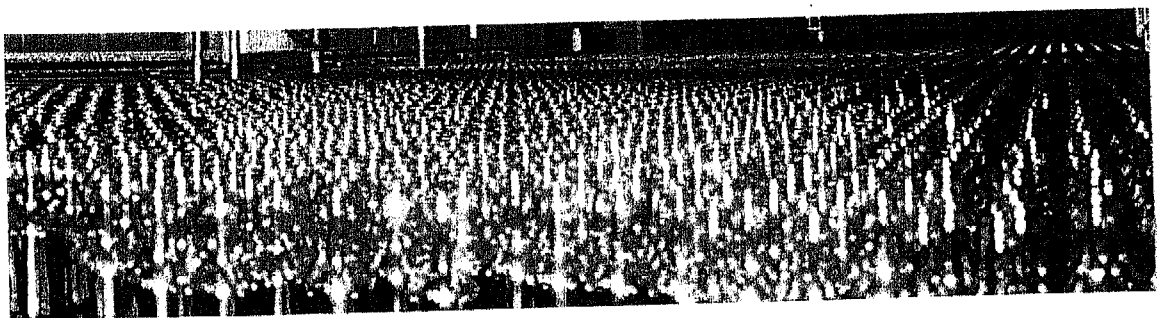


Carla Maria Dias de Aguiar Costa e Silva

**SIMULAÇÃO DE PROCESSOS DE ENFORMAÇÃO DE VIDRO E
CÁLCULO DE TENSÕES TÉRMICAS**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica



Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
Setembro de 1999

The sciences do not try to explain, they hardly even try to interpret, they mainly make models. By a model is meant a mathematical construct which, with the addition of certain verbal interpretations, describes observed phenomena. The justification of such a mathematical construct is solely and precisely that it is expected to work.

John von Neumann

Agradecimentos

Em primeiro lugar desejo exprimir o meu agradecimento ao Prof. Doutor José Manuel de Almeida César de Sá, meu supervisor, pela possibilidade de trabalhar neste projecto de investigação e pelo seu esforço em criar as melhores condições para a concretização deste trabalho. Desejo exprimir-lhe a minha amizade e o meu reconhecimento por todo o apoio, disponibilidade e constante incentivo manifestados durante a preparação deste trabalho.

Ao Prof. Doutor Renato Manuel Natal Jorge pelo seu apoio, amizade, paciência e diálogo mantido durante este trabalho.

A todos os meus colegas e amigos do Laboratório de Computação desejo agradecer o estímulo e o bom ambiente de trabalho proporcionado.

A todas as instituições que me acolheram para a realização deste trabalho, nomeadamente o Centro de Métodos Numéricos e Engenharia Estrutural (CENUME), o Instituto de Engenharia Mecânica (IDMEC), o Instituto de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial (INEGI), e à secção de Mecânica Aplicada do Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial, desejo expressar os meus agradecimentos pelos meios que puseram à minha disposição.

À Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto e ao Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial agradeço as condições e os meios informáticos dispensados, que foram essenciais para a realização deste trabalho de investigação.

À Fabrica de Vidros, Barbosa & Almeida S.A., agradeço a disponibilidade e condições dispensadas, que foram essenciais para a realização deste trabalho.

A todos os meus amigos estou reconhecido pela forma constante como sempre me apoiaram e incentivaram.

Finalmente, aos meus pais, pelo apoio e incentivo com que sempre rodearam o meu percurso académico. Sem o ambiente de estudo proporcionado e o contínuo encorajamento este trabalho não seria possível.

Simulação de Processos de Enformação de Vidro e Cálculo de Tensões Térmicas

por

Carla Maria Dias de Aguiar Costa e Silva

Tese submetida para satisfação dos requisitos do grau de Mestre em Engenharia Mecânica da FEUP e realizada sob a supervisão do
Prof. Doutor José Manuel de Almeida César de Sá

Resumo

A presente tese tem como objectivo principal o desenvolvimento de um conjunto de modelos numéricos importantes para a correcta simulação de processos de enformação de peças em vidro, nomeadamente com processos de regeneração adaptativa e tratamento numérico do contacto entre a peça a enformar e a ferramenta, assim como a determinação do campo de tensões térmicas durante a fase de arrefecimento.

Neste trabalho foi utilizado um modelo viscoelástico não linear, modelo de Maxwell, para traduzir o comportamento do vidro no intervalo de temperaturas correspondentes aos processos de enformação. Desta forma, a deformação total sofrida pelo vidro é decomposta num comportamento elástico e numa deformação correspondente às características viscosas do material. A dependência da viscosidade do vidro com a temperatura é traduzida pela equação de Fulcher.

Os processos de transferência de calor inerentes ao caso estudado, são expostos tendo por base a teoria clássica de transferência de calor. Apresentam-se as equações relativas à aplicação do método dos elementos finitos para o problema de transferência de calor em regime transiente. Descreve-se o modelo termomecânico para processos de enformação do vidro, sendo utilizado no tratamento pelo método dos elementos finitos uma formulação lagrangeana.

Devido a uma acentuada mudança de forma entre o estado inicial e o final foi implementado um processo adaptativo. Para o efeito foi utilizado um gerador automático de quadriláteros e implementado um programa de interface que permite realizar a transferência de variáveis e condições de contorno entre duas malhas consecutivas.

O tratamento numérico do contacto térmico entre dois corpos é realizado considerando-se para o contacto entre o vidro e o molde duas formulações distintas. Uma em que o fluxo de calor na fronteira da peça é prescrito por condições empíricas, e outra, em que o molde é discretizado e o contacto é tido em conta na simulação. Neste caso desenvolveu-se um processo para garantir a condução de calor entre malhas de elementos finitos de nós não coincidentes a partir de uma formulação de penalidade.

A determinação das tensões residuais durante a fase de arrefecimento da garrafa, é um factor determinante na determinação de defeitos nos produtos acabados. As equações gerais para problemas axissimétricos são apresentadas, considerando o vidro com um comportamento elástico.

Com o objectivo de validar os algoritmos termomecânicos, o efeito do processo de regeneração adaptativo, bem como o tratamento numérico do contacto térmico, realizam-se algumas simulações relacionadas com o fabrico de garrafas de vidro.

Simulation of Glass Forming Containers and Thermal Stresses

by

Carla Maria Dias de Aguiar Costa e Silva

Thesis submitted for satisfaction of the requirements for the Master degree in Mechanical Engineering of the FEUP, under the supervision of
Prof. José Manuel de Almeida César de Sá

Abstract

The main objective of the current thesis is the development of numerical models for the simulation of glass containers forming processes with mesh adaptivity, numerical treatment of contact and evaluation of residual stresses during the cooling phase.

In this work, a non-linear viscoelastic model was considered namely the Maxwell model, to express the glass behaviour into the forming processes temperature range. The total strain is separated into elastic and viscous behaviour. The Fulcher equation is used to express relation between the glass viscosity and temperature.

The heat transfer processes considered in the glass forming processes are represented by the heat transfer classical theory. The finite element method is presented for the transient form, as well as the thermomechanical model using a Lagrange formulation.

Due to a big difference between the original and the final shape, the development of the mesh adaptive procedures in this work is done with an automatic quadrilateral elements mesh generator. An interface program allows us to make all the variables and profile shape transfer in two consecutive meshes.

The numerical simulation of contact between two bodies is addressed. Two different cases are treated: the heat flux is prescribed by empirical conditions, and a finite element mesh is applied to the blow mould being the temperature of the glass node in contact estimated by a linear combination of the mould nodes temperature.

The residual stresses of the container during the cooling phase are estimated. The general equations for the axisymmetric problems considering an elastic behaviour for the glass are presented.

Finally, for testing the thermomechanical problem, mesh adaptive procedures, numerical treatment and glass forming simulations are illustrated.

Simulation des Processus de la Conformation du Verre et Calcul des Contraintes Residuelles

par

Carla Maria Dias de Aguiar Costa e Silva

Thèse soutenue pour l'obtention du titre de Maître en Ingénierie Mécanique de la Faculté
de Ingénierie de l'Université do Porto et réalisée sur la direction de
Prof. José Manuel de Almeida César de Sá

Résumé

Le principal objectif de cette thèse est le développement d'un ensemble de modèles numériques pour la simulation du processus de la conformation du verre. En particulier, on développe une procédure de régénération adaptative et des modèles numériques pour le contact thermique entre la pièce à conformer et la matrice et pour la détermination du champ de contraintes thermiques pendant le refroidissement.

Dans ce travail, on a utilisé la formulation viscoélastique non linéaire, le modèle de Maxwell, pour traduire le comportement du verre fonction de la température pendant le processus de formage. La déformation totale du verre peut être décomposée en deux composantes, la déformation élastique et la déformation visqueuse. La relation entre la viscosité du verre et la température est traduite par l'équation de Fulcher.

La modélisation du transfert thermique associé au processus est basée sur la théorie classique du transfert thermique. Les équations du modèle d'éléments finis sont présentées pour le régime instationnaire. Dans la formulation du modèle thermomécanique pour le verre, on a adopté une formulation lagrangienne.

Pour tenir compte des grandes changements de géométrie pendant le processus on a développé une technique de régénération adaptative. Pour cela on a utilisé un générateur automatique et on a développée une interface qui permet la transfert des variables et des conditions aux limites entre deux maillages consécutifs.

Le traitement numérique du contact thermique entre les deux corps et réalisé en considérant le contact entre le verre et la moule par deux formulations différentes. Dans l'une le flux de chaleur aux limites est imposée par des conditions empiriques, tandis que dans l'autre la moule est discretisée et, ainsi donc, le contact est simulé. Dans ce dernier cas, on a développé une procédure pour assurer non coincidents des maillages par une formulation de pénalité.

La détermination des contraintes résiduelles pendant le refroidissement de la bouteille est très important pour l'identification des défauts dans produits finis. Les équations générales pour les problèmes axissymétriques sont présentées en considérant le comportement élastique du verre.

Pour valider les algorithmes thermomécaniques, l'efficacité du processus de régénération adaptative et le traitement numérique du contact thermique, les résultats de quelques simulations de la production de bouteilles en verre sont présentés.

Índice

Simbologia

Capítulo 1 - Introdução

1.1. - Introdução.....	1.1
1.2. - Apresentação da tese.....	1.2
1.3. - Referências.....	1.4

Capítulo 2 - O Vidro- Propriedades e Processos de Enformação

2.1. - Introdução.....	2.1
2.2. - Breve introdução histórica.....	2.2
2.3. - Propriedades mecânicas do vidro.....	2.2
2.3.1. - Variações das propriedades do vidro sob a acção de solicitações estáticas.....	2.3
2.3.2. - Viscosidade.....	2.4
2.3.3. - Relação viscosidade - elasticidade.....	2.6
2.4. - Propriedades térmicas do vidro.....	2.9
2.4.1. - Calor específico.....	2.10
2.4.2. - Difusividade térmica.....	2.11
2.4.3. - Outros factores que influenciam a distribuição de temperatura.....	2.12
2.5. - Processos de enformação de garrafas.....	2.12
2.5.1. - Descrição do processo produtivo.....	2.14
2.6. - Referências.....	2.20

Capítulo 3 - Processos de Transferência de Calor

3.1. - Introdução.....	3.1
3.2. - Noções básicas dos processos de transferência de calor.....	3.2
3.2.1. - Condução.....	3.2
3.2.2. - Convecção.....	3.5
3.2.3. - Radiação.....	3.6
3.3. - Condições iniciais e de fronteira.....	3.7
3.4. - Princípio variacional associado ao problema de transferência de calor.....	3.10
3.5. - Método dos resíduos pesados- Método das funções de peso de Galerkin.....	3.12
3.6. - Método dos elementos finitos.....	3.15
3.6.1. - Matriz de condutividade e vector de cargas.....	3.17
3.6.2. - Domínios axissimétricos.....	3.19
3.7. - Discretização no tempo da equação de transferência de calor.....	3.22
3.7.1. - Aproximação temporal.....	3.23
3.8. - Resolução do sistema de equações pelo método <i>Skyline</i>	3.25
3.9. - Referências.....	3.28

Capítulo 4 - Análise Termomecânica e Cálculo de Tensões Térmicas

4.1. - Introdução.....	4.1
4.2. - Análise variacional.....	4.2
4.2.1. - Aproximação pelo método dos elementos finitos.....	4.4
4.3. - Modelação do contacto com o molde.....	4.8
4.3.1. - Formulação do contacto entre corpos deformáveis.....	4.8
4.3.1.1. - Método dos multiplicadores de Lagrange.....	4.9
4.3.1.2. - Método da função de penalidade.....	4.10
4.3.1.3. - Aspectos práticos de implementação.....	4.11
4.3.2. - Actualização das coordenadas nodais e do intervalo de tempo.....	4.12

4.3.3. - Actualização das condições de fronteira.....	4.14
4.4. - Tensões térmicas.....	4.19
4.4.1. - Problema termoelástico: equações básicas.....	4.19
4.4.1.1. - Tensor das deformações.....	4.19
4.4.1.2. - Tensor das tensões.....	4.20
4.4.1.3. - Relações tensões - deformações.....	4.21
4.4.2. - Formulação alternativa do problema termoelástico.....	4.24
4.5. - Formulação pelo método dos elementos finitos do comportamento termoelástico dos sólidos.....	4.25
4.5.1. - Relações deformações - deslocamentos.....	4.25
4.5.2. - Relações tensões - deformações.....	4.26
4.5.3. - Equações de equilíbrio.....	4.27
4.6. - Referências.....	4.29

Capítulo 5 - Gerador Automático e Transferência de variáveis

5.1. - Introdução.....	5.1
5.2. - Gerador automático de quadriláteros.....	5.2
5.2.1. - Princípio de funcionamento.....	5.2
5.3. - Transferência de variáveis.....	5.5
5.3.1. - Actualização das variáveis de campo.....	5.6
5.3.2. - Atribuição das condições de fronteira.....	5.8
5.3.2.1. - Determinação da fronteira da malha de elementos finitos.....	5.9
5.3.2.2. - Atribuição do código de posicionamento dos nós fronteira.....	5.11
5.3.2.3. - Atribuição das condições de fronteira.....	5.16
5.4. - Referências.....	5.20

Capítulo 6 - Aplicação Prática

6.1. - Introdução.....	6.1
6.2. - Descrição do problema.....	6.2
6.3. - Variação da malha de elementos finitos.....	6.5
6.4. - Campo de temperaturas.....	6.7
6.4.1. - Simulação do processo de formação da garrafa.....	6.7
6.4.1.1. - Comparação de temperaturas.....	6.16
6.4.2. - Campo de temperaturas durante a fase de arrefecimento.....	6.17
6.5. - Campo de tensões residuais.....	6.23
6.5.1. - Comparação de tensões.....	6.28
6.6. - Referências.....	6.29

Capítulo 7 - Conclusões e futuros trabalhos

7.1. – Conclusões.....	7.1
7.2. - Futuros Trabalhos.....	7.2

Símbolos

$\mathbf{b}$	-	Vector das forças de volume
$c = c_p$	-	Calor específico
c_m	-	Calor específico médio
$\mathbf{f}$	-	Vector de de forças na análise termomecânica
$\mathbf{f}^\circ$	-	Vector de cargas térmicas elementar
h_c	-	Coefficiente de transmissão de calor por convecção
h_r	-	Coefficiente de calor por radiação
h_{rc}	-	Coefficiente de transmissão de calor por convecção e (ou) radiação
k	-	Condutividade térmica do material
k'	-	Módulo de expansão volumétrica
k_x, k_y	-	Condutividades térmicas do material segundo as direcções xx e yy
n_x, n_y	-	Cosenos directores do versor normal exterior à superfície
p	-	Pressão hidrostática
q	-	Fluxo de calor gerado por unidade de área e de tempo
$\bar{q}$	-	Fluxo de calor prescrito por parte da fronteira Γ_q
q_{cv}	-	Fluxo de calor gerado por convecção
q_r	-	Fluxo de calor por radiação
q_{rc}	-	Fluxo de calor gerado simultaneamente por convecção e radiação
r	-	Raio, nos problemas axissimétricos
$\mathbf{t}$	-	Vector das forças de superfície
t	-	Tempo
$\mathbf{u}$	-	Vector das velocidades
u_x, u_y	-	Componentes do vector velocidades segundo as direcções xx e yy
u_r, u_z	-	Componentes do vector velocidades segundo as direcções rr e zz
A, B, T_0	-	Constantes empíricas utilizadas na equação de Fulcher
$\mathbf{B}$	-	Matriz de derivadas espaciais das funções de forma

$\mathbf{B}_q$	-	Matriz de derivadas das funções de forma correspondentes à parte térmica do problema
$\mathbf{C}^e$	-	Matriz de capacidade térmica elementar
D	-	Difusividade do material
$\mathbf{D}$	-	Matriz de elasticidade
$\overset{\circ}{\mathbf{D}}$	-	Matriz que relaciona as tensões de desvio com a taxa de deformação na análise termomecânica de problemas viscoelásticos
E	-	Módulo de elasticidade
$\mathbf{F}_t$	-	Forças nodais equivalentes devidas às forças de superfície
$\mathbf{F}_{e^0}$	-	Forças nodais equivalentes devidas às deformações de origem térmica
$\mathbf{F}_{\sigma^0}$	-	Forças nodais equivalentes devidas às tensões iniciais
$\mathbf{F}_b^e$	-	Forças nodais equivalentes devidas às forças de volume
G	-	Módulo de elasticidade transversal
K	-	Condutividade térmica do material
$\mathbf{K}$	-	Matriz de rigidez da análise termomecânica
$\mathbf{K}^e$	-	Matriz de condutividade térmica elementar
$\mathbf{L}$	-	Operador linear
$\mathbf{N}$	-	Matriz das funções de forma
N_m	-	Função de forma, de aproximação ou interpoladora da temperatura
Q	-	Quantidade de calor gerado por unidade de área e de tempo
Q_{cv}	-	Quantidade de calor gerado por convecção
Q_r	-	Quantidade de calor gerado por radiação
R_{Ω}	-	Função resíduo por parte do domínio
R_{Γ_q}	-	Função resíduo na fronteira Γ_q
R_{Γ_r}	-	Função resíduo na fronteira Γ_r
S	-	Tensão de corte
S_{ij}	-	Tensão de desvio

T	-	Campo de temperaturas
T_g	-	Temperatura do nó da malha do vidro que entra em contacto com o molde
$T_{m,1}, T_{m,2}$	-	Temperatura de ambos os nós do elemento do molde onde se verifica o contacto
T_m	-	Temperatura do molde
T_G	-	Temperatura média do vidro
$\bar{T}$	-	Campo de temperaturas na fronteira Γ_T
$\hat{T}$	-	Aproximação do campo de temperaturas no método das funções de peso
T_s	-	Temperatura da parede
T_∞	-	Temperatura do fluido
V_1, V_2	-	Vectores de posicionamento
W_i	-	Função de peso no domínio associada ao nó i
$\bar{W}_i$	-	Função de peso na fronteira associada ao nó i
α	-	Parâmetro que define o esquema de integração no tempo
α'	-	Factor de penalidade
α'' e β''	-	Números reais
α'''	-	Coefficiente de dilatação linear
δ	-	Vector de deslocamentos nodais
ϵ'	-	Emissividade do material
$\dot{\epsilon}$	-	Tensor taxa de deformação
ϵ^0	-	Campo de deformações de origem térmica
$\dot{\epsilon}_{ii}$	-	Taxa de deformação
$\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$	-	Componentes do tensor das deformações
ν	-	Coefficiente de Poisson
η	-	Viscosidade do material
λ, μ	-	Constantes de Lamé
π_e	-	Trabalho realizado pelas forças exteriores
π_i	-	Energia de deformação

θ	-	Ângulo de corte
ϱ	-	Densidade do material
ξ, η	-	Coordenadas locais
Δt_{red}	-	Intervalo de tempo actualizado
σ'	-	Constante de Stefan-Boltzmann
σ	-	Tensor das tensões
σ^0	-	Campo de tensões iniciais
σ_{ii}	-	Tensão hidrostática
σ_m	-	Tensão hidrostática
$\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \tau_{r\theta}, \tau_{rz}, \tau_{z\theta}$	-	Componentes do tensor das tensões
Γ_{cr}	-	Fronteira sujeita às condições de fronteira de convecção e de radiação
Γ_q	-	Fronteira sujeita às condições de fronteira de Neumann
Γ_T	-	Fronteira sujeita às condições de fronteira de Dirichlet
Γ'_q	-	Fronteira sujeita às condições de fronteira de Neumann em problemas axissimétricos
Γ'_h	-	Fronteira sujeita às condições de fronteira de Dirichlet em problemas axissimétricos
Θ	-	Soma das tensões normais

Capítulo 1

Introdução

1.1. INTRODUÇÃO

Durante a história da humanidade, o homem coexistiu com a natureza procurando tirar partido das matérias primas existentes para seu próprio proveito. A sua evolução foi acompanhada por constantes descobertas, quer de diferentes fontes de energia, quer de matérias primas. É neste contexto que o vidro aparece como um material de vastas aplicações.

A evolução inerente aos dias de hoje, caracterizada por uma grande competitividade nas indústrias relacionadas com o fabrico de produtos de vidro, assim como preocupações constantes em manter e melhorar o meio ambiente envolvente, obriga os fabricantes a desenvolverem as técnicas de produção bem como a reciclagem dos produtos. Incluem-se neste grupo de indústrias, os fabricantes de garrafas de vidro. Diferentes formas de novas garrafas, assim como diferentes tipos de vidro, obrigam a várias formas de moldes iniciais. No entanto, outros parâmetros variam, como a quantidade de material e temperatura da gota, diferentes moldes finais, diferentes parâmetros relacionados com o arrefecimento das peças de forma a garantir a fiabilidade dos produtos acabados. Neste contexto, torna-se essencial desenvolver um modelo tido como protótipo virtual, de forma a reduzir os custos quer do projecto de ferramentas quer dos tempos de fabrico.

Com o crescente interesse que a indústria mostra pela análise numérica aplicada aos processos de fabrico, torna-se indispensável desenvolver ferramentas de cálculo que permitam simular um processo industrial de modo a poder ser utilizado com credibilidade na concepção de ferramentas e moldes, e na optimização dos parâmetros industriais de fabrico. Desta forma, e concretamente na simulação do fabrico de garrafas, deve-se dar especial atenção a certos parâmetros determinantes nos processos de fabrico, como a variação da espessura da garrafa e tensões residuais instaladas.

Os processos de enformação de garrafas são considerados problemas termomecânicos, caracterizados pela interacção do problema térmico (traduzido pelos diversos processos de transferência de calor), e pelo problema mecânico, isto é, o fluxo viscoso inerente ao processo de fabrico de garrafas.

Tendo como objectivo a simulação dos processos de enformação de vidro assim como o cálculo das tensões residuais durante a fase de arrefecimento, são apresentados nesta tese um conjunto de definições que permitem descrever o processo em termos do campo de temperaturas e campo de tensões residuais existentes na garrafa após a sua formação.

Como sistema de CAD de base, para a definição da geometria da peça e do molde, foi utilizado o programa CADMEC [1,2] desenvolvido no Laboratório de Computação da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

1.2. APRESENTAÇÃO DA TESE

Neste trabalho simula-se o processo de enformação de garrafas de vidro. Para o efeito utilizou-se o método dos elementos finitos permitindo a obtenção da evolução do campo de temperaturas, bem como do campo de tensões residuais motivado pelo arrefecimento não uniforme da garrafa. A descrição do trabalho realizado encontra-se distribuída nesta tese por cinco capítulos que se passa a descrever sumariamente.

No **capítulo 2**, é feita uma apresentação do vidro como material de fabrico e dos diferentes processos de enformação de garrafas. Numa primeira parte, são apresentadas as diferentes propriedades que caracterizam o vidro nos processos de enformação. Nestas propriedades é feita uma distinção entre propriedades térmicas e propriedades mecânicas do vidro e sua variação com as temperaturas envolventes no processo. Como todo o trabalho se baseia nos processos de enformação de garrafas de vidro, na parte final deste capítulo são apresentados os dois processos de fabrico de garrafas, processo *sopro-sopro* e processo *pressão-sopro*, devidamente ilustrados com fotografias dos processos produtivos.

Estes processos de enformação são caracterizados por elevados gradientes térmicos, o que provoca a existência de processos de transferência de calor entre as peças e os moldes. No **capítulo 3** serão abordados os processos de transferência de calor por condução, convecção e radiação. Após apresentar os processos, são descritas as diferentes condições de fronteira assim como condições iniciais a que um corpo pode estar sujeito nos problemas térmicos. Através da aplicação do método dos resíduos pesados, o problema de transferência de calor é descrito pela formulação do método dos elementos finitos, onde se apresenta a malha inicial utilizada na discretização do *parison*, bem como do molde. Por fim, e visto este tipo de processo de produção se tratar de um processo transiente, isto é, os processos de transferência de calor variam com o tempo, é apresentada a discretização no tempo da equação de transferência de calor que rege todo o processo apresentado.

Para além de conterem elevados gradientes térmicos, estes processos de enformação são caracterizados por elevadas deformações das peças a moldar. Desta forma, e após ter sido apresentado o problema de transferência de calor, torna-se necessário fazer o acoplamento do problema correspondente aos processos de transferência de calor com a determinação dos deslocamentos sofridos pela peça durante o processo. A análise termomecânica é apresentada no **capítulo 4**. A acrescentar à determinação dos deslocamentos da malha de elementos finitos do vidro, torna-se imperioso modelar o contacto do vidro com as paredes interiores do molde. O problema do contacto é descrito

neste capítulo. Considerações cinemáticas entre os dois corpos são realizadas, sendo o contacto entre dois corpos deformáveis simulado. Para o problema de contacto neste trabalho, é apresentada a aproximação de um nó ao molde e a determinação da entidade do molde que vai fazer esse contacto. É descrito o algoritmo que verifica se determinado nó penetrou no molde e se tal acontecer como se procede para se colocar esse nó na superfície do molde. Após ter sido determinada a distribuição de temperaturas a que o vidro está sujeito até à plena formação da garrafa, o objectivo passa a ser a determinação do campo de tensões térmicas instaladas na garrafa durante a fase de arrefecimento, quando esta se encontra extraída do molde. É apresentada uma breve introdução teórica de tensões térmicas tendo como objectivo descrever as equações que regem a determinação de tensões térmicas para problemas axissimétricos. Por fim é apresentada a formulação por elementos finitos para a resolução deste tipo de problema.

Durante estes processos de enformação, as peças encontram-se sujeitas a elevadas variações na sua geometria. Devido à acentuada diferença de geometrias entre o estado inicial do processo (*parison*) e a forma final da garrafa, verifica-se que alguns elementos finitos sofreram elevadas distorções. Este facto pode obrigar a uma regeneração da malha de elementos finitos. O **capítulo 5** apresenta de uma forma sucinta o processo de geração automática da malha de elementos finitos utilizada na regeneração da malha correspondente ao vidro, sendo atribuído particular ênfase à actualização de variáveis bem como à adaptação da geração automática de malhas de elementos finitos no programa de simulação de processos de enformação. Desta forma é apresentado um programa de interface, que após a regeneração da malha, procede à actualização de todas as variáveis de campo assim como atribui as condições de fronteira relativas a deslocamentos prescritos na malha de elementos finitos.

O **capítulo 6** introduz os exemplos numéricos. Três programas são apresentados, baseados nas descrições [3,4] com vista a validar os resultados obtidos. A apresentação dos resultados numéricos encontra-se dividida em dois grupos principais face ao objectivo desta tese: i) apresentação dos campos de temperaturas durante o processo de enformação da garrafa, resultados estes apresentados quer para o vidro quer para o molde, e resultados relativos à fase de arrefecimento para a garrafa; e ii) apresentação das distribuições de tensões durante a fase de arrefecimento da garrafa. De forma a ser possível comparar os valores máximos e mínimos obtidos nos diversos programas tratados, são apresentados gráficos que permitem visualizar estas variações.

Por fim é realizado um resumo do trabalho efectuado, e descrição dos resultados obtidos, assim como conclusões sobre o desenvolvimento de modelos numéricos para a simulação de processos de enformação de peças em vidro, nomeadamente com processos de regeneração adaptativa e tratamento numérico do contacto entre a peça a enformar e o molde. São apresentados em fase final propostas sobre estudos a realizar inseridos neste tema.

1.3. REFERÊNCIAS

- [1] C. M. R. Gomes, Bragança de Oliveira, C. A., J. O. Fonseca, 1988, *Desenho Assistido por Computador em Computadores Pessoais*.
- [2] R. M. Natal Jorge, 1991, *Aplicações de CAD em ambiente X Window. Desenvolvimento de um pré-processador para o método dos elementos finitos.*, Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- [3] J. M. César de Sá, 1986, Numerical Modelling of Glass Forming Processes, *Engineering Computations*, vol. 3, nº 4, December 1986.
- [4] J. M. César de Sá, R. M. Natal Jorge, C. M. C. Silva, 1999, A Computational Model for Glass Container Forming Process, *European Conference on Computational Mechanics Solids, Structures and Couple Problems in Engineering*, Munich, Germany.

Capítulo 2

O Vidro- Propriedades e Processos de Enformação

2.1. INTRODUÇÃO

Face às suas características, o vidro encontra-se nas mais variadas aplicações que vão desde revestimentos artísticos a utensílios tipo reservatórios. No entanto com a evolução científica e tecnológica, verificou-se o aperfeiçoamento quer das técnicas de obtenção de diversos tipos de vidro como evoluções nos seus processos produtivos.

Segundo Iseghem [1], a literatura científica que se refere a processos de enformação em vidro, sendo a maior parte composta por artigos, centra-se no cálculo de tensões residuais em vidros compósitos [2], têmpera de vidro [3] ou garrafas em vidro [4], admitindo para o vidro um comportamento puramente elástico. Existem no entanto, outros estudos mais elaborados, efectuados na simulação de processos de enformação [5-8] e de lâmpadas [9], onde se admite para o vidro um comportamento puramente newtoniano.

Neste capítulo, inicialmente será feita uma breve referência à história do vidro e sua evolução ao longo da humanidade, passando para uma descrição das diferentes propriedades determinantes nos processos de enformação de vidro.

Por fim, serão descritos os diversos processos de enformação para a produção de garrafas.

2.2. BREVE INTRODUÇÃO HISTÓRICA

Historicamente, a primeira utilização do vidro remonta ao Egipto ao ano 12.000 a.C. Nesta época, a aplicação do vidro restringia-se a revestimentos decorativos de diversos utensílios. Os primeiros objectos produzidos com este tipo de material datam do ano 7.000 a.C. Desta forma, o Egipto torna-se o centro da indústria de vidro ao longo da história. A invenção da moldação por sopro, século I a.C., tornou inúmeras as utilizações do vidro, especialmente na construção de vasilhames e mais tarde em janelas. Com a queda do Império Romano, a produção do vidro dispersou-se por toda a Europa. Veneza torna-se então, o maior centro de produção de vidro. O desenvolvimento artístico que caracteriza o Renascimento aumentou o interesse por este material, assistindo-se a um aprofundar das técnicas associadas ao vidro. Assim, verifica-se o aparecimento de um novo vidro, mais transparente e cristalino, designado por cristal. Com a descoberta deste novo vidro, a produção de vidro nesta cidade cresce de uma forma significativa, tornando-se o maior produtor e exportador deste material para toda a Europa até meados do século XVII, onde a sua produção em alta escala começa a espalhar-se por toda a Europa, em especial na Boémia e Reino Unido [10].

Após o ano 1600, o desenvolvimento da indústria vidreira foi muito acentuado. Durante o século XIX, a qualidade do vidro produzido em toda a Europa aumenta significativamente em resposta às necessidades e potencialidades da sociedade industrial. A primeira máquina de moldação por sopro para a produção de garrafas aparece nos finais do século XIX [10].

Em Portugal, o início do processo produtivo do vidro remonta ao ano de 1748 na zona da Marinha Grande. Guilherme Stephens, cidadão britânico, adquire no ano de 1769 a incipiente fábrica de vidro da Marinha Grande onde a transforma num moderno centro vidreiro apetrechado dos mais aperfeiçoados mecanismos [11].

2.3. PROPRIEDADES MECÂNICAS DO VIDRO

O vidro é um dos mais conhecidos materiais de construção. A lista de vantagens é enorme, o que torna o vidro num material de inúmeras aplicações. Podendo ser moldado facilmente, este material possui elevada resistência a ataques químicos, assim como é um excelente isolante térmico. Apesar de ser um material transparente, pode facilmente ser colorido. Uma das suas maiores vantagens é a sua composição: sílica, soda e lima, matérias primas estas fáceis de encontrar na natureza [13].

A sua maior desvantagem é o seu peso (é um material com uma densidade relativamente elevada). A acrescentar a esta desvantagem, os processos de enformação impõem a utilização de temperaturas muito elevadas, o que aumenta a dificuldade de controlar os processos automáticos de enformação do vidro.

2.3.1. Variações das propriedades do vidro sob a acção de solicitações estáticas

A temperaturas elevadas o vidro encontra-se no estado líquido, tornando-se progressivamente sólido à medida que a temperatura a que este se encontra sujeito diminui. Desta forma, todas as propriedades características do vidro variam. A viscosidade, que para valores muito elevados de temperatura, assume baixos valores tornando o vidro num líquido viscoso incompressível, tende a aumentar à medida que a temperatura baixa, até um determinado valor em que o vidro sob o ponto de vista do comportamento mecânico pode ser considerado um material viscoelástico, ou mesmo de uma forma simplificada, ser considerado como um sólido elástico [12].

A figura 2.1. representa o efeito da temperatura quer no módulo de Young como na viscosidade para um vidro típico comercial, $\text{Na}_2\text{O}-\text{CaO}-\text{SiO}_2$ [5,10,12].

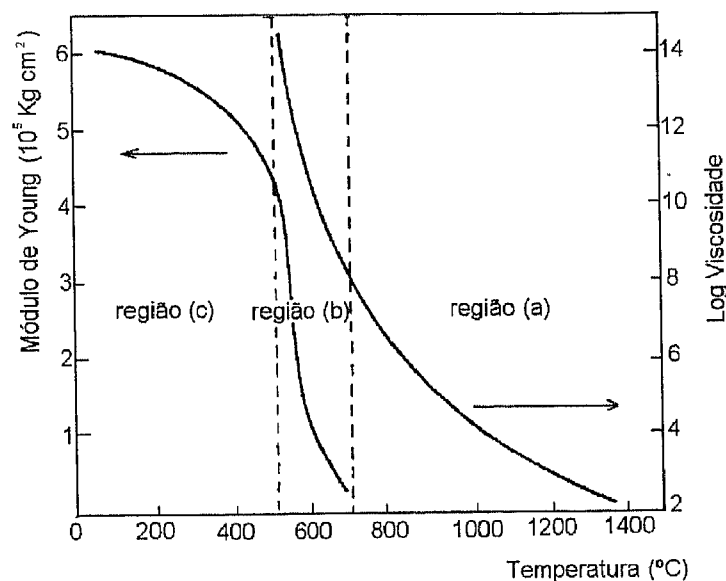


Figura 2.1: Representação de módulo de elasticidade, viscosidade vs. temperatura

Neste gráfico observam-se três regiões distintas:

- região (a) - Caracteriza a zona correspondente a um líquido viscoso, sendo as propriedades elásticas do material praticamente nulas. Nesta região, a viscosidade é dependente apenas da temperatura e dos diversos componentes do vidro.
- região (b) - Região a temperaturas inferiores às temperaturas da região (a), designada por zona de transição. Nesta região, quer a viscosidade como o módulo de elasticidade aumentam de uma forma significativa. O vidro, para estes valores de temperatura, é considerado um material puramente viscoelástico. As suas propriedades dependem, não apenas da temperatura, como da composição e do intervalo de tempo a que o material se encontra sujeito às solicitações.

região (c) - O módulo de elasticidade aumenta de forma significativa com a diminuição de temperatura, enquanto se assiste a uma diminuição drástica da viscosidade do fluido, isto é, o fluxo viscoso diminui drasticamente. Na maioria das aplicações o vidro para esta gama de temperaturas comporta-se como um sólido elástico, em que as suas propriedades dependem apenas da sua composição.

2.3.2. Viscosidade

A viscosidade é a propriedade mais relevante nas processos de enformação de vidro, sendo fortemente dependente da temperatura bem como da composição do vidro.

A viscosidade para uma gama que varia de 10^2 P a 10^{12} P*, é considerada dependente apenas da temperatura e da composição do vidro, e engloba um intervalo de variação de temperaturas de 700 a 1200° C (figura 2.2), enquanto para valores compreendidos entre 10^{12} a 10^{15} P e por vezes mais elevados a viscosidade aparece como uma propriedade dependente do tempo [12].

As condições de equilíbrio entre a estrutura molecular do vidro e a viscosidade são alteradas para valores de temperatura elevados. No entanto, para baixas temperaturas torna-se necessário aguardar algum tempo até serem efectuados os ajustamentos necessários da estrutura de forma a se atingir o equilíbrio do vidro. A viscosidade para o estado perto do equilíbrio é apenas função da composição química do vidro, sendo o seu valor aproximadamente de 10^{12} P [12].

A dependência da viscosidade com a temperatura pode ser expressa pela equação proposta por Fulcher [5,7,10,12]:

$$\log_{10} \eta = A + B/(T - T_0) \quad (2.1)$$

onde,

η - viscosidade

A, B e T_0 – constantes empíricas

A figura 2.2 representa a curva viscosidade - temperatura para um vidro de sílica. Existem dois tipos de viscosidade que geralmente se mede: o primeiro corresponde a dados provenientes do equilíbrio viscosidade - temperatura, enquanto o segundo provém de testes empíricos feitos ao controlo da viscosidade em processos de fabrico [12].



* Medida de viscosidade: P (Poise)
1 P = 0.1 Pa s

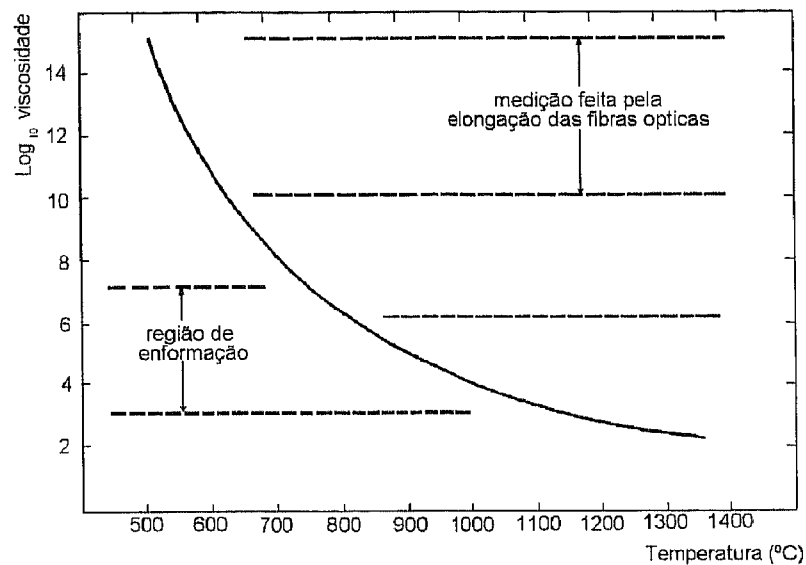


Figura 2.2: Curva viscosidade vs. temperatura para um vidro de sílica [5,12]

Apesar de existirem várias formas empíricas para a obtenção do valor da viscosidade em função da temperatura e composição do vidro [15-20], durante a execução deste trabalho, a equação proposta e utilizada foi a equação acima transcrita, designada por *Equação de Fulcher* [5,7,12], estando na tabela 2.1 os valores das diferentes constantes utilizadas neste trabalho.

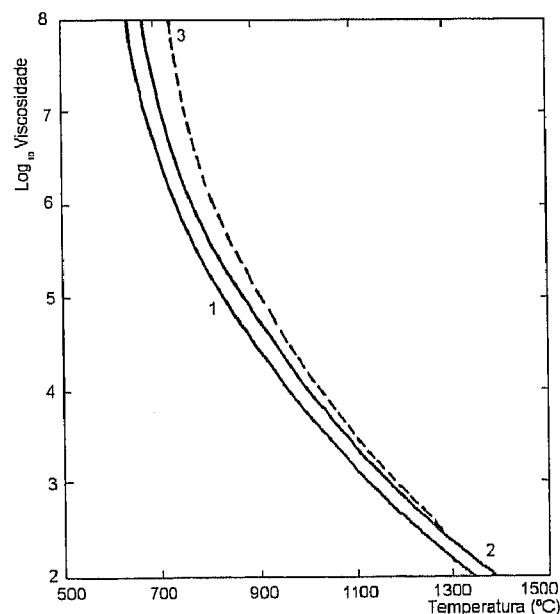


Figura 2.3: Curvas viscosidade - temperatura para três tipos de vidro comercial [5,12]

Nos processos de enformação de vidro, o intervalo de valores de viscosidade de trabalho admissível, varia consoante o tipo de produto. Por exemplo, no caso dos processos de enformação de garrafas, a gama de valores de viscosidade encontra-se compreendida entre os valores $\log 3 \text{ P}$ e $\log 7 \text{ P}$. Desta forma a temperatura envolvida no processo tem de

variar entre o intervalo de temperaturas que correspondem às viscosidades $\log 3 P$ e $\log 7 P$ [12].

Como exemplo, observe-se a figura 2.3, a qual representa três curvas de viscosidade - temperatura para três tipos diferentes de vidro. Apesar do paralelismo entre as curvas 1 e 2 (vidro 1 e vidro 2), para uma mesma temperatura a viscosidade do vidro 2 é superior à viscosidade do vidro 1. Isto quer dizer, que a gama de temperaturas de trabalho do vidro 2 comparativamente ao vidro 1, é mais elevada, isto é, a temperatura envolvida no sistema durante os processos de enformação tem de ser mais elevada [5,12].

Por seu lado, a curva correspondente ao vidro 3 tem um declive mais acentuado que as restantes curvas apresentadas. Para este tipo de vidro as temperaturas envolvidas são substancialmente mais elevadas que nos restantes vidros apresentados.

Tabela 2.1: Parâmetros da *equação de Fulcher*

η = viscosidade (P)
$\log_{10} \eta = A + B/(T - T_0)$
$A = -1.522$
$B = 4350$
$T_0 = 226$

2.3.3. Relação viscosidade - elasticidade

A reacção do vidro a uma determinada tensão e numa determinada gama de temperaturas, consoante as condições em que os ensaios são efectuados, traduz-se ou como um fluido viscoso, ou como um material viscoelástico ou então, como um sólido elástico.

A viscosidade e a elasticidade, sob o ponto de vista do comportamento do material, são para o caso do vidro duas propriedades muito próximas (ver figura 2.4). A aplicação de uma tensão de corte S , a um sólido elástico provoca uma deformação elástica. A deformação de corte é definida como a tangente ao ângulo de corte θ , dependendo ainda do módulo de elasticidade transversal G (equação (2.2)) [12].

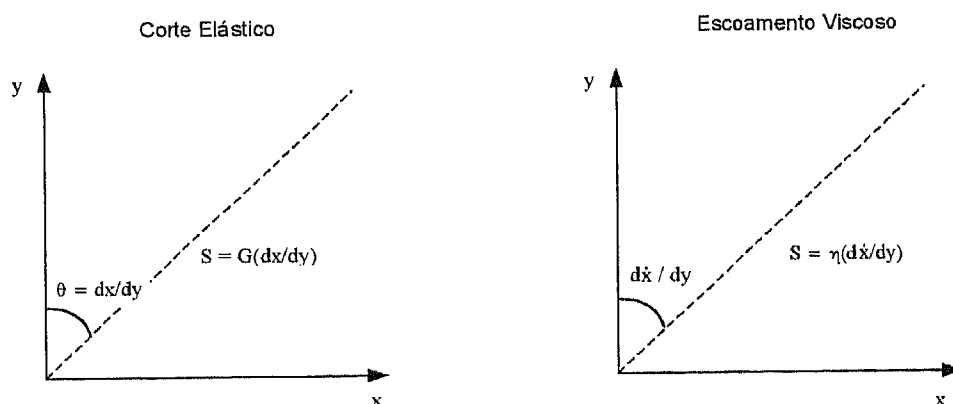


Figura 2.4: Efeito da tensão de corte num sólido elástico e num vidro líquido

$$S = G\theta = G\left(\frac{dx}{dy}\right) \quad (2.2)$$

O fluxo viscoso do vidro resulta da aplicação de uma tensão de corte, estando o vidro a uma temperatura muito elevada. A aplicação da mesma tensão de corte S , a um fluido viscoso, leva ao aparecimento de um fluxo laminar viscoso, cuja amplitude é dependente do valor da viscosidade.

A relação entre tensão de corte e fluxo, pode ser expressa da seguinte forma [12]:

$$S = \eta \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)}{dy} = \eta \frac{d\dot{x}}{dy} \quad (2.3)$$

onde η representa a viscosidade.

A velocidade de deformação é directamente proporcional à carga aplicada. Enquanto o módulo de corte elástico permite determinar a quantidade de deformação provocada por uma tensão aplicada, o módulo viscoso permite determinar a taxa de reacção do material a uma determinada tensão aplicada.

