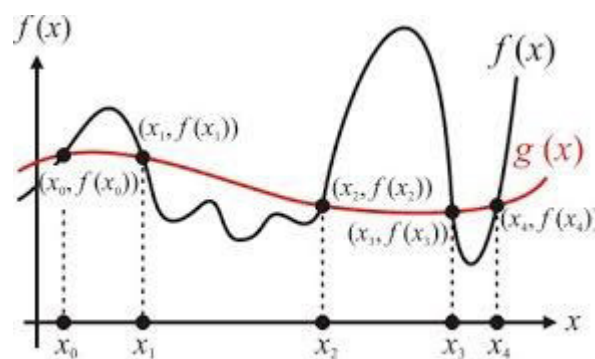




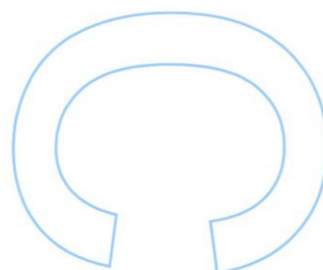
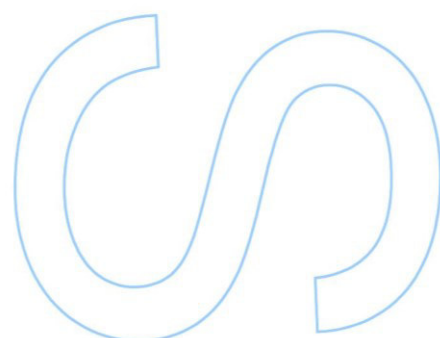
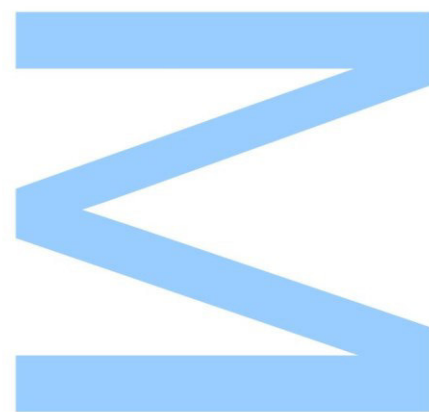
As Quatro famílias de Polinómios de Chebyshev: Propriedades e Algumas Aplicações na Análise Numérica

Victor Zaqueu Nassuiro
Mestrado em Matemática para Professores
Departamento de Matemática

Orientador

Maria Zélia Ramos Alves da Rocha
Professora Auxiliar, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

2018

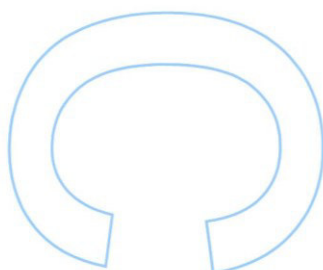
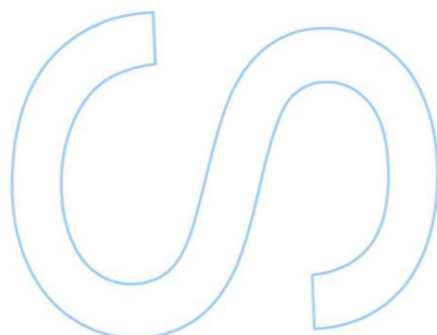
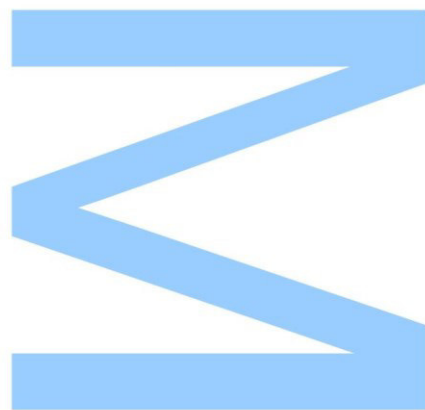




Todas as correções determinadas pelo júri, e só essas, foram efetuadas.

O Presidente do Júri,

Porto, ____/____/____



O desejo apoiado pela fé não conhece a palavra impossível.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus Deuses por me sustentarem a cada instante e Lhes peço que os frutos deste trabalho sejam de alguma forma úteis na comunidade académica do Instituto Superior Politécnico de Tete e, duma forma geral, à comunidade académica moçambicana e que por vias deste, me façam instrumento das Vossas vontades.

Obrigado à minha família que mesmo em Moçambique sempre me apoiou, acreditou em mim e pacientemente espera pelo meu regresso. Vocês ocupam um lugar de destaque na minha vida e são o verdadeiro motivo desta empreitada. Espero que, um dia, consiga vos compensar por toda falta que vos fiz sentir, pelos momentos importantes que não estive presente e pelos abraços que não dei naqueles momentos de dor e desespero.

Obrigado Professora Doutora Maria Zélia Ramos Alves da Rocha pela orientação que me deu na tese. Quero de viva voz agradecer-lhe pela cortesia, disponibilidade, constante preocupação e atenção, dedicação e profissionalismo. Muito obrigado!

Obrigado a todos os Professores do Departamento de Matemática da Universidade do Porto, em particular aos do Curso de Mestrado em Matemática para Professores, por todos os ensinamentos, pelas ajudas, pelos materiais e tempo disponibilizados. O vosso apoio foi imprescindível para o alcance dos objetivos do curso.

Agradeço ao Instituto Superior Politécnico de Tete, instituição para qual trabalho, por todas as oportunidades que me foram proporcionadas até aqui. Em especial, agradeço ao Professor Doutor Bernardo Miguel Bene, Director Geral do ISPT, e ao Doutor João Roque Maendaenda, Director Geral-Adjunto para Administração e Finanças, por todo apoio, incentivo e orientação, mas principalmente por terem contribuído de maneira significativa para aumentar ainda mais o meu interesse em continuar os meus estudos.

Obrigado a todos os colegas e amigos frutos do Mestrado e dos tempos passados na cidade do Porto. A descontração por vós proporcionada, o incentivo mútuo e a amizade foram fatores indispensáveis para que alcançasse os objetivos e as finalidades a priori definidas. Deixo um especial agradecimento àqueles amigos que foram como irmãos e que ao lado deles passei os melhores momentos nesta cidade. Aos colegas do Mestrado em Matemática para Professores agradeço pelos momentos de estudo.

É minha obrigação reconhecer o apoio daquelas pessoas (incluindo os anónimos) que direta ou indiretamente contribuíram para que este objetivo fosse alcançado e faço-o com muito carinho. O meu sincero muito obrigado a todos e a cada um de vós!

OBRIGADO! OBRIGADO! OBRIGADO!
NDA TENDA KWENE KWENE!

Dedicatória

À minha família pelo apoio incondicional em todos os momentos, principalmente nos de incerteza, muito comuns para quem tenta trilhar novos caminhos. Sem vocês nenhuma conquista valeria a pena.

Aos meus pais Omar Nassuiro e Saugina Zaqueu, que dignamente me apresentaram à importância da família e da escola. Eles ensinaram-me, também, que para prosperar é necessário: suor, sacrifício e paciência.

Resumo

Esta Dissertação de Mestrado é baseada no livro [*Mason, J. C., Handscomb, D. C., Chebyshev Polynomials, Chapman & Hall, 2003*] e tem como objetivo estudar as principais propriedades das quatro famílias de Polinómios de Chebyshev e algumas das suas aplicações na Análise Numérica. Consideramos, em particular, a ortogonalidade destas famílias e os desenvolvimentos de funções em séries de polinómios de Chebyshev, assim como as propriedades de aproximação destas séries. Implementamos programas no software Máxima com o objectivo de efectuar o cálculo simbólico destes polinómios e de ilustrar graficamente os resultados apresentados.

Palavras-chave: Análise Numérica, Séries de Chebyshev, Polinómios de Chebyshev, Polinómios Ortogonais.

Resumo

This Master's Dissertation is based on the book [*Mason, J. C., Handscomb, D. C., Chebyshev Polynomials, Chapman & Hall, 2003*] and aims to study the main properties of the four families of Chebyshev Polynomials and some of their applications in Numerical Analysis. We consider, in particular, the orthogonality of these families and the development of functions in series of Chebyshev polynomials, as well as the approximation properties of these series. We implemented programs in Maxima software with the purpose of making the symbolic computation of these polynomials and graphically illustrate the results presented.

Key words: Numerical Analysis, Chebyshev Series, Chebyshev Polynomials, Orthogonal Polynomials.

Conteúdo

1	As Quatro Famílias dos Polinómios de Chebyshev	8
1.1	Polinómios de Chebyshev de primeira espécie	8
1.1.1	Definição trigonométrica	8
1.1.2	Relação de recorrência	10
1.1.3	Paridade, zeros e extremos	13
1.1.4	Coefficientes na base canónica	16
1.2	Polinómios de Chebyshev de segunda espécie	19
1.2.1	Definição trigonométrica	19
1.2.2	Relação de recorrência	21
1.2.3	Paridade, zeros e extremos	24
1.3	Polinómios de Chebyshev de terceira e quarta espécies	26
1.3.1	Definição trigonométrica	27
1.3.2	Relação de recorrência dos polinómios de terceira espécie	31
1.3.3	Relação de recorrência dos polinómios de quarta espécie	33
1.3.4	Paridade, zeros e extremos	33
1.4	Cálculo dos polinómios de Chebyshev em pontos especiais	36
1.5	Relações entre famílias de polinómios de Chebyshev	42
1.6	Polinómios de Chebyshev no intervalo $[0,1]$ e no intervalo $[a,b]$	45
1.6.1	Polinómios da primeira espécie no intervalo $[0,1]$	46
1.6.2	Polinómios de segunda espécie no intervalo $[0,1]$	47
1.6.3	Polinómios de terceira e quarta espécies no intervalo $[0,1]$	48
1.6.4	Polinómios de Chebyshev definidos num intervalo $[a,b]$	50
2	Aproximação Minimax	51
2.1	Considerações gerais	51
2.2	O problema da aproximação	53
2.3	Melhor aproximação e aproximação minimax	54
2.4	Propriedade minimax dos polinómios de Chebyshev	55
2.5	Polinómios de Chebyshev ponderados de segunda, terceira e quarta espécies	55
3	Funções Geradoras, Ortogonalidade, Aproximação $\mathcal{L}_2$ e Séries de Chebyshev	56
3.1	Funções geradoras	56
3.1.1	Função geradora dos polinómios de Chebyshev de primeira espécie	57
3.1.2	Função geradora dos polinómios de Chebyshev de segunda espécie	57
3.1.3	Função geradora dos polinómios de Chebyshev de terceira espécie	58
3.1.4	Função geradora dos polinómios de Chebyshev de quarta espécie	58
3.2	Ortogonalidade	59
3.2.1	Representação integral e função peso	59

3.2.2	Ortogonalidade dos polinómios de Chebyshev	60
3.3	Aproximação $\mathcal{L}_2$	63
3.4	Desenvolvimento de funções em série ortogonais	69
3.5	Desenvolvimentos da função sinal em séries de Chebyshev	69
3.5.1	Desenvolvimento em série de polinómios de Chebyshev de primeira espécie . .	70
3.5.2	Desenvolvimento em série de polinómios de Chebyshev de segunda espécie . .	71
3.5.3	Desenvolvimento em série de polinómios de Chebyshev de terceira espécie . . .	74
3.5.4	Desenvolvimento em série de polinómios de Chebyshev de quarta espécie . . .	76
3.5.5	Conclusão	79
4	Considerações Finais	80
A	Nota Biográfica de Chebyshev	83
B	Identidades Trigonométricas	84
C	Teorema do Binómio de Newton	88
D	Análise Matemática	90
D.1	Cálculo de alguns integrais trigonométricos	91
E	Programas em Máxima	92

Lista de Tabelas

1.1	Polinómios de Chebyshev de primeira espécie	10
1.2	Polinómios de Chebyshev de segunda espécie	21
1.3	Polinómios de Chebyshev de terceira espécie	31
1.4	Polinómios de Chebyshev de quarta espécie	32
1.5	Polinómios de Chebyshev de primeira espécie no intervalo $[0, 1]$	47
1.6	Polinómios de Chebyshev de segunda espécie no intervalo $[0, 1]$	48
1.7	Polinómios de Chebyshev de terceira espécie no intervalo $[0, 1]$	49
1.8	Polinómios de Chebyshev de quarta espécie no intervalo $[0, 1]$	50

Lista de Figuras

1.1	Variação da variável dependente x em função da variação da variável independente θ , na função $x = \cos \theta$, para $\theta \in [0, \pi]$ e $x \in [-1, 1]$	14
1.2	Localização dos zeros do polinómio $T_{31}(x)$ e $T_{32}(x)$	14
1.3	Localização dos zeros do polinómio $T_{10}(x)$ e $T_{11}(x)$	15
1.4	Localização dos zeros do polinómio $U_{17}(x)$ e $U_{18}(x)$	25
1.5	Localização dos zeros dos polinómios $U_{10}(x)$ e $U_{11}(x)$ & $U_{17}(x)$ e $U_{18}(x)$	25
1.6	Localização dos zeros do polinómio $V_{22}(x)$ e $V_{23}(x)$	35
3.1	Somas parciais de graus 1, 5, 10, 15, 20 e 22 da série de polinómios de Chebyshev de primeira espécie	71
3.2	Somas parciais de graus 1, 5, 10, 15, 20 e 22 da série de polinómios de Chebyshev de segunda espécie	74
3.3	Somas parciais de graus 1, 5, 10, 15, 20 e 22 da série de Chebyshev de terceira espécie	76
3.4	Somas parciais de graus 1, 5, 10, 15, 20 e 22 da série de Chebyshev de quarta espécie	78
3.5	Somas parciais de graus 1, 5, 10, 15, 20 e 22 das séries de polinómios de Chebyshev de todas as espécies	79

Introdução

Este trabalho foi baseado no livro [*Chebyshev Polynomials, Chapman & Hall, 2003*], de J.C Mason e D.C Handscomb e tem como objectivo apresentar as principais propriedades dos polinómios de Chebyshev e algumas das suas aplicações na Análise Numérica.

Pafnut Lvovitch Chebyshev foi um matemático Russo que viveu entre os anos 1821 e 1894 e que em 1853 definiu a primeira e a segunda famílias destes polinómios. Em 1992, o matemático Walter Gautschi, renomeou os polinómios de perfil aerodinâmicos como polinómios de Chebyshev de terceira e quarta espécies, uma vez que os polinómios de perfil aerodinâmicos têm propriedades semelhantes às das duas primeiras famílias.

O trabalho apresentado é desenvolvido a partir da definição trigonométrica destes polinómios, por esse motivo foi necessário utilizar diversos resultados de trigonometria que se apresentam organizados no Apêndice B. As definições trigonométricas conduzem a fórmulas explícitas dos zeros, sendo as mesmas uma das principais vantagens destas famílias em relação a outras famílias de polinómios ortogonais. Com efeito, os zeros dos polinómios de Chebyshev ocupam um lugar preponderante em problemas de interpolação e de quadratura Gaussiana que não foram abordados neste trabalho. Concentramos a nossa atenção no desenvolvimento de funções em séries de polinómios de Chebyshev e no estudo das suas propriedades de aproximação. Para tal é crucial a fórmula explícita dos extremos dos polinómios de Chebyshev de primeira espécie que traduz a equioscilação destes polinómios.

O software *Máxima* foi usado como um instrumento de cálculo simbólico e representação gráfica com o objetivo de ilustrar os resultados apresentados. Os programas implementados encontram-se no Apêndice E.

Esta dissertação é constituída por cinco capítulos. A seguir apresentamos de forma sintética o conteúdo de cada um deles.

O Capítulo 1 tem como objectivo definir trigonometricamente as quatro famílias de polinómios de Chebyshev, apresentar o cálculo dos primeiros polinómios, as suas relações de recorrência, a paridade, os zeros e os extremos, os coeficientes na base canónica e o seu cálculo recursivo, calcular os polinómios em pontos especiais, estabelecer relações entre as quatro famílias, determinar os polinómios de Chebyshev no intervalo $[0, 1]$ e no intervalo $[a, b]$. Certos resultados que foram apresentados neste capítulo não constam do livro base desta tese mas sim no artigo [5]. Foi nossa intenção explicitar certos cálculos de forma a adquirir experiência nesta área científica.

O capítulo seguinte apresenta os principais resultados da Teoria da *Aproximação Minimax*. Dentre esses resultados, mereceram particular destaque o *Teorema fundamental da Teoria da Aproximação* (*Teorema de Weierstrass*), o *Teorema da alternância para polinómios algébricos*, o *Teorema da*

alternância para polinómios trigonométricos e a Propriedade da alternância para os polinómios de Chebyshev de primeira espécie.

No Capítulo 3 deduzimos as fórmulas fechadas das funções geradoras para as famílias de todas as espécies utilizando o mesmo método descrito em [5]. Apresentamos, também, os resultados sobre a ortogonalidade destes polinómios relativamente a um produto interno definido a custa dum integral com função peso contínua e não negativa. Seguidamente apresentamos o desenvolvimento da *função sinal* em séries de polinómios de Chebyshev das quatro espécies. Efectuamos, também, a representação gráfica das somas parciais destas séries e efectuamos algumas comparações.

Terminamos esta dissertação com considerações finais.

*Chebyshev polynomials are everywhere dense in numerical analysis. - J. C. Mason & D. C.
Handscomb*

Capítulo 1

As Quatro Famílias dos Polinómios de Chebyshev

Neste capítulo partimos das definições trigonométricas das quatro famílias dos polinómios de Chebyshev e demonstramos as suas principais propriedades, tais como: o cálculo dos primeiros polinómios, as relações de recorrência, a paridade, os zeros e os extremos assim como as relações entre as famílias. Na generalidade seguimos de perto o conteúdo do livro [1]. No entanto, as ideias usadas nas demonstrações apresentadas nas Secções 1.1.3, 1.2.3 e 1.3.4 são análogas as apresentadas na Secção 2.4 de [8]. Na demonstração da Proposição 1.1.1 foi usada uma técnica apresentada em [5].

1.1 Polinómios de Chebyshev de primeira espécie

1.1.1 Definição trigonométrica

Definição 1.1. *Os polinómios de Chebyshev¹ de primeira espécie, representados por $T_n(x)$ com $n \in \mathbb{N}_0$, são polinómios em x de grau n , definidos pelas identidades*

$$T_n(x) = \cos n\theta, \quad \text{com } x = \cos \theta. \quad (1.1)$$

Como o domínio da variável x está definido no intervalo $[-1, 1]$, podemos considerar que o domínio de definição da variável θ é o intervalo $[0, \pi]$. Estes intervalos são percorridos em sentidos contrários visto que $x = -1$ corresponde a $\theta = \pi$ e $x = 1$ corresponde a $\theta = 0$.

É possível exprimir $\cos n\theta$ como soma de potências de $\cos \theta$ de expoentes entre 0 e n . Vejamos os cálculos dos primeiros seis elementos da sucessão $\{\cos n\theta\}_{n=0}^{\infty}$. neste processo, vamos usar várias identidades trigonométricas que se encontram reunidas no anexo B.

1. Se $n = 0$, então

$$\cos 0\theta = 1. \quad (1.2)$$

2. Se $n = 1$, então

$$\cos 1\theta = \cos \theta. \quad (1.3)$$

3. Se $n = 2$, então

$$\cos 2\theta \stackrel{(B.2)}{=} 2 \cos^2 \theta - 1. \quad (1.4)$$

¹Pafnut Lvovitch Chebyshev, matemático russo que viveu entre os anos 1821 e 1894. Para mais informações sobre a vida e obra deste cientista, consulte o Anexo A

4. Se $n = 3$, então

$$\begin{aligned}
 \cos 3\theta &= \cos(2\theta + \theta) \\
 &\stackrel{(B.6)}{=} \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta \\
 &\stackrel{(1.4),(B.8)}{=} (2 \cos^2 \theta - 1) \cos \theta - 2 \cos \theta \sin^2 \theta \\
 &\stackrel{(B.2)}{=} (2 \cos^2 \theta - 1) \cos \theta - 2 \cos \theta (1 - \cos^2 \theta) \\
 &= 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta.
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

5. Se $n = 4$, então

$$\begin{aligned}
 \cos 4\theta &= \cos 2(2\theta) \\
 &\stackrel{(B.10)}{=} \cos^2(2\theta) - \sin^2(2\theta) \\
 &\stackrel{(B.2)}{=} 2 \cos^2(2\theta) - 1 \\
 &\stackrel{(B.10)}{=} 2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)^2 - 1 \\
 &\stackrel{(B.2)}{=} 2(2 \cos^2 \theta - 1)^2 - 1 \\
 &\stackrel{(C.5)}{=} 2(4 \cos^4 \theta - 4 \cos^2 \theta + 1) - 1 \\
 &= 8 \cos^4 \theta - 8 \cos^2 \theta + 1.
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

6. Se $n = 5$, então

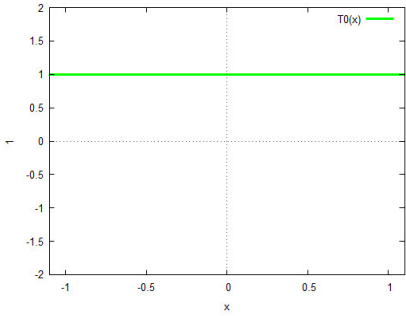
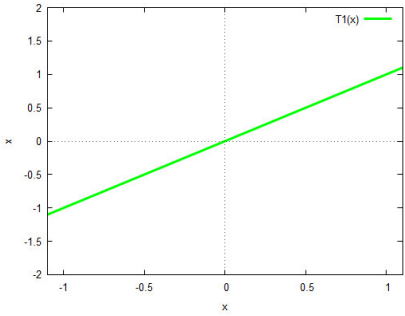
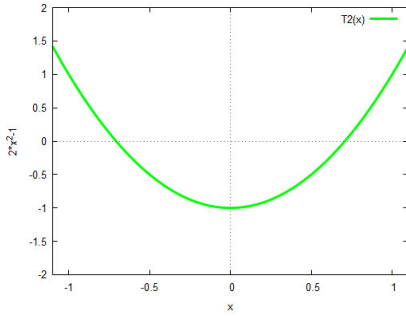
$$\begin{aligned}
 \cos 5\theta &= \cos(4\theta + \theta) \\
 &\stackrel{(B.6)}{=} \cos 4\theta \cos \theta - \sin 4\theta \sin \theta \\
 &\stackrel{(1.6),(B.8)}{=} (8 \cos^4 \theta - 8 \cos^2 \theta + 1) \cos \theta - 2 \sin 2\theta \cos 2\theta \sin \theta \\
 &\stackrel{(B.8),(B.10)}{=} 8 \cos^5 \theta - 8 \cos^3 \theta + \cos \theta - 4 \sin \theta \cos \theta (2 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta \\
 &= 8 \cos^5 \theta - 8 \cos^3 \theta + \cos \theta - 4(2 \cos^3 \theta - \cos \theta) \sin^2 \theta \\
 &\stackrel{(B.2)}{=} 8 \cos^5 \theta - 8 \cos^3 \theta + \cos \theta - 4(2 \cos^3 \theta - \cos \theta)(1 - \cos^2 \theta) \\
 &= 8 \cos^5 \theta - 8 \cos^3 \theta + \cos \theta - (-8 \cos^5 \theta + 12 \cos^3 \theta - 4 \cos \theta) \\
 &= 16 \cos^5 \theta - 20 \cos^3 \theta + 5 \cos \theta.
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Dado (1.1) então, os primeiros polinómios de Chebyshev serão:

$$\begin{aligned}
 T_0(x) &= \cos 0 = 1. \\
 T_1(x) &= \cos \theta = x. \\
 T_2(x) &= \cos 2\theta = 2x^2 - 1. \\
 T_3(x) &= \cos 3\theta = 4x^3 - 3x. \\
 T_4(x) &= \cos 4\theta = 8x^4 - 8x^2 + 1. \\
 T_5(x) &= \cos 5\theta = 16x^5 - 20x^3 + 5x, \dots
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Na Tabela 1.1 estão representados os gráficos dos primeiros polinómios de Chebyshev da primeira espécie.

Tabela 1.1: Polinómios de Chebyshev de primeira espécie

		
$T_0(x) = 1$	$T_1(x) = x$	$T_2(x) = 2x^2 - 1$

1.1.2 Relação de recorrência

A obtenção dos polinómios de Chebyshev de grau mais elevado a partir da definição trigonométrica envolve cálculos fastidiosos. Em alternativa, vamos reescrever as identidades (1.4) - (1.7) de forma a encontrar uma regularidade que nos permita calcular estes polinómios mais facilmente de forma recursiva. Assim notemos que:

$$\begin{aligned}
 \cos 2\theta &= 2\cos^2\theta - 1 = 2\cos\theta(\cos\theta) - 1. \\
 \cos 3\theta &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = 2\cos\theta(2\cos^2\theta - 1) - \cos\theta = 2\cos\theta(\cos 2\theta) - \cos\theta. \\
 \cos 4\theta &= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1 = 2\cos\theta(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) - (2\cos^2\theta - 1) \\
 &= 2\cos\theta(\cos 3\theta) - \cos 2\theta.
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

A partir destes exemplos, somos inferidos a enunciar o seguinte resultado.

Teorema 1.1. *Os polinómios de Chebyshev de primeira espécie podem ser gerados pela seguinte relação recursiva de ordem 2, com as correspondentes condições iniciais:*

$$\begin{cases} T_0(x) = 1, & n = 0 \\ T_1(x) = x, & n = 1 \\ T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), & n = 2, 3, \dots \end{cases}, \text{ com } x \in \mathbb{R}. \tag{1.10}$$

Demonstração. Pela Definição 1.1, demonstrar que (1.10) gera os polinómios de Chebyshev da primeira espécie é equivalente a demonstrar que a relação

$$\cos n\theta = 2\cos\theta \cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta, \quad n \geq 2 \tag{1.11}$$

é verdadeira. Assim:

$$\begin{aligned}
 T_n(x) = \cos n\theta &= \cos((n-1)\theta + \theta) \\
 \iff \cos n\theta &\stackrel{(B.6)}{=} \cos(n-1)\theta \cos\theta - \sin(n-1)\theta \sin\theta \\
 \iff \cos n\theta &\stackrel{(B.17)}{=} \cos\theta \cos(n-1)\theta - \frac{\cos(n-2)\theta - \cos n\theta}{2} \\
 \iff 2\cos n\theta &= 2\cos\theta \cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta + \cos n\theta \\
 \iff \cos n\theta &= 2\cos\theta \cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta
 \end{aligned}$$

Assim sendo, está provado que a fórmula (1.11) é verdadeira, logo, prova-se também que a relação (1.10) gera os polinómios de Chebyshev de primeira espécie. ■

Realcemos o facto de que em (1.10), a variável x pode assumir qualquer valor real, não necessita de pertencer ao intervalo $[-1, 1]$. Assim a relação recursiva e as suas condições iniciais produzem um prolongamento analítico a $\mathbb{R}$ dos polinómios de Chebyshev definidos trigonometricamente por (1.1).

Cálculo recursivo dos coeficientes na base canônica dos polinômios de Chebyshev de primeira espécie

Vamos escrever $T_n(x)$ na base canônica com coeficiente denotados por $a_{n,k}$, como

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n a_{n,k} x^k. \quad (1.12)$$

Proposição 1.1.1. *Os coeficientes $a_{n,k}$ dos polinômios de Chebyshev de primeira espécie podem ser calculados usando a seguinte relação de recorrência*

$$\begin{cases} a_{n,0} &= -a_{n-2,0} \\ a_{n,k} &= 2a_{n-1,k-1} - a_{n-2,k}, \quad k = 1 \dots n-2, \\ a_{n,n-1} &= 2a_{n-1,n-2} \\ a_{n,n} &= 2a_{n-1,n-1} \end{cases} \quad (1.13)$$

cujas condições iniciais são:

$$\begin{cases} a_{0,0} &= 1 \\ a_{1,0} &= 0, \quad a_{1,1} = 1. \end{cases} \quad (1.14)$$

Demonstração. Consideremos a relação recursiva dos polinômios de Chebyshev de primeira espécie, dada em (1.10), Vamos rescrever a fórmula (1.10) usando (1.12), isto é,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_{n,k} x^k &= 2x \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k} x^k - \sum_{k=0}^{n-2} a_{n-2,k} x^k \\ &= 2 \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k} x^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-2} a_{n-2,k} x^k \\ &= -a_{n-2,0} - \sum_{k=1}^{n-2} a_{n-2,k} x^k + 2 \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k} x^{k+1} \\ &= -a_{n-2,0} - \sum_{k=0}^{n-3} a_{n-2,k+1} x^{k+1} + 2 \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k} x^{k+1} \\ &= -a_{n-2,0} - \sum_{k=0}^{n-3} a_{n-2,k+1} x^{k+1} + 2 \sum_{k=0}^{n-3} a_{n-1,k} x^{k+1} + 2a_{n-1,n-2} x^{n-1} + 2a_{n-1,n-1} x^n \\ &= -a_{n-2,0} - \sum_{k=0}^{n-3} (2a_{n-1,k} - a_{n-2,k+1}) x^{k+1} + 2a_{n-1,n-2} x^{n-1} + 2a_{n-1,n-1} x^n \\ &= -a_{n-2,0} - \sum_{k=1}^{n-2} (2a_{n-1,k-1} - a_{n-2,k}) x^k + 2a_{n-1,n-2} x^{n-1} + 2a_{n-1,n-1} x^n \end{aligned}$$

Assim obtemos:

$$\sum_{k=0}^n a_{n,k} x^k = -a_{n-2,0} - \sum_{k=1}^{n-2} (2a_{n-1,k-1} - a_{n-2,k}) x^k + 2a_{n-1,n-2} x^{n-1} + 2a_{n-1,n-1} x^n \quad (1.15)$$

Identificando em ambos os membros da igualdade (1.15) os coeficientes das potências de x de igual grau, temos a seguinte relação de recorrência entre os coeficientes de (1.12)

$$\begin{cases} a_{n,0} &= -a_{n-2,0} \\ a_{n,k} &= 2a_{n-1,k-1} - a_{n-2,k}, \quad k = 1 \dots n-2, \\ a_{n,n-1} &= 2a_{n-1,n-2} \\ a_{n,n} &= 2a_{n-1,n-1} \end{cases}$$

cujas condições iniciais são:

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \end{cases} \implies \begin{cases} a_{0,0} = 1 \\ a_{1,0} = 0, a_{1,1} = 1. \end{cases}$$

■

Proposição 1.1.2. *O coeficiente do termo principal dos polinómios de Chebyshev de primeira espécie,*

$$T_n(x) = a_{n,n}x^n + \dots,$$

onde as reticências representam os termos de grau inferior a n , é dado pela fórmula,

$$a_{n,n} = 2^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.16)$$

Demonstração. Vamos fazer a demonstração usando o método de indução finita.

