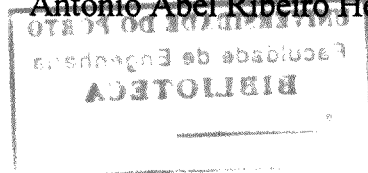




**FACULDADE DE ENGENHARIA  
UNIVERSIDADE DO PORTO**

**APLICAÇÃO DE NOVOS CONCEITOS DE  
SEGURANÇA NO DIMENSIONAMENTO  
DO BETÃO ESTRUTURAL**

**António Abel Ribeiro Henriques**



Dissertação para Doutoramento em Engenharia Civil

Fevereiro  
1998



**FACULDADE DE ENGENHARIA  
UNIVERSIDADE DO PORTO**

# **APLICAÇÃO DE NOVOS CONCEITOS DE SEGURANÇA NO DIMENSIONAMENTO DO BETÃO ESTRUTURAL**

**António Abel Ribeiro Henriques**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Civil e avaliada em 19 de Junho de 1998 pelo júri constituído por:

**Presidente:** Doutor Aristides Guedes Coelho, Professor Catedrático da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

**Vogais:** Doutor António José Luís dos Reis, Professor Catedrático do Instituto Superior Técnico da Universidade de Lisboa;

Engenheiro Mário Cirilo Neves Castanheta, Investigador Coordenador do Laboratório Nacional de Engenharia Civil;

Doutor Francisco José Lage Campelo Calheiros, Professor Auxiliar da Universidade de Évora;

Doutor António Manuel Adão da Fonseca, Professor Catedrático da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto;

Doutor Joaquim Azevedo Figueiras, Professor Catedrático da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto;

Doutor Manuel Carlos de Azeredo e Melo, Professor Associado com agregação da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto;

Doutora Paula Manuela Lemos Pereira Milheiro de Oliveira, Professora Auxiliar da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

*Antes de olhar para o céu  
vê onde pões os pés.*

## SUMÁRIO

A verificação consistente da segurança de estruturas de betão quando se utilizam métodos de análise não linear é um assunto que tem merecido especial atenção no seio da comunidade técnica e científica. As inconsistências existentes na actual regulamentação relativamente aos formatos de segurança têm sido objecto de ampla discussão e de procura de propostas alternativas. A investigação nesta área é por isso de interesse, justificando-se o desenvolvimento de metodologias de avaliação da segurança de nível superior como ponto de partida para a definição de regras simplificadas, lógicas e coerentes. O estabelecimento destas regras deverá basear-se no estudo de vários casos correntes de estruturas de betão tendo em conta as variabilidades das grandezas envolvidas nestes problemas. Exige-se assim a aplicação de modelos de análise estrutural e técnicas probabilísticas que permitam considerar o comportamento não linear dos materiais e avaliar da forma mais rigorosa possível a segurança.

Tendo em atenção os aspectos referidos no parágrafo anterior, desenvolveram-se metodologias de análise de segurança (ou fiabilidade) estrutural. Estas metodologias resultam da associação de técnicas probabilísticas com modelos de análise não linear de estruturas de betão.

Embora seja dado maior destaque às técnicas de análise de segurança, não se descurou a implementação de modelos de análise estrutural. Assim, desenvolveu-se um modelo numérico fundamentado em relações constitutivas que permitem descrever o comportamento não linear instantâneo e diferido dos materiais. Este modelo, apoiado na técnica dos elementos finitos, permite traçar a resposta de estruturas de betão armado e pré-esforçado desde a fase inicial até ao colapso.

Relativamente à avaliação probabilística da segurança existem dois aspectos que condicionam fortemente a solução deste tipo de problemas: o rigor e a eficácia. Tendo presente estes aspectos, desenvolveram-se duas metodologias alternativas: a metodologia baseada no método de Monte Carlo e a metodologia da superfície de resposta baseada nas técnicas de fiabilidade clássicas. Enquanto que na primeira o rigor é a sua característica dominante, na segunda dá-se maior relevância à eficácia. Destacam-se também as técnicas estatísticas desenvolvidas para tornar eficaz a aplicação do método de Monte Carlo. Descrevem-se ainda os procedimentos desenvolvidos para analisar a sensibilidade da resposta em relação às variáveis simuladas.

As presentes metodologias são utilizadas na discussão e clarificação de aspectos regulamentares relativos à verificação da segurança de estruturas de betão. Realizam-se várias aplicações práticas que servem de base à definição de regras simplificadas de avaliação da segurança de estruturas porticadas quando se utilizam métodos de análise não linear. Finalmente, apresenta-se o estudo de um exemplo prático, permitindo avaliar o desempenho dos métodos desenvolvidos com vista ao conhecimento mais aprofundado do comportamento das estruturas e à avaliação (e eventual reavaliação) da segurança e validação das soluções de projecto.

## ABSTRACT

A rational format for checking the structural safety when dealing with nonlinear methods of analysis is a matter of great interest within the technical and scientific community. The difficulties encountered in drafting the recent concrete design codes have been discussed and alternative formats proposed. The development of a high level safety methodology, as a starting point to propose simple and consistent rules, is today an important research area. These rules should be based on the study of various current structures, taking into account variabilities of material, geometric and load parameters. The use of structural models and probabilistic techniques, to describe material nonlinear behaviour and to evaluate accurately the structural safety, is mandatory.

Methods for the analysis and evaluation of the structural reliability of concrete structures were developed. These methods are the result of the adequate combination between probabilistic techniques and methods of nonlinear analysis of concrete structures.

Although the development of reliability techniques are the first objective of this work, a significant effort was made to implement the existing structural models of analysis. A numerical model based on realistic constitutive relationships was developed wherein nonlinear and time dependent behaviour of material was considered. This model, supported by finite element techniques can trace the structural response from the initial state up to the collapse by using an incremental-iterative procedure.

Probabilistic structural safety evaluation is conditioned mainly by two features, namely the accuracy and the efficiency. Considering these aspects two alternative methodologies were developed: a methodology based on Monte Carlo method and a response surface approach supported by classic reliability techniques. The former is characterised by its accuracy and the latter by its efficiency. Statistical techniques are combined with simulation Monte Carlo method to obtain accurate results with a minimum number of samples. Procedures to perform a sensitivity analysis of the response in order of basic variables are also described.

The approaches developed are applied to discuss and clarify some features related to the safety format presented by concrete structural codes. Practical applications are performed to provide consistent simple rules to evaluate safety of frame structures when nonlinear methods of analysis are used. Finally, a practical example is presented to point out the potentialities of present methods to infer structural behaviour of concrete structures, to evaluate (or re-evaluate) the structural safety and to design validation.

## RÉSUMÉ

La vérification consistant de la sécurité pour des structures en béton, quand des méthodes d'analyse non linéaires sont employées, est un sujet d'étude pour la communauté scientifique et technique. Des alternatives sont discutées et recherchées puisque la réglementation actuelle pour les formats de sécurité est contradictoire. La recherche sur ce sujet est donc pertinente et le développement de méthodes de niveau supérieur est justifié en vue la définition de règles simplifiées logiques et cohérents. La fixation de ces règles doit être basée sur l'étude des structures usuelles en tenant compte des variabilités des grandeurs. L'application de modèles d'analyse structural et de techniques probabilistes que tiennent en compte le comportement non linéaire des matériaux et l'évaluation la plus rigoureuse possible de la sécurité est une exigence.

En tenant compte des considerations antérieures, des méthodes de sécurité (fiabilité) structural on etait developpé. Ces méthodes sont la combinaison de méthodes probabilistes avec l'analyse non linéaire.

Les méthodes probabilistes pour l'étude de la fiabilité des structures en béton sont l'object principal, mais des modèles d'analyse structural n'ont été négligés. Ainsi, une méthode numérique, fondée sur les relations constitutives que décrivent le comportement instantané et différé des matériaux, est développée. Cette méthode basée sur les éléments finis permet l'obtention de la réponse des structures en béton armé et précontrainte du la phase initiale jusqu'à la rupture.

Sur l'évaluation probabiliste de la sécurité, deux aspects doivent être balancés: la rigueur et la efficace. Pour en tenir compte ces aspects, deux méthodes alternatives sont proposées: la méthode de Monte Carlo et la méthode de la surface de réponse basée sur les techniques de fiabilité classiques. Pour la première méthode, la rigueur est l'objectif principal, tandis que pour la deuxième l'efficacité est l'objectif. Il est relevé des techniques statistiques pour l'efficacité de la méthode de Monte Carlo. La sensibilité des réponses par rapport aux variables simulées est analysée.

La méthodologie présentée est utilisée pour la discussion et clarification de la réglementation reliée à la sécurité des structures en béton. Des applications pratiques qui servent de base à la définition des règles simplifiées d'évaluation de la sécurité des structures type portique sont effectuées par des méthodes d'analyse non linéaire. Ce travail s'achève avec un cas où s'évalue les différentes méthodes pour l'étude approfondi du comportement de structures et pour l'évaluation (et éventuelle re-évaluation) de la sécurité des solutions de projet.

## **PALAVRAS-CHAVE**

Estruturas de betão

Fiabilidade estrutural

Formatos de segurança

Análise não linear

Efeitos diferidos

Elementos finitos

Método de Monte Carlo

Superfície de resposta

Variáveis aleatórias

## **KEYWORDS**

Concrete structures

Structural reliability

Safety formats

Nonlinear analysis

Time dependent

Finite elements

Monte Carlo method

Response surface

Random variables

## **MOTS CLÉ**

Structures en béton

Fiabilité structural

Formats de sécurité

Analyse non linéaire

Effects différe

Elements finis

Méthode de Monte Carlo

Surface de réponse

Variables aléatoires

## AGRADECIMENTOS

A realização desta dissertação envolveu várias pessoas que, de uma forma directa ou indirecta, me conduziram a levar a bom termo a sua concretização. Não posso por isso deixar de apresentar a minha gratidão e o meu reconhecimento àqueles que deram os mais importantes contributos.

Ao Professor Joaquim Figueiras pelo despertar do meu interesse no estudo do betão estrutural e pela importância que teve desde o início da minha actividade científica. O seu empenho e o seu apurado sentido crítico, mas simultaneamente incentivador, muito contribuíram para que este trabalho fosse possível.

Ao Professor Francisco Calheiros expresse o meu agradecimento pelas sugestões inovadoras, a disponibilidade demonstrada, os ensinamentos e, não menos importante, pela amizade cultivada ao longo destes anos.

Aos colegas do Laboratório de Estruturas da Faculdade de Engenharia com quem convivi ao longo deste tempo e que contribuíram para o bom ambiente de trabalho, nomeadamente ao Professor Rui Póvoas, ao Professor Joaquim Barros, à Eng.<sup>a</sup> Elsa Caetano e Eng.<sup>o</sup> Paulo Cachim.

Ao Laboratório de Cálculo Automático do Centro de Engenharia Civil da Universidade do Porto, em especial ao Professor Álvaro Azevedo, pela assistência prestada na utilização dos meios informáticos disponíveis.

Aos colegas da Secção de Matemática e Física pelo incentivo, pelo interesse manifestado e pelas facilidades concedidas para a realização deste trabalho.

À Ferdouro e à BRISA, S.A. pelo fornecimento de dados experimentais relativos à construção de viadutos de betão pré-esforçado.

Ao Sr. Manuel Carvalho pelo empenho na colaboração no trabalho de processamento de texto e a todo o pessoal auxiliar da Secção de Estruturas pela disponibilidade demonstrada.

Aos meus pais, pelo carinho e apoio recebidos ao longo da minha vida, exprimo o meu profundo reconhecimento. Desejo também expressar a minha gratidão aos meus sogros pela amizade e o apoio manifestado.

Finalmente, desejo concluir com o agradecimento muito especial e sentido à minha esposa Anabela e ao meu filho Guilherme pelo afecto, a paciência e pela compreensão nos momentos mais difíceis.



# ÍNDICE

## Capítulo 1

### INTRODUÇÃO

1.1 – ASPECTOS GERAIS .....	1
1.2 – OBJECTIVOS PROPOSTOS .....	3
1.3 – ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO .....	5
1.4 – NOTAÇÕES .....	8

## Capítulo 2

### AVALIAÇÃO DA SEGURANÇA DE ESTRUTURAS

2.1 – INTRODUÇÃO .....	9
2.2 – ENQUADRAMENTO DO PROBLEMA DA ANÁLISE DA SEGURANÇA .....	11
2.2.1 – Incertezas na segurança estrutural .....	11
2.2.2 – Segurança e funcionalidade das estruturas. Estados limites .....	13
2.2.3 – Verificação da segurança aos estados limites .....	15
2.2.4 – Níveis de risco associados ao dimensionamento .....	16
2.2.5 – Abordagem probabilística da segurança .....	19
2.2.5.1 – Generalidades .....	19
2.2.5.2 – Variáveis aleatórias unidimensionais e suas características .....	20
2.2.5.3 – Sistemas de variáveis aleatórias .....	24
2.2.5.4 – Conceito de independência .....	25
2.2.5.5 – O período de retorno .....	26
2.2.5.6 – Medida probabilística de fiabilidade estrutural .....	29
2.2.5.7 – Formulação do problema básico de fiabilidade estrutural .....	30
2.2.6 – Abordagem semi-probabilística da segurança .....	33
2.2.6.1 – Descrição do formato semi-probabilístico .....	33
2.2.6.2 – Caracterização das acções e dos seus efeitos com base no Eurocódigo 1 .....	35
2.2.6.3 – Caracterização das resistências com base no Eurocódigo 1 .....	39
2.2.6.4 – Critérios regulamentares para o dimensionamento de estruturas de betão .....	41
2.2.7 – Problemática da avaliação de segurança de estruturas existentes .....	42
2.3 – ELEMENTOS SOBRE TÉCNICAS ESTATÍSTICAS NA AVALIAÇÃO DA FIABILIDADE ESTRUTURAL .....	45

2.3.1 – Introdução .....	45
2.3.2 – Sumário sobre medidas estatísticas .....	45
2.3.3 – Estimação de parâmetros - inferência estatística .....	49
2.3.3.1 – Aproximação clássica .....	49
2.3.3.2 – Técnicas de <i>bootstrap</i> e <i>jackknife</i> .....	52
2.3.4 – Identificação de leis probabilísticas .....	53
2.3.5 – Misturas de leis.....	55
2.3.6 – Análise de regressão e de correlação.....	56
2.3.6.1 – Regressão linear simples .....	56
2.3.6.2 – Regressão multilinear .....	59
2.3.6.3 – Regressão não linear .....	60
2.4 – MÉTODOS DE ANÁLISE DA FIABILIDADE ESTRUTURAL.....	60
2.4.1 – Breve resenha histórica da evolução da teoria da fiabilidade estrutural .....	60
2.4.2 – Métodos de fiabilidade de primeira e segunda ordem.....	61
2.4.2.1 – Aproximações de primeira e segunda ordem .....	61
2.4.2.2 – Teoria do segundo momento .....	64
2.4.2.3 – Inclusão de informação das distribuições. Métodos de transformação .....	67
2.4.3 – Aplicação dos métodos de fiabilidade às técnicas de elementos finitos .....	70
2.4.3.1 – Caracterização dos diferentes métodos .....	70
2.4.3.2 – Métodos de perturbação .....	71
2.4.3.3 – Métodos de fiabilidade.....	74
2.4.3.4 – Métodos da superfície de resposta.....	76
2.5 – MÉTODO DE MONTE CARLO .....	77
2.5.1 – Princípios de simulação.....	77
2.5.2 – Técnicas de simulação pura.....	79
2.5.3 – Técnicas de redução da variância.....	81
2.5.3.1 – Considerações gerais .....	81
2.5.3.2 – Amostragem por importância .....	81
2.5.3.3 – Amostragem estratificada.....	82
2.6 – COMPARAÇÃO ENTRE OS MÉTODOS DE FIABILIDADE E O MÉTODO DE MONTE CARLO.....	85
2.7 – FIABILIDADE DE SISTEMAS ESTRUTURAIS.....	87
2.7.1 – Generalidades .....	87
2.7.2 – Sistemas em série .....	87
2.7.3 – Sistemas em paralelo .....	88
2.7.4 – Sistemas mistos .....	89
2.7.5 – Limites de fiabilidade de sistemas estruturais.....	90
2.8 – CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	91

## Capítulo 3

### MODELAÇÃO ESTRUTURAL E ACÇÕES

3.1 – INTRODUÇÃO .....	92
3.2 – DISCRETIZAÇÃO DO MEIO CONTÍNUO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS	
FINITOS.....	94
3.2.1 – Considerações iniciais.....	94
3.2.2 – Caracterização da geometria .....	94
3.2.3 – Campo de deslocamentos.....	96
3.2.4 – Estado de deformação .....	96
3.2.5 – Estado de tensão - relações constitutivas .....	99
3.2.6 – Equações de equilíbrio .....	99
3.2.7 – Integração numérica.....	100
3.2.8 – Representação das armaduras .....	102
3.3 – ELEMENTOS FINITOS ESPECIAIS .....	102
3.3.1 – Generalidades .....	102
3.3.2 – Formulação de descontinuidades nos elementos finitos .....	103
3.3.2.1 – Geometria e campo de deslocamentos.....	103
3.3.2.2 – Estado de deformação.....	104
3.3.2.3 – Relações constitutivas.....	104
3.3.2.4 – Matriz de rigidez.....	105
3.3.2.5 – Aplicações: simulação de aparelhos de apoio e rótulas plásticas .....	105
3.3.3 – Formulação do elemento unidimensional curvilíneo. Modelação do pré-esforço.....	111
3.3.3.1 – Considerações iniciais .....	111
3.3.3.2 – Geometria do elemento.....	111
3.3.3.3 – Campo de deslocamentos.....	113
3.3.3.4 – Estado de deformação.....	115
3.3.3.5 – Matriz de rigidez.....	116
3.3.3.6 – Acção do pré-esforço.....	117
3.4 – VARIABILIDADE DA GEOMETRIA DOS ELEMENTOS DE BETÃO .....	120
3.4.1 – Generalidades.....	120
3.4.2 – Valores regulamentares.....	120
3.4.3 – Dados experimentais .....	122
3.5 – ACÇÕES CONSIDERADAS E SUAS VARIABILIDADES .....	123
3.5.1 – Generalidades .....	123
3.5.2 – Acções permanentes.....	124
3.5.3 – Acções de pré-esforço .....	124
3.5.4 – Sobrecargas de utilização corrente em edifícios.....	125
3.5.5 – Sobrecargas de tráfego em pontes rodoviárias.....	129

3.5.6 – Acções térmicas resultantes de variações de temperatura.....	134
3.5.6.1 – Generalidades .....	134
3.5.6.2 – Caracterização das acções térmicas ambientais em estruturas de betão .....	136
3.5.6.3 – Simulação da acção térmica em modelos de elementos finitos.....	138
3.5.6.4 – Recomendações regulamentares.....	138
3.5.6.5 – Valores medidos e obtidos numericamente para Portugal Continental .....	139
3.6 – CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	142

## **Capítulo 4**

### **MODELAÇÃO DO COMPORTAMENTO DO BETÃO ESTRUTURAL**

4.1 – INTRODUÇÃO .....	143
4.2 – RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DO BETÃO .....	144
4.2.1 – Generalidades .....	144
4.2.2 – Comportamento instantâneo.....	145
4.2.2.1 – Considerações iniciais.....	145
4.2.2.2 – Comportamento uniaxial .....	145
4.2.2.3 – Comportamento multiaxial .....	149
4.2.2.4 – Variabilidade do comportamento instantâneo do betão .....	153
4.2.2.5 – Resultados experimentais obtidos em viadutos de betão pré-esforçado.....	160
4.2.2.6 – Modelo numérico de comportamento .....	163
4.2.3 – Comportamento diferido .....	177
4.2.3.1 – Considerações iniciais.....	177
4.2.3.2 – Envelhecimento do betão .....	179
4.2.3.3 – Retracção do betão .....	180
4.2.3.4 – Fluência do betão .....	185
4.3 – RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DAS ARMADURAS .....	198
4.3.1 – Generalidades .....	198
4.3.2 – Comportamento instantâneo.....	199
4.3.3 – Relaxação das armaduras de pré-esforço .....	201
4.3.4 – Variabilidade do comportamento mecânico das armaduras.....	203
4.3.4.1 – Armaduras ordinárias.....	203
4.3.4.2 – Armaduras de pré-esforço .....	207
4.4 – EXEMPLO DE VERIFICAÇÃO.....	209
4.5 – CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	214

## Capítulo 5

### METODOLOGIAS DE AVALIAÇÃO DA SEGURANÇA DE ESTRUTURAS

5.1 – INTRODUÇÃO .....	215
5.2 – METODOLOGIA BASEADA NO MÉTODO DE MONTE CARLO .....	217
5.2.1 – Enquadramento geral .....	217
5.2.2 – Simulação estocástica .....	218
5.2.2.1 – Modelação do campo aleatório .....	218
5.2.2.2 – Discretização do campo aleatório .....	224
5.2.2.3 – Verificação da modelação. Testes de hipóteses .....	226
5.2.3 – Análise estrutural .....	229
5.2.4 – Análise estatística da resposta. Avaliação da segurança .....	231
5.2.4.1 – Considerações iniciais .....	231
5.2.4.2 – Análise de sensibilidade e estimação de erros .....	232
5.2.4.3 – Quantificação da segurança estrutural .....	240
5.2.5 – Implementação computacional .....	244
5.2.6 – Exemplo numérico .....	249
5.2.6.1 – Descrição do exemplo .....	249
5.2.6.2 – Simulação estocástica .....	251
5.2.6.3 – Análise estrutural das amostras .....	251
5.2.6.4 – Análise de correlação-regressão .....	253
5.2.6.5 – Quantificação da segurança estrutural .....	258
5.3 – METODOLOGIA BASEADA NA SUPERFÍCIE DE RESPOSTA .....	260
5.3.1 – Enquadramento geral .....	260
5.3.2 – Filtragem de variáveis .....	262
5.3.3 – Superfície de resposta e avaliação da segurança .....	267
5.3.3.1 – Conceitos básicos .....	267
5.3.3.2 – Localização dos pontos experimentais .....	269
5.3.3.3 – Ajuste e avaliação da superfície de resposta .....	272
5.3.3.4 – Análise da segurança e avaliação da sensibilidade da resposta .....	275
5.3.4 – Implementação computacional .....	281
5.3.5 – Exemplo numérico .....	284
5.3.5.1 – Considerações iniciais .....	284
5.3.5.2 – Filtragem das variáveis .....	285
5.3.5.3 – Ajuste da superfície de resposta .....	287
5.3.5.4 – Discussão da validade dos resultados obtidos .....	288
5.4 – COMPARAÇÃO ENTRE AS DUAS METODOLOGIAS E DEFINIÇÃO DA METODOLOGIA MISTA .....	291
5.4.1 – Introdução .....	291

5.4.2 – Qualidades e limitações das metodologias propostas, incluindo métodos probabilísticos correntes .....	291
5.4.3 – Metodologia mista.....	295
5.4.4 – Exemplo numérico.....	298
5.5 – CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	300

## **Capítulo 6**

### **PARA UM NOVO CONCEITO DE SEGURANÇA AOS ESTADOS LIMITES REGULAMENTARES**

6.1 – INTRODUÇÃO .....	301
6.2 – QUANTIFICAÇÃO DA ARMADURA MÍNIMA .....	303
6.3 – AVALIAÇÃO DA SEGURANÇA AOS ESTADOS LIMITES ÚLTIMOS USANDO A ANÁLISE NÃO LINEAR.....	307
6.3.1 – A análise não linear como referência na avaliação do comportamento de estruturas.....	307
6.3.2 – Formatos de segurança propostos pelas actuais regulamentações .....	309
6.3.3 – Discussões sobre os formatos de segurança no seio do CEB.....	312
6.3.4 – Propostas alternativas de formatos de segurança .....	313
6.3.5 – Breve discussão sobre os formatos propostos .....	316
6.4 – ESTUDO DE SECÇÕES DE BETÃO ARMADO SUJEITAS À FLEXÃO .....	317
6.4.1 – Generalidades .....	317
6.4.2 – Caracterização dos exemplos estudados.....	318
6.4.3 – Avaliação da resposta última de secções de betão armado flectidas .....	320
6.4.4 – Abordagem probabilística .....	325
6.5 – ESTUDO DE ESTRUTURAS RETICULADAS DE BETÃO ARMADO.....	329
6.5.1 – Generalidades .....	329
6.5.2 – Análise de vigas de betão armado sujeitas à flexão .....	330
6.5.3 – Análise de pórticos de betão armado sujeitos à flexão.....	348
6.6 – ESTRUTURA DO FORMATO DE SEGURANÇA PROPOSTO.....	360
6.7 – CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	361

## **Capítulo 7**

### **EXEMPLO DE APLICAÇÃO - AVALIAÇÃO DA SEGURANÇA DE UM VIADUTO**

7.1 – INTRODUÇÃO.....	364
-----------------------	-----

7.2 – CARACTERIZAÇÃO DO PROBLEMA .....	365
7.2.1 – Geometria e discretização da estrutura .....	365
7.2.2 – Características mecânicas dos materiais e cargas actuantes .....	367
7.2.2.1 – Propriedades dos materiais.....	367
7.2.2.2 – Caracterização das acções .....	369
7.2.2.3 – Variáveis aleatórias - Identificação e caracterização .....	373
7.2.2.4 – Combinações de acções associadas aos estados limites .....	376
7.3 – ESTUDO COMPARATIVO ENTRE O MODELO NUMÉRICO E MEDIÇÕES EXPERIMENTAIS .....	377
7.4 – ESTUDO DO COMPORTAMENTO ESTRUTURAL.....	379
7.4.1 – Considerações iniciais.....	379
7.4.2 – Efeito das diferentes acções na estrutura .....	379
7.4.3 – Análise comparativa entre as duas sobrecargas .....	382
7.4.4 – Comportamento aos estados limites de utilização .....	385
7.4.5 – Comportamento aos estados limites últimos.....	391
7.5 – VERIFICAÇÃO DA SEGURANÇA. ABORDAGEM PROBABILÍSTICA .....	397
7.5.1 – Considerações iniciais.....	397
7.5.2 – Critério de verificação.....	397
7.5.3 – Verificação da segurança aos estados limites de utilização.....	399
7.5.4 – Verificação da segurança aos estados limites últimos.....	414
7.5.5 – Reavaliação da segurança .....	420
7.5.6 – Conclusões .....	421
7.6 – CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	422

## **Capítulo 8**

### **CONCLUSÕES**

8.1 – CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	423
8.2 – CONCLUSÕES E OBSERVAÇÕES FINAIS .....	424
8.3 – ORIENTAÇÕES PARA FUTUROS DESENVOLVIMENTOS .....	428

<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>430</b>
--	------------

<b>ANEXOS.....</b>	<b>451</b>
--------------------	------------

ANEXO 1 – DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE CORRENTES .....	453
A1.1 – LEIS DE PROBABILIDADE DISCRETAS .....	453
A1.1.1 – Lei binomial, $B(n, p)$ .....	453
A1.1.2 – Lei geométrica, $G(p)$ .....	454
A1.1.3 – Lei binomial negativa, $BN(k, p)$ .....	454
A1.1.4 – Lei de Poisson, $P(\lambda)$ .....	455
A1.2 – LEIS DE PROBABILIDADE CONTÍNUAS .....	455
A1.2.1 – Lei normal ou gausseana, $N(\mu, \sigma)$ .....	455
A1.2.2 – Lei lognormal, $LN(\lambda, \xi)$ .....	456
A1.2.3 – Lei exponencial, $E(\nu)$ .....	457
A1.2.4 – Lei gama, $GM(k, \nu)$ .....	457
A1.2.5 – Lei beta, $\beta(a, b)$ .....	458
A1.2.6 – Lei de extremos tipo I ou lei de Gumbel, $E-I(u, \alpha)$ - Distribuição de máximos .....	459
A1.2.7 – Lei de extremos tipo II ou lei de Frechet, $E-II(u, k)$ - Distribuição de máximos .....	459
A1.2.8 – Lei de extremos tipo III ou lei de Weibull, $E-III(\varepsilon, u, k)$ - Distribuição de mínimos ...	460
 ANEXO 2 – RESULTADOS EXPERIMENTAIS DA RESISTÊNCIA DO BETÃO À COMPRESSÃO OBTIDOS NA CONSTRUÇÃO DE TRÊS VIADUTOS .....	      461
 ANEXO 3 – ESTUDO SOBRE A QUANTIFICAÇÃO DA ARMADURA MÍNIMA EM ESTRUTURAS DE BETÃO ARMADO .....	      465
A3.1 – CONSIDERAÇÕES INICIAIS .....	465
A3.2 – IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA .....	466
A3.3 – ARMADURA MÍNIMA – ASPECTOS REGULAMENTARES .....	467
A3.3.1 – Caracterização dos critérios utilizados .....	467
A3.3.2 – Quantificação pelo Eurocódigo 2 e Código-Modelo MC90.....	472
A3.3.3 – Propostas recentes de outros autores .....	475
A3.4 – ABORDAGEM PROBABILÍSTICA DO PROBLEMA.....	476
A3.4.1 – Descrição do procedimento utilizado .....	476
A3.4.2 – Resultados obtidos na primeira fase .....	480
A3.4.3 – Resultados obtidos na segunda fase.....	482
A3.5 – CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	489
 ANEXO 4 – RESULTADOS COMPLEMENTARES DOS PROBLEMAS ABORDADOS NO CAPÍTULO 6.....	     493



# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1 - ASPECTOS GERAIS

Os grandes avanços tecnológicos registados nos meios de cálculo permitiram o desenvolvimento de modelos de análise não linear estrutural baseados em técnicas numéricas avançadas e em relações constitutivas complexas. Os inúmeros testes efectuados e a comprovação com resultados experimentais mostraram as potencialidades destes modelos na representação do comportamento das estruturas, desde as mais correntes até àquelas com padrões menos usuais. Usualmente baseados nas técnicas dos elementos finitos, os métodos de análise não linear têm em conta as condições de equilíbrio e de compatibilidade. Deste modo, é possível traçar completamente a resposta desde o estado de repouso até ao colapso para qualquer história de carga.

As recentes normas sobre estruturas de betão (EC2, 1991; CEB, 1990a; CEB-FIP, 1993) recomendam os métodos de análise não linear como a forma mais consistente de análise estrutural, no entanto, as regras de verificação da segurança propostas são inadequadas quando se utilizam este tipo de métodos mais rigorosos. O formato vulgarmente aplicado no dimensionamento é dividido em duas fases:

- os esforços são calculados segundo a teoria da elasticidade (independentemente do comportamento do material);
- a verificação da segurança é realizada ao nível das secções mais esforçadas onde se consideram leis constitutivas não lineares para o betão e para o aço, sendo a variabilidade dos parâmetros circunscrita à definição dos denominados valores característicos e valores de cálculo (obtidos dos primeiros a partir da aplicação de coeficientes parciais de segurança).

Esta metodologia pode ser considerada aceitável para análises lineares, no entanto, deixa de ser válida quando a capacidade resistente das estruturas é determinada a partir de técnicas não lineares incrementais e iterativas. Neste caso, as relações constitutivas consideradas na análise e na verificação da segurança (ou dimensionamento) não podem ser consideradas independentemente. Além disso, tendo em conta a dependência entre as variáveis envolvidas, a separação entre os coeficientes de segurança para a resistência e para as ações é bastante discutível. As grandes inconsistências deste formato simples de segurança têm sido objecto de ampla discussão na comunidade técnica e científica (CEB, 1995b, 1997). Várias propostas alternativas têm sido apresentadas mantendo-se, no entanto, presentemente em aberto esta questão.

O estabelecimento de um formato de segurança simples e consistente deverá ter uma base fundamentada em conceitos racionais que permitam considerar o risco associado a este tipo de problemas. A fixação dos níveis de risco associados às regras de dimensionamento regulamentares envolve, para além dos aspectos técnico-científicos, uma série de interesses e conveniências económicas, sociais, políticas, industriais, comerciais e outras, que ultrapassam a jurisdição exclusiva do engenheiro. A probabilidade de rotura é uma das medidas mais racionais para a quantificação dos diferentes níveis de risco. Sob este ponto de vista, esta medida representa o custo que a sociedade está "disposta" a assumir em termos de pessoas vitimadas, consequências económicas e perigos vários para a comunidade em geral.

Nos últimos anos tem-se presenciado um desenvolvimento significativo na aplicação das técnicas probabilísticas no âmbito das estruturas de engenharia civil. Estes métodos permitem a consideração da variabilidade das grandezas mais significativas através de ferramentas estatísticas adequadas. A segurança estrutural é geralmente quantificada pelo índice de fiabilidade  $\beta$  que se encontra associado à noção de probabilidade de rotura assumindo a distribuição gausseana.

As formulações matemáticas e computacionais envolvidas no tratamento de grandezas com variabilidade espacial e temporal têm-se mostrado de aplicação complexa. Além disso, a hipótese gausseana para a distribuição da resposta estrutural é muitas vezes desajustada quando se tem em conta o comportamento não linear, sobretudo em estruturas que apresentam diferentes modos de rotura com probabilidades de ocorrência da mesma ordem de grandeza. Por isso, o estudo da segurança, quando se empregam métodos de nível superior, exige a escolha e a definição criteriosa de técnicas que permitam tirar partido dos métodos de análise estrutural mais rigorosos. Por outro lado, na procura do rigor não se deve descurar a eficácia dos procedimentos a usar. O volume de cálculo exigido nos programas de análise não linear conduz muitas vezes a elevados tempos de computação. A implementação de técnicas para a análise de segurança deve ter em conta este aspecto, de forma a obter soluções em tempo útil. Assim, é essencial o

desenvolvimento de procedimentos que permitam obter resultados rigorosos da forma mais eficaz possível. Este é um dos pontos críticos quando se aplicam métodos de fiabilidade de nível superior. No entanto, o tempo de computação exigido pelos métodos de fiabilidade estrutural não justifica simplificações na procura da solução.

Um dos objectivos principais da presente dissertação é a criação de uma metodologia de análise da segurança estrutural integrando técnicas probabilísticas com as técnicas de análise não linear, servindo de base ao estudo de regras simplificadas e consistentes de verificação da segurança de estruturas de betão quando se tem em conta o seu comportamento não linear e na avaliação de estruturas com padrão não corrente. Com este propósito, desenvolveram-se técnicas estocásticas e estatísticas para simular o comportamento real das grandezas envolvidas neste tipo de problemas associadas com modelos de análise não linear, também implementados neste trabalho. A segurança estrutural é quantificada pela probabilidade de rotura, que é avaliada através de uma análise estatística da distribuição da resposta. Complementarmente, as metodologias desenvolvidas permitem a realização de análises de sensibilidade para identificar a importância relativa das diferentes grandezas para a resposta. Fornece ainda modelos simplificados de regressão que permitem reavaliar a segurança de uma forma simples e eficiente, sempre que existam novos dados.

A aplicação das metodologias implementadas neste trabalho ao estudo de vários casos de estruturas correntes de betão armado permitiu discutir alguns conceitos regulamentares de verificação da segurança e definir novas propostas, nomeadamente, na verificação da segurança aos estados limites últimos de estruturas porticadas. A aplicabilidade destas metodologias ao estudo de casos práticos é também ilustrada através da análise de segurança de um viaduto de betão pré-esforçado.

## 1.2 - OBJECTIVOS PROPOSTOS

Tendo como objectivo principal ultrapassar as limitações e as insuficiências das técnicas correntes de avaliação da segurança, referidas na secção anterior, desenvolveram-se procedimentos que permitem:

- Quantificar, de forma mais eficiente e mais adequada do que as metodologias correntes, a segurança de estruturas tendo em conta a variabilidade real do comportamento estrutural através de modelos de análise não linear.
- Definir regras simplificadas e consistentes de verificação da segurança com base nas metodologias implementadas;

- Estudar estruturas com padrão não convencional (isto é, que não se inserem no âmbito das regulamentações correntes).
- Incluir informação adicional para além dos valores fixados de forma convencional nas normas e recomendações, nomeadamente dados experimentais obtidos directamente da obra ou de bases de dados disponíveis. Desta forma é possível obter soluções de dimensionamento mais fiáveis e mais económicos que aquelas com valores convencionais (desde que os valores considerados representem convenientemente a estrutura real).
- Identificar as variáveis relevantes para o comportamento estrutural através de análises de sensibilidades com base em técnicas estatísticas de correlação e de regressão, tendo em conta as distribuições definidas e a variabilidade obtida para a resposta. Como resultado deste estudo é possível identificar as situações críticas possibilitando, por exemplo, a definição de estratégias mais adequadas para a inspecção das obras.

Em suma, as metodologias propostas irão permitir a verificação e a validação da segurança antes, durante e após a construção de uma forma racional.

Tendo em conta os aspectos referidos, os objectivos propostos para a presente dissertação são classificados nas seguintes etapas:

- 1- Avaliação do estado actual de conhecimento sobre as técnicas de avaliação da segurança (fiabilidade) de estruturas de forma a estabelecer bases sólidas para o trabalho desenvolvido.
- 2- Recolha de dados observados sobre acções, propriedades mecânicas dos materiais e geometria dos elementos estruturais, com vista à estimativa de parâmetros de modelos probabilísticos de representação da variabilidade envolvida neste tipo de problemas.
- 3- Implementação de modelos numéricos e computacionais de análise não linear de estruturas de betão, tendo como base a técnica de elementos finitos, que permitam ter em conta o comportamento não linear dos materiais e os efeitos diferidos, nomeadamente, o envelhecimento, a fluência e a retracção do betão e a relaxação da armadura de pré-esforço. Pretende-se com este ponto a codificação de um modelo numérico que permita fazer um estudo rigoroso do comportamento de estruturas até ao colapso, tendo em conta os diferentes materiais constituintes.
- 4- Desenvolvimento e implementação computacional de metodologias probabilísticas de avaliação da segurança estrutural acopladas com os modelos de análise referidos no ponto anterior. Pretende-se que estas metodologias sejam de aplicação generalizada e que ultrapassem as limitações de aplicabilidade das técnicas de fiabilidade correntes a métodos de análise estrutural não lineares.

- 5- Contributo para o estabelecimento de regras práticas para o dimensionamento coerente de estruturas de betão quando se utilizam métodos de análise mais rigorosos que aqueles que são vulgarmente utilizados, com especial incidência em estruturas porticadas.
- 6- Aplicação dos modelos desenvolvidos a exemplos práticos de engenharia estrutural. Pretende-se com este ponto não só mostrar a aplicabilidade e as potencialidades das metodologias desenvolvidas, mas também aprofundar o conhecimento sobre o comportamento das estruturas em condições de serviço e em situações últimas, assim como mostrar de forma clara o tratamento probabilístico da segurança.

### 1.3 - ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O conjunto de objectivos parcelares descritos na secção anterior envolvem diversos temas que se encontram organizados em diferentes capítulos. Nos parágrafos que se seguem é feita uma descrição sumária de cada um destes capítulos.

#### *Capítulo 1*

Capítulo introdutório onde se faz a apresentação sumária do âmbito do trabalho, dos objectivos que se pretendem alcançar e dos capítulos que o compõem.

#### *Capítulo 2*

Apresenta-se o estado de conhecimento sobre a avaliação da segurança de estruturas utilizando critérios com base probabilística. Aborda-se sumariamente o critério semi-probabilístico recomendado pelo Eurocódigo 1. Salienta-se os níveis de risco associados ao estabelecimento dos estados limites e o formato de segurança baseado na definição dos valores característicos e dos valores de cálculo, obtidos a partir dos primeiros através de coeficientes parciais de segurança. São referidos os conceitos elementares que servem de base à abordagem probabilística. Apresentam-se os elementos estatísticos relevantes para a estimativa de parâmetros de distribuição teóricas e para a análise de regressão e correlação. Descrevem-se as técnicas mais correntemente usadas na avaliação probabilística da segurança, designadamente, os métodos de fiabilidade estrutural apoiados na definição do índice de fiabilidade  $\beta$  e as técnicas de simulação baseadas no método de Monte Carlo. Realçam-se as potencialidades e as limitações destas técnicas. Refere-se ainda, de uma forma sumária, a teoria clássica de fiabilidade de sistemas estruturais.

### *Capítulo 3*

Apresenta-se a formulação de base do método dos elementos finitos destinada à análise não linear material de meios contínuos. São introduzidos de forma concisa os aspectos fundamentais relacionados com as aproximações consideradas na descrição da geometria, as definições relativas aos estados de deformação e de tensão, as relações constitutivas e as equações de equilíbrio de um corpo. Destaca-se a formulação de elementos com características especiais: descontinuidades nos elementos finitos e o elemento unidimensional curvilíneo para a representação dos cabos de pré-esforço. Focam-se as variabilidades usuais associadas à geometria dos elementos estruturais de betão e às acções consideradas no modelo estrutural. É ainda realçada a caracterização e a simulação das acções térmicas resultantes de variações de temperatura.

### *Capítulo 4*

Descreve-se as características mais salientes do modelo do material implementado para a análise de estruturas de betão armado e pré-esforçado. O modelo do betão desenvolvido tem em conta o comportamento instantâneo quando submetido a carregamentos monotónicos quase-estáticos e a sua evolução no tempo devido a efeitos diferidos resultantes da fluência, retracção e do envelhecimento. No modelo de comportamento instantâneo distinguem-se dois modos distintos de fractura: o esmagamento por compressão e a fendilhação por tracção. Para o betão não fendilhado as relações constitutivas são obtidas por aplicação das leis elasto-plásticas com endurecimento (baseadas na lei de escoamento plástico) ao critério proposto por Ottosen (1977) e adoptado também pelo Código-Modelo do CEB-FIP (MC90). O comportamento do betão fendilhado é representado através de um modelo de fendilhação distribuída que tem em conta os mecanismos de interacção entre as armaduras e o betão envolvente. Em relação ao modelo de fluência é adoptado o princípio da sobreposição (admissível para níveis de tensão não superiores a cerca de 40% da resistência máxima do betão, correntemente verificados em condições de serviço). É feita a aproximação da função de fluência por uma série de funções exponenciais reais (série de Dirichlet), permitindo a realização de análises para histórias de carga arbitrárias sem que seja necessário proceder à respectiva memorização no tempo. A resposta instantânea do aço é aproximada por um diagrama unidimensional multilinear de tensões-deformações, sendo a relaxação das armaduras de pré-esforço descritas por diagramas obtidos de acordo com resultados experimentais. Abordam-se também as variabilidades usuais associadas aos parâmetros mecânicos mais relevantes do betão e do aço. Realça-se ainda a diferença entre os resultados experimentais usualmente obtidos em provetes e as resistências que realmente se

verificam nas estruturas. Este capítulo encerra com o estudo do comportamento diferido de vigas pré-esforçadas e a comparação com resultados experimentais e numéricos obtidos por outros autores.

### *Capítulo 5*

Neste capítulo descrevem-se as metodologias probabilísticas desenvolvidas para a análise da segurança de estruturas: a metodologia baseada nas técnicas de simulação de Monte Carlo, a metodologia apoiada na definição da superfície de resposta e na aplicação das técnicas clássicas de fiabilidade e, ainda, a metodologia mista. A implementação de técnicas estatísticas acopladas ao método de Monte Carlo conduziu à definição de uma metodologia rigorosa e com uma eficiência significativamente acrescida em relação às técnicas de simulação básicas. Os procedimentos desenvolvidos permitem ainda controlar o erro de simulação e analisar a sensibilidade da resposta estrutural em relação às variáveis simuladas. Descreve-se ainda a metodologia baseada na superfície de resposta como alternativa eficaz à metodologia anterior quando o problema de avaliação da segurança tem características aproximadamente gausseanas. Propõe-se ainda uma metodologia mista que pretende tirar partido das potencialidades dos dois métodos anteriores. Descreve-se sumariamente as implementações computacionais realizadas e apresentam-se exemplos numéricos para clarificar e comparar as metodologias desenvolvidas.

### *Capítulo 6*

A aplicação das presentes metodologias na discussão e clarificação de aspectos regulamentares relativos à verificação da segurança de estruturas de betão é o tema abordado neste capítulo. Primeiramente aborda-se o problema da quantificação da armadura mínima tendo em conta critérios de fendilhação do betão e de plastificação das armaduras. É feita uma abordagem probabilística de vários exemplos correntes. Os resultados obtidos serviram de base à proposta de valores alternativos para a definição da quantidade de armadura mínima. O segundo problema refere-se à avaliação da segurança de estruturas porticadas aos estados limites últimos de resistência, quando se utilizam métodos de análise não linear. São discutidos os formatos vulgarmente adoptados e algumas propostas alternativas de outros autores. Apresenta-se o estudo da segurança de secções e estruturas reticuladas de betão armado, usando as metodologias desenvolvidas neste trabalho. O tratamento dos resultados obtidos resultaram numa proposta alternativa com aplicação prática à verificação da segurança de estruturas porticadas de betão, quando se utilizam métodos de análise não linear.

## Capítulo 7

A aplicabilidade dos modelos computacionais desenvolvidos para o estudo do comportamento e da segurança de estruturas de betão é ilustrada através da apresentação e discussão dos resultados obtidos no estudo de um exemplo de aplicação prática. Esse exemplo consiste num viaduto de betão pré-esforçado. Neste estudo é tido em conta o comportamento não linear dos materiais, incluindo os efeitos diferidos. O desempenho do modelo adoptado é avaliado através da comparação com resultados experimentais obtidos em experiências realizadas sobre essa estrutura. É caracterizada a resposta da estrutura para condições de serviço e em situações de colapso. Na avaliação da segurança aos diferentes estados limites é tido em conta a variabilidade das principais variáveis que condicionam o comportamento estrutural. Este exemplo mostra ainda que além de quantificar a segurança, os métodos desenvolvidos permitem identificar as variáveis e as zonas da estrutura que mais condicionam cada um dos estados limites abordados. Complementarmente, são apontadas propostas alternativas à solução de dimensionamento adoptado.

## Capítulo 8

Apresentam-se sumariamente as conclusões mais importantes registadas ao longo do presente trabalho e ainda alguns aspectos que podem ser objecto para futuros desenvolvimentos.

### 1.4 - NOTAÇÕES

Os símbolos utilizados ao longo do texto são definidos logo na sua primeira aparição, sendo o seu significado redefinido sempre que lhe seja atribuído diferente sentido, de forma que haja uma identificação precisa. A ausência de uma lista com a simbologia utilizada deve-se sobretudo à variedade de temas que são abordados nesta dissertação, originando muitas vezes que o mesmo símbolo tenha significados distintos (por exemplo, o símbolo  $\sigma$  pode identificar uma componente de tensão ou um desvio padrão).

