

UNIVERSIDADE DO PORTO
FACULDADE DE ENGENHARIA

MODELAÇÃO DE ESTRUTURAS POR
ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL E
ACOPLAMENTO DINÂMICO

Dissertação Apresentada à Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
para Obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Mecânica
Opção de Engenharia Estrutural

JOÃO MIGUEL DE AMORIM NOVAIS DA COSTA NÓBREGA



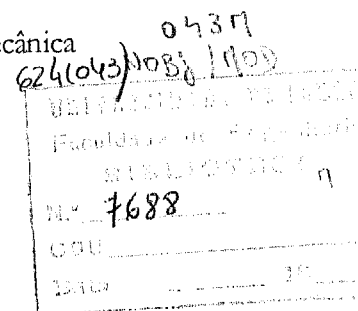
João Miguel de Amorim Novais da Costa Nóbrega

Bolseiro da Junta Nacional de Investigação Científica e Tecnológica (JNICT)

PRAXIS XXI / BM / 7055 / 95

**MODELAÇÃO DE ESTRUTURAS POR
ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL E
ACOPLAMENTO DINÂMICO**

Dissertação Apresentada à
Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
para Obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Mecânica
Opção de Engenharia Estrutural



DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA E GESTÃO INDUSTRIAL
FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO 1996

Aos que,
na certeza de serem muito especiais,
estiveram, estão e estarão
sempre no meu coração.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Doutor José Fernando Dias Rodrigues pela orientação, acompanhamento, estímulo, amizade, paciência e disponibilidade demonstradas, as quais permitiram ultrapassar muitas dificuldades e incertezas, e foram determinantes na realização deste trabalho. O meu muito obrigado.

Aos amigos e colegas do CETRIB Alexandre Sottomayor, Armando Campos, Beatriz Graça, Jorge Castro, Prof. Jorge Seabra, Prof. Luís Andrade Ferreira, Luís Magalhães, Pedro Silva e Rui Moreira, pelo bom ambiente de trabalho e apoio proporcionados.

Ao Luís do CEMAQ, por todo o auxílio prestado na parte experimental do trabalho.

À Ana Isabel pelo amor e incentivo transmitidos e muita paciência demonstrada em todas as fases deste trabalho.

Aos familiares e amigos que, de forma directa ou indirecta, muito me apoiaram, incentivaram e ajudaram a ultrapassar as fases mais difíceis.

Ao INEGI por ter disponibilizado todos os recursos materiais necessários à realização deste trabalho.

À Junta Nacional de Investigação Científica e Tecnológica (JNICT) pelo financiamento concedido através da bolsa BM/7055//95, no âmbito do programa PRAXIS XXI.

RESUMO

Neste trabalho de dissertação apresenta-se um estudo sobre a aplicação das técnicas de análise modal experimental e de acoplamento dinâmico na modelação do comportamento do cárter de uma caixa de transferência, de modo a identificar as características dinâmicas do cárter e estabelecer os regimes críticos de funcionamento da caixa, assim como a experimentar a aplicabilidade do acoplamento dinâmico a uma estrutura de geometria complexa.

Para a análise modal experimental apresenta-se a formulação do modelo de resposta e do modelo modal e, igualmente, dos algoritmos de identificação do programa utilizado, o programa CADA-PC da LMS.

Para o acoplamento dinâmico apresenta-se a formulação e implementação em computador de dois algoritmos de acoplamento de impedâncias, um deles trabalhando globalmente os modelos de resposta dos componentes a acoplar, e o outro operando a nível de blocos destes modelos. Estes algoritmos foram validados com base na modelação de um sistema discreto, que revelou igualmente que a redução de graus de liberdade nos modelos dos componentes, desde que o acoplamento seja correctamente descrito, não introduz erros no modelo acoplado, ao contrário da omissão de modos em qualquer dos modelos dos componentes.

A modelação do cárter e dos seus principais componentes foi efectuada por análise modal experimental, tendo-se identificado modelos representativos destas estruturas de geometria complexa.

Com base no modelo modal identificado para o cárter, foram estabelecidas as diversas velocidades críticas do veio de entrada da caixa e para as quais as diversas frequências características de funcionamento da caixa excitam os modos naturais do cárter.

A aplicação dos procedimentos de acoplamento dinâmico implementados à construção de um modelo do cárter por acoplamento dos modelos identificados para os seus componentes não conduziu à obtenção de um modelo final aceitável. Porém, verificou-se que o algoritmo de acoplamento por blocos é muito mais estável do ponto de vista numérico e muito menos susceptível à propagação de erros. Mais ainda, a utilização do conceito de pseudo-inversa, ao invés da inversa directa, permitiu melhorar o aspecto das funções de resposta do sistema acoplado.

ABSTRACT

In this dissertation two different modelisation techniques for obtaining the dynamic model of structures have been studied, the experimental modal analysis and a dynamic coupling technique. Both methodologies were applied to a transfer gearbox case.

The modal models for the transfer gearbox case and for each one of its components were identified by experimental modal analysis. This analysis could achieve both good results that showed a good correlation with de experimental measurements

The modal model identified for the transfer gearbox case was used to predict its behaviour while on its normal operation conditions. So, it was possible to verify that some of the natural frequencies of the transfer gearbox case were excited on its normal operation mode.

Two algorithms of dynamic coupling, based on the addition of impedance matrices, were developed and implemented in a computer program. They were both tested, using a discrete system model.

When applying the developed methods to the dynamic coupling of the transfer gearbox case component models, it was not possible to obtain satisfactory results. When trying to solve the problem, it was possible to identify and discuss some of the difficulties that make the application of that methods to geometric complex structures a very difficult matter.

RÉSUMÉ

Dans ce travail on présente une étude de modélisation du carter d'une boîte de transfert par analyse modale expérimentale et par accouplement dynamique, dans de but d'identifier les caractéristiques dynamiques du carter et d'établir les vitesses critiques de l'arbre d'entrée en tenant compte des fréquences caractéristiques de fonctionnement de la boîte de transfert.

Par analyse modale expérimentale on a identifié des modèles pour le carter ainsi que pour ses deux principaux composants. Les modèles identifiés présentent une très bonne concordance avec les fonctions de réponse en fréquence mesurées.

Pour la modélisation par accouplement dynamique, on a mis en oeuvre deux algorithmes, l'un des deux travaillant avec les matrices complètes des modèles identifiés pour les composants, et l'autre travaillant avec des sous-matrices. La validation de ces algorithmes a mis en évidence que le deuxième se montre numériquement beaucoup plus stable, en plus d'une considérable économie de temps de calcul et de la place mémoire nécessaires.

L'application de la procédure d'accouplement pour la modélisation du carter n'a pas conduit à l'obtention d'un modèle physiquement acceptable, ce que n'est pas dissocié de la complexité géométrique du carter, ainsi que du fait des modèles des composants ne pas inclure des degrés de liberté de rotation.

ÍNDICE

NOMENCLATURA.....	x
1. INTRODUÇÃO.....	1
1.1 Análise Modal e Acoplamento Dinâmico	1
1.2 Objectivos da Dissertação.....	4
1.3 Organização da Dissertação.....	5
2. ANÁLISE MODAL ANALÍTICA	7
2.1 Modelos Dinâmicos	7
2.2 Sistemas Discretos.....	10
2.2.1 Sistema não-Amortecido	10
2.2.2 Sistema com Amortecimento Viscoso Proporcional.....	16
2.2.3 Sistema com Amortecimento Viscoso Geral	18
2.3 Modelos Incompletos.....	24
3. ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL.....	27
3.1 Métodos SDOF	29
3.1.1 Identificação de Picos	29
3.1.2 Método do Círculo	31
3.2 Resíduos.....	38
3.3 Métodos MDOF	40
3.3.1 Método da Exponencial Complexa	41
3.3.2 Método da Exponencial Complexa com Mínimos Quadrados.....	48
3.3.3 Mínimos Quadrados no Domínio da Frequência.....	52
4. ACOPLAMENTO DINÂMICO	55
4.1 Método do Acoplamento de Impedâncias.....	59
4.1.1 Obtenção das Matrizes FRF de Impedância dos Componentes.....	63
4.2 Acoplamento Modal - Método I.	64
4.3 Acoplamento Modal - Método II.....	66
4.4 Acoplamento de Impedâncias - Abordagem por Blocos I.....	68
4.5 Acoplamento de Impedâncias - Abordagem por Blocos II.....	76

5. PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL.....	79
5.1 Montagem Experimental	80
5.2 Discretização da Estrutura.....	80
5.3 Equipamento Experimental.....	85
5.4 Ligação do Excitador à Estrutura.....	87
5.5 Montagem do Excitador	89
5.6 Excitação Aleatória	91
5.7 Calibração dos Transdutores	93
5.8 Procedimento de Análise Modal.....	95
6. ESTUDO DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DO CÁRTER.....	97
6.1 A Caixa de Transferência	97
6.2 Configuração Experimental.....	98
6.3 Gama de Frequências de Análise	100
6.4 Análise Modal	102
6.4.1 Funções de Resposta em Frequência.....	103
6.4.2 Identificação Modal.....	106
6.4.3 Parâmetros Modais	106
6.4.4 Indicadores da Qualidade da Identificação	107
6.4.4.1 Critério MAC.....	107
6.4.4.2 Sintetização de FRFs	107
6.4.5 Formas Naturais de Vibração	110
6.5 Velocidades Críticas da Caixa de Transferência	118
6.6 Conclusão	124
7. ANÁLISE MODAL DOS COMPONENTES	125
7.1 Análise Modal do Corpo do Cártter.....	125
7.1.1 Gama de Frequências de Análise.....	126
7.1.2 Funções de Resposta em Frequência.....	127
7.1.3 Identificação Modal.....	129
7.1.4 Parâmetros Modais	129
7.1.5 Indicadores da Qualidade da Identificação	130

7.1.5.1 Critério MAC.....	130
7.1.5.2 Sintetização de FRFs	130
7.1.6 Formas Naturais de Vibração	132
7.2 Análise Modal da Tampa do Câster.....	138
7.2.1 Gama de Frequências de Análise.....	140
7.2.2 Funções de Resposta em Frequência.....	141
7.2.3 Identificação Modal.....	142
7.2.4 Parâmetros Modais	143
7.2.5 Indicadores da Qualidade da Identificação	143
7.2.5.1 Critério MAC.....	143
7.2.5.2 Sintetização de FRFs	144
7.2.6 Formas Naturais de Vibração	145
7.3 Conclusão	151
8. PROGRAMA DE ACOPLAMENTO DINÂMICO	153
8.1 Fluxograma.....	154
8.2 Algoritmos de Inversão de Matrizes	155
9. ACOPLAMENTO DINÂMICO-EXEMPLO ANALÍTICO	159
9.1 Modelos Completos.....	161
9.2 Redução dos Graus de Liberdade.....	163
9.3 Redução dos Modos Considerados	164
9.4 Conclusão	169
10. ACOPLAMENTO DINÂMICO - CÂSTER.....	171
10.1 Modelos Completos.....	171
10.2 Modelos Incompletos.....	177
10.3 Conclusão	181
11. CONCLUSÃO	183
REFERÊNCIAS	187

ANEXOS.....	191
ANEXO A - FORMALISMO DO ACOPLAMENTO POR BLOCOS II	193
ANEXO B - FRFs MEDIDAS E SINTETIZADAS	199
ANEXO B1 - Cárter.....	199
ANEXO B2 - Corpo do Cárter.....	216
ANEXO B3 - Tampa do Cárter.....	227
ANEXO C - FORMAS NATURAIS	239
ANEXO C1 - Formas Naturais do Cárter	239
ANEXO C2 - Formas Naturais do Corpo do Cárter.....	242
ANEXO C3 - Formas Naturais da Tampa do Cárter.....	244
ANEXO D - FICHEIRO DE DADOS TIPO.....	247

NOMENCLATURA

$A(\omega)$	função de resposta em frequência de acelerabilidade
${}_r B_{jk} = {}_r \Psi_j {}_r \Psi_k$	constante modal
c_r	amortecimento modal
$c_{r,X}$	amortecimento modal do componente X
${}_r D_{jk}$	contribuição dos modos distintos de r
E_m^2	erro quadrático médio
E_f	sensibilidade do transdutor de força
E_x	sensibilidade do transdutor de aceleração
F	amplitude de excitação
F_j	amplitude de excitação do grau de liberdade j
$h(t), h$	função de resposta ao impulso
$h_q = h(q\Delta t)$	valor da função de resposta ao impulso para o instante $t = q\Delta t$
$h_{e,m+2N}$	função de resposta ao impulso medida
$h_{a,m+2N}$	função de resposta ao impulso analítica
H_1, H_2	estimadores da FRF
i	$\sqrt{-1}$
k_r	rigidez modal
$k_{r,X}$	rigidez modal do componente X
m	número de modos do modelo reduzido
m_r	massa modal
$m_{r,X}$	massa modal do componente X
M	número de pontos experimentais usados no método dos mínimos quadrados
MAC_{ij}	MAC entre os vectores modais i e j.
n	número de graus de liberdade do modelo reduzido
N	número de graus de liberdade
${}_M R_{jk}$	resíduo de massa
${}_K R_{jk}$	resíduo de rigidez

$R_{ff}(\tau)$	função autocorrelação de $f(t)$
$R_{xf}(\tau)$	função correlação cruzada de $f(t)$ e $x(t)$
$S_{xf}(\omega)$	função densidade espectral cruzada de $f(t)$ e $x(t)$
$S_{ff}(\omega)$	função densidade espectral de potência de $f(t)$
V	amplitude de velocidade
\ddot{x}	aceleração
\dot{x}	velocidade
X	amplitude de deslocamento
X_j	amplitude de deslocamento do grau de liberdade j
$Y(\omega), Y$	função de resposta em frequência de mobilidade
$\alpha(\omega), \alpha$	função de resposta em frequência de deslocabilidade
$\alpha_x(\omega)$	função de resposta em frequência de deslocabilidade do componente X
$\alpha_e, \alpha_e(\omega)$	função de resposta em frequência de deslocabilidade medida
$\alpha_a, \alpha_a(\omega)$	função de resposta em frequência de deslocabilidade analítica
$\lambda_r = -\omega_r \zeta_r + \omega_r \sqrt{1 - \zeta_r^2}$	pólo complexo
$\bar{\omega}_r$	frequência natural do sistema não amortecido ou com amortecimento proporcional
ω_r	frequência natural do sistema amortecido geral
${}_r \psi_k$	elemento k do vector $\{\psi\}_r$
${}_r \phi_k$	elemento k do vector $\{\phi\}_r$
${}_r \theta_k$	elemento k do vector $\{\theta\}_r$
γ^2	função coerência
$\Delta\omega$	banda de frequências
ω_a, ω_b	extremos da banda de frequências
ζ_r	factor de amortecimento
μ_r	valor esperado de $f(t)$
θ_a, θ_b	ângulos

- $\omega_{dr} = \omega_r \sqrt{1 - \zeta_r^2}$ frequência natural amortecida
- $\delta_r = -\omega_r \zeta_r$ taxa de amortecimento
- Δf resolução em frequência
- Δt resolução em tempo
- $[A(\omega)]$ matriz das funções de resposta em frequência de
acelerabilidade
- $[C]$ matriz de amortecimento viscoso
- $[D]$ matriz de amortecimento histerético
- $\{f(t)\}, \{f\}$ vector de excitação
- $\{f_x\}$ vector de excitação aplicado no componente X
- $\{F\}$ vector amplitude de excitação
- $\{F_x\}$ vector amplitude de excitação do componente X
- $\{F_x^x\}$ subvector do vector $\{F_x\}$, onde x:
=a- Pontos do componente A não acoplados
=b- Pontos do componente B não acoplados
=c- Pontos pertencentes ao acoplamento
- $[F] = [\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}]$ matriz de funções deslocabilidade dos graus de
liberdade acoplados
- $[h(t)]$ matriz das funções de resposta ao impulso
- $[H(\omega)]$ matriz das funções de resposta em frequência
- $[H^R(\omega)]$ matriz das funções de resposta em frequência
reduzida
- $[K]$ matriz de rigidez
- $[M]$ matriz de massa
- $\{p\}, \{p(t)\}$ vector de excitação do problema composto
- $\{P\}$ vector amplitude de excitação do problema
composto
- $\{q_x\}$ vector de deslocamentos do componente X em
coordenadas modais

$\{\ddot{q}_x\}$	vector de acelerações do componente X em coordenadas modais
$[R]$	matriz de termos residuais
$[U]$	matriz dos vectores singulares à esquerda
$[V]$	matriz dos vectores singulares à direita
$\{x(t)\}, \{x\}$	vector de deslocamentos
$\{\dot{x}(t)\}, \{\dot{x}\}$	vector de velocidades
$\{\ddot{x}(t)\}, \{\ddot{x}\}$	vector de acelerações
$\{X\}$	vector amplitude de deslocamento
$\{X_y\}$	vector amplitude de deslocamentos do componente Y
$\{X_y^x\}$	subvector do vector $\{X_y\}$, onde x: <ul style="list-style-type: none"> =a- Pontos do componente A não acoplados =b- Pontos do componente B não acoplados =c- Pontos pertencentes ao acoplamento
$[Y(\omega)]$	matriz das funções de resposta em frequência de mobilidade
$\{y(t)\}, \{y\}$	vector composto de deslocamentos e velocidades
$\{\dot{y}(t)\}, \{\dot{y}\}$	vector composto de velocidades e acelerações
$\{Y\}$	vector composto de amplitude de deslocamentos e velocidades
$[Z(\omega)], [Z]$	matriz de impedâncias
$[\alpha(\omega)]$	matriz das funções de resposta em frequência de deslocabilidade
$[\alpha_x(\omega)], [\alpha_x]$	matriz de funções de resposta em frequência de deslocabilidade do componente X
$[\alpha_x^{xy}(\omega)], [\alpha_x^{xy}]$	submatriz da matriz matriz $[\alpha_x(\omega)]$, onde x,y: <ul style="list-style-type: none"> =a- Pontos do componente A não acoplados =b- Pontos do componente B não acoplados =c- Pontos pertencentes ao acoplamento

$[\alpha_x^{ic}]$	vector linha da matriz $[\alpha_x]$ que relaciona os GDL i com os GDL acoplados
$\{\alpha_x^{ci}\}$	vector coluna da matriz $[\alpha_x]$ que relaciona os GDL acoplados com os GDL i
$\{\theta\}_r$	vector modal normalizado para massa modal unitária para o sistema com amortecimento viscoso geral
$\{\psi\}_r$	vector modal do sistema não amortecido ou com amortecimento proporcional
$[\Psi]$	matriz das formas naturais para o sistema não amortecido ou com amortecimento proporcional
$\{\phi\}_r$	vector modal normalizado para massa modal unitária para o sistema não amortecido ou com amortecimento proporcional
$[\Phi]$	matriz das formas naturais normalizadas para massa modal unitária para o sistema não amortecido ou com amortecimento proporcional.
$[\Theta]$	matriz das formas naturais normalizadas para massa modal unitária do sistema com amortecimento viscoso geral
$[\Sigma]$	matriz dos valores singulares

SIMBOLOGIA

$[]$	matriz
$\{ \}$	vector coluna
$[]$	vector linha
$[\cdot]$	matriz diagonal
*	conjugado

τ	transposto
$[]^{-1}$	matriz inversa
$[]^h$	matriz hermiciana
$ $	magnitude

ABREVIATURAS

A_r	${}_r A_{jk}$
BL	banda lateral
GDL	grau de liberdade
GDLs	graus de liberdade
FE	frequência de engrenamento
FFT	transformada rápida de Fourier (“Fast Fourier Transform”)
FR	frequência de rotação
FRF	função de resposta em frequência
FRFs	funções de resposta em frequência
MAC	critério de certificação modal (“Modal Assurance Criterium”)
MDOF	N graus de liberdade, com $N > 1$ (“Multi Degree Of Freedom”)
MIF	função indicadora de modos (“Mode Indicator Function”)
MIMO	múltiplas solicitações, múltiplas respostas (“Multi Input Multi Output”)
SDOF	um grau de liberdade (“Single Degree of Freedom”)
SIMO	uma solicitação, múltiplas respostas (“Single Input Multi Output”)
SISO	uma solicitação, uma resposta (“Single Input Single Output”)
SUM	função soma das funções de resposta em frequência
V_r	$e^{s_r \Delta t}$

1. INTRODUÇÃO

1.1 Análise Modal e Acoplamento Dinâmico

As estruturas mecânicas em serviço estão sujeitas a vibrações. Veículos, máquinas e outras estruturas vibram quando são excitadas por forças dinâmicas. Essas forças podem resultar de uma fonte externa ou ser geradas pelas próprias condições de funcionamento. Qualquer que seja o caso, a vibração verificada é o resultado da interacção entre as forças aplicadas e as características dinâmicas da estrutura. Assim, se essas características não forem adequadas para a excitação aplicada, a estrutura pode vibrar excessivamente^[1]. Logo, é fundamental para o engenheiro de projecto e desenvolvimento, não só ser capaz de antever o comportamento das estruturas em funcionamento, como, também, optimizá-las para as solicitações de serviço^[2]. Torna-se, pois, necessário prever a resposta da estrutura em estudo a um determinado conjunto de solicitações. No entanto, a análise do comportamento dinâmico necessita de um modelo do sistema em estudo, e para a obtenção desse modelo podem aplicar-se as técnicas de análise modal.

A análise modal consiste no processo de determinação das características dinâmicas inerentes a um determinado sistema, as quais podem ser usadas para formular um modelo matemático do seu comportamento dinâmico. Essas características aparecem, geralmente, na forma de frequências e formas naturais de vibração, e factores de amortecimento.

Existem duas vias para levar a cabo a análise modal: uma analítica e outra experimental.

Para a análise modal analítica, o sistema em estudo é descrito através das suas propriedades físicas de massa, rigidez e amortecimento^[3]. Desenvolvimentos recentes verificados nas técnicas de análise por elementos finitos permitem discretizar praticamente qualquer estrutura. Estes avanços, em conjugação com o rápido e eficaz aumento da capacidade de cálculo dos computadores actuais, aumentaram de forma significativa a capacidade e a aplicabilidade deste tipo de abordagem^{[3],[4]}. Porém, este desenvolvimento, foi também acompanhado pelo aumento das capacidades dos equipamentos de aquisição e processamento de dados^[5]. Isto originou grandes avanços

na via experimental da análise, aumentando as potencialidades da análise modal experimental.

A base teórica da análise modal experimental assenta no estabelecimento de uma relação entre a resposta vibratória de um determinado grau de liberdade e uma excitação no mesmo ou noutra grau de liberdade, como função da frequência de excitação. Esta relação é conhecida como função de resposta em frequência, FRF, a qual é uma função matemática complexa. Diferentes combinações de pontos de excitação e resposta permitem obter um conjunto de funções de resposta em frequência, FRFs, que constituem o modelo de resposta do sistema. A partir deste modelo, utilizando algoritmos específicos de identificação modal, podem obter-se os parâmetros modais da estrutura.

Ambos os métodos apresentam vantagens e inconvenientes. A principal vantagem da modelação analítica é permitir estudar o comportamento dinâmico da estrutura durante a fase de projecto, antes da construção de um protótipo. Este método de modelação é habitualmente utilizado para avaliar e comparar diferentes soluções, permitindo, assim, o desenvolvimento duma configuração óptima, que atenua eventuais problemas de vibração, ruído e fadiga.

No entanto, os modelos analíticos podem apresentar algumas deficiências. Estas são, fundamentalmente, consequência de incertezas relativas à distribuição do amortecimento, que é difícil de modelar, às condições de fronteira e à excitação actuante sobre a estrutura quando em funcionamento real.

Em consequência, os modelos analíticos devem ser verificados por um ensaio dinâmico efectuado sobre um protótipo, antes de serem utilizados em estudos de simulação. Esta verificação deve ser realizada, especialmente, para estruturas cuja missão, integridade, segurança ou controlo dependam fundamentalmente das suas características dinâmicas^[4].

A análise modal experimental apresenta-se, então, como uma técnica que permite obter uma representação matemática do comportamento dinâmico da estrutura, a partir de uma série de medições efectuadas sobre um protótipo. Deste modo, é possível validar e/ou melhorar o modelo analítico previamente estabelecido^[6].

A experiência adquirida durante os últimos anos mostra que a metodologia mais apropriada para otimizar as propriedades dinâmicas de uma estrutura, requer a construção de um protótipo. Essa construção deve ser realizada com base nos cálculos efectuados sobre os modelos analíticos, seguida de um ensaio que permita verificar as

suas características dinâmicas. Este ensaio permite identificar as zonas críticas onde os níveis de vibração excessivos podem provocar rotura precoce dos componentes. Obtém-se, então, uma representação matemática que serve para otimizar o projecto inicial^[6].

Considerando a tendência para o aumento do tamanho e complexidade das estruturas, presentes e futuras, a análise dinâmica duma estrutura completa fica cada vez mais dispendiosa, complicada ou mesmo impossível. Contudo, a qualificação e verificação de projectos necessita de testes extensivos.^[7]

Uma abordagem promissora na análise modal de grandes estruturas é o acoplamento dinâmico. Este permite reduzir, convenientemente, o esforço despendido nos testes por decomposição da estrutura em subsistemas ou componentes mais pequenos. As propriedades modais da estrutura completa são, então, sintetizadas através das propriedades modais individuais dos componentes^[8]. Este procedimento é especialmente vantajoso em duas situações: nos casos em que a estrutura principal é composta por várias subestruturas repetidas, ou, quando se pretende caracterizar várias estruturas distintas que possuem componentes idênticos. Para estes casos, os esforços despendidos nos testes podem ser consideravelmente reduzidos.^[7]

Esta metodologia apresenta vantagens, não só do ponto de vista experimental, como também quando se realiza um estudo numérico. Do ponto de vista experimental é, geralmente, mais simples estudar separadamente o comportamento das diversas subestruturas. No caso do estudo numérico permite analisar modelos de menor peso computacional, ou, caso necessário, refinar o estudo dos diversos componentes, o que poderia ser proibitivo no caso do estudo do modelo completo, devido a limitações de memória. Caso se possa estudar separadamente cada subestrutura, existe, adicionalmente, a vantagem de se poder modelar cada uma delas, quer por via experimental quer por via numérica, escolhendo a mais conveniente caso a caso, de modo a otimizar a eficiência e a solução.

Durante o projecto, ou mesmo utilização de qualquer estrutura ou sistema, há, por vezes, necessidade de executar diversas alterações, ou substituições, a um ou mais dos seus componentes. As alterações no seu comportamento dinâmico global podem rapidamente ser previstas, caso se opte por uma modelação via acoplamento dinâmico, tendo somente a necessidade de analisar o(s) componente(s) alterado(s).

Existem diversas formas de levar a cabo o processo de acoplamento^[9]. No entanto, algumas delas aplicam-se somente a modelos espaciais, não sendo directamente

aplicáveis a modelos obtidos por via experimental^[9]. O acoplamento dinâmico destes últimos envolve, quase sempre, a necessidade de inverter as matrizes das funções de resposta em frequência.

Em [9] são abordados alguns procedimentos de acoplamento, onde se ilustra a aplicação a um componente da plataforma de um helicóptero. Para este caso são aproveitadas as facilidades de conjugar modelos provenientes de diferentes tipos de análises. Porém, as diversas subestruturas e ligação entre elas eram relativamente simples.

Em [10], [11], [12] e [13] são experimentados procedimentos de acoplamento em estruturas compostas por vigas. Neles são abordados problemas, tais como, a necessidade de modelar correctamente o acoplamento e contabilizar a contribuição dos modos fora da banda de frequências de análise, e as dificuldades que ocorrem na inversão das matrizes. Este problema de inversão de matrizes é aprofundado em [14]. Aí, é referido o mau condicionamento das matrizes FRF, principalmente na vizinhança das ressonâncias, sendo também apresentado um método alternativo de inversão de matrizes, o qual utiliza um conceito diferente, designado por pseudo-inversa.

Em [15] e [16] são apresentadas metodologias de acoplamento que não usam inversão de matrizes. Contudo, estas metodologias não possuem aplicação directa a modelos obtidos experimentalmente, pois necessitam da parametrização das matrizes das funções de resposta em frequência.

1.2 Objectivos da Dissertação

O principal objectivo desta dissertação é modelar e caracterizar o comportamento dinâmico do cárter de uma caixa de transferência. Para atingir o objectivo, e dada a complexidade geométrica do cárter, recorre-se às técnicas de análise modal experimental e acoplamento dinâmico. A análise modal experimental é aplicada na modelação do cárter completo e dos seus componentes principais, sendo o acoplamento dinâmico aplicado na modelação do cárter completo a partir dos modelos dos seus componentes.

No contexto do objectivo proposto, pretende-se ainda estabelecer as condições críticas de funcionamento da caixa de transferência em termos das frequências de ressonância do cárter.

Procurar-se-á, igualmente, avaliar e testar a aplicabilidade de procedimentos de acoplamento dinâmico na obtenção de um modelo para o cárter em estudo, na base de que esta técnica, potencialmente muito promissora, já se encontra amplamente testada na obtenção de modelos de estruturas simples.

Por último comparar-se-ão os dois métodos de modelação utilizados, análise modal experimental e acoplamento dinâmico, avaliando a sua aplicabilidade à estrutura objecto do estudo.

1.3 Organização da Dissertação

Este trabalho está organizado em 11 capítulos, sendo o primeiro esta introdução, e os restantes apresentando o seguinte conteúdo:

Capítulo 2 - apresentação do formalismo analítico da análise modal, orientando o estudo para os modelos que vão permitir abordar a análise modal experimental;

Capítulo 3 - apresentação e estudo das diversas metodologias de identificação modal contidas no programa de análise modal utilizado;

Capítulo 4 - apresentação e estudo dos algoritmos de acoplamento dinâmico;

Capítulo 5 - descrição da estrutura em estudo, do procedimento experimental adoptado e do equipamento utilizado;

Capítulo 6 - modelização do cárter completo por análise modal experimental e determinação das condições críticas de funcionamento da caixa de transferência;

Capítulo 7 - obtenção dos modelos dinâmicos dos dois componentes do cárter, tampa e caixa, separadamente;

Capítulo 8 - apresentação do programa de acoplamento dinâmico implementado;

Capítulo 9 - validação do programa de acoplamento dinâmico implementado, com base num sistema discreto, composto por massas, molas e amortecedores, por acoplamento de dois sub-sistemas;

Capítulo 10 - Acoplamento dinâmico do cárter a partir dos modelos obtidos por análise modal experimental para os dois componentes do cárter.

Capítulo 11 - Apresentação das conclusões do trabalho e algumas sugestões para trabalho futuro.

2. ANÁLISE MODAL ANALÍTICA

2.1 Modelos Dinâmicos

As propriedades dinâmicas, características de um determinado sistema ou estrutura, podem ser apresentadas de três formas diferentes, ditas modelos. Assim sendo, podemos ter um sistema descrito pelo seu modelo espacial, modelo modal e modelo de resposta em frequência.

O modelo espacial é constituído, no caso mais geral, pelas matrizes de massa $[M]$, rigidez $[K]$ e amortecimento, podendo esta última ser dividida em outras duas, a de amortecimento viscoso $[C]$ e a de histerético $[D]$. Estas matrizes são o reflexo da distribuição espacial de massa, rigidez e amortecimento da estrutura, e são obtidas pela discretização da estrutura em N graus de liberdade, os quais passam a representar o seu comportamento. Este modelo pode ser obtido utilizando, por exemplo, a técnica de discretização espacial pelo método de elementos finitos. É com as matrizes do modelo espacial e condições de fronteira impostas à estrutura em estudo, que se estabelecem as suas equações diferenciais de movimento, as quais aparecem na seguinte forma:

$$[M]_{N \times N} \{\ddot{x}(t)\}_{N \times 1} + [C]_{N \times N} \{\dot{x}(t)\}_{N \times 1} + [[K]_{N \times N} + i[D]_{N \times N}] \{x(t)\}_{N \times 1} = \{f(t)\}_{N \times 1} \quad (2.1)$$

onde $[M]$, $[K]$, $[C]$ e $[D]$ são as matrizes de massa, rigidez, amortecimento viscoso e amortecimento histerético respectivamente, $\{x(t)\}$ o vector de deslocamentos e $\{f(t)\}$ o vector excitação.

No estudo aqui apresentado só será considerado o amortecimento tipo viscoso, pois o programa de análise modal utilizado só permite considerar este tipo de amortecimento. Deste modo a equação de movimento antes apresentada toma a seguinte forma:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (2.2)$$

O modelo modal é constituído por duas matrizes, uma contendo as frequências naturais e os factores de amortecimento $[\lambda_r]$ de todos os modos, e outra que descreve as respectivas formas naturais da estrutura $[\Phi]$, habitualmente designada por matriz modal. Esta última matriz é composta pelos vectores das formas naturais, vectores estes que descrevem a deformada da estrutura para cada uma das suas frequências naturais.

Ambas as descrições, modelo espacial e modelo modal, são equivalentes. No entanto o modelo modal apresenta-se mais conveniente para representar as características dinâmicas de uma estrutura pelas seguintes razões:

1. As propriedades dinâmicas estruturais podem ser representadas graficamente pela animação das formas naturais;
2. O modelo modal pode ser verificado e identificado experimentalmente;
3. O modelo modal permite a comparação fácil das propriedades dinâmicas de estruturas diferentes;
4. Efeitos resultantes de modificações estruturais são facilmente investigados com o modelo modal.

Em alternativa a estrutura pode ser descrita pelo seu modelo de resposta que é constituído pela matriz de resposta em frequência $[H(\omega)]$, a qual permite relacionar a resposta harmónica da estrutura com uma excitação também harmónica, relação que toma a seguinte forma:

$$\{X\} = [\alpha(\omega)]\{F\} \quad (2.3)$$

Neste caso, estamos a relacionar o vector excitação com o vector deslocamentos, e logo, a matriz $[H(\omega)]$ toma a forma da matriz de funções de resposta em frequência (FRFs) deslocabilidade $[\alpha(\omega)]$. Deste modo, um elemento da matriz FRF de deslocabilidade $\alpha_{jk}(\omega)$ é definido da seguinte forma:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \left(\frac{X_j}{F_k} \right), f_m = 0; m \begin{cases} = 1, N \\ \neq k \end{cases} \quad (2.4)$$

Ou seja, $\alpha_{jk}(\omega)$ relaciona, em termos de amplitude e fase, os deslocamentos harmônicos num determinado GDL j com uma excitação harmônica aplicada no GDL k .

A função de resposta em frequência que no caso geral é representada por $H(\omega)$, pode tomar, mais frequentemente, três formas, pois pode representar a razão entre:

- i) Deslocamento e força harmônicas: deslocabilidade ($\alpha(\omega)$)

$$\alpha(\omega) = \frac{Xe^{i\omega t}}{Fe^{i\omega t}} = \frac{X}{F} \quad (2.5)$$

- ii) Velocidade e força harmônicas: mobilidade ($Y(\omega)$)

$$Y(\omega) = \frac{Ve^{i\omega t}}{Fe^{i\omega t}} = \frac{V}{F} \quad (2.6)$$

contudo, se considerarmos vibração sinusoidal, a relação entre o deslocamento e a velocidade é a seguinte:

$$x(t) = Xe^{i\omega t} \text{ e } v(t) = \dot{x}(t) = i\omega Xe^{i\omega t} \quad (2.7)$$

logo:

$$Y(\omega) = \frac{V}{F} = i\omega \frac{X}{F} = i\omega\alpha(\omega) \quad (2.8)$$

- iii) Aceleração e força harmônicas: acelerabilidade ($A(\omega)$)

Neste caso:

$$a(t) = \ddot{x}(t) = -\omega^2 Xe^{i\omega t} \quad (2.9)$$

logo:

$$A(\omega) = \frac{A}{F} = -\omega^2 \frac{X}{F} = -\omega^2\alpha(\omega) \quad (2.10)$$

Estas são as principais formas de representação das FRFs, porém existem outras possibilidades que consistem nas suas funções inversas, deste modo poderemos ter:

- i) $\frac{\text{Força}}{\text{Deslocamento}}$: Rigidez dinâmica
- ii) $\frac{\text{Força}}{\text{Velocidade}}$: Impedância mecânica
- iii) $\frac{\text{Força}}{\text{Aceleração}}$: Massa aparente

A análise modal analítica permite relacionar os diferentes modelos, relações essas que podem ser utilizadas na análise modal experimental, de modo a obter um modelo matemático do sistema que se está a estudar.

2.2 Sistemas Discretos

2.2.1 Sistema não-Amortecido

Os sistemas discretos com N graus de liberdade (MDOF) são, do ponto de vista espacial, discretizados, sendo o seu comportamento expresso em função dos N graus de liberdade que o constituem. Assim sendo, o modelo espacial do sistema é representado por matrizes e vectores de dimensão N .

Para um sistema não amortecido, com N graus de liberdade, as equações diferenciais de movimento, na forma matricial, podem ser escritas da seguinte forma:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (2.11)$$

onde $[M]$ e $[K]$ representam, respectivamente, as matrizes de massa e rigidez de dimensão $N \times N$. Estas matrizes constituem o modelo espacial do sistema. Os vectores $\{x(t)\}$ e $\{f(t)\}$ de dimensão $N \times 1$, apresentam como componentes, respectivamente, os deslocamentos e as forças, variáveis no tempo.

Com o objectivo de obter as propriedades modais do sistema considera-se o regime livre, isto é, sem solicitação exterior aplicada:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{0\} \quad (2.12)$$

A equação anterior é uma equação diferencial homogénea de coeficientes constantes, logo possui uma solução na forma:

$$\{x(t)\} = \{X\}e^{i\omega t} \quad (2.13)$$

onde $\{X\}$ é o vector das amplitudes de vibração de dimensão $N \times 1$. Este tipo de solução assume que o sistema vibra com movimentos síncronos.

Substituindo a solução tipo na equação do movimento, obtemos:

$$([K] - \omega^2[M])\{X\} = \{0\} \quad (2.14)$$

A expressão anterior representa um problema típico de valores e vectores próprios, cuja solução permite-nos obter os N valores próprios do problema que são as frequências naturais não amortecidas do sistema ($\bar{\omega}_r, r=1,N$), e os respectivos N vectores próprios que são os vectores das formas naturais do sistema ($\{\psi\}_r, r=1,N$). Estes vectores representam a deformada do sistema para cada uma das frequências naturais.

A solução do problema pode ainda ser apresentada numa forma matricial, composta por duas matrizes de dimensão $N \times N$, $[\bar{\omega}_r]$ que é uma matriz diagonal, cujos valores da diagonal são as frequências naturais, e $[\Psi]$ que é uma matriz cujas colunas são os vectores das formas naturais. Estas duas matrizes, $[\bar{\omega}_r]$ e $[\Psi]$, constituem o modelo modal do sistema.

Deve ainda notar-se que das duas matrizes atrás referidas, a matriz dos valores próprios é única, ao contrário da matriz dos vectores próprios. Enquanto as frequências naturais são quantidades fixas, as formas naturais são definidas a menos de uma constante, de um factor de escala, que não afecta a forma natural.

O modelo modal do sistema possui propriedades que convém referir, conhecidas como propriedades de ortogonalidade. Essas propriedades podem ser definidas do seguinte modo:

$$\begin{aligned} [\Psi]^T[M][\Psi] &= [m_r] \\ [\Psi]^T[K][\Psi] &= [k_r] \end{aligned} \quad (2.15)$$

As matrizes diagonais $[\dot{m}_r]$ e $[\dot{k}_r]$ podem relacionar-se com as frequências naturais através da expressão:

$$[\dot{\omega}_r^2] = [\dot{m}_r]^{-1} [\dot{k}_r] \quad (2.16)$$

os termos m_r e k_r são designados, respectivamente, por massa e rigidez modal do modo de ordem r . Dado que, como foi referido anteriormente, os vectores próprios estão definidos a menos de uma constante, os valores de m_r e k_r não são únicos. Logo, de modo a não existirem ambiguidades, costuma-se recorrer a procedimentos de normalização. Um dos procedimentos mais usados em análise modal é a normalização para massa modal unitária. Assim sendo, com a matriz $[\Phi]$ dos vectores próprios normalizados para massas modais unitárias, as propriedades de ortogonalidade exprimem-se na seguinte forma:

$$\begin{aligned} [\Phi]^T [M] [\Phi] &= [I] \\ [\Phi]^T [K] [\Phi] &= [\dot{\omega}_r^2] \end{aligned} \quad (2.17)$$

Assim, a relação entre o vector da forma natural para o modo r , na forma geral $\{\psi\}_r$ e o normalizado para massa modal unitária $\{\phi\}_r$ é:

$$\{\phi\}_r = \frac{1}{\sqrt{m_r}} \{\psi\}_r \quad \text{ou} \quad \{\phi\}_r = \{\psi\}_r [\dot{m}_r]^{-1/2} \quad (2.18)$$

A demonstração das propriedades de ortogonalidade é realizada em seguida. Um determinado modo r verifica a equação:

$$([\dot{K}] - \dot{\omega}_r^2 [\dot{M}]) \{\psi\}_r = \{0\} \quad (2.19)$$

Pré-multiplicando por um vector próprio diferente, relativo a um determinado modo, s:

$$\{\psi\}_s^T ([K] - \bar{\omega}_r^2 [M]) \{\psi\}_r = 0 \quad (2.20)$$

Da mesma forma para o modo s:

$$([K] - \bar{\omega}_s^2 [M]) \{\psi\}_s = \{0\} \quad (2.21)$$

Transpondo a equação anterior, tendo em conta que as matrizes $[M]$ e $[K]$ são simétricas, e pós multiplicando-a por $\{\psi\}_r$, obtém-se:

$$\{\psi\}_s^T ([K] - \bar{\omega}_s^2 [M]) \{\psi\}_r = 0 \quad (2.22)$$

subtraindo a equação anterior da equação (2.20), obtemos:

$$(\bar{\omega}_r^2 - \bar{\omega}_s^2) \{\psi\}_s^T [M] \{\psi\}_r = 0 \quad (2.23)$$

Para $\bar{\omega}_s \neq \bar{\omega}_r$, a equação anterior só pode ser satisfeita se:

$$\{\psi\}_s^T [M] \{\psi\}_r = 0 \quad (2.24)$$

Substituindo na equação (2.20), vem:

$$\{\psi\}_s^T [K] \{\psi\}_r = 0 \quad (2.25)$$

Para $r=s$, as duas equações anteriores não se aplicam, mas a partir de (2.20), verifica-se que:

$$\{\psi\}_r^T [K] \{\psi\}_r = \bar{\omega}_r^2 \{\psi\}_r^T [M] \{\psi\}_r \quad (2.26)$$

Sendo $\{\psi\}_r^T [K] \{\psi\}_r = k_r$ e $\{\psi\}_r^T [M] \{\psi\}_r = m_r$, tem-se:

$$\bar{\omega}_r^2 = \frac{k_r}{m_r} \quad (2.27)$$

Substituindo todas os casos possíveis de r e s obtêm-se as equação de ortogonalidade na forma matricial apresentadas em (2.15).

Voltando agora ao regime forçado, e supondo-se a estrutura excitada por um conjunto de forças sinusoidais, com a mesma frequência, mas com amplitude e fase distintas, na forma:

$$\{f(t)\} = \{F\}e^{i\omega t} \quad (2.28)$$

Como anteriormente, admite-se uma solução do tipo:

$$\{x(t)\} = \{X\}e^{i\omega t} \quad (2.29)$$

onde $\{X\}$ representa um vector com amplitudes complexas constantes no tempo. Deste modo, substituindo na equação do movimento, obtêm-se:

$$([K] - \omega^2 [M])\{X\}e^{i\omega t} = \{F\}e^{i\omega t} \quad (2.30)$$

Resolvendo em função do vector dos deslocamentos vem:

$$\{X\} = ([K] - \omega^2 [M])^{-1} \{F\} \quad (2.31)$$

Fazendo $([K] - \omega^2 [M])^{-1} = [\alpha(\omega)]$, a expressão anterior pode ser rescrita na forma:

$$\{X\} = [\alpha(\omega)]\{F\} \quad (2.32)$$

onde $[\alpha(\omega)]$ é a matriz das funções de resposta em frequência (FRF) de deslocabilidade, a qual constitui o modelo de resposta do sistema em estudo.

Desta forma é possível calcular os elementos da matriz $[\alpha(\omega)]$ para qualquer frequência de interesse. No entanto, este tipo de cálculo não é conveniente para uma aplicação numérica, pois, como se pode ver em (2.32), envolve a inversão de uma matriz para cada frequência, o que apresenta diversas desvantagens, nomeadamente:

- o cálculo é numericamente pesado para sistemas de ordem elevada (N elevado);
- o cálculo é pouco eficiente quando há necessidade de conhecer somente algumas FRFs;
- não possibilita a observação de várias propriedades das FRFs.

Deste modo usa-se uma forma alternativa de determinação dos parâmetros das FRFs baseado em algumas propriedades modais do sistema, de modo a obter uma expansão em série das expressões das FRFs.

A equação (2.32) pode ser rescrita na seguinte forma:

$$[\alpha(\omega)]^{-1} = ([K] - \omega^2[M]) \quad (2.33)$$

Pré-multiplicando ambos os membros da igualdade anterior por $[\Phi]^T$ e pós-multiplicando por $[\Phi]$ obtemos:

$$[\Phi]^T [\alpha(\omega)]^{-1} [\Phi] = [\Phi]^T ([K] - \omega^2[M]) [\Phi] \quad (2.34)$$

Introduzindo as propriedades de ortogonalidade (2.15), a equação anterior simplifica-se na forma:

$$[\Phi]^T [\alpha(\omega)]^{-1} [\Phi] = [k_r - \omega^2 m_r] \quad (2.35)$$

donde se obtém:

$$[\alpha(\omega)] = [\Phi] \left[\begin{matrix} k_r - \omega^2 m_r \end{matrix} \right]^{-1} [\Phi]^T \quad (2.36)$$

Convém referir que tanto a matriz $\left[\begin{matrix} k_r - \omega^2 m_r \end{matrix} \right]$, como a sua inversa, $\left[\begin{matrix} k_r - \omega^2 m_r \end{matrix} \right]^{-1}$, são matrizes diagonais.

Atendendo à forma da matriz $[\Theta]$, a qual agrupa os diversos vectores coluna $\{\phi\}_r$, das formas naturais, podemos então obter a expressão de um elemento da matriz FRF de deslocabilidade:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_{jr} \phi_{kr}}{\bar{\omega}_r^2 - \omega^2} = \sum_{r=1}^N \frac{\psi_{jr} \psi_{kr}}{m_r (\bar{\omega}_r^2 - \omega^2)} \quad (2.37)$$

ou

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{A_{jk}}{\bar{\omega}_r^2 - \omega^2} \quad (2.38)$$

Esta forma de obtenção da matriz FRF é muito mais simples que a obtenção por inversão como na equação (2.32).

Na equação anterior A_{jk} é designada por constante modal.

2.2.2 Sistema com Amortecimento Viscoso Proporcional

No trajecto para o caso mais geral de sistemas amortecidos, é conveniente considerar um caso especial de amortecimento que possui a vantagem de ser relativamente fácil de analisar. Esse tipo de amortecimento é, habitualmente, designado por amortecimento proporcional. A vantagem de usar um modelo de amortecimento proporcional na análise dinâmica de estruturas consiste no facto de, nesse caso, as formas modais serem quase

idênticas às da estrutura não-amortecida. Especificamente, as formas naturais são idênticas e as frequências naturais são muito semelhantes. De facto, é possível derivar as propriedades modais de um sistema com amortecimento proporcional, analisando o não-amortecido e fazendo a correcção para a presença de amortecimento.

A equação do movimento para um sistema MDOF com amortecimento viscoso tem a forma:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (2.39)$$

No caso de a matriz de amortecimento resultar da combinação linear das matrizes de massa e de rigidez, pode exprimir-se na seguinte forma:

$$[C] = \beta[K] + \gamma[M] \quad (2.40)$$

Neste caso, se pré e pós-multiplicarmos a matriz de amortecimento pela matriz dos vectores próprios do sistema não amortecido, obtemos:

$$\begin{aligned} [\Psi]^T[C][\Psi] &= \beta[\Psi]^T[K][\Psi] + \gamma[\Psi]^T[M][\Psi] = \\ &= \beta \begin{bmatrix} \cdot & & \\ & k_r & \\ & & \cdot \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} \cdot & & \\ & m_r & \\ & & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & & \\ & c_r & \\ & & \cdot \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.41)$$

Os elementos c_r da matriz diagonal $\begin{bmatrix} \cdot & & \\ & c_r & \\ & & \cdot \end{bmatrix}$ são os coeficientes de amortecimento modal dos vários modos do sistema. O facto dessa matriz ser diagonal, significa que as formas modais do sistema com amortecimento proporcional são idênticas às do sistema não amortecido.

Realizando uma dedução idêntica à do sistema não amortecido para o regime forçado harmónico, permite-nos definir um componente da matriz FRF de deslocabilidade na seguinte forma:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{{}_r\Psi_j{}_r\Psi_k}{(k_r - \omega^2 m_r) + i(\omega c_r)} = \sum_{r=1}^N \frac{{}_r\Psi_j{}_r\Psi_k}{m_r \left(\left(\frac{k_r}{m_r} - \omega^2 \right) + i \left(\omega \frac{c_r}{m_r} \right) \right)} \quad (2.42)$$

Fazendo $\zeta_r = \frac{c_r}{2\sqrt{k_r m_r}} \Leftrightarrow \frac{c_r}{m_r} = 2\zeta_r \bar{\omega}_r$

e sabendo que $\bar{\omega}_r = \sqrt{\frac{k_r}{m_r}}$ e ${}_r\phi_j{}_r\phi_k = \frac{1}{m_r} {}_r\Psi_j{}_r\Psi_k$:

A função $\alpha_{jk}(\omega)$, pode ser rescrita na forma:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{{}_r\phi_j{}_r\phi_k}{(\bar{\omega}_r^2 - \omega^2) + i(2\omega\zeta_r\bar{\omega}_r)} \quad (2.43)$$

ou

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{{}_r A_{jk}}{(\bar{\omega}_r^2 - \omega^2) + i(2\omega\zeta_r\bar{\omega}_r)} \quad (2.44)$$

onde ${}_r A_{jk} = {}_r\phi_j{}_r\phi_k$, é designada constante modal.

A expressão anterior é muito idêntica à do sistema não amortecido, excepto que, para este caso, o denominador é complexo como resultado da inclusão do amortecimento.

2.2.3 Sistema com Amortecimento Viscoso Geral

Para o caso geral de amortecimento do tipo viscoso, a equação do movimento escreve-se:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (2.45)$$

Admitindo que a solicitação é harmónica:

$$\{F(t)\} = \{F\}e^{i\omega t} \quad (2.46)$$

e assumindo resposta harmónica do tipo:

$$\{x(t)\} = \{X\}e^{i\omega t} \quad (2.47)$$

após substituição na equação do movimento obtém-se:

$$[[K] - \omega^2[M] + i\omega[C]]\{X\}e^{i\omega t} = \{F\}e^{i\omega t} \quad (2.48)$$

A resposta forçada é então dada pelo sistema de equações:

$$\{X\} = [[K] - \omega^2[M] + i\omega[C]]^{-1} \{F\} \quad (2.49)$$

que pode ainda ser escrita na forma:

$$\{X\} = [\alpha(\omega)]\{F\} \quad (2.50)$$

Como nos casos anteriores, a expressão (2.50) é uma forma pouco conveniente para uma aplicação numérica. Deve procurar-se, de uma forma idêntica à anterior, obter uma expansão em série das expressões das FRFs.

Para o caso do amortecimento viscoso há necessidade de reformular as equações de modo a atingir o objectivo pretendido^{[9],[17]}. Deste modo, define-se um novo vector de coordenadas $\{y\}$, de ordem $2N$, o qual contém os deslocamentos $\{x\}$ e as velocidades $\{\dot{x}\}$:

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{\dot{x}\} \end{Bmatrix}_{(2N \times 1)} \quad (2.51)$$

Deste modo, a equação do movimento, admitindo o regime livre, pode ser reescrita:

$$[C|M]_{(N \times 2N)} \{\dot{y}\}_{(2N \times 1)} + [K|0] \{y\} = \{0\}_{(N \times 1)} \quad (2.52)$$

Contudo, nesta forma possuímos N equações e 2N incógnitas. Adicionando uma equação identidade do tipo:

$$[M|0] \{\dot{y}\} + [0|-M] \{y\} = \{0\} \quad (2.53)$$

a qual pode ser combinada com a equação (2.52) de modo a formar um conjunto de 2N equações, obtém-se:

$$\left[\begin{array}{c|c} C & M \\ \hline M & 0 \end{array} \right] \{\dot{y}\} + \left[\begin{array}{c|c} K & 0 \\ \hline 0 & -M \end{array} \right] \{y\} = \{0\} \quad (2.54)$$

Esta equação pode, ainda, ser escrita na forma compacta:

$$[A] \{\dot{y}\} + [B] \{y\} = \{0\} \quad (2.55)$$

Convém referir que, devido à simetria das matrizes [M], [K] e [C], as matrizes [A] e [B] também vão ser matrizes simétricas.

Assumindo uma solução do tipo $\{y\} = \{y\} e^{st}$ e introduzindo-a na equação anterior, obtemos um problema típico de valores e vectores próprios, cuja solução é constituída por 2N valores e vectores próprios, respectivamente, λ_r e $\{\theta\}_r$, os quais, em conjunto, satisfazem a equação:

$$(\lambda_r [A] + [B]) \{\theta\}_r = \{0\}; r = 1, 2N \quad (2.56)$$

É usual exprimir os valores próprios na seguinte forma:

$$\lambda_r = \omega_r \left(-\zeta_r + i\sqrt{1-\zeta_r^2} \right) \quad (2.57)$$

onde ω_r é a frequência natural e ζ_r é a razão de amortecimento para o modo r .

Este problema de valores e vectores próprios possui soluções complexas agrupadas em pares complexos conjugados. Para além disso, as soluções possuem propriedades de ortogonalidade que podem ser estabelecidas pré-multiplicando a equação (2.56), válida para o modo r , pelo vector próprio $\{\theta\}_q^T$:

$$\{\theta\}_q^T (\lambda_r [A] + [B]) \{\theta\}_r = 0 \quad (2.58)$$

Da mesma forma o par λ_q e $\{\theta\}_q$ satisfaz a equação:

$$(\lambda_q [A] + [B]) \{\theta\}_q = \{0\} \quad (2.59)$$

Transpondo a equação anterior, e tendo em conta que as matrizes $[A]$ e $[B]$ são simétricas, e pós multiplicando-a por $\{\theta\}_r$ obtém-se:

$$\{\theta\}_q^T (\lambda_q [A] + [B]) \{\theta\}_r = 0 \quad (2.60)$$

Subtraindo as duas equações anteriores obtém-se:

$$(\lambda_q - \lambda_r) \{\theta\}_q^T [A] \{\theta\}_r = 0 \quad (2.61)$$

Para $\lambda_r \neq \lambda_q$ tem-se:

$$\{\theta\}_q^T [A] \{\theta\}_r = 0 \quad (2.62)$$

Da expressão (2.58), obtém-se:

$$\{\theta\}_q^T [B] \{\theta\}_r = 0, \text{ caso } r \neq q \quad (2.63)$$

No caso de $q = r$, define-se:

$$\begin{aligned} \{\theta\}_r^T [A] \{\theta\}_r &= a_r \\ \{\theta\}_r^T [B] \{\theta\}_r &= b_r \end{aligned} \quad (2.64)$$

As últimas quatro equações definem as propriedades de ortogonalidade, as quais podem ser expressas na forma matricial:

$$\begin{aligned} [\Theta]^T [A] [\Theta] &= \begin{bmatrix} a_{r_1} \\ \vdots \\ a_{r_n} \end{bmatrix} \\ [\Theta]^T [B] [\Theta] &= \begin{bmatrix} b_{r_1} \\ \vdots \\ b_{r_n} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.65)$$

Da equação (2.58), considerando o caso em que $r=q$ e considerando as equações de ortogonalidade, (2.65), pode obter-se a seguinte relação entre a_r , b_r e λ_r :

$$\lambda_r = -\frac{b_r}{a_r}, \quad r=1,2,N \quad (2.66)$$

Voltando à equação diferencial do movimento (2.55), considerando agora a excitação aplicada e tendo em conta que se deve exprimir o vector excitação no novo sistema de coordenadas:

$$\{P\}_{(2N \times 1)} = \begin{Bmatrix} f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.67)$$

a equação do movimento, (2.55), no caso do regime forçado, fica:

$$[A]\{\dot{y}\} + [B]\{y\} = \{P\} \quad (2.68)$$

Supondo uma excitação harmónica, do tipo:

$$\{p\} = \{P\}e^{i\omega t} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}e^{i\omega t} \quad (2.69)$$

e assumindo a resposta também harmónica:

$$\{y\} = \{Y\}e^{i\omega t} \quad (2.70)$$

após substituição em (2.68), obtém-se:

$$(i\omega[A] + [B])\{Y\} = \{F\} \quad (2.71)$$

Da mesma forma que para (2.49):

$$[\alpha(\omega)]^{-1} = [i\omega[A] + [B]] \quad (2.72)$$

Pré-multiplicando ambos os membros da igualdade anterior por $[\Theta]^T$, e pós-multiplicando por $[\Theta]$, obtemos:

$$[\Theta]^T [\alpha(\omega)]^{-1} [\Theta] = [\Theta]^T [i\omega[A] + [B]] [\Theta] \quad (2.73)$$

Utilizando as propriedades de ortogonalidade (2.65), a expressão anterior simplifica-se na forma:

$$[\Theta]^T [\alpha(\omega)]^{-1} [\Theta] = [i\omega a_r + b_r] \quad (2.74)$$

donde se obtém:

$$[\alpha(\omega)] = [\Theta] [i\omega a_r + b_r]^{-1} [\Theta]^T \quad (2.75)$$

Assim, a expressão para um elemento da matriz FRF vem:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^{2N} \frac{{}_r\theta_j{}_r\theta_k}{a_r(i\omega - \lambda_r)} \quad (2.76)$$

Dado que os valores e vectores próprios ocorrem aos pares complexos conjugados, a expressão anterior pode ser rescrita, usando a expressão (2.57):

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{{}_r\theta_j{}_r\theta_k}{a_r(\omega_r\zeta_r + i(\omega - \omega_r(\sqrt{1-\zeta_r^2})))} + \frac{{}_r\theta_j^*{}_r\theta_k^*}{a_r^*(\omega_r\zeta_r + i(\omega + \omega_r(\sqrt{1-\zeta_r^2})))} \quad (2.77)$$

a qual pode ser rescrita na forma:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{{}_rA_{jk}}{\left(\omega_r\zeta_r + i(\omega - \omega_r(\sqrt{1-\zeta_r^2}))\right)} + \frac{{}_rA_{jk}^*}{\left(\omega_r\zeta_r + i(\omega + \omega_r(\sqrt{1-\zeta_r^2}))\right)} \quad (2.78)$$

onde ${}_rA_{jk} = \frac{{}_r\theta_j{}_r\theta_k}{a_r}$ é designada como constante modal.

2.3 Modelos Incompletos

No formalismo apresentado ao longo da secção anterior considerou-se que lidávamos com modelos completos, quer dizer, a análise foi apresentada para um sistema com N graus de liberdade (GDL) assumindo implicitamente que se conheciam todos os elementos das matrizes de massa, rigidez e amortecimento, e todos os elementos das matrizes modais e das matrizes de FRF. Este tipo de consideração é válido para estudos teóricos, mas possui aplicação limitada a estudos experimentais, onde nem sempre é possível medir todas as coordenadas, ou todos os modos que possui a estrutura em estudo. Assim sendo, há necessidade de estudar o tipo de implicações que tem o facto de não se ter acesso a toda a informação do sistema, o que nos leva à definição de modelos reduzidos ou incompletos.

Existem duas formas de um determinado modelo não ser completo: pela omissão de alguns modos de vibração ou pela omissão de algumas coordenadas, ou

ambos. Analisa-se em seguida cada um destes casos, prestando particular atenção às implicações deste facto no modelo de resposta. Considerando primeiro uma matriz FRF completa, $N \times N$:

$$[H(\omega)]_{N \times N} \quad (2.79)$$

Vamos agora supor que decidimos limitar a descrição do sistema a um determinado conjunto de n coordenadas, e logo ignorar o que acontece às outras, o que não é o mesmo que supor que elas não existem. O modelo de resposta reduzido do sistema passa a ser então de ordem $n \times n$, e pode ser designado por:

$$[H^R(\omega)]_{n \times n} \quad (2.80)$$

Deste modo é claro que não se alterou o número de GDLs do sistema, embora não tenhamos possibilidade de os descrever todos. Os elementos que se encontram na matriz FRF reduzida são idênticos aos elementos correspondentes na matriz completa, quer dizer, forma-se a matriz reduzida simplesmente extraindo, da matriz completa, os elementos que nos interessam, ignorando os restantes.

Neste caso, os elementos da matriz inversa da FRF relativa ao modelo reduzido $[H^R(\omega)]_{n \times n}^{-1}$, não serão os mesmos que os correspondentes para a matriz completa.

Para o modelo modal, a omissão de alguns dados relativos a algumas coordenadas, resulta numa matriz das formas modais menor, a qual se torna rectangular e de ordem $n \times N$. No entanto, ela continua a possuir N colunas, e a correspondente matriz dos valores próprios continua a ser de ordem $N \times N$, porque se continuam a incluir N modos.

Para o modelo espacial é mais difícil efectuar uma redução deste tipo. Não é muito realístico remover as linhas e colunas relativas aos GDLs omitidos das matrizes espaciais. Contudo, é possível reduzir as matrizes espaciais utilizando um determinado número de métodos que redistribuem as propriedades de massa, rigidez e amortecimento, das coordenadas omitidas pelas coordenadas que são mantidas. Deste modo, as propriedades da estrutura tais como a massa e a rigidez da estrutura são praticamente inalteradas.

A outra forma de redução é a omissão de alguns dos modos da estrutura. Este tipo de redução é muito frequentemente necessária, dado que, em muitos dos casos, alguns dos modos de alta frequência apresentam pouco interesse e são muito difíceis de medir.

Vamos, agora, supor uma matriz FRF, caso da mobilidade para um sistema com amortecimento viscoso proporcional, em que se consideram todas as coordenadas, mas omitiram-se alguns dos modos:

$$[Y(\omega)]_{N \times N} = i\omega [\Psi]_{N \times m} \left[(k_r - \omega^2 m_r) + i(\omega c_r) \right]^{-1} [\Psi]_{N \times m}^T \quad (2.81)$$

Considerando um só elemento da matriz anterior:

$$Y_{jk}(\omega) = i\omega \sum_{r=1}^{m \leq N} \frac{\Psi_{jr} \Psi_{kr}}{(k_r - \omega^2 m_r) + i(\omega c_r)} \quad (2.82)$$

É certo que os dois tipos de redução podem ser combinados e, nestas condições, a matriz FRF reduzida aparece com a forma:

$$[H^R(\omega)]_{m \times m} \quad (2.83)$$

Por vezes, é conveniente tentar corrigir a matriz FRF, de modo a compensar os erros introduzidos por terem sido desprezados alguns dos termos relativos a determinados modos. Isto é realizado habitualmente pela adição de um termo residual constante a cada elemento da FRF, na seguinte forma:

$$[H(\omega)] = [H^R(\omega)] + [R] \quad (2.84)$$

A consequência de omitir alguns modos para o modelo modal é óbvia, pois, nesse caso, a matriz dos valores próprios fica de ordem $m \times m$, tornando-se a matriz dos vectores próprios rectangular, na forma:

$$\left[\begin{array}{c} \bar{\omega}_r^2 \\ \vdots \end{array} \right]_{m \times m}; [\Phi]_{N \times m} \quad (2.85)$$

3. ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL

O objectivo da análise modal experimental é a obtenção de um modelo matemático do sistema em estudo. Esse modelo matemático vai permitir descrever de uma forma mais precisa o comportamento dinâmico do sistema, pois as curvas das FRFs obtidas experimentalmente não exprimem directamente as propriedades modais e/ou espaciais do sistema, e, para além disso, devido a erros ou problemas, verificados durante a fase experimental, todas essas curvas possuem ligeiros erros ou mesmo incoerências entre elas, problemas esses que são filtrados através da identificação de um modelo matemático para o sistema.

Assim sendo, o processo de análise consiste no ajustamento das curvas teóricas, do modelo adoptado, às curvas experimentais, através do qual se obtêm os parâmetros das curvas teóricas que melhor aproximam o conjunto de curvas experimentais obtidas. Esses parâmetros, como se pode confirmar nas expressões teóricas das FRFs, são, habitualmente, os parâmetros modais do sistema. As técnicas de ajustamento utilizadas são habitualmente designadas por técnicas de identificação modal. Estes métodos de ajustamento de curvas vão desde algoritmos muito sofisticados até técnicas de análise semi-gráficas^[18].

As técnicas de identificação dos parâmetros modais podem ser classificadas segundo diversos critérios. Um deles assenta no domínio em que é realizado o processamento das curvas obtidas experimentalmente. Assim, podemos ter técnicas no domínio do tempo e técnicas no domínio da frequência^{[19],[20]}. As técnicas no domínio do tempo, que usam na identificação a função de resposta ao impulso (transformada de Fourier inversa da função de resposta em frequência), permitem obter melhores resultados quando a banda de frequências é larga, ou mesmo quando o número de modos presentes na gama de análise também é elevado^[21]. Ao contrário, os métodos que trabalham no domínio da frequência que, por sua vez, usam a função de resposta em frequência no processo de identificação, permitem obter melhores resultados quando a banda de frequências é estreita ou o número de modos presentes nesse intervalo é reduzido^[21]. Porém, os métodos de identificação no domínio do tempo não permitem contabilizar a contribuição dos modos fora da gama de frequências em análise^[21]. Assim sendo, é por vezes conveniente utilizar métodos híbridos que permitem conjugar as vantagens de ambos^{[22],[23]}.

Outra forma de classificação baseia-se no número de modos que são analisados simultaneamente. Assim, podemos analisar somente um modo de cada vez, isto é, pressupondo que o sistema em estudo possui um comportamento idêntico a um sistema com um grau de liberdade, técnicas estas que são designadas por técnicas SDOF, ou analisar vários modos simultaneamente, que são as técnicas MDOF. Somente as técnicas que trabalham no domínio da frequência possibilitam a utilização de métodos SDOF, pois as que trabalham do domínio do tempo só utilizam métodos MDOF^[21].

A classificação dos métodos de identificação modal pode ainda ser realizada do ponto de vista da globalidade do método^[19], isto é, podemos ter métodos que utilizam, no processo de identificação, uma só FRF de cada vez, que são os métodos “Single-Input/Single-Output” (SISO)^{[24],[25]}. Os métodos SISO apresentam, por vezes, graves desvantagens, dado que só é analisada uma FRF de cada vez, e, como já foi referido existem, por vezes, incoerências entre as diversas FRFs, sendo pois necessário recorrer a métodos iterativos, os quais podem tornar o processo moroso^[24]. De modo a minimizar esta desvantagem, surgiram os métodos que permitem utilizar várias FRFs simultaneamente, tendo o ponto de excitação fixo e medindo a resposta em vários pontos, estes são designados por métodos “Single-Input/Multi-Output” (SIMO)^{[19],[22],[24]}. Os parâmetros que se obtêm com estes métodos são únicos para o grupo de FRFs analisado, obtendo assim um modelo consistente do sistema. Teoricamente, um grupo de FRFs medido variando o ponto de resposta e com a excitação fixa permite a obtenção de todos os parâmetros modais da estrutura. Porém, na prática, existe a possibilidade de perder alguns modos^[24]. Outra desvantagem dos métodos SIMO é a dificuldade que apresentam ao lidar com modos muito próximos. Assim, e dentro desta forma de classificação, podemos ter ainda os métodos “Multi-Input/Multi-Output” (MIMO), os quais permitem analisar simultaneamente FRFs resultantes de vários pontos de excitação e vários pontos de resposta^{[24],[25]}.

Em princípio, os métodos que apresentam maior abrangência permitem obter melhores resultados. Porém, são métodos de mais difícil implementação, ao contrário dos métodos SDOF que são simples de implementar^[25]. Assim, a escolha do método mais adequado para determinada análise é função de diversos factores. Não se pode, à partida, afirmar que existe um método adequado para todas as situações.^[19]

3.1 Métodos SDOF

3.1.1 Identificação de Picos

Este método de identificação modal é adequado para estruturas que possuem modos bem separados e com algum amortecimento. Caso não ocorresse esta situação seriam obtidas medições pouco precisas na vizinhança da ressonância. Contudo, as estruturas também não podem ser muito amortecidas, de forma a que a FRF na vizinhança de uma ressonância seja influenciada por um só modo. Esta metodologia é, por vezes, aplicada de modo a obter estimativas iniciais dos parâmetros modais.

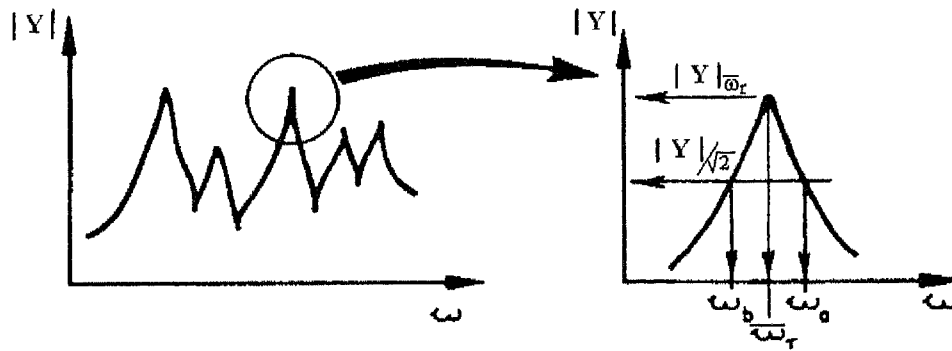


Figura 3.1 - Identificação de picos.

A FRF mobilidade com amortecimento proporcional, expressões (2.8) e (2.44), pode ser reescrita na seguinte forma:

$$Y_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N i\omega \frac{A_{jk}}{(\bar{\omega}_r^2 - \omega^2) + i(2\omega\zeta_r\bar{\omega}_r)} \quad (3.1)$$

$$\text{onde } \bar{\omega}_r = \sqrt{\frac{k_r}{m_r}} \text{ e } \zeta_r = \frac{c_r}{2\sqrt{k_r m_r}} \Leftrightarrow \frac{c_r}{m_r} = 2\zeta_r \bar{\omega}_r$$

O método é aplicado, utilizando a expressão anterior da FRF mobilidade, do seguinte modo:

1. Detectar os picos da magnitude da FRF (figura 3.1), deste modo estamos a isolar os diversos modos a identificar. Localizar para cada modo a frequência para a qual é máxima a magnitude da FRF, essa é a frequência natural do modo em estudo ($\bar{\omega}_r$).
2. Sendo o valor máximo da magnitude da FRF denotada por $|Y|_{\bar{\omega}_r}$, identificar a banda de frequências ($\Delta\omega$) para as quais a magnitude da FRF é $|Y|_{\bar{\omega}_r}/\sqrt{2}$. Os limites da gama são denotados por ω_b e ω_a , e são conhecidos, na literatura anglo-saxónica como “half power points”, figura 3.1.
3. Como será demonstrado no ponto seguinte, o amortecimento do modo em estudo pode ser calculado através de:

$$\zeta_r = \frac{\omega_a - \omega_b}{2\bar{\omega}_r} = \frac{\Delta\omega}{2\bar{\omega}_r} \quad (3.2)$$

4. Pode então obter-se uma estimativa do valor da constante modal do modo em questão, assumindo que o valor da FRF na ressonância é totalmente devido a um só modo, substituindo ω por $\bar{\omega}_r$ na equação(3.1), através de:

$$|Y| = \frac{{}_r A_{jk}}{(2\bar{\omega}_r \zeta_r)} \quad (3.3)$$

É preciso notar que a precisão com que são obtidos o amortecimento e a constante modal depende em grande parte da precisão com que é medida a FRF, pois este método baseia-se principalmente num valor da FRF. Para além disso, a maior parte dos erros de medição estão concentrados na vizinhança da ressonância, principalmente para estruturas pouco amortecidas. De notar que para este método só podemos obter constantes modais reais, o que origina modos reais, isto é, estruturas com amortecimento proporcional.

Outra limitação deste método é o facto de se assumir comportamento de SDOF, o que não é sempre aplicável. Podem mesmo acontecer casos em que os modos são bem

separados e haja uma contribuição significativa dos modos vizinhos para o modo em estudo.

3.1.2 Método do Círculo

Este método, como o anterior, enquadra-se no grupo dos métodos SDOF, pois assume que na vizinhança de uma determinada ressonância o valor da FRF é dominado pelo modo relativo a essa ressonância.

Considerando o modelo com amortecimento proporcional, para o caso da FRF de mobilidade, das equações (2.8) e (2.42), obtém-se:

$$Y_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N i\omega \frac{{}_r\Psi_j{}_r\Psi_k}{(k_r - \omega^2 m_r) + i(\omega c_r)} = \sum_{r=1}^N i\omega \frac{{}_r B_{jk}}{(k_r - \omega^2 m_r) + i(\omega c_r)} \quad (3.4)$$

Retirando do desenvolvimento em série um determinado modo r , a equação anterior pode ser rescrita:

$$Y_{jk}(\omega) = i\omega \frac{{}_r B_{jk}}{(k_r - \omega^2 m_r) + i(\omega c_r)} + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^N i\omega \frac{{}_s B_{jk}}{(k_s - \omega^2 m_s) + i(\omega c_s)} \quad (3.5)$$

Agora, ao assumir comportamento SDOF, admite-se que para uma banda estreita de frequências na vizinhança da frequência natural relativa ao modo r , o segundo termo do segundo membro da igualdade, isto é, a contribuição para a resposta dos restantes modos, é aproximadamente independente da frequência, o que não quer dizer que é desprezável. Logo, a expressão pode ser rescrita:

$$Y_{jk}(\omega)_{|\omega \approx \omega_r} = i\omega \frac{{}_r B_{jk}}{(k_r - \omega^2 m_r) + i(\omega c_r)} + {}_r D_{jk} \quad (3.6)$$

Considerando o caso em que a constante ${}_r B_{jk}$ é unitária e ${}_r D_{jk}$ é nula, temos:

$$\begin{aligned}
 Y_{jk}(\omega) &= \frac{i\omega}{(k_r - \omega^2 m_r) + i(\omega c_r)} \Leftrightarrow \\
 Y_{jk}(\omega) &= \frac{\omega^2 c_r + i\omega(k_r - \omega^2 m_r)}{(k_r - \omega^2 m_r)^2 + (\omega c_r)^2}
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

Separando as partes real e imaginária da mobilidade:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}(Y_{jk}(\omega)) &= \frac{\omega^2 c_r}{(k_r - \omega^2 m_r)^2 + (\omega c_r)^2} \\
 \operatorname{Im}(Y_{jk}(\omega)) &= \frac{\omega(k_r - \omega^2 m_r)}{(k_r - \omega^2 m_r)^2 + (\omega c_r)^2}
 \end{aligned}
 \tag{3.8}$$

Para este caso, pode demonstrar-se [9] que:

$$\left(\operatorname{Re}(Y_{jk}(\omega)) - \frac{1}{2c_r} \right)^2 + \left(\operatorname{Im}(Y_{jk}(\omega)) \right)^2 = \left(\frac{1}{2c_r} \right)^2
 \tag{3.9}$$

Assim, o diagrama de Nyquist para a expressão (3.7) é um círculo de raio $\frac{1}{2c_r}$ e centro

$\left(\frac{1}{2c_r}, 0 \right)$, como se pode ver na figura 3.2.

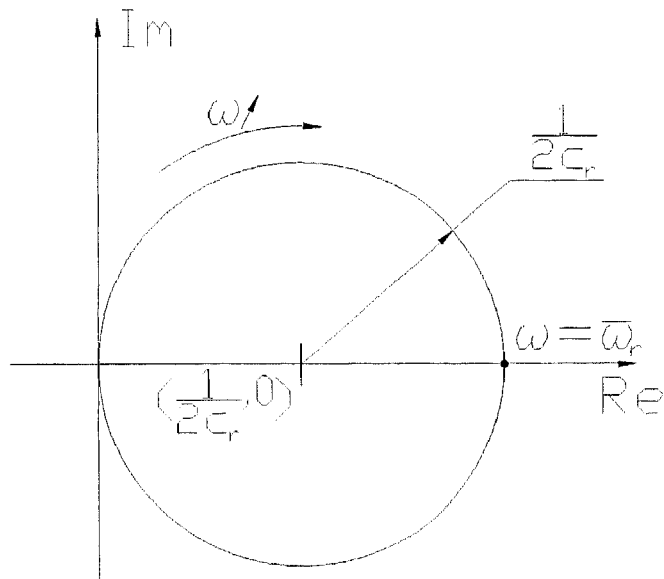


Figura 3.2 - Círculo Modal.

De notar que o círculo intercepta o eixo imaginário quando $\omega = \bar{\omega}_r = \sqrt{k_r/m_r}$, no ponto de coordenadas $\left(\frac{1}{c_r}, 0\right)$.

Deste modo, a FRF mobilidade dada pela equação (3.6) representa um círculo de raio ${}_r R_{jk}$, rodado $\angle({}_r B_{jk})$ e trasladado da origem ${}_r D_{jk}$, onde:

$${}_r R_{jk} = \frac{|{}_r B_{jk}|}{2c_r} \quad (3.10)$$

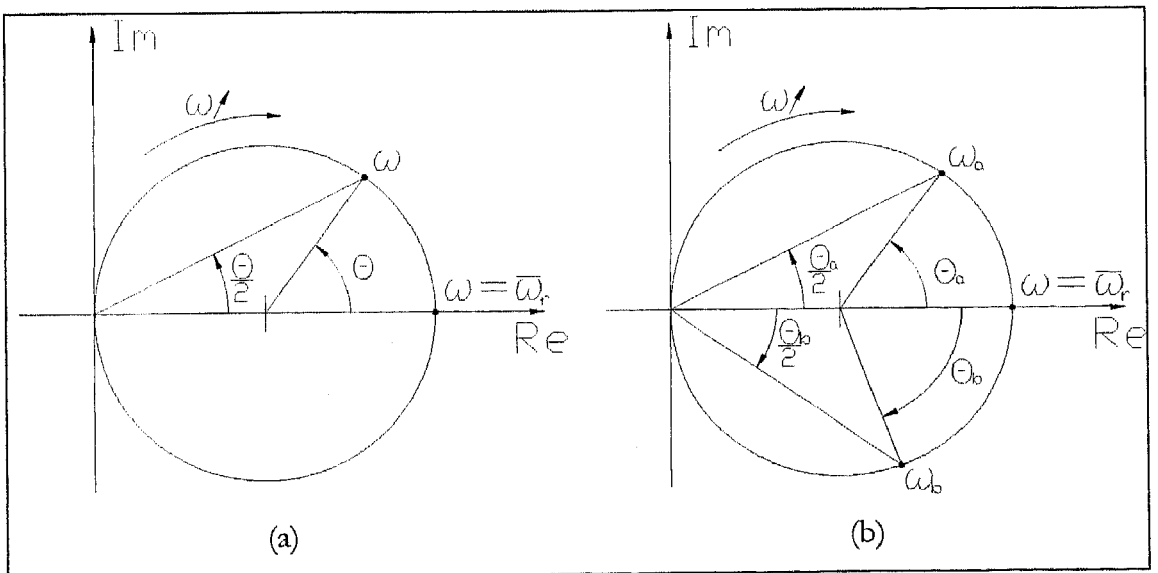


Figura 3.3 - Propriedades do círculo modal.

Voltando à equação do círculo, agora representada na figura 3.3(a), obtém-se para qualquer ω , a seguinte relação:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\operatorname{Im}(Y)}{\operatorname{Re}(Y)} = \frac{(k_r - \omega^2 m_r)}{\omega c_r} = \frac{(1 - (\omega/\bar{\omega}_r)^2)}{\omega c_r/k_r} = \frac{(1 - (\omega/\bar{\omega}_r)^2)}{2\zeta_r \omega/\bar{\omega}_r} \quad (3.11)$$

Substituindo $\omega/\bar{\omega}_r$ por β , a expressão anterior rescreve-se:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{(1 - \beta^2)}{2\zeta_r \beta} \quad (3.12)$$

onde β é designada por razão de frequências.

Resolvendo a equação (3.12) em ordem a θ , obtém-se:

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{(1 - \beta^2)}{2\zeta_r \beta}\right) \quad (3.13)$$

Derivando a expressão anterior em ordem a β :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \beta} = 2 \frac{-2\zeta_r \beta - 2\zeta_r}{(2\zeta_r \beta)^2 + (1 - \beta^2)^2} \quad (3.14)$$

Esta quantidade exprime a taxa de varrimento do círculo, isto é, a variação verificada em θ para uma variação unitária em β . Atendendo à definição de β , esta quantidade é também um indicador da taxa de variação do ângulo θ com a frequência, ω .

Assim, a fim de identificar a frequência à qual a referida variação atinge o valor máximo, há necessidade de conhecer a expressão da segunda derivada de θ em ordem a β . Deste modo, voltando a derivar (3.14) em ordem a β , obtém-se:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \beta^2} = 2 \frac{4\zeta_r \beta [\beta^4 + 2\beta^3 + (4\zeta_r^2 - 3)]}{[(1 - \beta^2)^2 + (2\zeta_r \beta)^2]^2} \quad (3.15)$$

Facilmente se verifica que a expressão anterior se anula, quer dizer, o varrimento do círculo atinge um valor estacionário que, de acordo com a representação gráfica da função, se verifica ser um máximo, quando:

$$\beta = \sqrt{-1 + 2\sqrt{1 - \zeta_r^2}} \quad (3.16)$$

ou, atendendo à definição de β , o varrimento máximo ocorre para a frequência:

$$\omega = \bar{\omega}_r \sqrt{-1 + 2\sqrt{1 - \zeta_r^2}} \quad (3.17)$$

No entanto, para valores correntes da razão de amortecimento ζ_r , pode assimilar-se a frequência de máximo varrimento à frequência natural do sistema correspondente ao modo em análise, $\bar{\omega}_r$.

Voltando à figura 3.3, tomando como referência a ressonância e considerando um ponto antes, (ω_b) , e outro após, (ω_a) , como está representado na figura 3.3(b), obtém-se:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(\frac{\theta_b}{2}\right) &= \frac{(1 - (\omega_b/\bar{\omega}_r)^2)}{2\zeta_r \omega_b/\bar{\omega}_r} \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\theta_a}{2}\right) &= \frac{((\omega_a/\bar{\omega}_r)^2 - 1)}{2\zeta_r \omega_a/\bar{\omega}_r} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Somando as duas equações anteriores:

$$\omega_b \operatorname{tg}\left(\frac{\theta_b}{2}\right) + \omega_a \operatorname{tg}\left(\frac{\theta_a}{2}\right) = \frac{(1 - (\omega_b/\bar{\omega}_r)^2)}{2\zeta_r/\bar{\omega}_r} + \frac{(1 - (\omega_a/\bar{\omega}_r)^2)}{2\zeta_r/\bar{\omega}_r} \quad (3.19)$$

donde se obtém:

$$\omega_b \operatorname{tg}\left(\frac{\theta_b}{2}\right) + \omega_a \operatorname{tg}\left(\frac{\theta_a}{2}\right) = \frac{(\omega_a^2 - \omega_b^2)}{2\zeta_r \bar{\omega}_r} \quad (3.20)$$

Resolvendo a equação anterior em ordem a ζ_r , obtém-se:

$$\zeta_r = \frac{(\omega_a^2 - \omega_b^2)}{2\bar{\omega}_r \left(\omega_b \operatorname{tg}\left(\frac{\theta_b}{2}\right) + \omega_a \operatorname{tg}\left(\frac{\theta_a}{2}\right) \right)} \quad (3.21)$$

No caso de $\theta_a = \theta_b = 90^\circ$, a expressão anterior vem:

$$\zeta_r = \frac{\omega_a - \omega_b}{2\bar{\omega}_r} \quad (3.22)$$

esta é a expressão apresentada no método da identificação de picos, faltando só demonstrar que os pontos atrás considerados são os “half power points”. Isso é conseguido sabendo que, para a expressão da mobilidade (3.7):

$$|Y| = \sqrt{\operatorname{Re}(Y)^2 + \operatorname{Im}(Y)^2} = \frac{\sqrt{(\omega^2 c_r)^2 + (\omega(k_r - \omega^2 m_r))^2}}{(k_r - \omega^2 m_r)^2 + (\omega c_r)^2} \quad (3.23)$$

Considerando os dois pontos $\theta_a = \theta_b = 90^\circ$, que, na equação (3.11), são obtidos substituindo θ por $\pm 90^\circ$, chegamos à seguinte relação:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm 1 \Leftrightarrow \omega c_r = \pm(k_r - \omega^2 m_r) \quad (3.24)$$

a qual substituída na equação (3.23), permite obter o valor da amplitude da FRF mobilidade para os “half power points”:

$$|Y|_{\theta/2} = \frac{\sqrt{(\omega^2 c_r)^2 + (\omega^2 c_r)^2}}{(\omega c_r)^2 + (\omega c_r)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2c_r} = \frac{1}{\sqrt{2}c_r} \quad (3.25)$$

Como se viu, quando $\omega = \bar{\omega}_r = \sqrt{k_r/m_r}$, a magnitude da FRF na ressonância é dado por $|Y|_{\bar{\omega}_r} = 1/c_r$, logo:

$$|Y|_{\theta/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} |Y|_{\bar{\omega}_r} \quad (3.26)$$

Assim foram definidos, no ponto 3.1.1, os “half power points”.

O processo de identificação dos parâmetros modais, utilizando o método do círculo, é realizado através da seguinte sequência:

1. Escolha de um determinado número fixo de pontos na vizinhança da ressonância em estudo. Esses pontos devem ser o mínimo possível influenciados pelos modos vizinhos e, sempre que possível, sem desobedecer à primeira regra, abarcarem aproximadamente 270° do círculo. Nunca devem ser usados menos de 6 pontos.
2. Determinação do círculo que melhor se ajusta aos pontos seleccionados, habitualmente, através de uma técnica de mínimos quadrados.
3. Através da comparação dos ângulos entre os segmentos de recta que unem o centro do círculo aos diversos pontos medidos, pode-se deduzir a frequência à qual ocorre a taxa de varrimento máxima, e que corresponde à frequência natural.
4. Calcular, através da equação (3.21), diversas estimativas para o amortecimento, utilizando as combinações possíveis entre pontos acima e abaixo da frequência natural. Com todas estas estimativas pode calcular-se o valor médio, ou examinar os valores individualmente, de modo a verificar se existem desvios sistemáticos, o que é indicador de erros experimentais, interferência de modos vizinhos ou comportamento não linear. Desvios em relação ao valor médio de 4 a 5% indica, em princípio, bons resultados. Caso

contrário, se o desvio se aproximar dos 20 ou 30%, poderemos ter resultados insatisfatórios.

5. Pode-se então determinar a magnitude e a fase da constante modal, através do raio e da rotação do círculo em relação aos eixos real e imaginário

3.2 Resíduos

Habitualmente, por razões práticas, há necessidade de limitar a gama de frequências medida e/ou analisada. Assim sendo, não podemos obter as propriedades modais dos modos que estão fora da gama analisada. Contudo, a influência desses modos, está presente nas FRFs medidas, influência essa que é necessário avaliar. Os resíduos, no processo de análise modal, são utilizados para considerar o efeito que os modos, que não foram considerados na análise, têm na FRF.^{[9],[25],[26]}

Se gerarmos uma curva a partir dos parâmetros modais obtidos, por identificação modal das FRFs medidas, usa-se uma equação do tipo:

$$Y_{jk}(\omega) = \sum_{r=m_1}^{m_2} i\omega \frac{{}_r B_{jk}}{(k_r - \omega^2 m_r) + i(\omega c_r)} \quad (3.27)$$

onde os limites do desenvolvimento em série, m_1 e m_2 , são um reflexo do facto da análise poder não começar no primeiro modo ($r=1$), e não acabar no modo mais alto ($r=N$). Contudo, o facto de termos limitado a nossa gama de frequências não quer dizer que a FRF medida não é influenciada pelos modos que estão fora dessa gama. Na realidade, a equação que melhor representa a FRF medida é:

$$Y_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N i\omega \frac{{}_r B_{jk}}{(k_r - \omega^2 m_r) + i(\omega c_r)} \quad (3.28)$$

que pode ser rescrita:

$$Y_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^{m_1-1} + \sum_{r=m_1}^{m_2} + \sum_{r=m_2-1}^N i\omega \frac{{}_r B_{jk}}{(k_r - \omega^2 m_r) + i(\omega c_r)} \quad (3.29)$$

Na equação anterior, o primeiro termo diz respeito aos modos de baixa frequência, e o terceiro aos de alta frequência, enquanto que o segundo refere-se aos modos identificados na análise.

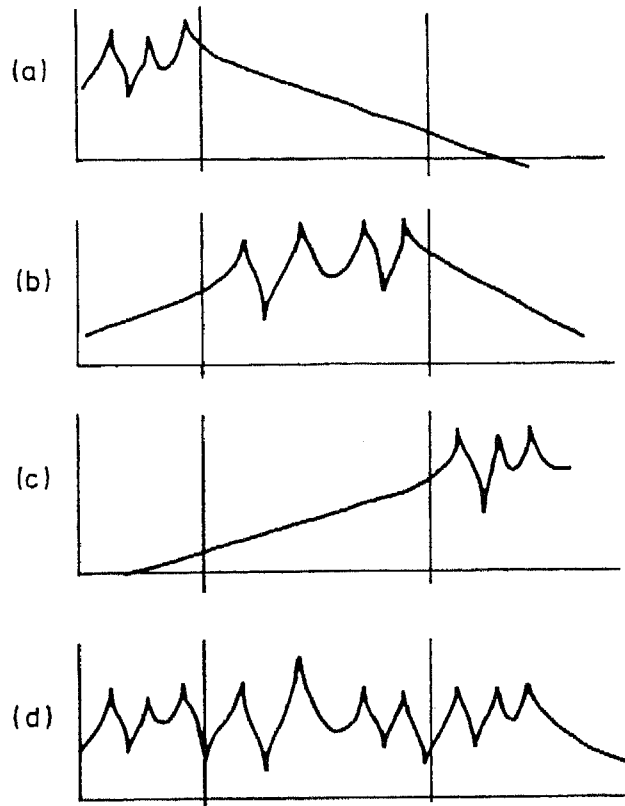


Figura 3.4 - Contribuição dos vários termos da expansão em série da FRF.

(a) Modos relativos às baixas frequências, (b) modos identificados, (c) modos relativos às altas frequências e (d) todos os modos.

A análise experimental de curvas geradas por cada um destes três termos, figura 3.4, permitiu concluir que, ao longo da gama de frequências de análise, o primeiro termo tende para um comportamento tipo massa, e o terceiro tende para um comportamento tipo rigidez^{[9],[27]}. Em consequência, a equação anterior pode ser rescrita:

$$Y_{jk}(\omega) \approx -\frac{i\omega}{\omega^2_M R_{jk}} + \sum_{r=m_1}^{m_2} i\omega \frac{B_{jk}}{(k_r - \omega^2 m_r) + i(\omega c_r)} + \frac{i\omega}{K R_{jk}} \quad (3.30)$$

onde as quantidades M_{jk} e K_{jk} são, respectivamente, a massa e a rigidez residual para a FRF e gama de frequências em análise. Caso se altere a FRF e/ou a gama de frequências, os termos residuais também se alteram.

O procedimento de obtenção dos termos residuais envolve somente a inspecção do gráfico da FRF no início e no fim da gama de frequências analisadas, e é aplicado do seguinte modo:

1. Obter uns valores da FRF, usando somente os modos identificados, para as frequências mais baixas da análise.
2. Por comparação desses valores com os medidos, estimar o valor da massa residual que, quando adicionada à curva gerada, a leva o mais perto possível da curva real.
3. Realizar o mesmo cálculo para as altas frequências, e obter o termo de rigidez residual.
4. Repetir o processo iterativamente, caso a adição do termo de rigidez residual afecte o termo de massa residual.

Para a gama de frequências em análise, este processo corre muito melhor caso a parte inicial e final da FRF coincida com uma anti-ressonância.^[9]

3.3 Métodos MDOF

Na prática existe um conjunto de situações onde, para a análise modal, a aproximação SDOF é inadequada. Para estes casos existem um conjunto de técnicas que podem ser classificadas como métodos MDOF de ajustamento de curvas. Entre os casos impróprios para o ajustamento SDOF temos os casos onde o amortecimento é muito pequeno, e, logo, as medições na vizinhança das ressonâncias são difíceis de obter e contêm erros, e os casos onde os modos são pouco espaçados e/ou muito acoplados, podendo este facto ocorrer devido a ressonâncias muito próximas ou amortecimentos elevados, o que leva a que a FRF, mesmo numa ressonância, não seja influenciada principalmente por um modo.

3.3.1 Método da Exponencial Complexa

Este método de análise modal trabalha no domínio do tempo, usando para isso uma versão no tempo do modelo de resposta do sistema, que é conhecida como a função de resposta ao impulso.

A análise inicia-se com a expressão da deslocabilidade de um sistema MDOF com amortecimento viscoso, expressão (2.78):

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{{}_r A_{jk}}{\left(\omega_r \zeta_r + i\left(\omega - \omega_r \left(\sqrt{1 - \zeta_r^2}\right)\right)\right)} + \frac{{}_r A_{jk}^*}{\left(\omega_r \zeta_r + i\left(\omega + \omega_r \left(\sqrt{1 - \zeta_r^2}\right)\right)\right)} \quad (3.31)$$

A qual pode ser rescrita na forma:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{{}_r u_{jk} + i {}_r v_{jk}}{\left(-\delta_r + i\left(\omega - \omega_{dr}\right)\right)} + \frac{{}_r u_{jk} - i {}_r v_{jk}}{\left(-\delta_r + i\left(\omega + \omega_{dr}\right)\right)} \quad (3.32)$$

ou:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{{}_r u_{jk} + i {}_r v_{jk}}{\left(i\omega - \lambda_r\right)} + \frac{{}_r u_{jk} - i {}_r v_{jk}}{\left(i\omega - \lambda_r^*\right)} \quad (3.33)$$

onde:

$$\begin{aligned} {}_r A_{jk} &= {}_r u_{jk} + i {}_r v_{jk} \\ \delta_r &= -\omega_r \zeta_r \rightarrow \text{amortecimento modal} \\ \omega_{dr} &= \omega_r \sqrt{1 - \zeta_r^2} \rightarrow \text{freq. natural amortecida} \\ \lambda_r &= \delta_r + i\omega_{dr} \rightarrow \text{polo} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Podemos então obter a correspondente função de resposta ao impulso (FRI), calculando a transformada inversa de Fourier da deslocabilidade^[28], obtendo assim:

$$\begin{aligned}
 h_{jk}(t) &= 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{r=1}^N {}_r A_{jk} e^{\lambda_r t} \right) \\
 &= 2 \left(\sum_{r=1}^N \left({}_r u_{jk} e^{\delta_r t} \cos(\omega_{dr} t) - {}_r v_{jk} e^{\delta_r t} \operatorname{sen}(\omega_{dr} t) \right) \right)
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Assim sendo, de modo a determinar a FRI é preciso obter o valor de $4N$ incógnitas, que são os parâmetros da expressão anterior.

O algoritmo da exponencial complexa calcula as constantes modais (${}_r A_{jk}$) e os pólos (λ_r), de modo a ajustar a FRI obtida pela expressão anterior às medições. Este algoritmo é uma técnica de identificação modal por interpolação. Os $4N$ parâmetros são obtidos utilizando $4N$ valores da FRI. Quer dizer, a esta técnica não está associada a possibilidade de amaciamento, e é por esta razão que a ela se costuma associar uma metodologia de mínimos quadrados.

Sendo a FRF original medida, ou obtida, por via numérica, isto é de forma discreta, ela aparece definida num determinado número de pontos em frequências discretas, igualmente separadas de uma quantidade Δf . Deste modo, a FRI, obtida por transformação inversa de Fourier da FRF, aparece definida num número igual de pontos igualmente separados por intervalos de tempo Δt , onde $\Delta t = 1 / \Delta f$. Assim sendo, este conjunto de pontos no tempo pode ser representado por:

$$h_0, h_1, h_2 \dots h_q = h(0), h(\Delta t), h(2\Delta t) \dots h(q\Delta t) \tag{3.36}$$

A partir de agora é conveniente omitir o índice jk e usar a seguinte notação abreviada:

$${}_r A_{jk} \rightarrow A_r; e^{\lambda_r \Delta t} = V_r \tag{3.37}$$

Deste modo a equação (3.35) pode ser rescrita:

$$h(t) = 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{r=1}^N A_r e^{\lambda_r t} \right) \tag{3.38}$$

Assim sendo, para o tempo $t_j = j \Delta t$, temos:

$$h(t_j) = 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{r=1}^N A_r V_r^j \right) \quad (3.39)$$

Logo para todos os pontos em que a função está definida, os pontos da amostra, temos:

$$\begin{aligned} h_0 &= 2 \operatorname{Re}(A_1 + A_2 \dots + A_N) \\ h_1 &= 2 \operatorname{Re}(V_1 A_1 + V_2 A_2 \dots + V_N A_N) \\ h_2 &= 2 \operatorname{Re}(V_1^2 A_1 + V_2^2 A_2 \dots + V_N^2 A_N) \\ &\vdots \\ h_q &= 2 \operatorname{Re}(V_1^q A_1 + V_2^q A_2 \dots + V_N^q A_N) \end{aligned} \quad (3.40)$$

Se temos N modos próprios e 2N+1 valores para a FRI, com $q=0,1,2,\dots,2N$, podemos escrever o seguinte polinómio de ordem 2N:

$$\beta_0 + \beta_1 V + \beta_2 V^2 + \dots + \beta_{2N} V^{2N} \quad (3.41)$$

O polinómio anterior é conhecido como o polinómio de Prony, que, de forma mais compacta, se pode escrever:

$$\sum_{q=0}^{2N} \beta_q V^q = \prod_{r=1}^N (V - V_r)(V - V_r^*) \quad (3.42)$$

Assim sendo, obtendo as 2N raízes V_1, V_2, \dots, V_{2N} da seguinte equação polinomial:

$$\sum_{q=0}^{2N} \beta_q V^q = 0 \quad (3.43)$$

podem-se obter os pólos s_p através da equação (3.37).

Se o conjunto de equações (3.40) for desenvolvido para 2N+1 pontos da FRI, isto é até $q=2N$, e multiplicarmos cada uma das equações pelo coeficiente β_1 , obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \beta_0 h_0 &= 2\beta_0 \operatorname{Re}(A_1 + A_2 \dots + A_N) \\
 \beta_1 h_1 &= 2\beta_1 \operatorname{Re}(V_1 A_1 + V_2 A_2 \dots + V_N A_N) \\
 \beta_2 h_2 &= 2\beta_2 \operatorname{Re}(V_1^2 A_1 + V_2^2 A_2 \dots + V_N^2 A_N) \\
 &\vdots \\
 \beta_{2N} h_{2N} &= 2\beta_{2N} \operatorname{Re}(V_1^{2N} A_1 + V_2^{2N} A_2 \dots + V_N^{2N} A_N)
 \end{aligned}
 \tag{3.44}$$

e adicionando todas as equações, vem:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^q \beta_j h_j &= 2 \sum_{j=1}^{2N} \left(\beta_j \operatorname{Re} \left(\sum_{i=0}^N A_i V_i^j \right) \right) \\
 &= \operatorname{Re} \left(\sum_{i=1}^N A_i 2 \left(\sum_{j=0}^{2N} \beta_j V_i^j \right) \right)
 \end{aligned}
 \tag{3.45}$$

Assim sendo, a partir de (3.43), obtém-se:

$$\sum_{i=0}^{2N} \beta_i V_r^i = 0 \text{ para } r=1,N
 \tag{3.46}$$

Assim, cada termo do membro direito da equação (3.45) é zero, logo:

$$\sum_{j=0}^{2N} \beta_j h_j = 0
 \tag{3.47}$$

A equação anterior é uma equação homogénea, logo podemos dividi-la por uma constante ou considerar uma constante unitária, sem alterar a sua solução. Assim sendo pode ser reorganizada, considerando $\beta_{2N} = 1$, de modo a:

$$\sum_{j=0}^{2N-1} \beta_j h_j = -h_{2N}
 \tag{3.48}$$

A equação anterior escreve-se em notação matricial na forma:

$$\begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \dots & h_{2N-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \end{Bmatrix} = -h_{2N} \quad (3.49)$$

O processo anterior entre as equações (3.36) a (3.49) pode ser repetido, usando um conjunto diferente de pontos da função de resposta ao impulso, o qual deve ser escolhido de modo a sobrepor-se ao anterior, à exceção de um dos pontos, isto é, realizando um deslocamento no tempo, de tal modo que se obtém:

$$\begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & \dots & h_{2N} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \end{Bmatrix} = -h_{2N+1} \quad (3.50)$$

Sucessivas aplicações do processo anterior permitem obter um sistema de 2N equações:

$$\begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \dots & h_{2N-1} \\ h_1 & h_2 & h_3 & \dots & h_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{2N-1} & h_{2N} & h_{2N+1} & \dots & h_{4N-2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{2N-1} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} h_{2N} \\ h_{2N+1} \\ \vdots \\ h_{4N-1} \end{Bmatrix} \quad (3.51)$$

ou na forma compacta:

$$\sum_{k=0}^{2N-1} h_{m+k} \beta_k = -h_{m+2N} ; \text{ para } m=0,1,2, \dots, 2N-1 \quad (3.52)$$

ou, ainda, na forma matricial:

$$[h]_{2N \times 2N} \{\beta\}_{2N \times 1} = -\{\tilde{h}\}_{2N \times 1} \quad (3.53)$$

Por resolução da equação matricial anterior podem obter-se os coeficientes desconhecidos, β_j :

$$\{\beta\} = -[h]^{-1} \{\tilde{h}\} \quad (3.54)$$

Com estes coeficientes, pode-se agora, usando a equação (3.43), determinar os valores V_1, V_2, \dots, V_{2N} , a partir dos quais se obtêm as frequências naturais e os coeficientes de amortecimento do sistema, através de:

$$V_r = e^{\lambda_r \Delta t} = e^{(\delta_r + i\omega_{dr})\Delta t} = e^{\delta_r \Delta t} e^{i\omega_{dr} \Delta t} \quad (3.55)$$

de onde se obtêm as seguintes relações:

$$\begin{aligned} |V_r| &= e^{\delta_r \Delta t} \\ \angle(V_r) &= \omega_{dr} \Delta t \end{aligned} \quad (3.56)$$

Resolvendo em ordem δ_r e ω_{dr} , obtém-se:

$$\begin{aligned} \delta_r &= \frac{\ln|V_r|}{\Delta t} = -\zeta_r \omega_r \\ \omega_{dr} &= \frac{\angle(V_r)}{\Delta t} = \omega_r \sqrt{1 - \zeta_r^2} \end{aligned} \quad (3.57)$$

A resolução pode ser concluída com a obtenção das constantes modais, usando a equação (3.35):

$$h_q = 2 \left(\sum_{r=1}^N \left(u_r e^{\delta_r q \Delta t} \cos(\omega_{dr} q \Delta t) - v_r e^{\delta_r q \Delta t} \sin(\omega_{dr} q \Delta t) \right) \right) \quad (3.58)$$

que pode ser rescrita, através da definição de V_r , na forma:

$$h_q = 2 \left(\sum_{r=1}^N \left(u_r \operatorname{Re}(V_r^q) - v_r \operatorname{Im}(V_r^q) \right) \right) \quad (3.59)$$

De modo a obter as N constantes modais $A_r = u_r + v_r$, devem ser utilizados 2N pontos da FRI. Assim sendo, através do desenvolvimento da expressão anterior para cada um dos pontos, obtêm-se um sistema de 2N equações na seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \text{Re}(V_1) & \text{Re}(V_2) & \dots & \text{Re}(V_N) & \text{Im}(V_1) & \text{Im}(V_2) & \dots & \text{Im}(V_N) \\ \text{Re}(V_1^2) & \text{Re}(V_2^2) & \dots & \text{Re}(V_N^2) & \text{Im}(V_1^2) & \text{Im}(V_2^2) & \dots & \text{Im}(V_N^2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{Re}(V_1^{2N-1}) & \text{Re}(V_2^{2N-1}) & \dots & \text{Re}(V_N^{2N-1}) & \text{Im}(V_1^{2N-1}) & \text{Im}(V_2^{2N-1}) & \dots & \text{Im}(V_N^{2N-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \\ v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{2N-1} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

Sistema de equações que pode ser resolvido de modo a obter as constantes modais.