Seja $n = 1$; procuramos mostrar que $a_{1,1} = 2^{1-1} = 1$. Como $T_1(x) = x$ decorre imediatamente o facto. Vamos supor que para $n = k$, o termo principal de

$$T_k(x) = a_{k,k}x^k + \dots$$

pode ser escrito como

$$a_{k,k} = 2^{k-1} \quad (1.17)$$

e vamos provar que para $n = k + 1$, o termo principal do polinómio

$$T_{k+1}(x) = a_{k+1,k+1}x^{k+1} + \dots \quad (1.18)$$

pode ser escrito como

$$a_{k+1,k+1} = 2^{(k+1)-1} = 2^k.$$

Usando a relação recursiva (1.10), vamos escrever o polinómio $T_{k+1}(x)$ como:

$$\begin{aligned} T_{k+1}(x) &= 2xT_k(x) - T_{k-1}(x) \\ &= 2x(a_{k,k}x^k + \dots) - (a_{k-1,k-1}x^{k-1} + \dots) = 2a_{k,k}x^{k+1} + \dots, \end{aligned}$$

onde as reticências representam termos de grau inferior a k .

Igualando os coeficientes dos termos principais dos polinómios dados em (1.18) e (1.19) e usando a hipótese de indução temos,

$$a_{k+1,k+1} = 2a_{k,k} \stackrel{1.17}{=} 2 \times 2^{k-1} = 2^k.$$

Assim, prova-se que a fórmula (1.16) gera o coeficiente principal dos polinómios de Chebyshev da primeira espécie. ■

1.1.3 Paridade, zeros e extremos

Paridade

Definição 1.2. Uma sucessão de polinómios $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, tal que, o grau de $P_n(x)$ é igual a n , diz-se simétrica se e somente se:

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1.19)$$

Isto significa que, se n for par $P_n(-x) = P_n(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ou seja, $P_n(x)$ é uma função par, e se n for ímpar $P_n(-x) = -P_n(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ou seja, $P_n(x)$ é uma função ímpar.

Proposição 1.1.3. A sucessão $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é simétrica.

Demonstração. Fazemos a demonstração usando o método de indução finita.

Seja $n = 0$, então, pela Definição 1.2, $T_0(x) = 1$ é par, visto que $T_0(-x) = 1 = T_0(x)$.

Seja $n = 1$, então, pela Definição 1.2, $T_1(x) = x$ é ímpar, visto que $T_1(-x) = -x = -T_1(x)$.

Seja $n \in \mathbb{N}$, vamos supor que, para cada $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, $T_k(x)$ é par se k for par e $T_k(x)$ é ímpar se k for ímpar. Vamos provar que $T_{n+1}(x)$ tem a mesma propriedade.

Sabe-se que

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Há agora dois casos a considerar:

- i) Se $n + 1$ for par, então n é ímpar e $n - 1$ é par. Aplicando a hipótese de indução, podemos afirmar que $T_n(x)$ é uma função ímpar e $T_{n-1}(x)$ é uma função par. Uma vez que x é uma função ímpar, então $xT_n(x)$ é uma função par, por ser produto de duas funções ímpares. Assim sendo, $T_{n+1}(x)$ é par por ser a soma de duas funções pares.
- ii) Se $n + 1$ foi ímpar, então n é par e $n - 1$ é ímpar. Aplicando a hipótese de indução, podemos afirmar que $T_n(x)$ é uma função par e $T_{n-1}(x)$ é uma função ímpar. Uma vez que x é uma função ímpar, então $xT_n(x)$ é uma função ímpar, por ser produto de uma função ímpar e outra par. Assim sendo, $T_{n+1}(x)$ é ímpar por ser a soma de duas funções ímpares.

■

Zeros

Proposição 1.1.4. $T_n(x)$ tem n zeros reais em $[-1, 1]$ dados pela seguinte fórmula

$$x_{n,k} = \cos \theta_{n,k}, \text{ onde } \theta_{n,k} = \frac{2(n-k)+1}{2n} \pi, \quad k=1(1)n. \quad (1.20)$$

Notemos que os ângulos $\theta_{n,k}$ são decrescentes em k e satisfazem a condição $\pi > \theta_{n,k} > \theta_{n,k+1} > \theta_k^n > 0$ pelo que, $x_{n,k}$ é crescente em k e satisfaz $-1 < x_{n,k} < x_{n,k+1} < 1$.

Demonstração. Os zeros da função $T_n(x)$, para $x \in [-1, 1]$, que correspondem aos zeros da função $\cos n\theta$, para $\theta \in [0, \pi]$, podem ser calculados pela equação trigonométrica,

$$\begin{aligned} T_n(x) &= 0 \\ \iff \cos n\theta &= \cos \frac{\pi}{2} \\ \iff n\theta &= \frac{\pi}{2} + k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ \iff \theta_{n,k} &= \frac{(2k+1)\pi}{2n}, & k \in \mathbb{Z} \\ \iff \theta_{n,k} &= \frac{2(n-k)+1\pi}{2n}, & k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

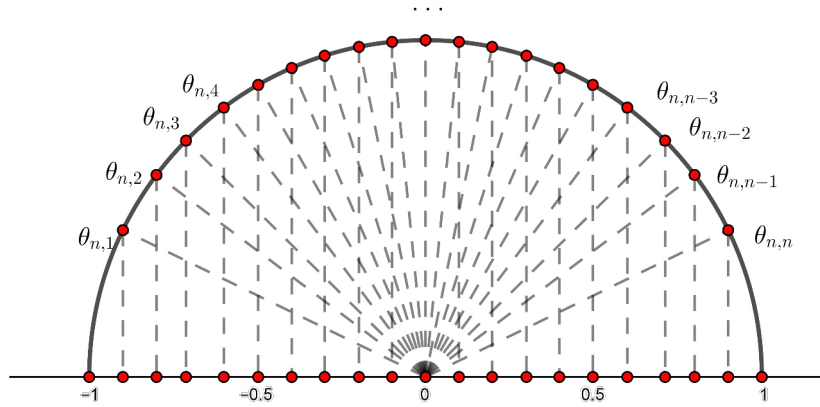


Figura 1.1: Variação da variável dependente x em função da variação da variável independente θ , na função $x = \cos \theta$, para $\theta \in [0, \pi]$ e $x \in [-1, 1]$.

Dado que a função cosseno é periódica de período positivo mínimo 2π , os zeros da função $T_n(x)$ são dados por

$$x_{n,k} = \cos \theta_{n,k} = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k = 1(1)n. \quad (1.21)$$

Como os intervalos das variáveis x e θ são percorridos em sentidos contrários a fórmula (1.21) vai gerar uma sucessão de zeros decrescentes para a variável x , para se evitar esta organização vamos usar a formula

$$x_{n,k} = \cos \left[\frac{2(n-k)+1}{2n} \pi \right], \quad k = 1(1)n.$$

■

Na Figura 1.2 estão representados os zeros das funções $T_{31}(x)$ e $T_{32}(x)$. Note que quanto maior for o grau do polinômio, mais próximo dos extremos $x = -1$ e $x = 1$ se localizarão os seus zeros e, por consequência da paridade, estes zeros são simétricos em relação a origem.

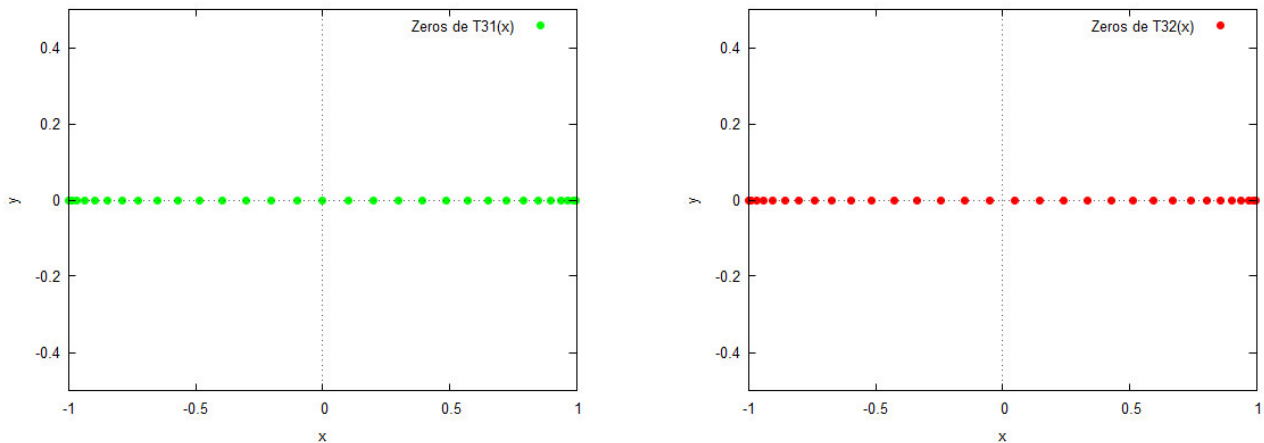


Figura 1.2: Localização dos zeros do polinômio $T_{31}(x)$ e $T_{32}(x)$

Na figura (1.3) estão representados no mesmo sistema de eixos os gráficos das funções $T_{10}(x)$ e $T_{11}(x)$, onde se nota que os zeros de dois polinómios de Chebyshev consecutivos entrelaçam-se entre si.

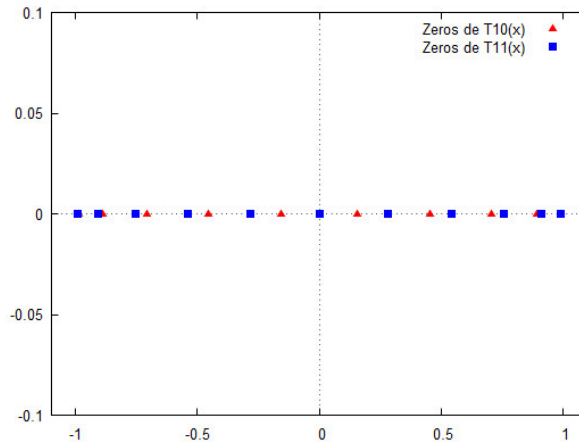


Figura 1.3: Localização dos zeros do polinómio $T_{10}(x)$ e $T_{11}(x)$

Extremos

Proposição 1.1.5. $T_n(x)$ apresenta $n + 1$ extremos locais no intervalo $[-1, 1]$ alternados entre -1 e 1 e esses extremos são dados por

$$x_{n,k} = \cos\left(\frac{n-k}{n}\pi\right), \quad k = 0(1)n.$$

Demonstração. Pelo Teorema D.1, se a função $T_n(x)$ admite extremos, então

$$T'_n(x) = \frac{dT_n(x)}{dx} = \frac{dT_n(x)}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} = \frac{d \cos n\theta}{d\theta} \frac{1}{\frac{d \cos \theta}{d\theta}} = -n \sin n\theta \frac{1}{-\sin \theta} = \frac{n \sin n\theta}{\sin \theta} = 0. \quad (1.22)$$

Os zeros da derivada correspondem aos zeros da função $\sin n\theta$, isto é,

$$\begin{aligned} T'_n(x) &= 0 \\ \iff \sin n\theta &= \sin 0 \\ \iff n\theta &= 0 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \iff \theta_{n,k} &= \frac{k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (1.23)$$

Assim, os extremantes serão dados por

$$x_{n,k} = \cos \frac{k}{n}\pi, \quad k = 0(1)n. \quad (1.24)$$

Como as variáveis x e θ são percorridas em sentidos contrários, a sucessão dada em (1.24) vai gerar uma sucessão decrescente de extremos. Para apresentar estes extremos na ordem crescente, vamos usar a fórmula que se segue,

$$x_{n,k} = \cos\left(\frac{n-k}{n}\pi\right), \quad k = 0(1)n. \quad (1.25)$$

■

1.1.4 Coeficientes na base canónica

Em várias aplicações, é útil e conveniente podermos expressar os polinómios de Chebyshev explicitamente em termos de potências de x e vice-versa. Por ser mais fácil obter estas fórmulas para os polinómios de Chebyshev de primeira espécie, então vamos concentrar-nos neles.

Escrever as potências de x em termos de $\{T_n(x)\}$

A potência x^n pode ser expressa em termos dos polinómios de Chebyshev de graus inferiores ou iguais a n , mas, como estes são alternadamente funções pares e ímpares, precisaremos apenas de incluir polinómios de graus alternados, ou seja, $T_n(x)$, $T_{n-2}(x)$, $T_{n-4}(x)$,... Se considerarmos $x = \cos \theta$, precisaremos de expressar x^n em termos de $\cos n\theta$, $\cos(n-2)\theta$, $\cos(n-4)\theta$,...

Dado que $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, pela fórmula de Moivre² temos que:

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \iff 2 \cos \theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta} \implies \underbrace{(2 \cos \theta)^n}_{(A)} = \underbrace{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^n}_{(B)} \quad (1.26)$$

Usando o binómio de Newton³, vamos desenvolver a parte (B) da fórmula (1.26) do seguinte modo:

$$\begin{aligned} (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^n &\stackrel{(C.5)}{=} e^{in\theta} + \binom{n}{1} e^{i(n-2)\theta} + \dots + \binom{n}{n-1} e^{i(n-2)\theta} + e^{-in\theta} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(n-k)\theta} \times e^{-ik\theta} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(n-2k)\theta} \end{aligned}$$

Então, de (1.26) conclui-se que

$$2^n \cos^n \theta = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(n-2k)\theta}. \quad (1.27)$$

A partir daqui, vamos considerar dois casos, um para n par e outro para n ímpar, isto é:

1. Se n for par ($n = 2p$), a fórmula (1.27) vai corresponder a $2p + 1$ parcelas e agrupando o primeiro e último termos, o segundo com o penúltimo e assim por diante, vamos ter p pares e

²Abraham De Moivre foi um matemático francês que viveu entre 1667 e 1754.

³Isaac Newton foi um matemático e físico inglês que viveu entre 1643 e 1727.

vai sobrar uma parcela, esta parcela corresponde a $k = p$, isto é,

$$\begin{aligned}
2^{2p} \cos^{2p} \theta &= \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} e^{2i(p-k)\theta} \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} e^{2i(p-k)\theta} + \sum_{k=p}^p \binom{2p}{p} e^{2i(p-p)\theta} + \sum_{k=p+1}^{2p} \binom{2p}{k} e^{2i(p-k)\theta} \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} e^{2i(p-k)\theta} + \underbrace{\sum_{k=p+1}^{2p} \binom{2p}{k} e^{2i(p-k)\theta}}_{\mathbf{C}} + \binom{2p}{p} \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} \left\{ \binom{2p}{k} e^{2i(p-k)\theta} + \binom{2p}{2p-k} e^{2ip\theta - 2i(2p-k)\theta} \right\} + \binom{2p}{p} \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} \left\{ \binom{2p}{k} e^{2i(p-k)\theta} + \binom{2p}{2p-k} e^{-2ip\theta + 2ik\theta} \right\} + \binom{2p}{p} \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} \left\{ \binom{2p}{k} e^{2i(p-k)\theta} + \binom{2p}{k} e^{-2i(p-k)\theta} \right\} + \binom{2p}{p} \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} \left\{ \binom{2p}{k} (e^{2i(p-k)\theta} + e^{-2i(p-k)\theta}) \right\} + \binom{2p}{p} \\
&= 2 \sum_{k=0}^{p-1} \left\{ \binom{2p}{k} \cos 2(p-k)\theta \right\} + \binom{2p}{p} \cos 2(p-p)\theta \\
&= 2 \sum_{k=0}^p {}' \binom{2p}{k} \cos 2(p-k)\theta.
\end{aligned}$$

Nota: Usou-se, no somatório assinalado por $\mathbf{C}$, a substituição $k = 2p - k$ para podermos efectuar a mudança dos limites do intervalo de soma. Assim, os limites inferior e superior deste intervalo passaram a ser $k = 0$ e $k = p - 1$.

O símbolo $\sum_{k=0}^p {}'$ significa que quando $p - k = 0 \iff p = k$ a parcela $\cos 2(p - k)\theta$ deverá ser dividida por dois.

Então,

$$\begin{aligned}
2^{2p} \cos^{2p} \theta &= 2 \sum_{k=0}^p {}' \binom{2p}{k} \cos 2(p-k)\theta \\
\iff 2^{2p-1} \cos^{2p} \theta &= \sum_{k=0}^p {}' \binom{2p}{k} \cos 2(p-k)\theta \\
\iff \cos^{2p} \theta &= 2^{1-2p} \sum_{k=0}^p {}' \binom{2p}{k} \cos 2(p-k)\theta, \quad x = \cos \theta \\
\iff_{(1.1)} x^{2p} &= 2^{1-2p} \sum_{k=0}^p {}' \binom{2p}{k} T_{2(p-k)}(x).
\end{aligned} \tag{1.28}$$

2. Se n for ímpar ($n = 2p + 1$), a fórmula (1.27) corresponde a $2(p + 1)$ parcelas, desta forma não aparecerá o termo isolado que aparece no caso par. Agrupando o primeiro e último termo, o

segundo com o penúltimo destes termos, e assim por diante, teremos:

$$\begin{aligned}
 2^{2p+1} \cos^{2p+1} \theta &= \sum_{k=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} e^{i(2p+1-2k)\theta} = \sum_{k=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} e^{i[2(p-k)+1]\theta} \\
 &= \sum_{k=0}^p \binom{2p+1}{k} e^{i[2(p-k)+1]\theta} + \sum_{k=p+1}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} e^{i[2(p-k)+1]\theta}, \quad k = 2p+1-k \\
 &= \sum_{k=0}^p \binom{2p+1}{k} e^{i[2(p-k)+1]\theta} + \sum_{k=0}^p \binom{2p+1}{2p+1-k} e^{i\{2[p-(2p+1-k)]+1\}\theta} \\
 &= \sum_{k=0}^p \binom{2p+1}{k} e^{i[2(p-k)+1]\theta} + \sum_{k=0}^p \binom{2p+1}{2p+1-k} e^{i[-2(p-k)-1]\theta} \\
 &= \sum_{k=0}^p \binom{2p+1}{k} e^{i[2(p-k)+1]\theta} + \sum_{k=0}^p \binom{2p+1}{2p+1-k} e^{-i[2(p-k)+1]\theta} \\
 &= \sum_{k=0}^p \binom{2p+1}{k} e^{i[2(p-k)+1]\theta} + \sum_{k=0}^p \binom{2p+1}{k} e^{-i[2(p-k)+1]\theta} \\
 &= \sum_{k=0}^p \binom{2p+1}{k} \left[e^{i[2(p-k)+1]\theta} + e^{-i[2(p-k)+1]\theta} \right] \\
 &= 2 \sum_{k=0}^p \binom{2p+1}{k} \cos[2(p-k)+1]\theta
 \end{aligned}$$

Finalmente teremos,

$$\begin{aligned}
 2^{2p+1} \cos^{2p+1} \theta &= 2 \sum_{k=0}^p \binom{2p+1}{k} \cos[2(p-k)+1]\theta \\
 \iff 2^{2p} \cos^{2p+1} \theta &= \sum_{k=0}^p \binom{2p+1}{k} \cos[2(p-k)+1]\theta \\
 \iff_{(1.1)} 2^{2p} x^{2p+1} &= \sum_{k=0}^p \binom{2p+1}{k} T_{2(p-k)+1}(x) \\
 \implies x^{2p+1} &= 2^{-2p} \sum_{k=0}^p \binom{2p+1}{k} T_{2(p-k)+1}(x)
 \end{aligned} \tag{1.29}$$

Escrever $\{T_n(x)\}$ em termos das potências de x

A partir da fórmula de De Moivre sabe-se que

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \tag{1.30}$$

e

$$e^{in\theta} = (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta. \tag{1.31}$$

Usando o desenvolvimento do binómio de Newton, vamos expandir a expressão (1.31), isto é,

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos^n \theta + \binom{n}{1} \cos^{n-1} \theta (i \sin \theta) + \dots + \binom{n}{n} (i \sin \theta)^n. \tag{1.32}$$

Vamos igualar as partes reais das fórmulas (1.31) e (1.32), isto é,

$$\begin{aligned}\cos n\theta &= \cos^n \theta - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \theta \sin^4 \theta + \dots \\ &= \sum_{q=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2q} \cos^{n-2q} \theta (-1)^q \sin^{2q} \theta\end{aligned}\quad (1.33)$$

Da fórmula (B.2) sabe-se que

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

então

$$\sin^{2q} \theta = (1 - \cos^2 \theta)^q. \quad (1.34)$$

Desse modo teremos,

$$\begin{aligned}\cos n\theta &= \sum_{q=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2q} \cos^{n-2q} \theta (-1)^q (1 - \cos^2 \theta)^q \\ &= \sum_{q=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2q} \cos^{n-2q} \theta (-1)^q \left(\sum_{k=0}^q (-1)^k \binom{q}{k} \cos^{2k} \theta \right)\end{aligned}\quad (1.35)$$

Se considerarmos que $x = \cos \theta$ então teremos,

$$\begin{aligned}T_n(x) &= \sum_{q=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2q} x^{n-2q} (-1)^q \left(\sum_{k=0}^q (-1)^k \binom{q}{k} x^{2k} \right) \\ &\stackrel{(D.1)}{=} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sum_{q=n}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^{(q-k)} \binom{n}{2q} \binom{q}{k} x^{n-2(q-k)}.\end{aligned}\quad (1.36)$$

Se considerarmos que $r = q - k$, teremos $r \leq \lfloor n/2 \rfloor$ e $q = r + k$ para $0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor - r$. Assim, a fórmula (1.36) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}T_n(x) &= \sum_{r=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sum_{q=r}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^r \binom{n}{2q} \binom{q}{q-r} x^{n-2r} \\ &= \sum_{r=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[(-1)^r \sum_{q=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2q} \binom{q}{r} \right] x^{n-2r}.\end{aligned}\quad (1.37)$$

1.2 Polinómios de Chebyshev de segunda espécie

1.2.1 Definição trigonométrica

Definição 1.3. Os polinómios de Chebyshev de segunda espécie, designados por $U_n(x)$, são polinómios em x de grau n , $n \in \mathbb{N}_0$, definidos pela identidade

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}, \quad \text{com } x = \cos \theta, \quad x \in [-1, 1], \quad \theta \in [0, \pi]. \quad (1.38)$$

É possível representar os termos de ordem n da sucessão $\{\text{sen}(n+1)\theta\}_{n=0}^{\infty}$ como soma de potências de $\cos \theta$ de expoentes entre 0 e n , multiplicados pelo factor $\text{sen } \theta$. Seguidamente apresentamos o cálculo dos seus primeiros seis elementos. Neste processo, faremos uso das fórmulas encontradas no desenvolvimento da sucessão $\{\cos n\theta\}_{n=0}^{\infty}$.

1. Se $n = 0$, então

$$\text{sen}(0+1)\theta = \text{sen } \theta. \quad (1.39)$$

2. Se $n = 1$, então

$$\text{sen } 2\theta \stackrel{(B.8)}{=} 2 \text{sen } \theta \cos \theta \quad (1.40)$$

3. Se $n = 2$, então

$$\begin{aligned} \text{sen } 3\theta &= \text{sen}(2\theta + \theta) \\ &\stackrel{(B.4)}{=} \text{sen } 2\theta \cos \theta + \text{sen } \theta \cos 2\theta \\ &\stackrel{(B.8),(B.10)}{=} 2 \text{sen } \theta \cos^2 \theta + \text{sen } \theta (2 \cos^2 \theta - 1) \\ &= \text{sen } \theta (4 \cos^2 \theta - 1) \end{aligned} \quad (1.41)$$

4. Se $n = 3$, então

$$\begin{aligned} \text{sen } 4\theta &= \text{sen}(3\theta + \theta) \\ &\stackrel{(B.4)}{=} \text{sen } 3\theta \cos \theta + \text{sen } \theta \cos 3\theta \\ &\stackrel{(1.41),(1.5)}{=} \text{sen } \theta (4 \cos^2 \theta - 1) \cos \theta + \text{sen } \theta (4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) \\ &= \text{sen } \theta (8 \cos^3 \theta - 4 \cos \theta). \end{aligned} \quad (1.42)$$

5. Se $n = 4$, então

$$\begin{aligned} \text{sen } 5\theta &= \text{sen}(4\theta + \theta) \\ &\stackrel{(B.4)}{=} \text{sen } 4\theta \cos \theta + \text{sen } \theta \cos 4\theta \\ &\stackrel{(1.42),(1.6)}{=} \text{sen } \theta (8 \cos^3 \theta - 4 \cos \theta) \cos \theta + \text{sen } \theta (8 \cos^4 \theta - 8 \cos^2 \theta + 1) \\ &= \text{sen } \theta (16 \cos^4 \theta - 12 \cos^2 \theta + 1). \end{aligned} \quad (1.43)$$

6. Se $n = 5$, então

$$\begin{aligned} \text{sen } 6\theta &= \text{sen}(5\theta + \theta) \\ &\stackrel{(B.4)}{=} \text{sen } 5\theta \cos \theta + \text{sen } \theta \cos 5\theta \\ &\stackrel{(1.7),(1.43)}{=} \text{sen } \theta (16 \cos^4 \theta - 12 \cos^2 \theta + 1) \cos \theta \\ &\quad + \text{sen } \theta (16 \cos^5 \theta - 20 \cos^3 \theta + 5 \cos \theta) \\ &= \text{sen } \theta (32 \cos^5 \theta - 32 \cos^3 \theta + 6 \cos \theta). \end{aligned} \quad (1.44)$$

Tendo em conta que

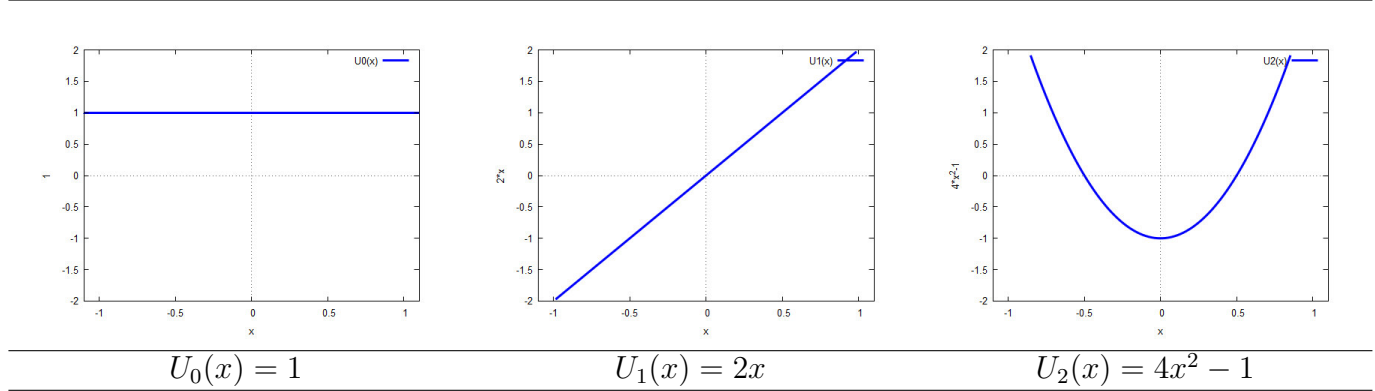
$$U_n(x) = \frac{\text{sen}(n+1)\theta}{\text{sen } \theta}, \quad x = \cos \theta,$$

então os primeiros elementos da segunda família dos polinômios de Chebyshev serão os seguintes:

$$\begin{aligned}
 U_0(x) &= \frac{\sin \theta}{\sin \theta} = 1, \\
 U_1(x) &= \frac{\sin 2\theta}{\sin \theta} = 2 \cos \theta = 2x, \\
 U_2(x) &= \frac{\sin 3\theta}{\sin \theta} = 4 \cos^2 \theta - 1 = 4x^2 - 1, \\
 U_3(x) &= \frac{\sin 4\theta}{\sin \theta} = 8 \cos^3 \theta - 4 \cos \theta = 8x^3 - 4x, \\
 U_4(x) &= \frac{\sin 5\theta}{\sin \theta} = 16 \cos^4 \theta - 12 \cos^2 \theta + 1 = 16x^4 - 12x^2 + 1, \\
 U_5(x) &= \frac{\sin 6\theta}{\sin \theta} = 32 \cos^5 \theta - 32 \cos^3 \theta + 6 \cos \theta = 32x^5 - 32x^3 + 6x.
 \end{aligned} \tag{1.45}$$

A Tabela 1.2 contém os gráficos dos primeiros destes polinômios.