As matrizes e os vectores são identificados por letras maiúsculas ( $A$ ), por símbolos sublinhados ( $\underline{A}$  ou  $\underline{a}$ ) ou, ainda, através de parêntesis rectos ou chavetas ( $[A]$  ou  $\{a\}$ ). Refira-se ainda que são usados somente tensores cartesianos nas formulações apresentadas, beneficiando das simplificações daí decorrentes.



## Capítulo 2

# AVALIAÇÃO DA SEGURANÇA DE ESTRUTURAS

### 2.1 – INTRODUÇÃO

O comportamento das estruturas depende de diversos factores, a maioria dos quais não podem ser controlados de forma absoluta. As diversas fontes de incerteza responsáveis pela variabilidade desses factores conduzem a que o problema de avaliação da segurança das estruturas tenha um carácter marcadamente não determinístico.

Até ao século XIX a concepção e a execução de obras de Engenharia Civil era realizada de forma empírica, isto é, a segurança dependia da experiência e da intuição dos construtores. Com o aparecimento da construção metálica e o desenvolvimento da teoria da resistência dos materiais apareceram as primeiras regras de avaliação da segurança com base científica: o método das tensões admissíveis. O princípio adoptado consistia em assegurar que, nas zonas críticas, as tensões máximas não ultrapassavam as resistências dos materiais divididas por um coeficiente de segurança fixado de forma convencional. Este critério de segurança manteve-se válido para as diferentes estruturas durante cerca de um século. Neste período, os progressos relativos ao conhecimento mais aperfeiçoado da mecânica estrutural e das cargas aplicadas, em simultâneo com o melhoramento das técnicas de produção dos materiais, resultaram unicamente numa diminuição e diversificação do coeficiente de segurança.

A insuficiência deste conceito e a necessidade de controlar de uma forma racional o risco associado a este tipo de problemas, conduziu à necessidade de desenvolver a noção da segurança sob uma perspectiva probabilística. Desta forma, surgiu o conceito de probabilidade de rotura associado à definição dos níveis de risco identificados com as diferentes situações a evitar.

Como resultado desta nova interpretação surgiram novos critérios de verificação da segurança com base probabilística, assentes nos seguintes pontos:

- definir estados limites ou situações a evitar;
- estimar a gravidade das consequências resultantes desses estados limites serem violados;
- definir coeficientes de segurança e dispositivos apropriados de forma que a probabilidade de serem violados os estados limites seja suficientemente pequena, aceitável de acordo com a estimativa das consequências referidas no ponto anterior.

Fornecendo um princípio de dimensionamento mais lógico do que os até aí usados, o conceito de estados limites foi rapidamente introduzido nos códigos de vários países, nomeadamente, no dimensionamento de estruturas. No entanto, a forma como a margem de segurança se distribui pelos vários parâmetros continuou a variar entre os diferentes países.

O desenvolvimento dos métodos de análise estrutural ocorrido nos últimos anos não foi acompanhado por uma evolução significativa dos formatos de segurança, presentemente utilizados no dimensionamento. O estudo de estruturas com padrão não usual ou a utilização de relações constitutivas mais evoluídas conduziu à necessidade de utilizar técnicas adequadas de avaliação da segurança. A comunidade técnica e científica tem mostrado a necessidade de serem implementados novos critérios de verificação da segurança coerentes e que conduzam, ao mesmo tempo, a uma uniformização do risco de rotura e da metodologia adoptada na própria verificação da segurança (CEB, 1995b, 1997). A utilização de técnicas de nível superior que sirvam como fundamento à implementação de novas regras de dimensionamento é um dos assuntos de grande actualidade e que tem merecido especial atenção pelas entidades envolvidas neste tipo de problemas.

No presente Capítulo descrevem-se os conceitos fundamentais associados à análise da segurança com base probabilística. Aborda-se sumariamente o formato semi-probabilístico proposto pelo Eurocódigo 1, tendo em conta que estas regras se restringem a estruturas correntes e a métodos de análise estrutural simplificados.

A procura constante de técnicas que permitam, não só determinar as possíveis causas responsáveis por efeitos adversos na estrutura, mas também quantifiquem a frequência de ocorrência que lhe está associada, levou à adopção de modelos probabilísticos como a forma mais adequada para quantificar as fontes de incerteza presentes nos problemas de segurança em Engenharia Civil. Assim, apresentam-se os aspectos mais relevantes sobre as técnicas probabilísticas aplicadas a este tipo de problemas.

Descrevem-se ainda as técnicas correntemente utilizadas tanto na aferição dos coeficientes parciais de segurança definidos nas actuais regulamentações, como na avaliação (estatística) da

segurança através de procedimentos numéricos aproximados, de acordo com as hipóteses simplificativas da teoria clássica. O desenvolvimento significativo da teoria e dos métodos de fiabilidade estrutural nas últimas duas décadas permitiu elaborar modelos expeditos que têm em conta o carácter aleatório das estruturas. Desta forma, a sua aplicação deixou de ser um assunto do âmbito de um número restrito de especialistas, sendo a sua aplicação mais vasta. Entre elas salienta-se o desenvolvimento de procedimentos desenvolvidos em conjunto com as técnicas dos elementos finitos.

As limitações que as técnicas clássicas de fiabilidade podem apresentar no estudo da segurança de sistemas não lineares são ultrapassadas com técnicas de simulação para a integração numérica associadas à determinação da probabilidade de rotura. É dado destaque ao método de Monte Carlo e às técnicas alternativas de redução da variância, com o objectivo de tornar este método mais eficiente, tirando partido da informação conhecida previamente.

Neste capítulo optou-se por uma descrição detalhada de certos conceitos e técnicas de avaliação da segurança devido à escassez de bibliografia nacional sobre este assunto. Finalmente, refira-se que a avaliação da segurança, quer em termos últimos ou de serviço (incluindo a durabilidade), não é uma simples função dos cálculos de dimensionamento. Essa avaliação depende também do tipo de controle de qualidade efectuado durante o fabrico e durante a colocação na obra, da grandeza e do controle das imperfeições inevitáveis e, ainda, da qualidade e da qualificação das pessoas envolvidas.

## **2.2 – ENQUADRAMENTO DO PROBLEMA DA ANÁLISE DA SEGURANÇA**

### **2.2.1 – Incertezas na segurança estrutural**

A segurança absoluta de uma estrutura não pode ser garantida devido à incapacidade de prever as condições de carga futuras e de conhecer com rigor as propriedades dos materiais, devido ao uso de hipóteses simplificadoras para prever o comportamento da estrutura às acções actantes e às condições ambientais, às limitações dos métodos numéricos usados e aos factores humanos (Ayyub, 1987). As inúmeras fontes de incerteza no dimensionamento podem resultar, em situações extremas, em desvios significativos da realidade. A consideração de dados experimentais na definição das dispersões das variáveis envolvidas no problema não são suficientes para eliminar as incertezas. Na maioria das vezes os dados disponíveis são insuficientes para representar integralmente essas variáveis ou ainda estão sujeitas a erros (König, 1985).

Os métodos clássicos de dimensionamento de estruturas, anteriores ao conceito de estados limites, utilizavam coeficientes de segurança globais para limitar as tensões admissíveis na estrutura. A distribuição dos esforços ao longo da estrutura era avaliada através da teoria da elasticidade linear e as tensões calculadas de acordo com os métodos clássicos da resistência de materiais. Através destes coeficientes de segurança reconhecia-se, implicitamente, a impossibilidade de prever e conhecer exactamente a resistência e as solicitações reais. Estavam ligados, em parte, à experiência acumulada em estruturas idênticas já construídas.

A filosofia de verificação da segurança aos estados limites introduziu novos métodos de cálculo que permitem considerar simplificada o comportamento real dos materiais e um tratamento mais adequado do carácter incerto da resposta estrutural e das acções, através da definição dos valores característicos e de cálculo. O desenvolvimento ocorrido no campo dos modelos de análise, acompanhado pela execução de obras cada vez mais arrojadas e de padrões pouco correntes do ponto de vista estrutural, tem conduzido à implementação de metodologias de verificação de segurança baseadas em conceitos probabilísticos que permitem um tratamento racional e global deste tipo de problemas.

Como se constatou, existem diversas fontes de incerteza que condicionam a avaliação do comportamento de uma estrutura. Entre esses diferentes tipos de incerteza destacam-se, pela sua importância, os seguintes grupos (Thoft-Christensen, 1982; Melchers, 1987):

*Incerteza física:* Este grupo está associado à inerente natureza incerta das propriedades dos materiais, da geometria dos elementos, da variabilidade e da simultaneidade das diferentes acções, etc.. A incerteza física pode ser controlada através de uma base de dados suficientemente grande, ou através de um controlo de qualidade conveniente. Geralmente, este tipo de incerteza não é conhecido *a priori*, mas pode ser estimado através de observações das variáveis, ou recorrendo a experiências anteriores.

*Incerteza na modelação:* Resulta das aproximações teóricas ao comportamento real dos materiais e das simplificações na consideração das acções e dos seus efeitos. Este tipo de incerteza pode ser considerado através de uma variável que represente a relação entre a verdadeira resposta e a resposta prevista pelo modelo.

*Incerteza estatística:* Este grupo está associado com a inferência estatística, uma vez que a estimativa dos parâmetros que caracterizam os modelos probabilísticos é realizada a partir de um número limitado de dados disponíveis. A incerteza estatística pode ser considerada através de uma função de distribuição de probabilidade. É possível usar uma aproximação *Bayesiana* (Baecher, 1982; Ditlevsen, 1991) para redefinir essa função de distribuição de forma a incorporar mais informação obtida a partir de novos dados.

*Incerteza devida a factores humanos:* Resulta do envolvimento humano durante a vida da obra. Este tipo de incerteza deve-se não somente à variação natural durante a execução das várias tarefas, mas também às intervenções e aos erros cometidos nos processos de documentação, dimensionamento, construção e utilização da estrutura. O conhecimento destas incertezas é limitado, sendo na sua maioria de carácter qualitativo. É, no entanto, evidente que o seu efeito provoca um aumento da incerteza da resistência estrutural para um valor superior àquele que é devido somente às propriedades mecânicas e geométricas da estrutura.

### **2.2.2 – Segurança e funcionalidade das estruturas. Estados limites**

A segurança estrutural e o adequado comportamento em serviço são dois aspectos básicos a ter em conta no dimensionamento de estruturas. O primeiro requisito corresponde à necessidade de minimizar o risco de colapso inerente a qualquer realização humana e o segundo está relacionado com a necessidade de proporcionar aos utentes um funcionamento adequado e, ao mesmo tempo, minimizar os custos de manutenção.

A validação de uma solução estrutural é realizada através da verificação do seu comportamento previsível e da concepção de sistemas de cargas possíveis de ocorrer para um determinado conjunto de situações designadas por estados limites. Para tal, utilizam-se modelos teóricos de cálculo, ou modelos experimentais, que permitem estimar a resposta estrutural de forma suficientemente precisa. Em relação às situações a verificar, devem-se definir hipóteses e modelos apropriados para caracterizar as acções (e suas combinações) durante a vida útil da estrutura, quer quanto às suas grandezas, quer quanto à sua permanência.

De acordo com as actuais normas de dimensionamento de estruturas (por exemplo, estruturas de betão), a verificação da segurança é estabelecida para certos níveis de solicitação. Simplificadamente, podem-se dividir em dois grupos: os estados limites últimos e os estados limites de utilização.

Na realidade, os estados limites de uma estrutura são estados idealizados (apresentando por isso um certo carácter convencional) de forma que se forem ultrapassados, a estrutura não satisfaz as exigências estruturais ou funcionais definidas regulamentarmente.

Os estados limites referidos são caracterizados do seguinte modo:

*Estados limites últimos:* Estão associados a situações em que a estrutura, ou parte dela, atinge o colapso colocando em causa a segurança de pessoas ou de equipamento. Neste

grupo distinguem-se as seguintes situações: perda de equilíbrio estático, rotura devido a tensões elevadas nos materiais, instabilidade resultante de efeitos de segunda ordem e fadiga provocada por acções elevadas repetidas.

*Estados limites de utilização:* Estão associados a situações em que a estrutura, ou parte dela, apresenta danos que, embora limitados, a deixam fora de serviço por razões funcionais, de durabilidade ou estética. Estes estados limites são ainda subdivididos em classes, geralmente associados às seguintes durações de referência:

- muito curta - correspondente a poucas horas da vida da estrutura;
- curta - correspondente a durações da ordem dos 5% da vida da estrutura;
- longa - correspondente a durações da ordem dos 50% da vida da estrutura.

Os estados limites de utilização têm como principal objectivo controlar o funcionamento das estruturas em condições de uso corrente. Esse controlo é realizado através da limitação de tensões, da abertura de fendas ou da ausência de qualquer fendilhação, deformações, vibrações, etc.. Todos estes aspectos encontram-se ligados com critérios de funcionalidade, durabilidade e estética.

A classificação dos estados limites pode estar associada a diversos critérios, como por exemplo (CEB, 1980a):

- 1 – fenómenos ligados à primeira ocorrência da solicitação ou a um certo número de solicitações. Neste grupo encontra-se, por exemplo, as situações de colapso, formação de estados imprevisíveis (grandes deformações), fendilhação, problemas de dano acumulado, fadiga, etc.;
- 2 – fenómenos que originam ruína imediata (frágil) ou progressiva (dúctil);
- 3 – fenómenos associados a riscos de vidas humanas, riscos catastróficos ou ordinários.

A distinção entre estados limites últimos e estados limites de utilização não permite considerar todos os casos possíveis de ocorrer (Calgaro, 1996). Existem estados limites, que se podem designar por intermédios, que não se incluem nos dois grupos definidos. Além disso, o comportamento estrutural pode não ser independente para diferentes estados limites. Por exemplo, a experiência mostra que a capacidade resistente de pontes de betão armado e pré-esforçado aos estados limites últimos, é afectada significativamente pelas violações sucessivas aos estados limites de utilização. O funcionamento da estrutura pode ser de tal modo afectado que, em geral, a rotura resulta directamente destas repetições, sem que as acções atinjam as intensidades extremas.

O objectivo básico que conduziu à definição dos estados limites regulamentares é essencialmente prático: definir regras unificadas, exactas ou aproximadas, de modo que para cada categoria as probabilidades de ocorrência desses estados limites, ou dos efeitos das acções correspondentes, sejam comuns à grande maioria dos casos correntes. Pretende-se assim evitar fenómenos ou situações indesejáveis para a segurança e funcionalidade das estruturas.

### 2.2.3 – Verificação da segurança aos estados limites

Os métodos de verificação da segurança devem considerar de forma apropriada as incertezas associadas às variáveis que intervêm na caracterização das acções e da resposta estrutural. A solução de dimensionamento resultante da aplicação destes métodos deverá assegurar uma margem de segurança em relação aos diferentes estados limites, de acordo com as respectivas probabilidades de ocorrência.

O dimensionamento, tendo em conta os vários estados limites, pode ser considerado como um processo de decisão (CEB-FIP, 1978). As incertezas associadas às variáveis intervenientes e a forma como elas condicionam o comportamento da estrutura, devem ser tidas em conta de modo a obter uma probabilidade de rotura aceitável.

Existem vários métodos para abordar o estudo da segurança estrutural. A tipologia habitualmente utilizada é a seguinte:

- *Nível 0*: corresponde a análises puramente determinísticas. As variáveis envolvidas no processo de dimensionamento têm valores estritamente determinísticos, sendo as incertezas consideradas através de coeficientes de segurança globais. Geralmente, estes coeficientes são estimados empiricamente através de experiências passadas.
- *Nível 1*: Refere-se aos métodos designados por semi-probabilísticos. A variabilidade das acções e das características resistentes dos materiais é considerada através de valores representativos (nominais ou característicos) associados com coeficientes parciais de segurança,  $\gamma$ . Os valores característicos são definidos a partir dos valores médios, dos coeficientes de variação (ou desvios-padrão) e da função de distribuição. Os coeficientes parciais de segurança são aferidos, geralmente, a partir de métodos probabilísticos do nível 2 ou, menos correntemente, do nível 3. Os métodos de nível 1 são habitualmente utilizados nas actuais normas de estruturas para definir regras de dimensionamento.
- *Nível 2*: Corresponde a métodos probabilísticos baseados na caracterização das variáveis básicas que intervêm no processo, através de medidas estatísticas que

descrevem a tendência central (geralmente os valores médios) e a sua dispersão, e no cálculo da probabilidade de ser atingido um dado estado limite. A avaliação probabilística da segurança é efectuada por técnicas numéricas aproximadas, recorrendo a hipóteses simplificadas na determinação dessa probabilidade.

- *Nível 3*: Diz respeito a métodos puramente probabilísticos, baseados em técnicas que têm em conta a distribuição conjunta de todas as variáveis básicas. A probabilidade de ser atingido um dado estado limite é calculada analiticamente (viável somente para casos muito simples) ou, mais correntemente, usando métodos de simulação.

#### 2.2.4 – Níveis de risco associados ao dimensionamento

A qualidade estrutural e os níveis de fiabilidade em relação a estados limites a exigir às estruturas é um problema de decisão que envolve áreas fora da jurisdição exclusiva do engenheiro (Ferry Borges, 1982; Augusti, 1984). O estabelecimento de níveis de risco associados às regras de dimensionamento regulamentares constitui uma solução de compromisso entre conveniências políticas, industriais e comerciais, pareceres técnico-científicos e opiniões várias (Santos, 1993).

A probabilidade de rotura (isto é, de ser atingido um estado limite) representa o custo que a sociedade está "disposta" a assumir, em termos de perdas de vidas humanas, consequências económicas e perigos vários para a comunidade em geral. A resolução deste tipo de problemas implica a definição e a optimização de uma função objectivo, que poderá traduzir uma utilidade envolvendo teoricamente factores essencialmente sociais e económicos.

A formulação do problema pode ser realizada, com alguma generalidade, através da representação de uma utilidade média de natureza sócio-económica,  $\bar{U}$ , a qual se definirá como uma média ponderada dos valores das qualidades médias de índole sócio-técnica,  $\bar{Q}_S$ , e económica,  $\bar{Q}_E$ , das estruturas. Ter-se-á então (Mascarenhas, 1992):

$$\bar{U} = P_S \bar{Q}_S + P_E \bar{Q}_E \quad , \quad (2.1)$$

em que  $P_S$  e  $P_E$  representam os pesos com que essas qualidades intervêm no valor da utilidade, sendo  $P_S + P_E = 1$ . Os pesos referidos traduzem à partida a política a seguir na escolha da solução a adoptar.

Na regulamentação existente a nível internacional está subjacente, explícita ou implicitamente, a consideração de uma função objectivo do tipo indicado em (2.1). Mascarenhas (1985) apresenta o valor de algumas grandezas para os valores das qualidades referidas para determinados níveis de riscos associados com probabilidades de serem atingidos os estados limites correntes.



Os valores máximos admissíveis das probabilidades de serem atingidos os estados limites últimos para os diversos tipos estruturais são determinados na regulamentação inglesa (CIRIA, 1977) com base na fórmula:

$$p'_{fu} = K_s \cdot \frac{10^{-4} \cdot T_r}{n_p} \quad , \quad (2.2)$$

sendo  $T_r$  o período de referência considerado (em anos),  $n_p$  o número médio de pessoas vitimadas em caso de rotura estrutural e  $K_s$  é um coeficiente cujo valor (ver Quadro 2.1) depende do tipo de utilização e função social da estrutura, e pretende traduzir o grau de aversão da sociedade em admitir a ocorrência de roturas estruturais.

Quadro 2.1 - Coeficiente  $K_s$  da expressão (2.2), de acordo com CIRIA (1977).

Tipo de utilização e função social da estrutura	$K_s$
Lugares de reunião pública, barragens	0.005
Uso doméstico, escritórios ou comércio e indústria	0.05
Pontes	0.5
Torres, mastros, estruturas <i>off-shore</i>	5

De acordo com o documento de aplicação nacional no Reino Unido (UK-NAD, 1996), com base na parte 1 do Eurocódigo 1 (EC1-1, 1994), o tempo de vida útil da uma estrutura (período durante o qual é utilizada para o fim em que foi dimensionada sem que seja necessário efectuar qualquer reparação relevante exceptuando manutenções periódicas) é definido de acordo com a classe da estrutura (Quadro 2.2).

No Quadro 2.3 apresentam-se os valores de  $p'_{fu}$  calculados de acordo com (2.2), considerando edifícios correntes da classe 3, de acordo com o Quadro 2.2, e três patamares de segurança, nomeadamente reduzido, normal e reforçado, correspondentes a valores de  $n_p = 0.1$ ;  $n_p = 1$  e  $n_p = 10$ , respectivamente.

O Comité Europeu do Betão (CEB-FIP, 1978) utiliza critérios sócio-económicos para definir os valores de referência de  $p_{fu}$ , agravando os valores de  $p'_{fu}$  obtidos pela expressão (2.2) conforme a severidade das consequências económicas de serem atingidos os estados limites últimos, de acordo com as relações definidas no Quadro 2.4.

Quadro 2.2 - Tempo de vida útil das estruturas,  $T_r$  (adaptado de Gulvanassian, 1996).

Classe	$T_r$ (anos)	Exemplos
1	1-5	Estruturas temporárias
2	25	Elementos estruturais substituíveis
3	50	Edifícios e outras estruturas correntes
4	100	Obras de arte e outras estruturas especiais ou importantes
5	120	Pontes

Quadro 2.3 - Probabilidades,  $p'_{fu}$ , de serem atingidos os estados limites último para edifícios correntes ( $K_S = 0.05$ ), de acordo com a expressão (2.2).

Patamar de segurança ( $n_p$ )	Tempo de vida útil da estrutura, $T_r$				
	1 ano	5 anos	10 anos	25 anos	50 anos
reduzido (0.1)	$5 \times 10^{-5}$	$2.5 \times 10^{-4}$	$5 \times 10^{-4}$	$1.25 \times 10^{-3}$	$2.5 \times 10^{-3}$
normal (1)	$5 \times 10^{-6}$	$2.5 \times 10^{-5}$	$5 \times 10^{-5}$	$1.25 \times 10^{-4}$	$2.5 \times 10^{-4}$
reforçado (10)	$5 \times 10^{-7}$	$2.5 \times 10^{-6}$	$5 \times 10^{-6}$	$1.25 \times 10^{-5}$	$2.5 \times 10^{-5}$

Quadro 2.4 - Critérios sócio-económicos para as probabilidades de referência,  $p_{fu}$  (CEB-FIP, 1978).

Consequências da rotura	Classe	$p_{fu}$
Risco de vidas humanas diminuto Pequenas consequências económicas Danos localizados	pouco grave	$10 \cdot p'_{fu}$
Risco de vidas humanas moderado Consequências económicas consideráveis Funcionamento normal da estrutura afectado	grave	$p'_{fu}$
Risco de vidas humanas elevado Consequências económicas grandes Estrutura pode ficar inoperacional	muito grave	$p'_{fu}/10$

Quadro 2.5 - Valores de referência de probabilidade de rotura (CEB-FIP, 1978).

Patamar de segurança ( $n_p$ )	Consequências económicas		
	pouco grave	grave	muito grave
reduzido (0.1)	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$
normal (1)	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$
reforçado (10)	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$

Considerando os critérios sócio-económicos referidos, os valores de referência de  $p_{fu}$  encontram-se indicados no Quadro 2.5.

As probabilidades de serem atingidos os estados limites de utilização,  $p_{fser}$ , são definidas de forma a ter em conta a perda de funcionalidade e os custos de reparação. Essas probabilidades devem ter em conta a duração dos respectivos estados limites. As probabilidades associadas aos estados limites de utilização variam entre  $10^{-1}$  e  $10^{-2}$ . No entanto, esses valores poderão ser menores se as consequências devidas às perdas de funcionalidade forem elevadas ou se não houver empenhamento em reduzir o risco de rotura.

Para finalizar esta secção saliente-se dois aspectos essenciais na caracterização das probabilidades de rotura definidas anteriormente:

- 1 – as probabilidades utilizadas no estudo de segurança das estruturas são geralmente muito pequenas. Por exemplo um valor de  $p_{fu} = 10^{-4}$  é um valor comum para os estados limites últimos, tem como significado prático que 1 em cada 10.000 estruturas (ou elementos estruturais) do mesmo tipo atinge provavelmente esse estado limite durante o tempo de vida útil. Em obras de engenharia de estruturas é praticamente impossível obter valores experimentais à rotura de 10.000 amostras do mesmo tipo de estruturas. Por isso, tais valores de probabilidades têm somente um significado convencional como meros valores comparativos.
- 2 – Em termos práticos, a probabilidade de rotura é interpretada como uma medida adequada da incerteza no dimensionamento. Esta afirmação quer dizer apenas que essa probabilidade é um valor para o qual a estrutura atingiu um estado extremo relativamente às condições de projecto. Isto não significa que a estrutura real entrará em rotura, mas indica que precisará de ser reavaliada se esse valor for atingido.

## 2.2.5 – Abordagem probabilística da segurança

### 2.2.5.1 - Generalidades

Os métodos probabilísticos de avaliação da segurança estrutural consistem na determinação da probabilidade de rotura da estrutura, em condições reais de funcionamento, utilizando técnicas baseadas na teoria da fiabilidade estrutural (técnicas probabilísticas aplicadas à avaliação da segurança estrutural).

O emprego de métodos probabilísticos na prática corrente de projectos de engenharia civil, tem sido limitada ao âmbito da engenharia marítima e hidráulica. A avaliação de cheias numa bacia hidrográfica com o objectivo de definir valores extremos do nível das águas numa albufeira para estabelecer a cota máxima de uma barragem, ou a avaliação dos caudais máximos de redes de águas ou saneamentos, são problemas vulgarmente tratados com técnicas probabilísticas. Na engenharia de estruturas a aplicação deste tipo de métodos encontra-se restringido a aplicações muito particulares, nomeadamente, a plataformas *off-shore* (Bea, 1980; Madsen, 1988; Leira, 1997), acções do vento e do tráfego em pontes de grande vão (Faber, 1996; Croce, 1997), valores máximos da acção do vento em estruturas de altura elevada (Holicky, 1997) e em poucos mais casos.

Actualmente, as técnicas da fiabilidade estrutural têm sido aplicadas na definição de planos de inspecção e de manutenção de obras importantes de engenharia das estruturas (NG, 1996; Faber, 1996). De igual modo, apareceram estudos relativos à determinação da capacidade resistente de elementos de betão, caracterizando a resposta estrutural de um modo probabilístico (Vanmarcke, 1983; Henriques, 1994 e 1996a; Val, 1994).

Os métodos de avaliação probabilística da segurança baseiam-se na caracterização realista da resposta estrutural,  $R$ , e das solicitações,  $S$ , a que está sujeita, através de variáveis aleatórias. Para tal, adoptam-se valores que têm em conta as distribuições reais das propriedades mecânicas dos materiais, das imperfeições geométricas dos elementos estruturais, das acções ou dos seus efeitos e de outras características significativas. Uma vez definidas,  $R$  e  $S$ , o critério utilizado para saber se uma estrutura é segura resulta do cálculo de probabilidade de rotura através de modelos de cálculo adequados.

Nas secções seguintes apresenta-se a base probabilística da teoria da fiabilidade estrutural. Previamente apresenta-se ainda algumas noções elementares de probabilidade, podendo ser complementada através de vários textos base sobre o assunto (Benjamin, 1970; Ang, 1975; Thoft-Christensen, 1982; Augusti, 1984; Melchers, 1987; Leitch, 1995).

### **2.2.5.2 - Variáveis aleatórias unidimensionais e suas características**

Nos problemas de fiabilidade os valores de algumas grandezas são desconhecidos à partida, estando-lhe associada uma distribuição de probabilidade de ocorrência. Quando os resultados de uma experiência não são previsíveis mas essa experiência pode ser repetida indefinidamente (pelo menos conceptualmente), tem-se aquilo que se denomina uma experiência aleatória. Ao conjunto de resultados de uma tal experiência é correntemente designado por espaço amostral  $S$ .

Para alguns subconjuntos (aqueles que são observáveis) do espaço amostral é possível associar uma probabilidade. Assim, a função de probabilidade  $P$  associa aos conjuntos observáveis um número  $P[A]$  tal que:

- (1) A probabilidade,  $P[A]$ , de ocorrer um subconjunto  $A$  do espaço amostral  $S$  é um valor situado no intervalo entre 0 e 1:

$$0 \leq P[A] \leq 1 ; \quad \forall A \in S \quad . \quad (2.3)$$

- (2) A soma de todos os subconjuntos possíveis de ocorrer no espaço amostral  $S$  deve ser igual a 1:

$$P[S] = 1 \quad . \quad (2.4)$$

- (3) A probabilidade de reunião de dois subconjuntos mutuamente exclusivos é igual à soma das probabilidades dos subconjuntos considerados individualmente:

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] ; \quad \forall A, B \in S \wedge A \cap B = \emptyset \quad . \quad (2.5a)$$

Em espaços amostrais infinitos é corrente utilizar em alternativa a seguinte expressão:

$$P\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P[A_n] ; \quad \forall A_i, A_j \in S \wedge A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j) \quad . \quad (2.5b)$$

- (4) A probabilidade de ocorrer um subconjunto complementar é dada por:

$$P[\bar{A}] = 1 - P[A] ; \quad \forall A \in S \quad . \quad (2.6)$$

Destas definições decorrem diversas propriedades das probabilidades, entre as quais se salientam as seguintes:

- A probabilidade da reunião de dois subconjuntos quaisquer é igual à soma das probabilidades dos subconjuntos considerados, subtraindo a probabilidade de ocorrência dos dois subconjuntos simultaneamente:

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] ; \quad \forall A, B \in S \quad . \quad (2.5c)$$

- Se um subconjunto  $A$  está contido noutro subconjunto  $B$ , a probabilidade associada ao primeiro é inferior à probabilidade de ocorrência do segundo:

$$\text{se } A \subset B \Rightarrow P[A] < P[B] ; \quad \forall A, B \in S \quad . \quad (2.7)$$

Uma variável aleatória associa a cada resultado de uma experiência aleatória um número (variável aleatória unidimensional), um par de números (variável aleatória bidimensional) ou uma família extensa de números (variável aleatória multidimensional).

A função de probabilidade,  $p_X(x)$ , para as variáveis aleatórias discretas, ou a função densidade de probabilidade,  $f_X(x)$ , para as variáveis aleatórias contínuas, permitem avaliar a probabilidade da variável  $X$  num dado intervalo, respectivamente:

$$P_{X_{discreta}} [X = k] = p_X(k) \quad , \quad (2.8a)$$

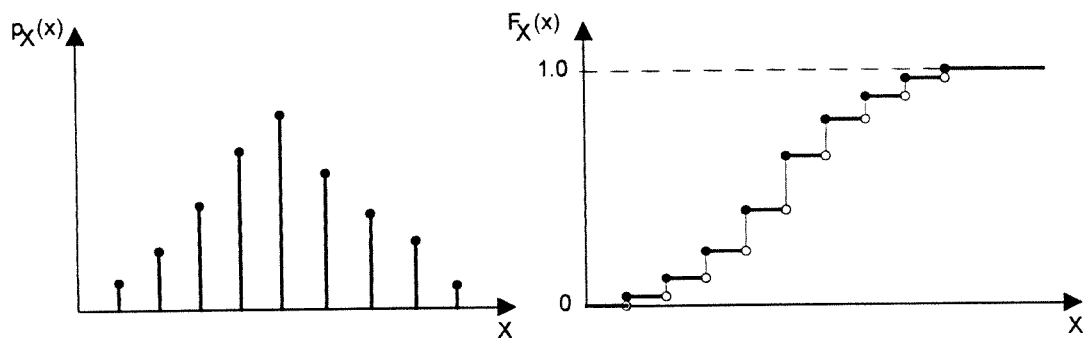
$$P_{X_{contínua}} [a < X \leq B] = \int_a^b f_X(x) dx \quad . \quad (2.8b)$$

A função distribuição,  $F_X(x)$ , descreve a probabilidade acumulada até ao valor genérico  $x$ . Esta função é definida, respectivamente para as variáveis discretas e contínuas, da seguinte forma:

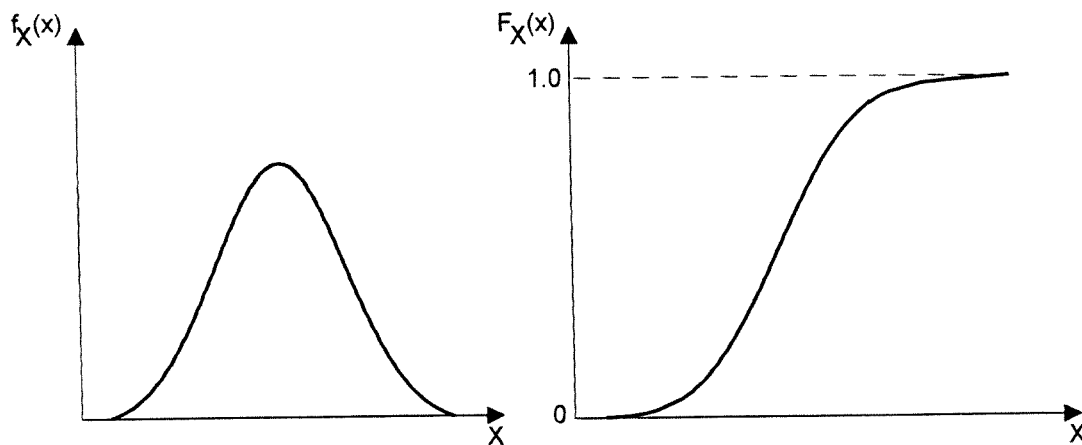
$$F_{X_{discreta}}(a) = P_X [X \leq a] = \sum_{-\infty}^a p_X(x) \quad , \quad (2.9a)$$

$$F_{X_{contínua}}(a) = P_X [X \leq a] = \int_{-\infty}^a f_X(x) dx \quad . \quad (2.9b)$$

Na Fig. 2.1 ilustram-se as representações gráficas típicas para as variáveis aleatórias.



a) variáveis aleatórias discretas



b) variáveis aleatórias contínuas

Fig. 2.1 - Representação gráfica das funções de probabilidade.

As variáveis aleatórias são vulgarmente caracterizadas pela forma da sua distribuição (isto é, o tipo de lei de probabilidade) e por alguns parâmetros. Estes parâmetros permitem definir de forma única a lei de probabilidade. Os parâmetros mais vulgarmente utilizados são a média e a variância (ou, mais correntemente, o desvio padrão, que é igual à raiz quadrada da variância). A média descreve a tendência central da distribuição, enquanto que o desvio padrão é a medida de dispersão em torno do valor médio.

O valor médio de uma variável aleatória ou a esperança matemática  $E[X]$  é definida para variáveis discretas por:

$$\mu_X = E[X] = \sum_i p_X(x_i) \cdot X_i \quad , \quad (2.10a)$$

e para variáveis contínuas por:

$$\mu_X = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx \quad . \quad (2.10b)$$

A variância,  $Var[X]$  (o quadrado do desvio padrão  $\sigma_X$ ), é definida para variáveis discretas por:

$$\sigma_X^2 = Var[X] = E[(X - \mu_X)^2] = \sum_i p_X(x_i) \cdot (x_i - \mu_X)^2 \quad , \quad (2.11a)$$

e para variáveis contínuas por:

$$\sigma_X^2 = Var[X] = E[(X - \mu_X)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 \cdot f_X(x) dx \quad . \quad (2.11b)$$

A variância pode também ser obtida em termos das esperanças matemáticas, respectivamente, por:

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - E^2[X] = \sum_i p_X(x_i) \cdot X_i^2 - \left( \sum_i p_X(x_i) \cdot X_i \right)^2 \quad , \quad (2.11c)$$

e

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - E^2[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx - \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \right)^2 \quad . \quad (2.11d)$$

O coeficiente de variação,  $CV_X$ , é definido pelo quociente entre o desvio padrão e a média, sendo por isso uma medida adimensional da variabilidade:

$$CV_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X} \quad . \quad (2.12)$$

Em alguns casos a média e o desvio padrão não são suficientes para definir completamente a distribuição da variável aleatória, sendo preciso utilizar momentos de ordem superior a 2. Os momentos centrados podem ser calculados pela fórmula generalizada por:

$$\mu_X^{(n)} = E\left[(X - \mu_X)^n\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^n f_X(x) dx \quad (2.13)$$

As distribuições teóricas (ver no Anexo 1 as leis de probabilidade correntemente utilizadas em problemas de fiabilidade estrutural) são definidas através de parâmetros expressos em função dos momentos.

### 2.2.5.3 - Sistemas de variáveis aleatórias

Nos problemas práticos encontram-se vulgarmente sistemas compostos por um certo número de variáveis aleatórias. Pode-se interpretar estes sistemas como as coordenadas ou as componentes de um vector aleatório, num espaço de dimensão adequada  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .

Considerando um sistema de duas variáveis  $(X, Y)$ . A função distribuição conjunta,  $F(x,y)$ , deste sistema é definida por:

$$F(x,y) = P[X \leq x \wedge Y \leq y] \quad (2.14a)$$

com as seguintes características:

$$F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty, -\infty) = 0 \quad (2.14b)$$

$$F(x, +\infty) = F_1(x) \quad (2.14c)$$

$$F(+\infty, y) = F_2(y) \quad (2.14d)$$

$$F(+\infty, +\infty) = 1 \quad (2.14e)$$

onde  $F_1(x)$  e  $F_2(y)$  são as funções distribuição marginais das variáveis  $X$  e  $Y$ . Se a função  $F(x,y)$  for diferenciável no domínio definido para as variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$ , a função  $f(x,y) = \partial^2 F / \partial x \partial y$  é a densidade de probabilidade conjunta, podendo escrever-se:

$$f(x,y) dx dy = P[(x < X \leq x + dx) \wedge (y < Y \leq y + dy)] \quad (2.15)$$

A representação gráfica da função  $f(x,y)$  consiste numa superfície de distribuição (Fig. 2.2).



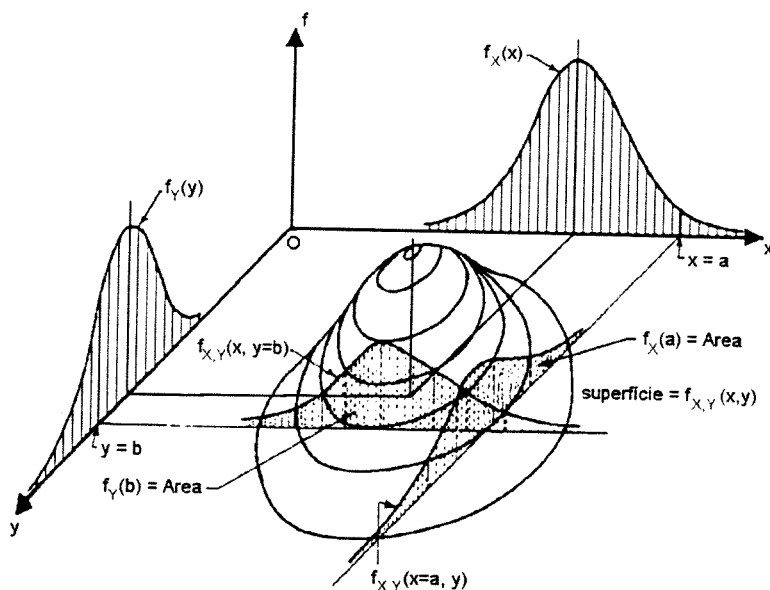


Fig. 2.2 - Funções densidade de probabilidade conjunta e marginais.

As probabilidades associadas a regiões do domínio das variáveis  $X$  e  $Y$  podem ser obtidas através das seguintes expressões:

$$P[(X,Y) \subset D] = \iint_D f(x,y) \, dx \, dy \quad , \quad (2.16a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \, dx \, dy = 1 \quad . \quad (2.16b)$$

#### 2.2.5.4 - Conceito de independência

O conceito de independência estatística é muito importante no estudo da fiabilidade estrutural, uma vez que permite grandes simplificações no problema.

Duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  são estatisticamente independentes se a informação sobre uma das variáveis não afectar a outra variável. A definição de independência entre duas variáveis é traduzida por exemplo através de:

$$P[X \leq x, Y \leq y] = P[X \leq x] \cdot P[Y \leq y] \quad . \quad (2.17)$$

Uma das consequências mais significativas desta definição é que a função densidade de probabilidade conjunta, de duas ou mais variáveis aleatórias, pode ser escrita como o produto das

funções densidade de probabilidade marginais. Por exemplo, para duas variáveis aleatórias independentes  $X$  e  $Y$ , demonstra-se facilmente que:

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y) \quad . \quad (2.18)$$

### 2.2.5.5 - O período de retorno

O conceito de período de retorno resultou da necessidade de definir uma grandeza apropriada para definir a variabilidade temporal das acções devidas a fenómenos naturais como o vento, sismos, cheias, ondas, etc.. De um modo geral, essas acções têm hipóteses remotas de atingirem valores extremamente elevados durante a vida da estrutura. O período de retorno define a probabilidade de ocorrência de um valor genérico para uma dada acção na estrutura.

O período de retorno define-se como o intervalo de tempo médio (ou esperado) entre dois acontecimentos sucessivos estatisticamente independentes. Considere-se, por exemplo, as observações contínuas no tempo da variável  $Q(t)$  (Fig. 2.3). Pode-se definir a lei de distribuição dos valores instantâneos pela função  $F_Q(x) = P[Q \leq x]$ . No entanto, esta lei tem um interesse limitado para o estudo da segurança. Interessa sobretudo avaliar a intensidade e a frequência de ocorrência dos valores extremos. Para isso, consideram-se somente os valores máximos da variável  $Q$  em intervalos de tempo,  $\tau$ , sucessivos e estuda-se a distribuição desses valores máximos através da função  $F_{Q_{\max}}$ . A definição desta função depende, evidentemente, dos intervalos de tempo  $\tau$  considerados. Na prática, faz-se uma escolha racional de  $\tau$ , de forma que os valores máximos atingidos em cada um dos intervalos possam ser considerados independentes (por exemplo, na distribuição dos valores máximos para a acção do vento considera-se geralmente intervalos de 1 ano).

O objectivo principal na definição do período de retorno é representar as acções variáveis por valores numéricos correspondentes às probabilidades de serem atingidos ou ultrapassados durante o período de tempo de vida da estrutura (ou tempo de referência,  $T_r$ ). O mais importante destes valores é o valor característico. A determinação do período de retorno de um valor em particular, significa o intervalo de tempo médio entre duas excedências sucessivas desse valor.

Seja  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , um conjunto de variáveis aleatórias independentes representando uma série de ocorrências de uma dada acção, em intervalos sucessivos de duração  $\tau$ , tal que as diversas ocorrências possam ser consideradas independentes.

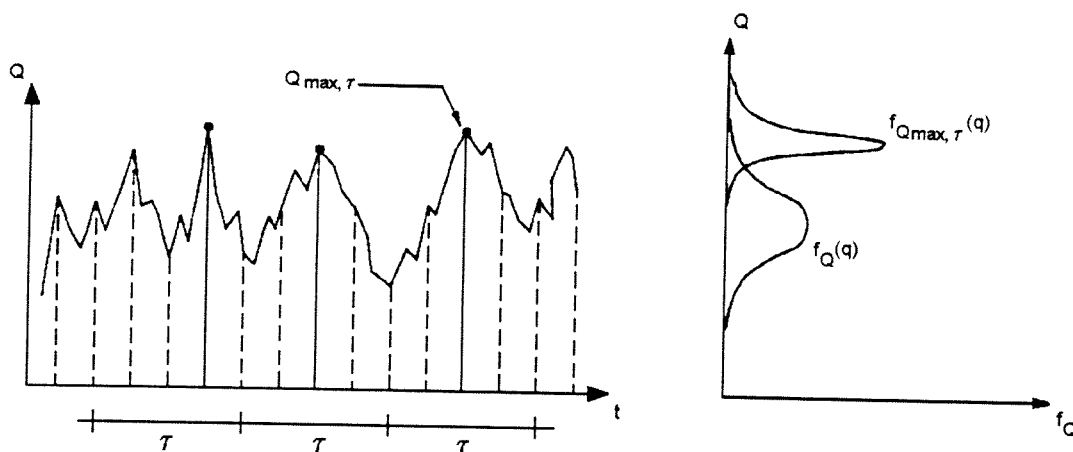


Fig. 2.3 - Definição de valores máximos duma variável aleatória.

Supondo que o tempo de referência,  $T_r$ , se encontra dividido em iguais intervalos de tempo  $\tau$ , de forma que  $T_r = n \cdot \tau$ . Considerando ainda a função distribuição de probabilidade,  $F(x)$ , de  $X$  relativa a esses intervalos e introduzindo a variável aleatória:

$$Y = \max_1^n (X_i) \quad , \quad (2.19)$$

a respectiva função distribuição, tendo em conta a independência das variáveis  $X$  (ver expressão (2.17)), será:

$$F_Y(x) = P[Y \leq x] = P[X_1 \leq x; X_2 \leq x; \dots; X_n \leq x] = [F(x)]^n \quad , \quad (2.20)$$

onde  $[F(x)]^n$  representa a probabilidade de não ser ultrapassado o valor  $x$  nos  $n$  períodos de duração  $\tau$ , ou seja (como  $T_r = n \cdot \tau$ ) no período de referência.