A descrição dos diversos sistemas mecânicos complexos, tem por base a simulação destes a partir de modelos mecânicos simples. O comportamento de um corpo elástico quando sujeito a uma solicitação, é traduzido pela lei de Hooke, definida da seguinte forma:

$$\sigma = E\epsilon \quad (2.4)$$

sendo a mola o elemento representativo do comportamento elástico do corpo (figura 2.5 a).

Um comportamento viscoso, é traduzido pela lei de Newton definida pela equação (2.5), sendo representado sob a forma esquemática como um pistão que se desloca no interior de um cilindro contendo um fluido viscoso (figura 2.5 b).

$$\sigma = \mu \frac{de}{dt} \quad (2.5)$$

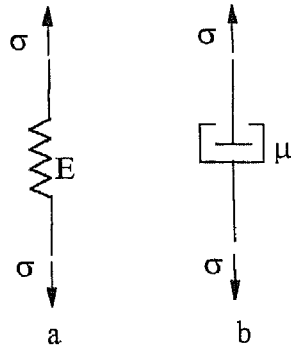


Figura 2.5: Representação esquemática dos elementos elástico (mola) e viscoso (cilindro) [14].

Caso se pretenda representar de forma esquemática a viscoelasticidade, é necessário utilizar estes dois elementos representados na figura 2.5. A viscoelasticidade é caracterizada por um agrupamento do comportamento elástico do material com um comportamento viscoso.

Se se considerar uma associação em paralelo dos dois elementos (figura 2.6 a) representados na figura 2.5, isto é, um elemento elástico e um elemento viscoso, a equação que descreve o comportamento deste sistema, toma a forma [14]:

$$\sigma = E\epsilon + \mu \frac{d\epsilon}{dt} \quad (2.6)$$

em que σ representa as tensões, ϵ as deformações, E o módulo de elasticidade e μ a viscosidade.

À medida que a deformação viscosa aumenta, a tensão também aumenta.

Considere-se uma solitação constante:

$$\sigma = \text{Constante} = \sigma_0 \text{ para } t \geq 0$$

por integração da equação (2.6), obtém-se a seguinte deformação viscoelástica:

$$\epsilon = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 - e^{-\frac{E}{\mu}t} \right) \quad (2.7)$$

Caso o sistema em estudo, seja representado por um conjunto de elementos em série (figura 2.6 b), estamos na presença do Modelo de Maxwell, que sob a forma matemática é representado do seguinte modo [14]:

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\mu} \quad (2.8)$$

Se a resposta do sistema resultar numa tensão constante ($\dot{\sigma} = 0$), este deformar-se-á com uma deformação constante, isto é, estamos na presença de um fluido viscoso. Se for aplicado um impulso de força, automaticamente o sistema desenvolve mais uma componente na resposta correspondente à parte elástica.

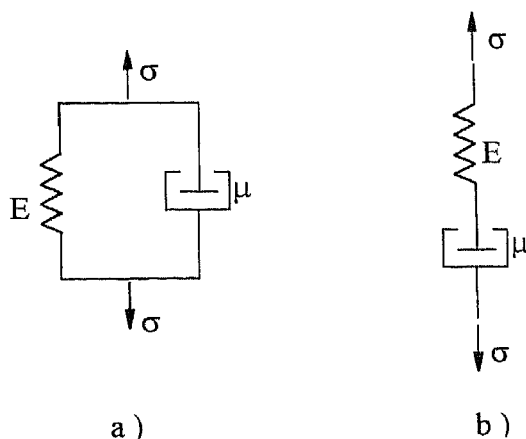


Figura 2.6: Modelos Viscoelásticos

2.4. PROPRIEDADES TÉRMICAS DO VIDRO

O calor pode ser definido como a energia transferida entre dois corpos a diferentes temperaturas. Dependendo das circunstâncias, o calor pode ser transferido por condução, convecção ou radiação, ou ainda por mais do que um processo simultaneamente.

A condutividade térmica, define a quantidade de calor que será transferida por unidade de volume de material sujeito a uma diferença unitária de temperaturas entre faces. O tempo em que se verifica algum processo de transferência de calor é proporcional tanto à condutividade do material, como ao gradiente de temperaturas e à área a partir da qual se faz a transferência de calor. A condutividade do vidro aumenta com a temperatura e é dependente apenas da composição química do vidro, sendo esta propriedade, difícil de determinar experimentalmente [12].

Considerando a lei de Kirchhoff, existe para qualquer substância uma relação entre o calor emitido por radiação e o calor absorvido pelo mesmo processo. Um corpo absorvente ideal, caracterizado pela absorção completa de qualquer comprimento de onda, é designado por corpo negro. Seguindo a lei de Stefan-Boltzmann, a quantidade de calor transferida por radiação entre dois corpos é proporcional às potências à quarta das temperaturas absolutas dos corpos [12].

Os processos de enformação de vidro englobam uma vasta gama de temperaturas. Desta forma, torna-se necessário considerar os processos de transferência de calor desde uma temperatura de aproximadamente 1500°C a 500°C. Como primeira aproximação, pode-se considerar que para o instante em que o vidro se encontra no forno de homogeneização, todo o processo é estacionário. No entanto, quando o vidro passa do

forno de homogeneização para as diversas máquinas de produção de garrafas, o processo torna-se transiente [5].

De uma forma generalizada, pode-se dizer que os processos de transferência de calor por condução, tornam-se predominantes a uma temperatura de cerca de 600°C, quando a garrafa entra em contacto com o molde, pois para temperaturas superiores, verifica-se o aumento dos processos de transferência de calor por convecção e radiação, predominando estes fenómenos sobre o fenómeno da condução [12].

Quando se estuda a transferência de calor em materiais como o vidro, verifica-se que este processo não é apenas afectado pela condução, tendo igualmente um efeito importante, o processo de transferência de calor por radiação, o qual pode mesmo em alguns casos ser relevante como anteriormente referido [5,12]. Esta radiação, quando se trata de materiais semitransparentes altamente absorventes, pode ser tratada como um processo de difusão. Desta forma o processo de transferência de calor por condução, pode englobar igualmente a radiação [5].

2.4.1. Calor específico

O calor específico define a capacidade térmica de um material. Na figura 2.7, pode-se observar a diferença entre o calor específico c e o calor específico médio c_m . O calor específico é definido como a tangente à curva de variação de calor para uma dada temperatura, $c=dH/dT$, onde H representa a entalpia do sistema [12,21]. O calor específico é igual à transferência de calor necessária para haver uma alteração da temperatura desde um determinado valor T para um valor $T\pm 1^\circ\text{C}$. O calor específico médio c_m representa a quantidade de calor necessária para se passar de uma temperatura T_0 para uma temperatura T . Goranson (1942), descreve um método para transformar o calor específico médio em calor específico total para um dado valor constante de pressão, como uma função matemática da temperatura [12].

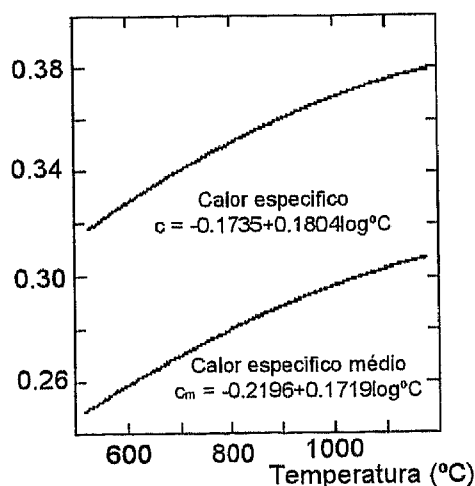


Figura 2.7: Calor específico para um vidro de sílica: $\text{Na}_2\text{O}-\text{CaO}-\text{SiO}_2$ [5,12].

A figura 2.7 representa a variação quer do calor específico médio, quer do calor específico total com a temperatura. Estas curvas, que descrevem o calor específico para todos os tipos de vidro de sílica, podem ser escritas matematicamente sob a forma [5]:

$$c = -0.1735 + 0.1804 \log_{10} (^\circ\text{C}) \quad (2.9)$$

$$c_m = -0.2196 + 0.1719 \log_{10} (^\circ\text{C}) \quad (2.10)$$

Visto o calor específico variar fortemente com a temperatura, torna-se necessário defini-lo em função da composição química do material. Desta forma, Sharp e Ginther (1951) propuseram a seguinte relação [5,12]:

$$c_m = aT + c_0/0.00146T + 1 \quad (2.11)$$

sendo a e c_0 funções da composição química do vidro.

Para um vidro de sílica, a equação (2.11) toma a forma [5,12]:

$$c_m = 0.000468T + 0.1657/0.00146T + 1 \quad (2.12)$$

2.4.2. Difusividade térmica

A difusividade térmica é definida como a razão entre a condutividade térmica do material e o produto da densidade pelo calor específico. Determina a razão com que a temperatura se propaga numa substância condutiva, sendo definida da seguinte forma [3,5]:

$$k = D\rho c \quad (2.13)$$

onde,

- k - condutividade térmica
- ρ - Densidade
- D - Difusividade
- c - calor específico

A transferência de calor a temperaturas elevadas que se verifica nos processos de enformação do vidro, efectuada por condução de calor, é incrementada pela radiação que se verifica durante o processo. Desta forma, a condutividade térmica definida pela equação (2.13), pode ser considerada como condutividade efectiva [12].

Os valores para k , D , c e ρ encontram-se representados na tabela 2.2 para um vidro comercial típico [5].

Tabela 2.2: Dados para o Problema de Transferencia de calor para um vidro comercial
 $\text{Na}_2\text{O}-\text{CaO}-\text{SiO}_2$

Temperatura (°C)	Densidade (g/cm ³)	Calor Específico (cal/g.°C)		Difusividade (cm ² /s)	Condutividade Efectiva [cal/(s)(cm)(°C)]
T	ρ	c_m	c	D	K
500	2.474	0.2445	0.3136	0.007	0.005
700	2.438	0.2695	0.3397	0.015	0.012
900	2.398	0.2882	0.3594	0.030	0.026
1100	2.367	0.3031	0.3751	0.065	0.058
1300	2.344	0.3167	0.3893	0.130	0.119
1400	2.335	0.3264	0.3995	0.200	0.187

2.4.3. Outros factores que influenciam a distribuição de temperatura

A distribuição de temperaturas que afecta de forma tão drástica a viscosidade, logo a forma final do produto, não é apenas função das propriedades térmicas do vidro, como de vários factores presentes nos processos de produção de garrafas [5]:

- A pressão da ferramenta que determina o tempo em que este estará em contacto directo com o vidro,
- a forma do primeiro molde, isto é da pré-forma que determina a forma do *parison*,
- a variação da forma do *parison*, quando após a sua rotação é introduzido no molde final, e por acção da gravidade e da pressão de ar a que está sujeito, aumenta a superfície de contacto com o ar e diminui a espessura do vidro,
- o tempo de contacto com o molde final,
- o valor da pressão de ar,
- as propriedades térmicas do molde, punção e outros elementos constituintes da máquina, etc.

2.5. PROCESSOS DE ENFORMAÇÃO DE GARRAFAS

Face à vasta gama de produtos manufacturados em vidro, utilizam-se vários processos produtivos. Desta forma, os produtos de vidro podem ser produzidos por pressão, sopro, uma combinação de pressão e sopro, por fusão, entre outros [13]. Em todos estes processos, a viscosidade da matéria prima é um factor muito importante, devendo o vidro durante a enformação permanecer num estado de um fluido viscoso.

Quando as máquinas de produção de produtos em vidro têm ciclos muito rápidos, o vidro por vezes não consegue fluir nas condições perfeitas, podendo comportar-se como um sólido elástico, ocorrendo desta forma a fractura [13]. Nestes casos, o coeficiente de expansão térmica toma um papel muito importante. Estas fracturas, aparecem em primeiro lugar na superfície exterior do produto, visto esta arrefecer muito mais rapidamente.

A produção contínua de produtos deve ser adaptada à composição química do vidro no que respeita à temperatura em que este se encontra num estado líquido, às propriedades do fluido viscoso, e à transferência de calor entre o vidro e todos os intervenientes no processo.

Quer ao nível de estudos analíticos como experimentais, os processos de transferência de calor envolvidos nos processos de enformação de vidro, são difíceis de quantificar, essencialmente devido a: i) queda drástica da difusividade efectiva devido à queda de temperatura do vidro, e ii) descontinuidade das propriedades de radiação e condução entre o vidro e os materiais envolventes [13]. Em produtos ociosos, como por exemplo garrafas, a principal troca de calor ocorre entre o vidro, a temperaturas muito elevadas, e o molde que se encontra a temperaturas inferiores.

Na prática, estes problemas são quantificados e controlados durante as operações de produção, através das medições das propriedades térmicas dos materiais envolventes, tempos e temperaturas. Soluções analíticas em termos de equações, são portanto ajudas preciosas para certas partes dos processos produtivos.

O processo de produção de garrafas é dividido em três fases:

- i. produção do vidro a partir da homogeneização dos seus componentes e o seu transporte através de um alimentador,
- ii. formação da garrafa numa máquina de produção de garrafas e
- iii. homogeneização da temperatura das garrafas numa linha de arrefecimento.

Um vidro comercial normalmente é constituído por dióxido de silício (sílica SiO_2), carbonato de sódio (soda Na_2CO_3) e carbonato de cálcio (limão CaCO_3). Antes de se proceder à produção das garrafas estas matérias primas devem ser homogeneizadas em conjunto com o vidro reciclado. Os componentes são inseridos num forno e tornados líquidos por aplicação de calor. Estes fornos são alimentados electricamente ou por queimadores a óleo ou gás. A uma temperatura de aproximadamente 1600°C , os carbonatos são decompostos em óxidos de sódio e cálcio, e dióxido de carbono.

A homogeneização do vidro constitui a fase mais morosa durante o ciclo de formação de garrafas, sendo o tempo total para este processo cerca de vinte e quatro horas. Este tempo é essencial, pois só assim se conseguirá a eliminação total do dióxido de carbono e a homogeneização completa do material.

A produção de garrafas pode ser efectuada segundo dois processos: *sopro-sopro*, *pressão-sopro*. Como os próprios nomes indicam, no primeiro processo é aplicado uma pressão de ar ao material de modo a ser formada uma primeira forma, designada por *parison*, enquanto no segundo caso esta pré-forma é obtida por aplicação de uma pressão exercida por um punção.

O processo estudado durante esta tese, é o processo de enformação por *pressão-sopro*. Este processo é caracterizado por uma melhor distribuição de material na garrafa visto ser mais fácil controlar a forma e distribuição de temperaturas do *parison*.

Na figura 2.8, encontram-se descritas as diversas zonas por que uma garrafa é composta. Estas designações são as usadas de modo corrente em toda a indústria vidreira, daí a preferência na sua utilização.

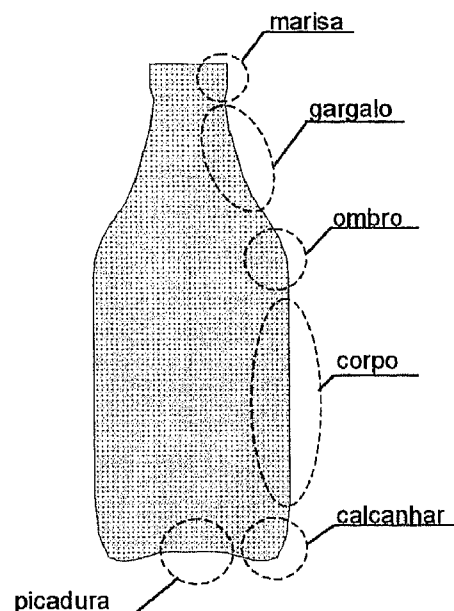


Figura 2.8: Descrição das diversas partes constituintes da garrafa

2.5.1. Descrição do processo produtivo

Neste item, pretende-se descrever todo o processo de produção de garrafas. Apesar de existirem dois processos diferentes, estes serão descritos de forma semelhante sendo as diferenças entre eles descritas de forma sucinta.

O vidro no seu estado líquido é transportado para a máquina de produção de garrafas através de um alimentador (figura 2.9). Quando o vidro atinge o fim do alimentador, a sua temperatura deverá ser corrigida de forma a possibilitar a boa formação da garrafa.

Uma determinada quantidade de vidro, designada por gota, e previamente definida como necessária para formar uma garrafa é separada do restante material proveniente do forno. Este processo é executado por tesouras automáticas, sendo transportado por alimentadores até às máquinas de produção, caindo por gravidade na pré-forma posicionada no interior da máquina. O molde é então fechado, sendo aplicado uma pressão por um punção, de forma a ser moldada a primeira forma da garrafa, o *parison*. Caso o processo produtivo seja o processo *sopro-sopro*, no lugar de uma pressão exercida por um punção, a pressão é aplicada por um sopro de ar. A formação do *parison* é um processo muito rápido, demorando cerca de uma fracção de segundo, sendo executada logo após o fecho do molde. Nas figuras 2.10 a 2.12 encontram-se representados diferentes tipos de moldes iniciais e finais.

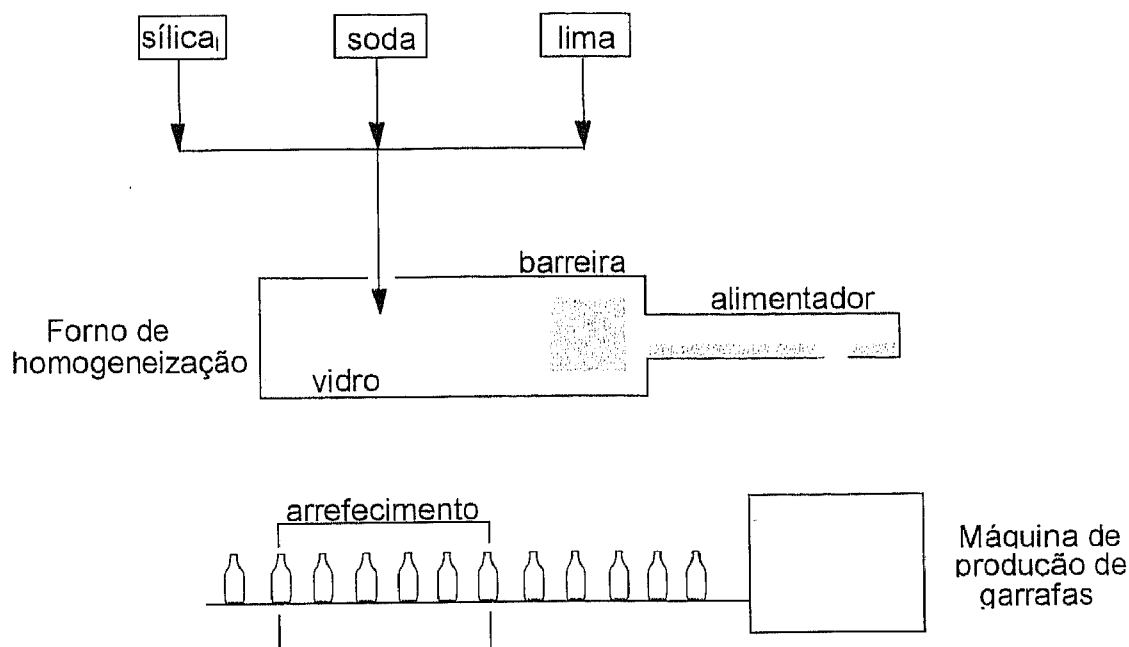
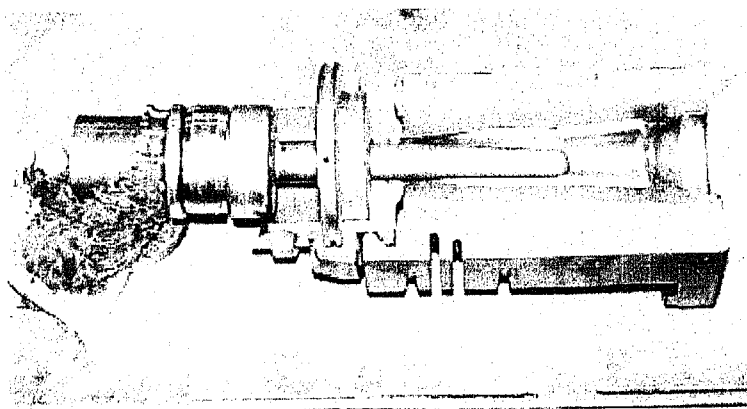


Figura 2.9: Processo de produção de garrafas

Após a formação do *parison*, o punção permanece no interior do molde inicial o tempo necessário até se obter a rigidez suficiente na marisa de modo a permitir a rotação do *parison* do molde inicial para o molde final (figura 2.13).

Figura 2.10: Molde inicial para o processo *pressão-sopro*

O vidro permanece no interior do molde final alguns segundos, sofrendo deformações apenas sob a acção da gravidade, e após este intervalo é aplicada uma pressão de ar comprimido. Antes da aplicação da pressão de ar, o vidro é reaquecido. Este aquecimento é necessário para homogeneizar a temperatura do *parison*.

A viscosidade do vidro em conjunto com a forma do *parison* e intensidade da pressão aplicada, garante no instante de aplicação da pressão, a correcta distribuição do material ao longo da garrafa. Uma viscosidade imprópria assim como uma má formação do *parison*, impossibilita a formação completa da garrafa.

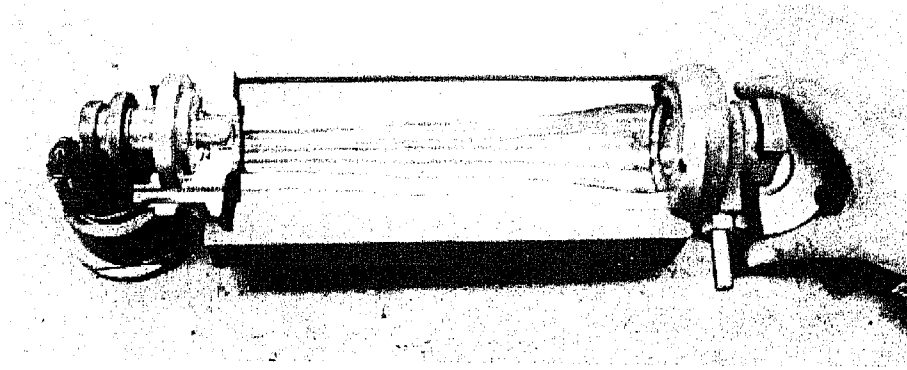


Figura 2.11: Molde inicial para o processo *sopro-sopro*

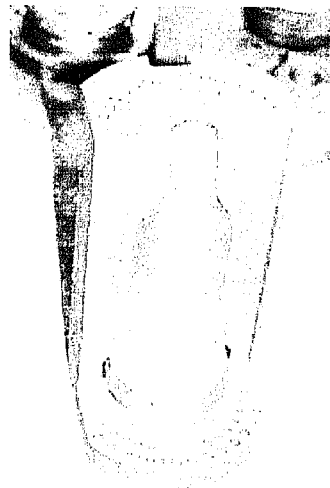


Figura 2.12: Molde final da garrafa

Após a formação da garrafa, esta é extraída do molde final ficando suspensa pelo anel superior. A base da garrafa é arrefecida com ar de forma a garantir que esta não parta, sendo de seguida transportada pela linha de arrefecimento. A garrafa deve ser arrefecida lentamente de forma a evitar o aparecimento de tensões internas no vidro.

O molde final, assim como o punção arrefecem durante alguns segundos até que uma nova quantidade de vidro é reencaminhada para a máquina, possibilitando a formação de uma nova garrafa. Enquanto que, relativamente ao vidro, o processo de transferência de calor é um processo transiente, o mesmo não acontece com o punção e restantes ferramentas da máquina, sendo para estes casos, o processo de transferência de calor considerado um processo cíclico. Caso a temperatura máxima das ferramentas se torne muito elevada durante um ciclo de produção, o risco de danos nestas peças é muito elevado assim como existe a possibilidade da viscosidade ser tão baixa que se verifica a impossibilidade de formação de garrafas.

Na fase de inversão do *parison*, assim como durante as fases de reaquisição, em especial no instante que antecede a aplicação de pressão de ar, os processos de transferência de calor no vidro não são fáceis de controlar.

Devido às elevadas diferenças de temperatura na fase inicial do processo, entre o vidro extraído do alimentador e as ferramentas, a maior quantidade de calor é transferida nesta fase, enquanto que logo após a transferência do *parison* para o molde final, a distribuição de temperaturas é facilmente determinada.

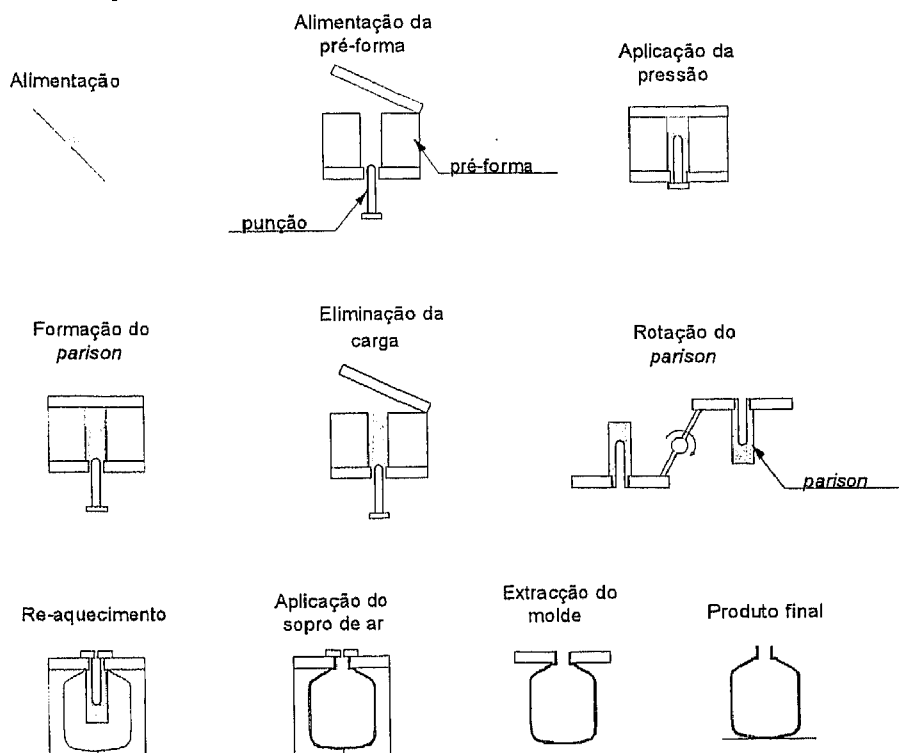


Figura 2.13: Esquema da sequência dos processos de enformação de vidro

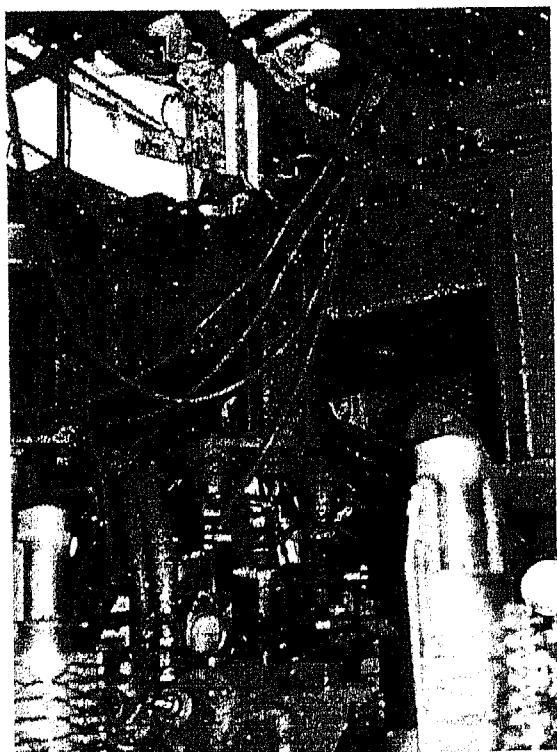


Figura 2.14: Queda da gota de vidro do alimentador para a máquina



Figura 2.15: *Parison* após a sua formação

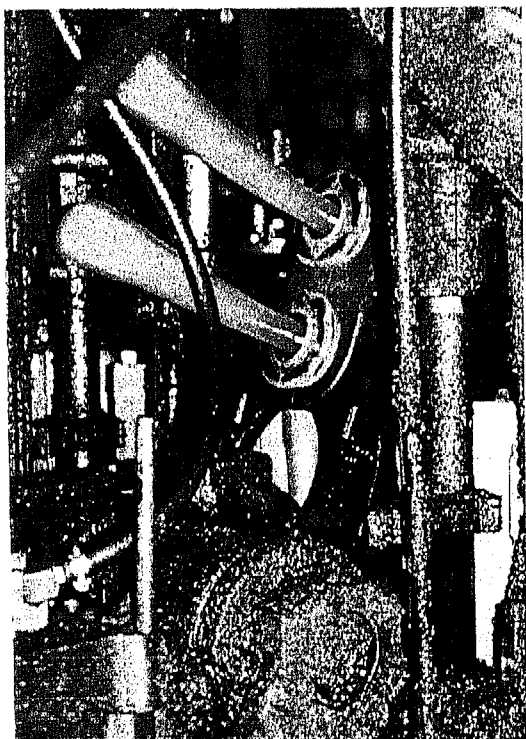


Figura 2.16: Rotação do *parison* da pré-forma para o molde final

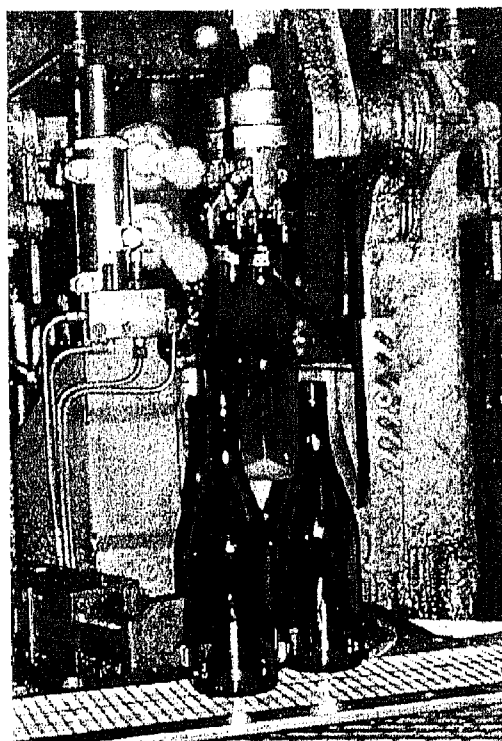


Figura 2.17: Fim do processo produtivo- a garrafa é encaminhada para a linha de arrefecimento



Figura 2.18: Representação do *parison* em conjunto com as garrafas já formadas





Figura 2.19: Vista das garrafas e do *parison* a entrar no molde final



Figura 2.20: Comparação das espessuras das garrafas produzidas por os processos pressão-sopro e *sopro-sopro*

2.6. REFERÊNCIAS

- [1] M. Van Iseghem, L. Fourment, J. F. Agassant, 1998, *Glass/metal Thermo-mechanical Coupling. Application to the Residual Stress Calculation in the Glass Indentation Process*, Simulation of Materials Processing. Theory, Methods and Applications, Huétink &baaijens (eds), Balkema, Rotterdam, ISBN90 54 10 970X, pp. 547-552.
- [2] G. W. Sherer, 1986, *Relaxation in Glass and Composites*, John Wiley and sons, New York.
- [3] H. Carré, 1996, *Etude du Comportement à la Rupture d'un matériau fragile précontraint: le verre trempé*, PhD. At ENPC, France.
- [4] M. J. Crochet, A. Denayer, 1980, Transient and Residual Thermoviscoelastic Stress in Glass, Transaction of the ASME, vol.47, pp. 254-260.
- [5] J. M. César de Sá, 1986, Numerical Modellind of Glass Forming Processes, Engineering Computation, vol.3, pp. 266-275.
- [6] J. M. César de Sá, R. M. Natal Jorge, R. P. R. Cardoso, 1998, Simulation of Hollow Glass Containers, Colloquium on Modelling of Glass Forming Processes, 14-18 October, Vallencienes, France.
- [7] G. Q. Lin, D. R. J. Owen, H. J. Anderson, 1998, Computational Modelling of Glass Container forming Processes, Colloquium on Modelling of Glass Forming Processes, 14-18 October, Vallencienes, France.
- [8] J. M. César de Sá, R. M. Natal Jorge, C. M. C. Silva, 1999, A Computational Model for Glass Container Forming Process, European Conference on Computational Mechanics Solids, Structures and Couple Problems in Engineering, Munich, Germany.
- [9] S. M. Rekhson, Y. Wang, H. P. Wang, 1990, Computer Modelling of Glass Flow in Ribbon Process, Ceramic Eng. Sci. Proc., vol.11, pp. 196-204.
- [10] Michael B. Bever, 1986, *Encyclopedia of Materials Science and Engineering*, vol.3, F-I, Massachusetts Institute of Technology, U.S.A., Pergamon Press.
- [11] *Moderna Enciclopédia Universal*, 1988, vol.18, Circulo de Leitores.
- [12] Clarence L. Babcock, 1977, *Silicate Glass Technology Methods*, John Wiley, New York.

- [13] Karl Storck, 1998, *Thermal System Analysis- Heat Tranfer in Glass Forming and Temperature-control Systems*, Applied Thermodynamics and Fluid Mechanics, department of Mechanical Engineering, Linkoping University, Sweden
- [14] L. M. Kachanov, 1974, *Fundamentals of the Theoty of Plasticity*, Mir Publisher
- [15] Alexander Priven, 1998, Calculation of Viscosity of Oxide Melts, Colloquium on Modelling of Glass Forming Processes, 14-18 October, Vallencienes, France.
- [16] Hans-Jürgen Trossin, 1998, A Phisical Prototype of a Pressing Process, Colloquium on Modelling of Glass Forming Processes, 14-18 October, Vallencienes, France.
- [17] G. Gehlhoff, M. Thomas, 1926, Die Physikalischen Eigenschaften der Glaser in Abhangigkeit von Zusammensetzun. III. Die Viskositat der Glaser, Zs. Technische Physic, 7, N 6, 260-278.
- [18] T. Lakatos, L. G. Johansson, B. Simmingskold, 1979, Investigations on Viscosity-temperature Relations in the Lead Crystal system Containing 24-30% PbO. Part III, Glasteknisk Tidskrift, 34, N 1, pp. 9-10.
- [19] O. V. Mazurin, G. P. Nikolina, M. L. Petrovskaya, 1988, *Calculation of Viscosity of Glasses*, LTI, Leningrad.
- [20] G. Urbain, F. Cambier, M. Deletter, M. R. Anseau, 1981, Viscosity of Silicate Melts, Journal of the British Ceramic Society, 80, pp. 139-141.
- [21] Frank M. White, 1994, *Fluid Mechanics*, 3rd Edition, McGraw-Hill Inc., U.S.A.

Capítulo 3

Processos de Transferência de Calor

3.1. INTRODUÇÃO

Face ao avançar da tecnologia, o estudo dos processos de transferência de calor e transporte de energia tem sido tema de estudo de vários cientistas e engenheiros. Todos os processos físicos envolvem produção e trocas de energia, o que face às necessidades inerentes nos dias de hoje, seja imperioso predizer e otimizar o estudo de como essa energia é transportada e distribuída dentro e através dos materiais. Desde o trabalho pioneiro de Fourier até aos nossos dias, muitos estudos têm sido efectuados, com o objectivo de obter resultados com elevada precisão [1].

Devido às elevadas temperaturas existentes no sistema, os fenómenos fundamentais nos processos de enformação do vidro são a transferência de calor e a alteração da viscosidade do vidro com a temperatura [2].

Neste capítulo serão abordados os processos de transferência de calor por condução, convecção e radiação, sendo dada particular atenção aos processos de transferência de calor por condução e convecção, visto se tratarem dos processos mais relevantes para o caso em estudo. Será ainda apresentado o tratamento deste fenómeno pelo Método dos Elementos Finitos.

3.2. NOÇÕES BÁSICAS DOS PROCESSOS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR

O campo de temperaturas no espaço bidimensional num determinado instante t é especificado por uma distribuição de temperaturas num corpo, isto é, por uma determinada função $T = T(x, y, t)$, sendo (x, y) as coordenadas cartesianas do ponto. Se num determinado domínio existe um gradiente de temperaturas, o calor flui da região a temperatura mais elevada para a região a temperatura mais baixa. Esta transmissão de calor, pode ser definida como a propagação de energia de uma região para outra, provocada pela diferença de temperaturas [3,4].

Existem três tipos fundamentais de transferência de calor [3,5,6]:

- *Condução*, se a transferência de calor ocorre entre micro-partículas de corpos em contacto.
- *Convecção*, caracterizada pela transferência de calor entre duas substâncias em movimento. Este tipo de transferência de calor é observado quando dois ou mais corpos (líquidos ou gases) se encontram em movimento.
- *Radiação*, processo caracterizado pela transferência de energia sob a forma de ondas electromagnéticas.

Na figura 3.1 encontram-se representados os três tipos fundamentais de transferência de calor.

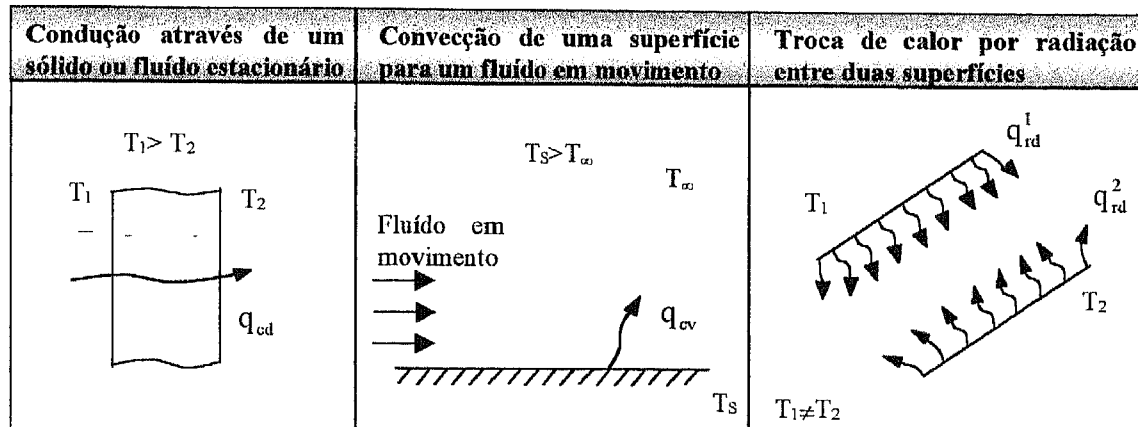


Figura 3.1: Diferentes processos de transferência de calor

3.2.1. Condução

Se o gradiente de temperaturas ocorre num meio estacionário (sólido, líquido ou gasoso), a transferência de calor que se verifica designa-se por condução. Esta forma de transferência de calor, caso se considere mais do que um único corpo, verifica-se quando os diferentes meios estão em contacto.

A condução, sendo caracterizada pela transferência de energia entre moléculas sem apreciável deslocação destas, é tida como uma transmissão de calor por difusão.

A equação que governa o processo de transferência de calor por condução é a *lei de Fourier*, segundo a qual, a quantidade de calor que passa através de uma área A (figura 3.2), cujo versor é normal à direcção do fluxo, por unidade de tempo, é proporcional ao produto da área pelo gradiente térmico. De uma forma matemática, pode ser descrita por [3,6]:

$$Q = kA(T_1 - T_2) \quad (3.1)$$

ou,

$$q = k(T_1 - T_2) \quad (3.2)$$

sendo,

Q : quantidade de calor que atravessa a área A ,

q : fluxo de calor na direcção normal exterior à superfície,

A : área,

k : condutividade térmica do material. Esta propriedade depende da composição química, estado físico e textura do material, bem como da temperatura.

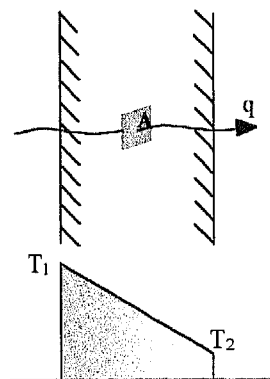


Figura 3.2: Condução de calor num corpo sólido

Como se verifica pela figura 3.2, a temperatura varia linearmente de uma temperatura T_1 para uma temperatura T_2 , isto se a condutividade térmica do material for constante. No entanto, esta variação linear não se verifica, isto é, a condutividade térmica não é constante como por exemplo em regimes de transferência de calor não estacionários ou processos de arrefecimento, onde o fluxo de calor varia localmente e no tempo. Desta forma a diferença de temperaturas existente nas equações anteriores ((3.1) e (3.2)), é substituída pelo diferencial δT , sendo a *lei de Fourier* escrita da seguinte forma [3,6]:

$$Q = -kA \frac{\partial T}{\partial n} \quad (3.3)$$

e o fluxo de calor q ,

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial n} \quad (3.4)$$

O sinal menos (-), indica que o fluxo de calor se processa segundo uma direcção contrária ao gradiente positivo de temperaturas $\partial T / \partial n$.

Considere-se um elemento de volume infinitesimal como o representado na figura 3.3. Se o elemento tiver espessura unitária, o calor gerado num elemento de área $dx dy$ é $Q dx dy$.

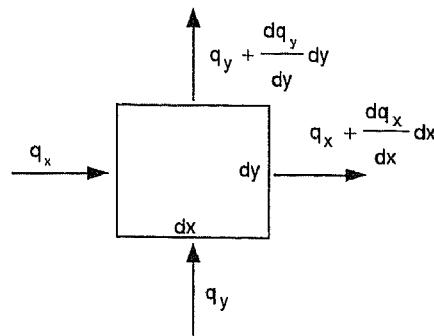


Figura 3.3: Fluxo de calor através dos lados de um elemento infinitesimal

Considere-se o equilíbrio de fluxo de calor entre os diferentes lados que compõe o elemento infinitesimal descrito da seguinte forma:

$$Q dx dy - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dy - \left(\frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) dx = \left(Q - \frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) dx dy \quad (3.5)$$

O fluxo de calor por unidade de tempo designado por energia, é definido por:

$$Q - \frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} = c_Q \dot{T} \quad (3.6)$$

Desta forma, a equação (3.5), escreve-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} + k_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_{xy} \frac{\partial T}{\partial x} + k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + Q = c_Q \dot{T} \quad (3.7)$$

Considerando o material isotrópico, isto é, $k_x = k_y = k$ e $k_{xy} = k_{yx} = 0$, a equação anterior toma a forma:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + Q = c_p \dot{T} \quad (3.8)$$

sendo conhecida na literatura como equação fundamental de transferência de calor [5,6].

3.2.2. Convecção

O processo de transferência de calor por convecção é caracterizado por dois mecanismos. Em conjunto com a transferência de energia provocada pelo movimento de moléculas, é necessário ter em consideração a energia transferida entre partes em movimento de um fluido a diferentes temperaturas. No entanto, a convecção também se verifica entre um fluido em movimento e as paredes sólidas que o limitam, estando estas a temperaturas diferentes [7].

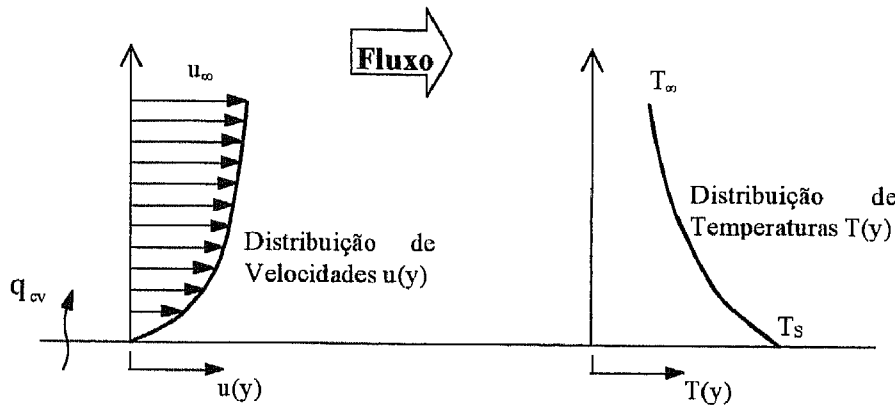


Figura 3.3: Transferência de calor por convecção

Considere-se o fluxo de um fluido através de uma parede aquecida, como ilustrado na figura 3.3. Como consequência da interacção do fluido em movimento com a parede, a velocidade irá variar de zero, na região de interacção com a parede até um valor u_{∞} . Se existe uma diferença de temperaturas entre o fluido e a parede, a temperatura do fluido variará desde uma temperatura T_s para $y = 0$ até uma temperatura T_{∞} . Desde que $T_s > T_{\infty}$, a transferência de calor efectuar-se-á da superfície para o fluido em movimento.