O processo de identificação das constantes modais através da técnica exponencial complexa desenvolve-se através de 4 etapas^[28]:

1. Através da análise visual da FRF é realizada uma estimativa inicial do número de graus de liberdade, na banda de frequências em análise.
2. A partir da FRI determinam-se os coeficientes do polinómio de Prony, cujas raízes permitem obter os coeficientes de amortecimento e as frequências naturais.
3. Obtêm-se então as constantes modais.
4. Os parâmetros modais obtidos são utilizados para gerar uma FRF que é comparada com a FRF medida.

Nesta fase, comparando as duas funções, se a função gerada se aproxima bem da função original obtemos 'bons' parâmetros modais. Caso contrário, se o erro é significativo, o processo deve ser repetido usando um número diferente de graus de liberdade^[28].

Um gráfico do erro em função dos graus de liberdade permite verificar que até se atingir o número de graus de liberdade correcto há uma redução significativa do erro. A inclusão de um número de graus de liberdade superior ao correcto vai gerar um conjunto adicional de modos numéricos. Esses modos servem para corrigir ligeiras imperfeições que aparecem sempre em FRFs medidas experimentalmente, porém eles são

identificados, geralmente, por elevados factores de amortecimento e constantes modais muito pequenas.

A principal vantagem deste método baseia-se no facto de a identificação dos parâmetros modais ser um cálculo automático, tanto para as frequências naturais, como para os coeficientes de amortecimento. Não necessitando de estimativas iniciais para os parâmetros modais^[9].

Contudo o método também apresenta algumas desvantagens. A determinação do número de modos contidos na gama de frequências em análise é realizada por inspecção visual da FRF, logo, se usarmos um número grande de modos, obtém-se um bom ajustamento para a FRF. Porém, alguns dos modos identificados não possuem significado físico, são modos numéricos. Para além disso, são somente usados $4N$ pontos da FRI para identificar $4N$ parâmetros, isto é, a técnica é sensível à presença de ruído e não possui amaciamento associado.

3.3.2 Método da Exponencial Complexa com Mínimos Quadrados

A técnica apresentada no ponto anterior pode ser melhorada se lhe associarmos um método de mínimos quadrados para ajustar a FRI^[28].

Para obter a solução da equação que permite determinar os $2N$ coeficientes de Prony, (3.52):

$$\sum_{k=0}^{2N-1} h_{m+k} \beta_k = -h_{m+2N} ; \text{ para } m=0,1,2, \dots, 2N-1 \quad (3.61)$$

somos obrigados a usar $4N$ pontos da FRI. Caso pretendamos usar mais pontos, podemos adaptar o método de ajuste da FRI com uma técnica de mínimos quadrados.

Usando a expressão anterior, o quadrado do erro para o ajustamento da $m^{\text{ésima}}$ equação é dado por:

$$E_m^2 = \left(h_{e,m+2N} - h_{a,m+2N} \right)^2 \quad (3.62)$$

onde $h_{e,m+2N}$ é o ponto da IRF medido e $h_{a,m+2N}$ é o obtido analiticamente. Assim sendo, o erro total é dado por:

$$E_t = \sum_{m=0}^M E_m^2 = \sum_{m=0}^M \left(h_{e,m+2N} - h_{a,m+2N} \right)^2 = \sum_{m=0}^M \left(\sum_{k=0}^{2N-1} (\beta_k h_{m+k}) + h_{e,m+2N} \right)^2 \quad (3.63)$$

onde M representa o número de equações utilizado para o ajustamento. De modo a minimizar o erro total devemos derivar a expressão anterior do erro, em ordem a cada um dos coeficientes β_i . Igualando as derivadas a zero, obtendo assim:

$$\frac{\partial E_t}{\partial \beta_i} = \sum_{m=0}^M \left(\left(\sum_{k=0}^{2N-1} (\beta_k h_{m+k}) + h_{m+2N} \right) h_{m+i} \right) = 0 \quad (3.64)$$

que pode ser rescrita, na forma:

$$\sum_{m=0}^M \sum_{k=0}^{2N-1} \left((\beta_k h_{m+k}) h_{m+i} \right) = - \sum_{m=0}^M h_{m+i} h_{m+2N} \quad (3.65)$$

ou ainda:

$$\sum_{k=0}^{2N-1} \left(\sum_{m=0}^M (h_{m+k} h_{m+i}) \beta_k \right) = - \sum_{m=0}^M h_{m+i} h_{m+2N} \quad (3.66)$$

Definindo:

$$R_{i,k} = \sum_{m=0}^M (h_{m+k} h_{m+i}) \quad (3.67)$$

A equação (3.66) pode ser rescrita:

$$\sum_{k=0}^{2N-1} (R_{i,k} \beta_k) = -R_{i,2N} \quad (3.68)$$

Agrupando as equações relativas a todos os coeficientes, β_i , obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} R_{0,0} & R_{0,1} & \dots & R_{0,2N-1} \\ R_{1,0} & R_{1,1} & \dots & R_{1,2N-1} \\ R_{2,0} & R_{2,1} & \dots & R_{2,2N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{2N-1,0} & R_{2N-1,1} & \dots & R_{2N-1,2N-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{2N-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{0,2N} \\ R_{1,2N} \\ R_{2,2N} \\ \vdots \\ R_{2N-1,2N} \end{Bmatrix} \quad (3.69)$$

A solução do sistema de equações permite obter os coeficientes do polinómio de Prony (3.52), β_i , cuja equação polinomial possui como raízes as quantidades V_r , as quais permitem obter os pólos, λ_r , e, conseqüentemente, as frequências naturais e os coeficientes de amortecimento.

As constantes modais podem também ser estimadas a partir da FRI, através do método dos mínimos quadrados. Para o instante $t=q\Delta t$, a equação da FRI pode ser escrita, como em (3.59),

$$h_q = 2 \left(\sum_{r=1}^N (u_r \operatorname{Re}(V_r^q) - v_r \operatorname{Im}(V_r^q)) \right) \quad (3.70)$$

O erro no ajustamento do $q^{\text{ésimo}}$ ponto é dado pela diferença entre a FRI obtida através da equação anterior (h_q) e a medida ($h_{e,q}$):

$$E_q = h_{e,q} - h_q \quad (3.71)$$

O erro quadrático total é a soma dos erros associados aos M pontos da FRI:

$$E = \sum_{q=1}^M E_k^2 = \sum_{q=1}^M \left(h_{e,q} - \sum_{r=1}^N (u_r C_{rq} - v_r S_{rq}) \right)^2 \quad (3.72)$$

onde $C_{rq} = 2 \operatorname{Re}(V_r^q)$ e $S_{rq} = 2 \operatorname{Im}(V_r^q)$

Para minimizar a função erro devem ser satisfeitas as seguintes condições:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial u_i} &= \sum_{q=1}^M \left(C_{iq} \left(h_{e,q} - \sum_{r=1}^N (u_r C_{rq} - v_r S_{rq}) \right) \right) = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial v_i} &= \sum_{q=1}^M \left(S_{iq} \left(h_{e,q} - \sum_{r=1}^N (u_r C_{rq} - v_r S_{rq}) \right) \right) = 0\end{aligned}\quad (3.73)$$

Efectuando, na expressão anterior, as seguintes substituições:

$$\begin{aligned}A_{ir} &= \sum_{q=1}^M C_{iq} C_{rq} \\ B_{ir} &= -\sum_{q=1}^M S_{iq} S_{rq} \\ D_{ir} &= -\sum_{q=1}^M C_{iq} S_{rq} \\ X_i &= \sum_{q=1}^M C_{iq} h_{e,q} \\ Y_i &= \sum_{q=1}^M S_{iq} h_{e,q}\end{aligned}\quad (3.74)$$

o par de equações anterior pode ser rescrito:

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^N (A_{ir} u_r + D_{ir} v_r) &= X_i \\ \sum_{r=1}^N (D_{ir} u_r + B_{ir} v_r) &= Y_i\end{aligned}\quad (3.75)$$

Utilizando o mesmo procedimento para todos os modos ($j=1,N$) e agrupando as equações, forma-se um sistema de equações de $2N$ equações a $2N$ incógnitas, do tipo:

$$\begin{bmatrix} [A] & [D] \\ [D]^T & [B] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}\quad (3.76)$$

Sistema que pode ser resolvido de modo a obter u_r e v_r ($r=1,N$), obtendo assim as constantes modais A_r .

A principal vantagem desta metodologia é a eliminação de ruído, pois utilizam-se mais pontos que os necessários, ponderando assim a informação e suprimindo o erro. Porém, continua a existir a desvantagem da determinação dos modos presentes, na gama de frequências analisada.

O processo de resolução com esta metodologia é idêntico ao anterior.

3.3.3 Mínimos Quadrados no Domínio da Frequência

A metodologia de determinação das constantes modais, após a determinação dos pólos (λ_r), apresentada no ponto anterior, pode ser alterada, de modo a trabalhar no domínio da frequência, e utilizando para tal uma técnica de mínimos quadrados.

Partindo da expressão da FRF deslocabilidade, (3.33):

$$\alpha(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{u_r + iv_r}{(i\omega - \lambda_r)} + \frac{u_r - iv_r}{(i\omega - \lambda_r^*)} \quad (3.77)$$

Sendo $\Delta\omega$ o espaçamento com que é definida a FRF e ω_i a frequência inicial, para a gama de frequências em análise. O erro quadrático associado à aproximação do $k^{\text{ésimo}}$ ponto relativo à frequência ω_k ($\omega_k = \omega_i + \Delta\omega(k-1)$), é dado por^[29]:

$$E_k^2 = \left(\alpha_e(\omega_k) - \alpha_a(\omega_k) \right)^2 \quad (3.78)$$

onde α_e é a FRF medida experimentalmente e α_a é a obtida analiticamente, utilizando os parâmetros modais.

Assim sendo, o erro total associado aos M pontos onde está definida a FRF, na gama de frequências em análise, é dado por:

$$E_t = \sum_{k=1}^M E_k^2 = \sum_{k=1}^M \left(\alpha_e(\omega_k) - \alpha_a(\omega_k) \right)^2 \quad (3.79)$$

Substituindo a expressão para a FRF analítica, vem:

$$E_t = \sum_{k=1}^M \left(\alpha_e(\omega_k) - \sum_{r=1}^N \frac{u_r + i v_r}{(i\omega_k - \lambda_r)} + \frac{u_r - i v_r}{(i\omega_k - \lambda_r^*)} \right)^2 \quad (3.80)$$

A expressão anterior pode ainda se rescreita numa forma mais adequada:

$$E_t = \sum_{k=1}^M \left(\alpha_e(\omega_k) - \sum_{r=1}^N u_r C_{rk} + v_r S_{rk} \right)^2 \quad (3.81)$$

onde:

$$C_{rk} = \frac{1}{(i\omega_k - \lambda_r)} + \frac{1}{(i\omega_k - \lambda_r^*)} \quad (3.82)$$

$$S_{rk} = \frac{i}{(i\omega_k - \lambda_r)} + \frac{-i}{(i\omega_k - \lambda_r^*)}$$

Com o objectivo de minimizar o erro, as derivadas do erro total em relação a cada um dos parâmetros devem ser nulas. Deste modo:

$$\frac{\partial E_t}{\partial u_j} = \sum_{k=1}^M \left(C_{jk} \left(\alpha_e(\omega_k) - \sum_{r=1}^N u_r C_{rk} + v_r S_{rk} \right) \right) = 0 \quad (3.83)$$

$$\frac{\partial E_t}{\partial v_j} = \sum_{k=1}^M \left(S_{jk} \left(\alpha_e(\omega_k) - \sum_{r=1}^N u_r C_{rk} + v_r S_{rk} \right) \right) = 0$$

Utilizando um procedimento idêntico ao do ponto anterior, equações (3.73) a (3.76), formamos um sistema de 2N equações a 2N incógnitas, que pode ser resolvido de modo a obter u_r e v_r ($r=1,N$), obtendo assim as constantes modais A_r , que vão minimizar o erro quadrático médio entre a FRF medida e a analítica, no domínio da frequência.

4. ACOPLAMENTO DINÂMICO

A caracterização do comportamento dinâmico de estruturas que durante o funcionamento normal estão sujeitas a cargas dinâmicas, é um passo fundamental para a sua certificação, tanto na fase de projecto como de teste. Neste sentido, os procedimentos de acoplamento dinâmico afiguram-se como uma alternativa potencial às técnicas tradicionais de análise. Estes consistem na obtenção do modelo dinâmico da estrutura total, em função dos modelos dos seus componentes^[8].

A abordagem da modelação via acoplamento dinâmico apresenta diversas vantagens:

- Permitem reduzir substancialmente o esforço dispendido tanto na fase de medição como na de processamento, especialmente em estruturas compostas por vários elementos repetidos.
- Em termos numéricos, possibilitam o estudo de estruturas de maiores dimensões, e, caso necessário, refinar os modelos de cada um dos componentes, contornando assim eventuais limitações de memória.
- Facultam a modelação de cada uma das subestruturas componentes, por diferentes vias, escolhendo a mais conveniente caso a caso.
- A obtenção de modelos dinâmicos para estruturas, previamente analisadas, em que alguns dos seus componentes sofreram alterações, necessita somente do estudo do(s) componente(s) alterado(s).

Como seria de esperar, existem diversas formas de abordar este tipo de problemas^[9]. No entanto, algumas delas estão desenvolvidas para estudos de modelos puramente analíticos, não sendo directamente aplicáveis a modelos obtidos experimentalmente^[9].

As técnicas de acoplamento dinâmico podem dividir-se em dois grandes grupos: acoplamento de impedâncias e acoplamento modal^[10]. O primeiro grupo pode ainda ser subdividido nos que realizam o acoplamento em componentes cujos modelos são descritos através das suas propriedades espaciais ou modais. As metodologias que usam os modelos espaciais são, habitualmente, usadas em sistemas estudados pela via do método de elementos finitos (MEF)^[10].

Para o nosso caso só nos interessam os métodos que possuem a possibilidade de aplicação directa a casos experimentais, quer dizer, a possibilidade de combinar modelos de componentes dos quais, pelo menos parte, foram obtidos via análise modal experimental. Dentro desta categoria, existem duas metodologias possíveis, dependendo do que se pretende obter para o modelo da estrutura completa ^[9]:

- As características do modelo de resposta (acoplamento de impedâncias).
- As propriedades modais (acoplamento modal).

É certo que uma pode ser obtida a partir da outra, mas a questão é qual dos resultados é de primordial importância.

Em [9] são apresentadas técnicas de acoplamento de estruturas que possuem aplicação directa a modelos obtidos experimentalmente, parcial ou totalmente. Assim sendo, são apresentadas três metodologias, uma de acoplamento de impedâncias e duas de acoplamento modal. O método de acoplamento de impedâncias utiliza as FRFs dos componentes e obtêm-se como resultado as FRFs da estrutura completa. São também referidas algumas formas de obtenção das matrizes de impedância e os problemas na inversão de matrizes, que é um passos necessários para levar a cabo no processo de acoplamento de impedâncias. Finalmente, é aplicado este tipo de acoplamento a um componente de um helicóptero. Para modelar os componentes do sistema foram utilizadas metodologias teóricas ou experimentais, tendo sido escolhido o método mais apropriado caso a caso. No caso dos modelos experimentais é referida a necessidade de criar modelos bem representativos da ligação que origina o acoplamento. Deste modo, para o caso estudado, houve necessidade de medir várias coordenadas de rotação. É também referida a necessidade de incluir na análise um elevado número de modos naturais, e, caso isso não seja possível, a necessidade de utilizar uma matriz de termos residuais.

No caso dos métodos de acoplamento modal, são apresentadas duas hipóteses. Numa delas, utilizam-se as propriedades dos modelos modais dos componentes, reformulando-se a técnica do acoplamento de impedâncias de modo a aplicar-se directamente ao modelo modal. Para este tipo de formulação, é difícil contabilizar os termos residuais, logo há necessidade de incluir um número significativo de modos. A formulação leva-nos à resolução de um problema de valores e vectores próprios a partir

do qual se pode obter o modelo modal da estrutura acoplada. Neste caso, a ordem do sistema acoplado depende do número de coordenadas usadas para descrever os componentes, logo há necessidade de incluir um número significativo de coordenadas de modo a construir um modelo útil. Finalmente, é apresentado um método de acoplamento modal cuja ordem do sistema acoplado não depende do número de coordenadas usadas para descrever os componentes, mas sim do número de modos usados em cada componente. Este método assume que existem molas e/ou amortecedores a ligar os diversos componentes. As propriedades modais do sistema acoplado são obtidas através da resolução de um problema de valores e vectores próprios.

A metodologia do acoplamento de impedâncias é também abordada em [11], onde são estudados vários exemplos. Os resultados obtidos num primeiro estudo teórico foram excelentes, mas após a simulação de alguns erros experimentais verificou-se a ocorrência de alguns erros, principalmente na vizinhança de ressonâncias dos componentes, devido ao mau condicionamento das matrizes nessas zonas, ocorrência essa que se confirmou no segundo estudo experimental. Esses erros foram atenuados pela adição de amortecimento, demonstrando-se que a adição de amortecimento, mesmo que moderadamente, torna o processo de acoplamento menos susceptível a erros nas FRFs dos componentes. No segundo caso verificou-se que a utilização directa, no processo de acoplamento, das FRFs medidas, não é aconselhável, pois as medições contêm sempre algumas incoerências. Foi então testado um caminho alternativo no uso das FRFs medidas, extraíndo os parâmetros modais para cada uma das curvas FRF e gerando curvas 'amaciadas'. Neste caso as FRF eram analisadas uma a uma e procedia-se a uma sintetização com os parâmetros identificados na FRF analisada, retirando assim algumas discrepâncias para os valores medidos. Embora tenha sido melhorada a qualidade dos resultados obtidos, estes continuaram a mostrar sinais de sensibilidade à acuidade dos dados dos componentes, devido aos erros sistemáticos que ocorrem, frequentemente, entre diferentes FRFs (por exemplo, valores da frequência natural e amortecimento diferentes) continuarem presentes na análise. Uma extensão lógica da análise é obter um modelo modal de cada subestrutura através de todas as FRFs medidas, e sintetizar as FRFs para esses modelo, método este que possui a vantagem de gerar um modelo consistente, livre de discrepâncias entre as diferentes FRFs de cada componente. Para este caso, a introdução de erros teve consequências mínimas, havendo

uma correspondência directa entre a ‘quantidade’ de erros introduzida e a ocasionada no modelo obtido para a estrutura acoplada.

O maior problema associado à técnica do acoplamento dinâmico de estruturas consiste na definição das coordenadas a introduzir na análise. Existe uma tendência para deixar de fora as coordenadas rotacionais^[7], situação que ocorre em [7], as quais são particularmente difíceis de medir, uma vez que as diversas técnicas já desenvolvidas, para o efeito, possuem sucesso limitado^[9]. Como é demonstrado com um exemplo esse tipo de coordenadas assumem, por vezes, um papel muito importante^[11]. Contudo, a descrição da ligação não deve ser modelada com redundância, que dizer, não se devem acoplar mais graus de liberdade dos que o que são acoplados na realidade, dado que esse procedimento também origina erros^[7]. Este tipo de comportamento foi verificado em [7] através do estudo de alguns exemplos, de onde se tornou evidente que a consideração exacta das reais condições de acoplamento originava melhores resultados que o simples aumento do número de graus de liberdade rigidamente acoplados.

Em [12] e [13] é apresentado um processo de acoplamento de impedâncias alternativo, obtendo a matriz FRF do sistema acoplado por blocos, dado ser sustentado que os processos de abordagem global dão geralmente bons resultados para as funções directas nos pontos de acoplamento, e na maior parte das vezes dão resultados inaceitáveis para as FRF sintetizadas entre quaisquer dois pontos do sistema. Este tipo de metodologia apresenta também vantagens do ponto de vista numérico, pois permite trabalhar com matrizes de menor dimensão. No estudo experimental de uma viga composta por dois componentes, em [12], obtiveram-se resultados satisfatórios mas voltou-se a verificar que na vizinhança de ressonâncias dos componentes existem muitas instabilidades numéricas. No estudo de uma estrutura semelhante, em [13], obtiveram-se bons resultados, com erros quadráticos relativos de 5% para as frequências naturais e de 20% para os amortecimentos modais.

A inversão da matriz FRF no processo de acoplamento de impedâncias, é, por vezes, difícil de concretizar. Isto porque a matriz FRF, devido a problemas experimentais e, por vezes, devido à sua elevada dimensão, é, em geral, mal condicionada, situação que se agrava na vizinhança das ressonâncias^[14]. Em [14] é aconselhada uma metodologia que substitui a matriz inversa pela pseudo-inversa, através da decomposição em valores singulares da matriz. O exemplo apresentado permite concluir que com esta metodologia se obtêm bons resultados em casos ideais comparativamente aos processos que usam a inversa directa. A utilidade da metodologia é comprovada em casos onde estão presentes

alguns erros, como é o caso das situações experimentais, onde se obtêm melhores resultados, principalmente na vizinhança de ressonâncias, tornando o processo de acoplamento menos sensível a esses erros.

De modo a evitar os problemas que os processos de acoplamento de impedâncias apresentam na inversão das matrizes FRF, [15] e [16] apresentam um método de acoplamento que trabalha directamente sobre as matrizes FRF, conhecido como o Método da Força Modal. Porém este método é de difícil aplicação a modelos obtidos experimentalmente, por necessitar da parametrização da matriz FRF.

Para a ilustração dos métodos de acoplamento vão ser considerados dois subsistemas A e B que estão ligados de uma determinada forma, de modo a compor o sistema C. Para além disso, as coordenadas usadas para descrever cada componente vão ser divididas em dois grupos - as usadas para descrever os pontos de ligação (x_c) e as restantes (x_a e x_b).

4.1 Método do Acoplamento de Impedâncias

O método de acoplamento de impedâncias trabalha directamente sobre as características do modelo de resposta dos componentes, e, como resultado, obtêm-se as características do modelo de resposta da estrutura acoplada. Contudo, é possível que as necessárias FRFs tenham sido obtidas a partir do modelo modal, dado que este último é a forma mais eficiente de armazenar as características dinâmicas das subestruturas.

O princípio básico deste método está ilustrado na figura 4.1, na qual os dois componentes A e B estão ligados através de uma coordenada de forma a constituírem a estrutura C. É de notar que o número de coordenadas usadas no processo de acoplamento não restringe o número de graus de liberdade que cada componente pode possuir, excepto que o último deve ser maior ou igual ao primeiro. Logo, como neste caso, A e B podem possuir um número elevado de graus de liberdade cada um, mesmo sendo somente usada uma coordenada para efeitos de acoplamento dos dois. A consequência deste facto é a de o comportamento do sistema não ser totalmente descrito do ponto de vista espacial. Contudo, as coordenadas incluídas irão exibir todas as ressonâncias que o sistema possui.

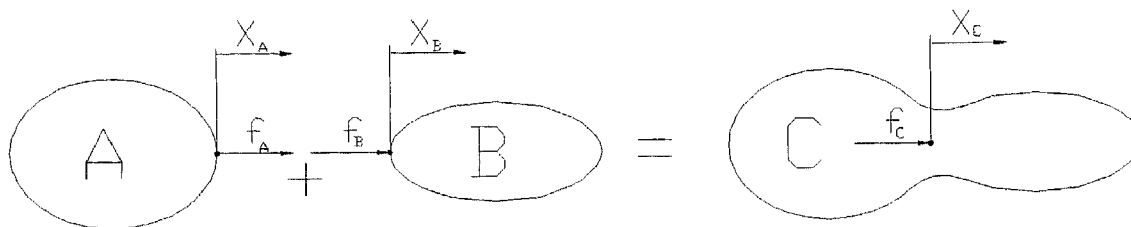


Figura 4.1 - Acoplamento, exemplo com um grau de liberdade.

Se considerarmos o comportamento dinâmico de cada componente em separado, podemos escrever a seguinte equação para o subsistema A quando uma força harmónica $f_A e^{i\omega t}$ é aplicada na coordenada de ligação:

$$x_A e^{i\omega t} = \alpha_A(\omega) f_A e^{i\omega t} \quad (4.1)$$

ou então

$$x_A = \alpha_A f_A \quad (4.2)$$

Do mesmo modo, para o subsistema B vem:

$$x_B = \alpha_B f_B \quad (4.3)$$

Considerando então que os dois subsistemas estão ligados de modo a formar o sistema C, e aplicando as condições de compatibilidade:

$$x_A = x_B = x_C \quad (4.4)$$

e de equilíbrio:

$$f_C = f_A + f_B \quad (4.5)$$

que devem existir nos pontos de conexão, obtemos:

$$\frac{1}{\alpha_C} = \frac{1}{\alpha_A} + \frac{1}{\alpha_B} \quad (4.6)$$

ou

$$Z_C = Z_A + Z_B \quad (4.7)$$

Assim, as características do sistema completo obtêm-se directamente em função das dos dois componentes, considerados como dois sistemas independentes.

A equação pode ser expressa em termos da FRF deslocabilidade (ou mobilidade), ou mais convenientemente em termos das suas inversas, rigidez dinâmica (ou impedância). Embora para este caso simples não faça muita diferença, quando se estende a análise para casos mais gerais, onde o acoplamento se dá em muitos graus de liberdade e onde são incluídas coordenadas que não estão envolvidas no processo de acoplamento, a formulação onde aparecem as impedâncias é algebricamente mais expedita.

A análise simples atrás descrita pode ser estendida para casos mais gerais, como ilustrado na figura 4.2.

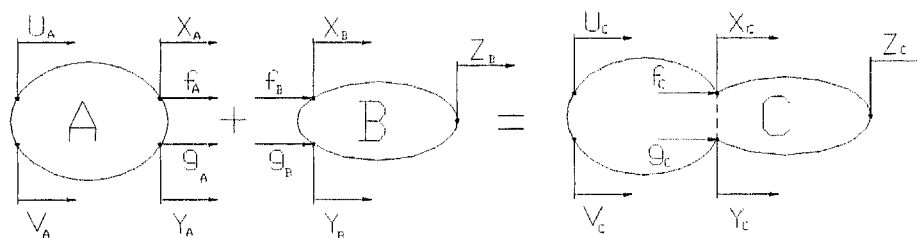


Figura 4.2 - Acoplamento no caso geral.

Neste caso, é conveniente notar que, por exemplo, as propriedades dinâmicas do componente A, expressas em termos das suas FRFs de deslocabilidade, estão contidas numa matriz que pode ser dividida na forma abaixo ilustrada, separando os elementos que dizem respeito às coordenadas de ligação (x_C) dos restantes (x_A):

$$[\alpha_A(\omega)] = \begin{bmatrix} \alpha_A^{aa} & \alpha_A^{ac} \\ \alpha_A^{ca} & \alpha_A^{cc} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Esta matriz FRF de deslocabilidade pode ser usada para determinar a correspondente matriz FRF de impedância, da seguinte forma:

$$[Z_A(\omega)] = [\alpha_A(\omega)]^{-1} = \begin{bmatrix} Z_A^{aa} & Z_A^{ac} \\ Z_A^{ca} & Z_A^{cc} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Da mesma forma, podemos escrever a correspondente matriz de impedâncias para o componente B:

$$[Z_B(\omega)] = [\alpha_B(\omega)]^{-1} = \begin{bmatrix} Z_B^{bb} & Z_B^{bc} \\ Z_B^{cb} & Z_B^{cc} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Deve notar-se que estas propriedades das FRF são as dos componentes quando os pontos, ou coordenadas, de ligação estão completamente desligados de qualquer outro componente ou estrutura, e, logo, dizem respeito às propriedades do componente, obtidas quando ele é testado ou analisado isolado dos restantes.

Como anteriormente, por aplicação das condições de equilíbrio e de compatibilidade, podemos obter a matriz FRF de impedância para o sistema total, na forma:

$$[Z_C(\omega)] = [Z_A(\omega)] \oplus [Z_B(\omega)] = \begin{bmatrix} Z_A^{aa} & 0 & Z_A^{ac} \\ 0 & Z_B^{bb} & Z_B^{bc} \\ Z_A^{ca} & Z_B^{cb} & Z_A^{cc} + Z_B^{cc} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

A partir da matriz de impedância, $[Z_C(\omega)]$, do sistema total, podemos então obter a matriz FRF de deslocabilidades, através de:

$$[\alpha_C] = [Z_C]^{-1} \quad (4.12)$$

Este procedimento é facilmente extensível ao acoplamento simultâneo de mais de dois componentes, e a casos onde vários componentes estão ligados através das mesmas coordenadas, simplesmente por adaptação do processo de adição acima descrito.

4.1.1 Obtenção das Matrizes FRF de Impedância dos Componentes

Existem diversas formas de obter as matrizes FRF, dos componentes, usadas no processo de acoplamento de estruturas, entre os quais:

1. Através das matrizes de massa e rigidez, pois:

$$[Z] = [[K] - \omega^2[M]]. \quad (4.13)$$

2. Análise directa de estruturas unidimensionais, para as quais existem expressões analíticas para a impedância.
3. Medição directa da matriz FRF de deslocabilidade e inversão da mesma.
4. Cálculo da matriz de impedância a partir do modelo modal, através da expressão:

$$[Z] = [\alpha]^{-1} = \left[[\Phi] \left[(\lambda_r^2 - \omega^2) \right]^{-1} [\Phi]^T \right]^{-1} \quad (4.14)$$

No terceiro e no quarto casos, é necessário inverter as matrizes de deslocabilidade de modo a obter as matrizes de impedância necessárias ao processo de acoplamento. No entanto este procedimento requer cuidados adicionais de modo a garantir que a inversão não se torne mal condicionada, situação a que o terceiro caso é mais susceptível, pois é inevitável a existência de pequenos erros nas medições. A situação é mais gravosa em estruturas pouco amortecidas, onde poderá ocorrer a transposição das ressonâncias dos componentes para as características do modelo de resposta da estruturas acoplada, levando por vezes ao aparecimento de picos 'fantasma' nos gráficos das FRF da estrutura acoplada, na vizinhança das ressonâncias de um dos componentes. Este problema é pouco importante para componentes com ressonâncias

mais atenuadas, como é o caso de estruturas com algum amortecimento e com densidade modal relativamente elevada. Para este último é melhor usar directamente as FRFs medidas, do que a alternativa de obtenção do modelo modal por aproximação a curvas que na realidade apresentam formas muito complexas.

Na quarta abordagem, é preciso garantir que a matriz FRF não é singular de modo a poder ser invertida. Para que esta condição seja verificada, é necessário que o número de modos incluídos na análise seja, pelo menos, igual ao número de coordenadas usadas para descrever o componente em análise. Também poderá haver a necessidade de incluir uma matriz de termos residuais de modo a considerar a influência dos modos fora da gama de análise não incluídos no modelo modal. Em muitos casos, a única forma de contornar a necessidade de obter a matriz de termos residuais, é o de durante a análise incluir mais modos que os necessários para a gama de frequências de interesse, o que implica a análise para uma gama de frequências mais larga.

4.2 Acoplamento Modal - Método I.

Este método é usado na análise de estruturas acopladas em que todos os componentes são descritos através do seu modelo modal, neste caso há possibilidade de reformular o método do acoplamento de impedâncias, de tal forma que permite a obtenção directa das propriedades modais do sistema acoplado. Nesta formulação é difícil satisfazer a necessidade de termos residuais, de modo a ter em linha de conta os modos necessariamente omitidos.

A relação entre a deslocabilidade (FRF) e o modelo modal, para o caso do sistema com amortecimento viscoso proporcional, pode ser escrita:

$$[\alpha_A]_{n \times n} = [\Phi_A]_{n \times m} \left[(k_{r,A} - \omega^2 m_{r,A} + i\omega c_{r,A}) \right]_{m \times m}^{-1} [\Phi_A]_{m \times n}^T \quad (4.15)$$

onde n representa o número de graus de liberdade e m o número de modos incluídos na análise.

Da expressão anterior obtém-se:

$$[\alpha_A]^{-1} = [\Phi_A^+]^T \left[\begin{array}{c} (k_{r,A} - \omega^2 m_{r,A} + i\omega c_{r,A}) \end{array} \right] [\Phi_A^+] \quad (4.16)$$

onde $[\Phi_A^+]$ representa a matriz pseudo-inversa de $[\Phi_A]$ e é dada por:

$$[\Phi_A^+]_{m \times n} = [\Phi_A]_{m \times n}^T \left([\Phi_A]_{m \times n} [\Phi_A^+]_{n \times m}^T \right)^{-1} \quad (4.17)$$

Assumindo que $n \leq m$, isto é, o número de coordenadas é menor que o número de modos, podemos exprimir a matriz de impedâncias na forma:

$$[Z_A] = [\alpha_A]^{-1} = \left([D_A] - \omega^2 [E_A] + i\omega [F_A] \right) \quad (4.18)$$

onde

$$[D_A] = [\Phi_A^+]^T \left[\begin{array}{c} k_{r,A} \end{array} \right] [\Phi_A^+] \quad (4.19)$$

$$[E_A] = [\Phi_A^+]^T \left[\begin{array}{c} m_{r,A} \end{array} \right] [\Phi_A^+] \quad (4.20)$$

$$[F_A] = [\Phi_A^+]^T \left[\begin{array}{c} c_{r,A} \end{array} \right] [\Phi_A^+] \quad (4.21)$$

Da mesma forma, para a estrutura B tem-se:

$$[Z_B] = [\alpha_B]^{-1} = \left([D_B] - \omega^2 [E_B] + i\omega [F_B] \right) \quad (4.22)$$

Aplicando a expressão do acoplamento de impedâncias, obtemos a expressão da matriz de impedância para o sistema acoplado, na seguinte forma:

$$[Z_C] = \begin{bmatrix} D_A^{aa} & 0 & D_A^{ac} \\ 0 & D_B^{bb} & D_B^{bc} \\ D_A^{ca} & D_B^{cb} & D_A^{cc} + D_B^{cc} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} E_A^{aa} & 0 & E_A^{ac} \\ 0 & E_B^{bb} & E_B^{bc} \\ E_A^{ca} & E_B^{cb} & E_A^{cc} + E_B^{cc} \end{bmatrix} + i\omega \begin{bmatrix} F_A^{aa} & 0 & F_A^{ac} \\ 0 & F_B^{bb} & F_B^{bc} \\ F_A^{ca} & F_B^{cb} & F_A^{cc} + F_B^{cc} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

ou na forma mais compacta

$$[Z_C] = [D_C] - \omega^2 [E_C] + i\omega [F_C] \quad (4.24)$$

Na expressão anterior, $[D_c]$ pode ser vista como uma matriz de rigidez, $[E_c]$ como uma matriz de massa e $[F_c]$ como uma matriz de amortecimento para o sistema acoplado. Embora estas matrizes não descrevam correctamente a distribuição de massa, rigidez e amortecimento do sistema acoplado, podem ser usadas na formulação de problemas de valores e vectores próprios de modo a calcular as frequências naturais e as formas naturais do sistema acoplado.

Para este caso, a ordem do sistema final é $a+b+c$, quer dizer, depende do número de coordenadas usadas para descrever cada subsistema e não do número de modos que cada um contém. Este facto pode ser uma limitação para a utilidade do método, pois há necessidade de incluir um número suficiente de coordenadas de modo a construir um modelo representativo, embora não superior ao número de modos, pois isso poderá violar uma necessidade básica para a não-singularidade das matrizes de FRF.

4.3 Acoplamento Modal - Método II

Uma das limitações do procedimento anterior é a restrição imposta à ordem do sistema final, que está relacionada com o número de coordenadas usadas e não com o número de modos de cada componente. Este método utiliza, como no caso anterior, os modos livres de cada componente, obtidos via análise modal de cada um dos componentes separadamente, mas reformula a análise de tal forma que a ordem do sistema final é ditada pelo número de modos incluídos em cada subsistema. O método apresenta-se ligeiramente diferente do caso anterior pois permite, ou antes assume, que cada par de subsistemas acoplados esteja ligado por uma mola ou um amortecedor. Um exemplo tipo está descrito na figura 4.3.

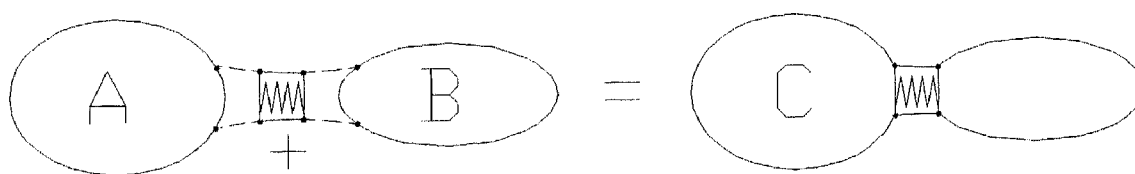


Figura 4.3 - Acoplamento com elemento de ligação.

A equação de movimento para o subsistema A pode ser escrita na seguinte forma:

$$[M_A]_{N_A \times N_A} \{\ddot{x}_A\} + [K_A] \{x_A\} = \{f_A\} \quad (4.25)$$

onde as únicas forças presentes são aquelas existentes nos pontos de ligação. Esta equação pode ser transformada para as coordenadas modais, de tal forma que:

$$[I]_{m_A \times m_A} \{\ddot{q}_A\} + [\omega_A^2] \{q_A\} = [\Phi_A]_{m_A \times n_A}^T \{f_A\}_{n_A \times 1} \quad (4.26)$$

onde m_A representa o número de modos incluídos e n_A o número de pontos de ligação. Do mesmo modo, para o componente B podemos escrever:

$$[I]_{m_B \times m_B} \{\ddot{q}_B\} + [\omega_B^2] \{q_B\} = [\Phi_B]_{m_B \times n_B}^T \{f_B\}_{n_B \times 1} \quad (4.27)$$

Estas duas equações podem ser combinadas de forma a obtermos a equação matricial conjunta:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_A \\ \ddot{q}_B \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_A^2 & 0 \\ 0 & \omega_B^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_A \\ q_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_A^T & 0 \\ 0 & \Phi_B^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_A \\ f_B \end{Bmatrix} \quad (4.28)$$

Através da ligação, as forças e as respostas podem ser relacionadas da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} f_A \\ f_B \end{Bmatrix} = [K_C] \begin{Bmatrix} x_A \\ x_B \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

Onde $[K_C]$ é a matriz de rigidez, e de amortecimento se estiver incluído, para o elemento de ligação e $\begin{Bmatrix} x_A \\ x_B \end{Bmatrix}$ as coordenadas geométricas dos pontos de ligação, que estão relacionadas com as coordenadas modais, através de transformação acima referida.

Logo, se não forem aplicadas forças externas à estrutura acoplada, a equação do movimento da montagem é dada por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_A \\ \ddot{\mathbf{q}}_B \end{Bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} \Phi_A^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_B^T \end{bmatrix} [\mathbf{K}_C] \begin{bmatrix} \Phi_A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_A^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \omega_B^2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_A \\ \mathbf{q}_B \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.30)$$

Esta equação pode então ser resolvida da forma normal de modo a obter os valores e os vectores próprios do sistema acoplado, respectivamente frequências e formas naturais, cujo número será determinado pelo número de modos em cada componente, e não pelo número de coordenadas usadas.

4.4 Acoplamento de Impedâncias - Abordagem por Blocos I

O método de acoplamento de impedâncias apresentado em 4.1 pode ser modificado de modo a que o acoplamento das matrizes de FRF seja realizado por blocos ou sub-matrizes^{[12],[13]}.

O processo de acoplamento, já apresentado, é baseado basicamente na adição das matrizes de impedância dos componentes. Este processo conduz, geralmente, a bons resultados para as funções directas nos pontos de acoplamento e, na maior parte dos casos, a resultados inaceitáveis para as FRF cruzadas de qualquer par de dois pontos do sistema.^[12]

Suponha-se os dois componentes A e B acoplados para constituírem o sistema (C), tal como está representado na figura 4.4.

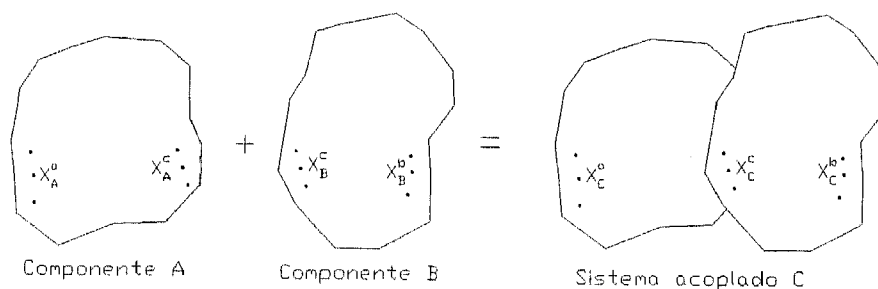


Figura 4.4 - Componentes e sistema acoplado.

Os graus de liberdade usados para descrever os componentes e o sistema acoplado são os que pertencem ao acoplamento (c) e os que não (a) e (b), caso sejam os pontos

internos de A e B respectivamente. Essas coordenadas são armazenadas em três vectores de deslocamentos, na seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \{X_A^a\}_{n_a \times 1} \\ \{X_A^c\}_{n_c \times 1} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} \{X_B^c\}_{n_c \times 1} \\ \{X_B^b\}_{n_b \times 1} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} \{X_C^a\}_{n_a \times 1} \\ \{X_C^c\}_{n_c \times 1} \\ \{X_C^b\}_{n_b \times 1} \end{array} \right\} \quad (4.31)$$

onde n_a , n_b e n_c , representam, respectivamente, o número de coordenadas a, b e c.

As forças generalizadas harmónicas a actuar em A,B e C, podem agrupar-se em três vectores com a seguinte configuração:

$$\left\{ \begin{array}{l} \{F_A^a\}_{n_a \times 1} \\ \{F_A^c\}_{n_c \times 1} \end{array} \right\} e^{i\omega t}, \left\{ \begin{array}{l} \{F_B^c\}_{n_c \times 1} \\ \{F_B^b\}_{n_b \times 1} \end{array} \right\} e^{i\omega t}, \left\{ \begin{array}{l} \{F_C^a\}_{n_a \times 1} \\ \{F_C^c\}_{n_c \times 1} \\ \{F_C^b\}_{n_b \times 1} \end{array} \right\} e^{i\omega t} \quad (4.32)$$

A relação entre a resposta e a força de excitação, para cada um dos componentes e para o sistema acoplado, é dada por:

$$\{x\} = [\alpha(\omega)]\{f\} \quad (4.33)$$

onde $[\alpha(\omega)]$ é a matriz FRF de deslocabilidade, que para cada um dos componentes do sistema pode ser arranjada na seguinte forma (omitindo o ω):

$$[\alpha_A] = \begin{bmatrix} [\alpha_A^{aa}]_{n_a \times n_a} & [\alpha_A^{ca}]_{n_a \times n_c} \\ [\alpha_A^{ac}]_{n_c \times n_a} & [\alpha_A^{cc}]_{n_c \times n_c} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

$$[\alpha_B] = \begin{bmatrix} [\alpha_B^{cc}]_{n_c \times n_c} & [\alpha_B^{cb}]_{n_c \times n_b} \\ [\alpha_B^{bc}]_{n_b \times n_c} & [\alpha_B^{bb}]_{n_b \times n_b} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

De forma idêntica, a matriz de deslocabilidade do sistema acoplado pode também configurar-se em sub-matrizes e na seguinte forma:

$$[\alpha_C] = \begin{bmatrix} [\alpha_C^{aa}]_{n_a \times n_a} & [\alpha_C^{ac}]_{n_a \times n_c} & [\alpha_C^{ab}]_{n_a \times n_b} \\ [\alpha_C^{ca}]_{n_c \times n_a} & [\alpha_C^{cc}]_{n_c \times n_c} & [\alpha_C^{cb}]_{n_c \times n_b} \\ [\alpha_C^{ba}]_{n_b \times n_a} & [\alpha_C^{bc}]_{n_b \times n_c} & [\alpha_C^{bb}]_{n_b \times n_b} \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Refira-se que as matrizes de deslocabilidades $[\alpha_A]$, $[\alpha_B]$ e $[\alpha_C]$ são matrizes simétricas.

De modo a obter uma expressão para a matriz FRF do sistema acoplado $[\alpha_C]$, em função das matrizes $[\alpha_A]$ e $[\alpha_B]$, dos componentes, há necessidade de considerar dois casos de carga distintos:

Caso 1: solicitações externas somente a actuar nos pontos de ligação de A, B e C, conforme representado na figura 4.5.

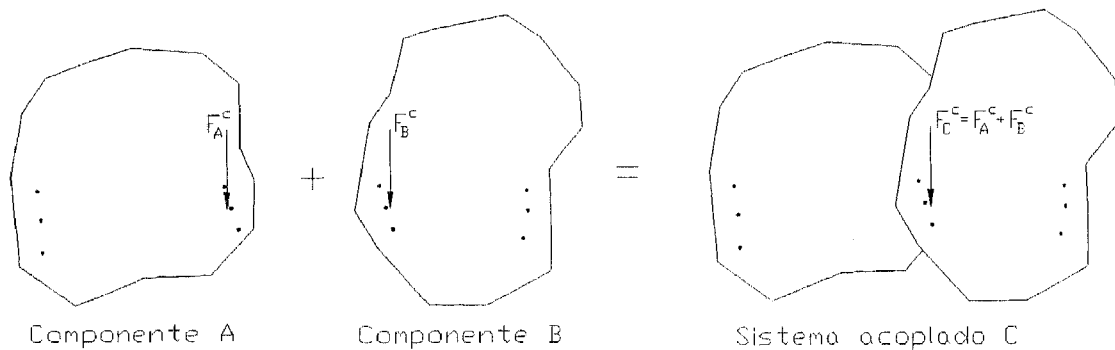


Figura 4.5 - Caso de carga 1: forças externas a actuar nos pontos de acoplamento.

Deste modo, para o componente A temos:

$$\begin{Bmatrix} \{X_A^a\} \\ \{X_A^c\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\alpha_A^{aa}] & [\alpha_A^{ac}] \\ [\alpha_A^{ca}] & [\alpha_A^{cc}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{F_A^c\} \end{Bmatrix} \quad (4.37)$$

Resolvendo o sistema por blocos, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \{X_A^a\} &= [\alpha_A^{ac}] \{F_A^c\} \\ \{X_A^c\} &= [\alpha_A^{cc}] \{F_A^c\} \end{aligned} \quad (4.38)$$

De modo semelhante, para o componente B, temos:

$$\begin{Bmatrix} \{X_B^c\} \\ \{X_B^b\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\alpha_B^{cc}] & [\alpha_B^{cb}] \\ [\alpha_B^{bc}] & [\alpha_B^{bb}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{F_B^c\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (4.39)$$

donde resulta:

$$\begin{aligned} \{X_B^c\} &= [\alpha_B^{cc}] \{F_B^c\} \\ \{X_B^b\} &= [\alpha_B^{bc}] \{F_B^c\} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Quando os dois componentes estão ligados de modo a formar o sistema C no qual actua a força $\{F_C^c\}$, verificam-se as seguintes condições de compatibilidade e equilíbrio:

$$\{X_A^c\} = \{X_B^c\} = \{X_C^c\} \text{ - compatibilidade} \quad (4.41)$$

$$\{F_A^c\} + \{F_B^c\} = \{F_C^c\} \text{ - equilíbrio} \quad (4.42)$$

Para o sistema acoplado C, a relação entre a solicitação e a resposta é então dada por:

$$\begin{Bmatrix} \{X_C^a\} \\ \{X_C^c\} \\ \{X_C^b\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\alpha_C^{aa}] & [\alpha_C^{ac}] & [\alpha_C^{ab}] \\ [\alpha_C^{ca}] & [\alpha_C^{cc}] & [\alpha_C^{cb}] \\ [\alpha_C^{ba}] & [\alpha_C^{bc}] & [\alpha_C^{bb}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{F_C^c\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (4.43)$$

Efectuando os produtos matriciais das sub-matrizes da expressão anterior, obtêm-se as relações:

$$\begin{aligned} \{X_C^a\} &= [\alpha_C^{ac}] \{F_C^c\} \\ \{X_C^c\} &= [\alpha_C^{cc}] \{F_C^c\} \\ \{X_C^b\} &= [\alpha_C^{bc}] \{F_C^c\} \end{aligned} \quad (4.44)$$

das expressões (4.38), (4.40), (4.41) e (4.42) obtém-se:

$$\{F_C^c\} = [\alpha_A^{cc}]^{-1} \{X_C^c\} + [\alpha_B^{cc}]^{-1} \{X_C^c\} \quad (4.45)$$

e de (4.44) e (4.45) obtém-se:

$$[\alpha_C^{cc}] = \left[[\alpha_A^{cc}]^{-1} + [\alpha_B^{cc}]^{-1} \right]^{-1} \quad (4.46)$$

A expressão anterior permite calcular a matriz de funções de resposta em frequência de deslocabilidade somente para os pontos do acoplamento.

Caso 2: solicitações externas a actuar no sistema C, conforme representado na figura 4.6.

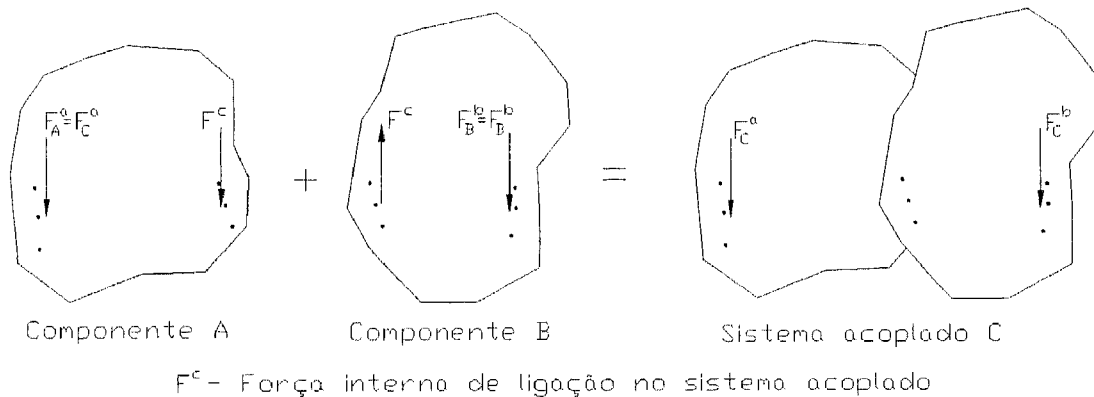


Figura 4.6 - Caso de carga 2: forças externas a actuar nos pontos não pertencentes ao acoplamento.

Neste caso para o componente C temos a seguinte relação entre a solicitação e a resposta:

$$\begin{Bmatrix} \{X_C^a\} \\ \{X_C^c\} \\ \{X_C^b\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\alpha_C^{aa}] & [\alpha_C^{ac}] & [\alpha_C^{ab}] \\ [\alpha_C^{ca}] & [\alpha_C^{cc}] & [\alpha_C^{cb}] \\ [\alpha_C^{ba}] & [\alpha_C^{bc}] & [\alpha_C^{bb}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{F_C^a\} \\ \{0\} \\ \{F_C^b\} \end{Bmatrix} \quad (4.47)$$

Efectuando o produto matricial por blocos, obtém-se:

$$\begin{aligned}\{X_C^a\} &= [\alpha_C^{aa}]\{F_C^a\} + [\alpha_C^{ab}]\{F_C^b\} \\ \{X_C^c\} &= [\alpha_C^{ca}]\{F_C^a\} + [\alpha_C^{cb}]\{F_C^b\} \\ \{X_C^b\} &= [\alpha_C^{ba}]\{F_C^a\} + [\alpha_C^{bb}]\{F_C^b\}\end{aligned}\quad (4.48)$$

Ao desacoplar o sistema aparece a força $\{F^c\}$ nos pontos de ligação dos dois componentes A e B, com sentido oposto. Desta forma, continuam a verificar-se as seguintes equações de compatibilidade:

$$\begin{aligned}\{X_A^a\} &= \{X_C^a\} \\ \{X_A^c\} &= \{X_B^c\} = \{X_C^c\} \\ \{X_B^b\} &= \{X_C^b\}\end{aligned}\quad (4.49)$$

e de equilíbrio:

$$\begin{aligned}\{F_A^a\} &= \{F_C^a\} \\ \{F_B^b\} &= \{F_C^b\}\end{aligned}\quad (4.50)$$

Assim, temos para o sistema A:

$$\begin{Bmatrix} \{X_A^a\} \\ \{X_A^c\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\alpha_A^{aa}] & [\alpha_A^{ac}] \\ [\alpha_A^{ca}] & [\alpha_A^{cc}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{F_A^a\} \\ \{F^c\} \end{Bmatrix}\quad (4.51)$$

efectuando o produto vem:

$$\begin{aligned}\{X_A^a\} &= [\alpha_A^{aa}]\{F_A^a\} + [\alpha_A^{ac}]\{F^c\} \\ \{X_A^c\} &= [\alpha_A^{ca}]\{F_A^a\} + [\alpha_A^{cc}]\{F^c\}\end{aligned}\quad (4.52)$$

Para o sub-sistema B, de forma idêntica:

$$\begin{Bmatrix} \{X_B^c\} \\ \{X_B^b\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\alpha_B^{cc}] & [\alpha_B^{cb}] \\ [\alpha_B^{bc}] & [\alpha_B^{bb}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\{F^c\} \\ \{F_B^b\} \end{Bmatrix} \quad (4.53)$$

ou ainda:

$$\begin{aligned} \{X_B^c\} &= -[\alpha_B^{cc}]\{F^c\} + [\alpha_B^{cb}]\{F_B^b\} \\ \{X_B^b\} &= -[\alpha_B^{bc}]\{F^c\} + [\alpha_B^{bb}]\{F_B^b\} \end{aligned} \quad (4.54)$$

Utilizando as expressões (4.49), (4.50), (4.52) e (4.54) podemos obter:

$$\{F^c\} = \left[[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}] \right]^{-1} [\alpha_B^{cb}]\{F_B^b\} - \left[[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}] \right]^{-1} [\alpha_A^{ca}]\{F_C^a\} \quad (4.55)$$

e por (4.48), (4.49), (4.50), (4.52) e (4.54) obtém-se:

$$\begin{aligned} [\alpha_A^{aa}]\{F_C^a\} + [\alpha_A^{ac}]\{F^c\} &= [\alpha_C^{aa}]\{F_C^a\} + [\alpha_C^{ab}]\{F_C^b\} \Leftarrow \{X_A^a\} = \{X_C^a\} \\ -[\alpha_B^{bc}]\{F^c\} + [\alpha_B^{bb}]\{F_C^b\} &= [\alpha_C^{ba}]\{F_C^a\} + [\alpha_C^{bb}]\{F_C^b\} \Leftarrow \{X_B^b\} = \{X_C^b\} \end{aligned} \quad (4.56)$$

Substituindo a expressão (4.55) para $\{F^c\}$ em (4.56), e sabendo que $\{F_C^a\}$ e $\{F_C^b\}$ são forças independentes, obtém-se:

$$[\alpha_C^{aa}] = [\alpha_A^{aa}] - [\alpha_A^{ac}]\left[[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}] \right]^{-1} [\alpha_A^{ca}] \quad (4.57)$$

$$[\alpha_C^{ab}] = [\alpha_A^{ac}]\left[[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}] \right]^{-1} [\alpha_B^{cb}] \quad (4.58)$$

$$[\alpha_C^{bb}] = [\alpha_B^{bb}] - [\alpha_B^{bc}]\left[[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}] \right]^{-1} [\alpha_B^{cb}] \quad (4.59)$$

utilizando (4.48), (4.49), (4.50) e (4.52) obtemos:

$$\{F^c\} = [\alpha_A^{cc}]^{-1} \left[[\alpha_B^{ca}] - [\alpha_A^{ca}] \right] \{F_C^a\} + [\alpha_A^{cc}]^{-1} [\alpha_C^{cb}]\{F_C^b\} \quad (4.60)$$

Da mesma forma para (4.48), (4.50) e (4.54):

$$\{F^c\} = [\alpha_B^{cc}]^{-1} \left[[\alpha_B^{cb}] - [\alpha_C^{cb}] \right] \{F_C^b\} - [\alpha_B^{cc}]^{-1} [\alpha_C^{ca}] \{F_C^a\} \quad (4.61)$$

Comparando os coeficientes das equações (4.60) e (4.61), e usando a equação (4.46), obtêm-se as seguintes relações independentes:

$$[\alpha_C^{cb}] = [\alpha_C^{cc}] [\alpha_B^{cc}]^{-1} [\alpha_B^{cb}] \quad (4.62)$$

e

$$[\alpha_C^{ca}] = [\alpha_C^{cc}] [\alpha_A^{cc}]^{-1} [\alpha_A^{ca}] \quad (4.63)$$

Em resumo, as equações (4.46), (4.57), (4.58), (4.59), (4.62) e (4.63) permitem, pois, calcular as seis sub-matrizes independentes da matriz FRF do sistema acoplado C, como função das matrizes de FRF dos componentes A e B, da seguinte forma:

$$[\alpha_C^{cc}] = \left[[\alpha_A^{cc}]^{-1} + [\alpha_B^{cc}]^{-1} \right]^{-1} \quad (4.64)$$

$$[\alpha_C^{aa}] = [\alpha_A^{aa}] - [\alpha_A^{ac}] \left[[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}] \right]^{-1} [\alpha_A^{ca}] \quad (4.65)$$

$$[\alpha_C^{ab}] = [\alpha_A^{ac}] \left[[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}] \right]^{-1} [\alpha_B^{cb}] \quad (4.66)$$

$$[\alpha_C^{bb}] = [\alpha_B^{bb}] - [\alpha_B^{bc}] \left[[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}] \right]^{-1} [\alpha_B^{cb}] \quad (4.67)$$

$$[\alpha_C^{cb}] = [\alpha_C^{cc}] [\alpha_B^{cc}]^{-1} [\alpha_B^{cb}] \quad (4.68)$$

$$[\alpha_C^{ca}] = [\alpha_C^{cc}] [\alpha_A^{cc}]^{-1} [\alpha_A^{ca}] \quad (4.69)$$

Este tipo de formulação por sub-matrizes apresenta grandes vantagens do ponto de vista numérico, em relação à formulação global apresentada em 4.1. Como se referiu, a inversão de matrizes constitui uma potencial e importante fonte de erro numérico na resolução do problema de acoplamento de impedâncias. Nesta formulação, como as

matrizes a inverter são de menor dimensão e apresentam um melhor condicionamento, esta operação apresenta-se menos susceptível à introdução e propagação de erros numéricos, permitindo a resolução de problemas de dimensão proibitiva para a formulação global. Além disso, esta formulação apresenta igualmente vantagens em termos de recursos de “memória” e de processamento necessários e em termos de tempo de cálculo.

De notar que, caso não se pretenda obter as funções da matriz de FRF do sistema acoplado em que estão envolvidos os graus de liberdade do acoplamento, equações (4.65) a (4.67), só há necessidade de inverter a matriz $\left[\left[\alpha_A^{cc} \right] + \left[\alpha_B^{cc} \right] \right]$, havendo a necessidade de realizar somente uma vez a inversão de matrizes. Ao contrário, o acoplamento de impedâncias global, num processo de cálculo há necessidade de realizar duas vezes a inversão de matrizes. Esta situação torna a abordagem por blocos uma forma mais eficaz e menos susceptível a erros numéricos quando comparada com a abordagem global.

4.5 Acoplamento de Impedâncias - Abordagem por Blocos II

Apesar das vantagens já referidas para a formulação por sub-matrizes em relação à formulação global, aquela pode ainda ser reformulada no sentido de melhorar o procedimento de construção das funções de resposta em frequência do sistema acoplado, que incluam os graus de liberdade acoplados, isto é, as sub-matrizes $\left[\alpha_C^{cc} \right]$, $\left[\alpha_C^{ca} \right]$ e $\left[\alpha_C^{cb} \right]$. O melhoramento introduzido assenta fundamentalmente no facto da determinação dos elementos das referidas sub-matrizes requerer somente a inversão duma única matriz.

As expressões para os elementos das matrizes $\left[\alpha_C^{cc} \right]$, $\left[\alpha_C^{ca} \right]$ e $\left[\alpha_C^{cb} \right]$ desta reformulação do acoplamento de impedâncias por sub-matrizes são apresentadas em [13] e [14]. Estas expressões obtêm-se a partir da formulação de impedâncias por sub-matrizes efectuando manipulações algébricas e matriciais que foram desenvolvidas neste trabalho e que se encontram descritas no Anexo A.

Assim, as sub-matrizes da matriz de FRF do sistema acoplado podem calcular-se pelas seguintes expressões:

$$[\alpha_C^{aa}] = [\alpha_A^{aa}] - [\alpha_A^{ac}] \left[[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}] \right]^{-1} [\alpha_A^{ca}] \quad (4.70)$$

$$\begin{aligned} [\alpha_C^{ac}] &= [\alpha_A^{ac}] \left[[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}] \right]^{-1} [\alpha_B^{cc}] \\ &= [\alpha_A^{ac}] - [\alpha_A^{ac}] \left[[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}] \right]^{-1} [\alpha_A^{cc}] \end{aligned} \quad (4.71)$$

$$[\alpha_C^{ab}] = [\alpha_A^{ac}] \left[[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}] \right]^{-1} [\alpha_B^{cb}] \quad (4.72)$$

$$\begin{aligned} [\alpha_C^{cc}] &= [\alpha_A^{cc}] \left[[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}] \right]^{-1} [\alpha_B^{cc}] \\ &= [\alpha_B^{cc}] \left[[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}] \right]^{-1} [\alpha_A^{cc}] \\ &= [\alpha_A^{cc}] - [\alpha_A^{cc}] \left[[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}] \right]^{-1} [\alpha_A^{cc}] \\ &= [\alpha_B^{cc}] - [\alpha_B^{cc}] \left[[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}] \right]^{-1} [\alpha_B^{cc}] \end{aligned} \quad (4.73)$$

$$\begin{aligned} [\alpha_C^{cb}] &= [\alpha_A^{cc}] \left[[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}] \right]^{-1} [\alpha_B^{cb}] \\ &= [\alpha_B^{cb}] - [\alpha_B^{cc}] \left[[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}] \right]^{-1} [\alpha_B^{cb}] \end{aligned} \quad (4.74)$$

$$[\alpha_C^{bb}] = [\alpha_B^{bb}] - [\alpha_B^{bc}] \left[[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}] \right]^{-1} [\alpha_B^{cb}] \quad (4.75)$$

Assim, um elemento individual da matriz FRF $\alpha_{ij,C}$ do sistema acoplado é dado por:

- Se i e j pertencem ambos ao mesmo componente A ou B

i e j em A:

$$\alpha_{ij,C} = \alpha_{ij,A} - [\alpha_A^{ic}] \left[[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}] \right]^{-1} \{\alpha_A^{cj}\} \quad (4.76)$$

i e j em B:

$$\alpha_{ij,C} = \alpha_{ij,B} - [\alpha_B^{ic}] \left[[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}] \right]^{-1} \{\alpha_B^{cj}\} \quad (4.77)$$

- Se i e j pertencem a diferentes componentes

i em A e j em B:

$$\alpha_{ij,C} = [\alpha_A^{ic}] \left[[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}] \right]^{-1} \{\alpha_B^{cj}\} \quad (4.78)$$

i em B e j em A:

$$\alpha_{ij,C} = [\alpha_B^{ic}] \left[[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}] \right]^{-1} \{\alpha_A^{cj}\} \quad (4.79)$$

Nas expressões anteriores $[\alpha_X^{ic}]$ representa a linha da matriz FRF do componente X, que relaciona o grau de liberdade i e os graus de liberdade de acoplamento; $\{\alpha_X^{cj}\}$ representa a linha da matriz FRF do componente X, que relaciona os graus de liberdade de acoplamento e o grau de liberdade j.

Nesta formulação, qualquer que seja o elemento da matriz FRF a calcular, para o sistema acoplado, só há necessidade de inverter a matriz $[[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}]]$. Deste modo, como se pode verificar nas expressões anteriores, a obtenção de um determinado elemento da matriz FRF, do sistema acoplado, passa sempre pela resolução de um problema do tipo:

$$v = [x][F]^{-1}\{y\} \quad (4.80)$$

onde [F], em qualquer caso, é dada por:

$$[F] = [\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}] \quad (4.81)$$

Deste modo, [F] é independente do elemento da matriz que se pretende obter. Assim, os pólos da estrutura acoplada devem estar descritos em [F], e, em consequência, uma frequência de ressonância deve coincidir com um mínimo do seu determinante. Logo, a matriz [F] vai tender para uma matriz mal condicionada à medida que nos aproximamos das ressonâncias.

5. PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

A obtenção do modelo de um sistema por análise modal experimental pressupõe, como já se referiu, a existência de um conjunto de funções de resposta em frequência (FRFs) do sistema em estudo.

Na prática, o procedimento de análise modal experimental envolve a medição do estado vibratório do sistema e a obtenção de um determinado número de FRFs do sistema. Esta etapa do processo é realizada, de uma forma simples, excitando a estrutura num determinado grau de liberdade, e medindo a resposta num ou vários graus de liberdade. Porém, existem técnicas de excitação modernas e desenvolvimentos na teoria da análise modal que permitem a utilização de mecanismos de excitação mais complexos. A excitação aplicada é medida através da utilização de um transdutor de força no ponto de excitação, enquanto que a resposta do sistema é medida através de um acelerómetro colocado no ponto onde se pretende obter a resposta. Tanto o sinal da excitação como o da resposta são introduzidos e processados em dois canais de um analisador que calcula a transformada rápida de Fourier (FFT), a qual, após transformar os sinais do domínio do tempo para o domínio da frequência, calcula a função de resposta em frequência.

Uma consideração a ter em conta ao realizar uma análise modal experimental consiste na definição do número de FRFs que precisam de ser medidas, de forma a poder obter as propriedades dinâmicas da estrutura na banda de frequência em análise. Teoricamente, é suficiente medir uma linha ou uma coluna da matriz FRF. Logo, são suficientes as medições resultantes de um teste com um martelo instrumentado com resposta fixa, o que resulta na obtenção duma linha da matriz FRF, ou com um excitador fixo medindo a resposta em todos os graus de liberdade, o que resulta na obtenção duma coluna da matriz FRF.

Deste modo, podemos subdividir o procedimento de análise modal experimental em três fases distintas:

- Preparação do teste
- Medição da excitação e resposta, e cálculo das FRFs
- Identificação dos parâmetros modais

A preparação do teste envolve a escolha da forma de suspensão da estrutura, do equipamento e tipo de excitação, dos pontos da estrutura onde se vão realizar medições, discretização da estrutura, e do equipamento utilizado para medir a excitação e a resposta. Durante o teste, são medidas a excitação e a resposta, e calculado um conjunto de FRFs que é armazenado para ulterior tratamento. Essa informação é, posteriormente, analisada e processada de modo a identificar os parâmetros modais da estrutura em teste.

5.1 Montagem Experimental

Em todos os testes realizados, a estrutura em análise foi suspensa em elásticos, apresentando, assim, condições de ligação ao exterior que permitem um comportamento próximo de condições de fronteira livres, pois a montagem permite os 6 modos de vibração de corpo rígido, 3 translações e 3 rotações, que não apresentam frequência nula como aconteceria para um caso ideal, mas que apresentam uma frequência muito reduzida. Aliás, esta situação foi verificada em cada uma das montagens utilizadas, para as quais todos os modos de corpo rígido se situavam abaixo dos 4Hz, logo muito abaixo dos 10% do primeiro modo com deformação, o qual ocorreu sempre acima dos 500Hz, conforme aconselhado por [9].

Optou-se por este tipo de suspensão porque, para além de ser o de mais fácil implementação na prática, é também o que garante com mais segurança que a estrutura em estudo não seja influenciada por factores externos.

Durante a apresentação de cada um dos testes realizados será apresentada uma fotografia ilustrativa da suspensão adoptada.

5.2 Discretização da Estrutura

Como se pode ver na figura 5.1, a estrutura em estudo é composta fundamentalmente por dois componentes: a tampa e o corpo. De modo a cumprir os objectivos propostos para este estudo será necessário realizar a análise modal tanto da caixa completa como de cada um dos dois componentes individualmente.

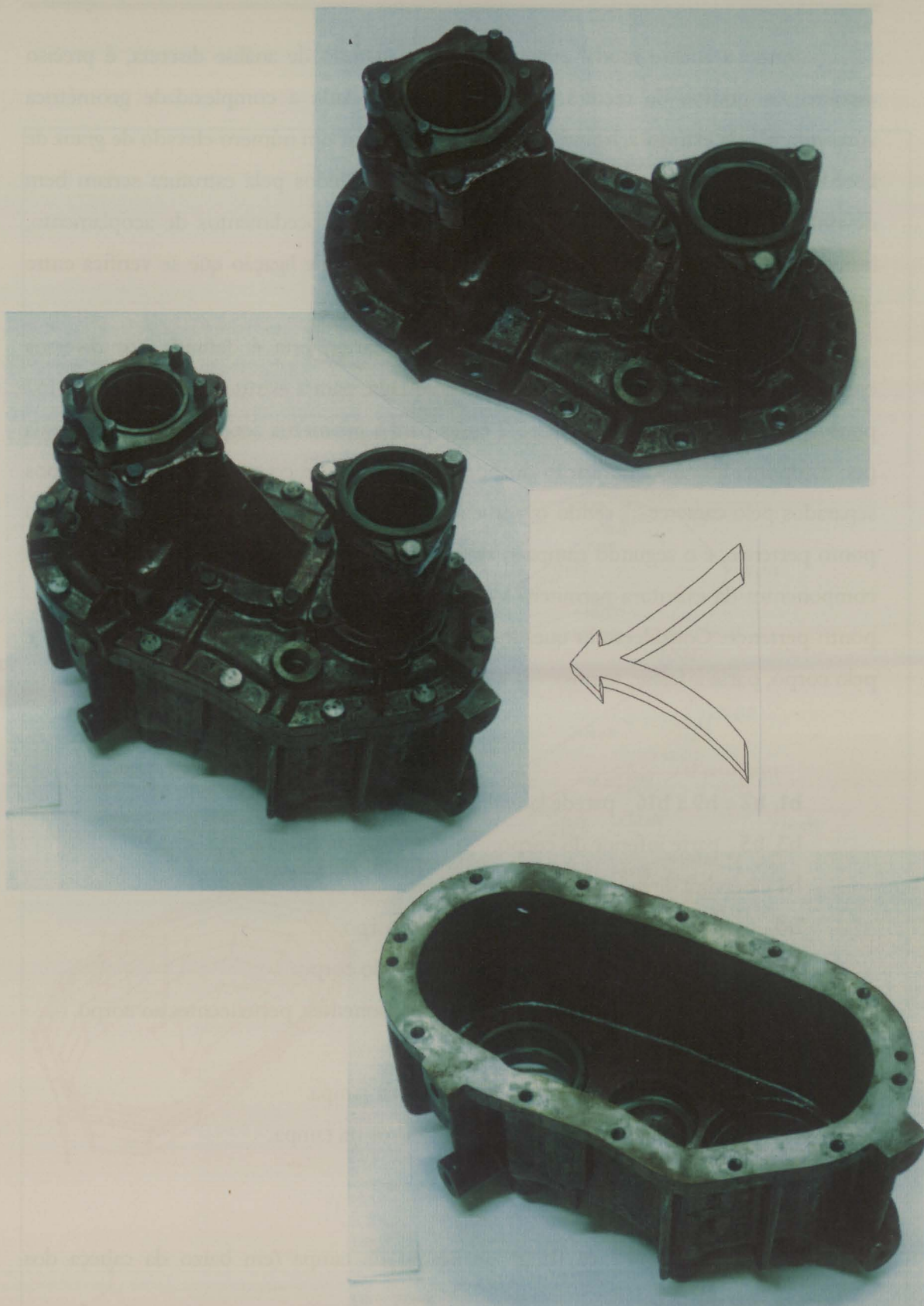


Figura 5.1 - Estrutura do cárter da caixa de transferência.

Sendo a análise modal experimental um método de análise discreta, é preciso escolher os pontos de medição. No nosso caso, dada a complexidade geométrica apresentada pela estrutura, houve necessidade de utilizar um número elevado de graus de liberdade de modo a garantir que os modos apresentados pela estrutura seriam bem definidos. Tendo também por objectivo o teste dos procedimentos de acoplamento, houve necessidade de caracterizar correctamente o tipo de ligação que se verifica entre os dois componentes estruturais.

De modo a representar a geometria do cárter, esta é definida por diversos componentes geométricos. A discretização adoptada, para a estrutura, num total de 157 pontos, está representada na figura 5.2 tanto para a geometria acoplada como separada por componentes. A identificação do ponto de medição é composta por dois campos separados pelo carácter ‘:’, sendo o primeiro campo o nome do componente ao qual o ponto pertence, e o segundo campo o nome do ponto propriamente dito. Os diversos componentes da estrutura permitem identificar a zona da geometria do cárter a que o ponto pertence. Considerando que o cárter é composto pela tampa, parte superior, e pelo corpo, parte inferior, temos:

- b1, b2 e b9 a b16** - parede lateral do corpo.
- b3, b5** - parte inferior do corpo.
- b4** - nervura de reforço de ponto de ligação do corpo
- b6** - parte inferior da flange de ligação do corpo.
- b7 e b7x** - parte lateral da flange de ligação do corpo.
- b8** - pontos de contacto entre os dois componentes, pertencentes ao corpo.
- t1 e t2** - parte superior da tampa.
- t4 a t4x** - parte lateral da flange de ligação da tampa.
- t5** - pontos à esquerda e direita dos parafusos na tampa.
- t6** - cilindro menor da tampa.
- t7** - cilindro maior da tampa.
- t8** - parte superior da flange de ligação da tampa (em baixo da cabeça dos parafusos).
- t9** - pontos de contacto entre os dois componentes, pertencentes à tampa.

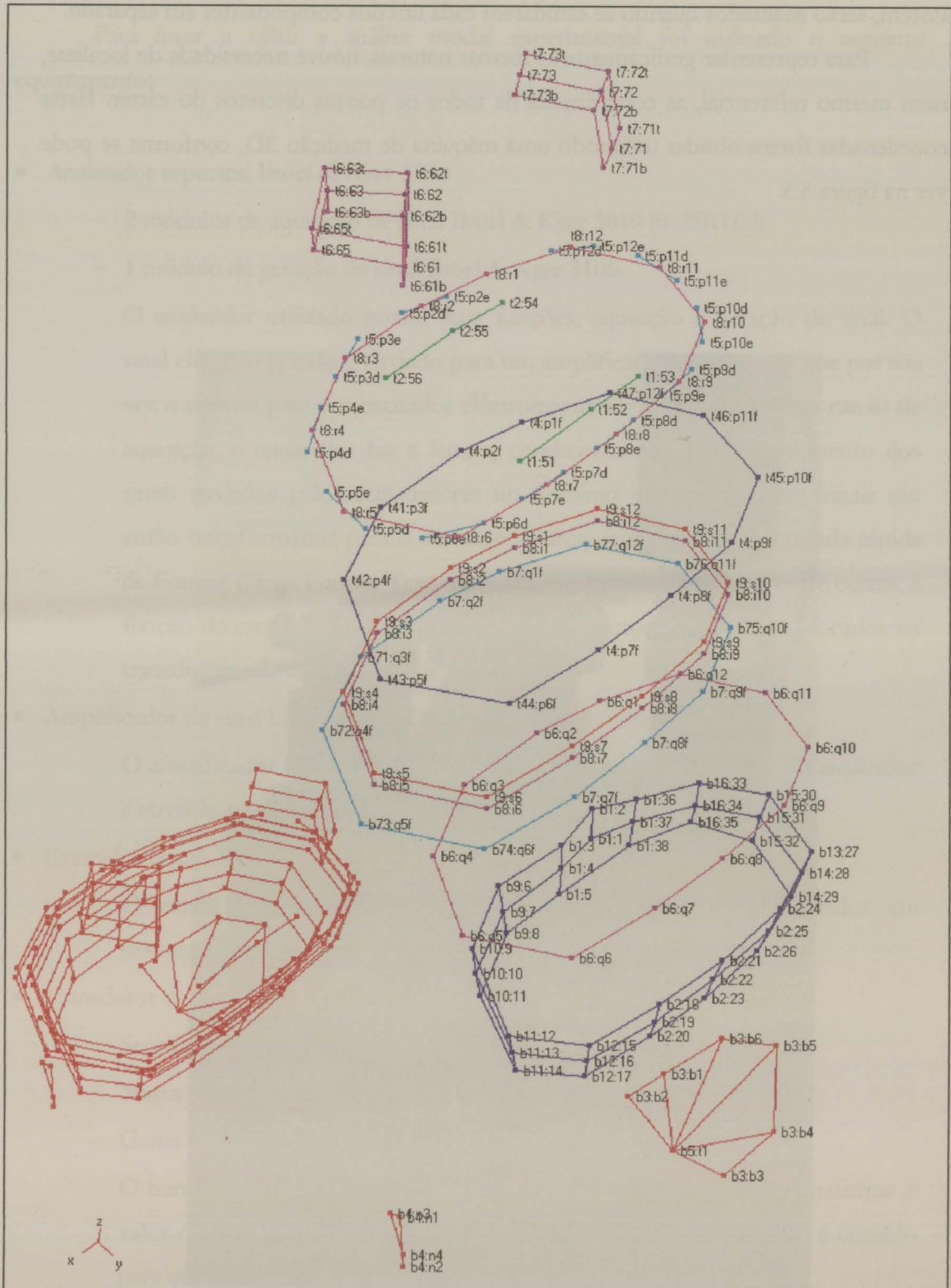


Figura 5.2 - Discretização do caráter.

Os graus de liberdade pertencentes aos componentes b8, t8 e t9 não poderão ser analisados quando do estudo da caixa completa, pois, nessa situação estarão inacessíveis. Porém, serão analisados quando se estudarem cada um dos componentes em separado.

Para representar graficamente as formas naturais, houve necessidade de localizar, num mesmo referencial, as coordenadas de todos os pontos discretos do cárter. Estas coordenadas foram obtidas utilizando uma máquina de medição 3D, conforme se pode ver na figura 5.3.

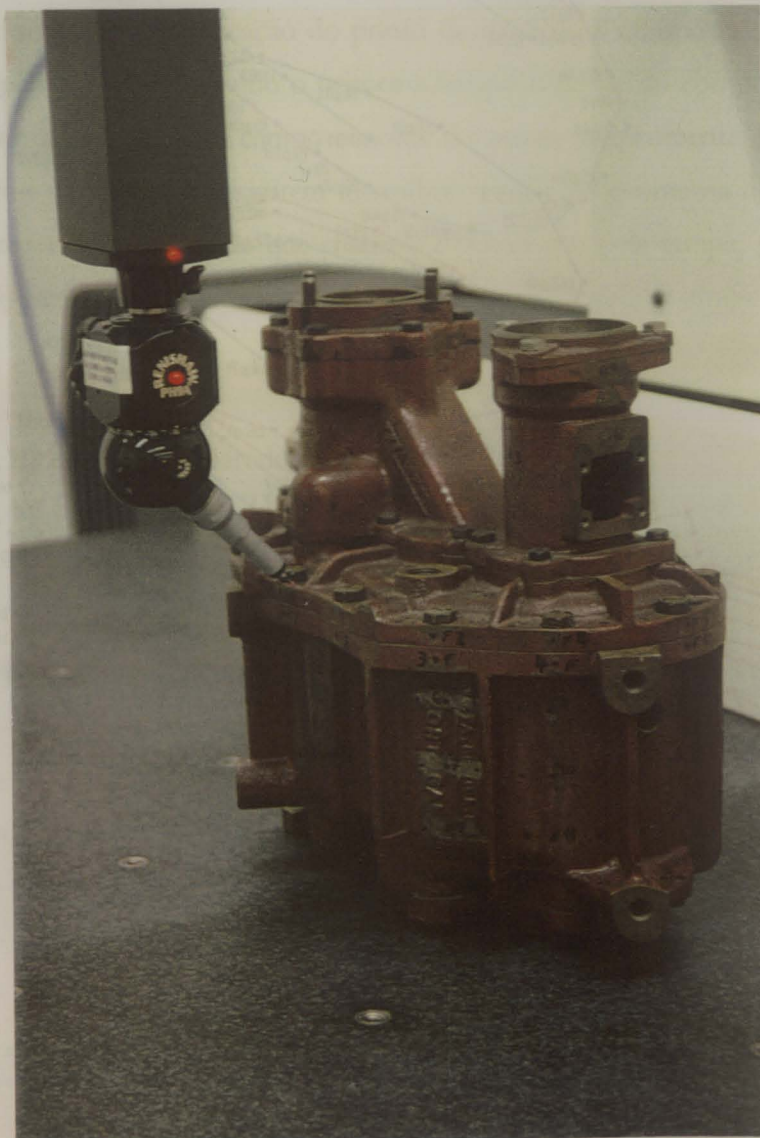


Figura 5.3 - Medição das coordenadas dos pontos do modelo discreto do cárter..

5.3 Equipamento Experimental

Para levar a cabo a análise modal experimental foi utilizado o seguinte equipamento:

- Analisador espectral Brüel & Kjær 3550

- 2 módulos de aquisição de sinal Brüel & Kjær 3019 (0-25KHz);
- 1 módulo de geração de sinal Brüel & Kjær 3106.

O analisador utilizado possui duas funções, aquisição e geração de sinal. O sinal eléctrico gerado é enviado para um amplificador de potência que por sua vez o reenvia para um excitador electromagnético. Através dos dois canais de aquisição, o analisador faz a leitura, condicionamento e processamento dos sinais enviados pelos transdutores no domínio do tempo. Estes sinais são então transformados para o domínio da frequência pela transformada rápida de Fourier (“Fast Fourier Transform”, FFT), permitindo obter, entre outras, a função de resposta em frequência entre os pontos onde estão colocados os transdutores de solicitação e de resposta.

- Amplificador de sinal LDS modelo PA100E

O amplificador tem como função amplificar o sinal proveniente do analisador e enviá-lo para o excitador.

- Excitador electromagnético LDS modelo 400

O excitador transforma o sinal eléctrico enviado do amplificador em deslocamento, o qual é transmitido à estrutura a excitar.

- Transdutor de força Brüel & Kjær 8200

- Sensibilidade: 3.88pC/N
- Massa: 21g
- Gama de frequência:0 a 10KHz

O transdutor de força é um transdutor do tipo piezoeléctrico, e transforma o valor da força aplicada à estrutura num sinal eléctrico em carga que é enviado para uma das entradas do analisador.

- Acelerómetro piezoeléctrico Brüel & Kjær 4371

- Sensibilidade 1.013pC/ms^{-2}
- Massa:11g
- Gama de frequência:0 a 15KHz

O acelerómetro é um transdutor piezoeléctrico que emite, na sua banda de funcionamento, um sinal eléctrico em carga proporcional à aceleração a que é submetido. Esse sinal é enviado para uma das entradas do analisador.

- Acelerómetro piezoeléctrico Brüel & Kjær 4393

- Sensibilidade 0.313pC/ms^{-2}
- Massa:2.2g
- Gama de frequência:0 a 18KHz

- “Software” CADA_PC da LMS para identificação modal

O “software” de análise modal permite importar directamente do analisador as FRFs medidas, com base nas quais, por procedimentos de identificação modal conforme descritos no capítulo 3, se obtêm os parâmetros modais da estrutura em estudo.

Nas figuras 5.4 e 5.5 está representado o equipamento utilizado.

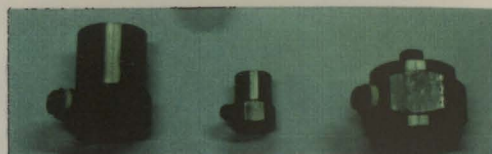


Figura 5.4 - Transdutor de força e acelerómetros.



Figura 5.5 - Analisador e “software” de identificação modal CADA-PC da LMS.

5.4 Ligação do Excitador à Estrutura

Ao transmitir a força do excitador para a estrutura, temos por objectivo somente a transmissão dos esforços axiais, dando total liberdade à estrutura na direcção transversal. Esta necessidade advém do facto de, ao aplicarmos a força numa determinada direcção, a estrutura poder responder com movimento em todas as direcções possíveis, e, caso a estrutura não tenha liberdade de movimento nas outras direcções, estaríamos inadvertidamente a introduzir força também nessas direcções^[30]. Esta situação conduziria à obtenção de medições incorrectas, pois, violaria a definição de FRF:

$$\alpha_{ik}(\omega) = \left(\frac{X_i}{F_k} \right), f_m = 0; m \begin{cases} = 1, N \\ \neq k \end{cases} \quad (5.1)$$

Para garantir a correcta transmissão de esforços costuma utilizar-se uma haste ligada ao excitador. Esta haste deve possuir a característica de ser muito rígida na direcção axial e simultaneamente muito flexível nas direcções transversais. Porém, se esta solução não for correctamente implementada, é susceptível de causar problemas. Caso a haste seja demasiado comprida, ou muito flexível, pode introduzir na medição os efeitos das suas próprias ressonâncias. Estes efeitos são difíceis de contabilizar e, logo, não se poderão corrigir as medições realizadas nestas condições^[9]. No caso da haste ser demasiado curta podem, também, surgir problemas, pois perder-se-á a necessária flexibilidade na direcção transversal. Deste modo, a escolha do comprimento da haste é uma solução de compromisso entre flexibilidade e frequências de ressonância na banda de análise.

Em consequência, deve verificar-se sempre a existência de ressonâncias internas da haste, tanto transversais como axiais, na gama de frequências de trabalho, pois caso ocorram nessa gama podem provocar efeitos indesejáveis nas medições. É de notar que, acima da primeira frequência de ressonância axial da haste, pouca força axial se conseguirá transmitir para a estrutura^[9]. Caso ocorram problemas na direcção transversal, é costume aplicar na superfície do tirante uma camada de material dissipativo, de modo a atenuar os efeitos dessas ressonâncias^[31].

Para o presente estudo foi inicialmente construída uma haste de 45mm de comprimento exposto. Porém, notaram-se alguns problemas na sua utilização, pois

verificou-se que se obtinham resultados substancialmente diferentes nas medições realizadas com este tirante, caso se envolvesse ou não a parte central da haste com uma película de material dissipativo, o que, à partida, era indicador de problemas na direcção transversal. Assim sendo, construiu-se uma haste de comprimento exposto inferior, 17mm, com a qual não ocorreram os problemas verificados para a mais comprida. Ambas as hastes são apresentadas na figura 5.6.



Figura 5.6 - Hastes.

Nas figuras 5.7 e 5.8 são apresentadas as FRF obtidas para as duas hastes com e sem o efeito de amortecimento atrás descrito.

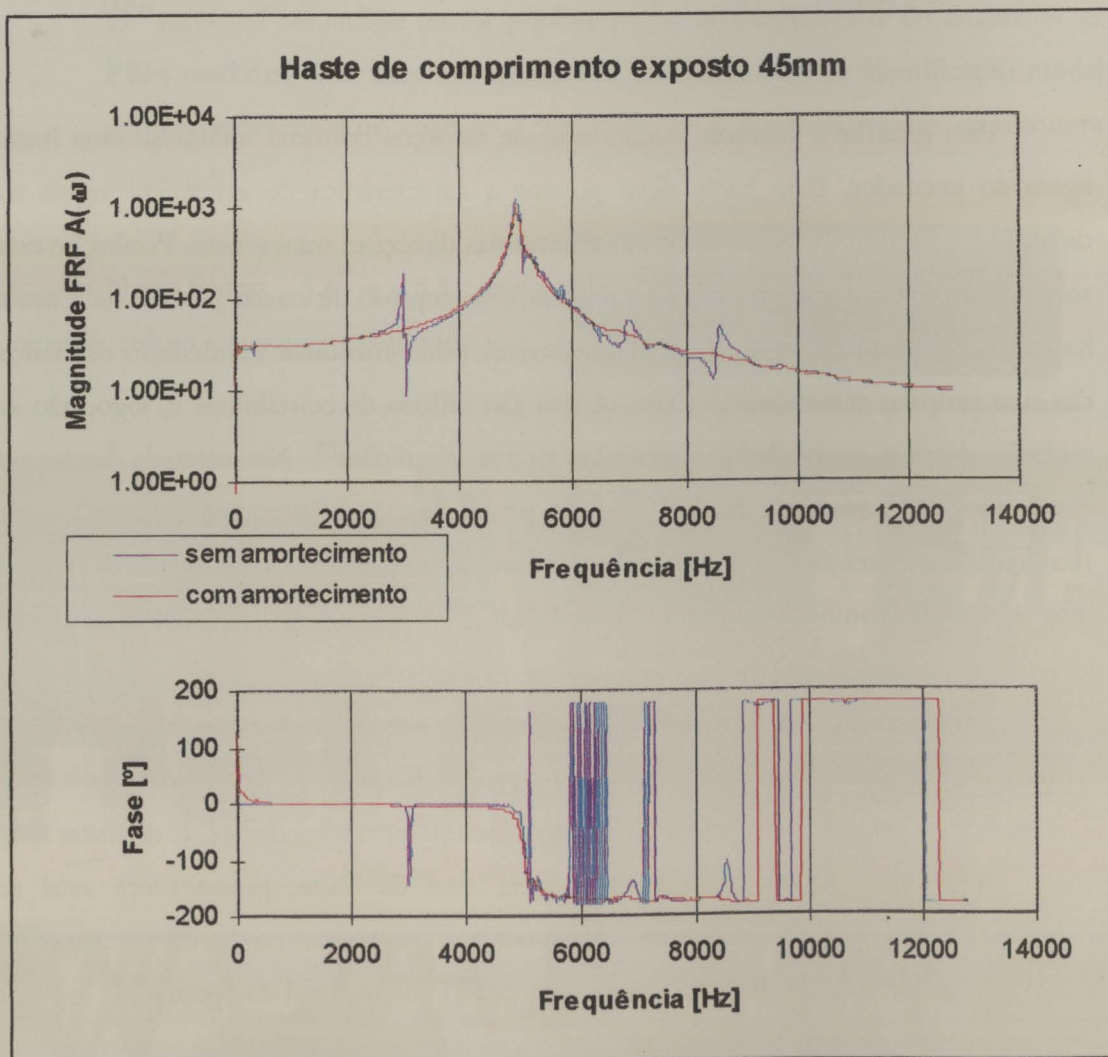


Figura 5.7 - FRF para a haste de comprimento exposto 45mm.

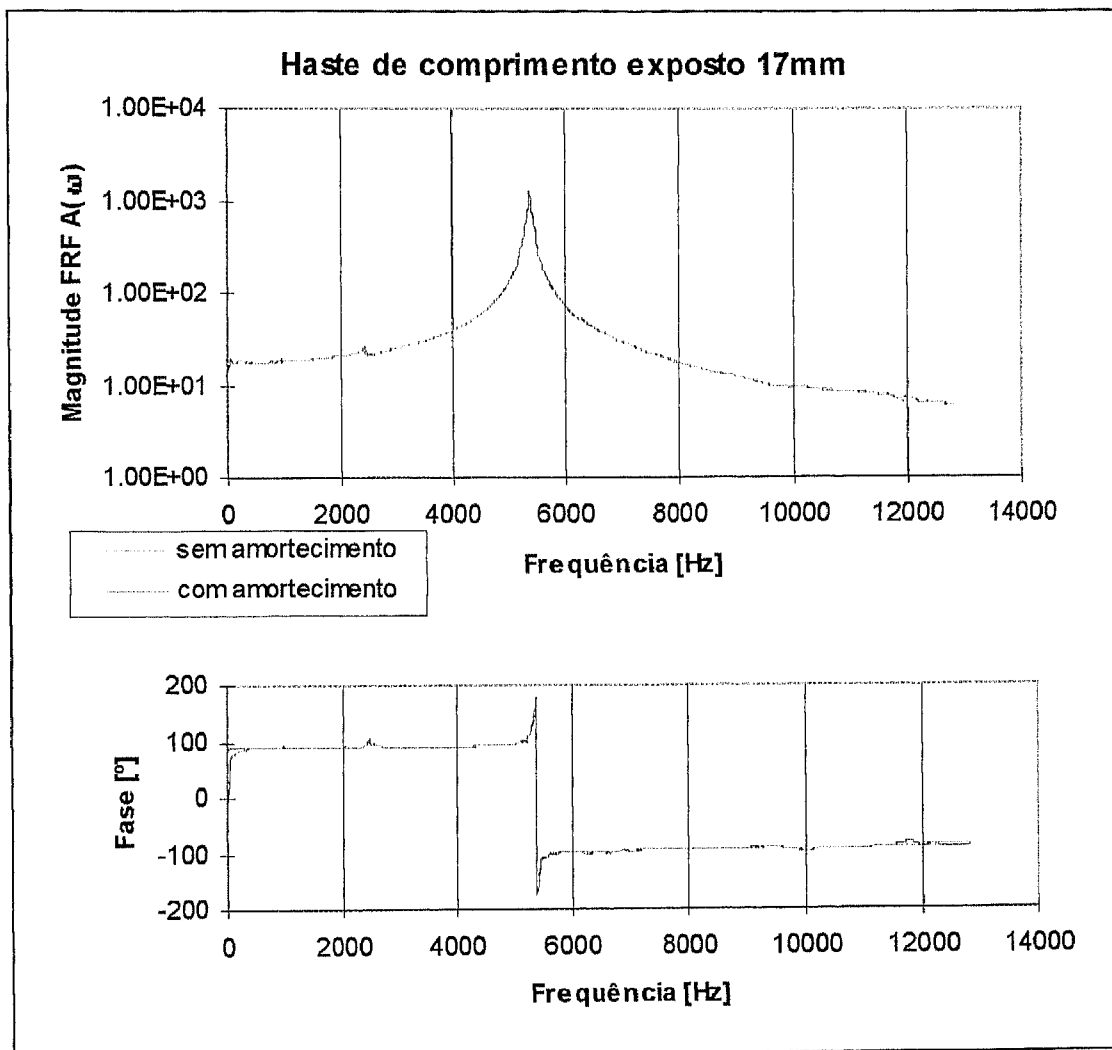


Figura 5.8 - FRF para a haste de comprimento exposto 17mm.

Como se pode verificar através das FRFs atrás apresentadas, ambas as hastes possuem uma primeira ressonância axial na vizinhança dos 5KHz. Porém, a haste mais curta não apresenta, na direcção transversal, os problemas verificados com a mais comprida. Além disso, possui flexibilidade suficiente nesta direcção. Deste modo, foi utilizada a haste mais curta em todas as medições realizadas.

5.5 Montagem do Excitador

A preparação do sistema de excitação envolve outra decisão referente à forma de suspensão ou suporte do excitador relativamente à estrutura em teste. Das duas

configurações apresentadas na figura 5.9, a configuração (a), em que o excitador está fixo e a estrutura está suspensa em elásticos, é a ideal. Em 5.9(b) é apresentada uma configuração alternativa, na qual o excitador é também suspenso. Com esta última configuração poderão existir alguns problemas, caso a massa do excitador não seja suficiente para introduzir energia necessária às baixas frequências. Contudo, este problema pode ser facilmente solucionado adicionando uma massa ao excitador^[9].

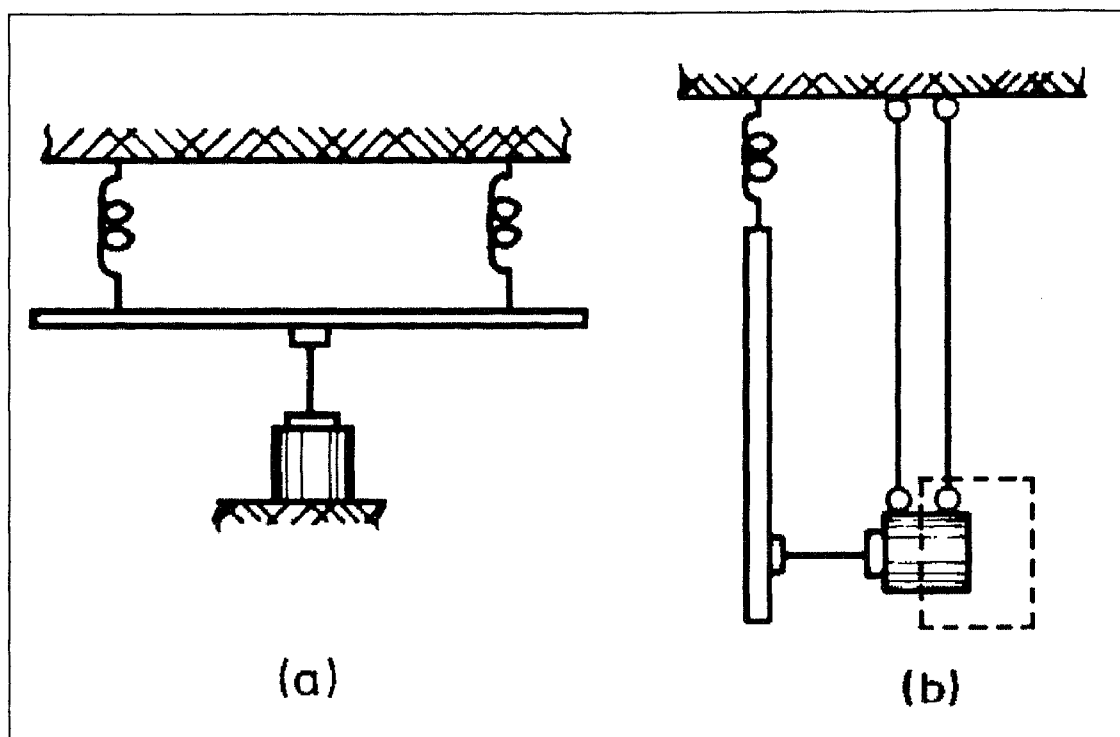


Figura 5.9 - Esquemas de suspensão do excitador.

Na análise do cárter completo foi utilizada a configuração apresentada na figura 5.9(a). No caso do estudo dos componentes separados, devido a dificuldades de posicionamento do excitador em relação à estrutura, optou-se pela configuração apresentada na figura 5.9(b). No entanto, não foi necessário tomar quaisquer medidas adicionais, pois não se verificaram nesta configuração os problemas atrás descritos, dado que a massa de qualquer um dos dois componentes é inferior à massa do excitador.

