

FRANCISCO J. SARMENTO CORREIA DE ARAÚJO

---

**Princípios gerais da teoria matemática  
da plasticidade e sua aplicação  
ao cálculo das peças prismáticas**

626

---

**P Ô R T O — 1 9 4 3**

**Princípios gerais da teoria matemática da plasticidade  
e sua aplicação ao cálculo das peças prismáticas**

# Princípios gerais da teoria matemática da plasticidade e sua aplicação ao cálculo das peças prismáticas

DISSERTAÇÃO PARA DOUTORAMENTO EM  
ENGENHARIA CIVIL, NA FACULDADE DE  
ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PÔRTO

Trabalho subsidiado pelo Instituto para a Alta Cultura

073D  
A 6392 624(043) ARAJ/PRI

UNIVERSIDADE DO PÔRTO
Faculdade de Engenharia
DEPARTAMENTO DE
Matemática
Nº 3881
Clas 626

15.12.944 0.4.31269

PÔRTO—1943



## INTRODUÇÃO

*Pode afirmar-se que toda a moderna técnica das construções, se baseia na hipótese fundamental de que, sob a acção das solicitações normais de serviço, as deformações são elásticas e muito pequenas, tão pequenas, que se consideram desprezíveis os seus produtos e potências de ordem superior à primeira. Desta hipótese decorre o enunciado da lei de Hooke generalizada, segundo o qual, o tensor dos esforços está ligado ao tensor das deformações por relação linear.*

*A lei de Hooke generalizada permite à teoria matemática da elasticidade pôr em equação o problema da determinação dos esforços e das deformações em todos os pontos de um corpo ou de um sistema de corpos sólidos em equilíbrio sob a acção de solicitações exteriores e até determinar esses esforços e deformações, naqueles raros casos em que as equações diferenciais do equilíbrio elástico são integráveis; e quando as dificuldades do cálculo matemático são insuperáveis, dá à teoria da resistência dos materiais elementar, à custa de simplificações que a prática legitima mais ou menos, o indispensável meio de «proporcionar racionalmente as construções, e todas as suas partes, às forças que as solicitam, considerando os pontos de vista da segurança, da economia e do aspecto» (Baes).*

*Mas o progresso da arte de construir, o desenvolvimento e divulgação dos processos de cálculo e execução dos sistemas hiperstáticos, as leis da concorrência e da economia e, acima de tudo, a eterna aspiração de aperfeiçoar, conduzem à alteração profunda da concepção clássica do funcionamento elástico das construções.*

*As deformações, sob a acção das solicitações normais de serviço, não são inteiramente elásticas e o aumento da sensibilidade dos aparelhos de medida, já autoriza a duvidar da existência, na natureza, de corpos perfeitamente elásticos. Mesmo nas construções mecânicas, onde a exe-*

cução e o funcionamento dos maquinismos atingem perfeição que os aproxima dos esquemas teóricos, se tem verificado a existência de deformações não proporcionais e irreversíveis.

*E estas deformações até não são, na generalidade dos casos, prejudiciais à segurança das construções, subordinadas à lei da adaptação, com que a natureza remedeia, se é possível ou até onde é possível, os erros dos homens.*

*Quere isto dizer que, em geral, as deformações chamadas plásticas, dão às construções maior segurança (em todo o caso, segurança diferente) do que a prevista pelo cálculo clássico e que, por consequência, é possível proporcionar mais racionalmente e construir mais economicamente. E se é verdade que o aspecto exterior das coisas deve ser o espelho da sua função, aí está justificada a importância do estudo da plasticidade, como meio de «proporcionar racionalmente as construções, e todas as suas partes, às forças que as solicitam, considerando os pontos de vista da segurança, da economia e do aspecto».*

*A teoria da plasticidade revela-se, desta maneira, ciência de tão vasto campo de acção como a clássica teoria da elasticidade e não é nosso fim, porque não está ao nosso alcance, expô-la com rigor e pormenor que permitam a sua aplicação geral aos problemas da técnica moderna. De entre êstes, apenas nos interessa encarar o das estruturas hiperstáticas constituídas de peças prismáticas, por ser de immediata aplicação na construção civil corrente e nas obras públicas. De resto, é no comportamento das construções hiperstáticas que mais se faz sentir a influência das deformações plásticas, com as vantagens que atrás acentuamos, e com alguns inconvenientes, que a seu tempo serão apontados.*

*O estudo dos sistemas hiperstáticos constituídos de peças prismáticas, tendo em conta as deformações plásticas, desdobra-se, naturalmente, no do equilíbrio elasto-plástico interior das peças prismáticas e no dos esforços interiores e exteriores a que aquêles sistemas estão sujeitos, por virtude da sua indeterminação estática. Problemas distintos, mas não independentes, pois que o segundo só se pode resolver à custa do primeiro, como é manifesto.*

*Ocupamo-nos, agora, apenas do estudo do equilíbrio elasto-plástico interior das peças prismáticas (aliás equilibrio hiperstático, como observaremos), deixando para trabalho posterior, o estudo dos sistemas estáticamente indeterminados, tendo em conta as deformações plásticas.*

*Devem-se a Tresca, Saint-Venant e Maurice Lévy os primeiros estudos das leis que regem as deformações e os esforços, nos corpos em*

*regimen de plasticidade. A teoria de Saint-Venant da plasticidade plana (que Maurice Lévy alargou à plasticidade a três dimensões) é ainda hoje aceite como a teoria matemática da plasticidade dos corpos sólidos e só em alguns aspectos de pormenor foi modificada por autores mais modernos, como Flamant, Brillouin, Colonetti, von Misés, Hencky, Nadai, etc.*

O método seguido nesta teoria, é semelhante ao da teoria matemática da elasticidade: parte-se da análise das pequenas deformações e dos esforços nos meios materiais contínuos, para as relações que, no processo de deformação plástica, ligam os esforços com as velocidades de deformação. Chega-se, assim, às equações diferenciais da plástico-dinâmica que, juntamente com as equações indefinidas do equilíbrio instantâneo e aquela que exprime ter-se atingido a fase plástica do processo de deformação, a condição de plasticidade, determinam completamente o problema matemático. A integração deste sistema de equação diferenciais é, por vezes, impossível e em todos os casos é extremamente delicada.

E aqui ocorre a primeira simplificação: a de considerar lentas, além de infinitamente pequenas, as deformações plásticas. Isto permite libertar o problema de uma variável, o tempo, e o estudo restringe-se ao do equilíbrio plástico-estático, em cada um dos instantes em que se divide o processo de deformação. Mesmo assim, porém, as dificuldades do problema matemático são tão grandes, que se tornam indispensáveis outras simplificações.

Não quiere isto dizer que tenha sido pôsto de parte o aspecto de rigor teórico da questão. Pelo contrário, alguns autores, como von Misés, Prandtl, Prager, Geiringer, Oseen, entre outros, levaram muito longe o desenvolvimento matemático, mas nem sempre chegaram a resultados que a experiência permitisse considerar indiscutíveis ou a métodos que pudessem considerar-se de aplicação prática.

Hencky e Prandtl ainda conseguiram dividir o problema e, por consequência, simplificá-lo, mostrando a existência de equilíbrios isostáticos e hiperstáticos. Hencky introduziu a hipótese do trabalho mínimo nas deformações plásticas e Colonetti, independentemente, generalizou ao equilíbrio elasto-plástico o teorema de Menabrea, o que permite resolver certos problemas hiperstáticos, sem a necessidade de calcular as deformações plásticas.

Baseado neste teorema do trabalho mínimo, fez Colonetti o estudo do equilíbrio interior das peças prismáticas, o que, afinal, é a generalização ao equilíbrio elasto-plástico do problema de Saint-Venant da elasticidade. Também Nadai esboçou a resolução do mesmo problema,

mas sem o carácter de generalidade de Colonetti, que chegou a elegantíssimas soluções em vários casos de solicitação correntes, as quais se prestam a disposição formal semelhante às correspondentes da elasticidade e são de fácil e imediata aplicação prática.

A teoria de Colonetti, que só excepcionalmente faz concessões de ordem empírica, permite chegar a resultados muito próximos dos obtidos experimentalmente em ensaios clássicos (de Bach, de Maier-Leibniz e de outros) e constitui, decerto, o mais coerente corpo de doutrina que existe sobre esta matéria. Está-se ainda muito longe da teoria geral da plasticidade, que justifique analiticamente o fenómeno do endurecimento a frio e tenha em conta o acréscimo de resistência que dele resulta para os corpos deformados plásticamente; a solução do problema do esforço cortante na flexão ainda não é satisfatória; a consideração dos efeitos de fadiga por repetição e alternância dos esforços ainda não é possível; mas não há dúvida de que, dentro de estrito critério de segurança, esta teoria permite chegar a resultados que diferem dos verdadeiros, tanto ou tão-pouco, como diferem dos da teoria da elasticidade os da resistência dos materiais clássica.

O nosso estudo tem em vista resolver o problema do equilíbrio elasto-plástico das peças prismáticas, a partir dos princípios da teoria matemática da plasticidade, mostrando que as soluções de Colonetti se enquadram nessa teoria, como casos particulares de solicitações mais complexas, analisando estas solicitações e generalizando-lhes os métodos de aplicação prática.

Começamo-lo pela descrição daquela parte que nos interessa do fenómeno físico da plasticidade, o que nos serve para pôr o problema. Em seguida, expomos os princípios gerais da teoria matemática da plasticidade, baseados no estudo das pequenas deformações e dos esforços nos corpos isótipos. Esse estudo é feito pelo cálculo tensorial, porque isso nos permite sintetizar melhor a série de princípios gerais que, pelo cálculo algébrico clássico, teriam de ser expostos em muito maior número de páginas.

O cálculo tensorial serve-nos, assim, de meio de trabalho, que abandonamos ao entrar na aplicação dos princípios gerais da teoria da plasticidade ao estudo das peças prismáticas, passando, então, a utilizar o cálculo algébrico clássico, com a notação de Kármán, preconizada no Congresso de 1912 da Associação Internacional para Ensaio dos Materiais, e que é a notação habitual da resistência dos materiais. Esta mudança de notação não nos parece prejudicial, desde que permite tirar partido das vantagens oferecidas pelo cálculo dos tensores, sem alterar o



aspecto das expressões finais, nas aplicações, e é, de resto, usada correntemente <sup>(1)</sup>.

O estudo das peças prismáticas, fazemo-lo à maneira clássica da teoria da elasticidade, pelo método semi-inverso de Saint-Venant: a partir das equações indefinidas de equilíbrio dos esforços e das condições de compatibilidade das deformações. Obtidas as expressões finais nos casos de maior generalidade, as aplicações nesses casos e nos mais simples, decorrem imediatamente, quer por via gráfica (como faz Colonnelli apenas para a flexão simples e para a flexão composta, não desviadas), quer por via analítica.

Este estudo rigoroso leva a concluir que, como na elasticidade, a hipótese de Bernouilli da conservação das secções planas, é aceitável em plasticidade, dentro dos limites das aplicações práticas. Por isso fazemos, em seguida, a exposição da teoria elementar da plasticidade, tendo aquela hipótese como ponto de partida e chegando, evidentemente, às mesmas fórmulas de aplicação, através de raciocínios extremamente simples, mas que não permitem dar conta do grau de aproximação que comportam.

---

(1) « Bien que la notation tensorielle ne dispense pas du retour final aux formules explicites pour pousser les applications jusqu'au calcul numérique, elle apporte dans certaines questions classiques une synthèse heureuse des résultats ». (P. PAINLEVÉ, Prefácio do Curso de Mecânica professado por C. Platrier na Escola Politécnica do Paris. Ed. Gauthier-Villars, Paris, 1929).

## CAPÍTULO I

### Princípios gerais da teoria matemática da plasticidade

1 — CONSIDERAÇÕES GERAIS — Quando se ensaia, à tracção simples, uma proveta de metal dúctil, o diagrama dos esforços em função das deformações, obtido na máquina de ensaio tem, em geral, o aspecto indicado na figura 1.

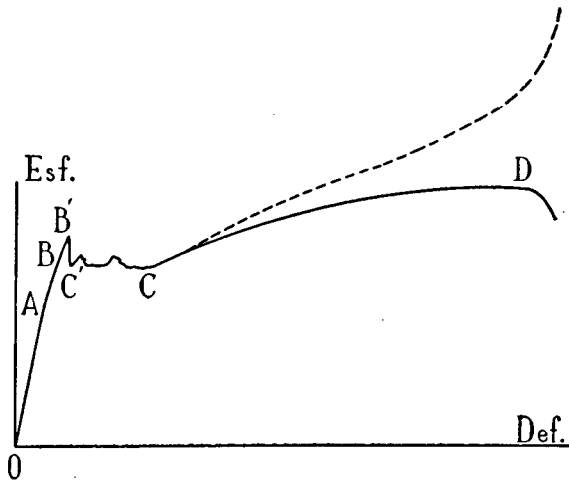


Fig. 1

A porção  $OB$  do diagrama corresponde às deformações elásticas da proveta, proporcionais aos esforços, desde  $O$  até  $A$ , não proporcionais desde  $A$  até  $B$ , mas sempre reversíveis. Quere isto dizer que, enquanto o esforço não exceder aquêlê que corresponde ao ponto  $B$  do diagrama, sempre as deformações se anulam ao cessar a carga de ensaio.

O ponto  $A$  define o *limite de proporcionalidade*, o ponto  $B$  o *limite de elasticidade* do material de que a proveta é constituída.

Nem sempre é possível, mesmo com aparelhos de grande sensibilidade, fixar o ponto *B* do diagrama, a partir do qual as deformações deixam de ser reversíveis. Por isso mesmo e para o efeito das aplicações práticas, se confunde o ponto *B* com o ponto *B'*, a que se chama *limite aparente de elasticidade*, mais facilmente determinável pela queda brusca de carga, a que corresponde na máquina de ensaio. O ponto *B'* pertence já à segunda fase das deformações, a fase *plástica*, durante a qual só uma pequena fracção da deformação total se anula, ao cessar a acção da carga de ensaio.

A deformação remanescente ou plástica vai sendo cada vez maior à medida que o ensaio prossegue e verifica-se que, desde *B'* a *C*, o esforço oscila entre o máximo *B'* e o mínimo *C'*, geralmente muito próximos, podendo considerar-se que, nesta fase do fenómeno, a deformação aumenta sem variação sensível do esforço. Por isso se chama também à fase plástica das deformações, correspondente à porção *B'C* do diagrama, *fase de escoamento plástico* ou *de fluência*. O ponto *B'* define o *limite superior de escoamento* ou *de fluência*, o ponto *C'* o *limite inferior de escoamento* ou *de fluência*.

O limite superior de escoamento varia com a velocidade de aplicação da carga, com a forma e dimensões da proveta, enfim, com as circunstâncias do ensaio, e não mede uma característica fixa do material; o limite inferior mantém-se sensivelmente constante e serve para caracterizar a fase plástica das deformações. Quando se fala de limite de escoamento ou de fluência, de limite de plasticidade e até de limite de elasticidade de um material, quere-se em geral, indicar o seu limite inferior de escoamento, que se admite ser o valor constante do esforço, durante a fase de escoamento plástico.

Naqueles materiais em que o diagrama de ensaio não apresenta tão nítida diferenciação desta fase das deformações, toma-se o limite de escoamento, como sendo o esforço para o qual o alongamento da proveta vale certa fracção do comprimento inicial (em França, por exemplo, e segundo as prescrições da A. F. N. O. R., o limite de escoamento mede-se no instante em que a percentagem de deformação permanente é de 0,2 %).

Se a proveta tiver sido previamente polida, até ficar especular (1),

---

(1) Êste acabamento da superfície exterior da proveta, apenas serve para tornar mais nítido o fenómeno e precisar o instante do seu início.

ao instante em que se atinge a fase de escoamento plástico, corresponde o aparecimento na superfície da proveta, de duas famílias de riscas, inclinadas de cerca de  $45^\circ$  sobre o eixo de carga, a que se chama *figuras de escoamento* ou *linhas de Lüders* ou de *Hartman*. O aparecimento destas figuras marca o início da fase plástica das deformações.

Ainda se não sabe explicar satisfatoriamente, porque é que o material não entra em deformação plástica, logo que se atinge o limite inferior de escoamento e porque é que o início da fluência é acompanhado de uma queda brusca de carga, a partir do limite superior. Pretende-se (Prager) que existe certa analogia entre este atraso no começo do escoamento plástico e a evaporação isotérmica de um fluido, pro-

duzida por acréscimo de volume. Durante a evaporação, a pressão mantém-se constante e, a quantidades decrescentes de fluido, correspondem quantidades crescentes de vapor. E assim como a evaporação pode ser retardada, também o aparecimento das deforma-



Fig. 2

ções plásticas pode ser retardado, isto é, pode ser ultrapassado o esforço correspondente ao limite inferior de escoamento, sem que o escoamento se inicie. A passagem à fase de escoamento faz-se, pois, bruscamente, quando uma porção finita da proveta entra em deformação plástica. A deformação desta parte da proveta cresce assim, de maneira descontínua e como a deformação total varia com continuidade, segue-se que o resto da proveta, ainda em fase elástica, há-de sofrer diminuição descontínua de comprimento, o que implica diminuição descontínua de esforço, até ao limite inferior de escoamento.

De resto, este atraso no aparecimento das deformações plásticas nem sempre se produz (fig. 2) e tende a desaparecer quando a aplicação da carga é muito lenta.

Seja como fôr, não há dúvida de que, na fase plástica, o esforço se mantém sensivelmente constante ou varia entre limites muito próximos, enquanto que a deformação cresce apreciavelmente.

Simultaneamente com o alongamento da proveta, produz-se diminuição da sua secção transversal. Mas, enquanto que, e na fase elástica, a proveta varia de volume, todos os ensaios mostram que, a partir do início do escoamento, o volume se mantém sensivelmente constante. Donde a conclusão de que as deformações plásticas se fazem por escorregamento, ao longo de planos, cujas intersecções com a superfície exterior são as linhas de Lüders.

A partir do ponto *C* do diagrama, começa a fase *das grandes deformações* ou *da ruptura*, em que, a pequeno aumento de carga, corresponde grande alongamento da proveta. Em *D* atinge-se o esforço máximo antes da ruptura, a que corresponde o início da *estricção*.

A estricção é a diminuição acentuada da secção transversal, no local da proveta onde, por virtude de qualquer falha de homogeneidade ou irregularidade da superfície, se vai produzir a ruptura. A estricção produz grande concentração do esforço, que se pode tornar evidente, traçando o diagrama dos esforços-deformações referido à secção *actual* da peça e não à sua secção *inicial*, como temos considerado (diagrama tracejado, na figura 1).

Já dissemos que, se cessar a acção da carga de ensaio enquanto as deformações não atingem a fase plástica, toda a deformação se anula com a carga e a proveta volta ao seu comprimento inicial. Mas se a deformação já tiver atingido a fase de escoamento plástico, então apenas uma parte da deformação se anula com a carga, isto é, apenas certa fracção da deformação total é elástica. E também é proporcional, pois o diagrama da descarga é linear, como mostra a figura 3, relativa a um ensaio <sup>(1)</sup> em que se fez a descarga da proveta, já depois de atingida a fase de escoamento plástico: o diagrama da descarga é uma recta.

E se a carga fôr novamente aplicada, verifica-se que o novo diagrama de carga é ainda linear e corresponde a deformações reversíveis ou elásticas, até ao momento em que se atinge o esforço a partir do qual se efectuou a descarga no primeiro ensaio. Depois, o

---

(1) A figura 3 reproduz o diagrama das deformações em função dos esforços, num ensaio de tracção simples efectuado no Laboratório de Ensaios de Materiais da Faculdade de Engenharia, com proveta de aço doce, pelo Engenheiro Rêgo Lima que, ao fim de cada descarga, fez rodar levemente o tambor onde se obtém o gráfico do ensaio, para que os diagramas de descarga e recarga se não sobrepussem.

diagrama continua o anterior diagrama das deformações plásticas, como se não tivesse havido interrupção.

Ora como nesta segunda deformação se partiu do estado de carga nula (a que se chama *estado natural*) tudo se passa como se o limite de elasticidade do material tivesse aumentado, em virtude de haver sofrido o primeiro alongamento plástico. Este aumento de resistência elástica é acompanhado de endurecimento do material e por isso se designa o fenómeno, de *endurecimento a frio*.

O mesmo se verifica de cada vez que, depois de ultrapassada a fase elástica, se procede a nova carga, após prévia descarga da proveta.

Todos estes fenómenos não são tão nítidos como os apresentamos, desde que a proveta não seja de aço doce ou desde que variem

as condições do ensaio.

Apenas nos interessa observar que, por vezes, a fase elástica não é caracterizada por variação linear dos esforços em função das deformações e que, por consequência, a cada descarga e recarga correspondem diagramas que não se sobrepõem (ou não são paralelos) e constituem verdadeiros ciclos de

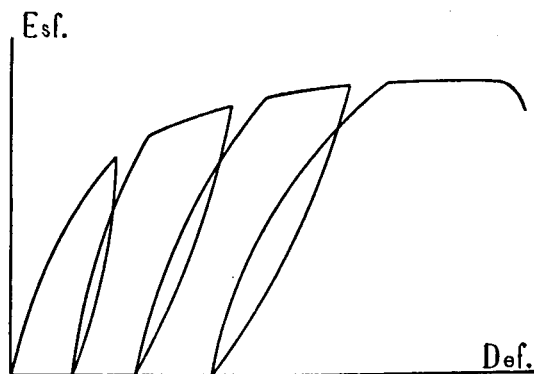


Fig. 4

histerese (fig. 4), cuja área mede o trabalho perdido durante a deformação. Se as operações de descarga e recarga se efectuam número suficiente de vezes, a pequena velocidade e sempre para a mesma intensidade máxima da carga, dá-se um fenómeno de *acomodação*, os ciclos de histerese tendem a estabilizar-se e, final-

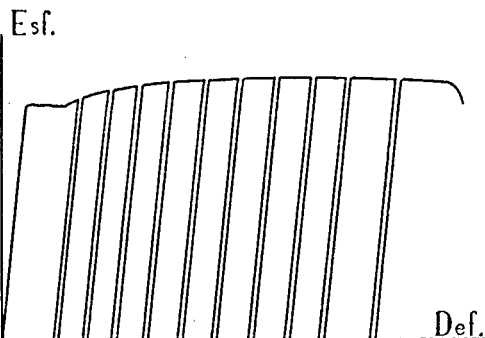


Fig. 3

mente, atinge-se um ciclo de acomodação, que não varia qualquer que seja o número de repetições (fig. 5): é o *efeito Bauschinger*.

Conclusões semelhantes a estas se poderiam tirar de ensaios de outras naturezas (de compressão, de corte, de torção, de flexão), com variações características e conhecidas, quer se tratasse de materiais dúcteis ou de materiais frágeis.

Descrevemos os fenómenos-tipos e dêles apenas nos interessa concluir, como útil para o nosso estudo, que, esquematicamente, o processo de deformação de um sólido submetido à acção de solicitações exteriores, se divide em três fases essenciais:

a) — a fase elástica, na qual as deformações são reversíveis e proporcionais aos esforços;

b) — a fase plástica, na qual as deformações crescem sem variação dos esforços e são quasi totalmente irreversíveis;

c) — a fase da ruptura, na qual as deformações aumentam muito mais rapidamente do que os esforços, até se atingir o limite de resistência do material.

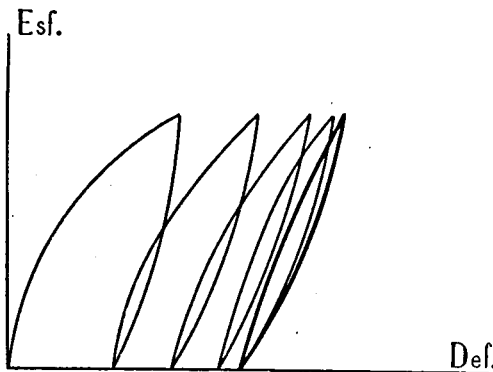


Fig. 5

Estas, as conclusões de ordem experimental. Analiticamente, à primeira fase corresponde a teoria matemática da elasticidade, a qual explica, com todo o rigor, os fenómenos resultantes da observação directa; à segunda fase corresponde a teoria da plasticidade e à terceira a teoria da ruptura, teorias que ainda não é possível compatibilizar com os factos da observação experimental, senão à custa de hipóteses que se têm mostrado legítimas, mas insuficientes para explicar os fenómenos da deformação não elástica e da ruptura, naquilo em que se afastam do esquema teórico que apresentamos.

O nosso estudo diz respeito à fase do escoamento plástico, durante a qual as deformações apenas representam fracção muito pequena das deformações totais de ruptura. Por isso o iniciamos pela análise das pequenas deformações, logo seguida pela dos esforços. E como na fase plástica a deformação total é a soma de certa deformação elástica, com certa deformação plástica, forçoso é que recor-

demos alguns princípios fundamentais da teoria da elasticidade, a partir dos quais facilmente se chega aos que regem a teoria da plasticidade. Consideraremos que estes princípios assentam, pois, no diagrama teórico da figura 6.

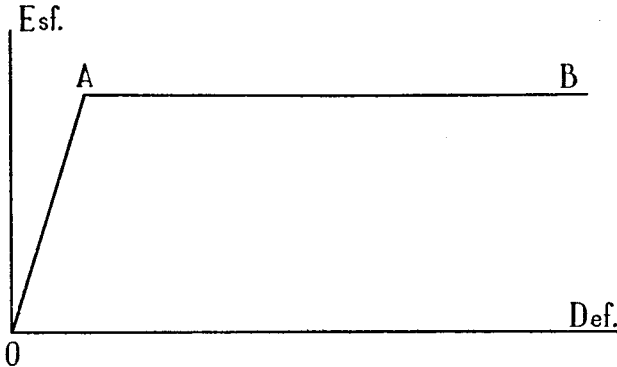


Fig. 6

2 — ESTUDO DAS PEQUENAS DEFORMAÇÕES — Consideremos uma deformação infinitamente pequena de um corpo sólido homogêneo, uniforme e contínuo, referido a um sistema de eixos coordenados ortogonais  $(Ox_1x_2x_3)$ , que designaremos abreviadamente por  $(Ox_i)$ . Em virtude dessa deformação, cada um dos pontos do corpo sofreu o deslocamento infinitamente pequeno  $\vec{u}$ , de modo que, se a sua posição era, antes da deformação, definida pelas coordenadas  $x_i$ , ela passou, depois da deformação, a ser definida pelas coordenadas:

$$x'_i = x_i + u_i, \quad (1)$$

sendo  $u_i$  as componentes cartesianas do vector  $\vec{u}$ , a que chamaremos *vector deslocamento* ou *vector deformação*. Suporemos que as componentes  $u_i$  são funções contínuas e uniformes das coordenadas  $x_i$  do ponto, pequeníssimas relativamente às dimensões do corpo e dotadas de derivadas parciais de primeira ordem, também contínuas e uniformes, e muito pequenas relativamente à unidade.

Pondo:

$$e_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \quad (2)$$

ficam, como se sabe, definidas as componentes cartesianas de um tensor de segunda ordem, o *tensor derivado* (ou *derivada*) do vector



*deslocamento*  $\vec{u}$ . Este tensor, que, em geral, não é simétrico nem hemi-simétrico, pode considerar-se como a soma de dois tensores de segunda ordem, um simétrico e o outro hemi-simétrico, cujas componentes cartesianas respectivas:

$$d_{ik} = \frac{1}{2} (e_{ik} + e_{ki}) \quad (3)$$

$$r_{ik} = \frac{1}{2} (e_{ik} - e_{ki})$$

satisfazem a:

$$e_{ik} = d_{ik} + r_{ik}. \quad (4)$$

Será, pois:

$$d_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad (5)$$

$$r_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right).$$

O tensor simétrico de componentes cartesianas  $d_{ik}$  <sup>(1)</sup> é o *tensor das deformações* (também conhecido por *deformador do vector deslocamento*), pois caracteriza inteiramente as deformações do sólido, como vamos reconhecer.

As coordenadas de um ponto do corpo depois da deformação eram, como vimos:

$$x'_i = x_i + u_i.$$

Um ponto muito próximo, de coordenadas  $x_i + dx_i$ , passou, em virtude da deformação, a ter as coordenadas:

$$x'_i + dx'_i = (x_i + dx_i) + (u_i + du_i), \quad (6)$$

onde  $du_i$  são os incrementos que as funções  $u_i$  sofreram, quando às variáveis  $x_i$  se deram os acréscimos  $dx_i$ . Conclui-se que:

$$dx'_i = dx_i + du_i \quad (7)$$

---

(1) Para designar, em geral, um tensor de componentes cartesianas  $\alpha_{ijk\dots np}$ , diremos, indiferentemente: «o tensor de componentes cartesianas  $\alpha_{ijk\dots np}$ » ou «o tensor  $\alpha_{ijk\dots np}$ ».

ou, desenvolvendo em série de Taylor e desprezando os infinitamente pequenos de ordem superior à primeira:

$$dx'_i = dx_i + \sum_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k. \quad (8)$$

Vejamos qual a interpretação física desta expressão. Para isso, consideremos três elementos lineares, paralelos aos eixos coordenados, de comprimentos  $dx_i$ , e analisemos as deformações de que são susceptíveis.

O elemento linear  $dx_\xi$ , correspondente a um eixo  $Ox_\xi$  determinado (1), deforma-se na sua própria direcção, e o valor da respectiva deformação obtém-se de (8), fazendo  $i = \xi$  e  $dx_\eta = dx_\zeta = 0$ . E vem:

$$dx'_\xi = dx_\xi + \frac{\partial u_\xi}{\partial x_\xi} dx_\xi, \quad (9)$$

donde:

$$\frac{dx'_\xi - dx_\xi}{dx_\xi} = \frac{\partial u_\xi}{\partial x_\xi}. \quad (10)$$

Esta expressão, que define a deformação linear unitária do elemento considerado e a que se pode chamar *coeficiente de dilatação (linear) na direcção do eixo  $Ox_\xi$* , é a expressão geral das componentes cartesianas do tensor simétrico  $d_{ik}$ , para  $i = k$ :

$$d_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}. \quad (11)$$

Mas cada um dos elementos lineares considerados também se desloca angularmente, isto é, varia de direcção. Por exemplo, o elemento particular  $dx_\xi$  roda, no plano ( $Ox_\xi x_\eta$ ) de um ângulo que, desprezando infinitamente pequenos de ordem superior, é dado por:

$$\frac{dx'_\eta}{dx_\xi},$$

---

(1) Para designar um eixo determinado, utilizaremos as letras  $\xi$ ,  $\eta$  ou  $\zeta$ , com as quais indicaremos, sempre, índices diferentes uns dos outros.

e cujo valor se obtém, fazendo em (8)  $i = \eta$  e  $dx_\eta = dx_\zeta = 0$ :

$$\frac{dx'_\eta}{dx_\xi} = \frac{\partial u_\eta}{\partial x_\xi}. \quad (12)$$

Do mesmo modo, o elemento  $dx_\eta$  roda, no plano  $(Ox_\xi x_\eta)$ , do ângulo dado com a mesma aproximação por:

$$\frac{dx'_\xi}{dx_\eta},$$

cujo valor se obtém de (8), fazendo  $dx_\xi = dx_\zeta = 0$ :

$$\frac{dx'_\xi}{dx_\eta} = \frac{\partial u_\xi}{\partial x_\eta}. \quad (13)$$

Por consequência, o ângulo formado pelos elementos  $dx_\xi$  e  $dx_\eta$  que, primitivamente, era recto, variou de:

$$\frac{\partial u_\xi}{\partial x_\eta} + \frac{\partial u_\eta}{\partial x_\xi}. \quad (14)$$

Esta expressão, que define a deformação angular sofrida pelas direcções dos elementos  $dx_\xi$  e  $dx_\eta$ , e a que costuma chamar-se *rotação recíproca*, *escorregamento mútuo* ou, simplesmente, *escorregamento* das duas direcções, é dada por uma das componentes cartesianas do tensor simétrico  $d_{ik}$ , pois que, fazendo  $i = \xi$  e  $k = \eta$ , vem:

$$2d_{\xi\eta} = \frac{\partial u_\xi}{\partial x_\eta} + \frac{\partial u_\eta}{\partial x_\xi}. \quad (15)$$

Encontra-se, assim, que os deslocamentos angulares recíprocos ou escorregamentos mútuos dos elementos lineares considerados, são dados pelas componentes cartesianas do tensor simétrico  $d_{ik}$ , para  $i \neq k$ :

$$2d_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}. \quad (16)$$

Não há, pois, dúvida de que o tensor simétrico, de matriz:

$$\left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{array} \right\| \quad (17)$$

ou tensor das deformações, caracteriza inteiramente as deformações do sólido em três direcções ortogonais, segundo as quais *as componentes da deformação* são:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ d_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ d_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 2d_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ 2d_{31} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ 2d_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \end{array} \right\} \quad (18)$$

ou, na notação habitual <sup>(1)</sup>:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right\} \quad (19)$$

O conhecimento destas seis componentes da deformação é, como vamos ver, suficiente para definir a deformação linear ou o escorregamento de qualquer elemento que passa no ponto considerado do corpo, qualquer que seja a sua orientação.

---

(1) Na notação habitual, as coordenadas são designadas por  $x$ ,  $y$  e  $z$  e as componentes cartesianas do vector deformação, por  $u$ ,  $v$  e  $w$ ; os coeficientes de dilatação linear designam-se por  $\varepsilon$  e os escorregamentos por  $\gamma$ .

Na realidade, consideremos dois elementos lineares que se cruzam no ponto de coordenadas  $x_i$ , de comprimentos infinitamente pequenos  $\Delta a$  e  $\delta b$  e de componentes, respectivamente,  $\Delta x_i$  e  $\delta x_i$ , que formam entre si o ângulo  $\theta$ . Os seus cosenos directores serão, respectivamente:

$$\alpha_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta a} \quad \text{e} \quad \beta_i = \frac{\delta x_i}{\delta b}, \quad (20)$$

de modo que virá:

$$\cos \theta = \sum_i \frac{\Delta x_i}{\Delta a} \frac{\delta x_i}{\delta b} \quad (21)$$

ou:

$$\Delta a \delta b \cos \theta = \sum_i \Delta x_i \delta x_i. \quad (22)$$

A variação desta expressão, durante a deformação infinitamente pequena atrás considerada, é:

$$\begin{aligned} (\Delta a d\delta b + \delta b d\Delta a) \cos \theta - \Delta a \delta b \sin \theta d\theta = \\ = \sum_i (\Delta x_i d\delta x_i + \delta x_i d\Delta x_i). \end{aligned} \quad (23)$$

Mas:

$$d\delta x_i = \delta dx_i = \delta u_i = \sum_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \delta x_k \quad (24)$$

$$d\Delta x_i = \Delta dx_i = \Delta u_i = \sum_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \Delta x_k,$$

logo:

$$\begin{aligned} (\Delta a d\delta b + \delta b d\Delta a) \cos \theta - \Delta a \delta b \sin \theta d\theta = \\ = \sum_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \delta x_k \Delta x_i + \sum_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \Delta x_k \delta x_i. \end{aligned} \quad (25)$$

Ora:

$$\sum_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \Delta x_k \delta x_i = \sum_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \Delta x_i \delta x_k, \quad (26)$$

por consequência:

$$\begin{aligned} (\Delta a d\delta b + \delta b d\Delta a) \cos \theta - \Delta a \delta b \sin \theta d\theta = \\ = \sum_{ik} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \Delta x_i \delta x_k \end{aligned} \quad (27)$$

ou:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{d\delta b}{\delta b} + \frac{d\Delta a}{\Delta a} \right) \cos \theta - \operatorname{sen} \theta d\theta = \\ & = \sum_{ik} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \frac{\Delta x_i}{\Delta a} \frac{\delta x_k}{\delta b}. \end{aligned} \quad (28)$$

Designando por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_a &= \frac{d\Delta a}{\Delta a} \\ \varepsilon_b &= \frac{d\delta b}{\delta b} \end{aligned} \quad (29)$$

os coeficientes de dilatação linear dos elementos considerados, por:

$$\gamma_{ab} = -d\theta \quad (30)$$

o seu escorregamento mútuo e observando as expressões (16) e (20), vem, finalmente:

$$\begin{aligned} & (\varepsilon_a + \varepsilon_b) \cos \theta + \gamma_{ab} \operatorname{sen} \theta = \\ & = 2 \sum_{ik} d_{ik} \alpha_i \beta_k. \end{aligned} \quad (31)$$

Se os dois elementos são coincidentes, isto é, se:

$$\alpha_i = \beta_i, \quad \theta = 0, \quad \varepsilon_a = \varepsilon_b,$$

esta expressão transforma-se em:

$$\varepsilon_a = \sum_{ik} d_{ik} \alpha_i \alpha_k, \quad (32)$$

o que mostra ser o coeficiente de dilatação de um elemento linear, considerado num ponto de um corpo, forma linear das seis componentes da deformação relativas a êsse ponto e forma quadrática dos cosenos directores do elemento.

Quando, em particular, o elemento tenha a direcção de um dos eixos coordenados, isto é, quando seja, por exemplo:

$$\alpha_\xi = 1, \quad \alpha_\eta = \alpha_\zeta = 0$$

vem:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_\xi = d_{\xi\xi}$$

e  $\varepsilon_a$  representa o coeficiente de dilatação linear correspondente ao eixo  $Ox_\xi$ .

Se os dois elementos considerados são perpendiculares entre si, isto é, se:

$$\theta = \frac{\pi}{2},$$

vem:

$$\gamma_{ab} = 2 \sum_{ik} d_{ik} \alpha_i \beta_k, \quad (33)$$

o que mostra ser o escorregamento mútuo de duas direcções ortogonais ou deslocamento angular recíproco de duas rectas perpendiculares de um corpo, forma linear das seis componentes da deformação relativas ao seu ponto de encontro e bilinear dos cosenos directores das duas direcções.

Se, em particular, cada uma das direcções coincide com a de um eixo coordenado, isto é, se, por exemplo, é:

$$\alpha_\xi = \alpha_\zeta = 0, \quad \alpha_\eta = 1$$

$$\beta_\xi = \beta_\eta = 0, \quad \beta_\zeta = 1,$$

vem:

$$\gamma_{ab} = 2 d_{\eta\zeta}$$

e  $\gamma_{ab}$  representa o escorregamento mútuo dos dois eixos considerados, como era de esperar.

A expressão (32):

$$\varepsilon_a = \sum_{ik} d_{ik} \alpha_i \alpha_k$$

dá o valor do coeficiente de dilatação linear na direcção do elemento considerado, isto é, a variação unitária do comprimento, nessa direcção. Se, a partir de um ponto O, marcarmos um vector de comprimento:

$$\frac{1}{\sqrt{|\varepsilon_a|}},$$

(no sentido definido pelos  $\alpha$ ) e se considerarmos, com a origem em O, o sistema de eixos coordenados anteriormente escolhido, as coordenadas  $x_i$  do extremo do vector são, manifestamente:

$$x_i = \frac{1}{\sqrt{|\varepsilon_a|}} \alpha_i, \quad (34)$$

donde:

$$a_i = x_i \sqrt{|\varepsilon_a|} \quad (35)$$

e a expressão (32) torna-se em:

$$\sum_{ik} d_{ik} x_i x_k = \pm 1. \quad (36)$$

Assim fica definido o lugar geométrico descrito pela extremidade do vector considerado. Esse lugar geométrico é a superfície de quarta ordem de equação:

$$\left( \sum_{ik} d_{ik} x_i x_k \right)^2 = 1, \quad (37)$$

degenerada nas duas quádricas (36), que representam, segundo os casos, elipsóides ou hiperbolóides e cujo conjunto se costuma designar (imprópriamente) por *quádrica das deformações* ou *dos alongamentos*.

Visto que, quando é:

$$d_{ik} = 0 \quad (i \neq k),$$

isto é, quando são nulos os escorregamentos, as quádricas (36) ficam referidas aos seus eixos:

$$\sum_i d_{ii} x_i^2 = \pm 1 \quad (38)$$

e, inversamente, quando os eixos coordenados coincidem com os eixos das quádricas, desaparecem os termos rectangulares da equação (36) e, por consequência, os escorregamentos são nulos, segue-se que existem, pelo menos, três direcções ortogonais que ficam ortogonais depois da deformação, quer dizer, que não sofrem escorregamento. A essas direcções chama-se *direcções principais* e aos alongamentos correspondentes, *dilatações principais*.

Se as três dilatações principais são do mesmo sinal, as quádricas (36) são elipsóides, dos quais um só é real; e as dilatações são, conforme o caso, tôdas positivas ou tôdas negativas.

Se as três dilatações principais não são do mesmo sinal, uma das quádricas é um hiperbolóide de uma fôlha, a outra é um hiper-



bolóide de duas fôlhas, ambos os hiperbolóides assimptóticos *do cone de escorregamento*, de equação:

$$\sum_{ik} d_{ik} x_i x_k = 0, \quad (39)$$

tal que os elementos lineares das suas geratrizes têm dilatação (linear) nula, isto é, têm comprimento constante.

Um dos hiperbolóides corresponde às dilatações lineares positivas e o outro às dilatações lineares negativas; o cone de escorregamento constitui a superfície intermediária, de transição entre umas e outras.

Supondo que os eixos coordenados coincidem com os eixos principais, o tensor das deformações passa a ter por matriz:

$$\left\| \begin{array}{ccc} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{array} \right\| \quad (40)$$

ou, na notação habitual:

$$\left\| \begin{array}{ccc} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial u}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial z} \end{array} \right\|. \quad (41)$$

Como se sabe, se  $a_{ik}$  são as componentes cartesianas de um tensor de segunda ordem, a soma:

$$\sum_i a_{ii}$$

dos termos da diagonal principal é um *invariante linear*, isto é, não depende do sistema de eixos coordenados.

Por consequência, a expressão:

$$\begin{aligned}\theta &= \sum_i d_i = \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{u}\end{aligned}\quad (42)$$

é um invariante (o que aliás já resultava da própria definição de *divergência de um vector*). O invariante ou escalar  $\theta$  tem, como vamos ver, significação física importante: é o *coeficiente de dilatação cúbica* do corpo considerado, durante a deformação.

Seja, de facto, um paralelepípedo elementar, de arestas  $dx_i$  paralelas aos eixos coordenados, os quais suporemos coincidentes com os eixos principais. O volume desse paralelepípedo é:

$$\Delta V = dx_1 dx_2 dx_3.$$

Depois da deformação, as arestas do paralelepípedo mantiveram-se paralelas aos eixos coordenados (que são os eixos principais das dilatações) e passaram a ter os comprimentos:

$$(1 + d_{ii}) dx_i,$$

de modo que o volume do paralelepípedo deformado é:

$$\Delta V + d\Delta V = dx_1 dx_2 dx_3 (1 + d_{11}) (1 + d_{22}) (1 + d_{33}).$$

A variação unitária de volume ou coeficiente de dilatação cúbica é, pois:

$$\frac{d\Delta V}{\Delta V} = (1 + d_{11}) (1 + d_{22}) (1 + d_{33}) - 1,$$

ou, desprezando infinitamente pequenos de ordem superior:

$$\frac{d\Delta V}{\Delta V} = d_{11} + d_{22} + d_{33} = \sum_i d_{ii},$$

logo:

$$\theta = \frac{d\Delta V}{\Delta V} = \sum_i d_{ii} = \operatorname{div} \vec{u}.$$

O coeficiente de dilatação cúbica de um corpo deformado é, pois, o invariante linear do tensor das deformações.

Quanto ao tensor hemi-simétrico de componentes cartesianas:

$$\begin{aligned} r_{ik} &= \frac{1}{2} (e_{ik} - e_{ki}) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \end{aligned}$$

é costume designá-lo por *rotor do vector deslocamento*. As suas componentes de índices iguais são nulas:

$$r_{ii} = 0;$$

e as de índices diferentes:

$$r_{ik} = -r_{ki},$$

que mostram tratar-se, realmente, de um tensor hemi-simétrico, definem a rotação do ponto considerado do corpo, durante a deformação. De facto, estas últimas componentes caracterizam, como se sabe, o vector  $\vec{R}$ , rotacional do vector deslocamento:

$$\vec{R} = \text{rot } \vec{u}. \quad (43)$$

O deslocamento infinitamente pequeno que leva um ponto de um corpo, de certa posição antes da deformação, para outra posição depois da deformação, é resultante dos três deslocamentos seguintes:

1.º — uma *translação*, definida pelo vector deslocamento  $\vec{u}$ , de componentes cartesianas  $u_i$ , aplicado no ponto considerado;

2.º — uma *rotação*, definida pelo tensor hemi-simétrico de segunda ordem:

$$\text{Rot } \vec{u}, \quad (44)$$

o rotor do vector deslocamento, de componentes cartesianas:

$$r_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right);$$

3.º — uma *deformação pura*, definida pelo tensor simétrico de segunda ordem:

$$Def \vec{u}, \quad (45)$$

o deformador do vector deslocamento, de componentes cartesianas:

$$d_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right).$$

É apenas durante a deformação pura que o corpo varia de volume e o seu coeficiente de dilatação cúbica é:

$$\theta = div \vec{u}.$$

Se a deformação é irrotacional, como sempre suporemos, é:

$$Rot \vec{u} = 0$$

ou seja:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} = 0 \quad (i \neq k)$$

e a expressão:

$$\sum_i u_i dx_i$$

é uma diferencial exacta, quer dizer, o vector deslocamento  $\vec{u}$  é o gradiente de certa função e o campo dos vectores  $\vec{u}$  é conservativo.

Tomando seis quaisquer funções, uniformes e contínuas,  $d_{ik} = d_{ki}$ , em geral estas funções não serão compatíveis com uma deformação possível do corpo, isto é, não existirá um vector  $\vec{u}$  que satisfaça às correspondentes relações:

$$d_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad 2d_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}. \quad (46)$$

De facto, obtém-se, por simples derivação:

$$\frac{\partial^2 d_{ii}}{\partial x_k^2} = \frac{\partial^3 u_i}{\partial x_i \partial x_k^2}$$

$$\frac{\partial^2 d_{kk}}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^3 u_k}{\partial x_i^2 \partial x_k}$$

$$2 \frac{\partial^2 d_{ik}}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^3 u_i}{\partial x_i \partial x_k^2} + \frac{\partial^3 u_k}{\partial x_i^2 \partial x_k}$$

e:

$$\frac{\partial^2 d_{ii}}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^3 u_i}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}$$

$$2 \frac{\partial^2 d_{jk}}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^3 u_j}{\partial x_i^2 \partial x_k} + \frac{\partial^3 u_k}{\partial x_i^2 \partial x_j}$$

$$2 \frac{\partial^2 d_{ki}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^3 u_i}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^3 u_k}{\partial x_i^2 \partial x_j}$$

$$2 \frac{\partial^2 d_{ij}}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^3 u_i}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^3 u_j}{\partial x_i^2 \partial x_k}$$

Combinando as três primeiras equações e as quatro últimas, obtém-se, respectivamente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 d_{ii}}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 d_{kk}}{\partial x_i^2} &= 2 \frac{\partial^2 d_{ik}}{\partial x_i \partial x_k} \\ \frac{\partial^2 d_{ii}}{\partial x_j \partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial d_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial d_{jk}}{\partial x_i} \right), \end{aligned} \quad (47)$$

relações diferenciais conhecidas por *equações de compatibilidade*, a que devem satisfazer as funções  $d_{ii}$  e  $d_{ik}$ , para poderem ser as componentes de uma deformação definida por um vector deslocamento  $\vec{u}$ .