A quantidade de calor por convecção, é dada pela *lei de Arrefecimento de Newton*, a qual pode ser transcrita da seguinte forma [3]:

$$Q_{cv} = h_c A (T_s - T_{\infty}) \quad (3.9)$$

ou,

$$q_{cv} = h_c (T_s - T_{\infty}) \quad (3.10)$$

onde q_{cv} , é o fluxo de calor por convecção, sendo proporcional à diferença de temperaturas da parede e do fluido, T_s e T_∞ respectivamente. O parâmetro h_c , é designado por coeficiente de transmissão de calor por convecção e depende da forma e dimensões da superfície, do tipo de fluido, da diferença de temperaturas entre a parede e o fluido, entre outros factores.

3.2.3. Radiação

Em contraste com os fenómenos de transferência de calor por condução e convecção, onde a transferência de energia implica a existência de um meio material envolvente, na radiação esta transferência de energia é efectuada por ondas electromagnéticas que provocam uma diminuição da energia interna do corpo que a emite. A quantidade de radiação electromagnética emitida resultante da diferença de temperaturas é definida como radiação térmica. Um corpo considerado um radiador perfeito, é o corpo negro, sendo o fluxo máximo (W/m^2) emitido pela superfície, dado pela Lei de Stefan-Boltzmann [3]:

$$q_r = \sigma' T_s^4 \quad (3.11)$$

onde, T_s é a temperatura absoluta (K) da superfície e σ' a constante de Stefan-Boltzmann ($\sigma' = 5.67 \times 10^{-8} W/m^2 K^4$). O fluxo de calor emitido por uma superfície real, será menor que o emitido por um corpo negro, visto este se tratar de um emissor perfeito.

Desta forma, pode-se dizer que o fluxo de calor por radiação será:

$$q_r = \epsilon' \sigma' T_s^4 \quad (3.12)$$

onde ϵ' é designado por emissividade, sendo igual a 1 para os corpos negros. Esta propriedade tem por objectivo indicar a eficiência de radiação de uma superfície quando comparada com os corpos ideais (corpos negros).

Considere-se um caso, que ocorre muito frequentemente, descrito pela figura 3.4. Esta representa duas superfícies S_1 e S_2 , sendo S_1 completamente envolvida por S_2 existindo a separá-las um gás que não tem qualquer efeito sobre a transferência de calor por radiação. A transferência de calor por radiação entre S_1 e S_2 é definida da seguinte forma:

$$Q_r = \epsilon' A \sigma' (T_1^4 - T_2^4) \quad (3.13)$$

e o fluxo,

$$q_r = \epsilon' \sigma' (T_1^4 - T_2^4) \quad (3.14)$$

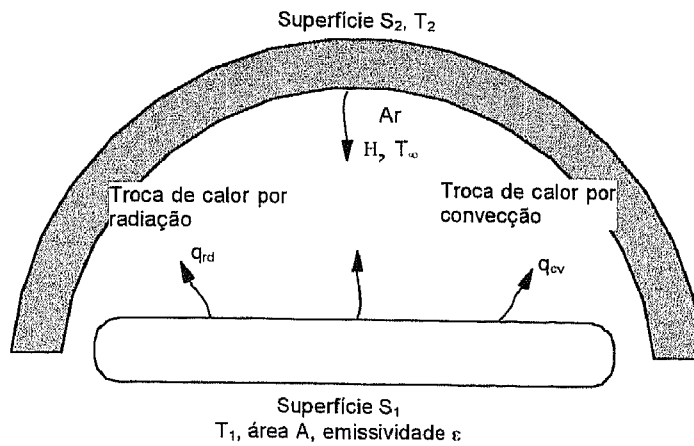


Figura 3.4: Trocas de calor entre uma superfície e o meio envolvente

Tendo em vista o estabelecimento de uma expressão para o fluxo de forma semelhante às obtidas anteriormente para os casos de transferência de calor por condução e convecção, a expressão (3.14), será escrita da seguinte forma:

$$q_r = h_r (T_1 - T_2) \quad (3.15)$$

onde h_r , é o coeficiente de transferência de calor por radiação sendo definido da seguinte forma:

$$h_r = \epsilon' \sigma' (T_1 + T_2)(T_1^2 + T_2^2) \quad (3.16)$$

3.3. CONDIÇÕES INICIAIS E DE FRONTEIRA

Um problema de transferência de calor, traduzido pela sua equação fundamental de transferência de calor, deve satisfazer quer as condições iniciais correspondentes à distribuição de temperaturas para o instante inicial, como as condições de fronteira caracterizadas pela imposição de temperaturas e fluxos em determinadas partes do domínio.

Na presente secção serão apresentadas as várias condições de fronteira a que um problema de transferência de calor poderá estar sujeito.

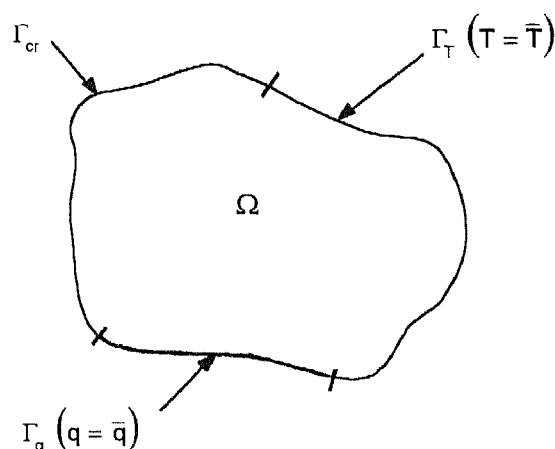


Figura 3.5: Transferência de calor a duas dimensões para um meio contínuo

Na figura 3.5, representam-se as seguintes possíveis condições de fronteira [5,7]:

- i. *Condições de fronteira essenciais* ou *condições de Dirichlet*, caracterizadas por valores de temperaturas prescritos $\bar{T}$ numa determinada parte Γ_T da fronteira:

$$T = \bar{T} \quad \text{em } \Gamma_T \quad (3.17)$$

- ii. *Condições de fronteira naturais*, caracterizadas por um valor de fluxo prescrito numa determinada parte da fronteira.

- Fluxo prescrito $\bar{q}$, numa parte Γ_q da fronteira, designada por *condição de Neumann*. Este fluxo é normal a Γ_q e igual a zero numa superfície termicamente isolada, sendo a condição de fronteira descrita por,

$$q = q_x n_x + q_y n_y = -k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x - k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y = \bar{q} \quad (3.18)$$

onde,

- q_x, q_y : fluxo de calor segundo as direcções x e y dos eixos coordenados;
- k_x, k_y : condutividades térmicas do material segundo x e y;
- n_x, n_y : cosenos directores do versor normal exterior à superfície.

Para o caso de um material isotrópico, como o caso do vidro [5] esta equação escrever-se-á:

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial n} = \bar{q} \quad (3.19)$$

em que n é o versor normal à superfície.

- Condições de fronteira de convecção, caracterizadas por um determinado valor de fluxo de calor por convecção, prescrito numa parte da fronteira Γ_{cr} em contacto com o ambiente. Este tipo de condição de fronteira é designado por *condição de Cauchy* ou *condição mista de Dirichlet e Newmann*, sendo definida por:

$$q_{cv} = -k \frac{\partial T}{\partial n} = h_c (T - T_a) \quad (3.20)$$

onde,

- q_{cv} : fluxo de calor por convecção através da superfície;
- T : temperatura da superfície;
- T_a : temperatura ambiente;
- h_c : coeficiente de transmissão de calor por convecção.

- Fluxo de calor por radiação q_r entre uma parte da fronteira à temperatura absoluta T e a superfície envolvente à temperatura T_∞ . A transferência de calor por radiação é proporcional às potências à quarta das temperaturas absolutas T e T_∞ das superfícies de radiação e absorção respectivamente, sendo expressa da forma matemática por:

$$q_r = -k \frac{\partial T}{\partial n} = \sigma' \epsilon' (T^4 - T_\infty^4) \quad (3.21)$$

onde,

- q_r : fluxo de calor por radiação;
- σ' : constante de Stefan-Boltzmann;
- ϵ' : emissividade.

Desenvolvendo a equação (3.21), obtém-se a seguinte expressão para o valor da transferência de calor por radiação:

$$\begin{aligned} q_r &= -\sigma' \epsilon' (T^4 - T_\infty^4) = \\ &= -\sigma' \epsilon' (T^2 + T_\infty^2)(T^2 - T_\infty^2) = \\ &= -\sigma' \epsilon' (T^2 + T_\infty^2)(T + T_\infty)(T - T_\infty) = \\ &= -h_r (T - T_\infty) \end{aligned} \quad (3.22)$$

em que h_r , designado por coeficiente de transmissão de calor por radiação, vale:

$$h_r = \sigma' \epsilon' (T^2 + T_\infty^2)(T + T_\infty) \quad (3.23)$$

Considere-se um caso particular onde, a transferência de calor se processa simultaneamente por convecção e por radiação, pelo que

$$T_a = T_\infty \quad (3.24)$$

obtem-se:

$$q_{rc} = q_r + q_{cv} = h_{rc}(T - T_a) \quad (3.25)$$

sendo,

$$h_{rc} = h_r + h_c \quad (3.26)$$

h_{rc} é o coeficiente de transmissão de calor por convecção e (ou) por radiação, vindo a condição de fronteira dada por:

$$q_{rc} = h_{rc}(T - T_a) \quad (3.27)$$

Esta condição de fronteira engloba a possibilidade de ocorrência de cada uma das condições de fronteira (3.20) e (3.21) em conjunto ou isoladamente.

3.4. PRINCÍPIO VARIACIONAL ASSOCIADO AO PROBLEMA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR

Certos problemas físicos podem ser descritos através de um princípio variacional que se obtém a partir da minimização de uma função integral designada por funcional. No entanto, a obtenção de uma função que descreva de forma completa os problemas em questão nem sempre é óbvia, daí nem sempre ser possível a aplicação deste princípio para descrever problemas reais.

Existe no entanto, para problemas térmicos um funcional válido para a equação diferencial de transferência de calor em regime estacionário, que a duas dimensões toma a forma [5,6,7]:

$$\Pi(T) = \int_{\Omega} \left[\frac{k_x}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \frac{k_y}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 - QT \right] d\Omega + \int_{\Gamma_q} \bar{q} T d\Gamma_q \quad (3.28)$$

Admitindo o material isotrópico, pelo que se passará a utilizar apenas k , para definir a condutividade térmica do material, Q é o fluxo de calor gerado internamente por unidade de volume. A fronteira que delimita o domínio é definida por: $\Gamma = \Gamma_q + \Gamma_T$

As condições de fronteira definidas pelas equações (3.17) e (3.18), isto é, as condições fronteira essenciais e naturais são impostas da seguinte forma:

Condições Fronteira Essenciais:

$$T = T_0 \quad \text{em } \Gamma_T \quad (3.29)$$

Condições Fronteira Naturais:

$$\bar{q} = -k \frac{\partial T}{\partial n} \quad \text{em } \Gamma_q \quad (3.30)$$

A partir da variação do funcional definido pela equação (3.28) pode ser obtida a equação de transferência de calor descrita anteriormente [6,7]:

Aplicando o princípio variacional à equação (3.28):

$$\delta \Pi(T) = \int_{\Omega} \left[k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} (\delta T) + k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial y} (\delta T) - Q \delta T \right] d\Omega + \int_{\Gamma_q} \bar{q} \delta T d\Gamma = 0 \quad (3.31)$$

Aplicando o *teorema de Green** à equação (3.31), a equação correspondente ao princípio variacional escrever-se-á da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \delta \Pi(T) = & \int_{\Gamma_T + \Gamma_q} k \frac{\partial T}{\partial n} \delta T d\Gamma - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + Q \right] \delta T d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{q} \delta T d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

* Teorema de Green definido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} A \frac{\partial B}{\partial x} dx dy &= - \int_{\Omega} B \frac{\partial A}{\partial x} dx dy + \oint_{\Gamma} A B n_x d\Gamma \\ \int_{\Omega} A \frac{\partial B}{\partial y} dx dy &= - \int_{\Omega} B \frac{\partial A}{\partial y} dx dy + \oint_{\Gamma} A B n_y d\Gamma \end{aligned}$$

onde A e B são funções diferenciais e n_x e n_y são os co-senos directores do versor n normal à fronteira Γ no plano (x, y) .

Deve-se ter em consideração que:

$$n_x \frac{\partial A}{\partial x} + n_y \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial A}{\partial n}$$

Desde que a temperatura seja constante na fronteira Γ_T [6], isto é:

$$\delta T = 0 \text{ em } \Gamma_T \quad (3.33)$$

a equação (3.28) escrever-se-á:

$$\delta \Pi(T) = \int_{\Gamma_q} \left(k \frac{\partial T}{\partial n} + \bar{q} \right) \delta T d\Gamma - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + Q \right] \delta T d\Omega = 0 \quad (3.34)$$

Uma vez que δT é arbitrário em qualquer posição do domínio Ω e fronteira Γ_q :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + Q = 0 \quad (3.35)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial n} + \bar{q} = 0 \quad (3.36)$$

isto é, obtém-se a equação fundamental de transferência de calor considerando o regime estacionário, e a equação representativa das condições de fronteira naturais.

Pode-se então concluir que, é possível minimizar o funcional substituindo desta forma a resolução da *equação de Euler-Lagrange* (equação (3.35)) de forma a obter uma solução para os valores da temperatura, incógnitas do problema, tendo em atenção as condições de fronteira a que o sistema está sujeito [6].

3.5. MÉTODO DOS RESÍDUOS PESADOS- MÉTODO DAS FUNÇÕES DE PESO DE GALERKIN

A solução da equação de transferência de calor, pode ser obtida pela minimização do funcional, método de Ritz, ou a partir da equação diferencial que traduz o problema, método dos resíduos pesados. Tendo em consideração os problemas descritos anteriormente na obtenção de uma equação que traduza o problema, a nossa atenção recai sobre o método dos resíduos pesados cuja descrição englobará problemas transientes como o caso estudado neste trabalho.

Considere-se o problema a duas dimensões definido pela equação relativa à transferência de calor em regime transiente descrita pela equação (3.35) ou equação (3.8) anteriormente definida) à qual será adicionado o termo correspondente ao regime transiente:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + Q = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.37)$$

onde ρ é a massa específica, c_p representa o calor específico e Q o calor gerado internamente por unidade de volume e tempo, e sujeita às condições de fronteira essenciais e naturais descritas pelas equações (3.29) e (3.30) respectivamente.

Primeiramente será definida a função resíduo R_Ω , escrita da seguinte forma [6]:

$$R_\Omega = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \hat{T}}{\partial y} \right) + Q - \rho c_p \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} \quad (3.38)$$

onde $\hat{T}$ representa uma aproximação ao campo de temperaturas, e R_Ω é apenas função da posição do domínio Ω .

Quanto menor for o valor do resíduo, melhor a aproximação. Face a este pressuposto, torna-se necessário fazer tender o valor do resíduo para zero. Considere-se:

$$\int_{\Omega} W_i R_\Omega d\Omega = 0 \quad i=1,2,\dots,M \quad (3.39)$$

sendo W_i funções arbitrárias, designadas por funções de peso e $M \rightarrow \infty$, R_Ω é obrigado a tender para zero como pretendido.

Substituindo (3.38) em (3.39), obtém-se:

$$\int_{\Omega} W_i \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \hat{T}}{\partial y} \right) + Q - \rho c_p \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} \right] d\Omega = 0 \quad (3.40)$$

De forma similar, se forem considerados os resíduos relativos às diversas condições de fronteira [6],

$$R_{\Gamma_q} = k \frac{\partial \hat{T}}{\partial n} + \bar{q} \quad \text{em } \Omega \quad (3.41)$$

$$R_{\Gamma_r} = k \frac{\partial \hat{T}}{\partial n} + h_{cr} (\hat{T} - T_\infty) \quad \text{em } \Gamma_{cr} \quad (3.42)$$

Como referido anteriormente, torna-se necessário minimizar o valor do resíduo:

$$\int_{\Gamma_q} \bar{W}_i R_\Gamma d\Gamma_q = 0 \quad i=1,2,\dots,M \quad (3.43)$$

onde $\bar{W}_i$ são as funções de peso para Γ_q , logo, por substituição,

$$\int_{\Gamma_q} \bar{W}_i \left[k \frac{\partial \hat{T}}{\partial n} + \bar{q} \right] d\Gamma = 0 \quad (3.44)$$

e,

$$\int_{\Gamma_q} \bar{W}_i \left[k \frac{\partial \hat{T}}{\partial n} + \alpha_{re} (\hat{T} - T_\infty) \right] d\Gamma = 0 \quad (3.45)$$

Adicionando (3.44), (3.45) e (3.40):

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} W_i \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \hat{T}}{\partial y} \right) + Q - \rho c_p \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} \right] d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma_q} \bar{W}_i \left[k \frac{\partial \hat{T}}{\partial n} + \bar{q} \right] d\Gamma_q + \\ & + \int_{\Gamma_c} \bar{W}_i \left[k \frac{\partial \hat{T}}{\partial n} + h_{re} (\hat{T} - T_\infty) \right] d\Gamma_c = 0 \end{aligned} \quad (3.46)$$

Aplicando o *teorema de Green*:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial W_i}{\partial x} k \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} + \frac{\partial W_i}{\partial y} k \frac{\partial \hat{T}}{\partial y} \right] d\Omega + \int_{\Omega} W_i Q d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma=\Gamma_q+\Gamma_T+\Gamma_r} k \frac{\partial \hat{T}}{\partial n} \bar{W}_i d\Gamma + \int_{\Gamma_q} \bar{W}_i \left[k \frac{\partial \hat{T}}{\partial n} + \bar{q} \right] d\Gamma_q - \\ & - \int_{\Omega} W_i \rho c_p \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma_{cr}} \bar{W}_i \left(k \frac{\partial \hat{T}}{\partial n} \right) d\Gamma_{cr} + \\ & + \int_{\Gamma_{cr}} \bar{W}_i h_{re} \hat{T} d\Gamma_{cr} - \int_{\Gamma_{cr}} \bar{W}_i h_{re} T_\infty d\Gamma_{cr} = 0 \end{aligned} \quad (3.47)$$

Uma vez que as funções de peso são arbitrárias, pode-se limitar a sua escolha a, [6,8]:

$$\overline{W}_i = -W_i \quad \text{para } \Gamma_q \quad (3.48)$$

Substituindo (3.48) na equação (3.47), obtém-se:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\frac{\partial W_i}{\partial x} k \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} + \frac{\partial W_i}{\partial y} k \frac{\partial \hat{T}}{\partial y} \right] d\Omega - \int_{\Omega} W_i Q d\Omega + \int_{\Gamma_q} W_i \bar{q} d\Gamma - \\ & - \int_{\Gamma_T} W_i \left(k \frac{\partial \hat{T}}{\partial n} \right) d\Gamma_T + \int_{\Omega} W_i \rho c_p \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} d\Omega - \int_{\Gamma_{cr}} W_i h_{rc} T_{\infty} d\Gamma_{cr} + \int_{\Gamma_{cr}} W_i h_{rc} \hat{T} d\Gamma_{cr} = 0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

Assim como no método variacional, a condição fronteira:

$$-k \frac{\partial \hat{T}}{\partial n} = \bar{q} \quad \text{em } \Gamma_q \quad (3.50)$$

elimina a necessidade de calcular o valor $\partial \hat{T} / \partial n$ nas fronteiras, e para o caso particular de $\bar{q} = 0$ estas fronteiras não são consideradas de forma explícita na equação (3.49), daí serem designadas por condições de fronteira naturais [8].

3.6. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O fenómeno de transferência de calor tem, desde há algum tempo, atraído a atenção quer de cientistas como de engenheiros. Face à elevada complexidade na simulação realista de problemas reais caracterizados por geometrias irregulares, comportamentos não lineares dos materiais, condições de fronteira mistas entre outras características, a análise clássica torna-se ineficiente para estes problemas, sendo os métodos numéricos a única alternativa.

As equações (3.35) e (3.49) definidas anteriormente, e que permitem obter o campo de temperaturas, estão definidas para o domínio completo. Uma forma alternativa para a resolução deste problema, consiste em dividir o domínio Ω num número finito de subdomínios designados por *elementos finitos*. A forma destes elementos está, para problemas a 2-D, normalmente restrita a polígonos simples, como triângulos ou quadriláteros. Exemplificando com o problema tratado neste trabalho, a figura 3.6 representa a discretização espacial na fase de arranque quer para o vidro como para o molde. A solução da equação (3.49) é obtida, utilizando-se uma discretização parcial [9-13], na qual o espaço é discretizado primeiro, dando lugar a um sistema de equações diferenciais que posteriormente deve ser integrado no tempo.

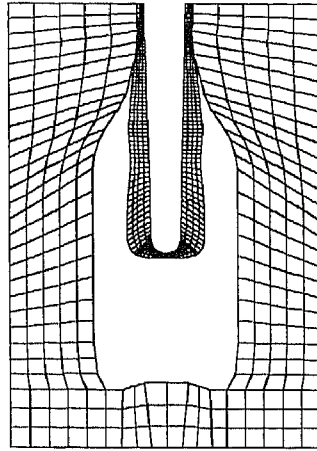


Figura 3.6: Modelação por elementos finitos da garrafa e do molde

Desta forma, o domínio Ω é primeiramente dividido num número finito, de subdomínios (elementos), Ω^e . A função desconhecida, neste caso a temperatura é aproximada no interior da cada elemento, à custa das temperaturas nodais, T_m , em qualquer instante de tempo t , de acordo com,

$$\hat{T}(x, y, t) = \sum_{m=1}^n N_m(x, y) T_m(t) \quad (3.51)$$

e a derivada,

$$\frac{\partial \hat{T}(x, y, t)}{\partial t} = \sum_{m=1}^n N_m(x, y) \frac{dT_m(t)}{dt} = \sum_{m=1}^n N_m(x, y) \dot{T}_m(t) \quad (3.52)$$

onde n é o numero de nós e N_m , é a função de forma associada ao nó m

O passo seguinte é escolher as funções de peso adequadas. O método das funções de peso mais popular é aquele que considera as funções de peso iguais às funções de forma:

$$W_i(x, y) = N_i(x, y) \quad (3.53)$$

Este método, usado pela primeira vez por Galerkin, é designado por Método de Galerkin [6]. Desta forma, e substituindo (3.51) e (3.52) em (3.49), tem-se para cada elemento o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^n \left[\int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial N_l}{\partial x} k \frac{\partial N_m}{\partial x} + \frac{\partial N_l}{\partial y} k \frac{\partial N_m}{\partial y} \right) d\Omega_e \right] T_m + \sum_{m=1}^n \left(\int_{\Gamma_{cr}^e} h_{cr} N_l N_m d\Gamma_h^e \right) T_m - \\
& - \sum_{m=1}^n \left[\int_{\Gamma_T^e} N_l \left(k \frac{\partial N_m}{\partial n} \right) d\Gamma_T^e \right] T_m + \sum_{m=1}^n \left(\int_{\Omega} \rho c_p N_l N_m d\Omega_e \right) \dot{T}_m = \\
& = \int_{\Omega_e} N_l Q d\Omega_e - \int_{\Gamma_q^e} N_l \bar{q} d\Gamma_q^e + \int_{\Gamma_{cr}^e} N_l h_{cr} T_{\infty} d\Gamma_h^e
\end{aligned} \tag{3.54}$$

3.6.1. Matriz de condutividade e vector de cargas

Como definido anteriormente, ao nível de cada elemento finito tem-se a seguinte equação:

$$\int_{\Omega_e} N_l Q d\Omega_e - \int_{\Gamma_q^e} N_l \bar{q} d\Gamma_q^e + \int_{\Gamma_{cr}^e} N_l \alpha_{cr} T_{\infty} d\Gamma_{cr}^e = 0 \quad (l=1,n) \tag{3.55}$$

O segundo termo da equação (3.55) aparece apenas se o elemento em questão se situa na fronteira sujeita às condições de fronteira de Neumann.

A equação (3.55) pode ser escrita sob a forma indicial:

$$K_{lm}^e T_l^e + C_{lm}^e \dot{T}_l^e = f_m^e \tag{3.56}$$

onde [5-8],

$$K_{lm}^e = \int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial N_l^e}{\partial x} k \frac{\partial N_m^e}{\partial x} + \frac{\partial N_l^e}{\partial y} k \frac{\partial N_m^e}{\partial y} \right] d\Omega_e + \int_{\Gamma_h^e} \alpha_{cr} N_l N_m d\Gamma_h^e \tag{3.57}$$

define a matriz de condutividade elementar, e,

$$C_{lm}^e = \int_{\Omega} \rho c_p N_l N_m d\Omega_e \tag{3.58}$$

a matriz de capacidade térmica e,

$$f_1^e = \int_{\Omega_e} N_1^e Q dx dy - \int_{\Gamma_q^e} N_1^e \bar{q} d\Gamma + \int_{\Gamma_h^e} N_1^e \alpha_{cr} T_\infty d\Gamma_h^e \quad (3.59)$$

define o vector de cargas nodais elementares.

Transcrevendo sob a forma matricial o sistema de equações (3.56), obtém-se:

$$\mathbf{K}^e \mathbf{T}^e + \mathbf{C}^e \dot{\mathbf{T}}^e = \mathbf{f}^e \quad (3.60)$$

sendo as respectivas matrizes de condutividade e de capacidade térmica, e vector de cargas (equações (3.57), (3.58) e (3.59)) elementares representadas na forma matricial por:

$$\mathbf{K}_q^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_q^T \mathbf{k} \mathbf{B}_q d\Omega_e + \int_{\Gamma_h^e} \mathbf{N}^T h_{cr} \mathbf{N} d\Gamma_h^e \quad (3.61)$$

$$\mathbf{C}_q^e = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \rho c_p \mathbf{N} d\Omega_e \quad (3.62)$$

$$\mathbf{f}_q^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T Q d\Omega_e - \int_{\Gamma_q^e} \mathbf{N}^T \bar{q} d\Gamma + \int_{\Gamma_h^e} \mathbf{N}^T h_{cr} T_\infty d\Gamma_h^e \quad (3.63)$$

sendo,

$$\mathbf{B}_q = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{array} \right]_{i=1,m} \quad (3.64)$$

a matriz de derivadas das funções de forma, e

$$\mathbf{N} = \left[N_i \mid_{i=1,m} \right] \quad (3.65)$$

as funções de forma.

Considerando o anteriormente citado, conclui-se que a expressão que permite calcular o campo de temperatura no domínio completo se escreve da seguinte forma:

$$\mathbf{K} \mathbf{T} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{T}} = \mathbf{f} \quad (3.66)$$

onde,

$$\mathbf{K}_q = \mathbf{A} \mathbf{K}_q^e \quad (3.67)$$

$$\mathbf{C}_q = \mathbf{A} \mathbf{C}_q^e \quad (3.68)$$

$$\mathbf{f}_q = \mathbf{A} \mathbf{f}_q^e \quad (3.69)$$

Para se obter quer a matriz de condutividade como o vector de cargas total é necessário proceder-se ao agrupamento das matrizes elementares de condutividade e capacidade térmica bem como dos vectores de carga elementares respectivamente.

Se não for considerada a condição de fronteira convectiva definida por (3.20), a matriz de condutividade elementar escrever-se-á da seguinte forma:

$$\mathbf{K}_{lm}^e = \int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial N_l^e}{\partial x} k \frac{\partial N_m^e}{\partial x} + \frac{\partial N_l^e}{\partial y} k \frac{\partial N_m^e}{\partial y} \right] d\Omega_e \quad (3.70)$$

e o vector de cargas nodais elementares:

$$f_l^e = \int_{\Omega_e} N_l^e Q d\Omega_e \quad (3.71)$$

3.6.2. Domínios axissimétricos

Neste item, serão analisados os processos de transferência de calor em problemas axissimétricos. Estes sólidos são definidos por uma rotação de uma secção radial em torno de um eixo central, como representado na figura 3.7.



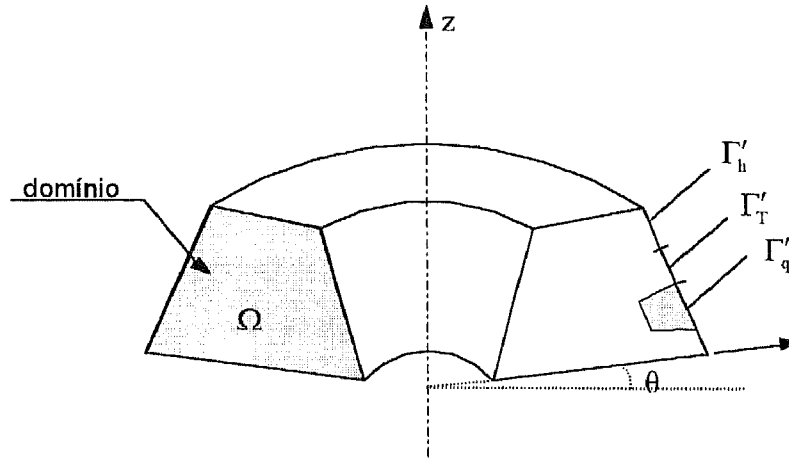


Figura 3.7: Problema Axissimétrico

Considere-se que as condições de fronteira não variam na direcção circunferencial [8], isto é, a solução é independente de θ , a configuração inicial tridimensional reduz-se a um problema a duas dimensões definido no plano das coordenadas, axiais z e radiais r .

Para o caso de problemas axissimétricos em regime transitório a equação de transferência de calor toma a forma:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.72)$$

A discretização da equação (3.72) pode ser feita pelo método dos resíduos pesados previamente definido. No entanto visto se tratar de problemas axissimétricos as integrações devem agora ser feitas sobre as superfícies Γ'_q e Γ'_h e sobre o volume V . Nestas integrações, os elementos de volume dv° e as superfícies $d\Gamma_q^\circ$ e $d\Gamma_h^\circ$ podem ser substituídos por [8,14]:

$$dv^\circ = r d\theta dr dz = r d\theta dr dz \quad (3.73)$$

$$d\Gamma_h^\circ = r d\theta dz \quad (3.74)$$

$$d\Gamma_q^\circ = r d\theta dz \quad (3.75)$$

onde $d\Omega^\circ$ representa um elemento de área e $d\Gamma_q^\circ$ e $d\Gamma_h^\circ$ representam os elementos lineares.

Como anteriormente referido, considerando a solução independente de θ , logo as equações anteriores podem ser escritas:

$$dv^e = 2\pi r d\Omega^e \quad (3.76)$$

$$d\Gamma_h^e = 2\pi r d\Gamma_h^e \quad (3.77)$$

$$d\Gamma_q^e = 2\pi r d\Gamma_h^e \quad (3.78)$$

Para problemas axissimétricos quer as matrizes $\mathbf{K}_q$ e $\mathbf{C}_q$ assim como o vector $\mathbf{f}_q$ previamente definidos pelas equações (3.57), (3.58) e (3.59), são rescritos na a forma indicial por,

$$\mathbf{K}_{lm}^e = \int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial N_l^e}{\partial r} k \frac{\partial N_m^e}{\partial r} + \frac{\partial N_l^e}{\partial z} k \frac{\partial N_m^e}{\partial z} \right] r d\Omega_e + \int_{\Gamma_h^e} \alpha_{cr} N_l N_m r d\Gamma_h^e \quad (3.79)$$

$$\mathbf{C}_{lm}^e = \int_{\Omega} \rho c_p N_l N_m r d\Omega_e \quad (3.80)$$

$$\mathbf{f}_l^e = \int_{\Omega_e} N_l^e Q r d\Omega_e - \int_{\Gamma_q^e} N_l^e \bar{q} r d\Gamma + \int_{\Gamma_h^e} N_l \alpha_{cr} T_{\infty} r d\Gamma_h^e \quad (3.81)$$

ou sob a forma matricial por,

$$\mathbf{K}_q^e = \int_{\Omega_e} (\mathbf{B}_q^T \mathbf{k} \mathbf{B}_q) r d\Omega_e + \int_{\Gamma_h^e} \mathbf{N}^T h_{cr} \mathbf{N} r d\Gamma_h^e \quad (3.82)$$

$$\mathbf{C}_q^e = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \rho c_p \mathbf{N} r d\Omega_e \quad (3.83)$$

$$\mathbf{f}_q^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T Q r d\Omega_e - \int_{\Gamma_q^e} \mathbf{N}^T \bar{q} r d\Gamma + \int_{\Gamma_h^e} \mathbf{N}^T h_{cr} T_{\infty} r d\Gamma_h^e \quad (3.84)$$

sendo neste caso a matriz de derivadas das funções de forma definida por,

$$\mathbf{B}_q = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{array} \right]_{i=1,m} \quad (3.85)$$

A distância radial r , definida nas equações (3.79), (3.80) e (3.81), é definida da seguinte forma:

- para os integrais sobre Ω_e :

$$r = \sum_{i=1}^n N_i r_i \quad (3.86)$$

onde n é o número de nós do elemento e r_i são as coordenadas nodais do elemento

- para os integrais fronteira Γ_h^e e Γ_q^e :

$$r = \sum_{j=1}^m N_j r_j \quad (3.87)$$

em que m representa o número de nós do elemento situados sobre as fronteiras e r_i as coordenadas nodais (radiais) desses nós.

3.7. DISCRETIZAÇÃO NO TEMPO DA EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR

Os problemas mais comuns em processos de transferência de calor são caracterizados por variações da temperatura com o decorrer do tempo. Estes problemas são designados por problemas transientes, em contraste com aqueles cuja temperatura nos diversos pontos constituintes do domínio se mantem inalterável com o tempo, designados por problemas estacionários. As equações desenvolvidas nos pontos anteriores deste capítulo descrevem a equação de transferência de calor não considerando a variação da temperatura com o tempo.

Considere-se a equação de transferência de calor definida para o domínio completo Ω :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial t} \right) \right] = Q \quad \text{em } \Omega \quad (3.88)$$

Pretende-se analisar esta equação tendo em consideração as condições de fronteira dadas pelas equações (3.17) e (3.18), e a condição inicial de temperatura:

$$T(\mathbf{x}, t = 0) = T_0(\mathbf{x}) \quad (3.89)$$

A obtenção da solução numérica da equação (3.88), envolve dois passos diferentes de aproximação. O primeiro passo, corresponde a discretização espacial da equação, tratado em secções anteriores, enquanto que o segundo passo corresponde à discretização temporal utilizando o Método das Diferenças Finitas [9-13,15-21].

3.7.1. Aproximação temporal

O conjunto de equações definido em (3.66) deve ser integrado no tempo de forma a ser possível a resposta transiente do sistema em estudo. No entanto, tal procedimento nem sempre é possível, sendo necessário proceder-se a uma aproximação no tempo para se obter um conjunto de equações em termos dos valores nodais da temperatura. Em princípio, é possível utilizar-se qualquer dos métodos correntes para a obtenção a solução do sistema de equações diferenciais. No entanto, face a considerações práticas, como os custos computacionais, ditam que apenas se deve considerar os métodos de integração simples [6].

Considere-se a equação (3.66), representativa de um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem [6,7,22], escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{KT} + \mathbf{CT} = \mathbf{f} \quad (3.90)$$

Adoptando uma discretização no tempo pelo método das diferenças finitas, considere-se as seguintes hipóteses:

- as equações (3.90) são apenas satisfeitas em pontos discretos ($t_{n+\alpha}$) de cada intervalo de tempo Δt (figura 3.8),
- visto o sistema envolver apenas derivadas de primeira ordem, considere-se que as temperaturas variam linearmente ao longo do intervalo de tempo Δt .

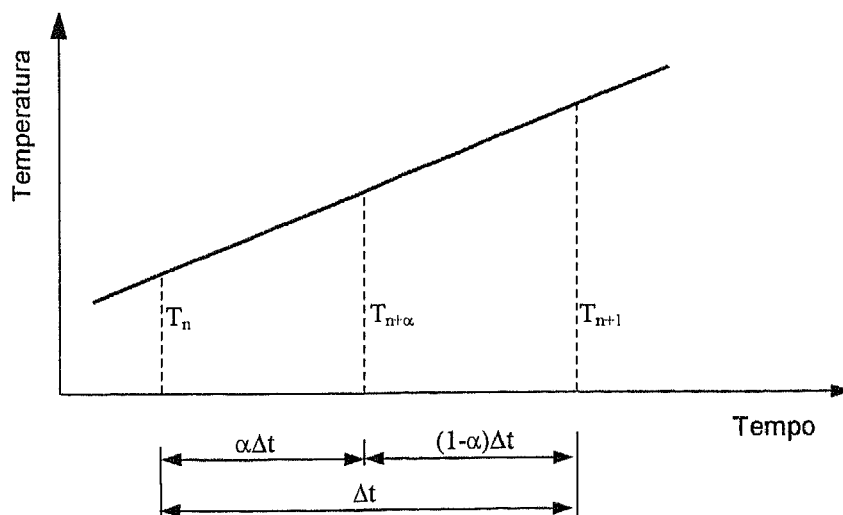


Figura 3.8: Variação da temperatura ao longo do intervalo de tempo Δt

Considere-se o valor da temperatura $T_{n+\alpha}$ para o instante $t_{n+\alpha} = t_n + \alpha\Delta t$ definido da seguinte forma [8]:

$$T_{n+\alpha} = T_n + \alpha(T_{n+1} - T_n), \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (3.91)$$

$$n \in [0, 1, 2, \dots, N-1]$$

onde α é o parâmetro que define, para cada intervalo de tempo, o instante em que as equações (3.91) devem ser satisfeitas.

De acordo com a hipótese ii. a derivada da temperatura em ordem ao tempo é constante dentro de cada intervalo de tempo, sendo definida por,

$$\dot{T}_{n+\alpha} = \frac{T_{n+1} - T_n}{\Delta t} \quad (3.92)$$

Por substituição de (3.91) e (3.92) na equação (3.90) definida no instante de tempo $t_{n+\alpha}$, obtém-se a seguinte fórmula de recorrência:

$$\left(\mathbf{K}_{n+\alpha} + \frac{1}{\alpha\Delta t} \mathbf{C} \right) \mathbf{T}_{n+\alpha} = \mathbf{f}_{n+\alpha} + \frac{1}{\alpha\Delta t} \mathbf{C}_{n+\alpha} \mathbf{T}_n \quad (3.93)$$

onde as matrizes $\mathbf{K}_{n+\alpha}$ e $\mathbf{C}_{n+\alpha}$ e o vector $\mathbf{f}_{n+\alpha}$ são calculados no instante $t_{n+\alpha}$.

Para problemas não lineares, em que as propriedades do material e as condições de fronteira dependem da temperatura, a solução da equação (3.90) requer a utilização de um procedimento iterativo. Nos problemas termomecânicos, em que a análise mecânica e térmica são feitas de um modo consecutivo, as condições de fronteira na interface peça-molde são actualizadas ao longo do tempo com base no estado de contacto da interface, sendo a informação relativa ao contacto fornecida pela análise mecânica do problema.

Rescrevendo a fórmula de recorrência (3.93) de outro modo tem-se,

$$\hat{\mathbf{K}}_{n+\alpha} \mathbf{T}_{n+\alpha} = \hat{\mathbf{F}}_{n+\alpha}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (3.94)$$

$$n \in [0, 1, 2, \dots, N-1]$$

onde,

$$\hat{\mathbf{K}}_{n+\alpha} = \mathbf{K}_{n+\alpha} + \frac{1}{\alpha\Delta t} \mathbf{C}_{n+\alpha} \quad (3.95)$$

e,

$$\hat{\mathbf{F}}_{n+\alpha} = \mathbf{F}_{n+\alpha} + \frac{1}{\alpha \Delta t} \mathbf{C}_{n+\alpha} \mathbf{T}_n \quad (3.96)$$

Conclui-se assim, que é possível obter a evolução do campo de temperaturas ao longo do tempo seguindo uma sequência de cálculo passo a passo para os subsequentes intervalos de tempo, em que em cada novo passo existem novas condições iniciais.

Resolvido o sistema de equações (3.94) para $t_{n+\alpha}$, as temperaturas no final do intervalo de tempo, isto é, para o instante t_{n+1} , são dadas por:

$$\mathbf{T}_{n+1} = \frac{1}{\alpha} \mathbf{T}_{n+\alpha} + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \mathbf{T}_n \quad (3.97)$$

Fazendo variar o valor do parâmetro α em (3.93), obtém-se vários esquemas de integração no tempo [9-13]. Se $\alpha \neq 0$, os esquemas são designados de implícitos, correspondendo os mais usuais aos esquemas:

$\alpha = 1/2$	Esquema de Crank-Nicolson
$\alpha = 1/3$	Esquema de Galerkin
$\alpha = 1$	Esquema de Euler Backward

Para $0 < \alpha < 1/2$, os esquemas são condicionalmente estáveis sendo necessária que a dimensão do intervalo de tempo Δt , satisfaça a condição [5]:

$$\Delta t < \Delta t_{\text{crit}} = \frac{2}{(w_{n+\alpha})_{\text{máx}} (1 - \alpha)} \quad (3.98)$$

Para que o processo seja convergente. O factor $(w_{n+\alpha})_{\text{máx}}$ representa o maior valor próprio da matriz $\mathbf{C}_{n+\alpha}^{-1} \times \mathbf{K}_{n+\alpha}$.

3.8. RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES PELO MÉTODO *SKYLINE*

Um aspecto quando se implementa qualquer tipo de solução computacional, é a obtenção das soluções utilizando o menor tempo possível. Com a utilização do método dos elementos finitos, depara-se com a existência de uma matriz de rigidez, resultante das diversas matrizes de rigidez elementares agrupadas, que não apenas é simétrica e definida

positiva como é também uma matriz em banda. Resumindo, obtém-se uma matriz, onde $k_{ij} = 0$ para $j > i + m_k$, onde m_k é a largura de banda do sistema (ver figura 3.9).

O facto de na análise por elementos finitos, todos os elementos cujo valor é diferente de zero, se encontrarem agrupados em redor da diagonal das matrizes, reduz o número total de operações aumentando a velocidade na determinação da solução do sistema de equações. No entanto, estas propriedades dependem da numeração da malha de elementos finitos utilizada, devendo desta forma o analista ter particular cuidado.

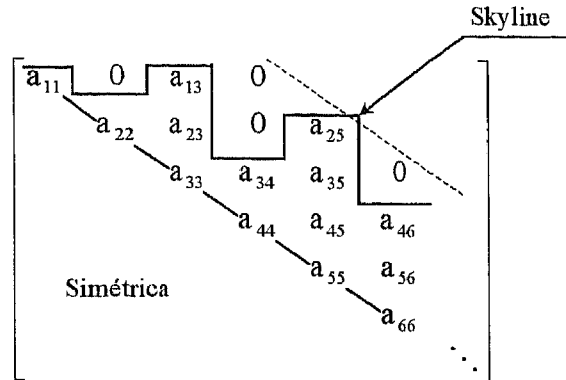


Figura 3.9: Matriz em Banda

Considere-se que, para uma agrupagem de elementos finitos, são determinadas as correspondentes alturas de colunas e matriz de rigidez total. A decomposição $\mathbf{LDL}^T$ da matriz $\mathbf{K}$ pode ser obtida determinando $\mathbf{D}$ e $\mathbf{L}$ por colunas em vez de ser utilizada a eliminação de Gauss. Utilizando $d_{11} = k_{11}$, o algoritmo para a determinação de l_{ij} e d_{jj} na coluna j , é, para $j = 2, \dots, n$:

$$\left. \begin{aligned} g_{m_j, j} &= k_{m_j, j} \\ g_{ij} &= k_{ij} - \sum_{r=m_m}^{i-1} l_{ir} g_{rj} \quad \text{para } i = m_j + 1, \dots, j-1 \end{aligned} \right\} \quad (3.99)$$

onde m_j é o número da linha do primeiro elemento não nulo na coluna j , e $m_m = \max\{m_i, m_j\}$. As variáveis m_i , $i = 1, \dots, n$, definem a *skyline* da matriz. Os elementos g_{ij} na equação (3.99) são definidos apenas como quantidades intermédias. O processo de calculo encontra-se completo com:

$$l_{ij} = \frac{g_{ij}}{d_{ii}} \quad \text{com } i = m_{j, \dots, j-1} \quad (3.100)$$

$$d_{jj} = k_{jj} - \sum_{r=m_j}^{j-1} l_{rj} g_{rj} \quad (3.101)$$

A utilização das expressões (3.99) e (3.101) não envolvem multiplicações com os elementos nulos situados no exterior da *skyline* da matriz, enquanto l_{ij} representam elementos da matriz $\mathbf{L}^T$. As equações (3.99) a (3.101), definem o *Método de Skyline*.