Tabela 1.2: Polinômios de Chebyshev de segunda espécie



1.2.2 Relação de recorrência

A obtenção dos primeiros polinômios de Chebyshev de grau mais elevado a partir da definição trigonométrica envolve cálculos fastidiosos. Vamos reescrever as identidades (1.41) - (1.44) de forma a encontrar uma regularidade que nos permita calcular estes polinômios de forma recursiva.

$$\begin{aligned}
 \sin 3\theta &= \sin \theta (4 \cos^2 \theta - 1) \\
 &= 4 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin \theta \\
 &= 2 \cos \theta \sin 2\theta - \sin \theta
 \end{aligned} \tag{1.46}$$

$$\begin{aligned}
 \sin 4\theta &= \sin \theta (8 \cos^3 \theta - 4 \cos \theta) \\
 &= 2 \cos \theta \sin \theta (4 \cos^2 \theta - 1) - 2 \sin \theta \cos \theta \\
 &= 2 \cos \theta \sin 3\theta - \sin 2\theta.
 \end{aligned} \tag{1.47}$$

$$\begin{aligned}
 \sin 5\theta &= \sin \theta (16 \cos^4 \theta - 12 \cos^2 \theta + 1) \\
 &= 2 \cos \theta \sin \theta (8 \cos^3 \theta - 4 \cos \theta) - \sin \theta (4 \cos^2 \theta - 1) \\
 &= 2 \cos \theta \sin 4\theta - \sin 3\theta.
 \end{aligned} \tag{1.48}$$

Estes exemplos sugerem a existência da seguinte relação de recorrência:

Teorema 1.2. *Os polinómios de Chebyshev de segunda espécie podem ser obtidos pela relação recursiva de ordem 2 que se segue, com as correspondentes condições iniciais*

$$\begin{cases} U_0(x) = 1, & n = 0 \\ U_1(x) = 2x, & n = 1 \\ U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), & n = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (1.49)$$

Demonstração. Consideremos que $n \geq 2$ e $\sin \theta \neq 0 \iff \theta \neq 0 \vee \theta \neq \pi$, pela Definição 1.3 temos que

$$\begin{aligned} U_n(x) &= \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} = \frac{\sin(n\theta + \theta)}{\sin \theta} \\ \iff & \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} \stackrel{(B.4)}{=} \frac{\sin n\theta \cos \theta + \sin \theta \cos n\theta}{\sin \theta} \\ \iff & \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} \stackrel{(B.15)}{=} \frac{\cos \theta \sin n\theta + \frac{\sin(n+1)\theta + \sin(1-n)\theta}{2}}{\sin \theta} \\ \iff & \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} = \frac{2 \cos \theta \sin n\theta + \sin(n+1)\theta + \sin(1-n)\theta}{2 \sin \theta} \\ \iff & \frac{2 \sin(n+1)\theta}{\sin \theta} = \frac{2 \cos \theta \sin n\theta + \sin(n+1)\theta + \sin(1-n)\theta}{\sin \theta} \\ \iff & \frac{2 \sin(n+1)\theta}{\sin \theta} = \frac{2 \cos \theta \sin n\theta - \sin(n-1)\theta}{\sin \theta} + \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} \\ \iff & \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} = \frac{2 \cos \theta \sin n\theta}{\sin \theta} - \frac{\sin(n-1)\theta}{\sin \theta} \\ \iff & \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} = \frac{2 \cos \theta \sin \{(n-1) + 1\}\theta}{\sin \theta} - \frac{\sin \{(n-2) + 1\}\theta}{\sin \theta}. \end{aligned}$$

Pela Definição 1.3 temos que:

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), \quad n \geq 2.$$

Suponhamos que $\sin \theta = 0 \iff \theta = 0 \vee \theta = \pi$, o que corresponde a $x = \cos 0 = 1 \vee x = \cos \pi = -1$. Assim, se $x = 1$, temos de provar que

$$U_n(1) = 2(1)U_{n-1}(1) - U_{n-2}(1), \quad n \geq 2. \quad (1.50)$$

Por (1.106) verifica-se que (1.50) é equivalente a

$$n+1 = 2[(n-1)+1] - [(n-2)+1] \Leftrightarrow n+1 = 2n - n + 1 \Leftrightarrow n+1 = n+1 \Leftrightarrow 0=0,$$

que é uma proposição verdadeira.

Suponhamos que $x = -1$, teremos de provar que

$$U_n(-1) = 2(-1)U_{n-1}(-1) - U_{n-2}(-1), \quad n \geq 2. \quad (1.51)$$

Por (1.109) verificamos que:

1. se n for par, então $n-1$ é ímpar e $n-2$ é par, desse modo (1.51) é equivalente a

$$n+1 = -2(-1)[(n-1)+1] - [(n-2)+1] \Leftrightarrow n+1 = 2n - n + 1 \Leftrightarrow n+1 = n+1 \Leftrightarrow 0=0,$$

que é uma proposição verdadeira.

2. se n for ímpar, então $n - 1$ é par e $n - 2$ é ímpar, desse modo (1.51) é equivalente a

$$-(n+1) = -2[(n-1)+1] + [(n-2)+1] \Leftrightarrow -(n+1) = -2n + n - 1 \Leftrightarrow n+1 = n+1 \Leftrightarrow 0 = 0,$$

que é uma proposição verdadeira.

Assim prova-se que a relação (1.49) é verdadeira. ■

Cálculo recursivo dos coeficientes na base canónica dos polinómios de Chebyshev da segunda espécie

Proposição 1.2.1. *Os coeficientes dos polinómios de Chebyshev de segunda espécie podem ser calculados usando a seguinte relação de recorrência*

$$\begin{cases} b_{n,0} &= -b_{n-2,0} \\ b_{n,k} &= 2b_{n-1,k-1} - b_{n-2,k}, \quad k = 1 \dots n-2 \\ b_{n,n-1} &= 2b_{n-1,n-2} \\ b_{n,n} &= 2b_{n-1,n-1} \end{cases} \quad (1.52)$$

cujas condições iniciais são:

$$\begin{cases} b_{0,0} &= 1 \\ b_{1,0} &= 0, \quad b_{1,1} = 2 \end{cases} \quad (1.53)$$

Demonstração. Análoga à demonstração da Proposição 1.1.1. ■

Proposição 1.2.2. *O coeficiente do termo principal dos polinómios de Chebyshev de segunda espécie,*

$$U_n(x) = a_{n,n}x^n + \dots,$$

onde as reticências representam os termos de grau inferiores a n , é dado pela fórmula

$$a_{n,n} = 2^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.54)$$

Demonstração. Usando o método de indução finita, vamos demonstrar que o coeficiente do termo principal dos polinómios de Chebyshev da segunda espécie é dado pela fórmula (1.54).

Seja $n = 0$, procuramos mostrar que $a_{0,0} = 2^0 = 1$. Como $U_0(x) = 1$, então, decorre imediatamente o facto.

Vamos supor que para $n = k$ o termo principal do polinómio $U_k(x) = a_{k,k}x^k + \dots$, pode ser escrito como

$$a_k = 2^k. \quad (1.55)$$

Vamos provar que o coeficiente do termo principal do polinómio

$$U_{k+1}(x) = a_{k+1,k+1}x^{k+1} + \dots \quad (1.56)$$

é dado por

$$a_{k+1,k+1} = 2^{k+1}$$

quando $n = k + 1$.

Vamos usar a relação (1.49) para rescrever a (1.56), isto é,

$$\begin{aligned} U_{k+1}(x) &= 2xU_n(x) - U_{k-1}(x) \\ &= 2x(a_{k,k}x^k + \dots) - (a_{k-1,k-1}x^{k-1} + \dots) \\ &= 2a_{k,k}x^{k+1} + \dots \end{aligned} \quad (1.57)$$

Igualando os coeficientes dos termos principais dos polinômios dados em (1.56) e (1.57) teremos:

$$\begin{aligned} a_{k+1,k+1} &= 2a_{k,k} \\ &\stackrel{(1.55)}{=} 2 \times 2^k \\ &= 2^{k+1}. \end{aligned}$$

■

1.2.3 Paridade, zeros e extremos

Paridade

Com os mesmos argumentos usados na demonstração do Teorema 1.1.3, prova-se que a família dos polinômios de Chebyshev da segunda espécie é simétrica.

Zeros

Proposição 1.2.3. $U_n(x)$ apresenta n zeros reais no intervalo $[-1, 1]$ e esses zeros são dados pela fórmula

$$x_{n,k} = \cos \theta_{n,k}, \text{ onde } \theta_{n,k} = \frac{n - k + 1}{n + 1} \pi, \quad k = 1(1)n \quad (1.58)$$

Demonstração. Os zeros da função $U_n(x)$, para $x \in [-1, 1]$ correspondem aos zeros da função $\sin(n + 1)\theta$, isto é,

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} \sin(n + 1)\theta &= 0 \\ (n + 1)\theta &= 0 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned} \\ \Rightarrow \quad \theta_{n,k} &= \frac{k}{n + 1} \pi. \end{aligned}$$

Atendendo a periodicidade da função cosseno, os zeros dos polinômios de Chebyshev de segunda espécie são explicitamente determinados por

$$x_{n,k} = \cos \left(\frac{k}{n + 1} \right) \pi, \quad k = 1(1)n. \quad (1.59)$$

Como os as variáveis x e θ são percorridas em sentidos contrários então a sucessão apresentada em (1.59) vai gerar uma sucessão decrescente. Para reordenar esta sucessão vamos usar a seguinte expressão:

$$x_k^{(n)} = \cos \frac{(n - k + 1)}{n + 1} \pi, \quad k = 1(1)n. \quad (1.60)$$

■

Na Figura 1.4 estão representadas a localização dos zeros das funções $U_{17}(x)$ e $U_{18}(x)$. Tal como foi referido para a família $T_n(x)$, para esta família os zeros dos polinómios de graus maiores também tendem a se acumular nos extremos do intervalo $[-1, 1]$.

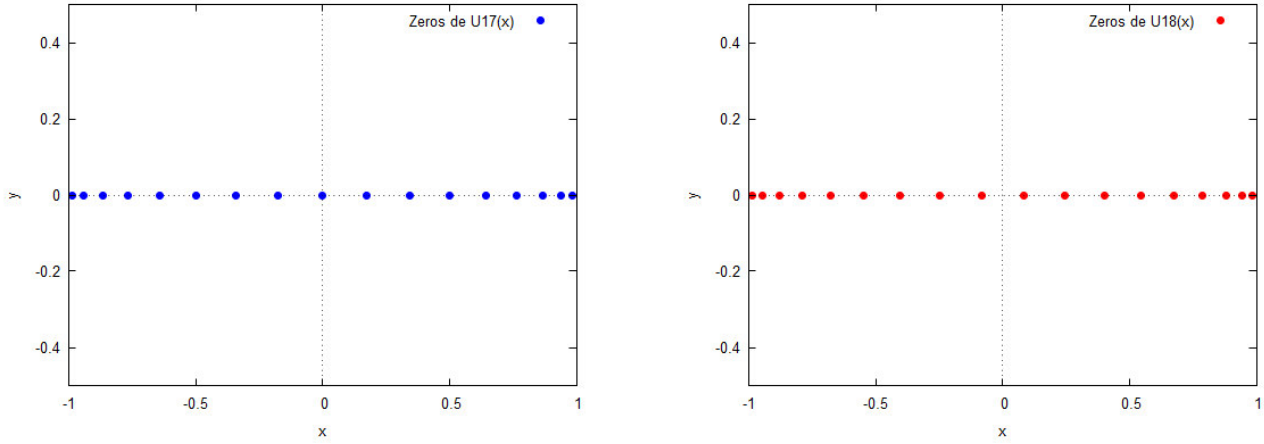


Figura 1.4: Localização dos zeros do polinómio $U_{17}(x)$ e $U_{18}(x)$

Na figura 1.5 estão representados, no mesmo sistema de eixos, os gráficos dos zeros dos polinómios $U_9(x)$ e $U_{10}(x)$; e $U_{17}(x)$ e $U_{18}(x)$, onde se verifica que os zeros de polinómios de graus consecutivos intercalam-se.

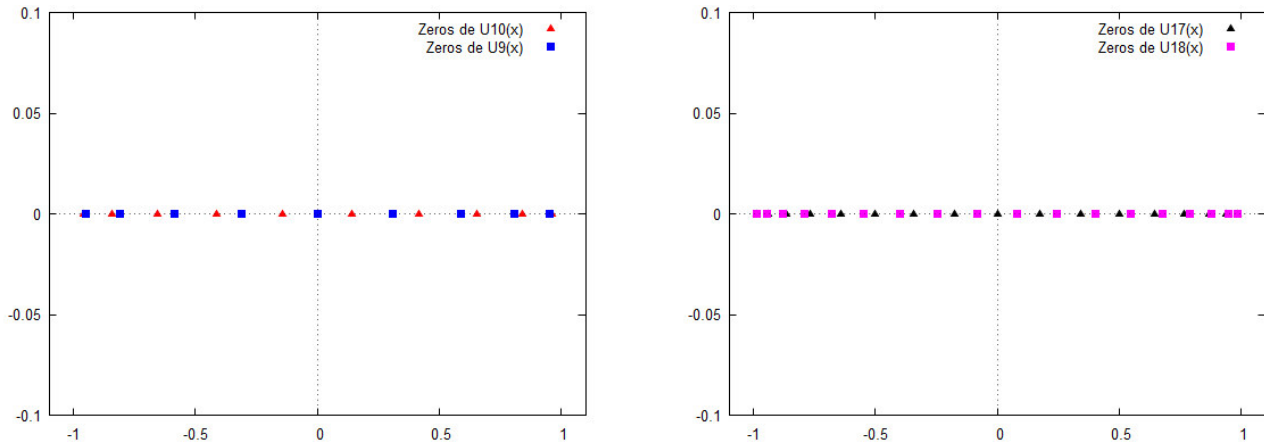


Figura 1.5: Localização dos zeros dos polinómios $U_{10}(x)$ e $U_{11}(x)$ & $U_{17}(x)$ e $U_{18}(x)$.

Extremos

Em geral, os extremos das famílias $U_n(x)$ não são fáceis de determinar visto que estes cálculos envolvem a resolução de equações transcendentais.

Por exemplo, vamos mostrar a dificuldade que existe para determinar os extremos locais de $U_n(x)$,

para isso, vamos primeiro determinar a derivada da função $U_n(x)$, isto é,

$$\begin{aligned} U'_n(x) &= \frac{d}{dx} U_n(x) = \frac{dU_n(x)}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} = \frac{dU_n(x)}{d\theta} \frac{1}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{(n+1) \cos(n+1)\theta \sin \theta - \cos \theta \sin(n+1)\theta}{\sin^2 \theta} \frac{1}{-\sin \theta} \\ &= \frac{-(n+1) \sin \theta \cos(n+1)\theta + \cos \theta \sin(n+1)\theta}{\sin^3 \theta}. \end{aligned}$$

Pelo Teorema D.1, se a função $U_n(x)$ admite extremos, então $U'_n(x) = 0$. Isto significa que

$$\frac{-(n+1) \sin \theta \cos(n+1)\theta + \cos \theta \sin(n+1)\theta}{\sin^3 \theta} = 0 \Leftrightarrow (n+1) \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin(n+1)\theta}{\cos(n+1)\theta}.$$

Os extremos correspondem, portanto, aos valores de θ que satisfazem a equação,

$$(n+1) \tan \theta = \tan(n+1)\theta. \quad (1.61)$$

Pelo Teorema D.1, $\theta \in]0, \pi[$ então a equação (1.61) não é igual a zero.

O que se pode dizer é que os valores dos extremos locais de $U_n(x)$ têm grandezas que aumentam monotonamente conforme o $|x|$ aumenta de 0, até a maior magnitude de $n+1$ que é obtida em $x = \pm 1$. Tendo em conta que $x = \cos \theta$, a partir da Definição 1.3, temos

$$\tilde{U}_n(x) = \sqrt{1-x^2} U_n(x) = \sin \theta \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin(\theta)} = \sin(n+1)\theta$$

Proposição 1.2.4. *Os polinômios ponderados da segunda espécie, $\tilde{U}_n(x)$, apresentam $n+1$ extremos locais no intervalo $[-1, 1]$ alternados de valor igual a $y = \pm 1$ e esses extremos podem ser explicitamente determinados pela sucessão*

$$x_{n,k} = \cos \frac{2k+1}{2(n+1)} \pi, \quad k = 0(1)n.$$

Demonstração. Pelo Teorema D.1, se a função $U_{pond}(x)$ admite extremos, então $\tilde{U}'_n(x) = 0$, isto é,

$$\frac{d\tilde{U}_n(x)}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{d\tilde{U}_n(x)}{d\theta} \frac{1}{\frac{dx}{d\theta}} = 0 \Leftrightarrow \frac{-(n+1) \cos(n+1)\theta}{\sin \theta} = 0 \Leftrightarrow \cos(n+1)\theta = 0. \quad (1.62)$$

A solução da equação (1.62) é dada por

$$\begin{aligned} \cos(n+1) &= 0 \Leftrightarrow \cos(n+1)\theta = \cos \frac{\pi}{2} \\ \Leftrightarrow \theta_{n,k} &= \frac{k\pi}{2(n+1)}, & k \in \mathbb{K} \\ \Leftrightarrow \theta_{n,k} &= \frac{2k+1}{2(n+1)} \pi, & k \in \mathbb{K}. \end{aligned}$$

■

1.3 Polinômios de Chebyshev de terceira e quarta espécies

Duas outras famílias de polinômios de Chebyshev, $\{V_n(x)\}_{n=0}^\infty$ e $\{W_n(x)\}_{n=0}^\infty$, que estão relacionadas com as famílias $\{T_n(x)\}_{n=0}^\infty$ e $\{U_n(x)\}_{n=0}^\infty$, podem ser construídas. As definições trigonométricas

destas famílias envolvem o meio ângulo, ou seja, $\frac{\theta}{2}$. Estes polinômios foram designados de *polinômios de perfil aerodinâmico*, mas W. Gautschi⁴ os chamou de *polinômios de Chebyshev de terceira e quarta espécie*, uma vez que estas famílias têm propriedades análogas às famílias da primeira e segunda espécies.

Primeiro, vamos definir estes polinômios trigonometricamente, por um par de relações análogas às expressões (1.1) e (1.38) e, seguidamente apresentaremos as relações de recorrência análogas as relações (1.10) e (1.49). Os domínios das variáveis x e θ mantêm-se como anterior.

1.3.1 Definição trigonométrica

Definição 1.4. Os polinômios de Chebyshev $V_n(x)$ e $W_n(x)$, de terceira e quarta espécies, são polinômios em x de grau n definidos, respectivamente, pelas expressões

$$V_n(x) = \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta} \quad (1.63)$$

e

$$W_n(x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta} \quad (1.64)$$

com $x = \cos\theta$, $\theta \in [0, \pi]$ e $x \in [-1, 1]$.

Observe que fazendo a mudança de variável $t = \frac{\theta}{2}$ teremos

$$\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta = \cos(2n + 1)\frac{\theta}{2} = \cos(2n + 1)t$$

que é um polinômio ímpar de grau $2n + 1$ que só contém potências de grau ímpar de $\cos t$, logo podemos colocar $\cos t$ em evidência o que simplifica com o denominador de (1.63). Portanto, o membro direito de (1.63) é um polinômio par de grau $2n$ em $\cos t$, o que equivale a um polinômio de grau n em $\cos^2 t$. Mas por (B.13),

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos\theta}{2} \Leftrightarrow \cos^2 t = \frac{1 + \cos\theta}{2} = \frac{1 + x}{2} \quad (1.65)$$

assim, $V_n(x)$ é um polinômio de grau n em x .

Da mesma forma $\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta = \sin(2n + 1)t$ pode ser escrito como produto de $\sin t$ com um polinômio grau par em $\cos t$, logo podemos simplificar $\sin t$ com o denominador de (1.64). Deste modo, a parte direita de (1.64) será um polinômio de grau n em $\cos^2 t$ e por (1.65), $W_n(x)$ é um polinômio de grau n em x .

Vejamos que é possível escrever os elementos das sucessões

$$\left\{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right\}_{n=0}^{\infty} \quad \text{e} \quad \left\{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right\}_{n=0}^{\infty}$$

⁴Walter Gautschi, é um Matemático que nasceu em 1927, em Basileia na Suíça, é Professor Emérito na Universidade de Purdue nos Estados Unidos da América. É reconhecido pelas suas contribuições na área de Análise Numérica, em particular, na área de Polinômios Ortogonais e suas Aplicações.

como soma de potências de $\cos \frac{1}{2}\theta$ de expoentes entre 0 e $2n+1$, sendo $\cos \frac{\theta}{2}$ um fator comum a todos os seus termos. Iremos usar as algumas fórmulas deduzidas na Subsecção 1.1.1.

Os cálculos dos primeiros quatros elementos da sucessão $\left\{ \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right\}_{n=0}^{\infty}$ são:

1. Para $n = 0$,

$$\cos \left(0 + \frac{1}{2} \right) \theta = \cos \frac{1}{2} \theta. \quad (1.66)$$

2. Para $n = 1$,

$$\begin{aligned} \cos \left(1 + \frac{1}{2} \right) \theta &= \cos 3t \stackrel{(1.5)}{=} 4 \cos^3 t - 3 \cos t \\ &= 4 \cos^3 \frac{\theta}{2} - 3 \cos \frac{\theta}{2}. \end{aligned} \quad (1.67)$$

3. Para $n = 2$,

$$\cos \left(2 + \frac{1}{2} \right) \theta = \cos 5t \stackrel{(1.7)}{=} 16 \cos^5 \frac{\theta}{2} - 20 \cos^3 \frac{\theta}{2} + 5 \cos \frac{\theta}{2}. \quad (1.68)$$

4. Para $n = 3$,

$$\begin{aligned} \cos \left(3 + \frac{1}{2} \right) \theta &= \cos 7t \\ &= 64 \cos^7 \frac{\theta}{2} - 112 \cos^5 \frac{\theta}{2} + 56 \cos^3 \frac{\theta}{2} - 7 \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (1.69)$$

Tendo encontrado os primeiros elementos da sucessão $\left\{ \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right\}_{n=0}^{\infty}$, é fácil determinar os primeiros elementos dos polinómios de Chebyshev de terceira espécie, que são:

1.

$$V_0(x) = \frac{\cos \frac{1}{2}\theta}{\cos \frac{1}{2}\theta} = 1 \quad (1.70)$$

2.

$$\begin{aligned} V_1(x) &= \frac{\cos \left(1 + \frac{1}{2} \right) \theta}{\cos \frac{1}{2}\theta} = \frac{4 \cos^3 \frac{1}{2}\theta - 3 \cos \frac{1}{2}\theta}{\cos \frac{1}{2}\theta} \\ &= 4 \cos^2 \frac{1}{2}\theta - 3 \\ &\stackrel{(B.23)}{=} 4 \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right) - 3 \\ &= 2 \cos \theta - 1 = 2x - 1. \end{aligned} \quad (1.71)$$

3.

$$\begin{aligned}
V_2(x) &= \frac{\cos\left(2 + \frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta} = \frac{16\cos^5\frac{1}{2}\theta - 20\cos^3\frac{1}{2}\theta + 5\cos\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta} \\
&= 16\cos^4\frac{1}{2}\theta - 20\cos^2\frac{1}{2}\theta + 5 \\
&\stackrel{(B.23)}{=} 16\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^2 - 20\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right) + 5 \\
&\stackrel{(C.5)}{=} 16\left(\frac{1+2\cos\theta+\cos^2\theta}{4}\right) - 20\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right) + 5 \\
&= 4\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1 \\
&= 4x^2 - 2x - 1.
\end{aligned} \tag{1.72}$$

4.

$$\begin{aligned}
V_3(x) &= \frac{\cos\left(3 + \frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta} \\
&= \frac{64\cos^7\frac{1}{2}\theta - 112\cos^5\frac{1}{2}\theta + 56\cos^3\frac{1}{2}\theta - 7\cos\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta} \\
&= 64\cos^6\frac{1}{2}\theta - 112\cos^4\frac{1}{2}\theta + 56\cos^2\frac{1}{2}\theta - 7 \\
&\stackrel{(B.23)}{=} 64\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^3 - 112\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^2 + 56\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right) - 7 \\
&\stackrel{(C.5)}{=} 64\left(\frac{1+3\cos\theta+3\cos^2\theta+\cos^3\theta}{8}\right) - 112\left(\frac{1+2\cos\theta+\cos^2\theta}{4}\right) \\
&\quad + 56\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right) - 7 \\
&= 8\cos^3\theta - 4\cos^2\theta - 4\cos\theta + 1 \\
&= 8x^3 - 4x^2 - 4x + 1.
\end{aligned} \tag{1.73}$$

Assim, os primeiros polinómios de Chebyshev de terceira espécie são os seguintes:

$$V_0(x) = 1, \quad V_1(x) = 2x - 1, \quad V_2(x) = 4x^2 - 2x - 1, \quad V_3(x) = 8x^3 - 4x^2 - 4x + 1, \dots$$

Para a sucessão $\left\{ \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta \right\}_{n=0}^{\infty}$ teremos:

1. Para $n = 0$,

$$\sin\left(0 + \frac{1}{2}\right)\theta = \sin\frac{1}{2}\theta. \tag{1.74}$$

2. Para $n = 1$,

$$\operatorname{sen} \left(1 + \frac{1}{2} \right) \theta = \operatorname{sen} 3t \stackrel{(1.41)}{=} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left(4 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right). \quad (1.75)$$

3. Para $n = 2$,

$$\operatorname{sen} \left(2 + \frac{1}{2} \right) \theta = \operatorname{sen} 5t \stackrel{(1.43)}{=} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left(16 \cos^4 \frac{\theta}{2} - 12 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 1 \right). \quad (1.76)$$

Desse modo, os primeiros polinômios de quarta família serão:

1.

$$W_0(x) = \frac{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}} = 1. \quad (1.77)$$

2.

$$\begin{aligned} W_1(x) &= \frac{\operatorname{sen} \left(1 + \frac{1}{2} \right) \theta}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left(4 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right)}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}} \\ &= 4 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 \\ &\stackrel{(B.23)}{=} 4 \left(\frac{\cos \theta + 1}{2} \right) - 1 \\ &= 2 \cos \theta + 1 \\ &= 2x + 1. \end{aligned} \quad (1.78)$$

3.

$$\begin{aligned} W_2(x) &= \frac{\operatorname{sen} \left(2 + \frac{1}{2} \right) \theta}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left(16 \cos^4 \frac{\theta}{2} - 12 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 1 \right)}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}} \\ &= 16 \cos^4 \frac{\theta}{2} - 12 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 1 \\ &\stackrel{(B.23)}{=} 16 \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^2 - 12 \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right) + 1 \\ &\stackrel{(C.5)}{=} 16 \left(\frac{\cos^2 \theta + 2 \cos \theta + 1}{4} \right) - 12 \left(\frac{\cos \theta + 1}{2} \right) + 1 \\ &= 4 \cos^2 \theta + 2 \cos \theta - 1 \\ &= 4x^2 + 2x - 1. \end{aligned} \quad (1.79)$$

4.

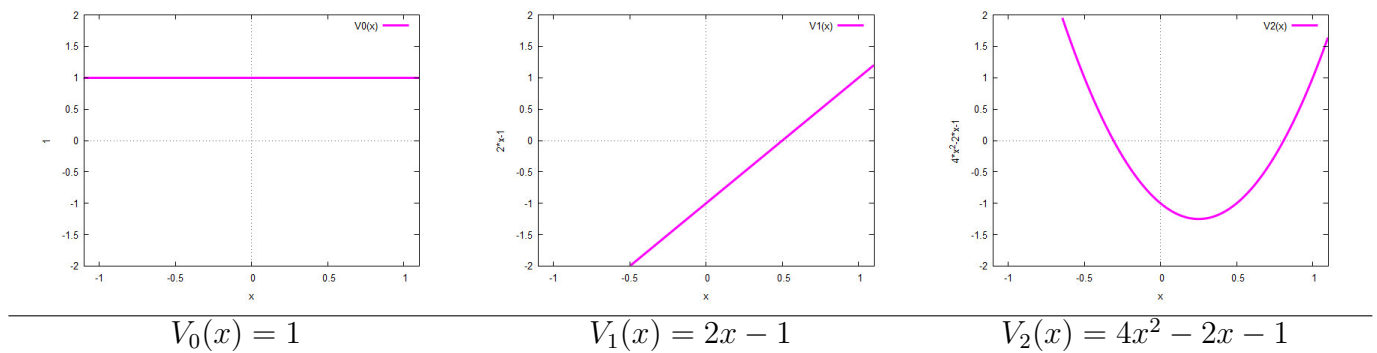
$$\begin{aligned}
 W_3(x) &= \frac{\sin\left(3 + \frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}\left(64\cos^6\frac{\theta}{2} - 80\cos^4\frac{\theta}{2} + 24\cos^2\frac{\theta}{2} - 1\right)}{\sin\frac{\theta}{2}} \\
 &= 64\cos^6\frac{\theta}{2} - 80\cos^4\frac{\theta}{2} + 24\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 \\
 &\stackrel{(B.23)}{=} 64\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^3 - 80\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^2 + 24\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right) - 1 \\
 &\stackrel{(C.5)}{=} 64\left(\frac{\cos^3\theta + 3\cos^2\theta + 3\cos\theta + 1}{8}\right) - 80\left(\frac{\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1}{4}\right) + 24\left(\frac{\cos\theta + 1}{2}\right) - 1 \\
 &= 8\cos^3\theta - 4\cos^2\theta - 4\cos\theta - 1 \\
 &= 8x^3 - 4x^2 - 4x - 1.
 \end{aligned} \tag{1.80}$$

Resumidamente teremos:

$$W_0(x) = 1, \quad W_1(x) = 2x + 1, \quad W_2(x) = 4x^2 + 2x - 1, \quad W_3(x) = 8x^3 - 4x^2 - 4x - 1, \dots$$

Nas Tabelas (1.3) e (1.4) estão representados os gráficos dos polinómios de Chebyshev de terceira e quarta espécies, respectivamente.

Tabela 1.3: Polinómios de Chebyshev de terceira espécie



1.3.2 Relação de recorrência dos polinómios de terceira espécie

Teorema 1.3. *Os polinómios de Chebyshev de terceira espécie podem ser determinados a partir da seguinte relação recursiva de ordem dois, com as correspondentes condições iniciais:*

$$\begin{cases} V_0(x) = 1, & n = 0 \\ V_1(x) = 2x - 1, & n = 1 \\ V_n(x) = 2xV_{n-1}(x) - V_{n-2}(x), & n = 2, 3, \dots \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.81}$$

Tabela 1.4: Polinómios de Chebyshev de quarta espécie

$W_0(x) = 1$	$W_1(x) = 2x + 1$	$W_2(x) = 4x^2 + 2x - 1$

Demonstração. Consideremos que $n \geq 2$ e que $\cos \frac{\theta}{2} \neq 0$, por (1.63) teremos que

$$\begin{aligned}
V_n(x) &= \frac{\cos \left((n-1) + \frac{1}{2} \right) \theta}{\cos \frac{\theta}{2}} \\
\iff V_n(x) &\stackrel{(B.6)}{=} \frac{\cos \left((n-1) + \frac{1}{2} \right) \theta \cos \theta - \sin \left((n-1) + \frac{1}{2} \right) \theta \sin \theta}{\cos \frac{\theta}{2}} \\
\iff V_n(x) &\stackrel{(B.17)}{=} \frac{\cos \left((n-1) + \frac{1}{2} \right) \theta \cos \theta - \frac{\cos \left((n-1) + \frac{1}{2} - 1 \right) \theta - \cos \left((n-1) + \frac{1}{2} + 1 \right) \theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} \\
\iff V_n(x) &= \frac{2 \cos \left((n-1) + \frac{1}{2} \right) \theta \cos \theta - \cos \left((n-1) + \frac{1}{2} - 1 \right) \theta - \cos \left((n-1) + \frac{1}{2} + 1 \right) \theta}{2 \cos \frac{\theta}{2}} \\
\iff 2V_n(x) &\stackrel{\times 2}{=} \frac{2 \cos \left((n-1) + \frac{1}{2} \right) \theta \cos \theta}{\cos \frac{\theta}{2}} - \frac{\cos \left((n-2) + \frac{1}{2} \right) \theta + \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \theta}{\cos \frac{\theta}{2}} \\
\iff V_n(x) &= \frac{2 \cos \left((n-1) + \frac{1}{2} \right) \theta \cos \theta}{\cos \frac{\theta}{2}} - \frac{\cos \left((n-2) + \frac{1}{2} \right) \theta}{\cos \frac{\theta}{2}}.
\end{aligned}$$

Logo, por (1.63) teremos

$$V_n(x) = 2xV_{n-1}(x) - V_{n-2}(x).$$

Suponhamos, agora, que $\cos \frac{\theta}{2} = 0 \iff x = \cos \pi = -1$ e vamos provar que

$$V_n(-1) = -2V_{n-1}(-1) - V_{n-2}(-1). \quad (1.82)$$

Por (1.112) verifica-se que

1. Se n for par então $n-1$ é ímpar e $n-2$ é par. Desse modo, por (1.117), (1.82) é equivalente a

$$2n+1 = -2[-(2n+1)] - (2n+1) \iff 2n+1 = 2n+1 \iff 0=0.$$

que é uma proposição verdadeira.