Chama-se *dilatação média* ao invariante:

$$d_0 = \frac{1}{3} \sum_i d_{ii} = \frac{1}{3} \theta. \quad (48)$$

Sendo:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{para } i \neq k \\ 1 & \text{para } i = k \end{cases} \quad (49)$$

as componentes cartesianas do tensor de segunda ordem, de matriz:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (50)$$

ou *tensor unidade*, chamaremos *tensor de desvio das deformações* ao tensor simétrico de segunda ordem, de componentes:

$$d'_{ik} = d_{ik} - d_o \delta_{ik}. \quad (51)$$

O tensor de desvio das deformações apenas difere do tensor das deformações, nos termos da diagonal principal, isto é, em deformações caracterizadas por êstes dois tensores, os escorregamentos são os mesmos e é evidente que:

$$\sum_i d'_{ii} = 0. \quad (52)$$

O estado de deformação caracterizado pelo tensor de desvio tem, pois, a propriedade de não ser acompanhado de variação de volume. Como é possível escolher um sistema de eixos coordenados ortogonais, de tal maneira que as deformações lineares  $d'_{ii}$  sejam nulas, segue-se que o tensor de desvio das deformações caracteriza uma deformação por escorregamento puro, em três planos ortogonais.

A expressão:

$$d_{ik} = d'_{ik} + d_o \delta_{ik} \quad (53)$$

permite concluir que qualquer deformação se pode considerar como a sobreposição de uma deformação linear, com variação de volume, e de uma deformação por escorregamento, com mudança de forma, mas sem variação de volume.

3 — ESTUDO DOS ESFORÇOS INTERIORES — Se um sólido uniforme e contínuo é solicitado por fôrças exteriores, desenvolvem-se no interior dêsse sólido esforços ou tensões interiores que, relativamente a cada elemento de área, são definidos pelo esforço (unitário) resultante ou pelas suas componentes normal e tangenciais ao elemento considerado.

Referindo o corpo ao sistema de eixos coordenados ortogonais ( $Ox_1x_2x_3$ ), em cada um dos seus pontos o estado de tensão é definido pelas componentes  $t_{ik}$  dos esforços que se exercem nos elementos de área que passam nesse ponto e são paralelos aos planos coordenados. Essas componentes, a que se chama *componentes dos esforços* no ponto considerado, caracterizam um tensor de segunda ordem, o *tensor dos esforços*, de matriz:

$$\begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{vmatrix}. \quad (54)$$

Cada componente  $t_{ii}$  do tensor, de índices iguais, designa a componente normal do esforço que se exerce no elemento de área perpendicular ao eixo  $Ox_i$ , caracterizado pelo índice  $i$ ; cada componente  $t_{ik}$  do tensor, de índices diferentes, designa a componente tangencial do esforço que se exerce no elemento de área perpendicular ao eixo  $Ox_i$ , caracterizado pelo primeiro índice, e tem a direcção do eixo  $Ox_k$ , caracterizado pelo segundo índice.

Na notação habitual <sup>(1)</sup>, a matriz do tensor dos esforços escreve-se:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}. \quad (55)$$

Considerando, no ponto em estudo, um paralelepípedo elementar de arestas paralelas aos eixos coordenados, com o comprimento  $dx_i$ ,

(1) Na notação habitual, os eixos coordenados designam-se por  $x, y$  e  $z$ , o esforço (unitário) resultante em certo elemento de área, por  $\rho$ , e as suas componentes normal e tangenciais, respectivamente por  $\sigma$  e  $\tau$ .

as condições gerais de equilíbrio permitem escrever, desprezando infinitamente pequenos de ordem superior e não considerando a existência de acções a distância que se traduzam por momentos proporcionais ao volume:

$$t_{ik} = t_{ki} \quad (56)$$

$$\sum_k \frac{\partial t_{ik}}{\partial x_k} + X_i = \rho \frac{dv_i}{dt}. \quad (57)$$

A primeira equação exprime a simetria do tensor dos esforços (o que reduz a seis, quando muito, o número de componentes distintas das tensões num ponto); a segunda, onde  $X_i$  designa as componentes, segundo os eixos, das forças de massa por unidade de volume do elemento, e  $\rho$  a densidade do corpo no ponto em estudo <sup>(1)</sup>, que está animado da aceleração  $\frac{dv_i}{dt}$ , exprime o *princípio de D'Alembert* do equilíbrio instantâneo do ponto, no movimento resultante da transformação. Se os esforços são lentamente aplicados, o ponto tem aceleração desprezível e poderá escrever-se:

$$\sum_k \frac{\partial t_{ik}}{\partial x_k} + X_i = 0 \quad (58)$$

ou, na notação habitual:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0, \end{array} \right. \quad (59)$$

---

(1) Define-se *densidade* (ou, com mais rigor, *massa específica*) num ponto de um meio contínuo material, como o limite finito para que tende a relação  $\frac{\Delta m}{\Delta v}$ , entre a massa  $\Delta m$  e o volume correspondente  $\Delta v$  que contém o ponto quando, de qualquer maneira,  $\Delta v$  tende para zero:

$$\rho = \frac{dm}{dv}.$$



que são as clássicas *equações de Cauchy* do equilíbrio dos meios materiais contínuos, aplicáveis a todos os pontos interiores a esses meios.

Consideremos uma superfície qualquer no corpo, que até pode ser a sua superfície-limite, e escolhamos o paralelepípedo elementar de modo a cortar nela um triângulo, face de um tetraedro, cujas outras três faces, interiores ao corpo, são constituídas pelo que resta do paralelepípedo. Este elemento triangular de superfície pode caracterizar-se pelos cosenos directores  $\beta_i$ , da sua normal exterior, que convencionamos considerar positiva.

Se  $\vec{R}$  o esforço (unitário) resultante nesse elemento de área, as suas componentes  $R_i$ , sobre os eixos coordenados, determinam-se por simples equações de equilíbrio:

$$R_i = \sum_k t_{ik} \beta_k. \quad (60)$$

Se  $\vec{R}$  é normal ao elemento de área em que actua, isto é, se se reduz à sua componente normal  $S$ , é:

$$S_i = S \beta_i, \quad (61)$$

logo:

$$S \beta_i = \sum_k t_{ik} \beta_k \quad (62)$$

ou, desenvolvendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} (t_{11} - S) \beta_1 + t_{12} \beta_2 + t_{13} \beta_3 = 0 \\ t_{21} \beta_1 + (t_{22} - S) \beta_2 + t_{23} \beta_3 = 0 \\ t_{31} \beta_1 + t_{32} \beta_2 + (t_{33} - S) \beta_3 = 0. \end{array} \right. \quad (63)$$

São três equações lineares e homogêneas em  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  e  $\beta_3$ , que não têm, simultaneamente, soluções diferentes de zero, senão quando o determinante do sistema seja nulo:

$$\left| \begin{array}{ccc} t_{11} - S & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} - S & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} - S \end{array} \right| = 0. \quad (64)$$

Esta equação é uma equação do 3.º grau «em  $S$ » ou equação «secular», que se sabe ter tôdas as raízes reais. Quere dizer, há pelo menos três planos sôbre os quais o esforço resultante  $\vec{R}$  é normal (e se reduz a  $S$ ); êstes planos são *os planos principais* e as direcções das respectivas normais são *as direcções principais*, assim como os *esforços principais* são os esforços (normais) que nêles actuem e que designaremos por  $t_i$ .

Podia chegar-se a esta mesma conclusão por via geométrica, idêntica à que seguimos no caso das deformações, como vamos verificar. Os esforços no paralelepípedo elementar, que tem duas faces paralelas ao elemento superficial considerado, são as componentes cartesianas do tensor transformado segundo a lei geral de transformação dos tensores:

$$t'_{hj} = \sum_{ik} t_{ik} \beta_{ij} \beta_{kh}. \quad (65)$$

A expressão:

$$t'_{hh} = \sum_{ik} t_{ik} \beta_{ih} \beta_{kh} \quad (66)$$

dá o valor da tensão normal. Se a partir de certa origem, marcarmos um vector de comprimento:

$$\frac{1}{\sqrt{|t'_{hh}|}}, \quad (67)$$

(no sentido definido pelos  $\beta$ ) as coordenadas  $x_i$  do extremo do vector, a respeito do sistema de eixos coordenados com origem no mesmo ponto e paralelos aos anteriormente escolhidos, são:

$$x_i = \frac{1}{\sqrt{|t'_{hh}|}} \beta_{ih}, \quad (68)$$

donde:

$$\beta_{ih} = x_i \sqrt{|t'_{hh}|} \quad (69)$$

e, por consequência:

$$\sum_{ik} t_{ik} x_i x_k = \pm 1. \quad (70)$$

Considerações idênticas às que fizemos a propósito das deformações, permitem concluir que, quando o elemento de área considerado gira em volta da origem, a extremidade do vector representativo da tensão normal descreve uma superfície a que costuma chamar-se *quádrlica directriz dos esforços* ou *das tensões* mas que, na realidade, é uma superfície de quarta ordem, degenerada em duas quádrlicas: um elipsóide real e um imaginário; ou um hiperbolóide de uma folha e um de duas folhas, assintóticos do cone lugar geométrico das normais aos elementos de superfície nos quais o esforço é puramente tangencial. Os três eixos da quádrlica directriz são os eixos principais dos esforços.

Adoptando os eixos principais como eixos coordenados, as componentes do esforço na superfície elementar passam a ser dadas por:

$$R_i = t_i \beta_i, \quad (71)$$

expressão que se obtém de (60), fazendo  $t_{ik} = 0$ , para  $i \neq k$ .

Observando que é:

$$\sum_i \beta_i^2 = 1, \quad (72)$$

a expressão de  $R_i$  permite escrever:

$$\sum_i \left( \frac{R_i}{t_i} \right)^2 = 1, \quad (73)$$

que é a equação de um elipsóide, o *elipsóide dos esforços* ou *das tensões* ou de *Lamé*.

O esforço resultante  $\vec{R}$  é dado por:

$$R^2 = \sum_i R_i^2 = \sum_i t_i^2 \beta_i^2. \quad (74)$$

A componente normal  $S$  e a componente tangencial  $T$ , de  $\vec{R}$ , encontra-se facilmente que são dadas por:

$$\begin{aligned} S &= \sum_i R_i \beta_i = \sum_i t_i \beta_i^3 \\ T^2 &= R^2 - S^2 = \sum_i t_i^2 \beta_i^2 - \left( \sum_i t_i \beta_i^3 \right)^2. \end{aligned} \quad (75)$$

De (72) tira-se:

$$\beta_{\xi}^2 + \beta_{\eta}^2 + \beta_{\zeta}^2 = 1,$$

e:

$$\beta_{\zeta}^2 = 1 - \beta_{\xi}^2 - \beta_{\eta}^2,$$

logo:

$$T^2 = (t_{\xi}^2 - t_{\zeta}^2) \beta_{\xi}^2 + (t_{\eta}^2 - t_{\zeta}^2) \beta_{\eta}^2 + t_{\zeta}^2 - \\ - [(t_{\xi} - t_{\zeta}) \beta_{\xi}^2 + (t_{\eta} - t_{\zeta}) \beta_{\eta}^2 + t_{\zeta}]^2. \quad (76)$$

Se, nesta equação, considerarmos  $\beta_{\xi}$  e  $\beta_{\eta}$  como variáveis independentes, as condições de máximo e mínimo de  $T^2$  serão:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dT^2}{d\beta_{\xi}} = 2(t_{\xi}^2 - t_{\zeta}^2) \beta_{\xi} - 4(t_{\xi} - t_{\zeta}) \beta_{\xi} [(t_{\xi} - t_{\zeta}) \beta_{\xi}^2 + \\ + (t_{\eta} - t_{\zeta}) \beta_{\eta}^2 + t_{\zeta}] = 0 \\ \frac{dT^2}{d\beta_{\eta}} = 2(t_{\eta}^2 - t_{\zeta}^2) \beta_{\eta} - 4(t_{\eta} - t_{\zeta}) \beta_{\eta} [(t_{\xi} - t_{\zeta}) \beta_{\xi}^2 + \\ + (t_{\eta} - t_{\zeta}) \beta_{\eta}^2 + t_{\zeta}] = 0. \end{array} \right. \quad (77)$$

Supondo que os três esforços principais são diferentes (caso em que existe um esforço maior do que todos os outros, o *esforço principal máximo*, e um esforço menor do que todos os outros, o *esforço principal mínimo*), pode satisfazer-se a estas duas equações, pondo:

$$\beta_{\xi} = \beta_{\eta} = 0,$$

logo:

$$\beta_{\zeta} = \pm 1.$$

Neste caso é  $T=0$  e  $S=t_{\zeta}$  e a solução corresponde ao mínimo valor do esforço tangencial (valor nulo) que, como já sabíamos, se verifica quando os esforços são puramente normais (esforços principais).

Outra solução consiste em supor apenas:

$$\beta_{\xi} = 0,$$

o que reduz a segunda condição a:

$$(t_{\eta} + t_{\zeta}) - 2(t_{\eta} - t_{\zeta}) \beta_{\eta}^2 - 2t_{\zeta} = 0, \quad (78)$$

donde:

$$\beta_{\eta} = \beta_{\zeta} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (79)$$

Os planos definidos por estes valores dos  $\beta$  são os planos bissectores dos diedros formados pelos planos principais  $O\xi\eta$  e  $O\xi\zeta$ , e nêles se exerce o esforço tangencial dado por (1):

$$T_{\xi}^2 = \frac{t_{\eta}^2 + t_{\zeta}^2}{2} - \left( \frac{t_{\eta} + t_{\zeta}}{2} \right)^2 = \left( \frac{t_{\eta} - t_{\zeta}}{2} \right)^2, \quad (80)$$

ou seja:

$$T_{\xi} = \left| \frac{t_{\eta} - t_{\zeta}}{2} \right|, \quad (81)$$

a que corresponde o esforço normal:

$$S_{\xi} = \frac{t_{\eta} + t_{\zeta}}{2}. \quad (82)$$

A maior diferença entre os esforços principais, isto é, à diferença entre o esforço principal máximo e o esforço principal mínimo, corresponde o maior dos valores do esforço tangencial, e a análise completa do problema mostra que este é o seu valor máximo absoluto.

E verifica-se, assim, que o esforço tangencial passa por um máximo para um dos planos bissectores dos planos principais, sendo o valor dêsse máximo dado pela semi-diferença dos esforços principais correspondentes; o esforço normal respectivo tem por valor a semi-soma dos mesmos esforços principais.

Se dois dos esforços principais são iguais, por exemplo, se:

$$t_{\eta} = t_{\zeta},$$

o elipsóide de Lamé é um elipsóide de revolução e a segunda condição (77) é idênticamente satisfeita. A outra exige que seja:

$$\beta_{\xi} = 0,$$

---

(1) Com  $T_{\xi}$  indicamos o esforço tangencial que se exerce no plano bissector do diedro formado pelos planos principais  $O\xi\eta$  e  $O\xi\zeta$ , e não a componente de  $T$  no eixo  $O\xi$ , como poderia parecer.

isto é, que a normal exista no plano do equador do elipsóide e que o plano correspondente seja um plano meridiano e vem, neste caso,  $T=0$ ; ou que seja:

$$(t_{\xi} + t_{\zeta}) - 2(t_{\xi} - t_{\zeta})\beta_{\xi}^2 - 2t_{\zeta} = 0, \quad (83)$$

equação que fornece:

$$\beta_{\xi} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (84)$$

permanecendo  $\beta_{\eta}$  e  $\beta_{\zeta}$  indeterminados, e isto significa que a normal a qualquer plano meridiano satisfaz à condição de máximo, constituindo o conjunto das normais um cone de revolução com  $O\xi$  como eixo.

Se os três esforços principais são iguais, o elipsóide de Lamé reduz-se a uma esfera e é constantemente  $T=0$ .

Estas mesmas conclusões se podem tirar a partir da representação plana dos *círculos de Mohr*. A possibilidade desta representação justifica-se pelo facto de o vector  $\vec{R}$  apenas depender, afinal, de duas variáveis independentes, pois que os três cosenos directores  $\beta_i$  estão ligados por uma relação, a relação (72).

Na representação de Mohr, utiliza-se o sistema plano de eixos coordenados ortogonais  $S$  e  $T$ , isto é, cada esforço  $\vec{R}$  é representado por um ponto, cuja ordenada é a componente tangencial  $T$ , e cuja abscissa é a componente normal  $S$ , de  $\vec{R}$ . Em virtude da simetria, basta considerar a representação dos esforços que correspondem a um oitavo do elipsóide de Lamé, por exemplo, os que correspondem a valores positivos dos cosenos directores e estão compreendidos no triedro positivo de referência  $Ox_i$ .

Considerados os eixos coordenados rectangulares  $OT$  e  $OS$  (fig. 7), qualquer ponto  $R$  define o vector  $\overline{OR}$  de componentes:

$$\begin{aligned} S &= \overline{OS} = \overline{OR} \cos \theta \\ T &= \overline{RS} = \overline{OR} \sin \theta, \end{aligned} \quad (85)$$

sendo  $\theta$  o ângulo que faz o vector com a sua componente normal ou, se o vector representa o esforço em certa facêta plana, o ângulo formado pelo esforço resultante na facêta, com a sua normal positiva.

Os esforços principais  $t_1 > t_2 > t_3$  são representados pelos pontos  $S_1, S_2$  e  $S_3$  do eixo das abscissas (1). Traçando as três circun-

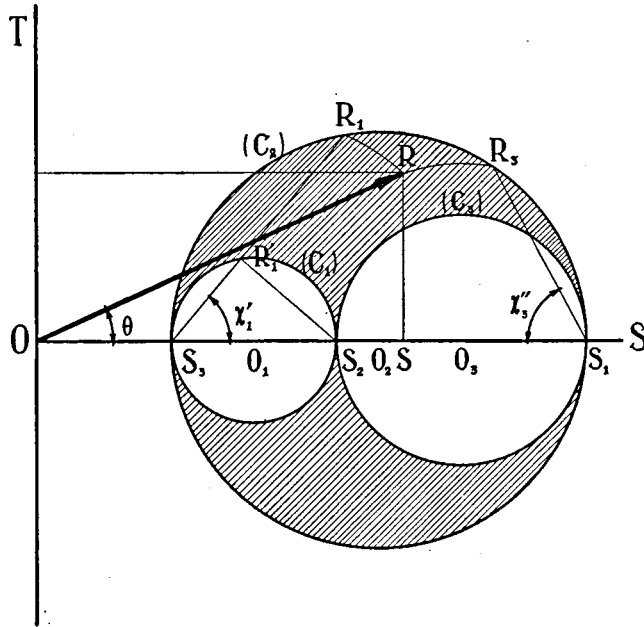


Fig. 7

ferências de diâmetros  $(t_2 - t_3)$ ,  $(t_1 - t_3)$  e  $(t_1 - t_2)$  e cujos centros  $O_1, O_2$  e  $O_3$  têm, respectivamente, por abscissas  $\frac{t_2 + t_3}{2}$ ,  $\frac{t_1 + t_3}{2}$  e  $\frac{t_1 + t_2}{2}$ , o ponto  $R$  representativo do esforço em certa facêta plana pertence, sempre, ao domínio limitado por estas três circunferências e que está tracejado na figura. Isto demonstra-se facilmente, verificando que as potências do ponto  $R$  relativamente às

(1) Na figura, supusemos todos os esforços principais do mesmo sinal e positivos, mas isso não é indispensável: considerações semelhantes se poderiam fazer, se o não fôsse.

duas circunferências menores são positivas, e que é negativa a potência de  $R$ , relativamente à circunferência maior.

De facto, a circunferência de centro  $O_\xi$ , que designaremos brevemente por circunferência  $(C_\xi)$ , tem por equação:

$$S^2 + T^2 - (t_\eta + t_\zeta) S + t_\eta t_\zeta = 0 \quad (86)$$

e como o esforço definido pelo ponto  $R$ , de coordenadas  $S$  e  $T$ , satisfaz às relações (75):

$$\begin{aligned} R^2 &= S^2 + T^2 = t_\xi^2 \beta_\xi^2 + t_\eta^2 \beta_\eta^2 + t_\zeta^2 \beta_\zeta^2 \\ S &= t_\xi \beta_\xi^2 + t_\eta \beta_\eta^2 + t_\zeta \beta_\zeta^2, \end{aligned}$$

segue-se que a potência do ponto  $R$ , relativamente à circunferência  $(C_\xi)$ , é:

$$\begin{aligned} P_\xi &= t_\xi^2 \beta_\xi^2 + t_\eta^2 \beta_\eta^2 + t_\zeta^2 \beta_\zeta^2 - \\ &\quad - (t_\eta + t_\zeta) (t_\xi \beta_\xi^2 + t_\eta \beta_\eta^2 + t_\zeta \beta_\zeta^2) + t_\eta t_\zeta = \\ &= t_\eta t_\zeta - t_\eta t_\zeta \beta_\eta^2 - t_\eta t_\zeta \beta_\zeta^2 + [t_\xi^2 - t_\xi (t_\eta + t_\zeta)] \beta_\xi^2 = \\ &= t_\eta t_\zeta (1 - \beta_\eta^2 - \beta_\zeta^2) + [t_\xi^2 - t_\xi (t_\eta + t_\zeta)] \beta_\xi^2, \end{aligned} \quad (87)$$

e, atendendo a que é:

$$1 - \beta_\eta^2 - \beta_\zeta^2 = \beta_\xi^2,$$

vem, finalmente:

$$\begin{aligned} P_\xi &= \beta_\xi^2 [t_\eta t_\zeta + t_\xi^2 - t_\xi (t_\eta + t_\zeta)] = \\ &= \beta_\xi^2 (t_\eta - t_\xi) (t_\zeta - t_\xi). \end{aligned} \quad (88)$$

Como supusemos que:

$$t_1 > t_2 > t_3, \quad (89)$$

segue-se que será:

$$\begin{aligned} P_1 &= \beta_1^2 (t_2 - t_1) (t_3 - t_1) > 0 \\ P_2 &= \beta_2^2 (t_3 - t_2) (t_1 - t_2) < 0 \\ P_3 &= \beta_3^2 (t_1 - t_3) (t_2 - t_3) > 0, \end{aligned} \quad (90)$$



o que demonstra a proposição: o ponto  $R$ , exterior às duas circunferências menores e interior à circunferência maior, só pode pertencer ao domínio tracejado na figura.

Se  $\chi_i$  são os ângulos formados pela normal à facêta plana considerada com os eixos coordenados, quere dizer, se é:

$$\beta_i = \cos \chi_i, \quad (91)$$

a construção de Mohr permite medir directamente estes ângulos, como vamos verificar.

Se  $\beta_\xi$  é constante e  $\beta_\eta$  e  $\beta_\zeta$  variam, a normal à facêta plana descreve um cone de revolução em torno de  $O\xi$ , a potência  $P_\xi$  do ponto  $R$  relativamente a  $(C_\xi)$  é constante e o ponto descreve um arco de circunferência concêntrica com  $(C_\xi)$ , desde  $(C_\eta)$  até  $(C_\zeta)$ . Inversamente, se o ponto  $R$  descreve uma circunferência concêntrica com uma das circunferências de Mohr, o respectivo coseno director mantém-se constante.

Os pontos  $R$  que pertencem a uma circunferência de Mohr, correspondem a esforços em facêtas planas cujas normais têm coseno director nulo, isto é, que passam pelo eixo principal cujo esforço não intervém na circunferência respectiva; os pontos  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$  correspondem a facêtas cujas normais coincidem com os respectivos eixos principais.

Dado, por consequência, um ponto  $R$ , se o transportarmos ao longo do arco de circunferência concêntrica com  $(C_\eta)$  até  $(C_\xi)$ , a potência  $P_\eta$  manter-se-á constante, assim como  $\beta_\eta$  e  $\chi_\eta$ ; se o transportarmos ao longo do arco de circunferência concêntrica com  $(C_\zeta)$ , até  $(C_\xi)$ , manter-se-á  $P_\zeta$  constante, assim como  $\beta_\zeta$  e  $\chi_\zeta$ . E se tivermos possibilidade de determinar os valores de  $\beta_\eta$  (ou  $\chi_\eta$ ) e  $\beta_\zeta$  (ou  $\chi_\zeta$ ), correspondentes aos pontos de encontro destes arcos de circunferência que contém  $R$ , com  $(C_\xi)$ , a relação (72):

$$\sum_i \beta_i^2 = 1$$

imediatamente permitirá determinar  $\beta_\xi$ . Tudo se resume, por consequência, em determinar  $\beta_\eta$  (ou  $\chi_\eta$ ) e  $\beta_\zeta$  (ou  $\chi_\zeta$ ), para pontos de  $(C_\xi)$ . Ora, para todos os pontos de  $(C_\xi)$  é, como vimos,  $\beta_\xi = 0$  e, por conseguinte, virá:

$$\beta_\eta^2 + \beta_\zeta^2 = 1$$

ou:

$$\chi_\eta + \chi_\zeta = \frac{\pi}{2} \quad (92)$$

e a determinação de  $\chi_\eta$  e  $\chi_\zeta$  vem notavelmente simplificada, como vamos verificar num caso concreto.

Seja, de facto, o ponto  $R$  da figura 7, transportado ao longo dos arcos de circunferência de centros em  $O_1$  e em  $O_3$ , respectivamente para  $R_1$  e  $R_3$ , em  $(C_1)$ : ao longo de  $\widehat{RR_1}$  é  $\beta_1$  constante e ao longo de  $\widehat{RR_3}$  é constante  $\beta_3$ . Tanto a  $R_1$  como a  $R_3$ , pontos de  $(C_2)$ , corresponde  $\beta_2=0$ , logo:

$$\beta_1^2 + \beta_3^2 = 1$$

ou:

$$\chi_1 + \chi_3 = \frac{\pi}{2}. \quad (93)$$

Consideremos o ponto  $R_1$ . A sua potência relativamente a  $(C_1)$ , é:

$$P_1 = \beta_1^2 (t_2 - t_1)(t_3 - t_1); \quad (94)$$

por outro lado, unindo  $R_1$  com  $S_3$ , também é:

$$P_1 = \overline{R_1 R'_1} \times \overline{R_1 S_3}. \quad (95)$$

Ora da figura tira-se imediatamente que:

$$\begin{aligned} \overline{R_1 S_3} &= \overline{S_3 S_1} \cos R_1 \hat{S}_3 S_1 = \\ &= (t_1 - t_3) \cos R_1 \hat{S}_3 S_1, \end{aligned} \quad (96)$$

e que:

$$\begin{aligned} \overline{R_1 R'_1} &= \overline{S_2 S_1} \cos R_1 \hat{S}_3 S_1 = \\ &= (t_1 - t_2) \cos R_1 \hat{S}_3 S_1, \end{aligned} \quad (97)$$

por consequência:

$$P_1 = (t_1 - t_3)(t_1 - t_2) \cos^2 R_1 \hat{S}_3 S_1. \quad (98)$$

Comparando (98) com (94), conclui-se que:

$$\beta_1 = \cos \chi'_1 = \cos R_1 \hat{S}_3 S_1, \quad (99)$$

logo:

$$\chi'_1 = R_1 \hat{S}_3 S_1. \quad (100)$$

Quere dizer, o ângulo  $R_1 \hat{S}_3 S_1$  é o ângulo  $\chi'_1$ , formado pela normal à facêta onde actua o esforço  $\vec{R}_1 = \overline{OR}_1$ , com o eixo  $Ox_1$ . Fácil seria de concluir que o ângulo formado pela mesma normal com  $Ox_3$ , é:

$$\chi'_3 = R_1 \hat{S}_1 S_3 \quad (101)$$

e é, manifestamente:

$$\chi'_1 + \chi'_3 = \frac{\pi}{2}. \quad (102)$$

Por outro lado, considerações semelhantes permitem concluir que os ângulos formados pela normal à facêta onde actua o esforço  $\vec{R}_3 = \overline{OR}_3$  com  $Ox_1$  e  $Ox_3$ , respectivamente, são:

$$\begin{aligned} \chi''_1 &= R_3 \hat{S}_3 S_1 \\ \chi''_3 &= R_3 \hat{S}_1 S_3. \end{aligned} \quad (103)$$

Êstes ângulos não estão todos marcados na figura, para não a sobrecarregar.

Os ângulos  $\chi'_1$  (que atrás designámos por  $\chi_1$ ) e  $\chi''_3$  (que atrás designámos por  $\chi_3$ ) também são os ângulos formados, respectivamente, com os eixos  $Ox_1$  e  $Ox_3$ , pela normal à facêta plana onde actua o esforço  $\vec{R} = \overline{OR}$ . O ângulo formado por esta normal com  $Ox_2$  será, por consequência, dado por:

$$\cos^2 \chi_2 = 1 - \cos^2 \chi_1 - \cos^2 \chi_3 \quad (104)$$

e também se pode determinar gráficamente transportando  $R$ , por exemplo, para  $(C_3)$ , no arco de circunferência concêntrica com  $(C_1)$ .

Daqui resulta mnemónica simples, para determinar os ângulos directores da normal à facêta onde actua certo esforço.

A representação de Mohr permite resolver os mesmos problemas que atrás resolvemos à custa do elipsóide de Lamé.

Por exemplo, a determinação do esforço tangencial máximo é imediata: o máximo valor de  $T$  verifica-se quando o ponto  $R$  cai na

circunferência maior ou principal e na vertical do centro  $O_2$  e vale, por consequência:

$$T_2 = \overline{O_2 S_1} = \frac{\overline{S_1 S_3}}{2} = \frac{t_1 - t_3}{2}; \quad (105)$$

a este esforço tangencial está associado o esforço normal:

$$S_2 = \overline{OO_2} = \frac{\overline{OS_1} + \overline{OS_3}}{2} = \frac{t_1 + t_3}{2}, \quad (106)$$

e estes esforços actuam na facêta plana cuja normal faz com os eixos coordenados os ângulos:

$$\chi_1 = \frac{\pi}{4}, \quad \chi_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \chi_3 = \frac{\pi}{4}, \quad (107)$$

isto é, na facêta contida no plano bissector do diedro formado pelos planos principais  $Ox_1x_2$  e  $Ox_2x_3$ .

Aos esforços definidos por pontos  $R$  pertencentes a cada uma das outras duas circunferências de Mohr correspondem máximos para  $T$  (menores do que o anterior, que é o máximo absoluto) e é, respectivamente:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{t_2 - t_3}{2} \\ S_1 &= \frac{t_2 + t_3}{2} \end{aligned} \quad (108)$$

e:

$$\begin{aligned} T_3 &= \frac{t_1 - t_2}{2} \\ S_3 &= \frac{t_1 + t_2}{2}; \end{aligned} \quad (109)$$

os esforços  $T_1$  e  $S_1$  actuam no plano bissector do diedro formado pelo planos principais  $Ox_1x_2$  e  $Ox_1x_3$ , e os esforços  $T_3$  e  $S_3$ , no plano bissector do diedro formado pelos planos principais  $Ox_1x_3$  e  $Ox_2x_3$ .

Um caso em que a discussão é muito facilitada pela construção de Mohr, é o do *estado duplo de tensão* ou *de tensão plana*. Êste caso verifica-se quando uma das tensões principais é nula, por exemplo a tensão principal mínima:

$$t_3 = 0.$$

A construção de Mohr é idêntica à anterior, sòmente, coincidindo o ponto  $S_3$  com a origem, a circunferência principal é tangente ao eixo  $OT$ ; as facêtas planas nas quais o esforço tangencial é máximo são contidas no plano bissector do diedro formado pelos planos principais  $Ox_1x_2$  (não sujeito a esforços) e  $Ox_2x_3$  (sujeito ao esforço principal máximo) e o esforço tangencial máximo vale:

$$T_2 = \frac{t_1}{2}. \quad (110)$$

Muitas vezes, interessa conhecer os esforços nas facêtas planas perpendiculares a uma das direcções principais. Neste caso, basta considerar, na construção de Mohr, a circunferência em que não intervém o esforço principal naquela direcção. É êste problema que habitualmente se conhece por «problema plano», mesmo que nenhum dos esforços principais seja nulo. Êle permite, por consequência, apenas determinar os esforços nos planos perpendiculares a uma das direcções principais e não indica que êsses esforços sejam os mais desfavoráveis. Para determinar os esforços mais desfavoráveis, é indispensável considerar as facêtas planas paralelas às três direcções principais, mesmo que numa delas não actuem esforços, quere dizer, é preciso considerar as três circunferências de Mohr, como atrás indicámos.

Suponhamos, então, que se deseja conhecer os esforços nas facêtas planas perpendiculares, por exemplo, ao eixo  $Ox_3$ . A construção de Mohr passa a ter o aspecto indicado na figura 8, isto é, reduz-se ao *círculo de Mohr*.

O ponto  $R'$  define o esforço  $\vec{R}' = \overline{OR'}$  na facêta que faz o ângulo  $R'\hat{S}_2S_1$  com o eixo  $Ox_1$ ; o ponto  $R''$ , diametralmente oposto a  $R'$ , define o esforço  $\vec{R}'' = \overline{OR''}$  na facêta que faz o ângulo  $R''\hat{S}_2S_1$  com  $Ox_1$ . Como:

$$R'\hat{S}_2S_1 + R''\hat{S}_2S_1 = \frac{\pi}{2},$$

segue-se que as duas facêtas em que actuam os esforços  $\vec{R}'$  e  $\vec{R}''$ , definidos por pontos do círculo de Mohr diametralmente opostos, são perpendiculares entre si.

E como é:

$$T' = \overline{R'S'} = -\overline{R''S''} = -T''$$

conclui-se que, em facêtas ortogonais, actuam esforços tangenciais iguais e de sinais contrários.

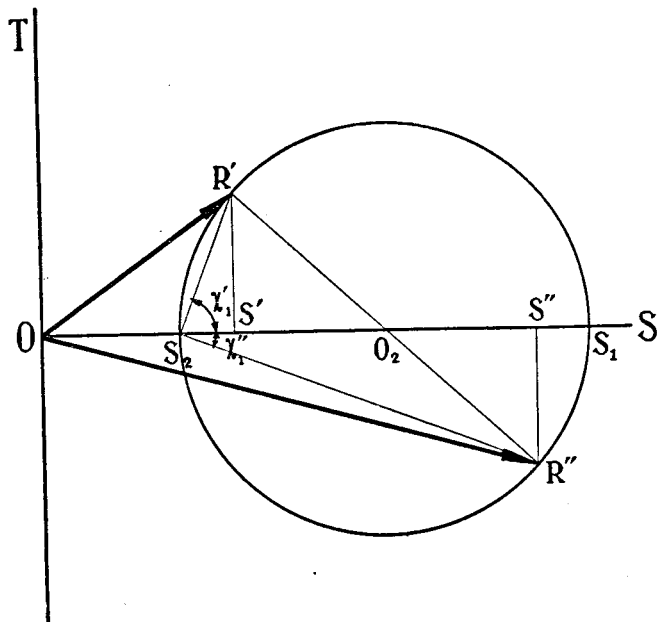


Fig. 8

Vamos exprimir os esforços principais,  $t_1$  e  $t_2$ , em função das componentes dos esforços  $S'$ ,  $T'$  e  $S''$ ,  $T''$ , em duas facêtas ortogonais.

Designando por:

$$t_o = \overline{OO_2} = \frac{S' + S''}{2} \quad (111)$$

o esforço médio, conclui-se facilmente da figura, que é:

$$\begin{aligned} t_1 &= \overline{OS_1} = \overline{OO_2} + \overline{O_2S_1} = \overline{OO_2} + \overline{O_2R'} \\ t_2 &= \overline{OS_2} = \overline{OO_2} - \overline{S_2O_2} = \overline{OO_2} - \overline{O_2R'}. \end{aligned} \quad (112)$$

Mas é:

$$\begin{aligned}\overline{O_2 R'} &= \sqrt{\overline{S' O_2^2} + \overline{R' S'^2}} \\ &= \sqrt{\left(\frac{S' - S''}{2}\right)^2 + T'^2}\end{aligned}\quad (113)$$

e por consequência:

$$\begin{aligned}t_1 &= \frac{S' + S''}{2} + \sqrt{\left(\frac{S' - S''}{2}\right)^2 + T'^2} \\ t_2 &= \frac{S' - S''}{2} - \sqrt{\left(\frac{S' - S''}{2}\right)^2 + T'^2}.\end{aligned}\quad (114)$$

Quanto ao esforço tangencial máximo, êle é, evidentemente, dado por:

$$\begin{aligned}T_3 &= \overline{S_2 O_2} = \overline{O_2 R'} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{S' - S''}{2}\right)^2 + T'^2}.\end{aligned}\quad (115)$$

Estas expressões escrevem-se, na notação habitual:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{\sigma' + \sigma''}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma' - \sigma''}{2}\right)^2 + \tau'^2} \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma' + \sigma''}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma' - \sigma''}{2}\right)^2 + \tau'^2} \\ \tau_3 &= \sqrt{\left(\frac{\sigma' - \sigma''}{2}\right)^2 + \tau'^2}.\end{aligned}\quad (116)$$

Se o corpo em estudo fôr um fluido em repouso, viscoso ou não, as componentes do tensor dos esforços são invariantes, isto é, são as mesmas, qualquer que seja o sistema de eixos coordenados que se adopte, e o tensor diz-se *isótropo*.

O tensor unidade, de componentes:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{para } i \neq k \\ 1 & \text{para } i = k, \end{cases}$$

é um tensor isotrópico. Se  $p$  for a pressão do fluido em repouso considerado, as componentes cartesianas do tensor dos esforços serão, evidentemente:

$$p_{ik} = p \delta_{ik}. \quad (117)$$

É esta a expressão geral das componentes cartesianas de um tensor isotrópico de segunda ordem.

Se o estado de tensão de um corpo é definido pelo tensor de componentes  $t_{ik}$ , chama-se *esforço normal médio* ou *pressão média*, ao invariante linear do tensor:

$$t_o = \frac{1}{3} \sum_i t_{ii} \quad (118)$$

ou, na notação habitual:

$$\sigma_o = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}, \quad (119)$$

sendo  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  os esforços principais.

Chama-se *tensor de desvio dos esforços*, ao tensor de segunda ordem, simétrico, de componentes cartesianas:

$$t'_{ik} = t_{ik} - t_o \delta_{ik}. \quad (120)$$

O tensor de desvio dos esforços apenas difere do tensor dos esforços pelos termos diagonal principal, isto é, nos estados de tensão caracterizados pelos tensores  $t_{ik}$  e  $t'_{ik}$ , os esforços tangenciais são os mesmos e é evidente que:

$$\sum_i t'_{ii} = 0. \quad (121)$$



O estado de tensão caracterizado pelo tensor de desvio tem, pois, a propriedade de corresponder a esforço normal médio nulo. Como é possível escolher um sistema de eixos coordenados ortogonais de tal modo que os esforços normais  $t'_{ii}$  sejam nulos, segue-se que o tensor de desvio caracteriza um estado de tensão puramente tangencial, em três planos ortogonais.

Da expressão (120) tira-se:

$$t_{ik} = t'_{ik} + t_o \delta_{ik}, \quad (122)$$

querer dizer, qualquer estado de tensão pode ser considerado como a sobreposição de um estado de tensão constante ou pressão hidrostática, actuando com a intensidade do esforço normal médio, e de um estado de tensão puramente tangencial em três planos ortogonais.

4 — EQUAÇÕES DO MOVIMENTO — Seja  $\vec{u}$  o vector deslocamento, que define a deformação produzida em certo instante; o *vector velocidade de deformação*  $\vec{v}$ , de componentes  $v_i$ , será:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{u}}{dt}. \quad (123)$$

Pondo:

$$v_{ik} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{du_i}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{de_{ik}}{dt}, \quad (124)$$

fica definido o *tensor de segunda ordem, derivado* (ou *derivada*) do *vector velocidade*, do qual se pode obter, como no caso das deformações, o *tensor simétrico das velocidades de deformação*, de componentes cartesianas:

$$\begin{aligned} v_{ik} &= \frac{1}{2} (v_{ik} + v_{ki}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{de_{ik}}{dt} + \frac{de_{ki}}{dt} \right) = \frac{dd_{ik}}{dt}, \end{aligned} \quad (125)$$

cuja matriz, na notação habitual, se escreve:

$$\begin{aligned}
 & \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{array} \right\| = \\
 & = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{d\varepsilon_x}{dt} & \frac{1}{2} \frac{d\gamma_{xy}}{dt} & \frac{1}{2} \frac{d\gamma_{xz}}{dt} \\ \frac{1}{2} \frac{d\gamma_{yx}}{dt} & \frac{d\varepsilon_y}{dt} & \frac{1}{2} \frac{d\gamma_{yz}}{dt} \\ \frac{1}{2} \frac{d\gamma_{zx}}{dt} & \frac{1}{2} \frac{d\gamma_{zy}}{dt} & \frac{d\varepsilon_z}{dt} \end{array} \right\|. \quad (126)
 \end{aligned}$$

Para simplicidade, usaremos a notação:

$$\begin{aligned}
 \vec{v} &= \frac{du}{dt} = \dot{u} \\
 v_{ik} &= \left( \frac{de_{ik}}{dt} + \frac{de_{ki}}{dt} \right) = \frac{1}{2} (\dot{e}_{ik} + \dot{e}_{ki}) = \dot{d}_{ik} \\
 \frac{d\varepsilon}{dt} &= \dot{\varepsilon} \quad , \quad \frac{d\gamma}{dt} = \dot{\gamma}
 \end{aligned} \quad (127)$$

e aquela matriz assumirá o novo aspecto:

$$\left\| \begin{array}{ccc} \dot{\varepsilon}_x & \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{xy} & \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{xz} \\ \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{yx} & \dot{\varepsilon}_y & \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{yz} \\ \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{zx} & \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{zy} & \dot{\varepsilon}_z \end{array} \right\|. \quad (128)$$

Consideremos, no instante  $t$ , um elemento de volume  $\Delta V$ , no ponto  $P(x_i)$  do corpo. No instante  $t + dt$ , o volume do elemento sofreu o acréscimo  $d\Delta V$  e se  $\vec{v}$  é a velocidade da transformação, o vector deslocamento  $\vec{u}$  sofreu o acréscimo:

$$d\vec{u} = \vec{v} dt.$$

O coeficiente de dilatação cúbica na deformação infinitamente pequena definida pelo vector  $d\vec{u}$  é, como sabemos:

$$\theta = \frac{d\Delta V}{\Delta V} = \text{div } d\vec{u} = dt \text{ div } \vec{v}.$$

Ora, nesta transformação, a massa do corpo manteve-se invariável e como a massa é o produto da densidade no ponto e no instante considerados, pelo volume, segue-se que deve ser nula a diferencial  $d(\rho \Delta V)$ , durante o tempo  $dt$ :

$$\Delta V d\rho + \rho d\Delta V = 0, \quad (129)$$

sendo  $d\rho$  a variação da densidade durante a transformação:

$$d\rho = \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} v_i \right) dt = \frac{d\rho}{dt} dt.$$

A expressão (129) escreve-se, por consequência:

$$\frac{d\rho}{dt} dt + \rho \frac{d\Delta V}{\Delta V} = \frac{d\rho}{dt} dt + \rho dt \text{ div } \vec{v} = 0 \quad (130)$$

ou:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{ div } \vec{v} = 0,$$

que é a equação de continuidade.

No caso de o sólido ser incompressível,  $\rho$  é constante e a equação de continuidade escreve-se:

$$\operatorname{div} \vec{v} = \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \sum_i d_{ii} = 0 \quad (131)$$

ou:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= \frac{d\varepsilon_x}{dt} + \frac{d\varepsilon_y}{dt} + \frac{d\varepsilon_z}{dt} = \\ &= \dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y + \dot{\varepsilon}_z = 0. \end{aligned} \quad (132)$$

**5 — ENERGIA POTENCIAL ELÁSTICA E TRABALHO INTERNO DE DEFORMAÇÃO** — A elasticidade de um corpo manifesta-se pela tendência que o mesmo corpo tem, quando deformado em virtude da acção de solicitações exteriores, a voltar ao estado natural não deformado. Esta propriedade pode exprimir-se, mecânicamente, admitindo que o trabalho mecânico que foi necessário produzir para levar o corpo ao seu estado de deformação elástica se transformou em energia potencial, a qual é susceptível de se transformar novamente em trabalho, se cessam as causas que produziram a deformação, e esta desaparece.

A energia potencial elástica de um corpo é a soma das energias elementares de cada um dos seus elementos de volume e pode escrever-se:

$$\Phi = \int \varphi dV, \quad (133)$$

sendo  $V$  o espaço ocupado pelo corpo e  $\varphi$  a energia potencial elástica elementar, que suporemos completamente definida pelo estado do elemento a que diz respeito, independente da sua posição no espaço e da dos outros elementos do corpo e função regular das componentes da deformação  $d_{ik}$ .

Aceites estas hipóteses, admitiremos mais que  $\varphi$  se pode desenvolver em série de Mac-Laurin:

$$\varphi = \varphi_0 + \sum_{ik} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial d_{ik}} \right)_0 d_{ik} + \frac{1}{2} \sum_{ik,jh} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial d_{ik} \partial d_{jh}} \right)_0 d_{ik} d_{jh} + \dots, \quad (134)$$

indicando os índices 0 que o elemento não está deformado ( $d_{ik} = 0$ ). Ora um corpo não deformado está, certamente, em posição de equi-

líbrio estável e, devendo ser mínima a sua energia potencial elástica, visto que não actuam forças exteriores, podemos admitir que ela seja nula e que seja positiva em qualquer outra conformação de equilíbrio. Por consequência, devem, na expressão anterior, ser nulos os termos constantes e os do primeiro grau (condição de mínimo). Dos restantes, os de grau superior ao segundo, se a deformação é tão pequena que se possa considerar infinitamente pequena, são desprezíveis em presença daqueles e a expressão da energia potencial elástica elementar reduz se a:

$$\varphi = \frac{1}{2} \sum_{ik,jh} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial d_{ik} \partial d_{jh}} \right)_0 d_{ik} d_{jh} = \frac{1}{2} \sum_{ik,jh} c_{ik,jh} d_{ik} d_{jh} \quad (135)$$

forma quadrática, essencialmente positiva, nas componentes da deformação  $d_{ik}$ .