3.9. REFERÊNCIAS

- [1] Benjamin Gebhart, 1971, *Heat Transfer*, Second edition, McGraw_Hill Book Company.
- [2] J. M. César de Sá, 1986, Numerical Modelling of Glass Forming Processes, Engineering Computations, vol. 3, nº 4, December 1986.
- [3] F. P. Incropera, D. P. Dewitt, 1981, *Fundamentals of Heat Transfer*, John Wiley & Sons, New York, U.S.A.
- [4] V. S. Patankar, 1980, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Mc Graw Hill Book Comp. Lda, New York, U.S.A.
- [5] J. N. Reddy, D. K. Gartling, 1994, *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamic*, CRC Press Inc, U.S.A., pg. 1.3-1
- [6] Hou-Cheng Huang, Asif S. Usmani, 1994, *Finite Element Analysis for Heat Transfer*, Springer-Verlag, U.K.
- [7] O. C. Zienkiewicz, K. Morgan, 1983, *Finite Elements and Approximation*, John Wiley & Sons, U.S.A.
- [8] J. N. Reddy, D. K. Gartling, 1994, *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamic*, CRC Press Inc, U.S.A.
- [9] Paulo J. M. M. Vila Real, 1993, *Modelação por Elementos Finitos da Solidificação e Comportamento Termo-Mecânico de Peças Vazadas em Moldações Mecânicas*, Tese de Doutoramento, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- [10] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, 1989, *The Finite Element Method*, 4th Edition, McGraw-Hill Book Company, Lda, U.K..
- [11] E. Hinton, D. R. J. Owen, 1977, *Finite Element Programming*, Academic Press Inc. Lda, London.
- [12] R. D. Cook, 1982, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 2nd Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- [13] K. J. Bath, 1982, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall Inc., New Jersey.
- [14] O. C. Zienkiewicz, K. Morgan, 1983, *Finite Elements and Approximation*, John Wiley & Sons, Inc., U.S.A.

- [15] E. Hinton, D. R. J. Owen, 1979, *An Introduction to the Finite Element Computation*, Pineridge Press, Swansea.
- [16] P. M. Vila Real, 1988, *Modelação por Elementos Finitos do Comportamento Térmico e Termo-elástico de Sólidos Sujeitos a Elevados Gradientes Térmicos*, Tese de Mestrado em Engenharia Estrutural, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- [17] A. E. Kardestuncer, D. H. Norrie, 1988, *Finite Element Handbook*, McGraw-Hill Book Company.
- [18] J. N. Reddy, 1988, *Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering*, McGraw-Hill Book Company.
- [19] T. J. R. Hughes, 1977, Unconditionally Stable Algorithms for Nonlinear Heat Conduction, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 10, pp. 135-139.
- [20] J. Doner, 1974, On the Accuracy of Finite Element Solution to the Transient Heat Conduction Equation, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 8, pp. 261-276.
- [21] D. R. J. Owen, F. Damjanic, 1981, The Stability of Numerical Time Integration Techniques for Transient Thermal Problems with Special Reference to Reduced Integration Effects, *Num. Meth. In Thermal Problems Conf. Proc.*, Vol.2, pp. 487-505, Pineridge press, Swansea.
- [22] Luísa M. P. A. C. Sousa, 1993, *Modelação Termomecânica de Processos de Enformação Plástica por Formulações Mistas*, Tese de Doutoramento, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.



Capítulo 4

Análise Termomecânica e Cálculo de Tensões Térmicas

4.1. INTRODUÇÃO

Os processos de enformação de metais e materiais como o vidro, são geralmente processos não isotérmicos e por vezes as peças estão a temperaturas muito mais elevadas que os moldes, sendo importante estudar a variação das propriedades dos materiais com a temperatura e taxas de deformação.

O modelo viscoplástico é apresentado para o estudo de problemas de enformação plástica de materiais, assim como é apresentado a modelação do contacto do vidro com o molde.

Uma das várias causas de tensões num corpo, é a variação não uniforme de temperatura a que este se encontra sujeito. Com a variação de temperatura verificam-se fenómenos como expansão ou contracção de elementos de um corpo. Tal variação nos elementos de um corpo não ocorre livremente, daí o aparecimento de tensões devidas a gradientes de temperatura.

A quebra verificada no vidro, quando este é aquecido ou durante o arrefecimento após o processo de enformação, assim como a ruptura por fadiga, são consequências destas variações de temperatura a que os corpos estão sujeitos, daí poder-se dizer que as consequências das tensões térmicas são muito importantes no projecto de engenharia.

O problema relacionado com as tensões térmicas desde há muito tem sido tema de estudo de diversos engenheiros e cientistas. De facto, a formulação dos problemas de elasticidade envolvendo temperaturas elevadas, foi primeiramente estudado por Duhamel (1835), pouco tempo após a formulação da teoria da elasticidade [5].

4.2. ANÁLISE VARIACIONAL

Os teoremas energéticos e os princípios variacionais permitem estabelecer as relações entre as cargas e as velocidades generalizadas.

Considere-se as equações descritas no capítulo 2 que descrevem o comportamento mecânico do vidro. A tensão é decomposta nas tensões de desvio e na tensão hidrostática:

$$\sigma_{ij} = S_{ij} + p \quad (4.1)$$

onde S_{ij} representa as tensões de desvio,

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - p \quad (4.2)$$

sendo p a pressão hidrostática:

$$p = \frac{\sigma_{ii}}{3} \quad (4.3)$$

Pode estabelecer-se como princípio variacional geral,

$$\delta(\pi(u)) = \delta(\pi_i + \pi_e) = 0 \quad (4.4)$$

em que π_i representa a energia de deformação,

$$\pi_i(u) = \int_V \frac{1}{2} \dot{\epsilon}^T \sigma dV \quad (4.5)$$

onde $\dot{\epsilon}$ e σ representam respectivamente a taxa de deformação e a tensão; π_e representa o trabalho realizado pelas forças exteriores,

$$\pi_e(u) = - \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{b} dV - \int_S \mathbf{u}^T \mathbf{t} dS \quad (4.6)$$

em que $\mathbf{u}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{t}$ representam respectivamente o vector das velocidades, das forças de volume e de superfície. O princípio variacional é dado por:

$$\delta(\pi(u)) = \int_V \delta \dot{\epsilon}^T \sigma dV - \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} dV - \int_S \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} dS = 0 \quad (4.7)$$

Se se utilizar as tensões de desvio e desprezar as forças mássicas, substituindo (4.3) em (4.7) obtém-se:

$$\int_V S_{ij} \delta \dot{\epsilon}_{ij} dV - \int_V p \delta \dot{\epsilon}_{ii} dV - \int_S t_i \delta u_i dS = 0 \quad (4.8)$$

Para materiais incompressíveis $\delta \dot{\epsilon}_{ii} = 0$ obtendo-se:

$$\delta(\pi(\mathbf{u})) = \int_V S_{ij} \delta \dot{\epsilon}_{ij} dV - \int_S t_i \delta u_i dS = 0 \quad (4.9)$$

A condição de incompressibilidade pode ser garantida através do *método dos multiplicadores de Lagrange* ou da *função de penalidade*.

Com o *método dos multiplicadores de Lagrange*, obtém-se o seguinte funcional aumentado,

$$\pi(\mathbf{u}, \lambda) = \pi(\mathbf{u}) + \int_V \lambda^T (\dot{\epsilon}_{ii}(\mathbf{u})) dV \quad (4.10)$$

onde a condição de incompressibilidade é garantida por $\dot{\epsilon}_{ii} = 0$.

O princípio variacional correspondente é dado por,

$$\delta\pi(\mathbf{u}, \lambda) = \delta\pi(\mathbf{u}) + \int_V \delta\lambda \dot{\epsilon}_{ii}(\mathbf{u}) dV + \int_V \lambda \delta(\dot{\epsilon}_{ii}(\mathbf{u})) dV = 0 \quad (4.11)$$

De modo a que a igualdade anteriormente definida seja verdadeira, para qualquer variação $\delta\mathbf{u}$ e $\delta\lambda$, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\int_V S_{ij} \delta(\dot{\epsilon}_{ij}(\mathbf{u})) dV + \int_V \lambda \delta(\dot{\epsilon}_{ii}(\mathbf{u})) dV - \int_S t_i \delta u_i dS = 0 \quad (4.12)$$

$$\int_V \delta\lambda \dot{\epsilon}_{ii}(\mathbf{u}) dV = 0 \quad (4.13)$$

onde comparando com a equação (4.8) vem $\lambda = -p$.

Com o *método da função de penalidade*, proposto por Courant [1], o funcional toma a forma.

$$\pi(u) = \pi(u) + \frac{1}{2\beta} \int_V (\dot{\epsilon}_{ii}(u))^2 dV \quad (4.14)$$

onde β é um número muito pequeno. O princípio variacional é neste caso igual a,

$$\delta\pi(u) = \int_V S_{ij} \delta(\dot{\epsilon}_{ij}(u)) dV + \frac{1}{\beta} \int_V \dot{\epsilon}_{ii} \delta \dot{\epsilon}_{ii} dV - \int_S t_i \delta u_i dS = 0 \quad (4.15)$$

Segundo a equação (4.8), a pressão pode ser obtida a partir da expressão:

$$\dot{\epsilon}_{ii} = -\frac{p}{\alpha'} \quad (4.16)$$

onde α' , o factor de penalidade [11,14], pode ser função da viscosidade obtendo-se o método da penalidade ponderada [15]; sendo β' um número muito grande α' pode ser dado por,

$$\alpha' = \beta' \eta \quad (4.17)$$

4.2.1. Aproximação pelo método dos elementos finitos

A implementação do método dos elementos finitos neste trabalho é feita com base em quadriláteros bi-lineares de quatro nós, figura 4.1.

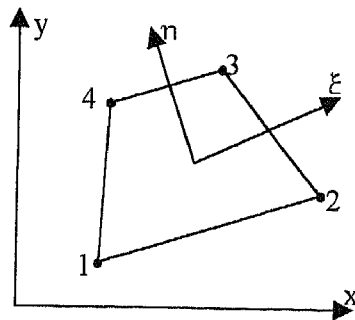


Figura 4.1. Quadrilátero linear de quatro nós.

De acordo com o método dos elementos finitos, a velocidade em qualquer ponto de um elemento é definida em função da velocidade nos pontos nodais do respectivo elemento por um conjunto de funções de forma:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^m N_i \mathbf{u}_i \quad (4.18)$$

onde m é o número de nós do elemento e N_i a função de interpolação (função de forma), ou seja,

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_m & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ \vdots \\ u_{xm} \\ u_{ym} \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

Para elementos axissimétricos, o campo de velocidades escreve-se:

$$\begin{Bmatrix} u_r \\ u_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_m & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{r1} \\ u_{z1} \\ u_{r2} \\ u_{z2} \\ \vdots \\ u_{rm} \\ u_{zm} \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

A taxa de deformação num determinado ponto do elemento é definida a partir das derivadas espaciais das velocidades:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = (v_{i,j} + v_{j,i})/2 \quad (4.21)$$

ou sob a forma matricial:

$$\dot{\epsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{L}\mathbf{N}^T \mathbf{v} = \mathbf{B}\mathbf{v} \quad (4.22)$$

onde $\mathbf{L}$ é um operador linear e $\mathbf{B}$ representa a matriz das derivadas espaciais das funções de forma, que para problemas axissimétricos toma a forma:

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{1}{r} N_i & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Para elementos axissimétricos, a taxa de deformação num ponto do elemento pode então ser obtida pela seguinte expressão:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = [\dot{\varepsilon}_r \quad \dot{\varepsilon}_z \quad \dot{\varepsilon}_\theta \quad \dot{\gamma}_{rz}]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix}_{i=1,m} \begin{Bmatrix} v_{r_i} \\ v_{z_i} \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

A lei constitutiva é dada por,

$$\mathbf{S} = \mathbf{\overset{\circ}{D}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.25)$$

onde $\mathbf{S}$ é o tensor das tensões de desvio, cujas componentes para problemas axissimétricos podem ser arrumadas no seguinte vector:

$$\mathbf{S} = [S_r \quad S_z \quad S_\theta \quad S_{rz}]^T \quad (4.26)$$

e a matriz $\mathbf{\overset{\circ}{D}}$ que relaciona as tensões de desvio com a taxa de deformação é definida da seguinte forma:

$$\mathbf{\overset{\circ}{D}} = \begin{bmatrix} 2\eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

em que η é a viscosidade.

A tensão hidrostática para o caso estudado é,

$$\sigma_m = \alpha' \mathbf{m}^T \dot{\epsilon} = \alpha' \mathbf{m}^T \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (4.28)$$

com,

$$\mathbf{m}^T = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0] \quad (4.29)$$

Substituindo as equações (4.22) a (4.29) na equação (4.15) obtém-se para cada elemento finito,

$$\int_{V^e} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{v} dV + \frac{1}{\beta} \int_{V^e} \delta \mathbf{v}^T \mathbf{B} \mathbf{m} \mathbf{m}^T \mathbf{B} \mathbf{u} dV - \int_{S^e} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{N} t dS = 0 \quad (4.30)$$

O sistema de equações global para o domínio completo obtém-se por agrupamento das matrizes de todos os elementos. Dada a arbitrariedade de $\delta \mathbf{v}$, o sistema global pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathbf{K} \mathbf{v} = \mathbf{f} \quad (4.31)$$

onde,

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_d + \mathbf{K}_h \quad (4.32)$$

e,

$$\mathbf{K}_d = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (4.33)$$

$$\mathbf{K}_h = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{m} \mathbf{m}^T \mathbf{B} dV \quad (4.34)$$

$$\mathbf{f} = \int_S \mathbf{N} t dS \quad (4.35)$$

Quando se aplica o método da função penalidade, a solução obtida pela minimização do funcional representado na equação (4.15) satisfaz a condição de restrição (condição de incompressibilidade) $\dot{\epsilon}_{ii} = 0$ apenas aproximadamente. Por observação das expressões, verifica-se que quanto maior for o valor do parâmetro α' , melhor é a aproximação. No

entanto, com o aumento deste valor surge o problema de enrijecimento, uma vez que a solução tende para zero afastando-se cada vez mais da solução real [13].

Para evitar o problema de enrijecimento, utiliza-se a integração selectiva reduzida, introduzida por Zienkiewicz [2,3], no cálculo da matriz K_h . A explicação reside no facto de que o parâmetro α' na equação (4.31) torna a rigidez global do sistema muito grande, impedindo qualquer campo de velocidades, a não ser o que respeita à incompressibilidade do material ou seja pertencente ao núcleo de K_h [2]. A integração reduzida permite aumentar a dimensão do núcleo de K_h dando maior liberdade à aproximação para reproduzir a incompressibilidade do material [2,3].

4.3. MODELAÇÃO DO CONTACTO COM O MOLDE

A geometria adoptada para a definição do molde, deve ser tal que permita uma modelação precisa do caso a ser simulado, permitindo no entanto a aplicação dos estudos paramétricos.

Enquanto se processa a resolução dos sistemas de equações, é para cada incremento de tempo verificado se existe algum nó correspondente à malha do vidro que entra em contacto com o molde. Caso o contacto se verifique, e após todos os nós se posicionarem na posição final ao fim do incremento de tempo, torna-se necessário refazer o intervalo de tempo correspondente, de forma a garantir que apenas um único nó entre em contacto com o molde.

As deformações da ferramenta são muito pequenas quando comparadas com as deformações da peça. Tendo em consideração estas pequenas deformações, a formulação utilizada para os elementos da ferramenta é puramente elástica.

No texto que se segue, será apresentada a formulação utilizada para estudar a influência do contacto na ferramenta bem como os aspectos de algoritmo utilizados na implementação do contacto entre corpos deformáveis.

4.3.1. Formulação do contacto entre corpos deformáveis

Considere-se a seguinte situação de contacto entre um nó da peça e a ferramenta, figura 4.2,

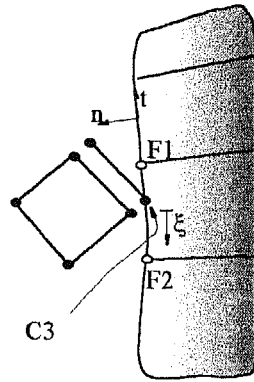


Figura 4.2. Contacto entre corpos deformáveis

C3 representa o nó do elemento de contacto que está colocado na ferramenta e F1 e F2 representam os nós do elemento da ferramenta.

A condição de contacto descrita na figura 4.2. para corpos deformáveis é formulada nos seguintes termos,

$$u_{C3} = N_1 u_{F1} + N_2 u_{F2} \quad (4.36)$$

$$v_{C3} = N_1 v_{F1} + N_2 v_{F2} \quad (4.37)$$

onde u_{C3} e v_{C3} são as velocidades nodais do nó 3 do elemento de interface, (u_{F1}, v_{F1}) e (u_{F2}, v_{F2}) são o deslocamento do nó do elemento da ferramenta.

As condições (4.36) e (4.37) podem ser introduzidas nas equações finais de equilíbrio através de dois métodos alternativos: método dos multiplicadores de Lagrange e o método da função de penalidade.

4.3.1.1. Método dos multiplicadores de Lagrange

A integração de (4.36) e (4.37) pelo método dos multiplicadores de Lagrange é efectuada da seguinte maneira,

$$\Pi = \dots + \lambda_1 (u_{C3} - (N_1 u_{F1} + N_2 u_{F2})) + \lambda_2 (v_{C3} - (N_1 v_{F1} + N_2 v_{F2})) \quad (4.38)$$

com a minimização do funcional obtém-se,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_{C3}} = \lambda_1, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial v_{C3}} = \lambda_2 \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_{F1}} = -\lambda_1 N_1, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial v_{F1}} = -\lambda_2 N_1 \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \lambda_1} = u_{C3} - N_1 u_{F1} - N_2 u_{F2} \quad , \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \lambda_2} = v_{C3} - N_1 v_{F1} - N_2 v_{F2} \quad (4.41)$$

O agrupamento final da matriz de rigidez quando se considera o contacto entre corpos deformáveis vem dado por,

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

onde $\mathbf{K}_{11}$ é a componente da matriz de rigidez que contém a formulação viscoplástica apresentada no capítulo 2 e $\mathbf{K}_{22}$ refere-se à parte elástica dos elementos da ferramenta juntamente com os graus de liberdade referentes aos multiplicadores de Lagrange.

As equações de equilíbrio vêm traduzidas da seguinte forma,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & 1 & 1 \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & -N_1 & -N_1 \\ 1 & -N_1 & -N_2 & -N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C3} \\ v_{C3} \\ u_{F1} \\ v_{F1} \\ u_{F2} \\ v_{F2} \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (4.43)$$

4.3.1.2. Método da função de penalidade

Com o método da função de penalidade, o funcional que traduz o equilíbrio do sistema vem definido da seguinte forma,

$$\Pi = \dots + \frac{\alpha_1}{2} (u_{C3} - (N_1 u_{F1} + N_2 u_{F2}))^2 + \frac{\alpha_2}{2} (v_{C3} - (N_1 v_{F1} + N_2 v_{F2}))^2 \quad (4.44)$$

a minimização do funcional implica determinar,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_{C3}} = \alpha_1 (u_{C3} - (N_1 u_{F1} + N_2 u_{F2})) \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial v_{C3}} = \alpha_2 (v_{C3} - (N_1 v_{F1} + N_2 v_{F2})) \quad (4.46)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_{F1}} = -\alpha_1 (u_{C3} - (N_1 u_{F1} + N_2 u_{F2})) N_1 \quad (4.47)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial v_{F1}} = -\alpha_2 (v_{C3} - (N_1 v_{F1} + N_2 v_{F2})) N_1 \quad (4.48)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_{F2}} = -\alpha_1 (u_{C3} - (N_1 u_{F1} + N_2 u_{F2})) N_2 \quad (4.49)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial v_{F2}} = -\alpha_2 (v_{C3} - (N_1 v_{F1} + N_2 v_{F2})) N_2 \quad (4.50)$$

no que resulta no seguinte sistema de equações,

$$\begin{bmatrix} \dots + \alpha_1 & & & -\alpha_1 N_1 & & -\alpha_1 N_2 \\ & \dots + \alpha_2 & & & -\alpha_2 N_1 & -\alpha_2 N_2 \\ & & & & & \\ -\alpha_1 N_1 & & \dots + \alpha_1 N_1^2 & & \dots + \alpha_1 N_1 N_2 & \\ & -\alpha_2 N_1 & & \dots + \alpha_2 N_1^2 & & \dots + \alpha_2 N_1 N_2 \\ & & & & & \\ -\alpha_1 N_2 & & \dots + \alpha_1 N_1 N_2 & & \dots + \alpha_1 N_2^2 & \\ & -\alpha_2 N_2 & & \dots + \alpha_2 N_1 N_2 & & \dots + \alpha_2 N_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{C3} \\ v_{C3} \\ \vdots \\ u_{F1} \\ v_{F1} \\ \vdots \\ u_{F2} \\ v_{F2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (4.51)$$

4.3.1.3. Aspectos práticos de implementação

Para a implementação do contacto entre corpos deformáveis é necessário identificar em qual elemento da ferramenta o nó entra em contacto e determinar a coordenada local ξ para integrar nas funções de forma N_1 e N_2 . As funções de forma a utilizar são definidas através da figura 4.3,

$$N_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (4.52)$$

e,

$$N_2 = \frac{1}{2}(\xi + 1) \quad (4.53)$$

Considere-se a figura 4.3,

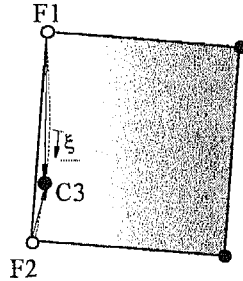


Figura 4.3. Coordenada local ξ .

A figura 4.3 pretende representar o contacto de um nó da peça C3 com um elemento da ferramenta.

Considere-se os seguintes vectores,

$$\mathbf{V}_1 = (x^{F2} - x^{F1}, y^{F2} - y^{F1}) \quad (4.54)$$

$$\mathbf{V}_2 = (x^{C3} - x^{F1}, y^{C3} - y^{F1}) \quad (4.55)$$

a coordenada local ξ fica definida,

$$\xi = 2 \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{\|\vec{V}_1\|^2} - 1 \quad (4.56)$$

4.3.2. Actualização das coordenadas nodais e do intervalo de tempo

No processo de a simulação numérica é efectuada uma verificação do contacto entre o vidro e o molde. Caso o programa verifique o contacto de algum nó do vidro com o molde, instantaneamente é efectuada uma actualização das coordenadas dos nós do vidro e do intervalo de tempo de forma a garantir que: i) nó que entrou em contacto com o molde não fica posicionado no interior deste e sim na fronteira, ii) apenas um único nó entra em contacto com o molde para cada iteração.

Desta forma, considere-se que um determinado nó se desloca da posição x_0 para a posição x_1 durante um intervalo de tempo Δt . Para a posição final do nó, considere-se que este já entrou em contacto com o molde (ver figura 4.4) [11].

Considere-se a figura 4.4, e os diversos pontos definidos da seguinte forma:

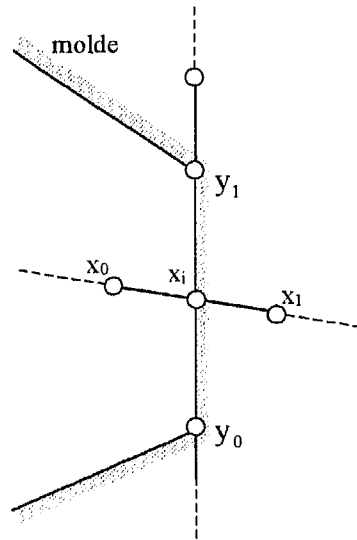


Figura 4.4: representação esquemática do contacto com o molde

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

$$\mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} y_0^1 \\ y_0^2 \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} y_1^1 \\ y_1^2 \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

As rectas x e y são definidas por:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \alpha''(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \quad (4.61)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 + \beta''(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_0) \quad (4.62)$$

sendo α'' e β'' números reais.

Caso o programa verifique que um nó entrou em contacto com o molde e se posicionou não na linha que representa a superfície interior deste mas no seu interior, um novo ponto $\mathbf{x}_i$ é determinado, correspondendo este novo ponto ao posicionamento do nó que anteriormente entrou em contacto.

Este novo posicionamento do nó (equação (4.63)), corresponde à intercepção das rectas x e y definidas pelas equações (4.61) e (4.62).

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_0 + \alpha_i (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \quad (4.63)$$

onde,

$$\alpha_i = \frac{(\mathbf{x}_0^1 - \mathbf{y}_0^1)(\mathbf{y}_1^2 - \mathbf{y}_0^1) - (\mathbf{x}_0^2 - \mathbf{y}_0^2)(\mathbf{y}_1^1 - \mathbf{y}_0^1)}{(\mathbf{x}_1^2 - \mathbf{x}_0^2)(\mathbf{y}_1^1 - \mathbf{y}_0^1) - (\mathbf{x}_1^1 - \mathbf{x}_0^1)(\mathbf{y}_1^2 - \mathbf{y}_0^2)} \quad (4.64)$$

Determinado o novo posicionamento do nó que irá entrar em contacto com o molde, é necessário redefinir o intervalo de tempo de forma a que para este novo intervalo apenas um único nó entre em contacto com o molde. Desta forma o novo intervalo de tempo é definido da seguinte forma:

$$\Delta t_{\text{red}} = \frac{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0\|} \quad (4.65)$$

4.3.3. Actualização das condições de fronteira

Tanto as condições de fronteira correspondentes ao problema mecânico como as condições de fronteira correspondentes ao problema térmico em processos de enformação, deverão ser actualizadas sempre que se verifique o contacto do vidro com o molde.

i. *Condições de Fronteira Mecânicas*

As condições de contacto do vidro com o molde são extremamente difíceis de simular do ponto de vista mecânico. No entanto, torna-se aceitável admitir [1,4], a atribuição de condições de fronteira fixas aos nós do vidro que entram em contacto, devido ao elevado aumento no valor da viscosidade com a diminuição de temperaturas a que o molde se encontra.

As condições de fronteira mais realistas a considerar, serão aquelas onde o contacto é simulado através da introdução de elementos de junta onde o atrito seria considerado. Estes elementos não foram no entanto introduzidos no programa, pois, face aos resultados obtidos, não se mostrou necessária tal utilização.

ii. *Condições de Fronteira Térmicas*

A existência de contacto do vidro com o molde afecta igualmente as condições de fronteira térmicas. O fluxo de calor resultante da convecção com o ar em contacto com o

vidro, é então substituído por uma transferência de calor directa por condução entre o vidro e as paredes do molde.

Quando se trata de condições de fronteira térmicas, torna-se necessário realçar dois tipos de condições: i) as condições associadas a valores de fluxo prescritos, ii) as condições associadas a valores de temperaturas prescritos.

Inicialmente as condições de fronteira correspondentes a valores de fluxo prescritos, quando o vidro entra em contacto com as superfícies do molde, eram aproximadas por imposição de valores de fluxo. Na figura 4.5, encontra-se representada a dependência do valor de fluxo com o tempo de contacto quer para o contacto do vidro com o molde inicial como para com o molde final. No entanto não existe nenhuma informação relativa à temperatura do vidro em que estes valores foram obtidos [11]. Apesar deste facto, considera-se que estas curvas correspondem a uma média de temperatura do vidro de 1138° C para a pré-forma (molde inicial) e de 975° C para o molde final, encontrando-se ambos os moldes a uma temperatura de 500° C [11], sendo o fluxo determinado por condições empíricas.

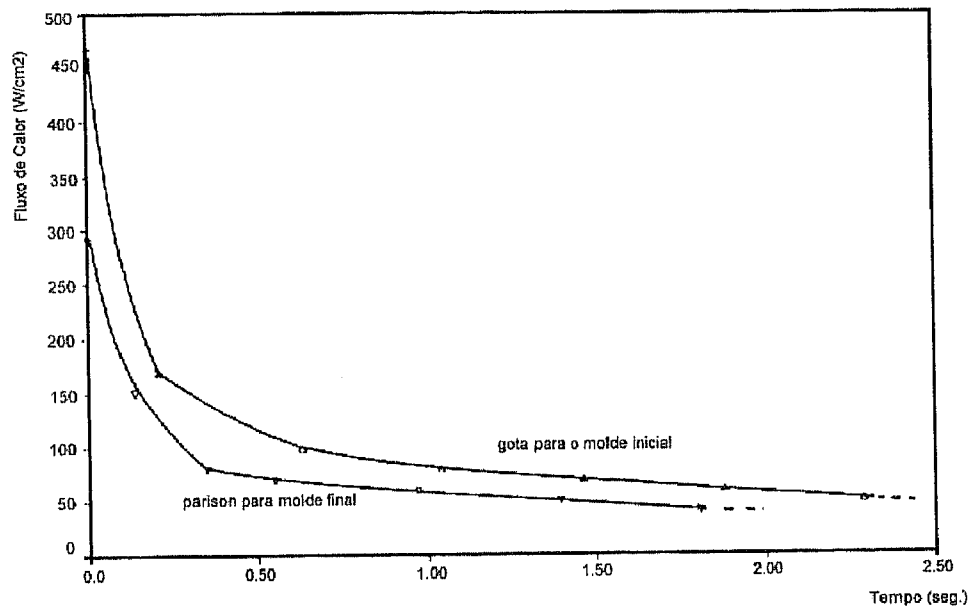


Figura 4.5: Variação do fluxo de calor com o tempo para as fronteiras

Estas curvas são corrigidas para os diferentes valores de temperatura do vidro, sendo o fluxo resultante afectado de uma constante K_f , definida por:

$$K_f = \frac{(T - T_m)}{(T_G - T_m)} \quad (4.66)$$

onde,

T : temperatura do vidro;

T_m : temperatura do molde;

T_G : média da temperatura do vidro: 1138°C ou 975° C

No entanto, com a introdução de uma discretização por elementos finitos para o molde, o fluxo nos nós fronteira da malha são calculados directamente através da formulação do problema de transferência de calor apresentado no capítulo 3.

Relativamente aos valores da temperatura dos diversos nós da malha de elementos finitos após o contacto, considera-se que o valor desta nova temperatura é obtido por uma combinação linear dos nós do molde, adjacentes ao nó da malha do vidro que entretanto entram em contacto com a parede interior do molde.

Desta forma, considere-se que quando um determinado nó do vidro entra em contacto com a superfície interior do molde, a sua temperatura é a temperatura do molde no ponto de contacto. Para tal, a partir do método da função penalidade, a temperatura é definida da seguinte forma:

$$T_g = N_{m,1}(\xi)T_{m,1} + N_{m,2}(\xi)T_{m,2} \quad (4.67)$$

sendo,

T_g : temperatura do nó da malha do vidro que entra em contacto;

$T_{m,1}$ e $T_{m,2}$: temperatura de ambos os nós do elemento do molde onde se verifica o contacto;

$N_{m,1}$ e $N_{m,2}$: funções de forma de ambos os nós do elemento do molde onde se verifica o contacto

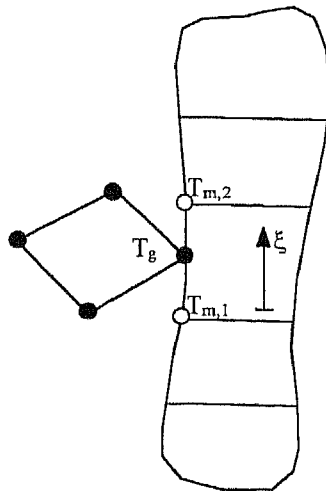


Figura 4.6: Condições de Fronteira Térmicas correspondentes ao contacto

Inicialmente, a resolução do problema mecânico, isto é, a determinação do posicionamento dos nós da malha de elementos finitos do vidro para cada incremento de tempo era determinado, após a resolução do problema de transferência de calor. Caso o programa detectasse o contacto de algum nó da malha do vidro com as superfícies internas do molde, o intervalo de tempo para a iteração em causa era recalculado. De forma a eliminar cálculos desnecessários, optou-se por alterar o código do programa de forma que este determine o campo de temperaturas da malha de elementos de finitos do vidro e do

molde após ter sido determinado o novo posicionamento da malha ao fim de determinado intervalo de tempo. Resumindo, o código determina em primeiro lugar o posicionamento da malha de elementos finitos correspondente à garrafa. Caso tenha sido detectado o contacto de algum nó com as superfícies do molde, o intervalo de tempo é actualizado de forma a apenas um único nó entrar em contacto. Após a determinação do novo intervalo de tempo e determinado o novo posicionamento da malha de elementos finitos da garrafa, todas as propriedades térmicas como temperaturas e fluxos, são calculadas. Desta forma, o procedimento correspondente à equação (4.66) é eliminado (ver figura 4.7).

Esta alteração no código do programa, introduz alterações quer nos resultados finais como nos resultados intermédios, alterações estas posteriormente analisados no Capítulo 6.

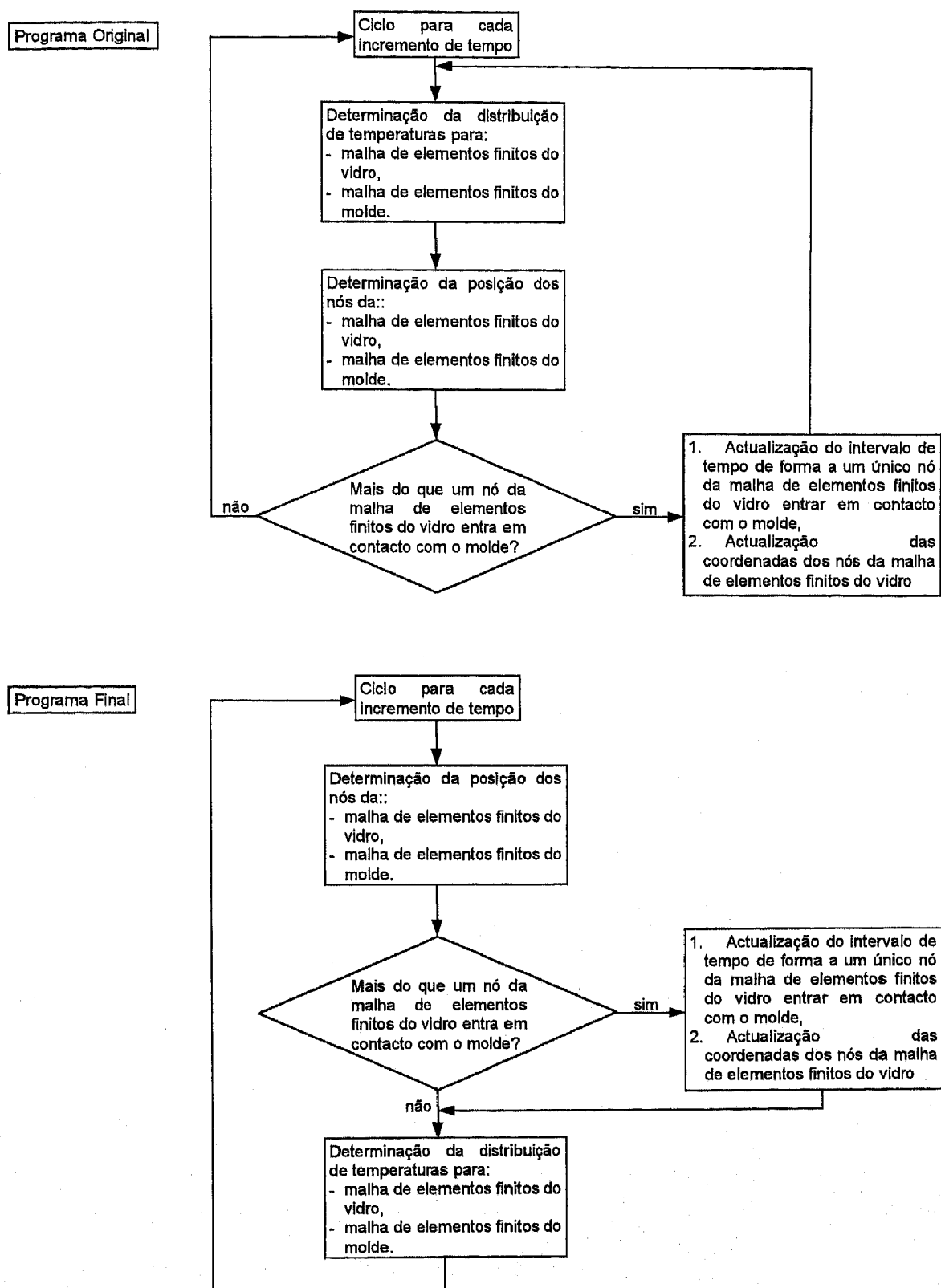


Figura 4.7.: Fluxograma que descreve as alterações nos algoritmos.



4.4. TENSÕES TÉRMICAS

Nos itens anteriores, foram estudados quer as equações fundamentais para a determinação do campo de temperaturas nas peças nos processos de enformação, quer a formulação do problema termomecânico. A determinação do campo de tensões térmicas é efectuada na fase de arrefecimento da garrafa, considerando o seu comportamento como um sólido elástico.

Serão apresentadas as equações que regem o comportamento dos sólidos. Tendo por base a teoria da elasticidade, as extrapolações necessárias para o caso de existirem gradientes térmicos são descritas. Desta forma, equações finais para o acoplamento térmico e mecânico são apresentadas neste capítulo, assim como a sua formulação pelo Método dos Elementos Finitos.

4.4.1. Problema termoelástico: equações básicas

Encontrado o campo de temperaturas característico do corpo, a determinação das tensões resultantes faz parte da teoria habitualmente designada por *termoelasticidade* [5,12].

A formulação apresentada, assenta nas seguintes três hipóteses fundamentais:

- i. as temperaturas podem ser determinadas independentemente das deformações do corpo,
- ii. as deformações do corpo são pequenas, e
- iii. o material comporta-se de forma elástica.

Tendo por base o problema em estudo, apenas serão tratadas as equações expressas em coordenadas cilíndricas.

4.4.1.1. Tensor das deformações

O deslocamento em qualquer ponto do sólido, é definido pelas suas componentes u , v , w , sendo o estado de deformação em cada elemento de volume, caracterizado por um tensor, o *tensor das deformações*, composto por nove componentes, sendo seis delas componentes independentes, formando desta forma uma matriz simétrica.

Tendo por base a teoria da elasticidade [5,6,9], as deformações relacionam-se com os deslocamentos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r} \\
\varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\
\gamma_{r\theta} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \\
\gamma_{rz} &= \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\
\gamma_{z\theta} &= \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)
\end{aligned} \tag{4.68}$$

onde, u , v e w representam as componentes do vector deslocamento nas direcções r , θ e z respectivamente, sendo para este caso o tensor das deformações:

$$\mathbf{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & \gamma_{r\theta} & \gamma_{rz} \\ \gamma_{\theta r} & \varepsilon_{\theta\theta} & \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{zr} & \gamma_{\theta z} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \tag{4.69}$$

Este tensor corresponde à parte simétrica do tensor gradiente de deslocamentos.

4.4.1.2. Tensor das Tensões

O *tensor das tensões*, que define o estado de tensão na vizinhança de um ponto, é constituído por nove componentes (figura 4.8), as componentes de tensão em três elementos de superfície infinitesimais, sendo para o caso de um sistema cartesiano, ortogonais entre si e paralelos aos planos coordenados.

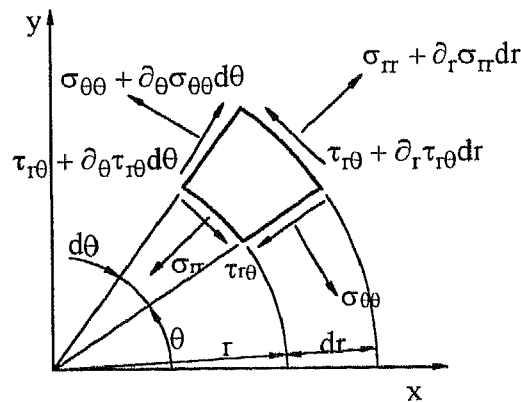


Figura 4.8: Elemento infinitesimal utilizado na determinação das equações de equilíbrio

O tensor das tensões expresso em coordenadas cilíndricas toma a forma:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\theta} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

As condições de equilíbrio de forças no elemento de volume na vizinhança de um ponto, são traduzidas pelas equações de equilíbrio (4.71), as quais devem ser satisfeitas em qualquer ponto do domínio do sólido [5,6,10]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + F_r &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + F_\theta &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + F_z &= 0 \end{aligned} \quad (4.71)$$

onde F_r, F_θ e F_z representam as forças de volume incluindo forças de inércia segundo as direcções r, θ e z .

Considerando o equilíbrio de momentos num elemento de volume como o representado na figura 4.8, as tensões tangenciais são conduzidas à seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta} &= \tau_{\theta r} \\ \tau_{rz} &= \tau_{zr} \\ \tau_{z\theta} &= \tau_{\theta z} \end{aligned} \quad (4.72)$$

Desta forma, o tensor de tensões que inicialmente era representado por uma matriz assimétrica passa a ser traduzido por uma matriz simétrica.

4.4.1.3. Relações Tensões - Deformações

Considere-se um corpo constituído por pequenas elementos cúbicos de igual tamanho. Se a temperatura do corpo variar uniformemente, e as superfícies de fronteira do corpo estiverem livres, cada elemento de volume expandir-se-á da mesma quantidade, uniformemente em todas as direcções, de uma forma proporcional à variação de temperaturas. Todos os elementos constituintes do corpo em estudo permanecem com a sua forma inalterável, isto é, permanecem igualmente cúbicos mantendo a continuidade do corpo, não surgindo assim quaisquer tensões.

Se, pelo contrário, a variação de temperatura verificada não for uniforme, cada elemento expandir-se-á de uma quantidade diferente, proporcional à própria variação de

temperatura. Como o corpo deve permanecer contínuo, a distorção de cada elemento irá ser afectada pela distorção dos elementos vizinhos, aparecendo desta forma tensões no corpo.

A deformação total em cada ponto de um determinado corpo sujeito a variações de temperatura, é constituída por duas partes [5]. A primeira parte representa as deformações necessárias para manter a continuidade do corpo, as quais se relacionam com as tensões pela conhecida *lei de Hooke* da teoria da elasticidade. A segunda parte, representa a expansão uniforme, proporcional à variação de temperatura ΔT . Considerando um corpo isotrópico, esta expansão é uniforme em todas as direcções, existindo consequentemente apenas deformações lineares enquanto as distorções angulares são nulas.

Assim sendo, a deformação total em coordenadas cilíndricas é dada por [5,6]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{1}{E} [\sigma_{rr} - \nu(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz})] + \alpha'''\Delta T \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{E} [\sigma_{\theta\theta} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{rr})] + \alpha'''\Delta T \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})] + \alpha'''\Delta T \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{G} \tau_{r\theta} \\ \gamma_{\theta z} &= \frac{1}{G} \tau_{\theta z} \\ \gamma_{zr} &= \frac{1}{G} \tau_{zr}\end{aligned}\tag{4.73}$$

em que, sendo α''' o coeficiente de dilatação linear, as deformações lineares provocadas por uma variação de temperatura, são representadas por $\alpha'''\Delta T$.

O módulo de elasticidade transversal G relaciona-se com o módulo de elasticidade E e o coeficiente de Poisson ν , através da equação:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}\tag{4.74}$$

A relação entre a dilatação volumétrica unitária e , e a soma das tensões normais Θ , é obtida a partir de (4.73):

$$e = \frac{\Theta}{3k'} + 3\alpha'''\Delta T\tag{4.75}$$

sendo k' o módulo de expansão volumétrica definido da seguinte forma:

$$k' = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (4.76)$$

e

$$\begin{aligned} e &= \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz} \\ \Theta &= \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz} \end{aligned} \quad (4.77)$$

Torna-se no entanto necessário, definir explicitamente as tensões em função das deformações. Tal relação toma a forma:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda e + 2\mu\varepsilon_{rr} - (3\lambda + 2\mu)\alpha'''T \\ \sigma_{\theta\theta} &= \lambda e + 2\mu\varepsilon_{\theta\theta} - (3\lambda + 2\mu)\alpha'''T \\ \sigma_{zz} &= \lambda e + 2\mu\varepsilon_{zz} - (3\lambda + 2\mu)\alpha'''T \\ \tau_{r\theta} &= \mu\gamma_{r\theta} \\ \tau_{\theta z} &= \mu\gamma_{\theta z} \\ \tau_{zr} &= \mu\gamma_{zr} \end{aligned} \quad (4.78)$$

onde λ e μ são as constantes elásticas de Lamé, as quais se relacionam com o módulo de elasticidade E , e com o coeficiente de Poisson da seguinte forma [5]:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (4.79)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G \quad (4.80)$$

A partir das equações (4.76), (4.79) e (4.80), obtém-se ainda as seguintes relações:

$$3\lambda + 2\mu = 3k' \quad (4.81)$$

$$E = \frac{(3\lambda + 2\mu)\mu}{\lambda + \mu} \quad (4.82)$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (4.83)$$

4.4.2. Formulação alternativa do problema termoelástico

Na resolução de problemas termoelásticos, depara-se com um sistema de equações composto por quinze variáveis dependentes, sujeito a um conjunto de condições de fronteira que, usualmente contém, ou três componentes de deslocamentos ou seis componentes de tensões. Desta forma, torna-se conveniente simplificar a formulação, expressando o problema em termos das variáveis que aparecem apenas nas condições de fronteira [5].