5.6 Excitação Aleatória

No nosso caso, devido à complexidade geométrica do cárter, à existência de juntas aparafusadas e ao material utilizado na construção do cárter, ferro-fundido, é previsível a existência de algumas não-linearidades. Assim, a excitação aleatória é a mais adequada. A excitação aleatória é uma excitação caracterizada por possuir energia em toda a gama de frequências e, adicionalmente, a amplitude e fase do sinal para cada uma das frequências varia de ciclo para ciclo de excitação. Deste modo, este tipo de excitação permite obter uma aproximação linear ponderada do sistema em análise.^[32]

Ao excitarmos a estrutura com um sinal aleatório obtém-se como resposta um sinal aleatório, ambos no tempo. A transformação destes sinais para o domínio da frequência é realizada através da FFT. Porém, essa transformada não pode ser aplicada directamente, pois, as propriedades inerentes aos sinais aleatórios fazem com que eles violem as condições de Dirichlet*. Assim sendo, é preciso introduzir a definição de dois parâmetros que são usados para descrever os sinais aleatórios: as funções correlação e densidade espectral.^{[9],[21]}

Considerando um sinal de força aleatório no tempo, $f(t)$, que consideramos ergódico**, define-se a função autocorrelação, $R_{ff}(\tau)$, como sendo o valor esperado do produto $f(t).f(t + \tau)$, calculado ao longo do tempo. Esta função é real e descreve, em média, como um determinado valor de amplitude depende dos valores prévios^{[32],[34]}:

$$R_{ff}(\tau) = E[f(t).f(t + \tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t).f(t + \tau)dt \quad (5.2)$$

* Uma função do tempo, $f(t)$, satisfaz as condições de Dirichlet no intervalo (a,b) se (1) $f(t)$ possuir um número finito de máximos e mínimos em (a,b) e (2) $f(t)$ possuir um número finito de descontinuidades finitas e não possuir descontinuidades infinitas em (a,b) ^[33].

** Um processo $f(t)$ é considerado ergódico se o valor médio no tempo, $\mu_f(k) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_k(t)dt$, e a função de autocorrelação de uma sua amostra representativa, forem, respectivamente, iguais ao valor médio e função de autocorrelação de um conjunto de amostras, isto é, $\mu_f(k) = \mu_f$ e $R_{ff}(k, \tau) = R_{ff}(\tau)$ ^{[33],[35]}

Esta função já satisfaz as condições necessárias à aplicação da FFT, e, assim, podemos obter a função densidade espectral de potência, que é uma função real da frequência e é dada por:

$$S_{ff}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ff}(\tau) \cdot e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (5.3)$$

Esta função descreve o conteúdo espectral do sinal original $f(t)$.

Estes conceitos podem também ser aplicados ao sinal de resposta $x(t)$ isoladamente, obtendo as funções de autocorrelação e densidade espectral de potência para este sinal.

Aplicando estas definições simultaneamente às funções $x(t)$ e $f(t)$, obtêm-se as funções de correlação cruzada e densidade espectral cruzada, que serão dadas por:

$$R_{xf}(\tau) = E[x(t) \cdot f(t + \tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot f(t + \tau) dt \quad (5.4)$$

$$S_{xf}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xf}(\tau) \cdot e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (5.5)$$

Neste caso, a função correlação cruzada continua a ser real, enquanto que a densidade espectral cruzada é, geralmente, uma função complexa.

Conhecendo estas funções podemos, então, obter a FRF que relaciona, no domínio da frequência, o sinal de excitação $f(t)$ e de resposta $x(t)$. A FRF pode ser dada por cada um dos seguintes estimadores^[9]:

$$\begin{aligned} H_1(\omega) &= \frac{S_{xf}(\omega)}{S_{ff}(\omega)} \\ H_2(\omega) &= \frac{S_{xx}(\omega)}{S_{xf}(\omega)} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Estes dois estimadores fornecem informação em relação à magnitude e fase da FRF. Teoricamente, estes estimadores deveriam dar os mesmos resultados. No entanto,

esta situação pode não acontecer na prática. Assim, pode definir-se uma nova quantidade, designada por coerência, calculada através da expressão^{[9],[29]}:

$$\gamma^2 = \frac{H_1(\omega)}{H_2(\omega)} \quad (5.7)$$

Pode demonstrar-se que a coerência está sempre compreendida entre 0 e 1^{[9],[21],[36]}. Esta função é, habitualmente, usada para verificar a qualidade da medição, sendo esta tanto melhor quanto mais próximo de 1 estiver o valor da coerência.

Em cada medição realizada foi analisada a respectiva função coerência, de modo a certificar a sua qualidade e garantir a não existência de problemas no sistema de medição, como é o caso da fixação do acelerómetro.

5.7 Calibração dos Transdutores

Os transdutores utilizados nas medições necessitam de ser calibrados periodicamente, de modo a detectar alterações à sua sensibilidade. É possível realizar dois tipos de calibração. Um deles consiste na calibração absoluta em que os transdutores são calibrados individualmente. Este tipo de calibração é pouco usada, pois há necessidade de comparar o valor lido pelo transdutor com o valor obtido por um sistema de medição de referência, usando transdutores padrão. As dificuldades inerentes a este tipo de calibração leva a que ela seja, frequentemente, substituída por outro tipo de calibração, em que se calibra é a sensibilidade de todo o sistema de medição. Este tipo de calibração é muito interessante para a análise modal experimental, pois o que se pretende medir são, habitualmente, razões entre quantidades, nomeadamente, força e aceleração.^[9]

Os sinais eléctricos que se obtêm dos transdutores são proporcionais ao valor da quantidade a medir, sendo esse factor de proporcionalidade designado por sensibilidade do transdutor. Desta forma, se estivermos a medir força e aceleração com transdutores de sensibilidade, respectivamente, E_f e $E_{\ddot{x}}$, temos:

$$\begin{aligned} Q_f &= E_f \times f \\ Q_{\ddot{x}} &= E_{\ddot{x}} \times \ddot{x} \end{aligned} \quad (5.8)$$

No caso de medição da FRF de acelerabilidade:

$$A = \frac{\ddot{x}}{f} = \frac{Q_x}{Q_f} \times \frac{E_f}{E_x} = E \frac{Q_x}{Q_f} \quad (5.9)$$

Assim, o que precisamos de conhecer com precisão é a razão E entre as sensibilidades dos transdutores. A FRF acelerabilidade possui dimensão $[1/\text{massa}]$, e a massa é uma quantidade que pode ser obtida através de uma medição independente^[9]. Assim sendo, se medirmos a acelerabilidade para uma massa padrão, da forma apresentada na figura 5.10, devemos obter uma magnitude constante de valor igual ao inverso do valor da massa. Esta calibração do sistema deve ser realizada para a banda de frequências em que se pretende utilizar os transdutores.

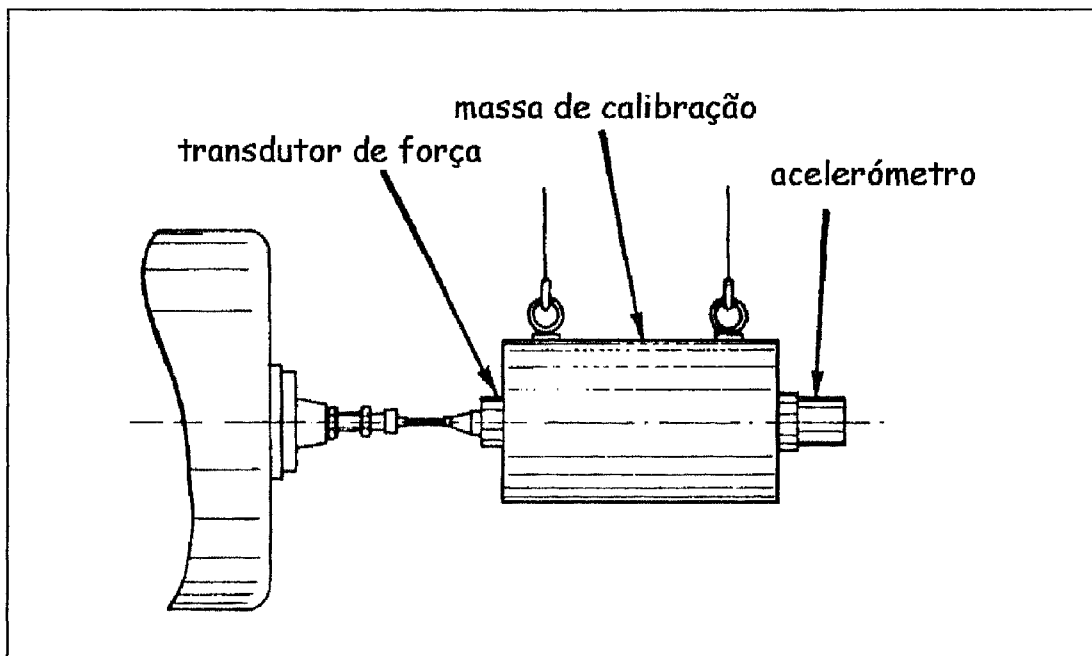


Figura 5.10 - Configuração do sistema de calibração.

Utilizando o procedimento atrás descrito, e considerando correcta a sensibilidade do transdutor de força, efectuou-se a calibração da cadeia de medição com os dois acelerómetros utilizados. A calibração efectuada permitiu concluir que não havia

necessidade de alterar o valor da sensibilidade dos acelerómetros para a banda de frequências de análise.

5.8 Procedimento de Análise Modal

No processo de identificação modal foi assumido um modelo com N graus de liberdade e com amortecimento viscoso, adoptando-se um procedimento de identificação do tipo MDOF, em que se admite que possa haver uma interacção, ainda que pequena, entre os diversos modos naturais da estrutura em estudo. Deste modo, foi utilizada uma metodologia de identificação modal que usa o método da exponencial complexa com mínimos quadrados na determinação dos pólos complexos, isto é, as frequências naturais e os factores de amortecimento. As constantes modais são obtidas através do método dos mínimos quadrados no domínio da frequência. Ambos os métodos estão descritas nos pontos 3.3.2 e 3.3.3. Este tipo de metodologia aproveita as vantagens da identificação no domínio do tempo, permitindo obter melhores resultados, tanto para gamas de frequência mais alargadas como quando o número de modos presentes na gama de análise é elevado. Por outro lado, ultrapassa-se, através da utilização de resíduos no domínio da frequência, a desvantagem dos métodos integralmente no domínio do tempo e que não possibilitam a quantificação da influência dos modos fora da gama de frequência em análise.

A determinação dos pólos dos modos naturais é um processo interactivo, pois o programa de identificação utilizado, CADA-PC da LMS, começa por aproximar o comportamento da estrutura a um sistema com um grau de liberdade, obtendo para esse caso o pólo que minimiza o erro quadrático médio das medições. O número de graus de liberdade é aumentado sucessivamente e os respectivos pólos identificados, cujo número é igual ao número de graus de liberdade admitidos. O utilizador tem a possibilidade de interromper este processo e verificar os pólos obtidos para cada um dos modelos até então calculados, escolhendo entre os pólos obtidos aqueles que julgar mais apropriados, ou, dar continuidade ao processo de determinação dos pólos^[37].

A escolha da gama de frequências em análise e a localização dos pólos é auxiliada por duas funções, a SUM e a MIF (“Mode Indicator Function”).

A função SUM é a soma ponderada de todas as FRFs medidas. Esta função reveste-se de grande utilidade, pois, algumas FRFs podem não apresentar todos os picos

relativos aos os modos existentes na banda de medição^[37]. Isto poderá acontecer quando o grau de liberdade de resposta, a que a FRF diz respeito, for um ponto na vizinhança de um nodo para um determinado modo. Assim sendo, para frequência relativa a esse modo não é visível o respectivo pico. Esta função permite, à partida, evidenciar todos os picos que ocorrem em todas as FRFs^[37].

A função MIF é outra função que auxilia na identificação de modos. A MIF baseia-se no facto de, na ressonância, toda ou quase toda a energia de vibração estar em quadratura com as forças de excitação. Esta função reflecte a proporção de energia de vibração em fase com a excitação. Assim sendo, a MIF atinge um valor mínimo em cada ressonância.^{[37],[38]}

Os resultados obtidos através do processo de identificação modal foram validados através da sintetização das FRFs, isto é, calculando as FRFs a partir dos parâmetros modais identificados, utilizando a expressão (2.77), e comparando-as com as FRFs medidas.

As formas naturais obtidas foram também validados usando o critério de validação modal MAC (“Modal Assurance Criterium”). Este critério baseia-se no facto de os vectores modais serem, teoricamente, linearmente independentes. Deste modo, a sua correlação deve ser nula^[1]. O valor numérico obtido pelo MAC exprime a correlação entre duas formas naturais r e s , e é dado por:

$$MAC_{rs} = \frac{\left(\{\phi_r\}^T \{\phi_s\} \right)^2}{\left(\{\phi_r^*\}^T \{\phi_s\} \right) \left(\{\phi_r\}^T \{\phi_s^*\} \right)} \quad (5.10)$$

O valor MAC para um par de vectores vale 0 quando os vectores são totalmente independentes, e 1 no caso de serem idênticos.

Aplicando o cálculo do MAC a todas as combinações possíveis de formas naturais, obtém-se uma matriz, habitualmente designada por matriz MAC, cujos elementos da diagonal devem aproximar-se da unidade e os restantes de zero. Para um modelo identificado, coerente e representativo, os elementos não diagonais da matriz, devem ser muito reduzidos^[1]. Contudo, esses termos podem ser elevados, mesmo para vectores linearmente independentes, caso os graus de liberdade incluídos na análise não sejam suficientes ou representativos para diferenciar os modos. Neste caso, é, então, necessário aumentar a resolução espacial da malha de medição.^[1]

6. ESTUDO DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DO CÂRTER

6.1 A Caixa de Transferência

A caixa de transferência, cujo cârter está a ser estudado, destina-se a fazer o re-escalonamento das velocidades obtidas a partir da caixa de velocidades principal, a qual transforma directamente o movimento de saída do motor em cinco velocidades possíveis. Esta caixa de transferência permite a obtenção de duas variantes cinemáticas, conduzindo à duplicação da gama de velocidades obtida a partir da caixa principal. Na figura 6.1 está representado um desenho, em corte, da caixa de transferência.

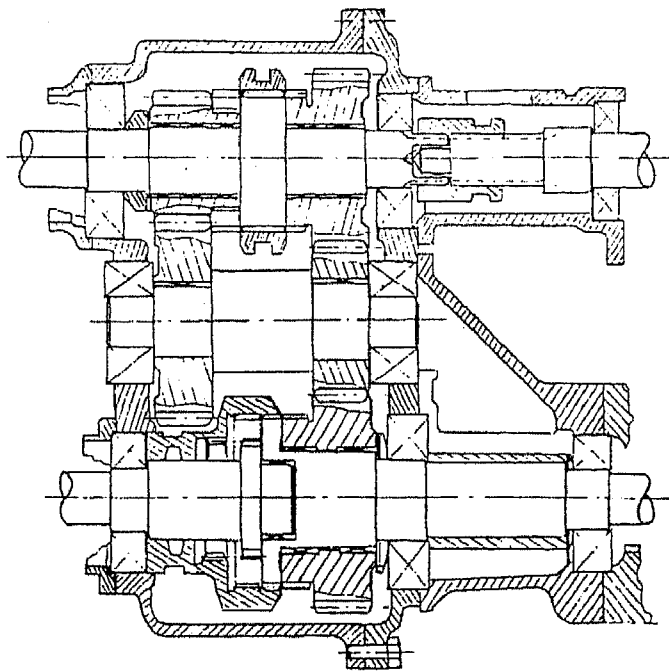


Figura 6.1 - Desenho em corte da caixa de transferência.

Como principais elementos funcionais, esta caixa utiliza cinco rodas dentadas helicoidais montadas em três veios suportados por rolamentos.

O esquema cinemático da caixa de transferência está representado na figura 6.2. Nessa mesma figura está assinalado o número de dentes de cada uma das rodas dentadas.

O movimento entra pelo veio I, sendo na gama baixa transmitido para o veio II, através do par de rodas 1/3. Nesta gama de funcionamento, a roda 2 está a rodar em vazio. Para a gama alta, o movimento é transmitido do veio I para o veio II, através do par de rodas 2/4. Nesta situação, é transmitido movimento da roda 3 para a 1, estando esta última a rodar em vazio. Em ambas as gamas de funcionamento, a transmissão de movimento do veio II para o veio III, dá-se através do par de rodas 4/5. A velocidade máxima de entrada que ocorre no veio I é de 4315rpm^[39], ou 71.917Hz.

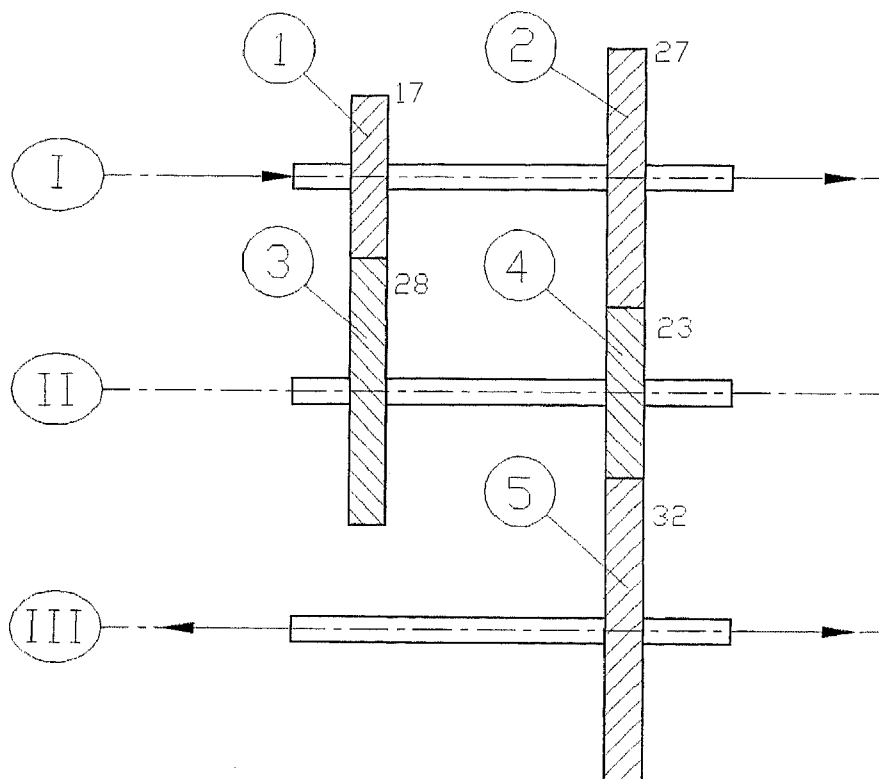


Figura 6.2 - Esquema cinemático da caixa de transferência.

6.2 Configuração Experimental

De modo a ser analisada, a estrutura do cárter da caixa foi suspensa em elásticos, apresentando assim condições de ligação ao exterior próximas das condições de fronteira livres, como se referiu no ponto 5.1. Na figura 6.3 é apresentada a suspensão adoptada para a estrutura.

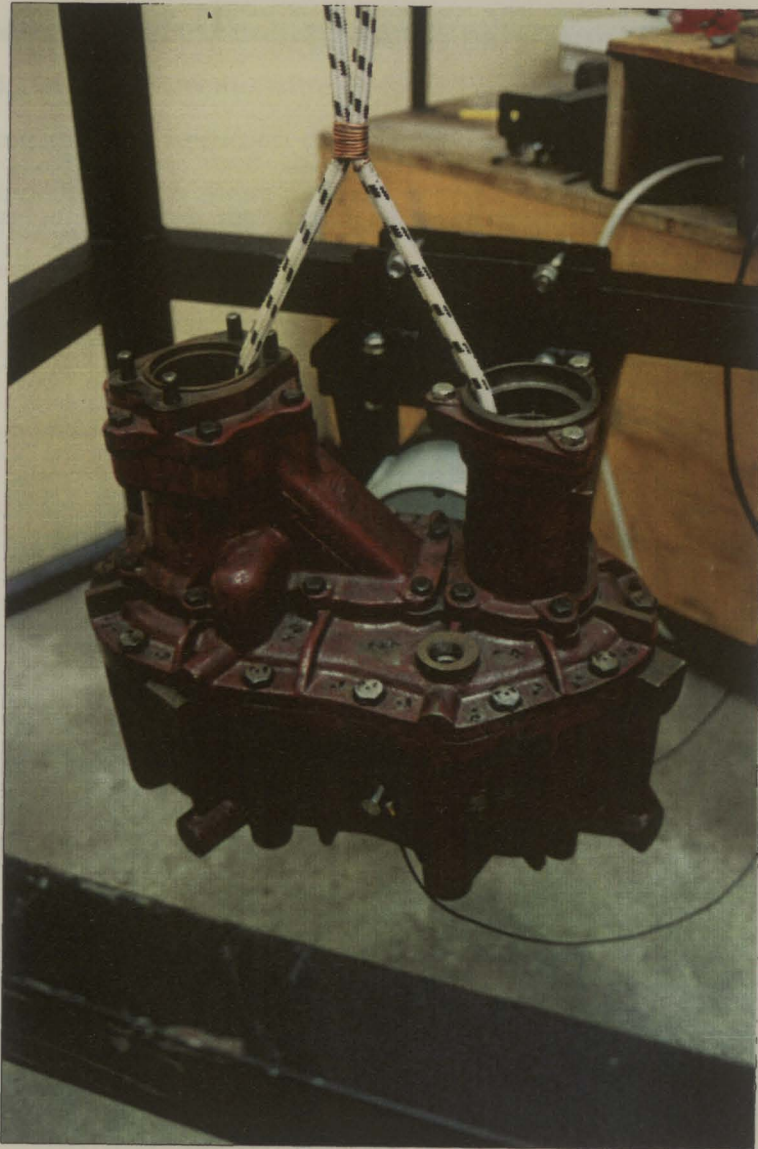


Figura 6.3 - Suspensão adoptada para o cárter

Para realizar a análise foram efectuadas medições em 133 pontos, dos 157 que constituem o modelo discretizado para a estrutura, pois, como já se referiu, 24 pontos estão inacessíveis.

O ponto de excitação foi escolhido em função da medição preliminar de algumas FRFs de modo a seleccionar um ponto que permitisse excitar todos os modos do cárter, presentes na banda de análise. Escolheu-se, assim, como ponto de excitação, o ponto 22. A resposta do cárter foi medida nos diversos pontos da malha experimental, obtendo-se as funções de resposta em frequência de tipo acelerabilidade, $H_{x|22}$, onde x designa o ponto onde foi medida a resposta à excitação aplicada no ponto 22.

6.3 Gama de Frequências de Análise

A análise modal do cárter da caixa de transferência tem por objectivo a caracterização das suas propriedades dinâmicas, em particular as suas frequências características susceptíveis de serem excitadas quando em funcionamento. Assim, o limite superior da banda de frequências de análise deve abarcar todas as frequências que possam ser excitadas na sua gama de funcionamento.

Em funcionamento, os diversos componentes da caixa excitam, em função da velocidade de entrada, diversas frequências. No entanto, consideramos apenas as mais importantes e que são as frequências de rotação de cada um dos componentes e as bandas de frequências excitadas pelas rodas dentadas.

Uma roda dentada engrenada excita, fundamentalmente, as seguintes frequências^[40]:

- **A frequência de rotação**, FR, e respectivas harmónicas, que se deve fundamentalmente a excentricidades provocadas por defeitos de fabrico.
- **A frequência de engrenamento**, FE, e suas harmónicas, que é provocada pela perturbação causada durante a alteração do par de dentes engrenado. Logo, a frequência excitada é obtida pela multiplicação da frequência de rotação pelo número de dentes da roda.
- **As bandas laterais**, BL, que são frequências simétricas em relação à FE, separadas exactamente da frequência de rotação do veio. Estas frequências aparecem devido à modulação em amplitude, normalmente associadas a problemas de excentricidade, desalinhamento ou desgaste exagerado dos dentes ou em frequência, flutuação da velocidade de um veio da engrenagem.

Para este estudo foram consideradas todas as frequências principais geradas pelas rodas dentadas, sendo desprezados os efeitos dos harmónicos, os quais à partida são muito reduzidos.

Assim sendo, a frequência mais alta excitada pelas rodas dentadas é a gerada na gama alta pela BL do engrenamento entre as rodas 1/3, que se encontram a rodar em vazio. Considerando a maior frequência de entrada possível na caixa, a maior frequência de engrenamento ocorre para o par de rodas 1/3 e é dada por:

$$FE_{\max} = 71.917 \frac{27}{23} 28 = 2363.87 \text{ Hz} \quad (6.1)$$

Esta frequência de engrenamento dá origem a uma frequência máxima provocada pela BL da roda 1, e dada por:

$$F_{\max} = FE_{\max} + 71.917 \frac{27}{23} \frac{28}{17} = 2502.93 \text{ Hz} \quad (6.2)$$

Com estes valores de frequências características de funcionamento, e de modo a fixar a gama de frequências a analisar, foram medidas algumas FRFs na caixa para uma banda de frequências até 3.2KHz, as quais estão representadas nas figuras 6.4 e 6.5.

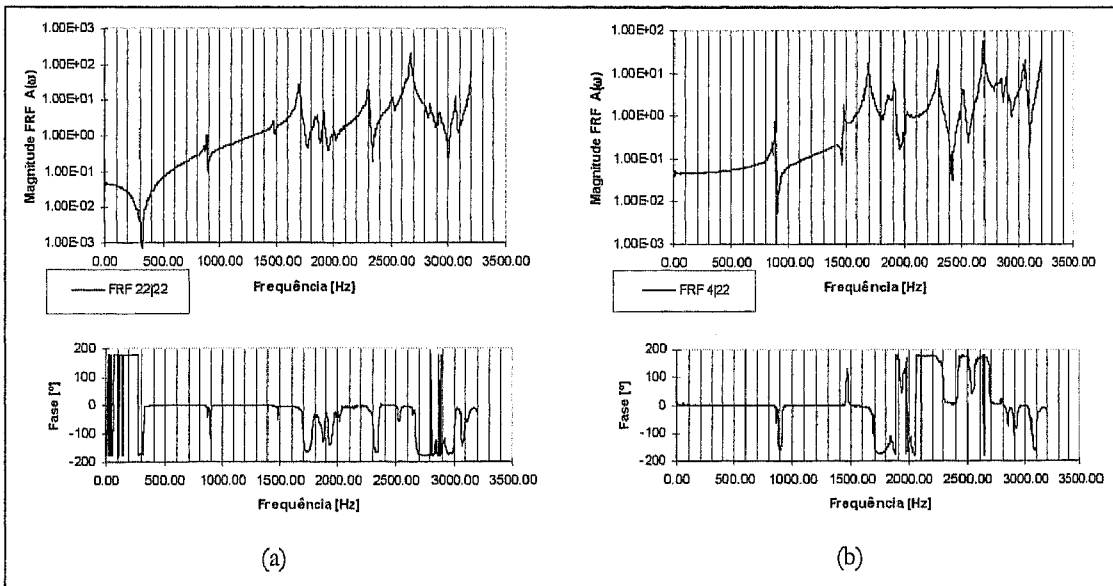


Figura 6.4 - Funções de resposta em frequência de acelerabilidade (a) $H_{22|22}$ e (b) $H_{4|22}$.

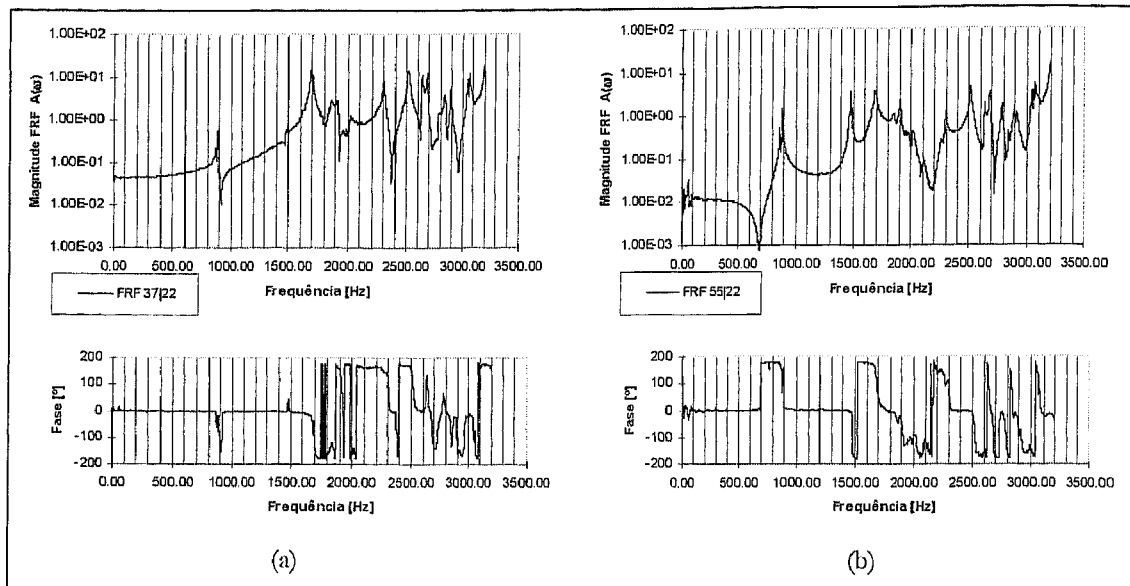


Figura 6.5 - Funções de resposta em frequência de acelerabilidade (a) $H_{37|22}$ e (a) $H_{55|22}$.

Como facilmente se verifica por análise das FRFs atrás apresentadas, o cárter possui a primeira ressonância próximo dos 900Hz, e possui uma ressonância na vizinhança dos 2300Hz, aparecendo a próxima ressonância acima dos 2500Hz. Assim sendo, e tendo também em vista o problema da resolução da análise em termos de frequência, optou-se pela análise numa banda de frequências de 800Hz a 2400Hz. Esta gama permite abarcar toda a gama de funcionamento da caixa à excepção das bandas laterais das rodas 1 e 3, e possui a vantagem de permitir uma melhor resolução, pois o intervalo de frequências medido é de 1600Hz. No caso se pretender aumentar essa gama de medição, ela teria que ser de 3200Hz, o que baixava para metade a resolução em termos de frequência.

De notar que, ao situar o limite superior da análise aos 2400Hz temos uma vantagem adicional, que é o facto de nessa zona se situar uma anti-ressonância, ou mínimo, que é uma situação sempre desejável ao realizar uma análise.

6.4 Análise Modal

Para a identificação dos parâmetros modais foi utilizado o procedimento descrito no ponto 5.8, foram também considerados os resíduos inferiores e superiores, conforme descrito no ponto 3.2, de modo a considerar o efeito dos modos que se situam fora da banda de frequências analisada.

6.4.1 Funções de Resposta em Frequência

Nas figuras 6.6 a 6.11 estão representadas seis das FRFs de acelerabilidade, sob a forma de magnitude e fase em função da frequência, diagrama de Bode, obtidas pela excitação da estrutura no ponto 22 e medição da resposta nos pontos, para a banda de frequência de medição. As restantes FRFs do modelo de resposta são apresentadas no Anexo B.1.

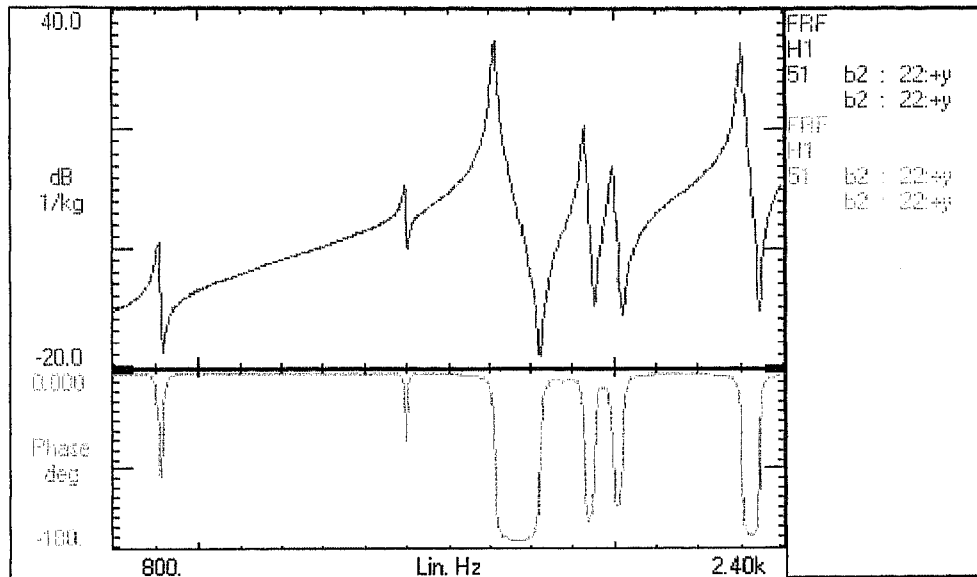


Figura 6.6 - Função de resposta em frequência de acelerabilidade H22|22.

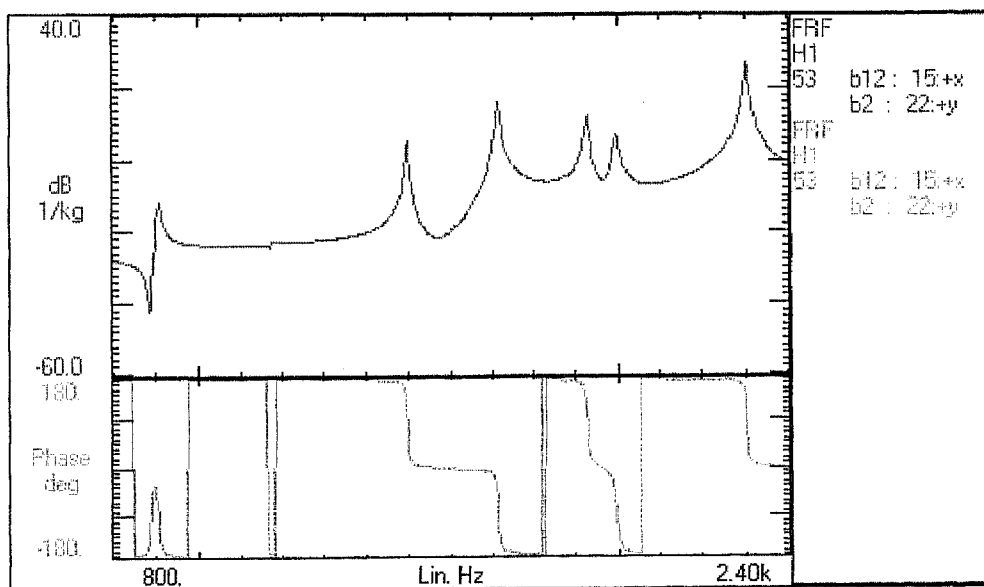


Figura 6.7 - Função de resposta em frequência de acelerabilidade H15|22.

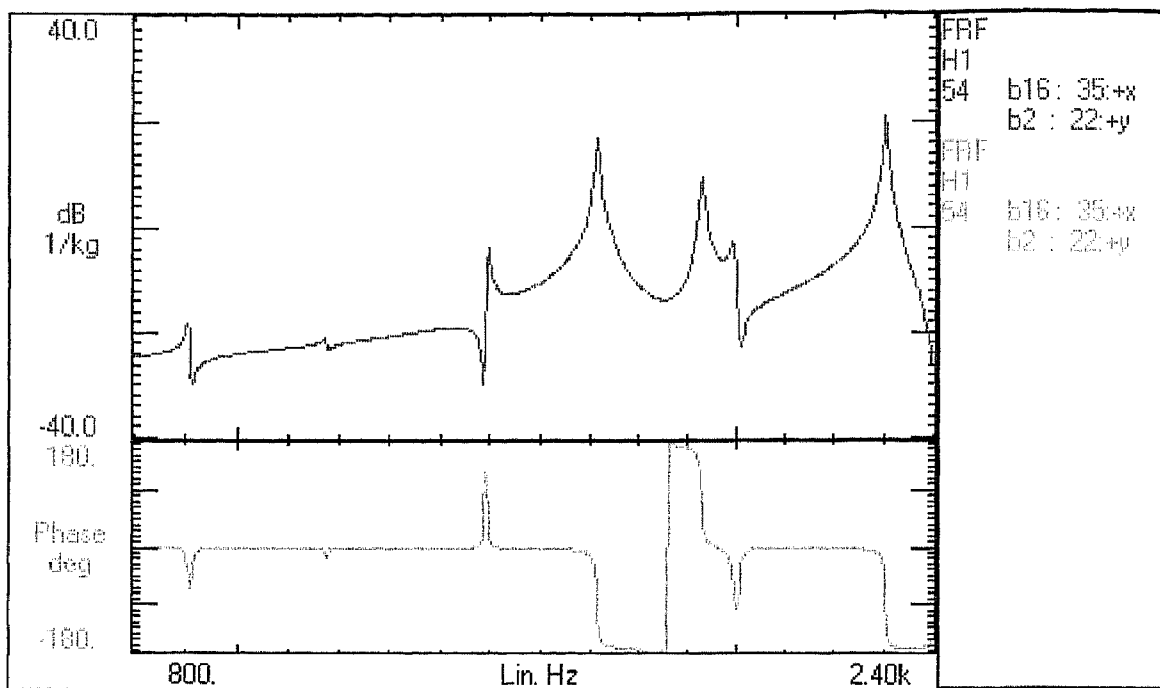


Figura 6.8 - Função de resposta em frequência de acelerabilidade $H_{35|22}$.

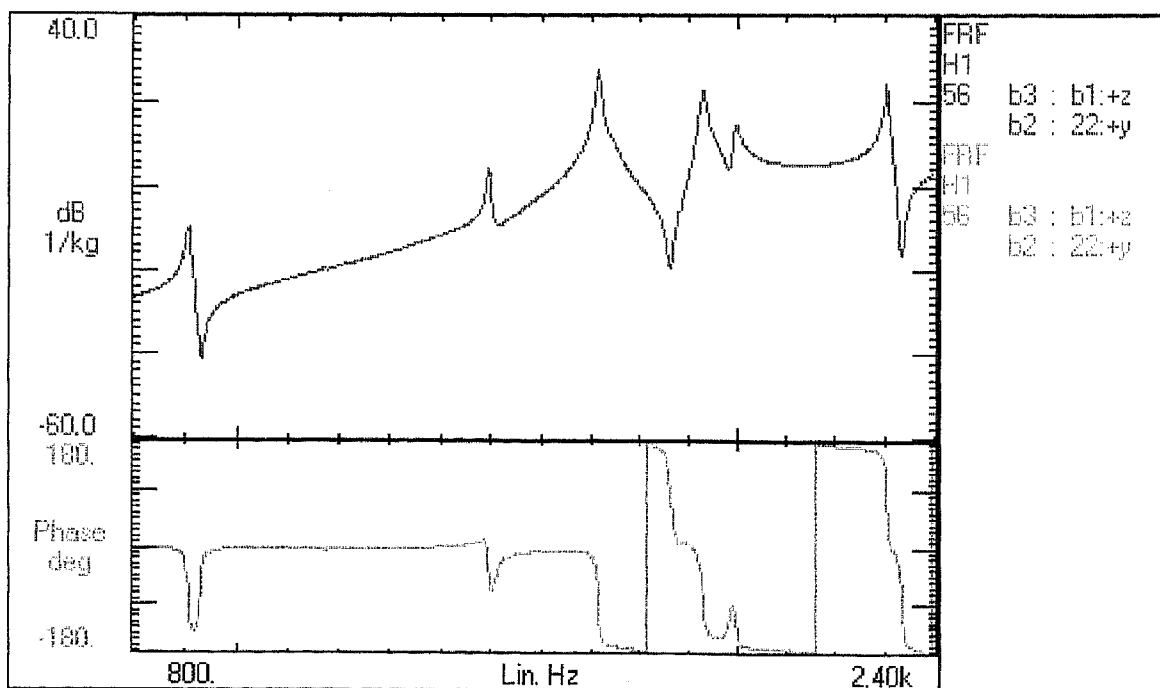


Figura 6.9 - Função de resposta em frequência de acelerabilidade $H_{b1|22}$.

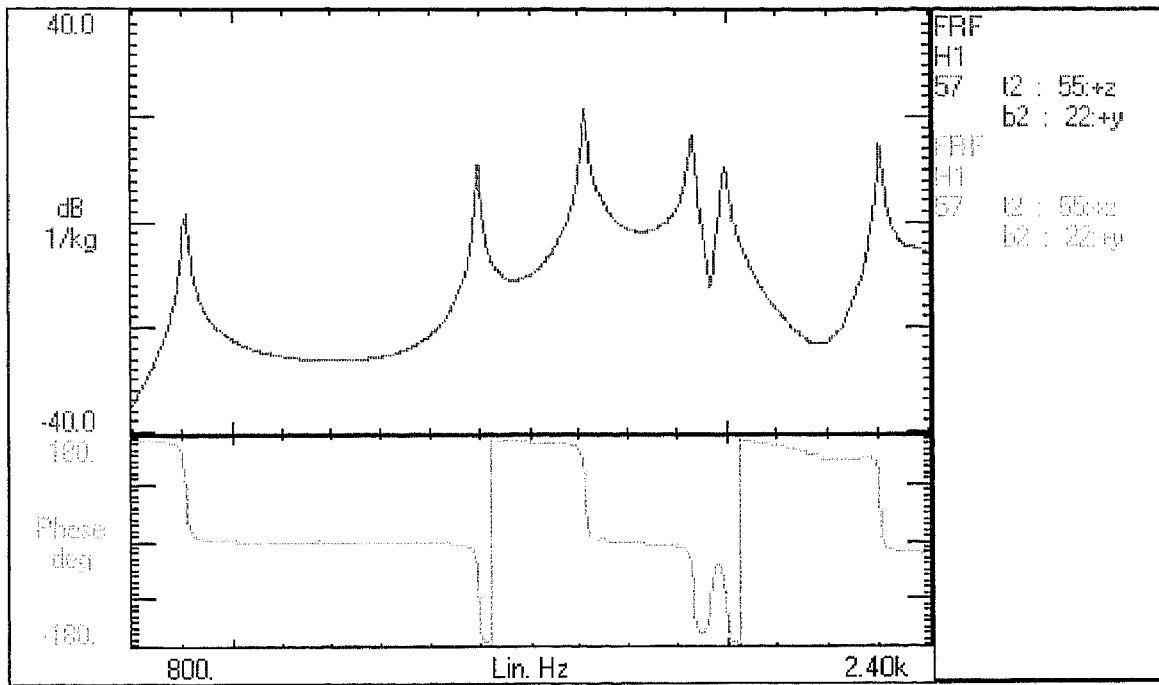


Figura 6.10 - Função de resposta em frequência de acelerabilidade $H_{55|22}$.

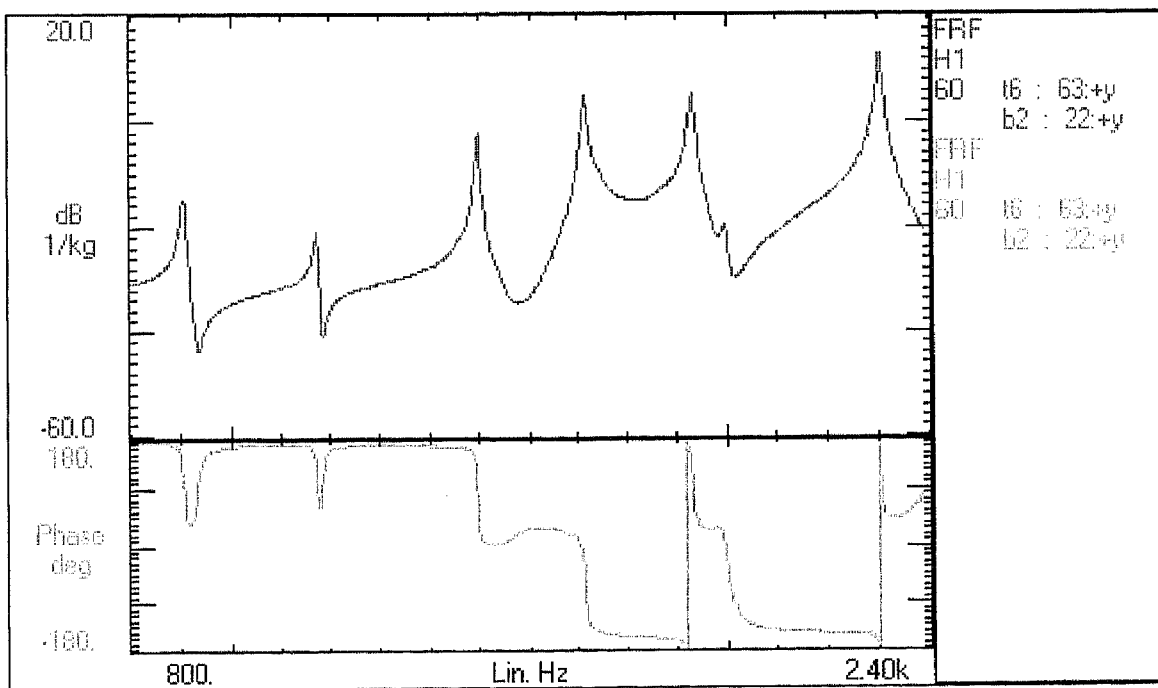


Figura 6.11 - Função de resposta em frequência de acelerabilidade $H_{63|22}$.

6.4.2 Identificação Modal

Na figura 6.12 está representada a função MIF e a função SUM sobreposta com a FRF directa $H_{22|22}$, para a banda de frequências de medida. Esta representação auxilia na identificação do número e da posição dos modos da estrutura, como de descreveu no ponto 5.8.

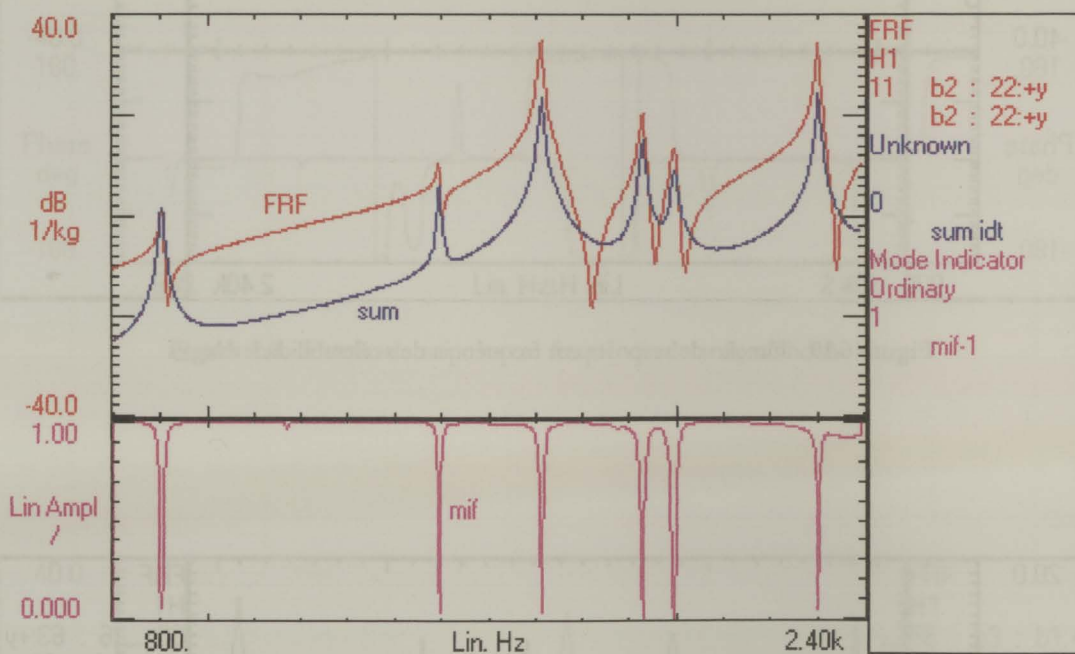


Figura 6.12 - FRF de acelerabilidade directa $H_{22|22}$, SUM e MIF.

6.4.3 Parâmetros Modais

Após completado o processo de identificação modal conforme descrito no ponto 5.8, obtiveram-se os modos naturais e respectivos parâmetros modais. Na tabela 6.1 são apresentadas as frequências naturais e factores de amortecimentos obtidos, assim como informação adicional de caracterização da metodologia adoptada. No Anexo C.1 são apresentadas as tabelas com a informação relativa às formas naturais.

Tabela 6.1 - Parâmetros modais e caracterização do processo de identificação do cárter.

Modo	Frequência (Hz)	ζ (%)	Nº de GDL	Nº de referências	Pólo	Const. Modal	Tipo de Const. Modal
1	904.17	0.34	133	1	MDOF	MDOF	COMPLEXA
2	1.17k	0.28	133	1	MDOF	MDOF	COMPLEXA
3	1.49k	0.17	133	1	MDOF	MDOF	COMPLEXA
4	1.71k	0.20	133	1	MDOF	MDOF	COMPLEXA
5	1.93k	0.21	133	1	MDOF	MDOF	COMPLEXA
6	1.99k	0.26	133	1	MDOF	MDOF	COMPLEXA
7	2.30k	0.12	133	1	MDOF	MDOF	COMPLEXA

6.4.4 Indicadores da Qualidade da Identificação

6.4.4.1 Critério MAC

Na tabela 6.2 é apresentado o valor do parâmetro MAC, obtido para as formas naturais

Tabela 6.2 - Critério MAC aplicado às formas naturais obtidas para o cárter.

Modo	Freq. (Hz)	Modo 1 (%)	Modo 2 (%)	Modo 3 (%)	Modo 4 (%)	Modo 5 (%)	Modo 6 (%)	Modo 7 (%)
1	904.17	100.0	2.5	0.0	0.9	0.1	6.4	0.3
2	1.17k	2.5	100.0	0.3	1.2	2.4	0.3	15.4
3	1.49k	0.0	0.3	100.0	0.2	8.1	0.0	0.2
4	1.71k	0.9	1.2	0.2	100.0	0.7	9.3	1.3
5	1.93k	0.1	2.4	8.1	0.7	100.0	0.0	2.5
6	1.99k	6.4	0.3	0.0	9.3	0.0	100.0	0.0
7	2.30k	0.3	15.4	0.2	1.3	2.5	0.0	100.0

6.4.4.2 Sintetização de FRFs

De seguida, apresentam-se algumas das FRFs sintetizadas, na gama de frequências de análise, a partir do modelo modal identificado.

6.4.2 A análise comparativa das FRFs medidas e das FRFs sintetizadas evidencia uma boa concordância entre os dois modelos da banda de frequência de análise, e permite-nos concluir da boa representatividade do modelo modal identificado.

A sintetização das restantes FRFs medidas é apresentada no Anexo B.1.

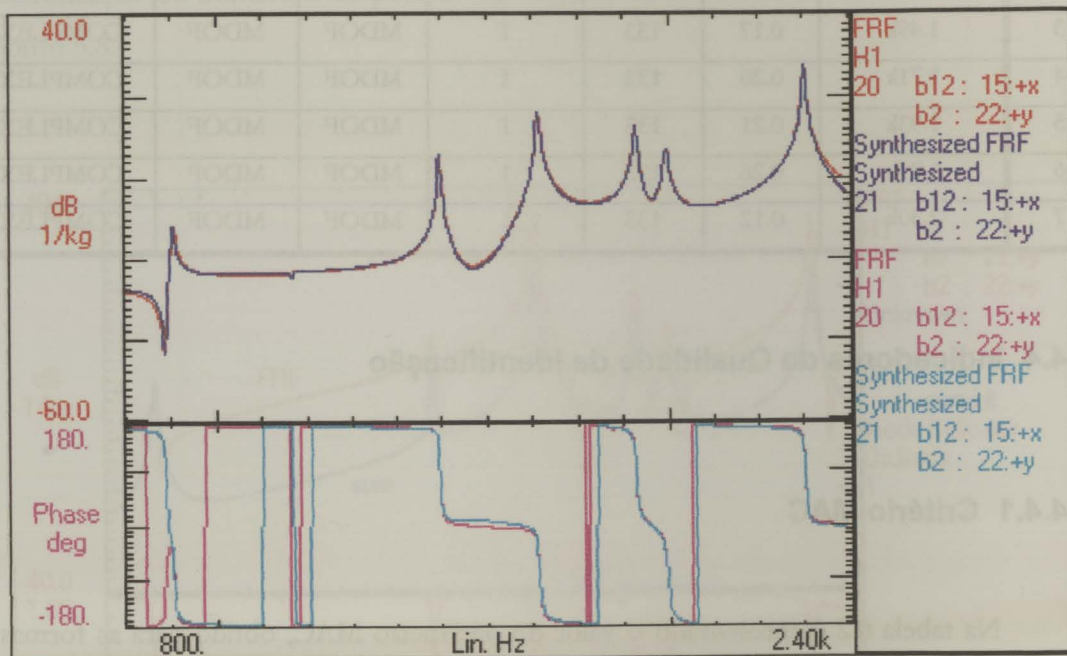


Figura 6.13 - FRF $H_{15|22}$ medida e sintetizada.

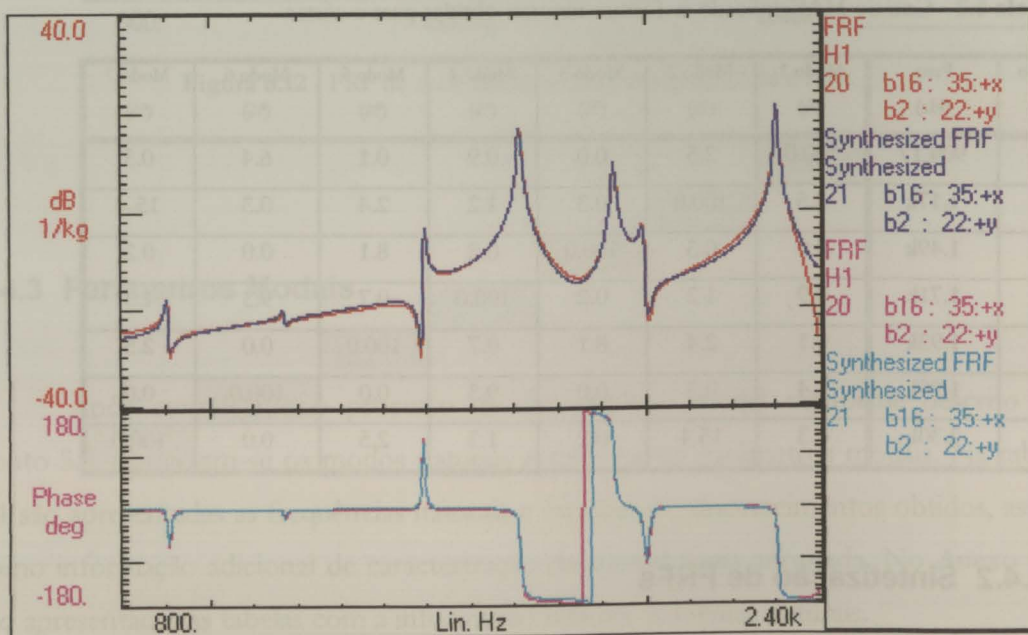


Figura 6.14 - FRF $H_{35|22}$ medida e sintetizada.

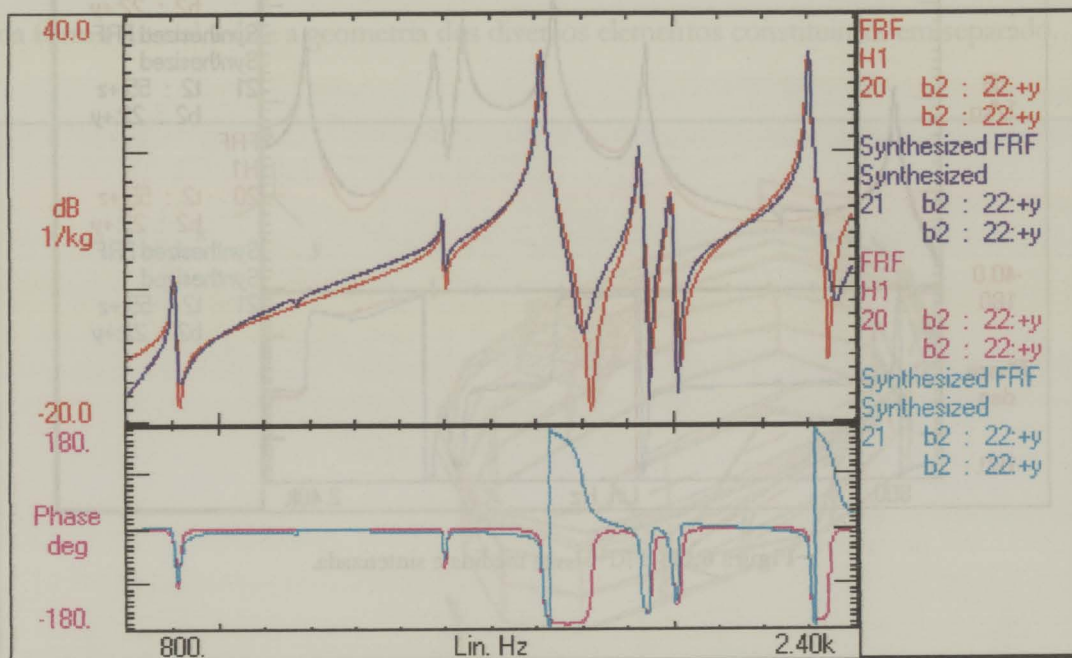


Figura 6.15 - FRF $H_{22|22}$ medida e sintetizada.

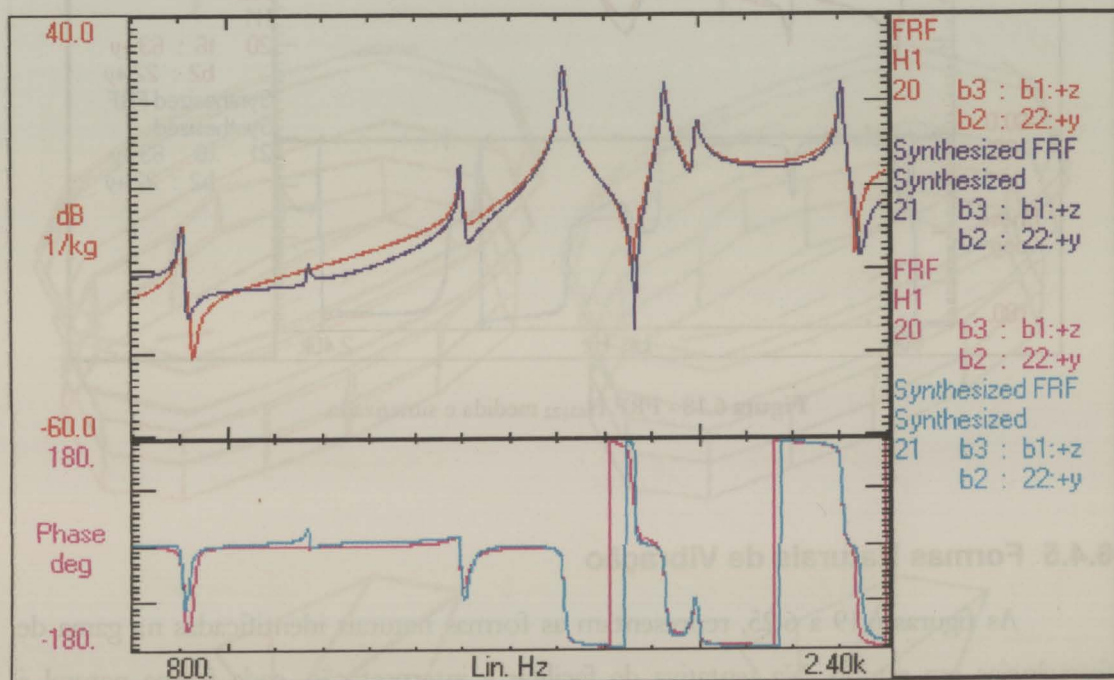


Figura 6.16 - FRF $H_{b1|22}$ medida e sintetizada.

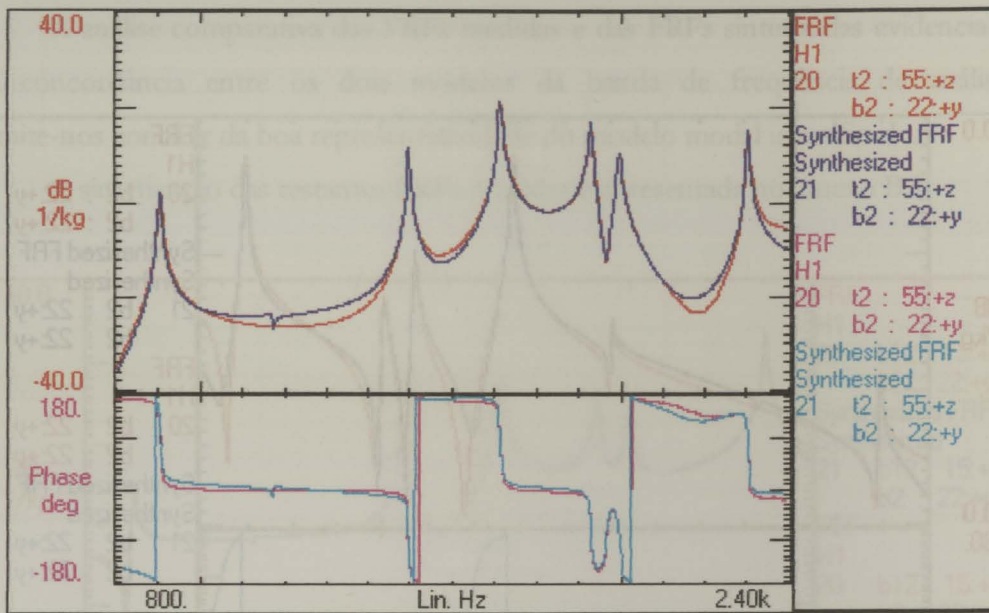


Figura 6.17 - FRF $H_{55|22}$ medida e sintetizada.

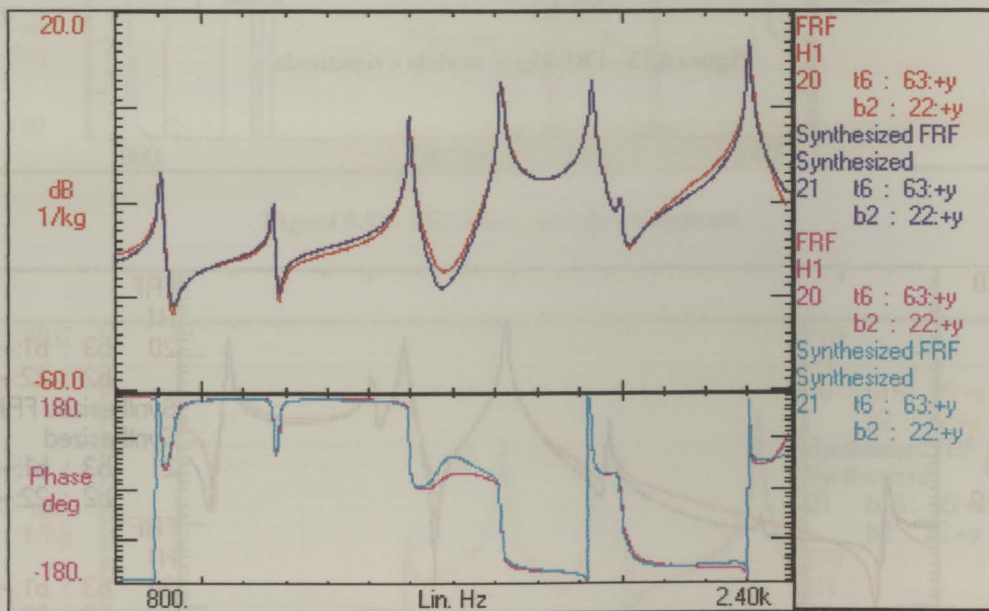


Figura 6.18 - FRF $H_{63|22}$ medida e sintetizada.

6.4.5 Formas Naturais de Vibração

As figuras 6.19 a 6.25, representam as formas naturais identificadas na gama de frequências em estudo. Na tentativa de facilitar a interpretação, cada forma natural é representada por três formas distintas. Na primeira delas, utiliza-se uma representação tipo arame, para a forma natural, sobre a geometria do carácter. Na segunda utiliza-se o

mesmo tipo de representação, da forma natural, com os diversos componentes do cárter separados. Na terceira forma, adopta-se uma representação por linhas das componentes da forma natural sobre a geometria dos diversos elementos constituintes em separado.

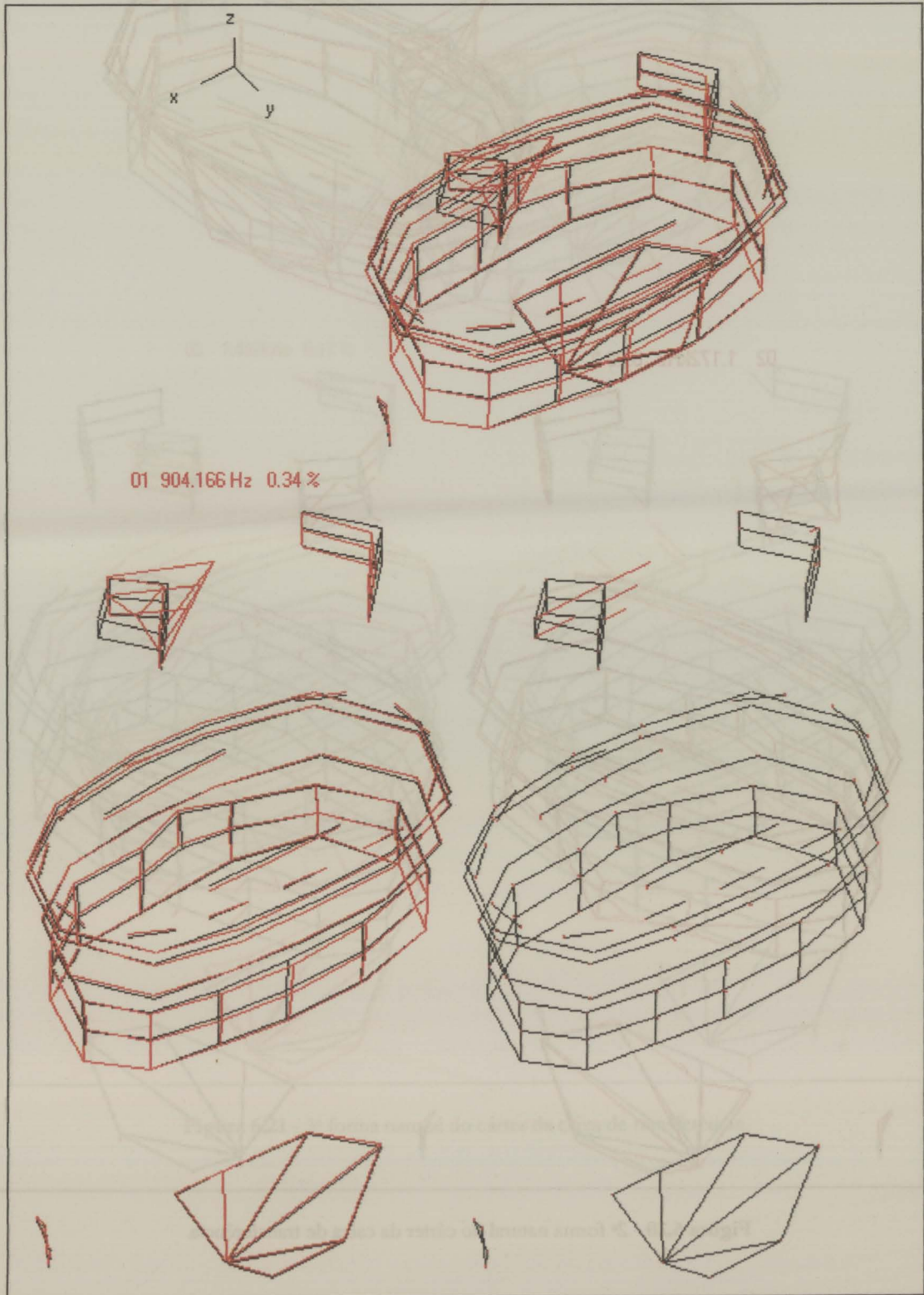


Figura 6.19 - 1ª forma natural do cárter da caixa de transferência.

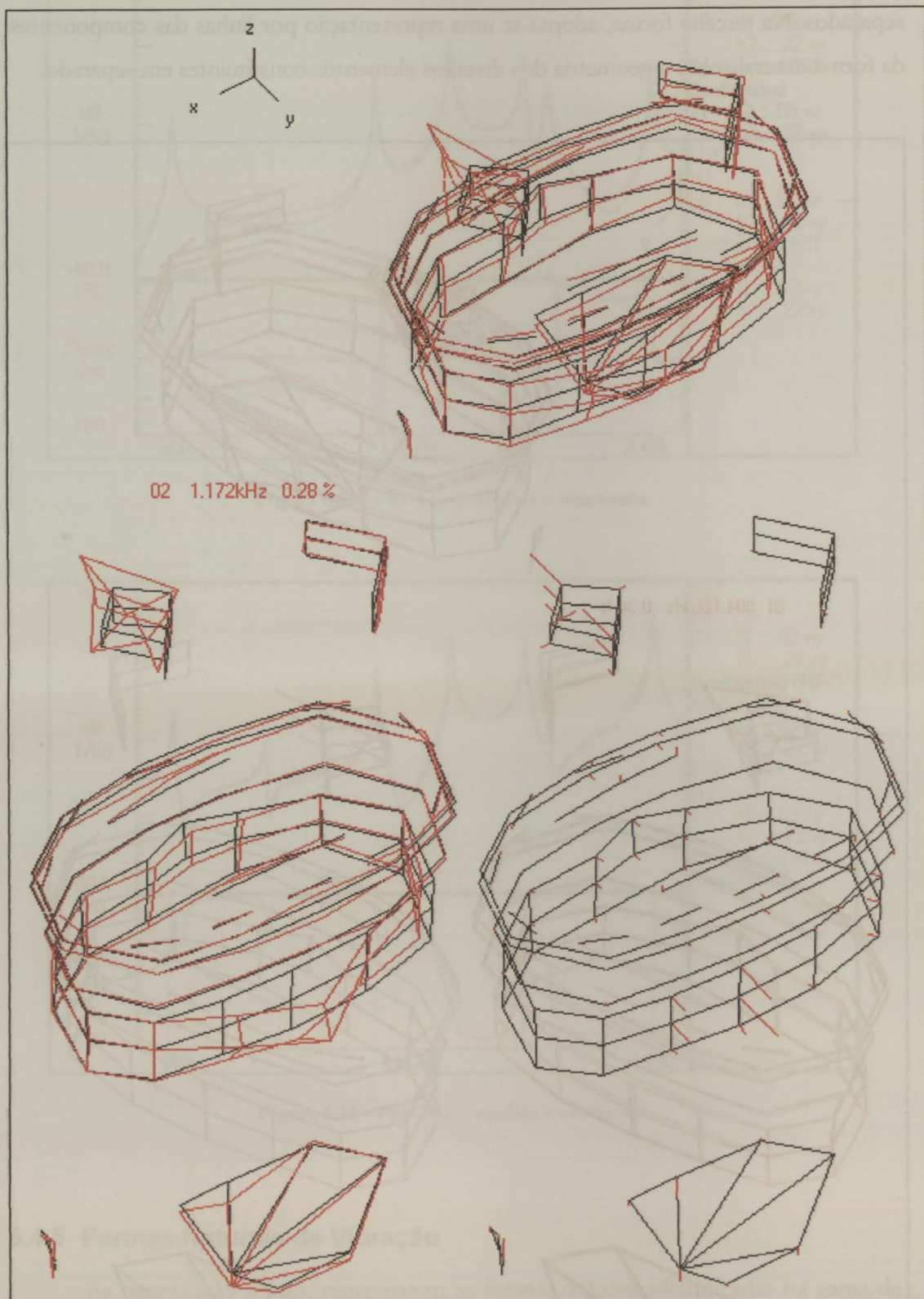


Figura 6.20 - 2ª forma natural do cârter da caixa de transferência.

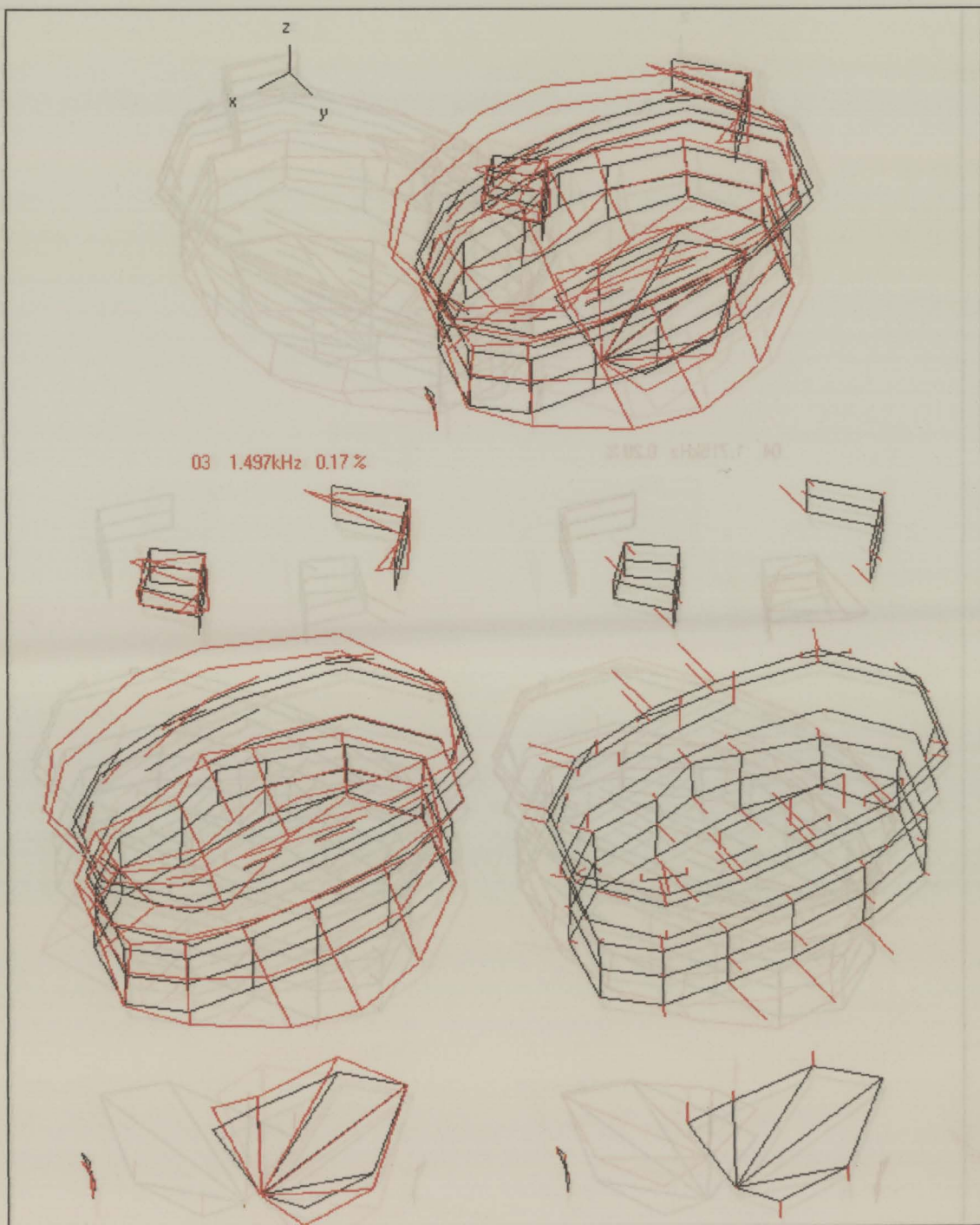


Figura 6.21 - 3ª forma natural do cárter da caixa de transferência.

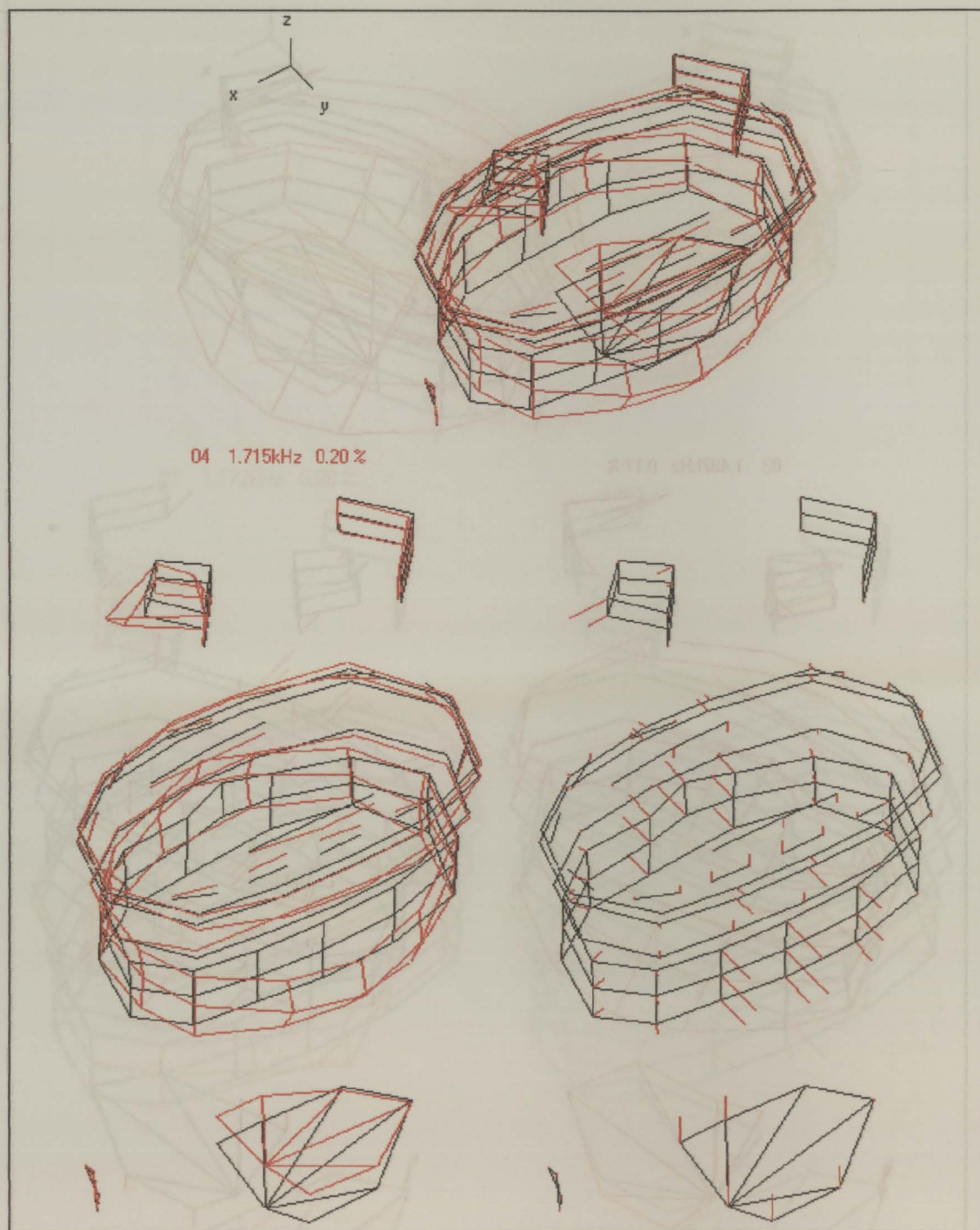


Figura 6.22 - 4ª forma natural do cârter da caixa de transferência.

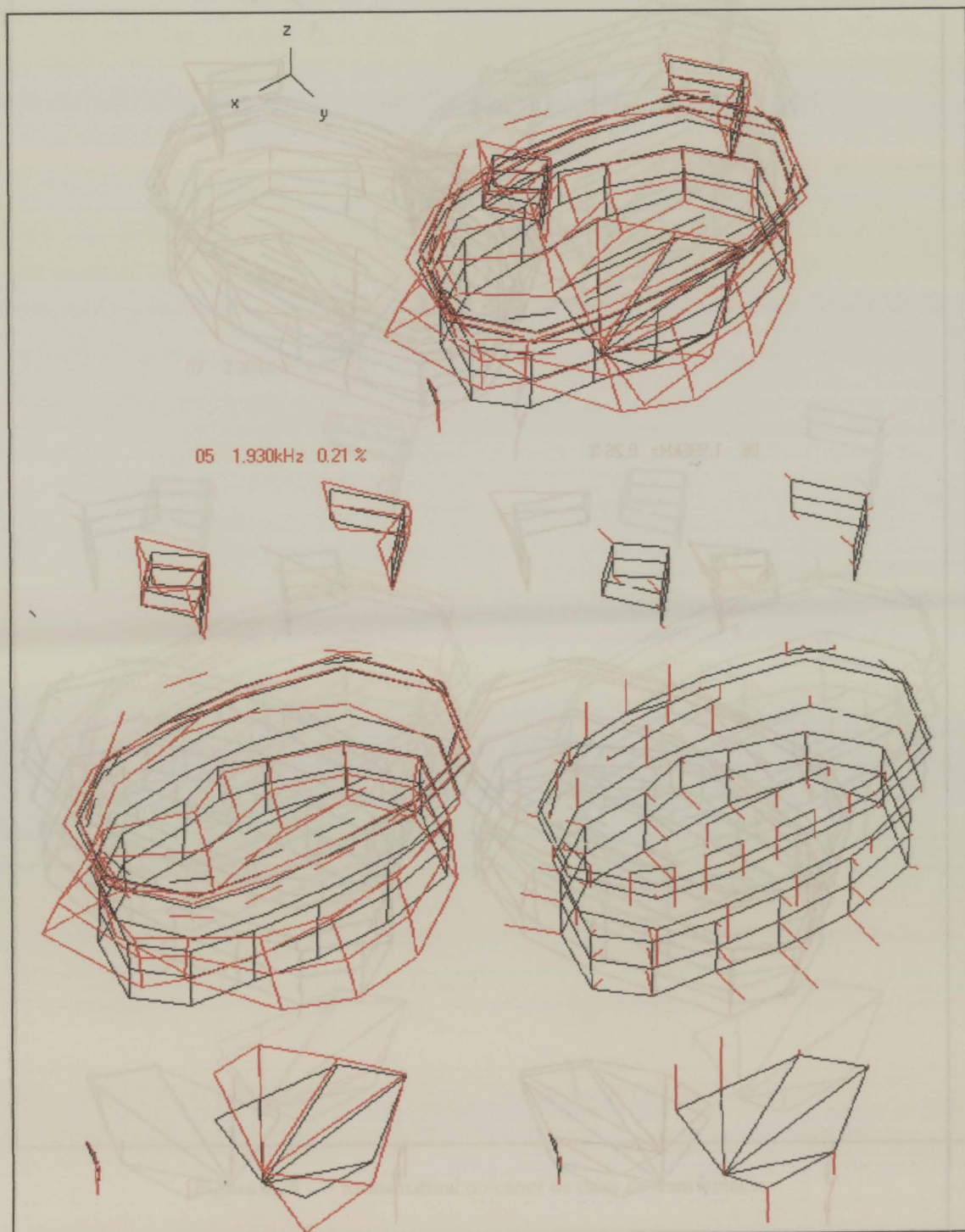


Figura 6.23 - 5ª forma natural do cárter da caixa de transferência.

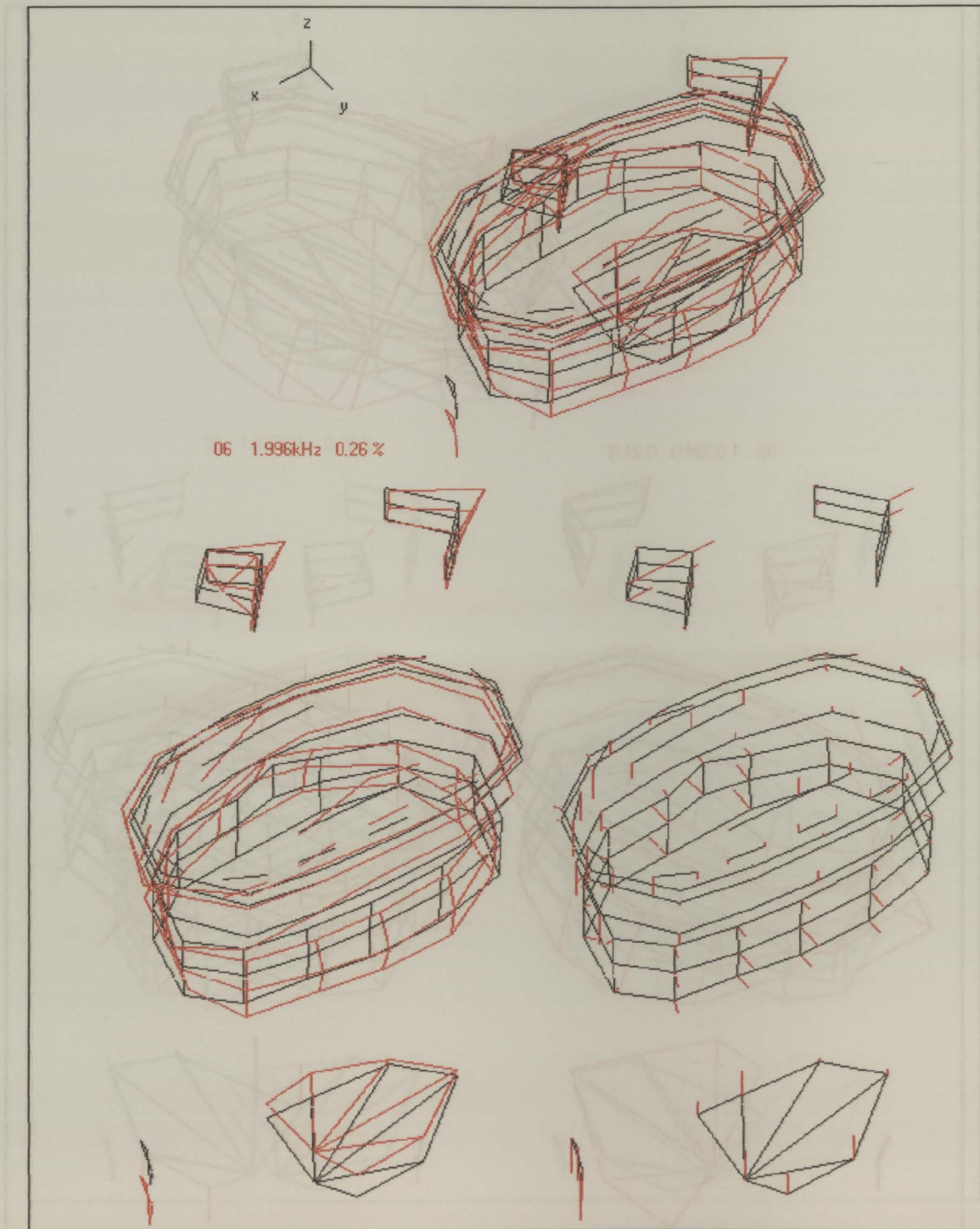


Figura 6.24 - 6ª forma natural do cárter da caixa de transferência.

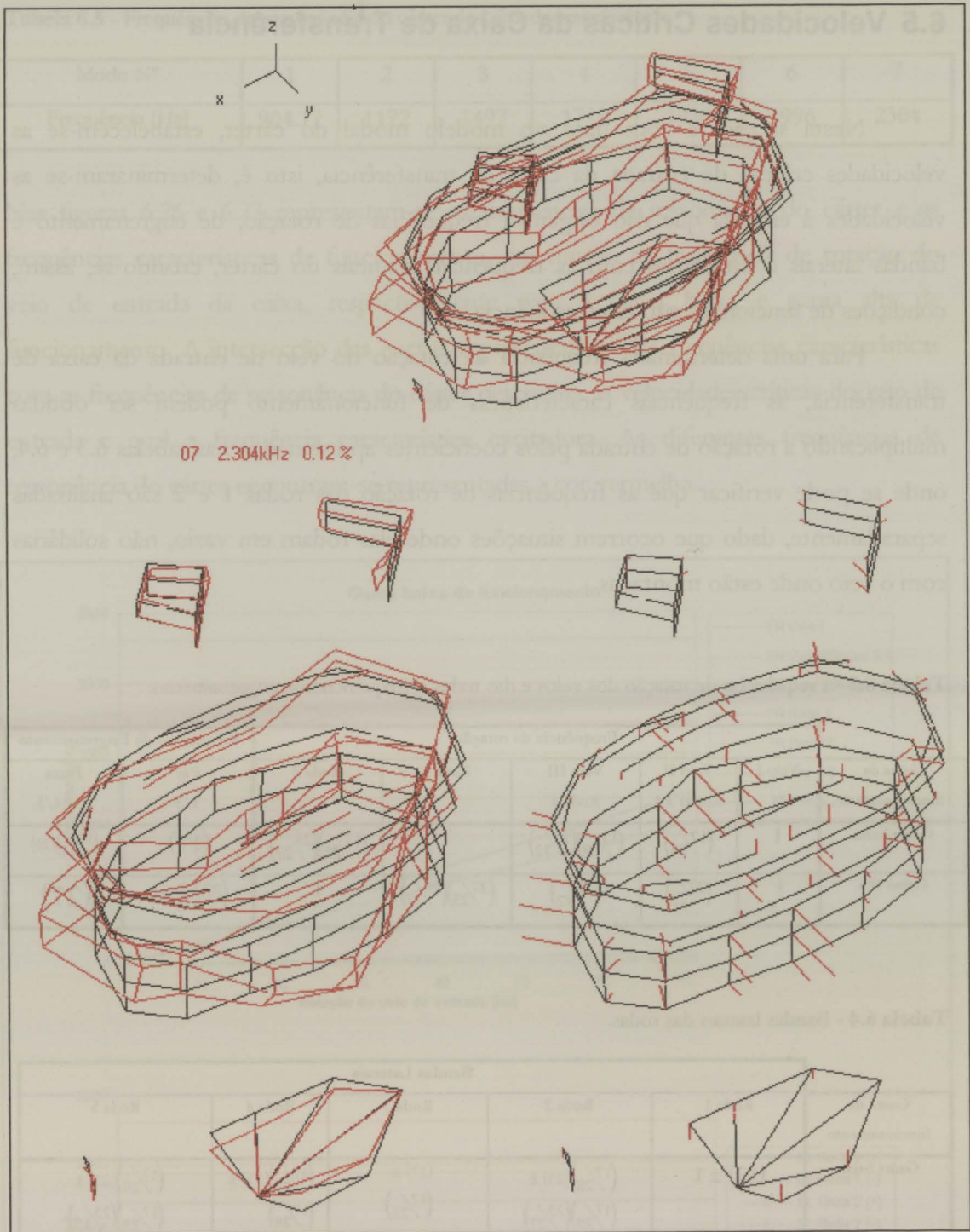


Figura 6.25 - 7ª forma natural do cárter da caixa de transferência.

A análise das diferentes formas naturais de vibração auxiliada pela sua visualização animada, permite-nos concluir que estas se apresentam coerentes em termos geométricos, reforçando assim a boa representatividade do modelo modal identificado.

6.5 Velocidades Críticas da Caixa de Transferência

Nesta secção, e com base no modelo modal do cárter, estabelecem-se as velocidades críticas de entrada da caixa de transferência, isto é, determinaram-se as velocidades à entrada que dão origem a frequências de rotação, de engrenamento e bandas laterais coincidentes com as frequências naturais do cárter, criando-se, assim, condições de funcionamento em ressonância.

Para uma determinada frequência de rotação do veio de entrada da caixa de transferência, as frequências características de funcionamento podem ser obtidas multiplicando a rotação de entrada pelos coeficientes apresentados nas tabelas 6.3 e 6.4, onde se pode verificar que as frequências de rotação das rodas 1 e 2 são analisadas separadamente, dado que ocorrem situações onde elas rodam em vazio, não solidárias com o veio onde estão montadas.

Tabela 6.3 - Frequências de rotação dos veios e das rodas e frequências de engrenamento.

Gama de funcionamento	Frequência de rotação					Frequência de Engrenamento	
	Veio I	Veio II Rodas 3,4	Veio III Roda 5	Roda 1	Roda 2	Par 1/3	Pares 2/4,4/5
Gama baixa	1	$(\frac{17}{28})$	$(\frac{17}{28})(\frac{23}{32})$	1	$(\frac{17}{28})(\frac{23}{27})$	(17)	$(\frac{17}{28})(23)$
Gama alta	1	$(\frac{27}{23})$	$(\frac{27}{32})$	$(\frac{27}{23})(\frac{28}{17})$	1	$(\frac{27}{23})(28)$	(27)

Tabela 6.4 - Bandas laterais das rodas.

Gama de funcionamento	Bandas Laterais				
	Roda 1	Roda 2	Roda 3	Roda 4	Roda 5
Gama baixa	$(17) \pm 1$	$(\frac{17}{28})(23) \pm$ $(\frac{17}{28})(\frac{23}{27})$	$(17) \pm$ $(\frac{17}{28})$	$(\frac{17}{28})(23) \pm$ $(\frac{17}{28})$	$(\frac{17}{28})(23) \pm$ $(\frac{17}{28})(\frac{23}{32})$
Gama alta	$(\frac{27}{23})(28) \pm$ $(\frac{27}{23})(\frac{28}{17})$	$(27) \pm 1$	$(\frac{27}{23})(28) \pm$ $(\frac{27}{23})$	$(27) \pm$ $(\frac{27}{23})$	$(27) \pm$ $(\frac{27}{32})$

Conforme os resultados da análise modal, na banda de frequências de 800 a 2400Hz, o cárter possui as frequências de ressonância apresentadas na tabela 6.5.

Tabela 6.5 - Frequências de ressonância do cárter da caixa de transferência.

Modo N°	1	2	3	4	5	6	7
Frequência [Hz]	904.17	1172	1497	1715	1930	1996	2304

Nas figuras 6.26 e 6.27 representam-se as frequências de ressonância do cárter e as frequências características de funcionamento, em função da frequência de rotação do veio de entrada da caixa, respectivamente para a gama baixa e gama alta de funcionamento. A intersecção das curvas representativas das frequências características com as frequências de ressonância do cárter determina as velocidades críticas do veio de entrada e qual a frequência característica excitadora. As diferentes frequências de ressonância do cárter encontram-se representadas a cor vermelha.

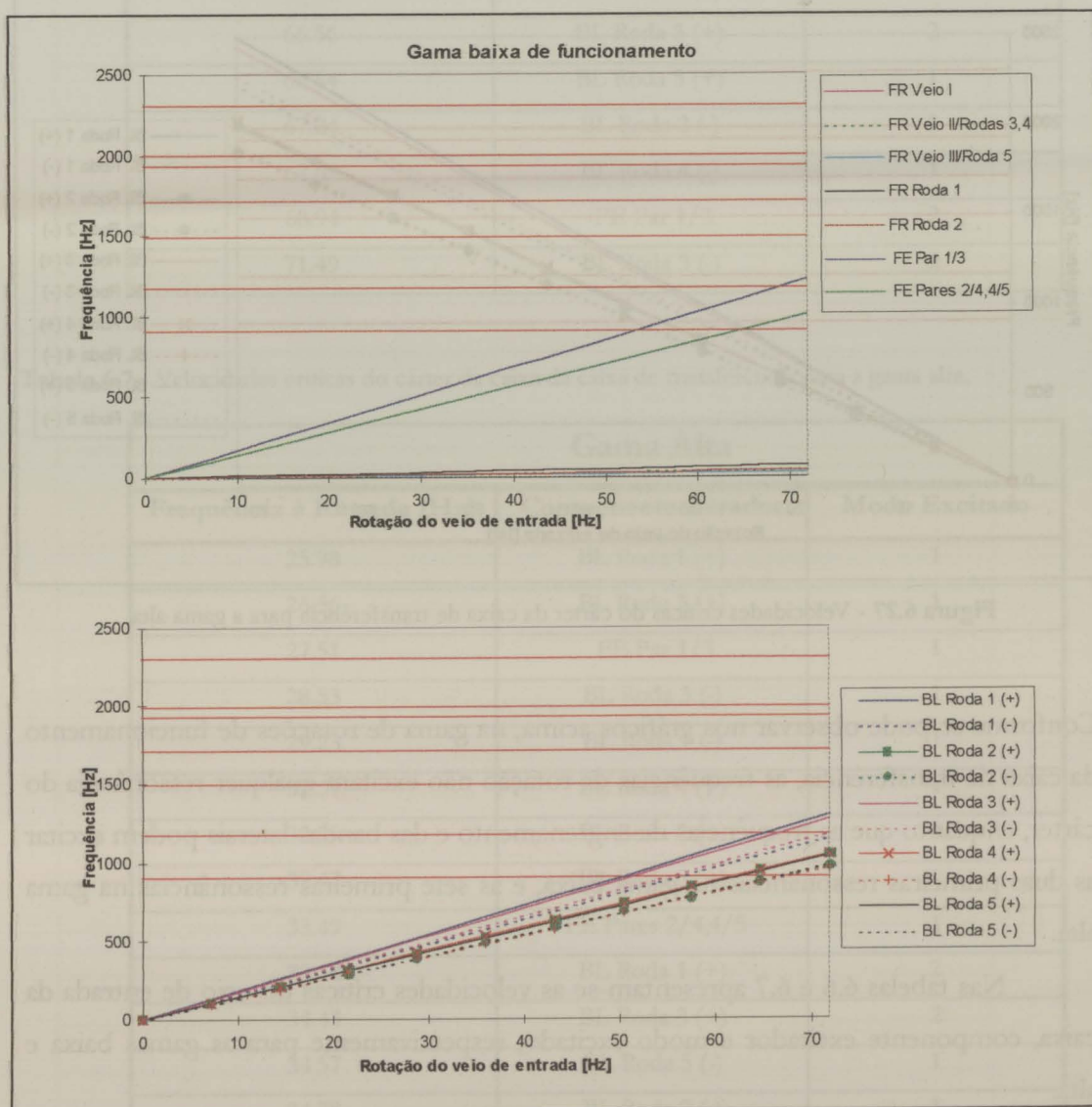


Figura 6.26 - Velocidades críticas do cárter da caixa de transferência para a gama baixa.

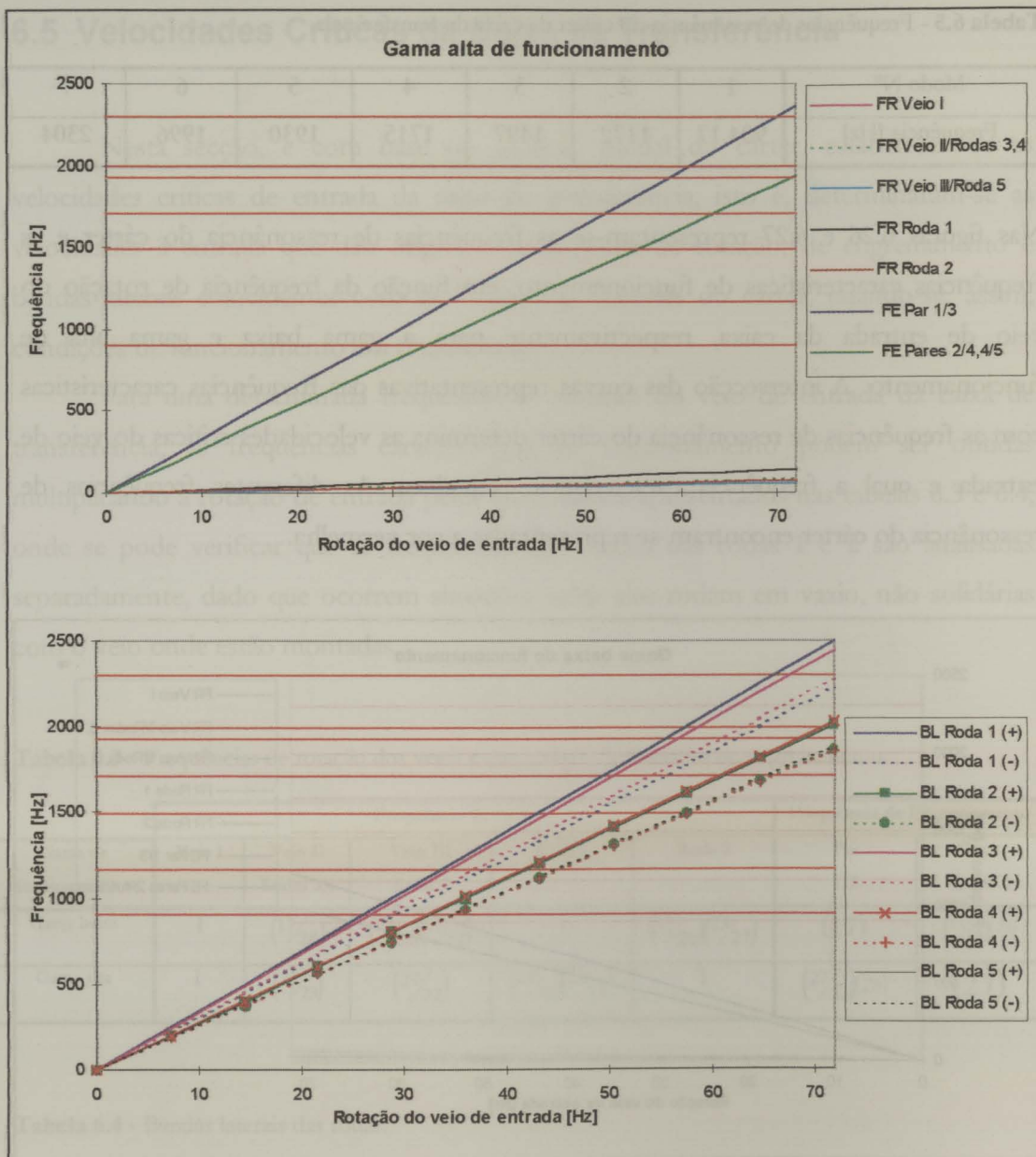


Figura 6.27 - Velocidades críticas do cárter da caixa de transferência para a gama alta.

Conforme se pode observar nos gráficos acima, na gama de rotações de funcionamento da caixa de transferência, as frequências de rotação não excitam qualquer ressonância do cárter, enquanto que as frequências de engrenamento e das bandas laterais podem excitar as duas primeiras ressonâncias na gama baixa, e as sete primeiras ressonâncias na gama alta.

Nas tabelas 6.6 e 6.7 apresentam-se as velocidades críticas do veio de entrada da caixa, componente excitador e modo excitado, respectivamente para as gamas baixa e alta.

Tabela 6.6 - Velocidades críticas do cârter da caixa da caixa de transferência para a gama baixa.