Os coeficientes:

$$c_{ik,jh} = \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial d_{ik} \partial d_{jh}} \right)_0 \quad (136)$$

são as componentes cartesianas de um tensor de quarta ordem, com 21 termos distintos, independentes de  $d_{ik}$ , mas dependentes das características elásticas do corpo.

As forças exteriores que actuam no corpo podem ser de duas naturezas: as forças de massa (a distância)  $p$ , de componentes  $p_i$ , referidas à unidade de volume do corpo; e as forças de superfície  $s$ , de componentes  $s_i$ , referidas à unidade de superfície exterior do corpo. Se no sistema, que por hipótese está em equilíbrio sob a acção destas forças, se produz uma deformação infinitamente pequena e compatível com as ligações, isto é, uma deformação virtual que imprime ao deslocamento actual de cada um dos seus pontos, de componentes  $u_i$ , os acréscimos  $\delta u_i$ , as componentes da deformação sofrem os acréscimos  $\delta d_{ik}$ , dos quais resulta a primeira variação  $\frac{\partial \varphi}{\partial d_{ik}}$  da energia potencial elástica elementar. E o princípio dos trabalhos virtuais permite escrever:

$$\int_V \sum_i p_i \delta u_i dV + \int_\Omega \sum_i s_i \delta u_i d\Omega = \int_V \sum_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial d_{ik}} \delta d_{ik} dV, \quad (137)$$

estendendo-se os integrais ao volume total  $V$  e à superfície total  $\Omega$  do corpo.

Considerámos, até agora, apenas a primeira variação da energia potencial elástica. Atendendo, também, à segunda variação, pode escrever-se, desenvolvendo em série de Taylor:

$$\begin{aligned} \int_V \varphi(d_{ik} + \delta d_{ik}) dV = & \int_V \varphi(d_{ik}) dV + \int_V \sum_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial d_{ik}} \delta d_{ik} dV + \\ & + \int_V \frac{1}{2} \sum_{ik, jh} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial d_{ik} \partial d_{jh}} \delta d_{ik} \delta d_{jh} dV. \end{aligned} \quad (138)$$

Mas o integrando do terceiro integral do segundo membro não é mais do que a expressão de  $\varphi$  calculada para os valores particulares  $\delta d_{ik}$  de  $d_{ik}$  e é, por consequência, essencialmente positivo. Quere isto dizer que a segunda variação da energia potencial elástica é sempre positiva e, por consequência, que a configuração de equilíbrio definida pela equação dos trabalhos virtuais, é estável.

A expressão anterior pode, assim, escrever-se:

$$\int_V \varphi(d_{ik} + \delta d_{ik}) dV = \int_V \varphi(d_{ik}) dV + \int_V \sum_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial d_{ik}} \delta d_{ik} dV + \int_V \varphi(\delta d_{ik}) dV \quad (139)$$

e applica-se a qualquer configuração de equilíbrio possível, em particular ao estado natural do corpo, isto é, ao estado em que o corpo não é solicitado por forças exteriores. Considerando como deformação virtual a deformação real que faz efectivamente passar o corpo do estado natural a qualquer outro estado de equilíbrio caracterizado pelas componentes  $d_{ik}$ , através dos acréscimos  $(d_{ik})_1$  das componentes  $(d_{ik})_0$  no estado natural, aquela expressão transforma-se em:

$$\begin{aligned} \int_V \varphi(d_{ik}) dV = & \int_V \varphi(d_{ik})_0 dV + \int_V \sum_{ik} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial d_{ik}} \right)_0 (d_{ik})_1 dV + \\ & + \int_V \varphi(d_{ik})_1 dV. \end{aligned} \quad (140)$$

Mas, visto que o estado natural é uma configuração de equilíbrio sob a acção de forças externas tôdas nulas, a aplicação do princípio dos trabalhos virtuais mostra que:

$$\int_V \sum_{ik} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial d_{ik}} \right) (d_{ik})_1 dV = 0 \quad (141)$$

e, por consequência, a expressão anterior reduz-se a:

$$\int_V \varphi(d_{ik}) dV = \int_V \varphi(d_{ik})_0 dV + \int_V \varphi(d_{ik})_1 dV, \quad (142)$$

ou, abreviadamente:

$$\int_V \varphi dV = \int_V \varphi_0 dV + \int_V \varphi_1 dV. \quad (143)$$

A expressão da energia potencial elástica compõe-se, por consequência, de dois termos, ambos essencialmente positivos: um, que exprime a energia armazenada no corpo quando no estado natural, a *energia intrínseca*, que é nula se, na ausência de forças exteriores, todos os elementos do corpo estão indeformados; o outro exprime o trabalho produzido durante a deformação, que se chama, por isso, o *trabalho de deformação*.

O trabalho de deformação é, assim, dado pela expressão:

$$T = \int_V \varphi_1 dV = \int_V \varphi dV - \int_V \varphi_0 dV. \quad (144)$$

Se atendermos a que  $\varphi$  é uma função homogênea, o teorema de Euler dá:

$$2T = \int_V \sum_{ik} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial d_{ik}} \right) (d_{ik})_1 dV. \quad (145)$$

Por outro lado,  $\varphi$  é função do 2.º grau de  $d_{ik}$ , por consequência as suas primeiras derivadas são funções lineares das mesmas variáveis, e a propriedade distributiva permite escrever:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial d_{ik}} = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial d_{ik}} \right)_0 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial d_{ik}} \right)_1, \quad (146)$$

logo:

$$2T = \int_V \sum_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial d_{ik}} (d_{ik})_1 dV - \int_V \sum_{ik} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial d_{ik}} \right)_0 (d_{ik})_1 dV. \quad (147)$$

Mas o segundo integral desta expressão é nulo, como vimos, pois exprime o equilíbrio no estado natural, para forças exteriores tôdas nulas; o primeiro, em virtude do princípio dos trabalhos virtuais, representa o trabalho virtual das forças exteriores, na configuração de equilíbrio real do sistema. E será, dêste modo:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_V \sum_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial d_{ik}} (d_{ik})_1 dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_V \sum_i p_i \delta u_i dV + \int_\Omega \sum_i s_i \delta u_i d\Omega, \end{aligned} \quad (148)$$

que é a conhecida expressão do teorema de Clapeyron.

Se no corpo considerado isolarmos o paralelepípedo elementar, de arestas paralelas aos eixos coordenados, e supusermos que o seu estado de tensão é definido pelas componentes  $t_{ik}$  dos esforços, e o estado de deformação pelas componentes  $d_{ik}$  das deformações, fica definida a sua energia potencial elástica elementar  $\varphi(d_{ik})$ . Dando à solicitação exterior um acréscimo infinitamente pequeno, o corpo passa do estado de equilíbrio considerado para novo estado de equilíbrio, depois de as componentes dos esforços e as das deformações terem sofrido, respectivamente, os acréscimos também infinitamente pequenos,  $\delta t_{ik}$  e  $\delta d_{ik}$ .

O trabalho produzido durante esta transformação é, desprezando infinitamente pequenos de ordem superior, dado por:

$$\sum_{ik} t_{ik} \delta d_{ik}. \quad (149)$$



Mas, em virtude do princípio da conservação da energia, este trabalho é idênticamente igual à variação da energia potencial elástica durante a transformação que, com a mesma aproximação, é dada por:

$$\sum_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial d_{ik}} \delta d_{ik}. \quad (150)$$

Da identidade:

$$\sum_{ik} t_{ik} \delta d_{ik} \equiv \sum_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial d_{ik}} \delta d_{ik} \quad (151)$$

tira-se:

$$t_{ik} = \frac{\partial \varphi}{\partial d_{ik}}, \quad (152)$$

o que, visto a energia potencial elástica elementar ser forma quadrática nas componentes das deformações, faz concluir que as componentes dos esforços são formas lineares nas componentes das deformações. É o enunciado da *lei de Hooke generalizada* que, então, e atendendo a (135), se pode exprimir por:

$$\begin{aligned} t_{ik} &= \sum_{jh} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial d_{ik} \partial d_{jh}} \right)_o d_{jh} = \\ &= \sum_{jh} c_{ik,jh} d_{jh}, \end{aligned} \quad (153)$$

onde os coeficientes:

$$c_{ik,jh} = \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial d_{ik} \partial d_{jh}} \right)_o$$

são, como vimos, as componentes cartesianas de um tensor de quarta ordem, com 21 termos distintos, independentes das componentes das deformações, mas dependentes das características elásticas do corpo e ao qual, por isso mesmo, se chama *tensor de elasticidade*.

O determinante formado com as componentes do tensor de elasticidade é sempre diferente de zero, pois que, se se anulasse, seria satisfeita a condição:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial d_{ik}} = 0 \quad (154)$$

e viria, pelo teorema de Euler:

$$2\varphi = \sum_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial d_{ik}} d_{ik} = 0, \quad (155)$$

o que é manifestamente impossível, desde que os valores de  $d_{ik}$  não sejam todos nulos.

Da expressão de  $t_{ik}$  pode, por consequência, tirar-se a de  $d_{jk}$  como forma linear de  $t_{ik}$ , donde se conclui que  $\varphi(t_{ik})$  também é forma quadrática nas componentes dos esforços, assim como o era nas componentes das deformações.

O teorema de Euler escreve-se, por um lado:

$$2\varphi = \sum_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial d_{ik}} d_{ik} = \sum_{ik} t_{ik} d_{ik} \quad (156)$$

e por outro:

$$2\varphi = \sum_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial t_{ik}} t_{ik}; \quad (157)$$

e da identidade:

$$\sum_{ik} t_{ik} d_{ik} \equiv \sum_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial t_{ik}} t_{ik} \quad (158)$$

tira-se:

$$d_{ik} = \frac{\partial \varphi}{\partial t_{ik}}, \quad (159)$$

expressão que dá as componentes das deformações como formas lineares nas componentes dos esforços.

6 — RELAÇÃO CARACTERÍSTICA DAS DEFORMAÇÕES ELÁSTICAS DOS CORPOS ISÓTROPIS. EQUAÇÕES DE LAMÉ — Acabamos de ver que, na fase elástica, os esforços estão ligados às deformações pela lei de Hooke generalizada: entre o tensor dos esforços e o das deformações há correspondência biúnívoca que, em virtude da hipótese das pequenas deformações, se pode traduzir por relação linear, de determinante não nulo:

$$t_{ik} = \sum_{jh} c_{ik,jh} d_{jh},$$

a qual exprime que os esforços se anulam quando as deformações desaparecem. Os coeficientes  $c_{ik,jh}$  definem o tensor de elasticidade.

Se o sólido é isótropo, este tensor também deve ser isótropo, isto é, as suas componentes devem ser invariantes nas mudanças de eixos coordenados rectangulares ou transformações ortogonais, como são habitualmente designadas.

Ora a forma mais geral de um tensor isótropo de quarta ordem pode obter-se, como vamos ver, a partir do tensor unitário (isótropo), de segunda ordem:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{para } i \neq k \\ 1 & \text{para } i = k. \end{cases}$$

Os tensores produtos (de quarta ordem), de componentes:

$$\delta_{ik}\delta_{jh}, \delta_{ij}\delta_{kh} \text{ e } \delta_{ih}\delta_{kj}$$

são ainda isótropos, visto estas expressões das componentes se conservarem nas transformações ortogonais; e não é possível formar, a partir do tensor unitário, mais tensores produtos de quarta ordem, de componentes independentes.

Quere dizer, correspondentemente a estes produtos, um tensor isótropo de quarta ordem pode ter, quando muito, três componentes independentes, que se reduzem a duas, atendendo à simetria em relação aos índices  $i$  e  $k$  e em relação aos índices  $j$  e  $h$ . Designando-as por  $\lambda$  e  $\mu$ , virá:

$$c_{ik,jh} = \lambda \delta_{ik} \delta_{jh} + \mu (\delta_{ij} \delta_{kh} + \delta_{ih} \delta_{kj}). \quad (160)$$

As constantes  $\lambda$  e  $\mu$  são as *constantes de Lamé*, ligadas ao módulo de Young  $E$ , ao módulo de elasticidade transversal  $G$  e ao coeficiente de Poisson  $1/m$ , pelas relações:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \\ G &= \mu \\ m &= \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda} \\ G &= \frac{1}{2} \frac{mE}{m+1}. \end{aligned} \quad (161)$$

Substituindo (160) em (153), vem:

$$\begin{aligned}
 t_{ik} &= \lambda \delta_{ik} \sum_{jh} d_{jh} \delta_{jh} + \mu \sum_{jh} d_{jh} (\delta_{ij} \delta_{kh} + \delta_{ih} \delta_{kj}) = \\
 &= \lambda \delta_{ik} \sum_j d_{jj} \delta_{jj} + \mu (d_{ik} \delta_{ii} \delta_{kk} + d_{ki} \delta_{kk} \delta_{ii}) = \\
 &= \lambda \delta_{ik} \sum_j d_{jj} + \mu (d_{ik} + d_{ki}) = \\
 &= \lambda \theta \delta_{ik} + 2 \mu d_{ik},
 \end{aligned} \tag{162}$$

sendo  $\theta$  o coeficiente de dilatação cúbica.

A relação (162) é a relação característica das deformações elásticas que, na notação habitual, permite escrever as clássicas *equações de Lamé*:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \theta + 2 \mu \epsilon_x = \lambda \theta + 2 \mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma_y &= \lambda \theta + 2 \mu \epsilon_y = \lambda \theta + 2 \mu \frac{\partial v}{\partial y} \\ \sigma_z &= \lambda \theta + 2 \mu \epsilon_z = \lambda \theta + 2 \mu \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \right. \tag{163}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \tau_{yz} &= \mu \gamma_{yz} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \tau_{zx} &= \mu \gamma_{zx} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \tau_{xy} &= \mu \gamma_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \right.$$

A expressão da energia potencial elástica, resulta de substituir (160) em (134):

$$\begin{aligned}
 \varphi &= \frac{1}{2} \sum_{ik,jh} c_{ik,jh} d_{ik} d_{jh} = \\
 &= \frac{1}{2} \lambda \sum_{ik} d_{ik} \delta_{ik} \sum_{jh} d_{jh} \delta_{jh} + \frac{1}{2} \mu \sum_{ik} d_{ik} \sum_{jh} (\delta_{ij} \delta_{kh} + \delta_{ih} \delta_{kj}) d_{jh} = \\
 &= \frac{1}{2} \lambda \theta^2 + \mu \sum_{ik} d_{ik}^2 = \\
 &= \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) \sum_i d_{ii}^2 + \frac{1}{2} \lambda \sum_{ik} d_{ii} d_{kk} \omega_{ik} + \mu \sum_{ik} d_{ik}^2 \omega_{ik}, \quad (164)
 \end{aligned}$$

sendo:

$$\omega_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{para } i = k \\ 1 & \text{para } i \neq k \end{cases} \quad (165)$$

as componentes cartesianas de uma matriz quadrada.

As tensões normais podem, assim, escrever-se:

$$\begin{aligned}
 t_{ii} &= \frac{\partial \varphi}{\partial d_{ii}} = (\lambda + 2\mu) d_{ii} + \lambda \sum_k d_{kk} \omega_{ik} = \\
 &= (\lambda + 2\mu) d_{ii} + \lambda \sum_k d_{kk}, \quad (i \neq k) \quad (166)
 \end{aligned}$$

e as tensões tangenciais:

$$\begin{aligned}
 t_{ik} &= \frac{\partial \varphi}{\partial d_{ik}} = 2\mu d_{ik} \omega_{ik} = \\
 &= 2\mu d_{ik}, \quad (i \neq k). \quad (167)
 \end{aligned}$$

Somando as três tensões normais, vem:

$$\sum_i t_{ii} = \theta (3\lambda + 2\mu), \quad (168)$$

donde:

$$\theta = \frac{\sum_i t_{ii}}{3\lambda + 2\mu}, \quad (169)$$

e a expressão (162) transforma-se em:

$$t_{ik} = \lambda \delta_{ik} \frac{\sum_i t_{ii}}{3\lambda + 2\mu} + 2\mu d_{ik}, \quad (170)$$

donde:

$$d_{ik} = \frac{1}{2\mu} \left( t_{ik} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \delta_{ik} \sum_i t_{ii} \right). \quad (171)$$

Os coeficientes de dilatação linear vêm:

$$\begin{aligned} d_{ii} &= \frac{1}{2\mu} \left( t_{ii} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \delta_{ii} \sum_i t_{ii} \right) = \\ &= \frac{1}{2\mu} \left[ \left( 1 - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \right) t_{ii} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sum_k t_{kk} \omega_{ik} \right] = \\ &= \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \left[ t_{ii} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \sum_k t_{kk} \omega_{ik} \right] \end{aligned} \quad (172)$$

ou, atendendo a (161):

$$\begin{aligned} d_{ii} &= \frac{1}{E} \left( t_{ii} - \frac{1}{m} \sum_k t_{kk} \omega_{ik} \right) = \\ &= \frac{1}{E} \left( t_{ii} - \frac{1}{m} \sum_k t_{kk} \right), \quad (i \neq k). \end{aligned} \quad (173)$$

Os escorregamentos serão:

$$\begin{aligned} d_{ik} &= \frac{1}{2\mu} t_{ik} \omega_{ik} = \\ &= \frac{1}{2\mu} t_{ik}, \quad (i \neq k) \end{aligned} \quad (174)$$

ou, atendendo a (161):

$$\begin{aligned} 2d_{ik} &= \frac{t_{ik}}{G} \omega_{ik} = \\ &= \frac{t_{ik}}{G}, \quad (i \neq k). \end{aligned} \quad (175)$$

Na notação habitual, as expressões (173) e (175) escrevem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \frac{1}{m} (\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \frac{1}{m} (\sigma_z + \sigma_x)] \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \frac{1}{m} (\sigma_x + \sigma_y)] \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx} \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \end{array} \right. \quad (176)$$

Adoptando êste aspecto das expressões das componentes das deformações, de (156) pode deduzir-se a expressão da energia potencial elástica elementar:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2} \sum_{ik} t_{ik} d_{ik} = \\ &= \frac{1}{2E} \sum_i t_{ii}^2 - \frac{1}{2mE} \sum_{ik} t_{ii} t_{kk} \omega_{ik} + \frac{1}{4G} \sum_{ik} t_{ik}^2 \omega_{ik} = \\ &= \frac{1}{2E} \sum_i t_{ii}^2 - \frac{1}{2mE} \sum_{ik} t_{ii} t_{kk} + \frac{1}{4G} \sum_{ik} t_{ik}^2, \quad (i \neq k) \end{aligned} \quad (177)$$

ou, na notação habitual:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{1}{mE} (\sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_y) + \\ &\quad + \frac{1}{2G} (\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2). \end{aligned} \quad (178)$$

A introdução dos tensores de desvio dos esforços e das deformações permite dar a estas expressões forma ainda mais simples. De facto, vimos que os tensores de desvio eram definidos pelas componentes cartesianas:

$$\begin{aligned} d_{ik} &= d_{ik} - d_o \delta_{ik} \\ t'_{ik} &= t_{ik} - t_o \delta_{ik}, \end{aligned}$$

sendo:

$$d_o = \frac{1}{3} \sum_i d_{ii} = \frac{1}{3} \theta$$

a dilatação média, e:

$$t_o = \frac{1}{3} \sum_i t_{ii}$$

o esforço médio. A expressão (162) transformar-se-á, pois, em:

$$\begin{aligned} t_{ik} &= 3\lambda d_o \delta_{ik} + 2\mu (d'_{ik} + d_o \delta_{ik}) = \\ &= (3\lambda + 2\mu) d_o \delta_{ik} + 2\mu d'_{ik}. \end{aligned} \quad (179)$$

Fazendo:

$$\nu = 3\lambda + 2\mu = \frac{mE}{m-2}, \quad (180)$$

pode escrever-se:

$$\begin{aligned} \sum_i t_{ii} &= \nu d_o \sum_i \delta_{ii} + 2\mu \sum_i d'_{ii} = \\ &= 3\nu d_o, \end{aligned} \quad (181)$$

logo:

$$t_o = \nu d_o = \frac{\nu}{3} \theta, \quad (182)$$

donde se conclui ser a dilatação cúbica proporcional ao esforço médio. O coeficiente  $\frac{3}{\nu} = \frac{3}{3\lambda + 2\mu}$  designa-se por *coeficiente de compressibilidade cúbica*.

Por outro lado:

$$\begin{aligned} t'_{ik} &= t_{ik} - t_o \delta_{ik} = \lambda \theta \delta_{ik} + 2\mu d_{ik} - \nu d_o \delta_{ik} = \\ &= 3d_o \lambda \delta_{ik} + 2\mu (d'_{ik} + d_o \delta_{ik}) - \nu d_o \delta_{ik} = \\ &= (3\lambda + 2\mu) d_o \delta_{ik} - \nu d_o \delta_{ik} + 2\mu d'_{ik} = \\ &= 2\mu d'_{ik}, \end{aligned} \quad (183)$$

expressão que mostra serem proporcionais as componentes dos tensores de desvio dos esforços e das deformações.



As expressões (182) e (183):

$$t_o = \nu d_o$$

$$t'_{ik} = 2\mu d'_{ik},$$

com:

$$\nu = 3\lambda + 2\mu = \frac{mE}{m-2}$$

são as expressões características das deformações elásticas e substituem (162).

Podem, assim, relacionar-se as conclusões isoladamente tiradas para os esforços e para as deformações, dizendo que qualquer estado de solitação de um sólido isótropo se pode considerar como a sobreposição de um estado de tensão constante ou pressão hidrostática, de intensidade igual à do esforço médio, que lhe provoca a variação de volume que realmente sofre, e de um estado de tensão puramente tangencial actuando em três planos ortogonais, que apenas lhe produz mudança de forma, sem variação de volume.

A energia potencial elástica elemental é, nesta forma, dada por:

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{1}{2} \sum_{ik} t_{ik} d_{ik} = \\ &= \frac{1}{2} (3 t_o d_o + \sum_{ik} t'_{ik} d'_{ik}) = \\ &= \frac{3}{2\nu} t_o^2 + \frac{1}{4\mu} \sum_{ik} t'^2_{ik}.\end{aligned}\quad (184)$$

O termo:

$$\varphi_v = \frac{3}{2\nu} t_o^2 = \frac{3\nu}{2} d_o^2, \quad (185)$$

que na notação habitual se escreve:

$$\begin{aligned}\varphi_v &= \frac{3}{2\nu} \left( \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \right)^2 = \frac{1}{6\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 = \\ &= \frac{m-2}{6mE} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 = \\ &= G \frac{m+1}{3(m-2)} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)^2,\end{aligned}\quad (186)$$

representa a parte da energia potencial elástica elementar despendida na variação de volume do corpo; o termo:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{\delta} &= \frac{1}{4\mu} \sum_{ik} t'_{ik}{}^2 = \\
 &= \frac{1}{24G} \sum_{ik} (t_{ii} - t_{kk})^2 + \frac{1}{4G} \sum_{ik} t_{ik}{}^2 \omega_{ik} = \\
 &= \frac{G}{6} \sum_{ik} (d_{ii} - d_{kk})^2 + \frac{G}{4} \sum_{ik} d_{ik}{}^2 \omega_{ik}, \quad (187)
 \end{aligned}$$

que na notação habitual se escreve:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{\delta} &= \frac{1}{12G} [(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2] + \\
 &\quad + \frac{1}{2G} (\tau_{yz}{}^2 + \tau_{zx}{}^2 + \tau_{xy}{}^2) = \\
 &= \frac{G}{3} [(\epsilon_y - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_z - \epsilon_x)^2 + (\epsilon_x - \epsilon_y)^2] + \\
 &\quad + \frac{G}{2} (\gamma_{yz}{}^2 + \gamma_{zx}{}^2 + \gamma_{xy}{}^2), \quad (188)
 \end{aligned}$$

representa a parte da energia potencial elástica elementar despendida na mudança de forma do corpo, por escorregamento.

7 — VARIAÇÃO DOS ESFORÇOS DURANTE O PROCESSO DE DEFORMAÇÃO PLÁSTICA. RELAÇÃO CARACTERÍSTICA DAS DEFORMAÇÕES PLÁSTICAS DOS CORPOS ISÓTROPOS — Pode, como dissemos, admitir-se que as deformações plásticas se fazem sem variação de volume. Quere dizer, quando um sólido se deforma sob a acção de sollicitações exteriores, só varia de volume enquanto as deformações são elásticas; desde que se atinge a fase plástica, as deformações produzem-se por escorregamento e o volume mantém-se constante.

Na fase elástica, a lei de Hooke generalizada traduz uma relação linear entre o tensor dos esforços e o das deformações; na fase plástica, as deformações crescem mais rapidamente do que os esforços e não desaparecem com êles, a lei de Hooke deixa de ter applicação

e torna-se impossível estabelecer relação biúnívoca entre os dois tensores. Isto mostra que não é o *estado de deformação* mas o *processo de deformação* que está relacionado com os esforços e daí o admitir-se que há correspondência entre os esforços e as velocidades de deformação.

Mas as deformações plásticas caracterizam-se, como acabamos de dizer, por serem produzidas sob volume constante, são deformações por escorregamento, e tem-se verificado que o estado de pressão hidrostática, constante em tôdas as direcções, produz deformações elásticas com variação de volume. Por consequência, a relação característica das deformações plásticas deve ligar o tensor das velocidades de deformação, não com o tensor dos esforços, mas com o tensor de desvio dos esforços. Admite-se que êstes dois tensores são *paralelos*, isto é, que as suas direcções principais coincidem e que é linear a relação que liga as componentes cartesianas correspondentes.

Esta relação é semelhante à que, nas deformações elásticas, liga as componentes do tensor dos esforços com as do tensor das deformações. Será, pois:

$$t'_{ik} = \sum_{jh} \bar{c}_{ik,jh} \dot{d}_{jh}. \quad (189)$$

No caso da isotropia, introduzindo os dois coeficientes  $\bar{\lambda}$  e  $\bar{\mu}$ , análogos aos coeficientes de Lamé, mas que agora não são constantes, e observando que as deformações plásticas se realizam sob volume constante, isto é, que se verifica a relação (131):

$$\sum_j \dot{d}_{jj} = 0$$

chega-se, por via semelhante à anteriormente seguida, a:

$$t'_{ik} = t_{ik} - t_o \delta_{ik} = 2 \bar{G} \dot{d}_{ik}, \quad (190)$$

onde se fêz  $\bar{\mu} = \bar{G}$ . Na notação habitual, escreve-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x - \sigma_o = 2 \bar{G} \dot{\epsilon}_x = 2 \bar{G} \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \\ \sigma_y - \sigma_o = 2 \bar{G} \dot{\epsilon}_y = 2 \bar{G} \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} \\ \sigma_z - \sigma_o = 2 \bar{G} \dot{\epsilon}_z = 2 \bar{G} \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} \end{array} \right. \quad (191)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{yz} = \bar{G} \dot{\gamma}_{yz} = \bar{G} \left( \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial z} \right) \\ \tau_{zx} = \bar{G} \dot{\gamma}_{zx} = \bar{G} \left( \frac{\partial \dot{u}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right) \\ \tau_{xy} = \bar{G} \dot{\gamma}_{xy} = \bar{G} \left( \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} \right), \end{array} \right.$$

donde se tira facilmente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\epsilon}_x = \frac{1}{3 \bar{G}} \left[ \sigma_x - \frac{1}{2} (\sigma_y + \sigma_z) \right] \\ \dot{\epsilon}_y = \frac{1}{3 \bar{G}} \left[ \sigma_y - \frac{1}{2} (\sigma_z + \sigma_x) \right] \\ \dot{\epsilon}_z = \frac{1}{3 \bar{G}} \left[ \sigma_z - \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) \right] \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \dot{\gamma}_{yz} = \frac{1}{\bar{G}} \tau_{yz} \\ \dot{\gamma}_{zx} = \frac{1}{\bar{G}} \tau_{zx} \\ \dot{\gamma}_{xy} = \frac{1}{\bar{G}} \tau_{xy} \end{array} \right. \quad (192)$$

ou, em notação tensorial:

$$2 \dot{d}_{ik} = \frac{1}{3 \bar{G}} (3 t_{ik} - \delta_{ik} \sum_i t_{ii}). \quad (193)$$

Estas relações são análogas às que exprimem a lei de Hooke na teoria da elasticidade, desde que, nestas, se tome para valor do módulo de Poisson:

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{2}.$$

A analogia é, no entanto, puramente formal, pois que o *módulo de plasticidade*  $\bar{G}$  é variável de ponto para ponto do corpo, e de instante para instante.

8 — CONDIÇÃO DE PLASTICIDADE — Enunciámos os princípios que, em elasticidade, permitem relacionar os esforços com as deformações e os que, em plasticidade, permitem relacionar os esforços com as velocidades de deformação. Põe-se, agora, o problema da determinação das condições a que os esforços devem satisfazer no instante em que o corpo, sob a acção de solicitações exteriores, passa da fase das deformações elásticas, para a fase das deformações plásticas.

Quando se submete um corpo à acção de solicitações exteriores, em cada ponto do corpo o estado de deformação é definido por seis componentes que, enquanto se não atinge a fase plástica, são funções lineares das componentes dos esforços que caracterizam o estado de tensão no mesmo ponto.

Ao iniciarem-se as deformações plásticas, esta relação linear deixa de se verificar e tem-se reconhecido experimentalmente que, durante a fase plástica, os esforços não sofrem variação sensível, mesmo quando varia a velocidade de deformação. Admite-se, então, que durante todo o processo de deformação plástica, as componentes do tensor dos esforços satisfazem à mesma equação:

$$F(t_{ik}) = 0, \quad (194)$$

que corresponde ao início da fluência e a que se chama *condição de plasticidade*. Se o corpo é isótropo, a condição de plasticidade não é, decerto, influenciada pela orientação dos eixos principais, mas apenas pela intensidade dos esforços principais, ou seja, dos elementos da diagonal principal do tensor dos esforços e passa a ser da forma:

$$f(t_i) = 0. \quad (195)$$

Adoptando as coordenadas de Haigh e Westergaard, isto é, considerando os esforços principais  $t_i$  como coordenadas rectangulares, cada estado de tensão de um ponto de um corpo será representado por um ponto no espaço assim definido e o lugar geométrico dos pontos que representam estados de tensão correspondentes ao início de deformações plásticas é uma superfície, cuja equação é, precisamente, a condição de plasticidade. O corpo estará no estado

elástico, enquanto o ponto representativo do seu estado de tensão fôr interior à superfície de fronteira assim definida, ou seja, enquanto a soma:

$$\sum_i t_i^2,$$

que mede a distância do ponto à origem, fôr inferior a certo limite; se o ponto representativo do estado de tensão cai na superfície de fronteira ou se a sua distância à origem atinge êsse limite, vão iniciar-se as deformações plásticas, caracterizadas por pontos representativos exteriores à superfície de fronteira.

Já sabemos que a pressão hidrostática não produz deformações plásticas, quer dizer, o limite elástico não varia se se aumenta o tensor dos esforços  $t_{ik}$  do tensor isótropo  $t_o \delta_{ik}$ . Por consequência, o limite elástico só depende dos esforços principais do tensor de desvio dos esforços:

$$t'_i = t_i - t_o$$

e segue-se que a superfície de fronteira possui três planos de simetria que passam pelos eixos coordenados e se cortam segundo uma recta com igual inclinação relativamente a cada um dêles: o eixo da superfície de fronteira é a equisectriz do triedro positivo de referência.

A representação plana das condições de plasticidade pode fazer-se, projectando no plano:

$$\sum_i t_i = 0$$

que passa pela origem, normalmente à equisectriz, as secções da superfície de fronteira por planos paralelos:

$$\sum_i t_i = \text{const.}$$

e situados a diferentes distâncias da origem.

O comportamento dos diferentes materiais, sob o ponto de vista da produção das deformações plásticas não permite que se estabeleça uma condição de plasticidade única e isto deve-se, certamente, à diversidade das suas estruturas internas. Assim se explica que tôdas

as numerosas condições de plasticidade que têm sido propostas encontrem a sua justificação nos ensaios experimentais restritos que a cada uma dizem respeito, os quais, por via de regra, excluem a aceitação das demais.

Sem esquecer que alguns afirmam (Roš) corresponder a cada estrutura da matéria condição de plasticidade diferente, pode dizer-se que existem algumas condições de plasticidade que, conforme os casos, parecem traduzir com suficiente aproximação as características das deformações plásticas dos materiais que cabem em cada uma das seguintes designações: materiais frágeis, materiais dúcteis, maciços com atrito interno.

Mencionaremos aquelas condições de plasticidade que merecem mais aceitação, sendo certo que nos interessa essencialmente o caso dos materiais dúcteis (como o aço doce e até o betão armado) e o dos materiais frágeis (como o ferro fundido, as rochas, o betão).

A condição de plasticidade de Saint-Venant ou de Guest, a que também se chama *princípio de Tresca*, exprime a hipótese de que as primeiras deformações plásticas se produzem em certo ponto de um corpo, desde que o esforço tangencial máximo ali atinja certo valor, o que, na notação habitual se traduz por:

$$\tau_{max} < K. \quad (196)$$

Como:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2},$$

onde  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$  são os esforços principais máximo e mínimo, esta condição pode-se escrever:

$$\sigma_1 - \sigma_3 < \Sigma_e, \quad (197)$$

sendo  $\Sigma_e = 2K$  o esforço normal no limite de elasticidade (esforço de comparação) à compressão e à tracção.

Adoptando o sistema de coordenadas cartesianas  $\sigma$  e  $\tau$ , a representação geométrica da condição de Saint-Venant-Guest (fig. 9) reduz-se a duas rectas paralelas ao eixo  $O\sigma$ , que são as envolventes dos círculos de Mohr, no limite inferior da plastificação. Estes círculos de Mohr têm por diâmetro  $\sigma_1 - \sigma_3$  ou por raio  $\tau_{max}$  e, por consequência, as duas rectas envolventes estão afastadas do eixo  $O\sigma$ , de  $\pm \frac{\Sigma_e}{2}$ .

As facêtas onde se produz o escorregamento são representadas pelos pontos  $R$ , de contacto entre os círculos de Mohr e as rectas limites e são paralelas a  $RS_3$ , se  $OS_1$  é a direcção principal máxima: as facêtas de escorregamento estão inclinadas de  $45^\circ$  sobre as facêtas principais.

Adoptando as coordenadas de Haigh, convém exprimir a condição de plasticidade em notação tensorial:

$$t_i - t_k < \Sigma_e, \quad (198)$$

para mostrar que implica a satisfação de seis desigualdades. Se se

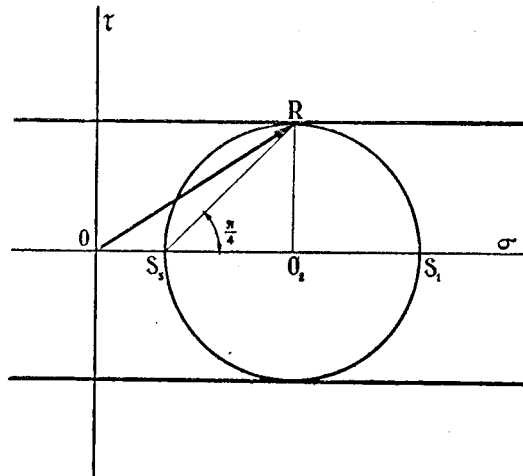


Fig. 9

toma o sinal de igualdade, obtêm-se seis equações que representam três grupos de dois planos paralelos dois a dois, respectivamente, aos planos bissectores do triedro positivo de referência. O conjunto destes seis planos constitui um prisma hexagonal, de eixo coincidente com a equisectriz do triedro positivo, prisma cuja superfície lateral é a superfície de fronteira entre os pontos representativos dos estados elástico e plástico.

De acordo com esta condição, as deformações permanentes deverão produzir-se nas facêtas do corpo onde actuam os esforços tangenciais máximos, as facêtas de escorregamento, inclinadas de  $45^\circ$  sobre as direcções principais extremas. Este facto é confirmado experimentalmente, mas só nos materiais muito dúcteis, pelo aparecimento das linhas de Lüders, Hartmann ou Piobert, traços na superfície do corpo



das superfícies ao longo das quais se dão os escorregamentos plásticos, inclinadas de  $45^\circ$  sobre as direcções principais extremas. Nos materiais frágeis, as linhas de Lüders têm direcção muito diferente da das facêtas de escorregamento.

A *condição de plasticidade de Coulomb* exprime a hipótese de que as deformações plásticas se dão por escorregamento e de que, entre a tensão tangencial e a tensão normal que actuam nas facêtas de escorregamento, existe relação linear:

$$\tau = c + \sigma f, \quad (199)$$

sendo  $c$  e  $f$  duas constantes características da matéria. Quando é  $f=0$ ,

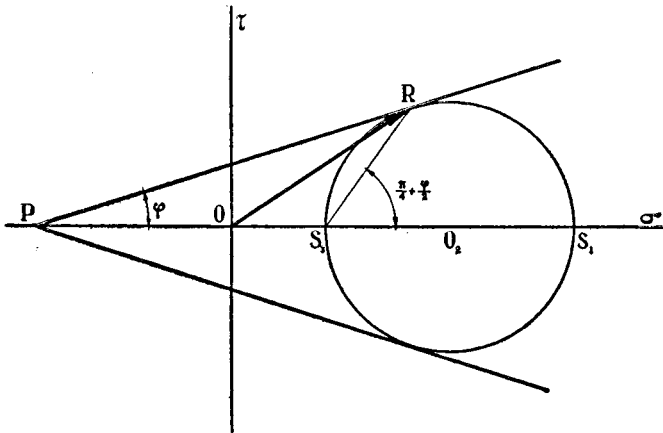


Fig. 10

vem  $\tau=c$  e conclui-se que a condição de plasticidade de Saint-Venant-Guest é um caso particular da de Coulomb.

No sistema de eixos coordenados cartesianos  $\sigma$  e  $\tau$ , a condição de Coulomb é representada por duas rectas (fig. 10), inclinadas relativamente ao eixo  $O\sigma$  do ângulo  $\varphi$  dado por:

$$f = \tan \varphi, \quad (200)$$

e que concorrem no ponto do mesmo eixo, de abscissa:

$$\sigma_0 = -\frac{c}{f}.$$

As duas rectas limites são as envolventes dos círculos de Mohr correspondentes a equilíbrios limites inferiores de plastificação e as facêtas de escorregamento são representadas pelos pontos  $R$  de tangência e fazem com a direcção principal máxima, ângulos tais como:

$$R\hat{S}_3 S_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}.$$

A resistência elástica à tracção simples  $\Sigma_e$  e à compressão simples  $\Sigma'_e$  são definidas pelos diâmetros dos círculos de Mohr (fig. 11)

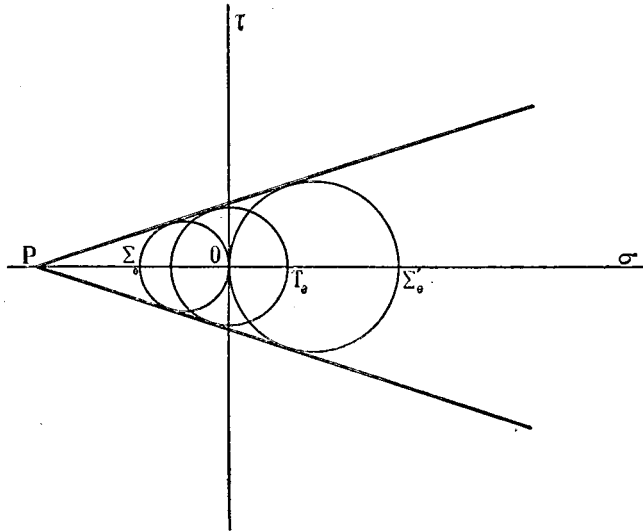


Fig. 11

que passam pela origem e são tangentes às rectas limites; a resistência elástica aos esforços tangenciais ou ao corte  $T_e$  é definida pelo raio do círculo de Mohr com centro na origem, tangente às rectas limites.

Adoptando as coordenadas de Haigh, é necessário exprimir a condição do Coulomb em função dos esforços principais extremos, que continuaremos a supor serem  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$ , e de  $\Sigma_e$  e  $\Sigma'_e$ .

Para isso, observe-se (fig. 12) que os triângulos  $OO_2E$  e  $OC'B$  são semelhantes e, por consequência, que:

$$\frac{\overline{O_2E}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{OO_2}}{\overline{OC'}}. \quad (201)$$

Mas:

$$\overline{O_2 E} = \overline{O_2 D} - \overline{DE} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) - T_e$$

$$\overline{C' B} = \overline{C' A} - \overline{BA} = \frac{1}{2}\Sigma'_e - T_e$$

$$\overline{OO_2} = \overline{O_2 S_3} - \overline{OS_3} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) - \sigma_1$$

$$\overline{OC'} = \frac{1}{2}\Sigma'_e.$$

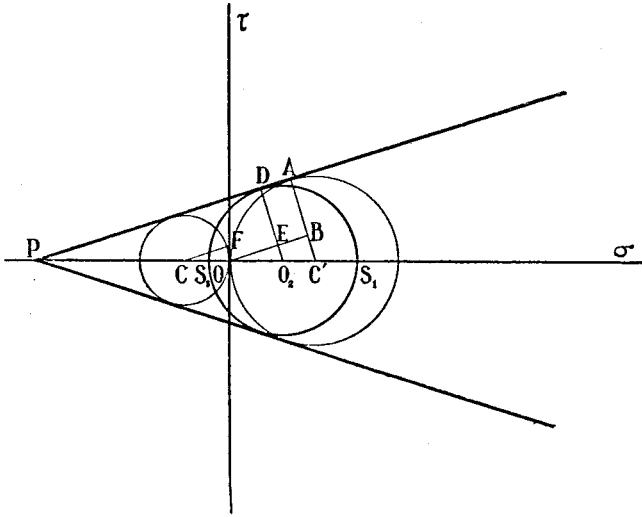


Fig. 12

Por outro lado:

$$\frac{\overline{C' B}}{\overline{OC'}} = \frac{\overline{OF}}{\overline{OC}}$$

e:

$$\overline{OF} = T_e - \frac{\Sigma_e}{2}$$

$$\overline{OC} = \frac{\Sigma_e}{2},$$

logo:

$$T_e = \frac{\Sigma_e \Sigma'_e}{\Sigma_e + \Sigma'_e} \quad (202)$$

e, finalmente, de (201) tira-se a condição de Coulomb:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \frac{\Sigma_e}{\Sigma'_e} = \Sigma_e \quad (203)$$

que, escrita em notação tensorial:

$$t_i - t_k \frac{\Sigma_e}{\Sigma'_e} = \Sigma_e, \quad (204)$$

mostra que a superfície de fronteira é constituída por seis planos, faces de uma pirâmide de base hexagonal, cujo eixo é a equisectriz do triedro positivo de referência.

A condição de Coulomb traduz com muita aproximação o escoamento plástico dos maciços com atrito interno, pulverulentos ou coerentes. Nesse caso, a constante  $c$  chama-se *coesão* e a constante  $\varphi$  *ângulo de atrito interno*.

Esta condição não é aceitável para os materiais dúcteis, mas é-o para os frágeis.

A *condição de Mohr-Coquot* exprime a hipótese de que as deformações plásticas se dão por escorregamento e de que, entre a tensão tangencial e a tensão normal que actuam nas facêtas de escorregamento, existe certa relação:

$$\tau = f(\sigma), \quad (205)$$

equação do lugar geométrico dos extremos dos vectores representativos dos esforços que nessas facêtas determinam os primeiros escorregamentos plásticos, lugar geométrico a que Caquot chama *curva intrínseca de resistência elástica* do material. Visto que o meio é isótropo, a curva intrínseca é simétrica relativamente ao eixo  $Oo$  (fig. 13).

Se o esforço numa facêta de escorregamento é representado por um vector cuja extremidade cai no domínio interior da curva intrínseca, a deformação correspondente é elástica; se essa extremidade cai na curva intrínseca, está-se na iminência da produção das primeiras deformações plásticas, ao longo da facêta de escorregamento correspondente. Os pontos da curva intrínseca correspondentes às

extremidades de vectores representativos de esforços do escorregamento, hão-de, simultâneamente, pertencer aos círculos de Mohr principais, correspondentes aos respectivos estados de equilíbrio. Segue-se que a curva intrínseca é a envolvente dos círculos de Mohr relativos aos estados de equilíbrio limite inferior de plasticificação e, para que o esforço em certa facêta, não de escorregamento, produza no corpo deformações elásticas, é necessário e suficiente que o círculo de Mohr que define o estado de equilíbrio

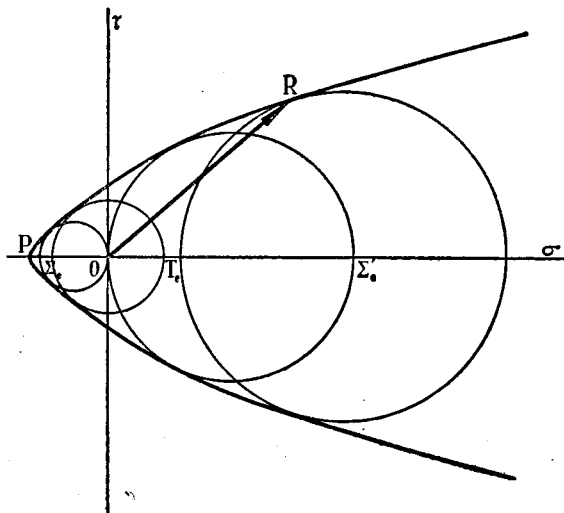


Fig. 13

correspondente e sôbre o qual há-de existir a extremidade do respectivo vector representativo pertença, em todos os seus pontos, ao domínio interior da curva intrínseca.

A resistência elástica à tracção simples e à compressão simples são dadas pelos diâmetros dos círculos de Mohr tangentes à curva intrínseca e que passam pela origem; a resistência elástica ao corte é dada pelo raio do círculo de Mohr tangente à curva intrínseca, com centro na origem das coordenadas.