As equações de equilíbrio definidas pelo conjunto de equações (4.71), podem ser expressas em termos dos componentes do gradiente de deslocamentos, tendo em consideração as relações tensão - deformação definidas por (4.73). Assim, as equações de equilíbrio, escritas em termos de deslocamentos e em coordenadas cilíndricas são as seguintes:

$$\begin{aligned}
 (\lambda + 2\mu) \frac{\partial e}{\partial r} - 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w_z}{\partial \theta} - \frac{\partial w_\theta}{\partial z} \right) - (3\lambda + 2\mu) \alpha''' \frac{\partial T}{\partial r} + R &= 0 \\
 (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \frac{\partial e}{\partial \theta} - 2\mu \left(\frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) - (3\lambda + 2\mu) \frac{\alpha'''}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \Theta &= 0 \\
 (\lambda + 2\mu) \frac{\partial e}{\partial z} - \frac{2\mu}{r} \left(\frac{\partial(rw_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial w_r}{\partial \theta} \right) - (3\lambda + 2\mu) \alpha''' \frac{\partial T}{\partial z} + Z &= 0
 \end{aligned} \tag{4.84}$$

Sendo e a dilatação, e w_z, w_r e w_θ as componentes do tensor associado à parte anti-simétrica do gradiente dos deslocamentos para este caso definidas por:

$$e = \frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{4.85}$$

$$w_r = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \tag{4.86}$$

$$w_\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \right) \tag{4.87}$$

$$w_z = \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial(rv)}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \tag{4.88}$$

4.5. FORMULAÇÃO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS DO COMPORTAMENTO TERMOELÁSTICO DOS SÓLIDOS

Nos itens anteriores, foram introduzidas as equações básicas que regem o comportamento termoelástico dos sólidos cilíndricos. Neste momento, o referido comportamento será analisado pelo método dos elementos finitos. No entanto, como o problema em estudo é tratado como um sólido axissimétrico, a formulação apresentada será escrita em termos de problemas axissimétricos, tendo em atenção as alterações necessárias nas equações anteriormente descritas.

Consoante a escolha efectuada em análise estrutural, das variáveis nodais utilizadas, os problemas podem ser formulados de diferentes maneiras. Pode-se considerar quer os deslocamentos quer as tensões, ou ainda uma combinação das duas incógnitas do problema [7].

Se, para incógnitas do problema, forem escolhidos os deslocamentos, sendo as tensões obtidas a partir das variáveis primárias (deslocamentos), o processo é denominado *método dos deslocamentos*, o qual será descrito seguidamente [7,8].

4.5.1. Relações deformações - deslocamentos

As deformações existentes em sólidos axissimétricos são [6],

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_z \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \mathbf{L} \delta \quad (4.89)$$

A substituição de (4.18) em (4.89), permite calcular o estado de deformação num ponto do elemento a partir dos respectivos deslocamentos nodais:

$$\epsilon = \mathbf{L} \mathbf{N} \delta^e = \mathbf{B} \delta^e = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i \delta_i \quad (4.90)$$

em que a matriz das deformações $\mathbf{B}_i$, é definida por (4.23)

4.5.2. Relações tensões - deformações

Existindo deformações de origem térmica, ϵ^0 , as tensões relacionam-se com as deformações por intermédio da *lei de Hooke*,

$$\sigma = \mathbf{D}(\epsilon - \epsilon^0) \quad (4.91)$$

Considerando a hipótese de existirem tensões iniciais no corpo, σ^0 , as tensões resultantes escrevem-se:

$$\sigma = \mathbf{D}(\epsilon - \epsilon^0) + \sigma^0 \quad (4.92)$$

O vector das tensões σ , é definido da seguinte forma:

$$\sigma = [\sigma_{rr} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{\theta\theta} \quad \tau_{rz}]^T \quad (4.93)$$

sendo a matriz de elasticidade $\mathbf{D}$ para um problema axissimétrico, definida da seguinte forma:

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

então, por (4.92), obtém-se o estado de tensão final.

$$\sigma = \mathbf{D}(\epsilon - \epsilon^0) + \sigma^0 \quad (4.95)$$

sendo as deformações de origem térmica definidas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \epsilon_r^0 &= \alpha \Delta T \\ \epsilon_z^0 &= \alpha \Delta T \\ \epsilon_\theta^0 &= \alpha \Delta T \\ \gamma_{rz}^0 &= 0 \end{aligned} \quad (4.96)$$

4.5.3. Equações de equilíbrio

As equações de equilíbrio de uma estrutura, podem ser obtidas ou por minimização da energia potencial total do sistema, ou em alternativa, utilizando o princípio dos trabalhos virtuais. No decurso da obtenção das equações de equilíbrio, será adoptado o princípio dos trabalhos virtuais, o qual passaremos a descrever.

Considere-se um único elemento com forças aplicadas nos nós, $\mathbf{F}_n$, forças de volume, $\mathbf{b}$, e forças de superfície $\mathbf{t}$, as quais produzem um estado de tensão σ . Considerando o elemento sujeito a deslocamentos nodais virtuais δ_n^* , estes vão provocar, quer deslocamentos como deformações δ^* e ϵ^* respectivamente.

De acordo com o Princípio dos Trabalhos Virtuais [7]:

$$\delta_n^{*T} \mathbf{F}_n + \int_{\Gamma^e} \delta^{*T} \mathbf{t} d\Gamma^e + \int_{V^e} \delta^{*T} \mathbf{b} dV^e = \int_{V^e} \epsilon^{*T} \sigma dV^e \quad (4.97)$$

onde,

Γ^e : a superfície fronteira do elemento;

V^e : o volume do elemento.

Definindo sob a forma vectorial δ^* e ϵ^* ,

$$\delta^{*T} = (\mathbf{N} \delta_n^*)^T = \delta_n^{*T} \mathbf{N}^T \quad (4.98)$$

$$\epsilon^{*T} = (\mathbf{B} \delta_n^*)^T = \delta_n^{*T} \mathbf{B}^T \quad (4.99)$$

Substituindo na equação(4.97), as equações (4.98), (4.99), (4.90) e (4.92), e uma vez que os deslocamentos nodais são arbitrários, obtém-se:

$$\left(\int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV^e \right) \delta^e = \mathbf{F}_n + \int_{\Gamma^e} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma^e + \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \epsilon^e dV^e - \int_{V^e} \mathbf{B}^T \sigma^e dV^e + \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV^e \quad (4.100)$$

ou,

$$\mathbf{K}^e \delta^e = \mathbf{F}_n + \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_{\epsilon^0} + \mathbf{F}_{\sigma^0} + \mathbf{F}_b \quad (4.101)$$

onde,

$\mathbf{K}^e$: a matriz de rigidez do elemento;

$\mathbf{F}_t$: forças nodais equivalentes devidas às forças de superfície;

$\mathbf{F}_{\epsilon^0}$: forças nodais equivalentes devidas às deformações de origem térmica;

$\mathbf{F}_{\sigma^0}$: forças nodais equivalentes devidas às tensões iniciais;

$\mathbf{F}_b^e$: forças nodais equivalentes devidas às forças de volume.

sendo definidas da seguinte forma:

$$\mathbf{K}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV^e \quad (4.102)$$

$$\mathbf{F}_t = \int_{\Gamma^e} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma^e \quad (4.103)$$

$$\mathbf{F}_{\epsilon^0} = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \epsilon^e dV^e \quad (4.104)$$

$$\mathbf{F}_{\sigma^0} = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \sigma^e dV^e \quad (4.105)$$

$$\mathbf{F}_b^e = \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV^e \quad (4.106)$$

As equações anteriormente descritas, referem-se a um sólido, que após ter sido efectuada a discretização por elementos finitos, apenas contem um único elemento. No entanto, quando se considera uma malha de elementos finitos composta por vários elementos, a equação (4.101), deve ser alterada, de forma a serem consideradas as contribuições dos diversos elementos da malha, obtendo-se assim um sistema de equações de equilíbrio da forma:

$$\mathbf{K} \delta = \mathbf{F} \quad (4.107)$$

o qual depois de resolvido fornece o valor dos deslocamentos para todos os nós da estrutura.

Conhecidos os valores desses deslocamentos, as tensões para cada elemento da estrutura, são calculados:

$$\sigma = \mathbf{D}(\mathbf{B} \delta^e - \epsilon^0) + \sigma^0 \quad (4.108)$$

4.6. REFERÊNCIAS

- [1] César de Sá, J.M., (1986), *Numerical modelling of incompressible problems in glass forming and rubber technology*, Ph. D. Thesis. Swansea.
- [2] César de Sá, J.M. & Almeida, F.D., (1989), *Métodos de solução por elementos finitos de problemas estruturais incompressíveis e análise de espaços de solução*, X Cong. Ibero Lat. Am. Met. Comp. Em Eng., Porto, A, pp. 921-936.
- [3] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. & Too, J.M., (1971), *Reduced integration technique in general analysis of plates and shells*, Int. Journal for Num. Meth. in Eng., vol.3, pp. 275-290.
- [4] César de Sá, R. M. Natal, Rui P. R. Cardoso, 1998, *Simulation of Hollow Glass Containers, Colloquium on Modelling of Glass Forming Processes*, Valenciennes, France, 13-15 October 1998
- [5] A. B. Boley, J. H. Weiner, 1960, *Theory of Thermal Stresses*, John Wiley and Sons, U.S.A..
- [6] S. P. Timoshenko, J. N. Goodier, 1980, *Teoria da Elasticidade*, 3ª Edição, Edições Guanabara Dois S.A., Rio de Janeiro.
- [7] E. Hinton, D.R.J. Owen, 1977, *Finite Element Programming*, pag. 12-15, Academic Press Inc. LTD., London.
- [8] Robert D. Cook, 1976, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 2nd Edition, John Wiley and Sons, New York.
- [9] T. J. Iardner, R. Archer, 1994, *Mechanics of Solids*, McGraw-Hill Book Company CO., Singapore.
- [10] Egor P. Popov, 1990, *Engineering Mechanics of Solids*, Prentice-Hall Inc., New Jersey.
- [11] J. M. César de Sá, 1986, *Numerical Modelling of Glass Forming Processes*, Engineering Computation, vol.3, pp. 266-275.
- [12] Paulo J. M. M. Vila Real, 1993, *Modelação por Elementos Finitos da Solidificação e Comportamento Termo-Mecânico de Peças Vazadas em Moldações Mecânicas*, Tese de Doutoramento, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- [13] R. P. R. Cardoso, 1998, *Desenvolvimento de Modelos para Regeneração Adaptativa e Contacto em Processos de Enformação Plástica*, Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

- [14] Luísa M. P. A. C. Sousa, 1993, *Modelação Termomecânica de Processos de Enformação Plástica por Formulações Mistas*, Tese de Doutoramento, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- [15] S. Nakazawa and O. C. Zienkiewicz, 1981, Finite Element Analysis of Flow and Couple Heat in Polimeric Fluids, Numerical Methods for Coupled Problems, E. Hinton, P. Bettes, and R. W. Lewis, Pineridge press, Swansea, U. K.

Capítulo 5

Gerador Automático e Transferência de Variáveis

5.1. INTRODUÇÃO

Com o desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos, tem-se verificado a sua crescente utilização na simulação de situações reais, quer nos meios académicos como nos diferentes meios industriais. No entanto, tendo em consideração que este método se baseia na discretização de um meio contínuo, as soluções obtidas nem sempre traduzem fielmente a realidade. A fiabilidade dos resultados depende desta forma, da malha utilizada, bem como da sua evolução ao longo do processo, como no presente caso em estudo.

Nos processos de enformação a altas temperaturas, as peças experimentam elevadas deformações traduzidas por acentuadas variações na geometria. No modelo numérico os elementos aparecem com um elevado grau de distorção, facto este que irá afectar a fiabilidade da solução final.

A utilização do Método dos Elementos Finitos, na análise numérica de problemas de enformação, torna-se a ferramenta mais importante para predizer e otimizar o processo. A utilização da regeneração adaptativa, na simulação de processos de enformação assenta nos seguintes pontos essenciais:

- fortes variações da geometria ao longo do processo,
- refinamento optimizado da malha de elementos finitos ao longo do processo.

Este capítulo, tem por objectivos, apresentar de uma forma sucinta o processo de geração automática da malha de elementos finitos, sendo atribuído particular ênfase à actualização de variáveis bem como à adaptação da geração automática de malhas de elementos finitos no programa de simulação de processos de enformação.

5.2. GERADOR AUTOMÁTICO DE QUADRILÁTEROS

A utilização de um gerador automático de quadriláteros, traduz a necessidade inerente aos processos de enformação face às elevadas variações de forma a que as peças estão sujeitas. Apesar da malha de elementos finitos inicialmente utilizada sofrer vertiginosas variações desde a fase inicial do processo até ao instante em que a garrafa está totalmente formada, verifica-se que as soluções obtidas estão muito próximas das reais, não havendo necessidade de se proceder à utilização de uma nova malha. No entanto, o cálculo das tensões residuais, requer a utilização de uma malha mais homogénea e refinada.

5.2.1. Princípio de funcionamento

O gerador automático que se passa a apresentar, consiste na geração de elementos quadrangulares a partir de triângulos. Apesar dos elementos triangulares aparecerem como o método mais fácil de gerar uma malha de elementos finitos num determinado domínio, a sua utilização com a mesma ordem no polinómio de interpolação não produz o mesmo grau de precisão dos elementos quadrangulares em certas aplicações de elementos finitos [1]. A metodologia baseia-se no facto de que (i) uma região pode sempre ser dividida em quadriláteros se o polígono que forma a fronteira dessa região tiver um número par de lados, (ii) um quadrilátero pode sempre ser formado por dois triângulos que partilham um lado em comum [2].

A geração de elementos quadrangulares, pelas técnicas de mapeamento isoparamétrico descritas por Zienkiewicz e Phillips [3] e mapeamento transfinito, é muito utilizada. No entanto, quando estas técnicas são utilizadas na geração de malha, o domínio tem que ser manualmente subdividido em regiões simples que são posteriormente mapeadas em redes regulares que formarão a malha. O gerador apresentado neste item, procurando ter o controle absoluto de forma a não permitir a existência de elementos triangulares e/ou cavidades numa malha de quadriláteros, começa por gerar triângulos, permitindo após a geração de dois triângulos com um lado comum, a formação de um quadrilátero.

Ao contrário de alguns geradores de quadriláteros a partir de elementos triangulares, em que é primeiro gerada uma malha de triângulos em todo o domínio e no final esses triângulos são convertidos em quadriláteros [4], este gerador vai começando a formar triângulos e sempre que se geram dois triângulos, converte-os em quadriláteros. A justificação desta opção assenta essencialmente no controle que desta forma pode ser feito, para que não fiquem triângulos, ou cavidades, numa malha de quadriláteros [5,6].

Apesar de se pretender fazer apenas uma breve introdução do gerador de quadriláteros, torna-se necessário para melhor compreensão do leitor introduzir certas variáveis utilizadas:

- *Nós:* Entidades que representam os vértices.
- *Lados:* Lados dos quadriláteros. Cada lado é composto por um segmento de recta contendo um nó em cada extremidade.
- *Lado Fronteira:* Lado que pertence ao polígono da fronteira.
- *Estrutura de Lados:* Base de dados constituída pelos diversos códigos associados aos respectivos lados. Este código permite identificar o posicionamento do lado em questão assim como identificar os nós constituintes desse lado.
 $Lado(ilado, 1)$ – primeiro nó do lado
 $Lado(ilado, 2)$ – segundo nó do lado
 $Lado(ilado, 3)$ - código do lado. Caso $Lado(ilado, 3) = 2$, significa que o lado é fronteira.



Figura 5.1. Lado de um quadrilátero

Consideremos a figura 5.1. Para um lado de um equilátero com a numeração em cima representada, a estrutura de *Lados* toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned} Lado(ilado, 1) &= 1 \\ Lado(ilado, 2) &= 2 \\ Lado(ilado, 3) &= 2 \text{ (lado fronteira)} \end{aligned}$$

- *Fronteira:* Conjunto de lados que formam a fronteira.
- *Primeiro triângulo:* Representa o primeiro triângulo que é formado a partir de um lado fronteira.
- *Segundo triângulo:* Segundo triângulo que é formado a partir de um dos lados do primeiro triângulo.

Conforme referido anteriormente, sempre que se geram dois triângulos com um lado comum, é gerado um quadrilátero. Desta forma a fronteira anteriormente existente deixa de ser válida passando a existir uma nova fronteira, cabendo ao algoritmo a responsabilidade de, para cada nova fronteira controlar a existência de cavidades, de forma a garantir a boa formação da malha.

A constante formação de triângulos obriga a que cada lado gerado se posicione ou no primeiro triângulo ou no segundo triângulo ou na nova fronteira. Sendo necessário controlar o posicionamento de cada novo lado gerado, tendo desta forma um controlo da

formação da malha, a estrutura do algoritmo atribui a cada lado um código de posicionamento (*estrutura do lado*).

Considere-se a figura 5.2 a), onde se apresenta um determinado domínio com uma distribuição de nós previamente estabelecida. Para o instante inicial, a fronteira encontra-se visualizada a traço grosso, tomando a forma da figura 5.2 b) após a formação de seis quadriláteros.

O próximo passo do algoritmo é formar um novo triângulo a partir da fronteira. Para tal, o algoritmo posiciona-se no lado fronteira com o menor comprimento, permitindo desta forma que a zona do domínio com maior densidade de nós seja a primeira onde serão gerados quadriláteros.

Após a formação do primeiro triângulo, o algoritmo posiciona-se num dos lados que não o lado fronteira para proceder à formação do segundo triângulo. Consideremos para efeito de ilustração que o algoritmo se posicionou no lado representado a traço interrompido (figura 5.2 c)), tendo-se formado o triângulo conforme mostra a figura.

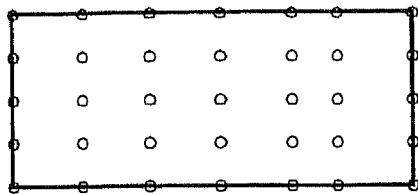


Figura 5.2 a): Fronteira inicial

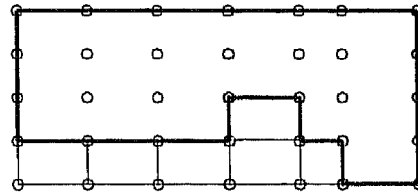


Figura 5.2 b): Fronteira após a formação de 6 elementos

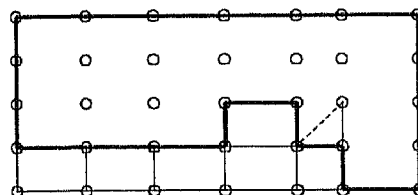


Figura 5.2 c): Formação do 1º triângulo

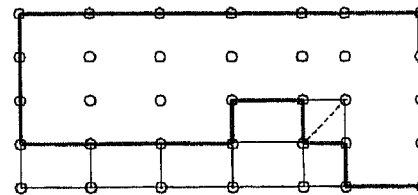


Figura 5.2 d): Formação do 2º triângulo

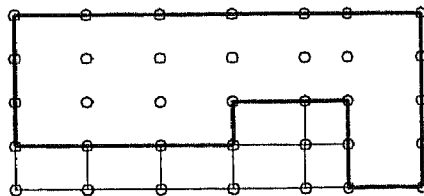


Figura 5.2 e): Formação de uma nova fronteira

Após a formação do segundo triângulo, está-se no momento de proceder à construção do quadrilátero eliminando-se para o efeito o lado comum aos dois triângulos, que será efectuado se, e só se, existirem condições favoráveis à sua formação.

Quando o algoritmo verifica incompatibilidades na geração do quadrilátero procede da seguinte forma:

- i. A informação que foi utilizada para gerar o primeiro triângulo é guardada.

- ii. O segundo triângulo é eliminado e os códigos dos lados são actualizados na estrutura de codificação.
- iii. O primeiro triângulo é eliminado e a estrutura de codificação dos lados actualizada.

Caso o gerador verifique a criação de um quadrilátero mal formado é procurado um outro lado fronteira para uma nova tentativa de construção do quadrilátero.

A figura 5.3 pretende representar as malhas antiga e após a regeneração. Como se pode observar, para além da malha nova se encontrar mais refinada, ela contém mais nós e elementos, sendo necessário proceder-se à actualização de variáveis, estudo este efectuado no próximo item.

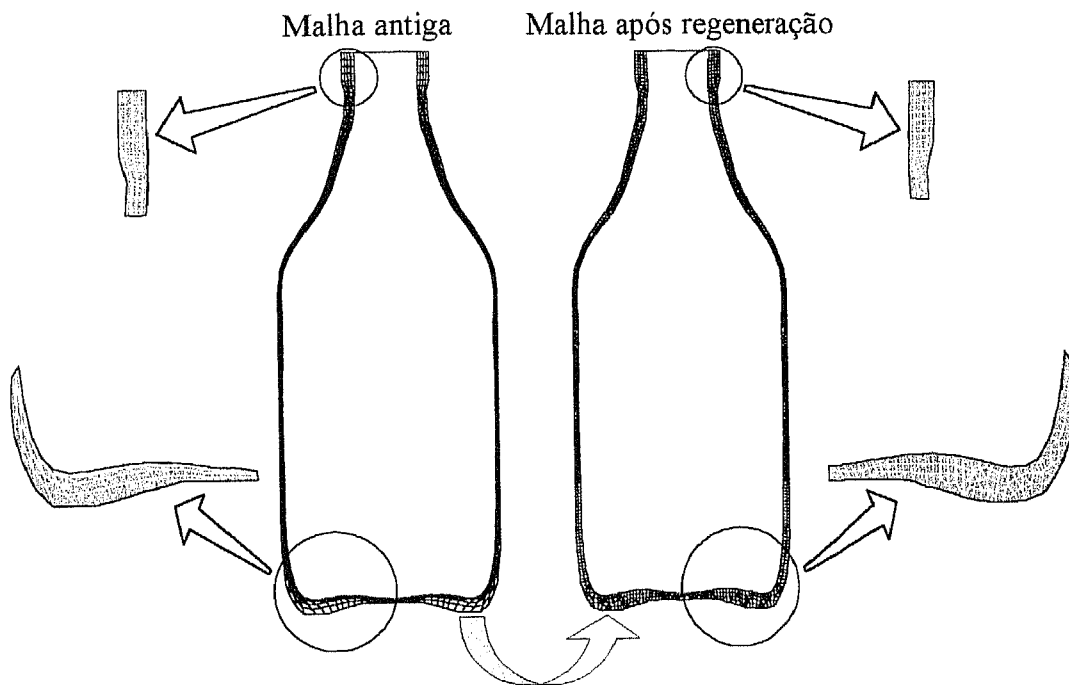


Figura 5.3: Malha antiga e malha após a regeneração

5.3. TRANSFERÊNCIA DE VARIÁVEIS

Após a criação da nova malha de elementos finitos, a transferência de variáveis como o campo de temperaturas, pressões, entre outras, torna-se necessária. De forma semelhante à análise implícita [7,8], deve-se ter especial atenção relativamente à consistência das equações constitutivas assim como compatibilidade com as condições de fronteira envolvente.

Para o efeito foi executado um programa de interface que tem por objectivo realizar a transferência de variáveis nodais, entre os nós da malha antiga e os nós da malha nova. Por outro lado é necessário identificar os diferentes tipos de fronteira de modo a impor correctamente, e em coerência com a antiga malha, as condições de contorno na nova malha.

O fluxograma abaixo representado pretende descrever o código implementado:

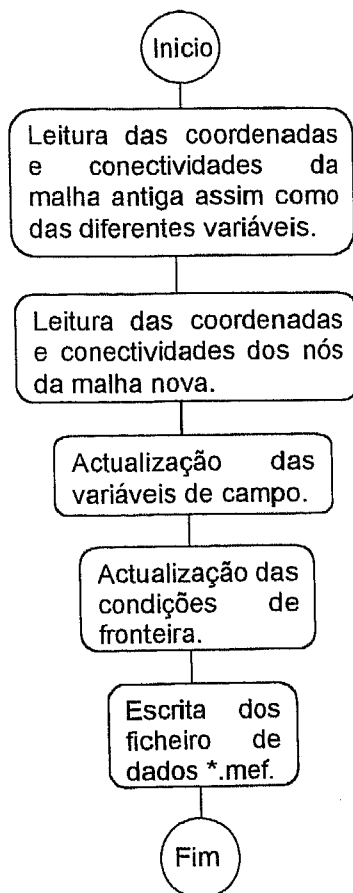


Figura 5.4: Fluxograma do programa que faz a actualização de variáveis

5.3.1. Actualização das variáveis de campo

Quando o funcionamento do programa principal é interrompido de forma a se proceder à regeneração da malha de elementos finitos, dois ficheiros são criados. Um deles contém apenas a informação correspondente ao estado em que o problema se encontrava no instante em que foi interrompido, isto é, contém a informação completa das diversas variáveis de campo nos vários pontos da malha de elementos finitos. O segundo ficheiro contém a geometria da malha, coordenadas nodais e conectividades.

Posteriormente, este segundo ficheiro é lido no CADMEC (programa utilizado apenas para visualização de resultados e geração de malhas) [11,12]. Aí, a malha de elementos finitos original é substituída por uma malha completamente nova, sendo criado um ficheiro com a extensão *.mef.

O novo código tem obrigatoriamente de ler quer o ficheiro que contém as variáveis correspondentes ao último incremento, como o ficheiro que contém os dados geométricos da nova malha.

Para se proceder à actualização das variáveis de campo, em primeiro lugar é imperioso determinar sobre qual o elemento da malha antiga se encontra o nó N_N da malha nova. Esta procura é feita através do cálculo dos quatro produtos vectoriais (5.1) entre os lados do elemento e os vectores que ligam o nó N_N ao vértice extremo do vector que representa o lado [5,8-10,13], figura 5.5.

$$\frac{\overline{N_1 N_2} \times \overline{N_1 N_N}}{\overline{N_3 N_4} \times \overline{N_4 N_N}} \quad (5.1)$$

$$\frac{\overline{N_2 N_3} \times \overline{N_3 N_N}}{\overline{N_4 N_1} \times \overline{N_1 N_N}}$$

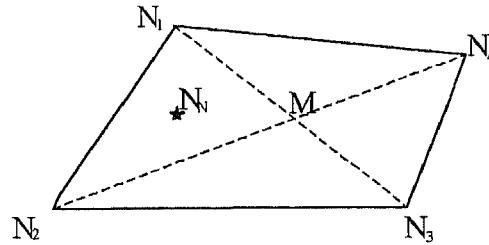


Figura 5.5. Determinação do elemento da malha antiga onde se encontra o nó N_N

Se todos os produtos vectoriais definidos pelas equações (5.1) forem positivos, o elemento foi encontrado, sendo então subdividido em quatro elementos triangulares conforme descrito na figura 5.5.

De forma semelhante à anterior, é necessário determinar em qual dos triângulos se encontra o novo nó N_N . Para tal, procede-se de forma análoga à anterior calculando os diversos produtos vectoriais.

Após a determinação do triângulo, as variáveis de campo são transferidas da malha antiga para a malha nova utilizando coordenadas de área, da seguinte forma:

$$vr_N^{new} = vr_1^0 \frac{A_1}{A_t} + vr_2^0 \frac{A_2}{A_t} + vr_3^0 \frac{A_3}{A_t} \quad (5.2)$$

sendo a área total do triângulo,

$$A_t = A_1 + A_2 + A_3 \quad (5.3)$$

e, vr_N^{new} o valor da variável na malha nova e vr_1^0 , vr_1^0 e vr_1^0 , os valores da mesma variável na malha antiga. As áreas A_1 , A_2 e A_3 são definidas de acordo com a figura 5.6.

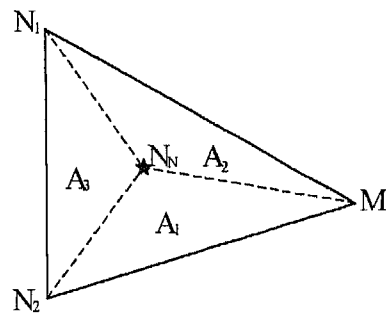


Figura 5.6: Áreas do Triângulo

5.3.2. Atribuição das condições de fronteira

Quando se procede à actualização das variáveis, algumas delas como o caso do fluxo de calor são tidas como condições de fronteira, devendo então ser impostas a um determinado conjunto de nós fronteira. Desta forma, quando se actualiza as condições de fronteira há que ter em atenção dois tipos de condições de fronteira:

- Condições de fronteira correspondentes à parte térmica caracterizadas pelos valores de fluxo de calor em determinados nós de fronteira e pelos valores de temperatura nos diversos nós da malha;
- condições de fronteira correspondentes à parte mecânica caracterizadas por restrições a deslocamentos em diversos nós.

A atribuição destas variáveis à nova malha de elementos finitos é realizada atendendo às seguintes etapas:

- i. determinação da fronteira da nova malha;
- ii. atribuição de um código de posicionamento de forma a determinar que tipo de condição de fronteira o nó em questão está sujeito
- iii. atribuição das condições de fronteira mecânicas à nova malha de elementos finitos
- iv. atribuição das condições de fronteira térmicas à nova malha
- v. escrita de um ficheiro de dados que contém toda a informação relativa à nova malha de elementos finitos.

5.3.2.1. Determinação da fronteira da malha de elementos finitos

A determinação dos lados e respectivos nós que constituem a malha de elementos finitos, é um passo essencial para a imposição das condições de fronteira. Neste ponto serão descritos os vários factores a ter em consideração para a obtenção das condições de fronteira.

De forma análoga ao descrito no item 5.2, as variáveis utilizadas nesta subrotina são:

- Nós
- Lados
- Lado fronteira
- Estrutura de lados

As definições relativas às diferentes variáveis acima referidas, encontram-se descritas no item 5.2.1. deste capítulo.

Tabela 5.1: Descrição das variáveis utilizadas no algoritmo de determinação dos lados fronteira.

Descrição das variáveis utilizadas no algoritmo de determinação dos lados fronteira	
lados_{i,j} :	Matriz que contém os diversos lados da malha de elementos finitos. Como anteriormente definido, o valor correspondente à terceira coluna, define se o lado em estudo é um lado fronteira.
NM_L :	Número máximo de lados.
no_i^{iel} :	Conectividades do elemento <i>iel</i> .

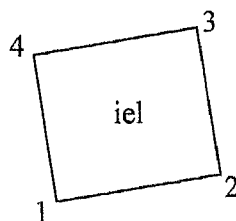
Algoritmo de Determinação dos Lados Fronteira

1º INICIALIZAÇÃO DO VECTOR QUE CONTÉM A ESTRUTURA DE LADOS:

$$\sum_{i=1}^{NM_L} \sum_{j=1}^3 \text{lados}_{i,j} = 0$$

2º CICLO PARA CADA ELEMENTO *iel*, DA MALHA DE ELEMENTOS FINITOS, CONSIDERANDO OS NÓS QUE O CONSTITUEM DEFINIDOS DA SEGUINTE FORMA:

no₁^{iel}
no₂^{iel}
no₃^{iel}
no₄^{iel}



iel = 1, *nelem* (n.º de elementos da malha de elementos finitos)

- Ciclo para determinar se os nós $\mathbf{no}_1^{iel}$ e $\mathbf{no}_2^{iel}$ do elemento iel pertencem à fronteira da malha de elementos finitos.

```

 $ln_1 = 0$ 
DO WHILE ( $il \geq 1 \wedge itest = 0$ )
  IF  $((\mathbf{lad}_{il,1} = \mathbf{no}_1^{iel}) \wedge (\mathbf{lad}_{il,2} = \mathbf{no}_2^{iel})) \vee$ 
     $((\mathbf{lad}_{il,2} = \mathbf{no}_1^{iel}) \wedge (\mathbf{lad}_{il,1} = \mathbf{no}_2^{iel}))$  THEN
     $ln_1 = il$ 
     $itest = 1$ 
  END IF
   $il = il - 1$ 
END DO

IF ( $ln_1 = 0$ ) THEN
   $nl = nl + 1$ 
   $\mathbf{lad}_{il,1} = \mathbf{no}_1^{iel}$ 
   $\mathbf{lad}_{il,2} = \mathbf{no}_2^{iel}$ 
   $\mathbf{lad}_{il,3} = 2$ 
ELSE
   $\mathbf{lad}_{il,3} = 3$ 
END IF

```

Neste caso, foi determinado que o lado composto pelos nós $\mathbf{no}_1^{iel}$ e $\mathbf{no}_2^{iel}$ é um lado fronteira

O lado composto pelos nós $\mathbf{no}_1^{iel}$ e $\mathbf{no}_2^{iel}$ não é um lado fronteira

- O ciclo anteriormente descrito repete-se de forma a percorrer todos os nós do elemento iel .

Desta forma, obtém-se uma matriz que contém a numeração de todos os nós que constituem a fronteira da malha de elementos finitos, assim como a informação necessária para definir o posicionamento dos diversos lados fronteira.

A figura 5.7 representa a malha de elementos finitos para a garrafa e a sua fronteira.

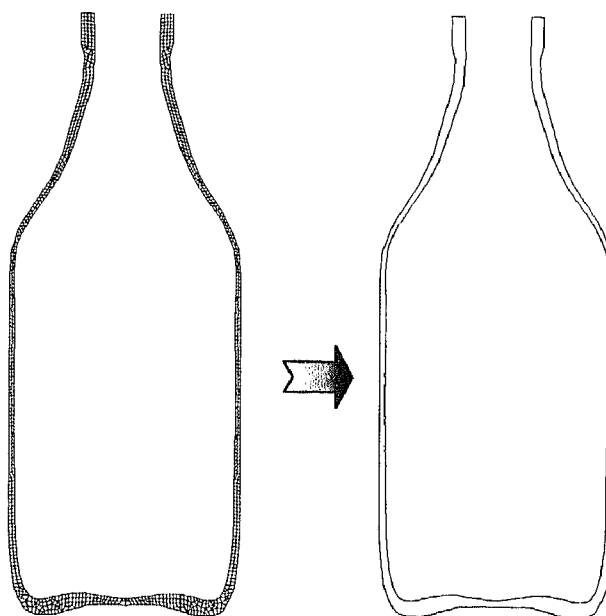


Figura 5.7: Representação da malha de elementos finitos e respectiva fronteira

5.3.2.2. Atribuição do código de posicionamento dos nós fronteira

A imposição de um código de posicionamento para os diferentes nós que constituem a fronteira, deve-se ao facto da geometria da malha ser extremamente pequena, facto este que levou ao aparecimento de certas dificuldades na imposição destas condições de fronteira.

Face ao número de condições de fronteira, quer térmicas como mecânicas, criou-se um vector que contém para um código de posicionamento para cada lado fronteira. A figura 5.8 representa a geometria da peça assim como os diversos códigos fronteira utilizados.

De seguida será apresentado o algoritmo de atribuição de códigos aos diversos lados que constituem a fronteira da malha. Para melhor compreensão do leitor, encontra-se na tabela 5.2, descritas as diversas variáveis que fazem parte do algoritmo apresentado.

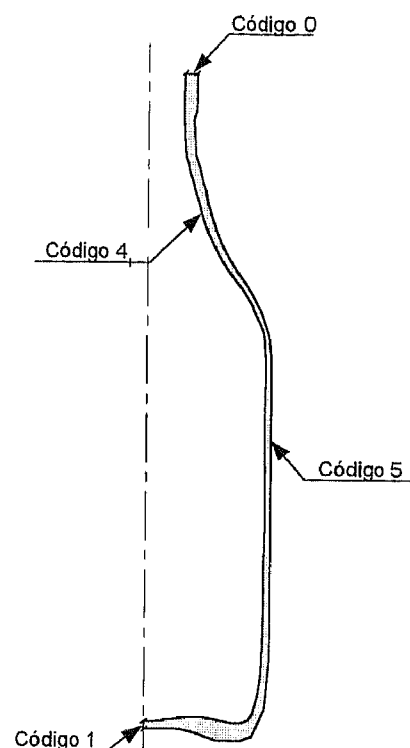


Figura 5.8: Códigos de posicionamento

Tabela 5.2. Descrição das variáveis utilizadas no algoritmo de atribuição de códigos os lados fronteira

Descrição das variáveis utilizadas no algoritmo de atribuição de códigos de posicionamento	
lados_{i,j} :	Matriz que contém os diversos lados da malha de elementos finitos. Como anteriormente definido, o valor correspondente à terceira coluna, define se o lado em estudo é um lado fronteira.
no_{i^{iel}} :	Conectividades do elemento <i>iel</i> .
code_{il} :	Vector que contém o código atribuído a cada lado fronteira <i>il</i> .
coord_{i,j} :	Matriz que contém as coordenadas dos nós

Algoritmo de Atribuição dos Códigos

1º DETERMINAÇÃO DOS LADOS FRONTEIRA COM CÓDIGOS 0 E 1 E SEU ARMAZENAMENTO NOS VECTORES *N0* E *N1* RESPECTIVAMENTE.

i. Ciclo para cada lado da fronteira *il*:

DO *il* = 1, *nlado*

```

no1 = ladosil,1
no2 = ladosil,2
IF ((coord1,no1 = 0.0) ∧ (coord1,no2 = 0.0)) THEN
    codeil = 1
    k1 = k1 + 1
    nk11 = no1
    k1 = k1 + 1
    nk11 = no2
END IF
IF ((coord2,no1 = 0.0) ∧ (coord2,no2 = 0.0)) THEN
    codeil = 0
    k0 = k0 + 1
    nk001 = no1
    k0 = k0 + 1
    nk00 = no2
END IF
END DO

```

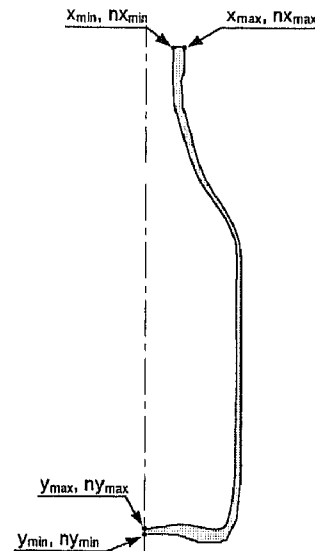
Determinação dos nós que compõem os lados que constituem a fronteira com o código 1, assim como seu armazenamento no vector $\mathbf{n}_{k_i}^1$

Determinação dos nós que compõem os lados que constituem a fronteira com o código 0, assim como seu armazenamento no vector $\mathbf{n}_{k_i}^0$

2º DETERMINAÇÃO DOS PONTOS CORRESPONDENTES AOS VALORES MÁXIMOS E MÍNIMOS DE XX E YY:

i. Valores iniciais de variáveis

$y_{\max} = 0$
 $y_{\min} = 0$
 $x_{\max} = 0$
 $x_{\min} = 0$



Ciclo para todos os nós com código 0:

```

DO i = 1, k0
  j0 = j0 + 1
  IF (j0 = 1) THEN
    xmax = coord1, noi0
    xmin = xmax
    nxmax = noi0
    nxmin = noi0
  ELSE
    IF (coord1, noi0 > xmax) THEN
      xmax = coord1, noi0
      nxmax = noi0
    END IF
    IF (coord1, noi0 < xmin) THEN
      xmin = coord1, noi0
      nxmin = noi0
    END IF
  END IF
END DO

```

Após o armazenamento no vector $n_{k_i}^0$ dos diversos nós que pertencem aos lados com o código 0, é realizado um ciclo para todos os nós com vista a determinar o nó com a coordenada xx maior, assim como o nó com a coordenada xx mais baixa, isto é, os nós nx_{max} e nx_{min} respectivamente

Ciclo para todos os nós com código 1:

```

DO i = 1, k1
  j1 = j1 + 1
  IF (j1 = 1) THEN
    ymax = coord2, noi1
    ymin = ymax
    nymax = noi1
    nymin = noi1
  ELSE
    IF (coord2, noi1 > ymax) THEN
      ymax = coord2, noi1
      nymax = noi1
    END IF
    IF (coord2, noi1 < ymin) THEN
      ymin = coord2, noi1
      nymin = noi1
    END IF
  END IF
END DO

```

Após o armazenamento no vector $n_{k_i}^1$ dos diversos nós que pertencem aos lados com o código 1, é realizado um ciclo para todos os nós com vista a determinar o nó com a coordenada yy maior, assim como o nó com a coordenada yy mais baixa, isto é, os nós ny_{max} e ny_{min} respectivamente

3º DETERMINAÇÃO DOS LADOS FRONTEIRA COM CÓDIGO 4.

Ciclo para todos os lados da fronteira da malha de elementos finitos:

```
DO il = 1, nlado
  IF (codeil ≠ 0 ∨ codeil ≠ 1 ∨ codeil ≠ 4) THEN
    IF (ladosil,1 = nymax) THEN
      nymax = ladosil,2
      codeil = 4
      IF (coord1,nymax = xmin) sai deste ciclo,
        e começa a determinar os códigos 5
    END IF

    IF (ladosil,2 = nymax) THEN
      nymax = ladosil,1
      codeil = 4
      IF (coord1,nymax = xmin) sai deste ciclo,
        e começa a determinar os códigos 5
    END IF
  END IF
END DO
```

Todos os lados com o código 4, como se vê na figura 5.8, estão posicionados na parte interior da garrafa. É realizado um ciclo pelos lados interiores da garrafa, isto é, os lados cujos nós variam entre os nós ny_{max} e nx_{min} .

4º DETERMINAÇÃO DOS LADOS FRONTEIRA COM CÓDIGO 5.

Ciclo para todos os lados da fronteira da malha de elementos finitos:

```
DO il = 1, nlado
  IF (codeil ≠ 0 ∨ codeil ≠ 1 ∨ codeil ≠ 4 ∨ codeil ≠ 5) THEN
    IF (ladosil,1 = nymax) THEN
      nymax = ladosil,2
      codeil = 5
      IF (coord1,nymax = xmax) sai deste ciclo
    END IF

    IF (ladosil,2 = nymax) THEN
      nymax = ladosil,1
      codeil = 5
      IF (ladoil,1 = nxmax) sai deste ciclo
    END IF
  END IF
END DO
```

Todos os lados com o código 5, como se vê na figura 5.8, estão posicionados na parte exterior da garrafa. É realizado um ciclo pelos lados interiores da garrafa, isto é, os lados cujos nós variam entre os nós ny_{min} e nx_{max} .

5.3.2.3. Atribuição das condições de fronteira

Relativamente às condições de fronteira correspondentes à parte mecânica do problema, isto é, aos nós fixos ou com deslocamentos prescritos, como o algoritmo tem um controle absoluto do posicionamento dos nós, este processo é praticamente automático.

Existem nós que pelo seu posicionamento em relação ao molde têm o seu deslocamento restrito em determinadas direcções. Estes nós estão situados na parte superior da garrafa (marisa) cuja posição segundo uma ou mais direcções se mantém inalterada ao longo do processo de enformação, assim como todos os nós que entram em contacto com o molde antes de se proceder à regeneração.

Como se trata de um problema axissimétrico, existem restrições devido à simetria. A figura 5.9 representa as condições de fronteira mecânicas necessárias para a simulação.

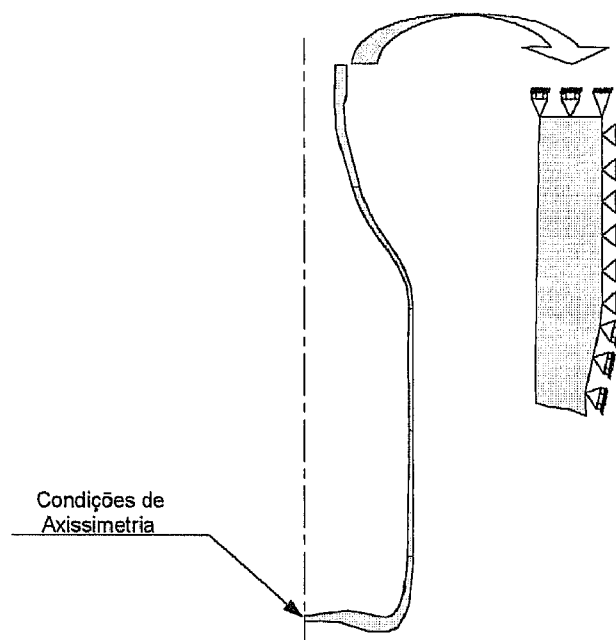


Figura 5.9: Condições de Fronteira Mecânicas

Relativamente às condições de fronteira correspondentes à parte térmica do problema, pode-se identificar as seguintes situações:

- Fluxo prescrito de calor,
- Temperatura envolvente da garrafa, isto é:
 - Temperatura da parte da garrafa que posteriormente irá entrar em contacto com o molde, e
 - Temperatura da região fronteira situada no interior da garrafa
- Temperatura nos diversos nós da malha de elementos finitos.

Conforme referido, estas condições de fronteira apenas são aplicadas após a correcta transferência de variáveis da malha antiga para a malha nova, pois os seus valores variam ao longo do processo de enformação. Desta forma, após a respectiva transferência de

variáveis e atribuição de um código de posicionamento, este processo torna-se, num processo rápido e intuitivo. Na figura 5.10, visualizamos as várias variáveis a transferir.

Tabela 5.3. Descrição das variáveis utilizadas no algoritmo de atribuição de condições de fronteira mecânicas

Descrição das variáveis utilizadas no algoritmo de atribuição de condições de fronteira mecânicas	
lados_{i,j} :	Matriz que contém os diversos lados da malha de elementos finitos. Como anteriormente definido, o valor correspondente à terceira coluna, define se o lado em estudo é um lado fronteira.
code_{il} :	Vector que contém o código atribuído a cada lado fronteira il.
coord_{i,j} :	Matriz que contém as coordenadas dos nós
no_cfm_i :	Vector que contém todos os nós com condições de fronteira mecânicas.
nf_i :	Vector que contém o tipo de restrições aplicadas aos diversos nós com condições de fronteira.

