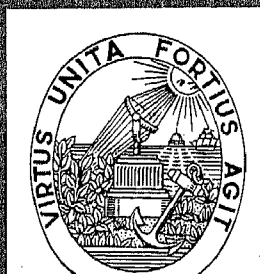


UNIVERSIDADE DO PORTO
FACULDADE DE ENGENHARIA

**ANÁLISE ESTRUTURAL, ANÁLISE DE SENSIBILIDADES E
OPTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS DO TIPO PLACA E CASCA**

PEDRO MIGUEL DE ALMEIDA AREIAS

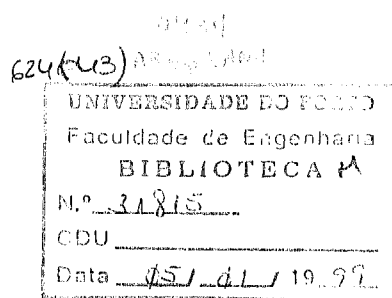
PORTO 1998



Pedro Miguel de Almeida Areias

ANÁLISE ESTRUTURAL, ANÁLISE DE SENSIBILIDADES E OPTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS DO TIPO PLACA E CASCA

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto para
obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica



FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO
OUTUBRO DE 1998

Aos meus Pais

Agradecimentos

Em primeiro lugar desejo exprimir a minha gratidão ao Prof. Doutor Carlos Alberto da Conceição António, meu supervisor, por todo o apoio, disponibilidade e ânimo manifestados durante o período de elaboração deste trabalho.

Aos colegas e amigos do Laboratório de Computação, desejo agradecer o apoio, motivação e bons conselhos que me dispensaram. Sem o excelente ambiente, propício à investigação, que se vive no Laboratório, a realização deste trabalho não teria sido possível.

Às instituições de acolhimento durante a realização deste trabalho, ao Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial e à Secção de Mecânica Aplicada desse departamento, agradeço o espaço e meios dispensados.

Desejo também agradecer ao Prof. Doutor Vasco Sanches da Silva e Sá pelas oportunidades oferecidas.

À Prof. Doutora Lúcia Maria Jesus Simas Dinis desejo agradecer a amizade e o apoio sempre manifestados.

Ao Prof. Doutor José Manuel Almeida César de Sá desejo agradecer o apoio e o interesse mostrados.

A toda a Universidade do Porto, desejo agradecer a oportunidade de ter podido trabalhar durante a realização deste trabalho.

É igualmente necessária uma palavra de gratidão à Luisa pelo apoio manifestado na correcção deste trabalho.

Torna-se obrigatório um agradecimento caloroso aos meus Pais, por toda a compreensão, amizade e paciência que dispensaram durante estes dois últimos anos.

Análise estrutural, análise de sensibilidades e optimização de estruturas do tipo placa e casca

por

Pedro Miguel de Almeida Areias

Tese submetida para satisfação dos requisitos do Grau de Mestre em Engenharia
Mecânica da FEUP e realizada sob a supervisão de

Prof. Doutor Carlos Alberto da Conceição António

Resumo

A presente tese tem como objectivo principal o desenvolvimento de métodos numéricos para a análise e optimização de estruturas do tipo placa e casca.

Faz-se a análise e implementação de várias variantes de elementos degenerados com deformação assumida. Os elementos permitem a análise de rotações e deslocamentos finitos, recorrendo-se a uma formulação Lagrangeana total.

Descreve-se a implementação de vários procedimentos de análise estrutural. Apresentam-se procedimentos de análise linear e não-linear em regime estático e em regime dinâmico. Para o caso dinâmico não-linear recorre-se a um método baseado na informação modal.

Com o objectivo de realizar optimização de forma, apresenta-se um gerador de malhas em cascas, que permite o cálculo analítico das sensibilidades das coordenadas nodais e dos vectores normais à superfície média da casca.

Na análise de sensibilidades, recorre-se à derivação analítica das matrizes elementares de rigidez e massa e do vector de forças externas. Para o vector de forças internas, recorre-se a um método híbrido analítico/semi-analítico. A análise de sensibilidades é efectuada para problemas lineares estáticos e dinâmicos, mas também para problemas não-lineares. Em problemas estáticos lineares usa-se o método da variável adjunta, enquanto que em problemas não lineares e em problemas dinâmicos utiliza-se o método da diferenciação directa.

Por fim, analisa-se um método de programação não-linear e apresentam-se algumas técnicas de melhoria desse método.

Mostram-se alguns exemplos das análises realizadas, apresentados sob a forma de representações de campos escalares e sob a forma de gráficos.

Structural analysis, sensitivity analysis and optimization of Plate and Shell structures

by

Pedro Miguel de Almeida Areias

Thesis submitted for fulfilment of the requirements for the Master Degree in Mechanical Engineering of FEUP, developed under the supervision of

Prof. Doutor Carlos Alberto da Conceição António

Abstract

This thesis main goal is the development of numerical methods applied to the analysis and optimization of Plate and Shell structures.

Various degenerate elements with improved strain fields are analysed and implemented. These elements allow the treatment of large rotations and displacements, under a total Lagrangean formulation.

The numerical implementation of several structural analysis procedures is also carried out. The procedures' purpose is to evaluate the plate and shell response for the linear and non-linear cases and in static and dynamic regimes. In non-linear dynamics a modal based method is used.

With the intent of optimizing the shape, a surface mesh generator is presented, which allows the analytical determination of the nodal coordinates and normal vectors' sensitivity.

In the sensitivity analysis, the analytical differentiation of the elemental matrices is discussed and carried out. For the internal forces vector, a hybrid analytical/semianalytical method is used. The sensitivity analysis is possible for linear statics and dynamics problems, but also for non-linear problems. The adjoint variable method is implemented to deal with linear-statics problems and the direct differentiation method to treat dynamics and non-linear problems.

Finally, a mathematical programming algorithm is inspected and a few improving techniques are presented.

Some numerical example problems are presented, related to the implemented analysis techniques.

Analyse structural, analyse de sensibilité et optimization des structures du type Plaques et Coques

par

Pedro Miguel de Almeida Areias

Thèse soumise pour l'obtention du titre de Maître en génie Mécanique de la Faculté de génie de l'Université du Porto. Elaborée sous la supervision du

Prof. Doutor Carlos Alberto da Conceição António

Précis

La présente thèse a, pour objectif principal, le développement de méthode numériques pour l'analyse et l'optimization des structures du type Plaques et Coques.

On fait l'analyse et la création de plusieurs versions des éléments dégénérés avec champs de déformation modifiés. Les éléments ont la possibilité d'analyser grandes rotations et déplacements, au recours de la formulation Lagrangéane total.

On décrit la implantation computationale de plusieurs procédés de l'analyse strutral. Sont présentés les procédés de analyse linéar et non-linéaire en statique et dynamique. Pour le cas dynamique non-linéaire, on utilise un procédé basé dans l'analyse modale.

Avec l'objectif de optimizer la forme des coques, on présente un générateur de maille en surfaces, qui permet le calcul analytique des sensibilités des coordonnées nodaux et des vecteurs normales au surface moyen.

Dans l'analyse de sensibilités, on dérive analitiquement les matrices élémentaires de rigidité et masse et le vecteur de forces extérieures. Pour le vecteur de forces internes, on utilise une méthode mixte analitique/semi-analitique. L'analyse de sensibilités est effectuée pour les problèmes linéaires statiques et dynamiques, mais aussi pour des problèmes non-linéaires. En problèmes statiques linéaires on utilise la méthode de la variable adjointe, tandis que pour des problèmes non-linéaires et dynamiques on utilise la méthode de la différentiation directe.

Enfin, on analyse une méthode de programmation mathématique non-linéaire e on présente quelques techniques de amélioration de cette méthode.

On montre exemples des analyses effectuées, présentés sous la forme de représentations de champs et sous la forme de graphiques.

Índice

Capítulo 1 - Introdução

1.1	Estruturas do tipo placa e casca	1.1
1.2	Apresentação do trabalho	1.2
1.3	Referências	1.4

Capítulo 2 - Conceitos introdutórios de mecânica dos sólidos

2.1	Sumário	2.1
2.2	Cinemática	2.1
2.2.1	Introdução	2.1
2.2.2	Rotação	2.1
2.2.2.1	Rotação finita	2.1
2.2.2.2	Aplicação ao caso da actualização de versores directores	2.4
2.2.3	Conceitos de extensão e deformação	2.5
2.2.3.1	Gradiente de deformação	2.5
2.2.3.2	Tensores de deformação e extensão	2.6
2.2.3.3	Variação do volume e da área devido à deformação	2.9
2.2.3.4	Taxa de deformação	2.10
2.2.4	O tensor de extensão de Green em coordenadas curvilíneas	2.11
2.3	Tensões	2.13
2.3.1	Equilíbrio	2.14
2.3.2	Tensor de Kirchhoff e os tensores de Piola-Kirchhoff	2.16
2.3.3	Tensão significativa	2.17
2.3.4	Lei constitutiva	2.18
2.4	Decomposições incrementais	2.19
2.5	Referências	2.27

Capítulo 3 - Análise estrutural - elementos de casca

3.1	Sumário e notas justificativas	3.1
3.1.1	Características dos elementos degenerados de tridimensionais:	3.2
3.2	Sistemas de coordenadas	3.3
3.2.1	Coordenadas globais	3.4
3.2.2	Coordenadas nodais	3.4
3.2.3	Coordenadas naturais	3.5
3.2.4	Coordenadas locais.....	3.5
3.3	Campos de posição e deslocamento	3.6
3.3.1	Posição	3.6
3.3.2	Deslocamento	3.7
3.3.3	Transformações de tensores de 1ª ordem.....	3.9
3.4	Extensão	3.11
3.4.1	Derivadas cartesianas dos deslocamentos	3.11
3.4.2	Tensor de extensão de Green-Lagrange na formulação Lagrangeana total	3.13
3.4.3	Matrizes deslocamento-extensão em coordenadas globais.....	3.14
3.4.3.1	Formulação geral	3.14
3.4.3.2	Extensão linear	3.17
3.4.3.3	Extensão não – linear	3.18
3.4.4	Matriz deslocamento-extensão em coordenadas naturais	3.19
3.4.5	Transformação tensorial.....	3.20
3.4.6	Interpolação tensorial da deformação	3.21
3.4.6.1	Interpolação de corte	3.21
3.4.6.2	Interpolação de membrana	3.26
3.4.6.3	Interpolação mista em coordenadas naturais.....	3.29
3.4.6.4	Efeito da interpolação	3.32
3.5	Tensões e lei constitutiva	3.33
3.6	Vector de forças internas	3.37
3.7	Rigidez tangencial	3.37
3.8	Massa e amortecimento	3.41
3.9	Forças nodais equivalentes	3.41
3.10	Conclusões.....	3.43
3.11	Referências	3.44

Capítulo 4 - Análise estrutural - procedimentos

4.1	Introdução e sumário	4.1
4.2	Análise estática	4.1
4.2.1	Análise linear.....	4.1
4.2.2	Análise não-linear	4.2
4.3	Análise dinâmica	4.11
4.3.1	Introdução	4.11
4.3.2	Extracção de formas e frequências naturais.....	4.12
4.3.2.1	Introdução.....	4.12
4.3.2.2	Algumas propriedades do problema característico.....	4.13
4.3.2.3	A implementação do método de Rayleigh-Ritz.....	4.16
4.3.2.4	O método de iteração em subespaços implementado.....	4.20
4.3.3	Sobreposição modal.....	4.21
4.3.3.1	Introdução.....	4.21
4.3.3.2	Métodos de correcção implementados.....	4.25
4.3.4	O método de Newmark	4.26
4.3.5	Problemas não-lineares	4.28
4.3.5.1	Breve introdução aos métodos explícitos e implícitos	4.28
4.3.5.2	Implementação do método do impulso virtual	4.29
4.4	Conclusões.....	4.32
4.5	Referências	4.33

Capítulo 5 - Pré e pós processamento

5.1	Introdução	5.1
5.2	Geração de malha	5.1
5.2.1	Justificação	5.1
5.2.2	Interpolação linear ponto a ponto	5.2
5.2.3	Linhas de Bézier	5.3
5.2.3.1	Definição de linha e polígono de Bézier	5.3
5.2.3.2	Interpolação por partes	5.4
5.2.4	Superfícies obtidas de um produto tensorial.....	5.5
5.2.4.1	Introdução.....	5.5
5.2.4.2	Forma matricial	5.5

5.2.4.3	Superfícies compostas.....	5.6
5.2.4.4	Derivadas no domínio de referência.....	5.7
5.2.5	Comprimento de arco.....	5.8
5.2.6	Classes e métodos de geração de malha.....	5.8
5.2.7	Algoritmo de geração de malha em domínios planos	5.11
5.2.7.1	Introdução.....	5.11
5.2.7.2	Criação de nós e lados nas fronteiras	5.11
5.2.7.3	Criação de uma matriz de nós no interior.....	5.11
5.2.7.4	Criação dos elementos sobre a matriz	5.12
5.2.7.5	Criação dos elementos que ligam a matriz às fronteiras	5.12
5.2.7.6	Modificação da configuração dos elementos.....	5.16
5.2.7.7	Nós intermédios.....	5.16
5.2.7.8	Reposicionamento	5.16
5.2.7.9	Visualização.....	5.17
5.2.8	Geração de malha em superfícies.....	5.18
5.3	Pós-processamento.....	5.20
5.4	Referências	5.21

Capítulo 6 - Análise de sensibilidades

6.1	Sumário e introdução.....	6.1
6.2	Formulação geral da análise de sensibilidades.....	6.2
6.3	Sensibilidades da superfície parametrizada.....	6.4
6.4	Sensibilidades do campo de espessuras	6.7
6.5	Equações de estado lineares.....	6.8
6.5.1	Análise estática	6.8
6.5.2	Análise dinâmica	6.10
6.5.3	Derivadas para os elementos de casca.....	6.12
6.5.3.1	Derivadas da matriz extensão-deslocamento em coordenadas locais	6.14
6.5.3.2	Derivadas das funções de forma.....	6.18
6.5.4	Funcionais usados na análise	6.19
6.6	Equações de estado não-lineares.....	6.22
6.6.1	Derivadas para os elementos de casca.....	6.25
6.7	Conclusões.....	6.28

6.8	Referências	6.29
-----	-------------------	------

Capítulo 7 - Optimização

7.1	Introdução	7.1
7.2	Conceitos básicos	7.1
7.2.1	Formulação	7.1
7.2.2	Mínimo local e global.....	7.3
7.2.3	Tópicos sobre a convergência.....	7.3
7.2.4	Direcção de pesquisa.....	7.4
7.3	Condições de optimalidade.....	7.4
7.3.1	Formulação	7.4
7.3.2	Problema não restringido	7.5
7.3.3	Problema restringido	7.5
7.4	Algoritmo de programação não-linear com restrições	7.8
7.4.1	Introdução	7.8
7.4.2	Programação quadrática sequencial – um primeiro algoritmo	7.9
7.5	Melhorias e modificações do algoritmo original.....	7.14
7.5.1	Restrições	7.14
7.5.2	Estratégia de eliminação de restrições e algumas consequências	7.15
7.5.3	Normalização das restrições e a pesquisa unidireccional.....	7.15
7.5.4	Tratamento de grandes violações-modificação ao subproblema	7.16
7.5.5	Fuga ao cálculo dos gradientes.....	7.17
7.5.6	Reactualização da Hessiana.....	7.17
7.5.7	Problemas no subproblema quadrático	7.18
7.5.8	Tratamento das restrições às variáveis	7.18
7.5.9	Convergência.....	7.18
7.6	Conclusões.....	7.19
7.7	Referências	7.20

Capítulo 8 - Resultados numéricos

8.1	Introdução	8.1
8.2	Análise linear estática	8.1
8.3	Análise estática não-linear	8.2
8.3.1	Introdução	8.2
8.3.2	Placa quadrada encastrada e simplesmente apoiada	8.2
8.3.3	Flexão pura de uma viga	8.7
8.3.4	Casca cilíndrica sujeita a forças pontuais	8.9
8.3.5	Telhado sujeito a uma força pontual	8.12
8.4	Dinâmica- análise linear e não linear	8.14
8.4.1	Introdução – o telhado sujeito a pressão e a uma força pontual	8.14
8.4.2	Frequências e formas naturais	8.15
8.4.3	Comparação de métodos em análise linear	8.18
8.4.4	A influência do elemento na resposta	8.20
8.4.5	Análise não-linear	8.20
8.5	Análise de sensibilidades	8.21
8.5.1	Introdução – placa apoiada sob pressão	8.21
8.5.2	Representações de campos de sensibilidades	8.21
8.5.3	Comparação com as diferenças centrais	8.23
8.6	Optimização de espessuras e forma	8.25
8.6.1	Viga em <i>Cantilever</i>	8.25
8.6.2	Placa encastrada inicial sob pressão uniforme	8.27
8.6.2.1	Dados	8.27
8.6.2.2	Análise estática linear	8.27
8.6.2.3	Análise dinâmica linear	8.33
8.6.2.4	Análise não-linear	8.37
8.6.3	Cilindro sob forças pontuais harmónicas	8.38
8.6.4	Hemisfera sujeita a forças pontuais	8.40
8.7	Referências	8.43

Capítulo 9 - Conclusões e perspectivas de desenvolvimento

9.1	Conclusões.....	9.1
9.2	Perspectivas de desenvolvimento.....	9.2
9.3	Referências	9.3

1 Introdução

1.1 Estruturas do tipo placa e casca.

As placas e cascas são estruturas vulgares na natureza e em construções humanas [HUA89]. Como definição pode dizer-se que uma casca é um elemento estrutural limitado por duas superfícies curvas separadas por uma distância (espessura da casca) que é pequena em comparação com as outras duas dimensões e com os raios principais de curvatura. A espessura é bissectada pela superfície média. Assim, conhecendo a superfície média e sobre esta o campo de espessuras identifica-se a geometria da casca. Uma placa é um caso particular de casca: a sua superfície média é plana.

Existem algumas teorias de cascas (ver [TIM59], [CHU88]) cuja aplicabilidade é condicionada e depende de vários factores: espessura, curvaturas, valores das componentes da extensão, e deslocamentos e rotações sofridos sob carga (ver [CHU88] para uma teoria geral). Um texto introdutório sobre os esforços e deslocamentos desse tipo de estruturas é o de Green e Zerna [GRE92, caps 10 a 16].

Vários objectos que nos rodeiam no dia-a-dia (o ovo é um exemplo estruturalmente ilustrativo) são cascas e é portanto natural que este tipo de estruturas tenha sido já profundamente estudado. Existem algumas soluções teóricas baseadas em teorias particulares e frequentemente resultantes de expansão em séries. Várias soluções para casos simples podem ser obtidas em [YOU89] ou [TIM59].

Como as soluções teóricas estão limitadas a casos geometricamente simples (cilindros, esferas, cones) e a casos de ligação ao exterior igualmente simples, parece lógico o recurso a métodos aproximados muito mais versáteis.

Um método bastante usual de cálculo é o Método dos Elementos Finitos. Existem alguns programas comerciais atractivos (e dispendiosos) que recorrem a esse método e que permitem a análise de cascas. A utilização desses programas não pode contudo ser realizada sem cautelas (ver [HUA89]) e os resultados devem ser examinados criticamente.

Neste trabalho foram implementados alguns elementos de casca e procedimentos de análise. Os elementos são do tipo degenerado de sólido, (um dos primeiros a sugerir foi o de *Ahmad* [AHM70]) e não recorrem a qualquer teoria de cascas mas directamente à mecânica dos sólidos ([OGD97], [MAR83], [MAL69]) o que os torna robustos e versáteis. O interesse da implementação desses elementos não é apenas o de evitar a aquisição de *Software* dispendioso, mas sim analisar, experimentar, modificar e melhorar os elementos e procedimentos necessários para compreender o comportamento das cascas.

Para além de analisar as cascas, o que corresponde grosso-modo a imitar numericamente a natureza, qualquer projectista pode estar interessado em modificar a forma da casca ou o seu campo de espessuras para a melhorar. Pode existir também, o interesse mais modesto de conhecer a influência relativa das causas geométricas ou dimensionais para o desempenho estrutural da casca.

São implementados neste trabalho procedimentos para calcular as derivadas dos funcionais de desempenho estrutural em relação a alguns parâmetros geométricos e às espessuras.

Para além desse tipo de análise criaram-se subrotinas de optimização das cascas, que permitem melhorar automaticamente esses funcionais.

É claro que existem numerosos aspectos limitativos da generalidade e dimensão dos problemas que é possível criar e resolver com os procedimentos aqui descritos. Os custos computacionais impedem a realização de grandes problemas. A geometria computacional

implementada é obviamente limitada e está fora de questão gerar uma malha num avião Boeing 747.

Finalmente, a biblioteca de cálculo (*Solver*) criada pelo autor armazena as matrizes em memória, para perder menos tempo, e portanto não aceita grandes estruturas.

1.2 Apresentação do trabalho

Este trabalho pretende abranger vários aspectos da análise e optimização de estruturas do tipo placa e casca. Foi possível implementar uma série de técnicas computacionais que não serão aqui expostas mas que são eventualmente tão importantes como as ideias descritas neste texto. As subrotinas foram criadas na linguagem Fortran90 [BRA92] e não houve tentação por parte do autor de utilizar quaisquer dos programas existentes que permitem analisar (se funcionarem) as cascas. As subrotinas foram isoladas por tarefas e agrupadas em bibliotecas de cálculo de acordo com o conceito de modularidade [PRE97]. Correram-se muitos de testes bem sucedidos nos vários módulos, e utilizou-se o procedimento de criar subrotinas de teste das bibliotecas criadas, que depois de testadas eram ligadas ao módulo de elementos finitos. O código implementado está de acordo com a notação aqui utilizada, e foi totalmente comentado em Português, o que permite uma fácil leitura e modificação.

Os capítulos estão ordenados por ordem de utilização. Pode parecer, à primeira vista, que a ligação entre os temas é ténue, mas pelo contrário: para fazer a optimização de uma estrutura é necessário realizar análises estruturais e análise de sensibilidades. Além disso, se se quiser modificar a geometria é necessário criar um gerador automático de malhas. Para fazer a análise não-linear é importante implementar um conjunto de procedimentos de solução iterativa. Da mesma forma, na análise dinâmica é necessário implementar métodos de integração temporal e, se interessar resolver o problema hoje, um extractor de frequências eficiente.

Como antevisão dos temas abordados, apresenta-se seguidamente um resumo.

No capítulo 2 mostram-se algumas ideias e conceitos de mecânica dos sólidos que são úteis no capítulo 3. Trata-se o tema da cinemática, dos tensores de extensão e tensão utilizados e da lei constitutiva. O tensor de extensão de Green em coordenadas curvilineas, por ser directamente usado num elemento do capítulo 3, merece alguma atenção, tal como a equação de equilíbrio resultante das decomposições incrementais que é directamente aplicável na formulação por elementos finitos.

O capítulo 3 é uma descrição dos elementos implementados. Mostram-se métodos de melhoramento forçado dos campos de deformação baseados na interpolação tensorial. Deduz-se a interpolação tensorial mista para o termo não-linear e as expressões da rigidez devida a rotações nodais finitas. Os elementos permitem rotações e deslocamentos finitos e é usada uma formulação Lagrangeana total. As matrizes e vectores elementares são completamente descritos tal como foram implementados.

No capítulo 4 apresentam-se os procedimentos de análise não-linear e análise dinâmica. Na análise não-linear apresenta-se o método Quasi-Newton BFGS que permite em certos casos poupar tempo em relação ao Newton-Raphson, o que é de muita importância na análise de sensibilidades e na optimização. Além disso, implementou-se o método de cálculo do passo, que é por vezes útil para aumentar a velocidade de convergência em certos casos mais difíceis. Na análise dinâmica mostram-se os métodos de integração implementados e os procedimentos de correcção da resposta modal: o método da correcção estática e o método da sobreposição de aceleração. Para a análise não-linear dinâmica apresenta-se o método implementado que é ainda pouco divulgado: o método do impulso virtual [TAM96]. Como foi implementado o conhecido método de iteração em subespaços [BAT96] este é igualmente descrito. Como alternativa económica ao método de iteração em subespaços apresenta-se o método aproximado de Rayleigh-Ritz com ortogonalização, que foi

implementado e pode ser usado como ferramenta na estimativa do intervalo de tempo adequado à integração directa de Newmark, igualmente implementada.

O capítulo 5 é uma descrição muito resumida dos geradores de malha e do pós-processador. O tom sucinto usado prende-se mais com a impenetrabilidade descritiva da temática (essencialmente computacional) do que com a sua importância. Foram implementados 2 geradores de quadriláteros totalmente automáticos e que permitem o funcionamento como caixa-negra para a optimização de forma. Todo o pós-processamento apresentado no capítulo 8 foi realizado com um programa do autor criado em OPEN-GL e Fortran, que permite a animação dinâmica, Zoom, translação e rotação das estruturas, etc.

No capítulo 6 descreve-se com detalhe o tema da análise de sensibilidades implementada.

Em elementos de casca, o autor desconhece qualquer trabalho relevante nessa área, pelo que a descrição tem algum pormenor. É desde já importante afirmar que se realizou a análise de sensibilidades para problemas lineares estáticos, dinâmicos e não-lineares geométricos e que é possível trabalhar com 4 espécies de funcionais de desempenho, em que apenas um é o objectivo: tensão de Von-Mises (tensor de Cauchy), deslocamento, energia de deformação e volume da casca. As variáveis são de dois tipos: geométricas e de espessura. Na análise dinâmica foram calculadas as sensibilidades para um instante temporal dos funcionais e não as vulgarmente determináveis sensibilidades das frequências naturais. A notação e linguagem utilizadas estão próximas das de [KLE97] mas toda a análise é original. Optou-se pelo método da variável adjunta nos problemas lineares estáticos e pelo método da diferenciação directa na análise não-linear e na análise dinâmica linear. Na análise não-linear o método da diferenciação directa não é necessariamente menos eficiente do que o método da variável adjunta (ver [KLE97]). Na análise dinâmica, o método da variável adjunta tem uma implementação complexa e requer trabalho de escrita e leitura inversa para ficheiros [HIE91], para além de estar sujeito a erros devido à simulação do impulso no instante de análise. Por esses factos o método da diferenciação directa é mais usual [SUN96], [CAR92] em problemas dinâmicos.

No capítulo 7 apresentam-se os conceitos necessários de optimização e descrevem-se as subrotinas implementadas. Essas subrotinas, embora sejam baseadas no método da programação quadrática sequencial [ARO89], são acompanhadas de algumas ideias no capítulo da implementação e na estratégia de redução das violações. A implementação realizada revelou-se muito eficiente, mas está limitada a problemas de reduzidas dimensões, devido à dificuldade de armazenamento da Hessiana. Certas deficiências do algoritmo original são evitadas ou minoradas através de procedimentos que resultaram de intensivos testes e análises com funções de teste da programação matemática e com exemplos estruturais.

No capítulo 8 são mostrados exemplos ilustrativos ou resultados comparativos da análise estrutural, análise de sensibilidades e da optimização.

Começa-se com uma comparação entre os resultados dos elementos implementados e os obtidos por um programa muito conhecido em análise linear estática do popular exemplo da casca cilíndrica sujeita a força pontual.

Apresentam-se posteriormente alguns exemplos clássicos de análise não-linear.

Depois apresentam-se resultados de extracção de frequências e exemplos de análise dinâmica. Faz-se uma aferição da análise de sensibilidades com o método das diferenças centrais e finalmente apresentam-se resultados da optimização para várias variáveis, vários funcionais e condições de análise: análise linear e não linear estática e análise dinâmica. Os resultados são apresentados sob a forma de gráficos e representações dos campos.

Por fim, no capítulo 9 conclui-se sobre este trabalho e são apresentadas propostas de evolução e futuros algoritmos e técnicas para todas as temáticas abordadas.

1.3 Referências

[AHM70] AHMAD, S. IRONS, B.M. , ZIENKIEWICZ, O.C. *Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 2, 419-451. John Wiley & Sons, 1970.

[ARO89] ARORA, J.S. *Introduction to Optimum Design*. McGraw-Hill International Edition 1989.

[BAT96] BATHE, K.J. *Finite Element Procedures*. Prentice-Hall, 1996.

[BRA92] BRAINERD, W.S., GOLDBERG, C.H., ADAMS, J.C. *Programmer's Guide to Fortran 90*. McGraw-Hill International Edition 1992.

[CAR92] CARDOSO, J.B. ,ARORA, J.S. *Design sensitivity analysis of nonlinear dynamic response of structural and mechanical systems*. Structural Optimization ,Vol 41, 37-46. Springer-Verlag 1992.

[CHU88] CHUNG, T.J. . *Continuum mechanics*. Prentice-Hall 1988.

[GRE92] GREEN, A.E., ZERNA, W.. *Theoretical Elasticity. Second Edition*. Dover Publications New York 1992.

[HIE91] HIEN, T.D., KLEIBER, M. *Stochastic design sensitivity in structural dynamics*. . International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 32, 1247-1265. John Wiley & Sons, 1991.

[HUA89] HUANG, H.C.. *Static and Dynamic Analyses of Plates and Shells. Theory, Software and Applications*. Springer Verlag 1989.

[KLE97] KLEIBER, M. ,ANTUNEZ, H. ,HIEN, T.D., KOWALCZYK, P. *Parameter sensitivity in nonlinear mechanics. Theory and finite element computations*. John Wiley and Sons 1997.

[MAL69] MALVERN, L.E. . *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. Prentice-Hall Englewood Cliffs, 1969.

[MAR83] MARSDEN, E., HUGHES, T.J.R. . *Mathematical foundations of elasticity*. Dover Publications, 1983.

[OGD97] OGDEN, R.W. . *Non-linear Elastic Deformations*. Dover Publications New York 1997.

[PRE97] PRESSMAN, R.S.. *Software Engineering A Practitioner's Approach, Fourth Edition*. McGraw-Hill 1997.

[SUN96] SUN, T.C.. *Design sensitivity analysis and optimization of nonlinear dynamic response for a motorcycle driving on a half-sine bump road*. *Structural Optimization*, Vol 11, 113-119. Springer-Verlag 1996.

[TAM96] TAMMA, K.KI., CHEN, X. SHA,D..*An Overview of Recent Advances and Evaluations of the virtual-pulse (V.I.P.) Time-Integral Methodology for General Structural Dynamics Problems: Computational Issues and Implementation Aspects*. Vol. 39, 1955-1977 John Wiley & Sons. 1996.

[TIM59] TIMOSHENKO, S. . WOINOWSKY-KRIEGER, S. *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill International Edition 1959.

[YOU89] YOUNG, W.C. . *Roark's Formulas for Stress & Strain*, McGraw-Hill International Editions 1989.

2 Conceitos introdutórios de mecânica dos sólidos

2.1 Sumário

Neste capítulo examinam-se alguns conceitos de mecânica dos sólidos sob a óptica da prática computacional. Assim, é dado ênfase aos temas do movimento e de análise de tensões em sólidos apenas nos seus aspectos relevantes para este trabalho. O tratamento sistematizado do tema é remetido para textos especializados [MAR83]. A informação que se segue está contida nos textos habituais sobre o assunto [MAL69], [BAT96], [ABA97], [BON97], [CRI97], [CHU88], [KLE89] mas a sua exposição direccionada para a temática deste trabalho surge como fundamental para a fácil leitura dos capítulos seguintes. Como neste trabalho as não-linearidades tratadas são apenas as referentes à cinemática das cascas, os conceitos sobre análise não-linear material não são expostos.

Para permitir a progressividade na leitura apresentam-se inicialmente as equações habituais da mecânica dos sólidos usando notação matricial para depois se usar a notação indicial de [KLE89] utilizada correntemente por diversos autores [SIL97], [BAT96], [KLE91] e tomada como mais clara para a formulação incremental usada vulgarmente no método dos elementos finitos.

2.2 Cinemática

2.2.1 Introdução

Analisa-se com algum pormenor a formulação de movimento dos sólidos já que os elementos implementados neste trabalho usam os conceitos deste capítulo. Na análise clássica de cascas o tema da cinemática é central já que a mobilidade de uma casca pode ser bastante complexa. Muito embora os elementos finitos neste trabalho sejam da família dos elementos degenerados de sólido, possuindo portanto uma formulação mais próxima dos meios contínuos do que de qualquer teoria específica de cascas, o tema da cinemática tem interesse e merece algum estudo já que existe alguma complexidade na formulação das matrizes elementares.

Alguns elementos finitos para análise de cascas necessitam de graus de liberdade de rotação para simularem o efeito de flexão. Na análise de cascas o efeito das rotações finitas pode ser importante [ABA97]. O tratamento da rotação de vectores é feito neste capítulo e será detalhado quando se analisarem as equações do elemento, no capítulo 3.

2.2.2 Rotação

2.2.2.1 Rotação finita

Embora muitos elementos de casca contenham como graus de liberdade 3 rotações nodais, os elementos usados neste trabalho possuem 2 graus de liberdade de rotação por nó.

Usam-se as 3 rotações nodais no caso de existirem uniões entre várias cascas ou no caso de não existir continuidade C1 geométrica. Neste trabalho usam-se cascas com continuidade geométrica C1.

O tema das rotações finitas de cascas tem merecido bastante atenção por parte de alguns investigadores [CRI97] e é discutido em várias fases ao longo deste trabalho. A formulação aqui apresentada é particularizada no capítulo 3.

Um vector de rotação infinitesimal $\vec{\phi}$ consiste numa magnitude ϕ e numa direcção $\mathbf{p}$ de rotação. Assim, $\vec{\phi}$ pode ser visto como uma rotação de ϕ radianos em torno de $\mathbf{p}$.

A rotação de um vector $\mathbf{v}$ pode ser escrita como

$$\vec{\phi} \times \mathbf{v} = \hat{\phi} \cdot \mathbf{v} \quad (2.1)$$

em que $\hat{\phi}$ é uma matriz anti-simétrica, cuja forma, usando na mesma base em que está definido $\vec{\phi}$

$$\text{é } \hat{\phi} = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_3 & \phi_2 \\ \phi_3 & 0 & -\phi_1 \\ -\phi_2 & \phi_1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ sendo } \phi_i \text{ a coordenada } i \text{ do vector } \vec{\phi}.$$

No caso de a amplitude de rotação não ser infinitesimal, a operação de rotação pode ser obtida à custa da fórmula de Rodrigues [CRI97] que seguidamente se deduz:

Se se pretende obter o vector $\mathbf{r}_n$ resultante da rotação finita de um vector $\mathbf{r}_0$ é necessário

definir um 'pseudo-vector rotação' $\vec{\phi} = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}$ de norma $\phi = \sqrt{\vec{\phi} \cdot \vec{\phi}}$ e direcção $\mathbf{e}$.

Atentando à seguinte figura, observa-se o vector variação de $\mathbf{r}_0$, $\Delta \mathbf{r}$.

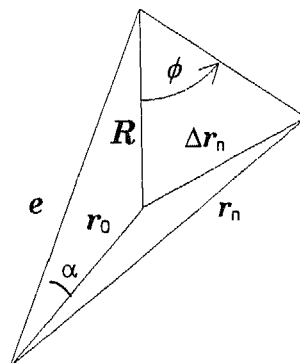


Fig. 2.1 Variação de $\mathbf{r}_0$

O vector $\Delta \mathbf{r}$ pode ser escrito como a adição de dois vectores $\Delta \mathbf{a}$ e $\Delta \mathbf{b}$ sendo $\Delta \mathbf{b} \perp \mathbf{R}$ e $\Delta \mathbf{a} \parallel \mathbf{R}$.

Assim como a seguinte figura e a Fig. 2.1 permitem concluir,

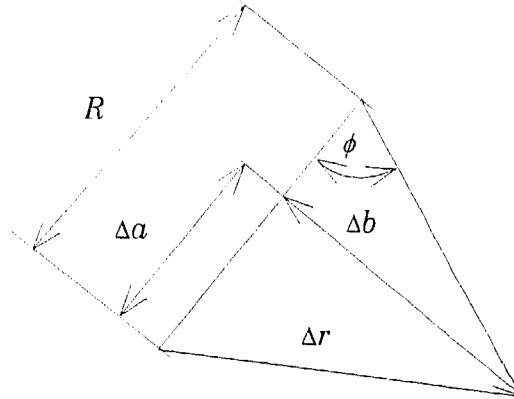


Fig. 2.2 Decomposição de Δr

$$\begin{aligned}
 R &= r_0 \operatorname{sen} \alpha \\
 \Delta a &= R(1 - \cos \phi) \\
 \Delta a &= \frac{\Delta a}{R} \cdot (e \times (e \times r_0)) \\
 \Delta b &= \frac{\operatorname{sen} \phi}{\phi} (\bar{\phi} \times r_0)
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

portanto,

$$\Delta r = \frac{\operatorname{sen} \phi}{\phi} (\bar{\phi} \times r_0) + \frac{(1 - \cos \phi)}{\phi^2} (\bar{\phi} \times (\bar{\phi} \times r_0)) \tag{2.3}$$

Ou fazendo $\bar{\phi} \times r_0 = \hat{\phi} \cdot r_0$, pode calcular-se r_n como

$$r_n = \mathbf{Rot} \cdot r_0 \tag{2.4}$$

em que

$$\mathbf{Rot} = \left[\mathbf{I} + \frac{\operatorname{sen} \phi}{\phi} \hat{\phi} + \frac{(1 - \cos \phi)}{\phi^2} \hat{\phi} \cdot \hat{\phi} \right] \tag{2.5}$$

A implementação computacional da actualização de vectores a partir dos campos de acréscimos de rotação pode ser realizada à custa da definição de outros parâmetros, seguidamente mostradas:

Define-se o conjunto $Q = \{q_0, \mathbf{q}\}$ em que

$$q_0 = \cos \frac{\phi}{2}, \mathbf{q} = \frac{\sin \frac{\phi}{2}}{\phi} \tilde{\phi} \quad (2.6)$$

É possível [ABA97] definir a matriz **Rot** à custa do conjunto Q .

Assim,

$$\mathbf{Rot} = (2q_0^2 - 1)\mathbf{I} + 2q_0\hat{\mathbf{q}} + 2\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}^T \quad (2.7)$$

em que $\hat{\mathbf{q}}$ é a matriz anti-simétrica correspondente ao vector $\mathbf{q}$.

2.2.2.2 Aplicação ao caso da actualização de versores directores

A utilidade do conjunto Q definido por (2.6) torna-se clara na actualização de vectores a partir dos campos de rotação incremental. Se o campo $\Delta\tilde{\phi}^i$ é conhecido na iteração i e interessa actualizar um vector director ${}^i\mathbf{V}$, e obter ${}^{i+1}\mathbf{V}$, define-se:

$$\Delta q_o^i = \cos \frac{\Delta\phi^i}{2} \text{ e } \Delta\mathbf{q}^i = \frac{\sin \frac{\Delta\phi^i}{2}}{\Delta\phi^i} \Delta\tilde{\phi}^i \quad (2.8)$$

O vector ${}^{i+1}\mathbf{V}$ pode se calculado como:

$${}^{i+1}\mathbf{V} = \left(2 \cdot (\Delta q_o^i)^2 - 1\right) {}^i\mathbf{V} + 2\Delta q_o^i \cdot \Delta\mathbf{q}^i \times {}^i\mathbf{V} + 2 \cdot (\Delta\mathbf{q}^i \bullet {}^i\mathbf{V}) \Delta\mathbf{q}^i \quad (2.9)$$

Na análise por elementos finitos deste trabalho, a equação (2.9) é usada na actualização dos vectores directores em cada iteração i , o campo de rotação incremental é definido da seguinte forma:

$$\Delta\tilde{\phi}^i = \Delta\theta_1 {}^i\mathbf{V}_1 + \Delta\theta_2 {}^i\mathbf{V}_2 \quad (2.10)$$

Existem portanto duas componentes independentes da rotação $\Delta\theta_1$ e $\Delta\theta_2$ em torno dos vectores iV_1 e iV_2 .

Se ${}^iV_1, {}^iV_2, {}^iV_3$ for um terno ortonormal ordenado directamente, a actualização de iV_3 pode ser escrita como:

$${}^{i+1}V_3 = {}^iV_3 + \frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta} (-\Delta\theta_1 {}^iV_2 + \Delta\theta_2 {}^iV_1) + \frac{1 - \cos\Delta\theta}{\Delta\theta^2} [-(\Delta\theta_1^2 + \Delta\theta_2^2) {}^iV_3] \quad (2.11)$$

em que $\Delta\theta = \sqrt{\Delta\theta_1^2 + \Delta\theta_2^2}$

ou de forma compacta:

$${}^{i+1}V_3 = \text{Rot}(\Delta\theta_1, \Delta\theta_2) {}^iV_3 \quad (2.12)$$

2.2.3 Conceitos de extensão e deformação

O tema dos grandes deslocamentos, devido ao número de investigadores que já o estudaram, está envolto numa certa dispersão de notações e ideias. Seguem-se neste texto apenas as referências já citadas. Embora existam vários tensores de extensão (ver [MAL69]) apenas alguns são habitualmente usados na prática computacional, sendo aqui apenas descritos estes.

Pode parecer à primeira vista que talvez fosse útil expor os conceitos de extensão e deformação em coordenadas curvilíneas na forma usual das teorias das cascas ([CHU88], p.ex.), porém, ao contrário de certos elementos percursores na análise de cascas, os elementos implementados neste trabalho são degenerados de sólido e assim possuem uma formulação geral.

A discussão seguinte é, portanto, directamente aplicável.

2.2.3.1 Gradiente de deformação

Imagine-se um sólido como um conjunto de partículas materiais, identificadas pelas suas coordenadas X correspondentes a uma base cartesiana E_i , nas suas posições iniciais ($t=0$). De forma geral, as posições correntes destas partículas, no instante t , são definidas pelas coordenadas x , correspondentes a uma base cartesiana alternativa e_i . Neste trabalho as duas bases coincidem, mantendo-se contudo a distinção pela sua generalidade. O movimento pode ser descrito através de uma relação entre a posição em $t=0$ e outro instante qualquer para o conjunto das partículas que constituem o corpo. Por uma questão de satisfação das dúvidas que podem aparecer após a afirmação anterior, o sólido é considerado um subespaço em $\mathcal{R}^3$ aberto [MAR83], para que se possa manter a existência da relação em causa no caso de auto-contacto. Se aparecerem fendas dentro do sólido, a relação pode não existir. O movimento, mediante certas (ver [MAR83]) restrições pode ser então materializado pela seguinte relação:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad (2.13)$$

Para um dado t fixo, a equação (2.13) representam um mapeamento entre o sólido indeformado e o mesmo sólido deformado (que pode ser visto como outro sólido). De forma análoga, se se impuser $\mathbf{X}$ fixo, a equação representa o movimento ou a trajetória de uma dada partícula identificada por $\mathbf{X}$. Ao longo deste trabalho não se irá impor restrições à norma do deslocamento $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$. É possível observar um campo usando as coordenadas $\mathbf{x}$ ou $\mathbf{X}$, às quais correspondem dois tipos de observação distintos de um mesmo campo. Se a observação de um campo é realizada usando as coordenadas espaciais $\mathbf{x}$, esta é chamada de observação euleriana ou espacial, e alternativamente, usando as coordenadas materiais $\mathbf{X}$, é chamada de observação Lagrangeana ou material.

O conceito de gradiente de deformação $\mathbf{F}$ é importante na construção dos tensores de extensão usados neste trabalho. O gradiente de deformação permite relacionar a posição relativa de duas partículas após deformação, com a posição relativa inicial das mesmas partículas. Assim,

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \quad (2.14)$$

Ou igualmente,

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad (2.15)$$

Usando a notação indicial,

$$\mathbf{F} = \sum_{i,j=1}^3 F_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_j \quad (2.16)$$

em que $F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$; $i, j = 1, 2, 3$

A existência do gradiente de deformação depende, claro está, do tipo de mapeamento (2.13) acima discutido. Como o deslocamento de cada ponto é considerado uma função contínua da posição original do ponto, não há razões, neste trabalho, para se duvidar da existência de tal gradiente.

2.2.3.2 Tensores de deformação e extensão

Usando dois vectores elementares materiais $d\mathbf{X}_1$ e $d\mathbf{X}_2$, deformando-se para $d\mathbf{x}_1$ e $d\mathbf{x}_2$ respectivamente, pode afirmar-se que tal deformação envolve alongamento (mudança de comprimento) e variação de ângulo formado pelos dois vectores elementares. Recorrendo ao conceito de gradiente de deformação, o produto escalar $d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2$ pode ser obtido a partir dos vectores materiais como:

$$d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2 = d\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot d\mathbf{X}_2 \quad (2.17)$$

em que C é conhecido por tensor de deformação direito de Cauchy-Green, facilmente obtido à custa do gradiente de deformação como:

$$C = F^T \cdot F \quad (2.18)$$

De forma análoga, o produto escalar $dX_1 \bullet dX_2$ obtém-se a partir dos vectores espaciais à custa do tensor esquerdo de Cauchy-Green como:

$$dX_1 \bullet dX_2 = dx_1 \bullet b^{-1} \cdot dx_2 \quad (2.19)$$

em que $b = F \cdot F^T$.

Assim, a mudança no produto escalar pode ser contabilizada em termos dos vectores materiais e do tensor de extensão de Green $E = 0.5(C - I)$ como:

$$0.5(dx_1 \bullet dx_2 - dX_1 \bullet dX_2) = dX_1 \bullet E \cdot dX_2 \quad (2.20)$$

ou, a mesma mudança expressa em termos dos vectores espaciais e do tensor de extensão de Almansi $e = 0.5(I - b^{-1})$:

$$0.5(dx_1 \bullet dx_2 - dX_1 \bullet dX_2) = dx_1 \bullet e \cdot dx_2 \quad (2.21)$$

Os tensores definidos acima (2.17 a 2.21) são tensores de extensão, nomenclatura que pode ficar clarificada se se escrever um vector material dX à custa dos seus versor N e norma dS : $dX = NdS$ e o vector espacial correspondente $dx = nds$. A mudança no quadrado das normas, decorrendo do movimento do ponto entre as posições inicial e corrente, pode ser escrita como:

$$ds^2 - dS^2 = 2dX \bullet E \cdot dX \quad (2.22)$$

ou, dividindo por $2 \cdot dS^2$:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{ds^2 - dS^2}{dS^2} \right) = N \bullet E \cdot N \quad (2.23)$$

ou, de forma idêntica para e :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{ds^2 - dS^2}{ds^2} \right) = n \bullet e \cdot n \quad (2.24)$$

O tensor gradiente de deformação $\mathbf{F}$ pode [ABA97] ser decomposto como um produto de um tensor rotação $\mathbf{R}$ e um tensor alongamento $\mathbf{U}$:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \quad (2.25)$$

Recorrendo à definição de tensor direito de Cauchy-Green e reconhecendo a ortogonalidade de $\mathbf{R}$, $\mathbf{C} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{U}$. A obtenção de $\mathbf{U}$ pode ser realizada a partir dos valores e vectores próprios de $\mathbf{C}$. Assim, se os vectores próprios de $\mathbf{C}$ forem $\mathbf{N}_i$ e β_i^2 os valores próprios correspondentes, $\mathbf{C} = \sum_{i=1}^3 \beta_i^2 \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i$ ou seja, o tensor $\mathbf{U}$ pode ser obtido a partir de:

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^3 \beta_i \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \quad (2.26)$$

Parece claro que os valores próprios de $\mathbf{U}$ são os mesmos de $\mathbf{F}$, e é possível [BON97] provar que

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 \beta_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{N}_i \quad (2.27)$$

em que $\mathbf{n}_i = \mathbf{R} \cdot \mathbf{N}_i$

O tensor de extensão de Green pode igualmente escrever-se a partir desses valores próprios:

$$\mathbf{E} = 0.5 \cdot \sum_{i=1}^3 (\beta_i^2 - 1) \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \quad (2.28)$$

A decomposição multiplicativa de $\mathbf{F}$ pode ser escrita, em alternativa à relação anterior, como:

$$\mathbf{F} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \quad (2.29)$$

Conclusivamente, uma rotação rígida seguida de alongamento, em vez de um alongamento seguido de rotação.

$\mathbf{V}$ é também um tensor simétrico, já que, aproveitando a ortogonalidade de $\mathbf{R}$, se escreve como:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \Leftrightarrow \\ \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^{-1} &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^{-1} \Leftrightarrow \\ \mathbf{V} &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^T \end{aligned} \quad (2.30)$$

É possível realizar-se a decomposição espectral dos vários tensores de alongamento, definindo-se vários tensores derivados [BAT96].

2.2.3.3 Variação do volume e da área devido à deformação

Os fenómenos de variação de volume e área devidos ao movimento dos pontos de um sólido, em particular de uma casca, são importantes, quer na formulação das equações de equilíbrio da casca, quer na contabilização da rigidez provocada por forças de pressão eventualmente não conservativas.

Pode escrever-se a expressão para o volume de um elemento dX_1, dX_2, dX_3 na configuração material a partir das relações $dX_i = dX_i E_i$ como

$$dV = dX_1 dX_2 dX_3 \quad (2.31)$$

relação assente na ortogonalidade dos vectores dX_i .

Um elemento de volume dv na configuração deformada pode ser escrito a partir dos vectores:

$$dx_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_i} dX_i \quad (2.32)$$

como o seguinte produto triplo

$$dv = dx_1 \cdot (dx_2 \times dx_3) \quad (2.33)$$

ou então:

$$dv = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_1} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_2} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_3} \right) dX_1 dX_2 dX_3 = \det[\mathbf{F}] dV \quad (2.34)$$

No caso da área, a importância da sua variação revelar-se-á quando se discutirem as forças nodais equivalentes no contexto do método dos elementos finitos.

Pode obter-se essa variação à custa da fórmula já deduzida para o volume. Assim, imaginando um vector material arbitrário dL , que o movimento transforma em dl ,

$$dV = dL \cdot dA \text{ e } dv = dl \cdot da \quad (2.35)$$

em que, recorrendo aos vectores normais $\mathbf{n}$ e $\mathbf{N}$:

$$d\mathbf{a} = n d\mathbf{a} \text{ e } d\mathbf{A} = N d\mathbf{A} \quad (2.36)$$

Relacionando os volumes inicial e final em termos do determinante de $\mathbf{F}$, e escrevendo $d\mathbf{l} = \mathbf{F} d\mathbf{L}$ conclui-se que:

$$d\mathbf{a} = \det[\mathbf{F}] \mathbf{F}^{-T} \cdot d\mathbf{A} \quad (2.37)$$

2.2.3.4 Taxa de deformação

Os conceitos de taxa de deformação ou extensão, apesar de não se usarem materiais viscosos neste trabalho, têm interesse na discussão de alguns conceitos neste capítulo.

A partir da relação entre o vector posição espacial de um ponto e o seu vector material, a definição de velocidade do ponto é:

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad (2.38)$$

A derivada temporal do gradiente de deformação pode ser escrita como:

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right) \quad (2.39)$$

É possível obter um tensor gradiente da velocidade $\mathbf{l}$ derivando a velocidade em ordem às coordenadas espaciais como:

$$\mathbf{l} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.40)$$

Este tensor permite obter a velocidade relativa entre partículas infinitamente próximas ($d\mathbf{v} = \mathbf{l} d\mathbf{x}$).

Usando o tensor gradiente de velocidade, a derivada temporal do gradiente de deformação vem:

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{l} \cdot \mathbf{F} \quad (2.41)$$

O tensor velocidade de extensão material é obtido directamente a partir da definição de tensor direito de Cauchy Green como:

$$\dot{\mathbf{E}} = 0.5(\dot{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \cdot \dot{\mathbf{F}}) \quad (2.42)$$

É usual escrever o tensor $\mathbf{l}$ como soma de um tensor simétrico com outro antissimétrico, operação sempre possível e escrita como de seguida:

$$\mathbf{l} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad (2.43)$$

Em que $\mathbf{D} = \text{sim}(\mathbf{l})$ é o tensor taxa de deformação [BAT96]. $\mathbf{W} = \text{assim}(\mathbf{l})$ é o tensor de rotação (*Spin Tensor*). A velocidade de extensão pode ser relacionada com a taxa de deformação [BAT96], [ABA97] a partir de (2.41):

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F} \quad (2.44)$$

ou inversamente :

$$\mathbf{D} = \mathbf{F}^T \cdot \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (2.45)$$

2.2.4 O tensor de extensão de Green em coordenadas curvilíneas

Neste trabalho, um dos elementos finitos criado, é formulado em coordenadas curvilíneas. As linhas coordenadas permitem a construção do tensor de Green. Os vectores da base covariante são tomados como as tangentes às linhas coordenadas e os da base contravariante obtêm-se destes.

Um tensor de 2ª ordem, como o tensor das extensões de Green, pode ser escrito recorrendo às componentes covariantes e aos vectores da base contravariante, ou vice-versa. Assim, se $\mathbf{A}$ é um tensor de 2ª ordem. Se $\mathbf{e}_i$ forem vectores da base covariante e $\mathbf{e}^i$ vectores da base contravariante, esse tensor pode escrever-se das formas:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\ \mathbf{A} &= A_{ij} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \end{aligned} \quad (2.46)$$

As componentes covariante e contravariante obtêm-se facilmente a partir da projecção do tensor $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \mathbf{e}_i \bullet (\mathbf{A} : \mathbf{e}_j) \\ A^{ij} &= \mathbf{e}^i \bullet (\mathbf{A} : \mathbf{e}^j) \end{aligned} \quad (2.47)$$

O gradiente de deformação em coordenadas curvilíneas (ξ_1, ξ_2, ξ_3) pode escrever-se recorrendo à notação: $d\mathbf{X} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi_i} d\xi_i = \mathbf{E}_i d\xi_i$.

Para a configuração corrente: $d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_i} d\xi_i = \mathbf{e}_i d\xi_i$.

Obtém-se, portanto, a seguinte expressão para o gradiente de deformação:

$$\mathbf{F} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{E}_3 \quad (2.48)$$

A obtenção do tensor $\mathbf{E}$ é realizada à custa do gradiente de deformação a partir da equação já conhecida:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} [\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}] = \frac{1}{2} [(\mathbf{E}^i \otimes \mathbf{e}_i) \cdot (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{E}^j) - \mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}^i] = E_{ij} \mathbf{E}^i \otimes \mathbf{E}^j = \frac{1}{2} [m_{ij} - M_{ij}] \mathbf{E}^i \otimes \mathbf{E}^j \quad (2.49)$$

Em que m_{ij} denota as componentes do tensor métrico da base $\mathbf{e}_i$ e M_{ij} as componentes do tensor métrico da base $\mathbf{E}_i$.

Fazendo $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$ resulta:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_i} \cdot \mathbf{E}_j + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_j} \cdot \mathbf{E}_i + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_j} \right) \quad (2.50)$$

É também importante relacionar as componentes covariantes do tensor da extensão de Green com as componentes cartesianas. Assim, se $\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_3$ for uma colecção de vectores de uma base cartesiana, e nessa base as componentes de $\mathbf{E}$ denotarem-se $\hat{E}_{cd}$ e se $\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_3$ forem os vectores da base covariante, na qual as componentes de $\mathbf{E}$ denotam-se $\bar{E}_{kl}$ as relações entre as componentes escrevem-se como:

$$\begin{aligned} \bar{E}_{cd} &= (\mathbf{E}_c \cdot \mathbf{i}^k) (\mathbf{E}_d \cdot \mathbf{i}^l) \hat{E}_{kl} \\ \hat{E}_{cd} &= (\mathbf{i}_c \cdot \mathbf{E}^k) (\mathbf{i}_d \cdot \mathbf{E}^l) \bar{E}_{kl} \end{aligned} \quad (2.51)$$

A variação das componentes covariantes do tensor $\mathbf{E}$ escreve-se recorrendo à definição de tensor métrico, como:

$$\delta E_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_i \cdot \delta \mathbf{e}_j + \delta \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) \quad (2.52)$$

2.3 Tensões

A avaliação das consequências das forças ou cargas sobre os sólidos é útil, quer para a avaliação da integridade do sólido, quer para o estabelecimento das equações de equilíbrio desse sólido.

A seguinte figura mostra o corte de um corpo sólido segundo um plano identificado por um ponto $\mathbf{P}$, e um versor normal $\hat{\mathbf{n}}$. A força resultante da acção da parte do sólido não representada sobre a parte representada na Fig. 2.3, em $\mathbf{P}$ e sobre a área ΔS , é $\Delta \mathbf{f}$.

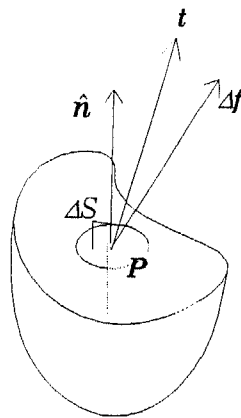


Fig. 2.3 Definição do vector tensão.

A definição do vector tensão $\mathbf{t}$ actuante no ponto $\mathbf{P}$, mediante as condições da Fig. 2.3, é:

$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta S} \quad (2.53)$$

O vector tensão $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{P}, \mathbf{t}, \hat{\mathbf{n}})$ depende das coordenadas do ponto $\mathbf{P}$ considerado, do instante considerado e da direcção de corte $\hat{\mathbf{n}}$. A dependência de $\mathbf{t}$ em relação a $\mathbf{P}$ e $\mathbf{t}$ pode ser obtida a partir do conhecimento de outros campos como o do deslocamento. Já a dependência de $\mathbf{t}$ em relação ao vector normal ao plano de corte $\hat{\mathbf{n}}$, pode ([BON97] págs. 98-99) ser explicitada recorrendo a um tensor de 2ª ordem (i.e. com base de ordem 2) conhecido como tensor de tensões de Cauchy e identificado por σ .

Assim,

$$\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}) = \sigma \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (2.54)$$

em que, usando as matrizes de base correspondentes à configuração espacial:

$$\sigma = \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (2.55)$$

O tensor de Cauchy é usado na avaliação da integridade dos sólidos, já que contabiliza os efeitos das forças reais sobre a geometria deformada. No estabelecimento das equações de equilíbrio é usado neste trabalho outro tensor das tensões adequado ao tipo de formulação escolhido.

2.3.1 Equilíbrio

Para um sólido com um volume v sob a acção de forças de superfície, $\mathbf{t}$, actuantes na sua fronteira Γ , e forças de volume $\mathbf{f}$, o princípio de Alembert implica que a soma de todas as forças aplicadas no sólido e na sua fronteira seja nula:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{t} d\Gamma + \int_v \mathbf{f} dv = \mathbf{0} \quad (2.56)$$

As forças de superfície podem ser determinadas a partir do tensor de Cauchy na fronteira e do vector $\mathbf{n}$ normal à fronteira:

$$\int_{\Gamma} \sigma \mathbf{n} d\Gamma + \int_v \mathbf{f} dv = \mathbf{0} \quad (2.57)$$

Recorrendo ao teorema de Gauss:

$$\int_v (\text{div } \sigma + \mathbf{f}) dv = \mathbf{0} \quad (2.58)$$

O divergente de um tensor de 2ª ordem como σ é um vector que se obtém a partir do tensor de 3ª ordem $\nabla \sigma$ como a contracção dupla deste com a identidade:

$$\text{div } \sigma = \nabla \sigma : \mathbf{I} = \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \quad (2.59)$$

A validade da equação de equilíbrio (2.58), não está restringida ao volume total do corpo sólido. Assim, se se imaginar partes do corpo como sendo igualmente corpos pode aplicar-se a

mesma equação a essas partes. A equação é válida para qualquer volume de integração, e pode escrever-se:

$$\text{div } \sigma + f = 0 \quad (2.60)$$

A equação (2.60) é a conhecida equação de Cauchy de equilíbrio [MAL69] ou a equação de equilíbrio espacial na sua forma pontual. A equação de Cauchy resulta do equilíbrio de forças segundo 3 direcções. O equilíbrio de momentos, para o caso não-polar ([MAL69], págs 217 a 220), permite concluir a simetria de σ .

$$\sigma^T = \sigma \quad (2.61)$$

A equação (2.60), por si só, peca em utilidade na formulação do equilíbrio numa forma numericamente imediata (no caso de parte da fronteira do sólido possuir deslocamentos prescritos, por exemplo). É usual utilizar uma forma escalar projectada da equação, projectando os vectores t e σ sobre campos vectoriais definidos no domínio do corpo, assim como no seu contorno. A selecção desses campos depende do objectivo da projecção. Se o objectivo é obter a equação de equilíbrio do sólido, usam-se como campos as velocidades ou os deslocamentos cinematicamente admissíveis. Neste texto usa-se um campo de deslocamentos virtual [SIL97] já que parece a forma mais popular da equação de equilíbrio projectada. A equação escalar resultante é habitualmente chamada de Princípio de Deslocamento Virtual, ou Princípio de Trabalho Virtual (PTV).

Assim, realizando tal projecção na equação de equilíbrio na sua forma integral:

$$\int_V \delta u^T \cdot (\text{div } \sigma + f) dv = 0 \quad (2.62)$$

ou, integrando por partes, e tendo em conta que $\delta u = 0$ na parte de Γ , Γ_d , à qual corresponde a prescrição de deslocamento (já que o campo virtual é compatível com as condições cinemáticas reais do sólido),

$$\int_{\Gamma_t} \delta u^T \cdot t d\Gamma_t + \int_V \delta u^T \cdot f dV = \int_V \left(\frac{\partial \delta u}{\partial x} \right) : \sigma dV \quad (2.63)$$

A equação escalar (2.63) pode ser interpretada fisicamente como:

$$\delta W_{Ext} = \delta W_{Int} \quad (2.64)$$

isto é, o trabalho realizado pelas forças exteriormente aplicadas ao sólido é igual ao trabalho realizado pelas forças internas, estaticamente equivalentes ao estado de tensão.

Analogamente a $\mathbf{l}$, pode decompor-se $\delta \mathbf{l}^* = \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}$ em dois tensores, sendo um simétrico e outro antissimétrico: $\delta \mathbf{l}^* = \delta \mathbf{D}^* + \delta \mathbf{W}^*$. Como a contracção dupla entre um tensor antissimétrico e um simétrico é um escalar nulo, a equação de equilíbrio resulta:

$$\int_{\Gamma_i} \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{t} d\Gamma_f + \int_V \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{f} dV = \int_V \delta \mathbf{D}^* : \boldsymbol{\sigma} dV \quad (2.65)$$

em que

$$\delta \mathbf{D}^* = 0.5 \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right) \quad (2.66)$$

2.3.2 Tensor de Kirchhoff e os tensores de Piola-Kirchhoff

Neste trabalho o equilíbrio é estabelecido usando o tensor de extensão de Green.

Assim, também o tensor de tensões usado nas equações de equilíbrio não é o de Cauchy, mas o 2º tensor de Piola-Kirchhoff, $\mathbf{S}$, definido a partir do cálculo da potência por unidade de volume baseada nos tensores de taxa de deformação:

$$J \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{E}} \quad (2.67)$$

, em que $J = \det \mathbf{F}$.

A relação entre $\boldsymbol{\sigma}$ e $\mathbf{S}$ pode ser re-escrita como de seguida:

$$\begin{aligned} J \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} &= \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F} \Leftrightarrow \\ J \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} \Leftrightarrow \\ \boldsymbol{\sigma} &= \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T \end{aligned} \quad (2.68)$$

Na manipulação (2.69), foram realizadas operações pouco óbvias, remetendo-se para [BAT96 pág 515] a sua explicação. A igualdade entre os tensores é válida para qualquer taxa de deformação $\mathbf{D}$, eis a razão do último passo. A relação inversa pode ser escrita como:

$$\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (2.69)$$

Uma interpretação física do 2º Tensor de Piola-Kirchhoff pode realizar-se escrevendo o 2º tensor de Piola-Kirchhoff para um estado pontual de rotação de corpo rígido:

$$\mathbf{S} = \mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{R} \quad (2.70)$$

Neste caso, as componentes de $\mathbf{S}$ são as componentes de $\boldsymbol{\sigma}$ rodadas para a configuração de referência. Como exemplo S_{11} é a componente da tensão normal correspondente à força, rodada para a configuração de referência, por unidade de área, actuante na superfície cuja normal era inicialmente paralela a $\mathbf{X}$ na configuração de referência.

A força movida para a configuração de referência é uma força fictícia ([BAT96] pág 516) obtida por aplicação de $\mathbf{F}^{-1}$.

Um tensor usado nas leis constitutivas para grandes deformações é o tensor de tensões de Kirchhoff:

$$\boldsymbol{\tau} = J \boldsymbol{\sigma} \quad (2.71)$$

O primeiro tensor de Piola-Kirchhoff é dado por:

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T \quad (2.72)$$

Neste trabalho utilizam-se os tensores de Cauchy e 2º Tensor de Piola-Kirchhoff.

A equação (2.65), traduzindo o princípio dos trabalhos virtuais, pode ser reescrita recorrendo ao 2º Tensor de Piola-Kirchhoff, tomando a forma [BAT96]:

$$\int_{\Gamma_i} \delta \mathbf{u}^T \cdot t d\Gamma_f + \int_V \delta \mathbf{u}^T \cdot f dV = \int_{^0V} \delta \mathbf{E} : \mathbf{S} d^0V \quad (2.73)$$

em que $\delta \mathbf{E}$ é a variação do tensor de extensão de Green e 0V é o volume do sólido na configuração de referência.

2.3.3 Tensão significativa

O tensor de tensões Cauchy é essencial na avaliação de qualquer invariante ou norma que possa servir para concluir acerca da segurança ou não de determinado objecto, já que é o tensor que contabiliza os efeitos das forças sobre a geometria deformada.

Assim, em qualquer análise de tensões ao longo deste trabalho usa-se como campo escalar significativo do campo tensorial das tensões de Cauchy, o campo de Von-Mises:

$$SVM = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \sigma_D : \sigma_D} \quad (2.74)$$

Em que

$$\sigma_D = \sigma - \frac{1}{3} \text{trac}(\sigma) \mathbf{I} \quad (2.75)$$

2.3.4 Lei constitutiva

Neste trabalho usam-se apenas materiais elásticos, com possibilidade de anisotropia.

Representando as componentes da extensão de Green por ε_{ij} e as componentes do 2º tensor de Piola-Kirchhoff por S_{ij} , a lei de Hooke pode escrever-se como:

$$S_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.76)$$

Para um material isotrópico

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2.77)$$

em que os parâmetros de Lamé, definidos em termos das constantes elásticas de engenharia, escrevem-se como:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (2.78)$$

E é o módulo de Young e ν é o coeficiente de Poisson do material considerado.

O caso da anisotropia será referido e particularizado quando se discutir o elemento de casca, no capítulo 3.

2.4 Decomposições incrementais

Neste trabalho segue-se a metodologia de [KLE89], [BAT96] tendo o autor optado pela formulação Lagrangeana total. A opção justificar-se-á aquando da análise de sensibilidades. A notação usada a partir deste momento na análise não-linear é a indicial. Resumidamente, um sobrescrito esquerdo indica a configuração corrente e, quando necessário, um subescrito esquerdo indica a configuração de referência. Quando não faça sentido falar da configuração de referência, o sobrescrito esquerdo indica a configuração para a qual a variável é medida. Os subscritos direitos são os índices correspondentes às componentes do tensor.

Na formulação Lagrangeana total os tensores de extensão e tensão são referidos à configuração original ou de referência, aqui identificada com o símbolo 0. Assim, 0V é o volume do sólido na configuração de referência. Na solução de problemas não lineares em termos de estado, este pode ser obtido usando um processo incremental em que se determina o estado num instante $t+\Delta t$ a partir do estado conhecido no instante t e dos incrementos de força aplicados entre os dois instantes. É portanto usada uma forma incremental de equilíbrio.

Atendendo à Fig. 2.4., podem observar-se 3 configurações distintas: posição de referência, instante t e instante $t+\Delta t$. É importante notar que neste trabalho todos os tensores são representados em bases cujos versores não acompanham o movimento do sólido.

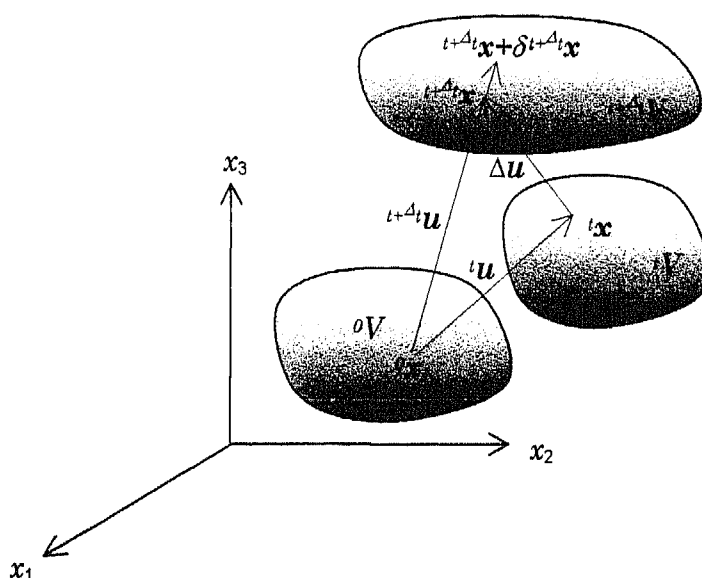


Fig. 2.4 Configurações distintas para três instantes

É habitual decompôr aditivamente a posição, deslocamento, tensão e extensão como soma das componentes determinadas em t com a sua variação incremental, ou seja :

$$\begin{aligned}
{}^t x_i &= {}^0 x_i + {}^t u_i \\
{}^{t+\Delta t} x_i &= {}^0 x_i + {}^{t+\Delta t} u_i \\
{}^{t+\Delta t} u_i &= {}^t u_i + \Delta u_i \\
{}^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} &= {}^t \varepsilon_{ij} + \Delta \varepsilon_{ij} \\
{}^{t+\Delta t} S_{ij} &= {}^t S_{ij} + \Delta S_{ij}
\end{aligned} \tag{2.79}$$

A variação, ou incremento do deslocamento pode escrever-se, das equações acima, como:

$$\Delta u_i = {}^{t+\Delta t} x_i - {}^t x_i \tag{2.80}$$

A equação do princípio dos trabalhos virtuais em $t+\Delta t$, escrita em termos do 2º Tensor de Piola-Kirchhoff, é, usando notação indicial:

$$\int_{{}^0 V} {}^{t+\Delta t} S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} d^0 V = \delta {}^{t+\Delta t} W \tag{2.81}$$

$\delta {}^{t+\Delta t} W$ é o trabalho realizado pelas forças exteriores mais o trabalho realizado pelas forças de inércia podendo escrever-se como:

$$\delta {}^{t+\Delta t} W = \int_{{}^{t+\Delta t} V} {}^{t+\Delta t} f_i^{vol} \delta u_i d^{t+\Delta t} V + \int_{{}^{t+\Delta t} S_f} {}^{t+\Delta t} f_i^s \delta u_i^s d^{t+\Delta t} S \tag{2.82}$$

O primeiro termo refere-se às forças volúmicas de densidade ${}^{t+\Delta t} f_i^{vol}$ e o segundo termo às forças de superfície.

Na maioria dos exemplos neste trabalho assume-se que o carregamento exterior é independente da deformação. De facto, tal pode não suceder em certas aplicações práticas. Imagine-se por exemplo um caso em que a pressão que se mantenha normal à superfície deformada. Assumindo a independência, escreve-se:

$$\delta {}^{t+\Delta t} W = \int_{{}^0 V} {}^{t+\Delta t} f_i^{vol} \delta u_i d^0 V + \int_{{}^0 S_f} {}^{t+\Delta t} f_i^s \delta u_i^s d^0 S \tag{2.83}$$

No caso de existir dependência entre as forças de superfície ou de volume e a configuração deformada do sólido é possível a utilização de um procedimento aproximado, que será discutido quando se referir o método iterativo.

Um conjunto de forças volúmicas de densidade conhecida e que merece uma particularização é o das forças inerciais (ver [BAT75]). O trabalho destas pode ser escrito como:

$$- \int_{t+\Delta t V} \rho^{t+\Delta t} \ddot{u}_i \delta u_i d^{t+\Delta t} V = - \int_{0V} \rho^{t+\Delta t} \ddot{u}_i \delta u_i d^0 V \quad (2.84)$$

As forças de inércia, obtidas de forma discreta como o produto da matriz de massa pelo vector aceleração nodal, podem ser avaliadas actualizando apenas o vector, já que a matriz é calculada uma única vez para a configuração de referência, devido à igualdade (2.85).

A equação de equilíbrio (2.82) foi escrita usando o volume de referência para o trabalho das forças internas e todos os tensores são referidos à configuração de referência. Corresponde portanto a uma formulação Lagrangeana total, em contraste com a formulação Lagrangeana actualizada em que o equilíbrio é estabelecido usando a configuração actualizada (em t).

A extensão virtual correspondente ao campo virtual de deslocamentos é

$$\delta^{t+\Delta t}_0 \varepsilon = \delta_0 \Delta \varepsilon \quad (2.85)$$

igualando portanto o acréscimo virtual de extensão.

O tensor de extensão de Green em $t+\Delta t$, $^{t+\Delta t}_0 \mathbf{E}$, de componentes ε_{ij} , pode escrever-se, recorrendo às componentes, como:

$$^{t+\Delta t}_0 \mathbf{E} = \sum_{i,j=1}^3 ^{t+\Delta t}_0 \varepsilon_{ij} \mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_j \quad (2.86)$$

em que

$$^{t+\Delta t}_0 \varepsilon_{ij} = 0.5 \left(^{t+\Delta t}_0 u_{i,j} + ^{t+\Delta t}_0 u_{j,i} \right) + 0.5 ^{t+\Delta t}_0 u_{k,i} ^{t+\Delta t}_0 u_{k,j} \text{ soma em } k \quad (2.87)$$

De forma análoga para o instante t :

$$^t_0 \varepsilon_{ij} = 0.5 \cdot \left(^t_0 u_{i,j} + ^t_0 u_{j,i} \right) + 0.5 ^t_0 u_{k,i} ^t_0 u_{k,j} \text{ soma em } k \quad (2.88)$$

Fazendo a subtracção de (2.88) a (2.87), obtém-se

$$_0 \Delta \varepsilon_{ij} = \underbrace{0.5 \cdot \left(_0 \Delta u_{i,j} + _0 \Delta u_{j,i} + ^t_0 u_{k,i} \cdot _0 \Delta u_{k,j} + _0 \Delta u_{k,i} \cdot ^t_0 u_{k,j} \right)}_{\text{termo linear}} + \underbrace{0.5 \cdot _0 \Delta u_{k,i} \cdot _0 \Delta u_{k,j}}_{\text{termo quadrático}} \quad (2.89)$$

ou ainda, separando o termo linear em termos de derivada do acréscimo de deslocamento do termo quadrático, resulta:

$${}_0\Delta\varepsilon_{ij} = {}_0e_{ij} + {}_0\eta_{ij} \quad (2.90)$$

Neste ponto parece útil detalhar o acréscimo da extensão de Green escrito usando as componentes covariantes, recorrendo às equações pormenorizadas anteriormente.