Seja  $N_x$  o número de intervalos ao fim dos quais a variável  $Y$  ultrapassa o valor  $x$  pela primeira vez, a respectiva função distribuição obtida como a intersecção de acontecimentos independentes (tal como na expressão 2.20), pode ser traduzida por uma lei geométrica (ver Anexo 1):

$$\begin{aligned} P[N_x = k] &= P\{X_1 \leq x; X_2 \leq x; \dots; X_{k-1} \leq x; X_k > x\} = \\ &= [F(x)]^{k-1} [1 - F(x)] \end{aligned} \quad . \quad (2.21)$$

De acordo com a definição de período de retorno do valor  $x$ ,  $T(x)$  é o valor médio de  $\tau \cdot N_x$ , ou seja:

$$\begin{aligned}
 T(x) &= \tau \cdot \sum_{k=1}^n k [1 - F(x)] \cdot [F(x)]^{k-1} = \\
 &= \tau \cdot [1 - F(x) + 2F(x) - 2F(x)^2 + 3F(x)^2 - 3F(x)^3 + \dots + nF(x)^{n-1} - nF(x)^n] , \quad (2.22) \\
 &= \tau \cdot [1 + F(x) + F(x)^2 + F(x)^3 + \dots + F(x)^{n-1} - nF(x)^n]
 \end{aligned}$$

para valores de  $n$  suficientemente grandes,  $T(x)$  tende para (atendendo a que  $F(x) < 1$ ):

$$T(x) = \frac{\tau}{1 - F(x)} \quad . \quad (2.23)$$

Geralmente, convém adoptar o intervalo de tempo  $\tau$  como unidade de medida dos intervalos de tempo, neste caso o período de retorno vem:

$$T(x) = \frac{1}{1 - F(x)} \quad . \quad (2.24)$$

Por exemplo, se a probabilidade anual ( $\tau=1$ ) de ultrapassar o valor  $x$  for igual a 0.02 ( $F(x) = 1 - 0.02 = 0.98$ ), o período de retorno vem igual a 50 anos de acordo com (2.24). Ou seja, o intervalo de tempo médio entre dois acontecimentos consecutivos com uma probabilidade anual de 0.02 é de 50 anos.

Uma vez conhecido o período de retorno (e por consequência a probabilidade de ser ultrapassado o valor  $x$  no intervalo de tempo  $\tau$ ) é possível conhecer a probabilidade de ser ultrapassado o valor  $x$  no período de referência  $T_r$ . Considerando  $p$  a probabilidade de  $Y$  ultrapassar o valor  $x$  dado:

$$p = P[Y > x] \quad , \quad (2.25)$$

então recorrendo à expressão (2.20) que representa a probabilidade de não ser ultrapassado o valor de  $x$  nos  $n$  intervalos elementares, vem:

$$p = P[Y > x] = 1 - P[Y \leq x] = 1 - F_Y(x) = 1 - [F(x)]^n \quad . \quad (2.26)$$

Viu-se que para uma probabilidade anual, de se ultrapassar  $x$ , igual a 0.02, o período de retorno é 50 anos mas a probabilidade desse valor ser ultrapassado para um período de referência de 50 anos é igual a  $1 - [F(x)]^{50} = 1 - 0.98^{50} = 0.64$ .

### 2.2.5.6 - Medida probabilística de fiabilidade estrutural

O conceito de período de retorno permite considerar de forma expedita a variabilidade no tempo, no entanto, ignora o facto de que para um dado ponto no tempo a variável apresenta incerteza.

Tanto a resposta estrutural,  $R$ , como as solicitações,  $S$ , aplicadas à estrutura são funções do tempo e do espaço. Geralmente, a variabilidade de  $R$  e  $S$  aumenta com o tempo, tornando as respectivas curvas de densidade de probabilidade,  $f_R$  e  $f_S$ , mais largas e achatadas. Além disso, os valores médios de  $R$  e  $S$  podem também variar com o tempo. As acções tendem a aumentar e a resistência a diminuir (Melchers, 1987). O problema geral de fiabilidade pode ser apresentado da forma como é ilustrado na Fig. 2.4.

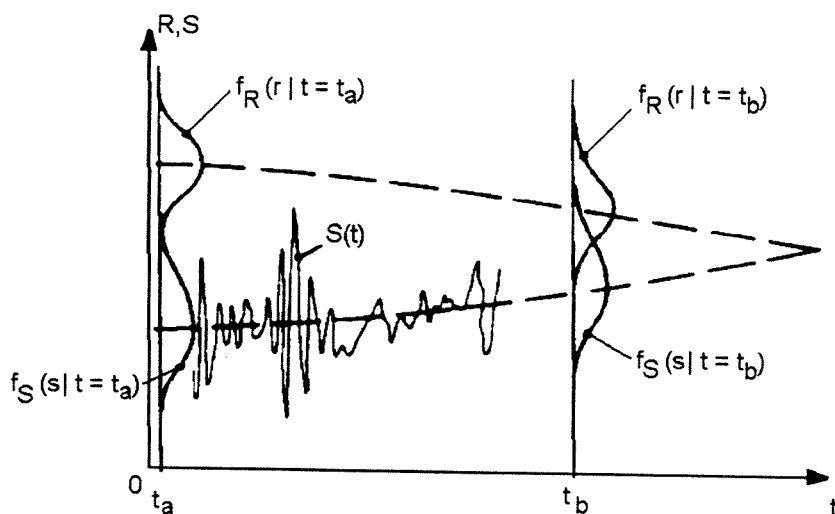


Fig. 2.4 - Problema geral de fiabilidade dependente do tempo.

O estado limite será violado sempre que, a qualquer instante, se verifique:

$$R(t) - S(t) < 0 \quad \text{ou} \quad \frac{R(t)}{S(t)} < 1 \quad . \quad (2.27)$$

A probabilidade de ocorrência destas condições é denominada por probabilidade  $p_f$  de rotura. Uma vez que as funções  $R$  e  $S$  podem variar com o tempo, então  $p_f$  pode também ser função do tempo.

Em muitas situações é, no entanto, conveniente assumir que tanto  $R$  como  $S$  não são funções do tempo. Geralmente, utilizam-se simplificações do seguinte tipo (Siemes, 1996):

- assume-se que as propriedades mecânicas dos materiais são iguais aos valores de curta duração ou iguais aos valores de longa duração;
- as acções são consideradas através dos valores máximos referentes ao período de referência definido.

### 2.2.5.7 - Formulação do problema básico de fiabilidade estrutural

O problema básico de fiabilidade estrutural considera somente a resistência  $R$  e a solicitação  $S$ , cada uma descrita pelas respectivas funções densidade de probabilidade  $f_R$  e  $f_S$ , respectivamente.

Considerando as expressões (2.27), a probabilidade  $p_f$  de rotura pode ser definida através das seguintes maneiras:

$$p_f = P(R \leq S) \quad , \quad (2.28a)$$

$$p_f = P(R - S \leq 0) \quad , \quad (2.28b)$$

$$p_f = P\left(\frac{R}{S} \leq 1\right) \quad , \quad (2.28c)$$

ou, de modo generalizado,

$$p_f = P[G(R,S) \leq 0] \quad , \quad (2.28d)$$

sendo  $G(R,S)$  a função estado limite. Desta forma, a probabilidade de rotura é identificada pela probabilidade de ser violado esse estado limite.

De um modo generalizado, apresenta-se na Fig. 2.5 as funções densidade (marginais)  $f_R$  e  $f_S$  para as variáveis  $R$  e  $S$ , respectivamente, em conjunto com a função densidade de probabilidade conjunta  $f_{RS}$ . Se  $D$  representar o domínio da rotura, então a probabilidade de rotura é definida por (ver expressão (2.16a)):

$$p_f = P[R - S \leq 0] = \int \int_D f_{RS}(r,s) dr ds \quad . \quad (2.29)$$

Se  $R$  e  $S$  forem independentes então, de acordo com a expressão (2.18),  $f_{RS}(r,s) = f_R(r) \cdot f_S(s)$ , obtém-se:

$$p_f = P[R - S \leq 0] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{s \geq r} f_R(r) \cdot f_S(s) dr ds \quad . \quad (2.30)$$

Como a função distribuição marginal,  $F_X(x)$ , de uma variável genérica  $X$  é dada por:

$$F_X(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^x f_X(y) dy \quad ; \quad x \geq y \quad . \quad (2.31)$$

Nos casos comuns em que  $R$  e  $S$  são independentes, a expressão (2.30) pode ser escrita na seguinte forma:

$$p_f = P[R - S \leq 0] = \int_{-\infty}^{+\infty} F_R(x) \cdot f_S(x) dx \quad . \quad (2.32)$$

Este integral é também conhecido por integral de convolução, correspondendo à soma de todos os casos de solitação para os quais a resistência não excede as acções.

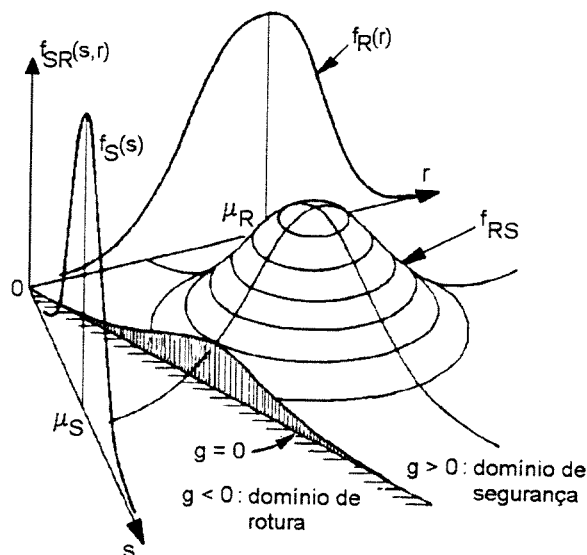


Fig. 2.5 - Determinação da probabilidade de rotura através da integração na zona de rotura  $D$ .

Repare-se que na passagem da expressão (2.30) para a expressão (2.32) reduziu-se a ordem de integração. Embora conveniente, esta passagem só foi possível considerando a independência de  $R$  e  $S$ .

Uma expressão alternativa à (2.32) é:

$$p_f = \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - F_S(x)] f_R(x) dx \quad , \quad (2.33)$$

que consiste na soma de todos os casos de resistência para os quais as acções excedem a resistência.

• *Caso de variáveis aleatórias normais*

A determinação analítica do integral de convolução (2.32) só é possível para poucas distribuições. O caso mais comum é quando  $R$  e  $S$  são duas variáveis aleatórias normais e independentes com média  $\mu_R$  e  $\mu_S$  e variância  $\sigma_R^2$  e  $\sigma_S^2$ , respectivamente.

Definindo a margem de segurança por (Fig. 2.6):

$$Z = R - S \quad , \quad (2.34)$$

considerando as propriedades aditivas das variáveis aleatórias normais e independentes, obtém-se o valor médio e a variância de  $Z$  através de:

$$\mu_Z = \mu_R - \mu_S \quad , \quad (2.35a)$$

$$\sigma_Z^2 = \sigma_R^2 + \sigma_S^2 \quad . \quad (2.35b)$$

A equação (2.28b) vem então:

$$p_f = P[R - S \leq 0] = P[Z \leq 0] = \Phi\left(\frac{0 - \mu_Z}{\sigma_Z}\right) \quad , \quad (2.36)$$

onde  $\Phi$  é a função distribuição da lei normal reduzida (média nula e variância unitária) extensivamente tabelada em inúmeros textos básicos de estatística.

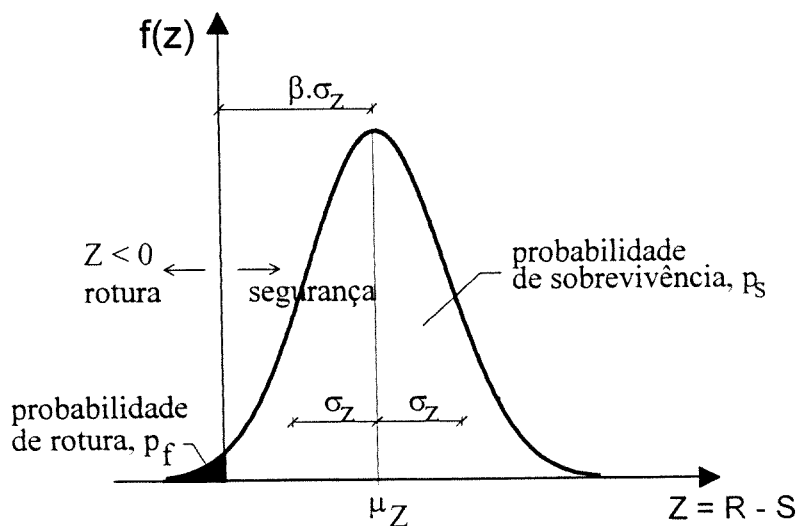


Fig. 2.6 - Distribuição da medida de segurança.



Usando as equações (2.35) e (2.36), obtém-se a probabilidade de rotura na seguinte forma:

$$p_f = \Phi \left[ \frac{-(\mu_R - \mu_S)}{(\sigma_R^2 + \sigma_S^2)^{1/2}} \right] = \Phi(-\beta) \quad , \quad (2.37)$$

onde  $\beta$  é definido como o "índice de fiabilidade":

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} \quad . \quad (2.38)$$

## 2.2.6 – Abordagem semi-probabilística da segurança

### 2.2.6.1 - Descrição do formato semi-probabilístico

O formato semi-probabilístico de avaliação da segurança estrutural teve como origem a necessidade de definir normas ou recomendações para o projecto de estruturas de engenharia civil de forma simplificada mas realista, mediante uma formulação baseada em critérios que tenham em conta a probabilidade de rotura.

As variabilidades das variáveis que intervêm na definição de um estado limite, assim como aquelas devidas a outros aspectos (modelos de cálculo, erros de execução, etc.) são consideradas de forma simplificada através de coeficientes de segurança, de hipóteses de carga e verificações a realizar. A aplicação destes coeficientes tem como consequência a majoração das acções ou dos seus efeitos (por exemplo, esforços internos como os momentos flectores, forças de coacção, deslocamentos ou deformações impedidas, etc.) e a minoração das propriedades resistentes dos materiais.

Os procedimentos de cálculo semi-probabilísticos são estabelecidos de forma a assegurar um nível de fiabilidade adequado e a reduzir os custos totais das estruturas (CEB, 1980a e 1980b; Ferry Borges, 1982). Os métodos semi-probabilísticos têm subjacente abordagens com metodologias probabilísticas mais rigorosas na definição dos modelos de carga e de resposta e na aferição de coeficientes de segurança. O objectivo principal é permitir a aplicação de regras simplificadas de forma que o nível de segurança seja idêntico àquele obtido com verificações efectuadas com análises mais rigorosas.

A abordagem semi-probabilística está associada a métodos de verificação de segurança de nível 1. O conjunto de regras que permitem garantir a segurança e o adequado comportamento em serviço é definido através de:

- valores representativos (nominais ou característicos) das diversas grandezas aleatórias (acções e resistências), que têm em conta a dispersão definida por estudos estatísticos ou por regras de aceitação e de controlo de qualidade. Geralmente, esses valores estão associados a um determinado quantil ou probabilidade de ocorrência;
- coeficientes parciais de segurança a considerar na verificação aos estados limites, de forma que a probabilidade de atingir ou ultrapassar esse estado seja inferior a um determinado nível de risco previamente estabelecido;
- margens de segurança, mais ou menos implícitas, que se introduzem em diversos modelos (e equações correspondentes) utilizados no cálculo.

Em termos simplistas, o formato semi-probabilístico substitui o cálculo da probabilidade definida pela equação (2.29), através da consideração dos valores representativos de  $R$  e  $S$  (geralmente, os valores característicos  $R_k$  e  $S_k$ , respectivamente) e os coeficientes parciais de segurança, do seguinte modo (Fig. 2.7):

$$S_d \leq R_d$$

$$\gamma_F \cdot S_k \leq \frac{R_k}{\gamma_M} \quad , \quad (2.39)$$

onde  $R_d$  e  $S_d$  representam os valores de cálculo das respectivas grandezas e  $\gamma_F$  e  $\gamma_M$  definem os coeficientes parciais de segurança associados às acções e às resistências, respectivamente.

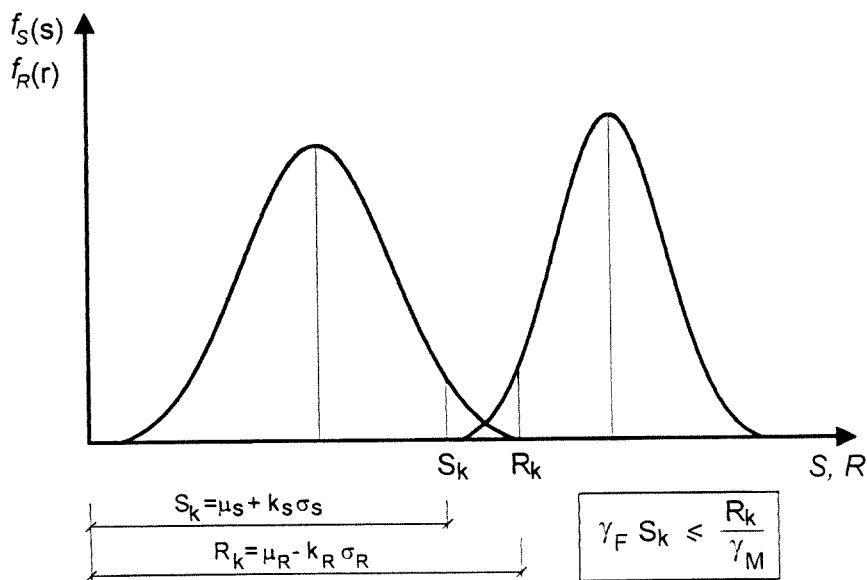


Fig. 2.7 - Ilustração esquemática do formato semi-probabilístico.

### 2.2.6.2 - Caracterização das acções e dos seus efeitos com base no Eurocódigo 1

Existem diversos critérios de classificação das acções, o mais corrente é aquele que distingue os seguintes tipos:

- *acções permanentes* - que correspondem as acções contínuas, ou praticamente contínuas, com intensidade constante ou muito pouco variável no tempo. Abrangem ainda as acções que variam no mesmo sentido e que tendem para um valor limite;
- *acções variáveis* - consistem em acções com intensidades que variam frequentemente com o tempo;
- *acções acidentais* - resultam de fenómenos de frequência rara (por exemplo, choques, sismos, etc.).

As acções podem também ser classificadas de fixas (o ponto de aplicação é perfeitamente definido, por exemplo, o peso próprio de uma parede) ou livres (não existe um ponto de aplicação particular, por exemplo, tráfego sobre um ponte). Podem ainda classificar-se de acções estáticas ou dinâmicas.

No dimensionamento é preciso ter em conta diversas acções de diferente natureza. Por isso, além da intensidade é preciso considerar também a simultaneidade dessas acções. As combinações de acções são definidas através dos valores representativos das acções e de coeficientes redutores das intensidades máximas das diferentes acções actuando simultaneamente.

Geralmente, o valor representativo de uma acção é o seu valor característico,  $S_k$ . A definição do valor característico depende da natureza da acção:

- *Acções permanentes* - definem-se dois valores característicos, superior ( $G_{k\text{sup}}$ ) e inferior ( $G_{k\text{inf}}$ ), correspondendo aos quantis de 95% e 5% das suas distribuições. No caso do peso próprio a respectiva acção é normalmente definida com boa precisão, além disso, apresenta distribuições com pequenas dispersões (coeficiente de variação inferior a 0.10). Assim, as respectivas acções são representadas por um único valor nominal, calculado a partir dos valores médios dos pesos volúmicos dos materiais.
- *Acções variáveis* - são representadas pela letra  $Q$ . Os valores representativos destas acções, além do valor característico  $Q_k$ , são os seguintes:
  - o valor de combinação,  $\psi_0 Q_k$ ;
  - o valor raro,  $\psi_1' Q_k$ ;
  - o valor frequente,  $\psi_1 Q_k$ ;
  - o valor quase permanente,  $\psi_2 Q_k$ .

Como se pode verificar, estes valores são definidos a partir do valor característico e de coeficientes (redutores) de combinação que fixam o nível de intensidade de uma acção variável não dominante para uma determinada combinação de acções. Os coeficientes de combinação  $\psi$  são definidos tendo em conta as probabilidades de ocorrência das acções variáveis para um determinado período de referência.

Os valores característicos  $Q_k$  superiores e inferiores correspondem geralmente aos quantis de 95% e 5%, respectivamente, das distribuições de extremos relativos a períodos de referência,  $T_r$ , iguais ao período de vida útil da estrutura (Fig. 2.8). Como se viu na secção 2.2.5.5, os valores extremos referem-se a intervalos de tempo  $\tau$  associados com a definição do período de retorno, que por sua vez está ligado com a probabilidade de ocorrência no período de referência.

O valor de combinação  $\psi_0 Q_k$  (correspondente aos quantis de 95% e 5% para valores superior e inferior) é determinado utilizando distribuições de extremos relativos a períodos de referência (e, por consequência, a períodos de retorno) convenientemente escolhidos, sempre significativamente inferiores ao período de vida da estrutura.

O valor raro,  $\psi'_1 Q_k$ , corresponde aos quantis de 95% e 5% (valores superior e inferior, respectivamente) da distribuição de extremos relativos a períodos de retorno de um ano.

O valor frequente,  $\psi_1 Q_k$ , corresponde aos quantis de 95% e 5% da distribuição dos valores instantâneos. Isto implica que o somatório dos períodos em que a sua intensidade é excedida não ultrapassa 5% do intervalo de tempo correspondente ao período de vida da estrutura.

O valor quase permanente,  $\psi_2 Q_k$ , corresponde ao nível da acção que é ultrapassado durante períodos cuja totalidade é da ordem dos 50% do intervalo de tempo de referência, correspondendo portanto ao valor mediano da distribuição dos valores instantâneos (quantil de 50%).

- *Acções acidentais* - são representadas por um único valor representativo do fenómeno, sendo considerado nas combinações do mesmo modo que o valor característico das acções variáveis.

As combinações de acções devem ter em conta a actuação simultânea de acções diferentes com intensidades distintas. Os critérios de combinação deverão considerar o facto de ser bastante improvável que as diferentes acções variáveis atinjam as suas intensidades máximas no mesmo instante de tempo. Existem inúmeras combinações possíveis, no entanto, consideram-se somente as mais desfavoráveis.

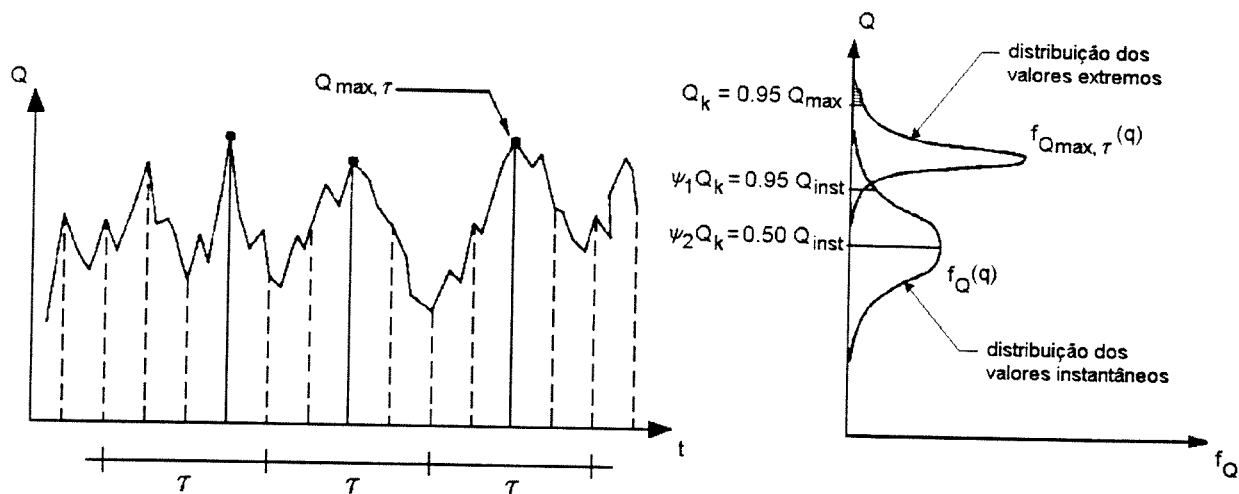


Fig. 2.8 - Ilustração esquemática de valores representativos das acções variáveis.

Na verificação da segurança aos estados limites de utilização definem-se as combinações raras, correspondentes a estados limites de muito curta duração; as combinações frequentes, correspondentes a estados limites de curta duração; e as combinações quase permanentes, correspondentes aos estados limites de longa duração. As combinações raras utilizam-se na verificação de estados limites com natureza irreversível (ocorrência de danos apreciáveis). As combinações frequentes e quase permanentes consideram-se nos estados limites reversíveis, isto é, os valores relativos aos estados limites não são mais atingidos se as acções que originam esse efeito desaparecerem.

Na verificação da segurança aos estados limites últimos definem-se as combinações fundamentais, para situações duráveis e transitórias; as combinações acidentais associadas a situações de excepção; e combinações associadas a situações sísmicas.

No Quadro 2.6 apresenta-se de forma esquemática os critérios de combinação de acções descritos.

Quadro 2.6 - Critérios de combinação de acções.

Estados limites	Combinações	Duração de referência
De Utilização	Raras	Muito curta
	Frequentes	Curta
	Quase permanentes	Longa
Últimos	Fundamentais	
	Acidentais	
	Situações sísmicas	

A verificação da segurança em relação aos estados limites de utilização deverá considerar as seguintes regras de combinação:

- Combinações raras:

$$S_d = \sum_{i \geq 1} G_{k_i} + P_k + \psi_{0_1} Q_{k_1} + \sum_{j > 1} \psi_{1_j} Q_{k_j} \quad (2.40)$$

- Combinações frequentes:

$$S_d = \sum_{i \geq 1} G_{k_i} + P_k + \psi_{1_1} Q_{k_1} + \sum_{j > 1} \psi_{2_j} Q_{k_j} \quad (2.41)$$

- Combinações quase permanentes:

$$S_d = \sum_{i \geq 1} G_{k_i} + P_k + \sum_{j \geq 1} \psi_{2_j} Q_{k_j} \quad (2.42)$$

onde  $P_k$  representa o valor característico da acção de pré-esforço.

A segurança em relação aos estados limites últimos, que não envolvam perda de equilíbrio ou fadiga, é verificada desde que o valor de cálculo do efeito das acções não seja superior ao valor de cálculo da capacidade resistente da estrutura. Consideram-se as seguintes regras de combinação:

- Combinações fundamentais:

$$S_d = \sum_{i \geq 1} \gamma_{G_i} G_{k_i} + \gamma_P P_k + \gamma_{Q_1} Q_{k_1} + \sum_{j > 1} \gamma_{Q_j} \psi_{0_j} Q_{k_j} \quad (2.43)$$

- Combinações acidentais:

$$S_d = \sum_{i \geq 1} \gamma_{G_{i,u}} G_{k_i} + \gamma_{P_t} P_k + A_d + \psi_{1_1} Q_{k_1} + \sum_{j \geq 1} \psi_{2_j} Q_{k_j} \quad (2.44)$$

- Combinações em situações sísmicas:

$$S_d = \sum_{i \geq 1} G_{k_i} + P_k + \gamma_E E_d + \sum_{j \geq 1} \psi_{2_j} Q_{k_j} \quad (2.45)$$

onde  $A_d$  é o valor de cálculo da acção acidental e  $E_d$  é o valor de cálculo da acção sísmica.

O Eurocódigo 1 (EC1-1, 1994) define valores dos coeficientes parciais de segurança aos estados limites em edifícios (ver Quadro 2.7). Como se pode constatar, distinguem-se três modos diferentes de rotura, denominados por casos A, B e C. O caso A refere-se a verificações relativas a perdas de equilíbrio estático, isto é, a situações em que não intervêm as propriedades do solo de fundação ou dos materiais. O caso B diz respeito a situações de verificação da resistência de elementos estruturais ou secções para casos de carga previamente fixados. Os coeficientes parciais mais correntes são os seguintes: 1.00 ou 1.35 para acções permanentes; 1.50 para acções

variáveis e 1.00 para acções acidentais. O caso C refere-se a casos em que os estados limites são atingidos por rotura das fundações.

Quadro 2.7 - Coeficientes parciais - Estados limites últimos para edifícios.

Casos	Acção	Símbolo	Situações	
			duráveis/transitórias	acidentais
CASO A Perda de equilíbrio estático; resistência dos materiais ou do solo de fundação não significativa.	Acções permanentes: peso próprio dos elementos estruturais e não estruturais, acções permanentes devidas ao solo, água subterrânea:			
	- desfavoráveis	$\gamma_{G_{sup}}$	1.10	1.00
	- favoráveis	$\gamma_{G_{inf}}$	0.90	1.00
	Acções variáveis: - desfavoráveis	$\gamma_Q$	1.50	1.00
	Acções acidentais	$\gamma_A$		1.00
CASO B Rotura da estrutura ou elementos estruturais, devido à resistência insuficiente dos materiais estruturais	Acções permanentes: (ver acima)			
	- desfavoráveis	$\gamma_{G_{sup}}$	1.35	1.00
	- favoráveis	$\gamma_{G_{inf}}$	1.00	1.00
	Acções variáveis: - desfavoráveis	$\gamma_Q$	1.50	1.00
	Acções acidentais	$\gamma_A$		1.00
CASO C Rotura pela fundação	Acções permanentes: (ver acima)			
	- desfavoráveis	$\gamma_{G_{sup}}$	1.00	1.00
	- favoráveis	$\gamma_{G_{inf}}$	1.00	1.00
	Acções variáveis: - desfavoráveis	$\gamma_Q$	1.30	1.00
	Acções acidentais	$\gamma_A$		1.00

### 2.2.6.3 - Caracterização das resistências com base no Eurocódigo 1

O valor de cálculo  $R_d$  da resistência de um material é obtido para o seu valor característico  $R_k$  através:

- da divisão por um coeficiente de segurança,  $\gamma_m$ , que tem em conta a variabilidade, no sentido desfavorável, das propriedades do material e eventualmente de defeitos localizados;
- da multiplicação, eventual, por um coeficiente de conversão  $\lambda$  (inferior à unidade) que tem em conta o efeito das cargas elevadas de longa duração (por exemplo,  $\lambda = 0.85$  para a resistência do betão à compressão), ou efeitos de volume ou escala, ou efeitos da humidade, da temperatura, etc..

Tem-se assim, de forma generalizada, que:

$$R_d = \lambda \cdot \frac{R_k}{\gamma_m} \quad (2.46)$$

Sendo o betão e o aço os materiais correntemente usados na construção, é abordado de seguida os coeficientes parciais de segurança  $\gamma_c$  e  $\gamma_s$ , respectivamente.

- *Definição do coeficiente parcial de segurança para o aço,  $\gamma_s$*

Existem diversos tipos de aço, geralmente distinguem-se em aços aplicados na construção metálica, aços para armaduras ordinárias e aços para armaduras pré-esforçadas. Dependendo do tipo de aço, a resistência convencional e a resistência efectiva são definidas através do limite de elasticidade (para aços macios) ou limite convencional de proporcional (para aços duros) e por outros pontos particulares do diagrama tensões-deformações. Admite-se ainda que a distribuição destes parâmetros resistentes têm aproximadamente uma distribuição gausseana (normal). A resistência característica é definida pelo quantil de 2% ( $f_{sk} = f_{sm} - 2\sigma_{fs}$ ) para os aços utilizados na construção metálica; e pelo quantil de 5% ( $f_{sk} = f_{sm} - 1.64\sigma_{fs}$ ) para as armaduras passivas e activas.

O valor de cálculo da resistência corresponde ao quantil 0.005 (0.5%). Assim, o coeficiente parcial de segurança,  $\gamma_s$ , para o aço corresponde ao quociente entre os quantis 0.005 e 0.02 para os aços da construção metálica, e ao quociente entre os quantis 0.005 e 0.05 para os outros aços, ou seja:

- $\gamma_s = 1.10$ , para os aços da construção metálica;
- $\gamma_s = 1.15$ , para as armaduras passivas e activas.

- *Definição do coeficiente parcial de segurança para o betão,  $\gamma_c$*

Quando se aborda a resistência do betão, refere-se sobretudo a resistência à compressão. Resultados experimentais obtidos em diferentes países mostram que a resistência do betão segue



aproximadamente uma lei log-normal na vizinhança do quantil 0.005. A representatividade das medidas convencionais, tendo em conta os valores da resistência efectiva medidos em provetes, levanta mais questões que no caso do aço. O coeficiente parcial de segurança do betão,  $\gamma_c$ , é obtido através da seguinte expressão:

$$\gamma_c = \gamma_{Rd} \eta \frac{f_{c0.005}}{f_{c0.05}} \quad . \quad (2.47)$$

O coeficiente  $\gamma_{Rd}$  tem em conta as incertezas que não são abrangidas pelo coeficiente do modelo das acções e toma aproximadamente o valor 1.10. O coeficiente  $\eta$ , também toma valores da ordem de 1.10, tem em conta, em média, as diferenças entre a resistência convencional (medida através de provetes) e a resistência efectiva na obra. A parcela  $f_{c0.005}/f_{c0.05}$  é o coeficiente que transforma o quantil 0.05 no quantil 0.005 da resistência efectiva e tem em conta a qualidade de execução, sendo geralmente igual a 1.24. De acordo com valores obtidos experimentalmente, o coeficiente  $\gamma_c$  varia entre 1.30 e 1.60, sendo o valor mais corrente 1.50, que é considerado como resultado do seguinte produto:

$$\gamma_c = 1.10 \times 1.10 \times 1.24 = 1.50 \quad . \quad (2.48)$$

#### 2.2.6.4 - Critérios regulamentares para o dimensionamento de estruturas de betão

Os coeficientes parciais de segurança regulamentares são geralmente definidos para o dimensionamento de secções críticas de elementos estruturais. Habitualmente, esse dimensionamento é realizado tendo em conta os esforços calculados por uma análise global da estrutura, independentemente da verificação da segurança ao nível das secções.

De acordo com o Eurocódigo 2 (EC2, 1991), vulgarmente designado por EC2, e com o código-modelo do CEB-FIP de 1990 (CEB-FIP, 1993), correntemente designado por MC90, a análise global da estrutura pode ser realizada por qualquer dos seguintes métodos:

- análise não linear;
- análise linear;
- análise linear com redistribuição, e
- análise plástica.

Sabendo que os diferentes métodos conduzem geralmente a diferentes soluções de dimensionamento, a questão que se põe é se os coeficientes parciais, que são apropriados para uma determinada forma de análise, podem ser usados com outros tipos de análise. É certo que

conduzirão a diferentes avaliações dos níveis de fiabilidade. O uso dos mesmos coeficientes parciais de segurança em critérios de dimensionamento de elementos estruturais, a partir de análises lineares da estrutura, e em critérios que considerem o comportamento não linear na avaliação dos esforços, não permite tirar partido do conhecimento mais apropriado que se obtém nos últimos critérios. Além disso, a aplicabilidade dos mesmos critérios de dimensionamento para aqueles baseados em métodos de análise linear e em métodos de análise não linear, tem sido objecto de ampla discussão no seio da comunidade técnica e científica. A abordagem deste assunto será feita de forma detalhada no Capítulo 6.

### **2.2.7 – Problemática da avaliação de segurança de estruturas existentes**

A avaliação da segurança de estruturas existentes é um problema que não é abordado na maioria das recomendações e normas que regulam este tipo de procedimentos. No entanto, problemas como a redução da capacidade resistente, degradação do betão, corrosão das armaduras, aumento das sobrecargas devidas ao tráfego em redes viárias, são questões que as administrações públicas e privadas enfrentam com uma acuidade cada vez maior.

O problema da reabilitação do património histórico e habitacional é um problema de importância relevante para os organismos públicos regionais e centrais no nosso país (Silva, 1996). Existem ainda outros exemplos onde este tipo de problemas se põe com premente relevância, como é o caso das pontes (Fig. 2.9). Segundo informações recentes da OCDE (1992), na Europa mais de 50% das pontes existentes têm uma idade superior a 25 anos. Estas foram projectadas com materiais de qualidades distintas das actuais, utilizando normas já ultrapassadas e, por consequência, diferentes critérios de verificação da segurança, modelos de sobrecargas devidas ao tráfego, coeficientes de segurança. Nos Estados Unidos da América cerca de 40% de um total de aproximadamente 600.000 pontes rodoviárias geridas pela administração federal de auto-estradas apresentam deficiências (estruturais e funcionais) com uma idade relativamente curta. Os problemas mais importantes de deterioração devem-se a manutenções deficientes, ambientes agressivos, por exemplo junto à orla marítima (problemas também comuns aos edifícios) e a um incremento significativo das sobrecargas devidas ao tráfego.

Vários esforços têm sido feitos para desenvolver um conjunto de recomendações para avaliar, com base probabilística, a segurança de estruturas existentes (Ditlevsen, 1991). Esse conjunto de recomendações deverá incluir programas de gestão do património existente, com o objectivo de racionalizar e dar diferentes prioridades aos recursos disponíveis para trabalhos de inspecção, manutenção, reabilitação ou substituição (AASHTO, 1989; Verma, 1989; Faber, 1996).

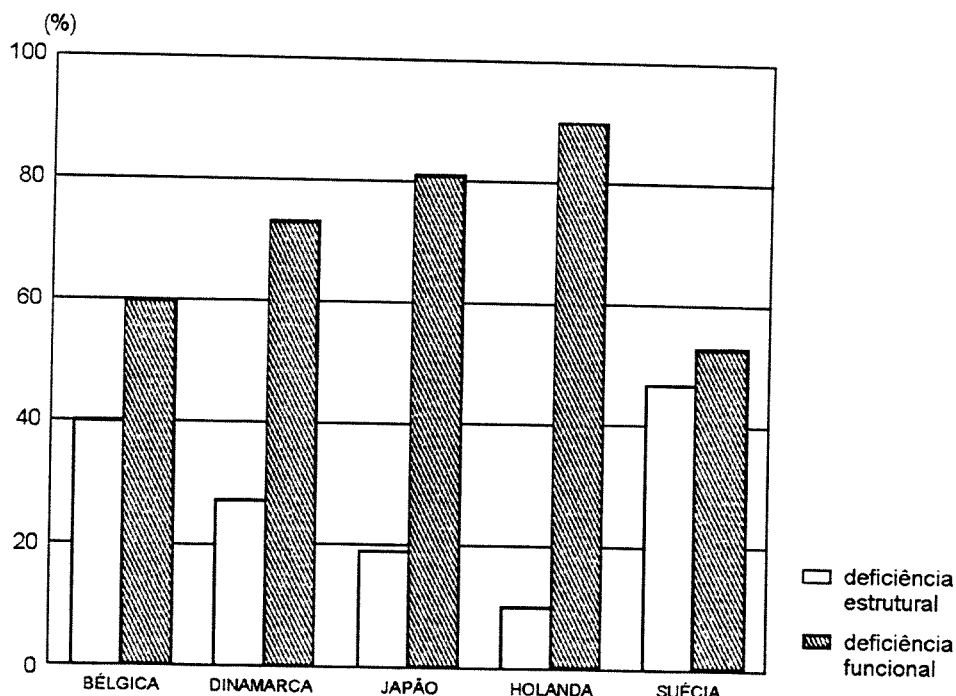


Fig. 2.9 - Causas de encerramento de pontes em países da OCDE (1992).

Deste modo, existe uma série de novos problemas na avaliação e gestão de estruturas existentes que deve ser tratada de maneira distinta daquela que é abordada pelas normas que regem o dimensionamento de novas estruturas. As recomendações a aplicar a este tipo de problemas deve ter em conta as seguintes questões (Vrouwenvelder, 1991; Almunia, 1993):

- Na gestão de estruturas:
  - Como definir um programa de inspeção e de trabalhos de manutenção ou reabilitação afim de rentabilizar ao máximo os recursos (escassos) disponíveis?
  - Deverá a reparação restituir o estado original ou uma reparação parcial é aceitável?
  - É mais rentável a reabilitação ou a substituição da estrutura?
  - Pode a sociedade actual aceitar o nível de segurança de uma estrutura existente com problemas de perda aparente da capacidade resistente?
  - Que incremento de segurança resulta de um determinado trabalho de reabilitação?
  - É necessário, ou rentável, aumentar a vida útil da estrutura?
- Na avaliação de estruturas existentes:
  - O que se entende por estrutura segura?

- O que fazer se as estruturas obedecem às regras para as quais foram dimensionadas mas deixam de obedecer às novas normas?
- Que vida útil resta a uma determinada estrutura?
- Qual a capacidade de resposta real de uma estrutura que apresente uma perda aparente da sua capacidade resistente? Que campanha experimental se deve realizar para a avaliar adequadamente?
- Que modelos de carga, de resposta e coeficientes de segurança se devem usar na avaliação de estruturas em serviço ou já reparadas?
- Que partes das normas de dimensionamento são aplicáveis a estruturas existentes, quais as que não se aplicam e quais devem ser modificadas?

Os métodos probabilísticos têm um grande campo de aplicação na avaliação da segurança de estruturas existentes (Goyet, 1994). A aplicação de técnicas estatísticas no tratamento de dados efectivamente medidos na verdadeira estrutura (por exemplo, sobrecarga devido ao tráfego em pontes, resistência dos materiais obtida por carotagens ou ensaios não destrutivos) permite avaliar de forma mais rigorosa a variabilidade das grandezas envolvidas na caracterização da resposta. Além disso, é possível definir de forma mais objectiva os vários parâmetros que condicionam o nível de risco real.

As técnicas de fiabilidade podem assim ser utilizadas na definição de valores adequados para os coeficientes de segurança e para os valores representativos das grandezas envolvidas na avaliação de segurança de estruturas existentes. Os coeficientes de segurança definidos para as estruturas novas são aferidas para uma gama ampla de tipos de estruturas e para períodos de referência bastante superiores aos das estruturas existentes. Assim, a sua aplicação na avaliação de estruturas existentes pode conduzir a uma segurança excessiva ou a soluções anti-económicas.

Os critérios probabilísticos a utilizar na actualização da capacidade resistente e das acções reais devem ter em conta os seguintes aspectos básicos (Almunia, 1993):

- 1 – determinação objectiva dos parâmetros que quantificam o nível de risco de uma estrutura em serviço em termos de probabilidade de rotura, e que tenham em conta o problema de gestão em termos de maximização da utilidade esperada;
- 2 – consideração de dados obtidos de ensaios ou de inspecções, nomeadamente, propriedades mecânicas dos materiais, estado de degradação do betão e corrosão das armaduras, reforços, funcionamento (incorrecto) dos apoios, detecção de outras patologias;

- 3 – utilização de bases de dados existentes e posterior actualização, permitindo minimizar o número de ensaios a realizar;
- 4 – estimativa objectiva das acções reais, designadamente daquelas que apresentam maior variabilidade, como por exemplo o vento, sismos, tráfego, etc., de forma a garantir um nível de segurança adequado.

Nos últimos anos observou-se um avanço significativo na consideração de métodos probabilísticos no desenvolvimento de propostas de regulamentação (Ditlevsen, 1991), na determinação da vida útil ou perda de capacidade resistente em problemas de degradação dos materiais, corrosão, fissuração, dano, etc. (Kraker, 1987; Kayser, 1989; Ting, 1991) e na avaliação da segurança de estruturas existentes (Andersen, 1988; Nowak, 1988; Ranganathan, 1992; Allen, 1993; Faber, 1996).

## **2.3 – ELEMENTOS SOBRE TÉCNICAS ESTATÍSTICAS NA AVALIAÇÃO DA FIABILIDADE ESTRUTURAL**

### **2.3.1 – Introdução**

Nesta secção descrevem-se algumas técnicas estatísticas de aplicação corrente no estudo da segurança. Esta apresentação não pretende ser exaustiva mas somente salientar os aspectos mais importantes. Um estudo mais pormenorizado sobre este assunto deverá ser completado com a consulta de textos básicos sobre estatística (Meyer, 1984; Moore, 1989; Tiago de Oliveira, 1990). Será dado destaque à estimativa de parâmetros de leis teóricas e à análise de regressão e correlação.

### **2.3.2 – Sumário sobre medidas estatísticas**

Supondo que existe um conjunto de  $n$  observações de uma grandeza  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . A primeira abordagem a fazer consiste em representar graficamente a distribuição dos valores observados. A forma mais comum consiste em agrupar os valores observados  $x_i$  em  $m$  classes disjuntas  $(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m; \Omega_j \cap \Omega_k = \emptyset)$  e representar em histogramas de frequência simples ou em curvas de frequência acumuladas (Fig. 2.10).

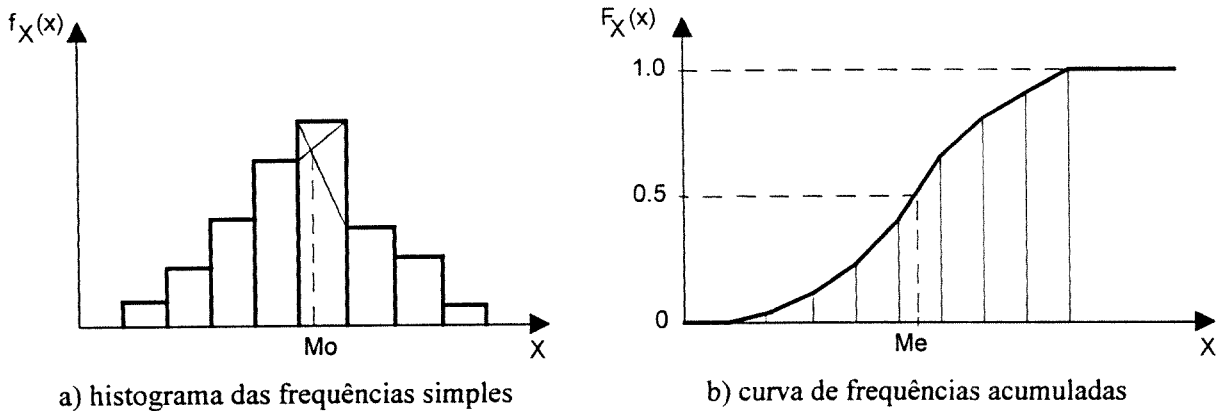


Fig. 2.10 - Representação de uma distribuição contínua observada (na Fig. 2.1a ilustra-se a representação de distribuições discretas).

- *Frequências simples*

A frequência,  $f_k$ , associada a uma classe  $\Omega_i$  é dada pelo quociente entre o número de observações (efectivos) nessa classe,  $n_k$ , e o número total de efectivos,  $n$ :

$$f_k = \frac{n_k}{n} \quad . \quad (2.49)$$

- *Frequências acumuladas*

A frequência acumulada,  $F_k$ , até à classe  $\Omega_k$  é dada pela soma das frequências simples até a essa classe, ou alternativamente, pelo quociente entre o número de efectivos acumulados até à classe  $\Omega_k$  e o número total de efectivos,  $n$ :

$$F_k = \sum_{i=1}^k f_i = \frac{\sum_{i=1}^k n_i}{n} \quad . \quad (2.50)$$

- *Medidas de tendência central: moda, mediana e média*

As medidas de tendência central posicionam a distribuição no sistema de eixos  $OX$ , indicando o centro da distribuição. A moda,  $M_0$ , corresponde ao valor de  $X$  mais frequentemente observado (ver Fig. 2.10a):

$$M_0 = x_k \quad : \quad \max\{f_i(x)/\Delta l_i\} \quad , \quad (2.51)$$

onde  $\Delta l_i$  é a amplitude da classe  $i$ . A classe onde se encontra a moda designa-se por classe modal.