2. Se n for ímpar então $n-1$ é par e $n-2$ é ímpar. Desse modo, por (1.117), (1.82) é equivalente a

$$-(2n+1) = -2 - (2n+1) - [(2n+1)] \iff -(2n+1) = -(2n+1) \iff 0=0.$$

■

Cálculo recursivo dos coeficientes na base canónica dos polinómios de Chebyshev de terceira espécie

Proposição 1.3.1. *Os coeficientes dos polinómios de Chebyshev de terceira espécie podem ser calculados usando a seguinte relação de recorrência*

$$\begin{cases} c_{n,0} &= -c_{n-2,0} \\ c_{n,k} &= 2c_{n-1,k-1} - c_{n-2,k}, \quad k = 1 \dots n-2 \\ c_{n,n-1} &= 2c_{n-1,n-2} \\ c_{n,n} &= 2c_{n-1,n-1} \end{cases} \quad (1.83)$$

cujas condições iniciais são:

$$\begin{cases} c_{0,0} &= 1 \\ c_{1,0} &= -1, \quad c_{1,1} = 2 \end{cases} \quad (1.84)$$

Demonstração. Análoga à demonstração da Proposição 1.1.1. ■

1.3.3 Relação de recorrência dos polinómios de quarta espécie

Teorema 1.4. *Os polinómios de Chebyshev de quarta espécie podem ser determinados a partir da seguinte relação recursiva, com as correspondentes condições iniciais*

$$\begin{cases} W_0(x) &= 1, & n = 0 \\ W_1(x) &= 2x + 1, & n = 1 \\ W_n(x) &= 2xW_{n-1}(x) - W_{n-2}(x), & n = 2, 3, \dots \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1.85)$$

Demonstração. Análoga a demonstração do Teorema 1.3. ■

Cálculo recursivo dos coeficientes na base canónica dos polinómios de Chebyshev de quarta espécie

Proposição 1.3.2. *Os coeficientes dos polinómios de Chebyshev de quarta espécie podem ser calculados usando a seguinte relação de recorrência*

$$\begin{cases} d_{n,0} &= -d_{n-2,0} \\ d_{n,k} &= 2d_{n-1,k-1} - d_{n-2,k}, \quad k = 1 \dots n-2 \\ d_{n,n-1} &= 2d_{n-1,n-2} \\ d_{n,n} &= 2d_{n-1,n-1} \end{cases} \quad (1.86)$$

cujas condições iniciais são:

$$\begin{cases} d_{0,0} &= 1 \\ d_{1,0} &= 1, \quad d_{1,1} = 2 \end{cases} \quad (1.87)$$

Demonstração. Análoga à demonstração da Proposição 1.1.1. ■

1.3.4 Paridade, zeros e extremos

Paridade

Os gráficos que constam das Tabelas (1.3) e (1.4) mostram que os polinómios de Chebyshev de terceira e quarta espécies não são funções pares e nem são funções ímpares, portanto, estas famílias não são simétricas.

Zeros

Proposição 1.3.3. *Os zeros dos polinómios, $V_n(x)$ e $W_n(x)$, de terceira e quarta espécies são dados, respectivamente, pelas seguintes fórmulas*

$$x_{n,k} = \cos \theta_{n,k}, \quad \text{onde } \theta_{n,k} = \frac{\left(k - \frac{1}{2}\right) \pi}{n + \frac{1}{2}}, \quad k = 1(1)n$$

e

$$x_{n,k} = \cos \theta_{n,k}, \quad \text{onde } \theta_{n,k} = \frac{k\pi}{n + \frac{1}{2}}, \quad k = 1(1)n.$$

Demonstração. Os zeros da função $V_n(x)$, para $x \in [-1, 1]$, que correspondem aos zeros da função $\cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \theta$, para $\theta \in [0, \pi]$, $\theta \neq \pi$, podem ser calculados pela seguinte equação trigonométrica:

$$\begin{aligned} V_n(x) &= 0 \\ \iff \frac{\cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \theta}{\cos \frac{\theta}{2}} &= 0 \\ \iff \left(n + \frac{1}{2}\right) \theta &= \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \iff \theta_{n,k} &= \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right) \pi}{n + \frac{1}{2}}, \quad k = 0(1)n - 1 \\ \iff \theta_{n,k} &= \frac{\left(k - \frac{1}{2}\right) \pi}{n + \frac{1}{2}}, \quad k = 1(1)n \end{aligned}$$

Finalmente, os zeros de $V_n(x)$ serão dados por

$$x_{n,k} = \cos \frac{\left(k - \frac{1}{2}\right) \pi}{n + \frac{1}{2}}, \quad k = 1(1)n \quad (1.88)$$

Em ordem crescente os zeros de $V_n(x)$ serão dados por

$$x_{n,k} = \cos \frac{\left(n - k + \frac{1}{2}\right) \pi}{n + \frac{1}{2}}, \quad k = 1(1)n. \quad (1.89)$$

E, os zeros da função $W_n(x)$, para $x \in [-1, 1]$, que correspondem aos zeros da função $\sin \left(n + \frac{1}{2}\right) \theta$,

para $\theta \in [0, \pi]$, podem ser calculados pela seguinte equação trigonométrica:

$$\begin{aligned}
 W_n(x) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta &= 0 \\
 \Leftrightarrow \left(n + \frac{1}{2}\right)\theta &= k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\
 \Leftrightarrow \theta_{n,k} &= \frac{k\pi}{n + \frac{1}{2}}, \quad k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned} \tag{1.90}$$

Finalmente, os zeros de $W_n(x)$ serão dados por

$$x_{n,k} = \cos \frac{\pi}{n + \frac{1}{2}}, \quad k = 1(1)n \tag{1.91}$$

Em ordem crescente os zeros de $W_n(x)$ serão dados por

$$x_{n,k} = \frac{(n - k + 1)\pi}{n + \frac{1}{2}}, \quad k = 1(1)n. \tag{1.92}$$

■

Na Figura 1.6 estão representadas as localizações dos zeros das funções $V_{22}(x)$ e $V_{23}(x)$. Note que para polinómios desta família com n grande, os zeros tendem a se acumular nos extremos do intervalo $[-1, 1]$ mas, por esses polinómios não serem simétricos, a distribuição dos zeros não é simétrica.

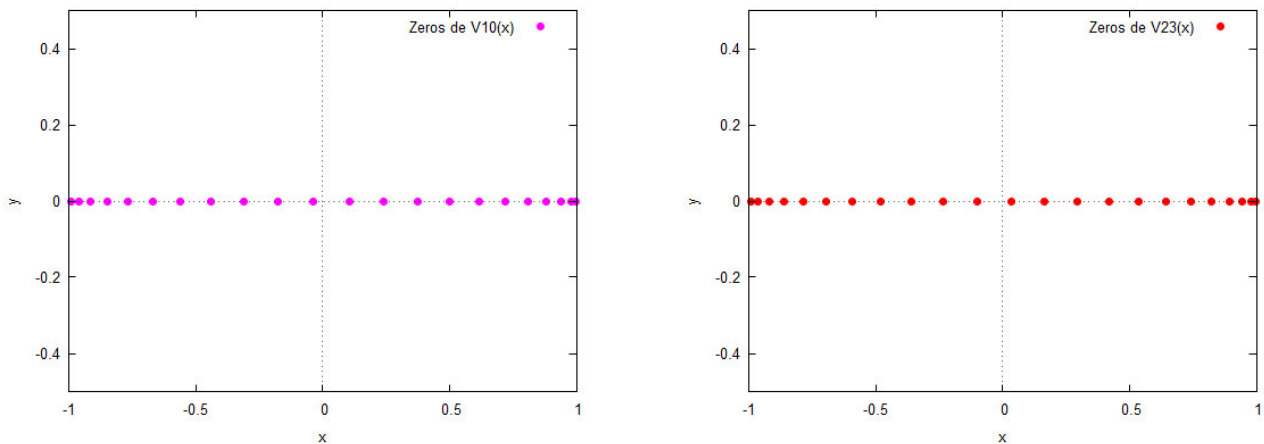


Figura 1.6: Localização dos zeros do polinómio $V_{22}(x)$ e $V_{23}(x)$

Extremos

Pelas mesmas razões apresentadas na Secção 1.2.3, vamos apresentar os extremos dos polinómios ponderados da terceira e quarta espécies e não os extremos dos polinómios de terceira e quarta espécies.

Proposição 1.3.4. *Dados os polinómios*

$$\tilde{V}_n(x) = \sqrt{1+x} V_n(x) = \sqrt{2} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \theta$$

e

$$\tilde{W}_n(x) = \sqrt{1-x} W_n(x) = \sqrt{2} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \theta$$

ponderados de terceira e quarta espécies, respectivamente, os seus extremos são explicitamente determinados por

$$x_{n,k} = \cos \frac{2k}{2n+1} \pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (1.93)$$

e

$$x_{n,k} = \cos \frac{2k+1}{2n+1} \pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (1.94)$$

respectivamente.

Demonstração. A demonstração é análoga a da Proposição 1.2.4. ■

1.4 Cálculo dos polinómios de Chebyshev em pontos especiais

Proposição 1.4.1. *No ponto $x = 0$ os polinómios de primeira espécie admitem os valores*

$$\begin{cases} T_{2n}(0) &= (-1)^n, \quad \forall n \geq 0 \\ T_{2n+1}(0) &= 0, \quad \forall n \geq 0 \end{cases} \quad (1.95)$$

Observemos que a segunda igualdade de (1.95) é uma consequência da simetria destes polinómios.

Demonstração. Vamos recorrer ao método de indução matemática para demonstrar que a relação (1.95) é verdadeira para $n \geq 0$.

É fácil mostrar que para $n = 0$ e $n = 1$ a relação (1.95) é verdadeira, visto que, $T_0(x) = 1$ e $T_1(x) = x$ pelo que $T_0(0) = 1$ e $T_1(0) = 0$.

Vamos supor que

$$T_{2n}(0) = (-1)^n, \quad 0 \leq n \leq k-1 \quad (1.96)$$

e

$$T_{2n+1}(0) = 0, \quad 0 \leq n \leq k-1. \quad (1.97)$$

Vamos demonstrar que para $n = k$ a relação (1.95) continua a ser verdadeira.

Sendo $n = k$, recorrendo à relação (1.10) temos que

$$T_{2k}(0) = 2 \times 0 \times T_{2k-1}(0) - T_{2k-2}(0) = -T_{2(k-1)}(0) \underset{(1.96)}{=} -(-1)^{k-1} = (-1)^k$$

e

$$T_{2k+1}(0) = 2 \times 0 \times T_{(2k+1)-1}(0) - T_{(2k+1)-2}(0) = -T_{2k-1}(0) \underset{(1.97)}{=} 0.$$

■

Proposição 1.4.2. *No ponto $x = 1$ os polinômios de Chebyshev da primeira espécie tomam o seguinte valor*

$$T_n(1) = 1, \quad \forall n \geq 0. \quad (1.98)$$

Demonstração. Usando o método de indução matemática, vamos provar que (1.98) é verdadeira para todo $n \geq 0$.

No caso $n = 0$, como $T_0(x) = 1$, temos que $T_0(1) = 1$ e se $n = 1$, como $T_1(x) = x$, temos $T_1(1) = 1$. Vamos supor que para $n \leq k - 1$ se verifica

$$T_n(1) = 1 \quad (1.99)$$

e vamos provar que, para $n = k$, $T_k(1) = 1$.

Sendo $n = k$, fazendo $x = 1$ na relação de recorrência (1.10), obtemos

$$T_k(1) = 2T_{k-1}(1) - T_{k-2}(1) \stackrel{(1.99)}{=} 2 \times 1 \times 1 - 1 = 1.$$

■

Proposição 1.4.3. *No ponto $x = -1$ os polinômios de Chebyshev de primeira espécie tomam os seguintes valores*

$$T_n(-1) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ for par} \\ -1, & \text{se } n \text{ for ímpar} \end{cases}. \quad (1.100)$$

Demonstração. Usando o método de indução matemática, vamos provar que (1.100) é verdadeira para todo $n \geq 0$.

Seja $n = 0$, como $T_0(x) = 1$, então, $T_0(-1) = 1$ e se $n = 1$, como $T_1(x) = x$, então, $T_1(-1) = -1$.

Vamos supor que para $n \leq k - 1$, ou seja, para os valores $\{0, 1, 2, \dots, 2k - 2, 2k - 1\}$, as igualdades

$$T_{2n}(-1) = 1, \quad n \geq 0. \quad (1.101)$$

e

$$T_{2n+1}(-1) = -1, \quad n \geq 0. \quad (1.102)$$

são verdadeiras.

Vamos mostrar que para $n = k$, ou seja, para os valores $\{2k, 2k + 1\}$, a igualdade (1.100) continua verdadeira.

Se $n = k$, então, fazendo $x = -1$ na relação de recorrência (1.10), obtemos:

$$\begin{aligned} T_{2k}(-1) &= 2(-1)T_{2k-1}(-1) - T_{2k-2}(-1) \\ &= -2T_{2k-1}(-1) - T_{2(k-1)}(-1) \\ &\stackrel{(1.102), (1.101)}{=} -2(-1) - 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T_{2k+1}(-1) &= 2(-1)T_{(2k+1)-1}(-1) - T_{(2k+1)-2}(-1) \\ &= -2T_{2k}(-1) - T_{2k-1}(-1) \\ &\stackrel{(1.101), (1.102)}{=} -2 \times 1 - (-1) \\ &= -1. \end{aligned}$$

■

Proposição 1.4.4. *No ponto $x = 0$ os polinómios de segunda espécie admitem os valores*

$$\begin{cases} U_{2n}(0) &= (-1)^n, \quad \forall n \geq 0 \\ U_{2n+1}(0) &= 0, \quad \forall n \geq 0 \end{cases} \quad (1.103)$$

Demonstração. Facilmente pode mostrar-se que a expressão (1.103) é verdadeira para $n = 0$ e $n = 1$, visto que, $U_0(x) = 1$ e $U_1(x) = 2x$, pelo que $U_0(0) = 1$ e $U_1(0) = 0$.

Vamos supor que para $n \leq k - 1$ as igualdades

$$U_{2n}(0) = (-1)^n \quad (1.104)$$

e

$$U_{2n+1}(0) = 0 \quad (1.105)$$

são verdadeiras.

Vamos demonstrar que para $n = k$ a fórmula (1.103) continua verdadeira.

Seja $n = k$, fazendo $x = 0$ na relação recursiva (1.49), obtemos:

$$U_{2k}(0) = 2 \times 0 \times U_{2k-1}(0) - U_{2k-2}(0) = -U_{2(k-1)}(0) \stackrel{(1.104)}{=} -(-1)^{k-1} = (-1)^k.$$

e

$$U_{2k+1}(0) = 2 \times 0 \times U_{(2k+1)-1}(0) - U_{(2k+1)-2}(0) = -U_{2k-1}(0) \stackrel{(1.105)}{=} 0.$$

■

Proposição 1.4.5. *No ponto $x = 1$ os polinómios de segunda espécie de grau n tomam o valor $n + 1$, isto é,*

$$U_n(1) = n + 1. \quad (1.106)$$

Demonstração. Vamos recorrer ao método da indução matemática para demonstrar que a expressão (1.106) é verdadeira para $n \geq 0$.

Facilmente se demonstra que para $n = 0$ e $n = 1$ a expressão (1.106) é verdadeira visto que $U_0(x) = 1$ e $U_1(x) = 2x$, pelo que, $U_0(1) = 1$ e $U_1(1) = 2$.

Vamos supor que para $n \leq k - 1$ a expressão

$$U_n(x) = n + 1 \quad (1.107)$$

é verdadeira. Temos de provar que para $n = k$ a expressão (1.106) continua verdadeira.

Seja $n = k$, recorrendo a relação (1.49) para $x = 1$, teremos

$$\begin{aligned} U_k(1) &= 2 \times 1 \times U_{k-1}(1) - U_{k-2}(1) \\ &\stackrel{(1.107)}{=} 2 \times \{(k-1) + 1\} - \{(k-2) + 1\} \\ &= 2k - k + 1 \\ &= k + 1. \end{aligned} \quad (1.108)$$

■

Proposição 1.4.6. *No ponto $x = -1$ os polinómios de segunda espécie admitem os valores*

$$U_n(-1) = \begin{cases} n + 1, & \text{se } n \text{ for par} \\ -(n + 1), & \text{se } n \text{ for ímpar} \end{cases} \quad (1.109)$$

Demonstração. Vamos usar o método da indução matemática para demonstrar que a fórmula (1.109) é verdadeira para $n \geq 0$.

Se $n = 0$, então, $U_0(-1) = 1$ pois $U_0(x) = 1$.

Se $n = 1$, então, $U_1(-1) = -2$ pois $U_1(x) = 2x$.

Suponhamos que para $n \leq k - 1$ as igualdades

$$U_n(-1) = n + 1, \quad n \text{ par} \quad (1.110)$$

e

$$U_n(-1) = -(n + 1), \quad n \text{ ímpar}. \quad (1.111)$$

Vamos demonstrar que para $n = k$ a afirmação (1.109) continua verdadeira.

Sendo $n = 2k$, recorrendo a relação (1.49) para $x = -1$, teremos

$$\begin{aligned} U_{2k}(-1) &= 2(-1)U_{2k-1}(-1) - U_{2k-2}(-1) \\ &\stackrel{(1.111), (1.110)}{=} -2\{ -[(2k-1) + 1] \} - [(2k-2) + 1] \\ &= 4k - (2k-1) \\ &= 2k + 1. \end{aligned}$$

Sendo $n = 2k + 1$, recorrendo a expressão (1.49), teremos

$$\begin{aligned} U_{2k+1}(-1) &= 2(-1)U_{(2k+1)-1}(-1) - U_{(2k+1)-2}(-1) \\ &= -2U_{2k}(-1) - U_{2k-1}(-1) \\ &\stackrel{(1.110), (1.111)}{=} -2(2k+1) - \{ -[(2k-1) + 1] \} \\ &= -4k - 2 + 2k \\ &= -\{(2k+1) + 1\}. \end{aligned}$$

■

Proposição 1.4.7. No ponto $x = 0$ os polinómios de terceira espécie admitem os valores

$$V_n(0) = \begin{cases} (-1)^n, & n \text{ par} \\ (-1)^{n+1}, & n \text{ ímpar} \end{cases}. \quad (1.112)$$

Demonstração. Vamos usar o método indução de matemática para demonstrar que a expressão (1.112) é verdadeira para $\forall n \geq 0$.

Se $n = 0$, então, $V_0(0) = 1$ visto que $V_0(x) = 1$. E se $n = 1$, então, $V_1(0) = -1$ visto que $V_1(x) = 2x - 1$.

Vamos supor que para $n \leq k - 1$

$$V_{2n}(0) = (-1)^n \quad (1.113)$$

e

$$V_{2n+1}(0) = (-1)^{n+1}, \quad (1.114)$$

vamos demonstrar que para $n = k$ a fórmula (1.112) continua verdadeira.

Se $n = 2k$, então teremos,

$$\begin{aligned} V_{2k}(0) &= 2 \times 0 \times V_{2k-1}(0) - V_{2k-2}(0) \\ &= -V_{2(k-1)}(0) \\ &\stackrel{(1.113)}{=} -(-1)^{k-1} \\ &= (-1)^k. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 V_{2k+1}(0) &= 2 \times 0 \times V_{(2k+1)-1}(0) - V_{(2k+1)-2}(0) \\
 &= -V_{2k-1}(0) \\
 &= -(-1)^{k+1} \\
 &\stackrel{(1.114)}{=} (-1)^{k+2} \\
 &= (-1)^{(k+1)+1}.
 \end{aligned}$$

■

Proposição 1.4.8. *No ponto $x = 1$ os polinómios de terceira espécie admite o seguinte valor*

$$V_n(1) = 1. \quad (1.115)$$

Demonstração. Vamos usar o método de indução matemática para demonstrar a expressão (1.115) é verdadeira para $\forall n \geq 0$.

Se $n = 0$ então $V_0(1) = 1$ pois $V_0(x) = 1$ e se $n = 1$ então $V_1(1) = 1$ pois $V_1(x) = 2x - 1$.

Vamos supor que para $n \leq k - 1$ temos

$$V_n(1) = 1 \quad (1.116)$$

e temos de provar que para $n = k$ a relação (1.115) continua verdadeira.

Se $n = k$, recorrendo a relação (1.49) para $x = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
 V_k(1) &= 2 \times 1 \times V_{2k-1}(1) - U_{2k-2}(1) \\
 &\stackrel{(1.116)}{=} 2 \times 1 - 1 \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

■

Proposição 1.4.9. *No ponto $x = -1$ os polinómios de terceira espécie admitem os valores*

$$V_n(-1) = \begin{cases} 2n + 1, & \text{se } n \text{ for par} \\ -(2n + 1), & \text{se } n \text{ for ímpar} \end{cases}. \quad (1.117)$$

Demonstração. Vamos usar o método de indução matemática para demonstrar que a expressão (1.117) é verdadeira para $\forall n \geq 0$.

Se $n = 0$ então, $V_0(-1) = 1$ visto que $V_0(x) = 1$. Se $n = 1$ então, $V_1(-1) = -3$ visto que $V_1(x) = 2x - 1$.

Vamos supor que para $n \leq k - 1$

$$V_n(-1) = 2n + 1, \quad \text{se } n \text{ for par} \quad (1.118)$$

e

$$V_n(-1) = -(2n + 1), \quad \text{se } n \text{ for ímpar}, \quad (1.119)$$

vamos demonstrar que para $n = 2k$ e $n = 2k + 1$ a expressão (1.117) continua verdadeira.

Se $n = 2k$, então,

$$\begin{aligned}
 V_{2k}(-1) &= 2 \times (-1) \times V_{2k-1}(-1) - V_{2k-2}(-1) \\
 &= -2V_{2k-1}(-1) - V_{2(k-1)}(-1) \\
 &\stackrel{(1.119),(1.118)}{=} -2\{-[2(2k-1)+1]\} - [2(2k-2)+1] \\
 &= 8k - 4k + 1 \\
 &= 4k + 1 \\
 &= 2(2k) + 1.
 \end{aligned}$$

e para $n = 2k + 1$ temos,

$$\begin{aligned}
 V_{2k+1}(-1) &= 2 \times (-1) \times V_{(2k+1)-1}(-1) - V_{(2k+1)-2}(-1) \\
 &= -2V_{2k}(-1) - V_{2k-1}(-1) \\
 &\stackrel{(1.118),(1.119)}{=} -2\{-[2(2k) + 1]\} - [2(2k - 1) + 1] \\
 &= 8k + 2 - 4k + 1 \\
 &= 4k + 3 \\
 &= 2(k + 1) + 1.
 \end{aligned}$$

■

Proposição 1.4.10. *No ponto $x = 0$ os polinómios de primeira espécie admitem os seguintes valores*

$$\begin{cases} W_{2n}(0) = (-1)^n \\ W_{2n+1}(0) = (-1)^n \end{cases} \quad (1.120)$$

Demonstração. Vamos usar o método de indução matemática para demonstrar que a relação (1.120) é verdadeira para $n \geq 0$.

Para $n = 0$ e $n = 1$, teremos $W_0(0) = 1$ e $W_1(0) = 1$ visto que $W_0(x) = 1$ e $W_1(x) = 2x + 1$.

Vamos supor que para $n \leq k - 1$ as relações

$$W_{2n}(0) = (-1)^n \quad (1.121)$$

e

$$W_{2n+1}(0) = (-1)^n \quad (1.122)$$

são verdadeiras e vamos provar que para $n = 2k$ e $n = 2k + 1$ a relação (1.120) continua verdadeira. Seja $n = 2k$, então,

$$\begin{aligned}
 W_{2k}(0) &= 2 \times 0 \times W_{2k-1}(0) - W_{2k-2}(0) \\
 &= 0 - W_{2(k-1)}(0) \\
 &\stackrel{(1.121)}{=} -(-1)^{k-1} \\
 &= (-1)^k
 \end{aligned}$$

e, seja $n = 2k + 1$, então,

$$\begin{aligned}
 W_{2k+1}(0) &= 2 \times 0 \times W_{(2k+1)-1}(0) - W_{(2k+1)-2}(0) \\
 &= 0 - W_{2k-1}(0) \\
 &\stackrel{(1.122)}{=} -(-1)^k \\
 &= (-1)^{k+1}
 \end{aligned}$$

■

Proposição 1.4.11. *O valor dos polinómios de quarta espécie no ponto $x = 1$ é dado por $2n + 1$, isto é,*

$$W_n(1) = 2n + 1, \quad \forall n \geq 0. \quad (1.123)$$

Demonstração. Vamos usar o método de indução matemática para demonstrar que a expressão (1.123) é verdadeira $\forall n \geq 0$.

Se $n = 0$, então, $W_0(1) = 1$ pois $W_0(x) = 1$.

Se $n = 1$, então, $W_1(1) = 3$ pois $W_1(x) = 2x + 1$.

Vamos supor que para $n \leq k - 1$ a expressão

$$W_n(1) = 2n + 1 \quad (1.124)$$

é verdadeira e vamos demonstrar que para $n = k$ a expressão (1.123) continua verdadeira.

Se $n = k$, então,

$$\begin{aligned} W_k(1) &= 2 \times 1 \times W_{k-1}(1) - W_{k-2}(1) \\ &= 2W_{k-1} - W_{k-2}(1) \\ &\stackrel{(1.124)}{=} 2\{2(k-1) + 1\} - \{2(k-2) + 1\} \\ &= 2k + 1. \end{aligned}$$

■

Proposição 1.4.12. *O valor dos polinómios de quarta espécie no ponto $x = -1$ é dado por*

$$W_n(-1) = (-1)^n, \quad \forall n \geq 0. \quad (1.125)$$

Demonstração. Vamos usar o método de indução matemática para demonstrar que a expressão (1.125) é verdadeira $\forall n \geq 0$.

Se $n = 0$, então, $W_0(-1) = 1$ visto que $W_0(x) = 1$ e se $n = 1$, então, $W_1(-1) = -1$.

Agora, vamos supor que para $n \leq k - 1$ a expressão

$$W_n(-1) = (-1)^n \quad (1.126)$$

é verdadeira e vamos demonstrar que para $n = k$ a expressão (1.125) continua verdadeira.

Se $n = k$, então

$$\begin{aligned} W_k(-1) &= 2(-1)W_{k-1}(-1) - W_{k-2}(-1) \\ &= -2W_{k-1}(-1) - W_{k-2}(-1) \\ &\stackrel{(1.126)}{=} -2(-1)^{k-1} - (-1)^{k-2} \\ &= 2(-1)^k - (-1)^k \\ &= (2-1)(-1)^k \\ &= (-1)^k. \end{aligned}$$

■

1.5 Relações entre famílias de polinómios de Chebyshev

As proposições que se seguem estabelecem formas de expressar os polinómios $T_n(x)$, $V_n(x)$ e $W_n(x)$ em termos dos polinómios de Chebyshev de segunda espécie.

Proposição 1.5.1. *Os polinómios de Chebyshev de primeira e de segunda espécies satisfazem a relação*

$$T_n(x) = \frac{1}{2}U_n(x) - \frac{1}{2}U_{n-2}(x), \quad n \geq 2. \quad (1.127)$$

Demonstração. Pelas definições (1.1) e (1.3), provar que (1.127) é equivalente a provar que

$$\cos n\theta = \frac{1}{2} \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} - \frac{1}{2} \frac{\sin(n-1)\theta}{\sin \theta}.$$

Supondo que $\sin \theta \neq 0$, ou seja, $\theta \neq 0 \wedge \theta \neq \pi$, vamos multiplicar ambos os membros da última igualdade por $\sin \theta$, isto é,

$$\begin{aligned} \sin \theta \cos n\theta &= \frac{1}{2} \sin(n+1)\theta - \frac{1}{2} \sin(n-1)\theta \\ \stackrel{(B.20)}{\iff} \sin \theta \cos n\theta &\stackrel{(B.15)}{=} \frac{\sin(n+1)\theta + \sin(1-n)\theta}{2}. \end{aligned} \quad (1.128)$$

Suponhamos agora que $\sin \theta = 0$ que corresponde a $x = \cos 0 = 1$. Temos que provar que

$$T_n(1) = \frac{1}{2} U_n(1) - \frac{1}{2} U_{n-2}(1), \quad n \geq 2. \quad (1.129)$$

Mas por (1.98) e (1.106) verificamos que (1.129) é equivalente a

$$2 = n + 1 - (n - 2 + 1) \iff 2 = 2,$$

o que é uma proposição verdadeira.

Suponhamos que $\theta = \pi$ que corresponde a $x = \cos \pi = -1$. Temos que provar que

$$T_n(-1) = \frac{1}{2} U_n(-1) - \frac{1}{2} U_{n-2}(-1), \quad n \geq 2. \quad (1.130)$$

Mas por (1.100) e (1.109) verificamos que:

1. se n for par então (1.130) é equivalente a

$$2 = n + 1 - (n - 2 + 1) \iff 2 = 2,$$

o que é uma proposição verdadeira.