Tais componentes obtêm-se usando a subtração já realizada para as componentes cartesianas:

$${}_0\Delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \xi_i} \cdot {}^t\mathbf{e}_j + \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \xi_j} \cdot {}^t\mathbf{e}_i + \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \xi_j} \right) = {}_0e_{ij} + {}_0\eta_{ij} \quad (2.91)$$

A equação de equilíbrio no instante t pode ser re-escrita decompondo os tensores da forma já realizada:

$$\int_{{}_0V} {}_0\Delta S_{ij} \delta_0 \Delta \varepsilon_{ij} d^0V + \int_{{}_0V} {}^tS_{ij} \delta_0 \eta_{ij} d^0V = \delta^{t+\Delta t} W - \int_{{}_0V} {}^tS_{ij} \delta_0 e_{ij} d^0V \quad (2.92)$$

Note-se que o deslocamento virtual $\delta^{t+\Delta t} u_i$ pode ser escrito da análise da Fig. 2.4 como:

$$\delta^{t+\Delta t} u_i = \delta \Delta u_i \quad (2.93)$$

O acréscimo de extensão virtual pode escrever-se como:

$$\delta_0 \Delta \varepsilon_{ij} = \delta_0 e_{ij} + \delta_0 \eta_{ij} \quad (2.94)$$

em que

$$\begin{aligned} \delta_0 e_{ij} &= 0.5 \left(\delta_0 \Delta u_{i,j} + \delta_0 \Delta u_{j,i} + {}^t u_{k,i} \delta_0 \Delta u_{k,j} + \delta_0 \Delta u_{k,i} {}^t u_{k,j} \right) \\ \delta_0 \eta_{ij} &= 0.5 \left(\delta_0 \Delta u_{k,i} \cdot {}_0 \Delta u_{k,j} + {}_0 \Delta u_{k,i} \cdot \delta_0 \Delta u_{k,j} \right) \end{aligned} \quad (2.95)$$

A primeira das relações (2.96) é independente do gradiente do incremento de deslocamento e a segunda é linear em termos desse gradiente.

O incremento do 2º tensor de Piola-Kirchhoff pode ser relacionado com o incremento do tensor das extensões de Green como:

$$\begin{aligned}
{}_0\Delta S_{ij} &= {}_0C_{ijkl} {}_0\Delta \varepsilon_{kl} \Leftrightarrow \\
{}_0\Delta S_{ij} &= {}_0C_{ijkl} ({}_0e_{kl} + {}_0\eta_{kl}) \Leftrightarrow \\
{}^{t+\Delta t}{}_0S_{ij} &= {}^tS_{ij} + {}_0C_{ijkl} ({}_0e_{kl} + {}_0\eta_{kl})
\end{aligned} \tag{2.96}$$

Esta equação de actualização é usada neste trabalho numa subrotina de actualização do tensor das tensões.

Substituindo as últimas decomposições na equação do PTV incremental, resulta:

$$\begin{aligned}
\int_{0V} (\delta {}_0e_{ij} {}_0C_{ijkl} {}_0e_{kl} + \delta {}_0e_{ij} {}_0C_{ijkl} {}_0\eta_{kl} + \delta {}_0\eta_{ij} {}_0C_{ijkl} {}_0e_{kl} + \delta {}_0\eta_{ij} {}_0C_{ijkl} {}_0\eta_{kl} + \delta {}_0\eta_{ij} {}^tS_{ij}) dV = \\
= \delta {}^{t+\Delta t}W - \int_{0V} \delta {}_0e_{ij} {}^tS_{ij} dV
\end{aligned} \tag{2.97}$$

O segundo membro da equação (2.97) é independente do gradiente do incremento de deslocamento e representa o trabalho virtual das forças residuais ou em desequilíbrio, após a discretização pelo Método dos Elementos Finitos (MEF).

A equação (2.97) é a base da formulação incremental do MEF baseado em aproximação de deslocamentos.

A equação contém no primeiro membro termos não-lineares em termos de acréscimo de deslocamento. A formulação clássica da análise não-linear, que conduz à matriz tangente usada habitualmente, ou consistente no caso de existir não-linearidade material, surge naturalmente do desprezo dos termos não-lineares da equação acima.

É habitual, nos textos do M.E.F., agrupar vectorialmente os tensores de ordem 1, mas também e fazendo uso das propriedades de simetria de alguns tensores de 2ª ordem, estes.

A forma de agrupamento usada para todos os tensores de 2ª ordem neste trabalho é $\{11,22,33,12,13,23\}^T$, resultando para os termos do acréscimo de extensão e para os termos acréscimo de extensão virtual, respectivamente :

$${}_0e = \begin{Bmatrix} {}_0e_{11} \\ {}_0e_{22} \\ {}_0e_{33} \\ 2{}_0e_{12} \\ 2{}_0e_{13} \\ 2{}_0e_{23} \end{Bmatrix}; \quad {}_0\eta = \begin{Bmatrix} {}_0\eta_{11} \\ {}_0\eta_{22} \\ {}_0\eta_{33} \\ 2{}_0\eta_{12} \\ 2{}_0\eta_{13} \\ 2{}_0\eta_{23} \end{Bmatrix}; \quad \delta {}_0e = \begin{Bmatrix} \delta {}_0e_{11} \\ \delta {}_0e_{22} \\ \delta {}_0e_{33} \\ 2\delta {}_0e_{12} \\ 2\delta {}_0e_{13} \\ 2\delta {}_0e_{23} \end{Bmatrix}; \quad \delta {}_0\eta = \begin{Bmatrix} \delta {}_0\eta_{11} \\ \delta {}_0\eta_{22} \\ \delta {}_0\eta_{33} \\ 2\delta {}_0\eta_{12} \\ 2\delta {}_0\eta_{13} \\ 2\delta {}_0\eta_{23} \end{Bmatrix} \tag{2.98}$$

O 2º tensor de Piola-Kirchhoff agrupa-se de forma semelhante:

$${}^t_0\mathbf{S} = \begin{Bmatrix} {}^t_0S_{11} \\ {}^t_0S_{22} \\ {}^t_0S_{33} \\ {}^t_0S_{12} \\ {}^t_0S_{13} \\ {}^t_0S_{23} \end{Bmatrix} \quad (2.99)$$

Em relação aos tensores de 1ª ordem, o agrupamento é óbvio.

O tensor de 4ª ordem ${}_0C_{ijkl}$, pode agrupar-se matricialmente usando os parâmetros de Lamé:

$${}_0\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (2.100)$$

A equação do P.T.V. na sua forma final, usando o agrupamento efectuado acima, resulta:

$$\begin{aligned} \int_V \left(\underbrace{\delta_0 \mathbf{e}^T {}_0\mathbf{C}_0 \mathbf{e}}_{\text{Linear em } \Delta \mathbf{u}} + \underbrace{\delta_0 \mathbf{e}^T {}_0\mathbf{C}_0 \boldsymbol{\eta} + \delta_0 \boldsymbol{\eta}^T {}_0\mathbf{C}_0 \mathbf{e}}_{\text{Quadrático em } \Delta \mathbf{u}} + \underbrace{\delta_0 \boldsymbol{\eta}^T {}_0\mathbf{C}_0 \boldsymbol{\eta}}_{\text{Cúbico em } \Delta \mathbf{u}} + \underbrace{\delta_0 \boldsymbol{\eta}^T {}_0^t\mathbf{S}}_{\text{Linear em } \Delta \mathbf{u}} \right) dV = \\ = \delta^{t+\Delta t} W - \int_V \delta_0 \mathbf{e}^T {}_0^t\mathbf{S} dV \end{aligned} \quad (2.101)$$

A discretização da equação (2.102) permite um estabelecimento natural e claro das matrizes elementares e do equilíbrio em termos de elementos finitos.

Mantendo apenas os termos lineares em termos de gradiente do acréscimo de deslocamento, a equação (2.102) mantém-se claramente não-linear em termos de deslocamento, mas permite a aplicação da formulação do M.E.F. baseado na matriz de rigidez tangente. A formulação usada por grande parte dos autores usa essa expressão linearizada em termos de gradiente do acréscimo de deslocamentos:

$$\int_V (\delta_0 \mathbf{e}^T \cdot {}_0\mathbf{C} \cdot {}_0\mathbf{e} + \delta_0 \boldsymbol{\eta}^T \cdot {}_0^t\mathbf{S}) dV = \delta^{t+\Delta t} W - \int_V \delta_0 \mathbf{e}^T \cdot {}_0^t\mathbf{S} dV \quad (2.102)$$

A solução da equação original (2.101) em termos de acréscimo de deslocamento de t a $t+\Delta t$ pode ser realizada de forma iterativa usando a equação (2.102), linearizada.

Desvenda-se já o procedimento realmente usado recorrendo ainda ao conceito de trabalho virtual. Conhecendo os campos de deslocamentos, extensões e tensões aproximados, resultantes da aplicação de um método baseado na equação acima escrita, calcula-se a diferença entre o trabalho virtual das forças internas e o das forças externas, melhora-se a estimativa dos campos até que essa diferença seja aceitável para o utilizador. Assim, o residuo em termos de trabalho virtual é calculado escrevendo o 2º membro da equação do P.T.V. para a configuração no instante $t+\Delta t$.

$$\text{Diferença}^{(k)} = \delta^{t+\Delta t} W - \int_{V_0} \delta_0 e^{T^{(k)}, t+\Delta t} S^{(k)} dV \quad (2.103)$$

$$k = 1, 2, \dots$$

Esta equação traduz, numa forma iterativa, o desequilíbrio entre forças internas e externas.

Como antecipação pode revelar-se que os métodos de solução de problemas estáticos ou dinâmicos neste trabalho recorrem a procedimentos iterativos para cada instante t . Usam-se assim procedimentos iterativos e incrementais.

Existem casos em que as forças externas são não-conservativas, no sentido de dependerem de alguma forma do deslocamento. A pressão aplicada sobre uma superfície pode mudar de direcção, a área sob essa pressão pode igualmente mudar, uma força pontual devida à acção do exterior pode rodar devido à deformação e muitos outros exemplos são possíveis. Para simular esse efeito, aparecem termos dependentes do gradiente de acréscimo de deslocamento na expressão do princípio dos trabalhos virtuais correspondentes à acção dessas forças. Esses termos podem [BAT96] introduzir assimetrias na rigidez do sistema e portanto adicionar dificuldades à determinação computacional do estado. Para mais detalhes sobre o assunto e sobre a forma de calcular a rigidez devida à variação da área sob pressão em cascas, correspondente a um termo $d\delta^{t+\Delta t} W$, pode consultar-se ([ABA97] pág 3.6.3-8) ou [BON97].

No caso de existirem forças não conservativas, neste trabalho usa-se um procedimento simplificado, que, em conjunto com incrementos de força exterior de pequena dimensão, pode simular o efeito desejado à custa de despesa computacional. Assim, usa-se a pressão correspondente ao tempo $t+\Delta t$ mas integra-se na área correspondente à iteração imediatamente anterior à iteração actual. Como foi dito, faz-se a seguinte aproximação, correspondendo à iteração k :

$$\int_{t+\Delta t S_f} f_i^S \delta u_i^S d^{t+\Delta t} S \cong \int_{t+\Delta t S_f^{(k-1)}} f_i^S \delta u_i^S d^{t+\Delta t} S \quad (2.104)$$

Esta técnica será descrita com mais pormenor quando se tratar a análise dos elementos de casca.

Ainda sobre rotações finitas, devido aos elementos usados possuírem termos de rigidez provenientes do facto de poderem sofrer rotações nodais arbitrárias, é importante identificar tal contribuição na equação do princípio dos trabalhos virtuais linearizado.

Assim o termo $\delta_0 e_{ij}^t S_{ij}$, independente do incremento do gradiente de deslocamento, não é independente do incremento das variáveis nodais, como veremos. Aliás, a contribuição desse termo na rigidez é incluída em todos os elementos deste trabalho e atinge apenas certos graus de liberdade. Para que o termo $\delta_0 e_{ij}$ contribua para a rigidez tangencial, é necessário que e_{ij} seja

não-linear em termos de incremento de variáveis nodais, mas para que o P.T.V. se mantenha linear em termos de variáveis nodais, o termo $\delta_0 e_{ij}$ incluído deve ser linearizado nas variáveis nodais e portanto, apenas para efeitos de contabilização de rigidez, ${}_0 e_{ij}$ é quadrático em termos de variáveis nodais.

2.5 Referências

[ABA97] ABAQUS. *Theory Manual Version 5.7*. Hibbitt, Karlsson & Sorensen, 1997.

[BAT75] BATHE, K.J. *Finite element formulations for large deformation dynamic analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 9, 353-386. John Wiley & Sons, 1975.

[BAT96] BATHE, K.J. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall Englewood Cliffs, 1996.

[BON97] BONET, J., WOOD, D. *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. Cambridge University press, 1997.

[CHU88] CHUNG, T.J. *Continuum Mechanics*. Prentice-Hall, 1988.

[CRI97] CRISFIELD, M.A. . *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures Vol2. Advanced Topics*. John Wiley & Sons. 1997.

[KLE89] KLEIBER, M. . *Incremental finite element modeling in non-linear solid mechanics*. Ellis Hordwood/Pwn-Polish Scientific Publishers, 1989.

[KLE91] KLEIBER, M. . *Incremental finite element analysis of nonlinear structural design sensitivity problems*. Finite elements in the 90's, E. Oñate, J. Periaux, A. Samulesson (Eds) Springer-Verlag/CIMNE 1991.

[MAL69] MALVERN, L.E. . *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. Prentice-Hall Englewood Cliffs, 1969.

[MAR83] MARSDEN, E., HUGHES, T.J.R. . *Mathematical foundations of elasticity*. Dover Publications, 1983.

[SIL97] SILVA, W.T.M., OÑATE, E. . *El Método de Desplazamiento Crítico para la Predicción de Puntos Límite y de Bifurcación en Estructuras*. Monografía CIMNE N°35, 1997.

3 Análise estrutural - elementos de casca

3.1 Sumário e notas justificativas

Neste capítulo descreve-se a formulação e a implementação de elementos de casca. A necessidade de construir um programa de análise de cascas é justificada, quer pela possibilidade de utilização de uma linguagem atractiva, o Fortran 90, quer pela inexistência de códigos cujas características sejam adequadas aos objectivos e intenções deste trabalho.

A utilização dessa linguagem é justificada pelas potencialidades a nível de manipulação de vectores e matrizes, existindo vários comandos que permitem a realização de operações matriciais, e a capacidade do uso em conjunto da linguagem gráfica OpenGL. Existe também a possibilidade, inexistente noutras linguagens como o Fortran 77, de definir tipos conforme o interesse do utilizador, e de criar módulos (Modules) de partilha de variáveis comuns aos vários tipos de análise.

Os programas pré-existentes recorrem frequentemente a operações dispendiosas de escrita e leitura para o disco magnético mesmo para pequenas quantidades de informação. Como exemplo refira-se que um programa existente para análise de cascas usa o disco para introduzir as matrizes B (que irão ser definidas neste capítulo) para todos os elementos e pontos de Gauss, o que, dada a dimensão das matrizes e dado o seu número, é um procedimento ineficiente. Por outro lado, ainda sobre as matrizes B , o uso da metodologia de cálculo habitual para elementos com deformação melhorada é inadequado, devido ao facto de que parte do cálculo de alguns elementos de B ser comum a todos os pontos de Gauss. Os programas mais antigos usam intensivamente as operações de leitura e escrita para o disco magnético porque os computadores da altura tinham uma capacidade de memória muito limitada. Ora, essa realidade mudou e, hoje em dia, as operações com o disco tornam-se muito dispendiosas e inúteis, à excepção do armazenamento das matrizes globais, que para grandes estruturas, podem não caber em memória.

Deve finalmente referir-se que o custo temporal de compreender um programa, já manipulado por diversos programadores, com o objectivo de o modificar e de adicionar novas estratégias de cálculo, pode ser superior à realização de um novo, escrito numa linguagem mais atractiva.

É também necessário dizer que, habitualmente, os elementos degenerados requerem um gerador de malha tridimensional que permita escrever as coordenadas dos nós da estrutura sobre as superfícies superior e inferior da casca, o que muitas vezes complica desnecessariamente os ficheiros de entrada e é fonte de problemas, principalmente não se tratando de análise de placas. Portanto é habitual definir a espessura e os vectores normais à superfície média da casca a partir dessas coordenadas e os programas já existentes usam tal informação extensivamente. No programa implementado pelo autor deste trabalho, com foram previamente construídos geradores de malha que permitem o cálculo analítico desses vectores normais, baseados na geometria computacional, o ficheiro de entrada apenas possui as coordenadas dos nós na superfície média da casca e é portanto muito simples e fácil de ler. Por outro lado, o facto desses vectores serem calculados analiticamente permite que as suas derivadas também o sejam o que é muito importante para a análise de sensibilidades da geometria.

Todas as subrotinas foram criadas e ensaiadas pelo autor deste trabalho. É ainda salientável que a notação usada nesta parte do relatório segue de perto a utilizada pelo programa, com o intuito de facilitar a sua leitura e modificação pelo leitor/utilizador.

3.1.1 Características dos elementos degenerados de tridimensionais:

Os elementos finitos para análise de cascas com uma formulação baseada nos meios contínuos, em particular degenerados de elementos tridimensionais, são muito populares e antigos [AHM70]. A razão de tal popularidade baseia-se na sua generalidade, e principalmente na simplicidade da sua formulação, em relação aos elementos de casca DK (Discretos de Kirchhoff) ou aos elementos baseados noutras teorias de cascas.

As características fundamentais do elemento são os graus de liberdade, 3 componentes do deslocamento e 2 rotações em cada nó. A tensão normal à superfície média da casca é considerada nula. Assume-se que os segmentos rectos originalmente normais à superfície média da casca permanecem rectos após deformação.

Os elementos degenerados originais (Ahmad [AHM70]) permitem resultados satisfatórios em cascas moderadamente espessas. No entanto, para cascas finas, o uso de integração completa o elemento fica excessivamente rígido quer em termos de efeitos de membrana quer de corte. O uso de integração reduzida, aparentemente eficaz na atenuação desse excesso de rigidez induz no entanto, para condições de contorno pouco restritivas do movimento, o aparecimento de mecanismos ou pelo menos de frequências naturais de vibração anormalmente baixas e modos espúrios de membrana, facto aliás verificado pelo autor.

Vários autores modificaram o elemento original, recorrendo a técnicas de melhoria do campo de deformação [HUA86], [BAT93], [RHI88] para referir apenas alguns, de modo a evitar o efeito de rigidificação para as pequenas espessuras.

As técnicas referidas, baseiam-se basicamente na substituição dos termos da deformação referentes a efeitos de corte e membrana por outros obtidos da interpolação do valor destes num conjunto discreto de pontos dentro do elemento.

Certos autores constroem o campo de deformação baseando-se numa teoria de cascas [PAR91] enquanto outros [BAT93] usam a teoria geral dos meios contínuos. Neste trabalho segue-se a segunda via, por facilidade de formulação.

Neste trabalho foram implementadas várias versões dos campos de deformação, de forma a comparar-se resultados e a concluir-se acerca da utilização dos vários tipos de elementos.

Em relação à análise não-linear geométrica, os elementos permitem rotações arbitrárias, existindo um esquema exacto de actualização dos vectores normais à superfície média e incorpora-se termos baseados na aproximação quadrática do esquema anterior na formulação da matriz de rigidez. Não existe igualmente qualquer restrição em relação aos deslocamentos

Os elementos de casca permitem uma fácil modelação de estruturas laminadas, através da construção de uma matriz de elasticidade, D , obtida das propriedades elásticas de cada lâmina. Esse aspecto foi pouco explorado neste trabalho, embora o elemento implementado permita o uso de um laminado até 6 lâminas. O autor deste trabalho tem no entanto a ideia que, por si só, a modelação realista de materiais laminados requereria um trabalho muito extenso e portanto esse aspecto, tal como o da modelação de materiais compostos, fica posto de lado neste trabalho.

O facto do elemento degenerado ter uma formulação próxima dos elementos adequados a meios contínuos, facilita a formulação de leis constitutivas não-lineares sem que seja necessário recorrer a formulações específicas em coordenadas curvilíneas adequadas a cascas [CRI97]. É bem conhecido o tratamento [HUA89] elasto-plástico de laminados usando a teoria clássica da elasto-plasticidade anisotrópica. Embora não seja excessivamente complexa a inclusão desse comportamento no programa criado pelo autor, optou-se pela exploração do comportamento elástico geométricamente não-linear, em detrimento da implementação de novas leis constitutivas.

Assim, deu-se ênfase à clareza da formulação elástica, com "grandes" deslocamentos e "grandes" rotações. Apresentam-se todas as matrizes elementares tal como foram implementadas e

os pormenores de implementação quase sempre ignorados nos artigos publicados em jornais e revistas.

As formulações que se seguem não são precisamente idênticas às comumente presentes em artigos sobre o tema e o autor deduziu certas expressões como a da rigidez devida às grandes rotações, e modificou outras como a expressão para a derivada do deslocamento total em que se usa uma actualização exacta dos vectores normais em cada iteração. O referencial local é também distinto do habitual. Convém lembrar que os vectores normais baseados na geometria computacional são conhecidos inicialmente, tal como as coordenadas nodais.

Sobre a discussão do número de nós do elemento a implementar, os elementos que no passado eram considerados satisfatórios [BAT93] possuindo 16 ou 25 nós, são excessivamente pesados para o tipo de exemplos realizados neste trabalho e são pouco ou nada usados em programas comerciais. O elemento de 4 nós sofre de excesso de rigidez ainda não completamente corrigido [BAT86], tem dificuldades de modelação de esforços de membrana e aproxima grosseiramente a geometria. O elemento triangular de 6 nós, inicialmente estudado, parece ter caído em desuso, com o aparecimento dos geradores automáticos de quadriláteros. O elemento Serendipity de 8 nós parece muito atractivo, mas sofre do problema habitual destes elementos que é o mau mapeamento isoparamétrico [BAT93] e os resultados pioram se a malha se torna muito distorcida, facto aliás possível em problemas de optimização. Escolhe-se assim o elemento de 9 nós, com funções de forma de Lagrange, o qual parece um bom compromisso, nas condições deste trabalho, entre resultados e complexidade.

3.2 Sistemas de coordenadas

O elemento implementado deriva da família de elementos de casca degenerados desólido e a seguinte figura mostra o elemento, os seus nós e sistemas de coordenadas.

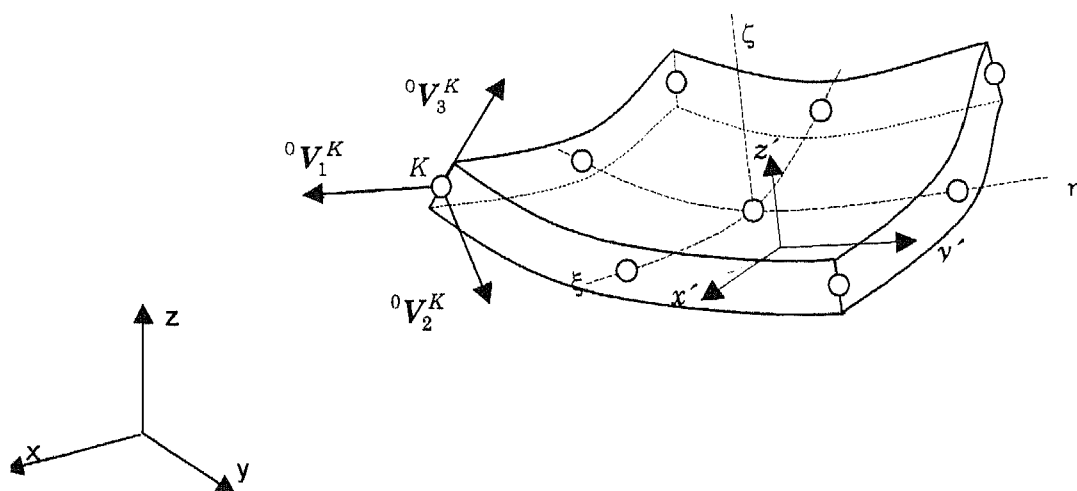


Fig. 3.1 O elemento degenerado de 9 nós e os sistemas de coordenadas

A formulação do elemento utiliza os quatro sistemas de eixos representados na figura, sendo um deles, correspondente às coordenadas naturais, curvilineo.

3.2.1 Coordenadas globais

Na criação da malha estabelece-se implicitamente uma base ortonormada de componentes $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$.

Nessa base são expressos os vectores nodais de deslocamento linear :

$$u = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k} \quad (3.1)$$

3.2.2 Coordenadas nodais

É definido, para cada nó da malha, um sistema ortonormado, a partir de um vector ${}^0V_3^K$ definido na fase de geração automática de malha (instante 0), com base na geometria computacional.

Assim, segue-se o seguinte esquema:

- ${}^0V_3^K$ é o versor normal à superfície média da casca no nó K .
- ${}^0V_1^K = \hat{j} \times {}^0V_3^K$ se $\hat{j}$ não é paralelo a ${}^0V_3^K$
- ${}^0V_1^K = \hat{k}$ se $\hat{j}$ é paralelo a ${}^0V_3^K$
- ${}^0V_2^K = {}^0V_3^K \times {}^0V_1^K$

O sistema nodal permite o estabelecimento de 2 graus de liberdade de rotação, θ_2 e θ_1 em torno de ${}^0V_1^K$ e ${}^0V_2^K$ respectivamente.

3.2.3 Coordenadas naturais

O sistema ξ, η, ζ de coordenadas naturais, curvilíneo é definido através do mapeamento elementar de 2º grau e permite a definição de uma coordenada ao longo da espessura nodal como $z_K = \zeta a_K$, sendo a_K a espessura no nó K .

3.2.4 Coordenadas locais

Para este sistema, baseado no anterior existem várias metodologias possíveis, mas aqui pretende-se a existencia de simetria* entre este sistema ortogonal e o anterior, não ortogonal, para isso segue-se o procedimento de [HUG87]

Podem facilmente definir-se tangentes às curvas $\eta=cte$ e $\xi=cte$.

Assim, respectivamente,

$$\begin{aligned} e_\xi &= \frac{\mathbf{x}_{,\xi}}{\|\mathbf{x}_{,\xi}\|} \\ e_\eta &= \frac{\mathbf{x}_{,\eta}}{\|\mathbf{x}_{,\eta}\|} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Um versor normal aos dois anteriores é simplesmente

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{e}_\xi \times \mathbf{e}_\eta}{\|\mathbf{e}_\xi \times \mathbf{e}_\eta\|} \quad (3.3)$$

Os vectores $\mathbf{l}, \mathbf{m}$ tangentes à superfície são escolhidos tais que o ângulo formado entre $\mathbf{l}$ e $\mathbf{e}_\xi$ seja igual ao ângulo formado entre $\mathbf{m}$ e $\mathbf{e}_\eta$.

Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{l} &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{e}_\alpha - \mathbf{e}_\beta) \\ \mathbf{m} &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{e}_\alpha + \mathbf{e}_\beta) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Com

* Devido à interpolação de corte, que irá ser discutida num capítulo seguinte

$$\begin{aligned}
 e_\alpha &= \frac{e_\xi + e_\eta}{\|e_\xi + e_\eta\|} \\
 e_\beta &= \frac{n \times e_\alpha}{\|n \times e_\alpha\|}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

A matriz ortogonal de transformação de 2ª ordem do sistema global para o local é:

$$T = [l, m, n] \tag{3.6}$$

Neste trabalho, as componentes dos tensores quando definidos no referencial local, são identificadas pelo sobrescrito '.

3.3 Campos de posição e deslocamento

3.3.1 Posição

O mapeamento por elementos finitos permite a determinação da posição de um ponto dentro de um elemento a partir das posições dos nós desse elemento. De facto, tal ponto pode não verificar a equação da superfície computacional ou analítica da casca, o que significa que a malha de elementos finitos apenas aproxima geometricamente a superfície real.

Para um elemento qualquer, com N nós, a posição de um ponto, definida no referencial global é:

$${}^t r = \sum_{i=1}^N N_i(\xi, \eta) [{}^t r_{oi} + z_i {}^t V_3^i] \tag{3.7}$$

t - instante

Sendo N_i a função de interpolação para o nó i . Neste trabalho usam-se os polinómios de Lagrange com a forma já conhecida [ZIE91]. ${}^t r_{oi}$ é a posição para o instante t , no referencial global, do nó i do elemento.

3.3.2 Deslocamento

Como o deslocamento entre 0 e t é a diferença de posição, pode escrever-se, usando a expressão acima, o deslocamento em t e o seu incremento como:

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{u} &= {}^t\mathbf{r} - {}^0\mathbf{r} \\ \Delta\mathbf{u} &= {}^{t+\Delta t}\mathbf{u} - {}^t\mathbf{u} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{r} - {}^t\mathbf{r} \end{aligned} \quad (3.8)$$

resultando

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{u} &= \sum_{i=1}^N N_i \left[{}^t\mathbf{u}_{oi} + z_i \left({}^t\mathbf{V}_3^i - {}^0\mathbf{V}_3^i \right) \right] \\ \Delta\mathbf{u} &= \sum_{i=1}^N N_i \left[\Delta\mathbf{u}_{oi} + z_i \Delta\mathbf{V}_3^i \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde $\Delta\mathbf{V}_3^i = {}^{t+\Delta t}\mathbf{V}_3^i - {}^t\mathbf{V}_3^i$

A avaliação de $\Delta\mathbf{V}_3^i$ para rotações arbitrárias pode ser efectuada através de uma expressão explícita em termos de incrementos de rotação em torno dos três eixos do referencial global. No entanto, para cascas com continuidade geométrica C_1 é usual definir os incrementos de rotação $\Delta\theta_1$ e $\Delta\theta_2$ em torno de eixos locais. É de salientar que a avaliação de $\Delta\mathbf{V}_3^i$ neste trabalho é exacta para o termo correspondente às forças internas equivalentes e usa-se uma aproximação de 2ª ordem [BAT96] para avaliar a contribuição para a rigidez. Aliás, como se usa uma formulação incremental baseada na matriz de rigidez tangente, a aproximação quadrática para o termo da rigidez é necessária.

Observa-se na figura 3.2 a representação para o instante t , do sistema nodal para um nó i , e a convenção usada neste trabalho para as variáveis de rotação.

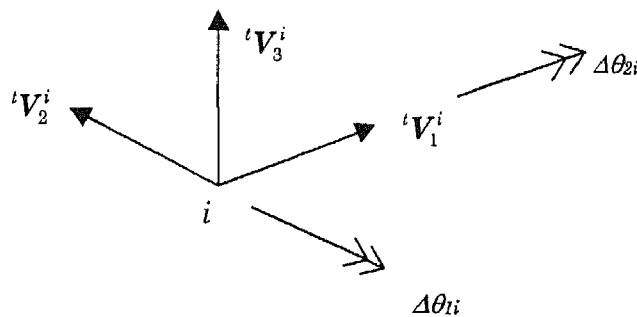


Fig. 3.2 Convenção das variáveis de rotação nodal

A equação de avaliação de ΔV_3^i , já deduzida para o caso geral, no capítulo 2 pode ser aqui repetida, mas usando a convenção anterior:

$$\Delta V_3^i = \frac{\sin \Delta \theta}{\Delta \theta} \left(-\Delta \theta_{2i} {}^t V_2^i - \Delta \theta_{1i} {}^t V_1^i \right) + \frac{1 - \cos \Delta \theta}{\Delta \theta^2} \left[-(\Delta \theta_{1i}^2 + \Delta \theta_{2i}^2) {}^t V_3^i \right] \quad (3.10)$$

Esta fórmula é usada directamente numa subrotina que actualiza, em cada iteração, os vectores (aproximadamente) normais à superfície média deformada. Para se obter uma aproximação quadrática de modo a incluir um termo da rotação na matriz de rigidez, recorre-se à equação (3.10) fazendo:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta \theta}{\Delta \theta} &= 1 \\ \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \Delta \theta}{\Delta \theta^2} &= \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{\sin \Delta \theta}{\Delta \theta} = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (3.11)$$

o vector ΔV_3^i pode ser determinado aproximadamente

$$\Delta V_3^i \cong -{}^t V_1^i \Delta \theta_{1i} - {}^t V_2^i \Delta \theta_{2i} - \frac{1}{2} (\Delta \theta_{1i}^2 + \Delta \theta_{2i}^2) {}^t V_3^i \quad (3.12)$$

Obtendo-se assim o incremento de deslocamento

$$\Delta u = \sum_{i=1}^N N_i \left[\Delta u_{oi} + z_i \left(-{}^t V_1^i \Delta \theta_{1i} - {}^t V_2^i \Delta \theta_{2i} - 0.5 (\Delta \theta_{1i}^2 + \Delta \theta_{2i}^2) {}^t V_3^i \right) \right] \quad (3.13)$$

Na forma matricial :

$$\Delta u = \sum_{i=1}^N N_i \left[I_3, -z_i \left\{ {}^t V_1^i + 0.5 \Delta \theta_{1i}^2 {}^t V_3^i \right\} \left\{ {}^t V_2^i + 0.5 \Delta \theta_{2i}^2 {}^t V_3^i \right\} \right] \cdot \Delta a_i = \sum_{i=1}^N N_i \cdot \Delta a_i \quad (3.14)$$

em que N_i é a função de forma matricial correspondente ao nó i . Estas funções de forma são as usadas na construção da matriz de massa e no cálculo das forças nodais equivalentes.

Para o caso linear, a equação (3.14) vem

$$\Delta \mathbf{u} = \sum_{i=1}^N N_i \left[\Delta \mathbf{u}_{oi} + z_i \left(-{}^0V_1^i \Delta \theta_{1i} - {}^0V_2^i \Delta \theta_{2i} \right) \right] \quad (3.15)$$

As variáveis nodais, na forma incremental são habitualmente agrupadas vectorialmente :

$$\Delta \mathbf{a}_i = \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \\ \Delta \theta_1 \\ \Delta \theta_2 \end{Bmatrix}_i \quad (3.16)$$

ou, reunindo todos os nós de um elemento e ,

$$\Delta \mathbf{a}_e = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{a}_9 \end{Bmatrix}_e \quad (3.17)$$

3.3.3 Transformações de tensores de 1ª ordem

Para o caso da transformação de vectores entre os referenciais de coordenadas naturais e globais, apresenta-se de seguida o tensor de 2ª ordem usado para essa transformação.

Derivando o vector posição em ordem às coordenadas naturais, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}^t\mathbf{r}}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \left[{}^t\mathbf{r}_{oi} + z_i {}^t\mathbf{V}_3^i \right] \\ \frac{\partial {}^t\mathbf{r}}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \left[{}^t\mathbf{r}_{oi} + z_i {}^t\mathbf{V}_3^i \right] \\ \frac{\partial {}^t\mathbf{r}}{\partial \zeta} &= \sum_{i=1}^N N_i \frac{a_i}{2} {}^t\mathbf{V}_3^i \end{aligned} \quad (3.18)$$

A transformação

$$\begin{bmatrix} u_{,x} & v_{,x} & w_{,x} \\ u_{,y} & v_{,y} & w_{,y} \\ u_{,z} & v_{,z} & w_{,z} \end{bmatrix} = {}^t\mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} u_{,\xi} & v_{,\xi} & w_{,\xi} \\ u_{,\eta} & v_{,\eta} & w_{,\eta} \\ u_{,\zeta} & v_{,\zeta} & w_{,\zeta} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

é realizada à custa das derivadas (3.18), já que

$${}^t\mathbf{J} = \begin{bmatrix} {}^t\mathbf{r}_{,\xi} \\ {}^t\mathbf{r}_{,\eta} \\ {}^t\mathbf{r}_{,\zeta} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Para a transformação de vectores definidos no referencial global para o referencial local, a matriz de transformação já foi definida como:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}] = \begin{bmatrix} x_{,x'} & x_{,y'} & x_{,z'} \\ y_{,x'} & y_{,y'} & y_{,z'} \\ z_{,x'} & z_{,y'} & z_{,z'} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Dada a ortogonalidade de cada um dos referenciais,

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T \quad (3.22)$$

A matriz correspondente à transformação entre coordenadas locais e naturais é escrita como:

$$\begin{bmatrix} \xi_{,x'} & \eta_{,x'} & \zeta_{,x'} \\ \xi_{,y'} & \eta_{,y'} & \zeta_{,y'} \\ \xi_{,z'} & \eta_{,z'} & \zeta_{,z'} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{J}^{-1} \quad (3.23)$$

Estas transformações são necessárias em vários pontos do programa e foram criadas subrotinas que as executam.

3.4 Extensão

Os elementos aqui discutidos possuem interpolação de extensão de corte e/ou membrana.

A deformação baseada no deslocamento, as matrizes interpoladoras, os vários pontos de amostragem usualmente adoptados e a formulação Lagrangeana total são detalhados neste capítulo e todas as matrizes expostas estão na sua forma adequada a implementação.

3.4.1 Derivadas cartesianas dos deslocamentos

As derivadas naturais do vector incremento de deslocamento, podem ser obtidas imediatamente a partir desse mesmo vector incremento de deslocamento, usando a aproximação de 2ª ordem como:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \left[\Delta \mathbf{u}_{oi} + z_i \left(-{}^tV_1^i \Delta \theta_{1i} - {}^tV_2^i \Delta \theta_{2i} - 0.5(\Delta \theta_{1i}^2 + \Delta \theta_{2i}^2) {}^tV_3^i \right) \right] \\ \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \left[\Delta \mathbf{u}_{oi} + z_i \left(-{}^tV_1^i \Delta \theta_{1i} - {}^tV_2^i \Delta \theta_{2i} - 0.5(\Delta \theta_{1i}^2 + \Delta \theta_{2i}^2) {}^tV_3^i \right) \right] \\ \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \zeta} &= \sum_{i=1}^N N_i \frac{a_i}{2} \left(-{}^tV_1^i \Delta \theta_{1i} - {}^tV_2^i \Delta \theta_{2i} - 0.5(\Delta \theta_{1i}^2 + \Delta \theta_{2i}^2) {}^tV_3^i \right)\end{aligned}\quad (3.24)$$

ou na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} [I_3] & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \zeta {}^t\mathbf{g}_1^i & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \zeta {}^t\mathbf{g}_2^i \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} [I_3] & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \zeta {}^t\mathbf{g}_1^i & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \zeta {}^t\mathbf{g}_1^i \\ [0]_{3 \times 3} & N_i {}^t\mathbf{g}_1^i & N_i {}^t\mathbf{g}_2^i \end{bmatrix} \cdot \Delta \mathbf{a}_i \quad (3.25)$$

em que

$$\begin{aligned}{}^t\mathbf{g}_1^i &= -0.5a_i ({}^tV_1^i + 0.5\Delta \theta_1 {}^tV_3^i) \\ {}^t\mathbf{g}_2^i &= -0.5a_i ({}^tV_2^i + 0.5\Delta \theta_2 {}^tV_3^i)\end{aligned}\quad (3.26)$$

O caso linear é obtido desprezando os termos não-lineares.

É necessário referir que os termos não-lineares em termos de acréscimo de rotação incluídos nas derivadas do acréscimo de deslocamento apenas são efectivamente incluídos na matriz de rigidez tangente se existir actualização iterativa desta. Se se usar um método aproximado de actualização da matriz (BFGS por exemplo) esta inclusão é apenas realizada para o vector de forças internas.

As derivadas cartesianas em relação à configuração t do acréscimo de deslocamento podem ser obtidas usando a regra da derivação em cadeia:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial x} &= \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \xi} {}^t J_{11}^{-1} + \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \eta} {}^t J_{12}^{-1} + \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \zeta} {}^t J_{13}^{-1} \\ \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial y} &= \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \xi} {}^t J_{21}^{-1} + \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \eta} {}^t J_{22}^{-1} + \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \zeta} {}^t J_{23}^{-1} \\ \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial z} &= \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \xi} {}^t J_{31}^{-1} + \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \eta} {}^t J_{32}^{-1} + \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \zeta} {}^t J_{33}^{-1}\end{aligned}\quad (3.27)$$

Os termos ${}^t J_{ij}^{-1}$ correspondem aos elementos da matriz inversa da matriz jacobiana.

Substituindo as derivadas em ordem às coordenadas naturais, fazendo $\Delta \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{Bmatrix}$ e

rearranjando matricialmente:

$$\begin{Bmatrix} \partial \Delta u / \partial^t x \\ \partial \Delta v / \partial^t x \\ \partial \Delta w / \partial^t x \\ \partial \Delta u / \partial^t y \\ \partial \Delta v / \partial^t y \\ \partial \Delta w / \partial^t y \\ \partial \Delta u / \partial^t z \\ \partial \Delta v / \partial^t z \\ \partial \Delta w / \partial^t z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} {}^t N_{i,x} & 0 & 0 & {}^t g_{1x}^i \cdot {}^t G_1^i & {}^t g_{1x}^i \cdot {}^t G_1^i \\ 0 & {}^t N_{i,x} & 0 & {}^t g_{1x}^i \cdot {}^t G_2^i & {}^t g_{2x}^i \cdot {}^t G_2^i \\ 0 & 0 & {}^t N_{i,x} & {}^t g_{1x}^i \cdot {}^t G_3^i & {}^t g_{2x}^i \cdot {}^t G_3^i \\ {}^t N_{i,y} & 0 & 0 & {}^t g_{1y}^i \cdot {}^t G_1^i & {}^t g_{2y}^i \cdot {}^t G_1^i \\ 0 & {}^t N_{i,y} & 0 & {}^t g_{1y}^i \cdot {}^t G_2^i & {}^t g_{2y}^i \cdot {}^t G_2^i \\ 0 & 0 & {}^t N_{i,y} & {}^t g_{1y}^i \cdot {}^t G_3^i & {}^t g_{2y}^i \cdot {}^t G_3^i \\ {}^t N_{i,z} & 0 & 0 & {}^t g_{1z}^i \cdot {}^t G_1^i & {}^t g_{2z}^i \cdot {}^t G_1^i \\ 0 & {}^t N_{i,z} & 0 & {}^t g_{1z}^i \cdot {}^t G_2^i & {}^t g_{2z}^i \cdot {}^t G_2^i \\ 0 & 0 & {}^t N_{i,z} & {}^t g_{1z}^i \cdot {}^t G_3^i & {}^t g_{2z}^i \cdot {}^t G_3^i \end{bmatrix} \cdot \Delta \mathbf{a}_i \quad (3.28)$$

em que

$$\begin{aligned}
{}^t G_l^i &= \zeta \left({}^t J_{l1}^{-1} N_{i,\xi} + {}^t J_{l1}^{-1} N_{i,\eta} \right) + {}^t J_{l3}^{-1} N_i \\
{}^t N_{i,x} &= {}^t J_{11}^{-1} N_{i,\xi} + {}^t J_{12}^{-1} N_{i,\eta} \\
{}^t N_{i,y} &= {}^t J_{21}^{-1} N_{i,\xi} + {}^t J_{22}^{-1} N_{i,\eta} \\
{}^t N_{i,z} &= {}^t J_{31}^{-1} N_{i,\xi} + {}^t J_{32}^{-1} N_{i,\eta}
\end{aligned} \tag{3.29}$$

As igualdades (3.28) e (3.29) são de fácil dedução, mas por uma questão de compacidade o autor apresenta apenas os resultados finais. As derivadas (3.28) podem ser extendidas ao caso das derivadas dos acréscimos de deslocamento em relação às coordenadas originais, bastando substituir t por 0 nos termos envolvendo a inversa da matriz jacobiana. As derivadas cartesianas dos deslocamentos totais estão envolvidas no cálculo do acréscimo de extensão de Green e correspondem ao termo dos deslocamentos iniciais.

Pode obter-se as expressões para essas derivadas de forma imediata como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial {}^t \mathbf{u}}{\partial {}^0 x} &= \sum_{i=1}^N {}^0 N_{i,x} {}^t \mathbf{u}^i + \sum_{i=1}^N \frac{a_i}{2} \left(\zeta {}^0 N_{i,x} + {}^0 J_{13}^{-1} N_i \right) \left({}^t \mathbf{V}_3^i - {}^0 \mathbf{V}_3^i \right) \\
\frac{\partial {}^t \mathbf{u}}{\partial {}^0 y} &= \sum_{i=1}^N {}^0 N_{i,y} {}^t \mathbf{u}^i + \sum_{i=1}^N \frac{a_i}{2} \left(\zeta {}^0 N_{i,y} + {}^0 J_{23}^{-1} N_i \right) \left({}^t \mathbf{V}_3^i - {}^0 \mathbf{V}_3^i \right) \\
\frac{\partial {}^t \mathbf{u}}{\partial {}^0 z} &= \sum_{i=1}^N {}^0 N_{i,z} {}^t \mathbf{u}^i + \sum_{i=1}^N \frac{a_i}{2} \left(\zeta {}^0 N_{i,z} + {}^0 J_{33}^{-1} N_i \right) \left({}^t \mathbf{V}_3^i - {}^0 \mathbf{V}_3^i \right)
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Ao contrário da abordagem da maioria dos autores, neste trabalho não se explicita a diferença ${}^t \mathbf{V}_3^i - {}^0 \mathbf{V}_3^i$ em termos das variáveis nodais mas mantém-se essa diferença actualizada em cada iteração, usando a fórmula exacta de actualização (3.10). São necessários portanto dois grupos de vectores normais à superfície, um deles guarda os vectores originais e outro os actualizados.

3.4.2 Tensor de extensão de Green-Lagrange na formulação Lagrangeana total

Relembrando os conceitos analisados no primeiro capítulo,

$${}^{t+\Delta t} {}^0 \varepsilon_{ij} = {}^t {}^0 \varepsilon_{ij} + {}^0 \Delta \varepsilon_{ij} \tag{3.31}$$

em que

$${}_0\Delta\varepsilon_{ij} = {}_0e_{ij} + {}_0\eta_{ij} \quad (3.32)$$

com

$$\begin{aligned} {}_0e_{ij} &= 0.5({}_0\Delta u_{i,j} + {}_0\Delta u_{j,i} + {}_0^t u_{k,i} {}_0\Delta u_{k,j} + {}_0\Delta u_{k,i} {}_0^t u_{k,j}) \\ {}_0\eta_{ij} &= 0.5({}_0\Delta u_{k,i} {}_0\Delta u_{k,j}) \end{aligned} \quad (3.33)$$

a deformação virtual total é dada por

$$\delta^{t+\Delta t}{}_0\varepsilon_{ij} = \delta{}_0\Delta\varepsilon_{ij} \quad (3.34)$$

Resta portanto explicitar os tensores na forma matricial usando a discretização já realizada.

3.4.3 Matrizes deslocamento-extensão em coordenadas globais

3.4.3.1 Formulação geral

Antes de se particularizarem as matrizes elementares específicas do elemento em causa, é útil identificar, para qualquer elemento baseado na interpolação do campo de deslocamentos, as matrizes correspondentes aos termos do acréscimo de extensão. Dessa forma, a formulação do elemento torna-se bastante simplificada e qualquer utilizador poderá, se assim quiser, modificar o programa de uma forma concertada.

Partindo das derivadas do acréscimo de deslocamento e do deslocamento total:

$${}_0\mathbf{h} = \begin{Bmatrix} {}_0\mathbf{h}_1 \\ {}_0\mathbf{h}_2 \\ {}_0\mathbf{h}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial\Delta u/\partial^0x \\ \partial\Delta v/\partial^0x \\ \partial\Delta w/\partial^0x \\ \partial\Delta u/\partial^0y \\ \partial\Delta v/\partial^0y \\ \partial\Delta w/\partial^0y \\ \partial\Delta u/\partial^0z \\ \partial\Delta v/\partial^0z \\ \partial\Delta w/\partial^0z \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad {}_0^t\mathbf{h} = \begin{Bmatrix} {}_0^t\mathbf{h}_1 \\ {}_0^t\mathbf{h}_2 \\ {}_0^t\mathbf{h}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial_0^t u/\partial^0x \\ \partial_0^t v/\partial^0x \\ \partial_0^t w/\partial^0x \\ \partial_0^t u/\partial^0y \\ \partial_0^t v/\partial^0y \\ \partial_0^t w/\partial^0y \\ \partial_0^t u/\partial^0z \\ \partial_0^t v/\partial^0z \\ \partial_0^t w/\partial^0z \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

Os dois termos do acréscimo de extensão escrevem-se como:

$${}_0\mathbf{e} = \left[{}_0\mathbf{L}_0 + {}_0^t\mathbf{L}_1({}_0^t\mathbf{h}) \right] {}_0\mathbf{h} \quad (3.36)$$

e

$${}_0\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{2} {}_0\mathbf{L}_1({}_0\mathbf{h}) {}_0\mathbf{h} \quad (3.37)$$

em que

$${}_0\mathbf{L}_1({}_0\mathbf{h}) = \begin{bmatrix} {}_0\mathbf{h}_1^T & \boldsymbol{\theta}_3 & \boldsymbol{\theta}_3 \\ \boldsymbol{\theta}_3 & {}_0\mathbf{h}_2^T & \boldsymbol{\theta}_3 \\ \boldsymbol{\theta}_3 & \boldsymbol{\theta}_3 & {}_0\mathbf{h}_3^T \\ {}_0\mathbf{h}_2^T & {}_0\mathbf{h}_1^T & \boldsymbol{\theta}_3 \\ {}_0\mathbf{h}_3^T & \boldsymbol{\theta}_3 & {}_0\mathbf{h}_1^T \\ \boldsymbol{\theta}_3 & {}_0\mathbf{h}_3^T & {}_0\mathbf{h}_2^T \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

, e de forma análoga para ${}_0^t\mathbf{L}_1({}_0^t\mathbf{h})$.

$$\mathbf{L}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Após a discretização pelo método dos elementos finitos é possível relacionar ${}_0\mathbf{h}_i$ com o vector acréscimo das variáveis nodais, $\Delta\mathbf{a}$. Assim, ${}_0\mathbf{h}_i = {}_0\mathbf{H}_i \cdot \Delta\mathbf{a}$ ou na forma de somatório, para todos os NNOS de um elemento:

$${}_0\mathbf{h}_i = \sum_{k=1}^{NNOS} {}_0\mathbf{H}_i^k \cdot \Delta\mathbf{a}^k \quad (3.40)$$

Resulta assim para o acréscimo linear de extensão:

$${}_0\mathbf{e} = \left({}_0\mathbf{B}_{L0} + {}_0^t\mathbf{B}_{L1}({}_0^t\mathbf{a}) \right) \cdot \Delta\mathbf{a} \quad (3.41)$$

ou na forma de somatório:

$${}_0\mathbf{e} = \sum_{k=1}^{NNOS} ({}_0\mathbf{B}_{L0}^k + {}^t\mathbf{B}_{L1}^k({}^t\mathbf{a})) \Delta \mathbf{a}^k \quad (3.42)$$

Para o acréscimo não-linear de extensão:

$${}_0\eta = \frac{1}{2} {}_0\mathbf{B}_1(\Delta \mathbf{a}) \cdot \Delta \mathbf{a} \quad (3.43)$$

A forma geral das matrizes ${}_0\mathbf{B}_{L0}$, ${}_0\mathbf{B}_{L1}$ e ${}_0\mathbf{B}_1$ é importante para este trabalho, já que permite uma fácil particularização para os casos aqui discutidos e seguidamente expostos, ou outros do interesse do leitor. A forma explícita de ${}_0\mathbf{B}_{L0}$ é imediata, portanto aqui apresentam-se apenas ${}_0\mathbf{B}_{L1}$ e ${}_0\mathbf{B}_1$:

$${}_0\mathbf{B}_{L1}^k = \begin{bmatrix} {}^t\mathbf{h}_1^T \mathbf{H}_1^k \\ {}^t\mathbf{h}_2^T \mathbf{H}_2^k \\ {}^t\mathbf{h}_3^T \mathbf{H}_3^k \\ {}^t\mathbf{h}_2^T \mathbf{H}_1^k + {}^t\mathbf{h}_1^T \mathbf{H}_2^k \\ {}^t\mathbf{h}_3^T \mathbf{H}_1^k + {}^t\mathbf{h}_1^T \mathbf{H}_3^k \\ {}^t\mathbf{h}_3^T \mathbf{H}_2^k + {}^t\mathbf{h}_2^T \mathbf{H}_3^k \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

$${}_0\mathbf{B}_1^k = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{a}^{kT} \mathbf{H}_1^{kT} \mathbf{H}_1^k \\ \Delta \mathbf{a}^{kT} \mathbf{H}_2^{kT} \mathbf{H}_2^k \\ \Delta \mathbf{a}^{kT} \mathbf{H}_3^{kT} \mathbf{H}_3^k \\ \Delta \mathbf{a}^{kT} \mathbf{H}_2^{kT} \mathbf{H}_1^k + \Delta \mathbf{a}^{kT} \mathbf{H}_1^{kT} \mathbf{H}_2^k \\ \Delta \mathbf{a}^{kT} \mathbf{H}_3^{kT} \mathbf{H}_1^k + \Delta \mathbf{a}^{kT} \mathbf{H}_1^{kT} \mathbf{H}_3^k \\ \Delta \mathbf{a}^{kT} \mathbf{H}_3^{kT} \mathbf{H}_2^k + \Delta \mathbf{a}^{kT} \mathbf{H}_2^{kT} \mathbf{H}_3^k \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Para os acréscimos virtuais de extensão:

$$\delta {}_0\mathbf{e} = ({}_0\mathbf{B}_{L0} + {}^t\mathbf{B}_{L1}({}^t\mathbf{a})) \cdot \delta \Delta \mathbf{a} \quad (3.46)$$

$$\delta {}_0\eta = \frac{1}{2} \delta {}_0\mathbf{B}_1(\Delta \mathbf{a}) \cdot \Delta \mathbf{a} + \frac{1}{2} {}_0\mathbf{B}_1(\Delta \mathbf{a}) \cdot \delta \Delta \mathbf{a} = {}_0\mathbf{B}_1(\Delta \mathbf{a}) \cdot \delta \Delta \mathbf{a} \quad (3.47)$$

Nesta fase são necessários alguns comentários acerca do acréscimo linear de extensão. No caso de o vector das variáveis nodais, para além de deslocamentos, possuir rotações, o acréscimo ${}_0e$ depende de Δa não-linearmente. Esse facto, bem presente neste trabalho, necessita de um tratamento detalhado, como se observará. Sendo assim, antevê-se que:

$$\delta_0 e = \left(\delta_0 B_{L0}(\Delta a) + \delta_0 {}^t B_{L1}(\Delta a) \right) \cdot \Delta a + \left({}_0 B_{L0}(\Delta a) + {}_0 {}^t B_{L1}(\Delta a) \right) \cdot \delta \Delta a \quad (3.48)$$

3.4.3.2 Extensão linear

O termo correspondente à parte linear em termos de acréscimo de deslocamento do vector de acréscimo de extensão é:

$${}_0 e = \begin{Bmatrix} {}_0 e_{11} \\ {}_0 e_{22} \\ {}_0 e_{33} \\ 2{}_0 e_{12} \\ 2{}_0 e_{13} \\ 2{}_0 e_{23} \end{Bmatrix} \quad (3.49)$$

A matriz deslocamento-extensão é obtida recorrendo à decomposição já discutida:

$${}_0 {}^t B_{L0} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} {}_0 N_{i,x} & 0 & 0 & {}^t g_{1x0}^i G_1^i & {}^t g_{2x0}^i G_1^i & & & & \\ 0 & {}_0 N_{i,y} & 0 & {}^t g_{1y0}^i G_2^i & {}^t g_{2y0}^i G_2^i & & & & \\ 0 & 0 & {}_0 N_{i,z} & {}^t g_{1z0}^i G_3^i & {}^t g_{2z0}^i G_3^i & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ {}_0 N_{i,y} & {}_0 N_{i,x} & 0 & {}^t g_{1x0}^i G_2^i + {}^t g_{1y0}^i G_1^i & {}^t g_{2x0}^i G_2^i + {}^t g_{2y0}^i G_1^i & & & & \\ {}_0 N_{i,z} & 0 & {}_0 N_{i,x} & {}^t g_{1x0}^i G_3^i + {}^t g_{1z0}^i G_1^i & {}^t g_{2x0}^i G_3^i + {}^t g_{2z0}^i G_1^i & & & & \\ 0 & {}_0 N_{i,z} & {}_0 N_{i,y} & {}^t g_{1y0}^i G_3^i + {}^t g_{1z0}^i G_2^i & {}^t g_{2y0}^i G_3^i + {}^t g_{2z0}^i G_2^i & & & & \end{array} \right] \quad (3.50)$$

e

$${}_0 {}^t B_{L1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} l_{110} N_{i,x} & l_{210} N_{i,x} & l_{310} N_{i,x} & \Psi_{110}^i G_1^i & \Psi_{210}^i G_1^i & & & & \\ l_{120} N_{i,y} & l_{220} N_{i,y} & l_{320} N_{i,y} & \Psi_{120}^i G_2^i & \Psi_{220}^i G_2^i & & & & \\ l_{130} N_{i,x} & l_{230} N_{i,x} & l_{330} N_{i,x} & \Psi_{130}^i G_3^i & \Psi_{230}^i G_3^i & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{110} N_{i,y} + l_{120} N_{i,x} & l_{210} N_{i,y} + l_{220} N_{i,x} & l_{310} N_{i,y} + l_{320} N_{i,x} & \Psi_{120}^i G_1^i + \Psi_{110}^i G_2^i & \Psi_{220}^i G_1^i + \Psi_{210}^i G_2^i & & & & \\ l_{110} N_{i,z} + l_{130} N_{i,x} & l_{210} N_{i,z} + l_{230} N_{i,x} & l_{310} N_{i,z} + l_{330} N_{i,x} & \Psi_{130}^i G_1^i + \Psi_{110}^i G_3^i & \Psi_{230}^i G_1^i + \Psi_{210}^i G_3^i & & & & \\ l_{120} N_{i,z} + l_{130} N_{i,y} & l_{220} N_{i,z} + l_{230} N_{i,y} & l_{320} N_{i,z} + l_{330} N_{i,y} & \Psi_{130}^i G_2^i + \Psi_{120}^i G_3^i & \Psi_{230}^i G_2^i + \Psi_{220}^i G_3^i & & & & \end{array} \right] \quad (3.51)$$

As matrizes (3.50) a (3.51) podem ser deduzidas das derivadas cartesianas do deslocamento e do acréscimo de deslocamento escritas anteriormente (ver [BAT82]). Os termos ainda não conhecidos de ${}^t_0\mathbf{B}_{L1}$ podem escrever-se como:

$$l_{ij} = \frac{\partial^t u_i}{\partial^0 x_j} \quad (3.52)$$

$$\Psi_{ij}^k = \sum_{m=1}^3 {}^t g_{im}^k l_{mj}$$

No caso linear, existe apenas uma matriz de deformação e é dada por:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{L0} \quad (3.53)$$

3.4.3.3 Extensão não – linear

A matriz de deformação resultante do termo $\delta_0 \eta_{ij}$ que é a variação do termo quadrático do acréscimo de extensão pode ser escrita na seguinte forma:

$${}^t_0\mathbf{B}_1 = \left[\begin{array}{cccccc} m_{110}N_{i,x} & m_{210}N_{i,x} & m_{310}N_{i,x} & \Phi_{110}^i G_1^i & \Phi_{210}^i G_1^i & \dots \\ m_{120}N_{i,y} & m_{220}N_{i,y} & m_{320}N_{i,y} & \Phi_{120}^i G_2^i & \Phi_{220}^i G_2^i & \dots \\ m_{130}N_{i,x} & m_{230}N_{i,x} & m_{330}N_{i,x} & \Phi_{130}^i G_3^i & \Phi_{230}^i G_3^i & \dots \\ m_{110}N_{i,y} + m_{120}N_{i,x} & m_{210}N_{i,y} + m_{220}N_{i,x} & m_{310}N_{i,y} + m_{320}N_{i,x} & \Phi_{120}^i G_1^i + \Phi_{110}^i G_2^i & \Phi_{220}^i G_1^i + \Phi_{210}^i G_2^i & \dots \\ m_{110}N_{i,z} + m_{130}N_{i,x} & m_{210}N_{i,z} + m_{230}N_{i,x} & m_{310}N_{i,z} + m_{330}N_{i,x} & \Phi_{130}^i G_1^i + \Phi_{110}^i G_3^i & \Phi_{230}^i G_1^i + \Phi_{210}^i G_3^i & \dots \\ m_{120}N_{i,z} + m_{130}N_{i,y} & m_{220}N_{i,z} + m_{230}N_{i,y} & m_{320}N_{i,z} + m_{330}N_{i,y} & \Phi_{130}^i G_2^i + \Phi_{120}^i G_3^i & \Phi_{230}^i G_2^i + \Phi_{220}^i G_3^i & \dots \end{array} \right] \quad (3.54)$$

em que

$$m_{ij} = \frac{\partial \Delta u_i}{\partial^0 x_j} \quad (3.55)$$

$$\Phi_{ij}^k = \sum_{m=1}^3 {}^t g_{im}^k m_{mj}$$

O termo $\delta \eta^T \cdot {}^t_0\mathbf{S}$ pode ser escrito como:

$$\delta \eta^T \cdot {}^t_0 S = {}^t_0 B_{NL}^T \cdot S \cdot {}^t_0 B_{NL} \quad (3.56)$$

em que S é uma matriz de dimensões 9x9 cujos elementos são as componentes do 2º tensor de Piola-Kirchhoff e,

$${}^t_0 B_{NL}^i = \begin{bmatrix} {}_0N_{i,x} & 0 & 0 & {}^t g_{1x0}^i G_1^i & {}^t g_{2x0}^i G_1^i \\ 0 & {}_0N_{i,y} & 0 & {}^t g_{1y0}^i G_1^i & {}^t g_{2y0}^i G_1^i \\ 0 & 0 & {}_0N_{i,z} & {}^t g_{1z0}^i G_1^i & {}^t g_{2z0}^i G_1^i \\ {}_0N_{i,y} & 0 & 0 & {}^t g_{1x0}^i G_2^i & {}^t g_{2x0}^i G_2^i \\ 0 & {}_0N_{i,y} & 0 & {}^t g_{1y0}^i G_2^i & {}^t g_{2y0}^i G_2^i \\ 0 & 0 & {}_0N_{i,y} & {}^t g_{1z0}^i G_2^i & {}^t g_{2z0}^i G_2^i \\ {}_0N_{i,z} & 0 & 0 & {}^t g_{1x0}^i G_3^i & {}^t g_{2x0}^i G_3^i \\ 0 & {}_0N_{i,z} & 0 & {}^t g_{1y0}^i G_3^i & {}^t g_{2y0}^i G_3^i \\ 0 & 0 & {}_0N_{i,z} & {}^t g_{1z0}^i G_3^i & {}^t g_{2z0}^i G_3^i \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

agrupando para os 9 nós:

$${}^t_0 B_{NL} = [\dots {}^t_0 B_{NL}^i \dots], \quad i=1,2,3,\dots,9 \quad (3.58)$$

Este agrupamento depende obviamente do arranjo da matriz das tensões baseada no 2º tensor de Piola-Kirchhoff, e portanto existem várias formas possíveis para esta matriz.

3.4.4 Matriz deslocamento-extensão em coordenadas naturais

Um dos elementos implementados usa uma formulação da extensão de Green em coordenadas naturais, e é portanto necessário definir as matrizes de deslocamento-extensão correspondentes a essa formulação. Reescrevendo o acréscimo de extensão de Green, obtém-se:

$${}_0 \Delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial \xi_i} {}^0 J_j + \frac{\partial \Delta u}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial {}^t u}{\partial \xi_j} + \frac{\partial \Delta u}{\partial \xi_j} {}^0 J_i + \frac{\partial \Delta u}{\partial \xi_j} \cdot \frac{\partial {}^t u}{\partial \xi_i} + \frac{\partial \Delta u}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial \Delta u}{\partial \xi_j} \right) \quad (3.59)$$

em que J_i é a linha i da matriz jacobiana. A partir desta relação, escreve-se a matriz ${}^t_0 B_{L0}$ em coordenadas naturais como:

$${}^t_0 \mathbf{B}_{L0N} = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{HN}_1 \\ {}^0\mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{HN}_2 \\ {}^0\mathbf{J}_3 \cdot \mathbf{HN}_3 \\ {}^0\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{HN}_2 + {}^0\mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{HN}_1 \\ {}^0\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{HN}_3 + {}^0\mathbf{J}_3 \cdot \mathbf{HN}_1 \\ {}^0\mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{HN}_3 + {}^0\mathbf{J}_3 \cdot \mathbf{HN}_2 \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

em que $\mathbf{HN}_i$ é uma matriz análoga à $\mathbf{H}_i$ já referida (3.40), mas neste caso particularizada para o caso das coordenadas naturais.

Para as matrizes ${}^t_0 \mathbf{B}_{L1N}$ e ${}^t_0 \mathbf{B}_{1N}$ os resultados são análogos aos já obtidos para as expressões gerais das matrizes em coordenadas cartesianas (3.50), (3.51) sendo no entanto necessário substituir as coordenadas x, y, z por ξ, η, ζ .

Estas matrizes são usadas no elemento Q93, definido posteriormente neste capítulo, em conjunto com um esquema de interpolação para melhoria da deformação.

3.4.5 Transformação tensorial

As matrizes de deformação correspondentes ao termo linear podem ser transformadas para o sistema de coordenadas local da seguinte forma:

$${}^t_0 \bar{\mathbf{B}}_L = {}_0 \mathbf{ST} \cdot {}^t_0 \mathbf{B}_L \quad (3.61)$$

em que ${}_0 \mathbf{ST}$ é uma matriz correspondente à transformação de 4ª ordem da matriz de deformação.

$${}_0 \mathbf{ST} = \begin{bmatrix} {}^0l_x^2 & {}^0l_y^2 & {}^0l_z^2 & {}^0l_x {}^0l_y & {}^0l_x {}^0l_z & {}^0l_y {}^0l_z \\ {}^0m_x^2 & {}^0m_y^2 & {}^0m_z^2 & {}^0m_x {}^0m_y & {}^0m_x {}^0m_z & {}^0m_y {}^0m_z \\ {}^0n_x^2 & {}^0n_y^2 & {}^0n_z^2 & {}^0n_x {}^0n_y & {}^0n_x {}^0n_z & {}^0n_y {}^0n_z \\ 2{}^0l_x {}^0m_x & 2{}^0l_y {}^0m_y & 2{}^0l_z {}^0m_z & {}^0l_x {}^0m_y + {}^0m_x {}^0l_y & {}^0l_x {}^0m_z + {}^0m_x {}^0l_z & {}^0l_y {}^0m_z + {}^0m_y {}^0l_z \\ 2{}^0n_x {}^0l_x & 2{}^0n_y {}^0l_y & 2{}^0n_z {}^0l_z & {}^0n_x {}^0l_y + {}^0l_x {}^0n_y & {}^0n_z {}^0l_x + {}^0l_z {}^0n_x & {}^0n_y {}^0l_z + {}^0l_y {}^0n_z \\ 2{}^0m_x {}^0n_x & 2{}^0m_y {}^0n_y & 2{}^0m_z {}^0n_z & {}^0m_x {}^0n_y + {}^0n_x {}^0m_y & {}^0m_z {}^0n_x + {}^0n_z {}^0m_x & {}^0m_y {}^0n_z + {}^0n_y {}^0m_z \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

Os elementos ${}^0l, {}^0m, {}^0n$ são os versores do referencial local correspondentes à posição de referência.

A transformação para a matriz de extensão não-linear não é explicitamente necessária, já que se pode transformar a matriz 9x9 das tensões para coordenadas globais realizando as

operações apenas a nível das 6 componentes independentes das tensões evitando o elevado número de operações necessário à transformação de ${}^t\mathbf{B}_{NL}$.

No sistema local, apenas 5 componentes da extensão são considerados não nulos, já que

$$\varepsilon'_{z'z'}^{def} = 0$$

3.4.6 Interpolação tensorial da deformação

Os elementos de casca degenerados com formulação baseada unicamente na interpolação de campos de deslocamento apresentam excesso de rigidez para cascas de pequena espessura.

Uma solução artificial desse problema consiste em modificar o campo de deformações recorrendo a uma interpolação modificada desse campo, criando um campo assumido como mais adequado do que o baseado nos deslocamentos. Não deve existir repúdio por esse tipo de procedimento, já que o campo de deslocamentos é igualmente assumido, na maior parte das formulações de elementos finitos.

O primeiro trabalho usando essa técnica em cascas parece ter sido o de Bathe & Dvorkin [BAT86] para o elemento de 4 nós usando as componentes covariantes do campo de deformação. Vários autores usaram técnicas semelhantes para o elemento de 9 nós [HUA86], [BAT93], [RHI88]. Neste trabalho detalham-se técnicas semelhantes às usadas em [BAT93] e [HUA86]. Inicialmente esta metodologia aplicou-se a problemas lineares, mas a extensão para os problemas não-lineares foi realizada pelo autor de uma forma porventura distinta da realizada por [BAT93]. É salientável que, apesar do autor desconhecer a aplicação da metodologia de *Huang* em problemas não-lineares geométricos, ela é realizada neste trabalho aplicando-se a interpolação separada de corte e membrana em problemas como uma extensão do processo usado em problemas lineares. A formulação é apresentada para problemas lineares e a extensão ao caso geral é feita no fim da apresentação.

O autor deste trabalho implementou várias versões da interpolação tensorial de modo a que o utilizador do programa possa optar por uma. O elemento sem interpolação é neste trabalho identificado pelo símbolo Q90, o elemento com interpolação de corte com o símbolo Q91, o elemento com interpolação de corte e membrana com o símbolo Q92 e o elemento que usa a interpolação mista em coordenadas covariantes com o símbolo Q93.

As ideias baseiam-se na melhoria dos campos de deformação de corte transversal e/ou membrana através da avaliação de algumas componentes das deformações em sistemas de coordenadas adequados.

Mostram-se de seguida as formulações de interpolação de corte, de membrana e mista sendo esta última uma variação sobre o método proposto por Bathe [BAT93].

3.4.6.1 Interpolação de corte

Pode escrever-se o vector contendo as componentes transversais ou de corte em coordenadas naturais da extensão de corte como

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{\xi\xi} \\ \varepsilon_{\eta\xi} \end{Bmatrix} \quad (3.63)$$

Na análise não – linear geométrica essas componentes correspondem apenas à parte linear do acréscimo de extensão.

Com o objectivo de melhorar o valor dessas componentes, usam-se 12 pontos de amostragem dos valores dessas componentes, 6 para cada componente como a Fig. 3.3 mostra. Observam-se os pontos de amostragem das componentes de deformação e também a posição dos pontos de Gauss para a quadratura, onde habitualmente é avaliada a deformação baseada no deslocamento:

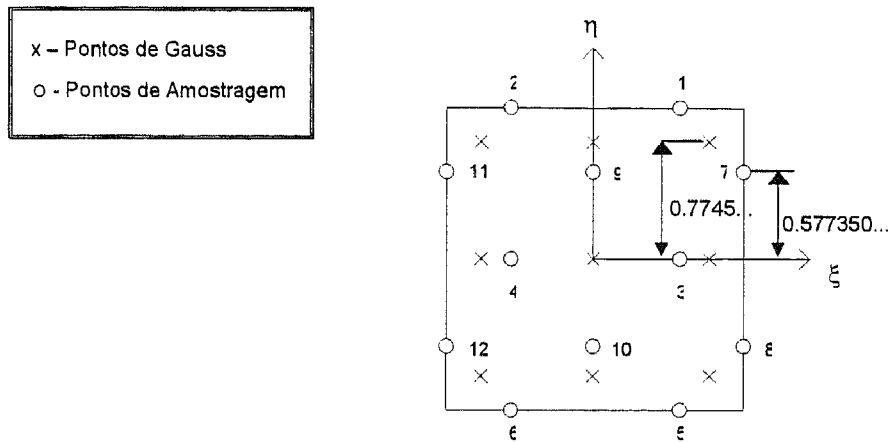


Fig. 3.3 Pontos de amostragem e pontos de Gauss para a interpolação de corte

Os pontos numerados de 1 a 6 são os usados para a interpolação de $\varepsilon_{\xi\xi}$ e os pontos numerados de 7 a 12 são usados para interpolar $\varepsilon_{\eta\xi}$. A posição dos pontos é a de [HUA89] mas outras combinações foram testadas. Pode afirmar-se que pontos mais próximos do centro do elemento tendem a diminuir a sua rigidez.

Usando esses pontos, pode escrever-se:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\xi\xi}^{Ass}(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^6 NC_i(\xi, \eta) \varepsilon_{\xi\xi}^{Des}(\xi_i, \eta_i, 0) \\ \varepsilon_{\eta\xi}^{Ass}(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=7}^{12} NC_i(\xi, \eta) \varepsilon_{\eta\xi}^{Des}(\xi_i, \eta_i, 0) \end{aligned} \quad (3.64)$$

onde o sobrescrito 'Ass' é a abreviatura de assumido, e sobrescrito 'Des' é a abreviatura de baseado no campo deslocamento. NC_i são as funções de interpolação gozando da propriedade das funções

de forma usadas no deslocamento : $NC_i(\xi_j, \eta_j) = \delta_i^j$. As funções NC_i são lineares numa das variáveis naturais e quadráticas noutra.

Note-se que apesar de, em coordenadas naturais, as componentes de corte serem independentes de ζ , a transformação para coordenadas locais impõe essa dependência.

A forma matricial da interpolação, fundamental para a construção da matriz B modificada é aqui escrita pelo autor, não é apresentada em qualquer artigo sobre o assunto. A metodologia usada para o caso linear será posteriormente extendida ao caso não-linear geométrico.