A mediana,  $M_e$ , corresponde ao valor de  $X$  que divide os efectivos em dois sub-conjuntos de igual frequência, isto é, com uma frequência acumulada de 50% (ver Fig. 2.10b):

$$M_e = x_k \quad : \quad F(x_k) = 0.50 \quad . \quad (2.52)$$

A média aritmética,  $\bar{x}$ , é dada por:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad , \quad (2.53a)$$

ou em termos de frequências:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n f_i \cdot x_i \quad . \quad (2.53b)$$

Fazendo analogia com a mecânica, a média aritmética corresponde ao centro de gravidade do histograma das frequências simples.

- *Medidas de dispersão: amplitude, desvio absoluto, variância, desvio padrão e coeficiente de variação*

A amplitude do intervalo de observação ("range" na literatura especializada de língua inglesa) é definida pela diferença entre os valores máximo,  $x_{\max}$ , e mínimo,  $x_{\min}$ , observados:

$$\text{Range} = x_{\max} - x_{\min} \quad . \quad (2.54)$$

Esta medida tem a desvantagem de depender somente de duas observações, não tendo em conta os restantes valores. Além disso, é muito susceptível aos "outliers" (valores extremos muito desfasados dos restantes, devido a fenómenos raros ou a erros de observação não detectados).

O desvio absoluto médio, DAM, é definido por:

$$\text{DAM} = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{n} = \sum_{i=1}^n f_i |x_i - \bar{x}| \quad . \quad (2.55)$$

O DAM mede os desvios absolutos em relação à média  $\bar{x}$ . Apesar de não apresentar dificuldades de cálculo, esta medida apresenta propriedades algébricas que exigem um tratamento diferenciado consoante as diferenças  $(x_i - \bar{x})$  sejam positivas ou negativas.

A forma mais eficaz de ultrapassar este problema é considerar os quadrados das diferenças  $(x_i - \bar{x})$ :

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} \quad , \quad (2.56a)$$

sendo  $s^2$  denominado por variância amostral e  $s$  designa-se por desvio padrão amostral. A estimativa não enviesada (isto é, de uma forma simplista pode-se dizer que é o valor esperado) da variância e, por consequência, do desvio padrão é:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad . \quad (2.56b)$$

O coeficiente de variação é definido como o quociente entre o desvio padrão e a média:

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \quad . \quad (2.57)$$

Esta é uma medida adimensional de dispersão que permite comparar distribuições de diferentes grandezas.

- *Momentos estatísticos*

O momento estatístico não centrado de ordem  $k$ ,  $m_k$ , é definido por:

$$m_k = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^k}{n} = \sum_{i=1}^n f_i \cdot x_i^k \quad . \quad (2.58)$$

O momento estatístico centrado (na média) de ordem  $k$ ,  $\mu_k$ , é definido por:

$$\mu_k = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^k}{n} = \sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^k \quad . \quad (2.59)$$

Verifica-se assim que a média,  $\bar{x}$ , é um momento não centrado de primeira ordem,  $m_1$ , enquanto que a variância é um momento centrado de segunda ordem,  $\mu_2$ , que pode ser obtido a partir dos momentos não centrados:

$$s^2 = m_2 - (m_1)^2 \quad . \quad (2.60)$$



Os momentos de ordem superior são geralmente utilizados na estimativa de parâmetros de algumas leis teóricas, e também na avaliação da assimetria e do achatamento das distribuições observadas. Por exemplo, o coeficiente de assimetria,  $\gamma_1$ , é definido em função dos momentos até à terceira ordem; e o coeficiente de achatamento,  $\gamma_2$ , é definido a partir dos momentos até à quarta ordem:

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{s^3} \quad , \quad (2.61)$$

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{s^4} - 3 \quad . \quad (2.62)$$

Estas duas medidas são vulgarmente utilizadas na avaliação da normalidade das distribuições, uma vez que as distribuições gausseanas apresentam valores nulos para  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ .

### 2.3.3 – Estimação de parâmetros - inferência estatística

#### 2.3.3.1 - Aproximação clássica

A estimação clássica de parâmetros é dividida em duas partes: estimação pontual e intervalo de estimação. Na estimação pontual é feita a avaliação de um único valor (esperado) para a grandeza em estudo, a partir de uma amostra da população. O intervalo estabelece os limites de confiança da quantidade estimada.

Os parâmetros de um modelo probabilístico são geralmente avaliados a partir de um conjunto de observações (amostra) da população. Existem diferentes métodos de estimar parâmetros, entre eles o método dos momentos e o método da máxima verosimilhança (*method of maximum likelihood*) são dos mais usados.

- *Método dos momentos*

Os parâmetros dos modelos probabilísticos são avaliados a partir dos momentos estatísticos amostrais. Por exemplo, no caso de uma variável aleatória normal, os parâmetros  $\mu$  e  $\sigma^2$  da distribuição (média e variância), são avaliados a partir dos respectivos valores esperados (média aritmética e variância amostral):

$$\mu \cong \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad , \quad (2.63)$$

$$\sigma^2 \cong s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad , \quad (2.64)$$

que são definidos a partir dos momentos estatísticos de primeira e de segunda ordem.

- *Método da máxima verosimilhança*

Considerando a variável aleatória  $X$  com função densidade  $f(x; \theta)$ , sendo  $\theta$  o parâmetro a estimar. Partindo dos valores amostrais  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , este método permite identificar o valor mais verosímil de gerar essas observações.

A função de verosimilhança associada ao conjunto de  $n$  observações independentes é definida por:

$$L(x_1, \dots, x_n, \theta) = f(x_1; \theta) \cdot f(x_2; \theta) \cdot \dots \cdot f(x_n; \theta) \quad . \quad (2.65)$$

O estimador,  $\hat{\theta}$ , é obtido por diferenciação de  $L$  em relação a  $\theta$  e igualando a derivada a zero; ou seja  $\hat{\theta}$  corresponde à solução da seguinte equação:

$$\frac{\partial L(x_1, \dots, x_n; \theta)}{\partial \theta} = 0 \quad . \quad (2.66)$$

Devido à natureza multiplicativa da função de verosimilhança, é usualmente realizada a maximização do logaritmo desta função, isto é:

$$\frac{\partial \log L(x_1, \dots, x_n; \theta)}{\partial \theta} = 0 \quad . \quad (2.67)$$

Se existirem vários parâmetros  $\theta_1, \dots, \theta_m$ , a expressão (2.66) é generalizada para o seguinte sistema de equações:

$$\frac{\partial L(x_1, \dots, x_n; \theta_1, \dots, \theta_m)}{\partial \theta_j} = 0; \quad j = 1, \dots, m \quad . \quad (2.68)$$

- *Intervalo de estimação*

O intervalo de estimação de uma determinada grandeza corresponde ao intervalo de valores que essa grandeza pode tomar, associado a uma dada probabilidade de ocorrência. Tal intervalo é também denominado por intervalo de confiança.

Considere-se como exemplo a média  $\mu$  estimada a partir da média amostral  $\bar{x}$ . Os valores observados numa amostra de tamanho  $n$   $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  são assimilados a um conjunto de variáveis aleatórias independentes  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , com idênticas distribuições  $f_{X_1}(x_1) = f_{X_2}(x_2) = \dots = f_{X_n}(x_n) = f_X(x)$ .

A média amostral pode assim ser considerada como uma variável aleatória,

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad , \quad (2.69)$$

com a seguinte esperança matemática:

$$\begin{aligned} E(\bar{X}) &= E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) \\ &= \frac{1}{n} \cdot n \mu = \mu \end{aligned} \quad (2.70)$$

Verifica-se assim que  $\bar{X}$  é um estimador não enviesado da média,  $\mu$ , da variável aleatória  $X$ .

Uma vez que  $\bar{X}$  é uma variável aleatória então também tem uma variância, dada por:

$$\sigma^2(\bar{X}) = \sigma^2\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sigma^2\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \quad , \quad (2.71a)$$

atendendo à independência das variáveis  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , então:

$$\sigma^2(X) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n \sigma^2(X_i) = \frac{1}{n^2} (n \sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n} \quad (2.71b)$$

Considerando o teorema do limite central (supondo que  $n$  é suficientemente grande), a variável aleatória  $\bar{X}$  tem uma distribuição gausseana com média  $\mu$  e desvio padrão  $\sigma/\sqrt{n}$ . Se utilizar a função distribuição da lei normal reduzida,  $\Phi$ , a probabilidade associada  $\bar{x}$  será:

$$F_N(\bar{x}) = \Phi\left(\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \quad (2.72)$$

Por exemplo, o intervalo de confiança do valor médio  $\mu$  (centrado em  $\bar{x}$ ) associado a um nível de confiança de 95% é definido por:

$$P\left[-1.96 < \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq 1.96\right] = 0.95 \quad , \quad (2.73a)$$

$$\bar{x} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu < \bar{x} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad . \quad (2.73b)$$

De forma idêntica se define os intervalos de confiança para outras grandezas estatísticas.

### 2.3.3.2 - Técnicas de *bootstrap* e *jackknife*

As técnicas de *bootstrap* e *jackknife* foram introduzidas como métodos computacionais de avaliação do desvio padrão de parâmetros estimados  $\hat{\theta}$ .

Seja  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  uma amostra (aleatória) duma população com uma distribuição desconhecida, para a qual se pretende estimar um parâmetro  $\theta$  a partir da seguinte relação:  $\hat{\theta} = f(x)$ . Considerando  $\hat{F}$  uma distribuição empírica, de forma que a probabilidade associada a cada uma das observações  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) é  $1/n$ .

Define-se uma amostra de *bootstrap* como sendo uma amostra de valores independentes de tamanho  $m$  obtido a partir de  $\hat{F}$ , de forma que:

$$\begin{aligned} X^* &= (x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*) \\ \hat{F} &\rightarrow (x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*) \end{aligned} \quad . \quad (2.74)$$

Os pontos de *bootstrap*,  $x_j^*$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , representam uma amostra da população obtida por amostragem com reposição a partir das  $n$  observações iniciais  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Assim, pode-se obter uma amostra de *bootstrap* do seguinte género:  $x_1^* = x_4$ ,  $x_2^* = x_8$ ,  $x_3^* = x_2$ ,  $x_4^* = x_8$ , ...,  $x_m^* = x_6$ . Ou seja a amostra  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*)$  é constituída por elementos da amostra original  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , que podem não aparecer nenhuma vez, ou uma vez, ou duas vezes, etc..

Como se pode verificar, é extremamente simples implementar a amostragem de *bootstrap* em computador, recorrendo a gerador de números pseudo-aleatórios de distribuições uniformes num intervalo fixado.

Uma vez definida a amostra  $x^*$  obtém-se uma (nova) estimativa do parâmetro  $\theta$ :  $\hat{\theta}^* = f(x^*)$ ; e a correspondente estimativa do desvio padrão  $\hat{S}_B(\hat{\theta}^*)$  do parâmetro  $\hat{\theta}^*$ .

De uma forma sumária, o algoritmo de *bootstrap* para estimar desvios padrão é o seguinte:

- 1 - definir  $m$  amostras independentes,  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*$  através de "tiragens" com reposição de uma amostra  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  retirada directamente da população;

2 - avaliar o parâmetro  $\theta$  para cada um dos valores da amostra de *bootstrap*:

$$\hat{\theta}_j^* = f(x_j^*) \quad ; \quad (2.75)$$

3 - estimar o desvio padrão  $\hat{s}_B(\hat{\theta}^*)$  através das  $m$  réplicas  $\hat{\theta}_j^*, j = 1, 2, \dots, m$ :

$$\hat{s}_B(\hat{\theta}^*) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^m (\hat{\theta}_j^* - \bar{\theta}^*)^2}{m-1}} \quad , \quad (2.76a)$$

onde,

$$\bar{\theta}^* = \frac{\sum_{j=1}^m \hat{\theta}_j^*}{m} \quad . \quad (2.76b)$$

A técnica de *jackknife* é idêntica à técnica de *bootstrap*, distinguindo-se basicamente pela forma como é realizada a amostragem ( $x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*$ ) a partir da amostra original ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ). Enquanto que pelo método de *bootstrap* essa amostragem é feita com reposição, no método de *jackknife* a amostragem é feita sem reposição, por isso, verifica-se a seguinte condição  $m \leq n$ . Assim, as técnicas de *jackknife* podem ser consideradas como uma aproximação às técnicas de *bootstrap* (Efron, 1993).

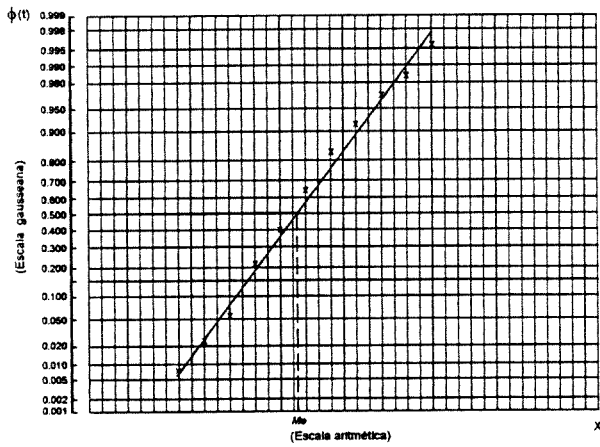
De uma forma simplificada, pode-se afirmar que estes métodos são uma ferramenta simples de averiguar a robustez das estimativas efectuadas, a partir da consideração de várias amostras obtidas de forma automática. As técnicas de *jackknife* apresentam uma grande utilidade em amostras de tamanho elevado, enquanto que as técnicas de *bootstrap* são bastante úteis em amostras de tamanho reduzido.

Várias aplicações destes métodos no campo da estatística têm sido feitas nos últimos anos (Efron, 1982, 1993; Hall, 1992), em consonância com o aumento da acessibilidade a computadores cada vez mais potentes.

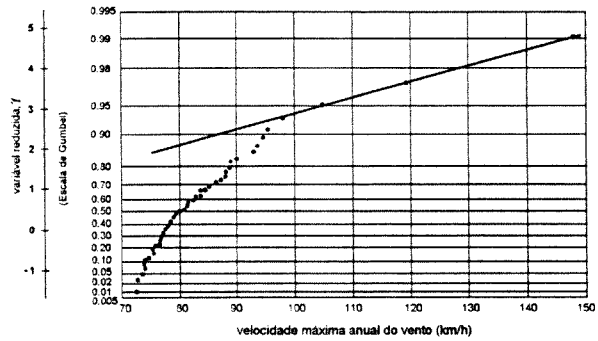
### 2.3.4 – Identificação de leis probabilísticas

As leis probabilísticas correntes (ver Anexo 1) são completamente caracterizadas por um número reduzido de parâmetros, que estão associados aos momentos estatísticos. O ajuste de leis teóricas às distribuições observadas é feito geralmente a partir da avaliação da forma dessas distribuições (através, por exemplo, dos histogramas) e da estimação dos momentos estatísticos e, por

consequência, dos parâmetros das leis (por exemplo, a média e o desvio padrão para a lei normal).



a) papel de probabilidade normal



b) papel de probabilidade de Gumbel

Fig. 2.11 - Frequências acumuladas representadas em função de uma escala convenientemente definida para diferentes leis teóricas.

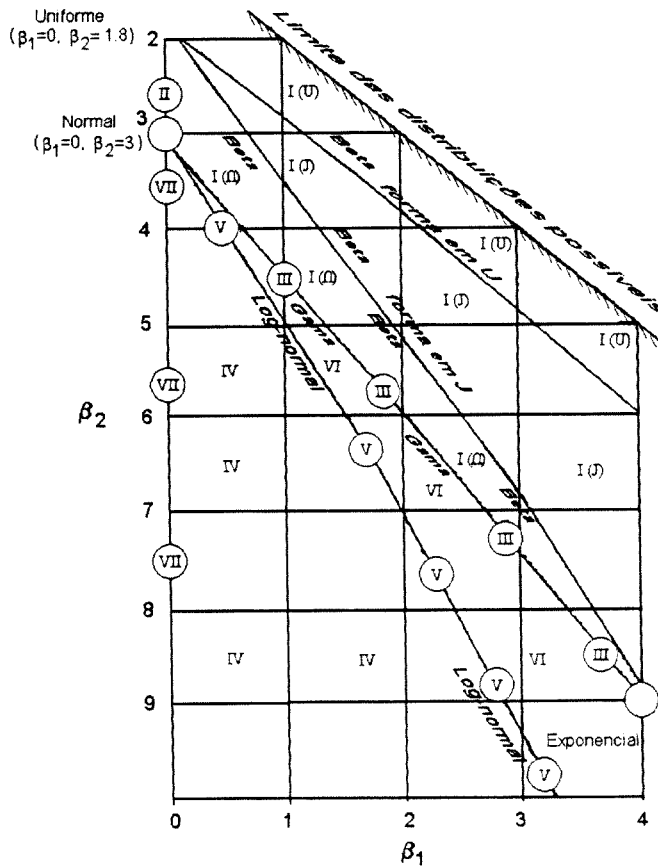


Fig. 2.12 - O sistema de Pearson.

Por vezes a escolha da lei teórica mais adequada não é uma tarefa fácil. No entanto, existem alguns processos para identificar a lei mais apropriada como, por exemplo, o traçado das frequências acumuladas em gráficos com escala conveniente definida de acordo com a lei em causa (Fig. 2.11), ou usando o sistema de Pearson baseado nos valores estimados do coeficiente de assimetria,  $\hat{\gamma}_1$ , e coeficiente de achatamento,  $\hat{\gamma}_2$  (Fig. 2.12).

O critério de Pearson para identificar o tipo de distribuição teórica exprime-se em função de dois parâmetros  $\beta_1$  e  $\beta_2$  definidos a partir de  $\hat{\gamma}_1$  e  $\hat{\gamma}_2$  através das seguintes relações:  $\beta_1 = \sqrt{\hat{\gamma}_1}$  e  $\beta_2 = \hat{\gamma}_2 + 3$  (Magnan, 1982).

Após a escolha da lei a ajustar e da avaliação dos respectivos parâmetros, é necessário testar a hipótese considerada. Entre os testes de hipóteses mais comuns encontram-se (Aivazian, 1986): o teste de normalidade baseado nas estimativas dos coeficientes de assimetria,  $\hat{\gamma}_1$ , e de achatamento,  $\hat{\gamma}_2$  (aplicável, obviamente, a distribuições gausseanas), o teste do qui-quadrado ( $\chi^2$ ) e o teste de Kolmogorov-Smirnov ( $K-S$ ) e a sua variante, o teste de Lilliefors (1967).

### 2.3.5 – Misturas de leis

Os problemas de misturas de leis ocorrem quando existem pelo menos duas características com diferentes distribuições e com pesos importantes na definição da distribuição global (Fig. 2.13). Este é o caso de sistemas estruturais que apresentam vários modos de rotura de idêntica importância e com diferentes distribuições, como por exemplo, o caso de estruturas com modos de rotura dúcteis e frágeis, ambas com probabilidades significativas de ocorrerem.

A função distribuição,  $F(x)$ , de um problema de misturas de leis é definido por:

$$F(x) = \sum_{i=1}^n p_i F_i(x) \quad ; \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1 \quad , \quad (2.77)$$

sendo  $n$  o número de leis simples com probabilidade de ocorrência,  $p_i$ , significativa, e  $F_i(x)$  a função distribuição da lei (simples)  $i$ .

A identificação de uma mistura de leis apresenta dificuldades, nomeadamente (Tassi, 1989):

- na identificação das principais componentes da mistura;
- no efeito de partição: uma mudança da definição das classes pode conduzir à modificação da forma dos histogramas;
- a mistura de leis não implica necessariamente a multimodalidade.

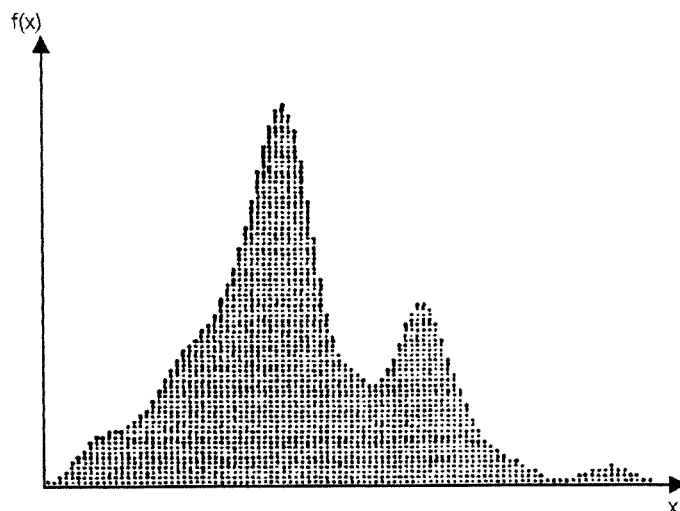


Fig. 2.13 - Distribuição da pluviosidade anual no estado de Ceará, no Brasil (Tassi, 1989).

A estimação dos parâmetros pode também ser efectuada através do método dos momentos ou do método da máxima verosimilhança, tendo em conta que além dos parâmetros das leis simples é preciso também avaliar os pesos,  $p_i$ , associados a cada uma dessas leis.

## 2.3.6 – Análise de regressão e de correlação

### 2.3.6.1 - Regressão linear simples

O método de regressão linear mais utilizado é o método dos mínimos quadrados. Este método consiste na minimização, numa determinada direcção, dos afastamentos entre os valores observados e a função a ajustar.

Considere-se os valores observados na Fig. 2.14, representados em função das duas variáveis  $X$  e  $Y$ , e a função linear genérica  $y = a + bx$  que traduz a relação entre essas duas variáveis. O objectivo do método dos mínimos quadrados é avaliar os valores de  $a$  e  $b$  que melhor traduzem essa relação.

O método dos mínimos quadrados consiste no seguinte procedimento:

- (i) Seja  $Q_{y_i} = y_i - (a + bx_i)$  o resíduo da aproximação definido como a distância vertical entre cada ponto observado  $(x_i, y_i)$  e estimado  $(\hat{x}_i, \hat{y}_i)$ . A soma dos resíduos quadráticos será então definida por:



$$Q^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (a + b x_i)]^2 \quad (2.78)$$

(ii) A determinação dos parâmetros  $a$  e  $b$  são calculados através da minimização da função  $Q^2$ . Esta minimização consiste em igualar a zero as derivadas parciais de  $Q^2$  em relação a cada parâmetro,  $a$  e  $b$ , obtendo-se o seguinte sistema de duas equações:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial b} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \bar{y} - b \cdot \bar{x} \\ b = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \end{cases} \quad (2.79)$$

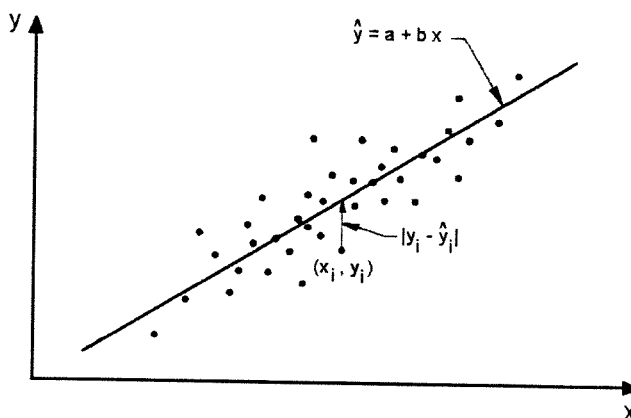


Fig. 2.14 - Regressão linear de duas variáveis.

Considere-se que para cada valor  $x_i$ , está associada uma distribuição de valores de  $y$ , e que cada uma das  $n$  distribuições,  $Y^{(i)}$ , são normais, independentes e identicamente distribuídas com média:

$$\mu_y = \alpha + \beta \cdot x \quad , \quad (2.80)$$

e variância  $\sigma^2$ . A estimativa não enviesada de  $\sigma^2$  é:

$$s_Q^2 = \frac{Q^2}{n-2} \quad (2.81)$$

O parâmetro  $a$  tem uma distribuição normal com média  $\alpha$  e variância  $\sigma_a^2$  dada por:

$$\sigma_a^2 = \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}{n \left[ \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right]} \quad (2.82)$$

e o parâmetro  $b$  tem uma distribuição normal com média  $\beta$  e variância  $\sigma_b^2$  dada por:

$$\sigma_b^2 = \frac{\sigma^2}{\left[ \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right] / n} \quad (2.83)$$

Os intervalos de confiança dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , definidos em função dos valores estimados para a média e para o desvio padrão (ver expressão 2.73) permitem definir a região de confiança para uma regressão linear (Fig. 2.15).

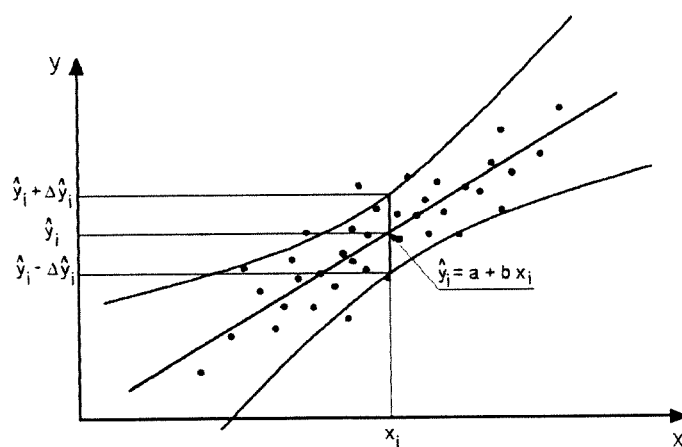


Fig. 2.15 - Região de confiança para uma regressão linear.

Uma vez estimados os coeficientes  $a$  e  $b$  e os respectivos intervalos de confiança, falta definir o grau de dependência entre as duas variáveis. Esta dependência é medida através do coeficiente de correlação linear definido por:

$$r = \frac{\frac{1}{n} \left[ \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i \right]}{\sqrt{\left[ \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) / n \right] \left[ \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \right) / n \right]}} \quad (2.84)$$

Se  $r$  é positivo, o crescimento de  $x$  corresponde a um aumento de  $y$ ; se  $r$  é negativo, o crescimento de  $x$  corresponde a uma diminuição de  $y$ . Se  $r$  é igual a 1 ou -1, todos os pontos encontram-se numa linha recta, se  $r$  é zero não há qualquer correlação entre as variáveis.

### 2.3.6.2 - Regressão multilinear

A aplicação do método dos mínimos quadrados a uma regressão multilinear consiste na generalização do procedimento descrito no ponto anterior. Se a função a ajustar for definida por  $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_px_p$ , a soma dos resíduos quadráticos será:

$$Q^2 = \sum_{i=1}^n \left[ y_i - (a_0 + a_1x_{1i} + a_2x_{2i} + \dots + a_px_{pi}) \right]^2 \quad . \quad (2.85)$$

A determinação dos  $(p + 1)$  parâmetros é realizada pelo sistema de  $(p + 1)$  equações lineares definido da seguinte forma:

$$\frac{\partial Q^2}{\partial a_j} = 0 \quad ; \quad j = 0, 1, 2, \dots, p \quad . \quad (2.86)$$

A estimativa da variância residual  $\sigma^2$  é obtida pela seguinte expressão:

$$s^2 = \frac{Q^2}{n - p - 1} \quad . \quad (2.87)$$

A variância associada aos coeficientes  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) é:

$$\sigma^2(a_j) = \frac{\sigma^2}{n^2 \cdot s_{x_j}^2} \quad , \quad (2.88)$$

sendo  $s_{x_j}^2$  a variância amostral de  $x_j$ .

A medida do grau de dependência da variável  $y$  com as  $p$  variáveis  $x_i$  é definida por:

$$r^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = \frac{\sigma^2 - \frac{Q^2}{n}}{\sigma^2} \quad . \quad (2.89)$$

### **2.3.6.3 - Regressão não linear**

A regressão não linear envolve dificuldades adicionais em relação à regressão linear. Além disso, os resultados obtidos da análise estatística apresenta dificuldades de interpretação física. No entanto, tem-se verificado nos últimos anos progressos assinaláveis, através de um conhecimento mais aprofundado das propriedades estatísticas dos modelos não lineares (Tomassone, 1983).

A aplicação do método dos mínimos quadrados a uma função,  $y = f(x)$ , não linear resulta num sistema de equações não linear, cuja resolução exige a utilização de métodos numéricos iterativos. Existem, no entanto, algumas funções (como, por exemplo, exponenciais e logarítmicas) que podem ser transformadas em funções lineares, o que simplifica significativamente o problema. Por exemplo, a função  $y = e^{(ax+b)}$  pode ser transformada numa função linear  $Z = \ln y = ax + b$ , com parâmetros  $a$  e  $b$ .

## **2.4 – MÉTODOS DE ANÁLISE DA FIABILIDADE ESTRUTURAL**

### **2.4.1 – Breve resenha histórica da evolução da teoria da fiabilidade estrutural**

O primeiro artigo onde era abordado o conceito de probabilidade associado ao estudo da segurança estrutural foi devido a Max Mayer em 1926 (Mayer, 1926), mas só na década de quarenta o problema voltou a ser mais intensamente discutido, embora mais em termos qualitativos. O desenvolvimento inicial da teoria da fiabilidade remonta a 1940, no campo da electrónica e da engenharia aeroespacial, com fins militares. O objectivo fundamental era a implementação de métodos de análise para estimar a vida útil e garantir um nível de segurança adequado para os sistemas mecânicos e electrónicos empregues, através da utilização de modelos probabilísticos (Thoft-Christensen, 1982).

Os problemas de análise estrutural têm uma natureza diferente dos problemas característicos da electrónica. Além disso, a informação básica para a aplicação das técnicas de fiabilidade é de obtenção muito mais difícil (a realização de experiências com um grande número de repetições, para definir probabilidades de rotura, apresenta custos incomparavelmente mais baixos em circuitos electrónicos). Estas dificuldades não impediram que em 1947 Freudenthal (Freudenthal, 1947), e mais tarde em 1956 com uma segunda publicação (Freudenthal, 1956), apresentasse os conceitos essenciais em que se baseia a teoria da fiabilidade estrutural.

A partir da segunda metade da década de sessenta este assunto passou a ser tratado de um modo mais consistente através de publicações devidas a Basler (1961), Bolotin (1965), Freudenthal (1966) e Ferry-Borges (1968).

A introdução de formas simplificadas, nomeadamente o método de fiabilidade do segundo momento de primeira ordem (*First Order Second Moment Reliability Method-FOSM*) (Cornell, 1969) desempenhou um papel importante nos desenvolvimentos futuros no âmbito da fiabilidade estrutural.

No entanto, este método apresentava um sério inconveniente: a probabilidade de rotura não era invariante com o critério de resistência usado. Em 1974 Hasofer e Lind (1974) apresentaram um método alternativo invariante com o critério de resistência a utilizar. Posteriormente, Rackwitz e Fiessler (1978) implementaram este método de forma a incluir informação sobre a distribuição das variáveis básicas (isto é, distribuições não normais), vulgarmente designados por métodos de fiabilidade de primeira ordem (*First Order Reliability Methods - FORM*). Mais recentemente, desenvolveram-se métodos que permitem aproximações de segunda ordem à função de resistência (Rackwitz, 1982; Thoft-Christensen, 1982; Kiureghian, 1987; Melchers, 1987).

Nos últimos anos apresentaram-se técnicas alternativas à teoria de fiabilidade clássica, como os métodos de perturbação (Liu, 1988), e técnicas complementares, como os métodos da superfície de resposta (Lo, 1989; Rajashekhar, 1993).

## 2.4.2 – Métodos de fiabilidade de primeira e segunda ordem

### 2.4.2.1 - Aproximações de primeira e segunda ordem

Como se viu na secção 2.2.5.7, se o problema de avaliação da fiabilidade estrutural se reduzir à consideração de duas variáveis normais e independentes, correspondentes à resistência  $R$  e à solicitação  $S$ , a equação de estado limite é definida pela margem de segurança  $Z = R - S$  e a probabilidade de rotura  $p_f$  é:

$$p_f = \Phi(-\beta) \quad ; \quad \beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} \quad , \quad (2.90)$$

onde  $\beta$  é o índice de fiabilidade e  $\Phi$  é a função distribuição da lei normal reduzida.

A equação (2.90) representa o valor exacto da probabilidade de rotura se as variáveis  $R$  e  $S$  tiverem uma distribuição normal. Para os outros tipos de distribuições o valor de  $p_f$  não

representa o valor exacto da probabilidade de rotura utilizando-se, por isso, conceptualmente o índice  $\beta$ . Como se pode observar pela Fig. 2.6,  $\beta$  é uma medida de segurança estrutural, sendo o seu valor tanto maior quanto menor for a probabilidade de rotura (ver Quadro 2.8).

Quadro 2.8 - Relação entre o índice de fiabilidade  $\beta$  e a probabilidade de rotura.

Índice de fiabilidade, $\beta$	Probabilidade de rotura, $p_f$	Fiabilidade $1 - p_f$	Índice de fiabilidade, $\beta$	Probabilidade de rotura, $p_f$	Fiabilidade $1 - p_f$
0.00	$0.500 \times 10^0$	0.500	3.09	$10^{-3}$	0.999000
0.50	$0.309 \times 10^0$	0.691	3.50	$0.233 \times 10^{-3}$	0.999767
1.00	$0.159 \times 10^0$	0.841	3.72	$10^{-4}$	0.9999000
1.28	$10^{-1}$	0.900	4.00	$0.317 \times 10^{-4}$	0.9999683
1.50	$0.668 \times 10^{-1}$	0.9332	4.27	$10^{-5}$	0.99999
2.00	$0.228 \times 10^{-1}$	0.9772	4.75	$10^{-6}$	0.999999
2.33	$10^{-2}$	0.9900	5.20	$10^{-7}$	0.9999999
2.50	$0.621 \times 10^{-2}$	0.99379	5.61	$10^{-8}$	0.99999999
3.00	$0.135 \times 10^{-2}$	0.99865	6.00	$10^{-9}$	0.999999999

Se o problema envolver mais do que duas variáveis aleatórias, os conceitos envolvidos na expressão (2.90) terão de ser generalizados. Seja  $X$  o vector aleatório composto pelas variáveis básicas do problema e  $g(X)$  a função que define o estado limite:

$$Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0 \quad (2.91)$$

Se as variáveis aleatórias  $X_i$  forem independentes e normalmente distribuídas e se a função  $g(X)$  for linear, então a determinação dos valores  $\mu_z$  e  $\sigma_z$  é imediata, através da consideração das propriedades aditivas da lei normal (ver expressão 2.35).

Em alguns casos correntes, a função  $g(X)$  não é linear. Este facto tem duas consequências directas: a primeira é que os dois primeiros momentos estatísticos não podem ser obtidos pelas propriedades aditivas da lei normal; a segunda é que a resposta  $Z$  resultante da aplicação da função não linear às variáveis  $X_i$  gausseanas pode ser não normal. A forma mais usual de obter os dois primeiros momentos (média e variância) de  $g(X)$  consiste em ajustar uma função aproximada no ponto mais representativo do problema em análise.

A aproximação é realizada através da consideração do desenvolvimento em série de Taylor da função  $g(X)$ :

$$Z = g(X^*) + \nabla g|_{X^*} \cdot (X - X^*) + \frac{1}{2} (X - X^*)^T \nabla^2 g|_{X^*} \cdot (X - X^*) + \dots \quad (2.92)$$

onde  $X^*$  é o ponto onde se faz a aproximação e  $\nabla^k g$  representa as derivadas parciais de ordem  $k$ .

Os métodos de primeira ordem consideram os termos de primeira ordem do desenvolvimento de Taylor da função  $g(X)$  em relação ao ponto arbitrário  $X^*$  (por exemplo, os valores médios das variáveis  $X_i$ ):

$$Z \cong g(X^*) + \left. \frac{\partial g}{\partial X} \right|_{X^*} (X - X^*) \quad (2.93)$$

Esta aproximação consiste na substituição da verdadeira superfície limite por um hiperplano tangente no ponto arbitrário  $X^*$  (Fig. 2.16) e na estimativa da probabilidade de rotura (ou índice de fiabilidade  $\beta$ ) através da equação (2.90).

Os métodos de segunda ordem permitem diminuir os erros que se obtêm das aproximações de primeira ordem a funções limites,  $g(X)$ , não lineares. As superfícies de segunda ordem que geralmente se usam na aproximação a  $g(X)$  no ponto  $X^*$ , são parabolóides ou esferas (Fig. 2.16). Várias aproximações de segunda ordem foram propostas nos últimos anos (Fiessler, 1979; Breitung, 1984; Kiureghian, 1987; Tvedt, 1990). A mais simples é baseada no ajuste através de parabolóides e foi proposta por Breitung (1984):

$$p_f \cong \phi(-\beta) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \beta \kappa_i)^{-1/2} \quad (2.94)$$

onde  $\kappa_i$  corresponde às curvaturas principais da função limite no ponto  $X^*$ .

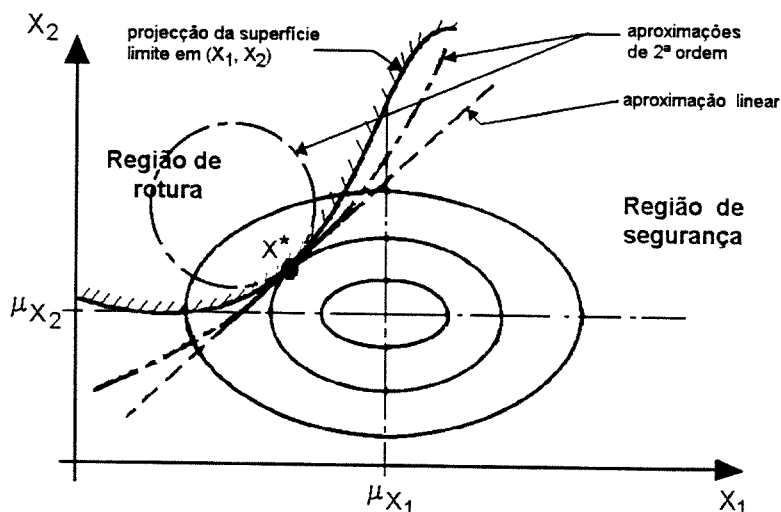


Fig. 2.16 - Aproximações à superfície de estado limite.

### 2.4.2.2 - Teoria do segundo momento

Cornell (1969) introduziu o conceito de índice de fiabilidade  $\beta$  através do cálculo da média,  $\bar{Z}$ , e da variância (ou desvio padrão,  $\sigma_Z$ ) usando a aproximação de primeira ordem da função  $g(X)$  e tendo em conta as propriedades aditivas da lei normal:

$$Z \cong a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i \quad , \quad (2.95a)$$

$$\bar{Z} \cong a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \bar{X}_i \quad , \quad (2.95b)$$

$$\sigma_Z^2 \cong \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_{X_i}^2 \quad . \quad (2.95c)$$

Assim, o índice de fiabilidade de Cornell,  $\beta_C$ , é definido por:

$$\beta_C = \frac{a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \bar{X}_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_{X_i}^2}} \quad . \quad (2.96)$$

No entanto, esta formulação além de só utilizar os dois primeiros momentos para descrever a variabilidade das variâncias aleatórias  $X_i$ , tem outro grande inconveniente:  $\beta_C$  depende do critério de resistência utilizado, isto é, se a função  $g(X)$  não for linear, o índice de fiabilidade toma valores diferentes consoante o ponto  $X^*$  onde é feita a aproximação à superfície limite (Fig. 2.17). A proposta de Cornell considerava que essa aproximação era feita no ponto definido pelos valores médios das variáveis  $X_i$ , no entanto, se o ponto escolhido for outro, o hiperplano tangente à superfície será diferente do anterior, resultando noutra valor para  $\beta$ .

Em 1974 Hasofer e Lind propuseram uma nova definição do índice de fiabilidade, com o objectivo de evitar os problemas relacionados com a falta de invariância ao linearizar a função limite  $g(X)$ .

A proposta apresentada consiste nas seguintes etapas (Fig. 2.18):

- 1 – transformar todas as variáveis aleatórias  $X_i$  em variáveis normais reduzidas  $Y_i$  (distribuições com média nula e variância unitária,  $N(0,1)$ );
- 2 – definir a superfície limite  $g(X)$  no espaço das variáveis normais reduzidas  $g(Y)$ ;



- 3 – determinar o ponto  $Y^*$  (vulgarmente designado por ponto de dimensionamento) da superfície limite  $g(Y)$ , expressa no espaço das normais reduzidas, que se encontra mais próximo da origem (isto é, dos valores médios);
- 4 – calcular o índice de fiabilidade  $\beta$ , definido como a distância do ponto de dimensionamento  $Y^*$  à origem do espaço das normais reduzidas.

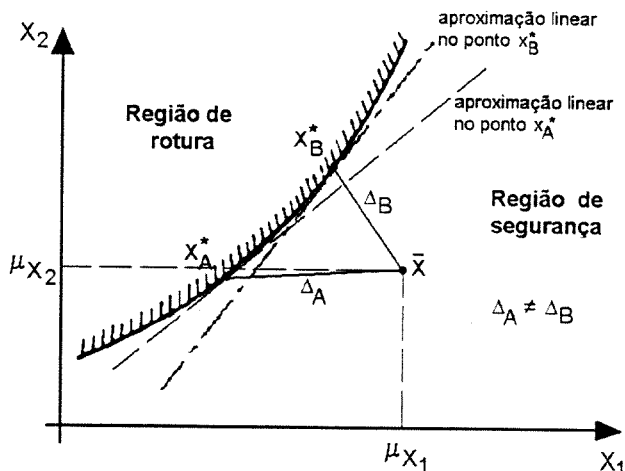


Fig. 2.17 - Índice de fiabilidade de Cornell dependente do ponto onde se faz a aproximação.

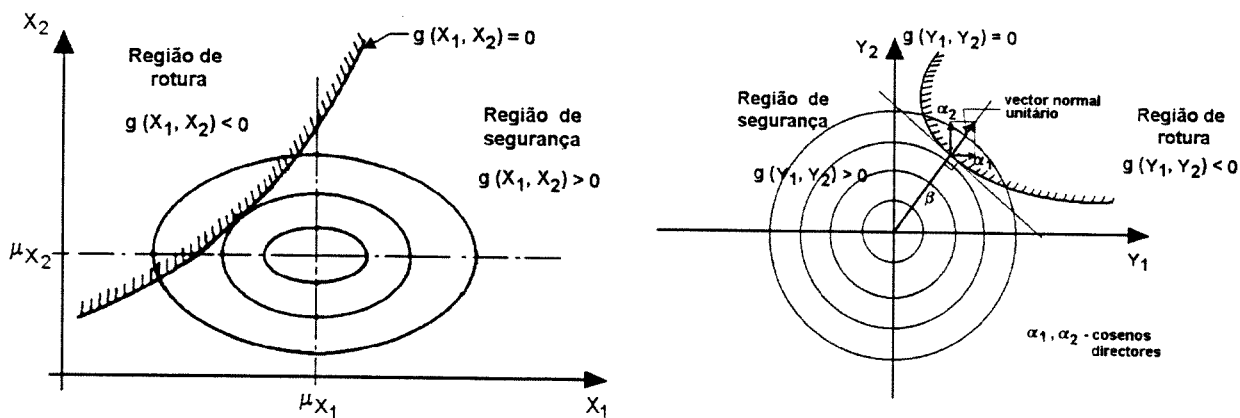


Fig. 2.18 - Transformação da função de estado limite no espaço das variáveis normais reduzidas.

A transformação de variáveis aleatórias  $X_i$  normais e independentes em variáveis aleatórias  $Y_i$  normais reduzidas e independentes é realizada pela expressão corrente:

$$Y_i = \frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}} \quad (2.97)$$

resultando  $\mu_{Y_i} = 0$  e  $\sigma_{Y_i} = 1$ . Esta transformação consiste na translação dos valores médios de  $X_i$  para a origem e na identificação das unidades dos eixos com os desvios padrão das respectivas variáveis (Fig. 2.18).

O ponto de dimensionamento  $Y^*$  é determinado tendo em conta os termos de primeira ordem do desenvolvimento da série de Taylor da função que define o estado limite:

$$g(Y) \cong g(Y^*) + \sum_{i=1}^n (Y_i - Y_i^*) \cdot \frac{\partial g}{\partial Y_i} = 0 \quad (2.98)$$

Como o ponto  $Y^*$  se encontra na superfície limite então  $g(Y^*) = 0$  e a expressão (2.98) simplifica-se para:

$$g(Y) \cong \sum_{i=1}^n (Y_i - Y_i^*) \cdot \frac{\partial g}{\partial Y_i} = 0 \quad (2.99)$$

Tendo em conta que  $\mu_{Y_i} = 0$ ,  $\sigma_{Y_i} = 1$  e as propriedades de aditividade da lei normal, então:

$$\mu_{g_{linear}}(Y) = - \sum_{i=1}^n Y_i^* \cdot \frac{\partial g}{\partial Y_i} \quad (2.100a)$$

e

$$\sigma_{g_{linear}}^2(Y) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial Y_i} \right)^2 \quad (2.100b)$$

Considerando a definição de  $\beta$ , de acordo com (2.90), vem:

$$\beta = \frac{\mu_{g_{linear}}}{\sigma_{g_{linear}}} = - \frac{\sum_{i=1}^n Y_i^* \cdot \frac{\partial g}{\partial Y_i}}{\left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial Y_i} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (2.101)$$

Uma vez que os cossenos directores  $\alpha_i$  do hiperplano tangente à superfície limite no ponto de dimensionamento  $Y^*$  são (ver Fig. 2.18):

$$\alpha_i = \frac{\frac{\partial g}{\partial Y_i}}{\left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial Y_i} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (2.102)$$

então o índice de fiabilidade  $\beta$  pode ser escrito de forma condensada por:

$$\beta = -Y^{*T} \cdot \alpha \quad , \quad (2.103)$$

que mostra de forma evidente que  $\beta$  corresponde à mínima distância da origem (do espaço das variáveis normais reduzidas,  $Y$ ) à superfície limite (a que corresponde o ponto de dimensionamento  $Y^*$ ).