Algoritmo de Atribuição das Condições de Fronteira Mecânicas

1º INICIALIZAÇÃO DE VARIÁVEIS:

nos_fixos = 0

2º CICLO PARA CADA LADO FRONTEIRA il

DO il = 1, nlado

```

IF (codeil = 0) THEN
  nos_fixos = nos_fixos + 1
  no1 = ladosil,1
  IF (coord1,no1 = 1.3) THEN
    no_cfmnos_fixos = ladosil,1
    ifix = 2 * no_cfmnos_fixos
    nfifix-1 = 1
    nfifix = 1
    GOTO ①
  END IF
  no_cfmnos_fixos = ladosil,1
  ifix = 2 * no_cfmnos_fixos
  nfifix = 1
① nos_fixos = nos_fixos + 1

```

Atribuição das condições de fronteira aos lados com o código 0. Estes lados com excepção do nó nx_{max} , têm o deslocamento segundo o eixo dos yy restringido estando livre de se deslocarem segundo o eixo dos xx. O nó nx_{max} tem os deslocamentos restringidos em ambas as direcções.

```

no1 = ladosil,2
IF (coord1,no1 = 1.3) THEN
    no_cfmnos_fixos = ladosil,2
    ifix = 2 * no_cfmnos_fixos
    nfifix-1 = 1
    nfifix = 1
    GOTO ②
END IF

no_cfmnos_fixos = ladoil,2
ifix = 2 * no_cfmnos_fixos
nfifix = 1
② END IF

IF (codeil = 1) THEN
    nos_fixos = nos_fixos + 1
    no1 = ladosil,1
    no_cfmnos_fixos = ladosil,1
    ifix = 2 * no_cfmnos_fixos
    nfifix-1 = 1
    nos_fixos = nos_fixos + 1
    no1 = ladosil,2
    ifix = 2 * no_cfmnos_fixos
    nfifix-1 = 1
END IF
END DO

```

Atribuição das condições de fronteira aos lados com o código 1. Estes têm o deslocamento segundo o eixo dos xx restringido estando livre de se deslocarem segundo o eixo dos yy.

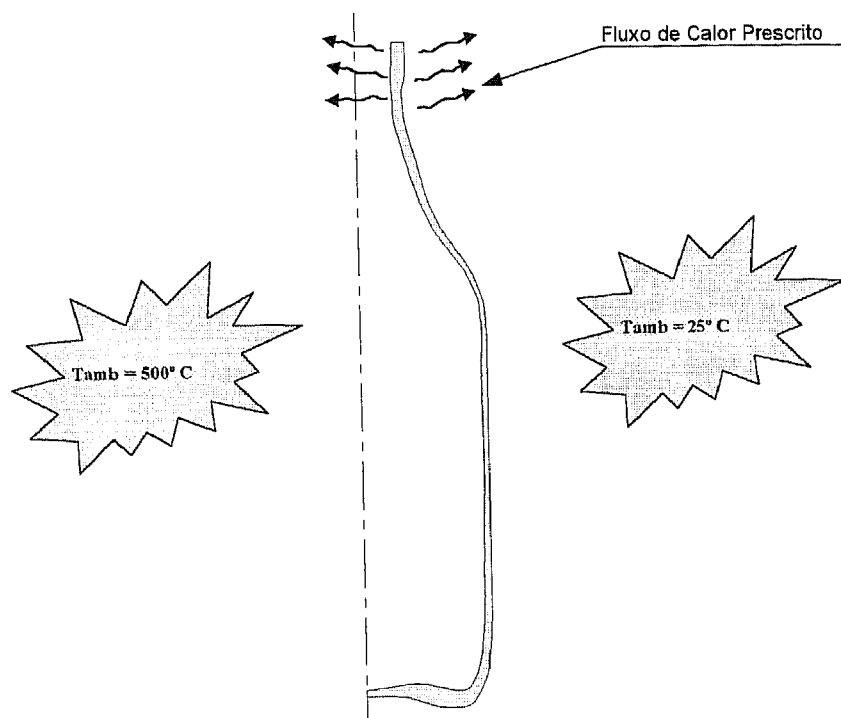


Figura 5.10: Condições de fronteira térmicas

5.4. REFERÊNCIAS

- [1] A. T. Jeffrey, R. P. Alan, 1990, Development of an automatic two-dimensional finite element mesh generator using quadrilateral elements and bezier curve boundary definition, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol. 29, pag. 1551-1567.
- [2] Zhu, J.Z., Zienkiewicz, O.C., Hinton, E., Wu, J., (1991), A new approach to the development of automatic quadrilateral mesh generation, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol. 32, pp. 849-866.
- [3] Zienkiewicz, O.C., Phillips, D.V., (1971), An automatic mesh generation scheme for plane and curved surfaces by isoparametric co-ordinates, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol. 3, pp. 519-528.
- [4] Johnston, B.P., Sullivan, J.M. & Kwasnik, A., 1991, Automatic conversion of triangular finite element meshes to quadrilateral elements, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol. 31, pp. 67-84.
- [5] Barata Marques, M.J.M. & Martins, P.A.F., 1990, An algorithm for remeshing in metal forming, *J. of Mat. Proc. Tech.*, vol. 24, pp. 157-167.
- [6] César de Sá, J.M.A., Costa Sousa, L.M., Natal Jorge, R.M. & Cardoso, R.P., 1998, Virtual prototyping of radial extruded components, *Proc. NUMIFORM'98 Sixth Int. Conf. on Num. Meth. in Forming Processes.*, University of Twente, Netherland.
- [7] César de Sá, J.M.A., Costa Sousa, L.M., Natal Jorge, R.M. & Cardoso, R.P., 1998, Models for forming processes: some aspects for reliability, *Proc. ESAFORM 98, CEMEF, France.*
- [8] M. Dutko, D. Peric, D. R. J. Owen, A. J. L. Crook, Z. Wei, J. Yu, 1997, Bulk Forming Simulation by Adaptive Explicit FEM, *Computational Plasticity, Fundamentals and Applications*, CIMNE, Barcelona, Spain, vol.2, pp. 1305- 1312.
- [9] D. Peric, Ch. Hochard, M. Dutko, D. R. J. Owen, 1996, Transfer Operator for Evolving Meshes in Small Strain Elasto-plasticity, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 137, pp. 331- 344.
- [10] R. P. R. Cardoso, 1998, *Desenvolvimento de Modelos para Regeneração Adaptativa e Contacto em Processos de Enformação Plástica*, Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- [11] C. M. R. Gomes, Bragança de Oliveira, C. A., J. O. Fonseca, 1988, *Desenho Assistido por Computador em Computadores Pessoais.*

- [12] R. M. Natal Jorge, 1991, *Aplicações de CAD em ambiente X Window. Desenvolvimento de um pré-processador para o método dos elementos finitos.*, Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- [13] Luísa M. P. A. C. Sousa, 1993, *Modelação Termomecânica de Processos de Enformação Plástica por Formulações Mistas*, Tese de Doutoramento, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

Capítulo 6

Aplicação Prática

6.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo, são apresentados os diversos resultados obtidos quer para a distribuição de temperaturas quer para a distribuição de tensões no processo de enformação. Relativamente à garrafa é feita uma análise da variação da forma do *parison* desde que este é introduzido no molde até à obtenção da forma final. Durante este processo também é analisada a variação da distribuição de temperaturas. A partir do momento em que se obtém a forma final, procede-se a uma análise das tensões residuais provocadas pelo arrefecimento da garrafa. Relativamente ao molde, é analisada a distribuição de temperaturas com vista a uma correcta transferência de calor entre o molde e o vidro.

Desta forma, neste capítulo será efectuada uma descrição tanto da variação da forma sofrida pelo *parison* desde que este é introduzido no molde final, como serão apresentadas as variações do campo de temperaturas durante todo o processo bem como do campo de tensões residuais.

Obtiveram-se resultados com base em três programas distintos: um programa que faz a simulação dos processos de enformação do vidro onde o molde se encontra simulado de acordo com [1]- programa ①, um programa em que é feita a discretização do molde, sendo a transferência de calor realizada entre o molde e o vidro efectuada segundo a formulação apresentada em [2]- programa ②; um programa final onde a transferência de calor é igual à do programa ② mas contrariamente aos dois programas anteriores efectua-se primeiro, para cada iteração, a parte mecânica do problema como descrito no capítulo 4- programa ③.

6.2. DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

O problema estudado nesta tese refere-se à segunda fase do processo de enformação. Desta forma, todos os resultados obtidos, resultam de uma análise ao processo após o *parison* ser introduzido no molde final. Descreve-se de seguida as propriedades térmicas e mecânicas necessárias à simulação.

i. Propriedades Térmicas:

As propriedades térmicas iniciais englobam:

- distribuição inicial de temperaturas quer para o *parison* quer para o molde,
- valores de fluxos iniciais em certos pontos da fronteira.

Quando se estuda processos de enformação, verifica-se que a distribuição de temperaturas no molde tem de estabilizar de forma a permitir a boa formação da garrafa. Para tal, e assim como se verifica em aplicações práticas, é necessário efectuar o aquecimento do molde.

No processo de simulação efectuado, esse aquecimento foi realizado do modo que se passa a descrever. Admite-se que o molde inicialmente tem um pré-aquecimento uniforme de 500°C. Inicia-se o processo de simulação pela introdução no molde do *parison*. Como a temperatura do molde é muito baixa (500°C) para trabalhar convenientemente o vidro, o que se passa é que a viscosidade aumenta muito rapidamente não permitindo a formação completa da garrafa. Por outro lado, como a distribuição de temperatura do *parison* é superior à do molde, dá-se a transferência de calor do *parison* para o molde, com o correspondente aumento de valores de temperatura. Para a simulação seguinte, a distribuição de temperaturas no molde corresponde à obtida no final da simulação anterior. Este processo prossegue até se atingir a formação correcta da garrafa. A distribuição de temperaturas obtida para o molde, encontra-se representada na figura 6.1.

Note-se que, o processo descrito anteriormente, tem correspondência prática, uma vez que na produção industrial de garrafas, há uma fase inicial correspondente à estabilização do processo.

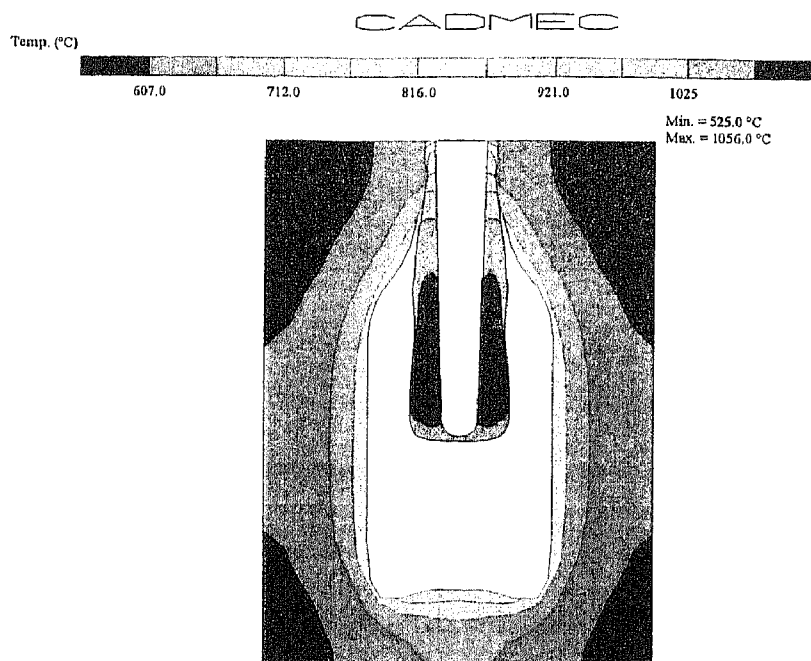


Figura 6.1: Condições iniciais de temperatura.

Os valores do fluxo de calor inicial nos diversos pontos da fronteira encontram-se especificados na figura 6.2. Como se pode observar, estes apenas são diferentes de zero na região da garrafa designada por marisa, isto é, na primeira região a ser formada, ainda no molde inicial.

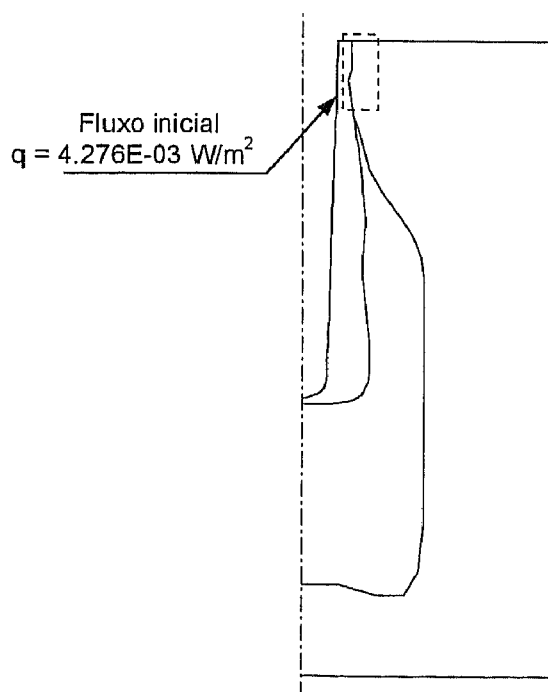


Figura 6.2: Condições iniciais de fluxo de calor.

As propriedades térmicas quer do vidro como do aço, encontram-se descritas na tabela 6.1.



Tabela 6.1.: Propriedades Térmicas

Propriedades Térmicas			
Material	Condutividade Térmica k (W/m.°C)	Capacidade Térmica c (J/°C)	Densidade ρ
Garrafa	1.00450	2.78000	2.5
Molde	0.109000E+03	4.55300	7.85

ii. Propriedades Mecânicas

Relativamente às propriedades mecânicas, são consideradas para os diferentes exemplos:

- nós com deslocamentos restringidos (figura 6.3)
- forças aplicadas: até ao instante de tempo $t = 0.8$ segundos, o parison apenas está sujeito à acção de gravidade. A partir deste instante, é aplicada uma pressão no interior da garrafa de $P = 1$ bar
- propriedades físicas: Na tabela 6.2, encontram-se descritas as propriedades físicas quer para o vidro como para o material de que é composto o molde (aço).

Tabela 6.2.: Propriedades Mecânicas

Propriedades Mecânicas				
Material	Módulo de Young E (N/m ²)	Coefficiente de Poisson ν	Densidade	Coefficiente de dilatação linear (°C ⁻¹)
Garrafa	7.6E11	0.3	2.5	3E-06

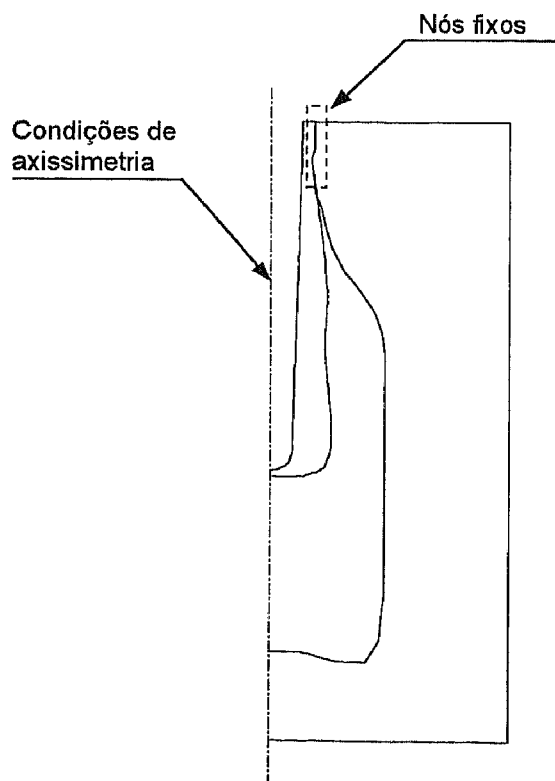


Figura 6.3: Condições de fronteira mecânicas.

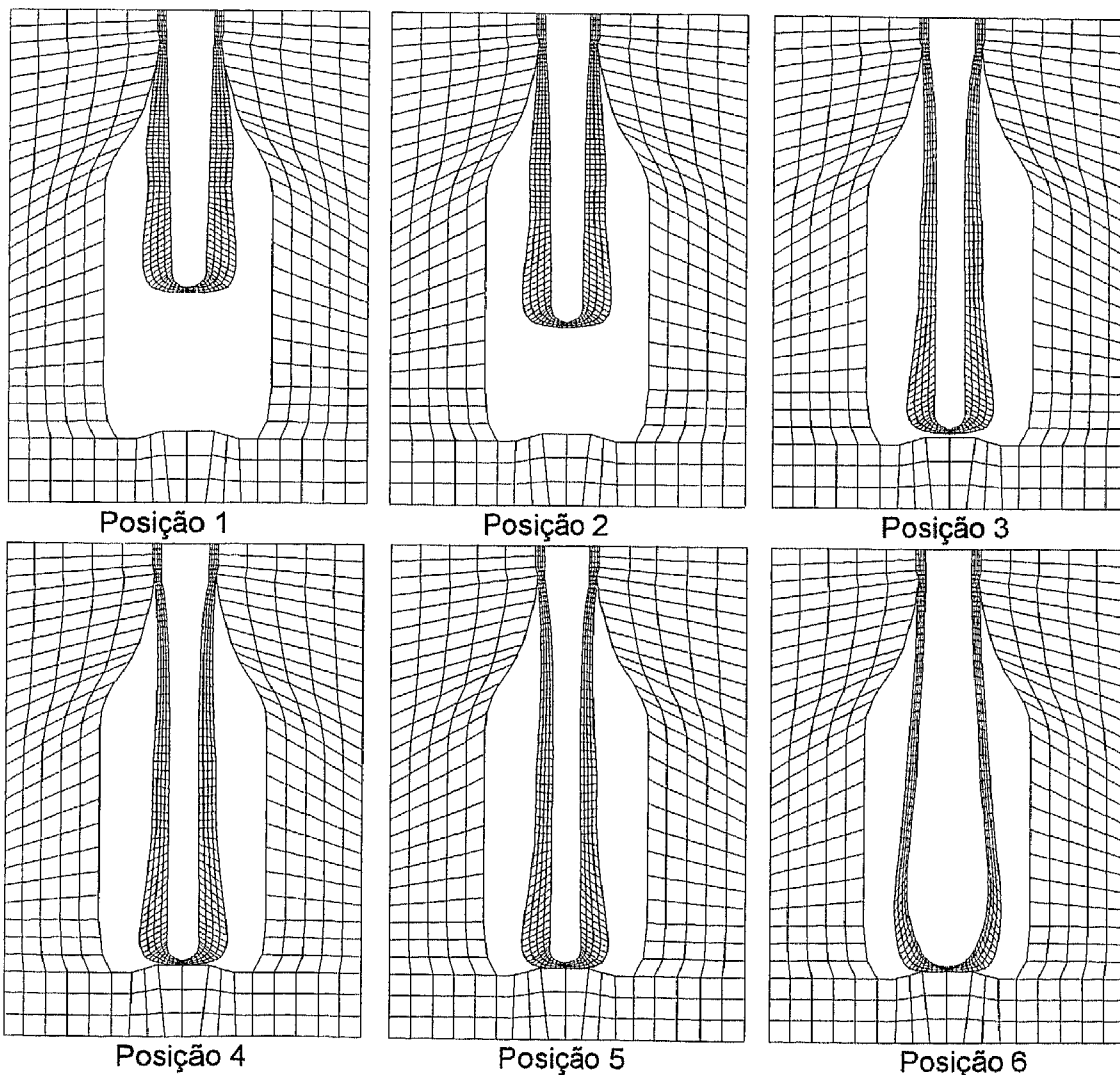
6.3. VARIAÇÃO DA MALHA DE ELEMENTOS FINITOS

São apresentados de seguida as diversas fases por que a garrafa passa durante o processo de enformação, correspondentes aos instantes em que o *parison* é introduzido no molde final, até a garrafa estar completamente formada no interior do referido molde.

O conjunto de figuras 6.4, pode ser subdividido em dois subgrupos:

- i. o correspondente à variação de forma da garrafa devido apenas à acção da força de gravidade, e
- ii. a variação de forma devido não apenas à acção de gravidade, como também por aplicação do sopro de ar no interior do *parison*.

Por observação das figuras, verifica-se que para as posições 1 a 6, o *parison* deforma-se apenas devido à acção do peso próprio. A partir desse instante, que corresponde ao instante de tempo $t = 0.8$ segundos, é aplicado uma pressão no interior do *parison* no valor de 1 bar. A aplicação desta pressão interna, tem por objectivo auxiliar a boa formação da garrafa, pois sem a acção desta, o vidro não conseguiria atingir as paredes do molde, impossibilitando desta forma a formação da garrafa.



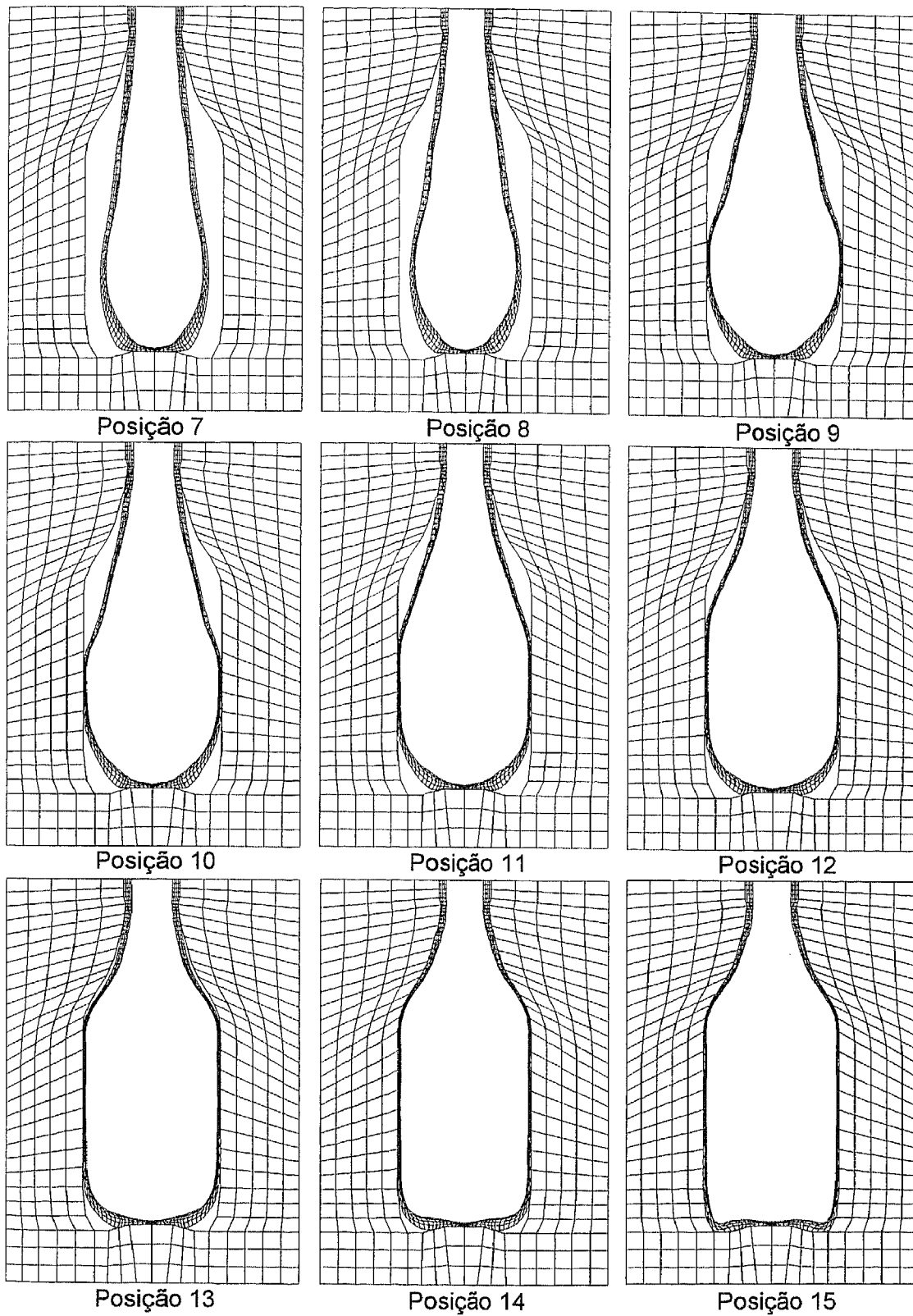


Figura 6.4: Variação da malha de elementos finitos do vidro e molde ao longo do processo.

6.4. CAMPO DE TEMPERATURAS

Neste item são apresentados os campos de temperaturas para a garrafa e para o molde até à formação completa da garrafa no interior do molde, e para a garrafa durante a fase de arrefecimento, quando a garrafa já se encontra no exterior do molde.

Conforme descrito no ponto anterior, os resultados apresentados encontram-se divididos em dois tipos de resultados: o primeiro corresponde à fase inicial do processo em que a garrafa ainda se encontra em formação (até ao instante de tempo $t = 3$ segundos), e o segundo, correspondente à fase do processo em que a garrafa se encontra fora do molde.

6.4.1. Simulação do processo de formação da garrafa

Neste item serão apresentados os resultados correspondentes aos campos de temperaturas quer para o programa ② como para o programa ③.

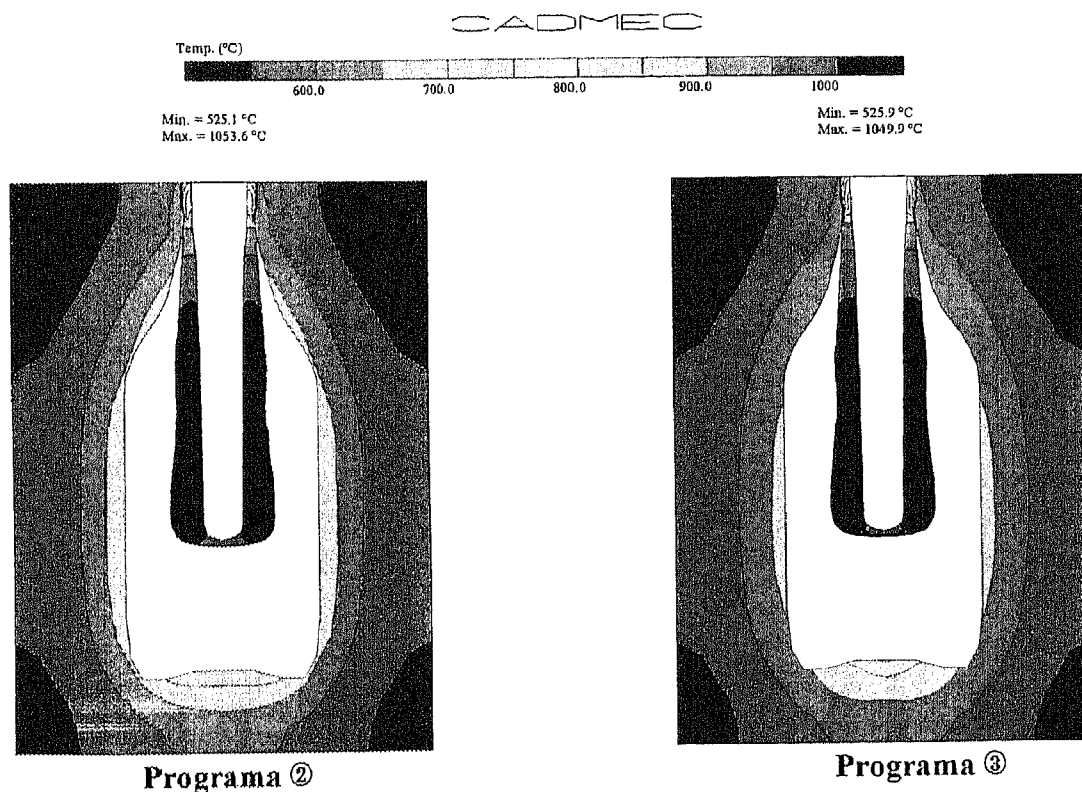


Figura 6.5: Comparação do campo de temperaturas no molde e na garrafa para o instante de tempo $t = 0.249$ segundos.

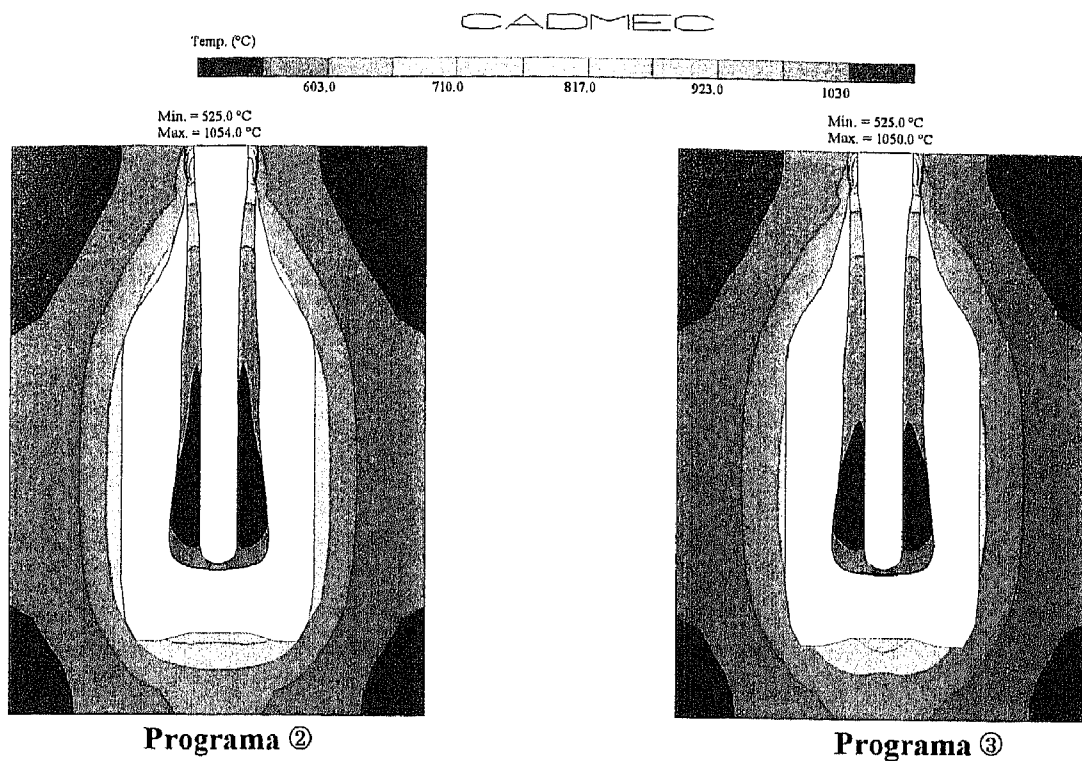


Figura 6.6: Comparação do campo de temperaturas no molde e na garrafa para o instante de tempo $t = 0.549$ segundos.

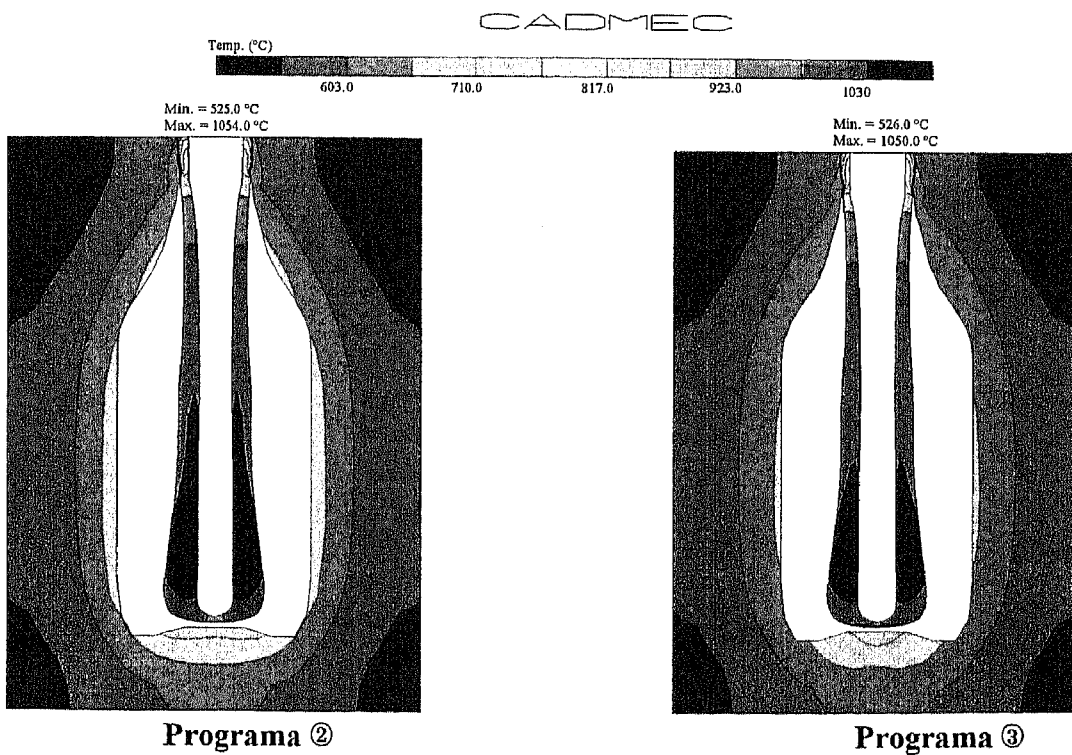


Figura 6.7: Comparação do campo de temperaturas no molde e na garrafa para o instante de tempo $t = 0.749$ segundos.



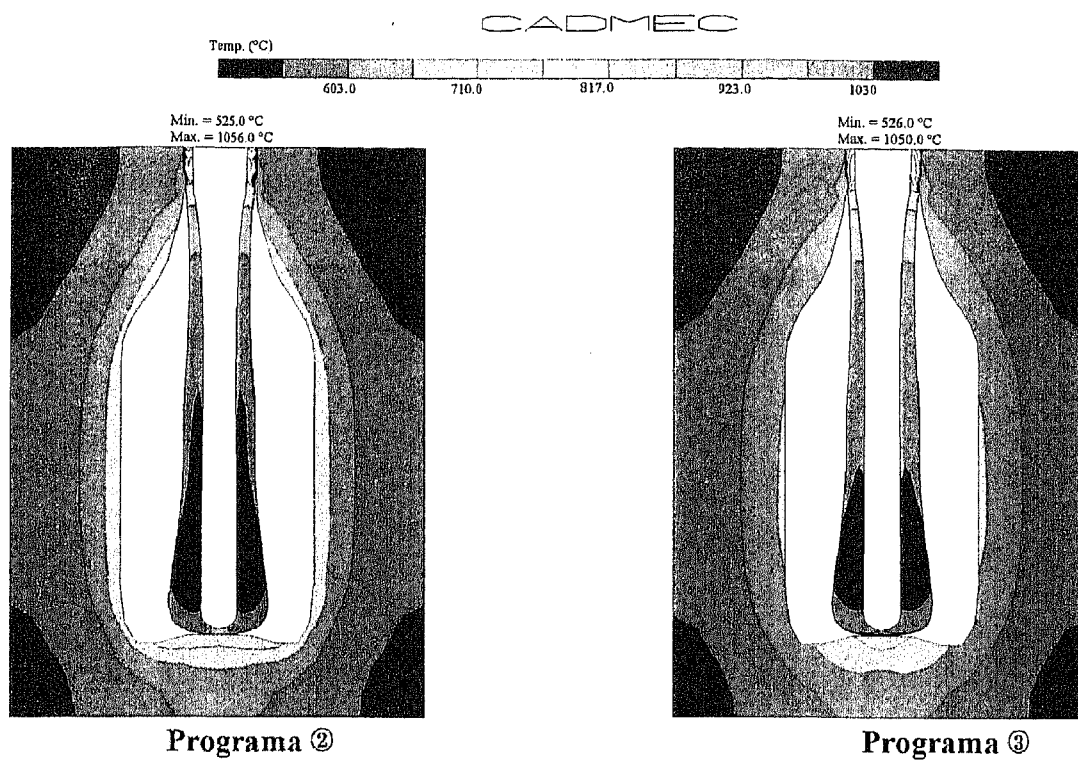


Figura 6.8: Comparação do campo de temperaturas no molde e na garrafa para o instante de tempo $t = 0.762$ segundos.

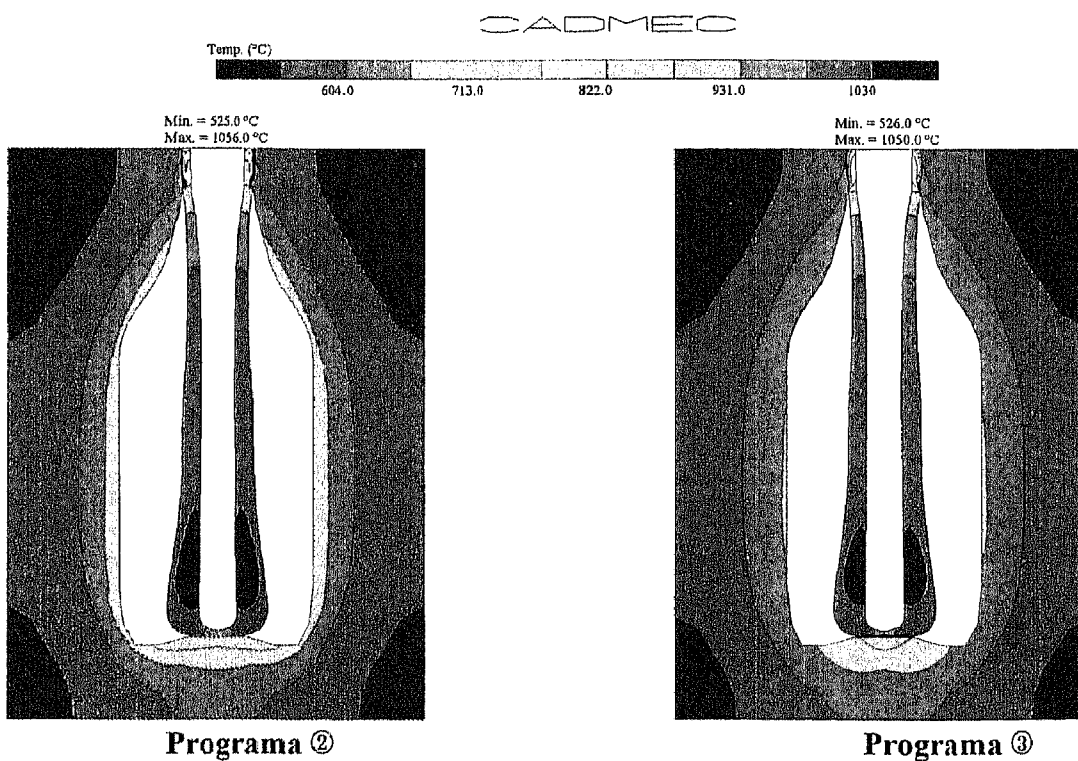


Figura 6.9: Comparação do campo de temperaturas no molde e na garrafa para o instante de tempo $t = 0.797$ segundos.

A partir deste instante ($t = 0.8 \text{ seg.}$), é aplicada, uma pressão no interior do *parison* de 1 bar.

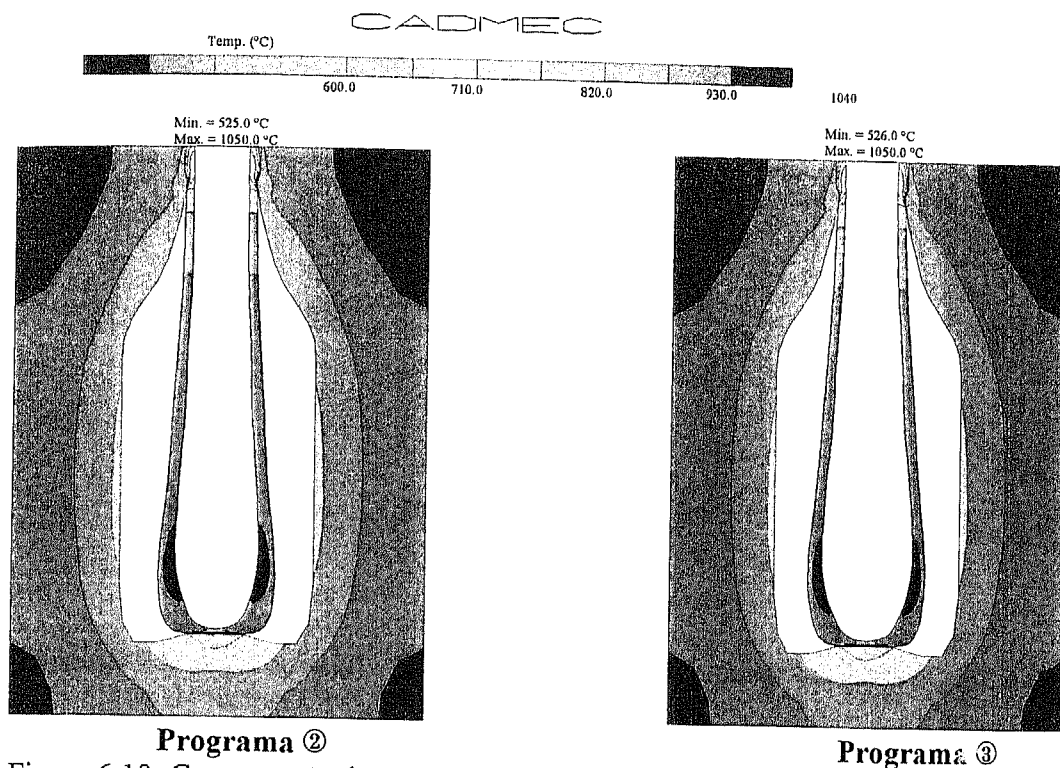


Figura 6.10: Comparação do campo de temperaturas no molde e na garrafa para o instante de tempo $t = 0.807$ segundos.

A partir deste instante ($t = 0.807 \text{ seg.}$), em conjunto com a aplicação da pressão no interior do *parison*, como se pode constatar pela comparação entre a respectiva distribuição de temperaturas representada na figura 6.10 e na figura 6.11, verifica-se o reaquecimento do molde, condição esta necessária de forma a garantir uma uniformização de temperaturas. Este fenómeno é mais acentuado no programa ②.

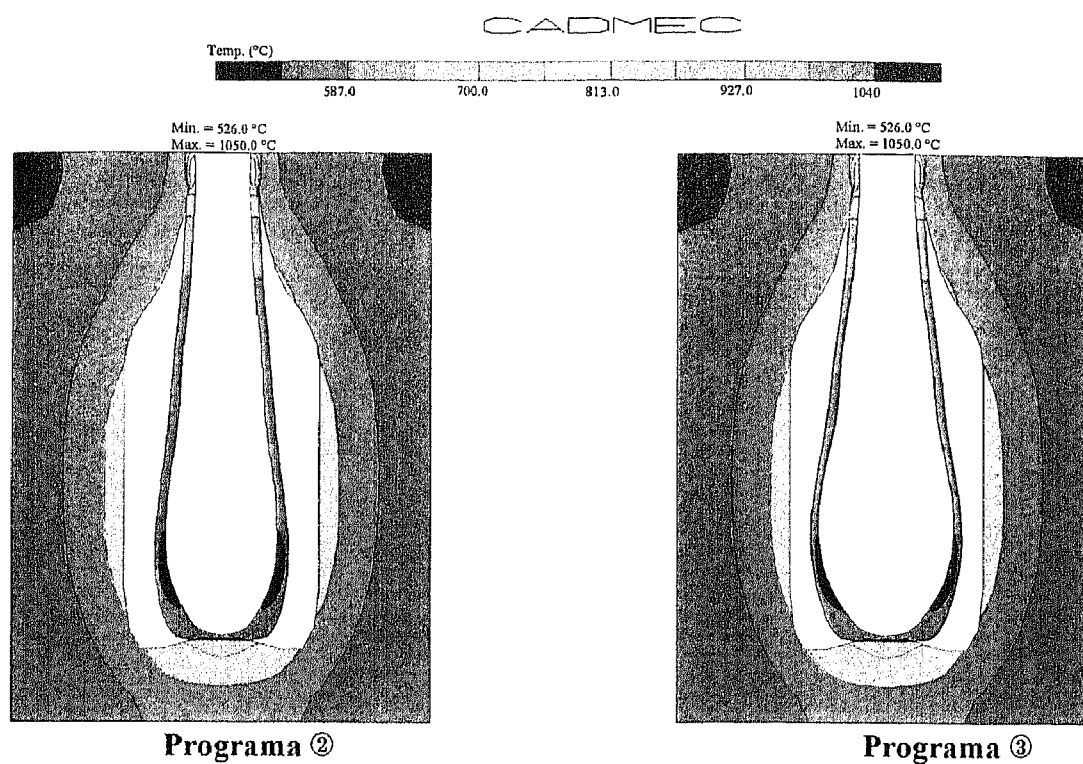


Figura 6.11: Comparação do campo de temperaturas no molde e na garrafa para o instante de tempo $t = 0.809$ segundos.