Pode separar-se a matriz B assumida em coordenadas naturais, B_{cn} em duas submatrizes B_{cn1} correspondente aos termo deixado intacto pela interpolação, ou seja baseado no

campo de deslocamentos e correspondente às componentes $\begin{Bmatrix} \varepsilon_{\xi\xi} \\ \varepsilon_{\eta\eta} \\ \varepsilon_{\zeta\zeta} \\ \varepsilon_{\xi\eta} \end{Bmatrix}$, e a submatriz B_{cn2}

correspondente às componentes $\begin{Bmatrix} \varepsilon_{\xi\zeta} \\ \varepsilon_{\eta\zeta} \end{Bmatrix}$ que sofrem modificação devido à interpolação. Assim:

$$B_{cn}|_{6 \times 45} = \begin{bmatrix} B_{cn1}|_{4 \times 45} \\ B_{cn2}|_{2 \times 45} \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

A matriz $B_{cn2}|_{2 \times 45}$ é obtida a partir da interpolação de 12 matrizes em coordenadas naturais $B|_{2 \times 45}$, obtidas do campo de deslocamento e avaliadas nos 12 pontos já representados, e correspondentes aos termos de corte da matriz B .

$$B_{cn2} = NC \cdot \underline{B}|_{24 \times 45} \quad (3.66)$$

A matriz NC é a matriz de interpolação de corte, que para a posição dos pontos acima pode ser escrita como:

$$NC = \begin{bmatrix} \frac{A\eta_1}{4} & 0 & \frac{B\eta_1}{4} & 0 & \frac{A\eta_2}{2} & 0 & \frac{B\eta_2}{2} & 0 & \frac{A\eta_1}{4} & 0 & \frac{B\eta_1}{4} & 0 & \mathbf{0}_{1 \times 12} \\ \mathbf{0}_{1 \times 12} & 0 & \frac{C\xi_1}{4} & 0 & \frac{D\xi_1}{4} & 0 & \frac{C\xi_2}{2} & 0 & \frac{D\xi_2}{2} & 0 & \frac{C\xi_3}{4} & 0 & \frac{D\xi_3}{4} \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

em que

$$\begin{aligned}
A &= 1 + \sqrt{3}\xi & s_1 &= s(1+s) \\
B &= 1 - \sqrt{3}\xi & s_2 &= 1 - s^2 \\
C &= 1 + \sqrt{3}\eta & s_3 &= s(1-s) \\
D &= 1 - \sqrt{3}\eta & s &= \xi, \eta
\end{aligned} \tag{3.68}$$

A matriz $\underline{B}|_{24 \times 45}$ é constituída pelas matrizes $\underline{B}|_{2 \times 45}$. Como estas últimas não estão explicitamente disponíveis, podem determinar-se à custa das matrizes $\underline{B}|_{6 \times 45}$ em coordenadas globais, já definidas neste capítulo (3.50). Assim, usando a matriz de transformação de 4ª ordem, mas aproveitando apenas as 2 últimas linhas, correspondentes às componentes da deformação interpoladas:

$$\underline{B}|_{2 \times 45} = \underline{S}_{GN}|_{2 \times 6} \cdot \underline{B}|_{6 \times 45} \tag{3.69}$$

e $\underline{S}_{GN}$ é determinada a partir das componentes da matriz jacobiana:

$$\underline{S}_{GN} = \begin{bmatrix} 2J_{11}J_{31} & 2J_{12}J_{32} & 2J_{13}J_{33} & J_{11}J_{32} + J_{12}J_{31} & J_{11}J_{33} + J_{13}J_{31} & J_{12}J_{33} + J_{13}J_{32} \\ 2J_{21}J_{31} & 2J_{22}J_{32} & 2J_{23}J_{33} & J_{21}J_{32} + J_{22}J_{31} & J_{21}J_{33} + J_{23}J_{31} & J_{22}J_{33} + J_{23}J_{32} \end{bmatrix} \tag{3.70}$$

A matriz $\underline{Bcn2}|_{2 \times 45}$ pode ser assim obtida por:

$$\underline{Bcn2}|_{2 \times 45} = \underline{NC}(\xi, \eta)_{2 \times 24} \cdot \underline{S}_{GN}|_{24 \times 72} \cdot \underline{B}|_{72 \times 45} \tag{3.71}$$

em que

$$\underline{B}|_{72 \times 45} = \begin{Bmatrix} \underline{B}(\xi_1, \eta_1, \zeta = 0) \\ \vdots \\ \underline{B}(\xi_{12}, \eta_{12}, \zeta = 0) \end{Bmatrix} \tag{3.72}$$

e

$$\underline{S}_{GN} = \begin{bmatrix} \underline{S}_{GN}(\xi_1, \eta_1, 0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \underline{S}_{GN}(\xi_{12}, \eta_{12}, 0) \end{bmatrix} \tag{3.73}$$

Como a matriz $\underline{B}|_{24 \times 45}$ está definida em coordenadas naturais e por razões de lei constitutiva todas as matrizes elementares devem estar definidas em coordenadas locais, é necessário transformar a matriz $\underline{Bcn}|_{6 \times 45}$ de forma a obter a matriz de deformação de corte em coordenadas locais. Tomando em consideração que em coordenadas locais, tal como em coordenadas naturais, apenas as 2 últimas componentes da deformação correspondem a efeitos de corte transversal:

$$\overline{\underline{B}}|_{2 \times 45} = \underline{S}_{NL}|_{2 \times 6} \underline{Bcn}|_{6 \times 45} \quad (3.74)$$

em que $\underline{S}_{NL}$ é uma matriz formalmente idêntica a $\underline{S}_{GN}$ mas os seus elementos são os correspondentes à transformação natural-local.

Pode obter-se $\underline{Bcn}|_{4 \times 45}$ a partir da matriz $\underline{B}$ definida em coordenadas globais, usando as 4 primeiras linhas da matriz de transformação de 4ª ordem:

$$\underline{Bcn1} = \underline{S}_{GN}^* \cdot \underline{B} \quad (3.75)$$

Em que $\underline{S}_{GN}^*$ é uma matriz correspondente cujas componentes são as contidas nas quatro primeiras linhas da matriz de transformação de 4ª ordem do tensor de extensão.

$$\underline{S}_{GN}^* = \begin{bmatrix} J_{11}^2 & J_{12}^2 & J_{13}^2 & J_{11}J_{11} & J_{11}J_{11} & J_{11}J_{11} \\ J_{21}^2 & J_{22}^2 & J_{23}^2 & J_{21}J_{22} & J_{21}J_{23} & J_{22}J_{33} \\ J_{31}^2 & J_{32}^2 & J_{33}^2 & J_{31}J_{32} & J_{31}J_{33} & J_{32}J_{33} \\ 2J_{11}J_{21} & 2J_{12}J_{22} & 2J_{13}J_{23} & J_{11}J_{22} + J_{12}J_{21} & J_{11}J_{23} + J_{13}J_{21} & J_{12}J_{23} + J_{13}J_{22} \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

Como conclusão pode escrever-se a matriz $\overline{\underline{B}}$ correspondente a efeitos de corte transversal como:

$$\overline{\underline{B}} = \underline{S}_{NL}(\xi, \eta, \zeta) \cdot \left[\frac{\underline{S}_{GN}^*(\xi, \eta, \zeta) \cdot \underline{B}(\xi, \eta, \zeta)}{NC(\xi, \eta) \cdot \underline{S}_{GN} \cdot \underline{B}} \right] \quad (3.77)$$

Para o caso não-linear geométrico:

$${}^t_0 \overline{\underline{B}}_L = {}^t_0 \underline{S}_{NL}(\xi, \eta, \zeta) \cdot \left[\frac{{}^t_0 \underline{S}_{GN}^*(\xi, \eta, \zeta) \cdot {}^t_0 \underline{B}_L(\xi, \eta, \zeta)}{NC(\xi, \eta) \cdot \underline{S}_{GN} \cdot {}^t_0 \underline{B}_L} \right] \quad (3.78)$$

Usando esta metodologia, o efeito da *locking* de corte é atenuado. Resta ainda o tratamento de um problema semelhante, que se prende com o *locking* de membrana. Este problema é tratado seguidamente.

3.4.6.2 Interpolação de membrana

As deformações de membrana só podem ser separadas das deformações de flexão no referencial local. É pois normal que alguns autores [HUA86] utilizem esse referencial para realizar a interpolação das deformações de membrana.

Pode representar-se o vector de deformação definido em coordenadas locais por

$${}^t_0\boldsymbol{\varepsilon}' = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^t u'}{\partial^0 x'} \\ \frac{\partial^t v'}{\partial^0 y'} \\ \frac{\partial^t u'}{\partial^0 y'} + \frac{\partial^t v'}{\partial^0 x'} \\ \frac{\partial^t u'}{\partial^0 z'} + \frac{\partial^t w'}{\partial^0 x'} \\ \frac{\partial^t v'}{\partial^0 z'} + \frac{\partial^t w'}{\partial^0 y'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^t_0\varepsilon'_s \\ {}^t_0\varepsilon'_t \end{Bmatrix} \quad (3.79)$$

Neste sistema de coordenadas pode separar-se as componentes (s) da deformação que actuam num plano tangente à superfície média e as que actuam (t) em planos perpendiculares a esta.

Parte de ${}^t_0\varepsilon'_s$ é devida a efeitos de membrana e outra parte é devida a efeitos de flexão.

$${}^t_0\varepsilon'_s = {}^t_0\varepsilon'_m + {}^t_0\varepsilon'_f \quad (3.80)$$

As componentes do deslocamento, no plano tangente, podem ser escritas separando, no caso linear, o deslocamento na superfície média com o deslocamento devido à rotação:

$$\begin{aligned} u' &= u'_0 + z'\theta_{x'} \\ v' &= v'_0 + z'\theta_{y'} \end{aligned} \quad (3.81)$$

As componentes da deformação correspondentes a efeitos de membrana obtêm-se como:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{mx'x'} &= u_{0,x'}' \\
\varepsilon_{my'y'} &= v_{0,y'}' \\
\varepsilon_{mx'y'} &= u_{0,y'}' + v_{0,x'}'
\end{aligned} \tag{3.82}$$

O autor deste trabalho usou várias estratégias de colocação dos pontos de amostragem, com funções lineares e quadráticas. Pode afirmar-se que a pontos de colocação mais interiores corresponde um comportamento mais flexível do elemento. A interpolação de membrana usa os mesmos pontos anteriores.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{mx'x'}^{Ass}(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^6 NC_i(\xi, \eta) \varepsilon_{mx'x'}^{Des}(\xi_i, \eta_i, 0) \\
\varepsilon_{my'y'}^{Ass}(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=7}^{12} NC_i(\xi, \eta) \varepsilon_{my'y'}^{Des}(\xi_i, \eta_i, 0) \\
\varepsilon_{mx'y'}^{Ass(a)}(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 NC_i(\xi, \eta) \varepsilon_{mx'y'}^{Des}(\xi_i, \eta_i, 0) \\
\varepsilon_{mx'y'}^{Ass(b)}(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{2} \sum_{i=7}^{12} NC_i(\xi, \eta) \varepsilon_{mx'y'}^{Des}(\xi_i, \eta_i, 0) \\
\varepsilon_{mx'y'}^{Ass} &= \varepsilon_{mx'y'}^{Ass(a)} + \varepsilon_{mx'y'}^{Ass(b)}
\end{aligned} \tag{3.83}$$

A separação dos termos correspondentes a efeitos de membrana dos termos correspondentes a efeitos de flexão, em termos matriciais, foi realizada neste trabalho da seguinte forma:

$$\overline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} m & m & m & f & f \\ m & m & m & f & f \\ m & m & m & f & f \\ c & c & c & c & c \\ c & c & c & c & c \end{bmatrix} \tag{3.84}$$

Apenas os termos m e/ou c são modificados.

A matriz $\overline{\mathbf{B}}$ pode ser escrita como:

$$\overline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{B}}_m & \overline{\mathbf{B}}_f \\ \overline{\mathbf{B}}_c & \end{bmatrix} \tag{3.85}$$

A matriz correspondente aos efeitos de membrana é interpolada da forma já vista, a forma matricial é:

$$\bar{\mathbf{B}}_m|_{3 \times 45} = \mathbf{NM}(\xi, \eta)|_{3 \times 36} \cdot \mathbf{B}_m|_{36 \times 45} \quad (3.86)$$

A matriz contendo os valores obtidos nos pontos de amostragem é:

$$\mathbf{B}_m|_{36 \times 45} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_m(\xi_1, \eta_1, \zeta = 0) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{B}}_m(\xi_{12}, \eta_{12}, \zeta = 0) \end{Bmatrix} \quad (3.87)$$

A matriz $\mathbf{NM}(\xi, \eta)$ deduzida pelo autor para os pontos já discutidos é:

$$\mathbf{NM} = \begin{bmatrix} \frac{A\eta_1}{4} & 0 & 0 & \frac{B\eta_1}{4} & 0 & 0 & \frac{A\eta_2}{2} & 0 & 0 & \frac{B\eta_2}{2} & 0 & 0 & \frac{A\eta_3}{4} & 0 & 0 & \frac{B\eta_3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A\eta_1}{8} & 0 & 0 & \frac{B\eta_1}{8} & 0 & 0 & \frac{A\eta_2}{4} & 0 & 0 & \frac{B\eta_2}{4} & 0 & 0 & \frac{A\eta_3}{8} & 0 & 0 & \frac{B\eta_3}{8} \\ \\ \frac{C\xi_1}{4} & 0 & 0 & \frac{D\xi_1}{4} & 0 & 0 & \frac{C\xi_2}{2} & 0 & 0 & \frac{D\xi_2}{2} & 0 & 0 & \frac{C\xi_3}{4} & 0 & 0 & \frac{D\xi_3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C\eta_1}{8} & 0 & 0 & \frac{D\eta_1}{8} & 0 & 0 & \frac{C\eta_2}{4} & 0 & 0 & \frac{D\eta_2}{4} & 0 & 0 & \frac{C\eta_3}{8} & 0 & 0 & \frac{D\eta_3}{8} \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

Como conclusão, se se usar interpolação de corte e de membrana, resulta, para o caso linear:

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{NM} \cdot \mathbf{B}_m + \bar{\mathbf{B}}_f \\ \mathbf{S}_{NL} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{GN} \cdot \mathbf{B} \\ \mathbf{NC} \cdot \mathbf{S}_{GN} \cdot \mathbf{B} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

e de forma semelhante para o caso não-linear geométrico.

3.4.6.3 Interpolação mista em coordenadas naturais.

A metodologia descrita é bastante dispendiosa em termos computacionais e certos autores [BAT93] preferem adoptar uma interpolação num único referencial, sem separar a deformação de flexão da de membrana. Se se usar um referencial curvilíneo, geralmente não-ortogonal, correspondente às linhas ξ, η, ζ , é possível diminuir bastante o tempo de cálculo da matriz de deformação. O tensor de extensão de Green-Lagrange, baseado no campo de deslocamentos em coordenadas naturais pode ser escrito como [BAT93] :

$${}^t_0 \varepsilon_{ij}^{Des} = \frac{1}{2} ({}^t \mathbf{e}_i \cdot {}^t \mathbf{e}_j - {}^0 \mathbf{E}_i \cdot {}^0 \mathbf{E}_j) \quad (3.90)$$

em que ${}^t \mathbf{e}_i$ e ${}^0 \mathbf{E}_i$ são os vectores de base covariante associados aos instantes t e 0 respectivamente. Estes vectores, podem ser facilmente obtidos a partir das derivadas naturais das coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} {}^0 \mathbf{E}_i &= \frac{\partial {}^0 \mathbf{x}}{\partial \xi_i} ; \quad \xi_1 = \xi, \xi_2 = \eta, \xi_3 = \zeta \\ {}^t \mathbf{e}_i &= \frac{\partial {}^t \mathbf{x}}{\partial \xi_i} = \frac{\partial ({}^0 \mathbf{x} + {}^t \mathbf{u})}{\partial \xi_i} = {}^0 \mathbf{E}_i + \frac{\partial {}^t \mathbf{u}}{\partial \xi_i} \end{aligned} \quad (3.91)$$

A interpolação é realizada como:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\xi\xi}^{Ass}(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^6 \overline{N}_i(\xi, \eta) \varepsilon_{\xi\xi}^{Des}(\xi_i, \eta_i, \zeta) \\ \varepsilon_{\eta\eta}^{Ass}(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=7}^6 \overline{\overline{N}}_i(\xi, \eta) \varepsilon_{\eta\eta}^{Des}(\xi_i, \eta_i, \zeta) \\ \varepsilon_{\xi\zeta}^{Ass}(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^6 \overline{N}_i(\xi, \eta) \varepsilon_{\xi\zeta}^{Des}(\xi_i, \eta_i, 0) \\ \varepsilon_{\eta\zeta}^{Ass}(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^6 \overline{\overline{N}}_i(\xi, \eta) \varepsilon_{\eta\zeta}^{Des}(\xi_i, \eta_i, 0) \\ \varepsilon_{\zeta\eta}^{Ass}(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^4 \overline{\overline{\overline{N}}}_i(\xi, \eta) \varepsilon_{\zeta\eta}^{Des}(\xi_i, \eta_i, \zeta) \end{aligned} \quad (3.92)$$

em que as funções $\overline{N}_1$ a $\overline{N}_6$ correspondem aos pontos 1 a 6, as funções $\overline{\overline{N}}_1$ a $\overline{\overline{N}}_6$ aos pontos 7 a 12 e as funções $\overline{\overline{\overline{N}}}_1$ a $\overline{\overline{\overline{N}}}_4$ correspondem aos pontos 13 a 16.

De seguida mostra-se uma figura com os pontos usados.

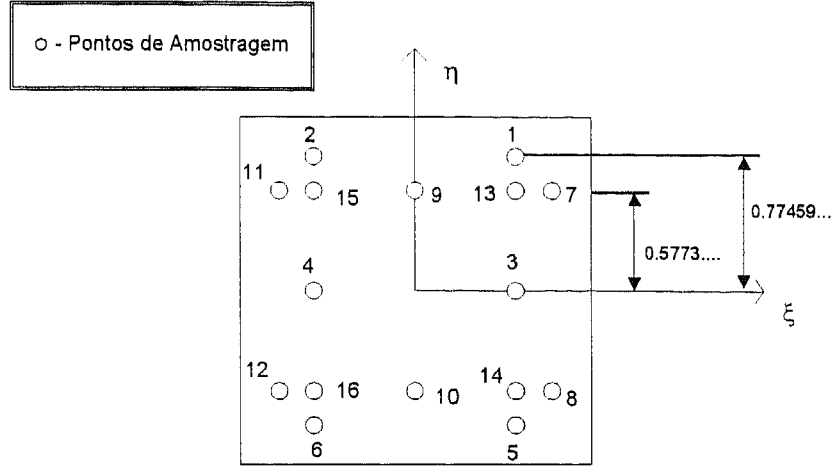


Fig. 3.4 Pontos de amostragem para a interpolação mista

As funções de interpolação são:

$$\begin{aligned}
 \overline{N}_1 &= \frac{\eta}{4 \cdot B} \left(\frac{\eta}{B} + 1 \right) \left(1 + \frac{\xi}{A} \right) & \overline{\overline{N}}_1 &= \frac{\xi}{4 \cdot B} \left(\frac{\xi}{B} + 1 \right) \left(1 + \frac{\eta}{A} \right) \\
 \overline{N}_2 &= \frac{\eta}{4 \cdot B} \left(\frac{\eta}{B} + 1 \right) \left(1 - \frac{\xi}{A} \right) & \overline{\overline{N}}_2 &= \frac{\xi}{4 \cdot B} \left(\frac{\xi}{B} + 1 \right) \left(1 - \frac{\eta}{A} \right) \\
 \overline{N}_3 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\eta^2}{B^2} \right) \left(1 + \frac{\xi}{A} \right) & \overline{\overline{N}}_3 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi^2}{B^2} \right) \left(1 + \frac{\eta}{A} \right) \\
 \overline{N}_4 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\eta^2}{B^2} \right) \left(1 - \frac{\xi}{A} \right) & \overline{\overline{N}}_4 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi^2}{B^2} \right) \left(1 - \frac{\eta}{A} \right) \\
 \overline{N}_5 &= \frac{\eta}{4 \cdot B} \left(\frac{\eta}{B} - 1 \right) \left(1 + \frac{\xi}{A} \right) & \overline{\overline{N}}_5 &= \frac{\xi}{4 \cdot B} \left(\frac{\xi}{B} - 1 \right) \left(1 + \frac{\eta}{A} \right) \\
 \overline{N}_6 &= \frac{\eta}{4 \cdot B} \left(\frac{\eta}{B} - 1 \right) \left(1 - \frac{\xi}{A} \right) & \overline{\overline{N}}_6 &= \frac{\xi}{4 \cdot B} \left(\frac{\xi}{B} - 1 \right) \left(1 - \frac{\eta}{A} \right)
 \end{aligned} \tag{3.93}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{N}}_1 &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\xi}{A} \right) \left(1 + \frac{\eta}{A} \right) \\
\overline{\overline{N}}_2 &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\xi}{A} \right) \left(1 - \frac{\eta}{A} \right) \\
\overline{\overline{N}}_3 &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\xi}{A} \right) \left(1 + \frac{\eta}{A} \right) \\
\overline{\overline{N}}_4 &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\xi}{A} \right) \left(1 - \frac{\eta}{A} \right)
\end{aligned} \tag{3.94}$$

em que $A = \sqrt{\frac{1}{3}}$ e $B = \sqrt{\frac{3}{5}}$.

Na implementação deste procedimento, foi usado um procedimento de cálculo que permite que a interpolação seja pouco dispendiosa computacionalmente.

Para os problemas não-lineares o procedimento é análogo.

$${}_0\Delta\epsilon_{ij}^{Des} = {}_0e_{ij}^{Des} + {}_0\eta_{ij}^{Des} \Leftrightarrow {}_0\Delta\epsilon_{ij}^{Ass} = {}_0e_{ij}^{Ass} + {}_0\eta_{ij}^{Ass} \tag{3.95}$$

Antes de se concluir este tema é pertinente a discussão das operações a realizar na interpolação mista, já que ainda pode parecer a alguns pouco clara a maior economia deste procedimento em relação aos anteriores.

Para não sobrecarregar por enquanto a discussão, introduz-se apenas a interpolação no caso linear e ao discutir matriz de rigidez introduzir-se-á a interpolação mista para o caso não-linear.

Detalhando a matriz de extensão linear em coordenadas naturais baseada na interpolação de deslocamentos:

$${}_0^t\mathbf{B}_{LON}(\xi, \eta, \zeta) = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{J}_1(\xi, \eta, \zeta) \cdot \mathbf{HN}_1(\xi, \eta, \zeta) \\ {}^0\mathbf{J}_2(\xi, \eta, \zeta) \cdot \mathbf{HN}_2(\xi, \eta, \zeta) \\ {}^0\mathbf{J}_3(\xi, \eta, \zeta) \cdot \mathbf{HN}_3(\xi, \eta, \zeta) \\ {}^0\mathbf{J}_1(\xi, \eta, \zeta) \cdot \mathbf{HN}_2(\xi, \eta, \zeta) + {}^0\mathbf{J}_2(\xi, \eta, \zeta) \cdot \mathbf{HN}_1(\xi, \eta, \zeta) \\ {}^0\mathbf{J}_1(\xi, \eta, \zeta) \cdot \mathbf{HN}_3(\xi, \eta, \zeta) + {}^0\mathbf{J}_3(\xi, \eta, \zeta) \cdot \mathbf{HN}_1(\xi, \eta, \zeta) \\ {}^0\mathbf{J}_2(\xi, \eta, \zeta) \cdot \mathbf{HN}_3(\xi, \eta, \zeta) + {}^0\mathbf{J}_3(\xi, \eta, \zeta) \cdot \mathbf{HN}_2(\xi, \eta, \zeta) \end{bmatrix} \tag{3.96}$$

O autor deste trabalho criou um esquema de cálculo da matriz assumida, tendo em conta as dependências dos vários termos da matriz original das coordenadas naturais:

$$\begin{aligned}
{}^t\mathbf{B}_{LON}^{Ass}\Big|_1(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{k=1}^6 \overline{N}_k(\xi, \eta) \mathbf{J}_1(\xi_k, \eta_k, \zeta) \cdot \mathbf{HN}_1(\xi_k, \eta_k, \zeta) \\
{}^t\mathbf{B}_{LON}^{Ass}\Big|_2(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{k=1}^6 \overline{N}_k(\xi, \eta) \mathbf{J}_2(\xi_{k+6}, \eta_{k+6}, \zeta) \cdot \mathbf{HN}_2(\xi_{k+6}, \eta_{k+6}, \zeta) \\
{}^t\mathbf{B}_{LON}^{Ass}\Big|_3(\xi, \eta, \zeta) &= \mathbf{J}_3(\xi, \eta, \zeta) \cdot \mathbf{HN}_3(\xi, \eta, \zeta) \\
{}^t\mathbf{B}_{LON}^{Ass}\Big|_4(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{k=1}^4 \overline{N}_k(\xi, \eta) [\mathbf{J}_1(\xi_{k+12}, \eta_{k+12}, \zeta) \cdot \mathbf{HN}_2(\xi_{k+12}, \eta_{k+12}, \zeta) + \\
&\quad + \mathbf{J}_2(\xi_{k+12}, \eta_{k+12}, \zeta) \cdot \mathbf{HN}_1(\xi_{k+12}, \eta_{k+12}, \zeta)] \\
{}^t\mathbf{B}_{LON}^{Ass}\Big|_5(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{k=1}^6 \overline{N}_k(\xi, \eta) [\mathbf{J}_1(\xi_k, \eta_k, 0) \cdot \mathbf{HN}_3(\xi_k, \eta_k, 0) + \\
&\quad + \mathbf{J}_3(\xi_k, \eta_k, 0) \cdot \left[\frac{\partial N}{\partial \xi} \mathbf{I}_3 \quad \{\mathbf{o}\} \quad \{\mathbf{o}\} \right]] \\
{}^t\mathbf{B}_{LON}^{Ass}\Big|_6(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{k=1}^6 \overline{N}_k(\xi, \eta) [\mathbf{J}_3(\xi_{k+6}, \eta_{k+6}, 0) \cdot \mathbf{HN}_2(\xi_{k+6}, \eta_{k+6}, 0) + \\
&\quad + \mathbf{J}_2(\xi_{k+6}, \eta_{k+6}, 0) \cdot \left[\frac{\partial N}{\partial \eta} \mathbf{I}_3 \quad \{\mathbf{o}\} \quad \{\mathbf{o}\} \right]]
\end{aligned}
\tag{3.97}$$

em que, claramente:

$${}^t\mathbf{B}_{LON}^{Ass} = \begin{bmatrix} {}^t\mathbf{B}_{LON}^{Ass}\Big|_1 \\ {}^t\mathbf{B}_{LON}^{Ass}\Big|_2 \\ {}^t\mathbf{B}_{LON}^{Ass}\Big|_3 \\ {}^t\mathbf{B}_{LON}^{Ass}\Big|_4 \\ {}^t\mathbf{B}_{LON}^{Ass}\Big|_5 \\ {}^t\mathbf{B}_{LON}^{Ass}\Big|_6 \end{bmatrix}
\tag{3.98}$$

3.4.6.4 Efeito da interpolação

Ao usar-se uma matriz de deformação substituta, como a matriz é avaliada em cada elemento para todos os pontos de Gauss, e estes podem ser numerosos, o número de operações aritméticas é bastante elevado. Para minorar esse problema, nas subrotinas que calculam as matrizes de deformação é realizado o cálculo de uma vez só para todos os pontos de Gauss e armazenado, para cada elemento de cada vez, em memória. Além disso, a ordem das operações é estudada de forma a evitar a repetição de cálculos. A implementação dos procedimentos de melhoria do campo de deformações permite atenuar os problemas habituais dos elementos degenerados. Existem numerosos pormenores importantes na implementação que apenas uma leitura do código permite examinar.

Estes procedimentos talvez pareçam à primeira vista artificiais. O autor deste trabalho, após dezenas de casos distintos corridos, pode afirmar que o comportamento dos elementos com

deformação assumida foi, em todos os casos até ao momento, melhor do que o elemento original.

Nos problemas não-lineares, devido à necessidade de cálculo do resíduo repetidas vezes, o procedimento, mesmo com a implementação realizada, torna-se bastante demorado.

Todos os elementos estão disponíveis na análise não-linear.

Nos problemas não-lineares geométricos, o efeito da interpolação pode não ser tão notório.

Um exemplo ilustrativo do bom comportamento, de forma a justificar desde já a implementação efectuada pelo autor é o de uma placa quadrada, encastrada de lado $a=1$ m sujeita a pressão uniforme. Apenas para valores muito elevados ou muito baixos da relação a/h , sendo h a espessura, é que os resultados dos elementos com deformação melhorada começam a piorar. O erro é obtido por comparação com a solução analítica [TIM59]. O elemento Q90 apresenta excesso de rigidez, como a seguinte figura mostra.

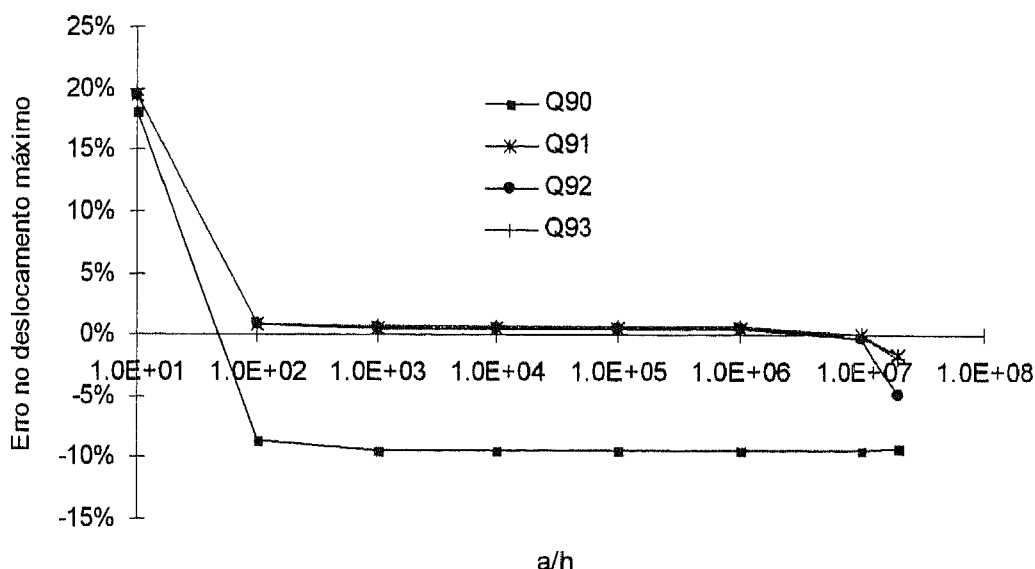


Fig. 3.5 Ilustração do bom comportamento dos elementos com deformação assumida.

3.5 Tensões e lei constitutiva

Na equação matricial de equilíbrio, usa-se o 2º tensor de Piola-Kirchhoff. Como a formulação é incremental e iterativa, as componentes desse tensor são actualizadas em cada iteração. Na formulação de equilíbrio usou-se uma linearização em termos de acréscimo de deslocamentos para o valor dessas componentes. Certos autores usam uma actualização consentânea com essa linearização (OÑA&OLIVER [OLI84]) enquanto que outros usam a actualização completa de 2ª ordem [SIL97]. Como o cálculo das forças nodais internas é o passo crucial em termos de resultados da análise não-linear, os dois procedimentos produzem resultados distintos. Não é clara a necessidade de impôr uma actualização de um campo coerente com a formulação da equação de equilíbrio que lhe deu origem. Aliás, basta observar o caso das rotações finitas, em que o autor e grande parte dos investigadores usam uma actualização exacta dos acréscimos de rotação em cada iteração e são obrigados a aproximar quadraticamente o acréscimo de rotação incluído nas forças internas se o

desejam incluir no equilíbrio. O programa desenvolvido neste trabalho permite os dois tipos de actualização à escolha do utilizador. Para o caso geral:

$${}_0\Delta S_{ij} = \underbrace{{}_0D_{ijkl}{}_0e_{kl}}_{1^{\text{ª ordem}}} + \underbrace{{}_0D_{ijkl}{}_0\eta_{kl}}_{2^{\text{ª ordem}}} \quad (3.99)$$

ou, matricialmente

$${}_0\Delta \mathbf{S} = {}_0\mathbf{D}({}_0\mathbf{e} + {}_0\boldsymbol{\eta}) \quad (3.100)$$

Obviamente, o 2º tensor de Piola-Kirchhoff na configuração $t+\Delta t$ pode obter-se a partir de

$${}^{t+\Delta t}{}_0S_{ij} = {}^t{}_0S_{ij} + {}_0\Delta S_{ij} \quad (3.101)$$

Recorrendo às matrizes de deformação já detalhadas,

$${}_0\Delta \mathbf{S} = {}_0\mathbf{D} \cdot \left[{}^t{}_0\mathbf{B}_L + \frac{1}{2}{}_0\mathbf{B}_1 \right] \cdot \Delta \mathbf{a} \quad (3.102)$$

ou, em função das variáveis nodais:

$${}_0\Delta \mathbf{S} = {}_0\mathbf{D} \cdot \left[{}^t{}_0\mathbf{B}_{L0} + {}^t{}_0\mathbf{B}_{L1}({}^t\mathbf{a}) + \frac{1}{2}{}_0\mathbf{B}_1(\Delta \mathbf{a}) \right] \cdot \Delta \mathbf{a} \quad (3.103)$$

Em problemas elásticos não-lineares geométricos, é possível determinar directamente, na forma não-incremental, o 2º tensor das tensões de Piola-Kirchhoff:

$${}^{t+\Delta t}{}_0\mathbf{S} = {}^{t+\Delta t}{}_0\mathbf{D} \cdot \left[{}_0\mathbf{B}_{L0} + \frac{1}{2}{}^{t+\Delta t}{}_0\mathbf{B}_1({}^{t+\Delta t}\mathbf{a}) \right] \cdot {}^{t+\Delta t}\mathbf{a} \quad (3.104)$$

A equação (3.104) é usada na formulação de equilíbrio. Na saída de resultados, porém, usa-se o tensor de Cauchy, já que este mede a acção das forças sobre a geometria deformada e é o tensor adequado à avaliação da segurança dos objectos.

A aplicação computacional do cálculo desse tensor é bastante simples. Para cada ponto de Gauss, realiza-se a transformação:

$${}^t\sigma = \frac{1}{\det {}^tF_0} {}^tF_0 {}^tS_0 {}^tF_0^T \quad (3.105)$$

em que tS está agora na forma matricial. A determinação do gradiente de deformação é realizada como de seguida:

$$\begin{aligned} {}^tF_{ij} &= {}^tI_{ij} + \delta_{ij} = \frac{\partial^t u_i}{\partial^0 x_j} + \delta_{ij} \Leftrightarrow \\ {}^tF &= {}^tI + I_3 \end{aligned} \quad (3.106)$$

A passagem das componentes do tensor de Cauchy dos pontos de Gauss para os nós tem de ser realizada no referencial global, já que só neste são aditivas as componentes obtidas para cada ponto de Gauss de um elemento.

Assim, recorrendo à matriz de transformação de 4ª ordem a operação é óbvia:

$${}^t\sigma|_{Global} = ST^T \cdot {}^t\sigma|_{Local} \quad (3.107)$$

A passagem para os nós é realizada usando as funções de forma associadas aos 9 pontos de Gauss habitualmente utilizados:

$${}^t\sigma_N = \frac{1}{nelN} \sum_{iel=1}^{nelN} \sum_{igaus=1}^{ngaus} \sum_{jgaus=1}^{ngaus} N_{igaus,jgaus}^*|_{iel} (\xi_N, \eta_N)^t \sigma_{igaus,jgaus} \quad (3.108)$$

em que $nelN$ é o número de elementos que possuem o nó N , $ngaus$ é o número de pontos de Gauss em cada direcção.

Em termos de lei constitutiva, este trabalho, embora limitado ao caso elástico, permite o tratamento de problemas anisotrópicos. Essa possibilidade foi propositadamente omitida nos exemplos mostrados, mas está implementada. A razão para a omissão prende-se com o facto de não ser objectivo deste trabalho tratar materiais laminados ou compostos.

A lei constitutiva é escrita no referencial local. Isso prende-se com o facto de num referencial ortogonal os elementos da matriz serem de fácil obtenção e de existir um tratamento correctivo de algumas componentes do tensor de elasticidade.

O facto da lei constitutiva ser escrita no referencial local impõe que as matrizes extensão-deslocamento também o sejam. Esse facto induz bastante esforço de cálculo para cada ponto de Gauss e é em parte responsável pelo peso computacional dos elementos. A matriz elasticidade, para eixos coincidentes com as direcções principais de elasticidade dos materiais (como por exemplo fibras), pode ser escrita como:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{55} \end{bmatrix} \quad (3.109)$$

em que

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{E_1}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \\ D_{22} &= \frac{E_2}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \\ D_{12} &= \frac{E_2\nu_{12}}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \\ D_{33} &= G_{12} \\ D_{44} &= \alpha_1 G_{13} \\ D_{55} &= \alpha_2 G_{23} \end{aligned} \quad (3.110)$$

Sendo E_i o módulo de Young correspondente à direcção i e G_{ij} o módulo de corte no plano ij . Os parâmetros α_i são parâmetros de correcção de corte [HUA89].

Para eixos locais basta definir um ângulo θ entre x' e a direcção 1, para que a determinação da matriz $\mathbf{D}'$ seja imediata:

$$\mathbf{D}' = \mathbf{T}_s^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{T}_s \quad (3.111)$$

em que a matriz de transformação é dada por

$$\mathbf{T}_s = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc & 0 & 0 \\ s^2 & c^2 & -sc & 0 & 0 \\ -2sc & 2sc & c^2 - s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \quad (3.112)$$

e claro, $c=\cos\theta$ e $s=\sin\theta$.

Os parâmetros α_1 e α_2 são $\frac{5}{6}$ para cascas isotrópicas e determinam-se segundo [HUA89] para cascas anisotrópicas. A existência destes parâmetros destina-se a corrigir a resultante da distribuição parabólica das tensões de corte quando se assume uma distribuição linear ao longo da espessura.

A tensão de Von-Mises é determinada, para cada nó, a partir da expressão usual.

3.6 Vector de forças internas

O vector que contabiliza as forças internas equivalentes ao estado de tensão, resultante do termo (Cap. 2) do trabalho virtual $\int_{0V} \delta_0 \mathbf{e}^T \cdot {}^t_0 \mathbf{S} dV$, na equação de equilíbrio, determina-se a partir da relação:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \delta_0 \mathbf{e}^T \cdot {}^t_0 \mathbf{S} \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 {}^t_0 \mathbf{S}^T \cdot \delta_0 \mathbf{e} \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta = \\ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 {}^t_0 \mathbf{S}^T \cdot \left(\delta_0 \mathbf{B}_{L0}(\Delta \mathbf{a}) + \delta_0 {}^t \mathbf{B}_{L1}(\Delta \mathbf{a}) \right) \cdot \Delta \mathbf{a} \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta + \\ \delta \Delta \mathbf{a}^T \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left({}^t_0 \mathbf{B}_{L0}(\Delta \mathbf{a}) + {}^t_0 \mathbf{B}_{L1}(\Delta \mathbf{a}) \right)^T \cdot {}^t_0 \mathbf{S} \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (3.113)$$

O termo ${}^t \mathbf{i} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left({}^t_0 \mathbf{B}_{L0}(\Delta \mathbf{a}) + {}^t_0 \mathbf{B}_{L1}(\Delta \mathbf{a}) \right)^T \cdot {}^t_0 \mathbf{S} \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta$ da equação (3.113) é habitualmente designado como vector de forças internas.

3.7 Rigidez tangencial

Considerando a equação de equilíbrio definida em (2.102) e a equação (3.113), o termo

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 {}^t_0 \mathbf{S}^T \cdot \left(\delta_0 \mathbf{B}_{L0}(\Delta \mathbf{a}) + \delta_0 {}^t \mathbf{B}_{L1}(\Delta \mathbf{a}) \right) \cdot \Delta \mathbf{a} \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta \quad (3.114)$$

e o termo

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\delta_0 \mathbf{e}^T \cdot {}_0 \mathbf{C} \cdot {}_0 \mathbf{e} + \delta_0 \boldsymbol{\eta}^T \cdot {}_0^t \mathbf{S}) d\xi d\eta d\zeta \quad (3.115)$$

são proporcionais ao acréscimo de deslocamento nodal.

Assim, na formulação matricial do problema discretizado, estes dois termos podem escrever-se como:

$$\mathbf{K}_T \cdot \Delta \mathbf{a} \quad (3.116)$$

em que

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_{NL} + \mathbf{K}_\theta \quad (3.117)$$

Cada uma das matrizes pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_L &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 {}_0^t \mathbf{B}_L^T \cdot \mathbf{D} \cdot {}_0^t \mathbf{B}_L \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta \\ \mathbf{K}_{NL} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 {}_0^t \mathbf{B}_{NL}^T \cdot {}_0^t \bar{\mathbf{S}} \cdot {}_0^t \mathbf{B}_{NL} \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta \\ \mathbf{K}_\theta &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \\ \vdots & & p_1 & \\ 0 & \dots & \dots & p_1 \end{bmatrix} \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \\ \vdots & & p_2 & \\ 0 & \dots & \dots & p_2 \end{bmatrix} \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (3.118)$$

sendo p_1 e p_2 definidos da seguinte forma:

$$\frac{\partial {}_0^t \mathbf{g}_1^k}{\partial \theta_1} = \frac{\partial {}_0^t \mathbf{g}_2^k}{\partial \theta_2} = -0.5^2 \alpha_k {}^t \mathbf{V}_3 \quad (3.119)$$

$$\begin{aligned} p_1 &= -0.5^2 \alpha_k {}^t \mathbf{V}_3^T \begin{bmatrix} {}^t \sigma_{11} & {}^t \sigma_{12} & {}^t \sigma_{13} \\ \text{sim} & {}^t \sigma_{22} & {}^t \sigma_{23} \\ & & {}^t \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} G_1^k \\ G_2^k \\ G_3^k \end{Bmatrix} \\ p_2 &= \left({}_0^t \mathbf{I}^T \frac{\partial {}_0^t \mathbf{g}_1^k}{\partial \theta_1} \right)^T \begin{bmatrix} {}^t \sigma_{11} & {}^t \sigma_{12} & {}^t \sigma_{13} \\ \text{sim} & {}^t \sigma_{22} & {}^t \sigma_{23} \\ & & {}^t \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} G_1^k \\ G_2^k \\ G_3^k \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.120)$$

em que ${}^t \sigma_{ij}$ são as componentes do 2º tensor de Piola-Kirchhoff, para o instante t .

Claro que a contribuição da rigidez de cada elemento, à qual corresponde a matriz K_T acima referida para a estrutura é efectuada através da operação de agrupamento:

$$K_T^{Estrutura} = \sum_{ielem=1}^{nelem} K_T^{ielem} \quad (3.121)$$

Neste trabalho, a operação de espalhamento é realizada em memória, mas a matriz de rigidez da estrutura é posta num vector, de acordo com o procedimento *Skyline* [BAT96].

É agora oportuno discutir a interpolação mista da componente não-linear do tensor de extensão em coordenadas naturais.

Partindo da expressão habitual referente à rigidez não-linear:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 {}^t\mathbf{B}_{NL}^T \cdot {}^t\bar{\mathbf{S}} \cdot {}^t\mathbf{B}_{NL} \det J d\xi d\eta d\zeta \quad (3.122)$$

É possível reescrever essa expressão, usando o 2º tensor de tensões de Piola-Kirchhoff em coordenadas globais, a partir da matriz ${}_0\mathbf{B}_1$:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 {}_0\mathbf{B}_1^T \begin{Bmatrix} {}^t\sigma_{11} \\ {}^t\sigma_{22} \\ {}^t\sigma_{33} \\ {}^t\sigma_{12} \\ {}^t\sigma_{13} \\ {}^t\sigma_{23} \end{Bmatrix} \cdot \det J d\xi d\eta d\zeta \quad (3.123)$$

ou, explicitando os termos de ${}_0\mathbf{B}_1$:

$$\begin{aligned} K_{NL} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 & \left(\mathbf{H}_1^T \cdot \mathbf{H}_1 {}^t\sigma_{11} + \mathbf{H}_2^T \cdot \mathbf{H}_2 {}^t\sigma_{22} + \right. \\ & \mathbf{H}_3^T \cdot \mathbf{H}_3 {}^t\sigma_{33} + \mathbf{H}_1^T \cdot \mathbf{H}_2 {}^t\sigma_{12} + \mathbf{H}_2^T \cdot \mathbf{H}_1 {}^t\sigma_{12} + \mathbf{H}_1^T \cdot \mathbf{H}_3 {}^t\sigma_{13} + \mathbf{H}_3^T \cdot \mathbf{H}_1 {}^t\sigma_{13} + \\ & \left. \mathbf{H}_2^T \cdot \mathbf{H}_3 {}^t\sigma_{23} + \mathbf{H}_3^T \cdot \mathbf{H}_2 {}^t\sigma_{23} \right) \det J d\xi d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (3.124)$$

Reescreve-se o 2º tensor de Piola-Kirchhoff em coordenadas naturais:

$${}^t\sigma|_{Natural} = \mathbf{S}^T * \mathbf{T} \cdot {}^t\sigma|_{Local} \quad (3.125)$$

ST^* é a matriz de transformação de 4ª ordem obtida a partir dos elementos da matriz de transformação de 2ª ordem entre as coordenadas naturais e locais, já discutida (3.23).

Usando as componentes do tensor das tensões em coordenadas naturais:

$$K_{NL} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(HN_1^T \cdot HN_1^t \sigma_{11}|_{Nat.} + HN_2^T \cdot HN_2^t \sigma_{22}|_{Nat.} + \right. \\ \left. HN_3^T \cdot HN_3^t \sigma_{33}|_{Nat.} + (HN_1^T \cdot HN_2 + HN_2^T \cdot HN_1)^t \sigma_{12}|_{Nat.} + (HN_1^T \cdot HN_3 + HN_3^T \cdot HN_1)^t \sigma_{13}|_{Nat.} + \right. \\ \left. (HN_2^T \cdot HN_3 + HN_3^T \cdot HN_2)^t \sigma_{23}|_{Nat.} \right) \det J d\xi d\eta d\zeta \quad (3.126)$$

A interpolação mista é facilmente realizável fazendo

$$K_{NL}^{Ass} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(A_1^t \sigma_{11}|_{Nat.} + A_2^t \sigma_{22}|_{Nat.} + A_3^t \sigma_{33}|_{Nat.} + A_4^t \sigma_{12}|_{Nat.} + A_5^t \sigma_{13}|_{Nat.} + \right. \\ \left. A_6^t \sigma_{23}|_{Nat.} \right) \det J d\xi d\eta d\zeta \quad (3.127)$$

em que

$$A_1(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{k=1}^6 \overline{N_k}(\xi, \eta) HN_1^T(\xi_k, \eta_k, \zeta) \cdot HN_1(\xi_k, \eta_k, \zeta) \\ A_2(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{k=1}^6 \overline{N_k}(\xi, \eta) HN_2^T(\xi_{k+6}, \eta_{k+6}, \zeta) \cdot HN_2(\xi_{k+6}, \eta_{k+6}, \zeta) \\ A_3(\xi, \eta, \zeta) = HN_3^T(\xi, \eta) \cdot HN_3(\xi, \eta) \\ A_4(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{k=1}^4 \overline{N_k}(\xi, \eta) \left[HN_1^T(\xi_{k+12}, \eta_{k+12}, \zeta) \cdot HN_2(\xi_{k+12}, \eta_{k+12}, \zeta) + HN_2^T(\xi_{k+12}, \eta_{k+12}, \zeta) \cdot HN_1(\xi_{k+12}, \eta_{k+12}, \zeta) \right] \\ A_5(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{k=1}^6 \overline{N_k}(\xi, \eta) \left[HN_1^T(\xi_k, \eta_k, 0) \cdot HN_3(\xi_k, \eta_k, 0) + HN_3^T(\xi_k, \eta_k, 0) \cdot HN_1(\xi_k, \eta_k, 0) \right] \\ A_6(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{k=1}^6 \overline{N_k}(\xi, \eta) \left[HN_2^T(\xi_{k+6}, \eta_{k+6}, 0) \cdot HN_3(\xi_{k+6}, \eta_{k+6}, 0) + HN_3^T(\xi_{k+6}, \eta_{k+6}, 0) \cdot HN_2(\xi_{k+6}, \eta_{k+6}, 0) \right] \quad (3.128)$$

Está portanto completamente definido o procedimento de interpolação para o caso não-linear.

3.8 Massa e amortecimento

Na formulação das equações incrementais de equilíbrio são geralmente incluídas as forças de inércia. Após a discretização, as forças de inércia são materializadas pelo produto de uma matriz de massa pelo vector das acelerações nodais.

A matriz de massa usada neste trabalho é escrita usando a mesma interpolação do campo de deslocamentos. Não se usa, por não ser necessário, qualquer procedimento de diagonalização dessa matriz.

Assim,

$$M_{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i^T \cdot N_j \det J d\xi d\eta d\zeta, \quad (3.129)$$

$$i, j = 1, \dots, N_{nos}$$

O agrupamento da matriz de massa é igual ao da rigidez e usa-se também o *Skyline*.

$$M^{Estrutura} = \sum_{ielem=1}^{nelem} M^{ielem} \quad (3.130)$$

O amortecimento disponível no programa implementado é do tipo proporcional, com a matriz de amortecimento C sendo uma combinação das matrizes de rigidez e de massa:

$$C = \alpha K + \beta M \quad (3.131)$$

Este tipo de matriz de amortecimento permite a utilização do método da sobreposição modal habitual com desacoplamento completo das equações na base modal.

A matriz de amortecimento não é explicitamente construída nos procedimentos de solução.

3.9 Forças nodais equivalentes

Neste trabalho, o tipo de cargas aplicadas às cascas pode ser dos seguintes tipos:

- Forças de volume (como o peso da própria casca)
- Forças superficiais aplicadas a uma das superfícies (inferior ou superior)
- Esforços distribuídos ao longo dos lados (como momentos, cargas distribuídas)
- Forças pontuais aplicadas a um nó.

O caso das forças pontuais aplicadas num ponto de um elemento não foi ainda implementado, por não ter sido necessário.

As forças de volume podem ser calculadas a partir da densidade volúmica b (N/m³) das forças, e da direcção de actuação, d . Assim, $b = b \cdot d$.

Nos nós, resulta:

$$f_{Vol} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N^T b \det J d\xi d\eta d\zeta \quad (3.132)$$

Para o peso, se este actuar segundo zz negativo,

$$b = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho g \end{Bmatrix} \quad (3.133)$$

Para as forças de superfície, como a pressão (p), o vector de forças nos nós é escrito como:

$$f_{Superficie} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N^T \Big|_{\zeta=\pm 1} (-\zeta \cdot p) \left(\frac{\partial r}{\partial \xi} \times \frac{\partial r}{\partial \eta} \right) \Big|_{\zeta=\pm 1} d\xi d\eta d\zeta \quad (3.134)$$

em que $\zeta = +1$ para a superfície superior e $\zeta = -1$ para a inferior.

Em termos de esforços aplicados ao longo de um lado, se for um lado $\eta=1$ ou $\eta=-1$:

$$f_{Lado} = \sum_{i=5}^7 \int_{-1}^1 N_i \Big|_{\eta=1} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix} \left\| r_{,\xi} \right\|_{\eta=1, \zeta=0} d\xi \quad (3.135)$$

$$f_{Lado} = \sum_{i=1}^3 \int_{-1}^1 N_i \Big|_{\eta=-1} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix} \left\| r_{,\xi} \right\|_{\eta=-1, \zeta=0} d\xi$$

Se for um lado $\xi=1$ ou $\xi=-1$:

$$f_{Lado} = \sum_{i=3}^5 \int_{-1}^1 N_i \Big|_{\xi=1} \left\{ \begin{matrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ m_1 \\ m_2 \end{matrix} \right\} \left\| \mathbf{r}, \eta \right\|_{\xi=1, \zeta=0} d\eta \quad (3.136)$$

$$f_{Lado} = \sum_{i=7}^8 \int_{-1}^1 N_i \Big|_{\xi=-1} \left\{ \begin{matrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ m_1 \\ m_2 \end{matrix} \right\} \left\| \mathbf{r}, \eta \right\|_{\xi=-1, \zeta=0} d\eta + \int_{-1}^1 N_1 \Big|_{\xi=-1} \left\{ \begin{matrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ m_1 \\ m_2 \end{matrix} \right\} \left\| \mathbf{r}, \eta \right\|_{\xi=-1, \zeta=0} d\eta$$

As forças pontuais aplicadas aos nós são imediatas.

O agrupamento dos vectores de forças nodais equivalentes é feito como a soma das contribuições, em cada nó, de todos os elementos que o possuem.

3.10 Conclusões

Neste capítulo detalharam-se todos os pormenores dos elementos implementados, assim como os procedimentos actualmente usados para melhorar as características dos elementos de casca degenerados de sólido. Como todo o programa foi criado de raiz, as equações aqui apresentadas estão de acordo, em notação, com as subrotinas implementadas. Pela mesma razão, o autor deste trabalho optou por clarificar, neste capítulo, a formulação dos elementos, por forma a que de uma forma simples, qualquer leitor modifique ou ensaie as subrotinas. Os elementos degenerados implementados permitem, na maioria dos exemplos-tipo para estruturas do tipo casca, bons resultados em análise linear e não-linear.

O peso computacional dos elementos com deformação melhorada foi bastante atenuado, com a implementação do elemento Q93, em coordenadas naturais, para o qual o tempo de cálculo é semelhante ao Q90. Os elementos Q91 e Q92 são dispendiosos em análise não-linear.

3.11 Referências

[AHM70] AHMAD, S. IRONS, B.M. , ZIENKIEWICZ, O.C. *Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 2, 419-451. John Wiley & Sons, 1970.

[BAT82] BATHE, K.J. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall, 1982.

[BAT86] BATHE, K.J. , DVORKIN, E.N.. *A Formulation of general shell elements-the use of mixed interpolation of tensorial components*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 22, 697-722. John Wiley & Sons, 1986.

[BAT93] BUCALEM, M.L., BATHE K.J. *Higher Order MITC General Shell Elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 36, 3729-3754. John Wiley & Sons, 1993.

[BAT96] BATHE, K.J. *Finite Element Procedures*. Prentice-Hall, 1996.

[CRI97] CRISFIELD, M.A. . *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures Vol2. Advanced Topics*. John Wiley & Sons. 1997.

[HUA86] HUANG H.C. ,HINTON E. *A new nine node degenerated shell element with enhanced membrane and shear interpolation*. . International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 22, 73-92. John Wiley & Sons, 1991.

[HUA89] HUANG, H.C.. *Static and Dynamic Analyses of Plates and Shells. Theory, Software and Applications*. Springer Verlag 1989.

[HUG87] HUGHES, T.J.R. *The Finite Element Method. Linear Statics and Dynamic Finite Element Analysis*. Prentice-Hall International Editions. 1987.

[OLI84] OLIVER, J., OÑATE, E. *A Total Lagrangian Formulation for the Geometrically Nonlinear Analysis of Structures using Finite Elements. Part I. Two-dimensional problems: Shell and Plate Structures*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 20, 2253-2281. John Wiley & Sons, 1984.

[PAR91] PARISH, H. *An investigation of a finite rotation four node assumed strain shell element*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 31, 127-150. John Wiley & Sons, 1991.

[RHI88] RHIU, J.J., LEE, S.W. *A Nine Node Finite Element for Analysis of Geometrically non-linear Shells*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 26, 1945-1962. John Wiley & Sons, 1988.

[SIL97] SILVA, W.T.M., OÑATE, E. . *El Método de Desplazamiento Crítico para la Predicción de Puntos Límite y de Bifurcación en Estructuras*. Monografía CIMNE N°35, 1997.

[TIM59] TIMOSHENKO, S. , WOINOWSKY-KRIEGER, S. *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill International Edition 1959.

[ZIE91] ZIENKIEWICZ, O.C. , TAYLOR, R.L. *The Finite Element Method Fourth Edition. Vol 2: Solid and Fluid Mechanics Dynamics and Non-Linearity*. Mc-Graw-Hill Book Company 1991.

4 Análise estrutural - procedimentos

4.1 Introdução e sumário

Os procedimentos de solução implementados são descritos resumidamente neste capítulo. O autor criou uma biblioteca de procedimentos que permite a análise linear estática, a extracção de formas e frequências naturais, a análise dinâmica linear, a análise estática não-linear e a análise dinâmica não-linear. Essa biblioteca funciona de forma independente de qualquer elemento e as subrotinas ligadas à saída de resultados ou ao cálculo de resíduos, etc. são argumentos da biblioteca, o que permite isolar os procedimentos de análise.

Toda a biblioteca usa o agrupamento das matrizes estruturais sob a forma da banda variável, num vector. Como neste trabalho os exemplos são de pequena dimensão, as matrizes, sob a forma vectorial, são mantidas em memória.

A biblioteca foi programada em Fortran90 Standard e usa alguns algoritmos da biblioteca comercial IMSL.

É importante referir que as bibliotecas comerciais de algoritmos numéricos raramente têm as subrotinas adequadas aos problemas de elementos finitos. Esse facto é devido às características particulares das matrizes estruturais resultantes do Método dos Elementos Finitos (MEF) e também à informação que habitualmente interessa ao analista. Assim, as matrizes de rigidez e massa são normalmente simétricas e em forma de banda, definidas positivas e muitas vezes esparsas. Da mesma forma, na extracção de formas e frequências naturais de vibração, o analista está frequentemente interessado num intervalo do espectro e as bibliotecas muitas vezes extraem todo o espectro.

Por outro lado, algoritmos simples como os de ordenação podem ser aproveitados dessas bibliotecas comerciais, o que permite implementar rapidamente o código.

4.2 Análise estática

4.2.1 Análise linear

Neste trabalho, para a análise estática, usa-se o método de eliminação de Gauss baseado na decomposição da matriz de rigidez na forma $\mathbf{L} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{L}^T$ em que os elementos de $\mathbf{D}$ ocupam as posições originais da diagonal principal da matriz e os elementos de $\mathbf{L}$, ocupam as posições fora da diagonal.

O agrupamento é do tipo *Skyline* ou banda variável [BAT96] e usa-se o endereço das diagonais, o vector **MAXA**, para localizar os elementos da matriz hipotética no vector efectivamente usado no agrupamento. Apenas os elementos abaixo da banda variável são agrupados, evitando-se assim um grande número de operações envolvendo elementos nulos na fase de decomposição.

Os procedimentos de eliminação e substituição são realizados em separado, logo são necessárias duas chamadas à subrotina de solução linear para resolver o sistema de equações.

4.2.2 Análise não-linear

A análise não-linear estática recorre, neste trabalho, a procedimentos iterativos e incrementais.

Escrevendo a equação de equilíbrio incremental, anteriormente detalhada,

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{f} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{i} = \mathbf{0} \quad (4.1)$$

em que ${}^{t+\Delta t}\mathbf{f}$ é o vector de forças nodais equivalentes e ${}^{t+\Delta t}\mathbf{i}$ é o vector correspondente às forças internas, calculados como no capítulo 3.

Como o vector correspondente às forças internas depende de forma não-linear dos deslocamentos nodais, é necessário usar um processo iterativo para resolver, em termos de deslocamentos, a equação de equilíbrio.

Neste trabalho usam-se dois procedimentos alternativos, com o objectivo de determinar o vector de deslocamentos nodais. O método de Newton-Raphson e o método Quasi-Newton BFGS.

O esquema de Newton-Raphson (NR) é sinteticamente escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{i-1} &= {}^{t+\Delta t}\mathbf{f} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{i}^{i-1} \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{i-1} \Delta \mathbf{a}^i &= \mathbf{r}^{i-1}, \quad i=1,2,3,\dots \end{aligned} \quad (4.2)$$

e,

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{a}^i = {}^{t+\Delta t}\mathbf{a}^{i-1} + \Delta \mathbf{a}^i \quad (4.3)$$

sendo $\Delta \mathbf{a}^i$ a variação de deslocamento para a iteração i .

As condições de início de cada incremento são:

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\mathbf{a}^0 &= {}^t\mathbf{a} \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{i}^0 &= {}^t\mathbf{i} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Estas equações são obtidas linearizando a resposta do sistema no instante $t+\Delta t$ na iteração $i-1$.

Em cada iteração calcula-se um vector de carga em desequilíbrio ou resíduo $\mathbf{r}$ que provoca um incremento no acréscimo de deslocamento. Continua-se o processo iterativo até que o resíduo ou o acréscimo iterativo de deslocamento sejam suficientemente pequenos.

O esquema de Newton-Raphson pode ser descrito formalmente a partir da nulidade do vector resíduo.

Assim, procura-se a solução, $\mathbf{a}^*$, que permita a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned}
 r(a^*) &= 0 \\
 r(a^*) &= {}^{t+\Delta t}f(a^*) - {}^{t+\Delta t}i(a^*)
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

Se na solução iterativa se conhecer ${}^{t+\Delta t}a^{i-1}$, uma expansão em séries de Taylor permite escrever:

$$r(a^*) = r({}^{t+\Delta t}a^{i-1}) + \left(\frac{\partial r}{\partial a} \right) \bigg|_{{}^{t+\Delta t}a^{i-1}} (a^* - {}^{t+\Delta t}a^{i-1}) + \dots \tag{4.6}$$

Assumindo que as forças exteriores são independentes do deslocamento, resulta

$$\left(\frac{\partial i}{\partial a} \right) \bigg|_{{}^{t+\Delta t}a^{i-1}} (a^* - {}^{t+\Delta t}a^{i-1}) + \dots = {}^{t+\Delta t}f - {}^{t+\Delta t}i^{i-1} \tag{4.7}$$

Desprezando os termos não-lineares, calcula-se o incremento nos deslocamentos,

$${}^{t+\Delta t}K^{i-1} \cdot \Delta a^i = {}^{t+\Delta t}f - {}^{t+\Delta t}i^{i-1} \tag{4.8}$$

a matriz rigidez tangente corrente é:

$${}^{t+\Delta t}K^{i-1} = \left(\frac{\partial i}{\partial a} \right) \bigg|_{{}^{t+\Delta t}a^{i-1}} \tag{4.9}$$

A solução melhorada é claramente

$${}^{t+\Delta t}a^i = {}^{t+\Delta t}a^{i-1} + \Delta a^i \tag{4.10}$$

A condição inicial em termos de rigidez tangente é:

$${}^{t+\Delta t}K^0 = {}^tK \tag{4.11}$$

O processo iterativo prossegue até que os critérios de convergência sejam satisfeitos.

Uma característica deste processo é que uma nova matriz de rigidez tangente é calculada em cada iteração. Este método é chamado método de Newton-Raphson completo.

Algumas propriedades deste método estão referidas em [BAT96]. Analisando o método sob o ponto de vista do custo computacional, salta à vista o cálculo e factorização da matriz de rigidez tangente. Esses cálculos podem ser muito dispendiosos em problemas de grandes dimensões, ou quando se utiliza iterativamente o MEF. em optimização. Podem ser utilizadas modificações do método de NR.

Um método simples de poupar tempo de cálculo na decomposição e construção da matriz de rigidez tangente consiste em calculá-la para cada incremento apenas numa iteração dentro do incremento. Outra possibilidade consiste em calculá-la apenas em certos incrementos.

Para alguns problemas estas alternativas podem ser mais dispendiosas do que o método de NR completo, já que requerem geralmente mais iterações antes de convergirem.

Uma alternativa às formas iterativas de Newton-Raphson é a utilização dos métodos Quasi-Newton, muito usados em problemas de optimização e também em análise não-linear. Um desses métodos, o BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno), foi implementado, a par do NR, neste trabalho.

Os métodos Quasi-Newton baseiam-se na actualização numérica da matriz de rigidez ou da sua inversa, aproximando-a de uma forma secante da iteração $i-1$ à iteração i .

Neste trabalho usa-se o método BFGS tal como descrito em [VIL95].

A matriz secante, aqui identificada por B^i é definida pela sua equação de Quasi-Newton, como:

$$B^i \cdot (a^i - a^{i-1}) = r^{i-1} - r^i \quad (4.12)$$

Aqui, a matriz B^i é uma incógnita. A matriz 'passa' pelos pontos $\{a^{i-1}, i^{i-1}\}$, $\{a^i, i^i\}$.

Pode dar-se uma forma diferente à equação (4.12), definindo:

$$\begin{aligned} y^{i-1} &= r^{i-1} - r^i \\ s^{i-1} &= a^i - a^{i-1} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Reescreve-se a equação (4.12) como:

$$B^i \cdot s^{i-1} = y^{i-1} \quad (4.14)$$

Depois da matriz secante B^i ser determinada, o vector a^{i+1} é obtido resolvendo o sistema linear:

$$B^i \cdot s^i = r^i \quad (4.15)$$

e subsequentemente actualizando

$$\mathbf{a}^{i+1} = \mathbf{a}^i + \mathbf{s}^i \quad (4.16)$$

Uma nova matriz secante, $\mathbf{B}^{i+1}$, pode então ser calculada e assim sucessivamente.

Os métodos que usam directamente a matriz $\mathbf{B}$ pertencem à família dos métodos de Quasi-Newton directos. Os métodos inversos estão relacionados com a aproximação da inversa da matriz tangente. Assim, $\mathbf{H} = \mathbf{B}^{-1}$.

A equação de Quasi-Newton pode reescrever-se da seguinte forma:

$$\mathbf{H}^i \cdot \mathbf{y}^{i-1} = \mathbf{s}^{i-1} \quad (4.17)$$

esta igualdade, em conjunto com mais algumas condições, permite a determinação da matriz $\mathbf{H}^i$.

Os métodos Quasi-Newton inversos são habitualmente preferidos, já que $\mathbf{s}^i$ pode ser determinado sem recurso à resolução de um sistema de equações.

$$\mathbf{s}^i = \mathbf{H}^i \cdot \mathbf{r}^i \quad (4.18)$$

Neste trabalho as matrizes tangentes são simétricas e definidas positivas. Assim, a estratégia usada consiste em inicializar o método QN com uma matriz simétrica definida positiva (SDP) $\mathbf{B}^0$ e transferir estas propriedades em cada iteração:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{i-1} \text{ simétrica} &\Rightarrow \mathbf{B}^i \text{ simétrica} \\ \mathbf{B}^{i-1} \text{ definida pos.} &\Rightarrow \mathbf{B}^i \text{ definida pos.} \end{aligned}$$

Uma família de actualizações [VIL95] pode ser escrita sob a forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^i = \mathbf{B}^{i-1} &+ \frac{(\mathbf{y}^{i-1} - \mathbf{B}^{i-1} \cdot \mathbf{s}^{i-1}) \cdot (\mathbf{c}^{i-1})^T + \mathbf{c}^{i-1} \cdot (\mathbf{y}^{i-1} - \mathbf{B}^{i-1} \cdot \mathbf{s}^{i-1})^T}{(\mathbf{s}^{i-1})^T \mathbf{c}^{i-1}} \\ &- \frac{(\mathbf{y}^{i-1} - \mathbf{B}^{i-1} \cdot \mathbf{s}^{i-1})^T \cdot \mathbf{s}^{i-1}}{\left((\mathbf{c}^{i-1})^T \cdot \mathbf{s}^{i-1}\right)^2} \mathbf{c}^{i-1} \cdot (\mathbf{c}^{i-1})^T \end{aligned} \quad (4.19)$$

em que $\mathbf{c}^{i-1}$ é um qualquer vector pertencente a $\mathfrak{R}^n$.

A matriz resultante da equação de actualização obedece simultaneamente à equação de Quasi-Newton e à condição de simetria.

Se se pretender uma matriz B^i definida positiva calculada de B^{i-1} definida positiva, usa-se [VIL95]:

$$c^{i-1} = y^{i-1} \quad (4.20)$$

Introduzindo a igualdade na forma geral e usando uma actualização inversa, obtém-se a fórmula de BFGS:

$$H_{BFGS}^i = \left[I - \frac{s^{i-1} \cdot (y^{i-1})^T}{(y^{i-1})^T \cdot s^{i-1}} \right] H^{i-1} \left[I - \frac{s^{i-1} \cdot (y^{i-1})^T}{(y^{i-1})^T \cdot s^{i-1}} \right] + \frac{s^{i-1} \cdot (s^{i-1})^T}{(y^{i-1})^T \cdot s^{i-1}} \quad (4.21)$$

O quadro seguinte resume o processo iterativo usando o BFGS para um dado instante t . O símbolo t é propositadamente omitido por razões de facilidade de leitura.

O método foi implementado de forma a minimizar o trabalho com matrizes, sendo grande parte do cálculo vectorial.

Tabela 4.1 Descrição do algoritmo BFGS.

Algoritmo do método BFGS em análise não-linear	
1.	Calcular K^0
2.	Resolver o sistema $K^0 \Delta a^1 = r^0$
3.	Actualizar $a^1 = a^0 + \Delta a^1$
4.	Avaliar $r^1 = r(a^1)$
5.	Controlo: se a^1 é suficientemente bom-sai $i \geq 1$:
6.	Calcular e armazenar $w^i = \frac{\Delta a^i}{(\Delta a^i)^T (r^{i-1} - r^i)}$
7.	Calcular e armazenar $v^i = r^i - \left[1 + \frac{1}{\sqrt{(w^i)^T r^{i-1}}} \right] r^{i-1}$
8.	Calcular $p = \prod_{j=1}^i \left(I + v^j (w^j)^T \right) r^i$
9.	Resolver o sistema $K^0 q = p$
10.	Calcular e armazenar $\Delta a^{i+1} = \prod_{j=i}^1 \left(I + w^j (v^j)^T \right) q$

-
11. Actualizar $\mathbf{a}^{i+1} = \mathbf{a}^i + \Delta\mathbf{a}^{i+1}$
 12. Avaliar $\mathbf{r}^{i+1} = \mathbf{r}(\mathbf{a}^{i+1})$
 13. Controlo de convergência: se $\mathbf{a}^{i+1}$ é suficientemente bom-sai.
 14. $i=i+1$ e vai para 6.
-

A convergência do método, quando acelerado com a pesquisa unidireccional, é superlinear [VIL95].

Os passos 8 e 10, ao contrário do que parece à primeira vista, são realizados usando apenas operações vectoriais, já que se recorre à propriedade $(\mathbf{I} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^T) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} + (\mathbf{b}^T \cdot \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}$.

O algoritmo do método de Newton-Raphson, mais simples, pode ser visto em [BON97], por exemplo.

Um dos passos opcionais do método de NR ou do BFGS é a pesquisa unidireccional. Neste trabalho usa-se o algoritmo de [VIL95]. A actualização dos deslocamentos nodais passa a ser do tipo:

$$\mathbf{a}^{i+1} = \mathbf{a}^i + \eta_{i+1} \Delta\mathbf{a}^{i+1} \quad (4.22)$$

η_{i+1} é o passo, anteriormente assumido unitário.

Pretende-se determinar η_{i+1} de tal forma que $\mathbf{a}^{i+1}(\eta_{i+1})$ seja melhor (i.e. mais próximo da solução) do que $\mathbf{a}^{i+1}(1)$.

O problema reduz-se à determinação do escalar η_{i+1} tal que:

$$\mathbf{r}(\eta_{i+1}) = \mathbf{r}(\mathbf{a}^i + \eta_{i+1} \Delta\mathbf{a}^{i+1}) = \mathbf{0} \quad (4.23)$$

Sucedee geralmente que a solução $\mathbf{a}^{i+1}$ para $\mathbf{r}(\mathbf{a}^{i+1}) = \mathbf{0}$ não está sobre uma linha paralela a $\Delta\mathbf{a}^{i+1}$ e portanto o resíduo, ao longo dessa linha, não se anula. O problema da determinação de η_{i+1} é modificado para um problema de minimização do resíduo:

Pretende-se determinar η_{i+1} que minimize $\Psi(\eta_{i+1})$ sendo

$$\Psi(\eta_{i+1}) = (\Delta\mathbf{a}^{i+1})^T \mathbf{r}(\mathbf{a}^i + \eta_{i+1} \Delta\mathbf{a}^{i+1}) \quad (4.24)$$

que é a equação linearizada da energia potencial total associada ao ponto $\mathbf{a}^{i+1}$.

Transforma-se portanto o problema da minimização do resíduo no problema de minimização de uma função escalar.

Os métodos de pesquisa linear requerem habitualmente que o módulo de $\Psi(\eta_{i+1})$ seja baixo quando comparado com o módulo de $\Psi(0)$. Assim,

$$|\Psi(\eta_{i+1})| < \varepsilon |\Psi(0)| \quad (4.25)$$

sendo ε uma tolerância especificada da pesquisa unidireccional. Esta tolerância é escolhida no intervalo [0.5,0.8].

Usa-se aqui uma técnica baseada no facto de que se pode determinar facilmente $\Psi(0)$ e $\Psi(1)$:

$$\begin{aligned} \Psi(0) &= (\Delta \mathbf{a}^{i+1})^T \cdot \mathbf{r}^i \\ \Psi(1) &= (\Delta \mathbf{a}^{i+1})^T \cdot \mathbf{r}^{i+1} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Testa-se a condição de paragem para $\eta_{i+1}=1$. Se esta não é satisfeita, realiza-se uma interpolação no plano (η, Ψ) entre os pontos $\eta_{i+1}=0$ e $\eta_{i+1}=1$. Resulta portanto:

$$\eta_{i+1,1} = \frac{\Psi(0)}{\Psi(0) - \Psi(1)} \quad (4.27)$$

como tentativa 1 para prever η_{i+1} . Se a condição de paragem ainda não é satisfeita, usa-se a fórmula de recorrência para a actualização de $\eta_{i+1,k}$:

$$\eta_{i+1,k} = \eta_{i+1,k-1} \frac{\Psi(0)}{\Psi(0) - \Psi(\eta_{i+1,k-1})} \quad (4.28)$$

Se o quociente $\frac{\Psi(\eta_{i+1,k-1})}{\Psi(0)}$ é positivo, é realizada uma extrapolação. Essa extrapolação pode produzir valores muito elevados de $\eta_{i+1,k+1}$, o que geralmente leva a maus resultados. Para evitar essa situação, especifica-se um limite superior para η_{i+1} .

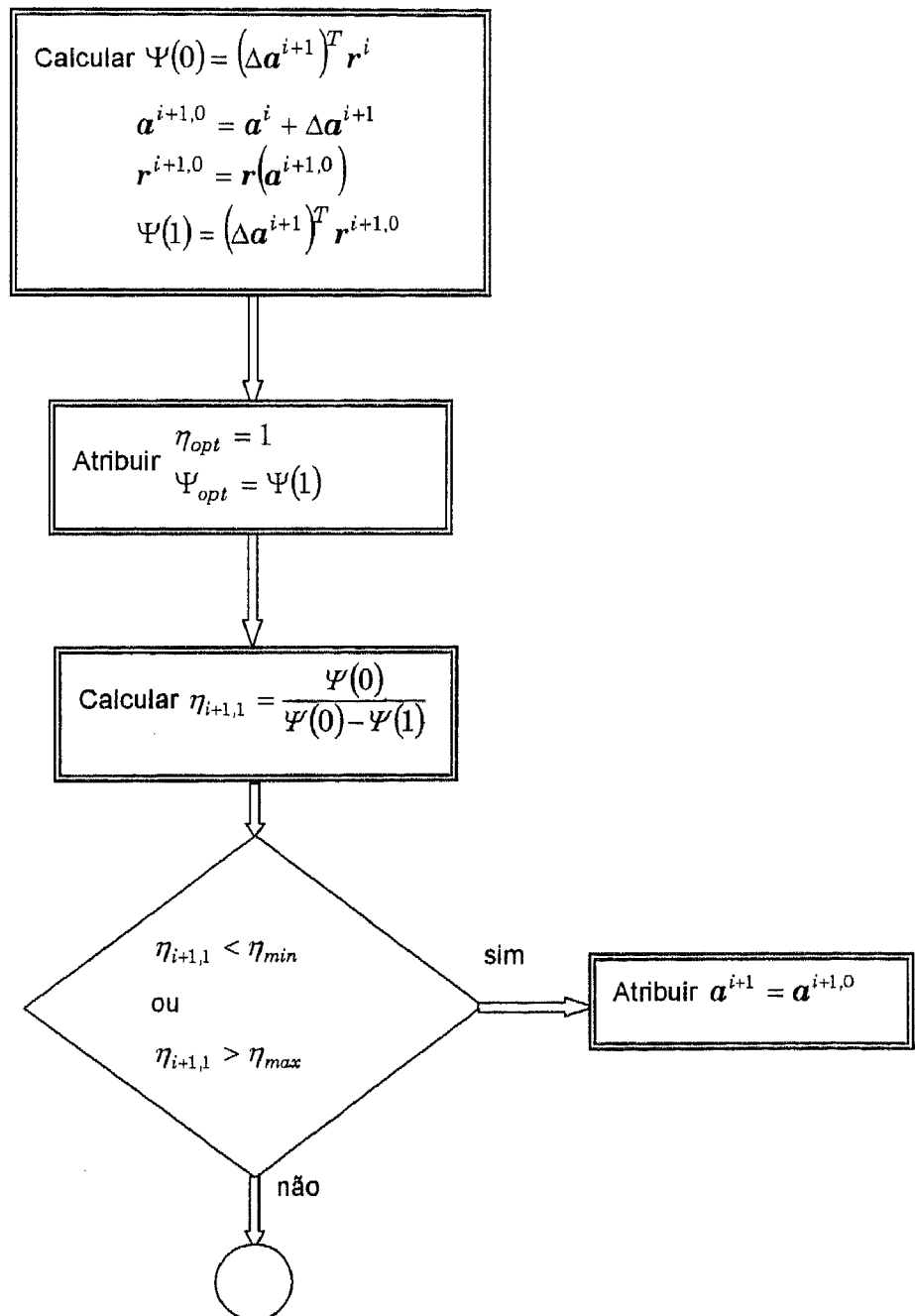
De forma semelhante, para valores muito negativos de $\frac{\Psi(\eta_{i+1,k-1})}{\Psi(0)}$, obtém-se um valor de $\eta_{i+1,k+1}$ próximo de 0 e o algoritmo não progride. Especifica-se um limite inferior para η_{i+1} .

