- deformação à rotura
ε_{ij} ($i, j = x, y, z$)	- componentes do tensor das deformações
Φ	- poder emissivo total
γ	- distorção
γ_k	- afastamento inicial dos dois pontos na direcção $\mathbf{n}_k$
γ_e	- distorção limite elástica
γ_p	- distorção máxima
λ	- comprimento de onda
ν	- coeficiente de Poisson
π	- funcional de um problema estrutural
$\bar{\pi}$	- funcional de um problema estrutural com restrições
$\theta(x)$	- rotação das faces de fenda de penetração parcial
ρ	- densidade
σ_{ij} ($i, j = x, y, z$)	- componentes do tensor das tensões
σ_{ij} ($i, j = x, y, z; i \neq j$)	- tensões normais
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	- tensões principais
σ_m	- tensão média

σ_c	- tensão de cedência à compressão
σ_t	- tensão de cedência à tracção
σ_{lim}	- tensão normal limite
σ_n	- tensão normal no elemento
σ	- vector das tensões no elemento
τ	- tensão de corte
τ_{lim}	- tensão de corte limite
τ_{ij} ($i, j = x, y, z; i \neq j$)	- tensões de corte
τ_s, τ_t	- tensões de corte no elemento
ξ, η	- coordenadas naturais
ψ	- fonte de entropia

ABREVIATURAS

AGARD	- <i>Advisory Group for Aerospace Research and Development</i>
ASTM	- <i>American Society for Testing and Materials</i>
DASA	- <i>Daimler-Benz Aerospace Airbus</i>
DEMEGI	- Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial
DCB	- <i>Double Cantilever Beam</i>
ENF	- <i>End Notched Flexure</i>
FAA	- <i>Federal Aviation Administration</i>
FEUP	- Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
IDMEC	- Instituto de Engenharia Mecânica
MED	- <i>Multiple Element Damage</i>
MEF	- Método dos Elementos Finitos
MMB	- <i>Mixed Mode Bending</i>
MSD	- <i>Multiple Site Damage</i>
NASA	- <i>National Aeronautics and Space Administration</i>
PABST	- <i>Primary Adhesively Bonded Structure Technology</i>
SEN	- <i>Single-Edge Notched</i>
SMAAC	- <i>Structural Maintenance of Ageing Aircraft</i>
SPATE	- <i>Stress Pattern Analysis by Thermal Emission</i>
SPIE	- <i>Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers</i>
TERSA	- <i>Thermal Evaluation for Residual Stress Analysis</i>
WFD	- <i>Widespread Fatigue Damage</i>

SUMÁRIO

As ligações adesivas com objectivos estruturais têm encontrado uma aceitação crescente em muitas aplicações, nomeadamente na indústria aeronáutica. No entanto, nesta indústria, as ligações rebitadas continuam a ter uma importância primordial e a merecer o interesse de investigação, principalmente no que respeita aos problemas associados com o envelhecimento das frotas comerciais.

Neste trabalho contribui-se para o estudo da integridade estrutural de juntas adesivas e rebitadas de sobreposição simples. Os estudos incidem sobre análises de tensões por meios numéricos e experimentais. A técnica de análise experimental de tensões baseada no efeito termoelástico é investigada. As juntas adesivas de sobreposição simples são modeladas com o método dos elementos finitos tridimensional. Um elemento finito de interface foi desenvolvido para modelar as interfaces substrato-adesivo. Esse elemento tem a possibilidade de modelar a iniciação e propagação de dano na interface.

O método dos elementos finitos, juntamente com o modelo *line spring*, são utilizados na modelação de fendas de penetração parcial que, tipicamente, aparecem nas juntas rebitadas. Os factores de intensidade de tensão ao longo da frente da fenda são comparados com resultados de análises numéricas tridimensionais.

SOMMAIRE

Les liaisons adhésives avec des objectives structuraux ont trouvée une acceptation croissante en plusieurs applications, nommément dans l'industrie aéronautique. Pourtant, dans cette industrie, les liaisons rivetées ont encore une importance primordial et sont thème de recherche, surtout dans ce qui concerne les problèmes associées avec le vieillissement des flottes commerciales.

Dans ce travail, on contribue pour l'étude de l'intégrité structural de liaisons adhésives et rivetées de recouvrement simple. Les études se rapportent à l'analyse de contraintes par moyens numériques et expérimentaux. La technique d'analyse expérimental de contraintes basée dans l'effet thermoélastique est étudiée. Les liaisons adhésives de recouvrement simple sont modélisées avec la méthode des éléments finis tridimensionales. Un élément fini d'interface a été développé pour modéliser les interfaces substrat-adhésif. Cet élément a la possibilité de modéliser l'initiation et la propagation de l'endommagement dans l'interface.

La méthode des éléments finis, avec la modèle *line spring*, sont utilisées dans la modélisation de fissures de pénétration partial qui apparaissent dans les liaisons rivetées. Les facteurs d'intensité de contrainte au long de l'extrémité de la fissure sont comparés avec des résultats d'analyses numériques tridimensionales.

ABSTRACT

Adhesive joints for structural purposes have been increasingly used in many applications, namely in the aeronautical industry. However, in this industry, riveted joints are still very important and a subject of research, mainly because of problems associated with the aging of commercial fleets.

In this work, we contribute to the study of the structural integrity of adhesive and riveted single lap joints. The studies focus on stress analyses by numerical and experimental means. The stress analysis technique based on the thermoelastic effect is investigated. Adhesive single lap joints are modeled with three-dimensional finite element methods. An interface finite element was developed to model adherend-adhesive interfaces. That element allows to model damage initiation and propagation in the interface.

The finite element method and the line spring model are used to model part-through cracks that typically appear in riveted joints. Stress intensity factors along the crack front are compared with results from three-dimensional numerical analyses.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1

1.	INTRODUÇÃO.....	1
1.1	Objectivos.....	2
1.2	Estrutura da dissertação.....	3
1.3	Contribuições originais.....	5
	Referências.....	6

CAPÍTULO 2

2.	TÉCNICA DE ANÁLISE EXPERIMENTAL DE TENSÕES BASEADA NO EFEITO TERMOELÁSTICO	7
2.1	Introdução.....	8
2.2	Revisão histórica	9
2.3	Teoria da termoelasticidade.....	10
2.3.1	Equações básicas da mecânica dos meios contínuos	10
2.3.2	Equação constitutiva	12
2.3.3	Equação termoelástica.....	12
2.4	Fundamentos da radiação.....	18
2.4.1	Relação entre radiação e termoelasticidade	20
2.5	Sistema SPATE.....	20
2.5.1	SPATE 9000.....	21
2.5.2	Modos de operação.....	23
2.5.3	Algumas características técnicas do SPATE 9000....	23
2.6	Processos de calibração do sistema SPATE.....	25
2.6.1	Calibração teórica.....	25
2.6.2	Calibração a partir de uma tensão calculada	26
2.6.3	Calibração a partir de uma tensão medida	26
2.7	Revisão bibliográfica.....	27
2.7.1	Aplicações em materiais isotrópicos.....	27
2.7.2	Aplicações em materiais anisotrópicos.....	30
2.7.3	Aplicações em mecânica da fractura.....	32
2.7.4	Medição de tensões residuais	33
2.7.5	Separação das tensões	35

2.8	Comparação com outras técnicas de análise experimental de tensões.....	37
	Referências.....	39

CAPÍTULO 3

3.	ENSAIOS EXPLORATÓRIOS E DE CALIBRAÇÃO DO SISTEMA SPATE	44
3.1	Introdução.....	45
3.2	Determinação de factores de calibração	46
3.3	Distribuição linear de tensões	49
3.4	Distribuição de tensões em placa com furo.....	51
3.5	Distribuição de tensões em juntas soldadas	58
3.6	Detecção de defeitos escondidos.....	66
3.6.1	Resultados experimentais.....	67
3.6.2	Análise pelo método dos elementos finitos.....	69
3.6.3	Discussão.....	72
3.7	Iniciação e propagação de fendas de fadiga	74
3.8	Conclusões.....	77
	Referências.....	79

CAPÍTULO 4

4.	JUNTAS ADESIVAS DE SOBREPOSIÇÃO SIMPLES: UMA REVISÃO	80
4.1	Introdução.....	81
4.1.1	Modelação matemática.....	83
4.2	Métodos analíticos.....	83
4.2.1	Análises lineares.....	85
4.2.1.1	Análise simplificada	85
4.2.1.2	Análise de Volkersen.....	86
4.2.1.3	Análise de Goland e Reissner	88
4.2.1.4	Outras análises	93
4.2.1.5	Tensões transversais	93
4.2.2	Análises não-lineares.....	95
4.2.2.1	Análises de Hart-Smith e Grant.....	95
4.2.2.2	Análise de Adams e Mallick	97
4.3	Método dos elementos finitos.....	97
4.3.1	Análises lineares.....	98

4.3.1.1	Elementos finitos especiais	100
4.3.2	Análises não-lineares.....	101
4.3.2.1	Elementos finitos especiais	103
4.4	Estudos experimentais	103
4.5	Considerações finais e modelo proposto	104
4.5.1	Características importantes das análises de elementos finitos	104
4.5.1.1	Análise tridimensional.....	105
4.5.1.2	Continuidade das tensões nas interfaces.....	105
4.5.2	Modelo de elementos finitos proposto	107
	Referências.....	108

CAPÍTULO 5

5.	ELEMENTO FINITO DE INTERFACE.....	112
5.1	Introdução.....	113
5.2	Características do elemento de interface	114
5.2.1	Formulação isoparamétrica.....	114
5.2.2	Utilização do método da função penalidade	115
5.2.3	Interligação com elementos tridimensionais paralelepípedicos de 27 nós	115
5.2.4	Espessura nula.....	116
5.2.5	Critério de propagação.....	116
5.2.6	Restrição de interpenetração ponto-ponto e ponto-superfície	117
5.3	Formulação do problema global	117
5.4	Formulação do elemento de interface	120
5.4.1	Restrição ponto-ponto	120
5.4.2	Restrição ponto-superfície.....	125
5.4.3	Matriz de rigidez.....	127
5.5	Implementação do elemento de interface.....	128
5.5.1	Utilização do programa ABAQUS	128
5.5.2	Escolha dos parâmetros de rigidez	129
5.5.2.1	Exemplo	129
5.6	Métodos de integração e comportamento do elemento	131
5.6.1	Integração numérica.....	131
5.6.2	Comparação entre métodos de integração	132

5.6.2.1	Análise linear-elástica de viga com entalhe	133
5.6.2.2	Análise linear-elástica de viga com reforço	136
5.6.3	Análise de valores próprios da matriz de rigidez do elemento	138
5.6.4	Verificação complementar	139
5.6.4.1	Análise linear-elástica de viga com duplo entalhe.....	140
5.6.4.2	Análise linear-elástica de base com reforço.....	141
5.6.5	Método de integração seleccionado.....	143
	Referências.....	144

CAPÍTULO 6

6.	INICIAÇÃO E PROPAGAÇÃO DE DANO	147
6.1	Introdução.....	148
6.2	Modelo baseado na resistência dos materiais.....	149
6.3	Modelo baseado na utilização conjunta da resistência dos materiais e da mecânica da fractura.....	150
6.3.1	Modo puro: I, II ou III.....	150
6.3.2	Modo misto	152
6.3.2.1	Sem relação entre modos	152
6.3.2.2	Com relação entre modos.....	153
6.4	Exemplos.....	155
6.4.1	Viga encastrada	155
6.4.2	Teste <i>Double Cantilever Beam</i> (DCB)	157
6.4.2.1	Soluções analíticas.....	158
6.4.2.2	Resultados.....	159
6.4.3	Teste <i>End Notched Flexure</i> (ENF)	160
6.4.3.1	Soluções analíticas.....	161
6.4.3.2	Resultados.....	161
6.4.4	Teste <i>Mixed Mode Bending</i> (MMB)	162
6.4.4.1	Soluções analíticas.....	163
6.4.4.2	Resultados.....	165
6.4.5	Discussão dos resultados e conclusão	166
	Referências.....	167

CAPÍTULO 7

7.	ESTUDO DE JUNTA ADESIVA DE SOBREPOSIÇÃO SIMPLES	168
7.1	Introdução.....	169
7.2	Materiais.....	170
7.2.1	Substratos	170
7.2.2	Adesivo.....	171
7.3	Provetes	173
7.3.1	Geometria	173
7.3.2	Preparação dos provetes.....	174
7.4	Modelo de elementos finitos - análise bidimensional.....	174
7.5	Modelo de elementos finitos - análise tridimensional	179
7.5.1	Materiais elásticos	180
7.5.2	Substratos elasto-plásticos	189
7.5.3	Adesivo elasto-plástico	195
7.5.4	Materiais elasto-plásticos	200
7.6	Análise de tensões com o SPATE.....	203
7.7	Iniciação e propagação de dano.....	206
7.8	Conclusões.....	210
	Referências.....	213

CAPÍTULO 8

8.	JUNTAS REBITADAS DE SOBREPOSIÇÃO SIMPLES EM ESTRUTURAS DE AERONAVES	215
8.1	Introdução.....	216
8.2	Carregamento e distribuição de tensões numa fatia de uma junta rebitada longitudinal da fuselagem.....	218
8.2.1	Carregamento exterior	218
8.2.2	Distribuição de tensões	219
8.3	Iniciação de fendas de fadiga.....	224
8.3.1	Localização da iniciação	225
8.3.2	Vida da iniciação.....	225
8.3.3	Distribuição das fendas na iniciação.....	227
8.3.4	Detecção da iniciação.....	227
8.4	Propagação de fendas de fadiga	228
8.5	Resistência residual	233
	Referências.....	235

CAPÍTULO 9

9.	UTILIZAÇÃO DO MODELO <i>LINE SPRING</i> NO ESTUDO DE FENDAS DE PENETRAÇÃO PARCIAL.....	237
9.1	Introdução.....	238
9.2	O modelo <i>line spring</i>	239
9.3	Implementação no programa de elementos finitos ABAQUS.....	242
9.4	Casos estudados.....	244
9.4.1	Fenda superficial semi-elíptica.....	245
9.4.2	Fenda de canto quarto-de-círculo em furo.....	253
9.4.3	Cenário simples de <i>Multiple Site Damage</i> (MSD)..<	259
9.4.4	Conclusões.....	271
	Referências.....	273

CAPÍTULO 10

10.	CONCLUSÕES E PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS	277
10.1	Conclusões.....	278
10.2	Perspectivas de trabalhos futuros.....	281

ANEXOS

A.	MÉTODO DE NEWTON GLOBALMENTE CONVERGENTE	284
B.	MODELO DE MODO MISTO TRIDIMENSIONAL.....	289
C.	MODELOS ANALÍTICOS PARA PROBLEMAS DCB, ENF E MMB	294

CAPÍTULO 1

1. INTRODUÇÃO

1.1 Objectivos

1.2 Estrutura da dissertação

1.3 Contribuições originais

Referências

CAPÍTULO 1

1. INTRODUÇÃO

1.1 Objectivos

A utilização de adesivos em ligações estruturais tem sofrido um aumento significativo nos últimos anos. As ligações adesivas entre metais são frequentes nas indústrias aeronáutica e aeroespacial, de defesa, automóvel, de mobiliário de escritório, e outras. O incremento deste tipo de ligação está directamente associado ao desenvolvimento de adesivos cada vez mais fiáveis e com melhores propriedades de durabilidade. A confiança neste tipo de ligações permitiu que, por exemplo, a indústria aeronáutica tenha aumentado a utilização de ligações adesivas em estruturas primárias (estruturas cuja falha implica graves consequências).

Apesar do número crescente de aplicações das ligações adesivas, a rebitagem continua a ser a principal forma de ligação estrutural em aeronaves civis. Os estudos sobre este tipo de ligação mecânica continuam a ter grande actualidade, nomeadamente relativamente aos problemas associados ao envelhecimento da grande maioria das frotas de aeronaves comerciais. Razões económicas exigem que estas sejam utilizadas para além da vida útil para que foram projectadas, o que requer investigação ao nível das estruturas e, consequentemente, das ligações rebitadas.

Uma das geometrias mais comuns em ligações adesivas e rebitadas são as juntas de sobreposição simples. Apesar da semelhança em termos de geometria, o processo de transferência de carga entre duas chapas coladas ou rebitadas é significativamente diferente. A distribuição de tensões nas juntas adesivas de sobreposição simples é mais uniforme e a carga transfere-se de forma mais suave. A este tipo de ligação está normalmente associado um bom comportamento à fadiga. Nas juntas rebitadas de sobreposição simples, a carga transfere-se fundamentalmente através dos rebites, ou

seja, de uma forma mais localizada, dando origem a elevadas concentrações de tensões.

O objectivo do trabalho apresentado nesta dissertação é o de contribuir para o estudo da integridade estrutural de juntas adesivas e rebitadas de sobreposição simples. O trabalho dedica especial atenção à análise de tensões por meios numéricos e experimentais. Os estudos numéricos relacionam-se com a utilização do método dos elementos finitos na análise desse tipo de juntas. A abordagem experimental incide sobre a técnica recente de análise experimental de tensões baseada no efeito termoelástico. O objectivo dos estudos relativamente a esta técnica é o de compreender as suas vantagens e limitações e ainda os possíveis campos de aplicação, nomeadamente no que se relaciona com as juntas adesivas e rebitadas.

1.2 Estrutura da dissertação

Esta dissertação divide-se em três partes fundamentais. Na primeira (capítulos 2 e 3) faz-se uma introdução à técnica de análise experimental de tensões baseada no efeito termoelástico e apresentam-se resultados de ensaios exploratórios e de calibração. Na segunda parte (capítulos 4 a 7) trata-se o problema da análise de tensões em juntas adesivas de sobreposição simples. A última parte (capítulos 8 e 9) refere-se ao estudo relativo a juntas rebitadas de sobreposição simples em que se dá especial atenção ao aparecimento de fendas de penetração parcial. O conteúdo de cada capítulo é brevemente apresentado de seguida.

No presente capítulo apresentam-se os principais objectivos do trabalho desenvolvido, esquematiza-se a organização desta dissertação e referem-se as contribuições originais incluídas.

No capítulo 2 faz-se uma introdução à técnica de análise experimental de tensões baseada no efeito termoelástico. O capítulo inicia-se com o enquadramento histórico relativo ao aparecimento e evolução desta técnica. Segue-se uma revisão dos seus fundamentos e a apresentação de um equipamento de análise experimental de tensões baseado no efeito termoelástico, comercialmente disponível e denominado SPATE (*Stress Pattern Analysis by Thermal Emission*). Por último, apresenta-se uma breve referência a trabalhos publicados relativos à aplicação desta técnica em várias situações, e faz-se uma comparação com outras técnicas de análise experimental de tensões.

No capítulo 3 apresentam-se resultados de ensaios com o sistema SPATE. Os vários exemplos tratados pretendem mostrar a aplicabilidade da técnica em situações diversas e com diferentes complexidades. Para além de análises de tensões em vários componentes, o SPATE é utilizado na detecção de defeitos escondidos em chapas e na monitorização da iniciação e propagação de fendas de fadiga.

No capítulo 4 faz-se uma revisão da literatura sobre juntas adesivas de sobreposição simples. Este capítulo versa essencialmente a modelação matemática deste tipo de juntas, embora inclua uma breve referência a estudos experimentais de análise de tensões. Na parte final do capítulo apresenta-se uma proposta para a modelação deste tipo de juntas com o método dos elementos finitos.

No capítulo 5 apresenta-se um elemento finito de interface desenvolvido com o objectivo de modelar as interfaces substrato-adesivo das juntas adesivas. Inicia-se o capítulo com uma descrição das principais características do elemento. De seguida, apresenta-se a formulação global de um problema estrutural com contacto entre dois corpos e a formulação do elemento de interface. Segue-se uma breve descrição da implementação do elemento. Finalmente, discute-se a integração numérica e faz-se uma avaliação do comportamento do elemento.

No capítulo 6 discute-se a possibilidade de modelação da iniciação e propagação de dano nos elementos de interface. Os critérios implementados no elemento de interface são apresentados. Finaliza-se o capítulo com alguns exemplos onde se faz a aplicação desses critérios.

No capítulo 7 estuda-se a distribuição de tensões numa junta adesiva de sobreposição simples com recurso às técnicas numéricas desenvolvidas e ao sistema de análise experimental de tensões baseado no efeito termoelástico (SPATE). Inicia-se o capítulo com a caracterização dos materiais e provetes utilizados. Segue-se a modelação da junta considerada pelo método dos elementos finitos através de um modelo bidimensional e de um modelo tridimensional. De seguida, apresentam-se os resultados de análise de tensões com o SPATE. O capítulo termina com um breve estudo do comportamento de juntas de sobreposição simples traccionadas até à rotura.

No capítulo 8 discutem-se os problemas associados às juntas rebitadas em estruturas de aeronaves utilizadas para além da vida útil para que foram projectadas. Em particular, discutem-se os tipos de carregamentos a que estas ligações estão sujeitas, a iniciação e propagação de fendas de fadiga e a redução da resistência residual da estrutura devido ao aparecimento simultâneo de várias fendas de fadiga.

O capítulo 9 contém o estudo de fendas de penetração parcial que tipicamente ocorrem em juntas rebitadas. Neste capítulo faz-se uma apresentação do modelo *line spring* e da sua implementação no programa de elementos finitos ABAQUS. A aplicação deste modelo ao estudo de fendas de penetração parcial é ilustrada com alguns exemplos.

No capítulo 10 apresentam-se as principais conclusões deste trabalho e propõem-se desenvolvimentos para trabalhos futuros.

1.3 Contribuições originais

O trabalho apresentado nesta dissertação contém o seguinte conjunto de contribuições originais:

- Análises da aplicabilidade do sistema SPATE a diversas situações de interesse. Destacam-se os estudos relacionados com a detecção de defeitos escondidos, relevantes para uma possível aplicação prática na detecção de fendas superficiais em juntas rebitadas de sobreposição simples, e as análises de tensões em juntas adesivas de sobreposição simples.
- Desenvolvimento e implementação de um elemento finito de interface para problemas tridimensionais com a possibilidade de modelar a iniciação e propagação de dano mediante a utilização de um critério de propagação. Implementação de um critério baseado na utilização conjunta da resistência dos materiais e da mecânica da fractura.
- Utilização de um modelo de elementos finitos tridimensional no estudo de uma junta adesiva de sobreposição simples. Inclusão de elementos finitos de interface para modelar o comportamento das interfaces substrato-adesivo.
- Estudo do comportamento até à rotura de juntas adesivas de sobreposição simples com o modelo de elementos finitos tridimensional, e considerando a propagação de dano nos elementos de interface.
- Aplicação do modelo *line spring* ao estudo de fendas de penetração parcial que normalmente têm origem junto aos furos dos rebites em juntas rebitadas de sobreposição simples.

Algumas das contribuições atrás descritas foram já objecto de publicação em revistas e congressos internacionais [1-6].

Referências

1. Gonçalves, J.P.M., Oliveira, F.M.F., Fernandes, A.A., e de Castro, P.M.S.T., "A calibration of the stress state measurement technique using the thermoelastic effect", em: *Recent Advances in Experimental Mechanics*, J.F.S. Gomes. *et al.*, eds., A.A. Balkema, Rotterdam, pp. 455-460, 1994.
2. Gonçalves, J.P.M., Oliveira, F.M.F., de Castro, P.M.S.T., e Fernandes, A.A., "Application of the thermoelastic effect to the stress analysis of structural adhesive connections", em: *Proceedings of the 1995 Design Engineering Technical Conferences*, O.M. Jadaan, *et al.*, eds., American Society of Mechanical Engineers, New York, pp. 277-281, 1995.
3. de Moura, M.F.S.F., Gonçalves, J.P.M., Marques, A.T., e de Castro, P.M.S.T., "Elemento finito isoparamétrico de interface para problemas tridimensionais", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. 12, pp. 447-466, 1996.
4. Gonçalves, J.P.M. e de Castro, P.M.S.T., "Application of the line spring model to some complex geometries, and comparison with three-dimensional results", *The International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 76, pp. 551-560, 1999.
5. Silva, L.F.M., Gonçalves, J.P.M., Oliveira, F.M.F., e de Castro, P.M.S.T., "Applicability of the SPATE technique to the detection of hidden cracks", *NDT&E International*, Vol. 33, pp. 7-13, 2000.
6. Gonçalves, J.P.M., de Moura, M.F.S.F., de Castro, P.M.S.T., e Marques, A.T., "Interface element including point-to-surface constraints for three-dimensional problems with damage propagation", *Engineering Computations*, Vol. 17, pp. 28-47, 2000.

CAPÍTULO 2

2. TÉCNICA DE ANÁLISE EXPERIMENTAL DE TENSÕES BASEADA NO EFEITO TERMOELÁSTICO

2.1 Introdução

2.2 Revisão histórica

2.3 Teoria da termoelasticidade

2.3.1 Equações básicas da mecânica dos meios contínuos

2.3.2 Equação constitutiva

2.3.3 Equação termoelástica

2.4 Fundamentos da radiação

2.4.1 Relação entre radiação e termoelasticidade

2.5 Sistema SPATE

2.5.1 SPATE 9000

2.5.2 Modos de operação

2.5.3 Algumas características técnicas do SPATE 9000

2.6 Processos de calibração do sistema SPATE

2.6.1 Calibração teórica

2.6.2 Calibração a partir de uma tensão calculada

2.6.3 Calibração a partir de uma tensão medida

2.7 Revisão bibliográfica

2.7.1 Aplicações em materiais isotrópicos

2.7.2 Aplicações em materiais anisotrópicos

2.7.3 Aplicações em mecânica da fractura

2.7.4 Medição de tensões residuais

2.7.5 Separação das tensões

2.8 Comparação com outras técnicas de análise experimental de tensões

Referências

CAPÍTULO 2

2. TÉCNICA DE ANÁLISE EXPERIMENTAL DE TENSÕES BASEADA NO EFEITO TERMOELÁSTICO

2.1 Introdução

A concepção de estruturas modernas resulta, cada vez mais, do objectivo de redução de custos, aliado a uma fiabilidade crescente e a uma optimização do uso dos materiais. Para tal, o conhecimento do estado de tensão nas fases de projecto e avaliação do comportamento de estruturas revela-se fundamental.

As técnicas de análise experimental de tensões permitem determinar o estado de tensão em sólidos. Estas técnicas são utilizadas na optimização de protótipos, na monitorização do comportamento de estruturas em serviço, na validação de modelos analíticos e numéricos e ainda na construção de soluções híbridas.

Várias metodologias experimentais estão hoje disponíveis sendo assim possível seleccionar a que melhor se adequa a cada situação. A análise experimental de tensões baseada no efeito termoelástico é relativamente recente tendo conhecido uma utilização crescente nos últimos dez anos. Este método apresenta como principais características a possibilidade de determinação global de tensões na superfície de um sólido sem contacto. Estas características, associadas à possibilidade de utilização em ambiente industrial, fazem com que esta técnica seja particularmente interessante para o estudo de componentes ou estruturas em serviço. Uma possível limitação é a necessidade de sujeitar o corpo em estudo a um carregamento cíclico.

2.2 Revisão histórica

O efeito termoelástico é conhecido desde o século passado. A primeira referência a esse fenómeno, devida a Gough [1], data de 1805. Em 1830, Weber [2] apresentou resultados de experiências com arames sujeitos a vibrações que evidenciavam esse fenómeno. Em 1853, Lord Kelvin [3] publicou um tratamento teórico aplicável a materiais homogêneos e isotrópicos. A sua teoria previa, em condições adiabáticas, uma relação linear entre a variação da soma das tensões principais e a variação de temperatura em qualquer ponto de um corpo. Esta teoria viria a ser posteriormente demonstrada experimentalmente, nomeadamente por Compton e Webster [4] em 1915 e por Rocca e Bever [5] em 1950. Todos esses trabalhos basearam-se em medições de temperatura com instrumentação de contacto de alta sensibilidade.

Os progressos da tecnologia dos infravermelhos permitiram a Belgen [6], em 1967, conduzir as primeiras medições sem contacto do efeito termoelástico. Nessas experiências, foi utilizado um detector de infravermelhos de leitura pontual e foram medidas as pequenas variações de temperatura num ponto de um sólido sujeito a um carregamento cíclico de amplitude constante. Belgen [7] também investigou a influência, devido a transferência de calor, da frequência de aplicação do carregamento, da geometria do provete e da distribuição de tensões na atenuação do efeito termoelástico.

Cerca de dez anos mais tarde, os avanços das técnicas optoelectricas e de processamento de sinal permitiram o desenvolvimento e construção de sistemas de detecção de infravermelhos com sensibilidade e resolução suficientes para a determinação quantitativa de tensões em componentes e estruturas. Em 1978, Mountain e Webber [8] publicaram os primeiros resultados baseados num sistema de leitura bidimensional, desenvolvido pela SIRA Ltd., Inglaterra, denominado SPATE (*Stress Pattern Analysis by Thermal Emission*). O sistema é actualmente produzido e comercializado pela firma inglesa OMETRON Ltd. e é reconhecido como uma técnica alternativa para análise experimental de tensões. Embora se trate do nome de um equipamento comercial, SPATE é correntemente utilizado para designar a técnica de análise experimental de tensões baseada no efeito termoelástico.

Mais recentemente, a empresa Stress Photonics Inc. iniciou a comercialização de um sistema de análise experimental de tensões baseado no efeito termoelástico com características muito melhoradas relativamente ao SPATE. Esse sistema, denominado DeltaTherm 1000, é constituído por uma matriz de 128 x 128 detectores. Isso permite reduzir o tempo de leitura do estado de tensão numa área de três ordens de magnitude.

O tamanho, o peso e a complexidade do sistema é também reduzido quando comparado com o sistema SPATE.

2.3 Teoria da termoelasticidade

A teoria da termoelasticidade relaciona a deformação de um material elástico com a variação da sua temperatura. Tal relação pode ser estabelecida a partir das leis da Termodinâmica. Embora a deformação de um sólido perfeitamente elástico seja um processo reversível, o fenómeno termoelástico deve ser estudado com base na termodinâmica dos processos irreversíveis. Isto porque a condução de calor, devida a um gradiente de temperatura, é um fenómeno irreversível.

A formulação relativa à teoria da termoelasticidade está publicada na literatura, embora não seja comum encontrar-se de forma sistematizada. Ela é aqui apresentada para permitir compreender-se a origem da equação que interessa ao utilizador do sistema SPATE, e que relaciona a variação da soma das tensões principais com a variação de temperatura num ponto de um corpo.

2.3.1 Equações básicas da mecânica dos meios contínuos

A mecânica dos meios contínuos é governada por três leis conservativas: leis da conservação da massa, do momento linear e da energia.

a) Lei da conservação da massa

Consideremos um sistema cartesiano de coordenadas. Sejam (x, y, z) as coordenadas de um dado ponto nesse referencial e (v_x, v_y, v_z) o vector velocidade $\mathbf{v}$. Sendo ρ a função densidade do meio contínuo, a lei da conservação da massa vem

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial i} = 0 \quad (2.1)$$

em que $i = x, y, z$.

b) Lei da conservação do momento linear

Sejam σ_{ij} as componentes do tensor das tensões e F_i as componentes da força de volume por unidade de massa. A equação que traduz a conservação do momento linear pode ser escrita na seguinte forma

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = \rho F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial j} \quad (2.2)$$

c) Lei da conservação da energia

Sejam Q_v a taxa de geração interna de calor por unidade de volume, $\mathbf{q}$ o vector fluxo de calor que atravessa a superfície do corpo, cuja normal com o sentido do exterior da superfície é $\mathbf{n}$, e U a energia interna por unidade de volume. A equação da conservação da energia é dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(U + \frac{1}{2} \rho v_i^2 \right) = \rho F_i v_i + \frac{\partial}{\partial j} (v_i \sigma_{ij}) - \frac{\partial q_i}{\partial i} + Q_v \quad (2.3)$$

Calculando o produto escalar de ambos os membros da equação (2.2) com o vector velocidade $\mathbf{v}$, obtém-se

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} v_i v_i \right) = \rho F_i v_i + v_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial j} \quad (2.4)$$

Substituindo a última expressão em (2.3) vem

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \rho F_i v_i + v_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial j} = \rho F_i v_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial j} v_i + \frac{\partial v_i}{\partial j} \sigma_{ij} - \frac{\partial q_i}{\partial i} + Q_v \quad (2.5)$$

que após simplificação fica

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial j} - \frac{\partial q_i}{\partial i} + Q_v \quad (2.6)$$

Devido à simetria do tensor das tensões, pode-se deduzir

$$\sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial j} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \left(\frac{\partial v_i}{\partial j} + \frac{\partial v_j}{\partial i} \right) \quad (2.7)$$

Considerando que existe linearidade geométrica, isto é, que o corpo está sujeito a pequenas deformações, podemos escrever [9]

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i} \right) \quad (2.8)$$

e

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial j} + \frac{\partial v_j}{\partial i} \right) \quad (2.9)$$

A equação (2.7) fica então

$$\sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial j} = \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} \quad (2.10)$$

e substituindo esta última equação em (2.6) vem

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} - \frac{\partial q_i}{\partial i} + Q_v \quad (2.11)$$

2.3.2 Equação constitutiva

Na mecânica dos sólidos é necessário uma equação adicional que relaciona tensão, deformação e variação de temperatura. Essa relação é descrita pela equação de Duhamel-Neumann que tem a seguinte forma [10]

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \alpha_{kl} \Delta T) \quad (2.12)$$

em que C_{ijkl} e α_{kl} são as componentes dos tensores das constantes elásticas e dos coeficientes de expansão térmica, respectivamente.

2.3.3 Equação termoelástica

Sejam S a entropia específica (por unidade de volume), T a temperatura absoluta e Q_v a quantidade de calor transferido por unidade de volume. A segunda lei da

termodinâmica é expressa por [11]

$$dS \geq \frac{\delta Q_v}{T} \quad (2.13)$$

Esta lei é baseada na generalização de observações experimentais e traduz a impossibilidade de converter calor em trabalho utilizando uma fonte de calor a temperatura constante.

O balanço de entropia de um determinado corpo pode ser escrito na seguinte forma

$$\int_V \dot{S} dV = - \int_A \frac{q_i n_i}{T} dA + \int_V \psi dV \quad (2.14)$$

em que,

q_i - componentes do vector fluxo de calor,

n_i - componentes do vector normal à superfície do corpo,

ψ - fonte de entropia (em processos irreversíveis $\psi > 0$).

Aplicando o teorema da divergência a (2.14) obtém-se

$$\dot{S} = \psi - \frac{1}{T} \frac{\partial q_i}{\partial i} + \frac{q_i}{T^2} \frac{\partial T}{\partial i} \quad (2.15)$$

A energia livre de Helmholtz é definida por [12]

$$A = U - TS \quad (2.16)$$

Derivando em ordem ao tempo obtém-se

$$\dot{A} = \dot{U} - T\dot{S} - S\dot{T} \quad (2.17)$$

Substituindo (2.11) e (2.15) na equação anterior vem

$$\dot{A} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - S\dot{T} - T \left(\psi + \frac{q_i}{T^2} \frac{\partial T}{\partial i} - \frac{Q_v}{T} \right) \quad (2.18)$$

Como se deduz de (2.12), para um corpo com comportamento elástico apenas duas variáveis de estado σ_{ij} , ϵ_{ij} e T são independentes. Considerando ϵ_{ij} e T as variáveis independentes e sendo A uma função de estado, podemos escrever

$$A = A(\epsilon_{ij}, T) \quad (2.19)$$

Assim

$$\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial \epsilon_{ij}} \dot{\epsilon}_{ij} + \frac{\partial A}{\partial T} \dot{T} \quad (2.20)$$

Comparando (2.18) com (2.20) conclui-se que

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial A}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (2.21)$$

$$S = -\frac{\partial A}{\partial T} \quad (2.22)$$

$$\psi + \frac{q_i}{T^2} \frac{\partial T}{\partial i} - \frac{Q_v}{T} = 0 \quad (2.23)$$

A entropia é também uma função de estado

$$S = S(\epsilon_{ij}, T) \quad (2.24)$$

Da mesma forma resulta

$$\dot{S} = \frac{\partial S}{\partial \epsilon_{ij}} \dot{\epsilon}_{ij} + \frac{\partial S}{\partial T} \dot{T} \quad (2.25)$$

Introduzindo (2.22) vem

$$\dot{S} = -\frac{\partial^2 A}{\partial \epsilon_{ij} \partial T} \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} \dot{T} \quad (2.26)$$

Derivando (2.21) em ordem à temperatura resulta

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} = \frac{\partial^2 A}{\partial \epsilon_{ij} \partial T} \quad (2.27)$$

Substituindo em (2.26)

$$\dot{S} = -\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} \dot{T} \quad (2.28)$$

Substituindo (2.23) em (2.15) resulta

$$\dot{S} = \frac{Q_v}{T} - \frac{1}{T} \frac{\partial q_i}{\partial i} \quad (2.29)$$

Substituindo em (2.28) vem

$$-\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} \dot{T} = \frac{Q_v}{T} - \frac{1}{T} \frac{\partial q_i}{\partial i} \quad (2.30)$$

ou

$$\frac{\partial q_i}{\partial i} = Q_v + T \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} \dot{\epsilon}_{ij} + \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} \dot{T} \right) \quad (2.31)$$

O calor específico a deformação constante é definido por [13]

$$C_\epsilon = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_\epsilon \quad (2.32)$$

Introduzindo (2.22) resulta

$$C_\epsilon = -T \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} \quad (2.33)$$

e substituindo em (2.31) vem

$$\frac{\partial q_i}{\partial i} = Q_v + T \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} \dot{\epsilon}_{ij} - C_\epsilon \dot{T} \quad (2.34)$$

Derivando a equação constitutiva (2.12) em ordem a T, obtém-se

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} = \frac{\partial C_{ijkl}}{\partial T} (\epsilon_{kl} - \alpha_{kl} \Delta T) - C_{ijkl} \left(\alpha_{kl} + \Delta T \frac{\partial \alpha_{kl}}{\partial T} \right) \quad (2.35)$$

Substituindo em (2.34) vem

$$\frac{\partial q_i}{\partial i} = Q_v + T \dot{\epsilon}_{ij} \left[\frac{\partial C_{ijkl}}{\partial T} (\epsilon_{kl} - \alpha_{kl} \Delta T) - C_{ijkl} \left(\alpha_{kl} + \Delta T \frac{\partial \alpha_{kl}}{\partial T} \right) \right] - C_\epsilon \dot{T} \quad (2.36)$$

Considerando que não há fonte de calor ($Q_v=0$) e que existem condições adiabáticas $\left(\frac{\partial q_i}{\partial i} = 0 \right)$, a expressão anterior vem

$$C_\epsilon \dot{T} = T \dot{\epsilon}_{ij} \left[\frac{\partial C_{ijkl}}{\partial T} (\epsilon_{kl} - \alpha_{kl} \Delta T) - C_{ijkl} \left(\alpha_{kl} + \Delta T \frac{\partial \alpha_{kl}}{\partial T} \right) \right] \quad (2.37)$$

Esta equação traduz o efeito termoelástico para condições adiabáticas em termos das componentes da deformação.

Rescrevendo a equação constitutiva (2.12) na seguinte forma

$$\epsilon_{ij} = C'_{ijkl} \sigma_{kl} + \alpha_{ij} \Delta T \quad (2.38)$$

em que $C'_{ijkl} = 1/C_{ijkl}$, e introduzindo na equação (2.37) obtém-se

$$\begin{aligned} (C_\epsilon + \alpha_{ij} C_{ijkl} \alpha_{kl} T) \frac{\dot{T}}{T} &= (\dot{C}'_{ijmn} \sigma_{mn} + C'_{ijmn} \dot{\sigma}_{mn} + \dot{\alpha}_{ij} \Delta T + \alpha_{ij} \Delta \dot{T}) \times \\ &\left(\frac{\partial C_{ijkl}}{\partial T} C'_{klrs} \sigma_{rs} - C_{ijkl} \Delta T \frac{\partial \alpha_{kl}}{\partial T} \right) - (\dot{C}'_{ijmn} C_{ijkl} \sigma_{mn} \alpha_{kl} + \dot{\sigma}_{ij} \alpha_{ij} + \dot{\alpha}_{ij} C_{ijkl} \alpha_{kl} \Delta T) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Considerando a relação entre os calores específicos a tensão e deformação constantes

$$C_\sigma - C_\epsilon = C_{ijkl} \alpha_{ij} \alpha_{kl} T \quad (2.40)$$

e substituindo em (2.39) resulta

$$\begin{aligned} C_\sigma \frac{\dot{T}}{T} &= (\dot{C}'_{ijmn} \sigma_{mn} + C'_{ijmn} \dot{\sigma}_{mn} + \dot{\alpha}_{ij} \Delta T + \alpha_{ij} \Delta \dot{T}) \times \\ &\left(\frac{\partial C_{ijkl}}{\partial T} C'_{klrs} \sigma_{rs} - C_{ijkl} \Delta T \frac{\partial \alpha_{kl}}{\partial T} \right) - (\dot{C}'_{ijmn} C_{ijkl} \sigma_{mn} \alpha_{kl} + \dot{\sigma}_{ij} \alpha_{ij} + \dot{\alpha}_{ij} C_{ijkl} \alpha_{kl} \Delta T) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Esta equação, escrita em função das componentes da tensão, é equivalente a (2.37).

Se considerarmos os tensores das constantes elásticas e dos coeficientes de expansão térmica independentes da temperatura e do tempo, a equação anterior vem

$$C_\sigma \frac{\dot{T}}{T} = -\alpha_{ij} \dot{\sigma}_{ij} \quad (2.42)$$

No caso de materiais isotrópicos o tensor dos coeficientes de expansão térmica escreve-se na seguinte forma [14]

$$\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij} \quad (2.43)$$

Como a escolha do sistema de coordenadas é arbitrário, a equação (2.42) pode ser representada em termos das tensões principais. Assim, para uma variação infinitesimal de tempo, pode-se reescrever aquela equação na seguinte forma

$$C_\sigma \frac{\Delta T}{T} = -\alpha (\Delta \sigma_1 + \Delta \sigma_2 + \Delta \sigma_3) \quad (2.44)$$

Considerando o calor específico por unidade de massa, c_σ

$$C_\sigma = \rho c_\sigma \quad (2.45)$$

podemos reescrever (2.44) como

$$\Delta T = -\frac{\alpha}{\rho c_\sigma} T (\Delta \sigma_1 + \Delta \sigma_2 + \Delta \sigma_3) \quad (2.46)$$

ou,

$$\Delta T = -K_m T \Delta (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (2.47)$$

em que,

K_m - constante termoelástica, $K_m = \alpha / \rho c_\sigma$.

De notar que $\Delta (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ representa a variação do primeiro invariante das tensões.

2.4 Fundamentos da radiação

O sistema SPATE baseia o seu funcionamento na detecção da variação da radiação emitida pela superfície de um corpo, sujeito a uma variação de tensão e consequentemente a uma variação de temperatura.

Todas as substâncias (sólidos, líquidos ou gases) a temperatura superior ao zero absoluto, emitem energia sob a forma de radiação térmica. A figura 2.1 ilustra a localização da radiação térmica no espectro da radiação electromagnética.

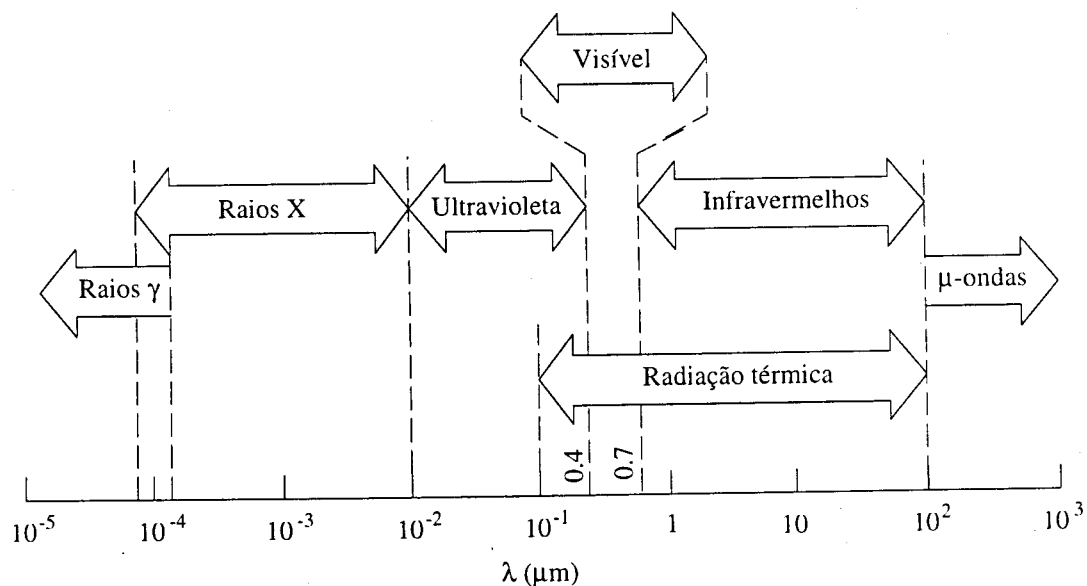


Figura 2.1 Espectro da radiação electromagnética [15].

A radiação térmica pode ser considerada como um fenómeno superficial. Devido à temperatura, as moléculas libertam energia que na maior parte dos materiais é absorvida pelas moléculas adjacentes. Assim, a radiação é emitida pelas moléculas que se encontram a aproximadamente $1 \mu\text{m}$ da superfície do corpo.

A expressão seguinte, deduzida por Plank, relaciona a radiação emitida por um corpo negro com a temperatura e o comprimento de onda [16]

$$W_{\lambda} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \left(\frac{1}{e^{(hc/\lambda KT)} - 1} \right) \quad (2.48)$$

em que,

W_{λ} - radiação espectral ou poder emissivo espectral (W/m^3)

c - velocidade da luz: $c = 2,9979 \times 10^8 \text{ m/s}$

K - constante de Boltzmann: $K = 1,38054 \times 10^{-23} \text{ J/K}$

h - constante de Planck: $h = 6,6256 \times 10^{-34} \text{ Js}$

λ - comprimento de onda (m)

T - temperatura (K)

Na figura 2.2 está representada a função anterior para diferentes temperaturas. Verifica-se claramente que, para um determinado comprimento de onda, a radiação emitida aumenta com a temperatura. Também se verifica que o pico da intensidade de radiação, à temperatura ambiente, ocorre aproximadamente para o comprimento de onda de $10 \mu\text{m}$. Para temperaturas mais elevadas, esse pico desloca-se para a esquerda, isto é, para menores comprimentos de onda. De notar ainda que a temperaturas inferiores a 800 K ($526,85^\circ\text{C}$) a emissão ocorre totalmente na região infravermelha.

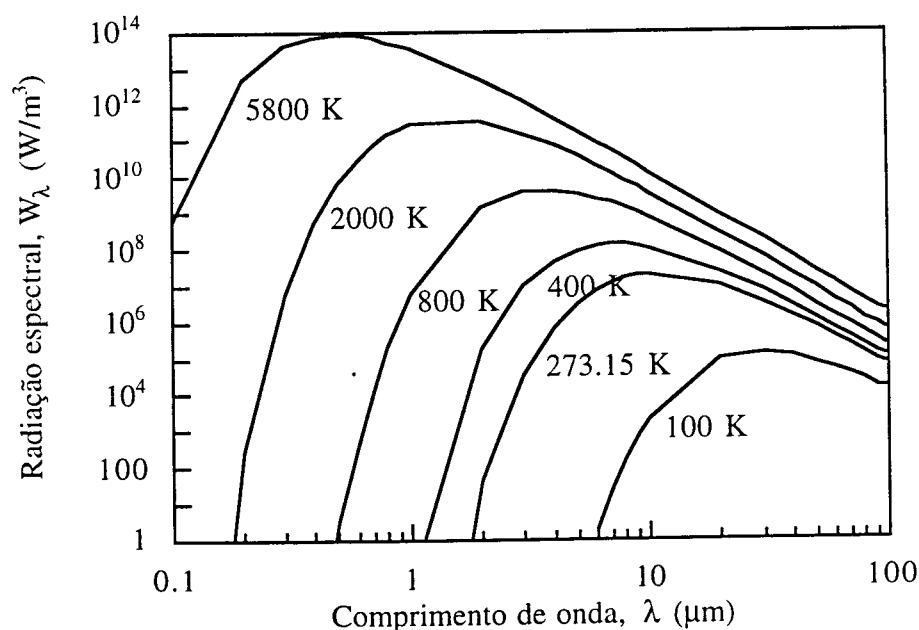


Figura 2.2 Radiação espectral emitida por um corpo negro [16].

O poder emissivo total, Φ , é definido como a taxa de radiação emitida por unidade de área, considerando todos os comprimentos de onda e todas as direcções. Assim, podemos escrever [15]

$$\Phi = \int_0^{\infty} W_{\lambda} d\lambda \quad (2.49)$$

Substituindo (2.48) na expressão anterior vem

$$\Phi = \int_0^{\infty} \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \left(\frac{1}{e^{(hc/\lambda KT)} - 1} \right) d\lambda \quad (2.50)$$

A resolução deste integral resulta na lei de Stefan-Boltzmann

$$\Phi = BT^4 \quad (2.51)$$

em que $B=5,6697 \times 10^{-8} \text{ W/(m}^2\text{K}^4)$ é a constante de Stefan-Boltzmann.

Para um corpo que não seja um corpo negro, isto é, com emissividade diferente de 1, a lei de Stefan-Boltzmann vem

$$\Phi = eBT^4 \quad (2.52)$$

em que (e) é a emissividade da superfície.

2.4.1 Relação entre radiação e termoelasticidade

Para uma variação de temperatura ΔT , a variação de radiação emitida é dada por [17]

$$\Delta\Phi = 4eBT^3\Delta T \quad (2.53)$$

Introduzindo a expressão (2.47) na equação anterior resulta

$$\Delta\Phi = -4eBK_m T^4 (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (2.54)$$

Se a variação de fluxo for detectada por um sistema linear, o sinal produzido será proporcional à variação da soma das tensões principais. Nessa situação, a constante que relaciona a variação da soma das tensões principais com o sinal do detector é chamada factor de calibração.

2.5 Sistema SPATE

Como referido em 2.2, SPATE é o nome do equipamento comercializado pela

OMETRON Ltd. e que utiliza a detecção de infravermelhos como meio de medir a variação de tensão em pontos da superfície de um sólido.

Neste subcapítulo faz-se a descrição do sistema SPATE 9000 (ver figura 2.3), adquirido pelo Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, em 1993. Actualmente é comercializado um outro sistema (SPATE 4000) que incorpora alguns melhoramentos, nomeadamente ao nível do pós-processamento dos resultados.



Figura 2.3 SPATE 9000.

2.5.1 SPATE 9000

O elemento fundamental do sistema SPATE é uma câmara de infravermelhos (ver figura 2.4) capaz de detectar variações de temperatura da ordem do milionésimo de Kelvin (0,001 K). O sensor de infravermelhos é arrefecido com azoto líquido e trabalha na banda 8-14 μm . A radiação recebida é concentrada e dirigida ao sensor através de uma lente de germânio.

O ponto de observação no provete é seleccionado por movimentação de um par de espelhos servocontrolados e incluídos no interior da câmara. Um canal visual, alinhado com o canal de infravermelhos, permite ao operador ver, através de uma lente, o ponto analisado no provete. Alternativamente, a lente pode ser substituída por uma

fonte de luz branca que projecta no provete um ponto luminoso correspondente ao ponto de observação.

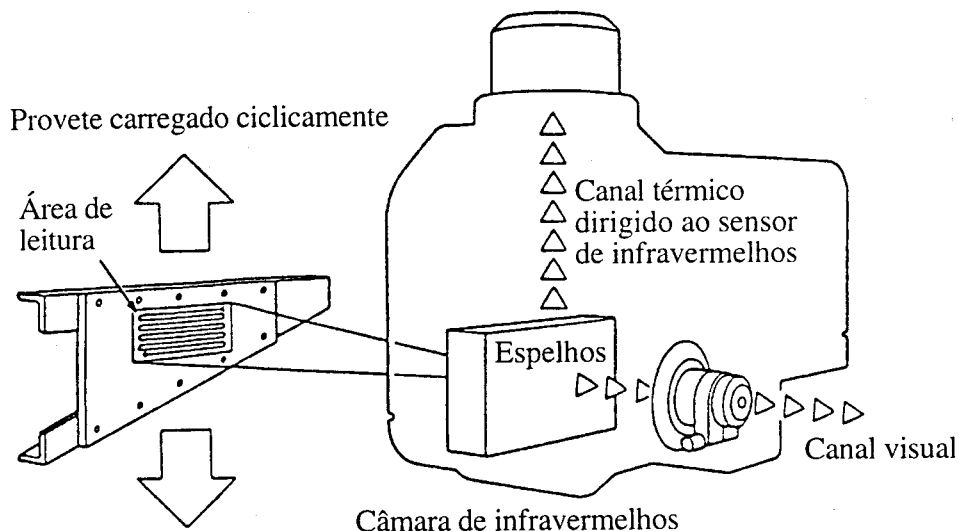


Figura 2.4 Câmara do sistema SPATE em operação.

Os restantes componentes do sistema SPATE, ilustrados na figura 2.5, estão alojados num armário móvel. Todas as operações do sistema são controláveis através do teclado do computador e algumas podem também ser controladas a partir de uma pequena consola portátil ligada directamente à câmara. O computador controla as operações da câmara e faz a aquisição e armazenamento de dados. Os resultados de ensaios são visualizados graficamente no monitor e podem ser impressos em papel.

O sinal eléctrico produzido pelo sensor de infravermelhos é fornecido ao amplificador *Lock-in* juntamente com um sinal de referência correspondendo em fase e frequência à onda de carregamento do provete. Este último pode ser obtido a partir da célula de carga ou do gerador de funções da máquina de ensaios, ou ainda a partir de um transdutor ligado à peça em estudo (por exemplo, um extensómetro de resistência eléctrica).

A função do amplificador *Lock-in* é correlacionar em frequência, amplitude e fase os sinais do sensor de infravermelhos e do carregamento. A correlação em frequência garante que as medições são feitas apenas na frequência de carregamento, filtrando assim o ruído exterior ao mesmo. A correlação em amplitude garante um sinal proporcional à variação das tensões principais. Por fim, a correlação em fase determina o sinal da variação da soma das tensões principais.

O filtro associado ao amplificador *Lock-in* é utilizado para minimizar o ruído do sinal de referência.

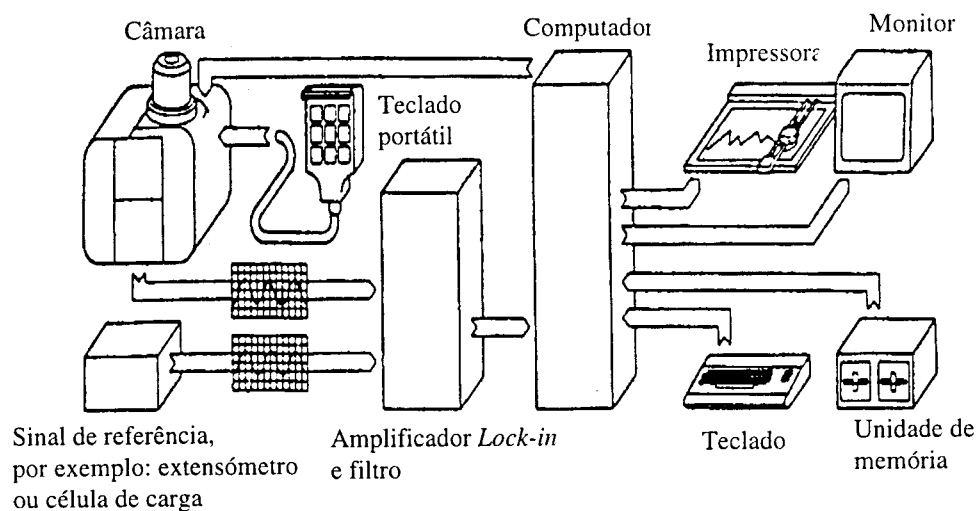


Figura 2.5 Componentes do sistema SPATE 9000.

2.5.2 Modos de operação

A operação da câmara é definida pelo utilizador e controlada pelo computador. Basicamente, esta operação envolve a leitura da variação de temperatura em pontos da superfície do corpo a estudar, seguindo um dos três modos possíveis:

- leitura de apenas um ponto;
- leitura de um conjunto de pontos que formam uma linha recta;
- leitura de um conjunto de pontos que formam uma área.

O operador tem ainda controlo sobre um conjunto de parâmetros como por exemplo, o espaçamento entre pontos ou o tempo de aquisição em cada ponto.

2.5.3 Algumas características técnicas do SPATE 9000

Como se referiu, o equipamento SPATE 9000 permite detectar uma variação mínima de temperatura da ordem dos 0,001 K. A essa variação de temperatura corresponde, para cada material em análise, uma variação de tensão e deformação. Na tabela 2.1 apresentam-se, para diversos materiais, valores típicos de variação mínima de tensão e correspondente deformação, medidos pelo SPATE à temperatura ambiente.

Tabela 2.1 Variação de tensão e deformação correspondente à variação de temperatura $\Delta T = 0,001 \text{ K}$.

Material	$\Delta\sigma$ - Variação da soma das tensões principais (MPa)	$\Delta\epsilon$ - Variação da soma das deformações principais
Aço	1,0	3×10^{-6}
Alumínio	0,4	4×10^{-6}
Titânio	1,0	6×10^{-6}
Epóxido	0,05	10×10^{-6}

A medição da variação de temperatura pelo SPATE 9000 é realizada através da detecção da radiação emitida pelo sólido, submetido a um carregamento cíclico. Assim, é importante que a emissão de radiação (emissividade, e) seja elevada, uniforme e inalterável para diferentes ângulos de detecção.

A emissividade da superfície de um metal pode ser baixa e é dependente do acabamento dessa superfície. Na tabela 2.2 indicam-se valores típicos de emissividade para três materiais de utilização corrente.

Tabela 2.2 Emissividades da superfície de três metais.

Material	Acabamento da superfície	e (emissividade)
Alumínio	natural	0,12
Alumínio	jacto de areia	0,46
Cobre	natural	0,10
Cobre	jacto de areia	0,41
Aço Macio	natural	0,39
Aço Macio	jacto de areia	0,43

A emissividade pode e deve ser melhorada por aplicação na superfície do sólido de uma tinta preta de elevada emissividade e com boa condutibilidade térmica. Tipicamente, uma boa tinta com as características referidas aumenta a emissividade para valores entre 0,9 e 0,95.

Como indicado previamente, a verificação da condição adiabática é necessária para a aplicação da teoria termoelástica. Essa condição é imposta por meio de um carregamento cíclico com uma frequência adequada. A frequência mínima a que se pode submeter cada material depende das suas características, nomeadamente da sua condutibilidade térmica.

O SPATE 9000 permite ensaios com frequências de solicitação que variam entre 0,5 Hz e 20 kHz.

2.6 Processos de calibração do sistema SPATE

O SPATE é um sistema de detecção linear e, conseqüentemente, como referido em 2.4.1, a variação de tensão no corpo é directamente relacionável com o sinal detectado através do factor de calibração. Sendo F o factor de calibração e s o sinal detectado, a variação da soma das tensões principais é dada por

$$\Delta(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = Fs \quad (2.55)$$

A determinação do factor F , ou calibração do sistema, pode ser realizada por três processos distintos:

- calibração teórica;
- calibração a partir de uma tensão calculada;
- calibração a partir de uma tensão medida.

2.6.1 Calibração teórica

A calibração teórica corresponde à determinação do factor de calibração a partir das propriedades do material e das características do equipamento SPATE. A seguinte fórmula é proposta pelo fabricante [18]

$$F = \frac{DgR\rho c_\sigma}{Te2048\alpha} \quad (2.56)$$

onde,

D - factor de resposta do sensor de infravermelhos (K/V)

g - valor máximo da escala do sistema analógico (V)

R - factor de correcção de temperatura

ρ - densidade do material (kg/m^3)

c_σ - calor específico do material por unidade de massa a tensão constante (J/kgK)

T - temperatura absoluta (K)

e - emissividade da superfície do corpo

α - coeficiente de expansão térmica linear do material (K^{-1})

O valor máximo da escala do sistema analógico, g, é a única variável da fórmula anterior que é escolhida pelo operador do sistema. As restantes quantidades são de natureza experimental; o valor de D é específico do sensor de infravermelhos, os valores de α , ρ e c_σ são dependentes do material a estudar e R e (e) são dependentes da superfície do corpo. Erros na quantificação destas variáveis são acumulados, podendo provocar um erro significativo no valor do factor de calibração.

2.6.2 Calibração a partir de uma tensão calculada

Este processo consiste na medição do sinal SPATE num provete submetido a um carregamento conhecido e para o qual se consegue calcular a tensão instalada. O provete deverá ser do mesmo material da estrutura em estudo, ter o mesmo acabamento superficial e emissividade, e estar sujeito às mesmas temperatura e frequência de carregamento. Deverá ainda ter uma geometria que permita o cálculo da tensão instalada a partir do conhecimento do carregamento aplicado.

O valor do factor de calibração é encontrado por aplicação da fórmula (2.55).

2.6.3 Calibração a partir de uma tensão medida

Este processo de calibração é frequentemente utilizado embora exija a utilização de uma outra técnica de análise experimental de tensões, a extensometria de resistência eléctrica. Baseia-se na medição do sinal SPATE numa zona da estrutura sujeita a uma tensão uniforme, de preferência elevada, e na medição da tensão instalada com recurso à técnica anteriormente referida. A colocação de uma roseta de extensómetros nessa zona permite determinar a variação do primeiro invariante das tensões.

Tal como no método anterior, o valor do factor de calibração é determinado utilizando a fórmula (2.55).

A calibração deve ser repetida sempre que hajam alterações nas variáveis que podem ser significativas, como por exemplo, temperatura, frequência de aplicação da carga, acabamento superficial, etc.

2.7 Revisão bibliográfica

Apesar de ser relativamente recente, são já inúmeras as aplicações da técnica SPATE, incluindo desde pequenos componentes, como por exemplo pás de turbinas, até estruturas de construção civil.

Infelizmente, muitas das aplicações não aparecem descritas na literatura devido à confidencialidade normalmente presente no meio industrial. No entanto, são conhecidas aplicações na maioria das principais áreas industriais, incluindo as indústrias automóvel e aeronáutica, engenharia civil, indústria médica, etc.

De seguida apresenta-se uma revisão da literatura relacionada com a técnica. Para além das aplicações, faz-se referência aos trabalhos de investigação relacionados geralmente com o aprofundamento do conhecimento da técnica e progressos no sentido do aumento das suas potencialidades.

2.7.1 Aplicações em materiais isotrópicos

Os primeiros resultados de aplicação da técnica SPATE foram publicados por Mountain e Webber [8], em 1978. O artigo descreve o estudo de um modelo do suporte de uma antena de radar, fixo pela base e sujeito a tensões de flexão. Os resultados são apresentados graficamente e mostram a distribuição de tensões antissimétrica ao longo de uma secção, como seria de esperar. No entanto, o eixo das tensões não se apresenta calibrado e não são referidos valores quantitativos para as mesmas:

Em 1982, Baker e Webber [19] publicaram um artigo com um estudo mais detalhado do mesmo modelo, incluindo uma razoável coincidência entre os resultados obtidos com a técnica SPATE e os valores determinados com a técnica da extensometria de resistência eléctrica.

Berry e Everett [20] fizeram um estudo do suporte do farol de um empilhador. Tendo o fabricante verificado rotura em serviço deste componente, foi possível identificar quantitativamente tensões elevadas e muito localizadas. Experiências prévias

com a técnica da extensometria de resistência eléctrica não tinham permitido identificar tais tensões.

Harwood e Cummings [21] estudaram a região da soldadura entre dois tubos de uma junta em T, pertencente às tubagens de uma plataforma *offshore*. Do mapa de tensões obtido foi possível distinguir os efeitos das diversas passagens no cordão de soldadura. No mesmo estudo, foi possível detectar uma fenda na fase inicial de propagação. Uma série de leituras com o SPATE, distribuídas ao longo do ensaio, mostraram o aumento progressivo da fenda.

Uma outra zona da junta em T foi analisada para se determinar a capacidade do SPATE em detectar a distribuição de tensões no exterior do tubo associada a reforços soldados internamente. Estes ensaios foram conduzidos com sucesso e mostraram duas linhas verticais de tensões elevadas correspondentes à geometria dos reforços internos.

Os mesmos autores fizeram análises de tensões com o SPATE em dois elos de uma cadeia metálica para ancorar navios. Essas análises fizeram parte de um estudo para melhorar o projecto de tais componentes, nomeadamente em termos das suas propriedades em fadiga. Os resultados foram satisfatórios embora fossem notados efeitos de bordo devido a deslocamentos consideráveis no plano perpendicular ao eixo de leitura.

Ainda no mesmo artigo, investigação em próteses médicas é descrita. O SPATE foi utilizado para determinar a distribuição de tensões em três modelos de próteses da anca. Os autores revelam a intenção de continuar estes estudos, incluindo análises de tensões em ossos reais.

Dois exemplos de aplicação da técnica SPATE na determinação experimental da distribuição de tensões em componentes de reactores nucleares foram publicados por Bream et al. [22]. Os ensaios foram conduzidos em componentes reais durante uma paragem de rotina para manutenção do reactor. Os resultados evidenciaram as potencialidades da técnica na determinação da distribuição de tensões e na análise dos modos de deformação.

Loader et al. [23] estudaram a distribuição de tensões em juntas de chassis de automóveis. O estudo experimental incluiu a utilização das técnicas dos vernizes frágeis, de extensometria de resistência eléctrica e SPATE. Este último mostrou potencialidades para a determinação de tensões em zonas inacessíveis a extensómetros e maior rapidez na análise de uma área com dimensões consideráveis. Em relação à técnica dos vernizes frágeis, o SPATE apresenta a enorme vantagem de requerer uma preparação mínima da superfície.

Os resultados experimentais foram comparados com os resultados de análises com o método dos elementos finitos. A distribuição de tensões obtida pela técnica SPATE apresentou concordância com os resultados numéricos e mostrou concentração

de tensões em zonas difíceis de modelar com o método dos elementos finitos, como por exemplo cordões de soldadura.

A técnica SPATE foi utilizada, juntamente com outras técnicas, por Wood et al. [24] no estudo de juntas tubulares em ferro fundido submetidas a diferentes tipos de carregamentos. As distribuições de tensões obtidas apresentaram uma aproximação razoável aos resultados de outras técnicas. Por exemplo, as tensões obtidas com o SPATE foram cerca de 10% mais elevadas do que as resultantes de leituras com extensómetros de resistência eléctrica.

Turner e Pollard [25] aplicaram a técnica SPATE ao estudo da distribuição de tensões em pás de turbinas de aviões. Os ensaios foram realizados para várias frequências de aplicação do carregamento, dentro da gama 30 Hz - 5 kHz. Os autores verificaram que a dificuldade na obtenção de bons resultados aumenta com o aumento da frequência.

Ensaio semelhantes aos acima referidos foram realizados por Copley [26]. A diminuição de custos e do tempo necessário para as análises são apontados como vantagens significativas do SPATE em relação a outras técnicas de análise experimental de tensões.

Sarihan et al. [27] publicaram resultados de ensaios com o SPATE numa biela de um motor de automóvel. Uma análise cuidada dos resultados permitiu concluir que o sistema de aplicação da carga utilizado nos ensaios introduziu esforços de flexão que não eram pretendidos. A comparação com análises por elementos finitos demonstrou o interesse do SPATE na determinação de concentrações de tensões em pormenores que requerem um elevado esforço computacional na sua modelação numérica. Os autores apontaram algumas limitações da técnica SPATE, nomeadamente a dificuldade de separar as tensões e a necessidade de aplicação de um carregamento cíclico à estrutura em estudo.

Ensaio em juntas em T tubulares são referidos por Slater [28]. Concentrações de tensões junto do cordão de soldadura foram identificadas em curto espaço de tempo, o que representa, para o autor, a maior vantagem desta técnica.

Harwood et al. [29] divulgaram um estudo da vida à fadiga de cabos de aço utilizados em estruturas *offshore*. Ensaio com a técnica SPATE foram realizados em cabos com 70 mm de diâmetro e com um total de 246 arames de aço entrelaçados. Através das áreas de tensão nula que se tornaram evidentes em leituras sucessivas, foi possível identificar arames que tinham sofrido rotura. Pode-se dizer que o SPATE foi utilizado neste caso como uma técnica de ensaios não destrutivos.

Inserido num projecto para o desenvolvimento de comboios de alta velocidade, os mesmos autores utilizaram, com sucesso, o SPATE num protótipo sujeito a diversos carregamentos representativos das condições reais de serviço. Os resultados

experimentais serviram para confirmar a precisão do modelo de elementos finitos da estrutura.

Purcell [30] publicou resultados de um estudo de tensões em componentes de turbinas a gás. O objectivo do estudo era o de identificar a localização das tensões máximas para modos críticos de vibração. A técnica SPATE foi utilizada e evidenciou excelente concordância com resultados obtidos com a técnica dos vernizes frágeis e com resultados numéricos obtidos com o método dos elementos finitos. As distribuições de tensões obtidas com o SPATE permitiram determinar a localização óptima de extensómetros para monitorizar o comportamento da turbina em serviço. A redução dos custos é apontada como um dos factores significativos para a utilização desta técnica neste tipo de ensaios.

2.7.2 Aplicações em materiais anisotrópicos

A utilização crescente de materiais compósitos com objectivos estruturais gerou o interesse na aplicação de técnicas de análise experimental de tensões a esses materiais. A utilização da técnica SPATE neste tipo de materiais tem sido estudada e originado a publicação de alguns trabalhos.

Potter e Greaves [13] fizeram a extensão do tratamento teórico da termoelasticidade ao caso dos materiais anisotrópicos. Os autores interessaram-se particularmente pelos materiais anisotrópicos mais comuns em engenharia, isto é, os materiais ortotrópicos. Para esses materiais obtiveram a seguinte relação

$$\Delta T = -\frac{T}{\rho c_g} (\alpha_{11} \Delta \sigma_{11} + \alpha_{22} \Delta \sigma_{22}) \quad (2.57)$$

em que os termos dos coeficientes de expansão térmica e tensões são definidos nas direcções dos eixos do material ortotrópico.

Na mesma publicação são apresentados alguns resultados de experiências com laminados de fibras de carbono e resina de epóxico. Um estudo do efeito da frequência de aplicação do carregamento no sinal detectado revelou que só para frequências elevadas o sinal estabiliza, ou seja, só nessas condições o processo pode ser considerado adiabático. Foi ainda estudado o efeito da fina camada de resina habitualmente existente na superfície dos laminados devido aos processos de fabricação. Esse estudo permitiu concluir que a espessura dessa camada de resina tem um efeito substancial no sinal detectado.

Stanley e Chan [31] realizaram ensaios com cilindros de parede fina feitos com laminados de kevlar® e resina de epóxico. Os cilindros foram submetidos a carregamentos de compressão e de pressão interna. A partir dos resultados obtidos com o SPATE, e recorrendo à relação deduzida por Potter e Greaves (equação 2.57), os valores dos coeficientes de expansão térmica foram calculados. A comparação com valores obtidos por outros autores revelou uma boa aproximação.

Zang et al. [32] mostraram que a resposta termoelástica depende fortemente do material compósito, temperatura e condições de carregamento. Em alguns casos, esses efeitos dificultam a análise de tensões. Por exemplo, para um material compósito com densidade de fibras não uniforme e com dois coeficientes de expansão térmica, pode ser difícil determinar o sinal da distribuição de tensões recorrendo apenas à técnica SPATE.

No mesmo trabalho foi verificado o efeito da frequência do carregamento nas condições adiabáticas e concluiu-se da necessidade de impôr frequências consideravelmente mais elevadas do que em materiais metálicos. Constatou-se ainda que a temperatura absoluta e variações na emissividade da superfície também afectam significativamente o sinal detectado, o qual aumenta de uma forma aproximadamente linear com o aumento da tensão média aplicada.

Wong [33] também estudou a influência da frequência de carregamento no comportamento adiabático de materiais compósitos. O seu trabalho mostra que as condições adiabáticas só são atingidas para valores relativamente elevados da frequência de carregamento devido à conductividade térmica entre a camada exterior e a camada adjacente do laminado.

Van Hemelrijck et al. [34] desenvolveram um modelo matemático para estudar a condução térmica através das camadas do material compósito, e concluíram também ser esse fenómeno responsável pela não existência de condições adiabáticas para baixas frequências de carregamento.

Camanho [35] também aplicou a técnica SPATE ao estudo de materiais compósitos laminados e verificou a necessidade de aplicação do carregamento com frequências elevadas para se obterem condições adiabáticas. Este autor verificou ainda que o efeito termoelástico é mais facilmente detectável se a camada superficial do laminado tiver as fibras orientadas a 90° relativamente à direcção de aplicação da carga. Isto deve-se ao coeficiente de expansão térmica ser bastante superior na direcção perpendicular às fibras do que na direcção das fibras.

Alguns investigadores fizeram estudos sobre a aplicabilidade do SPATE como método não destrutivo de análise da integridade de materiais compósitos. Heller et al. [36] utilizaram esta técnica na determinação da distribuição de tensões na superfície de um compósito unidireccional reparado. Com esses ensaios foi possível mostrar o potencial para a detecção e monitorização da propagação de fendas por baixo da reparação.

Os mesmos autores fizeram ensaios com laminados contendo dano devido a uma carga de impacto e demonstraram a possibilidade de detectar a sua presença. Na sequência desses ensaios, um parâmetro D_i , baseado na distribuição de tensões à superfície, foi proposto como indicador da severidade do dano de um compósito previamente submetido a cargas de impacto.

Zang e Sandor [37] desenvolveram uma teoria baseada no efeito termoelástico para quantificar dano em materiais anisotrópicos. A utilização desta teoria, juntamente com os resultados obtidos com o SPATE, permite determinar o parâmetro de dano D em materiais compósitos.

Camanho [35] realizou ensaios com materiais compósitos laminados e com estruturas *sandwich*. Em ambos os casos foi possível detectar alterações da distribuição de tensões à superfície, provocadas pela presença de defeitos.

Mahoney [38] desenvolveu uma metodologia teórica e experimental para quantificar a distribuição de fissuração transversa na matriz de materiais compósitos. A técnica relaciona os valores detectados pelo SPATE com medidas de dano convencionais.

2.7.3 Aplicações em mecânica da fractura

A técnica SPATE foi sempre reconhecida com potencialidades para o estudo do campo de tensões na vizinhança da ponta de uma fenda. Stanley e Chan [39] iniciaram os estudos nesta área utilizando o SPATE na determinação do factor de intensidade de tensão na ponta de uma fenda de penetração total, numa placa solicitada em modo I. A base teórica que suporta estes estudos surgiu da introdução das equações de Westergaard na equação que relaciona o sinal registado pelo SPATE com a variação do primeiro invariante das tensões (equação 2.55). O valor do factor de intensidade de tensão (K_I) é obtido por sucessivas leituras com o SPATE segundo linhas paralelas ou perpendiculares à fenda e posterior tratamento matemático dos resultados.

Pukas [40] publicou um estudo teórico relacionado com a determinação do factor de intensidade de tensão através da técnica SPATE. O autor discute vários métodos de análise dos resultados experimentais, nomeadamente técnicas de extrapolação, as quais são apontadas como preferíveis na determinação de factores de intensidade de tensão.

Stanley e Chan [41, 42] utilizaram vários tipos de provetes para estudar a aplicabilidade da técnica SPATE à determinação do campo de tensões em redor de uma fenda sujeita a carregamento em modo II, baseando-se no princípio utilizado nos ensaios em modo I. Os resultados foram comparados com os obtidos por

fotoelasticidade e pelo método dos elementos finitos. Foram encontradas diferenças consideráveis para o caso dos provetes com um fenda central e boa concordância para o caso de provetes com fenda lateral.

Investigação com carregamento em modo misto foi realizado por Chan e Tubby [43] com o objectivo de determinar ambos os factores de intensidade de tensão para uma fenda na raiz do cordão de soldadura de uma junta soldada transversal. Os resultados experimentais obtidos com o SPATE foram sempre inferiores aos resultantes de análises pelo método dos elementos finitos. No caso do factor de intensidade de tensão em modo I (K_I) as diferenças não excederam 20%, enquanto que em modo II (K_{II}) as diferenças foram cerca de 100%.

Em [44], Stanley e Dulieu-Smith fazem uma revisão da formulação teórica para a determinação de factores de intensidade de tensão nos vários modos (I, II, misto) a partir de dados obtidos com o SPATE.

2.7.4 Medição de tensões residuais

A teoria desenvolvida por Lord Kelvin previa uma relação linear entre a variação de temperatura e a variação da soma das tensões principais (ver equação 2.47). Sendo a constante termoelástica K_m considerada independente da tensão aplicada, e tendo o SPATE uma resposta linear com a variação de temperatura, o sinal detectado deveria ser independente de qualquer tensão estática aplicada. Em 1987, Machin et al. [45, 46] revelaram que tal não é verdade. Os autores fizeram ensaios com duas ligas de alta resistência utilizadas na construção aeronáutica (Al-2024 e Ti-6Al-4V), aplicando sucessivamente carregamentos cíclicos com a mesma amplitude de tensão mas com tensões médias diferentes. Os resultados indicaram uma relação de dependência linear entre o sinal do SPATE e a tensão média aplicada.

Wong et al. [12] apresentaram uma revisão da teoria termoelástica que justifica a dependência atrás referida. Esta teoria, ao contrário da apresentada por Lord Kelvin, considera que as propriedades elásticas e térmicas do material não são constantes. Esta suposição é válida uma vez que as propriedades referidas podem ser fortemente dependentes da temperatura.

Considerando o caso especial de um carregamento uniaxial, a fórmula encontrada para descrever o efeito termoelástico é

$$\Delta T = -\frac{T}{\rho c_\sigma} \left(\alpha - \frac{1}{E^2} \frac{\partial E}{\partial T} \sigma_m \right) \Delta \sigma_1 \quad (2.58)$$

em que σ_m é a tensão média aplicada. A constante termoelástica, agora designada por parâmetro termoelástico, tem a forma

$$K_m = \frac{1}{\rho c_\sigma} \left(\alpha - \frac{1}{E^2} \frac{\partial E}{\partial T} \sigma_m \right) \quad (2.59)$$

Como se pode verificar, este parâmetro é dependente da tensão média. Para o caso uniaxial, a relação de dependência é estabelecida pelas propriedades do módulo de elasticidade. Ao contrário do que Wong et al. inicialmente pensavam, a variação do parâmetro termoelástico com a tensão aplicada não é devida à dependência das propriedades mecânicas e/ou térmicas do material com a deformação; ela deve-se única e exclusivamente à variação das propriedades mecânicas com a temperatura.

No mesmo trabalho, Wong et al. calcularam a variação de K_m com a tensão média, para os dois materiais estudados por Machin et al. [45, 46]. Comparações com os valores experimentais obtidos por estes últimos revelaram boa concordância.

A descoberta da variação do sinal termoelástico com a componente estática de um carregamento cíclico despertou o interesse dos investigadores para a possibilidade de aplicar o SPATE na medição de tensões residuais. Wong et al. [47] publicaram um trabalho onde apresentam a distribuição de tensões residuais, medidas com o SPATE, em provetes de uma liga de alumínio (Al-2024T351). Os provetes, com forma aproximadamente rectangular, foram maquinados propositadamente com uma curvatura e posteriormente endireitados num sistema de flexão em quatro pontos. Esse processo introduziu tensões residuais nos provetes, as quais foram medidas com extensómetros de resistência eléctrica. Os provetes foram seguidamente submetidos a um carregamento cíclico de tracção e a distribuição de tensões residuais foi determinada a partir das leituras do sistema SPATE. Os resultados de ambas as técnicas apresentaram boas aproximações.

Enke [48] fez ensaios com provetes, de uma liga de titânio (Ti-6Al-4V), em forma de C. A tensão residual mínima detectada foi, aproximadamente, 30 MPa.

Uma outra forma de medir tensões residuais com o SPATE foi proposta por Mountain e Cooper [49]. O método foi denominado por TERSA (Thermal Evaluation for Residual Stress Analysis) e consiste na medição de pequenas variações de temperatura induzidas pelo fornecimento de uma quantidade específica de energia à superfície do corpo. A variação de temperatura é dependente do estado de tensão do corpo e os autores defendem que este efeito deve-se à dependência do calor específico com a tensão. Resultados experimentais são apresentados para um provete de titânio sujeito a vários carregamentos estáticos e incidido por um feixe de raios laser.

Dunn et al. [50, 51] fizeram uma análise crítica do método atrás descrito e argumentaram que a dependência do calor específico com a tensão não é significativa, ou seja, essa não é a explicação para os resultados de Mountain e Cooper.

2.7.5 Separação das tensões

A técnica SPATE fornece a variação das tensões principais na superfície de um corpo mas não dá qualquer informação relativamente aos valores individuais das tensões. Várias técnicas foram propostas para a separação das tensões a partir dos dados experimentais.

Stanley [52] descreve um exemplo de separação das tensões do topo de um reservatório de pressão, baseado numa solução das equações de equilíbrio pelo método das diferenças finitas. As tensões obtidas são próximas de valores teóricos, no entanto algumas limitações do método tornaram-se evidentes. Por exemplo, o algoritmo só é aplicável a provetes totalmente simétricos relativamente a um eixo e exige o conhecimento prévio das tensões em pelo menos um ponto.

Um método mais generalista foi proposto por Ryall e Wong [53] e baseia-se na representação de um campo de tensões bidimensional através das funções de tensão de Airy. A função de tensão de Airy exprime-se como uma série infinita e as tensões são função dos coeficientes da série. Os coeficientes são determinados impondo a minimização da diferença entre as somas das tensões geradas e experimentais. O método foi testado com um exemplo hipotético de uma placa rectangular sujeita a um carregamento de compressão em parte de um dos lados. Verificou-se que as tensões encontradas são comparáveis com valores calculados na região central da placa mas bastante diferentes perto dos extremos. Este problema é justificado com erros na determinação dos coeficientes de ordem superior. Mesmo tratando-se de um exemplo simples verificou-se mau condicionamento das matrizes.

Huang et al. [54] desenvolveram um outro método que tem a vantagem de desprezar as leituras dos extremos dos provetes, as quais são significativamente afectadas de ruído. O método das diferenças finitas é utilizado na obtenção das componentes individuais da tensão. Os autores apresentam exemplos de separação de tensões a partir de dados experimentais para duas situações: um semi-plano carregado parcialmente à compressão e um placa com entalhes semi-circulares laterais sujeita a tracção. Os resultados para o primeiro caso indicam uma fraca concordância com a teoria, o que é atribuído a problemas experimentais com o carregamento do provete. Para o segundo exemplo, os resultados deste método mostram-se próximos dos valores obtidos por extensometria e pelo método dos elementos finitos.

A técnica descrita em [54] foi significativamente melhorada por Huang e Rowlands [55]. Estes investigadores sugeriram exprimir a função de tensão de Airy em termos de duas funções complexas, as quais são relacionáveis na proximidade de um extremo livre. A relação entre as duas funções complexas é estabelecida recorrendo a técnicas de mapeamento e é expressa na forma de uma série de potências. Os coeficientes da série são determinados a partir dos dados experimentais. A técnica foi testada a partir de valores da soma das tensões principais gerados numericamente para uma placa com um furo central submetida a esforços de tracção. As tensões individuais foram determinadas com grande precisão. O método foi também testado a partir de resultados do SPATE para a mesma geometria e boa concordância com os valores teóricos foi obtida [56]. Apesar de teoricamente a técnica ser aplicável a geometrias com fronteiras curvas, tal não foi ainda demonstrado.

Feng et al. [57] e Lin e Rowlands [58] aplicaram esta última técnica na separação de tensões em materiais anisotrópicos. Os resultados obtidos revelam alguma concordância com os resultantes do método dos elementos finitos.

Stanley e Dulieu-Smith [59] propuseram uma técnica puramente experimental para separar as tensões. O conceito que deu origem a esta técnica é o de transferir a deformação do provete para uma fita fina colada na sua superfície. Se a fita for colada quando o provete não está deformado, ela irá sofrer uma deformação igual à do provete na direcção do seu comprimento. Assim, aproveitando os sinais termoelásticos dessa fita e do corpo na sua vizinhança, consegue-se obter as tensões em duas direcções ortogonais. Os autores descrevem três tipos de fitas com diferentes particularidades mas que funcionam segundo o mesmo princípio. Uma limitação deste métodos é a necessidade das tensões na vizinhança da fita serem aproximadamente constantes.

Barone e Patterson [60] apresentaram uma outra técnica baseada na combinação da termoelasticidade com a fotoelasticidade. A utilização das duas técnicas permite determinar a soma e a diferença das tensões principais obtendo-se a partir desses dados experimentais a separação das tensões. Os autores utilizaram o SPATE e um polariscópio de reflexão em faces opostas de uma placa com um furo central. Os resultados mostram que o erro resultante da combinação das duas técnicas não é superior ao obtido por cada uma delas independentemente. Embora as técnicas tenham sido utilizadas em faces opostas do provete, é possível aplicá-las sequencialmente na mesma face. Isto possibilitará o estudo de componentes tridimensionais.

2.8 Comparação com outras técnicas de análise experimental de tensões

A técnica de análise experimental de tensões baseada no efeito termoelástico enquadra-se no conjunto de técnicas com carácter de medição global, isto é, que permitem a determinação do campo de tensões numa área da superfície de um sólido. Outras técnicas que possuem essa característica e podem ser consideradas alternativas da anterior são seguidamente enumeradas:

- Fotoelasticidade;
- Moiré;
- Interferometria laser Speckle e holográfica;
- Método dos vernizes frágeis.

Por estar fora do âmbito deste trabalho, não se fazem aqui descrições das técnicas acima mencionadas as quais podem ser encontradas, por exemplo, na obra de referência editada por Kobayashi [61]. Comparações com o sistema SPATE são apresentadas em [62, 63].

A técnica da extensometria, apesar de ser uma das mais conhecidas e utilizadas, não possui a característica fundamental das técnicas atrás referidas, isto é, é uma técnica pontual.

Algumas vantagens do sistema SPATE relativamente a outras técnicas são:

- permite a determinação rápida do campo de tensões numa zona da superfície de um sólido, particularmente se for suficiente uma pequena resolução espacial;
- exige preparação mínima das superfícies (limpeza da superfície e aplicação de tinta de alta emissividade);
- superfícies não planas podem ser analisadas dado que o sinal termoelástico não é particularmente sensível ao ângulo de incidência da câmara de leitura;
- resolução espacial máxima de 0,5 mm;
- a estrutura ou componente podem estar sujeitos a uma gama bastante ampla de frequências (de 0,5 Hz a mais de 20 kHz);
- a resolução em termos de tensões é maior do que normalmente conseguido com outras técnicas que permitem a determinação de campos de tensões globais;
- é uma técnica sem contacto que pode ser usada em componentes e estruturas reais;
- a distribuição de tensões é representada directamente no monitor e pode ser gravada em ficheiros para análise posterior.

Algumas desvantagens que se podem apontar são:

- é necessária a aplicação de um carregamento cíclico de amplitude constantemente conhecida;
- para a obtenção de bons resultados quantitativos é necessário garantir condições adiabáticas utilizando um carregamento cíclico de frequência adequada; é necessário também a calibração experimental do processo o que nem sempre é fácil;
- obtém-se a variação do primeiro invariante das tensões e não é trivial a separação das tensões e dos níveis entre os quais variam;
- só é possível medir tensões superficiais;
- é necessário o acesso óptico à área pretendida;
- o sistema tem um preço relativamente elevado.

Referências

1. Gough, J., *Manchester Phil. Mem.*, Vol. 1, 2nd Series, pp. 288, 1805.
2. Weber, W., "Über die spezifische Wärme fester Körper insbesondere der Metalle", *Ann der Physic u. Chemie*, Vol. 96, pp. 177-213, 1830.
3. Thomson, W.L.K., "On the dynamical theory of heat", *Trans. Roy. Soc. Edinburgh*, Vol. 20, pp. 261-283, 1853.
4. Compton, K.T. e Webster, D.B., "Temperature changes accompanying the adiabatic compression of steel. Verification of W. Thomson's theory to a very high accuracy", *Phys. Rev.*, Vol. 4, pp. 159-166, 1915.
5. Rocca, R. e Bever, M.B., "The thermoelastic effect in iron and nickel (as a function of temperature)", *Trans. AIME*, Vol. 188, pp. 327-333, 1950.
6. Belgen, M.H., "Structural stress measurements with an infrared radiometer", *ISA transactions*, Vol. 6, pp. 49-53, 1967.
7. Belgen, M.H., *Infrared radiometric stress instrumentation application range study*. CR-1067, NASA, 1968.
8. Mountain, D.S. e Webber, J.M.B., "Stress pattern analysis by thermal emission (SPATE)", *Proc. Soc. Photo-Opt. Inst. Engrs.*, Vol. 164, pp. 189-196, 1978.
9. Timoshenko, S.P. e Godier, J.N., *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill, New York, 1970.
10. Fung, Y.C., *Foundations of Solid Mechanics*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.
11. Kovalenko, A.D., *Thermoelasticity, Basic Theory and Applications*. Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1987.
12. Wong, A.K., Jones, R., e Sparrow, J.G., "Thermoelastic constant or thermoelastic parameter?", *J. Phys. Chem. Solids*, Vol. 48, 8, pp. 749-753, 1987.
13. Potter, R.T. e Greaves, L.J., "The application of thermoelastic stress analysis techniques to fibre composites", em: *Proceedings of the Conference on optical and opto-electronic applied science and engineering*, D. Vukobratovich, ed., SPIE, Bellingham, pp. 134-146, 1987.
14. Potter, R.T., "Stress analysis in laminated fibre composites by thermoelastic emission", em: *Stress Analysis by Thermoelastic Techniques*, B.C. Gasper, ed., SPIE, Bellingham, pp. 110-120, 1987.
15. Incropera, F.P. e De Witt, D.P., *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. John Wiley & Sons, New York, 1990.
16. Enke, N.F., "Fundamentals of Thermographic Stress Analysis", em: *Workshop Notes for ASTM Committee Week*, University of Wisconsin, Madison, 1988.

17. Stanley, P. e Chan, W.K., "Quantitative stress analysis by means of the thermoelastic effect", *Journal of Strain Analysis*, Vol. 20, 3, pp. 129-137, 1985.
18. *Spate Operator's Manual*. Ometron inc., London, 1987.
19. Baker, L.R. e Webber, J.M.B., "Thermoelastic stress analysis", *Optica Acta*, Vol. 29, 4, pp. 555-563, 1982.
20. Berry, D.J. e Everett, G.M., "Materials testing using non-contacting stress mapping techniques", em: *Proceedings of the Second Conference on Materials Engineering*, A.N. Bramley, ed., London, pp. 127-134, 1985.
21. Harwood, N. e Cummings, W.M., "Applications of thermoelastic stress analysis", *Strain*, Vol. 22, pp. 7-12, 1986.
22. Bream, R.G., Gasper, B.C., Lloyd, B.E., e Page, S.W.J., "The SPATE 8000 thermo-elastic camera for dynamic stress measurement on nuclear plant components", em: *Stress Analysis by Thermoelastic Techniques*, B.C. Gasper, ed., SPIE, Bellingham, pp. 132-137, 1987.
23. Loader, A.J., Turner, W.B., e Harwood, N., "Stresses in vehicle chassis joints - a comparison of SPATE with other analysis techniques", em: *Stress Analysis by Thermoelastic Techniques*, B.C. Gasper, ed., SPIE, Bellingham, pp. 149-153, 1987.
24. Wood, A., Hurden, D.C., e Forsyth, P., "The application of thermoelastic techniques in determining stress distributions in cast tubular joints", em: *Stress Analysis by Thermoelastic Techniques*, B.C. Gasper, ed., SPIE, Bellingham, pp. 154-161, 1987.
25. Turner, S.R. e Pollard, N.G., "Application of SPATE to high frequency vibration measurement of aero engine components", em: *Stress Analysis by Thermoelastic Techniques*, B.C. Gasper, ed., SPIE, Bellingham, pp. 162-166, 1987.
26. Copley, D.W., "Considerations in the application of thermoelastic stress analysis to the vibration testing of aero-engine structures", *Experimental Techniques*, Vol. 12, pp. 11s-14s, 1988.
27. Sarihan, V., Oliver, D., e Russell, S., "Thermoelastic stress analysis of an automobile engine connecting rod", *Experimental Techniques*, Vol. 12, pp. 7s-10s, 1988.
28. Slater, G., "Thermoelastic stress analysis with SPATE 8000", *The Welding Institute Bulletin*, Vol. 29, pp. 113-119, 1988.
29. Harwood, N., Cummings, W.M., e Mackenzie, A.K., "An introduction to thermoelastic stress analysis", em: *Thermoelastic Stress Analysis*, N. Harwood e W.M. Cummings, eds., Adam Hilger, Bristol, pp. 1-33, 1991.

30. Purcell, T.E., "Dynamic stress analysis of gas turbine rotor airfoils using thermoelastic techniques", *Experimental Techniques*, Vol. 20, 3, pp. 9-13, 1996.
31. Stanley, P. e Chan, W.K., "The application of thermoelastic stress analysis techniques to composite materials", em: *Proceedings of the 1987 SEM Spring Conference on Experimental Mechanics*, Society for Experimental Mechanics, Bethel, pp. 536-544, 1987.
32. Zhang, D., Enke, N.F., e Sandor, B.I., "Thermographic stress analysis of composite materials", *Experimental Mechanics*, Vol. 30, pp. 68-73, 1990.
33. Wong, A.K., *A non-adiabatic thermoelastic theory for composite laminates*. TR90007, Royal Aircraft Establishment, 1990.
34. Van Hemelrijck, D., De Wilde, W.P., e Cardon, A., "SPATE and fibre reinforced composite systems, the pros and contras", em: *Computer Aided Design in Composite Material Technology IV*, W.R. Blain e W.P. De Wilde, eds., Computational Mechanics Publications, Southampton, pp. 15-22, 1994.
35. Camanho, P.M.P.R.C., *Aplicação do efeito termoelástico à análise experimental de tensões*. Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, 1995.
36. Heller, M., Williams, J.F., Dunn, S., e Jones, R., "Thermomechanical analysis of composite specimens", *Composite Structures*, Vol. 11, pp. 309-324, 1989.
37. Zhang, D. e Sandor, B.I., "A thermoelasticity theory for damage in anisotropic materials", *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, Vol. 13, pp. 497-509, 1990.
38. Mahoney, B., "Experimental validation of a methodology to quantify distributed damage in laminated composites using the thermoelastic effect", *Experimental Techniques*, Vol. 20, pp. 28-31, 1996.
39. Stanley, P. e Chan, W.K., "The determination of stress intensity factors and crack-tip velocities from thermoelastic infra-red emissions", em: *Proceedings of the International Conference on Fatigue of Engineering Materials and Structures*, Institute of Mechanical Engineers, London, pp. 105-114, 1986.
40. Pukas, S.R., "Theoretical considerations for determining stress intensity factors via thermoelastic stress analysis", em: *Stress Analysis by Thermoelastic Techniques*, B.C. Gasper, ed., SPIE, Bellingham, pp. 88-101, 1987.
41. Stanley, P. e Chan, W.K., "Mode II cracks studies using the SPATE technique", em: *Proceedings of the 1986 SEM Spring Conference on Experimental Mechanics*, Society for Experimental Mechanics, Bethel, pp. 916-923, 1986.
42. Stanley, P. e Chan, W.K., "A thermoelastic stress evaluation of a proposed K_{II} specimen", em: *Stress Analysis by Thermoelastic Techniques*, B.C. Gasper, ed., SPIE, Bellingham, pp. 102-109, 1987.

43. Chan, S.W.K. e Tubby, P.J., *Thermoelastic determination of stress intensity factors for toe cracks in fillet welded joints and comparison with finite element results*. 369, The Welding Institute, Abington, 1988.
44. Stanley, P. e Dulieu-Smith, J.M., "The determination of crack-tip parameters from thermoelastic data", *Experimental Techniques*, Vol. 20, 2, pp. 21-23, 1996.
45. Machin, A.S., Sparrow, J.G., e Stimson, M.-G., "The thermoelastic constant", em: *Stress Analysis by Thermoelastic Techniques*, B.C. Gasper, ed., SPIE, Bellingham, pp. 26-31, 1987.
46. Machin, A.S., Sparrow, J.G., e Stimson, M.-G., "Mean stress dependence of the thermoelastic constant", *Strain*, Vol. 23, pp. 27-30, 1987.
47. Wong, A.K., Dunn, S.A., e Sparrow, J.G., "Residual stress measurement by means of the thermoelastic effect", *Nature*, Vol. 332, pp. 613-615, 1988.
48. Enke, N.F., "An enhanced theory for thermographic stress analysis of isotropic materials", em: *Stress and Vibration - Recent Developments in Industrial Measurement and Analysis*, P. Stanley, ed., SPIE, Bellingham, pp. 84-102, 1989.
49. Mountain, D.S. e Cooper, G.P., "TERSA - a new technique for assessing residual stress", *Strain*, Vol. 25, pp. 15-19, 1989.
50. Dunn, S.A., Lombardo, D., e Sparrow, J.G., "The mean stress effect in metallic alloys and composites", em: *Stress and Vibration - Recent Developments in Industrial Measurement and Analysis*, P. Stanley, ed., SPIE, Bellingham, pp. 129-142, 1989.
51. Dunn, S.A. e Sparrow, J.G., "Stress dependence of specific heat: observations on the TERSA technique", *Strain*, Vol. 26, pp. 51-53, 1990.
52. Stanley, P., "Stress separation from SPATE data for a rotationally symmetrical pressure vessel", em: *Stress and Vibration - Recent Developments in Industrial Measurement and Analysis*, P. Stanley, ed., SPIE, Bellingham, pp. 72-83, 1989.
53. Ryall, T.G. e Wong, A.K., "Determining stress components from thermoelastic data - a theoretical study", *Mechanics of Materials*, Vol. 30, pp. 88-94, 1990.
54. Huang, Y.M., AbdelMohsen, H.H., e Rowlands, R.E., "Determination of individual stresses thermoelastically", *Experimental Mechanics*, Vol. 30, pp. 88-94, 1990.
55. Huang, Y.M. e Rowlands, R.E., "Quantitative stress analysis based on the measured trace of the stress tensor", *Journal of Strain Analysis*, Vol. 26, pp. 55-63, 1991.
56. Huang, Y.M., Rowlands, R.E., e Lesniak, J.R., "Simultaneous stress separation, smoothing of measured thermoelastic isopachic information and

- enhanced boundary data", *Experimental Mechanics*, Vol. 30, pp. 398-403, 1990.
57. Feng, Z., Zhang, D., Rowlands, R.E., e Sandor, B.I., "Thermoelastic determination of individual stress components in loaded composites", *Experimental Mechanics*, Vol. 32, pp. 89-95, 1992.
58. Lin, S.T. e Rowlands, R.E., "Thermoelastic stress analysis of composite members", em: *Recent Advances in Experimental Mechanics*, J.F.S. Gomes, et al., eds., A.A. Balkema, Rotterdam, pp. 11-16, 1994.
59. Stanley, P. e Dulieu-Smith, J.M., "Devices for the experimental determination of individual stresses from thermoelastic data", *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, Vol. 31, pp. 53-63, 1996.
60. Barone, S. e Patterson, E.A., "Full-field separation of principal stresses by combined thermo- and photoelasticity", *Experimental Mechanics*, Vol. 36, pp. 318-324, 1996.
61. Kobayashi, A.S., ed., *Handbook on Experimental Mechanics*. 2nd rev. ed., Society for Experimental Mechanics, Bethel, 1993.
62. Harwood, N., "Relative assessment of full-field experimental stress analysis techniques", *Strain*, Vol. 21, pp. 119-121, 1985.
63. Everett, G.M., "Comparison between the thermoelastic method and other experimental techniques for stress measurement", em: *Stress and Vibration: Recent Developments in Industrial Measurements and Analysis*, P. Stanley, ed., SPIE, Bellingham, pp. 54-59, 1989.