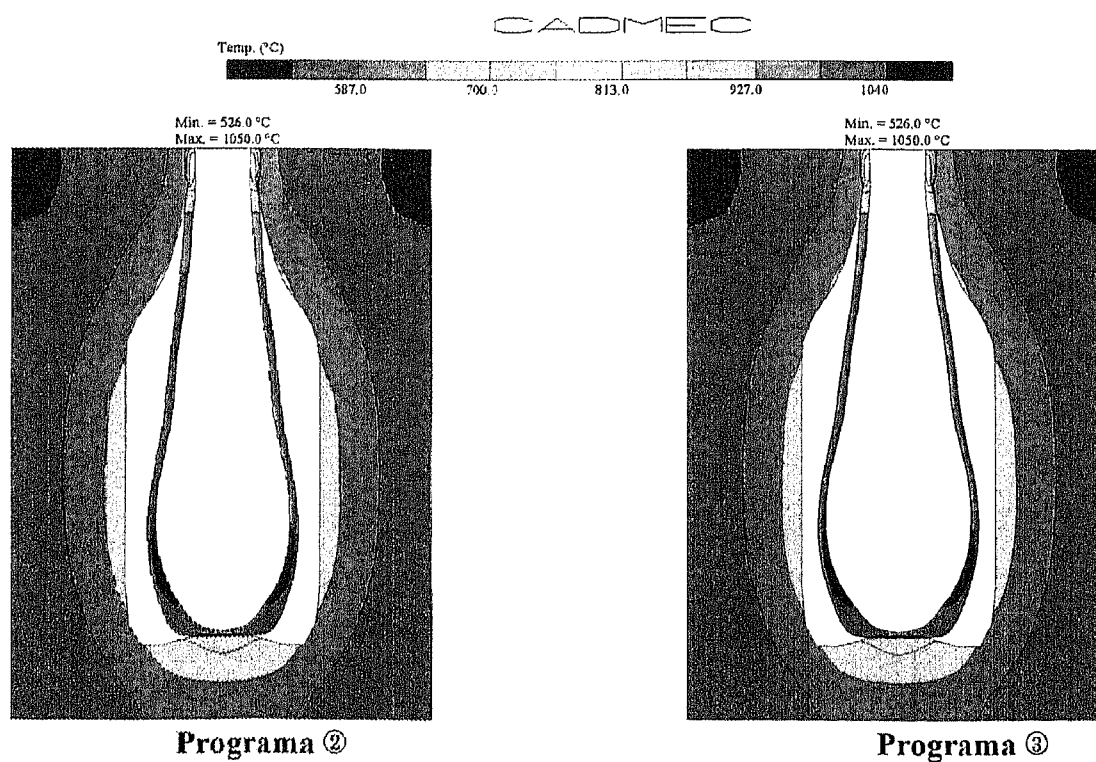


Figura 6.12: Comparação do campo de temperaturas no molde e na garrafa para o instante de tempo $t = 0.810$ segundos.

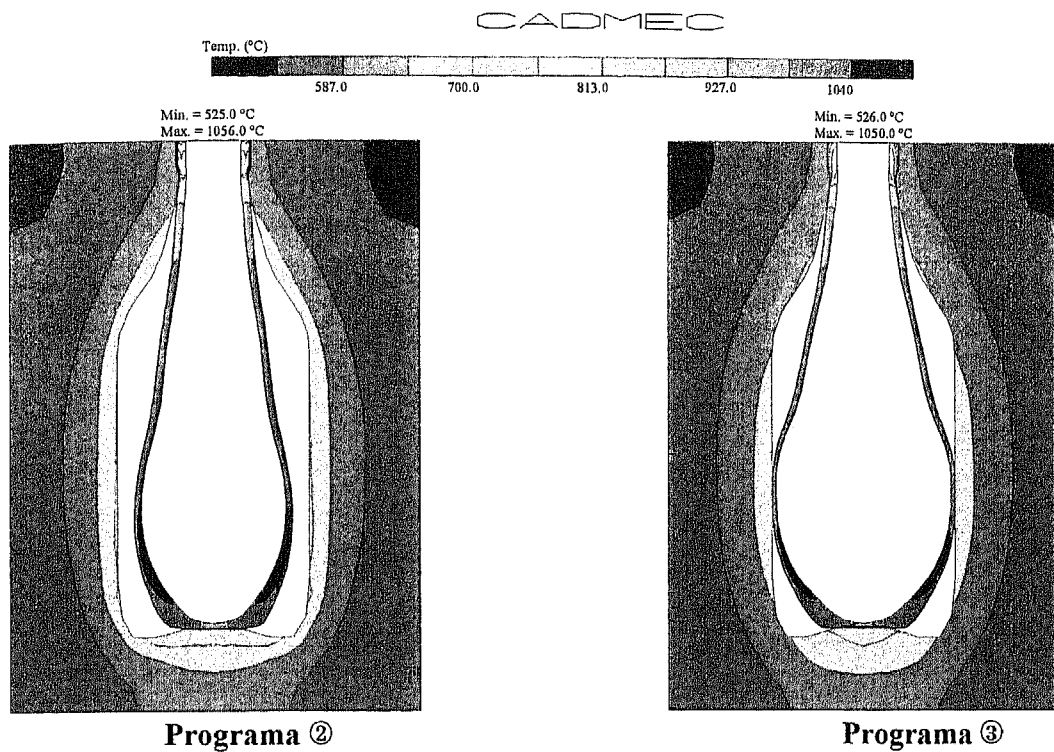


Figura 6.13: Comparação do campo de temperaturas no molde e na garrafa para o instante de tempo $t = 0.811$ segundos.

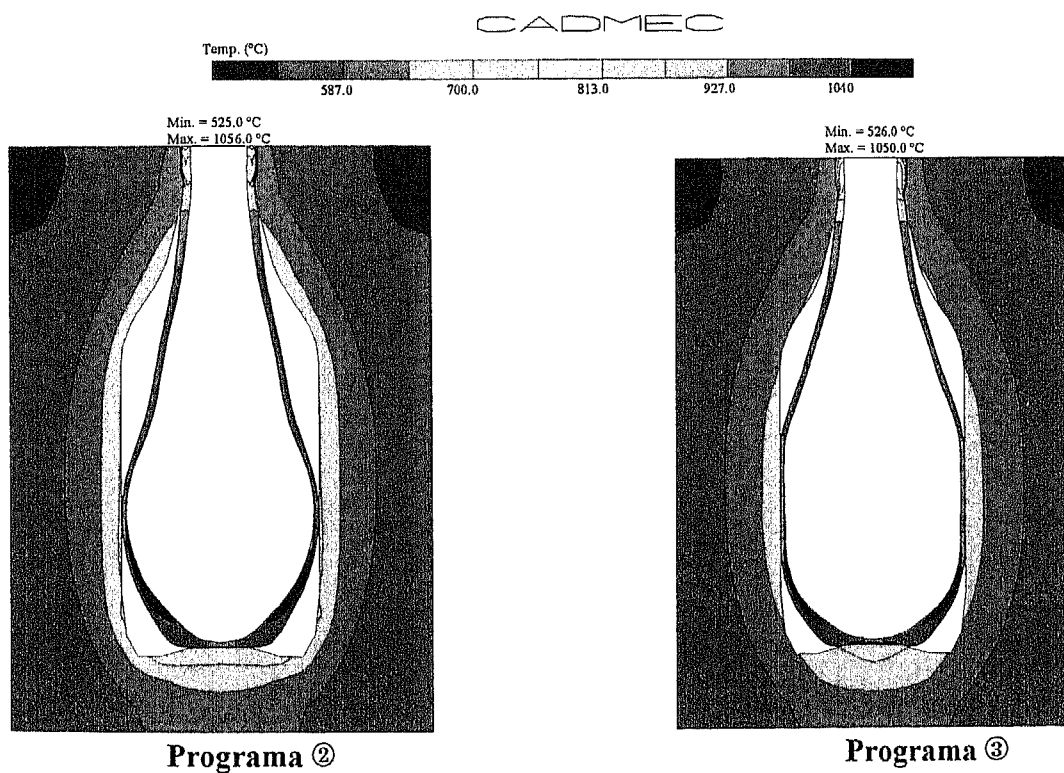


Figura 6.14: Comparação do campo de temperaturas no molde e na garrafa para o instante de tempo $t = 0.812$ segundos.

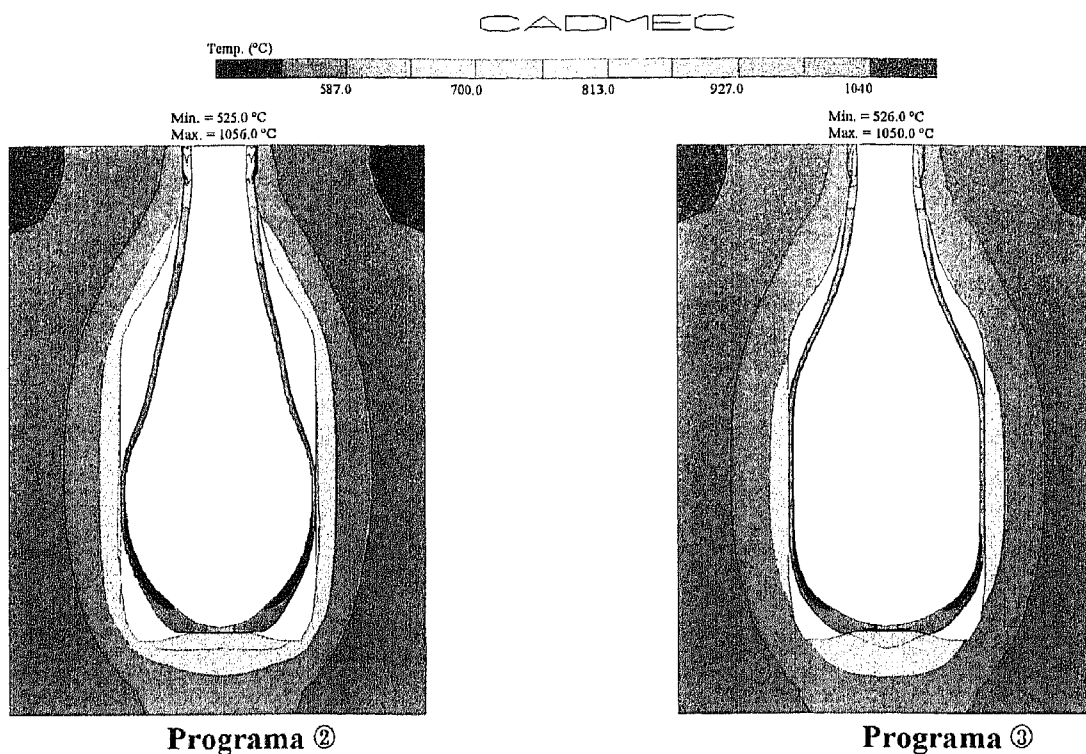


Figura 6.15: Comparação do campo de temperaturas no molde e na garrafa para o instante de tempo $t = 0.8123$ segundos.

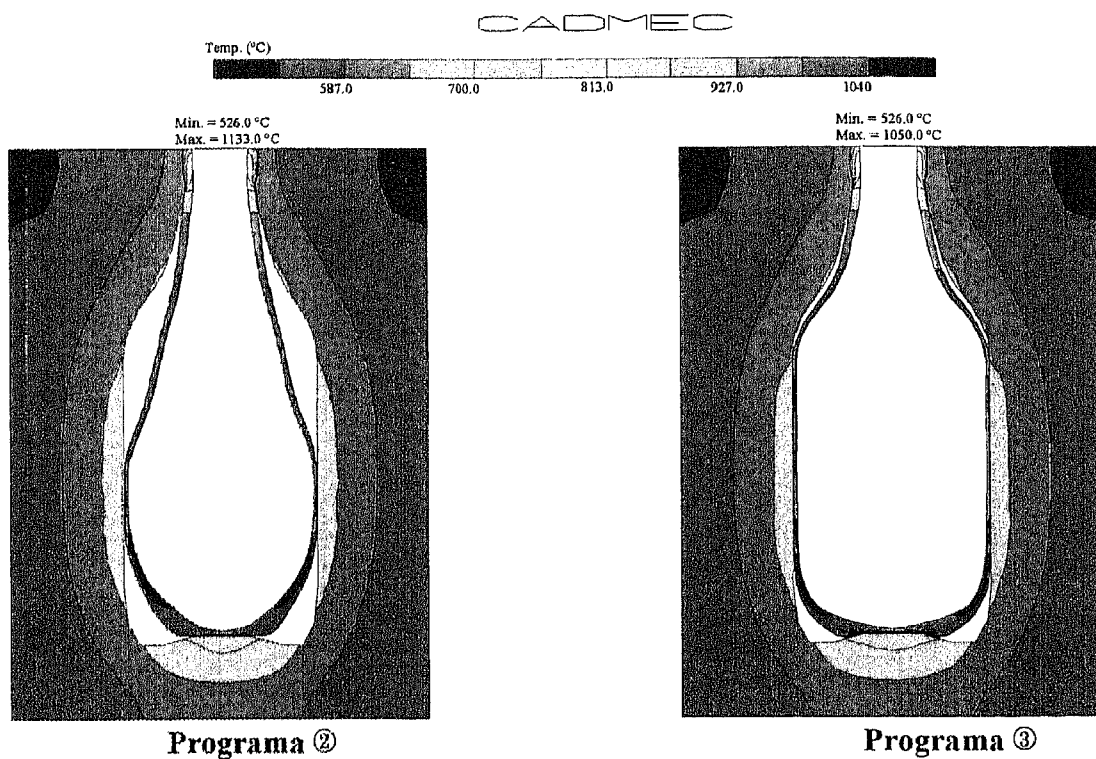


Figura 6.16: Comparação do campo de temperaturas no molde e na garrafa para o instante de tempo $t = 0.813$ segundos.

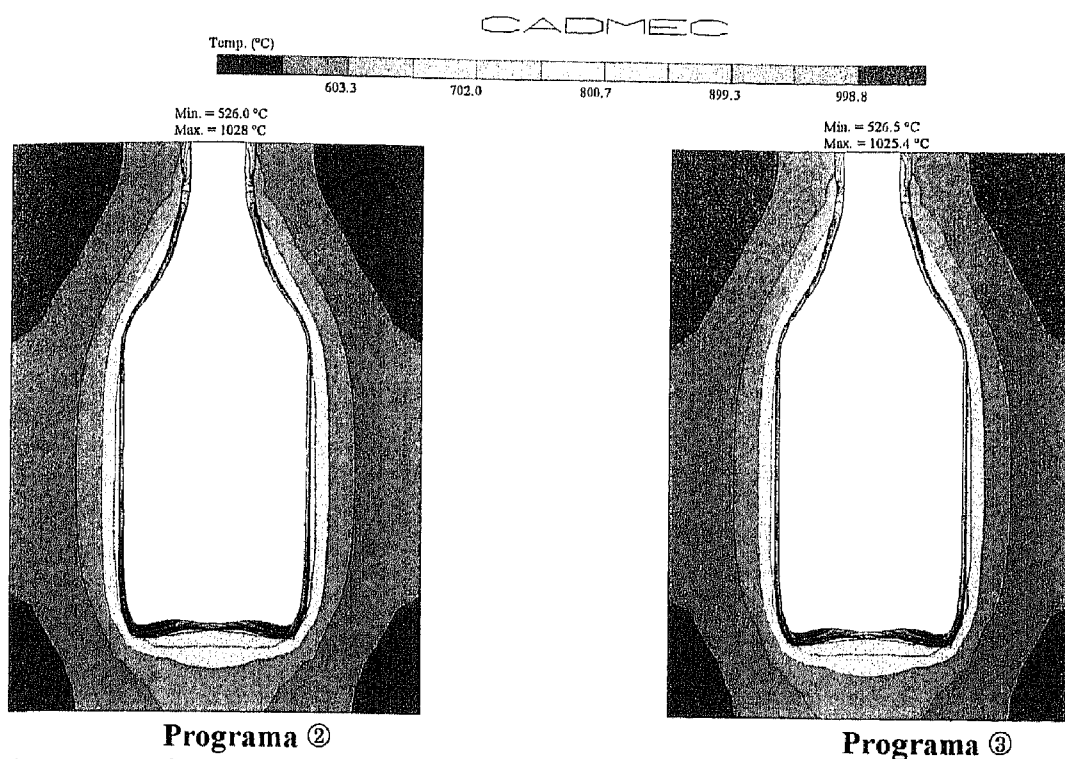


Figura 6.17: Comparação do campo de temperaturas no molde e na garrafa para o instante de tempo $t = 1.155$ segundos.

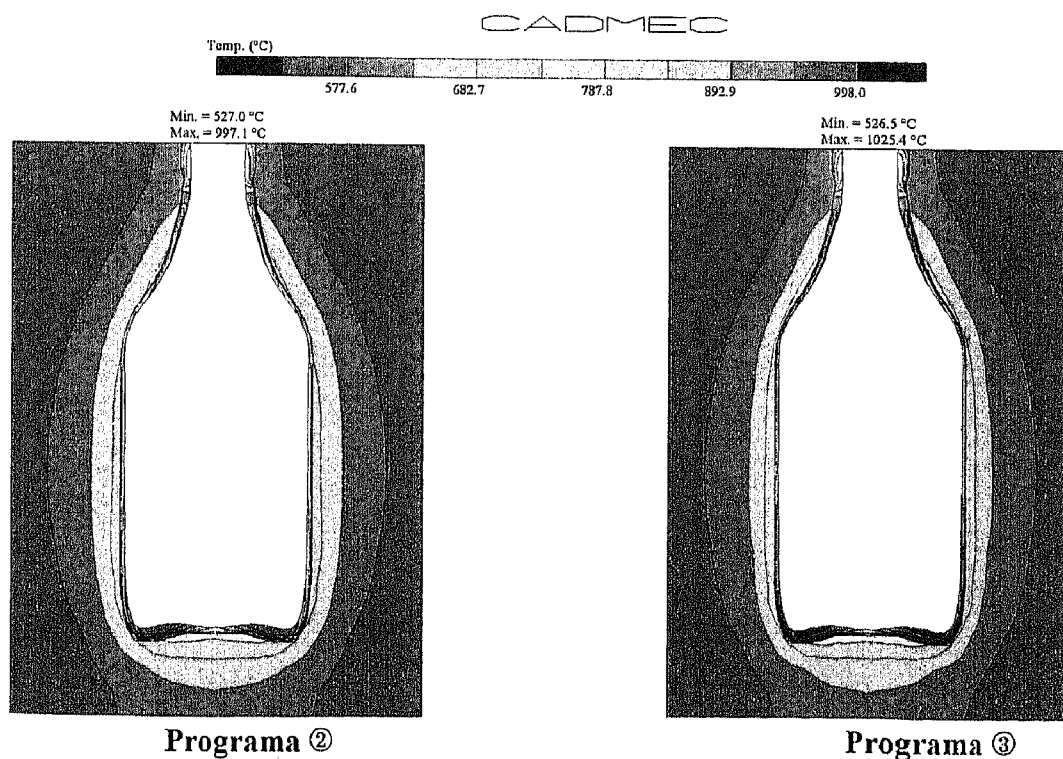


Figura 6.18: Comparação do campo de temperaturas no molde e na garrafa para o instante de tempo $t = 1.505$ segundos.

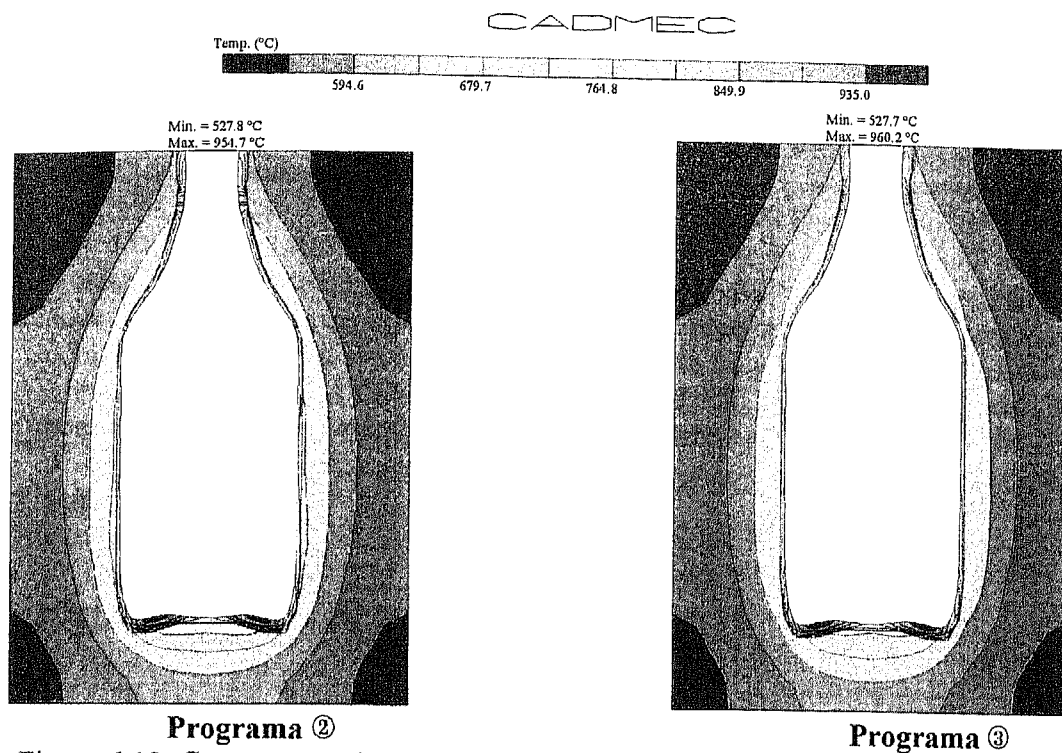


Figura 6.19: Comparação do campo de temperaturas no molde e na garrafa para o instante de tempo $t = 2.05$ segundos.

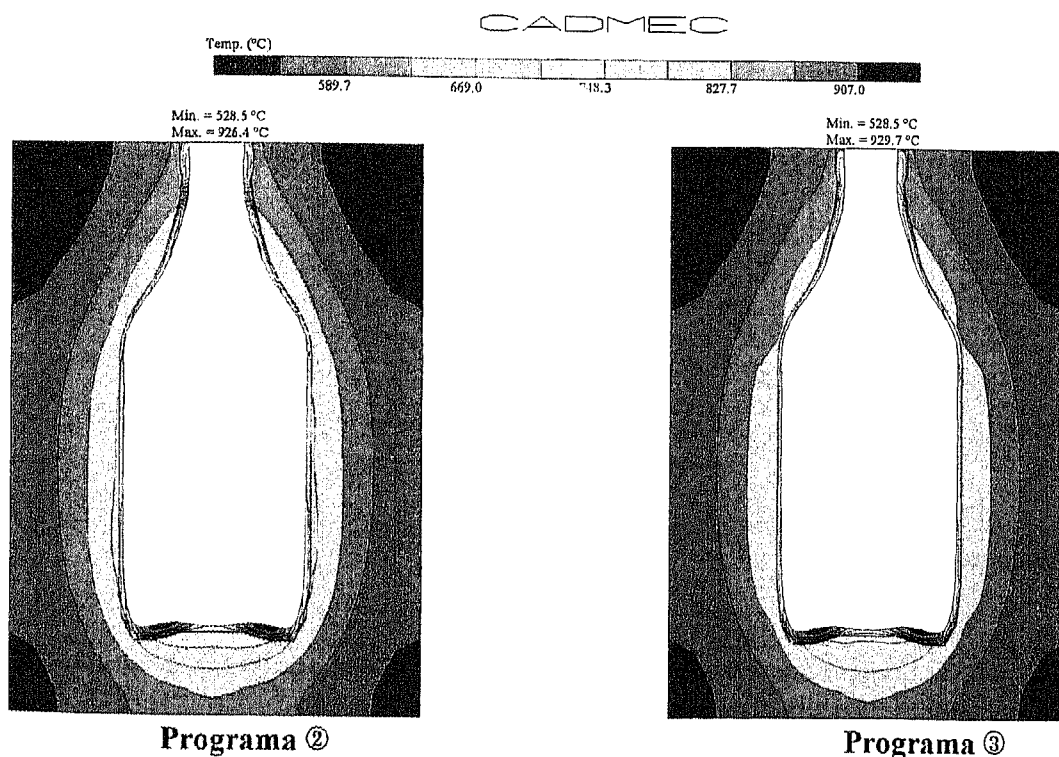


Figura 6.20: Comparação do campo de temperaturas no molde e na garrafa para o instante de tempo $t = 2.505$ segundos.

A partir do instante em que é aplicado um sopro de ar à garrafa verifica-se, como se pode observar pelo conjunto de figuras 6.11 a 6.18, uma crescente diferença na forma do *parison* para os programas ② e ③. Estas diferenças são explicáveis, visto o programa ② efectuar em primeiro lugar a resolução do problema de transferência de calor para cada incremento de tempo. Tendo em consideração este facto, o erro numérico provocado por se considerar a resolução do problema de transferência de calor primeiro é superior. O programa, após ter calculado a distribuição de temperaturas determina o posicionamento dos diversos nós constituintes do modelo. Caso referido anteriormente no capítulo 4, corresponde ao facto de mais que um nó entrar em contacto com o molde. Neste caso, um novo intervalo de tempo é recalculado de forma a apenas um único nó entrar em contacto com o molde em cada incremento de tempo, sendo de seguida determinado novamente o campo de temperaturas correspondente a este intervalo de tempo. Como nesta fase, já se considera um número relativamente elevado de nós em contacto, o erro de após se ter determinado a distribuição de temperaturas, efectuar-se novamente o calculo destas, é mais significativo.

6.4.1.1. Comparação de Temperaturas

Neste item, pretende-se fazer uma comparação entre os resultados obtidos para temperaturas máximas e mínimas para os programas em estudo. Desta forma, no gráfico 6.1., encontra-se representadas as variações das temperaturas máximas e mínimas, para o instantes de tempo anteriormente considerados.

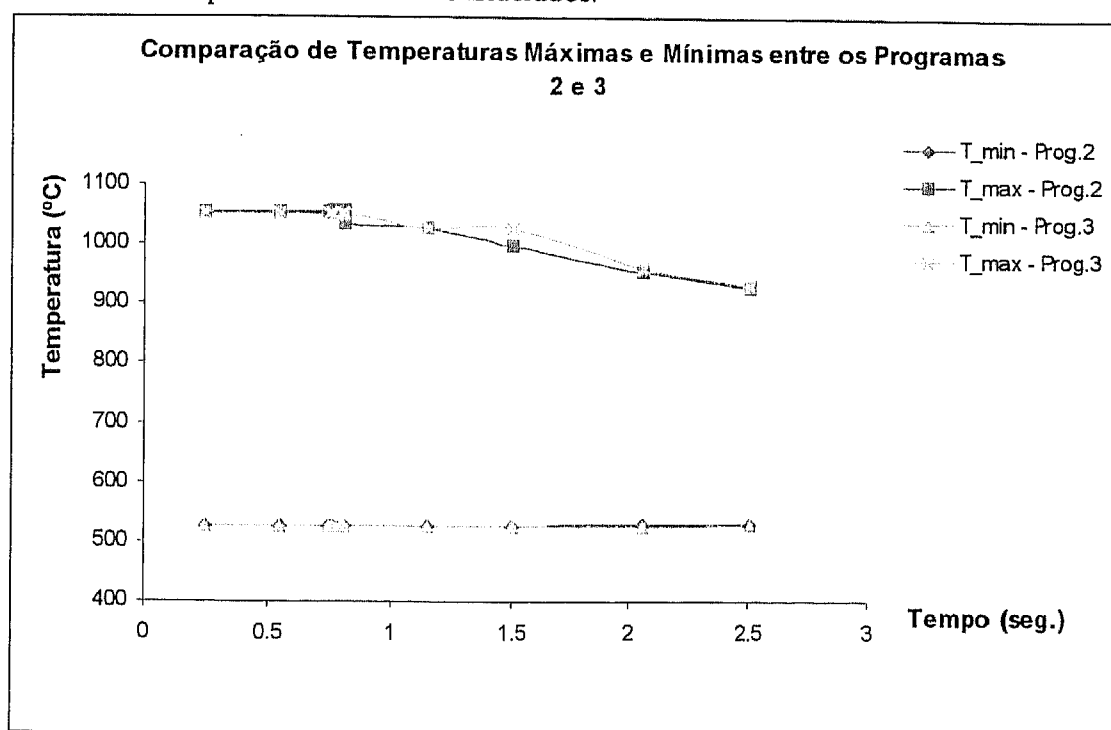


Gráfico 6.1.: Comparação de temperaturas máximas e mínimas entre os programas ② e ③

Como se pode observar, a variação da temperatura mínima ao longo do processo de enformação para os dois programas é praticamente igual, o mesmo não acontecendo para as temperaturas máximas. Para esta temperatura, e durante a fase inicial, até 0.8 segundos,

assim como na fase anterior ao contacto total dos nós da garrafa com o molde, as temperaturas mantêm-se aproximadamente iguais. No entanto, na região intermédia, correspondente à fase em que vários nós da malha de elementos finitos do *parison* entram em contacto com a malha de elementos finitos do molde, as temperaturas são diferentes. Tal facto deve-se às diferenças na resolução do problema de transferência de calor, visto esta resolução ser efectuada em momentos diferentes no decorrer para os programas ② e ③.

6.4.2. Campo de temperaturas durante a fase de arrefecimento

Neste item serão apresentados os resultados correspondentes aos campos de temperaturas para os programas ①, ② e ③. No entanto, para o programa ③, os resultados apresentados encontram-se divididos em dois grupos:

- i. resultados correspondentes ao campo de temperaturas sem regeneração da malha de elementos finitos, apresentados como programa ③_a, e
- ii. resultados correspondentes ao campo de temperaturas com regeneração da malha de elementos finitos, apresentados como programa ③_b.

Neste momento, e tendo em vista futuros cálculos para a determinação de tensões residuais no vidro, a malha correspondente ao programa ③, que inicialmente era igual à malha correspondente ao programa ②, sofreu uma regeneração, apresentada na figura 6.21.

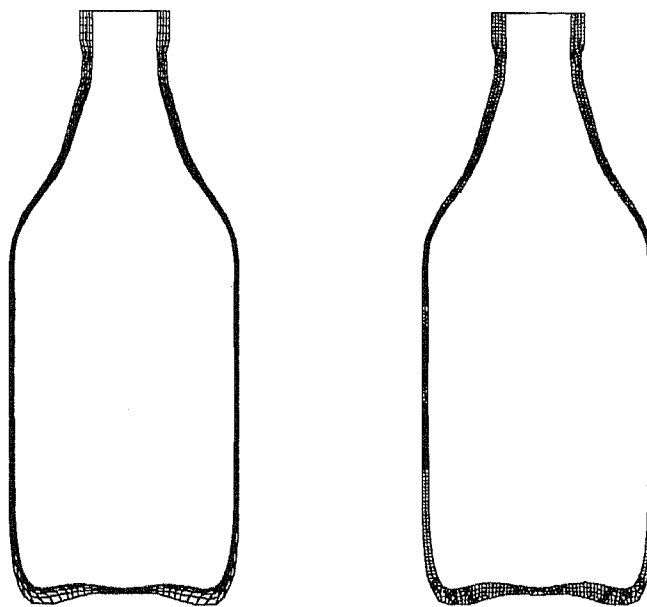


Figura 6.21: Malha pré e pós a regeneração

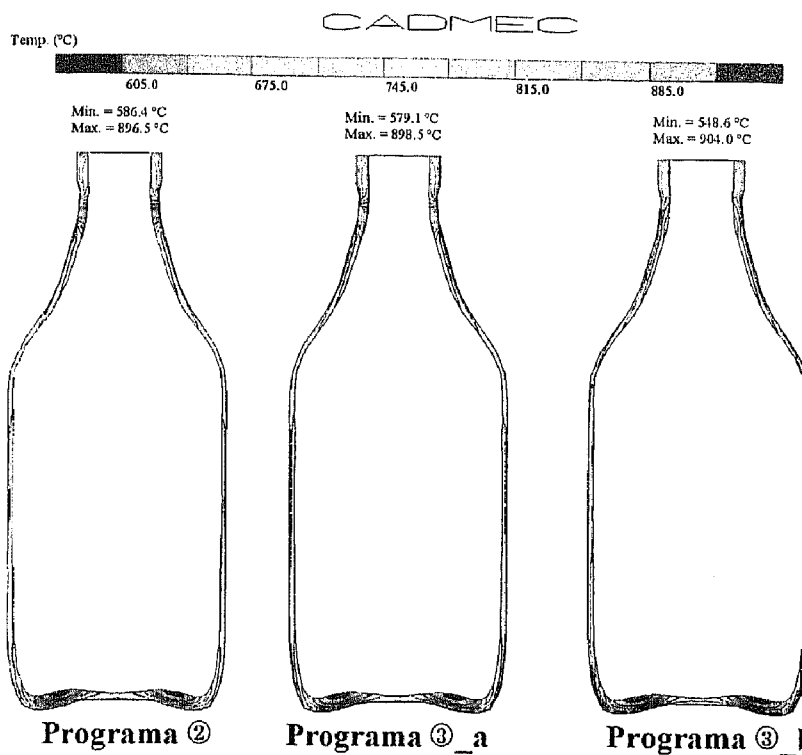


Figura 6.22: Comparação do campo de temperaturas na garrafa para o instante de tempo $t = 3.0$ segundos.

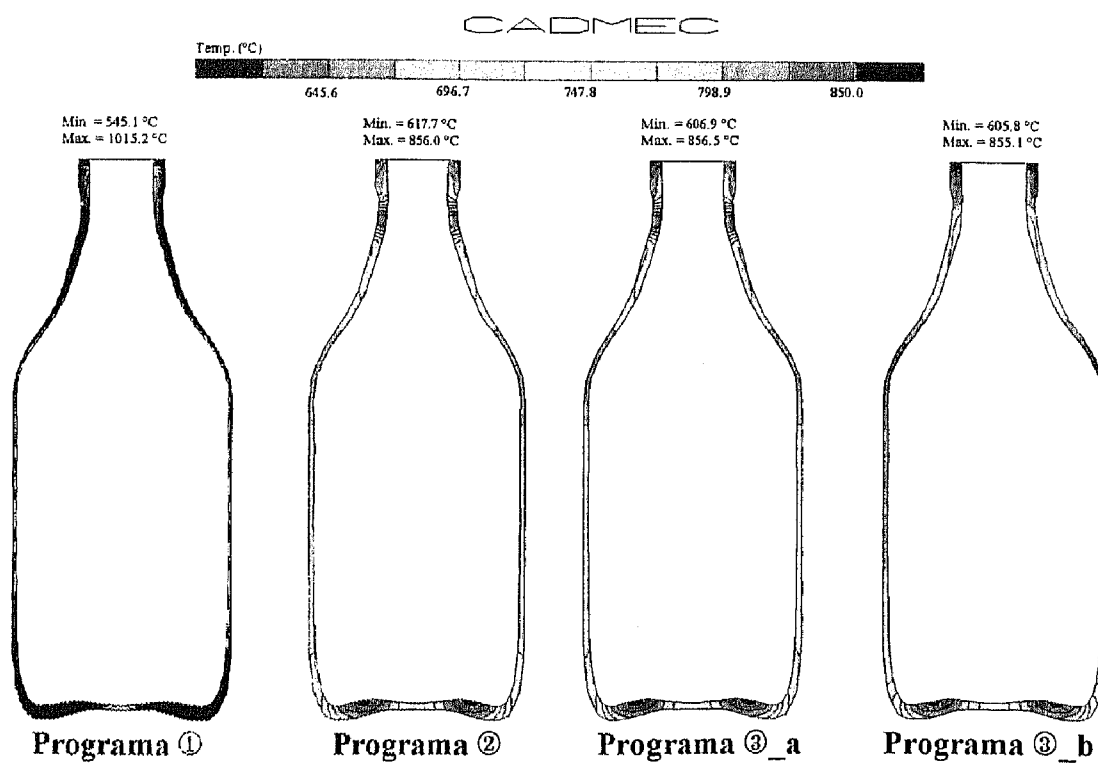


Figura 6.23: Comparação do campo de temperaturas na garrafa para o instante de tempo $t = 4.0$ segundos.

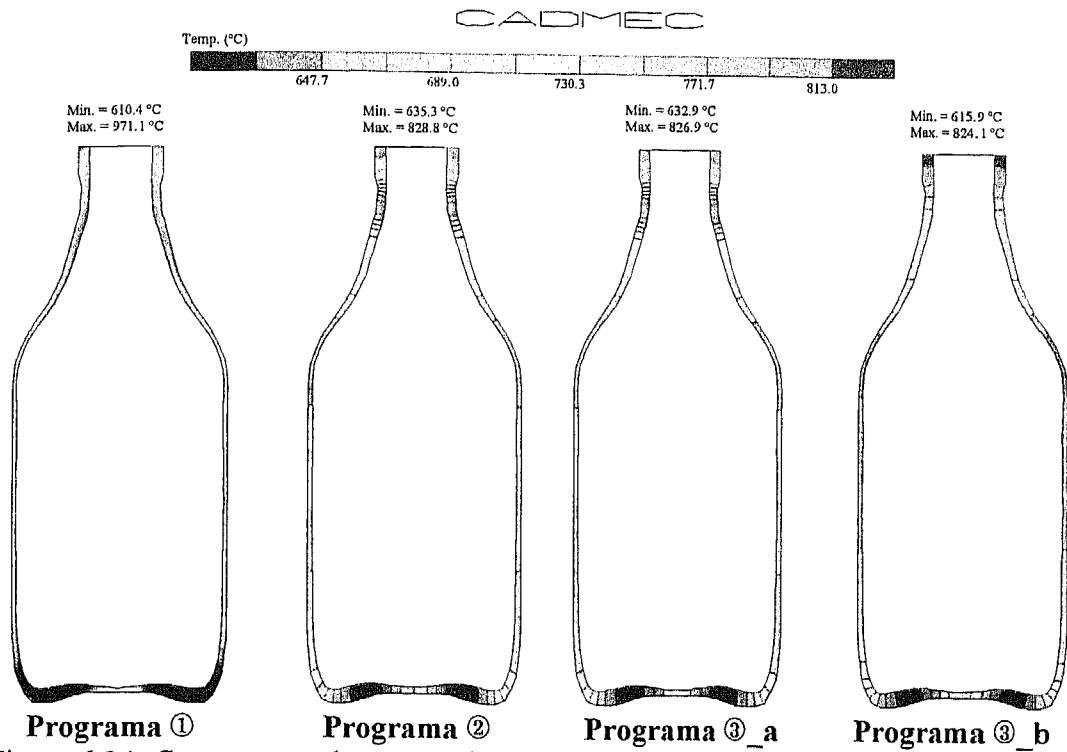


Figura 6.24: Comparação do campo de temperaturas na garrafa para o instante de tempo $t = 6.0$ segundos.

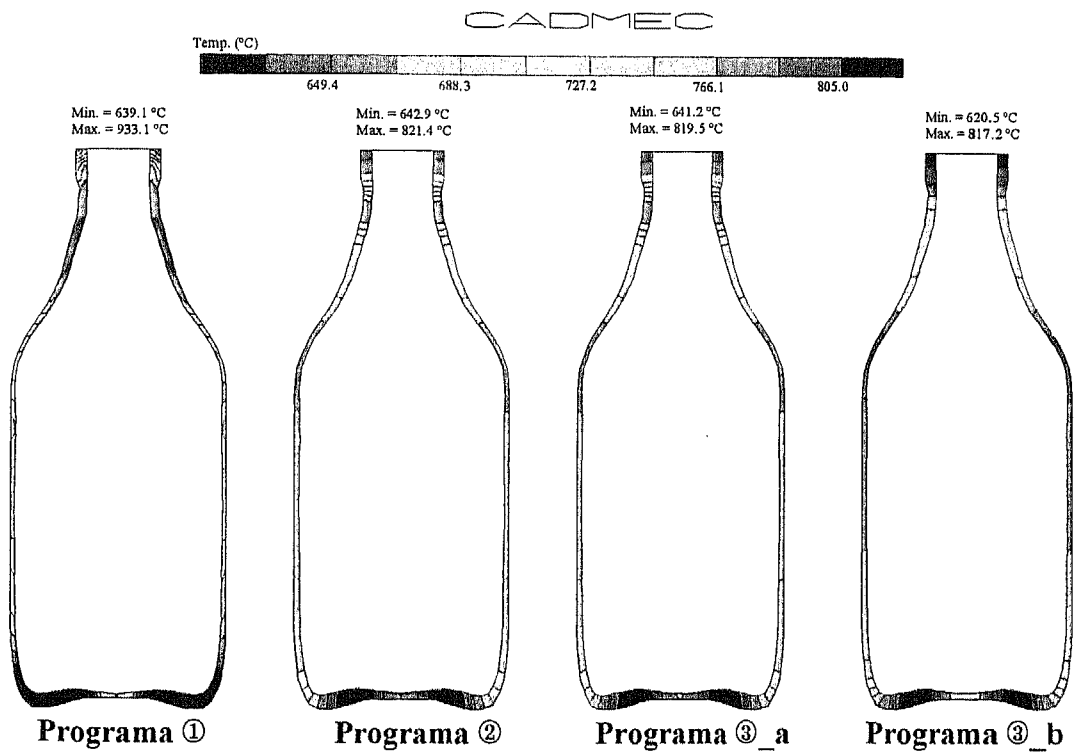


Figura 6.25: Comparação do campo de temperaturas na garrafa para o instante de tempo $t = 8.0$ segundos.

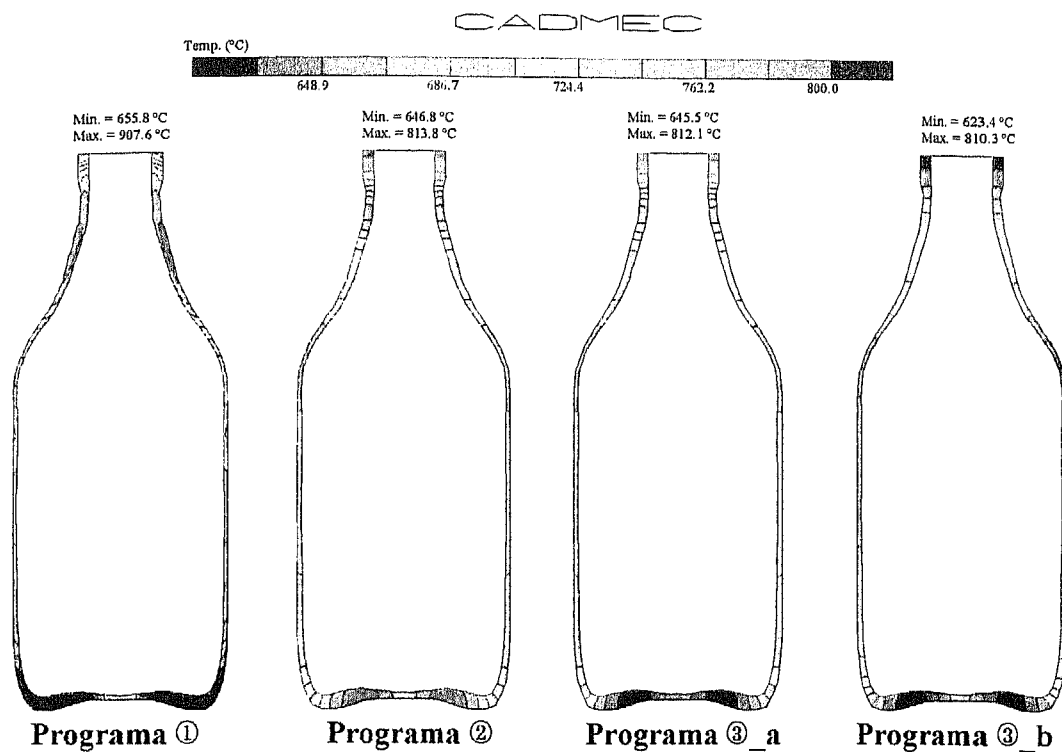


Figura 6.26: Comparação do campo de temperaturas na garrafa para o instante de tempo $t = 10.0$ segundos.