Como os sólidos cheios resistem indefinidamente à compressão hidrostática, representada por pontos do eixo das abscissas, a curva intrínseca é aberta do lado das compressões; a abscissa do pólo da curva, isto é, a abscissa do ponto de intersecção da curva com o eixo  $O\sigma$  do lado das tracções, mede a *resistência de atracção molecular* do material.

Da noção de curva intrínseca, tirou Caquot as seguintes conclusões:

1.<sup>a</sup> — que o limite das deformações reversíveis é unicamente determinado pela intensidade dos esforços principais máximo e mínimo e é independente do esforço principal médio;

2.<sup>a</sup> — que qualquer aumento do esforço principal máximo determina aumento, pelo menos igual, do esforço principal mínimo;

3.<sup>a</sup> — que os escorregamentos plásticos se produzem sempre simultaneamente em dois planos, os planos de escorregamento, cuja intersecção tem a direcção do esforço principal médio.

O traçado da curva intrínseca de resistência elástica, faz-se a partir dos resultados de ensaios experimentais.

Para adoptar a representação de Haigh, é indispensável conhecer previamente a relação que liga  $\sigma$  com  $\tau$  e determinar, em seguida, a relação que liga as tensões principais extremas. Obtêm-se, assim, seis relações que, em notação tensorial, se escrevem:

$$t_i = f(t_k) \quad (206)$$

e que no sistema de coordenadas de Haigh representam as seis faces da superfície de fronteira entre as deformações elásticas e as deformações plásticas. O volume limitado por esta superfície tem por eixo a equisectriz do triedro positivo de referência, é aberto do lado negativo dêste eixo e fechado do lado positivo.

A pirâmide representativa da condição de Coulomb e o prisma da condição de Saint-Venant-Guest são casos particulares da superfície representativa da condição de Mohr, assim como as duas rectas, concorrentes na primeira e paralelas na segunda, envoltentes dos círculos de Mohr relativos aos equilíbrios limites inferiores de plastificação, são as curvas intrínsecas particulares correspondentes às respectivas hipóteses.

A condição de Mohr-Caquot explica com muita exactidão o fenómeno da plastificação dos materiais dúcteis e até dos frágeis. À sua plena aceitação, apenas se oferecem duas objecções:

1.<sup>a</sup> — a plastificação e a ruptura dos materiais frágeis, por tracção simples, por dupla ou por tripla tracção não segue, manifestamente, a lei da curva intrínseca, pois não se faz por escorregamento;

2.<sup>a</sup> — a não intervenção do esforço principal médio na produção das deformações plásticas, aceitável no caso do corpo teórico, per-

feitamente homogêneo e contínuo, onde o escorregamento forçosamente se produz ao longo de um plano perpendicular ao dos dois esforços principais extremos, mostra a experiência que não se confirma no caso dos materiais utilizados nas construções, de textura irregular, que leva o plano de escorregamento a ter direcção diferente daquela.

A *condição de plasticidade de Beltrami* exprime a hipótese de que os diversos estados de tensão relativos ao início da fase da plasticidade, correspondem ao mesmo valor da energia potencial elástica elementar.

O valor limite ou crítico da energia potencial elástica elementar, além do qual as deformações correspondentes devem considerar-se plásticas, pode supor-se que seja o relativo ao esforço de tracção simples no limite de elasticidade  $\Sigma_e$ . A condição de Beltrami exprimir-se-á, pois, atendendo a (177), por:

$$\frac{\Sigma_e^2}{2E} = \frac{1}{2E} \sum_i t_{ii}^2 - \frac{1}{2mE} \sum_{ik} t_{ii} t_{kk} \omega_{ik} + \frac{1}{4G} \sum_{ik} t_{ik}^2 \omega_{ik}, \quad (207)$$

sendo, como vimos:

$$\omega_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{para } i = k \\ 1 & \text{para } i \neq k. \end{cases}$$

Em função dos esforços principais, virá:

$$\Sigma_e = \sqrt{\sum_i t_i^2 - \frac{1}{m} \sum_{ik} t_i t_k \omega_{ik}}. \quad (208)$$

Esta expressão representa, nas coordenadas de Haigh, um elipsóide de revolução, em torno da equisectriz do triedro positivo de referência.

A condição de Beltrami só se pode aplicar aos materiais cujos limites de elasticidade à tracção e à compressão sejam iguais, o que exclui os materiais frágeis.

Além disso, esta teoria limita o valor da pressão hidrostática compatível com as deformações elásticas, o que não é conforme com a experiência.

A condição de plasticidade de von Misés-Hencky atende a esta última observação, pois exprime a hipótese de que os diversos estados de tensão relativos ao início da fase plástica correspondem ao mesmo valor da energia potencial elástica despendida na mudança de forma do corpo por escorregamento.

Tomando como energia de comparação, a correspondente ao esforço de tracção simples no limite de elasticidade, a expressão (187) permite escrever:

$$\frac{\Sigma_e^2}{6G} = \frac{1}{24G} \sum_{ik} (t_{ii} - t_{kk})^2 + \frac{1}{4G} \sum_{ik} t_{ik}^2 \omega_{ik}. \quad (209)$$

Em função dos esforços principais, virá:

$$2 \Sigma_e^2 = \sum_{ik} (t_i - t_k)^2 \quad (210)$$

e em função dos esforços tangenciais máximos:

$$\frac{1}{2} \Sigma_e^2 = \sum_i T_i^2. \quad (211)$$

Esta expressão presta-se à justificação do enunciado da condição de plasticidade, tal como o propôs von Misés, pois que o seu enunciado como condição de energia, que acabamos de considerar, é devido a Hencky.

De facto, observe-se que os esforços tangenciais máximos são dados, em valor absoluto, por:

$$T_{\xi} = \frac{t_{\eta} - t_{\zeta}}{2},$$

e que é:

$$\sum_i T_i = 0.$$

Adoptando como coordenadas ortogonais os esforços tangenciais máximos, a condição de plasticidade de Saint-Venant-Guest:

$$T_i = K$$



representa um cubo de arestas paralelas aos eixos coordenados, com o comprimento  $2K$ . A intersecção dêste cubo com o plano:

$$\sum_i T_i = 0$$

é um hexágono regular, que limita o domínio dos pontos representativos de deformações elásticas. Os vértices do hexágono situados sobre as arestas do cubo são pontos representativos de estados de tensão limite, para os quais um dos esforços tangenciais máximos é nulo e os outros dois são iguais a  $K$ ; os lados do hexágono existentes nas faces do cubo, são constituídos por pontos representativos de estados de tensão limite, independentes do esforço principal médio. Como vimos, a hipótese de que o esforço principal médio não intervém na fixação do limite inferior da plastificação só é aceitável para o sólido teórico, e por isso von Misés substitui a linha descontínua que define o hexágono, por uma linha contínua, a circunferência circunscrita, que limita o círculo intersectado entre o plano:

$$\sum_i T_i = 0$$

e a esfera:

$$\sum_i T_i^2 = 2K^2. \quad (212)$$

Esta relação exprime a condição de plasticidade de von Misés, que se confunde com a de Hencky, para:

$$K = \frac{\Sigma_e}{2}. \quad (213)$$

Nas coordenadas de Haigh, esta condição de plasticidade é representada por uma superfície cilíndrica de revolução em torno da equisectriz do triedro positivo de referência.

A condição de plasticidade de von Misés-Hencky, como a de Beltrami, apenas diz respeito a materiais com limites de elasticidade iguais à tracção e à compressão. É confirmada experimentalmente para os materiais dúcteis, excepto em que implica ser ilimitado o equilíbrio elástico produzido por tracção hidrostática, o que é manifestamente inaceitável.

A condição de plasticidade de Huber tem em conta esta última observação, pois exprime a hipótese de que os diversos estados de tensão relativos ao início da fase plástica correspondem ao mesmo valor da energia potencial elástica despendida na mudança de forma do corpo, se o esforço médio é de compressão; e ao mesmo valor da energia potencial elástica total, se o esforço médio é de tracção.

A condição de Huber compõe-se, pois, das condições de Hencky e de Beltrami, nos limites em que, respectivamente, se consideram aceitáveis.

Em resumo, pode concluir-se, à face dos resultados dos ensaios experimentais, que são aceitáveis e traduzem com suficiente aproximação a realidade, as seguintes condições de plasticidade:

a) — para os materiais dúcteis, as condições de Saint-Venant-Guest, de Mohr-Caquot e de Huber, sendo, talvez, de preferir, dada a sua simplicidade, a de Saint-Venant-Guest, expressa por:

$$t_i - t_k \leq \Sigma_e;$$

b) — para os materiais frágeis, a condição de Mohr-Caquot que, nas aplicações práticas, se pode reduzir ao caso particular da condição de Coulomb, expressa por:

$$t_i - t_k \frac{\Sigma_e}{\Sigma'_e} \leq \Sigma_e.$$

9 — O PROBLEMA GERAL E O PROBLEMA PLANO DA PLASTICIDADE (PLÁSTICO-DINÂMICA) — O problema geral da plasticidade dos corpos isotrópicos consiste na determinação do estado de tensão num ponto, definido pelas seis componentes distintas  $t_{ik}$  do tensor dos esforços relativo a êsse ponto e pelas três componentes  $u_i$  do respectivo vector deslocamento ou pelas três direcções principais dos esforços e das deformações. Este problema envolve, por conseguinte, nove incógnitas ou até, atendendo à variabilidade do módulo de plasticidade  $\bar{G}$ , dez.

Para o resolver, dispomos das três equações gerais do equilíbrio indefinido, equações de Cauchy, da forma (58):

$$\sum_k \frac{\partial t_{ik}}{\partial x_k} + X_i = 0;$$

das seis equações características das deformações plásticas, da forma (190):

$$t'_{ik} = 2 \bar{G} \dot{d}_{ik};$$

e da condição de plasticidade, da forma geral (195):

$$f(t_i) = 0.$$

Ao todo, dez equações, tantas quantas as incógnitas.

Mesmo com o conhecimento das condições aos limites, o problema só em princípio fica resolvido, pois, a não ser em casos especiais, se depara com dificuldades matemáticas insuperáveis.

Entre esses casos especiais, citam-se aqueles em que é possível, pelo menos enquanto se não consideram as condições aos limites, separar o problema da determinação dos esforços do da determinação das deformações e a que, por isso mesmo, se chama *problemas isostáticos* da teoria da plasticidade. Tal é o *problema plano do equilíbrio plástico*, de Saint-Venant, que em seguida vamos considerar.

Um problema plano de plasticidade é um problema *de tensões planas* ou um problema *de deformações planas*. Num, como no outro, admite-se que uma das direcções principais é constantemente paralela a uma direcção fixa. Adoptando a notação habitual, suporemos que a direcção fixa é a do eixo dos  $zz$  e que os estados de tensão e de deformação se reproduzem, idênticos a si mesmos, em qualquer translação paralela a este eixo, isto é, que as componentes dos esforços e das deformações são independentes de  $z$ .

Quere dizer, será:

$$\dot{\gamma}_{yz} = \dot{\gamma}_{zx} = 0, \quad (214)$$

logo:

$$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (215)$$

e:

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0. \quad (216)$$

As equações de Cauchy reduzem-se, pois, no problema plano, a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \end{array} \right. \quad (217)$$

sendo  $\tau = \tau_{xy}$ .

No caso das tensões planas, visto que é:

$$\sigma_z = 0, \quad (218)$$

a condição de plasticidade não contém senão  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau$ ; no caso das deformações planas, é:

$$\dot{\epsilon}_z = \frac{1}{3G} \left[ \sigma_z - \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) \right] = 0, \quad (219)$$

donde:

$$\sigma_z = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) \quad (220)$$

e, por consequência, a condição de plasticidade também não contém senão  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau$ .

Verifica-se, assim, que no problema plano da plasticidade o conjunto das equações de Cauchy e da condição de plasticidade forma um sistema de três equações a três incógnitas, independentes das deformações: o problema, em princípio, é isostático.

Suponhamos que, por exemplo, se adopta a condição de plasticidade de Saint-Venant-Guest. A equação (220), aplicada aos esforços principais, pode escrever-se:

$$\sigma_3 = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \quad (221)$$

e as três tensões tangenciais correspondentes serão:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_1 = \frac{1}{2} (\sigma_3 - \sigma_2) = \frac{1}{4} (\sigma_1 - \sigma_2) \\ \tau_2 = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{1}{4} (\sigma_1 - \sigma_2) \\ \tau_3 = \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_1) \end{array} \right. \quad (222)$$

e a tensão  $\tau_3$  é a maior em valor absoluto, no caso das deformações planas.

No caso das tensões planas, é:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_1 = -\frac{1}{2}\sigma_2 \\ \tau_2 = +\frac{1}{2}\sigma_1 \\ \tau_3 = +\frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1) \end{array} \right. \quad (223)$$

e se  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  são de sinais contrários, como geralmente sucede, ainda neste caso é  $\tau_3$  maior em valor absoluto.

A condição de plasticidade de Saint-Venant-Guest será, pois, em ambos os casos:

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \Sigma_e, \quad (224)$$

ou:

$$\left( \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \right)^2 = \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau^2 = \frac{\Sigma_e^2}{4}. \quad (225)$$

As três equações que resolvem o problema da determinação dos esforços são, pois:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \\ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2 = \Sigma_e^2. \end{array} \right. \quad (226)$$

A integração dêste sistema de equações faz-se, por exemplo, introduzindo a *função de Airy* ou *função das tensões*  $F(x, y)$ , como em elasticidade. Pondo:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad (227)$$

as duas primeiras equações do sistema (226) são satisfeitas e a terceira transforma-se em:

$$\left( \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)^2 + 4 \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)^2 = \Sigma_e^2 \quad (228)$$

e, conhecidas as condições aos limites, a integração desta equação permite determinar  $F$  e, por consequência,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau$ . Mas, para isso, é indispensável que essas condições aos limites sejam independentes das deformações, o que nem sempre sucede.

No caso mais geral, há, pois, que associar às três equações (226), mais as três equações características das deformações plásticas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma'_x = 2 \bar{G} \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \\ \sigma'_y = 2 \bar{G} \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} \\ \tau = \bar{G} \left( \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} \right) \end{array} \right. \quad (229)$$

e o *problema plano completo*, estáticamente indeterminado, é resolvido por seis equações a seis incógnitas. O número de equações e de incógnitas pode ser reduzido a cinco, se observarmos que é:

$$\sigma'_x - \sigma'_y = \sigma_x - \sigma_y \quad (230)$$

e, que, por consequência, as três equações (229) dão:

$$\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau} = \frac{\frac{\partial \dot{v}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{u}}{\partial x}}{\frac{\partial \dot{u}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial x}} \quad (231)$$

Se a esta equação juntarmos a equação de continuidade (131), o sistema de equações que resolve o problema plano completo da plasticidade, é o seguinte:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \\ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2 = \Sigma_e^2 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau} = \frac{\frac{\partial \dot{v}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{u}}{\partial x}}{\frac{\partial \dot{u}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial x}} \\ \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (232)$$

e permite determinar as três componentes dos esforços  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau$  e as duas componentes  $\dot{u}$  e  $\dot{v}$  do vector velocidade de deformação.

10 — O PROBLEMA DA PLASTICIDADE, NO CASO DAS DEFORMAÇÕES MUITO PEQUENAS E LENTAS (PLÁSTICO-ESTÁTICA) — O problema plástico, tal como o temos pôsto até agora, é um problema de dinâmica, de *plástico-dinâmica*, no qual se procura caracterizar o estado de tensão e o estado de deformação dos pontos de um corpo que entraram na fase de escoamento plástico, em cada instante dessa fase do processo de deformação. Quere isto dizer que, até agora, não limitámos a grandeza das deformações, desde que caibam na fase de fluência, e temos considerado a velocidade com que se produzem.

É êste o problema da puncionagem, o da embutidura, o da laminagem e outros semelhantes, todos caracterizados por muito grandes deformações, mas não é o das estruturas resistentes das construções civis e das obras públicas, onde as deformações são muito pequenas, e cujo *equilíbrio* sob a acção das solicitações de serviço interessa garantir. Nessas estruturas, o problema plástico é, pois, um problema de estática, de *plástico-estática*, e havemos sempre de o considerar como simples perturbação, no problema geral do *equilíbrio elasto-estático*, onde o fenómeno elástico é preponderante. De facto, numa estrutura bem proporcionada devem ser elásticas as deformações produzidas pelas cargas e sobrecargas normais e, onde quer que deixem de o ser, sempre as deformações plásticas se poderão considerar localizadas e afectando o equilíbrio elástico apenas como termos de correcção que, aliás, é indispensável ter em conta.

Daqui resulta que, no cálculo das estruturas, só interessa considerar as deformações plásticas muito pequenas e muito lentamente applicadas, isto é, as que pertencem ao domínio da plástico-estática.

Vejamos como é que, nesta hipótese, se alteram as expressões anteriormente deduzidas.

O vector velocidade é, como vimos, dado por:

$$\vec{v} = \dot{u} = \frac{du}{dt}$$

e sendo as deformações num ponto, funções das coordenadas do ponto e do tempo, as componentes de  $\vec{v}$  serão:

$$\dot{u}_i = \frac{d\dot{u}_i}{dt} = \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} = \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_k} \dot{u}_k. \quad (233)$$

Ora, se não se consideram senão as muito pequenas deformações, produzidas a muito pequena velocidade, os termos do somatório do segundo membro desta expressão serão desprezíveis em presença do restante e poderá escrever-se:

$$\dot{u}_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial t} \quad (234)$$

e, por consequência, as componentes do tensor das velocidades de deformação virão dadas por:

$$\begin{aligned} \dot{d}_{ik} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_i} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{e}_{ik}}{\partial t} + \frac{\partial \dot{e}_{ki}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \bar{d}_{ik}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (235)$$

expressão que se obtém de (125), substituindo os sinais de derivada total pelos de derivada parcial e indicando com  $\bar{d}_{ik}$  que as deformações são plásticas. Conclui-se que, desprezando infinitamente pequenos de ordem superior, é:

$$\bar{d}_{ik} = \dot{d}_{ik} \Delta t \quad (236)$$

e a expressão (193) aplicada às deformações muito pequenas, que se produzem a muito pequena velocidade, no fim do mesmo tempo  $\Delta t$ , pode escrever-se:

$$2\bar{d}_{ik} = \frac{1}{3G} (\beta t_{ik} - \delta_{ik} \sum_i t_{ii}). \quad (237)$$

Na notação habitual, será:

$$\dot{\epsilon} = \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial t}, \quad \dot{\gamma} = \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t} \quad (238)$$

e:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\epsilon}_x = \frac{1}{3G} \left[ \sigma_x - \frac{1}{2} (\sigma_y + \sigma_z) \right] \\ \bar{\epsilon}_y = \frac{1}{3G} \left[ \sigma_y - \frac{1}{2} (\sigma_z + \sigma_x) \right] \\ \bar{\epsilon}_z = \frac{1}{3G} \left[ \sigma_z - \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) \right] \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\gamma}_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \bar{\gamma}_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx} \\ \bar{\gamma}_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \end{array} \right. \quad (239)$$



A lei que relaciona as pequenas e lentas deformações plásticas com os esforços é, por consequência, idêntica à lei de Hooke generalizada, salvo em que o módulo de plasticidade  $\bar{G}$  é variável no espaço e no tempo, enquanto que os módulos de elasticidade longitudinal e transversal,  $E$  e  $G$ , são constantes. Como a variação de  $\bar{G}$  não é conhecida, segue-se que não é possível, em plasticidade, determinar os esforços em função de deformações medidas experimentalmente. O estudo experimental das deformações plásticas há-de fazer-se à custa da determinação das *linhas de escorregamento*, trajectórias dos esforços tangenciais máximos, que aqui não consideraremos, visto que apenas nos interessa o estudo das peças prismáticas, a conduzir por via analítica.

O problema matemático está, de facto, perfeitamente determinado, tal como no caso da plástico-dinâmica, com a simples substituição das componentes da velocidade de deformação  $\dot{d}_{ik}$ , pelas componentes da deformação plástica  $\bar{d}_{ik}$ .

Há só, em cada caso concreto, que estabelecer as condições aos limites, entre as quais aquelas a que devem satisfazer os esforços e as deformações nos pontos da superfície de separação ou de fronteira entre o domínio dos pontos do corpo onde as deformações são elásticas e aquêle onde as deformações são plásticas: por um lado, as componentes dos esforços devem ter os mesmos valores quando avaliadas pelas leis da elasticidade e pelas da plasticidade; por outro, as deformações devem sofrer variações contínuas na passagem de um para o outro domínio.

É o facto de estas condições aos limites dependerem das deformações, que torna hiperstático o problema geral da plasticidade. No caso em que as deformações são muito pequenas e as elásticas são desprezíveis em presença das plásticas, as superfícies de fronteira devem considerar-se como indeformadas e o problema da determinação dos esforços é isostático.

Não é êste, como dissemos, o caso das estruturas onde, ao contrário, as deformações elásticas são preponderantes e intervêm nas condições aos limites, o que torna o problema estáticamente indeterminado.

## CAPÍTULO II

### O equilíbrio elasto-plástico das peças prismáticas

11 — O PROBLEMA DE SAINT-VENANT GENERALIZADO — Indicado como se põe em equação o problema geral da plástico-dinâmica e o da plástico-estática, e esboçado o esquema da solução matemática nalguns casos em que é susceptível de simplificação, interessa efectuar o estudo do equilíbrio elasto-plástico das peças prismáticas, de utilização universal e constante na construção.

É este o *problema de Saint-Venant generalizado*, pois que mais não é do que a generalização à plástico-estática do problema de Saint-Venant do equilíbrio elástico das peças prismáticas.

Chama-se *peça prismática* (com mais rigor ou generalidade, se devia dizer *cilíndrica*) um sólido gerado por uma superfície plana, de forma qualquer, que se move no espaço de maneira que a trajectória de cada um dos seus pontos é uma recta de direcção normal à superfície geradora, superfície a que se chama *secção transversal* ou, simplesmente, *secção* da peça prismática. Supõe-se que as dimensões da peça prismática são pequenas relativamente ao seu comprimento e que o material que a constitui é isótropo.

A superfície geradora não é necessariamente homogénea, quere dizer, pode ser constituída de vários materiais, desde que cada um dos elementos de área de diferente natureza gere, do modo atrás indicado, uma peça prismática elementar, homogénea. A peça prismática que consideramos pode, pois, ser o conjunto de várias peças prismáticas de diferentes materiais, de eixos paralelos, perfeitamente coincidentes pelas suas superfícies laterais e constituindo um todo indivisível. Isto implica que a deformação da peça há-de ser homogénea em todos os seus elementos e, analiticamente, tudo se passa

como se também a secção transversal fôsse homogénea e cada elemento de área  $d\Omega_i$  constituído de material com módulo de elasticidade  $E_i$  fôsse ampliado de  $\frac{E_i}{E}$ , sendo  $E$  o módulo de elasticidade de referência, da peça prismática. É o caso do betão armado, em que a área da secção transversal da armadura deve ser multiplicada pela relação  $m = \frac{E_a}{E_b}$ , entre o seu módulo de elasticidade e o do betão.

A estrutura das peças prismáticas é, por consequência, fibrosa e por isso se chama *fibra longitudinal* à trajectória de cada um dos pontos da secção geradora e, particularmente, *fibra média* ou *eixo médio*, à trajectória do centro de gravidade da secção. Nesta, também há a considerar *fibras transversais*, que se caracterizam pela sua direcção, e que são os lugares geométricos dos pontos da secção, equidistantes de certo eixo de referência.

O que se vai dizer, aplica-se às peças agora definidas, de eixo longitudinal rectilíneo, e às de eixo curvo, geradas de maneira semelhante, mas com raio de curvatura muito grande em relação às dimensões transversais.

No problema de Saint-Venant, supõem-se nulas as forças de massa das peças prismáticas e admite-se que as forças de solicitação exterior só estão aplicadas nas bases, onde, exclusivamente, se fazem as ligações com o exterior. A superfície lateral da peça prismática não fica, assim, sujeita a qualquer constrição ou solicitação exterior.

Adopta-se como origem das coordenadas ortogonais de referência, o centro de gravidade de uma das bases e admite-se que o eixo dos  $zz$  coincide com o eixo longitudinal da peça; os eixos dos  $xx$  e dos  $yy$ , existentes no plano da base que contém a origem, tomam-se coincidentes com os seus eixos principais centrais de inércia.

A solicitação exterior supõe-se, como dissemos, exclusivamente aplicada nas bases e há-de satisfazer à condição de que o esforço resultante em qualquer elemento de área paralelo ao eixo longitudinal da peça se reduza à componente tangencial paralela ao mesmo eixo. Em qualquer ponto deve ser, por consequência:

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0. \quad (240)$$

Admitindo que as forças exteriores aplicadas num corpo produzem esforços que excepto na immediata vizinhança dos seus pontos de aplicação, se podem considerar apenas dependentes da resultante das mesmas forças e não da sua distribuição, as três componentes não nulas:

$$\sigma_z, \tau_{yz} \text{ e } \tau_{zx}$$

dos esforços nos pontos de certa secção da peça prismática, à distância  $z$  da origem, definem completamente o estado de sollicitação exterior. De facto, aquella hipótese, conhecida por *hipótese de Saint-Venant*, leva a concluir que, se supusermos a peça prismática cortada pela referida secção, cada uma das porções isoladas pelo corte há-de estar em equilíbrio sob a acção de esforços iguais e de sinais contrários aos que, através da secção, transmitia à outra, e das forças exteriores que lhe estão directamente applicadas. Ora estas forças têm por resultante uma força que, relativamente ao plano da secção, se pode decompor em uma força normal  $N$  e outra tangencial  $T$ . A força normal é equipolente do sistema constituído pela força normal de igual intensidade  $N$ , applicada no centro de gravidade da secção, e dos momentos  $M_x$  e  $M_y$  relativamente aos eixos principais centrais de inércia da secção ou *momentos de flexão* em relação àquêles eixos; a força tangencial é equipolente do sistema constituído pelas suas componentes nas direcções dos eixos principais centrais de inércia,  $T_x$  e  $T_y$ , applicadas no centro de gravidade da secção ou *esforços transversos* componentes, e pelo momento  $M_t$  relativamente ao centro de gravidade ou *momento de torção*.

Temos, assim, que a sollicitação exterior applicada na porção de peça prismática situada a um lado da secção, é definida pelas seis *componentes da sollicitação*, relativamente àquella secção:

- a) — a força axial ou esforço axial  $N$ ;
- b) — os momentos de flexão relativamente a cada um dos eixos principais centrais de inércia,  $M_x$  e  $M_y$ ;
- c) — os esforços transversos componentes na direcção de cada um daqueles eixos,  $T_x$  e  $T_y$ ;
- d) — o momento de torção relativamente ao centro de gravidade da secção,  $M_t$ .

E a hipótese de Saint-Venant diz que, se a secção não está situada na imediata vizinhança dos pontos de aplicação da solicitação exterior, deve ser:

$$\left\{ \begin{array}{l} N = \int \sigma_z d\Omega \\ M_x = \int \sigma_z y d\Omega \\ M_y = \int \sigma_z x d\Omega \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} T_x = \int \tau_{xz} d\Omega \\ T_y = \int \tau_{yz} d\Omega \\ M_t = \int (\tau_{yz} y - \tau_{xz} x) d\Omega, \end{array} \right. \quad (241)$$

estendendo-se os integrais a tódia a secção  $\Omega$ .

O estudo das peças prismáticas tem por fim a determinação dos esforços interiores e das deformações, definidos pelas suas componentes, conhecidas que sejam as componentes da solicitação.

Em elasticidade, Barré de Saint-Venant resolveu o problema em ordem inversa, pois que, partindo das componentes das deformações e tendo-se assegurado de que elas satisfaziam às condições de compatibilidade, calculou as componentes dos esforços e, a partir delas, as componentes da solicitação. Mas só depois pôde definir convenientemente o estado de deformação do sistema: esta a razão por que o método de Saint-Venant é conhecido por *método semi-inverso*.

Na aplicação do método semi-inverso ao estudo do equilíbrio elasto-plástico das peças prismáticas, além das hipóteses que indicámos e são comuns ao problema em elasticidade, admitiremos mais que, naqueles pontos de cada secção transversal onde se atingiram as deformações plásticas, certa fracção da deformação total é elástica, quer dizer, desaparece quando cessa a acção da solicitação exterior.

Esta hipótese é, como dissemos oportunamente, confirmada pela experiência e equivale a admitir que a deformação total num ponto é a soma de certa deformação elástica e de certa deformação plástica, ambas produzidas sob a acção do mesmo esforço:

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon = \epsilon + \bar{\epsilon} = \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma}{\bar{E}} = \sigma \frac{E\bar{E}}{E + \bar{E}} \\ \gamma = \gamma + \bar{\gamma} = \frac{\tau}{G} + \frac{\tau}{\bar{G}} = \tau \frac{G\bar{G}}{G + \bar{G}}, \end{array} \right. \quad (242)$$

sendo:

$$E = 2 \left( 1 + \frac{1}{m} \right) G \quad (243)$$

$$\bar{E} = 3 \bar{G}.$$

No problema de Saint-Venant generalizado ao equilíbrio elasto-plástico das peças prismáticas, as componentes dos esforços em cada ponto de uma secção transversal serão, assim:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \\ \sigma_z = \epsilon_z E = (\epsilon_z - \bar{\epsilon}_z) E = \epsilon_z \frac{E\bar{E}}{E + \bar{E}} \\ \tau_{yz} = \gamma_{yz} G = (\gamma_{yz} - \bar{\gamma}_{yz}) G = \gamma_{yz} \frac{G\bar{G}}{G + \bar{G}} \\ \tau_{zx} = \gamma_{zx} G = (\gamma_{zx} - \bar{\gamma}_{zx}) G = \gamma_{zx} \frac{G\bar{G}}{G + \bar{G}}, \end{array} \right. \quad (244)$$

e hão-de satisfazer às equações de Cauchy (59) que, neste caso, se reduzem a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0. \end{array} \right. \quad (245)$$

Derivando a última em ordem a  $z$ , vem:

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = 0.$$

Mas, atendendo às duas primeiras e à simetria do tensor dos esforços é:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \quad (246)$$

e as equações de Cauchy ficam:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = 0. \end{array} \right. \quad (247)$$

As componentes da deformação:

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_x = \epsilon_x + \bar{\epsilon}_x = -\frac{1}{m} \epsilon_x - \frac{1}{2} \bar{\epsilon}_x = -\sigma_x \left( \frac{1}{mE} + \frac{1}{2\bar{E}} \right) \\ \epsilon_y = \epsilon_y + \bar{\epsilon}_y = -\frac{1}{m} \epsilon_x - \frac{1}{2} \bar{\epsilon}_x = -\sigma_x \left( \frac{1}{mE} + \frac{1}{2\bar{E}} \right) \\ \epsilon_z = \epsilon_z + \bar{\epsilon}_z = \sigma_x \left( \frac{1}{E} + \frac{1}{\bar{E}} \right) \end{array} \right. \quad (248)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{yz} = \gamma_{yz} + \bar{\gamma}_{yz} = \tau_{yz} \left( \frac{1}{G} + \frac{1}{\bar{G}} \right) \\ \Gamma_{zx} = \gamma_{zx} + \bar{\gamma}_{zx} = \tau_{zx} \left( \frac{1}{G} + \frac{1}{\bar{G}} \right) \\ \Gamma_{xy} = \gamma_{xy} + \bar{\gamma}_{xy} = \tau_{xy} \left( \frac{1}{G} + \frac{1}{\bar{G}} \right) = 0 \end{array} \right.$$

hãode, por um lado, satisfazer às equações de compatibilidade:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \Gamma_{zx}}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \end{array} \right. \quad (249)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \Gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \Gamma_{yz}}{\partial x} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \Gamma_{zx}}{\partial y} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \Gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \Gamma_{xy}}{\partial z} \right), \end{array} \right.$$

que agora se reduzem a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \Gamma_{zx}}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = 0 \end{array} \right. \quad (250)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \Gamma_{yz}}{\partial x} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \Gamma_{zx}}{\partial y} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \Gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_{yz}}{\partial x} \right). \end{array} \right.$$



O método semi-inverso consiste, então, em atribuir a  $\epsilon_z$ ,  $\Gamma_{yz}$  e  $\Gamma_{zx}$ , expressões que satisfaçam a (250), deduzir delas, por (244), as expressões de  $\sigma_z$ ,  $\tau_{yz}$  e  $\tau_{zx}$  e, à custa das equações de equilíbrio interior (241), determinar as constantes que definem  $\epsilon_z$ ,  $\Gamma_{yz}$  e  $\Gamma_{zx}$  e, por consequência,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{yz}$  e  $\tau_{zx}$ . Ficam, assim, conhecidos os valores das componentes das deformações e das componentes não nulas dos esforços, e a integração das equações diferenciais (19), aplicadas às deformações totais  $\epsilon$  e  $\Gamma$ , permite determinar as componentes  $u$ ,  $v$  e  $w$  do vector deformação, desde que sejam dadas as condições iniciais do problema.

Este método conduz a resultados exactos naqueles casos de solicitação em que a distribuição dos esforços é a mesma em tôdas as secções transversais da peça prismática, isto é, naqueles casos em que as componentes dos esforços e as das deformações são independentes de  $z$ , mas só se pode aplicar cómodamente nos outros casos de solicitação, como veremos, à custa de uma hipótese aparentemente grosseira que, no entanto, é legitimada pela aproximação dos resultados obtidos, em comparação com os que decorrem de medidas experimentais.

Há, assim, que fazer distinção fundamental entre solicitações constantes ao longo da peça e solicitações variáveis de secção para secção transversal.

Se as componentes dos esforços, variáveis dentro de cada secção transversal, são as mesmas em tôdas as secções, resulta que o módulo de plasticidade  $\bar{G}$  se pode considerar independente de  $z$  e variável apenas com  $x$  e  $y$ . A constância de  $\bar{G}$  (e, por consequência, de  $\bar{E}$ ) com  $z$  permite sintetizar em expressões simples, as condições de equilíbrio dos esforços e de compatibilidade das deformações, anteriormente escritas.

Na realidade, de ser  $\sigma_z$  independente de  $z$ , resulta:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{E \bar{E}}{E + \bar{E}} \epsilon_z \right) = 0, \quad (251)$$

o que verifica a última equação de Cauchy (247); tirando de (248),  $\epsilon_z$  em função de  $\epsilon_x$  e  $\epsilon_y$ , encontra-se:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{2mE\bar{E}}{mE + 2\bar{E}} \epsilon_x \right) = 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{2mE\bar{E}}{mE + 2\bar{E}} \epsilon_y \right) = 0 \end{cases} \quad (252)$$

e, dada a constância de  $\bar{E}$  com  $z$ , estas expressões permitem escrever:

$$\frac{\partial \epsilon_x}{\partial z} = \frac{\partial \epsilon_y}{\partial z} = \frac{\partial \epsilon_z}{\partial z} = 0. \quad (253)$$

As duas primeiras equações de Cauchy (247), atendendo às expressões de  $\tau_{yz}$  e  $\tau_{zx}$  (244) escrevem-se, por sua vez:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{G \bar{G}}{G + \bar{G}} \Gamma_{zx} \right) = 0 \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{G \bar{G}}{G + \bar{G}} \Gamma_{yz} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (254)$$

ou, como  $\bar{G}$  não varia com  $z$ :

$$\frac{\partial \Gamma_{zx}}{\partial z} = \frac{\partial \Gamma_{yz}}{\partial z} = 0. \quad (255)$$

Por outro lado, é:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \Gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Gamma_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial^2 \Gamma_{zx}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Gamma_{zx}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \Gamma_{zx}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Gamma_{zx}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \Gamma_{yz}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Gamma_{yz}}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \quad (256)$$

e a última equação de compatibilidade (250) e as duas primeiras associadas com (253), permitem escrever:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y} = 0. \quad (257)$$

As condições (253) e (257) exprimem que  $\epsilon_z$  deve ser do primeiro grau em  $x$  e  $y$ , independente de  $z$  e do produto  $(xy)$ , de modo que a expressão geral de  $\epsilon_z$  será da forma:

$$\epsilon_z = \nu x + \mu y + \lambda, \quad (258)$$

sendo  $\nu$ ,  $\mu$  e  $\lambda$  constantes.

Desta maneira, as três últimas equações de compatibilidade (250) reduzem-se a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \Gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \Gamma_{zx}}{\partial y} \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \Gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 0, \end{array} \right. \quad (259)$$

donde se obtém, por integração:

$$\frac{\partial \Gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \Gamma_{yz}}{\partial x} = -A_0$$

ou:

$$\frac{\partial \Gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \Gamma_{zx}}{\partial y} = A_0, \quad (260)$$

sendo  $A_0$  constante, e:

$$\frac{\partial \Gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_{yz}}{\partial x} = f_0(x, y), \quad (261)$$

sendo  $f_0(x, y)$  função de  $x$  e  $y$ .

Resolvendo o sistema constituído pelas equações (260) e (261) encontra-se, integrando:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{yz} = f_1(x, y) + \frac{1}{2} A_0 x + B \\ \Gamma_{zx} = f_2(x, y) - \frac{1}{2} A_0 y + C, \end{array} \right. \quad (262)$$

sendo  $B$  e  $C$  constantes e  $f_1(x, y)$  e  $f_2(x, y)$  funções de  $x$  e  $y$  que satisfazem à condição:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}. \quad (263)$$

Esta condição verifica-se, se fôr:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} \\ f_2(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}, \end{cases} \quad (264)$$

onde  $f(x, y)$  também é uma função de  $x$  e  $y$ , de modo que, fazendo:

$$A = \frac{1}{2} A_0,$$

vem, finalmente:

$$\begin{cases} \Gamma_{yz} = \frac{\partial f}{\partial y} + Ax + B \\ \Gamma_{zx} = \frac{\partial f}{\partial x} - Ay + C. \end{cases} \quad (265)$$

A terceira equação de Cauchy (245) impõe, atendendo a (244), que  $\Gamma_{yz}$  e  $\Gamma_{zx}$  satisfaçam à relação:

$$\frac{\partial \Gamma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_{yz}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{\Gamma}_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\Gamma}_{yz}}{\partial y}. \quad (266)$$

Se as componentes dos esforços são independentes de  $z$ , conclui-se, assim, que as componentes das deformações hão-de ser funções das formas gerais (258) e (265), satisfazendo a (266).

No caso de as componentes dos esforços serem funções de  $z$ , já não é legítimo considerar o módulo de plasticidade  $\bar{G}$  invariável com  $z$  e isso impede a integração das condições de equilíbrio e de compatibilidade. A solução do problema de Saint-Venant pode, no entanto, generalizar-se ainda a êste caso, desde que se faça a hipó-

tese de que, na fase plástica, a relação entre as deformações lineares em direcções ortogonais é o módulo de Poisson  $\frac{1}{m}$  <sup>(1)</sup>, como na fase elástica; isto é, desde que, em vez de ser:

$$\bar{\epsilon}_x = \bar{\epsilon}_y = -\frac{1}{2} \bar{\epsilon}_z,$$

conforme exige a admitida invariabilidade do volume nas deformações plásticas, seja:

$$\bar{\epsilon}_x = \bar{\epsilon}_y = -\frac{1}{m} \bar{\epsilon}_z, \quad (267)$$

como em elasticidade.

Esta hipótese, que também se pode exprimir por:

$$\epsilon_x = \epsilon_y = -\frac{1}{m} \epsilon_z, \quad (268)$$

é aceitável em critério de grande aproximação, visto que, como já dissemos, as deformações plásticas são tão pequenas que as consideramos infinitamente pequenas e, nas construções bem proporcionadas, sempre as deformações elásticas são preponderantes. Segue-se que, nos estados de equilíbrio elasto-plástico que estudamos, as deformações plásticas constituem como que uma simples perturbação do equilíbrio elástico inicial e parece razoável, para efeito das aplicações práticas, admitir que se mantenha o coeficiente de proporcionalidade de Poisson.

A solução do problema vem, assim, afectada de um êrro que os resultados experimentais mostram ser da ordem de grandeza dos que habitualmente se cometem no estudo da resistência dos materiais elásticos e que, por isso mesmo, é compatível com as condições técnicas da construção.

Admitida a relação (268), vejamos que conseqüências daí advêm, para as condições a satisfazer pelas componentes da deformação.

---

(1) Colonetti alarga esta hipótese mesmo ao caso em que as componentes dos esforços (e das deformações) são independentes de  $z$ . Acabamos de ver que nesse caso, ela é dispensável.

A última equação de Cauchy (247) permite, imediatamente, escrever:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \mathcal{C}_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \bar{\varepsilon}_x}{\partial z^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \mathcal{C}_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \bar{\varepsilon}_y}{\partial z^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \mathcal{C}_z}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \bar{\varepsilon}_z}{\partial z^2} = 0; \end{array} \right. \quad (269)$$

e as duas primeiras fornecem, por seu lado:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial z} = \frac{\partial \Gamma_{zx}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{\gamma}_{zx}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z} = \frac{\partial \Gamma_{yz}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{\gamma}_{yz}}{\partial z} = 0. \end{array} \right. \quad (270)$$

Das equações de compatibilidade deduz-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \mathcal{C}_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \bar{\varepsilon}_x}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \mathcal{C}_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \bar{\varepsilon}_z}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \mathcal{C}_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \bar{\varepsilon}_z}{\partial x \partial y} = 0. \end{array} \right. \quad (271)$$

As condições (269) e (271) mostram que  $\varepsilon_z$  é função do primeiro grau em  $x, y$  e  $z$ , independente do produto  $(xy)$ ; e da mesma forma será  $\bar{\varepsilon}_z$ , se fôr:

$$\mathcal{C}_z = vx + \mu y + \lambda + (\nu' x + \mu' y + \lambda') z, \quad (272)$$

onde  $\nu, \mu, \lambda, \nu', \mu'$  e  $\lambda'$  são constantes.

E atendendo a (268), a quarta e quinta equações de compatibilidade (250) ficam:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \Gamma_{zx}}{\partial y} \right) = \frac{2}{m} \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \Gamma_{yz}}{\partial x} \right) = \frac{2}{m} \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial z} \end{cases} \quad (273)$$

São estas as condições a que devem satisfazer as funções  $\Gamma_{zx}$  e  $\Gamma_{yz}$  que, em virtude de (270), devem ser independentes de  $z$ .

A terceira equação de Cauchy (245), atendendo a (244) e (161), impõe que entre as componentes das deformações se verifique a relação:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_{yz}}{\partial y} + 2 \left( 1 + \frac{1}{m} \right) \frac{\partial \epsilon_z}{\partial z} &= \frac{\partial \bar{\gamma}_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\gamma}_{yz}}{\partial y} + \\ &+ 2 \left( 1 + \frac{1}{m} \right) \frac{\partial \bar{\epsilon}_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (274)$$

No caso de a solicitação ser variável ao longo da peça, e desde que se suponha verificada a relação (268), as componentes das deformações hão-de, pois, satisfazer às relações (272), (273) e (274).

Assim fica generalizado ao equilíbrio elasto-plástico das peças prismáticas o problema de Saint-Venant, que permite determinar, em função das componentes da solicitação exterior, as componentes dos esforços em qualquer ponto das secções transversais e as componentes do respectivo vector deformação.

Indicamos, em seguida, as soluções do problema de Saint-Venant generalizado, para as solicitações que habitualmente se consideram na técnica da construção: a flexão, a tracção, compressão e torção, simples, e as suas combinações mútuas ou com esforço cortante. Na solicitação mais complexa que, como se verá, é a flexão desviada composta com torção, esforço axial e esforço cortante, o esforço em cada ponto de uma secção transversal é definido pelas três componentes não nulas  $\sigma_x$ ,  $\tau_{yz}$  e  $\tau_{zx}$ ; no caso de solicitações menos complexas, como as de compressão ou tracção simples, flexão

simples, flexão desviada, flexão desviada composta com esforço axial, apenas não é nula a componente  $\sigma_z$  do esforço, enquanto que no caso da torção simples, só as componentes  $\tau_{yz}$  e  $\tau_{zx}$  são diferentes de zero.

Vamos analisar cada um destes três grupos de solicitações, a começar pelo mais simples, sob o ponto de vista das condições a satisfazer para se atingirem as deformações plásticas.

a) — Se apenas a componente  $\sigma_z$  do esforço é diferente de zero, qualquer das condições de plasticidade atrás indicadas é satisfeita quando a intensidade de  $\sigma_z$  atinge a do esforço normal no limite de elasticidade do material, que se toma como esforço de comparação.

A condição de Saint-Venant-Guest reduz-se a:

$$\sigma_z \leq \Sigma_e \quad (275)$$

ou:

$$-\Sigma_e' \leq \sigma_z \leq \Sigma_e, \quad (276)$$

conforme o esforço de comparação é o mesmo ou é diferente, para a tracção e para a compressão. E a estas expressões se chega também, a partir das condições de plasticidade de Coulomb e de Mohr-Cauchy. A condição de plasticidade de Beltrami e a de von Mises-Hencky escrevem-se:

$$\sigma_z \leq \Sigma_e$$

e implicam a hipótese de que as tensões de comparação têm a mesma intensidade na tracção e na compressão.

Verifica-se, pois, que todas as condições de plasticidade, qualquer que seja o critério a que obedeceu a sua fixação, consideram como de início das deformações plásticas num ponto, aquêle instante em que o esforço normal nesse ponto atinge a intensidade do esforço de comparação, a qual não é excedida quando as deformações aumentam: as deformações plásticas fazem-se sob esforço constante.

Evidentemente que esta hipótese não tem em conta o aumento de resistência do material, devido ao fenómeno do endurecimento a frio e traduz-se, gráficamente, pelo diagrama da figura 6: à zona  $OA$  correspondem as deformações elásticas e à zona  $AB$  as deformações plásticas.



b) — Se a componente  $\sigma_z$  é nula e são diferentes de zero as componentes  $\tau_{yz}$  e  $\tau_{zx}$ , em cada ponto da secção transversal actua o esforço tangencial (unitário) resultante:

$$\tau = \sqrt{\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2}. \quad (277)$$

A condição de plasticidade de Saint-Venant-Guest estabelece que as deformações são elásticas, enquanto fôr:

$$\tau < \frac{\Sigma_e}{2} = K, \quad (278)$$

expressão que também traduz a condição de Coulomb e a de Mohr-Cauchot.