CAPÍTULO 3

3. ENSAIOS EXPLORATÓRIOS E DE CALIBRAÇÃO DO SISTEMA SPATE

3.1 Introdução

3.2 Determinação de factores de calibração

3.3 Distribuição linear de tensões

3.4 Distribuição de tensões em placa com furo

3.5 Distribuição de tensões em juntas soldadas

3.6 Detecção de defeitos escondidos

3.6.1 Resultados experimentais

3.6.2 Análise pelo método dos elementos finitos

3.6.3 Discussão

3.7 Iniciação e propagação de fendas de fadiga

3.8 Conclusões

Referências

CAPÍTULO 3

3. ENSAIOS EXPLORATÓRIOS E DE CALIBRAÇÃO DO SISTEMA SPATE

3.1 Introdução

Neste capítulo descreve-se um conjunto de ensaios experimentais realizados com o equipamento SPATE 9000, existente no Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial (DEMEGI) da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. Estes ensaios visaram fundamentalmente compreender as potencialidades da técnica de análise experimental de tensões baseada no efeito termoelástico, suas limitações e potenciais campos de aplicação.

Os ensaios decorreram no Laboratório de Ensaaios Tecnológicos do DEMEGI. Os provetes foram carregados ciclicamente numa máquina servo-hidráulica da marca MTS, com capacidade máxima de 250 kN. Em todos os ensaios, a onda de carregamento sinusoidal foi continuamente monitorizada num osciloscópio.

A câmara do sistema SPATE foi colocada a cerca de 650 mm do provete. Garantiu-se o seu posicionamento para que uma ordem de movimento horizontal gerada pelo sistema de comando originasse um deslocamento horizontal do eixo óptico. Não houve um cuidado especial em posicionar a câmara com o seu eixo óptico perpendicular à superfície do provete. O eixo óptico pode fazer um ângulo até 70° relativamente à normal à superfície do provete sem atenuação significativa do sinal [1].

As superfícies dos provetes foram limpas com acetona e pintadas com tinta preta de elevada emissividade (*RS matt black paint*).

Devido às limitações em termos de pós-processamento do programa incluído no equipamento SPATE 9000 e devido à pouca divulgação do sistema operativo que o acompanha (HP Basic), implementou-se um sistema para transferência dos ficheiros de

resultados para um computador pessoal com o sistema operativo MS-DOS ou Windows. A interface desenvolvida aproveita a porta série existente no computador do sistema SPATE e está descrita em pormenor em [2].

Os resultados apresentados neste capítulo relativos a leituras do sistema SPATE após calibração em tensão dizem respeito ao primeiro invariante das tensões. Assim, onde neste capítulo se diz "tensão" deve sempre compreender-se o primeiro invariante das tensões.

3.2 Determinação de factores de calibração

A obtenção de resultados quantitativos exige a calibração do sistema SPATE por um dos processos descritos em 2.6. Esses processos conduzem à determinação do factor de calibração F que relaciona a variação de tensão com o sinal detectado (ver equação 2.57).

O primeiro processo descrito em 2.6 é de natureza teórica e baseia-se no conhecimento de propriedades do material a ensaiar, das características do sistema SPATE e de algumas variáveis experimentais, como por exemplo, a temperatura. Os outros dois processos baseiam-se no conhecimento da variação de tensão e do sinal SPATE num ponto do corpo a estudar. Embora a determinação da variação de tensão possa ser analítica ou experimental, estes últimos processos de calibração são de natureza experimental na medida em que necessitam da leitura do sinal SPATE.

Um programa experimental foi planeado e executado com o objectivo de se compreender a sensibilidade do factor de calibração à modificação de algumas variáveis de ensaio. Os provetes adoptados foram barras de secção rectangular, com 320 mm de comprimento, 25 mm de largura e 5 mm de espessura. A escolha desta geometria deveu-se fundamentalmente à possibilidade de determinação imediata da tensão instalada quando o provete é solicitado com um carregamento conhecido na direcção longitudinal.

O material do provete, as cargas mínima e máxima, e a frequência de aplicação do carregamento foram as variáveis seleccionadas para o estudo. Aço DIN Ck45, alumínio comercial e *nylon*® foram os materiais utilizados. Utilizaram-se frequências de carregamento de 10 Hz e 25 Hz. Os provetes foram solicitados na direcção longitudinal com carregamentos sinusoidais tractivos. A tabela 3.1 mostra as forças mínimas e máximas desses carregamentos e a razão de tensão R correspondente. Os carregamentos foram escolhidos de tal forma que para cada par, a força máxima, a razão de tensão ou a amplitude de tensão são constantes.

Tabela 3.1 Forças limite dos carregamentos cíclicos.

Referência do carregamento	Força mínima (N)	Força máxima (N)	R
A	625	2500	0,25
B	3125	5000	0,625
C	1250	5000	0,25

Para evitar possíveis desalinhamentos entre a direcção longitudinal dos provetes e a direcção de carregamento, utilizaram-se duas rótulas na ligação dos provetes à máquina. O alinhamento de cada provete foi ainda controlado com a ajuda de três extensómetros e um transdutor de deslocamentos. Os extensómetros foram distribuídos ao longo do eixo longitudinal do provete e permitiram controlar a existência de deformações iguais pelo menos em três pontos. O transdutor de deslocamentos serviu para detectar a existência de deslocamentos transversais em diversos pontos do provete.

Os ensaios com o SPATE consistiram em leituras lineares transversais através da superfície mais larga do provete. Para cada conjunto de condições de ensaio executaram-se quatro leituras. Devido à constância da tensão em cada secção do provete, o sinal detectado em cada leitura não sofre variações significativas. Assim, calculou-se o valor médio do sinal de cada leitura e determinou-se o valor médio resultante das quatro leituras. Esse valor foi utilizado para calcular o factor de calibração recorrendo ao método de calibração a partir de uma tensão medida descrito em 2.6.3. A tensão instalada foi calculada a partir da deformação medida pelos extensómetros. Os valores dos factores de calibração obtidos para os provetes de aço e alumínio são apresentados nas tabelas 3.2 e 3.3, respectivamente.

Tabela 3.2 Factores de calibração F para provete de aço (MPa).

Referência do carregamento	Frequência do carregamento	
	10 Hz	25 Hz
A	0,0398406	0,0407821
B	0,0391658	0,0375063
C	0,0370554	0,0366427

Os ensaios com o provete de *nylon*® apresentaram algumas dificuldades devido à elevada deformação do material para os carregamentos aplicados. Em vários ensaios, a tinta aplicada na superfície do provete partiu, o que impossibilitou a obtenção de

resultados fiáveis. No entanto, foi possível ensaiar o provete com o carregamento de referência A, a frequências de 5 Hz e 10 Hz. Os factores de calibração encontrados são apresentados na tabela 3.4. De notar que todos os ensaios se realizaram com um valor máximo da escala do sistema analógico G de 30 mV e à temperatura ambiente de 20°C.

Tabela 3.3 Factores de calibração F para provete de alumínio (MPa).

Referência do carregamento	Frequência do carregamento	
	10 Hz	25 Hz
A	0,0128387	0,0129745
B	0,0122801	0,0129059
C	0,0122297	0,0127151

Tabela 3.4 Factores de calibração F para provete de *nylon*® (MPa).

Referência do carregamento	Frequência do carregamento	
	5 Hz	10 Hz
A	0,0108812	0,0099362

Os resultados apresentados nas tabelas 3.2 a 3.4 revelam variações do factor de calibração devidas às condições de ensaio. Para o provete de aço, a variação da frequência de carregamento de 10 Hz para 25 Hz induziu variações do factor de calibração compreendidas entre 1,1% e 4,2%, respectivamente para os carregamentos com referências C e B. No provete de alumínio, a mesma variação de frequência de carregamento provocou variações mínima e máxima do factor de calibração de 1% e 5% para os carregamentos com referências A e B, respectivamente. Os factores de calibração para o provete de *nylon*®, testado às frequências de 5 Hz e 10 Hz e com o carregamento A, diferem 8,7%.

Na mudança de carregamento a frequência constante, as variações máximas do factor de calibração verificam-se na passagem do carregamento com referência A para o de referência C. No caso do provete de aço, a variação é de 7% à frequência de 10 Hz e de 10,2% à frequência de 25 Hz. No provete de alumínio as variações máximas são de 4,7% e 2% para as frequências de 10 Hz e 25 Hz, respectivamente. As menores variações encontradas para o provete de alumínio explicam-se devido ao valor absoluto do sinal detectado pelo SPATE. Sendo a constante termoelástica do alumínio superior à do aço (alumínio: $K_m = 8,8 \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1}$; aço: $K_m = 3,5 \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1}$), torna-se evidente pela análise da equação 2.47 que, estando os dois materiais sujeitos à mesma variação

de tensão, o alumínio apresenta maior variação de temperatura. Nos ensaios realizados, tendo os dois materiais sido sujeitos aos mesmos carregamentos, o maior sinal detectado pelo SPATE corresponde ao provete de alumínio. Quanto mais elevado é o sinal, menos significativa é a influência do erro devido à resolução do sistema.

Dos ensaios realizados pode-se concluir da necessidade de calibração do sistema SPATE para as condições de ensaio a realizar. No processo de calibração deve-se utilizar o sinal de uma região do corpo sujeita a tensão elevada e constante.

3.3 Distribuição linear de tensões

Para verificar a capacidade do SPATE em reconhecer uma distribuição linear de tensões, fizeram-se ensaios com um provete sujeito a uma solicitação de flexão pura. Utilizou-se um provete de aço DIN Ck45 com 100 mm de comprimento e $25 \times 10,2$ mm² de secção. Para aplicação do carregamento, montou-se na máquina servo-hidráulica um sistema para flexão em quatro pontos, o qual é representado esquematicamente na figura 3.1. No sistema utilizado, a distância entre os pontos de aplicação das forças é ajustável sendo o contacto com o provete feito por intermédio de roletes.

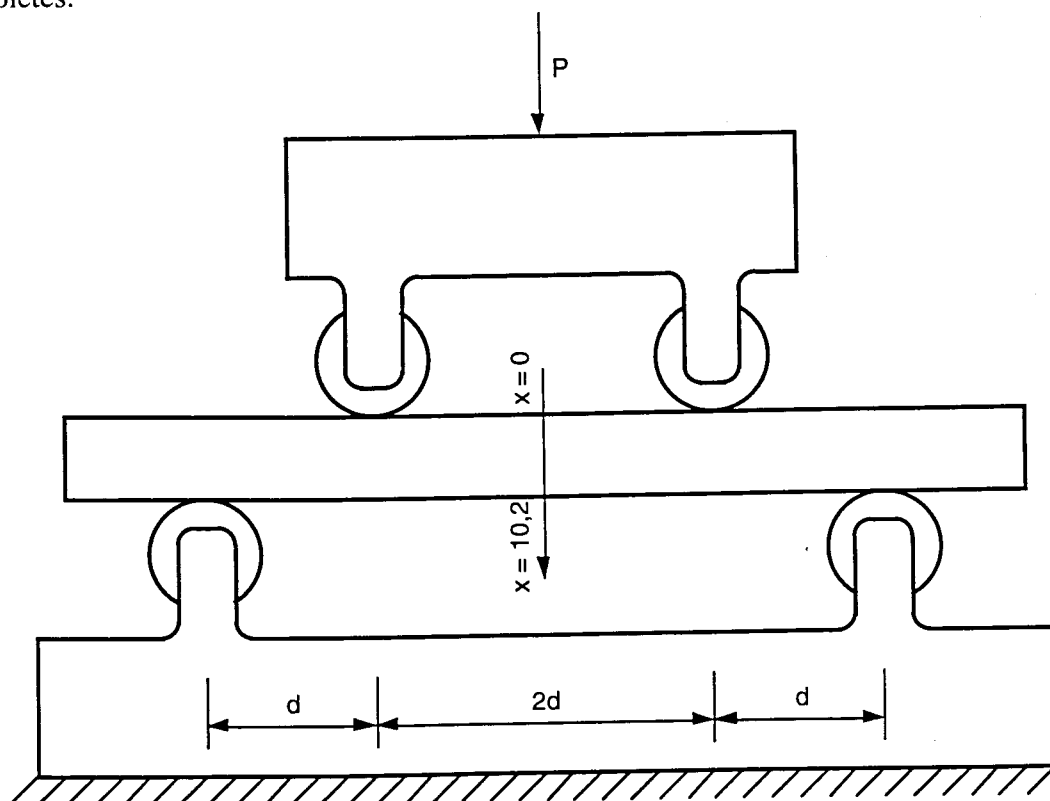


Figura 3.1 Sistema para flexão em quatro pontos.

A distância d entre os roletes foi ajustada para o valor de 21,35 mm. Os ensaios realizaram-se com o provete apoiado sobre a face mais larga e sujeito a um carregamento sinusoidal em que a força aplicada P variou entre os extremos $P_{\min} = 203$ N e $P_{\max} = 812$ N. O carregamento foi aplicado com as frequências de 10 Hz e 25 Hz.

Os testes com o SPATE consistiram em leituras lineares na face lateral do provete, na região onde o momento flector é constante. Para cada frequência de carregamento fizeram-se três leituras segundo uma linha vertical e no sentido descendente. Desprezando os valores obtidos junto dos bordos, fizeram-se regressões lineares de cada uma das leituras. As correlações obtidas são apresentadas na tabela 3.5.

Tabela 3.5 Correlações obtidas para as regressões lineares das leituras efectuadas.

Frequência (Hz)	Correlação
10	0,98773
	0,99064
	0,99445
25	0,99707
	0,99441
	0,99677

No gráfico da figura 3.2 apresenta-se a distribuição de tensões de uma das leituras efectuadas com o provete solicitado à frequência de 25 Hz. A calibração do sistema fez-se segundo o método descrito em 2.6.2, com base no cálculo da tensão máxima de flexão. Utilizando a recta da regressão linear, facilmente se determinou o valor, em unidades do sistema, correspondente à tensão máxima instalada e, consequentemente, o factor de calibração.

De notar, ainda no gráfico da figura 3.2, as zonas de elevado ruído junto aos bordos do provete. O ruído verificado é devido à resolução espacial do sistema SPATE. O diâmetro mínimo de cada ponto analisado é de 0,5 mm e depende da distância da câmara ao corpo a estudar. Nos bordos de um corpo, o sinal é afectado quando a área do ponto de leitura ultrapassa os limites do corpo.

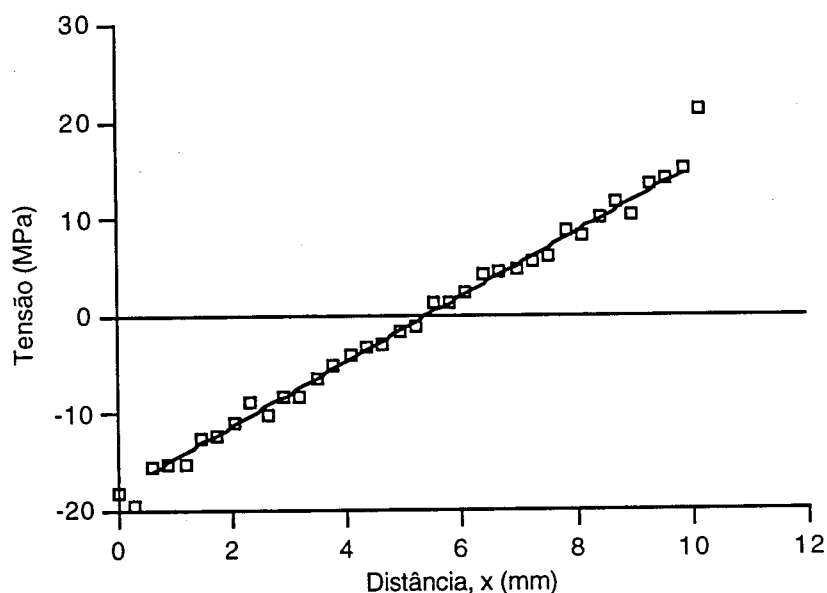


Figura 3.2 Leitura vertical com o SPATE.

Fica evidente, a partir dos ensaios realizados, a capacidade do SPATE para analisar uma distribuição linear de tensões. Torna-se também importante referir a capacidade do sistema para automaticamente reconhecer tensões tractivas e compressivas.

3.4 Distribuição de tensões em placa com furo

Para verificar a aplicabilidade do SPATE ao estudo de uma distribuição de tensões mais complexa do que as anteriormente analisadas, escolheu-se o exemplo clássico de uma placa com furo central, sujeita a um carregamento tractivo. Utilizou-se um provete de aço DIN Ck45 com a geometria representada na figura 3.3. Aplicou-se um carregamento sinusoidal com a frequência de 25 Hz e com valores de força mínima e máxima de 1875 N e 3750 N, respectivamente.

Na ligação do provete à máquina de ensaios utilizaram-se duas rótulas com o objectivo de evitar desalinhamentos entre a direcção do carregamento e a direcção longitudinal do provete. O procedimento descrito em 3.2 para controlar o alinhamento do provete foi também aqui empregue, tendo-se colocado dois extensómetros nas posições representadas na figura 3.3.

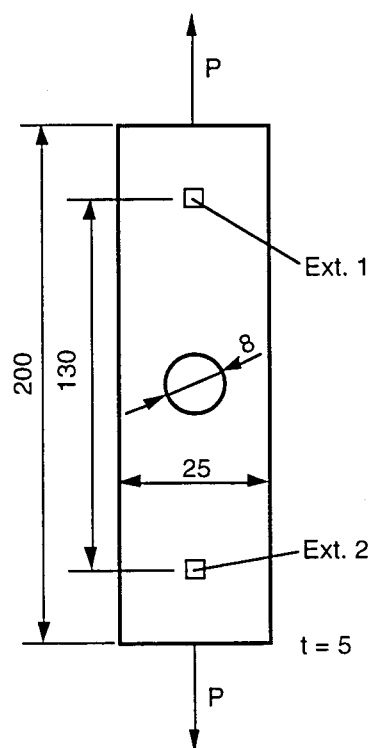


Figura 3.3 Geometria do provete utilizado.

A calibração do sistema SPATE fez-se segundo o método descrito em 2.6.3, o qual se baseia na medição da tensão num ponto do provete utilizando uma outra técnica de análise experimental de tensões. Neste caso, recorreu-se à deformação medida pelos extensómetros para calcular a tensão instalada naqueles pontos. O factor de calibração foi calculado relacionando essa tensão com o sinal da leitura do SPATE numa região próxima dos extensómetros. O factor de calibração obtido foi $F = 0,0366889$ MPa.

Os ensaios experimentais com o SPATE consistiriam em leituras lineares (horizontais e verticais) a passar pelo centro do furo e em leituras de área na zona próxima do furo. No sentido de se avaliar a qualidade dos resultados obtidos experimentalmente, fez-se uma modelação do problema pelo método dos elementos finitos (MEF) recorrendo ao programa ABAQUS. Considerou-se um modelo de estado plano de tensão composto por elementos isoparamétricos de oito nós (referência CPS8 [3]). Devido à simetria do problema, o modelo é constituído por apenas um quarto da placa, contendo as condições de fronteira apropriadas (ver figura 3.4). Criaram-se três malhas com diferentes graus de refinamento (354, 481 e 756 elementos). Na figura 3.5 é ilustrado um detalhe de uma dessas malhas. Considerou-se um modelo de material linear elástico com as propriedades indicadas na tabela 3.6.

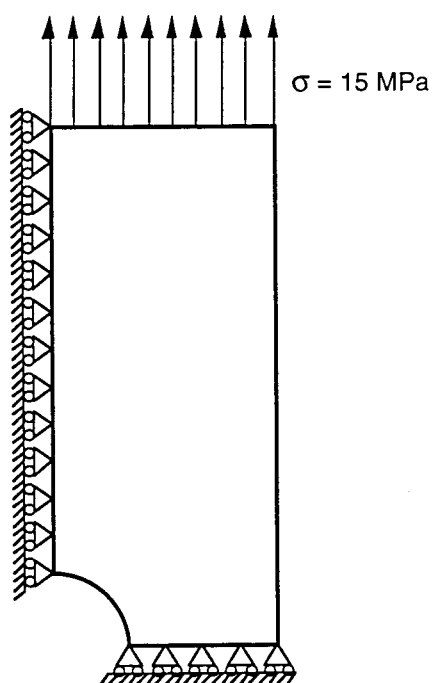


Figura 3.4 Geometria e condições de fronteira do modelo de elementos finitos.

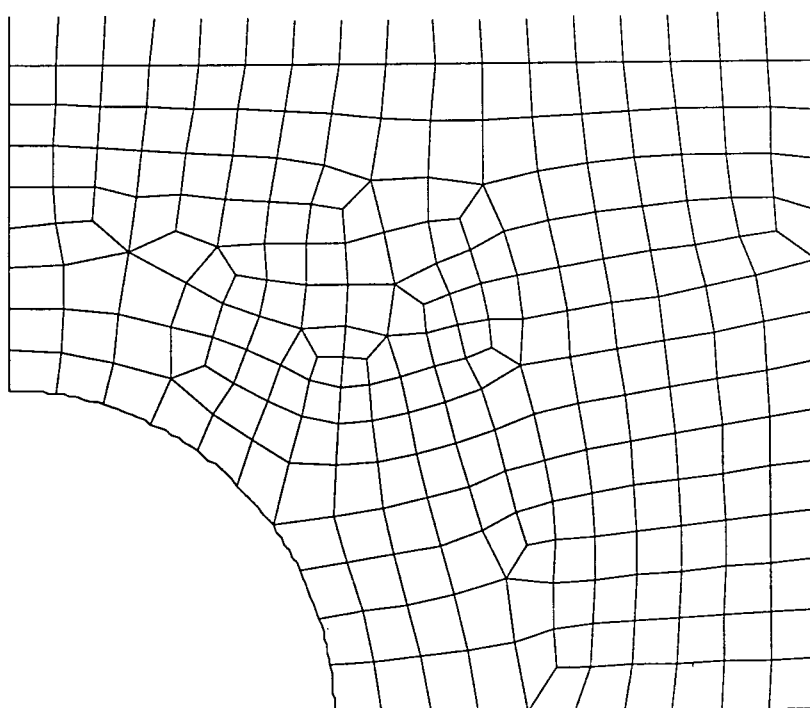


Figura 3.5 Pormenor da malha de elementos finitos com 756 elementos.

Tabela 3.6 Propriedades elásticas do material.

E (GPa)	ν
210	0,3

Para o estudo da convergência da solução com o refinamento da malha, escolheu-se comparar a distribuição de tensões ao longo de um eixo horizontal e um outro vertical, passando ambos pelo centro do furo. Na figura 3.6 representam-se esses eixos. Os gráficos das figuras 3.7 e 3.8 representam a distribuição de tensões segundo os eixos horizontal e vertical, respectivamente. Em ambos os gráficos é evidente a coincidência das soluções obtidas com as três malhas, o que significa a convergência da solução desde a malha menos refinada.

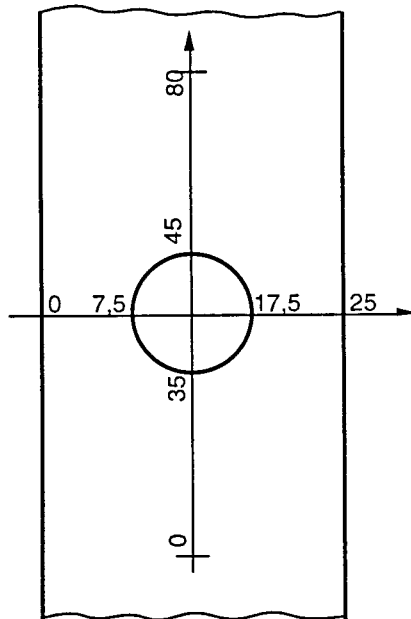


Figura 3.6 Eixos escolhidos para estudo da distribuição de tensões.

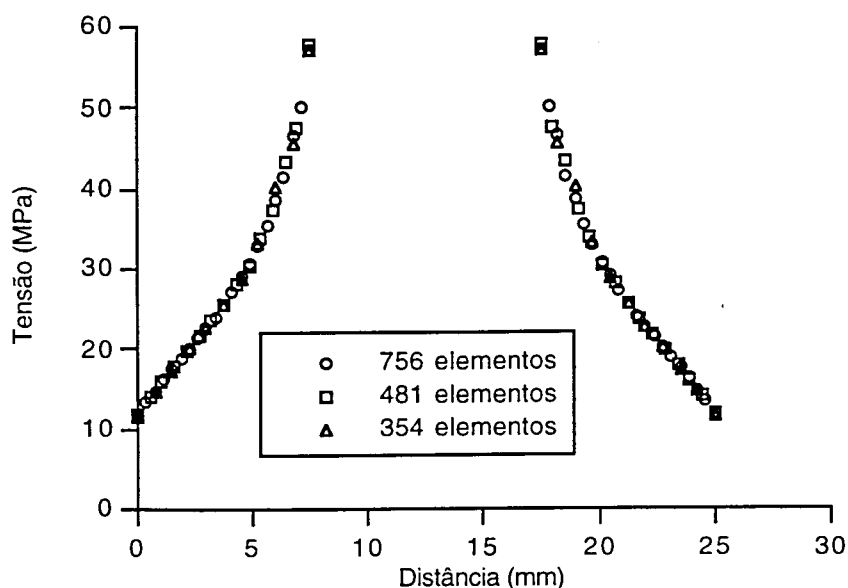


Figura 3.7 Tensões ao longo do eixo horizontal obtidas pelo MEF.

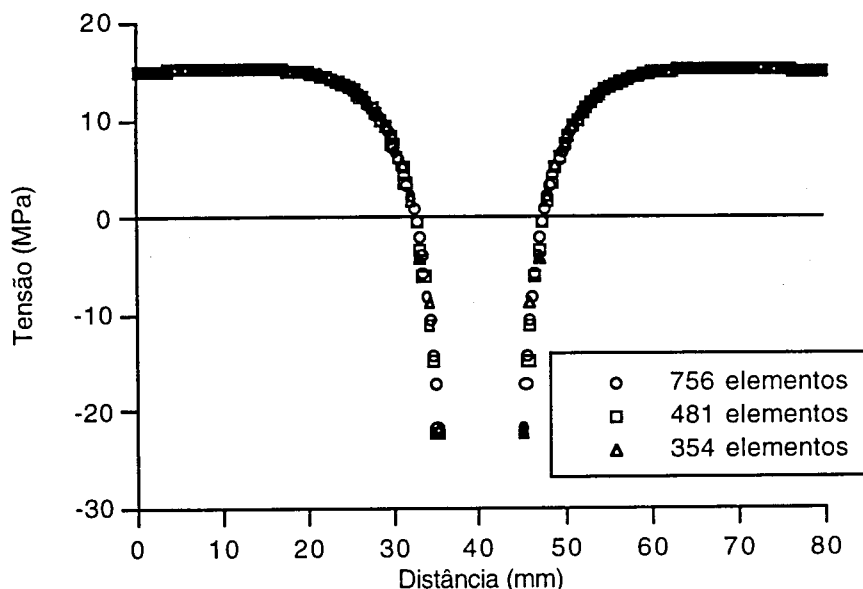


Figura 3.8 Tensões ao longo do eixo vertical obtidas pelo MEF.

As leituras lineares com o SPATE fizeram-se também segundo os eixos representados na figura 3.6. Os resultados obtidos são mostrados nos gráficos das figuras 3.9 e 3.10, respectivamente para os eixos horizontal e vertical, juntamente com as soluções do método dos elementos finitos (malha de 756 elementos). Globalmente existe uma boa aproximação entre os resultados experimentais e numéricos. No entanto, próximo do furo os resultados experimentais são afectados de ruído, o que impede a determinação fiável das tensões nessa zona. O ruído, tal como referido em 3.3, é devido à resolução espacial do SPATE e aparece quando a área do ponto de leitura inclui uma zona exterior ao provete.

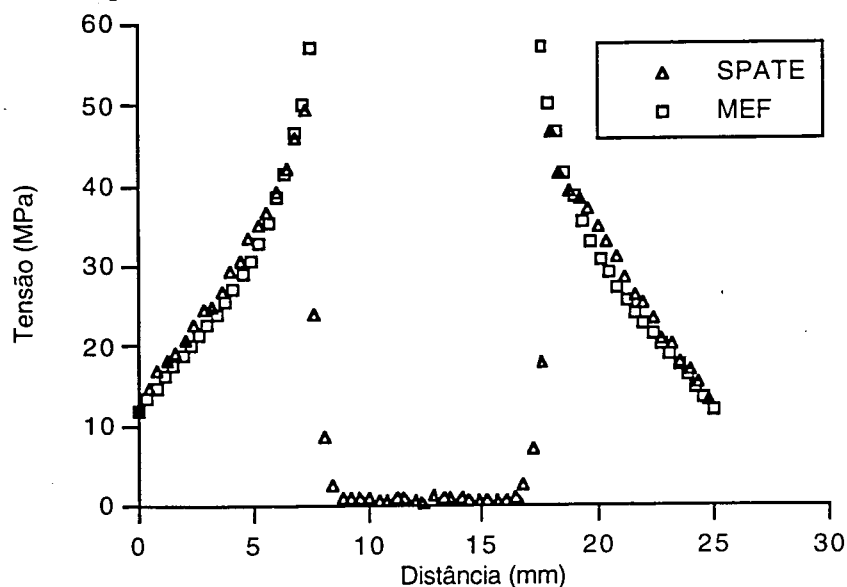


Figura 3.9 Tensões do SPATE e do MEF ao longo do eixo horizontal.

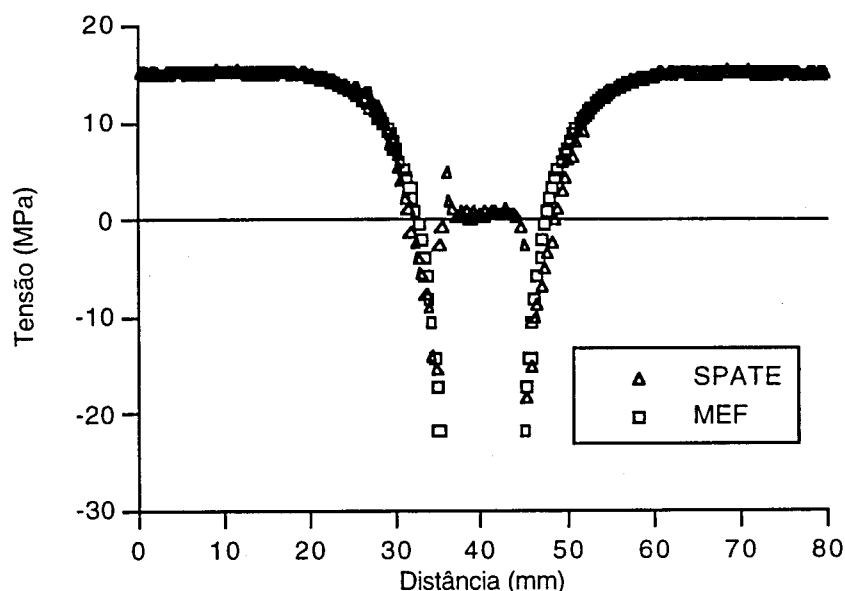


Figura 3.10 Tensões do SPATE e do MEF ao longo do eixo vertical.

Como referido anteriormente, também se fez a leitura de uma área na zona do furo com o sistema SPATE. Na figura 3.11 mostra-se as dimensões e localização dessa área rectangular. Na mesma figura é indicada a tracejado a porção dessa área correspondente aos resultados do modelo de elementos finitos. As distribuições de tensões obtidas pelo sistema SPATE e através do método dos elementos finitos (malha de 756 elementos) são apresentadas nas figuras 3.12 e 3.13, respectivamente. De notar que a distribuição de tensões resultante da análise pelo método dos elementos finitos para a área correspondente aos resultados experimentais obtém-se por simetria da distribuição de tensões apresentada na figura 3.13.

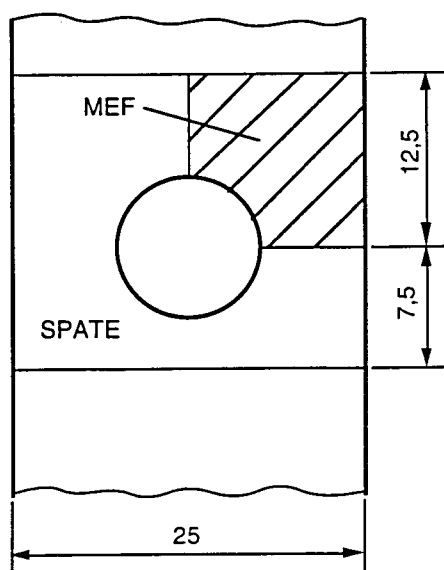


Figura 3.11 Áreas correspondentes à leitura do SPATE e aos resultados do MEF.

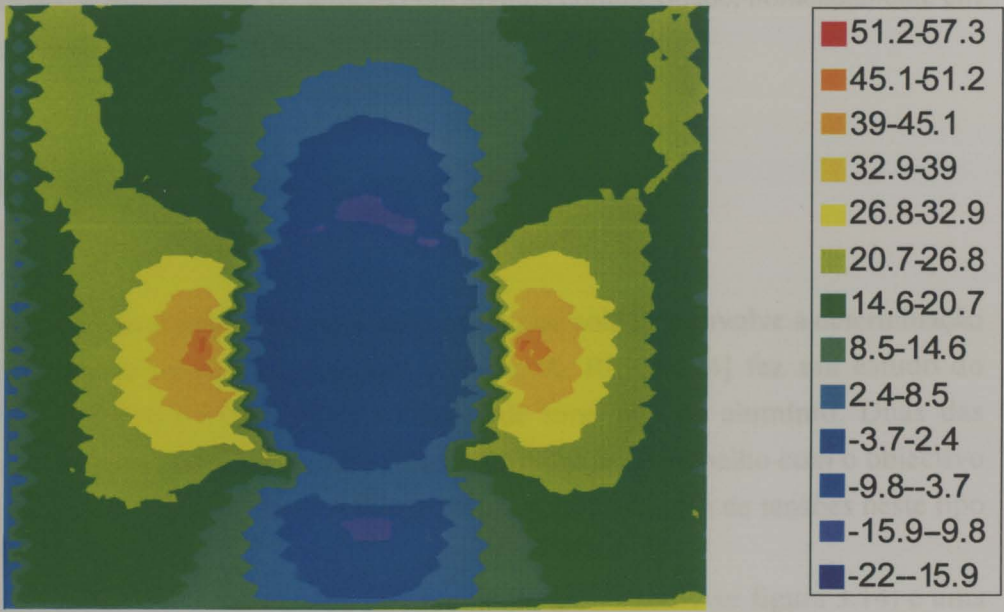


Figura 3.12 Distribuição de tensões obtidas pelo SPATE (MPa).

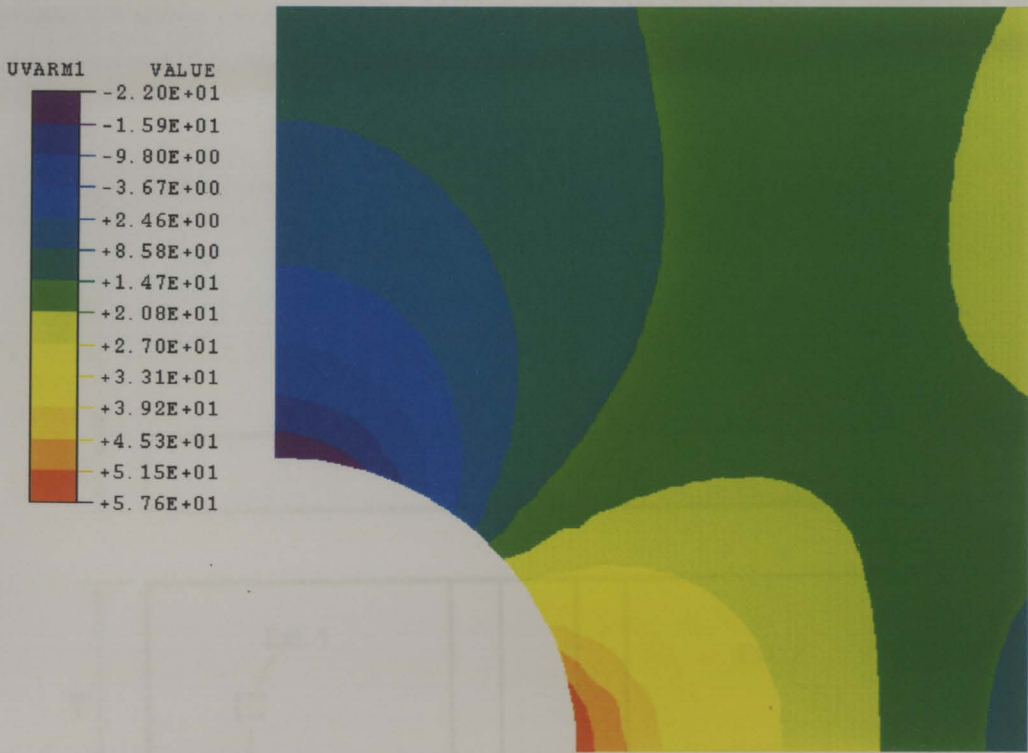


Figura 3.13 Distribuição de tensões obtidas pelo MEF (MPa).

A comparação das distribuições de tensões das figuras 3.12 e 3.13 permite concluir que existe uma boa aproximação entre os resultados experimentais e numéricos. Pode-se assim, com este exemplo, inferir a aplicabilidade do SPATE na

determinação de distribuições de tensões com alguma complexidade, nomeadamente em zonas de concentração de tensões.

3.5 Distribuição de tensões em juntas soldadas

O estudo do comportamento à fadiga de juntas soldadas envolve a determinação da distribuição de tensões nas secções críticas. A. Ribeiro [4] fez um estudo do comportamento à fadiga de juntas soldadas de uma liga de alumínio. Duas das geometrias consideradas nesse estudo foram utilizadas neste trabalho com o objectivo de se avaliar o desempenho do SPATE na análise da distribuição de tensões neste tipo de estruturas.

As geometrias seleccionadas foram uma junta de canto (ver figura 3.14) e uma junta cruciforme com transferência de carga (ver figura 3.15). O material de base é a liga de alumínio Al 6061-T651 e o material de enchimento Al Mg-5356. O processo de soldadura utilizado foi o processo MIG/manual. Detalhes sobre as condições do processo de soldadura são apresentados na referência [4].

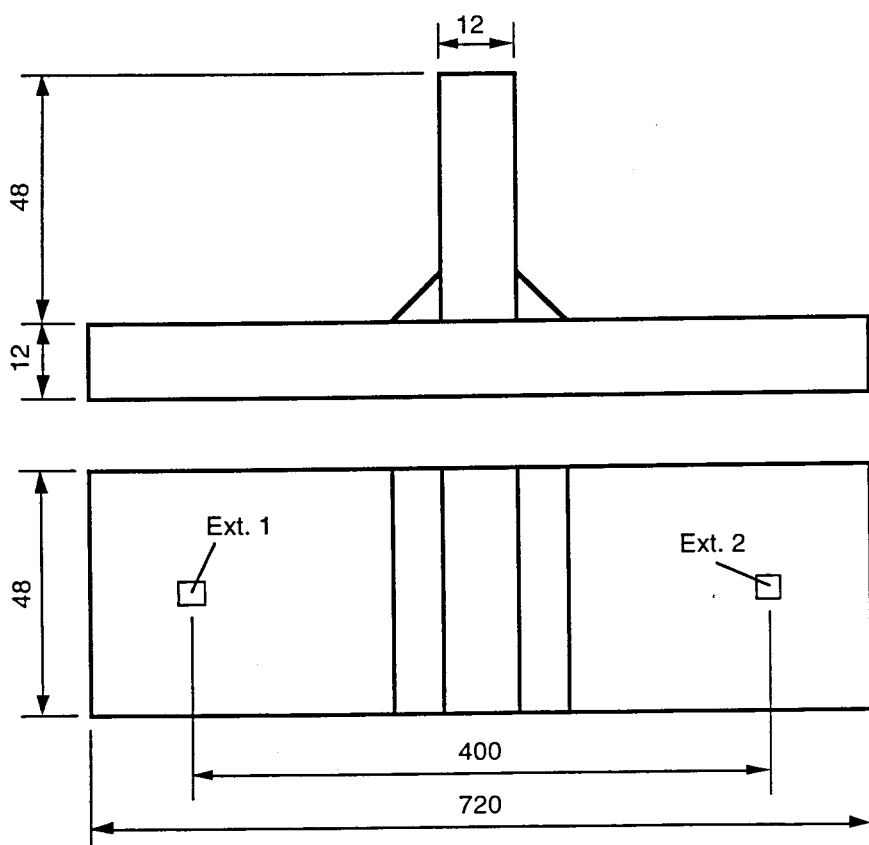


Figura 3.14 Geometria da junta de canto.

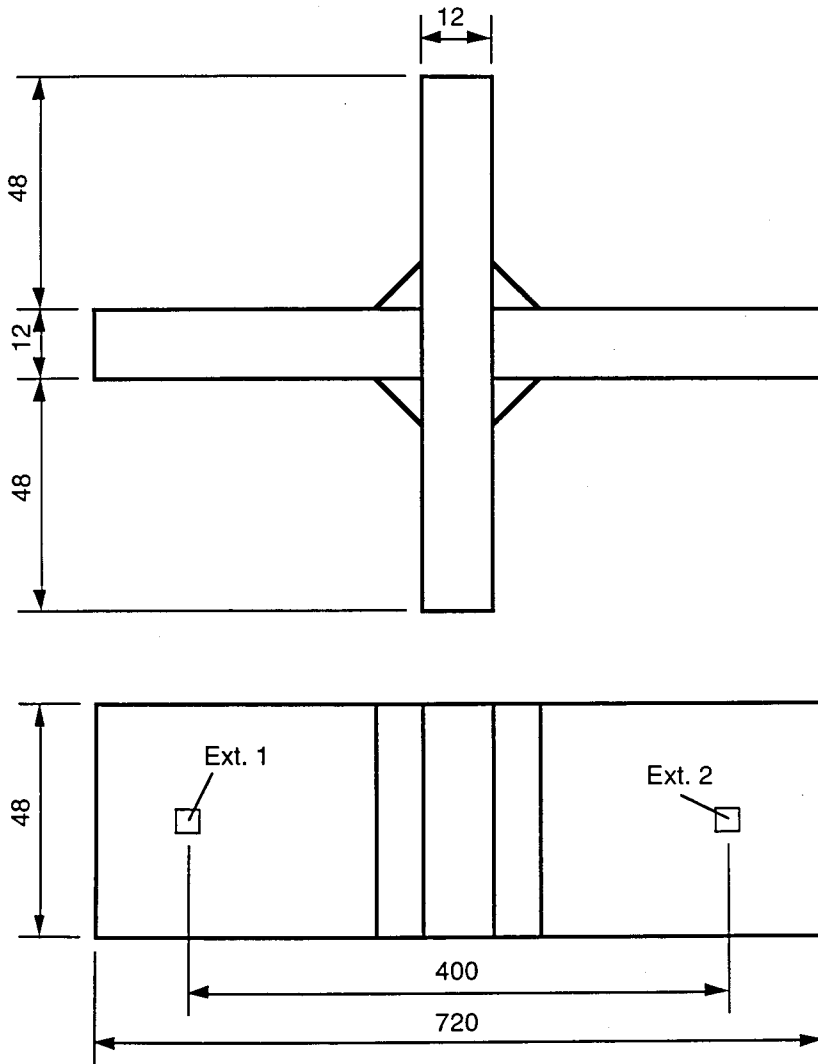


Figura 3.15 Geometria da junta criciforme com transferência de carga.

Cada uma das juntas foi submetida a um carregamento tractivo sinusoidal entre os valores limite mínimo de 4 kN e máximo de 40 kN. A frequência do carregamento foi de 25 Hz.

À semelhança do que foi feito no exemplo descrito em 3.4, a calibração do sistema SPATE fez-se a partir de uma tensão medida. Colaram-se extensómetros em cada junta, nas posições indicadas nas figuras 3.14 e 3.15. Fizeram-se três leituras com o SPATE na zona próxima de cada extensómetro e relacionou-se o valor médio dessas leituras com a tensão medida a partir do respectivo extensómetro. O valor do factor de calibração encontrado para a junta de canto foi $F = 0,127001$ MPa e para a junta criciforme com transferência de carga foi $F = 0,126991$ MPa.

Cada junta foi modelada numericamente pelo método dos elementos finitos recorrendo ao programa ABAQUS. Consideraram-se modelos de estado plano de

deformação compostos por elementos isoparamétricos de oito nós (referência CPE8 [3]). Devido à simetria existente em ambos os problemas, os modelos considerados representam apenas metade das geometrias dos provetes e contêm as devidas condições de fronteira. Nas figuras 3.16 e 3.17 apresentam-se as geometrias dos modelos e as condições de fronteira utilizadas, respectivamente para as juntas de canto e cruciforme com transferência de carga.

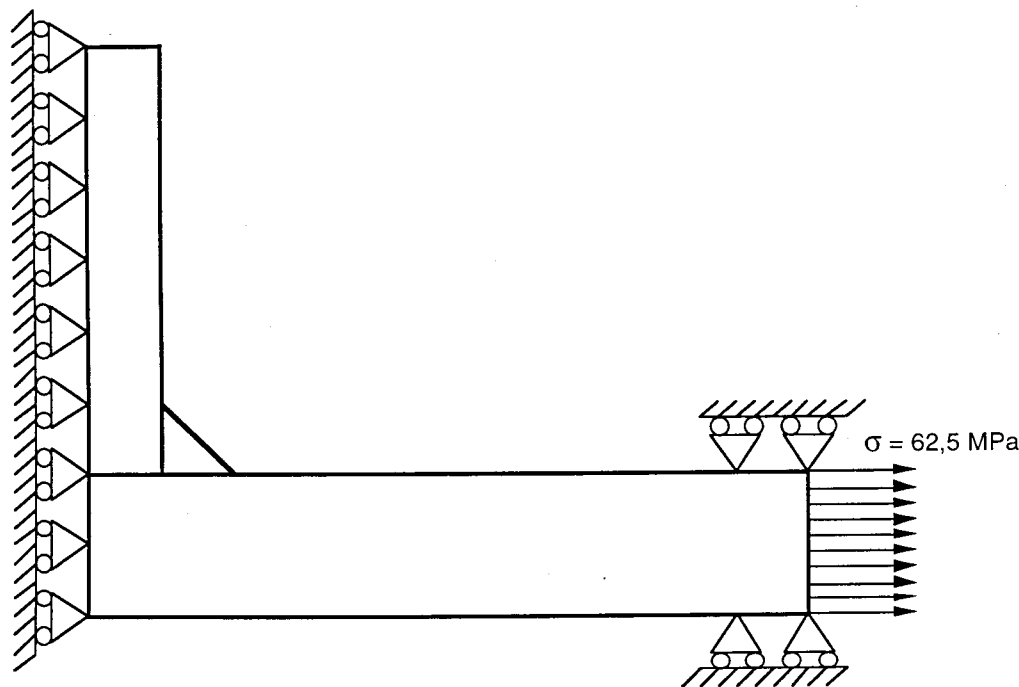


Figura 3.16 Geometria e condições de fronteira do modelo de elementos finitos da junta de canto.

O modelo material linear elástico considerado contém as propriedades indicadas na tabela 3.7.

Tabela 3.7 Propriedades elásticas do material.

E (GPa)	ν
68,9	0,33

Fez-se um estudo da sensibilidade da solução ao refinamento da malha. Para a junta de canto utilizaram-se três malhas com 255, 605 e 1055 elementos. No caso da junta cruciforme com transferência de carga construíram-se quatro malhas com 339, 1010, 1620 e 2220 elementos. Nas figuras 3.18 e 3.19 mostram-se exemplos de malhas das duas juntas.

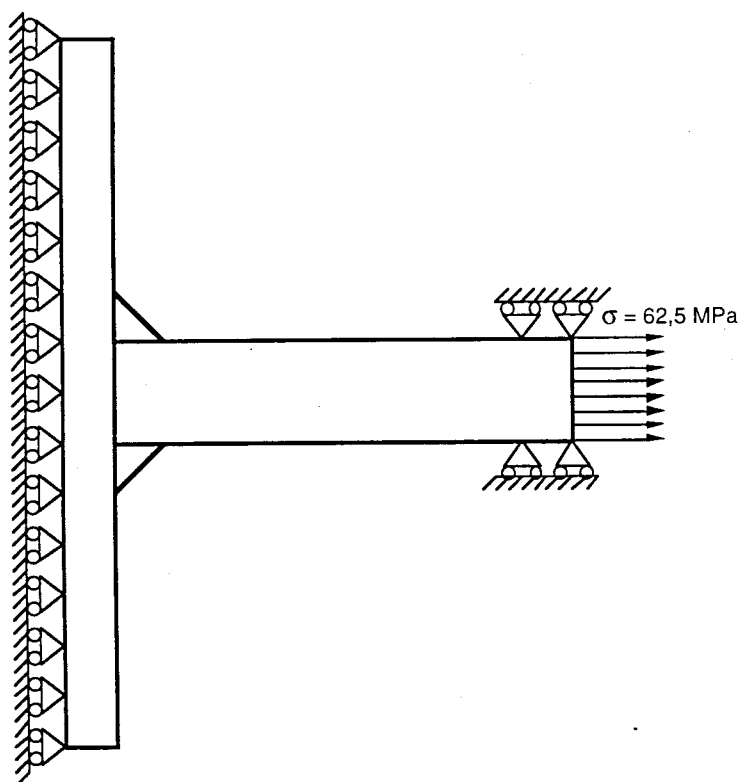


Figura 3.17 Geometria e condições de fronteira do modelo de elementos finitos da junta cruciforme com transferência de carga.

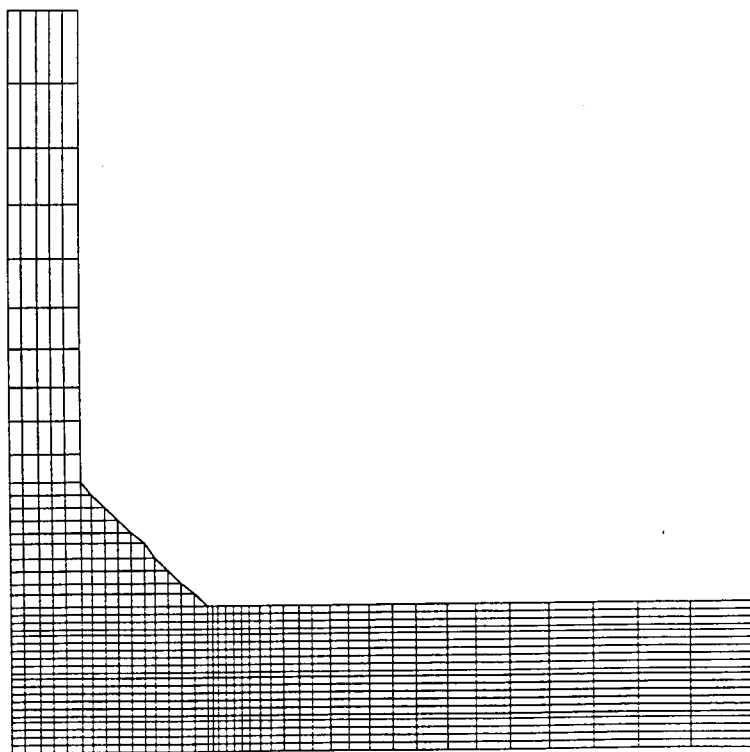


Figura 3.18 Pormenor da malha de elementos finitos da junta de canto com 1055 elementos.

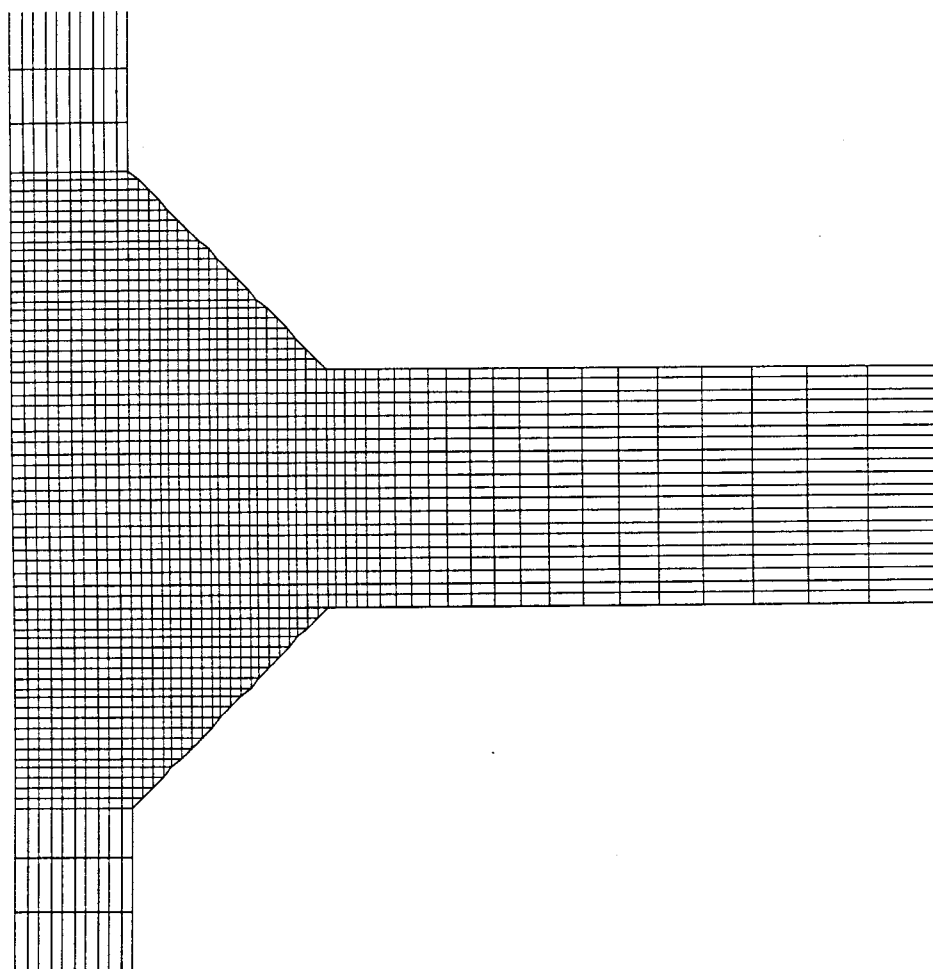


Figura 3.19 Pormenor da malha de elementos finitos da junta cruciforme com transferência de carga com 2220 elementos.

Escolheu-se estudar a distribuição de tensões nas secções que passam pela raiz dos cordões de soldadura. Nas figuras 3.20 e 3.21 indicam-se os eixos considerados para a análise de tensões. Na figura 3.22 são apresentadas as distribuições de tensões, obtidas com as várias malhas, segundo o eixo indicado na figura 3.20 e relativas à junta de canto. É visível uma boa aproximação entre as soluções obtidas com 605 e 1055 elementos, o que é indicativo da convergência da solução.

Na figura 3.23 mostram-se as distribuições de tensões obtidas com as diferentes malhas para a geometria da junta cruciforme com transferência de carga. As distribuições de tensões apresentadas referem-se ao eixo indicado na figura 3.21. Embora seja visível uma boa aproximação de todas as soluções na zona intermédia do eixo, só existe concordância nos valores da tensão máxima para as malhas de 1620 e 2220 elementos.

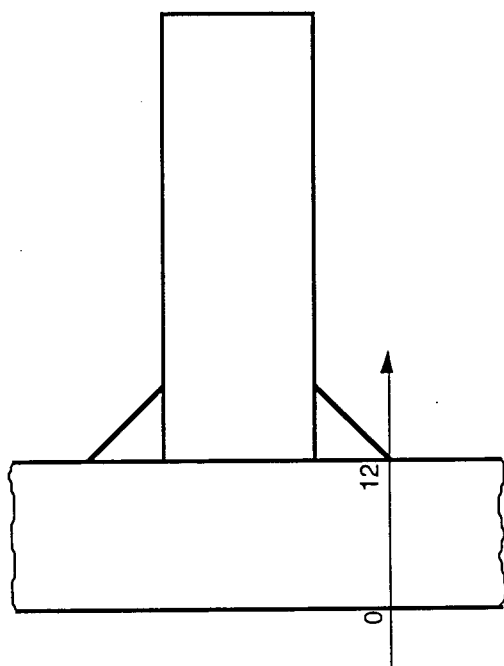


Figura 3.20 Eixo escolhido para o estudo da distribuição de tensões na junta de canto.

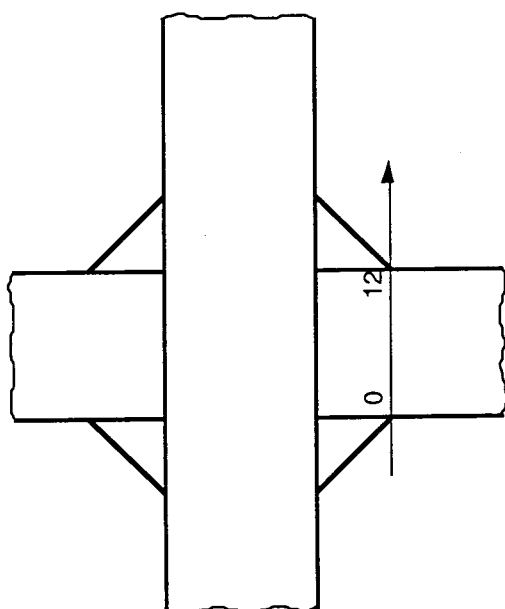


Figura 3.21 Eixo escolhido para o estudo da distribuição de tensões na junta criciforme com transferência de carga.

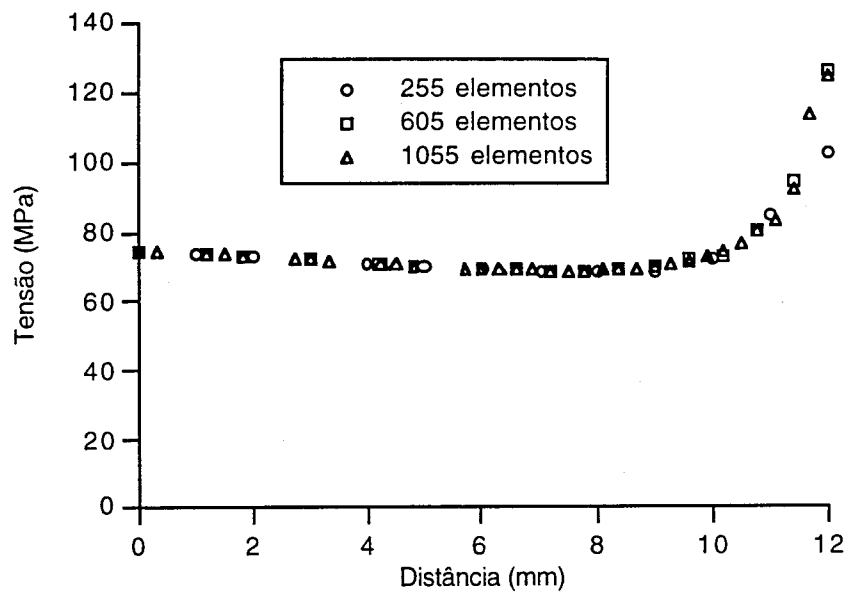


Figura 3.22 Tensões obtidas pelo MEF para junta de canto.

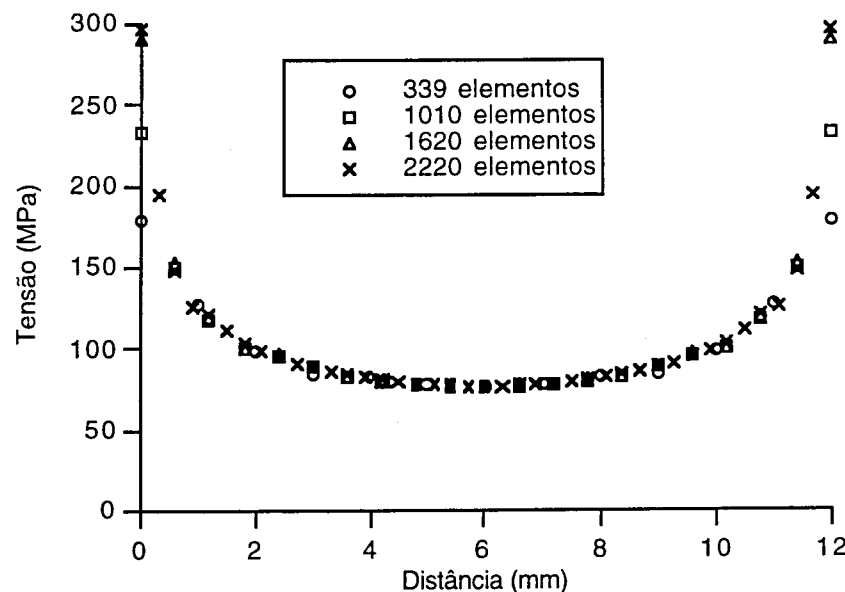


Figura 3.23 Tensões obtidas pelo MEF para junta cruciforme com transferência de carga.

Os ensaios com o SPATE consistiram em leituras lineares segundo os eixos indicados nas figuras 3.20 e 3.21. No gráfico da figura 3.24 é apresentada a distribuição de tensões obtida com o SPATE e os resultados numéricos (malha de 1055 elementos) para a junta de canto. De uma forma geral, há uma boa aproximação entre as duas curvas.

O resultado experimental relativo à junta cruciforme com transferência de carga é apresentado na figura 3.25, juntamente com o resultado numérico obtido com a malha

de 2220 elementos. Neste caso, a tensão máxima obtida pelo SPATE é bastante inferior à obtida numericamente. Novamente, esta tensão aparece no limite do provete o que se apresenta como uma dificuldade para o sistema SPATE devido à sua resolução espacial.

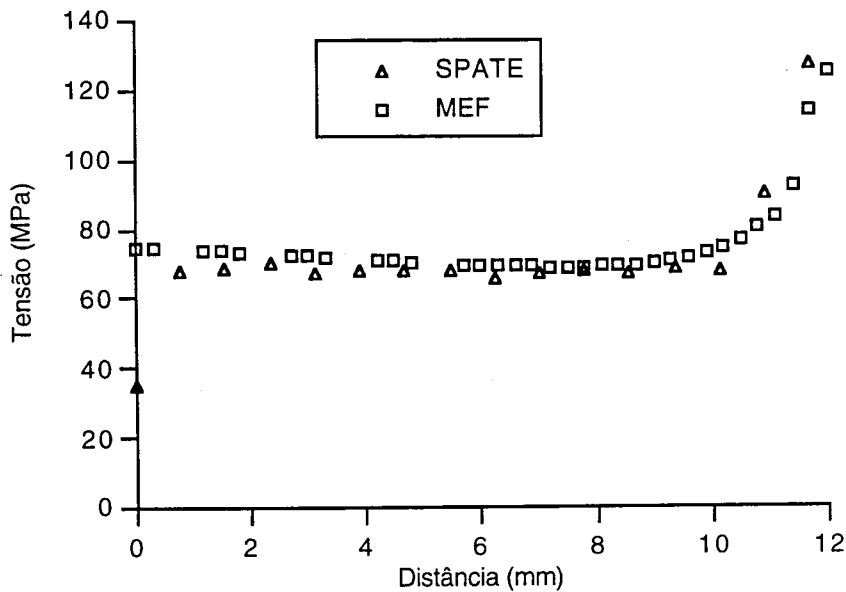


Figura 3.24 Distribuição de tensões obtidas pelo SPATE e pelo MEF para a junta de canto.

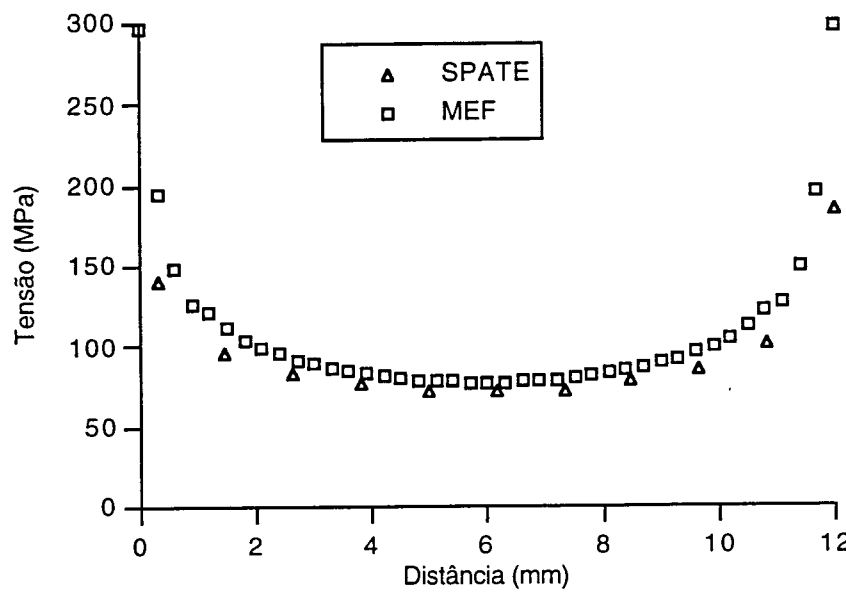


Figura 3.25 Distribuição de tensões obtidas pelo SPATE e pelo MEF para a junta cruciforme com transferência de carga.

3.6 Detecção de defeitos escondidos

O estudo descrito neste subcapítulo tem o objectivo de avaliar a utilização do SPATE na detecção de defeitos escondidos. Uma aplicação prática com interesse industrial é a detecção de fendas superficiais em juntas de sobreposição simples rebitadas. As fendas superficiais que normalmente aparecem nesse tipo de juntas iniciam-se nas faces em contacto, ou seja, nas faces invisíveis.

Neste estudo utilizaram-se placas de alumínio Al2024-T3 alclad com fendas superficiais criadas de forma artificial. A geometria dos provetes, incluindo a geometria do defeito, é apresentada na figura 3.26. As fendas foram maquinadas pelo processo de electroerosão com um eléctrodo de cobre rectangular de 0,2 mm de espessura. Na tabela 3.8 são apresentadas as dimensões das fendas consideradas.

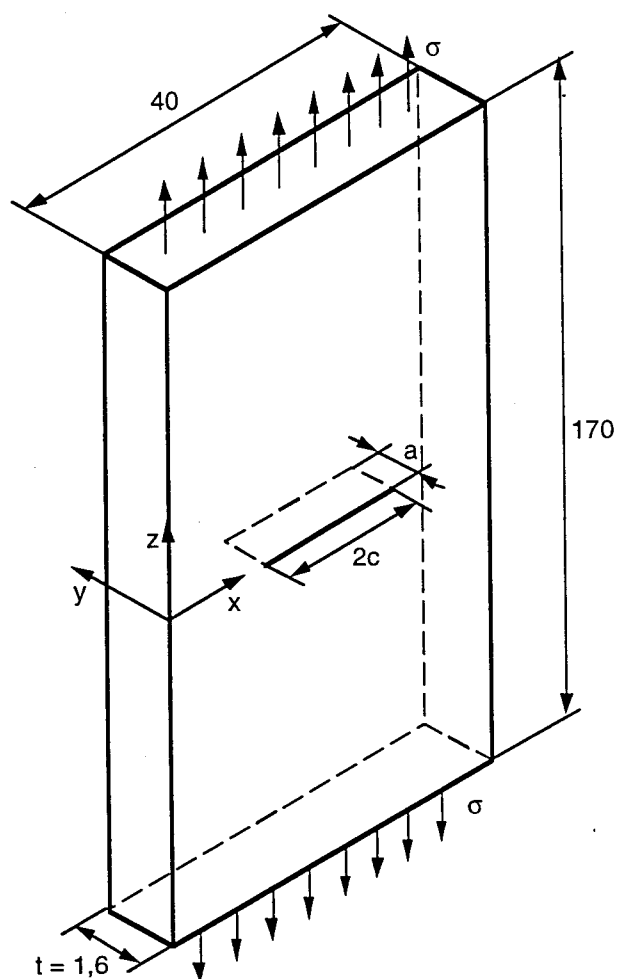


Figura 3.26 Geometria dos provetes.

Tabela 3.8 Dimensões das fendas utilizadas ($2c = 12 \text{ mm}$).

Provete	a (mm)	a/t
1	0,2	0,125
2	0,4	0,250
3	0,6	0,375
4	0,8	0,500
5	1,0	0,625
6	1,2	0,750
7	1,4	0,875
8	1,6	1,000

Os provetes foram submetidos a um carregamento sinusoidal entre os valores $P_{\min} = 2 \text{ kN}$ e $P_{\max} = 30 \text{ kN}$, à frequência de 15 Hz. A ligação à máquina de ensaios foi feita através de amarras que fixavam os provetes numa extensão de 25 mm.

Fizeram-se leituras de áreas com o SPATE na face oposta àquela onde existia a fenda superficial. As áreas foram marcadas com a ajuda de máscaras rectangulares de 35 mm x 10 mm para os três primeiros provetes e de 35 mm x 20 mm para os restantes provetes, de forma a garantir que o centro dessas áreas coincidissem com o centro da fenda. A calibração do SPATE foi feita utilizando o processo de calibração teórico descrito em 2.6.1. O factor de calibração encontrado foi $F = 0,039585 \text{ MPa}$.

3.6.1 Resultados experimentais

As leituras de área obtidas com o SPATE não indicam qualquer perturbação do estado de tensão para os provetes 1 e 2 ($a/t = 0,125$ e $a/t = 0,250$, respectivamente). No caso do provete 3 ($a/t = 0,375$) já se verificam alterações na distribuição de tensões, o que é indicativo da presença da fenda. Na figura 3.27 apresenta-se essa distribuição de tensões sendo os valores da legenda dados em MPa.

As leituras para os provetes 1 a 4 ($a/t = 0,125$ a $a/t = 0,5$) são aproximadamente simétricas. Para os restantes provetes já não existe simetria, como se pode verificar na figura 3.28 relativa à leitura para o provete 6 ($a/t = 0,75$). Este tipo de distribuição de tensões pode ser indicativo de propagação de fenda, por fadiga, durante a realização do ensaio. Os provetes 4 a 7 foram posteriormente traccionados até à rotura para se poder verificar a existência ou não de propagação de fadiga a partir da extremidade da fenda artificial. A análise ao microscópio (20x) da superfície de fractura revelou a existência

de fractura dúctil em toda a secção resistente do provete 4 e uma superfície plana sem estricção próxima da fenda artificial para os restantes provetes, provavelmente indicando a presença de um processo de fadiga. Para o objectivo deste estudo e tendo em conta a possibilidade assinalada de alteração da geometria do defeito artificial no decurso dos ensaios para os provetes com fendas de maior profundidade ($a/t \geq 0,625$) dever-se-á considerar válidos apenas os resultados relativos aos provetes 1 a 4 ($a/t = 0,125$ a $a/t = 0,5$).



Figura 3.27 Leitura do SPATE no provete 3 ($a/t = 0,375$), 35 mm x 10 mm (MPa).

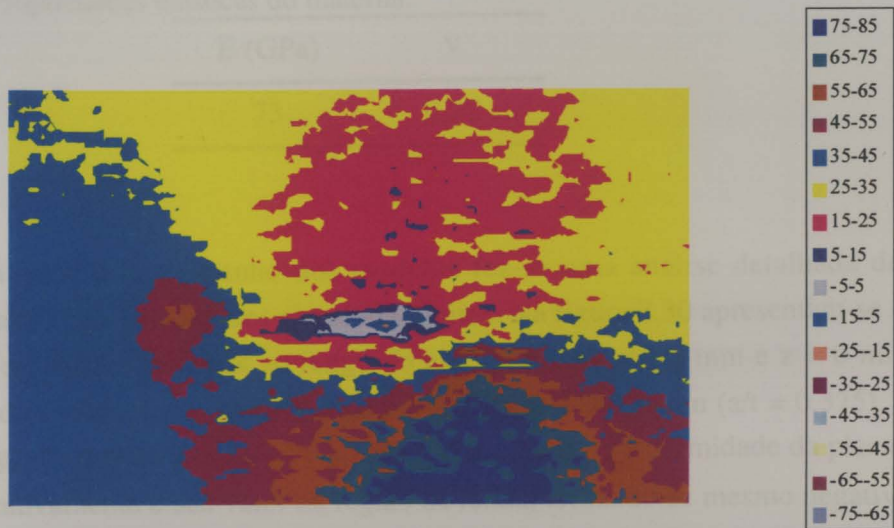


Figura 3.28 Leitura do SPATE no provete 6 ($a/t = 0,75$), 35 mm x 20 mm (MPa).

3.6.2 Análise pelo método dos elementos finitos

O problema foi também estudado pelo método dos elementos finitos, recorrendo ao programa ABAQUS. Construíram-se malhas tridimensionais com elementos paralelepípedicos de vinte nós (referência C3D20 [3]). Devido à simetria do problema considerou-se apenas um quarto de placa (a parte superior esquerda do provete representado na figura 3.26) juntamente com as devidas condições de fronteira.

Os nós pertencentes ao plano de simetria $z = 0$ mm estão impedidos de se deslocarem na direcção z , excepto os pertencentes à face superior da fenda que estão livres de se moverem em qualquer direcção. Os nós do plano de simetria $x = 20$ mm não se podem deslocar na direcção x e os nós pertencentes à zona onde as amarras apertam o provete só podem deslocar-se na direcção z .

As malhas criadas têm todas o mesmo número de elementos (6750 elementos, 31154 nós) embora a sua distribuição seja função da profundidade da fenda. Na figura 3.29 apresenta-se um detalhe de uma das malhas utilizadas. Convém aqui referir que os cantos das fendas superficiais são ligeiramente arredondados e que os modelos não incluem esse detalhe.

Fizeram-se análises linear elásticas. Consideraram-se as propriedades elásticas do material apresentadas na tabela 3.9. Aplicou-se uma tensão de tracção de 39,2 MPa, a qual corresponde à amplitude de tensão utilizada nos ensaios experimentais.

Tabela 3.9 Propriedades elásticas do material.

E (GPa)	ν
73	0,32

Para avaliar o desempenho dos modelos fez-se uma análise detalhada dos resultados obtidos pelo método dos elementos finitos. Na figura 3.30 apresentam-se as distribuições de tensões normais ao longo do eixo x , para $y = 1,6$ mm e $z = 0$ mm, correspondendo a uma placa com fenda de profundidade $a = 0,6$ mm ($a/t = 0,375$). A tensão σ_{zz} é igual à tensão remota aplicada na proximidade da extremidade da placa e reduz significativamente o seu valor na região da fenda, tornando-se mesmo negativa. Tal deve-se às tensões de flexão locais resultantes da presença da fenda superficial, as quais aumentam com o aumento da profundidade da fenda. Ainda relativamente à tensão σ_{zz} constata-se que, a partir de um certo valor de z , esta tensão é constante e igual à tensão remota para qualquer valor de x .

Na figura 3.30 a tensão σ_{yy} é nula para todos os valores de x visto ser perpendicular à face do provete.

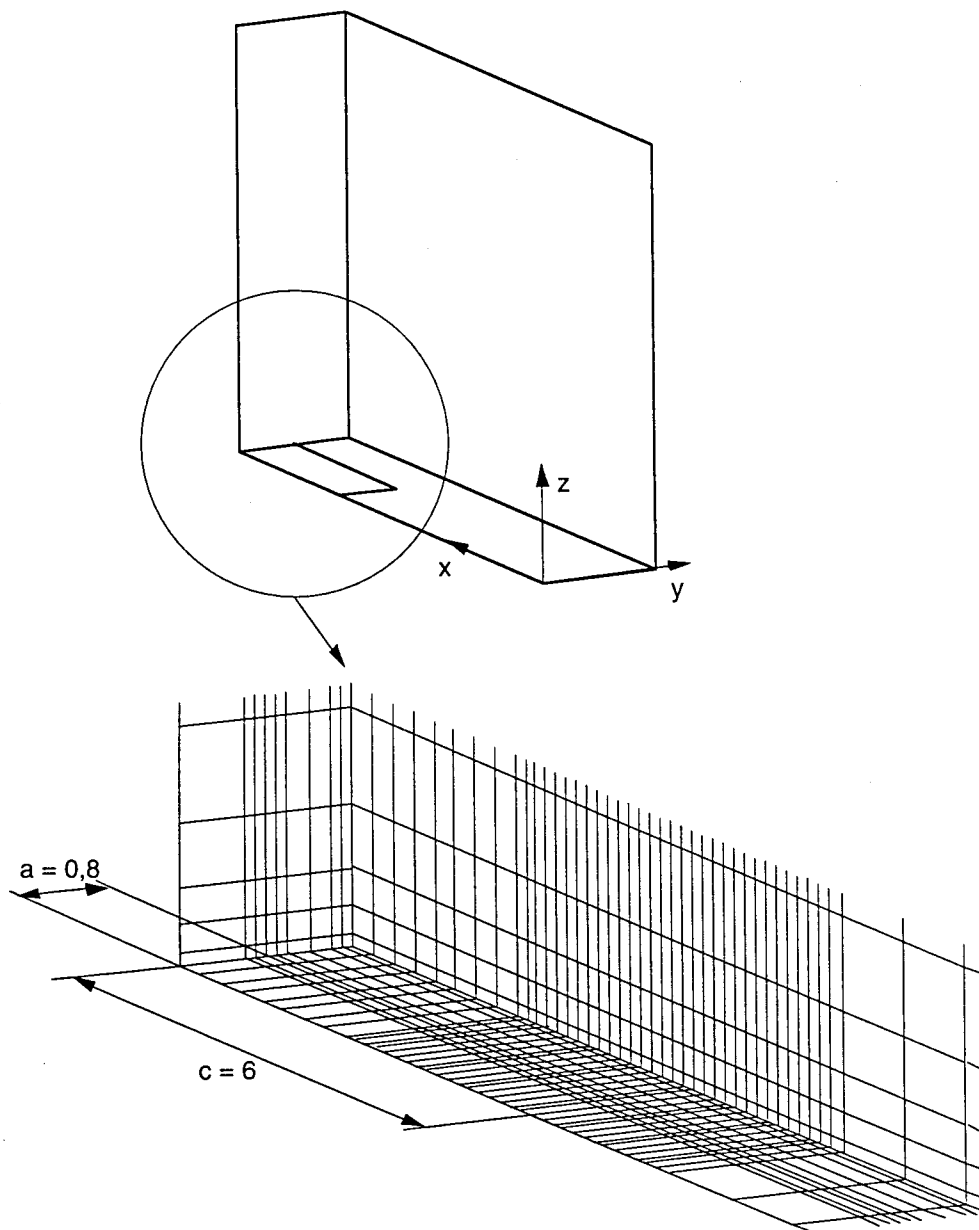


Figura 3.29 Detalhe da malha utilizada para a placa com fenda de profundidade $a = 0,8$ mm.

Finalmente, a tensão σ_{xx} é nula no bordo livre da placa e, depois de um pequeno aumento, torna-se negativa na região da fenda. Para uma placa com um furo central sujeita a uma tensão remota σ , a tensão σ_{xx} imediatamente acima do furo é igual a $-\sigma$: um comportamento semelhante, embora com valores de tensão diferentes, é expectável para uma placa com uma fenda de penetração total. Os resultados obtidos pelo método

dos elementos finitos nesse caso confirmam esse comportamento, tal como pode verificar-se pela distribuição de tensões σ_{xx} ao longo do eixo x , para $y = 1,6$ mm e $z = 0$ mm, apresentada na figura 3.31.

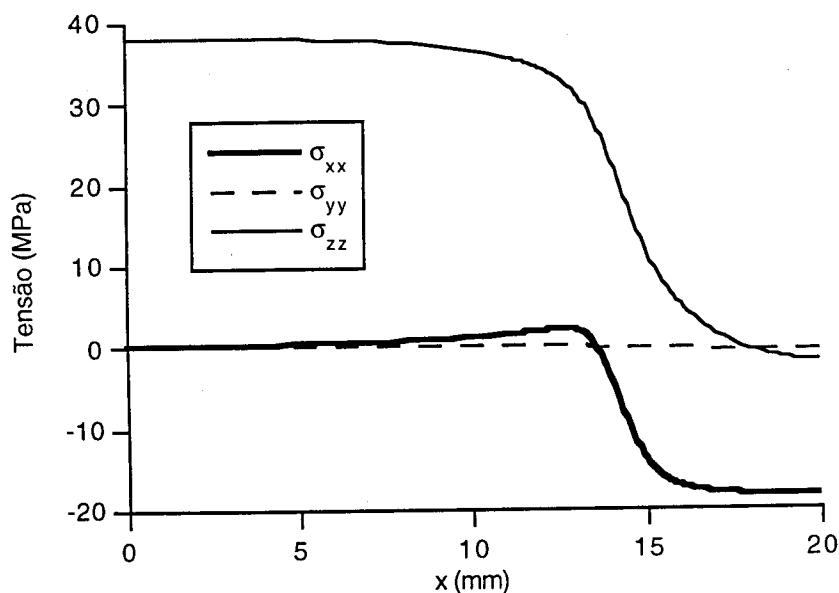


Figura 3.30 Distribuições de tensões para placa com fenda de profundidade $a = 0,6$ mm ($y = 1,6$ mm, $z = 0$ mm).

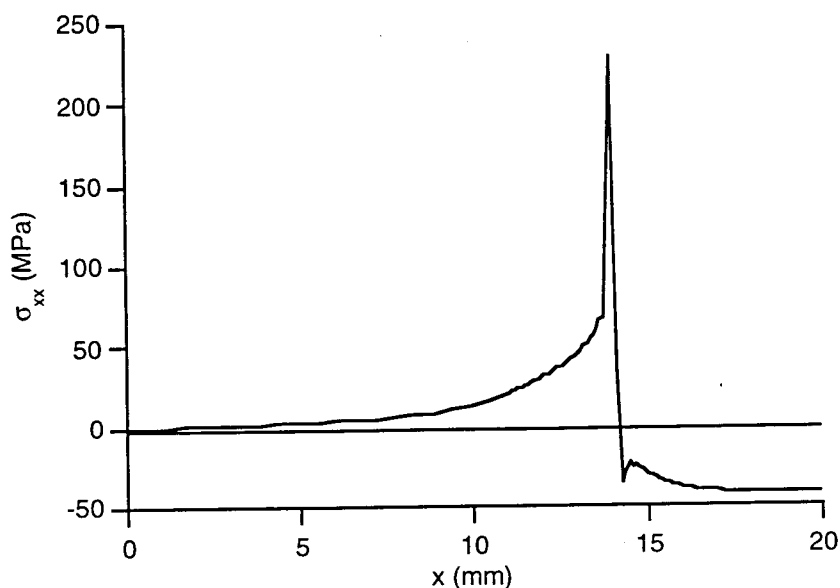


Figura 3.31 Distribuição da tensão σ_{xx} para placa com fenda de penetração total ($y = 1,6$ mm, $z = 0$ mm).

Na figura 3.32 apresenta-se, numa representação tridimensional, a distribuição do primeiro invariante das tensões no plano $y = 1,6$ mm, para uma placa com fenda de profundidade $a = 0,6$ mm ($a/t = 0,375$). É evidente nessa figura que existe um elevado gradiente de tensões na zona próxima da fenda. Após essa perturbação a tensão atinge um valor constante e igual à tensão remota aplicada.

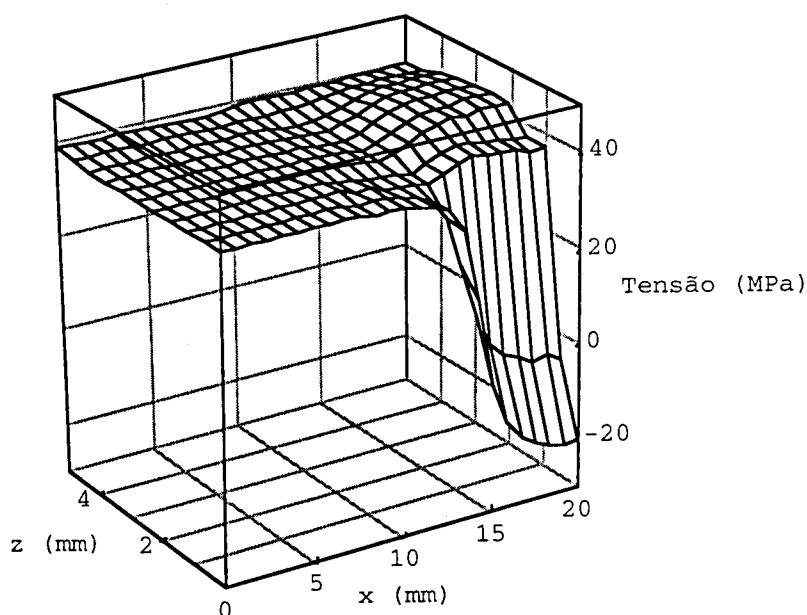


Figura 3.32 Distribuição do primeiro invariante das tensões para placa com fenda de profundidade $a = 0,6$ mm ($y = 1,6$ mm).

3.6.3 Discussão

A análise dos resultados obtidos pelo SPATE revela que é possível detectar uma fenda superficial desde que esta tenha um tamanho mínimo. Na figura 3.33 apresentam-se os resultados experimentais ao longo do eixo x , para $y = 1,6$ mm e $z = 0$ mm e para placas com fendas de profundidades 0,2 mm a 0,8 mm ($a/t = 0,125$ a $a/t = 0,5$). Nessa figura é possível identificar uma modificação de comportamento para a fenda de profundidade 0,6 mm ($a/t = 0,375$) comparando com as fendas menos profundas. Essa perturbação aparece mais acentuada no caso da fenda de profundidade 0,8 mm e verificou-se que cresce com a profundidade da fenda.

As distribuições de tensões ao longo do eixo x obtidas pelo método dos elementos finitos variam consideravelmente para diferentes valores de z , na região

próxima da fenda. Esse comportamento aparece ilustrado na figura 3.32 e pode ser verificado com mais detalhe nas figuras 3.34 e 3.35. Estas figuras mostram a distribuição de tensões ao longo do eixo x para diferentes valores de z e para os casos de profundidade de fenda 0,4 mm ($a/t = 0,25$) e 0,8 mm ($a/t = 0,5$), respectivamente.

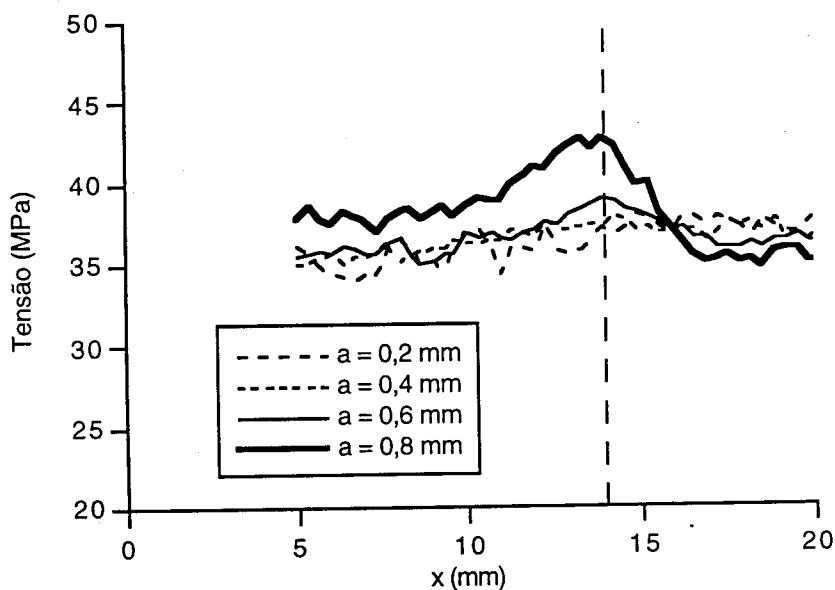


Figura 3.33 Resultados experimentais ao longo do eixo x , para $z = 0$ mm; $x = 14$ mm corresponde ao ponto inicial da fenda e $x = 20$ mm ao eixo de simetria.

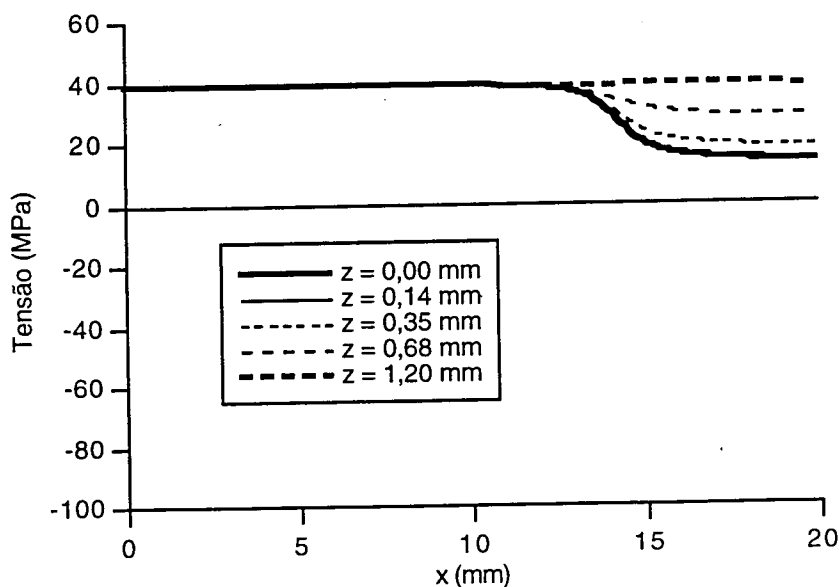


Figura 3.34 Distribuições de tensões ao longo do eixo x para diferentes valores de z e para uma placa com fenda de profundidade 0,4 mm ($y = 1,6$ mm).

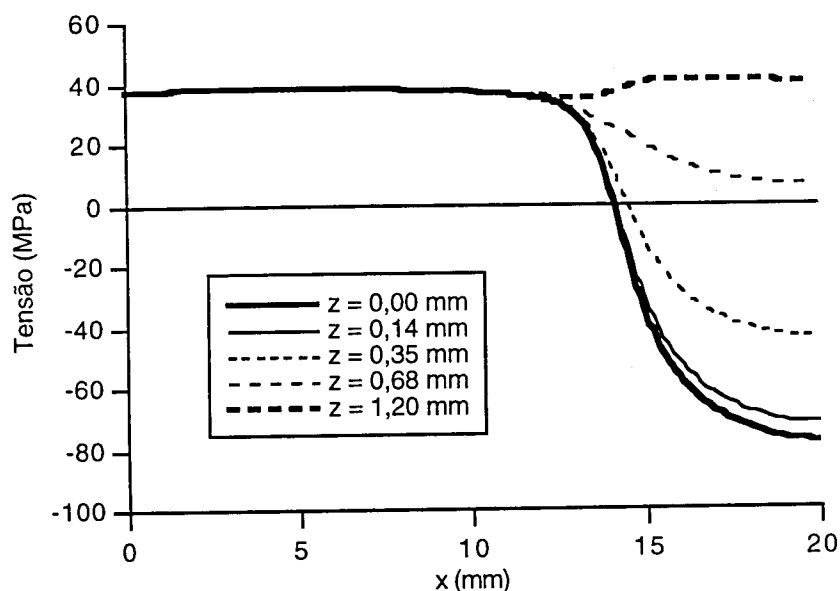


Figura 3.35 Distribuições de tensões ao longo do eixo x para diferentes valores de z e para uma placa com fenda de profundidade 0,8 mm ($y = 1,6$ mm).

O gradiente de tensões muito localizado é um factor negativo para a correcta determinação do estado de tensão com o SPATE. Devido ao diâmetro não desprezável do ponto de leitura, a tensão obtida com o SPATE representa um valor médio das tensões na área ocupada pelo ponto. Uma vez que o diâmetro do ponto de leitura utilizado nestes testes foi 0,77 mm, não se pode esperar que as leituras do SPATE correspondam à verdadeira distribuição de tensões na região próxima da fenda.

Devido ao elevado gradiente de tensões referido atrás, os resultados do método dos elementos finitos não são directamente comparáveis com as leituras do SPATE. No entanto, foi possível demonstrar que, nas condições utilizadas neste estudo, o SPATE tem a capacidade de detectar o aparecimento de uma fenda escondida desde que esta tenha um tamanho mínimo.

3.7 Iniciação e propagação de fendas de fadiga

Sendo a análise experimental de tensões baseada no efeito termoelástico particularmente interessante para o estudo de corpos sujeitos a carregamentos cíclicos, parece razoável estudar a aplicabilidade desta técnica à detecção da iniciação e

monitorização da propagação de fendas de fadiga. Com esse objectivo, planeou-se um ensaio onde fosse possível utilizar simultaneamente o SPATE e um sistema óptico para acompanhamento da propagação de uma fenda de fadiga.

Utilizou-se uma placa rectangular, com dois entalhes laterais, de aço DIN Ck45. A geometria e dimensões do provete estão representados na figura 3.36. Montou-se sobre a máquina de ensaios um dispositivo óptico para visualização e medição do comprimento de fendas. Esse dispositivo é composto por uma luneta, com resolução de 0,01 mm, apoiada numa base deslizante equipada com um comparador de deslocamentos com a mesma resolução. Posicionou-se a luneta de forma a ser possível visualizar a zona do provete onde era mais provável o aparecimento de fendas de fadiga, ou seja, a zona dos entalhes laterais. A câmara do sistema SPATE foi colocada do outro lado do provete.

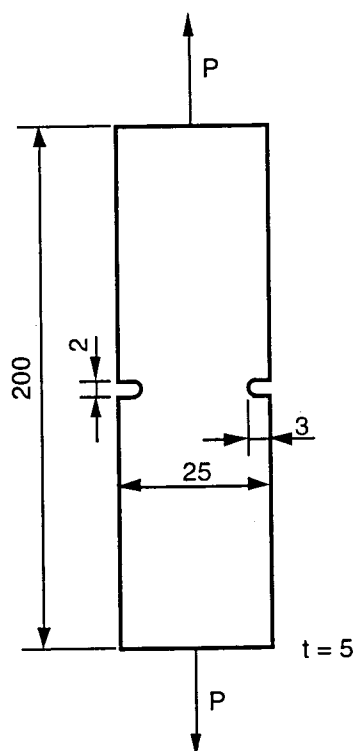


Figura 3.36 Placa com entalhes laterais.

Iniciou-se o ensaio solicitando o provete com um carregamento cíclico tractivo com força máxima relativamente reduzida, para não dar origem ao aparecimento de fendas de fadiga. Fez-se uma leitura linear com o SPATE ao longo do eixo representado na figura 3.37.

Seguidamente, aumentou-se significativamente o valor da força máxima aplicada, para dar origem ao aparecimento de fendas de fadiga. Apontou-se a câmara do sistema SPATE para a extremidade de um dos entalhes do provete e esperou-se que o

signal detectado sofresse alguma alteração. No momento em que isso sucedeu (300000 ciclos), parou-se a máquina de ensaios e observou-se com a luneta a existência de uma fenda iniciada na extremidade de um dos entalhes. Reiniciou-se o ensaio utilizando novamente o carregamento com carga máxima menos elevada e fez-se uma leitura com o SPATE segundo o eixo indicado na figura 3.37.

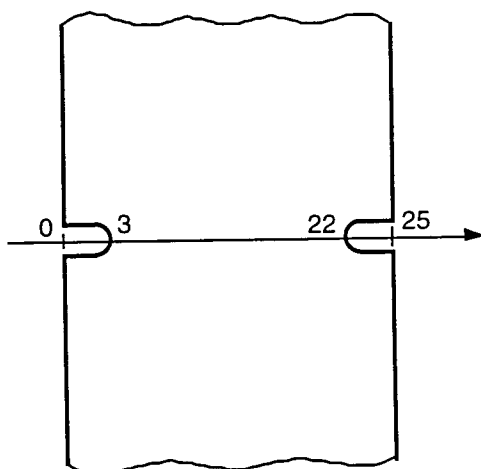


Figura 3.37 Eixo considerado para leituras do SPATE.

As leituras lineares do SPATE estão representadas no gráfico da figura 3.38. Nas zonas inicial e final de ambas as leituras verifica-se a existência de ruído. Esse ruído é devido à interferência das paredes dos entalhes no sinal. Para a primeira leitura verificam-se dois picos, com aproximadamente a mesma amplitude, na zona intermédia do gráfico. Esses picos indicam as extremidades dos entalhes.