Se a função limite não for linear, a determinação do ponto de dimensionamento é feita de modo iterativo.

Saliente-se neste procedimento a interpretação física dos cossenos directores  $\alpha_i$ . Eles são uma medida da sensibilidade da função limite  $g(Y)$ , no ponto de dimensionamento, relativamente a cada uma das variáveis aleatórias  $Y_i$ . Assim, se  $\alpha_i$  for aproximadamente igual a zero a função limite não é praticamente influenciada pela variável  $Y_i$ ; se pelo contrário  $\alpha_i$  se aproximar de 1 ou -1 a variável  $Y_i$  tem uma influência muito grande sobre o estado limite em causa, correspondendo o valor negativo às situações em que um decréscimo de  $Y_i$  corresponde um aumento do valor de  $g(Y)$ .

#### 2.4.2.3 - Inclusão de informação das distribuições. Métodos de transformação

Os métodos de fiabilidade baseados nos dois primeiros momentos estatísticos não permitem ter em conta a informação sobre distribuições não normais das variáveis aleatórias, nem o grau de dependência entre elas. A inclusão deste tipo de informação nos métodos apresentados nos pontos anteriores, definem os métodos de fiabilidade de primeira e segunda ordem (designados por métodos FORM/SORM na literatura de língua inglesa) (Fiessler, 1979; Hohenbichler, 1981; Breitung, 1984; Madsen, 1986; Tvedt, 1990).

- *Transformação de variáveis aleatórias não normais em variáveis aleatórias normais*

A transformação de variáveis aleatórias independentes com distribuições não normais em variáveis aleatórias normais reduzidas, pode ser feita separadamente para cada uma das variáveis, da seguinte forma (Fig. 2.19):

$$\Phi(y_i) = F_{X_i}(x_i) \Rightarrow y_i = \Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i)] \quad , \quad (2.104)$$

sendo  $F_{X_i}$  a função distribuição da variável  $X_i$  e  $\Phi$  a função distribuição da lei normal reduzida.

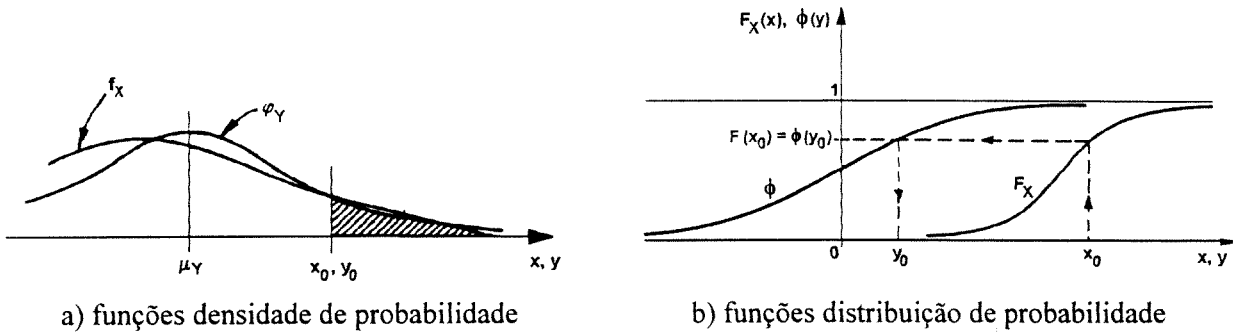


Fig. 2.19 - Transformação de uma variável não normal,  $X$ , numa variável normal reduzida,  $Y$ .

Geralmente esta transformação é feita através da escolha de um ponto  $x_0$  (ver Fig. 2.19) onde se faz a aproximação da lei normal à lei não normal. Existem vários métodos para fazer essa aproximação, entre os quais se destacam os seguintes (Thoft-Christensen, 1986):

*1º método:* A aproximação é realizada de forma que a distribuição não normal e a distribuição normal a aproximar, tenham a mesma média,  $\mu$ , e a mesma probabilidade de rotura,  $p_f$ .

Seja  $X$  a variável aleatória não normal e  $Z$  a variável aleatória normal, os parâmetros da variável  $Z$  serão definidos por:

$$\begin{aligned} \mu_Z &= \mu_X = \mu \\ \sigma_Z &= \sigma_X \cdot \frac{\Phi^{-1}(p_f) - \mu}{F^{-1}(p_f) - \mu} \end{aligned} \quad (2.105)$$

A variável normal reduzida  $Y$  é obtida através da transformação corrente  $Y = (Z - \mu_Z) / \sigma_Z$ .

*2º método:* Este método é idêntico ao anterior, sendo a aproximação feita na vizinhança do ponto de dimensionamento,  $X^*$ . Portanto, deve-se definir  $p_f$  pela seguinte expressão:

$$p_f = \Phi\left(\frac{X^* - \mu_X}{\sigma_X}\right) \quad (2.106)$$

Como a determinação de  $X^*$  envolve um processo iterativo, o valor de  $p_f$  deverá ser actualizado em cada ciclo iterativo.

*3º método:* A aproximação é feita na vizinhança do ponto de dimensionamento,  $X^*$ , mas de forma que além das funções de distribuição também as funções densidade de probabilidade sejam idênticas nesse ponto. Assim:

$$F_X(X^*) = F_Z(Z^*) = \Phi\left(\frac{Z^* - \mu_Z}{\sigma_Z}\right) \quad , \quad (2.107)$$

$$f_X(X^*) = f_Z(Z^*) = \varphi\left(\frac{Z^* - \mu_Z}{\sigma_Z}\right) \cdot \frac{1}{\sigma_Z} \quad , \quad (2.108)$$

onde  $X$  é a variável aleatória não normal e  $Z$  é a variável normal a aproximar. Invertendo a expressão (2.107):

$$\frac{Z^* - \mu_Z}{\sigma_Z} = \Phi^{-1}\left[F_X(X^*)\right] \quad , \quad (2.109)$$

considerando o valor da função densidade da normal reduzida dos dois membros desta equação e dividindo por  $\sigma_Z$  vem:

$$\varphi\left(\frac{Z^* - \mu_Z}{\sigma_Z}\right) \cdot \frac{1}{\sigma_Z} = \varphi\left\{\Phi^{-1}\left[F_X(X^*)\right]\right\} \cdot \frac{1}{\sigma_Z} \quad . \quad (2.110)$$

Repare-se que o primeiro membro desta equação, de acordo com (2.108), corresponde a  $f_X(X^*)$ , então o desvio padrão da variável normal aproximada,  $Z$ , é dado por:

$$\sigma_Z = \frac{\varphi\left\{\Phi^{-1}\left[F_X(X^*)\right]\right\}}{f_X(X^*)} \quad . \quad (2.111)$$

Substituindo esta expressão em (2.109) obtém-se o valor médio de  $Z$ :

$$\mu_Z = Z^* - \frac{\varphi\left\{\Phi^{-1}\left[F_X(X^*)\right]\right\} \cdot \Phi^{-1}\left[F_X(X^*)\right]}{f_X(X^*)} \quad . \quad (2.112)$$

Considerando a variável aleatória normal  $Z$  definida pelos parâmetros  $\mu_Z$  e  $\sigma_Z$  de acordo com as expressões (2.112) e (2.111), respectivamente, a variável normal reduzida,  $Y$ , correspondente é obtida pela expressão usual  $Y = (Z - \mu_Z)/\sigma_Z$ .

- *Transformação de variáveis dependentes em variáveis não correlacionadas*

A transformação de um conjunto de variáveis aleatórias correlacionadas,  $X$ , num conjunto de variáveis aleatórias não correlacionadas  $Y$  é feito da seguinte maneira (Thoft-Christensen, 1986):

- Seja  $C_X$  a matriz de covariância relativa ao conjunto de variáveis  $X$ ,

$$C_X = \begin{bmatrix} V_{X_1} & cov(X_1, X_2) & \cdots & cov(X_1, X_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ cov(X_n, X_1) & cov(X_n, X_2) & \cdots & V_{X_n} \end{bmatrix}, \quad (2.113)$$

onde  $V_{X_i}$  é a variância da variável  $X_i$  e  $cov(X_i, X_j)$  é a covariância entre as variáveis  $X_i$  e  $X_j$  (covariância é nula se as duas variáveis não forem correlacionadas). A matriz  $C_X$  pode ser diagonalizada, considerando a transformação:

$$Y = A^T \cdot X, \quad (2.114)$$

onde  $A$  é uma matriz ortogonal com vetores coluna iguais aos vetores próprios da matriz de covariância  $C_X$ . A matriz diagonal de covariância  $C_Y$ , do conjunto de variáveis  $Y_i$  será definida por:

$$C_Y = A^T \cdot C_X \cdot A = \begin{bmatrix} V_{Y_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & V_{Y_n} \end{bmatrix}. \quad (2.115)$$

Os elementos da diagonal da matriz  $C_Y$  são iguais aos valores próprios da matriz  $C_X$ .

Os valores médios das variáveis  $Y$  serão dados pela transformação (2.114):

$$\begin{Bmatrix} E(Y_1) \\ \vdots \\ E(Y_n) \end{Bmatrix} = A^T \begin{Bmatrix} E(X_1) \\ \vdots \\ E(X_n) \end{Bmatrix}. \quad (2.116)$$

## 2.4.3 – Aplicação dos métodos de fiabilidade às técnicas de elementos finitos

### 2.4.3.1 - Caracterização dos diferentes métodos

Os primeiros trabalhos sobre aplicações de técnicas probabilísticas e estatísticas em modelos de elementos finitos limitavam-se a estruturas com comportamento linear ou com um comportamento não linear traduzido por relações constitutivas simplistas (Vanmarcke, 1983; Kiureghian, 1988; Shinozuka, 1988; Spanos, 1989). Trabalhos recentes têm apresentado propostas e aplicações sobre o estudo da fiabilidade a análises não lineares de estruturas (Liu, 1989, 1991; Teigen, 1991a, 1991b; Rajashekhar, 1995; Eibl, 1995; Zhang, 1996). Estes métodos podem ser divididos, de forma genérica, em três grupos: métodos de fiabilidade, métodos de perturbação e métodos de simulação.

Nos métodos de fiabilidade o objectivo principal é avaliar a probabilidade de rotura, que divide o espaço da resposta estrutural em estados seguros e estados de rotura. Os princípios para incluir os métodos de fiabilidade, de primeira e de segunda ordem nas técnicas de elementos finitos tendo em conta as relações constitutivas não lineares, são apresentados por Liu e Kiureghian (1991). Neste grupo incluem-se os métodos de superfície de resposta que se consideram como uma extensão do método de fiabilidade de primeira e de segunda ordem (Lo, 1989; Rajashekhar, 1995). Este método consiste na substituição da função limite por uma função analítica simplificada, denominada por superfície de resposta.

Os métodos de perturbação consistem na aplicação dos desenvolvimentos, de primeira ou de segunda ordem, em séries de Taylor das equações que regem o problema em termos de elementos finitos. O comportamento estrutural é caracterizado em termos dos valores médios e em termos dos desvios, em relação aos valores médios, das variáveis aleatórias básicas. A média e a variância da resposta estrutural são definidas em função das médias e das variâncias das variáveis aleatórias básicas. Desta forma, nenhuma informação quanto ao tipo de distribuição é incorporada na formulação. Os métodos de perturbação têm sido aplicados nas técnicas de elementos finitos com o nome de método de elementos finitos probabilísticos (PFEM na literatura de língua inglesa) (Liu, 1988; Eibl, 1995).

Entre os métodos de simulação a técnica mais corrente é a de Monte Carlo. Este tipo de métodos exige um grande número de amostras para avaliar probabilidades de rotura muito pequenas, correntes nos problemas estruturais. Técnicas alternativas de redução da variância são, normalmente, utilizadas em conjunto com o método de Monte Carlo, para tornar este tipo de método mais eficiente. O método de Monte Carlo e as suas extensões mais correntes serão abordados com mais detalhe adiante.

#### **2.4.3.2 - Métodos de perturbação**

Os métodos de perturbação consistem nas seguintes fases:

- 1 – caracterização das variáveis aleatórias (referentes às propriedades mecânicas dos materiais, às imperfeições geométricas e às acções) através dos valores médios, dos desvios padrão e das correlações entre variáveis;
- 2 – determinação da resposta estrutural média através de uma análise determinística considerando os valores médios das variáveis aleatórias básicas;

- 3 – determinação da matriz de covariância das variáveis que caracterizam a resposta estrutural;
- 4 – avaliação da probabilidade de rotura.

De acordo com a formulação geral de elementos finitos, em termos determinísticos (ver com mais detalhe no Capítulo 3), o equilíbrio é assegurado pela seguinte condição:

$$K(a) \cdot a = F \quad , \quad (2.117)$$

onde  $K(a)$  representa a matriz de rigidez tangente da estrutura, definida em função dos deslocamentos nodais  $a$ , e  $F$  corresponde ao vector das forças nodais representativas das acções exteriores. Os métodos de perturbação consistem em considerar os desvios em torno dos valores médios, resultando no seguinte (Eibl, 1995):

$$(\bar{K} + \delta K) \cdot (\bar{a} + \delta a) = \bar{F} + \delta F \quad , \quad (2.118)$$

onde  $\bar{K}$ ,  $\bar{a}$  e  $\bar{F}$  são os valores médios das respectivas grandezas e  $\delta K$ ,  $\delta a$  e  $\delta F$  são os desvios em relação a essas grandezas. Desenvolvendo esta expressão vem:

$$\bar{K} \cdot \bar{a} + \delta K \cdot \bar{a} + \bar{K} \cdot \delta a + \delta K \cdot \delta a = \bar{F} + \delta F \quad . \quad (2.119)$$

Tendo em conta que  $\bar{K} \cdot \bar{a} = \bar{F}$ , de acordo com a equação (2.117) e desprezando os termos de segunda ordem  $\delta K \cdot \delta a$ , a expressão (2.119) simplifica-se para:

$$\delta K \cdot \bar{a} + \bar{K} \cdot \delta a = \delta F \quad , \quad (2.120)$$

ou ainda

$$\delta K \cdot \bar{a} = -K_M \cdot \delta_q \quad , \quad (2.121)$$

com

$$\delta_q = \begin{Bmatrix} \delta a_1 \\ \vdots \\ \delta a_{i-1} \\ \delta F_i \\ \delta a_{i+1} \\ \vdots \\ \delta a_n \end{Bmatrix} \quad , \quad K_M = \begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1\ i-1} & -f_1 & K_{1\ i+1} & \cdots & K_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & & \cdots & \\ K_{i-1\ 1} & \cdots & K_{i-1\ i-1} & -f_{i-1} & K_{i-1\ i+1} & \cdots & K_{i-1n} \\ K_{i1} & \cdots & K_{i\ i-1} & -f_i & K_{i\ i+1} & \cdots & K_{in} \\ K_{i+1\ 1} & \cdots & K_{i+1\ i-1} & -f_{i+1} & K_{i+1\ i+1} & \cdots & K_{i+1n} \\ \vdots & \cdots & & & & \cdots & \\ K_{n1} & \cdots & K_{n\ i-1} & -f_n & K_{n\ i+1} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \quad , \quad (2.122)$$



onde  $f$  é o vector das forças unitárias que descreve a distribuição, considerada constante, das forças exteriores na estrutura.

Os desvios da resposta estrutural,  $\delta_q$ , são determinados do seguinte modo: após o cálculo dos valores médios dos deslocamentos nodais  $\bar{a}$  pela equação (2.117),  $\delta_q$  é calculado pela seguinte expressão (de acordo com a equação 2.121):

$$\delta_q = -K_M^{-1} \cdot \delta K \cdot \bar{a} \quad . \quad (2.123)$$

Os métodos dos elementos finitos probabilísticos permitem determinar a matriz de covariância,  $C_q$ , das variáveis  $q$  do sistema estrutural a partir da matriz de covariância,  $C_v$ , das variáveis aleatórias básicas  $v$ , do seguinte modo:

$$C_q = \frac{\partial q}{\partial v} \cdot C_v \cdot \frac{\partial q^T}{\partial v} \quad . \quad (2.124)$$

A matriz de covariância das variáveis básicas  $v$  pode ser definida em função dos respectivos desvios padrão  $\sigma_v$  e das correlações  $\rho$  entre elas:

$$C_v = \sigma_v \cdot C_\rho \cdot \sigma_v^T \quad , \quad (2.125)$$

sendo  $C_\rho$  a matriz das correlações entre as variáveis básicas e  $\sigma_v$  o vector contendo os desvios padrão dessas variáveis.

Considerando que a variação de rigidez implícita na equação (2.123) resulta das variabilidades das variáveis aleatórias  $v$ , obtém-se:

$$\sigma_q = \frac{\partial q}{\partial v} \cdot \sigma_v = -K_M^{-1} \cdot \frac{\partial K}{\partial v} \cdot \bar{a} \cdot \sigma_v \quad . \quad (2.126)$$

Aplicando as equações (2.126) e (2.125) na equação (2.124) obtém-se a matriz de covariância das variáveis do sistema estrutural:

$$C_q = K_M^{-1} \cdot \frac{\partial K}{\partial v} \cdot \bar{a} \cdot \sigma_v \cdot C_\rho \cdot \sigma_v^T \cdot \bar{a}^T \cdot \frac{\partial K^T}{\partial v} \cdot (K_M^{-1})^T \quad , \quad (2.127)$$

$$\begin{matrix} [m \times m] & [m \times n] & [n \times n] \end{matrix}$$

onde  $m$  é o número de graus de liberdade da estrutura e  $n$  é o número de graus de liberdade estocásticos (ou seja o número de variáveis aleatórias básicas).

Uma vez definida a matriz de covariância e conhecida a resposta estrutural em termos de valores médios, a determinação da fiabilidade estrutural é feita da maneira usual.

### 2.4.3.3 - Métodos de fiabilidade

Considerando os vectores  $s$  e  $v$  representando, respectivamente, os efeitos das acções e as variáveis aleatórias básicas (materiais, geometria, acções). Estes dois grupos de variáveis estão relacionados através de equações do tipo  $S = S(V)$ . Nos modelos de elementos finitos, esta relação não é explícita podendo ser somente avaliada de forma discreta através de algoritmos em códigos computacionais.

A tarefa principal na aplicação da teoria clássica de fiabilidade estrutural, é a determinação do ponto de dimensionamento. Este ponto é obtido através de um algoritmo iterativo de busca da mínima distância entre a superfície limite e a origem do espaço das variáveis normais reduzidas. Essa busca é realizada através da utilização do vector gradiente da função que descreve o estado limite, definida em termos de variáveis normais reduzidas.

De acordo com a regra de diferenciação em cadeia, o gradiente da função limite pode ser determinado por:

$$\nabla_v g J_{y,v}^{-1} = \left( \nabla_s g|_v J_{s,v} + \nabla_v g|_s \right) J_{y,v}^{-1} \quad , \quad (2.128)$$

onde:

$\nabla_s g|_v = \left. \frac{\partial g(s,v)}{\partial s} \right|_v$ , é o gradiente da função limite  $g(s,v)$  em relação a  $s$  (para um valor de  $v$  fixo);

$\nabla_v g|_s = \left. \frac{\partial g(s,v)}{\partial v} \right|_s$ , é o gradiente da função limite  $g(s,v)$  em relação a  $v$  (para um valor de  $s$  fixo);

$J_{y,v} = \frac{\partial Y}{\partial v}$ , é a matriz do Jacobiano correspondente à transformação das variáveis aleatórias básicas  $v$  em variáveis aleatórias normais reduzidas (ver expressão 2.97);

$J_{s,v} = \frac{\partial s}{\partial v}$ , é a matriz do Jacobiano correspondente à transformação das variáveis aleatórias básicas  $v$  em variáveis que representam o efeito das acções,  $s$  (ou seja, a resposta estrutural).

Na Fig. 2.20 representa-se de forma esquemática como é que funciona um programa de elementos finitos em conjunto com as técnicas de fiabilidade clássicas (Liu, 1991).

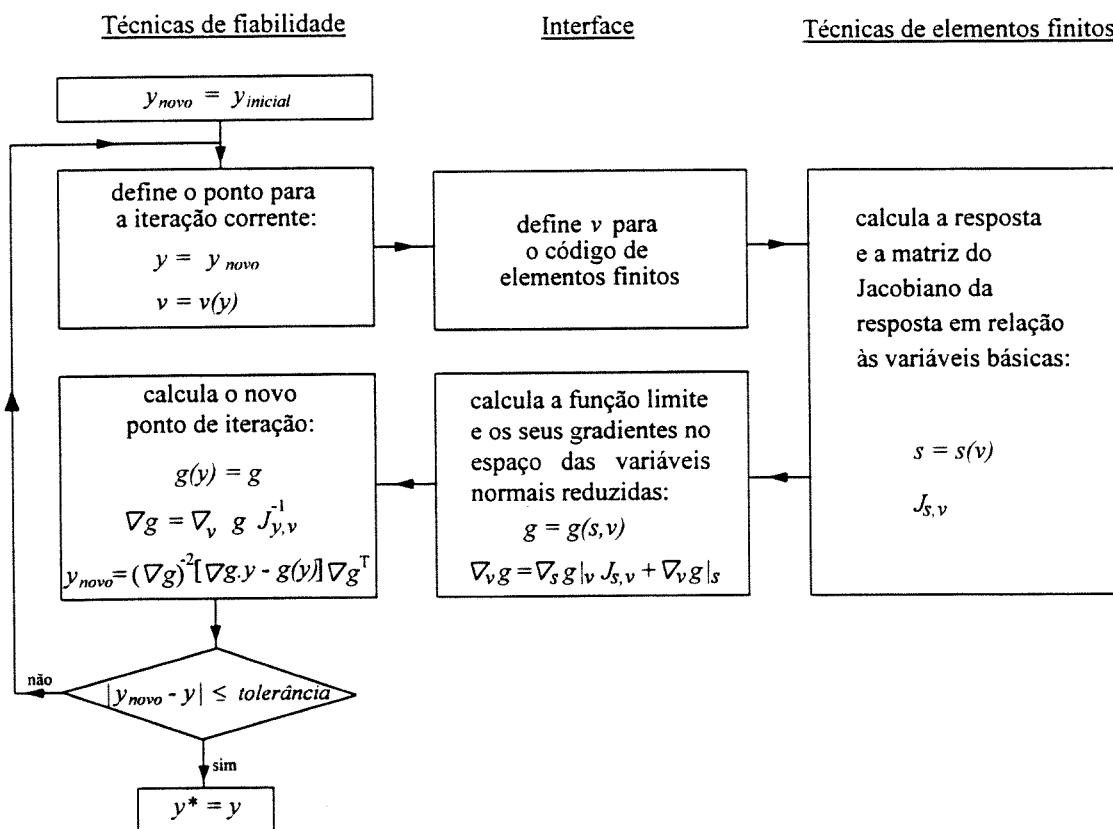


Fig. 2.20 - Representação esquemática do funcionamento de um programa de elementos finitos em conjunto com técnicas de fiabilidade clássica.

A determinação do gradiente  $\nabla_s g|_v$  e  $\nabla_v g|_s$  é relativamente simples, dado que  $g(s,v)$  é uma função explícita de  $s$  e  $v$ . A matriz do Jacobiano  $J_{y,v}$  e a sua inversa é também determinada de forma simples. No entanto, o cálculo de  $J_{s,v}$  não é fácil. Um elemento qualquer,  $\partial s_i / \partial v_j$ , desta matriz representa a derivada parcial da resposta estrutural  $s_i$  (por exemplo, a componente de um deslocamento ou de uma tensão) em relação à variável básica  $v_j$  (por exemplo, a propriedade de um material, um parâmetro geométrico ou uma acção). Tais medidas de sensibilidade não são geralmente implementadas nos programas correntes de elementos finitos. Por isso, a utilização de técnicas eficientes para determinar a matriz do Jacobiano  $J_{s,v}$  é a chave da implementação das técnicas de fiabilidade clássicas de primeira e de segunda ordem nos códigos computacionais de elementos finitos (Liu, 1991; Zhang, 1996).

#### 2.4.3.4 - Métodos da superfície de resposta

Os métodos da superfície de resposta surgiram como uma extensão aos métodos clássicos de fiabilidade. Estes métodos são especialmente utilizados em problemas onde a função limite,  $g(X)$ , só pode ser obtida pontualmente, como é o caso dos modelos de elementos finitos. A simplicidade de aplicação a problemas estruturais analisados pela técnica dos elementos finitos levou à sua utilização em modelos com algum grau de complexidade (Rajashekar, 1995; Devictor, 1997).

Seja  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  o vector das variáveis aleatórias básicas e  $S$  a resposta estrutural função das variáveis básicas, isto é,  $S = g(X)$ . Em termos de elementos finitos, esta função é desconhecida. A aplicação do método da superfície de resposta consiste em substituir a relação original entre  $S$  e  $X$  por uma função analítica,  $\tilde{g}(X)$  (geralmente, uma função polinomial até ao segundo grau).

Este método consiste nos seguintes passos:

- 1 – definir um conjunto de vectores  $X$  em número suficiente para caracterizar a função  $\tilde{g}(X)$  e para avaliar o ajuste aos valores reais;
- 2 – determinar a resposta estrutural para cada um dos conjuntos definidos no ponto anterior, através de análises por elementos finitos;
- 3 – determinar os coeficientes da função  $\tilde{g}(X)$  recorrendo aos resultados das análises por elementos finitos;
- 4 – avaliar a qualidade do ajuste de  $\tilde{g}(X)$  aos valores obtidos das análises efectuadas, se a qualidade desse ajuste for insuficiente voltar ao primeiro ponto;
- 5 – uma vez definida a função  $\tilde{g}(X)$ , a fiabilidade estrutural pode ser obtida pelas técnicas usuais de fiabilidade abordadas na secção 2.4.2 ou usando métodos de simulação.

A escolha do grau do polinómio a aproximar aos valores definidos nas análises requer algum cuidado. O grau de  $g(\tilde{X})$  deverá ser menor ou igual ao grau de  $g(X)$  de forma a obter sistemas de equações lineares bem condicionados, para a determinação dos coeficientes. Além disso, deve-se ter em conta que os termos de ordem superior podem apresentar um comportamento errático nos sub-domínios não abordados pelos valores considerados nas análises (Engelund, 1992). Por outro lado, deve-se ter em conta que, apesar dos termos de ordem superior do polinómio conduzirem, em geral, a resultados mais aproximados, o custo em termos computacionais pode ser elevado.

A avaliação da fiabilidade estrutural exige "somente" que se obtenha uma boa aproximação de  $g(X)$  na zona do ponto de dimensionamento, ou seja, na região de rotura. Assim, o processo de ajuste deverá ter em conta que essa região é bem representada. Como a zona de rotura é desconhecida à partida, o procedimento de ajuste deverá utilizar técnicas de fiabilidade que a permitam detectar e definir uma procura dirigida para o ponto de dimensionamento (Bucher, 1990; Rajashekhar, 1993).

Na ausência de informações adicionais a escolha dos vectores  $X$  a analisar (também designados por pontos experimentais ou experiências), deverá ser inicialmente centrada em torno dos valores médios das variáveis. Os pontos são geralmente definidos em função dos valores centrais e dos desvios padrão;  $X_i = X_{c_i} \pm h \cdot \sigma_{x_i}$ , sendo  $h$  um coeficiente arbitrário com um valor entre 2 e 3 na primeira iteração do processo de avaliação de  $\tilde{g}(x)$  e cerca de 1 nas iterações seguintes (Faravelli, 1989; Bucher, 1990; Rajashekhar, 1993).

## 2.5 – MÉTODO DE MONTE CARLO

### 2.5.1 – Princípios de simulação

A probabilidade de rotura é definida pelo integral da função densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias básicas, no domínio da rotura definido pela função limite (conforme se verificou na equação 2.29). A determinação exacta deste integral para problemas correntes de estruturas é geralmente impraticável, mesmo utilizando técnicas numéricas usuais como o método de Simpson. A teoria de fiabilidade clássica, descrita anteriormente, consiste na aplicação de técnicas numéricas de avaliação da probabilidade de rotura, partindo da hipótese que a resposta estrutural tem uma distribuição normal (definida no espaço das variáveis normais reduzidas obtidas por transformação das variáveis básicas) na vizinhança do ponto de dimensionamento. Esta hipótese permite utilizar a solução (que é conhecida) de integração de leis normais, evitando assim o cálculo explícito do integral, reduzindo o problema à determinação da posição do ponto de dimensionamento.

A utilização das técnicas de simulação permite obter estimativas não enviesadas do integral através de procedimentos que permitem considerar de forma aproximada o comportamento irregular da resposta estrutural. As técnicas de simulação usualmente utilizadas são baseadas no método de Monte Carlo. De uma forma genérica, o método de Monte Carlo consiste na simulação das variáveis aleatórias básicas,  $X^{(i)} = (X_1^{(i)}, X_2^{(i)}, \dots, X_n^{(i)})$ , tendo em conta as respectivas distribuições; na avaliação das respostas estruturais,  $Y^{(i)}$ , associadas a cada grupo de

variáveis básicas simuladas; e, no tratamento dessas respostas como uma amostra da distribuição de  $Y$ .

A simulação das variáveis básicas é feita através da geração sucessiva de números com distribuições idênticas às respectivas variáveis. Neste processo utiliza-se um gerador de números aleatórios como uma roleta de um casino (daí o nome Monte Carlo). Em termos computacionais, a roleta mecânica é substituída por um algoritmo programado que permite gerar uma sequência de números pseudo-aleatórios com distribuição uniforme no intervalo  $]0,1[$ .

O algoritmo de geração é baseado numa fórmula matemática recursiva que partindo de um número previamente definido (denominado de "semente") permite gerar sequencialmente todos os números pseudo-aleatórios seguintes. Portanto, o mecanismo de geração é completamente determinístico (por isso se designa de geração pseudo-aleatória). Existem vários algoritmos diferentes para gerar sequências de números com comportamento caótico. A qualidade do gerador de números pseudo-aleatórios deve ser sempre verificada através de uma série de testes estatísticos para averiguar a independência e a uniformidade da distribuição (Rubinstein, 1981).

O número de simulações (e, por consequência, o número de experiências) a realizar depende, essencialmente, da ordem de grandeza da probabilidade de rotura,  $p_f$ , e do problema estrutural, ou seja, da função que descreve o estado limite,  $g(X)$ . Esse número aumenta drasticamente para probabilidades muito pequenas, sendo este o principal (e praticamente único) inconveniente do método de Monte Carlo. A irregularidade da função limite,  $g(X)$ , é outro dos factores que conduzem ao aumento do número de simulações.

Teoricamente, se o gerador de números (pseudo-)aleatórios garantir as propriedades de independência e de uniformidade, o método de Monte Carlo fornece resultados exactos quando o número de simulações,  $n$ , tende para o infinito:

$$p_f = P[g(x) \leq 0] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K[g(X) \leq 0]}{n} \quad , \quad (2.129)$$

onde  $K[g(X) \leq 0]$  é o número de experiências em que foi atingido ou ultrapassado o estado limite. Outra alternativa para obter a probabilidade de rotura é a determinação dos momentos estatísticos e o ajuste de uma função de probabilidade teórica que permita posteriormente a sua avaliação.

As aplicações do método de Monte Carlo na avaliação da fiabilidade estrutural dividem-se basicamente em duas classes: métodos de simulação pura e os métodos semi-analíticos. Os primeiros baseiam-se na formulação original do método de Monte Carlo e os segundos são

utilizados em conjunto com outros tipos de métodos fiabilísticos para detectar mais rapidamente a região de rotura.

### 2.5.2 – Técnicas de simulação pura

A probabilidade de rotura pode ser descrita pelo seguinte integral:

$$p_f = \int_{g(X) \leq 0} I[g(X) \leq 0] \cdot f_X(X) dX \quad , \quad (2.130)$$

sendo  $I$  uma função "indicadora" definida do seguinte modo:

$$I = \begin{cases} 1 & ; \quad g(X) \leq 0 \quad (\text{região de rotura}) \\ 0 & ; \quad g(X) > 0 \quad (\text{região de segurança}) \end{cases} \quad . \quad (2.131)$$

O método de Monte Carlo utiliza técnicas discretas (sucessivas simulações) de integração, assim, o integral da equação (2.130) é aproximado pelo seguinte somatório (Augusti, 1984; Ang, 1984; Melchers, 1987):

$$p_f \cong \tilde{p}_f = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I[g(\hat{X}^{(i)}) \leq 0] \quad , \quad (2.132)$$

onde  $n$  é o número total de simulações e  $\hat{X}^{(i)}$  é o vector das variáveis básicas que representa a simulação  $i$ .

Os resultados obtidos das experiências realizadas podem ser representadas por curvas de frequências acumuladas  $F_g$  (Fig. 2.21). Conforme se pode observar, quanto menor a probabilidade de rotura, menor o número provável de observações na região de interesse ( $g(X) \leq 0$ ). Ou seja, a grande maioria das experiências situam-se na região amplamente segura, com interesse reduzido na avaliação da segurança.

A estimativa de  $p_f$ , obtida pela equação (2.132), pode ser melhorada através do ajuste de uma função distribuição apropriada na zona de interesse,  $g(X) \leq 0$  (Fig. 2.21). No entanto, o ajuste de uma lei teórica pode apresentar dificuldades, sobretudo se a resposta estrutural próximo da zona de rotura apresentar um comportamento extremamente irregular.

Uma das questões que se põe neste tipo de método é saber qual o número de simulações a efectuar de forma a estimar convenientemente a probabilidade de rotura. Uma das formas de

avaliar esse número é estimar a variância de  $p_f$  calculada pela expressão (2.132). Por definição o valor médio desta distribuição é:

$$E(\tilde{p}_f) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} E[I(g(X) \leq 0)] = E[I(g(X) \leq 0)] \quad , \quad (2.133)$$

sendo  $\tilde{p}_f$  o valor estimado de  $p_f$  pela equação (2.132). A respectiva variância será então:

$$\sigma_{\tilde{p}_f}^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2} \sigma^2[I(g(X) \leq 0)] = \frac{\sigma_{I[g(X) \leq 0]}^2}{n} \quad . \quad (2.134)$$

Esta expressão mostra que o desvio padrão de  $\tilde{p}_f$  varia directamente com o desvio padrão da função "indicadora"  $I$  e inversamente com  $\sqrt{n}$ .

Broding (1964) sugeriu para uma primeira estimativa do número,  $n$ , de simulações para um nível de confiança  $c$  da estimativa de  $p_f$ , a seguinte expressão:

$$n > \frac{-\ln(1-c)}{p_f} \quad . \quad (2.135)$$

Por exemplo, para uma probabilidade de rotura da ordem de  $p_f = 10^{-4}$  e para um nível de confiança  $c = 95\%$  seriam necessárias cerca de 30.000 simulações, segundo a equação (2.135). Outros autores (Bjerager, 1990) sugerem valores entre  $1/p_f$  e  $10/p_f$ , ou seja, para  $p_f = 10^{-4}$  o número de simulações varia entre 10.000 e 100.000 simulações.

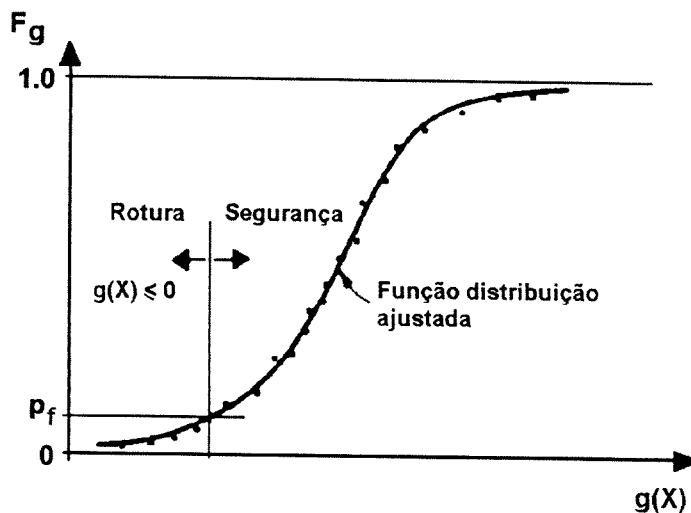


Fig. 2.21 - Função distribuição teórica ajustada às frequências acumuladas dos valores observados.



## 2.5.3 – Técnicas de redução da variância

### 2.5.3.1 - Considerações gerais

Como se viu no ponto anterior, o método de Monte Carlo original é de aplicação extremamente simples, mas exige um grande esforço computacional (muitas simulações) para obter resultados com rigor. A consideração de informações sobre o problema na aplicação deste tipo de método permite melhorar de forma significativa a sua eficiência.

As técnicas de redução da variância podem ser consideradas como uma forma de utilizar informação prévia sobre o problema, para obter resultados adequados com um número reduzido de simulações. De facto, as técnicas de redução da variância só podem ser aplicadas se houver alguma informação à partida. Existem diversos métodos baseados neste tipo de técnicas que podem ser encontrados na literatura sobre este tipo de problemas (Rubinstein, 1981; Melchers, 1987; Bjerager, 1990). Nos pontos seguintes são apresentadas algumas dessas técnicas.

### 2.5.3.2 - Amostragem por importância

O integral múltiplo da expressão (2.130) pode ser escrito da seguinte forma:

$$p_f = \int_{g(X) \leq 0} I[g(X) \leq 0] \cdot \frac{f_X(X)}{h(X)} h(X) dX \quad , \quad (2.136)$$

onde  $h(X)$  representa a função densidade de probabilidade da sub-região do espaço amostral onde se aplicam as técnicas de simulação, isto é, onde se faz a amostragem (Fig. 2.22).

Atendendo à definição de esperança matemática, a equação (2.136) pode ser escrita como um valor esperado:

$$p_f = E \left\{ I[g(X) \leq 0] \cdot \frac{f_X(X)}{h(X)} \right\} = E \left[ I \frac{f}{h} \right] \quad . \quad (2.137)$$

Comparando com a expressão (2.133), verifica-se que a função "indicadora"  $I$  foi substituída por  $I \cdot f / h$ .

A estimativa de  $p_f$ , recorrendo às técnicas discretas de simulação de Monte Carlo, é feita através de:

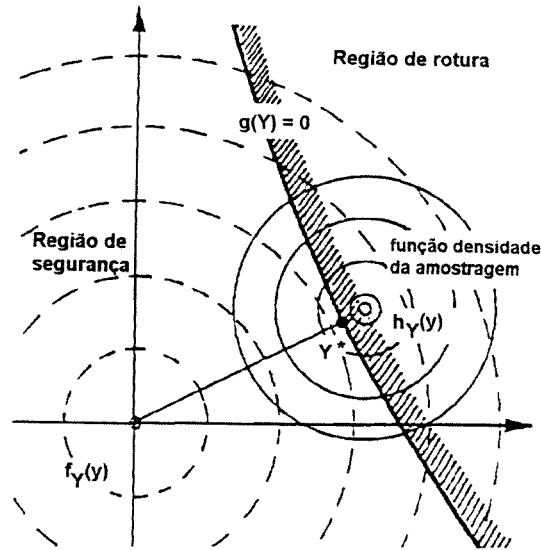


Fig. 2.22 - Amostragem por importância em torno do ponto provável de rotura, no espaço das variáveis normais reduzidas.

$$\tilde{p}_f = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ I[g(\hat{X}^{(i)}) \leq 0] \cdot \frac{f_X(\hat{X}^{(i)})}{h(\hat{X}^{(i)})} \right\} \quad (2.138)$$

A variância associada ao cálculo de  $\tilde{p}_f$  por (2.138) é obtida da seguinte maneira:

$$\sigma_{\tilde{p}_f}^2 = \frac{\sigma_{I \cdot f/h}^2}{n} \quad , \quad (2.139)$$

sendo:

$$\sigma_{I \cdot f/h}^2 = \int_{g(X) \leq 0} \frac{f_X^2(X)}{h(X)} dX - \tilde{p}_f \quad (2.140)$$

Esta expressão mostra que uma boa escolha da função  $h(X)$  pode conduzir ao resultado aparentemente surpreendente duma variância nula na estimativa de  $p_f$ . Isto acontece obviamente se for conhecido à partida completamente o problema.

### 2.5.3.3 - Amostragem estratificada

As técnicas de amostragem estratificada consistem em particionar todo o espaço amostral,  $\Omega$ , em  $m$  regiões disjuntas  $\Omega_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ); isto é:

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^m \Omega_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.141)$$

$$\Omega_k \cap \Omega_j = \emptyset \quad ; \quad k \neq j$$

A probabilidade de rotura associada a cada região  $\Omega_i$  é definida por:

$$p_{f_i} = \int_{\Omega_i} f_X(X) \cdot h(X) dX \quad , \quad (2.142)$$

de forma que a probabilidade de ocorrer cada uma das regiões é:

$$P_i = \int_{\Omega_i} h(X) dX \quad ; \quad \sum_{i=1}^m P_i = 1 \quad . \quad (2.143)$$

A probabilidade de rotura (global) é então definida por:

$$p_f = \int_{\Omega} f_X(X) \cdot h(X) dX = \sum_{i=1}^m \int_{\Omega_i} f_X(X) \cdot h(X) dX = \sum_{i=1}^m p_{f_i} \quad . \quad (2.144)$$

Considerando que:

$$f_X^{(i)}(X) = \begin{cases} f_X(X) & ; \text{ se } X \in \Omega_i \\ 0 & ; \text{ se } X \notin \Omega_i \end{cases} \quad , \quad (2.145)$$

o integral (2.142) pode ser definido como:

$$\begin{aligned} p_{f_i} &= \int_{\Omega_i} P_i \cdot f_X(X) \cdot \frac{h(X)}{P_i} dX = P_i \int_{\Omega} f_X^{(i)}(X) \cdot \frac{h(X)}{P_i} dX = \\ &= P_i \cdot E[f_X^{(i)}(X)] \end{aligned} \quad , \quad (2.146)$$

sendo,

$$\int_{\Omega_i} \frac{h(X)}{P_i} dX = 1 \quad . \quad (2.147)$$

Assim, a estimativa de  $p_f$ , recorrendo às técnicas discretas de simulação de Monte Carlo, é feita através de:

$$\tilde{p}_f = \sum_{i=1}^m \frac{P_i}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} f_X^{(i)}(\hat{X}_i^{(k)}) \quad , \quad (2.148)$$

com uma variância associada de:

$$\sigma_{\bar{p}_f}^2 = \sum_{i=1}^m \frac{P_i^2}{n_i} \cdot \sigma^2[f_X^{(i)}(x)] = \sum_{i=1}^m \frac{P_i^2 \cdot \sigma_i^2}{n_i} \quad , \quad (2.149)$$

onde,

$$\sigma_i^2 = \sigma^2[f_X^{(i)}(X)] = \frac{1}{P_i} \int_{\Omega_i} f_X^2(X) \cdot h(X) dX - \frac{P_{f_i}^2}{P_i^2} \quad , \quad (2.150)$$

sendo  $n_i$  o número de simulações a efectuar no sub-espaço  $\Omega_i$ .

A expressão (2.150) mostra que uma estratificação adequada pode conduzir a uma redução significativa da variância e, por isso, a uma redução do número de simulações de Monte Carlo.

Uma das técnicas mais correntes de amostragem estratificada em problemas estruturais é a amostragem pelo hipercubo latino (McKay, 1979; Florian, 1992). De acordo com este tipo de técnicas, o domínio associado a cada variável aleatória,  $X_i$ , é dividido em  $m$  intervalos disjuntos com igual probabilidade (Fig. 2.23). Cada intervalo é definido por uma amostra cujo parâmetro é representado pelo valor correspondente ao seu centro de gravidade definido de acordo com a função densidade de probabilidade. A escolha de cada um dos intervalos é feita aleatoriamente, de forma que os intervalos são considerados uma única vez na determinação da variabilidade estrutural. Assim, este método restringe o número total de simulações ao número de intervalos  $m$  considerados na partição do espaço amostral. Isto representa um ganho de eficiência acentuado. No entanto, os resultados deste método são adequados se as variáveis envolvidas e o comportamento estrutural tiverem uma distribuição aproximadamente normal.

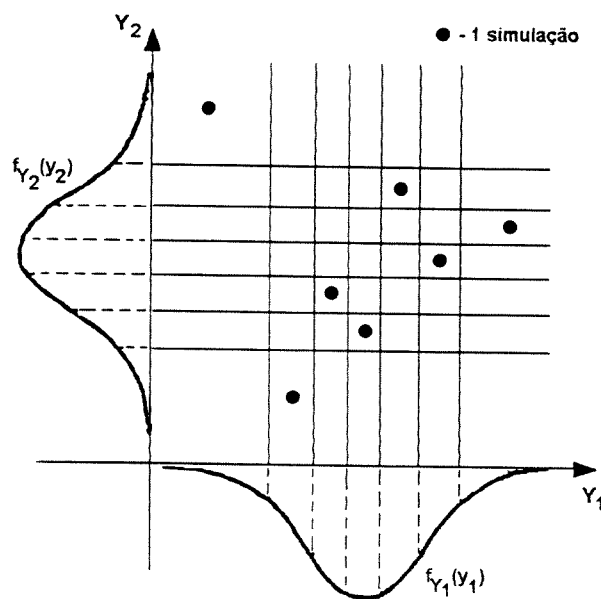


Fig. 2.23 - Amostragem estratificada: amostragem pelo hipercubo latino.

## 2.6 – COMPARAÇÃO ENTRE OS MÉTODOS DE FIABILIDADE E O MÉTODO DE MONTE CARLO

Neste ponto realça-se de forma genérica as qualidades e as limitações dos métodos probabilísticos abordados neste capítulo. Uma abordagem mais pormenorizada deste assunto será efectuada no Capítulo 5.

- *Características dos métodos de fiabilidade FORM/SORM*

As técnicas FORM/SORM consistem em métodos analíticos aproximados de avaliação da fiabilidade estrutural. O rigor obtido com este tipo de métodos é geralmente bom, para as situações para os quais foram desenvolvidos.

*Generalidade:* Os métodos de fiabilidade FORM/SORM aplicam-se somente a variáveis aleatórias básicas contínuas e para superfícies de rotura também contínuas.

*Rigor:* Embora estes métodos sejam aproximados, os resultados obtidos nas aplicações correntes de fiabilidade de estruturas (probabilidades da ordem de  $10^{-1}$  a  $10^{-7}$ ) são suficientemente adequados, desde que as variáveis aleatórias básicas apresentem funções densidade de probabilidade unimodais e superfícies de rotura com variação suave e aproximadamente gausseanas.