A condição de Beltrami é expressa, atendendo a (161), por:

$$\tau < \Sigma_e \sqrt{\frac{m}{2(m+1)}} \quad (279)$$

ou, para  $\frac{1}{m} = \frac{1}{3}$ , por:

$$\tau < 1,2 \frac{\Sigma_e}{2} = 1,2 K. \quad (280)$$

A condição de von Misés-Hencky escreve-se:

$$\tau < \Sigma_e \sqrt{\frac{1}{3}} \cong 1,2 \frac{\Sigma_e}{2} = 1,2 K. \quad (281)$$

Verifica-se, assim, que tôdas as condições de plasticidade são idênticas qualitativamente, e até que pouco diferem quantitativamente. Não há, pois, dúvida de que se pode afirmar que as deformações plásticas num ponto da secção têm início quando o esforço tangencial resultante atinge certo valor limite que não é excedido quando aumentam as deformações, desde que, evidentemente, se não tenha em conta o fenómeno de endurecimento a frio do material. O diagrama das deformações em função dos esforços é ainda, neste caso, semelhante ao da figura 6.

c) — Se são diferentes de zero as três componentes do esforço num ponto da secção transversal  $\sigma_z$ ,  $\tau_{yz}$  e  $\tau_{xz}$ , a condição de plasticidade de Saint-Venant-Guest escreve-se, atendendo a (116):

$$\sqrt{\frac{\sigma_z^2}{4} + \tau^2} \leq \frac{\Sigma_e}{2} = K \quad (282)$$

ou:

$$\sigma_z^2 + 4\tau^2 \leq \Sigma_e^2, \quad (283)$$

onde  $\tau$  é o esforço tangencial resultante (277), na secção.

A condição de Coulomb exprime-se por:

$$\sqrt{\frac{\sigma_z^2}{4} + \tau^2} \leq \frac{1}{2} \sqrt{\Sigma_e \Sigma'_e} - \frac{\Sigma'_e \Sigma_e}{2 \sqrt{\Sigma_e \Sigma'_e}} \sigma_z \quad (284)$$

e a de Mohr-Cauchy, por:

$$\sqrt{\frac{\sigma_z^2}{4} + \tau^2} \leq f(\sigma_z). \quad (285)$$

A condição de Beltrami escreve-se:

$$\sqrt{\frac{m}{2(m+1)} \sigma_z^2 + \tau^2} \leq \frac{m}{2m+1} \Sigma_e \quad (286)$$

ou, para  $\frac{1}{m} = \frac{1}{3}$ :

$$\sqrt{\frac{3}{2} \frac{\sigma_z^2}{4} + \tau^2} \leq \frac{3}{4} K. \quad (287)$$

A condição de plasticidade de von Misés-Hencky traduz-se por:

$$\sigma_z^2 + 3\tau^2 \leq \Sigma_e^2. \quad (288)$$

Assim se verifica que, neste caso, as condições de plasticidade diferem umas das outras, tanto qualitativa como quantitativamente. No entanto, se os esforços no limite de elasticidade à tracção e à

compressão são iguais, a condição de Coulomb é idêntica à de Saint-Venant-Guest e, adoptando a primeira (ou a de Mohr-Caquot) para os materiais frágeis e a segunda para os dúcteis, podemos afirmar que as deformações plásticas num ponto da secção têm início quando o esforço tangencial máximo nesse ponto:

$$\tau_{max} = \sqrt{\frac{\sigma_z^2}{4} + \tau^2}$$

atinge certo valor limite, que não é excedido quando o material tem idênticas características elásticas à tracção e à compressão, ou que varia com a intensidade do esforço normal, tanto mais rapidamente quanto mais divergem essas características; no primeiro caso, o do aço, o diagrama dos esforços-deformações é idêntico ao da figura 6; no segundo caso, nos materiais de características semelhantes às do ferro fundido e do betão, o diagrama real dos esforços-deformações traduz leve aumento dos esforços quando aumentam as deformações plásticas, e é favorável à segurança adoptar, ainda, diagrama teórico semelhante ao da figura 6.

É desta hipótese que partimos para o estudo do equilíbrio elasto-plástico das peças prismáticas: que o diagrama dos esforços-deformações é, em qualquer hipótese de solicitação, semelhante ao da figura 6.

12 — FLEXÃO DESVIADA COMPOSTA COM ESFORÇO AXIAL. — Se fizermos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_z = \epsilon_z + \bar{\epsilon}_z = vx + \mu y + \lambda \\ \Gamma_{yz} = \gamma_{yz} + \bar{\gamma}_{yz} = 0 \\ \Gamma_{zx} = \gamma_{zx} + \bar{\gamma}_{zx} = 0, \end{array} \right. \quad (289)$$

onde  $\nu$ ,  $\mu$  e  $\lambda$  são três constantes muito pequenas <sup>(1)</sup>, as condições (258) e (265) são satisfeitas. Em virtude de (244), vem:

$$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (290)$$

(1) Designamos por constante *muito pequena*, uma constante cujas potências de ordem superior à primeira são desprezíveis relativamente às de primeira ordem.

e, por conseqüência, a resultante dos esforços em cada ponto da peça prismática reduz-se à componente  $\sigma_z$ , normal à secção transversal que contém o ponto, e a condição de plasticidade é satisfeita quando a intensidade dessa componente atinge a do esforço normal no limite de elasticidade do material, tanto à tracção como à compressão:

$$\sigma_z \leq \Sigma_e, \quad (291)$$

sendo, de (244):

$$\sigma_z = E(\epsilon_z - \bar{\epsilon}_z) = E(\nu x + \mu y + \lambda - \bar{\epsilon}_z). \quad (292)$$

As componentes da sollicitação exterior são, neste caso:

$$\left\{ \begin{array}{l} N = \int \sigma_z d\Omega = E\nu \int x d\Omega + E\mu \int y d\Omega + E\lambda \int d\Omega - E \int \bar{\epsilon}_z d\Omega \\ M_x = \int \sigma_z y d\Omega = E\nu \int xy d\Omega + E\mu \int y^2 d\Omega + E\lambda \int y d\Omega - E \int \bar{\epsilon}_z y d\Omega \\ M_y = \int \sigma_z x d\Omega = E\nu \int x^2 d\Omega + E\mu \int xy d\Omega + E\lambda \int x d\Omega - E \int \bar{\epsilon}_z x d\Omega \end{array} \right. \quad (293)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T_x = \int \tau_{xz} d\Omega = 0 \\ T_y = \int \tau_{yz} d\Omega = 0 \\ M_t = \int (\tau_{yz} y - \tau_{xz} x) d\Omega = 0. \end{array} \right.$$

Mas como os eixos coordenados são paralelos aos eixos principais centrais de inércia e os integrais se estendem a toda a secção, de área  $\Omega$ , vem:

$$\int d\Omega = \Omega$$

$$\int x d\Omega = \int y d\Omega = \int xy d\Omega = 0;$$

por outro lado, os integrais:

$$\int y^2 d\Omega = I_x, \quad \int x^2 d\Omega = I_y$$

representam os momentos principais centrais de inércia da secção e, por consequência, das relações (293) tira-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu = \frac{M_y + E \int \bar{\epsilon}_z x d\Omega}{EI_y} = \frac{M_y + \bar{M}_y}{EI_y} \\ \mu = \frac{M_x + E \int \bar{\epsilon}_z y d\Omega}{EI_x} = \frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x} \\ \lambda = \frac{N + E \int \bar{\epsilon}_z d\Omega}{E\Omega} = \frac{N + \bar{N}}{E\Omega}, \end{array} \right. \quad (294)$$

tendo feito:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{M}_y = E \int \bar{\epsilon}_z x d\Omega \\ \bar{M}_x = E \int \bar{\epsilon}_z y d\Omega \\ \bar{N} = E \int \bar{\epsilon}_z d\Omega. \end{array} \right. \quad (295)$$

Êstes valores substituídos em (289) e (292) dão:

$$\epsilon_z = \frac{M_y + \bar{M}_y}{EI_y} x + \frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x} y + \frac{N + \bar{N}}{E\Omega} \quad (296)$$

e:

$$\sigma_z = \frac{M_y + \bar{M}_y}{I_y} x + \frac{M_x + \bar{M}_x}{I_x} y + \frac{N + \bar{N}}{\Omega} - E \bar{\epsilon}_z. \quad (297)$$

A solicitação assim caracterizada chama-se *flexão desviada composta com esforço axial*, quer dizer, é a flexão que se produz num plano que não contém nenhum dos eixos principais centrais de inércia da secção e é complicada com tracção ou compressão axial.

Para que a flexão seja desviada e composta, não é indispensável que o plano da solicitação exterior esteja desviado de um dos planos principais de inércia da secção, e que essa solicitação se reduza a uma força normal, não axial. Com efeito, suponhamos que o plano da solicitação exterior é o que contém o eixo principal central de

inércia  $Oy$  e que a referida solicitação se reduz ao momento de flexão  $M_x$ . Basta que o diagrama das deformações plásticas seja assimétrico, isto é, que seja:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{N} = E \int \bar{\varepsilon}_z d\Omega \neq 0 \\ \bar{M}_y = E \int \bar{\varepsilon}_z x d\Omega \neq 0 \\ \bar{M}_x = E \int \bar{\varepsilon}_z y d\Omega \neq 0, \end{array} \right. \quad (298)$$

para que o esforço normal em cada ponto da secção:

$$\sigma_z = \frac{\bar{M}_y}{I_y} x + \frac{M_x + \bar{M}_x}{I_x} y + \frac{\bar{N}}{\Omega} - E \bar{\varepsilon}_z \quad (299)$$

se componha dos esforços produzidos por flexão em dois planos ortogonais e por solicitação axial, o que caracteriza a flexão desviada composta com esforço axial.

O mesmo se poderia dizer, se a solicitação exterior se reduzisse ao momento  $M_y$  ou ao esforço axial  $N$ .

De qualquer maneira, enquanto se verificar a condição (291) em todos os pontos da secção, as deformações são elásticas, e é:

$$\bar{\varepsilon}_z = 0,$$

o que dá:

$$\sigma_z = \frac{M_y x}{I_y} + \frac{M_x y}{I_x} + \frac{N}{\Omega}, \quad (300)$$

que é a expressão, característica e conhecida, da flexão desviada composta com esforço axial, em elasticidade; quando, em alguns pontos da secção, as deformações forem plásticas, isto é, quando fôr:

$$\bar{\varepsilon}_z \neq 0,$$

vale a expressão (297), tanto nos pontos onde as deformações são elásticas, para os quais toma a forma:

$$\sigma_z = \frac{M_y + \bar{M}_y}{I_y} x + \frac{M_x + \bar{M}_x}{I_x} y + \frac{N + \bar{N}}{\Omega}, \quad (301)$$

como naqueles onde as deformações são plásticas, para os quais é constantemente:

$$\sigma_z = \frac{M_y + \bar{M}_y}{I_y} x + \frac{M_x + \bar{M}_x}{I_x} y + \frac{N + \bar{N}}{\Omega} - E \bar{\epsilon}_z = \Sigma_e. \quad (302)$$

A deformação da peça é caracterizada pelas componentes  $u$ ,  $v$  e  $w$  do vector deformação em qualquer ponto, as quais satisfazem às equações diferenciais (19). Observando, então, que é (248):

$$\begin{aligned} \epsilon_x = \epsilon_y &= -\frac{1}{m} \epsilon_z - \frac{1}{2} \bar{\epsilon}_z = \\ &= -\frac{M_y + \bar{M}_y}{mEI_y} x - \frac{M_x + \bar{M}_x}{mEI_x} y - \frac{N + \bar{N}}{mE\Omega} - \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{m} \right) \bar{\epsilon}_z, \end{aligned} \quad (303)$$

vem:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x &= -\frac{M_y + \bar{M}_y}{mEI_y} x - \frac{M_x + \bar{M}_x}{mEI_x} y - \frac{N + \bar{N}}{mE\Omega} - \frac{m-2}{2m} \bar{\epsilon}_z \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \epsilon_y &= -\frac{M_y + \bar{M}_y}{mEI_y} x - \frac{M_x + \bar{M}_x}{mEI_x} y - \frac{N + \bar{N}}{mE\Omega} - \frac{m-2}{2m} \bar{\epsilon}_z \\ \frac{\partial w}{\partial z} = \epsilon_z &= \frac{M_y + \bar{M}_y}{EI_y} x + \frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x} y + \frac{N + \bar{N}}{E\Omega} \end{aligned} \right. \quad (304)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} &= \Gamma_{yz} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} &= \Gamma_{zx} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \Gamma_{xy} = 0. \end{aligned} \right.$$

A integração da terceira destas equações dá:

$$w = \frac{M_y + \bar{M}_y}{EI_y} xz + \frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x} yz + \frac{N + \bar{N}}{E\Omega} z + w_o(x, y), \quad (305)$$

valor que, substituído na quarta e quinta, fornece:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x} z + \frac{\partial w_o}{\partial y} = 0 \\ \frac{M_y + \bar{M}_y}{EI_y} z + \frac{\partial w_o}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

ou:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x} z - \frac{\partial w_o}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{M_y + \bar{M}_y}{EI_y} z - \frac{\partial w_o}{\partial x} \end{cases}$$

donde, por integração:

$$\begin{cases} v = -\frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x} \frac{z^2}{2} - \frac{\partial w_o}{\partial y} z + v_o(x, y) \\ u = -\frac{M_y + \bar{M}_y}{EI_y} \frac{z^2}{2} - \frac{\partial w_o}{\partial x} z + u_o(x, y). \end{cases} \quad (306)$$

Substituindo estes valores, na primeira e segunda equações do sistema (304), encontra-se:

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} z + \frac{\partial u_o}{\partial x} = -\frac{M_y + \bar{M}_y}{mEI_y} x - \frac{M_x + \bar{M}_x}{mEI_x} y - \\ \quad -\frac{N + \bar{N}}{mE\Omega} - \frac{m-2}{2m} \epsilon_z \\ -\frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} z + \frac{\partial v_o}{\partial y} = -\frac{M_y + \bar{M}_y}{mEI_y} x - \frac{M_x + \bar{M}_x}{mEI_x} y - \\ \quad -\frac{N + \bar{N}}{mE\Omega} - \frac{m-2}{2m} \epsilon_z. \end{cases}$$



Estas duas relações devem ser satisfeitas, qualquer que seja o valor de  $z$ , logo, deve ser:

$$\frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} = 0,$$

a sua integração dá:

$$\left\{ \begin{aligned} u_o &= -\frac{M_y + \bar{M}_y}{mEI_y} \frac{x^2}{2} - \frac{M_x + \bar{M}_x}{mEI_x} xy - \frac{N + \bar{N}}{mE\Omega} x - \\ &\quad - \frac{m-2}{2m} \varepsilon_z x + u_1(y) \\ v_o &= -\frac{M_y + \bar{M}_y}{mEI_y} xy - \frac{M_x + \bar{M}_x}{mEI_x} \frac{y^2}{2} - \frac{N + \bar{N}}{mE\Omega} y - \\ &\quad - \frac{m-2}{2m} \varepsilon_z y + v_1(x) \end{aligned} \right.$$

e as expressões de  $u$  e  $v$  (306) ficam:

$$\left\{ \begin{aligned} u &= -\frac{1}{2} \frac{M_y + \bar{M}_y}{EI_y} \left( z^2 - \frac{x^2}{m} \right) - \frac{1}{m} \frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x} xy - \frac{1}{m} \frac{N + \bar{N}}{E\Omega} x - \\ &\quad - \frac{m-2}{2m} \varepsilon_z x - \frac{\partial w_o}{\partial x} z + u_1(y) \\ v &= -\frac{1}{m} \frac{M_y + \bar{M}_y}{EI_y} xy - \frac{1}{2} \frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x} \left( z^2 - \frac{y^2}{m} \right) - \frac{1}{m} \frac{N + \bar{N}}{E\Omega} y - \\ &\quad - \frac{m-2}{2m} \varepsilon_z y - \frac{\partial w_o}{\partial y} z + v_1(x). \end{aligned} \right. \quad (307)$$

Estas expressões substituídas na sexta de (304) dão:

$$-\frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} z - \frac{M_x + \bar{M}_x}{mEI_x} x + \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} z - \frac{M_y + \bar{M}_y}{mEI_y} y + \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0.$$

Como esta expressão deve ser satisfeita para qualquer valor de  $z$ , terá de ser:

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = 0$$

e fica:

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{M_y + \bar{M}_y}{mEI_y} y - \frac{M_x + \bar{M}_x}{mEI_x} x = 0,$$

equação que é satisfeita por:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{M_y + \bar{M}_y}{mEI_y} \frac{y^2}{2} + ry + s \\ v_1 = \frac{M_x + \bar{M}_x}{mEI_x} \frac{x^2}{2} - rx + t, \end{cases}$$

sendo  $r$ ,  $s$  e  $t$ , constantes arbitrárias.

Por outro lado, o facto de ser, como vimos:

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0,$$

mostra que é:

$$w_0 = nx + py + q,$$

sendo  $n$ ,  $p$  e  $q$ , constantes arbitrárias.

A substituição destes valores nas expressões anteriormente encontradas, (305) e (307), de  $u$ ,  $v$  e  $w$  dá, finalmente:

$$\left\{ \begin{aligned} u &= -\frac{1}{2} \frac{M_y + \bar{M}_y}{EI_y} \left( z^2 - \frac{y^2 - x^2}{m} \right) - \frac{1}{m} \frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x} xy - \\ &\quad - \frac{1}{m} \frac{N + \bar{N}}{E\Omega} x - \frac{m-2}{2m} \epsilon_s x + ry - nz + s \\ v &= -\frac{1}{m} \frac{M_y + \bar{M}_y}{EI_y} xy - \frac{1}{2} \frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x} \left( z^2 - \frac{x^2 - y^2}{m} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{m} \frac{N + \bar{N}}{E\Omega} y - \frac{m-2}{2m} \epsilon_s y - rx - pz + t \\ w &= \frac{M_y + \bar{M}_y}{EI_y} xz + \frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x} yz + \frac{N + \bar{N}}{E\Omega} z + nx + py + q. \end{aligned} \right. \quad (308)$$

Ora se fizermos:

$$\begin{cases} u' = +ry - nz + s \\ v' = -rx - pz + t \\ w' = +nx + py + q, \end{cases} \quad (309)$$

estas expressões representam, como se sabe, as componentes de um movimento rígido do corpo: translação, de componentes  $s$ ,  $t$  e  $q$  e rotação de componentes  $n$ ,  $p$  e  $r$ . Supondo que a origem das coordenadas, centro de gravidade de uma das bases da peça, é fixa, isto é, que para  $x=y=z=0$ , é:

$$u=v=w=0;$$

que a ligação desta base com o exterior é de encastramento, isto é, que o elemento linear dirigido segundo o eixo  $Oz$  não sofre deslocamento transversal ou que, para  $x=y=z=0$ , é:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

e que, além disso, não há rotação transversal na origem, por exemplo, que o elemento linear paralelo a  $Oz$  não sofre deslocamento paralelamente a  $Ox$ , isto é, que:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

então tôdas as constantes arbitrárias que figuram em (308) devem ser nulas e as componentes da deformação ficam:

$$\left\{ \begin{aligned} u &= -\frac{1}{2} \frac{M_y + \bar{M}_y}{EI_y} \left( z^2 - \frac{y^2 - x^2}{m} \right) - \frac{1}{m} \frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x} xy - \\ &\quad - \frac{1}{m} \frac{N + \bar{N}}{E\Omega} x - \frac{m-2}{2m} \varepsilon_z x \\ v &= -\frac{1}{m} \frac{M_y + \bar{M}_y}{EI_y} xy - \frac{1}{2} \frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x} \left( z^2 - \frac{x^2 - y^2}{m} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{m} \frac{N + \bar{N}}{E\Omega} y - \frac{m-2}{2m} \varepsilon_z y \\ w &= \frac{M_y + \bar{M}_y}{EI_y} xz + \frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x} yz + \frac{N + \bar{N}}{E\Omega} z. \end{aligned} \right. \quad (310)$$

Aos casos simples de solicitação em que a flexão desviada composta se desdobra correspondem expressões para  $u$ ,  $v$  e  $w$ , que se somam para dar as que agora deduzimos. Faremos a sua interpretação em cada caso, interessando notar, desde já, a conclusão fundamental a que leva essa interpretação e que a lei da sobreposição dos efeitos (aqui de legítima aplicação) permite generalizar à flexão desviada composta com esforço axial: se as deformações são muito pequenas, de modo a poderem ser desprezadas as segundas potências em presença das primeiras, as secções, planas antes da deformação, continuam planas durante e depois da deformação. Os ensaios experimentais têm mostrado que esta conclusão, a qual traduz a hipótese de Bernouilli da elasticidade, se verifica com grande aproximação na flexão elasto-plástica, contanto que as deformações sejam, na realidade, muito pequenas.

Segue-se daqui que, durante a deformação, a secção plana gira em torno de uma recta, cuja equação se obtém fazendo  $\epsilon_z = 0$  em (296):

$$\frac{M_y + \overline{M}_y}{I_y} x + \frac{M_x + \overline{M}_x}{I_x} y + \frac{N + \overline{N}}{\Omega} = 0 \quad (311)$$

e que é o lugar geométrico dos pontos onde os esforços são nulos, pois de (297) se conclui que corresponde a

$$\sigma_z = -E \overline{\epsilon}_z = 0,$$

visto  $\overline{\epsilon}_z$  não poder ser diferente de zero, se  $\epsilon_z$  é nulo.

Esta recta chama-se *fibra neutra* ou *eixo neutro* da secção, e a sua equação pode escrever-se sob a forma:

$$\frac{x_o}{\rho_x^2} x + \frac{y_o}{\rho_y^2} y + 1 = 0, \quad (312)$$

se com:

$$\begin{cases} x_o = \frac{M_y + \overline{M}_y}{N + \overline{N}} \\ y_o = \frac{M_x + \overline{M}_x}{N + \overline{N}} \end{cases} \quad (313)$$

indicarmos as coordenadas do *centro de solicitação*, ponto de aplicação, no plano da secção, da força  $(N + \bar{N})$ ; e com:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_x = \sqrt{\frac{I_y}{\Omega}} \\ \rho_y = \sqrt{\frac{I_x}{\Omega}} \end{array} \right. \quad (314)$$

os raios de giração principais.

A fibra neutra é a antipolar do centro de solicitação, relativamente à elipse central de inércia da secção e, por consequência, a sua direcção é conjugada da do eixo que passa por aquêl ponto, o *eixo de solicitação*. Com efeito, se na equação da fibra neutra (312) substituirmos as coordenadas  $(x_o, y_o)$  do centro de solicitação, pelas do seu simétrico em relação à origem:

$$x_1 = -x_o, \quad y_1 = -y_o,$$

obté-m-se:

$$\frac{x_1^2}{\rho_x^2} + \frac{y_1^2}{\rho_y^2} = 1, \quad (315)$$

equação da paralela à fibra neutra que passa pelo segundo ponto. Entre cada um dos pontos e a recta que passa pelo outro há, por conseguinte, correspondência biúnívoca que define a polaridade cujo lugar geométrico dos pontos unidos é a cónica de equação:

$$\frac{x^2}{\rho_x^2} + \frac{y^2}{\rho_y^2} = 1 \quad (316)$$

ou seja, a elipse central de inércia da secção. Não há, pois, dúvida de que a fibra neutra é a antipolar do centro de solicitação, relativamente à elipse central de inércia da secção e o seu traçado pode, dêste modo, fazer-se por métodos conhecidos de geometria elementar, desde que seja dada a elipse central de inércia (ou os seus semi-eixos, raios de giração principais) e as coordenadas do centro de solicitação.

Como os eixos principais de inércia são eixos conjugados relativamente à elipse de inércia da secção, precisamente os únicos eixos conjugados perpendiculares entre si, segue-se que o eixo neutro pode ser perpendicular ao eixo de solicitação: neste caso, a flexão não é desviada.

A fibra neutra também se pode definir, analiticamente, pelo cálculo das coordenadas dos seus pontos de intersecção com os eixos coordenados:

$$\begin{cases} x'_n = 0 \\ y'_n = -\frac{\rho_y^2}{y_o} \end{cases} \quad \begin{cases} x''_n = -\frac{\rho_x^2}{x_o} \\ y''_n = 0. \end{cases} \quad (317)$$

De qualquer maneira, a posição do eixo neutro depende das coordenadas  $(x_o, y_o)$  do centro de solicitação, que são funções (313)

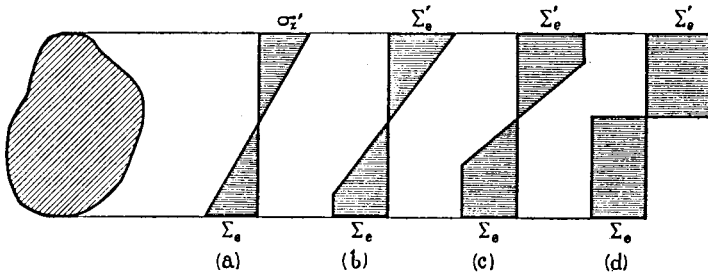


Fig. 14

das deformações plásticas  $\bar{\epsilon}_p$ : o problema do equilíbrio interior das secções transversais duma peça prismática, sujeita a solicitação que lhe produz flexão desviada composta elasto-plástica, é, por consequência, hiperstático. A indeterminação estática pode levantar-se tendo em conta considerações elementares que decorrem da hipótese de se manterem planas, durante a deformação, as secções inicialmente planas, hipótese que atrás já dissemos ser compatível com os resultados obtidos experimentalmente.

Com efeito, supondo que as solicitações se aplicam com intensidade gradualmente crescente desde zero até ao seu valor final, o diagrama dos esforços normais na secção, enquanto as deformações são elásticas, é duplamente triangular (fig. 14-a). O aumento das solicitações conduz, em certo instante, a que o esforço correspon-

dente ao limite de elasticidade se atinge em um dos bordos da secção (fig. 14-b) e, a partir dêste instante, novo aumento das solicitações não produz, nesse bordo, aumento do esforço normal, que se mantém constantemente igual ao esforço no limite de elasticidade, mas apenas o alastramento, para o interior da secção, das deformações plásticas. Êste funcionamento conserva-se até que a solicitação atinge a sua intensidade final, e é semelhante no outro bordo da secção (fig. 14-c), se aí as deformações chegam a atingir a fase plástica, antes de a solicitação haver deixado de crescer. Note-se que, com secção assimétrica, assimetricamente solicitada, e com esforços limites de elasticidade diferentes para a tracção e para a compressão, ou apenas por alguma destas causas, a fibra neutra não mantém a mesma inclinação, no caso de se haver atingido a fase plástica só num dos bordos da secção ou em ambos: a variação da inclinação resulta de variar o centro de solicitação, que depende da intensidade e da distribuição das deformações plásticas.

Se a solicitação continua a crescer, as deformações plásticas vão alastrando dos bordos para a zona central da secção, até que, teoricamente, se atinge o instante em que há plastificação completa: o diagrama dos esforços é constituído por dois rectângulos (fig. 14-d), cujas alturas medem esforços constantemente iguais aos respectivos limites de elasticidade. Veremos que a plastificação completa não pode atingir-se de facto, e que a ruptura da peça sobrevém antes dela, quando se encontra excedida a capacidade de comportamento dúctil das fibras. A solicitação correspondente à plastificação completa chama-se, por isso, *solicitação limite*, e ao respectivo valor do momento, *momento limite*. Se a peça está submetida a flexão simples, devendo o momento limite ser equilibrado pelo momento dos esforços interiores, de diagrama duplamente rectangular, sucede que *a fibra neutra limite divide a secção em duas zonas de áreas inversamente proporcionais aos respectivos limites de elasticidade*. Esta conclusão tem grande importância e dela faremos uso oportunamente.

O equilíbrio elasto-plástico da secção só se pode, por consequência, obter para solicitação de intensidade mais pequena que a solicitação limite e o respectivo diagrama dos esforços é constituído da seguinte maneira: na parte central, onde as deformações não deixaram de ser elásticas, é duplamente triangular; nos bordos (ou só num dêles, se as deformações plásticas se não atingiram em ambos) é rectangular e corresponde a esforço constantemente igual ao respectivo limite de elasticidade.

As condições aos limites impõem que os esforços nos pontos da secção pertencentes às linhas de fronteira que separam o domínio das deformações elásticas das das deformações plásticas sejam iguais aos esforços nos limites de elasticidade:

$$\sigma_z = \frac{M_y + \bar{M}_y}{I_y} x + \frac{M_x + \bar{M}_x}{I_x} y + \frac{N + \bar{N}}{\Omega} = \Sigma_e. \quad (318)$$

O lugar geométrico desses pontos é, por consequência, uma recta paralela à fibra neutra, cuja direcção assim fica determinada. Esta recta e a paralela que corresponde aos pontos da outra linha de fronteira das deformações elásticas e das plásticas, delimitam os três domínios em que a secção fica dividida: domínio superior, de deformações plásticas; domínio central, de deformações elásticas; domínio inferior, de deformações plásticas.

Como as secções se mantêm planas, os diagramas dos  $\bar{\epsilon}_z$  são triangulares e de ser:

$$\begin{cases} \int \bar{\epsilon}_z x d\Omega = \bar{x}_o \int \bar{\epsilon}_z d\Omega \\ \int \bar{\epsilon}_z y d\Omega = \bar{y}_o \int \bar{\epsilon}_z d\Omega, \end{cases} \quad (319)$$

onde  $\bar{x}_o$  e  $\bar{y}_o$  indicam as coordenadas do centro de gravidade do diagrama das deformações plásticas ou *centro das solicitações plásticas*, resulta a possibilidade de, em (318), determinar  $\int \bar{\epsilon}_z d\Omega$  e, por consequência a equação da fibra neutra.

Mas a determinação analítica dos esforços é tão trabalhosa, que melhor, e suficientemente rigoroso, é adoptar o método gráfico.

Consideremos, primeiro, o caso de as deformações plásticas apenas haverem atingido um dos bordos da secção. O diagrama dos esforços normais terá o aspecto indicado na figura 14-b.

Suponhamos (fig. 15) que se sobrepõe à solicitação exterior, de centro  $k$ , uma distribuição auxiliar de esforços, uniformemente distribuída sobre toda a secção, de intensidade igual, mas de sinal contrário ao esforço no limite de elasticidade  $\Sigma_e$ : o diagrama dos esforços auxiliares será rectangular e o diagrama total será triangular, com esforços nulos em toda a região inferior, onde se atin-





giram as deformações plásticas. Êste diagrama total, só existente na região das deformações elásticas, deve equilibrar a resultante da força exterior  $N$ , aplicada em  $k$ , e da força total auxiliar  $(-\Sigma_o \Omega)$ , a actuar no centro de gravidade da secção. Esta resultante, de intensidade:

$$N_o = N + \Omega \Sigma_o, \quad (320)$$

está aplicada no centro de solicitação  $k_o$ , de coordenadas:

$$\begin{cases} x'_o = \frac{M_y}{N_o} \\ y'_o = \frac{M_x}{N_o} \end{cases} \quad (321)$$

O equilíbrio exige, então, que seja:

$$\begin{cases} N_o = \int \sigma_z d\Omega \\ N_o \eta_o = \int \sigma_z \eta d\Omega, \end{cases} \quad (322)$$

estendendo-se os integrais a tôda a parte da secção onde as deformações são elásticas, sendo  $\eta$  as ordenadas dos pontos da secção em relação à linha de fronteira  $\xi\xi$ , medidas ortogonalmente a esta linha, e  $\eta_o$  a ordenada do centro de solicitação auxiliar  $k_o$ .

Mas, como a variação dos esforços  $\sigma_z$  é linear, pode escrever-se:

$$\sigma_z = C \eta, \quad (323)$$

onde  $C$  é uma constante. Logo:

$$N_o = \int \sigma_z d\Omega = C \int \eta d\Omega \quad (324)$$

e:

$$C = \frac{N_o}{\int \eta d\Omega}. \quad (325)$$

Por consequência:

$$\sigma_z = \frac{N_o \eta}{\int \eta d\Omega} \quad (326)$$

e, finalmente:

$$\eta_o = \frac{\int \sigma_z \eta d\Omega}{N_o} = \frac{\int \eta^2 d\Omega}{\int \eta d\Omega}. \quad (327)$$

O numerador e o denominador desta fracção representam, respectivamente, o momento de inércia e o momento estático da zona elástica da secção, em relação ao eixo  $\xi\xi$ , e podem determinar-se por meio de um funicular. Basta, para isso, dividir a secção em faixas de altura muito pequena, por rectas paralelas ao eixo neutro, e considerar as suas áreas como forças aplicadas nos respectivos centros de gravidade: tomando certa distância polar  $H$ , traça-se o polígono funicular  $ABCD$  e determina-se o segmento  $\overline{CF} = \xi$  intersectado sôbre o eixo  $\xi\xi$ , entre o funicular e o seu primeiro lado.

Será:

$$\int \eta d\Omega = H\xi \quad (328)$$

$$\int \eta^2 d\Omega = 2HA,$$

sendo  $A$  a área ( $ABCF$ ) limitada pelo polígono funicular, pelo seu primeiro lado, e pela recta  $\overline{CF}$ .

Virá, por consequência:

$$\eta_o = \frac{2A}{\xi}, \quad (329)$$

donde se tira:

$$A = \frac{\xi \eta_o}{2}, \quad (330)$$

querer dizer, a área  $A$  é igual à do triângulo que tem por base o segmento  $\overline{CF}$  e por altura a ordenada do centro de solicitação auxiliar  $k_o$ , isto é, do triângulo ( $CEF$ ), sendo  $E$  o ponto de intersecção do primeiro lado do funicular, com a paralela a  $\xi\xi$  conduzida por  $k_o$ . Mas para que a área  $A$  e a do triângulo ( $CEF$ ) sejam iguais, devem também ser iguais as áreas tracejadas ( $ABEA$ ) e ( $BCB$ ).

E daqui resulta a maneira de determinar, gráficamente, o eixo  $\xi\xi$ : traçado o polígono funicular  $ABCD$  e determinado o ponto  $E$ , de intersecção do seu primeiro lado com a paralela à direcção conhecida de  $\xi\xi$ , por  $k_0$ , fixa-se o ponto  $C$  de passagem de  $\xi\xi$ , pela condição de a recta  $EC$  tornar iguais as áreas  $(ABEA)$  e  $(BCB)$ . A fixação do ponto  $C$  faz-se, assim, por tentativas e com aproximação suficiente para os usos da prática.

Querendo evitar as tentativas, pode fixar-se o ponto  $C$  com todo o rigor, observando que o eixo  $\xi\xi$  é a antipolar do centro de solicitação auxiliar  $k_0$ , em relação à ellipse central de inércia da parte elástica da secção. Segue-se que, se se determinarem os momentos estáticos das áreas elementares em que se dividiu a secção, relativamente à paralela a  $\xi\xi$  conduzida por  $k_0$ , e que são proporcionais aos segmentos intersectados naquela recta pelos lados sucessivos do funicular anteriormente traçado, estes segmentos podem ser considerados como vectores que, compostos por meio de um segundo funicular, de pólo  $O_2$ , dão, na intersecção dêste segundo funicular com o seu primeiro lado, o ponto de passagem de  $\xi\xi$ .

Ambas estas construções implicam, porém, o prévio conhecimento da direcção da linha de fronteira  $\xi\xi$ , que não é dada «a priori». Ora o equilíbrio exige que o ponto de aplicação da resultante  $\int \sigma_x d\Omega$  dos esforços interiores devidos à solicitação auxiliar, na parte da secção em deformação elástica, coincida com o centro de solicitação auxiliar  $k_0$ , e qualquer das construções anteriores apenas assegura que aquêlê ponto de aplicação cai na recta conduzida por  $k_0$ , paralelamente à direcção attribuída a  $\xi\xi$ . Daqui resultá a possibilidade de, por tentativas, se fixar a direcção correcta da linha de fronteira  $\xi\xi$  que, então, deve satisfazer à condição de corresponder à resultante  $\int \sigma_x d\Omega$  dos esforços interiores na parte elástica, aplicada em  $k_0$ . Praticamente, o ponto de aplicação, na secção, da resultante dos esforços interiores, determina-se representando cada fôrça elementar:

$$\sigma_x d\Omega = C\eta d\Omega, \quad (331)$$

pelo segmento proporcional:

$$\frac{\eta d\Omega}{H}, \quad (332)$$

intersectado pelos lados correspondentes do primeiro funicular, em  $\xi\xi$ , e atribuindo-lhe direcção diferente da de  $\xi\xi$ : o ponto de intersecção dos lados extremos do funicular, de pólo  $O_3$ , que compõe estas forças elementares, de direcção arbitrária mas diferente da de  $\xi\xi$ , é um ponto de passagem da resultante das mesmas forças que, no caso de não passar por  $k_o$ , mostra ser incorrecta a direcção atribuída a  $\xi\xi$ .

Como a fixação da direcção do eixo  $\xi\xi$  se deve fazer antes da sua localização no plano, pode começar-se por verificar se há possibilidade de vir a coincidir com  $k_o$  o ponto de aplicação da resultante da força interior  $\int \sigma_x d\Omega$  correspondente a certa direcção. Para isso, observe-se que, unindo todos os centros de gravidade das áreas elementares solicitadas elasticamente, por um polígono fechado, sem ângulos reentrantes, o ponto de aplicação da força resultante  $\int \sigma_x d\Omega$  cai dentro desse polígono, e daqui a primeira verificação, que permite reduzir o número de tentativas: em cada hipótese feita sobre a direcção do eixo  $\xi\xi$ , o ponto  $k_o$  de aplicação da solicitação auxiliar, deve cair dentro do polígono (sem ângulos reentrantes) dos centros de gravidade das áreas elementares da correspondente zona das deformações elásticas.

Fixada a linha de fronteira  $\xi\xi$ , a distribuição linear dos esforços na solicitação auxiliar permite concluir que, no centro de gravidade da secção elástica (que se pode localizar à custa do primeiro funicular), o esforço vale:

$$(\sigma_x)_o = \frac{N_o}{\Omega_e}, \quad (333)$$

sendo  $\Omega_e$  a área da secção elástica. Assim fica determinado, por dois pontos, o diagrama dos esforços na solicitação auxiliar e, deduzindo-lhe a abscissa constante  $\sigma_x = \Sigma_e$ , o diagrama dos esforços reais, na secção total, em equilíbrio elasto-plástico.

Exemplo característico de funcionamento elasto-plástico, em que o equilíbrio final se atinge quando as deformações plásticas só apareceram em um dos bordos da secção, é o das peças de betão armado.

De facto, o limite de elasticidade do betão à tracção é muito baixo, enquanto que à compressão, consideravelmente mais elevado, é muito vizinho da ruptura. O diagrama teórico das deformações em função dos esforços, no betão armado (não tendo em conta a característica variabilidade do módulo de elasticidade com a solici-

tação), tem o aspecto indicado na figura 16. A propriedade de se deformar plásticamente à tracção provém, no betão armado da presença da armadura e então o funcionamento elasto-plástico da flexão no betão armado, até à ruptura, pode esquematizar-se assim:

Quando a intensidade da sollicitação exterior cresce gradualmente desde zero, as deformações começam por ser elásticas, mas depressa se atinge o limite de elasticidade do betão à tracção. As deformações plásticas, com esforço constante, iniciam-se, assim, na zona de tracção do betão e, a novo aumento da sollicitação exterior, corresponde aumento dos esforços elásticos no betão, à compressão, e da armadura, à tracção. A ruptura sobrevém por esmagamento do betão na zona de compressão (sem que ali, praticamente, se verifiquem deformações plásticas), quer se tenha atingido ou não, o limite de elasticidade da armadura de tracção.

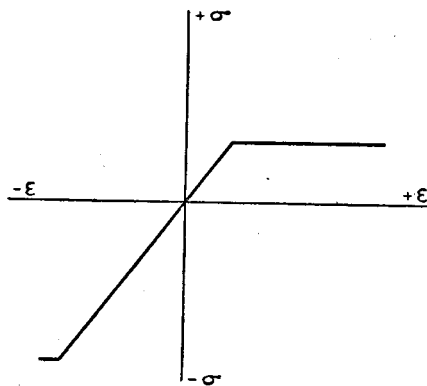


Fig. 16

Não há, pois, dúvida de que em qualquer estado de equilíbrio estável, anterior à ruptura, as deformações plásticas numa peça de betão armado apenas se atingem no bordo da peça submetido a tracção.

E a construção anterior repete-se, neste caso (fig. 17), sem qualquer alteração fundamental, a não ser a de que as áreas dos diferentes elementos da armadura, devem ser multiplicadas pelo coeficiente de homogeneização  $m$ . É vantajoso iniciar o traçado dos funiculares pela armadura de tracção, passar em seguida à de compressão (quando a haja) e, só depois, considerar as faixas elementares em que se dividiu a secção de betão, a começar pelo bordo comprimido.

Se o equilíbrio sobreveio depois de as deformações plásticas haverem atingido ambos os bordos da secção, o problema complica-se levemente.

O diagrama dos esforços na secção (fig. 18) só varia linearmente na parte central, onde as deformações são elásticas, e mostra esforços constantemente iguais aos respectivos limites de elasticidade.

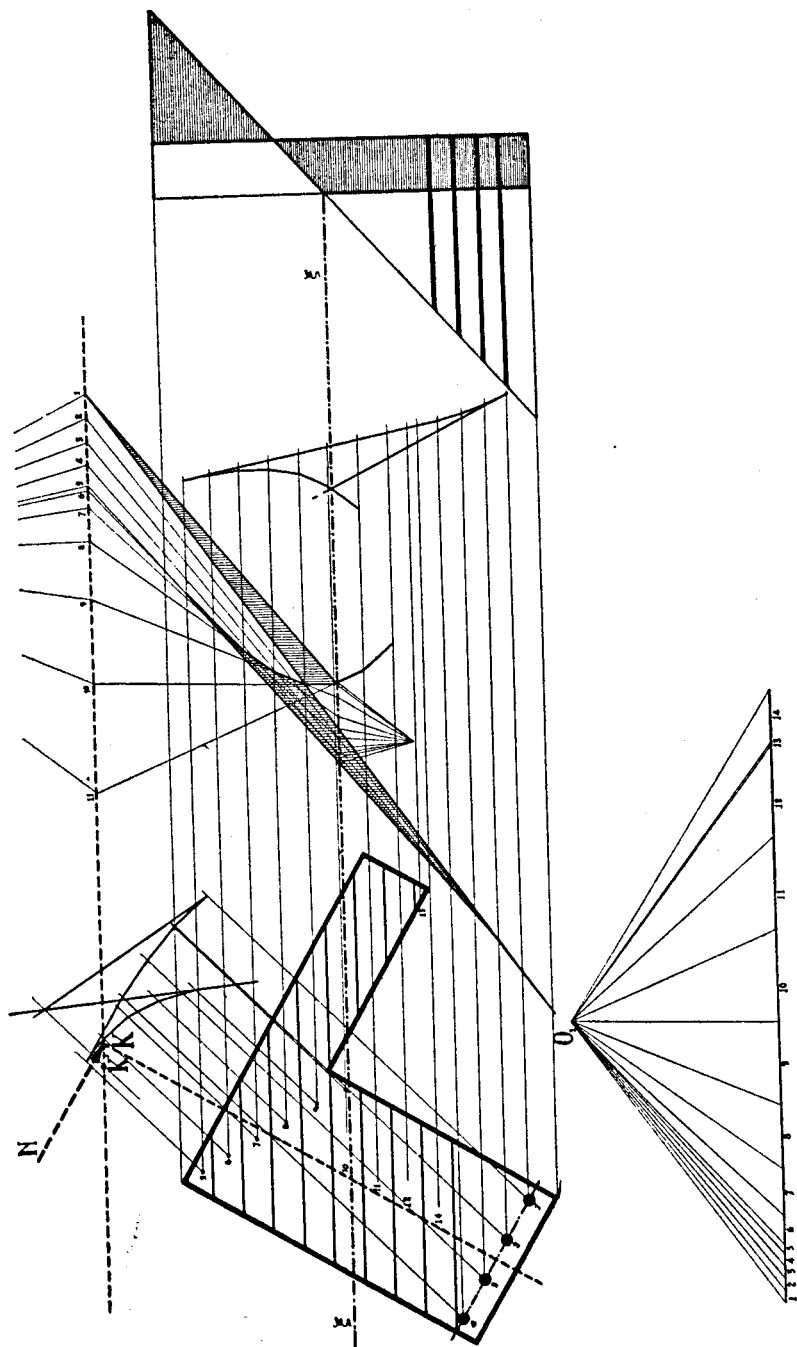


Fig. 17

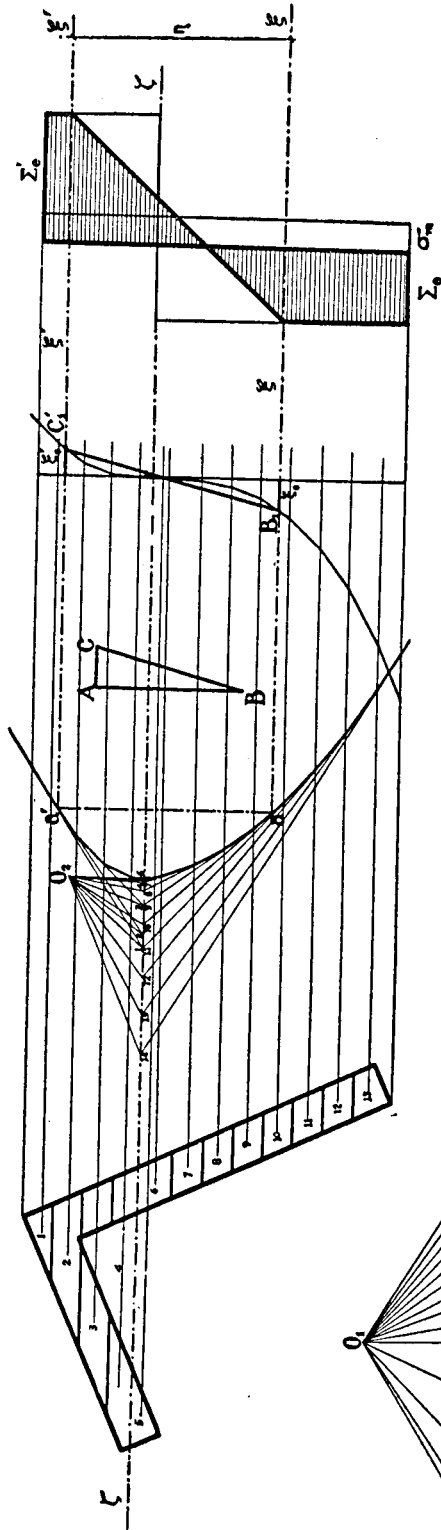
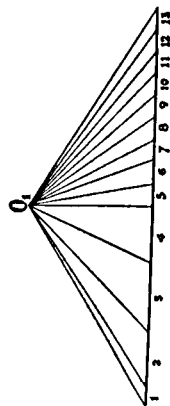


Fig. 18





dade,  $\Sigma_e$  e  $\Sigma'_e$ , nas zonas junto dos bordos, onde as deformações são plásticas. Deseja-se, precisamente, encontrar as linhas de fronteira que separam a região das deformações elásticas das regiões das deformações plásticas.