Se o número de iterações não foi suficiente para que a condição de paragem seja verificada, actualiza-se:

$$\mathbf{a}^{i+1} = \mathbf{a}^i + \eta_{i+1,opt} \Delta \mathbf{a}^{i+1} \quad (4.29)$$

e prossegue-se para a iteração seguinte. Na equação (4.29) $\eta_{i+1,opt}$ é o valor de $\eta_{i+1,k-1}$, para o qual $\frac{|\Psi(\eta_{i+1,k-1})|}{|\Psi(0)|}$ foi mínimo.

O algoritmo pode ser analisado a partir do seguinte fluxograma:



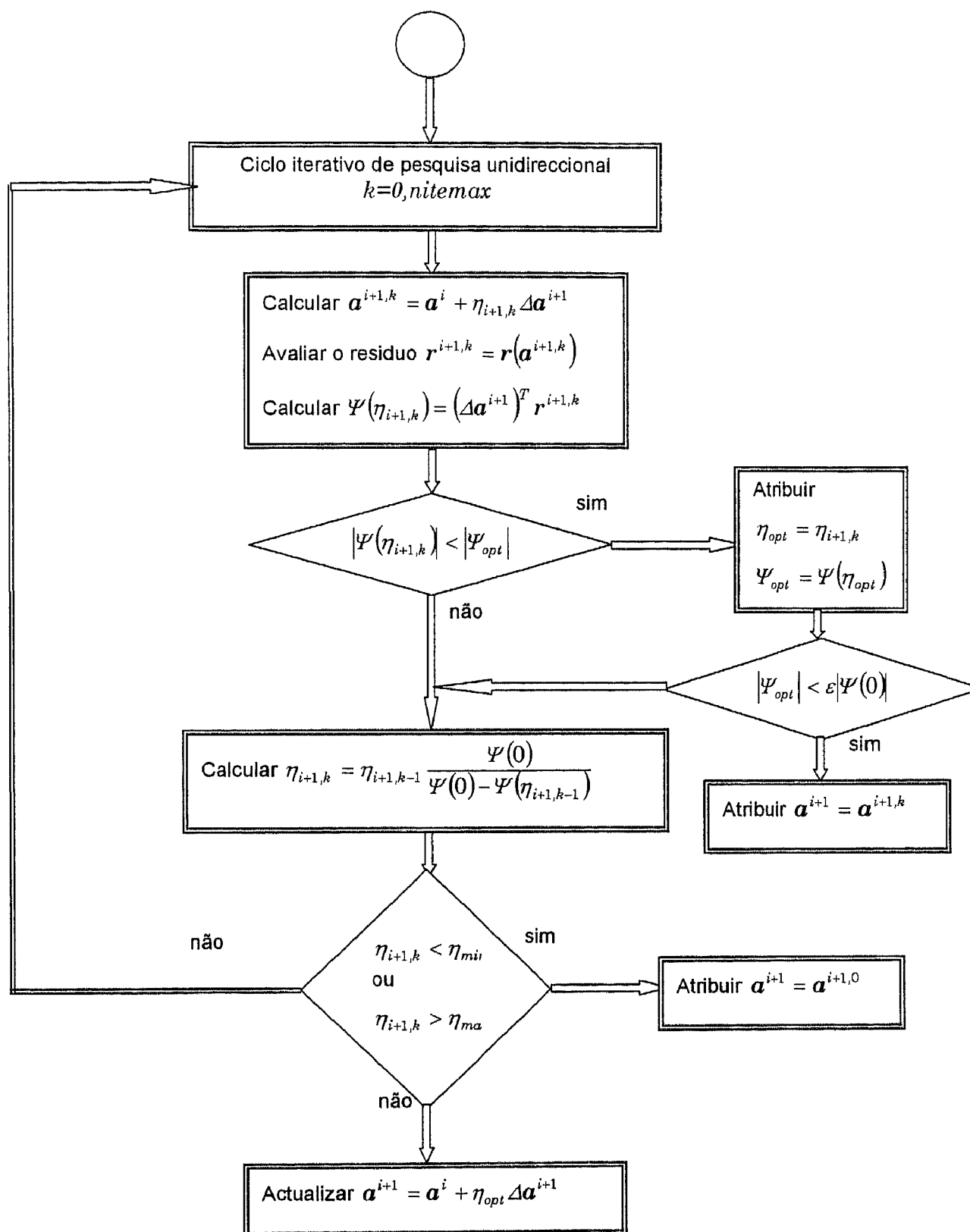


Fig. 4.1 Fluxograma da pesquisa unidireccional

Neste trabalho usaram-se os seguintes valores heurísticos:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= 0.75 \\ \eta_{min} &= 0.1 \\ \eta_{max} &= 1.5 \\ nitemax &= 6\end{aligned}$$

Quer o NR, quer o BFGS permitem a adopção deste procedimento como opção, sendo aconselhável em problemas com elevada não-linearidade quando se usa o BFGS.

O critério de convergência usado neste trabalho é a verificação da norma relativa do resíduo:

$$tolf = \frac{\|{}^{t+\Delta t}r\|}{\|{}^{t+\Delta t}f\|} \quad (4.30)$$

Os métodos de controlo de arco, necessários para problemas de instabilidade, não foram implementados.

4.3 Análise dinâmica

4.3.1 Introdução

Os problemas estruturais envolvendo forças de inércia e dissipação viscosa são extremamente importantes. Existem numerosos exemplos de casos em que não se podem desprezar os efeitos inerciais.

Na análise de cascas, estes efeitos devem ser incluídos em casos de impacto sobre chapas ou reservatórios, sobre cascos de navios, etc.

Neste trabalho detalham-se os pormenores do processo de extracção de formas e frequências, integração directa e sobreposição modal e, finalmente, o método do impulso virtual para problemas não-lineares.

Os sistemas lineares podem ser representados pelo sistema de equações diferenciais:

$$M \cdot \ddot{a} + C \cdot \dot{a} + K \cdot a = f \quad (4.31)$$

onde K é a matriz de rigidez do sistema, C a matriz de amortecimento e M a matriz de massa.

Os vectores ainda não definidos são $\dot{a} = \frac{da}{dt}$ e $\ddot{a} = \frac{d\dot{a}}{dt}$.

Em problemas não-lineares, a equação de equilíbrio é uma simples extensão da já conhecida para o caso estático:

$$\mathbf{M}^t \ddot{\mathbf{a}} = \mathbf{f} - \mathbf{f}_0 \quad (4.32)$$

Estas equações têm procedimentos de solução dispendiosos, principalmente para o caso não-linear. É o objectivo de muitos investigadores desenvolver procedimentos de solução eficientes, robustos e versáteis.

4.3.2 Extracção de formas e frequências naturais

4.3.2.1 Introdução

Para a utilização do método de sobreposição modal, com vista à determinação da resposta temporal de uma estrutura, é fundamental extrair algumas formas e frequências naturais de vibração. As frequências são, por elas mesmas, indicadoras da rigidez da estrutura. Mesmo em análises não-lineares, alguns métodos usam as propriedades das formas e frequências naturais.

Por todas essas razões, é importante a discussão de métodos aproximados ou exactos para o cálculo das frequências e formas naturais. Começa por expôr-se sinteticamente as propriedades do problema característico para um sistema estrutural comum, para depois mostrar os algoritmos utilizados.

Neste trabalho foram implementados o método de iteração em subespaços e o método aproximado de Rayleigh-Ritz com ortogonalização. O método de iteração em subespaços é completamente realizado em memória, ao contrário da versão original [BAT96] e usa um procedimento de filtragem dos modos do espectro indesejados [LOH84]. Além disso, o procedimento de detecção de frequências intermédias baseado nas sucessões de Sturm, presente no trabalho original, embora como opção, não é usado pelo autor deste trabalho por ser muito dispendioso.

Analisando por enquanto o caso linear não amortecido e em regime livre:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (4.33)$$

Pode bem assumir-se, por analogia com os sistemas não-amortecidos de 1 grau de liberdade, que o movimento livre é harmónico simples de frequência ω . Após substituição dessa resposta assumida na equação (4.33), e se $\mathbf{u}$ for a forma do sistema, obtém-se o seguinte problema característico:

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (4.34)$$

cuja solução não-trivial para $\mathbf{u}$ é apenas possível se:

$$\det[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] = 0 \quad (4.35)$$

Esta equação é chamada de equação de frequências do sistema. Expandindo o determinante obtém-se uma equação algébrica de grau n em ω^2 para um sistema de n graus de liberdade.

As frequências $\omega_1, \dots, \omega_n$ são habitualmente ordenadas de forma crescente num vector ω .

É possível afirmar-se que para matrizes de massa e rigidez simétricas e definidas positivas, todas as raízes da equação de frequências são reais e positivas [CLO93].

A cada raiz ω_i^2 corresponde um vector $\mathbf{u}_i$ chamado forma natural de vibração. Claro que cada vector $\mathbf{u}_i$ é definido a menos de uma constante. Correspondendo à ordenação das frequências agrupa-se todos esses vectores por colunas numa matriz $\mathbf{U}$.

Estes conceitos, se bem que básicos, permitem localizar o problema da extracção de formas e frequências.

4.3.2.2 Algumas propriedades do problema característico

Uma das propriedades centrais das formas naturais de vibração é a de que estas são ortogonais relativamente às matrizes de massa e rigidez.

Tendo em conta a simetria da matriz de massa e rigidez, e a igualdade $\mathbf{K} \cdot \mathbf{u}_n = \omega_n^2 \mathbf{M} \cdot \mathbf{u}_n$, resulta:

$$\mathbf{u}_n^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{u}_m = 0 \quad (4.36)$$

$$\mathbf{u}_n^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}_m = 0 \quad (4.37)$$

se $n \neq m$

Neste trabalho, usa-se uma normalização das formas naturais de vibração que produz massas modais unitárias.

Assim, por uma questão de facilidade de leitura, às formas normalizadas atribui-se o símbolo ϕ_i . Portanto, o procedimento de normalização é o seguinte:

$$\phi_i = \frac{\mathbf{u}_i}{\sqrt{\mathbf{u}_i^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{u}_i}} ; i=1, \dots, n \quad (4.38)$$

Agrupando por colunas os vectores normalizados, obtém-se a matriz Φ .

Podem agrupar-se apenas as $p \leq n$ formas correspondentes às p frequências mais baixas, já que frequentemente são as que melhor representam o movimento da estrutura.

A solução para esses p modos (i.e. formas e frequências) pode ser escrita como:

$$\mathbf{K} \cdot \Phi = \mathbf{M} \cdot \Phi \cdot \Omega \quad (4.39)$$

em que Ω é uma matriz diagonal contendo os quadrados das frequências naturais.

É possível aparecerem frequências naturais nulas. Devem-se a modos de corpo rígido, no caso da estrutura os possuir, ou a modos espúrios resultantes da deficiência de rigidez de um elemento. Neste trabalho, podem analisar-se modos de corpo rígido, já que existe um procedimento de translação do espectro (*Shifting*) que permite essa análise. Nenhum dos elementos implementados apresentou frequências espúrias.

Após a normalização, as propriedades de ortogonalidade escrevem-se como:

$$\begin{aligned} \phi_i^T \cdot \mathbf{M} \cdot \phi_j &= \delta_{ij} \\ \phi_i^T \cdot \mathbf{K} \cdot \phi_j &= \omega_j^2 \delta_{ij} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Podem também aparecer frequências de multiplicidade m às quais correspondem formas naturais que geram um espaço m -dimensional, mas não são únicas (ver p.ex [BAT96] ex.10.2).

É importante referir que pode existir um conjunto de dimensão p que verifique as condições de ortogonalidade, sem que esses p vectores sejam formas naturais. Esses só serão formas naturais se, para além de verificarem as condições de ortogonalidade, $p=n$.

Se se realizar a decomposição $\mathbf{LDL}^T$ de $\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}$ obtém-se o polinómio característico à custa dos elementos de $\mathbf{D}$:

$$P(\omega_i^2) = \det \mathbf{LDL}^T = \prod_{i=1}^n d_{ii} \quad (4.41)$$

Claro que em ω_i^2 , $P=0$.

Uma das propriedades usada na construção de algoritmos de extracção de frequências é a propriedade de sequência de Sturm dos polinómios característicos.

Sendo $\mathbf{K}^{(r)}$ a matriz de ordem $n-r$ obtida eliminando de $\mathbf{K}$ as suas últimas r linhas e colunas, e da mesma forma para $\mathbf{M}^{(r)}$, define-se o seguinte problema característico associado:

$$\mathbf{K}^{(r)} \cdot \mathbf{u}^{(r)} = \omega^{2(r)} \mathbf{M}^{(r)} \cdot \mathbf{u}^{(r)} \quad (4.42)$$

Claro que se podem reordenar linhas e colunas de forma a que sejam as últimas. O polinómio característico correspondente a este problema é dado por:

$$P^{(r)}(\omega^{2(r)}) = \det(\mathbf{K}^{(r)} - \omega^{2(r)} \mathbf{M}^{(r)}) \quad (4.43)$$

Como propriedade relevante, os valores próprios do problema $r+1$ separam os do problema r .

$$\omega_1^{2(r)} \leq \omega_1^{2(r+1)} \leq \omega_2^{2(r)} \leq \omega_2^{2(r+1)} \leq \dots \leq \omega_{n-r-1}^{2(r)} \leq \omega_{n-r-1}^{2(r+1)} \leq \omega_{n-r}^{2(r)} \quad (4.44)$$

Uma importante consequência da propriedade de separação dos valores próprios é a seguinte: assumindo que se pode factorizar $\mathbf{K} - \mu \mathbf{M}$ na forma $\mathbf{LDL}^T$, o número de elementos negativos em $\mathbf{D}$ é igual ao número de valores próprios menores do que μ .

Consequentemente, se $\omega_i^2 < \mu < \omega_{i+1}^2$, existem exactamente i elementos diagonais negativos em $\mathbf{D}$. Esta propriedade pode ser imediatamente usada para determinar valores próprios. Assumindo uma translacção μ e verificando se μ é menor ou maior do que o valor próprio requerido, pode reduzir-se sucessivamente o intervalo no qual o valor próprio está localizado.

Este procedimento importante é extensivamente usado na solução de valores e vectores próprios. O propósito pode ser o de acelerar os cálculos ou de determinar valores próprios nulos correspondentes a movimentos de corpo rígido.

Assim, para a solução $\mathbf{K} \cdot \phi = \omega^2 \mathbf{M} \cdot \phi$, aplica-se uma translacção ρ em $\mathbf{K}$, calculando:

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} - \rho \mathbf{M} \quad (4.45)$$

Considere-se ainda o problema característico $\hat{\mathbf{K}} \cdot \psi = \mu^2 \mathbf{M} \cdot \psi$. Pretende-se relacionar os valores e vectores próprios dos dois problemas. Faz-se $\gamma^2 = \rho + \mu^2$ resultando:

$$\mathbf{K} \cdot \psi = \gamma^2 \mathbf{M} \cdot \psi \quad (4.46)$$

Como este problema característico é o inicial, obtém-se:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \rho + \mu^2 \\ \phi &= \psi \end{aligned} \quad (4.47)$$

Para $\rho < 0$ é possível usar o método de iteração em subespaços em sistemas semi-definidos.

Neste trabalho o procedimento de translação foi implementado como uma opção do método de iteração em subespaços e pode ser usado com o objectivo de permitir a extracção em estruturas livres.

4.3.2.3 A implementação do método de Rayleigh-Ritz

Em problemas de grandes dimensões, ao usar-se o método de sobreposição modal, os algoritmos de extracção podem tornar-se dispendiosos [BAT96]. No cálculo aproximado dos primeiros modos é possível usar um método aproximado, o método de Rayleigh-Ritz. Neste trabalho usam-se as ideias de [COO89], [BAT96] e [CLO93].

O princípio de Rayleigh, afirma que:

$$\omega_1^2 = \min \rho(\phi) \quad (4.48)$$

onde o mínimo é obtido de todos os vectores possíveis ϕ e $\rho(\phi)$ é o quociente de Rayleigh:

$$\rho(\phi) = \frac{\phi^T \cdot K \cdot \phi}{\phi^T \cdot M \cdot \phi} \quad (4.49)$$

O quociente tem um mínimo para o primeiro valor próprio e é estacionário para os outros [COO89]. O problema da determinação das frequências pode ser resolvido como um problema de optimização [COO89].

Os limites ao quociente de Rayleigh são:

$$0 < \omega_1^2 \leq \rho(\phi) \leq \omega_n^2 < \infty \quad (4.50)$$

Na análise de Ritz considera-se um conjunto de vectores $\bar{\phi}$, que são combinações lineares dos vectores da base de Ritz, ψ_i $i=1, \dots, q$.

Assim um vector é dado por

$$\bar{\phi} = \sum_{i=1}^q x_i \psi_i \quad (4.51)$$

x_i são as coordenadas de Ritz. Ao subespaço gerado pelos vectores de Ritz chama-se V_q [BAT96]. Este está contido em V_n que é o espaço onde estão definidas as matrizes K e M .

Na análise de Rayleigh-Ritz, interessa determinar os vectores $\bar{\phi}_i$ $i=1, \dots, q$ que, estando contidos no espaço V_q , melhor aproximam os vectores próprios pretendidos.

Avaliando o quociente de Rayleigh:

$$\rho(\bar{\phi}) = \frac{\sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^q x_i x_j \tilde{K}_{ij}}{\sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^q x_i x_j \tilde{M}_{ij}} = \frac{\tilde{k}}{\tilde{m}} \quad (4.52)$$

em que

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{ij} &= \psi_i^T \cdot K \cdot \psi_j \\ \tilde{M}_{ij} &= \psi_i^T \cdot M \cdot \psi_j \end{aligned} \quad (4.53)$$

Aplicando a condição de estacionariedade, chega-se ao seguinte problema característico reduzido:

$$\tilde{K} \cdot x = \rho \tilde{M} \cdot x \quad (4.54)$$

cujas matrizes são $q \times q$, x é o vector de coordenadas de Ritz desejadas e os q valores próprios $\rho_1, \dots, \rho_q$ são aproximações aos q valores próprios $\omega_1^2, \dots, \omega_q^2$.

Uma importante característica das aproximações $\rho_1, \dots, \rho_q$ é que limitam superiormente cada valor próprio do problema inicial.:

$$\begin{aligned} \omega_i^2 &\leq \rho_i \\ \omega_q^2 &\leq \rho_q \leq \omega_n^2 \end{aligned} \quad (4.55)$$

A prova das desigualdades (4.55) é dada por *Bathe* [BAT96]. Uma consequência dessa prova, que é útil para a utilização consciente deste método aproximado, é a seguinte.

Para obter ρ_i e $\bar{\phi}_i$ minimiza-se $\rho(\bar{\phi})$ sujeito às $i-1$ condições de ortogonalidade:

$$\bar{\phi}^T \cdot M \cdot \bar{\phi}_j = 0 \quad j=1, \dots, i-1 \quad (4.56)$$

Essa observação permite concluir que se pode esperar menos precisão na aproximação das altas frequências do que nas baixas, para as quais são impostas menos restrições. Este facto é observado nas experiências realizadas com as estruturas do tipo casca deste trabalho.

O procedimento adoptado para a geração dos vectores é o seguinte:

Os vectores de Ritz são determinados a partir da solução estática onde os q segundos membros são empíricos.

$$K \cdot \Psi = F \quad (4.57)$$

em que Ψ ($n \times q$) guarda os vectores de base de Ritz por colunas e F ($n \times q$) os padrões de carga empíricos.

De seguida, avalia-se as projecções das matrizes K e M no subespaço V_q :

$$\begin{aligned} \tilde{K} &= \Psi^T \cdot K \cdot \Psi \\ \tilde{M} &= \Psi^T \cdot M \cdot \Psi \end{aligned} \quad (4.58)$$

Como, neste trabalho, as matrizes K e M estão armazenadas na forma vectorial, foram criadas subrotinas de multiplicação específicas para realizar eficientemente a projecção sobre os vectores de Ritz.

Resolve-se o problema característico reduzido pelo método de Jacobi generalizado:

$$\tilde{K} \cdot X = \tilde{M} \cdot X \cdot \rho \quad (4.59)$$

em que $\rho = \text{diag}(\rho_i)$. Finalmente, obtêm-se as aproximações aos vectores próprios:

$$\bar{\Phi} = \Psi \cdot X \quad (4.60)$$

Para se obter uma matriz de massa reduzida definida positiva, os vectores de base de Ritz devem ser linearmente independentes [BAT96]. Na prática, excitam-se vários graus de liberdade distintos através dos vectores de carga contidos em F . Em termos de erros, as aproximações estão muito dependentes dos vectores de base de Ritz. Podem obter-se bons resultados se as combinações dos vectores de Ritz permitirem aproximações razoáveis aos vectores próprios desejados.

Este procedimento é o usado no início do método de iteração em subespaços.

Neste trabalho, os padrões de carga são os de Bathe [BAT82], [BAT96], [ABA97]. Outros [CLO93] poderiam ser usados mas os implementados parecem satisfatórios, pelo menos para as baixas frequências.

Um procedimento atractivo, para gerar vectores de Ritz ortogonais em relação à massa, melhorando a qualidade destes, é o de [COO89]. Este procedimento foi implementado e requer uma ortogonalização de Gram-Schmidt.

Tabela 4.2 Descrição do procedimento de ortogonalização dos vectores de Ritz

Algoritmo de geração de vectores de Ritz ortogonais em relação à massa	
1.	Determinar $K \cdot \psi_1^* = F_1$
2.	Normalizar ψ_1^* em relação à massa e obter ψ_1
4.	Para $i > 1$:
4.1	$K \cdot \psi_i^* = M \cdot \psi_{i-1}$ Resolver para ψ_i^*
4.2	$\psi_i^{**} = \psi_i^* - \sum_{k=1}^{i-1} \psi_k^T \cdot M \cdot \psi_i^* \psi_k$ Ortogonalização
4.3	Normalizar ψ_i^{**} em relação à massa e obter ψ_i

É possível melhorar ainda o método, recorrendo a uma projecção modificada das matrizes definidas em V_n , como é proposto por [CLO93]. Na prática, e para os problemas de pequena ou média dimensão deste trabalho, o método de iteração em subespaços revelou-se satisfatório. No entanto, o método de Rayleigh-Ritz pode ser adequado à determinação da mais alta frequência de uma estrutura, escrevendo a seguinte igualdade:

$$\det[M - \alpha^2 K] = 0 \quad (4.61)$$

O menor valor próprio do problema permite a determinação da mais elevada frequência da estrutura e portanto do período mais pequeno:

$$T_n = 2\pi\alpha_1 \quad (4.62)$$

O método de integração directa implementado possui cálculo automático do passo baseado na informação do período acima (4.62) calculado.

Como o método de Rayleigh-Ritz é aproximado, uma medida do erro é a seguinte:

$$\varepsilon = \frac{\|K \cdot \bar{\phi} - \rho M \cdot \bar{\phi}\|}{\|K \cdot \bar{\phi}\|} \quad (4.63)$$

4.3.2.4 O método de iteração em subespaços implementado

Implementou-se uma versão modificada do algoritmo de Bathe [BAT82] totalmente em memória, sem o procedimento de verificação baseado nas sucessões de Sturm (que aliás, já era opcional) e com um processo de filtragem [LOH84] das frequências indesejadas. Existe possibilidade de translação (Shifting). Não menos importante, a versão criada neste trabalho é escrita em Fortran 90 com todas as vantagens sobre o código original, repleto de GOTO's e outras particularidades indesejáveis do Fortran IV.

O método de iteração em subespaços junta o método de iteração inversa de vectores com o método aproximado de Rayleigh-Ritz, já descrito. Algumas melhorias foram propostas ao algoritmo original, pelo próprio autor desse algoritmo [BAT82] ou por outros [AKL82], [LOH84] para citar apenas alguns. As melhorias propostas pelos diversos autores prendem-se essencialmente com a capacidade de calcular frequências elevadas, com a filtragem de frequências não pedidas e com a aceleração da convergência do algoritmo.

O problema característico na base reduzida é resolvido usando o método de Jacobi generalizado, utilizando um código melhorado mas baseado no proposto em [BAT96].

Embora actualmente o método de Lanczos pareça a muitos investigadores [CLO93], [COO89], [HUG87] mais eficiente e versátil, o método de iteração em subespaços é ainda o único presente em programas comerciais de grande qualidade [ABA97].

O método revelou-se eficaz na extracção modal até $p=25$.

Aqui não se apresentam todas as particularidades do método ou pormenores sobre a convergência, sendo o leitor interessado remetido para as referências já citadas.

A dimensão do subespaço é a proposta por [BAT82] e [ABA97] e é $q = \min(2p, p + 8, n)$.

A tolerância para o critério de convergência dos valores próprios é $tol=1E-6$ e o número máximo de iterações é $nite=16$.

Apresenta-se de seguida o algoritmo implementado, que é uma variação do original.

Tabela 4.3 Método de iteração em subespaços

Algoritmo de iteração em subespaços implementado	
1.	Factorização de K : $K=L \cdot D \cdot L^T$
2.	Calcular os q vectores de arranque em Y_I
3.	Fazer, de $k=1, nite$
3.1a)	Se $k=1$, então: resolver $K \cdot \bar{X}_{k+1} = Y_k$
3.1b)	Se $k \neq 1$ então: resolver $K \cdot \bar{X}_{k+1} = Y_k - \beta K \cdot X_k$ (LOH84)
3.2	Calcular $K_{k+1} = \bar{X}_{k+1}^T \cdot Y_k$
3.3	Calcular $\bar{Y}_{k+1} = M \cdot \bar{X}_{k+1}$
3.4	Calcular $M_{k+1} = \bar{X}_{k+1}^T \cdot \bar{Y}_{k+1}$

	Resolver o problema característico usando o método de Jacobi generalizado:
3.5	$K_{k+1} Q_{k+1} = M_{k+1} Q_{k+1} \Lambda_{k+1}$
3.6	Calcular $Y_{k+1} = \bar{Y}_{k+1} Q_{k+1}$
3.7	Calcular $X_{k+1} = \bar{X}_{k+1} Q_{k+1}$
3.8	Determinar ε , se $\varepsilon < \text{tol}$ sai, senão continua

É possível afirmar [BAT96] que $\lim X_{k+1} = \Phi$.

Os pormenores da determinação de β são dados em [LOH84].

4.3.3 Sobreposição modal

4.3.3.1 Introdução

Existem, para problemas lineares em dinâmica, duas técnicas habituais de determinação da resposta temporal de uma estrutura. Uma das técnicas recorre às propriedades de ortogonalidade das formas naturais de vibração é chamada de sobreposição modal, enquanto que a outra baseia-se na discretização do tempo e aproximação assumida das acelerações, velocidades e deslocamentos dentro de cada intervalo de tempo. Este último método é chamado de método de integração directa.

Na maior parte dos casos, para problemas lineares o método de sobreposição modal com base truncada é bastante mais eficiente do que os métodos de integração directa [ABA97]. É pois aconselhável o seu uso em *Software* pedagógico.

Neste trabalho é usada uma matriz de amortecimento proporcional, isto é:

$$C = \alpha K + \beta M \quad (4.64)$$

Nos métodos de sobreposição modal, esta estrutura da matriz de amortecimento permite o desacoplamento das equações da dinâmica, nos casos em que existe amortecimento.

A sobreposição modal baseia-se na seguinte transformação de coordenadas:

$$a = \Phi \cdot q \quad (4.65)$$

sendo Φ a matriz $n \times n$ que possui as formas naturais de vibração agrupadas por colunas e q o vector de coordenadas modais.

Substituindo a transformação na equação de equilíbrio dinâmico resulta:

$$\mathbf{M} \cdot \Phi \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \cdot \Phi \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \cdot \Phi \cdot \mathbf{q} = \mathbf{f} \quad (4.66)$$

pré-multiplicando ambos os membros por Φ^T resulta:

$$\ddot{\mathbf{q}} + (\alpha\Omega + \beta\mathbf{I}) \cdot \dot{\mathbf{q}} + \Omega \cdot \mathbf{q} = \mathbf{Q} \quad (4.67)$$

em que $\mathbf{Q} = \Phi^T \cdot \mathbf{f}$.

O sistema de equações inicial foi assim substituído por um conjunto de equações diferenciais ordinárias de 2ª ordem:

$$\ddot{q}_i + (\alpha\omega_i^2 + \beta)\dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = Q_i \quad i = 1, \dots, n \quad (4.68)$$

ou alternativamente,

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = Q_i \quad i = 1, \dots, n \quad (4.69)$$

sendo ξ_i a razão de amortecimento do modo i .

A frequência amortecida do modo i é dada por:

$$\omega_{di} = \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2} = \omega_i \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha\omega_i}{2} + \frac{\beta}{2\omega_i} \right)^2} \quad (4.70)$$

Cada uma das equações deste conjunto deve ser resolvida para um dado intervalo I de análise temporal, comum a todas, $I : [0, T]$.

As condições iniciais na base modal são facilmente relacionáveis com as condições iniciais do problema original:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_0 &= \Phi^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{a}_0 \\ \dot{\mathbf{q}}_0 &= \Phi^T \cdot \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{a}}_0 \end{aligned} \quad (4.71)$$

A solução de cada uma das equações pode ser obtida, para uma solicitação qualquer do sistema, recorrendo ao integral de convolução, para cada $t \in [0, T]$:

$$q_i(t) = \frac{1}{\omega_{di}} \int_0^t Q_i(\tau) e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} \sin(\omega_{di}(t-\tau)) d\tau + A_i e^{-\xi_i \omega_i t} \cos(\omega_{di} t - \theta_i) \quad (4.72)$$

em que A_i e θ_i são constantes e funções das condições iniciais. Põe a questão da existência ou não da excitação para $t=0$, já que as constantes são distintas para ambos os casos.

Alternativamente pode usar-se um procedimento de integração directa na base modal, como seja o método das diferenças finitas centrais.

É habitual realizar a transformação modal recorrendo a parte das formas naturais de vibração, já que a resposta da estrutura depende normalmente de alguns modos mais influentes. Se existir informação sobre o espectro de carga, devem extrair-se os modos cujas frequências estejam próximas das mais importantes do espectro de carga. De uma forma geral, apenas as frequências naturais mais baixas são usadas na determinação da resposta pelo método da sobreposição modal. Existem alguns factores importantes que contribuem para que assim seja (ver [CLO93]). Faz-se assim uma truncatura da base modal, introduzindo em Φ apenas as p primeiras formas naturais. Este método, usando uma base modal truncada, permite grandes economias na fase de extracção de frequências. Essa economia é acompanhada de algumas deficiências na representação da excitação na base modal. A resposta de uma estrutura pode ser dividida em quasi-estática e dinâmica [COO89] e a deformada quasi-estática é frequentemente mal representada quando se usa $p \leq n$. Para resolver essa deficiência existem dois métodos, ambos implementados, o método da correcção estática e a sobreposição de acelerações.

O algoritmo implementado permite, para além de condições iniciais não-homogéneas, forças exteriores aplicadas. Assim a representação da força exterior sobre a estrutura é realizada através de uma decomposição multiplicativa de um vector, que representa a distribuição das cargas sobre a estrutura, e um escalar, que representa a distribuição temporal dessa força:

$$f = f(t)f^* \quad (4.73)$$

Claro que f^* é o vector de forças nodais equivalentes já discutido na análise dos elementos de casca.

Neste trabalho existem 3 funções possíveis para $f(t)$: Degrau, Rampa e Sinusoide.

A saída de resultados é realizada apenas de m em m passos e pode realizar-se uma animação de qualquer processo dinâmico.

As próprias subrotinas de sobreposição modal calculam automaticamente o passo para a integração na base modal como sendo:

$$\Delta t = \frac{T_p}{12} \quad (4.74)$$

em que T_p é o período natural não amortecido do modo p .

O cálculo automático do passo é muito importante em problemas de optimização, já que existe modificação, entre iterações, do espectro de frequências.

Quer o operador de diferenças finitas centrais (ou outro), quer o integral de convolução podem ser usados na determinação da resposta modal. O método das diferenças centrais é condicionalmente estável mas é geral, enquanto que o integral de convolução dá uma resposta específica para um dado tipo de função.

Uma alternativa, usada por [CLO93] e [ABA97], consiste em proceder a uma linearização de qualquer função entre cada instante de análise e determinar, uma única vez, a resposta pelo integral para um segmento de recta.

$$\ddot{q} + 2\xi\omega\dot{q} + \omega^2 q = Q_{t+\Delta t} + \frac{\Delta Q}{\Delta t} \Delta t \quad (4.75)$$

A solução é obtida somando as componentes particular e homogénea, e pode ser escrita simultaneamente para deslocamentos e velocidades modais, usando a seguinte formula de recorrência [ABA97] obtida a partir do integral de convolução:

$$\begin{Bmatrix} q_{t+\Delta t} \\ \dot{q}_{t+\Delta t} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_t \\ \dot{q}_t \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_t \\ f_{t+\Delta t} \end{Bmatrix} \quad (4.76)$$

Para problemas subamortecidos ($\xi < 1$):

$$\begin{aligned} a_{11} &= A(B \operatorname{sen} + \cos) \\ a_{12} &= \frac{A}{\omega_D} \operatorname{sen} \\ a_{21} &= -AC \operatorname{sen} \\ a_{22} &= A(\cos - B \operatorname{sen}) \\ b_{11} &= -A[(E + D) \operatorname{sen} + (F + G) \cos] + G \\ b_{12} &= A(D \operatorname{sen} + G \cos) + F - G \\ b_{21} &= -A[(\omega_D \cos - \xi \omega \operatorname{sen})(D + E) - (\omega_D \operatorname{sen} + \xi \omega \cos)(F + G)] - H \\ b_{22} &= -A[-(\omega_D \cos - \xi \omega \operatorname{sen})D + (\omega_D \operatorname{sen} + \xi \omega \cos)G] + H \end{aligned} \quad (4.77)$$

em que:

$$\begin{aligned} A &= e^{-\xi\omega\Delta t} & E &= \frac{\xi}{\omega\omega_D} \\ B &= \xi \frac{\omega}{\omega_D} & F &= \frac{1}{\omega^2} \\ C &= \frac{\omega}{\sqrt{1-\xi^2}} & G &= \frac{2\xi}{\omega^3\Delta t} \\ D &= \frac{2\xi^2 - 1}{\omega^2\omega_D\Delta t} & H &= \frac{1}{\omega^2\Delta t} \end{aligned} \quad (4.78)$$

e também:

$$\begin{aligned}\cos &\equiv \cos(\omega_D \Delta t) \\ \sin &\equiv \sin(\omega_D \Delta t)\end{aligned}\quad (4.79)$$

Este processo permite incluir naturalmente as condições iniciais.

O operador de diferenças finitas centrais implementado, alternativamente usado, tem um esquema de recursão bastante simples (ver, p.ex. [CLO93]).

A resposta é obtida usando a transformação modal:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \sum_{i=1}^p \phi_i q_i \\ \dot{\mathbf{a}} &= \sum_{i=1}^p \phi_i \dot{q}_i\end{aligned}\quad (4.80)$$

4.3.3.2 Métodos de correcção implementados

Devido à incorrecção na representação da componente estática da excitação foram implementados, neste trabalho, procedimentos de correcção da resposta.

Escrevendo $\mathbf{f} = \sum_{i=1}^n Q_i \mathbf{M} \cdot \phi_i$, pode avaliar-se uma representação truncada deste vector

como: $\mathbf{f}_t = \sum_{i=1}^p Q_i \mathbf{M} \cdot \phi_i$. A diferença entre o vector e a sua representação truncada é:

$$\Delta \mathbf{f} = \mathbf{f} - \sum_{i=1}^p Q_i \mathbf{M} \cdot \phi_i \quad (4.81)$$

Sendo assim, para compensar o desvio na representação do vector de forças nodais equivalentes, deve fazer-se uma correcção pelo menos estática:

$$\mathbf{K} \cdot \Delta \mathbf{a} = \Delta \mathbf{f} \quad (4.82)$$

Esta correcção deve ser realizada em apenas alguns instantes relevantes, já que é bastante dispendiosa computacionalmente, embora a decomposição de $\mathbf{K}$ seja realizada uma única vez na extração das frequências.

Neste trabalho, o método de sobreposição modal, com a opção de correcção estática activa impõe a correcção apenas quando há saída de resultados para um ficheiro, e imediatamente antes desta saída.

Uma alternativa a este método é o método de sobreposição de acelerações.

Faz-se a transformação modal apenas nas velocidades e acelerações:

$$\begin{aligned}
 M \cdot \Phi \cdot \ddot{q} + C \cdot \Phi \cdot \dot{q} + K \cdot a &= f \Leftrightarrow \\
 a &= K^{-1} \cdot f - K^{-1} \cdot (M \cdot \Phi \cdot \ddot{q} + C \cdot \Phi \cdot \dot{q})
 \end{aligned}
 \tag{4.83}$$

como $K^{-1} \cdot \Phi^{-T} = \Phi \cdot \Omega^{-1}$ resulta para C proporcional:

$$a = K^{-1} \cdot f - \Phi \cdot \Omega^{-1} \cdot (\ddot{q} + \xi \cdot \dot{q}) \tag{4.84}$$

A matriz ξ é diagonal, com os termos $2\xi_i\omega_i$.

Usando uma base modal truncada a p modos, em que $p \ll n$:

$$a = K^{-1} \cdot f - \sum_{i=1}^p \phi_i \left(\frac{1}{\omega_i^2} \ddot{q}_i + \frac{2\xi_i}{\omega_i} \dot{q}_i \right) \tag{4.85}$$

O primeiro termo da equação representa a resposta quasi-estática, já referida, o segundo termo representa a correcção dinâmica devida aos efeitos inerciais e viscosos.

Na implementação, a integração na base modal é a mesma usada no método anterior, mas em vez de se usar a transformação modal para a obtenção da resposta, usa-se a equação (4.85).

Se a força f for decomposta multiplicativamente $f = f(t)f^*$, o método é bastante económico, já que é desnecessária a fase de substituição em cada passo para o cálculo de $K^{-1}f$. Basta realizar uma única vez a operação $v = K^{-1}f^*$ e multiplicar, em cada passo v por $f(t)$. Uma das desvantagens deste procedimento é a impossibilidade, de nesta forma, tratar estruturas em que K é singular.

4.3.4 O método de Newmark

Como alternativa ao método de sobreposição modal, existem métodos de determinação da resposta temporal sem que seja necessário extrair as formas e frequências naturais de vibração. Uma classe desses métodos é a integração directa, usada quer em análise linear quer em não linear e muito popular na área dos elementos finitos. É importante afirmar que estes métodos raramente são económicos em análise linear [ABA97] quando comparados com os métodos de sobreposição modal truncada com correcção, especialmente quando os intervalos de análise são longos. É fácil constatar que a integração das equações da base modal e subsequente sobreposição é muito mais económica do que a fase de substituição usada na integração directa. O custo da análise modal está praticamente concentrado na extracção dos modos naturais. Uma das razões da popularidade dos métodos de integração directa parece ser a facilidade de implementação, que dispensa a extracção de frequências e formas, a transformação de bases e os procedimentos de correcção que complicam bastante a implementação dos métodos de sobreposição modal.

Para uso em pequenos intervalos, e principalmente com o objectivo de testar os resultados obtidos usando a sobreposição modal, foi implementado um método muito popular de integração directa, o método de Newmark. Existem logo à partida duas formulações possíveis, uma em termos de deslocamentos e outra em termos de acelerações [ZIE91]. Usa-se aqui a formulação de deslocamentos, já que pode existir a possibilidade de se realizar a análise de sensibilidade com este operador (correntemente, por razões de economia, é o método de sobreposição modal).

O método de Newmark, ou regra trapezoidal, é uma extensão do método da aceleração linear. As equações usadas para a discretização do domínio do tempo são as seguintes:

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{a}} &= {}^t\dot{\mathbf{a}} + \left[(1-\delta) {}^t\ddot{\mathbf{a}} + \delta {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{a}} \right] \Delta t \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{a} &= {}^t\mathbf{a} + {}^t\dot{\mathbf{a}}\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) {}^t\ddot{\mathbf{a}} + \alpha {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{a}} \right] \Delta t^2 \end{aligned} \quad (4.86)$$

e, claro,

$$\mathbf{M} {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{C} {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K} {}^{t+\Delta t}\mathbf{a} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{f} \quad (4.87)$$

Introduzindo as acelerações assumidas na expressão para as velocidades, obtém-se ${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{a}}$ e ${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{a}}$ em função apenas dos deslocamentos desconhecidos. Essas relações são introduzidas na equação de equilíbrio que é resolvida para ${}^{t+\Delta t}\mathbf{a}$. As velocidades e acelerações são depois imediatamente determinadas.

A fórmula de recorrência é dada por [ZIE91]:

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{M} + \mathbf{C}\delta\Delta t + \mathbf{K}\alpha\Delta t^2 \right] {}^{t+\Delta t}\mathbf{a} &= \Delta t^2 \delta {}^{t+\Delta t}\mathbf{f} - \\ \mathbf{C} \cdot \left[\alpha\Delta t^2 ({}^t\dot{\mathbf{a}}\Delta t(1-\delta)\ddot{\mathbf{a}}) - \delta\Delta t \left({}^t\mathbf{a} + \Delta t {}^t\dot{\mathbf{a}} + \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) {}^t\ddot{\mathbf{a}} \right) \right] &+ \mathbf{M} \cdot \left[{}^t\mathbf{a} + \Delta t {}^t\dot{\mathbf{a}} + \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) {}^t\ddot{\mathbf{a}} \right] \end{aligned} \quad (4.88)$$

no caso de $\alpha=0$ o método pode ser explícito, isto é, a resolução do sistema (se $\mathbf{C}$ e $\mathbf{M}$ forem diagonais) não é necessária. Os métodos explícitos têm a desvantagem de exigirem a construção de uma matriz de massa diagonal, recorrendo a processos por vezes semi-empíricos (ver [HUG87]).

O método de solução consiste em decompor uma única vez a matriz

$$\mathbf{K}' = \mathbf{M} + \mathbf{C}\delta\Delta t + \mathbf{K}\alpha\Delta t \quad (4.89)$$

resolver o sistema $\mathbf{K}' {}^{t+\Delta t}\mathbf{a} = \mathbf{f}'$ e actualizar as velocidades e acelerações usando as expressões de Newmark.

O esquema é incondicionalmente estável para $\delta \geq \frac{1}{2}$ e $\alpha \geq 0.25(\delta + 0.5)^2$ [BAT96]. Os parâmetros escolhidos são os de [BAT96]: $\delta = 0.5$ e $\alpha = 0.25$.

Em termos de passo Δt é adoptado o esquema de cálculo do período mínimo da estrutura T_n , através da inversão das posições das matrizes de rigidez e massa no algoritmo de extracção, adoptando-se seguinte valor:

$$\Delta t = \frac{T_n}{12} \quad (4.90)$$

Os métodos de integração directa estão sujeitos a erros de alongamento de períodos e diminuição de amplitude. O método de Newmark, com os parâmetros referidos, apresenta apenas alongamento de período [BAT96]. Uma prova desta afirmação é realizada em [COO89]. Em relação à possibilidade de usar um método explícito com uma matriz de massa diagonal, o método torna-se condicionalmente estável e exige um intervalo Δt muito pequeno [BAT96]. Uma notável colectânea de informação sobre métodos directos pode ser consultada em [HUG87], nomeadamente sobre intervalos críticos para alguns elementos.

Existe ainda um processo de melhoria da precisão obtida pelo algoritmo de Newmark descrito em [ZIE91].

4.3.5 Problemas não-lineares

4.3.5.1 Breve introdução aos métodos explícitos e implícitos

Em problemas não-lineares (neste trabalho existe a possibilidade de analisar o comportamento não-linear geométrico) a análise dinâmica pode ser realizada recorrendo a métodos de integração directa explícitos ou implícitos ou ainda a métodos baseados na sobreposição modal. Existem numerosas referências tecendo considerações sobre essas metodologias [OWE80], [ABA97], [BAT96], [CLO93], [TAM96], [ZIE91] sendo destacável o trabalho de resumo de *Crisfield* [CRI97] sobre os métodos explícitos e implícitos em análise não linear.

Existem vários esquemas implícitos com actualizações separadas para as variáveis de rotação, velocidades angulares e acelerações angulares recorrendo às fórmulas exactas das rotações finitas (ver p.ex. [ABA97] e [CRI97]). Os métodos explícitos não integram habitualmente esses preciosismos mas são bastante eficientes computacionalmente. A discussão sobre a utilização de uma ou outra das famílias de métodos de solução parece ainda existir e é proveniente das propriedades desses métodos: os métodos implícitos podem ser incondicionalmente estáveis, mas exigem iterações de Newton-Raphson em cada passo que forçosamente exigem a resolução de sistemas de equações. Os métodos explícitos evitam a resolução de sistemas mas são condicionalmente estáveis e exigem um passo muito mais pequeno com eventuais correcções ao passo ao longo do processo, para além do processo de diagonalização da matriz de massa, que é discutível. Uma estratégia ilustrativa de um processo com correcção do passo é a de [ABA97]. Neste trabalho, não se realiza qualquer tentativa de comparar métodos ou sequer referir os existentes, já que o trabalho realizado nesta área é extensíssimo e os métodos podem ser na prática bastante sofisticados.

Uma alternativa às metodologias de integração directa é o uso de uma estratégia baseada na sobreposição modal [BAT96], [CLO93], [ABA97], [TAM96]. Esta afirmação pode parecer absurda já que o princípio de sobreposição implica linearidade. É verdade, mas existem algumas estratégias mais ou menos rebuscadas para contornar essa realidade. Uma dessas estratégias, aparentemente atraente, é a de [CLO93]. Recentemente apareceu um método muito eficiente, que foi o

implementado neste trabalho, e possui a particularidade de poder ser aplicado a problemas altamente não-lineares e irreversíveis, ao contrário do método de projecção modal usado em *software* comercial [ABA97]. O autor desse método, *Tamma* [TAM96], ilustra-o com um caso de uma placa elasto-plástica. O aplicação a estruturas do tipo casca aparece no presente trabalho.

Uma nota sobre o amortecimento: a modelação do amortecimento em problemas não-lineares é, na opinião do autor, complexa. Isto devido ao facto de persistir a dúvida sobre a correcta divisão dos efeitos dissipativos entre a lei constitutiva e o amortecimento 'estrutural' correspondente à fase linear. Embora seja porventura simplista eliminar esse amortecimento da formulação incremental de equilíbrio, neste trabalho o amortecimento é inexistente em problemas não-lineares. Claro que em problemas lineares é bem possível modelar o amortecimento e este está presente nas subrotinas de sobreposição modal e de integração numérica.

4.3.5.2 Implementação do método do impulso virtual

Este método é, segundo os seus autores [TAM96], incondicionalmente estável, possui uma formulação explícita, não exige diagonalização da massa e não envolve o cálculo de acelerações.

A ideia base do método é já bastante conhecida (ver p.ex. [CLO93]) e baseia-se na construção artificial de um problema linear em que os termos não-lineares são incorporados num vector de forças 'exteriores'. O método dos resíduos pesados, também já bem conhecido na função de integração das equações hiperbólicas ([ZIE91], p.ex), é usado com uma escolha criteriosa das funções de peso.

Assim, começa-se por transcrever a equação incremental de equilíbrio em análise não-linear dinâmica:

$$\mathbf{M}^t \ddot{\mathbf{a}} + {}^t_i \mathbf{f}(\mathbf{a}) = {}^t_f \quad (4.91)$$

para obter uma equação análoga à do caso linear, transforma-se (4.91) como:

$$\mathbf{M}^t \ddot{\mathbf{a}} + {}^0_K \mathbf{a} = {}^0_F(\mathbf{a}) \quad (4.92)$$

em que

$${}^0_F(\mathbf{a}) = {}^t_f - {}^t_i + {}^0_K \mathbf{a} \quad (4.93)$$

O método dos resíduos pesados pode ser utilizado sobre a equação (4.93), integrando entre os instantes t e $t+\Delta t$:

$$\int_t^{t+\Delta t} \mathbf{W}^T \cdot (\mathbf{M}^{\tau} \ddot{\mathbf{a}} + {}^0_K \mathbf{a}) d\tau = \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{W}^T \cdot {}^0_F(\mathbf{a}) d\tau \quad (4.94)$$

As funções $\mathbf{W} = \mathbf{W}(t)$ são as funções de peso temporais e serão posteriormente analisadas.

Integrando por partes o termo da aceleração obtém-se:

$$\int_t^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{W}}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{W}^T \cdot {}^0_0 \mathbf{K} \cdot \mathbf{a} d\tau + \left[\mathbf{W}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{a}} - \dot{\mathbf{W}}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{a} \right]_t^{t+\Delta t} = \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{W}^T \cdot {}^0_0 \mathbf{F}(\mathbf{a}) d\tau \quad (4.95)$$

Neste método escolhe-se $\mathbf{W}$ como sendo as soluções fundamentais do seguinte problema linear:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{W}} + {}^0_0 \mathbf{K} \cdot \mathbf{W} = \mathbf{M} \cdot \Phi \delta(t - \tau) \quad \tau \in [t, t + \Delta t] \quad (4.96)$$

Com condições $\mathbf{W}(t) = \dot{\mathbf{W}}(t) = \mathbf{0}$.

A matriz Φ foi já definida e contém as formas naturais de vibração por colunas dos p primeiros modos. O problema característico é o correspondente às matrizes iniciais:

$${}^0_0 \mathbf{K} \cdot \Phi = \mathbf{M} \cdot \Phi \cdot \Omega \quad (4.97)$$

As funções de peso são dadas por [TAM96]:

$$W_i(t - \tau) = \begin{cases} \frac{1}{\omega_i} \phi_i \sin \omega_i (t - \tau) & \text{se } t \geq \tau \\ 0 & \text{se } t < \tau \end{cases} \quad (4.98)$$

Usando a transformação modal usual e utilizando as propriedades de ortogonalidade das formas, a forma fraca representada em coordenadas modais no domínio temporal $[0, \Delta t]$ é escrita como:

$$\begin{bmatrix} \cos \sqrt{\Omega} \Delta t & -\sqrt{\Omega}^{-1} \sin \sqrt{\Omega} \Delta t \\ \sqrt{\Omega} \sin \sqrt{\Omega} \Delta t & \cos \sqrt{\Omega} \Delta t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t} \mathbf{q} \\ {}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^t \mathbf{q} \\ {}^t \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} + \int_0^{\Delta t} {}^{t+\tau} \mathbf{Q}^* \begin{Bmatrix} -\sqrt{\Omega}^{-1} \sin \sqrt{\Omega} \tau \\ \cos \sqrt{\Omega} \tau \end{Bmatrix} d\tau \quad (4.99)$$

em que $\mathbf{Q}^*$ é o vector de forças 'externas' na base modal,

$$\mathbf{Q}^* = \Phi^T \cdot \mathbf{F}(\mathbf{a}) \quad (4.100)$$

A matriz diagonal $\sqrt{\Omega}$ contém as frequências naturais ordenadas.

Realiza-se uma interpolação linear do vector Q^* no domínio $[0, \Delta t]$, resultando:

$${}^{t+\tau}Q^* = \left(1 - \frac{\tau}{\Delta t}\right) {}^tQ^* + \frac{\tau}{\Delta t} {}^{t+\Delta t}Q^* \quad (4.101)$$

Substituindo esta equação no integrando da equação acima, e reorganizando, resulta:

$$\begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}q \\ {}^{t+\Delta t}\dot{q} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \sqrt{\Omega} \Delta t & \sqrt{\Omega}^{-1} \sin \sqrt{\Omega} \Delta t \\ -\sqrt{\Omega} \sin \sqrt{\Omega} \Delta t & \cos \sqrt{\Omega} \Delta t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^tq \\ {}^t\dot{q} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^tQ^* \\ {}^{t+\Delta t}Q^* \end{Bmatrix} \quad (4.102)$$

As matrizes diagonais α_i são definidas como:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \Omega^{-1} \cdot \left[(\Delta t \sqrt{\Omega})^{-1} \sin \sqrt{\Omega} \Delta t - I \right] \\ \alpha_2 &= \Omega^{-1} \cdot \left[I - \cos \sqrt{\Omega} \Delta t \right] / \Delta t \\ \alpha_3 &= \Omega^{-1} \cdot \left[\cos \sqrt{\Omega} \Delta t - (\Delta t \sqrt{\Omega})^{-1} \sin \sqrt{\Omega} \Delta t \right] \\ \alpha_4 &= \sqrt{\Omega}^{-1} \cdot \left[\sin \sqrt{\Omega} \Delta t + (\Delta t \sqrt{\Omega})^{-1} (\cos \sqrt{\Omega} \Delta t - I) \right] \end{aligned} \quad (4.103)$$

Pode adaptar-se o procedimento para impôr um processo iterativo explícito adequado para a solução eficiente e precisa de problemas não-lineares.

Assim, para a iteração i ,

$$\begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}q^{i+1} \\ {}^{t+\Delta t}\dot{q}^{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \sqrt{\Omega} \Delta t & \sqrt{\Omega}^{-1} \sin \sqrt{\Omega} \Delta t \\ -\sqrt{\Omega} \sin \sqrt{\Omega} \Delta t & \cos \sqrt{\Omega} \Delta t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^tq \\ {}^t\dot{q} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^tQ^* \\ {}^{t+\Delta t}Q^{*i} \end{Bmatrix} \quad (4.104)$$

As forças internas ${}^{t+\Delta t}Q^{*i}$ são obtidas na base modal como:

$${}^{t+\Delta t}Q^{*i} = {}^{t+\Delta t}Q - {}^{t+\Delta t}T^i + \Omega {}^{t+\Delta t}q^i \quad (4.105)$$

em que

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}Q &= \Phi^T \cdot {}^{t+\Delta t}f \\ {}^{t+\Delta t}T &= \Phi^T \cdot {}^{t+\Delta t}\dot{q}^i \end{aligned} \quad (4.106)$$

O critério de convergência do esquema de integração explícita é escrito como:

$$\left\| \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}q^{i+1} \\ {}^{t+\Delta t}\dot{q}^{i+1} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}q^i \\ {}^{t+\Delta t}\dot{q}^i \end{Bmatrix} \right\| < \varepsilon \quad (4.107)$$

Depois de obter a resposta iterativa na base modal, usa-se a transformação modal para determinar os deslocamentos e velocidades nodais.

O algoritmo proposto por [TAM96] não pode ser utilizado na sua forma original, já que no cálculo das forças internas tem de se usar o deslocamento obtido na iteração anterior, o que significa que a transformação modal tem de ser realizada em todas as iterações.

Este método, para além de não necessitar de diagonalização da massa, permite o uso de um processo iterativo para uma base reduzida de dimensão p .

O método também possui arranque próprio, ao contrário do método das diferenças finitas centrais.

O método é incondicionalmente estável (para problemas lineares...). Pelos exemplos mostrados em [TAM96] é constatada a superioridade em tempo de CPU relativamente à família Newmark implícita e explícita.

4.4 Conclusões

Na construção de bibliotecas de solução adaptadas às características dos problemas estruturais, e dos métodos de discretização por elementos finitos, há ainda muito trabalho a realizar com vista a melhorar o desempenho dos métodos existentes e a desenvolver métodos revolucionários.

Neste capítulo, apresentaram-se alguns algoritmos que foram implementados com o objectivo de construir uma biblioteca de solução. Foi possível implementar todos os métodos sem os relacionar com os elementos finitos implementados. Parte dessa estratégia é realizada devido às potencialidades de programação do Fortran 90.

Para se construir um *Solver* verdadeiramente eficiente e atractivo, parece incontornável o uso de uma biblioteca de operações escrita numa linguagem de baixo nível como o MASM. Devido ao facto de este trabalho não se centrar na construção desse *Solver*, as subrotinas foram todas escritas em Fortran90.

4.5 Referências

- [ABA97] ABAQUS. *Theory Manual Version 5.7* Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc 1997.
- [AKL82] AKL, F.A., DILGER, W.H., IRONS, B.M. *Acceleration of Subspace Iteration*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 18, 583-589 John Wiley & Sons. 1982
- [BAT82] BATHE, K.J. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall, 1982.
- [BAT96] BATHE, K.J. *Finite Element Procedures*. Prentice-Hall. 1996.
- [BON97] BONET, J., WOOD, D. *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. Cambridge University press, 1997.
- [CLO93] CLOUGH, R.W. PENZIEN, J. *Dynamics of Structures. Second Edition*. International Editions McGraw-Hill 1993.
- [COO89] COOK, R.D. , MALKUS, D.S., PLESHA, M.E. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis. Third Edition*. John Wiley & Sons. 1989.
- [CRI97] CRISFIELD, M.A. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Vol2 Advanced Topics*. John Wiley & Sons. 1997.
- [HUG87] HUGHES, T.J.R. *The Finite Element Method. Linear Statics and Dynamic Finite Element Analysis*. Prentice-Hall International Editions. 1987.
- [IRO80] IRONS, B. AHMAD, S. *Techniques of Finite Elements*. Ellis Horwood Limited 1980.
- [LOH84] LOH, C.H.. *Chebyshev Filtering and Lanczos' Process in the Subspace Iteration Method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Short Communications pp 182-186 John Wiley & Sons 1984.
- [OWE80] OWEN, D.R.J., HINTON, E. *Finite Elements in Plasticity. Theory and Practice*. Pineridge Press Limited. Swansea U.K.. 1980.
- [TAM96] TAMMA, K.KI., CHEN, X. SHA, D. *An Overview of Recent Advances and Evaluations of the virtual-pulse (V.I.P.) Time-Integral Methodology for General Structural Dynamics Problems: Computational Issues and Implementation Aspects*. Vol. 39, 1955-1977 John Wiley & Sons. 1996.

[VIL95] VILA, A. , RODRIGUEZ-FERRAN, A. HUERTA, A. *Nonlinear Finite Element Techniques Using an Object-Oriented Code*. International Center for Numerical Methods in Engineering, Barcelona. Monograph CIMNE N°31, October 1995.

[ZIE91] ZIENKIEWICZ, O.C. , TAYLOR, R.L. *The Finite Element Method Fourth Edition. Vol 2: Solid and Fluid Mechanics Dynamics and Non-Linearity*. Mc-Graw-Hill Book Company 1991.

5 Pré e pós processamento

5.1 Introdução

Neste capítulo mostram-se os procedimentos de geração automática de malhas em domínios planos e superfície e apresenta-se uma breve descrição do pós-processador. Quer os geradores quer o pós-procesador foram criados de raiz pelo autor deste trabalho. O gerador de malhas em domínios planos foi criado em Fortran77 (Powerstation 1.0) e o gerador de superfícies em Fortran90. O pós-processador foi construído em Fortran90 e OpenGL.

A criação de geradores automáticos de malha é indispensável na optimização de forma. O pós-processador é útil na representação de campos de tensões e deformadas. Na análise dinâmica faz-se a animação dos campos.

Todos os exemplos deste trabalho foram criados recorrendo aos pré e pós processadores aqui sucintamente descritos. Além disso, foram criados pequenos programas para gerar as condições de contorno por grupos de nós ou elementos.

5.2 Geração de malha

5.2.1 Justificação

O tema da geração de malhas é fundamental no âmbito da análise de sólidos geometricamente realistas recorrendo ao método dos elementos finitos. Os programas de análise estrutural mais divulgados (I-Deas, Ansys, Abaqus, Adina,...) possuem actualmente mecanismos de computação gráfica bastante sofisticados e de utilização prática. No entanto, como habitualmente não há acesso ao código desses programas, torna-se necessário, no âmbito deste trabalho, desenvolver programas e subrotinas que permitam gerar de forma automática e cíclica as malhas necessárias e que permitam visualizar as malhas geradas.

Quando se pretende optimizar a forma de sólidos, tendo em conta o seu desempenho estrutural, a geração automática de malhas é imprescindível.

As necessidades de actualização da geometria dos sólidos em cada iteração do processo de optimização impõem características de robustez, independência de intervenção humana e rapidez aos geradores de malha. Neste trabalho foram criados dois geradores de malha, um para placas e outro para cascas (superfícies). O gerador de malha (*free - meshing*) para domínios planos permite tratar domínios não-convexos e multiplamente conexos de uma forma muito rápida (em relação p.ex ao programa I-Deas) e automática, tendo o autor conseguido eliminar a tendência habitual que os geradores de malha *free* têm de gerar elementos muito distorcidos em que aparecem por exemplo 'quadriláteros' com 3 vértices colineares. O gerador de malha em cascas foi desenvolvido com base na tecnologia de mapeamento e *multiblock*. Embora o autor esteja consciente das limitações geométricas deste tipo de procedimento, os resultados obtidos foram os suficientes para os objectivos deste trabalho. Ambos os geradores requerem apenas informação acerca da geometria do sólido (alguns pontos) e um indicador do número de elementos sobre a fronteira exterior do sólido. Parece importante referir que ao contrário dos geradores de triângulos, os geradores completamente automáticos de quadriláteros têm alguma complexidade computacional, e exibem dispersão de tempos de processamento em função da geometria considerada. Existem, desde 1990/91 geradores de quadriláteros baseados em métodos frontais e

offset que apresentam resultados muito semelhantes aos obtidos neste trabalho (ver [SEZ91], [BLA91], [ZHU91], [JIN90]).

Em relação às cascas é comentável a importância da computação gráfica e da parametrização de entidades geométricas de dimensão 1 ou 2 na definição de dados necessários ao programa de análise estrutural e de sensibilidade. Assim, para elementos finitos de casca degenerados de 3D, para os quais são habitualmente usados geradores tridimensionais, o gerador deste trabalho permite o cálculo analítico dos vectores normais à superfície e torna desnecessária a criação de nós em duas superfícies paralelas à média. Na análise de sensibilidade é necessário obter os vectores velocidade dos nós de cada elemento. Esse cálculo, entre outros, é analítico se recorrermos à parametrização de entidades geométricas de dimensão 1 e 2.

Devido ao avançado estado das tecnologias da geometria computacional e da modelação de sólidos, não é intenção do autor deste trabalho fazer investigação, ou sequer citar trabalhos nessa área, mas apenas construir as ferramentas geométricas necessárias a um trabalho de optimização de forma.

Sendo assim, os seguintes conceitos e ideias são os estritamente necessários à implementação dos geradores automáticos de malha e à análise gráfica das malhas.

5.2.2 Interpolação linear ponto a ponto

Sejam $X_0, \dots, X_n \in \mathbb{R}^3$ e formam um polígono B . Um polígono consiste numa sequência de segmentos de recta, cada um interpolando um par de pontos X_i, X_{i+1} . B pode então ser chamado de interpolador ponto a ponto ρL dos pontos X_i .

Se os pontos X_i estão sobre uma curva C então B é chamado de interpolador linear ponto a ponto de C e escreve-se:

$$B = \rho L C \quad (5.1)$$

Uma das propriedades importantes dos interpoladores lineares ponto a ponto é a sua invariância afim: se uma curva C é mapeada numa curva ΦC por um mapeamento afim Φ , então o interpolador linear ponto a ponto para ΦC é um mapeamento afim do interpolador original ponto a ponto:

$$\rho L \Phi C = \Phi \rho L C \quad (5.2)$$

Os interpoladores ponto a ponto foram usados neste trabalho na aproximação das linhas de fronteira em polígonos.

5.2.3 Linhas de Bézier

5.2.3.1 Definição de linha e polígono de Bézier

Dados $X_0, X_1, \dots, X_n \in \mathbb{R}^3$ e $t \in \mathbb{R}$, faz-se:

$$X_i^r(t) = (1-t)X_i^{r-1}(t) + tX_{i+1}^{r-1}(t) \quad \begin{cases} r=1, \dots, n \\ i=0, \dots, n-r \end{cases} \quad (5.3)$$

e $X_i^0(t) = X_i$.

Então, $X_0^n(t)$ é o ponto com parâmetro de valor t sobre a linha de Bézier X^n .

O polígono B formado pelos pontos $X_0, X_1, \dots, X_n$ é chamado polígono de controlo ou polígono de Bézier.

Assim, pode definir-se um operador linear B tal que $X^n(t) = B[B, t]$. Esse operador associa a linha de Bézier ao seu polígono de controlo.

As propriedades das linhas de Bézier não são escritas neste trabalho, por uma questão de concisão.

As funções polinomiais são muito populares, pela sua fácil manipulação analítica.

Os polinómios de Bernstein, utilizados neste trabalho no gerador em domínios planos, podem ser escritos explicitamente:

$$BE_i^n(t) = \binom{n}{i} \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i} \quad (5.4)$$

A utilidade dos polinómios de Bernstein na criação das curvas de Bézier é revelada ao exprimir os pontos de Bézier intermédios em termos desses polinómios:

$$X_i^r(t) = \sum_{j=0}^r X_{i+j} BE_j^r(t) \quad (5.5)$$

No caso de $r=n$, obtém-se a posição de qualquer ponto sobre a linha de Bézier como:

$$X^n(t) = \sum_{j=0}^n X_j BE_j^n(t) \quad (5.6)$$

A partir de (5.6) pode obter-se a derivada da linha de Bézier, como

$$\frac{d}{dt} X^n(t) = n \sum_{j=0}^{n-1} (X_{j+1} - X_j) BE_j^{n-1}(t) \quad (5.7)$$

As curvas de Bézier com base de Bernstein (5.4), tal como outras curvas de base polinomial, podem ser escritas na forma:

$$X(t) = [X_0 \dots X_n] \cdot \begin{bmatrix} m_{00} & \dots & m_{0n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n0} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t^0 \\ \vdots \\ t^n \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

em que $\{t^i\}$ é a base monomial. A forma (5.8) permite a construção de linhas com propriedades diversas das de Bézier, através de diferentes matrizes $\mathbf{M} = \{m_{ij}\}$.

5.2.3.2 Interpolação por partes

Se se quiser usar uma base polinomial de dimensão 4 na criação de curvas, é habitual definir uma curva como um conjunto sequencial de várias curvas de Bézier. Pela imposição de igualdade nas coordenadas nos pontos de fronteira assegura-se a continuidade C_0 . Se for útil a continuidade C_1 nas fronteiras de ligação entre as curvas deve impôr-se colinearidade dos três pontos: da fronteira, 1º da curva seguinte e 3º da curva corrente. A base de Bernstein não assegura a verificação da equação da curva por parte dos pontos intermédios.

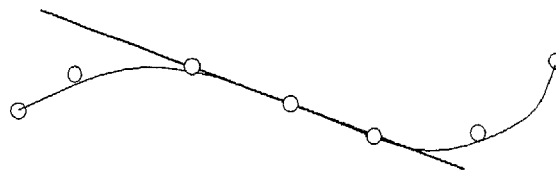


Fig. 5.1 Imposição de continuidade C_1 numa curva de Bézier usando a base de Bernstein

5.2.4 Superfícies obtidas de um produto tensorial

5.2.4.1 Introdução

Combinando duas equações paramétricas de curvas sob a forma de Bézier, pode obter-se uma superfície [FAR88], [GEO91].

Se existe uma curva de Bézier inicial $\mathbf{X}^m(u) = \sum_{i=0}^m \mathbf{X}_i BE_i^m(u)$ e se fizermos $\mathbf{X}_i$ atravessar uma curva de grau n :

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{X}_i(v) = \sum_{j=0}^n \mathbf{X}_{i,j} BE_j^n(v) \quad (5.9)$$

pode então escrever-se:

$$\mathbf{X}^{m,n}(u,v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{X}_{i,j} BE_i^m(u) BE_j^n(v) \quad (5.10)$$

5.2.4.2 Forma matricial

Em termos computacionais é frequentemente vantajoso escrever a equação paramétrica da superfície em termos matriciais

$$\mathbf{X}^{m,n}(u,v) = \begin{bmatrix} BE_0^m(u) & \cdots & BE_m^m(u) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{00} & \cdots & \mathbf{X}_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{X}_{m0} & \cdots & \mathbf{X}_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} BE_0^n(v) \\ \vdots \\ BE_n^n(v) \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

A matriz $\mathbf{B} = \{\mathbf{X}_{ij}\}$ é chamada a matriz geométrica do macroelemento[†]. A forma monomial (5.10) não está limitada a superfícies de Bézier, e substituindo os polinómios BE_i^j por outros, obtêm-se superfícies diversas das de Bézier.

Se usarmos a base de polinómios de Bernstein, podemos re-escrever a equação como

$$\mathbf{X}^{m,n}(u,v) = \begin{bmatrix} u^0 & \cdots & u^m \end{bmatrix} \cdot \mathbf{M}^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{00} & \cdots & \mathbf{X}_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{X}_{m0} & \cdots & \mathbf{X}_{mn} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{N} \cdot \begin{bmatrix} v^0 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

[†] A noção de macroelemento tem concretização quando se cria uma superfície baseada numa matriz de superfícies de Bézier, procedimento aliás usado neste trabalho.

e $0 \leq u, v \leq 1$ é o domínio de referência do macroelemento.

As matrizes quadradas $\mathbf{M}$ e $\mathbf{N}$ podem ser escritas, para o caso da base de Bernstein:

$$m_{ij} = (-1)^{j-i} \binom{m}{j} \cdot \binom{j}{i} \quad (5.13)$$

$$n_{ij} = (-1)^{j-i} \binom{n}{j} \cdot \binom{j}{i} \quad (5.14)$$

As superfícies usadas neste trabalho usaram não a base de Bernstein, mas a base de Catmull-Rom usada habitualmente para linhas [FAR88], [GEO91].

Nesse caso, e para $n=m=3$, as matrizes $\mathbf{M}$ e $\mathbf{N}$ são:

$$\mathbf{M} = \mathbf{N} = 0.5 \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -5 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Uma das virtudes da utilização da base de Catmull-Rom é a satisfação da equação da superfície nos pontos de controlo.

5.2.4.3 Superfícies compostas

Devido ao facto de habitualmente se usar bases de dimensão 4 para os polinómios de Bernstein e Catmull-Rom, a versatilidade geométrica obtida com um único macroelemento não é suficiente [GEO91] para a representação de superfícies de engenharia. Sendo assim é habitual definir vários domínios de referência resultando em vários domínios físicos (em $\mathcal{R}^3$).

Uma configuração usada também neste trabalho é a matriz 3×3 apresentada na seguinte figura

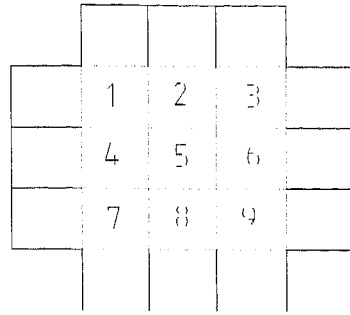


Fig. 5.2 Matriz 3x3 de domínios de referência

5.2.4.4 Derivadas no domínio de referência

As derivadas das coordenadas físicas em ordem aos parâmetros (i.e. coordenadas de referência) são úteis, neste trabalho, para o cálculo dos versores normais à superfície num qualquer ponto.

Sendo assim, pode obter-se para uma derivada de uma superfície de Bézier:

$$\frac{\partial^{r+s}}{\partial u^r \partial v^s} \mathbf{X}^{m,n}(u,v) = \frac{m!n!}{(m-r)!(n-s)!} \sum_{i=0}^{m-r} \sum_{j=0}^{n-s} \Delta^{r,0} \Delta^{0,s} \mathbf{X}_{i,j} BE_i^{m-r}(u) BE_j^{n-s}(v) \quad (5.16)$$

em que

$$\Delta^{r,0} \mathbf{X}_{i,j} = \Delta^{r-1,0} \mathbf{X}_{i+1,j} - \Delta^{r-1,0} \mathbf{X}_{i,j}, \text{ e } \Delta^{0,s} \mathbf{X}_{i,j} = \Delta^{0,s-1} \mathbf{X}_{i,j+1} - \Delta^{0,s-1} \mathbf{X}_{i,j} \quad (5.17)$$

com

$$\begin{aligned} \Delta^{1,0} \mathbf{X}_{i,j} &= \mathbf{X}_{i+1,j} - \mathbf{X}_{i,j} \\ \Delta^{0,1} \mathbf{X}_{i,j} &= \mathbf{X}_{i,j+1} - \mathbf{X}_{i,j} \end{aligned} \quad (5.18)$$

A função versor normal a uma superfície de Bézier é dada pelo produto vectorial:

$$\mathbf{n}(u,v) = \frac{\frac{\partial}{\partial u} \mathbf{X}^{m,n}(u,v) \times \frac{\partial}{\partial v} \mathbf{X}^{m,n}(u,v)}{\left\| \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{X}^{m,n}(u,v) \times \frac{\partial}{\partial v} \mathbf{X}^{m,n}(u,v) \right\|} \quad (5.19)$$

Para a base de Catmull-Rom [GEO91], os vectores obtidos acima são facilmente obtidos.

5.2.5 Comprimento de arco

Devido ao método de inserção de nós nas fronteiras de domínios planos e cascas ser efectuado, neste trabalho, através do cálculo do comprimento de arco, este é mostrado de seguida:

i) forma analítica

$$s(t) = \int_a^b \|\dot{X}\| \cdot dt \quad (5.20)$$

$$\text{com } s \in [a, b]$$

ii) forma aproximada

Como o integral acima não tem, para o caso de polinómios cúbicos, solução analítica, pode aproximar-se a fórmula acima por

$$s(t) \cong \sum_{i=0}^{\frac{1}{\Delta t}-1} \left\| \dot{X} \left[\Delta t \cdot \left(i + \frac{1}{2} \right) \right] \right\| \cdot \Delta t \quad (5.21)$$

em que $\Delta t = \frac{1}{3000}$ foi o valor (heurístico) utilizado neste trabalho

5.2.6 Classes e métodos de geração de malha

A classificação dos métodos mais comuns existentes pode ser realizada com base na abordagem computacional adoptada e o tipo (e quantidade) de dados fornecidos ao programa de computador [GEO91]:

Classe 1

i) Geração manual

Define-se toda a informação relevante. Assim, neste caso, o utilizador define os elementos pelos seus vértices.

ii) Geração semi-automática

Define-se toda a informação relevante para uma malha, assumindo que as conectividades são conhecidas. Um exemplo deste método consiste na geração de malha 2D numa secção transversal de uma barra que depois é extrudida para formar elementos volumétricos.