Gama baixa		
Frequência à Entrada [Hz]	Componente Gerador	Modo Excitado
50.23	BL Roda 1 (+)	1
51.35	BL Roda 3 (+)	1
53.19	FE Par 1/3	1
55.16	BL Roda 3 (-)	1
56.51	BL Roda 1 (-)	1
62.05	BL Roda 4 (+)	1
62.44	BL Roda 2 (+)	1
62.79	BL Roda 5 (-)	1
64.75	FE Pares 2/4,4/5	1
65.11	BL Roda 1 (+)	2
66.56	BL Roda 3 (+)	2
66.84	BL Roda 5 (+)	1
67.24	BL Roda 2 (-)	1
67.69	BL Roda 4 (-)	1
68.94	FE Par 1/3	2
71.49	BL Roda 3 (-)	2

Tabela 6.7 - Velocidades críticas do cârter da caixa da caixa de transferência para a gama alta.

Gama Alta		
Frequência à Entrada [Hz]	Componente Gerador	Modo Excitado
25.98	BL Roda 1 (+)	1
26.56	BL Roda 3 (+)	1
27.51	FE Par 1/3	1
28.53	BL Roda 3 (-)	1
29.23	BL Roda 1 (-)	1
32.09	BL Roda 4 (+)	1
32.29	BL Roda 2 (+)	1
32.47	BL Roda 5 (+)	1
33.49	FE Pares 2/4,4/5	1
33.68	BL Roda 1 (+)	2
34.43	BL Roda 3 (+)	2
34.57	BL Roda 5 (-)	1
34.78	BL Roda 2 (-)	1

Tabela 6.7 - Velocidades críticas do cárter da caixa da caixa de transferência para a gama alta. (cont)

	Gama Alta	
Frequência à Entrada [Hz]	Componente Gerador	Modo Excitado
35.01	BL Roda 4 (-)	1
35.66	FE Par 1/3	2
36.98	BL Roda 3 (-)	2
37.88	BL Roda 1 (-)	2
41.60	BL Roda 4 (+)	2
41.86	BL Roda 2 (+)	2
42.09	BL Roda 5 (+)	2
43.01	BL Roda 1 (+)	3
43.41	FE Pares 2/4,4/5	2
43.97	BL Roda 3 (+)	3
44.81	BL Roda 5 (-)	2
45.08	BL Roda 2 (-)	2
45.38	BL Roda 4 (-)	2
45.54	FE Par 1/3	3
47.23	BL Roda 3 (-)	3
48.39	BL Roda 1 (-)	3
49.28	BL Roda 1 (+)	4
50.38	BL Roda 3 (+)	4
52.18	FE Par 1/3	4
53.13	BL Roda 4 (+)	3
53.46	BL Roda 2 (+)	3
53.76	BL Roda 5 (+)	3
54.11	BL Roda 3 (-)	4
55.44	BL Roda 1 (-)	4
55.44	FE Pares 2/4,4/5	3
55.45	BL Roda 1 (+)	5
56.69	BL Roda 3 (+)	5
57.23	BL Roda 5 (-)	3
57.35	BL Roda 1 (+)	6
57.58	BL Roda 2 (-)	3
57.96	BL Roda 4 (-)	3
58.63	BL Roda 3 (+)	6
58.72	FE Par 1/3	5
60.72	FE Par 1/3	6

Tabela 6.7 - Velocidades críticas do cárter da caixa da caixa de transferência para a gama alta. (cont)

	Gama Alta	
Frequência à Entrada [Hz]	Componente Gerador	Modo Excitado
60.87	BL Roda 4 (+)	4
60.89	BL Roda 3 (-)	5
61.25	BL Roda 2 (+)	4
61.59	BL Roda 5 (+)	4
62.39	BL Roda 1 (-)	5
62.97	BL Roda 3 (-)	6
63.52	FE Pares 2/4,4/5	4
64.52	BL Roda 1 (-)	6
65.57	BL Roda 5 (-)	4
65.96	BL Roda 2 (-)	4
66.20	BL Roda 1 (+)	7
66.41	BL Roda 4 (-)	4
67.68	BL Roda 3 (+)	7
68.50	BL Roda 4 (+)	5
68.93	BL Roda 2 (+)	5
69.32	BL Roda 5 (+)	5
70.10	FE Par 1/3	7
70.85	BL Roda 4 (+)	6
71.29	BL Roda 2 (+)	6
71.48	FE Pares 2/4,4/5	5
71.69	BL Roda 5 (+)	6

6.6 Conclusão

Da análise realizada pode concluir-se que a estrutura em estudo possui sete modos naturais de vibração na gama de frequências de 0 a 2400Hz, sendo a frequência fundamental igual a 904.17 Hz.

Conforme se verificou através da sintetização de algumas FRFs e da visualização e análise das formas naturais, os resultados obtidos através da análise modal apresentam-se coerentes, o que valida a representatividade do modelo obtido para a caixa de transferência.

A análise das velocidades de entrada críticas permitiu concluir que, as condições operacionais normais da caixa de transferência excitam frequentemente as diversas ressonâncias do cárter, donde não será de estranhar a verificação de níveis de vibração elevados e radiação de ruído de nível igualmente elevado.

A observação das formas naturais relativas aos modos 2,4,5,6 e 7 permite concluir que a utilização de uma nervura horizontal de reforço na parte central do corpo, poderá melhorar a rigidez dinâmica da caixa. Por sua vez, observando os modos 1 e 2, poder-se-ão atenuar os efeitos localizados devidos ao componente cilíndrico reforçando-o com nervuras longitudinais na sua parede.

7. ANÁLISE MODAL DOS COMPONENTES

Para concretizar a aplicação da metodologia de acoplamento dinâmico na modelação do cárter, realiza-se uma análise modal a cada um dos componentes do cárter: o corpo e a tampa. Deste modo, obtém-se um modelo modal para cada um dos componentes.

A partir do modelo modal calcula-se, então, o respectivo modelo de resposta por sintetização das funções de resposta em frequência, isto é, substituindo os parâmetros modais identificados na expressão (2.77) que relaciona os dois modelos. Deste modo, sintetizam-se todas as funções das matrizes de FRFs de cada um dos componentes.

O modelo de resposta dos componentes, composto pela sua matriz de FRFs completa, serve então de base aos procedimentos de acoplamento, de modo a modelar e prever o comportamento da estrutura acoplada.

O conjunto de FRFs necessário à realização dos procedimentos de análise modal experimental foi obtido excitando a estrutura num determinado grau de liberdade e medindo a resposta em todos os graus de liberdade que constituem o seu modelo discretizado. Assim sendo, o conjunto de FRFs obtido para cada um dos componentes consiste numa coluna da sua matriz de FRFs. Estas medições são, teoricamente, suficientes para a obtenção do seu modelo modal.

O procedimento seguido na realização da análise modal experimental de cada um dos componentes é, à excepção da omissão dos resíduos, idêntico ao da análise modal do cárter completo. A omissão dos resíduos justifica-se pelo facto de, neste caso, eles não poderem ser utilizados na determinação de todos os elementos da matriz de FRFs. Isto porque, para se obterem os termos residuais de cada função da matriz são necessárias medições relativas a essa função e, como já se referiu, foram só medidas as funções de uma coluna da matriz de FRF, pois, a medição de todas as funções da matriz é, praticamente, inviável do ponto de vista experimental.

7.1 Análise Modal do Corpo do Cárter

O modelo discretizado do corpo do cárter, que é constituído por 85 graus de liberdade, está representado na figura 5.2. Deste modo, para realizar a análise modal do

corpo, houve necessidade de medir 85 FRFs. Estas foram obtidas mantendo o ponto de excitação utilizado na análise do cárter completo e medindo a resposta em cada um dos graus de liberdade. A montagem experimental utilizada na medição das FRFs é apresentada na figura 7.1.

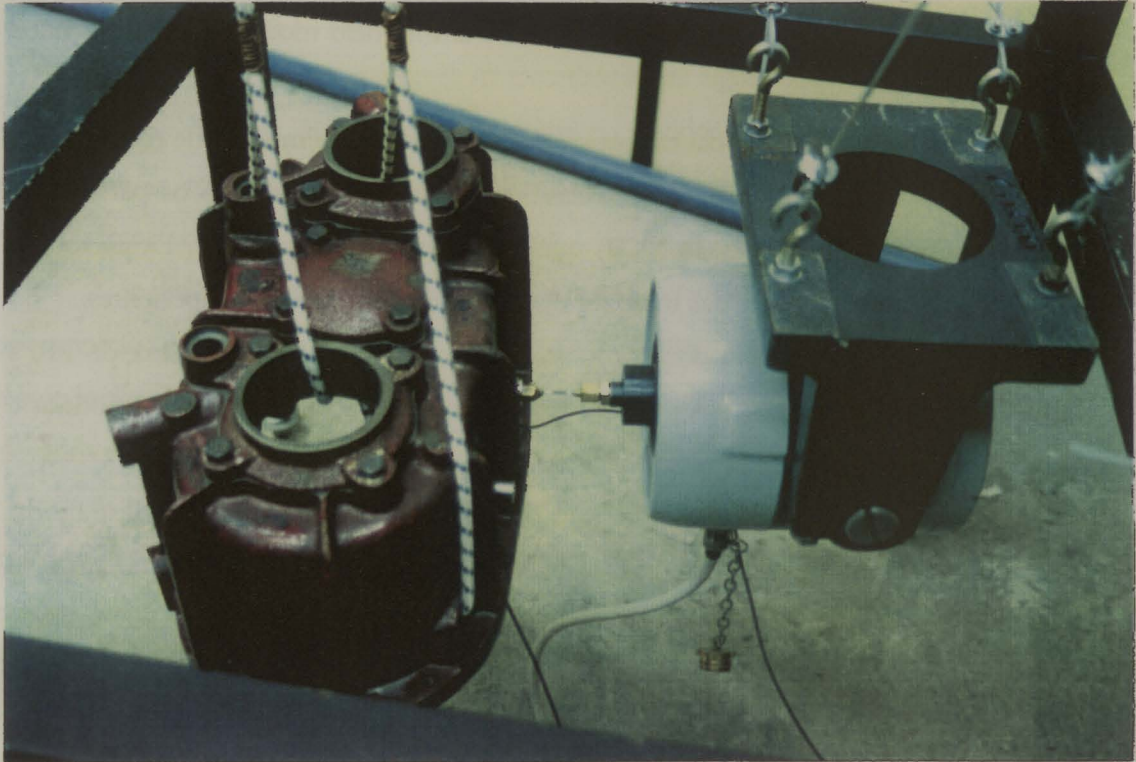


Figura 7.1 - Suspensão adoptada para o corpo do cárter.

Para a medição da aceleração utilizou-se o acelerómetro de referência Brüel & Kjær 4371.

7.1.1 Gama de Frequências de Análise

A banda de frequências de análise foi escolhida tendo por base medições preliminares de algumas FRFs, obtidas entre 0 e 3.2kHz, que estão representadas na figura 7.2 na forma de diagrama de Bode.

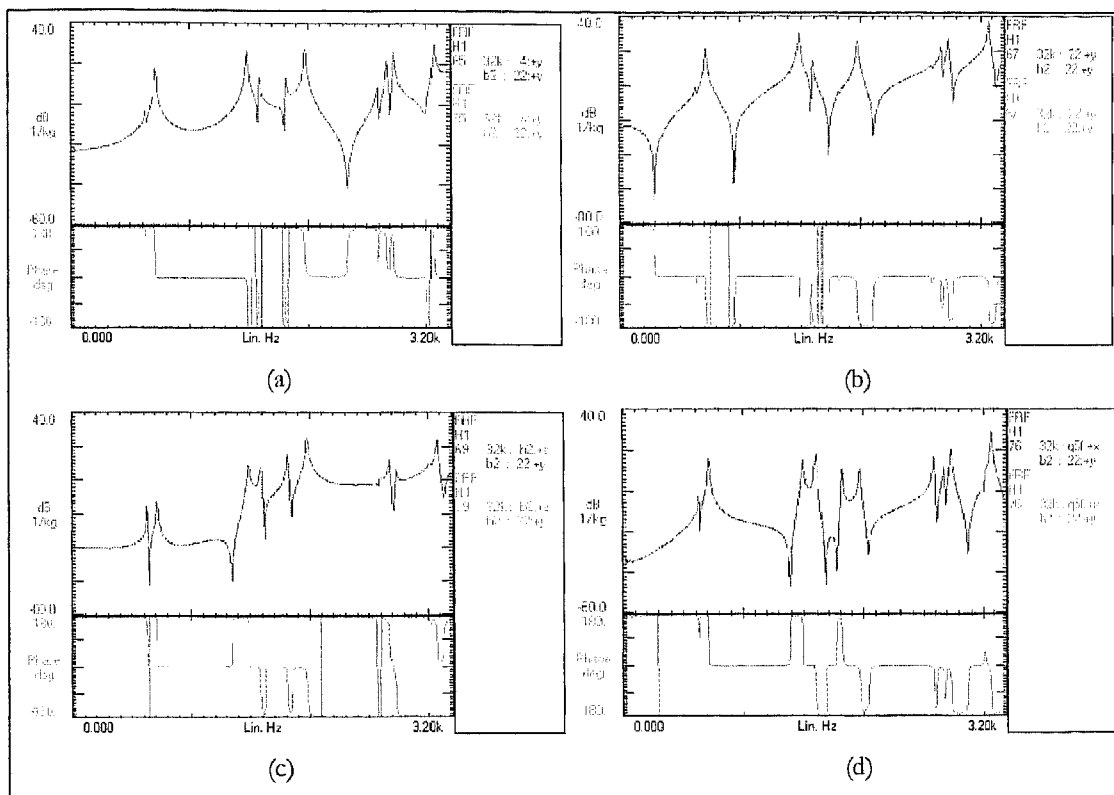


Figura 7.2 - FRFs de acelerabilidade (a) $H_{4|22}$, (b) $H_{22|22}$, (c) $H_{b2|22}$ e (d) $H_{q5f|22}$.

A análise das FRFs anteriores permite concluir que o corpo possui duas ressonâncias na vizinhança dos 600Hz, e, após um grande espaçamento, voltam a aparecer 4 ressonâncias, todas abaixo dos 2000Hz. Assim, optou-se por uma banda de frequências de análise entre os 550 e os 2150Hz, com uma largura de 1600Hz. Esta gama permite manter a resolução, em termos de frequência, idêntica à utilizada na análise do caráter total. Além disso, incluem-se na modelação os 6 primeiros modos naturais do corpo do caráter. De notar que, mais uma vez, o limite superior da análise se encontra na vizinhança de uma anti-ressonância.

7.1.2 Funções de Resposta em Frequência

Nas figuras 7.3 e 7.4 são apresentadas 2 das FRFs medidas. Estas, como se referiu, foram obtidas excitando a estrutura no grau de liberdade 22 e medindo a resposta em todos os graus de liberdade que constituem o seu modelo discretizado. As restantes FRFs do modelo de resposta do corpo do caráter estão representadas no Anexo B.2.

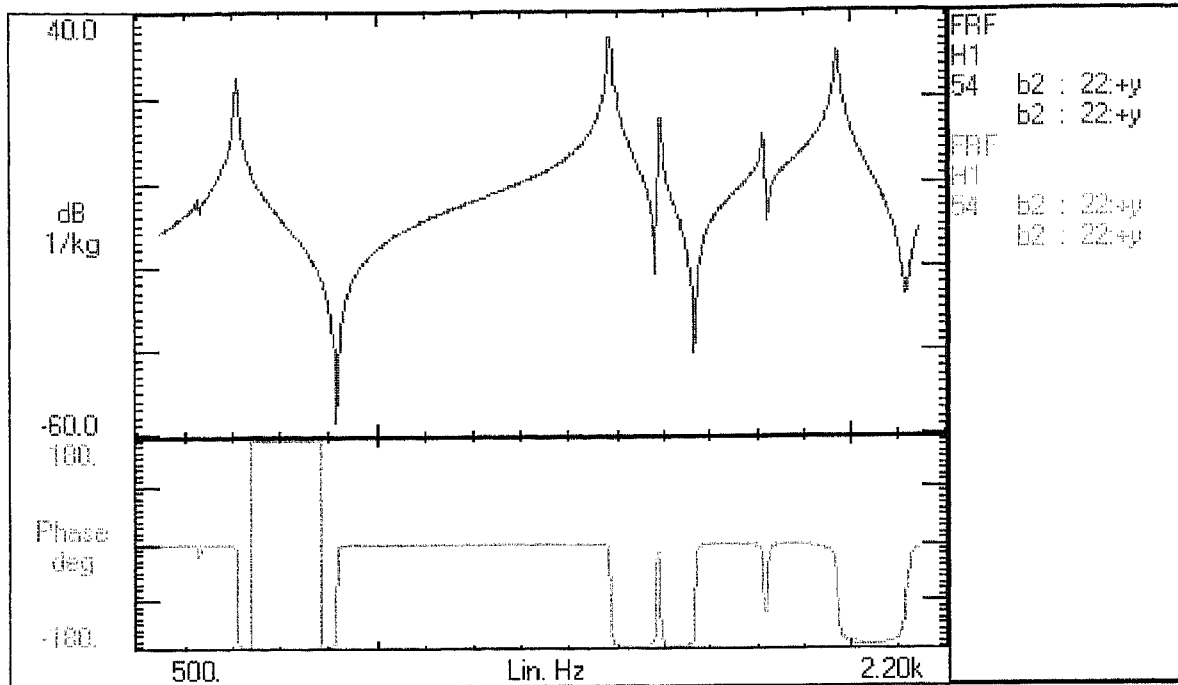


Figura 7.3 - Função de resposta em frequência de acelerabilidade $H_{22|22}$.

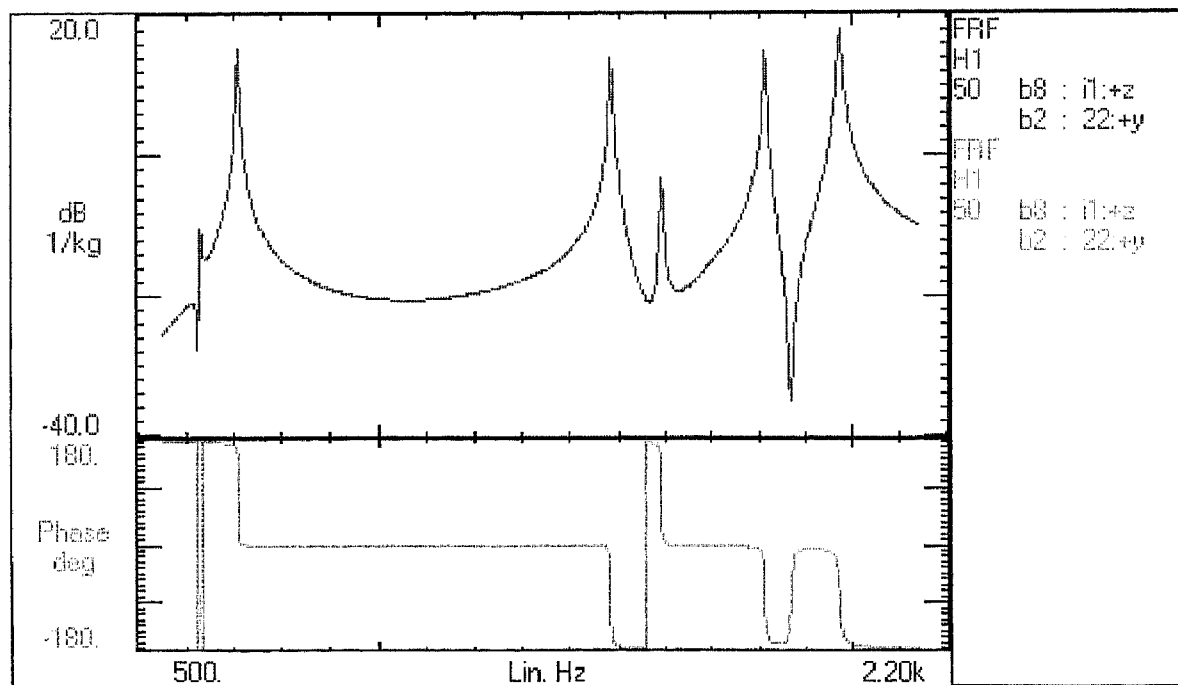


Figura 7.4 - Função de resposta em frequência de acelerabilidade $H_{i1|22}$.

7.1.3 Identificação Modal

A função MIF, a função SUM e a FRF directa $H_{22|22}$, obtidas para o corpo do carácter, estão representadas na figura 7.5. Estas funções orientam o utilizador no processo de localização dos modos naturais da estrutura em estudo.

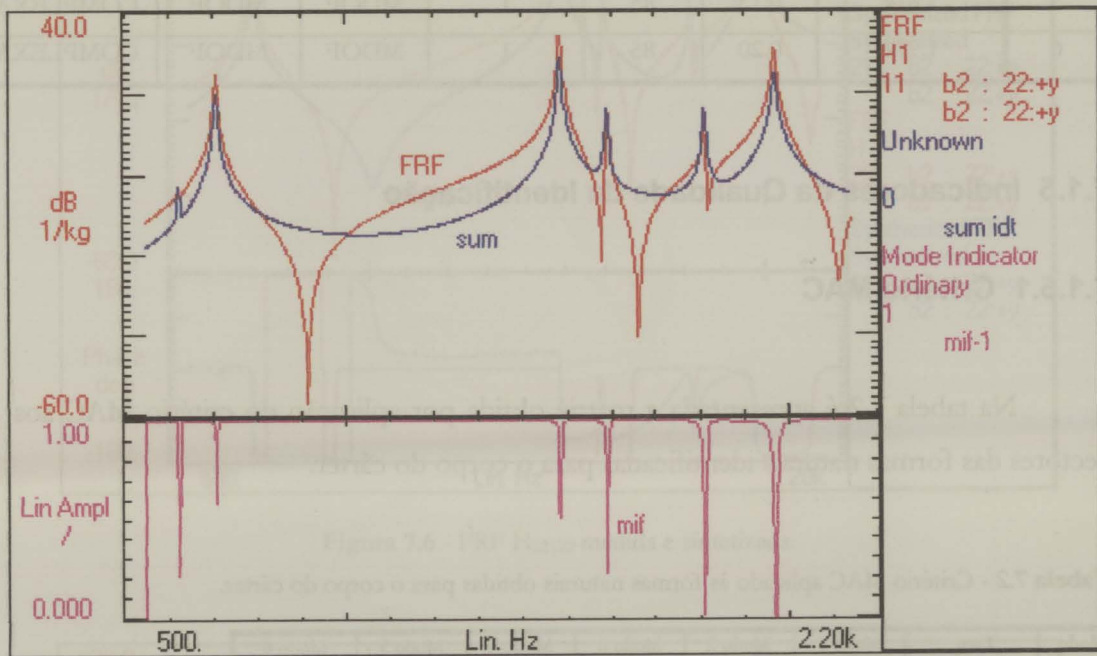


Figura 7.5 - FRF de acelerabilidade directa $H_{22|22}$, SUM e MIF.

7.1.4 Parâmetros Modais

O processo de identificação modal permitiu obter os parâmetros modais que formam o modelo modal do corpo do carácter. Na tabela 7.1 é apresentada alguma informação relativa ao processo de identificação, sendo também indicadas as frequências naturais e factores de amortecimento obtidos. A informação quantitativa, relativa às formas naturais, é apresentada no Anexo C.2.

Tabela 7.1 - Parâmetros modais e caracterização do processo de identificação modal do corpo do cárter.

Modo	Frequência (Hz)	ζ (%)	Nº de GDLs	Nº de referências	Pólo	Const. Modal	Tipo de Const. Modal
1	625.29	0.15	85	1	MDOF	MDOF	COMPLEXA
2	709.87	0.18	85	1	MDOF	MDOF	COMPLEXA
3	1.48k	0.09	85	1	MDOF	MDOF	COMPLEXA
4	1.59k	0.09	85	1	MDOF	MDOF	COMPLEXA
5	1.81k	0.13	85	1	MDOF	MDOF	COMPLEXA
6	1.97k	0.20	85	1	MDOF	MDOF	COMPLEXA

7.1.5 Indicadores da Qualidade da Identificação

7.1.5.1 Critério MAC

Na tabela 7.2 é apresentada a matriz obtida por aplicação do critério MAC aos vectores das formas naturais identificadas para o corpo do cárter.

Tabela 7.2 - Critério MAC aplicado às formas naturais obtidas para o corpo do cárter.

Modo	Freq. (Hz)	Modo 1 (%)	Modo 2 (%)	Modo 3 (%)	Modo 4 (%)	Modo 5 (%)	Modo 6 (%)
1	625.29	100.0	0.1	13.9	15.0	4.8	5.0
2	709.87	0.1	100.0	7.3	2.8	1.6	31.4
3	1.48k	13.9	7.3	100.0	4.2	0.8	3.9
4	1.59k	15.0	2.8	4.2	100.0	8.6	1.9
5	1.81k	4.8	1.6	0.8	8.6	100.0	0.8
6	1.97k	5.0	31.4	3.9	1.9	0.8	100.0

7.1.5.2 Sintetização de FRFs

Os parâmetros do modelo modal obtido foram utilizados na sintetização de todas as FRFs medidas, de modo a verificar a qualidade do modelo obtido. Para duas das funções, a comparação entre a função medida e a função sintetizada está representada nas figuras 7.6 e 7.7, e para as restantes funções encontra-se no Anexo B.2. Da análise comparativa das FRFs verificam-se algumas discrepâncias entre o modelo

identificado e o comportamento real do corpo, o que acontece, fundamentalmente, devido à não utilização dos termos residuais. No entanto, em termos globais, os resultados obtidos para as FRFs sintetizadas permitem concluir que o modelo obtido representa correctamente o comportamento dinâmico da estrutura em estudo.

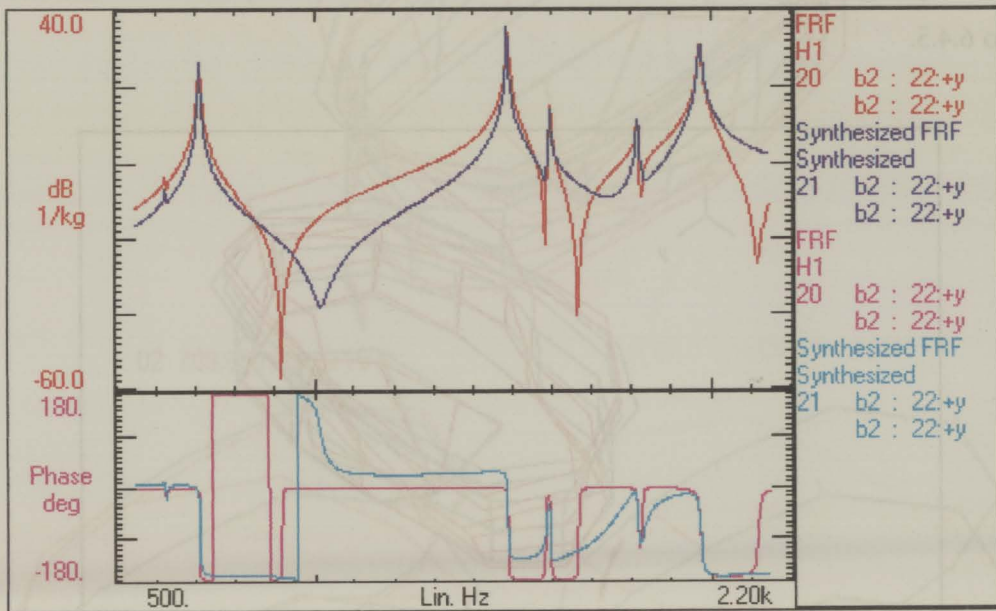


Figura 7.6 - FRF $H_{22|22}$ medida e sintetizada.

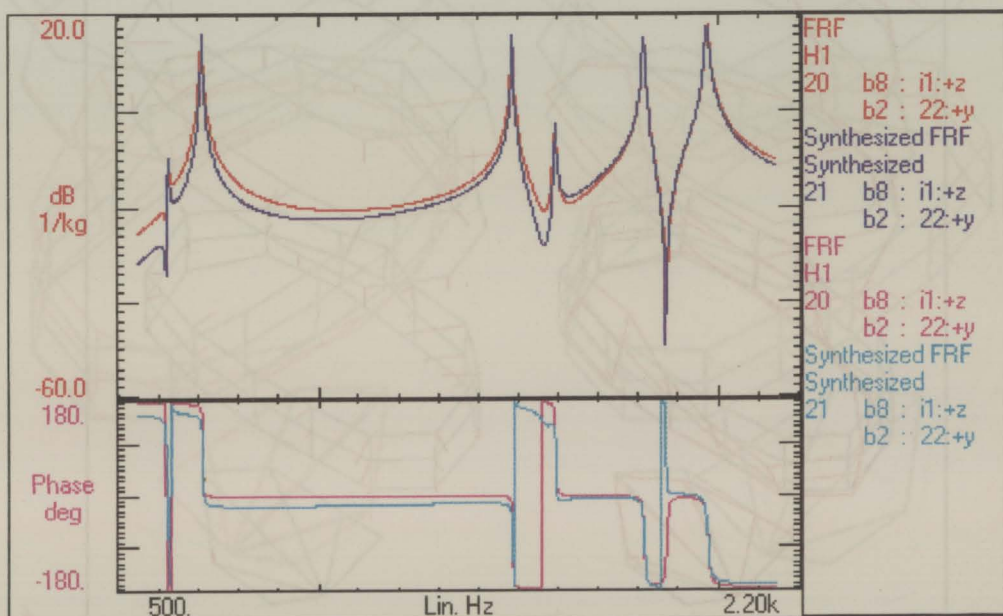


Figura 7.7 - FRF e sintetizada $H_{1|22}$ medida e sintetizada.

7.1.6 Formas Naturais de Vibração

As formas naturais obtidas no processo de identificação modal do corpo do cârter são apresentadas em seguida. De modo a facilitar a sua compreensão, a representação gráfica será apresentada sob três modos distintos, conforme descrito no ponto 6.4.5.

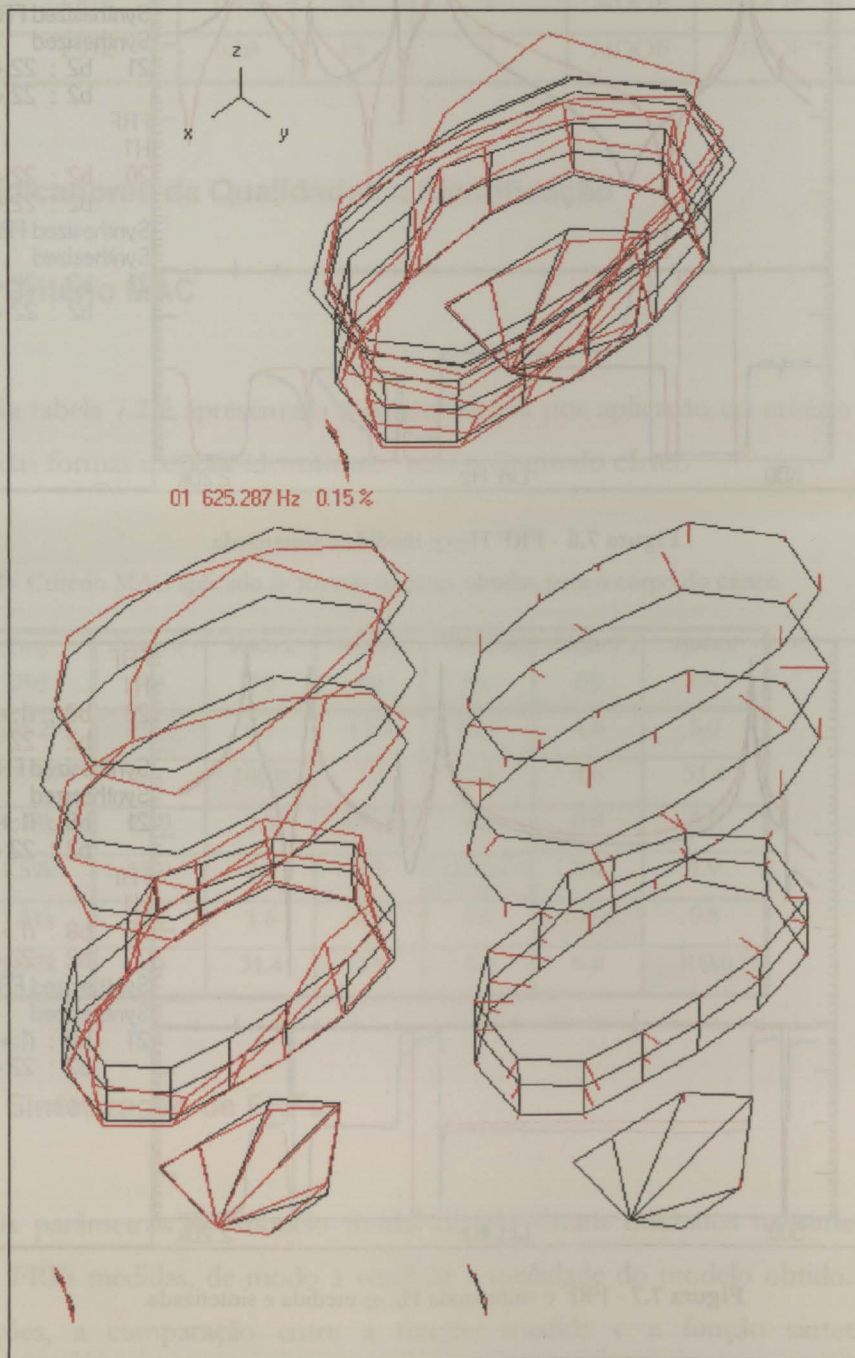


Figura 7.8 - 1ª forma natural do corpo do cârter.

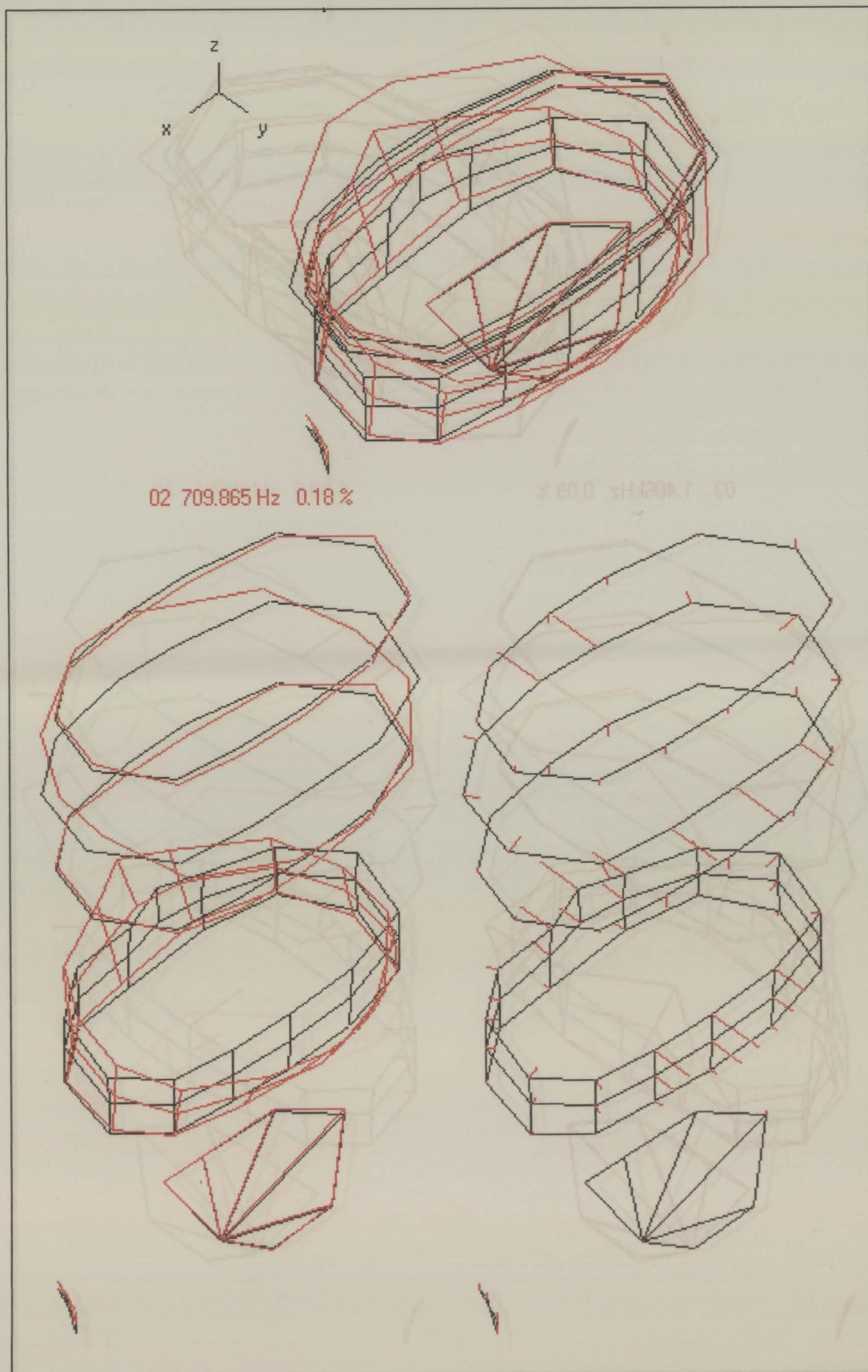


Figura 7.9 - 2ª forma natural do corpo do cárter.

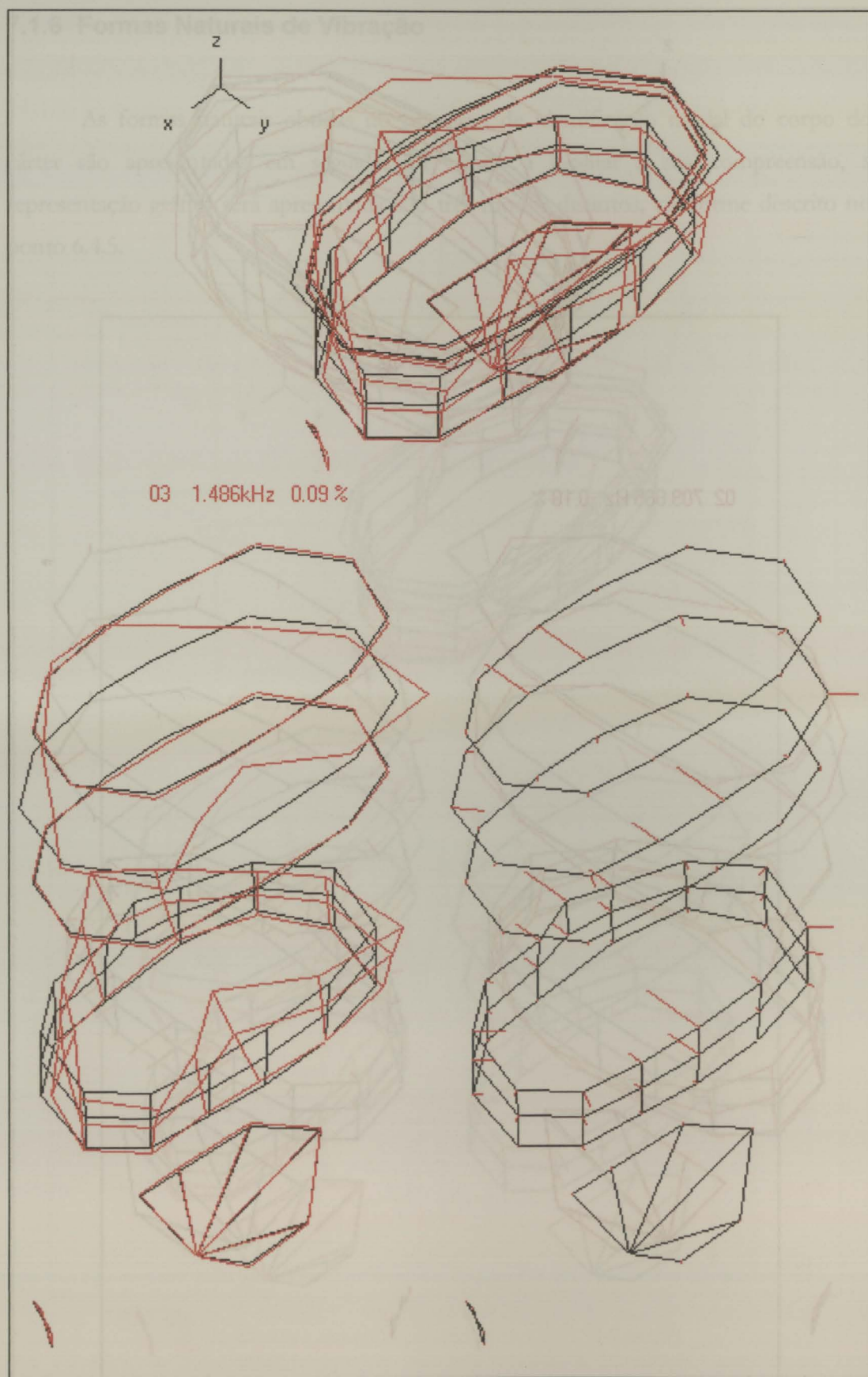


Figura 7.10 - 3ª forma natural do corpo do cárter.

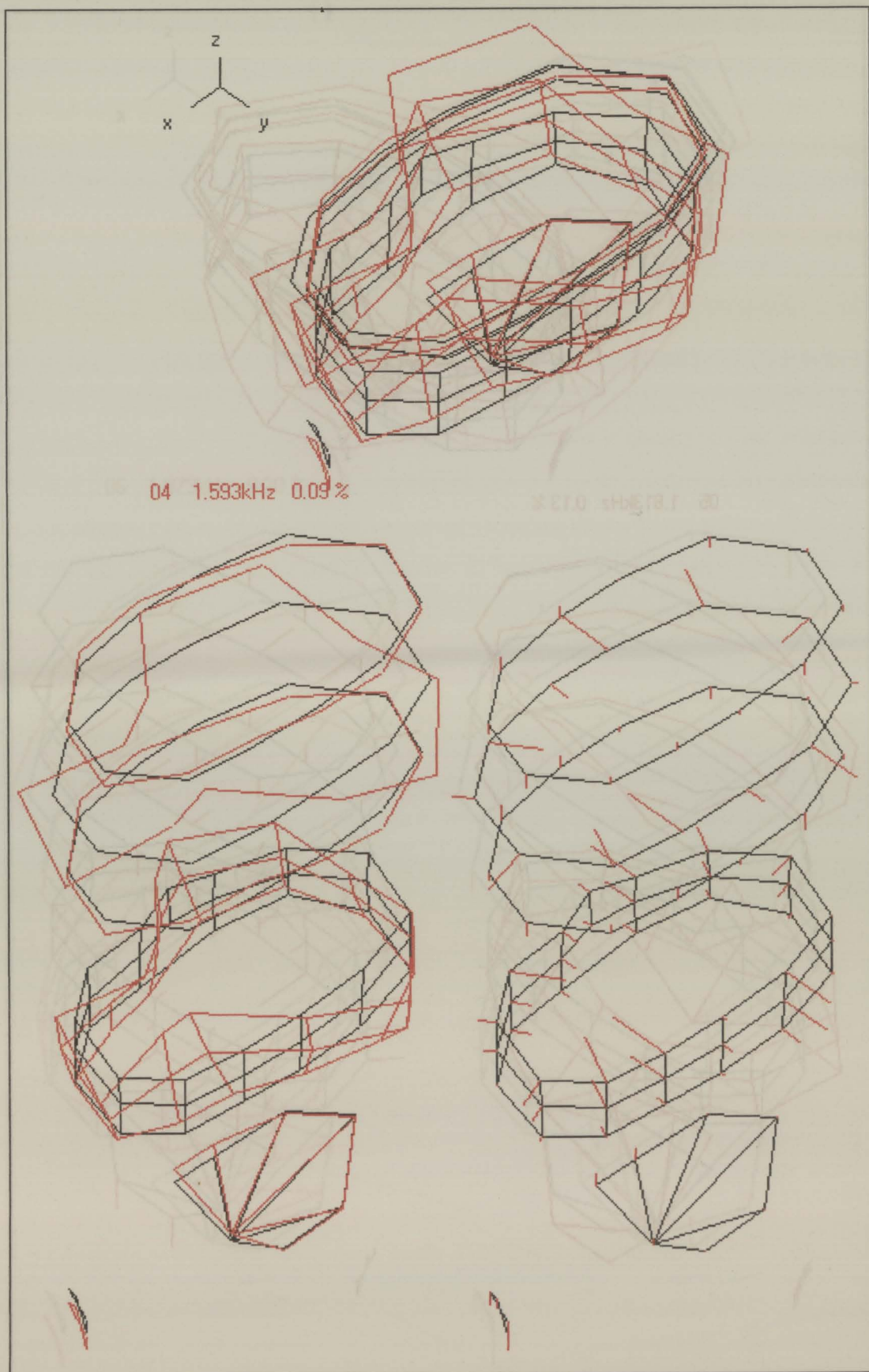


Figura 7.11 - 4ª forma natural do corpo do cárter.

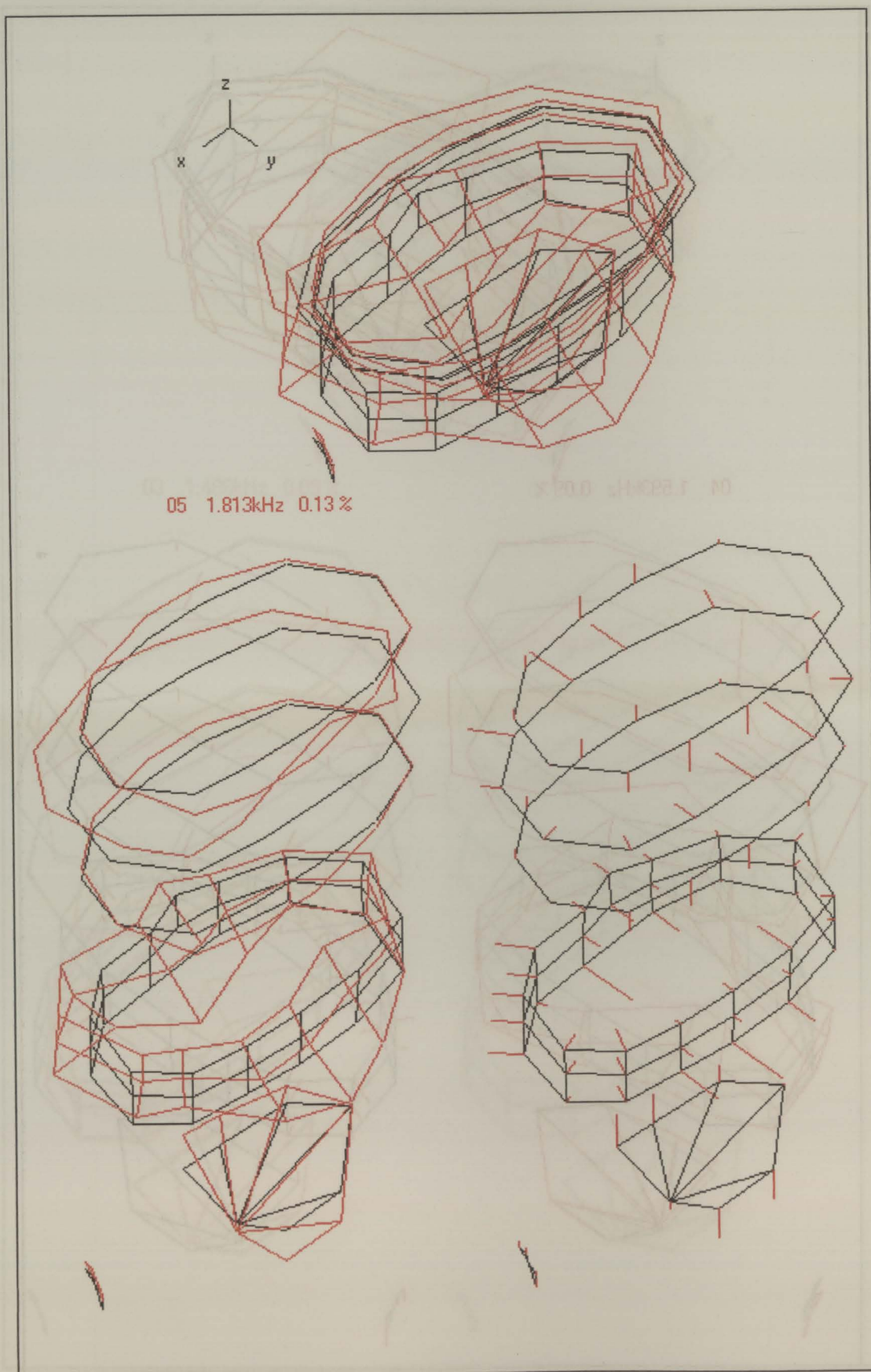


Figura 7.12 - 5ª forma natural do corpo do cârter.

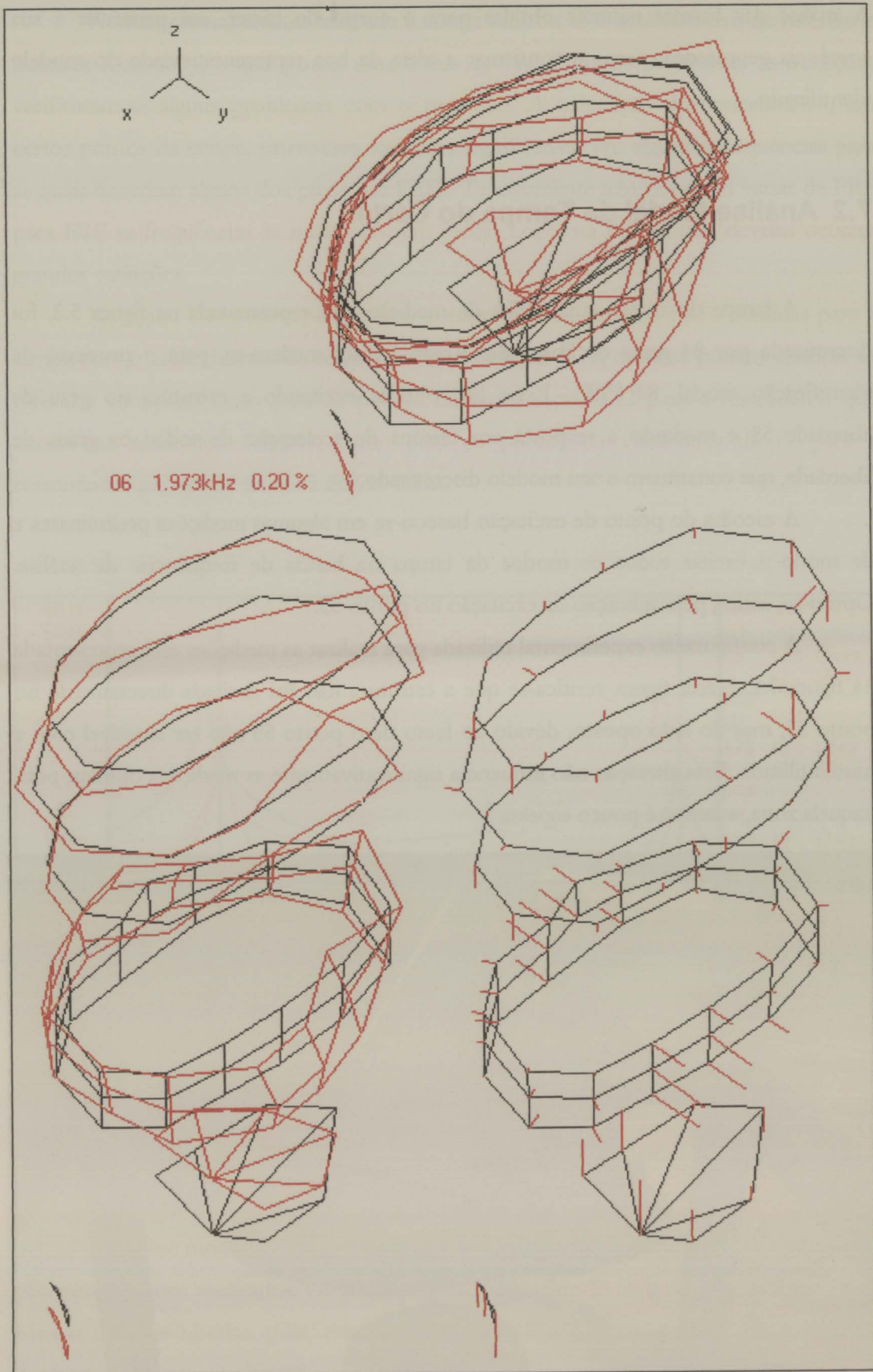


Figura 7.13 - 6ª forma natural do corpo do cárter.

A análise das formas naturais obtidas para o corpo do cárter, em particular a sua coerência geométrica, permite confirmar a ideia da boa representatividade do modelo identificado.

7.2 Análise Modal da Tampa do Cárter

A tampa do cárter, cuja malha de medição está representada na figura 5.2, foi discretizada por 84 graus de liberdade. Assim sendo, medem-se, para o processo de identificação modal, 84 FRFs. Estas são obtidas excitando a estrutura no grau de liberdade 55 e medindo a resposta em termos de aceleração de todos os graus de liberdade, que constituem o seu modelo discretizado.

A escolha do ponto de excitação baseou-se em algumas medições preliminares e de modo a excitar todos os modos da tampa na banda de frequências de análise. Optou-se, assim, pela aplicação da excitação no ponto 55.

A configuração experimental utilizada para realizar as medições está representada na figura 7.1. Nesta figura verifica-se que a estrutura não foi excitada directamente no ponto 55, mas do lado oposto, devido ao facto de o ponto 55 não ser acessível com a haste utilizada. Esta alteração não influencia significativamente as medições obtidas, pois, naquela zona, a tampa é pouco espessa^[9].

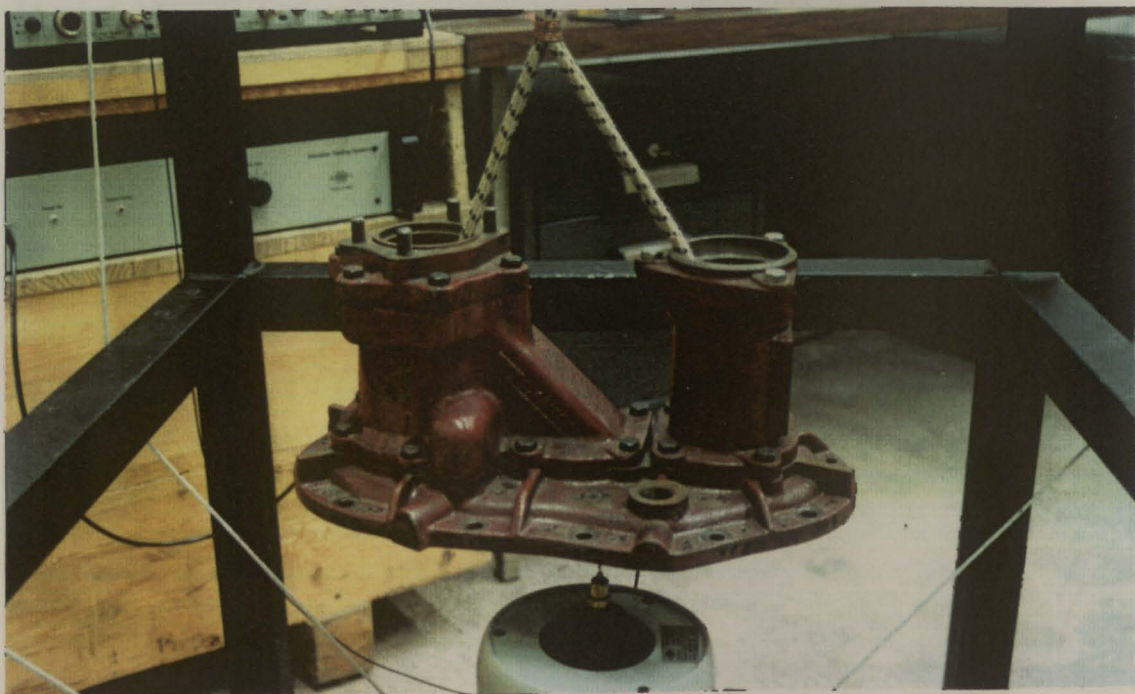


Figura 7.1 - Suspensão adoptada para a tampa do cárter.

Numa primeira análise realizada à tampa utilizou-se o acelerómetro de referência Brüel & Kjær 4371, o qual possui uma massa de 11g. Contudo, ao realizar as medições verificaram-se alguns problemas com o processo. A colocação do acelerómetro, em certos pontos da tampa, provocava variações significativas em algumas frequências para as quais ocorriam alguns dos picos das FRFs. Teoricamente não deveriam variar de FRF para FRF as frequências às quais ocorrem picos. Logo, na prática não deviam ocorrer grandes variações.

Na figura 7.1 estão representadas a magnitude de algumas FRFs medidas para a tampa com o acelerómetro de referência Brüel & Kjær 4371, onde se podem verificar as referidas variações, tanto para os pontos na vizinhança de r2 para a ressonância que ocorre na zona dos 1600Hz, como para os pontos na vizinhança de r7 para a ressonância que ocorre na zona dos 1940Hz.

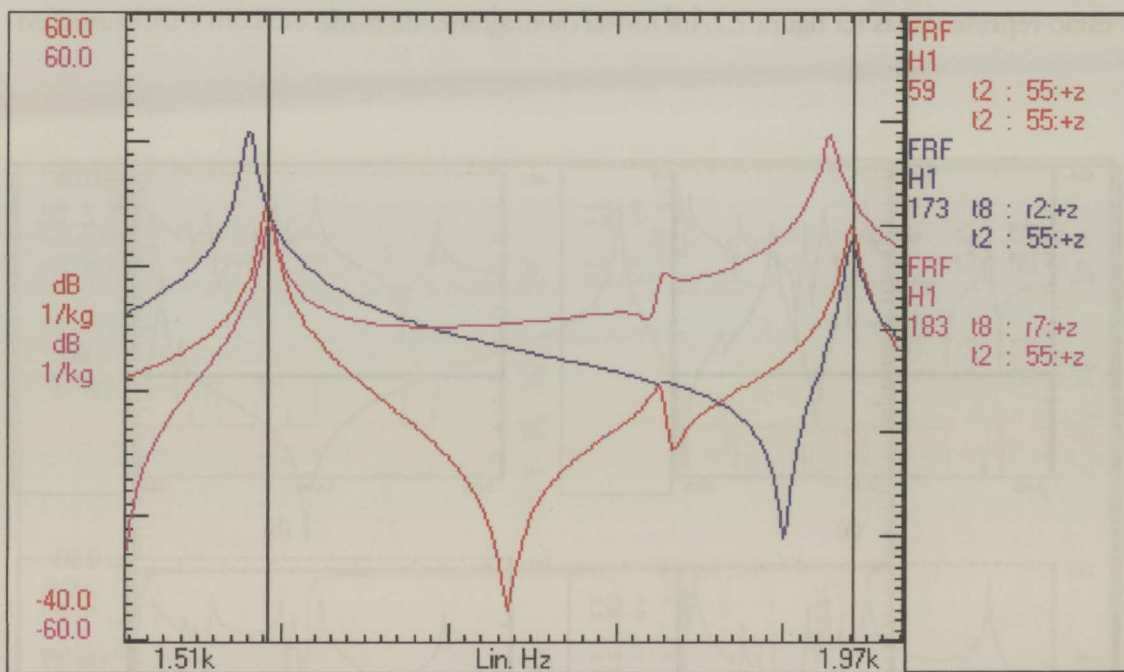


Figura 7.1 - Incoerências verificadas entre as FRFs utilizando o acelerómetro Brüel&Kjær 4371.

A análise modal realizada com as FRFs medidas nestas condições não permitia a obtenção de bons resultados. Os problemas manifestavam-se mais significativamente nas formas naturais obtidas, pois, estas apresentavam formas muito irregulares e grandes descontinuidades geométricas.

Assim sendo, optou-se pela utilização do acelerómetro de referência Brüel & Kjær 4393, de menores dimensões e massa mais reduzida e igual a 2.2g. Com este acelerómetro verificou-se que a referida variação era praticamente nula, conduzindo assim a um conjunto de FRFs coerentes.

Logo, para medir a aceleração de resposta dos diversos graus de liberdade que constituem o modelo discretizado da tampa, optou-se pela utilização do acelerómetro de massa mais reduzida e de referência Brüel & Kjær 4393.

7.2.1 Gama de Frequências de Análise

A selecção da banda de frequências utilizada na análise foi realizada tendo por base medições preliminares de algumas FRFs, entre 0 e 3.2KHz. As funções medidas estão representadas na figura 7.2, na forma de diagrama de Bode.

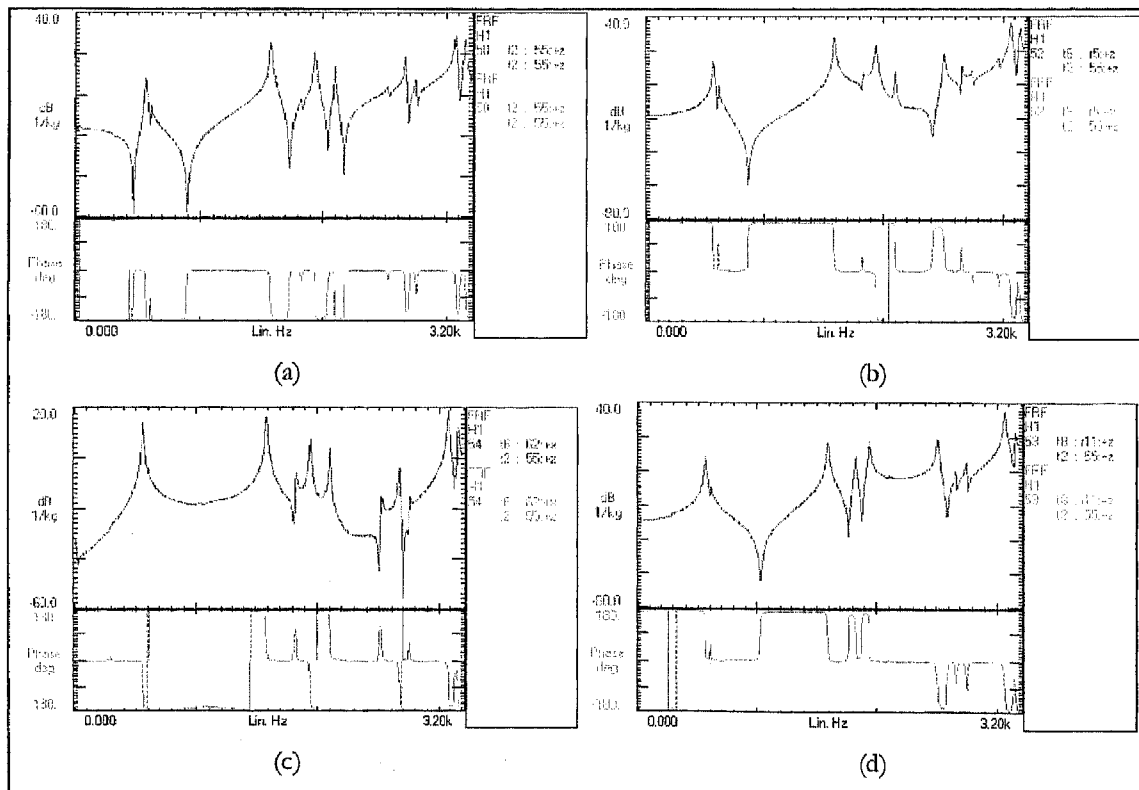


Figura 7.2 - FRFs de acelerabilidade (a) $H_{55|55}$, (b) $H_{r5|55}$, (c) $H_{62|55}$ e (d) $H_{d1|55}$.

A análise das FRFs anteriores evidencia que a estrutura em estudo possui uma primeira ressonância na vizinhança dos 550Hz, a qual é seguida de um conjunto cinco de ressonâncias até aos 2100Hz. Assim sendo, e no intuito de manter o intervalo de análise nos 1600Hz, de modo a manter a resolução até agora adoptada, optou-se pela medição numa banda de frequências entre os 530 e os 2130Hz. Podemos, assim, caracterizar os 6 primeiros modos da tampa do cárter.

7.2.2 Funções de Resposta em Frequência

Duas das FRFs medidas para a tampa do cárter estão representadas nas figuras 7.3 e 7.4, no formato de diagrama de Bode. Estas funções foram obtidas medindo a excitação no grau de liberdade 55, e a resposta nos pontos 55 e s10, respectivamente. As restantes FRFs medidas são apresentadas no Anexo B.3.

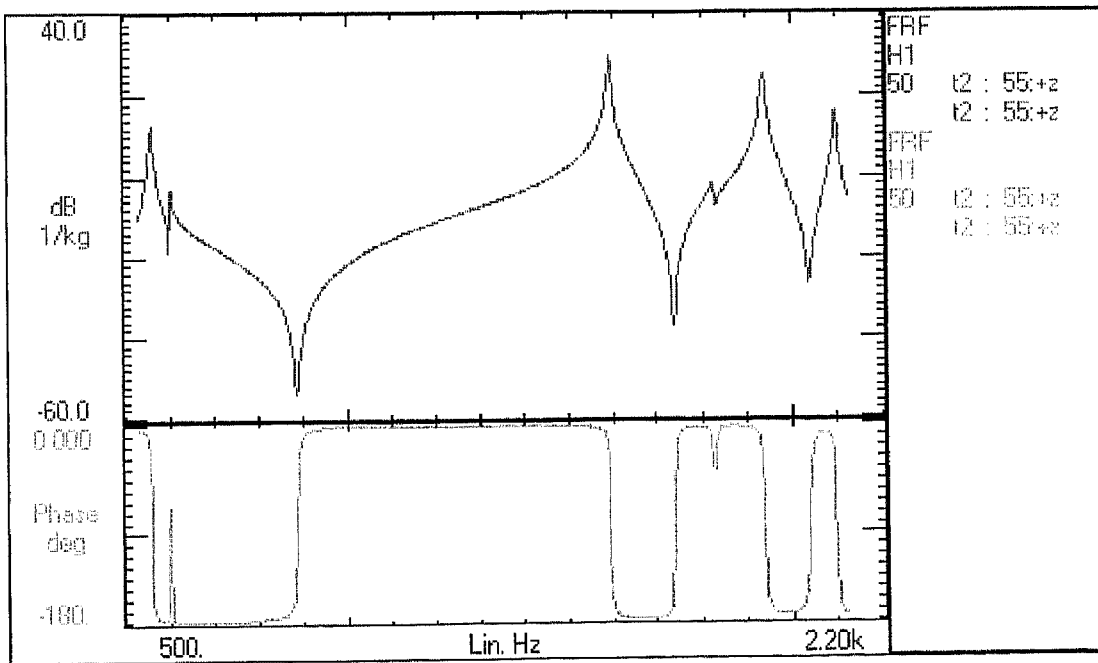


Figura 7.3 - Função de resposta em frequência de acelerabilidade $H_{55|55}$.

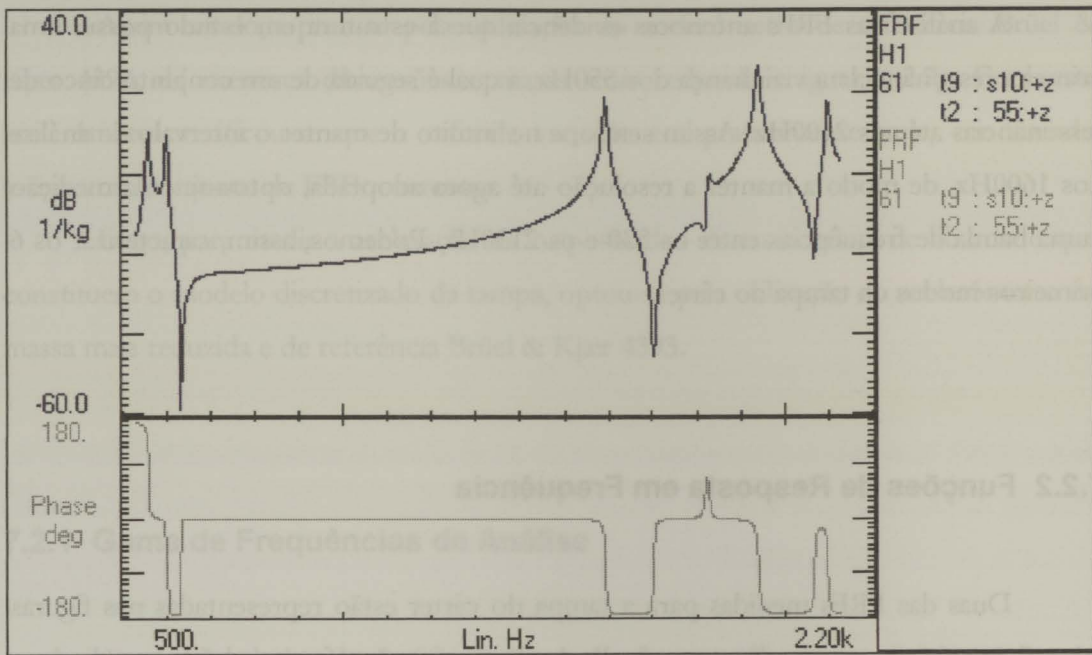


Figura 7.4 - Função de resposta em frequência de acelerabilidade $H_{s10|55}$.

7.2.3 Identificação Modal

A função MIF, a função SUM e a FRF directa, $H_{55|55}$, obtidas para a tampa do cârter, estão representadas na figura 7.5. Estas funções, como já se referiu, auxiliam o processo de localização dos modos da estrutura em estudo.

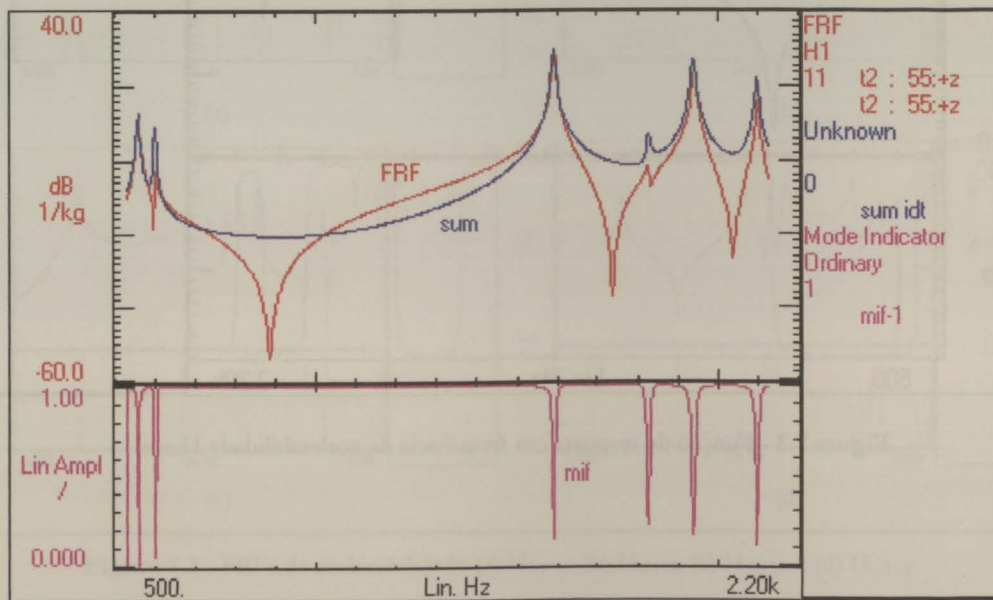


Figura 7.5 - FRF de acelerabilidade directa $H_{55|55}$, SUM e MIF.

7.2.4 Parâmetros Modais

O processo de identificação modal permitiu obter os parâmetros modais que formam o modelo modal da tampa do cárter. Na tabela 7.1 são apresentadas as frequências naturais e os factores de amortecimento modal obtidos, sendo também apresentados alguns dados de caracterização da metodologia adoptada. As tabelas com a informação relativa às formas naturais da tampa são apresentadas no Anexo C.3.

Tabela 7.1 - Parâmetros modais e caracterização do processo de identificação modal da tampa do cárter.

Modo	Frequência (Hz)	ζ (%)	Nº de GDLs	Nº de referências	Pólo	Const. Modal	Tipo de Const. Modal
1	558.51	0.19	84	1	MDOF	MDOF	COMPLEXA
2	599.89	0.17	84	1	MDOF	MDOF	COMPLEXA
3	1.59k	0.15	84	1	MDOF	MDOF	COMPLEXA
4	1.82k	0.25	84	1	MDOF	MDOF	COMPLEXA
5	1.93k	0.16	84	1	MDOF	MDOF	COMPLEXA
6	2.09k	0.13	84	1	MDOF	MDOF	COMPLEXA

7.2.5 Indicadores da Qualidade da Identificação

7.2.5.1 Critério MAC

A aplicação do critério MAC às possíveis combinações de vectores identificados para as formas naturais da tampa conduz à matriz MAC, a qual está representada na tabela 7.2.

Tabela 7.2 - Critério MAC aplicado às formas naturais obtidas para a tampa do cárter.

Modo	Freq. (Hz)	Modo 1 (%)	Modo 2 (%)	Modo 3 (%)	Modo 4 (%)	Modo 5 (%)	Modo 6 (%)
1	558.51	100.0	0.3	13.4	12.2	5.0	5.1
2	599.89	0.3	100.0	7.1	3.9	1.5	33.8
3	1.59k	13.4	7.1	100.0	1.1	1.0	2.9
4	1.82k	12.2	3.9	1.1	100.0	8.3	1.4
5	1.93k	5.0	1.5	1.0	8.3	100.0	0.9
6	2.09k	5.1	33.8	2.9	1.4	0.9	100.0

7.2.5.2 Sintetização de FRFs

De seguida apresentam-se algumas das FRFs sintetizadas, na banda de frequências analisada, a partir do modelo modal identificado. As restantes FRFs sintetizadas são apresentadas no Anexo B.3.

A análise comparativa dos resultados obtidos pela sintetização das FRFs permite concluir que existe uma boa concordância entre o modelo modal identificado para a tampa e o seu comportamento real.

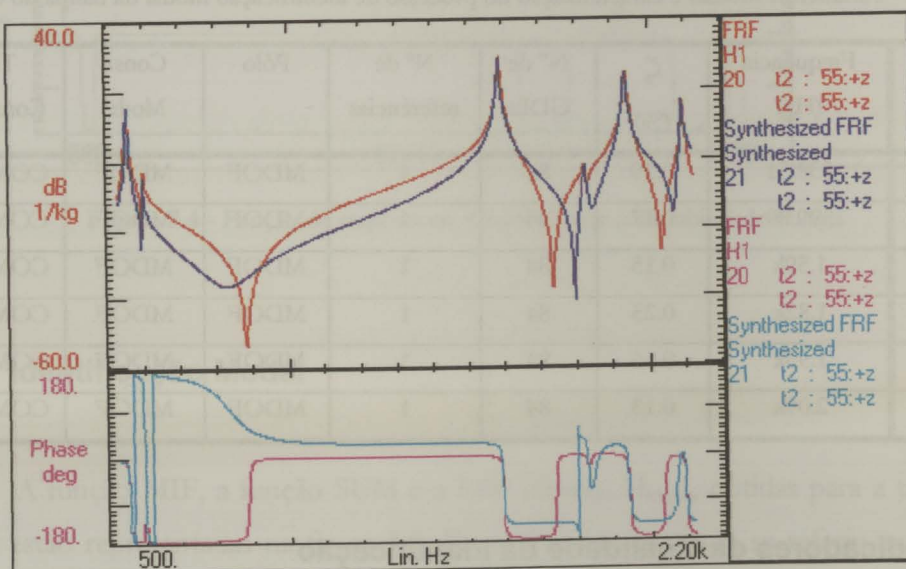


Figura 7.6 - FRF $H_{55|55}$ medida e sintetizada.

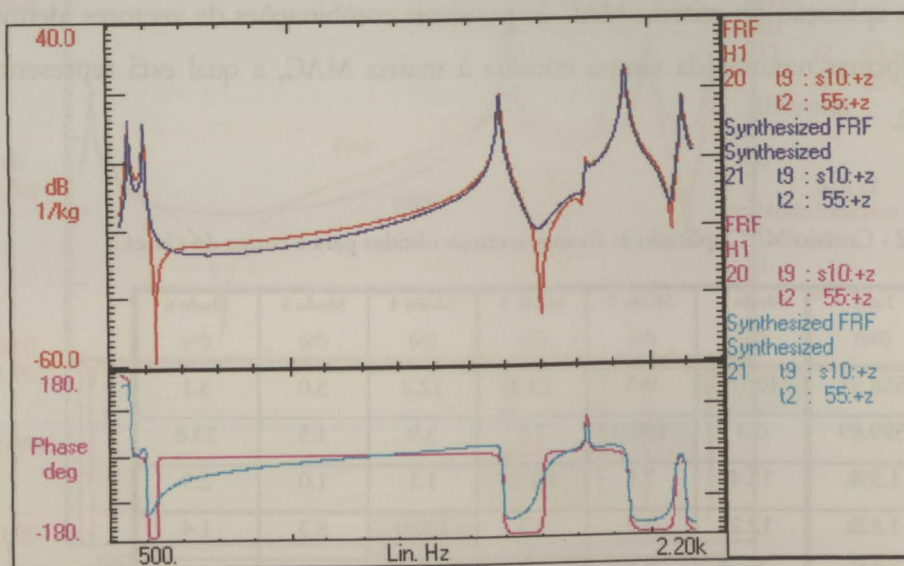


Figura 7.7 - FRF $H_{s10|55}$ medida e sintetizada.

7.2.6 Formas Naturais de Vibração

As formas naturais obtidas no processo de identificação modal da tampa do cárter são apresentadas em seguida. No intuito de facilitar a compreensão das formas naturais, a sua representação gráfica é apresentada em três formas distintas, cuja descrição é realizada no ponto 6.4.5.

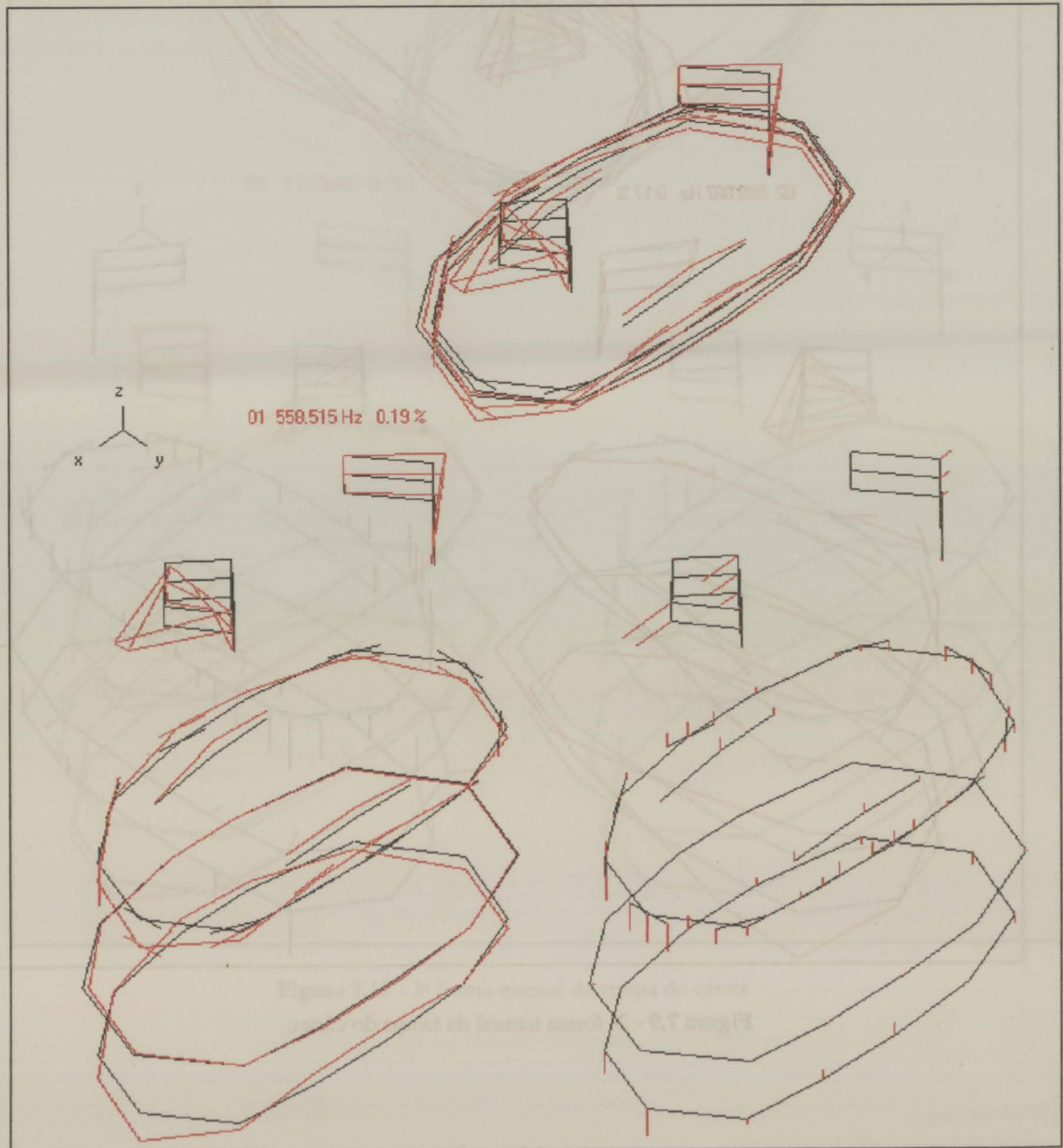


Figura 7.8 - 1ª forma natural da tampa do cárter.

As vibrações naturais de uma estrutura são as vibrações que ocorrem naturalmente em resposta a uma perturbação inicial. Estas vibrações são caracterizadas por uma frequência natural e um amortecimento. A análise modal experimental permite determinar estas características para uma estrutura física.

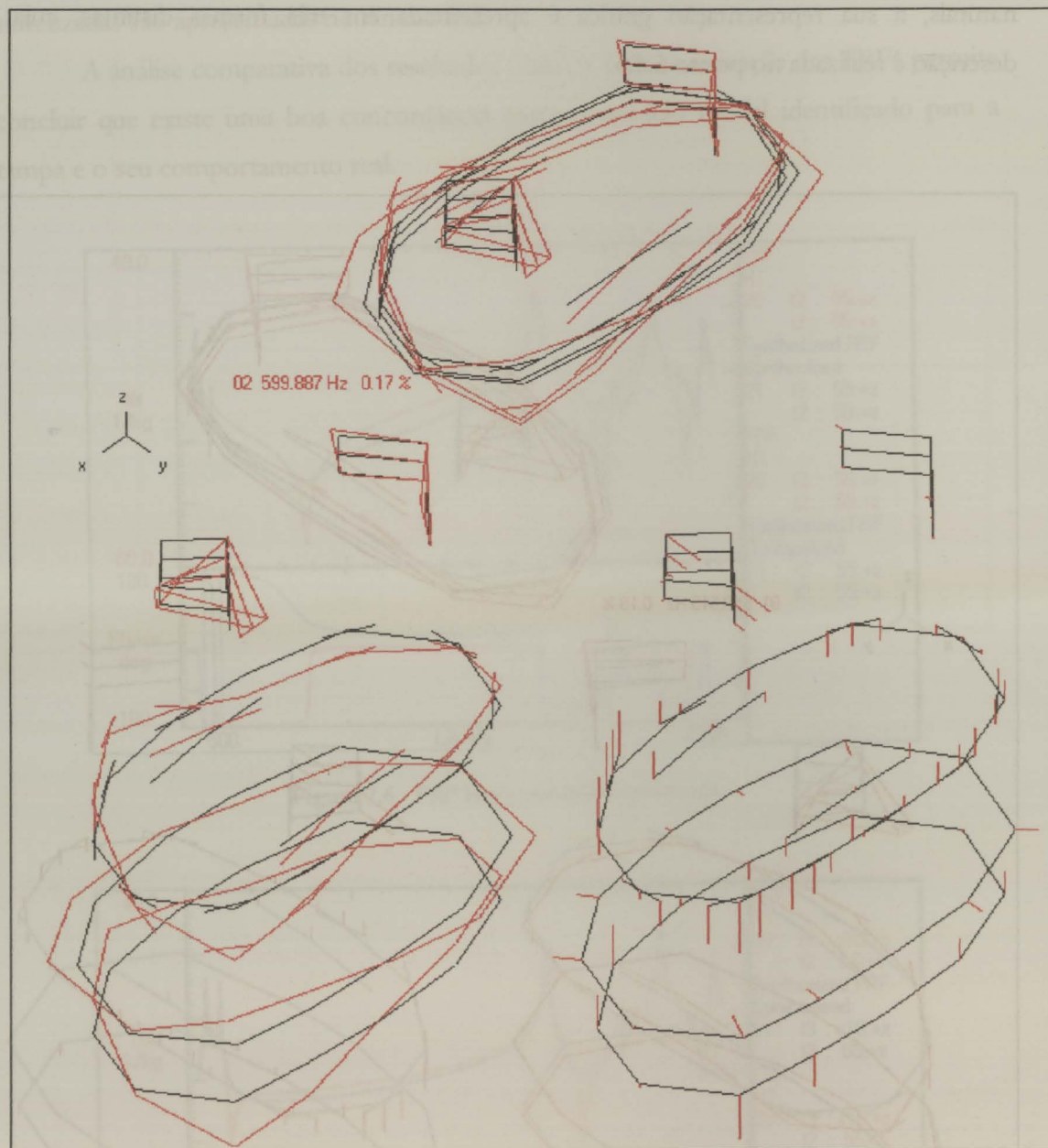


Figura 7.9 - 2ª forma natural da tampa do cârter.

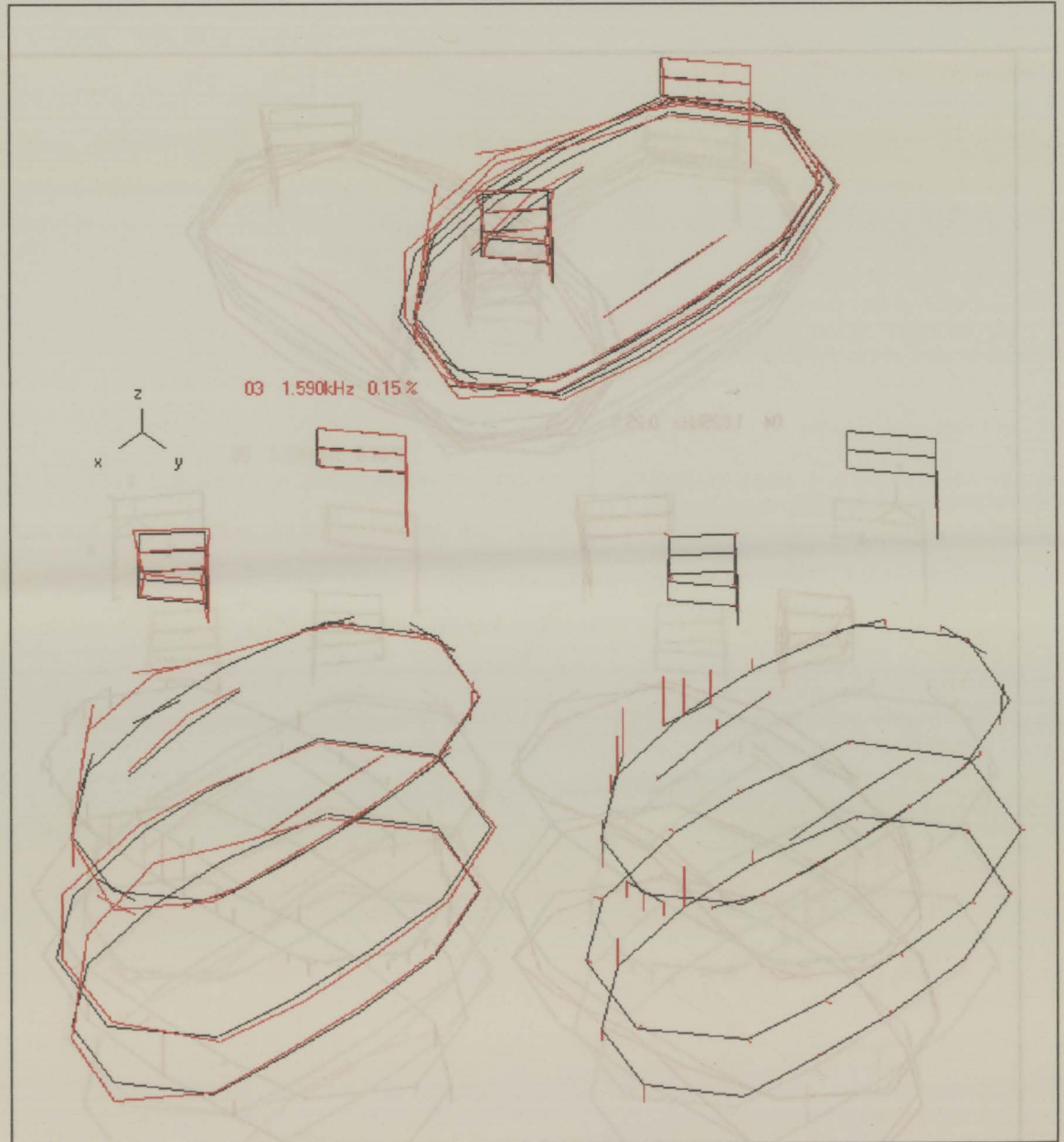


Figura 7.10 - 3ª forma natural da tampa do cárter.

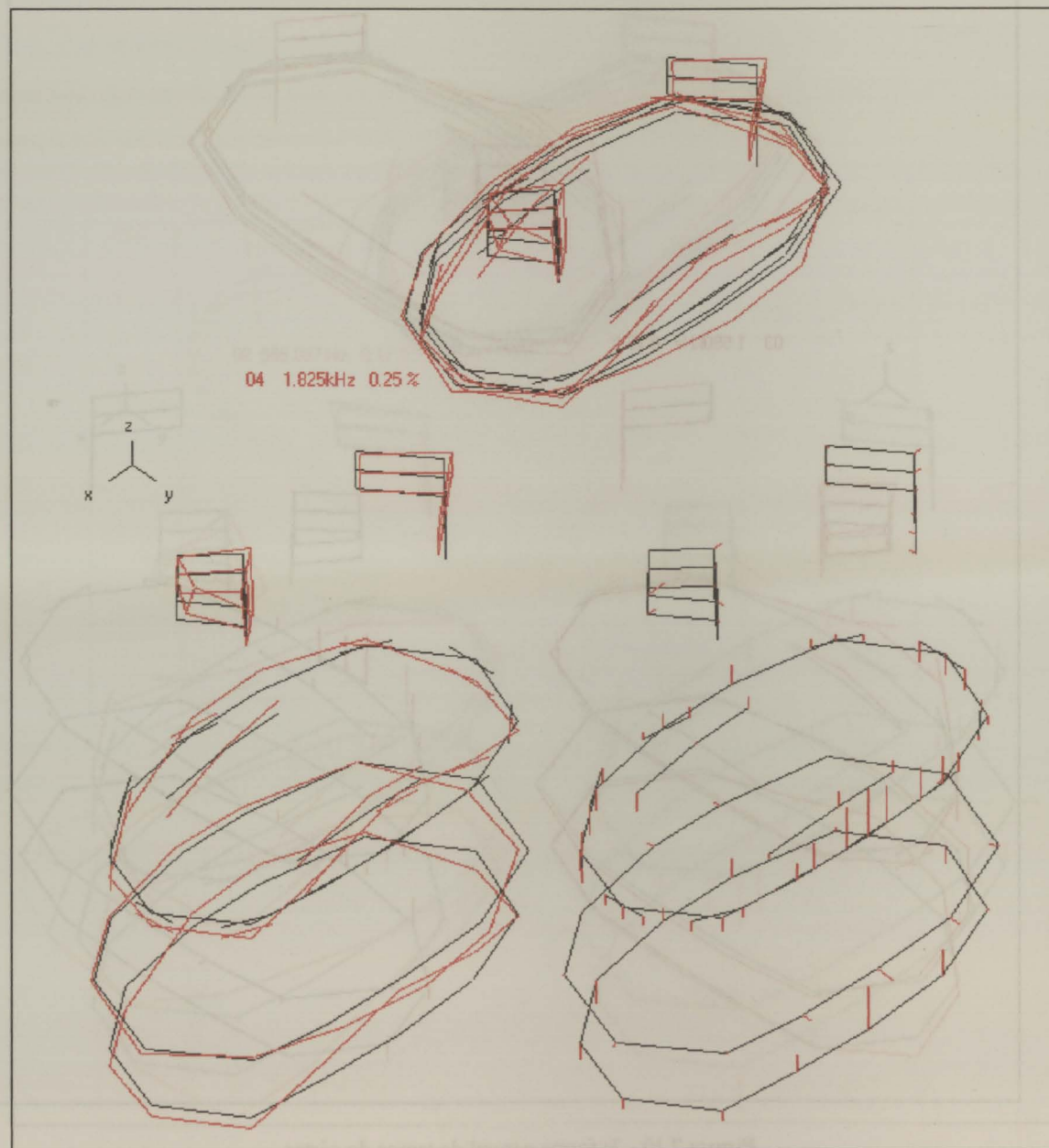


Figura 7.11 - 4ª forma natural da tampa do cárter.

7.3 Conclusão

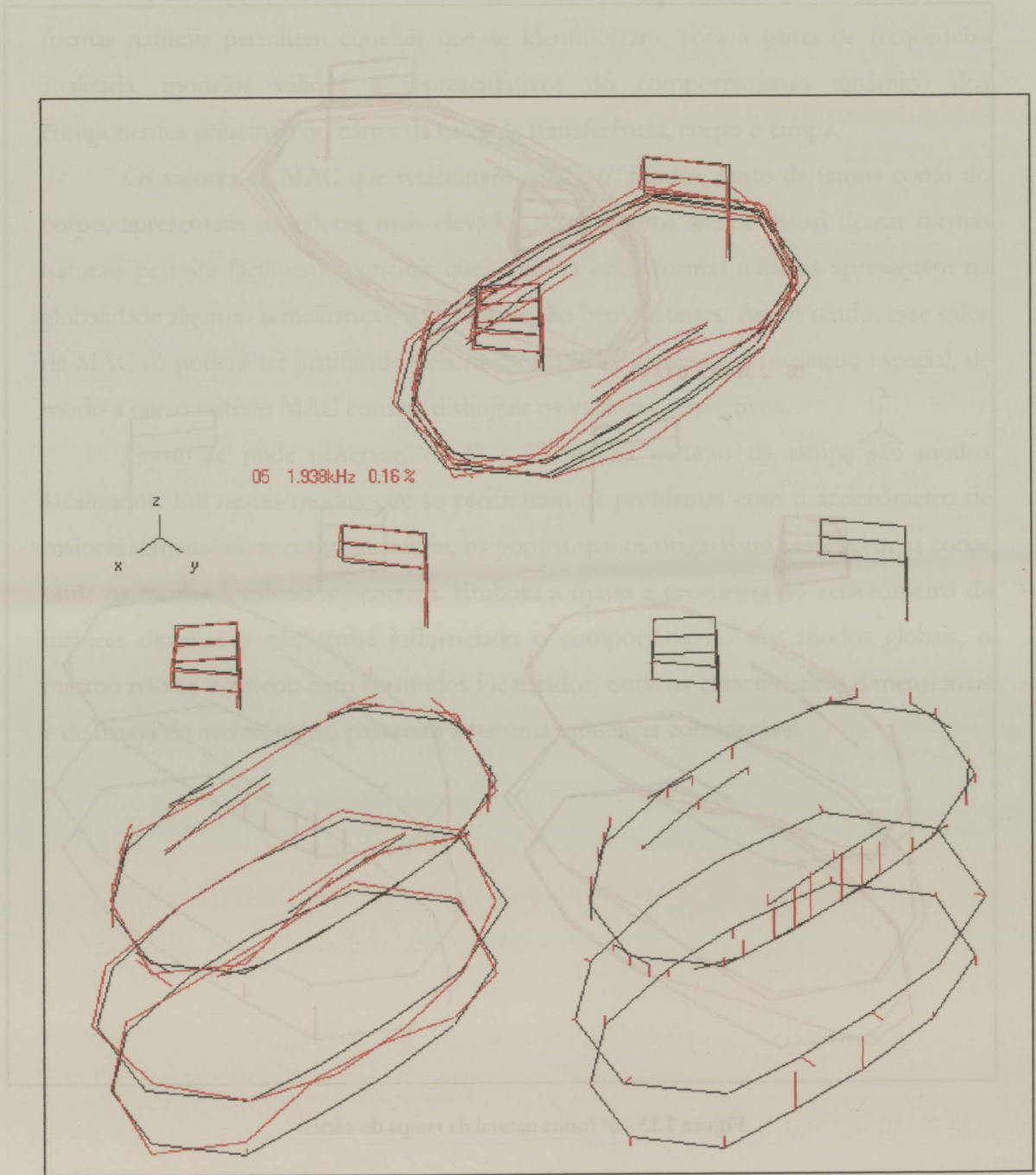


Figura 7.12 - 5ª forma natural da tampa do cárter.

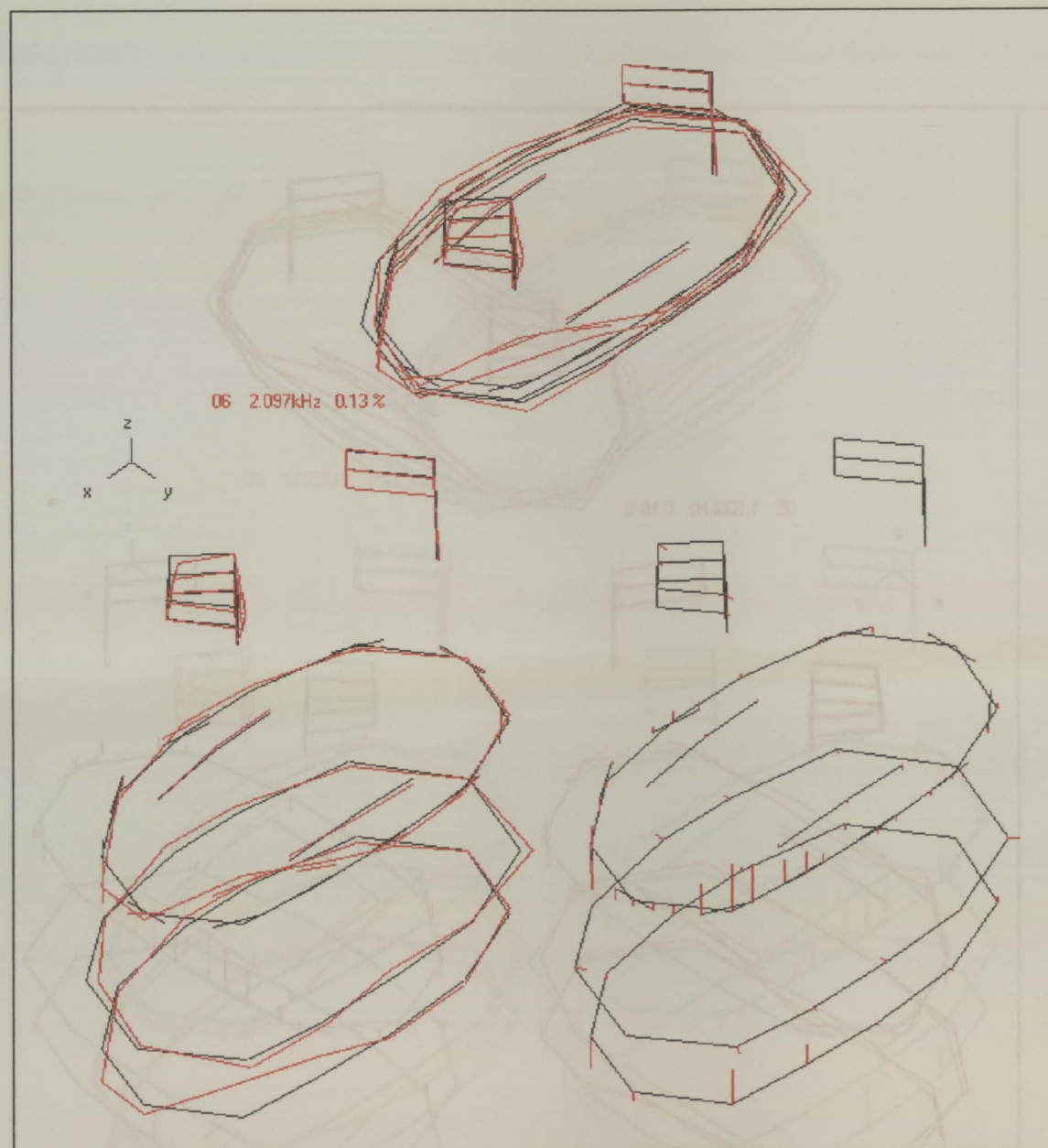


Figura 7.13 - 6ª forma natural da tampa do cárter.

A observação das deformadas espaciais das formas naturais identificadas revela que estas apresentam-se geometricamente coerentes, confirmando-se a validade do modelo identificado para a tampa do cárter

7.3 Conclusão

Os resultados obtidos na sintetização das FRFs, para o critério MAC e para as formas naturais permitem concluir que se identificaram, para a gama de frequências analisada, modelos válidos e representativos do comportamento dinâmico dos componentes principais do caráter da caixa de transferência, corpo e tampa.

Os valores de MAC que relacionam o 2º e 6º modos, tanto da tampa como do corpo, apresentam os valores mais elevados. Porém, uma análise visual dessas formas naturais permite facilmente concluir que, embora essas formas naturais apresentem na globalidade algumas semelhanças, na realidade são bem distintas. Assim sendo, esse valor de MAC só poderá ser justificado pela necessidade de aumentar a resolução espacial, de modo a que o critério MAC consiga distinguir os vectores respectivos.