*Eficiência:* Para probabilidades com ordem de grandeza muito pequena, as técnicas FORM/SORM são extremamente eficientes em comparação com os métodos de simulação. O tempo de computação depende sobretudo do tempo necessário para definir a superfície de rotura. Para tempos de avaliação desta superfície constante, o tempo de computação é independente da ordem de grandeza da probabilidade, variando de forma aproximadamente linear com o número,  $n$ , de variáveis básicas, para métodos FORM, e aproximadamente com  $n^2$ , para métodos SORM.

*Restrições:* Quando a superfície de rotura apresenta variações bruscas, estes métodos não garantem uma determinação adequada do ponto de dimensionamento (ponto com maior probabilidade de rotura). Nos casos em que a função limite exige tempos de computação elevados (como é o caso da análise não linear usando elementos finitos), vários autores sugerem a utilização de métodos da superfície de resposta (Lo, 1989; Devictor, 1997).

- *Características do método de simulação de Monte Carlo*

As técnicas de simulação de Monte Carlo permitem o cálculo numérico de integrais com resolução analítica impraticável com os meios correntes. Na literatura especializada, os resultados obtidos pelo método de Monte Carlo são apresentados como a base de comparação e de verificação do rigor obtido com outros métodos de avaliação da fiabilidade estrutural.

*Generalidade:* O método de Monte Carlo é de aplicação geral, qualquer que seja o tipo de distribuição das variáveis aleatórias e da forma da superfície de rotura. Somente algumas das técnicas de redução da variância são aplicáveis a variáveis aleatórias e a superfícies limites contínuas.

*Rigor:* O erro associado a este tipo de técnicas é perfeitamente controlado através do número de simulações. Verifica-se que para uma amostra com tamanho a tender para infinito ( $n \rightarrow \infty$ ), a estimativa da probabilidade de rotura converge para o resultado exacto.

*Eficiência:* Uma crítica generalizada ao método de Monte Carlo é o tempo de computação elevado que é exigido. Genericamente, o tempo de computação cresce aproximadamente de forma linear com  $1/p_f$ . O número total de simulações é da ordem de  $1/p_f$  a  $10/p_f$ . No entanto, a aplicação de técnicas de redução da variância adequadas pode tornar este método muito mais eficiente.

*Restrições:* O método de Monte Carlo não apresenta nenhum tipo de restrições, sendo as únicas restrições relativas às técnicas de redução da variância que, como já foi referido, exigem informações prévias sobre a região de rotura.

O método de Monte Carlo tem apresentado sucessivos opositores na aplicação a problemas baseados no método dos elementos finitos. Essa oposição deve-se sobretudo ao excessivo tempo de computação exigido. As técnicas de fiabilidade clássica sugeridas em alternativa são, no entanto, geralmente limitadas a problemas lineares com um número reduzido de graus de liberdade. A aplicação destas técnicas a problemas complexos com comportamento não linear é demasiado complexa e pouco prática.

A tendência actual de dimensionar estruturas mais leves e mais esbeltas tornam mais importante a utilização de técnicas de avaliação da segurança adequadas. Isto tem conduzido ao crescente uso das técnicas de simulação de Monte Carlo tendo em conta as possibilidades de computação actuais (Marchante, 1997). De acordo com Shinozuka (1996), a crítica habitual sobre o dispêndio do tempo de cálculo exigido pelo método de Monte Carlo não justifica simplificações irrealistas do comportamento físico, a menos que a solução desse comportamento físico (tantas vezes distorcido por conveniências matemáticas) possa fornecer indicações adequadas sobre a solução exacta.

## 2.7 – FIABILIDADE DE SISTEMAS ESTRUTURAIS

### 2.7.1 – Generalidades

A capacidade resistente de uma estrutura depende da resistência de cada um dos elementos que constituem o sistema e das ligações entre elas. Portanto a fiabilidade do sistema estrutural depende da fiabilidade de cada um dos seus elementos (Moses, 1982; Grigoriu, 1983; Ibrahim, 1991). O estudo da fiabilidade de sistemas estruturais envolve essencialmente os seguintes aspectos: identificação dos possíveis modos de rotura que podem ocorrer, avaliação das probabilidades de rotura associadas a cada um desses modos de rotura, associação dos modos de rotura e avaliação da fiabilidade do sistema.

De acordo com os critérios de fiabilidade, os sistemas estruturais são classificados nos seguintes grupos: sistemas em série, sistemas em paralelo e sistemas mistos.

### 2.7.2 – Sistemas em série

Nos sistemas em série a rotura de um elemento qualquer provoca a rotura do sistema, independentemente do seu comportamento ser dúctil ou frágil.

Considere-se o sistema da Fig. 2.24. Seja  $R$  a variável aleatória que define a sua resistência e  $R_i$  a variável aleatória associada à resistência do elemento  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Se  $F_{R_i}$  é a função distribuição que define a resistência  $R_i$ , então a função distribuição  $F_R$  da capacidade resistente de um sistema de  $n$  elementos em série e independentes é:

$$\begin{aligned}
 F_R(r) &= P(R \leq r) = 1 - P(R > r) = \\
 &= 1 - P\left[(R_1 > r) \cap (R_2 > r) \cap \dots \cap (R_n > r)\right] = \\
 &= 1 - \left[1 - F_{R_1}(r)\right] \left[1 - F_{R_2}(r)\right] \dots \left[1 - F_{R_n}(r)\right] = \\
 &= 1 - \prod_{i=1}^n \left[1 - F_{R_i}(r)\right]
 \end{aligned} \tag{2.151}$$

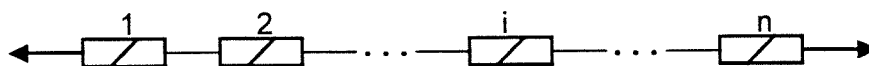


Fig. 2.24 - Sistema em série.

### 2.7.3 – Sistemas em paralelo

Nos sistemas em paralelo, a rotura de um elemento não resulta sempre na rotura da estrutura. Os restantes elementos podem ainda ser capazes de resistir às acções exteriores através de uma "redistribuição de esforços", se o comportamento dúctil dos elementos permitir. Portanto, a formação de um modo de rotura requer a formação de um mecanismo que conduza à rotura simultânea de vários elementos (Fig. 2.25).

Se todos os  $n$  elementos de um sistema em paralelo forem perfeitamente dúcteis, a resistência total,  $R$ , do sistema é definido como a soma das resistências,  $R_i$ , individuais de cada elemento  $i$ :

$$R = \sum_{i=1}^n R_i \quad (2.152)$$

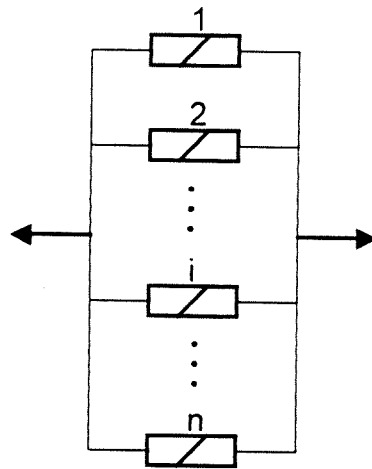


Fig. 2.25 - Sistema em paralelo.

Nestes casos é aceitável assumir uma distribuição gausseana para  $R$ , desde que o número de elementos não seja muito pequeno (de acordo com o teorema do limite central). Assim, a resistência do sistema em paralelo constituído por elementos perfeitamente dúcteis tem uma distribuição normal,  $N(\mu_R, \sigma_R)$ , com os seguintes parâmetros:

$$\mu_R = \sum_{i=1}^n \mu_{R_i} \quad , \quad (2.153a)$$

$$\sigma_R^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_{R_i}^2 \quad , \quad (2.153b)$$



onde  $\mu_{R_i}$  e  $\sigma_{R_i}$  representam o valor médio e o desvio padrão do elemento  $i$ .

Se, ao contrário do que foi suposto no parágrafo anterior, os elementos forem perfeitamente frágeis e apresentarem as seguintes características:  $R_1 \leq R_2 \leq \dots \leq R_n$ , então a resistência do sistema é dada por:

$$R = \max\{n \cdot R_1; (n-1)R_2; \dots; 2 \cdot R_{n-1}; R_n\} \quad , \quad (2.154)$$

supondo que  $R_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) são variáveis aleatórias independentes e com idênticas distribuições. A resistência de um sistema em paralelo com elementos perfeitamente frágeis tem uma distribuição normal, se o número de elementos não for muito pequeno (de acordo com as condições de aplicação do teorema do limite central), com os seguintes parâmetros:

$$\mu_R = n \cdot r_0 [1 - F_R(r_0)] \quad , \quad (2.155a)$$

$$\sigma_R^2 = n \cdot r_0^2 F_R(r_0) [1 - F_R(r_0)] \quad , \quad (2.155b)$$

sendo  $r_0$  o valor que maximiza a função  $r \cdot [1 - F_R(r)]$ .

### 2.7.4 – Sistemas mistos

Os sistemas em série e em paralelo são uma idealização dos sistemas estruturais reais, representando os casos extremos que podem ocorrer. Os sistemas estruturais correntes requerem usualmente uma combinação dos dois casos anteriores (Fig. 2.26). As possíveis correlações entre os diferentes elementos e o comportamento frágil ou dúctil de cada um deles requer análises com alguma complexidade.

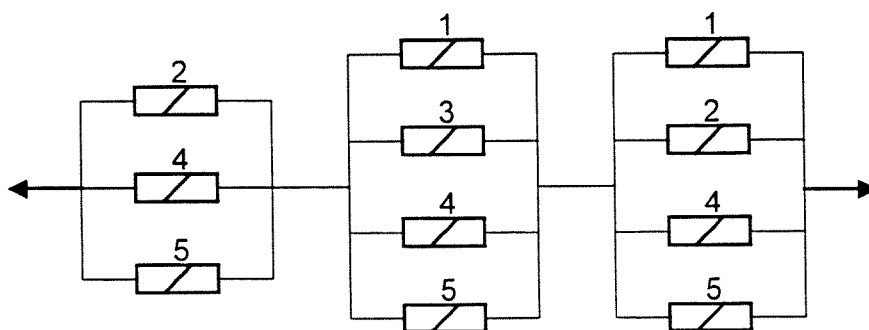


Fig. 2.26 - Sistemas mistos.

A determinação da fiabilidade de um sistema requer a identificação dos potenciais modos de rotura e a avaliação da probabilidade de rotura de cada modo. A fiabilidade do sistema obtém-se através da combinação desses modos, quantificando a probabilidade de ocorrência de cada modo e as suas correlações (Thoft-Christensen, 1986). As correlações podem ser descritas de duas formas, como correlações entre os elementos, ou correlações entre os distintos modos de rotura.

### 2.7.5 – Limites de fiabilidade de sistemas estruturais

Vários autores desenvolveram métodos de análise para avaliar a probabilidade de rotura de sistemas estruturais básicos (Ang, 1968; Moses, 1974; Thoft-Christensen, 1982, 1986; Ditlevsen, 1982). Nos parágrafos seguintes apresentam-se alguns deles.

Sendo  $p_{f_i}$  a probabilidade de rotura de cada elemento  $i$ .

1 – Sistema em série com elementos não correlacionados:

$$p_f = 1 - (1 - p_{f_1})(1 - p_{f_2}) \dots (1 - p_{f_n}) \quad . \quad (2.156)$$

2 – Sistema em série com elementos perfeitamente correlacionados:

$$p_f = \max\{p_{f_1}, p_{f_2}, \dots, p_{f_n}\} \quad , \quad (2.157)$$

3 – Sistema em paralelo com elementos não correlacionados:

$$p_f = p_{f_1} p_{f_2} \dots p_{f_n} \quad . \quad (2.158)$$

4 – Sistema em paralelo com elementos perfeitamente correlacionados:

$$p_f = \min\{p_{f_1}, p_{f_2}, \dots, p_{f_n}\} \quad . \quad (2.159)$$

Geralmente, os elementos estão correlacionados e, por consequência, os valores relativos às expressões (2.156) a (2.159) representam os casos extremos de probabilidades de rotura reais. Existem estudos similares para elementos parcialmente correlacionados (Ditlevsen, 1982).

## 2.8 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

Foi apresentado o estado de conhecimento sobre a avaliação da segurança de estruturas com base em conceitos probabilísticos.

Referiram-se as principais fontes de incerteza responsáveis pelo carácter não determinístico das principais variáveis que condicionam a segurança das estruturas. Mostrou-se que a definição de estados limites e os respectivos níveis de risco estabelecem critérios convencionais que permitem uniformizar as regras de verificação de segurança nas actuais normas.

Descreveram-se as noções essenciais relativas à abordagem probabilística deste tipo de problemas, assim como o formato semi-probabilístico utilizado nos actuais Eurocódigos. Salientou-se ainda os aspectos particulares a considerar na avaliação da segurança de estruturas existentes.

Abordaram-se os elementos estatísticos relevantes para este tipo de problemas, destacando-se a estimativa de parâmetros de leis teóricas e a análise de regressão e correlação.

As principais técnicas numéricas para a avaliação probabilística da segurança foram descritas, nomeadamente, os métodos de fiabilidade estrutural apoiados na definição do índice de fiabilidade  $\beta$  e as técnicas de simulação baseadas no método de Monte Carlo. Relativamente aos métodos de fiabilidade apresentaram-se as técnicas clássicas de primeira e de segunda ordem recorrendo à teoria do segundo momento e, ainda, a sua aplicação às técnicas de elementos finitos. Em relação ao método de Monte Carlo descreveram-se as técnicas de simulação pura e destacaram-se as principais técnicas de redução da variância para tornar este método mais eficiente. A comparação entre estes dois tipos de métodos permitiu realçar as suas principais vantagens e desvantagens.

Finalmente, abordou-se sumariamente a teoria da fiabilidade de sistemas estruturais de acordo com os critérios clássicos de idealização de agrupamentos de vários elementos estruturais.

## Capítulo 3

# MODELAÇÃO ESTRUTURAL E ACÇÕES

### 3.1 – INTRODUÇÃO

A utilização de modelos estruturais que descrevam o mais realisticamente possível o comportamento estrutural e que sirvam de apoio ao estudo da segurança de estruturas, desde as mais correntes até àquelas que apresentam padrões menos usuais, conduziu à adopção das técnicas de elementos finitos como suporte à modelação estrutural (Fig. 3.1).

No presente capítulo descreve-se os aspectos mais relevantes do modelo numérico de análise de peças de betão armado e pré-esforçado. O modelo baseia-se na formulação dos deslocamentos do Método dos Elementos Finitos (MEF), sendo o seu campo de aplicação limitado a carregamentos quase-estáticos e a campos de deslocamento onde os efeitos de segundo ordem podem ser desprezados. Aborda-se ainda as variabilidades associadas à geometria dos elementos estruturais do betão e das acções (com características quase-estáticas) correntemente usadas no estudo do comportamento de estruturas de edifícios e de pontes rodoviárias.

As técnicas de elementos finitos desenvolvidas tiveram como principal objectivo principal servir de suporte ao desenvolvimento de modelos de análise não linear que permitam descrever adequadamente o comportamento das estruturas de betão desde o início do carregamento até ao colapso. Partindo de modelos anteriormente desenvolvidos e suficientemente testados (Henriques, 1991, 1992a, 1992b; Póvoas, 1991), implementaram-se novas formulações para o estudo de estruturas porticadas e laminares. Entre os novos desenvolvimentos efectuados destacam-se a formulação de elementos de descontinuidade para simular zonas com comportamento diferenciado (por exemplo, aparelhos de apoio em pontes ou rótulas plásticas) e a implementação da modelação de pré-esforço. A implementação destas formulações permitiu melhorar e aumentar as potencialidades dos elementos finitos anteriormente desenvolvidos, nomeadamente, o elemento de viga, o elemento plano e o elemento de casca plana.

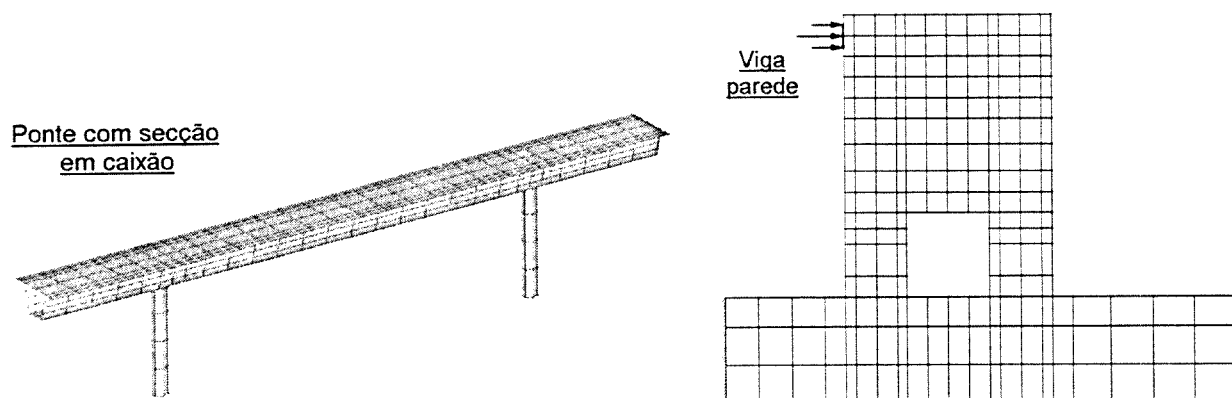


Fig. 3.1 - Discretização por elementos finitos.

A descrição do MEF apresentada neste capítulo pode ser complementada com a consulta de livros de texto apropriados (Zienkiewicz, 1977; Hinton, 1977, 1981; Bathe, 1982; Reddy, 1985). A integração dos modelos não lineares na técnica dos elementos finitos permite estudar o comportamento não linear físico das estruturas. A resolução deste tipo de problemas é feito com recurso a algoritmos incrementais e iterativos e a critérios de convergência adequados. O processo adoptado na resolução de sistemas de equações não lineares é o método de Newton-Raphson e as suas versões modificadas. Utilizam-se também técnicas e procedimentos numéricos que introduzem refinamentos no processo incremental e iterativo de base, que permitem a consideração de um incremento de carga variável durante o ciclo iterativo (métodos com solução restringida) e aceleração de convergência (Crisfield, 1991; Póvoas, 1991; Barbosa, 1992).

Sendo o objectivo principal deste trabalho o estudo da segurança de estruturas de betão, impõe-se a necessidade de destacar as variabilidades dos vários factores que influenciam de forma preponderante o comportamento estrutural. Assim, aborda-se as variabilidades presentes na geometria de elementos estruturais de betão e nas acções correntes que podem ser simuladas pelo presente modelo. As variabilidades associadas ao comportamento dos materiais são abordadas no capítulo seguinte.

As acções são divididas em dois grupos: acções de carácter mecânico e acções não mecânicas. O segundo grupo, no qual se insere a fluência e a retracção do betão e a relaxação das armaduras, é abordado no capítulo seguinte. Neste capítulo realçam-se as variabilidades das acções mecânicas que podem ser simuladas através de cargas de curta duração. Além da acção de pré-esforço que é objecto de atenção especial na formulação do elemento de cabo de pré-esforço, destaca-se ainda a simulação da acção térmica através do MEF.

## 3.2 – DISCRETIZAÇÃO DO MEIO CONTÍNUO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

### 3.2.1 – Considerações iniciais

A técnica dos elementos finitos consiste na discretização do meio contínuo em elementos de dimensão reduzida (elementos finitos), para os quais são estabelecidas as relações geométricas (relações entre os deslocamentos e as deformações), as relações constitutivas (relações entre as tensões e as deformações) e as equações diferenciais regentes do fenómeno (equações de equilíbrio).

O equilíbrio global da estrutura face às acções aplicadas é definido a partir do agrupamento (assemblagem) dos elementos finitos, tendo em conta as equações de equilíbrio estabelecidas para cada elemento, as relações de compatibilidade (por exemplo, os elementos não se sobrepõem) e as ligações ao exterior.

A formulação apresentada baseia-se na hipótese dos deslocamentos serem pequenos comparativamente com as dimensões das peças, de forma que os efeitos de segunda ordem são desprezáveis. O processo de análise é baseado na formulação dos deslocamentos do método dos elementos finitos, ou seja, os deslocamentos dos nós da malha de discretização da estrutura são as incógnitas do problema.

Os modelos de análise estrutural implementados no presente trabalho baseiam-se nas formulações desenvolvidas para três tipos de elementos finitos: o elemento de viga de Timoshenko, o elemento quadrático plano e o elemento de casca plana (Henriques, 1991; Póvoas, 1991).

### 3.2.2 – Caracterização da geometria

Na formulação de elementos finitos consideram-se os seguintes sistemas coordenados (Fig. 3.2):

- *sistema coordenado global* -  $\underline{x} = (x, y, z)$  - sistema coordenado cartesiano usado para definir a geometria da estrutura no espaço. As coordenadas nodais, o campo de deslocamentos, a matriz de rigidez global e o vector das forças nodais equivalentes são referidos a este sistema;

- *sistema coordenado unitário local* -  $\underline{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$  - sistema local cujas coordenadas tomam valores entre  $\xi_i = -1$  e  $\xi_i = 1$ . As funções de forma do elemento,  $N_j(\xi, \eta, \zeta)$  ( $j$  identifica o nó do elemento), são definidas em relação a este sistema;
- *sistema coordenado cartesiano local* -  $\underline{x}' = (x', y', z')$  - sistema coordenado cartesiano definido localmente no elemento, permitindo caracterizar os deslocamentos e a sua matriz de rigidez em função dos nós desse elemento, servindo ainda de referência à definição do estado de tensão e de deformação nos pontos de integração (pontos de Gauss).

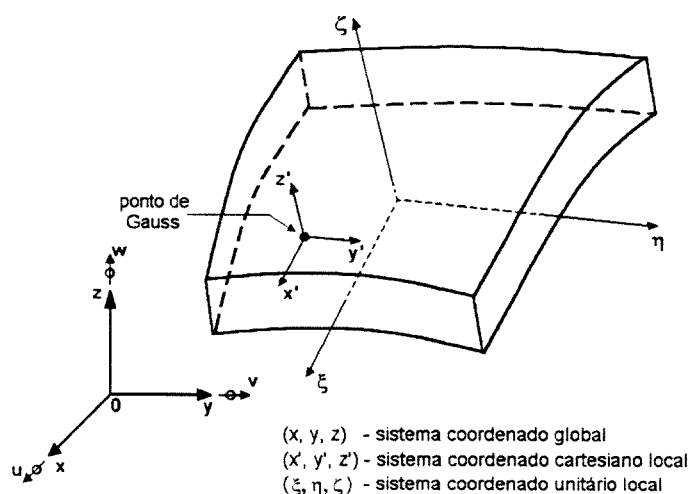


Fig. 3.2 - Sistemas coordenados (sentidos positivos).

A parametrização isoparamétrica permite definir as coordenadas locais  $\underline{x}'$ , num ponto qualquer do elemento, a partir das coordenadas locais  $\underline{\xi}$ , do seguinte modo:

$$\underline{x}'(\underline{\xi}) = \sum_{j=1}^n N_j(\underline{\xi}) \underline{x}'_j \quad , \quad (3.1)$$

onde  $n$  é o número de pontos nodais que discretizam o elemento,  $N_j(\underline{\xi})$  é a função de forma associada ao nó  $j$  do elemento (corresponde a uma função interpoladora de Lagrange que toma o valor unitário no nó  $j$  e zero nos restantes nós),  $\underline{x}'_j$  são as coordenadas nodais no nó  $j$ .

A relação entre os sistemas cartesianos nodal e global obtém-se através da matriz de cosenos directores, correntemente designada de matriz de transformação  $\underline{T}$ :

$$\underline{x}' = \underline{T} \cdot \underline{x} \quad . \quad (3.2)$$

A matriz  $\underline{T}$  é uma matriz diagonal por blocos de submatrizes  $\underline{T}_j$  associadas a cada nó do elemento, isto é:

$$\underline{x}'_j = \underline{T}_j \cdot \underline{x}_j \quad , \quad (3.3a)$$

$$\underline{T}_j = \begin{bmatrix} l_{x'x} & l_{x'y} & l_{x'z} \\ l_{y'x} & l_{y'y} & l_{y'z} \\ l_{z'x} & l_{z'y} & l_{z'z} \end{bmatrix} \quad , \quad (3.3b)$$

onde  $l_{x'_i x_j}$  representa o coseno do eixo  $x'_i$  com o eixo  $x_j$ .

### 3.2.3 – Campo de deslocamentos

O campo de deslocamentos de uma estrutura é completamente definido através das componentes de deslocamentos nos nós dos elementos. A direcção e o sentido das componentes de translação dos deslocamentos identificam-se com a convenção utilizada para os sistemas coordenados cartesianos (Fig. 3.2).

As componentes locais de deslocamentos  $\underline{u}' = (u', v', w')$  de um ponto genérico são definidas em função dos deslocamentos nodais  $\underline{u}'_j$  e das coordenadas unitárias locais  $\underline{\xi}$ , de acordo com uma relação idêntica a (3.1):

$$\underline{u}'(\underline{\xi}) = \sum_{j=1}^n N_j(\underline{\xi}) \cdot \underline{u}'_j \quad . \quad (3.4)$$

O deslocamento  $\underline{u}$  referido ao sistema coordenado global é obtido pela transformação inversa expressa em (3.2):

$$\underline{u} = \underline{T}^T \cdot \underline{u}' \quad , \quad (3.5)$$

uma vez que  $\underline{T}$  é uma matriz ortogonal, isto é,  $\underline{T}^T = \underline{T}^{-1}$ .

### 3.2.4 – Estado de deformação

Na formulação Lagrangeana, o estado de deformação de um corpo é definido pelo tensor das deformações de Green-Lagrange,  $\gamma_{ij}$ , vindo expresso pela relação:



$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right); \quad i, j = 1, 2, 3 \quad . \quad (3.6)$$

Considerando a hipótese dos gradientes dos deslocamentos serem muito pequenos (estado de deformação infinitesimal), os termos de ordem superior da relação (3.6) podem ser desprezados, resultando:

$$\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \quad i, j = 1, 2, 3 \quad , \quad (3.7)$$

ou seja, o tensor das deformações de Green-Lagrange,  $\gamma_{ij}$ , fica coincidente com o tensor das deformações infinitesimais de Cauchy,  $\varepsilon_{ij}$ . Explicitando mais pormenorizadamente, a expressão (3.7), referida ao referencial cartesiano local, vem:

$$\underline{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \varepsilon_{z'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{y'z'} \\ \gamma_{x'z'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial y'} \\ \frac{\partial w'}{\partial z'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \end{Bmatrix} \quad . \quad (3.8)$$

As derivadas parciais presentes em (3.8) são definidas a partir das derivadas parciais no referencial global pela seguinte transformação:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = \underline{T} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \underline{T}^T \quad , \quad (3.9)$$

onde  $\underline{T}$  é a matriz de cossenos directores que transforma o sistema coordenado global (0xyz) no sistema coordenado local (0x'y'z') (ver expressão 3.3b).

As derivadas parciais dos deslocamentos em relação ao referencial global, são definidas a partir dos deslocamentos nodais e tendo em conta as funções de forma:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u_i}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} \quad , \quad (3.10a)$$

considerando a equação (3.4), vem:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_j(\xi_i)}{\partial \xi_i} \cdot u_j \cdot \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} \quad ; \quad (3.10b)$$

ou seja, descondensando a expressão (3.10):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \underline{J}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad , \quad (3.11)$$

onde  $\underline{J}$  é a matriz Jacobiano definida por:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad , \quad (3.12)$$

que se obtém directamente de (3.1). As derivadas parciais  $\partial u_i / \partial \xi_i$ , determinam-se a partir de (3.4), conforme se viu em (3.10b).

Tendo em conta as expressões (3.8) a (3.12), o campo de deformações é obtido a partir dos deslocamentos nodais de acordo com a seguinte relação, escrita numa forma condensada,

$$\underline{\varepsilon} = \underline{B} \cdot \underline{u}' \quad , \quad (3.13)$$

sendo  $\underline{u}'$  o vector de deslocamentos referidos ao referencial cartesiano local; e  $\underline{B}$  é a matriz de deformação do elemento, com dimensão  $nl \times nc$  ( $nl$  é o número de linhas e corresponde ao número de componentes de deformação;  $nc$  é o número de colunas e corresponde ao número de graus de liberdade do elemento, ou seja, o produto do número de nós pelo número de componentes de deslocamentos por nó).

### 3.2.5 – Estado de tensão - relações constitutivas

O estado de tensão é representado, no referencial cartesiano local, através das suas componentes normais e tangenciais que se encontram relacionadas com as componentes de deformação do seguinte modo:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \sigma_{z'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{y'z'} \\ \tau_{x'z'} \end{Bmatrix} = \underline{D} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \varepsilon_{z'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{y'z'} \\ \gamma_{x'z'} \end{Bmatrix}, \quad (3.14a)$$

ou condensadamente,

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \cdot \underline{\varepsilon}, \quad (3.14b)$$

onde  $\underline{D}$  é a matriz constitutiva do material, cuja definição será abordada em detalhe na descrição do modelo não linear do material, apresentado no capítulo seguinte.

### 3.2.6 – Equações de equilíbrio

As equações de equilíbrio podem ser estabelecidas através do Princípio do Trabalho Virtual (PTV). Considerando um corpo sujeito a dois estados de tensão independentes:

- sob a acção de um sistema de forças exteriores (forças de superfície  $\underline{t}$  e forças de volume  $\underline{b}$ ), desenvolve-se um estado de tensão interna  $\underline{\sigma}$  que satisfaz as equações de equilíbrio;
- sob a acção de outro sistema de forças desenvolvem-se deslocamentos virtuais  $\underline{u}^*$  e de deformações virtuais  $\underline{\varepsilon}^*$  compatíveis;

O PTV estabelece como condição necessária e suficiente o seguinte: se um corpo em equilíbrio sob a acção de um sistema de forças exteriores é submetido a um campo de deslocamentos virtuais, compatíveis com as ligações ao exterior e infinitamente pequenos, o trabalho virtual realizado pelas forças exteriores,  $\delta W$ , é igual ao trabalho virtual de deformação,  $\delta U$ .

O trabalho realizado pelas forças exteriores é:

$$\delta W = \int_S \underline{u}^{*T} \cdot \underline{t} \, dS + \int_V \underline{u}^{*T} \cdot \underline{b} \, dV \quad . \quad (3.15)$$

Por sua vez, o trabalho virtual de deformação é:

$$\delta U = \int_V \underline{\varepsilon}^{*T} \underline{\sigma} \, dV \quad . \quad (3.16)$$

Atendendo às expressões (3.13), (3.14b) e (3.4), pode então escrever-se:

$$\delta U = \underline{u}_e^{*T} \int_V \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B} \, dV \cdot \underline{u}_e \quad , \quad (3.17)$$

onde  $\underline{u}_e$  é o vector dos deslocamentos nodais do elemento e  $\underline{u}_e^*$  é o correspondente vector dos deslocamentos virtuais.

Igualando os trabalhos das forças exteriores e das deformações internas, respectivamente (3.15) e (3.17), resulta:

$$\int_V \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B} \, dV \cdot \underline{u}_e = \underline{f}_e \quad , \quad (3.18)$$

ou condensadamente,

$$\underline{k}_e \cdot \underline{u}_e = \underline{f}_e \quad , \quad (3.19)$$

sendo  $\underline{k}_e$  a matriz de rigidez do elemento e  $\underline{f}_e$  o vector de forças referidas aos nós do elemento (vector das forças nodais) estaticamente equivalentes às forças exteriores que o sollicitam.

Os modelos da análise desenvolvidos permitem simular as acções mecânicas devidas às cargas pontuais e uniformemente distribuídas, pré-esforço e deslocamentos dos apoios; e, às acções não mecânicas devidas a variações de temperatura e efeitos diferidos (fluência e retracção do betão e relaxação das armaduras de pré-esforço). As acções mecânicas devidas às cargas pontuais e uniformes e aos deslocamentos dos apoios são introduzidas directamente nas equações de equilíbrio (3.19). As acções devidas ao pré-esforço e às variações de temperatura são consideradas através de deformações impostas nos materiais, sendo o seu tratamento objecto de descrição detalhada neste capítulo. As acções resultantes dos efeitos diferidos serão abordados no capítulo seguinte.

### 3.2.7 – Integração numérica

A determinação da matriz de rigidez e do vector das forças nodais envolvem o cálculo de integrais complexos, estendidos ao volume de cada elemento. A integração no domínio do

elemento é realizada numericamente através de uma quadratura de Gauss-Legendre (Zienkiewicz, 1977).

De acordo com a regra de integração numérica de Gauss, a determinação do integral de uma função  $f(\underline{\xi})$  (com  $\xi_i$  assumindo valores entre -1 e 1) será efectuada através do somatório dos produtos do valor da função nos pontos de integração  $\underline{\xi}_i$  (correntemente designados de pontos de Gauss) por um coeficiente  $a_i$  (que traduz os pesos associados aos pontos de Gauss):

$$I_n = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ijk} f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \quad , \quad (3.20)$$

onde  $n$  define a ordem de integração.

Nos modelos de análise não linear baseados nas técnicas dos elementos finitos utiliza-se frequentemente uma discretização da espessura em diferentes camadas (por exemplo, elementos de viga, elementos de laje, elementos de casca, etc.). Nestes casos, a integração no volume do elemento é efectuada através da decomposição numa integração na espessura do elemento, previamente discretizado por camadas, e numa integração de superfície para  $\zeta$  constante, de acordo com a expressão (3.20).

As regras de integração numérica no domínio da superfície ( $\zeta$  constante) distinguem-se geralmente em: integração completa, integração reduzida e integração selectiva. A regra de integração completa consiste numa quadratura de  $m \times m$  pontos de Gauss, onde  $m$  designa o número de nós existentes em cada face. Os resultados obtidos com esta regra revelam a ocorrência de comportamentos demasiadamente rígidos à medida que a razão comprimento/espessura do elemento aumenta, devido a uma sobrevalorização da parcela de rigidez de corte, designada na literatura de língua inglesa por "shear locking" (Zienkiewicz, 1971; Delgado, 1986; Oñate, 1992).

As regras de integração reduzida (quadratura de Gauss com  $(m-1) \times (m-1)$  pontos de Gauss) e selectiva (na parcela de flexão a integração é feita com  $m \times m$  pontos de Gauss e na parcela de corte utilizam-se  $(m-1) \times (m-1)$  pontos de Gauss) permitem diminuir a probabilidade de ocorrerem fenómenos de "shear locking". No entanto, pode ocorrer em certas estruturas o aparecimento (raro) de fenómenos correntemente designados por modos de energia nulos ou mecanismos espúrios (Belytshko, 1981; Delgado, 1986; Oñate, 1992).

Nas aplicações correntes dos modelos desenvolvidos privilegia-se a utilização da regra de integração reduzida.

### 3.2.8 – Representação das armaduras

No presente modelo, as armaduras podem ser discretizadas de forma distribuída ou por elementos unidimensionais do segundo grau.

A discretização distribuída é idêntica àquela utilizada para o betão, sendo os varões definidos por camadas de aço de espessura equivalente  $t_s$ , de forma que a área correspondente seja igual à soma das áreas das secções transversais dos varões considerados.

A representação de armaduras isoladas com orientação qualquer pode ser realizada por elementos unidimensionais inseridos nos elementos estruturais. A formulação deste elemento é apresentada na modelação da armadura de pré-esforço (ver secção 3.3.3).

Em ambas as representações considera-se a existência de uma aderência perfeita entre o betão e o aço, através de campos de deslocamentos completamente dependentes.

## 3.3 – ELEMENTOS FINITOS ESPECIAIS

### 3.3.1 – Generalidades

A existência de comportamentos e acções que não são devidamente simulados pelos elementos finitos descritos exige a consideração de formulações específicas. Entre eles destaque-se a simulação do pré-esforço e das respectivas armaduras, quanto ao seu comportamento distinto e quanto à sua geometria peculiar; ou ainda, as descontinuidades que frequentemente ocorrem no estudo do comportamento não linear até à rotura de estruturas de betão, designadamente, deslocamentos ou rotações relativas em secções críticas para elevados graus de plastificação das armaduras, deslocamento relativo entre a estrutura e o solo da fundação, ou ainda fendas discretas de grandes dimensões.

Tendo em conta os aspectos referidos no parágrafo anterior, desenvolveram-se formulações que permitem traduzir adequadamente o comportamento de descontinuidades nos elementos finitos. Como um dos objectivos do presente trabalho é a análise de pontes de betão armado e pré-esforçado, a modelação das descontinuidades visaram sobretudo a descrição do comportamento não linear de aparelhos de apoio e de rótulas plásticas.

Desenvolveu-se também um elemento particular para descrever convenientemente os cabos de pré-esforço e o comportamento não linear até à rotura das respectivas armaduras.



### 3.3.2 – Formulação de descontinuidades nos elementos finitos

#### 3.3.2.1 - Geometria e campo de deslocamentos

As descontinuidades nos elementos finitos são formuladas através da consideração de nós coincidentes em elementos contíguos, mas com campos de deslocamentos distintos (Beer, 1985; Schellekens, 1990). A formulação apresentada consiste numa descontinuidade entre dois nós coincidentes de elementos distintos e tem em conta todas as componentes de deslocamento no referencial global (Fig. 3.3). O modelo associado aos três elementos finitos utilizados no presente trabalho é obtido directamente das expressões que vão ser apresentadas, anulando as componentes de deslocamento e de deformação sem interesse.

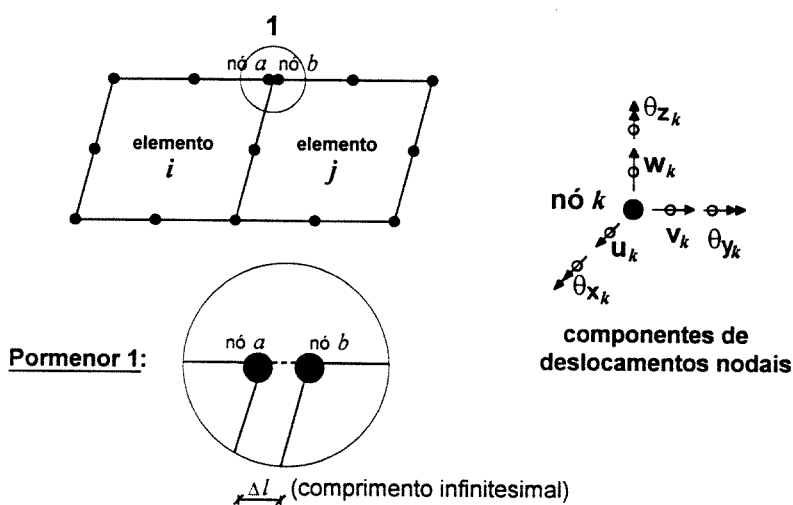


Fig. 3.3 - Caracterização das descontinuidades.

O campo de deslocamentos é definido pelas respectivas componentes nos nós *a* e *b* (Fig. 3.3):

$$\begin{Bmatrix} \underline{u}_a \\ \underline{u}_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I} & \cdot \\ \cdot & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\delta}_a \\ \underline{\delta}_b \end{Bmatrix} \quad , \quad (3.21a)$$

onde  $\underline{I}$  é a submatriz identidade com dimensão igual ao número de graus de liberdade por cada nó, e os vectores  $\underline{u}_i$  e  $\underline{\delta}_i$  no nó *i* são identificados com as componentes de deslocamento:

$$\underline{u}_i = \underline{\delta}_i = \{ u_i \quad v_i \quad w_i \quad \theta_{x_i} \quad \theta_{y_i} \quad \theta_{z_i} \}^T \quad . \quad (3.21b)$$

### 3.3.2.2 - Estado de deformação

O estado de deformação é definido através dos deslocamentos relativos entre os dois nós coincidentes:

$$\begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \\ \Delta \theta_x \\ \Delta \theta_y \\ \Delta \theta_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_a \\ v_a \\ w_a \\ \theta_{x_a} \\ \theta_{y_a} \\ \theta_{z_a} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} u_b \\ v_b \\ w_b \\ \theta_{x_b} \\ \theta_{y_b} \\ \theta_{z_b} \end{Bmatrix}, \quad (3.22)$$

ou escrevendo numa forma condensada,

$$\underline{\Delta u} = \underline{B} \underline{u}, \quad (3.23a)$$

onde a matriz de deformação é igual a:

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{I} & \cdot \\ \cdot & -\underline{I} \end{bmatrix}. \quad (3.23b)$$

### 3.3.2.3 - Relações constitutivas

As forças internas que se desenvolvem na descontinuidade, resultantes dos deslocamentos relativos são definidas através das seguintes relações constitutivas:

$$\begin{Bmatrix} t_u \\ t_v \\ t_w \\ t_{\theta_x} \\ t_{\theta_y} \\ t_{\theta_z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_u & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & K_v & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & K_w & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & K_{\theta_x} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & K_{\theta_y} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & K_{\theta_z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \\ \Delta \theta_x \\ \Delta \theta_y \\ \Delta \theta_z \end{Bmatrix}, \quad (3.24a)$$

ou condensadamente,

$$\underline{t} = \underline{D} \underline{\Delta u}. \quad (3.24b)$$



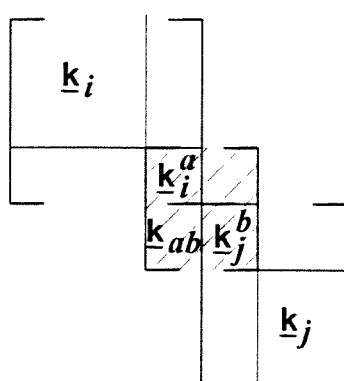
### 3.3.2.4 - Matriz de rigidez

A matriz de rigidez da descontinuidade é definida pela relação usual,

$$\underline{k} = \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B} \quad . \quad (3.25)$$

Repare-se que a determinação desta matriz de rigidez não envolve nenhuma integração, porque o "elemento" que caracteriza a descontinuidade tem, teoricamente, dimensões infinitesimais.

Durante o processo de montagem para a formação da matriz global da estrutura, os termos de rigidez definidos em (3.25) serão espalhados da forma indicada na Fig. 3.4.



$\underline{k}_{ab}$  - matriz de rigidez da descontinuidade;

$\underline{k}_i$  - matriz de rigidez do elemento  $i$ ;

$\underline{k}_j$  - matriz de rigidez do elemento  $j$ ;

$\underline{k}_i^a$  - termos da matriz  $\underline{k}_i$  relativos ao nó  $a$

$\underline{k}_j^b$  - termos da matriz  $\underline{k}_j$  relativos ao nó  $b$

Fig. 3.4 - Espalhamento das rigidezes da descontinuidade na matriz de rigidez global.

### 3.3.2.5 - Aplicações: simulação de aparelhos de apoio e rótulas plásticas

A simulação do comportamento não linear de aparelhos de apoio em pontes ou de isoladores anti-sísmicos em edifícios é realizada de forma conveniente com os elementos de descontinuidade. Para tal pode definir-se uma malha de discretização com nós de diferentes elementos coincidentes no local dos aparelhos, mas com campos de deslocamentos distintos, e simular os seus comportamentos de acordo com as características de rigidez (ou seja as relações constitutivas) desses aparelhos (Fig. 3.5).

As rótulas plásticas são também representadas convenientemente pelos elementos de descontinuidade. Mas antes de apresentar o modelo de simulação das rótulas plásticas, serão abordadas as razões que conduzem à sua utilização em modelos de elementos finitos.

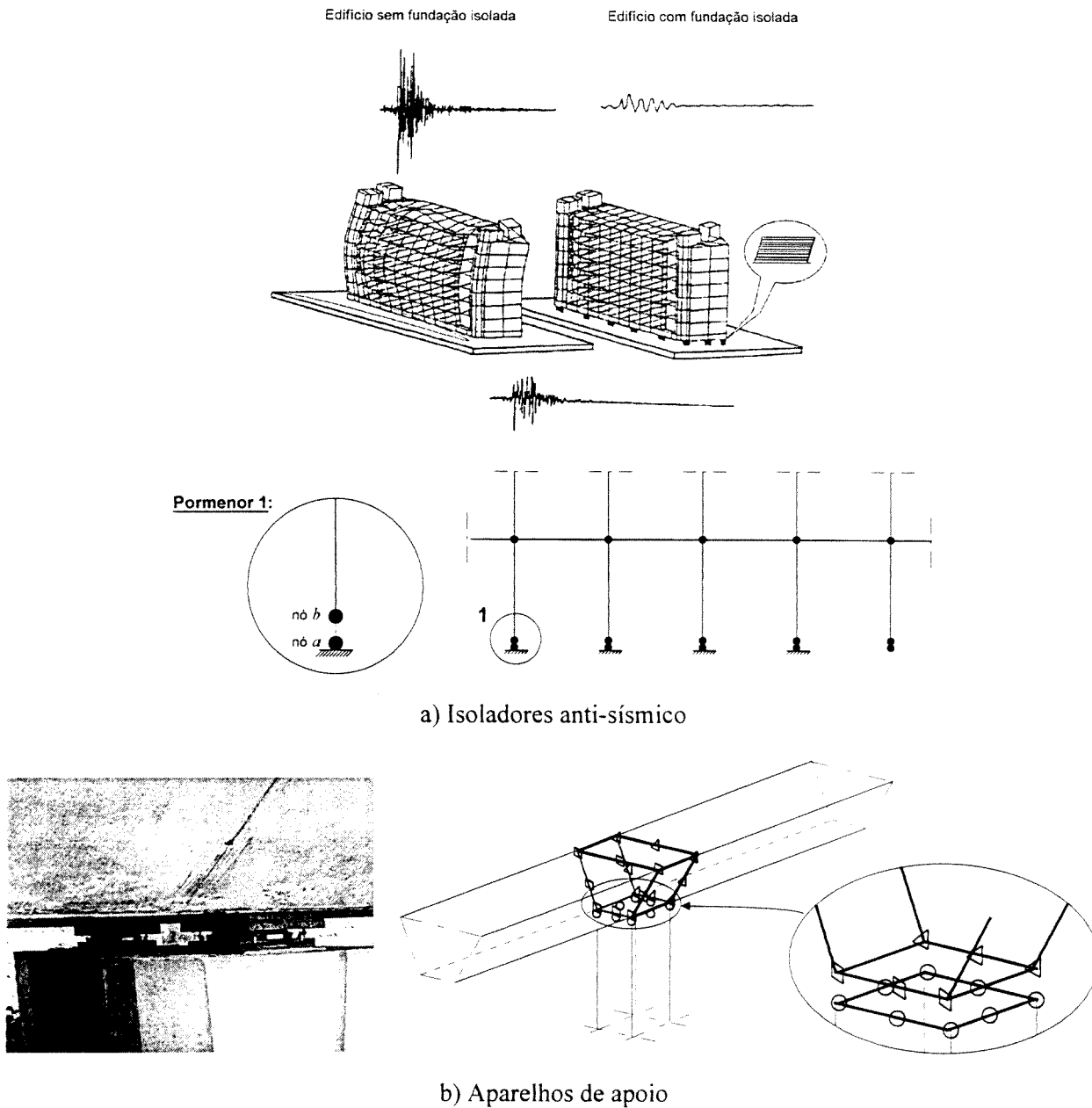


Fig. 3.5 - Elementos de descontinuidade na simulação de aparelhos de apoio.