Classe 2

iii) Mapeamento

Consiste em gerar uma malha num domínio de referência geometricamente elementar (triângulos, quadriláteros) e mapear a malha (i.e. cada ponto) para um domínio físico através de funções de mapeamento.

Este processo, em conjunto com uma partição estruturada do domínio, foi usado no gerador de malha em cascas no presente trabalho.

Classe 3

iv) Solução de equações às derivadas parciais

As equações são formuladas numa malha de referência à qual corresponde uma geometria onde a malha é facilmente gerada. Uma função de mapeamento é definida de modo a assegurar algumas propriedades pretendidas (ortogonalidade de elementos, densidade de elementos, ...)

Classe 4

v) Aplicações de técnicas de sobreposição e deformação

O domínio, definido pela sua fronteira, é incluído numa grelha de quadriláteros que depois é deformada de modo a cobrir o domínio precisamente. Uma variante deste método é o método da grelha inteira (*integer grid*), que consiste na criação de uma grelha incluída completamente no domínio e depois usa uma variante do método frontal para a ligação da grelha à fronteira do domínio. O método da grelha inteira foi o adoptado, com modificações, pelo autor do presente trabalho no gerador de domínios planos.

Classe 5

vi) Partição estruturada

Este método, também chamado de *Multiblock*, consiste na partição estruturada do domínio por macroelementos de geometria pouco complexa. Após essa partição, é gerada a malha em cada

macroelemento (por exemplo por mapeamento), tendo em conta a compatibilidade nas fronteiras entre cada macroelemento.

Classe 6

vii) Métodos frontais

Neste método, a geração da malha, já bastante explorado pelo autor, é realizada a partir da fronteira que é, em cada varrimento do processo, aproximada por um polígono *B*. A partir de cada segmento de recta do polígono, são criados pontos, segmentos de recta e elementos. A partir do momento em que todos os segmentos do polígono foram usados, cria-se um novo polígono e repete-se o processo. Existem diversas versões destes métodos em que apenas se geram triângulos (é aliás muitíssimo simples) e triângulos com quadriláteros.

A geração de malhas que incluam apenas quadriláteros requer bastante esforço de computação (partição automática do domínio, limitações em domínios multiplamente conexos).

viii) Geração do tipo Delaunay-Voronoi

Neste caso, aproxima-se igualmente a fronteira por um polígono e define-se pontos de inserção, a partir da geometria do polígono. É um método adequado principalmente a geração de triângulos e baseia-se em considerações geométricas.

Classe 7

ix) Combinações de malhas

As transformações geométricas usadas em CAD (simetria, rotação, translacção, ...) permitem combinar malhas geradas por um qualquer processo anterior e juntá-las (merging).

Existem técnicas de geração livre de malhas cuja classificação não se reduz à realizada acima. Alguns exemplos são o *Paving* [BLA91], as técnicas de *offset* [SEZ91], [JIN90], as conversões triângulos-quadriláteros [JOH91], [ZHU91] e a subdivisão sequencial do domínio (actualmente muito popular) [TAL90].

O autor combinou os métodos frontal e da grelha inteira de forma a aproveitar as vantagens de um e outro método. Esta combinação foi já usada com bons resultados por *Kikuchi e Tezuka* [KIK94].

Como resumo de técnicas e trabalhos para domínios planos pode referir-se o trabalho de *Blacker e Stephenson* [BLA91], cuja técnica permite a formação de quadriláteros através de geração de fronteiras internas criadas com um conjunto de regras. O trabalho de *Sezer e Zeid* [SEZ91], que inspirou alguns procedimentos do presente trabalho, permite a exploração da técnica de *offset* de fronteiras. *Sezer e Zeid* criam inicialmente uma malha de quadriláteros e triângulos que é depois transformada, tal como no presente trabalho, numa malha apenas de quadriláteros. O trabalho supracitado refere igualmente técnicas eficazes de geração de nós sobre linhas e 'smoothing'. Em relação à técnica de decomposição sequencial de domínios, que é usada em programas de optimização estrutural, o artigo de *Talbert e Parkinson* [TAL90] está muito claro e refere algumas limitações práticas desta técnica, uma das quais é a necessidade de subdivisão prévia de domínios multiplamente conexos. As técnicas baseadas em transformação de malhas de triângulos em

quadriláteros e de aplicação do método frontal (inicialmente adoptado para triângulos), em conjunto com alguns truques (p.ex a eliminação de um lado comum a dois triângulos para formar um quadrilátero), são também comuns e podem referir-se os trabalhos de *Johnston, Sullivan e Kwasnik* [JOH91], e de *Zhu, Zienkiewicz, Hinton e Wu* [ZHU91].

Finalmente, para superfícies, apesar da rarefação dos trabalhos, é salientável o trabalho de *Jin e Wiberg* [JIN90], que embora esteja limitado a triângulos, usa a tecnologia multiblock com superfícies de Coons com 3 e 4 lados e, ao apresentar alguns exemplos sugestivos, inspirou o corrente trabalho em que se usou quadriláteros e superfícies de Catmull-Rom.

Existem alguns livros sobre o assunto que foram utilizados intensamente na realização deste trabalho. Em geometria computacional, geração de malhas e optimização é interessante o livro de *Kodiyalam e Saxena* [KIK94], sobre geração de malha o livro de *George* [GEO91] e o livro de *Thomson, Warsi e Mastin* [THO85]. *Farin* [FAR88] trata extensivamente o tema das linhas e superfícies.

5.2.7 Algoritmo de geração de malha em domínios planos

5.2.7.1 Introdução

A geração de malha em domínios planos é efectuada usando uma combinação do método frontal com o método de sobreposição. Além do programa principal, usam-se duas bibliotecas criadas pelo autor. Uma das bibliotecas é constituída por subrotinas para cálculo geométrico e outra é constituída por subrotinas de computação gráfica. Usa-se uma estrutura do tipo base de dados com 3 tipos de entidades: nós, elementos e lados. O programa em si é bastante complexo, apresentado-se aqui apenas os resultados dos passos fundamentais.

5.2.7.2 Criação de nós e lados nas fronteiras

Mediante o número de nós pretendido na fronteira e dos pontos de controlo dessa fronteira, mede-se o comprimento de cada linha definida pelos seus pontos de controlo e gera-se automaticamente os nós sobre cada uma das linhas, igualmente espaçados. Se for necessário, ordena-se directamente os nós.

5.2.7.3 Criação de uma matriz de nós no interior

Depois de se saber as dimensões das fronteiras gera-se uma matriz de pontos. Estes pontos são interiores ao domínio e possuem uma distância mínima das fronteiras, $0.5xD$, sendo D a dimensão indicativa dos elementos.

5.2.7.4 Criação dos elementos sobre a matriz

Depois da matriz de pontos ser construída, a geração dos primeiros elementos e/ou lados é possível, unindo os pontos da matriz. Existem 11 combinações possíveis dependendo dos pontos da matriz que são candidatos a nós. Assim, considerando 4 pontos vizinhos:

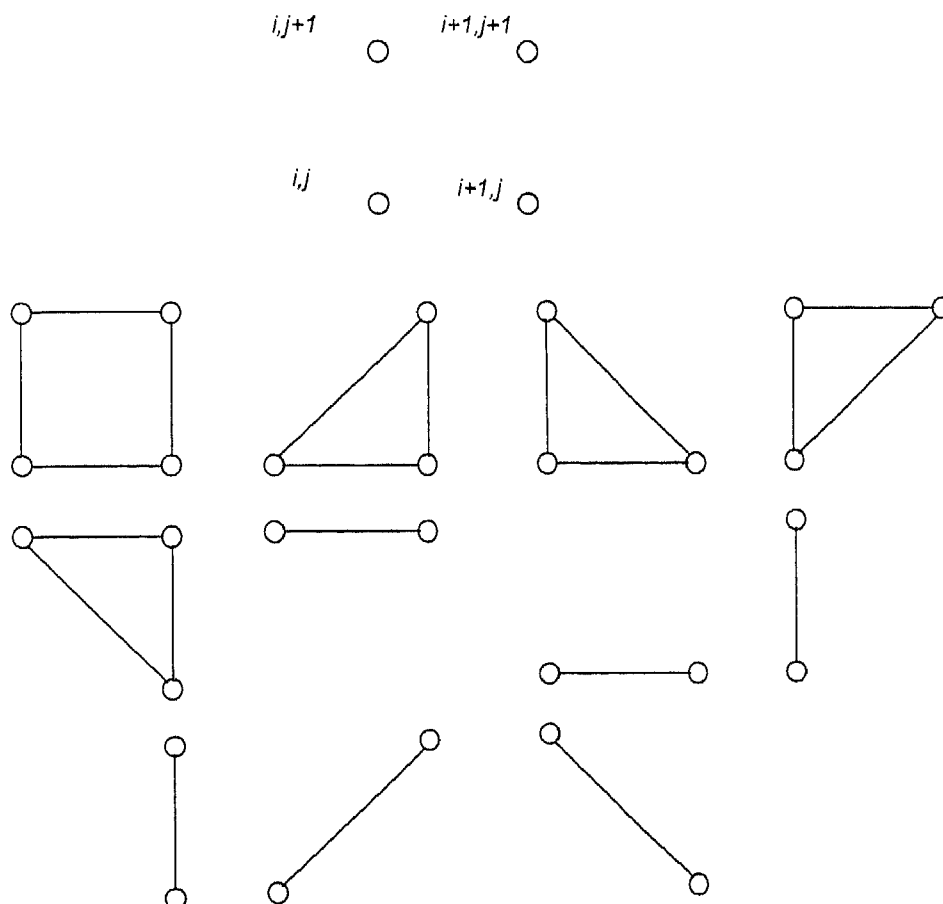


Fig. 5.3 As onze combinações para os lados e elementos da grelha

5.2.7.5 Criação dos elementos que ligam a matriz às fronteiras

Depois da criação dos lados e elementos a partir da matriz de pontos, é necessário criar os lados e elementos restantes de forma a completar a malha. Parte-se dos lados usados uma ou menos vezes, e procuram-se os pontos adequados à construção de um novo elemento. É necessário, por vezes, percorrer todos os lados úteis várias vezes, já que se podem formar novos lados úteis ou eliminar alguns. A estratégia consiste em encontrar alguns nós candidatos, eliminando sucessivamente do grupo dos candidatos os nós inadequados.

O primeiro filtro elimina os nós cuja distância a cada um dos nós do lado é superior a um dado valor.

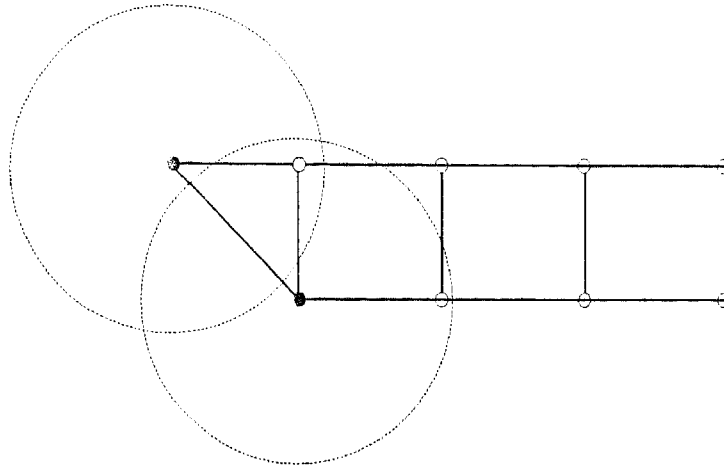


Fig. 5.4 Zona de influência para os pontos candidatos

O segundo filtro elimina os próprios nós do lado.

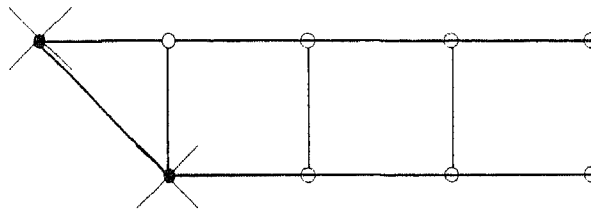


Fig. 5.5 Os próprios pontos do lado não podem ser candidatos.

O terceiro filtro elimina os nós que provocariam intersecções de lados.

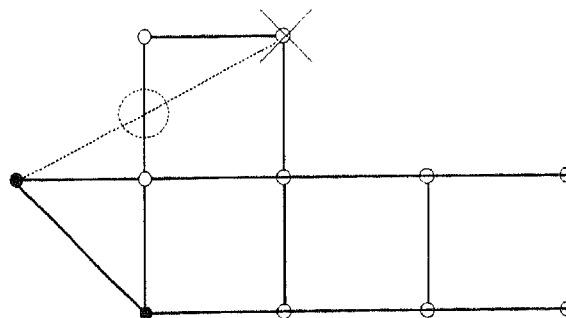


Fig. 5.6 Eliminação dos pontos que provocariam intersecções.

O quarto filtro elimina os nós que formariam um triângulo cujo centroide estaria dentro de um elemento.

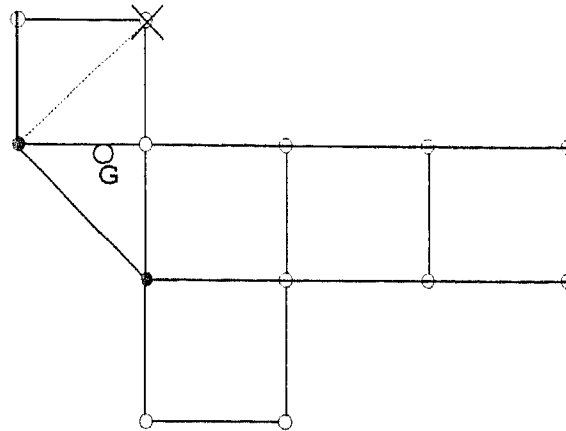


Fig. 5.7 Eliminação dos pontos que criariam um triângulo cujo centroide seria interior a um elemento

O quinto filtro elimina os nós que formariam um triângulo que conteria um centroide de um elemento.

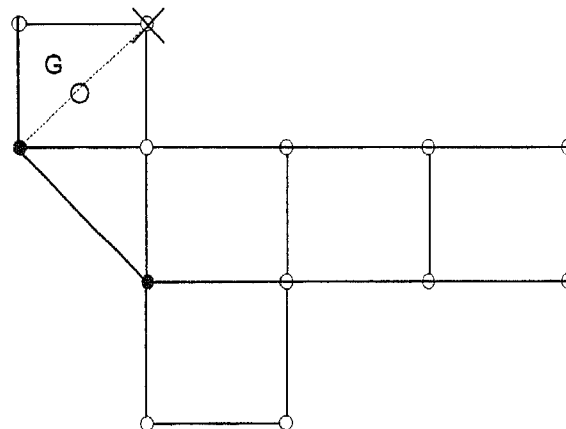


Fig. 5.8 Eliminação dos pontos que criariam um triângulo a conter o centroide de um elemento

O sexto filtro elimina os nós candidatos que formariam um elemento fora da fronteira exterior.

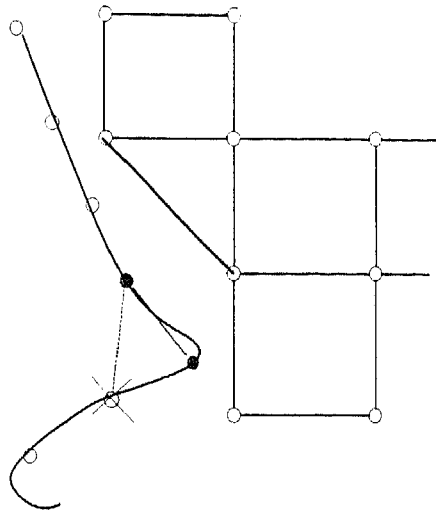


Fig. 5.9 Eliminação de pontos que criariam um lado exterior ao domínio

O sétimo filtro elimina os nós demasiado próximos do lado.

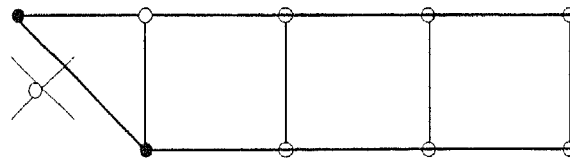


Fig. 5.10 Eliminação de pontos excessivamente próximos

O oitavo elimina nós que produziram lados com ângulos excessivos.

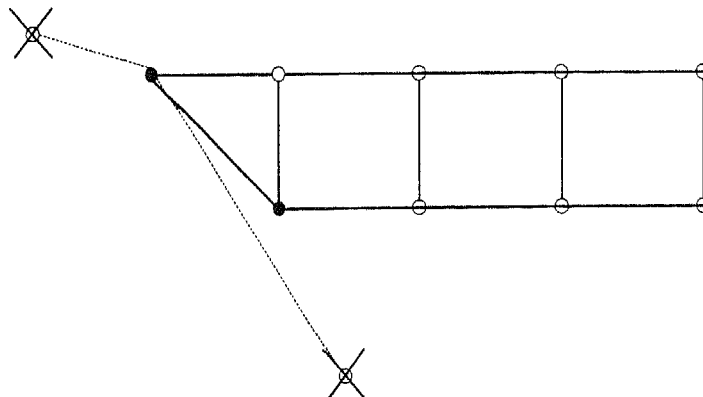


Fig. 5.11 Eliminação de pontos que criariam um elemento muito distorcido

Depois da aplicação dos filtros, os nós candidatos são escolhidos mediante um conjunto de critérios. Pode surgir um quadrilátero ou um triângulo. As estruturas de elementos e lados são actualizadas e passa-se ao lado seguinte.

5.2.7.6 Modificação da configuração dos elementos

Depois da formação dos elementos pertencentes à grelha e dos elementos de ligação da grelha às fronteiras, aparecem alguns triângulos em conjunto com quadriláteros. Toda a malha pode ser subdividida, por forma a transformar os triângulos em quadriláteros.

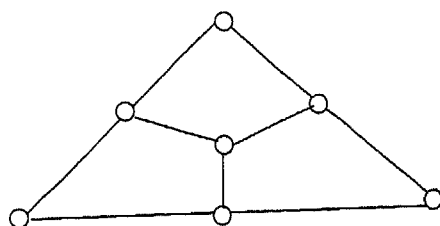


Fig. 5.12 Transformação de um triângulo em três quadriláteros

5.2.7.7 Nós intermédios

Depois da formação dos quadriláteros, a formação dos elementos de 9 nós é realizada interpolando linearmente os lados rectilíneos dos quadriláteros. Depois dessa operação, renumera-se directamente os nós dentro de cada elemento de forma a que possa ser utilizado pelo programa criado.

5.2.7.8 Reposicionamento

Pode melhorar-se a qualidade e o aspecto da malha reposicionando os nós. O método aqui usado é o do centroide [SEZ91]. Começa-se por determinar o centroide de cada elemento que possui o nó. Depois, determina-se a nova posição do ponto a partir dos centroides dos m elementos.

Depois de se ordenarem os nós no sentido directo, e se o elemento possuir n nós, a posição do centroide $P_k = \{X_k, Y_k\}$ é dada por:

$$\begin{aligned}
 X_k &= \left\{ \frac{1}{6} \sum_{j=1}^n (X_{j+1} - X_j) [Y_j(Y_j + Y_{j+1}) + Y_{j+1}^2] \right\} / A \\
 Y_k &= \left\{ -\frac{1}{6} \sum_{j=1}^n (Y_{j+1} - Y_j) [X_j(X_j + X_{j+1}) + X_{j+1}^2] \right\} / A
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

onde

$$A = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (X_j - X_{j+1})(Y_j + Y_{j+1}) \text{ e, claro, } X_{n+1} = X_1 \quad Y_{n+1} = Y_1 \tag{5.23}$$

Depois de se determinarem os centroides $P_1, P_2, \dots$ dos elementos vizinhos, determina-se o centroide combinado como:

$$P = \frac{\left(\sum_{k=1}^m P_k A_k \right)}{\sum_{k=1}^m A_k} \tag{5.24}$$

O processo é iterativo. No programa usam-se 4 iterações.

5.2.7.9 Visualização

Neste trabalho, para além do pós-processador para visualizar os resultados, implementou-se subrotinas para visualizar as malhas, os números dos elementos e dos nós, etc. Existe a possibilidade de fazer *Zoom*, translacção e rotação e de aplicar o procedimento de reposicionamento dos nós.

Mostra-se, para uma geometria muito simples, o processo de geração de malha.

Sucintamente: geração dos primeiros nós e elementos na fronteira e na grelha, ligação às fronteiras, primeira fase de reposicionamento, divisão de todos os elementos de forma a só restarem quadriláteros, introdução de nós a meio dos lados e último reposicionamento e, por fim, visualização dos números dos nós e/ou elementos.

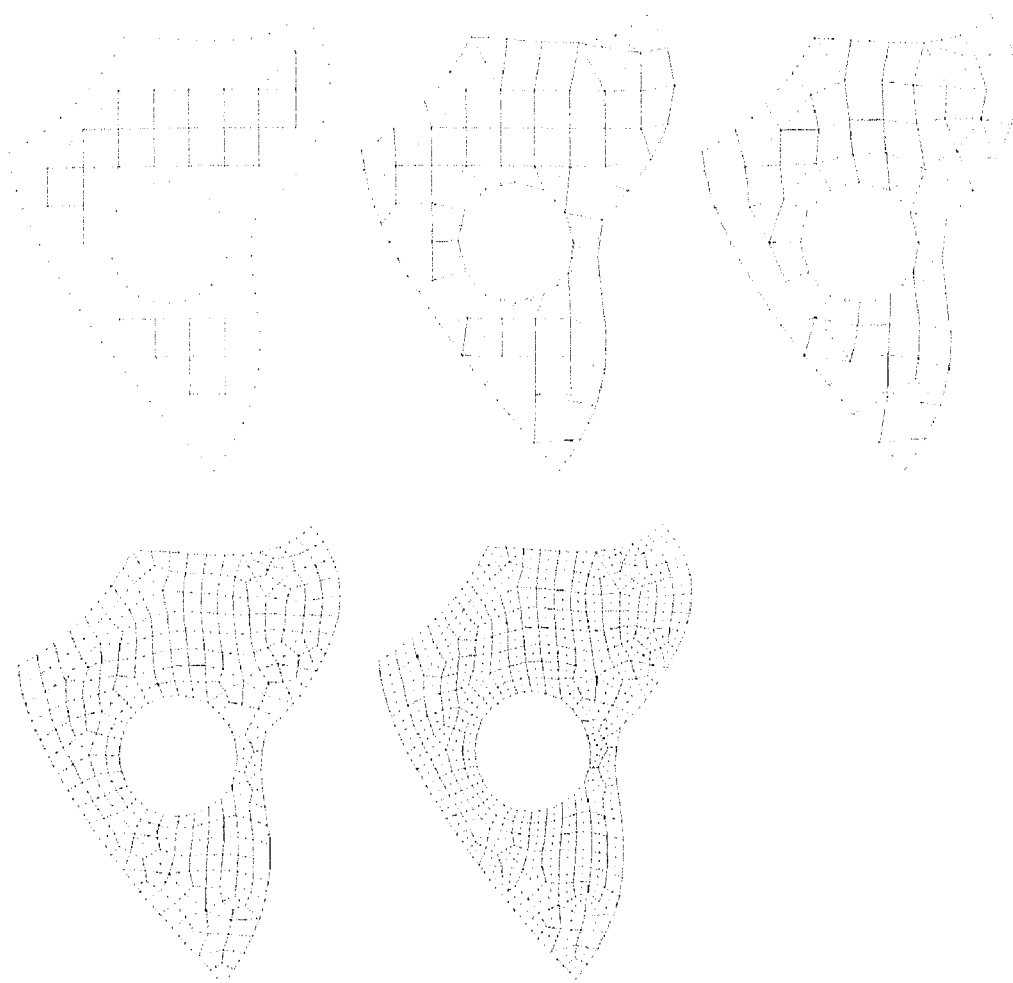


Fig. 5.13 Algumas etapas na construção de uma malha plana

5.2.8 Geração de malha em superfícies

A geração de malhas de quadriláteros em superfícies é uma tarefa bastante mais complexa e de implementação mais dispendiosa do que em domínios planos.

Aqui opta-se por gerar a malha recorrendo a superfícies compostas numa matriz 3x3, já mostrada. Claro que essa configuração é limitativa, mas já permite alguns resultados em optimização de forma. Neste trabalho usa-se uma estratégia inspirada em [GEO91]. Através do uso da base de Catmull-Rom, cria-se a matriz. Depois gera-se nós em comprimentos de arco iguais em cada linha da matriz. Para cada nó gerado nas linhas guardam-se as coordenadas do domínio (plano) de referência. Com essas coordenadas, gera-se no domínio de referência uma rede em cada macroelemento unindo nós de linhas opostas. Essa rede, cujos nós têm as coordenadas de referência bem conhecidas, é remapeada para o domínio tridimensional para cada um dos macroelementos. Tem, claro, de existir compatibilidade entre os macroelementos em termos de nós.

A seguinte figura resume o processo:

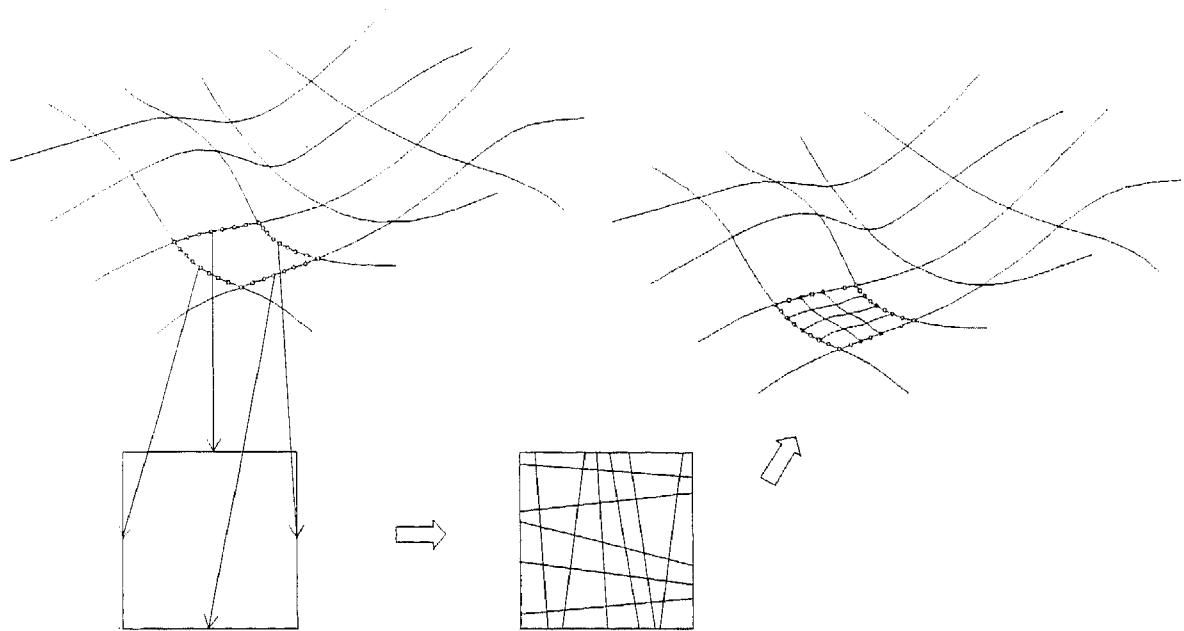


Fig. 5.14 Geração de malhas em superfícies

Tal como no caso das malhas planas, este gerador é completamente automático e pode ser usado como passo na optimização. A análise de sensibilidades usa a informação criada neste gerador e o cálculo é detalhado no capítulo 6. As malhas em superfícies podem igualmente ser geradas a partir do programa de domínios planos recorrendo a uma transformação analítica.

Os detalhes de implementação não são aqui escritos, já que não é esse o objectivo deste trabalho. Apresenta-se seguidamente um exemplo de uma malha em superfície:

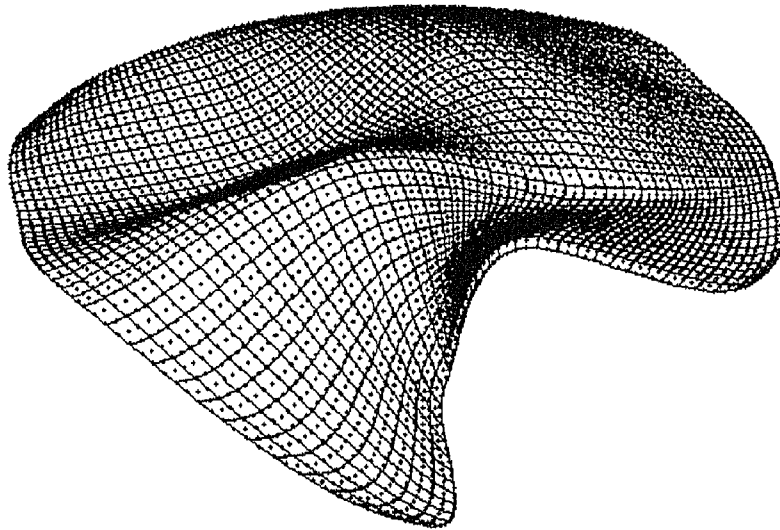


Fig. 5.15 Exemplo de uma malha numa superfície recorrendo à matriz de macroelementos.

5.3 Pós-processamento

Todos os exemplos mostrados no capítulo 8 usam um pós-processador criado no âmbito deste trabalho que permite visualizar deformadas, campos escalares, campos sobre as deformadas, formas naturais, respostas temporais, etc. Esse pós-processador permite realizar as operações habituais mais simples dos sistemas CAD: *Zoom*, rotação e translacção, mas em tempo real.

5.4 Referências

[BLA91] BLACKER, T.D., STEPHENSON, M.B.. *Paving: A new approach to Automated Quadrilateral Mesh Generation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol.32, págs 811-847 John Wiley and Sons Ltd. 1991

[FAR88] FARIN, G. . *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design, a Practical Guide*. Academic Press 1988

[GEO91] GEORGE, P.L.. *Automatic Mesh Generation, Application to Finite Element Methods*. John Wiley and Sons Ltd. 1991

[JIN90] JIN,H. ,WIBERG, N.E.. *Two-Dimensional Mesh Generation, Adaptive Remeshing and Refining*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol.29, págs 1501-1526. John Wiley and Sons, Ltd, 1990

[JOH91] JOHNSTON, B.P., SULLIVAN, J.M., KWASNIK, A.. *Automatic conversion of triangular finite element meshes to quadrilateral elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol.31, págs 67-84 John Wiley and Sons Ltd. 1991

[KIK94] KIKUCHI, N., TEZUKA, A.. *Adaptative finite element method and its applications*, Cap.7 em *Geometry and Optimization Techniques for Strutural Design*. Kodyalam, S. Saxena, M. (Eds), Computational Mechanics Publications, Elsevier Applied Science (Co-publicação) 1994

[SEZ91] SEZER, L., ZEID, I.. *Automatic Quadrilateral/Triangular Free-Form Mesh Generation for Planar Regions*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol.32, págs 1441-1483 John Wiley and Sons Ltd. 1991

[TAL90] TALBERG, A.J., PARKINSON, A.R. *Development of an automatic, two-dimensional finite element mesh generator using quadrilateral elements and bezier curve boundary definition*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol.29, págs 1551-1567 John Wiley and Sons Ltd. 1990

[THO85] THOMPSON, J.F., WARSI, Z.U.A., WAYNE MASTIN, C.. *Numerical Grid Generation, Foundations and Applications*. North-Holland, Elsevier Science Publishing Co. 1985

[ZHU91] ZHU,J.Z., ZIENKIEWICZ, O.C., HINTON, E., WU, J.. *A new approach to the development of automatic quadrilateral mesh generation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol.32, págs 849-866 John Wiley and Sons Ltd. 1991

6 Análise de sensibilidade

6.1 Sumário e introdução

Neste capítulo discutem-se os procedimentos implementados para a análise dos funcionamentos (entre os quais se incluem algumas variáveis de estado) em ordem às espessuras das cascas e às coordenadas dos nós que definem a malha. O interesse deste tipo de análise é claro. É possível saber precisamente qual a influência de certos parâmetros geométricos ou dimensionais na resposta estrutural da casca. Assim, a análise de sensibilidades é como que uma extensão da análise estrutural: o projectista, para além de saber qual é o comportamento de uma dada casca, fica também com a informação da influência da geometria e dimensões nesse comportamento. Esta última informação tem, em certas situações, um valor mais importante do que a informação do comportamento em si. Frequentemente, em termos de projecto a geometria e/ou as dimensões são incógnitas.

A tecnologia da análise de sensibilidades está actualmente muito divulgada e a dificuldade da sua realização prática é quase toda ao nível de implementação. Neste trabalho, optou-se por realizar a análise estrutural e de sensibilidades de uma forma muito próxima, de modo a que a informação das sensibilidades fosse tratada, se necessário, simultaneamente com a informação da análise estrutural. Tal só foi possível devido à implementação conjunta das subrotinas e porque o autor optou por criar um novo programa de análise estrutural, de sensibilidades e optimização.

Na análise de sensibilidades por via analítica existem presentemente duas [YAM9] correntes de formulação das equações para as derivadas. Certos autores de textos sobre o assunto usam uma formulação variacional derivando a equação de equilíbrio antes da sua discretização pelos elementos finitos enquanto outros derivam directamente as equações de equilíbrio discretizadas. A segunda abordagem é utilizada neste trabalho, já que normalmente permite um tratamento mais acessível e claro e em certos casos é formalmente idêntica à primeira.

A realização da análise de sensibilidades requer o cálculo das derivadas parciais das matrizes elementares já definidas para os elementos de casca. Esse cálculo pode ser realizado numericamente ou analiticamente. Neste trabalho todas as derivadas são obtidas analiticamente, que as derivadas numéricas, por exemplo recorrendo às diferenças centrais, que muitos autores utilizam devido à sua simplicidade, podem introduzir erros elevados nas sensibilidades de estruturas do tipo casca. Para além disso, o método das diferenças centrais não pode ser usado directamente na análise não linear geométrica, devido à dependência das matrizes elementares relativamente às variáveis de estado.

Neste trabalho foram criadas subrotinas de análise de sensibilidades para problemas estáticos lineares e geometricamente não lineares, e dinâmicos lineares.

Neste capítulo detalha-se a análise de sensibilidades para as variáveis geométricas e para as variáveis de espessura. No entanto, para enquadrar o problema, começa-se com uma formulação de sensibilidades geral.

Existem várias referências importantes na análise de sensibilidades. Podem referir-se aos trabalhos de *Chen et al* [CHE97], de *Guillet et al* [GUI96], de *Zhang et al* [ZHA95] na ligação da análise de sensibilidades a sistemas de CAD e parametrização geométrica.

Na dinâmica e frequências naturais são realçáveis os trabalhos de *Angulo* [ANG9], *Ramakrishnan* [RAM91], *Lund* [LUN94], *Hien* (Processos estocásticos) [HIE91], *Sun* (Análise dinâmica não-linear) [SUN96], *Cardoso* (Equações de estado adjunto para o problema dinâmico não-linear) [CAR92].

Algumas aplicações em cascas podem ser vistas em [YAM93] e [YAM97]. Existem procedimentos aproximados de análise que podem diminuir o tempo de cálculo das sensibilidades. Algumas referências sobre a temática são [NOO91] e [ZHA97].

6.2 Formulação geral da análise de sensibilidades

É útil imaginar um sistema estrutural na forma de um bloco como a seguinte figura mostra:

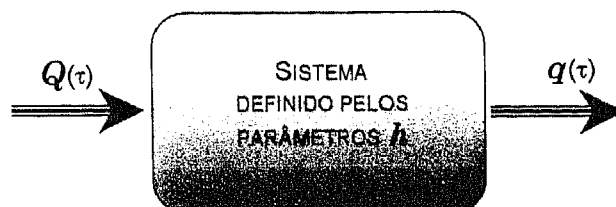


Fig. 6.1 Modelo conceptual de uma estrutura

Em termos conceptuais, a materialização do sistema estrutural é simplesmente o conjunto de equações que definem as relações entre o conjunto $Q(\tau)$ de sinais de entrada, que são, no caso deste trabalho, as forças exteriores aplicadas ao sistema e os deslocamentos prescritos, e o conjunto de sinais de saída, ou variáveis de estado $q(\tau)$ constituídos, no caso corrente, por deslocamentos, tensões, deformações, etc.

O sistema estrutural é caracterizado por um conjunto h de parâmetros, habitualmente designados por variáveis de projecto. Desse conjunto h podem distinguir-se, para o caso deste trabalho dois tipos de parâmetros: os parâmetros dimensionais e os parâmetros geométricos. Assim temos, no caso das cascas, o campo de espessuras, obtido a partir de um conjunto de parâmetros definidores desse campo, como parâmetros dimensionais. As coordenadas de alguns pontos definidores da malha de elementos finitos são os parâmetros geométricos.

A análise de sensibilidades realizada para a classe dos parâmetros geométricos possui algumas características particulares e é alvo de um tratamento específico neste trabalho.

A análise estrutural, já discutida em capítulos anteriores, relaciona-se com a determinação das variáveis de estado $q(\tau)$ a partir do conjunto $Q(\tau)$. Nessa análise é assumido que o sistema em si, ou seja, o conjunto h , é mantido inalterado. Na análise de sensibilidades, contudo, estuda-se o comportamento do sistema $q(\tau)$ em função de h . A análise de sensibilidades tem habitualmente uma de duas intenções: saber que direcção deve tomar h de modo a obter uma melhoria do sistema ou um dado estado pretendido. Alternativamente, pode servir para saber qual o efeito de uma imperfeição, como uma variação local de espessura inesperada, ou uma moessa, no estado do sistema.

A problemática existente na análise de sensibilidades prende-se com a dependência dos funcionais de desempenho com os conjuntos h e $q(\tau)$, já que $q(\tau)$ depende implicitamente de h .

Considerando portanto um funcional de desempenho G que, no caso deste trabalho, pode ser a tensão equivalente de Von-Mises, o deslocamento, a flexibilidade ou o volume, e a sua dependência com h da forma:

$$G = G(q(h); h) \quad (6.1)$$

ou ainda, em função das D componentes de h e das N componentes de q ,

$$G = G(q_n(h_d); h_d) \quad (6.2)$$

G é explícito em termos dos seus argumentos q_n e h_d , mas q_n depende implicitamente de h_d .

A derivada do funcional de desempenho em ordem a um parâmetro h_d pode escrever-se como:

$$\frac{dG}{dh_d} = \frac{\partial G}{\partial q_n} \frac{\partial q_n}{\partial h_d} + \frac{\partial G}{\partial h_d}, \text{ soma em } n \quad (6.3)$$

Para facilitar a notação, usa-se:

$$\frac{dG}{dh} = \frac{\partial G}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial h} + \frac{\partial G}{\partial h} \quad (6.4)$$

No caso da análise estrutural não-linear geométrica, G pode depender dos acréscimos das variáveis de estado:

$$G = G(\Delta q_n(h_d); h_d) \quad (6.5)$$

resultando, assim,

$$\frac{dG}{dh_d} = \frac{\partial G}{\partial \Delta q_n} \frac{\partial \Delta q_n}{\partial h_d} + \frac{\partial G}{\partial h_d} \quad (6.6)$$

É igualmente útil definir os conceitos de variação do funcional de desempenho, separando também os termos explícito e implícito.

A variação total de G devida às variáveis de projecto denota-se $\bar{\delta}G$ e escreve-se:

$$\bar{\delta}G = \frac{\partial G}{\partial h} \delta h + \frac{\partial G}{\partial q_n} \bar{\delta}q_n \quad (6.7)$$

Usa-se, então, a seguinte terminologia:

Variação explícita de G :

$$\partial G = \frac{\partial G}{\partial h} \delta h \quad (6.8)$$

Variação implícita de G :

$$\tilde{G} = \frac{\partial G}{\partial q_n} \frac{dq_n}{dh} \delta h \quad (6.9)$$

Deste modo, a variação devida às variáveis de projecto escreve-se:

$$\bar{\delta}G = \partial G + \tilde{G} \quad (6.10)$$

Neste capítulo a análise de sensibilidades é detalhada para vários modelos de análise estrutural. Antes de se mostrarem as diversas particularidades dessa análise para cada um dos modelos, existe uma parte do cálculo que é comum a alguns desses modelos e que se prende com as derivadas parciais dos parâmetros geométricos.

6.3 Sensibilidades da superfície parametrizada

Para calcular as sensibilidades em relação às variáveis geométricas, é necessário calcular as derivadas das coordenadas de todos os nós da malha em ordem às variáveis geométricas, assim como calcular as derivadas das componentes dos vectores normais em ordem às variáveis geométricas. Neste capítulo ilustram-se apenas os tópicos fundamentais dessas sensibilidades, já que a tarefa computacional, mais uma vez, não pode ser aqui totalmente dissecada.

Em termos práticos, cada ponto de controlo (ver Cap.5) da malha de uma superfície pode ser identificado pelo seu vector posição:

$$\mathbf{Y}_{ij} = \begin{Bmatrix} x_{ij} \\ y_{ij} \\ z_{ij} \end{Bmatrix} \quad (6.11)$$

sendo i e j os índices correspondentes à posição no macroelemento ao qual o nó pertence.

Então, se se pretende parametrizar a posição de cada ponto de controlo (a malha está já completamente parametrizada usando os macroelementos), pode relacionar-se a posição corrente de cada ponto de controlo com a sua posição original $\mathbf{Y}_{ij}^0$:

$$\mathbf{Y}_{ij} = \mathbf{Y}_{ij}^0 + \chi_{ij} \mathbf{V}_{ij}^0 \quad (6.12)$$

sendo $\mathbf{V}_{ij}^0$ um vector tangente à trajectória do ponto de controlo da malha.

A derivada de Y_{ij} em ordem ao parâmetro χ_{ij} , essencial para o cálculo das velocidades nodais, escreve-se simplesmente como:

$$\frac{\partial Y_{ij}}{\partial \chi_{ij}} = V_{ij}^0 \quad (6.13)$$

A parametrização geométrica da malha, que já foi discutida no Cap. 5, pode concretizar-se aqui, por uma questão de facilidade de tratamento, para cada coordenada do vector posição de um nó em cada macroelemento. Se um nó k pertence ao macroelemento l , e o vector posição desse nó

é identificado como $\mathbf{X}_k = \begin{Bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{Bmatrix}$, pode então escrever-se:

$$\begin{aligned} x_k &= \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{B}_x \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{v} \\ y_k &= \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{B}_y \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{v} \\ z_k &= \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{B}_z \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{v} \end{aligned} \quad (6.14)$$

Onde todas as matrizes foram identificadas neste capítulo, com excepção de $\mathbf{B}_x, \mathbf{B}_y, \mathbf{B}_z$, que podem chamar-se matrizes geométricas (ver Cap. 5) correspondentes às coordenadas x, y, z , por analogia com a matriz $\mathbf{B}$. Estas matrizes são função de Y_{ij} .

A derivada de um dado vector posição $\mathbf{X}_k$ em ordem a um parâmetro χ_{ij} , de um nó de controlo do macroelemento que contém o nó k , pode ser obtida a partir de:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_k}{\partial \chi_{ij}} &= \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{M}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial \chi_{ij}} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{v} \\ \frac{\partial y_k}{\partial \chi_{ij}} &= \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{M}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial \chi_{ij}} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{v} \\ \frac{\partial z_k}{\partial \chi_{ij}} &= \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{M}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial \chi_{ij}} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{v} \end{aligned} \quad (6.15)$$

em que

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \chi_{ij}} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial Y_{ij}} V_{ij}^0 \quad (6.16)$$

As derivadas são imediatas, recordando que se usam as superfícies de Catmull-Rom (Cap. 5) neste trabalho.

Para cada vector posição dos nós na malha é necessário obter a derivada em ordem a *todos* os nós de controlo da malha. Cada nó k tem de possuir informação sobre as suas coordenadas u, v, x, y, z e ainda sobre o macroelemento a que pertence.

Como, para além das coordenadas nodais, os elementos necessitam dos vectores normais à superfície média, estes podem ser derivados usando a mesma interpolação usada para as coordenadas.

Os vectores normais nos nós, para o instante inicial, identificam-se por ${}^0V_3^K$. Estes podem ser determinados a partir das derivadas em ordem aos parâmetros u e v usados na interpolação das coordenadas desse nó:

$${}^0V_3^K = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{X}_K}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{X}_K}{\partial v} \right\|} \frac{\partial \mathbf{X}_K}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{X}_K}{\partial v} \quad (6.17)$$

em que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{X}_K}{\partial u} &= \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial u} \cdot \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{v} \\ \frac{\partial \mathbf{X}_K}{\partial v} &= \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{M}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial \chi_{ij}} \cdot \mathbf{N} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial v} \end{aligned} \quad (6.18)$$

A derivada de ${}^0V_3^K$ em ordem a um parâmetro χ_{ij} , se esse parâmetro controla o nó k , é realizada de forma óbvia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}^0V_3^K}{\partial \chi_{ij}} &= \frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{X}_K}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{X}_K}{\partial v} \right\|} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{X}_K}{\partial u \partial \chi_{ij}} \times \frac{\partial \mathbf{X}_K}{\partial v} - \frac{\partial^2 \mathbf{X}_K}{\partial v \partial \chi_{ij}} \times \frac{\partial \mathbf{X}_K}{\partial u} \right) - \\ &\quad \frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{X}_K}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{X}_K}{\partial v} \right\|^3} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{X}_K}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{X}_K}{\partial v} \right) \cdot \left(\frac{\partial^2 \mathbf{X}_K}{\partial u \partial \chi_{ij}} \times \frac{\partial \mathbf{X}_K}{\partial v} - \frac{\partial^2 \mathbf{X}_K}{\partial v \partial \chi_{ij}} \times \frac{\partial \mathbf{X}_K}{\partial u} \right) \right] \frac{\partial \mathbf{X}_K}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{X}_K}{\partial v} \end{aligned} \quad (6.19)$$

e, naturalmente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{X}_K}{\partial u \partial \chi_{ij}} &= \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial u} \cdot \mathbf{M}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \chi_{ij}} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{v} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{X}_K}{\partial v \partial \chi_{ij}} &= \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{M}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial \chi_{ij}} \cdot \mathbf{N} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial v} \end{aligned} \quad (6.20)$$

Neste trabalho, os vectores tangentes à trajectória são normais à superfície nos pontos de controlo. Estes vectores são actualizados sempre que se refaz a malha. Usando os vectores normais é possível manter a malha pouco distorcida, embora possa ainda ocorrer interferência. Na optimização limita-se o passo das variáveis geométricas por forma a controlar facilmente os casos de interferência.

Existem pormenores a detalhar na análise de sensibilidades geométrica. As equações (6.17) a (6.20) resumem os passos fundamentais implementados computacionalmente e permitem uma interface com o método dos elementos finitos extremamente eficaz, baseada apenas na geometria paramétrica computacional, sem aproximações numéricas de 'perturbações' (leia-se método das diferenças finitas) da malha através de movimentos da fronteira. Neste trabalho, cada nó da malha de elementos finitos tem a sua posição controlada apenas por alguns nós de controlo da malha.

Em termos de sequência de cálculo, a análise realiza-se como:

- Criação da superfície
- Geração da malha sobre a superfície
- Análise de sensibilidades da malha
- Análise de sensibilidades estrutural

No trabalho realizado pelo autor podem seleccionar-se os nós de controlo desejados de forma a movimentar apenas uma parte da malha, ou toda. Para além das variáveis geométricas, existem ainda as variáveis de espessura.

Podem executar-se problemas de cálculo de sensibilidade envolvendo os dois tipos de variáveis, em separado ou em conjunto.

6.4 Sensibilidades do campo de espessuras

À partida parece complexo usar uma parametrização do tipo da anterior, de forma a definir economicamente um campo de espessuras. Como os elementos de casca degenerados usam, na sua formulação, as espessuras nodais, pode de uma forma geral usar-se as espessuras nodais como variáveis. Esse tipo de procedimento levanta problemas ao nível da análise e da optimização.

Se existirem grandes gradientes de espessura dentro de um elemento, este começa a produzir maus resultados e surgem jacobianas singulares. Esses maus resultados são devidos à grande sensibilidade do elemento com as espessuras. Para além desse problema, que poderia ser resolvido recorrendo a restrições adicionais em termos de espessuras, o número de variáveis torna-se elevado (é, pelo menos igual ao número de nós) e a fase de optimização tarda em convergir. A ideia de usar, em vez das espessuras nodais, as espessuras elementares, é uma solução para esse problema. Alguns autores [CCA95], recorrendo ao conceito de macroelemento, optam por realizar um 'smoothing' das espessuras, transferindo para os nós de ligação na fronteira as espessuras obtidas nesses macroelementos. Neste trabalho, esse procedimento não é usado.

Alternativamente ao procedimento das espessuras nodais, o autor usa espessuras definidas para os nós de canto de cada elemento, interpolando para os nós a meio dos lados ou centrais, as espessuras dos cantos do elemento. Este procedimento equivale à utilização das funções de forma do elemento de 4 nós para a interpolação das espessuras.

6.5 Equações de estado lineares

Devido à existência de diferenças, não apenas ao nível do cálculo dos funcionais, como obviamente na determinação do estado, entre os problemas de estado lineares e os problemas de estado não-lineares, separaram-se estas análises por forma a facilitar a leitura.

A análise de sensibilidade para problemas lineares está actualmente bastante divulgada, para os elementos finitos mais comuns (ver p.ex. [OLH95]). Em termos de análise de sensibilidade de estruturas do tipo casca, a bibliografia é bastante reduzida e frequentemente pouco clara, ou mesmo muito simplificada ao nível geométrico (ver [YAM93]). A complexidade destes elementos limita o uso de métodos semi-analíticos sem uma análise crítica do passo e introduz dificuldades no cálculo analítico das derivadas.

6.5.1 Análise estática

Após discretização em elementos finitos, o estado de equilíbrio de uma estrutura com comportamento linear pode ser descrito através de um sistema linear de n equações, sob a forma:

$$K \cdot a = f \quad (6.21)$$

em que K é a matriz de rigidez, f é o vector de forças nodais, e a é o vector de deslocamentos nodais.

Quer K quer f dependem explicitamente das variáveis de projecto, h . Consequentemente, a depende de h de uma forma implícita.

A linearidade da equação de estado refere-se apenas à dependência entre as componentes de f e a , e não à dependência entre a e h .

Neste trabalho, e de uma forma geral, a é uma função não-linear de h .

Note-se que as equações de equilíbrio são postas em termos de deslocamentos, a , e portanto, das variáveis de estado q referidas anteriormente apenas uma parte, a , é suficiente para estabelecer a dependência implícita entre o estado e as variáveis de projecto.

Uma forma simples de obter $\frac{\partial a}{\partial h}$, com o objectivo de calcular $\frac{dG}{dh} = \frac{\partial G}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial h} + \frac{\partial G}{\partial h}$, consiste em derivar a equação de estado em ordem a cada uma das componentes de h .

Assim, se h é uma componente de h ,

$$K \cdot \frac{da}{dh} = \frac{df}{dh} - \frac{dK}{dh} a \quad (6.22)$$

Este sistema é suficiente para determinar o valor da sensibilidade do estado. Este método é conhecido como método da diferenciação directa.

Apesar da simplicidade da sua formulação, e do facto da matriz $\mathbf{K}$ estar já decomposta da fase de análise estrutural, o método exige que se resolva um sistema para cada variável de projecto.

Como o número de variáveis de projecto pode ser elevado, neste trabalho, principalmente quando se trabalha com espessuras nodais, o custo computacional resultante é elevado. Em alternativa a este método existe outro, conhecido como método do sistema adjunto, ou método da variável adjunta.

A formulação desse método é também bastante simples. Segue-se aqui a derivação obtida por [ARO95] usando um funcional aumentado (i.e. com uma restrição). Re-escreve-se a equação (na verdade o sistema de equações) de equilíbrio da forma:

$$\mathbf{R}(\mathbf{a}(h), h) = \mathbf{0} \quad (6.23)$$

para a qual $\mathbf{R}(\mathbf{a}(h), h) = \mathbf{f} - \mathbf{K}\mathbf{a}$.

Criando o funcional aumentado G^* através do vector n -dimensional de multiplicadores de Lagrange, λ :

$$G^*[\lambda(h), \mathbf{a}(h), h] = G[\mathbf{a}(h), h] + \lambda^T(h) \mathbf{R}(\mathbf{a}(h), h) \quad (6.24)$$

Derivando o funcional em ordem a h , obtém-se:

$$\frac{dG^*}{dh} = \frac{\partial G}{\partial h} + \frac{\partial G}{\partial \mathbf{a}} \frac{d\mathbf{a}}{dh} + \frac{d\lambda^T}{dh} \mathbf{R} + \lambda^T \frac{d\mathbf{R}}{dh} \quad (6.25)$$

a equação de estado é válida para qualquer h , o que significa que [KLE97] $\frac{d\mathbf{R}}{dh} = \mathbf{0}$.

Logo:

$$\frac{dG}{dh} = \frac{dG^*}{dh} \quad (6.26)$$

A derivada do funcional aumentado pode ser então re-escrita como:

$$\frac{dG^*}{dh} = \frac{\partial G}{\partial h} + \lambda^T \left(\frac{d\mathbf{f}}{dh} - \frac{d\mathbf{K}}{dh} \mathbf{a} \right) + \left(\frac{\partial G}{\partial \mathbf{a}} - \lambda^T \mathbf{K} \right) \frac{d\mathbf{a}}{dh} \quad (6.27)$$

Assume-se agora a estacionariedade do funcional em ordem às variáveis de estado $\mathbf{a}$:

$$\delta G^* = \frac{\partial G}{\partial \mathbf{a}} \delta \mathbf{a} = \left(\frac{\partial G}{\partial \mathbf{a}} - \lambda^T \mathbf{K} \right) \delta \mathbf{a} = 0 \quad (6.28)$$

A equação

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{a}} - \lambda^T \mathbf{K} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{K} \lambda = \left(\frac{\partial G}{\partial \mathbf{a}} \right)^T \quad (6.29)$$

é a equação de estado adjunto, cuja solução é o vector dos deslocamentos adjuntos.

Resulta, portanto, para o cálculo das derivadas dos funcionais,

$$\frac{dG^*}{dh} = \frac{\partial G}{\partial h} + \lambda^T \left(\frac{d\mathbf{f}}{dh} - \frac{d\mathbf{K}}{dh} \mathbf{a} \right) \quad (6.30)$$

Assim, resumidamente, o método da variável adjunta, para o caso em questão, envolve os seguintes passos:

- Determinação do estado $\mathbf{a}$
- Determinação do estado adjunto para cada funcional λ
- Determinação, para cada G e para cada h , de $\frac{dG}{dh}$

Usando este método é óbvio que o número de sistemas a resolver depende do número de funcionais. Como frequentemente este é inferior ao número de variáveis, optou-se neste trabalho, para problemas estáticos lineares, pelo método da variável adjunta.

6.5.2 Análise dinâmica

A análise de sensibilidades para problemas dinâmicos lineares, implementada neste trabalho, recorre ao método da diferenciação directa. Essa opção é fundamentada na facilidade de implementação deste método, na maior clareza da sua formulação e, mais importante, na menor propensão a imprecisões de carácter numérico, já que não se recorre a qualquer integração numérica temporal das derivadas, ao contrário do que acontece neste caso com o método da variável adjunta.

O comportamento dinâmico linear de uma estrutura é descrito por um sistema de equações diferenciais ordinárias de 2ª ordem sob a forma:

$$\mathbf{M}(h)\ddot{\mathbf{u}}(\tau, h) + \mathbf{C}(h)\dot{\mathbf{u}}(\tau, h) + \mathbf{K}(h)\mathbf{u}(\tau, h) = \mathbf{f}(\tau)\mathbf{f}(h) \quad (6.31)$$

onde M identifica a matriz de massa e C a matriz de amortecimento. Neste trabalho, o vector de forças exteriores é obtido a partir do produto de um vector de distribuição espacial da força $f(h)$, por um escalar que impõe a distribuição temporal $f(\tau)$.

As condições iniciais podem assumir-se nulas $a(0, h) = 0$; $\dot{a}(0, h) = 0$.

Quer através de uma translacção do tempo, quer através de mudança de variável, pode relaxar-se essa condição.

Os funcionais usados em dinâmica linear podem representar-se de uma forma unificada como:

$$G(a(\tau, h), h) = g(a(\bar{t}, h), h) + \int_0^{\bar{t}} \tilde{g}(a(\tau, h), h) d\tau \quad (6.32)$$

em que $\bar{t}$ é o chamado instante terminal e identifica o extremo superior do intervalo de tempo no qual se pretende obter as sensibilidades.

A derivada do funcional anterior em ordem a uma variável h escreve-se como:

$$\frac{dG}{dh} = \frac{\partial^t g}{\partial h} + \frac{\partial^t g}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial h} + \int_0^{\bar{t}} \left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial h} + \frac{\partial \tilde{g}}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial h} \right) d\tau \quad (6.33)$$

A equação (6.32) pode ser facilmente particularizada para um dado funcional. Partindo da equação de estado, calcula-se a primeira variação em h :

$$\begin{aligned} M(h)\delta\ddot{a}(\tau, h) + C(h)\delta\dot{a}(\tau, h) + K(h)\delta a(\tau, h) = \\ f(\tau)\delta f(h) - \delta M(h)\ddot{a}(\tau, h) - \delta C(h)\dot{a}(\tau, h) - \delta K(h)a(\tau, h) \end{aligned} \quad (6.34)$$

Recorrendo à notação usada na integração temporal passo a passo:

$$\begin{aligned} M(h)\delta^t\ddot{a}(\tau, h) + C(h)\delta^t\dot{a}(\tau, h) + K(h)\delta^t a(\tau, h) = \\ {}^t f(\tau)\delta^t f(h) - \delta M(h)^t\ddot{a}(\tau, h) - \delta C(h)^t\dot{a}(\tau, h) - \delta K(h)^t a(\tau, h) \end{aligned} \quad (6.35)$$

A equação usada para as sensibilidades é assim formalmente idêntica à equação de estado. O método de solução pode, portanto, ser o mesmo. Como as matrizes do sistema são as mesmas, apenas o segundo membro é distinto, grande parte do esforço de cálculo, que é dedicado à determinação das formas e frequências naturais, foi já realizado na fase de determinação do estado.

A sequência de cálculo baseia-se no cálculo do estado e na sua introdução no segundo membro da equação de sensibilidades, por forma a determinar as sensibilidades.

As condições iniciais da equação das sensibilidades são, neste trabalho, nulas. Isto é,

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{a}(0, h) &= \mathbf{0} \\ \delta \dot{\mathbf{a}}(0, h) &= \mathbf{0}\end{aligned}\tag{6.36}$$

Estas igualdades significam que qualquer modificação no valor das variáveis de projecto não interfere nas condições iniciais de velocidade e deslocamento.

Podem existir vários instantes terminais, correspondentes a vários funcionais. A introdução do parâmetro temporal no problema de sensibilidades requer, de uma forma geral, para os funcionais que dependam dele, que se calcule um instante crítico para cada funcional.

Assim, como exemplo, se um dos funcionais é o deslocamento mais elevado e outro o segundo deslocamento mais elevado em toda a estrutura e para o intervalo de tempo de análise, os instantes de ocorrência de um ou de outro não são necessariamente coincidentes.

Neste trabalho, optou-se por determinar um único instante crítico. Essa opção foi tomada para manter a simetria nos problemas de optimização. Determina-se o instante crítico como o instante onde ocorre o deslocamento máximo.

A estratégia computacional utilizada consiste em realizar uma análise estrutural, onde se extraem as frequências e formas naturais que são úteis nesta fase e na fase de análise de sensibilidades, depois, faz-se a análise estrutural, enviando para um ficheiro de acesso directo de m em m passos (m é estabelecido pelo utilizador), o estado: posição, velocidade e aceleração.

Determina-se o instante crítico e depois começa-se com a análise de sensibilidades para cada variável, recorrendo às mesmas frequências e ao estado guardado em ficheiro, percorrendo o intervalo até ao instante crítico.

6.5.3 Derivadas para os elementos de casca

Descreveram-se brevemente os procedimentos utilizados para realizar a análise de sensibilidades em problemas lineares. Os pormenores variam portanto de elemento para elemento.

Como neste trabalho se usam elementos de casca, detalham-se agora os pormenores do cálculo das derivadas das matrizes globais e elementares para o elemento Q90, descrito no Cap. 3.

Foram realizadas muitas experiências com os outros elementos, principalmente Q91 e Q92, mas o tempo de computação é muito mais elevado e toma-se pouco prático o seu uso em problemas de optimização.

As derivadas das matrizes e vectores globais em ordem a uma variável h podem obter-se da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial h} &= \sum_{e=1}^{nel} \frac{\partial \mathbf{K}^e}{\partial h} \\
\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial h} &= \sum_{e=1}^{nel} \frac{\partial \mathbf{M}^e}{\partial h} \\
\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial h} &= \alpha \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial h} + \beta \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial h} \\
\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial h} &= \sum_{e=1}^{nel} \frac{\partial \mathbf{f}^e}{\partial h}
\end{aligned} \tag{6.37}$$

assumindo a proporcionalidade do amortecimento.

As operações de agrupamento são as já conhecidas da análise estrutural.

Cada variável h é habitualmente comum a apenas alguns elementos, pelo que a operação de agrupamento envolve apenas os elementos afectados por h .

O cálculo das derivadas das matrizes elementares é discutido de seguida.

As derivadas elementares da rigidez podem obter-se, escrevendo a matriz de rigidez num volume de integração em coordenadas naturais, como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}^e &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{\mathbf{B}}_{L0}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \bar{\mathbf{B}}_{L0} \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta \Leftrightarrow \\
\frac{\partial \mathbf{K}^e}{\partial h} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}_{L0}^T}{\partial h} \cdot \mathbf{D} \cdot \bar{\mathbf{B}}_{L0} \det \mathbf{J} + \bar{\mathbf{B}}_{L0}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}_{L0}}{\partial h} \det \mathbf{J} \right. \\
&\quad \left. + \bar{\mathbf{B}}_{L0}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \bar{\mathbf{B}}_{L0} \frac{\partial \det \mathbf{J}}{\partial h} \right) d\xi d\eta d\zeta \Leftrightarrow \\
\frac{\partial \mathbf{K}^e}{\partial h} &= 2 \cdot \text{sim} \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{\mathbf{B}}_{L0}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \bar{\mathbf{B}}_{L0}^* \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta \right)
\end{aligned} \tag{6.38}$$

em que

$$\bar{\mathbf{B}}_{L0}^* = \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}_{L0}}{\partial h} + \frac{\bar{\mathbf{B}}_{L0}}{2 \det \mathbf{J}} \frac{\partial \det \mathbf{J}}{\partial h} \tag{6.39}$$

Para o caso da matriz de massa:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}^e &= \rho \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{N} \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta \Leftrightarrow \\
\frac{\partial \mathbf{M}^e}{\partial h} &= \rho \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial h} \cdot \mathbf{N} \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{N}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial h} \det \mathbf{J} + \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{N} \frac{\partial \det \mathbf{J}}{\partial h} \right) d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \tag{6.40}$$

Para o caso do vector de forças exteriores,

$$\begin{aligned}
 f^e &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N^T \cdot b \det J d\xi d\eta d\zeta + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N^T \Big|_{\zeta=\pm 1} p \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} \Big|_{\zeta=\pm 1} d\xi d\eta \Leftrightarrow \\
 \frac{\partial f^e}{\partial h} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{\partial N^T}{\partial h} \cdot b \det J d\xi d\eta d\zeta + N^T \cdot b \frac{\partial \det J}{\partial h} \right) d\xi d\eta d\zeta + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N^T}{\partial h} \Big|_{\zeta=\pm 1} p \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} \Big|_{\zeta=\pm 1} d\xi d\eta + \\
 &\quad \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N^T \Big|_{\zeta=\pm 1} p \cdot \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \xi \partial h} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} \Big|_{\zeta=\pm 1} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \times \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \eta \partial h} \Big|_{\zeta=\pm 1} \right) d\xi d\eta +
 \end{aligned} \tag{6.41}$$

Na equação (6.41), considerou-se que o vector das forças pontuais não depende das variáveis de projecto.

6.5.3.1 Derivadas da matriz extensão-deslocamento em coordenadas locais

A matriz de extensão-deslocamento em coordenadas locais pode ser obtida a partir da pré-multiplicação pela matriz de transformação de 4ª ordem da matriz de extensão-deslocamento em coordenadas globais. Esta matriz de transformação é função das variáveis de projecto, tal como a matriz extensão-deslocamento em coordenadas globais.

Lembra-se (Cap.3) que

$$\bar{\mathbf{B}}_{L0} = \mathbf{ST} \cdot \mathbf{B}_{L0} \tag{6.42}$$

e portanto,

$$\delta \bar{\mathbf{B}}_{L0} = \delta \mathbf{ST} \cdot \mathbf{B}_{L0} + \mathbf{ST} \cdot \delta \mathbf{B}_{L0} \tag{6.43}$$

Fazendo $\delta \mathbf{B}_{L0} = \frac{\partial \mathbf{B}_{L0}}{\partial h} \delta h$, resulta:

$$\delta \mathbf{B}_{L0} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \delta N_{i,x} & 0 & 0 & \delta(g_{1x}^i \cdot G_1^i) & & \delta(g_{2x}^i \cdot G_1^i) & & \\ 0 & \delta N_{i,y} & 0 & \delta(g_{1y}^i \cdot G_2^i) & & \delta(g_{2y}^i \cdot G_2^i) & & \\ 0 & 0 & \delta N_{i,z} & \delta(g_{1z}^i \cdot G_3^i) & & \delta(g_{2z}^i \cdot G_3^i) & & \\ \delta N_{i,y} & \delta N_{i,x} & 0 & \delta(g_{1x}^i \cdot G_2^i) + \delta(g_{1y}^i \cdot G_1^i) & \delta(g_{2x}^i \cdot G_2^i) + \delta(g_{2y}^i \cdot G_1^i) & & & \\ \delta N_{i,z} & 0 & \delta N_{i,x} & \delta(g_{1x}^i \cdot G_3^i) + \delta(g_{1z}^i \cdot G_1^i) & \delta(g_{2x}^i \cdot G_3^i) + \delta(g_{2z}^i \cdot G_1^i) & & & \\ 0 & \delta N_{i,z} & \delta N_{i,y} & \delta(g_{1y}^i \cdot G_3^i) + \delta(g_{1z}^i \cdot G_2^i) & \delta(g_{2y}^i \cdot G_3^i) + \delta(g_{2z}^i \cdot G_2^i) & & & \end{array} \right] \dots$$

(6.44)

em que

$$\begin{aligned} \delta(g_{jk}^i \cdot G_l^i) &= \delta g_{jk}^i \cdot G_l^i + g_{jk}^i \delta G_l^i \\ \delta N_{i,x} &= \delta J_{1,1}^{-1} N_{i,\xi} + \delta J_{1,2}^{-1} N_{i,\eta} \\ \delta N_{i,y} &= \delta J_{2,1}^{-1} N_{i,\xi} + \delta J_{2,2}^{-1} N_{i,\eta} \\ \delta N_{i,z} &= \delta J_{3,1}^{-1} N_{i,\xi} + \delta J_{3,2}^{-1} N_{i,\eta} \\ \delta G_1^i &= \zeta \delta N_{i,x} + \delta J_{1,3}^{-1} N_i \\ \delta G_2^i &= \zeta \delta N_{i,y} + \delta J_{2,3}^{-1} N_i \\ \delta G_3^i &= \zeta \delta N_{i,z} + \delta J_{3,3}^{-1} N_i \end{aligned} \quad (6.45)$$

Relativamente ao cálculo de δg_{jk}^i , depende directamente do tipo de variável considerado:

Se h é geométrica e influencia V_3^i , então:

$$\delta g_{jk}^i = -0.5 a_i \frac{\partial V_{jk}^i}{\partial h} \delta h \quad (6.46)$$

em que V_{jk}^i é a componente k do vector V_j^i .

Se h é a espessura a_i , então:

$$\delta g_{jk}^i = -0.5 V_{jk}^i \delta h \quad (6.47)$$

As derivadas $\frac{\partial V_1^i}{\partial h}$ e $\frac{\partial V_2^i}{\partial h}$ são obtidas da seguinte forma:

$$\frac{\partial V_1^i}{\partial h} = \hat{\mathbf{j}} \times \frac{\partial V_3^i}{\partial h} \text{ se } \hat{\mathbf{j}} \text{ não é paralelo a } {}^0V_3^K \quad (6.48)$$

$$\frac{\partial V_1^i}{\partial h} = \mathbf{0} \text{ se } \hat{\mathbf{j}} \text{ é paralelo a } {}^0V_3^K \quad (6.49)$$

$$\frac{\partial V_2^i}{\partial h} = \frac{\partial V_3^i}{\partial h} \times V_1^i - \frac{\partial V_1^i}{\partial h} \times V_3^i \quad (6.50)$$

As derivadas dos elementos da matriz jacobiana são obtidas da seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial h} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \xi \partial h} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \eta \partial h} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \zeta \partial h} \end{bmatrix} \quad (6.51)$$

Assim, se h é geométrica e atinge os nós do elemento em questão,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \xi \partial h} &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \left[z_i \frac{\partial V_3^i}{\partial h} \right] \\ \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \eta \partial h} &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \left[z_i \frac{\partial V_3^i}{\partial h} \right] \\ \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \zeta \partial h} &= \sum_{i=1}^N N_i \frac{a_i}{2} \frac{\partial V_3^i}{\partial h} \end{aligned} \quad (6.52)$$

No caso em que $h=a_i$, então,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \left[\mathbf{r}_{oi} + \frac{\zeta}{2} \mathbf{V}_3^i \right] \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \left[\mathbf{r}_{oi} + \frac{\zeta}{2} \mathbf{V}_3^i \right] \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta} &= N_i \frac{1}{2} \mathbf{V}_3^i \end{aligned} \quad (6.53)$$

Para a derivada do determinante jacobiano, resulta, de forma bastante simples:

$$\frac{\partial \det \mathbf{J}}{\partial h} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \xi \partial h} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \eta \partial h} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \zeta \partial h} \end{bmatrix} \quad (6.54)$$

Para a inversa da matriz jacobiana é claramente:

$$\frac{\partial \mathbf{J}^{-1}}{\partial h} = -\mathbf{J}^{-1} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial h} \mathbf{J}^{-1} \quad (6.55)$$

Para se obter $\frac{\partial \mathbf{ST}}{\partial h}$ é necessário calcular as derivadas dos vectores l, m, n . Estes dependem das variáveis geométricas, mas também das espessuras.

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial h} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial h} - \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial h} \right) \\ \frac{\partial m}{\partial h} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial h} + \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial h} \right) \end{aligned} \quad (6.56)$$

em que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial h} &= \frac{\frac{\partial \mathbf{e}_\xi}{\partial h} + \frac{\partial \mathbf{e}_\eta}{\partial h}}{\|\mathbf{e}_\xi + \mathbf{e}_\eta\|} - \frac{(\mathbf{e}_\xi + \mathbf{e}_\eta) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{e}_\xi}{\partial h} + \frac{\partial \mathbf{e}_\eta}{\partial h} \right)}{\|\mathbf{e}_\xi + \mathbf{e}_\eta\|^3} (\mathbf{e}_\xi + \mathbf{e}_\eta) \\ \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial h} &= \frac{\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial h} \times \mathbf{e}_\alpha - \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial h} \times \mathbf{n}}{\|\mathbf{n} \times \mathbf{e}_\alpha\|} - \frac{(\mathbf{n} \times \mathbf{e}_\alpha) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial h} \times \mathbf{e}_\alpha - \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial h} \times \mathbf{n} \right)}{\|\mathbf{n} \times \mathbf{e}_\alpha\|^3} \mathbf{n} \times \mathbf{e}_\alpha \end{aligned} \quad (6.57)$$

e, para n

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial h} = \frac{\frac{\partial \mathbf{e}_\xi}{\partial h} \times \mathbf{e}_\eta - \frac{\partial \mathbf{e}_\eta}{\partial h} \times \mathbf{e}_\xi}{\|\mathbf{e}_\xi \times \mathbf{e}_\eta\|} - \frac{(\mathbf{e}_\xi \times \mathbf{e}_\eta) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{e}_\xi}{\partial h} \times \mathbf{e}_\eta - \frac{\partial \mathbf{e}_\eta}{\partial h} \times \mathbf{e}_\xi \right)}{\|\mathbf{e}_\xi \times \mathbf{e}_\eta\|^3} \mathbf{e}_\xi \times \mathbf{e}_\eta \quad (6.58)$$

para a matriz de transformação de 2ª ordem:

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial h} = \left[\frac{\partial l}{\partial h}, \frac{\partial m}{\partial h}, \frac{\partial n}{\partial h} \right] \quad (6.59)$$

Para a matriz de transformação de 4ª ordem:

$$\frac{\partial \mathbf{ST}}{\partial h} = \begin{bmatrix} 2l_x \frac{\partial l_x}{\partial h} & 2l_y \frac{\partial l_y}{\partial h} & 2l_z \frac{\partial l_z}{\partial h} \\ 2m_x \frac{\partial m_x}{\partial h} & 2m_y \frac{\partial m_y}{\partial h} & 2m_z \frac{\partial m_z}{\partial h} \\ 2 \frac{\partial l_x}{\partial h} m_x + 2 \frac{\partial m_x}{\partial h} l_x & 2 \frac{\partial l_y}{\partial h} m_y + 2 \frac{\partial m_y}{\partial h} l_y & 2 \frac{\partial l_z}{\partial h} m_z + 2 \frac{\partial m_z}{\partial h} l_z \\ 2 \frac{\partial n_x}{\partial h} l_x + 2 \frac{\partial l_x}{\partial h} n_x & 2 \frac{\partial n_y}{\partial h} l_y + 2 \frac{\partial l_y}{\partial h} n_y & 2 \frac{\partial n_z}{\partial h} l_z + 2 \frac{\partial l_z}{\partial h} n_z \\ 2 \frac{\partial m_x}{\partial h} n_x + 2 \frac{\partial n_x}{\partial h} m_x & 2 \frac{\partial m_y}{\partial h} n_y + 2 \frac{\partial n_y}{\partial h} m_y & 2 \frac{\partial m_z}{\partial h} n_z + 2 \frac{\partial n_z}{\partial h} m_z \\ \frac{\partial l_x}{\partial h} l_y + l_x \frac{\partial l_y}{\partial h} & \frac{\partial l_x}{\partial h} l_z + l_x \frac{\partial l_z}{\partial h} & \frac{\partial l_y}{\partial h} l_z + l_y \frac{\partial l_z}{\partial h} \\ \frac{\partial m_x}{\partial h} m_y + m_x \frac{\partial m_y}{\partial h} & \frac{\partial m_x}{\partial h} m_z + m_x \frac{\partial m_z}{\partial h} & \frac{\partial m_y}{\partial h} m_z + m_y \frac{\partial m_z}{\partial h} \\ \frac{\partial l_x}{\partial h} m_y + l_x \frac{\partial m_y}{\partial h} + \frac{\partial m_x}{\partial h} l_y + m_x \frac{\partial l_y}{\partial h} & \frac{\partial m_x}{\partial h} l_z + m_x \frac{\partial l_z}{\partial h} + \frac{\partial m_z}{\partial h} l_x + m_z \frac{\partial l_x}{\partial h} & \frac{\partial m_y}{\partial h} l_z + m_y \frac{\partial l_z}{\partial h} + \frac{\partial m_z}{\partial h} l_y + m_z \frac{\partial l_y}{\partial h} \\ \frac{\partial n_x}{\partial h} l_y + n_x \frac{\partial l_y}{\partial h} + \frac{\partial l_x}{\partial h} n_y + l_x \frac{\partial n_y}{\partial h} & \frac{\partial n_x}{\partial h} l_z + n_x \frac{\partial l_z}{\partial h} + \frac{\partial n_z}{\partial h} l_x + n_z \frac{\partial l_x}{\partial h} & \frac{\partial n_y}{\partial h} l_z + n_y \frac{\partial l_z}{\partial h} + \frac{\partial n_z}{\partial h} l_y + n_z \frac{\partial l_y}{\partial h} \\ \frac{\partial m_x}{\partial h} n_y + m_x \frac{\partial n_y}{\partial h} + \frac{\partial n_x}{\partial h} m_y + n_x \frac{\partial m_y}{\partial h} & \frac{\partial m_x}{\partial h} n_z + m_x \frac{\partial n_z}{\partial h} + \frac{\partial n_x}{\partial h} m_z + n_x \frac{\partial m_z}{\partial h} & \frac{\partial m_y}{\partial h} n_z + m_y \frac{\partial n_z}{\partial h} + \frac{\partial n_y}{\partial h} m_z + n_y \frac{\partial m_z}{\partial h} \end{bmatrix} \quad (6.60)$$

Todas as derivadas necessárias ao cálculo da derivada da matriz extensão-deslocamento linear estão pois definidas. As subrotinas de cálculo dessas derivadas foram implementadas com base nas que calculam as próprias matrizes.