Como se pode observar, os 3º e 5º modos naturais da tampa são modos localizados. Foi nestes modos que se verificaram os problemas com o acelerómetro de maiores dimensões, e, como se referiu, os pontos que os originavam pertencem às zonas onde os modos localizados ocorrem. Embora a massa e geometria do acelerómetro de maiores dimensões não tenha influenciado o comportamento dos modos globais, o mesmo não se verificou com os modos localizados, onde as características dimensionais e de massa do acelerómetro passaram a ter uma influência considerável.

8. PROGRAMA DE ACOPLAMENTO DINÂMICO

O procedimento de acoplamento dinâmico de componentes, por acoplamento de impedâncias total e por blocos II, conforme os algoritmos descritos, respectivamente, em 4.1 e 4.5, foi implementado em computador através de um programa constituído por um conjunto de rotinas escritas em linguagem FORTRAN 5.0. O programa de acoplamento utiliza os parâmetros modais obtidos no programa de identificação modal LMS CADA-PC, os quais se encontram armazenados num ficheiro ASCII, formato universal, exportado pelo programa.

A interacção entre o programa implementado e o utilizador é realizada através de um ficheiro de dados, do qual é apresentado no Anexo D um exemplo tipo, e que fornece ao programa de acoplamento os seguintes parâmetros:

- Gama de frequências para as FRFs
- Número de frequências discretas para as FRFs
- Tipo de FRF a utilizar no acoplamento (deslocabilidade, mobilidade ou acelerabilidade).
- Algoritmo de inversão a utilizar
- Algoritmo de acoplamento a utilizar
- Para cada um dos componentes a acoplar:
 - Nome do ficheiro com os parâmetros modais
 - Número de graus de liberdade do componente
 - Número de modos naturais para o componente
 - Modos a utilizar no procedimento de acoplamento
 - Graus de liberdade a utilizar no procedimento de acoplamento
- Graus de liberdade acoplados
- Nome do ficheiro onde vão ser armazenados os resultados
- Identificação das FRFs a armazenar

No programa de acoplamento implementado todos os cálculos são realizados com variáveis de dupla precisão, de modo a reduzir ao máximo possível a propagação de erros. Porém, as limitações de memória quando se trabalha em ambiente MS-DOS, obrigaram à compilação das rotinas para trabalhar em ambiente WINDOWS,

permitindo assim aceder a toda a memória disponível no computador, inclusive a memória virtual. Deste modo, conseguiu-se implementar um programa que permite utilizar matrizes de FRFs de dimensão 150, considerar 30 modos naturais e utilizar 30 pares de graus de liberdade acoplados.

8.1 Fluxograma

Na figura 8.1 é apresentado um fluxograma do programa implementado.

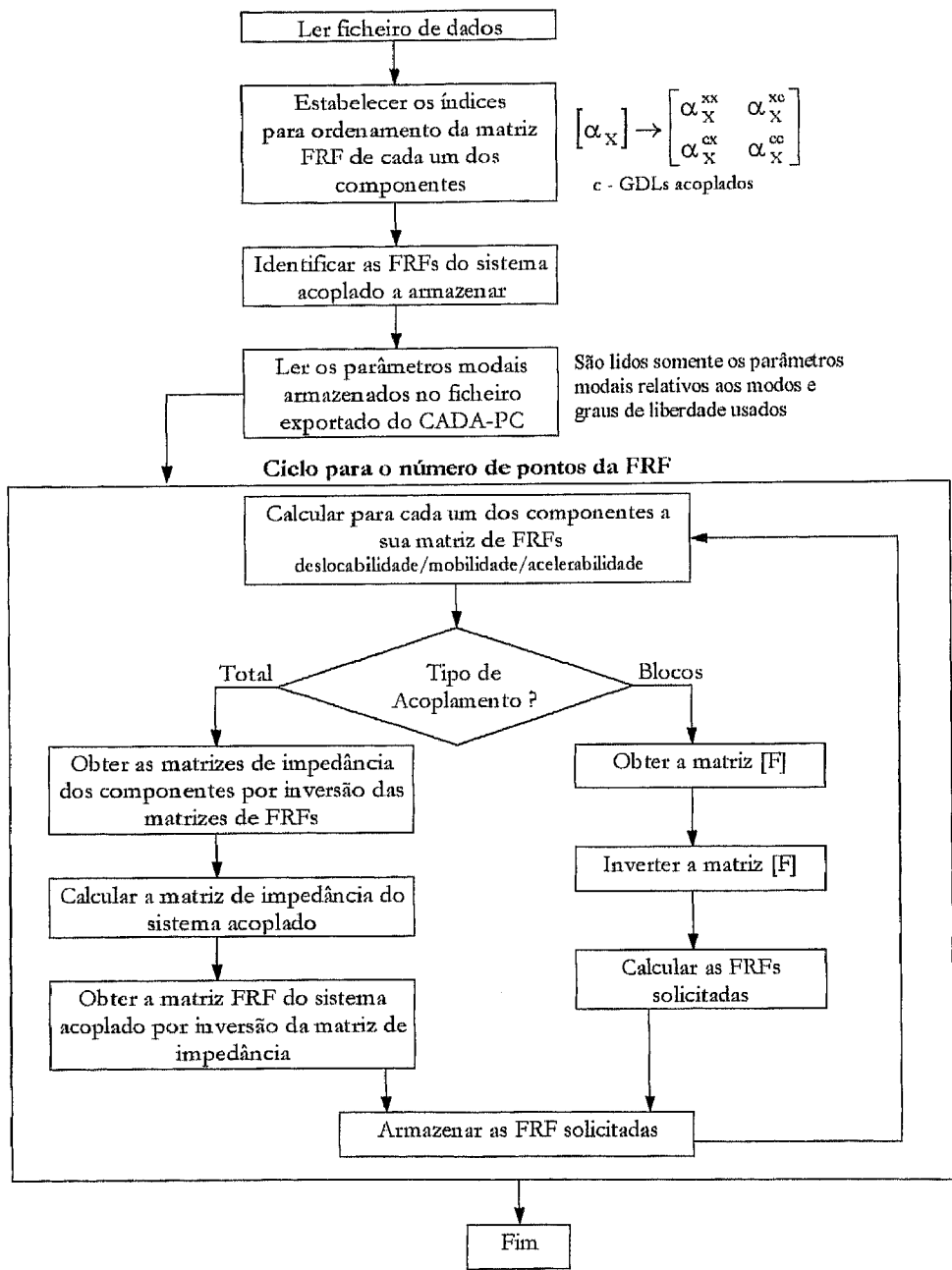


Figura 8.1 - Fluxograma do programa implementado.

8.2 Algoritmos de Inversão de Matrizes

Como se referiu, quando da apresentação dos algoritmos de acoplamento de impedâncias, estes algoritmos envolvem sempre um problema de inversão de matrizes, que coloca, frequentemente algumas dificuldades práticas. Estas dificuldades decorrem, por vezes, de incorrecções ocorridas durante o processo de medição das FRFs, do elevado “peso” computacional e consequente acumulação de erros, principalmente para matrizes de elevada dimensão, ou ainda do mau condicionamento inerente à matriz FRF, em particular próximo das ressonâncias. Assim, esta operação apresenta-se muito susceptível a erros e os resultados obtidos poderão conter muitas incorrecções^[14]. A vulnerabilidade aos erros e sua propagação para esta operação agrava-se mais no caso do acoplamento de impedâncias total. Efectivamente, se no caso do acoplamento de impedâncias por blocos só há necessidade de realizar uma vez a inversão das matrizes, no caso do acoplamento total as matrizes são invertidas duas vezes. Primeiro, as matrizes de FRFs dos componentes são invertidas para obter as matrizes de impedância, as quais são acopladas de modo a formar a matriz de impedância do sistema total, que, por sua vez, tem que ser invertida de modo a obter a matriz de FRFs.

No programa implementado, o procedimento de inversão de matrizes pode ser realizado utilizando um de dois algoritmos de inversão de matrizes, sendo o algoritmo a utilizar escolhido no ficheiro de dados.

O primeiro algoritmo implementado baseou-se numa adaptação do algoritmo de decomposição LU de matrizes reais para o caso das matrizes complexas. A matriz inversa é obtida através da resolução de n sistemas de n equações a n incógnitas, tendo por segundo membro os diversos vectores coluna da matriz identidade e como matriz dos coeficientes a matriz complexa a inverter factorizada na forma LU.

O algoritmo anterior realiza a inversão directa da matriz. Porém, na referência [14], devido às dificuldades encontradas na obtenção de resultados com os algoritmos de inversão directa, sugere-se a utilização da matriz pseudo-inversa como forma de contornar o problema de mau condicionamento da matriz FRF. Assim, implementou-se igualmente um algoritmo apresentado em [41] para obter a matriz pseudo-inversa de uma matriz complexa.

Para uma matriz $[F]$, a sua decomposição em valores singulares apresenta-se na seguinte forma:

$$[F] = [U][\Sigma][V]^h \quad (8.1)$$

onde $[\Sigma]$ é a matriz diagonal dos valores singulares e $[U]$ e $[V]$ são as matrizes dos vectores singulares à esquerda e direita respectivamente, e ambas são matrizes unitárias. A partir desta decomposição a matriz inversa, $[F]^{-1}$, é dada por:

$$[F]^{-1} = [V][\Sigma]^{-1}[U]^h \quad (8.2)$$

Se a matriz $[F]$ é singular, ou próximo de singular, então a matriz $[\Sigma]^{-1}$, respectivamente, não existe ou é difícil de obter correctamente. Nestas condições, a matriz inversa $[F]^{-1}$ pode ser substituída por uma matriz pseudo-inversa, $[F]^+$, dada pela expressão^[14]:

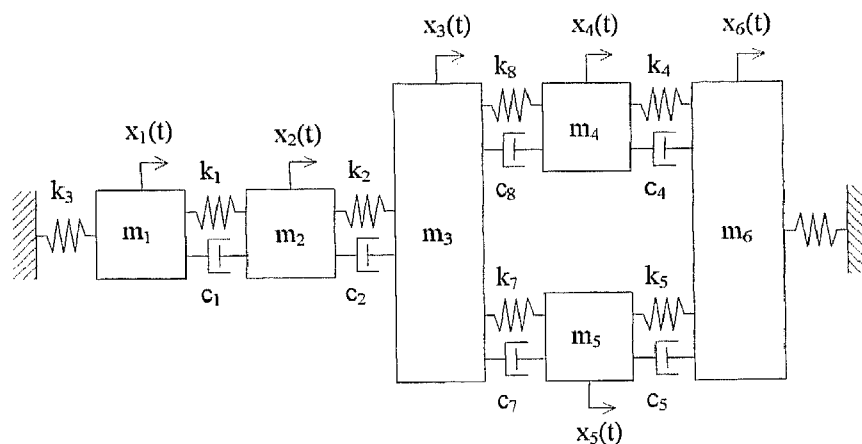
$$[F]^+ = [V]_r[\Sigma]_r^{-1}[U]_r^h \quad (8.3)$$

onde $[\Sigma]_r^{-1}$ representa a inversa da matriz $[\Sigma]_r$ construída a partir da matriz $[\Sigma]$ retirando os valores singulares menos importantes. As matrizes rectangulares $[V]_r$ e $[U]_r^h$ são construídas a partir de $[V]$ e $[U]^h$ retirando os vectores singulares associados. O grau de importância de cada valor singular em $[\Sigma]$ é estabelecido comparando, em termos percentuais, a sua magnitude com a magnitude do valor singular mais elevado.

Na implementação deste segundo algoritmo de inversão, a pseudo-inversão de matrizes, utilizou-se uma rotina da livreria LINPACK para decomposição em valores singulares de matrizes complexas.

9. ACOPLAMENTO DINÂMICO-EXEMPLO ANALÍTICO

Com o objectivo de testar os procedimentos de acoplamento implementados, foi estudado um modelo de um sistema discreto com 6 graus de liberdade, representado na figura 9.1. Este sistema resulta do acoplamento de 2 sistemas discretos representados na figura 9.2.



$m_1=m_2=m_3=m_4=m_5=m_6= 10 \text{ kg}$	$c_1=c_4= 3 \text{ Ns/m}$
$k_3=k_1=k_5=10000 \text{ N/m}$	$c_2= 5 \text{ Ns/m}$
$k_2=k_6= k_7= 20000 \text{ N/m}$	$c_5= 7 \text{ Ns/m}$
$k_4= 15000 \text{ N/m}$	$c_7= 12.5 \text{ Ns/m}$
$k_8= 12000 \text{ N/m}$	$c_8= 10 \text{ Ns/m}$

Figura 9.1 - Sistema discreto.

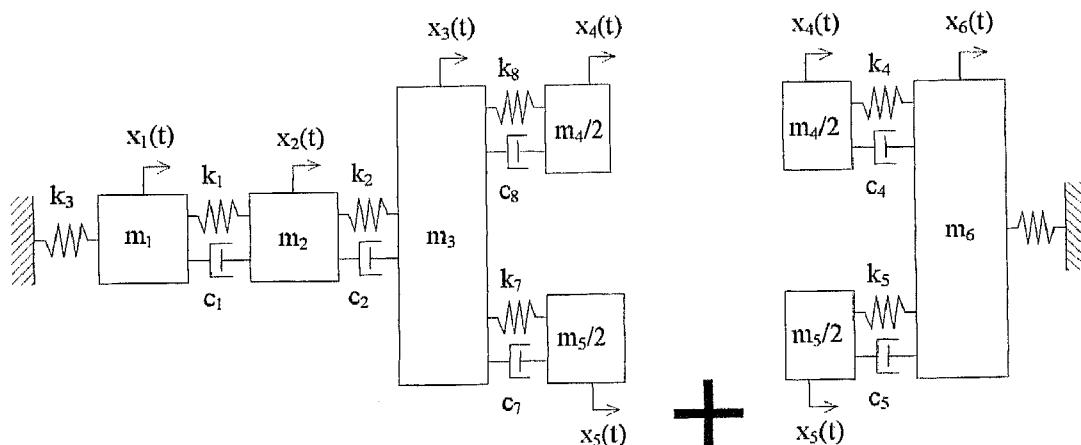


Figura 9.2 - Acoplamento dos componentes.

Para cada um dos três sistemas foi estabelecida a equação matricial diferencial do movimento na forma^[42]:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (9.1)$$

Utilizando o procedimento descrito na apresentação do regime forçado de um sistema com amortecimento viscoso, ponto 2.2.3, e resolvendo um problema de valores e vectores próprios obtiveram-se os parâmetros modais dos 3 sistemas. A resolução do problema de valores e vectores próprios foi levada a cabo utilizando a subrotina EIGZF, da livreria IMSL, que está implementada para resolver um problema de valores e vectores próprios do tipo:

$$[A]\{x\} = \lambda[B]\{x\} \quad (9.2)$$

onde [A] e [B] são matrizes reais, e a solução do problema pode ser complexa.

Deste modo, foram obtidas para cada um dos três sistemas as frequências naturais e factores de amortecimento apresentados na seguinte tabela:

Tabela 9.1 - Frequências naturais e factores de amortecimento modais

Modo	Sistema global		Componente 1		Componente 2	
	Frequência natural [Hz]	ζ [%]	Frequência natural [Hz]	ζ [%]	Frequência natural [Hz]	ζ [%]
1	2.93	0.14	1.86	0.09	4.49	0.19
2	6.08	0.41	6.39	0.45	7.77	1.22
3	8.05	1.43	8.43	1.88	12.65	1.07
4	9.06	1.07	9.72	1.14	--	--
5	11.53	0.89	14.51	2.51	--	--
6	13.84	2.17	--	--	--	--

Após terem sido obtidos os parâmetros modais, calcularam-se, tanto para os componentes como para o sistema completo, as matrizes do modelo de resposta, constituídas pelas diversas funções de resposta em frequência, utilizando a expressão (2.77).

As matrizes do modelo de resposta para os componentes foram então utilizadas nos procedimentos de acoplamento de modo a obter a matriz do modelo de resposta para o sistema acoplado. As funções de resposta em frequência do sistema acoplado foram então comparadas com as obtidas directamente para o sistema completo.

Os procedimentos de acoplamento foram testados em várias situações, limitando os graus de liberdade usados e/ou os modos incluídos, com o objectivo de simular, em parte, o comportamento dos procedimentos de acoplamento quando utilizados no caso experimental em estudo neste trabalho. Em seguida são descritos e apresentados os resultados para os casos estudados.

9.1 Modelos Completos

Neste ponto representa-se o caso em que se utilizaram, no processo de acoplamento, todos os graus de liberdade e todos os modos de cada um dos componentes. Este estudo teve por objectivo testar as subrotinas de acoplamento implementadas.

Como seria de esperar, sendo o modelo teórico e completo, obtiveram-se funções de resposta em frequência idênticas para o modelo de resposta, tanto utilizando um procedimento de acoplamento como realizando a análise modal do sistema completo. Este facto pode ser comprovado pelos gráficos apresentados nas figuras 9.3 a 9.5, onde se representam os diagramas de Bode de algumas FRFs obtidas directamente e por acoplamento, conforme acima referido, e onde se verifica que essas curvas se sobrepõem.

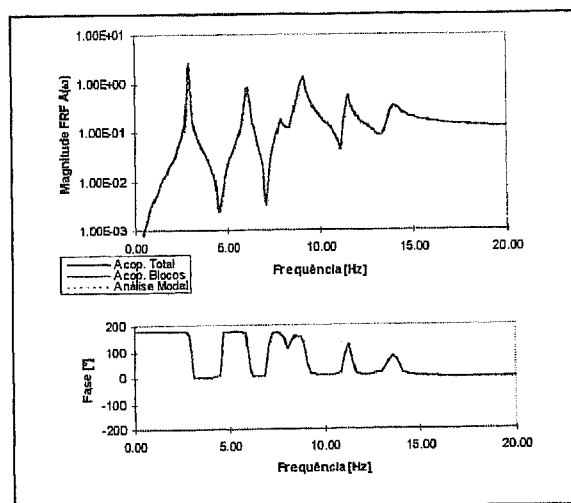


Figura 9.3 - Função de resposta em frequência $H_{2|2}$.

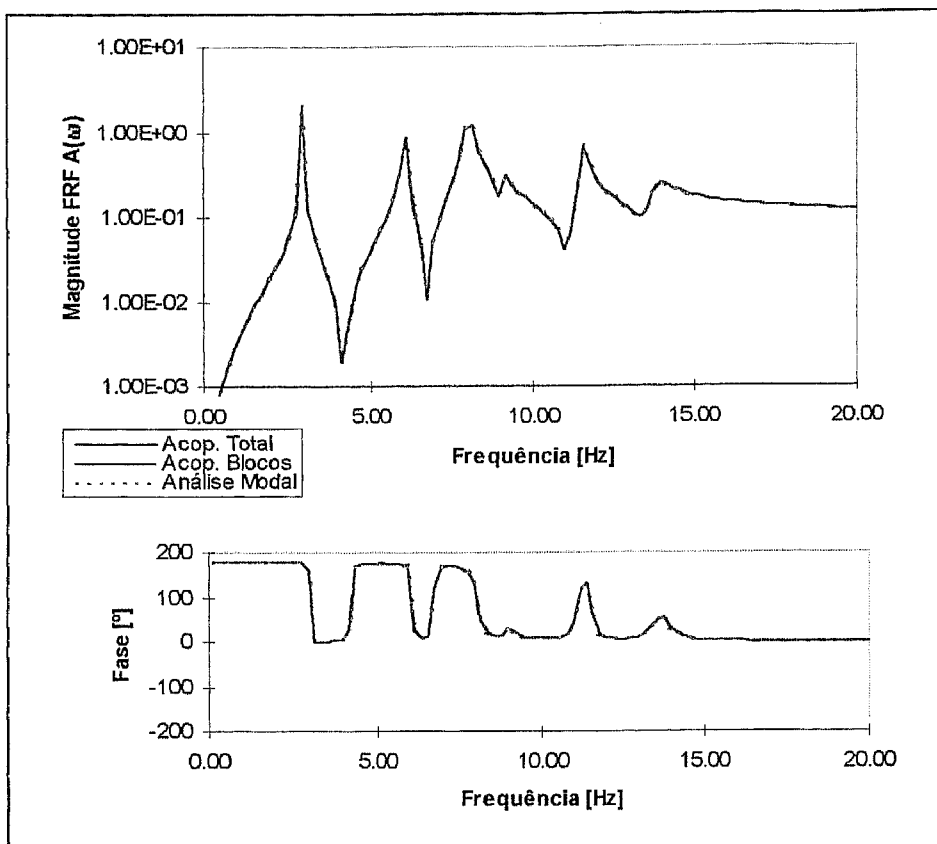


Figura 9.4 - Função de resposta em frequência $H_{4|4}$.

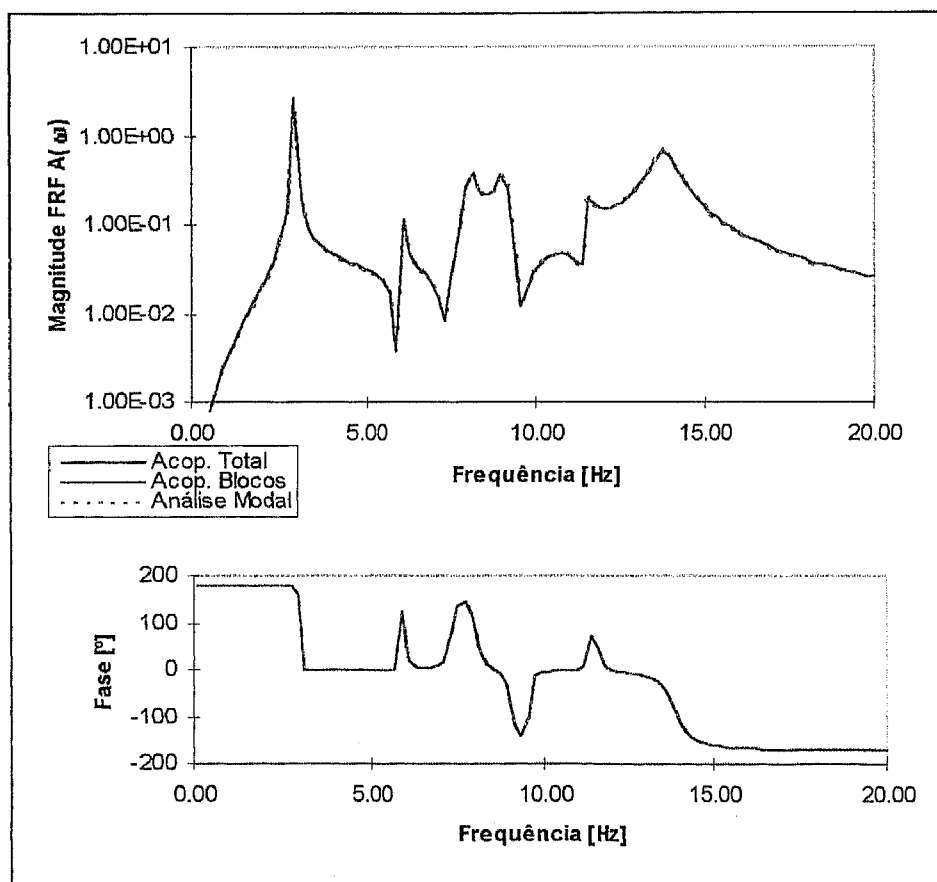


Figura 9.5 - Função de resposta em frequência $H_{3|5}$.

9.2 Redução dos Graus de Liberdade

Um segundo teste aos procedimentos de acoplamento implementados consistiu em restringir o número de graus de liberdade usados no processo de acoplamento. Assim, a matriz FRF do componente 1 foi reduzida a três dos seus cinco graus de liberdade, os graus de liberdade acoplados (4,5), e o (3), deixando o componente 2 completo. Esta situação ocorre frequentemente na prática, pois, por limitações de memória de cálculo ou mesmo experimentais, somos obrigados a usar no processo de acoplamento somente alguns dos graus de liberdade. No entanto, não se deve omitir nenhum dos graus de liberdade que fazem parte dos acoplados, caso contrário não estaremos a modelizar correctamente o acoplamento.

Para este caso, como se pode verificar nas figuras 9.6 e 9.7, continuamos a obter uma coincidência perfeita entre os resultados obtidos por cada uma das três metodologias adoptadas.

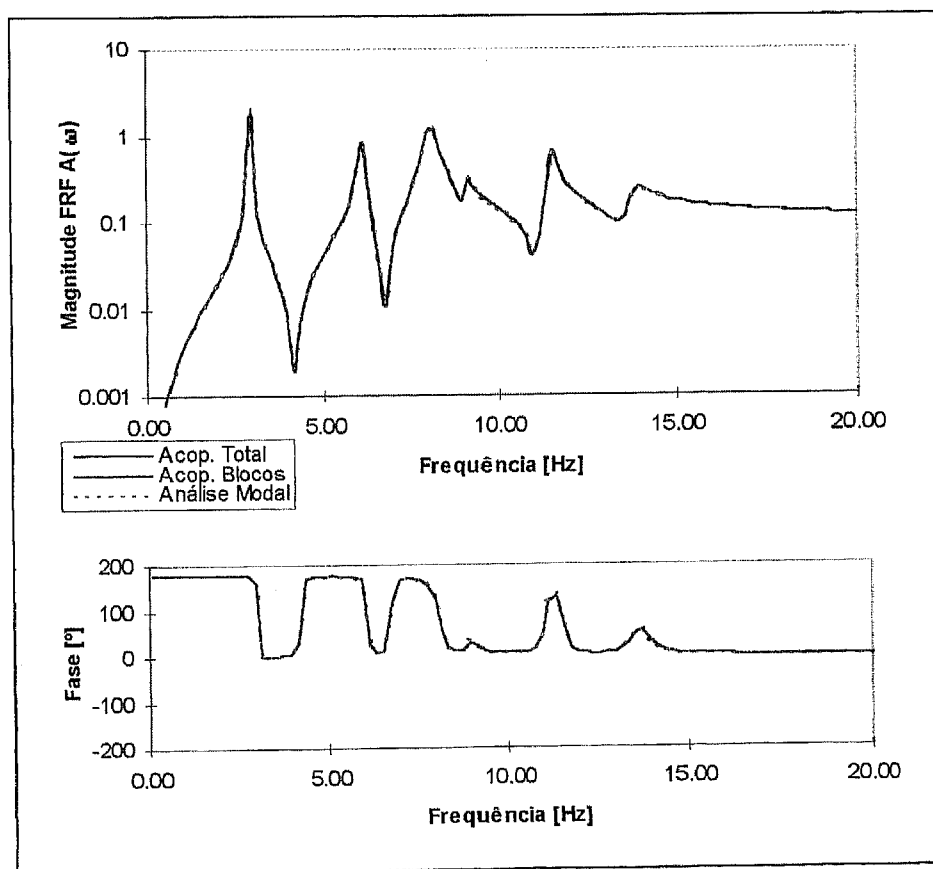


Figura 9.6 - Função de resposta em frequência $H_{4|4}$.

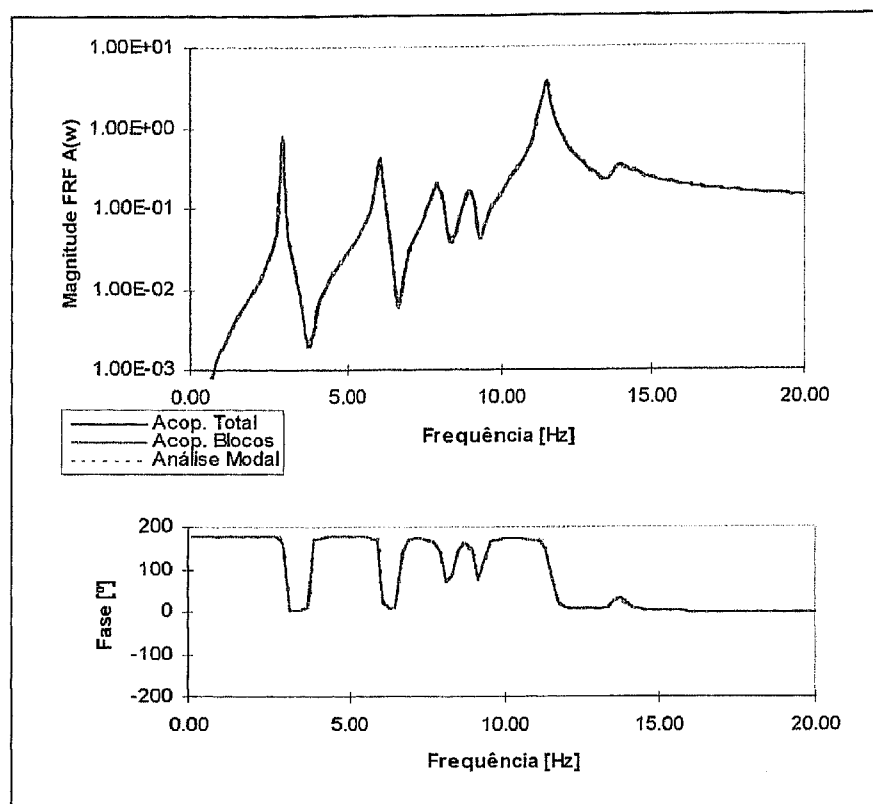


Figura 9.7 - Função de resposta em frequência H_{616} .

9.3 Redução dos Modos Considerados

Para avaliar os efeitos práticos no acoplamento dinâmico decorrentes da ausência de modos naturais nos modelos de resposta dos componentes, analisaram-se dois casos distintos. Em ambos os casos foram retirados modos naturais das funções de resposta em frequência dos componentes. Refira-se que esta situação ocorre também, frequentemente, no estudo de casos experimentais, onde, por limitações do procedimento de análise modal e dos equipamentos usados, somos obrigados a concentrar a análise nos modos relativos às frequências naturais mais baixas.

No primeiro caso foi realizada uma redução aos modos utilizados na obtenção da matriz FRF do componente 1, isto é, na construção das funções de resposta em frequência foi desprezado o último modo.

Nesta situação, como se pode verificar nas figuras 9.8 a 9.10, começam a ocorrer algumas diferenças entre os resultados obtidos por acoplamento dos componentes e por

análise modal do sistema completo, sendo essas diferenças mais importantes na vizinhança da ressonância que foi omitida.

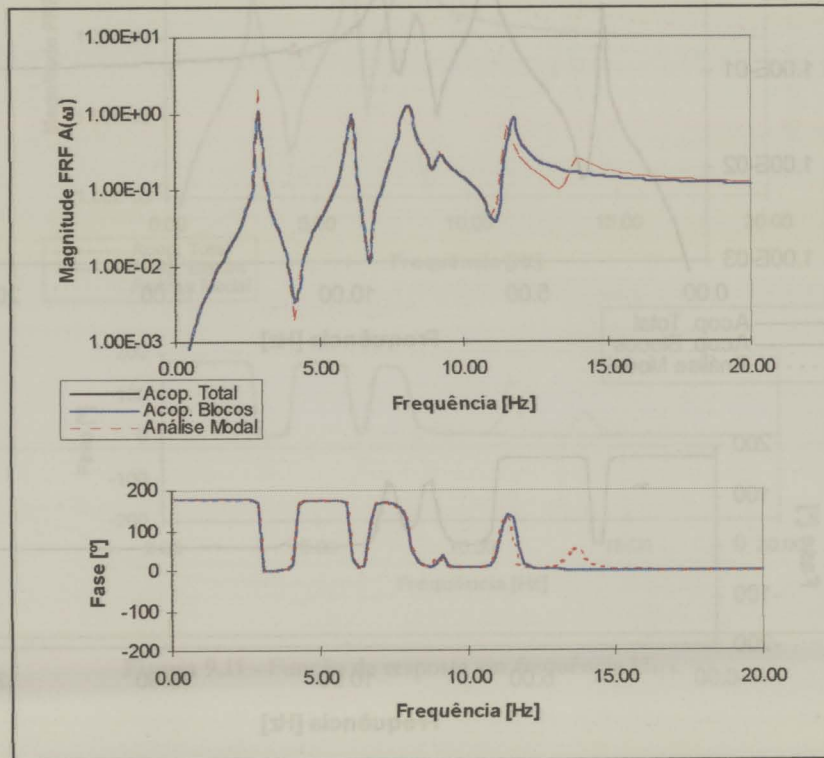


Figura 9.8 - Função de resposta em frequência $H_{4|4}$.

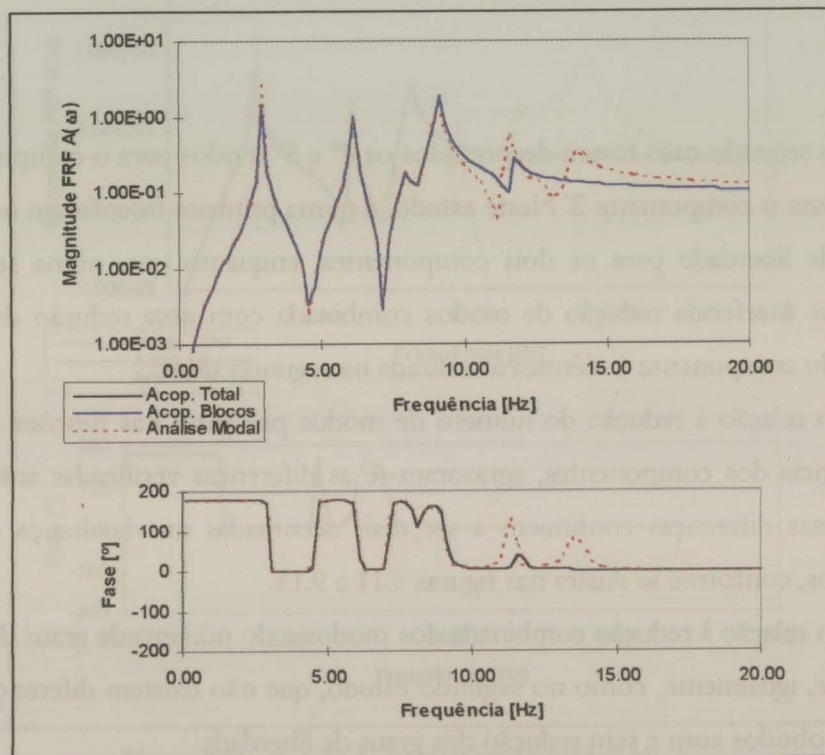


Figura 9.9 - Função de resposta em frequência $H_{2|2}$.

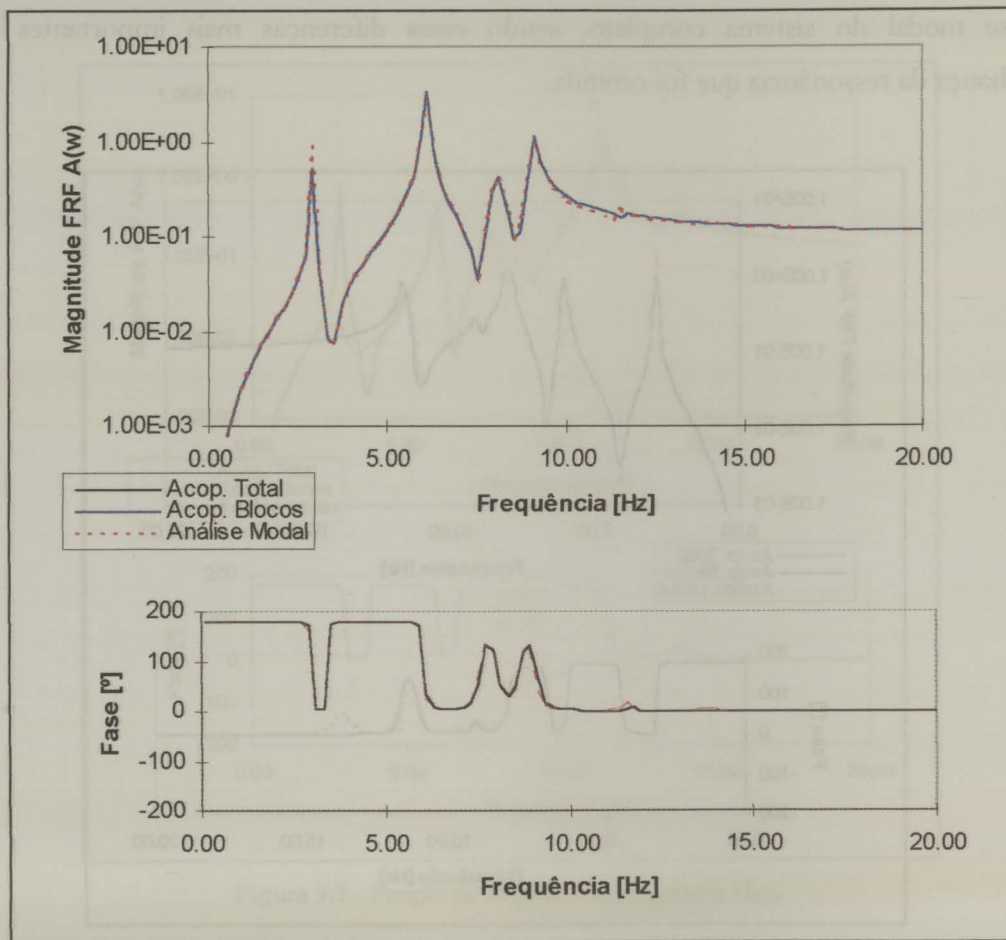


Figura 9.10 - Função de resposta em frequência $H_{1|1}$.

No segundo caso foram desprezados os 4º e 5º modos para o componente 1 e o 3º modo para o componente 2. Neste estudo, e numa primeira fase, foram usados todos os graus de liberdade para os dois componentes, enquanto que, numa segunda fase procedeu-se à referida redução de modos combinada com uma redução dos graus de liberdade do componente 1 idêntica à realizada na segundo teste.

Em relação à redução do número de modos presentes nas funções de resposta em frequência dos componentes, agravaram-se as diferenças verificadas anteriormente, embora essas diferenças continuem a ser mais acentuadas na vizinhança dos modos desprezados, conforme se ilustra nas figuras 9.11 a 9.15.

Em relação à redução combinada dos modos e do número de graus de liberdade, verificou-se, igualmente, como no segundo estudo, que não existem diferenças entre os resultados obtidos com e sem redução dos graus de liberdade.

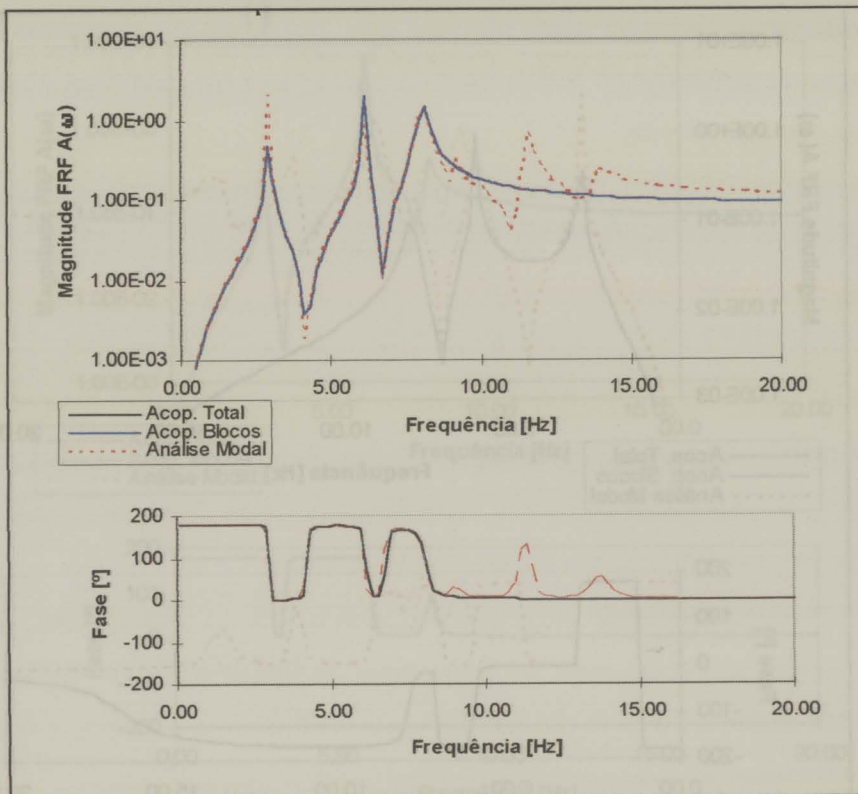


Figura 9.11 - Função de resposta em frequência $H_{4|4}$.

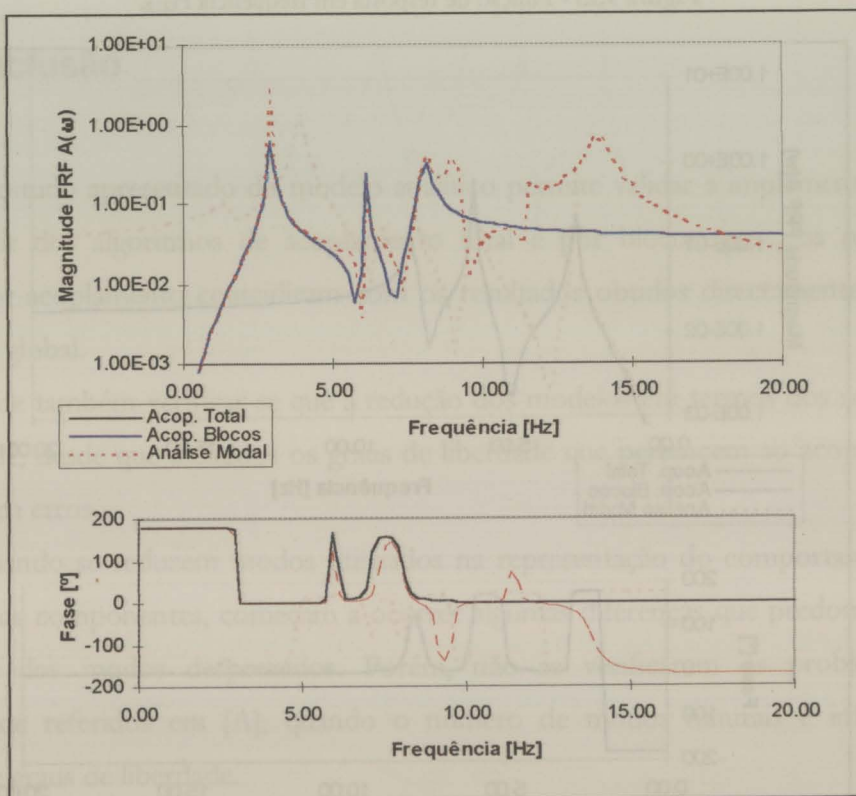


Figura 9.12 - Função de resposta em frequência $H_{3|5}$.

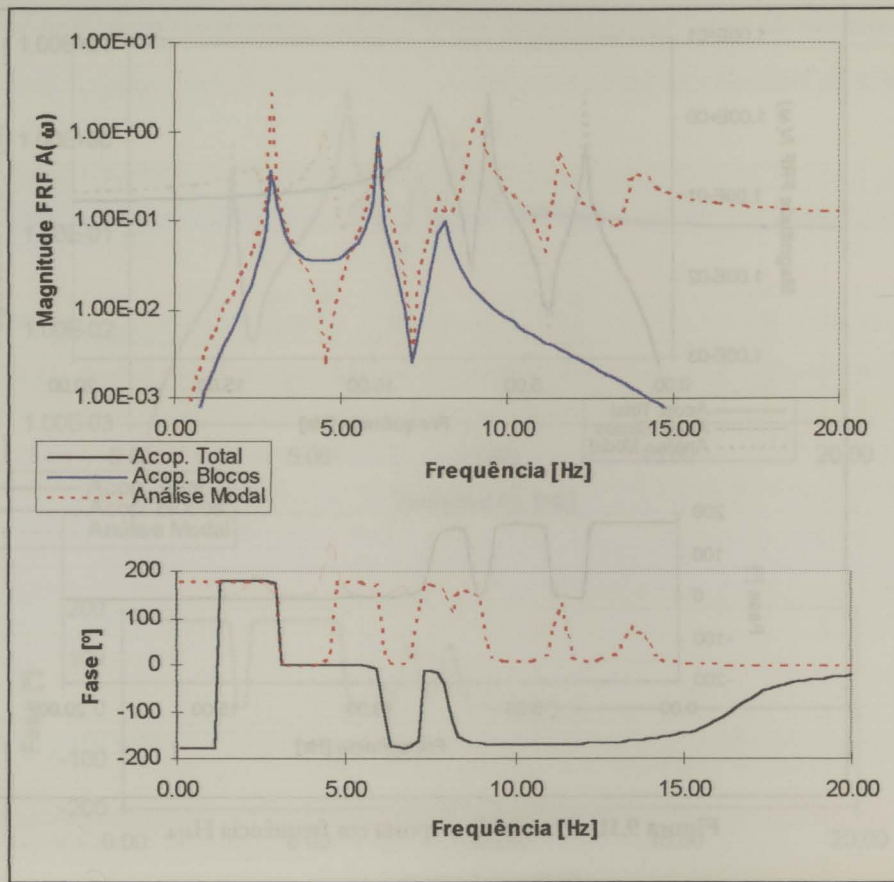


Figura 9.13 - Função de resposta em frequência $H_{2|2}$.

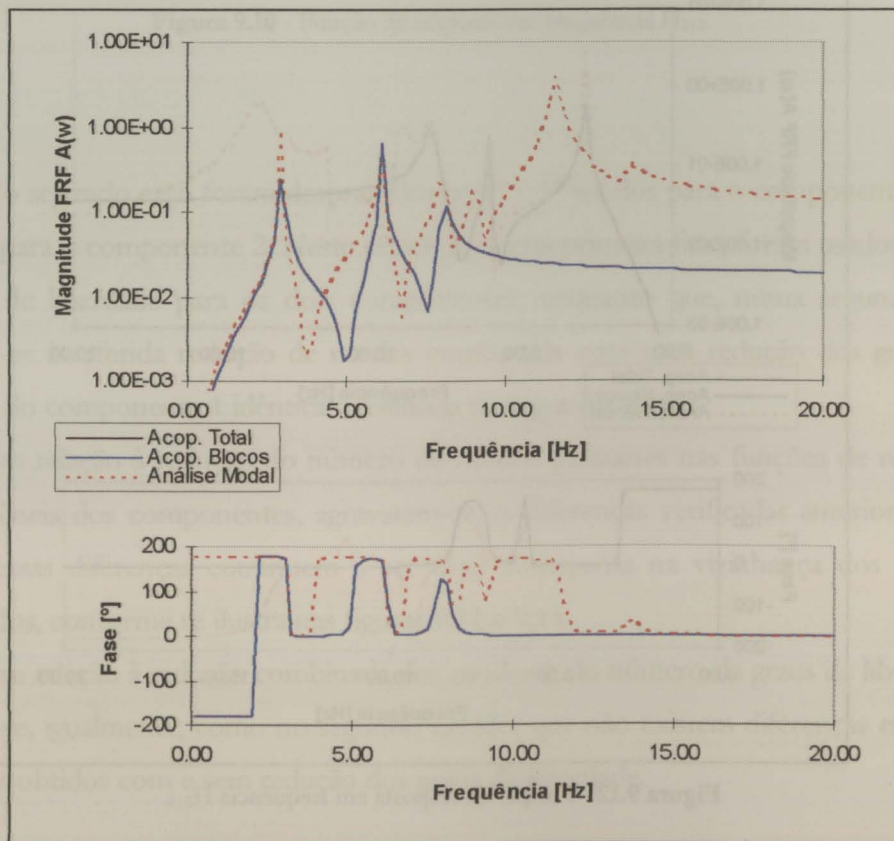
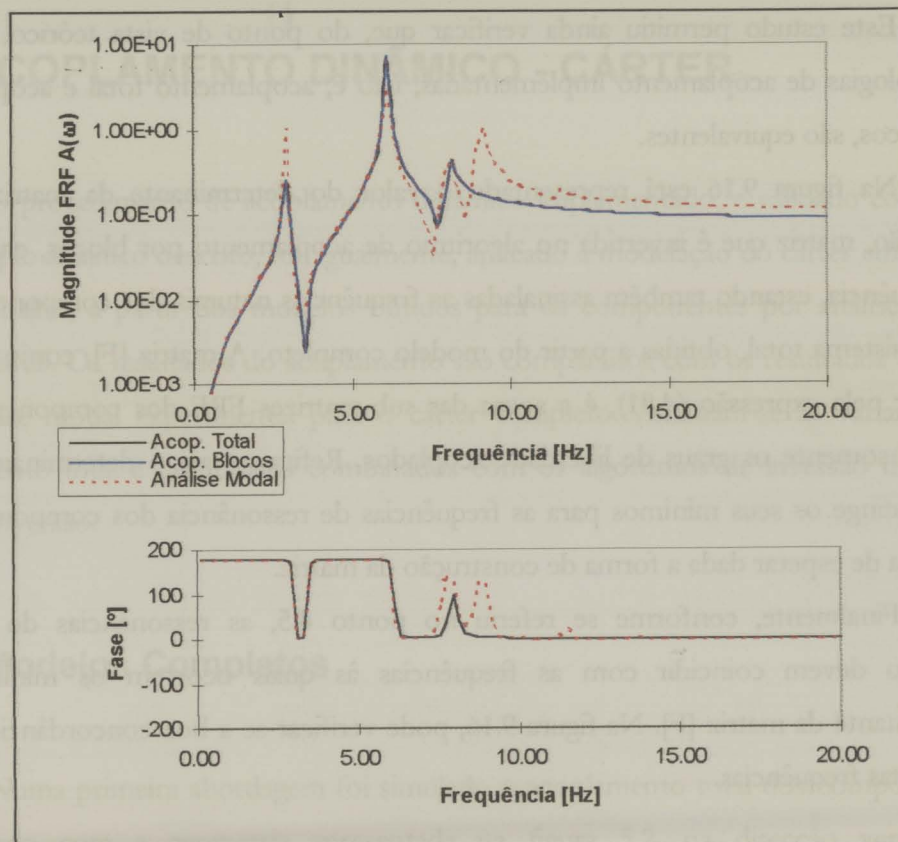


Figura 9.14 - Função de resposta em frequência $H_{6|6}$.


 Figura 9.15 - Função de resposta em frequência $H_{1|1}$.

9.4 Conclusão

O estudo apresentado do modelo analítico permite validar a implementação em computador dos algoritmos de acoplamento total e por blocos, pois, os resultados obtidos por acoplamento coincidiram com os resultados obtidos directamente a partir do sistema global.

Pode também verificar-se que a redução dos modelos em termos dos seus graus de liberdade, desde que incluídos os graus de liberdade que pertencem ao acoplamento, não provoca erros.

Quando se reduzem modos utilizados na representação do comportamento de cada um dos componentes, começam a ocorrer algumas diferenças que predominam na vizinhança dos modos desprezados. Porém, não se verificaram os problemas de singularidade referidos em [A], quando o número de modos naturais é inferior ao número de graus de liberdade.

Este estudo permitiu ainda verificar que, do ponto de vista teórico, as duas metodologias de acoplamento implementadas, isto é, acoplamento total e acoplamento por blocos, são equivalentes.

Na figura 9.16 está representado o valor do determinante da matriz $[F]$ da expressão, matriz que é invertida no algoritmo de acoplamento por blocos, em função da frequência, estando também assinaladas as frequências naturais dos componentes 1 e 2 e do sistema total, obtidas a partir do modelo completo. A matriz $[F]$, como se pode verificar pela expressão (4.81), é a soma das sub-matrizes FRF dos componentes que contêm somente os graus de liberdade acoplados. Refira-se que o determinante desta matriz atinge os seus mínimos para as frequências de ressonância dos componentes, o que seria de esperar dada a forma de construção da matriz.

Finalmente, conforme se referiu no ponto 4.5, as ressonâncias do sistema acoplado devem coincidir com as frequências às quais ocorrem os mínimos do determinante da matriz $[F]$. Na figura 9.16, pode verificar-se a boa concordância obtida entre estas frequências.

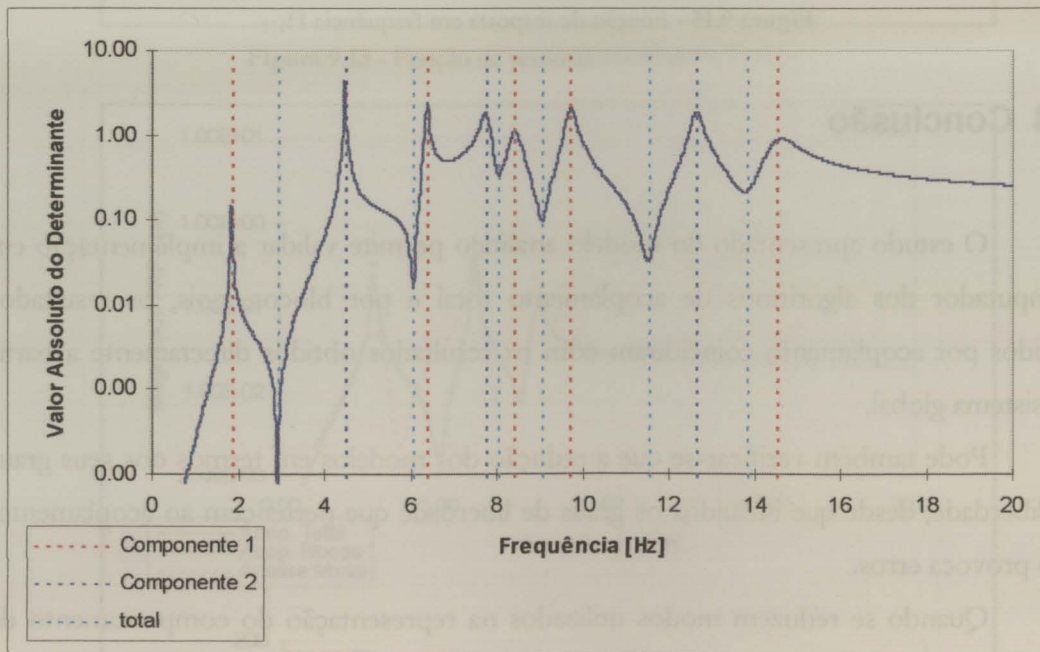


Figura 9.16 - Valor absoluto do determinante da matriz invertida no acoplamento por blocos.

10. ACOPLAMENTO DINÂMICO - CÂRTER

O procedimento de acoplamento dinâmico implementado, e validado com base no exemplo analítico descrito, foi, igualmente, aplicado à modelação do cârter em estudo neste trabalho, a partir dos modelos obtidos para os componentes por análise modal experimental. Os resultados do acoplamento são comparados com os resultados obtidos por análise modal experimental para o cârter completo. Analisam-se as variantes de acoplamento total e por blocos combinados com os algoritmos de inversão directa e pseudo inversão.

10.1 Modelos Completos

Numa primeira abordagem foi simulado o acoplamento total dos componentes. De acordo com a geometria apresentada na figura 5.2, na direcção vertical, o acoplamento realiza-se entre os graus de liberdade 'i' e 's', e, na horizontal, entre os graus de liberdade 'p' e 'q'. Refira-se que estes últimos GDLs não são exactamente os pontos de acoplamento, pois nesses pontos não era possível fixar o acelerómetro na horizontal, tendo-se utilizado os pontos mais próximos onde essa colocação foi possível.

Este caso de acoplamento foi executado com os dois algoritmos de acoplamento implementados e utilizando o algoritmo de inversão directa. Contudo, para o algoritmo de acoplamento global, houve necessidade de restringir os GDLs considerados aos GDLs acoplados e a outros dez distribuídos pela geometria. No entanto, esta restrição não provoca erros, como se pôde verificar quando se estudou o exemplo analítico.

Esta primeira modelação não foi bem sucedida, tendo-se obtido FRFs para o sistema acoplado semelhantes às representadas na figura 10.1, onde se representa a FRF acelerabilidade directa, ponto 22, obtida por acoplamento dos componentes e a medida. Este comportamento verificou-se para ambos os algoritmos de acoplamento implementados, acoplamento global e acoplamento por blocos. Porém, no caso do acoplamento global, onde é usada a matriz FRF completa, ocorreram problemas numéricos que conduziam mesmo à interrupção do cálculo, por "over flow". Estes erros atribuem-se ao mau condicionamento e elevada dimensão, das matrizes FRF, que

possuíam, para determinadas frequências, determinantes de ordem de grandeza inferior a 10^{-30} .

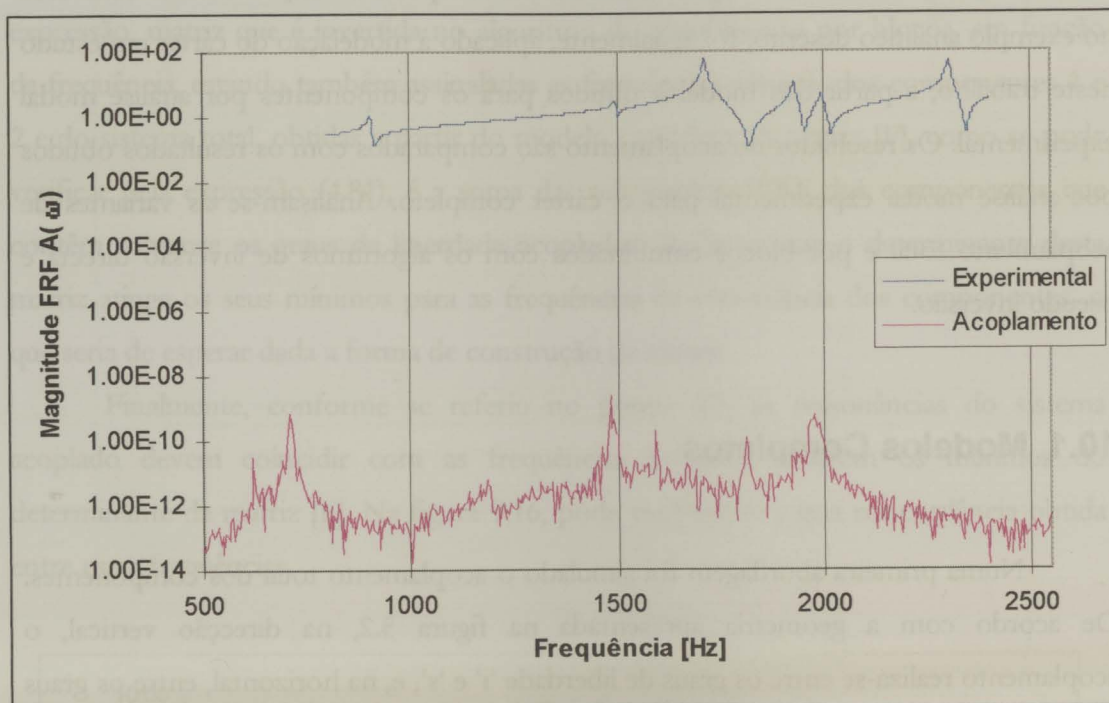


Figura 10.1 - FRF directa $H_{22|22}$, experimental e obtida por acoplamento total.

Assim sendo, e dado o mau condicionamento verificado para as matrizes, tentou-se a aplicação do conceito da pseudo inversa, utilizando o algoritmo de inversão por decomposição em valores singulares. Neste caso, à medida que se iam desprezando valores singulares, isto é, aumentando a percentagem SVD, conforme descrito em 8.2, melhorava o aspecto das FRFs obtidas por acoplamento, apresentando mesmo uma ordem de grandeza idêntica à das FRFs medidas. Nas figuras 10.2 a 10.4 estão representadas as FRFs de acelerabilidade directa, ponto 22, obtida com o acoplamento por blocos e a medida experimentalmente.

Nestas condições, utilizando a pseudo-inversa, o algoritmo de acoplamento global voltou a mostrar-se muito mais instável, do ponto de vista numérico, que o de acoplamento por blocos. Este facto justifica-se por aquele realizar, a cada frequência, duas vezes a inversão de matrizes, enquanto que no acoplamento por blocos essa

inversão só se realiza uma vez. Este problema foi já referido quando da apresentação dos dois algoritmos.

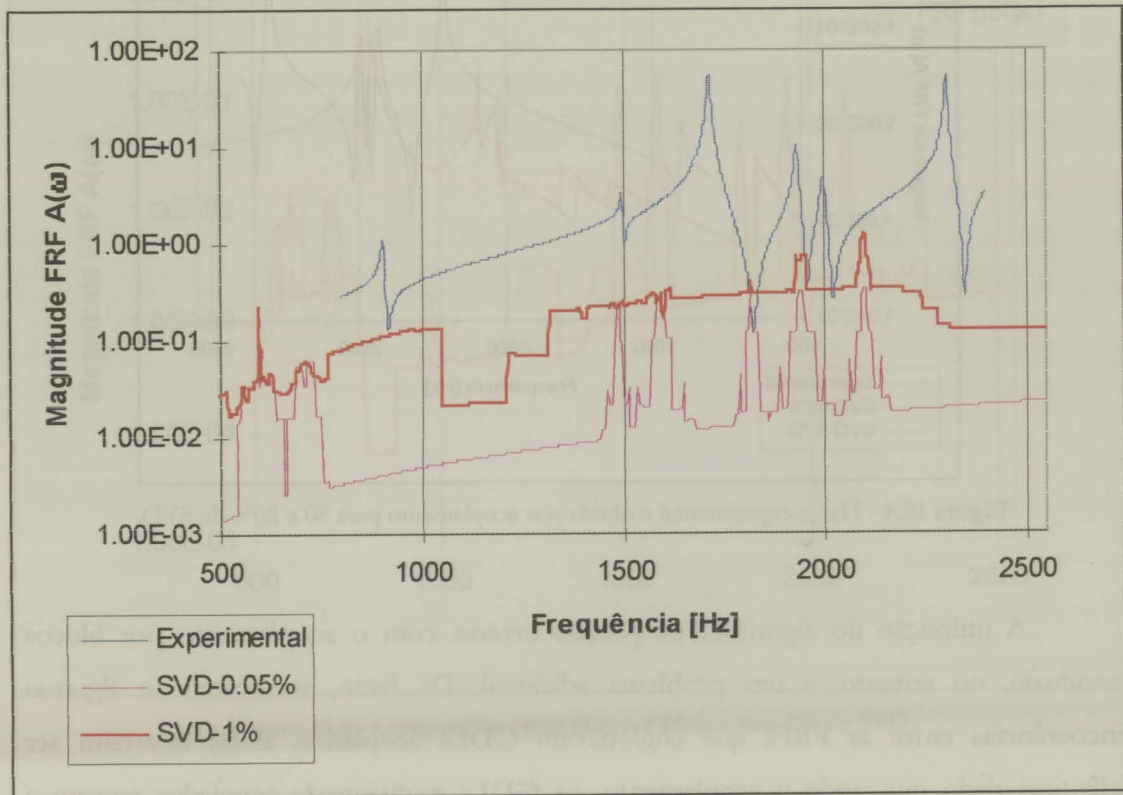


Figura 10.2 - $H_{22|22}$ experimental e obtida por acoplamento para 0.05 e 1% de SVD.

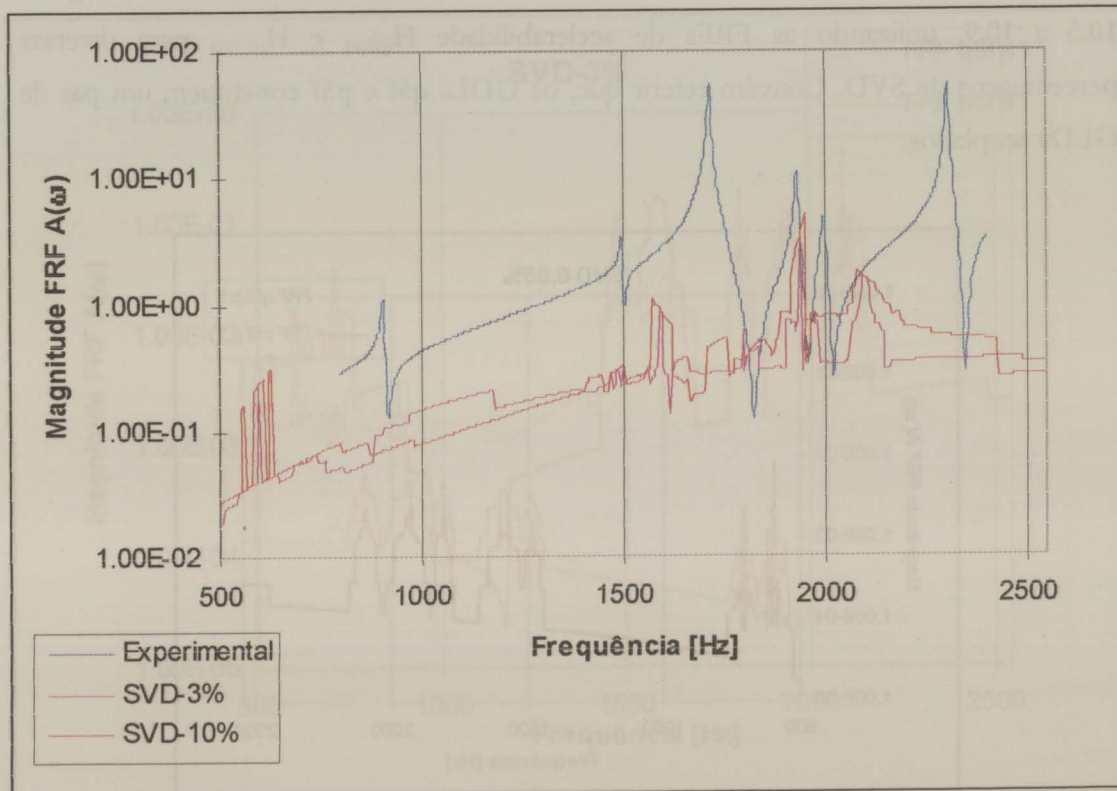


Figura 10.3 - $H_{22|22}$ experimental e obtida por acoplamento para 3 e 10% de SVD.

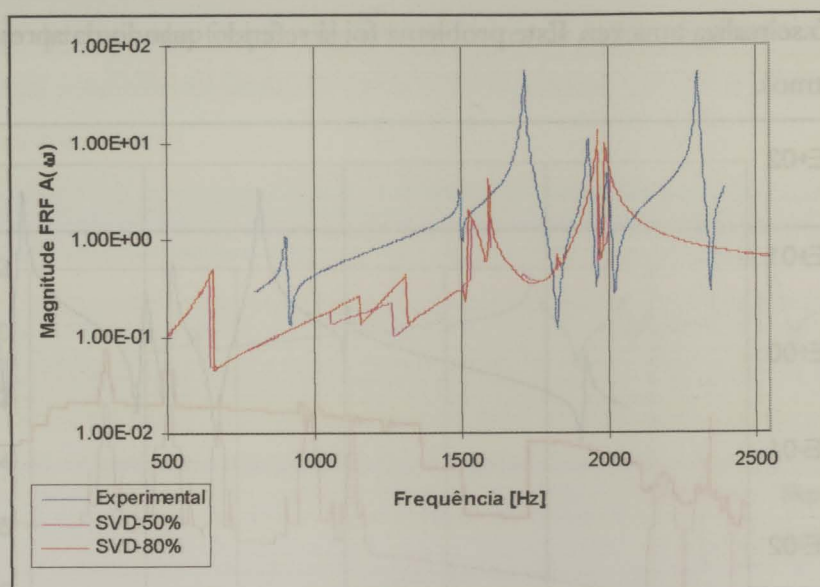


Figura 10.4 - $H_{22|22}$ experimental e obtida por acoplamento para 50 e 80% de SVD.

A utilização do algoritmo da pseudo inversa com o acoplamento por blocos conduziu, no entanto, a um problema adicional. De facto, verificaram-se algumas incoerências entre as FRFs que englobavam GDLs acoplados. Estas deveriam ser idênticas dado que, após o acoplamento, os GDLs mutuamente acoplados passam a possuir o mesmo comportamento. Os referidas incoerências são ilustradas nas figuras 10.5 a 10.9, utilizando as FRFs de acelerabilidade $H_{q5f|s1}$ e $H_{p5f|s1}$, para diversas percentagens de SVD. Convém referir que, os GDLs q5f e p5f constituem um par de GLDs acoplados.

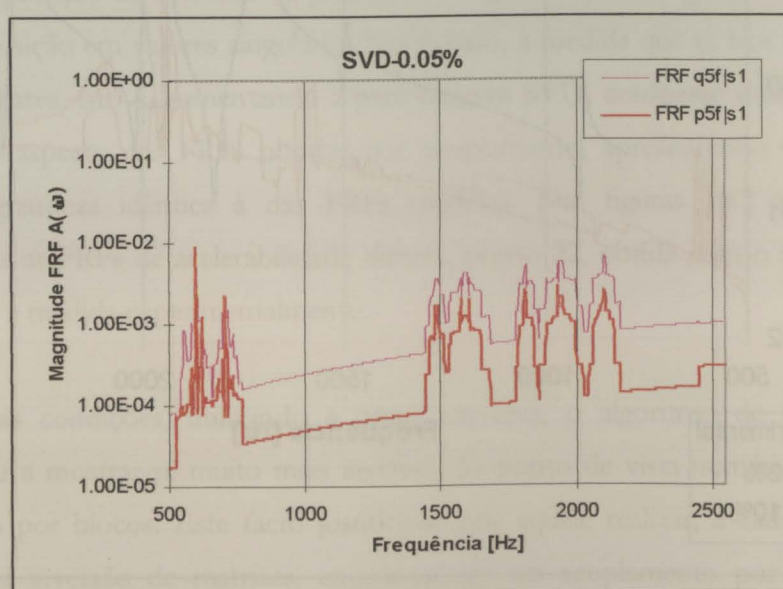


Figura 10.5 - Comparação entre $H_{q5f|s1}$ e $H_{p5f|s1}$ para 0.05% de SVD.

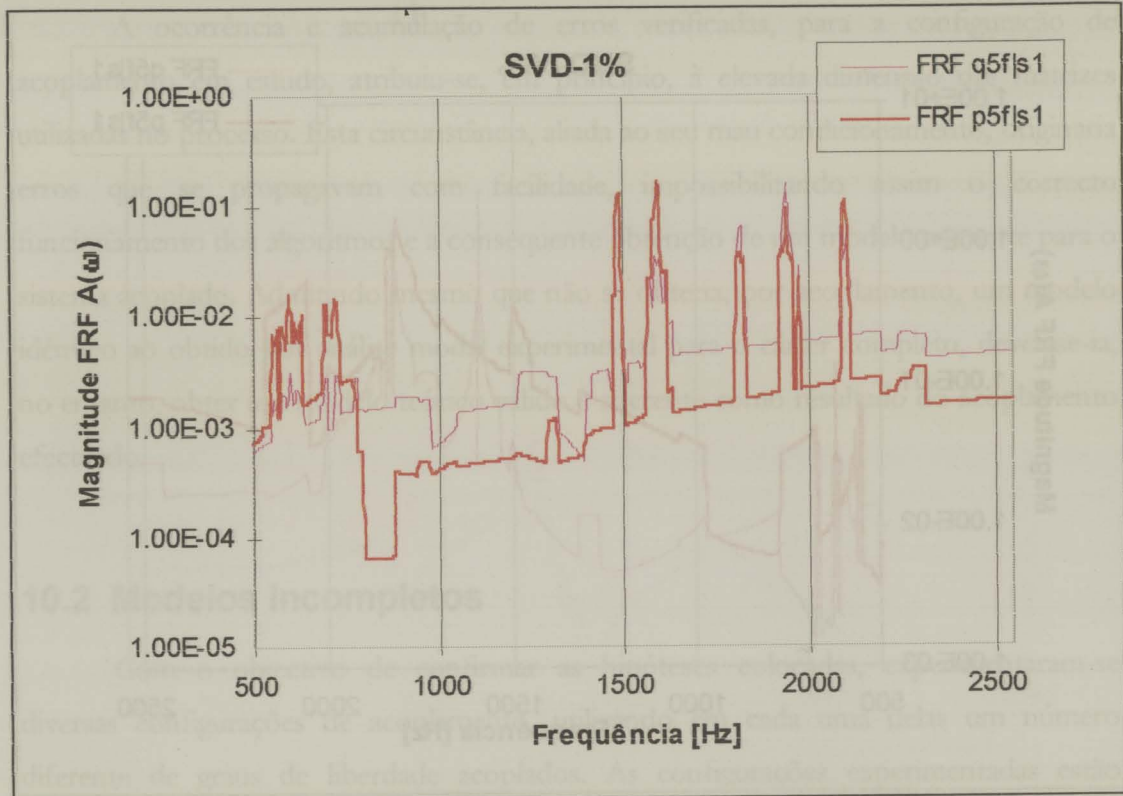


Figura 10.6 - Comparação entre $H_{q5f|s1}$ e $H_{p5f|s1}$ para 1% de SVD.

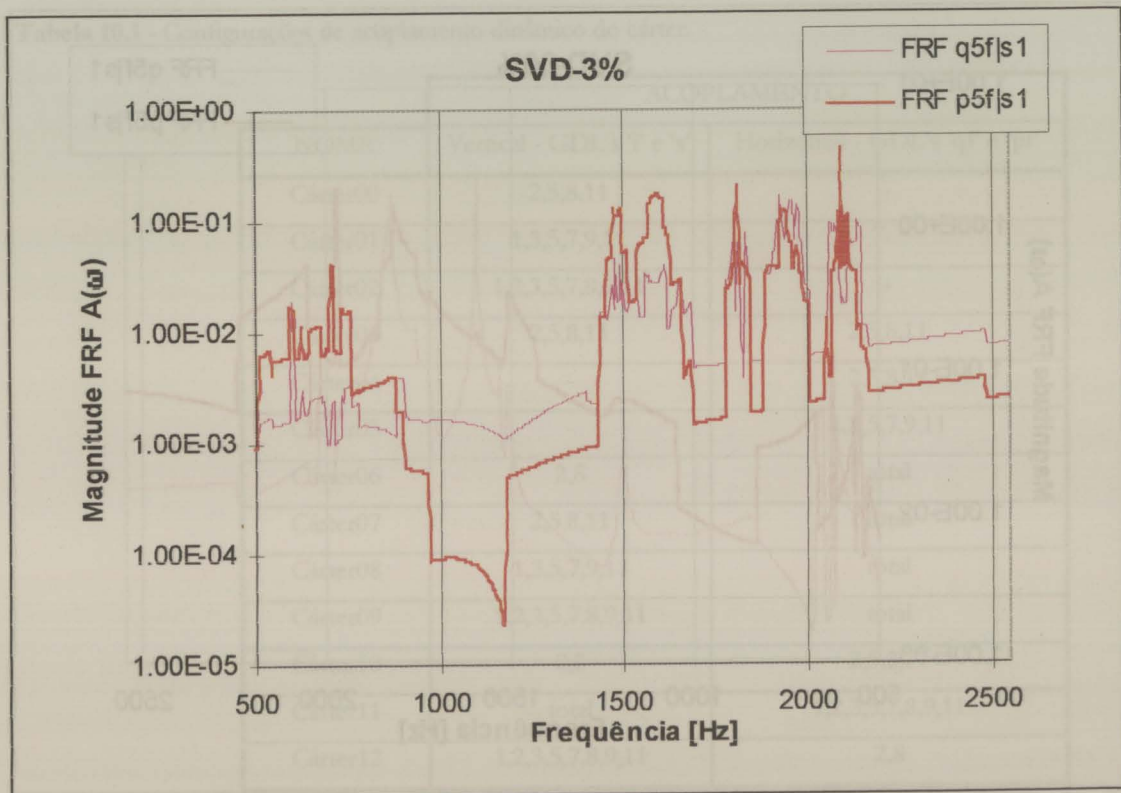


Figura 10.7 - Comparação entre $H_{q5f|s1}$ e $H_{p5f|s1}$ para 3% de SVD.

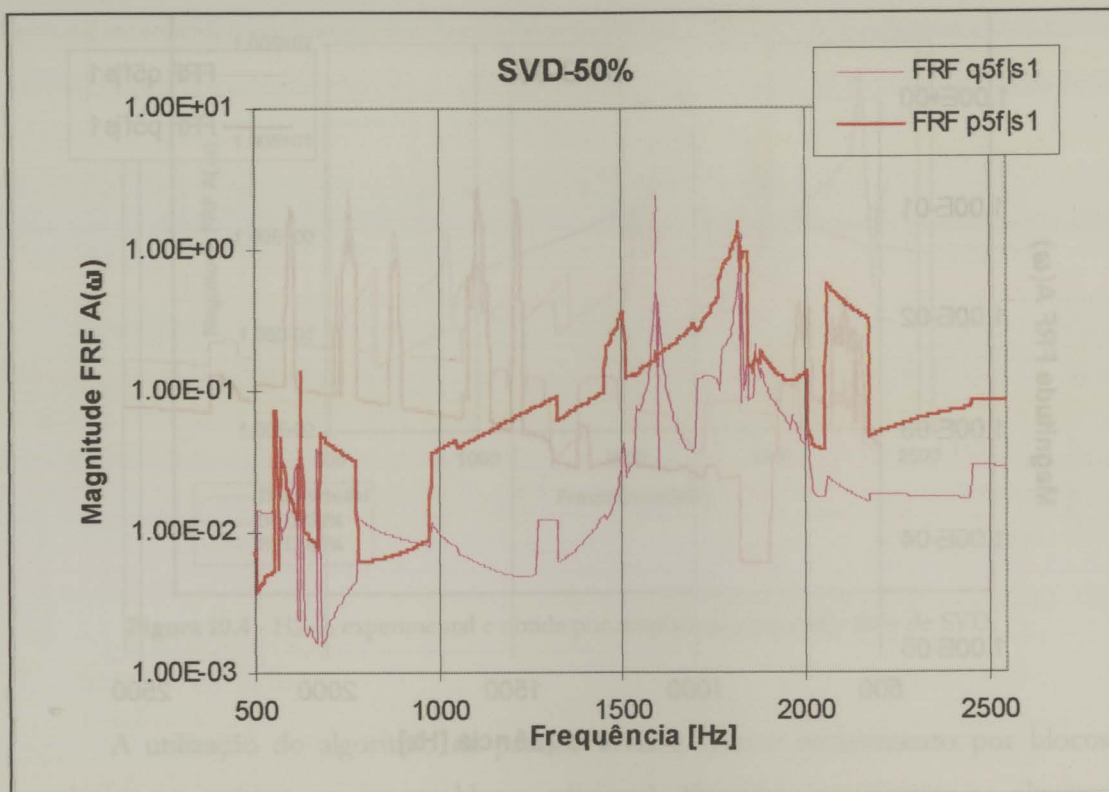


Figura 10.8 - Comparação entre $H_{q5f|s1}$ e $H_{p5f|s1}$ para 50% de SVD.

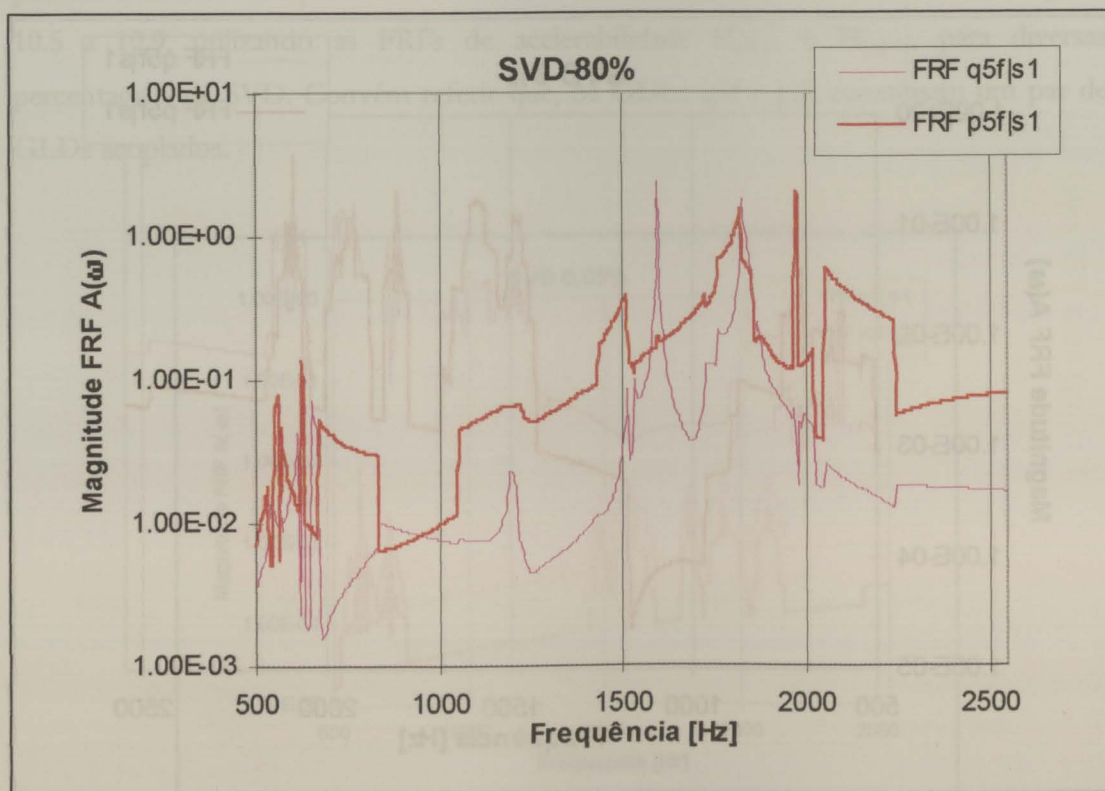


Figura 10.9 - Comparação entre $H_{q5f|s1}$ e $H_{p5f|s1}$ para 80% de SVD.

A ocorrência e acumulação de erros verificadas, para a configuração de acoplamento em estudo, atribuiu-se, em princípio, à elevada dimensão das matrizes utilizadas no processo. Esta circunstância, aliada ao seu mau condicionamento, originaria erros que se propagavam com facilidade, impossibilitando assim o correcto funcionamento dos algoritmos e a consequente obtenção de um modelo coerente para o sistema acoplado. Admitindo mesmo que não se obteria, por acoplamento, um modelo idêntico ao obtido por análise modal experimental para o cárter completo, dever-se-ia, no entanto, obter um modelo teórico válido e coerente como resultado do acoplamento efectuado.

10.2 Modelos Incompletos

Com o objectivo de confirmar as hipóteses colocadas, experimentaram-se diversas configurações de acoplamento, utilizando em cada uma delas um número diferente de graus de liberdade acoplados. As configurações experimentadas estão descritas na tabela 10.1, e foram realizadas com o algoritmo de acoplamento por blocos, pois, como já se referiu, este permite, todavia, obter melhores resultados.

Tabela 10.1 - Configurações de acoplamento dinâmico do cárter.

NOME	ACOPLAMENTO	
	Vertical - GDL's 'i' e 's'	Horizontal - GDL's 'qF' e 'pF'
Cárter00	2,5,8,11	-
Cárter01	1,3,5,7,9,11	-
Cárter02	1,2,3,5,7,8,9,11	-
Cárter03	2,5,8,11	2,5,8,11
Cárter04	-	2,5,8,11
Cárter05	-	1,3,5,7,9,11
Cárter06	2,8	total
Cárter07	2,5,8,11	total
Cárter08	1,3,5,7,9,11	total
Cárter09	1,2,3,5,7,8,9,11	total
Cárter10	2,8	2,5,8,11
Cárter11	total	1,2,3,5,7,8,9,11
Cárter12	1,2,3,5,7,8,9,11	2,8
Cárter13	total	-
Cárter14	total	total

Refira-se que a configuração designada por “Cárter14” é a configuração apresentada anteriormente.

Nas figuras 10.10 a 10.12 estão representadas as FRFs de acelerabilidade directa, ponto 22, para as diversas configurações experimentadas.

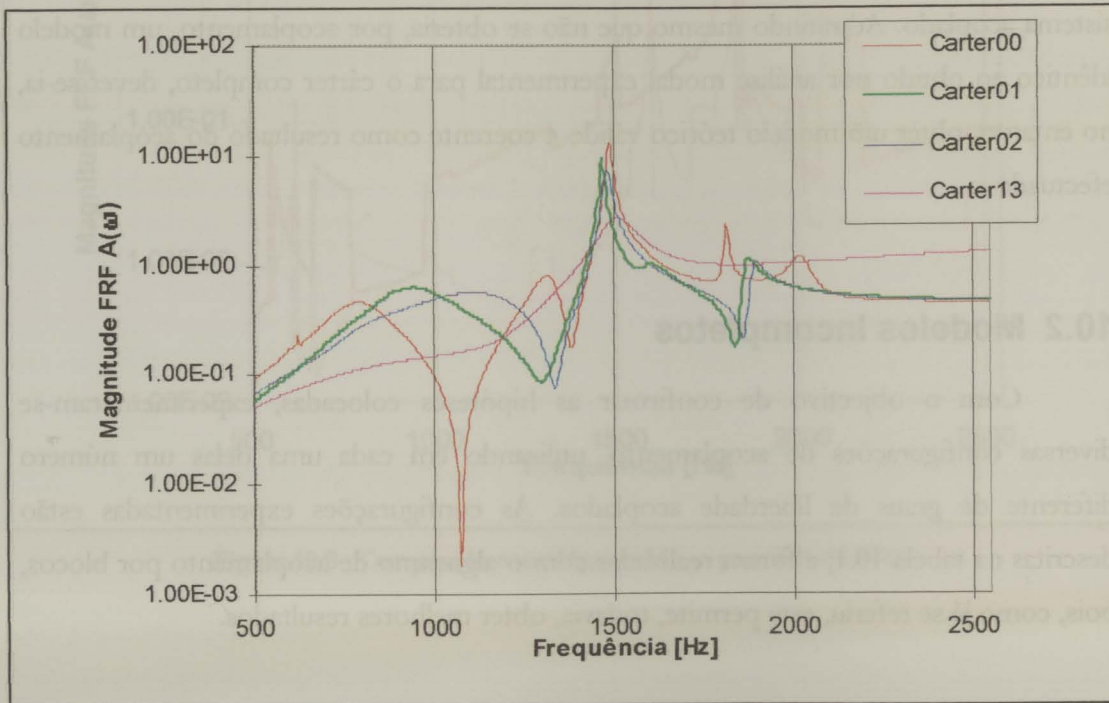


Figura 10.10 - FRF $H_{22|22}$ para diversas configurações de acoplamento.

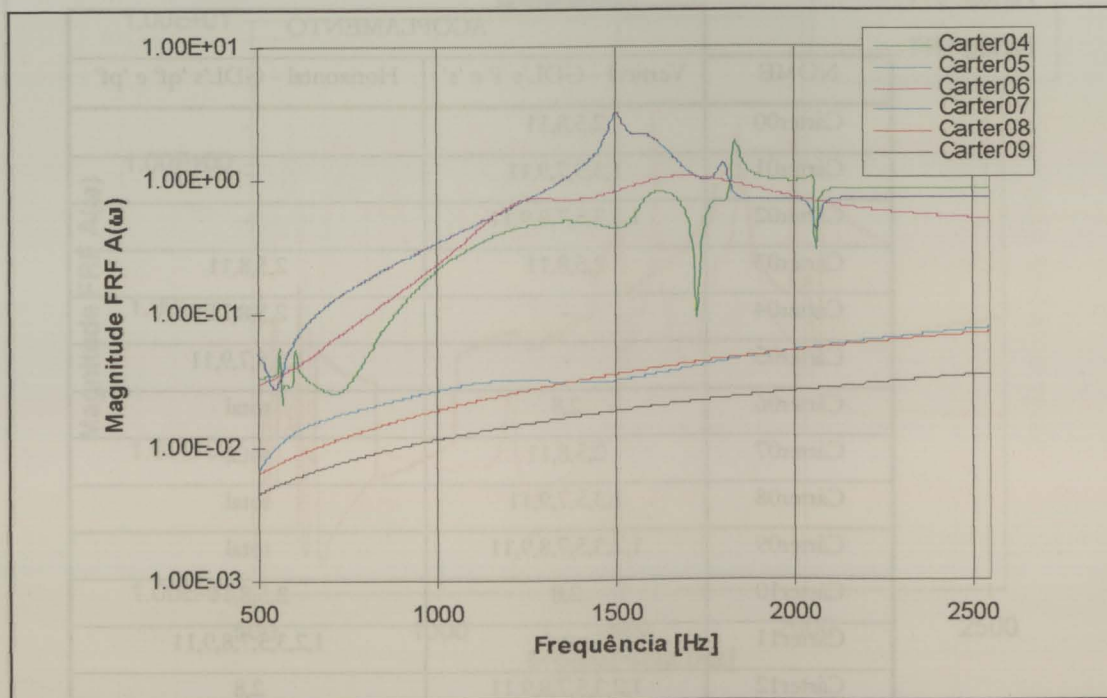


Figura 10.11 - FRF $H_{22|22}$ para diversas configurações de acoplamento.

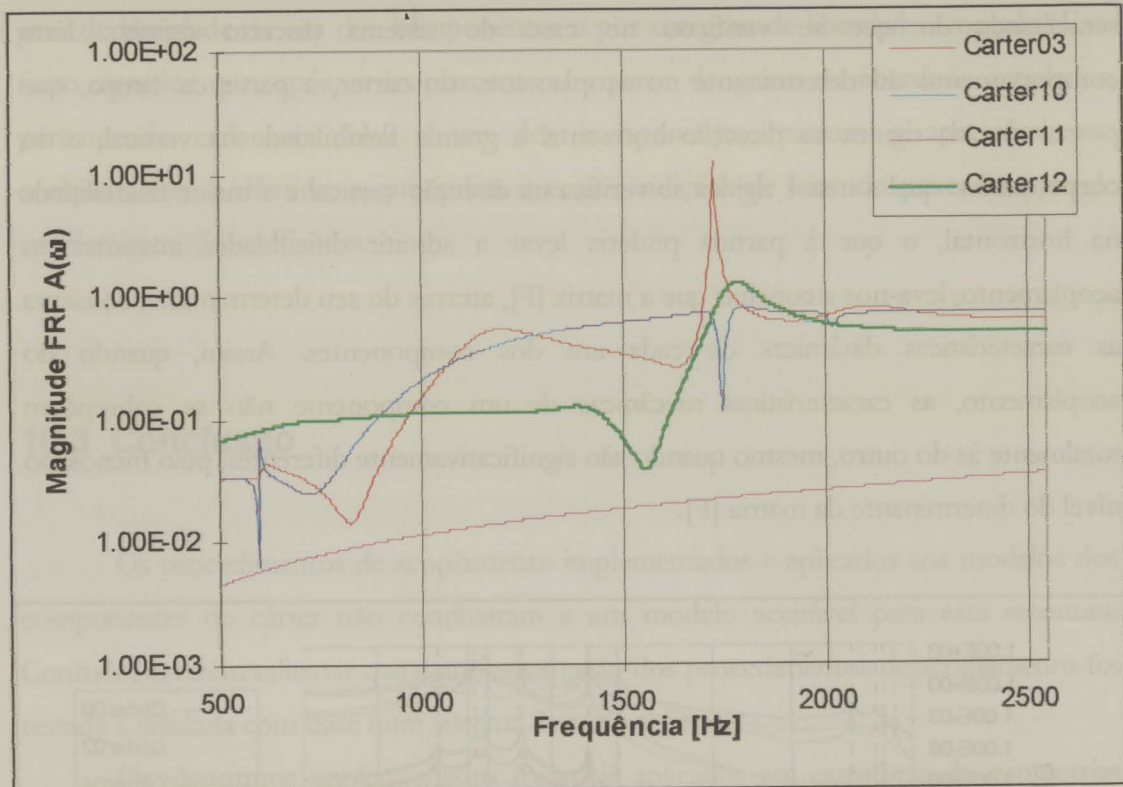


Figura 10.12 - FRF $H_{22|22}$ para diversas configurações de acoplamento.

Como se pode observar nas figuras 10.10 a 10.12, à medida que se aumenta o número de graus de liberdade acoplados, é sistemática a tendência para uma FRF aparentemente sem ressonâncias. Refira-se que, em consequência do aumento do número de graus de liberdade acoplados aumenta também a dimensão da matriz a inverter, pois estamos a usar o algoritmo de acoplamento por blocos. No limite, ao incluir nos graus de liberdade acoplados todos os graus de liberdade das direcções vertical e horizontal, as FRFs obtidas por acoplamento degeneram em FRFs do tipo já anteriormente apresentada, na figura 10.1.

A tendência anteriormente verificada, até a degeneração da FRF, pode ser constatada na figura 10.13, onde está representado o determinante da matriz $[F]$ em função da frequência para algumas das configurações experimentadas. Esta matriz é invertida no processo de acoplamento por blocos. Na figura 10.13 pode observar-se que, à medida que se aumenta o número de graus de liberdade acoplados, o determinante tende para valores muito reduzidos. Nesta figura, onde estão também representadas as frequências de ressonância dos componentes, corpo e tampa, assim como as do cârter completo, obtidas por análise modal experimental, pode verificar-se que o determinante atinge valores máximos nas ressonâncias locais de cada um dos componentes, à

semelhança do que se verificou no caso do sistema discreto teórico. Este comportamento do determinante no acoplamento do cárter, a partir da tampa, que possui elevada rigidez na direcção horizontal e grande flexibilidade na vertical, e do corpo, para o qual a maior rigidez se verifica na direcção vertical e a maior flexibilidade na horizontal, o que à partida poderia levar a admitir dificuldades inerentes ao acoplamento, leva-nos a concluir que a matriz $[F]$, através do seu determinante, conserva as características dinâmicas de cada um dos componentes. Assim, quando do acoplamento, as características mecânicas de um componente não se sobrepõem totalmente às do outro, mesmo quando são significativamente diferentes, pelo menos, ao nível do determinante da matriz $[F]$.

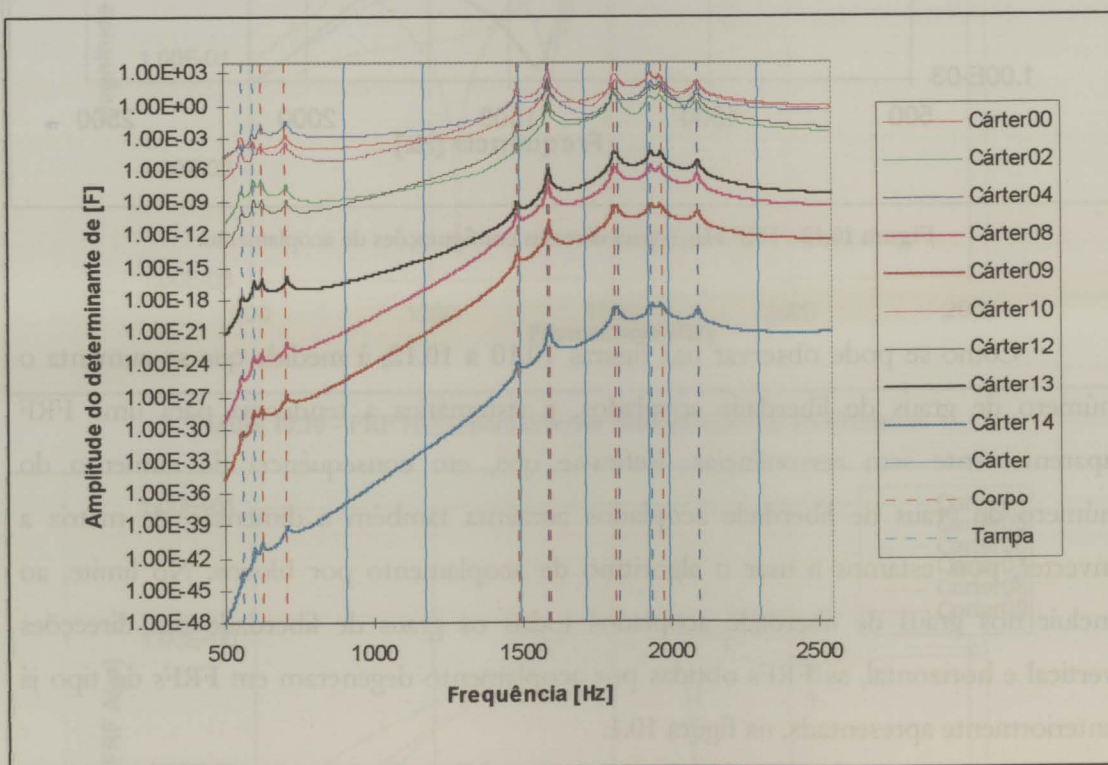


Figura 10.13 - Amplitude do determinante da matriz $[F]$ para diversas configurações de acoplamento.

Como nota final, convém salientar que o cálculo da matriz inversa de $[F]$ é efectuado correctamente para qualquer uma das configurações experimentadas, pois o mesmo foi verificado multiplicando a matriz inversa pela original, obtendo-se sempre uma matriz identidade.

Refira-se ainda que, até ocorrer a degeneração das FRFs, quando foram considerados no acoplamento todos os graus de liberdade disponíveis, verificou-se sempre coerência entre qualquer par de FRFs correspondentes, isto é, definidas por um

grau de liberdade de um dos componentes e por um grau de liberdade acoplado. Este facto significa que, após o acoplamento, os pares de graus de liberdade acoplados, pertencendo cada um deles a um dos componentes, passam a apresentar um comportamento idêntico, o que indica que as condições de base do procedimento de acoplamento são verificadas.

10.3 Conclusão

Os procedimentos de acoplamento implementados e aplicados aos modelos dos componentes do cárter não conduziram a um modelo aceitável para esta estrutura. Contudo, convém salientar que a implementação dos procedimentos de acoplamento foi testada e validada com base num sistema discreto teórico.

Os algoritmos implementados foram já aplicados em estruturas de geometrias simples, tais como vigas e placas ^{[10],[11],[12],[13]}. Contudo, para o caso em estudo, estes algoritmos não funcionaram correctamente. Este facto pode não ser alheio à elevada complexidade geométrica do cárter, assim como dos seus componentes, a tampa e o corpo. A referida complexidade geométrica, originou, no caso da tampa, a existência de modos localizados, os quais provocam elevados desequilíbrios na matriz FRF, contribuindo deste modo para ampliar o seu mau condicionamento. Adicionalmente, o procedimento de acoplamento assume que os graus de liberdade acoplados são ligados com rigidez infinita, mas os componentes do cárter são ligados por ligações aparafusadas das quais se desconhecem as características dinâmicas.

Na construção dos modelos dos componentes, foram introduzidas duas simplificações que, de alguma forma, podem também contribuir para o incorrecto funcionamento do processo de acoplamento neste caso. Uma delas, foi a não inclusão dos graus de liberdade de rotação, pois não se dispunha do equipamento necessário para executar a respectiva medição. Convém, contudo referir que a medição dos graus de liberdade de rotação iria, provavelmente, gerar problemas. De facto, se as medições para a análise da tampa apresentaram algumas dificuldades ligadas à dimensão do acelerómetro utilizado, conforme é descrito no ponto 7.2, caso se tivesse que usar o habitual dispositivo em forma de $T^{(9)}$ para medir rotações, as dificuldades atrás referidas iriam ser agravadas.

Uma outra possível fonte de erros foi o facto de não se considerarem os resíduos nos modelos matemáticos dos componentes. Contudo, caso se pretendesse contabilizar os referidos resíduos, havia a necessidade de dispor de, pelo menos, medições de FRFs para todos os termos das sub-matrizes FRF de cada um dos componentes e relativas aos 24 graus de liberdade acoplados. Mesmo considerando que estas sub-matrizes são simétricas, seriam necessárias 600 medições de FRFs e o posicionamento do excitador em 48 pontos. Porém, realizando este número mínimo de medições, e admitindo que o processo de acoplamento conduziria a um modelo do carácter completo, poderíamos obter as frequências naturais e amortecimentos modais do carácter. Mas, em relação às suas formas naturais, só poderíamos conhecer o comportamento dos pontos de acoplamento, o que não seria representativo do comportamento global do carácter. Convém ainda referir que, caso pretendamos conhecer as frequências naturais e factores de amortecimento do carácter completo, é suficiente realizar a medição de uma FRF. E, no caso da análise modal realizada ao carácter, foi possível identificar os seus primeiros 7 modos naturais através da realização de 133 medições com um só ponto de excitação.

11. CONCLUSÃO

O objectivo fundamental deste trabalho consistia na aplicação das metodologias de análise modal experimental e de acoplamento dinâmico na modelação do comportamento do carácter de uma caixa de transferência, na perspectiva de identificar as características dinâmicas estruturais do carácter e estabelecer os regimes críticos de funcionamento da caixa, assim como de experimentar a aplicabilidade do acoplamento dinâmico a uma estrutura de geometria complexa. Ainda que procurando incutir um carácter prático a este trabalho, o estudo desenvolvido dirigiu-se, igualmente, para a formulação, discussão e implementação de algoritmos da técnica de análise modal e, em particular, do acoplamento dinâmico.

A nível da análise modal experimental foram apresentados e discutidos quer o modelo quer os algoritmos de identificação implementados no programa utilizado, o programa CADA-PC da LMS.

Para o acoplamento dinâmico foram estudados e implementados em computador dois algoritmos de acoplamento de impedâncias, um deles trabalhando globalmente os modelos de resposta dos componentes a acoplar, e o outro operando somente com blocos. Estes algoritmos foram validados com base num sistema discreto. Este estudo permitiu igualmente verificar que não existiam problemas com a redução de graus de liberdade nos modelos dos componentes, desde que o acoplamento seja correctamente descrito. Foi também verificado que a omissão de modos em qualquer dos modelos dos componentes origina erros no modelo acoplado, e que se manifestam de forma mais significativa na vizinhança das frequências correspondentes aos modos omitidos. Do ponto de vista teórico, verificou-se não existirem diferenças entre os dois algoritmos implementados, residindo estas apenas no tempo de cálculo e capacidade de memória requeridos.