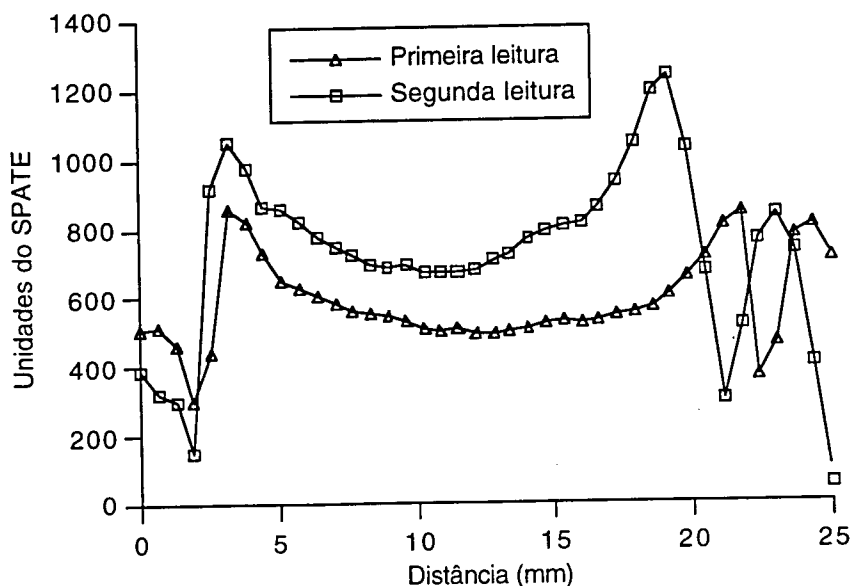


Figura 3.38 Leituras obtidas pelo SPATE.

Na segunda leitura verifica-se que o pico da esquerda, correspondente ao entalhe da esquerda, mantém-se na mesma posição, embora o valor da sua amplitude seja mais elevado. O pico correspondente ao entalhe do lado direito deslocou-se para o interior da face do provete e a sua amplitude aumentou significativamente. Estas alterações verificaram-se na zona do aparecimento da fenda de fadiga. Admitindo que esse pico corresponde à extremidade da fenda de fadiga, pode-se estimar o comprimento desta medindo a diferença de posição do pico nas duas leituras. Essa medição indica um comprimento de fenda de 2,5 mm enquanto que da medição com o sistema óptico resulta um comprimento de 2,1 mm.

Este ensaio, embora não conclusivo, permite inferir que o SPATE é uma ferramenta a considerar na detecção e acompanhamento do crescimento de fendas de fadiga.

3.8 Conclusões

Os estudos apresentados neste capítulo permitiram retirar várias conclusões relativas ao comportamento da técnica SPATE.

No trabalho relativo à determinação de factores de calibração, verificou-se que a modificação da frequência do carregamento sinusoidal de 10 Hz para 25 Hz induziu variações máximas do factor de calibração de 4,2% no caso do aço, 5% no alumínio e 8,7% no nylon. Para a mesma frequência de carregamento, a variação máxima do factor de calibração deu-se quando se variou a amplitude de tensão, mantendo-se constante a razão de tensão. No aço, a variação máxima foi de 10,2% e verificou-se à frequência de 25 Hz. No alumínio, a variação máxima foi de 4,7% à frequência de 10 Hz.

A partir dos resultados atrás referidos pode-se concluir que, para a utilização do SPATE em análises quantitativas, é importante determinar-se o factor de calibração nas condições de ensaio. Para isso, deve-se utilizar o sinal de uma região do corpo sob tensão elevada e uniforme, de forma a reduzir a influência do erro devido à resolução do sistema.

As análises de tensões apresentadas nos subcapítulos 3.3 a 3.5 evidenciaram algumas características fundamentais da técnica SPATE. Nomeadamente, verificou-se a capacidade desta técnica na medição de distribuições de tensões complexas, sendo capaz de distinguir tensões tractivas e compressivas. Ficou também clara a dificuldade em se obter bons resultados nas proximidades de um bordo livre devido à resolução espacial do SPATE.

Em 3.6 concluiu-se da capacidade do SPATE na detecção de fendas de penetração parcial escondidas em chapas de 1,6 mm de espessura. As leituras

realizaram-se na face oposta à fenda e verificou-se uma alteração no estado de tensão para fendas de profundidade igual ou superior a 0,6 mm. Embora tenha sido possível detectar alterações no estado de tensão devido à presença da fenda, não houve concordância com as distribuições de tensões obtidas numericamente. Isso deve-se ao elevado gradiente de tensões na região próxima da fenda.

No ensaio descrito em 3.7, verificou-se uma alteração do estado de tensão com a iniciação de uma fenda de fadiga. Embora este ensaio não seja conclusivo, pode-se inferir que a aplicação do SPATE à monitorização da iniciação e propagação de fendas de fadiga deve ser explorada.

Referências

1. Berry, D.J. e Everett, G.M., "Materials testing using non-contacting stress mapping techniques", em: *Proceedings of the Second Conference on Materials Engineering*, A.N. Bramley, ed., London, pp. 127-134, 1985.
2. Gonçalves, J.P.M., *Interface para transmissão de ficheiros do sistema SPATE para um PC*. Relatório interno, DEMEGI, FEUP, Porto, 1994.
3. *ABAQUS User's Manual, Version 5.6*. Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc., Pawtucket, 1996.
4. Ribeiro, A.S., *Efeito da fase de iniciação na previsão do comportamento à fadiga de estruturas soldadas*. Tese de Doutoramento, Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Vila Real, 1993.

CAPÍTULO 4**4. JUNTAS ADESIVAS DE SOBREPOSIÇÃO SIMPLES: UMA REVISÃO****4.1 Introdução****4.1.1 Modelação matemática****4.2 Métodos analíticos****4.2.1 Análises lineares****4.2.1.1 Análise simplificada****4.2.1.2 Análise de Volkersen****4.2.1.3 Análise de Goland e Reissner****4.2.1.4 Outras análises****4.2.1.5 Tensões transversais****4.2.2 Análises não-lineares****4.2.2.1 Análises de Hart-Smith e Grant****4.2.2.2 Análise de Adams e Mallick****4.3 Método dos elementos finitos****4.3.1 Análises lineares****4.3.1.1 Elementos finitos especiais****4.3.2 Análises não-lineares****4.3.2.1 Elementos finitos especiais****4.4 Estudos experimentais****4.5 Considerações finais e modelo proposto****4.5.1 Características importantes das análises de elementos finitos****4.5.1.1 Análise tridimensional****4.5.1.2 Continuidade das tensões nas interfaces****4.5.2 Modelo de elementos finitos proposto****Referências**

CAPÍTULO 4

4. JUNTAS ADESIVAS DE SOBREPOSIÇÃO SIMPLES: UMA REVISÃO

4.1 Introdução

O projecto de ligações estruturais tem de basear-se na previsão das forças, e consequentemente das tensões, que provavelmente ocorrerão em serviço. O projectista deve utilizar as técnicas e materiais disponíveis para encontrar a melhor solução. Embora o projecto possa e deva recorrer à experiência adquirida ao longo dos tempos, cada vez mais é necessária uma rigorosa quantificação das forças e tensões envolvidas. A forte competição nos mercados, a qual exige produtos de elevada qualidade a preços reduzidos, ou legislação cada vez mais exigente no que diz respeito à responsabilização pela segurança e fiabilidade das estruturas, são exemplos das pressões a que o projectista está actualmente sujeito. Isto resulta na necessidade de análises detalhadas das estruturas e particularmente das ligações.

As ligações adesivas são cada vez mais utilizadas em aplicações estruturais. Vários tipos de juntas adesivas são utilizados na prática. Na figura 4.1 mostram-se alguns dos tipos de juntas mais comuns. Como ilustrado na figura, na maioria destas juntas os substratos são sujeitos a carregamentos tractivos.

A junta representada na figura 4.1(a) designa-se por junta de sobreposição simples e é um dos tipos mais utilizados na indústria. Segundo uma classificação qualitativa feita por Adams [2] para diferentes juntas carregadas em tracção, a junta de sobreposição simples aparece com uma boa relação entre a facilidade para suportar as forças aplicadas e o seu custo. Relativamente à facilidade para suportar as forças aplicadas, a junta de sobreposição simples obtém uma classificação de 10 numa escala de 1 a 15 (a capacidade da junta cresce com os valores da escala). Relativamente ao custo,

é apontado um valor de 2 numa escala de 1 a 8 (o custo cresce com os valores da escala). Obviamente, esta classificação deve ser considerada com muitas reservas, uma vez que a qualidade e custo das juntas variam com as suas características geométricas e com os tipos de materiais utilizados. No entanto, ela reflecte as razões fundamentais da elevada utilização deste tipo de juntas, ou seja, custos reduzidos, devido fundamentalmente à facilidade de execução e a um razoável comportamento mecânico.

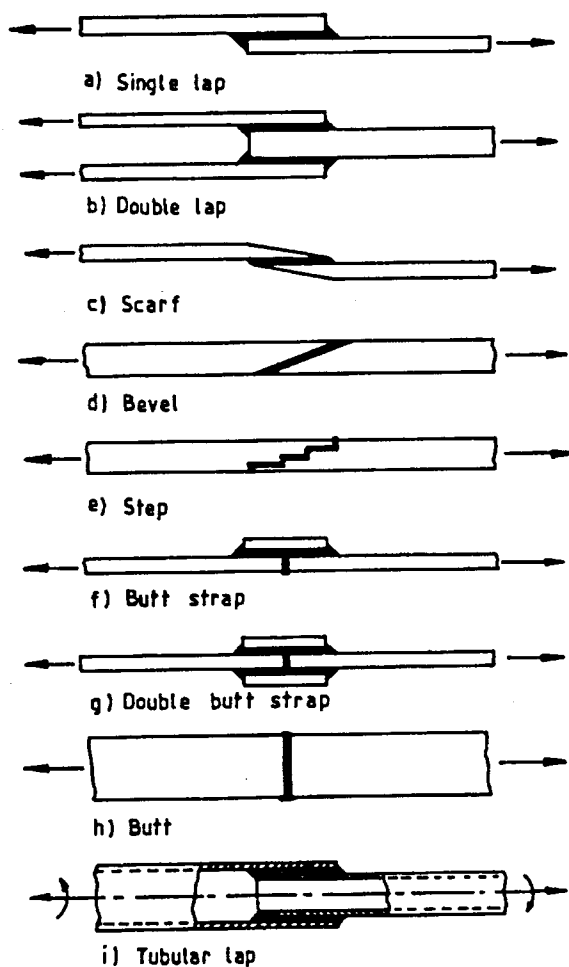


Figura 4.1 Alguns tipos de juntas adesivas [1].

A análise da bibliografia que se apresenta neste capítulo é dirigida às juntas de sobreposição simples. Sem dúvida que este é o tipo de junta melhor documentado na literatura e que suscitou o interesse dos investigadores desde o final dos anos 30. Este é também o tipo de junta mais frequente na normalização relativamente a ensaios de adesivos.

4.1.1 Modelação matemática

O estado de tensão numa junta de sobreposição simples é complexo. A não-colinearidade das forças exteriores aplicadas (ver figura 4.1(a)) implica o aparecimento de um momento flector e a consequente rotação da junta. Claramente, o adesivo não estará apenas sujeito a tensões de corte mas também a tensões normais tractivas. Por outro lado, os substratos não são apenas traccionados mas também flectidos. Por último, existe ainda a possibilidade de o adesivo e/ou os substratos plastificarem, particularmente nas zonas de elevadas tensões.

Os métodos disponíveis para a modelação de juntas adesivas podem ser divididos em dois grupos: métodos analíticos e métodos numéricos. Os métodos analíticos tornam-se quase sempre impraticáveis na solução de problemas com geometrias e condições de fronteira complexas. No entanto, uma solução analítica tem a importante vantagem de permitir fazer estudos paramétricos com elevada eficiência, considerando variações de geometria e de propriedades dos materiais.

O aparecimento de meios de cálculo automático induziu a utilização de técnicas numéricas na solução destes problemas. O método dos elementos finitos é sem dúvida o mais utilizado. Uma desvantagem deste método, é o facto de a solução ser relativa apenas a um determinado conjunto de parâmetros; a necessidade de um estudo paramétrico exige análises sucessivas para os diversos conjuntos de parâmetros. O custo de um estudo deste tipo pode torná-lo pouco atractivo.

O método dos elementos finitos não tem provavelmente concorrência quando se trata de analisar novas configurações de juntas. Nessa situação, a tentativa de derivação de uma solução analítica não é garantia de sucesso particularmente para geometrias complexas. A utilização do método dos elementos finitos assegura pelo menos a obtenção de uma solução.

4.2 Métodos analíticos

Soluções elásticas exactas, que satisfazem as equações de equilíbrio e compatibilidade assim como as condições de fronteira, são por vezes possíveis para ligações adesivas entre diferentes materiais. Por exemplo, Penado e Folias [3] apresentam uma solução elástica rigorosa para o caso de um cilindro colado no furo de uma placa com propriedades mecânicas diferentes. No entanto, estes autores depararam-se com dificuldades matemáticas na resolução deste tipo de problemas e

concluíram que existem singularidades na intersecção do cilindro e da superfície livre da placa.

Outros autores também mostraram a existência de singularidades na ligação de materiais diferentes [4-7]. Na figura 4.2 apresenta-se o conceito de singularidade das tensões para o caso de juntas de sobreposição simples. Na vizinhança do ponto de singularidade, isto é, para $r \rightarrow 0$

$$\sigma_{ij} \propto \frac{1}{r^\alpha} \quad (4.1)$$

em que σ_{ij} são as tensões, r é a distância a partir do ponto singular (ver figura 4.2) e α é um número real positivo ($0 < \alpha < 1$) que representa a ordem da singularidade. De notar que α depende da geometria local e das propriedades dos materiais mas é independente da geometria global e do carregamento. O comportamento singular verificado na ligação de diferentes materiais que não apresentam fendas é semelhante ao da extremidade de uma fenda num meio homogéneo, excepto que neste último caso $\alpha = 0,5$.

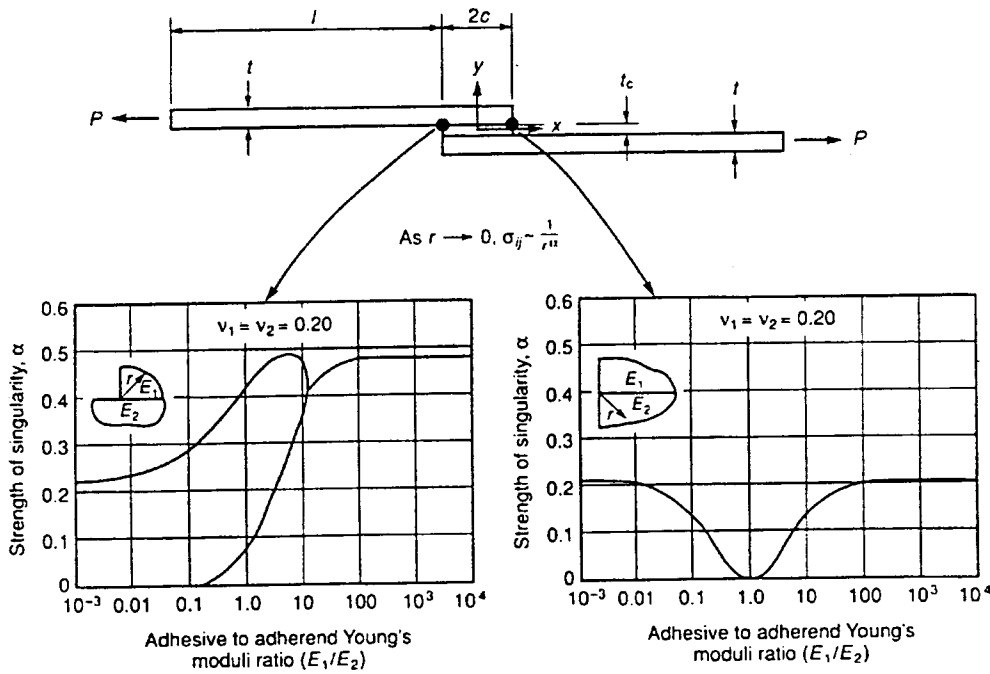


Figura 4.2 Singularidade das tensões nos cantos das interfaces da junta de sobreposição simples [8].

Devido às dificuldades matemáticas em encontrar soluções analíticas exactas para as juntas adesivas, muitos investigadores fizeram simplificações de forma a conseguirem obter o estado de tensão. A seguir apresentam-se algumas das soluções

descritas na literatura para juntas de sobreposição simples, divididas em análises lineares e não-lineares.

4.2.1 Análises lineares

4.2.1.1 Análise simplificada

A análise simplificada assume que os substratos são rígidos e que o adesivo deforma-se somente em corte. A justificação para esta simplificação deve-se ao facto de na maioria das juntas adesivas o módulo de elasticidade dos substratos ser muito superior ao do adesivo. Na figura 4.3 representa-se esquematicamente a deformação de uma junta de sobreposição simples considerando os substratos rígidos.

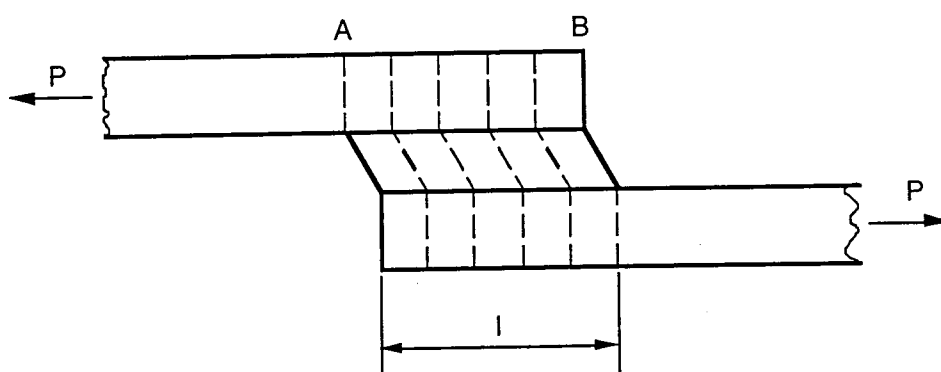


Figura 4.3 Representação esquemática da deformação da junta de sobreposição simples considerando os substratos rígidos.

Se considerarmos b a largura da junta, l o comprimento da zona de sobreposição e P a carga aplicada, a tensão de corte τ no adesivo é constante e dada por

$$\tau = \frac{P}{bl} \quad (4.2)$$

A tensão tractiva no substrato decresce linearmente de A para B até se anular.

4.2.1.2 Análise de Volkersen

Na análise de Volkersen [9] assume-se que os substratos deformam-se apenas em tracção e que o adesivo deforma-se em corte. O esquema da figura 4.4 representa esta situação. No substrato superior, a tensão tractiva é máxima no ponto A e decresce até se anular em B. Isto significa que a deformação é maior em A do que em B e que sofre um decréscimo ao longo do comprimento l . O oposto é verdadeiro para o substrato inferior. Assumindo continuidade na interface adesivo/substrato, os paralelogramos devidos ao corte, representados na figura 4.3, aparecem agora distorcidos como ilustrado na figura 4.4.

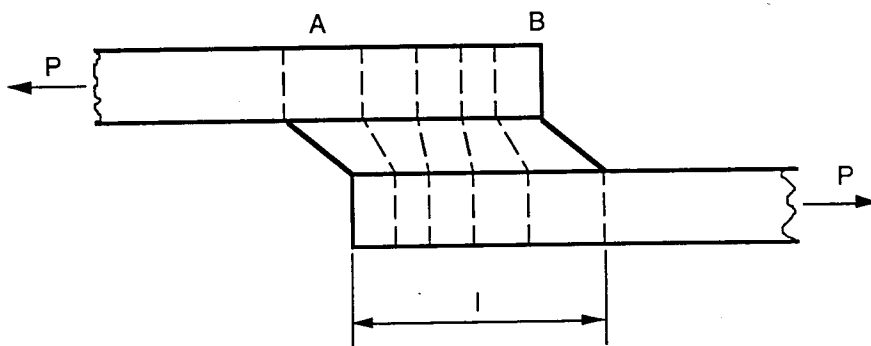


Figura 4.4 Representação esquemática da deformação da junta de sobreposição simples na análise de Volkersen.

Na figura 4.5(a) mostra-se a zona de sobreposição de uma junta não deformada e na figura 4.5(b) aparece representado um elemento dx da junta deformada segundo as hipóteses de Volkersen.

Para a secção x , o deslocamento relativo δ_x entre os substratos inferior e superior é dado por

$$\delta_x = \delta_0 - \int_{-l/2}^x \epsilon_{xx(1)} dx + \int_{-l/2}^x \epsilon_{xx(2)} dx \quad (4.3)$$

em que δ_0 é o deslocamento relativo para $x = -l/2$ e $\epsilon_{xx(1)}$ e $\epsilon_{xx(2)}$ são as deformações longitudinais nos substratos 1 e 2, respectivamente.

Considerando a junta com largura unitária e sujeita à carga P , a deformação no substrato superior é

$$\epsilon_{xx(1)} = \frac{1}{Et_1} \left(P - \int_{-l/2}^x \tau_{xy} dx \right) \quad (4.4)$$

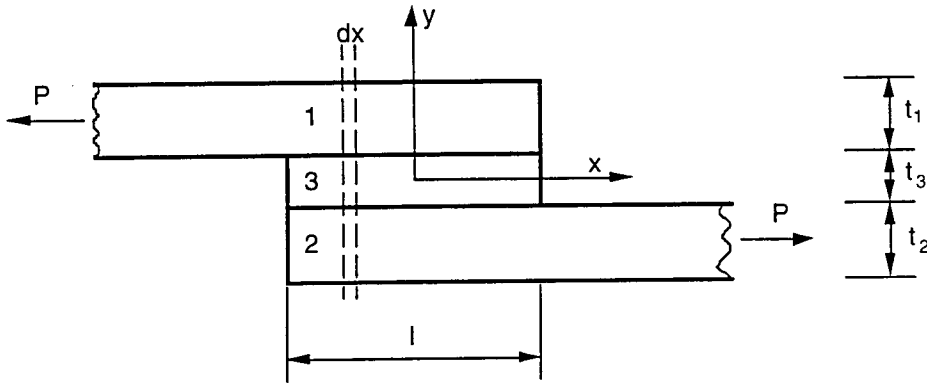
e no substrato inferior

$$\varepsilon_{xx(2)} = \frac{1}{Et_2} \int_{-l/2}^x \tau_{xy} dx \quad (4.5)$$

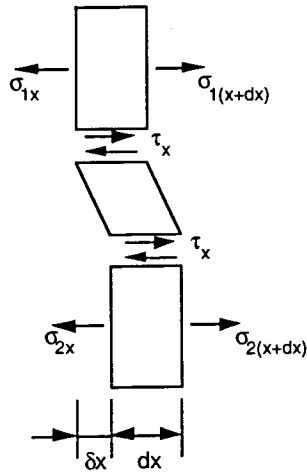
em que E é o módulo de elasticidade dos substratos. Para o adesivo temos

$$\delta_x = \frac{t_3}{G_3} \tau_{xy} \quad (4.6)$$

em que G_3 é o módulo de elasticidade transversal.



(a)



(b)

Figura 4.5 (a) Detalhe da junta de sobreposição simples não deformada; (b) elemento dx da junta deformada segundo Volkersen.

Substituindo as equações (4.4), (4.5) e (4.6) na equação (4.3) e derivando duas vezes, obtém-se uma equação com a seguinte forma

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} = \omega^2 \tau_{xy} \quad (4.7)$$

em que

$$\omega^2 = \left(1 + \frac{t_1}{t_2}\right) \frac{G_3 l^2}{E t_1 t_3} \quad (4.8)$$

A equação (4.7) tem uma solução da forma

$$\tau_{xy} = A_1 \cosh(\omega x) + A_2 \sinh(\omega x) \quad (4.9)$$

em que A_1 e A_2 são constantes arbitrárias definidas pelas condições de fronteira. Considerando as condições de fronteira apropriadas obtém-se finalmente

$$\tau_{xy} = \frac{P\omega}{2bl} \left[\frac{\cosh(\omega x/l)}{\sinh(\omega/2)} + \left(\frac{t_1/t_2 - 1}{t_1/t_2 + 1} \right) \frac{\sinh(\omega x/l)}{\cosh(\omega/2)} \right] \quad (4.10)$$

4.2.1.3 Análise de Goland e Reissner

Goland e Reissner [10] foram os primeiros a considerar o efeito de flexão devido ao desalinhamento das forças aplicadas. Esse efeito é representado esquematicamente na figura 4.6. Estes autores utilizaram um factor k para relacionar o momento flector no substrato e na extremidade da zona de sobreposição M_0 com a carga aplicada P . Considerando os dois substratos com a mesma espessura t ($t = t_1 = t_2$) e desprezando a espessura do adesivo, a relação é dada por

$$M_0 = kP \frac{t}{2} \quad (4.11)$$

Se a carga aplicada na junta for muito pequena, não há rotação da junta e a linha de acção da carga passa perto da extremidade dos substratos, como ilustrado na figura 4.6(a). Neste caso $k \approx 1,0$ e $M_0 = Pt/2$. Com o aumento da carga, a zona de

sobreposição roda, fazendo com que a linha de acção da força se aproxime do plano médio dos substratos e reduzindo assim o valor do momento flector (ver figura 4.6(b)).

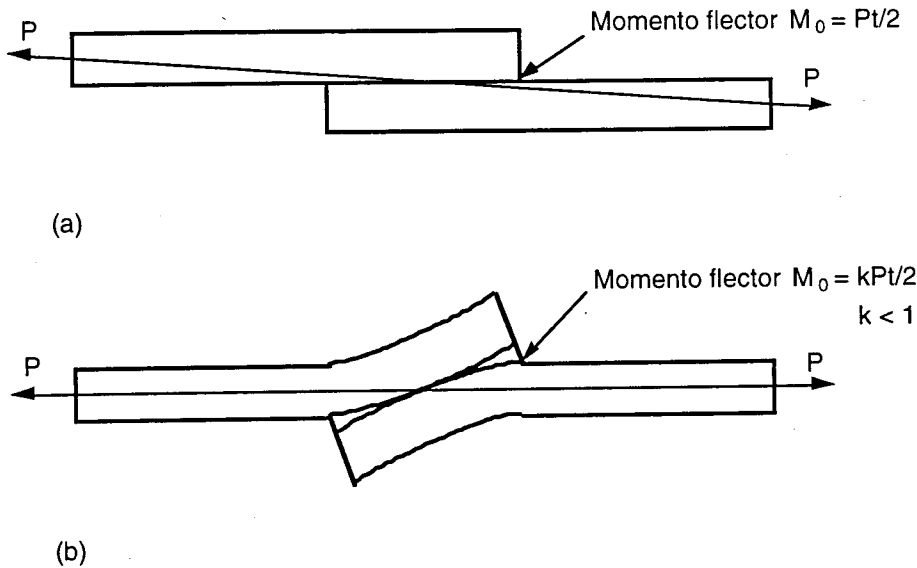


Figura 4.6 Representação esquemática da deformação de flexão numa junta de sobreposição simples. (a) junta não deformada; (b) junta deformada.

O momento flector provoca o aparecimento de tensões normais σ_{yy} no adesivo. Goland e Reissner derivaram expressões analíticas para as distribuições de tensões normais σ_{yy} e de corte τ_{xy} no adesivo. Eles consideraram que os substratos flectem de uma forma cilíndrica e assumiram tensões constantes ao longo da espessura do adesivo. À semelhança da análise de Volkersen, também estes autores consideraram um estado plano de deformação.

A solução apresentada por Goland e Reissner gerou uma alargada discussão e vários autores apontaram erros e propuseram correcções para a distribuição de tensões normais σ_{yy} no adesivo [11, 12]. Finalmente em 1989, Carpenter [13] publicou um artigo onde demonstra que as soluções apresentadas por Goland e Reissner estão correctas. Embora tenha encontrado erros em algumas equações do artigo original, Carpenter concluiu que as expressões finais para as tensões normais e de corte no adesivo estão correctas. Essas expressões são as seguintes

$$\sigma_{yy} = \frac{Pt}{bc^2R_3} \left[\left(R_2\lambda^2 \frac{k}{2} + \lambda k' \cosh(\lambda) \cos(\lambda) \right) \cosh\left(\frac{\lambda x}{c}\right) \cos\left(\frac{\lambda x}{c}\right) + \left(R_1\lambda^2 \frac{k}{2} + \lambda k' \sinh(\lambda) \sin(\lambda) \right) \sinh\left(\frac{\lambda x}{c}\right) \sin\left(\frac{\lambda x}{c}\right) \right] \quad (4.12)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{P}{8bc} \left[\frac{\beta c}{t} (1 + 3k) \frac{\cosh(\beta x/t)}{\sinh(\beta c/t)} + 3(1 - k) \right] \quad (4.13)$$

em que,

P - carga aplicada

l - comprimento de sobreposição

b - largura da junta

t - espessura dos substratos ($t = t_1 = t_2$)

t_3 - espessura do adesivo

E - módulo de elasticidade dos substratos

ν - coeficiente de Poisson dos substratos

E_3 - módulo de elasticidade do adesivo

ν_3 - coeficiente de Poisson do adesivo

k - factor do momento flector

$c = l/2$

$$\lambda = \frac{c}{t} \left(\frac{6E_3 t}{Et_3} \right)^{1/4}$$

$$R_1 = \cosh(\lambda) \sin(\lambda) + \sinh(\lambda) \cos(\lambda)$$

$$R_2 = \sinh(\lambda) \cos(\lambda) - \cosh(\lambda) \sin(\lambda)$$

$$R_3 = (\sinh(2\lambda) + \sin(2\lambda)) / 2$$

$$k' = k \frac{c}{t} \left(3(1 - \nu^2) \frac{P}{btE} \right)^{1/2}$$

$$\beta = \frac{4E_3 t}{Et_3(1 + \nu_3)}$$

Segundo Goland e Reissner estas soluções são válidas se $\frac{tG_3}{t_3G} < 0,1$ e $\frac{tE_3}{t_3G} < 0,1$, em

que G e G_3 são os módulos de elasticidade transversal para os substratos e adesivo, respectivamente. Estes limites são baseados em considerações relativas à energia de deformação. Basicamente, a teoria considera o trabalho realizado pelas tensões σ_{yy} e τ_{xy} nos substratos desprezável face ao trabalho realizado pelas mesmas tensões no adesivo. Sneddon [11] apresenta a demonstração destes limites. Convém referir que esta teoria contém uma limitação fundamental devido à derivação do factor do momento flector k considerar a rotação da zona de sobreposição e admitir que a espessura do adesivo é nula enquanto que as tensões no adesivo são obtidas assumindo que não existe rotação e o adesivo tem espessura. Esta limitação implica que as tensões normais e de corte só sejam correctas para $k=1$, ou seja, para cargas muito pequenas [1].

A expressão para o factor do momento flector apresentada por Goland e Reissner [10] é

$$k = \left[1 + 2\sqrt{2} \tanh\left(\frac{\theta}{2\sqrt{2}}\right) \right]^{-1} \quad (4.14)$$

em que,

$$\theta = l \sqrt{\frac{3P(1-\nu^2)}{bEt^3}}$$

Formas alternativas foram propostas por Hart-Smith [14]

$$k = (1 + \theta + \theta^2 / 6)^{-1} \quad (4.15)$$

e Zhao et al. [15]

$$k = (1 + \theta)^{-1} \quad (4.16)$$

Estes últimos autores concluíram que embora sendo a mais complexa, a equação (4.14) forneceu os melhores resultados para um determinado conjunto de condições analisadas.

As distribuições das tensões de corte e normais no adesivo, segundo as soluções de Volkersen e Goland e Reissner, para uma junta de alumínio e adesivo de epóxico são apresentadas nas figuras 4.7 e 4.8, respectivamente. A junta de sobreposição simples considerada tem as seguintes características geométricas (ver figura 4.5): $t_1 = t_2 = 1,5$ mm, $t_3 = 0,25$ mm, $l = 12,5$ mm. Os gráficos das figuras 4.7 e 4.8 representam as distribuições de tensões em apenas metade da zona de sobreposição (ver figura 4.5).

A solução de Goland e Reissner é apresentada nos gráficos das figuras 4.7 e 4.8 para três valores de carga aplicada a que correspondem valores do factor do momento flector k de 0,97, 0,55 e 0,32. Verifica-se que para valores decrescentes do factor k , ou seja, para valores crescentes da carga aplicada, as tensões máximas normalizadas diminuem.

A tensão de corte segundo Goland e Reissner para o caso de $k = 0,97$ é muito próxima da solução de Volkersen. Este valor de k corresponde a uma carga aplicada muito baixa e, conseqüentemente, a uma reduzida rotação da junta.

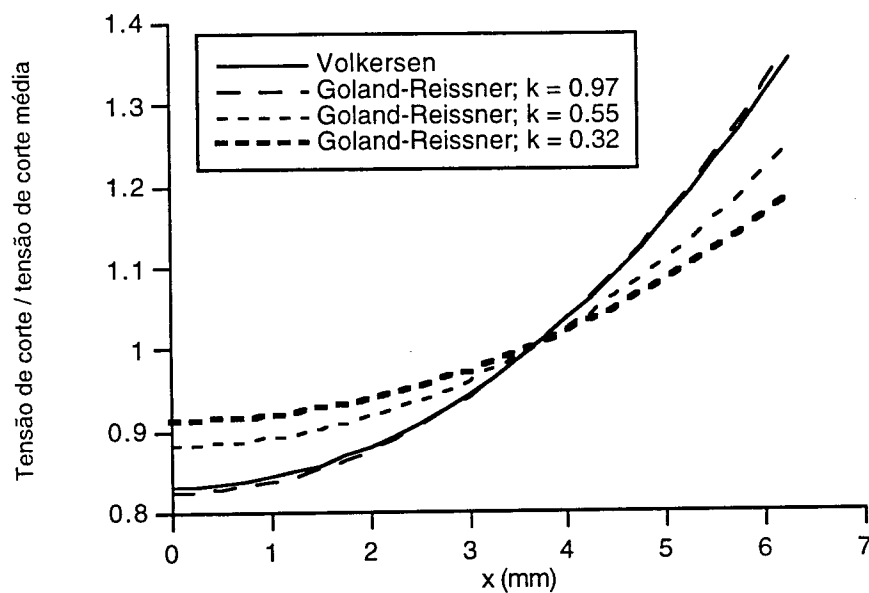


Figura 4.7 Distribuições das tensões de corte segundo os modelos de Volkersen e Goland e Reissner.

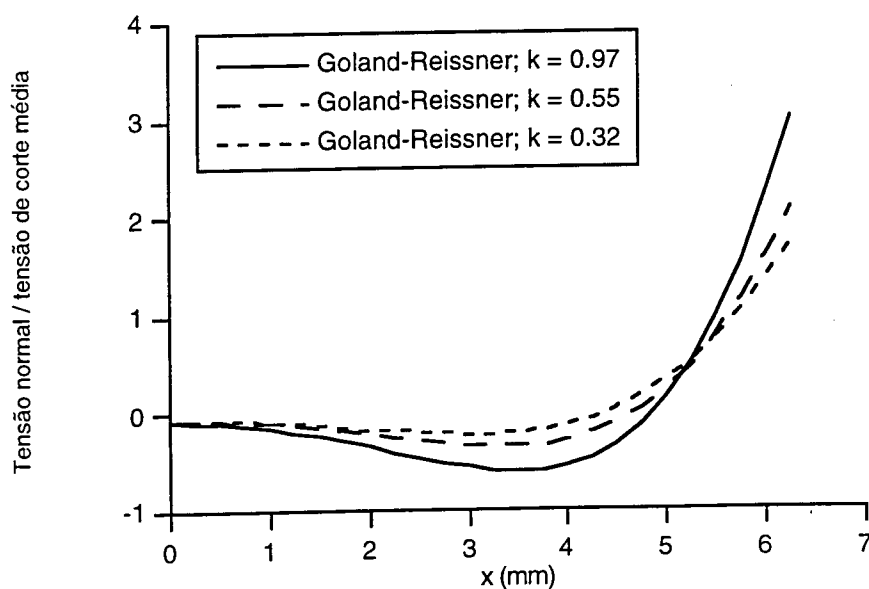


Figura 4.8 Distribuições das tensões normais segundo o modelo de Goland e Reissner.

4.2.1.4 Outras análises

As análises de Volkersen e de Goland e Reissner contêm várias simplificações que convém assinalar. Por um lado, as tensões normais e de corte são consideradas constantes ao longo da espessura do adesivo. Por outro lado, as tensões de corte nos substratos e a variação das tensões normais ao longo da espessura dos substratos são desprezadas. Ainda, a tensão de corte no adesivo atinge erradamente o valor máximo nas extremidades da zona de sobreposição. Uma vez que essas extremidades são superfícies livres, a tensão de corte tem de ser nula.

Vários autores desenvolveram análises no sentido de incorporar algumas limitações atrás apontadas. Srinivas [16] e Renton e Vinson [17] apresentaram soluções em que incorporam a variação das deformações de corte e normais ao longo da espessura dos substratos. Ambas as análises desprezam a variação das tensões ao longo da espessura do adesivo. Srinivas mostra que a não inclusão da variação das deformações de corte e normais ao longo da espessura dos substratos só causa erros significativos se o comprimento da zona de sobreposição for pequeno ou se a rigidez do adesivo for elevada. No entanto, esta conclusão tem de ser enquadrada no contexto das simplificações da solução deste autor.

Allman [18] apresentou uma solução que inclui todos os efeitos contemplados pelos autores atrás mencionados e ainda a variação linear da tensão normal σ_{yy} ao longo da espessura do adesivo. A tensão de corte mantém-se constante ao longo da espessura do adesivo. A inclusão da variação da tensão σ_{yy} ao longo da espessura do adesivo provoca o deslocamento do pico máximo da tensão de corte no adesivo para um ponto cuja distância à extremidade da zona de sobreposição é, aproximadamente, a espessura do substrato. Ojalvo e Eidinoff [19] desenvolveram uma solução em que acrescentam a variação linear da tensão de corte ao longo da espessura do adesivo.

Mais recentemente, Sawa et al. [20] desenvolveram uma solução bidimensional baseada na teoria da elasticidade (estado plano de deformação) e no contacto entre três corpos (os dois substratos e o adesivo). As soluções foram comparadas com resultados de análises de elementos finitos bidimensionais e as mesmas tendências foram obtidas. A mesma análise foi considerada por Liu et al. [21] para juntas sujeitas a um momento flector exterior.

4.2.1.5 Tensões transversais

Um aspecto que é normalmente ignorado nas análises de juntas adesivas é a consideração da largura finita de uma junta. Todas as análises referidas até ao momento

baseiam-se na hipótese de que o problema é tratável considerando um estado plano de deformação.

Adams e Peppiatt [22] mostraram que existem tensões consideráveis na direcção da largura da junta. Previamente, Hahn [23], utilizando a técnica fotoelástica de reflexão, tinha mostrado que as tensões de corte no adesivo são mais elevadas nos cantos. Nesse estudo, os substratos podiam flectir e pensou-se que as tensões de corte elevadas nos cantos deviam-se a *anticlastic bending*. Kutscha [24] baseou-se nesta ideia para desenhar uma figura qualitativa com a distribuição das tensões de corte longitudinais no adesivo.

No artigo já referido [22], Adams e Peppiatt consideraram a existência de tensões de corte no adesivo e tensões normais nos substratos, a actuar perpendicularmente à direcção de aplicação da carga. Estas tensões resultam de deformações devidas ao efeito de Poisson nos substratos. Um argumento físico simples pode ser utilizado para indicar a existência destas tensões transversais. Se o substrato está sujeito a tensão uniforme até ao início da zona de sobreposição, deve existir uma contracção uniforme na sua espessura e largura devido ao efeito de Poisson. No entanto, a extremidade do outro substrato, na zona de sobreposição, não está solicitada e aí não pode existir contracção lateral. Esta situação está representada esquematicamente na figura 4.9.

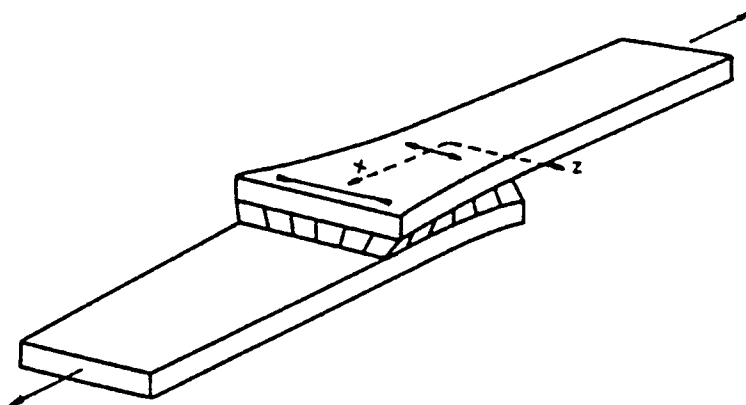


Figura 4.9 Representação esquemática de deformação na junta de sobreposição simples devido a contracção lateral [1].

A situação descrita seria válida para o caso em que o adesivo não tivesse rigidez ao corte. Numa situação real, o adesivo impede o substrato de contrair completamente, o que provoca o aparecimento de tensões laterais tractivas. Segundo o mesmo raciocínio pode concluir-se que o outro substrato estará sujeito a tensões laterais compressivas e que para uma junta simétrica não existem tensões laterais a meio do comprimento de sobreposição.

O modelo desenvolvido por Adams e Peppiatt despreza os efeitos de flexão e trata o adesivo como um conjunto infinito de molas sujeitas ao corte. As tensões normais no adesivo não são consideradas mas as tensões de corte nos substratos são incluídas. As equações desenvolvidas foram resolvidas numericamente utilizando o método das diferenças finitas embora uma solução analítica aproximada também tenha sido obtida.

4.2.2 Análises não-lineares

Desde há muito que é reconhecida a necessidade de se considerar não-linearidades na análise de juntas adesivas. Por um lado, muitos dos adesivos modernos, particularmente os adesivos de epóxido modificados com borracha, apresentam uma elevada ductilidade. A utilização desses adesivos pressupõe que se compreenda qual o comportamento da junta quando as tensões no adesivo ultrapassam a zona elástica.

Por outro lado, a resistência dos actuais adesivos é tão elevada que há a possibilidade de os substratos também plastificarem. Esta situação é frequente mesmo com adesivos frágeis. A plastificação dos substratos tem dois efeitos opostos numa junta de sobreposição simples. O efeito do modelo de deformação apresentado em 4.2.1.2 provoca o aparecimento de picos de tensão de corte próximos das extremidades do adesivo. Se os substratos começarem por plastificar no início da zona de sobreposição, as tensões de corte no adesivo vão aumentar e a carga de rotura da junta vai diminuir. No entanto, se os substratos plastificarem, a zona de sobreposição rodará mais facilmente devido às cargas aplicadas não-colineares. Isto conduz a uma diminuição maior do factor k de Goland e Reissner do que aquela que aconteceria se os substratos se mantivessem elásticos, com a consequente redução das tensões.

Por último, convém recordar a não-linearidade geométrica introduzida com a rotação da zona de sobreposição.

4.2.2.1 Análises de Hart-Smith e Grant

Hart-Smith realizou um trabalho extenso e muito significativo nesta área. Esse estudo foi realizado no âmbito do programa PABST (*Primary Adhesively Bonded Structure Technology*), contratado pelo USAF Flight Dynamics Laboratory, e incluiu vários tipos de juntas. O estudo relativo a juntas de sobreposição simples é detalhado em [14] e o estudo global encontra-se resumido em [25].

Relativamente às juntas de sobreposição simples, o modelo de Hart-Smith é uma evolução das análises de Volkersen [9] e Goland e Reissner [10]. O adesivo é considerado elástico/perfeitamente plástico como ilustrado na curva tensão de corte/deformação de corte apresentada na figura 4.10. O autor mostrou em [26] que, para juntas de sobreposição dupla, a energia de deformação em corte do adesivo é a única variável significativa a afectar a resistência da junta. Assim, a energia de deformação do modelo é igualada à da curva real, ajustando a distorção limite elástica (γ_e) e mantendo a distorção máxima (γ_p). Convém referir que o modelo de Hart-Smith não considera o efeito das tensões normais σ_{yy} no adesivo.

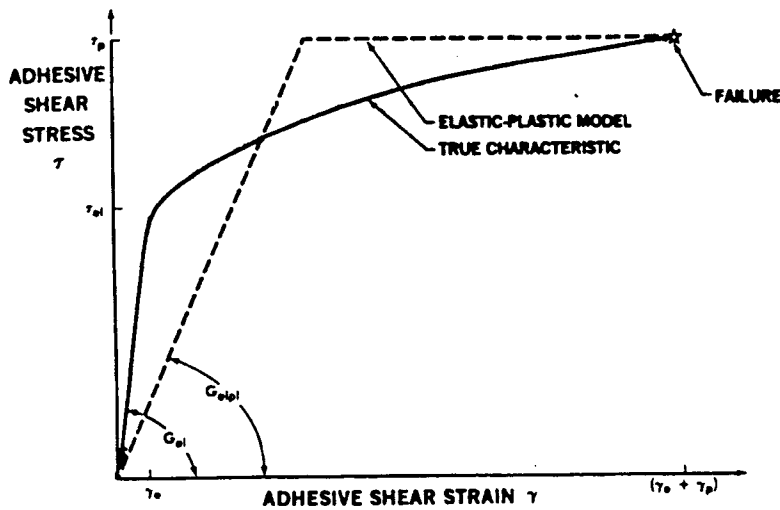


Figura 4.10 Curvas tensão de corte/deformação para o adesivo [1].

Uma análise semelhante, embora desprezando a flexão dos substratos, foi desenvolvida por Grant [27] da British Aerospace. Neste caso, o adesivo é modelado conforme apresentado na figura 4.11 com as seguintes condições

$$\text{se } \gamma < \gamma_e \text{ então } \tau = \gamma G_e \quad (4.17)$$

$$\text{se } \gamma > \gamma_e \text{ então } \tau = \tau_e + \left(\frac{\alpha \beta}{\alpha + \beta} \right) \quad (4.18)$$

em que $\alpha = \gamma G_e - \tau_e$ e $\beta = \tau_{\max} - \tau_e$.

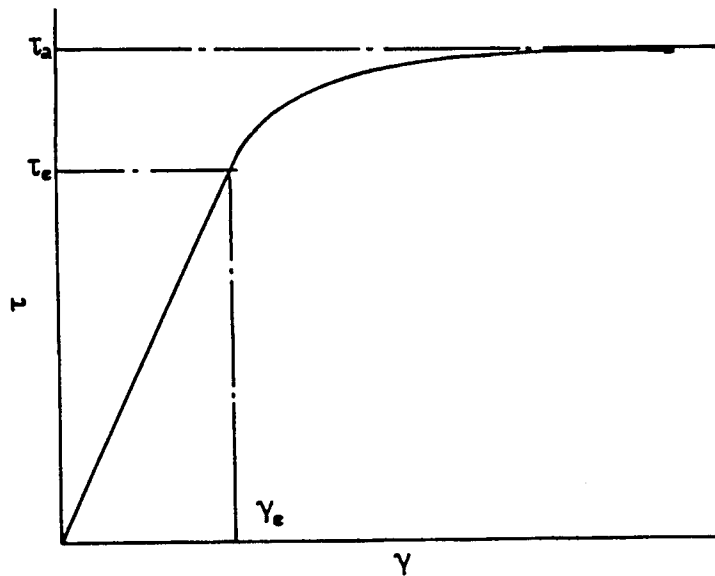


Figura 4.11 Curva tensão de corte/distorção para o adesivo [1].

4.2.2.2 Análise de Adams e Mallick

Mais recentemente, Adams e Mallick [28] apresentaram uma solução que inclui o comportamento elasto-plástico do adesivo. Esta formulação inclui os efeitos de flexão, corte e tracção no adesivo e nos substratos. A análise é aplicável a uma grande gama de propriedades dos materiais, incluindo substratos isotrópicos e anisotrópicos (por exemplo, materiais compósitos laminados). As equações não podem ser resolvidas explicitamente e por isso são resolvidas numericamente. Um esquema iterativo, baseado nas tensões iniciais obtidas na análise elástica, é utilizado para o caso do comportamento elasto-plástico do adesivo.

4.3 Método dos elementos finitos

A acessibilidade a meios de cálculo cada vez mais poderosos a preços cada vez mais reduzidos criou o interesse da comunidade científica na aplicação de técnicas numéricas na resolução de problemas estruturais e outros. O método dos elementos finitos é a técnica habitualmente empregue em mecânica estrutural e tem sido adoptado no estudo de juntas adesivas. A sua aplicação ao estudo deste tipo de ligação mecânica iniciou-se há cerca de trinta anos, mais de dez anos após a introdução do método como uma ferramenta para análises estruturais.

Obviamente que uma introdução ao método dos elementos finitos cai fora do âmbito desta dissertação. O leitor interessado tem à disposição várias excelentes obras sobre o assunto [29-32]. Convém só aqui referir que, com a utilização deste método, as simplificações feitas na análise de juntas adesivas pelos métodos analíticos não necessitam, em princípio, de serem feitas. No entanto, circunstâncias de vária ordem, nomeadamente a indisponibilidade de meios computacionais suficientes ou o custo da análise, podem implicar a utilização de hipóteses simplificativas.

Tal como nos métodos analíticos, as análises pelo método dos elementos finitos também se podem dividir em lineares e não-lineares. As análises não-lineares podem incluir não-linearidades geométricas e materiais.

4.3.1 Análises lineares

O artigo de Wooley e Carver [33] publicado em 1971 é um dos primeiros trabalhos conhecidos relacionados com a aplicação do método dos elementos finitos ao estudo de juntas adesivas. Estes autores fizeram análises lineares em juntas de sobreposição simples utilizando elementos quadriláteros de deformação constante. O problema foi tratado como estado plano de tensão e utilizaram-se duas camadas de elementos para definir o adesivo, possibilitando estudar a variação de tensões ao longo da sua espessura. Os factores de concentração de tensões obtidos são semelhantes aos resultados da análise de Goland e Reissner. No entanto, existem diferenças fundamentais entre as duas análises, uma vez que a análise de Goland e Reissner foi derivada para um caso de estado plano de deformação e a análise de elementos finitos não inclui os efeitos de flexão devidos à não-colinearidade das cargas aplicadas.

Guess et al. [34] fizeram análises lineares de juntas de sobreposição simples em tudo semelhantes às de Wooley e Carver [33]. No entanto, Guess et al. utilizaram uma malha mais refinada que permitiu identificar significativos gradientes de tensões ao longo da espessura do adesivo.

Harrison e Harrison [35] fizeram análises do mesmo tipo das atrás referidas mas utilizaram um modelo mais simplificado. Eles consideraram os substratos perfeitamente rígidos e dedicaram apenas a sua atenção à deformação do adesivo.

Adams e Peppiatt [36] utilizaram elementos triangulares de deformação constante e consideraram um estado plano de deformação nas suas análises. Nesse trabalho, fizeram-se análises elásticas e dedica-se especial atenção às tensões próximas do final da camada de adesivo. Em particular, os autores fazem um estudo da distribuição das tensões de corte no adesivo, considerando que o adesivo termina fazendo um ângulo recto com o substrato ou com uma inclinação de 45°. Este último

caso é um bom exemplo de um problema que seria intratável utilizando os métodos analíticos devido à complexidade da geometria. Na figura 4.12 mostram-se as distribuições de tensões de corte no adesivo para as várias geometrias analisadas. As linhas a traço interrompido fora da zona de sobreposição evidenciam uma zona adicional de transferência de carga. É claro nesta figura que a tensão de corte máxima decresce com o aumento do tamanho da região de adesivo exterior à zona de sobreposição.

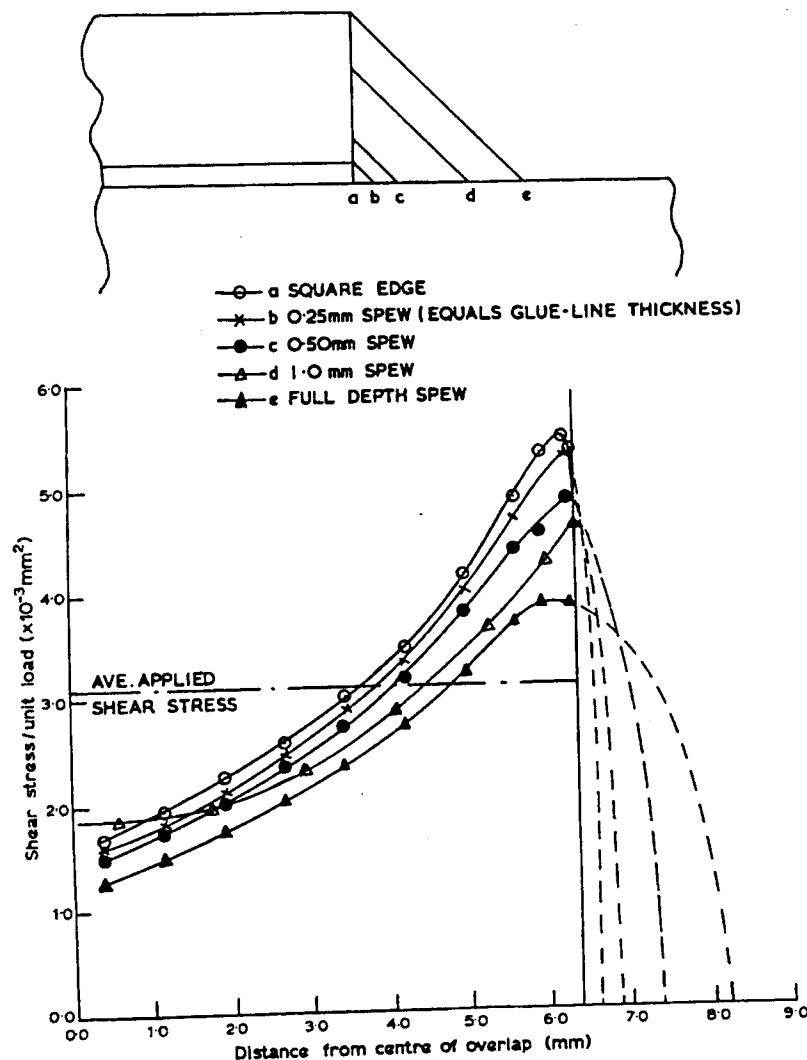


Figura 4.12 Distribuição da tensão de corte no adesivo [1].

No mesmo artigo é apresentado um estudo experimental com um modelo que consiste numa camada de silicone depositada entre dois substratos de aço. Marcou-se uma grelha na camada de silicone com a geometria da malha do modelo de elementos finitos e compararam-se as deformadas entre os dois modelos. Uma boa aproximação foi encontrada.

Outros tipos de juntas foram também objecto de análises lineares pelo método dos elementos finitos, como por exemplo, juntas de sobreposição dupla [37, 38] e juntas tubulares [39].

4.3.1.1 Elementos finitos especiais

Vários autores desenvolveram elementos finitos especialmente destinados a modelar a camada do adesivo. Barker e Hatt [40] desenvolveram um elemento de quatro nós para análises bidimensionais e que se comporta como uma mola que trabalha à tracção e ao corte e cuja rigidez depende da espessura do adesivo. Este elemento é aplicado em análises de juntas de sobreposição simples e juntas em chanfro.

Carpenter [41] desenvolveu um elemento de dois nós com o objectivo de modelar a hipótese de o adesivo não ter espessura, considerada por Goland e Reissner [10]. Mais tarde, o mesmo autor [42] desenvolveu outro elemento que considera a espessura do adesivo e em que há uma variação linear do campo dos deslocamentos ao longo da espessura do adesivo. Os resultados obtidos com estes elementos são semelhantes aos obtidos pelas abordagens analíticas com idênticas considerações.

Carpenter e Barsoum [43] desenvolveram dois elementos para representar a camada do adesivo e que podem modelar as várias teorias relativas a juntas de sobreposição simples mediante a escolha criteriosa de diversos parâmetros. São elementos de dois e quatro nós e que podem ser utilizados juntamente com elementos bidimensionais de estado plano de tensão ou de estado plano de deformação ou ainda com elementos de viga ou placa. Neste trabalho, as hipóteses de Delale e Erdogan [44] são discutidas e mostra-se que estes elementos, com valores apropriados dos parâmetros de controlo, dão resultados que convergem para os daquela referência. †

Rao et al. [45] desenvolveram um elemento isoparamétrico de seis nós com características semelhantes às do elemento apresentado em [40]. Neste elemento, as tensões normais longitudinais são consideradas nulas. Yadagiri et al. [46] modificaram o elemento de Rao et al. [45] de forma a obter essas tensões e acrescentaram a possibilidade de o utilizar em análises viscoelásticas. Neste elemento consideram-se as mesmas hipóteses da análise analítica apresentada por Delale e Erdogan [44]. No entanto, na modelação das juntas de sobreposição simples, os substratos são modelados com elementos planos isoparamétricos na referência [46] e com elementos de placa em [44].

Lin e Lin [47] desenvolveram um elemento para representar simultaneamente a camada do adesivo e os dois substratos, considerando um estado plano de tensão. A



formulação deste elemento é baseada na teoria das vigas de Timoshenko e considera a tensão de corte na região do adesivo constante.

4.3.2 Análises não-lineares

As análises não-lineares têm um custo computacional superior ao das lineares. Essa é talvez uma das razões mais fortes para justificar a escassez de publicações nesta área. Cooper e Sawyer [48] foram dos primeiros autores a incluir efeitos de não-linearidade nas suas análises de juntas adesivas de sobreposição simples. Embora tenham considerado os materiais linear elásticos, eles incluíram o efeito não linear geométrico devido à rotação da junta. Fizeram análises bidimensionais com elementos quadrangulares e consideraram um estado plano de deformação. Os resultados compararam favoravelmente com os de Goland e Reissner [10] embora estes últimos não incluíssem a variação das tensões ao longo da espessura do adesivo.

Tsai e Morton [49] também fizeram análises não-linear geométricas de juntas de sobreposição simples, considerando um estado plano de deformação. Os materiais foram considerados elásticos e utilizaram-se elementos quadrangulares de deformação constante. As análises tiveram por objectivo tentar avaliar os métodos analíticos existentes. Comparações dos resultados de elementos finitos com as soluções analíticas permitiram sugerir alterações às formulações destas últimas.

Os principais trabalhos relativos à inclusão de não-linearidades nas análises de elementos finitos de juntas adesivas devem-se ao grupo liderado por R. Adams da universidade de Bristol no Reino Unido. Em [50], Adams et al. apresentam um estudo de juntas de sobreposição dupla onde consideram o comportamento não-linear de dois adesivos com diferentes propriedades mecânicas. Nesse estudo, os substratos são considerados elásticos e não é contemplada a não-linearidade geométrica. Os autores referem que o comportamento de cedência de muitos materiais poliméricos, incluindo as resinas de epóxido, depende das componentes hidrostática e de desvio das tensões. Uma consequência deste fenómeno é a diferença entre as tensões de cedência em tracção e compressão uniaxiais. Este comportamento foi incluído nesta análise considerando um critério de cedência parabolóide da forma

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + 2(|\sigma_c| - \sigma_t)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = 2|\sigma_c|\sigma_t \quad (4.19)$$

em que σ_1 , σ_2 e σ_3 são as tensões principais e σ_c e σ_t são, respectivamente, as tensões de cedência à compressão e à tracção. Este tipo de critério de cedência foi proposto por

Raghava et al. [51] e foi demonstrado, por esses autores, aplicar-se a vários materiais poliméricos amorfos para uma vasta gama de estados de tensão. De notar que quando $|\sigma_c| = \sigma_c$, o critério de cedência parabolóide reduz-se ao mais comum critério cilíndrico de Von Mises. As conclusões deste estudo referem a necessidade de considerar o modelo elasto-plástico do adesivo para se conseguir obter uma boa previsão da carga de rotura das juntas.

Harris e Adams [52] estudaram o comportamento de juntas de sobreposição simples com a utilização de análises de elementos finitos não-lineares. Foram considerados modelos bidimensionais com elementos quadrangulares e triangulares de estado plano de deformação. As malhas utilizadas podem-se considerar pouco refinadas. O estudo está dividido em duas partes fundamentais. Na primeira fase foi realizada uma análise não-linear geométrica considerando o comportamento linear-elástico dos materiais. As propriedades elásticas de um alumínio e de um adesivo de epóxico foram consideradas. Os resultados foram comparados com os resultantes dos modelos analíticos de Goland e Reissner [10] e Allman [18] e permitiram concluir que os erros no cálculo das tensões no adesivo por estes métodos analíticos têm origem em duas fontes. Por um lado, existem erros no cálculo do momento flector na extremidade da zona de sobreposição. Por outro lado, só um número limitado das tensões actuantes no adesivo e substratos ao longo da zona de sobreposição é incluído nas soluções analíticas.

Na segunda parte do estudo, Harris e Adams consideram juntas de sobreposição simples resultantes da combinação de substratos de três ligas de alumínio e de quatro adesivos de epóxico. As análises de elementos finitos realizadas incluíram não-linearidade geométrica, comportamento elasto-plástico dos substratos e do adesivo e a modelação de uma zona triangular de adesivo exterior à zona de sobreposição. A inclusão do comportamento elasto-plástico dos substratos permitiu demonstrar que uma pequena deformação plástica nos substratos pode ser vantajosa para a resistência da junta, uma vez que aumenta a rotação da zona de sobreposição com a consequente redução do momento flector e das tensões no adesivo. Grandes deformações plásticas dos substratos conduzem ao aparecimento de concentração de tensões na extremidade da parte triangular de adesivo exterior à zona de sobreposição. Esse efeito é prejudicial à resistência da junta.

O modelo referido em [50] para o comportamento elasto-plástico dos adesivos foi novamente utilizado. A inclusão deste comportamento permitiu concluir que no caso dos adesivos dúcteis, o aumento da carga aplicada à junta origina a plastificação do adesivo nas zonas de concentração de tensões e uma consequente redistribuição das tensões ao longo da zona de sobreposição. O resultado dessa redistribuição é uma maior uniformização das tensões ao longo da zona de sobreposição e uma maior resistência da

junta. No entanto, foi também identificada a importância da tensão de rotura do adesivo como factor que pode contrabalançar a sua menor ductilidade.

4.3.2.1 Elementos finitos especiais

Os únicos trabalhos conhecidos na utilização de elementos especialmente desenvolvidos para análises não-lineares de juntas adesivas devem-se a Reddy e Roy [53, 54] e Edlund e Klarbring [55]. Reddy e Roy desenvolveram um elemento bidimensional para modelar a camada de adesivo tendo em consideração análises não-lineares geométricas. As não-linearidades materiais não foram consideradas na referência [53], mas em [54] é adoptado um modelo viscoelástico para o adesivo.

Edlund e Klarbring [55] apresentam um elemento para modelar o adesivo em problemas tridimensionais. O elemento desenvolvido destina-se a análises não-linear geométricas mas considera o adesivo linear-elástico e com espessura desprezável.

4.4 Estudos experimentais

A análise experimental de tensões em juntas adesivas é um problema complexo devido, fundamentalmente, à reduzida espessura da camada de adesivo. No entanto, existem algumas publicações com resultados experimentais obtidos com a técnica da fotoelasticidade ou com modelos de borracha.

Mylonas [56], McLaren e MacInnes [57], e Tuzi e Shimada [58, 59] aplicaram a técnica da fotoelasticidade em modelos ampliados que segundo esses autores são semelhantes às juntas reais que eles pretendiam estudar. Para isso, os modelos cumpriam um determinado número de restrições, como por exemplo, terem um rácio entre a espessura do substrato e a espessura do adesivo igual ao da junta real.

Cornell [60] também utilizou a técnica da fotoelasticidade para investigar a distribuição de tensões num modelo homogéneo que pretende representar uma junta adesiva. Especificando, o interesse deste autor foi estudar a variação da concentração de tensões com a variação do raio de concordância da extremidade da zona que representa o adesivo.

Os modelos de borracha foram introduzidos por Demarkles [61] e mais tarde utilizados por Adams et al. [36, 62]. A técnica consiste em construir um modelo de borracha e desenhar numa face lateral uma grelha. Medições de deformação são feitas a partir da grelha deformada quando a junta se encontra carregada. Em [61], o modelo foi

construído com dois pedaços de borracha colados com um adesivo. Adams et al. [62] utilizaram no seu modelo uma borracha mole para representar a camada de adesivo e uma borracha mais dura para representar os substratos. Em [36], o adesivo foi modelado com uma camada de silicone e chapas de aço foram escolhidas para representar os substratos. Em geral, estes modelos de borracha permitiram inferir com uma razoável aproximação a distribuição das tensões de corte no adesivo.

4.5 Considerações finais e modelo proposto

A análise de tensões em juntas adesivas, e particularmente em juntas de sobreposição simples, não é um problema trivial. Como se constata da revisão da literatura, o estudo deste tipo de juntas tem incidido fundamentalmente na utilização de modelos analíticos e no método dos elementos finitos. É reconhecido que o desenvolvimento de soluções analíticas implica frequentemente a utilização de hipóteses demasiado simplificativas. Assim, essas soluções, embora possam fornecer indicativos concretos relativamente ao comportamento das juntas, devem ser sempre analisadas tendo em conta as simplificações consideradas. No entanto, os modelos analíticos têm sido fortemente explorados uma vez que possuem a vantagem de permitir realizar com facilidade estudos paramétricos.

O método dos elementos finitos permite, em princípio, obter com mais rigor a distribuição de tensões nas juntas de sobreposição simples. No entanto, este método não tem sido tão intensivamente utilizado como as suas potencialidades fariam prever. Frequentemente, as soluções obtidas com o método dos elementos finitos baseiam-se em hipóteses simplificativas semelhantes às utilizadas em soluções analíticas. Obviamente, este tipo de estudo tem interesse como forma de avaliar as várias soluções analíticas propostas, mas o método pode ser utilizado na obtenção de soluções mais rigorosas.

4.5.1 Características importantes das análises de elementos finitos

Algumas das características consideradas importantes na modelação de juntas adesivas de sobreposição simples são:

- variação das tensões ao longo da espessura do adesivo;
- não-linearidade geométrica devido à rotação da junta;

- não-linearidade material dos substratos e adesivo;
- análise tridimensional;
- continuidade das tensões nas interfaces substrato-adesivo.

Apesar do trabalho de Harris e Adams [52] ser o único conhecido em que se incluem simultaneamente os três primeiros pontos atrás referidos, há a registar outras publicações onde se considerou pelo menos um desses pontos. Os dois últimos itens não são incluídos nas análises conhecidas e por isso convém aqui discuti-los brevemente.

4.5.1.1 Análise tridimensional

A utilização de modelos bidimensionais, normalmente considerando um estado plano de deformação, é uma das simplificações incluída em quase todas as publicações conhecidas. No entanto, como demonstrado por Adams e Peppiatt [22], as tensões na direcção da largura da junta resultam de deformações devidas ao efeito de Poisson nos substratos e não devem ser desprezadas.

4.5.1.2 Continuidade das tensões nas interfaces

Uma vez que na zona das interfaces substrato-adesivo se verifica normalmente o início da rotura das juntas adesivas de sobreposição simples, torna-se fundamental o cálculo rigoroso das tensões nessa região. Na maioria dos estudos publicados de juntas adesivas com o método dos elementos finitos utilizaram-se elementos contínuos isoparamétricos, normalmente de estado plano de deformação, para modelar os substratos e a camada de adesivo. Esta formulação assegura a continuidade dos deslocamentos através da interface substrato-adesivo, mas as tensões na interface não estão definidas. Se analisarmos as equações de equilíbrio da elasticidade

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\
 \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0 \\
 \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4.20}$$

constata-se que uma condição necessária à sua satisfação é a continuidade das tensões σ_{yy} , τ_{xy} e τ_{yz} segundo a coordenada y . Se considerarmos a zona de sobreposição de uma junta adesiva de sobreposição simples como representada na figura 4.13, podemos afirmar que para cada interface k as condições a satisfazer são:

- condições de continuidade geométrica

$$\begin{aligned} u_x(y_k^-) &= u_x(y_k^+) \\ u_y(y_k^-) &= u_y(y_k^+) \\ u_z(y_k^-) &= u_z(y_k^+) \end{aligned} \quad (4.21)$$

- condições de continuidade de tensões

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(y_k^-) &= \tau_{xy}(y_k^+) \\ \tau_{yz}(y_k^-) &= \tau_{yz}(y_k^+) \\ \sigma_{yy}(y_k^-) &= \sigma_{yy}(y_k^+) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Nas equações 4.21, u_x , u_y e u_z são as componentes dos deslocamentos nas direcções x , y e z , respectivamente, e y_k é o valor da coordenada y da interface k . Os símbolos $+$ e $-$ referem-se aos valores da grandeza em questão na interface k , considerados a partir de cada uma das camadas adjacentes.

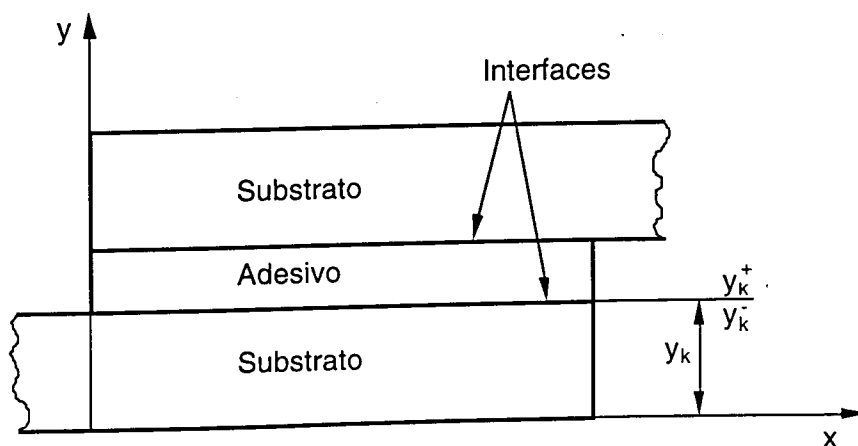


Figura 4.13 Interfaces na zona de sobreposição de uma junta adesiva.

4.5.2 Modelo de elementos finitos proposto

Neste trabalho propõe-se a utilização de modelos de elementos finitos tridimensionais no estudo de juntas adesivas de sobreposição simples. Os modelos são constituídos por elementos sólidos, que representam os substratos e o adesivo, e por elementos de interface. Estes últimos são colocados nas interfaces substrato-adesivo e permitem calcular as tensões nessa região. As restantes características enumeradas em 4.5.1 são também incluídas nestes modelos.

Neste estudo utilizou-se o programa de elementos finitos comercial ABAQUS. Este programa oferece a possibilidade de resolver problemas não-lineares com recurso ao método de Newton-Raphson.

O elemento de interface foi desenvolvido e implementado de forma a poder ser utilizado com o programa ABAQUS. Este elemento apresenta a possibilidade de modelar a iniciação e a propagação de dano na interface mediante a utilização de um critério de propagação.

Nos próximos dois capítulos apresenta-se o elemento de interface e os critérios de propagação implementados. No capítulo 7 faz-se um estudo de uma junta de sobreposição simples com a utilização do modelo proposto.

Referências

1. Adams, R.D., Comyn, J., e Wake, W.C., *Structural Adhesive Joints in Engineering*. Chapman & Hall, London, 1997.
2. Adams, R.D., "The design of adhesively-bonded lap joints", em: *Mechanical Behaviour of Adhesive Joints, General Lectures*, Pluralis, pp. 3-19, 1997.
3. Penado, F.E. e Folias, E.S., "The three-dimensional stress field around a cylindrical inclusion in a plate of arbitrary thickness", *International Journal of Fracture*, Vol. 39, pp. 129-146, 1989.
4. Bogy, D.B., "Edge bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 35, pp. 460-466, 1968.
5. Bogy, D.B., "Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 38, pp. 377-386, 1971.
6. Bogy, D.B. e Wang, K.C., "Stress singularities at interface corners in bonded dissimilar isotropic elastic materials", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 7, pp. 993-1005, 1971.
7. Hein, V.L. e Erdogan, F., "Stress singularities in a two-material wedge", *International Journal of Fracture Mechanics*, Vol. 7, pp. 317-330, 1971.
8. Penado, F.E. e Dropek, R.K., "Numerical design and analysis", em: *Engineered Materials Handbook*, ASM International, pp. 477-500, 1990.
9. Volkersen, O., "Die nietkraftverteilung in zubeanspruchten nietverbindungen mit konstanten loschquerschnitten", *Luftfahrtforschung*, Vol. 15, pp. 41-47, 1938.
10. Goland, M. e Reissner, E., "The stresses in cemented joints", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 66, pp. A17-A27, 1944.
11. Sneddon, I., "The distribution of stress in adhesive joints", em: *Adhesion*, D. Eley, ed., Oxford University Press, Clarendon, 1961.
12. Kuenzi, E.W. e Stevens, G.H., *Determination of the mechanical properties of adhesives for use in the design of bonded joints*. FPL-011, US Forest Products Laboratory, 1963.
13. Carpenter, W.C., "Goland and Reissner were correct", *Journal of Strain Analysis*, Vol. 24, pp. 185-187, 1989.
14. Hart-Smith, L.J., *Adhesive-bonded single-lap joints*. CR 112236, NASA, 1973.
15. Zhao, X., Adams, R.D., e Pavier, M.J., "A new approach to determining the bending moment factors in single lap joints", em: *Proceedings of Adhesion '90*:

- Fourth International Conference*, Plastics and Rubber Institute, London, pp. 35/1-35/6, 1990.
16. Srinivas, S., *Analysis of bonded joints*. TN D-7855, NASA, 1975.
 17. Renton, W.J. e Vinson, J.R., "The efficient design of adhesive bonded joints", *Journal of Adhesion*, Vol. 7, pp. 175-193, 1975.
 18. Allman, D.J., "A theory for elastic stresses in adhesive bonded lap joints", *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol. 30, pp. 415-436, 1977.
 19. Ojalvo, I.U. e Eidinoff, H.L., "Bond thickness effects upon stresses in single-lap adhesive joints", *AIAA Journal*, Vol. 16, pp. 204-211, 1978.
 20. Sawa, T., Nakano, Y., e Toratani, H., "A two-dimensional stress analysis of single-lap adhesive joints subjected to tensile loads", *Journal of Adhesion Science and Technology*, Vol. 11, pp. 1039-1062, 1997.
 21. Liu, J., Sawa, T., e Toratani, H., "A two-dimensional stress analysis of single-lap adhesive joints subjected to external bending moments", *Journal of Adhesion Science and Technology*, Vol. 12, pp. 795-812, 1998.
 22. Adams, R.D. e Peppiatt, N.A., "Effect of Poisson's ratio strains in adherends on stresses of an idealized lap joint", *Journal of Strain Analysis*, Vol. 8, pp. 134-139, 1973.
 23. Hahn, K.F., *Photostress investigation of bonded lap joints. Part II: analysis of experimental data*. SM 4000-1, Douglas-Aircraft Company, 1960.
 24. Kutscha, D., *Mechanics of adhesive bonded lap-type joints - survey and review*. MLTDR-64-298, U.S. Forest Products Laboratory, 1964.
 25. Hart-Smith, L.J., *Analysis and design of advanced composite bonded joints*. CR 2218, NASA, 1974.
 26. Hart-Smith, L.J., *Adhesive bonded double-lap joints*. CR 112235, NASA, 1973.
 27. Grant, P., "Analysis of adhesive stresses in bonded joints", em: *Symposium: Jointing in Fibre Reinforced Plastics*, IPC Science and Technology Press Ltd, Guildford, pp. 41-50, 1978.
 28. Adams, R.D. e Mallick, V., "A method for the stress analysis of lap joints", *Journal of Adhesion*, Vol. 38, pp. 199-217, 1992.
 29. Zienkiewicz, O.C. e Taylor, R.L., *The Finite Element Method: Basic Formulation and Linear Problems*. McGraw-Hill, London, 1994.
 30. Zienkiewicz, O.C. e Taylor, R.L., *The Finite Element Method: Solid and Fluid Mechanics; Dynamics and Non-Linearity*. McGraw-Hill, London, 1994.
 31. Bathe, K.-J., *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1996.

32. Cook, R.D., Malkus, D.S., e Plesha, M.E., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, New York, 1989.
33. Wooley, G.R. e Carver, D.R., "Stress concentration factors for bonded lap joints", *Journal of Aircraft*, Vol. 8, pp. 817-820, 1971.
34. Guess, T.R., Allred, R.E., e Gerstle, F.P., "Comparison of lap shear test specimens", *Journal of Testing and Evaluation*, Vol. 5, pp. 84-93, 1977.
35. Harrison, N.L. e Harrison, W.J., "The stresses in an adhesive layer", *Journal of Adhesion*, Vol. 3, pp. 195-212, 1972.
36. Adams, R.D. e Peppiatt, N.A., "Stress analysis of adhesive-bonded lap joints", *Journal of Strain Analysis*, Vol. 9, pp. 185-196, 1974.
37. Ishai, O. e Gali, S., "Two-dimensional interlaminar stress distribution within the adhesive layer of a symmetrical doubler model", *Journal of Adhesion*, Vol. 8, pp. 301-312, 1977.
38. Allred, R.E. e Guess, T.R., "Efficiency of double-lapped composite joints in bending", *Composites*, Vol. 9, pp. 112-118, 1978.
39. Adams, R.D. e Peppiatt, N.A., "Stress analysis of adhesive bonded tubular lap joints", *Journal of Adhesion*, Vol. 9, pp. 1-18, 1977.
40. Barker, R.M. e Hatt, F., "Analysis of bonded joints in vehicular structures", *AIAA Journal*, Vol. 11, pp. 1650-1654, 1973.
41. Carpenter, W.C., "Finite element analysis of bonded connections", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 6, pp. 450-451, 1973.
42. Carpenter, W.C., "Stresses in bonded connections using finite elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 15, pp. 1659-1680, 1980.
43. Carpenter, W.C. e Barsoum, R., "Two finite elements for modelling the adhesive in bonded configurations", *Journal of Adhesion*, Vol. 30, pp. 25-46, 1989.
44. Delale, F. e Erdogan, F., "Viscoelastic analysis of adhesively bonded joints", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 48, pp. 331-338, 1981.
45. Rao, B.N., Rao, V.K., e Yadagiri, S., "Analysis of composite bonded joints", *Fibre Science and Technology*, Vol. 17, pp. 77-90, 1982.
46. Yadagiri, S., Reddy, C.P., e Reddy, T.S., "Viscoelastic analysis of adhesively bonded joints", *Computers & Structures*, Vol. 27, pp. 445-454, 1987.
47. Lin, C.C. e Lin, Y.S., "A finite element model of single-lap adhesive joints", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 30, pp. 1679-1692, 1993.
48. Cooper, P.A. e Sawyer, J.W., *A critical examination of stresses in an elastic single lap joint*. TP-1507, NASA, 1979.
49. Tsai, M.Y. e Morton, J., "An evaluation of analytical and numerical solutions to the single-lap joint", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 31, pp. 2537-2563, 1994.

50. Adams, R.D., Coppendale, J., e Peppiatt, N.A., "Failure analysis of aluminium-aluminium bonded joints", em: *Adhesion 2*, K.W. Allen, ed., Applied Science Publishers, London, pp. 105-120, 1978.
51. Raghava, R.S., Cadell, R.M., e Yeh, G.S., "Macroscopic yield behaviour of polymers", *Journal of Materials Science*, Vol. 8, pp. 225-232, 1973.
52. Harris, J.A. e Adams, R.D., "Strength prediction of bonded single lap joints by non-linear finite element methods", *International Journal of Adhesion and Adhesives*, Vol. 4, pp. 65-78, 1984.
53. Reddy, J.N. e Roy, S., "Non-linear analysis of adhesively bonded joints", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 23, pp. 97-112, 1988.
54. Roy, S. e Reddy, J.N., "Finite element models of viscoelasticity and diffusion in adhesively bonded joints", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 26, pp. 2531-2546, 1988.
55. Edlund, U. e Klarbring, A., "A geometrically nonlinear model of the adhesive joint problem and its numerical treatment", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 96, pp. 329-350, 1992.
56. Mylonas, C., "Experiments on composite models with application to cemented joints", *Experimental Stress Analysis*, Vol. 12, pp. 129-142, 1954.
57. McLaren, A.S. e MacInnes, I., "The influence on the stress distribution in an adhesive lap joint of bending of the adhering sheets", *British Journal of Applied Physics*, Vol. 9, pp. 72-77, 1958.
58. Tuzy, I. e Shimada, H., "Photoelastic investigation of the stresses in cemented joints (1st report - lap bonding)", *Bulletin of JSME*, Vol. 7, pp. 263-268, 1964.
59. Tuzi, I. e Shimada, H., "Photoelastic investigation of the stresses in cemented joints (2nd report - scarf and butt bondings)", *Bulletin of JSME*, Vol. 8, pp. 330-339, 1965.
60. Cornell, R.W., "Determination of stresses in cemented lap joints", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 20, pp. 355-364, 1953.
61. Demarkles, L.R., *Investigation of the use of a rubber analog in the study of stress distribution in riveted and cemented joints*. TN-3413, NASA, 1955.
62. Adams, R.D., Chambers, S.H., Del Strother, P.J.A., e Peppiatt, N.A., "Rubber model for adhesive lap joints", *Journal of Strain Analysis*, Vol. 8, pp. 52-57, 1973.

CAPÍTULO 5

5. ELEMENTO FINITO DE INTERFACE

5.1 Introdução

5.2 Características do elemento de interface

5.2.1 Formulação isoparamétrica

5.2.2 Utilização do método da função penalidade

5.2.3 Interligação com elementos tridimensionais paralelepípedicos de 27 nós

5.2.4 Espessura nula

5.2.5 Critério de propagação

5.2.6 Restrição de interpenetração ponto-ponto e ponto-superfície

5.3 Formulação do problema global

5.4 Formulação do elemento de interface

5.4.1 Restrição ponto-ponto

5.4.2 Restrição ponto-superfície

5.4.3 Matriz de rigidez

5.5 Implementação do elemento de interface

5.5.1 Utilização do programa ABAQUS

5.5.2 Escolha dos parâmetros de rigidez

5.5.2.1 Exemplo

5.6 Métodos de integração e comportamento do elemento

5.6.1 Integração numérica

5.6.2 Comparação entre métodos de integração

5.6.2.1 Análise linear-elástica de viga com entalhe

5.6.2.2 Análise linear-elástica de viga com reforço

5.6.3 Análise de valores próprios da matriz de rigidez do elemento

5.6.4 Verificação complementar

5.6.4.1 Análise linear-elástica de viga com duplo entalhe

5.6.4.2 Análise linear-elástica de base com reforço

5.6.5 Método de integração seleccionado

Referências

CAPÍTULO 5

5. ELEMENTO FINITO DE INTERFACE

5.1 Introdução

Na mecânica dos sólidos há um interesse crescente em estudar o comportamento de estruturas que contêm interfaces entre materiais diferentes. Estão incluídos nos exemplos mais importantes as juntas adesivas, os materiais compósitos laminados e os materiais híbridos. No caso dos materiais compósitos laminados, a rotura da fina camada de resina existente na interface entre duas camadas diferentemente orientadas (delaminação) pode reduzir a resistência à compressão em 60% [1]. Esta evidência experimental demonstra a importância do estudo deste tipo de problemas.

A maioria das publicações nesta área são relacionadas com materiais compósitos laminados ou com problemas de engenharia civil, nomeadamente a interação entre solo e estruturas. Vários métodos foram propostos para tratar estes problemas. A breve revisão bibliográfica que a seguir se apresenta agrupa as referências conforme o método utilizado, independentemente da aplicação em causa.

Alguns autores [2-5] modelaram as interfaces com elementos finitos convencionais de espessura reduzida. Outros [6, 7], utilizaram elementos finitos híbridos para obter o estado de tensão na interface. Esta formulação assegura a continuidade dos deslocamentos e das tensões na interface ao satisfazer as equações de equilíbrio da elasticidade. A dificuldade na introdução de um critério de rotura é comum em ambas as análises. Essa dificuldade é ultrapassada por alguns investigadores [8-11] que incluem restrições de ligação e condições de contacto nas suas formulações de elementos finitos contínuos. Outros autores [12-14] utilizaram elementos de mola discretos para ligarem os elementos sólidos.

Outra possibilidade para modelar a interacção entre dois materiais diferentes são os elementos de interface [15-21]. Estes elementos são constituídos por duas faces (ou duas linhas no caso de elementos bidimensionais) e são governados por relações entre tensões e deslocamentos relativos dessas faces. De notar o contraste com os elementos contínuos onde são utilizadas relações entre tensões e deformações. Geralmente, as duas faces do elemento de interface funcionam como se de apenas uma se tratasse até que um critério de rotura seja satisfeito. No momento em que o critério é satisfeito, a ligação é retirada dando origem ao aparecimento ou crescimento de dano.

O elemento de interface que a seguir se apresenta foi desenvolvido e implementado em colaboração com M. Moura. O elemento destina-se a problemas tridimensionais e contém dezoito nós. A escolha recaiu num elemento tridimensional devido aos problemas que os autores pretendem tratar: a aplicação ao estudo de juntas adesivas como descrito no capítulo 4 e o interesse de M. Moura em estudar fenómenos de delaminação em materiais compósitos laminados [1, 22].

5.2 Características do elemento de interface

As características fundamentais do elemento desenvolvido assentam em:

- formulação isoparamétrica;
- utilização do método da função penalidade;
- interligação com elementos tridimensionais paralelepípedicos de 27 nós;
- espessura nula;
- critério de propagação;
- restrição de interpenetração ponto-ponto e ponto-superfície.

A seguir faz-se uma breve discussão de cada um destes pontos.

5.2.1 Formulação isoparamétrica

A modelação pelo método dos elementos finitos de estruturas reais implica o recurso a elementos distorcidos e indiferentemente orientados em relação ao sistema global de referência. Isto é conseguido recorrendo à formulação isoparamétrica, em que as funções interpoladoras usadas para a variável ou variáveis desconhecidas são também utilizadas na interpolação das coordenadas.

5.2.2 Utilização do método da função penalidade

A formulação de problemas que envolvem restrições de contacto pode ser realizada através de vários métodos [23-27] cuja génese se pode sintetizar em dois: método dos multiplicadores de Lagrange e método da função penalidade. O primeiro apresenta a vantagem de impor condições de contacto exactas, como é o caso da impenetrabilidade. Em contrapartida, os multiplicadores de Lagrange são variáveis do problema o que provoca o aumento do número de equações. Esta situação não é desejável, particularmente em problemas tridimensionais.

O método da função penalidade apresenta como vantagens a simplicidade e o facto de ser desnecessário o recurso a variáveis adicionais. Contudo, existe uma grande sensibilidade à escolha do parâmetro de penalidade (ϵ). Assim, este valor deve ser tanto maior quanto possível, uma vez que para valores de $\epsilon \rightarrow \infty$, o problema tende para a exactidão. No entanto, quanto maior for o valor de ϵ maiores são os problemas numéricos de mau condicionamento das matrizes que levam ao aparecimento de problemas de convergência. O compromisso reside na escolha do maior valor possível que leva à convergência da solução.

5.2.3 Interligação com elementos tridimensionais paralelepípedicos de 27 nós

O elemento de interface foi desenvolvido de forma a ser compatível com os elementos tridimensionais paralelepípedicos de 27 nós disponíveis no programa ABAQUS (referência C3D27 [28]). O elemento C3D27 é um elemento isoparamétrico com um número variável de nós, entre 21 e 27. A distribuição dos nós faz-se da forma ilustrada na figura 5.1. Qualquer um dos nós do centro das faces do elemento (nós 22 a 27) pode ou não existir. No entanto, as faces dos elementos tridimensionais em contacto com os elementos de interface têm obrigatoriamente o nó central. Isto porque os nove nós de uma face do elemento de interface coincidem com os nós da face em contacto do elemento tridimensional contíguo.

Embora os elementos de 20 nós sejam os mais comuns na família dos elementos paralelepípedicos quadráticos, optou-se pelos elementos de 27 nós. A formulação dos elementos de 20 nós implica uma interpolação na superfície baseada nos quatro nós dos vértices e nos quatro nós do meio das arestas. Essa formulação é de carácter incompleto e só dá resultados aceitáveis quando existe contacto em toda a superfície dos elementos tridimensionais. Nos elementos de 27 nós as funções interpoladoras resultam do

produto de funções de Lagrange [24]. Estes elementos, quando associados a elementos de interface de nove nós por face, são particularmente adequados para análises tridimensionais de contacto, sobretudo nos casos em que o contacto parcial entre as superfícies dos elementos possa ocorrer [29].

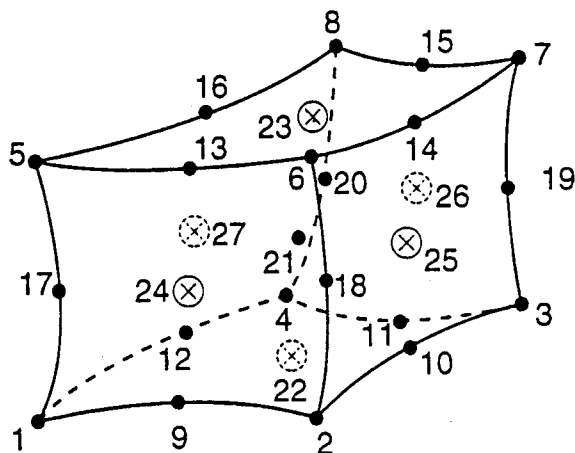


Figura 5.1 Distribuição dos nós no elemento C3D27 [28].

5.2.4 Espessura nula

No caso da modelação da interface substrato-adesivo numa junta adesiva ou da interface entre camadas diferentemente orientadas de um compósito laminado, o objectivo do estudo concentra-se no comportamento relativo entre os dois materiais interactuantes, o que implica o recurso a elementos de interface de espessura nula.

5.2.5 Critério de propagação

O elemento desenvolvido admite a possibilidade de modelar a iniciação e a propagação de um dano na interface. Geralmente, admitindo que a interface a modelar não contém defeitos iniciais, as duas faces do elemento de interface funcionam como se de uma face apenas se tratasse (pontos homólogos pertencentes às faces opostas permanecem ligados). Nesta fase, a presença dos elementos de interface não introduz deformações significativas no modelo de elementos finitos.

A partir do momento em que o critério de rotura especificado é satisfeito para um determinado par de pontos em contacto, a ligação é quebrada o que cria uma

descontinuidade geométrica entre as duas faces do elemento.

A iniciação e propagação de dano é discutida em detalhe no capítulo 6.

5.2.6 Restrição de interpenetração ponto-ponto e ponto-superfície

Geralmente, a relação de contacto entre as duas superfícies do elemento de interface é realizada ponto a ponto, ou seja, entre pontos homólogos das duas superfícies. Este tipo de interacção pode envolver alguma imprecisão no cálculo dos deslocamentos relativos de interpenetração, sobretudo em problemas com deslocamentos relativos tangenciais significativos.

Uma forma alternativa para obviar a imprecisão referida é recorrer a uma restrição do tipo ponto-superfície. Nesse caso, os deslocamentos relativos de interpenetração não são calculados entre pontos homólogos mas entre um ponto e o ponto mais próximo da superfície oposta.

No elemento de interface desenvolvido, a restrição ponto-ponto é utilizada entre cada par de pontos homólogos até que o critério de rotura seja satisfeito. A partir do momento em que o critério de rotura é satisfeito passa a existir uma interacção ponto-superfície. Admite-se portanto que deslocamentos relativos tangenciais significativos entre pontos homólogos só poderão ocorrer depois da rotura desses pontos.

5.3 Formulação do problema global

Na análise de problemas estruturais onde os deslocamentos $\mathbf{U}$ são usados como variáveis de estado, o funcional $\pi(\mathbf{U})$ correspondente à energia potencial total escreve-se

$$\pi(\mathbf{U}) = V - W \quad (5.1)$$

onde V é a energia de deformação e W a energia potencial das forças aplicadas. Reescrevendo este funcional na forma matricial obtém-se

$$\pi(\mathbf{U}) = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{U}^T \mathbf{F} \quad (5.2)$$

sendo

$\mathbf{U}$ - vector do campo de deslocamentos,
 $\mathbf{K}$ - matriz de rigidez do sistema,
 $\mathbf{F}$ - vector de forças nodais aplicadas.

Minimizando $\pi(\mathbf{U})$ obtém-se

$$\delta\pi(\mathbf{U}) = \delta\mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} - \delta\mathbf{U}^T \mathbf{F} = 0 \quad (5.3)$$

ou seja,

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (5.4)$$

que representa o sistema de equações algébricas habitual num problema de elementos finitos em análise estrutural estática.

A introdução de condições de restrição cinemáticas no problema anterior, utilizando o método da função penalidade conduz ao seguinte funcional [30]

$$\bar{\pi}(\mathbf{U}) = \pi(\mathbf{U}) + \frac{\epsilon}{2} [\mathbf{G}(\mathbf{U})]^2 \quad (5.5)$$

em que ϵ é o parâmetro de penalidade e

$$\mathbf{G}(\mathbf{U}) = 0 \quad (5.6)$$

a condição restritiva. Mostra-se que quando ϵ tende para infinito, a minimização do funcional $\bar{\pi}$ traduz com crescente aproximação a condição de restrição expressa em (5.6).

A condição de restrição para um par (k) de pontos em contacto pode ser escrita da seguinte forma [27, 31]

$$(\mathbf{U}_p - \mathbf{U}_s) \cdot \mathbf{n}_k + \gamma_k = 0 \quad (5.7)$$

com

$\mathbf{U}_p$ - vector deslocamento do nó (p),

$\mathbf{U}_s$ - formulação ponto-ponto: vector deslocamento do nó homólogo de (p);

formulação ponto-superfície: vector deslocamento do ponto resultante da projecção de (p) na superfície oposta,

$\mathbf{n}_k$ - vector unitário normal à superfície que contém o ponto (s),

γ_k - afastamento inicial dos dois pontos na direcção $\mathbf{n}_k$.

Os vectores U_p e U_s podem-se escrever

$$U_p = e_p^T U \quad (5.8)$$

$$U_s = \sum_{j=1}^m \alpha_j e_j^T U \quad (5.9)$$

sendo

e_p, e_j - as três colunas da matriz de identidade respeitantes ao nó (p) e ao nó (j),
respectivamente,

m - número de pontos utilizados na definição do deslocamento do ponto (s),

α_j - conjunto de funções de interpolação.

Reescrevendo (5.7) obtém-se

$$(C_k^T U) \cdot n_k + \gamma_k = 0 \quad (5.10)$$

sendo

$$C_k^T = e_p^T - \sum_{j=1}^m \alpha_j e_j^T \quad (5.11)$$

Considerando o número total de restrições (d), o funcional $\bar{\pi}$ pode rescrever-se na forma

$$\bar{\pi}(U) = \pi(U) + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=1}^d \left[\left((C_k^T U) \cdot n_k + \gamma_k \right)^T \left((C_k^T U) \cdot n_k + \gamma_k \right) \right] \quad (5.12)$$

Fisicamente, $\varepsilon/2$ representa a rigidez duma mola fictícia, existente entre quaisquer dois pontos em contacto. Minimizando temos

$$\delta \bar{\pi}(U) = \delta \pi(U) + \varepsilon \sum_{k=1}^d \left[U^T C_k n_k n_k^T C_k^T + \gamma_k n_k^T C_k^T \right] \delta U = 0 \quad (5.13)$$

Introduzindo (5.2) na equação anterior obtém-se

$$\left[K + \varepsilon \sum_{k=1}^d C_k n_k n_k^T C_k^T \right] U = F - \varepsilon \sum_{k=1}^d \gamma_k C_k n_k \quad (5.14)$$

ou

$$[\mathbf{K} + \mathbf{K}_r]\mathbf{U} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_r \quad (5.15)$$

em que

$$\mathbf{K}_r = \varepsilon \sum_{k=1}^d \mathbf{C}_k \mathbf{n}_k \mathbf{n}_k^T \mathbf{C}_k^T \quad (5.16)$$

$$\mathbf{F}_r = -\varepsilon \sum_{k=1}^d \gamma_k \mathbf{C}_k \mathbf{n}_k \quad (5.17)$$

Pode-se então dizer, através da análise da equação (5.15), que quer a matriz de rigidez quer o vector de forças nodais vêm acrescentados de parcelas relativamente à bem conhecida expressão da análise estrutural $\mathbf{KU}=\mathbf{F}$. Estas traduzem o contributo da restrição imposta ao problema. Constata-se que o uso desta técnica se reflecte na adição de um valor muito grande a alguns membros da matriz de rigidez e uma força correspondente no segundo membro da equação (5.15), que traduz a condição de restrição (5.7).

5.4 Formulação do elemento de interface

A formulação do elemento de interface consiste na determinação da sua contribuição para as matrizes $\mathbf{K}_r$ e $\mathbf{F}_r$. Como descrito em 5.2.6, duas situações distintas foram previstas:

- utilização de restrição ponto-ponto nos pontos onde o critério de rotura ainda não foi satisfeito;
- utilização de restrição ponto-superfície a partir do momento em que o critério de rotura é satisfeito.

5.4.1 Restrição ponto-ponto

O elemento de interface de 18 nós desenvolvido está esquematicamente ilustrado na figura 5.2.

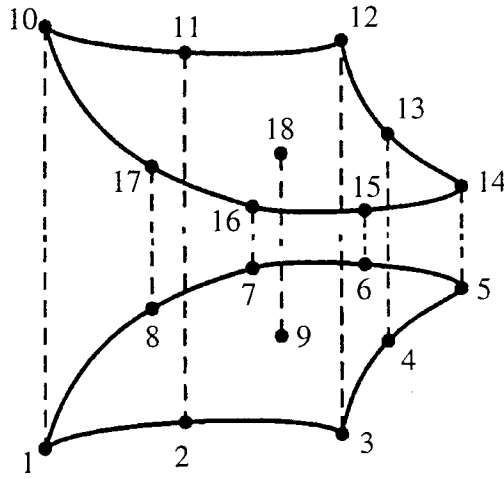


Figura 5.2 Elemento de interface de 18 nós.

O campo de deslocamentos associado a cada uma das faces do elemento escreve-se

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix}_{\text{sup}} = \mathbf{N}_{\text{sup}} \mathbf{U}_{\text{sup}} \quad (5.18)$$

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix}_{\text{inf}} = \mathbf{N}_{\text{inf}} \mathbf{U}_{\text{inf}} \quad (5.19)$$

onde os índices (sup) e (inf) referem-se às faces superior e inferior do elemento, respectivamente. Os vectores $\mathbf{U}_{\text{sup}}$ e $\mathbf{U}_{\text{inf}}$ representam os vectores de deslocamentos nodais de cada uma das faces e escrevem-se

$$\mathbf{U}_{\text{sup,inf}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_9 \end{Bmatrix} \quad (5.20)$$

em que

$$\mathbf{u}_i = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix}_i \quad (5.21)$$

e N_{sup} e N_{inf} as matrizes das funções de forma

$$N_{\text{sup,inf}} = [N_1, N_2, \dots, N_9]_{\text{sup,inf}} \quad (5.22)$$

em que

$$N_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

As funções de forma deste elemento são as mesmas que as do elemento rectangular isoparamétrico lagrangeano quadrático de nove nós (ver tabela 5.1). As coordenadas naturais (ξ, η) variam entre -1 e 1.