6.5.3.2 Derivadas das funções de forma

No cálculo das derivadas do vector de forças exteriores e da matriz de massa, está envolvida a derivada do vector da matriz das funções de forma.

A matriz dessas funções é aqui reescrita, para o caso linear:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_i, \dots, \mathbf{N}_9]_{3 \times 45} \quad (6.61)$$

em que:

$$N_i = N_i \left[\mathbf{I}_3, -z_i \left[{}^t\mathbf{V}_1^i, {}^t\mathbf{V}_2^i \right] \right] \quad (6.62)$$

Facilmente, se h é geométrica e modifica o nó i , então:

$$\frac{\partial N_i}{\partial h} = N_i \left[\mathbf{0}_3, -z_i \left[\frac{\partial {}^t\mathbf{V}_1^i}{\partial h}, \frac{\partial {}^t\mathbf{V}_2^i}{\partial h} \right] \right] \quad (6.63)$$

Se h é a espessura do nó i , então:

$$\frac{\partial N_i}{\partial h} = N_i \left[\mathbf{0}_3, -\frac{\zeta}{2} \left[{}^t\mathbf{V}_1^i, {}^t\mathbf{V}_2^i \right] \right] \quad (6.64)$$

6.5.4 Funcionais usados na análise

Os funcionais usados neste trabalho são os seguintes:

- Volume da casca indeformada
- As 4 máximas tensões de Von-mises para todos os pontos de Gauss
- Os 4 deslocamentos máximos para todos os nós da malha de elementos finitos
- A flexibilidade (i.e., energia de deformação) da casca

A razão para a utilização de 4 pontos de Gauss e 4 nós onde ocorrem os valores mais críticos prende-se com a possibilidade, muito comum, de existência de múltiplos pontos críticos numa casca. Se se usasse apenas o ponto mais crítico em termos de tensões e o nó mais crítico em termos de deslocamento, na fase de optimização apareceriam algumas assimetrias, aliás constatadas pelo autor na fase de experimentação numérica.

O volume de uma casca pode ser numericamente determinado a partir da integração numérica com a seguinte fórmula:

$$Vol = \sum_{e=1}^{Nelem} \sum_{igaus=1}^{Ngaus} \sum_{jgaus=1}^{Ngaus} \sum_{ilayr=1}^{Nlayr} \det \mathbf{J} W_{igaus} W_{jgaus} W_{ilayr} \quad (6.65)$$

onde W_i são escalares correspondentes ao processo de integração.

$$\frac{\partial Vol}{\partial h} = \frac{dVol}{dh} = \sum_{e=1}^{N_{elem}} \sum_{igaus=1}^{N_{gaus}} \sum_{jgaus=1}^{N_{gaus}} \sum_{ilayr=1}^{N_{layr}} \frac{\partial \det \mathbf{J}}{\partial h} \cdot W_{igaus} W_{jgaus} W_{ilayr} \quad (6.66)$$

Para a determinação das derivadas das 4 máximas tensões de Von-Mises, determina-se quais os elementos que contêm os 4 pontos de Gauss mais críticos e estes.

A tensão de Von-Mises pode facilmente determinar-se recorrendo à sua relação com as componentes do tensor das tensões:

$$SVM = \sqrt{\frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{xz}^2)}{2}} \quad (6.67)$$

resultando, portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial SVM}{\partial \sigma_{xx}} &= \frac{(2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - \sigma_{zz})}{2SVM} \\ \frac{\partial SVM}{\partial \sigma_{yy}} &= \frac{(2\sigma_{yy} - \sigma_{xx} - \sigma_{zz})}{2SVM} \\ \frac{\partial SVM}{\partial \sigma_{zz}} &= \frac{(2\sigma_{zz} - \sigma_{xx} - \sigma_{yy})}{2SVM} \\ \frac{\partial SVM}{\partial \sigma_{xy}} &= 3 \frac{\sigma_{xy}}{SVM} \\ \frac{\partial SVM}{\partial \sigma_{xz}} &= 3 \frac{\sigma_{xz}}{SVM} \\ \frac{\partial SVM}{\partial \sigma_{yz}} &= 3 \frac{\sigma_{yz}}{SVM} \end{aligned} \quad (6.68)$$

Como

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix}_e = \mathbf{D} \cdot \bar{\mathbf{B}}_{L0} \cdot \mathbf{a}_e \quad (6.69)$$

resulta:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial h} \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial h} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial h} \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial h} \\ \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial h} \end{Bmatrix}_e = \mathbf{D} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}_{L0}}{\partial h} \cdot \mathbf{a}_e \quad (6.70)$$

e

$$\frac{\partial \sigma}{\partial a_i} = \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}}_{L0} \cdot \begin{Bmatrix} \vdots \\ 1(i) \\ \vdots \end{Bmatrix} \text{ se } i \text{ pertence a } e. \quad (6.71)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial a_i} = \mathbf{0} \text{ se } i \text{ não pertence a } e \quad (6.72)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial SVM}{\partial h} &= \frac{\partial SVM}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial h} \\ \frac{\partial SVM}{\partial a_i} &= \frac{\partial SVM}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial a_i} \end{aligned} \quad (6.73)$$

Os funcionais de deslocamento máximo podem ser definidos da seguinte forma aproximada:

$$d_i \cong \sqrt{u_i^2 + v_i^2 + w_i^2} \quad (6.74)$$

desprezando as rotações nodais:

$$\begin{aligned}\frac{\partial d_i}{\partial u_i} &= \frac{u_i}{d_i} \\ \frac{\partial d_i}{\partial v_i} &= \frac{v_i}{d_i} \\ \frac{\partial d_i}{\partial w_i} &= \frac{w_i}{d_i}\end{aligned}\tag{6.75}$$

e obviamente, $\frac{\partial d_i}{\partial h} = 0$.

Para o funcional flexibilidade usa-se a expressão da energia de deformação:

$$F = 0.5 \mathbf{f} \cdot \mathbf{a}\tag{6.76}$$

ou seja, metade do produto interno entre o vector global das forças exteriores e o vector de variáveis nodais.

Resulta assim para as derivadas parciais:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial a_i} &= 0.5 f_i \\ \frac{\partial F}{\partial h} &= 0.5 \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial h} \cdot \mathbf{a}\end{aligned}\tag{6.77}$$

Estão, pois, escritas as expressões para as derivadas parciais dos funcionais usados na análise de sensibilidades linear em regime estático ou dinâmico.

6.6 Equações de estado não-lineares

Neste trabalho também se realizou a análise de sensibilidades para problemas não-lineares geométricos em regime estático. A análise dinâmica é uma extensão bastante simples do caso estático e não é referida aqui. Se o tema da análise de sensibilidades em problemas de estado não-lineares é já muito popular e pacífico, nos problemas não-lineares a formulação pode ser bastante complexa e alguns autores usam procedimentos simplificados [NOO91]. O tema é ainda alvo de investigação e na área das estruturas do tipo casca o autor desconhece a existência deste tipo de trabalho. Parece portanto útil citar alguns trabalhos consultados, que permitem adquirir a perspectiva geral do tema antes da particularização para as cascas. Existe pelo menos um livro sobre o assunto que é o de [KLE97] e cuja notação é semelhante à usada neste trabalho. O tratamento matemático do tema foi realizado por [BAR96] recorrendo à análise funcional. Em análise dinâmica é relevante [CAR92] e em termos de aplicações em dinâmica [SUN96]. Em análise elastoplástica [OHS95] [VAZ95]. Existem alguns textos introdutórios sobre o tema como [HAF85] e [YAM94]. Na formulação

$$\begin{aligned}\frac{\partial d_i}{\partial u_i} &= \frac{u_i}{d_i} \\ \frac{\partial d_i}{\partial v_i} &= \frac{v_i}{d_i} \\ \frac{\partial d_i}{\partial w_i} &= \frac{w_i}{d_i}\end{aligned}\tag{6.75}$$

e obviamente, $\frac{\partial d_i}{\partial h} = 0$.

Para o funcional flexibilidade usa-se a expressão da energia de deformação:

$$F = 0.5 \mathbf{f} \cdot \mathbf{a}\tag{6.76}$$

ou seja, metade do produto interno entre o vector global das forças exteriores e o vector de variáveis nodais.

Resulta assim para as derivadas parciais:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial a_i} &= 0.5 f_i \\ \frac{\partial F}{\partial h} &= 0.5 \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial h} \cdot \mathbf{a}\end{aligned}\tag{6.77}$$

Estão, pois, escritas as expressões para as derivadas parciais dos funcionais usados na análise de sensibilidades linear em regime estático ou dinâmico.

6.6 Equações de estado não-lineares

Neste trabalho também se realizou a análise de sensibilidades para problemas não-lineares geométricos em regime estático. A análise dinâmica é uma extensão bastante simples do caso estático e não é referida aqui. Se o tema da análise de sensibilidades em problemas de estado lineares é já muito popular e pacífico, nos problemas não-lineares a formulação pode ser bastante complexa e alguns autores usam procedimentos simplificados [NOO91]. O tema é ainda alvo de investigação e na área das estruturas do tipo casca o autor desconhece a existência deste tipo de trabalho. Parece portanto útil citar alguns trabalhos consultados, que permitem adquirir a perspectiva geral do tema antes da particularização para as cascas. Existe pelo menos um livro sobre o assunto, que é o de [KLE97] e cuja notação é semelhante à usada neste trabalho. O tratamento matemático do tema foi realizado por [BAR96] recorrendo à análise funcional. Em análise dinâmica é relevante [CAR92] e em termos de aplicações em dinâmica [SUN96]. Em análise elastoplástica [OHS94] e [VAZ95]. Existem alguns textos introdutórios sobre o tema como [HAF85] e [YAM94]. Na formulação

geral segue-se aqui a metodologia de [KLE94], um trabalho chave na análise de sensibilidades já que o autor conclui, de uma forma simples, que não é necessário determinar as derivadas da matriz de rigidez tangente para o cálculo das derivadas parciais do vector de variáveis nodais. Pela segunda vez, o método da diferenciação directa parece possuir uma formulação mais simples, e neste caso, não implica necessariamente maior despesa computacional [KLE97].

A equação de equilíbrio incremental e iterativa usada neste trabalho é escrita como:

$${}^t K_T \delta \mathbf{a}^i = {}^{t+\Delta t} \mathbf{f} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{i}^{i-1} \quad (6.78)$$

com

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{i}^0 = {}^t \mathbf{i} \quad (6.79)$$

ou, alternativamente, na forma incremental:

$${}^t K_T \Delta \mathbf{a} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{f} - {}^t \mathbf{i} \quad (6.80)$$

em que $\Delta \mathbf{a} = \delta \mathbf{a}^1 + \dots + \delta \mathbf{a}^i + \dots$

Pode realizar-se a decomposição incremental no tempo do funcional G , como:

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} G &= {}^t G + \Delta G \Leftrightarrow \\ \frac{\partial {}^{t+\Delta t} G}{\partial h} &= \frac{\partial {}^t G}{\partial h} + \frac{\partial \Delta G}{\partial h} \end{aligned} \quad (6.81)$$

A decomposição temporal do funcional G não recorre a uma linearização temporal e $\frac{\partial \Delta G}{\partial h}$ é calculada recorrendo directamente à derivada do acréscimo de deslocamento [KLE94].

A derivada total do funcional G em ordem a uma variável de projecto pode ser calculada recorrendo à sua decomposição:

$$\frac{d {}^{t+\Delta t} G}{dh} = \frac{\partial {}^{t+\Delta t} G}{\partial h} + \frac{\partial {}^{t+\Delta t} G}{\partial {}^{t+\Delta t} \mathbf{a}_i} \frac{\partial {}^{t+\Delta t} \mathbf{a}_i}{\partial h} \text{ soma em } i \quad (6.82)$$

$$\frac{d {}^{t+\Delta t} G}{dh} = \frac{\partial {}^{t+\Delta t} G}{\partial h} + \frac{\partial {}^{t+\Delta t} G}{\partial {}^{t+\Delta t} \mathbf{a}_i} \left(\frac{\partial {}^t \mathbf{a}_i}{\partial h} + \frac{\partial \Delta \mathbf{a}_i}{\partial h} \right) \quad (6.83)$$

ou, recorrendo ao acréscimo temporal de sensibilidade:

$$\frac{d\Delta G}{dh} = \frac{\partial \Delta G}{\partial h} + \frac{\partial \Delta G}{\partial a_i} \frac{\partial a_i}{\partial h} + \frac{\partial^{t+\Delta t} G}{\partial^{t+\Delta t} a_i} \frac{\partial \Delta a_i}{\partial h} \quad (6.84)$$

Sendo assim, basta o cálculo de $\frac{\partial^{t+\Delta t} a_i}{\partial h}$, ou de $\frac{\partial \Delta a_i}{\partial h}$ para a determinação da derivada de qualquer funcional.

Pode derivar-se directamente a equação de equilíbrio incremental:

$${}^t K_T \frac{\partial \Delta \mathbf{a}}{\partial h} = \frac{\partial^{t+\Delta t} \mathbf{f}}{\partial h} - \frac{\partial^t \mathbf{i}}{\partial h} - \frac{\partial^t \mathbf{i}}{\partial a_i} \frac{\partial a_i}{\partial h} - \left(\frac{\partial^t \mathbf{K}_T}{\partial h} + \frac{\partial^t \mathbf{K}_T}{\partial a_i} \frac{\partial a_i}{\partial h} \right) \cdot \Delta \mathbf{a} \quad (6.85)$$

Pode observar-se a seguinte relação:

$$\left. \frac{d^{t+\Delta t} \mathbf{i}}{dh} \right|_{\Delta \mathbf{a} \neq \Delta \mathbf{a}(h)} = \frac{d^t \mathbf{i}}{dh} + \left. \frac{d^t \Delta \mathbf{i}}{dh} \right|_{\Delta \mathbf{a} \neq \Delta \mathbf{a}(h)} = \frac{d^t \mathbf{i}}{dh} + \left(\frac{\partial^t \mathbf{K}_T}{\partial h} + \frac{\partial^t \mathbf{K}_T}{\partial a_i} \frac{\partial a_i}{\partial h} \right) \quad (6.86)$$

resultando em

$${}^t K_T \frac{\partial \Delta \mathbf{a}}{\partial h} = \frac{\partial^{t+\Delta t} \mathbf{f}}{\partial h} - \left. \frac{d^{t+\Delta t} \mathbf{i}}{dh} \right|_{\Delta \mathbf{a} \neq \Delta \mathbf{a}(h)} \quad (6.87)$$

A equação (6.87) é, para este trabalho, a equação fundamental da análise de sensibilidades em problemas não-lineares.

É extraordinário que, mesmo que o problema de estado exija um processo iterativo em cada incremento, a análise de sensibilidades é realizada no fim da convergência do processo iterativo, de forma não-iterativa.

Conclui-se portanto que, no caso deste trabalho, a análise de sensibilidades em problemas não-lineares é realizada de forma não iterativa.

Se existir interesse na derivada do vector deslocamento, basta somar as derivadas dos acréscimos de deslocamento obtidas para todos os incrementos:

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial h} = \sum_{inc=1}^{ninc} \frac{\partial \Delta \mathbf{a}}{\partial h}_{inc} \quad (6.88)$$

em que $ninc$ representa o número de incrementos.

A formulação Lagrangeana total, usada neste trabalho, tem vantagens em termos de simplicidade de formulação sobre a formulação Lagrangeana actualizada [KLE97].

Resumidamente, o procedimento consiste em calcular a derivada das forças internas para cada variável, faz-se a escala da derivada do vector de força exterior derivado $\frac{inc}{ninc} \frac{\partial f}{\partial h}$, e resolve-se o sistema (6.86), depois actualiza-se o vector deslocamento e as derivadas das tensões.

6.6.1 Derivadas para os elementos de casca

A particularização para os elementos descritos neste trabalho reduz-se praticamente à análise da derivada do vector das forças internas e à actualização incremental da derivada do 2º tensor de tensões de Piola-Kirchhoff, já que as outras derivadas foram já discutidas para o caso da análise linear.

Como

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{i}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 {}^{t+\Delta t} \overline{\mathbf{B}}_L^T \cdot {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma} \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta \quad (6.89)$$

resulta:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial {}^{t+\Delta t} \mathbf{i}^e}{\partial h} \right|_{\Delta \mathbf{a} \neq \Delta \mathbf{a}(h)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\left(\frac{\partial {}^{t+\Delta t} \overline{\mathbf{B}}_L}{\partial h} + \frac{\partial {}^{t+\Delta t} \overline{\mathbf{B}}_L}{\partial {}^t a_i} \cdot \frac{\partial {}^t a_i}{\partial h} \right)^T {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma} + \right. \\ &\quad \left. {}^{t+\Delta t} \overline{\mathbf{B}}_L^T \left(\frac{d^t \boldsymbol{\sigma}}{dh} + \mathbf{D} \cdot \frac{d {}^{t+\Delta t} \overline{\mathbf{B}}_L}{dh} \right) \Delta \mathbf{a} \right] \det \mathbf{J} + {}^{t+\Delta t} \overline{\mathbf{B}}_L^T \cdot {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma} \frac{\partial \det \mathbf{J}}{\partial h} d\xi d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (6.90)$$

A derivada $\frac{d^t \boldsymbol{\sigma}}{dh}$ é função das derivadas dos acréscimos de deslocamento para instantes anteriores a $t+\Delta t$. A derivada da variável nodal em ordem a uma variável de projecto é simplesmente obtida a partir da soma das derivadas do acréscimo da variável nodal nos últimos incrementos:

$$\frac{\partial {}^t a_i}{\partial h} = \sum_{inc=1}^{Ninc(t+\Delta t)-1} \left. \frac{\partial \Delta a_i}{\partial h} \right|_{inc} \quad (6.91)$$

onde $Ninc(t+\Delta t)$ é o número do incremento correspondente ao instante $t+\Delta t$.

A matriz ${}^{t+\Delta t} \overline{\mathbf{B}}_L$ pode ser decomposta da forma habitual:

$${}^{t+\Delta t} \overline{\mathbf{B}}_L = {}^{t+\Delta t} \overline{\mathbf{B}}_{L0} + {}^{t+\Delta t} \overline{\mathbf{B}}_{L1} \quad (6.92)$$

O caso da matriz ${}^{t+\Delta t}\overline{\mathbf{B}}_{L0}$ foi já tratado, restando a derivada de

$${}^{t+\Delta t}\overline{\mathbf{B}}_{L1} = \mathbf{ST} \cdot {}^{t+\Delta t}\mathbf{B}_{L1} \quad (6.93)$$

A derivada de ${}^{t+\Delta t}\mathbf{B}_{L0}$ em ordem às variáveis é realizada como no caso linear e a derivada parcial de ${}^{t+\Delta t}\mathbf{B}_{L1}$ em ordem às variáveis é aqui realizada recorrendo a diferenças centrais. A razão para esse método é simples: embora a despesa de implementação não seja muito elevada, este método, aplicado apenas à matriz linear 1, permite poupar algum tempo.

Assim,

$$\frac{\partial {}^{t+\Delta t}\mathbf{B}_{L1}}{\partial h} \approx \frac{{}^{t+\Delta t}\mathbf{B}_{L1}[h(1+p)] - {}^{t+\Delta t}\mathbf{B}_{L1}[h(1-p)]}{2hp} \quad (6.94)$$

em que p foi um número determinado heurísticamente. Neste trabalho considerou-se $p = 1 \times 10^{-8}$

É importante referir que o facto de se ter omitido o índice de h é apenas para não sobrecarregar a notação e não impede que a análise de sensibilidade, como foi implementada, permita uma análise simultânea de D variáveis de projecto. É o caso e existe a facilidade de determinar simultaneamente as sensibilidade em ordem às variáveis seleccionadas pelo utilizador do programa.

A derivada em ordem a uma variável nodal α_i , à qual corresponde um deslocamento linear ou uma componente da rotação, é realizada analiticamente, já que aqui o método da diferença central torna-se dispendioso (45x2 avaliações da matriz!).

Escrevendo a derivada $\frac{\partial {}^{t+\Delta t}\mathbf{B}_{L1}}{\partial \alpha_i}$:

$$\frac{\partial {}^{t+\Delta t}\mathbf{B}_{L1}}{\partial \alpha_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial l_{11}}{\partial \alpha_j} \cdot N_{i,x} & \frac{\partial l_{21}}{\partial \alpha_j} \cdot N_{i,x} & \frac{\partial l_{31}}{\partial \alpha_j} \cdot N_{i,x} & \frac{\partial \Psi_{11}^i}{\partial \alpha_j} \cdot G_1^i & \frac{\partial \Psi_{21}^i}{\partial \alpha_j} \cdot G_1^i \\ \frac{\partial l_{12}}{\partial \alpha_j} \cdot N_{i,y} & \frac{\partial l_{22}}{\partial \alpha_j} \cdot N_{i,y} & \frac{\partial l_{32}}{\partial \alpha_j} \cdot N_{i,y} & \frac{\partial \Psi_{12}^i}{\partial \alpha_j} \cdot G_2^i & \frac{\partial \Psi_{22}^i}{\partial \alpha_j} \cdot G_2^i \\ \frac{\partial l_{13}}{\partial \alpha_j} \cdot N_{i,x} & \frac{\partial l_{23}}{\partial \alpha_j} \cdot N_{i,x} & \frac{\partial l_{33}}{\partial \alpha_j} \cdot N_{i,x} & \frac{\partial \Psi_{13}^i}{\partial \alpha_j} \cdot G_3^i & \frac{\partial \Psi_{23}^i}{\partial \alpha_j} \cdot G_3^i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial l_{11}}{\partial \alpha_j} \cdot N_{i,y} + \frac{\partial l_{12}}{\partial \alpha_j} \cdot N_{i,x} & \frac{\partial l_{21}}{\partial \alpha_j} \cdot N_{i,y} + \frac{\partial l_{22}}{\partial \alpha_j} \cdot N_{i,x} & \frac{\partial l_{31}}{\partial \alpha_j} \cdot N_{i,y} + \frac{\partial l_{32}}{\partial \alpha_j} \cdot N_{i,x} & \frac{\partial \Psi_{12}^i}{\partial \alpha_j} \cdot G_1^i + \frac{\partial \Psi_{11}^i}{\partial \alpha_j} \cdot G_2^i & \frac{\partial \Psi_{22}^i}{\partial \alpha_j} \cdot G_1^i + \frac{\partial \Psi_{21}^i}{\partial \alpha_j} \cdot G_2^i \\ \frac{\partial l_{11}}{\partial \alpha_j} \cdot N_{i,x} + \frac{\partial l_{13}}{\partial \alpha_j} \cdot N_{i,y} & \frac{\partial l_{21}}{\partial \alpha_j} \cdot N_{i,x} + \frac{\partial l_{23}}{\partial \alpha_j} \cdot N_{i,y} & \frac{\partial l_{31}}{\partial \alpha_j} \cdot N_{i,x} + \frac{\partial l_{33}}{\partial \alpha_j} \cdot N_{i,y} & \frac{\partial \Psi_{13}^i}{\partial \alpha_j} \cdot G_1^i + \frac{\partial \Psi_{11}^i}{\partial \alpha_j} \cdot G_3^i & \frac{\partial \Psi_{23}^i}{\partial \alpha_j} \cdot G_1^i + \frac{\partial \Psi_{21}^i}{\partial \alpha_j} \cdot G_3^i \\ \frac{\partial l_{12}}{\partial \alpha_j} \cdot N_{i,x} + \frac{\partial l_{13}}{\partial \alpha_j} \cdot N_{i,y} & \frac{\partial l_{22}}{\partial \alpha_j} \cdot N_{i,x} + \frac{\partial l_{23}}{\partial \alpha_j} \cdot N_{i,y} & \frac{\partial l_{32}}{\partial \alpha_j} \cdot N_{i,x} + \frac{\partial l_{33}}{\partial \alpha_j} \cdot N_{i,y} & \frac{\partial \Psi_{13}^i}{\partial \alpha_j} \cdot G_2^i + \frac{\partial \Psi_{12}^i}{\partial \alpha_j} \cdot G_3^i & \frac{\partial \Psi_{23}^i}{\partial \alpha_j} \cdot G_2^i + \frac{\partial \Psi_{22}^i}{\partial \alpha_j} \cdot G_3^i \end{bmatrix} \quad (6.95)$$

As derivadas contidas nos elementos da matriz podem ser determinadas a partir da estratégia seguidamente descrita.

Para cada nó k do elemento, estão associados 3 graus de liberdade de translação $l=1,2,3$ e duas rotações ($l=4,5$). Re-escreve-se portanto a_i como a_k^l . Assim, e para $l \leq 3$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_{ij}}{\partial a_k^l} &= \begin{cases} N_{k,j} & \text{se } i = l \\ 0 & \text{se } i \neq l \end{cases} \\ \frac{\partial \psi_{ij}^m}{\partial a_k^l} &= g_{ik}^m \frac{\partial l_{kj}}{\partial a_k^l} \end{aligned} \quad (6.96)$$

para $l > 3$:

como

$$l_{ij} = \sum_{k=1}^{N_{nos}} N_{k,j} \cdot {}^{t+\Delta t}u_i + \frac{a_k}{2} \left(\zeta \cdot N_{k,j} + J_{j3}^{-1} \cdot N_k \right) \left({}^{t+\Delta t}V_{3i} - {}^0V_{3i} \right) \quad (6.97)$$

e ${}^{t+\Delta t}V_{3i}$ é implícito em a_k^l , faz-se a seguinte aproximação:

$${}^{t+\Delta t}V_3^k \cong -{}^{t+\Delta t}\theta_1^0 V_1^k - {}^{t+\Delta t}\theta_2^0 V_2^k + {}^0V_3^k \quad (6.98)$$

portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_{ij}}{\partial a_k^4} &= \frac{a_k}{2} \left(\zeta \cdot N_{k,j} + J_{j3}^{-1} \cdot N_k \right) \left(-{}^0V_{1i}^k \right) \\ \frac{\partial l_{ij}}{\partial a_k^5} &= \frac{a_k}{2} \left(\zeta \cdot N_{k,j} + J_{j3}^{-1} \cdot N_k \right) \left(-{}^0V_{2i}^k \right) \end{aligned} \quad (6.99)$$

$$\frac{\partial \psi_{ij}^m}{\partial a_k^l} = \sum_{k=1}^{N_{nos}} g_{ik}^m \frac{\partial l_{kj}}{\partial a_k^l} \quad (6.100)$$

Os funcionais são os mesmos que os discutidos na análise linear, sendo no entanto necessário examinar o cálculo de $\frac{d^{t+\Delta t}\sigma}{dh}$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{d^{t+\Delta t}\sigma}{dh} &= \frac{d^t\sigma}{dh} + \frac{d\Delta\sigma}{dh} \Leftrightarrow \\ \frac{d^{t+\Delta t}\sigma}{dh} &= \frac{\partial^{t+\Delta t}\sigma}{\partial h} + \mathbf{D} \cdot {}^{t+\Delta t}\overline{\mathbf{B}}_L \cdot \frac{\partial \Delta\sigma}{\partial h} \end{aligned} \quad (6.101)$$

Esta actualização é realizada para todos os incrementos, depois de determinada a derivada do acréscimo de deslocamento nodal.

6.7 Conclusões

A análise de sensibilidades implementada computacionalmente foi descrita neste capítulo. A implementação computacional é, só por si, bastante importante. Isto porque para realizar de forma económica a análise de sensibilidades é necessário investir muito na implementação. Em problemas lineares, a implementação conduz a várias subrotinas bastante eficientes. Foram criados módulos de partilha de variáveis e subrotinas de interface (EXTERNAL) para que a análise de sensibilidades seja usada por um optimizador. Assim, é possível definir a função objectivo e as restrições e modificar o problema iterativamente alterando os ficheiros de dados, gerando novas malhas, etc. Em análise não linear, as possibilidades são as mesmas só que os problemas limitam-se ao caso estático. Esse facto deve-se mais à impraticabilidade de se correrem exemplos realistas em sensibilidades com problemas não-lineares dinâmicos em computadores pessoais do que à eventual dificuldade de implementação do código.

A discussão sobre a análise de sensibilidades usando elementos de casca isoparamétricos parece estar ainda pouco desenvolvida. O único artigo sobre o tema, envolvendo análise linear é o de [YAM93] e carece de profundidade. Neste trabalho, pese embora a inexistência do tratamento das não-linearidades materiais e a redução ao caso estático na análise não-linear, os resultados foram muito animadores e o tratamento misto analítico – semianalítico da matriz ${}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{B}_{L1}$ parece ser uma boa solução, depois de se encontrar um passo p adequado. A análise de sensibilidades semianalítica é desaconselhada para este tipo de estrutura [YAM93] e, portanto, o trabalho de derivação analítica efectuado parece ser mesmo a única via para a determinação rigorosa das sensibilidades.

Não obstante a importância central das estruturas do tipo casca, existem poucos trabalhos sobre as sensibilidades destas estruturas. O autor pensa que este capítulo pode ter alguma utilidade no despertar do interesse sobre a temática.

As sensibilidades geométricas merecem também um estudo aprofundado, nomeadamente entre a integração das tecnologias de modelação sólida e a análise de sensibilidades. Já que muitas estruturas do tipo casca com interesse prático podem ser modelizadas como a fronteira de sólidos obtidos por operações booleanas, o interesse de determinar as derivadas de alguns funcionais em ordem às dimensões dos sólidos primitivos parece extremamente útil.

Por fim, refira-se que as limitações actualmente existentes em termos de velocidade de processamento e capacidade de memória dos computadores pessoais tendem a diminuir rapidamente, o que permite prever um futuro fértil para esta tecnologia.

6.8 Referências

- [ANG92] ANGULO, C., VADILLO, E.G., CANALES, J.. *Optimization of the dynamic characteristics of structures*. Em ' Finite Elements in the 90's' Eds. E.Oñate, J. Periaux, A. Samuelsson Co-publicação Springer-Verlag e CIMNE, 1991
- [ARO95] ARORA, J.S. *Structural design sensitivity analysis: Continuum and discrete approaches*. Em ' *Advances in structural optimization* ' Ed J. Herskovits. Kluwer Academic Publishers 1995.
- [BAR96] BARTHOLD, F.J. ,STEIN, E. *A continuum mechanical-based formulation of the variational sensitivity analysis in structural optimization. Part I: analysis*. Structural Optimization ,Vol 11, 29-42. Springer-Verlag 1996.
- [CAR92] CARDOSO, J.B. , ARORA, J.S. *Design sensitivity analysis of nonlinear dynamic response of structural and mechanical systems*. Structural Optimization ,Vol 41, 37-46. Springer-Verlag 1992
- [CCA95] ANTÓNIO, C.A.C. *Optimização de estruturas em materiais compósitos de matriz polimérica*. Tese de Doutoramento, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- [CHE95] CHEN, C.J. , CHOI, K.K. *A continuum approach for second-order shape design sensitivity of elastic solids with loaded boundaries*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 38, 2979-3004. John Wiley & Sons, 1995.
- [CHE97] CHEN, S. TORTORELLI. *Three-dimensional shape optimization with variational geometry*. Structural Optimization ,Vol 13, 81-94. Springer-Verlag 1997
- [GUI96] GUILLET, S. NOEL,F. LÉON, J.C. *Structural shape optimization of parts bounded by free-form surfaces*. Structural Optimization, Vol 11, 159-169. Springer-Verlag 1996
- [HAF85] HAFKA, R.T. *Sensitivity calculations for iteratively solved problems*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 21, 1535-1546. John Wiley & Sons, 1985
- [HIE91] HIEN, T.D., KLEIBER, M. *Stochastic design sensitivity in structural dynamics*. . International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 32, 1247-1265. John Wiley & Sons, 1991.
- [KLE91] KLEIBER, M. , HIEN, T.D.,POSTEK, E. *Incremental finite element analysis of nonlinear structural design sensitivity problems*. Em ' Finite Elements in the 90's' Eds. E.Oñate, J. Periaux, A. Samuelsson Co-publicação Springer-Verlag e CIMNE, 1991
- [KLE94] KLEIBER, M. ,HIEN, T.D.,POSTEK, E. *Incremental finite element sensitivity analysis for non-linear mechanics applications*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 37, 3291-3308. John Wiley & Sons, 1994

[KLE97] KLEIBER, M. , ANTUNEZ, H. ,HIEN, T.D., KOWALCZYK, P. *Parameter sensitivity in nonlinear mechanics. Theory and finite element computations*. John Wiley and Sons 1997

[LIN97] LINDBY, T., SANTOS, J.L.T. *2D and 3D shape optimization using mesh velocities to integrate analytical sensitivities with associative CAD*. Structural Optimization ,Vol 13, 213-222. Springer-Verlag 1997

[LUN94] LUND, E., OLHOFF, N. *Shape design sensitivity analysis of eigenvalues using 'exact' numerical differentiation of finite element matrices*. Structural Optimization, Vol 8, 52-59. Springer-Verlag 1994

[NOO91] NOOR, A.K., PETERS, J.M. *Reduced basis technique for calculating sensitivity derivatives of the nonlinear structural response*. Em ' Finite Elements in the 90's' Eds. E.Oñate, J. Periaux, A. Samuelsson Co-publicação Springer-Verlag e CIMNE, 1991

[OHS94] OHSAKI, M. , ARORA, J.S. *Design sensitivity analysis of elastoplastic structures*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 37, 737-762. John Wiley & Sons, 1994.

[OLH95] OLHOFF, N., LUND, E. *Finite element based engineering design sensitivity analysis and optimization*. Em ' Advances in structural optimization ' Ed J. Herskovits. Kluwer Academic Publishers 1995.

[RAM91] RAMAKRISHNAN, C.V., PAUL, A.C., SEHGAL, D.K. *Optimal shape design under transient dynamic loading*. Em ' Finite Elements in the 90's' Eds. E.Oñate, J. Periaux, A. Samuelsson Co-publicação Springer-Verlag e CIMNE, 1991

[SUN96] SUN, T.C.. *Design sensitivity analysis and optimization of nonlinear dynamic response for a motorcycle driving on a half-sine bump road*. Structural Optimization ,Vol 11, 113-119. Springer-Verlag 1996.

[VAZ95] VAZ, L.E., HINTON, E. *FE-shape sensitivity of elastoplastic response*. Structural Optimization ,Vol 10, 231-238. Springer-Verlag 1995

[YAM93] YAMAZAKI, K. VANDERPLAATS, G.N. *Design sensitivity analysis with isoparametric shell elements*. Structural Optimization ,Vol 5, 152-158. Springer-Verlag 1993

[YAM94] YAMAZAKY, K. *Design sensitivity analysis in structural optimization*. Em ' Geometry and Optimization Techniques for Structural Design'. Co-publicação Computational Mechanics Publications e Elsevier Applied Science, 1994

[YAM97] YAMAZAKI, K., TSUBOSAKA, N. *A stress analysis technique for plate and shell built-up structures with junctions and its application to minimum-weight design of stiffened structures*. . Structural Optimization , Vol 14, 173-183. Springer-Verlag 1997

[ZHA95] ZHANG, W.H. , BECKERS, P., FLEURY, C. *A unified parametric design approach to structural shape optimization*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 38, 2283-2292. John Wiley & Sons, 1995.

[ZHA97] ZHANG, J. ANDERSON, W.J. *Exploiting design length scales in structural optimization*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 40, 1465-1482. John Wiley & Sons, 1997

7 Optimização

7.1 Introdução

A optimização estrutural está bastante difundida na área de investigação da mecânica estrutural. Em termos de optimização do campo de espessuras e forma de cascas a bibliografia é rara e limita-se a casos muito simplificados. A análise estrutural e de sensibilidades de cascas usando o elemento degenerado é pesada do ponto de vista computacional e portanto a optimização só é computacionalmente possível em computadores pessoais para problemas de pequenas dimensões.

A teoria da programação não-linear, exposta em muitos textos dada a sua aplicabilidade multidisciplinar, é usada neste trabalho para melhorar ou otimizar estruturas do tipo casca. É útil distinguir entre análise e concepção. Até agora tratou-se da análise de cascas, consistindo em saber a resposta do sistema ao ambiente. Separou-se a informação de ordem 0 da de ordem 1 identificando-as como análise estrutural e de sensibilidades respectivamente. Na concepção define-se parte do sistema, sendo a análise um subproblema no processo de concepção.

O objectivo da optimização estrutural é a busca racional do melhor projecto que verifique os requisitos do projectista [VAN84].

Os problemas aqui tratados são do tipo minimização com restrições e todas as funções são não-lineares. Este tipo de problemas é habitualmente resolvido recorrendo a duas possíveis estratégias: transformação do problema com restrições num problema sem restrições, ou resolução directa do problema com restrições. As técnicas associadas à primeira estratégia são designadas por Técnicas de Minimização Sequencial não Restringida, ou em Inglês '*Sequential Unconstrained Minimization Techniques*', SUMT. A resolução directa é frequentemente realizada recorrendo a subproblemas aproximados que são resolvidos usando a programação linear ou quadrática. Devido ao facto das técnicas directas, e em particular as mais actuais (SQP, p.ex.), serem ligeiramente superiores (ver [ARO89] p.ex.) para as funções de teste da programação não linear do que as técnicas SUMT, optou-se pelo uso de uma técnica directa em conjunto com algumas estratégias de simplificação do problema tratado.

Neste capítulo transmite-se a informação prévia necessária à compreensão do algoritmo e os passos fundamentais deste.

7.2 Conceitos básicos

7.2.1 Formulação

Chama-se a $[h_1, h_2, \dots, h_n]$ o vector das variáveis de projecto, a $f(h)$ a função objectivo e Ω o domínio admissível. O problema de optimização pode ser escrito como:

$$\text{Minimizar } f(h) \text{ sujeito a } h \in \Omega \quad (7.1)$$

O problema é um problema de programação matemática.

A definição de domínio admissível recorre aos conceitos de restrição:

$$\Omega \equiv \{ \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \mid g_j(\mathbf{h}) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m; i_j(\mathbf{h}) = 0, j = 1, 2, \dots, p \} \quad (7.2)$$

em que g_j e i_j são as restrições desigualdade e igualdade, respectivamente.

O problema de optimização não-linear básico é escrito como:

$$\begin{cases} \min f(\mathbf{h}) \\ \text{sujeito a } g_j \leq 0; j = 1, 2, \dots, m \\ \text{e a } i_j = 0; j = 1, 2, \dots, p \end{cases} \quad (7.3)$$

Onde f, i, g são funções contínuas em $\mathbb{R}^n$ e pelo menos uma delas é não linear em termos de variáveis de projecto. Além destas restrições, é por vezes adequado separar as restrições directamente aplicadas às variáveis:

$$h_j^U \geq h_j \geq h_j^L, \quad j = 1, \dots, n. \quad (7.4)$$

Estas restrições são alvo de um tratamento separado no algoritmo usado.

Qualquer restrição desigualdade é dita activa se $g_j = 0$ e inactiva se $g_j < 0$. Uma restrição desigualdade é violada se $g_j > 0$.

Escrevendo $\mathbf{i} = [i_1, \dots, i_p]^T$ e $\mathbf{g} = [g_1, \dots, g_m]^T$ tem-se:

$$\begin{cases} \min f(\mathbf{h}) \\ \text{sujeito a } \mathbf{g} \leq \mathbf{0} \\ \text{e a } \mathbf{i} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (7.5)$$

Introduzindo as variáveis auxiliares $\lambda \in \mathbb{R}^m$ e $\mu \in \mathbb{R}^p$ chamadas variáveis duais ou multiplicadores de Lagrange, define-se a função Lagrangeana associada ao corrente problema como:

$$l(\mathbf{h}, \lambda, \mu) = f(\mathbf{h}) + \lambda^T \mathbf{g}(\mathbf{h}) + \mu^T \mathbf{i}(\mathbf{h}) \quad (7.6)$$

7.2.2 Mínimo local e global

A definição de mínimo local e global é feita seguidamente.

Um ponto h^* é um mínimo local de f em Ω se existe uma vizinhança $\Delta \equiv \{h \in \Omega \mid \|h - h^*\| \leq \delta\}$ tal que $f(h) \geq f(h^*) \quad \forall h \in \Delta$. Se $f(h) > f(h^*) \quad \forall h \in \Delta$, então h^* é um mínimo estrito local.

Um ponto h^* é um mínimo global de f em Ω se $f(h) > f(h^*) \quad \forall h \in \Omega$.

Em certos casos é possível assegurar a existência de um mínimo global, mesmo que não se determine. O teorema de Weierstrass assegura essa existência mediante certas condições.

Se f é contínua no domínio Ω não vazio, o qual é fechado e limitado, então f tem pelo menos um mínimo global em Ω .

Os métodos de programação matemática procuram geralmente os mínimos locais. Os mínimos globais só podem ser caracterizados em certos casos particulares, como seja na programação convexa.

7.2.3 Tópicos sobre a convergência

Os métodos de programação não-linear são usualmente iterativos. Parece portanto útil referir alguns conceitos sobre a convergência desses métodos. Dado um ponto inicial h^0 , uma sequência de pontos $\{h^k\}$ é obtida por aplicação sucessiva da regra algorítmica. Esta sequência deve convergir para a solução h^* . Essa convergência é chamada de assintótica quando a solução não é obtida ao fim de um número finito de iterações. Os métodos de programação não-linear possuem habitualmente uma convergência assintótica.

Um algoritmo iterativo é dito globalmente convergente se para qualquer ponto inicial $h^0 \in \mathbb{R}^n$ (ou mais realisticamente $h^0 \in \Omega$) gera uma sequência de pontos convergindo para a solução do problema.

Um algoritmo iterativo é dito localmente convergente se existe um real positivo ρ tal que para qualquer ponto inicial $h^0 \in \mathbb{R}^n$ (ou $h^0 \in \Omega$) verificando adicionalmente $\|h^0 - h^*\| \leq \rho$, gera uma sequência de pontos convergindo para a solução do problema.

O grande objectivo das técnicas usadas é obter métodos globalmente convergentes e, simultaneamente, eficientes. Na optimização estrutural, a eficiência está relacionada com o elevado custo da avaliação das funções e dos gradientes da função objectivo e restrições. Os cálculos internos dos algoritmos de optimização em si são normalmente muito menos dispendiosos do que as análises estrutural e de sensibilidades. Alguns conceitos sobre a velocidade de convergência são, pois, úteis para a comparação quantitativa dos algoritmos.

A ordem de convergência de uma sequência $\{h^k\} \rightarrow h^*$ é o maior número p dos números não negativos $\bar{p}$ que satisfazem a seguinte relação:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|h^{k+1} - h^*\|}{\|h^k - h^*\|^p} = \beta < \infty \quad (7.7)$$

Se $p=1$ temos convergência linear e se $p=2$ a convergência é quadrática. Se $p=1$ e $\beta=0$ temos convergência superlinear, em que β é a razão de convergência.

De uma forma geral, os métodos globalmente convergentes da programação matemática baseiam-se na definição, em cada ponto da sequência, de uma direcção de pesquisa e na determinação de um ponto nessa direcção.

7.2.4 Direcção de pesquisa

É necessário caracterizar essa direcção de pesquisa de acordo com dois atributos que deve possuir: a direcção deve ser de descida e admissível.

Assim, um vector $d \in \mathbb{R}^n$ é uma direcção de descida de uma função real f em $h \in \mathbb{R}^n$ se existe um $\delta > 0$ tal que $f(h + td) < f(h)$ para todo o $t \in]0, \delta[$.

Se f é diferenciável em h e $d^T \cdot \nabla f(h) < 0$ d é uma direcção de descida de f .

Um vector $d \in \mathbb{R}^n$ é uma direcção admissível do problema em $h \in \Omega$ se, para algum $\theta > 0$, se verifica $h + td \in \Omega$ para todo o $t \in [0, \theta]$.

7.3 Condições de optimalidade

7.3.1 Formulação

É bastante importante saber quais as condições necessárias para que um ponto considerado seja um mínimo local, ou ainda, quais as condições que, a não serem verificadas, asseguram que o ponto não seja um mínimo local. É também interessante saber em que circunstâncias está assegurada a existência de mínimos globais.

Estas condições podem ser úteis na criação de técnicas numéricas de resolução de problemas. As condições para problemas multidimensionais são obtidas considerando que qualquer curva admissível $h(t)$ passando por um mínimo local h^* do problema, tem um mínimo local de $f[h(t)]$ em h^* . Assim, aplicando as condições de optimalidade de problemas unidimensionais a $f[h(t)]$, pode obter-se as condições para problemas multidimensionais.

O seguinte teorema permite uma interpretação geométrica das condições de optimalidade:

Teorema:

Se $\mathbf{h}^* \in \Omega$ é um mínimo local de f em Ω então, para cada direcção admissível $\mathbf{d} \in \mathcal{R}^n$, tem-se:

- i) $\mathbf{d}^T \cdot \nabla f(\mathbf{h}^*) \geq 0$
- ii) se $\mathbf{d}^T \cdot \nabla f(\mathbf{h}^*) = 0$, então $\mathbf{d}^T \cdot \nabla^2 f(\mathbf{h}^*) \cdot \mathbf{d} \geq 0$

A primeira afirmação significa que cada direcção de descida de f em $\mathbf{h}^*$ não é admissível.

7.3.2 Problema não restringido

Para o caso de não existirem restrições, qualquer $\mathbf{d} \in \mathcal{R}^n$ é uma direcção admissível. Para esse caso, as condições necessárias são as seguintes.

Se $\mathbf{h}^*$ é um mínimo local de f em $\mathcal{R}^n$, então,

- i) $\nabla f(\mathbf{h}^*) = \mathbf{0}$
- ii) para todo o $\mathbf{d} \in \mathcal{R}^n$, $\mathbf{d}^T \cdot \nabla^2 f(\mathbf{h}^*) \cdot \mathbf{d} \geq 0$. Isso significa que a Hessiana de f é semi-definida positiva ou definida positiva.

As condições suficientes são as seguintes:

Sendo f uma função escalar duplamente diferenciável em $\mathcal{R}^n$ e $\mathbf{h}^*$ é tal que,

- i) $\nabla f(\mathbf{h}^*) = \mathbf{0}$
- ii) $\nabla^2 f(\mathbf{h}^*)$ é definida positiva

então, $\mathbf{h}^*$ é um mínimo estrito de f

7.3.3 Problema restringido

No caso do problema com restrições do tipo igualdade:

$$\begin{cases} \min f(\mathbf{h}) \\ \text{sujeito a } \mathbf{i} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (7.8)$$

Uma definição importante para o problema restringido é a de ponto regular.

Um ponto $\mathbf{h} \in \Omega$ é um ponto regular de Ω se os gradientes de todas as restrições em $\mathbf{h}$ são lineamente independentes.

Assim, as condições necessárias de primeira ordem para o problema com restrições do tipo igualdade são seguidamente escritas.

Sendo $\mathbf{h}^*$ um ponto regular das restrições $\mathbf{i}=\mathbf{0}$ e um mínimo local, existe um vector $\boldsymbol{\mu}^* \in \mathbb{R}^p$ tal que:

$$\begin{aligned}\nabla f(\mathbf{h}^*) + \nabla \mathbf{i}(\mathbf{h}^*)\boldsymbol{\mu}^* &= \mathbf{0} \\ \mathbf{i}(\mathbf{h}^*) &= \mathbf{0}\end{aligned}\tag{7.9}$$

Recorrendo à definição do Lagrangeano, as condições acima podem escrever-se como:

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{h}} l &= \mathbf{0} \\ \nabla_{\boldsymbol{\mu}} l &= \mathbf{0}\end{aligned}\tag{7.10}$$

Conclui-se que o Lagrangeano desempenha o papel da função objectivo da optimização não restringida.

Para as condições necessárias de segunda ordem:

Sendo $\mathbf{h}^*$ um ponto regular das restrições $\mathbf{i}=\mathbf{0}$ e um mínimo local, existe um vector $\boldsymbol{\mu}^* \in \mathbb{R}^p$ tal que as condições anteriores são verificadas e a matriz:

$$\mathbf{H}(\mathbf{h}^*, \boldsymbol{\mu}^*) = \nabla^2 f(\mathbf{h}^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j^* \nabla^2 i_j(\mathbf{h}^*)\tag{7.11}$$

é semi-definida.

As condições suficientes de 2ª ordem exigem que a matriz $\mathbf{H}$ seja definida positiva. Este caso, não envolvendo desigualdades, é útil na derivação do método SQP.

Chama-se a $I(\mathbf{h}) = \{j | g_j(\mathbf{h}) = 0\}$ o conjunto de restrições activas em $\mathbf{h}$.

$\mathbf{h}$ é um ponto regular se os vectores ∇g_j para $j \in I(\mathbf{h})$ são lineamente independentes.

Se $\mathbf{d}^T \nabla g_j < 0$ para $j \in I(\mathbf{h})$, então $\mathbf{d}$ é uma direcção admissível em $\mathbf{h}$.

Se $\mathbf{h}^*$ é um ponto regular e um mínimo local do problema restringido, então também é um mínimo local de f sujeito a $g_j(\mathbf{h}) = 0$ para $j \in I(\mathbf{h}^*)$. Resulta, portanto, recorrendo ao caso anterior, que existe um vector $\boldsymbol{\lambda}^* \in \mathbb{R}^m$ tal que:

$$\nabla f(h^*) + \nabla g(h^*)\lambda^* = 0$$

onde $\lambda_j^* = 0$ para $j \notin I(h^*)$. Esta condição é chamada de condição de complementaridade e pode ser representada pelas seguintes igualdades:

$$\lambda_i^* g_i(h^*) = 0 \text{ para } i=1,2,\dots,m$$

Uma condição necessária adicional (ver p.ex. [ARO89]) é $\lambda^* \geq 0$.

As condições necessárias de primeira ordem, são seguidamente resumidas:

Sendo h^* um ponto regular das restrições $g(h) \leq 0$ e um mínimo local, então, existe um vector $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ tal que:

$$\begin{aligned} \nabla f(h^*) + \nabla g(h^*)\lambda^* &= 0 \\ \lambda_j^* g_j(h^*) &= 0; j = 1, 2, \dots, m \\ \lambda^* &\geq 0 \\ g(h^*) &\leq 0 \end{aligned}$$

Para o caso geral, com restrições do tipo igualdade e desigualdade, escrevem-se seguidamente as condições necessárias de primeira ordem de Karush-Kuhn-Tucker.

Sendo o ponto h^* um ponto regular das restrições $g(h) \leq 0$ e $i(h) = 0$ e um mínimo local do problema

$$\begin{cases} \min f(h) \\ \text{sujeito a } g \leq 0 \\ \text{e a } i = 0 \end{cases}$$

Então, existe um vector $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ e um vector $\mu^* \in \mathbb{R}^p$ tais que:

$$\begin{aligned} \nabla f(h^*) + \nabla g(h^*)\lambda^* + \nabla i(h^*)\mu^* &= 0 \\ \lambda_j^* g_j(h^*) &= 0; j = 1, \dots, m \\ i(h^*) &= 0 \\ g(h^*) &\leq 0 \\ \lambda^* &\geq 0 \end{aligned}$$

As condições necessárias de 2ª ordem incluem as condições anteriores, mas também impõe que a matriz

$$H(h^*, \mu^*) = \nabla^2 f(h^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j^* \nabla^2 i_j(h^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j^* \nabla^2 g_j(h^*) \quad (7.12)$$

seja definida positiva ou semidefinida.

Para que as condições necessárias sejam também suficientes, a matriz H tem de ser definida positiva.

Alguns comentários devem ser feitos relativamente às condições necessárias de primeira ordem (KKT):

- i) Qualquer ponto que não satisfaça as condições de KKT só pode ser um mínimo local se for irregular
- ii) As condições de KKT podem ser utilizadas para verificar se um dado ponto é ou não candidato a mínimo

7.4 Algoritmo de programação não-linear com restrições

7.4.1 Introdução

Neste trabalho implementou-se o método directo SQP (*Sequential Quadratic Programming*).

A comparação dos diversos métodos e algoritmos de minimização com restrições foi já realizada por vários investigadores [RAO96]. Habitualmente usam-se funções de teste bem conhecidas, de forma a testar e comparar os vários algoritmos. Antes de aplicar os algoritmos aqui descritos a problemas estruturais, o autor deste trabalho ensaiou-os usando as funções propostas por [PIE86].

Segundo um trabalho publicado por *Shittkowski* [RAO96] o algoritmo SQP foi considerado o mais eficiente seguido do GRG (Generalized Reduced Gradient). Os métodos SUMT parecem menos eficientes [RAO96]. Como existem bibliotecas disponíveis que resolvem eficazmente o subproblema quadrático, o SQP é de implementação acessível (i.e. 900 linhas de Fortran90) e permite um funcionamento robusto, depois de terem sido eliminados alguns defeitos do método original. *Arora* [ARO89] alerta para vários pormenores de implementação, que na prática são muito importantes. A adaptação do algoritmo inicial de forma a evitar o cálculo da Hessiana é realizada recorrendo a uma actualização Quasi-Newton [ARO89]. Este autor afirma que os métodos Quasi-Newton, como o PLBA que é uma sofisticação do SQP, são superiores aos não Quasi-Newton.

Segundo *Herskovits* [HER95] o SQP é, em 1995, o método mais utilizado para problemas não lineares restringidos, e é baseado numa ideia proposta por Wilson em 1963.

Várias estratégias de melhoria dos algoritmos são referidas em [VAN84] e foram implementadas.

Neste trabalho, os problemas são de pequena ou média dimensão. Se fôr necessário resolver um problema com centenas de variáveis, o algoritmo implementado não é eficiente. Para esses casos é útil actualizar vectorialmente a aproximação à matriz Hessiana, recorrendo a um método de baixo armazenamento (ver [NAS96]).

Existem, algumas estratégias de localização de mínimos globais, que recorrem a métodos de programação matemática como etapa na pesquisa das regiões onde se encontram presumivelmente os mínimos globais (ver [ELW96]).

7.4.2 Programação quadrática sequencial – um primeiro algoritmo

Começa-se por aproveitar as condições necessárias para a existência de um mínimo local para o problema com restrições do tipo igualdade:

$$\begin{aligned} \nabla L &= \nabla f(\mathbf{h}^*) + \nabla i(\mathbf{h}^*) \cdot \mu^* = \mathbf{0} \\ i(\mathbf{h}^*) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (7.13)$$

ou, matricialmente:

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad (7.14)$$

em que

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \nabla L \\ i \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{y} = \begin{Bmatrix} \mathbf{h} \\ \mu^* \end{Bmatrix} \quad (7.15)$$

Recorrendo ao método de Newton-Raphson para a variável $\mathbf{y}$, obtém-se o seguinte sistema linear:

$$\nabla \mathbf{F}^T(\mathbf{y}^{(k)}) \cdot \Delta \mathbf{y}^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{y}^{(k)}) \quad (7.16)$$

para a iteração k :

$$\Delta \mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{y}^{(k+1)} - \mathbf{y}^{(k)}.$$

particularizando:

$$\begin{bmatrix} \nabla^2 L & \mathbf{N} \\ \mathbf{N}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{h} \\ \Delta \mu \end{Bmatrix}^{(k)} = -\begin{Bmatrix} \nabla L \\ \mathbf{h} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (7.17)$$

A matriz $\mathbf{N}$ ($n \times p$) contém as derivadas das restrições em ordem às variáveis de projecto.

A primeira linha de (7.13) corresponde a :

$$\nabla^2 L \cdot \Delta \mathbf{h}^{(k)} + \mathbf{N} \cdot \mu^{(k+1)} = -\nabla f^{(k)} \quad (7.18)$$

recombinando matricialmente:

$$\begin{bmatrix} \nabla^2 L & N \\ N^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{h}^{(k)} \\ \mu^{(k+1)} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \nabla L \\ \mathbf{h} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (7.19)$$

O processo iterativo é mantido até se verificar a convergência.

A solução deste problema é a solução de um problema de programação quadrática definido na iteração k como:

$$\nabla f^T \cdot \Delta \mathbf{h} + 0.5 \Delta \mathbf{h}^T \cdot \nabla^2 L \cdot \Delta \mathbf{h} \quad (7.20)$$

sujeito às restrições linearizadas:

$$i_j + \nabla i_j^T \cdot \Delta \mathbf{h} = 0; j = 1, \dots, p \quad (7.21)$$

A função de Lagrange correspondente ao problema é:

$$\bar{L} = \nabla f^T \cdot \Delta \mathbf{h} + 0.5 \Delta \mathbf{h}^T \cdot \nabla^2 L \cdot \Delta \mathbf{h} + \sum_{j=1}^p \mu_j (i_j + \nabla i_j^T \Delta \mathbf{h}) \quad (7.22)$$

As condições necessárias para a variável $\Delta \mathbf{h}$ são:

$$\begin{aligned} \nabla \bar{L} &= \mathbf{0} \\ i_j + \nabla i_j^T \cdot \Delta \mathbf{h} &= 0 \end{aligned} \quad (7.23)$$

Combinando as duas igualdades e escrevendo-as matricialmente, obtém-se a fórmula iterativa do processo previamente descrito. Conclui-se, portanto, que o problema da minimização de f sujeito a $i_j = 0; j = 1, \dots, p$ pode ser resolvido recorrendo à solução iterativa de um problema quadrático. A matriz Hessiana da função lagrangeana é aproximada segundo a fórmula BFGS, já que habitualmente não estão disponíveis segundas derivadas das restrições e da função objectivo.

A extensão para o caso que inclui as restrições desigualdade é realizada seguidamente.

O algoritmo básico SQP, segundo o autor deste trabalho, pode ser apresentado da seguinte forma:

Repetir até à convergência:

- i) Obter a direcção de pesquisa $\mathbf{d}$ resolvendo o problema quadrático:

$$\begin{aligned} \min_{(\mathbf{d})} & (\nabla f \cdot \mathbf{d} + 0.5 \mathbf{d}^T \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{d}) \\ \nabla g_j \cdot \mathbf{d} + \delta_j g_j & \leq 0; j = 1, \dots, m \\ \nabla i_k \cdot \mathbf{d} + \delta i_k & = 0; k = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (7.24)$$

- ii) Cálculo do passo α recorrendo ao método da penalidade exterior

$$\begin{aligned} R & \leftarrow 4.0 \times R \\ P_{inicial}(\mathbf{h}) &= \sum_{i=1}^m \{\max(0, g_i(\mathbf{h}))\}^2 + \sum_{k=1}^p [i_k(\mathbf{h})]^2 \\ \Phi_{inicial}(\mathbf{h}, R) &= f(\mathbf{h}) + R P_{inicial}(\mathbf{h}) \\ \text{Fazer, de } it=it1, n1 \\ \alpha_{it} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{it} \\ \mathbf{h}_{it} &= \mathbf{h} + \alpha_{it} \mathbf{d} \\ P_{it}(\mathbf{h}_{it}) &= \sum_{i=1}^m \{\max(0, g_i(\mathbf{h}_{it}))\}^2 + \sum_{k=1}^p [i_k(\mathbf{h}_{it})]^2 \\ \Phi_{it}(\mathbf{h}_{it}, R) &= f(\mathbf{h}_{it}) + R P_{it}(\mathbf{h}_{it}) \\ \text{se } \Phi_{it} &< \gamma \Phi_{inicial} \text{ então} \\ \alpha &= \alpha_{it} \\ \text{sai} \\ \text{senão} \\ \text{continua} \end{aligned}$$

- iii) Actualização da aproximação da matriz Hessiana $\mathbf{H} \cong \nabla^2 L$ (BFGS):

$$\mathbf{H} \leftarrow \mathbf{H} - \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}^T \cdot \mathbf{H}}{\mathbf{p}^T \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{p}} + \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}^T}{\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}} \quad (7.25)$$

em que:

$$\begin{aligned}
p &= h^k - h^{k-1} \\
q &= \theta y + (1 - \theta)Hp \\
y &= \nabla L(h^k, \mu^k, \lambda^k) - \nabla L(h^{k-1}, \mu^{k-1}, \lambda^{k-1}) \\
L(h^k, \mu^k, \lambda^k) &= f + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j + \sum_{j=1}^p \mu_j i_j \\
\theta &= \begin{cases} 1.0 & \text{se } p \cdot y \geq 0.2 p^T \cdot H \cdot p \\ \frac{0.8 p^T \cdot Hp}{p^T \cdot H \cdot p - p \cdot y} & \text{se } p \cdot y < 0.2 p^T \cdot H \cdot p \end{cases}
\end{aligned} \tag{7.26}$$

Fig. 7.1 Algoritmo da programação quadrática sequencial

Na obtenção da direcção de pesquisa, os parâmetros δ_j e $\bar{\delta}$ são usados para assegurar que as restrições linearizadas não eliminem totalmente a região admissível [VAN84].

Aqui,

$$\begin{aligned}
\bar{\delta} &= 0.95 \\
\delta_j &= 1 \text{ se } g_j < 0 \\
\delta_j &= \bar{\delta} \text{ se } g_j \geq 0
\end{aligned} \tag{7.27}$$

Na obtenção da direcção de pesquisa é habitual não incluir todas as restrições desigualdade, mas apenas as mais activas. Este assunto é discutido posteriormente.

Parece importante referir que a pesquisa unidireccional apresentada é diferente da original.

O autor experimentou várias técnicas e funções de descida ([ARO89], [ARO91]), seguidamente referidas:

- i) Aproximação polinomial quadrática das restrições e da função objectivo, seguida de pesquisa dourada com o método da penalidade exterior/interior (já que a função é não diferenciável).
- ii) O mesmo com aproximação cúbica.
- iii) O método original [VAN84] recorrendo a multiplicadores de lagrange, com a estratégia da pesquisa unidireccional inexacta [ARO89].
- iv) O método da penalidade interior com a pesquisa unidireccional inexacta.
- v) A função de descida de Pshenichny com a pesquisa unidireccional inexacta.
- vi) A função de descida de Shittkowski com a pesquisa unidireccional inexacta.

Em termos de funções de descida, o autor obteve resultados semelhantes recorrendo à função de Pshenichny e ao método de penalidade exterior.

Os métodos de penalidade interior, devido à descontinuidade que apresentam na fronteira da região admissível, provocam problemas numéricos, já que não se consegue assegurar que os pontos sejam admissíveis.

Os métodos baseados na aproximação polinomial directamente aplicados à função de descida são bastante restritivos, já que esta é frequentemente não-diferenciável.

Os métodos i) e ii) são frequentemente bastante rápidos mas em casos altamente não-lineares falham na fase da aproximação. Como a fase da pesquisa dourada é realizada sobre as aproximações polinomiais, não há dispêndio computacional em análises estruturais.

O método original falha frequentemente já que, recorrendo aos multiplicadores de lagrange, ou se faz uma análise de sensibilidades em cada passo da pesquisa (altamente dispendiosa) ou se usam os últimos multiplicadores calculados na fase de análise anterior. Sucede portanto, que se se recorrer à segunda hipótese, existem restrições que se podem tornar activas estando previamente inactivas e portanto com multiplicador nulo e estão assim despenalizadas. Claro que é possível aproximar os multiplicadores [ARO91], mas essa estratégia não difere da dos métodos de penalidade.

O método usado, embora frequentemente não seja o mais eficiente, é o mais robusto, não envolve aproximações e tem dado resultados satisfatórios. A actualização $R \leftarrow 1.0 \times R$ é heurística. O número 4 usado neste trabalho não é a única possibilidade (ver [VAN84]) mas é adequado aos problemas resolvidos até agora.

O subproblema quadrático pode ser resolvido recorrendo indirectamente ao método de Simplex (ver p.ex [ARO89]). O autor recorre à subrotina QPROG da biblioteca IMSL.

Para os multiplicadores de Lagrange, podem usar-se os obtidos do subproblema quadrático ou calcular-se directamente [RAO96].

Para as restrições desigualdade, recorrendo às condições necessárias:

$$\begin{aligned} \nabla g \cdot \lambda &= -\nabla f \Leftrightarrow \\ \nabla g^T \cdot \nabla g \cdot \lambda &= -\nabla g^T \cdot \nabla f \Leftrightarrow \\ \lambda &= -(\nabla g^T \cdot \nabla g)^{-1} \cdot \nabla g^T \cdot \nabla f \end{aligned} \quad (7.28)$$

Outras técnicas de actualização podem ser obtidas em [ARO91].

O algoritmo, tal como apresentado até aqui, falha em pontos para os quais o subproblema quadrático não tem solução. Como as restrições do problema quadrático são aproximações lineares das restrições do problema original, o domínio admissível do subproblema pode ser um conjunto vazio. [HER95] propõe uma alteração à definição do subproblema quadrático. Também [SNY96] apresenta um método, chamado SAM2, que mantém os pontos na região admissível.

Este método parece mais eficiente do que o SQP, segundo os testes realizados por [STA96].

Uma estratégia que pode resolver este problema consiste em não incluir todas as restrições no subproblema.

Um efeito nocivo que pode ocorrer neste algoritmo é o efeito de Maratos ([HER95]). Esse efeito traduz-se na dificuldade de reduzir o valor da função objectivo perto da solução, impedindo o algoritmo de convergir para o óptimo.

Outra deficiência do método, raramente referida mas bem presente na prática, prende-se com a possibilidade de d ser inadmissível. O passo resultante de d inadmissível tende para 0 forçando sucessivamente a convergência para pontos que não obedecem às condições de KKT.

Para visualizar a situação, imagine-se uma restrição g_k activa ($g_k=0$). Se a restrição $\nabla g_k \cdot d + \delta_k g_k \leq 0$ é também activa, i.e., $\nabla g_k \cdot d + \delta_k g_k = 0$, resulta:

$$\nabla g_k \cdot d = 0 \quad (7.29)$$

Significando que d é tangente à fronteira do domínio admissível. Se a situação for a da figura:

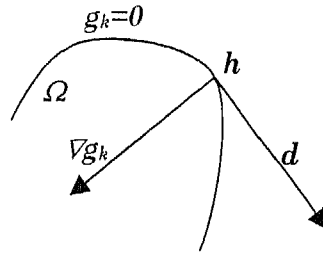


Fig. 7.2 Inadmissibilidade da direcção de pesquisa

a direcção é inadmissível e o passo torna-se nulo.

Uma estratégia empírica que permite atenuar a inadmissibilidade consiste em substituir a restrição do subproblema quadrático $\nabla g_k \cdot d + \delta_k g_k \leq 0$ por $\nabla g_k \cdot d + \delta_k g_k \leq \rho$, em que $\rho < 0$ e portanto, para o caso anterior $\nabla g_k \cdot d < 0$, tornando d uma direcção admissível (ver p.ex. [HER95]).

Neste trabalho, usa-se um valor para $\rho < 0$ empírico, baseado na máxima violação.

7.5 Melhorias e modificações do algoritmo original

7.5.1 Restrições

É vantajoso normalizar as restrições do tipo $r \leq r_{\max}$ na forma:

$R - 1 \leq 0 \Leftrightarrow g_k \leq 0$ com $R = \frac{r}{r_{\max}}$. As sensibilidades passam a ser $\frac{\partial g_j}{\partial h_k} = \frac{1}{r_{\max}} \frac{\partial r}{\partial h_k}$. Uma observação útil é que uma restrição $g_k \leq 0$ pode ser substituída por uma do tipo

$$C_k g_k \leq 0; C_k > 0 \quad (7.30)$$

e, portanto, o seu gradiente também.

Para incluir uma restrição inactiva no conjunto das restrições potencialmente activas é vulgar considerar quase activa uma restrição que verifique a desigualdade $g_j + \varepsilon \geq 0$ com $\varepsilon > 0$.

7.5.2 Estratégia de eliminação de restrições e algumas consequências

Normalmente, para poupar esforço de cálculo (e problemas no subproblema quadrático) envolvem-se no problema apenas algumas restrições, e não todas, poupando esforço no cálculo dos gradientes.

Define-se um conjunto de índices, correspondente à iteração k como:

$$I_k = \left\{ \begin{array}{l} \{j | j = 1, \dots, p \text{ igualdades}\} \\ \{i | g_i + \varepsilon \geq 0, i = 1, \dots, m\} \end{array} \right\} \quad (7.31)$$

que inclui as restrições do tipo igualdade e as desigualdade quase activas.

Habitualmente ordena-se as restrições desigualdade por ordem crescente de actividade.

Essa ordenação permite uma eliminação sucessiva no caso de o subproblema quadrático apresentar um domínio admissível vazio.

Como consequência da estratégia, existem restrições, em cada iteração, que são incluídas ou excluídas do conjunto. O gradiente da função Lagrangeana envolve, de forma geral, gradientes de restrições distintas entre cada iteração.

A diferença $y = \nabla L(\mathbf{h}^k, \mu^k, \lambda^k) - \nabla L(\mathbf{h}^{k-1}, \mu^{k-1}, \lambda^{k-1})$ pode envolver gradientes em $k-1$ que não são calculados em k .

Para ultrapassar esta dificuldade apagam-se em $\nabla L(\mathbf{h}^{k-1}, \mu^{k-1}, \lambda^{k-1})$ os gradientes das restrições que se tomaram inactivas.

Se $j=l, \dots, u$ são os índices das restrições que se tomaram inactivas, então:

$$\nabla L(\mathbf{h}^{k-1}, \mu^{k-1}, \lambda^{k-1}) = \nabla L(\mathbf{h}^{k-1}, \mu^{k-1}, \lambda^{k-1}) - \sum_{j=l}^u \lambda_j^{k-1} \nabla g_j^{k-1} \quad (7.32)$$

e

$$y = \nabla L(\mathbf{h}^k, \mu^k, \lambda^k) - \nabla L(\mathbf{h}^{k-1}, \mu^{k-1}, \lambda^{k-1}) \quad (7.33)$$

7.5.3 Normalização das restrições e a pesquisa unidireccional

Para a resolução estável do subproblema quadrático [ARO88a] é conveniente usar uma estratégia de normalização das restrições e dos seus gradientes. Neste trabalho, faz-se a uma normalização igual para todas as iterações e baseada em valores obtidos na primeira iteração:

$$\begin{aligned}
C_k &= \max\left(\frac{\|\nabla f\| + 0.001\|\nabla g_k\|}{\|\nabla g_k\|}, \|\nabla g_k\| > 0\right) \\
C_k &= 1.0, \|\nabla g_k\| = 0 \\
g_k &\leftarrow C_k g_k \\
\nabla g_k &\leftarrow C_k \nabla g_k
\end{aligned} \tag{7.34}$$

O parâmetro de penalidade inicial, R_o , é obtido, após a escala das restrições, como:

$$R_o = \max\left(\frac{|f|}{P}, \sum_{i=1}^m \lambda_i, 1\right) \tag{7.35}$$

Claro que estes valores são empíricos, mas têm resultado bastante bem para os problemas tratados. As referências [ARO88a] e [ARO88b] contêm resultados de experiências numéricas com vários parâmetros. Neste trabalho, os valores foram baseados nesses resultados e na experiência do autor.

Para o parâmetro $it1$ foi escolhido o valor 0 para a primeira iteração, -1 para as iterações 2 a 6 e 0 para as iterações superiores a 6. Para o parâmetro $n1$, escolheu-se 14, embora existam estratégias bastante sofisticadas [ARO88a]. Se $n1$ for ultrapassado, faz-se o 'restart' da matriz Hessiana. Para além disso, é necessário, na fase de pesquisa unidireccional, pré-condicionar os pontos de teste de forma a não violarem as restrições às variáveis. Dessa forma, pode ocorrer um anulamento de Δh . Se for esse o caso faz-se o 'restart' da matriz Hessiana.

7.5.4 Tratamento de grandes violações-modificação ao subproblema

No caso de algumas restrições estarem muito violadas, é útil substituir o subproblema quadrático de minimização por outro, que permita reduzir a violação, ou mesmo verificar se o domínio admissível não é vazio (ver [ARO89]).

O algoritmo de correcção de restrições baseia-se na eliminação da função objectivo do subproblema:

$$\begin{aligned}
&\min_{(d)} (0.5 d^T \cdot d) \\
&\nabla g_j \cdot d + \delta_j g_j \leq 0; j = 1, \dots, m \\
&\nabla i_k \cdot d + \bar{\delta} i_k = 0; k = 1, \dots, p
\end{aligned} \tag{7.36}$$

O que equivale a igualar o gradiente da função objectivo a zero e a matriz Hessiana da função Lagrangeana a uma matriz identidade.

Este problema é equivalente à determinação de uma direcção $\mathbf{d}$ à qual corresponde a menor distância do ponto corrente ao domínio admissível linearizado.

O subproblema proposto e implementado induz habitualmente ao aumento do valor da função objectivo.

7.5.5 Fuga ao cálculo dos gradientes

Depois da determinação dos valores das restrições e da função objectivo, pode realizar-se um teste para se saber se os gradientes calculados na iteração anterior ainda poderão ser usados nesta sem introduzir um grande erro nos cálculos. Sabendo que o cálculo dos gradientes é dispendioso (análise de sensibilidades), esta metodologia permite poupar tempo de computação em problemas onde os gradientes se mantêm razoavelmente constantes.

Recorrendo à expansão de primeira ordem em séries de Taylor da função objectivo e das restrições:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\mathbf{h}^k) &= f(\mathbf{h}^{k-1}) + \nabla f(\mathbf{h}^{k-1}) \cdot (\mathbf{h}^k - \mathbf{h}^{k-1}) \\ \tilde{g}_j(\mathbf{h}^k) &= g_j(\mathbf{h}^{k-1}) + \nabla g_j(\mathbf{h}^{k-1}) \cdot (\mathbf{h}^k - \mathbf{h}^{k-1})\end{aligned}\quad (7.37)$$

Se $\frac{|f(\mathbf{h}^k) - \tilde{f}(\mathbf{h}^k)|}{f(\mathbf{h}^k)} < \varepsilon$ sendo ε uma tolerância pré-estabelecida, mantém-se $\nabla f(\mathbf{h}^{k-1})$.