A análise modal experimental mostrou-se como uma técnica eficaz de modelação do comportamento dinâmico do carácter em estudo. Contudo, foram encontradas algumas dificuldades, tais como a realização da suspensão a adoptar e a concepção do tirante para transmissão da força de excitação para a estrutura. Após superadas estas dificuldades, obteve-se um modelo de resposta para o carácter completo e a partir do qual foi identificado um modelo modal representativo.

Com base no modelo modal identificado para o cárter, foram estabelecidas as diversas velocidades críticas do veio de entrada da caixa e para as quais as diversas frequências características de funcionamento da caixa excitam os modos naturais do cárter.

Os modelos dos componentes principais do cárter, tampa e corpo, foram identificados por análise modal experimental. No entanto, ao realizar as medições na tampa para a obtenção das funções de resposta em frequência, verificaram-se algumas dificuldades originadas pelo acelerómetro, o qual conduzia a incoerências entre as funções de resposta em frequência nas frequências de ressonância. A análise das formas naturais da tampa permitiu identificar que essas incoerências eram devidas à colocação do acelerómetro em zonas onde ocorriam modos locais. Embora o acelerómetro não tivesse influência nos modos globais, o mesmo não ocorria para os modos locais. O problema foi resolvido utilizando um acelerómetro de menor massa que conduziu à obtenção de um modelo coerente.

A aplicação dos procedimentos de acoplamento dinâmico implementados à construção de um modelo do cárter por acoplamento dos modelos identificados para os seus componentes não conduziu à obtenção de um modelo final aceitável. Porém, verificou-se que o algoritmo de acoplamento por blocos é muito mais estável do ponto de vista numérico e muito menos susceptível à propagação de erros. Mais ainda, a utilização do conceito de pseudo-inversa, ao invés da inversa directa, permitiu melhorar o aspecto das funções de resposta do sistema acoplado. No entanto, conduziu a algumas incoerências entre o comportamento previsto para alguns pares de pontos acoplados que, após o acoplamento, deveriam apresentar comportamento idêntico.

A dificuldade na obtenção de um modelo aceitável para o cárter por acoplamento dos seus componentes, supõe-se ter origem a dois níveis relacionados entre si. Por um lado, devido à complexidade geométrica e estrutural do cárter, e, por outro lado, devido à ausência de graus de liberdade de rotação nos modelos dos componentes, a que se poderá juntar ainda a omissão dos resíduos nos modelos modais. Assim, a tampa possui modos locais na banda de análise que desequilibram as funções de resposta em frequência do modelo de resposta e que contribuem para o mau condicionamento da sua matriz. Além disso, os dois componentes são ligados por parafusos, cujas características dinâmicas não são incluídas no procedimento, quando a correcta modelização do acoplamento é um factor relevante na obtenção de bons resultados. Por sua vez, a ausência de graus de liberdade de rotação nos modelos dos componentes é

devida à indisponibilidade do equipamento necessário à sua medição. Quanto à omissão dos resíduos nos modelos modais dos componentes, esta deve-se ao facto de a sua determinação não ser exequível do ponto de vista prático, dada a necessidade de efectuar um número elevado de medições, proibitivo de realizar em tempo útil no âmbito deste trabalho, e que, além disso, conduziria igualmente a que a utilização da técnica de acoplamento dinâmico não apresentasse vantagens em relação à modelação por análise modal experimental do cárter.

Tendo como referência os resultados obtidos neste trabalho e o conjunto de rotinas implementadas para o acoplamento dinâmico e compatíveis com os modelos identificados pelo programa de análise modal CADA-PC, seria, pois, de experimentar e desenvolver a aplicação desta técnica com base em estruturas de geometria mais simples e para as quais se disponha, igualmente, de modelos espaciais analíticos obtidos pelo método dos elementos finitos. O estudo poder-se-ia, assim, realizar num contexto que melhor permitisse conhecer e aprofundar os mecanismos associados aos algoritmos do processo.

Em relação a trabalhos futuros com o cárter e com base nos modelos identificados por análise modal experimental para o cárter completo e para os seus principais componentes, seria de experimentar, por um processo de desacoplamento, modelar a ligação dos parafusos e avaliar a sua relevância no processo de acoplamento, que poderia contemplar a inclusão da rigidez dos parafusos, utilizando-se algoritmos que admitam a existência de elementos elásticos a ligar os diversos componentes.

REFERÊNCIAS

- [1] - Lang George F., Modal Testing Principles, Technical Report Number 023/87 Schlumberger, 1987.
- [2] - Luk Y., Mitchell D., System Identification Via Modal Analysis, ASME, Applied Mechanics Division, Vol.59, pp. 31-50, 1983.
- [3] - Albjanic Radomir, Kalajdzic Milisav, Pratical Application of Experimental and Mathematical Modal Analysis on Machine Tools, Proccedings of the 7th International Modal Analysis Conference., pp. 424-430, 1989.
- [4] - Ibrahim Samir R., Modal Identification Techniques Assessment and Comparasion, Proccedings of the 3th International Modal Analysis Conference., pp. 831-839, 1985.
- [5] - Bates Andrew, Evolution of Modal Analysis Systems, Proccedings of the 5th International Modal Analysis Conference., pp. 1219-1223, 1987.
- [6] - Vanhonacker Patrick, A Methodology for Combining Experimental and Mathematical Modal Analysis With Application to an Automotive Component, Proccedings of the 5th International Modal Analysis Conference., pp. 406-408, 1987.
- [7] - Sachs Werner, Identification of a Complex Satallite Model by Means of Modal Synthesis, Proccedings of the 5th International Modal Analysis Conference., pp. 468-475, 1987.
- [8] - Klosterman Albert, On the Experimental Determination and Use of Modal Representations of Dynamic Characteristics, PhD Thesis, University of Cincinnati, 1971.
- [9] - Ewins D.J., 'Modal Testing: Theory and Practice', Ed. John Wiley & Sons, 1985.

- [10] - Urgueira A.P.V., Ewins D.J., A Refined Modal Coupling Technique for Including Residual Effects of Out-of-range Modes, Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference., pp. 299-306, 1989.
- [11] - Imregun M., Robb D.A., Ewins D.J., Structural Modification and Coupling Dynamic Analysis Using Measured FRF Data, Proceedings of the 5th International Modal Analysis Conference., pp. 1136-1141, 1987.
- [12] - Brassard J., Massoud M., Identification of a Complete Mobility Matrix of a Synthesized System from Component Mobility Measurements, Proceedings of the 5th International Modal Analysis Conference., pp. 319-323, 1987.
- [13] - Zhang C., Hu Yu-zhou, Experimental Component Mode Synthesis of Structures Using Measured Frequency Response Data, Recent Advances in Experimental Mechanics Silva Gomes et al., pp. 537-542, 1994.
- [14] - D. Otte J.Leuridan, H. Grangier R.Aquilina, Coupling of Structures Using Measured FRFs by Means of SVD-Based Data Reduction Techniques, Proceedings of the 8th International Modal Analysis Conference., pp. 213-220, 1990.
- [15] - Tsuei Y. G., Yee Eric K.L., Lin Albert C.Y., Physical Interpretation and Application of a Component Modal Synthesis Technique (Modal Force Method), Proceedings of the 8th International Modal Analysis Conference., pp. 35-42, 1990.
- [16] - Tsuei Y. G., Yee Eric K.L., An Investigation to the Solution of Component Modal Synthesis, Proceedings of the 6th International Modal Analysis Conference., pp. 383-388, 1988.
- [17] - Klosterman Albert, Zimmerman Raymond, Modal Survey Activity Via Frequency Respose Functions, A.S.E., 1975.
- [18] - Tsang W.F., Williams C., A Comparision of Some Methods of Modal Parameter Extraction, Proceedings of the 8th International Modal Analysis Conference., pp. 1020-1025, 1990.
- [19] - Carrascosa Luís I., Busturia Jesús M., Global Experimental Modal Analysis. A Comparision of Different Methods, Proceedings of the 3th International Modal Analysis Conference., pp. 311-321, 1985.

-
- [20] - Snyder Virgil, Review of Matrix Formulations Used in Modal Analysis, Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference., pp. 313-316, 1989.
- [21] - Ribeiro Pedro Manuel Leal, 'Modelação por Desacoplamento Dinâmico', Tese de Mestrado, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, 1994.
- [22] - Leuridan J., Lipkens J., Auweraer H., Lembregts F. , Global Modal Parameter Estimation Methods an Assessment of Time Versus Frequency Domain Implementation, Proceedings of the 4th International Modal Analysis Conference., pp. 1586-1595, 1986.
- [23] - Yue,Feng Li, A Frequency,Time Domain Modal Parameter Identification Technique, Proceedings of the 4th International Modal Analysis Conference., pp. 812-818, 1986.
- [24] - Zhang Lingmi, Yao Yigxian, Advances in Modal Identification-from SISI, SIMO to MIMO Methods, Proceedings of the 5th International Modal Analysis Conference., pp. 1003-1007, 1987.
- [25] - Richardson Mark, Global Frequency & Damping Estimates from Frequency Response Measurements, Proceedings of the 4th International Modal Analysis Conference., pp. 465-470, 1986.
- [26] - Brinkman Brett A., Generating Modal Parameters That Compensate for Residual Energy, Proceedings of the 4th International Modal Analysis Conference., pp. 119-122, 1986.
- [27] - Allemang Randall, Brown David, Experimental Modal Analysis, Shock and Vibration Handbook, McGraw-Hill, 3^oedição, pp. 21_1-21_34, 1988.
- [28] - Rodrigues J.D., Analyse Modal Expérimentale, Rapport Scientifique, EPFL/DME/LMA, 1988.
- [29] - Richardson Mark, Modal Analysis Using Digital Test Systems, Hewllett Packard, 19??.
- [30] - McConnell Kenneth, Erros Using Force Transducers, Proceedings of the 8th International Modal Analysis Conference., pp. 884-890, 1990.

- [31] - Anderson I.A., Avoiding Stinger Rod Resonance Effects on Small Structures, Proceedings of the 8th International Modal Analysis Conference., pp. 673-678, 1990.
- [32] - 'Multichannel Analysis System Type 3550 Technical Documentation', Brüel&Kjaer, 1992.
- [33] - Meirovitch Leonard, 'Elements of Vibration Analysis', 2^o Edição, McGraw,Hill International Editons, 1996.
- [34] - Broch Jens Trampe, 'The Application of Brüel&Kjaer Equipment to Mechanical Vibration and Shock Measurements', Brüel&Kjaer, 1972.
- [35] - Clough Ray, Penzien Joseph, 'Dynamics of Structures', McGraw-Hill, 1975.
- [36] - Smiley R., Patrick Gary, Automated Methods of Frequency Response Function Quality Evaluation, Proceedings of the 4th International Modal Analysis Conference., pp. 107-112, 1986.
- [37] - 'LMS CADA-PC User Manual', LMS International, 1993.
- [38] - Williams Roger, Crowley John, Vold Haverd, The Multivariate Mode Indicator Function in Modal Analysis, Proceedings of the 3th International Modal Analysis Conference., pp. 66-70, 1985.
- [39] - INEGI/CETTRIB, Análise Dinâmica de Transmissões Mecânicas Complexas, Relatório técnico T01-STRIDE-TPR-0125, 1993.
- [40] - Sampaio Rui Pedro Chedas, 'Integração de Técnicas de Controlo de Condição Aplicadas a Bombas Centrífugas', Tese de Mestrado Instituto Superior Técnico Universidade Técnica de Lisboa, 1995.
- [41] - Lawson Charles L., Hanson Richard J., 'Solving Least Squares Problems', Society of Industrial Applied Mathematics, 1995.
- [42] - Kelly Graham, 'Fundamentals of Mechanical Vibrations', McGraw-Hill, 1993.

ANEXOS

ANEXO A - Formalismo do Acoplamento por Blocos II

ANEXO B - FRFs Medidas e Sintetizadas

ANEXO C - Formas Naturais

ANEXO D - Ficheiro de Dados Tipo

ANEXO A - FORMALISMO DO ACOPLAMENTO POR BLOCOS II

Neste anexo é apresentada a dedução das expressões para as sub-matrizes da matriz de FRF do sistema acoplado $[\alpha_C]$, relativas à formulação do procedimento de acoplamento de impedâncias abordagem por blocos II, apresentado em 4.5. Esta dedução tem como ponto de partida as expressões, formuladas no procedimento de acoplamento de impedâncias abordagem por blocos I, ponto 4.4, para as seis sub-matrizes independentes da matriz do sistema acoplado $[\alpha_C]$, as quais são obtidas a partir das seguintes expressões:

$$[\alpha_C^{cc}] = \left[[\alpha_A^{cc}]^{-1} + [\alpha_B^{cc}]^{-1} \right]^{-1} \quad (A.1)$$

$$[\alpha_C^{aa}] = [\alpha_A^{aa}] - [\alpha_A^{ac}] \left[[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}] \right]^{-1} [\alpha_A^{ca}] \quad (A.2)$$

$$[\alpha_C^{ab}] = [\alpha_A^{ac}] \left[[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}] \right]^{-1} [\alpha_B^{cb}] \quad (A.3)$$

$$[\alpha_C^{bb}] = [\alpha_B^{bb}] - [\alpha_B^{bc}] \left[[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}] \right]^{-1} [\alpha_B^{cb}] \quad (A.4)$$

$$[\alpha_C^{cb}] = [\alpha_C^{cc}] [\alpha_B^{cc}]^{-1} [\alpha_B^{cb}] \quad (A.5)$$

$$[\alpha_C^{ca}] = [\alpha_C^{cc}] [\alpha_A^{cc}]^{-1} [\alpha_A^{ca}] \quad (A.6)$$

Considerando (A.1) e (A.6), obtém-se:

$$\left[[\alpha_A^{cc}]^{-1} + [\alpha_B^{cc}]^{-1} \right] [\alpha_C^{ca}] = [\alpha_A^{cc}]^{-1} [\alpha_A^{ca}] \quad (A.7)$$

Pré-multiplicando por $[\alpha_A^{cc}]$, vem:

$$\left[[I] + [\alpha_A^{cc}] [\alpha_B^{cc}]^{-1} \right] [\alpha_C^{ca}] = [\alpha_A^{ca}] \quad (A.8)$$

Pós-multiplicando por $[\alpha_A^{ca}]^{-1}$, obtemos:

$$\left[[I] + [\alpha_A^{cc}] [\alpha_B^{cc}]^{-1} \right] = [\alpha_A^{ca}] [\alpha_C^{ca}]^{-1} \quad (A.9)$$

Pós-multiplicando, de novo ,por $[\alpha_B^{cc}]$ vem:

$$[[\alpha_B^{cc}] + [\alpha_A^{cc}]] = [\alpha_A^{ca}] [\alpha_C^{ca}]^{-1} [\alpha_B^{cc}] \quad (A.10)$$

Resolvendo a expressão anterior em ordem a $[\alpha_C^{ca}]^{-1}$ obtém-se:

$$[\alpha_C^{ca}]^{-1} = [\alpha_A^{ca}]^{-1} [[\alpha_B^{cc}] + [\alpha_A^{cc}]] [\alpha_B^{cc}]^{-1} \quad (A.11)$$

Invertendo a expressão anterior chegamos a:

$$[\alpha_C^{ca}] = [\alpha_B^{cc}] [[\alpha_B^{cc}] + [\alpha_A^{cc}]]^{-1} [\alpha_A^{ca}] \quad (A.12)$$

Após transposição da expressão anterior, e tendo em conta as condições de simetria das matrizes FRF:

$$[\alpha_C^{ac}] = [\alpha_C^{ca}]^T = [\alpha_A^{ac}] [[\alpha_B^{cc}] + [\alpha_A^{cc}]]^{-1} [\alpha_B^{cc}] \quad (A.13)$$

Considerando (A.8) podemos obter:

$$[\alpha_C^{ca}] + [\alpha_A^{cc}] [\alpha_B^{cc}]^{-1} [\alpha_C^{ca}] = [\alpha_A^{ca}] \quad (A.14)$$

Substituindo (A.12) no segundo termo do primeiro membro da igualdade anterior, obtém-se:

$$[\alpha_C^{ca}] + [\alpha_A^{cc}] \underbrace{[\alpha_B^{cc}]^{-1} [\alpha_B^{cc}]}_{[I]} [[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}]]^{-1} [\alpha_A^{ca}] = [\alpha_A^{ca}] \quad (A.15)$$

Identificando as matrizes identidade na expressão anterior, chegamos a:

$$[\alpha_C^{ca}] = [\alpha_A^{ca}] - [\alpha_A^{cc}] [[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}]]^{-1} [\alpha_A^{ca}] \quad (A.16)$$

Após transposição obtém-se:

$$\boxed{[\alpha_C^{ac}] = [\alpha_A^{ac}] - [\alpha_A^{ac}] \left[[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}] \right]^{-1} [\alpha_A^{cc}]} \quad (A.17)$$

Do mesmo modo, considerando (A.5) e (A.1), obtém-se:

$$\left[[\alpha_A^{cc}]^{-1} + [\alpha_B^{cc}]^{-1} \right] [\alpha_C^{cb}] = [\alpha_B^{cc}]^{-1} [\alpha_B^{cb}] \quad (A.18)$$

Pré-multiplicando por $[\alpha_B^{cc}]$ vem:

$$\left[[\alpha_B^{cc}] \left[[\alpha_A^{cc}]^{-1} + [1] \right] \right] [\alpha_C^{cb}] = [\alpha_B^{cb}] \quad (A.19)$$

Pós-multiplicando por $[\alpha_C^{cb}]^{-1}$ obtemos:

$$\left[[\alpha_B^{cc}] \left[[\alpha_A^{cc}]^{-1} + [1] \right] \right] = [\alpha_B^{cb}] \left[[\alpha_C^{cb}]^{-1} \right] \quad (A.20)$$

Pós-multiplicando de novo por $[\alpha_A^{cc}]$ vem:

$$\left[[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}] \right] = [\alpha_B^{cb}] \left[[\alpha_C^{cb}]^{-1} \right] [\alpha_A^{cc}] \quad (A.21)$$

Resolvendo em ordem a $[\alpha_C^{cb}]^{-1}$:

$$\left[[\alpha_C^{cb}]^{-1} \right] = [\alpha_B^{cb}]^{-1} \left[[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}] \right] \left[[\alpha_A^{cc}]^{-1} \right] \quad (A.22)$$

Após inversão chegamos a:

$$\boxed{[\alpha_C^{cb}] = [\alpha_A^{cc}] \left[[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}] \right]^{-1} [\alpha_B^{cb}]} \quad (A.23)$$

Considerando (A.19) pode-se obter:

$$\left[\alpha_B^{cc} \right] \left[\alpha_A^{cc} \right]^{-1} \left[\alpha_C^{cb} \right] + \left[\alpha_C^{cb} \right] = \left[\alpha_B^{cb} \right] \quad (A.24)$$

Substituindo (A.23) no primeiro termo do primeiro membro da igualdade anterior, chegamos a:

$$\left[\alpha_B^{cc} \right] \underbrace{\left[\alpha_A^{cc} \right]^{-1} \left[\alpha_A^{cc} \right]}_{[I]} \left[\alpha_A^{cc} \right] + \left[\alpha_B^{cc} \right] \left[\alpha_B^{cb} \right] + \left[\alpha_C^{cb} \right] = \left[\alpha_B^{cb} \right] \quad (A.25)$$

Identificando as matrizes identidade, a expressão anterior simplifica-se:

$$\boxed{\left[\alpha_C^{cb} \right] = \left[\alpha_B^{cb} \right] - \left[\alpha_B^{cc} \right] \left[\alpha_A^{cc} \right] + \left[\alpha_B^{cc} \right]^{-1} \left[\alpha_B^{cb} \right]} \quad (A.26)$$

A partir de (A.1), podemos obter:

$$\left[\alpha_C^{cc} \right]^{-1} = \left[\alpha_A^{cc} \right]^{-1} + \left[\alpha_B^{cc} \right]^{-1} \quad (A.27)$$

Pré e pós-multiplicando respectivamente por $\left[\alpha_A^{cc} \right]$ e $\left[\alpha_B^{cc} \right]$ vem:

$$\left[\alpha_A^{cc} \right] \left[\alpha_C^{cc} \right]^{-1} \left[\alpha_B^{cc} \right] = \left[\alpha_A^{cc} \right] + \left[\alpha_B^{cc} \right] \quad (A.28)$$

Resolvendo em ordem a $\left[\alpha_C^{cc} \right]^{-1}$, obtém-se:

$$\left[\alpha_C^{cc} \right]^{-1} = \left[\alpha_A^{cc} \right]^{-1} \left[\alpha_A^{cc} \right] + \left[\alpha_B^{cc} \right] \left[\alpha_B^{cc} \right]^{-1} \quad (A.29)$$

Invertendo a expressão anterior, chega-se a:

$$\boxed{\left[\alpha_C^{cc} \right] = \left[\alpha_B^{cc} \right] \left[\alpha_A^{cc} \right] + \left[\alpha_B^{cc} \right]^{-1} \left[\alpha_A^{cc} \right]} \quad (A.30)$$

Do modo idêntico à dedução entre (A.27) a (A.30), pré e pós-multiplicando (A.27) respectivamente por $[\alpha_B^{cc}]$ e $[\alpha_A^{cc}]$, obtém-se:

$$\boxed{[\alpha_C^{cc}] = [\alpha_A^{cc}][[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}]]^{-1}[\alpha_B^{cc}]} \quad (A.31)$$

Considerando (A.23), chegamos a:

$$[\alpha_A^{cc}][[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}]]^{-1} = [\alpha_C^{cb}][[\alpha_B^{cb}]]^{-1} \quad (A.32)$$

Substituindo a equação anterior em (A.31) obtém-se:

$$[\alpha_C^{cc}] = [\alpha_C^{cb}][[\alpha_B^{cb}]]^{-1}[\alpha_B^{cc}] \quad (A.33)$$

E substituindo $[\alpha_C^{cb}]$ da expressão (A.26) vem:

$$[\alpha_C^{cc}] = [[\alpha_B^{cb}] - [\alpha_B^{cc}][[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}]]^{-1}[\alpha_B^{cb}]] [[\alpha_B^{cb}]]^{-1}[\alpha_B^{cc}] \quad (A.34)$$

Efectuando as multiplicações e identificando as matrizes identidade, a equação anterior pode simplificar-se para:

$$\boxed{[\alpha_C^{cc}] = [\alpha_B^{cc}] - [\alpha_B^{cc}][[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}]]^{-1}[\alpha_B^{cc}]} \quad (A.35)$$

Da mesma forma a partir de (A.12), podemos obter:

$$[\alpha_C^{ca}][[\alpha_A^{ca}]]^{-1} = [\alpha_B^{cc}][[\alpha_B^{cc}] + [\alpha_A^{cc}]]^{-1} \quad (A.36)$$

Substituindo a igualdade anterior em (A.30) obtém-se:

$$[\alpha_C^{cc}] = [\alpha_C^{ca}][[\alpha_A^{ca}]]^{-1}[\alpha_A^{cc}] \quad (A.37)$$

Substituindo na expressão anterior $[\alpha_C^{ca}]$, da expressão (A.16), obtém-se:

$$[\alpha_C^{cc}] = \left[[\alpha_A^{ca}] - [\alpha_A^{cc}] \left[[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}] \right]^{-1} [\alpha_A^{ca}] \right] \left[[\alpha_A^{ca}]^{-1} [\alpha_A^{cc}] \right] \quad (A.38)$$

Após simplificação pode obter-se:

$$\boxed{[\alpha_C^{cc}] = [\alpha_A^{cc}] - [\alpha_A^{cc}] \left[[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}] \right]^{-1} [\alpha_A^{cc}]} \quad (A.39)$$

Deste modo, obtivemos as expressões das sub-matrizes da matriz de FRF do sistema acoplado, apresentadas em 4.5, as quais podem ser organizadas da seguinte forma:

de (A.2):

$$[\alpha_C^{aa}] = [\alpha_A^{aa}] - [\alpha_A^{ac}] \left[[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}] \right]^{-1} [\alpha_A^{ca}] \quad (A.40)$$

de (A.13) e (A.17)

$$\begin{aligned} [\alpha_C^{ac}] &= [\alpha_A^{ac}] \left[[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}] \right]^{-1} [\alpha_B^{cc}] \\ &= [\alpha_A^{ac}] - [\alpha_A^{ac}] \left[[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}] \right]^{-1} [\alpha_A^{cc}] \end{aligned} \quad (A.41)$$

de (A.3):

$$[\alpha_C^{ab}] = [\alpha_A^{ac}] \left[[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}] \right]^{-1} [\alpha_B^{cb}] \quad (A.42)$$

de (A.31), (A.30), (A.1), (A.39) e (A.35)

$$\begin{aligned} [\alpha_C^{cc}] &= [\alpha_A^{cc}] \left[[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}] \right]^{-1} [\alpha_B^{cc}] \\ &= [\alpha_B^{cc}] \left[[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}] \right]^{-1} [\alpha_A^{cc}] \\ &= \left[[\alpha_A^{cc}]^{-1} + [\alpha_B^{cc}]^{-1} \right]^{-1} \\ &= [\alpha_A^{cc}] - [\alpha_A^{cc}] \left[[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}] \right]^{-1} [\alpha_A^{cc}] \\ &= [\alpha_B^{cc}] - [\alpha_B^{cc}] \left[[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}] \right]^{-1} [\alpha_B^{cc}] \end{aligned} \quad (A.43)$$

de (A.23) e (A.26):

$$\begin{aligned} [\alpha_C^{cb}] &= [\alpha_A^{ac}] \left[[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}] \right]^{-1} [\alpha_B^{cb}] \\ &= [\alpha_b^{cb}] - [\alpha_B^{cc}] \left[[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}] \right]^{-1} [\alpha_B^{cb}] \end{aligned} \quad (A.44)$$

de (A.4):

$$[\alpha_C^{bb}] = [\alpha_B^{bb}] - [\alpha_B^{bc}] \left[[\alpha_A^{cc}] + [\alpha_B^{cc}] \right]^{-1} [\alpha_B^{cb}] \quad (A.45)$$

ANEXO B - FRFs MEDIDAS E SINTETIZADAS

ANEXO B1 - Cárter

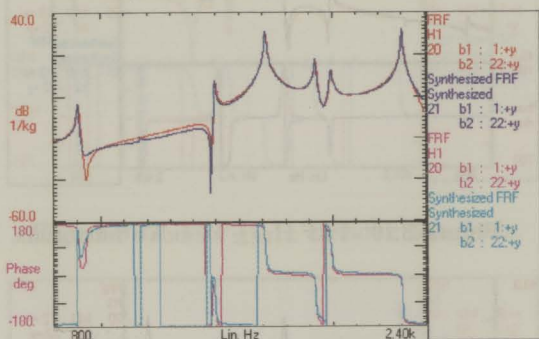


Figura B.1 - FRF $H_{1|22}$ medida e sintetizada.

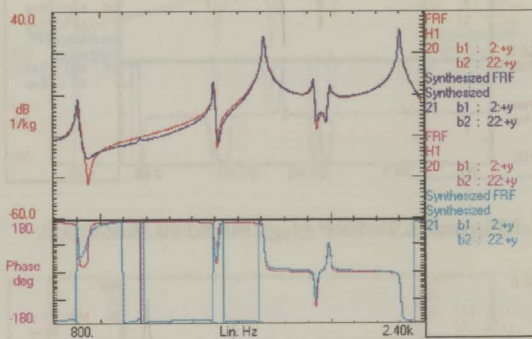


Figura B.2 - FRF $H_{2|22}$ medida e sintetizada.

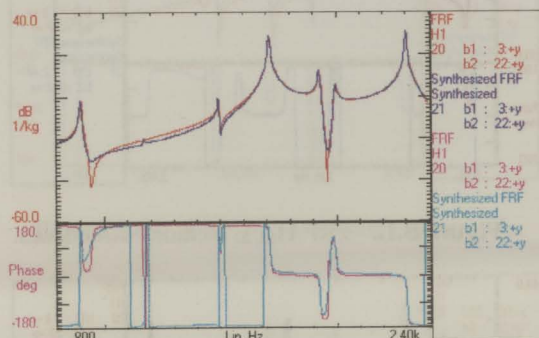


Figura B.3 - FRF $H_{3|22}$ medida e sintetizada.

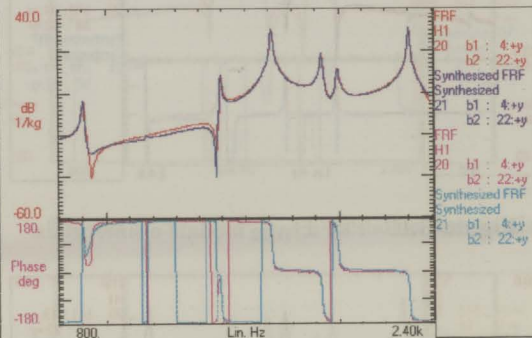


Figura B.4 - FRF $H_{4|22}$ medida e sintetizada.

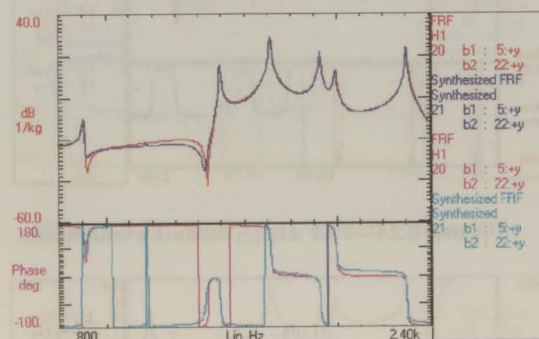


Figura B.5 - FRF $H_{5|22}$ medida e sintetizada.

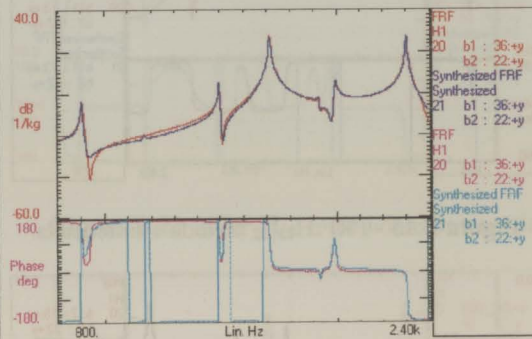


Figura B.6 - FRF $H_{36|22}$ medida e sintetizada.

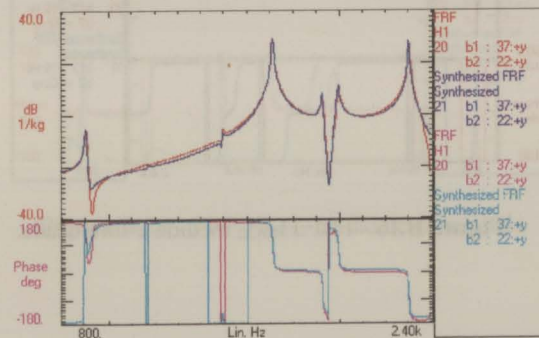


Figura B.7 - FRF $H_{37|22}$ medida e sintetizada.

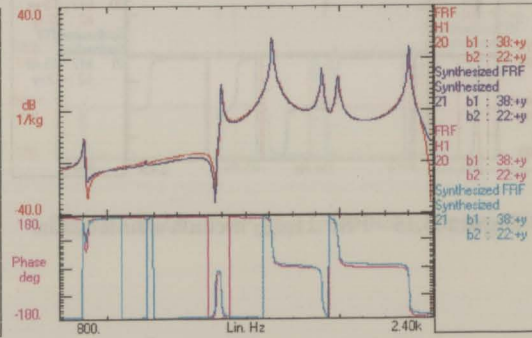


Figura B.8 - FRF $H_{38|22}$ medida e sintetizada.

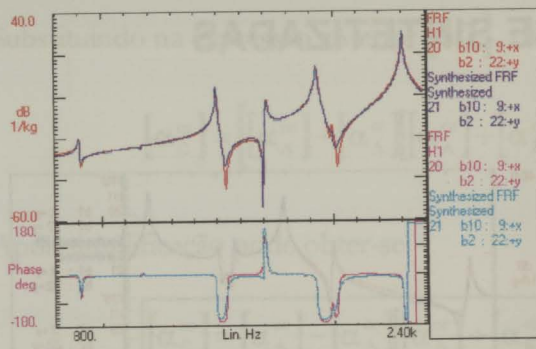


Figura B.9 - FRF $H_{9|22}$ medida e sintetizada.

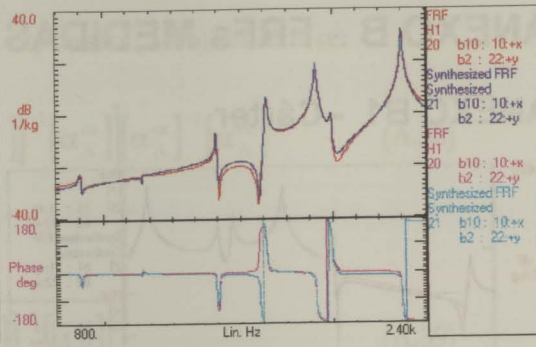


Figura B.10 - FRF $H_{10|22}$ medida e sintetizada.

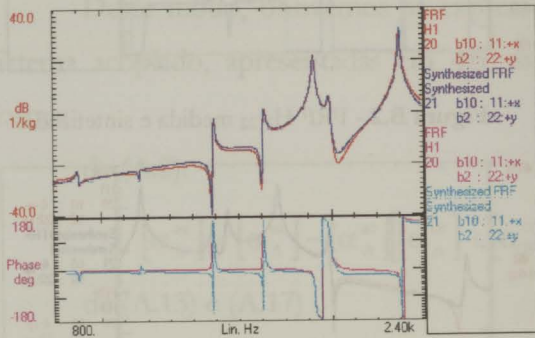


Figura B.11 - FRF $H_{11|22}$ medida e sintetizada.

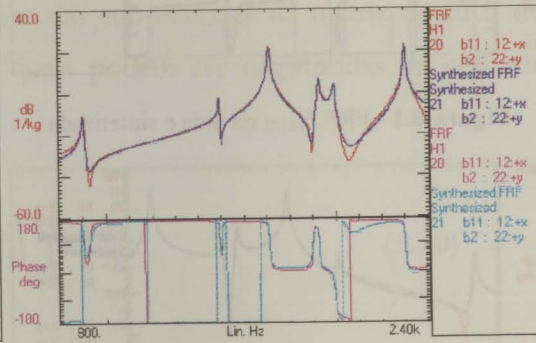


Figura B.12 - FRF $H_{12|22}$ medida e sintetizada.

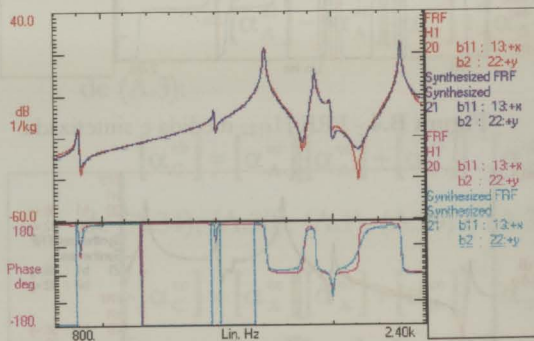


Figura B.13 - FRF $H_{13|22}$ medida e sintetizada.

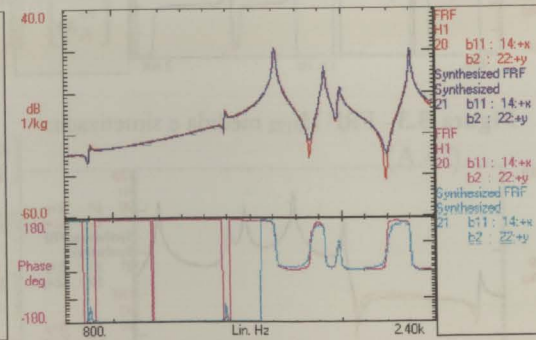


Figura B.14 - FRF $H_{14|22}$ medida e sintetizada.

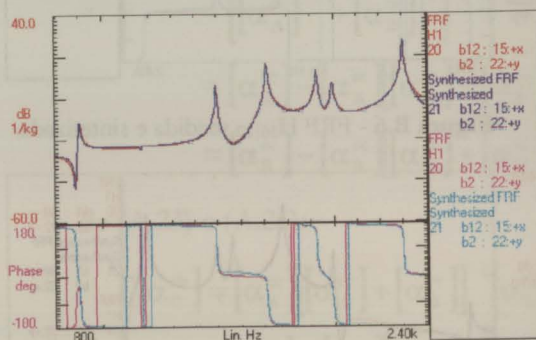


Figura B.15 - FRF $H_{15|22}$ medida e sintetizada.

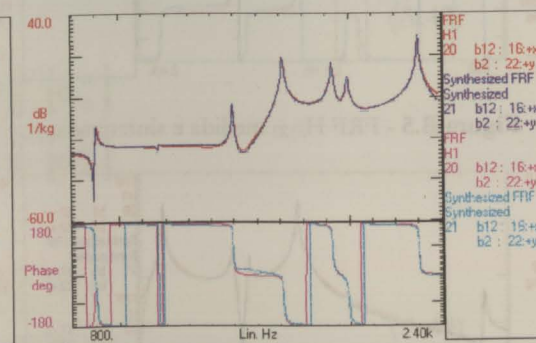


Figura B.16 - FRF $H_{16|22}$ medida e sintetizada.

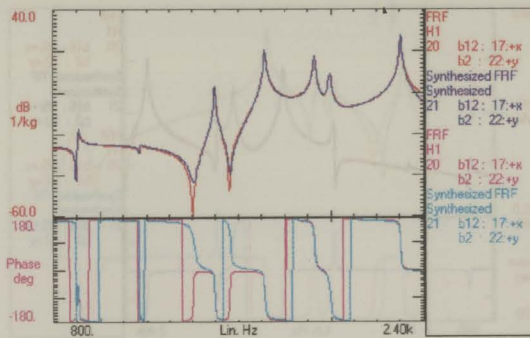


Figura B.17 - FRF $H_{17|22}$ medida e sintetizada.

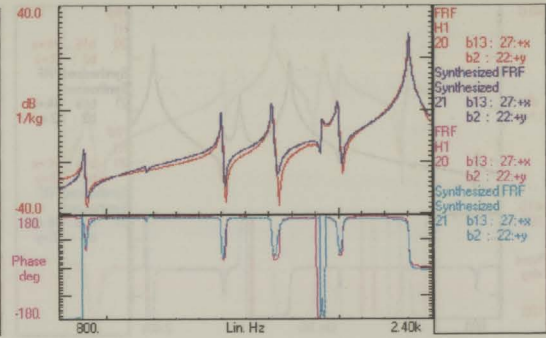


Figura B.18 - FRF $H_{27|22}$ medida e sintetizada.

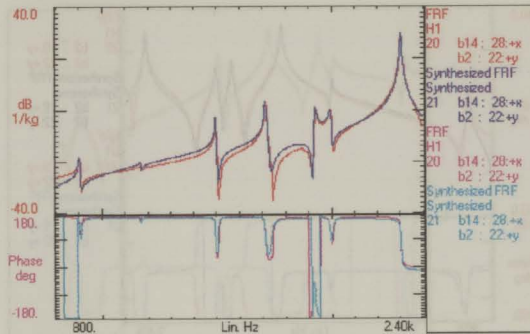


Figura B.19 - FRF $H_{28|22}$ medida e sintetizada.

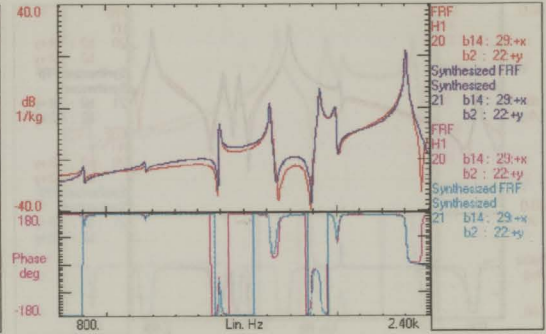


Figura B.20 - FRF $H_{29|22}$ medida e sintetizada.

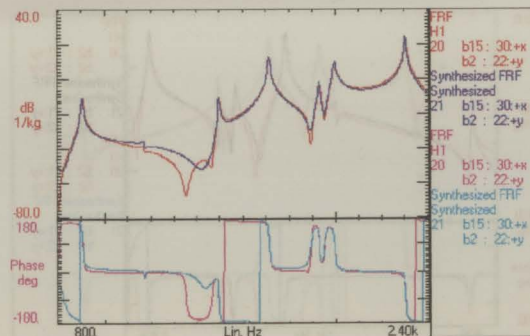


Figura B.21 - FRF $H_{30|22}$ medida e sintetizada.

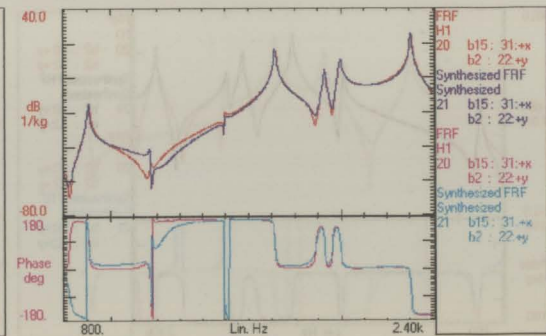


Figura B.22 - FRF $H_{31|22}$ medida e sintetizada.

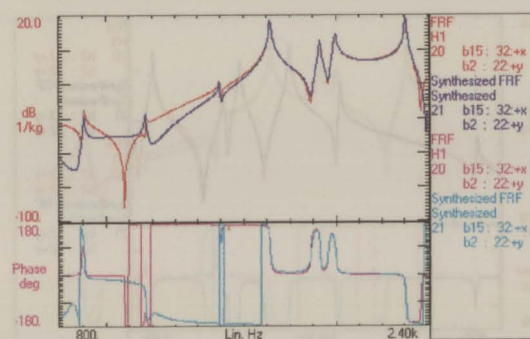


Figura B.23 - FRF $H_{32|22}$ medida e sintetizada.

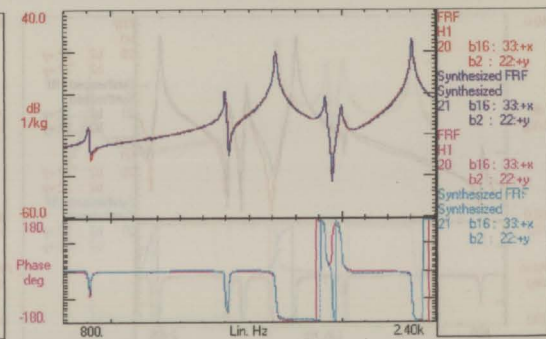


Figura B.24 - FRF $H_{33|22}$ medida e sintetizada.

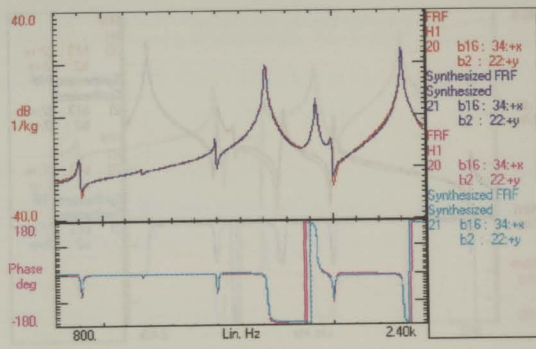


Figura B.25 - FRF $H_{34|22}$ medida e sintetizada.

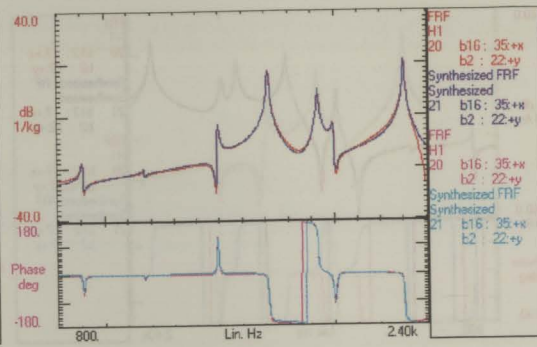


Figura B.26 - FRF $H_{35|22}$ medida e sintetizada.

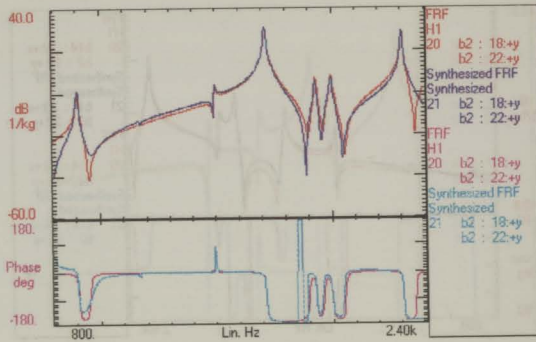


Figura B.27 - FRF $H_{18|22}$ medida e sintetizada.

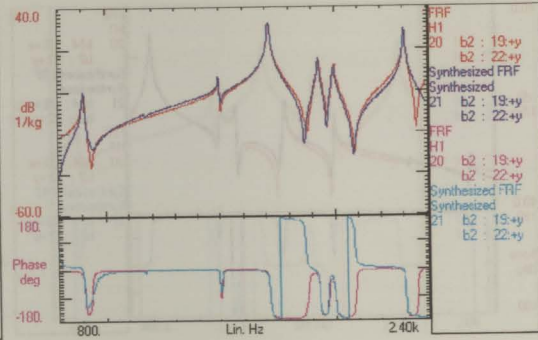


Figura B.28 - FRF $H_{19|22}$ medida e sintetizada.

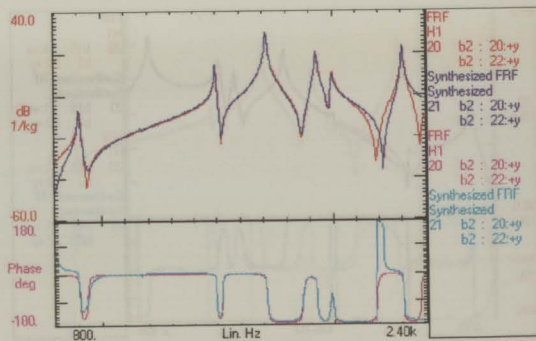


Figura B.29 - FRF $H_{20|22}$ medida e sintetizada.

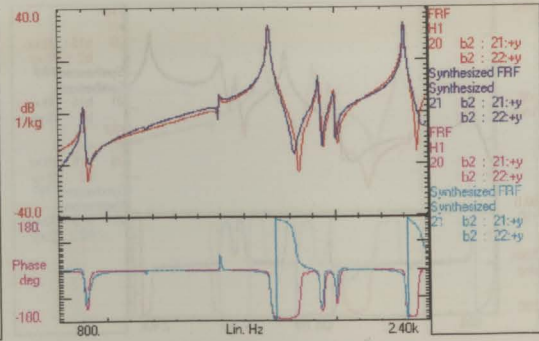


Figura B.30 - FRF $H_{21|22}$ medida e sintetizada.

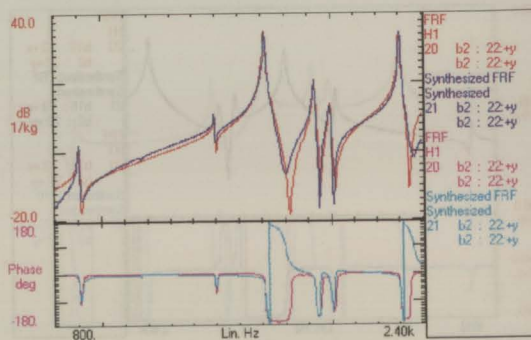


Figura B.31 - FRF $H_{22|22}$ medida e sintetizada.

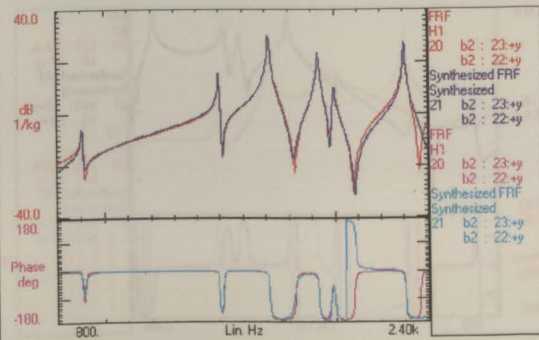


Figura B.32 - FRF $H_{23|22}$ medida e sintetizada.

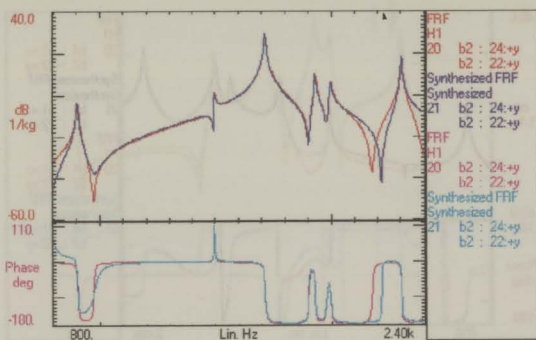


Figura B.33 - FRF $H_{24|22}$ medida e sintetizada.

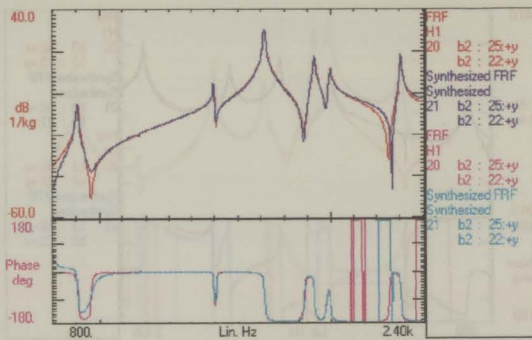


Figura B.34 - FRF $H_{25|22}$ medida e sintetizada.

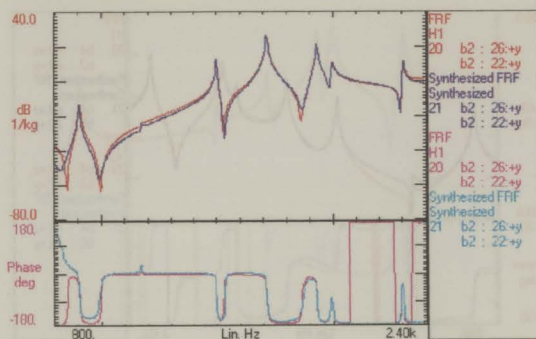


Figura B.35 - FRF $H_{26|22}$ medida e sintetizada.

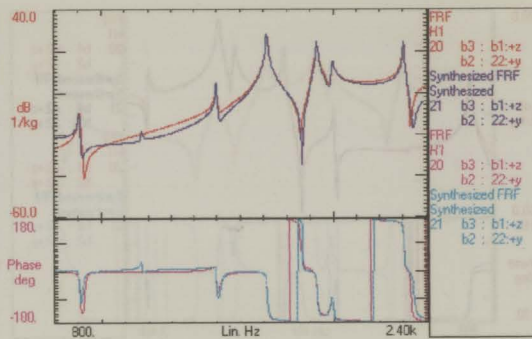


Figura B.36 - FRF $H_{b1|22}$ medida e sintetizada.

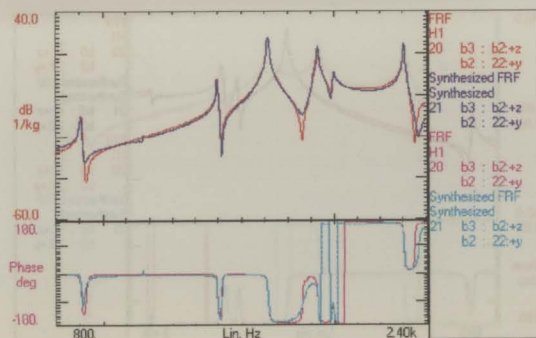


Figura B.37 - FRF $H_{b2|22}$ medida e sintetizada.

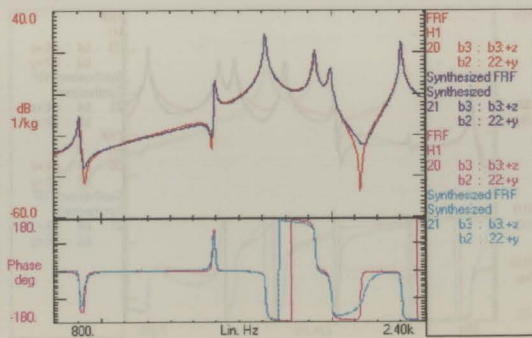


Figura B.38 - FRF $H_{b3|22}$ medida e sintetizada.

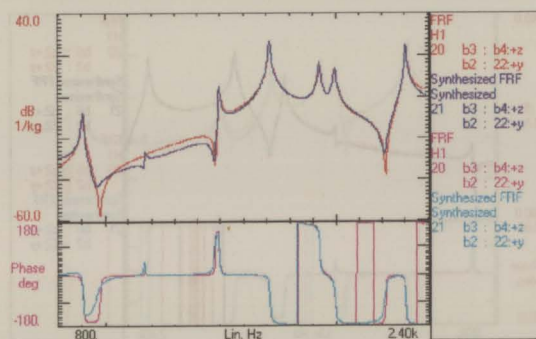


Figura B.39 - FRF $H_{b4|22}$ medida e sintetizada.

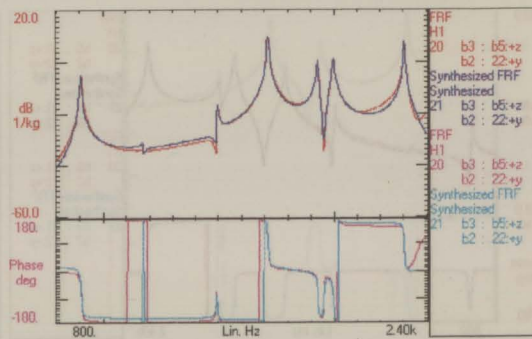


Figura B.40 - FRF $H_{b5|22}$ medida e sintetizada.

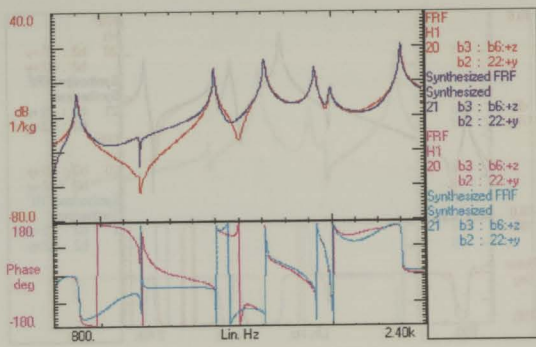


Figura B.41 - FRF $H_{b6|22}$ medida e sintetizada.

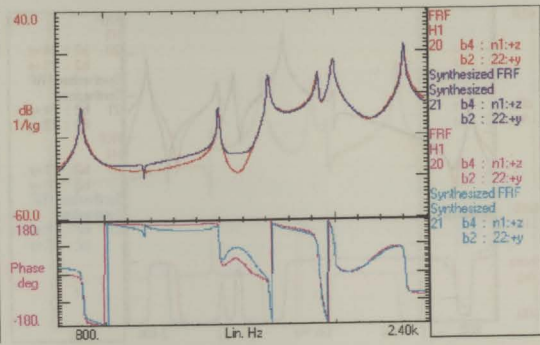


Figura B.42 - FRF $H_{n1|22}$ medida e sintetizada.

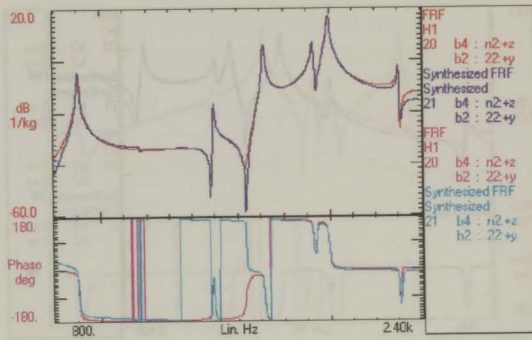


Figura B.43 - FRF $H_{n2|22}$ medida e sintetizada.

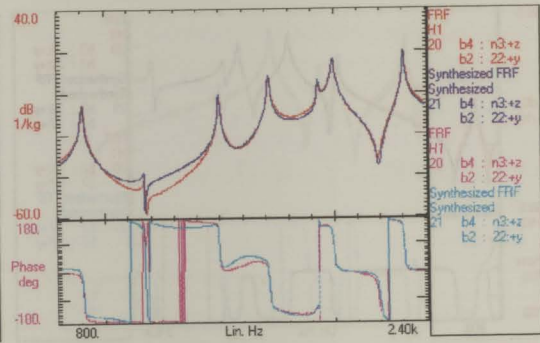


Figura B.44 - FRF $H_{n3|22}$ medida e sintetizada.

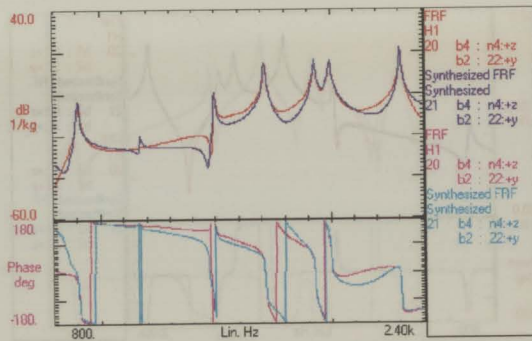


Figura B.45 - FRF $H_{n4|22}$ medida e sintetizada.

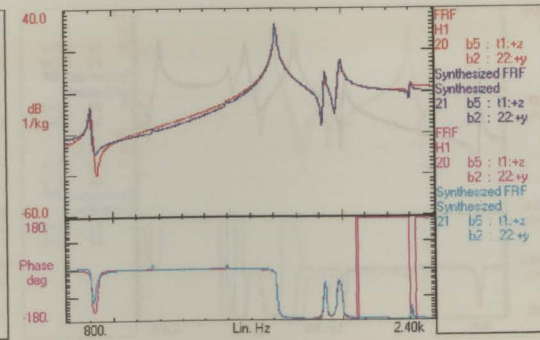


Figura B.46 - FRF $H_{t1|22}$ medida e sintetizada.

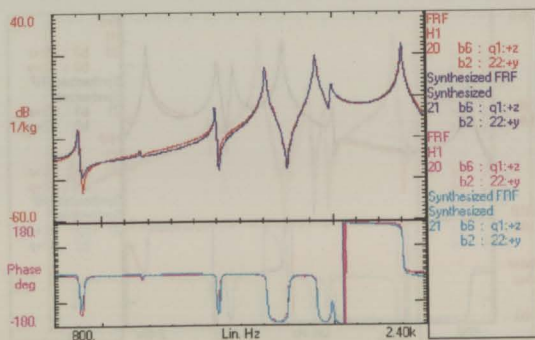


Figura B.47 - FRF $H_{q1|22}$ medida e sintetizada.

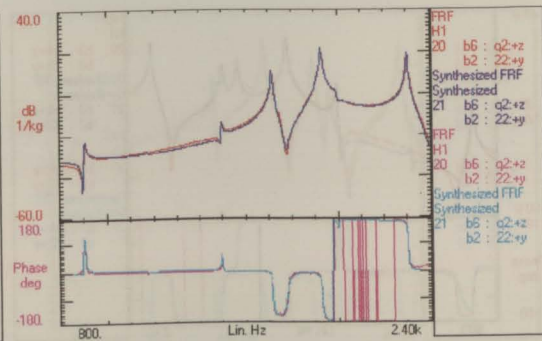


Figura B.48 - FRF $H_{q2|22}$ medida e sintetizada.

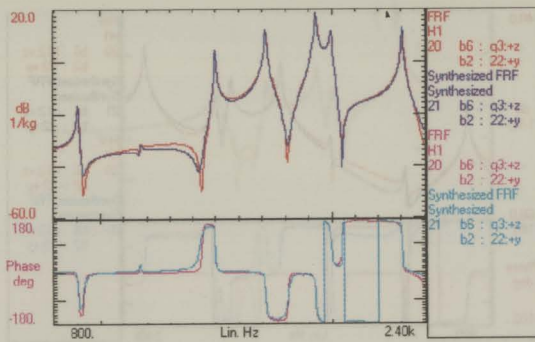


Figura B.49 - FRF $H_{q3|22}$ medida e sintetizada.

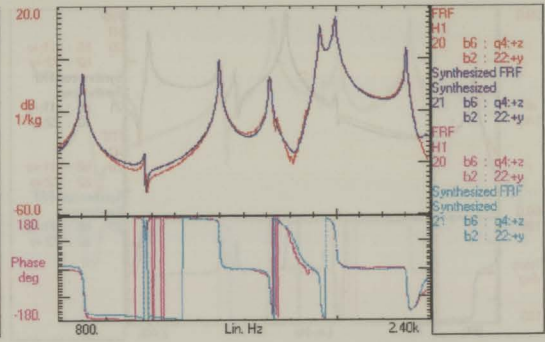


Figura B.50 - FRF $H_{q4|22}$ medida e sintetizada.

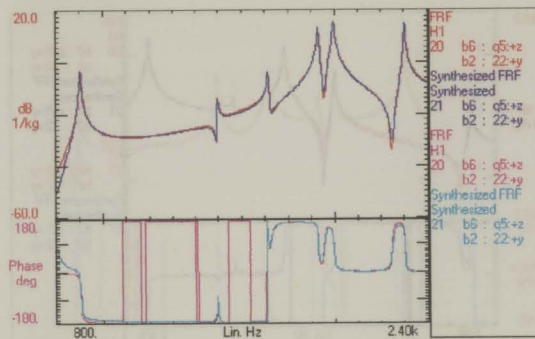


Figura B.51 - FRF $H_{q5|22}$ medida e sintetizada.

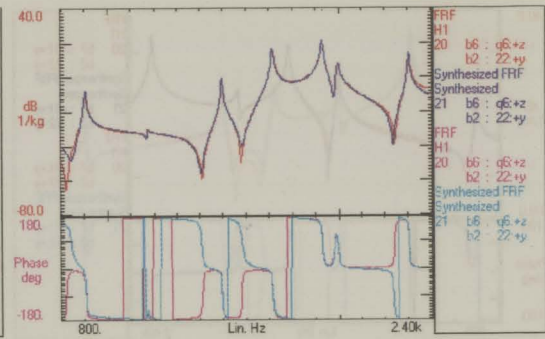


Figura B.52 - FRF $H_{q6|22}$ medida e sintetizada.

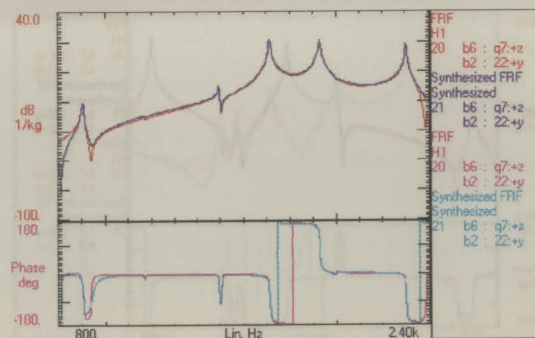


Figura B.53 - FRF $H_{q7|22}$ medida e sintetizada.

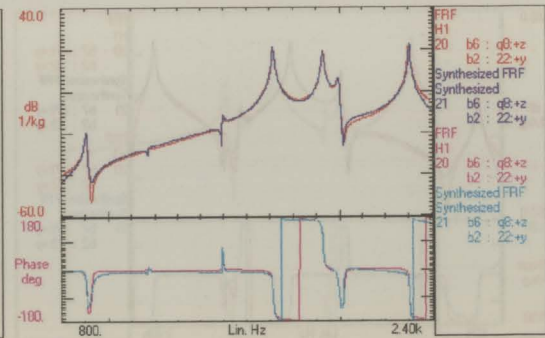


Figura B.54 - FRF $H_{q8|22}$ medida e sintetizada.

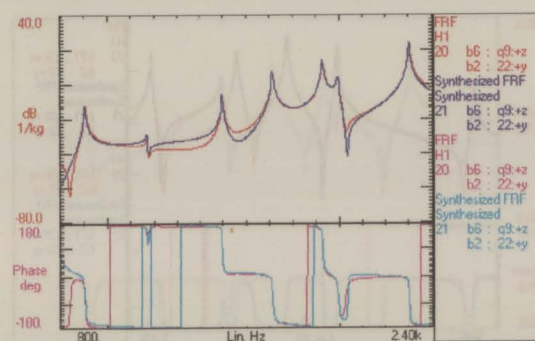


Figura B.55 - FRF $H_{q9|22}$ medida e sintetizada.

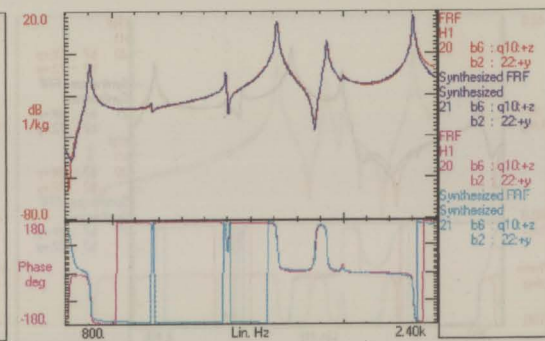


Figura B.56 - FRF $H_{q10|22}$ medida e sintetizada.

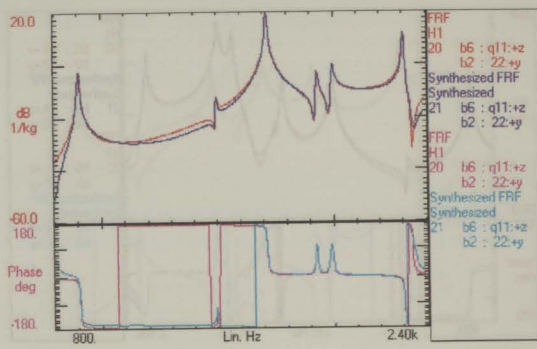


Figura B.57 - FRF $H_{q11|22}$ medida e sintetizada.

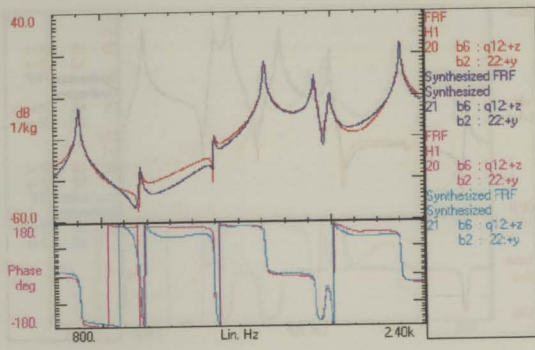


Figura B.58 - FRF $H_{q12|22}$ medida e sintetizada.

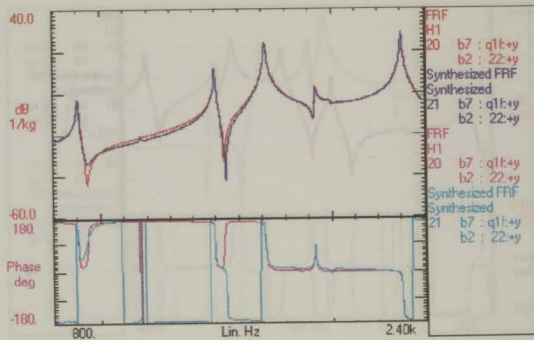


Figura B.59 - FRF $H_{q1f|22}$ medida e sintetizada.

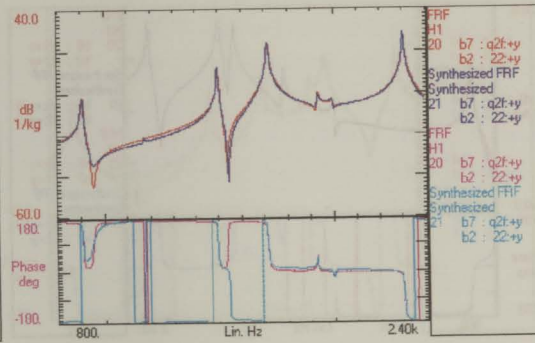


Figura B.60 - FRF $H_{q2f|22}$ medida e sintetizada.

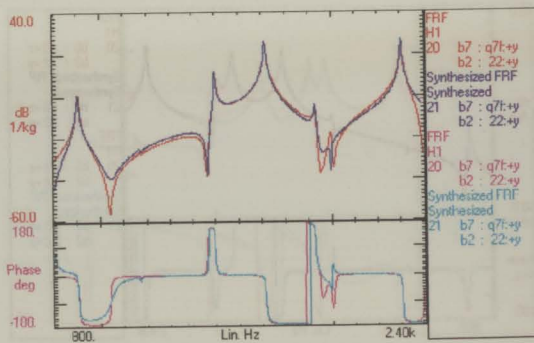


Figura B.61 - FRF $H_{q7f|22}$ medida e sintetizada.

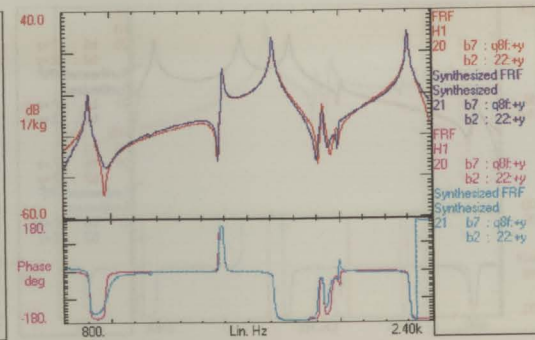


Figura B.62 - FRF $H_{q8f|22}$ medida e sintetizada.

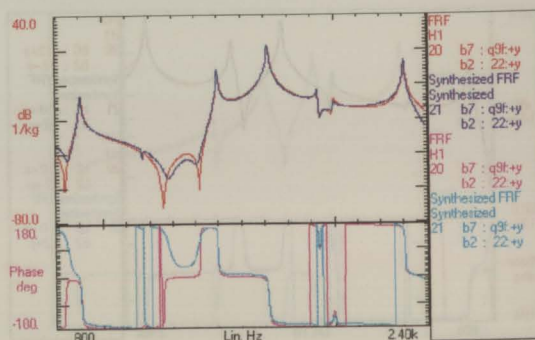


Figura B.63 - FRF $H_{q9f|22}$ medida e sintetizada.

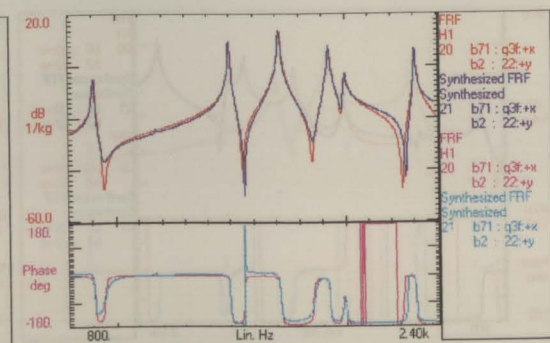


Figura B.64 - FRF $H_{q3f|22}$ medida e sintetizada.

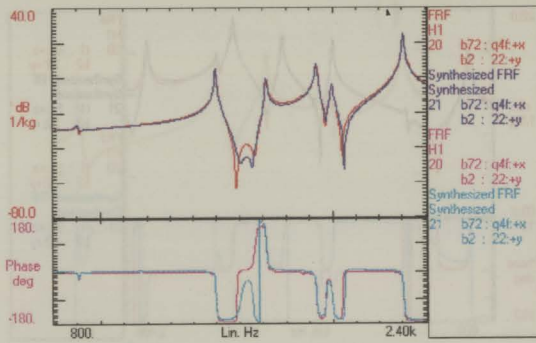


Figura B.65 - FRF $H_{q4f|22}$ medida e sintetizada.

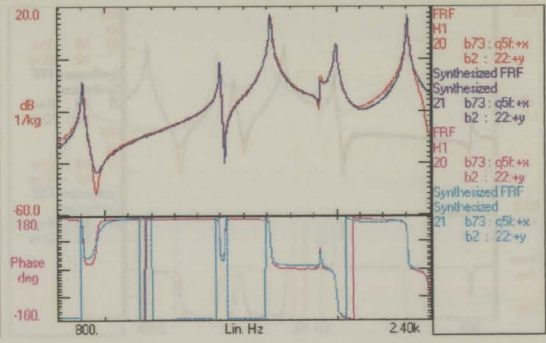


Figura B.66 - FRF $H_{q5f|22}$ medida e sintetizada.

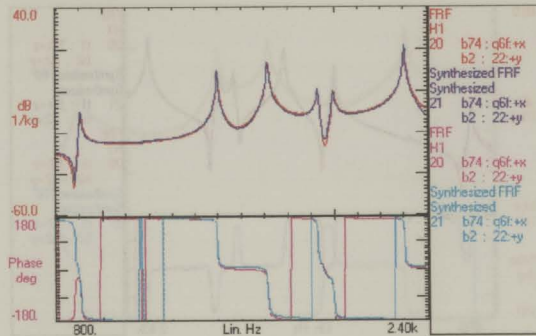


Figura B.67 - FRF $H_{q6f|22}$ medida e sintetizada.

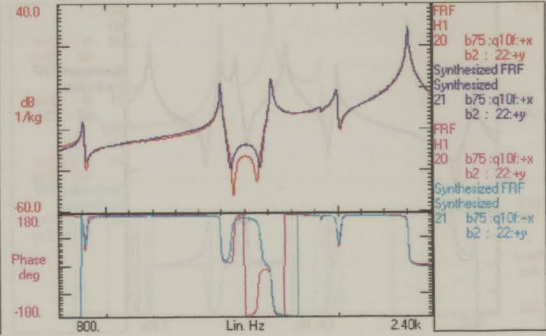


Figura B.68 - FRF $H_{q10f|22}$ medida e sintetizada.

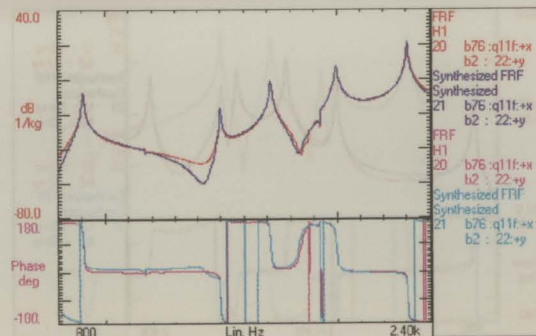


Figura B.69 - FRF $H_{q11f|22}$ medida e sintetizada.

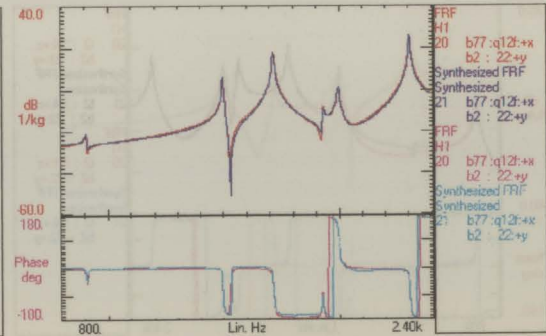


Figura B.70 - FRF $H_{q12f|22}$ medida e sintetizada.

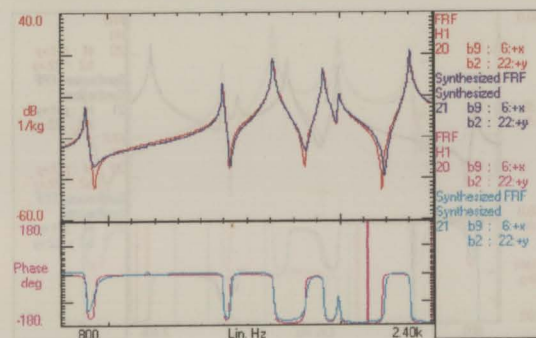


Figura B.71 - FRF $H_6|22$ medida e sintetizada.

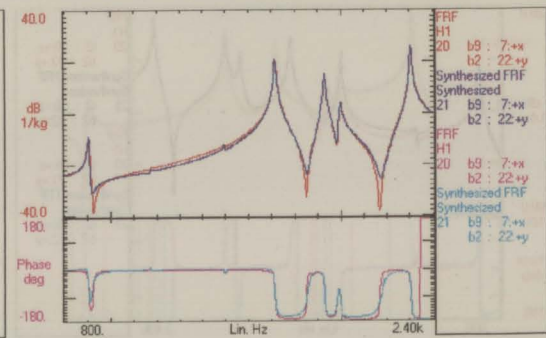


Figura B.72 - FRF $H_7|22$ medida e sintetizada.

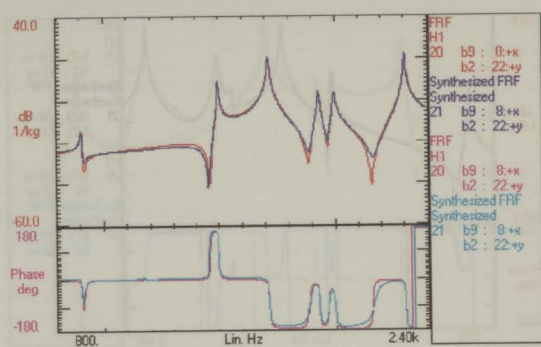


Figura B.73 - FRF $H_{8|22}$ medida e sintetizada.

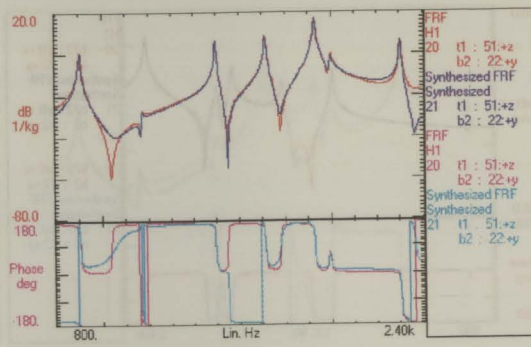


Figura B.74 - FRF $H_{51|22}$ medida e sintetizada.

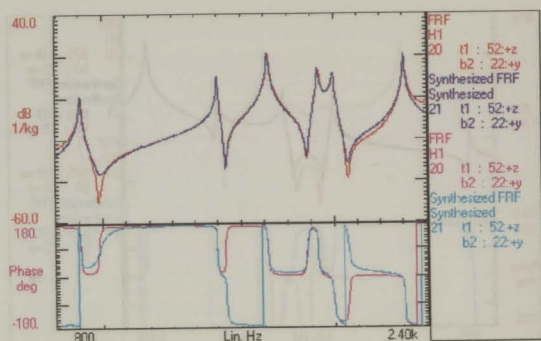


Figura B.75 - FRF $H_{52|22}$ medida e sintetizada.

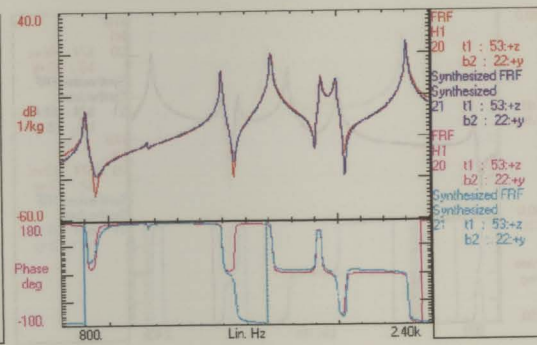


Figura B.76 - FRF $H_{53|22}$ medida e sintetizada.

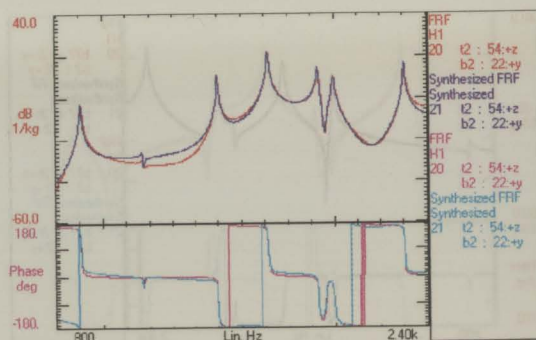


Figura B.77 - FRF $H_{54|22}$ medida e sintetizada.

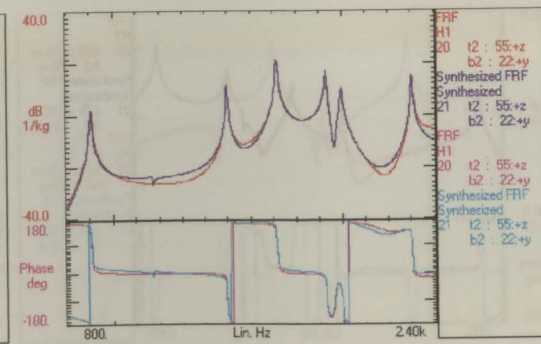


Figura B.78 - FRF $H_{55|22}$ medida e sintetizada.

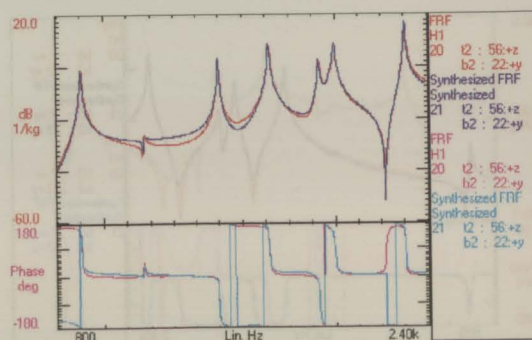


Figura B.79 - FRF $H_{56|22}$ medida e sintetizada.

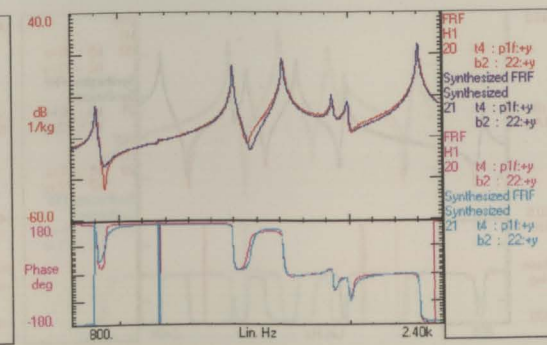


Figura B.80 - FRF $H_{p1f|22}$ medida e sintetizada.

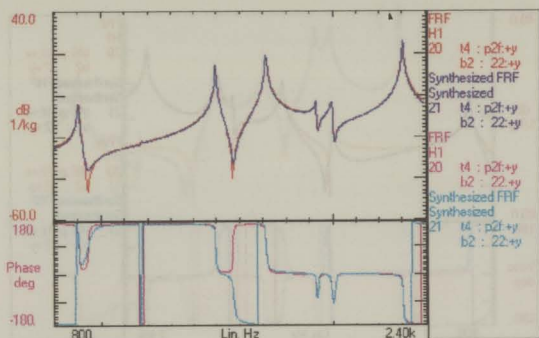


Figura B.81 - FRF $H_{p2f|22}$ medida e sintetizada.

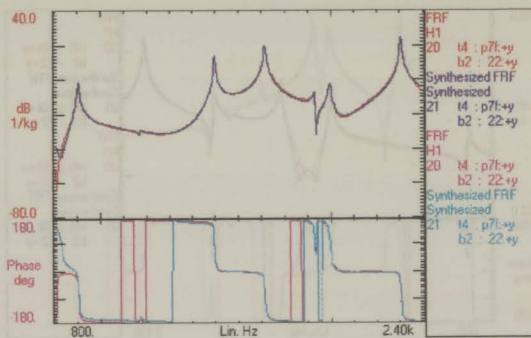


Figura B.82 - FRF $H_{p7f|22}$ medida e sintetizada.

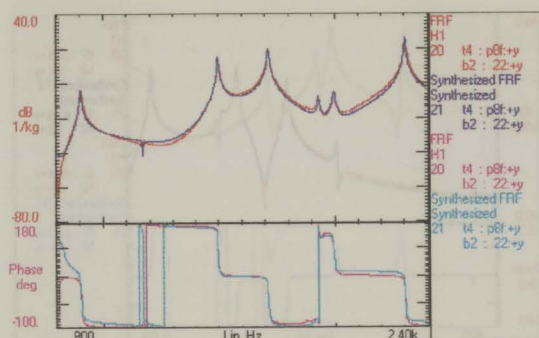


Figura B.83 - FRF $H_{p8f|22}$ medida e sintetizada.

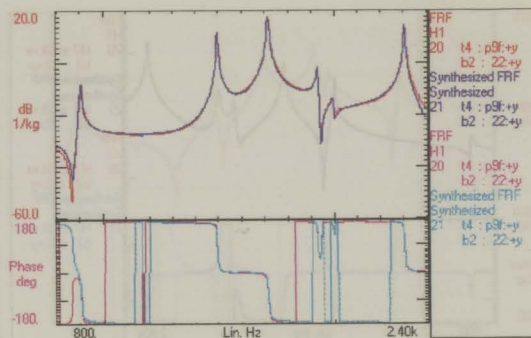


Figura B.84 - FRF $H_{p9f|22}$ medida e sintetizada.

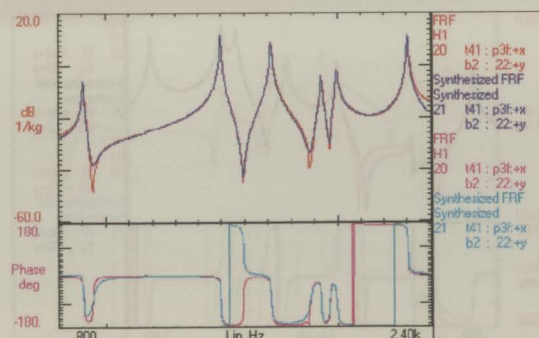


Figura B.85 - FRF $H_{p3f|22}$ medida e sintetizada.

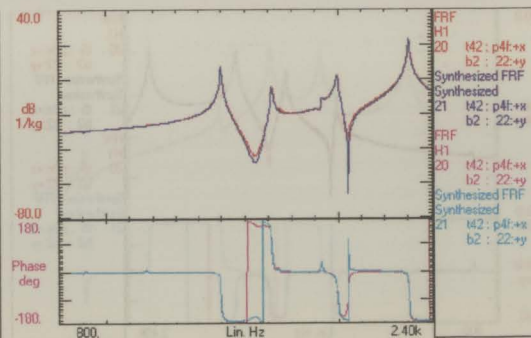


Figura B.86 - FRF $H_{p4f|22}$ medida e sintetizada.

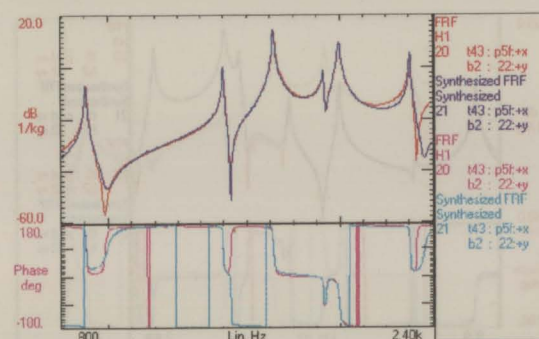


Figura B.87 - FRF $H_{p5f|22}$ medida e sintetizada.

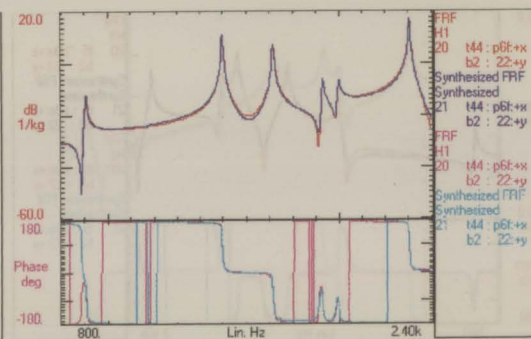


Figura B.88 - FRF $H_{p6f|22}$ medida e sintetizada.

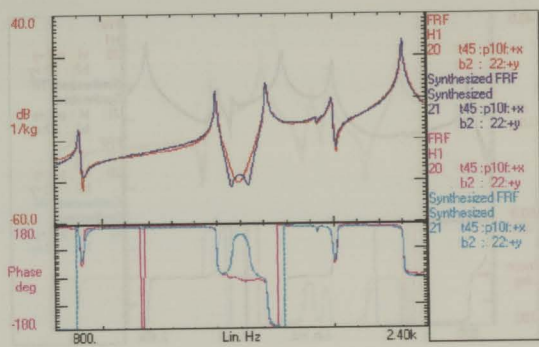


Figura B.89 - FRF $H_{p10f|22}$ medida e sintetizada.

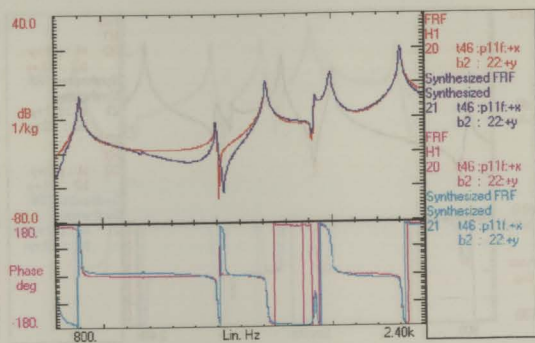


Figura B.90 - FRF $H_{p11f|22}$ medida e sintetizada.

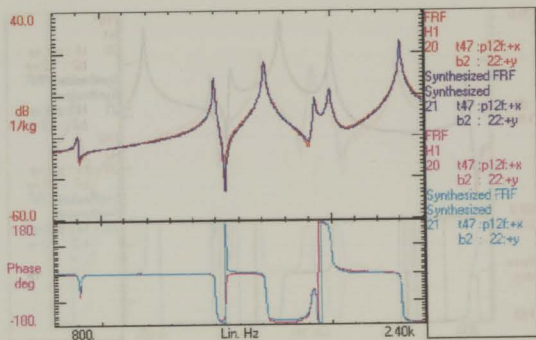


Figura B.91 - FRF $H_{p12f|22}$ medida e sintetizada.

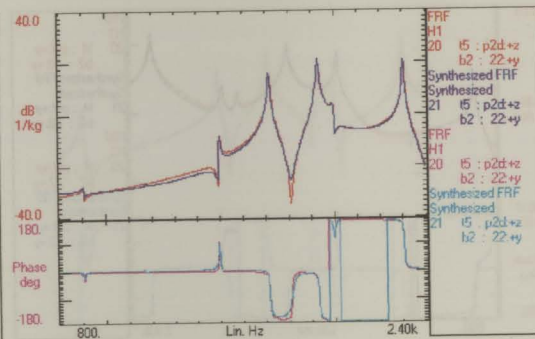


Figura B.92 - FRF $H_{p2d|22}$ medida e sintetizada.

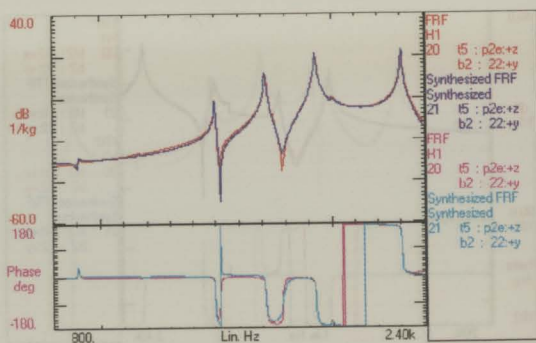


Figura B.93 - FRF $H_{p2e|22}$ medida e sintetizada.

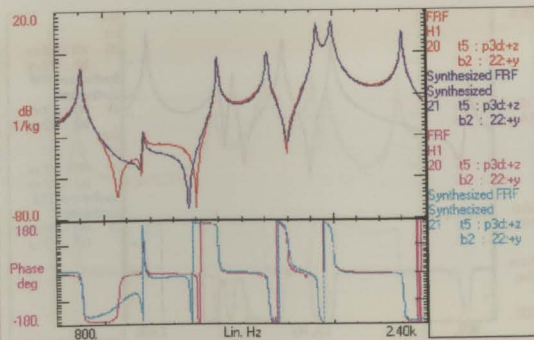


Figura B.94 - FRF $H_{p3d|22}$ medida e sintetizada.

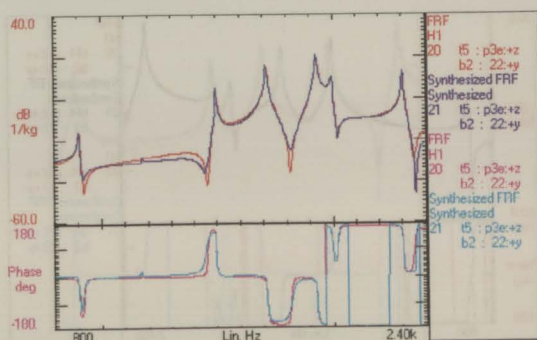


Figura B.95 - FRF $H_{p3e|22}$ medida e sintetizada.

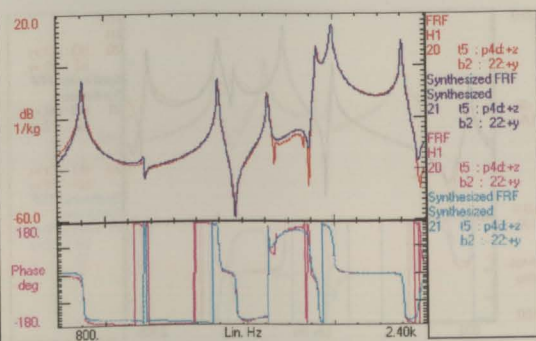


Figura B.96 - FRF $H_{p4d|22}$ medida e sintetizada.

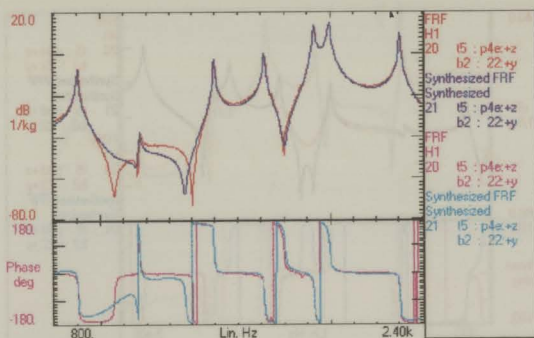


Figura B.97 - FRF $H_{p4e|22}$ medida e sintetizada.

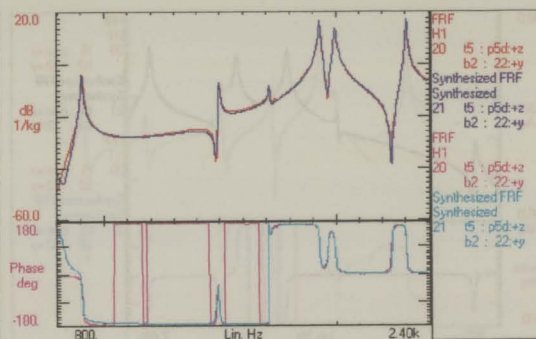


Figura B.98 - FRF $H_{p5d|22}$ medida e sintetizada.

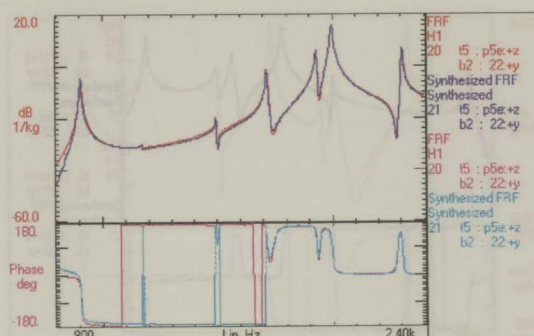


Figura B.99 - FRF $H_{p5e|22}$ medida e sintetizada.

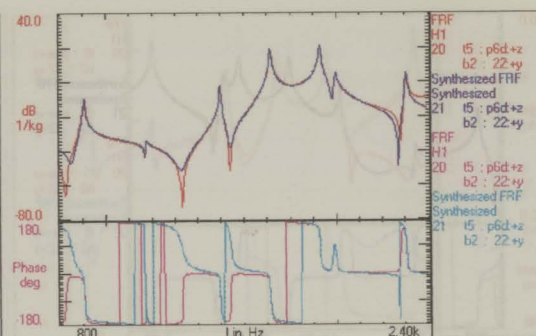


Figura B.100 - FRF $H_{p6d|22}$ medida e sintetizada.

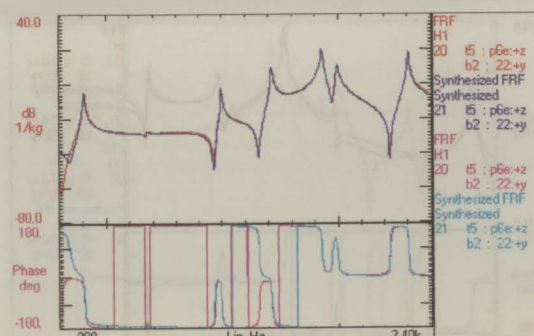


Figura B.101 - FRF $H_{p6e|22}$ medida e sintetizada.

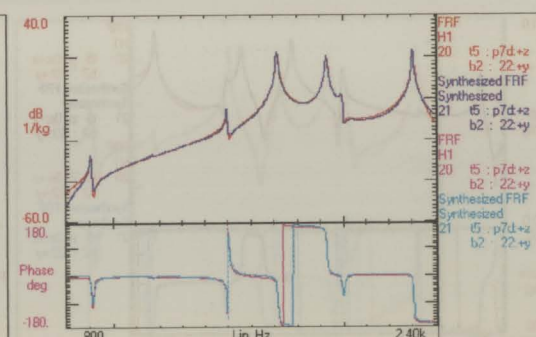


Figura B.102 - FRF $H_{p7d|22}$ medida e sintetizada.

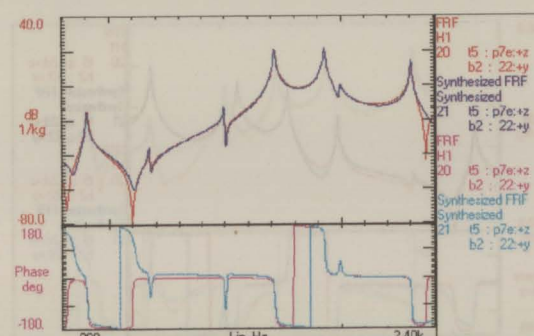


Figura B.103 - FRF $H_{p7e|22}$ medida e sintetizada.

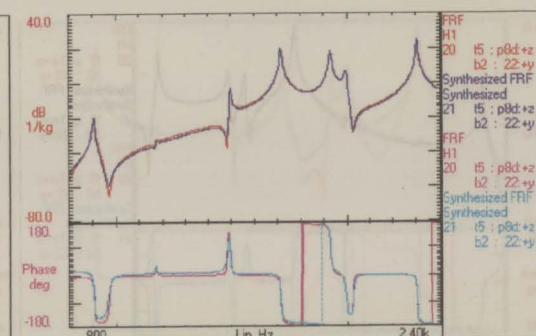


Figura B.104 - FRF $H_{p8d|22}$ medida e sintetizada.

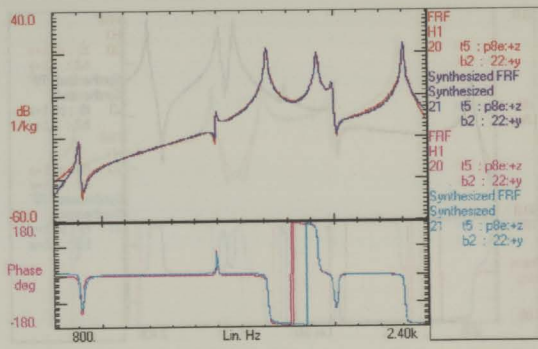


Figura B.105 - FRF $H_{p8e|22}$ medida e sintetizada.

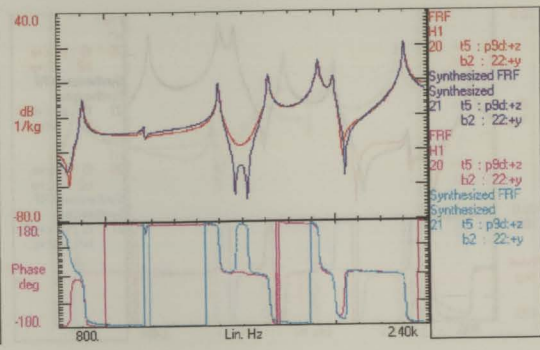


Figura B.106 - FRF $H_{p9d|22}$ medida e sintetizada.

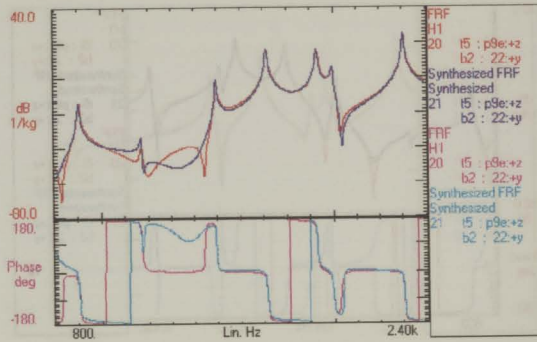


Figura B.107 - FRF $H_{p9e|22}$ medida e sintetizada.

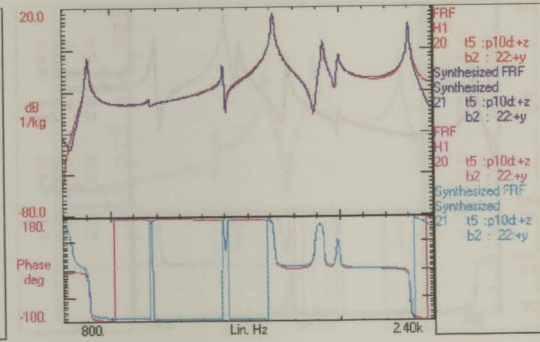


Figura B.108 - FRF $H_{p10d|22}$ medida e sintetizada.

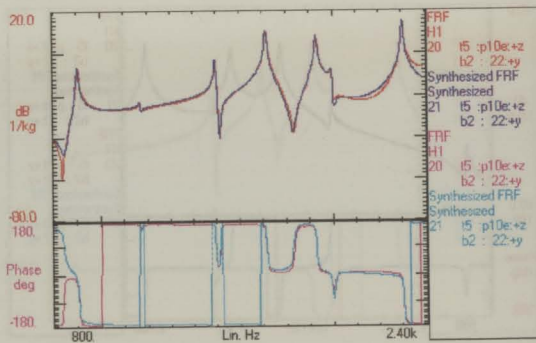


Figura B.109 - FRF $H_{p10e|22}$ medida e sintetizada.