Tabela 5.1 Funções de forma do elemento [32].

Nós	Funções de forma
1, 3, 5, 7	$N_i = \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi\xi_i)(\eta^2 + \eta\eta_i)$
2, 4, 6, 8	$N_i = \frac{1}{2}\xi_i^2(\xi^2 + \xi\xi_i)(1 - \eta^2) + \frac{1}{2}\eta_i^2(\eta^2 + \eta\eta_i)(1 - \xi^2)$
9	$N_i = (1 - \eta^2)(1 - \xi^2)$

Consideremos um referencial local (s, t, n) num ponto de contacto da superfície do elemento, como representado na figura 5.3.

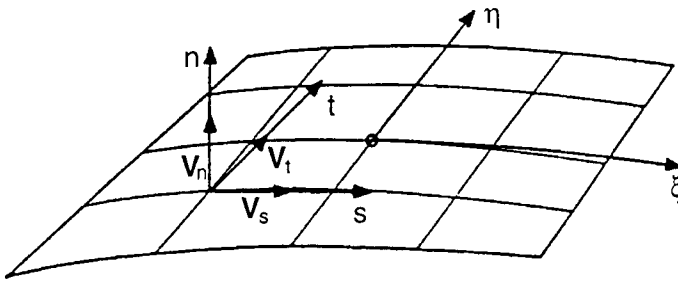


Figura 5.3 Referencial local num ponto de contacto do elemento.

Os deslocamentos nas direcções tangenciais (s,t) e normal (n) à superfície de contacto são obtidos por

$$\begin{Bmatrix} u_s \\ u_t \\ u_n \end{Bmatrix} = \theta^T \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} \quad (5.24)$$

sendo

$$\theta = [V_s, V_t, V_n] \quad (5.25)$$

V_s , V_t e V_n representam os versores das direcções locais (ver figura 5.3) e são obtidos a partir de

$$V_\xi = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{Bmatrix} \quad (5.26)$$

$$V_\eta = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (5.27)$$

da seguinte forma

$$V_s = \frac{V_\xi}{|V_\xi|} \quad (5.28)$$

$$V_n = \frac{V_\xi \times V_\eta}{|V_\xi| \times |V_\eta|} \quad (5.29)$$

$$V_t = V_n \times V_s \quad (5.30)$$

Os deslocamentos relativos na interface são então constituídos por:

- escorregamento nas direcções s e t;
- aproximação/separação na direcção n;

e podem-se escrever na seguinte forma

$$\begin{Bmatrix} \delta_s \\ \delta_t \\ \delta_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_s \\ u_t \\ u_n \end{Bmatrix}_{\text{sup}} - \begin{Bmatrix} u_s \\ u_t \\ u_n \end{Bmatrix}_{\text{inf}} \quad (5.31)$$

Combinando as expressões (5.18), (5.19), (5.24) e (5.31) temos

$$\begin{Bmatrix} \delta_s \\ \delta_t \\ \delta_n \end{Bmatrix} = \theta^T \mathbf{N}_{\text{sup}} \mathbf{U}_{\text{sup}} - \theta^T \mathbf{N}_{\text{inf}} \mathbf{U}_{\text{inf}} \quad (5.32)$$

ou, de uma forma condensada

$$\delta = \mathbf{B} \mathbf{U}_e \quad (5.33)$$

onde

$$\mathbf{B} = \theta^T [\mathbf{N}_{\text{sup}}, -\mathbf{N}_{\text{inf}}] \quad (5.34)$$

e

$$\mathbf{U}_e = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_{\text{sup}} \\ \mathbf{U}_{\text{inf}} \end{Bmatrix} \quad (5.35)$$

As tensões resultantes dos deslocamentos relativos definidos em (5.31) são dadas por

$$\begin{aligned} \tau_s &= d_s \delta_s \\ \tau_t &= d_t \delta_t \\ \sigma_n &= d_n \delta_n \end{aligned} \quad (5.36)$$

ou seja,

$$\sigma = \mathbf{D} \delta \quad (5.37)$$

sendo

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_s & 0 & 0 \\ 0 & d_t & 0 \\ 0 & 0 & d_n \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

Os parâmetros d_i definem a rigidez ao corte (d_s e d_t) e normal (d_n) da interface. Eles representam a penalidade introduzida no problema pelo utilizador.

5.4.2 Restrição ponto-superfície

No caso de interacção ponto-superfície, a primeira etapa consiste na determinação da projecção do ponto em análise na superfície oposta. Como já foi referido, este procedimento conduz à obtenção do ponto da superfície oposta que se encontra mais perto do ponto em questão.

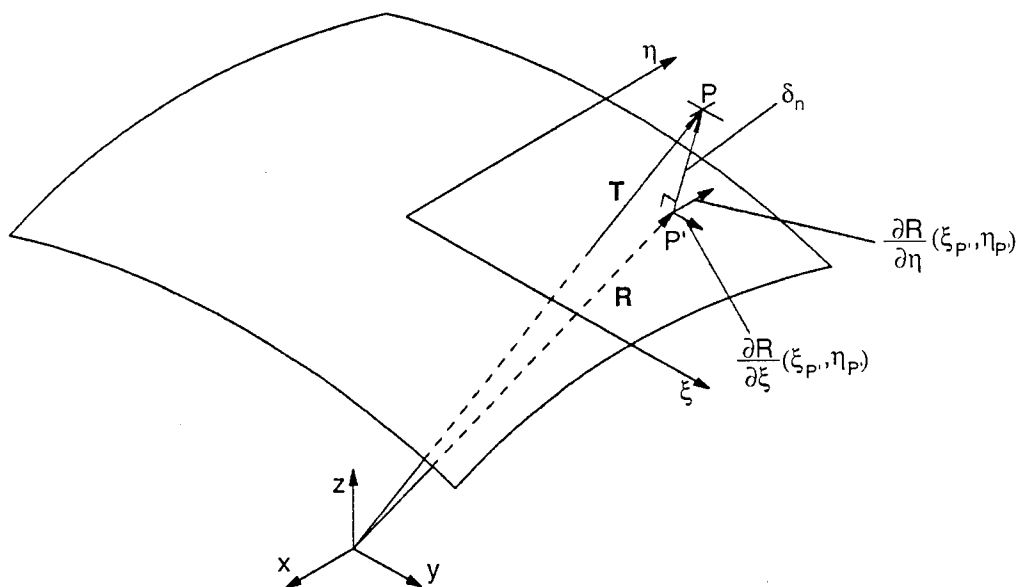


Figura 5.4 Representação esquemática da projecção do ponto P na superfície.

Tendo em conta a figura 5.4 consideremos os vectores $\mathbf{T}$ e $\mathbf{R}$ que representam, no referencial global, a posição do ponto em análise (P) e a posição da sua projecção na superfície oposta, respectivamente. Genericamente, o vector $\mathbf{R}$ define-se como sendo

$$\mathbf{R} = \begin{Bmatrix} g_1(\xi, \eta) \\ g_2(\xi, \eta) \\ g_3(\xi, \eta) \end{Bmatrix} \quad (5.39)$$

com

$$\begin{aligned} g_1(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^9 N_i x_i \\ g_2(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^9 N_i y_i \\ g_3(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^9 N_i z_i \end{aligned} \quad (5.40)$$

sendo N_i as funções de forma da tabela 5.1. As derivadas parciais de $\mathbf{R}$ relativamente às coordenadas naturais representam os vectores tangenciais à superfície no ponto de coordenadas (ξ, η) . A determinação das coordenadas $(\xi_{P'}, \eta_{P'})$ do ponto (P') passa pela imposição da condição desse ponto se encontrar na projecção de (P) perpendicularmente à superfície. Esta condição é verificada impondo a perpendicularidade de cada um dos vectores tangentes à superfície relativamente ao vector $\mathbf{T}-\mathbf{R}$. Assim, as coordenadas $(\xi_{P'}, \eta_{P'})$ do ponto de contacto (P') devem satisfazer as seguintes equações [33, 34]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi}(\xi_{P'}, \eta_{P'}) \cdot [\mathbf{T} - \mathbf{R}(\xi_{P'}, \eta_{P'})] &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta}(\xi_{P'}, \eta_{P'}) \cdot [\mathbf{T} - \mathbf{R}(\xi_{P'}, \eta_{P'})] &= 0 \end{aligned} \quad (5.41)$$

Tendo em consideração as funções de forma da tabela 5.1, estamos em presença de um sistema de duas equações não-lineares. O sistema é resolvido numericamente através duma variante do método iterativo de Newton, designada por método de Newton globalmente convergente, descrita em detalhe no anexo A.

Uma vez calculadas as coordenadas $(\xi_{P'}, \eta_{P'})$ do ponto (P') , determina-se o vector $\mathbf{T}-\mathbf{R}$ que representa o deslocamento normal à superfície no ponto (P') . O comprimento (δ_n) desse vector traduz a interpenetração ou afastamento entre (P) e (P') . Relembre-se que este tipo de análise se restringe aos pontos que já satisfizeram o critério de rotura, o que implica a não consideração dos deslocamentos tangenciais uma vez que se desprezam as forças de atrito. O cálculo das tensões resume-se a

$$\sigma_n = d_n \delta_n \quad (5.42)$$

sendo, neste caso, δ_n o comprimento do vector $\mathbf{T}-\mathbf{R}$. O valor δ_n deverá ser afectado do sinal negativo na situação de interpenetração. Só nesse caso é que a equação (5.42) é utilizada visto que para uma situação de afastamento entre (P) e (P') a tensão normal é nula.

5.4.3 Matriz de rigidez

A matriz de rigidez do elemento é determinada por minimização da energia potencial total que se escreve na seguinte forma

$$\pi(\mathbf{U}_e) = \frac{1}{2} \int_A \delta^T \sigma dA - \mathbf{U}_e^T \mathbf{F}_e \quad (5.43)$$

onde o índice (e) se refere ao elemento. Introduzindo (5.33) e (5.37) e minimizando, obtém-se

$$\delta\pi(\mathbf{U}_e) = \delta\mathbf{U}_e^T \left(\int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA \right) \mathbf{U}_e - \delta\mathbf{U}_e^T \mathbf{F}_e = 0 \quad (5.44)$$

ou seja,

$$\mathbf{K}_e \mathbf{U}_e = \mathbf{F}_e \quad (5.45)$$

em que a matriz de rigidez do elemento se escreve

$$\mathbf{K}_e = \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA \quad (5.46)$$

Em coordenadas isoparamétricas, o integral anterior escreve-se

$$\mathbf{K}_e = \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} |\mathbf{V}_\xi \times \mathbf{V}_\eta| d\xi d\eta \quad (5.47)$$

A integração numérica deste integral é discutida no sub-capítulo 5.6.

5.5 Implementação do elemento de interface

5.5.1 Utilização do programa ABAQUS

O elemento de interface apresentado foi implementado no programa ABAQUS. Este programa, reconhecido como um dos principais programas comerciais de elementos finitos (principalmente para análises não-lineares) dispõe de uma ferramenta que permite a qualquer utilizador acrescentar um elemento à biblioteca disponível sem ter acesso directo à fonte. O nome dessa ferramenta é *User Element* (UEL) [28]. Basicamente, a implementação de um elemento consiste na escrita de um subprograma em Fortran com a definição do elemento, respeitando um conjunto de argumentos e regras definidas. Esta ferramenta é suficientemente flexível para permitir ao programador escolher o número de nós e graus de liberdade do elemento.

Na resolução de um problema que contenha elementos deste tipo, o programa ABAQUS possui um procedimento automático para fazer a compilação e o acoplamento do subprograma respeitante a esse elemento. Numa análise não-linear de um problema que contém elementos de interface, o subprograma UEL é executado com dois objectivos:

- i) cálculo da matriz de rigidez do elemento de interface;
- ii) cálculo das tensões e forças nodais equivalentes.

Em cada iteração, o ponto i) repete-se para todos os elementos de interface do modelo. A contribuição de cada um dos elementos é acoplada à matriz de rigidez global que contém também as contribuições dos restantes elementos do modelo. Após a resolução do sistema de equações, o ponto ii) também é repetido para todos os elementos de interface. É após este cálculo que o ABAQUS faz a análise de convergência do método de análise não-linear considerado.

Como já referido em 5.2.3, o elemento finito de interface implementado é compatível com os elementos tridimensionais paralelepípedicos isoparamétricos de 27 nós (C3D27).

5.5.2 Escolha dos parâmetros de rigidez

Os parâmetros de rigidez d_i ($i = s, t, n$) correspondem à penalidade introduzida no problema. O valor destes parâmetros deve ser tão elevado quanto possível. No entanto, valores demasiado elevados originam problemas numéricos que é necessário evitar. Por outro lado, valores muito pequenos resultam em deslocamentos relativos elevados. Para uma interface não danificada, esses deslocamentos são intoleráveis.

Wriggers e Nour-Omid [35] propuseram um método para determinar o valor óptimo do parâmetro de penalidade num problema global que envolva contacto entre dois corpos. Eles basearam-se no erro verificado quando, num computador, uma grande quantidade é somada a uma pequena e entraram em consideração com a rigidez dos corpos em contacto. A utilização prática deste método está bastante condicionada principalmente porque é necessário determinar o menor termo da matriz de rigidez dos elementos em contacto.

Na prática, a experiência com a utilização dos elementos de interface permite facilmente escolher parâmetros de rigidez adequados para cada problema. Um valor empírico mas que serve de referência é considerar os parâmetros de rigidez iguais a 10^4 ou 10^5 vezes o máximo valor dos módulos de elasticidade dos corpos em contacto.

Os parâmetros d_i ($i = s, t, n$) podem ser diferentes embora na situação de interfaces sem dano entre corpos de material isotrópico faça sentido considerá-los iguais. Neste trabalho, estes parâmetros são sempre iguais e daqui para a frente passaremos a utilizar apenas o parâmetro de rigidez d , tendo em conta que $d = d_i$ ($i=s, t, n$).

5.5.2.1 Exemplo

No exemplo que se segue pretende-se mostrar a variação das tensões τ_{xz} e σ_{zz} e do deslocamento relativo δ_z de um par de pontos em contacto em função do parâmetro de rigidez d . O problema está ilustrado na figura 5.5. Os dois elementos tridimensionais estão ligados por um elemento de interface. Os nós da face de baixo do elemento inferior estão impedidos de se deslocarem nas três direcções e os da face de cima do elemento superior estão sujeitos a forças na direcção do eixo x .

Na resolução deste problema, utilizou-se a integração de Gauss no cálculo da matriz de rigidez do elemento de interface.

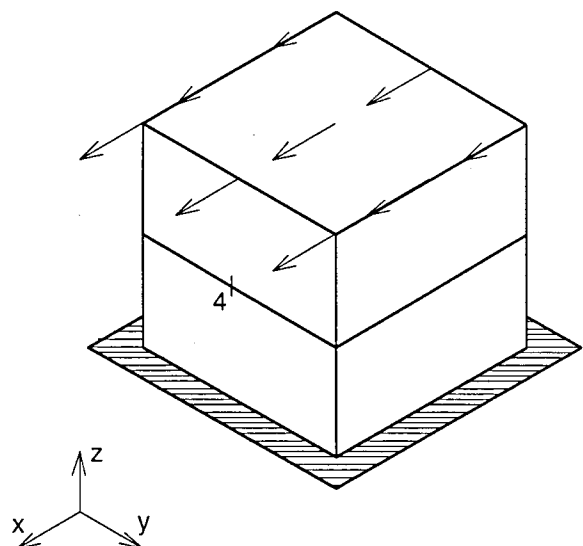


Figura 5.5 Solicitação e condições de fronteira.

Na tabela 5.2 apresentam-se os resultados obtidos para o ponto de integração número 6 do elemento de interface, situado nas proximidades do nó 4 (ver figura 5.5).

Tabela 5.2 Valores das tensões τ_{xz} e σ_{zz} e deslocamento relativo δ_z no ponto de integração número 6.

Parâmetro d	τ_{xz}	σ_{zz}	δ_z
(N/mm ³)	(MPa)	(MPa)	(mm)
10 ⁵	0,53E+02	-0,16E+03	-0,161E-02
10 ⁶	0,51E+02	-0,16E+03	-0,161E-03
10 ⁷	0,50E+02	-0,16E+03	-0,161E-04
10 ¹⁰	0,50E+02	-0,16E+03	-0,161E-07
10 ¹³	0,50E+02	-0,16E+03	-0,161E-10
10 ¹⁵	0,50E+02	-0,16E+03	-0,161E-12
10 ¹⁶	0,50E+02	-0,16E+03	-0,161E-13
10 ¹⁷	0,50E+02	-0,16E+03	-0,161E-14
10 ¹⁸	0,50E+02	-0,16E+03	-0,161E-15

Várias conclusões se podem retirar da análise da tabela 5.2:

- i) O deslocamento relativo decresce com o aumento do valor do parâmetro de rigidez. Para valores baixos deste parâmetro, a interpenetração (δ_z) apresenta valores assinaláveis.
- ii) Existe uma gama de valores do parâmetro de rigidez (10^7 a 10^{18} N/mm³) para os quais as tensões se mantêm constantes.
- iii) O limiar superior do parâmetro de rigidez é neste caso 10^{18} N/mm³ que corresponde ao valor que fornece resultados correctos com um mínimo de interpenetração.
- iv) Os valores do parâmetro de rigidez iguais ou superiores a 10^{16} N/mm³ correspondem a situações onde, apesar dos bons resultados, se evidenciaram alguns problemas numéricos relacionados com dificuldades de convergência.

5.6 Métodos de integração e comportamento do elemento

5.6.1 Integração numérica

A determinação da matriz de rigidez do elemento envolve o cálculo do integral em (5.47). Na integração numérica, este integral é substituído pela soma

$$\mathbf{K}_e = \sum_{i=1}^N W_i \mathbf{B}_i^T \mathbf{D}_i \mathbf{B}_i \left| \mathbf{V}_{\xi_i} \times \mathbf{V}_{\eta_i} \right| \quad (5.48)$$

em que N representa o número de pontos de integração e W_i são os factores de peso do método de integração considerado. O método de integração de Gauss é o mais comum na integração de elementos contínuos. No entanto, alguns autores [19-21] verificaram que, em certas condições, a aplicação do método de integração de Gauss nos elementos de interface conduz a distribuições de tensões oscilatórias devido ao mau comportamento do elemento.

A seguir faz-se a avaliação do elemento de interface desenvolvido quando integrado segundo os métodos de Gauss, Newton-Cotes e Lobatto. Na situação de 3x3 pontos de integração, os métodos de Newton-Cotes e Lobatto são idênticos e por isso serão aqui tratados como método de Newton-Cotes/Lobatto. Na figura 5.6 representa-se a distribuição dos pontos de integração dos métodos considerados no elemento de interface. As coordenadas naturais e factores de peso de cada ponto de integração são apresentados na tabela 5.3.

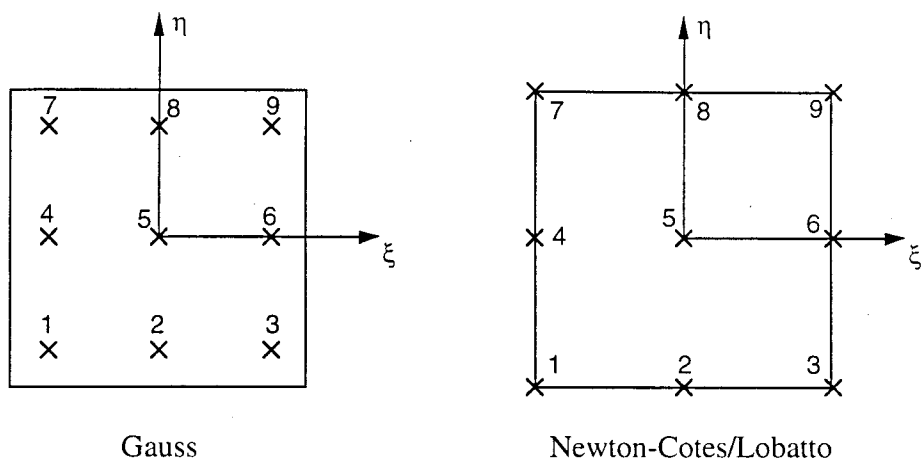


Figura 5.6 Distribuição dos pontos de integração no elemento de interface.

Tabela 5.3 Coordenadas naturais e factores de peso dos pontos de integração ($W_i = \alpha_i \beta_i$) [36].

Ponto de integração	Gauss				Newton-Cotes/Lobatto			
	ξ	η	α	β	ξ	η	α	β
1	$-\sqrt{0,6}$	$-\sqrt{0,6}$	5/9	5/9	-1	-1	1/3	1/3
2	0	$-\sqrt{0,6}$	8/9	5/9	0	-1	4/3	1/3
3	$\sqrt{0,6}$	$-\sqrt{0,6}$	5/9	5/9	1	-1	1/3	1/3
4	$-\sqrt{0,6}$	0	5/9	8/9	-1	0	1/3	4/3
5	0	0	8/9	8/9	0	0	4/3	4/3
6	$\sqrt{0,6}$	0	5/9	8/9	1	0	1/3	4/3
7	$-\sqrt{0,6}$	$\sqrt{0,6}$	5/9	5/9	-1	1	1/3	1/3
8	0	$\sqrt{0,6}$	8/9	5/9	0	1	4/3	1/3
9	$\sqrt{0,6}$	$\sqrt{0,6}$	5/9	5/9	1	1	1/3	1/3

5.6.2 Comparação entre métodos de integração

Para estudar o impacto dos métodos de integração no comportamento do elemento de interface escolheram-se dois exemplos propostos por Schellekens e de Borst [21].

5.6.2.1 Análise linear-elástica de viga com entalhe

Com este exemplo pretende-se compreender o comportamento do elemento de interface sujeito a carregamento em modo I puro. A malha de elementos finitos deste problema está ilustrada na figura 5.7. O modelo representa metade de uma viga com um entalhe no plano de simetria. Elementos de interface estão distribuídos pela secção resistente desse plano para modelar a possível propagação de uma fenda. Os nós das faces exteriores dos elementos de interface estão impedidos de se movimentarem. Na vista lateral da figura 5.8 aparecem representadas as condições de fronteira do problema. A viga é carregada na direcção vertical com uma tensão de 1 MPa, na segunda fila de elementos sólidos a contar do plano de simetria.

Fizeram-se análises linear-elásticas para os dois métodos de integração numérica considerados. Utilizou-se um módulo de elasticidade $E = 20000 \text{ MPa}$ e um coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$ para os elementos sólidos. O parâmetro de rigidez d dos elementos de interface variou entre 10^3 N/mm^3 e 10^6 N/mm^3 . Nas figuras 5.9 e 5.10 apresentam-se as distribuições de tensões normais nos elementos de interface com integração de Gauss e de Newton-Cotes/Lobatto, respectivamente.

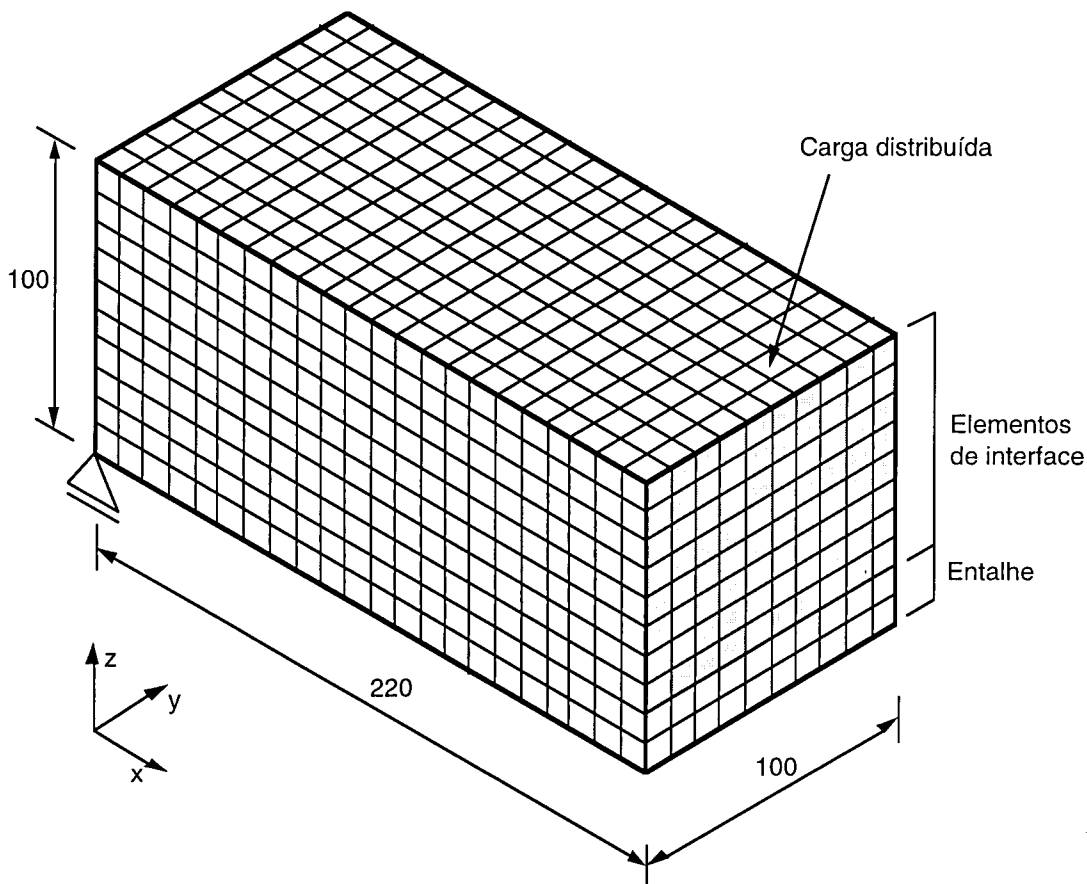


Figura 5.7 Malha de elementos finitos.

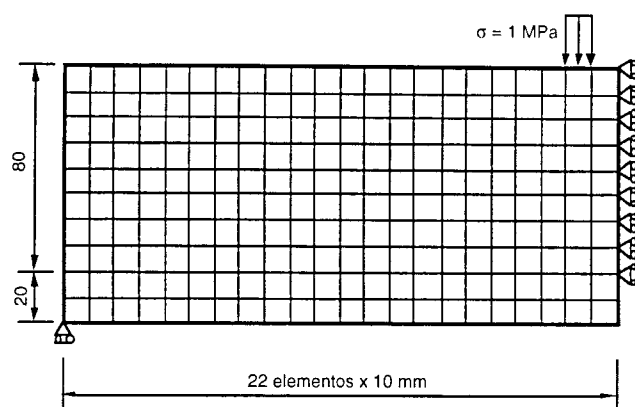
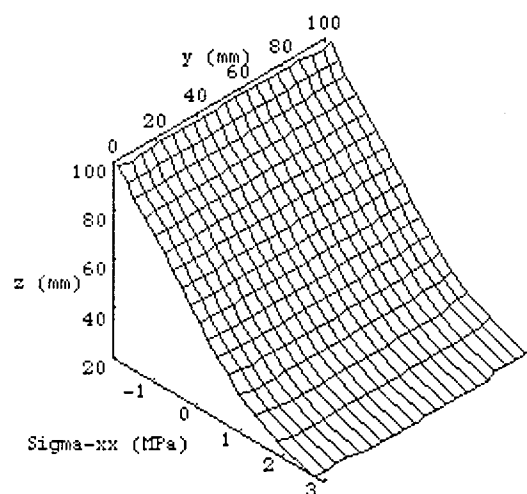
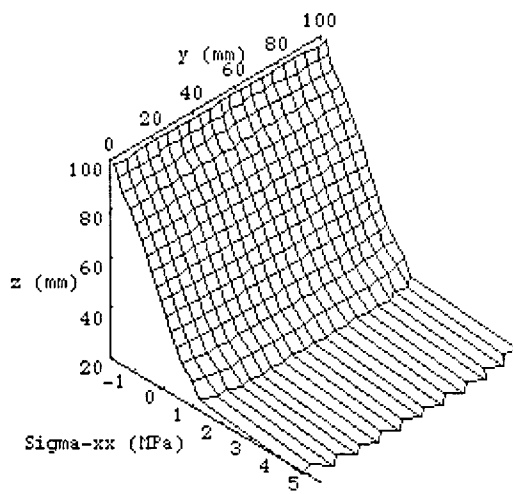


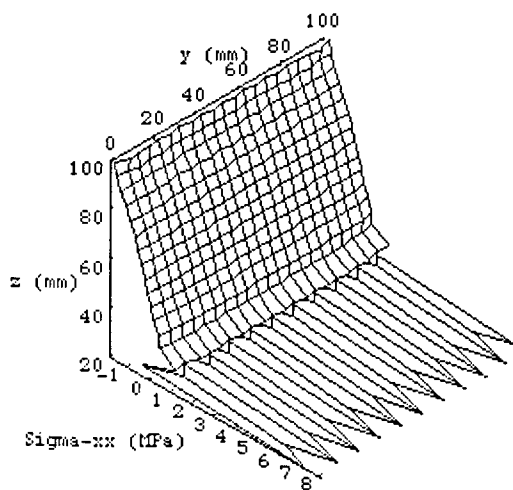
Figura 5.8 Vista lateral com condições de fronteira e carregamento.



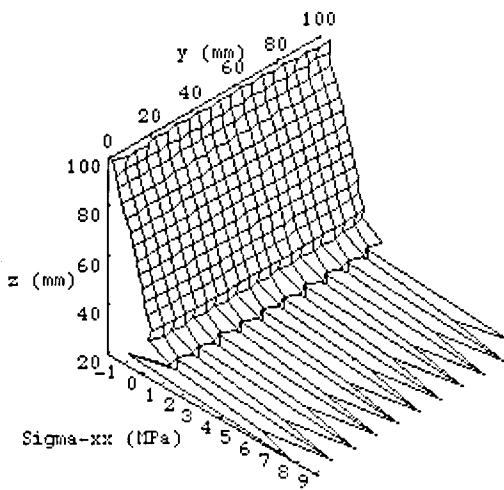
a)



b)

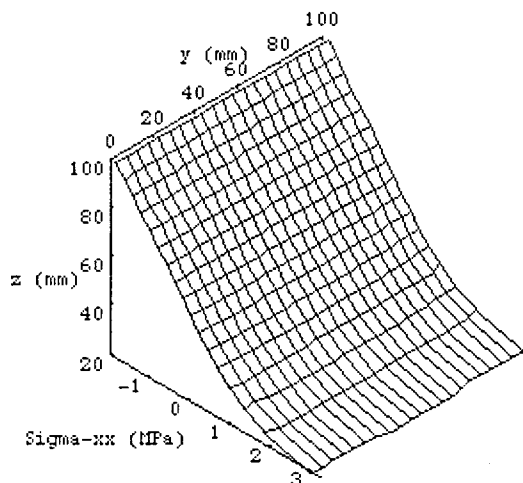


c)

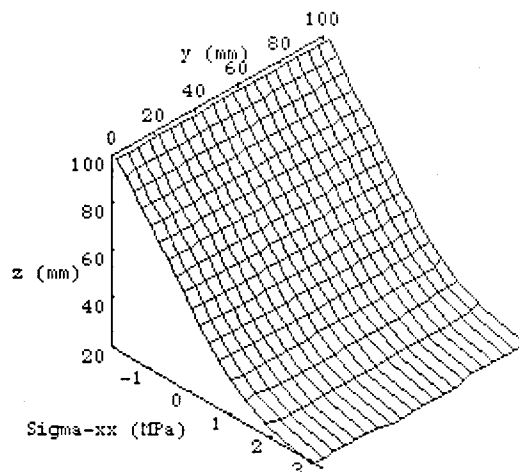


d)

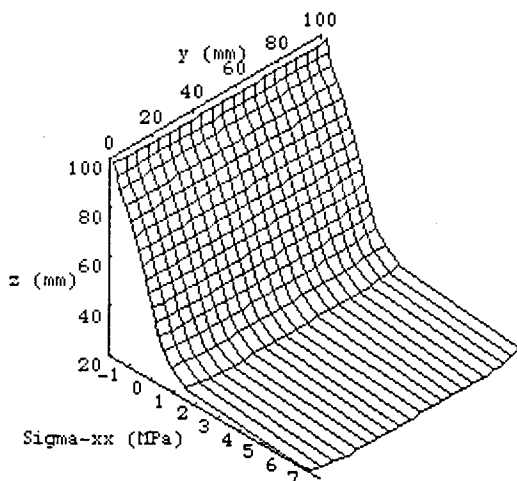
Figura 5.9 Distribuições de tensões para elementos de interface com integração de Gauss: a) $d = 10^3 \text{ N/mm}^3$ b) $d = 10^4 \text{ N/mm}^3$ c) $d = 10^5 \text{ N/mm}^3$ d) $d = 10^6 \text{ N/mm}^3$.



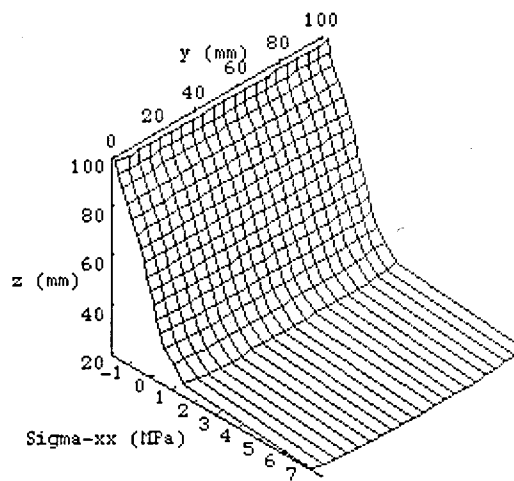
a)



b)



c)



d)

Figura 5.10 Distribuições de tensões para elementos de interface com integração de Newton-Cotes/Lobatto: a) $d = 10^3 \text{ N/mm}^3$ b) $d = 10^4 \text{ N/mm}^3$ c) $d = 10^5 \text{ N/mm}^3$ d) $d = 10^6 \text{ N/mm}^3$.

Vários comentários se podem fazer relativamente aos resultados acima apresentados:

- i) Para ambos os métodos de integração, a distribuição de tensões obtida com $d = 10^3 \text{ N/mm}^3$ apresenta uma forma aceitável.
- ii) No método de integração de Gauss, com o aumento do valor do parâmetro de rigidez d aparecem oscilações na distribuição de tensões.

- iii) As distribuições de tensões para o método de Newton-Cotes/Lobatto não apresentam oscilações mesmo para os maiores valores do parâmetro d .
- iv) Para os dois métodos de integração, a tensão máxima aumenta com o valor de d . No caso da integração de Newton-Cotes/Lobatto, só se obtém a convergência da solução para valores de $d = 10^5 \text{ N/mm}^3$ e $d = 10^6 \text{ N/mm}^3$.

5.6.2.2 Análise linear-elástica de viga com reforço

Este exemplo foi pensado para estudar o comportamento do elemento de interface sujeito a modo II puro. A malha de elementos finitos utilizada está ilustrada na figura 5.11. A viga é modelada pelas três camadas inferiores de elementos sólidos e o reforço pela camada superior. Elementos de interface estão colocados entre os dois materiais. Os nós da face de baixo da viga estão impedidos de se deslocarem em qualquer direcção. Numa das extremidades do reforço é aplicada uma tensão $\sigma = 3 \text{ MPa}$ como representado na figura 5.11.

Fizeram-se análises linear-elásticas. O módulo de elasticidade da viga é de 1 MPa e o dos reforços de 10^3 MPa . Ambos os materiais têm coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$. O parâmetro d variou entre 10^6 N/mm^3 e 10^8 N/mm^3 .

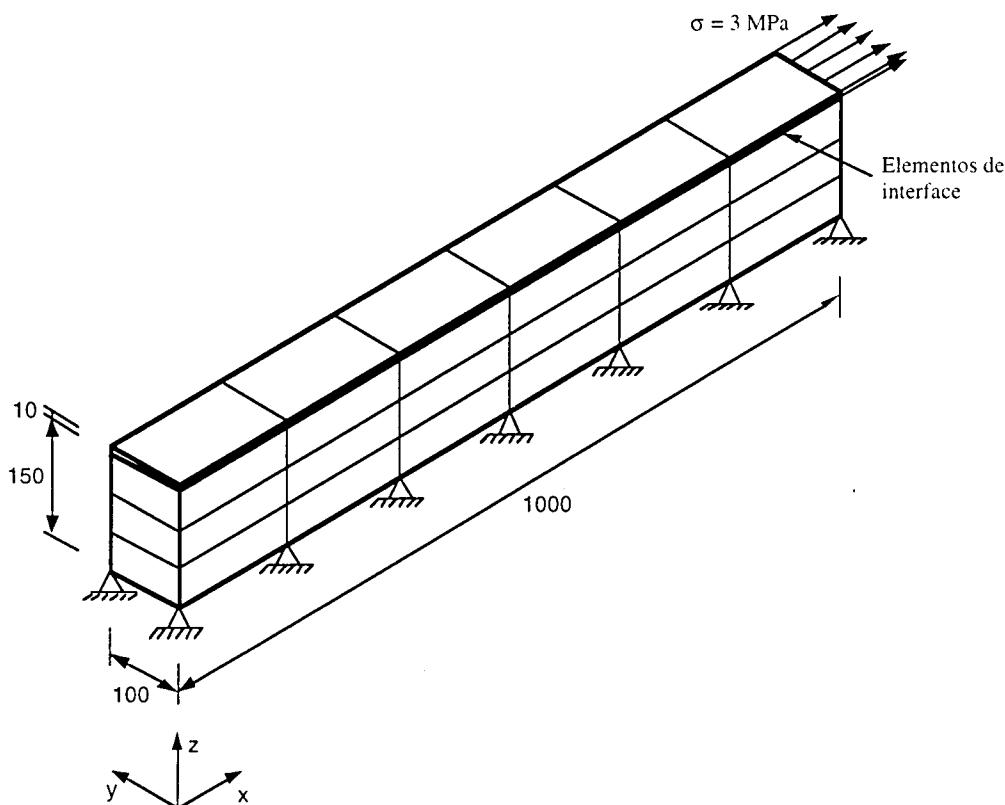


Figura 5.11 Malha de elementos finitos e condições de fronteira.

Nas figuras 5.12 e 5.13 apresentam-se as distribuições de tensões, nos elementos de interface e ao longo do plano médio longitudinal, para a integração de Gauss e de Newton-Cotes/Lobatto, respectivamente. Como se pode ver na figura 5.12, também neste exemplo fica evidente o comportamento oscilatório das tensões para a integração de Gauss. Os resultados obtidos com a integração de Newton-Cotes/Lobatto não apresentam esse tipo de oscilações. Para a gama de valores de d utilizados, o valor da tensão máxima mantém-se constante, ou seja, atingiu-se a convergência da solução. De referir que para valores de d superiores a 10^8 N/mm³ já se verificaram problemas numéricos.

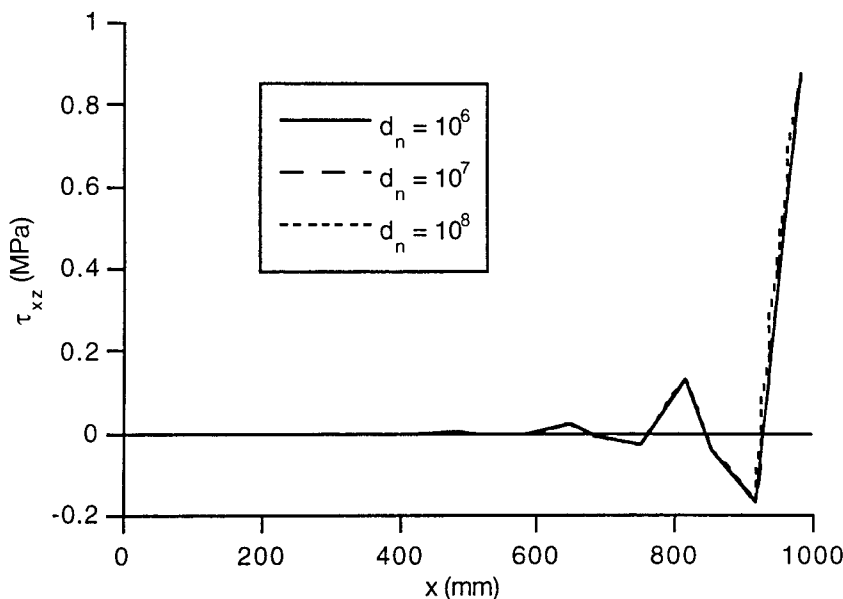


Figura 5.12 Distribuição de tensões de corte nos elementos de interface, ao longo do plano médio longitudinal, com integração de Gauss.

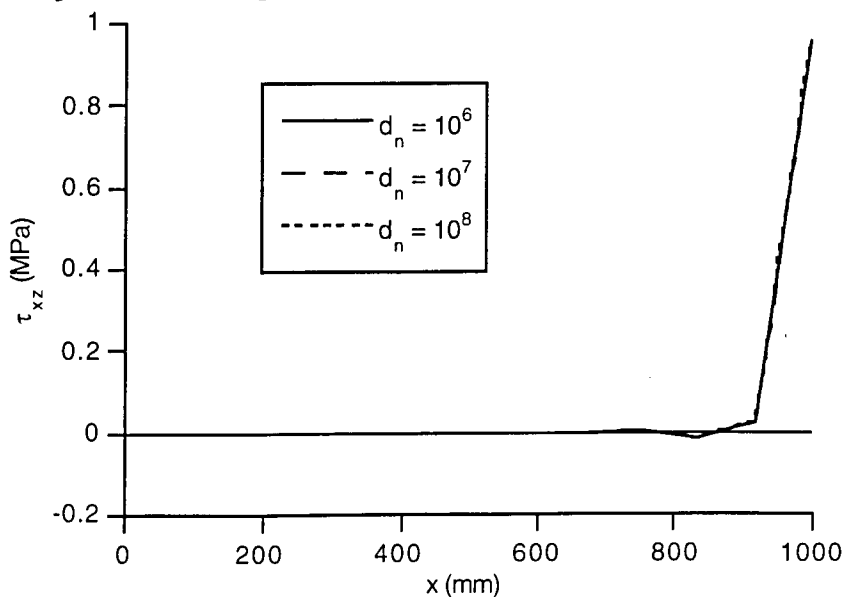


Figura 5.13 Distribuição de tensões de corte nos elementos de interface, ao longo do plano médio longitudinal, com integração de Newton-Cotes/Lobatto.

5.6.3 Análise de valores próprios da matriz de rigidez do elemento

Para se tentar perceber as razões do aparecimento de oscilações nas distribuições de tensões, fez-se uma análise de valores próprios da matriz de rigidez do elemento de interface. Considerou-se um elemento com área 1×1 e com parâmetro de rigidez $d = 1$. Para os métodos de integração de Gauss e de Newton-Cotes/Lobatto, os modos próprios não nulos e correspondentes valores próprios da matriz de rigidez são apresentados nas figuras 5.14 e 5.15. Os modos próprios da figura 5.14 mostram que existe acoplamento de deslocamentos nodais entre os vários pares de nós com a integração de Gauss. Na figura 5.15 pode comprovar-se que para a integração de Newton-Cotes/Lobatto não existe acoplamento entre pares de nós.

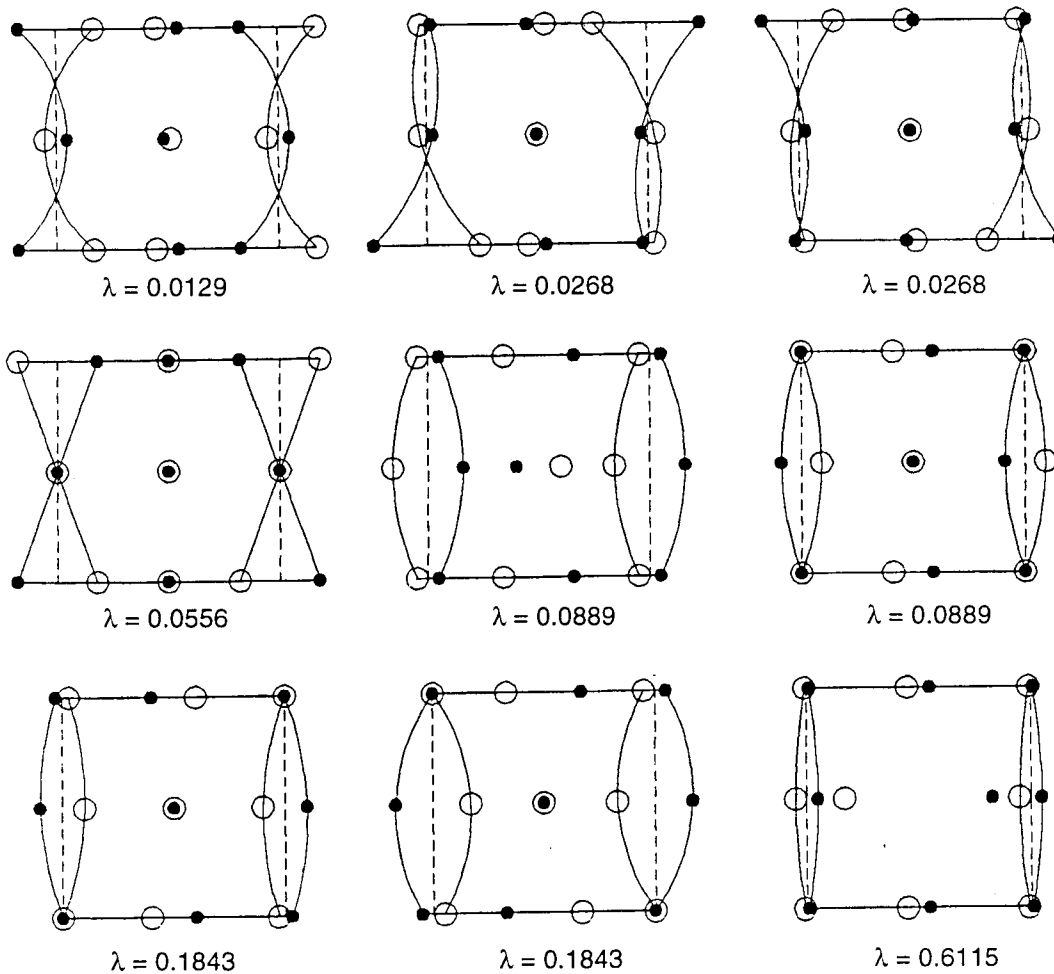


Figura 5.14 Modos próprios e correspondentes valores próprios da matriz de rigidez com integração de Gauss.

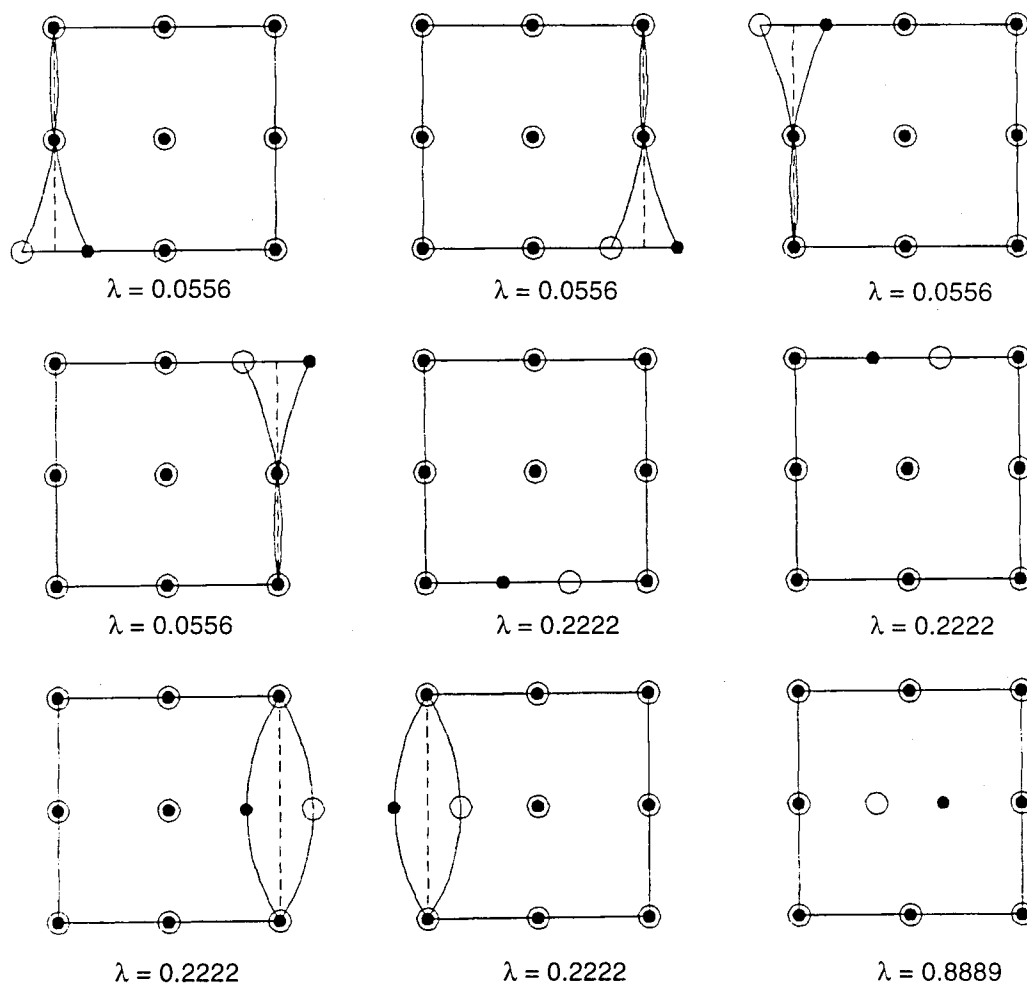


Figura 5.15 Modos próprios e correspondentes valores próprios da matriz de rigidez com integração de Newton-Cotes/Lobatto.

5.6.4 Verificação complementar

Dos exemplos atrás descritos e das análises de valores próprios da matriz de rigidez pode-se concluir que o elemento de interface apresenta um melhor comportamento quando a integração de Newton-Cotes/Lobatto é utilizada. A distribuição suave das tensões para o método de Newton-Cotes/Lobatto verificou-se em situações em que o campo de deslocamentos num elemento varia apenas numa direcção. Os exemplos que se seguem pretendem verificar o comportamento do elemento quando o campo de deslocamentos no elemento varie nas duas direcções.

5.6.4.1 Análise linear-elástica de viga com duplo entalhe

Este exemplo é uma modificação do apresentado em 5.6.2.1. Considerou-se a mesma malha mas desta vez introduziu-se um entalhe adicional como representado na figura 5.16. Por outro lado, a viga é carregada nas direcções horizontal e vertical. As propriedades utilizadas são as mesmas do exemplo 5.6.2.1 excepto o valor do parâmetro de rigidez que se considerou $d = 10^9 \text{ N/mm}^3$. Na figura 5.17 mostra-se a distribuição de tensões normais nos elementos de interface com integração de Newton-Cotes/Lobatto. Mesmo nesta situação mais complexa, a distribuição de tensões não apresenta oscilações.

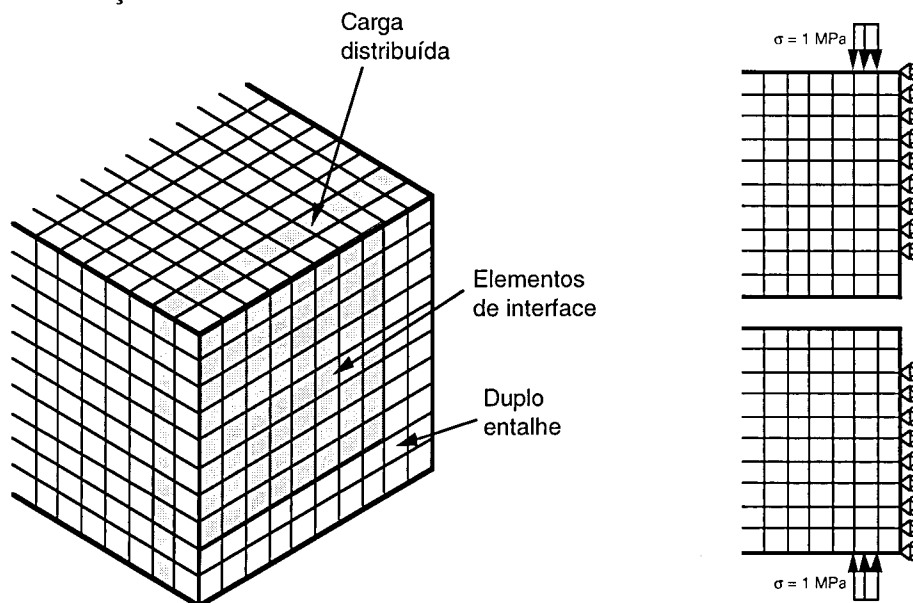


Figura 5.16 Pormenor da malha de elementos finitos da viga com duplo entalhe.

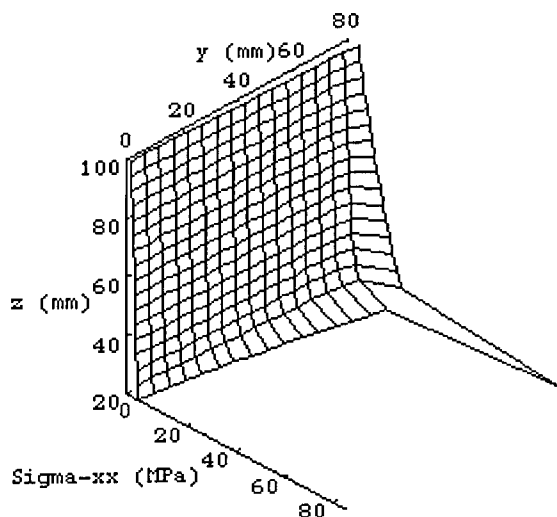


Figura 5.17 Distribuição de tensões normais nos elementos de interface para a viga com duplo entalhe (integração de Newton-Cotes/Lobatto).

5.6.4.2 Análise linear-elástica de base com reforço

Este exemplo, representado na figura 5.18, deriva do exemplo apresentado em 5.6.2.2. Utilizaram-se as mesmas propriedades dos materiais e um parâmetro de rigidez $d = 10^9 \text{ N/mm}^3$. Duas tensões de $3 \times 10^6 \text{ MPa}$ na direcção x e $1 \times 10^6 \text{ MPa}$ na direcção y são aplicadas nos elementos do reforço, como ilustrado na figura 5.18. Nas figuras 5.19 e 5.20 mostram-se as distribuições de tensões de corte τ_{xz} e τ_{yz} nos elementos de interface. Também nesta situação não se verificam oscilações nas distribuições de tensões.

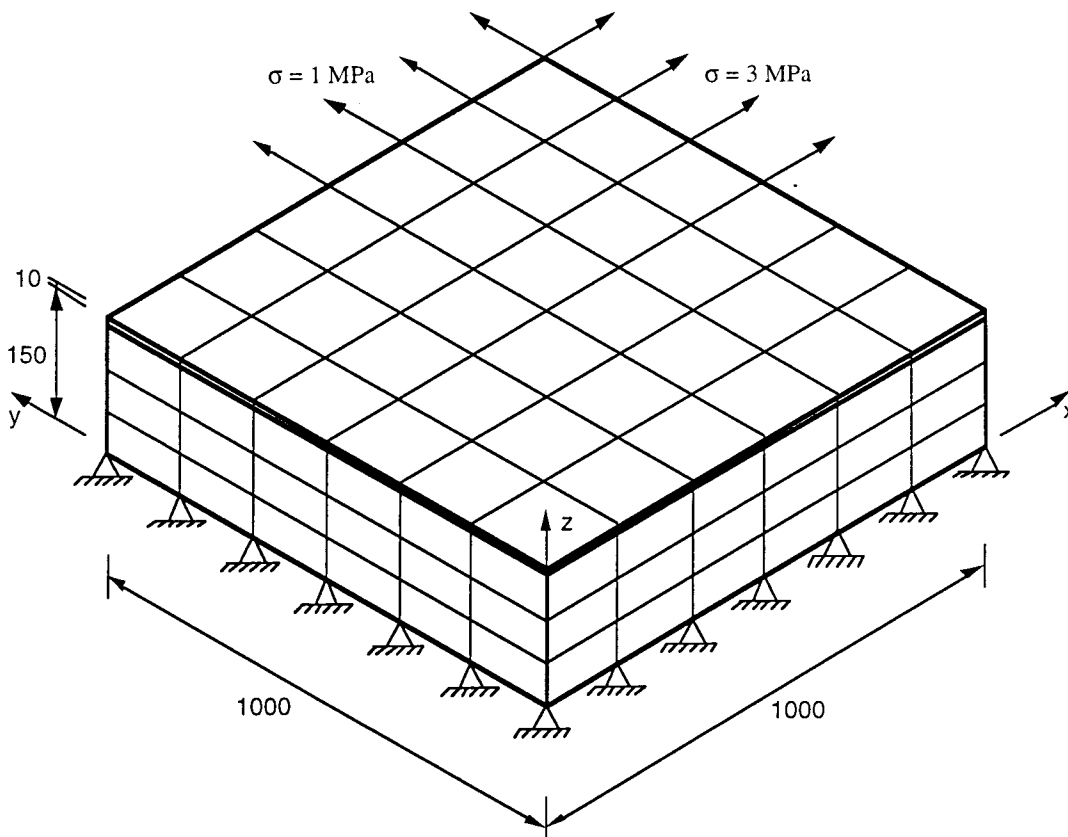


Figura 5.18 Malha de elementos finitos e condições de fronteira de base com reforço solicitado ao corte.

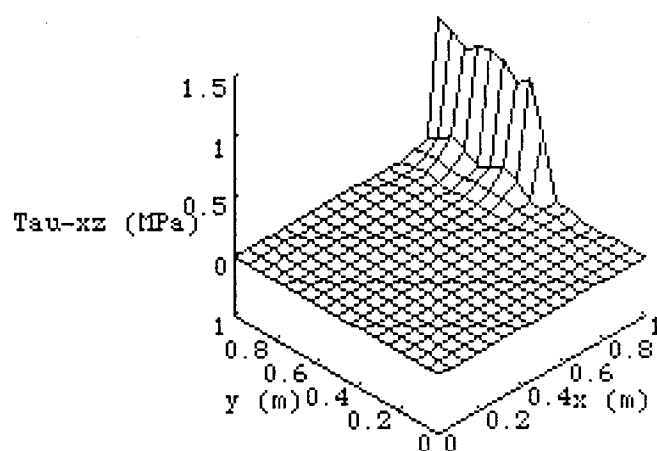


Figura 5.19 Distribuição de tensão τ_{xz} nos elementos de interface (integração de Newton-Cotes/Lobatto).

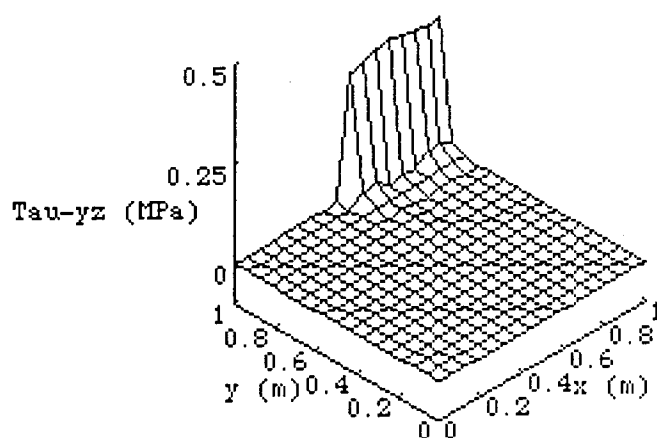


Figura 5.20 Distribuição de tensão τ_{yz} nos elementos de interface (integração de Newton-Cotes/Lobatto).

5.6.5 Método de integração seleccionado

O estudo atrás apresentado permite concluir que o elemento de interface apresenta melhor desempenho quando se utiliza a integração de Newton-Cotes/Lobatto. O método de integração de Gauss conduziu repetidamente a distribuições de tensões com comportamento oscilatório, principalmente quando se utilizaram os maiores valores do parâmetro de rigidez. A análise de valores próprios da matriz de rigidez do elemento mostrou que, no caso da integração de Gauss, existe acoplamento de deslocamentos nodais entre os vários pares de nós. Esse comportamento reflecte-se nas distribuições de tensões originando oscilações.

Embora os dois métodos acima referidos tenham sido implementados, a integração de Newton-Cotes/Lobatto foi seleccionada para os estudos apresentados nos capítulos seguintes.

Referências

1. de Moura, M.F.S.F., Gonçalves, J.P.M., Marques, A.T., e de Castro, P.M.S.T., "Modeling compression failure after low velocity impact on laminated composites using interface elements", *Journal of Composite Materials*, Vol. 31, pp. 1462-1479, 1997.
2. Wang, S.S., "An analysis of delamination in angle-ply fiber-reinforced composites", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 47, pp. 64-70, 1980.
3. Wu, C.M.L., "Nonlinear analysis of edge effects in angle-ply laminates", *Computers & Structures*, Vol. 25, pp. 787-798, 1987.
4. Lindner, M. e Kromp, K., "FE-calculation demonstrating the influence of the matrix interface layer on the free edge stress in a laminated CFRC composite", em: *Proceedings of the Second International Symposium on Brittle Matrix Composites*, A.M. Brandt e I.H. Marshall, eds., Cedzina, Poland, pp. 443-453, 1988.
5. Allix, O. e Ladevèze, P., "Interlaminar interface modelling for the prediction of delamination", *Composite Structures*, Vol. 22, pp. 235-242, 1992.
6. Spilker, R.L., "Hybrid-stress eight-node elements for thin and thick multilayer laminated plates", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 18, pp. 801-828, 1982.
7. Shi, Y.B. e Chen, H.R., "A mixed finite element for interlaminar stress computation", *Composite Structures*, Vol. 20, pp. 127-136, 1992.
8. Francavilla, A. e Zienkiewicz, O.C., "A note on numerical computation of elastic contact problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 9, pp. 913-924, 1975.
9. Sachdeva, T.D. e Ramakrishnan, C.V., "A finite element solution for the two-dimensional elastic contact problem", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 17, pp. 1259-1271, 1981.
10. Zheng, S. e Sun, C.T., "A double-plate finite-element model for the impact-induced delamination problem", *Composite Science and Technology*, Vol. 53, pp. 111-118, 1995.
11. Liu, S. e Chang, F.K., "Matrix cracking effect on delamination growth in composite laminates induced by a spherical indenter", *Journal of Composite Materials*, Vol. 28, pp. 940-977, 1994.
12. Ngo, D. e Scordelis, A.C., "Finite element analysis of reinforced concrete beams", *Journal of the American Concrete Institute*, Vol. 64, pp. 152-163, 1967.

13. Frank, R., Guenot, A., e Humbert, P., "Numerical analysis of contacts in geomechanics", em: *Proceedings of the 4th International Conference on Numerical Methods in Geomechanics*, A.A. Balkema, Rotterdam, pp. 37-42, 1982.
14. Cui, W. e Wisnom, M.R., "A combined stress-based and fracture-mechanics-based model for predicting delamination in composites", *Composites*, Vol. 24, pp. 467-474, 1993.
15. Goodman, R.E., Taylor, R.L., e Brekke, T.L., "A model for the mechanics of jointed rock", *ASCE Journal of Soil Mechanics and Foundations Division*, Vol. 94, pp. 637-659, 1968.
16. Schafer, H., "A contribution to the solution of contact problems with the aid of bond elements", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 6, pp. 335-354, 1975.
17. Buragohain, D.N. e Shah, V.L., "Curved isoparametric interface surface element", *ASCE Journal of the Structural Division*, Vol. 104, pp. 205-209, 1978.
18. Beer, G., "An isoparametric joint/interface element for finite element analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, pp. 585-600, 1985.
19. Gens, A., Carol, I., e Alonso, E.E., "An interface element formulation for the analysis of soil-reinforcement interaction", *Computers and Geotechnics*, Vol. 7, pp. 133-151, 1988.
20. Schellekens, J.C.J., *Computational strategies for composite structures*. Tese de Doutorado, Universidade Técnica de Delft, Delft, 1992.
21. Schellekens, J.C.J. e de Borst, R., "On the numerical integration of interface elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, pp. 43-66, 1993.
22. de Moura, M.F.S.F., *Modelos de previsão do comportamento mecânico de materiais compósitos de carbono-epóxico sujeitos a impacto de baixa velocidade e da sua resistência residual após impacto*. Tese de Doutorado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, 1995.
23. Bathe, K.-J., *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1996.
24. Zienkiewicz, O.C. e Taylor, R.L., *The Finite Element Method: Basic Formulation and Linear Problems*. McGraw-Hill, London, 1994.
25. Simo, J.C., Wriggers, P., e Taylor, R.L., "A perturbed lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 50, pp. 163-180, 1985.

26. Simo, J.C. e Laursen, T.A., "An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction", *Computers & Structures*, Vol. 42, pp. 97-116, 1992.
27. Papadopoulos, P. e Taylor, R.L., "A mixed formulation for the finite element solution of contact problems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 94, pp. 373-389, 1992.
28. *ABAQUS User's Manual, Version 5.6*. Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc., Pawtucket, 1996.
29. *ABAQUS Examples Problems Manual, Version 5.6*. Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc., Pawtucket, 1996.
30. Reddy, J.N., *Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering*. McGraw-Hill International Editions, Singapore, 1986.
31. Nour-Omid, B. e Wriggers, P., "A two-level iteration method for solution of contact problems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 54, pp. 131-144, 1986.
32. Oñate, E., *Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos - Análisis Estático Lineal*. Centro Internacional de Métodos Numéricos em Ingeniería, Barcelona, 1992.
33. Brockman, R.A., "Numerical solution of large deformation problems involving surface contact and impact", em: *Penalty-Finite Element Methods in Mechanics*, J.N. Reddy, ed., The American Society of Mechanical Engineers, New York, 1982.
34. Hallquist, J.O., Goudreau, G.L., e Benson, D.J., "Sliding interfaces with contact-impact in large scale lagrangian computations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 51, pp. 107-137, 1985.
35. Wriggers, P. e Nour-Omid, B., *Solution methods for contact problems*. UCB/SESM-84/09, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, 1984.
36. Cook, R.D., Malkus, D.S., e Plesha, M.E., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, New York, 1989.

CAPÍTULO 6

6. INICIAÇÃO E PROPAGAÇÃO DE DANO

6.1 Introdução

6.2 Modelo baseado na resistência dos materiais

6.3 Modelo baseado na utilização conjunta da resistência dos materiais e da mecânica da fractura

6.3.1 Modo puro: I, II ou III

6.3.2 Modo misto

6.3.2.1 Sem relação entre modos

6.3.2.2 Com relação entre modos

6.4 Exemplos

6.4.1 Viga encastrada

6.4.2 Teste *Double Cantilever Beam* (DCB)

6.4.2.1 Soluções analíticas

6.4.2.2 Resultados

6.4.3 Teste *End Notched Flexure* (ENF)

6.4.3.1 Soluções analíticas

6.4.3.2 Resultados

6.4.4 Teste *Mixed Mode Bending*(MMB)

6.4.4.1 Soluções analíticas

6.4.4.2 Resultados

6.4.5 Discussão dos resultados e conclusão

Referências

CAPÍTULO 6

6. INICIAÇÃO E PROPAGAÇÃO DE DANO

6.1 Introdução

As interfaces entre materiais com características mecânicas diferentes são zonas onde frequentemente se iniciam e desenvolvem defeitos que geralmente contribuem para a rotura da ligação e possível colapso da estrutura. A modelação de estruturas que contenham interfaces deverá incluir a possibilidade de prever o aparecimento e propagação de dano. O dano deverá ser incluído no modelo à medida que se desenvolve porque isso altera o comportamento da estrutura e pode promover o aparecimento de mais dano.

Dois tipos de critérios de rotura são habitualmente utilizados: os critérios baseados na resistência dos materiais e os critérios baseados na mecânica da fractura. Nos primeiros, as tensões em cada ponto são determinadas e a verificação do critério significa a ocorrência de rotura na região vizinha a esse ponto. Os critérios baseados na mecânica da fractura utilizam os conceitos de factor de intensidade de tensão ou de taxa de libertação de energia para prever a propagação de um defeito. Ao contrário dos critérios baseados na resistência dos materiais, estes últimos necessitam que se considere a existência de um defeito inicial.

Neste capítulo apresentam-se os dois critérios implementados no elemento de interface. Nenhum critério baseado na mecânica da fractura foi implementado devido à limitação apontada. Assim, decidiu-se utilizar um modelo com um critério baseado na resistência dos materiais e um outro que combina as ideias dos dois tipos atrás referidos.

6.2 Modelo baseado na resistência dos materiais

O critério baseado na resistência dos materiais adoptado é conhecido na área dos materiais compósitos por Critério Quadrático de Delaminagem [1, 2]. Este critério considera, como principais responsáveis na propagação do dano, as tensões normais e as tensões de corte existentes na interface. Considerando um referencial local na interface (s,t,n) o critério escreve-se

$$\frac{\sigma_n^2}{\sigma_{lim}^2} + \frac{\tau_s^2 + \tau_t^2}{\tau_{lim}^2} \geq 1 \quad (6.1)$$

em que

σ_n - tensão normal

σ_{lim} - tensão normal limite

τ_s, τ_t - tensões de corte

τ_{lim} - tensão de corte limite

A rotura de um determinado ponto dá-se quando as tensões de corte e a tensão normal atingem, durante o processo incremental, valores susceptíveis de satisfazer a inequação (6.1). Quando tal acontece, o processo de rotura do ponto em questão faz-se de uma forma gradual, uma vez que a passagem abrupta a zero das tensões transmitidas na interface implica o aparecimento de problemas numéricos relacionados com dificuldades de convergência. Os aspectos fundamentais deste processo são:

- possibilidade de existência de quatro mudanças de estado num ponto:

- i) rotura em tracção, o que implica a anulação das tensões de corte e da tensão normal;
- ii) rotura em compressão, o que implica a anulação das tensões de corte, sendo mantida a tensão normal que neste caso é compressiva;
- iii) passagem de uma situação de abertura sem contacto para uma de contacto, o que implica o aparecimento da tensão normal compressiva;
- iv) situação inversa da anterior com a consequente necessidade de anular a tensão normal compressiva;

- sempre que surja um ponto em rotura, o tamanho do incremento é reduzido a um valor muito pequeno, que se mantém constante desde que exista pelo menos um ponto nessas condições;

- o tamanho muito pequeno do incremento nesta fase de abertura deve-se ao facto de se pretender que ela seja o mais instantânea possível, de modo a reflectir com maior

precisão a realidade física;

- rotura em quatro incrementos sendo os parâmetros de rigidez reduzidos linearmente a zero, o que serve para amortecer o efeito nefasto, em termos numéricos, causado por uma anulação abrupta.

6.3 Modelo baseado na utilização conjunta da resistência dos materiais e da mecânica da fractura

Este modelo surgiu na literatura relativa à modelação do comportamento do betão [3] e tem sido também utilizado no estudo de delaminagens em materiais compósitos [4-9]. A ideia fundamental deste modelo é considerar que, após o estado de tensão num ponto atingir um determinado valor crítico, a rotura não se dá instantaneamente e a energia dissipa-se à medida que o dano avança. Este conceito é facilmente perceptível no ponto seguinte.

6.3.1 Modo puro: I, II ou III

Em presença de modo I puro, a relação que descreve o processo de rotura de um ponto da interface está representado na figura 6.1. A rotura inicia-se quando a tensão normal σ_n no ponto atinge a tensão limite σ_{lim} . A essa tensão corresponde um deslocamento relativo crítico $\delta_{n,0}$. A partir deste ponto, a tensão decresce linearmente com o deslocamento relativo até se anular e a rotura ficar completa. O valor do deslocamento $\delta_{n,max}$, para o qual a tensão se anula, é obtido impondo que a área por baixo da curva de relaxação seja igual à taxa crítica de libertação de energia em modo I, G_{Ic} . A mecânica da fractura é assim indirectamente utilizada e a taxa de crescimento do dano é controlada e definida pela taxa crítica de libertação de energia.

O modelo material representado na figura 6.1 fica completamente definido especificando os valores de σ_{lim} , $\delta_{n,0}$ e $\delta_{n,max}$. Na prática, o valor de $\delta_{n,0}$ é muito pequeno e o cálculo de $\delta_{n,max}$ é dado por

$$\delta_{n,max} = \frac{2G_{Ic}}{\sigma_{lim}} \quad (6.2)$$

Os pontos que estão no processo de relaxação das tensões têm deslocamentos relativos na gama $\delta_{n,0} < \delta_n < \delta_{n,max}$. Em cada instante, a região definida por todos os

pontos nessas condições é conhecida por "Zona de Processamento". Na figura 6.2 representa-se uma situação de propagação num problema plano e define-se a "Zona de Processamento" de comprimento c . Nesta figura são representados cinco pontos e a posição de cada um na curva tensão/deslocamento relativo. Numa das extremidades, o ponto 1 terminou o processo de rotura, enquanto que na outra extremidade, o ponto 5 ainda não atingiu a tensão máxima. O ponto 4 acabou de atingir a tensão máxima, enquanto que o ponto 3 encontra-se na fase de relaxação e o ponto 2 terminou essa fase e a tensão anulou-se.

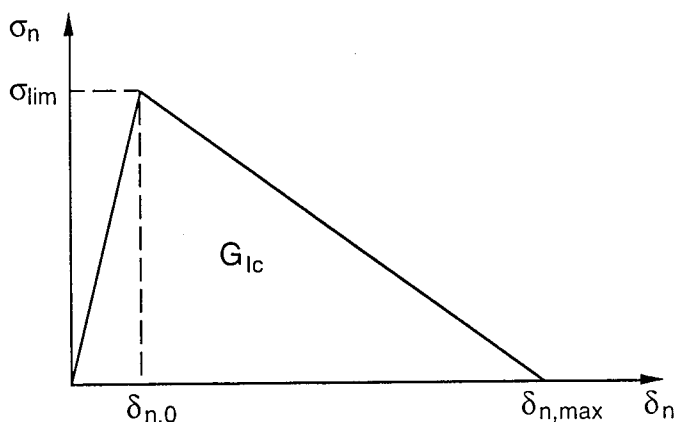


Figura 6.1 Relação tensão/deslocamento relativo.

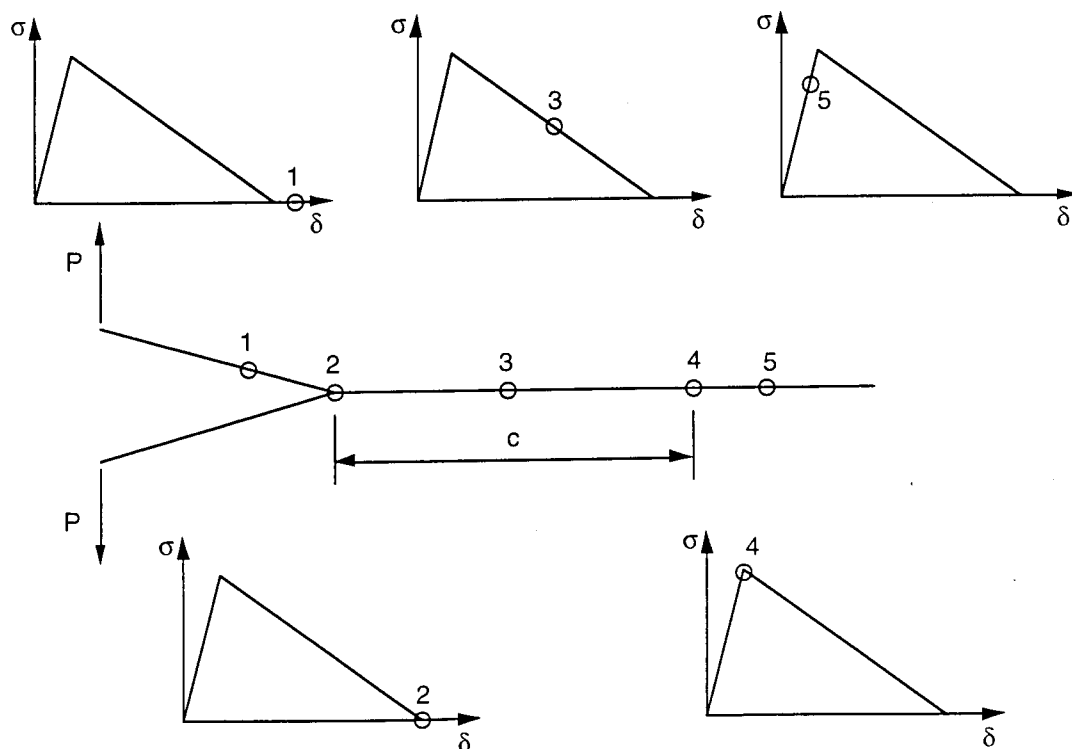


Figura 6.2 Zona de Processamento.

A implementação da relação tensão/deslocamento relativo da figura 6.1 pode ser separada em três fases distintas:

1 - Para $\delta_n < \delta_{n,0}$, a relação é descrita pela equação (5.37)

2 - Para $\delta_{n,0} \leq \delta_n \leq \delta_{n,max}$, temos

$$\sigma = (\mathbf{I} - \mathbf{E})\mathbf{D}\delta \quad (6.3)$$

onde $\mathbf{I}$ representa a matriz identidade e $\mathbf{E}$ é uma matriz diagonal com a forma

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\delta_{n,max}(\delta_n - \delta_{n,0})}{\delta_n(\delta_{n,max} - \delta_{n,0})} \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

3 - Para $\delta_n > \delta_{n,max}$, verifica-se a equação (6.3), embora todas as componentes da diagonal da matriz $\mathbf{E}$ sejam iguais a 1. Isto implica que os parâmetros de rigidez e, consequentemente, as tensões nas três direcções sejam nulos. Convém referir que, neste caso, a interpenetração é impedida fazendo intervir o parâmetro de rigidez d_n sempre que se verifique contacto.

Os modelos para os modos puros II e III são idênticos ao modelo descrito para modo I adaptado às respectivas direcções e fazendo intervir a taxa crítica de libertação de energia correspondente.

6.3.2 Modo misto

6.3.2.1 Sem relação entre modos

A forma mais simples de implementar um critério de modo misto, seguindo o modelo apresentado em 6.3.1, é considerar que cada um dos modos é independente, ou seja, em cada ponto, a posição na curva tensão/deslocamento relativo para cada um dos modos é dependente apenas dos deslocamentos relativos correspondentes a esse modo. Isto implica que para o mesmo ponto tenhamos em cada momento um estado diferente

para cada um dos modos considerados. Por exemplo, pode suceder que, num determinado instante, um ponto esteja na fase de relaxação de tensões em modo I e ainda não tenha atingido essa fase nos modos II e III. Para que o modelo esteja completo, é necessário definir quando é que o ponto é considerado completamente aberto, isto é, não resiste a tensões em nenhuma direcção. Este modelo foi implementado no elemento de interface e considerou-se que quando o processo de relaxação numa das direcções terminar, as outras direcções deixam automaticamente de resistir a qualquer força.

6.3.2.2 Com relação entre modos

Neste modelo de modo misto existe uma relação entre os deslocamentos relativos nas várias direcções. Nesta secção apresenta-se o modelo bidimensional considerando modos I e II. A derivação do modelo tridimensional que inclui os três modos foi realizada neste trabalho e é apresentada no anexo B. Os dois modelos (bi e tridimensionais) foram implementados no elemento de interface.

O modelo baseia-se na consideração de uma superfície de dano S em cada ponto, dependente dos deslocamentos relativos num determinado momento, como representado na figura 6.3.

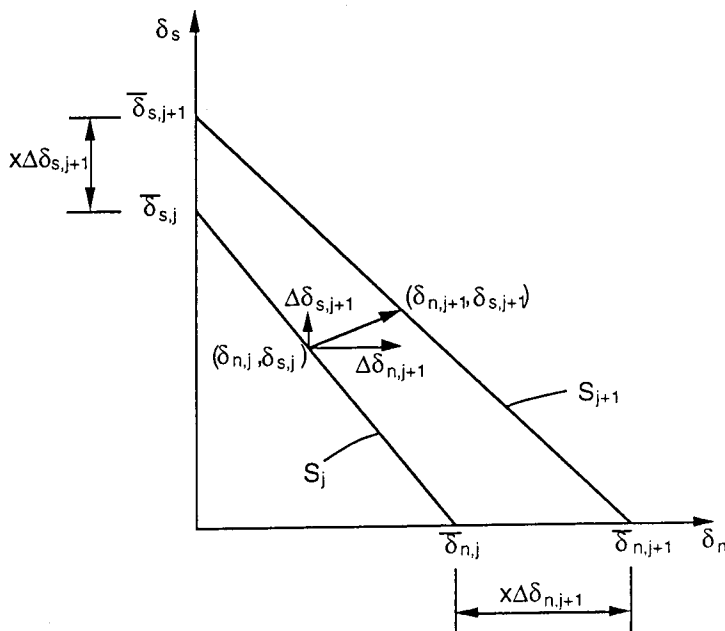


Figura 6.3 Modelo de modo misto.

Suponhamos que a superfície de dano para um determinado ponto é definida pela recta S_j no final do incremento de carga j . Haverá propagação de dano no final do incremento de carga $j+1$ se o vector deslocamento relativo do ponto ultrapassar a superfície de dano anterior (S_j). Nesse caso, a superfície de dano é transladada e rodada para uma nova posição S_{j+1} que contém as novas componentes de deslocamento relativo do ponto (ver figura 6.3). A translação e rotação da superfície é determinada pelos incrementos de deslocamento relativo nas várias direcções.

Para cada direcção, a relação tensão/deslocamento relativo é a descrita em 6.3.1. A propagação do dano inicia-se quando o vector deslocamento relativo ultrapassa a superfície definida pelos deslocamentos relativos $(\delta_{s,0}, \delta_{n,0})$ e termina quando a superfície definida pelos deslocamentos relativos $(\delta_{s,max}, \delta_{n,max})$ é atingida.

Consideremos as intersecções da superfície de dano S_j com os eixos n e s , respectivamente $\bar{\delta}_{n,j}$ e $\bar{\delta}_{s,j}$. Se $S_j > 0$, o novo vector de deslocamentos relativos cai fora da superfície e a nova superfície será determinada por

$$S_{j+1} = \frac{\delta_{n,j+1}}{\bar{\delta}_{n,j} + x\Delta\delta_{n,j+1}} + \frac{\delta_{s,j+1}}{\bar{\delta}_{s,j} + x\Delta\delta_{s,j+1}} - 1 = 0 \quad (6.5)$$

em que $\Delta\delta_{n,j+1} = \delta_{n,j+1} - \delta_{n,j}$ e $\Delta\delta_{s,j+1} = \delta_{s,j+1} - \delta_{s,j}$. A equação (6.5) permite determinar o valor de x de tal forma que a nova recta passa pelo ponto $(\delta_{s,j+1}, \delta_{n,j+1})$. O valor de x é determinado pela menor raiz positiva da equação quadrática

$$\begin{aligned} & (-\Delta\delta_{n,j+1}\Delta\delta_{s,j+1})x^2 + \\ & (\delta_{n,j+1}\Delta\delta_{s,j+1} + \delta_{s,j+1}\Delta\delta_{n,j+1} - \bar{\delta}_{n,j}\Delta\delta_{s,j+1} - \bar{\delta}_{s,j}\Delta\delta_{n,j+1})x + \\ & (\delta_{n,j+1}\bar{\delta}_{s,j} + \delta_{s,j+1}\bar{\delta}_{n,j} - \bar{\delta}_{n,j}\bar{\delta}_{s,j}) = 0 \end{aligned} \quad (6.6)$$

Após calcular o valor de x podem-se determinar os pontos de intersecção da nova superfície de dano com cada um dos eixos i ($i = s, n$) pela fórmula

$$\bar{\delta}_{i,j+1} = \bar{\delta}_{i,j} + x(\delta_{i,j+1} - \delta_{i,j}) \quad (6.7)$$

A relação tensões/deslocamentos relativos é descrita por (6.3), sendo os elementos da diagonal da matriz $\mathbf{E}$ (ver (6.4)) correspondentes às direcções i ($i = s, n$), dados por

$$e_{i,j+1} = \frac{\delta_{i,max}(\bar{\delta}_{i,j+1} - \delta_{i,0})}{\bar{\delta}_{i,j+1}(\delta_{i,max} - \delta_{i,0})} \quad (6.8)$$

6.4 Exemplos

Nos exemplos que se seguem faz-se a aplicação dos modelos de propagação de dano descritos atrás. O primeiro exemplo refere-se à aplicação do modelo baseado na resistência dos materiais a uma viga encastrada. Nos restantes três exemplos faz-se a aplicação do modelo baseado na combinação da resistência dos materiais com a mecânica da fractura. Esses exemplos são relativos a ensaios comuns para determinação de propriedades em modo I, modo II e modo misto.

6.4.1 Viga encastrada

A geometria e condições de fronteira deste problema estão representadas na figura 6.4. A viga tem comprimento de 200 mm, espessura de 40 mm e largura de 25 mm. As propriedades elásticas do material são: $E = 210$ GPa e $\nu = 0,3$. A força máxima aplicada é $P = 1,5$ kN. Neste problema, admite-se que as forças aplicadas provocam o aparecimento e propagação de dano no plano médio horizontal da viga. O modelo é constituído por duas camadas de elementos tridimensionais unidas por elementos de interface. Nos elementos de interface utilizou-se o modelo baseado na resistência dos materiais apresentado em 6.2, com a tensão normal limite $\sigma_{lim} = 2$ MPa e a tensão de corte limite $\tau_{lim} = 4$ MPa. Geraram-se três malhas com 32, 64 e 128 elementos ao longo do comprimento da viga. Na figura 6.5 mostra-se a malha com 32 elementos ao longo da viga.

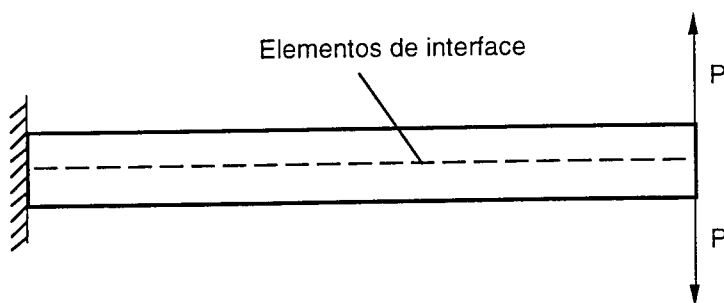


Figura 6.4 Geometria e condições de fronteira de viga encastrada.

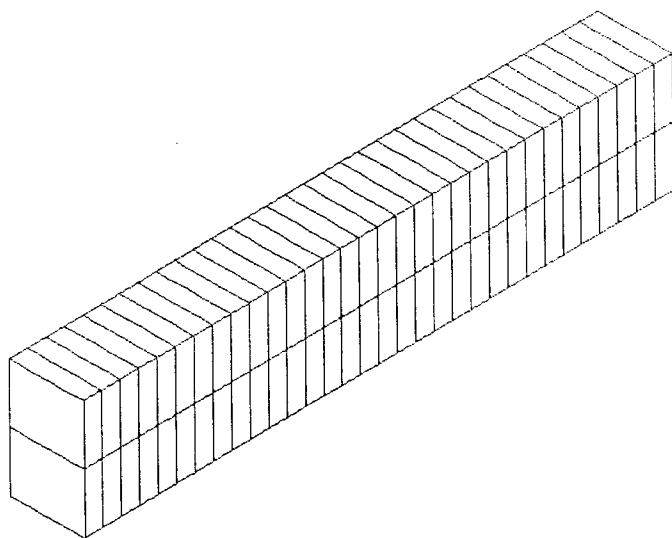


Figura 6.5 Malha de elementos finitos para viga com 32 elementos ao longo do seu comprimento.

O dano inicia-se na extremidade da viga onde as forças são aplicadas, e propaga-se até à outra extremidade. Na figura 6.6 mostra-se a propagação do dano em vários momentos da história do carregamento. No gráfico da figura 6.7 representa-se a variação da carga aplicada P em função do afastamento Δ entre as extremidades das duas metades da viga. Neste gráfico constata-se que não existe convergência da solução com o refinamento da malha. Para o mesmo valor do afastamento Δ , a carga aumenta com o refinamento da malha.

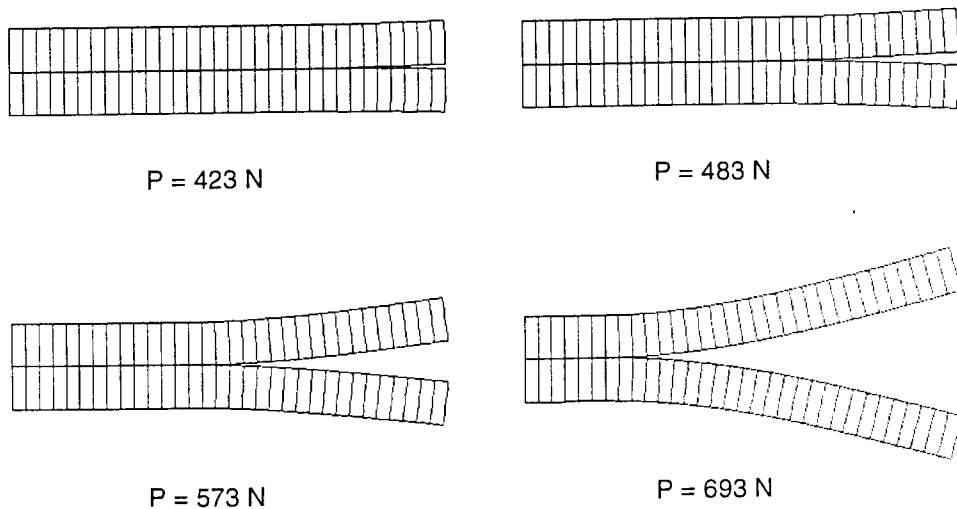


Figura 6.6 Fases de propagação do dano.

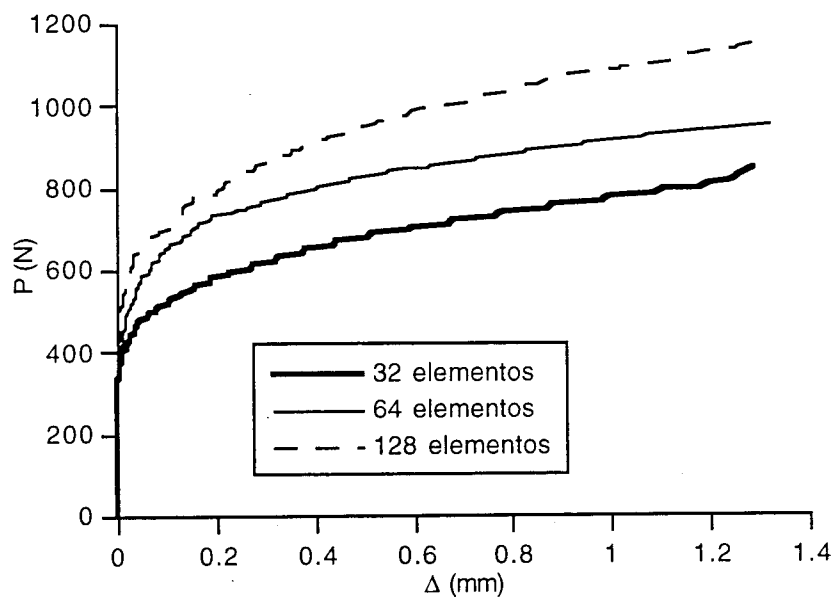


Figura 6.7 Variação da carga aplicada P com o afastamento Δ .

6.4.2 Teste *Double Cantilever Beam* (DCB)

O teste *Double Cantilever Beam* (DCB) é um problema em modo I puro. A geometria considerada neste exemplo está ilustrada na figura 6.8. O provete tem uma fenda inicial com um comprimento de 30 mm. As condições de fronteira do problema e a direcção de aplicação do carregamento estão representados na figura 6.9.

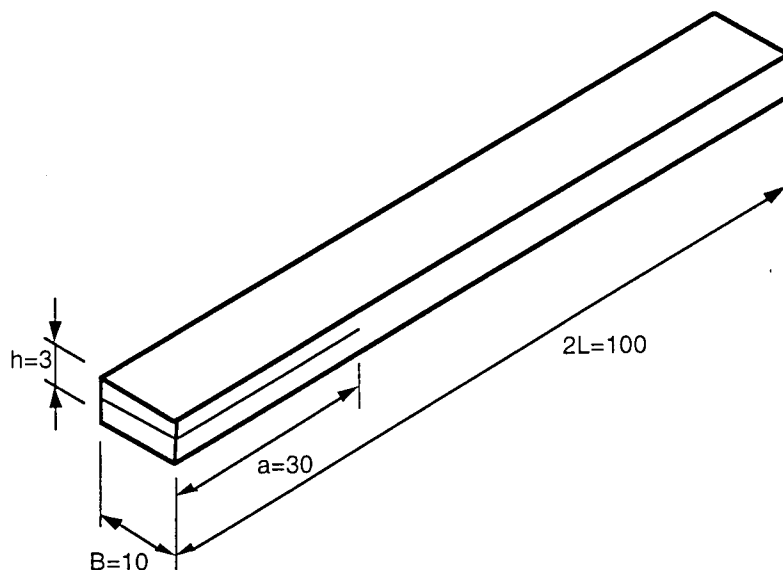


Figura 6.8 Geometria do provete.

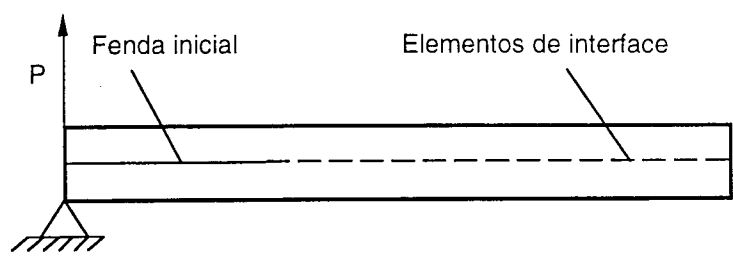


Figura 6.9 Carregamento e condições de fronteira para modelo DCB.

Utilizaram-se três malhas com duas camadas de elementos paralelepípedicos separados por elementos de interface. Nestes últimos, utilizou-se o modelo baseado na utilização conjunta da resistência dos materiais e da mecânica da fractura para modo I apresentado em 6.3.1. Na zona da fenda inicial, os elementos de interface estão abertos, isto é, admite-se que já chegaram ao fim do processo de propagação. As três malhas diferem no número de elementos ao longo do comprimento da viga; utilizaram-se 50, 100 e 200 elementos.

As propriedades dos elementos sólidos e dos elementos de interface são apresentadas na tabela 6.1. A taxa crítica de libertação de energia em modo II (G_{IIC}) e a tensão limite ao corte (τ_{lim}) só são utilizadas nos exemplos seguintes. O parâmetro de rigidez utilizado nos elementos de interface foi 10^7 N/mm². Fizeram-se análises não-lineares geométricas utilizando o método de Riks modificado disponível no programa ABAQUS [10].

Tabela 6.1 Propriedades dos materiais.

Elementos sólidos		Elementos de interface			
E (GPa)	ν	G_{IC} (N/mm)	G_{IIC} (N/mm)	σ_{lim} (MPa)	τ_{lim} (MPa)
69	0,33	0,055	1,45	20	40

6.4.2.1 Soluções analíticas

Para este problema é possível encontrar soluções analíticas baseadas na teoria das vigas e da mecânica da fractura [9, 11]. Duas situações são consideradas para se obter relações entre a carga aplicada P e a flecha Δ na extremidade do DCB:

1 - Antes do dano propagar

$$\Delta = \frac{16Pa_0^3}{3EI} \quad (6.9)$$

2 - Durante a propagação

$$\Delta = \frac{16}{3EIP^2} \left(\frac{BG_{lc}EI}{8} \right)^{3/2} \quad (6.10)$$

onde

a_0 - comprimento inicial da fenda

B - largura da viga

I - momento de inércia da secção

A derivação detalhada destas fórmulas é apresentada no anexo C.

6.4.2.2 Resultados

As curvas força/deslocamento na extremidade da viga, analíticas e obtidas com o modelo numérico, são apresentadas no gráfico da figura 6.10.

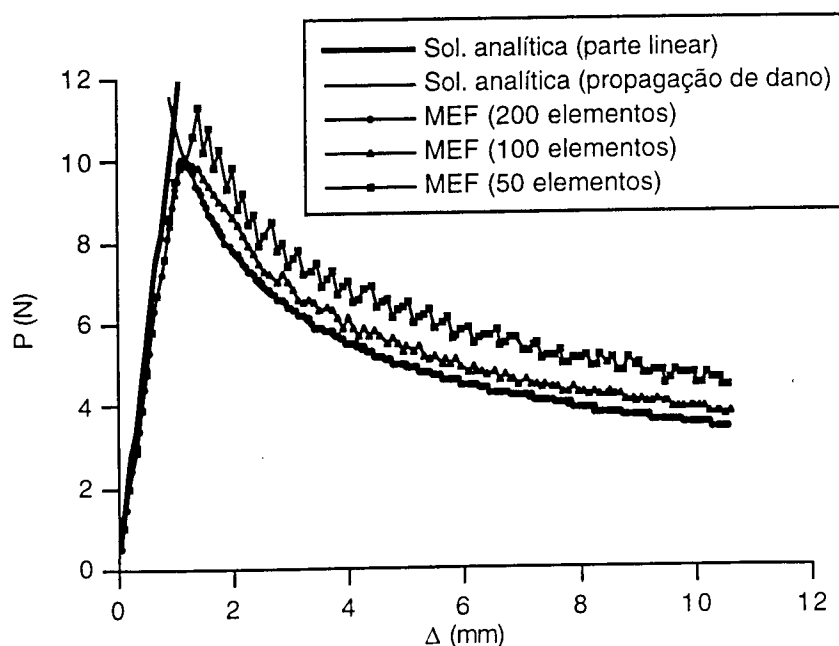


Figura 6.10 Curva força/deslocamento na extremidade da viga para modelo DCB.