Faz-se o mesmo para cada uma das restrições.

7.5.6 Reactualização da Hessiana

Para evitar o mau condicionamento da matriz aproximada à Hessiana, convém inicializá-la periodicamente (aqui, 10 iterações) ou sempre que está mal condicionada (o quociente entre o maior e o menor valor próprio é elevado). Como neste trabalho não se realiza a decomposição da matriz $\mathbf{H}$, usa-se um teste para verificar se é necessário um 'restart'. Assim, como em [HUA96], recorre-se ao seguinte teste.

Se :

$$|\mathbf{d}^{k-1} \cdot \mathbf{d}^k| > 0.2 \|\mathbf{d}^k\|^2 \quad (7.38)$$

então é realizado um 'restart'. Este teste é devido a Powell [HUA96].

7.5.7 Problemas no subproblema quadrático

Sempre que aparecerem erros no subproblema quadrático, erros que são introduzidos em variáveis de estado da biblioteca IMSL, é necessário tomar medidas que permitam a determinação da direcção de pesquisa. Os erros são frequentemente devidos ao excesso de restrições na formulação do subproblema, provocando um domínio admissível vazio.

Neste trabalho, usa-se uma estratégia inspirada em [ARO88b] que consiste, sempre que o subproblema quadrático bloqueou ou sempre que exista um multiplicador $\lambda > 1.0 \times 10^7$, em eliminar a primeira restrição do conjunto I_k , que está ordenado por ordem crescente de actividade. Se não for suficiente, repete-se o procedimento até o subproblema ter solução.

7.5.8 Tratamento das restrições às variáveis

Neste trabalho, recorre-se a uma estratégia de separação das restrições às variáveis, das outras restrições. É necessário um pré-condicionamento do ponto usado antes de cada teste na fase de pesquisa unidireccional e quando se actualiza o ponto h^{k+1} .

Assim, usa-se um procedimento extremamente simples e que consiste em:

$$\begin{aligned} h_j^k > h_j^U &\Rightarrow h_j^k \leftarrow h_j^U \\ h_j^k < h_j^L &\Rightarrow h_j^k \leftarrow h_j^L \end{aligned} \quad (7.39)$$

Embora haja autores que incluem estas restrições no subproblema quadrático (ver [ARO88a]), e outros que usam procedimentos mais sofisticados (ver [VAN84]), este método tem resultado bastante bem.

7.5.9 Convergência

Os critérios de convergência utilizados neste trabalho consistem numa série de condições, já usuais, e uma condição de verificação simultânea das anteriores pelo menos durante 3 iterações sucessivas.

As condições referem-se à variação dos pontos determinados, da função objectivo, da máxima violação e dos multiplicadores:

$$\begin{aligned}
\frac{\|h^{k+1} - h^k\|}{\|h^{k+1}\|} &< 5 \times 10^{-3} \\
\frac{|f^{k+1} - f^k|}{|f^k|} &< 5 \times 10^{-4} \\
V = \max_{i=1,m}(g_i) &< 1 \times 10^{-6} \\
\lambda_i &\leq 1 \times 10^{-6}
\end{aligned} \tag{7.40}$$

Se em três iterações sucessivas se verificarem estas condições, o processo para.

7.6 Conclusões

O método SQP é eficiente em problemas estruturais ([ARO89], [ARO88a], [ARO88b], [VAN84], [BEL84], [HUA96], [COS96]). A possibilidade de a direcção de pesquisa ser inadmissível foi evitada, através de algumas estratégias por *Herskovitz* [HER95]. Os métodos SAM (Successive approximation method) parecem muito eficientes [COS96], [SNY96] e uma comparação exhaustiva podia ser útil.

Os métodos de determinação de um mínimo global, podendo usar os algoritmos da programação matemática sucessivamente, permitem a resolução de problemas de grandes dimensões e parecem de fácil implementação (ver p.ex. [ARO96]).

A programação não-linear parece ainda longe de fornecer ferramentas simultaneamente robustas e eficientes para qualquer problema. Existem muitos métodos cuja implementações é dependente de parâmetros empíricos e experiências numéricas.

É notável que um método eficiente a resolver problemas analíticos de teste pode não o ser num problema estrutural (e, embora menos frequentemente, vice-versa). Esse facto e algumas particularidades justificam a publicação de pelo menos uma revista sobre o assunto (Structural Optimization, Springer-Verlag).

7.7 Referências

[ARO88a] TSENG, C.H., ARORA, J.S. *On implementation of computational algorithms for optimal design 1: Preliminary investigation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol 26 pags. 1365-1382 John Wiley & Sons 1988

[ARO88b] TSENG, C.H., ARORA, J.S. *On implementation of computational algorithms for optimal design 2: Extensive numerical investigation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol 26 pags. 1383-1402 John Wiley & Sons 1988

[ARO89] ARORA, J.S. *Introduction to Optimum Design*. McGraw-Hill International Edition 1989

[ARO91] ARORA, J.S., CHAHANDE, A.I., PAENG, J.K. *Multiplier Methods for Engineering Optimization*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol 32 pags. 1485-1525 John Wiley & Sons 1991

[ARO96] ELWAKEIL, O.A., ARORA, J.S. *Two algorithms for global optimization of general NLP problems*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol 39 pags. 3305-3325 John Wiley & Sons 1996

[BEL84] BELENGUNDU, A.D. , ARORA, J.S. *A recursive quadratic programming method with active set strategy for optimal design*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol 20 pags. 803-816 John Wiley & Sons 1984

[COS96] COSTER, J.E. , STANDER, N. *Structural optimization using augmented Lagrangian methods with secant Hessian updating*. Structural Optimization Vol 12, pags 113-119, Springer-Verlag 1996

[HER95] HERSKOVITS, J. *A view on nonlinear optimization*. J. Herskovits (Eds). *Advances in Structural Optimization*. Págs. 71-116. Kluwer Academic Publishers. 1995

[HUA96] HUANG, M-W., ARORA, J.S. *A self-scaling implicit SQP method for large scale structural optimization*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol 39 pags. 1933-1953 John Wiley & Sons 1996

[SNY96] SNYMAN, J.S. STANDER, N. *Feasible descent cone methods for inequality constrained optimization problems*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol 39 pags. 1341-1356 John Wiley & Sons 1996

[VAN84] VANDERPLAATS, G.N. *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design. With applications*. McGraw-Hill 1984

8

Resultados numéricos

8.1

Introdução

Neste capítulo apresentam-se os resultados da análise e optimização de várias placas e cascas. Na análise estrutural, comparam-se, sempre que é possível, os resultados obtidos neste trabalho com os obtidos por outros autores, ou com resultados analíticos.

Na análise de sensibilidades comparam-se os resultados com os obtidos pela aplicação do método das diferenças centrais.

Em optimização apresentam-se os resultados obtidos e a formulação do problema de optimização.

Apresentam-se gráficos ilustrativos e imagens das deformadas, campos de tensões e campos de espessuras.

Como este trabalho é bastante lato, a exemplificação não pode ser muito intensiva. Assim, a tónica é posta sobre a análise não linear e sobre a optimização.

8.2

Análise linear estática

O caso da casca cilíndrica sujeita a forças pontuais, documentado em [HUA89] e [BAT93] é usado neste capítulo em análise não-linear.

Como exemplo do bom comportamento dos elementos implementados pelo autor, mostra-se uma comparação com outros elementos. O erro relativo no deslocamento do ponto sob a força pontual é um indicador da rigidez dos elementos em análise estática linear. Os resultados do programa Abaqus estão documentados em [ABA96].

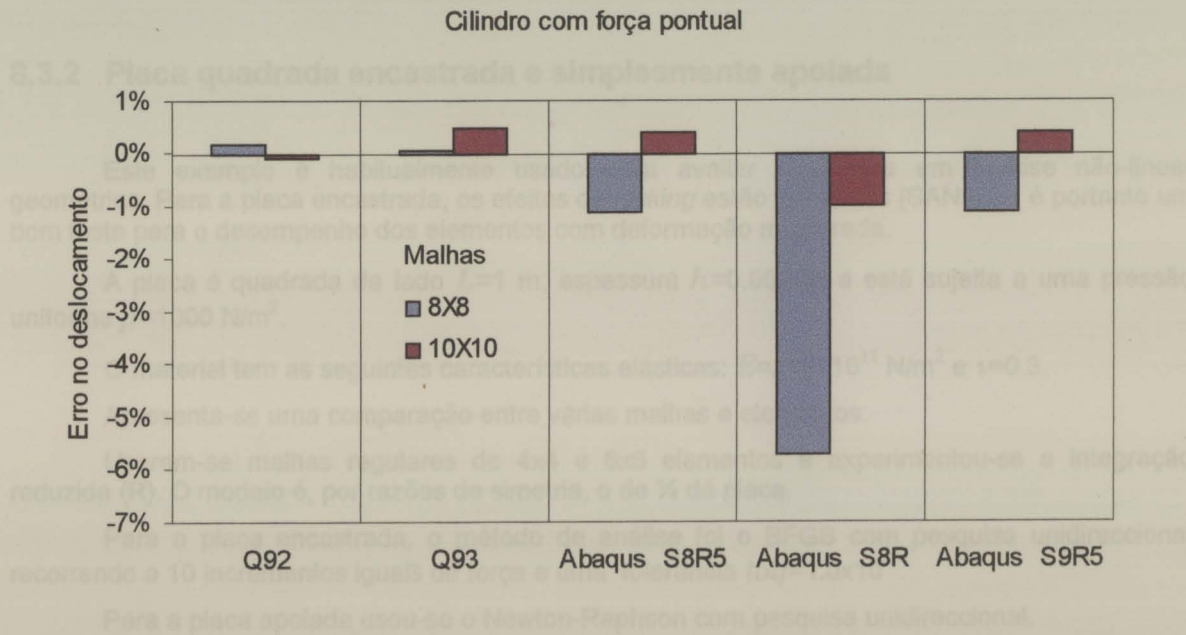


Fig. 8.1 Erro relativo do deslocamento sob uma força pontual, comparação de elementos.

O autor realizou vários testes, com vários problemas, aos elementos em análise estática linear. Em análise de placas, os elementos Q91, Q92 e Q93 são muito semelhantes. Se os efeitos de membrana estiverem presentes, os elementos mais aconselháveis são os Q92 e Q93.

O elemento Q92 é o mais insensível à distorção da malha.

Para malhas regulares o elemento Q93 é habitualmente o mais preciso. Este tem ainda a vantagem de ser pouco dispendioso computacionalmente, quando comparado com o Q92.

8.3 Análise estática não-linear

8.3.1 Introdução

Em análise não linear de cascas existem alguns testes já tradicionais (ver, p.ex. [SAN92]) e alguns desses testes são aqui executados.

Existem três elementos que permitem a análise não-linear geométrica com grandes deslocamentos e rotações: Q90, Q92 e Q93. O Q91 foi já utilizado, mas em alguns casos, como no do cilindro pontual, é semelhante ao Q90.

Naturalmente, os resultados obtidos pelos elementos com deformação melhorada são bastante superiores aos obtidos com o Q90.

Não se faz uma exemplificação detalhada para não monopolizar este capítulo com a fase de análise.

Comparam-se, sempre que possível e revelador, os resultados obtidos com o programa criado pelo autor com os resultados obtidos por outros autores, ou com os obtidos recorrendo ao programa ANSYS.

8.3.2 Placa quadrada encastrada e simplesmente apoiada

Este exemplo é habitualmente usado para avaliar resultados em análise não-linear geométrica. Para a placa encastrada, os efeitos de *locking* estão presentes [SAN92] e é portanto um bom teste para o desempenho dos elementos com deformação melhorada.

A placa é quadrada de lado $L=1$ m, espessura $h=0.002$ m e está sujeita a uma pressão uniforme $p=1000$ N/m².

O material tem as seguintes características elásticas: $E=210 \times 10^{11}$ N/m² e $\nu=0.3$.

Apresenta-se uma comparação entre várias malhas e elementos.

Usaram-se malhas regulares de 4x4 e 6x6 elementos e experimentou-se a integração reduzida (R). O modelo é, por razões de simetria, o de $\frac{1}{4}$ da placa.

Para a placa encastrada, o método de análise foi o BFGS com pesquisa unidireccional recorrendo a 10 incrementos iguais de força e uma tolerância $tolf=1.0 \times 10^{-7}$.

Para a placa apoiada usou-se o Newton-Raphson com pesquisa unidireccional.

Os resultados obtidos para a placa encastrada, em termos de deslocamento do nó central, foram comparados com os do gráfico apresentado por *Timoshenko* ([TIM59] Fig.208).

Para o caso da placa simplesmente apoiada, recorreu-se à expressão analítica apresentada por *Timoshenko* ([TIM59], expressão 252), para aferir a qualidade dos resultados obtidos pelos elementos.

$$p = \frac{w_0 E h^3}{L^4} \left(1.37 + 1.94 \frac{w_0^2}{h^2} \right)$$

(8.1)

em que w_0 é o deslocamento transversal do centro da placa.

Para a placa encastrada, o deslocamento máximo teórico é $w_0 \cong 0.003250\text{ m}$ e para a apoiada, $w_0 \cong 0.0040275\text{ m}$.

Tabela 8.1 Deslocamento transversal no centro de uma placa encastrada

Elemento	Malha	Deslocamento obtido (m)
Q90	6X6	0.0031419
Q90(R)	6x6	0.0031809
Q93	6X6	0.0031808
Q90	4x4	0.0030442
Q93	4X4	0.0031243
Shell 93 (Ansys)	4x4	0.0033105

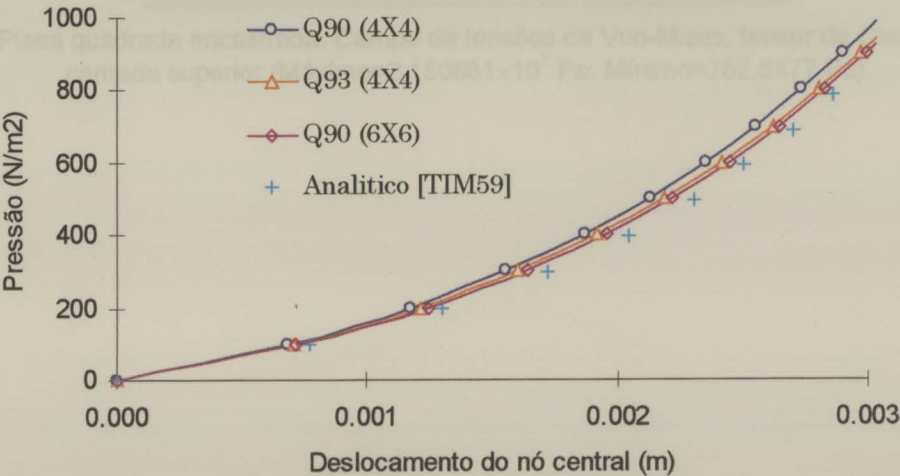


Fig. 8.2 Placa encastrada sujeita a pressão uniforme. Diagrama pressão-deslocamento

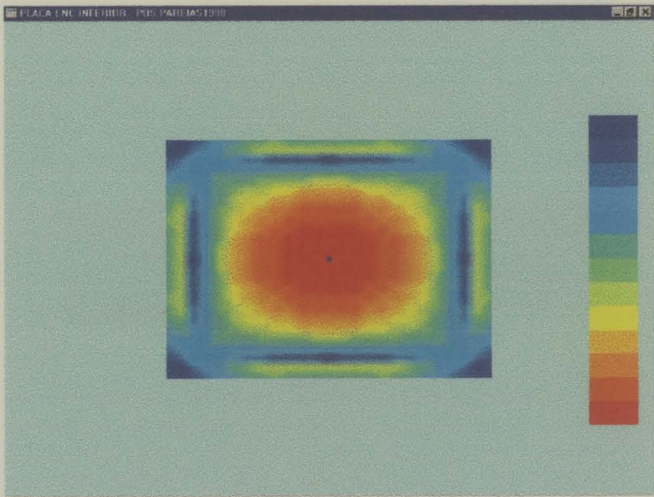


Fig. 8.3 Placa quadrada encastrada. Campo de tensões de Von-Mises, tensor de Cauchy, para a camada inferior (Máximo= 1.366467×10^7 Pa, Mínimo= 781.3044 Pa).

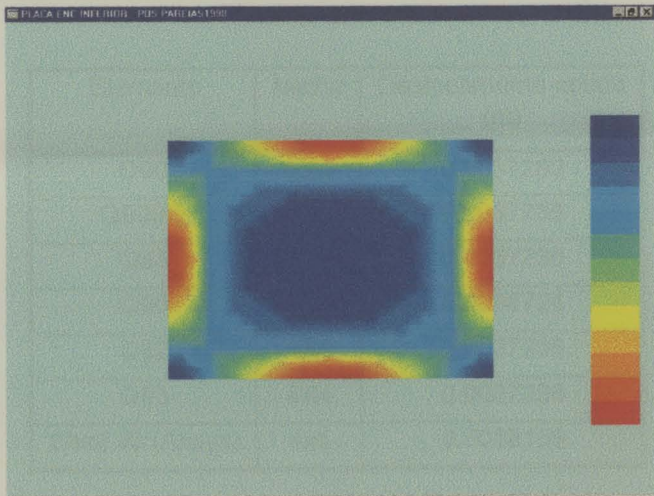


Fig. 8.4 Placa quadrada encastrada. Campo de tensões de Von-Mises, tensor de Cauchy, para a camada superior (Máximo= 2.150861×10^7 Pa, Mínimo= 782.5477 Pa).

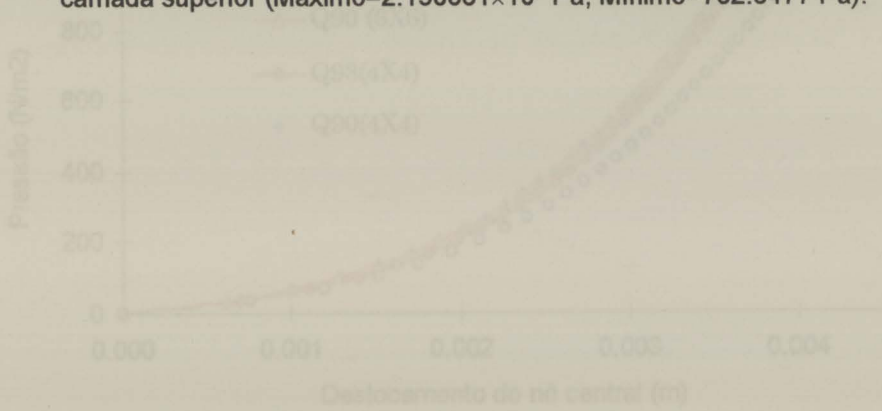


Fig. 8.5 Placa apoiada sujeita a pressão uniforme. Diagrama de pressão-deslocamento.

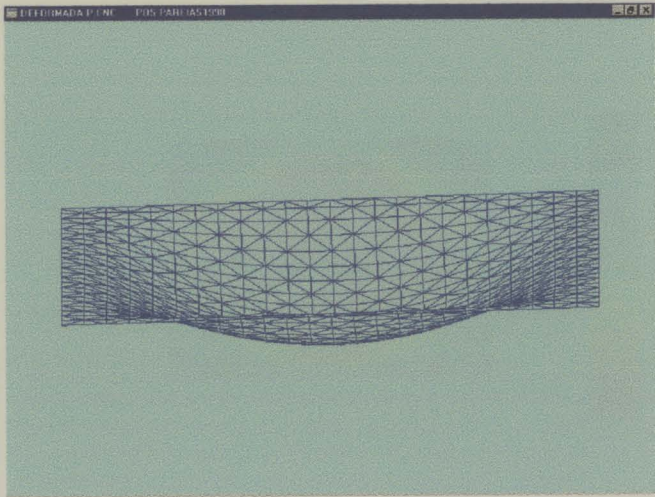


Fig. 8.5 Placa quadrada encastrada. Deformada ampliada, modelo de triângulos.

Tabela 8.2 Deslocamento transversal no centro de uma placa apoiada

Elemento	Malha	Deslocamento obtido (m)
Q90	6X6	0.0037280
Q90(R)	6x6	0.0037236
Q93	6X6	0.0037236
Q90	4x4	0.0036724
Q92	4X4	0.0037236
Q93	4X4	0.0037236
Shell 93 (Ansys)	4x4	0.0038109

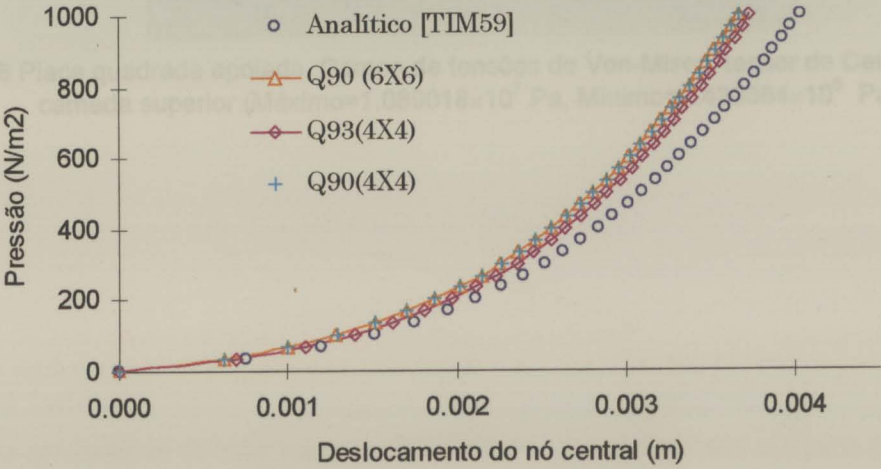


Fig. 8.6 Placa apoiada sujeita a pressão uniforme. Diagrama de pressão-deslocamento.

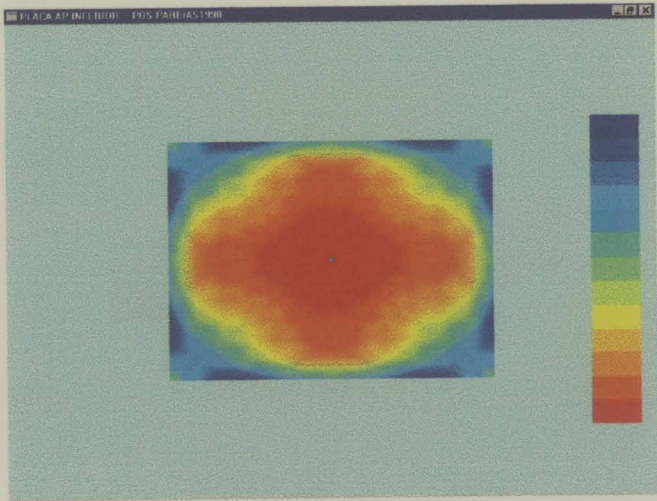


Fig. 8.7 Placa quadrada apoiada. Campo de tensões de Von-Mises, tensor de Cauchy, para a camada inferior (Máximo= 1.427174×10^7 Pa, Mínimo= 7.559646×10^6 Pa).

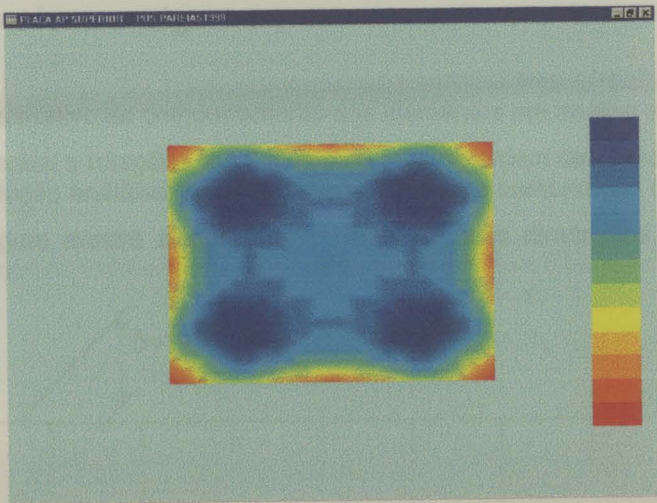


Fig. 8.8 Placa quadrada apoiada. Campo de tensões de Von-Mises, tensor de Cauchy, para a camada superior (Máximo= 1.089018×10^7 Pa, Mínimo= 2.430864×10^6 Pa).

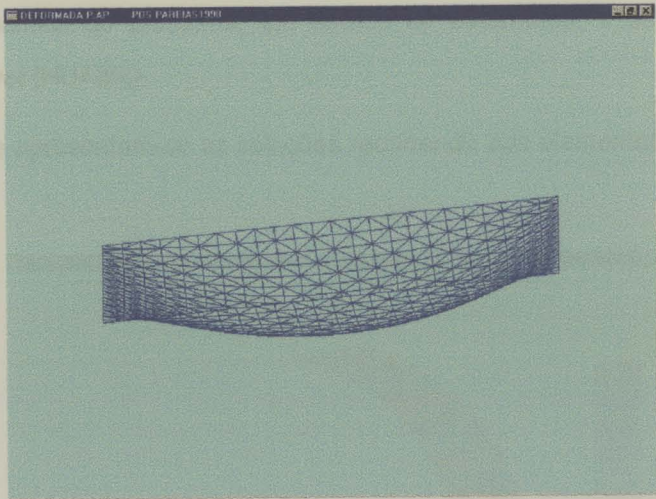


Fig. 8.9 Placa quadrada apoiada. Deformada ampliada, modelo de triângulos.

8.3.3 Flexão pura de uma viga

Este teste é ilustrativo do comportamento dos elementos em análise altamente não-linear. Os deslocamentos e rotações são finitos e da mesma ordem de grandeza das dimensões da peça. Como existe solução analítica, torna-se interessante uma comparação crítica dos elementos. A seguinte figura mostra a viga indeformada, as suas dimensões, a malha usada e as condições de contorno:

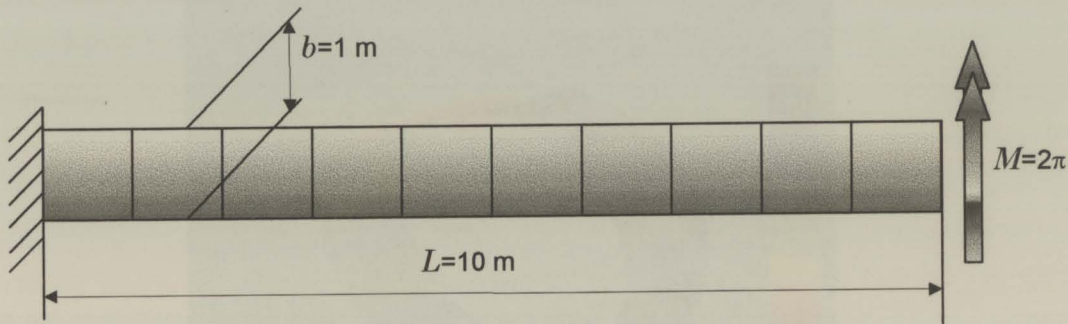


Fig. 8.10 Dimensões e malha da viga encastrada

O material tem as seguintes propriedades elásticas: $E=120000\text{ N/m}^2$ e $\nu=0.0$. A espessura da chapa é $h=0.1\text{ m}$.

No processo de solução usou-se o método de Newton-Raphson puro e a carga foi dividida em 100 incrementos. A tolerância para a força foi de $\text{tol}f=1\times10^{-4}$.

Neste caso, o método BFGS não converge para os 100 incrementos.

A solução analítica do problema, em termos de deformada, é um cilindro de diâmetro $D = \frac{L}{\pi} = 3.1831\text{ m}$ (ver [HUA89]).

Seguidamente apresentam-se as soluções recorrendo aos elementos implementados neste trabalho.

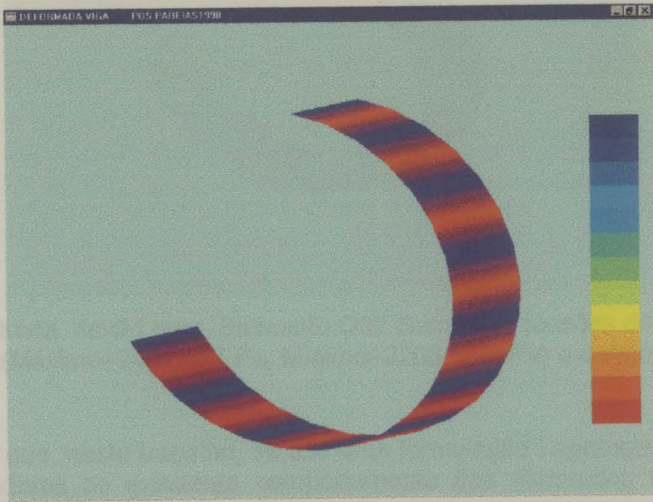


Fig. 8.11 Viga encastrada, flexão pura. Elemento Q90.Campo de tensões de Von-Mises, tensor de Cauchy (Máximo=2537.536 Pa, Mínimo=175.345 Pa) e deformada real.

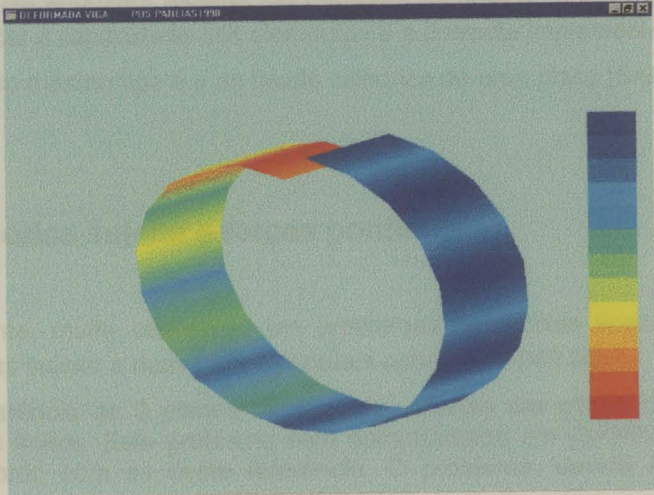


Fig. 8.12 Viga encastrada, flexão pura. Elemento Q93.Campo de tensões de Von-Mises, tensor de Cauchy (Máximo=2652.731 Pa, Mínimo=2189.088 Pa) e deformada real.



Fig. 8.13 Viga encastrada, flexão pura. Elemento Q92. Campo de tensões de Von-Mises, tensor de Cauchy (Máximo=2491.027 Pa, Mínimo=2208.489 Pa) e deformada real.

Relembrando que, neste trabalho, se usa uma formulação Lagrangeana total, os resultados anteriores são indicadores do excelente comportamento dos elementos Q92 e Q93 em casos altamente não-lineares.

O elemento Q90, devido ao excesso de rigidez, não consegue simular o enrolar da chapa.

Os resultados estão de acordo com os obtidos por [HUA89] que recorreu a uma formulação Lagrangeana actualizada.

É nítido que este problema poderia ser resolvido recorrendo a elementos mais económicos, mas o seu papel é testar a capacidade dos elementos e a correcta implementação computacional.

Um exemplo do mesmo tipo é o da flexão cilíndrica de uma placa [SAN92].

8.3.4 Casca cilíndrica sujeita a forças pontuais

Neste problema, muito conhecido em problemas de análise linear, testa-se um cilindro apoiado em diafragmas sujeito a duas forças pontuais opostas $P=640\text{ N}$.

Devido à existência de 3 planos de simetria, apenas um oitavo do cilindro é usado no modelo de elementos finitos. Este problema está documentado em [SAN92] e os resultados aqui obtidos estão de acordo com os deste referência. O problema, devido à existência de forças pontuais, é usualmente impiedoso com alguns elementos.

As dimensões são: $R=0.100\text{ m}$, $L=0.200\text{ m}$, $h=1\times10^{-3}\text{ m}$.

As propriedades elásticas são: $E=3\times10^{10}\text{ N/m}^2$ e $\nu=0.3$. Usa-se uma malha regular 5×5 elementos. Sansour [SAN92] usou uma malha 8×8 de elementos de 9 nós.

O procedimento usado foi o BFGS e recorreu-se a 15 incrementos.

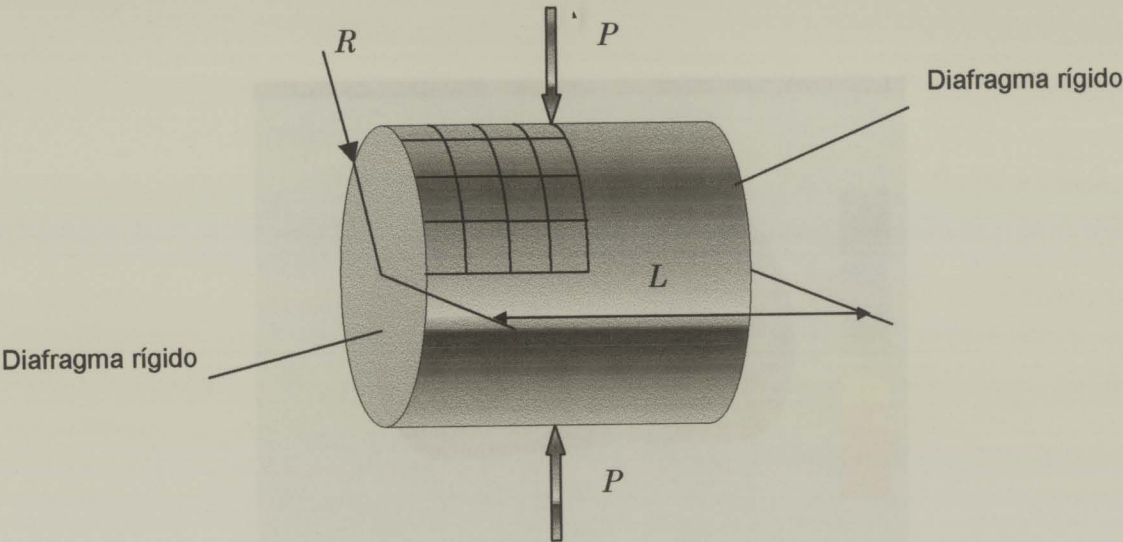


Fig. 8.14 Cilindro sujeito a forças pontuais

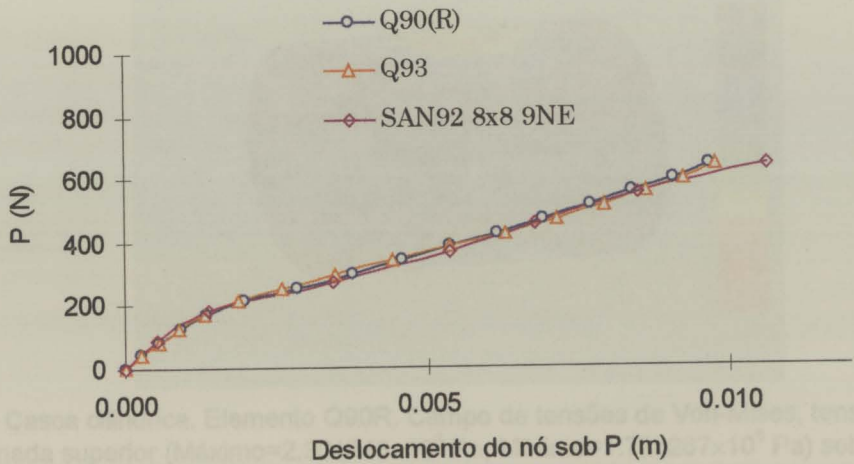


Fig. 8.15 Diagrama força-deslocamento do nó do cilindro sob a força pontual.

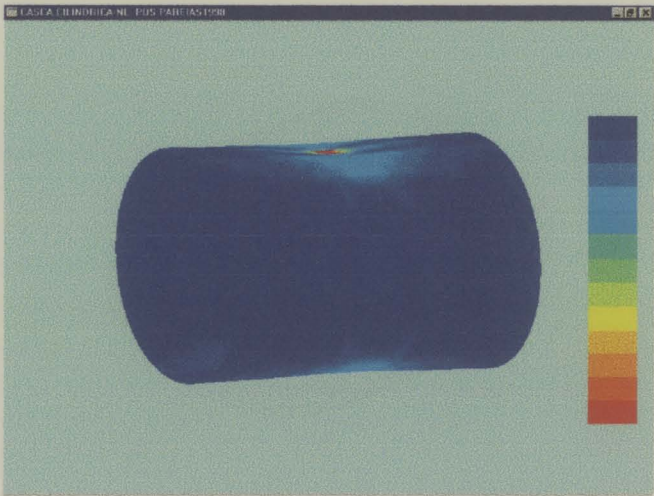


Fig. 8.16 Casca cilíndrica. Elemento Q90R. Campo de tensões de Von-Mises, tensor de Cauchy, para a camada inferior (Máximo= 4.170410×10^8 Pa, Mínimo= 2.62202×10^6 Pa) sobre a deformada real.

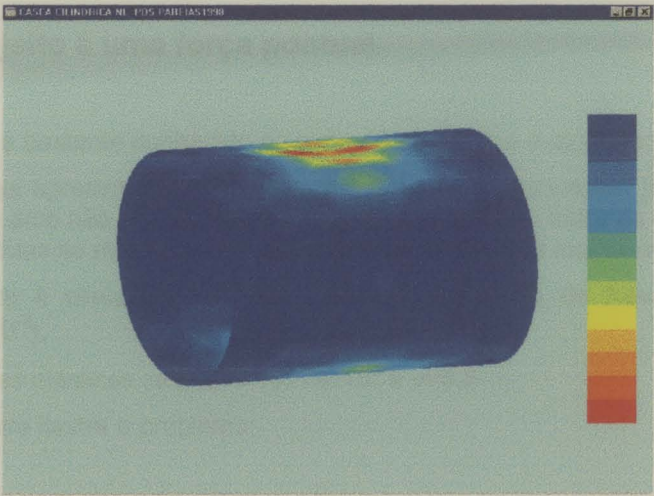


Fig. 8.17 Casca cilíndrica. Elemento Q90R. Campo de tensões de Von-Mises, tensor de Cauchy, para a camada superior (Máximo= 2.301748×10^8 Pa, Mínimo= 1.723267×10^6 Pa) sobre a deformada real.

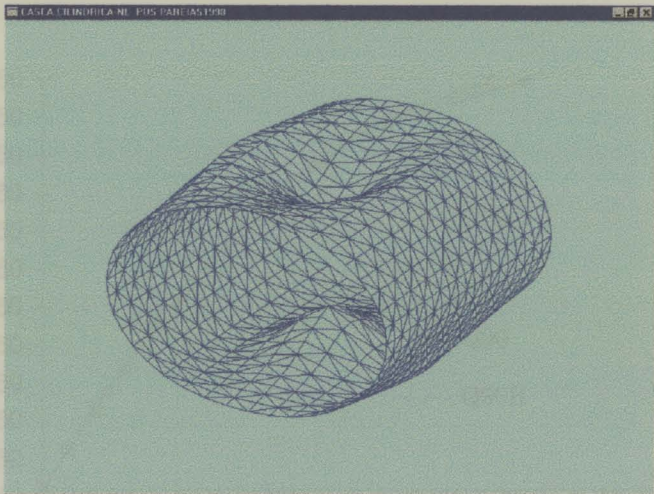


Fig. 8.18 Casca cilíndrica. Elemento Q90R. Deformada ampliada, modelo de triângulos.

Os resultados obtidos estão de acordo com [SAN92] que utilizou uma malha de 64 elementos.

8.3.5 Telhado sujeito a uma força pontual

Este exemplo é bastante conhecido no teste de elementos e algoritmos de controlo da força. O exemplo aqui apresentado é baseado em [OLI84] e o interesse, já que neste trabalho o método de controlo do arco não foi implementado, é de comparação entre os elementos para cargas inferiores à crítica. Apenas se modela ¼ da casca, recorrendo a uma malha regular 4x4.

A carga crítica é cerca de 2.22 kN. Usou-se o método de Newton-Raphson com 10 incrementos ($tol_f=1\times10^{-3}$).

As propriedades elásticas são: $E=3.10275\times10^9$ e $\nu=0.3$.

A seguinte figura ilustra o problema:

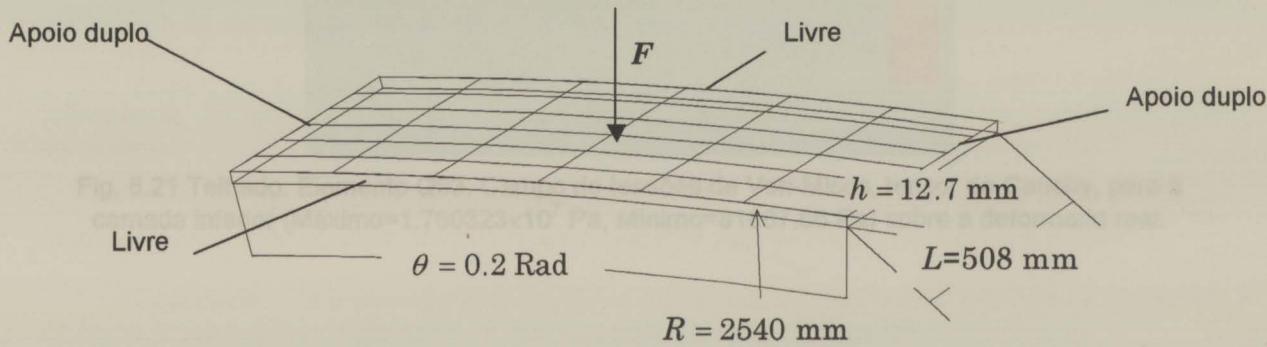


Fig. 8.19 Dimensões e força sobre um telhado.

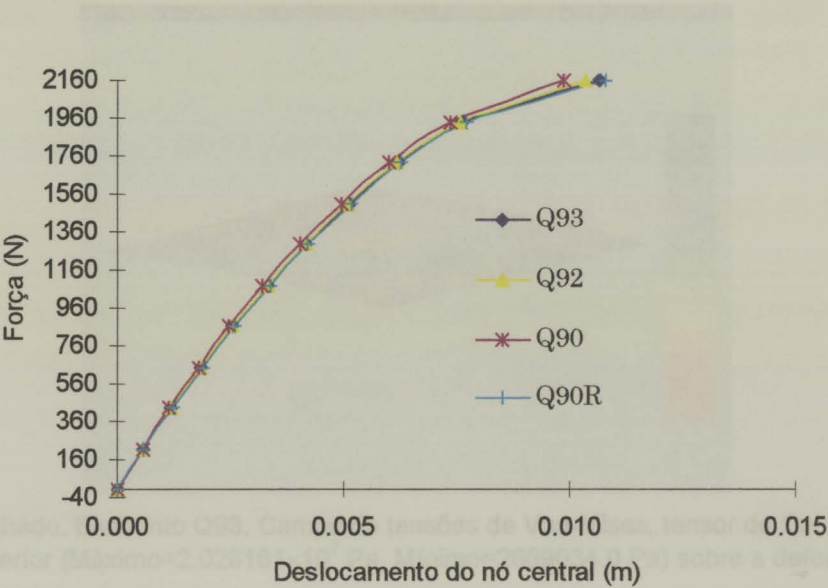


Fig. 8.20 Diagrama força-deslocamento do nó central do telhado sujeito a força pontual.

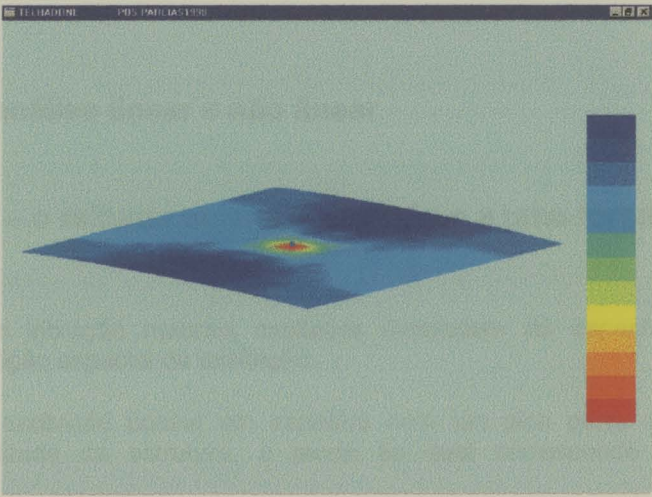


Fig. 8.21 Telhado. Elemento Q93. Campo de tensões de Von-Mises, tensor de Cauchy, para a camada inferior (Máximo= 1.760323×10^7 Pa, Mínimo=81607.66 Pa) sobre a deformada real.

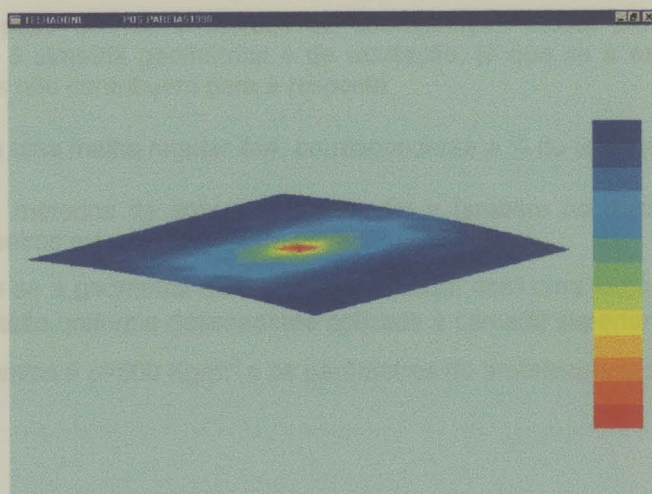


Fig. 8.22 Telhado. Elemento Q93. Campo de tensões de Von-Mises, tensor de Cauchy, para a camada superior (Máximo= 2.028161×10^7 Pa, Mínimo=2669034.0 Pa) sobre a deformada real.

Constata-se, mais uma vez, que o elemento Q90 é o mais rígido.

Em problemas onde surjam fenómenos de instabilidade, a maior rigidez do elemento Q90 origina cargas críticas superiores, o que pode ser perigoso.

Na referência [OLI84] os autores *Oliver e Oñate* obtiveram resultados análogos para a região do diagrama força-deslocamento anterior à instabilidade.

8.4 Dinâmica- análise linear e não linear

8.4.1 Introdução – o telhado sujeito a pressão e a uma força pontual.

Os modos de vibração naturais excitados dependem do espectro de frequências da excitação e da distribuição espacial da excitação.

Assim, se a excitação possui um espectro com um pico perto de uma frequência de ressonância de amplitude da estrutura, o modo ao qual corresponde esta frequência será dominante.

A distribuição espacial da excitação também é importante: Se a distribuição espacial 'segue' uma forma natural de vibração, é comum que a resposta seja dominada por esta (ver [CLO93]).

Realiza-se uma análise bastante genérica em termos de distribuição espacial da excitação, de forma a que a comparação entre os métodos seja o mais geral possível.

Quando se pretende determinar os modos naturais de vibração de uma estrutura, as simplificações de simetria geométrica, não podem, geralmente, ser usadas directamente. Isto, porque as estruturas simétricas podem possuir formas antissimétricas.

No entanto, pode usar-se o método de sobreposição modal para obter a resposta da estrutura, recorrendo à simetria geométrica e de excitação, já que se a excitação é simétrica, os modos antissimétricos não contribuem para a resposta.

Usa-se assim uma malha regular 4x4, correspondente a ¼ do telhado.

Em todos os métodos de sobreposição modal e também no método do impulso virtual, utilizam-se os 25 primeiros modos naturais de vibração.

Assim, utiliza-se a geometria do telhado já definido, com uma força pontual ascendente de $F=4000\text{ N}$ e uma pressão uniforme descendente aplicada à camada superior $p=10000\text{ N/m}^2$.

A massa volúmica é $\rho=500\text{ Kg/m}^3$ e os parâmetros de amortecimento: $\alpha=0.0001$; $\beta=0.002$.

8.4.2 Frequências e formas naturais

Comparam-se as 25 primeiras frequências naturais não-amortecidas do telhado obtidas pelo método de iteração em subespaços (IS) para vários elementos. Também parece relevante comparar os resultados do método de iteração em subespaços com o método aproximado de Rayleigh-Ritz (RR), mais rápido. Comparam-se os espectros para o elemento Q93. Por fim, mostram-se as primeiras formas naturais usando uma representação de triângulos.

Como, por enquanto, são importantes todos os modos, a malha é 8x8 correspondente ao telhado completo.

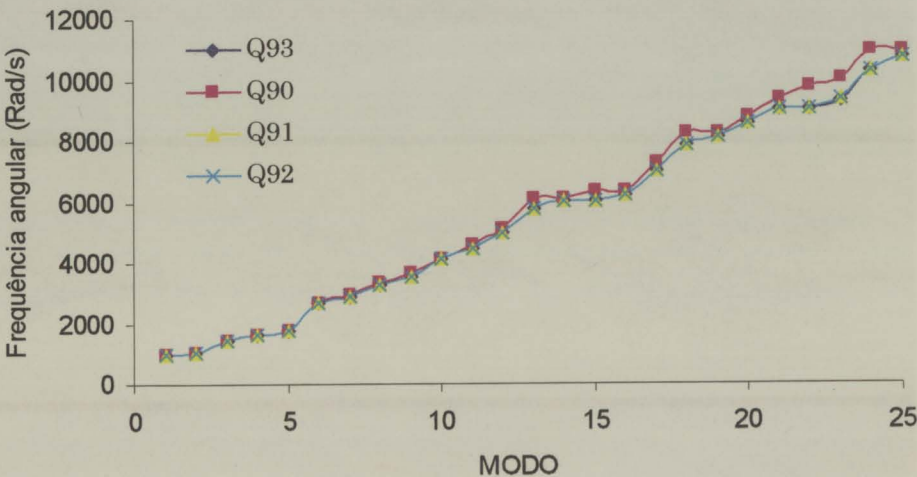


Fig. 8.23 Espectro de frequências naturais de 4 elementos.

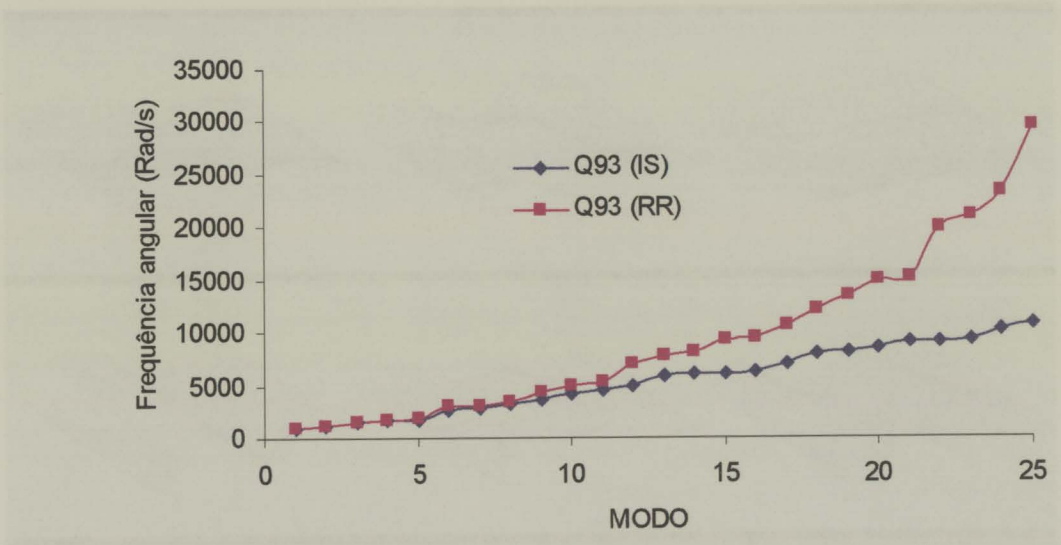


Fig. 8.24 Comparação entre o método de iteração em subespaços (IS) e o método de Rayleigh-Ritz (RR)

Seguidamente, mostram-se as 25 formas naturais de vibração do telhado.

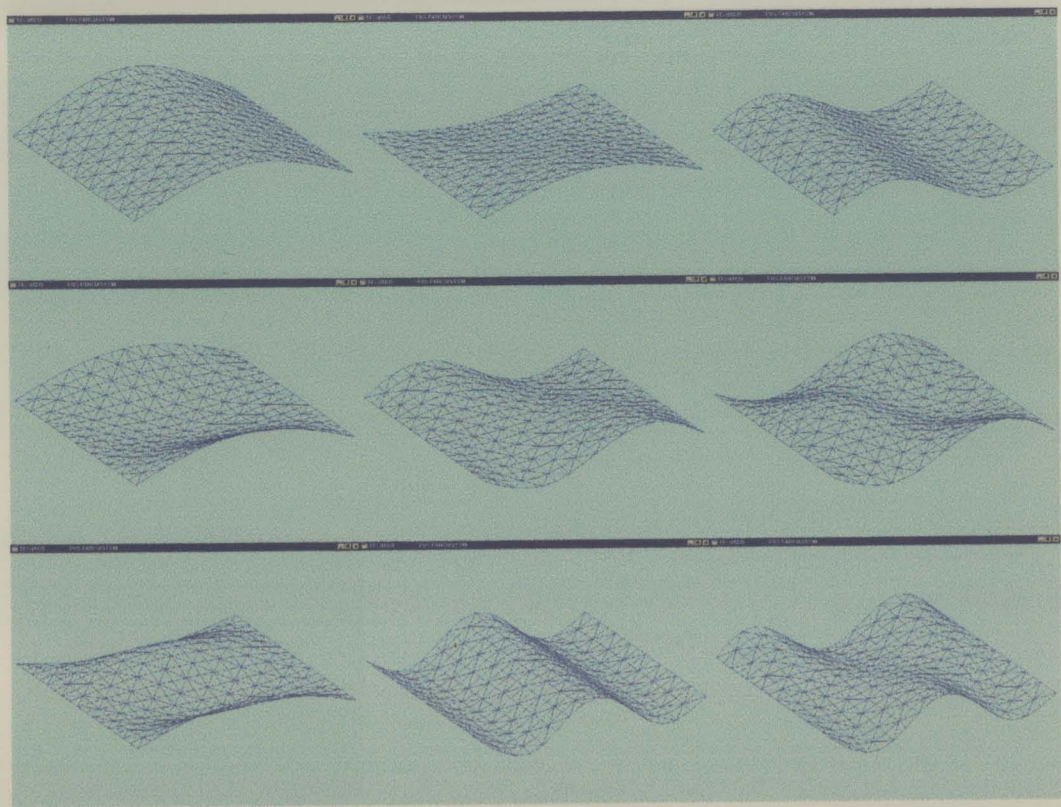


Fig. 8.25 25 primeiras formas naturais de vibração do telhado.

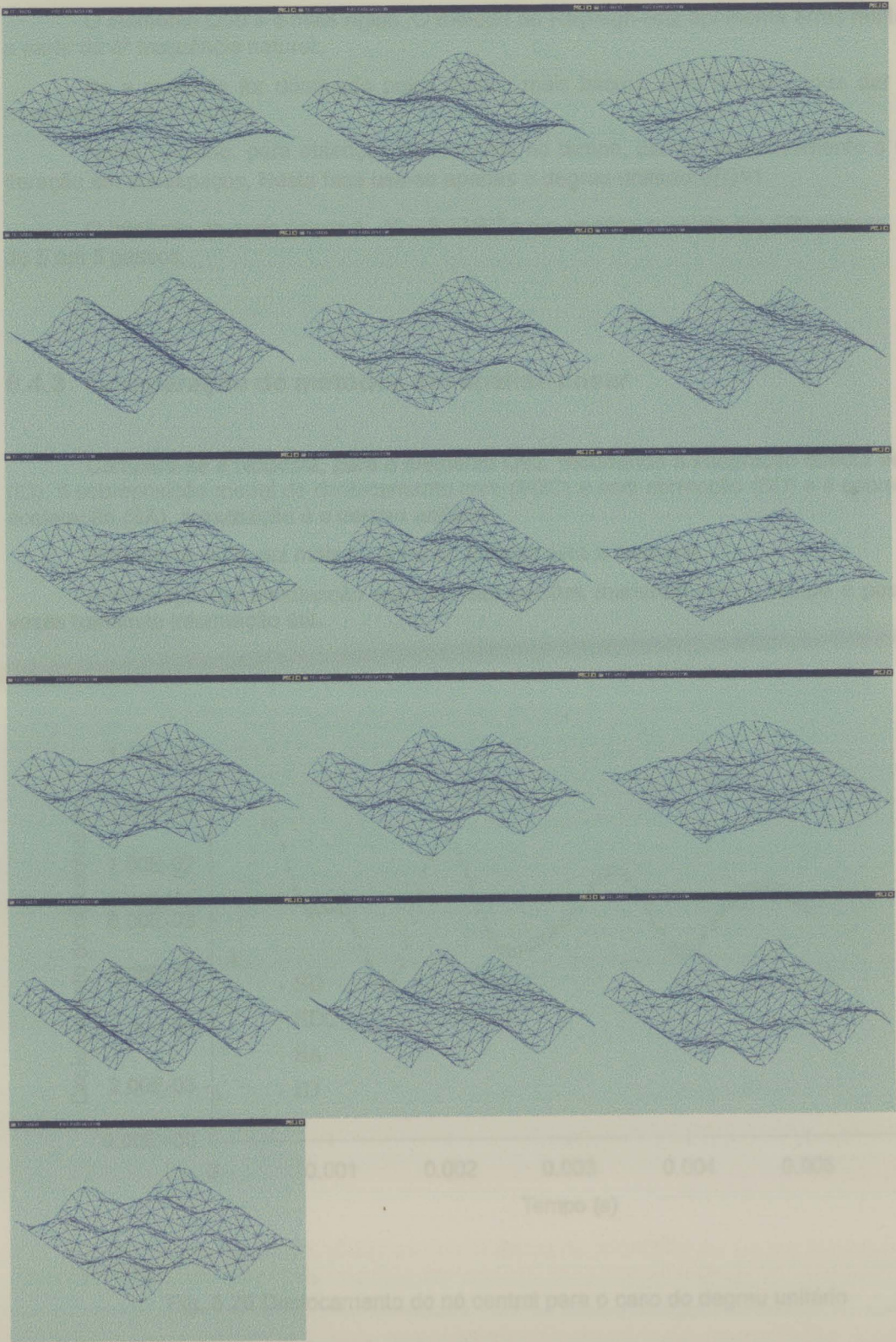


Fig. 8.25 25 primeiras formas naturais de vibração do telhado.

O elemento Q90 é o mais rígido. O método de Rayleigh-Ritz apresenta erros muito elevados a partir da 4ª frequência natural.

Se a resposta for dominada pelos modos mais baixos, este método pode dar resultados aceitáveis e é económico.

Neste trabalho, para obtenção da resposta no tempo, usa-se exclusivamente o método de iteração em subespaços. Nesta fase usa-se apenas o degrau unitário: $f(t)=1$

O intervalo de cada passo é $\Delta t = 5 \times 10^{-5}$ s e a análise consiste em 500 passos, com saída de 5 em 5 passos.

8.4.3 Comparação de métodos em análise linear

Compara-se a resposta, para o elemento Q93, recorrendo à integração directa de Newmark (ID), à sobreposição modal de deslocamento com (SDC) e sem correcção (SD) e à sobreposição de aceleração (SA). A excitação é o degrau unitário.

Escolhe-se uma vez mais o centro do telhado para a resposta.

A animação da distribuição espacial das tensões mudando com o tempo é possível e por vezes transmite informação útil.

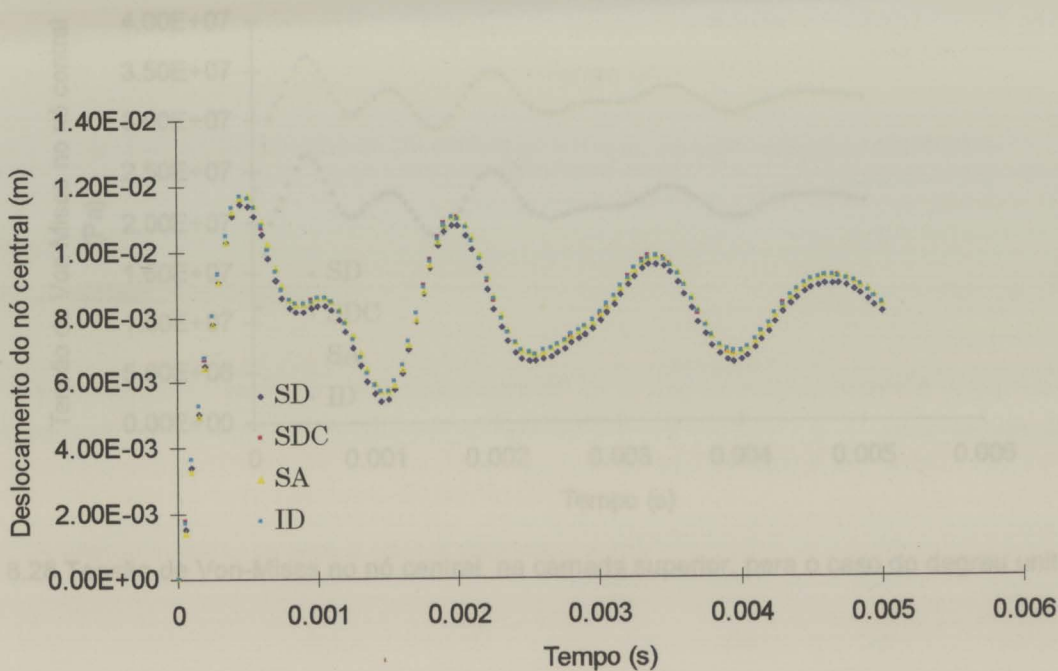


Fig. 8.26 Deslocamento do nó central para o caso do degrau unitário.

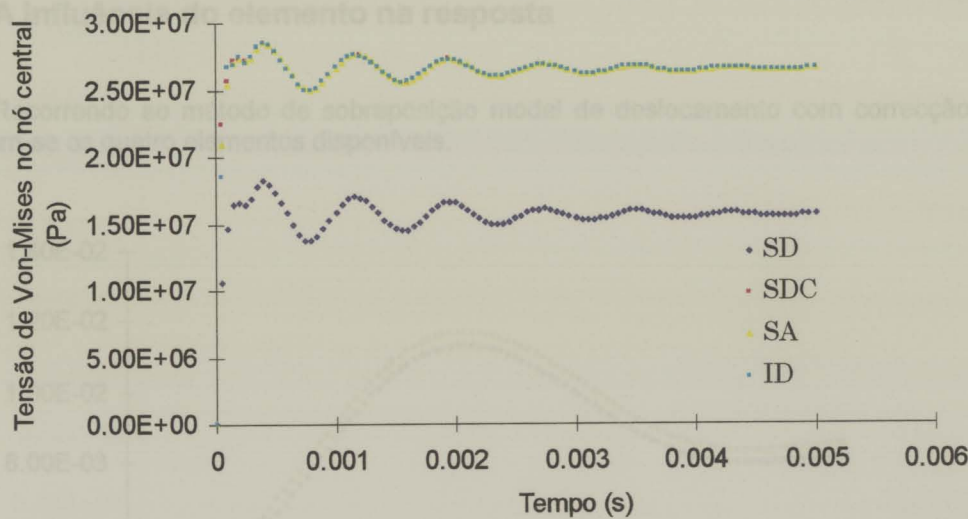


Fig. 8.27 Tensão de Von-Mises no nó central, na camada inferior, para o caso do degrau unitário.

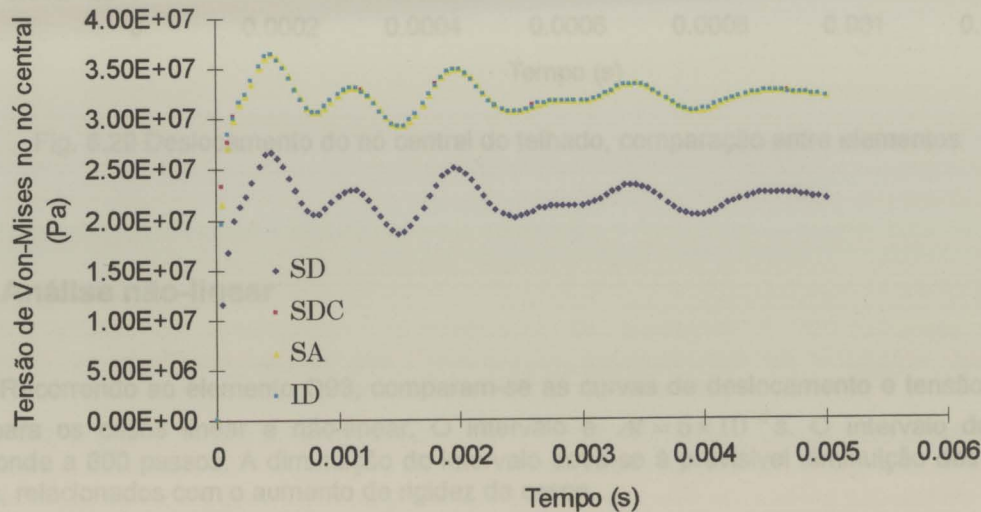


Fig. 8.28 Tensão de Von-Mises no nó central, na camada superior, para o caso do degrau unitário.

Observa-se em (8.27), (8.28) que os métodos de sobreposição modal SDC e SA permitem obter resultados, em termos de resposta das tensões, idênticos ao método de integração directa.

O método de sobreposição modal SD, permite obter resultados semelhantes aos SDC e SA em termos de deslocamento, para bases modais representativas da excitação. Existem muitos casos em que o procedimento de correcção da resposta modal produz uma maior diferença, do que a aqui observada, na resposta de deslocamento.

8.4.4 A influência do elemento na resposta

Recorrendo ao método de sobreposição modal de deslocamento com correcção estática, comparam-se os quatro elementos disponíveis.

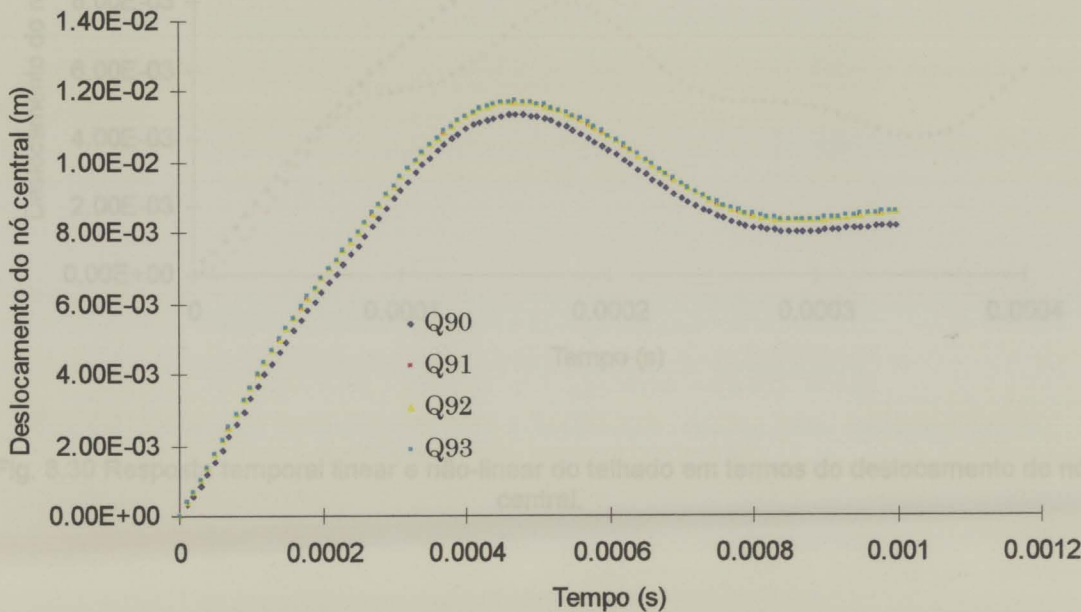


Fig. 8.29 Deslocamento do nó central do telhado, comparação entre elementos

8.4.5 Análise não-linear

Recorrendo ao elemento Q93, comparam-se as curvas de deslocamento e tensão de Von-Mises para os casos linear e não-linear. O intervalo é $\Delta t = 5 \times 10^{-6}$ s. O intervalo de análise corresponde a 800 passos. A diminuição do intervalo deve-se à previsível diminuição dos periodos naturais, relacionados com o aumento de rigidez da casca.

A tolerância de força para a análise não-linear é $tolf = 1 \times 10^{-5}$.

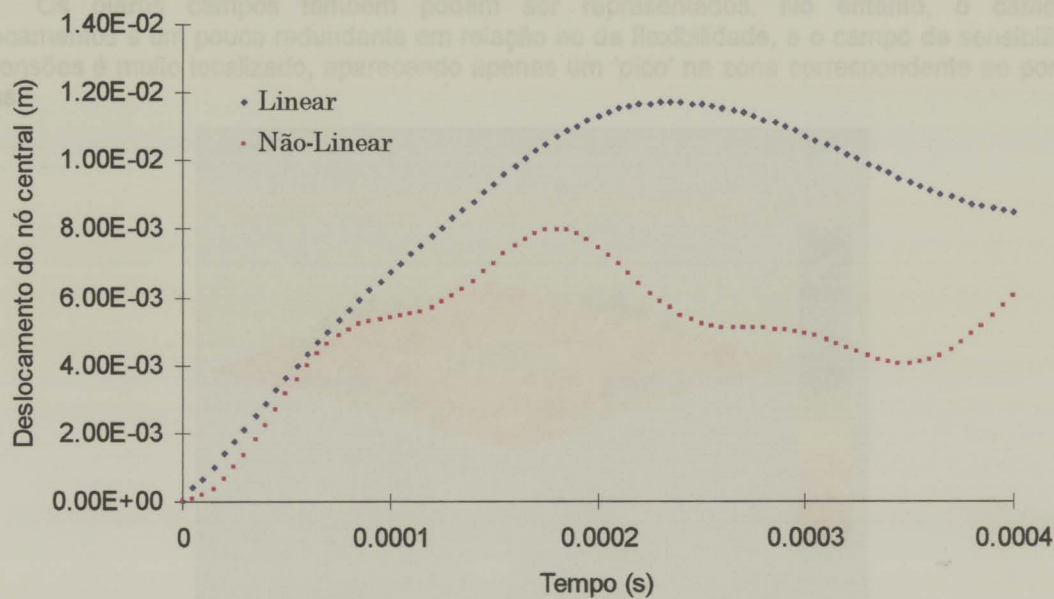


Fig. 8.30 Resposta temporal linear e não-linear do telhado em termos do deslocamento do nó central.

8.5 Análise de sensibilidades

8.5.1 Introdução – placa apoiada sob pressão.

Na análise de sensibilidades a verificação de resultados é habitualmente realizada comparando os resultados obtidos por diferenciação analítica com os resultados dados pela perturbação dos ficheiros de entrada recorrendo às diferenças centrais.

Para ilustrar e confirmar a implementação realizada na análise de sensibilidades mostram-se gráficos de barras que comparam os valores obtidos pelo programa em conjunto com os obtidos pelas diferenças centrais para o caso da placa apoiada já detalhada em análise não-linear.

Antes de se apresentarem esses resultados, são expostos os campos de sensibilidades para as espessuras. Em dinâmica usa-se a função degrau e o cálculo automático do passo.

8.5.2 Representações de campos de sensibilidades

A título ilustrativo mostram-se os campos de sensibilidades da flexibilidade para a placa apoiada. As variáveis são as espessuras e assim, a representação é a de: $\frac{\partial F}{\partial h(x,y,z)}$, sendo F a energia de deformação da estrutura.

Os outros campos também podem ser representados. No entanto, o campo de deslocamentos é um pouco redundante em relação ao da flexibilidade, e o campo de sensibilidades das tensões é muito localizado, aparecendo apenas um 'pico' na zona correspondente ao ponto de Gauss.

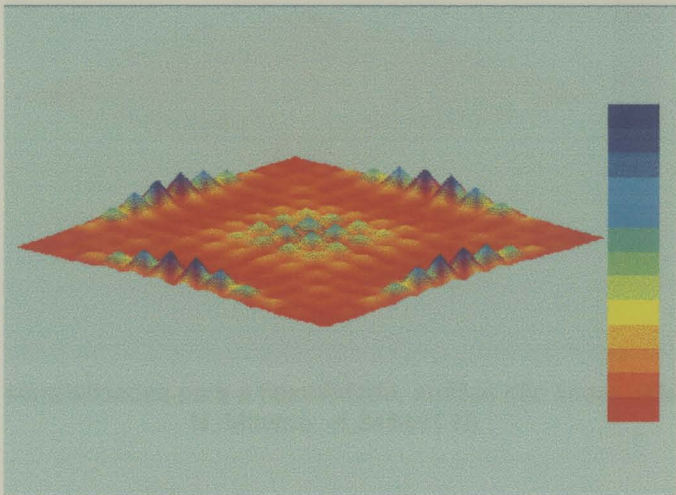


Fig. 8.31 Campo de sensibilidades para a flexibilidade, análise linear estática (Máximo: 8.830503×10^{-3} N, Mínimo: -18.318 N).

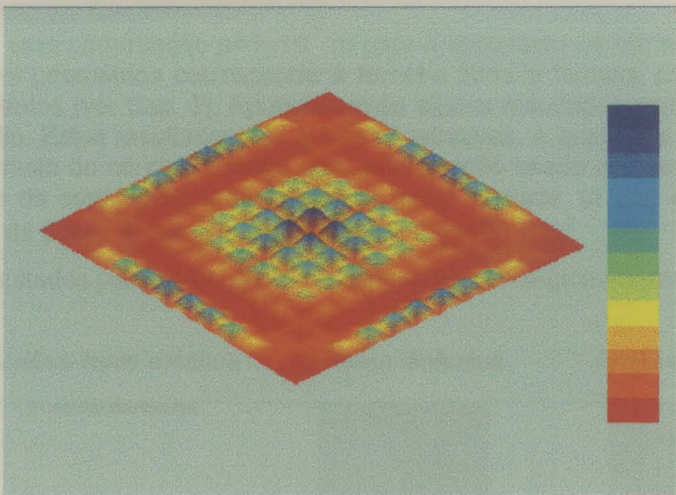


Fig. 8.32 Campo de sensibilidades para a flexibilidade, análise linear dinâmica (Máximo: 2.913013×10^{-1} N, Mínimo: -7.383207 N).

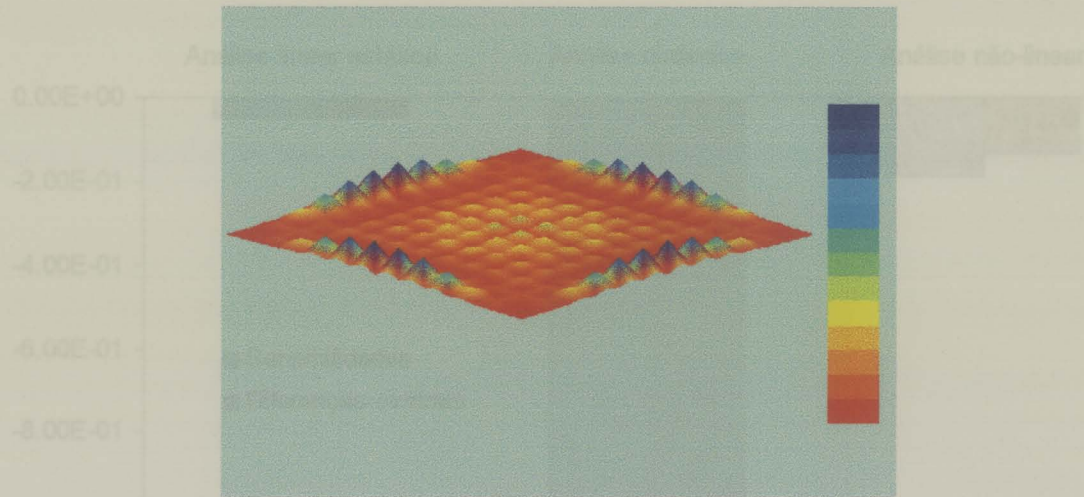


Fig. 8.33 Campo de sensibilidades para a flexibilidade, análise não linear. (Máximo: 1.379526×10^{-3} N, Mínimo: -4.849491 N) .