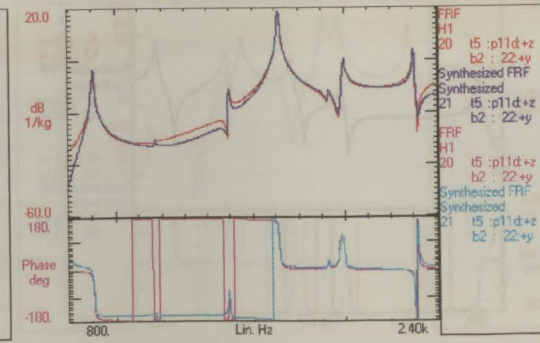


Figura B.110 - FRF $H_{p11d|22}$ medida e sintetizada.

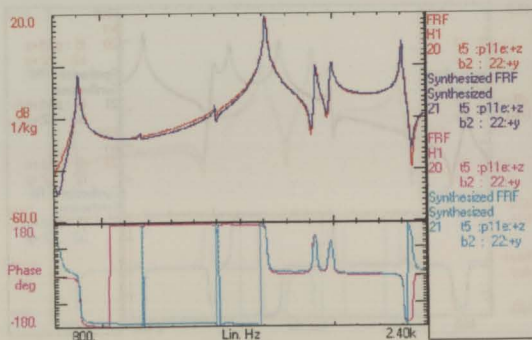


Figura B.111 - FRF $H_{p11e|22}$ medida e sintetizada.

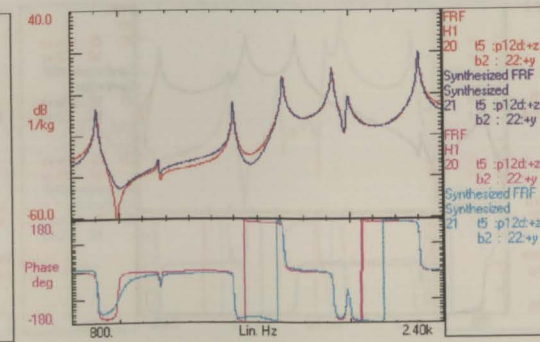


Figura B.112 - FRF $H_{p12d|22}$ medida e sintetizada.

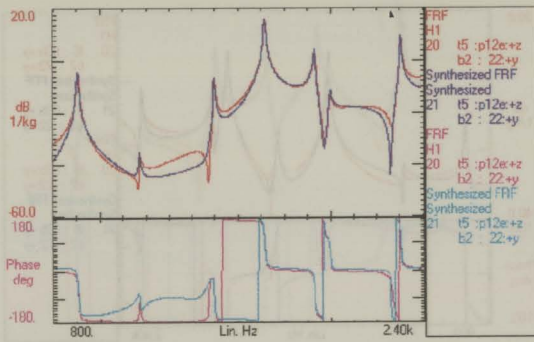


Figura B.113 - FRF $H_{p12e|22}$ medida e sintetizada.

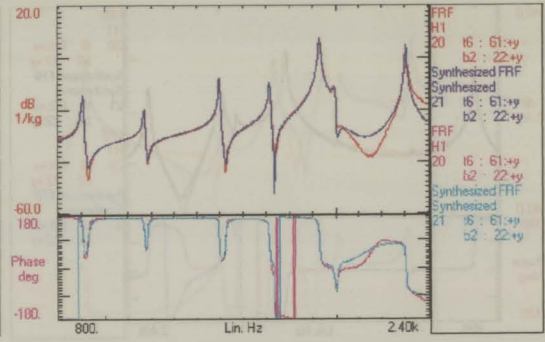


Figura B.114 - FRF $H_{61|22}$ medida e sintetizada.

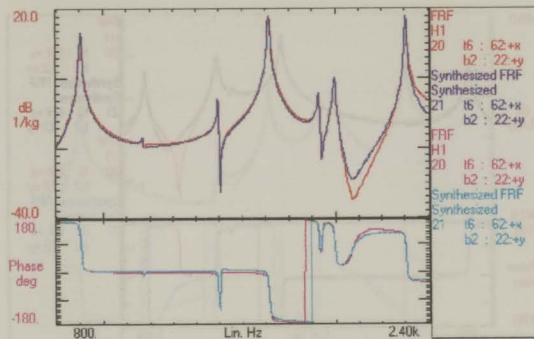


Figura B.115 - FRF $H_{62|22}$ medida e sintetizada.

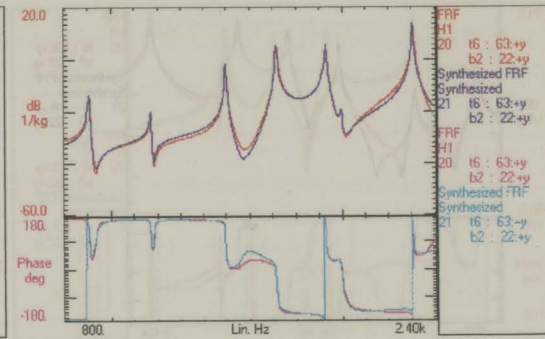


Figura B.116 - FRF $H_{63|22}$ medida e sintetizada.

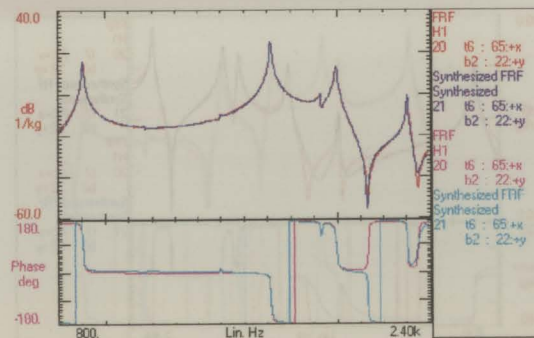


Figura B.117 - FRF $H_{65|22}$ medida e sintetizada.

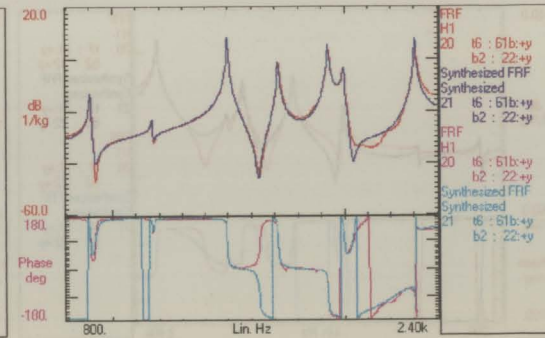


Figura B.118 - FRF $H_{61b|22}$ medida e sintetizada.

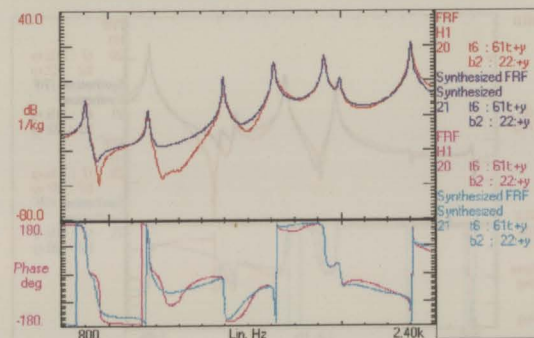


Figura B.119 - FRF $H_{61t|22}$ medida e sintetizada.

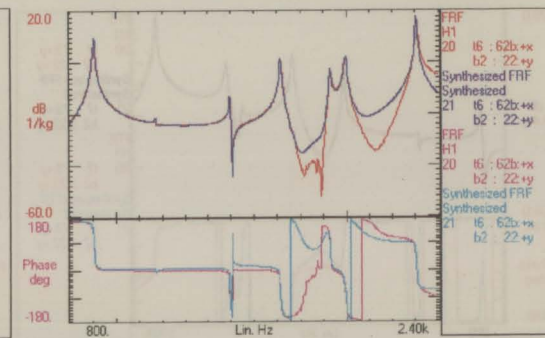


Figura B.120 - FRF $H_{62b|22}$ medida e sintetizada.

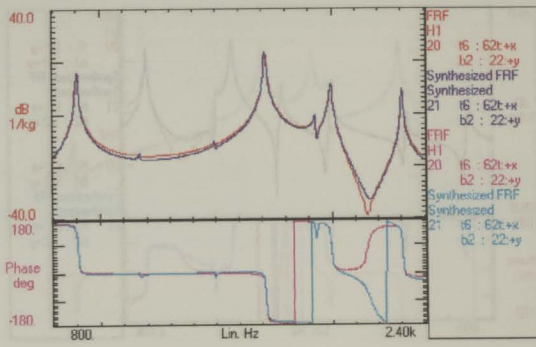


Figura B.121 - FRF $H_{62t|22}$ medida e sintetizada.

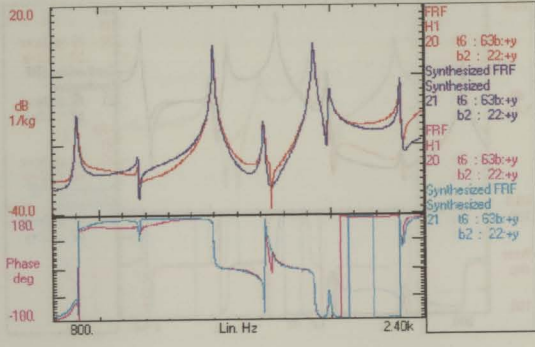


Figura B.122 - FRF $H_{63b|22}$ medida e sintetizada.

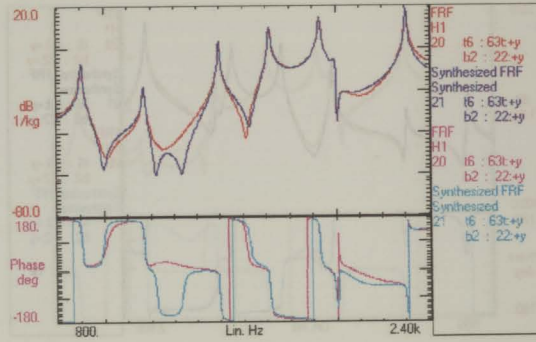


Figura B.123 - FRF $H_{63t|22}$ medida e sintetizada.

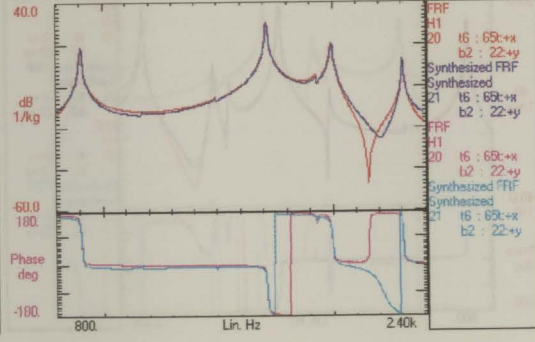


Figura B.124 - FRF $H_{65t|22}$ medida e sintetizada.

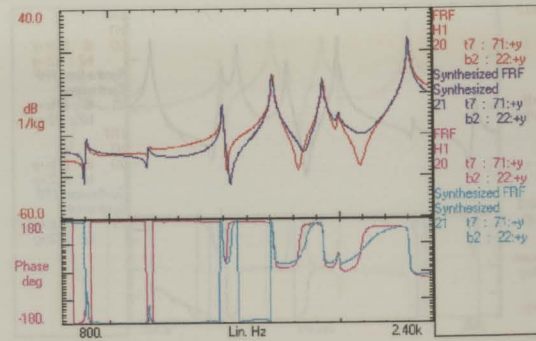


Figura B.125 - FRF $H_{71|22}$ medida e sintetizada.

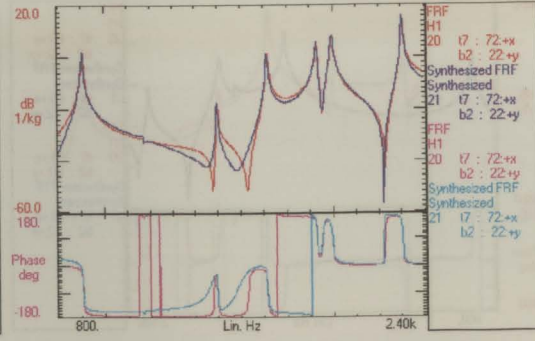


Figura B.126 - FRF $H_{72|22}$ medida e sintetizada.

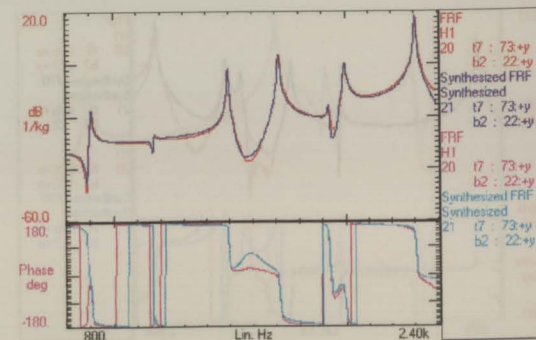


Figura B.127 - FRF $H_{73|22}$ medida e sintetizada.

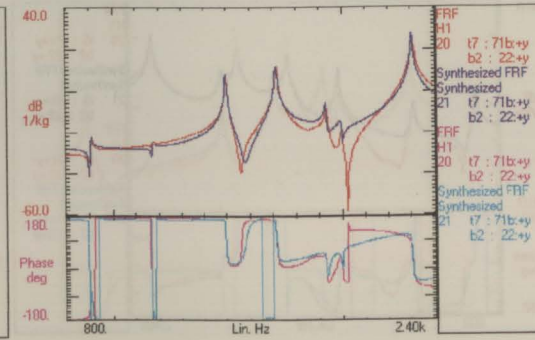


Figura B.128 - FRF $H_{71b|22}$ medida e sintetizada.

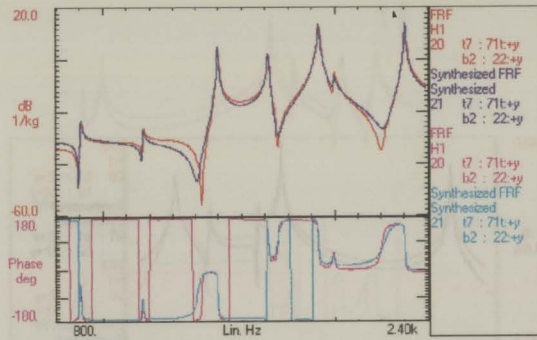


Figura B.129 - FRF $H_{71t|22}$ medida e sintetizada.

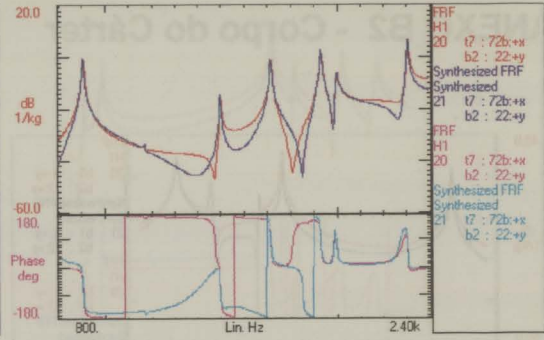


Figura B.130 - FRF $H_{72b|22}$ medida e sintetizada.

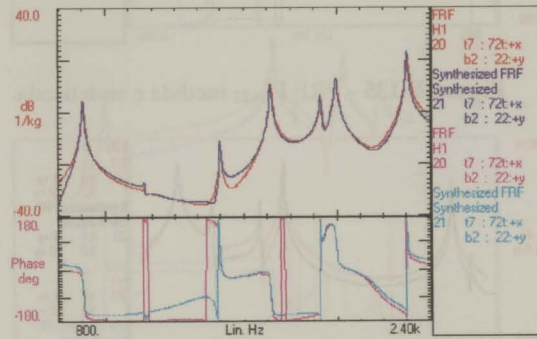


Figura B.131 - FRF $H_{72t|22}$ medida e sintetizada.

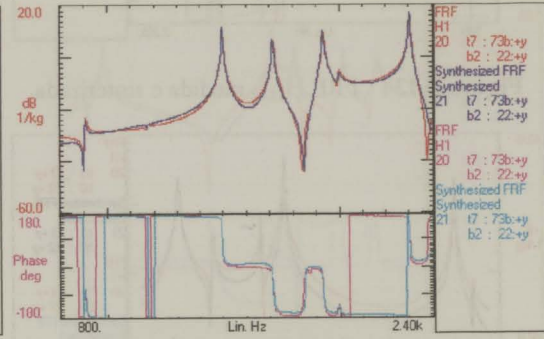


Figura B.132 - FRF $H_{73b|22}$ medida e sintetizada.

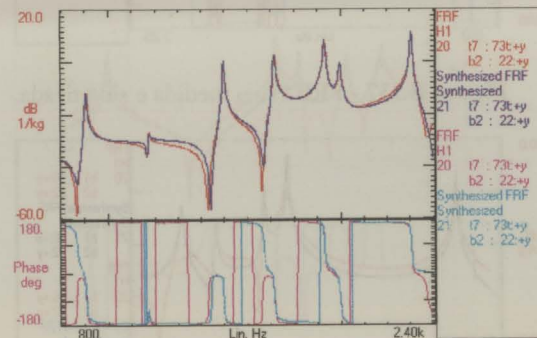


Figura B.133 - FRF $H_{73t|22}$ medida e sintetizada.

ANEXO B2 - Corpo do Cártor

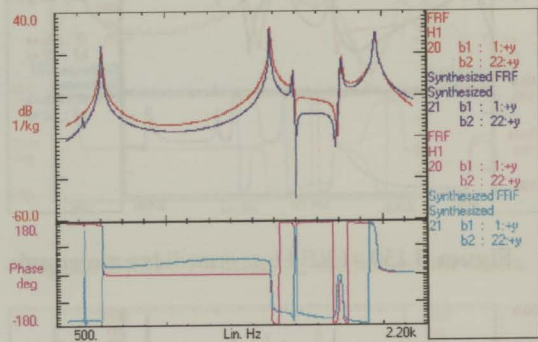


Figura B.134 - FRF $H_{1|22}$ medida e sintetizada.

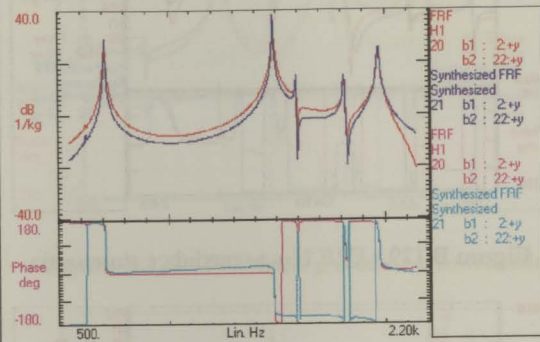


Figura B.135 - FRF $H_{2|22}$ medida e sintetizada.

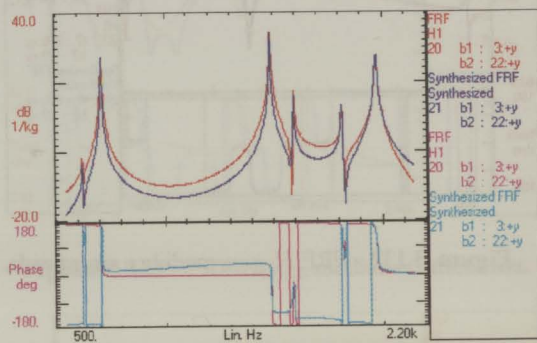


Figura B.136 - FRF $H_{3|22}$ medida e sintetizada.

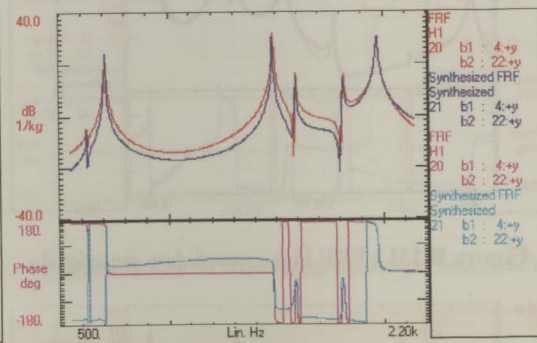


Figura B.137 - FRF $H_{4|22}$ medida e sintetizada.

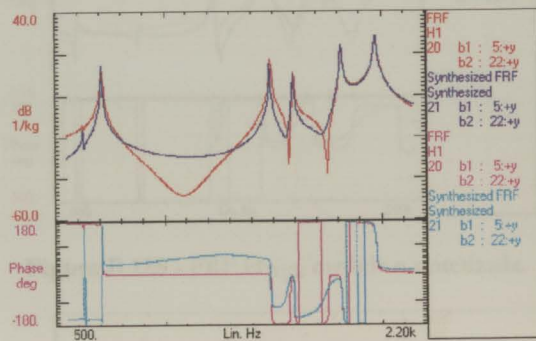


Figura B.138 - FRF $H_{5|22}$ medida e sintetizada.

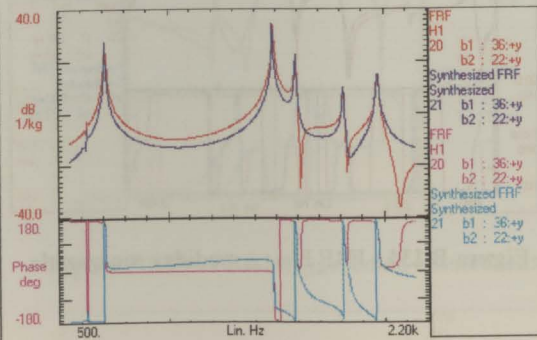


Figura B.139 - FRF $H_{36|22}$ medida e sintetizada.

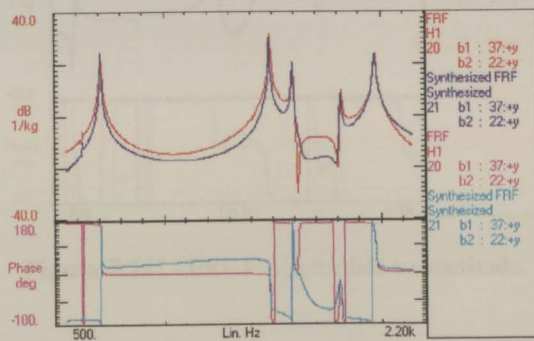


Figura B.140 - FRF $H_{37|22}$ medida e sintetizada.

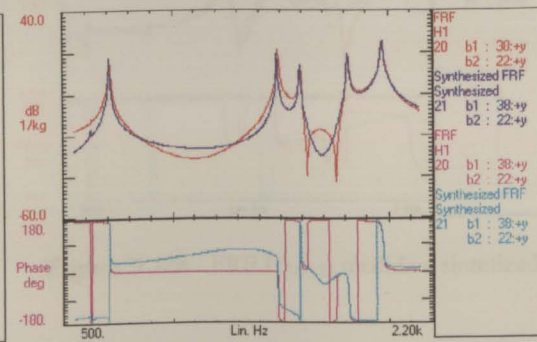


Figura B.141 - FRF $H_{38|22}$ medida e sintetizada.

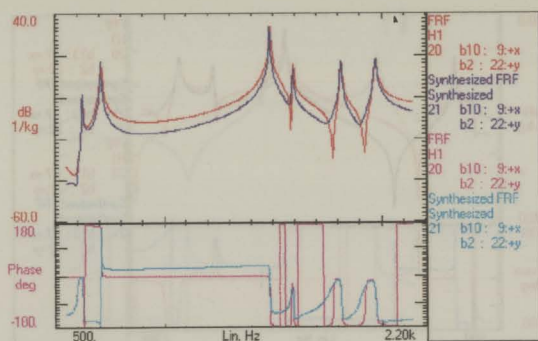


Figura B.142 - FRF $H_{9|22}$ medida e sintetizada.

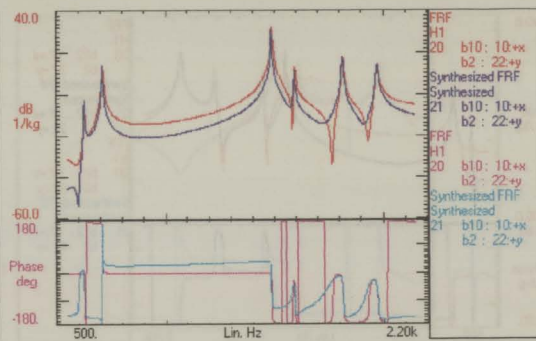


Figura B.143 - FRF $H_{10|22}$ medida e sintetizada.

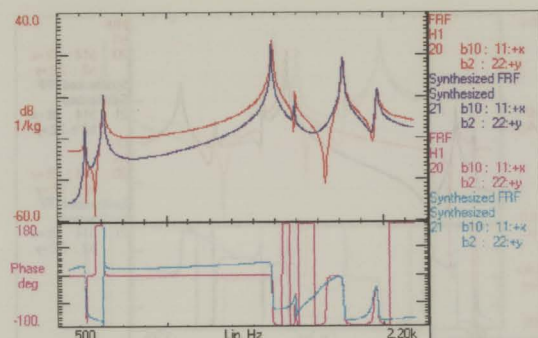


Figura B.144 - FRF $H_{11|22}$ medida e sintetizada.

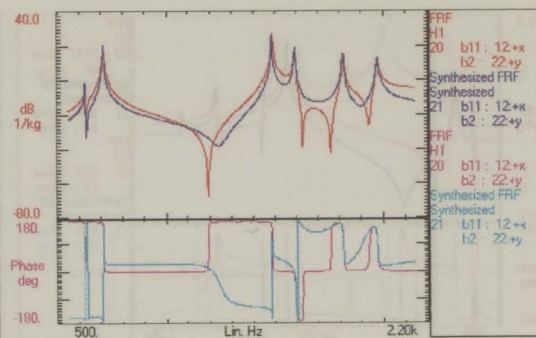


Figura B.145 - FRF $H_{12|22}$ medida e sintetizada.

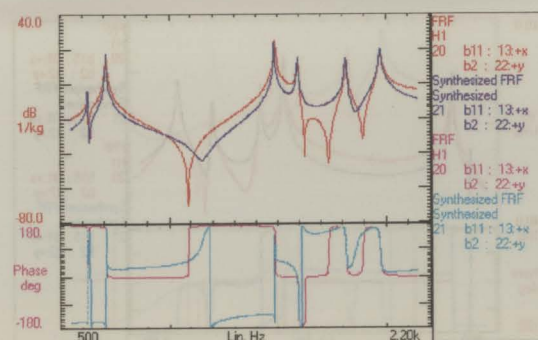


Figura B.146 - FRF $H_{13|22}$ medida e sintetizada.

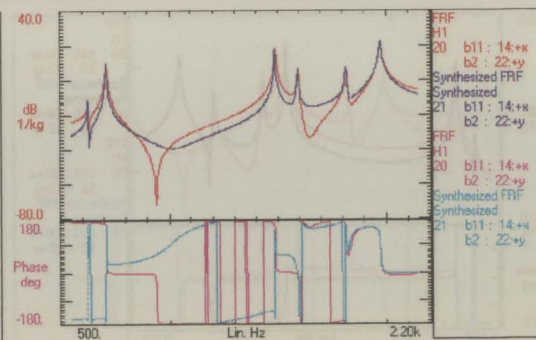


Figura B.147 - FRF $H_{14|22}$ medida e sintetizada.

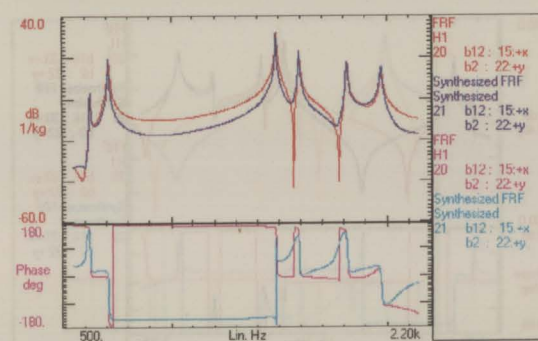


Figura B.148 - FRF $H_{15|22}$ medida e sintetizada.

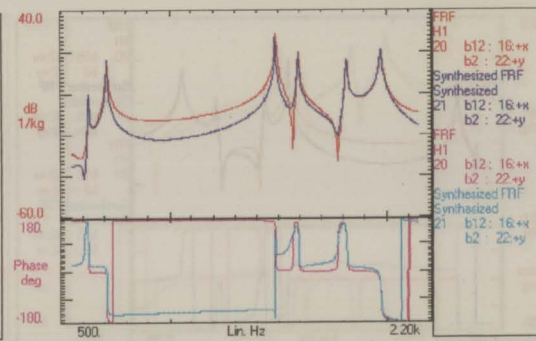


Figura B.149 - FRF $H_{16|22}$ medida e sintetizada.

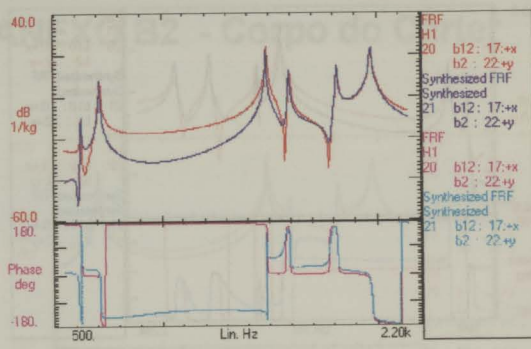


Figura B.150 - FRF $H_{17|22}$ medida e sintetizada.

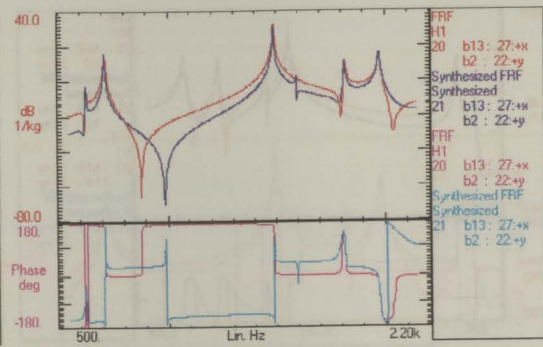


Figura B.151 - FRF $H_{27|22}$ medida e sintetizada.

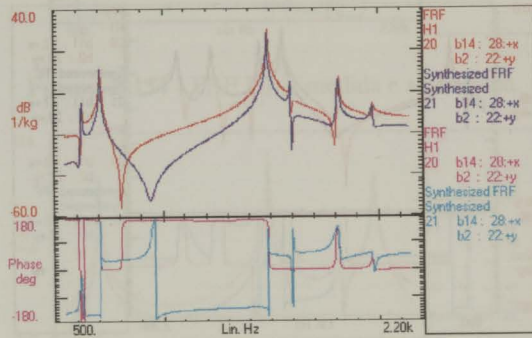


Figura B.152 - FRF $H_{28|22}$ medida e sintetizada.

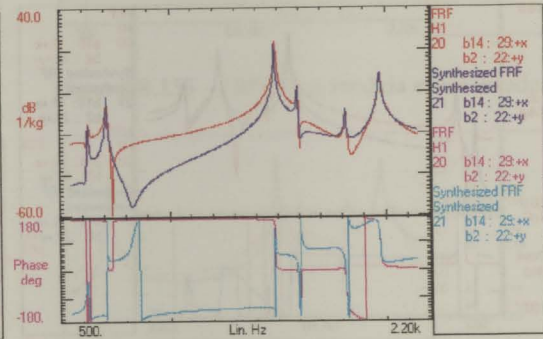


Figura B.153 - FRF $H_{29|22}$ medida e sintetizada.

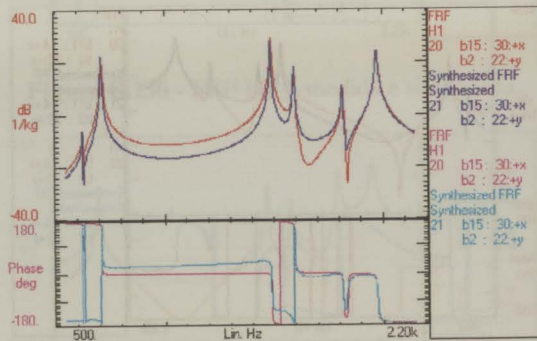


Figura B.154 - FRF $H_{30|22}$ medida e sintetizada.

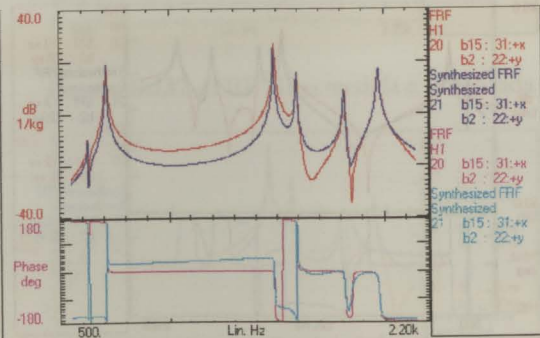


Figura B.155 - FRF $H_{31|22}$ medida e sintetizada.

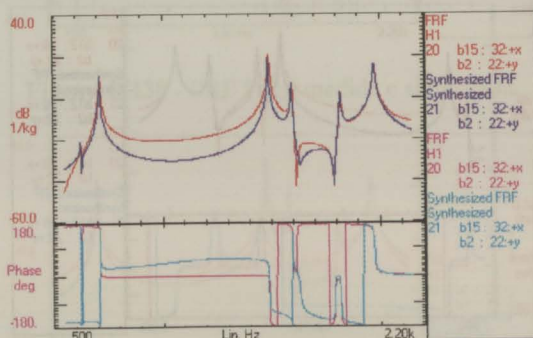


Figura B.156 - FRF $H_{32|22}$ medida e sintetizada.

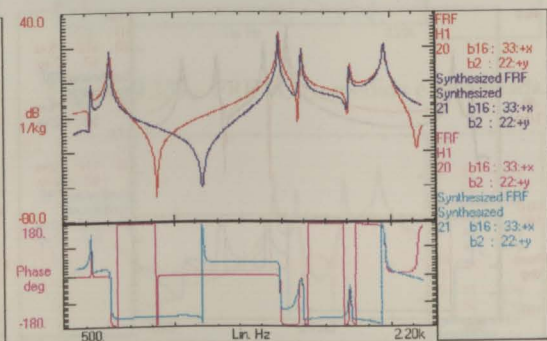


Figura B.157 - FRF $H_{33|22}$ medida e sintetizada.

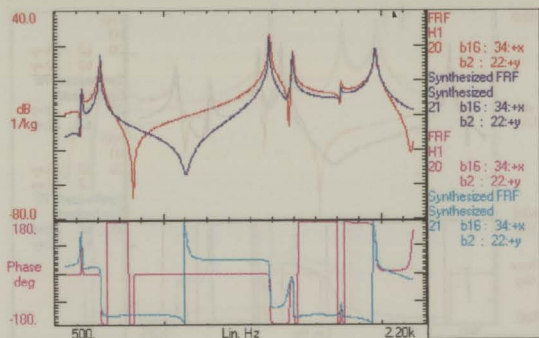


Figura B.158 - FRF $H_{34|22}$ medida e sintetizada.

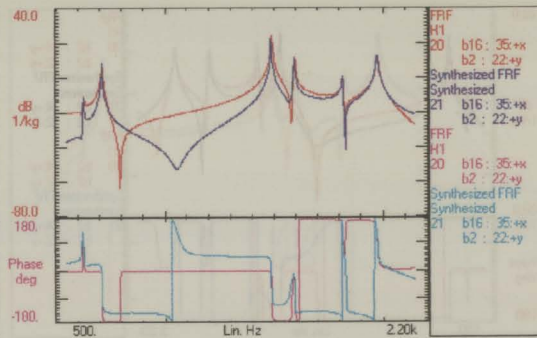


Figura B.159 - FRF $H_{35|22}$ medida e sintetizada.

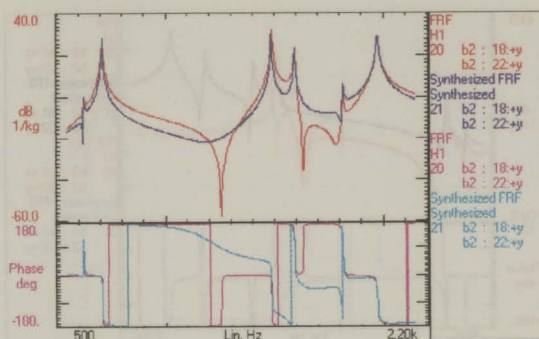


Figura B.160 - FRF $H_{18|22}$ medida e sintetizada.

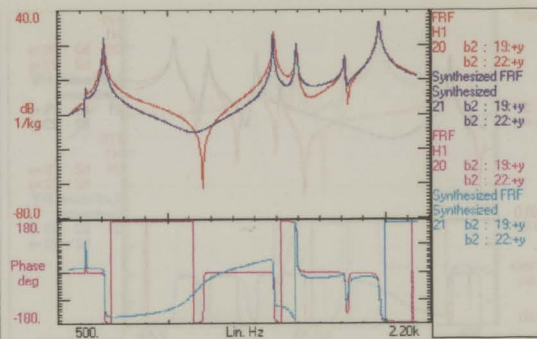


Figura B.161 - FRF $H_{19|22}$ medida e sintetizada.

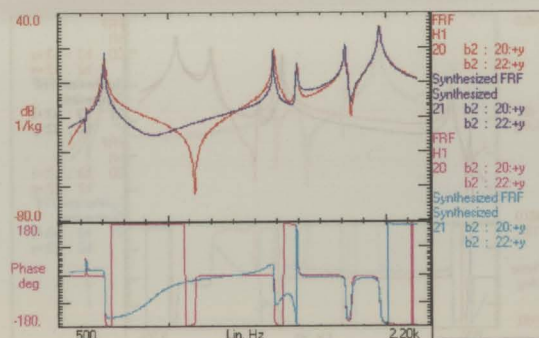


Figura B.162 - FRF $H_{20|22}$ medida e sintetizada.

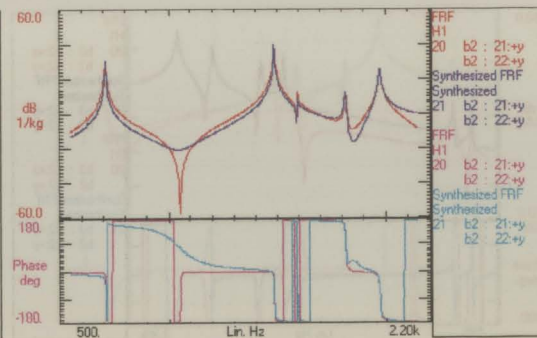


Figura B.163 - FRF $H_{21|22}$ medida e sintetizada.

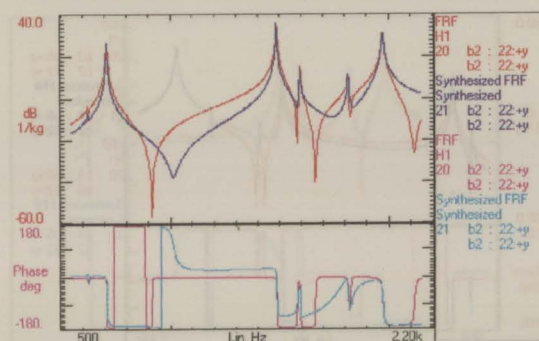


Figura B.164 - FRF $H_{22|22}$ medida e sintetizada.

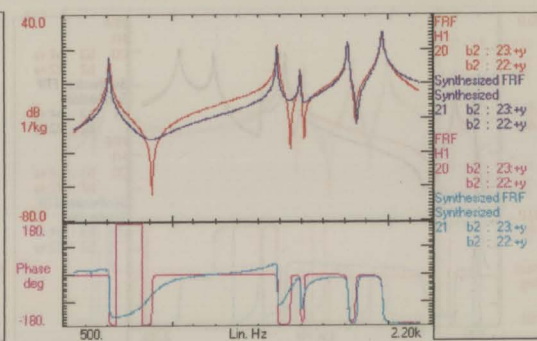


Figura B.165 - FRF $H_{23|22}$ medida e sintetizada.

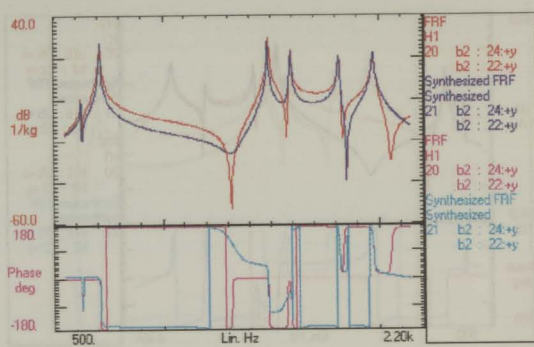


Figura B.166 - FRF $H_{24|22}$ medida e sintetizada.

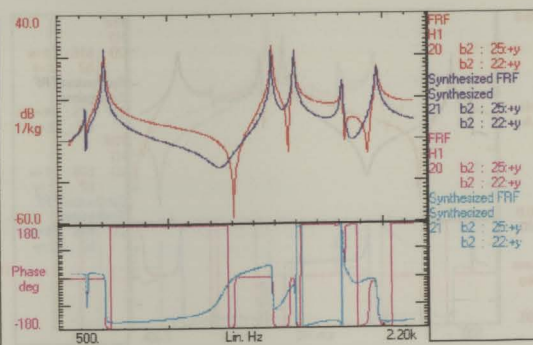


Figura B.167 - FRF $H_{25|22}$ medida e sintetizada.

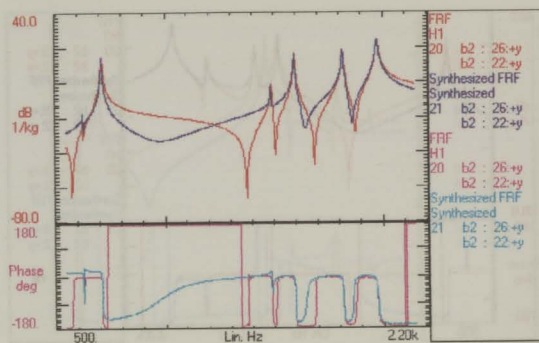


Figura B.168 - FRF $H_{26|22}$ medida e sintetizada.

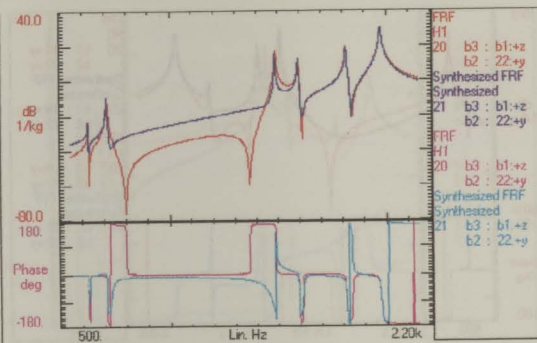


Figura B.169 - FRF $H_{b1|22}$ medida e sintetizada.

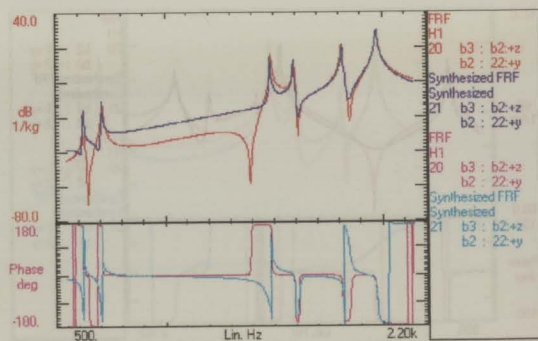


Figura B.170 - FRF $H_{b2|22}$ medida e sintetizada.

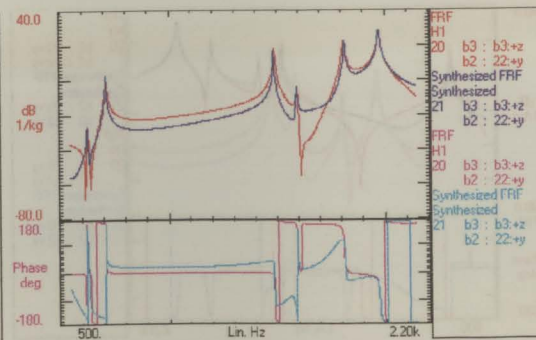


Figura B.171 - FRF $H_{b3|22}$ medida e sintetizada.

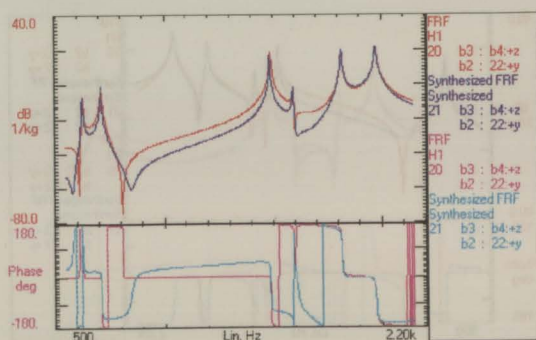


Figura B.172 - FRF $H_{b4|22}$ medida e sintetizada.

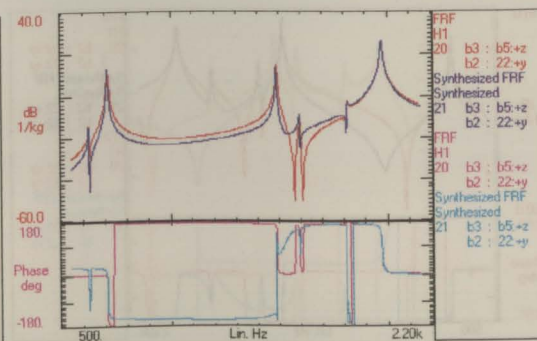


Figura B.173 - FRF $H_{b5|22}$ medida e sintetizada.

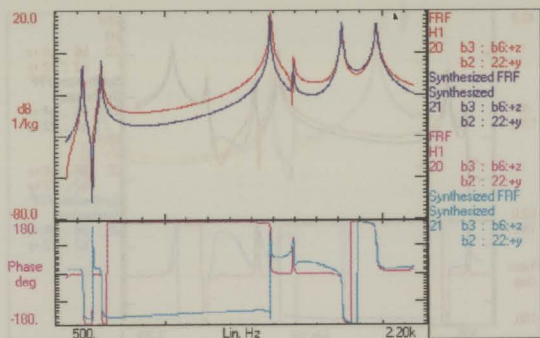


Figura B.174 - FRF $H_{b6|22}$ medida e sintetizada.

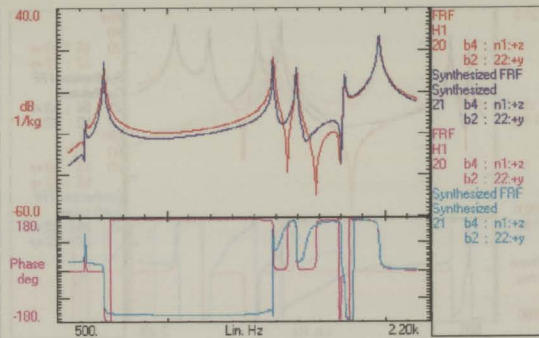


Figura B.175 - FRF $H_{n1|22}$ medida e sintetizada.

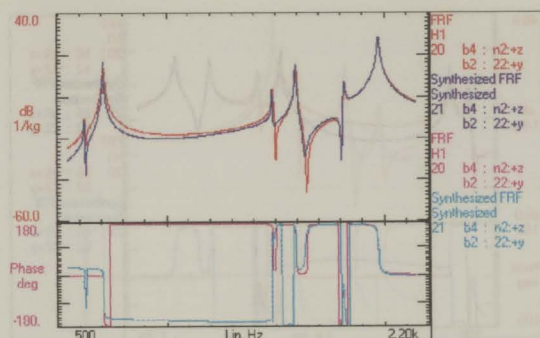


Figura B.176 - FRF $H_{n2|22}$ medida e sintetizada.

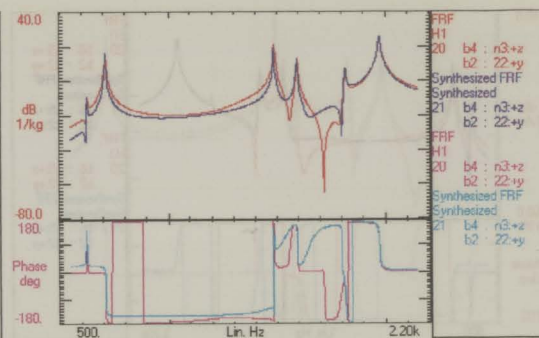


Figura B.177 - FRF $H_{n3|22}$ medida e sintetizada.

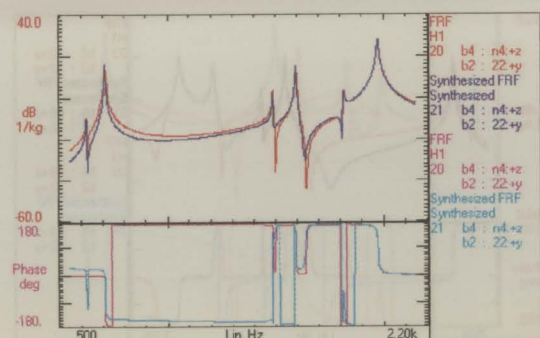


Figura B.178 - FRF $H_{n4|22}$ medida e sintetizada.

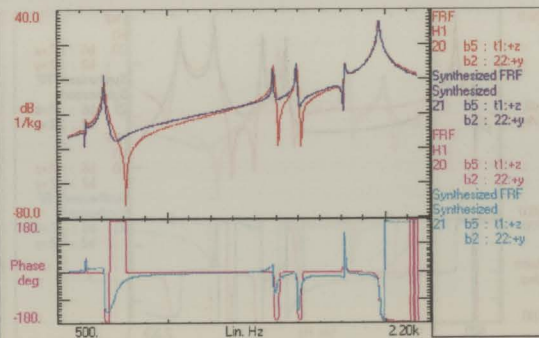


Figura B.179 - FRF $H_{t1|22}$ medida e sintetizada.

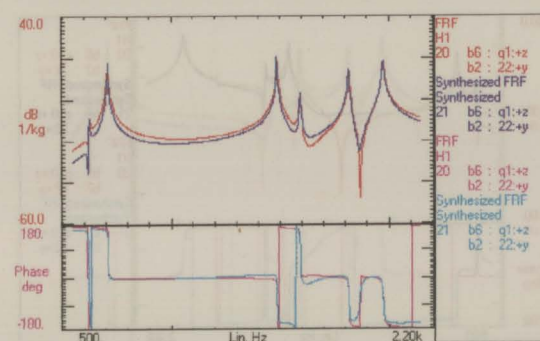


Figura B.180 - FRF $H_{q1|22}$ medida e sintetizada.

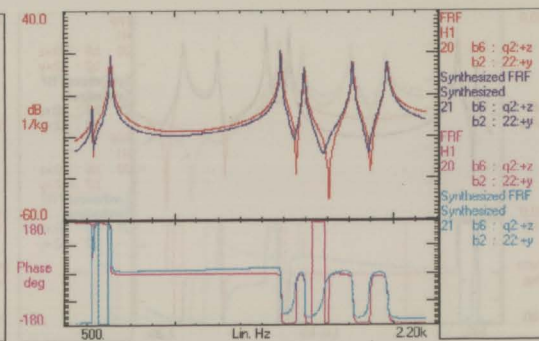


Figura B.181 - FRF $H_{q2|22}$ medida e sintetizada.

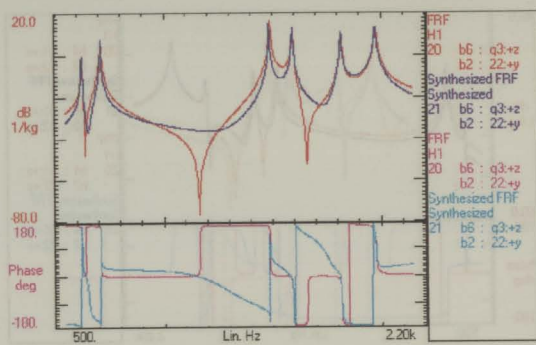


Figura B.182 - FRF $H_{q3|22}$ medida e sintetizada.

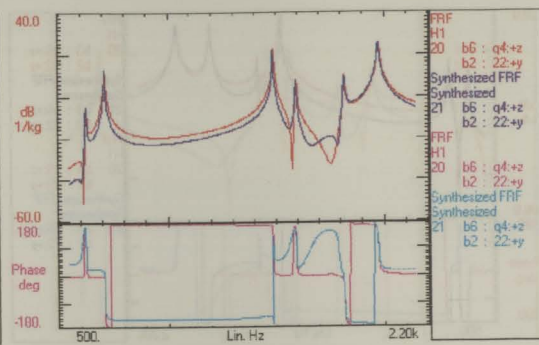


Figura B.183 - FRF $H_{q4|22}$ medida e sintetizada.

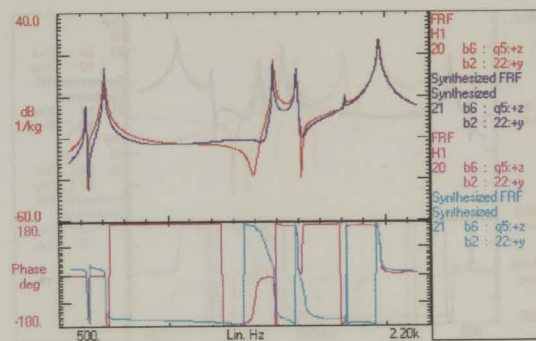


Figura B.184 - FRF $H_{q5|22}$ medida e sintetizada.

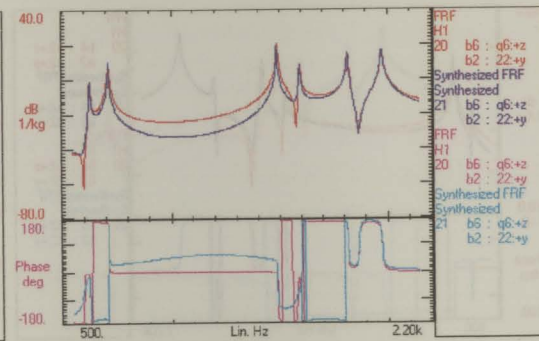


Figura B.185 - FRF $H_{q6|22}$ medida e sintetizada.

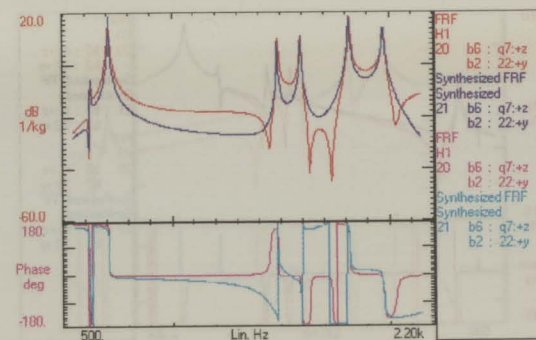


Figura B.186 - FRF $H_{q7|22}$ medida e sintetizada.

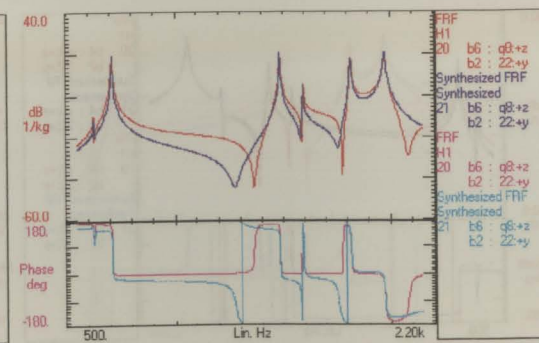


Figura B.187 - FRF $H_{q8|22}$ medida e sintetizada.

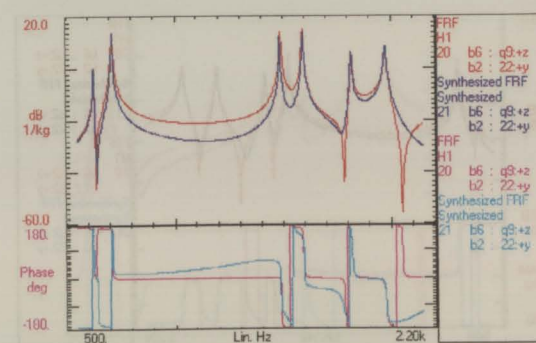


Figura B.188 - FRF $H_{q9|22}$ medida e sintetizada.

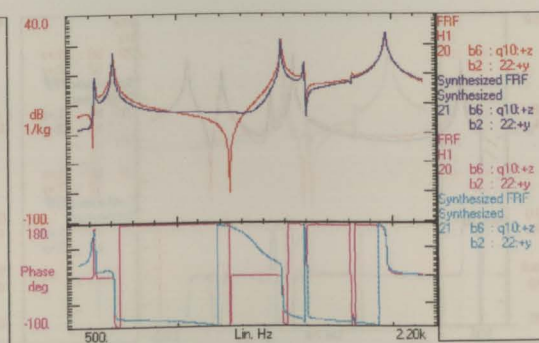


Figura B.189 - FRF $H_{q10|22}$ medida e sintetizada.

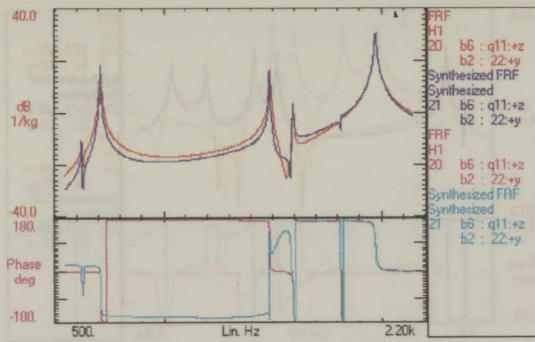


Figura B.190 - FRF $H_{q11|22}$ medida e sintetizada.

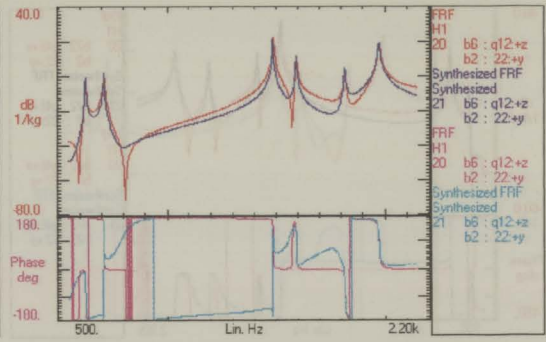


Figura B.191 - FRF $H_{q12|22}$ medida e sintetizada.

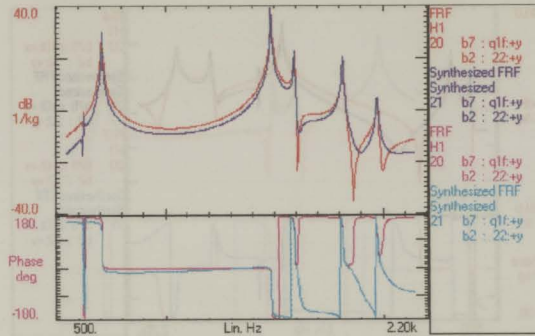


Figura B.192 - FRF $H_{q1f|22}$ medida e sintetizada.

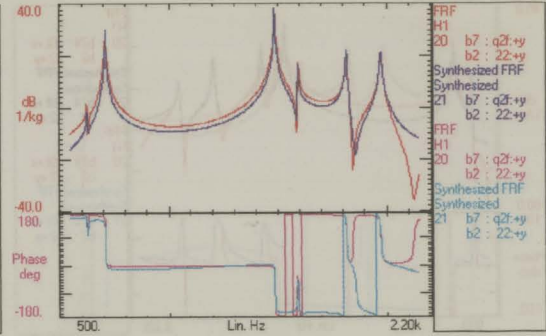


Figura B.193 - FRF $H_{q2f|22}$ medida e sintetizada.

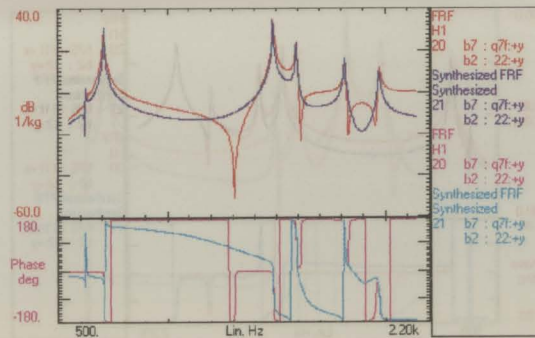


Figura B.194 - FRF $H_{q7f|22}$ medida e sintetizada.

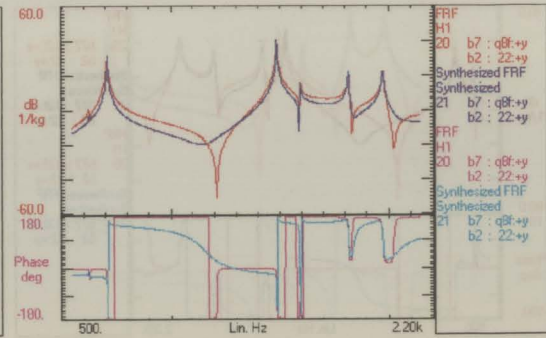


Figura B.195 - FRF $H_{q8f|22}$ medida e sintetizada.

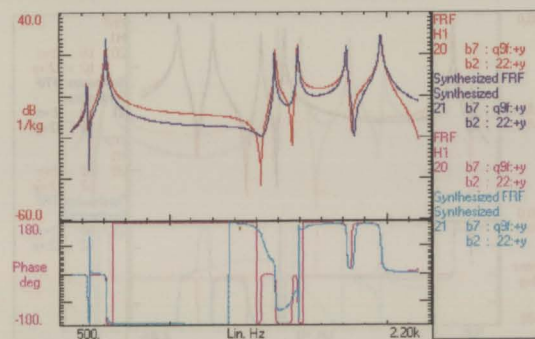


Figura B.196 - FRF $H_{q9f|22}$ medida e sintetizada.

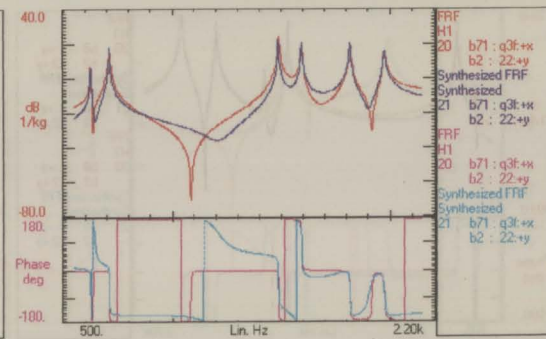


Figura B.197 - FRF $H_{q3f|22}$ medida e sintetizada.

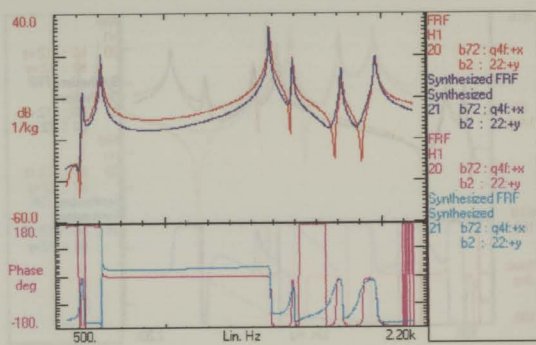


Figura B.198 - FRF $H_{q4f|22}$ medida e sintetizada.

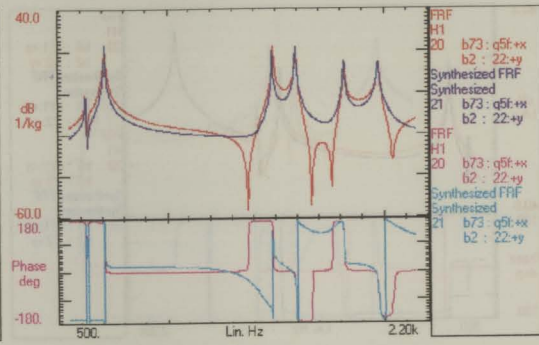


Figura B.199 - FRF $H_{q5f|22}$ medida e sintetizada.

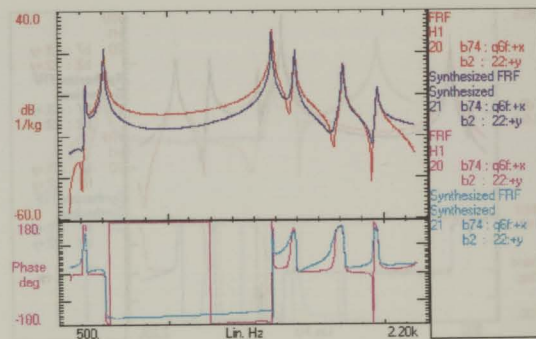


Figura B.200 - FRF $H_{q6f|22}$ medida e sintetizada.

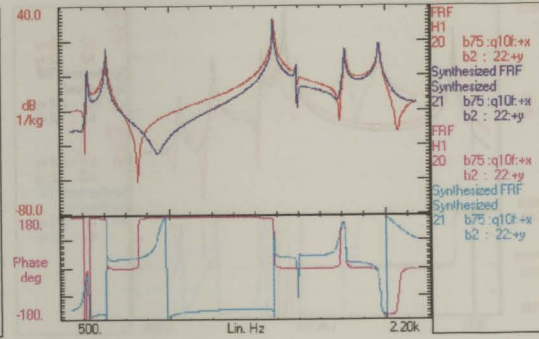


Figura B.201 - FRF $H_{q10f|22}$ medida e sintetizada.

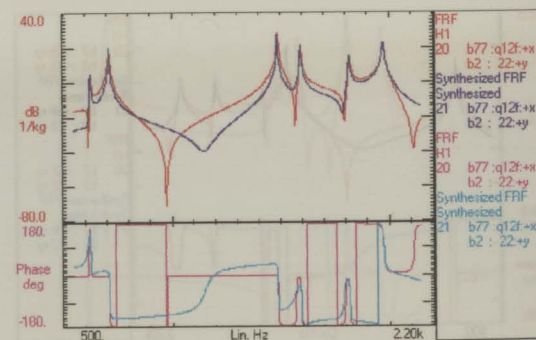


Figura B.202 - FRF $H_{q12f|22}$ medida e sintetizada.

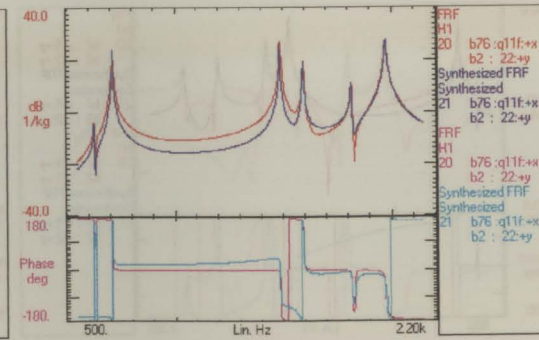


Figura B.203 - FRF $H_{q11f|22}$ medida e sintetizada.

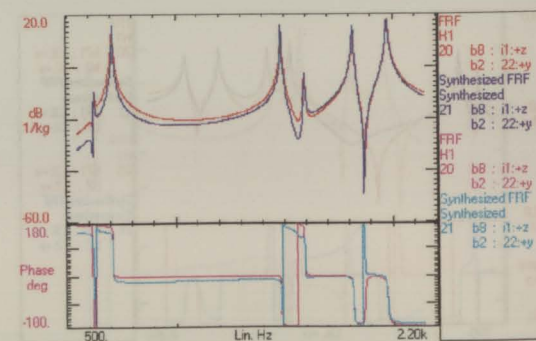


Figura B.204 - FRF $H_{i1|22}$ medida e sintetizada.

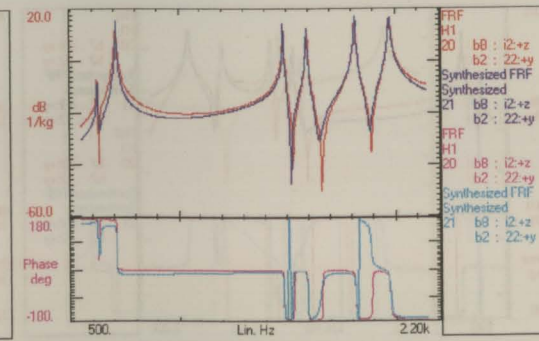


Figura B.205 - FRF $H_{i2|22}$ medida e sintetizada.

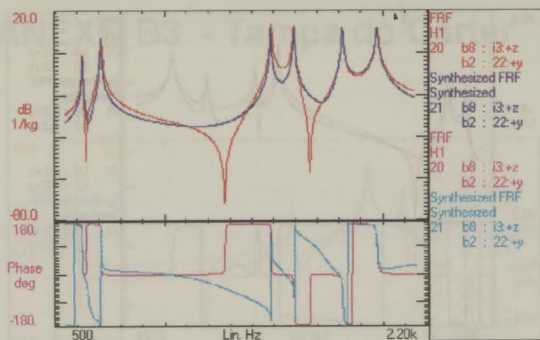


Figura B.206 - FRF $H_{i3|22}$ medida e sintetizada.

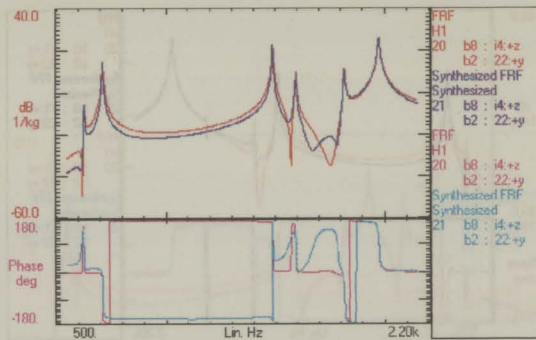


Figura B.207 - FRF $H_{i4|22}$ medida e sintetizada.

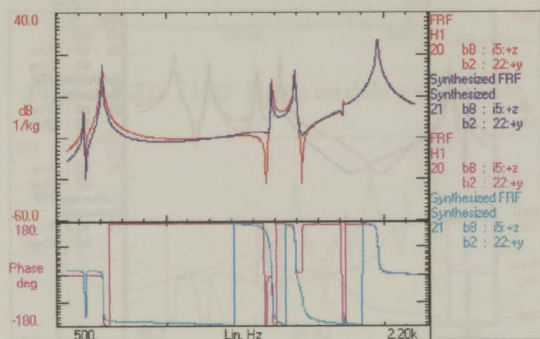


Figura B.208 - FRF $H_{i5|22}$ medida e sintetizada.

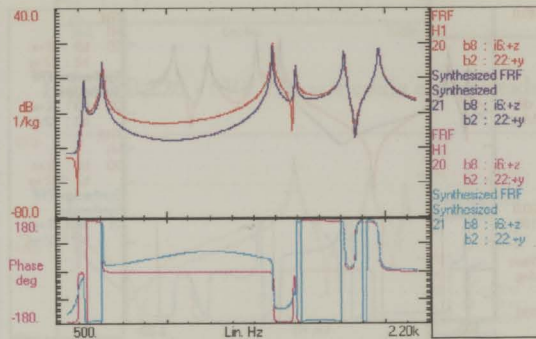


Figura B.209 - FRF $H_{i6|22}$ medida e sintetizada.

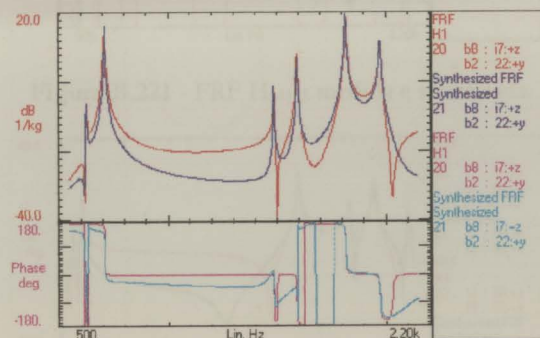


Figura B.210 - FRF $H_{i7|22}$ medida e sintetizada.

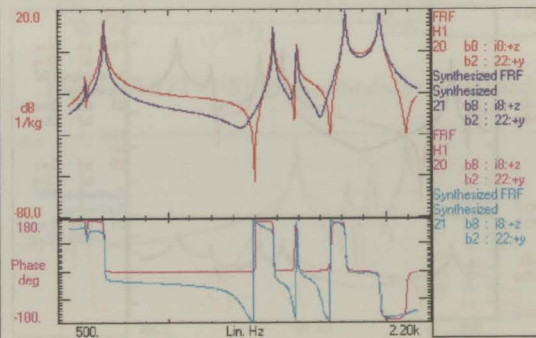


Figura B.211 - FRF $H_{i8|22}$ medida e sintetizada.

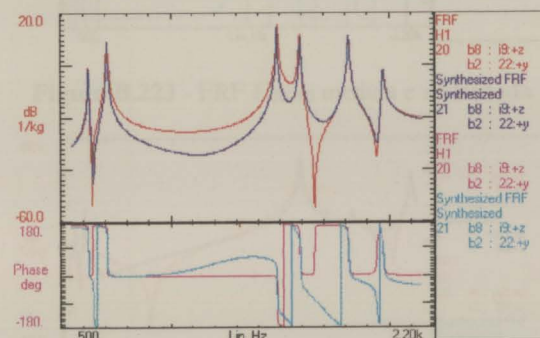


Figura B.212 - FRF $H_{i9|22}$ medida e sintetizada.

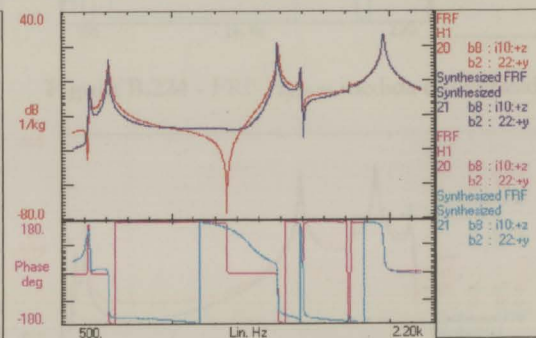


Figura B.213 - FRF $H_{i10|22}$ medida e sintetizada.

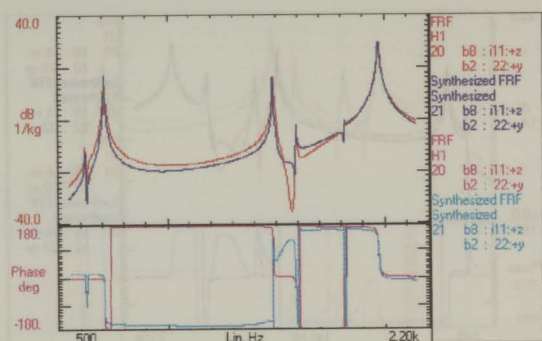


Figura B.214 - FRF $H_{11|22}$ medida e sintetizada.

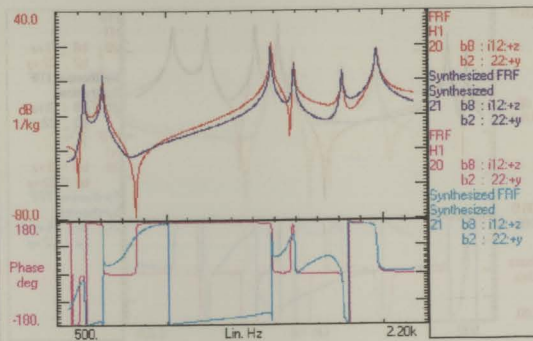


Figura B.215 - FRF $H_{12|22}$ medida e sintetizada.

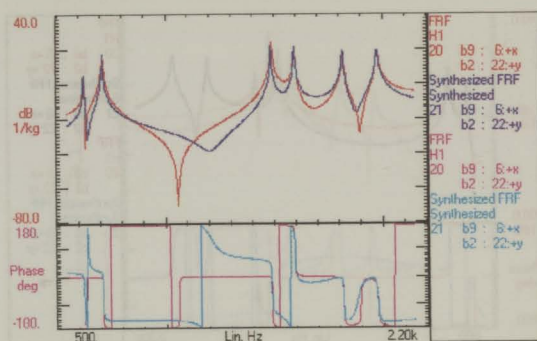


Figura B.216 - FRF $H_{6|22}$ medida e sintetizada.

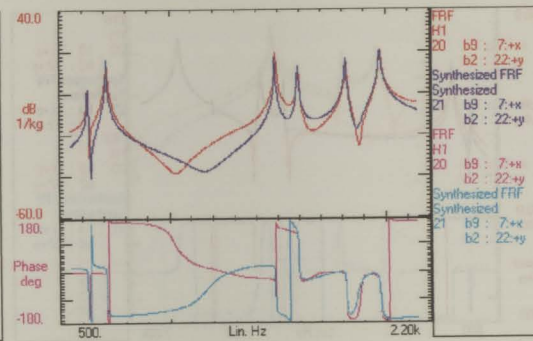


Figura B.217 - FRF $H_{7|22}$ medida e sintetizada.

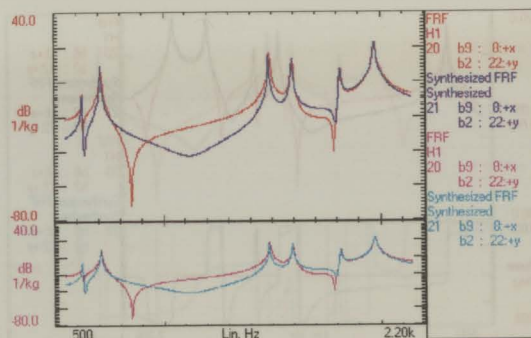


Figura B.218 - FRF $H_{8|22}$ medida e sintetizada.

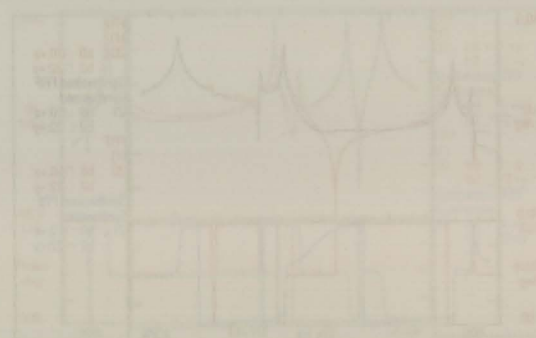


Figura B.219 - FRF $H_{9|22}$ medida e sintetizada.

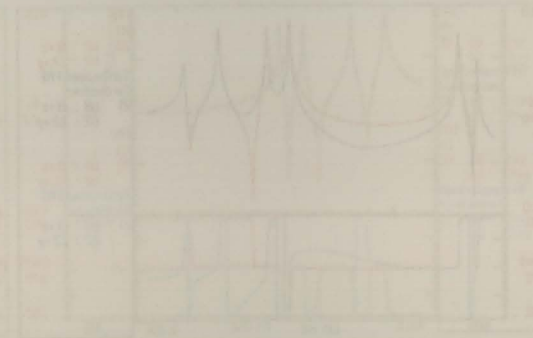


Figura B.220 - FRF $H_{10|22}$ medida e sintetizada.

ANEXO B3 - Tampa do Cárter

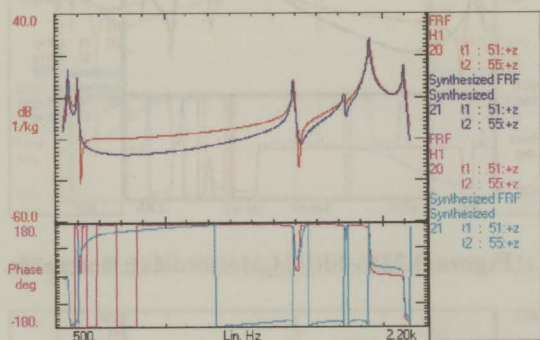


Figura B.219 - FRF $H_{51|55}$ medida e sintetizada.

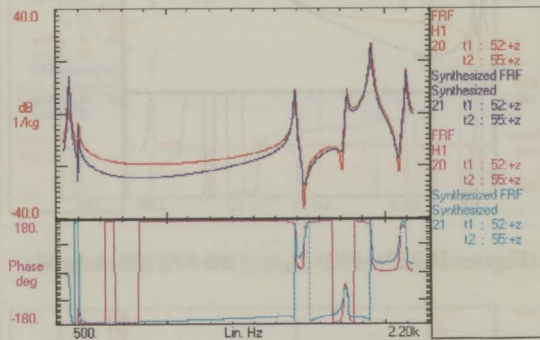


Figura B.220 - FRF $H_{52|55}$ medida e sintetizada.

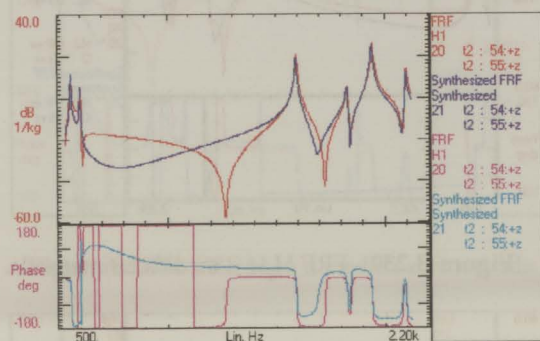


Figura B.221 - FRF $H_{54|55}$ medida e sintetizada.

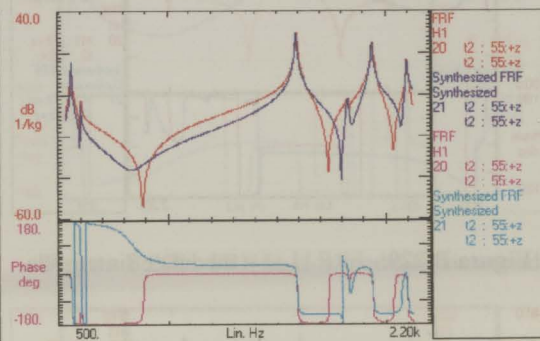


Figura B.222 - FRF $H_{55|55}$ medida e sintetizada.

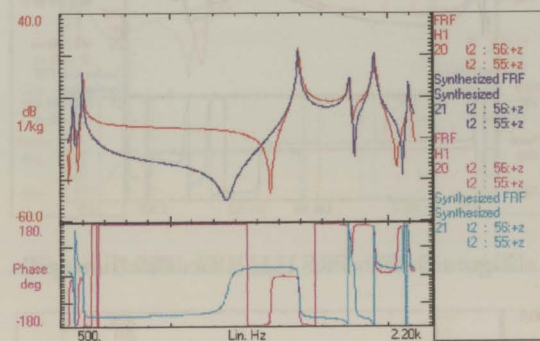


Figura B.223 - FRF $H_{56|55}$ medida e sintetizada.

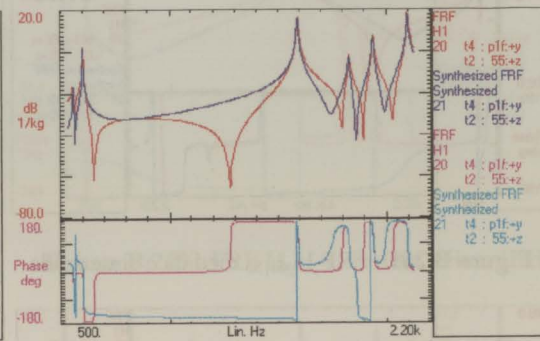


Figura B.224 - FRF $H_{p1f|55}$ medida e sintetizada.

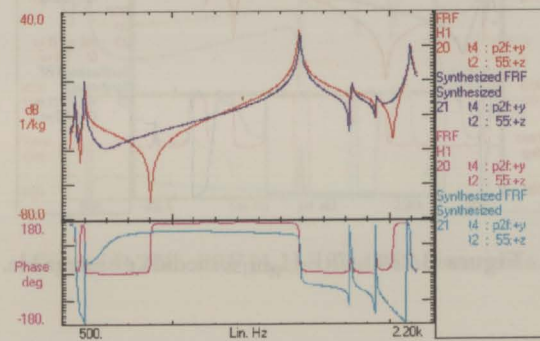


Figura B.225 - FRF $H_{p2f|55}$ medida e sintetizada.

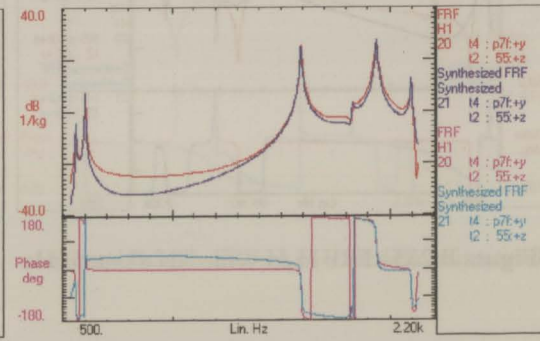


Figura B.226 - FRF $H_{p7f|55}$ medida e sintetizada.

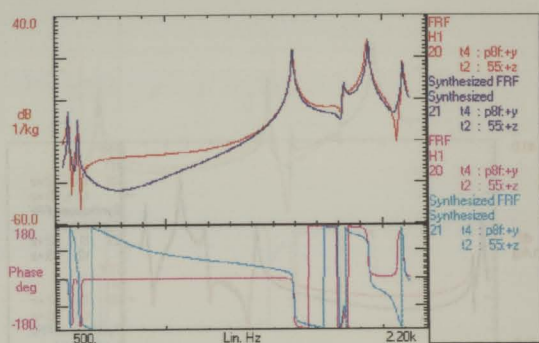


Figura B.227 - FRF $H_{p8f|55}$ medida e sintetizada.

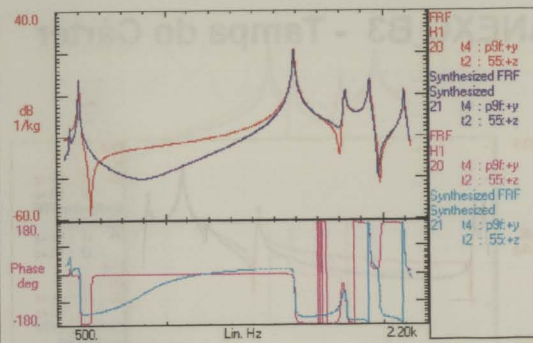


Figura B.228 - FRF $H_{p9f|55}$ medida e sintetizada.

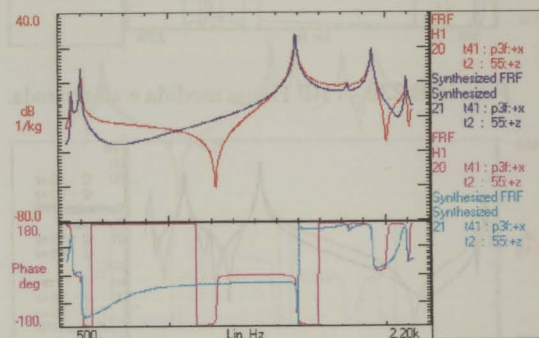


Figura B.229 - FRF $H_{p3f|55}$ medida e sintetizada.

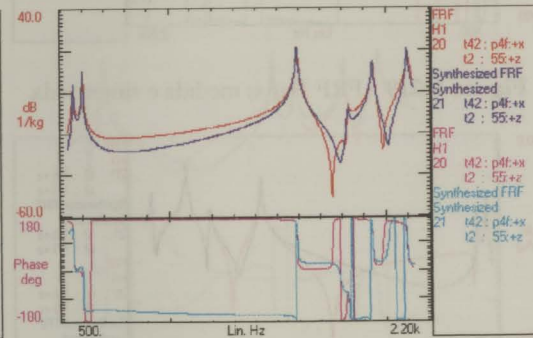


Figura B.230 - FRF $H_{p4f|55}$ medida e sintetizada.

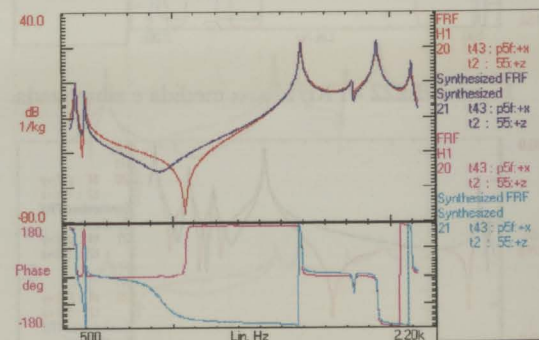


Figura B.231 - FRF $H_{p5f|55}$ medida e sintetizada.

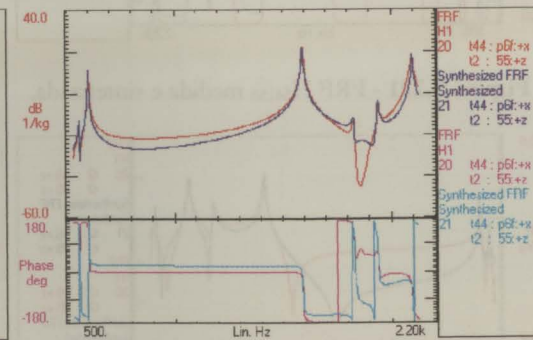


Figura B.232 - FRF $H_{p6f|55}$ medida e sintetizada.

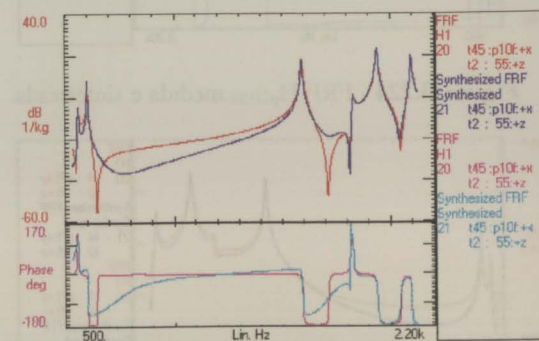


Figura B.233 - FRF $H_{p10f|55}$ medida e sintetizada.

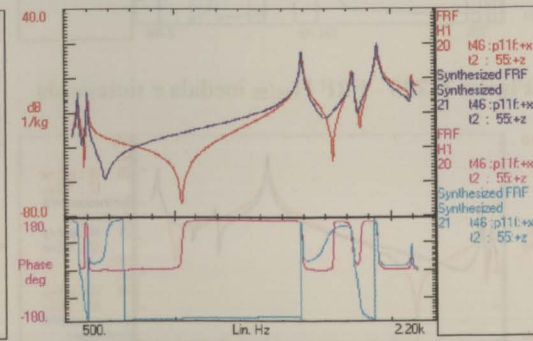


Figura B.234 - FRF $H_{p11f|55}$ medida e sintetizada.

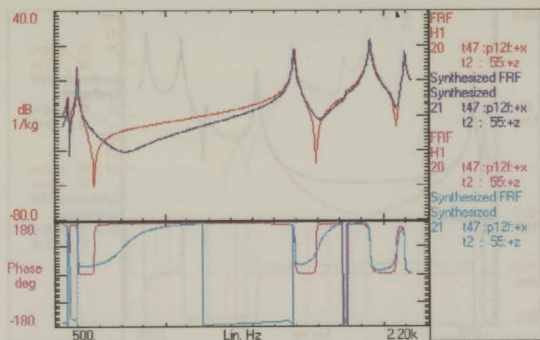


Figura B.235 - FRF $H_{p12f|55}$ medida e sintetizada.

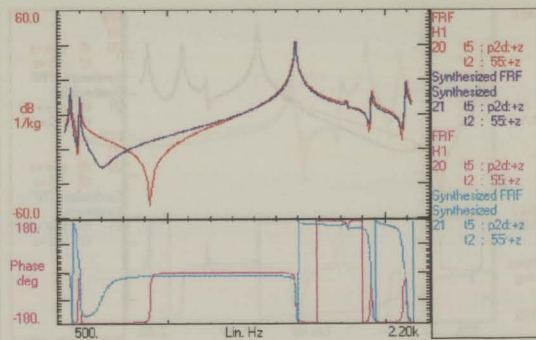


Figura B.236 - FRF $H_{p2d|55}$ medida e sintetizada.

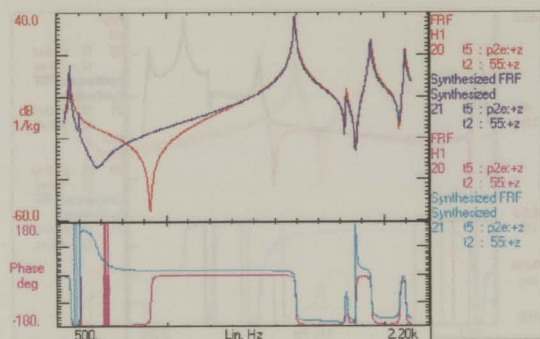


Figura B.237 - FRF $H_{p2e|55}$ medida e sintetizada.

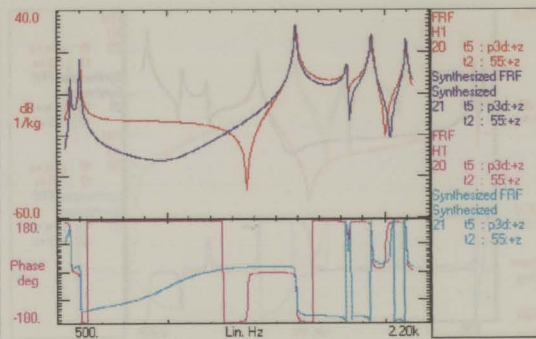


Figura B.238 - FRF $H_{p3d|55}$ medida e sintetizada.

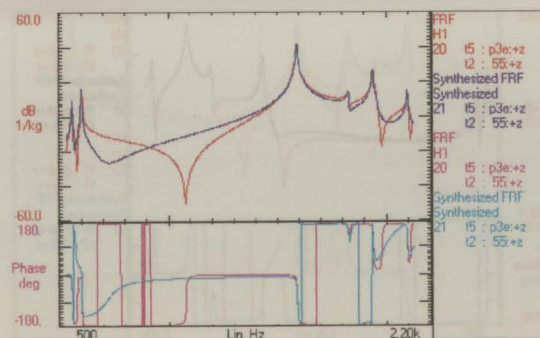


Figura B.239 - FRF $H_{p3e|55}$ medida e sintetizada.

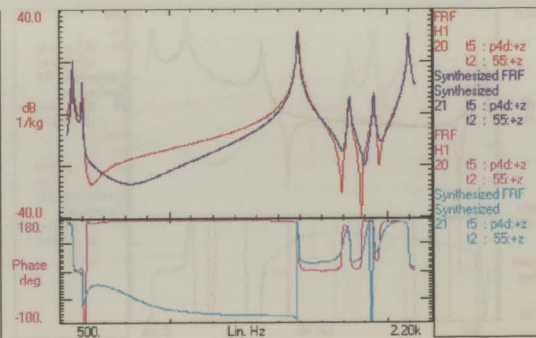


Figura B.240 - FRF $H_{p4d|55}$ medida e sintetizada.

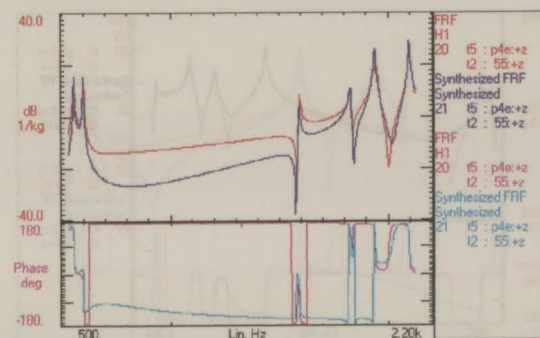


Figura B.241 - FRF $H_{p4e|55}$ medida e sintetizada.

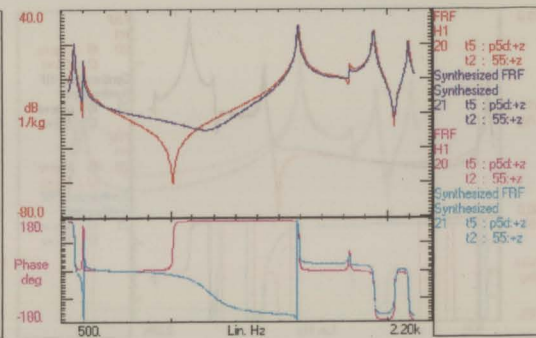


Figura B.242 - FRF $H_{p5d|55}$ medida e sintetizada.

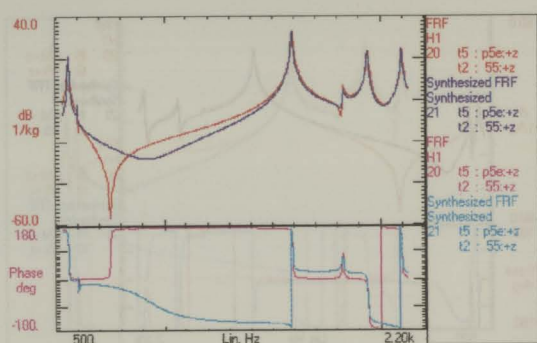


Figura B.243 - FRF $H_{p5e|55}$ medida e sintetizada.

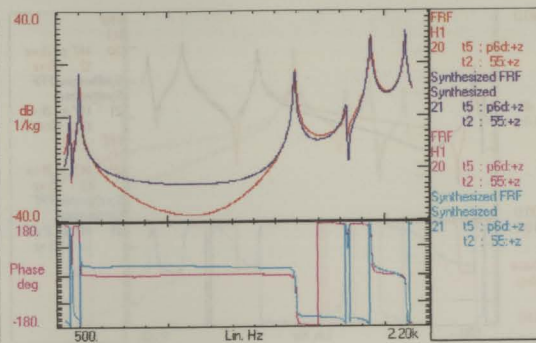


Figura B.244 - FRF $H_{p6d|55}$ medida e sintetizada.

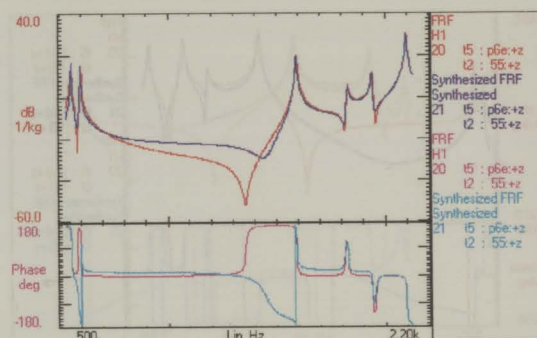


Figura B.245 - FRF $H_{p6e|55}$ medida e sintetizada.

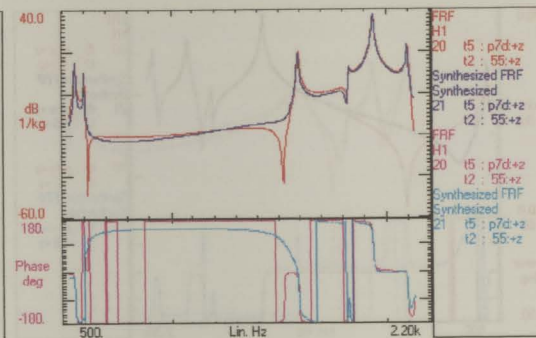


Figura B.246 - FRF $H_{p7d|55}$ medida e sintetizada.

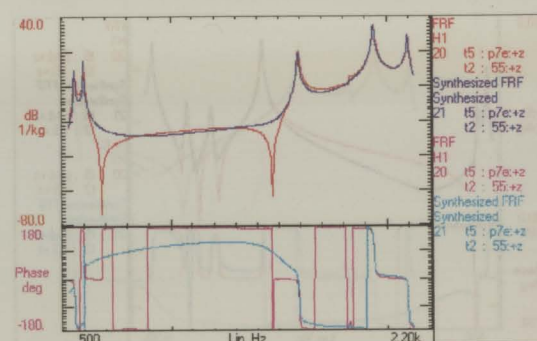


Figura B.247 - FRF $H_{p7e|55}$ medida e sintetizada.

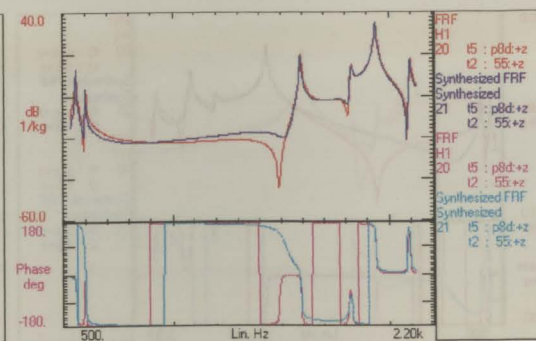


Figura B.248 - FRF $H_{p8d|55}$ medida e sintetizada.

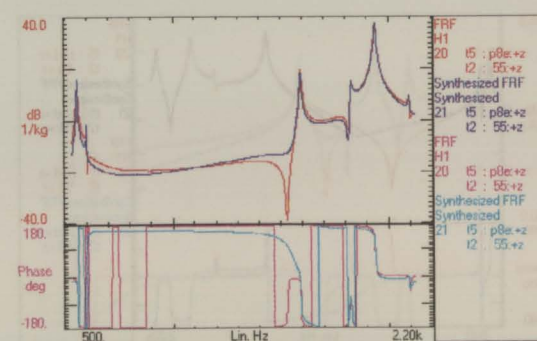


Figura B.249 - FRF $H_{p8e|55}$ medida e sintetizada.

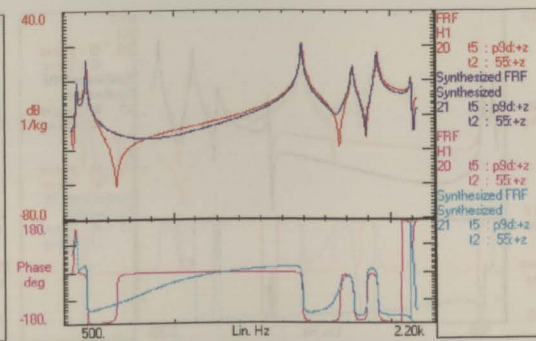


Figura B.250 - FRF $H_{p9d|55}$ medida e sintetizada.