Várias conclusões podem-se retirar da análise do gráfico anterior:

- i) A solução para a malha menos refinada (50 elementos ao longo do comprimento da viga) apresenta algumas instabilidades que desaparecem com o refinamento da malha. Essas instabilidades podem ser explicadas pelo pequeno número de pontos simultaneamente em processo de relaxação de tensões, o que conduz a uma queda abrupta da carga quando um dos pontos deixa de transmitir qualquer tensão.
- ii) A solução converge com o refinamento da malha. A diferença entre as soluções obtidas para as malhas de 100 e 200 elementos ao longo do comprimento da viga é inferior à diferença entre as soluções para as malhas de 50 e 100 elementos.
- iii) A solução obtida com a malha mais refinada (200 elementos ao longo do comprimento da viga) é idêntica à das soluções analíticas. A pequena diferença entre as cargas máximas pode ser explicada por dois factores. O primeiro deve-se à consideração de análise não-linear geométrica no modelo de elementos finitos, hipótese não incluída nos modelos analíticos. O segundo factor relaciona-se com a iniciação do processo de relaxação de tensões em alguns elementos do modelo de elementos finitos antes de se atingir a carga máxima. Como é evidente no gráfico da figura 6.10, a carga máxima do modelo analítico resulta da intersecção da curva derivada para a situação de não propagação com a curva obtida para a situação de propagação (ver também anexo C).

6.4.3 Teste *End Notched Flexure* (ENF)

Para estudar o comportamento do elemento de interface numa situação de modo II puro, considerou-se um modelo do ensaio *End Notched Flexure* (ENF) como ilustrado na figura 6.11. As características geométricas e propriedades do material são idênticas às utilizadas no exemplo anterior. Obviamente, neste caso aplica-se a taxa de libertação de energia em modo II (G_{IIc}) e a tensão limite ao corte (τ_{lim}) (ver tabela 6.1). As condições de fronteira e ponto de aplicação da carga estão representados na figura 6.11.

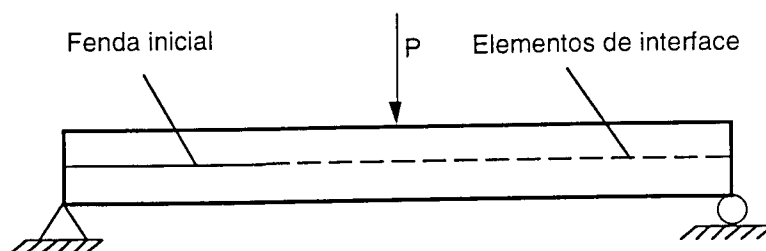


Figura 6.11 Modelo ENF.

6.4.3.1 Soluções analíticas

Para este problema também é possível derivar soluções analíticas [9, 11]. A derivação dessas soluções é apresentada no anexo C. As relações entre carga e deslocamento nas diversas fases são dadas pelas seguintes fórmulas:

1 - Antes do dano propagar

$$\Delta = \frac{P(2L^3 + 3a_0^3)}{12EI} \quad (6.11)$$

em que L representa metade do comprimento da viga.

2 - Durante a propagação, para o comprimento da fenda menor do que metade do comprimento da viga ($a < L$)

$$\Delta = \frac{P}{12EI} \left[2L^3 + \frac{(8G_{lc}BEI)^{3/2}}{\sqrt{3}P^3} \right] \quad (6.12)$$

3 - Durante a propagação, para o comprimento da fenda maior do que metade do comprimento da viga ($a > L$)

$$\Delta = \frac{P}{3EI} \left[2L^3 - \frac{(8G_{lc}BEI)^{3/2}}{4\sqrt{3}P^3} \right] \quad (6.13)$$

6.4.3.2 Resultados

No gráfico da figura 6.12 está representada a solução obtida pelo método dos elementos finitos com uma malha de 100 elementos ao longo do comprimento da viga e a solução analítica. Pode concluir-se deste gráfico que existe uma boa concordância entre as soluções numérica e analítica. As razões que justificam a diferença verificada nas cargas máximas são as mesmas que foram apontadas para o exemplo do teste DCB.

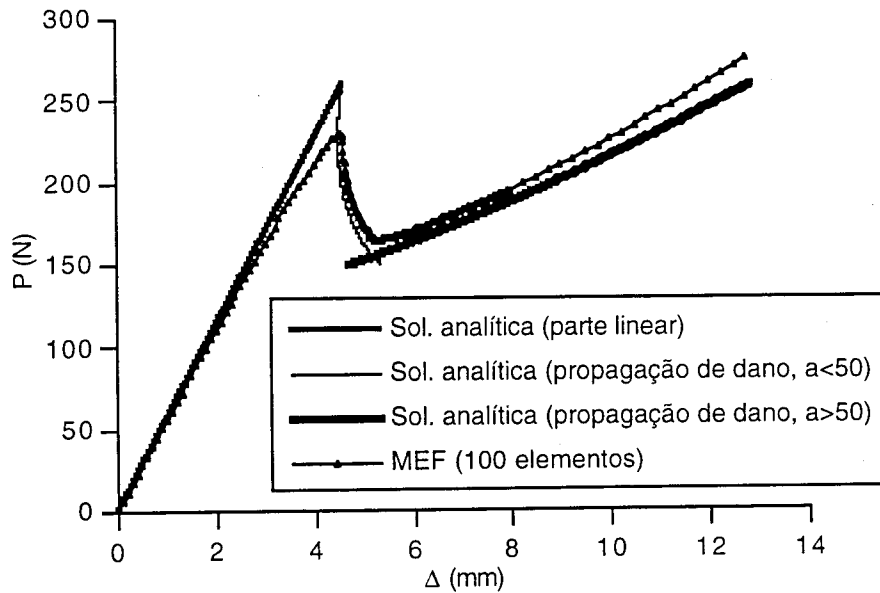


Figura 6.12 Curva força/deslocamento no centro da viga para o modelo ENF.

6.4.4 Teste *Mixed Mode Bending* (MMB)

O teste *Mixed Mode Bending* (MMB) proposto por Reeder e Crews [12] foi escolhido para estudar o comportamento do modelo em modo misto (modo I e II). O ensaio é realizado com o sistema esquematizado na figura 6.13(a). A carga P aplicada no braço de carregamento resulta em duas forças aplicadas no centro e na extremidade do provete, como representado na figura 6.13(b). Para um comprimento L fixo, a distância (e) determina a razão entre as duas cargas e consequentemente a razão entre modo I e modo II na extremidade da fenda.

Neste exemplo considerou-se $G_I/G_{II} = 1$. Para que esta relação se verifique resulta o valor de (e) igual a 43,72 mm. As propriedades dos elementos de interface relativas aos dois modos também foram igualadas. Assim, na tabela 6.1, os novos valores para a tensão normal limite e taxa crítica de libertação de energia em modo I são, respectivamente, $\sigma_{lim} = 40$ MPa e $G_{Ic} = 1,45$ N/mm. As propriedades elásticas dos elementos sólidos mantêm-se como na tabela 6.1.

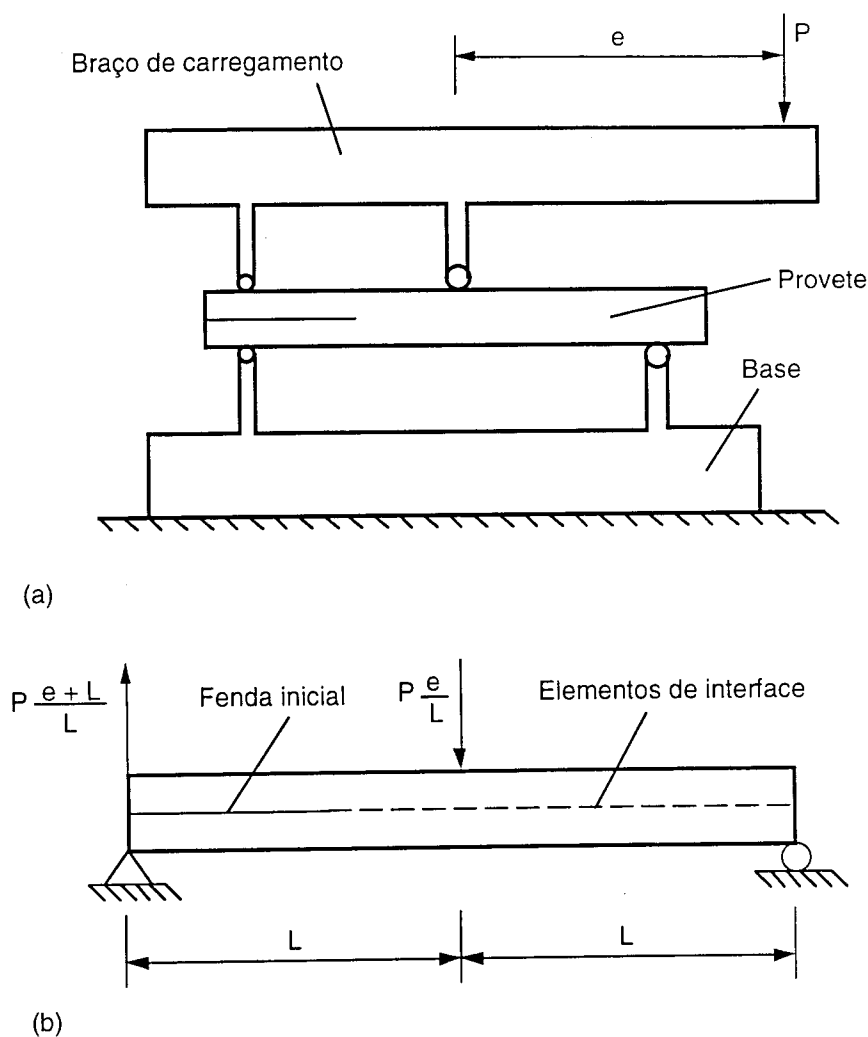


Figura 6.13 Ensaio MMB: (a) sistema experimental (b) modelo.

6.4.4.1 Soluções analíticas

À semelhança dos dois exemplos anteriores, a derivação detalhada das soluções analíticas para este caso também são apresentadas no anexo C. No entanto, os resultados dessas derivações, na forma de relações força/deslocamento na extremidade do provete, são apresentados a seguir. As cargas relativas a cada um dos modos, na extremidade da fenda, são dadas por

$$P_I = \left(\frac{3e - L}{4L} \right) P \quad (6.14)$$

$$P_{II} = \left(\frac{e + L}{L} \right) P \quad (6.15)$$

O deslocamento na extremidade da viga é calculado nas seguintes formas:

1 - Antes do dano propagar

$$\Delta = \frac{16P_I a_0^3}{3EI} \quad (6.16)$$

2 - Durante a propagação, para o comprimento da fenda menor do que metade do comprimento da viga ($a < L$)

$$\Delta = \frac{16P_I a^3}{3EI} \quad (6.17)$$

em que (a) é determinado tendo em conta o critério linear de modo misto

$$a = \sqrt{\frac{BEI}{\frac{8P_I^2}{G_{Ic}} + \frac{3P_{II}^2}{8G_{IIc}}}} \quad (6.18)$$

Após o cálculo de (a), a expressão (6.17) escreve-se

$$\Delta = \frac{16P_I}{3EI} \left(\frac{BEI}{\frac{8P_I^2}{G_{Ic}} + \frac{3P_{II}^2}{8G_{IIc}}} \right)^{3/2} \quad (6.19)$$

3 - Durante a propagação, para um comprimento da fenda maior do que metade do comprimento da viga ($a > L$), o deslocamento é calculado pela expressão (6.17), embora neste caso o valor de (a) seja calculado através da seguinte equação quadrática

$$\begin{aligned} & \frac{1}{BEI} \left(\frac{8P_I^2}{G_{Ic}} + \frac{3P_{II}^2}{8G_{IIc}} - \frac{8P_I P_{II}}{G_{IIc}} \right) a^2 - \frac{1}{BEI} \left(\frac{3P_{II}^2 L}{2G_{IIc}} - \frac{8P_I P_{II} L}{G_{IIc}} \right) a + \\ & \frac{3P_{II}^2 L}{2BEIG_{IIc}} - 1 = 0 \end{aligned} \quad (6.20)$$

6.4.4.2 Resultados

No gráfico da figura 6.14 estão representadas a solução analítica e as duas soluções numéricas obtidas com os modelos de modo misto apresentados em 6.3.2. As soluções numéricas foram obtidas com uma malha de 100 elementos ao longo do comprimento da viga.

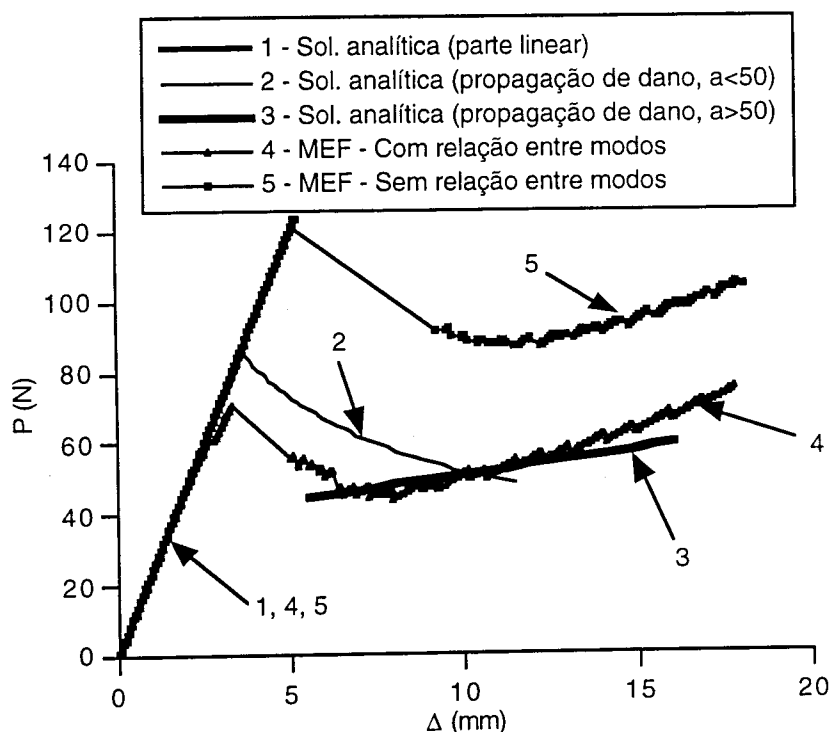


Figura 6.14 Curvas força/deslocamento na extremidade da viga para modelo MMB.

Embora o comportamento global das três soluções seja semelhante, existem diferenças consideráveis no que diz respeito às cargas máximas. A solução numérica, que inclui o modelo com relação entre modos, é diferente da solução analítica pelas razões apontadas nos exemplos anteriores. Para além disso, o critério linear de modo misto adoptado na solução analítica é diferente do modelo de modo misto considerado na solução numérica.

A carga máxima da solução numérica obtida com o modelo sem relação entre modos é muito superior à carga máxima da outra solução numérica. Utilizando um modelo com relação entre modos é compreensível que o dano se propague para cargas mais baixas. Para um determinado estado de tensão, a força responsável pela propagação num dos modos também contribui para a propagação nos outros modos.

Daqui resulta que essa situação é mais grave em termos de propagação de dano do que a situação em que não há relação entre modos.

6.4.5 Discussão dos resultados e conclusão

A principal conclusão que se pode retirar do primeiro exemplo estudado é o mau desempenho do modelo baseado na resistência dos materiais, uma vez que os resultados obtidos são dependentes do refinamento da malha utilizada. No segundo exemplo, verifica-se que o modelo baseado na utilização conjunta da resistência dos materiais e da mecânica da fractura conduz a uma solução que converge com o refinamento da malha.

As soluções numéricas relativas aos exemplos em modos I e II puros apresentam boa concordância com as soluções analíticas respectivas. Mesmo no exemplo em modo misto, as soluções numéricas têm um comportamento semelhante ao da solução analítica, embora esta última utilize um critério diferente das primeiras.

Em geral, pode concluir-se que o modelo baseado na utilização conjunta da resistência dos materiais e da mecânica da fractura apresenta um comportamento satisfatório. Convém ainda realçar que uma das características fundamentais deste modelo é o de não ser necessário definir previamente um defeito inicial como acontece com os modelos tradicionais baseados na mecânica da fractura.

Referências

1. Brewer, J.C. e Lagace, P.A., "Quadratic stress criterion for initiation of delamination", *Journal of Composite Materials*, Vol. 22, pp. 1141-1155, 1988.
2. Lagace, P.A. e Bhat, N.V., "On the prediction of delamination initiation", em: *Advanced Composites '93, International Conference on Advanced Composite Materials*, T. Chandra e A.K. Dhingra, eds., The Minerals Metals & Materials Society, pp. 335-341, 1993.
3. Hilleborg, A., Modeer, M., e Petersson, I.E., "Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements", *Cement & Concrete Research*, Vol. 6, pp. 773-782, 1976.
4. Schellekens, J.C. e de Borst, R., "Free edge delamination in carbon epoxy laminates, a novel numerical/experimental approach", *Composite Structures*, Vol. 28, pp. 357-373, 1993.
5. Cui, W. e Wisnom, M.R., "A combined stress-based and fracture-mechanics-based model for predicting delamination in composites", *Composites*, Vol. 24, pp. 467-474, 1993.
6. Allix, O., Ladevèze, P., e Corigliano, A., "Damage analysis of interlaminar fracture specimens", *Composite Structures*, Vol. 31, pp. 61-74, 1995.
7. Reedy, E.D., Mello, F.J., e Guess, T.R., "Modeling the initiation and growth of delaminations in composite structures", *Journal of Composite Materials*, Vol. 31, pp. 812-831, 1997.
8. Crisfield, M., Mi, Y., Davies, G.A.O., e Hellweg, H.B., "Finite element methods and the progressive failure-modelling of composite structures", em: *Computational Plasticity: Fundamentals and Applications*, D.R.J. Owen e E. Hinton, eds., CIMNE, Barcelona, pp. 239-254, 1997.
9. Mi, Y., Crisfield, M.A., Davies, G.A.O., e Hellweg, H.B., "Progressive delamination using interface elements", *Journal of Composite Materials*, Vol. 32, pp. 1246-1272, 1998.
10. *ABAQUS User's Manual, Version 5.6*. Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc., Pawtucket, 1996.
11. Mi, Y. e Crisfield, M.A., *Analytical derivation of load/displacement relationship for the DCB and MMB and proof of the FEA formulation*. Department of Aeronautics, Imperial College, London, 1996.
12. Reeder, J.R. e Crews, J.H., "Mixed-mode bending method for delamination testing", *AIAA Journal*, Vol. 28, pp. 1270-1276, 1990.

CAPÍTULO 7**7. ESTUDO DE JUNTA ADESIVA DE SOBREPOSIÇÃO SIMPLES****7.1 Introdução****7.2 Materiais****7.2.1 Substratos****7.2.2 Adesivo****7.3 Provetes****7.3.1 Geometria****7.3.2 Preparação dos provetes****7.4 Modelo de elementos finitos - análise bidimensional****7.5 Modelo de elementos finitos - análise tridimensional****7.5.1 Materiais elásticos****7.5.2 Substratos elasto-plásticos****7.5.3 Adesivo elasto-plástico****7.5.4 Materiais elasto-plásticos****7.6 Análise de tensões com o SPATE****7.7 Iniciação e propagação de dano****7.8 Conclusões****Referências**

CAPÍTULO 7

7. ESTUDO DE JUNTA ADESIVA DE SOBREPOSIÇÃO SIMPLES

7.1 Introdução

Neste capítulo exemplifica-se a aplicação das técnicas numéricas desenvolvidas neste trabalho e da técnica experimental baseada no efeito termoelástico ao estudo de uma junta adesiva de sobreposição simples. Na junta considerada utilizaram-se dois materiais frequentemente aplicados neste tipo de ligação: substratos de alumínio e um adesivo de epóxico. As dimensões da junta são típicas da normalização relativa a ensaios para caracterização deste tipo de ligações adesivas.

Com os modelos numéricos, estudou-se o efeito da não-linearidade geométrica e material na distribuição de tensões no adesivo. Através da utilização de um modelo de elementos finitos tridimensional fez-se o estudo dos efeitos tridimensionais na distribuição de tensões no adesivo. Esse modelo inclui a utilização de elementos de interface para modelar o comportamento das interfaces substrato-adesivo. A técnica experimental de análise de tensões baseada no efeito termoelástico (SPATE) foi utilizada na determinação da distribuição de tensões à superfície do substrato.

Várias juntas de sobreposição simples com diferentes comprimentos de sobreposição foram traccionadas e a carga máxima registada. O comportamento dessas juntas até à rotura foi simulado com o modelo de elementos finitos tridimensional, considerando a propagação de dano nos elementos de interface.

7.2 Materiais

7.2.1 Substratos

Os substratos são chapas de alumínio comercial com 1,5 mm de espessura. Realizaram-se ensaios de tracção em quatro provetes segundo a norma NP 10002-1 com o objectivo de caracterizar o comportamento mecânico do alumínio. Os ensaios realizaram-se numa máquina MTS servo-hidráulica com um transdutor de força de 5 kN. O alumínio apresenta uma elevada ductilidade como é visível no gráfico da figura 7.1 onde se representa a curva tensão-extensão de um dos provetes ensaiados. Na tabela 7.1 apresentam-se as propriedades mecânicas médias obtidas nos quatro ensaios realizados. A tensão limite elástico a 0,2% não aparece na tabela 7.1 visto que os valores encontrados são praticamente coincidentes com a tensão de rotura.

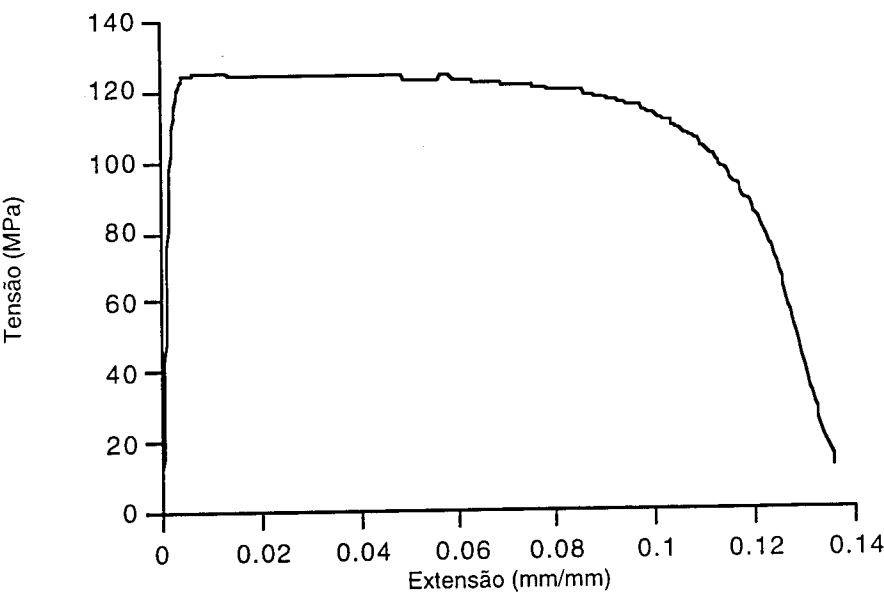


Figura 7.1 Curva tensão-extensão do alumínio utilizado.

Tabela 7.1 Propriedades mecânicas do alumínio.

	E (MPa)	R _M (MPa)	ε _{max} (%)
Média	62088	124,1	14,0
Desvio Padrão	2624	1,02	0,85
Coef. Variação	4,2 %	0,8 %	6 %

7.2.2 Adesivo

O adesivo estrutural utilizado é um adesivo de epóxico de dois componentes, produzido pela Teroson sob a referência Terokal 5045. Realizaram-se ensaios de tracção até à rotura com o objectivo de caracterizar o comportamento mecânico do adesivo. Nesses ensaios utilizaram-se provetes planos com a geometria representada na figura 7.2 e indicada na norma ISO R527. Os provetes foram moldados com a espessura de, aproximadamente, $t = 1$ mm. A escolha desta espessura deve-se à tentativa de simular as condições de um filme de adesivo semelhante ao existente nas juntas de sobreposição simples. Devido a dificuldades na obtenção destes provetes, não foi possível utilizar espessuras menores e portanto mais próximas das utilizadas nas juntas adesivas. Como referido por Adams et al. [1], existe controvérsia relativamente à determinação das propriedades dos adesivos, particularmente porque ensaios com provetes espessos não parecem conduzir a propriedades semelhantes às determinadas com filmes finos.

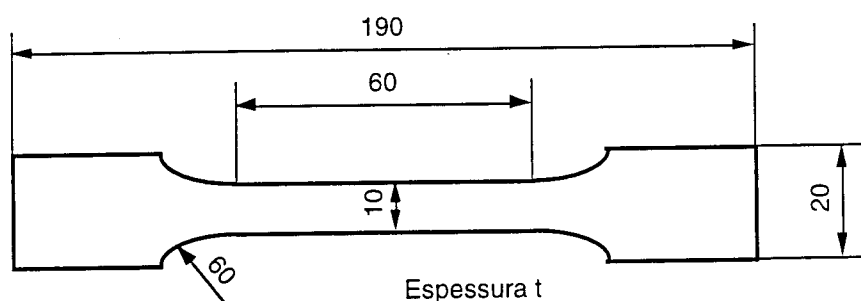


Figura 7.2 Geometria dos provetes utilizados.

Os ensaios realizaram-se numa máquina JJ Instruments-T30K equipada com uma célula de carga com 5 kN de capacidade. As condições ambientais verificadas foram 20°C de temperatura e 72% de humidade relativa. Utilizou-se a velocidade de solicitação de 1 mm/min indicada na norma referida. Na tabela 7.2 apresentam-se as propriedades mecânicas médias retiradas dos 19 provetes ensaiados. Dois dos provetes ensaiados foram instrumentados com rosetas de extensómetros de resistência eléctrica com o objectivo de medir o coeficiente de Poisson. Obteve-se o valor de 0,38, próximo de 0,4 indicado em [2] como um valor típico do coeficiente de Poisson para adesivos de epóxico.

Tabela 7.2 Propriedades mecânicas do adesivo Terokal 5045 (velocidade de sollicitação = 1 mm/min).

	E (MPa)	R _{p0.2} (MPa)	R _M (MPa)	ε _{max} (%)	ε _r (%)
Média	437,4	12,7	15,0	11,3	7,6
Desvio Padrão	96,1	3,2	3,0	4,5	4,2
Coef. Variação	22,0%	25,2%	20,0%	39,8%	55,3%

Os resultados da tabela 7.2 apresentam uma elevada variabilidade, principalmente no que diz respeito às deformações máxima e após rotura. Devido à escassez de resultados de propriedades mecânicas de adesivos na literatura, não é possível uma comparação com outros métodos de ensaio. No entanto, os valores médios obtidos incluem-se na gama de propriedades referidas em alguma bibliografia [1, 3, 4].

Geralmente, o comportamento de materiais com características viscoelásticas depende fortemente da velocidade de sollicitação. Para se estudar a influência deste parâmetro nas propriedades mecânicas, realizaram-se ensaios a 100 mm/min. Os resultados médios obtidos para os 7 provetes ensaiados são apresentados na tabela 7.3. Verifica-se que o aumento da velocidade de sollicitação provoca um aumento do módulo de elasticidade e da resistência máxima, e uma diminuição significativa da deformação.

Tabela 7.3 Propriedades mecânicas do adesivo Terokal 5045 (velocidade de sollicitação = 100 mm/min).

	E (MPa)	R _{p0.2} (MPa)	R _M (MPa)	ε _{max} (%)	ε _r (%)
Média	523,5	13,0	17,7	7,2	4,1
Desvio Padrão	58,9	1,0	1,9	1,5	1,4
Coef. Variação	11,2%	7,8%	10,7%	21,0%	35,7%

Como curiosidade refere-se a realização de 2 ensaios em provetes com cerca de 5 mm de espessura. Na tabela 7.4 apresentam-se os resultados desses ensaios. Assinale-se o valor reduzido da tensão de rotura que se deve à existência de defeitos de fabrico. Alguns dos defeitos tinham dimensões consideráveis sendo mesmo visíveis a

olho nu. O aparecimento deste tipo de defeitos é um dos problemas apontados na literatura para ensaios com provetes espessos.

Tabela 7.4 Propriedades mecânicas do adesivo Terokal 5045 para provetes com 5 mm de espessura (velocidade de sollicitação = 1 mm/min).

Ref ^a	E (MPa)	R _{p0,2} (MPa)	R _M (MPa)	ε _{max} (%)	ε _r (%)
E1	282,0	*	8,6	10,0	*
E2	392,0	7,6	7,0	9,7	7,6

* - não foi possível obter o valor

A tensão de rotura ao corte indicada pelo fabricante do adesivo tem valores entre 16 MPa e 20 MPa [5].

7.3 Provetes

7.3.1 Geometria

A geometria da junta de sobreposição simples considerada está ilustrada na figura 7.3. As dimensões utilizadas são típicas da normalização relativa a ensaios neste tipo de juntas.

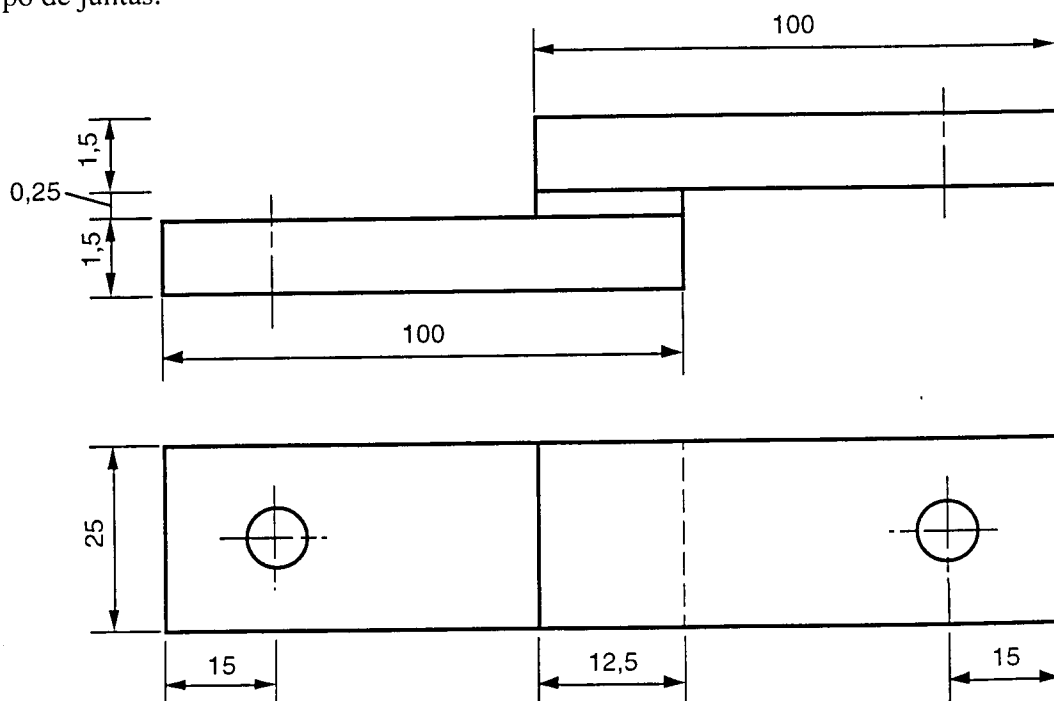


Figura 7.3 Geometria da junta de sobreposição simples.

7.3.2 Preparação dos provetes

Os substratos foram cortados nas dimensões de 100 mm x 25 mm, a partir de chapas de 1,5 mm de espessura. Para garantir o desengorduramento das superfícies, foram colocados durante 10 minutos num banho de Ridoline® à temperatura de 75°C. Este produto, moderadamente alcalino, é fornecido pela Henkel expressamente para a limpeza das superfícies de aços, ferros fundidos, zinco e alumínio. Depois de retirados do banho, os substratos foram passados por água desionizada e colocados numa estufa a 60°C durante 5 minutos.

A colagem realizou-se após o arrefecimento completo dos substratos. A zona de sobreposição foi mantida apertada com um pequeno grampo durante 24 horas, à temperatura ambiente.

7.4 Modelo de elementos finitos - análise bidimensional

Como referido no capítulo 4, a quase totalidade dos estudos analíticos e numéricos de juntas de sobreposição simples publicados tratam o problema como um estado plano de tensão ou de deformação. Embora neste trabalho se pretenda dedicar especial atenção a modelos tridimensionais, pensa-se que é importante a referência a modelos bidimensionais. Para além da maior simplicidade e menores exigências computacionais, os modelos bidimensionais permitem retirar conclusões importantes sobre o comportamento das juntas de sobreposição simples. O modelo de elementos finitos a seguir apresentado é utilizado para mostrar algumas dessas conclusões importantes.

A geometria e condições de fronteira do modelo utilizado são ilustrados na figura 7.4. Na figura 7.5 representa-se um pormenor da malha de elementos finitos considerada. A malha é composta por 470 elementos quadrangulares isoparamétricos de 8 nós e de estado plano de deformação (referência CPE8 [6]). Dois elementos são utilizados ao longo da espessura do adesivo e de cada substrato. Os materiais são considerados linear-elásticos com as propriedades médias dos ensaios experimentais.

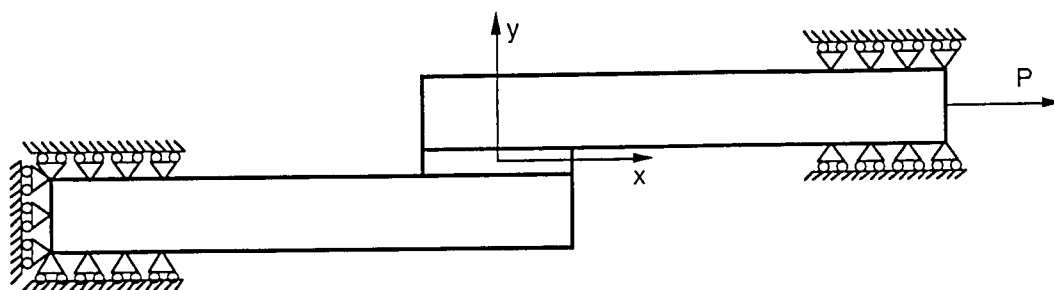


Figura 7.4 Geometria e condições de fronteira do modelo.

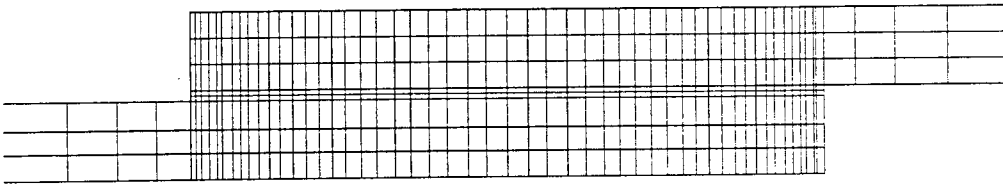


Figura 7.5 Pormenor da malha de elementos finitos.

Com o modelo bidimensional estudou-se o efeito da rotação da junta na distribuição de tensões no adesivo. Assim, fez-se uma análise linear e uma análise não-linear geométrica considerando uma carga máxima aplicada $P = 21$ kN. Nas figuras 7.6 e 7.7 representa-se, respectivamente, a evolução da tensão normal σ_{yy} máxima e da tensão de corte τ_{xy} máxima no adesivo com o aumento da carga aplicada. Estes resultados mostram a importância de se considerar os efeitos da não-linearidade geométrica. Por exemplo, para uma carga aplicada de 4,2 kN as diferenças entre os resultados da análise linear e da análise não-linear geométrica são de 20,1% para a tensão normal σ_{yy} máxima e de 12,4% para a tensão de corte τ_{xy} máxima.

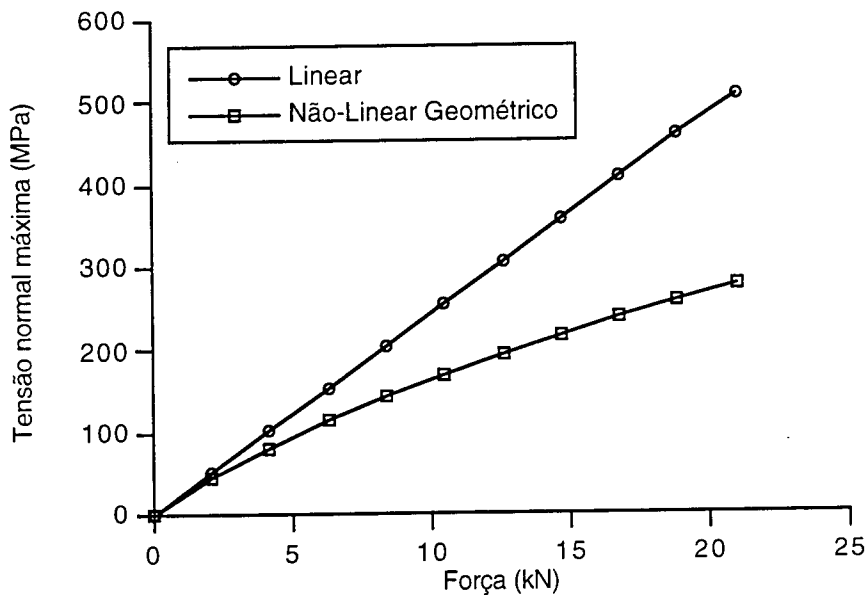


Figura 7.6 Tensão normal σ_{yy} máxima no adesivo para análises linear e não-linear geométrica.

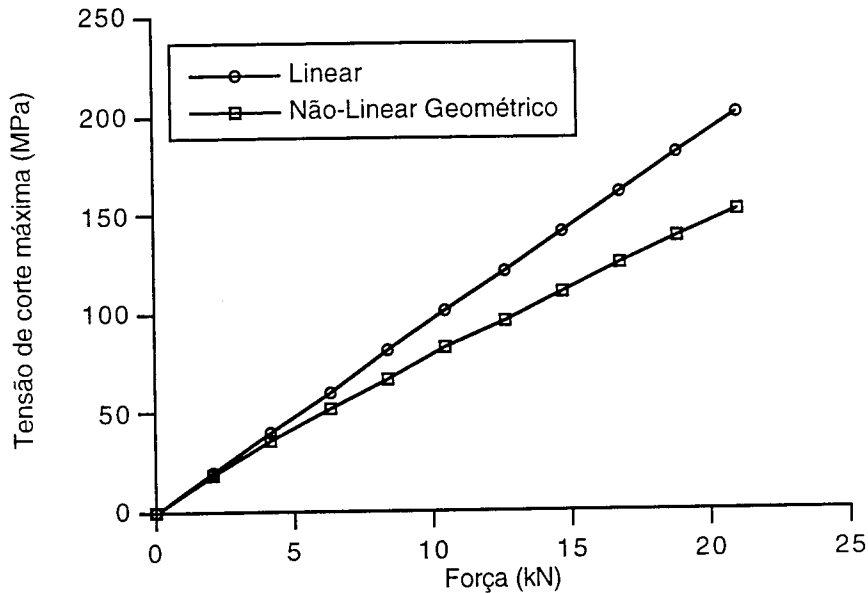


Figura 7.7 Tensão de corte τ_{xy} máxima no adesivo para análises linear e não-linear geométrica.

Nos gráficos das figuras 7.8 a 7.11 apresentam-se comparações das distribuições de tensões ao longo do plano médio do adesivo, obtidas com a solução de Goland e Reissner e com as análises numéricas linear e não-linear geométrica. As tensões apresentadas são normalizadas com a tensão de corte média no adesivo definida como $\tau_{\text{média}} = P/bl$, em que P é a carga aplicada, b a largura da junta e l o comprimento da zona de sobreposição. Os gráficos das figuras 7.8 e 7.9 representam as distribuições da tensão normal σ_{yy} para as cargas aplicadas $P = 2,1$ kN ($k = 0,72$) e $P = 21$ kN ($k = 0,46$), respectivamente. É notória a significativa diferença entre a solução numérica linear e as outras duas soluções. Essa diferença acentua-se com o aumento da carga aplicada, ou seja, à medida que o efeito da não-linearidade se torna mais significativo.

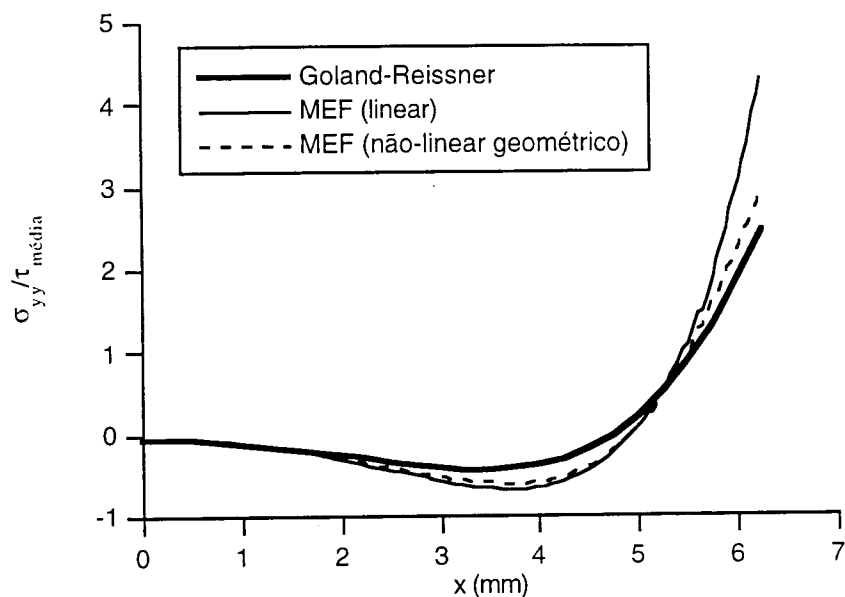


Figura 7.8 Comparação de soluções numéricas e analítica para distribuição de tensão normal σ_{yy} normalizada no plano médio do adesivo ($P = 2,1$ kN, $k = 0,72$).

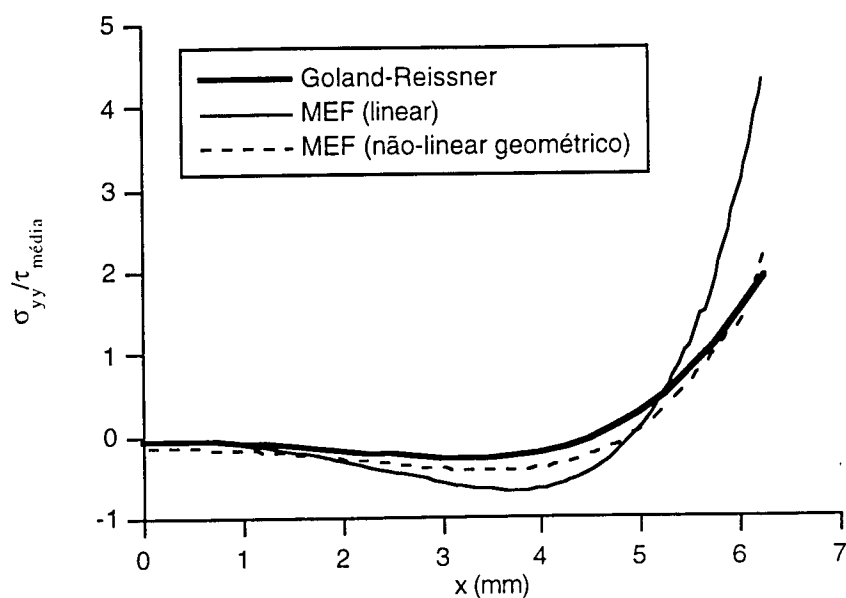


Figura 7.9 Comparação de soluções numéricas e analítica para distribuição de tensão normal σ_{yy} normalizada no plano médio do adesivo ($P = 21$ kN, $k = 0,46$).

Nos gráficos das figuras 7.10 e 7.11 apresentam-se as distribuições da tensão de corte τ_{xy} no plano médio do adesivo para as cargas aplicadas $P = 2,1$ kN ($k = 0,72$) e $P = 21$ kN ($k = 0,46$), respectivamente. É novamente visível nestes gráficos o afastamento, com o aumento da carga aplicada, da solução linear relativamente às outras soluções apresentadas. Convém ainda assinalar o facto de as tensões de corte obtidas pelo método dos elementos finitos tenderem para zero na extremidade do adesivo, o que não sucede com a solução de Goland e Reissner.

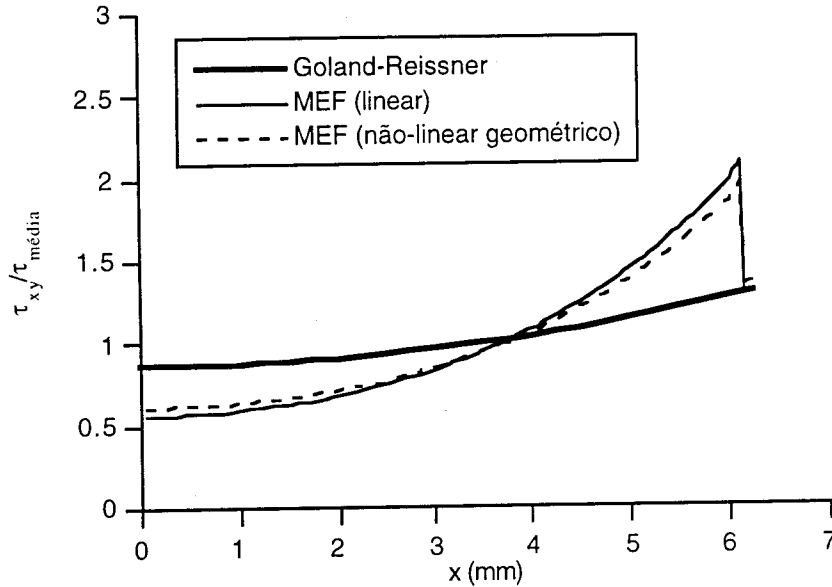


Figura 7.10 Comparação de soluções numéricas e analítica para distribuição de tensão de corte τ_{xy} normalizada no plano médio do adesivo ($P = 2,1$ kN, $k = 0,72$).

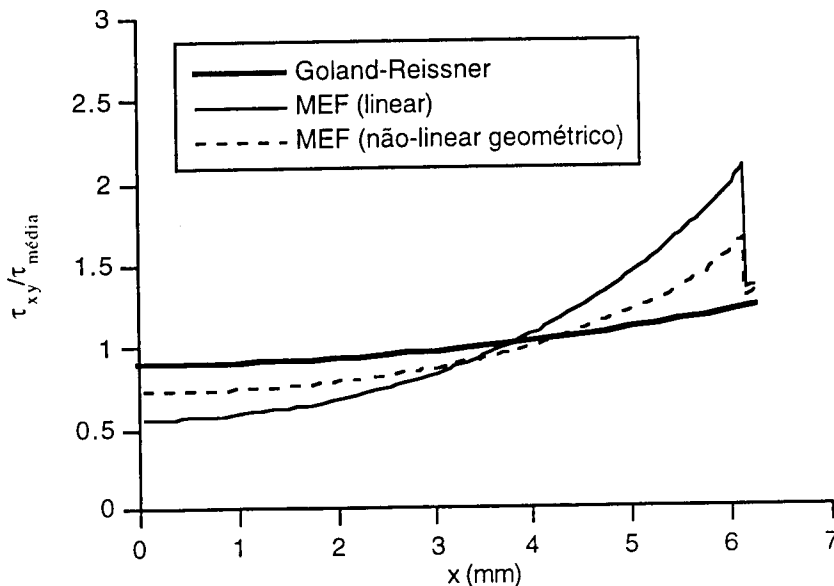


Figura 7.11 Comparação de soluções numéricas e analítica para distribuição de tensão de corte τ_{xy} normalizada no plano médio do adesivo ($P = 21$ kN, $k = 0,46$).

7.5 Modelo de elementos finitos - análise tridimensional

As análises com o modelo de elementos finitos tridimensional realizaram-se em três etapas. Inicialmente consideraram-se propriedades linear-elásticas dos materiais. Em segundo lugar, incluiu-se as propriedades elasto-plásticas dos substratos e manteve-se o adesivo linear-elástico. Finalmente, incluiu-se as propriedades elasto-plásticas dos substratos e do adesivo. Em todas as análises considerou-se não-linearidade geométrica.

Na figura 7.12 mostra-se a geometria e condições de fronteira do modelo. O modelo representa apenas metade da junta devido à simetria longitudinal existente. Na figura 7.13 apresenta-se um detalhe da malha utilizada. A malha é composta por 2720 elementos sólidos de 20 nós (referência C3D20 [6]), 1360 elementos sólidos de 27 nós (referência C3D27 [6]), e 544 elementos de interface. Os elementos de interface são colocados nas interfaces substrato-adesivo. Os elementos sólidos adjacentes aos elementos de interface têm 27 nós e os restantes elementos sólidos são de 20 nós. Cada substrato é modelado com 4 elementos ao longo da espessura e o adesivo com 3 elementos.

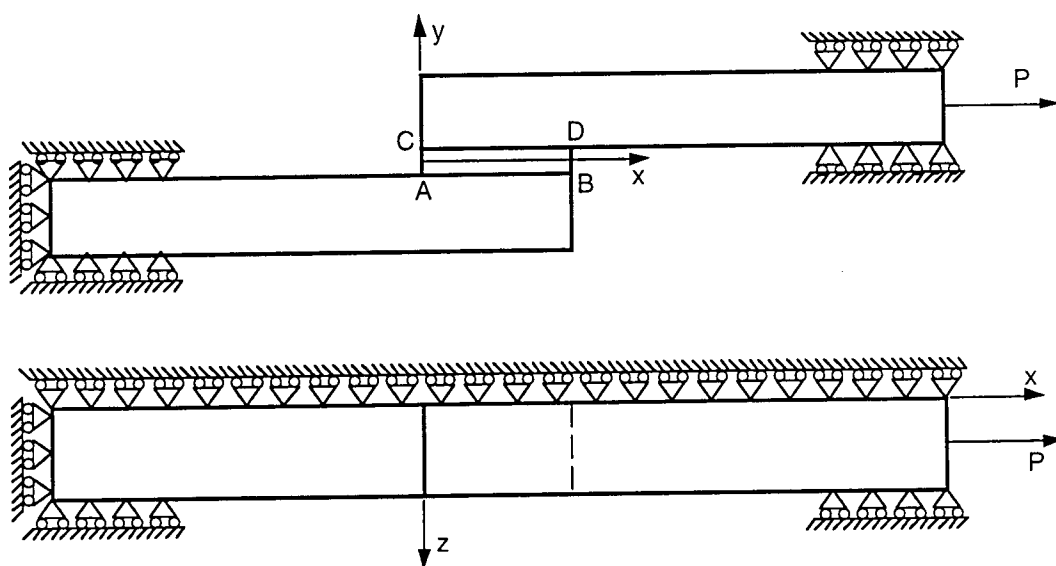


Figura 7.12 Geometria e condições de fronteira do modelo tridimensional:

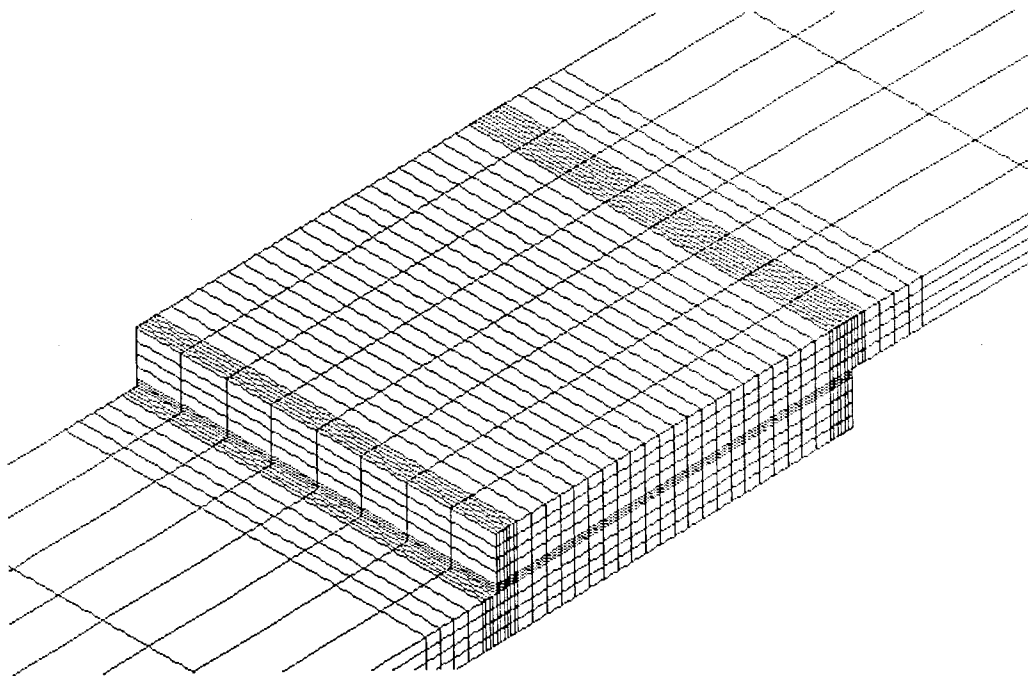


Figura 7.13 Detalhe da malha de elementos finitos tridimensional.

7.5.1 Materiais elásticos

Na primeira fase do estudo com o modelo de elementos finitos tridimensional consideram-se os substratos e o adesivo linear elásticos e utilizam-se as propriedades elásticas médias obtidas experimentalmente. Para verificar a natureza tridimensional das tensões na junta de sobreposição simples, fez-se uma análise com uma força remota aplicada de 1,8 kN. Nos gráficos das figuras 7.14 a 7.19 apresentam-se as distribuições das componentes da tensão no plano médio do adesivo. Em cada gráfico representam-se as distribuições, ao longo do comprimento de sobreposição, de uma componente da tensão normalizada com a tensão de corte média no adesivo ($\tau_{\text{média}}$) definida em 7.4, para vários planos longitudinais (planos $z = \text{constante}$). Os planos foram seleccionados de forma a incluírem pontos de Gauss e assim permitir representar as tensões obtidas nesses pontos. O plano $z = 0,176 \text{ mm}$ é o plano longitudinal que contém os pontos de Gauss mais próximos do plano médio da junta e o plano $z = 12,324 \text{ mm}$ contém os pontos de Gauss mais próximos do bordo livre.

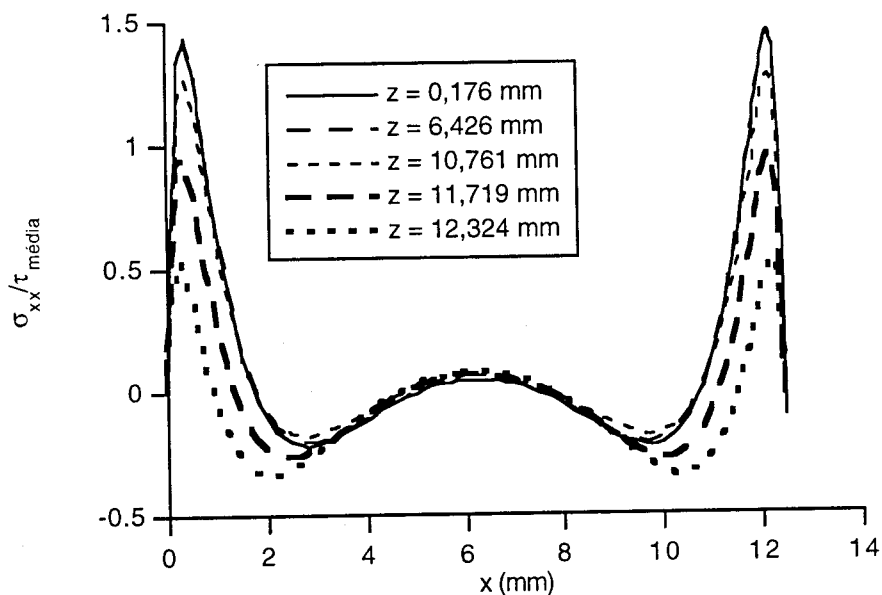


Figura 7.14 Distribuição da tensão σ_{xx} normalizada no plano médio do adesivo.

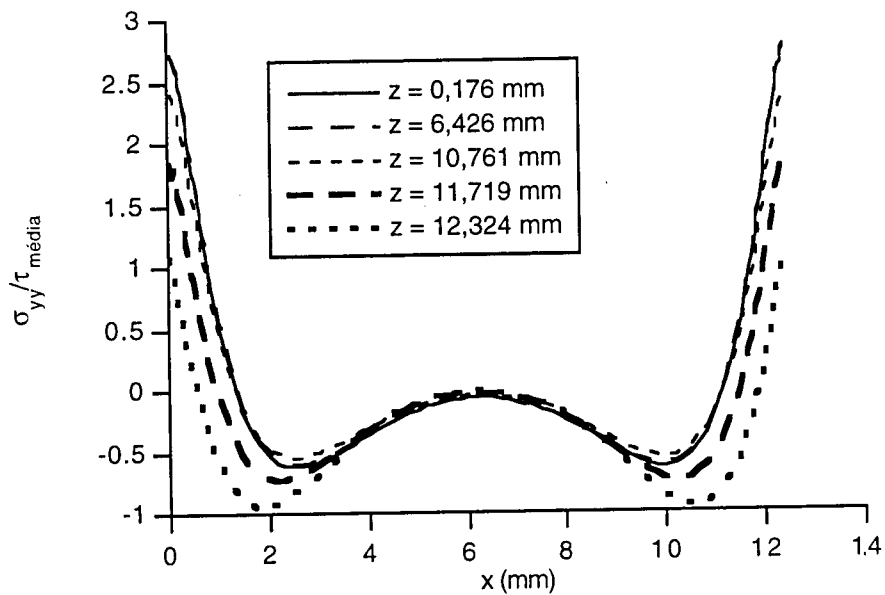


Figura 7.15 Distribuição da tensão σ_{yy} normalizada no plano médio do adesivo.

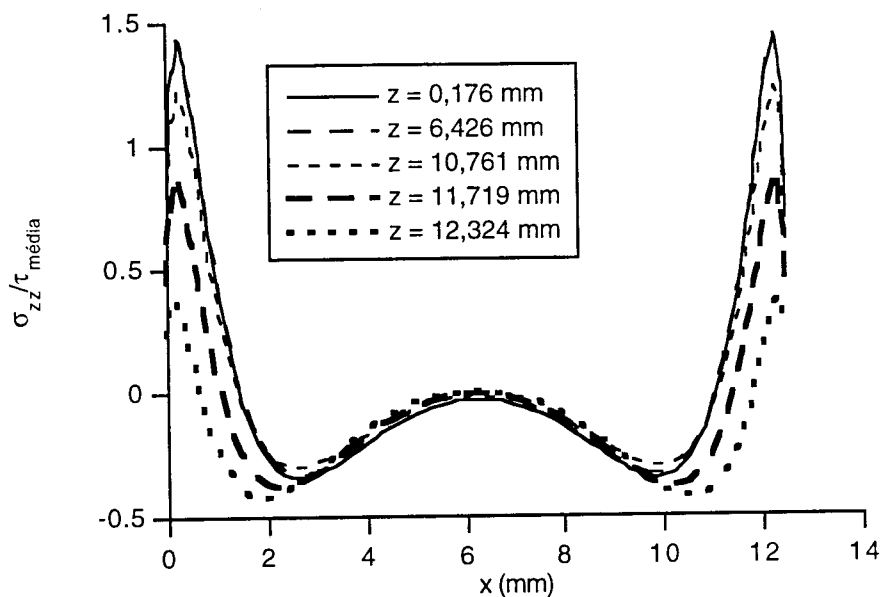


Figura 7.16 Distribuição da tensão σ_{zz} normalizada no plano médio do adesivo.

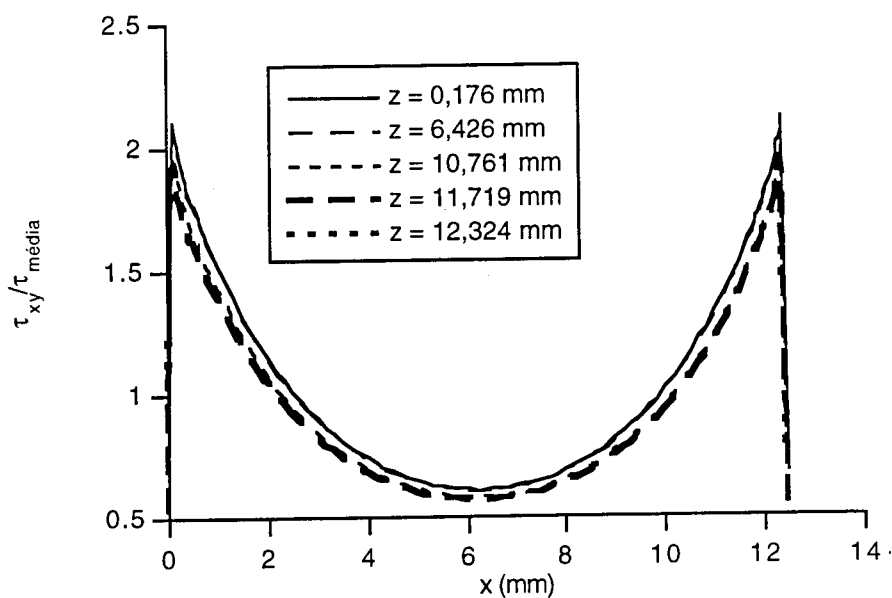


Figura 7.17 Distribuição da tensão τ_{xy} normalizada no plano médio do adesivo.

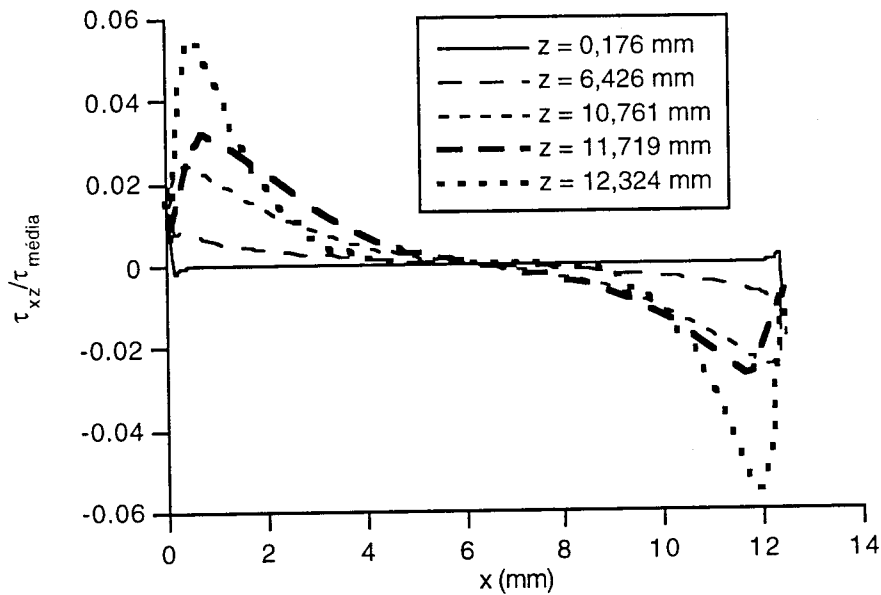


Figura 7.18 Distribuição da tensão τ_{xz} normalizada no plano médio do adesivo.

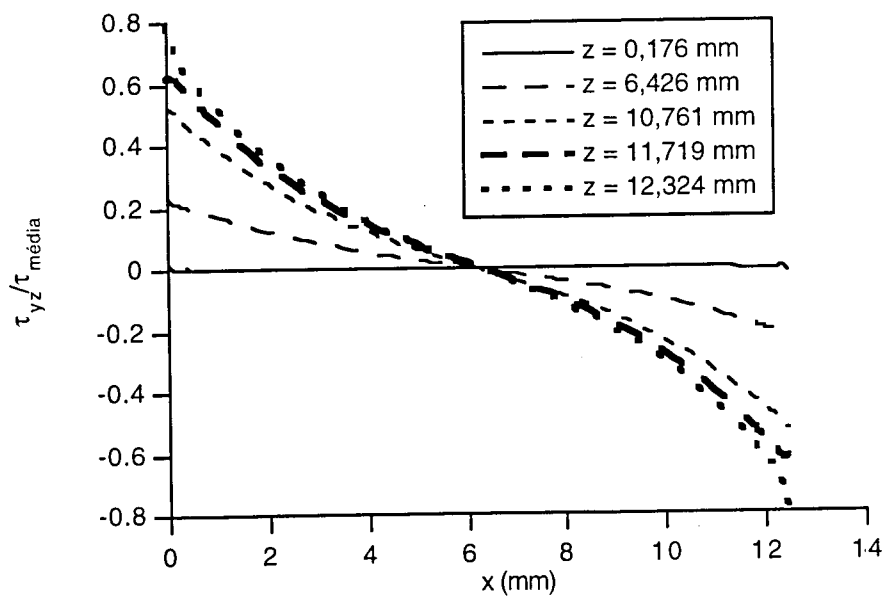


Figura 7.19 Distribuição da tensão τ_{yz} normalizada no plano médio do adesivo.

No gráfico da figura 7.14 representa-se a distribuição da tensão normal σ_{xx} . Verifica-se que a tensão σ_{xx} máxima ocorre no plano $z = 0,176$ mm, próximo das extremidades da zona de sobreposição. A distribuição da tensão σ_{xx} é praticamente

constante ao longo da largura da junta mas decresce significativamente na proximidade do bordo livre. Este efeito verifica-se igualmente para as componentes σ_{yy} e σ_{zz} representadas nas figuras 7.15 e 7.16, respectivamente. Na figura 7.15 constata-se que existem tensões normais σ_{yy} consideráveis, próximo do plano médio longitudinal e nas extremidades da zona de sobreposição, quando comparadas com as outras componentes da tensão. A distribuição da tensão normal σ_{zz} apresentada na figura 7.16 é da mesma ordem de grandeza da componente σ_{xx} .

Na figura 7.17 apresenta-se a distribuição da tensão de corte τ_{xy} . O valor máximo desta componente é inferior ao valor máximo da tensão normal σ_{yy} embora seja superior aos valores máximos das restantes componentes da tensão. A distribuição da tensão τ_{xy} não se altera significativamente com a aproximação do bordo livre, ou seja, esta tensão é praticamente insensível aos efeitos tridimensionais. A tensão τ_{xz} apresentada na figura 7.18 é reduzida, quando comparada com as outras componentes da tensão. Esta tensão é nula no plano médio longitudinal. Para outros planos, a tensão τ_{xz} apresenta um pico próximo da extremidade da zona de sobreposição. O valor absoluto desse pico de tensão aumenta para valores crescentes da coordenada z , ou seja, com a aproximação do bordo livre. A tensão τ_{yz} representada na figura 7.19 também é nula no plano médio longitudinal e o pico máximo cresce com a coordenada z . De notar que o efeito tridimensional nas duas últimas tensões apresentadas (τ_{xz} e τ_{yz}) verifica-se ao longo de toda a largura da junta, ao contrário do que acontece para as componentes normais da tensão. Também se deve referir que as distribuições das tensões τ_{xz} e τ_{yz} são antissimétricas relativamente ao plano médio vertical $x = 6,25$ mm e que as restantes tensões são simétricas relativamente a esse mesmo plano.

A distribuição da tensão principal máxima normalizada no plano médio do adesivo ($y = 0$ mm) é representada na figura 7.20. À semelhança das tensões normais atrás representadas, a distribuição da tensão normal máxima permanece praticamente constante na maioria da largura da junta mas decresce na proximidade do bordo livre. A distribuição da tensão principal máxima no adesivo, num plano próximo da interface substrato-adesivo ($y = 0,116$ mm), está representada na figura 7.21. Neste plano, a distribuição da tensão principal já não é simétrica relativamente ao plano $x = 6,25$ mm. A tensão máxima verifica-se na extremidade da zona de sobreposição próxima do ponto D (ver figura 7.12). Em planos próximos da outra interface, a tensão principal máxima aparece na região do ponto A. Na figura 7.22 representa-se graficamente a distribuição da tensão principal máxima no adesivo, na extremidade da zona de sobreposição e para o plano médio longitudinal. O comprimento dos segmentos de recta é função da magnitude da tensão em cada ponto. As setas que apontam para fora dos segmentos de recta indicam tensões tractivas e as que apontam para dentro correspondem a tensões compressivas.

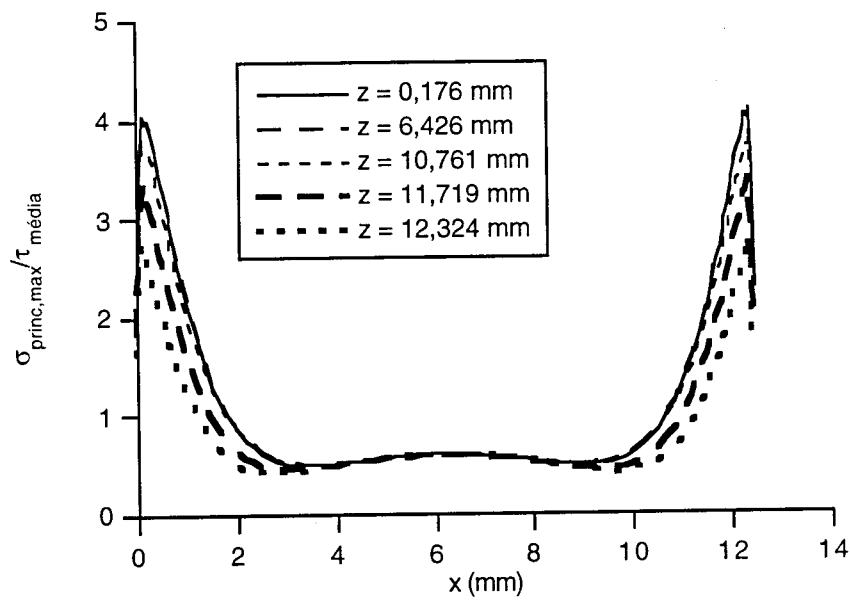


Figura 7.20 Distribuição da tensão principal máxima normalizada no plano médio do adesivo ($y = 0$ mm).

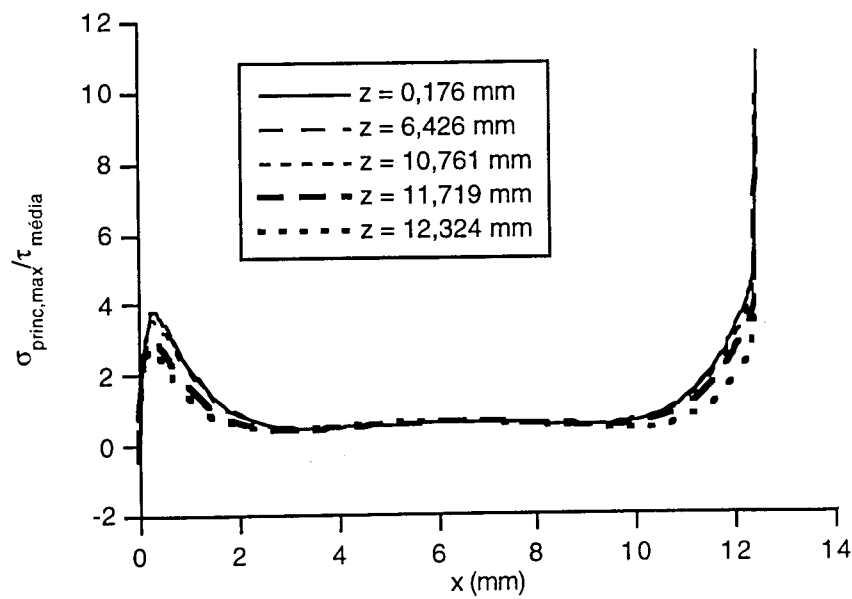


Figura 7.21 Distribuição da tensão principal máxima normalizada no plano $y = 0,116$ mm.

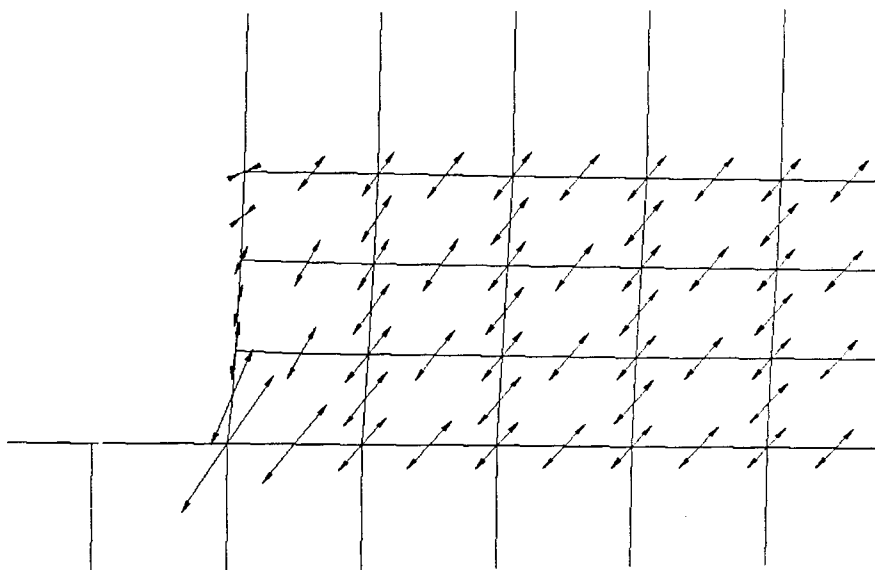


Figura 7.22 Representação gráfica da tensão principal máxima no adesivo, no plano médio longitudinal da junta ($z = 0$ mm).

Para verificar o efeito da não-linearidade geométrica na distribuição das tensões fez-se uma análise com uma força máxima aplicada de 3 kN. No gráfico da figura 7.23 ilustra-se a distribuição da tensão principal máxima normalizada no plano médio do adesivo e no plano longitudinal $z = 0,176$ mm (próximo do plano médio longitudinal da junta) para vários incrementos da história do carregamento. Verifica-se que ao aumento da força aplicada corresponde uma diminuição da concentração de tensões. Esta redução justifica-se devido ao aumento da rotação da junta com o aumento da carga aplicada e consequente redução do efeito de flexão.

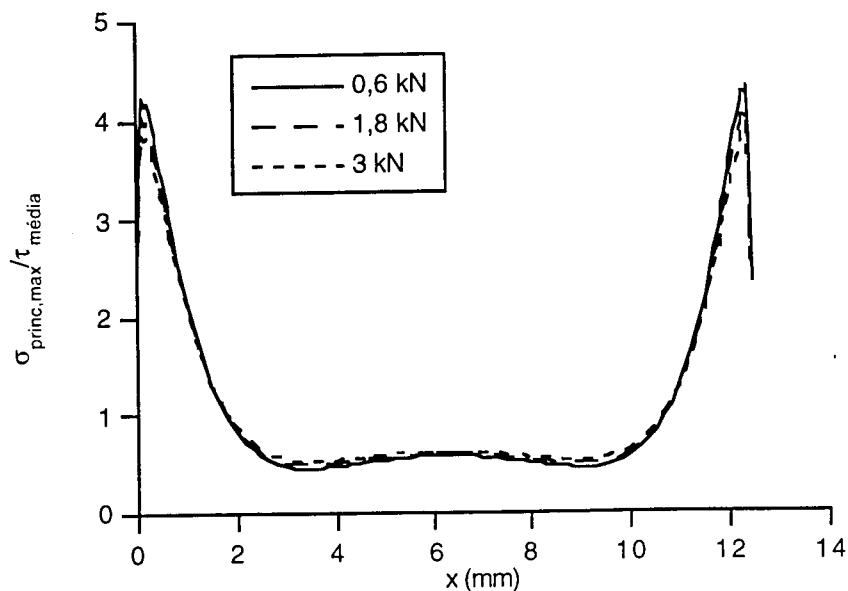


Figura 7.23 Variação da tensão principal máxima normalizada no plano médio do adesivo com o aumento da carga aplicada ($z = 0,176$ mm).

As tensões nas interfaces substrato-adesivo também foram analisadas. Nas figuras 7.24 a 7.26 estão representadas as tensões na interface com coordenada $y = 0,125$ mm. De notar que os pontos de integração dos elementos de interface coincidem com os nós e, consequentemente, os planos longitudinais escolhidos para a representação das tensões são diferentes daqueles seleccionados para representar as tensões no plano médio do adesivo. Na figura 7.24 apresenta-se a distribuição da tensão normal σ_{yy} . À semelhança das tensões normais no plano médio do adesivo, a distribuição desta tensão é praticamente constante na zona intermédia da largura da junta e decresce na proximidade do bordo livre. A tensão máxima ocorre no plano $z = 0$ mm e na extremidade da zona de sobreposição onde o adesivo e o substrato fazem um ângulo de 90° (ponto D na figura 7.12). A tensão de corte τ_{xy} , mostrada no gráfico da figura 7.25, também atinge o ponto máximo no plano $z = 0$ mm e próximo da mesma extremidade da zona de sobreposição. A tensão τ_{yz} (ver gráfico da figura 7.26) apresenta um comportamento semelhante ao verificado para a mesma tensão no plano médio do adesivo. As tensões na outra interface (plano $y = -0,125$ mm) obtêm-se a partir das anteriores por simetria relativamente ao plano vertical ($x = 6,25$ mm).

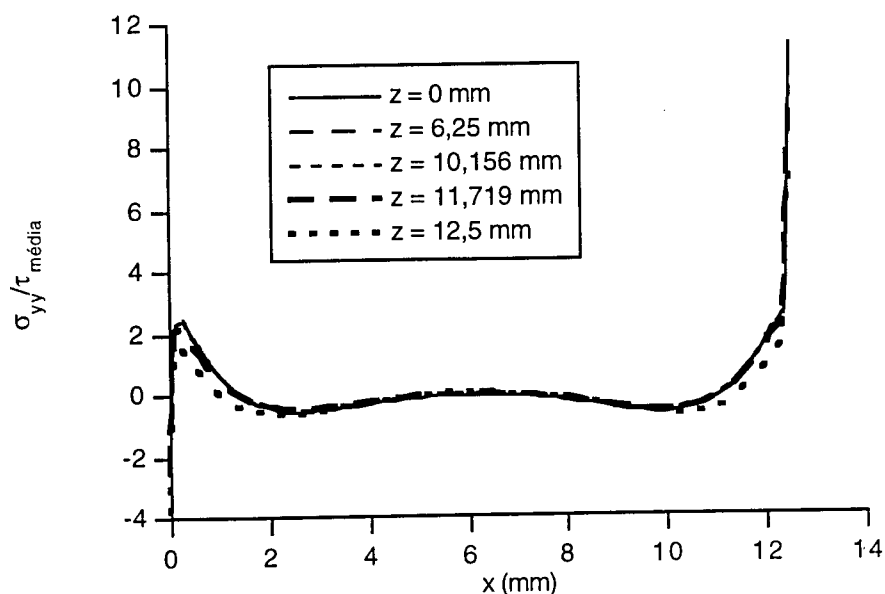


Figura 7.24 Distribuição da tensão σ_{yy} normalizada na interface $y = 0,125$ mm.

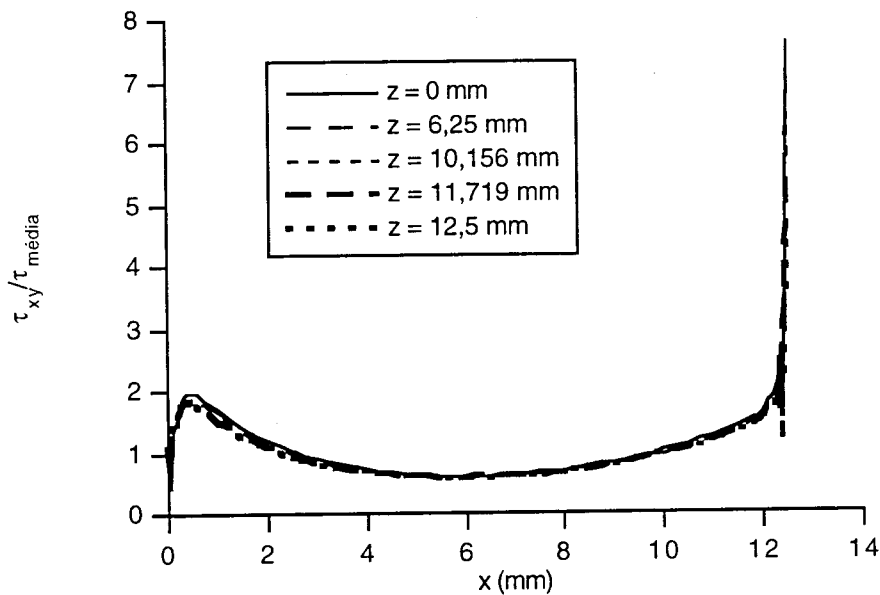


Figura 7.25 Distribuição da tensão τ_{xy} normalizada na interface $y = 0,125$ mm.

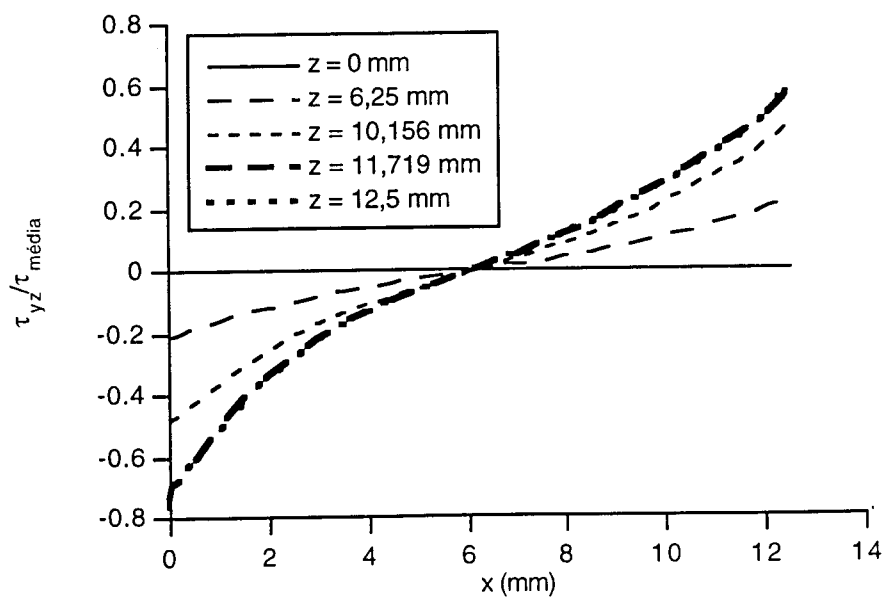


Figura 7.26 Distribuição da tensão τ_{yz} normalizada na interface $y = 0,125$ mm.

7.5.2 Substratos elasto-plásticos

Nesta parte do estudo considerou-se o comportamento elasto-plástico do alumínio, mantendo-se o comportamento linear-elástico do adesivo. O modelo material que representa o alumínio tem o comportamento elástico-perfeitamente plástico e foi definido com as propriedades médias da tabela 7.1. O critério de cedência de Von Mises é utilizado nesse modelo. A carga remota máxima aplicada foi de 4,6 kN.

A partir dos resultados da análise de elementos finitos determinou-se a progressão da plastificação dos substratos. Nas figura 7.27 e 7.28 ilustra-se o tamanho aproximado das zonas plastificadas para os carregamentos de 2,1 kN e 3,5 kN, respectivamente. As faces dos elementos preenchidas a cinzento indicam que existem pontos de integração próximos dessas faces onde já se verificou plastificação. A iniciação da plastificação dos substratos ocorre no final da zona de sobreposição. À medida que a carga aplicada aumenta, a zona plástica avança afastando-se do adesivo e atravessando a espessura do substrato.

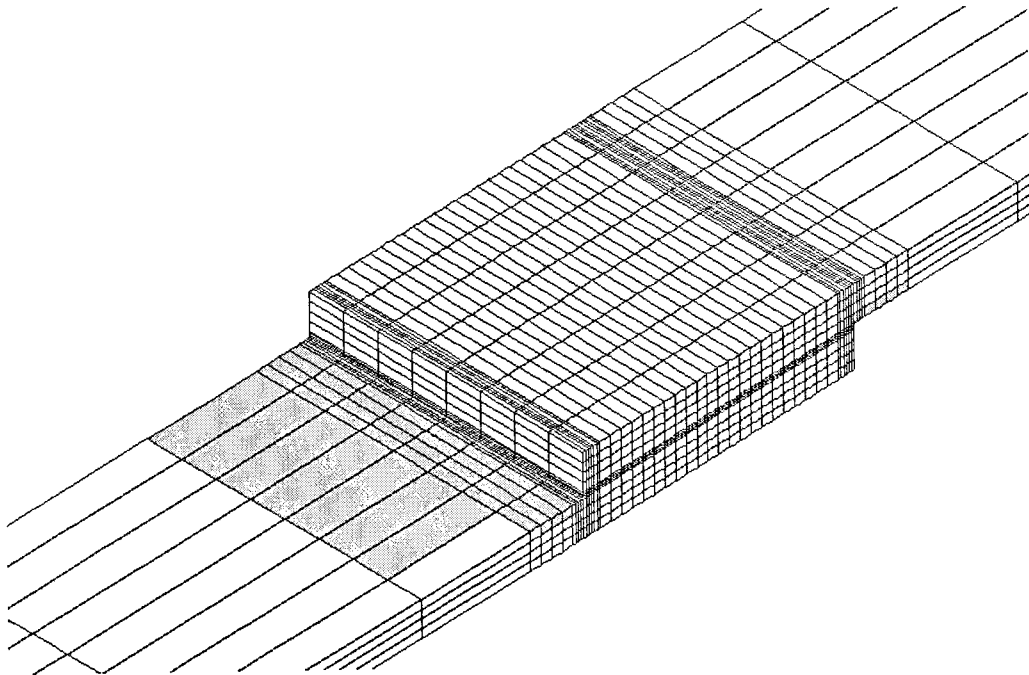


Figura 7.27 Representação simplificada de zona plástica nos substratos para carga aplicada $P = 2,1$ kN.

A plastificação dos substratos introduz alterações na distribuição de tensões no adesivo. Na figura 7.29 apresenta-se a distribuição da tensão principal máxima normalizada no plano médio do adesivo e próximo do plano médio longitudinal da junta

($z = 0,176$ mm), para várias cargas aplicadas. A comparação com o gráfico da figura 7.23 relativo à análise com os materiais linear-elásticos permite identificar duas diferenças de comportamento. No gráfico da figura 7.23, as curvas são próximas embora a tensão máxima normalizada diminua com o aumento da carga aplicada. Na figura 7.29 constata-se que, com o aumento da carga aplicada a tensão máxima normalizada aumenta, assim como a tensão no centro da zona de sobreposição. Verifica-se ainda que a tensão na zona central tende a ficar constante.

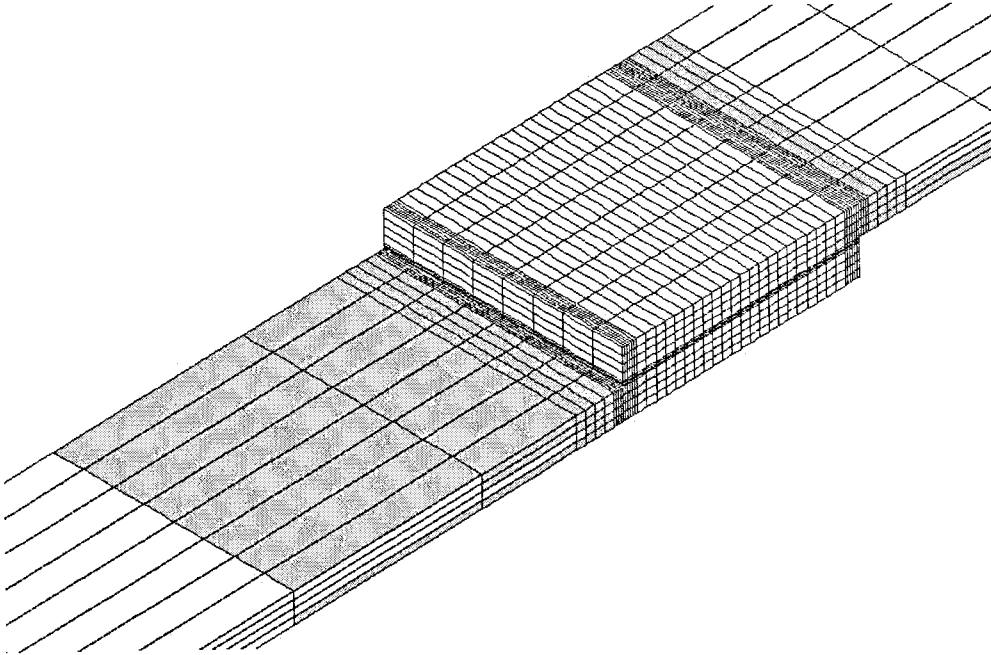


Figura 7.28 Representação simplificada de zona plástica nos substratos para carga aplicada $P = 3,5$ kN.

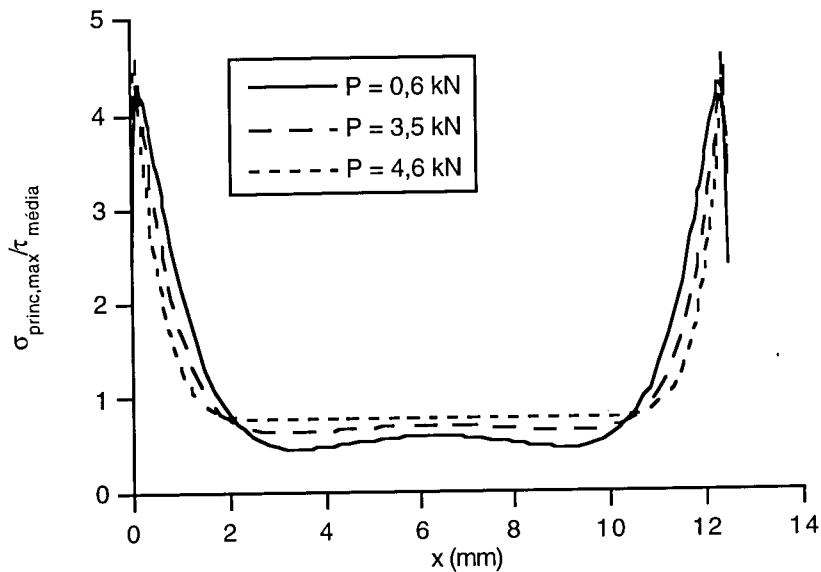


Figura 7.29 Variação da tensão principal máxima normalizada no plano médio do adesivo com o aumento da carga aplicada ($z = 0,176$ mm).

A tensão principal máxima normalizada no plano médio do adesivo mais próximo do bordo livre ($z = 12,324$ mm) tende a aumentar com o aumento da carga aplicada, embora a forma da distribuição de tensão permaneça praticamente inalterável (ver figura 7.30). O pico máximo para a carga de 4,6 kN é superior ao verificado próximo do plano médio longitudinal da junta (comparar com figura 7.29). Aliás, como se pode constatar no gráfico da figura 7.31, o valor máximo da tensão principal máxima normalizada desloca-se do plano médio longitudinal para o bordo livre com o aumento da carga aplicada. Esse valor tende a aumentar com o desenvolvimento da zona plastificada. Na figura 7.32 representa-se a distribuição da tensão principal máxima normalizada no plano médio do adesivo, para o carregamento $P = 4,6$ kN. Embora a tensão na zona central varie com a largura da junta, ela mantém-se praticamente constante nas extremidades.

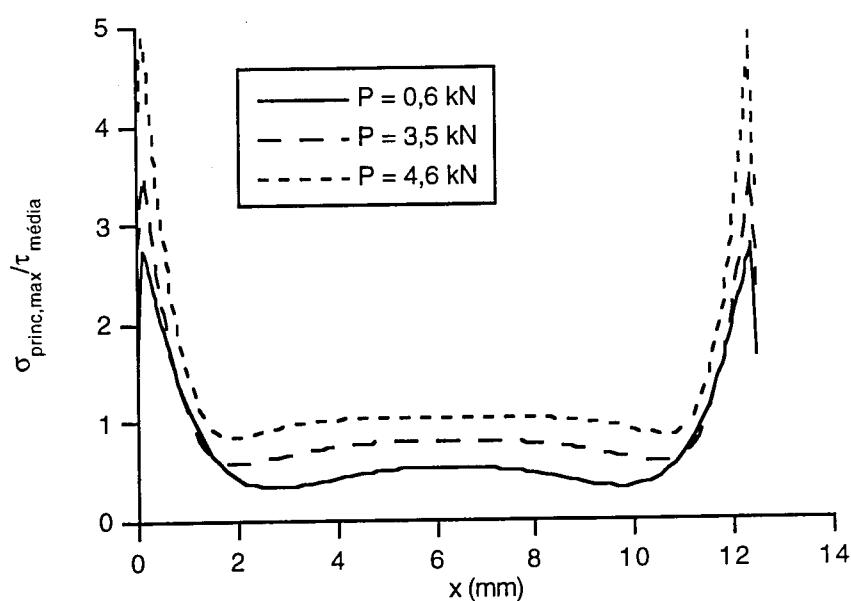


Figura 7.30 Variação da tensão principal máxima normalizada no plano médio do adesivo com o aumento da carga aplicada ($z = 12,324$ mm).

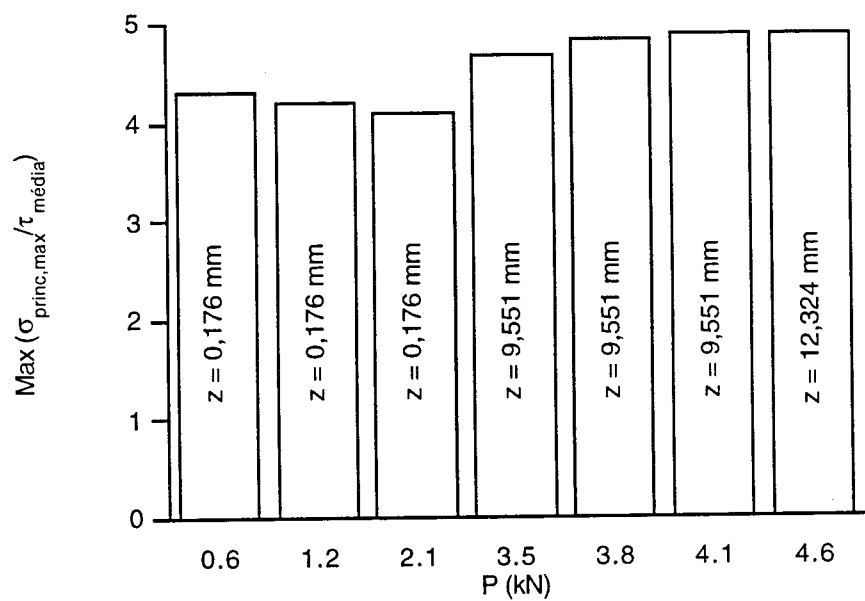


Figura 7.31 Variação do valor máximo da tensão principal máxima normalizada no plano médio do adesivo.

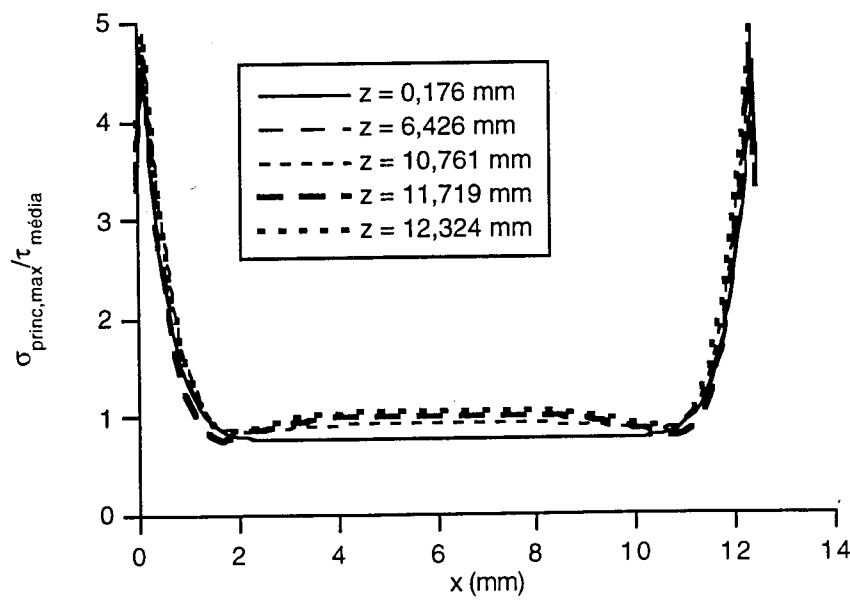


Figura 7.32 Distribuição da tensão principal máxima normalizada no plano médio do adesivo para o carregamento $P = 4,6$ kN.

A plastificação dos substratos também tem influência na distribuição de tensões das interfaces. O valor máximo das tensões σ_{yy} e τ_{xy} normalizadas, que na análise com os materiais linear-elásticos permanecia no plano médio longitudinal da junta ($z = 0$ mm), desloca-se no sentido do bordo livre com o aumento da plastificação dos substratos. Na figura 7.33 mostram-se os valores máximos dessas tensões normalizadas para várias cargas aplicadas e os planos longitudinais onde esses valores ocorrem. Para as cargas mais elevadas, as tensões máximas verificam-se para $z = 9,375$ mm. A variação do valor máximo da tensão τ_{yz} normalizada é semelhante ao da tensão normal σ_{yy} embora o valor absoluto da primeira seja menos de metade da segunda. Por outro lado, o valor máximo da tensão τ_{yz} normalizada ocorre sempre no plano médio longitudinal da junta ($z = 0$ mm).

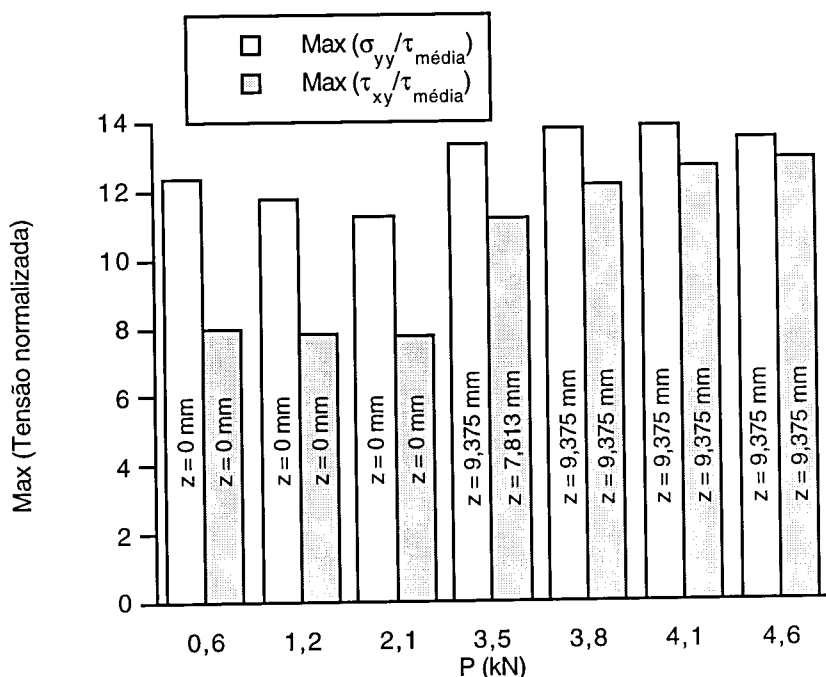


Figura 7.33 Variação dos valores máximos das tensões σ_{yy} e τ_{xy} normalizadas na interface $y = 0,125$ mm.