8.5.3 Comparação com as diferenças centrais

Recorre-se a uma perturbação $p=1 \times 10^{-7}$ m para a espessura de um nó e para uma variável geométrica. A variável geométrica corresponde à terceira linha e terceira coluna (variável 13) da matriz de macroelementos (ver Cap. 5). Apresentam-se alguns resultados para as sensibilidades de deslocamento e tensão. Estes resultados são apenas ilustrativos. A qualidade das sensibilidades de espessura depende muito do nó considerado e do perturbação usada na aferição pelas diferenças centrais. A qualidade da sensibilidade do volume é muito elevada, já que este não depende do estado. Analisa-se $\frac{1}{4}$ da placa. A pressão sobre a placa é $q=100$ N/m².

Assim, os resultados para as variáveis de espessura são seguidamente mostrados:

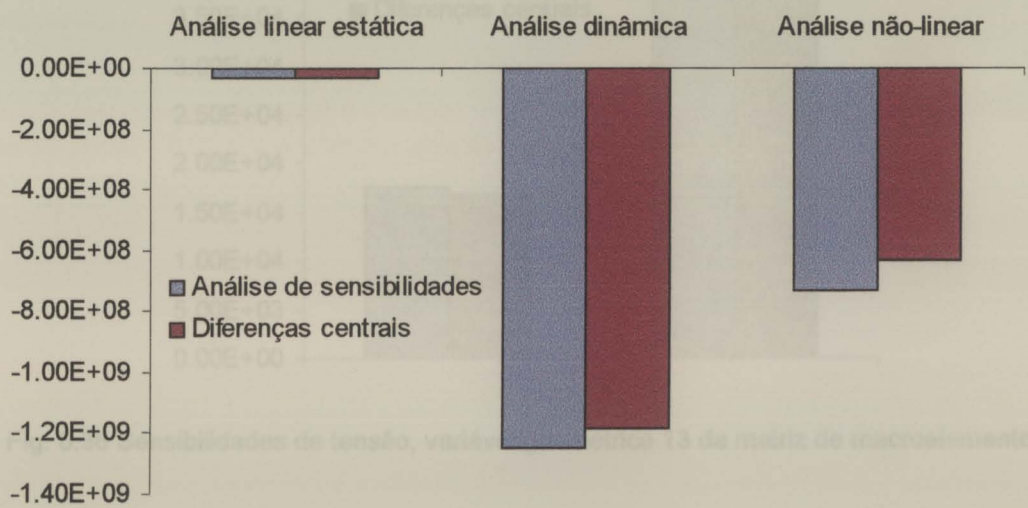


Fig. 8.34 Resultados para a sensibilidade de tensão, usando a variável de espessura mais influente.

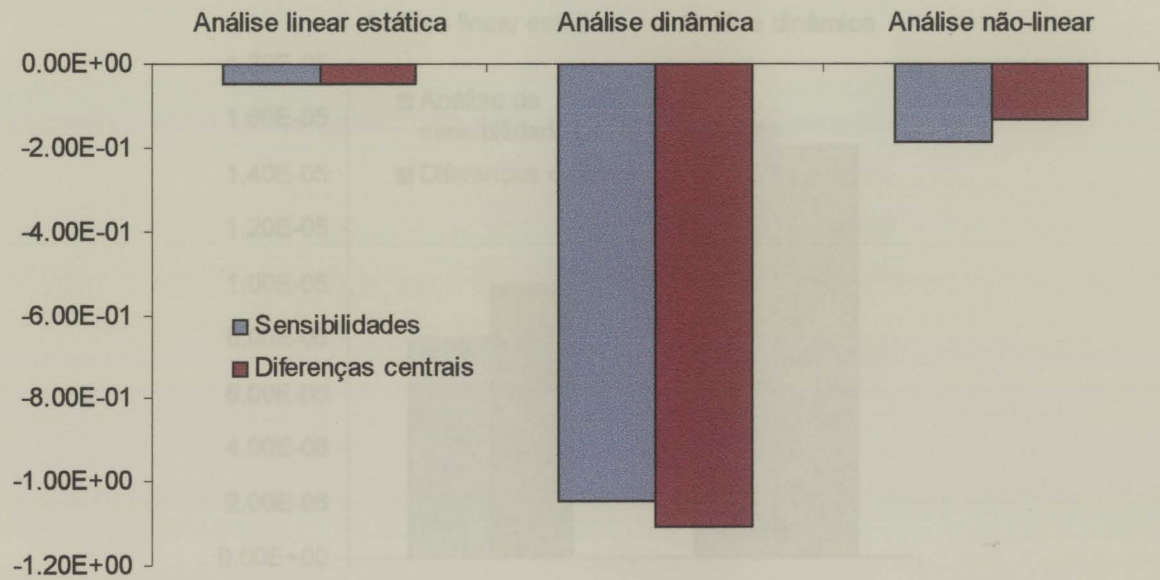


Fig. 8.35 Resultados para a sensibilidade de deslocamento, usando a variável de espessura mais influente.

Para as variáveis geométricas, apresentam-se seguidamente os resultados:

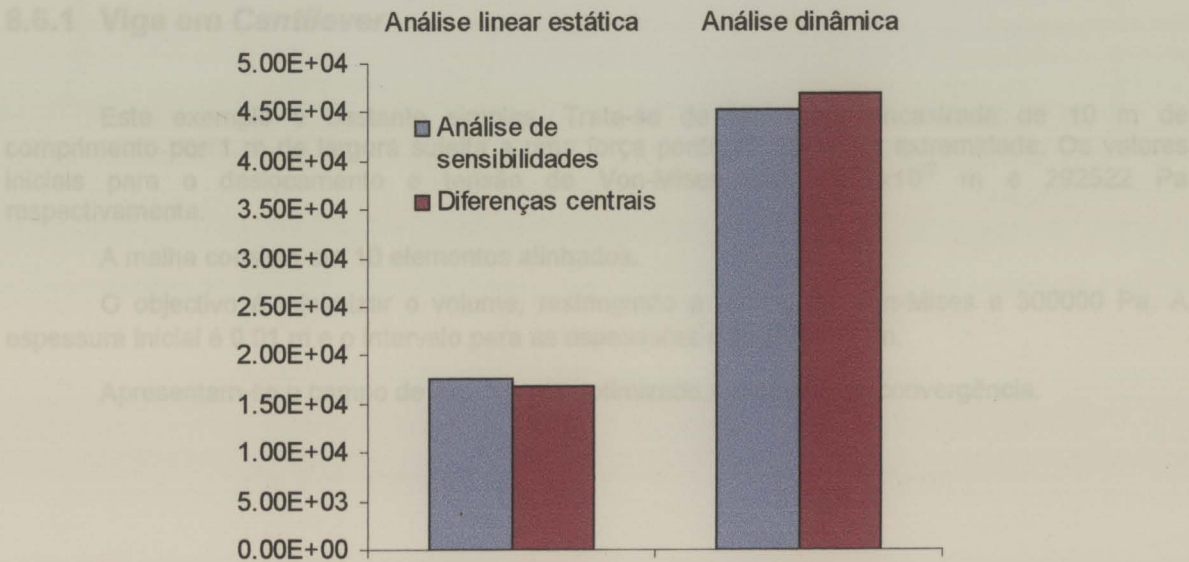


Fig. 8.36 Sensibilidades de tensão, variável geométrica 13 da matriz de macroelementos.

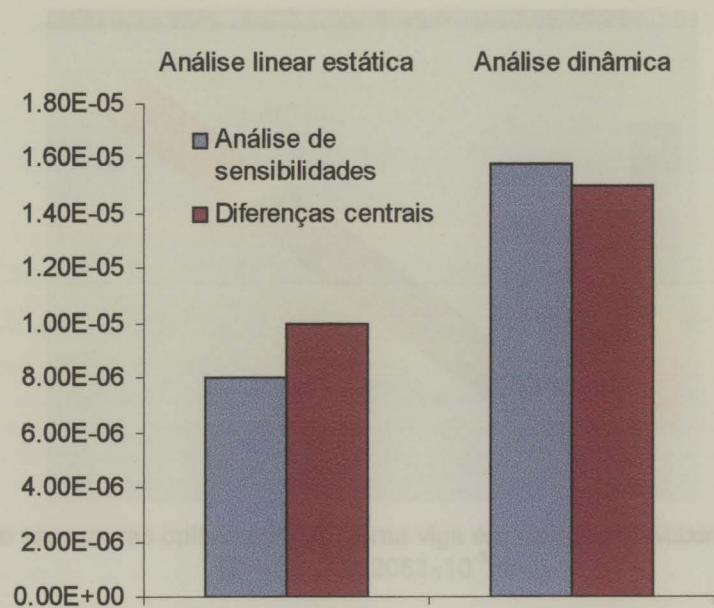


Fig. 8.35 Campo de deslocamento da viga em Cantilever

Fig. 8.37 Sensibilidades de deslocamento, variável geométrica 13 da matriz de macroelementos.

8.6 **Optimização de espessuras e forma**

8.6.1 **Viga em *Cantilever***

Este exemplo é bastante simples. Trata-se de uma viga encastrada de 10 m de comprimento por 1 m de largura sujeita a uma força pontual unitária na extremidade. Os valores iniciais para o deslocamento e tensão de Von-Mises são 1.729×10^{-2} m e 292522 Pa respectivamente.

A malha consiste em 10 elementos alinhados.

O objectivo é minimizar o volume, restringindo a tensão de Von-Mises a 300000 Pa. A espessura inicial é 0.01 m e o intervalo para as espessuras é $[5,20] \times 10^{-3}$ m.

Apresentam-se o campo de espessuras optimizado e o gráfico de convergência.

Fig. 8.39 Gráfico de convergência para a viga em Cantilever



Fig. 8.38 Campo de espessuras otimizado para uma viga em *Cantilever*. Máximo: 1.008988×10^{-2} m, Mínimo: 7.222083×10^{-3} m.

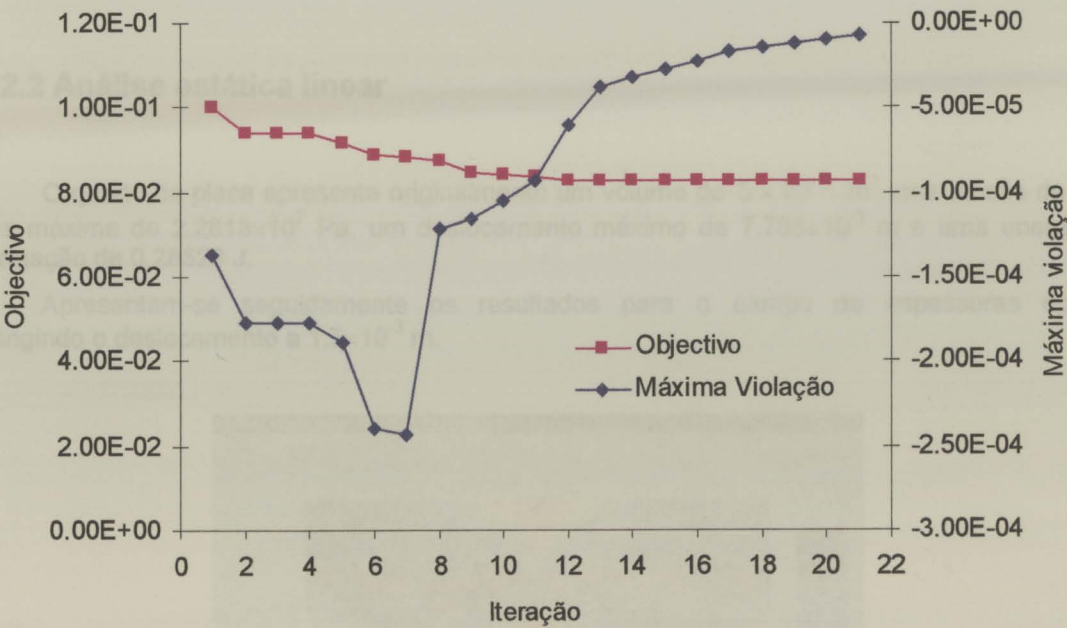


Fig. 8.39 Gráfico de convergência para a viga em *Cantilever*.

8.6.2 Placa encastrada inicial sob pressão uniforme

8.6.2.1 Dados

Usa-se uma placa quadrada de lado $L=1\text{ m}$, de espessura inicial $h=2\times10^{-3}\text{ m}$, e sujeita a uma pressão de 1000 N/m^2 . O material é aço ($E=210\times10^9\text{ N/m}^2$ $\nu=0.3$).

As variáveis de espessura estão restringidas ao intervalo $[1.0,8.0]\times10^{-3}\text{ m}$ e as variáveis geométricas ao intervalo $[-0.2,0.2]$.

O objectivo é o volume e as restrições são as 4 maiores tensões de Von-Mises, os 4 deslocamentos máximos e a energia de deformação. Alternativamente, e a título ilustrativo, o objectivo pode ser um outro funcional.

Para as espessuras modela-se $\frac{1}{4}$ da placa e para a geometria a placa toda.

Usam-se malhas 4×4 elementos para as variáveis de espessura e, para as variáveis geométricas, usam-se malhas 3×3 e 6×6 .

8.6.2.2 Análise estática linear

O quarto da placa apresenta originalmente um volume de $5\times10^{-4}\text{ m}^3$ uma tensão de Von-Mises máxima de $2.2818\times10^7\text{ Pa}$, um deslocamento máximo de $7.783\times10^{-3}\text{ m}$ e uma energia de deformação de 0.28529 J .

Apresentam-se seguidamente os resultados para o campo de espessuras óptimo, restringindo o deslocamento a $1.5\times10^{-3}\text{ m}$.

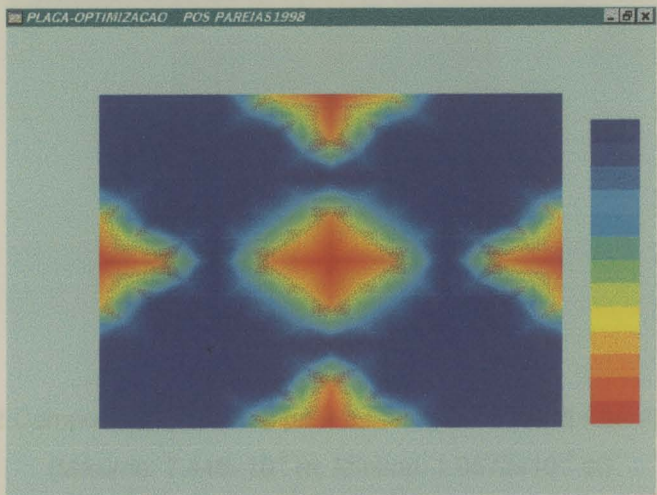


Fig. 8.40 Campo de espessuras para a restrição de deslocamento (Máximo: $6.6\times10^{-3}\text{ m}$, Mínimo: $1\times10^{-3}\text{ m}$).

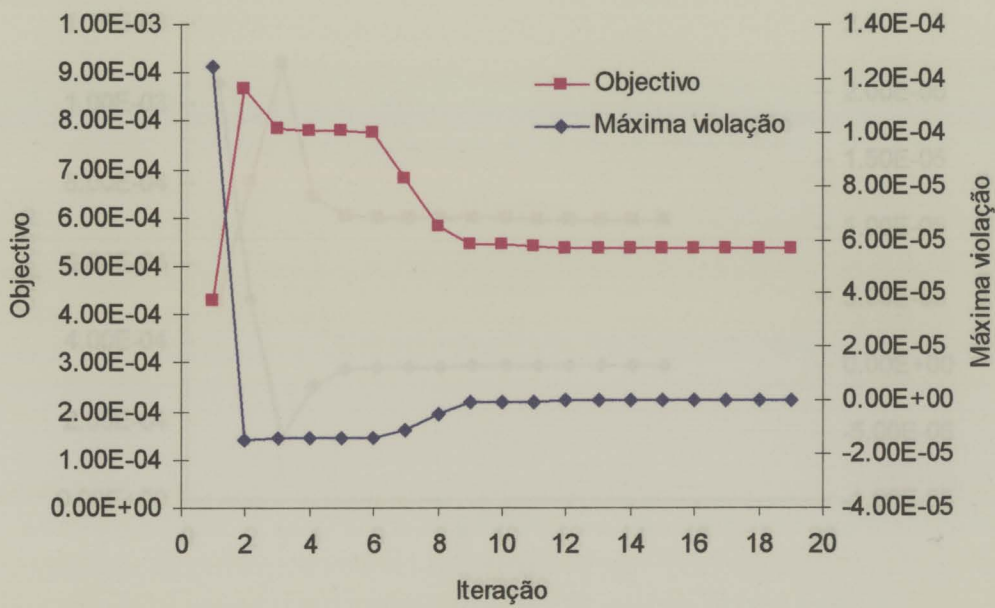


Fig. 8.41 Gráfico de convergência para a placa com a restrição de deslocamento.

Para a restrição da tensão de Von-Mises (8×10^6 Pa) apresentam-se seguidamente os resultados:

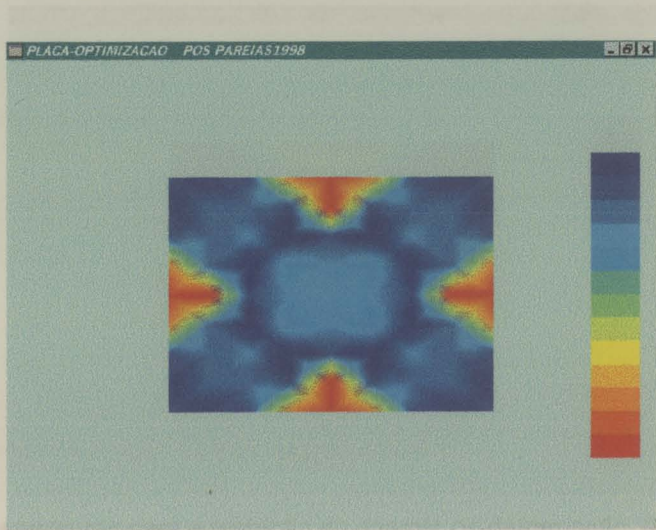


Fig. 8.42 Campo de espessuras para a restrição de tensão de Von-Mises.
(Máximo: 7.446×10^{-3} m, Mínimo: 1.0572×10^{-3} m).

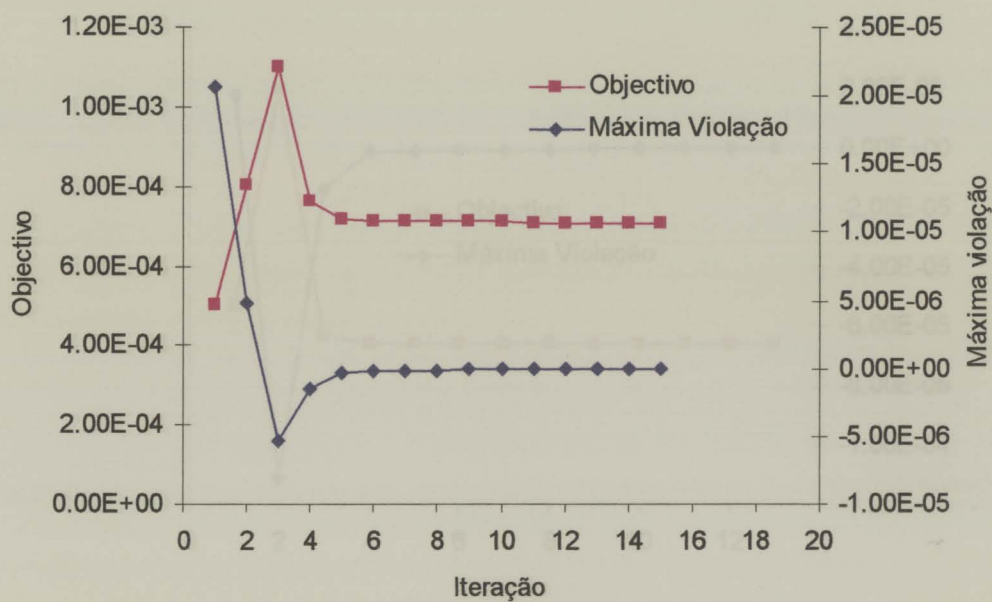


Fig. 8.43 Gráfico de convergência para a placa sujeita à restrição de tensão.

Para a restrição de flexibilidade, limita-se a energia de deformação a 0.25 J.

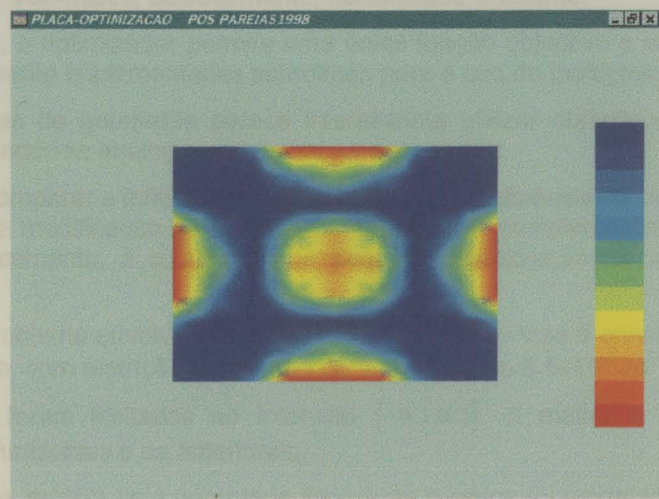


Fig. 8.44 Campo de espessuras para a restrição de energia de deformação. (Máximo: 3.2833×10^{-3} m, Mínimo 1.0×10^{-3} m).

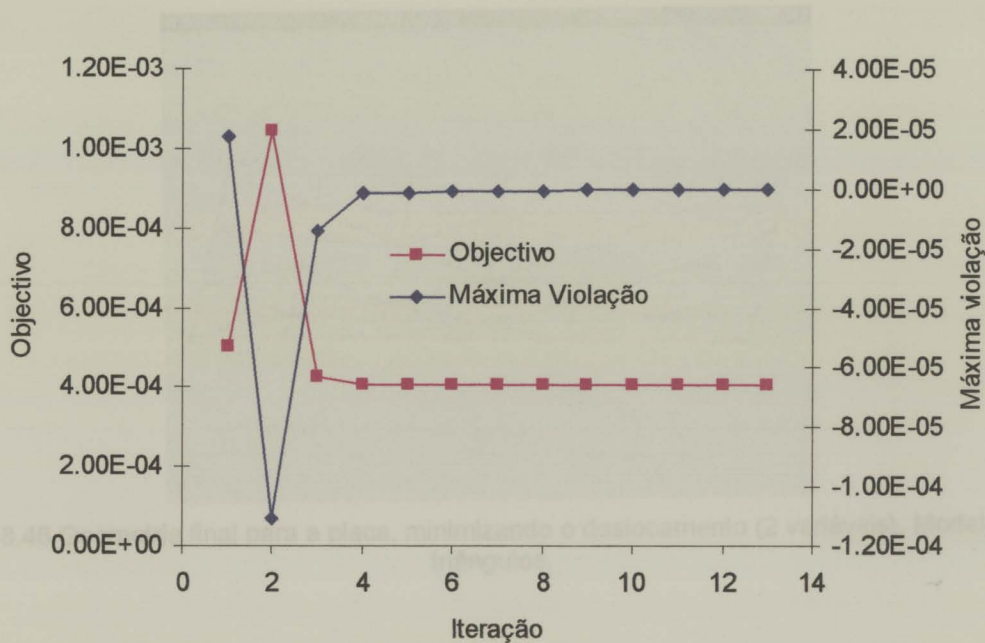


Fig. 8.45 Convergência para a placa com a restrição de energia de deformação.

Reunindo todas as restrições, obtém-se uma distribuição igual à obtida para a restrição de tensões, já que esta é a única activa para esse caso.

É possível combinar quaisquer restrições com qualquer função objectivo, dos 4 funcionais envolvidos: tensão de Von-Mises, deslocamento, flexibilidade e volume.

Por enquanto, o optimizador permite uma única função objectivo e um número qualquer de restrições. No futuro serão implementadas subrotinas para o uso de múltiplos objectivos.

Nos problemas de geometria parece interessante utilizar objectivos distintos do volume, embora pudesse proceder-se analogamente para as espessuras.

É relevante comparar a influência da geometria com a influência do campo de espessuras. Uma pequena modificação geométrica permite alterar completamente os valores máximos das tensões e deslocamento, à custa de uma pequena penalização do volume e, portanto, da massa.

O seguinte problema envolve apenas 2 variáveis geométricas e consiste na minimização do deslocamento máximo, com restrição do volume de ¼ da casca a $5.5 \times 10^{-3} \text{ m}^3$.

As variáveis foram limitadas ao intervalo $[-0.1, 0.1]$. A malha é 3x3, o que explica a disparidade entre os funcionais e os anteriores.

Seguidamente, mostra-se a geometria final (toda a casca foi modelada, e não ¼ como para o caso da espessura)

É espantosa a influência da geometria no deslocamento máximo. O deslocamento final é 453 vezes inferior ao original, devido a um movimento transversal máximo de 30 mm de geometria para uma placa de 1 m de lado. Recorrendo a 15 variáveis, a geometria resultante é igualmente ótima.

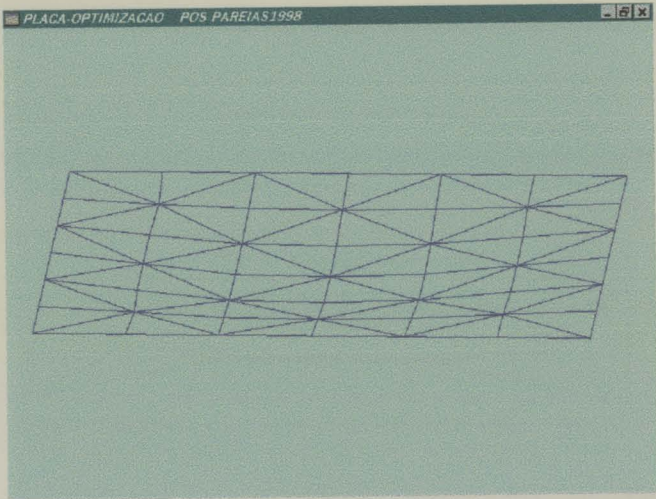


Fig. 8.46 Geometria final para a placa, minimizando o deslocamento (2 variáveis). Modelo de triângulos.

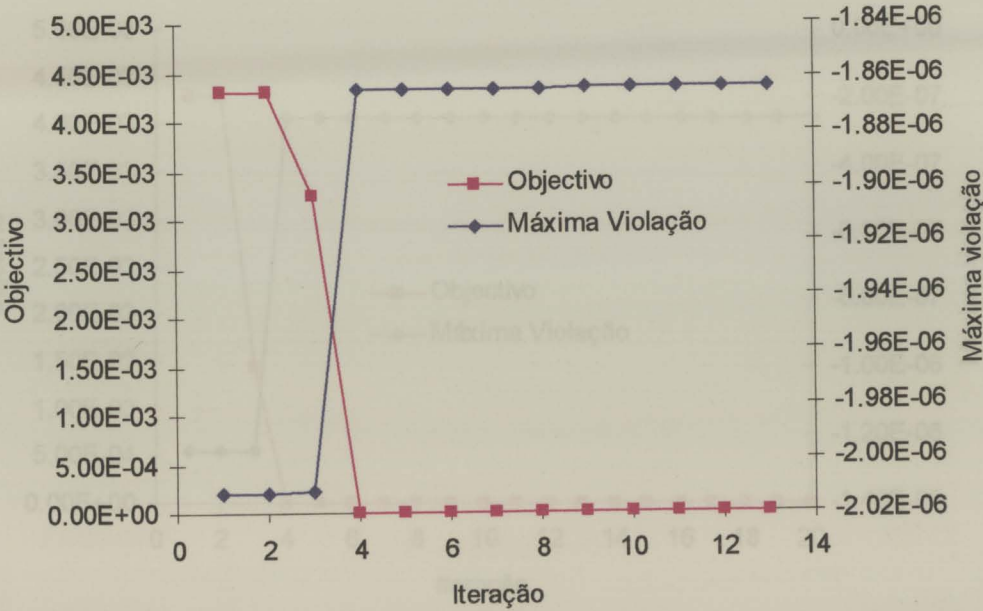


Fig. 8.47 Gráfico de convergência para a minimização do deslocamento recorrendo a 2 variáveis geométricas.

É espantosa a influência da geometria no deslocamento máximo. O deslocamento final é 453 vezes inferior ao original, devido a um movimento transversal máximo de 50 mm da geometria, para uma placa de 1 m de lado.

Recorrendo a 16 variáveis, a geometria resultante é igualmente simétrica:

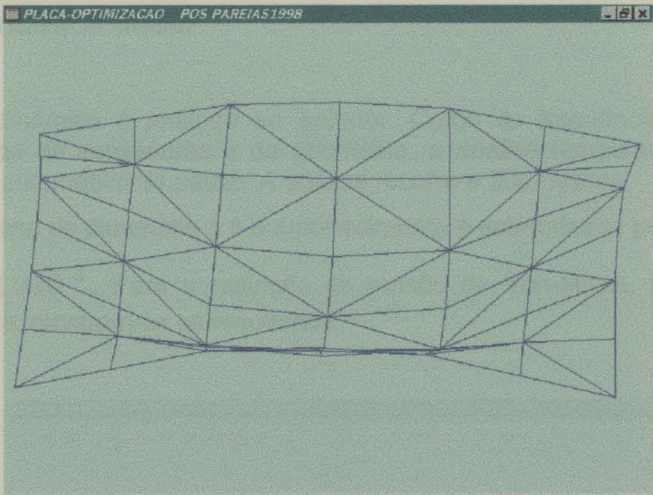


Fig. 8.48 Geometria final para a placa, minimizando o deslocamento (16 variáveis). Modelo de triângulos.

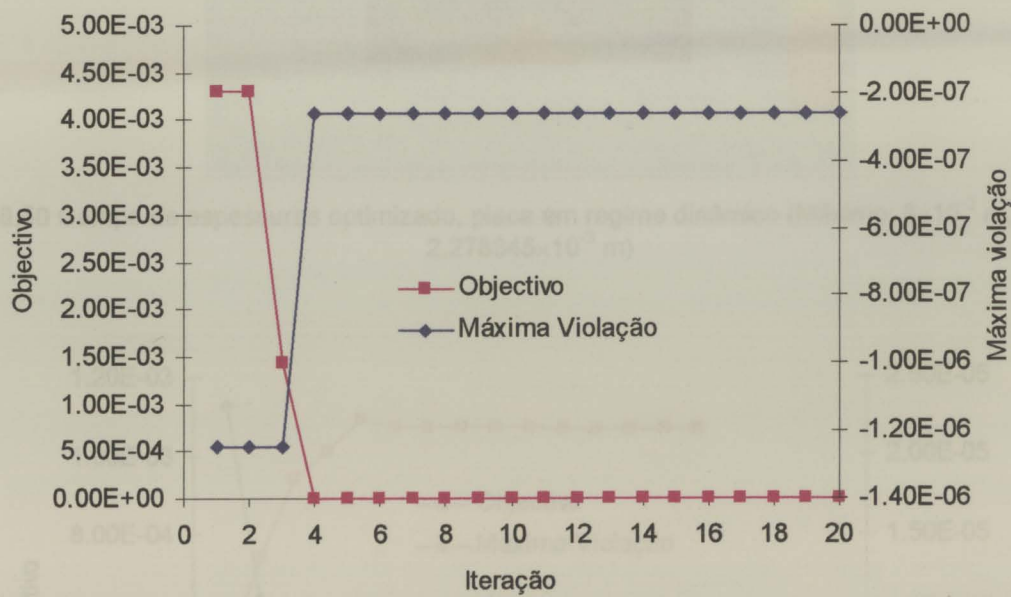


Fig. 8.49 Gráfico de convergência para o problema da placa usando 16 variáveis geométricas.

Com a utilização de 16 variáveis, o deslocamento final é 6766 vezes inferior ao inicial.

8.6.2.3 Análise dinâmica linear

O problema dinâmico é análogo ao anterior. Como as frequências naturais são muito dependentes do campo de espessuras e da geometria, a análise temporal tem de ser realizada recorrendo ao cálculo automático do passo. A análise recorre a 200 passos.

Usa-se uma base de dimensão 5 e o amortecimento é determinado pelos parâmetros

$\alpha = 2 \times 10^{-4}$ e $\beta = 1 \times 10^{-4}$. Para a restrição de tensão de Von-Mises, e para o objectivo de minimização do volume, mostram-se os resultados.

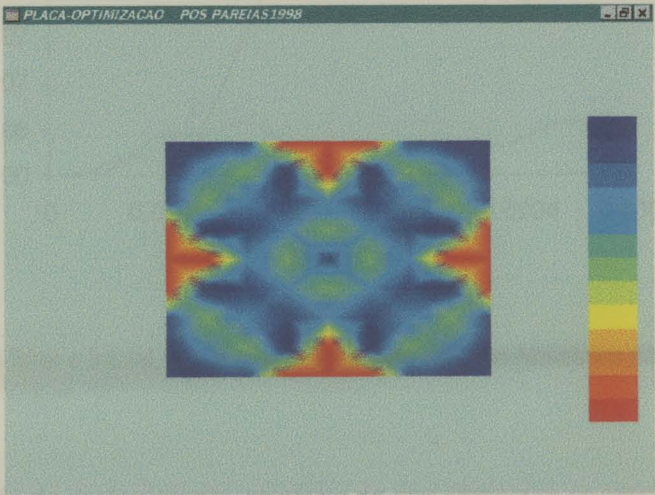


Fig. 8.50 Campo de espessuras otimizado, placa em regime dinâmico (Máximo: 8×10^{-3} m, Mínimo: 2.278345×10^{-3} m)

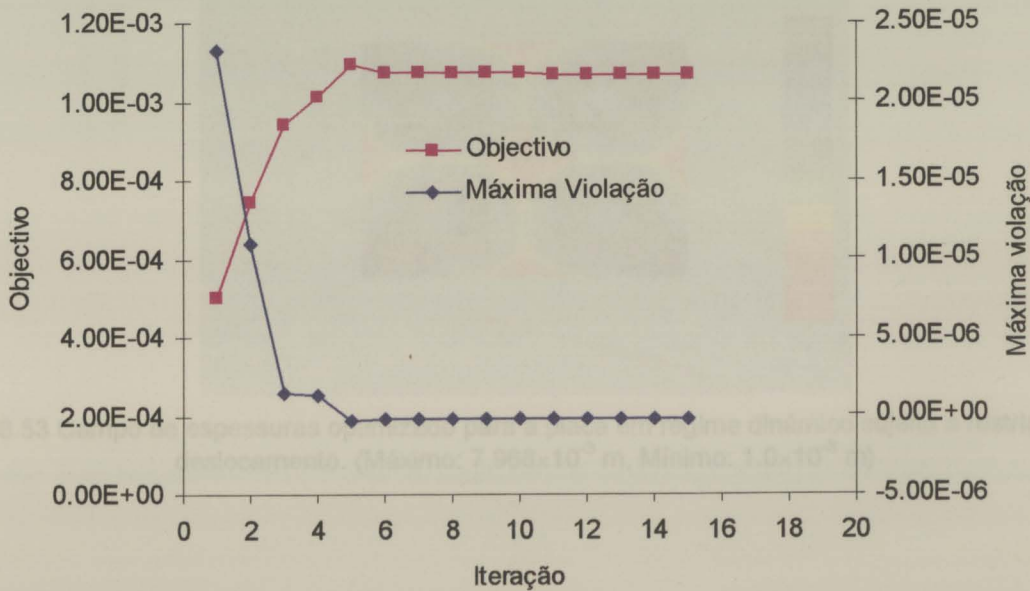


Fig. 8.51 Gráfico de convergência para o problema da placa em regime dinâmico

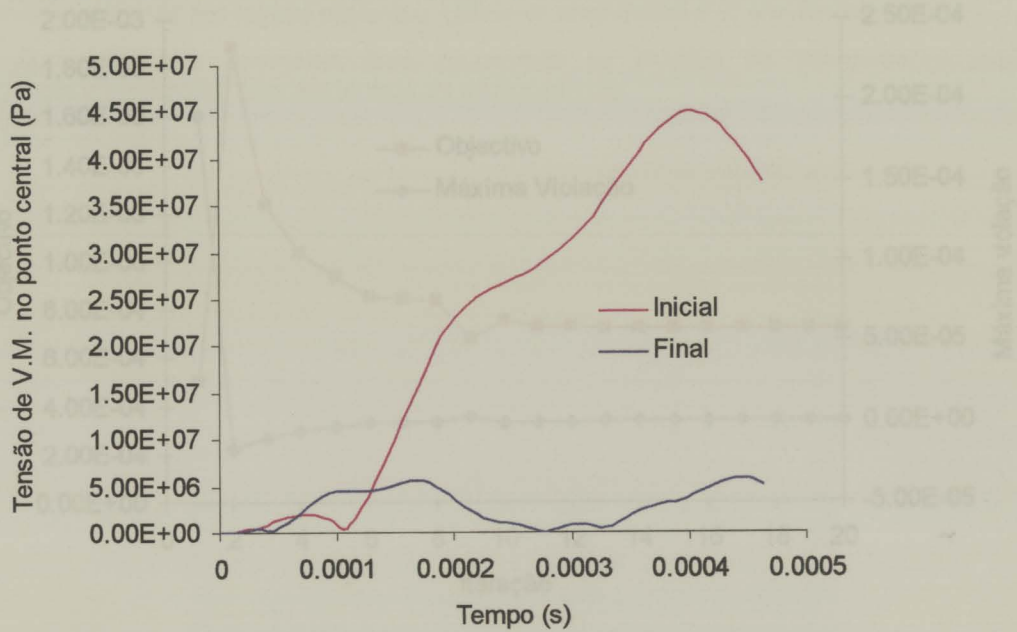


Fig. 8.52 Respostas final e inicial, em termos de tensão de Von-Mises no ponto central da placa.

Para a restrição de deslocamento, mostram-se seguidamente os resultados.

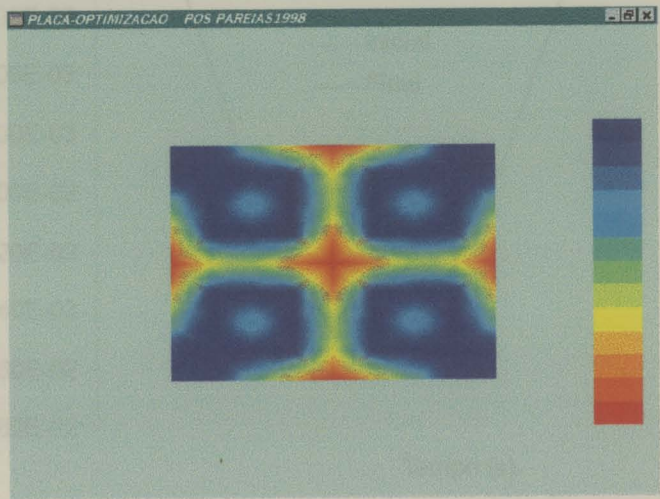


Fig. 8.53 Campo de espessuras otimizado para a placa em regime dinâmico sujeita a restrição de deslocamento. (Máximo: 7.968×10^{-3} m, Mínimo: 1.0×10^{-3} m)

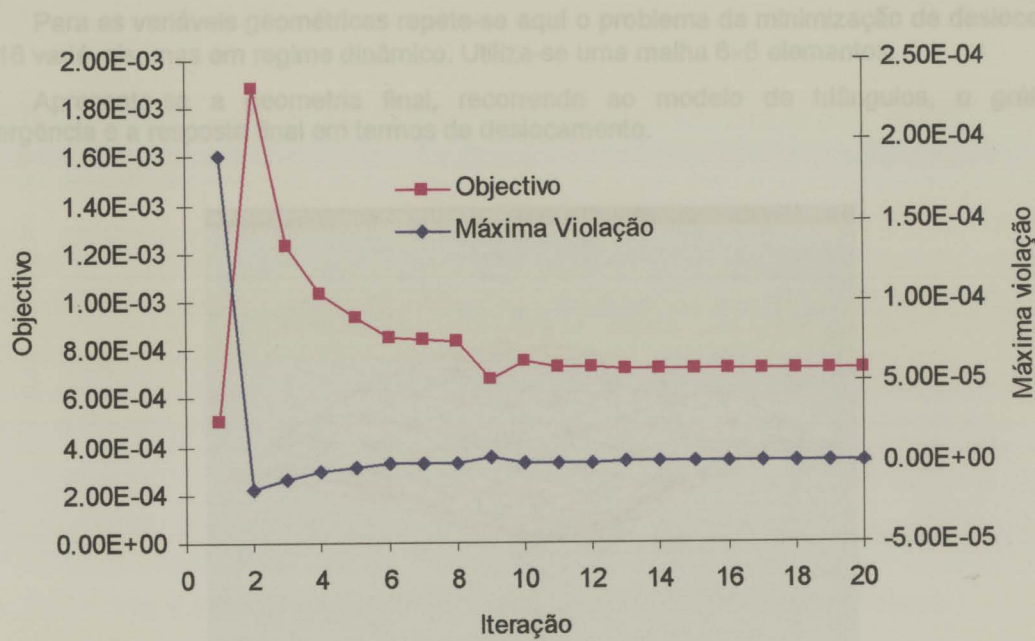


Fig. 8.54 Gráfico de convergência para a placa em regime dinâmico sujeita a restrição de deslocamento.

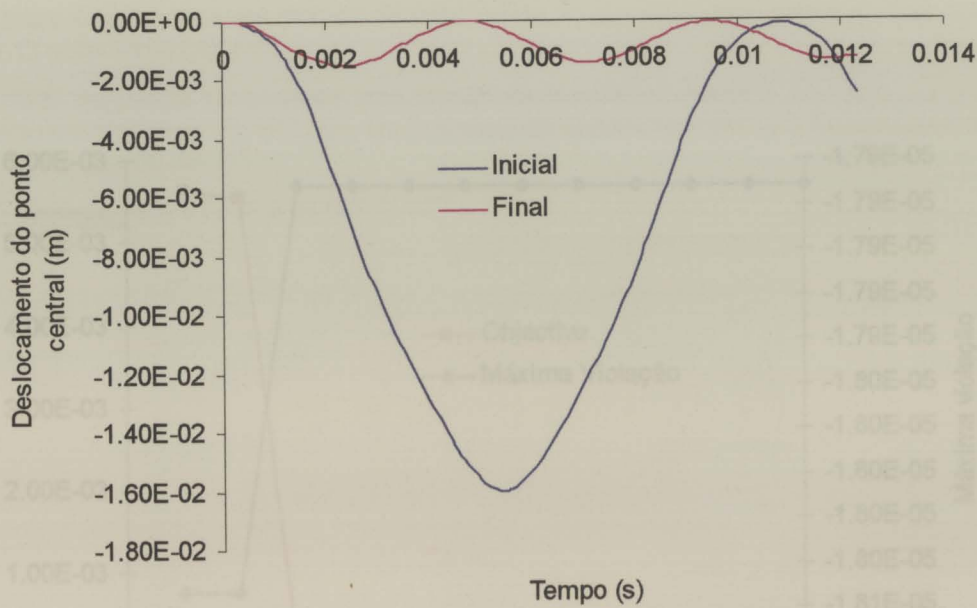


Fig. 8.55 Respostas inicial e final do ponto central da placa, em termos de deslocamento.

Para as variáveis geométricas repete-se aqui o problema da minimização de deslocamento, com 16 variáveis, mas em regime dinâmico. Utiliza-se uma malha 6×6 elementos.

Apresenta-se a geometria final, recorrendo ao modelo de triângulos, o gráfico de convergência e a resposta final em termos de deslocamento.

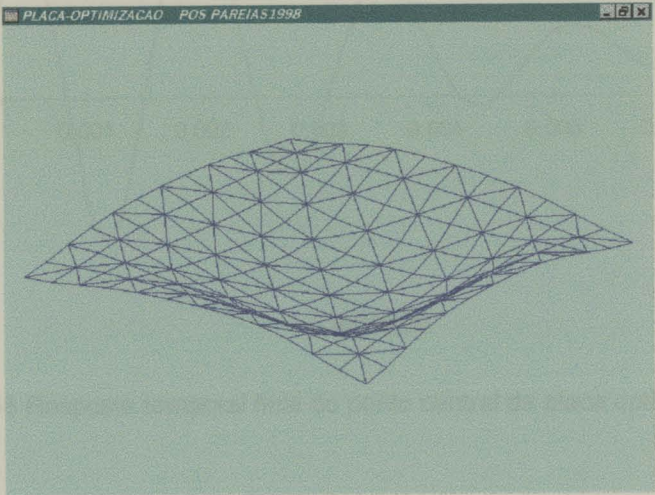


Fig. 8.56 Geometria final otimizada para a placa em regime dinâmico. Modelo de triângulos.

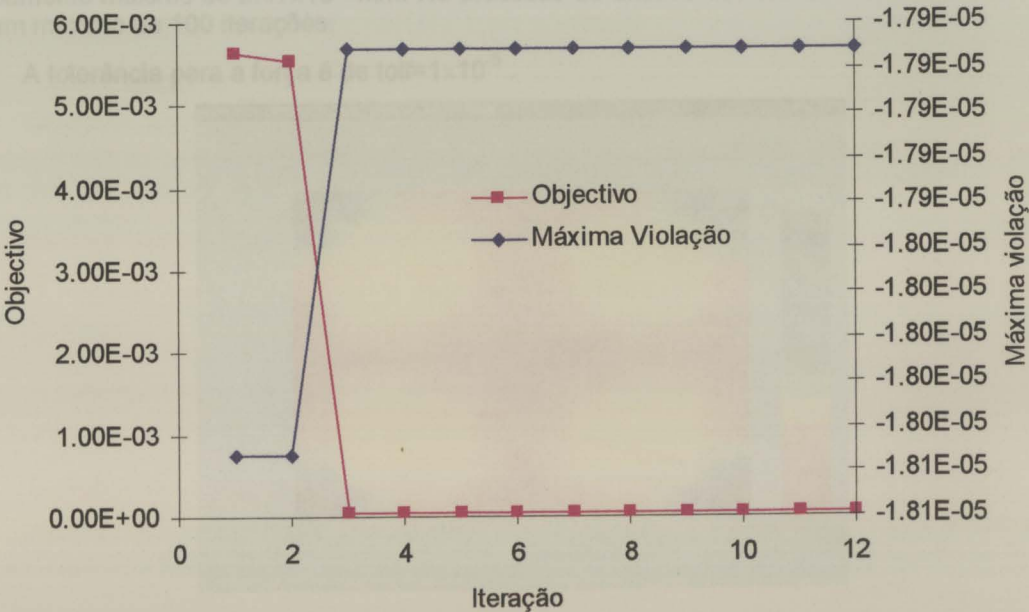


Fig. 8.57 Gráfico de convergência para a placa em regime dinâmico, variáveis geométricas.

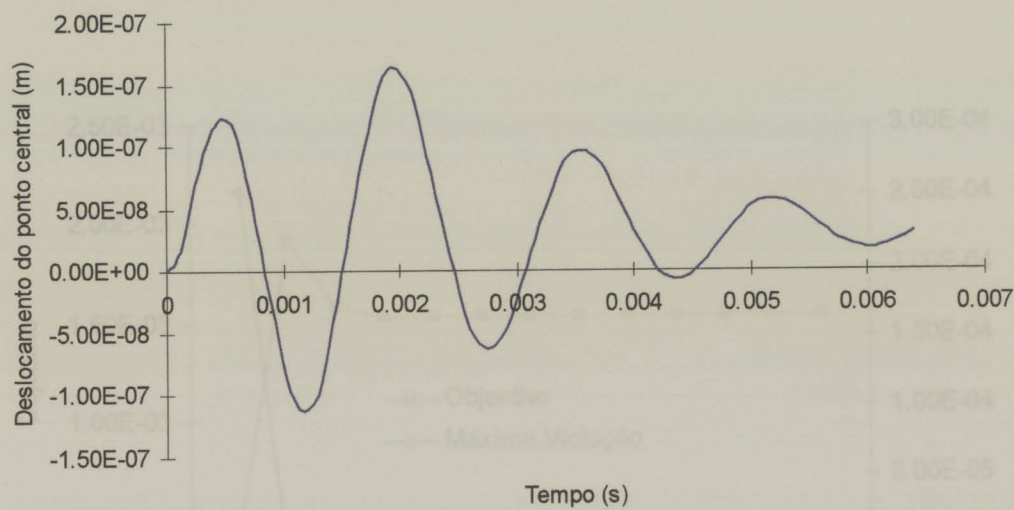


Fig. 8.58 Resposta temporal final do ponto central da placa otimizada.

8.6.2.4 Análise não-linear

A placa é otimizada em termos de espessuras. O deslocamento passa a estar limitado a 0.2×10^{-3} m. O objectivo é o volume.

A placa apresenta inicialmente uma tensão de Von-Mises máxima de 1.901×10^7 Pa e um deslocamento máximo de 2.47×10^{-3} mm. No processo de análise usaram-se 3 incrementos de força para um máximo de 100 iterações.

A tolerância para a força é de $\text{tol}f=1 \times 10^{-5}$.

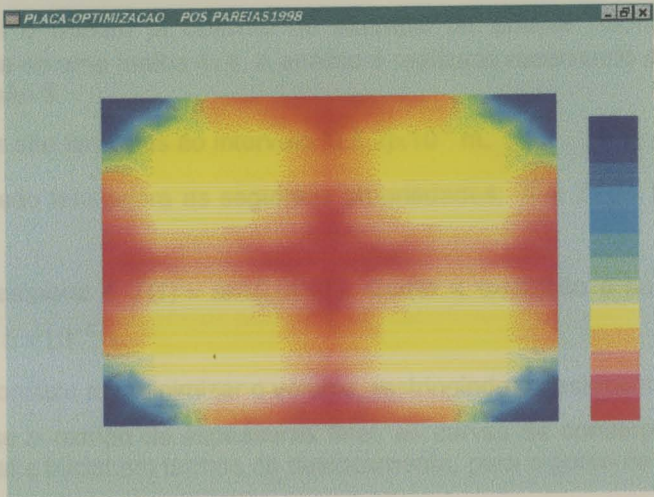


Fig. 8.59 Campo de espessuras otimizado, análise não-linear.

(Máximo: 8×10^{-3} m, Mínimo: 1.8949×10^{-3} m)

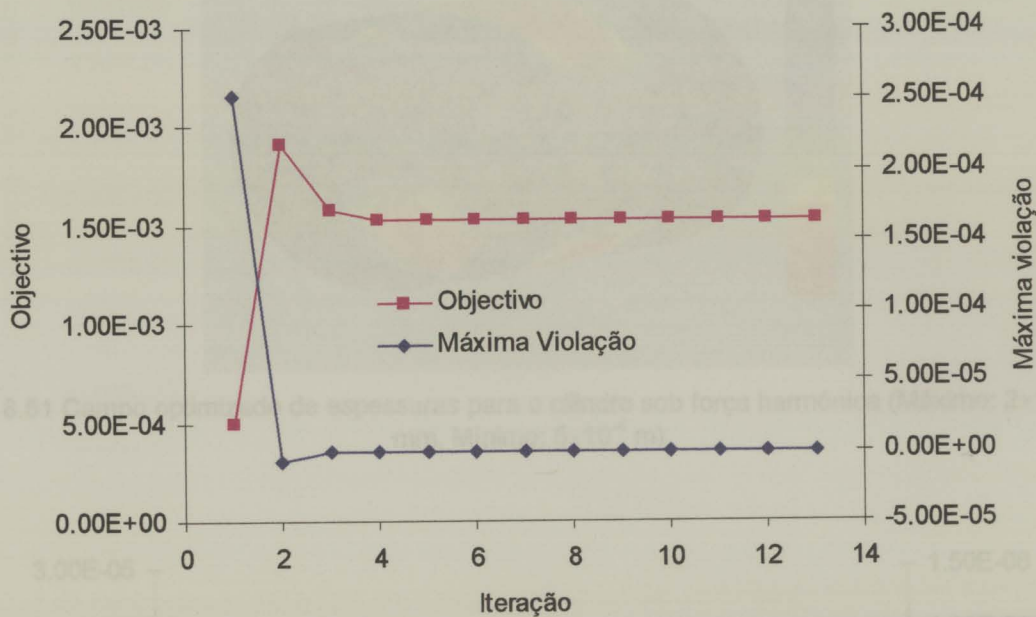


Fig. 8.60 Gráfico de convergência para a otimização da placa recorrendo a análise não-linear.

8.6.3 Cilindro sob forças pontuais harmónicas

Utiliza-se aqui o cilindro já descrito no exemplo de análise não-linear, sujeito a forças pontuais $P=640\text{ N}$. Usa-se uma malha 4×4 . A análise é realizada recorrendo a 100 passos, com uma base modal de dimensão 5.

As espessuras são limitadas ao intervalo $[0.5,2]\times 10^{-3}\text{ m}$.

O material usado tem agora as seguintes propriedades: $E = 210\times 10^9\text{ N/m}^2$, $\nu = 0.3$ e $\rho = 7850\text{ Kg/m}^3$.

A excitação temporal é $f(t) = \text{sen}(1000t)$. Como a excitação é harmónica, impõe-se um passo temporal: $\Delta t = 5\times 10^{-5}\text{ s}$.

O problema consiste em minimizar o volume, restringindo o deslocamento a $0.05\times 10^{-3}\text{ m}$.

Apresentam-se o campo de espessuras final, as curvas de convergência e a comparação entre as respostas final e inicial em termos de deslocamento, para o ponto de aplicação da força.

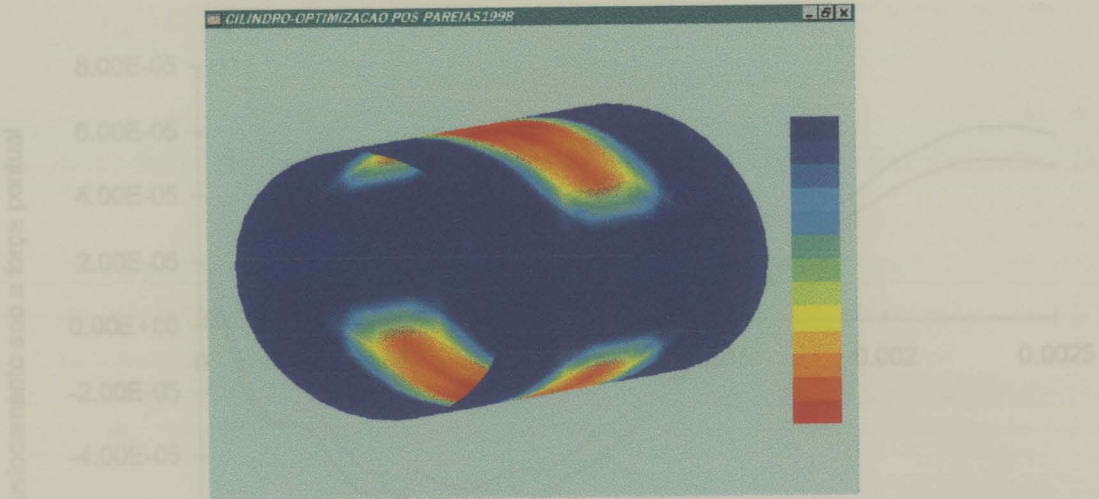


Fig. 8.61 Campo otimizado de espessuras para o cilindro sob força harmônica (Máximo: 2×10^{-3} m mm, Mínimo: 5×10^{-4} m)

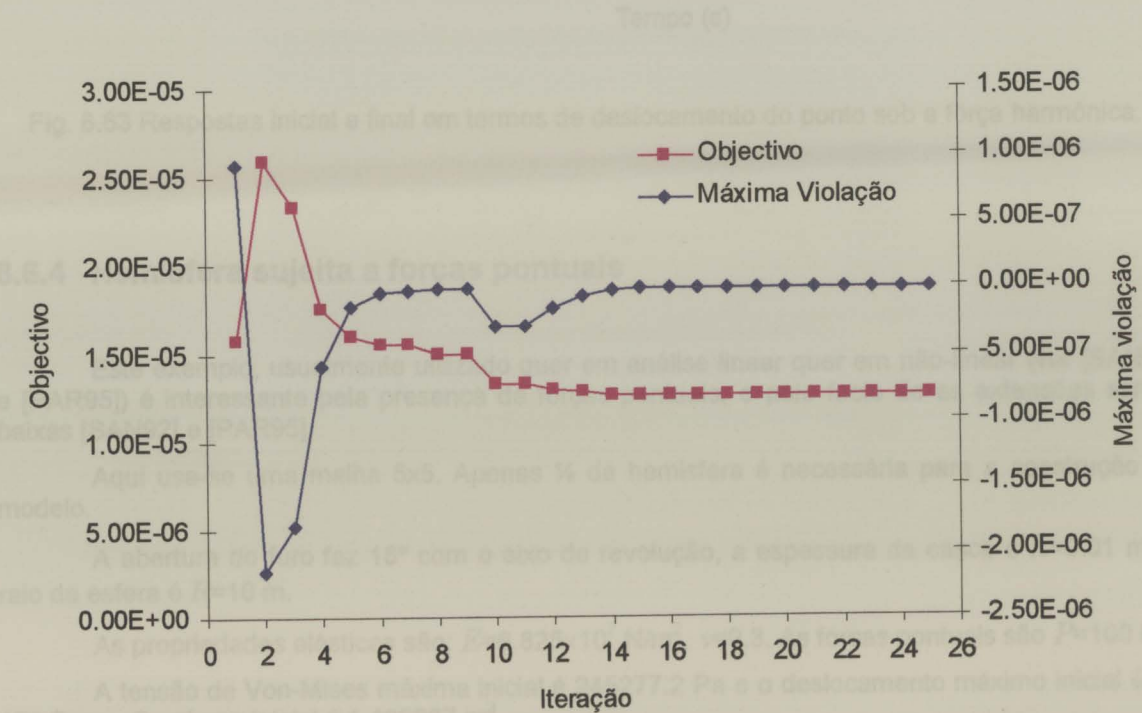


Fig. 8.62 Gráfico de convergência para a otimização do cilindro sob força harmônica.

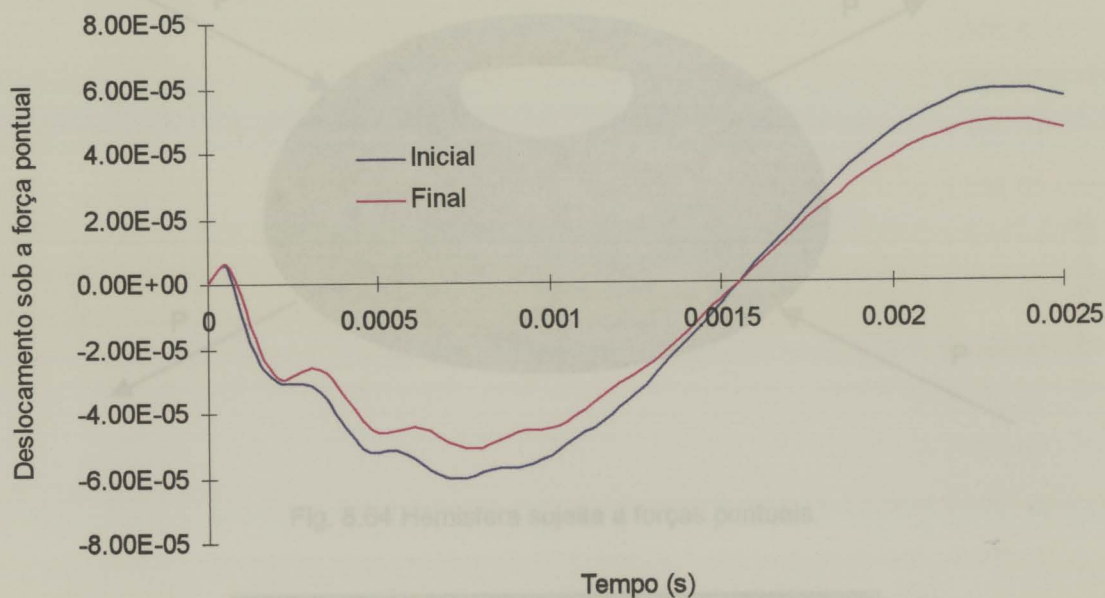


Fig. 8.63 Respostas inicial e final em termos de deslocamento do ponto sob a força harmónica.

8.6.4 Hemisfera sujeita a forças pontuais

Este exemplo, usualmente utilizado quer em análise linear quer em não-linear (ver [SAN92] e [PAR95]) é interessante pela presença de forças pontuais, e pelo facto de as extensões serem baixas [SAN92] e [PAR95].

Aqui usa-se uma malha 5x5. Apenas $\frac{1}{4}$ da hemisfera é necessária para a construção do modelo.

A abertura do furo faz 18° com o eixo de revolução, a espessura da casca é $h=0.01$ m, o raio da esfera é $R=10$ m.

As propriedades elásticas são: $E=6.825 \times 10^7$ N/m², $\nu=0.3$. As forças pontuais são $P=100$ N.

A tensão de Von-Mises máxima inicial é 245277.2 Pa e o deslocamento máximo inicial é de 162.7 mm. O volume inicial é 1.493867 m³.

Pretende-se minimizar o volume, restringindo o deslocamento a 150×10^{-3} m e as variáveis de espessura são restringidas ao intervalo $[0.005, 0.03]$ m.

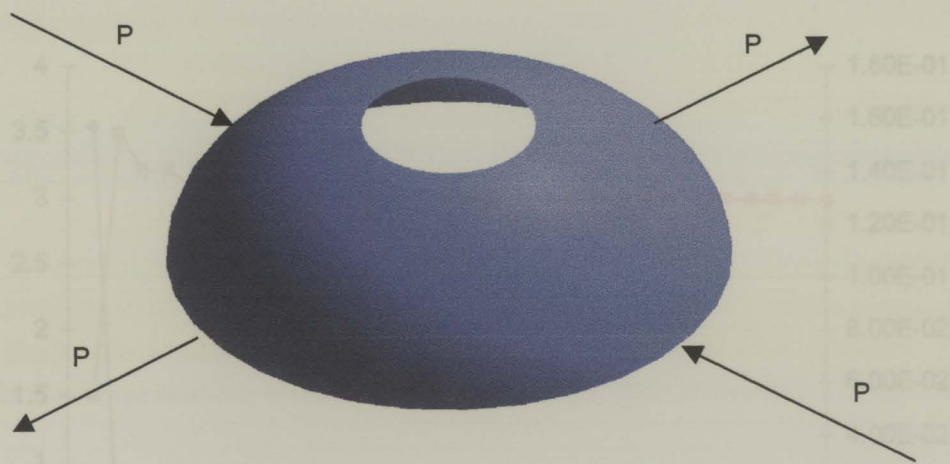


Fig. 8.64 Hemisfera sujeita a forças pontuais.

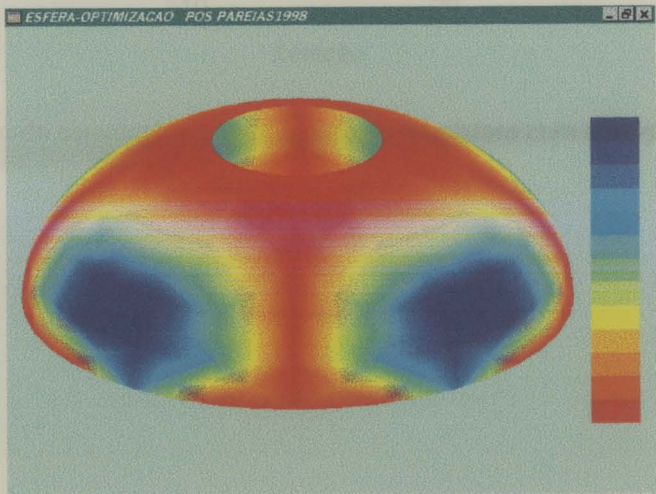


Fig. 8.65 Campo otimizado de espessuras da esfera (Máximo: 30 mm, Mínimo: 5 mm)

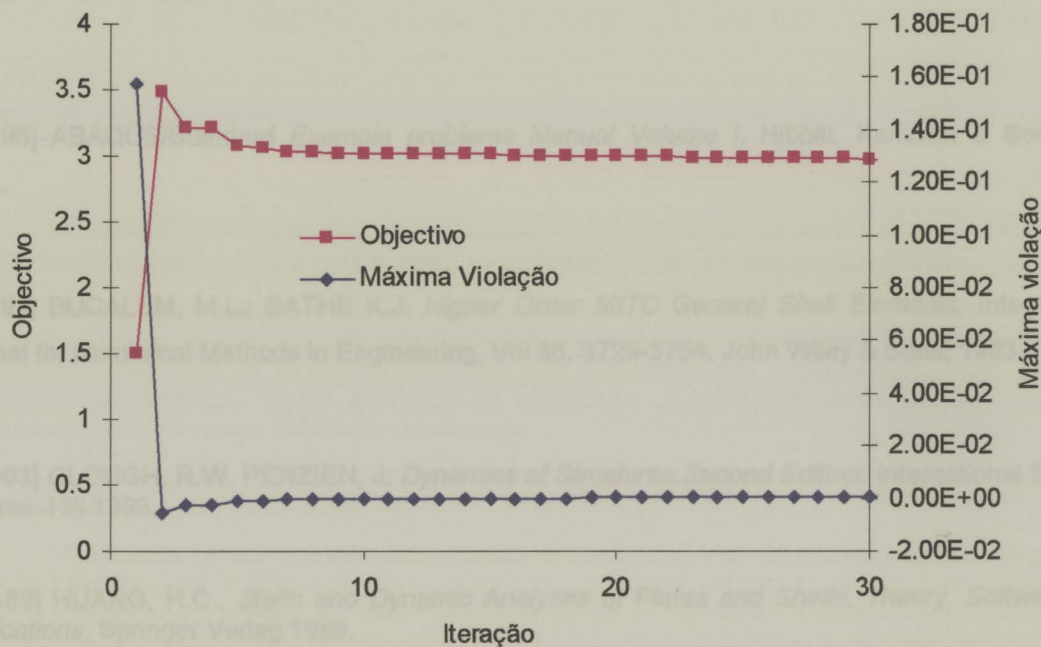


Fig. 8.66 Gráfico de convergência para o caso da hemisfera com restrição de deslocamento.

8.7 Referências

- [ABA96] ABAQUS/Standard *Example problems Manual Volume I*. Hibbitt, Karlsson & Sorensen, 1996.
- [BAT93] BUCALEM, M.L., BATHE K.J. *Higher Order MITC General Shell Elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 36, 3729-3754. John Wiley & Sons, 1993.
- [CLO93] CLOUGH, R.W. PENZIEN, J. *Dynamics of Structures. Second Edition*. International Editions McGraw-Hill 1993.
- [HUA89] HUANG, H.C.. *Static and Dynamic Analyses of Plates and Shells. Theory, Software and Applications*. Springer Verlag 1989.
- [OLI84] OLIVER, J., OÑATE, E. *A Total Lagrangian Formulation for the Geometrically Nonlinear Analysis of Structures using Finite Elements. Part I. Two-dimensional problems: Shell and Plate Structures*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 20, 2253-2281. John Wiley & Sons, 1984.
- [PAR95] PARISH, H. *A continuum-based Shell Theory for Non-Linear Applications*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 38, 1855-1883. John Wiley & Sons, 1995.
- [SAN92] SANSOUR, C., BUFLER, H. *An Exact Finite Rotation Shell Theory, its Mixed Variational Formulation and its Finite Element Implementation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 34, 73-115. John Wiley & Sons, 1992.
- [TIM59] TIMOSHENKO, S. , WOINOWSKY-KRIEGER, S. *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill International Edition 1959.

9 Conclusões e perspectivas de desenvolvimento

9.1 Conclusões

Neste trabalho apresentaram-se algumas técnicas e métodos para a análise estrutural, para a análise de sensibilidade e para a optimização de estruturas do tipo placa e casca.

Como ilustração da utilização dessas técnicas apresentaram-se alguns exemplos de placas e cascas. O trabalho computacional consistiu na implementação de raiz de todas as subrotinas aqui utilizadas. Pelo facto da tarefa de descrição dos procedimentos computacionais ser certamente fastidiosa e complexa, foram descritos os algoritmos e equações utilizados de forma fiel à implementação. O código em si não foi descrito.

Os resultados obtidos pela análise estrutural foram bastante animadores, mesmo em problemas altamente não-lineares.

O tratamento dos grandes deslocamentos e rotações permite analisar alguns casos difíceis em problemas geometricamente não-lineares. Foram completamente descritos os processos de melhoramento dos campos de extensão através da interpolação tensorial e apresentadas as expressões que permitem diminuir o tempo de cálculo, habitualmente elevado, tal como foram implementadas.

Em análise não-linear discutiram-se os algoritmos criados: Newton-Raphson, B.F.G.S. e pesquisa unidireccional.

O método de Newton-Raphson permite analisar problemas pouco lineares. A sua convergência, principalmente usando a pesquisa unidireccional, é realizada em poucas iterações.

O método B.F.G.S. revela-se eficiente em problemas mais lineares e pode apresentar algumas oscilações entre iterações.

Na análise dinâmica, apresentaram-se vários métodos de integração das equações do movimento. Por ter sido necessário, o tema da extracção de frequências e formas naturais foi igualmente discutido. Foi mostrado igualmente o método aproximado de Rayleigh-Ritz.

Para a análise não-linear foi discutido e implementado o método do impulso virtual, baseado na extracção de frequências para o problema linear.

Em termos de integração das equações do movimento foram discutidos os métodos de sobreposição modal clássica, integração directa de Newmark, sobreposição de aceleração e os procedimentos de correcção da resposta modal. Após alguns exemplos, os métodos de sobreposição modal mostram-se muito eficientes, particularmente para intervalos de análise extensos. Além disso, os métodos de sobreposição são muito adequados para a análise de sensibilidade, já que as frequências calculadas na fase de análise estrutural são utilizadas posteriormente na análise das derivadas.

Os geradores de malha implementados revelaram-se também bem sucedidos. O gerador para domínios planos é extremamente robusto e permite criar malhas facilmente em domínios multiplamente conexos de forma eficiente. Para as cascas, o gerador de malhas em superfícies é também muito robusto e pelo facto de calcular automaticamente os vectores normais à superfície e as sensibilidade das coordenadas nodais e dos vectores normais, permite a realização da análise de sensibilidade e optimização de forma.

Na análise de sensibilidade, os resultados foram muito próximos dos obtidos recorrendo à perturbação do problema pelo método das diferenças centrais. O autor realizou a análise de sensibilidade para variáveis de espessura e geométricas, em problemas lineares estáticos, lineares dinâmicos dinâmicos e estáticos não-lineares.

Em termos de elementos de casca degenerados, esta análise aparece como original.

Foi criado também um otimizador baseado no algoritmo da programação quadrática sequencial. Esse otimizador é eficiente e permitiu realizar os exemplos apresentados. Foram implementadas algumas estratégias de melhoramento do algoritmo original, nomeadamente para atenuar as dificuldades de solução no problema quadrático e no cálculo do passo.

9.2 Perspectivas de desenvolvimento

Em termos de desenvolvimento de novos elementos de casca, o conceito de Ahmad [AHM70] não parece ainda esgotado. As ideias de melhoramento desta família de elementos estão ligadas à diminuição do excesso de rigidez apresentado, em particular de *locking* em análise não-linear, e ao aumento de eficiência computacional. No primeiro aspecto, as ideias de Bathe [BAT93] parecem interessantes e foram implementadas.

Existe também a necessidade, ditada pela aplicabilidade prática, de desenvolver elementos de união entre cascas e elementos de ligação entre cascas e sólidos. Por outro lado, a aplicação de leis constitutivas não-lineares é uma imposição para aplicações de conformação plástica e *crash-worthiness*. O desenvolvimento de elementos de contacto para cascas parece também útil na análise de contacto entre as cascas e as ferramentas, etc.

Em termos de procedimentos existe ainda muito a realizar. É importante a implementação de um renumerador de graus de liberdade de forma a reduzir o número de elementos nulos por baixo da banda da matriz de rigidez. Sobre a extracção de frequências, o método de Lanczos [CLO93], [HUG87] é tido como mais rápido do que o método de iteração em subespaços.

Para a análise não-linear, é também necessário o desenvolvimento de estratégias de controlo da carga, como o método do controlo do arco [BAT96].

Na análise de sensibilidades, as estratégias de utilização de bases reduzidas [ZHA97], de reanálise e outros métodos aproximados [VAN84] parecem ser apropriadas para a redução dos custos computacionais.

Na análise dinâmica, a reanálise pode ser realizada facilmente: os vectores de arranque do método de extracção de frequências podem ser os vectores próprios da iteração anterior, o que permite uma redução no número de iterações.

A parametrização geométrica e a modelação sólida também são importantes para se realizar a análise de sensibilidades de sólidos e cascas geometricamente realistas. A integração das tecnologias de CAD com a análise de sensibilidades tomar-se-á previsivelmente importante.

Finalmente, uma palavra sobre as técnicas de optimização. O método utilizado é eficiente e parece lógico continuar a melhorá-lo. Para problemas de grandes dimensões deve ser utilizada uma actualização vectorial da matriz Hessiana e um processo de escala [HUA96]. Os métodos de optimização global que utilizam uma fase local parecem também úteis e merecedores de investigação (ver p.ex. [ELW96]).

9.3 Referências

[AHM70] AHMAD, S. IRONS, B.M. , ZIENKIEWICZ, O.C. *Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 2, 419-451. John Wiley & Sons, 1970.

[BAT93] BUCALEM, M.L., BATHE K.J. *Higher Order MITC General Shell Elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 36, 3729-3754. John Wiley & Sons, 1993.

[BAT96] BATHE, K.J. *Finite Element Procedures*. Prentice-Hall, 1996.

[ELW96] ELWAKEIL, O.A., ARORA, J.S. *Two algorithms for global optimization of general NLP problems*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol 39 pags. 3305-3325 John Wiley & Sons 1996.

[HUA96] HUANG, M-W., ARORA, J.S. *A self-scaling implicit SQP method for large scale structural optimization*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol 39 pags. 1933-1953 John Wiley & Sons 1996.

[VAN84] VANDERPLAATS, G.N. *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design. With applications*. McGraw-Hill 1984.

[ZHA97] ZHANG, J. ANDERSON, W.J. *Exploiting design length scales in structural optimization*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 40, 1465-1482. John Wiley & Sons, 1997.