2. se n for ímpar então (1.130) é equivalente a

$$-2 = -(n + 1) + (n - 2 + 1) \iff -2 = -2,$$

o que é uma proposição verdadeira.

■

Para estabelecer as relações entre os polinómios $T_n(x)$ e $U_n(x)$ com os polinómios $V_n(x)$ e $W_n(x)$, vamos introduzir as seguintes variáveis auxiliares:

$$u = \left(\frac{1+x}{2} \right)^{1/2} = \cos \frac{\theta}{2} \quad \text{e} \quad t = \left(\frac{1-x}{2} \right)^{1/2} = \sin \frac{\theta}{2}. \quad (1.131)$$

As definições (1.63) e (1.64) derivam das definições (1.1) e (1.38) do seguinte modo:

$$T_n(x) = \cos n\theta = \cos 2 \left(n \frac{\theta}{2} \right) = \cos 2n \left(\frac{\theta}{2} \right) = T_{2n}(u). \quad (1.132)$$

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} = \frac{\sin 2(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin 2\frac{\theta}{2}} \stackrel{(B.8)}{=} \frac{\sin\{(2n+1)+1\}\frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{U_{2n+1}(u)}{2 \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2} u^{-1} U_{2n+1}(u). \quad (1.133)$$

$$V_n(x) = \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{\cos \frac{\theta}{2}} = \frac{\cos 2\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} = \frac{\cos(2n+1)\frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} = \frac{\cos(2n+1)\frac{\theta}{2}}{u} = u^{-1} T_{2n+1}(u). \quad (1.134)$$

$$W_n(x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} = \frac{\sin 2\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} = \frac{\sin(2n+1)\frac{\theta}{2}}{t} = t^{-1} U_{2n+1}(u). \quad (1.135)$$

Proposição 1.5.2. *Os polinómios de Chebyshev da segunda e de terceira espécie satisfazem a relação*

$$V_n(x) = U_n(x) - U_{n-1}(x). \quad (1.136)$$

Demonstração. Demonstrar que (1.136) é verdadeira é equivalente a mostrar que

$$2 \sin \frac{\theta}{2} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta = \sin(n+1)\theta - \sin n\theta,$$

também o é. Assim,

$$\begin{aligned} & 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta = \sin(n+1)\theta - \sin n\theta \\ \Leftrightarrow & \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{\sin \theta} = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} - \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \\ \Leftrightarrow & \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{\frac{2\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}} = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} - \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \\ \Leftrightarrow & \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} - \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \\ \Leftrightarrow & \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{\cos \frac{\theta}{2}} = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} - \frac{\sin\{(n-1)+1\}\theta}{\sin \theta} \end{aligned}$$

Logo

$$V_n(x) = U_n(x) - U_{n-1}(x)$$

■

Proposição 1.5.3. *Para $n \geq 1$ temos que*

$$W_n(x) = U_n(x) + U_{n-1}(x). \quad (1.137)$$

Demonstração. Demonstrar que (1.137) é verdadeira equivale a demonstrar que

$$2 \cos \frac{\theta}{2} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta = \sin(n+1)\theta + \sin n\theta$$

é também verdadeira. Assim,

$$\begin{aligned}
 & 2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \theta = \sin(n+1)\theta + \sin n\theta \\
 \Leftrightarrow_{\text{sen } \theta} & \frac{2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} + \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \\
 \Leftrightarrow & \frac{2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \theta}{\sin \frac{2\theta}{2}} = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} + \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \\
 \Leftrightarrow_{\text{(B.8)}} & \frac{2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \theta}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} + \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \\
 \Leftrightarrow & \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \theta}{\sin \frac{\theta}{2}} = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} + \frac{\sin\{(n-1) + 1\}\theta}{\sin \theta}
 \end{aligned}$$

Logo,

$$W_n(x) = U_n(x) + U_{n-1}(x)$$

■

A partir dos cálculos acima apresentados, conclui-se que se desejarmos estabelecer propriedades de $V_n(x)$ e $W_n(x)$ poderemos fazê-lo de duas maneiras, uma é a partir das relações trigonométricas dadas nas definições destes polinómios e, a outra maneira é utilizar as propriedades dos polinómios $T_n(x)$ e $U_n(x)$ e estabelecer a relação com $V_n(x)$ e $W_n(x)$ usando (1.134) e (1.135).

Como já vimos em (1.54), tal como nos polinómios $U_n(x)$, o coeficiente principal dos polinómios $V_n(x)$ e $W_n(x)$ é determinado por 2^n com $n \in \mathbb{N}_0$, o que sugere que existe um estreito vínculo entre os polinómios $V_n(x)$, $W_n(x)$ e $U_n(x)$. De facto, se calcularmos a média aritmética entre as condições iniciais dos polinómios $V_n(x)$ e $W_n(x)$, obteremos as condições iniciais dos polinómios $U_n(x)$ a partir das quais podemos mostrar que a média entre $V_n(x)$ e $W_n(x)$ satisfaz a relação de recorrência 1.49.

Proposição 1.5.4. *Para $n \in \mathbb{N}_0$, temos que*

$$U_n(x) = \frac{V_n(x) + W_n(x)}{2}, n \geq 0. \quad (1.138)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
 U_n(x) &= \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} = \frac{\sin\{(n + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\}\theta}{\sin 2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \stackrel{\text{(B.4),(B.8)}}{=} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\theta \cos \frac{\theta}{2} + \cos(n + \frac{\theta}{2}) \sin \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} \\
 &= \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}} + \frac{\cos(n + \frac{1}{2})\theta}{2 \cos \frac{\theta}{2}} \stackrel{\text{(1.63),(1.64)}}{=} \frac{V_n(x) + W_n(x)}{2}, \quad n \geq 0.
 \end{aligned}$$

■

1.6 Polinómios de Chebyshev no intervalo $[0,1]$ e no intervalo $[a,b]$

Por vezes, em certas aplicações, não é o intervalo $[-1,1]$ que se utiliza, mas sim o intervalo $[0,1]$. Consideremos $x \in [0,1]$, $s \in [-1,1]$ e as transformações lineares que levam um intervalo no outro

$$s = 2x - 1 \iff x = \frac{1}{2}(s + 1) \quad (1.139)$$

e isso leva a um polinómio de Chebyshev deslocado de grau n em x no intervalo $[0, 1]$.

1.6.1 Polinómios da primeira espécie no intervalo $[0, 1]$

Definição 1.5. Os polinómios de Chebyshev da primeira espécie no intervalo $[0, 1]$, $T_n^*(x)$, são definidos a partir de (1.1), tendo em consideração a substituição (1.139), isto é,

$$T_n^*(x) = T_n(s) = T_n(2x - 1), x \in [0, 1], s \in [-1, 1]. \quad (1.140)$$

A partir de (1.140), podemos escrever os primeiros polinómios da primeira espécie no intervalo $[0, 1]$,

$$\begin{aligned} T_0(s) &= 1 & \implies T_0^*(x) &= 1 \\ T_1(s) &= s & \implies T_1^*(x) &= 2x - 1 \\ T_2(s) &= 2s^2 - 1 & \implies T_2^*(x) &= 2(2x - 1)^2 - 1 \\ & & &= 8x^2 - 8x + 1 \\ & & & \text{(C.5)} \\ T_3(s) &= 4s^3 - 3s & \implies T_3^*(x) &= 4(2x - 1)^3 - 3(2x - 1) \\ & & &= 32x^3 - 48x^2 + 18x - 1 \\ & & & \text{(C.5)} \end{aligned} \quad (1.141)$$

Os polinómios $T_n^*(x)$ possuem a seguinte propriedade que deriva das definições (1.1) e da definição (1.140)

$$T_{2n}(x) = \cos 2n\theta = \cos n(2\theta) = T_n(\cos 2\theta) \stackrel{(B.11)}{=} T_n(2\cos^2\theta - 1) = T_n(2x^2 - 1) = T_n^*(x^2)$$

Donde se chega a conclusão que:

$$T_{2n}(x) = T_n^*(x^2) \quad (1.142)$$

Comparando as fórmulas (1.8) e (1.141) sugerem claramente esta propriedade. Assim, $T_n^*(x)$ pode ser obtido a partir de $T_{2n}(\sqrt{x})$, um polinómio de Chebyshev com o dobro do grau na raiz quadrada do argumento e a relação (1.142) fornece uma forma importante de como relacionar as sucessões $\{T_n(x)\}_{n=0}^\infty$ e $\{T_n^*(x)\}_{n=0}^\infty$ que complementa a mudança de variável dada em (1.140).

Tal como foi feito para os polinómios $T_n(x)$, é possível definir os polinómios $T_n^*(x)$ a partir duma identidade trigonométrica.

Definição 1.6. Se combinarmos as igualdades (1.1) e (1.142) obteremos a definição trigonométrica dos polinómios de Chebyshev de primeira espécie em $[0, 1]$, que é dada por

$$T_n^*(x) = \cos 2n\theta, \quad x = \cos^2\theta, n \geq 0. \quad (1.143)$$

Proposição 1.6.1. Os polinómios de Chebyshev de primeira espécie no intervalo $[0, 1]$ satisfazem a seguinte relação de recorrência e condições iniciais

$$\begin{cases} T_0^*(x) = 1, & n = 0 \\ T_1^*(x) = 2x - 1, & n = 1 \\ T_n^*(x) = 2(2x - 1)T_{n-1}^*(x) - T_{n-2}^*(x), & n = 2, 3, \dots \end{cases}, \text{ com } x \in \mathbb{R}. \quad (1.144)$$

Demonstração. A partir de (1.10) e (1.139) pode-se deduzir a relação de recorrência dos polinómios de Chebyshev de primeira espécie no intervalo $[0, 1]$, isto é, basta substituir x por s na relação (1.10) teremos

$$\begin{cases} T_0(s) = 1 \\ T_1(s) = s \\ T_n(s) = 2sT_{n-1}(s) - T_{n-2}(s) \end{cases} \iff \begin{cases} T_0^*(x) = 1, & n = 0 \\ T_1^*(x) = 2x - 1, & n = 1 \\ T_n^*(x) = 2(2x - 1)T_{n-1}^*(x) - T_{n-2}^*(x), & n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

■

Polinómios de Chebyshev

Polinómios de Chebyshev em $[0,1]$ e em $[a,b]$

Estes polinómios não são simétricos, visto que $T_n^*(-x) \neq (-1)^n T_n^*(x)$.

Na Tabela 1.5 estão representados os gráficos dos primeiros polinómios de Chebyshev da primeira espécie no intervalo $[0, 1]$.

Tabela 1.5: Polinómios de Chebyshev de primeira espécie no intervalo $[0, 1]$

$T_0^*(x) = 1$	$T_1^*(x) = 2x - 1$	$T_2^*(x) = 8x^2 - 8x + 1$

Proposição 1.6.2. *O coeficiente do termo principal destes polinómios é dado pela fórmula*

$$a_n = 2^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.145)$$

Demonstração. Análoga à demonstração da proposição (1.16). ■

1.6.2 Polinómios de segunda espécie no intervalo $[0, 1]$

Definição 1.7. *Os polinómios da segunda espécie no intervalo $[0, 1]$, $U_n^*(x)$, são obtidos a partir de (1.38) e (1.139), isto é,*

$$U_n^*(x) = U_n(s) = U_n(2x - 1) \quad (1.146)$$

Assim, os primeiros polinómios da segunda espécie são os seguintes:

$$\begin{aligned}
 U_0(s) &= 1 & \implies & U_0^*(x) = 1 \\
 U_1(s) &= 2s & \implies & U_1^*(x) = 4x - 2 \\
 U_2(s) &= 4s^2 - 1 & \implies & U_2^*(x) = 4(2x - 1)^2 - 1 \\
 & & & \stackrel{(C.5)}{=} 16x^2 - 16x + 3 \\
 U_3(s) &= 8s^3 - 4s & \implies & U_3^*(x) = 8(2x - 1)^3 - 4s \\
 & & & \stackrel{(C.5)}{=} 64x^3 - 96x^2 + 40x - 4 \\
 & \dots & &
 \end{aligned} \quad (1.147)$$

Proposição 1.6.3. *Os polinómios de Chebyshev de segunda espécie no intervalo $[0, 1]$ satisfazem a seguinte relação de recorrência e condições iniciais*

$$\begin{cases} U_0^*(x) = 1, & n = 0 \\ U_1^*(x) = 4x - 2, & n = 1 \\ U_n^*(x) = 2(2x - 1)U_{n-1}^*(x) - U_{n-2}^*(x), & n = 2, 3, \dots \end{cases}, \text{ com } x \in \mathbb{R}. \quad (1.148)$$

Demonstração. Análoga à demonstração da proposição (1.144). ■

Na Tabela 1.6 estão representados os gráficos dos primeiros polinómios de Chebyshev de segunda espécie no intervalo $[0, 1]$.

Tabela 1.6: Polinómios de Chebyshev de segunda espécie no intervalo $[0, 1]$

$U_0^*(x) = 1$	$U_1^*(x) = 4x - 2$	$U_2^*(x) = 16x^2 - 16x + 3$

Proposição 1.6.4. De (1.38) e de (1.146) pode-se concluir que

$$U_{2n-1}(x) = 2xU_{n-1}^*(x^2). \quad (1.149)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
 \text{sen } \theta U_{2n-1}(x) &= \text{sen } 2n\theta \\
 \iff \text{sen } \theta U_{2n-1}(x) &= \text{sen } n(2\theta) \\
 \iff \text{sen } \theta U_{2n-1}(x) &= \text{sen } 2\theta U_{n-1}(\cos 2\theta) \\
 \iff \text{sen } \theta U_{2n-1}(x) &= 2 \text{sen } \theta \cos \theta U_{n-1}(2 \cos^2 \theta - 1) \\
 \iff \text{sen } \theta U_{2n-1}(x) &= \text{sen } \theta [2 \cos \theta U_{n-1}(2 \cos^2 \theta - 1)] \\
 \iff \text{sen } \theta U_{2n-1}(x) &= \text{sen } \theta [2x U_{n-1}(2x^2 - 1)] \\
 \implies U_{2n-1}(x) &= 2x U_{n-1}^*(x^2).
 \end{aligned}$$

■

1.6.3 Polinómios de terceira e quarta espécies no intervalo $[0, 1]$

Definição 1.8. Os polinómios de terceira espécie no intervalo $[0, 1]$, $V_n^*(x)$, são obtidos a partir de (1.63) e (1.139), isto é,

$$V_n^*(x) = V_n(s) = V_n(2x - 1) \quad (1.150)$$

Assim, os primeiros polinómios da terceira espécie são os seguintes:

$$\begin{aligned}
 V_0(s) &= 1 & \implies V_0^*(x) &= 1 \\
 V_1(s) &= 2s - 1 & \implies V_1^*(x) &= 4x - 3 \\
 V_2(s) &= 4s^2 - 2s - 1 & \implies V_2^*(x) &= 4(2x - 1)^2 - 2(2x - 1) - 1 \\
 & & &= 16x^2 - 20x + 5 \\
 & & & \text{(C.5)} \\
 V_3(s) &= 8s^3 - 4s^2 - 4s + 1 & \implies V_3^*(x) &= 8(2x - 1)^3 - 4(2x - 1)^2 - 4(2x - 1) - 1 \\
 & & &= 64x^3 - 112x^2 + 56x - 8 \\
 & & & \text{(C.5)} \\
 &\dots & &
 \end{aligned} \quad (1.151)$$

Na Tabela 1.7 estão representados os gráficos dos primeiros polinómios de Chebyshev de segunda espécie no intervalo $[0, 1]$.

Tabela 1.7: Polinómios de Chebyshev de terceira espécie no intervalo $[0,1]$

$V_1^*(x) = 4x - 3$	$V_2^*(x) = 16x^2 - 20x + 5$	$V_3^*(x) = 64x^3 - 112x^2 + 56x - 8$

As relações correspondentes para V_n^* e W_n^* são ligeiramente diferentes dos casos (1.142) e (1.149) envolvendo $T_{2n-1}(x)$ e $U_{2n}(x)$. Usando a variável $u = \cos \frac{\theta}{2}$ introduzida em (1.131), (1.134) e (1.150) teremos para a terceira espécie

$$V_{n-1}^*(u^2) \underset{(1.150)}{=} V_{n-1}(2u^2 - 1) \underset{(1.134)}{=} V_{n-1}(x) = u^{-1}T_{2n-1}(u),$$

substituindo u por x teremos

$$T_{2n-1}(x) = xV_{n-1}^*(x^2). \quad (1.152)$$

Definição 1.9. Os polinómios de quarta espécie, $W_n^*(x)$, são obtidos a partir de (1.64) e (1.139), isto é,

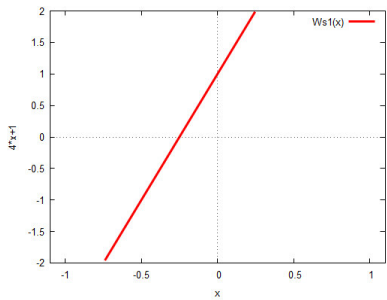
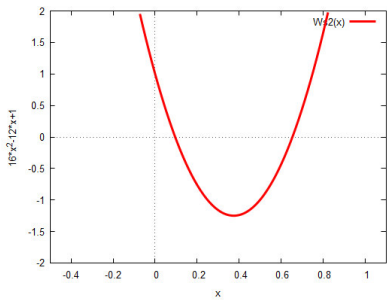
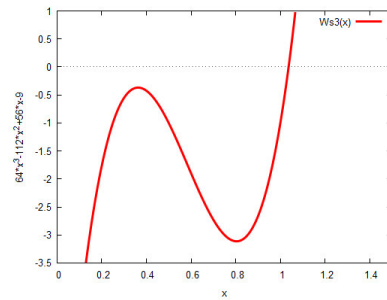
$$W_n^*(x) = W_n(s) = W_n(2x - 1) \quad (1.153)$$

Assim, os primeiros polinómios de quarta espécie são os seguintes:

$$\begin{aligned}
 W_0(s) &= 1 & \implies W_0^*(x) &= 1 \\
 W_1(s) &= 2s + 1 & \implies W_1^*(x) &= 4x - 1 \\
 W_2(s) &= 4s^2 + 2s - 1 & \implies W_2^*(x) &= 4(2x - 1)^2 + 2(2x - 1) - 1 \\
 & & &= 16x^2 - 12x + 1 \\
 W_3(s) &= 8s^3 - 4s^2 - 4s - 1 & \implies W_3^*(x) &= 8(2x - 1)^3 - 4(2x - 1)^2 \\
 & & &\quad - 4(2x - 1) - 1 \\
 & & &\underset{(C.5)}{=} 64x^3 - 112x^2 + 56x - 9 \\
 & \dots & &
 \end{aligned} \quad (1.154)$$

Na Tabela 1.8 estão representados os gráficos dos primeiros polinómios de Chebyshev da segunda espécie no intervalo $[0,1]$.

Tabela 1.8: Polinómios de Chebyshev de quarta espécie no intervalo $[0, 1]$

		
$W_1^*(x) = 4x + 1$	$W_2^*(x) = 16x^2 - 12x + 1$	$W_3^*(x) = 64x^3 - 112x^2 + 56x - 9$

Usando as relações dadas em (1.131), (1.134) e (1.153) teremos para a quarta espécie

$$W_{n-1}^*(u^2) = W_{n-1}(2u^2 - 1) = W_{n-1}(x) = U_{2n}(u)$$

substituindo u por x teremos

$$U_{2n}(x) = W_n^*(x^2). \quad (1.155)$$

1.6.4 Polinómios de Chebyshev definidos num intervalo $[a,b]$

Em geral, podemos definir os polinómios de Chebyshev em qualquer intervalo finito $[a, b]$ na variável x , fazendo que este intervalo corresponda ao intervalo $[-1, 1]$ de uma nova variável s sob a transformação linear

$$s = \frac{2x - (a + b)}{b - a} \iff x = \frac{s(b - a) + (a + b)}{2}, \quad x \in [a, b], \quad s \in [-1, 1]. \quad (1.156)$$

Capítulo 2

Aproximação Minimax

Neste capítulo apresentamos os principais resultados teóricos da Teoria da *Aproximação Minimax*. Dentre esses resultados, merecem particular destaque o *Teorema fundamental da Teoria da Aproximação*, conhecido como *Teorema de Weierstrass*, o *Teorema da alternância para polinômios algébricos*, o *Teorema da alternância para polinômios trigonométricos* e a *propriedade da alternância para os polinômios de Chebyshev da primeira espécie*, não nos foi possível apresentar as demonstrações destes teoremas mas elas podem ser encontradas em [1] ou em obras nele citadas. Duma forma geral, o conteúdo deste capítulo foi extraído do livro [1].

2.1 Considerações gerais

Uma das áreas em que os polinômios de Chebyshev têm um papel fundamental é a *aproximação minimax de funções por polinômios*. Vamos inicialmente nos concentrar na definição da estrutura da função objeto da aproximação e apresentar alguns resultados teóricos essenciais, dando particularmente atenção à ***aproximação uniforme*** (ou $\mathcal{L}_\infty$) e introdução a propriedade minimax dos polinômios de Chebyshev.

É muito útil poder substituir qualquer função dada por uma função simples, como um polinômio, escolhido para ter valores não idênticos, mas muito próximo dos da função dada, uma vez que tal *aproximação* pode não só ser mais compacta para representar e armazenar valores, mas também mais eficiente para avaliar ou manipular.

A estrutura de um *problema de aproximação* apresenta três componentes principais:

1. Uma classe de funções que contém a função a ser aproximada;
2. Uma forma para a função aproximante e
3. Uma norma (do erro de aproximação), em termos de qual o problema pode ser formalmente apresentado.

O trabalho do especialista em aproximações é de fazer uma selecção dessas componentes que seja adequada ao problema de aproximação proposto de modo que o consiga resolver.

Definição 2.1. *Chama-se classe de funções a uma família restrita $\mathcal{F}$ de funções $f(x)$ que apresentam uma determinada característica comum.*

Vamos usar as seguintes classes de funções definidas no intervalo $[a, b]$:

1. $\mathcal{C}[a, b]$ - classe das funções contínuas no intervalo $[a, b]$;

2. $\mathcal{L}_2[a, b]$ - classe das funções de quadrado integrável no intervalo $[a, b]$, isto é,

$$\mathcal{L}_2[a, b] = \left\{ h(x) : [a, b] \mapsto \mathbb{R} : \int_a^b h^2(x) dx < +\infty \right\} \quad (2.1)$$

esta classe é um caso particular da classe $\mathcal{L}_p$, isto quando $p = 2$.

Apesar de estarmos interessados apenas numa função específica, a que pretendemos aproximar, definimos estas classes de funções porque isso nos ajuda a isolar as propriedades da função que são relevantes para o nosso estudo, para além de existir uma estreita ligação entre a classe de função em que trabalhamos e as normas que podemos usar. Em particular, ao colocar as funções em uma das famílias acima apresentadas, assumimos implicitamente que não nos importaremos com o comportamento das funções nem desejamos aproxima-las fora do intervalo $[a, b]$ dado.

Definição 2.2. *Chama-se forma de aproximação a uma forma funcional específica que será adoptada, que inclui os coeficientes indeterminados ou outros parâmetros.*

Neste trabalho, salvo em casos específicos, as aproximações terão a forma polinomial com grau n cuja forma geral é dada por

$$f^*(x) = p_n(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0, \quad (2.2)$$

onde $c_n, \dots, c_0$ com $c_n \neq 0$ são os coeficientes a determinar.

Definição 2.3. *Seja V um espaço vectorial. Sejam u e v do espaço vectorial V . Chama-se norma, e representa-se por $\|\cdot\|$, a qualquer função escalar real definida em $\mathcal{V}$, que satisfaça as seguintes propriedades:*

1. $\forall u \in V, \|u\| \geq 0$ e $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$,
2. $\forall u, v, \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ e
3. $\forall a \in \mathbb{R}$ e $\forall u, \|au\| = |a|\|u\|$.

As principais normas das classes de funções anteriormente mencionadas são as seguintes:

1. $\mathcal{L}_\infty$ que também é chamada *norma uniforme, norma minimax ou norma de Chebyshev* que é definida como

$$\|f\| = \|f\|_\infty = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|; \quad (2.3)$$

2. Norma Euclidiana:

$$\|f(x)\| = \|f(x)\|_2 \stackrel{(3.7)}{=} \sqrt{\int_a^b f^2(x) w(x) dx}, \quad (2.4)$$

onde $w(x)$ é uma função contínua e não negativa definida no intervalo $[a, b]$, integrável à Lebesgue neste intervalo e $\int_a^b w(x) dx > 0$

2.2 O problema da aproximação

Na secção anterior definimos *classe de funções* $\mathcal{F}$, *forma de aproximação* e uma medida $\|f(x) - f^*(x)\|$ que determina a proximidade de $f^*(x)$ em relação a $f(x)$ definida em $\mathcal{F}$. Então, como é que podemos julgar com precisão a qualidade de $f^*(x)$, como aproximante de $f(x)$ em termos da norma?

Definição 2.4. *Seja $\mathcal{F}$ um espaço linear normado. Seja dado $f(x)$ em $\mathcal{F}$ e seja $\mathcal{A}$ um sub-espaço de $\mathcal{F}$.*

1. *Uma aproximação $f^*(x)$ em $\mathcal{A}$ é considerada aceitável se*

$$\|f(x) - f^*(x)\| < \varepsilon \quad (2.5)$$

onde ε é a precisão.

2. *Uma aproximação $f_B^*(x)$ é considerada melhor aproximação em relação a qualquer outra aproximação $f^*(x)$ se*

$$\|f(x) - f_B^*(x)\| < \|f(x) - f^*(x)\| \quad (2.6)$$

ou

$$\left\| 1 - \frac{f_B^*(x)}{f(x)} \right\| \leq \varepsilon. \quad (2.7)$$

Note que às vezes haverá mais de uma melhor aproximação para a mesma função $f(x)$ dada.

3. *Uma aproximação $f_N^*(x)$ é considerada quase-melhor aproximação em relação a uma distância ρ se*

$$\|f(x) - f_N^*(x)\| < (1 + \rho) \|f(x) - f_B^*(x)\| \quad (2.8)$$

onde ρ é um valor real positivo e $f_B^(x)$ é melhor aproximação de $f(x)$.*

*Se a norma a usar for $\mathcal{L}_\infty$, no lugar de melhor ou quase-melhor, usaremos a terminologia **minimax** ou **quase-minimax**, respectivamente.*

Um problema de aproximação consiste em determinar uma aproximação de um destes tipos. No entanto, exige-se que a aproximação seja aceitável e melhor ou aceitável e quase melhor, uma vez que não é útil encontrar uma melhor aproximação se também for muito pobre.

A expressão (2.7) pode ser vista como um problema de aproximação ponderada, onde $w(x) = \frac{1}{|f(x)|}$.

Teorema 2.1 (De Weierstrass¹). *Dada uma função $f(x)$ pertencente a $\mathcal{C}[a, b]$, e para qualquer $\varepsilon > 0$ dado, existe sempre, pelo menos, um polinómio aproximador $p_n(x)$ de grau suficientemente grande, tal que*

$$\|f(x) - p_n(x)\| < \varepsilon. \quad (2.9)$$

¹Karl Wilhelm Theodor Weierstrass, foi um matemático Alemão que viveu entre os anos de 1815 e 1897, o seu trabalho forneceu as bases para a teoria das funções analíticas e foi o pioneiro da Análise Matemática moderna.

2.3 Melhor aproximação e aproximação minimax

Definição 2.5. Dada uma norma, a **melhor aproximação** será dada pela solução do seguinte problema de minimização

$$\min_{f^*(x) \in \mathcal{A}} \|f(x) - f^*(x)\|. \quad (2.10)$$

No caso da aproximação polinomial de grau menor ou igual a n , como é o nosso caso, a expressão (2.10) será escrita como

$$\min_{c_0, c_1, \dots, c_n} \|f(x) - p_n(x)\|. \quad (2.11)$$

onde

$$p_n(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n.$$

Teorema 2.2. Para qualquer $p \in [1, \infty[$ existe um único polinómio $p_n(x)$ aproximante da função $f(x) \in \mathcal{L}_p[a, b]$ na norma $\mathcal{L}_p$, onde $w(x)$ é a função peso associada ao integral em $\mathcal{L}_p$, considerada unitária quando $p \rightarrow \infty$.

Teorema 2.3 (Teorema da alternância para polinómios algébricos). Para qualquer função $f(x)$ pertencente a $\mathcal{C}[a, b]$, existe uma única aproximação polinomial minimax $p_n(x)$ que é caracterizada pela propriedade da **alternância** (ou equioscilação) em pelo menos $n + 2$ pontos no intervalo $[a, b]$ nos quais $|f(x) - p_n(x)|$ atinge o seu valor máximo, tomando $|f(x) - p_n(x)|$ sinais alternados nesses pontos.

Este teorema, que muitas vezes é atribuído à Chebyshev mas, que na verdade, pertence à Borel², afirma que, para $p_n(x)$ ser melhor aproximação é necessário e suficiente que a propriedade da equioscilação se mantenha e que apenas um polinómio que tenha essa propriedade será uma melhor aproximação.

Como exemplo da aplicação do Teorema 2.3, vamos supor que a função $f(x) = x^2$ foi aproximada pela função linear

$$f^*(x) = p_1(x) = x - 0.125 \quad (2.12)$$

no intervalo $[0, 1]$. Então o erro absoluto será dado por

$$\Delta_{f(x)} = x^2 - x + 0.125$$

e atinge o máximo absoluto de 0.125 nos pontos $x = 0$, $x = 0.5$ e $x = 1$. nesses pontos a função assume alternadamente os valores +0.125, -0.125 e +0.125.

Teorema 2.4 (Teorema da alternância para polinómios trigonométricos). Seja $\mathcal{C}_{2\pi}^0$ o espaço das funções contínuas com período 2π . Seja

$$q(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) \quad (2.13)$$

no intervalo $[a, b]$.

Para qualquer função $f(\theta)$ definida em $\mathcal{C}_{2\pi}^0$, o polinómio aproximador $q(\theta)$ da forma (2.13) existe e é caracterizado pela propriedade da alternância em $2n + 2$ pontos para $[-\pi, \pi]$. Se $b_1, \dots, b_n$ (ou $b_1, \dots, b_n$) forem todos iguais a zero, então $q(\theta)$ será uma soma de cossenos ou senos, respectivamente. Se $f(\theta)$ for uma função par (ou ímpar) então a aproximação minimax $q(\theta)$ será caracterizada pela propriedade da alternância em $n + 2$ (ou respectivamente $n + 1$) pontos de $[0, \pi]$.