Nas figuras 7.34 e 7.35 representam-se, respectivamente, as tensões σ_{yy} e τ_{xy} normalizadas na interface $y = 0,125$ mm e para a carga aplicada $P = 4,6$ kN. Da comparação destes gráficos com os das figuras 7.24 e 7.25 relativos a uma análise com os materiais linear-elásticos, verifica-se que a plastificação dos substratos origina uma uniformização das tensões na zona central do comprimento de sobreposição. Como ilustrado no gráfico da figura 7.33, os valores máximos das tensões σ_{yy} e τ_{xy} normalizadas, para a carga aplicada $P = 4,6$ kN, ocorreu no plano $z = 9,375$ mm. Embora não seja perceptível nos gráficos das figuras 7.34 e 7.35, o pico de tensão

decrece a partir do plano $z = 9,375$ mm até o bordo livre da junta ($z = 12,5$ mm). Por exemplo, no caso da tensão σ_{yy} normalizada, há um decréscimo do valor do pico de tensão de 13 (para $z = 9,375$ mm) até 9,96 (para $z = 12,5$ mm).

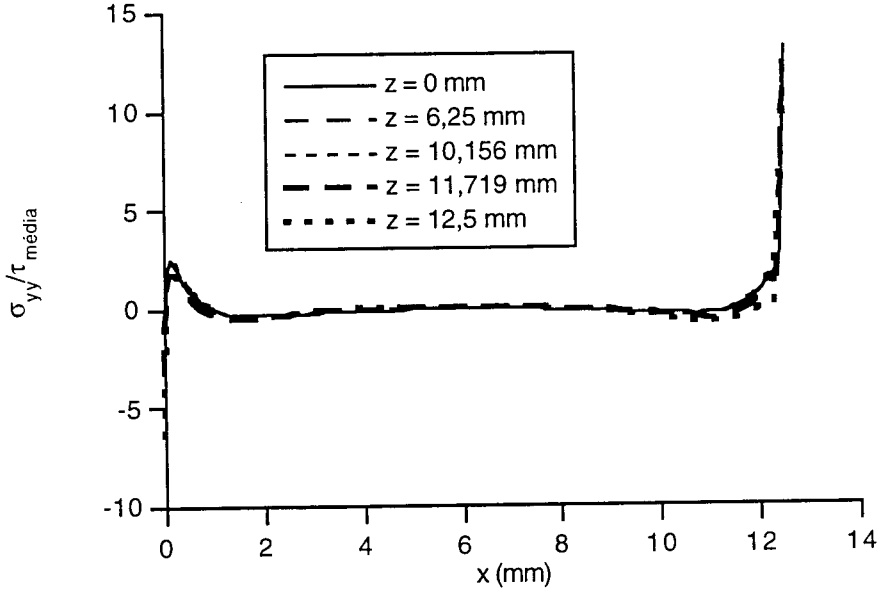


Figura 7.34 Distribuição da tensão σ_{yy} normalizada na interface $y = 0,125$ mm para a carga $P = 4,6$ kN.

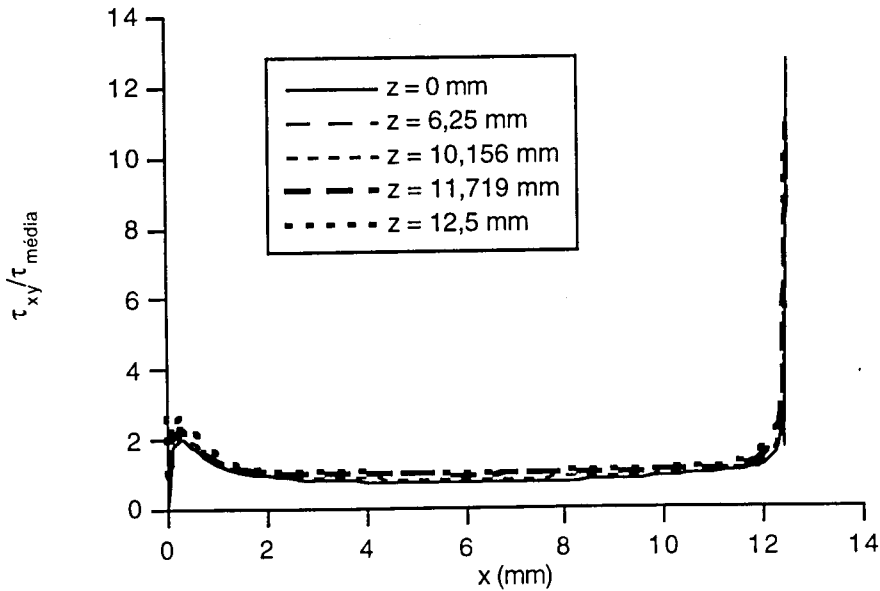


Figura 7.35 Distribuição da tensão τ_{xy} normalizada na interface $y = 0,125$ mm para a carga $P = 4,6$ kN.

7.5.3 Adesivo elasto-plástico

Nesta secção estuda-se a distribuição de tensões na junta de sobreposição simples considerando os comportamentos linear-elástico dos substratos e elasto-plástico do adesivo. Como referido em 4.3.2, a cedência dos adesivos de epóxico depende das componentes hidrostática e deviatórica das tensões. Consequentemente, diferentes tensões de cedência ocorrem em tracção e compressão uniaxiais. Para representar este comportamento utilizou-se o critério parabolóide de Raghava et al. [7] que se escreve da seguinte forma

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + 2(|\sigma_c| - \sigma_t)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = 2|\sigma_c|\sigma_t \quad (7.1)$$

em que σ_1 , σ_2 e σ_3 são as tensões principais e σ_c e σ_t são, respectivamente, as tensões de cedência à compressão e à tracção. Neste critério assumiu-se uma razão entre as tensões de cedência à compressão e à tracção de 1,3, o qual é um valor típico para adesivos de epóxico [8, 9]. As propriedades médias determinadas experimentalmente e apresentadas na tabela 7.2 foram utilizadas para definir o comportamento uniaxial em tracção do adesivo.

Na análise realizada aplicou-se uma carga remota máxima de 2,8 kN. A evolução da plastificação do adesivo foi acompanhada ao longo da história do carregamento. Nas figuras 7.36 e 7.37 mostra-se o tamanho das zonas plastificadas para os carregamentos de 1,2 kN e 2,1 kN, respectivamente. Tal como na secção anterior, as faces dos elementos preenchidas a cinzento indicam que existem pontos de Gauss na sua proximidade onde já se deu plastificação. Embora nestas figuras se faça uma representação aproximada das regiões plastificadas, pode-se pelo menos perceber a sua evolução. Na figura 7.36 compreende-se que o início da plastificação se dá nas extremidades da camada de adesivo, próximo dos pontos onde adesivo e substrato fazem um ângulo de 90° (pontos A e D da figura 7.12). Na figura 7.37 pode-se verificar que a zona plastificada cresce para o interior da camada de adesivo e através da sua espessura. De notar que nas regiões próximas dos pontos B e C (ver figura 7.12) o adesivo ainda não plastificou. Isso está relacionado com as tensões compressivas reduzidas que ocorrem nessa zona (ver figura 7.22).

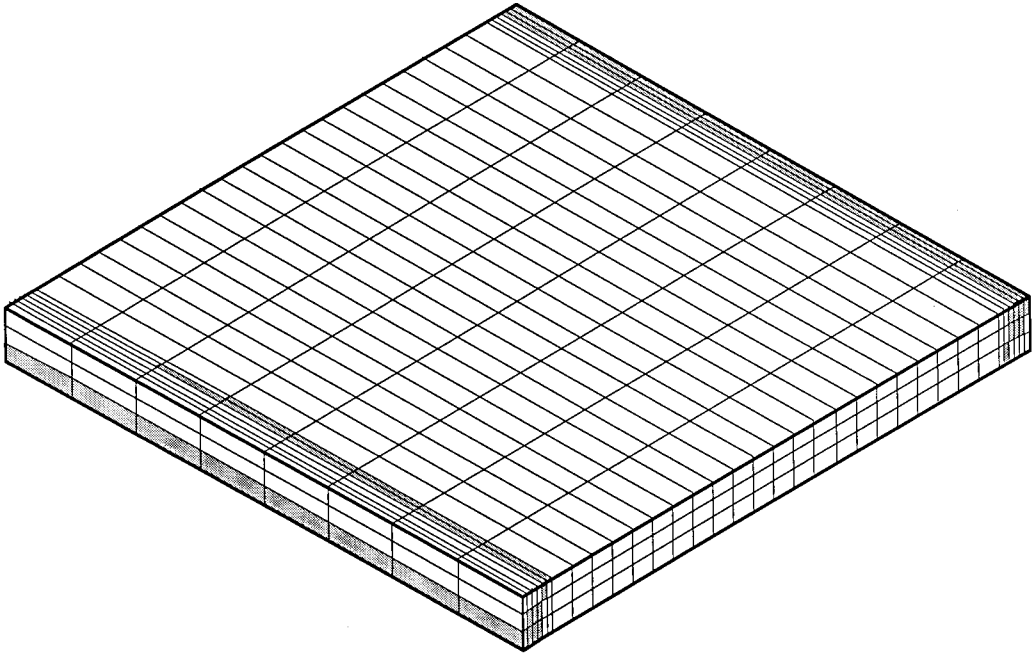


Figura 7.36 Representação simplificada da zona plástica do adesivo para carga aplicada $P = 1,2 \text{ kN}$.

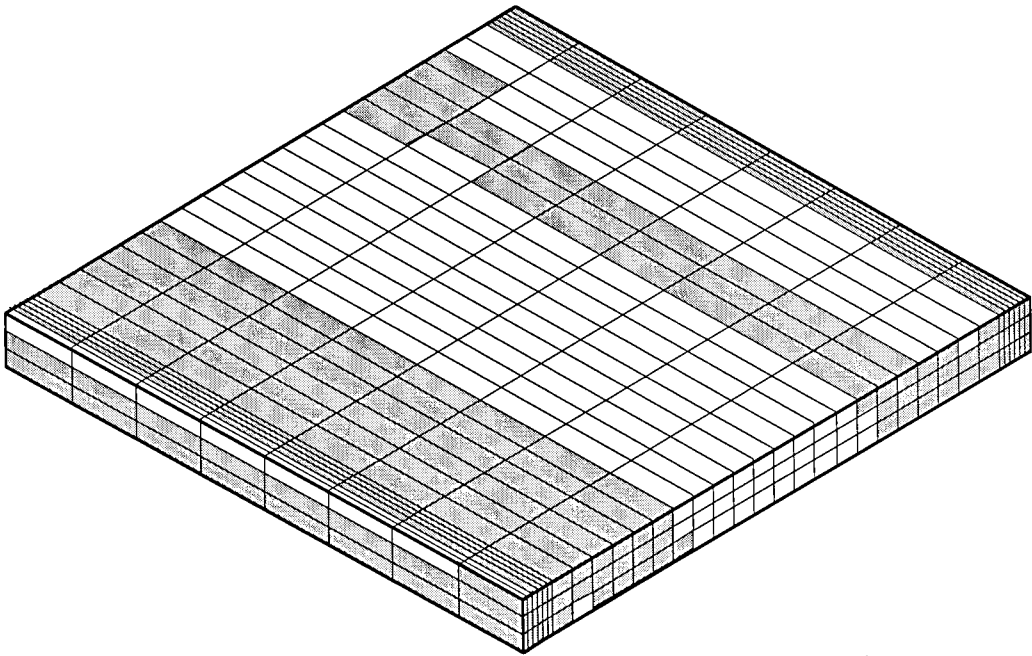


Figura 7.37 Representação simplificada da zona plástica do adesivo para carga aplicada $P = 2,1 \text{ kN}$.

Ao contrário do verificado com a plastificação dos substratos, as concentrações de tensões no adesivo e nas interfaces substrato-adesivo diminuem com o aumento da plastificação do adesivo. Na figura 7.38 apresentam-se os valores máximos da tensão

principal máxima normalizada no plano médio do adesivo para várias cargas aplicadas. Verifica-se nesta figura que o valor máximo diminui com o aumento da carga aplicada e que para os maiores valores de P ($P = 2,4$ kN e $2,8$ kN) esse valor máximo ocorre no plano $z = 8,594$ mm. O efeito da carga aplicada na distribuição da tensão principal máxima normalizada no plano médio do adesivo e para $z = 0,176$ mm é apresentado na figura 7.39. Embora existam diferenças na distribuição da tensão principal máxima normalizada na zona central do comprimento de sobreposição, convém principalmente registar a significativa diminuição da concentração de tensões com o aumento da carga aplicada. Para a carga máxima aplicada ($P = 2,8$ kN), a tensão principal máxima normalizada no plano médio do adesivo ocorre no plano $z = 8,594$ mm e decresce na direcção do bordo livre da junta. Este comportamento é visível no gráfico da figura 7.40 onde se representa a distribuição dessa tensão ao longo do comprimento de sobreposição e para vários planos longitudinais.

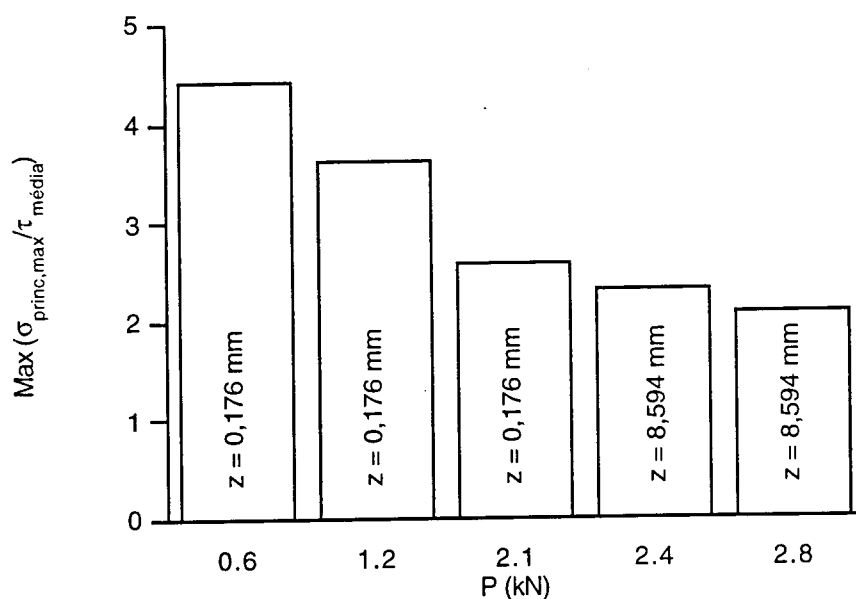


Figura 7.38 Variação do valor máximo da tensão principal máxima normalizada no plano médio do adesivo.

Nas interfaces substrato-adesivo, a concentração de tensões diminui com o aumento da carga aplicada para todas as componentes da tensão. No entanto, enquanto o máximo das tensões σ_{yy} e τ_{yz} normalizadas ocorre no bordo livre da junta para as cargas mais elevadas (ver figura 7.41), o máximo da tensão τ_{xy} normalizada verifica-se sempre no plano médio longitudinal ($z = 0$ mm). No gráfico da figura 7.42 mostra-se a distribuição da tensão σ_{yy} normalizada na interface $y = 0,125$ mm e para a carga

aplicada $P = 2,8 \text{ kN}$. Embora não seja compreensível no gráfico, a concentração de tensões para o plano $z = 12,5 \text{ mm}$ é de 3,97 e para o plano médio longitudinal ($z = 0 \text{ mm}$) é de 2,13, ou seja, o primeiro valor é quase o dobro do segundo.

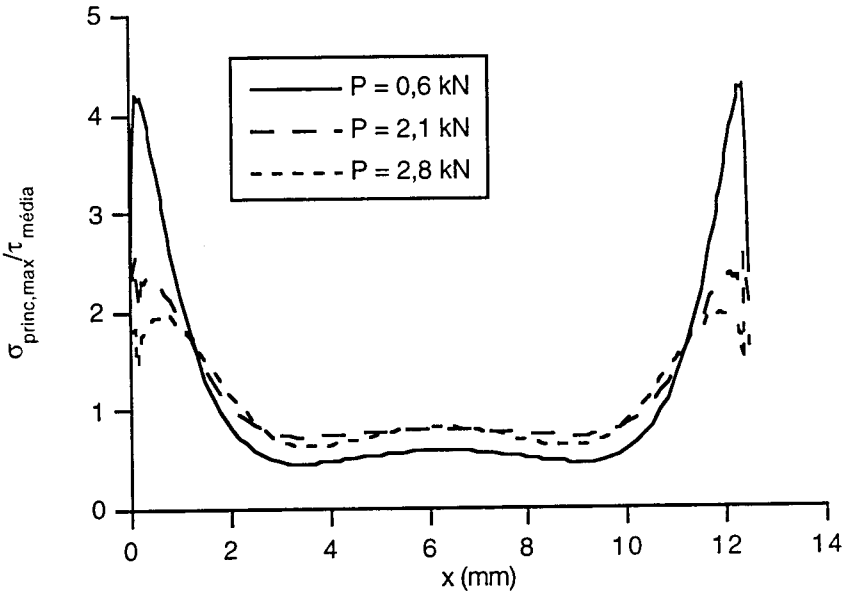


Figura 7.39 Variação da tensão principal máxima normalizada no plano médio do adesivo com o aumento da carga aplicada ($z = 0,176 \text{ mm}$).

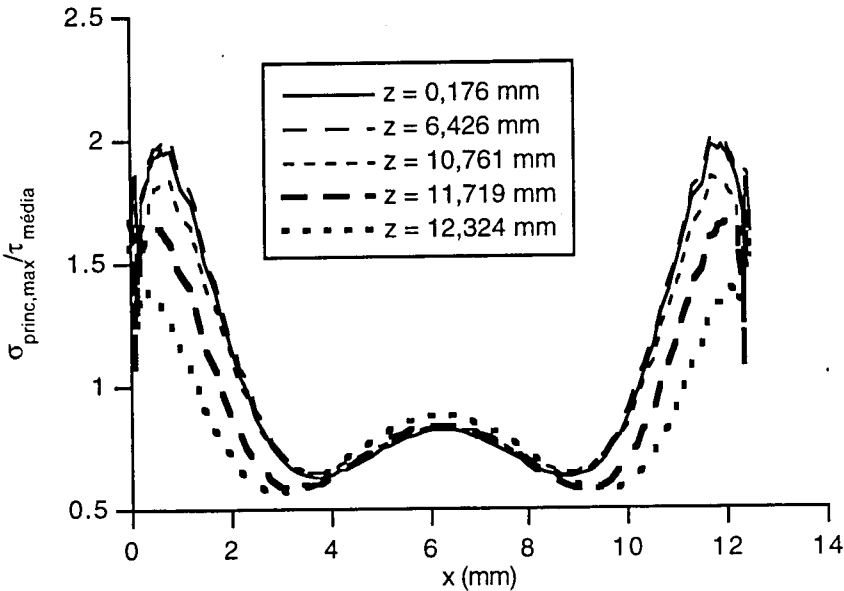


Figura 7.40 Distribuição da tensão principal máxima normalizada no plano médio do adesivo para a carga aplicada $P = 2,8 \text{ kN}$.

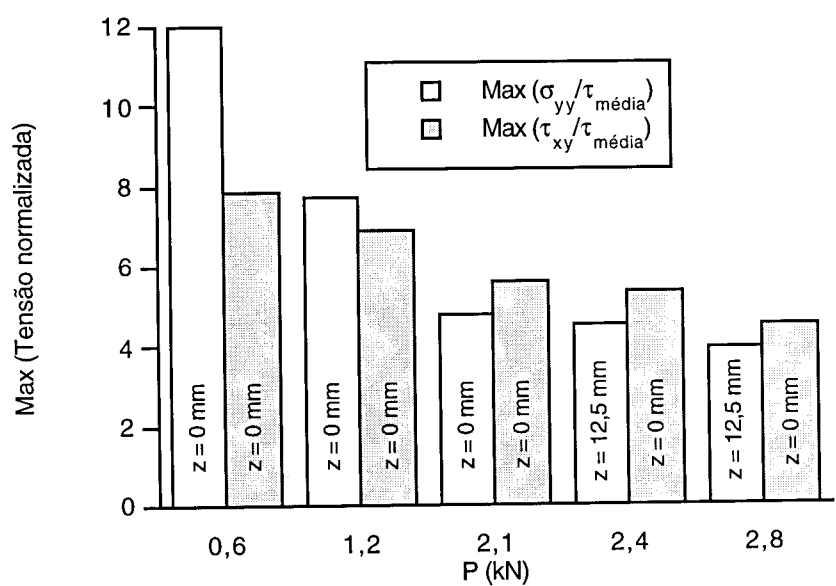


Figura 7.41 Variação do valor máximo das tensões σ_{yy} e τ_{xy} normalizadas na interface $y = 0,125$ mm.

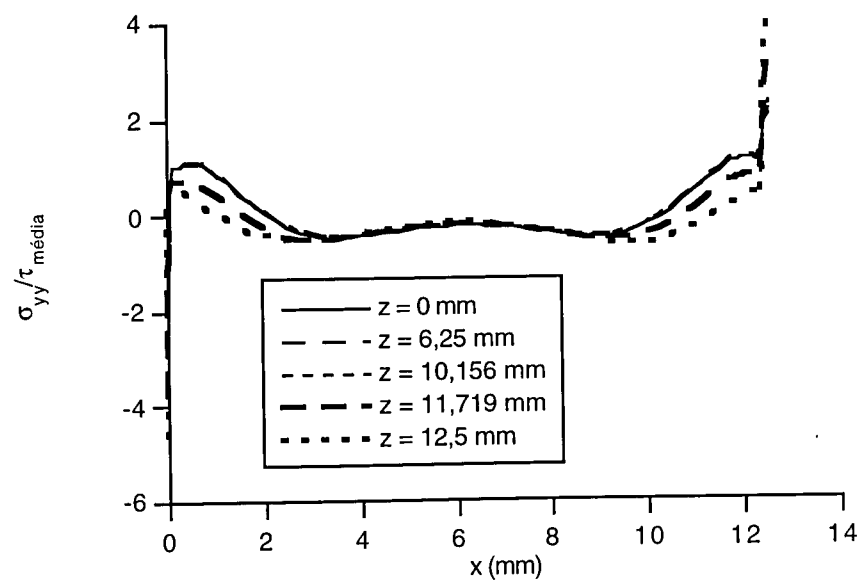


Figura 7.42 Distribuição da tensão σ_{yy} normalizada na interface $y = 0,125$ mm para a carga $P = 2,8$ kN.

A distribuição da tensão τ_{xy} normalizada na interface $y = 0,125$ mm e para a carga máxima aplicada ($P = 2,8$ kN) é praticamente constante ao longo da largura da junta. Mesmo relativamente ao pico máximo, a variação do plano médio longitudinal ($z = 0$ mm) até ao bordo livre ($z = 12,5$ mm) é reduzida (varia entre 4,53 e 4,32). No gráfico da figura 7.43 apresenta-se a distribuição da tensão τ_{xy} normalizada ao longo do plano médio longitudinal para várias cargas aplicadas. Nesse gráfico verifica-se que com o aumento da carga aplicada, a tensão τ_{xy} normalizada fica praticamente constante ao longo de quase todo o comprimento de sobreposição.

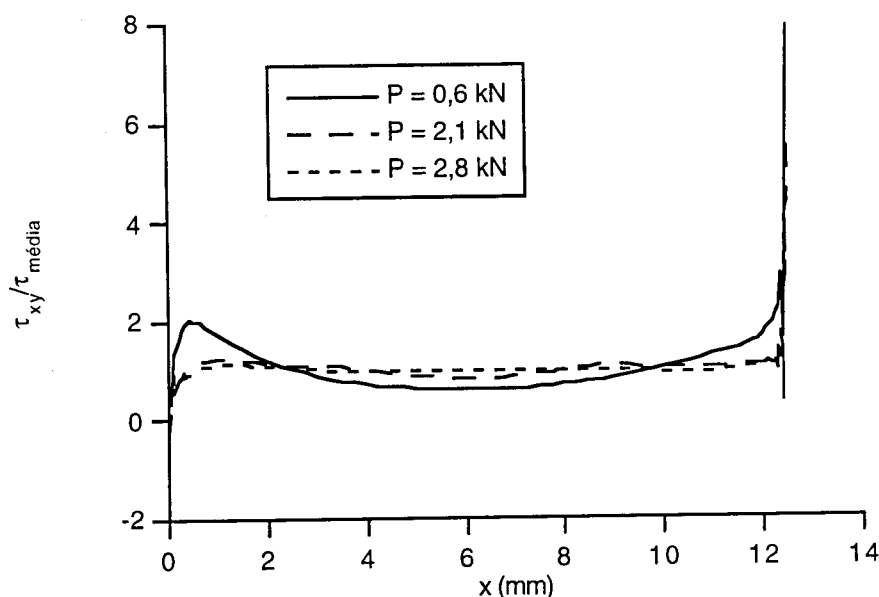


Figura 7.43 Distribuição da tensão τ_{xy} normalizada na interface $y = 0,125$ mm, ao longo do plano médio longitudinal da junta.

7.5.4 Materiais elasto-plásticos



Nesta análise consideram-se os substratos e o adesivo com comportamento elasto-plástico. A carga máxima aplicada foi de 2,9 kN. Com os incrementos de carga utilizados não foi possível identificar os valores exactos das cargas aplicadas para as quais se iniciou a plastificação do adesivo e dos substratos. No entanto, pode-se referir que para a carga aplicada de 1,2 kN o adesivo já apresenta alguma plastificação e que para a carga de 2,1 kN o substrato também já iniciou a sua plastificação.

No gráfico da figura 7.44 mostra-se a variação do valor máximo da tensão principal máxima normalizada no plano médio do adesivo para várias cargas aplicadas.

Verifica-se que esse valor máximo decresce com o aumento da carga aplicada até que para a carga máxima ($P = 2,9$ kN) apresenta um ligeiro aumento. Para as cargas mais baixas, o valor máximo da tensão principal máxima normalizada verifica-se próximo do plano médio longitudinal da junta ($z = 0,176$ mm). Para as cargas de 2,4 kN e 2,9 kN, o valor máximo desloca-se para o plano $z = 8,594$ mm. Nessas situações, a distribuição longitudinal da tensão principal máxima normalizada permanece praticamente constante desde o plano médio longitudinal até ao plano $z = 8,594$ mm. Em planos mais próximos do bordo livre da junta, a distribuição da tensão principal máxima normalizada altera-se, apresentando um decréscimo nas extremidades da zona de sobreposição. No gráfico da figura 7.45 pode-se verificar este comportamento para a carga aplicada $P = 2,9$ kN.

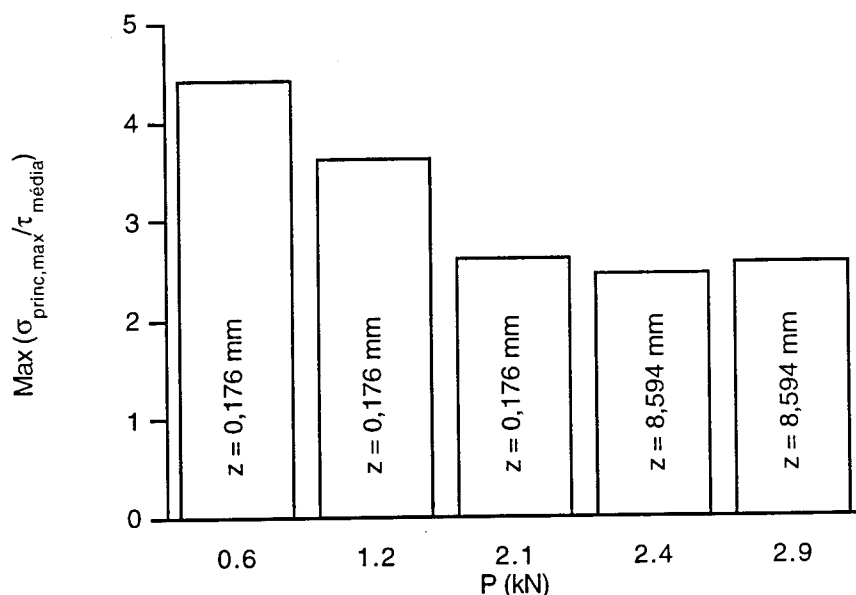


Figura 7.44 Variação do valor máximo da tensão principal máxima normalizada no plano médio do adesivo.

A concentração de tensões nas interfaces diminui com o aumento da carga aplicada. Isso é visível na figura 7.46, onde se representa a variação do valor máximo das tensões σ_{yy} e τ_{xy} normalizadas, na interface $y = 0,125$ mm, com o aumento da carga aplicada. Para as cargas mais baixas, os valores máximos das tensões σ_{yy} e τ_{xy} normalizadas verificam-se no plano médio longitudinal da junta ($z = 0$ mm). Para as cargas de 2,4 kN e 2,9 kN, a tensão σ_{yy} normalizada máxima ocorre no bordo livre da junta ($z = 12,5$ mm) e para a carga de 2,9 kN, o pico da tensão τ_{xy} normalizada ocorre no plano $z = 10,938$ mm. A distribuição da tensão σ_{yy} normalizada na interface $y = 0,125$ mm, para a carga máxima aplicada ($P = 2,9$ kN) está representada no gráfico da

figura 7.47. O valor do pico máximo para os vários planos longitudinais varia entre 1,8 ($z = 0\text{ mm}$) e 3,8 ($z = 12,5\text{ mm}$). A tensão τ_{xy} normalizada na mesma interface ($y = 0,125\text{ mm}$) e para a mesma carga aplicada ($P = 2,9\text{ kN}$) é praticamente constante e igual a 1 na quase totalidade da zona de sobreposição (ver figura 7.48).

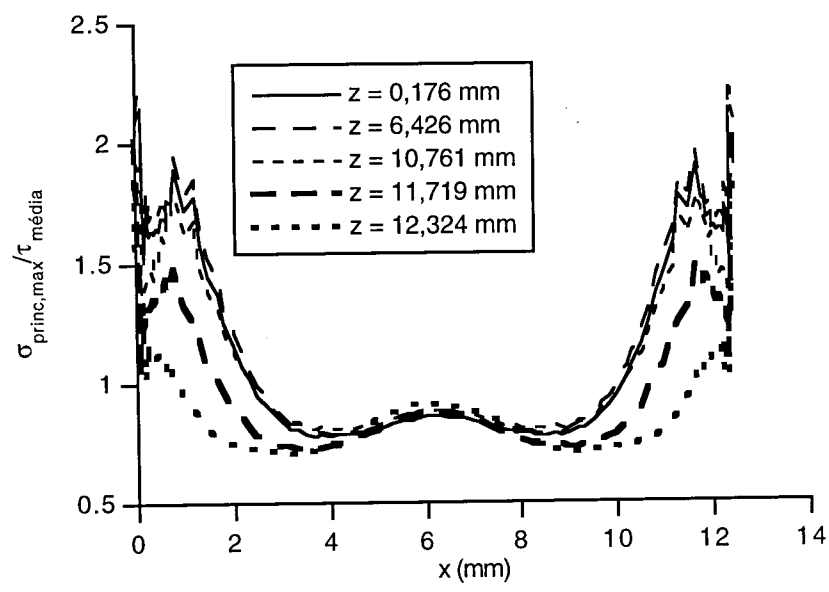


Figura 7.45 Distribuição da tensão principal máxima normalizada no plano médio do adesivo para a carga $P = 2,9\text{ kN}$.

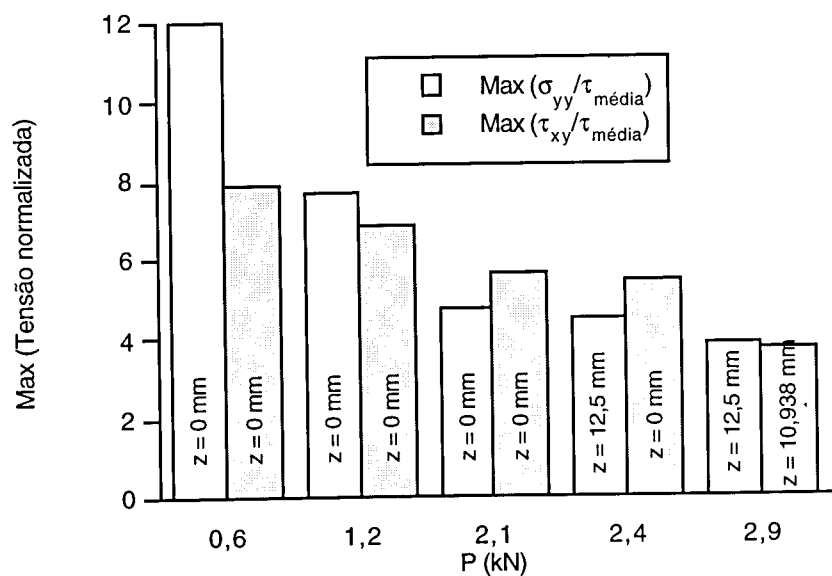


Figura 7.46 Variação do valor máximo das tensões σ_{yy} e τ_{xy} normalizadas na interface $y = 0,125\text{ mm}$.

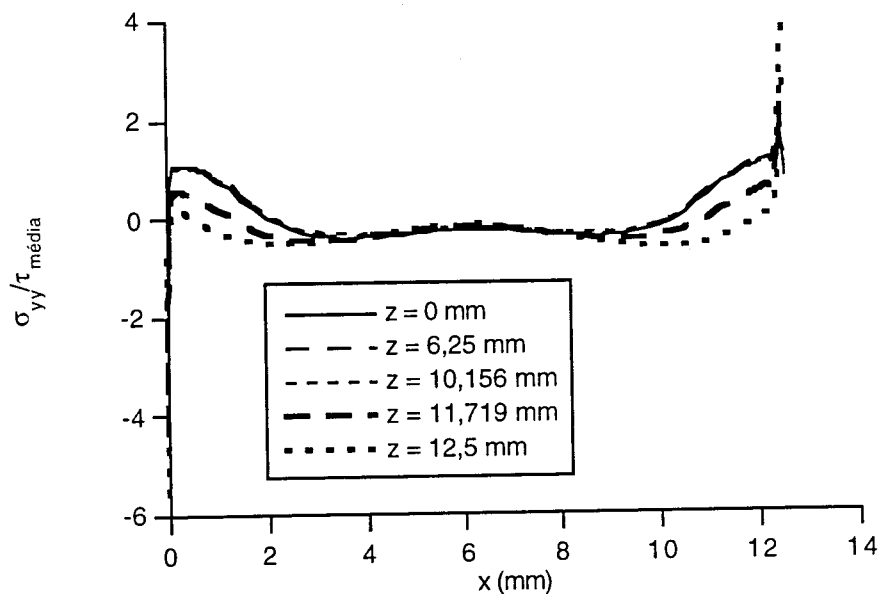


Figura 7.47 Distribuição da tensão σ_{yy} normalizada na interface $y = 0,125$ mm para a carga $P = 2,9$ kN.

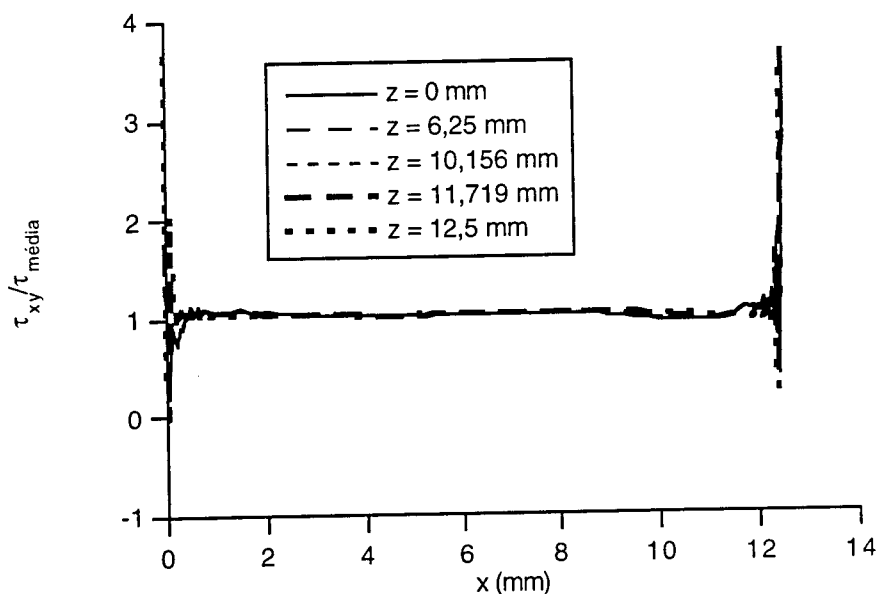


Figura 7.48 Distribuição da tensão τ_{xy} normalizada na interface $y = 0,125$ mm para a carga $P = 2,9$ kN.

7.6 Análise de tensões com o SPATE

O sistema de análise experimental de tensões baseado no efeito termoelástico (SPATE) foi utilizado para estudar a distribuição de tensões na superfície da junta adesiva de sobreposição simples descrita em 7.3.1. O provete foi submetido a um

carregamento cíclico sinusoidal à frequência de 10 Hz, com a tensão remota a variar entre 6 MPa e 26 MPa. Devido à reduzida espessura da camada de adesivo e também dos substratos, não foi possível analisar a distribuição de tensões nas faces laterais da junta. Optou-se por fazer uma análise da distribuição de tensões na face do substrato sobre a zona de sobreposição. O diâmetro dos pontos do SPATE utilizado foi de 0,51 mm e o espaçamento entre pontos de 0,49 mm.

A calibração do sistema SPATE fez-se a partir de uma tensão medida, segundo o método descrito em 2.6.3. Para tal, colocou-se um roseta de extensómetros de resistência eléctrica num dos substratos e numa zona afastada da área de sobreposição. A variação do primeiro invariante das tensões, calculado a partir dos valores de deformação medidos, juntamente com o valor do sinal medido com o SPATE num ponto ligeiramente ao lado da roseta de extensómetros, conduziram ao factor de calibração $F = 0,122162$ MPa.

Os ensaios com o SPATE consistiram em leituras de área correspondente à zona de sobreposição (ver figura 7.49). Na figura 7.50 apresenta-se a distribuição do primeiro invariante das tensões na superfície do substrato e para a área representada na figura 7.49. Os valores de tensão são dados em MPa.

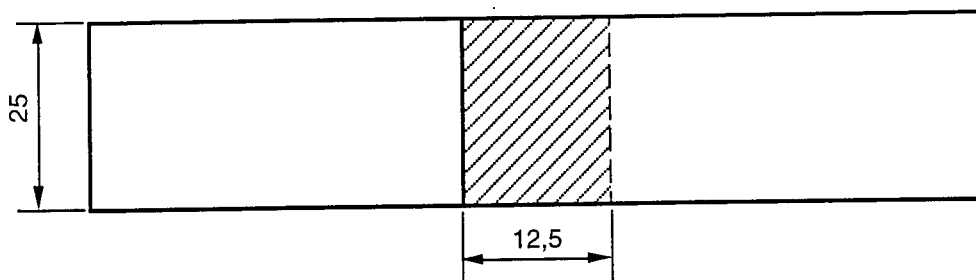


Figura 7.49 Representação esquemática da área coberta com a leitura do SPATE.

Com o objectivo de comparar a distribuição de tensões obtida experimentalmente com resultados numéricos, fez-se uma análise com o modelo de elementos finitos tridimensional descrito em 7.5. Nesta análise aplicou-se uma tensão remota de 20 MPa, correspondente à gama de tensões dos ensaios experimentais, e considerou-se o adesivo e os substratos com comportamento linear-elástico. Como o modelo de elementos finitos representa apenas metade da junta devido à simetria longitudinal, a distribuição de tensões na superfície do substrato é determinada para a área indicada na figura 7.51. A distribuição do primeiro invariante das tensões na área atrás indicada e à superfície do substrato, obtida numericamente está representada na figura 7.52.

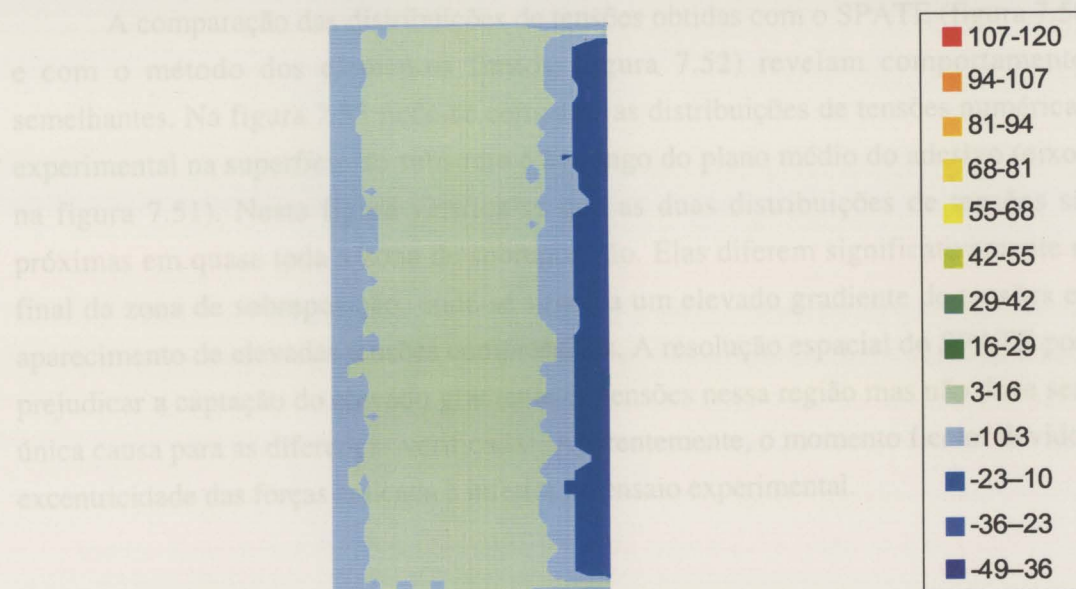


Figura 7.50 Distribuição de tensões na superfície do substrato obtida com o SPATE (MPa).

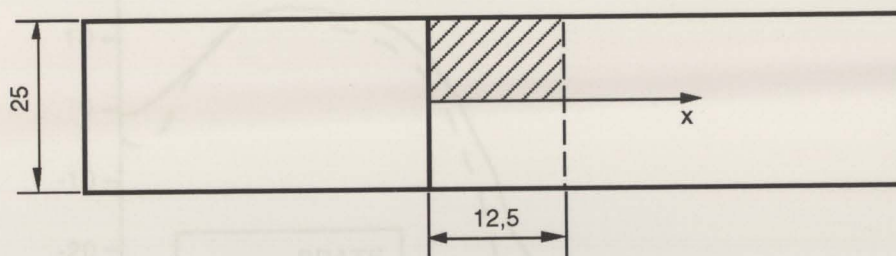


Figura 7.51 Representação esquemática da área considerada na distribuição de tensões obtida pelo método dos elementos finitos.

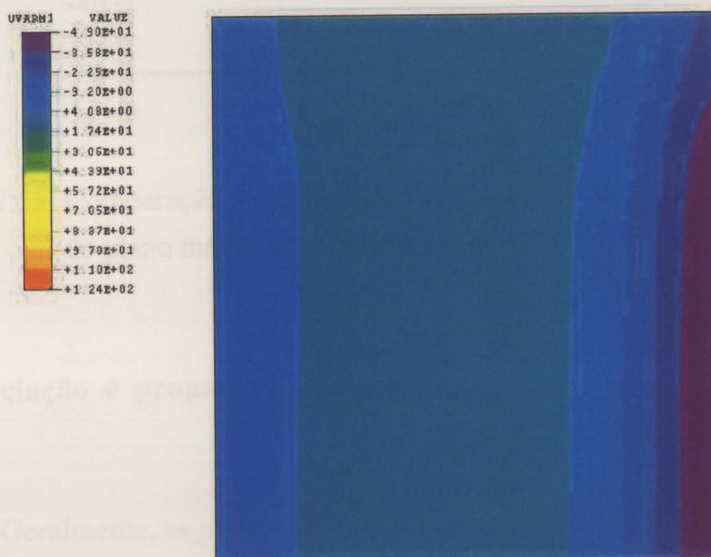


Figura 7.52 Distribuição de tensões na superfície do substrato obtida com o método dos elementos finitos (MPa).

A comparação das distribuições de tensões obtidas com o SPATE (figura 7.50) e com o método dos elementos finitos (figura 7.52) revelam comportamentos semelhantes. Na figura 7.53 pode-se comparar as distribuições de tensões numérica e experimental na superfície do substrato e ao longo do plano médio do adesivo (eixo x na figura 7.51). Nesta figura verifica-se que as duas distribuições de tensões são próximas em quase toda a zona de sobreposição. Elas diferem significativamente no final da zona de sobreposição, onde se verifica um elevado gradiente de tensões e o aparecimento de elevadas tensões compressivas. A resolução espacial do SPATE pode prejudicar a captação do elevado gradiente de tensões nessa região mas não deve ser a única causa para as diferenças verificadas. Aparentemente, o momento flector devido à excentricidade das forças aplicada é inferior no ensaio experimental.

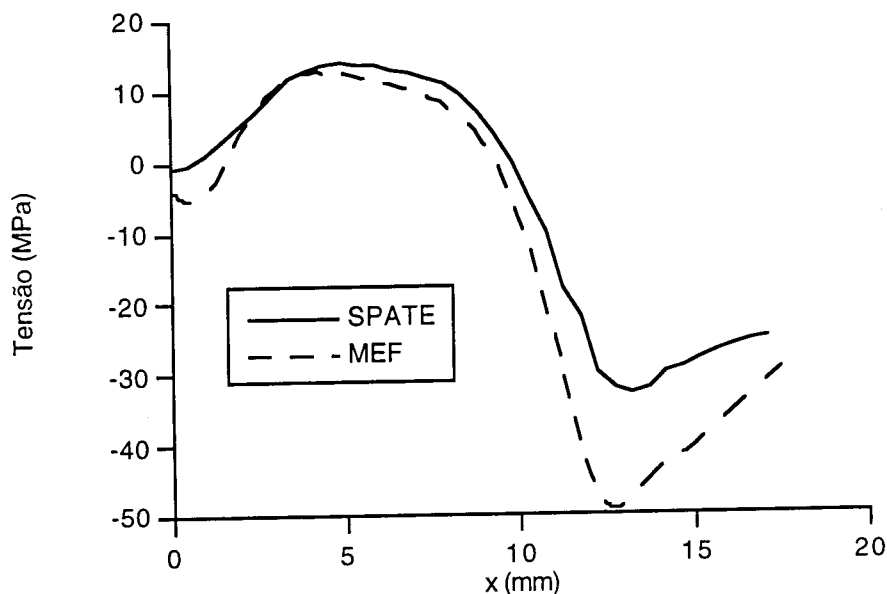


Figura 7.53 Comparação da distribuição de tensões na superfície do substrato ao longo do plano médio longitudinal.

7.7 Iniciação e propagação de dano

Geralmente, as juntas adesivas atingem a rotura após a progressiva propagação de uma fenda [10]. As interfaces substrato-adesivo são as fontes potenciais para a iniciação de fendas que, após propagação, podem conduzir à rotura da ligação [11]. Consequentemente, a modelação do comportamento de juntas adesivas até à rotura não

pode deixar de incluir a possibilidade de propagação de dano nas interfaces. Isso é conseguido através da utilização de elementos de interface com as características apresentadas nos capítulos 5 e 6.

Juntas adesivas com as características descritas no início deste capítulo foram traccionadas até à rotura. Os ensaios realizaram-se com controlo de deslocamento à velocidade de 1 mm/min. Não foi possível observar a iniciação e propagação do dano que conduziu à rotura das juntas. No entanto, a análise posterior da superfície de rotura e o conhecimento da distribuição de tensões na junta sugerem que a iniciação se dá nas extremidades do adesivo, nos pontos A e D da figura 7.12. As fendas propagam-se junto às interfaces substrato-adesivo até aproximadamente ao meio da zona de sobreposição. Finalmente, a rotura total do provete dá-se quando as duas fendas se unem. Este comportamento é observável na figura 7.54 relativa a um dos provetes ensaiados.

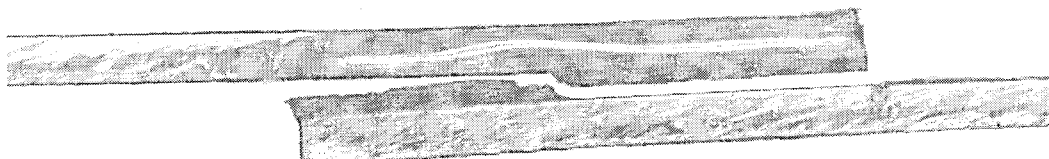


Figura 7.54 Rotura típica verificada nas juntas adesivas de sobreposição simples.

A simulação numérica do comportamento até à rotura da junta de sobreposição simples pode fazer-se com o modelo de elementos finitos tridimensional descrito em 7.5. A utilização de elementos de interface permite modelar a iniciação e propagação de fendas na interface. A malha de elementos finitos utilizada nesta análise é semelhante à apresentada na secção 7.5 embora tenha menos elementos ao longo da zona de sobreposição. Isso deve-se à necessidade de simplificar o modelo, uma vez que o processo de iniciação e propagação de dano nos elementos de interface é uma tarefa exigente em termos computacionais e aumenta significativamente o tempo necessário para realizar a análise. Assim, a malha utilizada tem 1024 elementos sólidos de 20 nós (referência C3D20 [6]), 384 elementos sólidos de 27 nós (referência C3D27 [6]), e 256 elementos de interface.

A malha de elementos finitos utilizada não permite simular a fase final da propagação, ou seja, não contempla a possibilidade de crescimento da fenda que atravessa o adesivo e que faz a ligação entre as fendas que se desenvolvem junto às interfaces. No entanto, verificou-se numericamente que a carga máxima na junta é obtida para uma situação em que as fendas junto às interfaces ainda não atingiram a zona central do comprimento de sobreposição.

Para promover a iniciação e propagação de dano nos elementos de interface, utilizou-se o modelo de modo misto descrito em 6.3.2.2. As propriedades consideradas neste modelo são do adesivo, uma vez que é aceite que as fendas se propagam no adesivo embora muito próximo dos substratos [10]. Essas propriedades são apresentadas na tabela 7.5. A tensão normal limite σ_{lim} foi determinada experimentalmente e a tensão de corte limite τ_{lim} é indicada pelo fabricante do adesivo (ver secção 7.2.2). As taxas críticas de libertação de energia baseiam-se na gama de valores típicos indicados na literatura para adesivos de epóxido semelhantes ao utilizado [12-17]. Dentro dessa gama foram procurados os valores que melhor se ajustam ao comportamento da junta adesiva.

Tabela 7.5 Propriedades utilizadas no modelo de modo misto.

σ_{lim} (MPa)	τ_{lim} (MPa)	G_{Ic} (N/mm)	G_{IIc} (N/mm)
15	20	0,6	1,8

Com o objectivo de possibilitar uma primeira avaliação do comportamento do modelo de elementos finitos descrito, realizaram-se ensaios experimentais em juntas de sobreposição simples com diferentes comprimentos de sobreposição. Assim, para além dos ensaios descritos para as juntas com 12,5 mm de comprimento de sobreposição, ensaiaram-se juntas com 16 mm e 20 mm de comprimento de sobreposição. As condições de ensaio descritas atrás para as juntas com 12,5 mm de sobreposição, repetiram-se para as outras juntas. Na tabela 7.6 apresentam-se as cargas máximas médias, os desvios padrão e os coeficientes de variação resultantes dos ensaios experimentais com os três tipos de juntas. Embora se tenham realizado 5 ensaios para cada tipo de junta, os resultados relativos às juntas com 16 mm e 20 mm de comprimento de sobreposição resultam apenas de 3 ensaios, uma vez que os restantes não foram considerados válidos.

Para a modelação dos três tipos de juntas utilizaram-se malhas com o mesmo número de elementos. Na figura 7.55 mostra-se o modelo de elementos finitos relativo à junta de 12,5 mm de sobreposição durante a fase de propagação do dano nas interfaces.

Tabela 7.6 Resultados numéricos e experimentais relativos à carga máxima nas juntas de sobreposição simples estudadas.

		Comprimento de sobreposição (mm)		
		12,5	16	20
Experimental	P _{max} Média (N)	3390	3544	4218
	Desvio Padrão (N)	410	384	207
	Coef. Variação	0,120	0,113	0,049
Numérico - materiais elásticos	P _{max} (N)	3385	3850	4641
	Erro %	0,25	8,0	10,0
Numérico - materiais elasto-plásticos	P _{max} (N)	3287	3550	4014
	Erro %	3,1	0,17	4,8

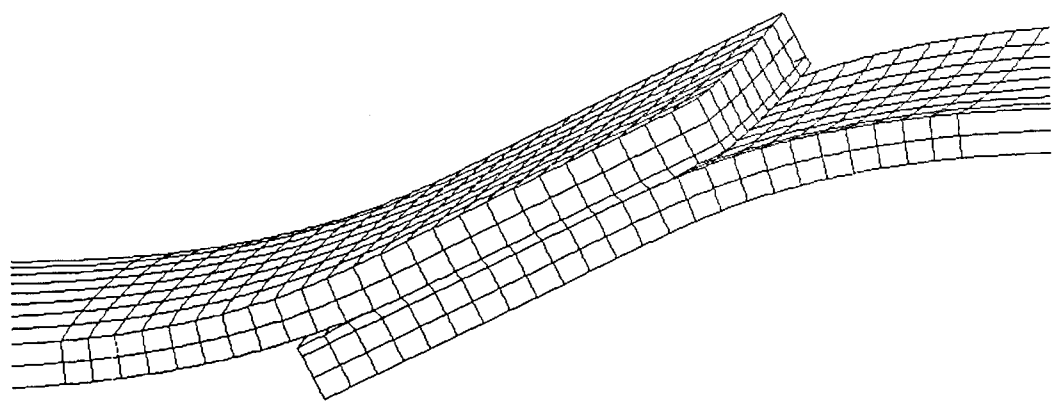


Figura 7.55 Propagação de dano nas interfaces para junta com 12,5 mm de comprimento de sobreposição.

O estudo numérico iniciou-se com a análise da junta com 12,5 mm de comprimento de sobreposição. Nessa análise, considerou-se o comportamento linear-elástico do adesivo e substratos e procuraram-se os valores das taxas críticas de

libertação de energia que melhor representassem o comportamento dessa junta. Os valores das taxas críticas de libertação de energia encontrados (ver tabela 7.5) foram utilizados nas análises das restantes juntas considerando o comportamento linear-elástico dos materiais. Fizeram-se ainda análises dos três tipos de juntas considerando o comportamento elasto-plástico do adesivo e substratos.

As cargas máximas obtidas numericamente, considerando o comportamento linear-elástico e elasto-plástico dos materiais, e o erro relativamente aos valores médios obtidos experimentalmente são apresentados na tabela 7.6. Nessa tabela verifica-se uma boa concordância entre as cargas máximas obtidas experimental e numericamente. De um modo geral, os erros obtidos com o modelo numérico são reduzidos, especialmente nos casos em que se considera o comportamento elasto-plástico dos substratos e adesivo. Nas juntas com 16 e 20 mm de comprimento de sobreposição, os erros dos resultados numéricos considerando o comportamento elasto-plástico dos materiais são significativamente inferiores aos obtidos com o comportamento linear-elástico dos materiais.

7.8 Conclusões

O objectivo do trabalho apresentado neste capítulo é o de mostrar a aplicação do modelo numérico desenvolvido e da técnica experimental baseada no efeito termoelástico, ao estudo de uma junta adesiva de sobreposição simples. A geometria seleccionada manteve-se constante, excepto no estudo relativo à modelação do comportamento de juntas até à rotura onde se consideraram variações no comprimento de sobreposição. Deve-se, por isso, ter em atenção que as conclusões a retirar dos resultados obtidos são relativas a geometrias particulares e nem sempre poderão ser generalizadas.

Algumas das conclusões que se podem retirar das análises de tensões com o método dos elementos finitos são apresentadas de seguida.

i) Análise bidimensional:

- Confirmaram-se as limitações da solução analítica de Goland e Reissner.
- Verificou-se que é fundamental considerar-se os efeitos da não-linearidade geométrica.

ii) Análise tridimensional; materiais elásticos:

- As componentes normais da tensão no plano médio do adesivo são praticamente constantes ao longo da largura da junta mas decrescem significativamente na

proximidade do bordo livre.

- A tensão σ_{yy} máxima no plano médio do adesivo é superior às tensões σ_{xx} e σ_{zz} máximas, as quais são da mesma ordem de grandeza.
- O valor máximo da tensão τ_{xy} no plano médio do adesivo é inferior ao máximo de σ_{yy} , embora seja superior aos valores máximos das outras tensões normais. A tensão τ_{xy} é praticamente insensível aos efeitos tridimensionais.
- As componentes τ_{xz} e τ_{yz} no plano médio do adesivo são reduzidas quando comparadas com as outras componentes de tensão. O efeito tridimensional nestas componentes verifica-se ao longo de toda a largura da junta.
- A distribuição da tensão principal máxima no plano médio do adesivo tem um comportamento semelhante às tensões normais, isto é, mantém-se praticamente constante na maioria da largura da junta e decresce na proximidade do bordo livre.
- As tensões principais máximas no adesivo ocorrem próximo das interfaces substrato-adesivo, nos cantos onde o adesivo e o substrato fazem um ângulo de 90° .
- As distribuições nas interfaces das componentes σ_{yy} e τ_{xy} mantêm-se praticamente constantes na zona intermédia da junta e decrescem na proximidade dos bordos livres. Os seus valores máximos verificam-se na extremidade da zona de sobreposição onde o adesivo e o substrato fazem um ângulo de 90° .

iii) Análise tridimensional; substratos elasto-plásticos:

- Foi possível identificar a progressão da plastificação dos substratos. A iniciação da plastificação ocorre no final da zona de sobreposição. À medida que a força aplicada aumenta, a zona plástica avança, afastando-se do adesivo e atravessando a espessura do substrato.
- A distribuição de tensões no adesivo altera-se com a evolução da plastificação dos substratos. Os valores máximos da tensão principal máxima normalizada no plano médio do adesivo e das tensões σ_{yy} e τ_{xy} normalizadas nas interfaces deslocam-se no sentido do bordo livre com o aumento da plastificação dos substratos. No entanto, o valor máximo da tensão τ_{yz} nas interfaces permanece no plano médio longitudinal.

iv) Análise tridimensional; adesivo elasto-plástico:

- O início da plastificação do adesivo dá-se nas extremidades da camada de adesivo, próximo dos pontos onde adesivo e substrato fazem um ângulo de 90° . A zona plastificada cresce para o interior da camada de adesivo e através da sua espessura.
- As concentrações de tensões no adesivo e nas interfaces substrato-adesivo diminuem com o aumento da plastificação do adesivo.

v) Análise tridimensional; materiais elasto-plásticos:

- Embora não se tenham determinado os momentos de iniciação da plastificação, verificou-se que ela já existe no adesivo para a carga aplicada de 1,2 kN e no substrato para a carga de 2,1 kN.
- O valor máximo da tensão principal máxima normalizada decresce com o aumento da carga aplicada até que para $P = 2,9$ kN apresenta um ligeiro aumento. Esse valor máximo verifica-se próximo do plano médio longitudinal no início do carregamento e transfere-se para o plano $z = 8,594$ mm a partir da carga $P = 2,4$ kN.
- A concentração de tensões nas interfaces diminui com o aumento da carga aplicada.

A comparação entre as distribuições de tensões obtidas com o SPATE e com o método dos elementos finitos deu indicação de comportamentos semelhantes. No entanto, verificaram-se algumas diferenças que podem ser devidas a variações nas condições de carregamento.

O estudo da iniciação e propagação de dano nas interfaces substrato-adesivo também deu boas indicações quanto à possibilidade de utilizar o modelo de elementos finitos tridimensional na previsão da carga de rotura das ligações. Nas juntas de sobreposição simples analisadas verificou-se uma boa concordância entre os valores numéricos e experimentais das cargas de rotura, especialmente quando no modelo numérico se considerou o comportamento elasto-plástico dos materiais.

Referências

1. Adams, R.D., Comyn, J., e Wake, W.C., *Structural Adhesive Joints in Engineering*. Chapman & Hall, London, 1997.
2. Jonhson, W.S. e Mall, S., "A fracture mechanics approach for designing adhesively bonded joints", em: *Delamination and Debonding of Materials*, W.S. Johnson, ed., ASTM STP 896, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, pp. 189-199, 1985.
3. Adams, R.D., *An overview on stress and strength analysis for bonded joints*. Composites and Adhesives Group, University of Bristol, Bristol, 1996.
4. Hildebrand, M. e Vessonen, I., "Experimental data on damping of adhesively bonded single-lap joints", em: *Modelling of Sandwich Structures and Adhesive Joints - Workshop*, Porto, Portugal, pp. 1-9, September 17-18, 1998.
5. *Terokal 5045 Technical Data Sheet*. Teroson, Heidelberg, 1992.
6. *ABAQUS User's Manual, Version 5.6*. Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc., Pawtucket, 1996.
7. Raghava, R.S., Cadell, R.M., e Yeh, G.S., "Macroscopic yield behaviour of polymers", *Journal of Materials Science*, Vol. 8, pp. 225-232, 1973.
8. Adams, R.D., Coppedale, J., e Peppiatt, N.A., "Failure analysis of aluminium-aluminium bonded joints", em: *Adhesion 2*, K.W. Allen, ed., Applied Science Publishers, London, pp. 105-120, 1978.
9. Harris, J.A. e Adams, R.D., "Strength prediction of bonded single lap joints by non-linear finite element methods", *International Journal of Adhesion and Adhesives*, Vol. 4, pp. 65-78, 1984.
10. Bogdanovich, A.E. e Yushanov, S.P., "3-D progressive failure analysis of bonded composite joints", em: *Proceedings of the Structures, Structural Dynamics & Materials Conference*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, pp. 1616-1626, 1998.
11. Pradham, S.C., Iyengar, N.G.R., e Kishore, N.N., "Parametric study of interfacial debonding in adhesively bonded composite joints", *Composite Structures*, Vol. 29, pp. 119-125, 1994.
12. Johnson, W.S. e Mangalgiri, P.D., *Influence of the resin on interlaminar mixed-mode fracture*. NASA TM-87571, National Aeronautics Space Administration, 1985.
13. Boudjemaa, N., Prel, Y., Benzeggagh, M.L., e de Charentenay, F.X., "The application of finite element analysis to a mode I delamination study on DCB and SCB specimens", em: *Mechanical Behaviour of Adhesive Joints*, G. Verchery e A.H. Cardon, eds., Éditions Pluralis, Paris, pp. 307-322, 1987.

14. Liechti, K.M. e Freda, T., "On the use of laminated beams for the determination of pure and mixed-mode fracture properties of structural adhesives", em: *Advances in Adhesively Bonded Joints*, S. Mall, K.M. Liechti, e J.R. Vinson, eds., The American Society of Mechanical Engineers, New York, pp. 65-77, 1988.
15. Fernlund, G. e Spelt, J.K., "Mixed-mode fracture characterization of adhesive joints", *Composites Science and Technology*, Vol. 50, pp. 441-449, 1994.
16. Fernlund, G., Papini, M., McCammond, D., e Spelt, J.K., "Fracture load predictions for adhesive joints", *Composites Science and Technology*, Vol. 51, pp. 587-600, 1994.
17. Papini, M., Fernlund, G., e Spelt, J.K., "Effect of crack-growth mechanism on the prediction of fracture load of adhesive joints", *Composites Science and Technology*, Vol. 52, pp. 561-570, 1994.

CAPÍTULO 8

8. JUNTAS REBITADAS DE SOBREPOSIÇÃO SIMPLES EM ESTRUTURAS DE AERONAVES

8.1 Introdução

8.2 Carregamento e distribuição de tensões numa fatia de uma junta rebitada longitudinal da fuselagem

8.2.1 Carregamento exterior

8.2.2 Distribuição de tensões

8.3 Iniciação de fendas de fadiga

8.3.1 Localização da iniciação

8.3.2 Vida da iniciação

8.3.3 Distribuição das fendas na iniciação

8.3.4 Detecção da iniciação

8.4 Propagação de fendas de fadiga

8.5 Resistência residual

Referências

CAPÍTULO 8

8. JUNTAS REBITADAS DE SOBREPOSIÇÃO SIMPLES EM ESTRUTURAS DE AERONAVES

8.1 Introdução

As juntas de sobreposição simples rebitadas ou adesivas têm uma geometria semelhante. Ambos os tipos consistem na sobreposição de duas chapas e na utilização de um meio adicional para promover a sua ligação. Nas juntas adesivas, o adesivo é colocado entre as duas chapas e preenche normalmente a zona de sobreposição. A carga transfere-se entre as duas chapas através da camada de adesivo. Em contraste, as juntas rebitadas contêm um número discreto de rebites, normalmente distribuídos em várias filas na zona de sobreposição. Por exemplo, na indústria aeronáutica, as juntas rebitadas utilizadas na fuselagem de aeronaves comerciais têm tipicamente entre duas a quatro filas de rebites. A transferência de carga entre as duas chapas de uma junta rebitada faz-se fundamentalmente através dos rebites, que trabalham ao corte, mas também devido à fricção entre as duas chapas. As diferenças assinaladas entre estes dois tipos de ligação permitem concluir que a transferência de carga nas juntas adesivas é distribuída pela zona de sobreposição, enquanto que se faz de uma forma localizada e discreta nas juntas rebitadas.

O trabalho apresentado neste documento relativo a juntas rebitadas insere-se no projecto Brite/Euram BE-1053, "Structural Maintenance of Ageing Aircraft" (SMAAC). O objectivo deste projecto é o estudo da integridade estrutural de aeronaves que continuam em operação para além da vida útil para que foram projectadas. Mais especificamente, o projecto tem enfoque no estudo do fenómeno de iniciação e propagação simultânea de fendas de fadiga em vários pontos da estrutura de uma aeronave.

O interesse por este fenómeno surgiu após o acidente, em 1988, do Boeing 737 da companhia Aloha Airlines, nas ilhas do Hawaii [1]. Pouco tempo depois da descolagem, o avião perdeu uma secção considerável da fuselagem. Esse incidente foi causado por uma série de fendas de fadiga colineares que repentinamente se ligaram e formaram uma fenda única com um comprimento crítico capaz de conduzir ao colapso da estrutura.

Segundo Schmidt e Brandecker [2], a estrutura de uma aeronave que contém fendas de fadiga pode ser classificada com uma das seguintes designações:

- 1 - *Widespread Fatigue Damage* (WFD) - presença de fendas de fadiga em vários sítios da estrutura de forma que a interacção entre elas diminui a resistência residual da estrutura.
- 2 - *Multiple Site Damage* (MSD) - desenvolvimento simultâneo de fendas de fadiga em vários sítios do mesmo elemento estrutural de forma que as fendas podem coalescer e formar uma fenda de grandes dimensões.
- 3 - *Multiple Element Damage* (MED) - desenvolvimento simultâneo de fendas de fadiga em elementos estruturais similares e adjacentes, e consequente interacção entre elas.

Das definições acima, compreende-se que o WFD é uma consequência do MSD. O estudo deste último pode ser dividido em três fases:

- 1 - A iniciação de MSD.
- 2 - Propagação de fendas em MSD.
- 3 - Resistência residual na presença de MSD.

O estudo desenvolvido pelo Instituto de Engenharia Mecânica (IDMEC), no âmbito do projecto SMAAC, contém contribuições nas três fases do processo de MSD atrás inuncias. O programa experimental visou a caracterização mecânica do material, incluindo a obtenção de propriedades básicas de propagação de fendas, e o estudo da iniciação e propagação de fendas de fadiga em provetes de laboratório que simulam as características fundamentais de juntas de estruturas de aeronaves na presença de MSD. A informação coligida relativa à iniciação e propagação de fendas e à resistência residual das juntas foi utilizada na verificação do modelo numérico desenvolvido com o programa de elementos finitos FRANC2D/L [3]. Os estudos numéricos, para além do modelo de elementos finitos referido, incluíram a utilização do método dos elementos de fronteira na modelação de cenários de MSD com fendas de penetração total e o recurso ao método dos elementos finitos para modelar a presença de fendas de penetração parcial.

Neste capítulo faz-se uma análise das várias fases do problema de MSD baseado no trabalho desenvolvido pelo IDMEC e incluindo referências à literatura sobre o assunto. O leitor interessado numa descrição detalhada do programa experimental e do modelo numérico desenvolvido com o programa de elementos finitos FRANC2D/L, deve consultar o trabalho de L. Silva [4]. Os estudos com o método dos elementos de fronteira conduzidos por J. Sabino Domingues, A. Portela, e P. de Castro encontram-se publicados em vários relatórios (ver por exemplo [5-8]). O trabalho numérico relativo à presença de fendas de penetração parcial é apresentado no capítulo 9 desta dissertação.

8.2 Carregamento e distribuição de tensões numa fatia de uma junta rebitada longitudinal da fuselagem

8.2.1 Carregamento exterior

O principal carregamento de fadiga a que a fuselagem de uma aeronave está sujeita é a sua pressurização, uma vez por voo, a uma pressão constante de cerca de 55 kPa [9]. Durante uma vida útil de 20 anos, uma aeronave para transporte de longo curso pode ser sujeita a 20000 ciclos de pressurização enquanto que uma aeronave utilizada em viagens de médio curso pode estar sujeita a 80000 ciclos de pressurização (o Boeing 737 da companhia Aloha Airlines tinha 19 anos e 89090 ciclos de pressurização no momento do acidente [1]). Devido à pressão interna, uma fatia de uma junta rebitada longitudinal está sujeita a tracção circunferencial, tracção longitudinal e a efeitos de flexão. Os efeitos de flexão têm duas origens. Por uma lado, devem-se à excentricidade da tracção circunferencial nas duas chapas resultante da geometria das juntas de sobreposição simples e já discutida para o caso das juntas adesivas. Por outro lado, derivam da deformação em forma de almofada dos painéis entre reforços. A representação esquemática na figura 8.1 ilustra as cargas numa fatia de uma junta rebitada longitudinal devido à pressão interna na fuselagem. Nesta figura mostra-se uma secção circunferencial de dois painéis e os reforços associados.

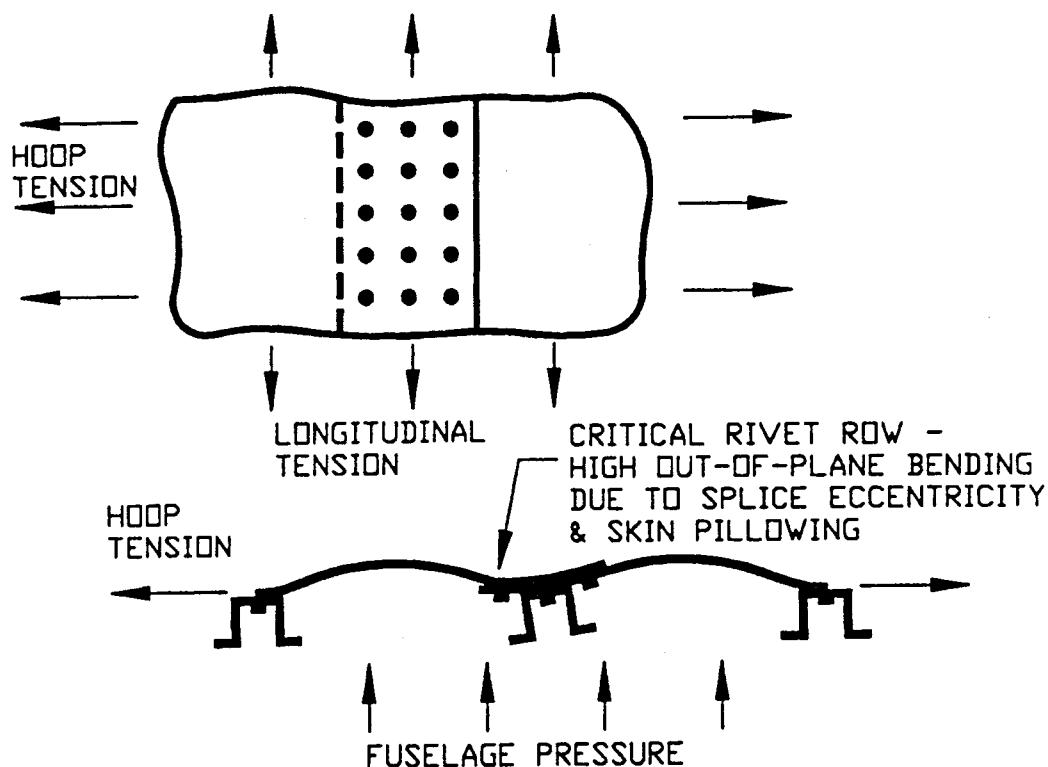
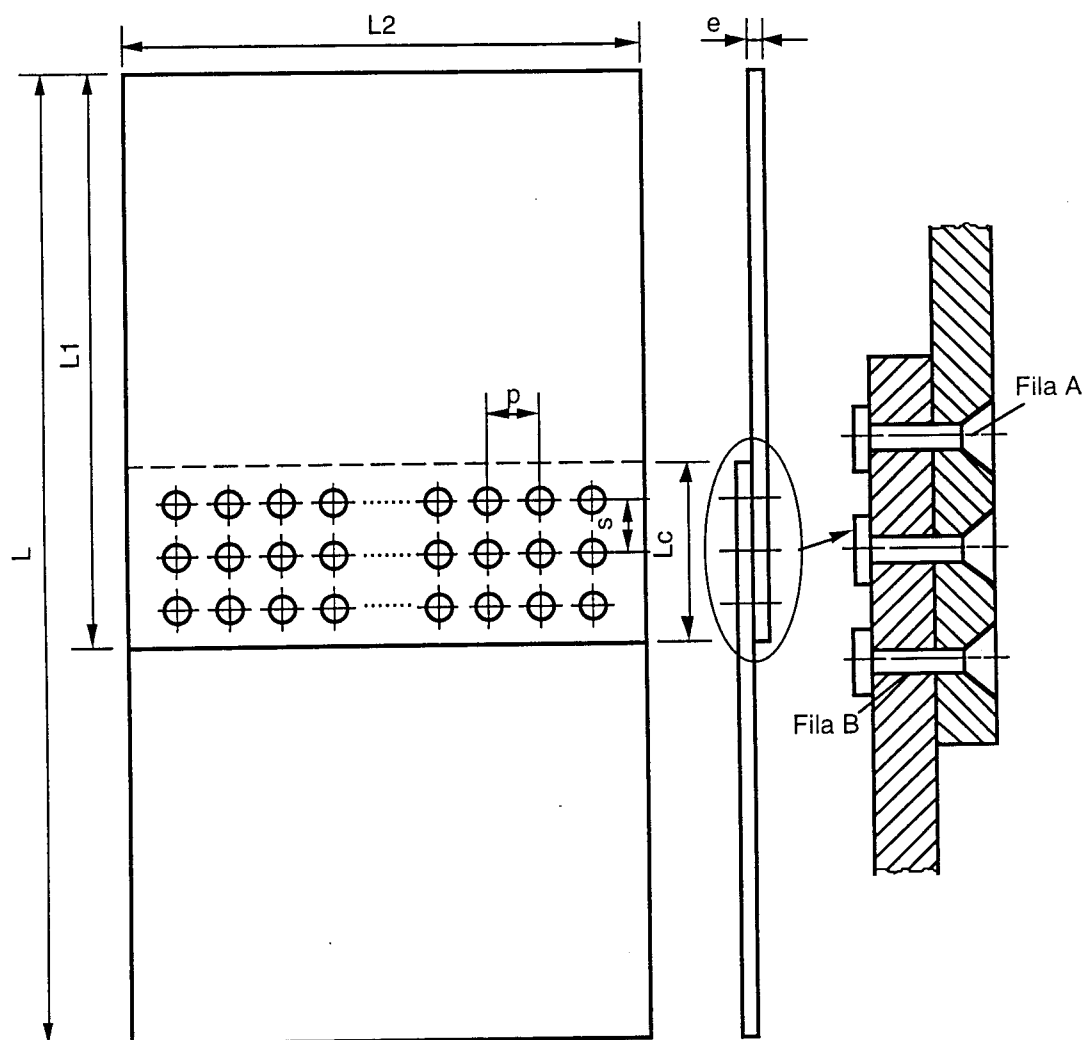


Figura 8.1 Cargas numa fatia de uma junta rebitada longitudinal devido à pressurização da fuselagem [9].

8.2.2 Distribuição de tensões

Os provetes estudados no âmbito do projecto SMAAC foram fornecidos pela Daimler-Benz Aerospace Airbus (DASA) e estão esquematicamente representados na figura 8.2. São juntas rebitadas de sobreposição simples, com duas ou três filas de rebites, da liga de alumínio Al2024-T3 alclad.

Em juntas rebitadas, a transferência de carga entre chapas é feita principalmente pelos rebites mas também através de fricção entre as chapas em contacto. A combinação de uma transferência de carga pouco suave com as concentrações de tensões devidas aos furos, e com as tensões de flexão, origina um estado de tensão tridimensional complexo. Na figura 8.3 mostra-se um exemplo da distribuição do primeiro invariante das tensões à superfície de uma junta rebitada com duas filas de rebites, do lado em que a extremidade dos rebites é tronco-cónica. Esta distribuição de tensões foi obtida experimentalmente com o SPATE e representa uma área rectangular abrangendo seis rebites (ver figura 8.4). O ensaio realizou-se com o provete sujeito a um carregamento cíclico à frequência de 6 Hz e com valores de forças mínima e máxima aplicadas ao provete de 2 kN e 30 kN, respectivamente.



No. de filas	2	3
L	555	534
L1	299,5	300
L2	440	440
Lc	44	66
e	1,6	1,6
No. de colunas	20	20
p	22	22
s	22	22
Ø dos rebites	4,8	4,8

Figura 8.2 Geometria dos provetes estudados.

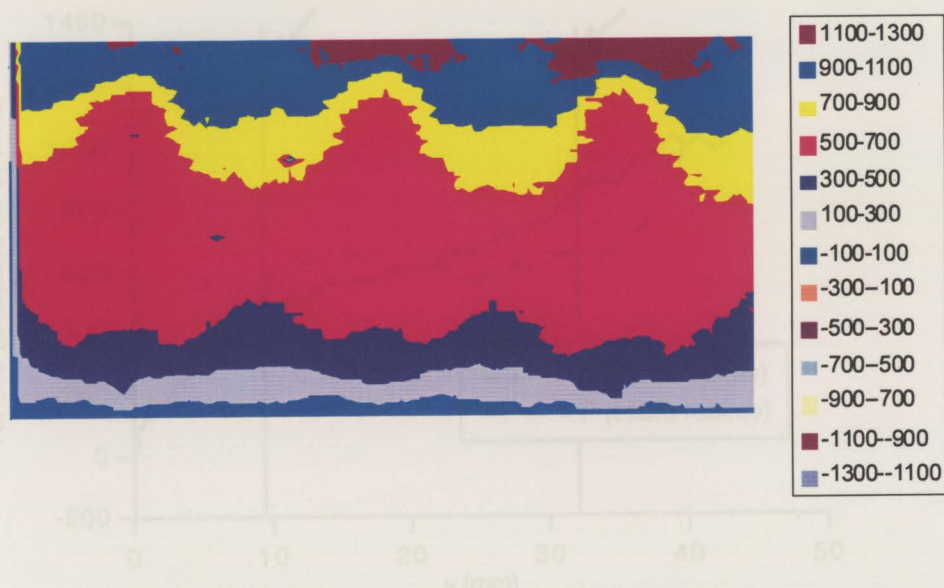


Figura 8.3 Distribuição de tensões na zona dos rebites obtida com o SPATE (tensões em unidades do SPATE).

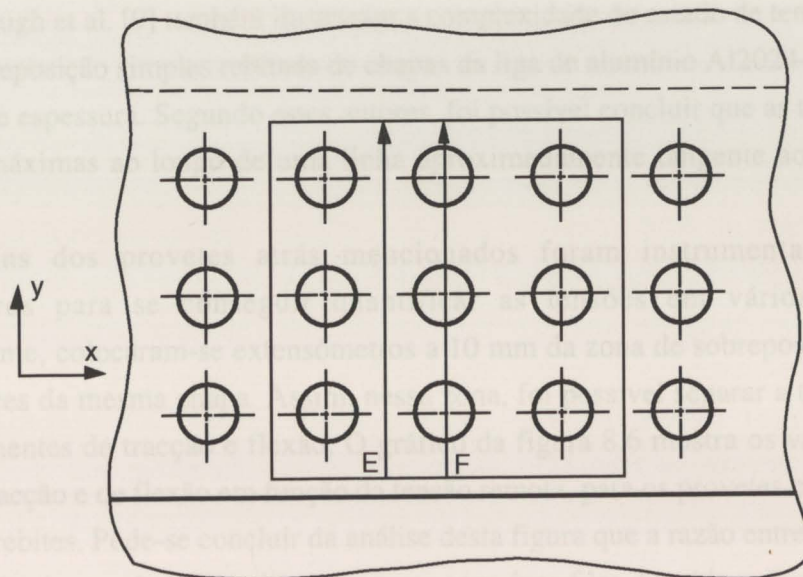


Figura 8.4 Representação esquemática da área e linhas de leitura.

Na figura 8.5 representa-se a distribuição de tensões ao longo das linhas E e F (ver figura 8.4) que passam entre e sobre os rebites, respectivamente. A distribuição de tensões ao longo da linha que passa sobre os rebites (linha F) apresenta um patamar enquanto que na outra a tensão decresce continuamente.

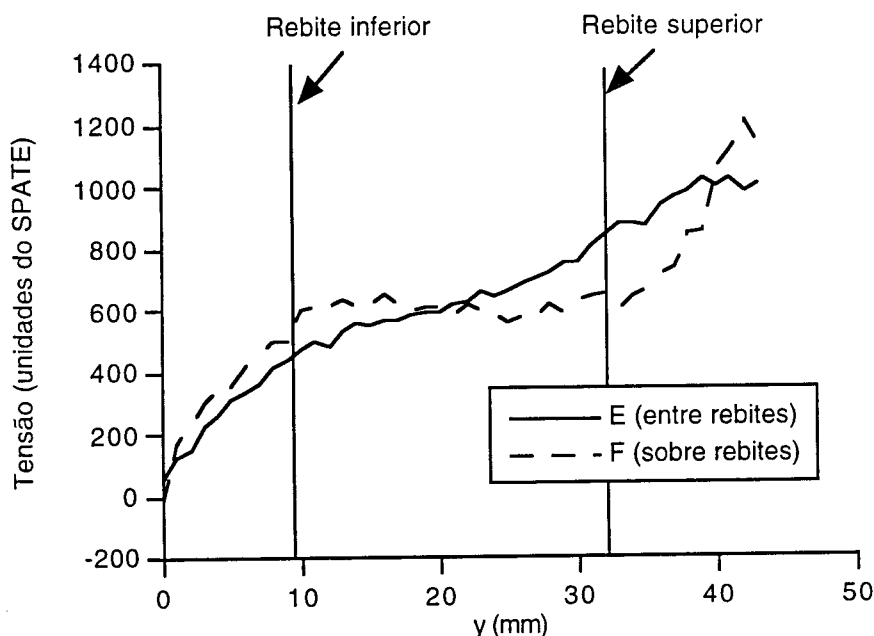


Figura 8.5 Distribuição de tensões ao longo das linhas E e F.

Eastaugh et al. [9] também ilustraram a complexidade do estado de tensão numa junta de sobreposição simples rebitada de chapas da liga de alumínio Al2024-T3 alclad com 1 mm de espessura. Segundo estes autores, foi possível concluir que as tensões de flexão são máximas ao longo de uma linha aproximadamente tangente ao furo dos rebites.

Alguns dos provetes atrás mencionados foram instrumentados com extensômetros para se conseguir quantificar as tensões em vários pontos. Nomeadamente, colocaram-se extensômetros a 10 mm da zona de sobreposição e em ambas as faces da mesma chapa. Assim, nessa zona, foi possível separar a tensão nas suas componentes de tracção e flexão. O gráfico da figura 8.6 mostra os valores das tensões de tracção e de flexão em função da tensão remota, para os provetes com duas e três filas de rebites. Pode-se concluir da análise desta figura que a razão entre tensão de flexão e tensão de tracção é superior no provete com duas filas de rebites. Para a tensão remota de 100 MPa, essa razão é 0,32 para o provete com duas filas de rebites e 0,18 para o provete com três filas de rebites. Schutz e Lowak [10] mediram a razão entre tensão de flexão e tensão de tracção em fatias reais de fuselagens e obtiveram valores entre 0,2 e 1,8.

A distribuição de tensões na proximidade dos furos dos rebites resulta da sobreposição de vários efeitos, alguns dos quais já referidos [9]:

- i) Tensão tractiva biaxial nos painéis.
- ii) Carregamento localizado no furo devido à transferência de carga por corte no rebite.
- iii) Aperto provocado pelo rebite.
- iv) Tensões de corte nas superfícies das chapas em contacto devido à transferência de carga por fricção.
- v) Pressão interna no furo devido à expansão do rebite, possivelmente produzindo plastificação.
- vi) Efeitos de flexão devido à excentricidade da junta de sobreposição simples e à deformação em forma de almofada dos painéis.

A importância relativa de cada um dos efeitos varia com as características específicas das juntas da fuselagem em causa. Em geral, a tensão circunferencial, a carga transmitida pelos rebites e as tensões de flexão são superiores nas filas extremas de rebites. Numa junta rebitada com três filas de rebites, como a representada na figura 8.2, as filas A e B são críticas. Segundo Schijve [13], as fendas de fadiga são esperadas na fila A; numa aeronave, esta é a fila superior da chapa exterior. A razão principal para se esperar o aparecimento de fendas de fadiga nessa fila e não em B (fila inferior da chapa interior) deve-se à presença do chanfro cónico do furo. A extremidade do furo tronco-cónico propicia o aparecimento de concentração de tensões e pode aumentar as tensões locais três ou mais vezes [14]. Apesar desta evidência, também se constata experimentalmente o aparecimento de fendas de fadiga na fila B.

8.3 Iniciação de fendas de fadiga

As características de iniciação com interesse no contexto do MSD são: a localização da iniciação, a vida correspondente à iniciação e a distribuição das fendas de fadiga na iniciação [9]. A localização da iniciação tem interesse porque isso influencia a escolha do método de inspecção. A vida correspondente à iniciação, juntamente com o período de propagação em que a fenda não é detectável, determina o limiar da inspecção. A distribuição das fendas na iniciação determina o tamanho e a densidade de um grupo de MSD e, consequentemente, o período de detecção da propagação anterior à rotura catastrófica da fuselagem.

8.3.1 Localização da iniciação

Como referido na secção anterior, a iniciação de fendas de fadiga é esperada na fila de furos superior da chapa exterior de uma fatia da fuselagem. A evidência experimental demonstra que também é possível o aparecimento de iniciação na fila de furos inferior da chapa interior. Verificou-se que esta última hipótese está geralmente associada a chapas mais finas, utilizadas em aeronaves com fuselagem estreita. No entanto, outros factores poderão influenciar a localização da iniciação. Por exemplo, Schijve [15] refere resultados não publicados de Muller em que se observou que um aumento da força de aperto durante a introdução do rebite origina a iniciação na chapa com furos cilíndricos, isto é, na chapa interior.

As fendas de fadiga iniciam-se tipicamente em zonas escondidas. Segundo Piascik et al. [16], a iniciação ocorre em zonas de elevada concentração de tensões, localizadas nos furos dos rebites ou em áreas próximas destes que sofreram esmagamento. Wang [17] e Potter e Yee [18] publicaram análises de superfícies de fractura que mostram a iniciação de fendas nos furos dos rebites. A nucleação ocorreu em inclusões, marcas de ferramentas, ou outras zonas com pequeno dano. Em [18] mostra-se que a substituição da técnica de furação por uma técnica que produz melhores acabamentos superficiais originou a quase duplicação da vida à fadiga de uma junta rebitada. Isto confirma que a iniciação pode resultar de ligeiro dano na superfície.

No estudo realizado pelo IDMEC, observou-se iniciação de fendas no furo do rebite ou na sua proximidade. Na figura 8.7 apresentam-se micrografias de superfícies de fractura obtidas com a técnica de microscopia electrónica de varrimento. Nessas micrografias mostra-se a localização da fenda de fadiga, o sítio de iniciação e a morfologia das fendas de fadiga. A representação esquemática permite localizar cada uma das micrografias.

8.3.2 Vida da iniciação

A fase de iniciação e propagação de fendas até se tornarem visíveis pode representar a maior parte da vida à fadiga das ligações rebitadas [13]. A contagem de estrias no Boeing da Aloha Airlines revelou que houve propagação de fendas de fadiga debaixo da cabeça de rebites durante pelo menos 25% da vida total da estrutura [19]. Também em testes de fuselagens à escala real surgiram fendas de fadiga visíveis após cerca de 50% da vida da estrutura [20]. Nos ensaios realizados no IDMEC, as fendas de fadiga só se tornaram visíveis após 80% a 96% da vida total à fadiga.

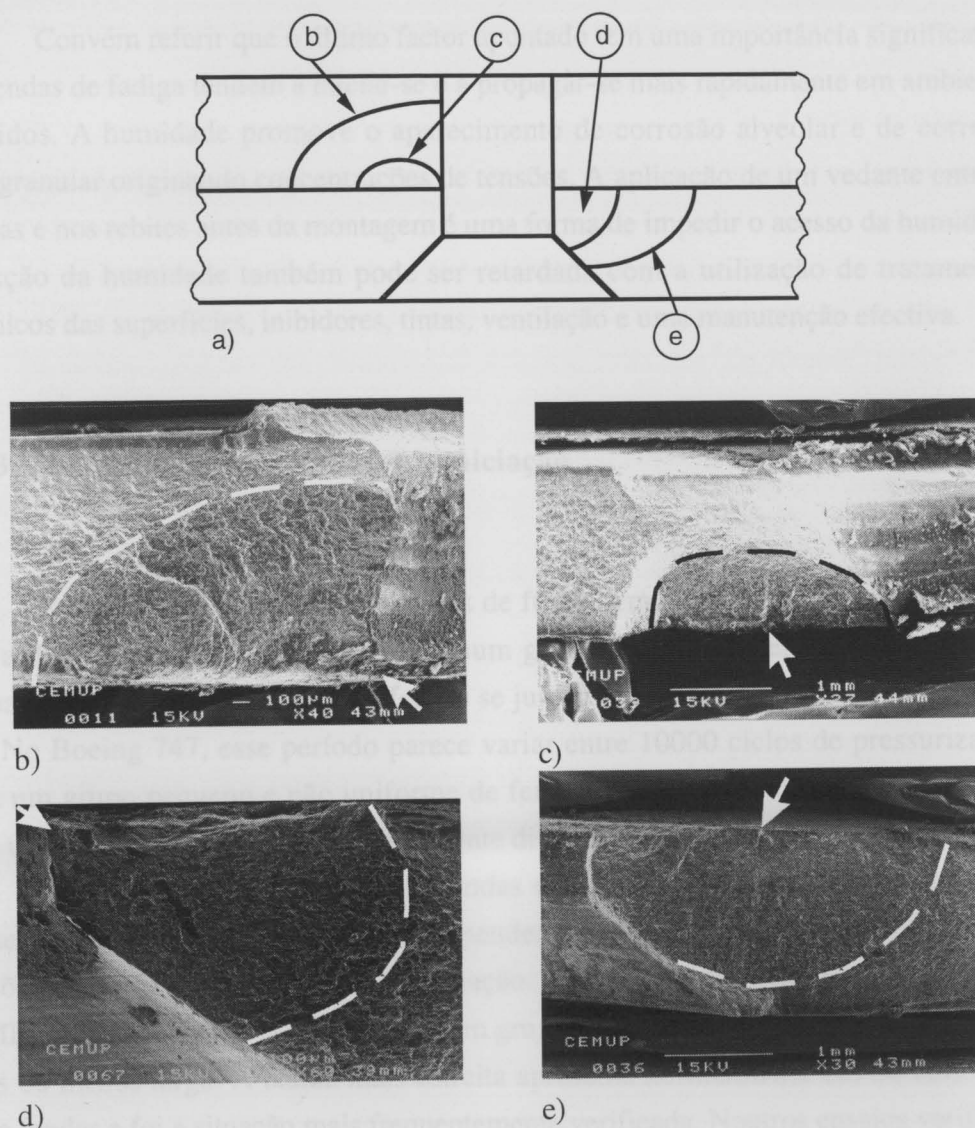


Figura 8.7 Representação esquemática a) e micrografias b)-e) de fendas de fadiga.

Segundo Eastaugh et al. [9], a vida correspondente à iniciação é fortemente dependente do projecto detalhado de cada fatia da fuselagem. Pequenas modificações na geometria, pormenores dos rebites e dos furos, ou tratamento superficial das chapas em contacto, podem representar diferenças consideráveis na vida da iniciação. Alguns factores importantes apontados por aqueles autores são:

- i) Tensão de membrana local.
- ii) Tensão de flexão local.
- iii) Transferência de carga no rebite.
- iv) Localização e valor das tensões máximas na proximidade do furo do rebite.
- v) Susceptibilidade ao esmagamento devido ao movimento relativo entre rebite e superfície do furo.
- vi) Susceptibilidade às condições ambientais.

Convém referir que o último factor apontado tem uma importância significativa. As fendas de fadiga tendem a iniciar-se e a propagar-se mais rapidamente em ambientes húmidos. A humidade promove o aparecimento de corrosão alveolar e de corrosão intergranular originando concentrações de tensões. A aplicação de um vedante entre as chapas e nos rebites antes da montagem é uma forma de impedir o acesso da humidade. A acção da humidade também pode ser retardada com a utilização de tratamentos químicos das superfícies, inibidores, tintas, ventilação e uma manutenção efectiva.

8.3.3 Distribuição das fendas na iniciação

Resultados de ensaios em secções de fuselagem à escala real parecem indicar que a distribuição de fendas de fadiga num grupo de MSD determina o período de propagação desde que duas dessas fendas se juntam até se atingir a rotura da estrutura [9]. No Boeing 747, esse período parece variar entre 10000 ciclos de pressurização, para um grupo pequeno e não uniforme de fendas, até 1000 ciclos de pressurização, para um grupo grande e mais uniformemente distribuído de fendas.

O número e a distribuição de fendas que se desenvolvem num determinado painel da fuselagem provavelmente dependem da uniformidade na distribuição de tensões e da dispersão na vida de iniciação. Em alguns dos ensaios realizados no IDMEC verificou-se o aparecimento de um grupo de fendas distribuídas por uma banda mais ou menos larga. A banda mais estreita apresenta normalmente um ou dois furos entre fendas e foi a situação mais frequentemente verificada. Noutros ensaios verificou-se o aparecimento de apenas uma fenda.

8.3.4 Detecção da iniciação

A inspecção visual e a técnica das correntes de Eddy de alta frequência são actualmente utilizadas na inspecção dos painéis das fuselagens. Infelizmente, estas técnicas não são fiáveis na detecção de fendas antes destas atravessarem completamente a chapa e ultrapassarem a zona da cabeça do rebite.

No programa experimental realizado no IDMEC utilizaram-se as técnicas da extensometria e do SPATE com o objectivo de detectar a iniciação de fendas de fadiga antes de elas serem visíveis à superfície. A ideia fundamental que conduziu à utilização destas técnicas é a detecção da alteração do estado de tensão devida à iniciação de uma fenda de fadiga. Ambas as técnicas revelaram-se incapazes de indicar o aparecimento de

fendas de fadiga escondidas. Relativamente à técnica da extensometria, a explicação para o insucesso parece dever-se à distância entre os extensómetros e os furos dos rebites. Provavelmente, a variação do estado de tensão devido à iniciação de uma fenda de fadiga é demasiado localizada para ser sentida à distância a que os extensómetros foram colocados dos furos dos rebites.

A técnica do SPATE, como permite determinar a distribuição de tensões numa área, parece ser mais indicada para analisar as modificações que possam acontecer na zona dos rebites. Embora nos ensaios com as juntas rebitadas não tivesse sido possível detectar a iniciação de fendas de fadiga escondidas com o SPATE, o trabalho realizado posteriormente em placas com fendas superficiais, e descrito no capítulo 3, permitiu mostrar que a técnica tem potencialidades neste tipo de aplicações.

8.4 Propagação de fendas de fadiga

As principais características relativas à propagação de fendas de fadiga derivadas do estudo realizado no IDMEC coincidem com dados publicados, obtidos em estruturas em serviço ou em ensaios de laboratório [9, 16, 21]. As fendas de fadiga tendem a iniciar-se no plano horizontal que contém o eixo do furo do rebite ou na zona superior do furo. Geralmente, elas propagam-se num plano horizontal, ao longo da fila de rebites. Em alguns casos, as fendas propagam-se obliquamente, o que é indicativo da presença de tensões de corte no plano da chapa. No entanto, verificou-se que duas fendas que se propagam em direcções diferentes e que se sobrepõem, acabam por mudar de trajectória, dirigindo-se no sentido de se intersectarem.

Como já referido, o cenário de MSD inicia-se por um grupo de fendas que podem espalhar-se por uma banda mais ou menos larga. Em qualquer dos casos, a propagação das fendas acaba normalmente por resultar na junção de duas fendas adjacentes. A fenda resultante torna-se dominante e cresce mais rapidamente do que as outras. A contínua propagação da fenda dominante acaba por resultar na junção com outras fendas até que ocupa uma percentagem importante da largura do provete.

A combinação de um cenário de MSD de banda larga com comprimento de fendas uniformes resulta num período relativamente curto entre a primeira junção de duas fendas e o desenvolvimento de uma fenda dominante a ocupar a quase totalidade da largura do painel. Este comportamento, verificado num dos provetes ensaiados, está ilustrado na figura 8.8. Nessa figura mostram-se os momentos mais significativos da história de iniciação e propagação de fendas no provete, nomeadamente a detecção de iniciação e a junção de duas fendas. A visualização e medição do comprimento das fendas fez-se com uma luneta acoplada a um sistema de deslocamento micrométrico.