Se à solicitação exterior, definida pelas componentes  $M_x$ ,  $M_y$  e  $N$ , juntarmos a solicitação auxiliar ( $-N$ ), igual e de sinal contrário ao esforço axial na secção, do diagrama dos esforços normais sobreposto ao diagrama dos esforços auxiliares uniformemente distribuídos na secção, de intensidade:

$$\sigma_n = -\frac{N}{\Omega}, \quad (334)$$

resulta o diagrama dos esforços devidos à flexão desviada, definida pelo momento  $M$ , resultante de  $M_x$  e  $M_y$ .

Neste caso, de flexão sem esforço axial, o diagrama limite dos esforços é, como dissemos, constituído por dois rectângulos, de alturas respectivamente iguais aos limites de elasticidade do material à tracção e à compressão, que, agora, tudo se passa como se fôssem ( $\Sigma_e + \sigma_n$ ) e ( $\Sigma'_e - \sigma_n$ ), rectângulos que equilibram o momento limite exterior  $\mathfrak{M}$ , de tal modo que a fibra neutra  $\zeta\zeta$  é determinada pela condição de dividir a secção em duas zonas de áreas inversamente proporcionais a ( $\Sigma_e + \sigma_n$ ) e ( $\Sigma'_e - \sigma_n$ ):

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega = \frac{\Sigma'_e - \sigma_n}{\Sigma_e + \Sigma'_e} \Omega \\ \omega' = \frac{\Sigma_e + \sigma_n}{\Sigma_e + \Sigma'_e} \Omega. \end{array} \right. \quad (335)$$

Como a diferença de dois momentos é ainda um momento, segue-se que o momento:

$$\mathfrak{M} - M, \quad (336)$$

diferença entre o momento limite  $\mathfrak{M}$  e o momento resultante:

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} \quad (337)$$

da flexão desviada, será equilibrado pelo momento interior cujo diagrama dos esforços se obtém subtraindo os dois diagramas correspondentes.

Quere isto dizer, que a distribuição de esforços interiores que equilibra o momento  $\mathfrak{M} - M$  constitui um binário e, por consequência, que a resultante dos esforços de tracção há-de nesta solicitação, ser igual e de sinal contrário à resultante dos esforços de compressão. Ora esta distribuição de esforços compõe-se de dois triângulos com os vértices sobre as rectas de fronteira  $\xi\xi$  e  $\xi'\xi'$  e com as bases sobre a fibra neutra limite  $\zeta\zeta$ . E daqui se conclui que os momentos estáticos das porções de área da secção transversal compreendidas entre a fibra neutra limite e as rectas de fronteira, em relação a cada uma destas, respectivamente, hão-de ser iguais, visto que nelas actuam distribuições triangulares de esforços de resultantes iguais e de sinais contrários e com a disposição que acabamos de indicar.

Se, então, dividirmos a área da secção transversal em faixas, por paralelas a certa direcção arbitrada da fibra neutra, e compusermos os vectores representativos das áreas parcelares, como se estivessem concentrados nos respectivos centros de gravidade, por um funicular de pólo  $O_1$ , com a distância polar  $H_1$ , este funicular permite comprovar aquella igualdade de momentos estáticos. Basta, para isso, que a fibra neutra limite  $\zeta\zeta$  seja linha de separação de duas faixas elementares contíguas, com o que se obtêm dois ramos do funicular, para cima e para baixo de  $\zeta\zeta$ , com um lado comum a cortar esta linha: os segmentos das rectas de fronteira, intersectados entre este lado comum e os lados correspondentes do funicular, são proporcionais àquêles momentos estáticos e devem ser iguais; e da sua igualdade resulta que a recta que une os pontos  $a$  e  $a'$ , de intersecção das rectas de fronteira com o funicular, deve ser paralela ao lado comum. Para que duas rectas  $\xi\xi$  e  $\xi'\xi'$  sejam rectas de fronteira do diagrama dos esforços é, pois, necessário e suficiente que os seus pontos de encontro com o primeiro funicular estejam sobre uma recta paralela ao lado comum dos ramos, superior e inferior, do mesmo funicular.

Os segmentos intersectados em  $\zeta\zeta$  pelos lados consecutivos do funicular são proporcionais aos momentos estáticos relativamente àquella recta, das áreas elementares em que se dividiu a secção. Precisamente, se  $\zeta_i$  é um desses segmentos e  $1/n$  a escala de redução das áreas a vectores, o momento estático da área elementar correspondente, em relação a  $\zeta\zeta$  será:

$$H_1 n \zeta_i$$

visto que com  $H_1$  indicámos a distância polar.

Supondo que cada um dêesses segmentos é uma fôrça com a mesma direcção, aplicada no centro de gravidade da faixa respectiva, e compondo-os por um segundo funicular de pólo  $O_2$  e distância polar  $H_2$ , os segmentos intersectados pelos lados consecutivos dêste funicular, em qualquer paralela a  $\zeta\zeta$ , são proporcionais aos momentos de inércia das áreas elementares respectivas, em relação à mesma paralela. Precisamente, se  $\zeta'_i$  é um dêesses segmentos, o momento de inércia será:

$$H_1 H_2 n \zeta'_i.$$

Se, por consequência, com  $\xi_o$  e  $\xi'_o$  indicarmos os segmentos intersectados sôbre as rectas de fronteira pelo lado comum aos dois ramos do segundo funicular e pelos lados correspondentes, manifestamente:

$$H_1 H_2 n \xi_o$$

e:

$$H_1 H_2 n \xi'_o$$

serão os momentos de inércia das porções de área da secção transversal compreendidas entre  $\zeta\zeta$  e as rectas de fronteira, em relação, respectivamente, a cada uma destas linhas; e a soma:

$$H_1 H_2 n (\xi_o + \xi'_o)$$

será o momento de inércia da área compreendida entre as duas rectas de fronteira, relativamente a  $\zeta\zeta$ . Ora esta área é, precisamente, aquela que, pelas duas distribuições triangulares de esforços a que nos referimos, equilibra o momento  $\mathfrak{M} - M$ . E será:

$$\begin{cases} \Sigma'_e - \sigma_n = \frac{(\mathfrak{M} - M)}{I} v' \\ \Sigma_e + \sigma_n = \frac{(\mathfrak{M} - M)}{I} v, \end{cases}$$

logo, chamando  $\eta = v + v'$  à distância entre as rectas de fronteira

$$\Sigma_e + \Sigma'_e = \frac{(\mathfrak{M} - M) \eta}{H_1 H_2 n (\xi_o + \xi'_o)},$$

donde:

$$\xi_o + \xi'_o = (\mathfrak{M} - M) \frac{1}{H_1 H_2 n \frac{\Sigma_e + \Sigma'_e}{\eta}}, \quad (338)$$

quere dizer, o segmento  $\xi_o + \xi'_o$  representa o momento ( $\mathfrak{M} - M$ ), desde que seja multiplicado por:

$$H_1 H_2 n \frac{\Sigma_e + \Sigma'_e}{\eta}.$$

Por simples semelhança de triângulos se conclui que, se marcarmos numa paralela ao lado comum dos dois ramos do segundo funicular:

$$\overline{AB} = H_1 H_2 n (\Sigma_e + \Sigma'_e)$$

e conduzirmos por  $B$  a paralela  $\overline{BC}$  à recta que une os pontos de encontro do segundo funicular com as linhas de fronteira, esta paralela intersecta na paralela por  $A$  a estas duas linhas, o segmento  $\overline{AC}$  tal que:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\xi_o + \xi'_o}{\eta}$$

ou:

$$\overline{AC} = (\xi_o + \xi'_o) H_1 H_2 n \frac{\Sigma_e + \Sigma'_e}{\eta} = \mathfrak{M} - M. \quad (339)$$

E daqui resulta o seguinte método prático para resolver o problema:

São dados a forma e a área  $\Omega$  da secção transversal, as componentes da solicitação  $N$ ,  $M_x$  e  $M_y$  e os limites de elasticidade à tracção  $\Sigma_e$  e à compressão  $\Sigma'_e$ . O momento resultante é:

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}. \quad (340)$$

A fibra neutra limite  $\zeta\zeta$ , qualquer que seja a sua direcção, determina-se pela condição de dividir a área total  $\Omega$ , em duas áreas  $\omega'$  e  $\omega$ , inversamente proporcionais aos respectivos limites de elasticidade reduzidos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega = \frac{\Sigma'_e - \sigma_n}{\Sigma_e + \Sigma'_e} \Omega \\ \omega' = \frac{\Sigma_e + \sigma_n}{\Sigma_e + \Sigma'_e} \Omega, \end{array} \right.$$

sendo:

$$\sigma_n = -\frac{N}{\Omega}.$$

Divide-se a área  $\Omega$  em faixas, por paralelas à direcção arbitrada de  $\zeta\zeta$ , de maneira que este eixo sirva de linha divisória de duas faixas contíguas e traça-se com distância polar  $H_1$  o funicular que compõe as forças representativas das áreas parcelares, quando concentradas nos respectivos centros de gravidade. Prolongam-se os lados do funicular até  $\zeta\zeta$  e consideram-se os segmentos ali intersectados por cada dois lados consecutivos, como forças da mesma direcção, applicadas nos centros de gravidade das áreas parcelares respectivas. Compõe-se estas forças por um segundo funicular, de distância polar  $H_2$ .

Cada um dos dois funiculares fica, assim, constituído por dois ramos, acima e abaixo de  $\zeta\zeta$ , com um lado comum a cortar esta linha.

Numa paralela ao lado comum do segundo funicular, marca-se, a certa escala:

$$\overline{AB} = H_1 H_2 n (\Sigma_e + \Sigma'_e), \quad (341)$$

sendo  $1/n$  a escala de redução das áreas a vectores; na paralela por  $A$  a  $\zeta\zeta$ , marca-se:

$$\overline{AC} = \mathfrak{M} - M,$$

sendo  $\mathfrak{M}$  o momento limite, ou seja o momento que corresponde à plastificação completa da secção, na flexão simples complana com  $M$ , que é dado por:

$$\mathfrak{M} = \omega (\Sigma_e + \sigma_n) e = \omega' (\Sigma'_e - \sigma_n) e, \quad (342)$$

onde  $e$  é a distância dos centros de gravidade de  $\omega$  e  $\omega'$ , a qual se determina do primeiro funicular.

Por tentativas, traça-se a paralela a  $\overline{BC}$  que intersecta no segundo funicular dois pontos,  $B_1$  e  $C'_1$ , cujos correspondentes no primeiro funicular,  $a$  e  $a'$ , estejam na paralela ao seu lado comum. Estes dois pontos determinam as rectas de fronteira, às quais correspondem, respectivamente, os esforços  $\Sigma_e$  e  $\Sigma'_e$ , e isto permite traçar o diagrama dos esforços na secção.

Para fixar a direcção correcta da fibra neutra, procede-se como anteriormente se indicou.

13 — FLEXÃO DESVIADA — Se nas condições (289) se fizer:

$$\lambda = 0 \quad (343)$$

e se fôr:

$$\int \bar{\epsilon}_z d\Omega = 0, \quad (344)$$

as expressões (296) e (297) ficam:

$$\epsilon_z = \frac{M_y + \bar{M}_y}{EI_y} x + \frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x} y \quad (345)$$

e:

$$\sigma_z = \frac{M_y + \bar{M}_y}{I_y} x + \frac{M_x + \bar{M}_x}{I_x} y - E \bar{\epsilon}_z. \quad (346)$$

E a solicitação por *flexão desviada*, sem esforço axial, na qual, geralmente, o plano de solicitação das forças exteriores não contém nenhum dos eixos principais centrais de inércia da secção. Porque, mesmo quando um dos momentos componentes exteriores é nulo, a assimetria das deformações plásticas torna desviada a flexão. Com efeito, se, por exemplo, fôr:

$$M_y = 0, \quad (347)$$

o que significa que o plano de solicitação das forças exteriores contém o eixo principal central de inércia  $Oy$ , a flexão é desviada desde que seja:

$$\int \bar{\epsilon}_z x d\Omega \neq 0, \quad (348)$$

pois que a fibra neutra, de equação:

$$\frac{\bar{M}_y}{I_y} x + \frac{M_x + \bar{M}_x}{I_x} y = 0 \quad (349)$$

é uma recta desviada do eixo  $Ox$ , perpendicular ao eixo de solicitação.

O facto de a solicitação exterior se reduzir ao momento de flexão resultante  $M$ , de componentes  $M_x$  e  $M_y$ , exprime-se dizendo que a resultante da solicitação exterior na secção é uma força infinitamente pequena e longínqua. O centro de solicitação está a distância infinita e a fibra neutra, que é a sua anti-polar relativamente à elipse central de inércia, passa pelo centro de gravidade da secção, como aliás resultava da sua equação geral:

$$\frac{M_y + \bar{M}_y}{I_y} x + \frac{M_x + \bar{M}_x}{I_x} y = 0. \quad (350)$$

Esta solicitação é um caso particular da flexão desviada composta e aplica-se-lhe «mutatis mutandis», tudo quanto àcerca desta se disse.

As componentes da deformação num ponto são, neste caso:

$$\left\{ \begin{aligned} u &= -\frac{1}{2} \frac{M_y + \bar{M}_y}{EI_y} \left( z^2 - \frac{y^2 - x^2}{m} \right) - \frac{1}{m} \frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x} xy - \frac{m-2}{2m} \epsilon_s x \\ v &= -\frac{1}{m} \frac{M_y + \bar{M}_y}{EI_y} xy - \frac{1}{2} \frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x} \left( z^2 - \frac{x^2 - y^2}{m} \right) - \frac{m-2}{2m} \epsilon_s y \\ w &= \frac{M_y + \bar{M}_y}{EI_y} xz + \frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x} yz. \end{aligned} \right. \quad (351)$$

14—FLEXÃO COMPOSTA COM ESFÔRÇO AXIAL—Se nas condições (289) se fizer:

$$v = 0 \quad (352)$$

e se fôr:

$$\int \epsilon_s x d\Omega = 0, \quad (353)$$

isto é, se o diagrama das deformações plásticas fôr simétrico em relação ao eixo  $Oy$ , as componentes da solicitação exterior reduzem-se a  $N$  e  $M_x$  e as expressões (296) e (297) ficam:

$$\epsilon_s = \frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x} y + \frac{N + \bar{N}}{E\Omega} \quad (354)$$

e:

$$\sigma_s = \frac{M_x + \bar{M}_x}{I_x} y + \frac{N + \bar{N}}{\Omega} - E\epsilon_s. \quad (355)$$

É a *flexão composta com esforço axial*, flexão não desviada, no plano que contém  $Oy$  e que também se produz quando a força  $N$  é infinitamente pequena e longínqua, mas é:

$$\int \bar{\epsilon}_z d\Omega \neq 0, \quad (356)$$

isto é, quando o diagrama das deformações plásticas não é central, pois que neste caso vem:

$$\epsilon_z = \frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x} y + \frac{\bar{N}}{E\Omega} \quad (357)$$

e:

$$\sigma_z = \frac{M_x + \bar{M}_x}{I_x} y + \frac{\bar{N}}{\Omega} - E\bar{\epsilon}_z. \quad (358)$$

A fibra neutra, no caso geral, tem por equação:

$$\frac{M_x + \bar{M}_x}{I_x} y + \frac{N + \bar{N}}{\Omega} = 0 \quad (359)$$

e é uma recta perpendicular ao eixo de solicitação.

Aplica-se à flexão composta, não desviada, tudo quanto anteriormente se disse à cerca da flexão desviada composta, de que é caso particular. A determinação gráfica dos diagramas dos esforços, simplifica-se apreciavelmente, visto que é conhecida a direcção da fibra neutra, que, no caso geral, tem de ser fixada por tentativas.

As componentes da deformação num ponto são, neste caso:

$$\left\{ \begin{aligned} u &= -\frac{1}{m} \frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x} xy - \frac{1}{m} \frac{N + \bar{N}}{E\Omega} x - \frac{m-2}{2m} \epsilon_z x \\ v &= -\frac{1}{2} \frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x} \left( z^2 - \frac{x^2 - y^2}{m} \right) - \frac{1}{m} \frac{N + \bar{N}}{E\Omega} y - \frac{m-2}{2m} \epsilon_z y \\ w &= \frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x} yz + \frac{N + \bar{N}}{E\Omega} z. \end{aligned} \right. \quad (360)$$



A conclusões semelhantes se chega, evidentemente, à cerca da flexão composta no plano que contém o eixo  $Ox$  e que é definida pelas expressões que resultam de fazer em (289):

$$\mu = 0, \quad (361)$$

quando seja:

$$\int \bar{\epsilon}_z y d\Omega = 0. \quad (362)$$

15—FLEXÃO SIMPLES — Se nas condições (289), se fizer:

$$\nu = \lambda = 0, \quad (363)$$

sendo:

$$\int \bar{\epsilon}_z d\Omega = \int \bar{\epsilon}_z x d\Omega = 0, \quad (364)$$

as componentes da sollicitação exterior reduzem-se a  $M_x$  e as expressões (296) e (297) ficam:

$$\epsilon_z = \mu y = \frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x} y \quad (365)$$

e:

$$\sigma_z = \frac{M_x + \bar{M}_x}{I_x} y - E \bar{\epsilon}_z. \quad (366)$$

É a *flexão simples*, que se caracteriza por a fibra neutra, de equação:

$$y = 0, \quad (367)$$

coincidir com o eixo principal central de inércia  $Ox$ , perpendicular ao eixo de sollicitação  $Oy$ .

: Neste caso, as componentes da deformação vêm:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = -\frac{1}{m} \frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x} xy - \frac{m-2}{2m} \bar{\epsilon}_z x \\ v = -\frac{1}{2} \frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x} \left( z^2 - \frac{x^2 - y^2}{m} \right) - \frac{m-2}{2m} \bar{\epsilon}_z y \\ w = \frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x} yz. \end{array} \right. \quad (368)$$

Quere dizer, as coordenadas  $(x, y, z)$  de certo ponto da peça prismática mudaram, em virtude da deformação, para:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x - \frac{1}{m} \frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x} xy - \frac{m-2}{2m} \varepsilon_z x \\ y' = y - \frac{1}{2} \frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x} \left( z^2 - \frac{x^2 - y^2}{m} \right) - \frac{m-2}{2m} \varepsilon_z y \\ z' = z + \frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x} yz. \end{array} \right. \quad (369)$$

É fácil de verificar que, desprezando a segunda potência de quantidades muito pequenas, as secções primitivamente planas, se mantêm planas depois da deformação. Isto é evidente para a base da peça prismática que contém a origem, pois que, para  $z=0$  é  $z'=0$ ; para as outras secções, basta tirar o valor de  $y$  da expressão de  $y'$ , observando que é, por hipótese:

$$\bar{\varepsilon}_z = \varepsilon_z - \varepsilon_z = \mu y - \varepsilon_z,$$

onde  $\varepsilon_z$  é a fracção elástica da deformação, subordinada à lei de Hooke e, por isso mesmo constante, visto que  $\sigma_z = \Sigma_e$  não varia nas zonas das deformações plásticas, que começam para  $y = y_e$ :

$$\varepsilon_z = \frac{\Sigma_e}{E} = \mu y_e, \quad (370)$$

ou:

$$\bar{\varepsilon}_z = \mu(y - y_e) = \frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x} (y - y_e). \quad (371)$$

E virá:

$$\begin{aligned} z' = z + \frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x} z \left[ y' + \frac{1}{2} \frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x} \left( z^2 - \frac{x^2 - y^2}{m} \right) + \right. \\ \left. + \frac{m-2}{m} y \frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x} (y - y_e) \right] \end{aligned}$$

ou, atendendo a que:

$$\mu = \frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x}$$

é uma constante muito pequena, da qual se podem desprezar os quadrados em presença das primeiras potências:

$$z' = z \left( 1 + \frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x} y' \right), \quad (372)$$

expressão que, para cada valor de  $z$ , é a equação de um plano.

A intersecção dêste plano com o plano da base que contém a origem, é uma recta cuja equação se obtém fazendo  $z' = 0$  e que é independente de  $z$ :

$$y' = - \frac{EI_x}{M_x + \bar{M}_x}. \quad (373)$$

Isto mostra que a deformação da peça prismática é circular, pois que tôdas as secções passam, depois da deformação, pela mesma recta (373), e que o raio da linha média deformada é:

$$r = \frac{EI_x}{M_x + \bar{M}_x}. \quad (374)$$

Daqui se conclui que, no caso de as deformações serem tão pequenas que se possam considerar infinitamente pequenas (como admitimos), a curvatura da fibra média deformada de uma peça prismática solicitada à flexão simples e em equilíbrio elasto-plástico, é constante e vale:

$$\frac{1}{r} = \mu = \frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x}. \quad (375)$$

Como a curvatura da fibra média é dada por:

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \cong \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad (376)$$

visto ser  $\frac{dy}{dx}$  muito pequeno e desprezível o seu quadrado, pode escrever-se:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_x + \overline{M}_x}{EI_x}, \quad (377)$$

o que alarga ao equilíbrio elasto-plástico conhecidos princípios de elasticidade, como o da determinação da fibra média deformada pelo método do segundo funicular de Mohr.

Se as deformações são elásticas, a curvatura é:

$$\mu_e = \frac{M_x}{EI_x}$$

e como se pode escrever:

$$\mu = \frac{M_x}{EI_x} + \frac{\overline{M}_x}{EI_x} = \mu_e + \overline{\mu}, \quad (378)$$

segue-se que, no equilíbrio elasto-plástico, a curvatura total é a soma da curvatura elástica:

$$\mu_e = \frac{M_x}{EI_x} \quad (379)$$

e da curvatura plástica:

$$\overline{\mu} = \frac{\overline{M}_x}{EI_x}. \quad (380)$$

Evidentemente que seria possível tirar conclusões semelhantes, se o plano de solicitação contivesse o eixo  $Ox$ , em vez de conter o eixo  $Oy$ .

Aplica-se à flexão simples tudo quanto anteriormente se disse acerca da flexão desviada composta, com a simplificação de que agora se conhece a posição da fibra neutra. Neste caso, parece mais simples adoptar, nas aplicações, o método analítico do que o gráfico.

Seja, por exemplo, a secção rectangular de largura  $b$  e altura  $H$ , de uma peça prismática constituída de material que tem o mesmo limite de elasticidade  $\Sigma_e$ , à tracção e à compressão, solicitada pelo momento de flexão  $M$ , no seu plano médio vertical.

A fibra neutra é horizontal e passa a meia altura da secção. O diagrama dos esforços será semelhante ao representado esquematicamente na figura 14-c. As fibras onde começam as deformações plásticas, à distância  $y_e = \pm \frac{h}{2}$  da fibra neutra, estão sujeitas ao esforço:

$$\Sigma_e = \frac{M + \bar{M}}{I} y_e \quad (381)$$

e ao mesmo esforço estão sujeitas as fibras extremas, de ordenada  $y_v = \pm \frac{H}{2}$ :

$$\Sigma_e = \frac{M + \bar{M}}{I} y_v - E \bar{\epsilon}_v. \quad (382)$$

Nestas expressões, é:

$$\bar{M} = E \int \bar{\epsilon}_y d\Omega \quad (383)$$

ou, em virtude de (371):

$$\bar{M} = \frac{M + \bar{M}}{I} 2 \int_{y_e}^{y_v} (y - y_e) y d\Omega. \quad (384)$$

Integrando, desenvolvendo, observando que é:

$$I = \frac{b H^3}{12}, \quad (385)$$

e substituindo  $y_e$  e  $y_v$  pelos seus valores, encontra-se:

$$\bar{M} = (M + \bar{M}) \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{h}{H} + \frac{1}{2} \frac{h^3}{H^3} \right), \quad (386)$$

donde:

$$\bar{M} = \frac{M}{\frac{3}{2} \frac{h}{H} - \frac{1}{2} \frac{h^3}{H^3}}. \quad (387)$$

Substituindo (387) em (381) ou em (382), mas atendendo, neste último caso, a que é:

$$\bar{\varepsilon}_v = \frac{M + \bar{M}}{EI} (y_v - y_e), \quad (388)$$

encontra-se:

$$\begin{aligned} M &= \frac{bH^2}{6} \Sigma_e \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{h^2}{H^2} \right) \\ &= \frac{bH^2}{4} \Sigma_e \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{h^2}{H^2} \right), \end{aligned} \quad (389)$$

expressão conhecida por *fórmula de Fritsche*, que a deduziu, como veremos, por outra via.

Quando seja  $h = H$ , isto é, quando as deformações sejam inteiramente elásticas, mas no instante em que nas fibras extremas se atinge o limite de elasticidade, o momento de flexão, a que se chama *momento crítico de plasticidade*, é:

$$M = \frac{bH^2}{6} \Sigma_e = W \Sigma_e, \quad (390)$$

sendo:

$$W = \frac{bH^3}{12} : \frac{h}{2} = \frac{I}{v} \quad (391)$$

o módulo de resistência da secção, em elasticidade; quando seja  $h = 0$ , isto é, quando toda a secção esteja em plasticidade, será:

$$\mathfrak{M} = \frac{bH^2}{4} \Sigma_e = \bar{W} \Sigma_e, \quad (392)$$

sendo:

$$\bar{W} = \frac{bH^2}{4} = 1,5 W \quad (393)$$

o módulo de resistência da secção correspondente ao momento limite  $\mathfrak{M}$ . Daqui se conclui que, neste caso da secção rectangular, é:

$$\mathfrak{M} = 1,5 M,$$

quere dizer, o momento limite de plasticidade excede de 50 % o momento crítico de plasticidade, desde que os limites de elasticidade sejam os mesmos para a tracção e para a compressão.

Fácil é de ver que a plastificação completa da secção se não pode atingir. Na realidade, se as secções, inicialmente planas, se mantêm planas depois da deformação, resulta que as deformações totais nas fibras são proporcionais às suas distâncias à fibra neutra. E em particular, para as fibras das linhas de separação da região elástica das plásticas, e para as fibras extremas, será:

$$\frac{\epsilon_e}{\epsilon_v} = \frac{y_e}{y_v} = \frac{h}{H}. \quad (394)$$

A fórmula (389) transforma-se então em:

$$M = \frac{bH^2}{6} \Sigma_e \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{\epsilon_e^2}{\epsilon_v^2} \right). \quad (395)$$

Neste outro aspecto, a fórmula de Fritsche permite concluir que a plastificação completa, a que corresponde:

$$\mathfrak{M} = \frac{3}{2} \frac{bH^2}{6} \Sigma_e = \frac{bH^2}{4} \Sigma_e,$$

só se dará quando seja  $\epsilon_v = \infty$ , isto é, quando a deformação das fibras extremas cresça além de todo o limite, o que é manifestamente incompatível com a capacidade de comportamento dúctil do material: a ruptura sobrevirá antes da plastificação completa da secção.

Não seria difícil alargar esta demonstração a qualquer outra forma de secção transversal.

16 — COMPRESSÃO OU TRACÇÃO SIMPLES — Se nas condições (289) se fizer:

$$\nu = \mu = 0, \quad (396)$$

sendo:

$$\int \epsilon_x x d\Omega = \int \epsilon_y y d\Omega = 0, \quad (397)$$

as componentes da sollicitação exterior reduzem-se a  $N$  e as expressões (296) e (297) ficam:

$$\epsilon_z = \frac{N + \bar{N}}{E\Omega} \quad (398)$$

e:

$$\sigma_z = \frac{N + \bar{N}}{\Omega} - E\epsilon_z. \quad (399)$$

É a solicitação por *tração* ou *compressão simples*, a que correspondem as componentes da deformação:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = -\frac{1}{m} \frac{N + \bar{N}}{E\Omega} x - \frac{m-2}{2m} \bar{\epsilon}_z x \\ v = -\frac{1}{m} \frac{N + \bar{N}}{E\Omega} y - \frac{m-2}{2m} \bar{\epsilon}_z y \\ w = \frac{N + \bar{N}}{E\Omega} z. \end{array} \right. \quad (400)$$

É evidente como, neste caso, as secções planas antes da deformação, se mantêm planas depois da deformação.

17 — TORÇÃO SIMPLES — Se fizermos:

$$\epsilon_z = \epsilon_z + \bar{\epsilon}_z = 0, \quad (401)$$

o que implica ser  $\bar{\epsilon}_z = 0$ , e:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{yz} = \gamma_{yz} + \bar{\gamma}_{yz} = \omega \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} + x \right) \\ \Gamma_{zx} = \gamma_{zx} + \bar{\gamma}_{zx} = \omega \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} - y \right), \end{array} \right. \quad (402)$$

onde  $\omega$  é uma constante muito pequena e  $\Phi(x, y)$  uma função regular em todos os pontos da secção transversal e independente de  $z$ , as condições (258) e (265) são satisfeitas.

A condição (266) reduz-se, neste caso, a:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial \bar{\gamma}_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\gamma}_{yz}}{\partial y}. \quad (403)$$

Ora as condições no contôrno da secção transversal hão-de exprimir a hipótese feita, de que a peça prismática não recebe solicitação exterior na sua superfície lateral, e as equações (60) reduzem-se, então, a:

$$\tau_{zx} \cos \alpha + \tau_{yz} \cos \beta = 0, \quad (404)$$



sendo  $\alpha$  e  $\beta$  os ângulos directores da normal ao elemento genérico do contôrno da secção, que é perpendicular ao eixo dos  $zz$ . E a condição (404) significa que o esforço resultante, de corte, no contôrno da secção, é dirigido segundo a tangente ao contôrno e não tem componente na direcção normal.

Atendendo a (244), esta condição transforma-se em:

$$\Gamma_{xx} \cos \alpha + \Gamma_{yz} \cos \beta = 0 \quad (405)$$

ou, substituindo  $\Gamma_{xx}$  e  $\Gamma_{yz}$  pelos seus valores (402):

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} - y \right) \cos \alpha + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} + x \right) \cos \beta = 0 \quad (406)$$

e, desenvolvendo:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cos \beta = y \cos \alpha - x \cos \beta. \quad (407)$$

Se com  $\xi$  e  $\eta$  indicarmos, respectivamente, a direcção da tangente e a da normal ao elemento do contôrno, é:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dx}{d\eta} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{d\eta} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cos \beta, \quad (408)$$

visto que:

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{dy}{d\xi} = \frac{dx}{d\eta} \\ \cos \beta = -\frac{dx}{d\xi} = \frac{dy}{d\eta} \end{cases} \quad (409)$$

A condição no contôrno (407) reduz-se, pois, a:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = y \cos \alpha - x \cos \beta. \quad (410)$$

Esta condição caracteriza a função  $\Phi(x, y)$ . De facto, é manifesto que:

$$\begin{aligned} \int_c \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} d\xi &= \int_c (y \cos \alpha - x \cos \beta) d\xi = \\ &= \int_c y dy + x dx = 0, \end{aligned} \quad (411)$$

visto os integrais (curvilíneos) se estenderem a todo o contórno da secção, que é fechado.

Mas, efectuando a transformação de Green, pode escrever-se:

$$\begin{aligned}\int_c \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} d\xi &= \int_c \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} dy - \frac{\partial \Phi}{\partial y} dx \right) = \\ &= \iint \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) dx dy = \\ &= \iint \Delta \Phi dx dy = 0,\end{aligned}\tag{412}$$

o que, a menos de uma constante aditiva, mostra ser:

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0.\tag{413}$$

Para que esta condição seja compatível com (403), deve ser:

$$\frac{\partial \bar{\gamma}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\gamma}_{yz}}{\partial y} = 0\tag{414}$$

ou, multiplicando por  $d\Omega = dx dy$  e integrando:

$$\iint \left( \frac{\partial \bar{\gamma}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\gamma}_{yz}}{\partial y} \right) dx dy = \int_c (\bar{\gamma}_{xx} \cos \alpha + \bar{\gamma}_{yz} \cos \beta) d\xi = 0,$$

donde, ainda a menos de uma constante aditiva:

$$\bar{\gamma}_{xx} \cos \alpha + \bar{\gamma}_{yz} \cos \beta = 0,\tag{415}$$

e então a função  $\Phi(x, y)$ , satisfazendo à equação de Laplace (413), é uma função harmónica ou potencial. O seu conhecimento em cada

caso particular (quere dizer, para cada forma da secção transversal) permite determinar as componentes da solicitação exterior, que são:

$$\left\{ \begin{array}{l} N = \int \sigma_z d\Omega = E \int \varepsilon_z d\Omega = 0 \\ M_x = \int \sigma_z y d\Omega = E \int \varepsilon_z y d\Omega = 0 \\ M_y = \int \sigma_z x d\Omega = E \int \varepsilon_z x d\Omega = 0 \end{array} \right. \quad (416)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T_x = \int \tau_{zx} d\Omega = G \int \gamma_{zx} d\Omega = G \int \left[ \omega \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} - y \right) - \bar{\gamma}_{zx} \right] d\Omega \\ T_y = \int \tau_{yz} d\Omega = G \int \gamma_{yz} d\Omega = G \int \left[ \omega \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} + x \right) - \bar{\gamma}_{yz} \right] d\Omega \\ M_t = \int (\tau_{yz} x - \tau_{zx} y) d\Omega = G \int \left[ \omega \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} + x \right) x - \omega \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} - y \right) y - \right. \\ \left. - \bar{\gamma}_{yz} x + \bar{\gamma}_{zx} y \right] d\Omega. \end{array} \right.$$

Mas é fácil de verificar que:

$$\begin{aligned} \int \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} - y \right) d\Omega &= \iint \left[ \frac{\partial}{\partial x} x \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} - y \right) + \frac{\partial}{\partial y} x \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} + x \right) \right] dx dy = \\ &= \int_c \left[ x \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} - y \right) \frac{dy}{d\xi} - x \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} + x \right) \frac{dx}{d\xi} \right] d\xi = \\ &= \int_c x \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} - y \right) \cos \alpha + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} + x \right) \cos \beta \right] d\xi = \\ &= 0, \end{aligned} \quad (417)$$

em virtude de (406), depois de efectuada a transformação de Green.  
Do mesmo modo:

$$\begin{aligned} \int \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} + x \right) d\Omega &= \iint \left[ \frac{\partial}{\partial y} y \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} + x \right) + \frac{\partial}{\partial x} y \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} - y \right) \right] dx dy = \\ &= \int_c y \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} - y \right) \cos \alpha + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} + x \right) \cos \beta \right] d\xi = 0. \end{aligned} \quad (418)$$

Por outro lado, sendo:

$$I_p = \int (x^2 + y^2) d\Omega \quad (419)$$

o momento de inércia polar da secção e designando por:

$$\chi = \frac{I_p}{I_p + \int \left( x \frac{\partial \Phi}{\partial y} - y \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) d\Omega} \quad (420)$$

o factor de torção, e admitindo que é:

$$\int \bar{\gamma}_{yz} d\Omega = \int \bar{\gamma}_{zx} d\Omega = 0, \quad (421)$$

vem:

$$T_x = T_y = 0$$

$$\begin{aligned} M_t &= G\omega \int \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} + x \right) x - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} - y \right) y \right] d\Omega - G \int (\bar{\gamma}_{yz} x - \bar{\gamma}_{zx} y) d\Omega = \\ &= G\omega \left[ \int \left( x \frac{\partial \Phi}{\partial y} - y \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) d\Omega + \int (x^2 + y^2) d\Omega \right] - G \int (\bar{\gamma}_{yz} x - \bar{\gamma}_{zx} y) d\Omega = \\ &= G\omega \left[ I_p + \int \left( x \frac{\partial \Phi}{\partial y} - y \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) d\Omega \right] - G \int (\bar{\gamma}_{yz} x - \bar{\gamma}_{zx} y) d\Omega, \quad (422) \end{aligned}$$

donde:

$$\omega = \chi \frac{M_t + G \int (\bar{\gamma}_{yz} x - \bar{\gamma}_{zx} y) d\Omega}{GI_p}, \quad (423)$$

logo:

$$\left\{ \begin{aligned} \Gamma_{yz} &= \chi \frac{M_t + G \int (\bar{\gamma}_{yz} x - \bar{\gamma}_{zx} y) d\Omega}{GI_p} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} + x \right) = \\ &= \chi \frac{M_t + \bar{M}_t}{GI_p} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} + x \right) \\ \Gamma_{zx} &= \chi \frac{M_t + G \int (\bar{\gamma}_{yz} x - \bar{\gamma}_{zx} y) d\Omega}{GI_p} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} - y \right) = \\ &= \chi \frac{M_t + \bar{M}_t}{GI_p} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} - y \right), \end{aligned} \right. \quad (424)$$

tendo feito:

$$\bar{M}_t = G \int (\bar{\gamma}_{yz} x - \bar{\gamma}_{zx} y) d\Omega. \quad (425)$$

Finalmente:

$$\begin{cases} \tau_{yz} = G\gamma_{yz} = \chi \frac{M_t + \bar{M}_t}{I_p} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} + x \right) - G\bar{\gamma}_{yz} \\ \tau_{zx} = G\gamma_{zx} = \chi \frac{M_t + \bar{M}_t}{I_p} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} - y \right) - G\bar{\gamma}_{zx}. \end{cases} \quad (426)$$

A solicitação assim caracterizada é a *torção simples*, para a qual a condição de plasticidade se verifica quando o esforço tangencial  $\tau$ , resultante de  $\tau_{yz}$  e  $\tau_{zx}$ , atinge certo limite.

A natureza das deformações pode determinar-se a partir das equações:

$$\begin{cases} \Gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \omega \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} + x \right) \\ \Gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \omega \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} - y \right), \end{cases} \quad (427)$$

sendo  $u$ ,  $v$  e  $w$  as componentes cartesianas do vector deformação num ponto da secção transversal. Por diferenciação destas expressões, obtém-se:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{zx}}{\partial x} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} = \\ &= \omega \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \Gamma_{yz}}{\partial x} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} = \\ &= \omega \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + 1 \\ \frac{\partial \Gamma_{zx}}{\partial y} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial y} = \\ &= \omega \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - 1 \\ \frac{\partial \Gamma_{yz}}{\partial y} &= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y} = \\ &= \omega \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \end{aligned} \right. \quad (428)$$

donde, atendendo a que, por hipótese, é:

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \Gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \end{array} \right. \quad (429)$$

se tira:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \omega \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \omega \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \omega \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}. \end{array} \right. \quad (430)$$

Por consequência, visto que, por outro lado, é:

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (431)$$

virá:

$$w = \omega (\Phi + w_o + qx + py), \quad (432)$$

sendo  $w_o$ ,  $p$  e  $q$  constantes de integração, e (427):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial z} = \omega \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} + x \right) - \frac{\partial w}{\partial y} = + \omega (x - p) \\ \frac{\partial u}{\partial z} = \omega \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} - y \right) - \frac{\partial w}{\partial x} = - \omega (y + q). \end{array} \right. \quad (433)$$

Finalmente:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = - \omega (yz + qz + u_o + ry) \\ v = + \omega (xz - pz + v_o + rx) \\ w = + \omega (\Phi + w_o + qx + py), \end{array} \right. \quad (434)$$

sendo  $u_o$ ,  $v_o$  e  $r$  constantes de integração, que, juntamente com as restantes, caracterizam o movimento rígido de componentes:

$$\begin{cases} u' = -u_o - ry - qz \\ v' = +v_o + rx - pz \\ w' = +w_o + qx + py, \end{cases} \quad (435)$$

de modo que as componentes essenciais ou características geométricas da deformação são dadas por:

$$\begin{cases} u = -\omega yz \\ v = +\omega xz \\ w = +\omega \Phi. \end{cases} \quad (436)$$

As expressões de  $u$  e  $v$  definem a rotação  $\omega z$ , que a secção transversal sofre em torno do seu eixo, e, por consequência,  $\omega$  mede o *ângulo de torção por unidade de comprimento da peça prismática*.

Estas expressões mostram que a secção transversal não se altera de forma, no seu plano, e apenas roda de certo ângulo, mas que sofre um enfunamento, isto é, que a secção primitivamente plana, passa a ser empenada, sendo a sua forma definida pela função potencial  $\Phi(x, y)$ , a que se chama *função de torção*.

O enfunamento não se dá quando  $\Phi$  seja constante e de (407) tira-se que, neste caso, será:

$$\text{tang } \alpha = \frac{y}{x}. \quad (437)$$

Como  $\alpha$  define a direcção da normal em cada ponto do contôrno, segue-se que a secção transversal será caracterizada pelo facto de a normal em cada ponto do seu contôrno passar constantemente pela origem, e só poderá ser circular.

Daqui se conclui que, na torção simples das peças prismáticas, as secções planas só se mantêm planas se são de forma circular e o eixo de torção coincide com o eixo longitudinal da peça.

A cada forma da secção transversal corresponde, pois, uma função de torção, mediante a qual ficam inteiramente caracterizadas as componentes dos esforços e das deformações.

18 — FLEXÃO E ESFÓRÇO CORTANTE — Se fizermos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_z = \bar{\epsilon}_z + \bar{\epsilon}_z = (\mu + \mu' z) y \\ \Gamma_{yz} = \gamma_{yz} + \bar{\gamma}_{yz} = \mu' \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{2m-1}{2m} x^2 - \frac{1}{2m} y^2 \right) \\ \Gamma_{zx} = \gamma_{zx} + \bar{\gamma}_{zx} = \mu' \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{2m+1}{m} xy \right), \end{array} \right. \quad (438)$$

sendo  $\mu$  e  $\mu'$  constantes muito pequenas e  $\Psi(x, y)$  uma função regular em todos os pontos da secção transversal e independente de  $z$ , as condições (272) e (273) são satisfeitas, desde que seja:

$$\bar{\epsilon}_z = (\bar{\mu} + \bar{\mu}' z) y + \bar{\lambda} \quad (439)$$

e  $\bar{\mu}$ ,  $\bar{\mu}'$  e  $\bar{\lambda}$  constantes muito pequenas.

De facto, esta hipótese corresponde a:

$$\nu = \lambda = \nu' = \lambda' = 0$$

e substituindo  $\Gamma_{yz}$  e  $\Gamma_{zx}$  pelos seus valores, encontra-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \Gamma_{zx}}{\partial y} \right) = \frac{2}{m} \mu' = \frac{2}{m} \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \Gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 0 = \frac{2}{m} \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial z}. \end{array} \right. \quad (440)$$

A relação (274) escreve-se, neste caso:

$$\mu' \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial \bar{\gamma}_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\gamma}_{yz}}{\partial y} + 2 \left( 1 + \frac{1}{m} \right) \mu' y. \quad (441)$$

A condição no contorno, exprimindo que a peça não está, por hipótese, sujeita a solicitação exterior na sua superfície lateral:

$$\tau_{zx} \cos \alpha + \tau_{yz} \cos \beta = 0$$

ou:

$$\Gamma_{zx} \cos \alpha + \Gamma_{yz} \cos \beta = 0$$



fica, substituindo  $\Gamma_{xz}$  e  $\Gamma_{yz}$  pelos seus valores e desenvolvendo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} &= \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cos \beta = \frac{2m+1}{m} xy \cos \alpha + \\ &+ \left( \frac{2m-1}{2m} x^2 + \frac{1}{2m} y^2 \right) \cos \beta.\end{aligned}\quad (442)$$

Mas já vimos (409), que:

$$\cos \alpha = \frac{dy}{d\xi}, \quad \cos \beta = -\frac{dx}{d\xi}$$

e vem, pela fórmula de Green:

$$\begin{aligned}&\int_c \left[ \frac{2m+1}{m} xy \cos \alpha + \left( \frac{2m-1}{2m} x^2 + \frac{1}{2m} y^2 \right) \cos \beta \right] d\xi = \\ &= \int_c \left[ \frac{2m+1}{m} xy dy - \left( \frac{2m-1}{2m} x^2 + \frac{1}{2m} y^2 \right) dx \right] = \\ &= \iint \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{2m+1}{m} xy \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{2m-1}{2m} x^2 + \frac{1}{2m} y^2 \right) \right] dxdy = \\ &= 2 \left( 1 + \frac{1}{m} \right) \iint y dxdy = 0,\end{aligned}\quad (443)$$

visto que o integral duplo representa o momento estático da área da secção transversal em relação ao eixo central  $Ox$ .

Será, por consequência:

$$\begin{aligned}&\int_c \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cos \beta \right) d\xi = \int_c \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} dy - \frac{\partial \Psi}{\partial y} dx \right) = \\ &= \iint \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) dxdy = \iint \Delta \Psi dxdy = 0.\end{aligned}\quad (444)$$

Daqui se segue que, a menos de uma constante aditiva, é:

$$\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \quad (445)$$

e a função  $\Psi(x, y)$ , de laplaciano nulo, é portanto uma função harmónica ou potencial. Deve, pois, ser, no contórno da secção em virtude de (441):

$$\frac{\partial \bar{\gamma}_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\gamma}_{yz}}{\partial y} + 2 \left(1 + \frac{1}{m}\right) \mu' y = 0 \quad (446)$$

ou, multiplicando por  $d\Omega = dxdy$  e integrando:

$$\begin{aligned} \iint \left( \frac{\partial \bar{\gamma}_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\gamma}_{yz}}{\partial y} \right) dxdy + 2 \left(1 + \frac{1}{m}\right) \mu' \iint y dxdy = \\ = \iint \left( \frac{\partial \bar{\gamma}_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\gamma}_{yz}}{\partial y} \right) dxdy = \int_c (\bar{\gamma}_{zx} \cos \alpha + \bar{\gamma}_{yz} \cos \beta) d\xi = 0, \end{aligned}$$

donde, a menos duma constante aditiva:

$$\bar{\gamma}_{zx} \cos \alpha + \bar{\gamma}_{yz} \cos \beta = 0. \quad (447)$$

O conhecimento da função  $\Psi(x, y)$ , em cada caso particular, permite determinar as componentes da sollicitação exterior, que são:

$$\left\{ \begin{aligned} N &= \int \sigma_z d\Omega = E \int \varepsilon_z d\Omega = E(\mu + \mu' z) \int y d\Omega - E \int \bar{\varepsilon}_z d\Omega \\ M_x &= \int \sigma_z y d\Omega = E \int \varepsilon_z y d\Omega = E(\mu + \mu' z) \int y^2 d\Omega - E \int \bar{\varepsilon}_z y d\Omega \\ M_y &= \int \sigma_z x d\Omega = E \int \varepsilon_z x d\Omega = E(\mu + \mu' z) \int xy d\Omega - E \int \bar{\varepsilon}_z x d\Omega, \\ T_x &= \int \tau_{zx} d\Omega = G \int \gamma_{zx} d\Omega = G \mu' \left[ \int \frac{\partial \Psi}{\partial x} d\Omega - \frac{2m+1}{m} \int xy d\Omega \right] - \\ &\quad - G \int \bar{\gamma}_{zx} d\Omega \\ T_y &= \int \tau_{yz} d\Omega = G \int \gamma_{yz} d\Omega = G \mu' \left[ \int \frac{\partial \Psi}{\partial y} d\Omega - \frac{2m-1}{2m} \int x^2 d\Omega - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2m} \int y^2 d\Omega \right] - G \int \bar{\gamma}_{yz} d\Omega \\ M_t &= \int (\tau_{yz} x - \tau_{zx} y) d\Omega = G \mu' \left[ \int \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} x - \frac{\partial \Psi}{\partial x} y \right) d\Omega - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2m-1}{2m} \int x^3 d\Omega + \left( 2 + \frac{1}{2m} \right) \int xy^2 d\Omega \right] - G \int (\bar{\gamma}_{yz} x - \bar{\gamma}_{zx} y) d\Omega. \end{aligned} \right. \quad (448)$$

Mas como os eixos coordenados são os eixos principais centrais de inércia da secção, é:

$$\int y d\Omega = \int xy d\Omega = 0$$

e as expressões:

$$\int y^2 d\Omega = I_x, \quad \int x^2 d\Omega = I_y$$

representam os momentos principais centrais de inércia.