Uma das principais dificuldades dos modelos de análise estrutural é a descrição da capacidade de redistribuição de esforços em estruturas hiperstáticas. Na generalidade dos casos, os modelos não lineares descrevem de forma adequada a redistribuição de esforços resultantes da diminuição de rigidez causada pela fendilhação. No entanto, a tradução da ductilidade das secções após a cedência das armaduras (fase de formação das rótulas plásticas) não é, muitas vezes, feita de modo adequado.

Na resolução de problemas estruturais através de modelos de análise não linear baseados as técnicas dos elementos finitos, a solução depende muitas vezes do grau de refinamento da discretização estrutural. Os casos que apresentam grandes variações de esforços nas secções mais esforçadas (por exemplo, os momentos flectores negativos nas zonas próximas do encastramento de uma viga) são os mais problemáticos. Geralmente, a ductilidade da resposta será tanto menor quanto mais refinada for a malha de elementos finitos (Fig. 3.6). Em muitos casos a capacidade deformacional do ponto de Gauss mais esforçado esgota-se sem que os pontos de Gauss mais próximos colaborem "eficazmente" na rotação plástica da zona crítica, isto é, a "rótula plástica" concentra-se toda num único ponto não se estendendo a uma zona mais alargada como demonstram os resultados experimentais (CEB, 1993).

Os modelos só conseguem uma boa simulação da ductilidade nas rótulas plásticas através de formulações complexas (com inclusão de relações constitutivas de aderência-escorregamento), pouco eficazes na análise de estruturas com muitos elementos. Em alternativa, em formulações de elementos finitos um procedimento usualmente adoptado, e de implementação simples, consiste em relacionar a rotação relativa entre as extremidades da rótula (secção A e B da Fig. 3.6),  $\theta_{AB}$ , com a curvatura da secção A,  $1/r_A$ , estabelecendo um comprimento equivalente da rótula plástica,  $l_p$ , de modo que se verifique a seguinte condição (Coelho, 1992; Santos, 1997):

$$\theta_{AB} = l_p \cdot \frac{1}{r_A} \quad (3.26)$$

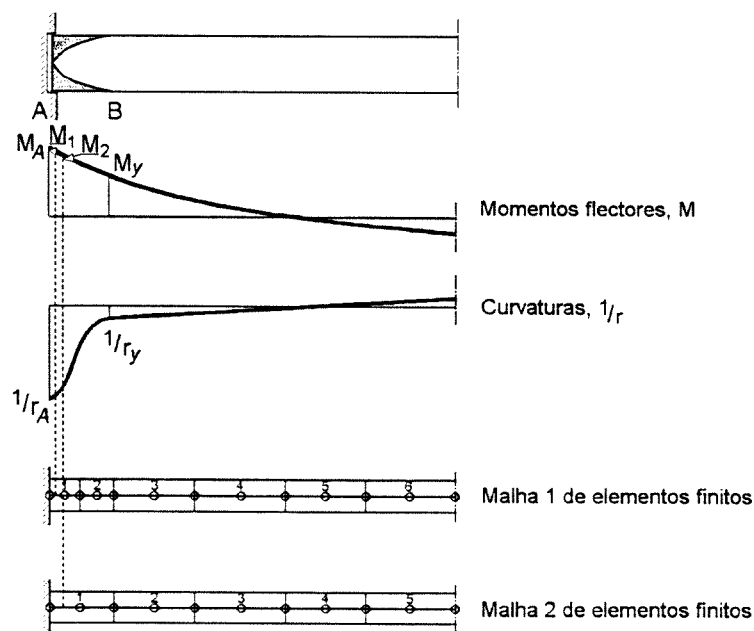


Fig. 3.6 - Ductilidade dependente do grau de discretização.

Para secções rectangulares, o comprimento  $l_p$  situa-se entre  $0.5h$  e  $h$  em que  $h$  é a maior dimensão da secção transversal (Vaz, 1993). O CEB (1988) sugere para a avaliação de  $l_p$ :

$$l_p = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon_{sy}}{\varepsilon_{su}}\right) \left(1 - \frac{f_{sy}}{f_{su}}\right) \cdot l_0 \quad , \quad (3.27)$$

onde  $l_0$  é a distância entre os pontos de momento nulo e máximo,  $f_{sy}$  e  $f_{su}$  são a tensão de cedência e a resistência última das armaduras e  $\varepsilon_{sy}$  e  $\varepsilon_{su}$  são a extensão de cedência e a extensão última das armaduras.

Recorrendo ao conceito do comprimento equivalente da rótula plástica,  $l_p$ , surgiram diversas implementações consistindo na definição de um comprimento adequado dos elementos próximos das rótulas plásticas, de forma que a deformação plástica não se concentre num número insuficiente de pontos de Gauss. Outra alternativa consiste na alteração dos pesos da integração das diferentes secções do elemento, quando ocorre cedência das armaduras (Santos, 1997).

No presente trabalho, o comportamento das rótulas plásticas é simulado por elementos de descontinuidade, utilizando a seguinte estratégia:

- às rigidezes de translação (horizontal e vertical) atribuem-se valores elevados ("rigidez infinita") durante todo o processo de análise, de forma a não existir deslocamentos relativos de translação entre os dois nós coincidentes que definem a rótula plástica;
- à rigidez de rotação é também atribuída inicialmente um valor elevado até ser atingida a plastificação da armadura nesta secção. A partir daí a deformação plástica que ocorre nessa zona é concentrada na rótula plástica, sendo as rotações relativas entre os dois nós coincidentes obtidas através da consideração de uma rigidez definida por diagramas momentos-curvaturas para a secção (Fig. 3.7). A capacidade rotacional última da rótula plástica é definida através do produto da curvatura última da secção pelo comprimento  $l_p$  que é afectado pela rótula plástica. A este valor desconta-se a parcela de rotação ocorrida até ao início da plastificação da armadura, uma vez que já tinha sido contabilizada no ponto de Gauss respectivo, na fase inicial em que a rigidez era (praticamente) infinita.

A Fig. 3.8 mostra o efeito da consideração da formulação das rótulas plásticas no estudo do comportamento não linear até à rotura de uma viga bi-encastrada sujeita a uma carga uniformemente distribuída. A figura apresenta os traçados da resposta da viga para diferentes malhas de elementos de viga sem a formulação de rótulas plásticas (Fig. 3.8a) e com a formulação dessas rótulas (Fig. 3.8b).

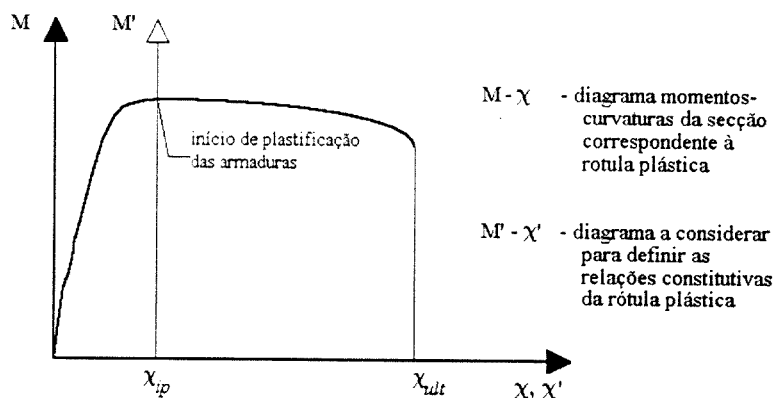


Fig. 3.7 - Definição das relações constitutivas das rótulas plásticas.

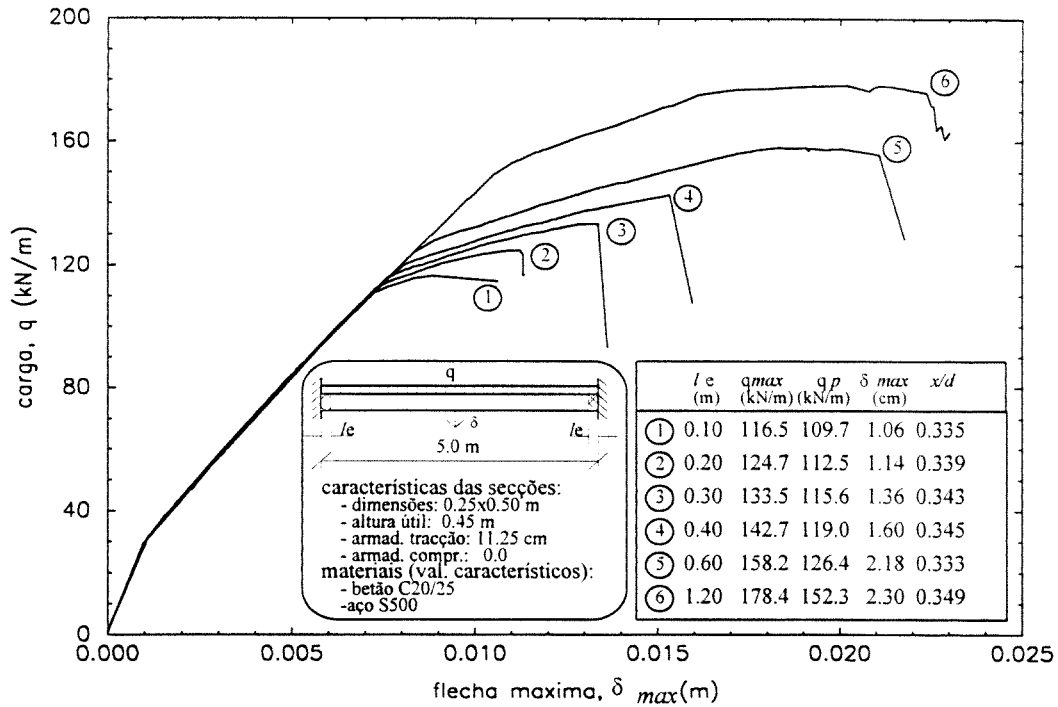
Os dados do problema encontram-se descritos na figura, nomeadamente: comprimento do vão igual a 5.0m; largura, altura e altura útil da secção iguais a 0.25m, 0.50m e 0.45m, respectivamente; armadura de tracção com secção total de 11.25cm<sup>2</sup> (armadura de compressão desprezável); betão da classe C20/25 e aço da classe A500, sendo os materiais caracterizados pelos seus valores característicos.

Consideraram-se seis malhas de elementos finitos diferentes, todas elas com elementos de igual comprimento junto ao meio vão e com elementos de comprimentos diferentes junto aos encastramentos,  $l_e$ , respectivamente, 0.10, 0.20, 0.30, 0.40, 0.60 e 1.20m.

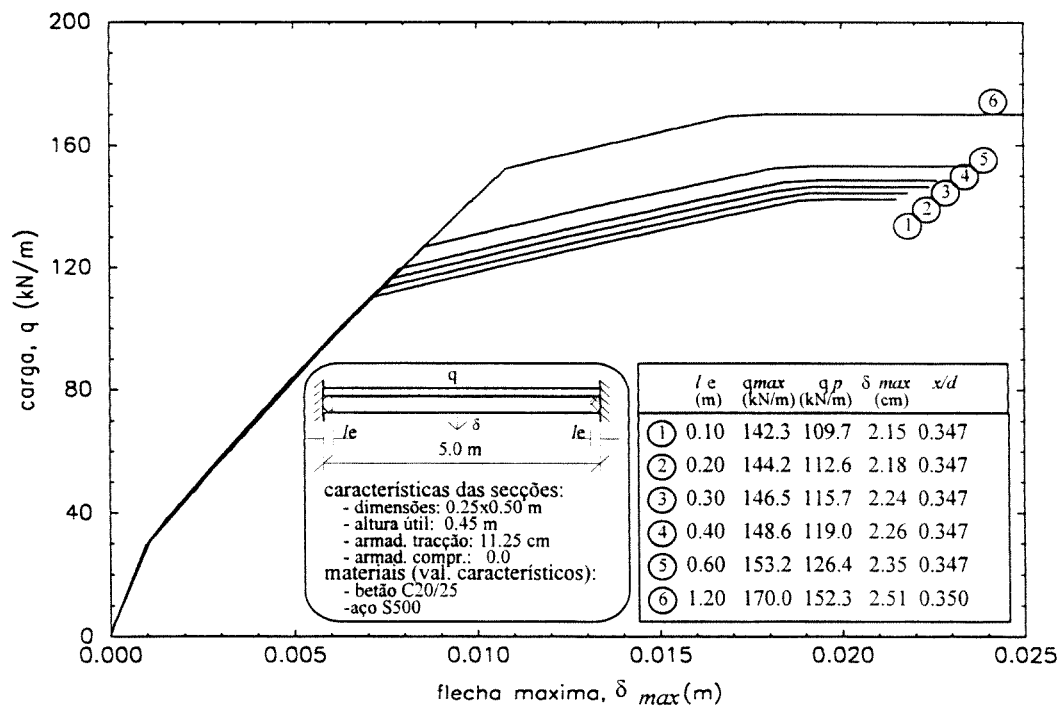
Além dos traçados da resposta, os resultados da análise encontram-se caracterizados pela carga máxima,  $q_{max}$ , a carga de início de plastificação das armaduras,  $q_p$ , o deslocamento vertical máximo atingido a meio vão próximo do colapso,  $\delta_{max}$ , e a posição relativa do eixo neutro,  $x/d$ , no ponto de Gauss mais próximo do encastramento, quando se atingiu a carga máxima.

A Fig. 3.8a permite verificar que quanto mais refinada a malha junto aos encastramentos, mais cedo se inicia a plastificação das armaduras e mais depressa se atinge a capacidade resistente e deformacional da viga. Ou seja, as malhas mais refinadas originaram menores valores para a capacidade resistente e respostas menos dúcteis.

Na Fig. 3.8b constata-se que a consideração de rótulas plásticas nas secções de encastramento permite obter resultados que são praticamente independentes do grau de refinamento da discretização. Conforme se pode verificar, a capacidade deformacional última vem praticamente inalterada para as várias discretizações usadas. As discrepâncias ocorridas nos valores da capacidade resistente,  $q_{max}$ , e da carga que originou início da plastificação,  $q_p$ , devem-se às diferentes posições do ponto de Gauss mais próximo do encastramento nas diferentes malhas.



a) sem rótulas plásticas



b) com rótulas plásticas

Fig. 3.8 - Traçados da resposta para uma viga bi-encastada considerando diferentes malhas de elementos finitos.

### 3.3.3 – Formulação do elemento unidimensional curvilíneo. Modelação do pré-esforço

#### 3.3.3.1 - Considerações iniciais

A contribuição das armaduras de pré-esforço para o equilíbrio da estrutura deve considerar, não só, a modelação da acção resultante da força de esticamento aplicada à armadura de pré-esforço, mas também, a sua rigidez na formação da matriz de rigidez global da estrutura.

Diferentes formulações têm sido utilizadas para simular os cabos de pré-esforço, quer admitindo linhas poligonais com troços rectos no interior dos elementos (Kang, 1977 e 1980; Van Zyl, 1979; Scordelis, 1983; Mari, 1984; Onn, 1984), quer considerando um traçado curvo mas tendo em conta apenas as forças nodais equivalentes (Bouberguig, 1983; Calvi, 1987). Em formulação desenvolvida pelo autor (Henriques, 1988 e 1991) admite-se um traçado curvo contínuo do cabo, sendo contabilizada a sua contribuição para a matriz de rigidez global e para o vector das forças nodais equivalentes, através de elementos curvos unidimensionais inseridos em elementos de viga usados na discretização de estruturas porticadas. Póvoas (1989 e 1991) generalizou a formulação de elementos curvos unidimensionais a elementos planos e de casca.

A formulação do elemento unidimensional curvilíneo, usado na caracterização da rigidez e das forças conduzidas pela armadura de pré-esforço, é baseado nas propostas apresentadas anteriormente pelo autor (Henriques, 1991) e por Póvoas (1991). Partindo do conceito de elemento discreto (Zienkiewicz, 1972), a formulação desenvolvida permite considerar qualquer traçado de armadura até ao segundo grau (ou aproximadamente), embebida no interior dos elementos finitos que discretizam a estrutura, sendo considerada uma aderência perfeita entre o betão e o aço.

Nos pontos seguintes descrevem-se os aspectos mais significativos da formulação. Destaca-se a inserção dos elementos discretos nos elementos de casca, no entanto, a aplicação aos elementos de viga e elementos planos é obtida de forma imediata através da anulação das componentes que não interessam.

#### 3.4.3.2 - Geometria do elemento

Conhecida a localização de um certo número,  $m$ , de pontos da armadura de pré-esforço, o respectivo traçado ao longo da estrutura (Fig. 3.9) é definido com o auxílio das funções interpoladoras de Lagrange:

$$\underline{x}_p(s) = \sum_{i=1}^m L_i(s) \underline{x}_{p,i} \quad , \quad (3.28)$$

onde  $\underline{x}_p(s)$  é o vector representativo da geometria, no referencial global, em função da coordenada  $s$  referida ao sistema coordenado da armadura;  $L_i(s)$  representa as funções de interpolação de Lagrange adoptadas e  $\underline{x}_{p,i}$  indica as coordenadas dos pontos previamente fixados.

De uma forma idêntica a (3.28), define-se a geometria do troço de armadura inserido no elemento finito da estrutura (Fig. 3.10):

$$\underline{x}_p(\tau) = \sum_{j=1}^3 N'_j(\tau) \cdot \underline{x}_{p,j} \quad , \quad (3.29a)$$

onde  $\tau$  é a coordenada curvilínea no referencial local da armadura,  $\underline{x}_{p,j}$  representa as coordenadas gerais dos nós deste elemento e  $N'_j(\tau)$  designa as funções de forma adoptadas na formulação do elemento unidimensional parabólico, definidas por:

$$N'_1(\tau) = -\frac{1}{2}\tau(1-\tau) \quad , \quad N'_2(\tau) = (1-\tau)(1+\tau) \quad \text{e} \quad N'_3(\tau) = \frac{1}{2}\tau(1+\tau) \quad . \quad (3.29b)$$

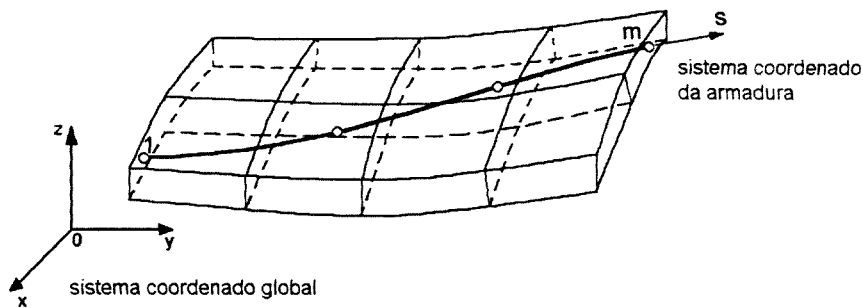


Fig. 3.9 - Geometria da armadura de pré-esforço.

A definição da geometria dos cabos de pré-esforço na malha de elementos finitos exige o conhecimento dos elementos finitos da estrutura que são intersectados pela armadura e das coordenadas locais em cada um dos elementos atravessados. De forma a simplificar esta tarefa, desenvolveu-se um procedimento automático que permite identificar todos os elementos finitos da estrutura atravessados e determinar as coordenadas  $s_i$  e  $(\xi, \eta, \zeta)_{p,i}$  dos pontos de intersecção, recorrendo ao sistema de equações não lineares representado por (Bouberguig, 1983):

$$\underline{x}_f(\xi, \eta, \zeta) = \underline{x}_p(s) \quad , \quad (3.30)$$

onde  $\underline{x}_f(\xi, \eta, \zeta)$  define a geometria da face de um elemento finito da estrutura (Fig. 3.10).



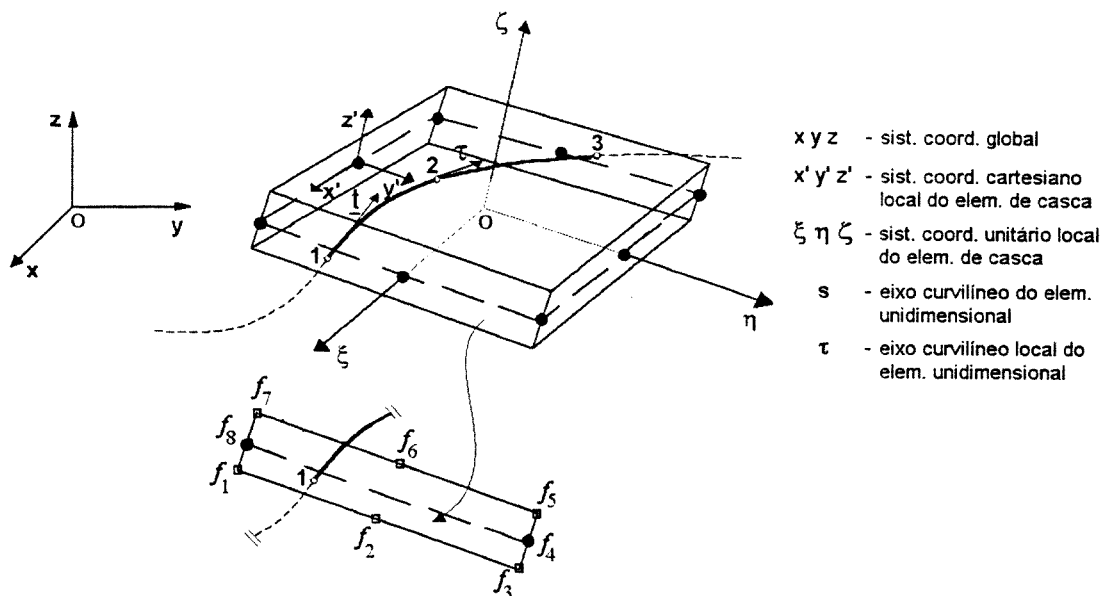


Fig. 3.10 - Representação do elemento unidimensional curvilíneo embestado no elemento de casca.

Uma vez definidos os dois pontos de intersecção com as faces do elemento (identificados pelas coordenadas  $s_1$  e  $s_3$ ) a localização do ponto médio do elemento unidimensional embestado no elemento finito da estrutura caracteriza-se pela seguinte igualdade:

$$s_2 = (s_1 + s_3) / 2 \quad , \quad (3.31)$$

obtendo-se, subseqüentemente, as correspondentes coordenadas curvilíneas  $(\xi, \eta, \zeta)_{p,2}$  através de (3.30).

Finalmente, conhecidas as coordenadas locais  $(\xi, \eta, \zeta)_{p,j}$  dos nós do elemento unidimensional, é possível obter as correspondentes coordenadas globais  $\underline{x}_{p,j}$  recorrendo à formulação do elemento finito da estrutura e, conseqüentemente, a geometria do trecho da armadura pela equação (3.29).

### 3.3.3.3 - Campo de deslocamentos

O campo de deslocamentos da armadura de pré-esforço é caracterizado pela componente axial de deslocamentos  $u_p$ . Esta componente de deformação corresponde à projecção das componentes de deformação referidas ao sistema coordenado global no referencial curvilíneo do elemento unidimensional.

O vector de posição  $\underline{r}(\tau)$  de um ponto genérico do elemento unidimensional, em relação à origem do referencial global, é definido por:

$$\underline{r}(\tau) = \underline{x}_p(\tau) = x_p(\tau)\underline{i} + y_p(\tau)\underline{j} + z_p(\tau)\underline{k} \quad , \quad (3.32a)$$

onde  $\underline{i}$ ,  $\underline{j}$  e  $\underline{k}$  são os versores do referencial global e,

$$\begin{Bmatrix} x_p(\tau) \\ y_p(\tau) \\ z_p(\tau) \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^3 N'_j(\tau) \begin{Bmatrix} x_{p,j} \\ y_{p,j} \\ z_{p,j} \end{Bmatrix} \quad . \quad (3.32b)$$

O vector tangente unitário,  $\underline{t}$  (ver Fig. 3.10), ao elemento unidimensional, num ponto genérico de coordenada  $\tau$ , é dado pelas seguintes relações:

$$\underline{t}(\tau) = \frac{\underline{v}(\tau)}{\|\underline{v}(\tau)\|} \quad , \quad (3.33a)$$

com

$$\underline{v}(\tau) = \frac{d\underline{r}}{d\tau} = \frac{dx_p}{d\tau}\underline{i} + \frac{dy_p}{d\tau}\underline{j} + \frac{dz_p}{d\tau}\underline{k} \quad , \quad (3.33b)$$

e

$$\|\underline{v}(\tau)\| = v = \sqrt{\left(\frac{dx_p}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy_p}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz_p}{d\tau}\right)^2} \quad . \quad (3.33c)$$

Fazendo coincidir o vector  $\underline{i}'$  com a direcção do vector unitário  $\underline{t}(\tau)$ , os versores  $\underline{i}'$ ,  $\underline{j}'$  e  $\underline{k}'$  formam um referencial cartesiano local associado ao elemento unidimensional, definidos por:

$$\underline{i}' = \underline{t}(\tau) = a\underline{i} + b\underline{j} + c\underline{k} \quad , \quad (3.34a)$$

$$\underline{j}' = \frac{-b\underline{i} + a\underline{j}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad , \quad (3.34b)$$

$$\underline{k}' = \frac{\underline{i}' \times \underline{j}'}{\|\underline{i}' \times \underline{j}'\|} \quad , \quad (3.34c)$$

com

$$a = \frac{1}{v} \frac{dx_p}{d\tau} \quad , \quad b = \frac{1}{v} \frac{dy_p}{d\tau} \quad e \quad c = \frac{1}{v} \frac{dz_p}{d\tau} \quad . \quad (3.34d)$$

As componentes de deslocamento  $(u_p, v_p, w_p)$  referidas ao sistema cartesiano local do elemento unidimensional são obtidas através da seguinte relação:

$$\begin{Bmatrix} u_p \\ v_p \\ w_p \end{Bmatrix} = \underline{T}_p \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad , \quad (3.35)$$

onde  $\underline{T}_p$  é a matriz de transformação definida pelas componentes dos vectores locais de base no referencial global, ou seja:

$$\underline{T}_p = \begin{bmatrix} a & b & c \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \underline{i}' \\ \leftarrow \underline{j}' \\ \leftarrow \underline{k}' \end{matrix} \quad . \quad (3.36)$$

Tendo presente que apenas interessa considerar o deslocamento axial,  $u_p$ , da armadura de pré-esforço, então a relação (3.35) simplifica-se para:

$$u_p = \{a \quad b \quad c\} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = au + bv + cw \quad . \quad (3.37)$$

#### 3.3.3.4 - Estado de deformação

O estado de deformação é traduzido pela deformação na direcção longitudinal,  $\varepsilon_p$ , ao traçado da armadura de pré-esforço:

$$\varepsilon_p = \frac{\partial u_p}{\partial x'} \quad , \quad (3.38)$$

onde o eixo  $x'$  tem a direcção do vector unitário  $\underline{t}$ , coincidindo com o referencial local  $\underline{i}'$ .

Considerando a matriz  $\underline{T}_p$  definida em (3.36), as componentes de deformação no referencial local podem ser obtidas pela transformação, expressa em (3.9), das componentes relativas ao referencial global. Tendo em conta exclusivamente a componente axial de extensão da armadura essa transformação simplifica-se, vindo:

$$\varepsilon_p = \frac{\partial u_p}{\partial x'} = \left\{ a \quad b \quad c \right\} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} , \quad (3.39)$$

e desenvolvendo:

$$\begin{aligned} \varepsilon_p = a^2 \frac{\partial u}{\partial x} + ab \frac{\partial v}{\partial x} + ac \frac{\partial w}{\partial x} + ab \frac{\partial u}{\partial y} + b^2 \frac{\partial v}{\partial y} + bc \frac{\partial w}{\partial y} + \\ + ac \frac{\partial u}{\partial z} + bc \frac{\partial v}{\partial z} + c^2 \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Finalmente, recorrendo às expressões da formulação do elemento finito da estrutura, é possível explicitar as derivadas parciais,  $\partial \underline{u} / \partial \underline{x}$ , das componentes dos deslocamentos no referencial em função dos deslocamentos nodais  $\underline{u}'_j$  desse elemento ( $j = 1, \dots, n$ ;  $n$  é o número de nós por elemento), ou seja:

$$\varepsilon_p = \underline{B}_p(\tau) \cdot \underline{u}' \quad , \quad (3.41)$$

onde  $\underline{B}_p$  é a matriz de deformação da armadura de pré-esforço.

### 3.3.3.5 - Matriz de rigidez

Utilizando a formulação usual do método dos elementos finitos e conhecendo a matriz de deformação  $\underline{B}_p$  que relaciona a extensão axial do elemento unidimensional com os graus de liberdade do elemento finito da estrutura, a contribuição da armadura de pré-esforço para a matriz de rigidez da estrutura é dada por:

$$\underline{k}_{pe} = \int_{l_p} \underline{B}_p^T \cdot E_p \cdot \underline{B}_p \cdot A_p \cdot dl \quad , \quad (3.42)$$

onde  $E_p$  e  $A_p$  correspondem, respectivamente, ao módulo de rigidez longitudinal do aço de pré-esforço (definido de acordo com a relação constitutiva traduzida pela curva tensões-deformações axiais) e à área da secção transversal da armadura, representando  $l_p$  o comprimento do troço de armadura contido no elemento.

Escrevendo o integral de linha da relação (3.42) em termos da coordenada curvilínea local  $\tau$ , vem:

$$\underline{k}_{pe} = \int_{-1}^1 \underline{B}_p^T \cdot E_p \cdot \underline{B}_p \cdot A_p \cdot v \, d\tau \quad , \quad (3.43)$$

onde  $v$  vem definido por (3.33c). O cálculo deste integral é efectuado por integração numérica de modo idêntico aquele descrito na secção 3.2.7.

### 3.3.3.6 - Acção do pré-esforço

A acção do pré-esforço aderente é introduzida de uma forma natural através de uma deformação longitudinal previamente aplicada à armadura, com o valor correspondente à força de esticamento transmitida pelos macacos de pré-esforço.

Esta técnica permite avaliar, de forma simples e directa, a acção do pré-esforço tanto na fase de aplicação como nas fases seguintes de carregamento.

A contribuição da armadura de pré-esforço para o vector das forças nodais equivalentes ao estado de tensão instalado na estrutura é considerada da seguinte forma:

$$\underline{f}_{pe} = \int_{l_p} \underline{B}_p^T \cdot \sigma_p \cdot A_p \cdot dl \quad , \quad (3.44)$$

sendo,

$$\sigma_p = E_p \cdot \varepsilon_p \quad . \quad (3.45)$$

A determinação do integral (3.44) é efectuada, como habitualmente, por integração numérica.

A acção do pré-esforço,  $P'_0$ , é introduzida através da consideração de uma deformação inicial,  $\varepsilon_{p'_0}$ , dada pela seguinte expressão:

$$\varepsilon_{p'_0} = \frac{P'_0}{E_{p_0} \cdot A_p} \quad , \quad (3.46)$$

onde  $E_{p_0}$  é o módulo de elasticidade do aço de pré-esforço. Substituindo esta deformação inicial nas expressões (3.45) e (3.44), obtêm-se as forças nodais equivalentes ao pré-esforço aplicado, sendo adicionadas às forças nodais devidas à restante solicitação.

Na modelação da acção do pré-esforço é necessário considerar as perdas que ocorrem durante todo o processo de análise. Logo após se proceder ao esticamento dos cabos, verifica-se uma diminuição da força instalada devido às perdas instantâneas, dando origem ao pré-esforço inicial  $P_0$ . As perdas instantâneas processam-se antes (nas armaduras pré-tensionadas) e durante a

transferência das forças dos macacos de pré-esforço para os dispositivos de amarração da peça, sendo classificadas nos seguintes grupos:

- perdas instantâneas devidas a atritos entre a armadura e as bainhas (geralmente desprezáveis nas armaduras pré-tensionadas);
- perdas instantâneas devidas à deformação instantânea do betão;
- perdas instantâneas nos dispositivos de amarração;
- perdas que antecedem a transferência do pré-esforço nas armaduras pré-tensionadas, nomeadamente, a retracção do betão e a relaxação do aço de pré-esforço.

A variação das propriedades do betão e do aço ao longo do tempo conduz a uma diminuição do pré-esforço, resultante das perdas diferidas que se processam num período de vários anos. O pré-esforço ao fim de um período de tempo,  $t$ , obtém-se do pré-esforço inicial deduzindo-lhes as perdas diferidas que se processam nesse período. As perdas diferidas são, geralmente, classificadas em dois grupos:

- perdas por fluência e retracção do betão;
- perdas por relaxação do aço de pré-esforço.

No presente modelo, as perdas instantâneas devidas ao atrito entre a armadura e as bainhas são avaliadas de acordo com os códigos de prática corrente, nomeadamente, o Código-Modelo do CEB-FIP (CEB-FIP, 1993) e o Eurocódigo 2 (EC2, 1991).

As perdas instantâneas provocadas por um encurtamento das armaduras com origem no sistema de ancoragem, são avaliadas através de procedimentos convencionais (Henriques, 1991; Póvoas, 1991). A determinação do comprimento de influência,  $l_a$ , da região adjacente à ancoragem afectada por este tipo de perdas é feita pela seguinte relação genérica:

$$\Delta u_a = \int_0^{l_a} \Delta \varepsilon_p dl \quad , \quad (3.47)$$

onde  $\Delta u_a$  é o escorregamento total na ancoragem e  $\Delta \varepsilon_p$  a correspondente variação da deformação axial da armadura.

Os procedimentos numéricos relativos à aplicação do pré-esforço que a seguir se descrevem, consideram de forma automática, quer as perdas devidas à deformação instantânea do betão verificadas nas estruturas pré-tensionadas, quer a respectiva compensação através do aumento da força de esticamento no caso de estruturas pós-tensionadas.

As perdas diferidas, resultantes dos fenómenos de fluência e retracção do betão e relaxação do aço, estão intimamente ligadas com a evolução no tempo do comportamento dos materiais. A solução adoptada no presente trabalho possibilita a realização de análises transitórias (ver capítulo seguinte) tendo em conta os fenómenos atrás referidos e considerando implicitamente as perdas diferidas enumeradas.

A modelação da aplicação do pré-esforço considera de forma adequada todas as perdas instantâneas que lhe estão associadas, por forma a garantir o nível de pré-esforço efectivamente instalado na estrutura. Nesta fase, as armaduras pré-tensionadas e pós-tensionadas apresentam comportamentos distintos, por isso, adoptam-se diferentes procedimentos numéricos consoante o tipo de armaduras.

O procedimento numérico implementado para as armaduras pré-tensionadas consiste nos seguintes passos:

- a) definição do pré-esforço inicial,  $P_0$ , obtido da força de esticamento  $P'_0$  descontando as perdas antecedendo a transferência do pré-esforço e as perdas por escorregamento das armaduras na zona de amarração;
- b) determinação da deformação axial correspondente ao pré-esforço inicial, definida por:

$$\Delta\varepsilon_{p0} = \frac{P_0}{E_{p0} \cdot A_p} \quad ; \quad (3.48)$$

- c) determinação das forças nodais equivalentes à deformação inicial imposta à armadura de pré-esforço, de acordo com a expressão (3.44), sendo adicionadas às forças nodais resultantes das restantes cargas.

O procedimento numérico adoptado para as armaduras pós-tensionadas visa garantir o valor do pré-esforço instalado na estrutura, tendo em atenção, simultaneamente, a deformação da estrutura, as perdas por atrito durante o esticamento da armadura e as perdas devidas à penetração das cunhas. Este procedimento iterativo consiste nos seguintes passos:

- a) a deformação  $\Delta\varepsilon_{p'_0}$  correspondente à força de esticamento  $P'_0$ , avaliada identicamente a (3.48), é utilizada para determinar as forças nodais equivalentes ao pré-esforço aplicado, com base na expressão (3.44);
- b) determinado o campo de deslocamentos correspondente,  $\Delta u$ , a deformação incremental  $\Delta\bar{\varepsilon}_p$  da armadura é avaliada de forma idêntica a (3.41), vindo a distribuição de tensões,  $\Delta\bar{\sigma}_p$ , ao longo da armadura definida de acordo com a distribuição das perdas por atrito e por escorregamento das cunhas, previamente avaliadas;

- c) conhecido o estado de tensão na armadura de pré-esforço, a força de pré-esforço correspondente vem definida pelo integral:

$$\bar{P}_0 = \int_{l_p} \frac{B'_p \sigma_p}{A_p} dl \quad ; \quad (3.49)$$

- d) a identidade entre as forças de pré-esforço inicial  $P_0$  e  $\bar{P}_0$  é verificada, sendo os passos anteriores repetidos até que estes valores sejam aproximadamente iguais, para uma tolerância previamente fixada.

### 3.4 – VARIABILIDADE DA GEOMETRIA DOS ELEMENTOS DE BETÃO

#### 3.4.1 – Generalidades

A variabilidade associada à geometria dos elementos estruturais afecta directamente tanto a resposta como a solicitação. Se por um lado a resposta estrutural depende das dimensões das secções transversais e da posição das armaduras e respectivas espessuras de recobrimento (que afecta sobretudo a durabilidade), a solicitação associada ao peso próprio dos elementos estruturais depende da respectiva geometria.

A incerteza relativa à geometria dos elementos de betão depende essencialmente do tipo da obra a realizar (definitivas ou provisórias, pontes ou edifícios, lajes maciças ou aligeiradas, vigas com secção cheia ou oca, etc.), do processo construtivo ou tecnologia envolvida e qualidade de execução.

A consideração de modelos probabilísticos para tratar a variabilidade geométrica exige cuidados especiais e, em muitos casos, um tratamento individualizado. A definição de modelos probabilísticos ou dados experimentais provenientes de fontes distintas ou de outros países pode não caracterizar de forma adequada o problema em estudo, sobretudo se estão associados a tecnologias e a formas de construir muito diversas.

#### 3.4.2 – Valores regulamentares

As normas correntes lidam com este tipo de incertezas através da especificação de tolerâncias, definidas como a diferença absoluta entre os valores nominais e os valores reais. Estas tolerâncias têm como objectivo principal limitar os desvios previsíveis durante a execução.



O Código-Modelo do CEB-FIP (MC90) (CEB-FIP, 1993) define tolerâncias admissíveis para obras de estruturas de betão armado ou pré-esforçado, cujos valores se definem nos Quadros 3.1 e 3.2. O cumprimento destas tolerâncias permite assegurar um "modo de construir adequado".

A tolerância máxima admissível especificada para o recobrimento das armaduras é:

- para controlo normal,  $\Delta_c = 10\text{mm}$ ;
- para controlo intenso,  $\Delta_c = 5\text{mm}$ ;

As tolerâncias propostas pelo Eurocódigo 2 (EC2, 1991), apresentadas nos Quadros 3.3 e 3.4, têm como objectivo garantir as hipóteses de dimensionamento admitidas nesta norma e assegurar níveis de segurança e durabilidade das estruturas de betão.

Quadro 3.1 - Tolerâncias para as dimensões das secções de betão, segundo o MC90.

Elemento estrutural	Dimensão $A$ (mm)	Tolerância para a dimensão $A$ $\Delta A$ (mm)
Vigas, pilares, ou paredes	$A \leq 200$	$\Delta A \leq 5$
	$200 < A < 2000$	$\Delta A \leq (3.5 + 0.008A)$
	$A \geq 2000$	$\Delta A \leq (17.5 + 0.001A)$
Lajes	$A \leq 200$	$-10 \leq \Delta A \leq 6$
	$200 < A < 2000$	$-20 \leq \Delta A \leq (4 + 0.010A)$
	$A \geq 2000$	$-30 \leq \Delta A \leq (20 + 0.002A)$

Quadro 3.2 - Tolerâncias para a posição das armaduras, segundo o MC90.

Altura útil $d$ (mm)	Tolerância para $d$ $\Delta d$ (mm)
$d \leq 1000$	$\Delta d \leq 10$
$1000 < d < 2000$	$\Delta d \leq 0.01d$
$d \geq 2000$	$\Delta d \leq 20$

Quadro 3.3 - Tolerâncias para as dimensões dos elementos estruturais segundo o EC2.

Dimensão $A$ (mm)	Tolerância para a dimensão $A$ $\Delta A$ (mm)
$A \leq 150$	$\Delta A \leq \pm 5$
$A = 400$	$\Delta A \leq \pm 10$
$A \geq 2500$	$\Delta A \leq \pm 15$
Nota: Interpolação linear para outros valores de $A$ .	

Quadro 3.4 - Tolerâncias para as alturas úteis de armaduras pré-esforçadas, segundo o EC2.

Tipo de armadura	Altura útil $d_p$ (mm)	Tolerância para $d$ $\Delta d_p$ (mm)
Cabos	$d_p \leq 200$	$\Delta d_p \leq \pm 0.025 d_p$
	$d_p \geq 200$	$\Delta d_p \leq \pm 0.025 d_p$ ou $\Delta d_p \leq \pm 20$
Cordões	$d_p \leq 200$	$\Delta d_p \leq \pm 0.025 d_p$
	$d_p \geq 200$	$\Delta d_p \leq \pm 0.025 d_p$ ou $\Delta d_p \leq \pm 30$

### 3.4.3 – Dados experimentais

A vasta gama de valores experimentais apresentada por diversos autores sobre variações dimensionais em obras de betão, não permitem estabelecer de forma generalizada modelos probabilísticos adequados. Como já foi referido o tipo de obra e as diferentes tecnologias envolvidas são os principais factores que impedem essa generalização.

Mirza e MacGregor (Mirza, 1979b) fizeram um amplo tratamento sobre variações dimensionais em obras de betão armado, para elementos pré-fabricados e betonados no local da obra (*in situ*), nos Estados Unidos da América (EUA). Em todas as grandezas estudadas consideraram distribuições normais para descrever os diferentes tipos de imperfeições geométricas. Para dimensões muito pequenas usam-se distribuições truncadas para evitar valores negativos. De uma maneira geral esta distribuição é adoptada por diversos autores. De acordo com os estudos de Mirza e MacGregor, o coeficiente de variação da espessura e da altura útil em lajes betonadas *in situ* varia entre 6% a 12% e em lajes pré-fabricadas esses valores descem para 1% a 5%. Os valores obtidos para os coeficientes de variação em vigas de betão foram sensivelmente mais baixos.

Melchers (1987) sugere os seguintes coeficientes de variação ( $CV$ ) para a espessura de lajes de betão:

- em edifícios:  $CV = 0.08$  ;
- na construção de pontes, com controlo rigoroso do processo construtivo:  $CV = 0.02$  .

Ainda segundo o mesmo autor, a altura útil referida à armadura passiva apresenta os seguintes coeficientes de variação:

- lajes betonadas *in situ*:  $CV = 0.08$  ;
- lajes pré-fabricadas: *variação praticamente desprezável*.

Ainda tendo em conta resultados experimentais obtidos nos EUA, Siriakson (ver Almunia, 1993) propôs a utilização dos parâmetros de variabilidade da geometria resumidos no Quadro 3.5.

Quadro 3.5 - Valores de variabilidade da geometria de elementos estruturais nos EUA.

Grandeza (mm)	Coefficiente de variação ( $CV$ )
Altura útil, $d$ (vigas e lajes)	$17.8/d$
altura de vigas, $h$	$10.2/h$
espessura de lajes, $e$	$10.2/e$
largura das secções, $b$	$10.2/b$

O Joint Committee on Structural Safety (JCSS) publicou em 1991 (Casciati, 1991) um documento referente ao estudo da variabilidade geométrica em elementos estruturais e suas posições relativas. As bases de dados estudadas são provenientes fundamentalmente de países europeus, embora se assinalem as diferenças em relação a outros países não europeus.

Tichy (CEB, 1980b) propôs valores médios,  $\bar{x}$ , e desvios padrão,  $\sigma_x$ , para as dimensões de elementos de betão, baseados no tratamento estatístico de 40.000 medidas referentes a lajes, vigas e paredes de edifícios. Os parâmetros propostos (expressos em cm) são:

- elementos betonados *in situ*:

$$\bar{x} = X_n \quad , \quad \sigma_x = 0.7 + 0.007 X_n \quad ; \quad (3.50)$$

- elementos pré-fabricados:

$$\bar{x} = X_n \quad , \quad \sigma_x = 0.5 + 0.005 X_n \quad ; \quad (3.51)$$

onde  $X_n$  é o valor nominal.

### 3.5 – ACCÕES CONSIDERADAS E SUAS VARIABILIDADES

#### 3.5.1 – Generalidades

As acções contempladas no presente modelo são todas aquelas que podem ser analisadas tendo em conta o comportamento estático da estrutura. Assim, as acções resultantes do efeito dos

sismos e do vento, cuja consideração de modelos dinâmicos é essencial, saem fora do âmbito deste trabalho.

As acções consideradas dividem-se em dois grupos: as acções de carácter mecânico e as acções não mecânicas. No primeiro grupo inserem-se acções tais como cargas permanentes, pré-esforço, sobrecargas de utilização corrente em edifícios ou do tráfego em pontes, etc.. No segundo grupo incluem-se as variações de temperatura e as acções resultantes dos fenómenos diferidos, nomeadamente, a fluência e a retracção do betão e a relaxação das armaduras. Os fenómenos diferidos são abordados no capítulo seguinte, sendo a variação de temperatura objecto de destaque nesta secção.

Aborda-se de forma sumária a variabilidade das acções mecânicas mais significativas e da variação de temperatura.

### 3.5.2 – Acções permanentes

As acções permanentes caracterizam-se, geralmente, por cargas distribuídas pelo volume (peso próprio dos elementos estruturais) ou pela superfície exterior (elementos não estruturais colocados sobre a estrutura com carácter de permanência, por exemplo, o pavimento de uma ponte rodoviária). Este tipo de acções apresentam em geral pequenas variabilidades o que está implícito nas actuais normas, que identificam o valor característico com o valor médio.