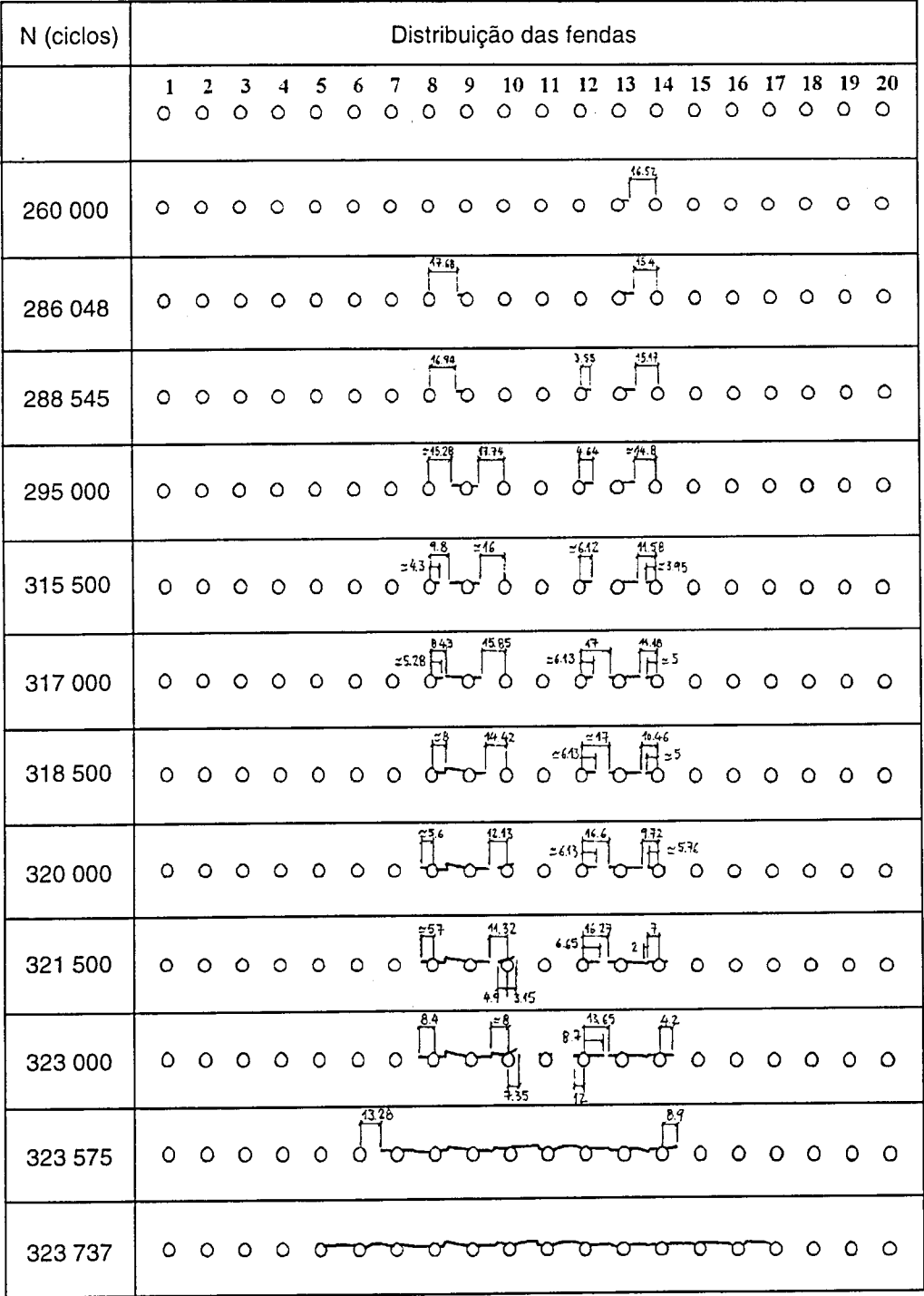


Figura 8.8 História da iniciação e propagação de fendas num cenário de MSD de banda larga.

Por outro lado, um cenário de MSD de banda estreita ou um conjunto de fendas dispersas com comprimentos não uniformes resulta num período mais longo após a primeira junção entre fendas. Uma situação deste tipo está ilustrada na figura 8.9 correspondente a outro dos provetes ensaiados.

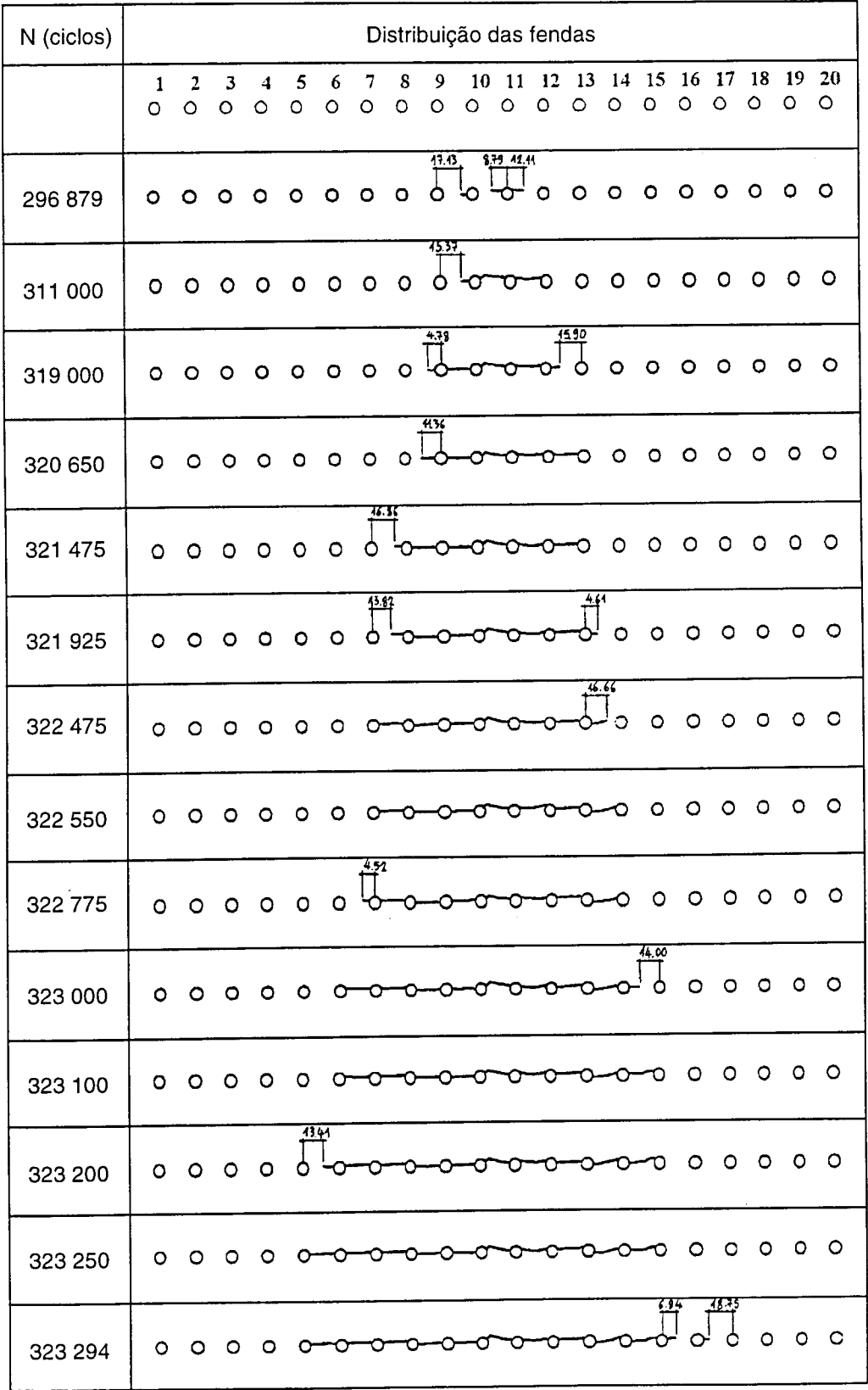


Figura 8.9 História da iniciação e propagação de fendas num cenário de MSD de banda estreita.

A vida total à fadiga dos provetes ensaiados parece dever-se em parte à natureza do cenário de MSD encontrado. Geralmente, as vidas mais curtas correspondem a cenários de banda estreita em que as fendas de maior comprimento crescem no sentido de se juntarem. As vidas mais longas correspondem a cenários de MSD de banda larga. Em qualquer dos casos, a vida correspondente à fase visível da propagação de fendas de fadiga não ultrapassa 20% da vida total à fadiga.

A superfície de fractura dos provetes foi analisada com a técnica da microscopia electrónica de varrimento. Nesse estudo foi possível identificar a localização da iniciação e a forma da propagação de fendas de fadiga, como ilustrado na figura 8.7. Em geral, a superfície de fractura de um provete sugere três tipos de mecanismos de fractura:

- fractura dúctil,
- fadiga,
- mistura de fractura dúctil e fadiga.

Também foram identificadas estrias de fadiga na fina camada superficial de alumínio puro perto das fendas de fadiga. À medida que as estrias nessa camada se afastam das fendas de fadiga, a distância entre estrias aumenta. Na figura 8.10 apresenta-se uma representação esquemática da superfície de fractura do provete cuja história da propagação está descrita na figura 8.8. Nesta figura podem-se identificar fendas de penetração parcial de canto e semi-elípticas, assim como fendas de penetração total. As linhas verticais nas zonas de mistura de fadiga e fractura dúctil correspondem a uma mudança de direcção das estrias na camada superficial de alumínio puro.

As análises das superfícies de fractura sugerem que a junção entre duas fendas pode seguir o seguinte mecanismo (ver figura 8.11):

- i) Iniciação de uma fenda de penetração parcial num furo.
- ii) Propagação por fadiga dessa fenda até se transformar em fenda de penetração total.
Iniciação de fenda de penetração parcial no furo adjacente.
- iii) Crescimento por fadiga de duas fendas até a segunda se tornar visível e se ligar à outra.

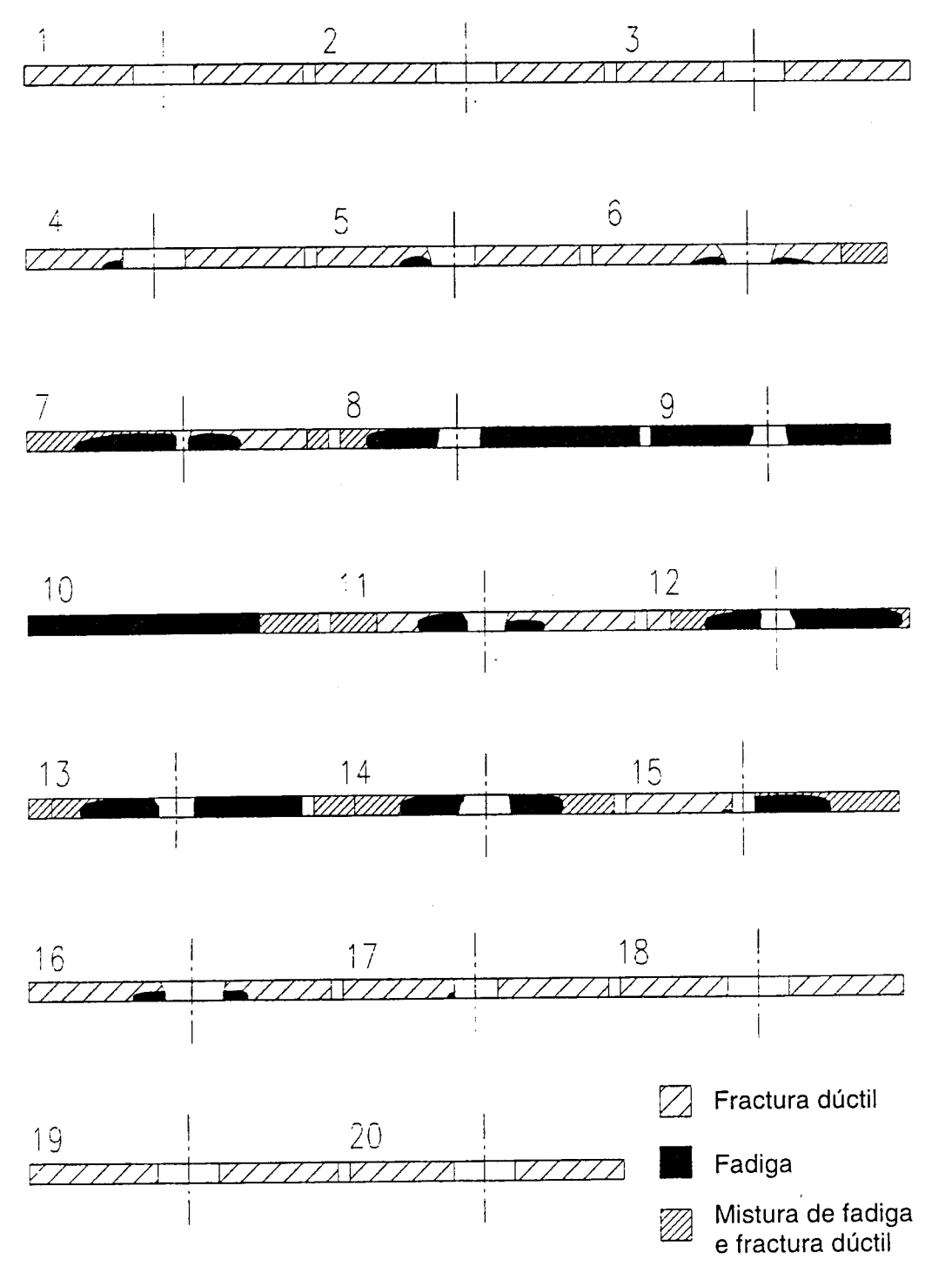


Figura 8.10 Representação esquemática de superfície de fractura.

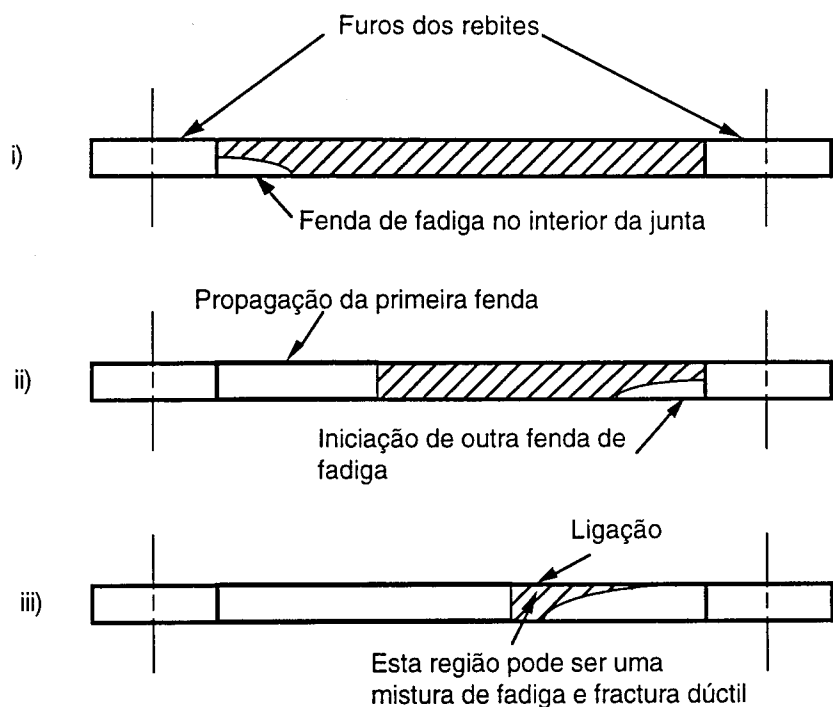


Figura 8.11 Mecanismo de junção de duas fendas sugerido.

8.5 Resistência residual

As fendas de fadiga reduzem a vida residual da estrutura da aeronave. Esse efeito é acentuado na presença de WFD. Na figura 8.12 representa-se a degradação da resistência residual devido ao fenómeno de WFD [22].

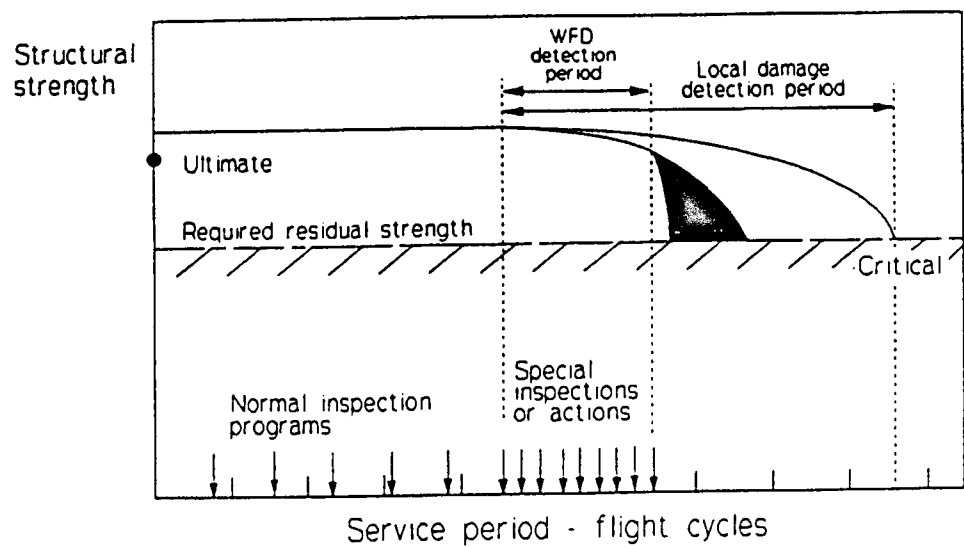


Figura 8.12 Degradação da resistência residual em aeronaves [22].

Em ensaios de fatias de fuselagem à escala real, Samavedam et al. [23] verificaram que a presença de uma fenda dominante rodeada de pequenas fendas reduz a resistência residual da estrutura em cerca de 15%. Broek [24] também verificou, em painéis da liga de alumínio Al2024-T3, que a presença de pequenas fendas na proximidade de uma fenda dominante reduz significativamente a resistência residual. Segundo esse autor, nessa situação a resistência residual não é correctamente representada pelo critério da secção resistente. Também nos ensaios realizados no IDMEC verificou-se que a resistência residual numa situação de MSD é menor do que a prevista pelo critério da secção resistente.

Nesterenko [25] apresenta resultados relativos à resistência residual de vários tipos de estruturas de fuselagens na presença de MSD. Ele refere que a resistência residual é afectada por vários factores incluindo os furos, tensões de flexão, plastificação do material, distribuição das fendas de MSD e crescimento estável de fendas sob a acção de carregamento estático. As estruturas com MSD atingem a rotura final quando os factores de intensidade de tensão têm valores compreendidos entre as tenacidades em estado plano de deformação (K_{Ic}) e estado plano de tensão, e quando as tensões na secção resistente estão compreendidas entre 30% e 90% da tensão limite elástico.

Referências

1. Hendricks, W.R., "The Aloha Airlines accident - a new era for aging aircraft", em: *Structural Integrity of Aging Airplanes*, S.N. Atluri, S.G. Sampath, e P. Tong, eds., Springer-Verlag, Berlin, pp. 153-165, 1991.
2. Schmidt, H.J. e Brandecker, B., "On widespread fatigue damage, durability of metal aircraft structures", em: *Proceedings of the International Workshop on Structural Integrity of Aging Airplanes*, S.N. Atluri, et al., eds., Springer-Verlag, Berlin, pp. 279-295, 1992.
3. Swenson, D. e James, M., *FRacture ANalysis Code 2-D/Layered User's Guide, Version 1.4*. Kansas State University, Manhattan, Kansas, 1997.
4. da Silva, L.F.M., *Multi-Site Damage in Riveted Lap Joints: Experimental Simulation and Finite Element Prediction*. Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, 1999.
5. Sabino, J., Portela, A., e de Castro, P.T., *Boundary element analysis of fatigue and damage tolerance - Current capabilities of IDMEC*. Projecto BRITE-EURAM "Structural Maintenance of Ageing Aircraft, SMAAC-WP-2.0-11-1.3/IDMEC, IDMEC, Porto, 1996.
6. Sabino, J. e de Castro, P.T., *Contribution to the numerical modeling of a stiffened panel with MSD*. Projecto BRITE-EURAM "Structural Maintenance of Ageing Aircraft, SMAAC-WP-2.0-12-1.1/IDMEC, IDMEC, Porto, 1997.
7. Sabino, J., Portela, A., e de Castro, P.T., *Analysis of plane elastic crack problems with Trefftz boundary elements*. Projecto BRITE-EURAM "Structural Maintenance of Ageing Aircraft, SMAAC-WP-2.0-XX-1.1/IDMEC, IDMEC, Porto, 1997.
8. Domingues, J.S., Portela, A., e de Castro, P.M.S.T., "Trefftz boundary element method applied to fracture mechanics", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 64, pp. 67-86, 1999.
9. Eastaugh, G.F., Simpson, D.L., Straznicki, P.V., e Wakeman, R.B., "A special uniaxial coupon test specimen for the simulation of multiple site fatigue crack growth and link-up in fuselage skin splices", em: *Widespread Fatigue Damage in Military Aircraft*, AGARD-CP-568, pp. 2.1-2.19, 1995.
10. Schutz, D. e Lowak, H., *The effect of secondary bending on the fatigue strength of joints*. FB-113, RAE Library translation No. 1858, Laboratorium fur Betriebsfestigkeit, 1975.
11. Miller, M., Gruber, M.L., Wilkins, K.E., e Worden, R.E., "Full-scale testing and analysis of fuselage structure", em: *FAA/NASA International Symposium on Advanced Structural Integrity Methods for Airframe Durability and*

- Damage Tolerance*, NASA CP 3274, pp. 481-496, 1994.
12. Jeong, D.Y., et al., *Strain fields in Boeing 737 fuselage lap splices: field and laboratory measurements with analytical correlations*. DOT/FAA/CT-95/25, FAA, 1995.
 13. Schijve, J., "Fatigue of aircraft materials and structures", *International Journal of Fatigue*, Vol. 16, pp. 21-32, 1994.
 14. Dawicke, D.S., Phillips, E.P., Swenson, D.V., e Gondhalekar, S., "Crack growth from loaded countersunk rivet holes, durability of metal aircraft structures", em: *Proceedings of the International Workshop on Structural Integrity of Aging Airplanes*, S.N. Atluri, et al., eds., Springer-Verlag, Berlin, pp. 75-90, 1992.
 15. Schijve, J., "Multiple-site damage in aircraft fuselage structures", *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, Vol. 18, pp. 329-344, 1995.
 16. Piascik, R.S., Willard, S.A., e Miller, M., *The characterization of widespread fatigue damage in fuselage*. NASA-TM-109142, NASA, 1994.
 17. Wang, D.Y., "A study of small crack growth under transport spectrum loading", em: *Behavior of Short Cracks in Airframe Components*, AGARD-CP-328, pp. 14.1-14.15, 1983.
 18. Potter, J.M. e Yee, B.G.W., "Use of small crack data to bring about and quantify improvements to aircraft structural integrity", em: *Behavior of Short Cracks in Airframe Components*, AGARD-CP-328, pp. 4.1-4.13, 1983.
 19. "Part 2 of the US National Transportation Safety Board report on the fuselage failure of an Aloha Airlines Boeing 737-200 in April 1988", *Aviation Week and Space Technology*, 4-15 September, , 1989.
 20. Maclin, J.R., "Performance of fuselage pressure structure", em: *1991 International Conference on Aging Aircraft and Structural Airworthiness*, NASA-CP-3160, pp. 67-74, 1991.
 21. Molent, L. e Jones, R., "Crack growth and repair of multi-site damage of fuselage lap joints", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 44, pp. 627-637, 1993.
 22. Goranson, U.G., "Damage tolerance, facts and fiction", em: *Durability and Structural Integrity of Airframes*, A. Blom, ed., EMAS, pp. 3-15, 1993.
 23. Samavedam, G., Hoadley, D., e Thomson, D., *Full-scale testing and analysis of curved aircraft fuselage panels*. DOT/FAA/CT-93/78, FAA, 1993.
 24. Broek, D., *The effects of multi-site damage on the arrest capability of aircraft fuselage structures*. TR 9302, FractureResearch, 1993.
 25. Nesterenko, G.I., *Multiple site fatigue damages of aircraft structures*. N96-24270, NASA, 1995.

CAPÍTULO 9

9. UTILIZAÇÃO DO MODELO *LINE SPRING* NO ESTUDO DE FENDAS DE PENETRAÇÃO PARCIAL

9.1 Introdução

9.2 O modelo *line spring*

9.3 Implementação no programa de elementos finitos ABAQUS

9.4 Casos estudados

9.4.1 Fenda superficial semi-elíptica

9.4.2 Fenda de canto quarto-de-círculo em furo

9.4.3 Cenário simples de *Multiple Site Damage* (MSD)

9.4.4 Conclusões

Referências

CAPÍTULO 9

9. UTILIZAÇÃO DO MODELO *LINE SPRING* NO ESTUDO DE FENDAS DE PENETRAÇÃO PARCIAL

9.1 Introdução

Como demonstrado no capítulo anterior, nas juntas rebitadas de estruturas de aeronaves é comum a iniciação e propagação de fendas de penetração parcial. Essas fendas têm normalmente origem junto aos furos dos rebites e propagam-se até se transformarem em fendas de penetração total.

Vários procedimentos numéricos tridimensionais, tal como o método dos elementos finitos [1-10], o método das equações integrais de fronteira [11], o método alternativo [12-15], e o método dos elementos finitos alternativo [16-18], foram utilizados na análise de placas e cascas com fendas superficiais. Em 1972, Rice e Levy [19] introduziram o modelo *line spring* que reduz o problema tridimensional a um problema bidimensional da teoria das placas ou cascas. Este método tem um custo computacional mais reduzido do que os modelos tridimensionais.

Neste capítulo apresenta-se o modelo *line spring* e os elementos *line spring* disponíveis no programa de elementos finitos ABAQUS. Alguns casos são analisados, nomeadamente uma placa com uma fenda semi-elíptica, uma placa com um furo e uma fenda quarto-de-círculo adjacente, e uma situação simples de *Multiple Site Damage* (MSD).

9.2 O modelo *line spring*

O modelo *line spring* foi inicialmente proposto por Rice e Levy [19, 20] e mais tarde complementado por Parks [21, 22] como um método simplificado para analisar fendas superficiais em placas e cascas. A simplicidade do modelo reside no facto do problema tridimensional ser reduzido a um problema da teoria das placas ou cascas. Os autores atrás mencionados integraram o modelo *line spring* em formulações de equações integrais singulares baseadas nas teorias clássicas de Kirchhoff de placas ou cascas. Delale e Erdogan [23] reformularam o problema utilizando a teoria das placas de Reissner, a qual toma em consideração os efeitos das deformações de corte transversais.

Parks et al. [24, 25] implementaram o modelo *line spring* no programa ABAQUS, na forma de um elemento *line spring* associado a um elemento finito de casca. Miyoshi et al. [26], Kumar et al. [27], de Melo et al. [28], Oliveira et al. [29], e de Langre e Ebersolt [30] também implementaram o modelo *line spring* em programas de elementos finitos, combinando-o com vários elementos finitos de casca.

O conceito introduzido por Rice e Levy reduz o problema tridimensional de uma fenda superficial de comprimento $2c$ e profundidade variável $a(x)$, numa placa ou casca de espessura t (ver figura 9.1), a uma configuração bidimensional. Como representado na figura 9.2, a fenda de penetração parcial é idealizada como uma fenda de penetração total de comprimento $2c$ com uma série de molas que ligam as duas faces da fenda. A placa é carregada remotamente com a força de membrana N^∞ e o momento flector M^∞ por unidade de comprimento. A razão de ser deste modelo deve-se ao facto da fenda de penetração parcial representada na figura 9.1 ter uma distribuição de profundidades $a(x)$ entre os casos limite de ausência de fenda ($a(x) = 0$) e presença de fenda de penetração total ($a(x) = t$). Esses dois casos limite são representados por condições de fronteira de deslocamento nulo e tracção nula, respectivamente, que podem ser consideradas fundações elásticas infinitamente rígidas e infinitamente flexíveis. Tendo em conta este raciocínio, deve-se esperar que a fenda superficial possa ser representada por algum tipo de fundação elástica generalizada ao longo do corte, com rigidez variável de acordo com a profundidade local $a(x)$ da fenda.

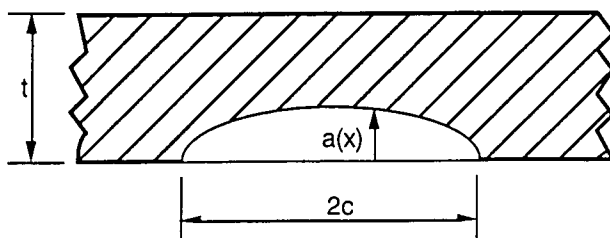


Figura 9.1 Representação esquemática de fenda superficial em placa (casca).

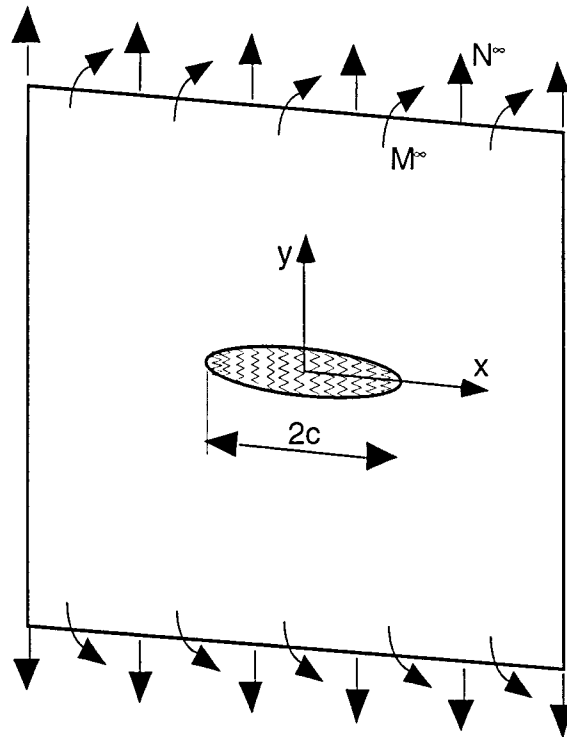


Figura 9.2 Representação esquemática de uma fenda de penetração total em placa (casca) com rigidez distribuída ao longo da linha da fenda.

Consideremos $\delta(x)$ e $\theta(x)$ que representam o deslocamento relativo e a rotação das faces da fenda no plano médio da placa, respectivamente. $\delta(x)$ e $\theta(x)$ relacionam-se com os deslocamentos do plano médio $u_x(x,y)$, $u_y(x,y)$ e $u_z(x,y)$ da seguinte forma

$$\delta(x) = u_y(x, 0^+) - u_y(x, 0^-) \quad (9.1)$$

$$\theta(x) = \frac{\partial u_z(x, 0^-)}{\partial y} - \frac{\partial u_z(x, 0^+)}{\partial y} \quad (9.2)$$

A relação constitutiva para as molas, que relaciona os carregamentos locais ($N(x), M(x)$) com os seus deslocamentos locais conjugados ($\delta(x), \theta(x)$) em cada ponto ao longo do corte, pode exprimir-se, considerando comportamento linear elástico, na seguinte forma

$$\begin{bmatrix} \delta(x) \\ \theta(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}(x) & C_{12}(x) \\ C_{21}(x) & C_{22}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(x) \\ M(x) \end{bmatrix} \quad (9.3)$$

ou, de forma equivalente

$$\begin{bmatrix} N(x) \\ M(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}(x) & S_{12}(x) \\ S_{21}(x) & S_{22}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta(x) \\ \theta(x) \end{bmatrix} \quad (9.4)$$

em que $\mathbf{C}$ e $\mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1}$ são as matrizes locais elásticas de *compliance* e rigidez, respectivamente.

As *compliances* locais $[\mathbf{C}(x)]$ obtêm-se modelando as molas como provetes *Single-Edge Notched* (SEN) de estado plano de deformação com largura t e profundidade de fenda a , sujeitos à força axial N e ao momento flector M por unidade de espessura (ver figura 9.3). O deslocamento δ_c e a rotação θ_c adicionais nos ponto de carregamento, devido à presença da fenda, são dados por

$$\begin{bmatrix} \delta_c \\ \theta_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} \quad (9.5)$$

A matriz $\mathbf{P}$ pode ser obtida a partir das calibrações do factor de intensidade de tensão no provete SEN, utilizando as relações de Rice [31]. Os termos de $\mathbf{P}$ são dados por

$$P_{11} = \frac{2\pi(1-\nu^2)}{E} \gamma_{11} \quad (9.6)$$

$$P_{12} = P_{21} = \frac{12\pi(1-\nu^2)}{Et} \gamma_{12} \quad (9.7)$$

$$P_{22} = \frac{72\pi(1-\nu^2)}{Et^2} \gamma_{22} \quad (9.8)$$

em que E é o módulo de Young, ν o coeficiente de Poisson, e

$$\gamma_{ij} = \int_0^{a/t} \xi F_i(\xi) F_j(\xi) d\xi \quad (9.9)$$

Os factores de intensidade de tensão são calculados pela seguinte expressão

$$K_I = (\pi a)^{1/2} \left[F_1 \left(\frac{a}{t} \right) \frac{N}{t} + F_2 \left(\frac{a}{t} \right) \frac{6M}{t^2} \right] \quad (9.10)$$

onde F_1 e F_2 são os factores de correcção geométricos para os factores de intensidade de tensão do provete SEN carregado com força axial N e momento flector M , respectivamente. Expressões aproximadas para F_1 e F_2 são dadas, por exemplo, por Tada et al. [32].

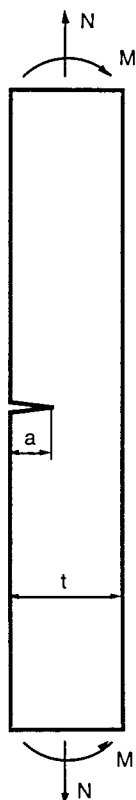


Figura 9.3 Provete *Single-Edge Notched* (SEN) sujeito a tração e flexão.

O modelo *line spring* assume que $\mathbf{C} = \mathbf{P}$ e consequentemente $\mathbf{S} = \mathbf{P}^{-1}$. Nesta igualdade está implícito que o deslocamento adicional δ_c e a rotação θ_c correspondentes ao provete SEN da figura 9.3 podem ser utilizados em $\delta(x)$ e $\theta(x)$, definidos nas equações (9.1) e (9.2) para o problema da fenda superficial.

Na análise de um problema de uma fenda superficial com o modelo *line spring*, as molas distribuem-se ao longo de uma fenda de penetração total. As equações resultantes são resolvidas e $\delta(x)$ e $\theta(x)$ são determinados. $N(x)$ e $M(x)$ são posteriormente calculados através da equação (9.4).

A generalização da equação (9.10), considerando a profundidade variável $a(x)$ de uma fenda superficial e as cargas locais transmitidas através do corte ($N(x), M(x)$), conduz a uma estimativa do factor de intensidade de tensão local $K_I(x)$.

9.3 Implementação no programa de elementos finitos ABAQUS

Vários programas de elementos finitos incluem a possibilidade de utilizar o modelo *line spring* na forma de um elemento especial. No programa ABAQUS estão

disponíveis dois elementos *line spring* - LS6 e LS3S [33]. O elemento LS6 destina-se a modelar fendas arbitrárias de penetração parcial em cascas. O LS3S é utilizável em situações de modo I, para casos em que a fenda se encontra num plano de simetria e a deformação é simétrica relativamente a esse plano, sendo que o modelo inclui apenas metade da geometria. Ambos os elementos utilizam interpolação quadrática dos deslocamentos e rotações, garantindo-se assim a compatibilidade com elementos de casca de segunda ordem. Na figura 9.4 ilustra-se esquematicamente a ligação entre os elementos *line spring* e elementos de casca de oito nós. Cada par de nós em faces opostas da fenda tem coordenadas coincidentes. Nos elementos LS3S, os nós 1', 2' e 3' são definidos internamente pelo programa.

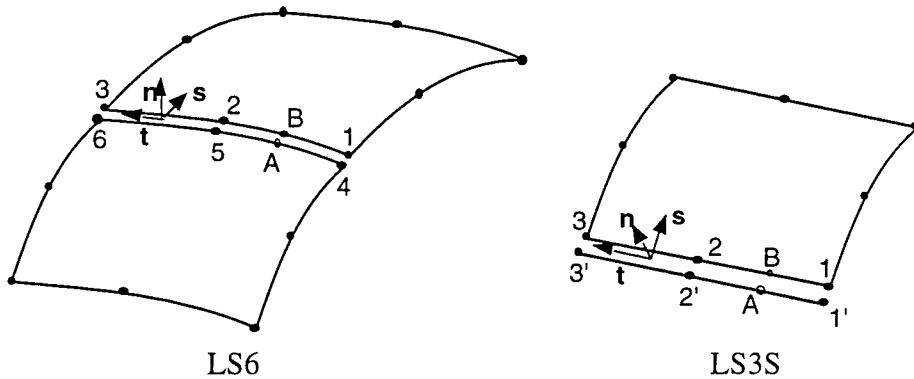


Figura 9.4 Ilustração esquemática dos elementos *line spring* ligados a elementos de casca de oito nós.

Em cada ponto ao longo da fenda, define-se um referencial local (s, t, n), sendo t tangente à casca ao longo da fenda, n normal à casca, e s definido como

$$s = t \times n \quad (9.11)$$

As deformações generalizadas para um par de pontos em lados opostos da fenda (pontos A e B na figura 9.4) definem-se da seguinte forma

Modo I

$$\delta_I = (u_B - u_A) \cdot s \quad (9.12)$$

$$\theta_I = (\phi_B - \phi_A) \cdot t \quad (9.13)$$

Modo II

$$\delta_{II} = (\mathbf{u}_B - \mathbf{u}_A) \cdot \mathbf{n} \quad (9.14)$$

Modo III

$$\delta_{III} = (\mathbf{u}_B - \mathbf{u}_A) \cdot \mathbf{t} \quad (9.15)$$

$$\theta_{III} = (\phi_B - \phi_A) \cdot \mathbf{s} \quad (9.16)$$

A rotação relativa $\theta_{II} = (\phi_B - \phi_A) \cdot \mathbf{n}$ não desempenha nenhum papel na deformação. As deformações generalizadas em modo II e modo III só existem para o elemento LS6.

Uma vez que o elemento LS3S é adequado para a utilização em modo I, a sua contribuição para os trabalhos virtuais é definida da seguinte forma

$$V.W. = \int_L \begin{bmatrix} \delta_I^* & \theta_I^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_I \\ M_I \end{bmatrix} dL \quad (9.17)$$

em que δ_I^* e θ_I^* são deslocamento e rotação virtuais, respectivamente, e a integração é feita ao longo de todo o elemento. A contribuição para os trabalhos virtuais do elemento LS6 é semelhante à equação (9.17) mas inclui a contribuição dos outros modos de deformação. Nesse caso, definem-se as *compliances* locais, semelhantes à equação 9.5, para os modos II e III.

Na formulação da matriz de rigidez a partir da equação (9.17), utiliza-se a regra de Simpson com três pontos de integração. Nesse caso, os pontos de integração coincidem com os nós. Depois de se obter a solução global, calculam-se as tensões generalizadas (N_I, M_I) nos pontos de integração e os factores de intensidade de tensão são obtidos a partir da equação (9.10). No caso do elemento LS6 utilizam-se expressões semelhantes para os modos II e III.

9.4 Casos estudados

Nesta secção apresentam-se resultados para três casos modelados com recurso ao programa de elementos finitos ABAQUS e aos elementos finitos *line spring* nele disponíveis. Os casos tratados são problemas utilizados para comparação do comportamento das várias técnicas de modelação. Considerou-se o problema de uma placa contendo uma fenda superficial semi-elíptica, o problema de uma placa com um

furo e com uma fenda de canto quarto-de-círculo, e ainda um cenário de *Multiple Site Damage* (MSD). Os resultados obtidos são comparados com soluções tridimensionais.

Todos os casos foram estudados para os carregamentos de tracção e flexão puras. Em todos os cálculos, o coeficiente de Poisson utilizado foi $\nu = 0,3$.

Os factores de intensidade de tensão são apresentados na seguinte forma normalizada

$$FN = \frac{K_I}{\sigma(\pi a / Q)^{1/2}} \quad (9.18)$$

em que Q é o factor de forma para uma elipse e é dado pelo integral elíptico completo de segunda ordem. Expressões empíricas para Q são dadas por [34]

$$Q = 1 + 1,464(a / c)^{1,65} \quad \text{para } a/c \leq 1 \quad (9.19)$$

$$Q = 1 + 1,464(c / a)^{1,65} \quad \text{para } a/c > 1 \quad (9.20)$$

Para a placa carregada em tracção $\sigma = N^\infty/t$ e para a placa carregada em flexão $\sigma = 6M^\infty/t^2$.

9.4.1 Fenda superficial semi-elíptica

A geometria do problema da fenda superficial semi-elíptica numa placa está ilustrada na figura 9.5. A forma adoptada para a localização de pontos na frente da fenda utilizando o ângulo ϕ está esquematizada na figura 9.6 e a malha utilizada está representada na figura 9.7. O modelo é constituído por apenas um quarto da placa devido à dupla simetria do problema. A malha é composta por 391 elementos de casca (referência S8R [35]) e por 8 elementos *line spring* (referência LS3S [35]). Os quatro elementos *line spring* mais próximos de $\phi = 0$ têm o comprimento de $c/12$ e os restantes quatro têm o comprimento de $c/6$.

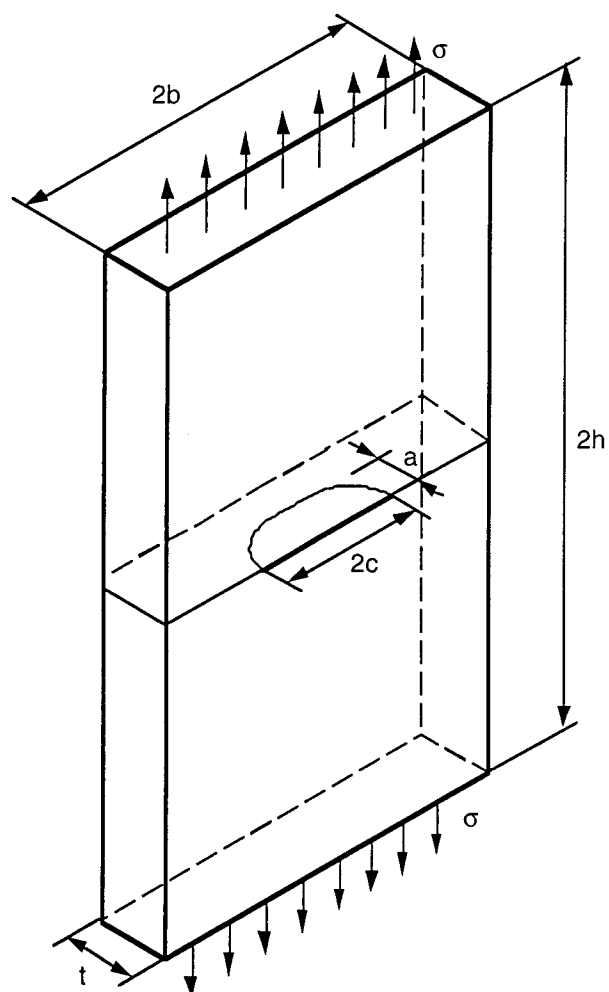


Figura 9.5 Fenda superficial semi-elíptica em placa.

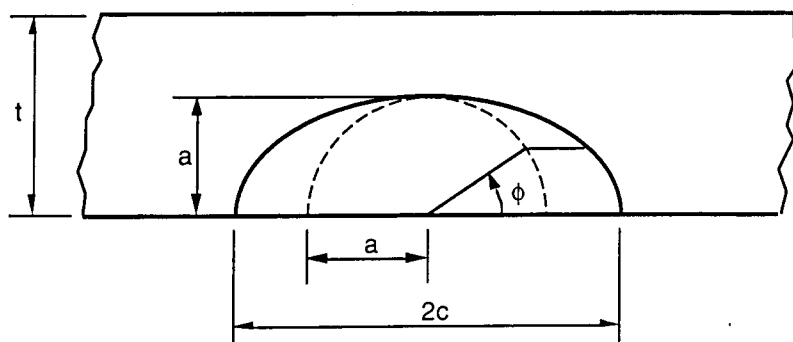


Figura 9.6 Representação esquemática dos parâmetros de uma fenda superficial semi-elíptica.

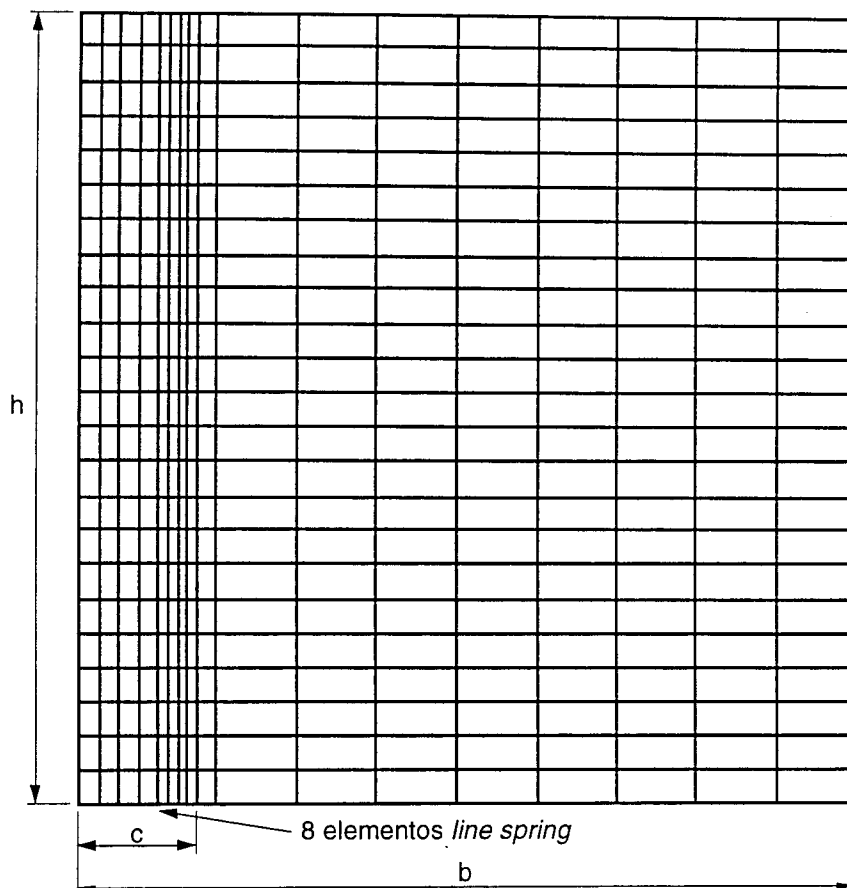


Figura 9.7 Malha utilizada na modelação de placa com fenda superficial semi-elíptica.

Neste estudo obtiveram-se factores de intensidade de tensão para várias combinações dos parâmetros geométricos da fenda ($a/c = 0,2, 0,4, 0,6$ e $1,0$) e da profundidade relativa da fenda ($a/t = 0,2, 0,4, 0,6$ e $0,8$). Em todos os casos, a largura e a altura da placa são iguais ($b = h$) e a razão entre o comprimento da fenda e a largura da placa obedece à relação $c/b \leq 0,2$. Nos gráficos das figuras 9.8 a 9.11 e 9.12 a 9.15 apresentam-se os factores de intensidade de tensão normalizados, ao longo da frente da fenda, para os carregamentos de tracção e flexão, respectivamente. Nesses gráficos, para além das curvas relativas aos resultados do modelo *line spring*, apresentam-se soluções obtidas com modelos de elementos finitos tridimensionais devidas a Newman e Raju [2, 3]. Os resultados do modelo *line spring* para $\phi < 15^\circ$ não foram representados, uma vez que o modelo não é aplicável nessa região. Rice e Levy [19] indicaram que a aproximação do *line spring* é apropriada para regiões onde a profundidade da fenda varia lentamente. Como apresentado em 9.2, a rigidez local introduzida pelo modelo *line spring* baseia-se em igualar a *compliance* local da fenda com a de um provete *Single-Edge Notched* (SEN). Consequentemente, o modelo *line spring* não considera a curvatura da frente da fenda, e não é uma boa aproximação na

zona em que a fenda intersecta a superfície da placa devido à rápida variação da profundidade da fenda.

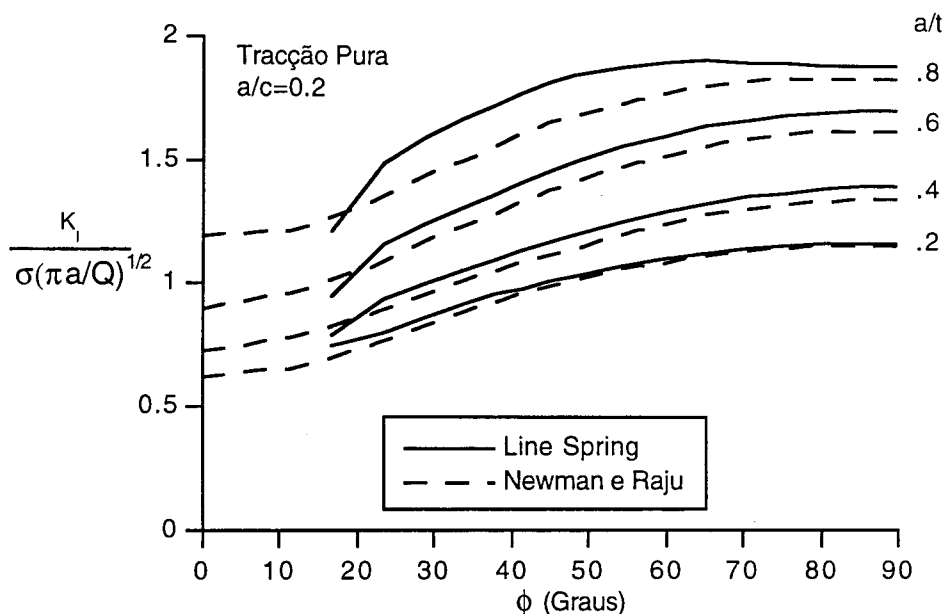


Figura 9.8 Factores de intensidade de tensão normalizados em fenda superficial semi-elíptica com $a/c = 0,2$, para placa com carregamento de tracção.

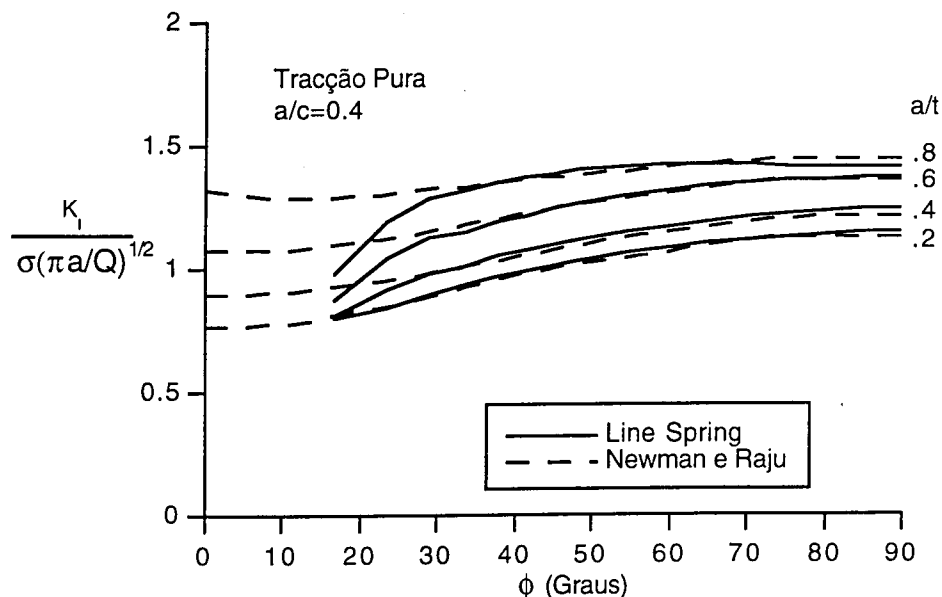


Figura 9.9 Factores de intensidade de tensão normalizados em fenda superficial semi-elíptica com $a/c = 0,4$, para placa com carregamento de tracção.

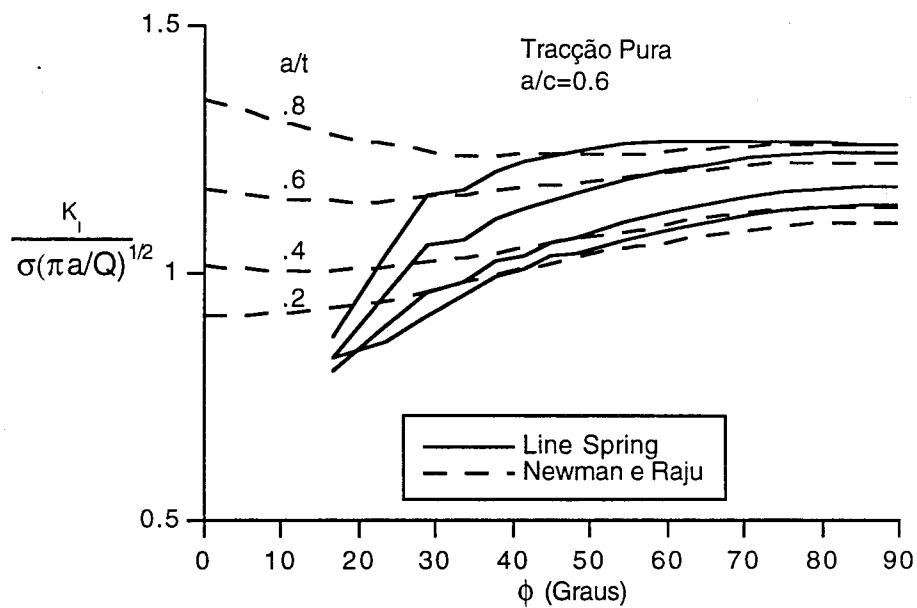


Figura 9.10 Factores de intensidade de tensão normalizados em fenda superficial semi-elíptica com $a/c = 0,6$, para placa com carregamento de tracção.

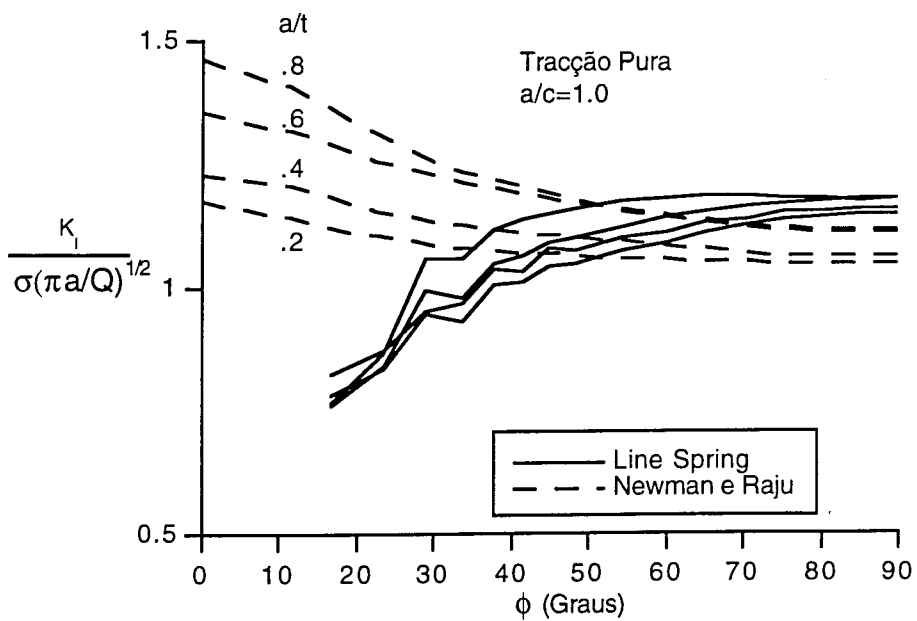


Figura 9.11 Factores de intensidade de tensão normalizados em fenda superficial semi-elíptica com $a/c = 1,0$, para placa com carregamento de tracção.

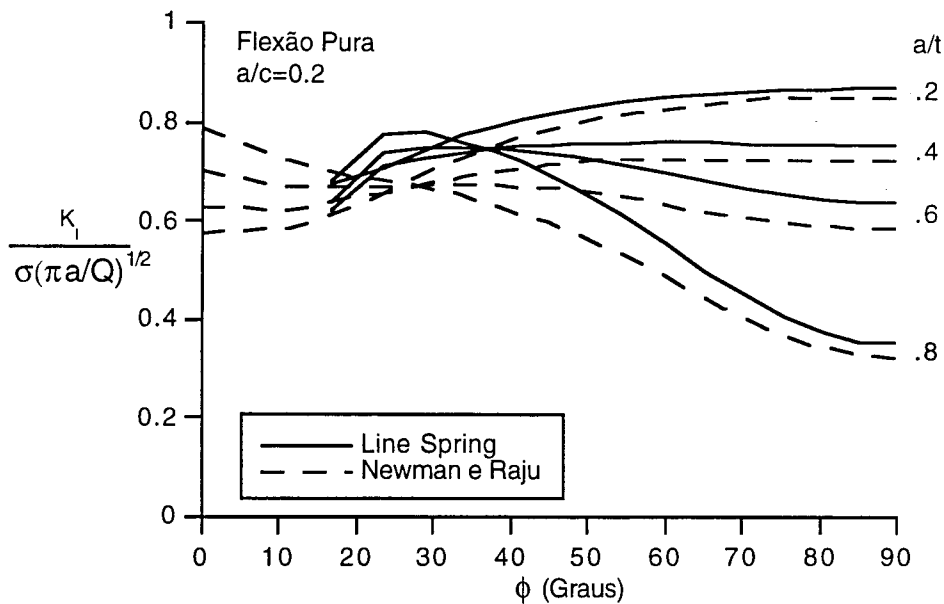


Figura 9.12 Factores de intensidade de tensão normalizados em fenda superficial semi-elíptica com $a/c = 0,2$, para placa com carregamento de flexão.

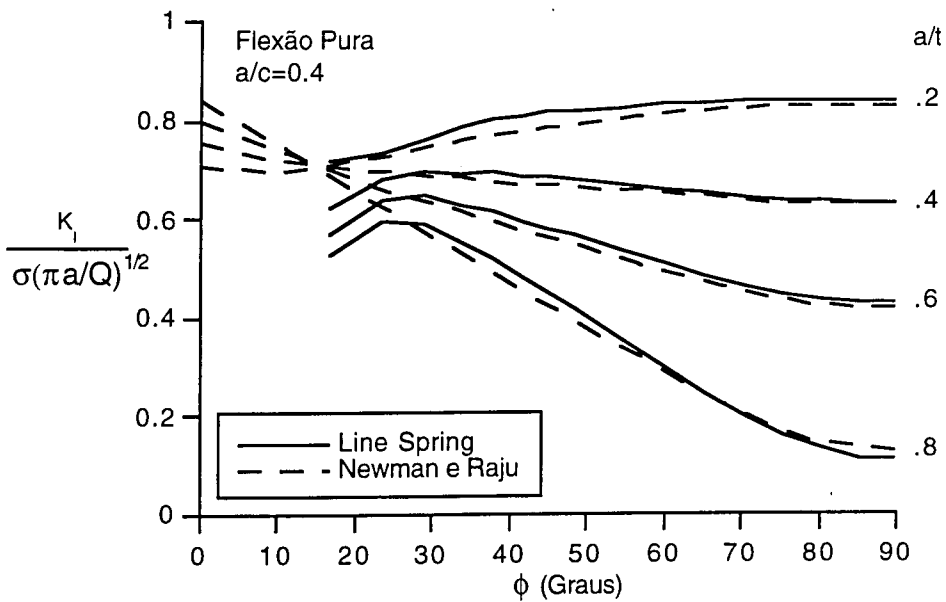


Figura 9.13 Factores de intensidade de tensão normalizados em fenda superficial semi-elíptica com $a/c = 0,4$, para placa com carregamento de flexão.

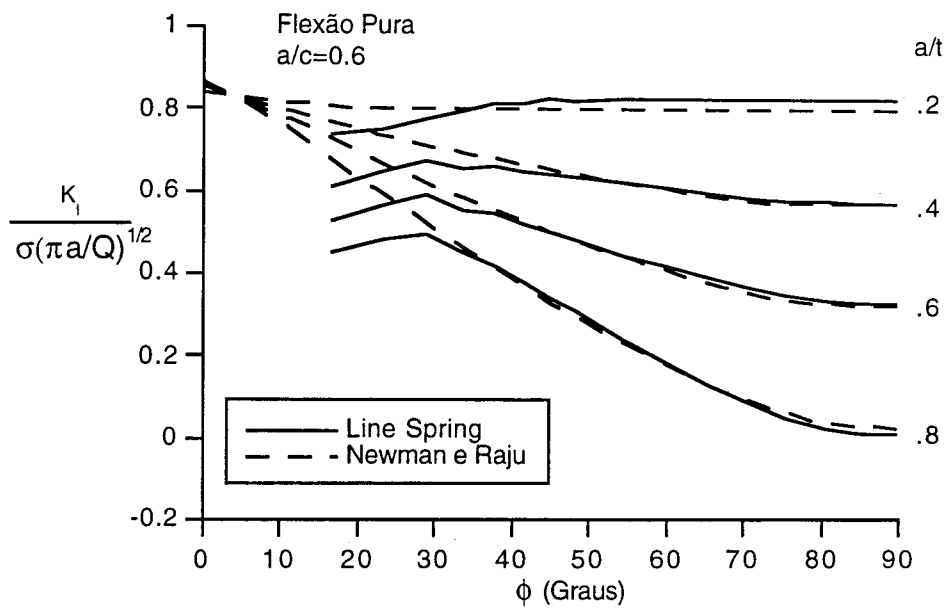


Figura 9.14 Factores de intensidade de tensão normalizados em fenda superficial semi-elíptica com $a/c = 0,6$, para placa com carregamento de flexão.

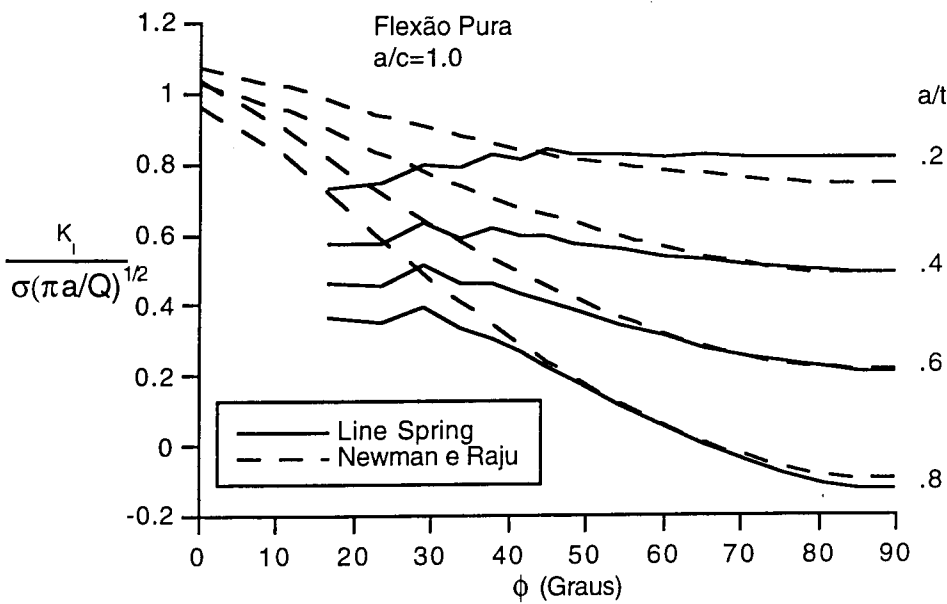


Figura 9.15 Factores de intensidade de tensão normalizados em fenda superficial semi-elíptica com $a/c = 1,0$, para placa com carregamento de flexão.

Na tabela 9.1 apresentam-se medidas das diferenças entre os resultados *line spring* e as soluções de Newman e Raju [2, 3] para $\phi > 30^\circ$. Para cada combinação de a/c e a/t calculou-se o erro relativo máximo dos resultados *line spring* e uma medida global da diferença entre as duas curvas. A medida global é definida da seguinte forma

$$E = \sqrt{\frac{\sum_i (FN_i^{ls} - FN_i^{referência})^2}{\sum_i (FN_i^{referência})^2}} \tag{9.21}$$

em que FN_i é o factor de intensidade de tensão normalizado na posição (i) da frente da fenda. A sigla "ls" identifica a solução do modelo *line spring* e "referência" indica, neste caso, a solução de Newman e Raju. Nas situações em que o factor de intensidade de tensão é máximo para $\phi = 90^\circ$ calculou-se também o erro relativo da solução *line spring* nesse ponto.

Tabela 9.1 Análise comparativa das soluções do factor de intensidade de tensão para fenda superficial semi-elíptica ($\phi > 30^\circ$).

		a/t							
		0,2	0,4	0,6	0,8	0,2	0,4	0,6	0,8
a/c		Tracção				Flexão			
0,2	Erro relativo máximo (%)	5,0	5,3	6,2	11,0	8,0	7,6	10,8	16,7
	E	0,019	0,039	0,051	0,070	0,037	0,052	0,102	0,149
	Erro rel. para $\phi = 90^\circ$ (%)	0,3	3,2	4,4	2,4	1,9			
0,4	Erro relativo máximo (%)	2,2	1,9	0,9	2,3	4,3	2,2	3,4	12,0
	E	0,013	0,016	0,006	0,014	0,028	0,014	0,029	0,051
	Erro rel. para $\phi = 90^\circ$ (%)	0,6	1,3	0,2	1,9	1,6			
0,6	Erro relativo máximo (%)	3,0	4,7	7,7	5,8	3,9	5,6	5,8	83,6
	E	0,022	0,027	0,030	0,020	0,030	0,022	0,030	0,044
	Erro rel. para $\phi = 90^\circ$ (%)	2,9	3,4	2,0	0,6				
1,0	Erro relativo máximo (%)	10,9	17,4	19,5	14,9	10,6	20,6	21,8	44,9
	E	0,075	0,079	0,086	0,065	0,071	0,102	0,128	0,154

Da análise dos gráficos das figuras 9.8 a 9.11 e da tabela 9.1 pode-se concluir que as soluções do modelo *line spring* para o carregamento de tracção são, em geral, próximas das soluções tridimensionais de Newman e Raju. No entanto, verifica-se que, para $a/c = 1,0$, os erros relativos máximos e a medida global E são consideráveis. Esses valores estão certamente associados à curvatura constante da fenda semi-circular ($a=c$). Embora as fendas semi-elípticas apresentem uma curvatura elevada na região próxima da superfície livre, essa curvatura decresce rapidamente, para valores inferiores à curvatura da fenda semi-circular, com o aumento do ângulo ϕ . Os erros relativos em $\phi = 90^\circ$, para as situações em que o factor de intensidade de tensão é máximo nesse ponto ($a/c = 0,2, 0,4$ e $0,6$), são reduzidos, sendo o seu valor máximo de 4,4%.

As soluções do modelo *line spring* para o carregamento de flexão (figuras 9.12 a 9.15) também são, de um modo geral, próximas das soluções de Newman e Raju. Novamente, as soluções para $a/c = 1,0$ apresentam erros mais elevados do que as restantes. De notar ainda os valores demasiado elevados do erro relativo máximo nas situações em que $a/c = 0,6$ ou $1,0$ e $a/t = 0,8$. Constata-se que, nesses casos, o erro relativo máximo verifica-se para $\phi = 90^\circ$, e como se pode visualizar nos gráficos das figuras 9.14 e 9.15, os factores de intensidade de tensão nesses pontos são próximos de zero e até negativos. Esses valores de factores de intensidade de tensão não têm interesse prático, e os valores negativos nem têm significado físico. Nas soluções com carregamento de flexão, só em duas situações o factor de intensidade de tensão é máximo para $\phi = 90^\circ$. Como se constata na tabela 9.1, o erro relativo da solução *line spring* nesses pontos é inferior a 2%.

9.4.2 Fenda de canto quarto-de-círculo em furo

A geometria do problema de uma placa com um furo e uma fenda de canto quarto-de-círculo adjacente está ilustrada na figura 9.16. A placa tem espessura $t = 1,6$ mm e o furo tem diâmetro $D = 4,0$ mm. A largura e a altura da placa são iguais ($b = h$) e a razão entre o diâmetro do furo e a largura da placa $D/2b$ é 0,02.

Estudaram-se três casos com razões entre a profundidade da fenda e a espessura da placa $a/t = 0,25, 0,5$ e $0,75$, a que correspondem profundidades de fenda de 0,4 mm, 0,8 mm e 1,2 mm, respectivamente. As malhas utilizadas são constituídas por 2370 elementos de casca (referência S8R [35]) e por 8 elementos *line spring* (referência LS6 [35]). Na figura 9.17 mostra-se a malha utilizada para o problema com $a/t = 0,25$ ($a = 0,4$ mm).

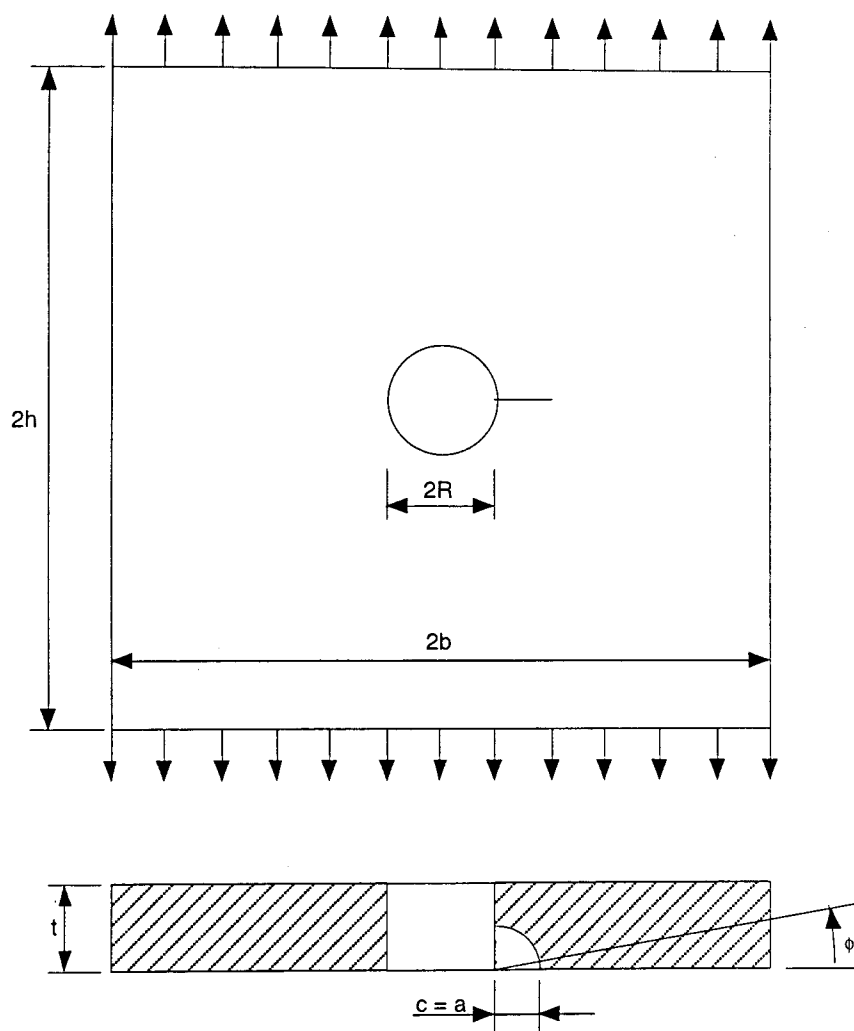


Figura 9.16 Placa com furo e fenda de canto quarto-de-círculo.

Os factores de intensidade de tensão obtidos para os carregamentos de tracção e flexão estão representados nos gráficos das figuras 9.18 a 9.20 e 9.21 a 9.23, respectivamente. Nesses gráficos estão também representadas soluções obtidas com o método dos elementos finitos tridimensional [36] e com o método dos elementos de fronteira tridimensional [37]. Nos gráficos relativos ao carregamento tractivo apresenta-se ainda a solução devida a Newman e Raju [7], estimada a partir de soluções de elementos finitos tridimensionais do problema de uma placa com furo e duas fendas de canto diametralmente opostas.

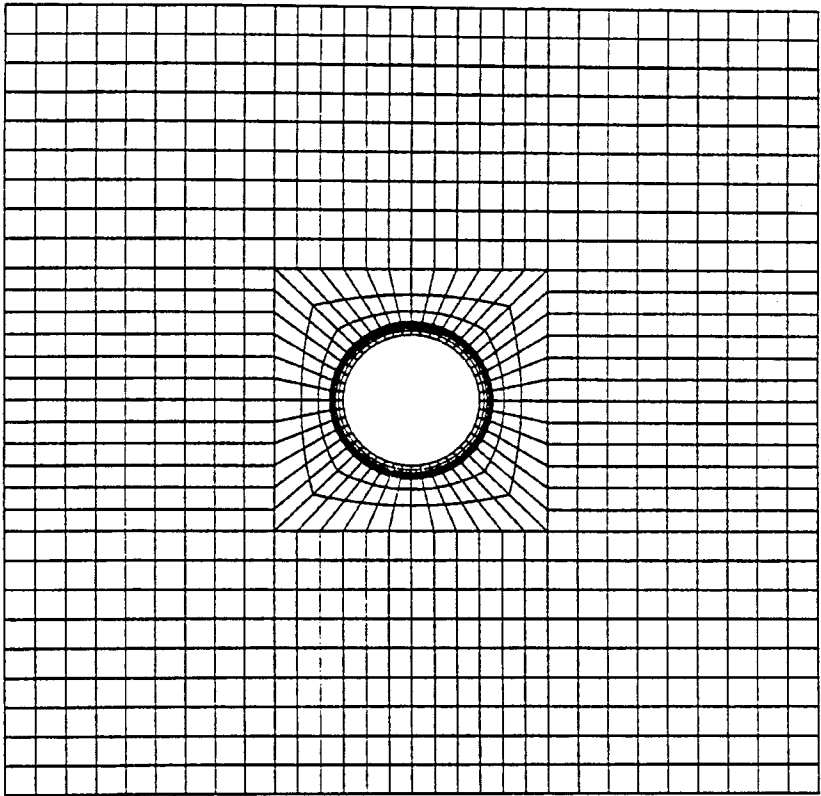


Figura 9.17 Malha de elementos finitos para problema com fenda de profundidade relativa $a/t = 0,25$.

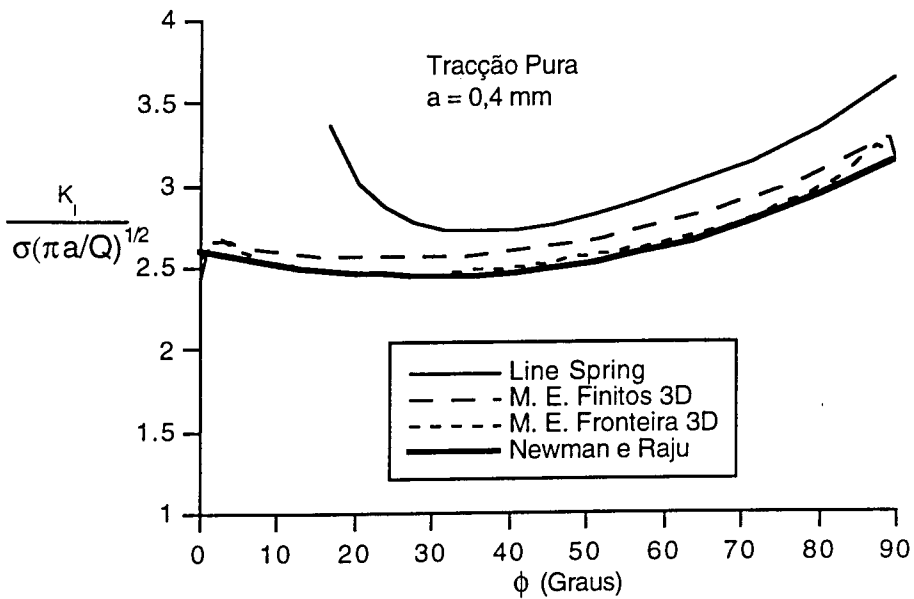


Figura 9.18 Factores de intensidade de tensão normalizados em fenda de canto quarto-de-círculo com $a/t = 0,25$ ($a = 0,4 \text{ mm}$), para placa com carregamento de tracção.

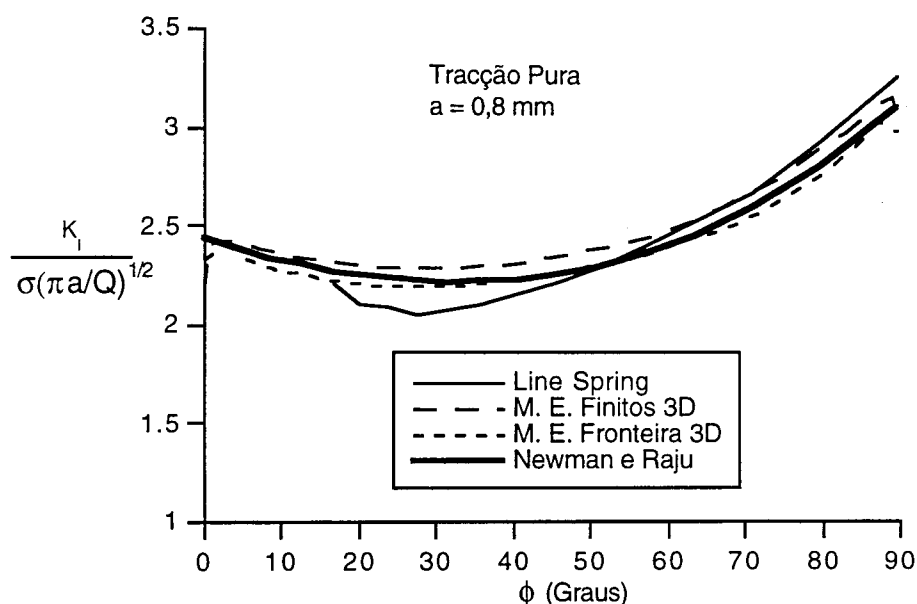


Figura 9.19 Factores de intensidade de tensão normalizados em fenda de canto quarto-de-círculo com $a/t = 0,5$ ($a = 0,8$ mm), para placa com carregamento de tracção.

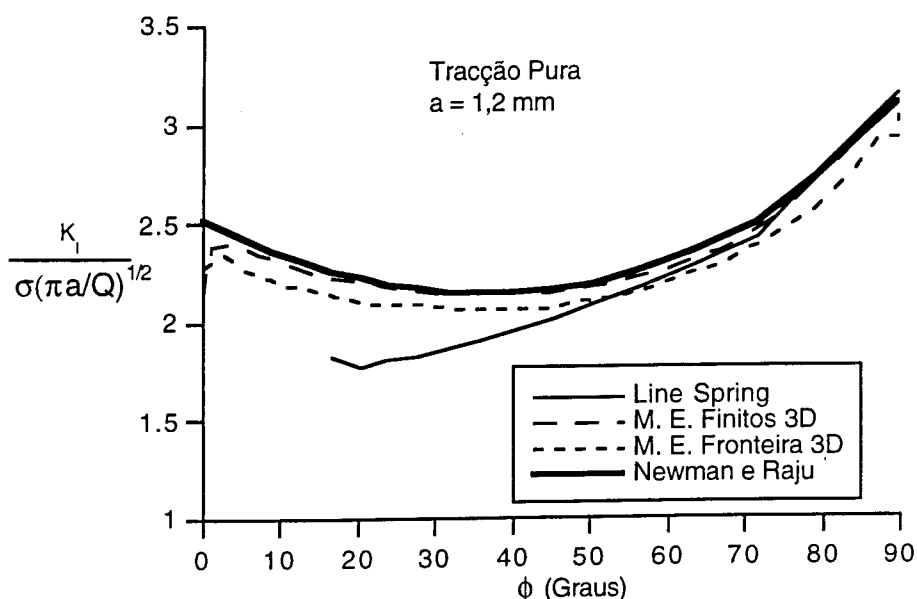


Figura 9.20 Factores de intensidade de tensão normalizados em fenda de canto quarto-de-círculo com $a/t = 0,75$ ($a = 1,2$ mm), para placa com carregamento de tracção.

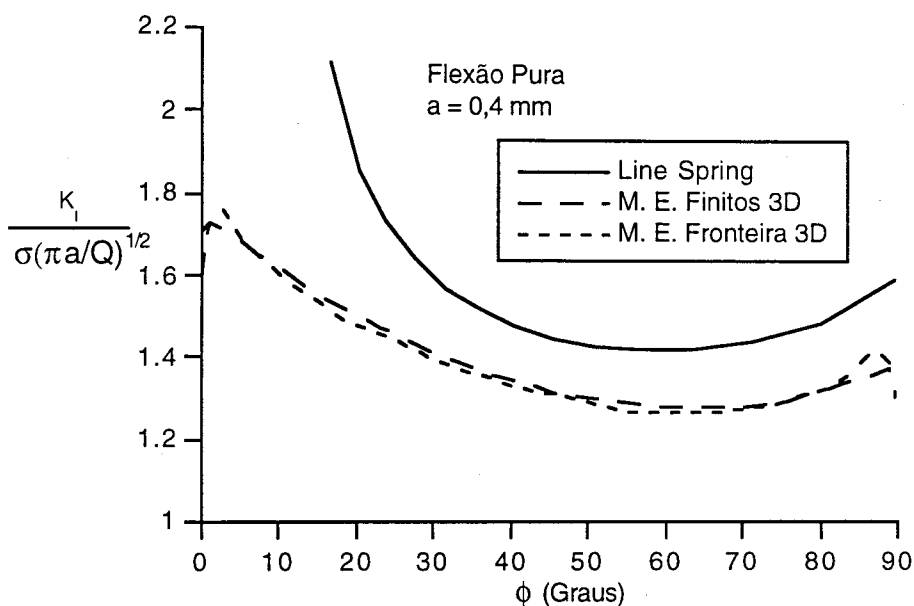


Figura 9.21 Factores de intensidade de tensão normalizados em fenda de canto quarto-de-círculo com $a/t = 0,25$ ($a = 0,4$ mm), para placa com carregamento de flexão.

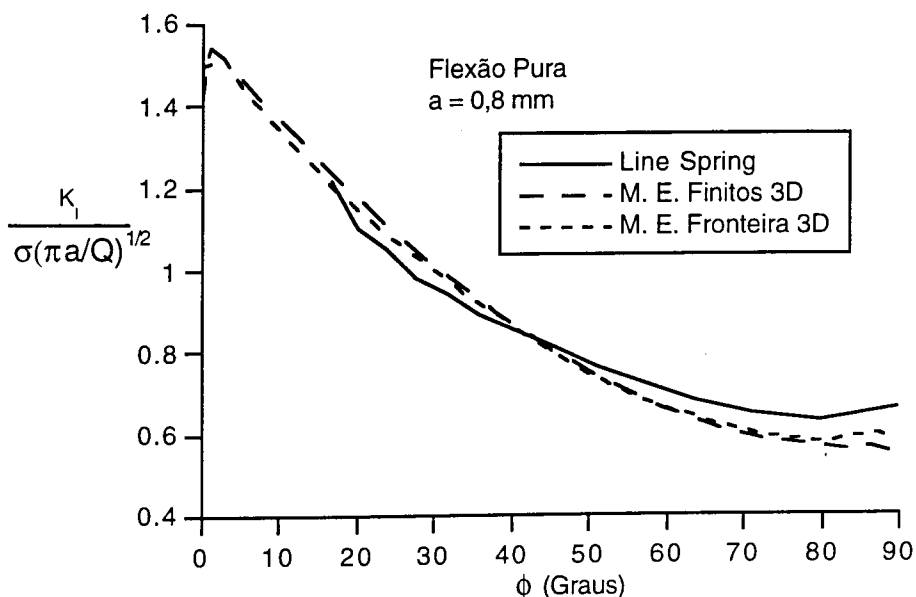


Figura 9.22 Factores de intensidade de tensão normalizados em fenda de canto quarto-de-círculo com $a/t = 0,5$ ($a = 0,8$ mm), para placa com carregamento de flexão.

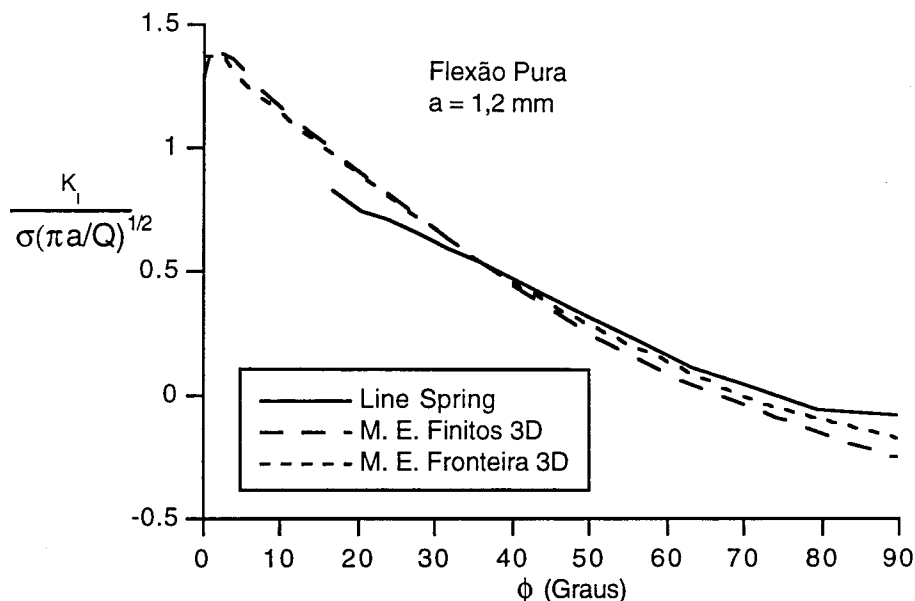


Figura 9.23 Factores de intensidade de tensão normalizados em fenda de canto quarto-de-círculo com $a/t = 0,75$ ($a = 1,2 \text{ mm}$), para placa com carregamento de flexão.

Na tabela 9.2 comparam-se resultados *line spring* com os obtidos pelo método dos elementos finitos tridimensional [36], para $\phi > 30^\circ$. À semelhança do exemplo anterior, apresentam-se os valores do erro relativo máximo e da medida global E definida em (9.21). Neste caso, "referência" indica a solução apresentada em [36]. Na tabela 9.2, para o carregamento de tracção, apresenta-se também o erro relativo do factor de intensidade de tensão máximo ($\phi = 90^\circ$) obtido com o modelo *line spring*. Nestes cálculos, a solução de Newman e Raju [7] é tomada como referência, uma vez que as outras soluções tridimensionais apresentam algumas oscilações na zona de interesse.

Os resultados do modelo *line spring* apresentam uma razoável aproximação aos dos modelos tridimensionais. Os erros relativos são, de uma forma geral, inferiores aos verificados no exemplo anterior para $a/c = 1$. O valor muito elevado do erro relativo, na situação de carregamento de flexão e com $a/t = 0,75$, não tem significado devido ao valor negativo do factor de intensidade de tensão para $\phi = 90^\circ$ (ver figura 9.23). A comparação do factor de intensidade de tensão máximo nos casos de carregamento de tracção mostra que o erro da solução *line spring* diminui com o aumento da profundidade da fenda. Embora esta tendência não se verifique para as outras medidas de erro apresentadas na tabela 9.2, a diminuição do erro atrás apontada pode estar

relacionada com a diminuição da curvatura da frente da fenda que acompanha o aumento da sua profundidade.

Tabela 9.2 Análise comparativa das soluções do factor de intensidade de tensão para fenda de canto quarto-de-círculo em furo ($\phi > 30^\circ$).

a/t		Tracção	Flexão
0,25	Erro relativo máximo (%)	8,5	12,3
	E	0,064	0,108
	Erro rel. para $\phi = 90^\circ$ (%)	15,7	
0,50	Erro relativo máximo (%)	9,4	9,7
	E	0,051	0,054
	Erro rel. para $\phi = 90^\circ$ (%)	5,1	
0,75	Erro relativo máximo (%)	13,7	143,5
	E	0,069	0,170
	Erro rel. para $\phi = 90^\circ$ (%)	2,4	

9.4.3 Cenário simples de *Multiple Site Damage* (MSD)

O objectivo deste exemplo é o de estudar um caso simples de MSD. A geometria tratada está representada na figura 9.24. Trata-se de uma placa com dois furos, a partir de cada um dos quais se desenvolve uma fenda no sentido de se aproximarem. Uma das fendas é de penetração total e a outra é uma fenda de canto quarto-de-círculo. A placa tem espessura $t = 1,6$ mm, os furos têm diâmetro $D = 4,0$ mm e os seus centros distam $p = 20$ mm. A largura e a altura da placa são iguais ($b = h$) e a razão entre o diâmetro dos furos e a largura da placa $D/2b$ é 0,02.

Estudaram-se nove casos, resultado da combinação de três profundidades a_1 da fenda de canto quarto-de-círculo com três comprimentos a_2 da fenda de penetração total. As três profundidades da fenda de canto quarto-de-círculo são $a_1 = 0,4$ mm, 0,8 mm e 1,2 mm, a que correspondem razões a_1/t de 0,25, 0,5 e 0,75, respectivamente. Os comprimentos da fenda de penetração total são $c_2 = 5,5$ mm, 8,0 mm e 10,5 mm ($c_2/p = 0,275, 0,4$ e 0,525). As malhas utilizadas são compostas por 806 elementos de casca (referência S8R [35]) e por 8 elementos *line spring* (referência LS6 [35]). O modelo é

constituído por apenas metade da placa devido à simetria do problema. Na figura 9.25 mostra-se um detalhe da malha utilizada para a situação de $a_1/t = 0,25$ ($a_1 = 0,4$ mm) e $c_2/p = 0,4$ ($c_2 = 8,0$ mm).

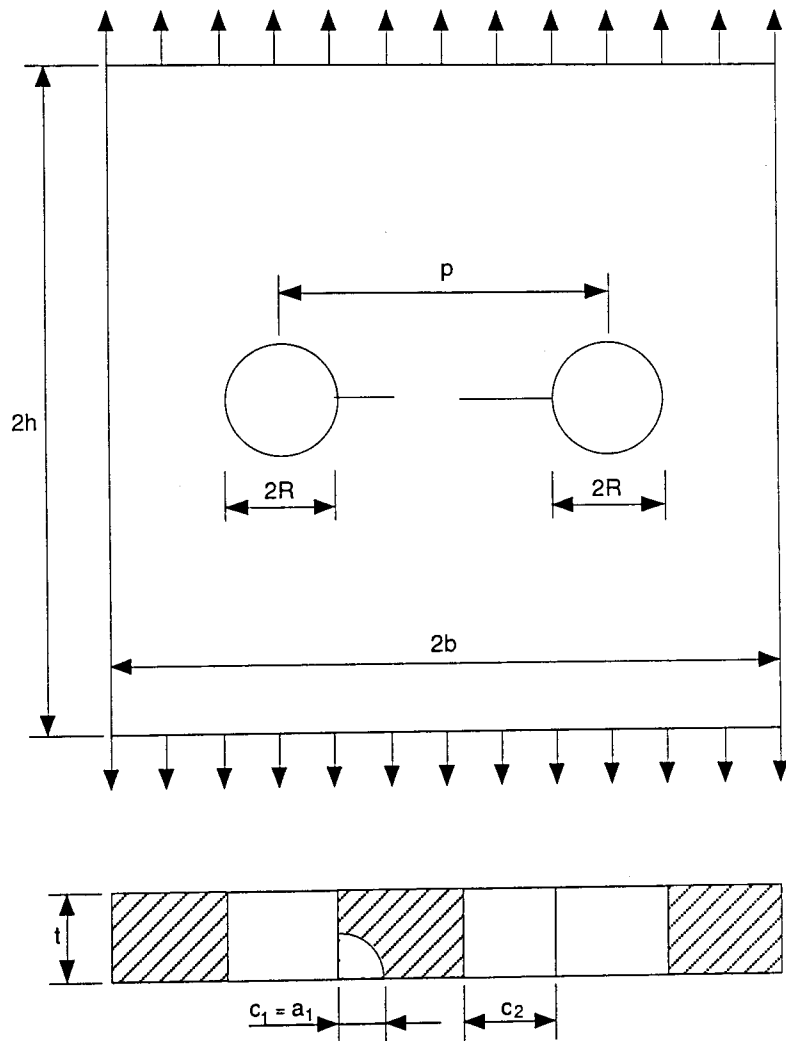


Figura 9.24 Placa com cenário simples de MSD.

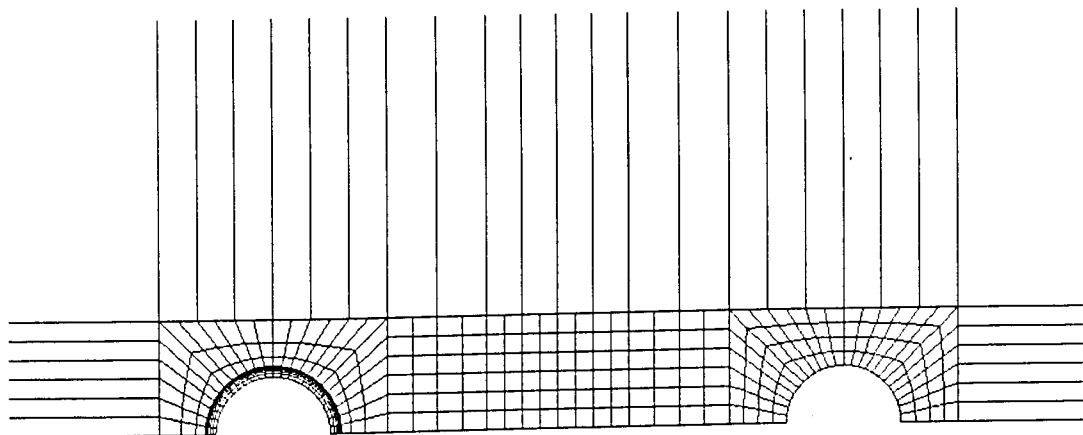


Figura 9.25 Detalhe de malha de elementos finitos para a situação de $a_1/t = 0,25$ ($a_1 = 0,4$ mm) e $c_2/p = 0,4$ ($c_2 = 8,0$ mm).

Os factores de intensidade de tensão normalizados, na frente da fenda quarto-de-círculo, para os nove casos estudados e para o carregamento de tracção estão representados nos gráficos das figuras 9.26 a 9.34. As figuras 9.35 a 9.43 incluem os resultados relativos ao carregamento de flexão. Nestes gráficos, para além das soluções obtidas com o modelo *line spring*, estão também representadas as soluções obtidas com o método dos elementos finitos tridimensional [36] e com o método dos elementos de fronteira tridimensional [37].

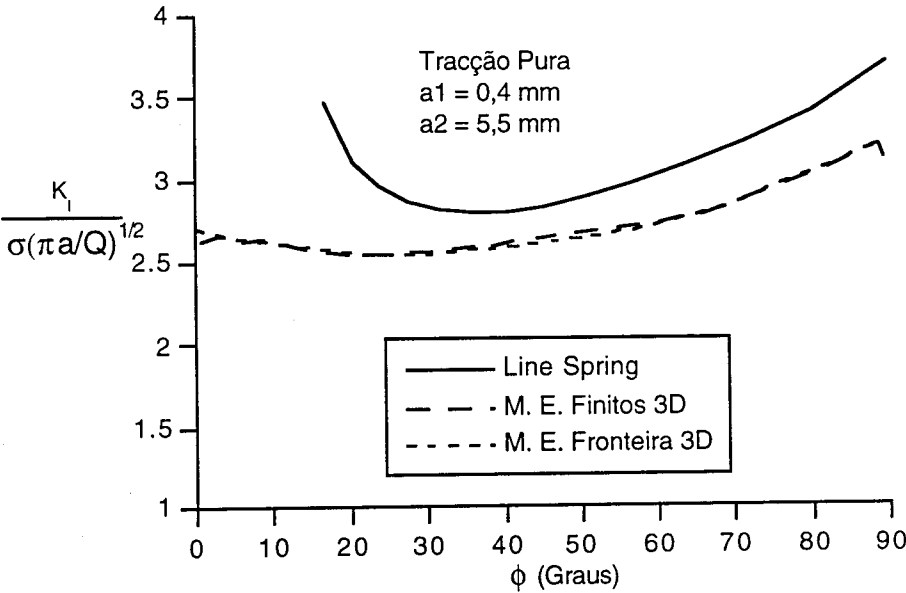


Figura 9.26 Factores de intensidade de tensão normalizados em fenda de canto quarto-de-círculo com $a_1/t = 0,25$ ($a_1 = 0,4 \text{ mm}$) e $c_2/p = 0,275$ ($c_2 = 5,5 \text{ mm}$), para placa com carregamento de tracção.

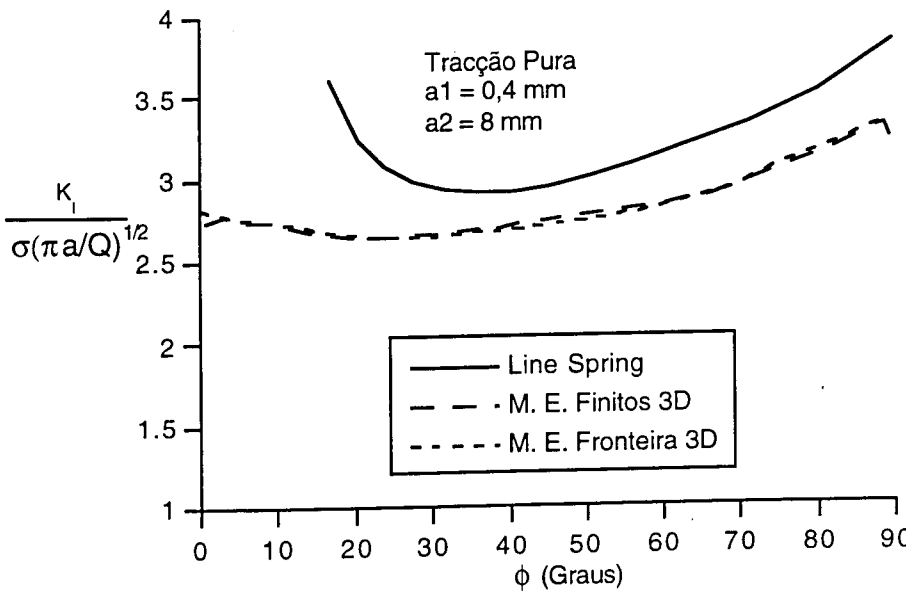


Figura 9.27 Factores de intensidade de tensão normalizados em fenda de canto quarto-de-círculo com $a_1/t = 0,25$ ($a_1 = 0,4 \text{ mm}$) e $c_2/p = 0,4$ ($c_2 = 8,0 \text{ mm}$), para placa com carregamento de tracção.