Por outro lado, é:

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial \Psi}{\partial x} d\Omega &= \iint \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx dy = \iint \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( x \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \right] dx dy = \\ &= \int_c \left( x \frac{\partial \Psi}{\partial x} dy - x \frac{\partial \Psi}{\partial y} dx \right) = \\ &= \int_c x \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} dy - \frac{\partial \Psi}{\partial y} dx \right) = 0 \end{aligned} \quad (449)$$

e, do mesmo modo:

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial \Psi}{\partial y} d\Omega &= \iint \frac{\partial \Psi}{\partial y} dx dy = \iint \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( y \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( y \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \right] dx dy = \\ &= \int_c y \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} dy - \frac{\partial \Psi}{\partial y} dx \right) = 0. \end{aligned} \quad (450)$$

A expressão de  $M_x$  na base da peça prismática, isto é, para  $z=0$ , é:

$$(M_x)_o = E\mu I_x - E \int (\bar{\epsilon}_x)_o y d\Omega. \quad (451)$$

Como  $T_y$  é independente de  $z$ , pode escrever-se:

$$M_x = (M_x)_o + T_y z = E\mu I_x - E \int (\bar{\epsilon}_x)_o y d\Omega + T_y z, \quad (452)$$

logo:

$$E\mu I_x - E \int (\bar{\epsilon}_x)_o y d\Omega + T_y z = E(\mu + \mu' z) I_x - E \int \bar{\epsilon}_x y d\Omega, \quad (453)$$

donde se tira:

$$T_y = E\mu' I_x - \frac{E \int \Delta \bar{\epsilon}_x y d\Omega}{z}, \quad (454)$$

sendo  $\Delta \bar{\epsilon}_z = \bar{\epsilon}_z - (\bar{\epsilon}_z)_0$  a variação de  $\bar{\epsilon}_z$  desde a origem à secção de abscissa  $z$ .

Igualando as duas expressões de  $T_y$ , vem:

$$E\mu' I_x - \frac{E \int \Delta \bar{\epsilon}_z y d\Omega}{z} = G\mu' \left( -\frac{2m-1}{2m} I_y - \frac{1}{2m} I_x \right) - G \int \bar{\gamma}_{yz} d\Omega \quad (455)$$

e, admitindo que, ainda para as deformações plásticas, se verifica a relação:

$$T = \frac{dM}{dz}, \quad (456)$$

isto é, que:

$$\frac{E \int \Delta \bar{\epsilon}_z y d\Omega}{z} = G \int \bar{\gamma}_{yz} d\Omega \quad (457)$$

vem, atendendo a (161):

$$-\frac{2m-1}{2m} I_y = \frac{4m+5}{2m} I_x. \quad (458)$$

A substituição deste valor na expressão de  $T_y$  dá, finalmente:

$$\begin{aligned} T_y &= \mu' G \frac{2(m+1)}{m} I_x - G \int \bar{\gamma}_{yz} d\Omega = \\ &= E\mu' I_x - G \int \bar{\gamma}_{yz} d\Omega \end{aligned} \quad (459)$$

e as componentes da sollicitação exterior, ficam:

$$\left\{ \begin{aligned} N &= -E \int \bar{\epsilon}_z d\Omega \\ M_x &= E(\mu + \mu' z) I_x - E \int \bar{\epsilon}_z y d\Omega \\ M_y &= -E \int \bar{\epsilon}_z x d\Omega \\ T_x &= -G \int \bar{\gamma}_{zx} d\Omega \\ T_y &= E\mu' I_x - G \int \bar{\gamma}_{yz} d\Omega \\ M_t &= G\mu' \left[ \int \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} x - \frac{\partial \Psi}{\partial x} y \right) d\Omega - \frac{2m-1}{2m} \int x^3 d\Omega + \right. \\ &\quad \left. + \left( 2 + \frac{1}{2m} \right) \int xy^2 d\Omega \right] - G \int (\bar{\gamma}_{yz} x - \bar{\gamma}_{zx} y) d\Omega. \end{aligned} \right. \quad (460)$$

É a solicitação por *flexão desviada composta com torção, esforço cortante e esforço axial*. O desvio da flexão e a solicitação axial são apenas devidos a assimetria das deformações plásticas. As componentes da solicitação no caso mais geral da flexão desviada, em que o plano das forças exteriores não é central, obtinham-se a partir de:

$$\epsilon_z = (\nu'x + \mu'y)z + \nu x + \mu y \quad (461)$$

e resultariam de acrescentar às expressões anteriores, os respectivos termos complementares; se o esforço axial resulta, não só da assimetria das deformações plásticas, mas também da existência de componente axial da solicitação exterior, é evidente como, a partir de:

$$\epsilon_z = (\nu'x + \mu'y + \lambda')z + \nu x + \mu y + \lambda \quad (462)$$

se obtinham as expressões das componentes da solicitação mais complexa a que uma peça prismática pode ser submetida, quando a sua temperatura não varia.

Essas expressões dependem da função potencial  $\Psi(x, y)$  e só em casos especiais se podem determinar sem o seu conhecimento. Se, por exemplo, na hipótese particular de solicitação que analisámos, a secção transversal da peça prismática fôr simétrica em relação ao eixo principal central de inércia  $Oy$ , as componentes da solicitação são independentes da função potencial.

Com efeito, a simetria da secção implica que a função  $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$  é uma função ímpar de  $x$ , quere dizer, é uma função que muda de sinal sem mudar de valor absoluto, quando se passa do ponto de coordenadas  $(x, y)$  ao de coordenadas  $(-x, y)$ ; e a função  $\frac{\partial \Psi}{\partial y}$  é uma função par de  $x$ , isto é, não varia de valor absoluto nem de sinal, quando se passa do ponto  $(x, y)$  ao ponto  $(-x, y)$ . Isto resulta de que a equação aos limites (442) não deve mudar quando se substitui  $x$  por  $-x$ . Ora o coeficiente de  $\cos \alpha$ , no segundo membro, é função ímpar de  $x$  e muda de sinal com  $x$ , por isso, também o coeficiente de  $\cos \alpha$  no primeiro membro,  $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ , deve mudar de sinal com  $x$  ou, o que é o mesmo, ser uma função ímpar de  $x$ ; ao contrário, o coeficiente de  $\cos \beta$  no segundo membro é função par de  $x$  e, por isso, também  $\frac{\partial \Psi}{\partial y}$  o deve ser.

A função:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} x - \frac{\partial \Psi}{\partial x} y$$

é, por consequência, ímpar em  $x$  e, na secção transversal, a cada valor desta função corresponde outro igual e de sinal contrário, de modo que será:

$$\int \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} x - \frac{\partial \Psi}{\partial x} y \right) d\Omega = 0. \quad (463)$$

E o momento de torção  $M_t$ , única das componentes da solicitação que dependia da função  $\Psi(x, y)$ , passa a ser independente dela.

Mas a simetria da secção transversal em relação ao eixo principal central de inércia  $Oy$ , ainda permite maior simplificação da expressão de  $M_t$ , se atendermos a que, por serem funções ímpares de  $x$ , é também:

$$\int xy^2 d\Omega = \int x^3 d\Omega = 0. \quad (464)$$

E se admitirmos que as deformações plásticas são tais que as secções rodam em torno de uma recta paralela ao eixo  $Ox$  e não rodam no seu plano, nem escorregam paralelamente àquêle eixo, isto é, que se verificam as relações:

$$\int \bar{\varepsilon}_x d\Omega = 0 \quad (465)$$

$$\int \bar{\gamma}_{zx} d\Omega = \int (\bar{\gamma}_{yz} x - \bar{\gamma}_{zx} y) d\Omega = 0,$$

o que parece razoável dada a simetria material da peça e a da solicitação exterior, então vem:

$$T_x = M_y = M_t = 0, \quad (466)$$

a flexão deixa de ser desviada e não há torção. É o caso das secções de betão armado, simétricas em relação ao eixo de solicitação, mas assimetricamente armadas, em que as componentes da solicitação se reduzem a:

$$\begin{cases} N = -E \int \bar{\varepsilon}_x d\Omega \\ M_x = E(\mu + \mu' z) I_x - E \int \bar{\varepsilon}_x y d\Omega \\ T_y = E\mu' I_x - G \int \bar{\gamma}_{yz} d\Omega \end{cases} \quad (467)$$

e caracterizam a solicitação por flexão, não desviada, composta com esforço cortante e esforço axial, este último provocado pela disposição assimétrica da armadura.

Quando seja:

$$\int \bar{\epsilon}_z d\Omega = 0, \quad (468)$$

quere dizer, quando não haja translação plástica da secção, então, apenas duas das componentes da solicitação exterior são diferentes de zero: o momento de flexão e o esforço cortante, existentes no plano da solicitação.

E será, neste caso:

$$\begin{cases} M_x = E(\mu + \mu' z) I_x - E \int \bar{\epsilon}_z y d\Omega \\ T_y = E\mu' I_x - G \int \bar{\gamma}_{yz} d\Omega. \end{cases} \quad (469)$$

Estas expressões, em virtude de (457) satisfazem à relação:

$$T_y = \frac{dM_x}{dz}, \quad (470)$$

como se pode verificar. E delas se tira:

$$\mu + \mu' z = \frac{M_x + E \int \bar{\epsilon}_z y d\Omega}{EI_x} = \frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x} \quad (471)$$

$$\mu' = \frac{T_y + G \int \bar{\gamma}_{yz} d\Omega}{EI_x} = \frac{T_y + \bar{T}_y}{EI_x},$$

tendo feito:

$$\bar{T}_y = G \int \bar{\gamma}_{yz} d\Omega. \quad (472)$$

Será, por consequência:

$$\epsilon_z = \epsilon_z + \bar{\epsilon}_z = \frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x} y \quad (473)$$

e:

$$\begin{cases} \Gamma_{yz} = \gamma_{yz} + \bar{\gamma}_{yz} = \frac{T_y + \bar{T}_y}{EI_x} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{2m-1}{2m} x^2 - \frac{1}{2m} y^2 \right) \\ \Gamma_{zx} = \gamma_{zx} + \bar{\gamma}_{zx} = \frac{T_y + \bar{T}_y}{EI_x} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{2m+1}{m} xy \right). \end{cases} \quad (474)$$

Finalmente, as componentes dos esforços serão:

$$\sigma_z = E \varepsilon_z = \frac{M_x + \bar{M}_x}{I_x} y - E \bar{\varepsilon}_z \quad (475)$$

e, atendendo a (161):

$$\begin{cases} \tau_{yz} = G \gamma_{yz} = \frac{T_y + \bar{T}_y}{2(m+1)I_x} \left( m \frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{2m-1}{2} x^2 - \frac{1}{2} y^2 \right) - G \bar{\gamma}_{yz} \\ \tau_{zx} = G \gamma_{zx} = \frac{T_y + \bar{T}_y}{2(m+1)I_x} \left( m \frac{\partial \Psi}{\partial x} - (2m+1) xy \right) - G \bar{\gamma}_{zx}. \end{cases} \quad (476)$$

Verifica-se, assim, que as componentes normais dos esforços e das deformações são as mesmas que no caso da flexão simples, e que tudo se passa como se o esforço cortante actuasse independentemente do momento de flexão: os resultados finais obtêm-se por sobreposição de efeitos.

Esta independência das solicitações é só aparente, pois que, de facto, vimos que  $T_y$  e  $M_x$  estão relacionados pela expressão:

$$T_y + \bar{T}_y = \frac{d(M_x + \bar{M}_x)}{dz}. \quad (477)$$

Como o esforço cortante ( $T_y + \bar{T}_y$ ) é independente de  $z$ , isto é, como se mantém constante de secção para secção e apenas depende da solicitação exterior aplicada nas bases, pode escolher-se esta solicitação de modo a que, por exemplo, o momento de flexão seja nulo na secção da base livre, isto é, de modo a que, para  $z=l$ , seja (469):

$$M_x + \bar{M}_x = E(\mu + \mu' l) I_x = 0,$$

e vem:

$$\mu + \mu' l = 0. \quad (478)$$



A solicitação reduz-se, então, a uma força  $(T_y + \bar{T}_y)$ , a actuar segundo o eixo de simetria  $Oy$  da secção da base livre, e o momento de flexão, dado pela combinação de (478) com (469), é:

$$M_x + \bar{M}_x = -E\mu' I_x (l - z) = -(T_y + \bar{T}_y)(l - z). \quad (479)$$

Neste caso, as componentes da deformação num ponto são dadas pela integração das equações diferenciais:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x &= -\frac{1}{m} \epsilon_z = -\frac{1}{m} \frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x} y = \frac{1}{m} \frac{T_y + \bar{T}_y}{EI_x} (l - z) y \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \epsilon_y &= -\frac{1}{m} \epsilon_z = -\frac{1}{m} \frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x} y = \frac{1}{m} \frac{T_y + \bar{T}_y}{EI_x} (l - z) y \\ \frac{\partial w}{\partial z} = \epsilon_z &= \frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x} y = -\frac{T_y + \bar{T}_y}{EI_x} (l - z) y \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} &= \Gamma_{yz} = \frac{T_y + \bar{T}_y}{EI_x} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{2m-1}{2m} x^2 - \frac{1}{2m} y^2 \right) \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} &= \Gamma_{xz} = \frac{T_y + \bar{T}_y}{EI_x} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{2m+1}{m} xy \right) \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \Gamma_{xy} = 0. \end{aligned} \right. \quad (480)$$

Da terceira destas equações deduz-se, por integração:

$$w = -\frac{T_y + \bar{T}_y}{EI_x} lyz + \frac{1}{2} \frac{T_y + \bar{T}_y}{EI_x} yz^2 + w_0(x, y). \quad (481)$$

Da quarta tira-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{T_y + \bar{T}_y}{EI_x} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{2m-1}{2m} x^2 - \frac{1}{2m} y^2 \right) - \frac{\partial w}{\partial y} = \\ &= \frac{T_y + \bar{T}_y}{EI_x} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{2m-1}{2m} x^2 - \frac{1}{2m} y^2 + lz - \frac{1}{2} z^2 \right) - \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{aligned} \quad (482)$$

ou, derivando em ordem a  $y$ :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} = \frac{T_y + \bar{T}_y}{EI_x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} - \frac{1}{m} \frac{T_y + \bar{T}_y}{EI_x} y. \quad (483)$$

Mas da segunda obtém-se, derivando em ordem a  $z$ :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} = -\frac{1}{m} \frac{T_y + \bar{T}_y}{EI_x} y. \quad (484)$$

As expressões (483) e (484) só são compatíveis, se fôr:

$$\frac{T_y + \bar{T}_y}{EI_x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{T_y + \bar{T}_y}{EI_x} \Psi - w_o \right) = 0. \quad (485)$$

Da quinta equação diferencial tira-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{T_y + \bar{T}_y}{EI_x} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{2m+1}{m} xy \right) - \frac{\partial w}{\partial x} = \\ &= \frac{T_y + \bar{T}_y}{EI_x} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{2m+1}{m} xy \right) - \frac{\partial w_o}{\partial x} \end{aligned} \quad (486)$$

e:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = \frac{T_y + \bar{T}_y}{EI_x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} - \frac{2m+1}{m} \frac{T_y + \bar{T}_y}{EI_x} y, \quad (487)$$

enquanto que da primeira se obtém:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = -\frac{1}{m} \frac{T_y + \bar{T}_y}{EI_x} y. \quad (488)$$

As expressões (487) e (488) só são compatíveis, se fôr:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{T_y + \bar{T}_y}{EI_x} \Psi - w_o \right) = 2 \frac{T_y + \bar{T}_y}{EI_x} y. \quad (489)$$

Mas a última equação diferencial, derivada em ordem a  $z$ :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (490)$$

e atendendo a (482) e (486), escreve-se:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{T_y + \bar{T}_y}{EI_x} \Psi - w_o \right) = 2 \frac{T_y + \bar{T}_y}{EI_x} x. \quad (491)$$

As equações diferenciais (485), (489) e (491) permitem determinar:

$$\frac{T_y + \bar{T}_y}{EI_x} \Psi - w_o = \frac{T_y + \bar{T}_y}{EI_x} x^2 y + nx - py - q, \quad (492)$$

onde  $n$ ,  $p$ ,  $q$  são constantes arbitrárias, ou:

$$w_o = \frac{T_y + \bar{T}_y}{EI_x} (\Psi - x^2 y) - nx + py + q \quad (493)$$

e (481) fica:

$$w = \frac{T_y + \bar{T}_y}{EI_x} \left[ \Psi - yz \left( l - \frac{z}{2} \right) - x^2 y \right] + nx + py + q. \quad (494)$$

Substituindo êste valor em (486), obtém-se:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{m} \frac{T_y + \bar{T}_y}{EI_x} xy + n \quad (495)$$

e esta equação, associada com a primeira de (480) permite determinar:

$$u = \frac{1}{m} \frac{T_y + \bar{T}_y}{EI_x} (l - z) xy + nz + u_o(y). \quad (496)$$

Substituindo (494) em (482), obtém-se, de modo semelhante:

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{T_y + \bar{T}_y}{EI_x} \left( lz - \frac{1}{2} z^2 - \frac{y^2 - x^2}{2m} \right) + p \quad (497)$$

e esta equação, associada com a segunda de (480), permite determinar:

$$v = \frac{T_y + \bar{T}_y}{EI_x} \left[ \frac{1}{2} l \left( z^2 + \frac{y^2}{m} \right) - \frac{1}{2m} z (y^2 - x^2) - \frac{z^3}{6} \right] + pz + v_o(x). \quad (498)$$

Mas estas expressões (496) e (498) devem satisfazer à última equação de (480), o que dá:

$$\frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} + \frac{1}{m} \frac{T_y + \bar{T}_y}{EI_x} lx = 0; \quad (499)$$

logo, será:

$$\begin{cases} v_o = -\frac{1}{2m} \frac{T_y + \bar{T}_y}{EI_x} x^2 - rx + s \\ u_o = ry + t, \end{cases} \quad (500)$$

onde  $r$ ,  $s$  e  $t$  são constantes arbitrárias, e virá, finalmente:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{m} \frac{T_y + \bar{T}_y}{EI_x} (l - z) xy + t + ry + nz \\ v = \frac{T_y + \bar{T}_y}{EI_x} \left[ \frac{z^2}{2} \left( l - \frac{z}{3} \right) - \frac{x^2 - y^2}{2m} (l - z) \right] + s - rx + pz \\ w = -\frac{T_y + \bar{T}_y}{EI_x} \left[ yz \left( l - \frac{z}{2} \right) + x^2 y - \Psi \right] + q - nx + py. \end{cases} \quad (501)$$

Como as expressões:

$$\begin{cases} u' = t + ry + nz \\ v' = s - rx + pz \\ w' = q - nx + py \end{cases} \quad (502)$$

definem o movimento rígido do corpo, as componentes geométricas da deformação são dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{1}{m} \frac{T_y + \bar{T}_y}{EI_x} (l - z) xy \\ v = \frac{T_y + \bar{T}_y}{EI_x} \left[ \frac{z^2}{2} \left( l - \frac{z}{3} \right) - \frac{x^2 - y^2}{2m} (l - z) \right] \\ w = - \frac{T_y + \bar{T}_y}{EI_x} \left[ yz \left( l - \frac{z}{2} \right) + x^2 y - \Psi \right] \end{array} \right. \quad (503)$$

Estas expressões também se podem escrever:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = - \frac{1}{m} \frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x} xy \\ v = - \frac{1}{2} \frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x} \left( z^2 - \frac{x^2 - y^2}{m} \right) + \frac{1}{3} \frac{T_y + \bar{T}_y}{EI_x} z^3 \\ w = \frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x} yz - \frac{T_y + \bar{T}_y}{EI_x} \left[ y \left( x^2 + \frac{z^2}{2} \right) - \Psi \right] \end{array} \right. \quad (504)$$

e, comparadas com as que correspondem à solicitação por flexão simples (368), mostram qual o efeito do esforço cortante na deformação: as secções planas deixam de ser planas e o seu enfunamento depende da função  $\Psi$ .

Fica, assim, perfeitamente caracterizada a solicitação por flexão com esforço cortante, à custa da função harmónica ou potencial  $\Psi(x, y)$ , cujo conhecimento, para cada forma da secção transversal, permite determinar as componentes dos esforços e as das deformações. Se, por exemplo, a secção é circular, de raio  $r$ , a equação do contorno é:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

e a equação (442) permite, por integração, determinar a função  $\Psi$ . De modo semelhante se procederia no caso de outro formato do contorno da secção.

Não nos interessa fazer essa determinação rigorosa, pois é possível generalizar ao equilíbrio elasto-plástico o método aproximado que habitualmente se utiliza em elasticidade e que, à custa de erros compatíveis com o cálculo de aplicação, permite simplificar o problema matemático.

Com efeito, as expressões (476) mostram que os esforços tangenciais variam de ponto para ponto da secção, e variam de secção para secção na medida em que variam as deformações plásticas: vamos supor que dependem das coordenadas  $x$  e  $y$  e são independentes de  $z$ . Sucede que, para o mesmo valor de  $y$ , a variação de  $\tau_{yz}$  com  $x$  é muito pequena, isto é, o esforço tangencial paralelo ao eixo de solicitação varia muito pouco ao longo das fibras paralelas à fibra neutra; e o esforço  $\tau_{xz}$  é de muito pequena intensidade, relativamente a  $\tau_{yz}$ .

A simplificação consiste em desprezar  $\tau_{xz}$  e tomar para  $\tau_{yz}$  o seu valor médio, que designaremos por  $\tau_y$ .

O problema reduz-se, agora, a determinar o valor médio  $\tau_y$  do esforço tangencial  $\tau_{yz}$  nas fibras perpendiculares ao eixo de solicitação, definidas pela sua distância  $y$ , ao centro de gravidade da secção (fig. 19).

A última equação de Cauchy, que exprime o equilíbrio paralelamente ao eixo  $Oz$ , escreve-se, como vimos:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0.$$

Multiplicando esta equação pelo elemento de superfície  $d\Omega = dx dy$  e integrando ao longo da superfície situada acima da fibra de ordenada  $y$  (superfície tracejada na figura 19), vem:

$$\iint \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) dx dy + \iint \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dx dy = 0. \quad (505)$$

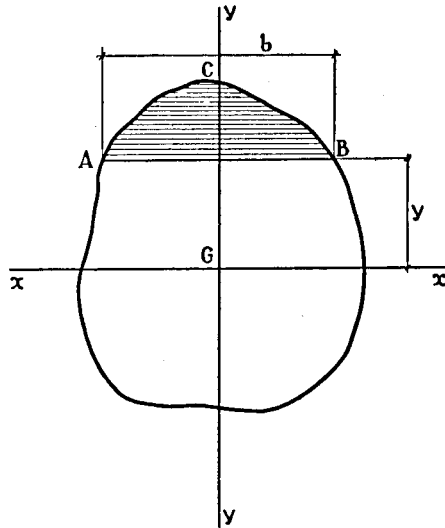


Fig. 19

Mas, pela transformação de Green, é:

$$\iint \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) dx dy = \int_c (\tau_{xx} \cos \alpha + \tau_{yz} \cos \beta) d\xi, \quad (506)$$

estendendo-se o integral curvilíneo ao contôrno da superfície tracejada, definido pelo elemento  $d\xi$  e pelos ângulos directores da normal positiva  $\alpha$  e  $\beta$ . Ora, ao longo da parte exterior  $ACB$  do contôrno, a condição que exprime estar a superfície lateral da peça prismática descarregada é, como vimos:

$$\tau_{xx} \cos \alpha + \tau_{yz} \cos \beta = 0.$$

Por outro lado, ao longo da parte rectilínea  $AB$  do contôrno, é:

$$\cos \alpha = 0, \quad \cos \beta = -1,$$

logo:

$$\int_c (\tau_{xx} \cos \alpha + \tau_{yz} \cos \beta) d\xi = - \int_A^B \tau_{yz} dx = -b\tau_y, \quad (507)$$

pelo teorema da média, designando por  $b$  a largura (variável) da secção correspondentemente à fibra de ordenada  $y$ , e por  $\tau_y$ , como já dissemos, o valor médio de  $\tau_{yz}$  ao longo da mesma fibra.

Substituindo  $\sigma_z$  pelo seu valor (475) e atendendo a (439) e a (471), vem:

$$\begin{aligned} \iint \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dx dy &= \int \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} d\Omega = \int \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{M_x + \bar{M}_x}{I_x} y - E\bar{\epsilon}_z \right) d\Omega = \\ &= \frac{1}{I_x} \int_y^{y_e} \frac{d(M_x + \bar{M}_x)}{dz} y d\Omega - E \int_y^{y_e} \mu' y d\Omega = \\ &= \frac{T_y + \bar{T}_y}{I_x} \int_y^{y_e} y d\Omega = \frac{(T_y + \bar{T}_y)S}{I_x}, \end{aligned} \quad (508)$$

tendo designado por:

$$S = \int_y^{y_e} y d\Omega \quad (509)$$

o momento estático, em relação à fibra neutra  $Ox$ , da parte elástica da secção que está situada acima da fibra em estudo.

E a equação (505) escrever-se-á:

$$-b\tau_y + \frac{(T_y + \bar{T}_y)S}{I_x} = 0,$$

donde, finalmente:

$$\tau_y = \frac{(T_y + \bar{T}_y)S}{I_x b}. \quad (510)$$

Supondo, então, que é  $\tau_{xx} = 0$ , as componentes dos esforços em um ponto da secção, reduzem-se a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{M_x + \bar{M}_x}{I_x} y - E \varepsilon_x \\ \tau_y = \frac{T_y + \bar{T}_y}{I_x b} S. \end{array} \right. \quad (511)$$

Estas expressões, associadas com a condição de plasticidade, permitem resolver inteiramente o problema prático.

Suponhamos, de facto, dados o momento de flexão  $M_x$  e o esforço cortante  $T_y$ , relacionados por uma expressão que satisfaz à relação:

$$T_y = \frac{dM_x}{dz}, \quad (512)$$

por exemplo:

$$M_x = -T_y(l - z). \quad (513)$$

É conhecido o esforço de comparação  $\Sigma_e$  e adoptamos como condição de plasticidade, a de Saint-Venant-Guest.

As componentes dos esforços são dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{M_x + \bar{M}_x}{I_x} y \\ \tau_y = \frac{T_y + \bar{T}_y}{I_x b} S = -\frac{M_x + \bar{M}_x}{I_x b(l - z)} S, \end{array} \right. \quad (514)$$



enquanto seja:

$$\sigma_z^2 + 4\tau_y^2 < \Sigma_e^2, \quad (515)$$

e por:

$$\begin{cases} \sigma_z = \frac{M_x + \bar{M}_x}{I_x} y - E\bar{\varepsilon}_z = \Sigma_e \\ \tau_y = 0, \end{cases} \quad (516)$$

quando seja:

$$\sigma_z^2 + 4\tau_y^2 = \Sigma_e^2 \quad (517)$$

ou:

$$\sigma_z = \Sigma_e.$$

Nas fibras onde começam as deformações plásticas, à distância  $y_e$  da fibra neutra, é, por conseguinte:

$$\begin{cases} \sigma_z = \frac{M_x + \bar{M}_x}{I_x} y_e = \Sigma_e \\ \tau_y = 0, \end{cases} \quad (518)$$

e nas fibras extremas, à distância  $y_v$  da fibra neutra, é:

$$\begin{cases} \sigma_z = \frac{M_x + \bar{M}_x}{I_x} y_v - E\bar{\varepsilon}_v = \Sigma_e \\ \tau_y = 0. \end{cases} \quad (519)$$

Nestas expressões, é:

$$\bar{M}_x = E \int \bar{\varepsilon}_z y d\Omega \quad (520)$$

e como:

$$\bar{\varepsilon}_z = \frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x} (y - y_e), \quad (521)$$

vem:

$$\bar{M}_x = \frac{M_x \int (y - y_e) y d\Omega}{I_x - \int (y - y_e) y d\Omega}, \quad (522)$$

estendendo-se os integrais à parte plástica da secção. A substituição dêste valor em (516) e (518), juntamente com:

$$\bar{\epsilon}_v = \frac{M_x + \bar{M}_x}{EI_x} (y_v - y_e), \quad (523)$$

permite determinar  $y_e$  e, por consequência, os valores de  $\sigma_z$  e  $\tau_y$  em qualquer fibra.

Se, por exemplo, a secção é rectangular e o limite de elasticidade à tracção é o mesmo que à compressão, fazendo:

$$y_e = \pm \frac{h}{2}, \quad y_v = \pm \frac{H}{2}$$

$$I_x = \frac{bH^3}{12},$$

vem a expressão (387):

$$\bar{M}_x = M_x \frac{1 - \frac{3}{2} \frac{h}{H} + \frac{1}{2} \frac{h^3}{H^3}}{\frac{3}{2} \frac{h}{H} - \frac{1}{2} \frac{h^3}{H^3}} \quad (524)$$

e a substituição dêste valor em (518) dá a fórmula de Fritsche:

$$M_x = \frac{bH^2}{4} \Sigma_e \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{h^2}{H^2} \right),$$

donde se pode tirar:

$$y_e = \frac{h}{2} = \pm \sqrt{\frac{3}{4} H^2 - \frac{3 M_x}{b \Sigma_e}}, \quad (525)$$

e os valores de  $\sigma_z$  e de  $\tau_y$  em qualquer fibra, dados por (514), ficam completamente determinados. Os diagramas dos esforços na secção têm o aspecto indicado na figura 20.

O máximo valor de  $\tau_y$  produz-se na fibra neutra, isto é, para  $y=0$ , e como neste caso é:

$$S = \int_0^{\frac{h}{2}} y d\Omega = \frac{bh^2}{8}, \quad (526)$$

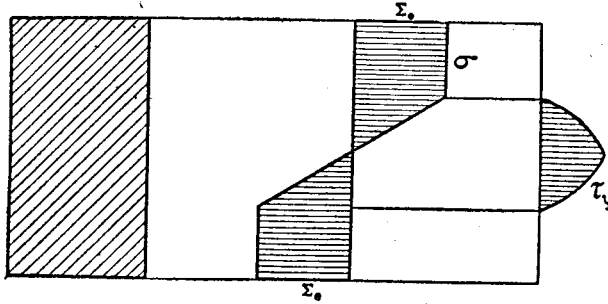


Fig. 20

vem:

$$\begin{aligned} \tau_{y\text{máx}} &= -\frac{3}{2} \frac{M_x}{bH(l-z)} \frac{1}{\frac{3}{2} \frac{H}{h} - \frac{1}{2} \frac{h}{H}} = \\ &= \frac{3}{2} \frac{T_y}{bH} \frac{1}{\frac{3}{2} \frac{H}{h} - \frac{1}{2} \frac{h}{H}}, \end{aligned} \quad (527)$$

que, para:

$$\frac{h}{H} = 1,$$

dá a conhecida fórmula da elasticidade:

$$\tau_{y\text{máx}} = \frac{3}{2} \frac{T_y}{bH}.$$

19 — ESFORÇOS E DEFORMAÇÕES RESIDUAIS — Se nas expressões (296) e (297), se fizer:

$$N = M_x = M_y = 0,$$

aquelas expressões reduzem-se a:

$$\begin{aligned} \epsilon_z &= \epsilon_s + \bar{\epsilon}_z = \frac{\int \bar{\epsilon}_z d\Omega}{E\Omega} + \frac{\int \bar{\epsilon}_z x d\Omega}{EI_y} x + \frac{\int \bar{\epsilon}_z y d\Omega}{EI_x} y \\ \sigma_z &= \frac{E \int \bar{\epsilon}_z d\Omega}{\Omega} + \frac{E \int \bar{\epsilon}_z x d\Omega}{I_y} x + \frac{\int \bar{\epsilon}_z y d\Omega}{I_x} y - E \bar{\epsilon}_z. \end{aligned} \quad (528)$$

Quere dizer, quando, atingidas as deformações plásticas de uma peça prismática solicitada à flexão desviada composta, se faz cessar a acção da solicitação exterior, resta em cada ponto da peça certa *deformação residual*, que é a soma da deformação plástica ou permanente que se produziu no próprio ponto e da deformação que ali resulta do estado de coacção plástica da peça. Esta segunda fracção da deformação residual traduz a influência que tem na deformação de cada ponto a deformação plástica dos outros pontos da peça, e tem características elásticas, isto é, anular-se-ia se fôsse possível fazer desaparecer o estado de conexão interior dos infinitos elementos de volume em que se divide o volume total do sólido, estado de conexão que provoca o aparecimento dos *esforços residuais*, não obstante a ausência de solicitação exterior.

Considerações semelhantes se poderiam fazer para cada uma das outras solicitações estudadas ou para as suas combinações.

Daqui a seguinte conclusão geral: enquanto que um sólido prismático, deformado elásticamente, volta ao estado natural, não deformado, quando se anula a solicitação exterior; enquanto que um volume elementar do mesmo sólido, isolado de todos os outros que o rodeiam pelo ideal desaparecimento das múltiplas conexões moleculares, fica, depois de se atingirem as deformações plásticas, indefinidamente deformado ao cessar a solicitação exterior e com ausência de quaisquer esforços ou tensões; o mesmo elemento de volume, considerado como fazendo parte do todo múltiplamente conexo que constitui o corpo, fica submetido a certos esforços elásticos remanescentes, os esforços residuais, quando, depois de atingidas as deformações plásticas, deixa de actuar a solicitação exterior.

Pode, assim, considerar-se definido pelo cálculo o mecanismo da produção das deformações de um sólido prismático e nada se opõe à generalização dos mesmos princípios às deformações de qualquer sólido, isótropo ou anisótropo, homogéneo ou não, mas contínuo.

Ao iniciar-se a acção da solicitação exterior, cada elemento de volume do sólido deforma-se elásticamente e o trabalho despendido transforma-se em energia potencial elástica, capaz de desfazer as deformações, se a solicitação vier a desaparecer; mas se a solicitação aumenta de intensidade, atingem-se as deformações plásticas em alguns elementos de volume e o trabalho despendido na deformação dêesses elementos de volume, cujos esforços se mantêm constantes, já se não transforma em energia potencial elástica, antes se dispersa em transformações irreversíveis, com produção de calor. Nesta segunda fase existem, então, no corpo, elementos de volume deformados elásticamente e outros onde à deformação elástica se adicionou certa deformação plástica, sem variação do seu estado de tensão; do trabalho despendido nas deformações, só uma parte se transformou em energia potencial elástica, precisamente aquela parte à custa da qual se produziram as deformações elásticas.

Se, agora, se anular a solicitação exterior, a energia potencial elástica que existe, latente, em cada elemento de volume do corpo e corresponde à fracção elástica da sua própria deformação, tende a desfazer essa parte da deformação. Se o corpo fôsse desprovido das suas conexões interiores, é evidente que nada se oporia a que voltassem ao estado natural, não deformado, aquêles elementos de volume que apenas se tinham deformado elásticamente, e a que se desfizesse a fracção elástica das deformações daqueles onde se atingira a fase plástica. Mas como o corpo é múltiplamente conexo nos seus infinitos elementos de volume, a tendência ao desaparecimento da fracção elástica das deformações é contrariada pela existência das deformações plásticas e isto determina a produção de novo estado de deformação, com o aparecimento dos esforços residuais.

Quere dizer, as deformações plásticas, que se produziram apenas em certos elementos de volume do corpo, não são compatíveis com as suas múltiplas conexões interiores: para que as equações de compatibilidade sejam satisfeitas, é necessário juntar-lhes certo sistema de deformações elásticas, determinado pela condição de que sejam compatíveis as deformações totais.

Êste funcionamento dá razão do fenómeno de endurecimento a frio que, como vimos, se traduz pelo aumento do limite de elas-

ticidade dos materiais previamente submetidos a deformações plásticas. Suponhamos, de facto, uma peça de prova solicitada por forças sucessivamente crescentes a partir do estado natural não deformado, que já lhe produzem deformações plásticas em alguns pontos. Anulando as forças exteriores, as deformações plásticas impedem o regresso puro e simples do sistema ao estado inicial e sucede que, naqueles elementos de volume onde o limite de elasticidade ainda se não atingira, os esforços interiores não se anulam por completo, mas apenas diminuem de intensidade; naqueles que já se deformavam plásticamente, é manifesto que se desenvolvem esforços destinados a equilibrar os esforços remanescentes e que, por isso mesmo, hão-de ser de sinal contrário. Se, agora, se aplicam novamente as forças exteriores com intensidade sucessivamente crescente, compreende-se que, antes de se atingirem os esforços que anteriormente haviam solicitado os elementos de volume não deformados plásticamente, primeiro se hão-de anular os esforços residuais, de sinal contrário, desenvolvidos pelo estado de coacção da peça nos elementos de volume onde já se haviam produzido deformações plásticas. Como os esforços residuais são elásticos, também a sua neutralização tem características elásticas, e eis aí por que razão o limite de elasticidade do material *aparentemente* se elevou: para que as deformações tornem a ser plásticas no segundo estado de solicitação, é indispensável atingir os esforços máximos correspondentes ao instante em que se anularam as forças na primeira solicitação e isso faz-se agora em régimen elástico.

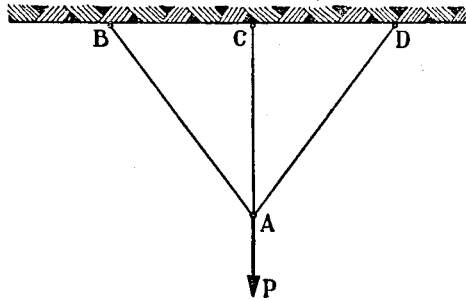


Fig. 21

É fenómeno semelhante, mas infinitamente mais complexo, do que se produz quando três barras de eixos coplanares e concorrentes num ponto (fig. 21), ligadas entre si e com o exterior por articulações sem atrito, são solicitadas por uma força aplicada no seu nó comum, que produz deformações plásticas apenas em uma delas, por exemplo AC.

Admitamos que o sentido da força é tal, que os esforços nas barras são de tracção. Se a força vier a anular-se, as duas barras

$AB$  e  $AD$ , onde as deformações não deixaram de ser elásticas, tenderão a recuperar o seu comprimento primitivo. A isso opõe-se a deformação plástica da terceira barra,  $AC$ , que, por consequência, vem a ser comprimida elásticamente pela acção das outras duas, a actuarem como molas. O equilíbrio atinge-se quando a resultante dos esforços de tracção nestas duas barras tenha diminuído até ser igual e de sinal contrário ao esforço na terceira. No estado final correspondente a fôrça exterior nula, existe, pois, esforço de compressão na barra  $AC$  que fôra deformada plásticamente à tracção, e esforços de tracção, mas de intensidade menor do que em plena carga, nas outras duas barras,  $AB$  e  $AD$ .

Se, a partir dêste estado de equilíbrio, a fôrça exterior voltar a ser aplicada com intensidade sucessivamente crescente, é manifesto que só se atingirá o equilíbrio correspondente à primeira carga, quando houver sido anulado o esforço residual de compressão na barra  $AC$ , que fôra deformada plásticamente. E como o fenómeno, nesta fase, tem características elásticas, tudo vem a passar-se como se o sistema das três barras tivesse limite de elasticidade mais elevado do que da primeira vez.

É este funcionamento que se aproveita na técnica do betão pré-esforçado e na do betão cintado, onde, em última análise, se provoca a elevação, aparente e artificial, do limite de elasticidade do betão armado, com o fim de aumentar a sua capacidade de resistência elástica.

## CAPÍTULO III

### Teoria elementar da plasticidade

20 — PRINCÍPIOS GERAIS — A teoria que acabamos de expor mostra que, nas solicitações por flexão, quando não complicadas com esforço cortante, as secções planas das peças prismáticas se mantêm planas depois da deformação. Esta conclusão é confirmada pela experiência e, mesmo no caso da torção simples e no de as deformações não serem homogêneas ao longo das fibras longitudinais da peça (como quando existe esforço cortante), pode considerar-se aceitável em critério de aplicação prática.

Sendo assim e qualquer que seja a lei que relaciona a variação das deformações com a dos esforços, é fácil de chegar às expressões finais do equilíbrio elasto-plástico das peças prismáticas, pelo menos nos casos mais simples.

Consideremos, para exemplificar, o caso da flexão simples de momento  $M$ , e suponhamos que o raio de curvatura da fibra neutra da peça prismática deformada é  $r$ . Se, em virtude da deformação, o elemento linear  $dz$  das fibras longitudinais à distância  $y$  da fibra neutra, sofreu a variação de comprimento  $\Delta dz$ , é evidente que o seu coeficiente de dilatação linear será (omitindo os índices, agora inúteis e indicando com a letra  $\varepsilon$  as deformações totais, visto que não nos interessa distinguir as elásticas das plásticas):

$$\varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz} = \frac{y}{r}. \quad (529)$$

Sendo  $y_1$  e  $y_2$  as distâncias da fibra neutra às fibras mais afastadas da secção, os coeficientes de dilatação lineares respectivos serão:

$$\varepsilon_1 = \frac{y_1}{r}, \quad \varepsilon_2 = \frac{y_2}{r},$$

contando-se as distâncias negativamente para baixo.



O equilíbrio interior exige que seja:

$$\begin{cases} \int \sigma d\Omega = 0 \\ \int \sigma y d\Omega = M, \end{cases} \quad (530)$$

sendo  $\sigma$  o esforço normal nas fibras à distância  $y$  da fibra neutra e estendendo-se os integrais a toda a secção. Se  $b$  é a largura correspondente a  $y$  (variável com  $y$ ), é:

$$d\Omega = b dy$$

e como, por outro lado, é:

$$y = r\varepsilon, \quad dy = r d\varepsilon,$$

vem, sucessivamente:

$$\begin{cases} \int \sigma d\Omega = \int_{y_1}^{y_2} b \sigma dy = r \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} b \sigma d\varepsilon = 0 \\ \int \sigma y d\Omega = \int_{y_1}^{y_2} b \sigma y dy = r^2 \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} b \sigma d\varepsilon = M. \end{cases} \quad (531)$$

É possível exprimir  $r$  em função de  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$ , pois que, sendo  $H$  a altura da secção (medida normalmente à fibra neutra), é:

$$y_1 + y_2 = H$$

e:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{H}{r},$$

donde:

$$r = \frac{H}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \quad (532)$$

E então, desde que se conheça a lei de variação de  $b$  com  $y$  (e, por consequência, com  $\varepsilon$ ), e a que relaciona  $\sigma$  com  $\varepsilon$ , traduzida pelo diagrama de ensaios à tracção e à compressão simples do mate-

rial que constitui a peça prismática ou por uma função dada analiticamente:

$$\sigma = f(\varepsilon), \quad (533)$$

as duas equações (531) permitem determinar  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  e, por consequência,  $y_1$  e  $y_2$ , o que fixa a posição da fibra neutra. O traçado do diagrama dos esforços normais  $\sigma$  na secção, segue-se imediatamente, a partir da expressão (533), a qual mostra, em virtude de (529), que aquêle diagrama é geomêtricamente semelhante ao dos esforços em função das deformações, obtido na máquina de ensaios. Se êste último diagrama tem o aspecto indicado na figura 6, a distribuição dos esforços na secção transversal há-de fazer-se de um dos modos indicados na figura 14: o caso *a*) corresponde a deformações inteiramente elásticas; o caso *b*), a deformações plásticas apenas em um dos bordos da secção; o caso *c*), a deformações plásticas em ambos os bordos da secção, com núcleo central elástico; o caso *d*), caso limite, corresponde à plastificação completa da secção e não se pode atingir para valores finitos das deformações.

Vamos ainda concretizar, supondo que, para material com diagrama característico semelhante ao da figura 6, sendo iguais os valores absolutos dos esforços nos limites de elasticidade à tracção e à compressão:

$$\Sigma_e = \Sigma'_e,$$

a peça prismática é de secção rectangular, com a largura  $b$  e a altura  $H$ .

É evidente que, em virtude da simetria, é, neste caso:

$$y_1 = -\frac{H}{2}, \quad y_2 = +\frac{H}{2}.$$

O momento resistente da secção obtém-se a partir da segunda das equações (531):

$$M = br^2 \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \sigma \varepsilon d\varepsilon = 2br^2 \int_0^{\varepsilon_2} \sigma \varepsilon d\varepsilon. \quad (534)$$

No caso mais geral, de as deformações plásticas haverem atingido ambos os bordos da secção, caso *c*) da figura 14, chamando  $\varepsilon_e$  ao valor absoluto do coeficiente de dilatação linear das fibras à dis-

tância  $y_e = \pm \frac{h}{2}$  da fibra neutra, onde as deformações deixam de ser elásticas, vem, sucessivamente:

$$\begin{aligned}
 M &= 2br^2 \left( \int_0^{\varepsilon_e} \sigma \varepsilon d\varepsilon + \int_{\varepsilon_e}^{\varepsilon_2} \sigma \varepsilon d\varepsilon \right) = \\
 &= 2br^2 \left( E \int_0^{\varepsilon_e} \varepsilon^2 d\varepsilon + \Sigma_e \int_{\varepsilon_e}^{\varepsilon_2} \varepsilon d\varepsilon \right) = \\
 &= 2br^2 \left[ \frac{E \varepsilon_e^3}{3} + \frac{\Sigma_e}{2} (\varepsilon_2^2 - \varepsilon_e^2) \right] = \\
 &= 2br^2 \left[ \frac{\Sigma_e \varepsilon_e^2}{3} + \frac{\Sigma_e}{2} (\varepsilon_2^2 - \varepsilon_e^2) \right] = \\
 &= br^2 \Sigma_e \left( \varepsilon_2^2 - \frac{1}{3} \varepsilon_e^2 \right). \quad (535)
 \end{aligned}$$

Esta expressão, observando que é:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_2 &= \frac{y_2}{r} = \frac{H}{2r} \\
 \varepsilon_e &= \frac{y_e}{r} = \frac{h}{2r},
 \end{aligned}$$

transforma-se em:

$$M = \frac{bH^2}{4} \Sigma_e \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{h}{H} \right)^2 \right] \quad (536)$$

e encontramos a fórmula de Fritsche, como na teoria rigorosa.