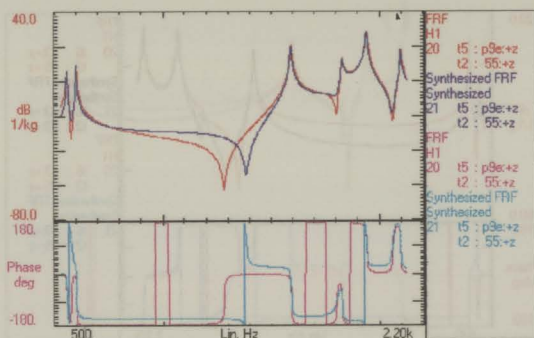


Figura B.251 - FRF $H_{p9e|55}$ medida e sintetizada.

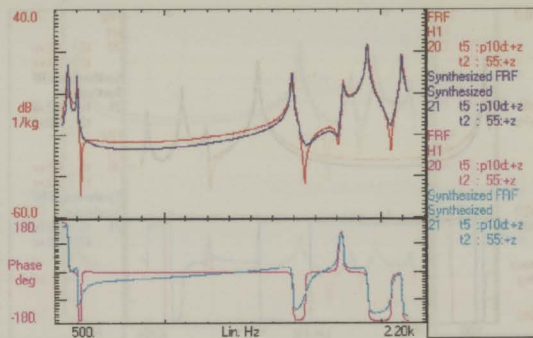


Figura B.252 - FRF $H_{p10d|55}$ medida e sintetizada.

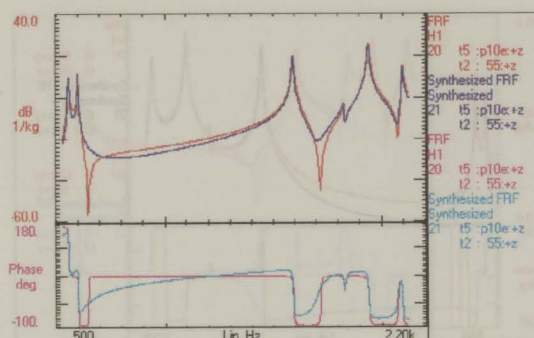


Figura B.253 - FRF $H_{p10e|55}$ medida e sintetizada.

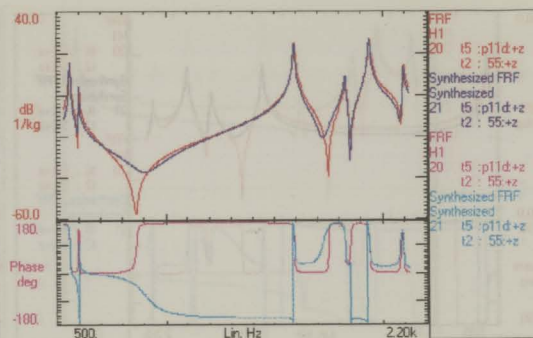


Figura B.254 - FRF $H_{p11d|55}$ medida e sintetizada.

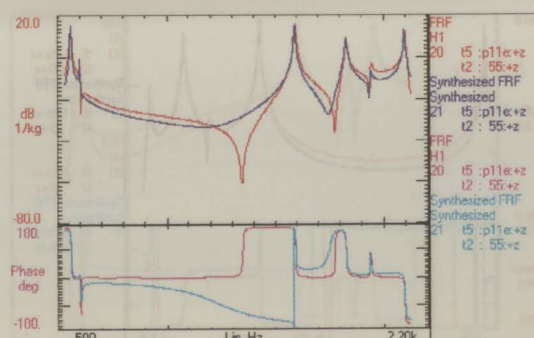


Figura B.255 - FRF $H_{p11e|55}$ medida e sintetizada.

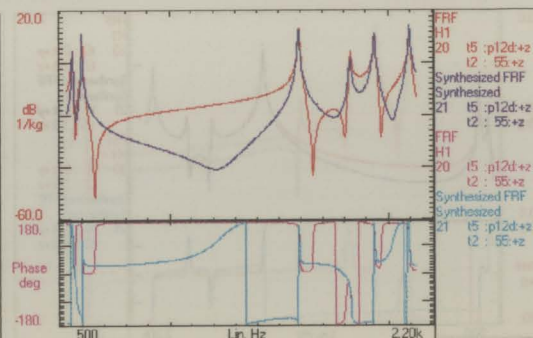


Figura B.256 - FRF $H_{p12d|55}$ medida e sintetizada.

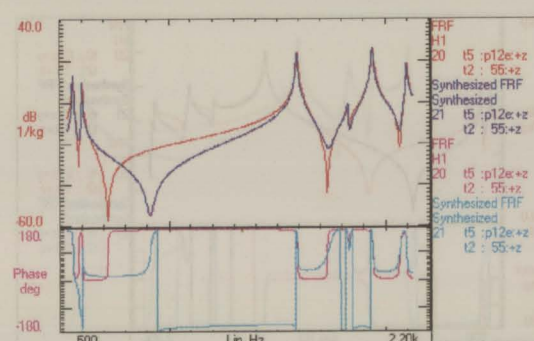


Figura B.257 - FRF $H_{p12e|55}$ medida e sintetizada.

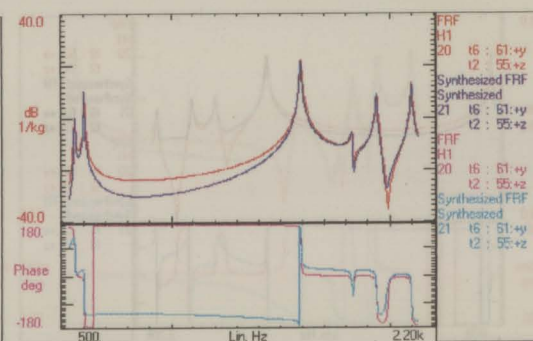


Figura B.258 - FRF $H_{61|55}$ medida e sintetizada.

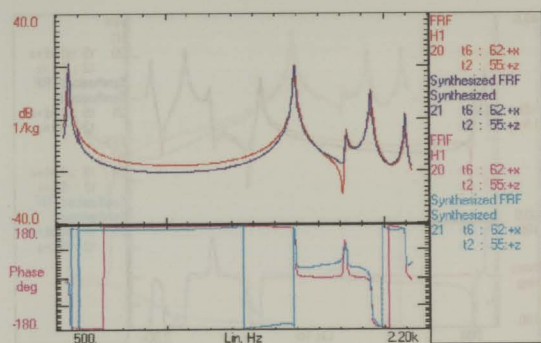


Figura B.259 - FRF $H_{62|55}$ medida e sintetizada.

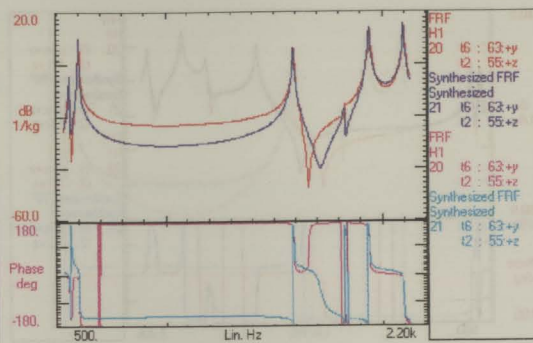


Figura B.260 - FRF $H_{63|55}$ medida e sintetizada.

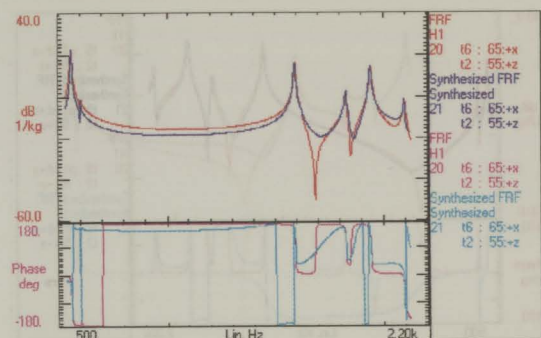


Figura B.261 - FRF $H_{65|55}$ medida e sintetizada.

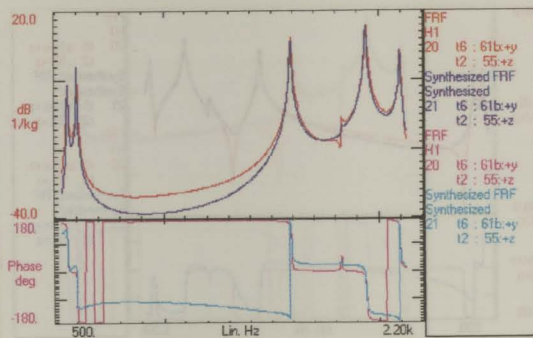


Figura B.262 - FRF $H_{61b|55}$ medida e sintetizada.

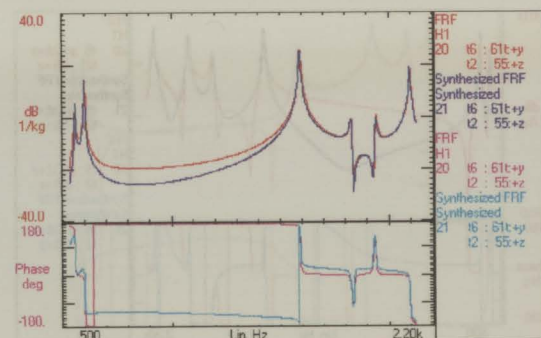


Figura B.263 - FRF $H_{61t|55}$ medida e sintetizada.

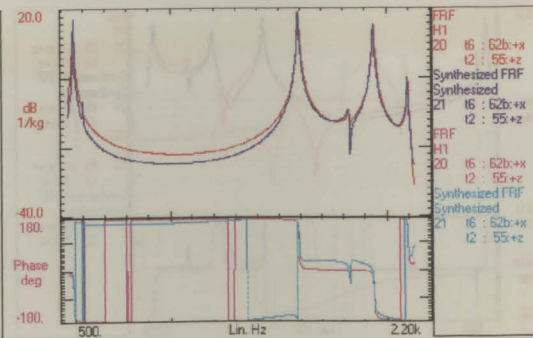


Figura B.264 - FRF $H_{62b|55}$ medida e sintetizada.

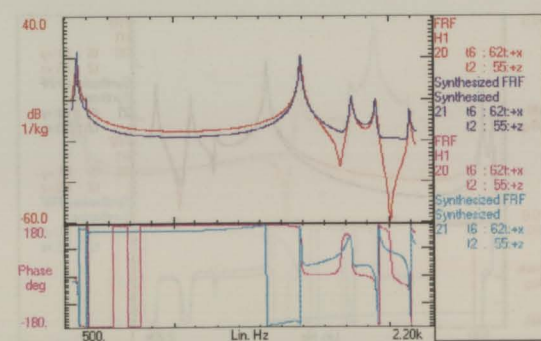


Figura B.265 - FRF $H_{62t|55}$ medida e sintetizada.

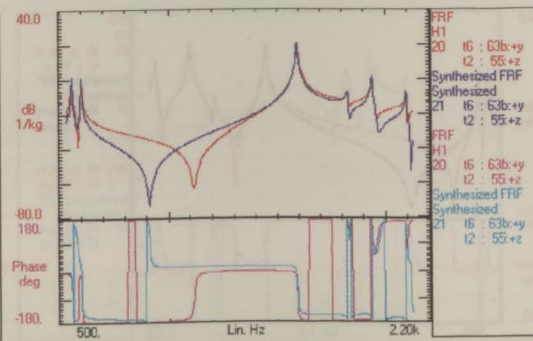


Figura B.266 - FRF $H_{63b|55}$ medida e sintetizada.

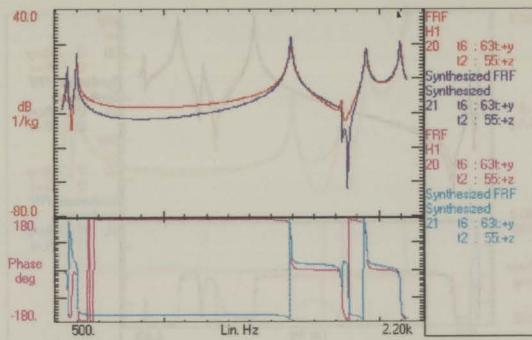


Figura B.267 - FRF $H_{63t|55}$ medida e sintetizada.

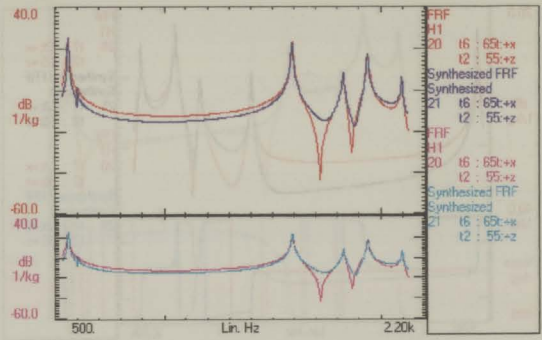


Figura B.268 - FRF $H_{65t|55}$ medida e sintetizada.

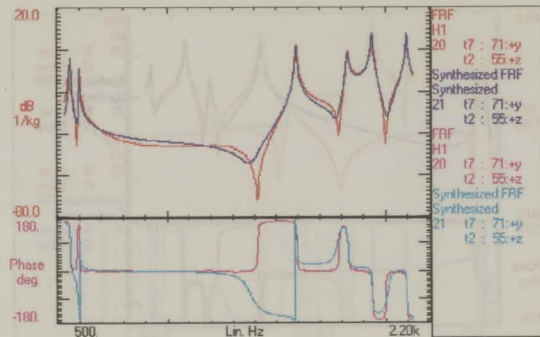


Figura B.269 - FRF $H_{71|55}$ medida e sintetizada.

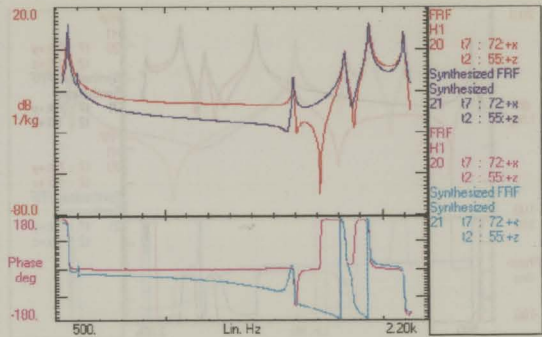


Figura B.270 - FRF $H_{72|55}$ medida e sintetizada.

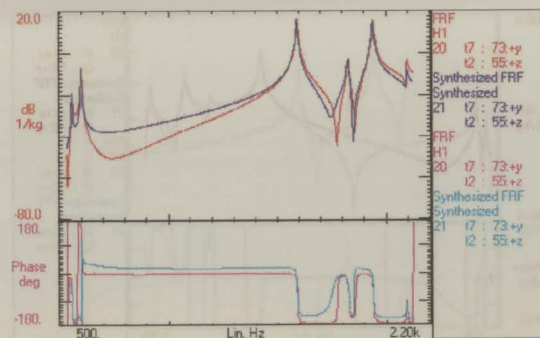


Figura B.271 - FRF $H_{73|55}$ medida e sintetizada.

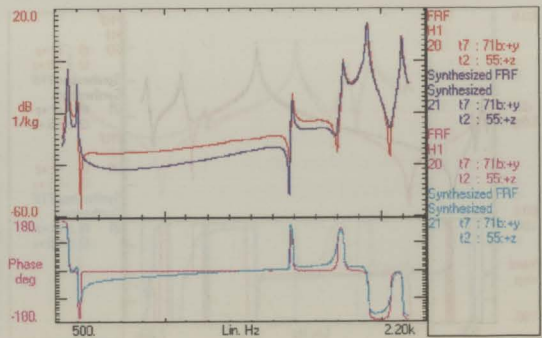


Figura B.272 - FRF $H_{71b|55}$ medida e sintetizada.

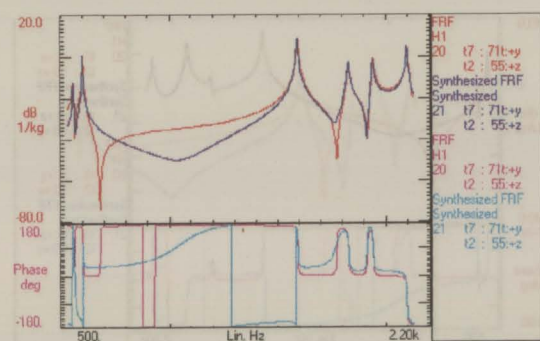


Figura B.273 - FRF $H_{71t|55}$ medida e sintetizada.

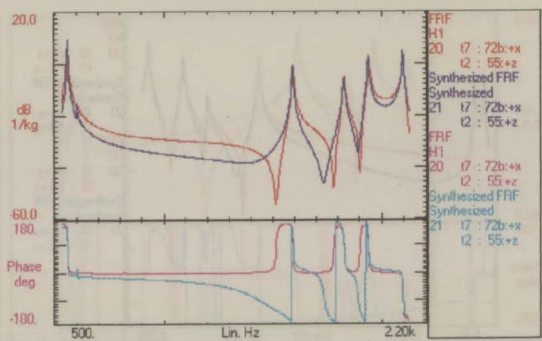


Figura B.274 - FRF $H_{72b|55}$ medida e sintetizada.

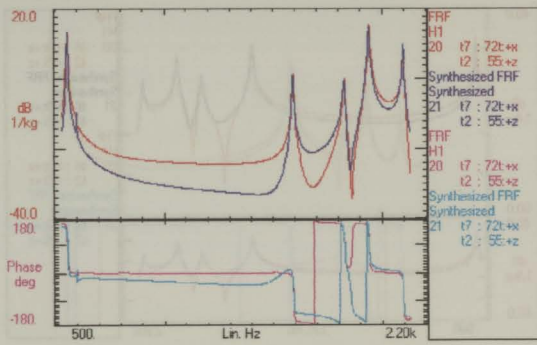


Figura B.275 - FRF $H_{72t|55}$ medida e sintetizada.

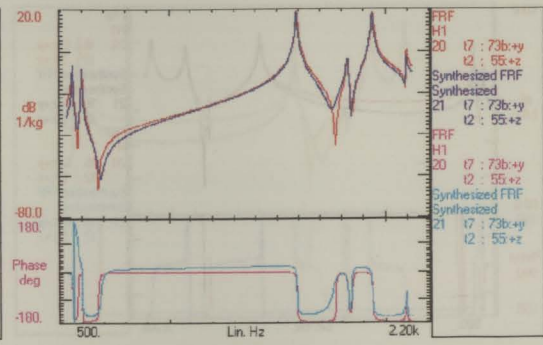


Figura B.276 - FRF $H_{73b|55}$ medida e sintetizada.

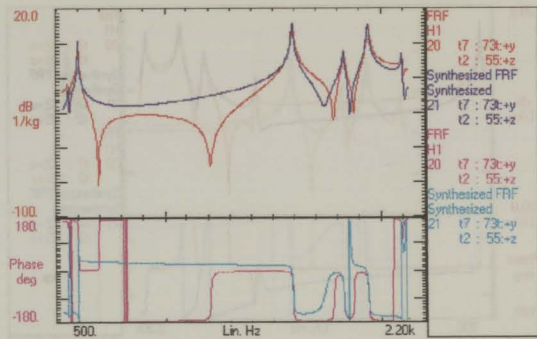


Figura B.277 - FRF $H_{73t|55}$ medida e sintetizada.

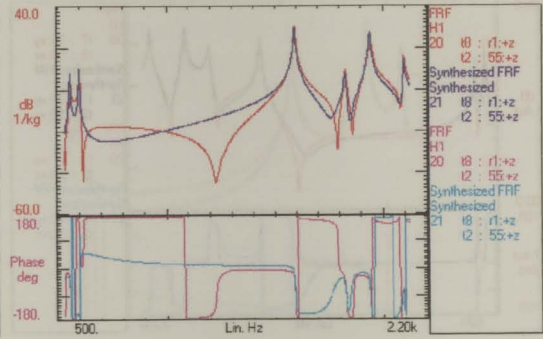


Figura B.278 - FRF $H_{r1|55}$ medida e sintetizada.

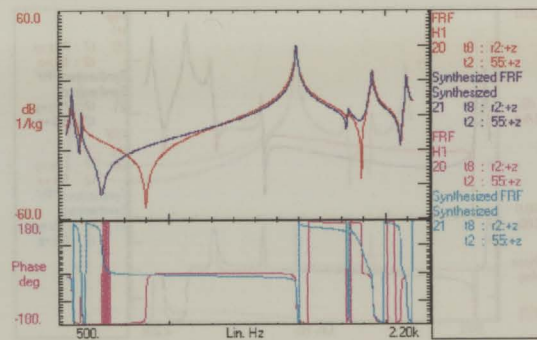


Figura B.279 - FRF $H_{r2|55}$ medida e sintetizada.

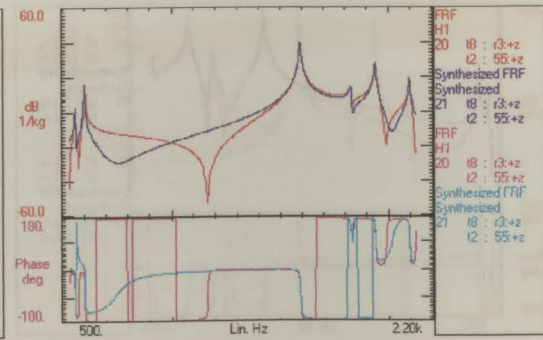


Figura B.280 - FRF $H_{r3|55}$ medida e sintetizada.

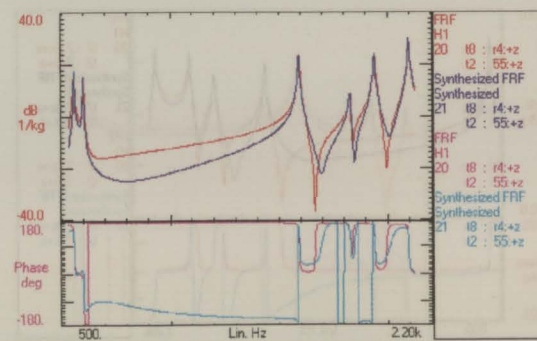


Figura B.281 - FRF $H_{r4|55}$ medida e sintetizada.

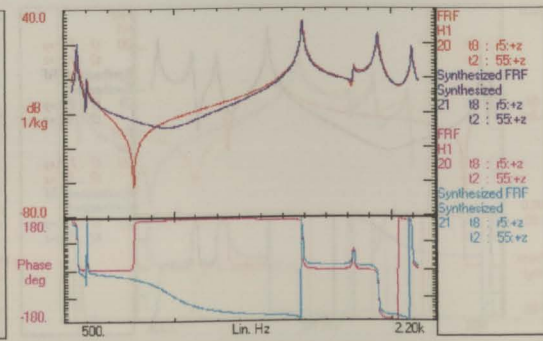


Figura B.282 - FRF $H_{r5|55}$ medida e sintetizada.

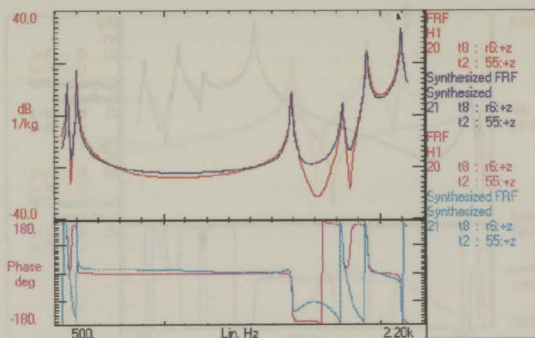


Figura B.283 - FRF $H_{r6|55}$ medida e sintetizada.

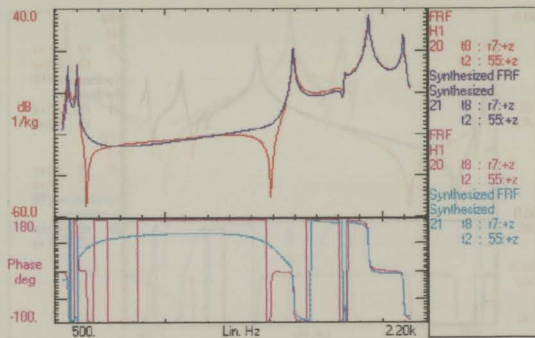


Figura B.284 - FRF $H_{r7|55}$ medida e sintetizada.

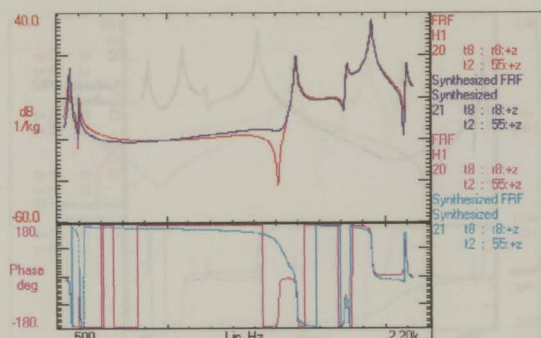


Figura B.285 - FRF $H_{r8|55}$ medida e sintetizada.

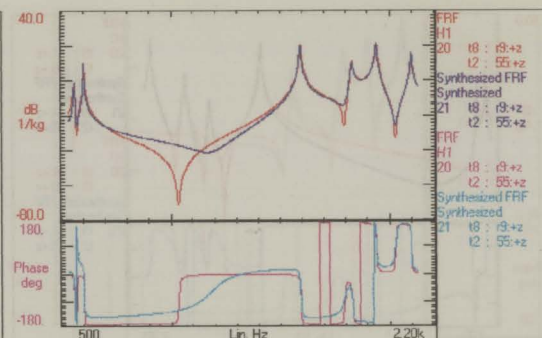


Figura B.286 - FRF $H_{r9|55}$ medida e sintetizada.

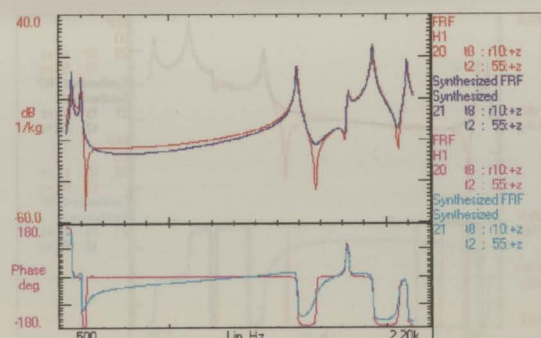


Figura B.287 - FRF $H_{r10|55}$ medida e sintetizada.

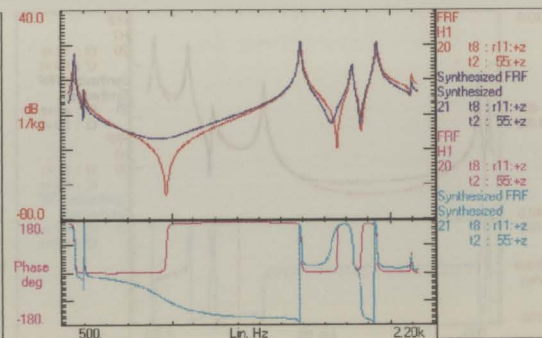


Figura B.288 - FRF $H_{r11|55}$ medida e sintetizada.

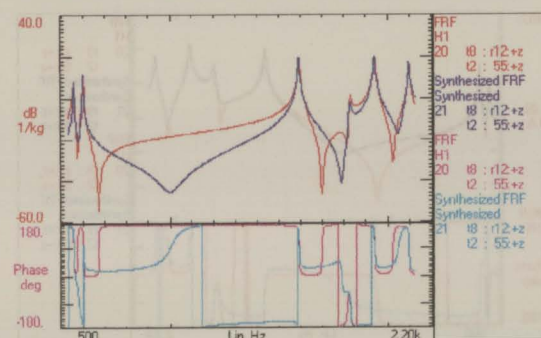


Figura B.289 - FRF $H_{r12|55}$ medida e sintetizada.

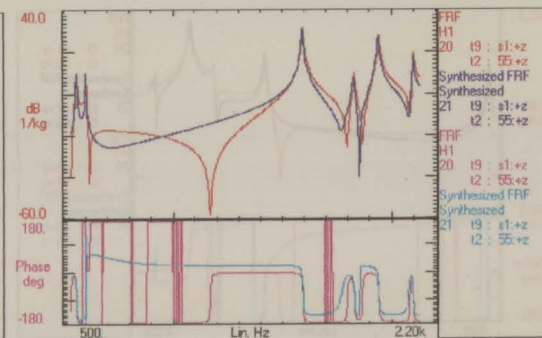


Figura B.290 - FRF $H_{s1|55}$ medida e sintetizada.

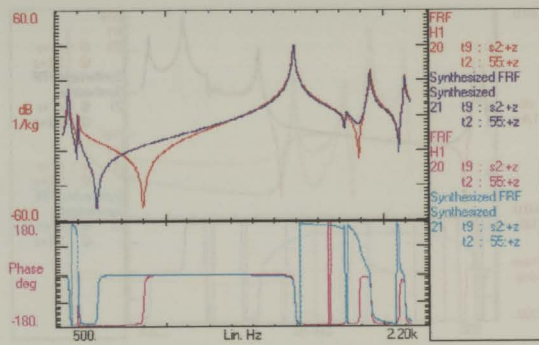


Figura B.291 - FRF $H_{s2|55}$ medida e sintetizada.

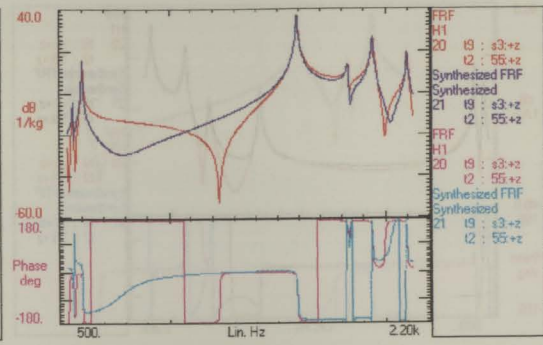


Figura B.292 - FRF $H_{s3|55}$ medida e sintetizada.

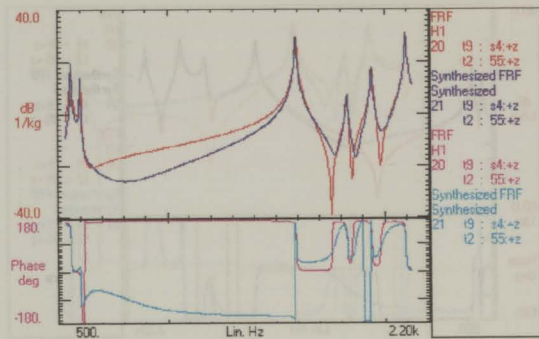


Figura B.293 - FRF $H_{s4|55}$ medida e sintetizada.

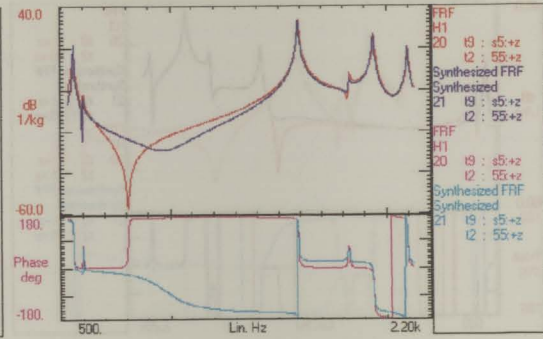


Figura B.294 - FRF $H_{s5|55}$ medida e sintetizada.

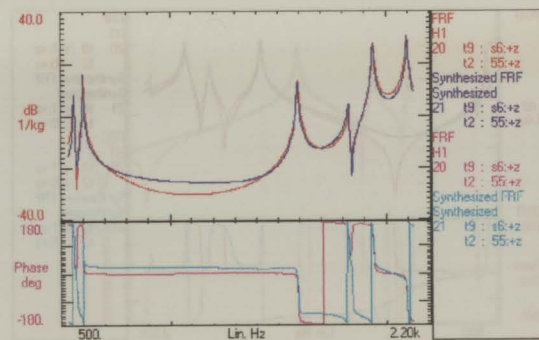


Figura B.295 - FRF $H_{s6|55}$ medida e sintetizada.

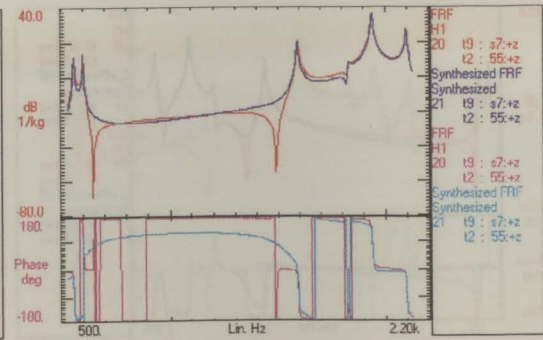


Figura B.296 - FRF $H_{s7|55}$ medida e sintetizada.

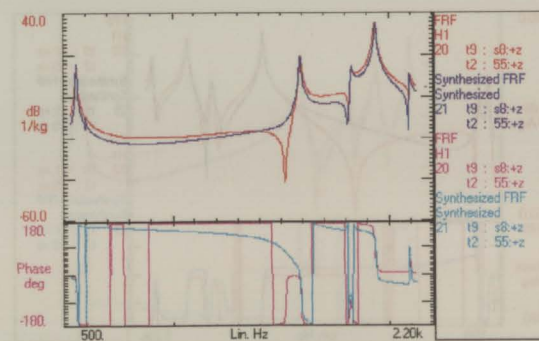


Figura B.297 - FRF $H_{s8|55}$ medida e sintetizada.

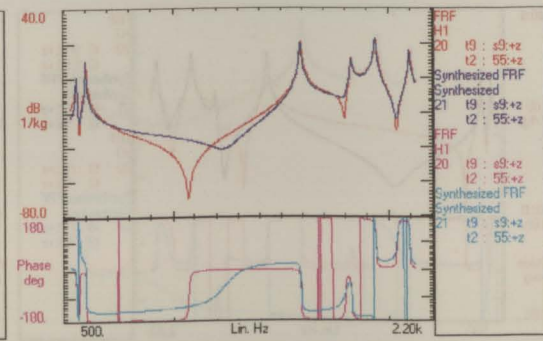


Figura B.298 - FRF $H_{s9|55}$ medida e sintetizada.

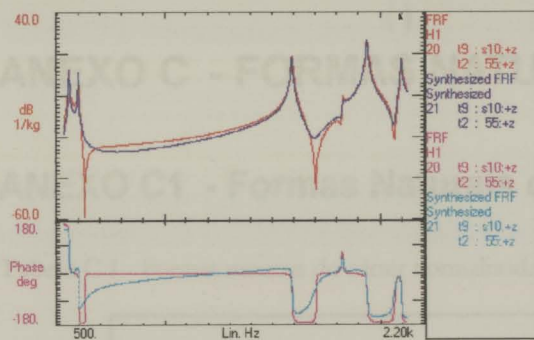


Figura B.299 - FRF $H_{s10|55}$ medida e sintetizada.

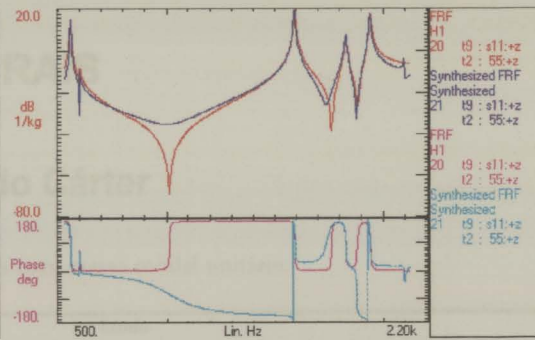


Figura B.300 - FRF $H_{s11|55}$ medida e sintetizada.

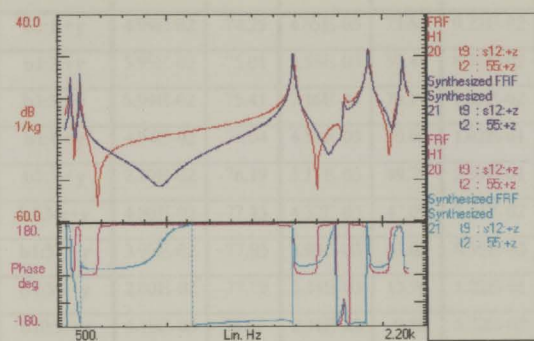


Figura B.301 - FRF $H_{s12|55}$ medida e sintetizada.

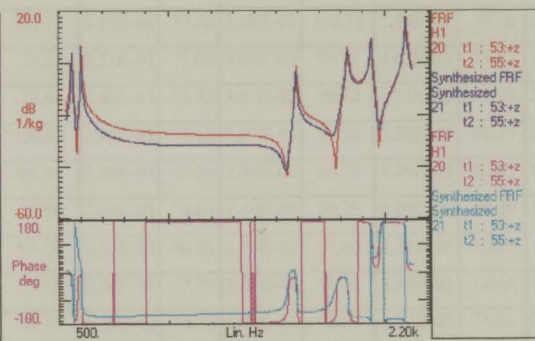


Figura B.302 - FRF $H_{s3|55}$ medida e sintetizada.

ANEXO C - FORMAS NATURAIS

ANEXO C1 - Formas Naturais do Cárter

Tabela C.1 - Formas naturais do cárter normalizadas para massa modal unitária.

GDL	Modo													
	1°		2°		3°		4°		5°		6°		7°	
	Amp.	Fase	Amp	Fase	Amp	Fase	Amp	Fase	Amp	Fase	Amp	Fase	Amp	Fase
b1:1:+y	4.99E-02	-74.25	4.85E-03	73.66	9.22E-02	101.73	3.13E-01	-77.28	1.48E-01	100.74	1.44E-01	-78.76	2.67E-01	100.16
b1:2:+y	5.95E-02	-75.01	5.58E-03	59.41	8.36E-02	-76.24	2.27E-01	-75.02	4.04E-02	98.95	4.67E-02	-75.67	2.55E-01	96.33
b1:3:+y	5.99E-02	-75.41	5.16E-03	70.19	3.23E-02	-74.85	2.40E-01	-75.32	8.07E-02	98.52	5.93E-02	-77.83	2.39E-01	97.51
b1:4:+y	4.94E-02	-76.04	4.58E-03	90.03	1.02E-01	100.02	2.90E-01	-78.52	1.69E-01	94.96	1.29E-01	-80.79	2.33E-01	98.97
b1:5:+y	2.19E-02	-76.19	3.17E-03	49.78	2.39E-01	94.46	2.36E-01	-76.00	2.34E-01	88.76	1.49E-01	-82.05	1.02E-01	107.35
b1:36:+y	4.80E-02	-77.13	4.32E-03	47.09	7.44E-02	-78.99	2.06E-01	-76.60	7.44E-03	88.75	6.00E-02	-80.39	1.65E-01	98.63
b1:37:+y	3.95E-02	-77.83	2.93E-03	67.03	8.55E-03	93.78	2.54E-01	-80.25	4.90E-02	97.69	1.20E-01	-83.05	1.70E-01	105.45
b1:38:+y	2.00E-02	-77.79	3.34E-03	13.79	1.22E-01	95.88	2.20E-01	-77.75	1.25E-01	90.24	1.50E-01	-82.66	1.10E-01	105.77
b10:9:+x	6.10E-03	96.47	2.31E-03	-9.86	6.32E-02	93.43	6.25E-03	-74.73	1.01E-01	93.34	1.77E-03	74.69	2.17E-01	88.45
b10:10:+x	3.48E-03	93.94	4.12E-03	-1.05	1.62E-02	90.21	1.77E-02	-75.71	1.74E-01	90.84	3.43E-02	-84.26	2.71E-01	86.05
b10:11:+x	2.86E-03	89.82	6.35E-03	-7.51	2.96E-02	-84.61	1.00E-02	-70.16	2.45E-01	84.72	6.72E-02	-89.78	2.70E-01	76.33
b11:12:+x	2.25E-02	-81.55	1.01E-03	-80.11	2.91E-02	-86.74	1.12E-01	-77.99	4.27E-02	-85.14	5.62E-02	91.31	8.72E-02	-88.41
b11:13:+x	1.18E-02	-81.76	8.88E-04	-111.53	1.30E-02	-88.07	1.20E-01	-78.28	7.76E-02	-88.66	2.05E-02	91.94	1.23E-01	-89.75
b11:14:+x	2.80E-03	95.19	2.50E-04	157.93	9.25E-03	91.54	1.00E-01	-79.21	7.84E-02	-91.01	3.94E-02	-91.44	7.05E-02	-87.45
b12:15:+x	2.13E-02	96.49	2.77E-03	166.11	7.70E-02	-88.24	5.50E-02	101.62	8.52E-02	-90.83	7.83E-02	90.91	1.61E-01	-88.20
b12:16:+x	1.55E-02	96.92	3.88E-03	161.39	2.55E-02	-88.66	7.97E-02	101.10	1.33E-01	-91.59	1.04E-01	90.60	1.89E-01	-89.72
b12:17:+x	9.75E-03	97.41	4.45E-03	152.60	5.70E-02	92.14	9.09E-02	100.89	1.52E-01	-92.10	9.55E-02	90.03	1.63E-01	-88.36
b13:27:+x	1.27E-02	-83.65	4.23E-03	-92.49	3.53E-02	-89.88	1.13E-02	-79.00	9.89E-03	96.57	4.46E-02	-94.27	1.91E-01	-92.50
b14:28:+x	7.84E-03	-82.85	5.81E-03	-81.83	2.86E-02	-92.80	1.21E-02	-77.83	2.13E-02	96.13	2.69E-02	-91.48	2.02E-01	-95.02
b14:29:+x	3.30E-03	-78.50	6.12E-03	-65.03	1.77E-02	95.28	9.87E-03	-78.20	4.60E-02	92.92	2.96E-02	-90.85	8.39E-02	-86.74
b15:30:+x	2.34E-02	-85.10	1.21E-03	128.55	1.20E-02	86.55	3.86E-02	-77.66	1.49E-02	-87.70	1.10E-01	-89.14	1.14E-01	95.82
b15:31:+x	1.42E-02	-85.58	1.75E-03	129.34	2.24E-03	115.48	6.21E-02	-80.09	3.23E-02	-95.91	1.15E-01	-89.19	1.35E-01	107.16
b15:32:+x	9.24E-04	-105.36	2.71E-03	99.30	3.66E-03	-75.38	6.21E-02	-77.91	3.52E-02	-87.37	9.65E-02	-87.71	6.01E-02	96.69
b16:33:+x	9.74E-03	96.18	1.87E-03	140.02	4.44E-02	91.60	8.61E-02	101.33	1.72E-02	-88.90	1.78E-02	-84.49	1.34E-01	93.58
b16:34:+x	9.33E-03	96.80	3.96E-03	129.83	1.02E-02	88.26	7.90E-02	101.19	3.96E-02	-87.54	8.82E-03	78.75	1.21E-01	91.07
b16:35:+x	7.58E-03	97.81	5.68E-03	128.22	2.46E-02	-87.67	6.14E-02	101.22	6.14E-02	-88.76	1.97E-02	86.21	7.64E-02	95.32
b2:18:+y	8.83E-02	102.35	1.01E-02	83.52	5.04E-02	-76.60	3.23E-01	95.57	3.89E-02	93.64	7.61E-02	94.73	1.95E-01	99.27
b2:19:+y	7.23E-02	102.26	1.28E-02	79.43	7.20E-02	94.39	3.84E-01	92.48	1.21E-01	93.37	1.29E-01	93.94	1.97E-01	99.97
b2:20:+y	3.49E-02	102.03	5.53E-03	115.95	2.14E-01	93.64	2.72E-01	99.92	2.08E-01	91.54	9.41E-02	96.86	1.00E-01	105.62
b2:21:+y	1.00E-01	100.60	2.08E-02	65.48	5.65E-02	-74.81	4.02E-01	88.34	9.01E-02	90.72	6.91E-02	84.83	3.38E-01	82.31
b2:22:+y	8.70E-02	100.86	2.69E-02	59.39	8.51E-02	89.29	4.84E-01	82.75	2.12E-01	87.54	1.54E-01	86.97	3.63E-01	82.60
b2:23:+y	3.50E-02	100.61	6.29E-03	76.21	2.43E-01	89.86	2.83E-01	97.95	2.99E-01	85.36	1.02E-01	95.62	1.60E-01	100.66
b2:24:+y	5.26E-02	99.76	1.85E-03	69.48	4.05E-02	-82.42	2.56E-01	98.54	6.13E-02	96.51	5.92E-02	94.19	5.53E-02	102.80
b2:25:+y	4.26E-02	99.45	2.72E-03	-8.72	6.24E-02	95.24	2.97E-01	96.56	1.57E-01	93.21	1.16E-01	94.23	5.28E-02	102.11
b2:26:+y	1.62E-02	97.60	5.02E-03	-70.28	1.77E-01	92.62	1.95E-01	101.45	2.32E-01	89.08	9.89E-02	96.02	2.51E-02	102.82
b3:b1:+z	2.47E-02	92.98	1.10E-02	-113.76	6.32E-02	126.94	2.30E-01	98.15	3.26E-01	101.08	1.61E-01	82.29	1.13E-01	-91.08
b3:b2:+z	2.20E-02	92.51	5.84E-03	-62.12	9.50E-02	81.19	2.22E-01	96.68	2.93E-01	73.79	9.44E-02	89.95	1.13E-01	-84.13
b3:b3:+z	2.24E-02	93.87	1.51E-03	-97.69	7.97E-02	-98.29	2.42E-01	95.01	2.26E-01	-101.40	1.35E-01	88.20	1.16E-01	95.88

Tabela C.1 - Formas naturais do carácter normalizadas para massa modal unitária. (cont.)

GDL	Modo													
	1°		2°		3°		4°		5°		6°		7°	
	Amp.	Fase	Amp.	Fase	Amp.	Fase	Amp.	Fase	Amp.	Fase	Amp.	Fase	Amp.	Fase
b3:b4+z	3.09E-02	93.09	5.58E-03	-74.05	6.71E-02	-94.28	1.85E-01	97.13	1.39E-01	-94.67	1.61E-01	88.06	1.14E-01	95.28
b3:b5+z	4.41E-02	94.15	2.11E-03	-50.28	4.56E-03	84.26	2.76E-02	-73.48	2.06E-02	82.64	4.09E-02	81.63	1.61E-02	-92.05
b3:b6+z	3.75E-02	91.42	6.03E-03	-1.54	9.26E-02	50.12	3.79E-02	-30.67	5.22E-02	45.98	2.92E-02	87.81	7.55E-02	-80.40
b4:n1+z	4.14E-02	96.19	2.51E-03	-153.53	1.84E-02	-79.70	2.43E-02	85.88	7.06E-02	-163.73	2.30E-01	-92.71	9.71E-02	-167.00
b4:n2+z	4.89E-02	95.67	1.01E-03	-78.71	5.77E-03	91.90	1.79E-02	93.82	4.27E-02	-95.71	2.59E-01	-94.91	4.50E-03	92.74
b4:n3+z	4.19E-02	96.05	2.66E-03	-111.59	3.54E-02	-92.71	2.20E-02	138.71	3.08E-02	31.05	2.28E-01	-97.59	6.50E-02	-85.50
b4:n4+z	5.30E-02	95.01	1.24E-02	74.00	4.36E-02	36.12	4.77E-02	156.57	1.39E-01	157.47	2.23E-01	-106.56	7.66E-02	122.79
b5:t1+z	3.35E-02	99.79	7.00E-03	-94.74	4.48E-03	-124.95	3.73E-01	98.06	5.59E-02	101.03	1.94E-01	96.89	5.28E-03	105.92
b6:q1+z	1.23E-02	90.75	2.36E-03	172.66	2.14E-02	91.16	4.13E-02	98.11	1.83E-01	91.02	5.05E-02	93.21	1.17E-01	-93.12
b6:q2+z	5.22E-03	-85.59	7.99E-04	-170.31	5.29E-03	-108.95	2.99E-02	101.13	2.38E-01	89.73	1.49E-02	-97.81	6.15E-02	-85.76
b6:q3+z	1.12E-02	91.61	1.92E-03	-73.51	6.69E-02	-93.41	3.66E-02	101.12	1.79E-01	91.56	1.36E-01	-90.78	3.06E-02	-86.94
b6:q4+z	4.18E-02	92.12	2.66E-03	-63.29	3.91E-02	-92.57	4.05E-03	85.67	8.82E-02	93.69	2.16E-01	-91.75	1.03E-02	105.82
b6:q5+z	5.26E-02	92.48	4.85E-04	-133.47	6.50E-03	87.47	4.80E-03	-58.49	8.91E-02	-87.57	2.03E-01	-91.43	3.78E-02	-88.20
b6:q6+z	3.34E-02	92.34	2.90E-03	142.32	3.87E-02	87.48	6.02E-02	99.97	2.33E-01	-91.87	8.25E-02	-87.90	3.25E-02	-83.21
b6:q7+z	7.13E-03	92.46	1.30E-03	97.57	1.17E-02	83.73	1.04E-01	91.96	2.31E-01	-90.48	4.85E-03	40.86	5.46E-02	95.67
b6:q8+z	8.12E-03	90.10	3.20E-03	-14.64	8.85E-03	-78.44	9.72E-02	90.59	1.90E-01	-87.58	6.86E-02	87.61	9.20E-02	85.11
b6:q9+z	1.92E-02	90.82	5.42E-03	-64.53	2.13E-02	-88.59	2.02E-02	106.24	9.83E-02	-84.56	5.64E-02	90.82	1.12E-01	98.51
b6:q10+z	4.72E-02	91.16	5.16E-03	-54.63	1.24E-02	-89.47	5.25E-02	-78.94	4.03E-02	-86.12	2.15E-03	-83.20	5.50E-02	86.32
b6:q11+z	6.00E-02	91.47	9.39E-04	43.07	7.17E-03	76.21	8.65E-02	-79.50	1.25E-02	-84.99	3.03E-02	-88.56	2.64E-02	82.16
b6:q12+z	4.21E-02	92.24	4.86E-03	141.81	4.74E-03	117.85	5.46E-02	-84.74	5.81E-02	90.34	3.83E-02	76.82	1.19E-01	-118.34
b7:q1f+y	5.46E-02	-83.17	4.33E-03	56.79	1.61E-01	-86.46	1.42E-01	-74.46	2.00E-02	-82.33	4.90E-03	86.58	1.78E-01	94.78
b7:q2f+y	6.21E-02	-83.34	4.02E-03	76.50	1.63E-01	-87.22	1.37E-01	-74.74	9.08E-03	-102.81	9.58E-03	95.27	1.80E-01	94.10
b7:q7f+y	8.87E-02	94.66	2.71E-03	100.57	1.55E-01	-88.68	1.76E-01	97.45	1.22E-02	-90.09	1.96E-03	-0.57	1.47E-01	98.04
b7:q8f+y	8.11E-02	94.29	4.22E-03	80.77	1.65E-01	-88.59	1.99E-01	96.36	7.64E-03	99.08	4.29E-03	-36.04	2.03E-01	92.19
b7:q9f+y	4.02E-02	95.58	1.34E-03	-161.74	1.11E-01	-85.25	1.18E-01	104.37	1.14E-02	-81.79	4.73E-03	93.87	3.37E-02	-84.09
b71:q3f+x	4.51E-02	96.59	1.89E-03	-120.65	1.22E-01	93.41	4.26E-02	108.27	5.00E-02	95.80	2.00E-02	96.64	1.38E-02	107.66
b72:q4f+x	1.28E-03	87.14	1.00E-03	-74.82	7.51E-02	93.94	8.05E-03	-75.69	4.90E-02	95.46	2.24E-02	92.15	1.25E-01	102.29
b73:q5f+x	2.80E-02	-83.29	7.24E-04	-5.03	3.55E-02	-86.80	6.31E-02	-74.25	4.66E-03	-74.07	6.92E-02	92.66	4.57E-02	-90.02
b74:q6f+x	2.46E-02	95.12	1.05E-03	-178.72	1.21E-01	-87.83	4.11E-02	105.94	2.21E-02	-88.99	3.02E-02	93.17	7.80E-02	-79.96
b75:q10f+x	1.11E-02	-86.16	1.58E-03	-113.36	5.03E-02	-90.03	1.40E-02	104.83	1.36E-03	-112.15	2.55E-02	-88.54	1.78E-01	-87.25
b76:q11f+x	3.27E-02	-88.68	4.16E-04	76.86	5.79E-03	85.66	7.83E-03	-77.79	1.50E-03	110.58	8.05E-02	-89.74	7.87E-02	91.90
b77:q12f+x	3.80E-03	93.47	9.29E-04	-126.92	7.86E-02	89.96	6.76E-02	103.53	4.89E-03	100.50	4.02E-02	-85.49	1.32E-01	91.95
b9:6+tx	4.13E-02	98.38	2.26E-03	-99.92	8.02E-02	95.36	6.89E-02	103.49	8.64E-02	93.21	3.00E-02	94.18	8.15E-02	101.08
b9:7+tx	2.53E-02	98.80	2.65E-03	-85.14	2.79E-03	119.12	9.87E-02	103.30	1.10E-01	92.99	4.88E-02	94.26	1.36E-01	94.48
b9:8+tx	1.21E-02	97.81	1.94E-03	-82.32	1.12E-01	-86.62	9.56E-02	102.57	3.10E-02	91.82	4.96E-02	92.33	8.66E-02	92.43
t1:51+z	9.14E-02	-82.88	5.76E-03	128.55	8.69E-02	-91.28	2.40E-02	-73.43	1.44E-01	-83.16	2.05E-02	-82.18	1.46E-02	101.51
t1:52+z	8.30E-02	-82.68	1.76E-03	-9.98	1.30E-01	-94.21	9.88E-02	-75.00	9.91E-02	-81.29	1.29E-01	94.11	6.84E-02	99.24
t1:53+z	3.31E-02	-82.57	4.71E-03	-40.25	1.56E-01	-94.55	8.56E-02	-75.17	4.99E-02	-81.23	8.15E-02	94.72	1.21E-01	100.66
t2:54+z	5.48E-02	-83.70	5.09E-03	96.83	1.40E-01	84.15	1.08E-01	-75.59	1.03E-01	95.66	1.07E-01	93.59	4.60E-02	-80.00
t2:55+z	1.01E-01	-84.11	4.28E-03	76.63	1.53E-01	80.55	1.02E-01	-78.34	1.34E-01	94.54	1.11E-01	83.39	3.72E-02	-99.63
t2:56+z	6.89E-02	-84.59	4.68E-03	-3.92	5.75E-02	87.13	2.44E-02	-74.97	2.80E-02	94.67	9.64E-02	-87.23	4.75E-02	-77.65
t4:p1f+y	4.32E-02	-86.80	4.01E-03	105.96	2.11E-01	-92.49	6.80E-02	-97.12	1.53E-02	150.47	1.88E-02	102.91	1.18E-01	101.13
t4:p2f+y	4.84E-02	-87.10	3.24E-03	112.07	2.13E-01	-95.22	7.76E-02	-78.62	1.09E-02	87.20	2.10E-02	90.59	1.31E-01	93.29
t4:p7f+y	6.87E-02	92.34	1.60E-03	155.28	1.98E-01	-94.72	9.20E-02	96.20	8.22E-03	-101.28	2.65E-02	-87.05	1.11E-01	96.18

Tabela C.1 - Formas naturais do caráter normalizadas para massa modal unitária. (cont.)

GDL	Modo													
	1°		2°		3°		4°		5°		6°		7°	
	Amp.	Fase	Amp.	Fase	Amp.	Fase	Amp.	Fase	Amp.	Fase	Amp.	Fase	Amp.	Fase
t4:p8f:+y	5.31E-02	101.69	3.03E-03	-131.28	2.44E-01	-94.90	8.73E-02	95.90	6.11E-03	-4.68	1.86E-02	-100.77	1.40E-01	110.12
t4:p9f:+y	3.20E-02	92.52	9.21E-04	-175.27	1.55E-01	-92.62	6.82E-02	101.13	1.58E-02	-89.30	4.46E-03	-80.84	3.49E-02	-83.22
t41:p3f:+x	3.82E-02	92.55	1.15E-03	-53.07	1.61E-01	86.58	2.48E-02	102.43	1.21E-02	84.44	2.71E-02	90.78	2.58E-02	-80.39
t42:p4f:+x	2.09E-04	30.18	1.10E-03	-52.52	9.36E-02	90.08	5.12E-03	-79.47	2.83E-03	-94.04	4.50E-02	87.05	9.93E-02	98.32
t43:p5f:+x	3.51E-02	-86.45	4.21E-04	-33.14	4.16E-02	-91.17	4.62E-02	-77.57	1.52E-02	90.35	1.09E-01	87.81	1.24E-02	-82.99
t44:p6f:+x	2.01E-02	92.07	1.27E-03	-168.14	1.46E-01	-92.54	1.97E-02	102.47	9.19E-03	90.39	1.30E-02	91.44	4.80E-02	-82.65
t45:p10f:+x	1.35E-02	-87.88	1.45E-03	-138.42	5.66E-02	-91.53	1.86E-02	100.50	1.73E-03	-115.66	2.96E-02	-94.74	1.58E-01	-89.70
t46:p11f:+x	3.70E-02	-87.71	4.32E-04	-40.12	3.20E-03	79.83	1.08E-02	97.91	7.75E-03	97.58	6.83E-02	-88.31	7.35E-02	87.31
t47:p12f:+x	6.28E-03	90.86	6.90E-04	-91.83	9.93E-02	88.76	5.33E-02	103.01	1.49E-02	80.59	4.58E-02	-83.86	1.25E-01	96.11
t5:p2d:+z	1.13E-03	84.90	1.27E-03	-135.70	1.29E-02	-99.26	5.43E-02	103.38	2.26E-01	91.46	3.84E-02	-90.67	7.26E-02	-82.08
t5:p2e:+z	1.42E-03	-78.46	1.05E-03	179.84	3.50E-02	85.77	3.36E-02	104.11	2.21E-01	91.12	8.40E-03	105.90	9.16E-02	-83.82
t5:p3d:+z	3.60E-02	94.01	3.02E-03	-55.43	3.03E-02	-90.35	9.03E-03	96.30	1.00E-01	93.84	1.91E-01	-91.13	2.08E-02	97.15
t5:p3e:+z	1.14E-02	93.18	1.93E-03	-84.15	6.48E-02	-95.36	5.45E-02	103.01	2.13E-01	90.19	1.02E-01	-89.56	2.84E-02	-82.63
t5:p4d:+z	4.36E-02	93.95	2.33E-03	-60.11	2.19E-02	-87.35	2.31E-03	-30.57	4.74E-02	96.81	2.24E-01	-90.21	1.99E-02	97.20
t5:p4e:+z	3.57E-02	95.45	3.08E-03	-56.04	3.01E-02	-90.24	8.90E-03	97.26	9.95E-02	94.36	1.91E-01	-90.14	2.07E-02	98.23
t5:p5d:+z	5.14E-02	95.78	2.89E-04	158.79	1.73E-02	90.87	1.86E-03	-38.49	1.39E-01	-86.75	1.69E-01	-89.42	4.73E-02	-82.64
t5:p5e:+z	4.82E-02	93.37	1.26E-03	-38.34	3.16E-03	-88.83	7.21E-03	-63.51	3.68E-02	-85.14	2.14E-01	-90.76	1.45E-02	-87.20
t5:p6d:+z	2.72E-02	95.70	2.77E-03	148.55	3.24E-02	88.11	7.85E-02	103.38	2.39E-01	-89.13	5.59E-02	-85.84	1.23E-02	-83.37
t5:p6e:+z	4.42E-02	95.49	2.05E-03	147.37	2.98E-02	90.75	2.65E-02	103.04	2.00E-01	-88.02	1.17E-01	-87.78	5.54E-02	-83.34
t5:p7d:+z	3.00E-03	99.41	1.10E-03	155.83	2.80E-02	30.92	1.14E-01	96.34	2.12E-01	-90.38	3.15E-02	92.96	9.73E-02	104.15
t5:p7e:+z	1.47E-02	96.16	2.63E-03	146.87	9.15E-03	89.17	9.80E-02	103.10	2.34E-01	-87.67	2.34E-02	-83.28	3.32E-02	99.86
t5:p8d:+z	8.40E-03	93.89	1.57E-03	-56.59	2.58E-02	-93.88	8.55E-02	103.34	1.71E-01	-85.08	7.53E-02	91.41	1.20E-01	96.93
t5:p8e:+z	6.03E-03	96.28	1.04E-03	121.63	1.17E-02	-93.42	1.13E-01	102.59	2.04E-01	-86.37	5.89E-02	90.77	1.07E-01	96.46
t5:p9d:+z	2.53E-02	93.92	5.63E-03	-53.76	3.59E-02	-89.21	1.25E-02	103.84	8.14E-02	-82.66	4.46E-02	93.75	8.50E-02	98.19
t5:p9e:+z	1.53E-02	94.18	3.59E-03	-62.25	3.61E-02	-92.68	5.62E-02	104.07	1.28E-01	-82.54	6.67E-02	92.92	1.21E-01	99.00
t5:p10d:+z	5.05E-02	94.17	4.39E-03	-40.14	1.56E-02	-86.94	6.50E-02	-76.20	3.14E-02	-84.98	2.06E-02	-86.68	2.60E-02	90.24
t5:p10e:+z	3.78E-02	94.03	5.66E-03	-48.84	2.91E-02	-87.91	3.02E-02	-76.08	5.09E-02	-83.92	1.17E-02	93.50	3.90E-02	92.12
t5:p11d:+z	5.46E-02	94.24	1.58E-03	67.88	9.36E-03	84.06	7.81E-02	-76.27	2.11E-03	-73.39	3.40E-02	-87.85	1.09E-02	74.18
t5:p11e:+z	5.46E-02	94.23	2.25E-03	-21.83	3.47E-03	-75.53	8.01E-02	-76.23	1.88E-02	-84.33	3.50E-02	-86.75	1.90E-02	89.80
t5:p12d:+z	3.23E-02	94.49	2.85E-03	124.00	2.44E-02	89.08	2.22E-02	-76.41	8.01E-02	94.13	2.59E-02	93.49	6.66E-02	-83.02
t5:p12e:+z	4.73E-02	94.77	2.41E-03	109.43	1.78E-02	87.75	5.50E-02	-75.80	3.24E-02	94.46	8.10E-03	-96.31	1.99E-02	-75.54
t6:61:+y	1.41E-02	-90.71	1.93E-02	-56.83	1.65E-02	-88.70	2.92E-03	-97.75	4.69E-02	-86.28	7.97E-03	95.28	1.13E-02	-175.12
t6:62:+x	3.67E-01	-100.23	7.78E-03	149.50	2.00E-02	84.82	7.03E-02	104.46	1.12E-02	-87.01	3.44E-02	-86.54	5.17E-02	-119.72
t6:63:+y	1.58E-02	-87.08	1.79E-02	-57.51	3.28E-02	-96.64	1.60E-02	129.88	3.76E-02	-69.75	3.29E-03	156.12	3.26E-02	-39.32
t6:65:+x	4.78E-01	-95.82	4.95E-03	96.58	2.94E-03	-84.35	1.57E-01	96.20	1.07E-02	-94.85	1.50E-01	-92.91	5.78E-03	-78.53
t6:61b:+y	1.66E-02	-87.63	8.61E-03	-44.57	1.06E-01	-90.62	7.73E-03	-77.18	3.58E-02	96.07	2.15E-02	-72.67	1.62E-02	41.72
t6:61t:+y	2.25E-02	-106.58	3.16E-02	-58.87	4.90E-02	89.96	3.03E-02	67.43	1.04E-01	-81.41	3.20E-02	178.66	8.35E-02	14.56
t6:62b:+x	2.42E-01	-98.77	4.38E-03	156.62	9.31E-03	80.52	1.07E-02	104.47	1.40E-02	-97.39	4.52E-02	87.93	4.91E-02	-158.52
t6:62t:+x	4.95E-01	-106.00	8.66E-03	-178.42	3.42E-03	111.67	1.34E-01	102.42	1.23E-02	-87.03	1.29E-01	-91.47	2.01E-02	-101.38
t6:63b:+y	2.03E-02	11.44	1.10E-02	-89.74	1.08E-01	-93.80	2.06E-03	37.52	5.59E-02	88.82	1.87E-02	98.37	5.10E-03	-58.57
t6:63t:+y	3.50E-02	-96.94	2.77E-02	-65.42	5.94E-02	90.91	2.73E-02	113.32	1.11E-01	-87.20	1.78E-02	62.17	5.56E-02	46.93
t6:65t:+x	7.14E-01	-112.37	1.25E-02	-116.34	3.11E-03	83.53	2.92E-01	90.43	9.89E-03	-90.62	3.55E-01	-98.88	2.86E-02	-76.98
t7:71:+y	5.78E-03	99.57	7.26E-03	124.10	2.04E-02	-81.67	2.25E-02	-67.78	4.20E-02	-77.42	5.36E-03	-104.62	1.36E-01	-102.18
t7:72:+x	1.05E-01	96.64	1.57E-03	-53.96	4.91E-03	90.81	9.97E-03	106.39	3.75E-02	-80.75	8.98E-02	-83.56	4.11E-02	-80.90

Tabela C.1 - Formas naturais do carácter normalizadas para massa modal unitária. (cont.)

GDL	Modo													
	1°		2°		3°		4°		5°		6°		7°	
	Amp.	Fase	Amp	Fase	Amp	Fase	Amp	Fase	Amp	Fase	Amp	Fase	Amp	Fase
t7:73:+y	1.11E-02	100.09	4.70E-03	158.01	3.22E-02	-83.79	1.33E-02	118.16	3.79E-03	-116.33	3.47E-02	87.41	5.60E-02	-95.36
t7:71b:+y	5.25E-03	99.94	5.61E-03	146.36	9.93E-02	-84.82	3.29E-02	-66.68	7.81E-03	171.69	4.48E-03	138.80	1.55E-01	-135.37
t7:71t:+y	5.30E-03	99.28	7.16E-03	130.52	7.00E-02	93.05	1.15E-02	-66.56	9.66E-02	-77.59	8.18E-03	-89.77	3.37E-02	-91.20
t7:72b:+x	7.75E-02	96.32	9.85E-04	6.71	7.45E-03	106.51	8.02E-03	-75.37	2.74E-02	-82.01	1.62E-02	-71.45	1.41E-02	-102.08
t7:72t:+x	1.29E-01	95.83	3.61E-03	-22.01	1.14E-02	-101.42	2.87E-02	103.01	3.54E-02	-39.77	1.51E-01	-87.24	9.69E-02	-36.95
t7:73b:+y	4.06E-03	96.35	1.99E-03	-151.55	1.50E-01	-88.72	1.94E-02	110.28	6.39E-02	101.54	7.14E-03	95.76	4.71E-02	-73.44
t7:73t:+y	2.06E-02	96.98	5.28E-03	150.90	4.17E-02	91.90	1.22E-02	110.52	5.12E-02	-79.04	3.42E-02	93.83	2.52E-02	-85.11

ANEXO C2 - Formas Naturais do Corpo do Cárter

Tabela C.2 - Formas naturais do corpo do carácter normalizadas para massa modal unitária.

GDL	Modo											
	1°		2°		3°		4°		5°		6°	
	Amp.	Fase	Amp	Fase	Amp	Fase	Amp	Fase	Amp	Fase	Amp	Fase
b1:1:+y	2.03E-02	-68.98	2.06E-01	-72.73	2.05E-01	118.70	8.10E-02	-69.30	2.10E-01	90.72	3.44E-01	-84.23
b1:2:+y	1.76E-02	-42.17	3.66E-01	-91.92	4.69E-01	96.92	1.14E-01	-77.67	1.57E-01	-83.84	2.11E-01	-80.05
b1:3:+y	7.87E-02	-91.99	3.00E-01	-80.78	2.89E-01	112.97	1.27E-01	87.33	1.29E-01	-84.60	2.65E-01	-82.86
b1:4:+y	6.04E-02	-86.42	2.10E-01	-71.08	1.84E-01	119.39	1.18E-01	88.52	1.53E-01	88.78	3.70E-01	-87.20
b1:5:+y	1.59E-02	-63.01	6.85E-02	-67.32	3.19E-02	126.76	6.73E-02	92.94	4.47E-01	69.67	2.89E-01	-82.91
b1:36:+y	3.30E-02	62.92	3.14E-01	-84.88	2.96E-01	111.29	3.20E-01	-103.55	9.38E-02	-82.77	6.20E-02	-77.08
b1:37:+y	1.61E-02	51.44	2.18E-01	-73.85	1.78E-01	114.80	2.41E-01	-88.92	7.08E-02	84.95	1.70E-01	-78.91
b1:38:+y	8.52E-03	-19.81	9.68E-02	-68.67	4.93E-02	125.88	1.15E-01	-79.31	2.49E-01	79.46	2.01E-01	-80.47
b10:9:+x	1.62E-01	76.92	9.66E-02	-71.16	2.76E-01	113.37	1.02E-01	79.81	1.99E-01	82.56	8.47E-02	92.96
b10:10:+x	9.40E-02	85.17	6.31E-02	-70.49	1.90E-01	118.05	7.14E-02	80.98	2.19E-01	82.48	5.22E-02	90.35
b10:11:+x	2.46E-02	98.65	1.43E-02	-71.71	9.73E-02	122.08	1.28E-02	58.83	2.30E-01	81.35	1.43E-02	89.04
b11:12:+x	1.35E-01	-98.03	1.38E-01	-70.94	1.02E-01	-59.25	2.10E-01	86.40	1.62E-01	-95.33	4.45E-02	-89.06
b11:13:+x	9.74E-02	-93.92	9.28E-02	-69.85	8.50E-02	-58.24	1.35E-01	93.01	1.47E-01	-96.37	1.05E-01	-87.32
b11:14:+x	3.93E-02	-90.81	4.20E-02	-68.92	3.95E-02	-54.93	5.18E-02	97.05	6.00E-02	-71.61	1.45E-01	-99.83
b12:15:+x	1.90E-01	-110.11	1.24E-01	108.11	2.11E-01	-67.92	3.15E-01	-114.95	2.14E-01	-107.30	5.87E-02	139.68
b12:16:+x	1.30E-01	-102.75	8.37E-02	109.37	1.24E-01	-58.82	2.11E-01	-99.95	1.80E-01	-95.33	1.21E-01	96.70
b12:17:+x	4.11E-02	-89.83	3.14E-02	108.92	7.18E-02	-57.02	8.81E-02	-91.11	1.48E-01	-95.39	1.58E-01	96.04
b13:27:+x	9.64E-02	66.59	8.12E-02	-69.77	2.22E-01	-65.16	1.99E-02	122.88	9.55E-02	-94.19	7.29E-02	97.28
b14:28:+x	7.12E-02	68.96	4.51E-02	-67.40	1.46E-01	-61.01	3.62E-02	115.73	5.12E-02	-94.15	3.48E-03	175.55
b14:29:+x	1.95E-02	56.75	9.90E-03	-65.18	7.34E-02	-59.05	3.04E-02	107.12	1.21E-02	103.26	2.78E-02	-80.45
b15:30:+x	6.69E-02	-96.92	1.67E-01	-71.91	1.37E-01	118.60	1.88E-01	-84.97	9.50E-02	88.09	1.75E-01	90.27
b15:31:+x	4.27E-02	-96.16	1.18E-01	-70.52	9.72E-02	120.53	1.39E-01	-81.37	7.70E-02	88.74	7.53E-02	91.61
b15:32:+x	9.99E-03	-111.09	4.44E-02	-69.77	4.78E-02	122.80	4.88E-02	-75.54	3.62E-02	91.40	6.67E-02	-87.50
b16:33:+x	1.11E-01	-116.77	1.02E-01	112.07	1.23E-01	121.77	1.93E-01	86.13	7.00E-02	91.92	1.36E-01	-79.73
b16:34:+x	6.97E-02	-113.21	6.80E-02	112.92	9.92E-02	122.58	1.35E-01	91.57	1.08E-02	85.17	8.93E-02	-78.65
b16:35:+x	3.09E-02	-118.40	3.67E-02	113.37	7.61E-02	123.11	7.47E-02	95.74	3.37E-02	-86.32	4.95E-02	-79.01

Tabela C.2 - Formas naturais do corpo do caráter normalizadas para massa modal unitária. (Cont.)

GDL	Modo											
	1°		2°		3°		4°		5°		6°	
	Amp.	Fase	Amp	Fase	Amp	Fase	Amp	Fase	Amp	Fase	Amp	Fase
b2:18:+y	1.09E-01	-103.96	3.41E-01	87.85	1.80E-01	118.78	3.50E-01	-113.65	5.97E-02	-89.79	3.03E-01	88.98
b2:19:+y	5.61E-02	-97.38	2.14E-01	104.50	1.09E-01	123.45	2.51E-01	-95.44	1.25E-01	83.80	4.86E-01	80.84
b2:20:+y	1.50E-02	-78.41	9.25E-02	109.43	4.15E-02	126.45	8.23E-02	-84.75	3.50E-01	75.01	4.44E-01	84.38
b2:21:+y	1.29E-02	-147.06	4.44E-01	72.04	5.79E-01	75.68	4.76E-02	104.05	1.14E-01	-100.15	2.09E-01	94.58
b2:22:+y	2.66E-02	115.36	2.81E-01	93.48	3.49E-01	106.93	9.73E-02	97.42	9.30E-02	102.22	3.81E-01	88.50
b2:23:+y	3.49E-03	94.35	7.78E-02	108.79	6.30E-02	122.80	4.87E-02	97.27	4.61E-01	69.04	3.43E-01	89.47
b2:24:+y	1.28E-01	70.45	3.01E-01	95.49	1.32E-01	121.08	3.00E-01	53.39	3.02E-01	-93.36	1.38E-01	-80.27
b2:25:+y	8.23E-02	74.09	2.00E-01	105.43	7.67E-02	123.52	2.84E-01	63.32	7.43E-02	-86.05	5.48E-02	95.34
b2:26:+y	1.46E-02	52.32	6.80E-02	111.19	3.07E-03	125.82	1.47E-01	88.40	2.41E-01	80.64	1.85E-01	95.70
b3:b1:+z	9.22E-03	71.05	4.24E-03	104.97	3.30E-02	-54.86	9.25E-02	92.53	2.74E-01	61.02	3.57E-01	85.28
b3:b2:+z	2.14E-02	-85.85	3.94E-03	-62.46	2.85E-02	-54.56	9.38E-02	92.01	3.37E-01	52.06	3.38E-01	89.22
b3:b3:+z	6.95E-03	-110.83	1.71E-02	-70.00	3.59E-02	121.89	1.54E-02	-70.77	3.85E-01	-148.47	2.98E-01	81.96
b3:b4:+z	5.81E-02	-98.72	1.15E-02	111.08	3.74E-02	124.75	1.88E-02	-76.24	2.80E-01	-110.44	1.28E-01	94.01
b3:b5:+z	2.67E-02	84.51	5.64E-02	110.81	2.50E-02	-57.02	6.13E-03	-115.75	1.65E-02	104.01	2.20E-01	-89.58
b3:b6:+z	7.00E-02	82.15	8.46E-03	110.48	4.25E-02	-56.03	9.43E-03	-107.34	1.49E-01	82.73	5.32E-02	-83.13
b4:n1:+z	2.11E-02	-100.12	6.70E-02	112.17	3.14E-02	-56.67	7.96E-02	-88.13	6.91E-02	85.37	2.30E-01	-88.29
b4:n2:+z	3.97E-02	86.98	8.78E-02	111.13	6.52E-03	-59.51	1.29E-01	-90.49	6.22E-02	85.24	2.87E-01	-92.09
b4:n3:+z	3.90E-02	-98.87	8.03E-02	109.83	5.16E-02	-42.13	1.00E-01	-91.62	6.72E-02	83.38	2.22E-01	-86.33
b4:n4:+z	4.62E-02	87.93	8.53E-02	110.13	6.41E-03	-62.42	1.26E-01	-89.48	3.76E-02	89.61	2.76E-01	-88.82
b5:t1:+z	5.00E-03	-87.07	1.58E-02	110.24	9.94E-03	125.48	5.56E-02	90.16	7.89E-02	-96.48	4.96E-01	80.67
b6:q1:+z	4.55E-02	75.82	9.92E-02	-100.86	5.93E-02	84.88	3.39E-02	-117.86	1.52E-01	86.30	8.87E-02	99.63
b6:q2:+z	6.69E-02	-93.03	1.11E-01	-87.87	6.30E-02	98.32	1.01E-01	95.88	1.74E-01	90.09	6.42E-02	104.05
b6:q3:+z	1.36E-01	-111.73	3.08E-02	-67.57	3.07E-02	-55.87	1.09E-01	75.63	9.97E-02	89.81	4.97E-02	-73.83
b6:q4:+z	7.35E-02	-103.62	5.80E-02	111.36	7.25E-02	-66.61	5.07E-02	-94.24	8.82E-02	97.29	2.06E-01	-77.86
b6:q5:+z	8.40E-02	82.55	6.30E-02	110.67	3.14E-02	114.23	9.97E-02	-99.95	1.10E-02	1.83	2.39E-01	-78.92
b6:q6:+z	1.23E-01	63.85	4.23E-02	-73.19	5.24E-02	116.53	5.99E-02	54.60	1.73E-01	-94.68	7.57E-02	-84.43
b6:q7:+z	6.99E-02	78.15	1.14E-01	-102.87	1.55E-02	-74.96	8.35E-02	60.85	2.41E-01	-90.47	5.60E-02	107.26
b6:q8:+z	2.54E-02	-92.97	1.18E-01	-114.11	6.04E-02	-131.77	3.73E-02	-94.07	2.19E-01	-98.03	1.18E-01	102.19
b6:q9:+z	1.49E-01	-114.68	6.41E-02	-83.04	2.35E-02	122.46	1.17E-01	-130.63	5.75E-02	-98.21	2.90E-02	92.38
b6:q10:+z	1.13E-01	-111.97	6.77E-02	111.20	7.61E-02	112.82	4.98E-02	-81.63	6.75E-03	93.17	2.64E-01	-84.76
b6:q11:+z	3.54E-02	88.10	1.03E-01	106.50	3.30E-02	-64.00	3.17E-02	87.69	1.10E-02	110.31	3.64E-01	-93.10
b6:q12:+z	1.30E-01	64.34	1.68E-02	-67.99	6.59E-02	-61.25	8.31E-02	-104.68	5.17E-02	93.79	9.95E-02	-84.53
b7:q1f+y	8.01E-02	64.81	4.23E-01	-110.16	5.06E-01	77.90	3.13E-01	-107.77	3.08E-01	-96.65	1.97E-02	-77.82
b7:q2f+y	9.47E-02	-88.96	4.15E-01	-108.62	4.72E-01	80.45	1.28E-01	83.78	3.81E-01	-100.46	1.28E-01	-83.54
b7:q7f+y	1.48E-01	-109.79	4.61E-01	64.43	3.11E-01	103.78	3.63E-01	-123.20	1.89E-01	-92.56	3.24E-02	83.51
b7:q8f+y	3.98E-02	137.65	5.09E-01	57.45	5.82E-01	52.76	1.24E-01	80.58	3.45E-01	-98.80	1.33E-01	-86.53
b7:q9f+y	2.66E-01	56.15	3.09E-01	89.13	5.80E-02	120.45	3.19E-01	42.65	4.52E-01	-103.52	3.03E-01	-88.69
b71:q3f+x	3.04E-01	57.56	1.04E-01	108.91	7.66E-02	119.51	2.56E-01	-110.67	3.06E-01	80.73	6.64E-02	96.57
b72:q4f+x	1.78E-01	73.30	1.34E-01	-72.59	2.78E-01	109.56	1.64E-01	77.15	1.33E-01	85.21	9.96E-02	92.44
b73:q5f+x	1.23E-01	-99.23	1.85E-01	-76.97	5.59E-02	-59.37	2.78E-01	71.44	1.54E-01	-93.10	5.82E-02	93.89
b74:q6f+x	2.15E-01	-121.39	1.67E-01	104.62	1.77E-01	-52.53	2.59E-01	-114.77	1.45E-01	-99.86	1.43E-02	-71.52
b75:q10f+x	2.00E-01	60.43	8.01E-02	-71.36	2.43E-01	-70.76	3.79E-02	103.39	1.56E-01	-95.37	8.94E-02	92.20
b76:q11f+x	8.37E-02	-99.19	2.00E-01	-78.84	1.09E-01	117.97	2.28E-01	-96.95	9.94E-02	84.61	2.55E-01	79.83
b77:q12f+x	2.25E-01	-124.85	1.34E-01	108.25	1.30E-01	118.04	2.57E-01	66.15	1.69E-01	85.73	1.55E-01	-84.62

Tabela C.2 - Formas naturais do corpo do cárter normalizadas para massa modal unitária. (Cont.)

GDL	Modo											
	1°		2°		3°		4°		5°		6°	
	Amp.	Fase	Amp	Fase	Amp	Fase	Amp	Fase	Amp	Fase	Amp	Fase
b8:i1:+z	4.33E-02	69.85	8.46E-02	-114.49	3.41E-02	58.30	1.60E-02	-120.56	1.71E-01	74.13	8.49E-02	97.21
b8:i2:+z	5.61E-02	-105.28	7.82E-02	-113.10	2.87E-02	65.11	9.66E-02	82.50	2.07E-01	66.59	7.58E-02	97.42
b8:i3:+z	1.23E-01	-127.99	2.92E-02	-75.54	2.26E-02	-58.93	9.29E-02	51.79	1.16E-01	78.06	4.24E-02	-84.88
b8:i4:+z	6.57E-02	-114.91	6.67E-02	102.70	7.54E-02	-77.56	6.38E-02	-116.80	1.04E-01	87.52	2.14E-01	-87.60
b8:i5:+z	6.03E-02	75.37	7.30E-02	100.85	1.11E-02	118.19	9.73E-02	-118.37	7.49E-03	101.63	2.49E-01	-87.39
b8:i6:+z	1.19E-01	57.04	3.70E-02	-77.62	4.66E-02	119.62	4.71E-02	49.11	1.74E-01	-95.37	7.64E-02	-83.80
b8:i7:+z	6.67E-02	67.89	8.47E-02	-118.01	4.53E-03	112.98	4.99E-02	47.88	2.75E-01	-101.28	4.11E-02	99.06
b8:i8:+z	1.71E-02	-83.94	7.86E-02	-128.35	2.17E-02	-142.19	3.25E-02	-94.92	2.67E-01	-111.00	8.88E-02	92.51
b8:i9:+z	1.29E-01	-128.01	3.73E-02	-96.64	2.92E-02	121.58	8.12E-02	-136.22	1.11E-01	-112.45	9.25E-03	-97.39
b8:i10:+z	1.04E-01	-120.01	5.67E-02	106.38	7.21E-02	107.29	5.15E-02	-89.22	6.46E-03	83.68	2.44E-01	-90.14
b8:i11:+z	3.36E-02	78.49	9.25E-02	101.47	3.50E-02	-67.30	1.62E-02	91.77	1.58E-02	89.36	3.28E-01	-100.49
b8:i12:+z	1.09E-01	55.14	1.91E-02	-74.37	5.28E-02	-60.56	6.69E-02	-119.63	5.57E-02	88.15	8.13E-02	-89.69
b9:6:+x	2.53E-01	69.36	9.64E-02	109.64	7.24E-02	123.68	2.67E-01	-108.79	2.64E-01	81.94	1.00E-01	96.08
b9:7:+x	1.79E-01	73.62	8.13E-02	108.32	4.07E-02	96.56	1.04E-01	-124.51	1.91E-01	85.95	1.10E-01	92.65
b9:8:+x	6.25E-02	90.17	3.84E-02	113.32	3.21E-02	124.22	1.14E-01	-90.90	6.86E-02	-88.91	1.50E-01	95.47

ANEXO C3 - Formas Naturais da Tampa do Cárter

Tabela C.3 - Formas naturais da tampa do cárter normalizadas para massa modal unitária.

GDL	Modo											
	1°		2°		3°		4°		5°		6°	
	Amp.	Fase	Amp	Fase	Amp	Fase	Amp	Fase	Amp	Fase	Amp	Fase
t1:51:+z	1.26E-01	91.73	2.12E-01	-60.58	2.39E-02	-72.67	7.36E-02	-97.56	3.39E-01	-78.77	1.22E-01	96.46
t1:52:+z	1.36E-01	91.00	4.56E-02	107.38	2.73E-02	-71.97	1.72E-01	66.19	2.84E-01	-78.47	1.24E-01	-82.21
t1:53:+z	4.30E-02	91.95	1.60E-01	115.30	6.95E-03	102.72	1.44E-01	69.58	3.81E-02	-77.99	1.58E-01	-83.41
t2:54:+z	9.50E-02	87.75	1.32E-01	-58.65	9.41E-02	105.44	1.39E-01	71.90	2.58E-01	101.02	7.86E-02	97.72
t2:55:+z	1.61E-01	87.77	4.62E-02	102.16	3.13E-01	103.86	6.12E-02	120.24	2.37E-01	103.37	1.33E-01	102.37
t2:56:+z	2.56E-02	84.56	2.93E-01	112.39	1.30E-01	105.39	2.34E-01	-107.71	1.46E-01	-78.24	4.35E-02	-83.87
t4:p1f+y	3.65E-03	105.08	9.66E-02	112.53	6.79E-02	-87.65	5.92E-02	-129.12	2.99E-02	-89.88	1.68E-01	-97.32
t4:p2f+y	9.92E-03	-103.90	7.31E-02	-73.68	2.33E-01	-148.19	6.94E-02	-156.06	5.94E-03	-134.65	2.31E-01	-100.92
t4:p7f+y	1.51E-02	78.80	1.73E-01	-73.76	1.88E-01	94.28	7.18E-02	38.34	3.33E-01	-114.77	8.44E-02	83.94
t4:p8f+y	1.41E-02	84.26	2.46E-02	116.48	1.52E-01	95.52	1.66E-01	29.06	3.10E-01	-143.19	1.61E-01	-102.30
t4:p9f+y	3.01E-03	-140.29	1.70E-01	108.57	1.17E-01	96.74	9.18E-02	51.47	3.22E-02	-91.83	2.71E-02	-98.42
t41:p3f+x	1.55E-02	-98.53	1.84E-01	98.81	2.41E-01	51.73	2.73E-02	-62.54	1.19E-01	-99.12	2.58E-02	-81.02
t42:p4f+x	4.29E-02	-103.10	2.41E-01	102.31	1.17E-01	-84.05	2.74E-02	32.98	7.39E-02	-88.71	2.25E-01	-91.35
t43:p5f+x	2.84E-02	-106.63	4.67E-02	-72.95	1.46E-01	-92.89	6.79E-02	63.15	2.22E-01	84.46	8.31E-02	-97.10
t44:p6f+x	6.05E-03	-99.10	2.75E-01	-78.12	1.29E-01	98.04	2.62E-02	-133.17	9.89E-03	-144.68	1.71E-01	53.20
t45:p10f+x	1.51E-02	-103.78	1.81E-01	105.33	7.91E-02	100.15	8.84E-02	-120.67	2.01E-01	72.26	1.98E-01	73.88

Tabela C.3 - Formas naturais da tampa do cárter normalizadas para massa modal unitária. (cont.)

GDL	Modo											
	1°		2°		3°		4°		5°		6°	
	Amp.	Fase	Amp.	Fase	Amp.	Fase	Amp.	Fase	Amp.	Fase	Amp.	Fase
t46:p11f:+x	9.83E-03	-99.56	2.82E-02	-74.68	6.02E-02	-82.67	1.29E-01	-146.68	1.37E-01	-92.49	1.26E-02	-113.12
t47:p12f:+x	9.01E-03	-84.76	1.93E-01	-77.70	8.03E-02	-81.53	1.12E-02	18.19	2.12E-01	-96.81	1.34E-01	-105.19
t5:p2d:+z	1.62E-01	86.61	2.43E-01	111.27	1.38E+00	62.24	4.94E-02	-72.72	5.96E-02	97.81	1.71E-01	91.17
t5:p2e:+z	1.50E-01	87.53	1.93E-02	-4.01	8.70E-01	89.71	7.51E-02	94.26	3.06E-01	100.54	2.42E-01	95.29
t5:p3d:+z	6.07E-02	-92.00	5.14E-01	109.48	4.64E-01	98.95	4.04E-01	-107.90	3.65E-01	-82.01	4.10E-01	-89.08
t5:p3e:+z	7.52E-02	85.34	4.73E-01	108.14	1.34E+00	68.36	3.16E-01	-106.12	2.88E-01	-80.65	1.09E-01	-80.18
t5:p4d:+z	2.85E-01	-93.83	2.85E-01	111.82	3.87E-01	80.11	1.58E-01	-110.37	3.05E-02	-70.47	6.89E-01	-99.63
t5:p4e:+z	1.63E-01	-93.80	4.44E-01	108.69	1.67E-02	104.55	2.94E-01	-107.85	2.82E-01	-80.25	5.88E-01	-95.35
t5:p5d:+z	3.03E-01	-96.13	2.70E-01	-69.77	3.65E-01	-80.08	7.43E-02	-122.37	3.45E-01	93.90	2.46E-01	89.26
t5:p5e:+z	3.08E-01	-96.53	3.68E-02	133.20	4.67E-01	-81.16	9.27E-02	-115.51	1.97E-01	97.43	3.46E-01	-90.01
t5:p6d:+z	2.90E-02	-87.64	5.06E-01	-69.14	6.93E-02	103.91	1.23E-01	-105.75	4.46E-01	-85.61	8.55E-01	69.97
t5:p6e:+z	1.81E-01	-93.45	4.37E-01	-71.78	9.65E-02	-77.81	1.25E-01	-112.65	4.70E-02	101.84	7.06E-01	76.48
t5:p7d:+z	1.54E-01	84.11	2.23E-01	-62.68	9.74E-02	102.48	2.89E-01	61.29	1.07E+00	-113.05	2.94E-01	90.85
t5:p7e:+z	7.68E-02	82.76	3.91E-01	-66.12	9.75E-02	103.11	1.93E-02	38.05	7.78E-01	-98.03	6.24E-01	80.32
t5:p8d:+z	1.21E-01	84.73	1.21E-01	110.92	9.54E-02	102.46	3.92E-01	55.71	8.16E-01	-99.18	1.45E-01	-90.53
t5:p8e:+z	1.68E-01	83.53	4.65E-02	-50.86	8.93E-02	102.47	4.37E-01	56.38	1.07E+00	-114.98	3.14E-02	122.90
t5:p9d:+z	2.19E-02	-102.70	2.93E-01	113.16	1.15E-01	101.90	1.99E-01	65.19	8.15E-02	98.72	2.46E-02	-91.20
t5:p9e:+z	5.40E-02	85.83	2.28E-01	112.01	1.05E-01	101.99	3.23E-01	57.97	3.59E-01	-85.30	1.55E-01	-89.27
t5:p10d:+z	1.34E-01	-97.16	1.88E-01	115.16	3.06E-02	103.69	1.36E-01	-117.83	1.95E-01	96.62	1.62E-01	89.65
t5:p10e:+z	7.91E-02	-98.30	2.66E-01	113.92	9.69E-02	101.91	4.08E-02	70.47	2.53E-01	95.93	1.03E-01	90.02
t5:p11d:+z	1.65E-01	-97.52	1.24E-01	-72.04	1.73E-01	-78.72	2.29E-01	-116.57	2.90E-01	-83.54	8.72E-02	-90.17
t5:p11e:+z	1.62E-01	-95.29	5.85E-02	121.95	5.83E-02	-78.95	2.30E-01	-118.53	4.83E-03	-78.76	9.26E-02	93.63
t5:p12d:+z	4.77E-02	-91.05	2.85E-01	-67.09	4.70E-02	-75.54	1.03E-01	54.96	5.02E-02	-80.12	1.11E-01	-86.33
t5:p12e:+z	1.18E-01	-94.57	2.33E-01	-67.04	1.58E-01	-78.94	5.99E-02	-106.89	2.74E-01	-84.44	1.68E-01	-89.99
t6:61:+y	2.72E-02	-101.20	2.43E-01	111.81	1.27E-01	-78.57	3.68E-02	68.24	3.68E-02	98.65	9.33E-02	86.86
t6:62:+x	3.14E-01	81.90	2.25E-02	29.19	1.07E-01	-79.03	3.21E-02	-105.00	4.56E-02	96.55	2.38E-02	-90.87
t6:63:+y	1.66E-02	81.23	2.38E-01	107.63	2.14E-02	-80.66	8.81E-03	-89.80	6.74E-02	-85.24	1.24E-01	83.91
t6:65:+x	3.75E-01	74.05	4.96E-02	61.39	6.34E-02	-82.51	1.03E-01	-110.46	7.20E-02	-83.44	2.06E-02	76.47
t6:61b:+y	2.32E-02	-97.59	1.15E-01	113.47	3.95E-02	-77.01	4.65E-03	-133.36	8.14E-02	98.14	5.67E-02	-88.88
t6:61t:+y	4.95E-02	-102.59	3.88E-01	110.59	1.96E-01	-79.13	7.00E-02	65.60	1.20E-02	-87.33	1.86E-01	85.07
t6:62b:+x	1.97E-01	81.21	1.72E-02	-15.42	9.13E-02	-81.29	2.37E-02	59.00	8.05E-02	94.04	2.01E-02	-88.68
t6:62t:+x	4.07E-01	77.46	4.38E-02	-22.69	1.14E-01	-78.36	8.44E-02	-118.09	1.44E-02	78.65	1.29E-02	47.13
t6:63b:+y	3.17E-02	79.28	8.54E-02	107.80	1.08E-01	94.39	2.98E-02	-101.86	1.54E-02	-72.40	9.47E-03	-91.74
t6:63t:+y	5.73E-02	74.15	4.01E-01	107.59	1.64E-01	-84.27	9.69E-03	32.69	9.85E-02	-85.87	2.45E-01	81.07
t6:65t:+x	5.24E-01	70.35	6.68E-02	50.97	1.43E-01	-84.59	2.05E-01	-113.28	9.67E-02	-83.59	4.90E-02	66.31
t7:71:+y	1.79E-02	-100.32	2.74E-02	-74.83	1.26E-02	-83.87	7.31E-02	-117.69	3.27E-02	92.46	5.03E-02	84.62
t7:72:+x	1.09E-01	-101.50	1.02E-02	-179.26	2.14E-03	120.06	7.13E-02	-122.03	5.56E-02	-87.26	5.38E-02	87.36
t7:73:+y	2.82E-03	75.28	3.21E-02	-68.14	6.67E-02	96.92	5.56E-02	59.90	8.16E-02	93.64	5.12E-03	71.93
t7:71b:+y	1.90E-02	-103.22	2.55E-02	114.20	1.78E-03	-89.81	7.48E-02	-118.16	7.35E-02	93.15	5.91E-02	85.26
t7:71t:+y	6.15E-03	-93.79	8.12E-02	-71.61	2.78E-02	-82.44	5.75E-02	-117.19	1.14E-02	-87.90	3.75E-02	83.60
t7:72b:+x	8.21E-02	-100.19	6.93E-03	-148.08	9.30E-03	-85.45	4.51E-02	-121.52	1.84E-02	-88.17	3.59E-02	86.13
t7:72t:+x	1.31E-01	-101.94	1.36E-02	169.99	1.17E-02	102.40	8.32E-02	-121.51	7.76E-02	-87.59	6.48E-02	86.78
t7:73b:+y	1.24E-02	81.80	2.89E-02	110.80	9.16E-02	97.73	5.27E-02	62.16	1.16E-01	93.81	1.27E-02	84.16
t7:73t:+y	1.22E-03	-70.17	8.56E-02	-69.31	3.94E-02	97.16	4.71E-02	57.77	4.76E-02	93.32	9.90E-03	-86.18

Tabela C.3 - Formas naturais da tampa do cárter normalizadas para massa modal unitária. (cont.)

GDL	Modo											
	1°		2°		3°		4°		5°		6°	
	Amp.	Fase	Amp	Fase	Amp	Fase	Amp	Fase	Amp	Fase	Amp	Fase
t8:r1:+z	6.62E-02	74.87	2.37E-01	-67.27	3.26E-01	85.00	1.85E-01	42.80	3.30E-01	66.58	9.80E-02	49.18
t8:r2:+z	1.62E-01	77.97	9.72E-02	96.23	1.06E+00	57.53	9.82E-02	41.80	2.65E-01	91.01	2.76E-01	79.51
t8:r3:+z	3.67E-02	76.78	4.88E-01	104.48	1.05E+00	75.03	3.47E-01	-116.31	3.41E-01	-90.67	1.99E-01	-94.13
t8:r4:+z	2.01E-01	-101.82	4.21E-01	105.47	1.52E-01	-83.81	2.24E-01	-114.21	2.17E-01	-86.76	6.63E-01	-110.00
t8:r5:+z	2.99E-01	-101.53	8.57E-02	-85.93	4.66E-01	-88.54	1.03E-01	-120.95	2.75E-01	90.09	1.62E-01	-96.29
t8:r6:+z	1.07E-01	-97.86	5.58E-01	-76.64	2.57E-02	101.21	1.55E-01	-116.54	2.34E-01	-90.62	9.51E-01	56.80
t8:r7:+z	1.14E-01	78.48	3.45E-01	-69.12	1.18E-01	96.14	1.72E-01	57.20	9.64E-01	-115.08	5.12E-01	76.54
t8:r8:+z	1.39E-01	78.87	7.91E-02	104.11	9.96E-02	95.75	4.81E-01	49.44	9.60E-01	-115.13	1.32E-01	-102.94
t8:r9:+z	2.36E-02	84.76	2.44E-01	109.37	1.07E-01	96.59	2.72E-01	57.51	1.55E-01	-89.11	1.29E-01	-96.25
t8:r10:+z	1.18E-01	-103.13	2.31E-01	110.96	5.79E-02	97.68	9.82E-02	-121.70	2.49E-01	89.86	1.65E-01	83.48
t8:r11:+z	1.57E-01	-102.14	4.57E-02	-83.40	1.29E-01	-83.67	2.28E-01	-122.59	1.71E-01	-87.28	1.05E-02	-114.30
t8:r12:+z	6.93E-02	-97.65	2.74E-01	-72.12	9.67E-02	-82.86	6.23E-02	46.51	1.38E-01	-88.24	1.49E-01	-96.38
t9:s1:+z	7.95E-02	85.90	2.16E-01	-58.69	3.72E-01	100.46	1.96E-01	63.43	3.21E-01	99.33	1.46E-01	92.54
t9:s2:+z	1.66E-01	87.57	7.73E-02	103.52	1.11E+00	70.62	7.45E-02	70.74	2.57E-01	101.76	2.58E-01	92.43
t9:s3:+z	1.65E-02	80.33	4.44E-01	110.40	7.54E-01	81.94	3.59E-01	-109.53	2.94E-01	-81.91	1.95E-01	-85.17
t9:s4:+z	2.60E-01	-94.54	3.61E-01	113.08	3.15E-01	-79.19	1.77E-01	-109.66	1.00E-01	-78.66	7.13E-01	-109.04
t9:s5:+z	3.21E-01	-96.51	5.12E-02	-82.58	4.87E-01	-83.53	8.37E-02	-116.96	2.75E-01	96.51	2.14E-01	-92.82
t9:s6:+z	6.80E-02	-91.15	4.89E-01	-72.44	4.52E-02	104.30	1.43E-01	-112.61	3.24E-01	-86.34	7.01E-01	61.69
t9:s7:+z	1.11E-01	83.13	3.44E-01	-66.79	1.10E-01	100.63	1.69E-01	53.89	8.98E-01	-118.84	5.17E-01	78.30
t9:s8:+z	1.59E-01	82.82	1.28E-02	49.43	9.71E-02	98.46	4.20E-01	41.53	8.00E-01	-133.93	6.61E-02	-124.20
t9:s9:+z	2.89E-02	88.04	2.38E-01	111.78	1.05E-01	100.75	2.72E-01	55.22	1.89E-01	-84.94	1.28E-01	-89.85
t9:s10:+z	1.08E-01	-98.48	2.56E-01	113.11	8.74E-02	100.79	3.91E-02	-121.01	2.84E-01	92.59	1.54E-01	87.85
t9:s11:+z	1.48E-01	-98.54	2.43E-02	-90.31	9.70E-02	-80.59	1.98E-01	-119.20	1.06E-01	-86.72	7.90E-03	111.44
t9:s12:+z	8.63E-02	-95.07	2.95E-01	-68.46	1.17E-01	-80.20	5.02E-02	45.44	2.02E-01	-86.14	1.87E-01	-92.16

ANEXO D - FICHEIRO DE DADOS TIPO

```
Carter com acoplamento hor e vert
***** Dados Gerais *****
*nfrfpon
  513
*fini,ffim
  .5000000e+03 .2548000e+04
*dva,modelo
  3 1
*dupla
  T
*pini
  1
*pfin
  513
*alginv
  3
*algaco,persvd
  2,0
*prop,proptot
  .1000000e+01 .1000000e+01
*verifinv,npeq
  F .1000000e-10
*inspecfrf
  F,31
***** Componente 1 *****
*fichdat1
  inf_mod.uf
*nfrfref1
  85
*nmodos1
  6
*usamod1(i)
  T,T,T,T,T,T
```

```
*nuref1
  85
*usaref1

1, 12, 20, 26, 31, 36, 38, 40, 42, 47, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 6
8,
***** Componente 2 *****
*fichdat2
sup_mod.uf
*nfrfref2
  84
*nmodos2
  6
*usamod2(i)
T, T, T, T, T, T
*nuref2
  84
*usaref2

1, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 22, 26, 32, 37, 41, 43, 52
, 59,
***** Acoplamento *****
*nacopla
  4
*acop(i, j)
60, 8
62, 10
66, 14
69, 17
***** Resultados *****
*fichres
carter76
*nfrfs
133
*FRF's
1, 31, 1, 1,
```


1,31,1,2,

1,31,1,3,

1,31,1,4,

1,31,1,5,

...

...

...

1,31,2,40,

1,31,2,41,

1,31,2,42,

1,31,2,43,

1,31,2,44,

1,31,2,45,

1,31,2,46,

1,31,2,47,

1,31,2,48,

1,31,2,49,

1,31,2,50,

1,31,2,51,

1,31,2,52,

1,31,2,53,

1,31,2,54,

1,31,2,55,

1,31,2,56,

1,31,2,57,

1,31,2,58,

1,31,2,59,

1,31,2,60,