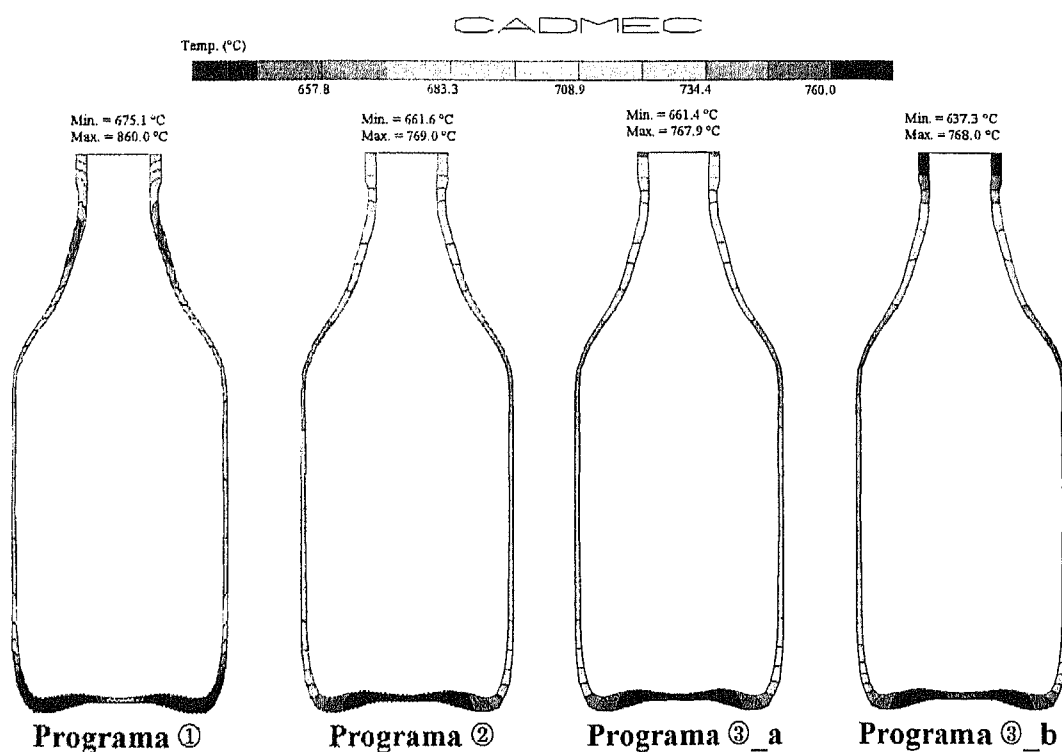


Figura 6.27: Comparação do campo de temperaturas na garrafa para o instante de tempo $t = 30.0$ segundos.

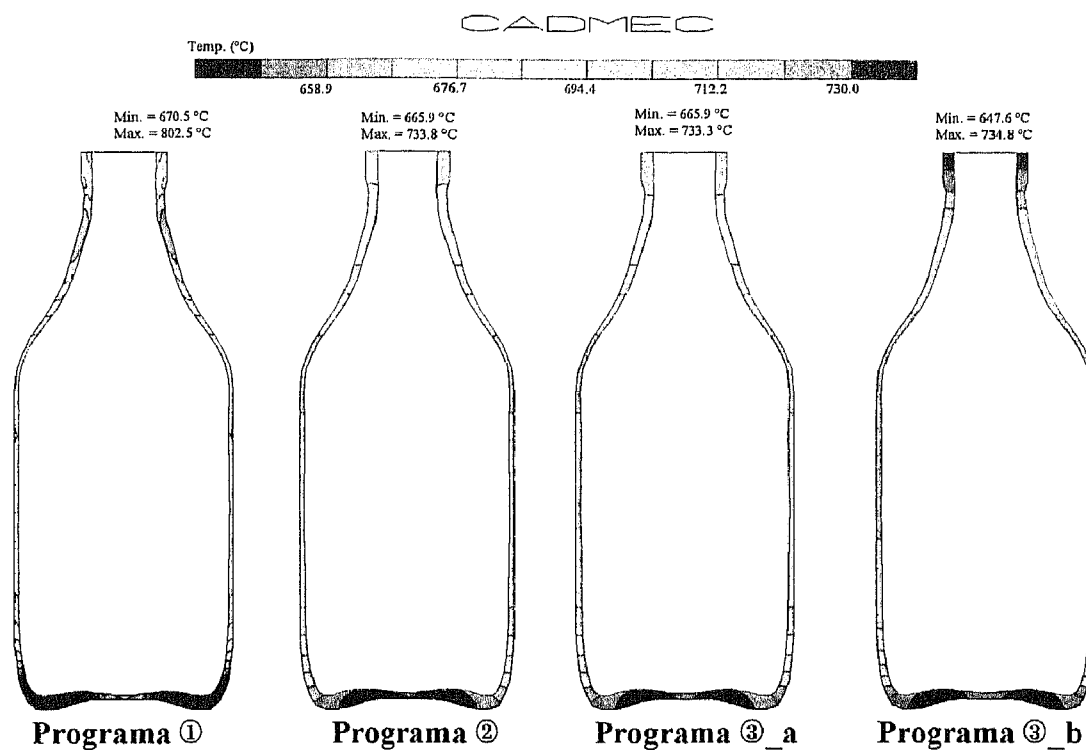


Figura 6.28: Comparação do campo de temperaturas na garrafa para o instante de tempo $t = 60.0$ segundos.

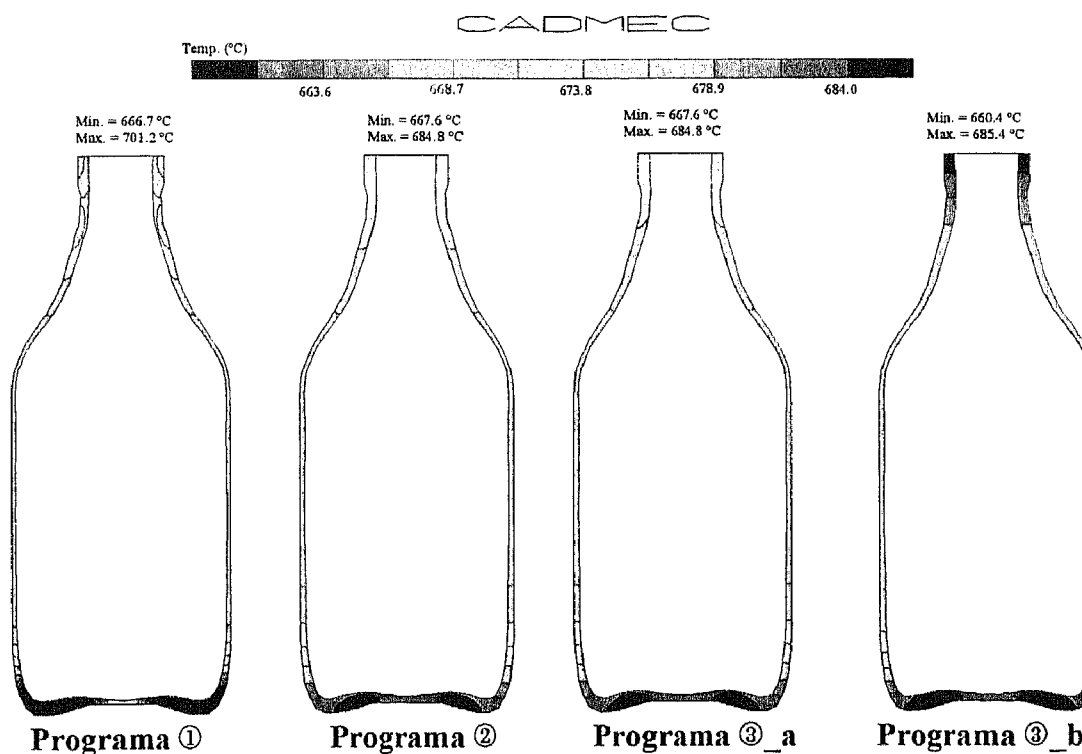


Figura 6.29: Comparação do campo de temperaturas na garrafa para o instante de tempo $t = 180.0$ segundos.

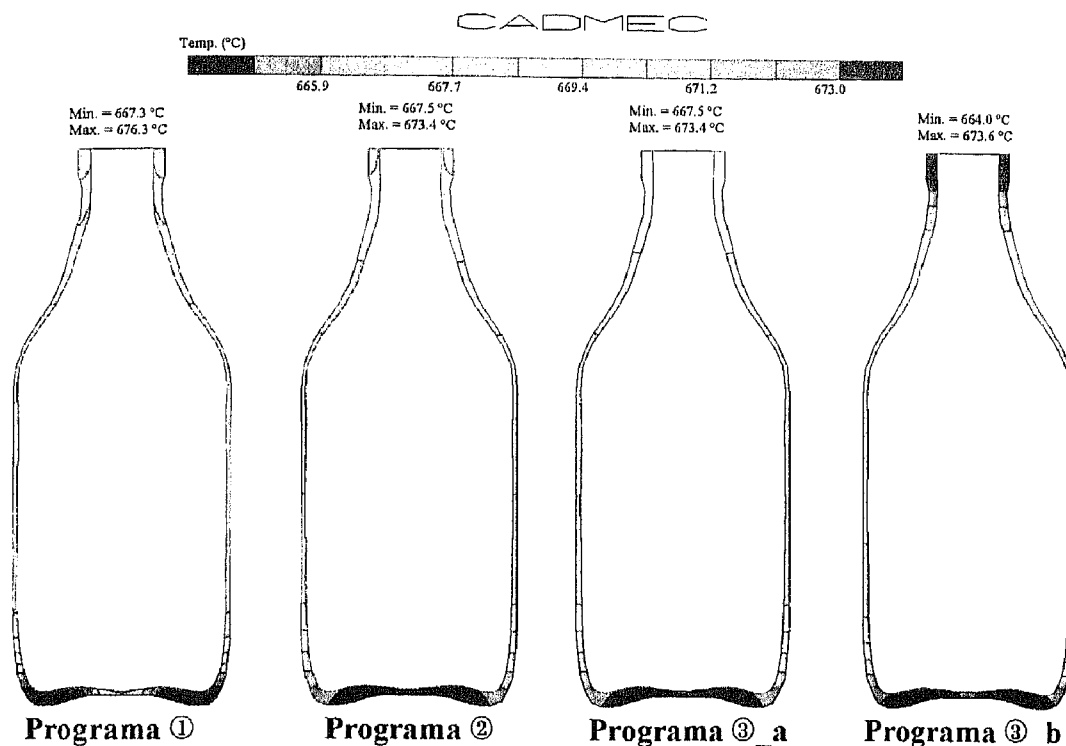


Figura 6.30: Comparação do campo de temperaturas na garrafa para o instante de tempo $t = 300.0$ segundos.

Comparando os três programas apresentados, verifica-se que as temperaturas correspondentes ao programa ① são mais elevadas relativamente aos programas ② e ③. Tal facto, deve-se a que, ao ser considerado o molde na simulação dos processos de enformação, a transferência de calor verificada entre o molde e a garrafa é superior no programa ①.

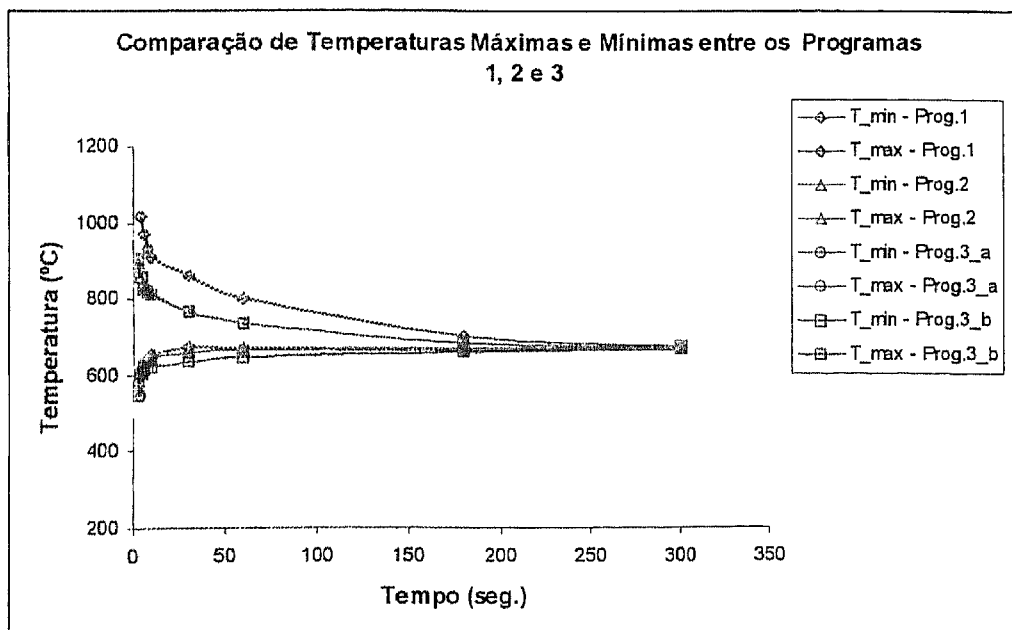


Gráfico 6.2.: Comparação de temperaturas máximas e mínimas entre os programas ①, ② e ③

6.5. CAMPO DE TENSÕES RESIDUAIS

Neste item, serão apresentados os campos de tensões residuais, para a garrafa após esta ter sido extraída do molde. Nesta fase de arrefecimento, as temperaturas no interior da garrafa são muito superiores às temperaturas existentes no exterior das garrafas, provocando elevadas tensões residuais.

Face à fragilidade das garrafas durante o processo de arrefecimento e na presença de tensões tão elevadas, verifica-se a necessidade existente de determinar estas tensões de forma a otimizar o processo.

Assim como no item anterior, são apresentados os resultados correspondentes aos três programas em estudo, permitindo desta forma a comparação entre os diversos processos.

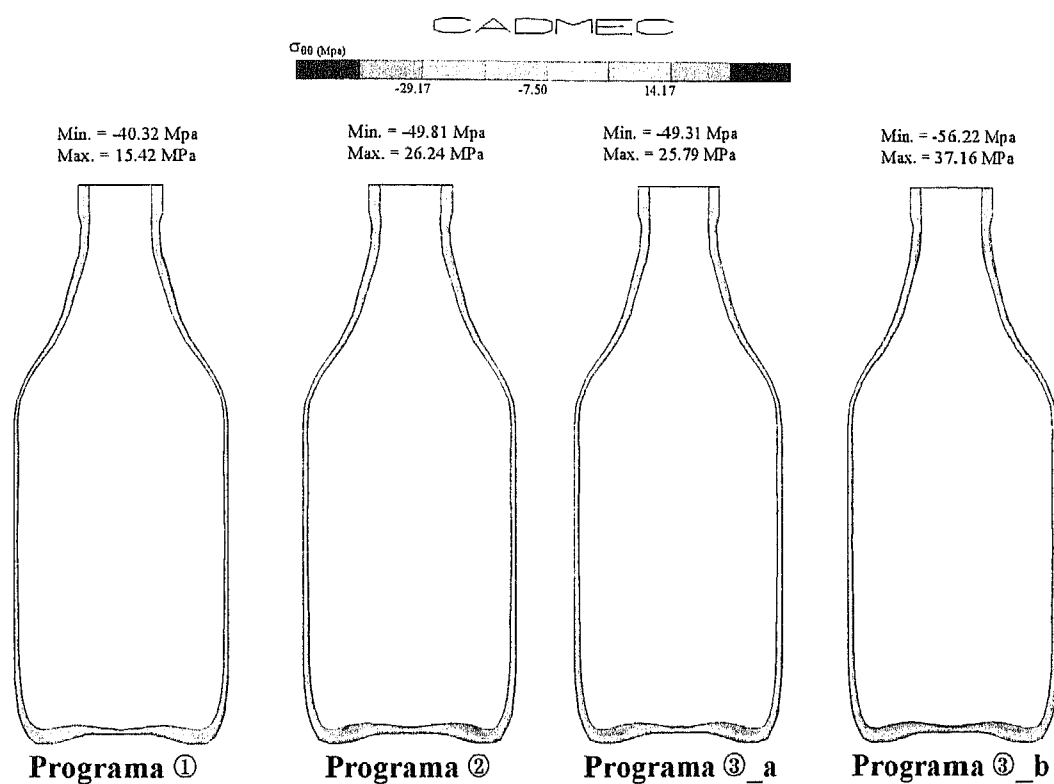


Figura 6.31: Comparação do campo de tensões na garrafa para o instante de tempo $t = 5.0$ segundos.

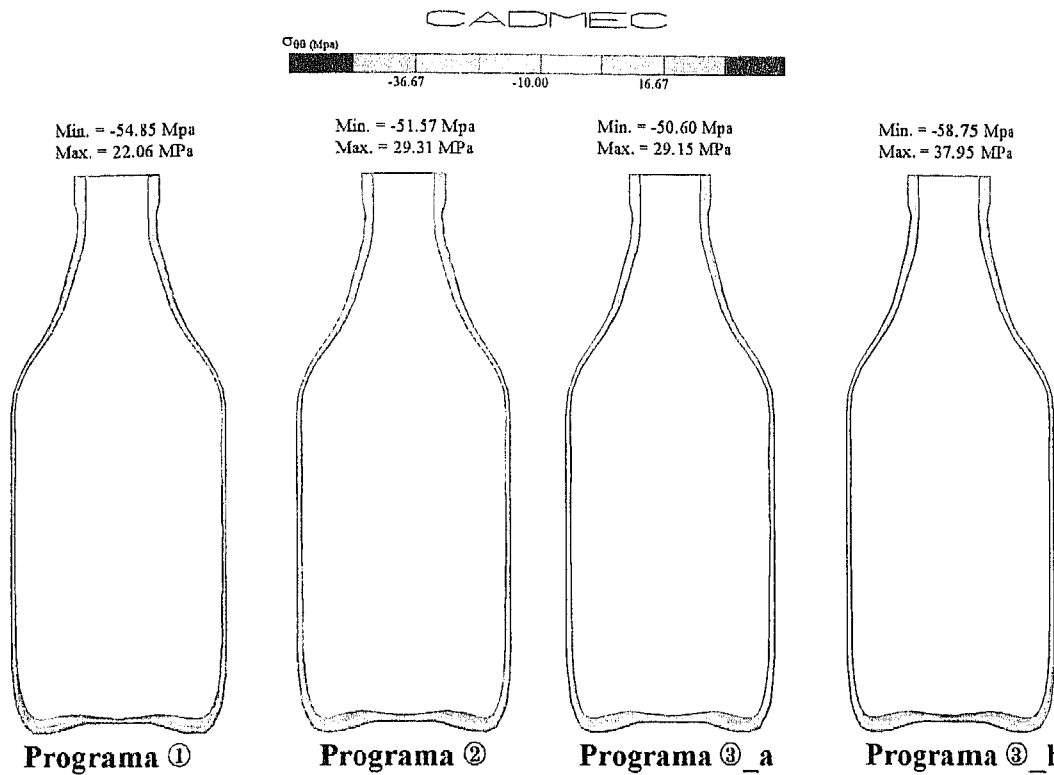


Figura 6.32: Comparação do campo de tensões na garrafa para o instante de tempo $t = 6.0$ segundos.

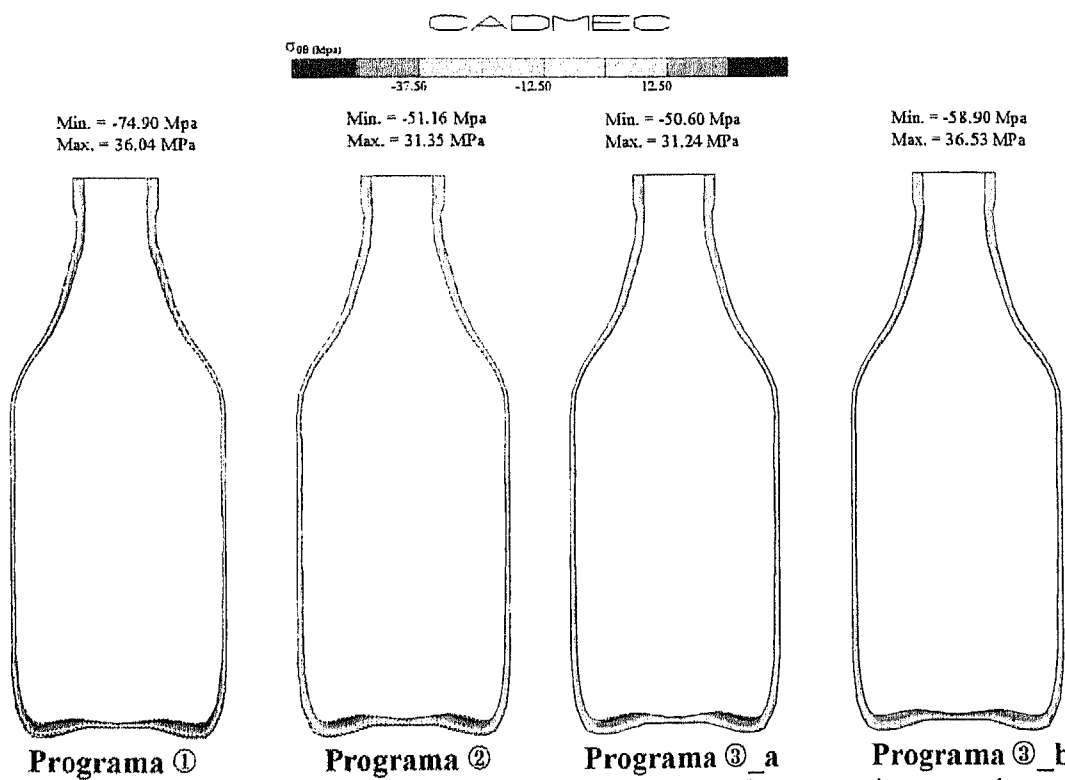


Figura 6.33: Comparação do campo de tensões na garrafa para o instante de tempo $t = 8.0$ segundos.

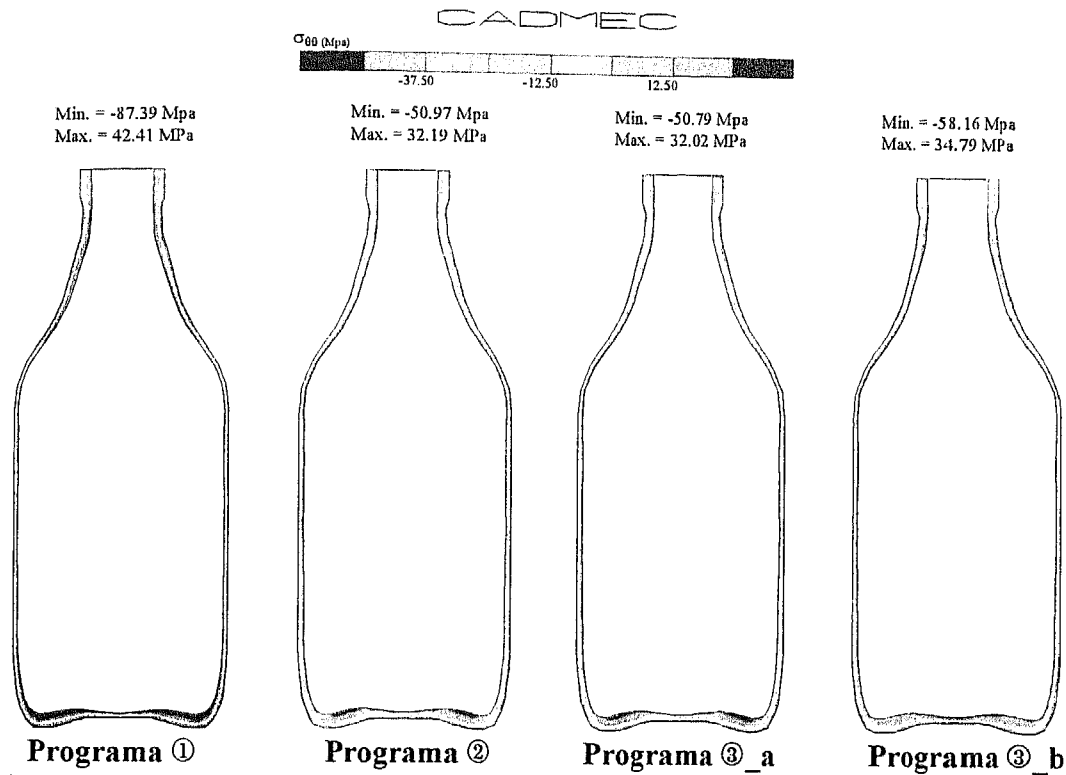


Figura 6.34: Comparação do campo de tensões no molde e na garrafa para o instante de tempo $t = 10.0$ segundos.

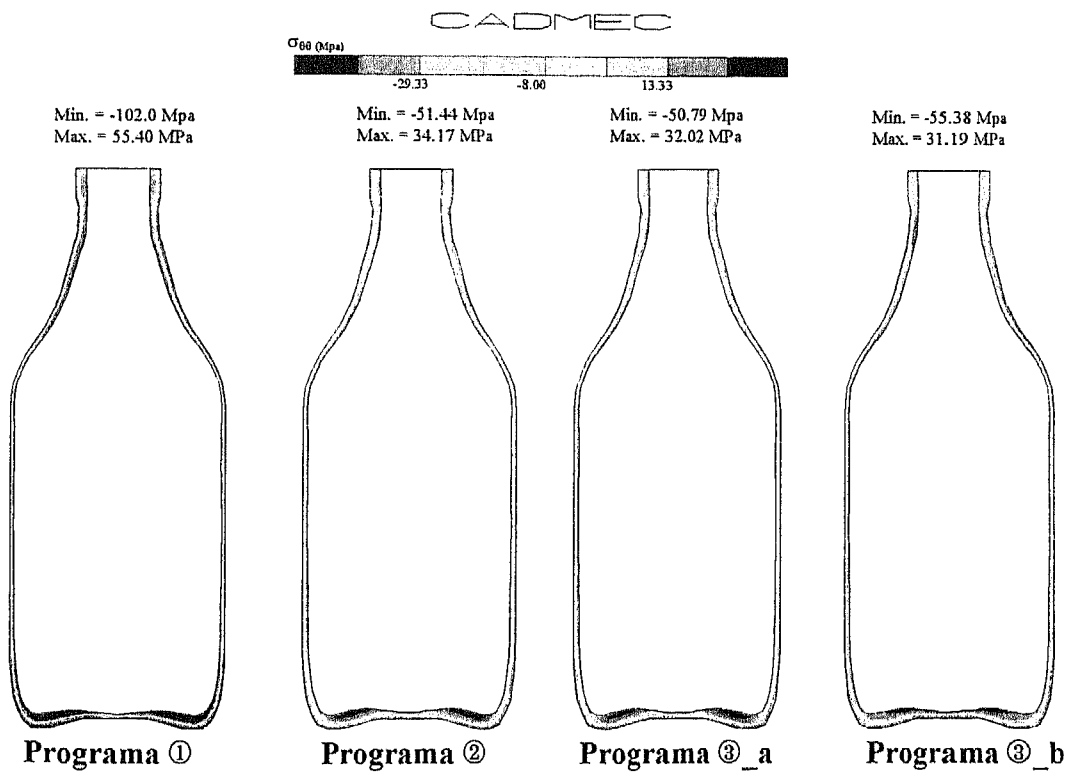


Figura 6.35: Comparação do campo de tensões na garrafa para o instante de tempo $t = 30.0$ segundos.

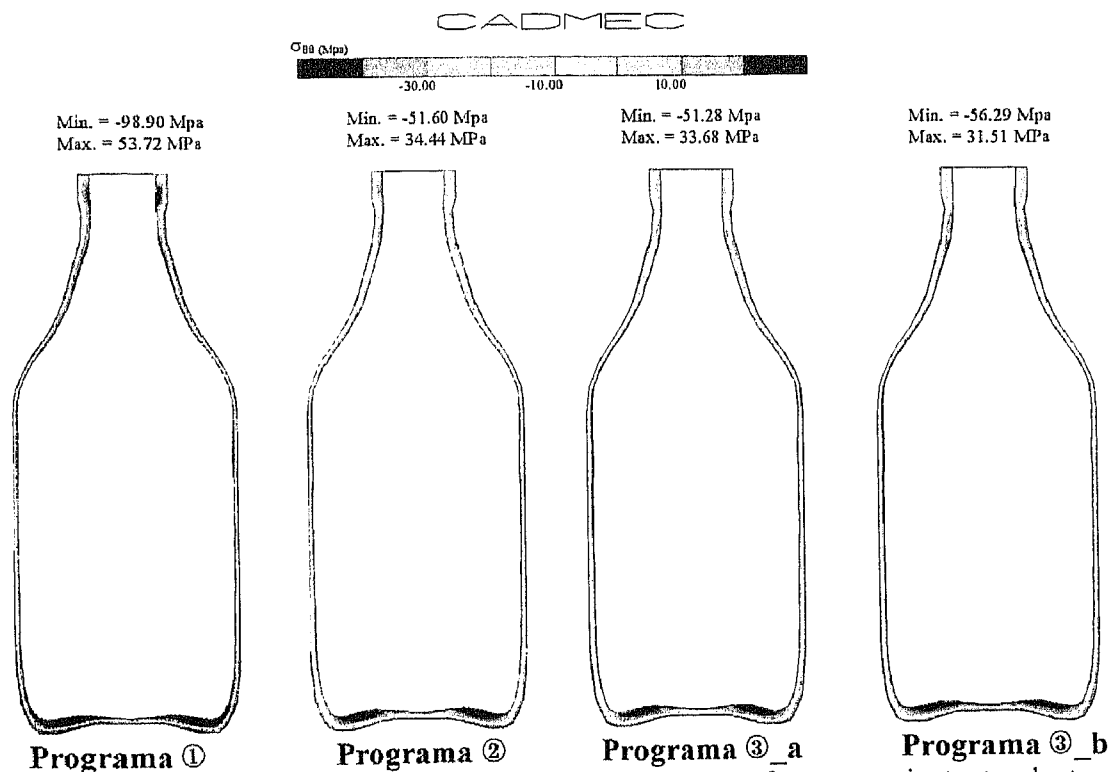


Figura 6.36: Comparação do campo de tensões na garrafa para o instante de tempo $t = 60.0$ segundos.

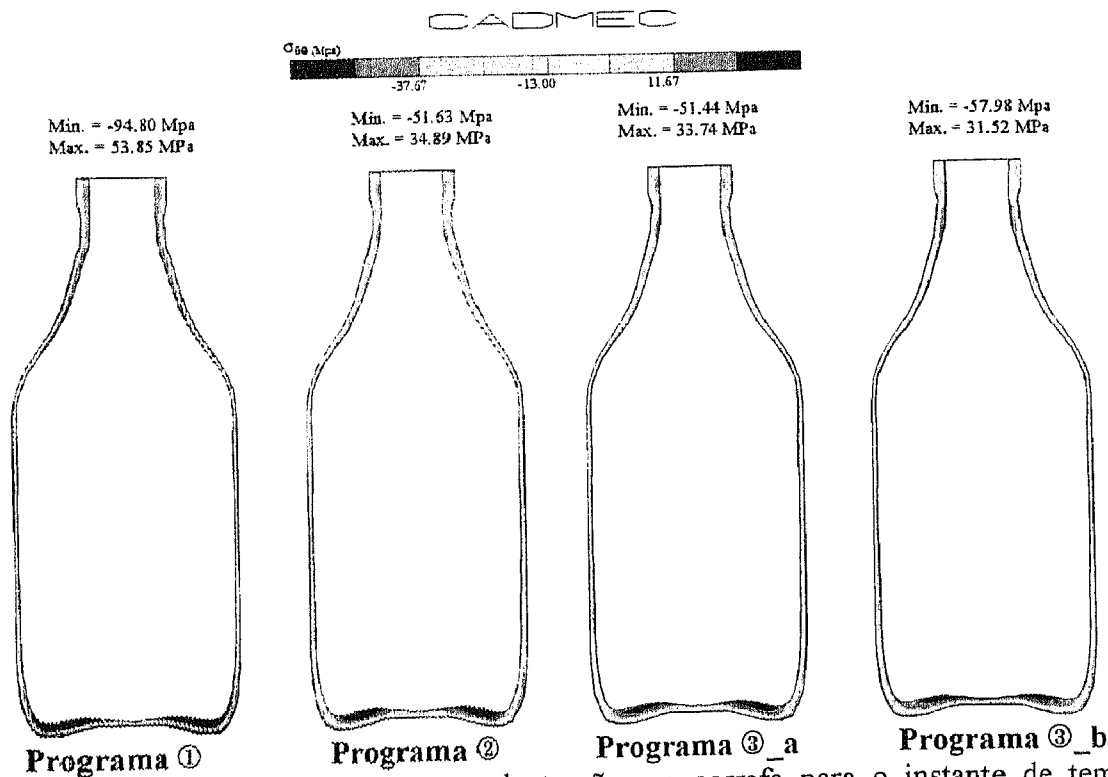


Figura 6.37: Comparação do campo de tensões na garrafa para o instante de tempo $t = 180.0$ segundos.

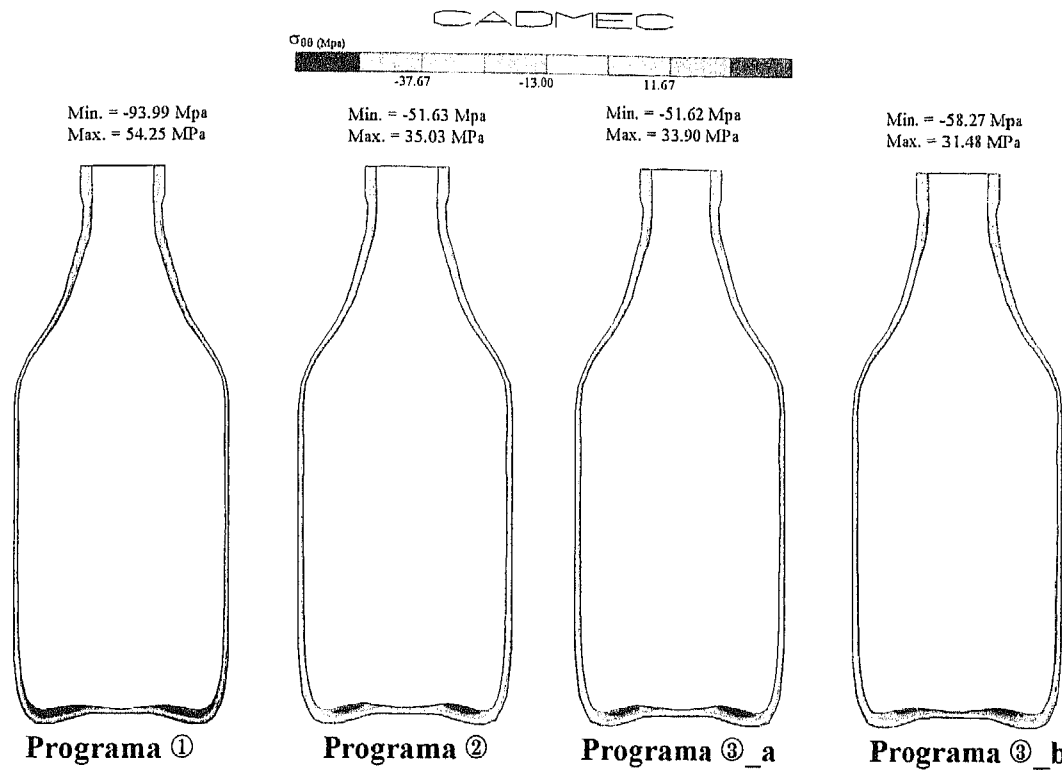


Figura 6.38: Comparação do campo de tensões na garrafa para o instante de tempo $t = 300.0$ segundos.

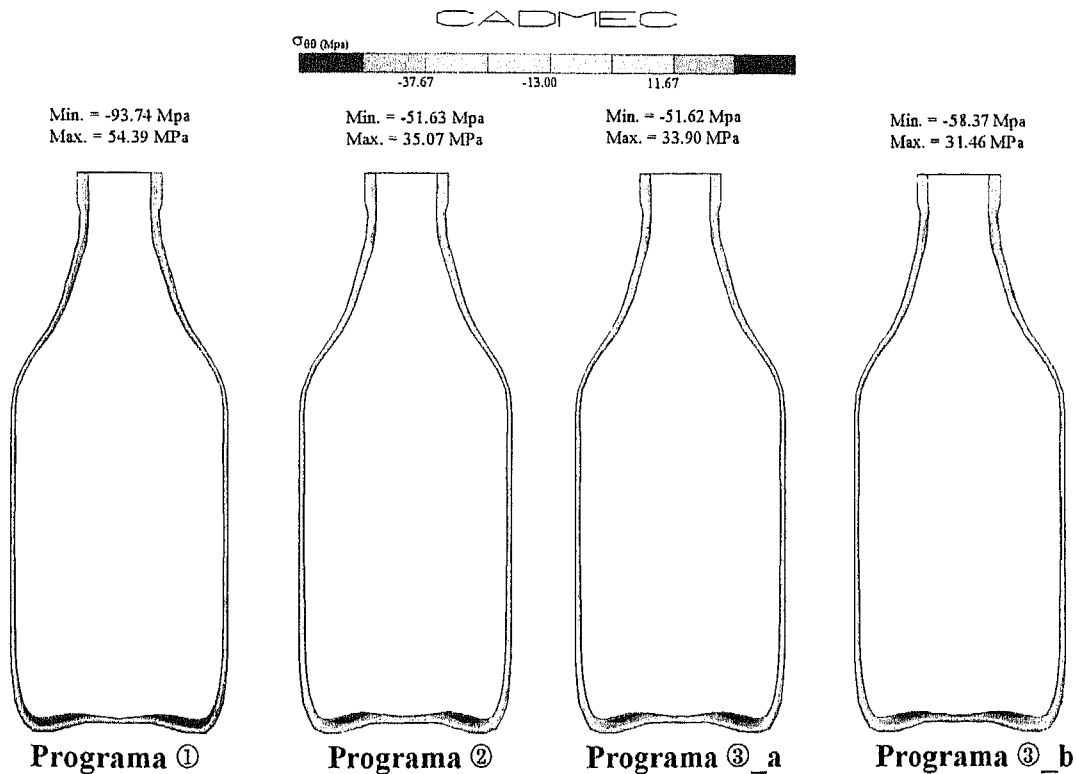


Figura 6.39: Comparação do campo de tensões na garrafa para o instante de tempo $t = 600.0$ segundos.

6.5.1. Comparação das tensões

Por observação das figuras correspondentes aos diversos campos de tensões, e recorrendo como auxílio ao gráfico 6.3, verifica-se que estas, à medida que se avança no tempo, tendem a estabilizar.

As temperaturas mais elevadas, verificadas no programa ①, levam a que, após o molde ser retirado, a garrafa tenda a arrefecer mais rapidamente, provocando gradientes térmicos mais elevados. Desta forma, as tensões residuais existentes devido ao arrefecimento, são superiores quando comparadas com os restantes programas.

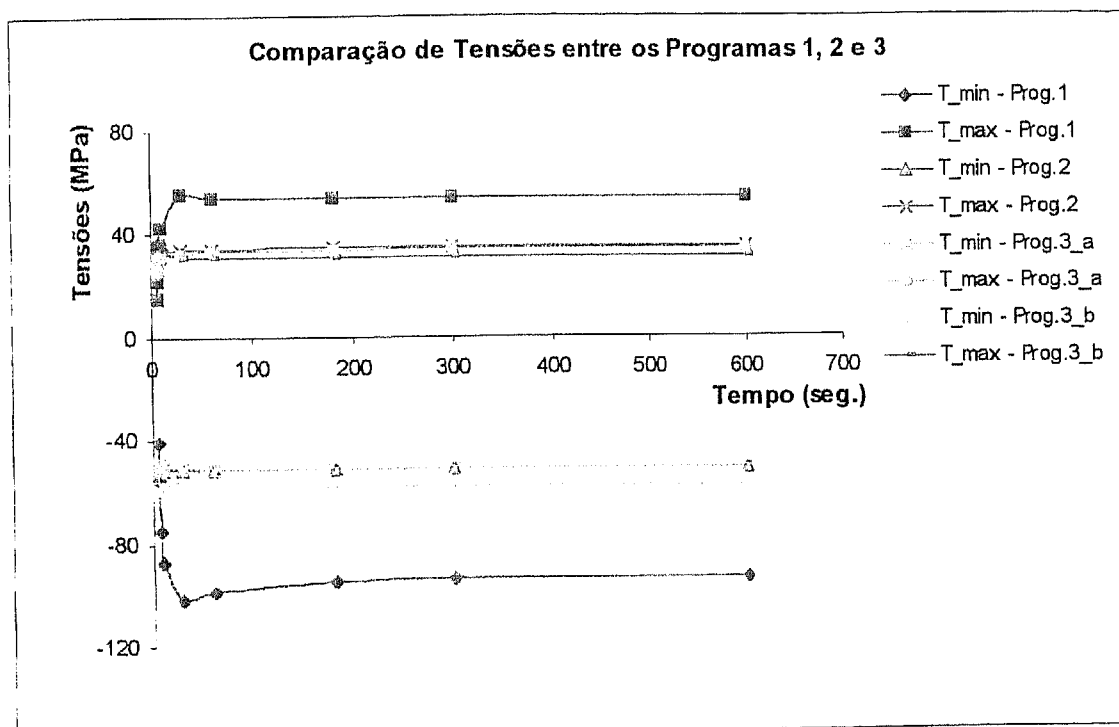


Gráfico 6.3: Comparação das tensões residuais da garrafa durante a fase de arrefecimento para os programas ①, ② e ③

6.6. REFERÊNCIAS

- [1] J. M. César de Sá, 1986, Numerical Modelling of Glass Forming Processes, Engineering Computations, vol. 3, nº 4, December 1986.
- [2] J. M. César de Sá, R. M. Natal Jorge, C. M. C. Silva, 1999, A Computational Model for Glass Container Forming Process, European Conference on Computational Mechanics Solids, Structures and Couple Problems in Engineering, Munich, Germany.
- [3] J. M. César de Sá, R. M. Natal Jorge, R. P. R. Cardoso, 1998, Simulation of Hollow Glass Containers, Colloquium on Modelling of Glass Forming Processes, 14-18 October, Vallencienes, France.

Capítulo 7

Conclusões e Futuros Trabalhos

7.1. CONCLUSÕES

Neste trabalho apresentam-se as ferramentas para a análise numérica pelo método dos elementos finitos dos processos de enformação de garrafas e para o cálculo das tensões térmicas durante o período de arrefecimento da garrafa.

As operações de fabrico por processos de enformação caracterizam-se como sendo processos muito complexos, com grandes deslocamentos e deformações, onde o material apresenta um comportamento não linear.

Os processos de enformação de vidro conduzem a constantes alterações nas peças e das condições de fronteira, determinadas pela interacção entre ferramentas e peça. A variação das propriedades quer térmicas quer mecânicas do vidro com os gradientes térmicos existentes no sistema, são factores determinantes na obtenção das garrafas.

De forma a validar o código implementado, foram apresentadas as soluções obtidas baseadas nos programas ①, ② e ③. No programa ① as condições de fronteira de fluxo são impostas por relações empíricas, enquanto nos programas ② e ③ é feita a discretização do molde e o contacto realizado através do método da função penalidade. No programa ② a determinação do campo de temperaturas do *parison* e do molde é realizada antes da determinação dos deslocamentos da malha, para cada intervalo de tempo, enquanto no programa ③ a determinação do campo de temperaturas é realizada no fim do incremento de tempo. Para a distribuição de temperaturas, verifica-se que durante a fase de formação da garrafa, isto é, desde o instante inicial em que o *parison* é colocado no molde final até a garrafa estar completamente formada:

- i. os resultados dos programas apresentados, programas ② e ③, a distribuição de temperaturas para o *parison* e para o molde é muito semelhante,
- ii. o processo de formação da garrafa é acelerado no programa ③, o que é explicado face à alteração efectuada no código implementado. No entanto, o tempo total até todos os nós da malha de elementos finitos da garrafa entrar em contacto com o molde é aproximadamente igual para o programa 2 ($t =$

1.17 seg.) e para o programa ③ ($t = 1.15$ seg.), assim como a distribuição do campo de temperaturas entre os programas.

Durante o período de arrefecimento, quando a garrafa já não se encontra no interior do molde, e não considerando o programa ③_b (com regeneração da malha de elementos finitos), verifica-se que:

- i. as temperaturas obtidas pelo programa ① são mais elevadas que nos restantes códigos, devido à simulação efectuada neste programa considerar o molde representado apenas por condições de fronteira,
- ii. as distribuições de temperaturas relativas aos programas ② e ③_a são praticamente iguais.

Após concluída a comparação entre o código implementado com os códigos existentes, torna-se necessário avaliar a utilização da regeneração da malha de elementos finitos. Para tal, são comparados os resultados entre os programas 3_a (sem regeneração) e o programa 3_b (com regeneração da malha de elementos finitos). Com vista ao cálculo das tensões térmicas durante esta fase do processo, a malha utilizada foi refinada. O número de elementos e nós da malha de elementos finitos aumentou, sendo necessário proceder-se à actualização das variáveis e das condições de fronteira. Os resultados obtidos para a distribuição de temperaturas na garrafa, demonstram que considerando uma nova malha de elementos finitos, a garrafa arrefece mais rapidamente.

7.2. FUTURO TRABALHO

A concluir apresentam-se algumas sugestões para futuros trabalhos de investigação no domínio onde se insere a presente dissertação:

- i. implementação de um algoritmo de erro térmico, de forma a permitir que a regeneração automática da malha de elementos finitos seja executada sempre que o erro seja significativo,
- ii. implementação de um algoritmo de contacto que contabilize sempre que um nó da malha de elementos finitos entre em contacto com o molde, o atrito entre o vidro e o molde, de forma ao contacto ser mais realista,
- iii. face às grandes deformações características dos processos de enformação, a simulação destes processos pode ser efectuada pela utilização de métodos sem malhas em substituição dos elementos finitos.