²Félix Édouard Justin Émile Borel, foi um político e matemático francês que viveu entre os anos 1871 e 1956. Como matemático, ele é reconhecido pelos trabalhos efectuados na Teoria de medida e sua aplicação à Teoria de Probabilidades.

2.4 Propriedade minimax dos polinómios de Chebyshev

Da Proposição 1.1.5 sabemos que os polinómios de Chebyshev $T_n(x)$ admitem $n+1$ extremantes que são determinados pela fórmula (1.25)

Lema 2.5 (Propriedade da equioscilação para $T_n(x)$). *A família $T_n(x)$ atinge no intervalo $[-1, 1]$ o seu valor máximo igual a um, isto é, $\max_{x \in [-1, 1]} |f(x)| = 1$, com sinais alterados, precisamente em $n+1$ pontos, nomeadamente nos pontos dados por 1.25.*

Corolário 2.6 (Do Teorema (2.3)). *A aproximação polinomial minimax de grau $n-1$ da função $f(x) = x^n$ no intervalo $[-1, 1]$ é dada por*

$$p_{n-1}(x) = x^n - 2^{1-n}T_n(x). \quad (2.14)$$

Corolário 2.7 (Propriedade minimax de $T_n(x)$). *$2^{1-n}T_n(x)$ é a aproximação minimax no intervalo $[-1, 1]$ para a função zero por um polinómio mónico de grau n .*

2.5 Polinómios de Chebyshev ponderados de segunda, terceira e quarta espécies

Vimos que a propriedade minimax de $T_n(x)$ depende da propriedade da alternância de $\cos n\theta$. No entanto, a propriedade da alternância mantém-se em $n+1$ pontos θ , com $\theta \in [0, \pi]$, para cada um dos polinómios trigonométricos

$$\begin{aligned} \sin(n+1)\theta, \quad \theta &= \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi}{n+1}, \quad k = 0, 1, \dots, n; \\ \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta, \quad \theta &= \frac{k\pi}{n + \frac{1}{2}}, \quad k = 0, 1, \dots, n; \\ \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta, \quad \theta &= \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi}{n + \frac{1}{2}}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Portanto, a partir das Definições 1.1, 1.3 e 1.4 as seguintes propriedades podem ser prontamente deduzidas.

Corolário 2.8 (do Teorema 2.4). *As aproximações minimax a zero no intervalo $[1, 1]$, por polinómios mónicos de grau n ponderados, respectivamente, por $\sqrt{1-x^2}$, $\sqrt{1+x}$ e $\sqrt{1-x}$ são dados por*

$$2^{-n}U_n(x), \quad 2^{-n}V_n(x) \text{ e } 2^{-n}W_n(x). \quad (2.15)$$

Capítulo 3

Funções Geradoras, Ortogonalidade, Aproximação $\mathcal{L}_2$ e Séries de Chebyshev

Neste capítulo, utilizando a relação recursiva dos polinómios de Chebyshev e um método descrito em [5], deduzimos as fórmulas fechadas das funções geradoras para as famílias de todas espécies destes polinómios. Apresentamos os resultados sobre a ortogonalidade destes polinómios relativamente a um produto interno definido a custa dum integral com função peso contínua e não negativa. Seguidamente apresentamos o desenvolvimento da *função sinal* em série de polinómios de Chebyshev de todas as espécies. Efectuamos, também, a representação gráfica das somas parciais destas séries e efectuamos algumas comparações.

A referência base deste capítulo é [1] mas a técnica usada na secção 3.1, foi tirada de [5]. No artigo em causa, esta técnica foi usada para encontrar funções geradoras para outros tipos de polinómios ortogonais.

3.1 Funções geradoras

Definição 3.1. *Chama-se função geradora de uma sucessão de polinómios $\{P_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, onde $P_k(x)$ tem grau k , a uma função f que satisfaz*

$$f(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x) t^k. \quad (3.1)$$

3.1.1 Função geradora dos polinômios de Chebyshev de primeira espécie

Consideremos a relação de recorrência dada em (1.10). Multiplicando ambos os membros desta por t^k e somando para $n \geq 2$, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=2}^{\infty} T_k(x)t^k &= 2x \sum_{k=2}^{\infty} T_{k-1}(x)t^k - \sum_{k=2}^{\infty} T_{k-2}(x)t^k \\
 \iff \sum_{k=2}^{\infty} T_k(x)t^k &= 2xt \sum_{k=2}^{\infty} T_{k-1}(x)t^{k-1} - t^2 \sum_{k=2}^{\infty} T_{k-2}(x)t^{k-2} \\
 \iff \sum_{k=2}^{\infty} T_k(x)t^k &= 2xt \sum_{k=1}^{\infty} T_k(x)t^k - t^2 \sum_{k=0}^{\infty} T_k(x)t^k \\
 \iff \sum_{k=0}^{\infty} T_k(x)t^k - T_0(x) - T_1(x)t &\stackrel{(3.1)}{=} 2xt \left[\sum_{k=0}^{\infty} T_k(x)t^k - T_0(x) \right] - t^2 \sum_{k=0}^{\infty} T_k(x)t^k \\
 \iff f(x, t) - T_0(x) - T_1(x)t &= 2xtf(x, t) - 2xt - t^2f(x, t) \\
 \iff f(x, t) - 2xtf(x, t) + t^2f(x, t) &= 1 - 2xt + xt \\
 \iff (1 - 2xt + t^2)f(x, t) &= 1 - xt
 \end{aligned}$$

Assim, a função geradora dos polinômios de Chebyshev de primeira espécie é dada por

$$f(x, t) = \frac{1 - xt}{1 - 2xt + t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(x)t^k. \quad (3.2)$$

3.1.2 Função geradora dos polinômios de Chebyshev de segunda espécie

Consideremos a relação de recorrência dada em (1.49). Multiplicando ambos os membros desta por t^k e somando para $n \geq 2$, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=2}^{\infty} U_k(x)t^k &= 2x \sum_{k=2}^{\infty} U_{k-1}(x)t^k - \sum_{k=2}^{\infty} U_{k-2}(x)t^k \\
 \iff \sum_{k=2}^{\infty} U_k(x)t^k &= 2xt \sum_{k=2}^{\infty} U_{k-1}(x)t^{k-1} - t^2 \sum_{k=2}^{\infty} U_{k-2}(x)t^{k-2} \\
 \iff \sum_{k=2}^{\infty} U_k(x)t^k &= 2xt \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x)t^k - t^2 \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x)t^k \\
 \iff \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x)t^k - U_0(x) - U_1(x)t &\stackrel{(3.1)}{=} 2xt \left[\sum_{k=0}^{\infty} U_k(x)t^k - U_0(x) \right] - t^2 \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x)t^k \\
 \iff f(x, t) - U_0(x) - U_1(x)t &= 2xtf(x, t) - 2xt - t^2f(x, t) \\
 \iff f(x, t) - 2xtf(x, t) + t^2f(x, t) &= 1 - 2xt + 2xt \\
 \iff (1 - 2xt + t^2)f(x, t) &= 1
 \end{aligned}$$

Assim, a função geradora para os polinômios de Chebyshev de segunda espécie é dada por:

$$f(x, t) = \frac{1}{1 - 2xt + t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x)t^k. \quad (3.3)$$

3.1.3 Função geradora dos polinômios de Chebyshev de terceira espécie

Consideremos a relação de recorrência dada em 1.81. Multiplicando ambos os membros desta igualdade por t^k e somando para $k \geq 2$, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=2}^{\infty} V_k(x)t^k &= 2x \sum_{k=2}^{\infty} V_{k-1}(x)t^k - \sum_{k=2}^{\infty} V_{k-2}(x)t^k \\
 \iff \sum_{k=2}^{\infty} V_k(x)t^k &= 2xt \sum_{k=2}^{\infty} V_{k-1}(x)t^{k-1} - t^2 \sum_{k=2}^{\infty} V_{k-2}(x)t^{k-2} \\
 \iff \sum_{k=2}^{\infty} V_k(x)t^k &= 2xt \sum_{k=1}^{\infty} V_k(x)t^k - t^2 \sum_{k=0}^{\infty} V_k(x)t^k \\
 \iff \sum_{k=0}^{\infty} V_k(x)t^k - V_1(x)t - V_0(x) &\stackrel{(3.1)}{=} 2xt \left[\sum_{k=0}^{\infty} V_k(x)t^k - V_0(x) \right] - t^2 \sum_{k=0}^{\infty} V_k(x)t^k \\
 \iff f(x, t) &= (2xt - t^2)f(x, t) - 2xt + (2x - 1)t + 1
 \end{aligned}$$

Então a função geradora para os polinômios de Chebyshev de terceira espécie é dada por

$$f(x, t) = \frac{1 - t}{1 - 2xt + t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} V_k(x)t^k. \quad (3.4)$$

3.1.4 Função geradora dos polinômios de Chebyshev de quarta espécie

Consideremos a definição de recorrência dada em 1.85. Multiplicando ambos os membros desta igualdade por t^k e somando para $k \geq 2$, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=2}^{\infty} W_k(x)t^k &= 2x \sum_{k=2}^{\infty} W_{k-1}(x)t^k - \sum_{k=2}^{\infty} W_{k-2}(x)t^k \\
 \iff \sum_{k=2}^{\infty} W_k(x)t^k &= 2xt \sum_{k=2}^{\infty} W_{k-1}(x)t^{k-1} - t^2 \sum_{k=2}^{\infty} W_{k-2}(x)t^{k-2} \\
 \iff \sum_{k=2}^{\infty} W_k(x)t^k &= 2xt \sum_{k=1}^{\infty} W_k(x)t^k - t^2 \sum_{k=0}^{\infty} W_k(x)t^k \\
 \iff \sum_{k=0}^{\infty} W_k(x)t^k &\stackrel{(3.1)}{=} 2xt \left[\sum_{k=0}^{\infty} W_k(x)t^k - W_0(x) \right] - t^2 \sum_{k=0}^{\infty} W_k(x)t^k + W_1(x)t + W_0(x) \\
 \iff f(x, t) &= (2xt - t^2)f(x, t) - 2xt + (2x + 1)t + 1.
 \end{aligned}$$

Então a função geradora para os polinômios de Chebyshev de quarta espécie é dada por:

$$f(x, t) = \frac{1 + t}{1 - 2xt + t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} W_k(x)t^k. \quad (3.5)$$

3.2 Ortogonalidade

3.2.1 Representação integral e função peso

Definição 3.2. *Seja E um espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{K}$, em que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Consideremos três elementos, x , y e z , do espaço E .*

Chama-se produto interno a função $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \mapsto \mathbb{K}$, que satisfaz as seguintes propriedades:

- $\langle x, x \rangle \geq 0$ e $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (**Positividade**)
- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (**Comutatividade**)
- $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ (**Homogeneidade**)
- $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ (**Aditividade**).

Definição 3.3. *Chama-se função peso, e representa-se por w , a uma função não negativa, definida e contínua no intervalo $[a, b]$, que é integrável à Lebesgue e*

$$\int_a^b w(x) dx > 0.$$

No contexto das funções reais de variável real, o produto interno pode ser definido a custa dum integral que depende duma função peso.

Definição 3.4. *Seja E um espaço vectorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções reais ou complexas definidas em E , então, o produto interno dessas funções será dado por*

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x) dx \quad (3.6)$$

Pode-se demonstrar que (3.6) satisfaz os axiomas do produto interno apresentados na Definição 3.2. A norma Euclidiana, dada em (2.4), é uma norma definida a partir do produto interno (3.6) através da identidade:

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f(x), f(x) \rangle} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)w(x) dx}. \quad (3.7)$$

Definição 3.5. *Duas funções, $f(x)$ e $g(x)$, definidas no espaço das funções contínuas de quadrado integrável no intervalo $[a, b]$, isto é, $f(x), g(x) \in L_2[a, b]$, são ortogonais no intervalo $[a, b]$ em relação a uma função peso, se e somente se:*

$$\langle f(x), g(x) \rangle = 0. \quad (3.8)$$

Vamos-nos concentrar nas famílias dos polinómios ortogonais $\{P_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$, onde $P_i(x)$ tem exactamente grau i , que satisfazem

$$\langle P_i(x), P_j(x) \rangle = 0, \quad i \neq j. \quad (3.9)$$

Como a função $w(x)$ é não negativa, então

$$\langle P_i(x), P_i(x) \rangle = \|P_i(x)\|^2 > 0. \quad (3.10)$$

Em particular, diremos que a família é ortonormal se:

$$\begin{cases} \langle P_i(x), P_i(x) \rangle &= 1, & i = j \\ \langle P_i(x), P_j(x) \rangle &= 0, & i \neq j \end{cases}. \quad (3.11)$$

3.2.2 Ortogonalidade dos polinômios de Chebyshev

Proposição 3.2.1. *A família dos polinômios de Chebyshev de primeira espécie é ortogonal no intervalo $[-1, 1]$ em relação à função peso $w(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$, isto é,*

$$\langle T_i(x), T_j(x) \rangle = \int_{-1}^1 T_i(x) T_j(x) (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = 0, \quad i \neq j. \quad (3.12)$$

Demonstração. Se considerarmos que $x = \cos \theta \implies dx = -\sin \theta d\theta$ e se usarmos a definição $T_i(x) = \cos i\theta$ e atendendo que $x = -1 \implies \theta = \pi$, $x = 1 \implies \theta = 0$, para $i \neq j$, teremos

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{T_i(x) T_j(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx &= \int_{\pi}^0 \frac{\cos i\theta \cos j\theta}{\sin \theta} (-\sin \theta) d\theta = \int_0^{\pi} \frac{\cos i\theta \cos j\theta}{\sin \theta} \sin \theta d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \cos i\theta \cos j\theta d\theta \stackrel{(B.16)}{=} \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\cos(i+j)\theta + \cos(i-j)\theta] d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(i+j)\theta}{i+j} + \frac{\sin(i-j)\theta}{i-j} \right] \Big|_0^{\pi} = 0, \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Consequentemente,

$$\langle T_i(x), T_j(x) \rangle = 0, \quad i \neq j. \quad (3.14)$$

Se $i = j$, teremos

$$\begin{aligned} \|T_i\|^2 &= \langle T_i(x), T_i(x) \rangle = \int_0^{\pi} (\cos i\theta)^2 d\theta \\ &\stackrel{(B.13)}{=} \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos 2i\theta) d\theta = \frac{1}{2} \left[\theta + \frac{\sin 2i\theta}{2i} \right] \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2} \pi, \quad i > 0 \end{aligned}$$

A norma dos polinômios $T_i(x)$, para $i > 0$, é dada pela fórmula

$$\|T_i(x)\|^2 = \frac{\pi}{2}, \quad (3.15)$$

e para $i = 0$ temos

$$\|T_0(x)\|^2 = \langle T_0(x), T_0(x) \rangle = \int_0^{\pi} d\theta = \pi. \quad (3.16)$$

■

A segunda, a terceira e a quarta famílias de polinômios de Chebyshev também formam sistemas ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ em relação a funções pesos apropriadas. Assim, usando certas identidades trigonométricas teremos:

Proposição 3.2.2. *A família dos polinômios de Chebyshev de segunda espécie, $\{U_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ é ortogonal no intervalo $[-1, 1]$ com respeito à função peso $w(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned} \langle U_i(x), U_j(x) \rangle &= \int_{-1}^1 U_i(x) U_j(x) (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \int_{-1}^1 (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} U_i(x) (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} U_j(x) dx \end{aligned} \quad (3.17)$$

Sabendo que $x = \cos \theta$ então

$$\left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} \underset{(B.2)}{=} \left(\sin^2 \theta\right)^{\frac{1}{2}} = \sin \theta$$

e que

$$U_i(x) = \frac{\sin(i+1)\theta}{\sin \theta} \implies \sin \theta U_i(x) = \sin(i+1)\theta.$$

Assim o integral dado em (3.17) fica

$$\begin{aligned} \langle U_i(x), U_j(x) \rangle &= \int_0^\pi \frac{\sin \theta U_i(x) \sin \theta U_j(x)}{\sin \theta} \sin \theta d\theta = \int_0^\pi \sin(i+1)\theta \sin(j+1)\theta d\theta \\ &\underset{(B.17)}{=} \frac{1}{2} \int_0^\pi [\cos(i-j)\theta - \cos(i+j+2)\theta] d\theta = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(i-j)\theta}{i-j} - \frac{\sin(i+j+2)\theta}{i+j+2} \right] \Big|_0^\pi \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Se na fórmula (3.18) considerarmos que $j = i$ teremos

$$\begin{aligned} \|U_i(x)\|^2 &= \langle U_i(x), U_i(x) \rangle = \int_0^\pi \sin^2(i+1)\theta d\theta \\ &\underset{(B.14)}{=} \frac{1}{2} \int_0^\pi [1 - \cos 2(i+1)\theta] d\theta = \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{\sin 2(i+1)\theta}{2(i+1)} \right] \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Logo, para $i = j$ temos

$$\|U_i(x)\|^2 = \frac{\pi}{2}. \tag{3.19}$$

■

Proposição 3.2.3. *A família dos polinómios de Chebyshev de terceira espécie, $\{V_i(x)\}_0^\infty$, é ortogonal no intervalo $[-1, 1]$ com respeito a função peso $w(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned} \langle V_i(x), V_j(x) \rangle &= \int_{-1}^1 (1+x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}} V_i(x) V_j(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{(1-x)^{-\frac{1}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}} V_i(x) (1+x)^{\frac{1}{2}} V_j(x)}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} dx \\ &= \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (1+x)^{\frac{1}{2}} V_i(x) (1+x)^{\frac{1}{2}} V_j(x) dx \end{aligned} \tag{3.20}$$

Considerando que $x = \cos \theta$ então

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = (1+\cos \theta)^{\frac{1}{2}} \underset{(B.23)}{=} \left(2 \cos^2 \frac{1}{2}\theta\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \cos \frac{1}{2}\theta$$

e $dx = -\sin \theta d\theta$, bem como

$$V_i(x) = \frac{\cos(i+\frac{1}{2})\theta}{\cos \frac{1}{2}\theta} \implies \cos \frac{1}{2}\theta V_i(x) = \cos\left(i+\frac{1}{2}\right)\theta.$$

Deste modo, de (3.18), obtemos:

$$\begin{aligned}
 \langle V_i(x), V_j(x) \rangle &= 2 \int_0^\pi \cos\left(i + \frac{1}{2}\right) \theta \cos\left(j + \frac{1}{2}\right) \theta \, d\theta \\
 &= \int_0^\pi [\cos(i+j+1)\theta + \cos(i-j)\theta] \, d\theta \\
 &= \left[\frac{\sin(i+j+1)\theta}{i+j+1} + \frac{\sin(i-j)\theta}{i-j} \right] \Big|_0^\pi = 0, \quad i \neq j.
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Se na fórmula (3.21) considerarmos que $j = i$, teremos

$$\begin{aligned}
 \|V_i(x)\|^2 &= \langle V_i(x), V_i(x) \rangle = 2 \int_0^\pi \cos^2\left(i + \frac{1}{2}\right) \theta \, d\theta \\
 &\stackrel{(B.13)}{=} \int_0^\pi \left[1 + \cos 2\left(i + \frac{1}{2}\right) \theta \right] \, d\theta = \left[\theta + \frac{\sin 2\left(i + \frac{1}{2}\right) \theta}{2\left(i + \frac{1}{2}\right)} \right] \Big|_0^\pi = \pi.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\|V_i(x)\|^2 = \pi \tag{3.22}$$

■

Proposição 3.2.4. *A família dos polinómios de Chebyshev de quarta espécie, $\{W_i(x)\}_0^\infty$, é ortogonal no intervalo $[-1, 1]$ com respeito a função peso $w(x) = (1+x)^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned}
 \langle W_i, W_j \rangle &= \int_{-1}^1 (1+x)^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}} W_i(x) W_j(x) \, dx \\
 &= \int_{-1}^1 \frac{(1+x)^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}} W_i(x) (1-x)^{\frac{1}{2}} W_j(x)}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} \, dx \\
 &= \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}} W_i(x) (1-x)^{\frac{1}{2}} W_j(x) \, dx
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Note que

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = (1-\cos\theta)^{\frac{1}{2}} \stackrel{(B.14)}{=} \left(2 \sin^2 \frac{1}{2} \theta \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \sin \frac{1}{2} \theta$$

então

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} W_i(x) = \sqrt{2} \sin \frac{\theta}{2} W_i(x) = \sqrt{2} \sin\left(i + \frac{1}{2}\right) \theta.$$

Deste modo, de (3.23) temos:

$$\begin{aligned}
 \langle W_i, W_j \rangle &= 2 \int_0^\pi \sin\left(i + \frac{1}{2}\right) \theta \sin\left(j + \frac{1}{2}\right) \theta \, d\theta \\
 &\stackrel{(B.17)}{=} \int_0^\pi [\cos(i-j)\theta - \cos(i+j+1)\theta] \, d\theta \\
 &= \left[\frac{\sin(i-j)\theta}{i-j} - \frac{\sin(i+j+1)\theta}{i+j+1} \right] \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Se, na fórmula (3.24), considerarmos que $j = i$ teremos

$$\begin{aligned}
 &= \langle W_i(x), W_i(x) \rangle = 2 \int_0^\pi \sin^2 \left(i + \frac{1}{2} \right) \theta \, d\theta \\
 &\stackrel{(B.14)}{=} \int_0^\pi \left[1 - \cos 2 \left(i + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \, d\theta = \left[\theta - \frac{\sin 2 \left(i + \frac{1}{2} \right) \theta}{2 \left(i + \frac{1}{2} \right)} \right] \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} \\
 &= \pi.
 \end{aligned}$$

Logo

$$\|W_i(x)\|^2 = \pi \quad (3.25)$$

■

3.3 Aproximação $\mathcal{L}_2$

No Capítulo 2, por meio do Teorema 2.3 caracterizamos uma melhor aproximação polinomial minimax e isso levou-nos à propriedade da alternância. Agora consideramos a melhor aproximação polinomial $\mathcal{L}_2$ de um dado grau, o que nos levará à propriedade da Ortogonalidade.

Teorema 3.1. *Para qualquer polinômio $f(x)$ de grau n , existe um único polinômio $p_n^B(x)$ de grau menor ou igual a n que melhor aproxima uma dada função $f(x)$ definida em $\mathcal{L}_2$, tal que*

$$\langle f(x) - p_n^B(x), p_n(x) \rangle = 0. \quad (3.26)$$

Demonstração. Consideremos

$$e_n^B = f(x) - p_n^B(x) \quad (3.27)$$

1. **Necessidade.** Suponhamos que, para algum $p_n(x)$, $\langle e_n^B, p_n(x) \rangle \neq 0$. Então, para qualquer escalar λ ,

$$\begin{aligned}
 \|f(x) - (p_n^B(x) + \lambda p_n(x))\|^2 &= \|e_n^B(x) - \lambda p_n(x)\|^2 \\
 &= \langle e_n^B(x) - \lambda p_n(x), e_n^B(x) - \lambda p_n(x) \rangle \\
 &= (e_n^B(x))^2 - 2\lambda e_n^B(x)p_n(x) + \lambda^2 (p_n(x))^2 \\
 &= \|e_n^B(x)\|^2 - 2\lambda \langle e_n^B(x), p_n(x) \rangle \\
 &< \|e_n^B(x)\|^2
 \end{aligned}$$

Portanto, $p_n^B(x) + \lambda p_n(x)$ é melhor aproximação que $p_n^B(x)$, o que contradiz o enunciado do teorema.

2. **Suficiência.** Suponhamos que (3.27) seja válido e que $q_n(x)$ seja um polinômio de grau n , não idêntico ao polinômio $p_n^B(x)$. Então

$$\begin{aligned}
 \|f(x) - q_n(x)\|^2 - \|f(x) - p_n^B(x)\|^2 &\stackrel{(3.27)}{=} \|e_n^B(x) + p_n^B(x) - q_n(x)\|^2 - \|e_n^B(x) + p_n^B(x) - p_n^B(x)\|^2 \\
 &= \|e_n^B(x) + (p_n^B(x) - q_n(x))\|^2 - \|e_n^B(x)\|^2 \\
 &= \langle e_n^B(x) + (p_n^B(x) - q_n(x)), e_n^B(x) + (p_n^B(x) - q_n(x)) \rangle \\
 &\quad - \langle e_n^B(x), e_n^B(x) \rangle \\
 &= (e_n^B(x))^2 + 2e_n^B(x)(p_n^B(x) - q_n(x)) + (p_n^B(x) - q_n(x))^2 \\
 &\quad - (e_n^B(x))^2 \\
 &= 2e_n^B(x)(p_n^B(x) - q_n(x)) + (p_n^B(x) - q_n(x))^2 \\
 &= \langle p_n^B(x) - q_n(x), p_n^B(x) - q_n(x) \rangle + 2\langle e_n^B(x), p_n^B(x) - q_n(x) \rangle \\
 &\stackrel{(3.26)}{=} \|p_n^B(x) - q_n(x)\|^2 \\
 &> 0
 \end{aligned}$$

Portanto, $\|f(x) - q_n(x)\|^2 > \|f(x) - p_n^B(x)\|^2$.

Como $q_n(x)$ é arbitrário, $p_n^B(x)$ deve ser a melhor aproximação em $\mathcal{L}_2$. Ele também deve ser único, pois senão poderíamos ter $q_n(x)$ para ser outra melhor aproximação e obtem-se a última desigualdade como uma contradição. ■

Corolário 3.2. Se $\{P_i(x)\}$, sendo que o grau de $P_i(x)$ tem grau i , for um sistema de polinômios ortogonais em $[a, b]$, então:

1. a função zero é a melhor aproximação polinomial $\mathcal{L}_2$ de grau $n - 1$ para P_n em $[a, b]$;
2. P_n é a melhor aproximação de $\mathcal{L}_2$ da função zero em $[a, b]$ entre os polinômios de grau n com o mesmo coeficiente principal.

Demonstração.

1. Qualquer polinômio de grau $n - 1$ pode ser escrito na forma

$$p_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i P_i(x). \quad (3.28)$$

Então,

$$\begin{aligned} \langle P_n(x) - 0, p_{n-1}(x) \rangle &= \left\langle P_n(x), \sum_{i=0}^{n-1} c_i P_i(x) \right\rangle \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} c_i \langle P_n(x), P_i(x) \rangle \\ &\stackrel{(3.9)}{=} 0. \end{aligned}$$

O mostra, pelo Teorema 3.1, que a função zero é a melhor aproximação polinomial de grau não superior a $n - 1$ de $P_n(x)$.

2. Seja $q_n(x)$ um outro polinómio de grau n que tenha o mesmo coeficiente principal que $P_n(x)$. Então $q_n(x) - P_n(x)$ é um polinómio de grau $n - 1$. Podemos, portanto, escrever

$$q_n(x) - P_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i P_i(x)$$

e de (3.9), deduz-se que

$$\langle P_n(x), q_n(x) - P_n(x) \rangle = 0. \quad (3.29)$$

Agora temos

$$\begin{aligned} \|q_n(x)\|^2 - \|P_n(x)\|^2 &= \langle q_n(x), q_n(x) \rangle - \langle P_n(x), P_n(x) \rangle \\ &= \langle q_n(x) - P_n(x), q_n(x) - P_n(x) \rangle - \langle P_n(x), q_n(x) - P_n(x) \rangle \\ &\stackrel{(3.29)}{=} \|q_n(x) - P_n(x)\|^2 \\ &> 0. \end{aligned}$$

Portanto, P_n é a melhor aproximação para a função zero. ■

Corolário 3.3. *O melhor polinómio aproximador em $\mathcal{L}_2$ $p_n^B(x)$ de grau n da função $f(x)$ pode ser expresso em termos da família de polinómios ortogonais $\{P_i(x)\}$ na forma*

$$p_n^B(x) = \sum_{i=0}^n c_i P_i(x)$$

onde

$$c_i = \frac{\langle f(x), P_i(x) \rangle}{\langle P_i(x), P_i(x) \rangle}, \quad i = 0(1)n. \quad (3.30)$$

Demonstração. Para $k = 0, 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \langle f(x) - p_n^B(x), P_k(x) \rangle &= \left\langle f(x) - \sum_{i=0}^n c_i P_i(x), P_k(x) \right\rangle \\ &= \langle f(x), P_k(x) \rangle - \sum_{i=0}^n c_i \langle P_i(x), P_k(x) \rangle \\ &= \langle f(x) - P_k(x), P_k(x) \rangle - c_k \langle P_k(x), P_k(x) \rangle \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Agora, qualquer polinómio de grau n , $p_n(x)$, pode ser escrito como

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n d_i P_i(x),$$

e, portanto

$$\langle f(x) - p_n^B(x), p_n(x) \rangle = \sum_{i=0}^n d_i \langle f(x) - p_n^B(x), P_i(x) \rangle \stackrel{(3.31)}{=} 0.$$

Pelo Teorema 3.1, $p_n^B(x)$ é a melhor aproximação. ■

Para ilustrar a aplicação do Corolário 3.3, vamos determinar, para cada uma das famílias dos polinómios de Chebyshev, a melhor aproximações $p_1^B(x)$ da função $f(x) = 1 - x^2$.