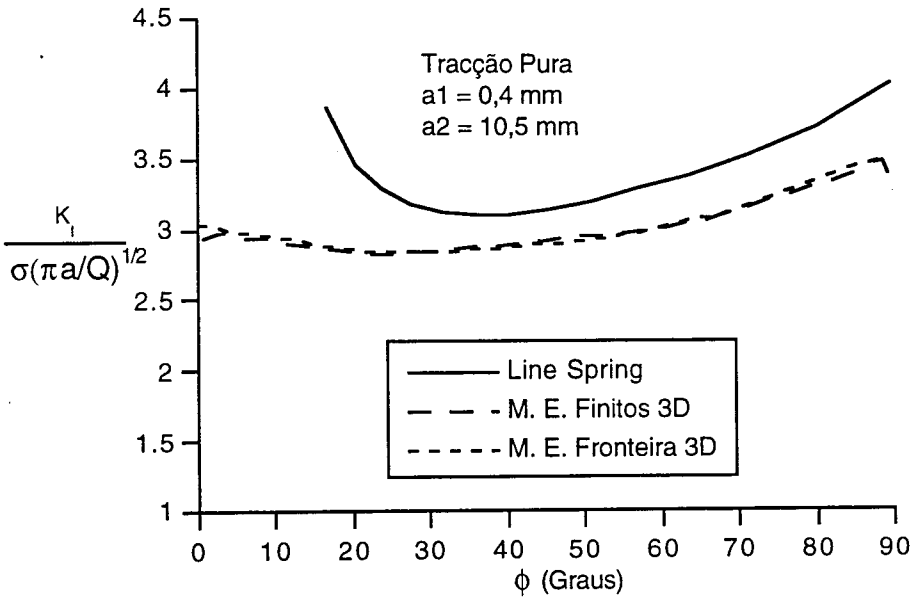


Figura 9.28 Factores de intensidade de tensão normalizados em fenda de canto quarto-de-círculo com $a_1/t = 0,25$ ($a_1 = 0,4 \text{ mm}$) e $c_2/p = 0,525$ ($c_2 = 10,5 \text{ mm}$), para placa com carregamento de tracção.

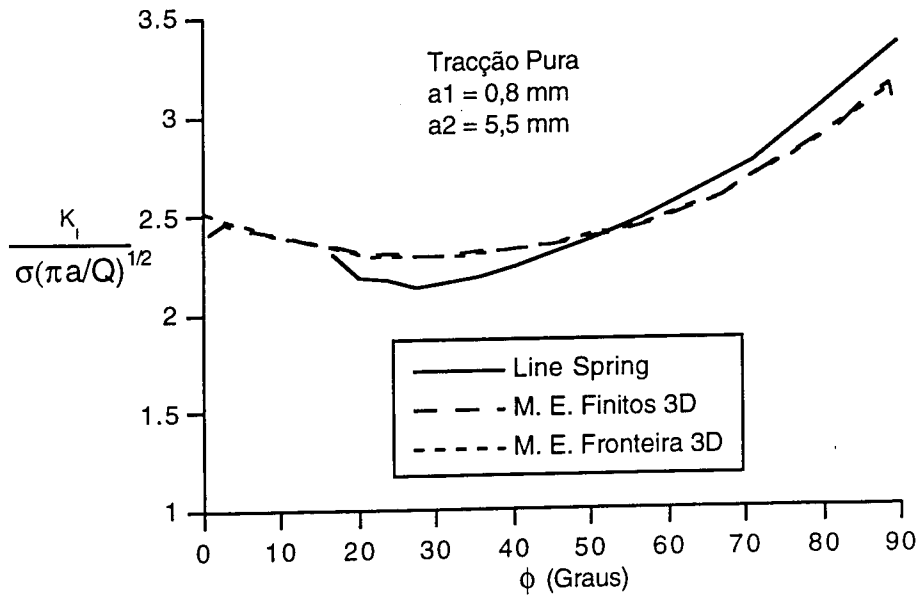


Figura 9.29 Factores de intensidade de tensão normalizados em fenda de canto quarto-de-círculo com $a_1/t = 0,5$ ($a_1 = 0,8 \text{ mm}$) e $c_2/p = 0,275$ ($c_2 = 5,5 \text{ mm}$), para placa com carregamento de tracção.

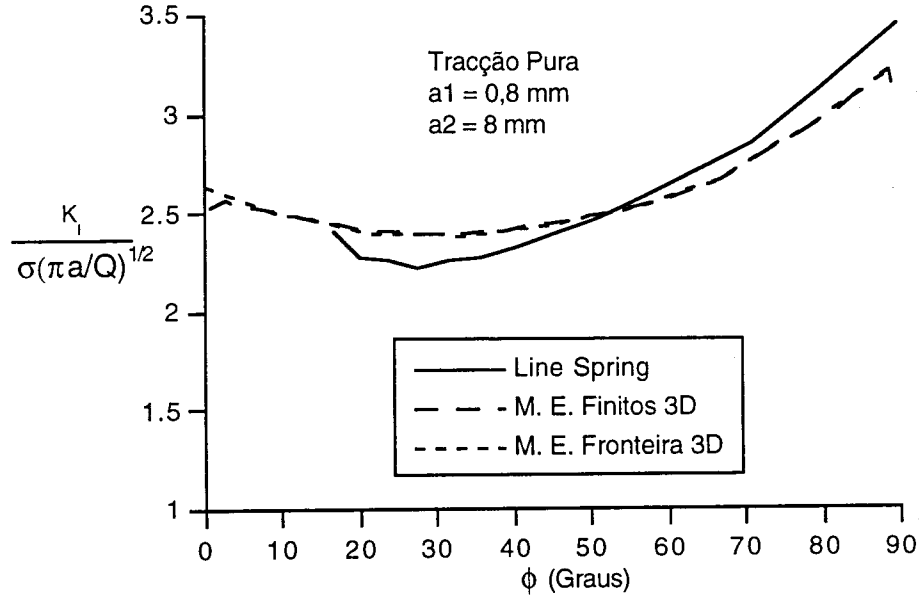


Figura 9.30 Factores de intensidade de tensão normalizados em fenda de canto quarto-de-círculo com $a_1/t = 0,5$ ($a_1 = 0,8 \text{ mm}$) e $c_2/p = 0,4$ ($c_2 = 8,0 \text{ mm}$), para placa com carregamento de tracção.

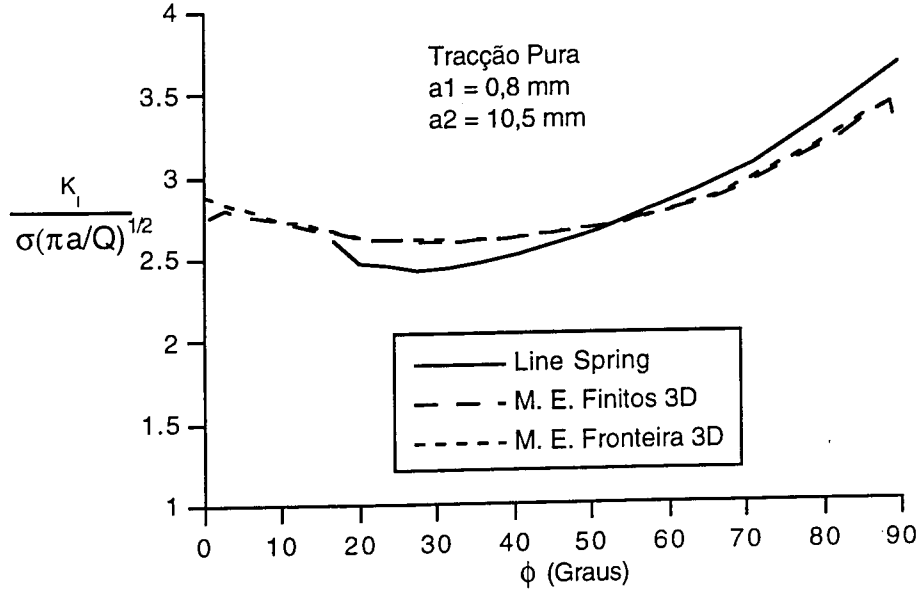


Figura 9.31 Factores de intensidade de tensão normalizados em fenda de canto quarto-de-círculo com $a_1/t = 0,5$ ($a_1 = 0,8 \text{ mm}$) e $c_2/p = 0,525$ ($c_2 = 10,5 \text{ mm}$), para placa com carregamento de tracção.

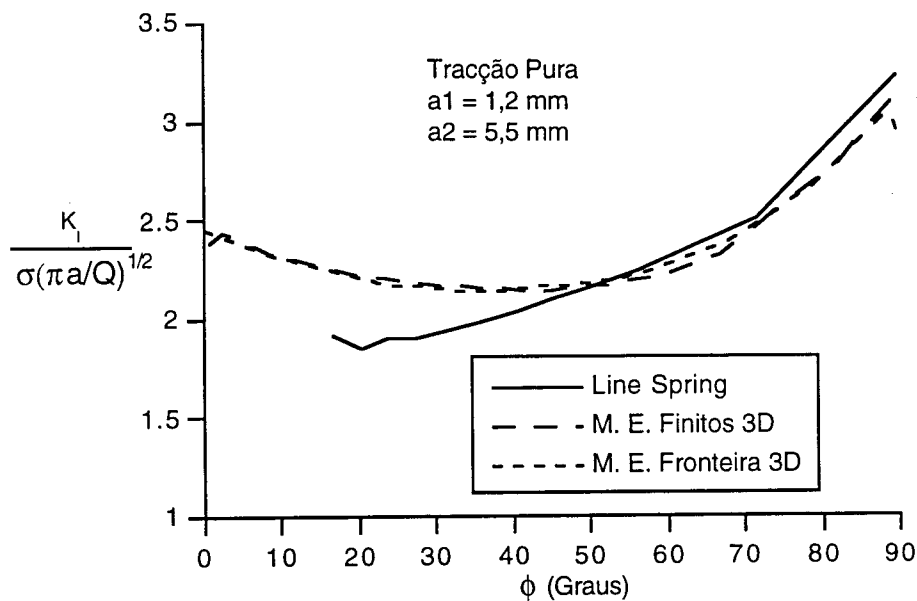


Figura 9.32 Factores de intensidade de tensão normalizados em fenda de canto quarto-de-círculo com $a_1/t = 0,75$ ($a_1 = 1,2 \text{ mm}$) e $c_2/p = 0,275$ ($c_2 = 5,5 \text{ mm}$), para placa com carregamento de tracção.

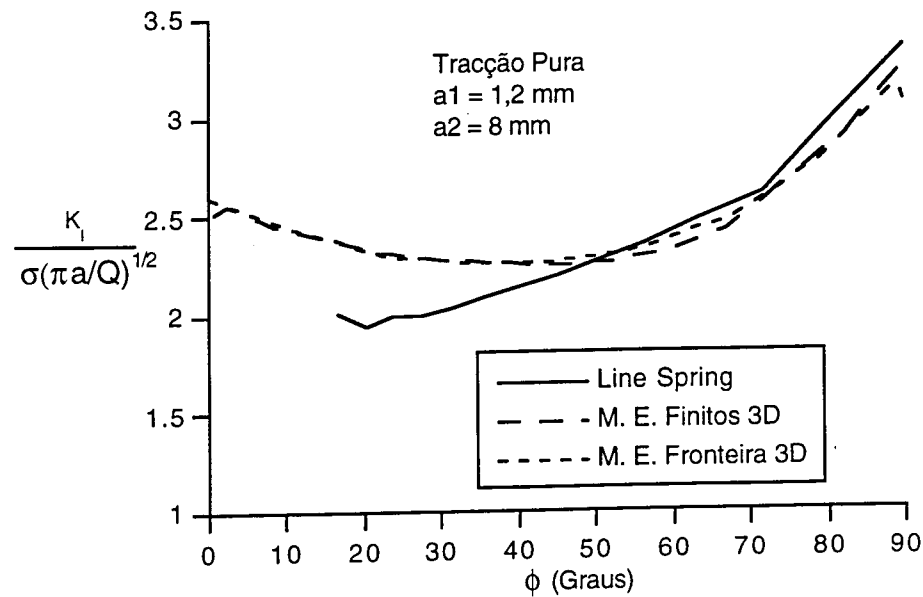


Figura 9.33 Factores de intensidade de tensão normalizados em fenda de canto quarto-de-círculo com $a_1/t = 0,75$ ($a_1 = 1,2 \text{ mm}$) e $c_2/p = 0,4$ ($c_2 = 8,0 \text{ mm}$), para placa com carregamento de tracção.

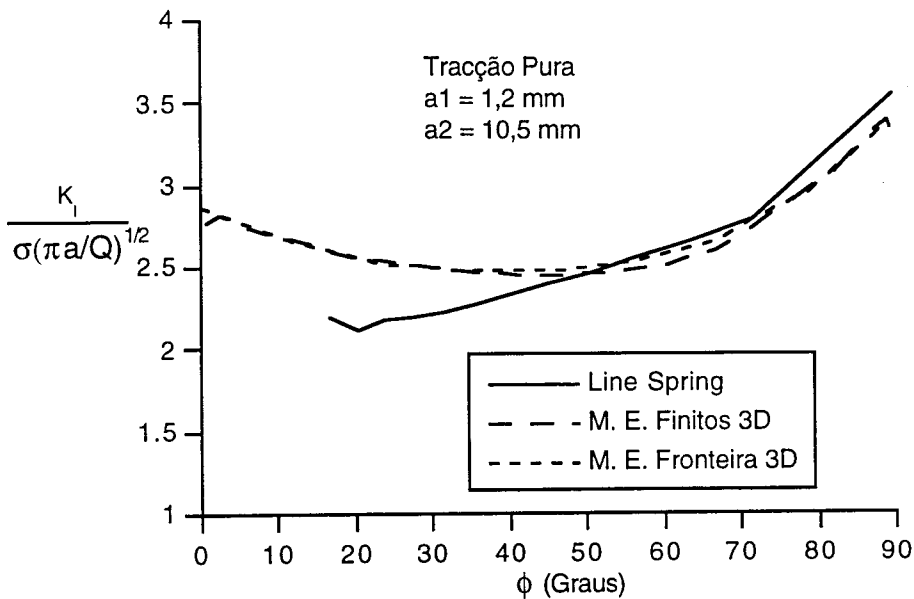


Figura 9.34 Factores de intensidade de tensão normalizados em fenda de canto quarto-de-círculo com $a_1/t = 0,75$ ($a_1 = 1,2 \text{ mm}$) e $c_2/p = 0,525$ ($c_2 = 10,5 \text{ mm}$), para placa com carregamento de tracção.

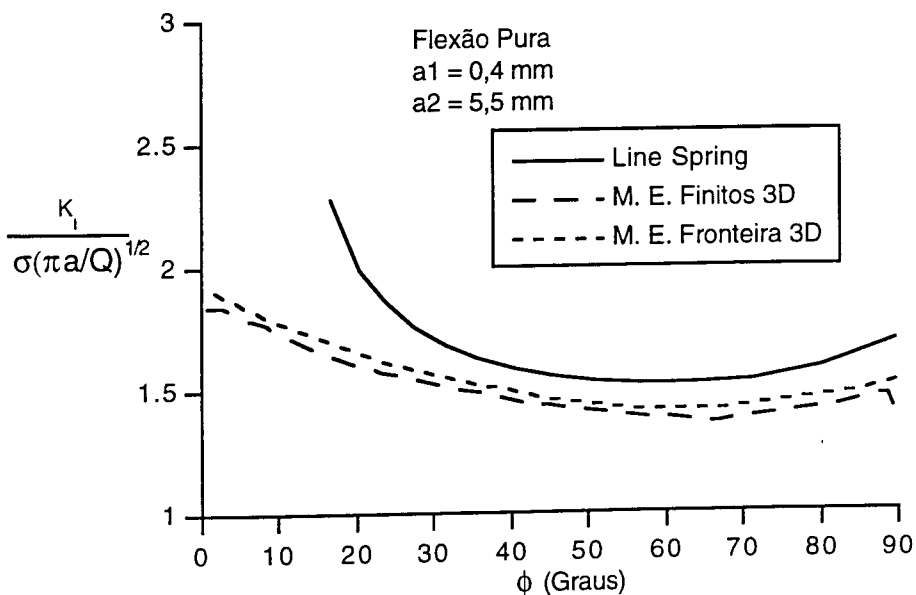


Figura 9.35 Factores de intensidade de tensão normalizados em fenda de canto quarto-de-círculo com $a_1/t = 0,25$ ($a_1 = 0,4 \text{ mm}$) e $c_2/p = 0,275$ ($c_2 = 5,5 \text{ mm}$), para placa com carregamento de flexão.

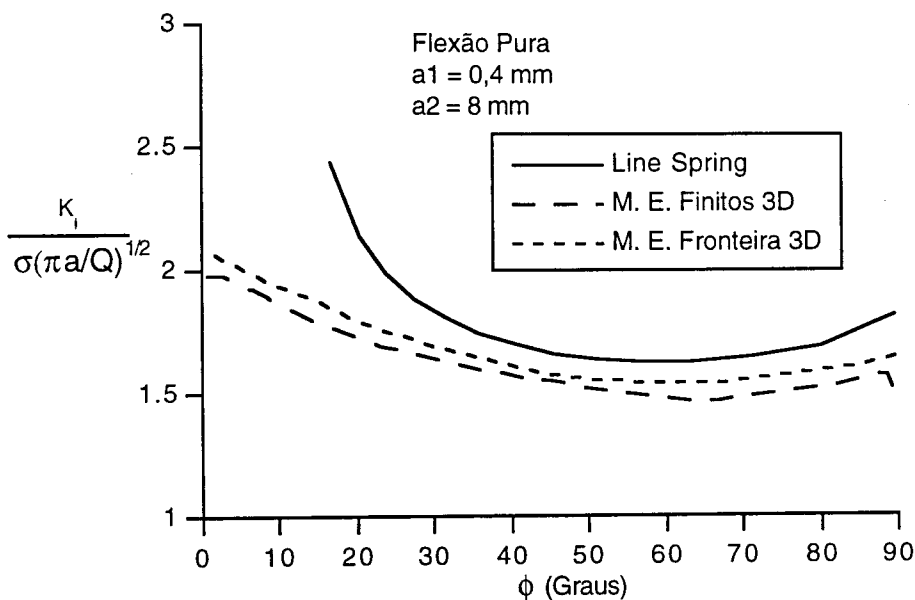


Figura 9.36 Factores de intensidade de tensão normalizados em fenda de canto quarto-de-círculo com $a_1/t = 0,25$ ($a_1 = 0,4 \text{ mm}$) e $c_2/p = 0,4$ ($c_2 = 8,0 \text{ mm}$), para placa com carregamento de flexão.

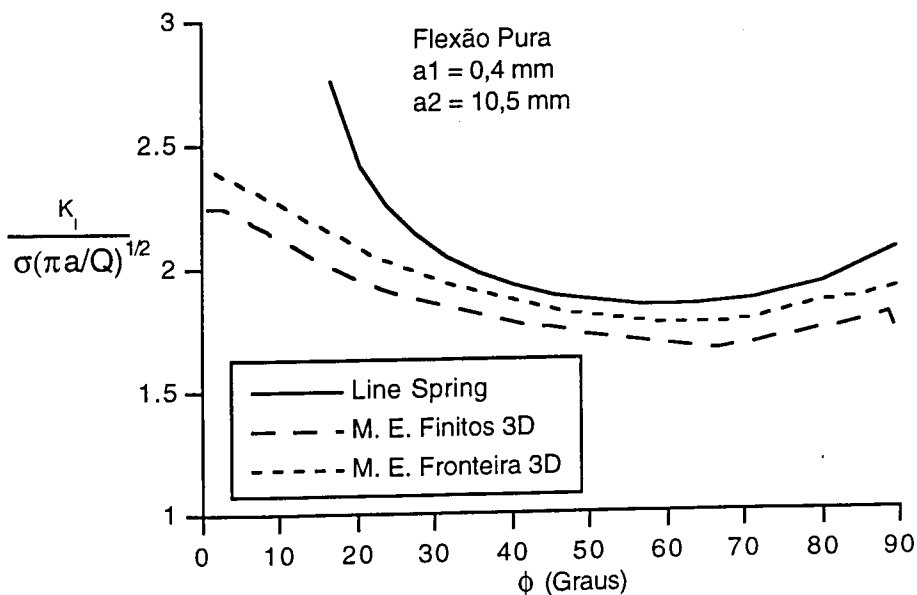


Figura 9.37 Factores de intensidade de tensão normalizados em fenda de canto quarto-de-círculo com $a_1/t = 0,25$ ($a_1 = 0,4 \text{ mm}$) e $c_2/p = 0,525$ ($c_2 = 10,5 \text{ mm}$), para placa com carregamento de flexão.

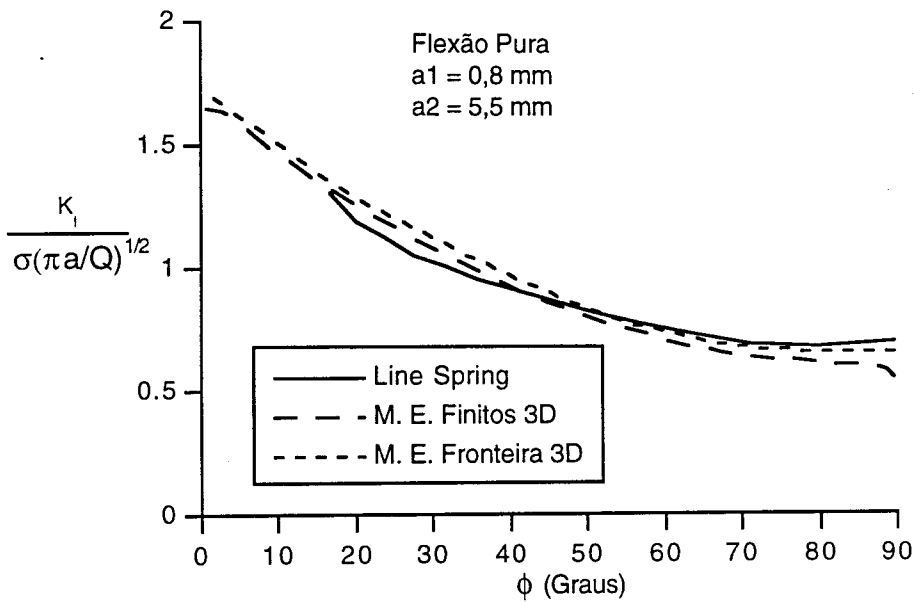


Figura 9.38 Factores de intensidade de tensão normalizados em fenda de canto quarto-de-círculo com $a_1/t = 0,5$ ($a_1 = 0,8 \text{ mm}$) e $c_2/p = 0,275$ ($c_2 = 5,5 \text{ mm}$), para placa com carregamento de flexão.

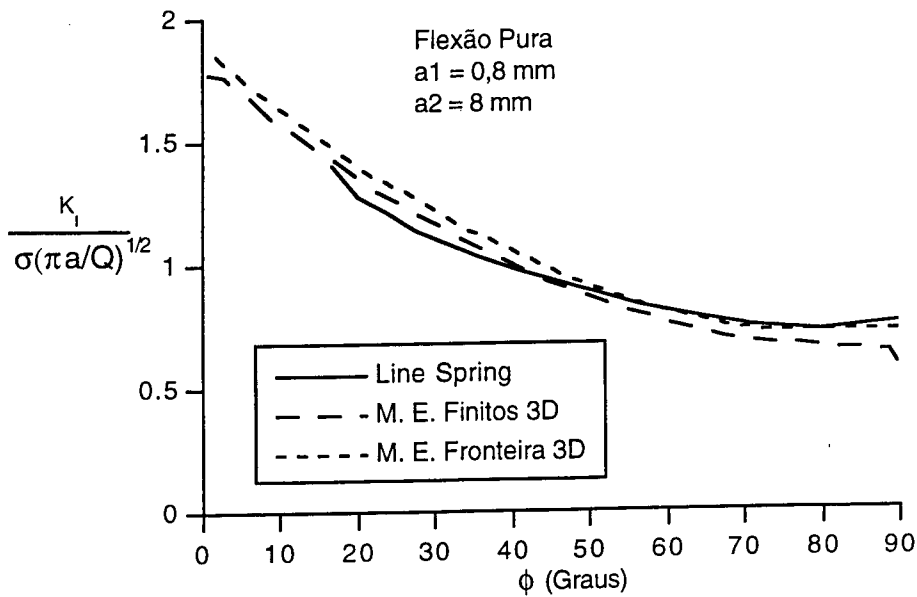


Figura 9.39 Factores de intensidade de tensão normalizados em fenda de canto quarto-de-círculo com $a_1/t = 0,5$ ($a_1 = 0,8 \text{ mm}$) e $c_2/p = 0,4$ ($c_2 = 8,0 \text{ mm}$), para placa com carregamento de flexão.

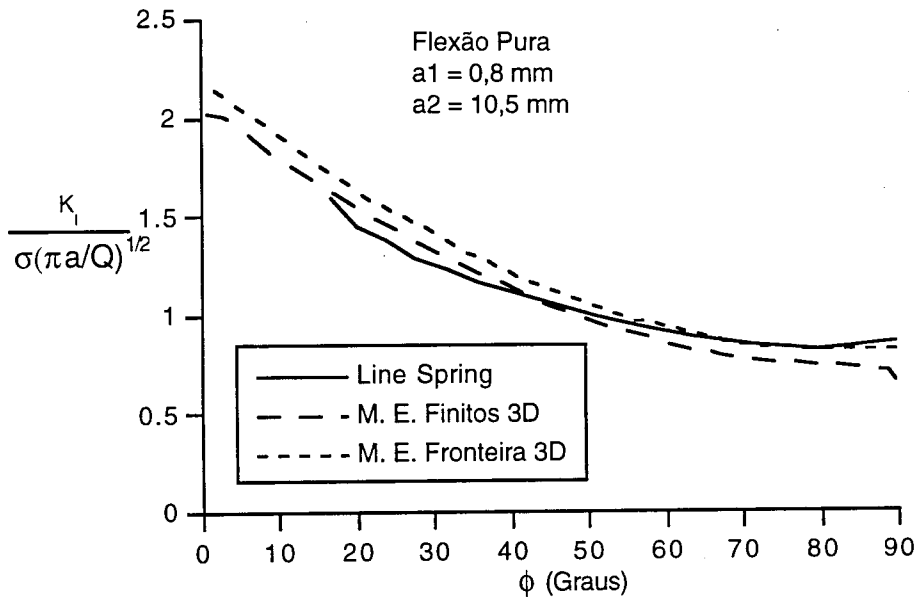


Figura 9.40 Factores de intensidade de tensão normalizados em fenda de canto quarto-de-círculo com $a_1/t = 0,5$ ($a_1 = 0,8 \text{ mm}$) e $c_2/p = 0,525$ ($c_2 = 10,5 \text{ mm}$), para placa com carregamento de flexão.

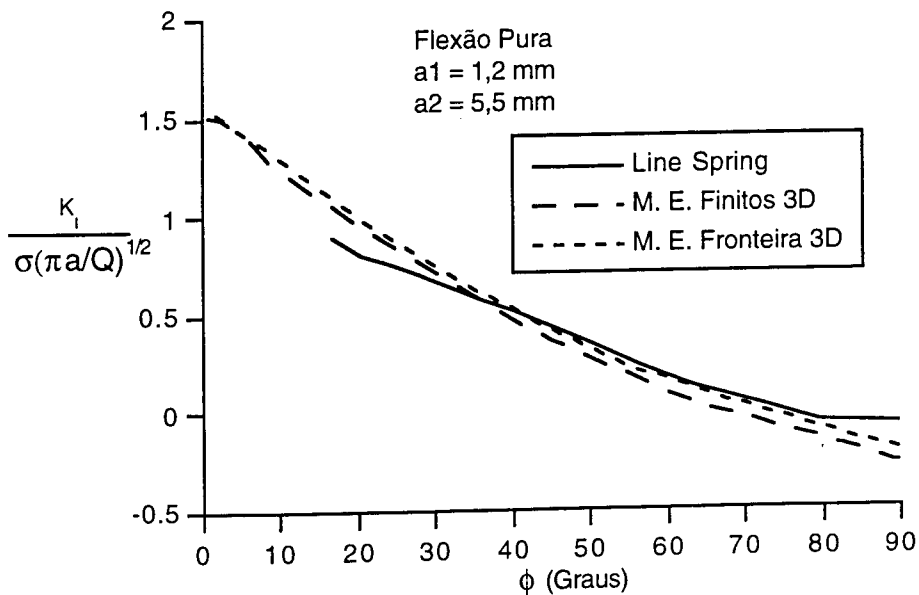


Figura 9.41 Factores de intensidade de tensão normalizados em fenda de canto quarto-de-círculo com $a_1/t = 0,75$ ($a_1 = 1,2 \text{ mm}$) e $c_2/p = 0,275$ ($c_2 = 5,5 \text{ mm}$), para placa com carregamento de flexão.

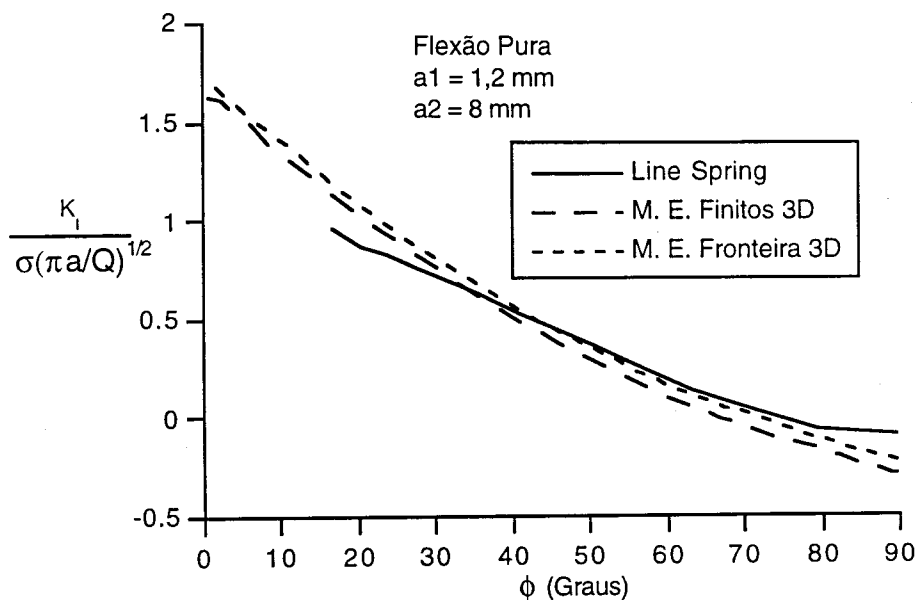


Figura 9.42 Factores de intensidade de tensão normalizados em fenda de canto quarto-de-círculo com $a_1/t = 0,75$ ($a_1 = 1,2 \text{ mm}$) e $c_2/p = 0,4$ ($c_2 = 8,0 \text{ mm}$), para placa com carregamento de flexão.

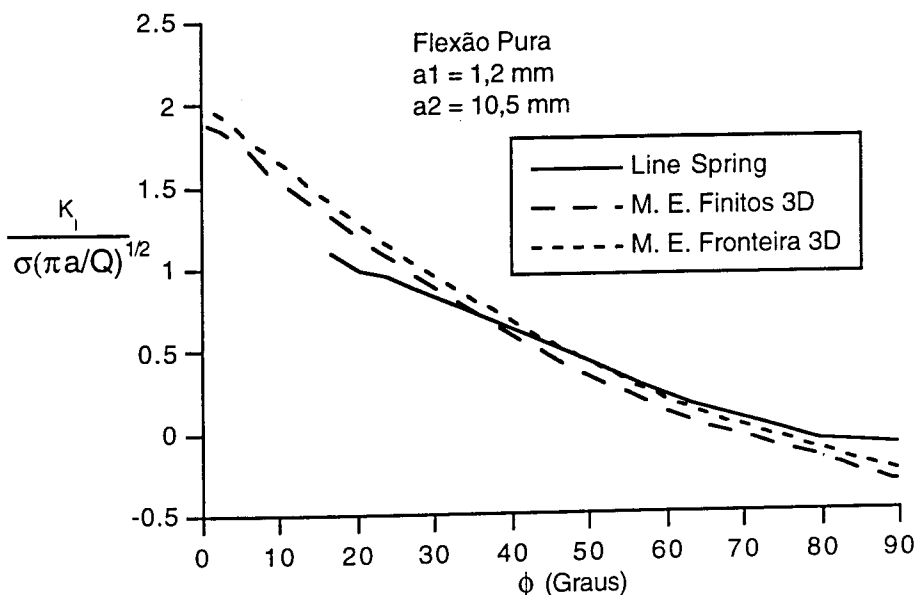


Figura 9.43 Factores de intensidade de tensão normalizados em fenda de canto quarto-de-círculo com $a_1/t = 0,75$ ($a_1 = 1,2 \text{ mm}$) e $c_2/p = 0,525$ ($c_2 = 10,5 \text{ mm}$), para placa com carregamento de flexão.

Na tabela 9.3 faz-se a comparação dos resultados *line spring* com resultados de análises tridimensionais, para $\phi > 30^\circ$. Para cada caso estudado, apresenta-se o erro relativo máximo e a medida global E definida em (9.21), em que a solução do método dos elementos finitos tridimensional [36] é tomada como referência. Para o carregamento de tracção, apresenta-se na tabela 9.3 o erro relativo do factor de intensidade de tensão máximo obtido com o modelo *line spring* em comparação com o resultado do método dos elementos de fronteira tridimensional [37]. Esta solução foi escolhida como referência por não apresentar oscilações na região próxima de $\phi = 90^\circ$.

Tabela 9.3 Análise comparativa das soluções do factor de intensidade de tensão para fenda de canto em cenário de MSD ($\phi > 30^\circ$).

c_2/p		a_1/t					
		Tracção			Flexão		
		0,25	0,5	0,75	0,25	0,5	0,75
0,275	Erro relativo máximo (%)	12,9	5,9	10,3	12,0	10,4	143,9
	E	0,100	0,039	0,053	0,100	0,046	0,184
	Erro rel. para $\phi = 90^\circ$ (%)	15,3	6,4	4,9			
0,400	Erro relativo máximo (%)	12,9	5,9	10,3	11,9	10,2	145,5
	E	0,101	0,039	0,053	0,098	0,045	0,183
	Erro rel. para $\phi = 90^\circ$ (%)	14,9	6,5	5,1			
0,525	Erro relativo máximo (%)	12,8	6,1	10,4	11,8	10,1	149,5
	E	0,099	0,040	0,053	0,096	0,045	0,181
	Erro rel. para $\phi = 90^\circ$ (%)	14,5	6,1	4,6			

A comparação de cada conjunto de três gráficos relativos a situações com o mesmo carregamento e profundidade da fenda quarto-de-círculo permite concluir que o aumento do comprimento da fenda de penetração total produz um aumento do factor de intensidade de tensão normalizado em cada ponto da frente da fenda de canto. Apesar desse aumento, verifica-se, por análise da tabela 9.3, que a diferença relativa entre as soluções *line spring* e do método dos elementos finitos tridimensional (ver erro relativo máximo e E) mantém-se constante. Constata-se também, para os casos de carregamento de tracção, que o erro relativo do factor de intensidade de tensão máximo permanece

praticamente inalterável com o aumento do comprimento da fenda de penetração total. À semelhança do sucedido no exemplo anterior, o erro relativo do factor de intensidade de tensão máximo diminui com o aumento da profundidade da fenda de canto.

As soluções do modelo *line spring* relativas ao carregamento de flexão e profundidade relativa da fenda de canto $a_1/t = 0,75$ ($a_1 = 1,2$ mm) apresentam erros demasiado elevados quando comparados com as soluções do método dos elementos finitos tridimensional. Tal como se verificou nos exemplos anteriores, estes erros estão associados a factores de intensidade de tensão próximos de zero ou mesmo negativos (ver figuras 9.41 a 9.43), o que não tem qualquer significado prático.

9.4.4 Conclusões

Os exemplos estudados neste capítulo permitem retirar algumas conclusões relativamente ao comportamento do modelo *line spring* na modelação de fendas de penetração parcial. As soluções obtidas foram comparadas com soluções numéricas tridimensionais e os erros relativos avaliados.

Como referido anteriormente, Rice e Levy [19] indicaram que a aproximação do *line spring* é apropriada para regiões onde a profundidade da fenda varia lentamente. Este modelo não considera a curvatura da frente da fenda e, consequentemente, não é uma boa aproximação na zona em que a fenda intersecta a superfície da placa devido à rápida variação da profundidade da fenda. Esta limitação verificou-se em todos os casos estudados. Para ângulos ϕ reduzidos, os resultados do modelo *line spring* são significativamente diferentes das soluções tridimensionais.

Os factores de intensidade de tensão obtidos para a fenda superficial semi-elíptica mostram que a razão entre a profundidade da fenda e o seu comprimento (a/c) também impõe limitações ao modelo. Verificou-se que, com poucas excepções, os erros máximos estão associados às fendas com $a/c = 1$. Isso deve-se certamente à curvatura constante da fenda semi-circular ($a = c$). Ainda no problema da fenda superficial semi-elíptica, e para as situações em que o factor de intensidade de tensão é máximo para $\phi = 90^\circ$, o erro relativo máximo da solução *line spring* nesse ponto é de 4,4%.

Os erros das soluções com o modelo *line spring* no problema da fenda de canto quarto-de-círculo em furo são, em geral, inferiores aos verificados no problema da fenda superficial semi-elíptica para $a/c = 1$. Isso também é verdade para o problema da fenda de canto em cenário de MSD. Neste último exemplo, verifica-se ainda que o comprimento da fenda de penetração total não afecta os erros dos factores de intensidade de tensão na frente da fenda de canto quarto-de-círculo. Por outro lado, os

resultados destes dois últimos exemplos indicam que o erro relativo para $\phi = 90^\circ$ diminui com o aumento da profundidade da fenda de canto.

Para todas as geometrias estudadas, os resultados relativos ao carregamento de flexão e às maiores razões entre profundidade da fenda e espessura da placa ($a/t = 0,75$ ou $0,8$) apresentam erros muito elevados. Esses erros estão associados a factores de intensidade de tensão muito próximos de zero ou até negativos, os quais não têm interesse prático. Os valores negativos não têm mesmo qualquer significado físico.

Referências

1. Tracey, D.M., "3-D elastic singularity element for evaluation of K along an arbitrary crack front", *International Journal of Fracture*, Vol. 9, pp. 340-343, 1973.
2. Raju, I.S. e Newman, J.C., Jr., "Stress-intensity factors for a wide range of semi-elliptical surface cracks in finite-thickness plates", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 11, pp. 817-829, 1979.
3. Newman, J.C., Jr. e Raju, I.S., *Analyses of surface cracks in finite plates under tension or bending loads*. NASA TP-1578, NASA, 1979.
4. McGowan, J.J. e Raymund, M., "Stress intensity factor solutions for internal longitudinal semi-elliptical surface flaws in a cylinder under arbitrary loadings", em: *Fracture Mechanics*, C.W. Smith, ed., ASTM STP 677, American Society of Testing and Materials, Philadelphia, pp. 365-380, 1979.
5. Raju, I.S. e Newman, J.C., Jr., "Stress-intensity factors for two symmetric corner cracks", em: *Fracture Mechanics*, C.W. Smith, ed., ASTM STP 677, American Society of Testing and Materials, Philadelphia, pp. 411-430, 1979.
6. Newman, J.C., Jr. e Raju, I.S., "Stress-intensity factors for internal surface cracks in cylindrical pressure vessels", *Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 102, pp. 342-346, 1980.
7. Newman, J.C., Jr. e Raju, I.S., *Stress-intensity factor equations for cracks in three-dimensional finite bodies subjected to tension and bending loads*. NASA TM-85793, NASA, 1984.
8. Raju, I.S. e Newman, J.C., Jr., "Stress-intensity factors for corner cracks in rectangular bars", em: *Fracture Mechanics: Nineteenth Symposium*, T.A. Cruse, ed., ASTM STP 969, American Society of Testing and Materials, Philadelphia, pp. 43-55, 1988.
9. Tan, P.W., Raju, I.S., Shivakumar, K.N., e Newman, J.C., Jr., "Evaluation of finite-element models and stress-intensity factors for surface cracks emanating from stress concentrations", em: *Surface-Crack Growth: Models, Experiments and Structures*, W.G. Reuter, J.H. Underwood, e J.C. Newman, Jr., eds., ASTM STP 1060, American Society of Testing and Materials, Philadelphia, pp. 34-48, 1990.
10. Tan, P.W., Newman, J.C., Jr., e Bigelow, C.A., "Three-dimensional finite-element analyses of corner cracks at stress concentrations", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 55, pp. 505-512, 1996.
11. Heliot, J., Labbens, R.C., e Pellissier-Tanon, A., "Semi-elliptical cracks in a cylinder subjected to stress gradients", em: *Fracture Mechanics*, C.W. Smith,

- ed., ASTM STP 677, American Society of Testing and Materials, Philadelphia, pp. 341-364, 1979.
12. Shah, R.C. e Kobayashi, A.S., "On the surface flaw problem", em: *The Surface Crack: Physical Problems and Computational Solutions*, J.L. Swedlow, ed., American Society of Mechanical Engineers, New York, pp. 79-124, 1972.
 13. Smith, F.W., "The elastic analysis of the part-circular surface flaw problem by the alternating method", em: *The Surface Crack: Physical Problems and Computational Solutions*, J.L. Swedlow, ed., American Society of Mechanical Engineers, New York, pp. 125-152, 1972.
 14. Kobayashi, A.S. e Enetanya, A.N., "Stress intensity factor of a corner crack", em: *Mechanics of Crack Growth*, ASTM STP 590, American Society of Testing and Materials, Philadelphia, pp. 477-495, 1976.
 15. Smith, F.W. e Kullgren, T.E., *Theoretical and experimental analysis of surface cracks emanating from fastener holes*. AFFDL-TR-76-104, Air Force Flight Dynamics Laboratory, Wright-Patterson Air Force Base, OH, 1977.
 16. Nishioka, T. e Atluri, S.N., "Analytical solution for embedded elliptical cracks and finite element alternating method for elliptical surface cracks, subjected to arbitrary loadings", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 17, pp. 247-268, 1983.
 17. Nishioka, T. e Atluri, S.N., "An alternating method for analysis of surface-flawed aircraft structural components", *AIAA Journal*, Vol. 21, pp. 749-757, 1983.
 18. Atluri, S.N. e Nishioka, T., "Computational methods for three-dimensional problems of fracture", em: *Computational Methods in the Mechanics of Fracture*, S.N. Atluri, ed., North Holland, Amsterdam, pp. 230-287, 1986.
 19. Rice, J.R. e Levy, N., "The part-through surface crack in an elastic plate", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 39, pp. 185-194, 1972.
 20. Rice, J.R., "The line spring model for surface flaws", em: *The Surface Crack: Physical Problems and Computational Solutions*, J.L. Swedlow, ed., American Society of Mechanical Engineers, New York, pp. 171-185, 1972.
 21. Parks, D.M., "The inelastic line-spring: estimates of elastic-plastic fracture mechanics parameters for surface-cracked plates and shells", *Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 103, pp. 246-254, 1981.
 22. Parks, D.M., "Inelastic analysis of surface flaws using the line-spring model", em: *Advances in Fracture Research*, D. Francois, ed., Pergamon, Oxford, pp. 2589-2598, 1981.
 23. Delale, F. e Erdogan, F., "Line-spring model for surface cracks in a Reissner plate", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 19, pp. 1331-1340, 1981.

24. Parks, D.M., Lockett, R.R., e Brockenbrough, J.R., "Stress-intensity factors for surface-cracked plates and cylindrical shells using line-spring finite elements", em: *1981 Advances in Aerospace Structures and Materials, AD-01*, S.S. Wang e W.J. Renton, eds., American Society of Mechanical Engineers, New York, pp. 279-285, 1981.
25. Parks, D.M. e White, C.S., "Elastic-plastic line-spring finite elements for surface-cracked plates and shells", *Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 104, pp. 287-292, 1982.
26. Miyoshi, T., Shiratori, M., e Tanabe, O., "Stress intensity factors for surface cracks with arbitrary shapes in plates and shells", em: *Fracture Mechanics: Sixteenth Symposium*, M.F. Kanninen e A.T. Hopper, eds., ASTM STP 868, American Society of Testing and Materials, Philadelphia, pp. 521-534, 1985.
27. Kumar, V., German, M.D., e Schumacher, B.I., "Analysis of elastic surface cracks in cylinders using the line-spring model and shell finite element method", *Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 107, pp. 403-411, 1985.
28. de Melo, F.J.M.Q., Oliveira, C.A.M., e de Castro, P.M.S.T., "The stress analysis near a part-through crack in thin-walled pipe bends under in-plane bending", em: *Structural Mechanics in Reactor Technology*, F.H. Wittmann, ed., A. A. Balkema, Rotterdam, pp. 219-224, 1987.
29. Oliveira, C.A.M., de Melo, F.J.M.Q., e de Castro, P.M.S.T., "The elastic analysis of arbitrary thin shells having part-through cracks, using the integrated line spring and the semiloof shell elements", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 39, pp. 1027-1035, 1991.
30. de Langre, E. e Ebersolt, L., "The use of a new line-spring shell element for elastic surface crack analysis", *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, Vol. 10, pp. 153-167, 1987.
31. Rice, J.R., "Some remarks on elastic crack tip fields", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 8, pp. 751-758, 1972.
32. Tada, H., Paris, P.C., e Irwin, G.R., *The Stress Analysis of Cracks Handbook*. Del Research Corporation, Hellertown, Pennsylvania, 1973.
33. *ABAQUS Theory Manual, Version 5.6*. Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc., Pawtucket, 1996.
34. Merkle, J.G., *A review of some of the existing stress intensity factor solutions for part-through surface crack*. ORNL-TM-3983, Oak Ridge National Laboratory, 1973.
35. *ABAQUS User's Manual, Version 5.6*. Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc., Pawtucket, 1996.

36. Nilsson, K.F., *Accurate and reliable computation of stress intensity functions at corner cracks*. SMAAC-WP-2.0-08-1.3/FFA, Brite-Euram Project No. BE95-1053, 1997.
37. Young, A., *Single-domain boundary element method for 3-D elastoplastic crack analysis*. SMAAC-WP-2.0-07-1.0/DRA, Brite-Euram Project No. BE95-1053, 1997.

CAPÍTULO 10

10. CONCLUSÕES E PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS

10.1 Conclusões

10.2 Perspectivas de trabalhos futuros

CAPÍTULO 10

10. CONCLUSÕES E PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS

10.1 Conclusões

O trabalho apresentado nesta dissertação incidiu essencialmente na análise de tensões por via numérica e experimental. Relativamente à análise experimental de tensões, fez-se um estudo da técnica baseada no efeito termoelástico utilizando o equipamento SPATE. Os ensaios com este equipamento evidenciaram algumas das suas vantagens, nomeadamente a possibilidade de obter a distribuição de tensões numa área da superfície de um sólido sem contacto. Nos exemplos tratados confirmou-se a capacidade do SPATE para reconhecer distribuições de tensões complexas incluindo a distinção automática entre tensões tractivas e compressivas. No entanto, a resolução espacial do equipamento dificulta a determinação correcta do estado de tensão próximo dos bordos livres de um sólido.

A utilização fiável do SPATE na análise quantitativa do estado de tensão de um sólido exige a calibração do sistema para as condições de ensaio previstas. No processo de calibração deve-se utilizar o sinal de uma região do corpo sujeita a tensão elevada e constante.

Neste trabalho ficou demonstrada a aplicabilidade do SPATE em situações diversas. Destaca-se aqui a utilização desta técnica na detecção de fendas superficiais em placas, por análise da modificação do estado de tensão em presença de uma dessas fendas. Nos ensaios realizados com chapas de 1,6 mm de espessura conseguiu-se detectar fendas de profundidade igual ou superior a 0,6 mm. Convém também referir as potencialidades desta técnica no estudo de componentes sujeitos a esforços de fadiga, uma vez que é necessária uma solicitação cíclica para impor condições adiabáticas.

Os estudos em juntas adesivas de sobreposição simples incidiram fundamentalmente no desenvolvimento de um modelo de elementos finitos tridimensional que permite simular com maior acuidade o comportamento deste tipo de juntas. Este modelo é constituído por elementos sólidos, que representam os substratos e o adesivo, e por elementos de interface. Estes últimos são colocados nas interfaces substrato-adesivo e permitem calcular as tensões nessa região. Para além disso, o modelo de elementos finitos proposto possui outras características importantes para a modelação deste tipo de ligações. Por exemplo, contempla a variação das tensões ao longo da espessura do adesivo e a possibilidade de inclusão das não-linearidades materiais e geométrica.

O elemento finito de interface utilizado foi desenvolvido e implementado de forma a poder ser utilizado com o programa de elementos finitos comercial ABAQUS. O seu desempenho foi testado e verificou-se um bom comportamento quando se utiliza a integração numérica de Newton-Cotes/Lobatto. Este elemento finito de interface permite ainda modelar a iniciação e propagação de dano nas interfaces através da utilização de um critério de propagação. Dois critérios foram implementados. Um desses critérios é baseado na resistência dos materiais e o outro na combinação da resistência dos materiais e da mecânica da fractura. Verificou-se que este último, ao contrário do que acontece com o primeiro, conduz a soluções convergentes com o refinamento da malha.

O modelo de elementos finitos tridimensional proposto foi utilizado no estudo da distribuição de tensões numa junta de sobreposição simples de uma liga de alumínio e adesivo de epóxico. Algumas das conclusões que se podem retirar das análises de tensões efectuadas são:

- A inclusão na modelação dos efeitos da não-linearidade geométrica é fundamental.
- As tensões no adesivo e nas interfaces substrato-adesivo variam ao longo da largura da junta, ou seja, são de natureza tridimensional.
- Considerando os materiais elásticos, as componentes normais da tensão no plano médio do adesivo são praticamente constantes ao longo da largura da junta mas decrescem significativamente na proximidade do bordo livre. A tensão de corte τ_{xy} é praticamente insensível aos efeitos tridimensionais enquanto que as restantes tensões de corte variam ao longo de toda a largura da junta.
- Ainda considerando o comportamento elástico dos materiais, as tensões σ_{yy} e τ_{xy} no plano médio do adesivo apresentam os maiores valores máximos. No entanto, as tensões σ_{xx} e σ_{zz} também apresentam valores máximos significativos.
- Para as mesmas condições, as distribuições nas interfaces das componentes σ_{yy} e τ_{xy} mantêm-se praticamente constantes na zona intermédia da junta e decrescem na proximidade dos bordos livres. Os seus valores máximos verificam-se na

extremidade da zona de sobreposição onde o adesivo e o substrato fazem um ângulo de 90°. As tensões principais máximas no adesivo ocorrem precisamente nessa mesma zona.

- Considerando o comportamento linear elástico do adesivo, a iniciação da plastificação dos substratos ocorre no final da zona de sobreposição. À medida que a força aplicada aumenta, a zona plástica avança, afastando-se do adesivo e atravessando a espessura do substrato.
- A distribuição de tensões no adesivo altera-se com a evolução da plastificação dos substratos. Os valores máximos da tensão principal máxima normalizada no plano médio do adesivo e das tensões σ_{yy} e τ_{xy} normalizadas nas interfaces deslocam-se no sentido do bordo livre com o aumento da plastificação dos substratos.
- Quando se considera o comportamento elasto-plástico do adesivo, o início da sua plastificação dá-se nas extremidades da zona de sobreposição, próximo dos pontos onde adesivo e substrato fazem um ângulo de 90°. A zona plastificada cresce para o interior da camada de adesivo e através da sua espessura.
- Na análise em que se considera o comportamento elasto-plástico de ambos os materiais, o adesivo inicia a sua plastificação antes dos substratos.
- Ao aumento da plastificação do adesivo corresponde uma diminuição das concentrações de tensões no adesivo e nas interfaces substrato-adesivo.

O modelo de elementos finitos tridimensional proposto também foi utilizado na previsão da carga de rotura de juntas adesivas. A simulação do comportamento das juntas até à rotura inclui a iniciação e propagação de dano nos elementos de interface. Isso retrata a evidência experimental de propagação de dano próximo das interfaces substrato-adesivo. Nas juntas de sobreposição simples analisadas verificou-se uma boa concordância entre os valores numéricos e experimentais das cargas de rotura, especialmente quando no modelo numérico se considerou o comportamento elasto-plástico dos materiais.

Na última parte desta dissertação aborda-se o problema do aparecimento de fendas de fadiga em vários pontos de uma junta rebitada de sobreposição simples. Habitualmente, essas fendas começam por ser de penetração parcial e com origem nos furos dos rebites. O modelo *line spring*, juntamente com o método dos elementos finitos, foram utilizados para modelar casos simples de placas com fendas superficiais, incluindo um exemplo de uma situação de *Multiple Site Damage* (MSD), e as soluções encontradas foram comparadas com resultados de análises tridimensionais. Os exemplos tratados permitiram confirmar que o modelo *line spring* não é uma boa aproximação em zonas em que a profundidade da fenda varia rapidamente, o que normalmente acontece na zona em que a fenda intersecta a superfície livre da placa. O

exemplo da placa com fenda superficial semi-elíptica permitiu ainda concluir que a razão entre a profundidade da fenda e o seu comprimento tem influência na qualidade dos resultados. Em particular, verificou-se que os erros máximos estão geralmente associados às fendas semi-circulares. Ainda nesse exemplo, e para os casos em que o factor de intensidade de tensão é máximo para $\phi = 90^\circ$, obteve-se um erro relativo máximo da solução *line spring* nesse ponto de 4,4%.

Os erros das soluções com o modelo *line spring* no problema da fenda de canto quarto-de-círculo em furo e no problema da fenda de canto em cenário de MSD são, em geral, inferiores aos verificados no problema da fenda superficial semi-circular. Naqueles exemplos, o erro relativo para $\phi = 90^\circ$ diminui com o aumento da profundidade da fenda de canto. Ainda, no caso da fenda de canto em cenário de MSD, o comprimento da fenda de penetração total não afecta os erros dos factores de intensidade de tensão na frente da fenda quarto-de-círculo.

Para todas as geometrias estudadas, os resultados relativos ao carregamento de flexão e às maiores razões entre profundidade da fenda e espessura da placa ($a/t = 0,75$ ou $0,8$) apresentam erros muito elevados. No entanto, esses erros não têm interesse do ponto de vista prático, visto que estão associados a factores de intensidade de tensão muito próximos de zero ou até negativos.

10.2 Perspectivas de trabalhos futuros

O equipamento recente de análise experimental de tensões baseado no efeito termoelástico referido no capítulo 2, e designado DeltaTherm 1000, parece colmatar um dos principais obstáculos à utilização desta técnica. Referimo-nos concretamente ao tempo de leitura da distribuição de tensões na superfície de um sólido. Enquanto que o sistema utilizado neste trabalho (SPATE 9000) faz uma leitura ponto a ponto, o sistema DeltaTherm 1000 tem uma matriz de 128×128 detectores e permite determinar a distribuição de tensões numa área quase instantaneamente. Isto vai, provavelmente, tornar a técnica mais atraente na detecção e monitorização de fendas de fadiga.

Apesar da evolução atrás referida, a técnica de análise experimental de tensões baseada no efeito termoelástico continua a apresentar a limitação de fornecer apenas a variação do primeiro invariante das tensões. Para que esta técnica passe a ter uma utilização mais generalizada é necessário encontrar meios que permitam individualizar as componentes das tensões. Um dos caminhos que valerá a pena prosseguir é o da utilização conjunta dessa técnica experimental e de métodos numéricos, como por exemplo, o método dos elementos finitos.

Relativamente ao modelo de elementos finitos tridimensional das juntas adesivas de sobreposição simples apresentado é necessário prosseguir uma verificação mais detalhada e sistematizada do seu comportamento. Essa verificação requer a execução de um programa experimental que inclua o estudo das várias características geométricas e dos materiais que podem influenciar o comportamento das juntas. Dentro das características geométricas a estudar dever-se-á incluir o excesso de adesivo que normalmente existe para além da zona de sobreposição.

O estudo do comportamento de juntas adesivas na presença de defeitos no adesivo é também um assunto com interesse e complementar do referido anteriormente.

A ferramenta desenvolvida para modelar problemas de interfaces entre diferentes materiais poderá ser complementada com um elemento de interface para problemas bidimensionais. Assim, nos casos em que tal se justifique, poder-se-á recorrer à resolução de problemas através do modelo bidimensional que não é tão exigente em termos computacionais.

O modelo *line spring*, utilizado na análise de fendas de penetração parcial, é especialmente indicado para a modelação do processo de propagação de fendas de fadiga. Tratando-se de um modelo bidimensional, fica facilitada a criação de um sistema de modelação automática do processo de propagação. Os primeiros passos nesse sentido já foram dados e espera-se concretizar esse objectivo desenvolvendo um sistema que inclui a utilização do programa ABAQUS. No contexto do estudo de fendas de penetração parcial com origem em furos, é especialmente importante conseguir registos experimentais de propagação de fendas quarto-elipse até estas se tornarem passantes, por forma a que a modelação tenha em consideração comportamentos reais e não apenas hipóteses mais ou menos arbitrárias.

- A. MÉTODO DE NEWTON GLOBALMENTE CONVERGENTE**
- B. MODELO DE MODO MISTO TRIDIMENSIONAL**
- C. MODELOS ANALÍTICOS PARA PROBLEMAS DCB, ENF E MMB**

ANEXO A

MÉTODO DE NEWTON GLOBALMENTE CONVERGENTE

O método de Newton globalmente convergente [1] foi escolhido para resolver o sistema de duas equações não-lineares (5.41). Este método combina a rápida convergência local do método de Newton com uma estratégia de convergência global que garante, em cada iteração, algum progresso na direcção da solução. Um método globalmente convergente é um método cuja convergência para a solução é menos dependente da escolha do valor inicial no processo iterativo.

No método de Newton, pretende-se resolver um sistema de equações (ver equações (5.41)) que pode ser representado por

$$\begin{aligned} f_1(\xi, \eta) &= 0 \\ f_2(\xi, \eta) &= 0 \end{aligned} \tag{A.1}$$

ou

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0 \tag{A.2}$$

sendo

$\mathbf{F}(\mathbf{x})$ - vector de funções f_i ,

$\mathbf{x}$ - vector de variáveis (ξ, η) .

Na vizinhança de $\mathbf{x}$, cada uma das funções f_i pode ser expandida em série de Taylor da seguinte forma

$$f_i(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \delta x_j + E(\delta x^2) \tag{A.3}$$

sendo $E(\delta\mathbf{x}^2)$ o termo relativo ao erro cometido pela aproximação adoptada. A matriz das derivadas parciais da equação anterior é conhecida por matriz jacobiana

$$J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad (\text{A.4})$$

Utilizando notação matricial temos

$$\mathbf{F}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{J}\delta\mathbf{x} + E(\delta\mathbf{x}^2) \quad (\text{A.5})$$

Desprezando os termos de segunda ordem e superior e fazendo $\mathbf{F}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = 0$, obtém-se um sistema de equações lineares que origina

$$\mathbf{J}\delta\mathbf{x} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (\text{A.6})$$

A resolução do sistema anterior permite obter os valores das correcções a adicionar ao vector solução para determinar o seu novo valor

$$\mathbf{x}_{\text{actual}} = \mathbf{x}_{\text{anterior}} + \delta\mathbf{x} \quad (\text{A.7})$$

Uma forma razoável de decidir se a iteração de Newton é aceitável consiste em verificar se ela provoca uma redução em

$$h = \frac{1}{2} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (\text{A.8})$$

Qualquer solução de (A.2) minimiza (A.8), mas podem existir mínimos locais de (A.8) que não são soluções de (A.2). Logo, a simples adopção deste critério de minimização de h pode ser insuficiente. Para tornar esta dificuldade, é desenvolvida uma estratégia cujos passos fundamentais são apresentados de seguida:

- i) Inicialmente aplica-se o método de Newton uma vez que na vizinhança da solução a convergência é quadrática.
- ii) Verifica-se se a iteração produz uma diminuição de h .
- iii) Em caso de não satisfação do ponto ii), volta-se ao passo anterior e promove-se uma iteração de menor tamanho que produza a pretendida diminuição de h .

Note-se que, neste método, a minimização de h é conseguida recorrendo a iterações de Newton definidas de forma a anular $\mathbf{F}(\mathbf{x})$. Isto não é equivalente à minimização directa

de h através de iterações de Newton, definidas com o objectivo de anular ∇h . Embora este método possa ocasionalmente falhar caindo num mínimo local de h , tal é raro na prática. Se isso suceder, a solução é reiniciar o processo escolhendo outros valores iniciais.

Implementação do método de Newton globalmente convergente

Os passos fundamentais da implementação do método de Newton globalmente convergente são de seguida sucintamente descritos.

O objectivo, no processo iterativo, é encontrar uma nova aproximação à solução ($\mathbf{x}_{\text{actual}}$) a partir de um valor anterior ($\mathbf{x}_{\text{anterior}}$)

$$\mathbf{x}_{\text{actual}} = \mathbf{x}_{\text{anterior}} + \lambda \delta \mathbf{x} \quad (\text{A.9})$$

sendo λ um parâmetro compreendido entre 0 e 1 ($0 < \lambda \leq 1$) que permite controlar o tamanho da iteração. A primeira tentativa numa iteração é sempre executada com $\lambda = 1$, o que corresponde ao método de Newton normal. Todavia, se $h(\mathbf{x}_{\text{actual}})$ não respeitar o critério de aceitação, é realizada nova tentativa com um valor de λ menor até se encontrar um valor de $\mathbf{x}_{\text{actual}}$ satisfatório. O critério usado tem basicamente que respeitar a condição de $h(\mathbf{x}_{\text{actual}}) < h(\mathbf{x}_{\text{anterior}})$. No entanto, para se evitar situações em que a variação do valor da função é pequena relativamente ao tamanho da iteração impõe-se que a taxa média de decréscimo de h seja pelo menos uma fracção α relativamente à anterior

$$h(\mathbf{x}_{\text{actual}}) \leq h(\mathbf{x}_{\text{anterior}}) + \alpha \nabla h \cdot (\mathbf{x}_{\text{actual}} - \mathbf{x}_{\text{anterior}}) \quad (\text{A.10})$$

sendo $0 < \alpha < 1$. Um valor usual é $\alpha = 1 \times 10^{-4}$.

A fixação do novo valor de λ é uma das características fundamentais do método. Começa-se por definir

$$g(\lambda) = h(\mathbf{x}_{\text{anterior}} + \lambda \delta \mathbf{x}) \quad (\text{A.11})$$

sendo

$$g'(\lambda) = \nabla h \cdot \delta \mathbf{x} \quad (\text{A.12})$$

A obtenção do valor de $g(\lambda)$ actual permite, por minimização, o cálculo de λ . Assim, conhecidos $g(0)$, $g'(0)$ e $g(1)$, sendo este último obtido através de uma primeira aproximação com $\lambda = 1$, podemos exprimir $g(\lambda)$ por uma função quadrática

$$g(\lambda) \equiv [g(1) - g(0) - g'(0)]\lambda^2 + g'(0)\lambda + g(0) \quad (\text{A.13})$$

Derivando e igualando a zero obtém-se o valor de λ que minimiza $g(\lambda)$

$$\lambda = -\frac{g'(0)}{2[g(1) - g(0) - g'(0)]} \quad (\text{A.14})$$

Caso este valor de λ não permita a satisfação do critério (A.10) recorre-se agora a uma função cúbica usando os dois últimos valores de λ conhecidos (λ_1 e λ_2)

$$g(\lambda) = a\lambda^3 + b\lambda^2 + g'(0)\lambda + g(0) \quad (\text{A.15})$$

Impondo que (A.15) verifique os valores de g para λ_1 e λ_2 , obtém-se um sistema de duas equações que permite determinar os coeficientes a e b

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1^2} & -\frac{1}{\lambda_2^2} \\ -\frac{\lambda_2}{\lambda_1^2} & \frac{\lambda_1}{\lambda_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(\lambda_1) - g'(0)\lambda_1 - g(0) \\ g(\lambda_2) - g'(0)\lambda_2 - g(0) \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

A minimização de (A.15) conduz a

$$\lambda = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ag'(0)}}{3a} \quad (\text{A.17})$$

Para se evitar a existência de iterações muito pequenas e tendo em conta o valor de α utilizado no critério (A.10) impõe-se para λ

$$0,1\lambda_{\text{anterior}} \leq \lambda \leq 0,5\lambda_{\text{anterior}} \quad (\text{A.18})$$

O método descrito revelou-se eficaz na determinação das coordenadas (ξ_p, η_p) do ponto P' . No entanto, para evitar situações em que h encontre um mínimo local, o que como já foi referido pode ocasionar uma falha no método, foi implementado um algoritmo que permite a utilização de outros valores iniciais. Assim, a partir de um

critério baseado na análise dos valores de $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, repete-se o processo com outros valores iniciais.

Referências

1. Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., e Flannery, B.P., *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

ANEXO B

MODELO DE MODO MISTO TRIDIMENSIONAL

O modelo de modo misto que inclui os três modos é idêntico ao descrito em 6.3.2.2 para os modos I e II. A superfície de dano passa a ser um plano que translada e roda no caso de ser ultrapassado pelo vector deslocamento relativo (ver figura B.1).

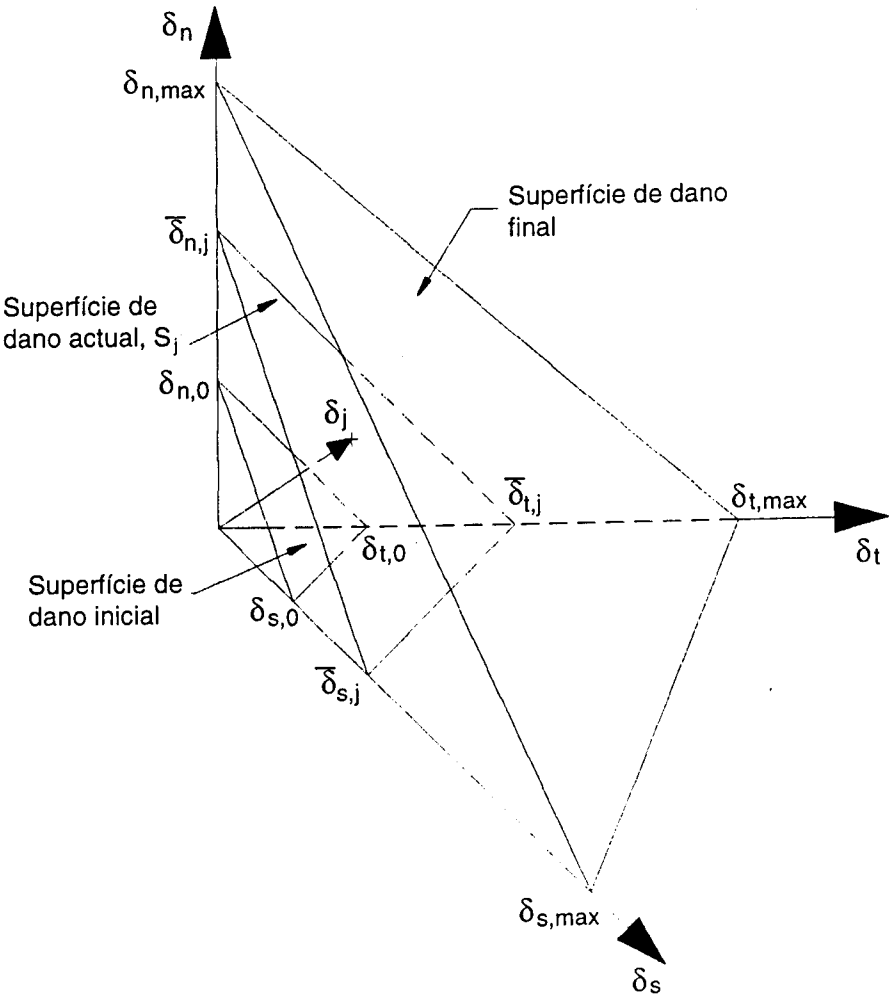


Figura B.1 Modelo de modo misto tridimensional

No caso de se verificar propagação de dano, a nova superfície é determinada por

$$S_{j+1} = \frac{\delta_{n,j+1}}{\bar{\delta}_{n,j} + x\Delta\delta_{n,j+1}} + \frac{\delta_{s,j+1}}{\bar{\delta}_{s,j} + x\Delta\delta_{s,j+1}} + \frac{\delta_{t,j+1}}{\bar{\delta}_{t,j} + x\Delta\delta_{t,j+1}} - 1 = 0 \quad (B.1)$$

Esta equação reduz-se a uma equação cúbica em x com a forma

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (B.2)$$

com

$$\begin{aligned} a &= \frac{\bar{\delta}_{s,j} - \delta_{s,j+1}}{\Delta\delta_{s,j+1}} + \frac{\bar{\delta}_{t,j} - \delta_{t,j+1}}{\Delta\delta_{t,j+1}} + \frac{\bar{\delta}_{n,j} - \delta_{n,j+1}}{\Delta\delta_{n,j+1}} \\ b &= \frac{\bar{\delta}_{s,j}(\bar{\delta}_{t,j} - \delta_{t,j+1})}{\Delta\delta_{s,j+1}\Delta\delta_{t,j+1}} + \frac{\bar{\delta}_{s,j}(\bar{\delta}_{n,j} - \delta_{n,j+1})}{\Delta\delta_{n,j+1}\Delta\delta_{s,j+1}} - \frac{\bar{\delta}_{t,j}\delta_{s,j+1}}{\Delta\delta_{t,j+1}\Delta\delta_{s,j+1}} - \frac{\bar{\delta}_{n,j}\delta_{s,j+1}}{\Delta\delta_{n,j+1}\Delta\delta_{s,j+1}} + \\ &\quad \frac{\bar{\delta}_{t,j}(\bar{\delta}_{n,j} - \delta_{n,j+1})}{\Delta\delta_{n,j+1}\Delta\delta_{t,j+1}} - \frac{\bar{\delta}_{n,j}\delta_{t,j+1}}{\Delta\delta_{n,j+1}\Delta\delta_{t,j+1}} \\ c &= \frac{-\delta_{n,j+1}\bar{\delta}_{s,j}\bar{\delta}_{t,j} - \delta_{s,j+1}\bar{\delta}_{n,j}\bar{\delta}_{t,j} - \delta_{t,j+1}\bar{\delta}_{n,j}\bar{\delta}_{s,j} + \bar{\delta}_{n,j}\bar{\delta}_{s,j}\bar{\delta}_{t,j}}{\Delta\delta_{n,j+1}\Delta\delta_{s,j+1}\Delta\delta_{t,j+1}} \end{aligned}$$

As três raízes da equação (B.2) são dadas por [1]

$$\begin{aligned} x_1 &= \left(\frac{1}{6}ab - \frac{1}{2}c - \frac{1}{27}a^2 + \frac{1}{18}\sqrt{12b^3 - 3a^2b^2 - 54abc + 81c^2 + 12a^3c} \right)^{\frac{1}{3}} - \\ &\quad \frac{\frac{1}{3}b - \frac{1}{9}a^2}{\left(\frac{1}{6}ab - \frac{1}{2}c - \frac{1}{27}a^2 + \frac{1}{18}\sqrt{12b^3 - 3a^2b^2 - 54abc + 81c^2 + 12a^3c} \right)^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{3}a \end{aligned} \quad (B.3)$$

$$\begin{aligned}
 x_2 = & -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{6}ab - \frac{1}{2}c - \frac{1}{27}a^2 + \frac{1}{18} \sqrt{12b^3 - 3a^2b^2 - 54abc + 81c^2 + 12a^3c} \right)^{\frac{1}{3}} + \\
 & \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{3}b - \frac{1}{9}a^2}{\left(\frac{1}{6}ab - \frac{1}{2}c - \frac{1}{27}a^2 + \frac{1}{18} \sqrt{12b^3 - 3a^2b^2 - 54abc + 81c^2 + 12a^3c} \right)^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{3}a + \\
 & \frac{1}{2} I \sqrt{3} \left[\left(\frac{1}{6}ab - \frac{1}{2}c - \frac{1}{27}a^2 + \frac{1}{18} \sqrt{12b^3 - 3a^2b^2 - 54abc + 81c^2 + 12a^3c} \right)^{\frac{1}{3}} + \right. \\
 & \left. \frac{\frac{1}{3}b - \frac{1}{9}a^2}{\left(\frac{1}{6}ab - \frac{1}{2}c - \frac{1}{27}a^2 + \frac{1}{18} \sqrt{12b^3 - 3a^2b^2 - 54abc + 81c^2 + 12a^3c} \right)^{\frac{1}{3}}} \right] \quad (B.4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_3 = & -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{6}ab - \frac{1}{2}c - \frac{1}{27}a^2 + \frac{1}{18} \sqrt{12b^3 - 3a^2b^2 - 54abc + 81c^2 + 12a^3c} \right)^{\frac{1}{3}} + \\
 & \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{3}b - \frac{1}{9}a^2}{\left(\frac{1}{6}ab - \frac{1}{2}c - \frac{1}{27}a^2 + \frac{1}{18} \sqrt{12b^3 - 3a^2b^2 - 54abc + 81c^2 + 12a^3c} \right)^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{3}a - \\
 & \frac{1}{2} I \sqrt{3} \left[\left(\frac{1}{6}ab - \frac{1}{2}c - \frac{1}{27}a^2 + \frac{1}{18} \sqrt{12b^3 - 3a^2b^2 - 54abc + 81c^2 + 12a^3c} \right)^{\frac{1}{3}} + \right. \\
 & \left. \frac{\frac{1}{3}b - \frac{1}{9}a^2}{\left(\frac{1}{6}ab - \frac{1}{2}c - \frac{1}{27}a^2 + \frac{1}{18} \sqrt{12b^3 - 3a^2b^2 - 54abc + 81c^2 + 12a^3c} \right)^{\frac{1}{3}}} \right] \quad (B.5)
 \end{aligned}$$

A menor raiz real depende dos valores dos deslocamentos relativos, da variação desses deslocamentos e das intersecções da superfície de dano anterior com os eixos. Tendo em conta a seguinte notação

$$R_1 = 12b^3 - 3a^2b^2 - 54abc + 81c^2 + 12a^3c \quad (B.6)$$

$$R_2 = \frac{1}{6}ab - \frac{1}{2}c - \frac{1}{27}a^2 + \frac{1}{18} \sqrt{12b^3 - 3a^2b^2 - 54abc + 81c^2 + 12a^3c} \quad (B.7)$$

$$R_3 = \frac{\frac{1}{3}b - \frac{1}{9}a^2}{\left(\frac{1}{6}ab - \frac{1}{2}c - \frac{1}{27}a^2 + \frac{1}{18}\sqrt{12b^3 - 3a^2b^2 - 54abc + 81c^2 + 12a^3c}\right)^{\frac{1}{3}}} \quad (\text{B.8})$$

as várias situações possíveis são dadas por:

i) R_2 real e maior do que zero

$$\text{Se } (R_2)^{2/3} = \frac{1}{9}a^2 - \frac{1}{3}b \text{ então}$$

$$x_1 = 2(R_2)^{1/3} - \frac{1}{3}a$$

$$x_2 = x_3 = -(R_2)^{1/3} - \frac{1}{3}a$$

senão

$$x = x_1 = (R_2)^{1/3} - R_3 - \frac{1}{3}a$$

ii) R_2 real e menor do que zero

$$\text{Se } (-R_2)^{1/3} = \frac{1}{9}a^2 - \frac{1}{3}b \text{ então}$$

$$x_1 = x_3 = (-R_2)^{1/3} - \frac{1}{3}a$$

$$x_2 = -2(-R_2)^{1/3} - \frac{1}{3}a$$

senão

$$x = x_2 = -(-R_2)^{1/3} + \frac{\frac{1}{3}b - \frac{1}{9}a^2}{(-R_2)^{1/3}} - \frac{1}{3}a$$

iii) R_2 imaginário puro $\left(R_2 = \frac{1}{18}I\sqrt{-R_1}\right)$

$$x_1 = \sqrt{3}\left(\frac{1}{18}\sqrt{-R_1}\right)^{1/3} - \frac{1}{3}a$$

$$x_2 = -\sqrt{3}\left(\frac{1}{18}\sqrt{-R_1}\right)^{1/3} - \frac{1}{3}a$$

$$x_3 = -\frac{1}{3}a$$

$$\text{iv) } R_2 = R_4 + \frac{1}{18}I\sqrt{-R_1} \text{ e } R_4 \text{ maior do que zero } \left(R_4 = \frac{1}{6}ab - \frac{1}{2}c - \frac{1}{27}a^3 \right)$$

$$\text{Seja } \alpha = \arctg \left(\frac{\frac{1}{18}\sqrt{-R_1}}{R_4} \right)$$

$$\text{Se } \left(-\frac{1}{324}R_1 + R_4^2 \right)^{1/3} = \frac{1}{9}a^2 - \frac{1}{3}b \text{ então}$$

$$x_1 = 2 \left(-\frac{1}{324}R_1 + R_4^2 \right)^{1/6} \cos \left(\frac{1}{3}\alpha \right) - \frac{1}{3}a$$

$$x_2 = - \left(-\frac{1}{324}R_1 + R_4^2 \right)^{1/6} \cos \left(\frac{1}{3}\alpha \right) - \frac{1}{3}a - \sqrt{3} \left(-\frac{1}{324}R_1 + R_4^2 \right)^{1/6} \sin \left(\frac{1}{3}\alpha \right)$$

$$x_3 = - \left(-\frac{1}{324}R_1 + R_4^2 \right)^{1/6} \cos \left(\frac{1}{3}\alpha \right) - \frac{1}{3}a + \sqrt{3} \left(-\frac{1}{324}R_1 + R_4^2 \right)^{1/6} \sin \left(\frac{1}{3}\alpha \right)$$

$$\text{v) } R_2 = R_4 + \frac{1}{18}I\sqrt{-R_1} \text{ e } R_4 \text{ menor do que zero } \left(R_4 = \frac{1}{6}ab - \frac{1}{2}c - \frac{1}{27}a^3 \right)$$

$$\text{Seja } \alpha = \pi - \arctg \left(\frac{\frac{1}{18}\sqrt{-R_1}}{-R_4} \right)$$

$$\text{Se } \left(-\frac{1}{324}R_1 + R_4^2 \right)^{1/3} = \frac{1}{9}a^2 - \frac{1}{3}b \text{ então}$$

$$x_1 = 2 \left(-\frac{1}{324}R_1 + R_4^2 \right)^{1/6} \cos \left(\frac{1}{3}\alpha \right) - \frac{1}{3}a$$

$$x_2 = - \left(-\frac{1}{324}R_1 + R_4^2 \right)^{1/6} \cos \left(\frac{1}{3}\alpha \right) - \frac{1}{3}a - \sqrt{3} \left(-\frac{1}{324}R_1 + R_4^2 \right)^{1/6} \sin \left(\frac{1}{3}\alpha \right)$$

$$x_3 = - \left(-\frac{1}{324}R_1 + R_4^2 \right)^{1/6} \cos \left(\frac{1}{3}\alpha \right) - \frac{1}{3}a + \sqrt{3} \left(-\frac{1}{324}R_1 + R_4^2 \right)^{1/6} \sin \left(\frac{1}{3}\alpha \right)$$

Referências

1. Tuma, J.J., *Engineering Mathematics Handbook*. McGraw-Hill, New York, 1978.

ANEXO C

MODELOS ANALÍTICOS PARA PROBLEMAS DCB, ENF E MMB

Taxa de libertação de energia

Consideremos uma placa de espessura B com uma fenda lateral e sujeita à carga P , como representado na figura C.1. A taxa de libertação de energia da placa com o crescimento da fenda pode ser escrita na seguinte forma

$$G = \frac{P^2}{2B} \frac{\partial C}{\partial a} \quad (C.1)$$

em que

a - comprimento da fenda,

C - *compliance* da placa.

Se não existir crescimento da fenda, o deslocamento Δ é proporcional à carga aplicada, isto é,

$$\Delta = CP \quad (C.2)$$

Substituindo a equação anterior em (C.1) vem

$$G = \frac{P^2}{2B} \frac{\partial(\Delta/P)}{\partial a} \quad (C.3)$$

A expressão de G na equação (C.3) para uma placa com uma fenda será utilizada nas seguintes derivações.

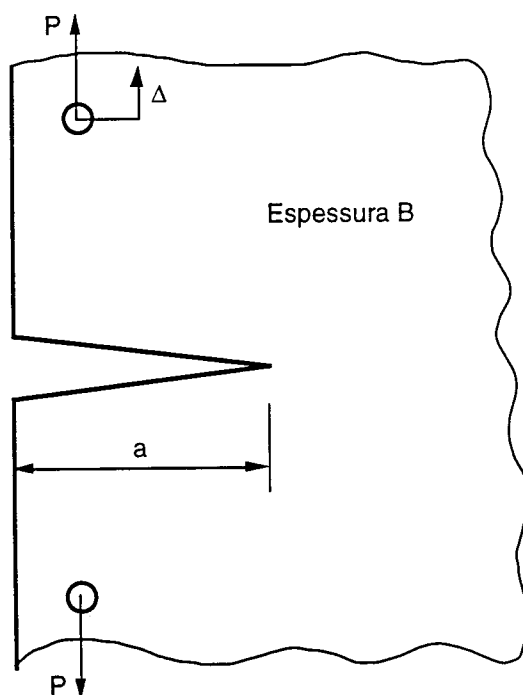


Figura C.1 Placa com fenda lateral.

Double Cantilever Beam (DCB)

O ensaio Double Cantilever Beam (DCB) é um problema de modo I puro. A geometria do provete, condições de fronteira e carregamento estão ilustrados na figura C.2.

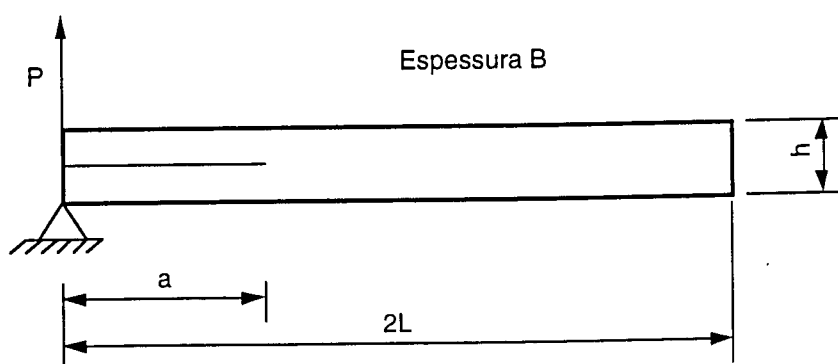


Figura C.2 Ensaio DCB.

Da teoria das vigas, a flecha Δ na extremidade do provete DCB, onde a carga P é aplicada, pode escrever-se na seguinte forma

$$\Delta = \frac{16Pa^3}{3EI} \quad (C.4)$$

em que E é o módulo de elasticidade do material e I o momento de inércia da secção. A taxa de libertação de energia em (C.3) toma a forma

$$G = \frac{P^2}{2B} \frac{\partial(\Delta/P)}{\partial a} = \frac{8P^2a^2}{BEI} \quad (C.5)$$

e o comprimento de fenda (a) escreve-se

$$a = \frac{1}{P} \sqrt{\frac{GBEI}{8}} \quad (C.6)$$

Substituindo (C.6) na equação (C.4) resulta

$$\Delta = \frac{16}{3EIP^2} \left(\frac{BGEI}{8} \right)^{3/2} \quad (C.7)$$

Antes da fenda propagar, a relação linear carga/deslocamento é governada pela equação (C.4) substituindo (a) por (a_0), em que (a_0) é o comprimento inicial da fenda. Se se assumir que, durante a propagação, a taxa de libertação de energia G é constante e igual à taxa crítica de libertação de energia G_{lc} , a relação carga/deslocamento nessa situação é dada pela equação (C.7) com $G = G_{lc}$.

End Notched Flexure (ENF)

O ensaio End Notched Flexure (ENF) é um problema de modo II puro. Na figura C.3 mostram-se as características geométricas, carregamento e condições de fronteira do problema.

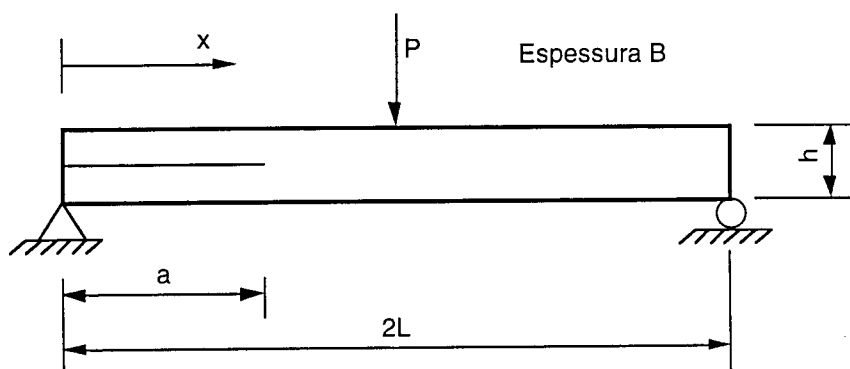


Figura C.3 Ensaio ENF.

A derivação de expressões analíticas para o deslocamento no problema de modo II não é tão simples como para o problema de modo I. No problema de modo II, as expressões são diferentes para os casos em que o comprimento da fenda é menor e maior do que metade do comprimento da viga.

Caso: $a \leq L$

Para calcular o deslocamento Δ no meio da viga sujeita à carga P utiliza-se o teorema de Castigliano da seguinte forma:

$$0 \leq x < a$$

$$\Delta_1 = 2 \int_0^a \frac{8M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dx = \int_0^a \frac{Px^2}{EI} dx = \frac{Pa^3}{3EI} \quad (C.8)$$

$$a \leq x < L$$

$$\Delta_2 = \int_a^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dx = \int_a^L \frac{Px^2}{4EI} dx = \frac{P(L^3 - a^3)}{12EI} \quad (C.9)$$

$$L \leq x \leq 2L$$

$$\Delta_3 = \int_L^{2L} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dx = \int_L^{2L} \frac{P(2L-x)^2}{4EI} dx = \frac{PL^3}{12EI} \quad (C.10)$$

O deslocamento no meio da viga sujeita à carga P vem

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = \frac{P(2L^3 + 3a^3)}{12EI} \quad (C.11)$$

Introduzindo a expressão anterior na equação (C.3) obtém-se

$$G = \frac{P^2}{2B} \frac{\partial(\Delta/P)}{\partial a} = \frac{3P^2 a^2}{8BEI} \quad (C.12)$$

e explicitando o comprimento de fenda resulta

$$a = \frac{1}{P} \sqrt{\frac{8GBEI}{3}} \quad (C.13)$$

Substituindo a expressão anterior na equação (C.11) vem

$$\Delta = \frac{P}{12EI} \left[2L^3 + \frac{(8GBEI)^{3/2}}{\sqrt{3}P^3} \right] \quad (C.14)$$

Caso: $a > L$

Utilizando o mesmo procedimento do caso anterior temos:

$$0 \leq x < L$$

$$\Delta_1 = 2 \int_0^L \frac{8M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dx = \int_0^L \frac{Px^2}{EI} dx = \frac{PL^3}{3EI} \quad (C.15)$$

$$L \leq x < a$$

$$\Delta_2 = 2 \int_L^a \frac{8M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dx = \int_L^a \frac{P(2L-x)^2}{EI} dx = \frac{P}{3EI} [L^3 - (2L-a)^3] \quad (C.16)$$

$$a \leq x \leq 2L$$

$$\Delta_3 = \int_a^{2L} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dx = \int_a^{2L} \frac{P(2L-x)^2}{4EI} dx = \frac{P(2L-a)^3}{12EI} \quad (C.17)$$

O deslocamento no meio da viga sujeita à carga P vem

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = \frac{P}{3EI} \left[2L^3 - \frac{3}{4}(2L - a)^3 \right] \quad (C.18)$$

Introduzindo este deslocamento Δ na taxa de libertação de energia (ver equação (C.3)) fica

$$G = \frac{P^2}{2B} \frac{\partial(\Delta/P)}{\partial a} = \frac{3P^2(2L - a)^2}{8BEI} \quad (C.19)$$

e o comprimento de fenda exprime-se na forma

$$a = 2L - \frac{1}{P} \sqrt{\frac{8GBEI}{3}} \quad (C.20)$$

Substituindo a expressão anterior na equação (C.18) vem

$$\Delta = \frac{P}{3EI} \left[2L^3 - \frac{(8GBEI)^{3/2}}{4\sqrt{3}P^3} \right] \quad (C.21)$$

Antes da fenda propagar, a relação carga/deslocamento é dada pela equação (C.11) considerando o comprimento de fenda $a = a_0$. Após o início da propagação, a relação carga/deslocamento é governada pela equação (C.14) para $a \leq L$ e pela equação (C.21) para $a > L$, tendo em conta que $G = G_{IIc}$.

Mixed Mode Bending (MMB)

O Mixed Mode Bending (MMB) é um ensaio de modo misto que permite testar diferentes rácios G_I/G_{II} . A configuração deste ensaio está ilustrada na figura C.4(a). Na figura C.4(b) estão representadas as características geométricas da viga, as condições de carregamento e as condições de fronteira do modelo.

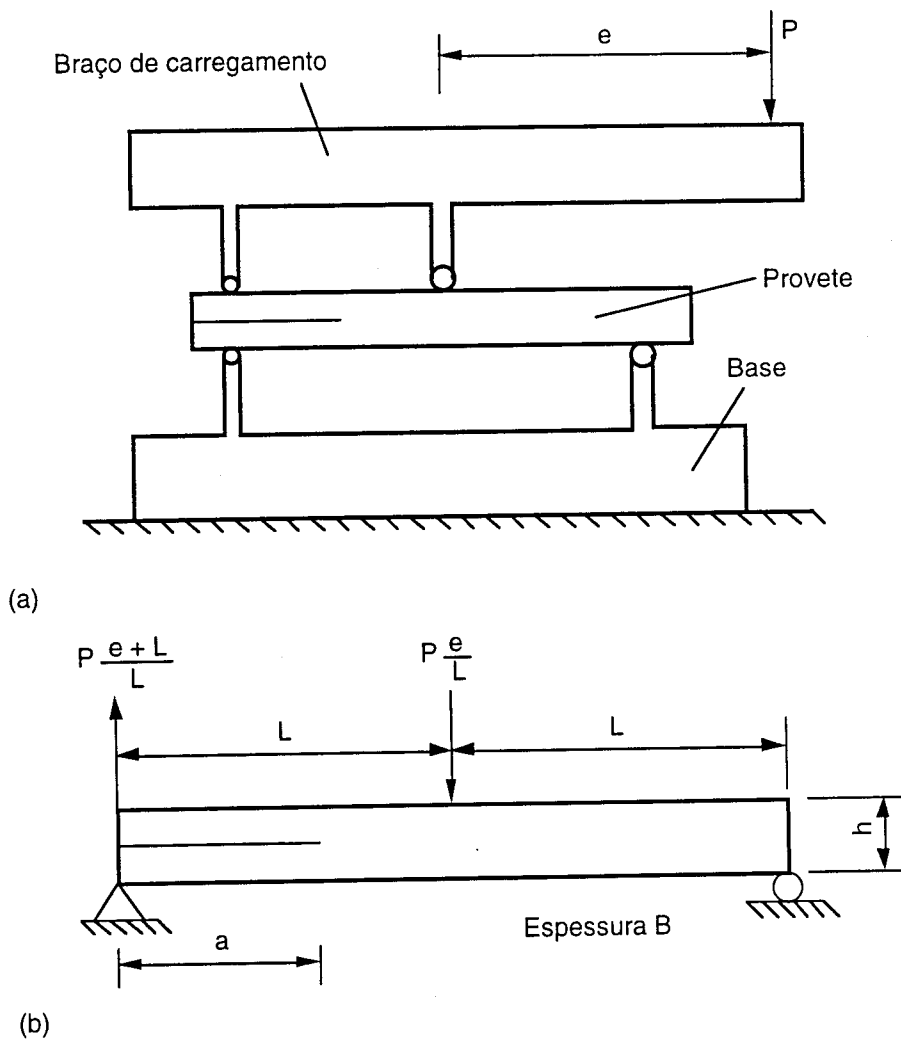


Figura C.4 Ensaio MMB: (a) sistema experimental (b) modelo.

As cargas associadas com os modos I e II são dadas por [1]

$$P_I = \left(\frac{3e - L}{4L} \right) P \quad (C.22)$$

$$P_{II} = \left(\frac{e + L}{L} \right) P \quad (C.23)$$

As carga \$P_I\$ e \$P_{II}\$ são responsáveis pelos deslocamentos \$\Delta_I\$ e \$\Delta_{II}\$, respectivamente, nos pontos em que são aplicadas.



Caso: $a \leq L$

A partir das equações (C.4) e (C.11), os deslocamentos Δ_I e Δ_{II} podem-se escrever na seguinte forma

$$\Delta_I = \frac{16P_I a^3}{3EI} \quad (C.24)$$

e

$$\Delta_{II} = \frac{P_{II}(2L^3 + 3a^3)}{12EI} \quad (C.25)$$

As correspondentes taxas de libertação de energia são obtidas a partir das equações (C.5) e (C.12) e escrevem-se

$$G_I = \frac{P_I^2}{2B} \frac{\partial(\Delta_I/P_I)}{\partial a} = \frac{8P_I^2 a^2}{BEI} \quad (C.26)$$

e

$$G_{II} = \frac{P_{II}^2}{2B} \frac{\partial(\Delta_{II}/P_{II})}{\partial a} = \frac{3P_{II}^2 a^2}{8BEI} \quad (C.27)$$

Utilizando as expressões de P_I e P_{II} nas equações (C.22) e (C.23), a razão G_I/G_{II} pode-se escrever [1]

$$\frac{G_I}{G_{II}} = \frac{4}{3} \left(\frac{3e - L}{e + L} \right)^2 \quad (C.28)$$

o que indica que a razão G_I/G_{II} é independente do comprimento de fenda (a). Consideremos o seguinte critério de modo misto

$$\frac{G_I}{G_{Ic}} + \frac{G_{II}}{G_{IIc}} = 1 \quad (C.29)$$

Substituindo as expressões (C.26) e (C.27) em (C.29) obtém-se

$$\frac{8P_I^2 a^2}{BEIG_{Ic}} + \frac{3P_{II}^2 a^2}{8BEIG_{IIc}} = 1 \quad (C.30)$$

e explicitando o comprimento de fenda vem

$$a = \sqrt{\frac{BEI}{\frac{8P_I^2}{G_{lc}} + \frac{3P_{II}^2}{8G_{llc}}}} \quad (C.31)$$

O deslocamento Δ na extremidade da viga vem dado por

$$\Delta = \frac{16P_I}{3EI} \left(\frac{BEI}{\frac{8P_I^2}{G_{lc}} + \frac{3P_{II}^2}{8G_{llc}}} \right)^{3/2} \quad (C.32)$$

Caso: $a > L$

A carga P_{II} relativa ao modo II não provoca um deslocamento adicional na extremidade da viga onde a carga P_I é aplicada. Isso significa que as equações (C.24) e (C.26) relativas ao modo I permanecem válidas nesta situação. No entanto, a carga P_I provoca um deslocamento extra no meio do provete. O deslocamento Δ_{II} no meio da viga vem assim dado por [2]

$$\Delta_{II} = \frac{P_{II}}{3EI} \left[2L^3 - \frac{3}{4}(2L - a)^3 \right] - \frac{8P_I}{3EI} (a - L)^2 (2a + L) \quad (C.33)$$

e G_{II} escreve-se na forma

$$G_{II} = \frac{P_{II}}{2BEI} \left[\frac{3}{4} P_{II} (2L - a)^2 - 16P_I a (a - L) \right] \quad (C.34)$$

Substituindo as expressões de G_I e G_{II} na equação (C.29) obtém-se

$$\frac{8P_I^2 a^2}{BEIG_{lc}} + \frac{P_{II}}{2BEIG_{llc}} \left[\frac{3}{4} P_{II} (2L - a)^2 - 16P_I a (a - L) \right] = 1 \quad (C.35)$$

que pode ser escrita como uma equação quadrática com incógnita (a) na seguinte forma

$$\begin{aligned} & \frac{1}{BEI} \left(\frac{8P_I^2}{G_{lc}} + \frac{3P_{II}^2}{8G_{llc}} - \frac{8P_I P_{II}}{G_{llc}} \right) a^2 - \frac{1}{BEI} \left(\frac{3P_{II}^2 L}{2G_{llc}} - \frac{8P_I P_{II} L}{G_{llc}} \right) a + \\ & \frac{3P_{II}^2 L}{2BEIG_{llc}} - 1 = 0 \end{aligned} \quad (C.36)$$

O valor de (a) é obtido por resolução da equação anterior. O deslocamento na extremidade da viga é dado pela expressão (C.24) considerando o valor de (a) acima determinado. Em resumo, antes da fenda propagar, a relação carga/deslocamento na extremidade da viga é dada pela equação (C.24) com $a = a_0$. Após o início da propagação, e para $a \leq L$, a equação (C.32) define o deslocamento na extremidade da viga. Para a situação em que $a > L$, esse deslocamento é definido por (C.24) tendo em conta que o comprimento de fenda (a) é determinado por resolução da equação (C.36).

Referências

1. Reeder, J.R. e Crews, J.H., "Mixed-mode bending method for delamination testing", *AIAA Journal*, Vol. 28, pp. 1270-1276, 1990.
2. Mi, Y. e Crisfield, M.A., *Analytical derivation of load/displacement relationship for the DCB and MMB and proof of the FEA formulation*. Department of Aeronautics, Imperial College, London, 1996.





FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

BIBLIOTECA



0000050890