Deve observar-se que, nesta hipótese que fizemos, de supor o diagrama característico das deformações idêntico ao da figura 6, nem é preciso, por ser mais trabalhoso, efectuar o cálculo explícito: desde que sabemos que o diagrama dos esforços normais na secção há-de ser um dos representados na figura 14, basta avaliar o integral do segundo membro da expressão:

$$M = \int \sigma y d\Omega,$$

à custa das áreas geomêtricamente simples (rectângulos e triângulos), em que é possível dividir o diagrama dos esforços, cuja forma supomos conhecida «a priori».

Esta mesma conclusão se poderia tirar, no caso de outras solicitações mais complexas. Segue-se, então, que, desde que suponhamos ser idêntico ao da figura 6, o diagrama característico das deformações do material que constitui a peça prismática, a lei da conservação das secções planas permite concluir que o diagrama dos esforços normais numa secção transversal há-de ser um dos representados na figura 14 e o cálculo da secção resistente da peça pode fazer-se a partir das expressões:

$$\left\{ \begin{array}{l} N = \int \sigma d\Omega \\ M_x = \int \sigma y d\Omega \\ M_y = \int \sigma x d\Omega, \end{array} \right. \quad (537)$$

sendo os integrais avaliados à custa do diagrama considerado dos esforços. E de maneira idêntica se procederia, também, no caso da torção simples.

Faremos, em seguida, a aplicação destes princípios, mas apenas em alguns dos casos que mais freqüentemente se apresentam na prática.

21 — SECÇÃO RECTANGULAR — Seja a secção rectangular de largura  $b$  e altura  $H$  (fig. 22), solicitada à flexão composta pelo

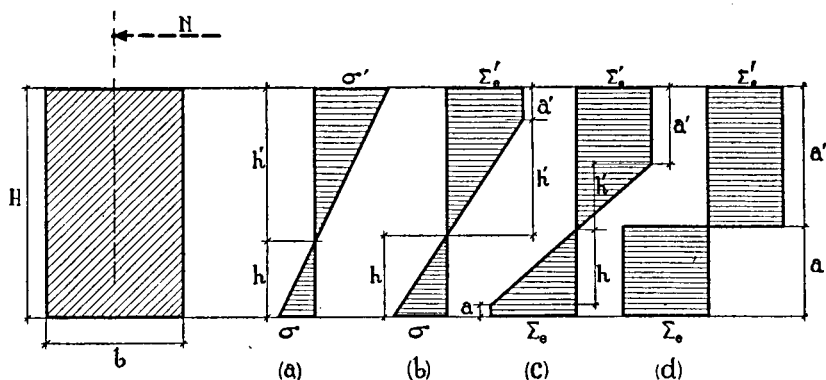


Fig. 22

momento  $M$  e pelo esforço axial  $N$ , a actuar no seu plano médio vertical.

No caso de haver deformações plásticas apenas junto de um dos bordos da secção (fig. 22-b), será:

$$N = ba' \Sigma'_e + \frac{bh'}{2} \Sigma'_e - \frac{bh}{2} \sigma$$

$$M + N \left( \frac{H}{2} - h \right) = ba' \left( h' + \frac{a'}{2} \right) \Sigma'_e + \frac{bh'}{2} \cdot \frac{2}{3} h' \Sigma'_e + \frac{bh}{2} \cdot \frac{2}{3} h \sigma.$$

Mas:

$$a' + h' + h = H$$

$$\sigma = \frac{h}{h'} \Sigma'_e,$$

logo:

$$N = \Sigma'_e \cdot b \left( a' + \frac{h'}{2} - \frac{h^2}{2h'} \right)$$

$$M + N \left( \frac{H}{2} - h \right) = \Sigma'_e \cdot b \left[ a' \left( h' + \frac{a'}{2} \right) + \frac{h'^2}{3} + \frac{h^3}{3h'} \right], \quad (538)$$

donde:

$$a' = \frac{3M}{bH\Sigma'_e - N} - \frac{H}{2}$$

$$h' = \frac{(H - a')^2}{2 \left( H - \frac{N}{b\Sigma'_e} \right)} \quad (539)$$

$$h = H - (a' + h'),$$

o que determina o diagrama dos esforços.

Se a secção está solicitada à flexão simples, de momento  $M$ , basta fazer, nestas expressões,  $N=0$  e virá:

$$a' = \frac{3M}{bH\Sigma'_e} - \frac{H}{2}$$

$$h' = \frac{(H - a')^2}{2H}. \quad (540)$$

Note-se que esta solicitação não é a flexão simples elasto-plástica, pois a fibra neutra não passa pelo centro de gravidade da

secção: é uma flexão composta, cujo esforço axial resulta de as deformações plásticas não serem simétricas relativamente ao centro de gravidade, isto é, de os esforços nos limites de elasticidade serem diferentes à tracção e à compressão.

No caso de ambos os bordos da secção terem entrado em deformação plástica (fig. 22-c), será:

$$\begin{aligned}
 N &= ba' \Sigma'_e + \frac{bh'}{2} \Sigma'_e - \frac{bh}{2} \Sigma_e - ba \Sigma_e \\
 M + N \left( \frac{H}{2} - a - h \right) &= ba' \left( h' + \frac{a'}{2} \right) \Sigma'_e + \frac{bh'}{2} \cdot \frac{2}{3} h' \Sigma'_e + \\
 &\quad + \frac{bh}{2} \cdot \frac{2}{3} h \Sigma_e + ba \left( h + \frac{a}{2} \right) \Sigma_e,
 \end{aligned} \tag{541}$$

sendo:

$$H = a + h + h' + a'$$

$$h = h' \frac{\Sigma_e}{\Sigma'_e}.$$

Destas equações é possível tirar os valores de  $a$ ,  $a'$ ,  $h$  e  $h'$ , em função de  $M$ ,  $N$ ,  $\Sigma_e$  e  $\Sigma'_e$ . No caso particular de ser:

$$\Sigma_e = \Sigma'_e,$$

vem:

$$h = h'$$

e encontra-se, facilmente:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{1}{2} \left( H - \frac{N}{b \Sigma_e} \right) \pm \sqrt{\frac{3}{4} \left( H^2 - \frac{N^2}{b^2 \Sigma_e^2} \right) - \frac{3M}{b \Sigma_e}} \\
 a' &= \frac{1}{2} \left( H + \frac{N}{b \Sigma_e} \right) \pm \sqrt{\frac{3}{4} \left( H^2 - \frac{N^2}{b^2 \Sigma_e^2} \right) - \frac{3M}{b \Sigma_e}}.
 \end{aligned} \tag{542}$$

Se a flexão é simples, isto é, se  $N=0$ , vem:

$$a = a' = \frac{1}{2} H \pm \sqrt{\frac{3}{4} H^2 - \frac{3M}{b \Sigma_e}} \tag{543}$$

e:

$$\frac{1}{2}H - a = \frac{1}{2}h = \mp \sqrt{\frac{3}{4}H^2 - \frac{3M}{b\Sigma_e}},$$

donde:

$$M = \frac{bH^2}{4}\Sigma_e \left[ 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{h}{H}\right)^2 \right],$$

que é a fórmula de Fritsche.

No caso limite de toda a secção ter entrado em deformação plástica (fig. 22-d) é:

$$h = h' = 0$$

$$a + a' = H$$

e, indicando com  $\mathfrak{M}$  e  $\mathfrak{N}$  os valores limites de  $M$  e  $N$ :

$$\mathfrak{N} = ba'\Sigma'_e - ba\Sigma_e \quad (544)$$

$$\mathfrak{M} + \mathfrak{N}\left(\frac{H}{2} - a\right) = ba' \cdot \frac{a'}{2}\Sigma'_e + ba \cdot \frac{a}{2}\Sigma_e.$$

Se:

$$\Sigma_e = \Sigma'_e,$$

vem:

$$a + a' = H = H \pm 2 \sqrt{\frac{3}{4}\left(H^2 - \frac{\mathfrak{N}^2}{b^2\Sigma_e^2}\right) - \frac{3\mathfrak{M}_e}{b\Sigma_e}},$$

donde:

$$H^2 - \frac{\mathfrak{N}^2}{b^2\Sigma_e^2} - \frac{4\mathfrak{M}}{b\Sigma_e} = 0. \quad (545)$$

Esta expressão também se pode escrever:

$$\overline{W} = \frac{bH^2}{4} = \frac{\mathfrak{M}}{\Sigma_e} + \frac{\mathfrak{N}^2}{4b\Sigma_e^2}, \quad (546)$$

tendo designado por:

$$\overline{W} = \frac{bH^2}{4} = 2S \quad (547)$$

o *módulo de resistência plástica* da secção rectangular, ou seja, a soma dos momentos estáticos (cada um igual a  $S$ ) das duas metades da secção em relação à fibra neutra.

Adoptando o coeficiente de segurança  $\frac{1}{n}$  <sup>(1)</sup> e fazendo:

$$M = \frac{\mathfrak{M}}{n}, \quad N = \frac{\mathfrak{N}}{n}, \quad \sigma = \frac{\Sigma_e}{n}, \quad (548)$$

vem:

$$\overline{W} = \frac{M}{\sigma} + \frac{N^2}{4 b \sigma^2} \quad (549)$$

e, sob o ponto de vista prático, dados  $M$ ,  $N$  e  $\sigma$ , fácil é determinar  $\overline{W}$ . A influência de  $N$  é, quasi sempre, tão pequena, que se pode supor  $N=0$  e cai-se, então, no caso da flexão simples, em que é:

$$\overline{W} = \frac{M}{\sigma}, \quad (550)$$

fórmula semelhante à da flexão elástica:

$$W = \frac{M}{\sigma},$$

onde:

$$W = \frac{b H^2}{6} = \frac{I}{v}$$

é o módulo de resistência elástica da secção.

Daqui resulta, como já vimos, que a resistência plástica de uma secção rectangular é 50 % maior do que a sua resistência elástica:

$$\overline{W} = 1,50 W,$$

o que justifica a economia proveniente do cálculo plástico.

(1) Habitualmente, toma-se  $\frac{1}{n} = \frac{1}{2}$  para os materiais dúcteis e  $\frac{1}{n} = \frac{1}{4}$  a  $\frac{1}{8}$  para os frágeis. No caso do betão armado, toma-se  $\frac{1}{n} = \frac{1}{3}$  a  $\frac{1}{4}$  e no do aço,  $\frac{1}{n} = \frac{1}{2}$ .



22 — SECÇÃO EM I — Como os ferros laminados da construção são normalmente feitas de aço, em que os limites de elasticidade à tracção e à compressão são os mesmos, apenas consideraremos o caso de:

$$\Sigma_e = \Sigma'_e,$$

por ser o único de interesse nas aplicações. Do mesmo modo, apenas consideraremos o caso limite de toda a secção ter entrado na fase plástica, por ser nesta hipótese que se baseia o cálculo prático.

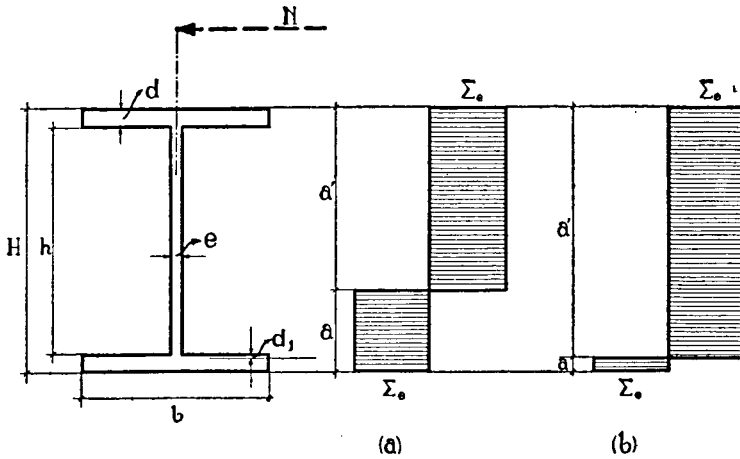


Fig. 23

Se a fibra neutra cai na alma (fig. 23-a), são imediatas as relações seguintes:

$$a + a' = H \quad (551)$$

$$\mathfrak{N} = \Sigma_e (a' - a) d$$

$$\mathfrak{M} = \Sigma_e \frac{1}{4} (b - e) (H^2 - h^2) + \Sigma_e [a (H - a) + a' (H - a')].$$

As duas primeiras permitem determinar:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \left( H - \frac{\mathfrak{N}}{e \Sigma_e} \right) \\ a' &= \frac{1}{2} \left( H + \frac{\mathfrak{N}}{e \Sigma_e} \right) \end{aligned} \quad (552)$$

e associando-as com a terceira, vem:

$$eh^2 + b(H^2 - h^2) - \frac{\mathfrak{N}^2}{e\Sigma_e^2} - \frac{4\mathfrak{M}}{\Sigma_e} = 0. \quad (553)$$

Esta expressão também se pode escrever:

$$\overline{W} = \frac{b(H^2 - h^2)}{4} + \frac{eh^2}{4} = \frac{\mathfrak{M}}{\Sigma_e} + \frac{\mathfrak{N}^2}{4e\Sigma_e^2}, \quad (554)$$

tendo designado por:

$$\overline{W} = \frac{b(H^2 - h^2)}{4} + \frac{eh^2}{4} = 2S$$

o módulo de resistência plástica da secção I, ou seja, a soma dos momentos estáticos (cada um igual a  $S$ ) das duas metades da secção, em relação à fibra neutra.

Adoptando o coeficiente de segurança  $\frac{1}{n}$  e fazendo, como no caso da secção rectangular:

$$M = \frac{\mathfrak{M}}{n}, \quad N = \frac{\mathfrak{N}}{n}, \quad \sigma = \frac{\Sigma_e}{n},$$

vem:

$$\overline{W} = \frac{M}{\sigma} + \frac{N^2}{4e\sigma^2}, \quad (555)$$

fórmula que permite efectuar o cálculo prático das secções transversais, quer directamente, quer com auxílio de tabelas que, geralmente, contêm o valor de  $S$ .

A influência de  $N$  é, quasi sempre, tão pequena, que se pode fazer  $N=0$  e cai-se, então, no caso da flexão simples, em que é:

$$\overline{W} = \frac{M}{\sigma}, \quad (556)$$

fórmula semelhante à da flexão elástica:

$$W = \frac{I}{v} = \frac{M}{\sigma}.$$

Para as secções constantes das tabelas usuais, encontra-se que é:

$$\frac{\bar{W}}{W} = 1,16 \text{ a } 1,18.$$

Neste caso, a economia resultante do cálculo elasto-plástico é menos sensível do que no da secção rectangular, mas ainda é quasi de 20 %.

Se a fibra neutra cai num banzo (fig. 23-b), vem:

$$\begin{aligned} a + a' &= H \\ \mathfrak{N} &= \Sigma_e (2d_1 b + eh) \\ \mathfrak{M} &= \Sigma_e \left[ \frac{b}{4} (H^2 - h^2) - d_1 b (h + d_1) \right], \end{aligned} \quad (557)$$

donde se tira:

$$eh^2 \left( 2 - \frac{e}{b} \right) + b(H^2 - h^2) - \frac{4\mathfrak{M}}{\Sigma_e} - \frac{\mathfrak{N}^2}{b\Sigma_e^2} - \frac{2\mathfrak{N}b}{\Sigma_e} \left( 1 - \frac{e}{b} \right) = 0 \quad (558)$$

ou, fazendo intervir o coeficiente de segurança:

$$\bar{W} = \frac{b(H^2 - h^2)}{4} + \frac{eh^2}{4} = \frac{M}{\sigma} + \frac{N^2}{4b\sigma^2} + \left( \frac{N}{\sigma} - \frac{eh}{2} \right) h \frac{b-e}{2b}, \quad (559)$$

fórmula que permite o cálculo prático.

23 — SECÇÃO RECTANGULAR DE BETÃO ARMADO — Seja a secção

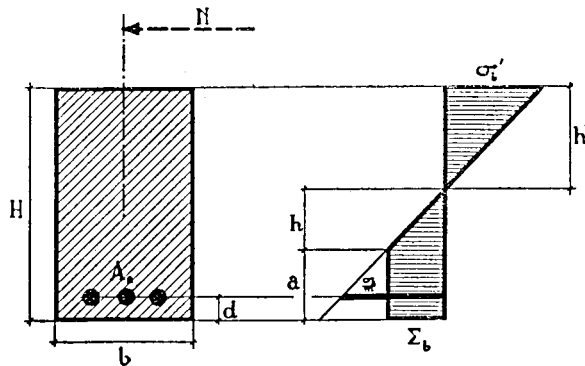


Fig. 24

rectangular de largura  $b$  e altura  $H$  (fig. 24), armada à tracção com a armadura  $A_a$ , distando  $d$  do bordo mais próximo da secção.

O diagrama dos esforços está representado na figura e dêle se deduz:

$$\frac{bh'}{2}\sigma'_b - \frac{bh}{2}\Sigma_b - ba\Sigma_b - A_a\sigma_a = N \quad (560)$$

$$M + N\left(\frac{H}{2} - h'\right) = \frac{bh'}{2}\sigma'_b \cdot \frac{2}{3}h' + \frac{bh}{2}\Sigma_b \cdot \frac{2}{3}h + \\ + ba\Sigma_b\left(H - h' - \frac{a}{2}\right) + A_a\sigma_a(H - h' - d).$$

É, de tôda a evidência:

$$h' + h + a = H \\ h = \frac{\Sigma_b}{\sigma'_b} h' \quad (561) \\ a = H - h' - h = H - h' \left(1 - \frac{\Sigma_b}{\sigma'_b}\right) \\ \sigma_a = m\sigma'_b \frac{H - h' - d}{h'},$$

de modo que as expressões (560) apenas envolvem  $\sigma'_b$  e  $h'$  como incógnitas e o cálculo destas incógnitas determina imediatamente o diagrama dos esforços correspondentes a certa solicitação exterior  $M$  e  $N$ .

Fica, assim, resolvido o problema da verificação da secção, dadas que sejam as suas características geométricas. É este, aliás, o problema usual do cálculo elasto-plástico das peças de betão armado: o da verificação das secções. De facto, como o betão é um material frágil em que a fase de fluência, à compressão, praticamente não existe (o que leva a admitir que se confundem os limites de elasticidade e de ruptura à compressão), o cálculo das secções a partir do diagrama limite dos esforços só se poderá fazer supondo que os limites de elasticidade no betão à compressão e na armadura à tracção se atingem simultaneamente. Então, a hipótese da conservação das secções planas permite escrever:

$$h' = \frac{m\Sigma'_b}{m\Sigma'_b + \Sigma_a}(H - d) \quad (562)$$

e substituindo, nas equações (560),  $h'$  por êste valor,  $\sigma'_b$  por  $\Sigma'_b$  e  $\sigma_a$  por  $\Sigma_a$ , podem calcular-se  $H$  e  $A_a$ , em função de  $\mathfrak{M}$  e de  $\mathfrak{N}$ . Como

os limites de elasticidade do betão à compressão e da armadura à tracção só por coincidência se atingirão simultaneamente, o cálculo directo das secções deve considerar-se indeterminado: no caso do betão armado, o cálculo das peças prismáticas é «de verificação».

Se a solicitação é por flexão simples, basta, nas expressões anteriores, fazer  $N=0$ .

Se a secção é duplamente armada ou se não é rectangular, o problema resolve-se de maneira semelhante.

24 — FLEXÃO COM ESFÔRÇO TRANSVERSO — Quando a flexão é complicada com esforço cortante, ainda o problema prático se pode resolver à custa de considerações elementares, como vamos verificar.

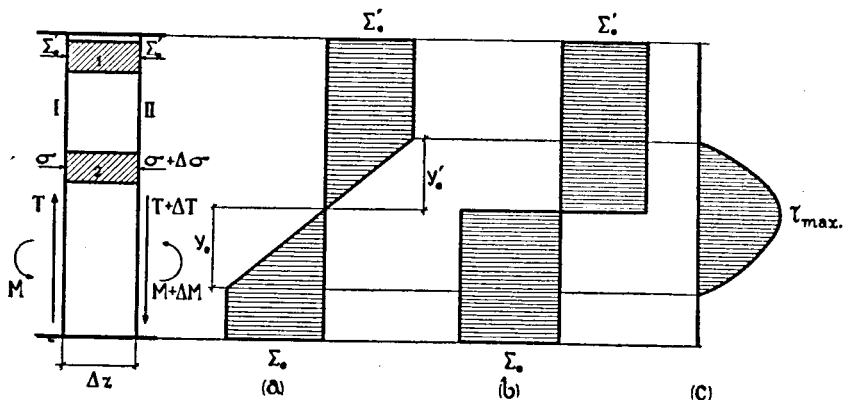


Fig. 25

Consideremos um trôço de peça prismática (fig. 25) compreendido entre duas secções transversais, I e II, distantes de  $\Delta Z$ , solicitadas a flexão não desviada, a primeira pelo momento de flexão  $M$  e pelo esforço cortante  $T$ , e a segunda pelo momento de flexão  $M + \Delta M$  e pelo esforço cortante  $T + \Delta T$ . Suporemos que, na segunda, se atingiu o estado limite de plastificação, definido pelo diagrama dos esforços normais (b) e que, na primeira, ainda reage elasticamente certa parte central da secção, como indica o diagrama (a), sendo êsse núcleo elástico compreendido entre as fibras que distam  $y_e$  da fibra neutra (ou, precisamente,  $y = y'_e$  na zona de compressão e  $y = -y_e$  na zona de tracção).

Isolando um prisma elementar neste trôço da viga, êle comporta-se de maneira diferente, sob o ponto de vista da existência de tensões tangenciais, conforme está compreendido na zona das defor-

mações plásticas ou na das deformações elásticas: se está compreendido na zona das deformações plásticas (área tracejada 1), as duas faces I e II estão submetidas a esforços normais iguais e de sinais contrários e o equilíbrio na direcção da fibra neutra fica assegurado sem a existência de esforços tangenciais; se está compreendido na zona das deformações elásticas (área tracejada 2), a face I está submetida ao esforço normal  $\sigma$ , a face II ao esforço normal  $-(\sigma + \Delta\sigma)$  e o equilíbrio impõe a existência de esforços tangenciais.

Sendo  $b$  a largura (variável) da secção, à distância  $y$  da fibra neutra, será, manifestamente, na zona das deformações elásticas

$$\tau b \Delta z = \int_y^{y_e} \Delta\sigma b dy, \quad (563)$$

donde se tira o valor do esforço tangencial médio nas fibras correspondentes:

$$\tau = \frac{1}{b} \int_y^{y_e} \frac{\Delta\sigma}{\Delta z} b dy \quad (564)$$

e  $\frac{\Delta\sigma}{\Delta z}$  representa o acréscimo das tensões por unidade de comprimento da peça prismática.

Mas quando o momento de flexão varia de  $M$  para  $M + \Delta M$ , o acréscimo de momento  $\Delta M$  é inteiramente absorvido pela parte da secção onde as deformações ainda são elásticas, visto que já se esgotou a capacidade de resistência na parte restante, onde as deformações plásticas aumentam sem variação do esforço normal. Tudo se passa, por conseguinte, como se ao momento  $\Delta M$  resistisse elásticamente a secção de altura reduzida  $(y_e + y'_e)$  e será:

$$\Delta\sigma = \frac{\Delta M}{I_e} y, \quad (565)$$

sendo  $I_e$  o momento de inércia, relativamente à fibra neutra, da parte da secção onde as deformações ainda são elásticas.

Virá, pois:

$$\tau = \frac{1}{I_e b} \frac{\Delta M}{\Delta z} \int_y^{y_e} y b dy. \quad (566)$$

Ora o esforço transverso na secção é dado precisamente por:

$$T = \frac{\Delta M}{\Delta z} \quad (567)$$

e representando por:

$$S = \int_y^{y_e} y b dy \quad (568)$$

o momento estático da parte da secção compreendida entre a fibra à distância  $y$  da fibra neutra e aquela onde começam as deformações plásticas, vem, finalmente:

$$\tau = \frac{TS}{I_e b}. \quad (569)$$

Expressando  $T$  em função de  $M$  e substituindo  $M$  pelo momento resistente da secção, obtido a partir do diagrama dos esforços normais, pode determinar-se  $\tau$  em função das características geométricas e elásticas da peça. O diagrama dos esforços tangenciais  $\tau$  tem o aspecto indicado na figura 25.c.

Se, por exemplo, se trata de uma viga simplesmente apoiada, de vão  $l$  e secção rectangular, constituída de material para o qual é:

$$\Sigma_e = \Sigma'_e,$$

o esforço tangencial máximo vale:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{T}{bh}, \quad (570)$$

sendo  $h = y_e + y'_e = 2y_e$  a altura do núcleo elástico da secção.

O esforço transverso  $T$  depende da solicitação exterior. Supondo, para exemplificar, que a viga está sujeita à acção de uma carga concentrada  $P$ , no meio do vão, é, em valor absoluto:

$$T = \frac{P}{2} = \frac{M}{z}, \quad (571)$$

sendo  $M$  o momento de flexão na secção à distância  $z$  do apoio que se toma como origem. E virá:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{3}{2} \frac{M}{bh z}. \quad (572)$$

Mas, pela fórmula de Fritsche, é:

$$M = \frac{bH^2}{4} \Sigma_e \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{h}{H} \right)^2 \right],$$

logo:

$$\begin{aligned} \tau_{m\acute{a}x} &= \frac{3}{2} \frac{1}{bh z} \frac{bH^2}{4} \Sigma_e \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{h}{H} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{3}{8} \frac{H}{z} \Sigma_e \left( \frac{H}{h} - \frac{1}{3} \frac{h}{H} \right). \end{aligned} \quad (573)$$

A secção mais desfavoravelmente solicitada é, certamente, aquela onde se produz o momento máximo, isto é, a de abscissa:

$$z = \frac{l}{2},$$

e virá:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{3}{4} \frac{H}{l} \Sigma_e \left( \frac{H}{h} - \frac{1}{3} \frac{h}{H} \right). \quad (574)$$

A plastificação completa da secção, como já sabemos, é um caso limite incompatível com a capacidade de deformação de qualquer material, isto é, não pode ser nunca:

$$\frac{h}{H} = 0.$$

Admitindo, com Zhudin, que seja:

$$\frac{h}{H} = 0,1, \quad (575)$$



vem:

$$\begin{aligned}\tau_{m\acute{a}x} &= \frac{3}{4} \frac{H}{l} \cdot 9,97 \Sigma_e \cong \\ &\cong 15 \frac{H}{2l} \Sigma_e.\end{aligned}\quad (576)$$

O problema resolvia-se de maneira semelhante, em outras hipóteses de solicitação ou de apoios.

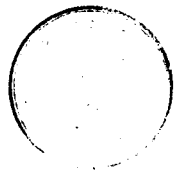
25 — ENCURVADURA OU VAREJAMENTO, EM PEÇAS PRISMÁTICAS COMPRIMIDAS ALÉM DO LIMITE DE ELASTICIDADE — Quando se submete uma barra prismática a compressão axial e se aumenta sucessivamente a solicitação exterior, pode suceder que se atinja o esforço no limite de elasticidade por compressão, antes de se produzir o fenómeno de instabilidade conhecido por *encurvadura* ou *varejamento*, tal como se estuda na teoria matemática da elasticidade e na resistência dos materiais clássica. Se, então, continuar a crescer a solicitação exterior, a encurvadura vai produzir-se na fase plástica, e é fácil de compreender que a *carga crítica* (assim se chama ao valor da solicitação capaz de produzir a encurvadura) é precisamente aquela para a qual se atinge o esforço no limite de elasticidade, desde que a lei de variação das deformações com os esforços seja, como supomos, traduzida pelo diagrama da figura 6, isto é, desde que não se considere o aumento de resistência do material, devido ao fenómeno de endurecimento a frio.

Suponhamos, com efeito, atingido o valor da carga crítica, na fase plástica. Vai, nesse instante, produzir-se o varejamento, isto é, vai adicionar-se à solicitação exterior que produz esforço uniforme na secção, de intensidade  $\Sigma'_e$ , a flexão que determina a deformação longitudinal da peça por encurvadura, no plano do momento principal central de inércia mínimo da secção. A distribuição dos esforços, que era uniforme para a compressão axial exterior, vai ser alterada em virtude da flexão de encurvadura: na zona de tracção (do lado da convexidade), haverá diminuição de esforços, e como a descarga de uma peça solicitada além do limite de elasticidade tem características elásticas (v. § 1), o diagrama das tensões de flexão será triangular, nessa parte; na zona de compressão (do lado da concavidade), o diagrama dos esforços de flexão há-de equilibrar o da zona de tracção, visto que ambos definem o momento resistente da

secção transversal. Ora como, por hipótese, a compressão axial já havia produzido o esforço normal  $\Sigma'_e$ , correspondente ao limite de elasticidade do material, não pode a flexão de encurvadura ser acompanhada de aumento de esforços na zona de compressão, e daqui se segue que também não pode haver diminuição de esforços na zona de tracção, visto que o respectivo diagrama não pode ser convenientemente equilibrado. Em última análise, não existe zona de tracção, porque o material esgotou toda a sua capacidade de resistência à compressão, e nada se opõe à deformação por encurvadura, que, assim, se produz sem aumento de esforços.

Não há, pois, dúvida de que a carga crítica de encurvadura se confunde com aquela que produz as primeiras deformações plásticas.

Se se considerasse o endurecimento a frio do material, a encurvadura seria contrariada pelo correspondente aumento de resistência à compressão da peça prismática, e a carga crítica excederia a carga no limite de elasticidade. A aceitação do diagrama da figura 6 exclui esta hipótese, cuja análise, aliás elementar, conduziria a expressões semelhantes às que Euler deduziu em elasticidade.



## BIBLIOGRAFIA (1)

- AIMOND (F.) — *Rôle de la ductilité de l'acier dans la stabilité des constructions* (Association Internationale des Ponts et Charpentes ou A. I. P. C. — 2<sup>ème</sup> Congrès, Berlin 1936, «Rapport Final» Ed. W. Ernst & Sohn, Berlin, 1938).
- BAES (LOUIS) — *Résistance des matériaux et éléments de la théorie de l'élasticité et de la plasticité des corps solides* (Ed. Maurice Lambertin — Bruxelles, 1934)
- BAES (L.) — *Les principes de la plasticité parfaite appliqués aux calculs de résistance des matériaux* («L'Ossature Métallique», n.º 2, 1934).
- BAES (L.) — *Discussion relative à la plasticité* (A. I. P. C. — 2<sup>ème</sup> Congrès 1936, «Rapport Final»).
- BIJLAARD (P. P.) — *Theory of local plastic deformation* (A. I. P. C. — 6<sup>ème</sup> vol. «Mémoires» — Zürich, 1940-41).
- BIJLAARD (P. P.) — *Theory of the plastic stability of thin plates* (Idem).
- BRICE (L. P.) — *Rôle de la plasticité des matériaux et des efforts variables dans la stabilité et la durée des constructions* (A. I. P. C. — 2<sup>ème</sup> Congrès, «Publication Préliminaire» Ed. W. Ernst & Sohn, Berlin, 1936).
- BRILLOUIN (MARCEL) — *Théorie de la plasticité et de la fragilité des corps solides isotropes* («Annales de Physique», tome XIII — Paris).
- BRILLOUIN (M.) — *La théorie de Tresca-Saint-Venant* (Idem, tome XIV).
- BRILLOUIN (LÉON) — *La structure des corps solides dans la physique moderne* (Ed. Herman & Cie — Paris, 1937).
- BROSZKO (M.) — *Beitrag zur allgemeinen Lösung des knickproblems* (A. I. P. C. — 1<sup>er</sup> vol. «Mémoires», 1932).

---

(1) Indicam-se apenas, das obras consultadas, as que se relacionam directamente com a teoria da plasticidade.

- CASADO (CARLOS FERNANDEZ) — *Resistencia* (Ed. Donat — Madrid, 1941).
- CASTELFRANCHI (GAETANO) — *Scienza delle costruzioni* (Ed. Hoepli — Milano, 1940).
- COLONNETTI (GUSTAVO) — *La statica delle costruzioni* (Ed. Unione Tipografico — Torino, 1932).
- COLONNETTI (G.) — *De la résistance des poutres fléchies en régime élasto-plastique* («L'Ossature Métallique», n.º 11, 1938).
- COLONNETTI (G.) — *Le problème des déformations plastiques et la théorie des poutres fléchies* («La Technique des Travaux», n.º 2, 1938).
- COLONNETTI (G.) — *Les bases expérimentales de la théorie de l'équilibre élasto-plastique* («L'Ossature Métallique», n.º 3, 1939).
- COLONNETTI (G.) — *Scienza delle costruzioni* (Ed. Giulio Einaudi — Torino, 1941).
- COLONNETTI (G.) — *Théorie de l'équilibre des corps élasto-plastiques* («Bulletin Technique de la Suisse Romande» — Lausanne, 1942).
- COPPÉE (R.) — *Considérations sur le calcul et la sécurité des pièces fléchies* (A. I. P. C. — 3<sup>ème</sup> vol. «Mémoires», 1935).
- EICHINGER (A.) — *Flexion et effort tranchant en dehors de la zone de déformation purement élastique* (A. I. P. C. — 2<sup>ème</sup> Congrès «Rapport Final»).
- FABER (OSCAR) — *Plastic yield, shrinkage, and other problems of concret, and their effect on design* («Proceedings of the Institution of Civil Engineers», vol. 225 — London, 1928).
- FABER (O.) — *Elasticity, plasticity and shrinkage* (A. I. P. C. — 1<sup>er</sup> Congrès, Paris, 1932 «Rapport Final»).
- FLAMANT (A.) — *Stabilité des constructions. Résistance des matériaux* (Ed. Baudry & Cie — Paris, 1886).
- FREUDENTHAL (A.) — *Théorie générale de la plasticité. Champs des lignes de cession* (A. I. P. C. — 2<sup>ème</sup> Congrès «Publication Préliminaire»).
- FRITSCHÉ (J.) — *Die Biegung eines Balkens aus Baustahl im plastischen Bereich* (A. I. P. C. — 6<sup>ème</sup> vol. «Mémoires», 1940-41).
- FRITSCHÉ (J.) — *Principes de la théorie de la plasticité* (A. I. P. C. — 2<sup>ème</sup> Congrès «Publication Préliminaire»).
- GEIRINGER (M.<sup>ME</sup> HILDA) — *Fondements mathématiques de la théorie des corps plastiques isotropes* («Mémoires des Sciences Mathématiques». Ed. Gauthier-Villars, Paris, 1937).

- GUIDI E COLONNETTI — *Sono ammissibili deformazioni plastiche nelle costruzioni?* («Il Cemento Armato», n.º 12, 1940).
- L'HERMITE (R.) — *Les méthodes de calcul de la résistance des matériaux et de la théorie de l'élasticité* (A. I. P. C. — 4<sup>ème</sup> vol. «Mémoires», 1936).
- L'HERMITE (R.) — *La ductilité de l'acier, l'action des efforts rapides et des efforts répétés* (A. I. P. C. — 2<sup>ème</sup> Congrès «Rapport Final»).
- L'HERMITE (R.) — *La structure et la déformation des solides* (Ed. Herman & Cie — Paris, 1938).
- L'HERMITE (R.) — *Éssais des métaux.* (Idem).
- L'HERMITE (R.) — *L'expérience et les théories nouvelles en résistance des matériaux* (Ed. Dunod — Paris, 1942).
- KARNER (L.) — *Rapport général de la I Section au 2<sup>ème</sup> Congrès de l'A. I. P. C.* («Rapport Final»).
- KAZINCZY (VON GABOR) — *Bemessung von statisch unbestimmten Konstruktionen unter Berücksichtigung der bleibenden Formänderungen* (Congrès International de la Construction Métallique — Liège, 1930).
- KAZINCZY (VON GABOR) — *Considérations critiques sur la théorie de la plasticité* (A. I. P. C. — 2<sup>ème</sup> Congrès «Publication Préliminaire»).
- KOLLBRUNNER (C.) — *Schichtenweises Fließen in Balken aus Baustahl* (A. I. P. C. — 3<sup>ème</sup> vol. «Mémoires», 1935).
- KUNTZE (W.) — *Considérations sur la ductilité* (A. I. P. C. — 2<sup>ème</sup> Congrès «Rapport Final»).
- LEMOES (VIRGÍLIO CÉSAR A. DE) — *Princípios de aplicação da plasticidade do aço à construção metálica* («Revista da Associação dos Engenheiros Cíveis Portugueses», n.ºs 726 e 727, de 1935).
- LÉVI (R.) — *Sécurité des constructions* (A. I. P. C. — 2<sup>ème</sup> Congrès «Publication Préliminaire»).
- MAIER-LEIBNITZ — *Éssais; signification et application des résultats* (Idem).
- MASI (FAUSTO) — *La ductilité de l'acier* («L'Ossature Métallique», n.º 5, de 1934).
- NÁDAI (A.) — *Plasticity. A mechanics of the plastic state of matter* (Ed. McGraw-Hill — New York, 1931).
- PALTSCHESKY (S. A.) — *Plastische Deformationen des Stahlbauten* (Verlag der Akademie des Wissenschaften der UKR.SSR — Kiew, 1940).

- PRAGER (M. W.) — *Mécanique des solides isotropes au delà du domaine élastique* («*Mémorial des Sciences Mathématiques*», Ed. Gauthier-Villars — Paris 1937).
- RINAGL (F.) — *Sur les limites d'écoulement et les diagrammes de flexion* (A. I. P. C. — 2ème Congrès «*Publication Préliminaire*»).
- SPÄTH (W.) — *La physique de l'essai de rupture par traction* (Idem, «*Rapport Final*»).
- STÜSSI (F.) — *Aktuelle baustatische Probleme der Konstruktionspraxis* (Zürich, 1935).
- STÜSSI (F.) — *L'interprétation des essais sur la méthode d'équilibre plastique* (A. I. P. C. — 2ème Congrès «*Rapport Final*»).
- TIMOSHENKO (S.) — *Theory of elastic stability* (Ed. McGraw-Hill — New York, 1936).
- TIMOSHENKO (S.) — *Strength of materials* (Ed. Macmillan — London, 1941).
- WESTERGAARD (H. M.) — *On the method of complementary energy* («*Proceedings of the American Society of Civil Engineers*» — New York, Feb. 1941).
- WHITNEY (C. S.) — *Plastic theory of reinforced concret design* (Idem, Dec. 1940, Feb., Mar., Ap., May., Jun., Sept., 1941).
- ZHUDIN (N. D.) — *Plastic deformations in steel constructions. Principles of computation* (Pb. Ukrainian Academy of Sciences — Kiew, 1935).
- ZHUDIN (N. D.) — *Les déformations plastiques dans les constructions en acier. Acier sans palier d'écoulement* (Ed. Académie des Sciences de la RSS d'Ukraine — Kiew, 1936).
- ZHUDIN AND STRELBITSKAYA — *Plastic deformations in steel structures. Experimental investigation of the yield point under bending* (Pb. Ukrainian SSR Academy of Sciences Press — Kiew, 1939).

# ÍNDICE

	Pág.
INTRODUÇÃO . . . . .	5

## CAPÍTULO I

### Princípios gerais da teoria matemática da plasticidade

1 — Considerações gerais . . . . .	11
2 — Estudo das pequenas deformações . . . . .	17
3 — Estudo dos esforços interiores . . . . .	32
4 — Equações do movimento . . . . .	50
5 — Energia potencial elástica e trabalho interno de deformação . . . . .	53
6 — Relação característica das deformações elásticas dos corpos isótropos. Equações de Lamé . . . . .	59
7 — Variação dos esforços durante o processo de deformação plástica. Relação característica das deformações plásticas dos corpos isótropos. . . . .	67
8 — Condição de plasticidade. . . . .	70
9 — O problema geral e o problema plano da plasticidade (plástico-dinâmica) . . . . .	83
10 — O problema da plasticidade, no caso das deformações muito pequenas e lentas (plástico-estática) . . . . .	88

## CAPÍTULO II

### O equilíbrio elasto-plástico das peças prismáticas

11 — O problema de Saint-Venant generalizado . . . . .	91
12 — Flexão desviada composta com esforço axial . . . . .	108
13 — Flexão desviada . . . . .	135
14 — Flexão composta com esforço axial . . . . .	136
15 — Flexão simples . . . . .	138
16 — Compressão ou tracção simples. . . . .	144
17 — Torção simples . . . . .	145
18 — Flexão e esforço cortante . . . . .	153
19 — Esforços e deformações residuais . . . . .	173

## CAPÍTULO III

## Teoria elementar da plasticidade

20 — Princípios gerais . . . . .	177
21 — Secção rectangular. . . . .	181
22 — Secção em I . . . . .	186
23 — Secção rectangular de betão armado . . . . .	188
24 — Flexão com esforço transversal . . . . .	190
25 — Encurvadura ou varejamento, em peças prismáticas comprimidas além do limite de elasticidade . . . . .	194
BIBLIOGRAFIA . . . . .	197



# ADITAMENTO À ERRATA

NA PÁG.	LINHA	ONDE SE LÊ	DEVE LER-SE
53	3	$\sum_i d_{ii}$	$\sum_i \dot{d}_{ii}$
54	28	$\frac{\partial \varphi}{\partial d_{ik}}$	$\frac{\partial \varphi}{\partial d_{ik}} \delta d_{ik}$
57	13	$\int_{\Omega} \sum_i s_i \delta u_i d\Omega$	$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_i s_i \delta u_i d\Omega$
62	10	componentes cartesianas	componentes
88	19-20	elasto-estático	elasto-plástico
88	35	$\dot{u}_i = \frac{d\dot{u}_i}{dt} =$	$\dot{u}_i = \frac{du_i}{dt} =$
		$= \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} =$	$= \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} =$
		$= \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_k} \dot{u}_k$	$= \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \dot{u}_k$
89	5	$\dot{u}_i = \frac{d\dot{u}_i}{dt} = \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial t}$	$\dot{u}_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t}$
89	9	$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{e}_{ik}}{\partial t} + \frac{\partial \dot{e}_{ki}}{\partial t} \right)$	$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial e_{ik}}{\partial t} + \frac{\partial e_{ki}}{\partial t} \right)$
94	29	$\frac{E \bar{E}}{E + \bar{E}}$	$\frac{E + \bar{E}}{E \bar{E}}$
94	30	$\frac{G \bar{G}}{G + \bar{G}}$	$\frac{G + \bar{G}}{G \bar{G}}$
98	30	$\epsilon_z$	$\sigma_z$

NA PÁG.	LINHA	ONDE SE LÊ	DEVE LER-SE
107	9	$-\frac{\Sigma'_e \Sigma_e}{2 \sqrt{\Sigma_e \Sigma'_e}} \sigma_z$	$-\frac{\Sigma'_e - \Sigma_e}{2 \sqrt{\Sigma_e \Sigma'_e}} \sigma_z$
107	13	$\leq \frac{m}{2m+1} \Sigma_e$	$\leq \sqrt{\frac{m}{2(m+1)}} \Sigma_e$
107	15	$\sqrt{\frac{3}{2} \frac{z^2}{4} + \tau^2} \leq \frac{3}{4} K$	$\sigma_z^2 + 2,7 \tau^2 \leq \Sigma_e^2$
118	14	$\frac{x_1}{\rho_x^2} x + \frac{y_1}{\rho_y^2} y = 1,$	$\frac{x_o}{\rho_x^2} x + \frac{y_o}{\rho_y^2} y = 1,$
e se considerarmos o ponto de encontro do eixo de solicitação com a fibra neutra e o seu simétrico em relação à origem, esta é a			
123	6	$N_o = N + \Omega \Sigma_e$	$N_o = N - \Omega \Sigma_e$
132	6	inércia	segunda ordem
132	7	paralela.	paralela e a $\zeta\zeta$ .
132	8	inércia	segunda ordem
132	17	inércia	segunda ordem
132	19	linhas;	linhas e a $\zeta\zeta$ ;
132	22	rectas de fronteira,	rectas de fronteira, supostas em coincidência com $\zeta\zeta$ ,
132	25	$\Sigma'_e - \sigma_n$	$\Sigma'_e - \sigma_\zeta$
132	26	$\Sigma_e + \sigma_n$	$\Sigma_e + \sigma_\zeta$
142	19	$\overline{M} = \frac{M}{\frac{3}{2} \frac{h}{H} - \frac{1}{2} \frac{h^3}{H^3}}$	$\overline{M} = M \frac{1 - \frac{3}{2} \frac{h}{H} + \frac{1}{2} \frac{h^3}{H^3}}{\frac{3}{2} \frac{h}{H} - \frac{1}{2} \frac{h^3}{H^3}}$
145	17	$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$	$\omega \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)$
178	12	$r^2 \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} b \sigma \epsilon d\epsilon$	$r^2 \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} b \sigma \epsilon d\epsilon$

## ERRATA

NA PÁG.	LINHA	ONDE SE LÊ	DEVE LER-SE
7	15	<i>equação</i>	<i>equações</i>
28	4	$r_{ik} = \frac{1}{2}(e_{ik} - e_{ik}) =$	$r_{ik} = \frac{1}{2}(e_{ik} - e_{ki}) =$
53	20-21	energia potencial elástica elementar, que suporemos	energia potencial elástica por unidade de volume, que designaremos, brevemente, por <i>energia potencial elástica elementar</i> , e que suporemos
70	28	$f(t_i) = 0$	$f(t_1, t_2, t_3) = 0$
77	14	<i>Mohr-Coquot</i>	<i>Mohr-Caquot</i>
84	5	$f(t_i) = 0$	$f(t_1, t_2, t_3) = 0$
84	33	sendo $\tau = \tau_{xy}$ .	sendo $\tau = \tau_{xy}$ e supondo nulas as forças de massa.
97	1	por um lado	por seu lado
102	10	$\epsilon_x$	$\epsilon_x$
150	12	Por diferenciação	Por derivação
164	11	$+ nx$	$- nx$