Nos cálculos que se seguem, quando necessário, iremos empregar a seguinte mudança de variável:

$$x = \cos \theta \Rightarrow dx = -\sin \theta. \text{ Se } x = -1 \Rightarrow \theta = \pi \text{ e } x = 1 \Rightarrow \theta = 0. \quad (3.32)$$

1. Para a primeira família temos que

$$p_1^B(x) = c_0 T_0(x) + c_1 T_1(x),$$

onde

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{\langle f(x), T_0(x) \rangle}{\langle T_0(x), T_0(x) \rangle} \stackrel{(3.16)}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (1-x^2) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx \stackrel{(3.32)}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \\ &\stackrel{(D.2)}{=} \frac{1}{2\pi} \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \Big|_0^\pi = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\langle f(x), T_1(x) \rangle}{\langle T_1(x), T_1(x) \rangle} \stackrel{(3.15)}{=} \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (1-x^2) x dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 (1-x^2) x dx \stackrel{(3.32)}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos \theta d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta d(\sin \theta) = \frac{2}{3\pi} \sin^3 \theta \Big|_0^\pi = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$p_1^B(x) = c_0 T_0(x) + c_1 T_1(x) = \frac{1}{2}.$$

2. Para a segunda família temos

$$p_1^B(x) = c_0 U_0(x) + c_1 U_1(x),$$

onde

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{\langle f(x), U_0(x) \rangle}{\langle U_0(x), U_0(x) \rangle} \stackrel{(3.19)}{=} \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} (1-x^2) dx \stackrel{(3.32)}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin^4 \theta d\theta \\ &\stackrel{(D.4)}{=} \frac{1}{4\pi} (3\theta - \sin 2\theta) \Big|_0^\pi = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
c_1 = \frac{\langle f(x), U_1(x) \rangle}{\langle U_1(x), U_1(x) \rangle} & \stackrel{(3.19)}{=} \frac{4}{\pi} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} (1-x^2) x \, dx \stackrel{(3.32)}{=} \frac{4}{\pi} \int_0^\pi \sin^4 \theta \cos \theta \, d\theta \\
& = \frac{4}{\pi} \int_0^\pi \sin^4 \theta \, d \sin \theta = \frac{4}{\pi} \frac{\sin^5 \theta}{5} \Big|_0^\pi = 0
\end{aligned}$$

Logo,

$$p_1^B(x) = c_0 U_0(x) + c_1 U_1(x) = \frac{3}{4}.$$

3. Para a terceira família temos

$$p_1^B(x) = c_0 V_0(x) + c_1 V_1(x),$$

onde

$$\begin{aligned}
c_0 = \frac{\langle f(x), V_0(x) \rangle}{\langle V_0(x), V_0(x) \rangle} & \stackrel{(3.22)}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1+x)^{\frac{1}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{2}} (1-x^2) \, dx \\
& = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{2}} (1-x^2) (1+x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} \, dx \\
& = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1+x) (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (1-x^2) \, dx \\
& = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1+x) (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \, dx \\
& \stackrel{(3.32)}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (1+\cos \theta) \sin^2 \theta \, d\theta \\
& = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta \, d\theta + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta \, d \sin \theta \\
& \stackrel{(D.2)}{=} \frac{1}{2\pi} \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \Big|_0^\pi + \frac{1}{\pi} \sin^3 \theta \Big|_0^\pi \\
& = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
c_1 = \frac{\langle f(x), V_1(x) \rangle}{\langle V_1(x), V_1(x) \rangle} & \stackrel{(3.22)}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1+x)^{\frac{1}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{2}} (1-x^2) (2x-1) \, dx \\
& = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{2}} (1-x^2) (1+x)^{\frac{1}{2}} (2x-1)}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} \, dx \\
& = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1+x) (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (1-x^2) (2x-1) \, dx \\
& = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1+x) (1-x^2)^{\frac{1}{2}} (2x-1) \, dx \\
& \stackrel{(3.32)}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (1+\cos \theta) (2\cos \theta - 1) \sin^2 \theta \, d\theta \\
& = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (2\cos^2 \theta + \cos \theta - 1) \sin^2 \theta \, d\theta \\
& = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin^2 \theta \, d\theta + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos \theta \sin^2 \theta \, d\theta - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta \, d\theta \\
& \stackrel{(D.5), (D.2)}{=} \frac{2}{8\pi} (\theta - 3\sin 2\theta) \Big|_0^\pi + \frac{1}{\pi} \frac{\sin^3 \theta}{3} \Big|_0^\pi - \frac{1}{\pi} \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \Big|_0^\pi \\
& = -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$p_1^B(x) = c_0 V_0(x) + c_1 V_1(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(2x - 1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}x.$$

4. Para a quarta família temos

$$p_1^B(x) = c_0 W_0(x) + c_1 W_1(x),$$

onde

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{\langle f(x), W_0(x) \rangle}{\langle W_0(x), W_0(x) \rangle} \stackrel{(3.25)}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1+x)^{-\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}} (1-x^2) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(1+x)^{-\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}} (1-x^2) (1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1-x) (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (1-x^2) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1-x) (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx \\ &\stackrel{(3.32)}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (1-\cos \theta) \sin^2 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta d \sin \theta \\ &\stackrel{(D.2)}{=} \frac{1}{2\pi} \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \Big|_0^\pi - \frac{1}{\pi} \sin^3 \theta \Big|_0^\pi \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\langle f(x), W_1(x) \rangle}{\langle W_1(x), W_1(x) \rangle} \stackrel{(3.25)}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1+x)^{-\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}} (1-x^2) (2x+1) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(1+x)^{-\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}} (1-x^2) (1-x)^{\frac{1}{2}} (2x+1)}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1-x) (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (1-x^2) (2x+1) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1-x) (1-x^2)^{\frac{1}{2}} (2x+1) dx \\ &\stackrel{(3.32)}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (1-\cos \theta) (2\cos \theta + 1) \sin^2 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (-2\cos^2 \theta + \cos \theta + 1) \sin^2 \theta d\theta \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos \theta \sin^2 \theta d\theta + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \\ &\stackrel{(D.5), (D.2)}{=} \frac{2}{8\pi} (\theta - 3\sin 2\theta) \Big|_0^\pi + \frac{1}{\pi} \frac{\sin^3 \theta}{3} \Big|_0^\pi - \frac{1}{\pi} \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \Big|_0^\pi \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Logo,

$$p_1^B(x) = c_0 W_0(x) + c_1 W_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(2x + 1) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}.$$

Apesar das questões ligadas a convergência não fazerem parte deste trabalho, interessa trazer o seguinte resultado teórico:

Teorema 3.4. *Seja $f(x)$ uma função definida em $\mathcal{C}[a, b]$, então seu desenvolvimento em polinómios ortogonais converge em $\mathcal{L}_2$ com respeito a funções peso apropriadas.*

3.4 Desenvolvimento de funções em série ortogonais

Definição 3.6. Consideremos o desenvolvimento formal de uma dada função $f(x)$ em série com base em um sistema $\{\phi_k\}_{k=0}^{\infty}$ de polinómios ortogonais no intervalo $[a, b]$ relativamente a uma função peso não-negativa $w(x)$, onde o grau de $\phi_k(x)$ é igual a k , ou seja

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \phi_k(x), \quad x \in [a, b]. \quad (3.33)$$

Aplicando o produto interno definido em (3.9) com $\phi_i(x)$ a ambos os membros da igualdade anterior, obtemos:

$$\langle f(x), \phi_k(x) \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \langle \phi_i(x), \phi_k(x) \rangle = c_k \langle \phi_k(x), \phi_k(x) \rangle,$$

ou seja

$$c_k = \frac{\langle f(x), \phi_k(x) \rangle}{\langle \phi_k(x), \phi_k(x) \rangle}, \quad k=0(1)n. \quad (3.34)$$

3.5 Desenvolvimentos da função sinal em séries de Chebyshev

Fixemos o intervalo $[a, b]$ igual a $[-1, 1]$ e tomemos as funções peso dos polinómios de Chebyshev de primeira, segunda, terceira e quarta espécies, que são respectivamente

$$w_T(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad w_U(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad w_V(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \text{ e } w_W(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Definição 3.7. Os desenvolvimentos de funções em séries de polinómios de Chebyshev das quatro espécies, segundo (3.15), (3.19), (3.22) e (3.25) têm a forma

1. Para a primeira espécie temos

$$f(x) \sim \sum_{i=0}^{\infty} c_i^T T_i(x) \text{ com } c_i^T = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 f(x) T_i(x) (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx. \quad (3.35)$$

2. Para a segunda espécie temos

$$f(x) \sim \sum_{i=0}^{\infty} c_i^U U_i(x) \text{ com } c_i^U = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 f(x) U_i(x) (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx. \quad (3.36)$$

3. Para a terceira família temos

$$f(x) \sim \sum_{i=0}^{\infty} c_i^V V_i(x) \text{ com } c_i^V = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 V_i(x) f(x) (1+x)^{\frac{1}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx. \quad (3.37)$$

4. Para a quarta família temos

$$f(x) \sim \sum_{i=0}^{\infty} c_i^W W_i(x) \text{ com } c_i^W = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 W_i(x) f(x) (1+x)^{-\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}} dx. \quad (3.38)$$

3.5.1 Desenvolvimento em série de polinómios de Chebyshev de primeira espécie

Definição 3.8. De acordo com (3.35), o desenvolvimento formal em série de polinómios de Chebyshev de primeira espécie é dado por

$$f(x) \sim \sum_{i=0}^{\infty} c_i^T T_i(x) = \frac{1}{2} c_0^T T_0(x) + c_1^T T_1(x) + c_2^T T_2(x) + \cdots \quad (3.39)$$

Seguidamente vamos apresentar o desenvolvimento da função

$$f(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}.$$

em série de polinómios de Chebyshev de primeira espécie.

De (3.35) vem, para $i = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} c_i^T &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 f(x) T_i(x) (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx \\ \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} c_i^T &= \int_0^\pi (1-\cos^2 \theta)^{-\frac{1}{2}} f(\cos \theta) T_i(\cos \theta) (1-\cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \\ \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} c_i^T &= \int_0^\pi f(\cos \theta) T_i(\cos \theta) d\theta \\ \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} c_i^T &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos \theta) \cos i\theta d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi f(\cos \theta) \cos i\theta d\theta \\ \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} c_i^T &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos i\theta d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos i\theta d\theta \\ \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} c_i^T &= \left. \frac{\sin i\theta}{i} \right|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} - \left. \frac{\sin i\theta}{i} \right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\theta=\pi} \\ \Rightarrow \frac{\pi}{2} c_i^T &= \frac{2 \sin i\frac{\pi}{2}}{i}. \end{aligned}$$

Se $i = 0$, então,

$$\pi c_0^T = \int_0^\pi f(\cos \theta) T_0(\cos \theta) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi d\theta = \theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} - \theta \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\theta=\pi} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0 \Leftrightarrow c_0^T = 0$$

Se $i = 2k, k = 1, 2, \dots$, então

$$\frac{\pi}{2} c_{2k}^T = \frac{2 \sin \frac{2k\pi}{2}}{2k} = \frac{2 \sin k\pi}{2k} = 0 \Leftrightarrow c_{2k}^T = 0$$

Se $i = 2k-1, k = 1, 2, \dots$, então,

$$\frac{\pi}{2} c_{2k-1}^T = \frac{2 \sin \frac{(2k-1)\pi}{2}}{2k-1} = \frac{2 \sin (k\pi - \frac{\pi}{2})}{2k-1} = \frac{2(-1)^{k-1}}{2k-1}$$

Assim

$$c_{2k-1}^T = \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}.$$

Finalmente, temos

$$\text{sign}(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} T_{2k-1}(x)}{2k-1} = \frac{4}{\pi} \left[T_1(x) - \frac{1}{3} T_3(x) + \frac{1}{5} T_5(x) + \cdots \right]. \quad (3.40)$$

A Figura 3.1 sugere que quanto maior for o número de termos somados na série (3.40), tanto melhor é a aproximação.

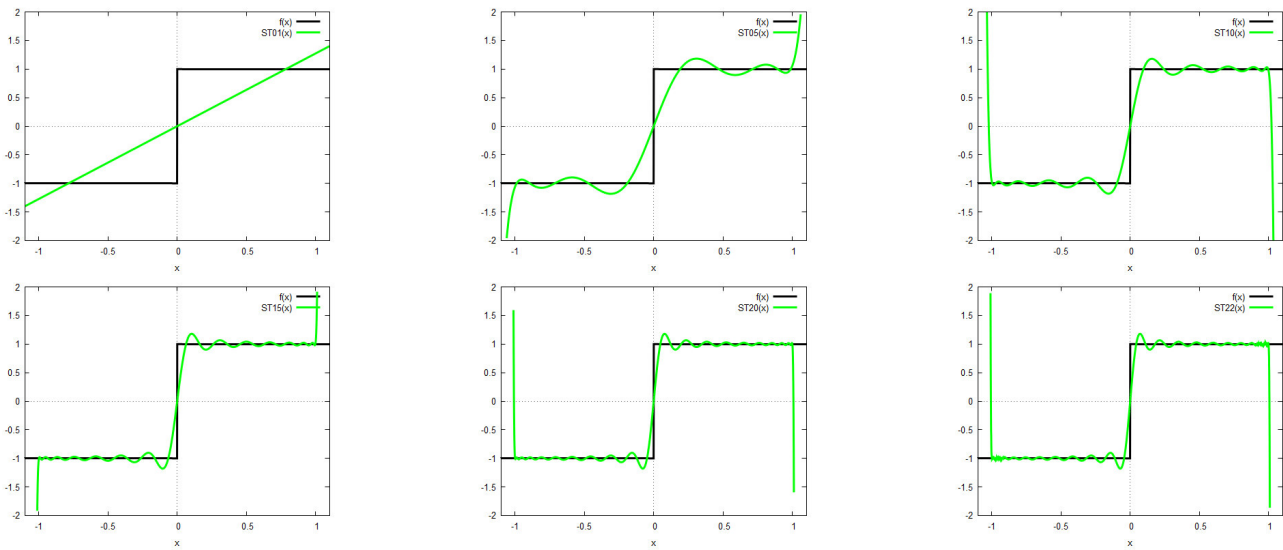


Figura 3.1: Somas parciais de graus 1, 5, 10, 15, 20 e 22 da série de polinómios de Chebyshev de primeira espécie

3.5.2 Desenvolvimento em série de polinómios de Chebyshev de segunda espécie

As séries em $\{U_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ podem ser obtidas directamente usando as propriedades da ortogonalidade e a relação (3.36).

Definição 3.9. De acordo com (3.36), o desenvolvimento formal em série de polinómios de Chebyshev da segunda espécie duma função $f(x)$ é dado por

$$f(x) \sim \sum_{i=0}^{\infty} c_i^U U_i(x) = c_0^U U_0(x) + c_1^U U_1(x) + c_2^U U_2(x) + \cdots. \quad (3.41)$$

Seguidamente vamos apresentar o desenvolvimento da função sinal dada em (??) em série de polinómios de Chebyshev de segunda espécie.

De (3.36) vem, para $i = 1, 2, 3, \dots$,

$$\begin{aligned}
 c_i^U &= \frac{\int_{-1}^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} f(x) U_i(x) dx}{\langle U_i(x), U_i(x) \rangle} \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} f(x) U_i(x) dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin \theta U_i(\cos \theta) \sin \theta f(\cos \theta) d\theta \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(i+1)\theta \sin \theta f(\cos \theta) d\theta
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

Por (3.42), os coeficientes da série serão dados por

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi}{2} c_i^U &= \int_0^\pi \sin \theta \sin(i+1)\theta f(\cos \theta) d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \sin(i+1)\theta d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin \theta \sin(i+1)\theta d\theta \\
 &\stackrel{(B.17)}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos i\theta - \cos(i+2)\theta}{2} d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{\cos i\theta - \cos(i+2)\theta}{2} d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin i\theta}{i} - \frac{\sin(i+2)\theta}{i+2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\sin i\theta}{i} - \frac{\sin(i+2)\theta}{i+2} \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^\pi \\
 &= \frac{\sin i\frac{\pi}{2}}{i} - \frac{\sin(i+2)\frac{\pi}{2}}{i+2}, \quad i \geq 1.
 \end{aligned}$$

Se $i = 0$, então

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi}{2} c_0^U &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin^2 \theta d\theta \\
 &\stackrel{(B.14)}{=} \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2\theta) d\theta - \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (1 - \cos 2\theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^\pi = 0.
 \end{aligned}$$

Assim, teremos

$$c_0^U = 0.$$

Se $i = 2k$, $k = 1, 2, 3, \dots$, teremos

$$\frac{\pi}{2} c_{2k}^U = \frac{\sin k\pi}{2k} - \frac{\sin(k+1)\pi}{2k+1} \stackrel{(B.4)}{=} \frac{\sin k\pi}{2k} - \frac{\sin k\pi \cos \pi + \cos k\pi \sin \pi}{2k+1},$$

Donde

$$c_{2k}^U = 0.$$

Se $i = 2k - 1$, $k = 1, 2, 3, \dots$, teremos

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} c_{2k-1}^U &= \frac{\text{sen}(2k-1)\frac{\pi}{2}}{2k-1} - \frac{\text{sen}(2k+1)\frac{\pi}{2}}{2k+1} = \frac{\text{sen}(k\pi - \frac{\pi}{2})}{2k-1} - \frac{\text{sen}(k\pi + \frac{\pi}{2})}{2k+1} \\ &\stackrel{=}{=} \stackrel{(B.5),(B.4)}{=} -\frac{\cos k\pi}{2k-1} - \frac{\cos k\pi}{2k+1} = -\left(\frac{(-1)^k}{2k-1} + \frac{(-1)^k}{2k+1}\right) \\ &= \frac{4k}{4k^2-1}(-1)^{k+1}. \end{aligned}$$

Assim,

$$c_{2k-1}^U = \frac{8}{\pi} \frac{k}{4k^2-1}(-1)^{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

De acordo com (3.41) teremos que

$$\begin{aligned} \text{sign}(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k-1}^U U_{2k-1}(x) &= \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4k^2-1}(-1)^{k+1} U_{2k-1}(x) \\ &= \frac{8}{\pi} \left(\frac{1}{3} U_1(x) - \frac{2}{15} U_3(x) + \frac{1}{3} U_5(x) + \dots \right). \end{aligned} \tag{3.43}$$

Se continuarmos a desenvolver a igualdade (3.42) teremos

$$\begin{aligned} c_i^U &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \text{sen}(i+1)\theta \text{sen} \theta f(\cos \theta) d\theta \\ &\stackrel{=}{=} \stackrel{(B.17)}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos\{[1-(i+1)]\theta\} - \cos(i+2)\theta}{2} f(\cos \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos i\theta - \cos(i+2)\theta] f(\cos \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos i\theta f(\cos \theta) d\theta - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(i+2)\theta f(\cos \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} (c_i^T - c_{i+2}^T). \end{aligned} \tag{3.44}$$

A fórmula (3.44) permite-nos determinar coeficientes da série (3.41) como diferença dos coeficientes da série em polinómios de Chebyshev de primeira espécie.

Na Figura 3.2 estão representadas as somas parciais da Série 3.43 para $k = 1, 5, 10, 15, 20$, e 22.

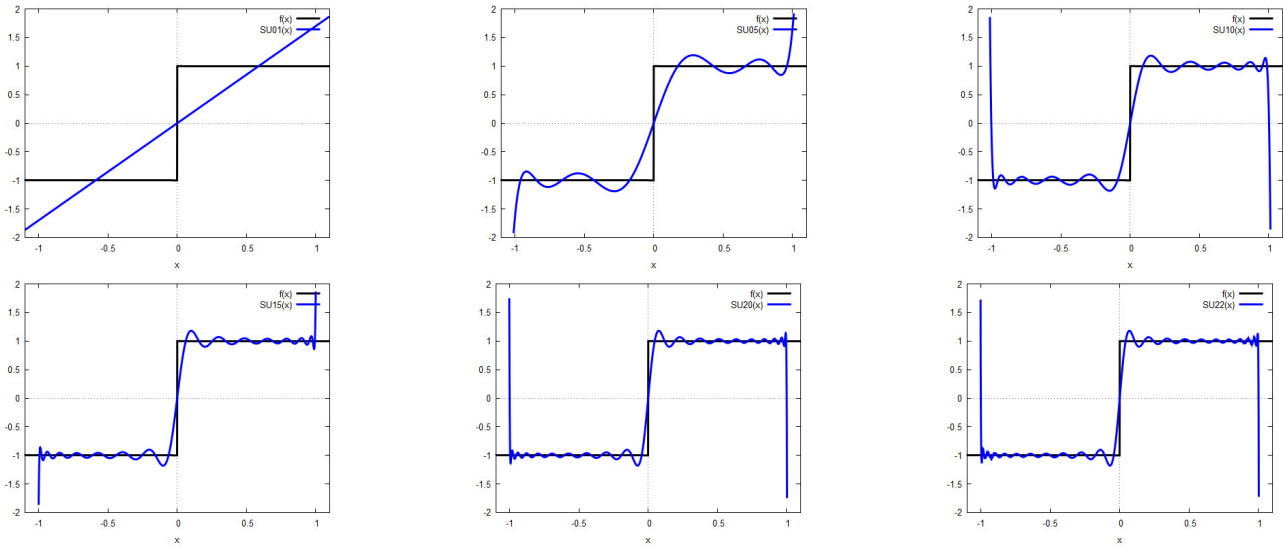


Figura 3.2: Somas parciais de graus 1, 5, 10, 15, 20 e 22 da série de polinómios de Chebyshev de segunda espécie

3.5.3 Desenvolvimento em série de polinómios de Chebyshev de terceira espécie

As séries em $\{V_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ podem ser obtidas directamente usando as propriedades da Ortogonalidade e a relação (3.37).

Definição 3.10. De acordo com (3.37), o desenvolvimento formal em série de polinómios de Chebyshev de terceira espécie duma função $f(x)$ é dado por

$$f(x) \sim \sum_{i=0}^{\infty} c_i^V V_i(x) = c_0^V V_0(x) + c_1^V V_1(x) + c_2^V V_2(x) + \dots \quad (3.45)$$

De 3.37, vem

$$\begin{aligned} c_i^V &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1+x)^{\frac{1}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{2}} V_i(x) f(x) dx, \quad x = \cos \theta \quad dx = -\sin \theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^0 (1 - \cos \theta)^{-\frac{1}{2}} (1 + \cos \theta)^{\frac{1}{2}} V_i(\cos \theta) f(\cos \theta) (-\sin \theta) d\theta \\ &\stackrel{(B.14), (B.13), (B.9)}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\sqrt{2} \sin \frac{1}{2} \theta \right)^{-1} \left(\sqrt{2} \cos \frac{1}{2} \theta \right) V_i(\cos \theta) f(\cos \theta) \left(2 \sin \frac{1}{2} \theta \cos \frac{1}{2} \theta \right) d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \frac{1}{2} \theta \cos \left(i + \frac{1}{2} \right) \theta f(\cos \theta) d\theta. \end{aligned}$$

Portanto,

$$c_i^V \stackrel{(B.16)}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos i \theta + \cos(i+1)\theta) f(\cos \theta) d\theta. \quad (3.46)$$

Vamos, agora, fazer o desenvolvimento em série de polinómios de Chebyshev de terceira espécie da função $f(x) = \text{sign}(x)$.

De acordo com (3.45), os coeficientes da série serão dados por

$$\begin{aligned}\pi c_i^V &= \int_0^\pi \{\cos i\theta + \cos(i+1)\theta\} f(\cos \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{\cos i\theta + \cos(i+1)\theta\} d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \{\cos i\theta + \cos(i+1)\theta\} d\theta \\ &= \left(\frac{\sin i\theta}{i} + \frac{\sin(i+1)\theta}{i+1} \right) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} - \left(\frac{\sin i\theta}{i} + \frac{\sin(i+1)\theta}{i+1} \right) \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\theta=\pi} \\ &= 2 \frac{\sin i\frac{\pi}{2}}{i} + 2 \frac{\sin(i+1)\frac{\pi}{2}}{i}, \quad i \geq 1.\end{aligned}$$

Se $i = 0$, então,

$$\begin{aligned}\pi c_0^V &= \int_0^\pi (1 + \cos \theta) f(\cos \theta) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos \theta) d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (1 + \cos \theta) d\theta \\ &= (\theta + \sin \theta) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} - (\theta + \sin \theta) \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\theta=\pi} = 2.\end{aligned}$$

Logo

$$c_0^V = \frac{2}{\pi}.$$

Se $i = 2k$, $k = 1, 2, 3, \dots$, então,

$$\pi c_{2k}^V = \frac{2 \sin k\pi}{2k} + \frac{2 \sin(2k+1)\frac{\pi}{2}}{2k+1} \stackrel{(B.4)}{=} \frac{2 \sin k\pi \cos \frac{\pi}{2} + 2 \sin \frac{\pi}{2} \cos k\pi}{2k+1} = \frac{2 \cos k\pi}{2k+1} = \frac{2(-1)^k}{2k+1},$$

donde se chega a conclusão

$$c_{2k}^V = \frac{2(-1)^k}{\pi(2k+1)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Se $i = 2k-1$, $k = 1, 2, \dots$, teremos,

$$\pi c_{2k-1}^V = \frac{2 \sin(2k-1)\frac{\pi}{2}}{2k-1} + \frac{2 \sin(2k)\frac{\pi}{2}}{2k} \stackrel{(B.5)}{=} \frac{2 \sin \pi \cos \frac{\pi}{2} - 2 \sin \frac{\pi}{2} \cos k\pi}{2k-1} = \frac{2 \cos k\pi}{2k-1} = \frac{2(-1)^{k+1}}{2k-1},$$

e portanto

$$c_{2k-1}^V = \frac{2(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

De acordo com (3.45) teremos

$$\text{sign}(x) \sim \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_{2k}^V V_{2k}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k-1}^V V_{2k-1}(x) \right) \quad (3.47)$$

$$(3.48)$$

$$= \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} V_{2k}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} V_{2k-1}(x) \right) \quad (3.49)$$

$$(3.50)$$

$$= \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \left(V_1(x) - \frac{1}{3} V_2(x) - \frac{1}{3} V_3(x) + \frac{1}{5} V_4(x) + \frac{1}{5} V_5 - \frac{1}{7} V_6 \right). \quad (3.51)$$

Na Figura 3.3 estão representadas as somas parciais da Série 3.43 para $k = 1, 5, 10, 15, 20$, e 22.

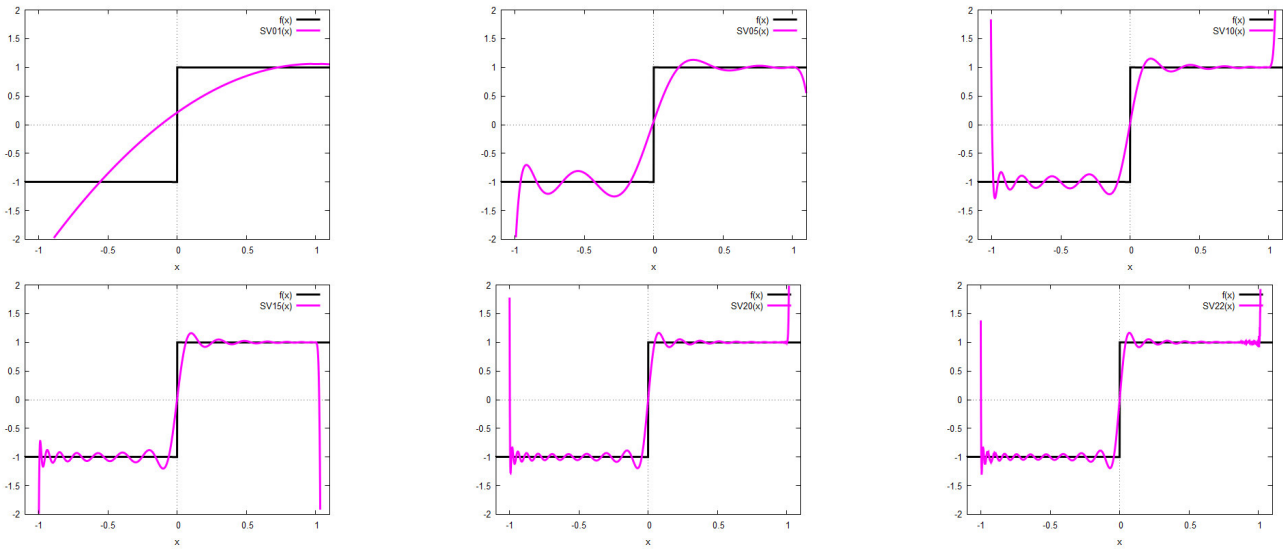


Figura 3.3: Somas parciais de graus 1, 5, 10, 15, 20 e 22 da série de Chebyshev de terceira espécie

3.5.4 Desenvolvimento em série de polinómios de Chebyshev de quarta espécie

As séries em $\{W_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ podem ser obtidas directamente usando as propriedades da Ortogonalidade e a relação (3.38).

Definição 3.11. De acordo com (3.38) o desenvolvimento formal em série de polinómios de Chebyshev da terceira espécie duma função $f(x)$ é dado por

$$f(x) \sim \sum_{i=0}^{\infty} c_i^W W_i(x) = c_0^W W_0(x) + c_1^W W_1(x) + c_2^W W_2(x) + \dots \quad (3.52)$$

De (3.38) vem

$$\begin{aligned} c_i^W &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1+x)^{-\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}} W_i(x) f(x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}} W_i(x) (1-x)^{\frac{1}{2}} f(x) dx, x = \cos \theta, dx = -\sin \theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 \theta)^{-\frac{1}{2}} (1 - \cos \theta)^{\frac{1}{2}} W_i(\cos \theta) (1 - \cos \theta)^{\frac{1}{2}} f(\cos \theta) d\theta \\ &\stackrel{(B.14), (B.13)}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\sin \theta)^{-1} \left(\sqrt{2} \sin \frac{\theta}{2} \right) W_i(\cos \theta) \left(\sqrt{2} \sin \frac{\theta}{2} \right) f(\cos \theta) \sin \theta d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \left(i + \frac{1}{2} \right) \theta \sin \frac{\theta}{2} f(\cos \theta) d\theta \\ &\stackrel{(B.17)}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos i\theta - \cos(i+1)\theta}{2} f(\cos \theta) d\theta \end{aligned}$$

Portanto

$$c_i^W = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos i\theta - \cos(i+1)\theta) f(\cos \theta) d\theta \quad (3.53)$$

Vamos, agora, determinar o desenvolvimento da função $f(x) = \text{sign}(x)$ em série de polinómios de Chebyshev de quarta espécie.

Por (3.53), os coeficientes serão dados por

$$\begin{aligned} c_i^W &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos i\theta - \cos(i+1)\theta) f(\cos \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos i\theta - \cos(i+1)\theta) d\theta - \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (\cos i\theta - \cos(i+1)\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin i\theta}{i} - \frac{\sin(i+1)\theta}{i+1} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin i\theta}{i} - \frac{\sin(i+1)\theta}{i+1} \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^\pi \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{(i+1) \sin \frac{\pi}{2} i - i \sin \frac{\pi}{2} (i+1)}{i(i+1)}, \quad i \geq 1. \end{aligned}$$

Se $i = 0$, então,

$$\begin{aligned} c_0^W &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (1 - \cos \theta) f(\cos \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos \theta) d\theta - \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (1 - \cos \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} (\theta - \sin \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{\pi} (\theta - \sin \theta) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^\pi = -\frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

Assim,

$$c_0^W = -\frac{2}{\pi}. \quad (3.54)$$

Se $i = 2k$, $k = 1, 2, \dots$, então,

$$\begin{aligned} c_{2k}^W &= \frac{2}{\pi} \frac{(2k+1) \sin \frac{\pi}{2} (2k) - 2k \sin \frac{\pi}{2} (2k+1)}{2k(2k+1)} \\ &= -\frac{2 \sin(k\pi + \frac{\pi}{2})}{\pi (2k+1)} \\ &\stackrel{B.4}{=} -\frac{2 \sin k\pi \cos \frac{\pi}{2} + \cos k\pi \sin \frac{\pi}{2}}{\pi (2k+1)} \\ &= -\frac{2 \cos k\pi}{\pi (2k+1)}. \end{aligned}$$

Assim,

$$c_{2k}^W = -\frac{2 (-1)^k}{\pi (2k+1)} = \frac{2 (-1)^{k+1}}{\pi (2k+1)} \quad (3.55)$$

Se $i = 2k - 1$, $k = 1, 2, \dots$, então,

$$\begin{aligned}
 c_{2k-1}^W &= \frac{2(2k) \sin \frac{\pi}{2}(2k-1) - 2k \sin \frac{\pi}{2}(2k)}{\pi 2k(2k-1)} \\
 &= \frac{2 \sin(k\pi - \frac{\pi}{2})}{\pi 2k-1} \\
 &\stackrel{B.5}{=} \frac{2 \sin k\pi \cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} \cos k\pi}{\pi 2k-1} \\
 &= -\frac{2 \cos k\pi}{\pi 2k-1}.
 \end{aligned}$$

Assim,

$$c_{2k-1}^W = -\frac{2(-1)^k}{\pi 2k-1} = \frac{2(-1)^{k+1}}{\pi 2k-1} \quad (3.56)$$

De acordo com (3.52) teremos

$$\begin{aligned}
 \text{sign}(x) &\sim -\frac{2}{\pi}W_0(x) + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (c_{2k}^W W_{2k}(x) + c_{2k-1}^W W_{2k-1}(x)) \\
 &= -\frac{2}{\pi}W_0(x) + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} W_{2k}(x) + \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} W_{2k-1}(x) \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(W_0(x) + W_1(x) + \frac{1}{3}W_2(x) - \frac{1}{3}W_3(x) - \frac{1}{5}W_4(x) + \dots \right)
 \end{aligned}$$

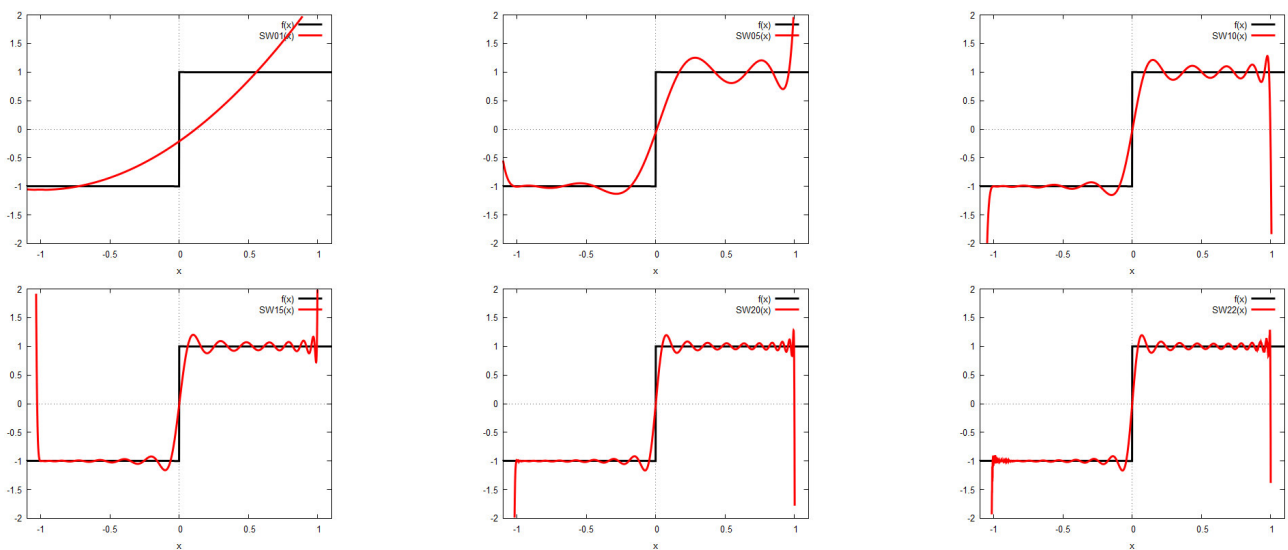


Figura 3.4: Somas parciais de graus 1, 5, 10, 15, 20 e 22 da série de Chebyshev de quarta espécie

3.5.5 Conclusão

Na Figura 3.5 estão representados os gráficos das somas parciais, $S_k(x)$, das séries de polinómios de Chebyshev de todas as espécies para $k = 1, 5, 10, 15, 20$, e 22. Esta figura mostra que quanto maior for o número de termos somados na série, tanto melhor será a aproximação. A partir de $k = 22$, o polinómio $S_k(x)$ começa a ser afectado pelo fenómeno *Gibbs* que se manifesta pelas oscilações excessivas perto dos extremos.

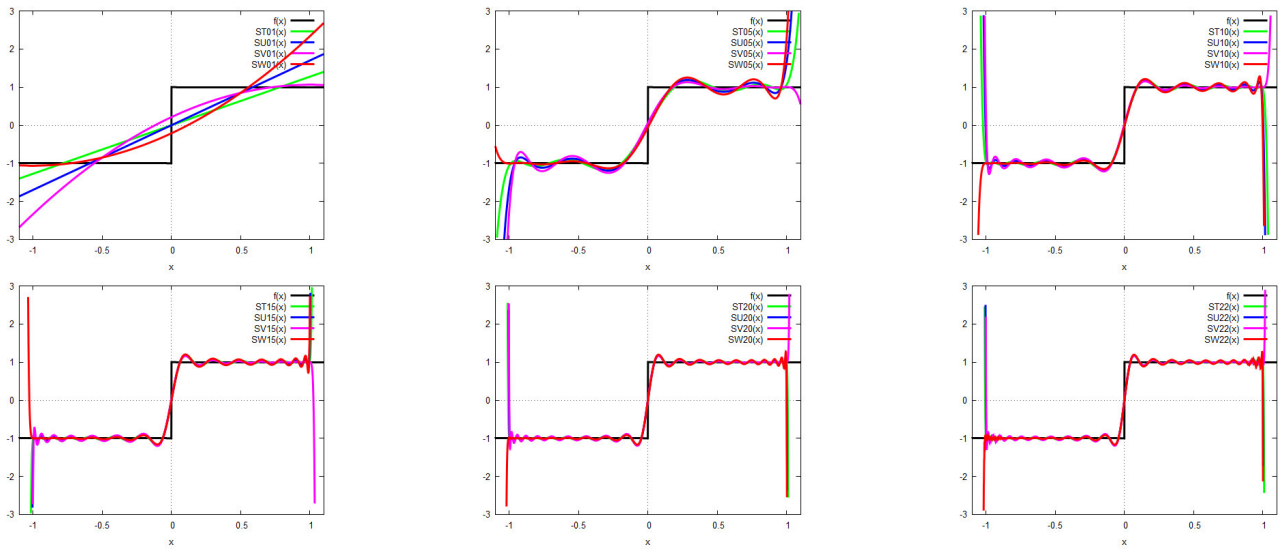


Figura 3.5: Somas parciais de graus 1, 5, 10, 15, 20 e 22 das séries de polinómios de Chebyshev de todas as espécies

Capítulo 4

Considerações Finais

Este trabalho começou por definir trigonometricamente os polinómios de Chebyshev, e a partir destas fez-se o cálculo dos primeiro polinómios, demonstram-se os teoremas sobre as relações de recorrência, as proposições sobre os zeros e extremos dos polinómios de Chebyshev. A partir da relação de recorrência determinam-se os coeficientes na base canónica e apresenta-se uma relação para o cálculo recursivo destes coeficientes. A partir do método da indução matemática e da relação de recorrência, demonstram-se as proposições sobre os valores dos polinómios em pontos especiais. Estabelecem-se, também, as relações existentes entre as quatro famílias de polinómios de Chebyshev. E, determina-se os polinómios de Chebyshev no intervalo $[0, 1]$ e em $[a, b]$.

De seguida, apresenta os principais resultados da *Teoria de Aproximação Minimax*, onde se destacam o *Teorema fundamental da Teoria da Aproximação*, conhecido como *Teorema de Weierstrass* e as propriedades da alternância para os polinómios de Chebyshev da primeira espécie.

A partir da relação de recorrência e utilizando um método descrito em [5], determinam-se as fórmulas fechadas das funções geradoras dos polinómios de Chebyshev de todas as espécies. Apresentam-se os resultados sobre a ortogonalidade destes polinómios relativamente a um produto interno definido a custa dum integral com função peso contínua e não negativa. Faz-se o desenvolvimento da função sinal em séries de polinómios de Chebyshev das quatro espécies e a partir da representação gráfica das somas parciais destas séries conclui-se que quanto maior for a ordem das somas parciais tanto melhor é a aproximação da função no intervalo $[-1, 1]$.

Por falta de tempo e pelo avançar da dimensão desta dissertação, não nos foi possível estudar outras aplicações dos polinómios de Chebyshev. Lamentamos, em particular, por não apresentar a aplicação dos polinómios de Chebyshev na *Interpolação* e na *Quadratura Gaussiana*. Esperamos que numa próxima oportunidade possamos apresentar estes estudos.

E finalmente, este trabalho mostrou-se ser uma óptima oportunidade para integrar vários conhecimentos adquiridos na Licenciatura e nas diversas disciplinas do Mestrado. Foi, também, uma grande oportunidade para aprender os polinómios de Chebyshev, de treinar a produção de material científico e a comunicação científica. Assim, considero que os objectivos propostos foram alcançados e espero que as competências aqui adquiridas façam de mim um melhor profissional.

Bibliografia

- [1] Mason, J. C., Handscomb, D. C., Chebyshev Polynomials, Chapman & Hall, 2003.
- [2] Rivlin, T. J., The Chebyshev Polynomials, A Wiley-Interscience publication, 1974.
- [3] Fox & Parker, Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis, 1968.
- [4] Chihara, T. S., An Introduction to Orthogonal Polynomials, Gordon and Breach, Science Publishers, Inc., New York, 1978.
- [5] Zélia da Rocha, A general method for deriving semi-classical properties of perturbed second degree forms: The case of the Chebyshev form of second kind, Journal of Computational and Applied Mathematics, Pg: 677-689, 2016.
- [6] Delbourgo, R., Trigonometry: Notes, Problems and Exercises, World Scientific, 2017.
- [7] Spiegel, M. R., Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas, Mc Graw Hill.
- [8] Gonçalves, J. L., Introdução à Aproximações de Funções: Trabalho de Conclusão de Curso Apresentado ao Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura, Departamento de Matemática, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2004.
- [9] Rodrigues, F. C., Matemáticas - Geometria, Trigonometria, Probabilidade e Estatística. Guia de Apoio ao Estudante, FGP - Editor, Lisboa, 1997.
- [10] Stewart, J.; Readlin, L.; Watson, S., Algebra and Trigonometry, Cengage Learning, Boston, 2014.
- [11] Stewart, J., Cálculo Vol. II Tradução, Cengage Learning, São Paulo, 2013.
- [12] Alves, M.J., Alves, E.V., Módulo de Análise Matemática II, Livraria Universitária - Universidade Eduardo Mondlane, Maputo, 2013.
- [13] Alves, M.J., Alves, E.V., Módulo de Análise Matemática I, Livraria Universitária - Universidade Eduardo Mondlane, Maputo, 2012.
- [14] Abramowitz, M., Stegun, I., Handbook of Mathematical functions with formulas, graphs and Mathematical tables, Dover, New York, 1972.
- [15] Oetiker, T.; Partl, H.; Hyna, I.; Schlegl, E., The not So Short Introduction to $\text{\LaTeX}$ 2 ϵ , Oetiker+Partner AG, Aarweg, Switzerland, 2015.
- [16] Lopez, I. F.; da Silva, M^a D. G., Introdução ao Uso do $\text{\LaTeX}$, Edição do autor, Rio de Janeiro 2013.

-
- [17] Santos, B., Introdução ao Software Máxima, Centro de Matemática da Universidade do Porto, Porto, 2009.
- [18] Haager, W., Graphics With Maxima, Department Electrical Engenhering, St. Polten, 2011.

Apêndice A

Nota Biográfica de Chebyshev

Pafnuty Lvovich Chebyshev nasceu em Okatovo na região de Kaluga, na Rússia, em 16 de Maio 1821.

Ele estudou matemática na Universidade de Moscovo de 1837 a 1846, depois mudou-se para São Petersburgo onde em 1847 se tornou professor assistente na Universidade de Petersburgo e professor titular em 1851, no qual permaneceu até 1882.

Ele foi o principalmente responsável pela fundação, Direção e inspirador da "Escola de Petersburgo" de pesquisa matemática, notável por sua ênfase em desenhar problemas a partir de necessidades práticas, e não por mera curiosidade intelectual. Em 1874 foi eleito associado estrangeiro do Institut de France e em 1877 da Royal Society of London.

Para além da teoria da aproximação, ele trabalhou em várias outras áreas, incluindo a teoria dos números (a distribuição de primos), integração de funções algébricas, teoria geométrica de mecanismos de articulação (o tema que ganhou seu interesse especial na aproximação minimax de funções), o problema dos momentos, fórmulas de quadratura e teoria da probabilidade (teoremas de limite).

Os polinômios de Chebyshev T_n que agora levam seu nome (o símbolo 'T' derivado de suas transliterações continentais como 'Tchebycheff', 'Tschebyscheff') foram apresentados à Academia de São Petersburgo em 1853. Eles foram discutidos com mais profundidade matemática em um segundo trabalho (Chebyshev 1859) apresentado em 1857. Surpreendentemente, à luz do que parece hoje a conexão óbvia com a teoria de Fourier, a sua discussão não faz uso da substituição $x = \cos \theta$.

Ele morreu em São Petersburgo no dia 8 de dezembro 1894.

Apêndice B

Identidades Trigonométricas

Este apêndice foi elaborado com base nas referências [6], [7], [9] e [10].

Identidade 1 (Identidade fundamental da trigonometria).

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1. \quad (\text{B.1})$$

Identidade 2 (Seno em termos do cosseno).

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x. \quad (\text{B.2})$$

Identidade 3 (Cosseno em termos do seno).

$$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x. \quad (\text{B.3})$$

Identidade 4 (Seno da soma de ângulos).

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x. \quad (\text{B.4})$$

Identidade 5 (Seno da diferença de ângulos).

$$\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen} x \cos y - \operatorname{sen} y \cos x. \quad (\text{B.5})$$

Identidade 6 (Cosseno da soma de ângulos).

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y. \quad (\text{B.6})$$

Identidade 7 (Cosseno da diferença de ângulos).

$$\cos(x - y) = \cos[x + (-y)] \stackrel{(\text{B.6})}{=} \cos x \cos(-y) - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(-y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y.$$

Assim,

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y. \quad (\text{B.7})$$

Identidade 8 (Seno do ângulo duplo).

$$\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen}(x + x) \stackrel{(\text{B.4})}{=} \operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen} x \cos x = 2 \operatorname{sen} x \cos x.$$

Assim,

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x. \quad (\text{B.8})$$

Identidade 9.

$$\operatorname{sen} x \underset{(B.8)}{=} 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}. \quad (B.9)$$

Identidade 10 (Cosseno do ângulo duplo).

$$\cos 2x = \cos(x+x) \underset{(B.6)}{=} \cos x \cos x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x.$$

Assim,

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x. \quad (B.10)$$

Identidade 11 (Cosseno do ângulo duplo).

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \underset{(B.2)}{=} \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2 \cos^2 x - 1.$$

Assim,

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1. \quad (B.11)$$

Identidade 12 (Cosseno do ângulo duplo).

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \underset{(B.3)}{=} (1 - \operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x.$$

Assim,

$$\cos 2x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x. \quad (B.12)$$

Identidade 13 (Quadrado do cosseno dum ângulo).

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \iff 2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x \iff \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Assim,

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}. \quad (B.13)$$

Identidade 14 (Quadrado do seno dum ângulo).

$$\cos 2x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x \iff 2 \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos 2x \iff \operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

Assim,

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}. \quad (B.14)$$

Identidade 15 (Produto de seno e cosseno de ângulos diferentes).

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y) &= (\operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x) + (\operatorname{sen} x \cos y - \operatorname{sen} y \cos x) \\ \iff \operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y) &= 2 \operatorname{sen} x \cos y \\ \iff \operatorname{sen} x \cos y &= \frac{\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)}{2} \end{aligned}$$

Assim,

$$\operatorname{sen} x \cos y = \frac{\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)}{2} \quad (B.15)$$

Identidade 16 (Produto de cossenos de ângulos diferentes).

$$\begin{aligned}\cos(x+y) + \cos(x-y) &= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + (\cos x \cos y + \sin x \sin y) \\ \iff \cos(x+y) + \cos(x-y) &= 2 \cos x \cos y \\ \implies \cos x \cos y &= \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\cos x \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}. \quad (\text{B.16})$$

Identidade 17 (Produto de senos de ângulos diferentes).

$$\begin{aligned}\cos(x-y) - \cos(x+y) &= (\cos x \cos y + \sin x \sin y) - (\cos x \cos y - \sin x \sin y) \\ \iff \cos(x-y) - \cos(x+y) &= 2 \sin x \sin y \\ \implies \sin x \sin y &= \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\sin x \sin y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}. \quad (\text{B.17})$$

Identidade 18 (Período da função Seno).

$$\sin(x+2\pi) = \sin(x). \quad (\text{B.18})$$

Identidade 19 (Período da função Cosseno).

$$\cos(x+2\pi) = \cos(x). \quad (\text{B.19})$$

Identidade 20 (Paridade da função seno).

$$\sin(-x) = -\sin(x). \quad (\text{B.20})$$

Identidade 21 (Paridade da função cosseno).

$$\cos(-x) = \cos(x). \quad (\text{B.21})$$

Lema B.1. Se k e n são inteiros tais que $0 \leq k \leq n$ e i a unidade imaginária ($i^2 = -1$) então

$$\frac{i^{n-k} + (-i)^{n-k}}{2} = \cos \left[\frac{1}{2}(n-k)\pi \right]. \quad (\text{B.22})$$

Demonstração. Seja $0 \leq k \leq n$, vamos considerar os possíveis valores de $n-k$ e vamos calcular os valores dos dois membros da igualdade (B.22) e verificar se são ou não iguais, isto é:

Seja $n-k=0$, então

$$\frac{i^{n-k} + (-i)^{n-k}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1 = \cos \left[\frac{1}{2} \times 0 \times \pi \right] = \cos 0.$$

Seja $n-k=1$, então

$$\frac{i^{n-k} + (-i)^{n-k}}{2} = \frac{i-i}{2} = 0 = \cos \left[\frac{1}{2}\pi \right] = \cos \frac{\pi}{2}.$$

Seja $n - k = 2$, então

$$\frac{i^{n-k} + (-i)^{n-k}}{2} = \frac{-1 - 1}{2} = -1 = \cos \left[\frac{1}{2} \times 2 \times \pi \right] = \cos \pi.$$

Seja $n - k = 3$, então

$$\frac{i^{n-k} + (-i)^{n-k}}{2} = \frac{-i + i}{2} = 0 = \cos \left[\frac{1}{2} \times 3 \times \pi \right] = \cos \left[\frac{3}{2} \pi \right].$$

Os valores das potências de i repetem-se com período 4, isto é,

$$i^{n-k+4} = i^{n-k},$$

porque $i^4 = 1$. Os valores de $\cos \left[\frac{1}{2}(n - k)\pi \right]$ também se repetem com igual período, isto é,

$$\cos \left[\frac{1}{2}(n - k + 4)\pi \right] = \cos \left[\frac{1}{2}(n - k) + 2\pi \right] = \cos \left[\frac{1}{2}(n - k)\pi \right].$$

Deste modo prova-se que

$$\frac{i^{n-k} + (-i)^{n-k}}{2} = \cos \left[\frac{1}{2}(n - k)\pi \right].$$

■

Lema B.2.

$$\cos^{2n} \left(\frac{\theta}{2} \right) = \left(\frac{1}{2} \right)^n (1 + \cos \theta)^n. \quad (\text{B.23})$$

Demonstração. Vamos fazer a demonstração usando o princípio de indução finita.

Vamos demonstrar que (B.23) é válida para $n = 1$. Seja $n = 1$ então

$$\cos^{2 \times 1} \left(\frac{\theta}{2} \right) = \cos^2 \frac{\theta}{2} \stackrel{(\text{B.13})}{=} \frac{1 + \cos \theta}{2} = \left(\frac{1}{2} \right)^1 (1 + \cos \theta)^1 = \frac{1}{2} (1 + \cos \theta).$$

Vamos supor que (B.23) é verdadeira para $n = k$, isto é,

$$\cos^{2k} \left(\frac{\theta}{2} \right) = \left(\frac{1}{2} \right)^k (1 + \cos \theta)^k. \quad (\text{B.24})$$

Vamos demonstrar que (B.23) é verdadeira para $n = k + 1$, isto é,

$$\cos^{2(k+1)} \left(\frac{\theta}{2} \right) = \left(\frac{1}{2} \right)^{k+1} (1 + \cos \theta)^{k+1}.$$

Seja $n = k + 1$, então

$$\begin{aligned} \cos^{2(k+1)} \left(\frac{\theta}{2} \right) &= \cos^{2k+2} \left(\frac{\theta}{2} \right) = \cos^{2k} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \\ &\stackrel{(\text{B.24})}{=} \left(\frac{1}{2} \right)^k (1 + \cos \theta)^k \left(\frac{1}{2} \right) (1 + \cos \theta) \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^{k+1} (1 + \cos \theta)^{k+1}. \end{aligned}$$

■

Apêndice C

Teorema do Binômio de Newton

Este apêndice foi elaborado com base nas referências [10].

Definição C.1. Chama-se *binômio* a uma expressão da forma $a + b$.

Embora, em princípio, seja fácil elevar um binômio a qualquer potência, elevar a potência muito grande pode ser tedioso.

Neste apêndice, vamos apresentar e demonstrar uma fórmula para o desenvolvimento dum binômio para qualquer expoente natural.

Definição C.2. Chama-se **factorial**, e representa-se por $n!$, ao produto de todos os números menos de n , isto é,

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 1. \quad (\text{C.1})$$

Definição C.3. Sejam n e r dois números naturais, com $n \geq r$. Chama-se **coeficiente binomial**, e denota-se por $\binom{n}{r}$, ao número

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}. \quad (\text{C.2})$$

Propriedades dos coeficientes binomiais

Propriedade C.1.

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \quad (\text{C.3})$$

Propriedade C.2.

$$\binom{k}{r-1} + \binom{k}{r} = \binom{k+1}{r} \quad (\text{C.4})$$

Teorema C.1 (Binômio de Newton).

$$P(n) = (a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n. \quad (\text{C.5})$$

Demonstração. Vamos fazer a demonstração usando o princípio da indução matemática.

Seja $n = 1$, então,

$$P(1) = (a + b)^1 = \binom{1}{0}a^1 + \binom{1}{1}b^1.$$

Vamos supor que $n = k$ $P(k)$ é verdadeira, isto é,

$$P(k) = (a + b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k \quad (\text{C.6})$$

e vamos demonstrar que para $n = k + 1$ (C.5) é verdadeira.

Seja $n = k + 1$, então,

$$\begin{aligned} P(k+1) &= (a + b)^{k+1} = (a + b)(a + b)^k \\ &\stackrel{(\text{C.6})}{=} (a + b) \left[\binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k \right] \\ &= a \left[\binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k \right] \\ &\quad + b \left[\binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k \right] \\ &= \left[\binom{k}{0}a^{k+1} + \binom{k}{1}a^k b + \binom{k}{2}a^{k-1}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}a^2 b^{k-1} + \binom{k}{k}ab^k \right] \\ &\quad + \left[\binom{k}{0}a^k b + \binom{k}{1}a^{k-1}b^2 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^3 + \cdots + \binom{k}{k-1}ab^k + \binom{k}{k}b^{k+1} \right] \\ &= \binom{k}{0}a^{k+1} + \left[\binom{k}{0} + \binom{k}{1} \right] a^k b + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{2} \right] a^{k-1} b^2 + \cdots + \left[\binom{k}{k-1} + \binom{k}{k} \right] ab^k + \binom{k}{k} b^{k+1} \\ &\stackrel{(\text{C.4})}{=} \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \cdots + \binom{k+1}{k}ab^k + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}. \end{aligned}$$

Como

$$P(k+1) = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \cdots + \binom{k+1}{k}ab^k + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1},$$

fica demonstrado o teorema. ■

Apêndice D

Análise Matemática

Este apêndice foi elaborado com base nas referências [11], [12] e [13].

Definição D.1. Diremos que a função f atinge no ponto $x_0 \in \mathcal{D}$ um máximo local se existe uma vizinhança $U(x_0)$ de x_0 tal que $f(x) < f(x_0)$ qualquer que seja $x \in U(x_0) \setminus x_0$.

Definição D.2. Diremos que a função f atinge no ponto $x_0 \in \mathcal{D}$ um mínimo local se existe uma vizinhança $U(x_0)$ de x_0 tal que $f(x) > f(x_0)$ qualquer que seja $x \in U(x_0) \setminus x_0$.

Teorema D.1. Se a função f atinge no ponto x_0 , sendo x_0 um ponto interior do domínio da função f , um máximo ou mínimo local então

$$f'(x_0) = 0 \text{ ou } f'(x_0)$$

não existe

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [13].

Proposição D.0.1.

$$\sum_{k=0}^n a_k \left(\sum_{j=0}^k b_j \right) = \sum_{j=0}^n b_j \left(\sum_{k=j}^n a_k \right) \quad (\text{D.1})$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k \left(\sum_{j=0}^k b_j \right) &= a_0 \sum_{j=0}^0 b_j + a_1 \sum_{j=0}^1 b_j + a_2 \sum_{j=0}^2 b_j + \cdots + a_{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} b_j + a_n \sum_{j=0}^n b_j \\ &= a_0 b_0 + a_1 (b_0 + b_1) + a_2 (b_0 + b_1 + b_2) + \cdots + \\ &\quad + a_{n-1} (b_0 + b_1 + \cdots + b_{n-1}) + a_n (b_0 + b_1 + \cdots + b_n) \\ &= b_0 (a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n) + b_1 (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n) \\ &\quad + \cdots + b_{n-1} (a_{n-1} + a_n) + b_n a_n \\ &= b_0 \left(\sum_{k=0}^n a_k \right) + b_1 \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) + \cdots + b_{n-1} \left(\sum_{k=n-1}^n a_k \right) + b_n \left(\sum_{k=n}^n a_k \right) \\ &= \sum_{j=0}^n b_j \left(\sum_{k=j}^n a_k \right). \end{aligned}$$

D.1 Cálculo de alguns integrais trigonométricos

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx \stackrel{(B.14)}{=} \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} \right) + C. \quad (D.2)$$

$$\int \cos^2 x \, dx \stackrel{(B.13)}{=} \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} \right) + C. \quad (D.3)$$

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^4 x \, dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^2 \, dx \stackrel{(B.14)}{=} \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) \, dx \stackrel{(D.3)}{=} \frac{1}{4} \left[x - \frac{2 \operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{1}{2} \left(x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} \right) \right] + C \end{aligned}$$

Assim

$$\int \operatorname{sen}^4 x \, dx = \frac{1}{8} (3x - \operatorname{sen} 2x) + C. \quad (D.4)$$

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \, dx &\stackrel{B.3}{=} \int (\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^4 x) \, dx = \int \operatorname{sen}^2 x \, dx - \int \operatorname{sen}^4 x \, dx \\ &\stackrel{D.2,??}{=} \frac{1}{2} \left(x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} \right) + \frac{1}{8} (3x - \operatorname{sen} 2x) + C. \end{aligned}$$

Assim,

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{8} (x - 3 \operatorname{sen} 2x) + C. \quad (D.5)$$

Apêndice E

Programas em Máxima

1. Definição da função

```
f(x):=signum(x)
```

2. Polinômios de Chebyshev da Primeira Espécie

```
T[0,x]:1$
T[0,x]:1$
T[1,x]:x$
T[n,x]:=expand(2*x*T[n-1,x]-T[n-2,x])$

max:100$
Tt:makelist(T[n,x],n,0,max)$
```

3. Definição das Constantes dos Somatórios

```
C(k):=(-1)^(k-1)/(2*k-1)$
```

4. Somas parciais

```
define(S01(x),ratsimp(4/%pi*sum(C(k)*Tt[2*k],k,1,1)))$
define(S05(x),ratsimp(4/%pi*sum(C(k)*Tt[2*k],k,1,5)))$
define(S10(x),ratsimp(4/%pi*sum(C(k)*Tt[2*k],k,1,10)))$
define(S15(x),ratsimp(4/%pi*sum(C(k)*Tt[2*k],k,1,15)))$
define(S20(x),ratsimp(4/%pi*sum(C(k)*Tt[2*k],k,1,20)))$
define(S22(x),ratsimp(4/%pi*sum(C(k)*Tt[2*k],k,1,22)))$
```

5. Gráficos

```
wxplot2d([f(x),S01(x)], [x,-1.1,1.1], [y,-1.1,1.1], [legend,"f(x)","S01(x)"]);
wxplot2d([f(x),S05(x)], [x,-1.1,1.1], [y,-1.1,1.1], [legend,"f(x)","S05(x)"]);
wxplot2d([f(x),S10(x)], [x,-1.1,1.1], [y,-1.1,1.1], [legend,"f(x)","S10(x)"]);
wxplot2d([f(x),S15(x)], [x,-1.1,1.1], [y,-1.1,1.1], [legend,"f(x)","S15(x)"]);
wxplot2d([f(x),S20(x)], [x,-1.1,1.1], [y,-1.1,1.1], [legend,"f(x)","S20(x)"]);
wxplot2d([f(x),S22(x)], [x,-1.1,1.1], [y,-1.1,1.1], [legend,"f(x)","S22(x)"]);
```