A variabilidade das acções permanentes está sobretudo associada às imperfeições geométricas (abordadas na secção anterior), uma vez que, comparativamente, o peso específico dos materiais apresenta variações praticamente insignificantes. A regulamentação corrente define valores de cálculo  $G_d = 1.35G_k$  ( $G_k = G_m$ ), onde o coeficiente 1.35 assegura a variabilidade corrente associada ao processo construtivo e ao tipo de controlo, características já abordadas na descrição das imperfeições geométricas. Além disso, é permitido a utilização de um coeficiente inferior a 1.35 se o modo de fabrico e o controlo rigoroso garantirem uma qualidade superior.

### 3.5.3 – Acções de pré-esforço

O efeito induzido na estrutura pela força de pré-esforço introduzida na respectiva armadura é convenientemente modelado pelo elemento unidimensional curvilíneo descrito na secção 3.3.3. As incertezas relativas à força de pré-esforço e às acções que lhe estão associadas depende de vários factores, nomeadamente, erros da geometria dos elementos estruturais e do traçado da

armadura, das propriedades dos materiais (módulos de deformação, coeficientes de atrito, comportamento diferido, etc.), qualidade de execução, controlo do processo, etc..

Os actuais códigos de dimensionamento de estruturas de betão armado e pré-esforçado (CEB-FIP, 1993; EC2, 1991) adoptam como valores característicos superior e inferior (correspondendo, respectivamente, aos quantis de 95% e de 5%) da força de pré-esforço, os valores 1.1 e 0.9 do valor médio dessa força. Assumindo uma distribuição gausseana, estes valores estão associados a um coeficiente de variação aproximadamente igual a 6%.

De acordo com resultados experimentais obtidos por vários autores (CEB, 1980b), os coeficientes de variação associados à força de pré-esforço oscilam entre 3% a 8% para as idades iniciais e entre 6% a 12% quando se consideram todas as perdas.

#### **3.5.4 – Sobrecargas de utilização corrente em edifícios**

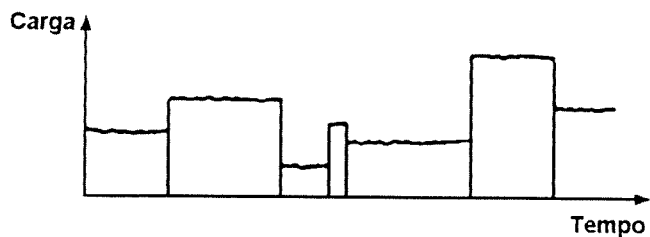
De acordo com os actuais Eurocódigos (EC1-2, 1994), as cargas de exploração em edifícios são devidas a (Calgaro, 1996):

- 1 – equipamentos, materiais e bens amovíveis;
- 2 – uso corrente por ocupação humana;
- 3 – uso excepcional, acumulação de pessoas ou de bens, que pode ocorrer em casos de reorganização ou redecoração dos espaços;
- 4 – veículos.

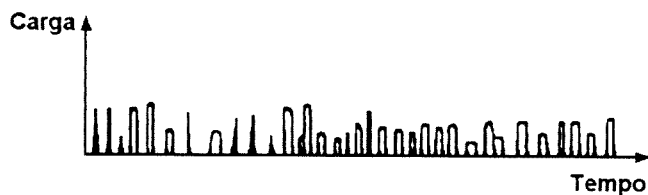
As grandezas referentes ao primeiro tipo de carga podem sofrer alterações instantâneas significativas em determinados pontos no tempo devido, por exemplo, a mudança de uso. No entanto, entre esses instantes as variações do carregamento são muito pequenas sendo, geralmente, consideradas insignificantes (Fig. 3.11a).

As cargas devidas à ocupação corrente de pessoas têm características periódicas e actuam durante um período de tempo relativamente pequeno. Por exemplo, as salas de aulas numa escola encontram-se ocupadas cerca de uma terça parte do tempo por dia (Fig. 3.11b).

As cargas de natureza excepcional ocorrem em situações especiais durante um espaço de tempo curto ou moderado, mas com uma frequência suficiente durante a vida da estrutura para que seja necessário considerá-las (Fig. 3.11c).



a) sobrecargas devidas a equipamentos pesados ou mobiliário



b) sobrecargas devidas a pessoas em situações correntes

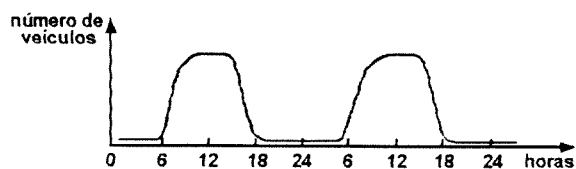


c) sobrecargas em situações excepcionais

Fig. 3.11 - Variabilidade no tempo das sobrecargas em edifícios.



a) zona habitacional



b) zona comercial

Fig. 3.12 - Flutuação diária do número de veículos numa garagem pública.

As cargas resultantes dos veículos estacionados, por exemplo em garagens públicas, têm uma flutuação diária. Essa flutuação depende dos locais e das zonas servidas aos utentes dos veículos (Fig. 3.12).

Embora o presente trabalho não tenha como objectivo a definição de modelos probabilísticos de sobrecargas em edifícios, será abordado sumariamente os aspectos essenciais que conduziram à definição dos valores propostos pelo Eurocódigo 1.

As técnicas estatísticas utilizadas na definição dos valores característicos e de cálculo das sobrecargas tiveram em conta as seguintes hipóteses (Sedlacek, 1992, 1996):

- 1 – A variação espacial das sobrecargas é independente da sua variação no tempo.
- 2 – Na representação da variação espacial, as sobrecargas discretas são definidas por uma sobrecarga equivalente uniformemente distribuída.
- 3 – A representação da variação temporal é feita através da consideração de duas componentes (Fig. 3.13):
  - A componente quase permanente (Fig. 3.13a), cujo valor representa aproximadamente o tempo médio da flutuação real da sobrecarga entre as mudanças de utilização e inclui o peso das pessoas que frequentemente se encontram presentes. O valor das flutuações entre as mudanças de utilização é considerado nas incertezas associadas a esta componente de sobrecarga.
  - A sobrecarga intermitente (fig. 3.13b) representa todo o tipo de sobrecargas não representadas pela componente quase permanente (por exemplo, sobrecargas de uso especial).

A combinação entre as componentes de sobrecarga quase permanente e intermitente encontra-se ilustrada na Fig. 3.13c.

As sobrecargas devidas aos veículos em áreas de estacionamento não são, em geral, consideradas com carácter quase permanente. A aproximação probabilística para este tipo de sobrecargas, com o objectivo de determinar valores característicos, é baseada nas seguintes hipóteses:

- 1 – A variação espacial entre dois lugares de estacionamento (supostos idênticos, isto é, com a mesma forma e as mesmas dimensões) é independente.
- 2 – a variação temporal das sobrecargas para cada lugar de estacionamento é modelado por um processo rectangular de carga periódica (Fig. 3.14). Assim, se  $t_d$  designar o tempo de ocupação (horas por dia) e  $t_u$  representar o tempo que um lugar de estacionamento está continuamente ocupado pelo mesmo veículo, o número médio de carros por dia é  $\bar{n} = t_d/t_u$ .

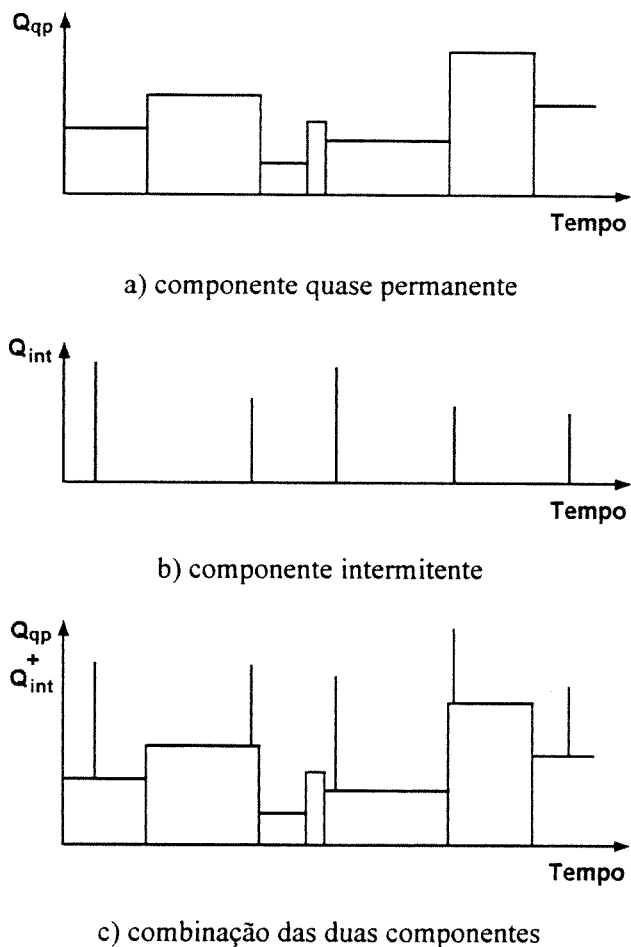


Fig. 3.13 - Representação da variabilidade temporal (processo estocástico) da sobrecarga.

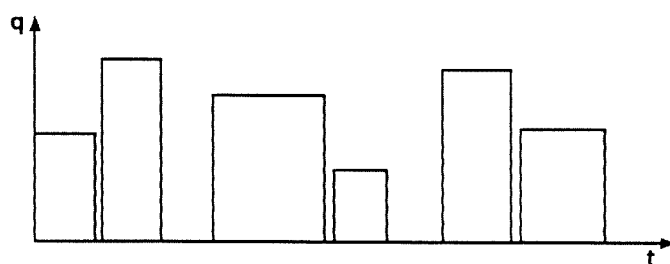


Fig. 3.14 - Processo rectangular de carga periódica.

Os valores de cálculo das sobrecargas são determinadas para um período de referência de 50 anos e para um índice de fiabilidade  $\beta = 3.80$ . Os valores característicos,  $p_k$ , são determinados a partir dos valores de cálculo,  $p_d$ , pela seguinte relação:

$$p_k = \frac{p_d}{\gamma_Q} \quad , \quad \text{com} \quad \gamma_Q = 1.50 \quad . \quad (3.52)$$



No dimensionamento dos elementos horizontais da estrutura considera-se que estão submetidos:

- a uma sobrecarga vertical uniformemente distribuída, com valor característico designado por  $q_{k,v}$ , a qual está afectada por um coeficiente reductor de superfície  $\alpha_A$  definido por:

$$\alpha_A = \frac{5}{7}\psi_0 + \frac{A_0}{A} \leq 1 \quad ; \quad A_0 = 10\text{m}^2 \quad , \quad (3.53)$$

sendo  $A_0$  uma área de referência,  $A$  a área da superfície efectivamente carregada em  $\text{m}^2$  e  $\psi_0$  o coeficiente que define o valor de combinação. O coeficiente  $\alpha_A$  é limitado superiormente por 1.

- a uma sobrecarga vertical concentrada com valor característico  $Q_{k,v}$ , geralmente não acumulável com a sobrecarga uniformemente distribuída.

No dimensionamento dos elementos verticais da estrutura considera-se que estão submetidos às acções que são transmitidas pelos elementos horizontais ao longo do seu comprimento. Estas acções podem ser afectadas por um coeficiente de redução vertical  $\alpha_n$  dado pela seguinte fórmula:

$$\alpha_n = \frac{2 + (n - 2)\psi_0}{n} \quad , \quad (3.54)$$

onde  $n$  (superior a 2) é o número de pisos situados sobre o elemento estrutural carregado.

Consideram-se ainda sobrecargas horizontais com valor característico representado por  $q_{k,h}$ , para o dimensionamento de elementos especiais, como por exemplo guarda-corpos.

Os valores das sobrecargas e os coeficientes parciais de combinação são diferenciados de acordo com a função e os fins a que se destina a estrutura. Assim, as estruturas são classificadas em diferentes categorias. No Quadro 3.6 apresenta-se resumidamente as sobrecargas de utilização e os coeficientes  $\psi$  para as diferentes categorias definidas no Eurocódigo 1.

### 3.5.5 – Sobrecargas de tráfego em pontes rodoviárias

A grandeza das sobrecargas de tráfego em pontes rodoviárias dependem essencialmente dos seguintes aspectos:

Quadro 3.6 - Sobrecargas de utilização em edifícios.

Categoria	Natureza da superfície	$q_{k,v}$ (kN/m <sup>2</sup> )	$Q_{k,v}$ (kN)	$q_{k,h}$ (kN/m)	$\psi_0$	$\psi_1$	$\psi_2$	obs.
A	Actividades domésticas e habitações				0.7	0.5	0.3	
A.1	Caso geral	2.0	2.0	0.5				a)
A.2	Escadas	3.0	2.0	0.5				a)
A.3	Varandas	4.0	2.0	0.5				a)
B	Edifícios públicos, escritórios, escolas, hotéis				0.7	0.5	0.3	
B.1	Caso geral	3.0	2.0	1.0				a)
B.2	Escadas e varandas	4.0	2.0	1.0				a)
C	Lugares de reunião de pessoas (exceptuando as categorias A, B, D e E)				0.7	0.7	0.6	
C.1	Locais com mesas	3.0	4.0	1.0				a)
C.2	Locais com lugares fixos	4.0	4.0	1.5				a)
C.3	Locais sem obstáculos à circulação de pessoas	5.0	4.0	1.5				a)
C.4	Locais que permitem actividades físicas	5.0	7.0	1.5				a)
C.5	Locais susceptíveis de ficarem superpovoados	5.0	4.0	3.0				a)
D	Superfícies comerciais				0.7	0.7	0.6	
D.1	Caso geral	5.0	4.0	1.5				a)
E	Superfícies susceptíveis de receber uma acumulação de mercadorias, compreendendo as áreas de acesso	6.0	7.0		1.0	0.9	0.8	a)
F	Áreas de circulação e de estacionamento de veículos ligeiros (< 30kN e < 8 passageiros)	2.0	10.0		0.7	0.7	0.6	b)
G	Áreas de circulação e de estacionamento de veículos de peso médio (> 30kN e < 160kN sobre dois eixos)	5.0	45.0		0.7	0.5	0.3	b)
H	Tectos inacessíveis				0.7	0.5	0.3	
H.1	Tectos com inclinação inferior a 20°	0.75	1.5					c)
H.2	Tectos com inclinação entre 20° e 40°	interpolação	linear					c)
H.3	Tectos com inclinação superior a 40°			0	1.5			
I	Tectos acessíveis para estruturas das categorias A a G	mesmas cargas que para as categorias A a E						
J	Tectos acessíveis a funções especiais (áreas de aterragem de helicópteros)	mesmas cargas que para as categorias F e G						
Observações:	a) Considerar em alternativa a carga concentrada em certas verificações locais. Os coeficientes $\alpha_I$ e $\alpha_n$ são aplicáveis. b) Considerar $q_{k,v}$ e $Q_{k,v}$ simultaneamente. Não se aplicam os coeficientes $\alpha_I$ e $\alpha_n$ . c) Considerar em alternativa a carga concentrada em certas verificações locais. Não se aplicam os coeficientes $\alpha_I$ e $\alpha_n$ .							

- Configuração e características do tráfego, nomeadamente, a intensidade, velocidade, densidade e sua evolução no tempo; a sua composição (percentagem de veículos pesados, tipos de veículos, etc.); possíveis correlações na chegada ou na carga dos veículos.
- Características dos veículos (carga total, configuração geométrica, distribuição de cargas pelos eixos, etc.).
- Tipo estrutural e esquema estático da ponte.
- Zona funcional do tabuleiro e posicionamento transversal dos veículos.
- Efeito dinâmico (interacção veículo-estrutura) função da rugosidade do pavimento, estado de conservação das juntas de dilatação, tipo estrutural, tipo de veículo, amortecimento, pressão das rodas, etc..

A avaliação das solicitações a partir dos limites legais do peso dos veículos e das velocidades máximas é completamente desadequado, dado que esses limites são normalmente excedidos. Assim, a determinação das sobrecargas reais do tráfego exige a consideração de dados experimentais medidos no local.

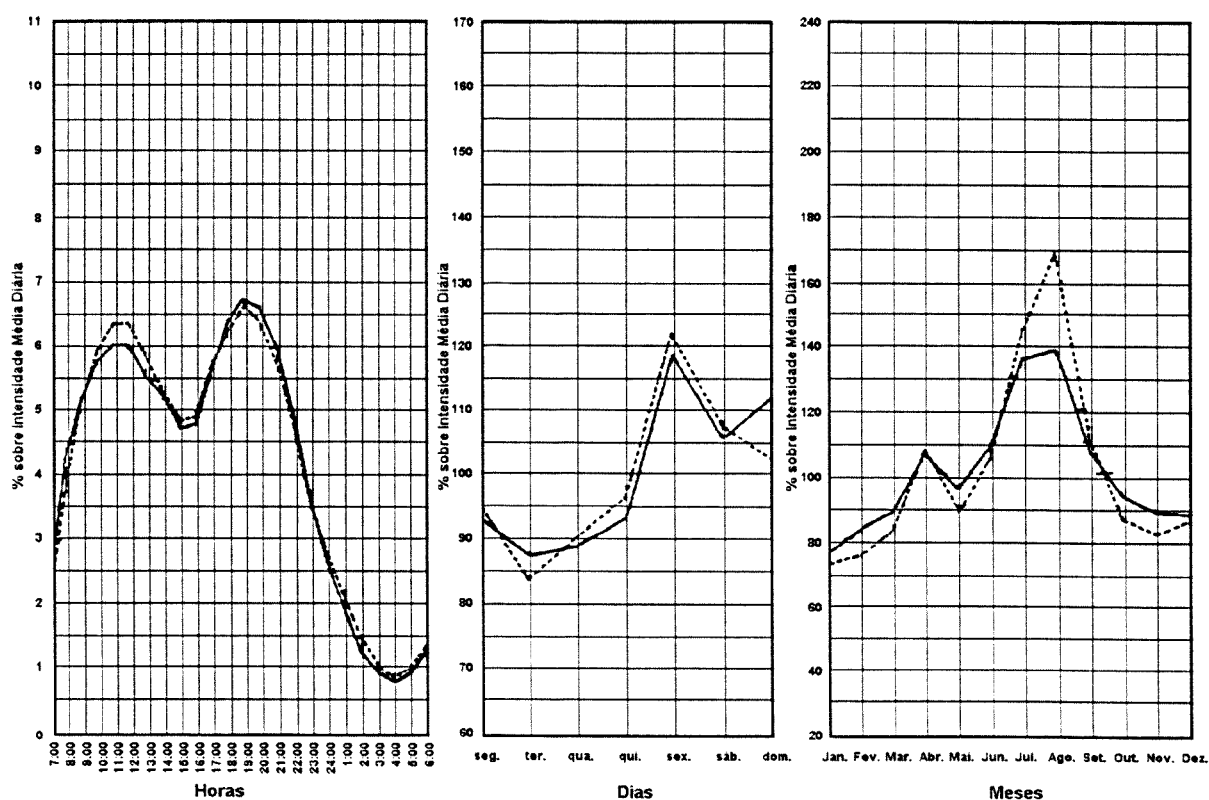


Fig. 3.15 - Variação horária, diária e mensal da intensidade do tráfego.

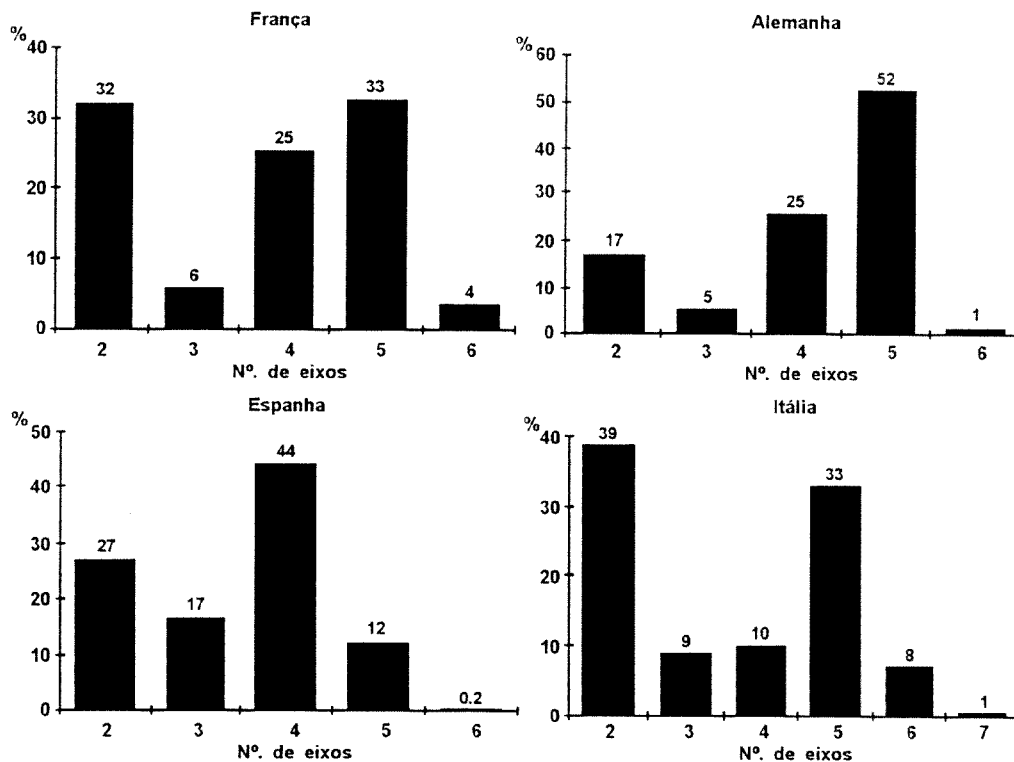
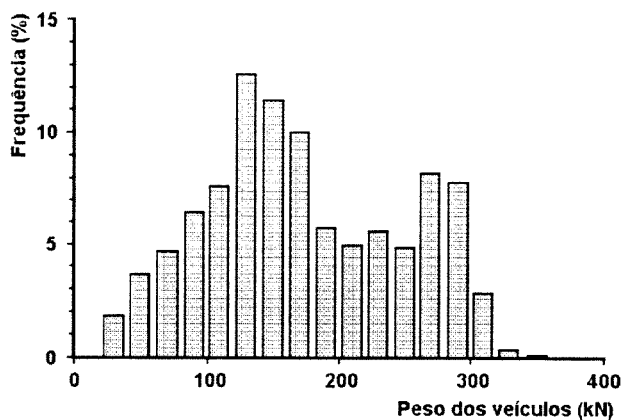


Fig. 3.16 - Distribuição do número de eixos por veículo pesado.

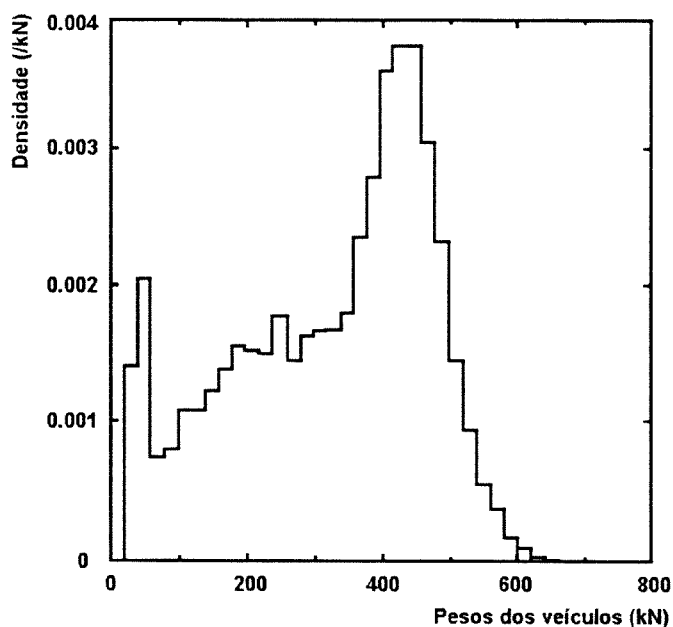
Os dados experimentais geralmente disponíveis correspondem às intensidades (Fig. 3.15), composições do tráfego (Fig. 3.16) e às cargas dos veículos (Fig. 3.17). Na definição e na avaliação das sobrecargas do tráfego em pontes rodoviárias deverá ser tido em conta as características do tráfego nas estradas que lhe estão ligadas. Assim, por exemplo, se uma ponte dá acesso a um local de extracção de inertes, suportará um tráfego diário muito pesado tanto em relação ao tipo de veículo como à sua carga. Este caso pode não ter nenhuma relação com o tráfego existente em estradas próximas.

A maior parte dos modelos teóricos de solicitação do tráfego em pontes rodoviárias apoiam-se em métodos numéricos baseados, em geral, em técnicas de simulação. Estes modelos permitem incluir diferentes esquemas estáticos, tempos de chegada, possível presença de um ou mais veículos na ponte, características dos veículos e suas cargas reais, distribuição transversal de cargas, efeitos dinâmicos, etc. (Bez, 1989; Almunia, 1993).

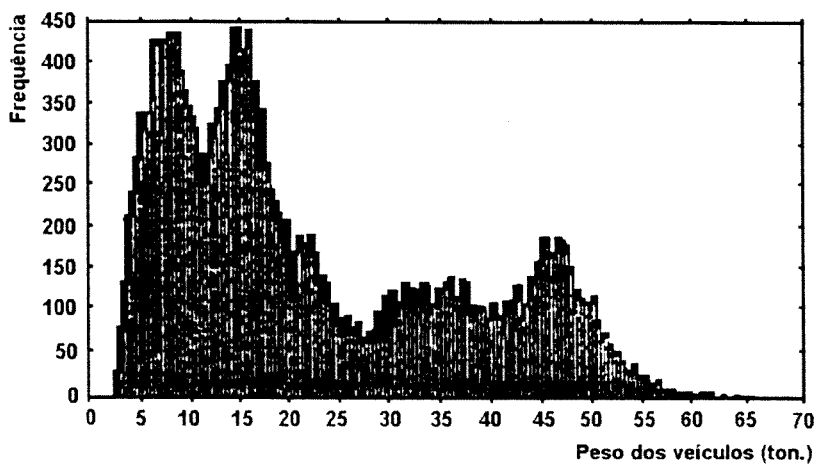
Os modelos probabilísticos de sobrecargas devidas ao tráfego têm sido utilizadas com êxito na calibração de valores nominais e de coeficientes de segurança nos actuais Eurocódigos (Calgaro, 1992; Bruls, 1996). Estes modelos permitem descrever de forma adequada as solicitações devidas ao tráfego. Estas solicitações estão associadas, de uma forma genérica, às seguintes situações:



a) tráfego na Suíça em 1988



b) tráfego em França na auto-estrada Paris-Auxerre em 1992.



c) tráfego no Canadá em 1995.

Fig. 3.17 - Distribuição das cargas por veículo (Almunia, 1993).

- Situações frequentes de serviço - associadas ao tráfego em movimento (fluido ou saturado), para a verificação aos estados limites de utilização ou de fadiga.
- Situações extremas de carga - geralmente associadas a trânsito parado sobre a ponte (máxima sobrecarga, sem efeito dinâmico), para a verificação aos estados limites últimos.
- Situações excepcionais de serviço - passagem de veículos de peso excepcionalmente alto, comboios de veículos pesados, etc., para a verificação aos estados limites últimos e de utilização.

Uma vez identificadas as possíveis situações de carga e o seu número previsível, a partir dos dados experimentais, é possível caracterizar o espectro das solicitações devidas ao tráfego, mediante técnicas de simulação e posterior tratamento estatístico, para distintos tempos de referência em função do estado limite a considerar.

O actual Eurocódigo relativo às acções do tráfego em pontes (EC1-3, 1994) estabelece quatro modelos de carga para a verificação aos estados limites últimos e de utilização e cinco modelos de carga para a verificação aos estados limites de fadiga. Fornece ainda modelos adicionais para as forças horizontais resultantes da travagem ou aceleração dos veículos e devidas à curvatura da via (força centrífuga). Estes modelos permitem ter em conta as configurações e as características do tráfego mais relevantes e, ainda, os diversos tipos de veículos pesados.

### **3.5.6 – Acções térmicas resultantes de variações de temperatura**

#### **3.5.6.1 - Generalidades**

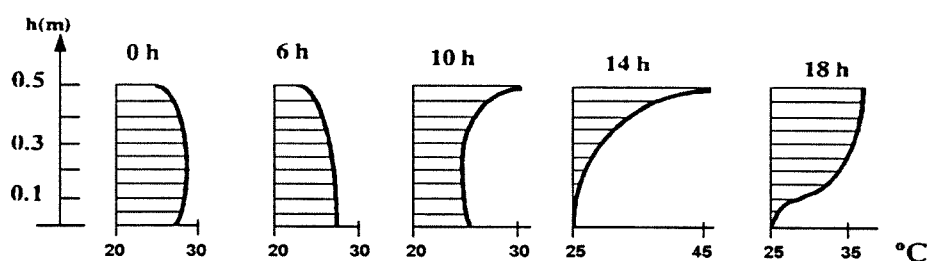
A adopção de soluções estruturais mais monolíticas e contínuas, com vãos cada vez maiores, tem tornado as estruturas mais sensíveis às acções térmicas. Estas acções são muitas vezes responsáveis pela ocorrência de deformações excessivas, provocadas pela dilatação e contracção dos elementos estruturais; e por fendilhação excessiva, resultante do elevado grau de monolitismo da estrutura ou dos gradientes não lineares de temperatura que originam tensões auto-equilibradas de valor considerável (CEB, 1985).

De uma forma sumária, as acções térmicas podem ser classificadas em dois grupos: as acções térmicas não ambientais e as ambientais.

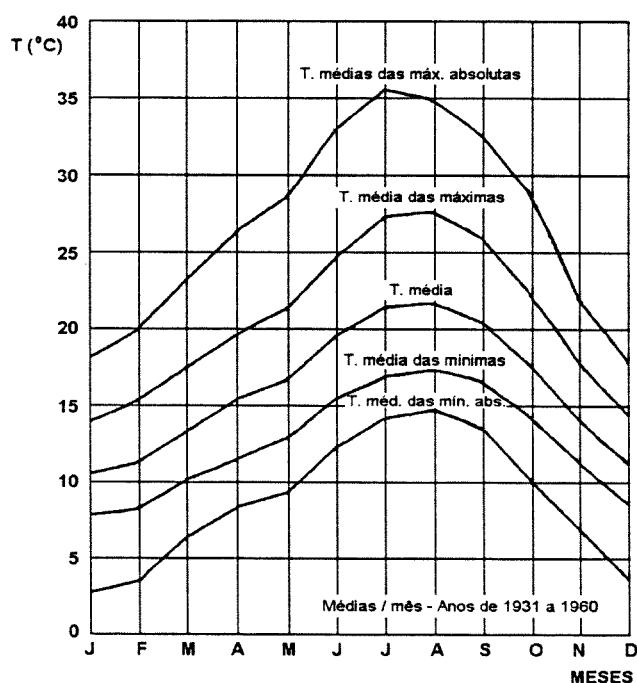
No primeiro grupo insere-se o calor de hidratação que ocorre nos primeiros dias após a betonagem (ou seja numa altura em que a estrutura não está sujeita a acções exteriores)

originando tensões auto-equilibradas que podem ultrapassar a resistência à tracção do betão jovem. Esta acção pode assim conduzir a uma micro-fendilhação espalhada pela estrutura. Outro tipo de acção pertencente a este grupo é corrente nos tabuleiros de pontes e resulta das aplicações do tapete betuminoso, cuja colocação é efectuada a uma temperatura superior a 100°C. A atenuação dos efeitos provenientes deste grupo de acções é normalmente conseguida através de processos construtivos adequados. Refira-se ainda que poderão ocorrer acções térmicas de acidente devidas, por exemplo, a um incêndio, mas como a sua probabilidade de ocorrência durante o período da vida da estrutura é muito baixa, estas não são normalmente consideradas.

As acções térmicas ambientais, consideradas no segundo grupo, são aquelas que, de um modo geral, se consideram no dimensionamento. Estas acções são variáveis ao longo de cada dia e ciclicamente variáveis ao longo do ano (Fig. 3.18).



a) distribuição de temperaturas numa secção transversal ao longo de um dia (situação de pico de Verão)



b) valores médios, máximos e mínimos mensais da temperatura do ar. Lisboa: período 1931-1960 (Gomes, 1962)

Fig. 3.18 - Variações diárias e anuais da temperatura ambiente.

A transmissão de calor para a estrutura é realizada basicamente segundo três formas distintas (Fig. 3.19),

- *radiação* - faz-se sem contacto entre corpos, dependendo da energia radiante do corpo emissor;
- *convecção* - é feito por intermédio de um fluido em movimento;
- *condução* - ocorre através de um meio sem que haja intervenção da radiação e sem movimentos internos, é o processo típico de transmissão dentro de um sólido.

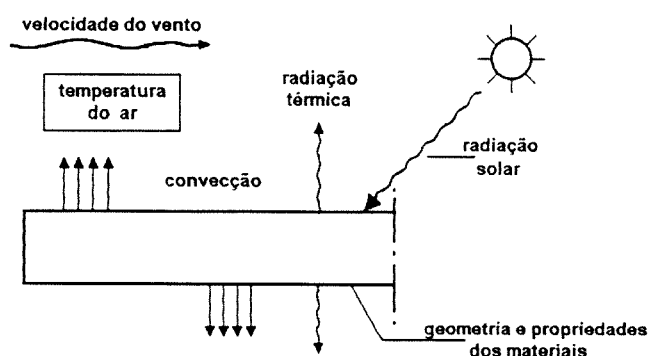


Fig. 3.19 - Factores que influenciam a transmissão de calor.

### 3.5.6.2 - Caracterização das acções térmicas ambientais em estruturas de betão

A distribuição longitudinal de temperaturas ao longo da estrutura é geralmente considerada constante em toda a sua extensão, ou em zonas bem definidas. Esta constatação permite reduzir o problema de definição da respectiva acção à distribuição de temperaturas na secção transversal.

A distribuição não linear de temperaturas na secção transversal de elementos estruturais é dividida nas parcelas uniforme ( $T_u$ ), linear ( $T_l$ ) e não linear ou auto-equilibrada ( $T_{ae}$ ), conforme ilustra a Fig. 3.20. A parcela não linear é responsável apenas por um estado de coacção, originando tensões auto-equilibradas sem se verificarem deformações. A parcela linear conduz a alterações de curvatura sem, no entanto, se verificar um aumento de comprimento ao nível do eixo das peças. A parcela uniforme é traduzida por alterações do comprimento do eixo dos elementos estruturais, sem se verificarem modificações na curvatura.



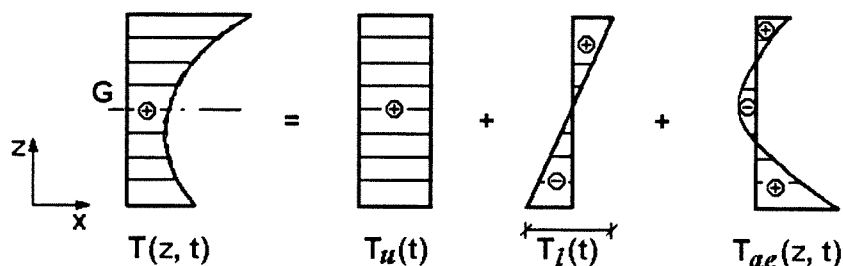


Fig. 3.20 - Decomposição da distribuição de temperaturas numa secção transversal simétrica em relação ao eixo vertical.

As componentes da distribuição térmica para o caso de secções simétricas em relação ao eixo vertical (a extensão a secções não simétricas é relativamente simples (Mendes, 1989)) são calculadas através das seguintes expressões:

$$T_u(t) = \frac{1}{A} \int_A T(z, t) dA \quad , \quad (3.55)$$

$$T_l(t) = \frac{h}{I_x} \int_A [T(z, t) \cdot (z - z_G)] dA \quad , \quad (3.56)$$

$$T_{ae}(z, t) = T(z, t) - T_u(t) - T_l(t) \cdot \frac{z - z_G}{h} \quad , \quad (3.57)$$

sendo  $z_G$  a coordenada do centro de gravidade e  $A$ ,  $h$  e  $I_x$  a área da secção transversal, a sua altura e o seu momento de inércia em relação ao eixo longitudinal que contém o centro de gravidade, respectivamente.

As parcelas uniforme e linear estão associadas a deformações axiais,  $\varepsilon$ , e a curvaturas de flexão,  $\chi$ , respectivamente, tendo-se que:

$$\varepsilon = \alpha (T_u - T_{ref}) = \alpha \Delta T_u \quad , \quad (3.58)$$

$$\chi = \frac{\alpha T_l}{h} \quad , \quad (3.59)$$

sendo  $T_{ref}$  uma temperatura de referência (a que corresponde uma extensão longitudinal nula) e  $\alpha$  o coeficiente de dilatação linear do material.

As parcelas uniforme e linear só introduzem estados de coacção no caso de estruturas hiperstáticas. Pelo contrário, a parcela não linear auto-equilibrada introduz tensões na estrutura, mesmo que (externamente) isostática.

### 3.5.6.3 - Simulação da acção térmica em modelos de elementos finitos

Os efeitos da variação de temperatura em estruturas de betão são tratados no presente modelo do seguinte modo:

- 1 – para cada elemento (discretizado por camadas) define-se o campo de deformações resultante da variação de temperatura, calculando para cada camada a extensão  $\varepsilon_{\Delta T}$ , de acordo com a equação  $\varepsilon_{\Delta T} = \alpha \cdot \Delta T = \alpha \cdot (T - T_{ref})$ ;
- 2 – ainda para cada elemento, determina-se o vector das forças nodais equivalentes, de forma idêntica àquela descrita para o pré-esforço:

$$\sigma_{\Delta T} = E \varepsilon_{\Delta T} \quad , \quad (3.60)$$

$$\underline{f}_{-p_{\Delta T}} = \int_V \underline{B}^T \sigma_{\Delta T} dV \quad ; \quad (3.61)$$

- 3 – calcula-se o incremento de deformação total,  $\Delta \varepsilon$ , resultante da aplicação das forças nodais  $\underline{f}_{-p_{\Delta T}}$  à estrutura;
- 4 – o estado de deformação resultante é determinado da forma usual, sendo adicionado às deformações mecânicas, obtendo-se finalmente o estado de tensão associado.

Repare-se que este procedimento permite introduzir o campo de temperaturas total,  $T(z, t)$ , através da definição de deformações equivalentes em cada camada, não sendo por isso necessário estar a decompô-lo nas três parcelas referidas no ponto anterior.

### 3.5.6.4 - Recomendações regulamentares

Os valores de variação de temperatura a adoptar no dimensionamento de estruturas deve ter em conta as características do local. Obviamente, por exemplo, os valores recomendados para um país da Europa Central podem estar completamente desajustados para países mediterrâneos.

A regulamentação nacional (RSA, 1983) indica valores para variações uniformes de temperatura,  $\Delta T_u = \pm 15^\circ \text{C}$  para estruturas de betão não protegidas e  $\Delta T = \pm 10^\circ \text{C}$  para estruturas de betão protegidas, mas não propõe quaisquer valores para os gradientes de temperatura, mencionando apenas que devem ser consideradas variações diferenciais de acordo com as condições climáticas locais e as características térmicas da estrutura. A regulamentação de países como a Alemanha, Dinamarca, Espanha, França e Suécia, indicam a utilização de gradientes lineares, enquanto que as regulamentações utilizadas na Austrália, Grã-Bretanha e Nova Zelândia preconizam a utilização de gradientes não lineares (Silveira, 1993).

Em termos de valores reduzidos o RSA (1983) recomenda para as variações uniformes de temperatura, relativamente à temperatura média anual do local, os seguintes valores:  $\psi_0 = 0.6$ ;  $\psi_1 = 0.5$ ;  $\psi_2 = 0.3$ .

### 3.5.6.5 - Valores medidos e obtidos numericamente para Portugal Continental

Nos últimos anos tem-se desenvolvido em Portugal trabalho de investigação relevante na avaliação das acções térmicas e no seu efeito em estruturas de betão, quer através de medições no local, quer utilizando modelos numéricos para descrever os mecanismos de transmissão de calor (Reis, 1983; Branco, 1984 e 1993; Teles, 1985; Mendes, 1987 e 1989; Silveira, 1993).

Recorrendo a dados relativos à temperatura do ar e velocidade do vento medidos nas estações da Rede Actinométrica do Instituto Nacional de Meteorologia e Geofísica, Silveira (1993) estudou a distribuição de temperaturas nas secções correntes de tabuleiros de pontes. A informação sobre os dados ambientais foram processados através de modelos numéricos, a partir dos quais definiu as parcelas de temperatura uniforme, linear e auto-equilibrada nas secções.

A análise dos resultados indicaram a possibilidade de dividir Portugal Continental em três zonas: zona interior, zona litoral e Algarve. Constatou-se ainda que é nas zonas interior e Algarve que se verificam as maiores variações na temperatura uniforme e nos diferenciais térmicos das secções.

Posteriormente, com base numa simulação de um período de 15 anos e considerando as condições climáticas da região de Lisboa, obtiveram-se os valores característicos, superior e inferior, e os desvios padrão da acção térmica uniforme e diferencial (Quadro 3.7). Estes valores foram calculados a partir das distribuições de máximos e mínimos anuais, consideradas como de extremos de tipo I (Gumbel), em períodos de 50 anos, admitindo independência entre os extremos anuais.

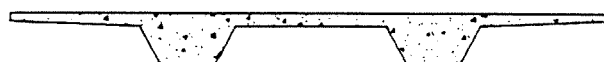
Silveira (1993) apresenta ainda valores das tensões auto-equilibradas para as secções referidas no Quadro 3.7, correspondentes ainda ao mesmo estudo. A título meramente ilustrativo, apresenta-se os resultados relativos às secções  $SL_{60}$  e  $SL_{120}$ , no Quadro 3.8.

Ainda de acordo com o mesmo estudo, são propostos valores para os coeficientes  $\psi$  relativos aos valores reduzidos da variação de temperatura. No Quadro 3.9 apresentam-se esses valores e, comparativamente, os valores regulamentares (RSA, 1983) relativos à variação de temperatura uniforme.

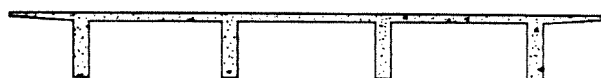
Quadro 3.7 - Valores característicos da temperatura uniforme e diferencial de temperatura, para as condições de Lisboa (distribuições de extremos em 50 anos) (Silveira, 1993).

Secções	Temperatura uniforme (°C)				Diferencial de Temperatura			
	Dist. Mínimas		Dist. máximas		Dist. mínimas		Dist. máximas	
	$F^{-1}$ (0.05)	desvio padrão	$F^{-1}$ (0.05)	desvio padrão	$F^{-1}$ (0.05)	desvio padrão	$F^{-1}$ (0.05)	desvio padrão
SL <sub>15</sub>	-2.1	1.19	46.0	1.55	-3.4	0.35	12.1	0.52
SL <sub>30</sub>	-1.4	1.35	43.1	1.62	-4.5	0.51	15.1	0.67
SL <sub>60</sub>	0.0	1.37	40.7	1.68	-3.8	0.39	15.2	0.73
SL <sub>100</sub>	1.4	1.27	37.7	1.39	-3.3	0.32	14.3	0.68
SL <sub>120</sub>	1.9	1.25	36.3	1.26	-3.0	0.28	13.5	0.64
SV1	-0.2	1.31	40.7	1.56	-6.0	0.47	18.4	1.23
SV2	-1.2	1.24	42.3	1.58	-2.4	0.12	15.0	0.76
SC1	-0.9	1.30	41.7	1.66	-2.9	0.29	11.7	0.58
SC2	-0.4	1.28	38.9	1.67	-4.5	0.50	7.4	0.38

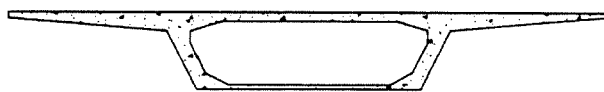
Nota: SL<sub>i</sub> - Secção de tabuleiros de laje com espessura *i*; SV e SC - secções de tabuleiros vigados e em caixão (ver Fig. 3.21).



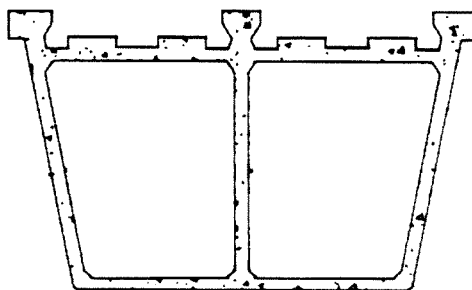
a) secção tipo SV1



b) secção tipo SV2



c) secção tipo SC1



d) secção tipo SC2

Fig. 3.21 - Secções analisadas por Silveira (1993), referentes ao Quadro 3.7.

Quadro 3.8 - Tensões auto-equilibradas. Unidades: MPa.

Tensões auto-equilibradas valor:	0.60	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.00
Característico superior	3.54	0.53	0.81	1.08	0.76	0.43	2.93
Característico inferior	-2.11	-0.43	-1.33	-1.61	-1.05	-0.31	-2.02
Frequente superior	1.29	0.20	0.35	0.42	0.27	0.14	0.95
Quase permanente	-0.13	0.00	0.04	0.03	0.02	-0.01	-0.07
Frequente inferior	-0.91	-0.21	-0.48	-0.52	-0.33	-0.12	-0.74
Tensões auto-equilibradas compatíveis com o diferencial:	0.60	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.00
Característico superior	1.24	0.05	-0.55	-0.57	-0.29	0.18	0.89
Característico inferior	0.46	0.05	-0.17	-0.25	-0.19	0.05	0.48
Frequente superior	0.80	0.06	-0.35	-0.40	-0.24	0.11	0.67
Quase permanente	-0.10	-0.03	0.06	0.09	0.05	-0.03	-0.11
Frequente inferior	-0.13	0.01	0.04	0.04	0.03	0.00	-0.12
Tensões auto-equilibradas valor:	1.20	1.325	1.05	0.60	0.375	0.15	0.00
Característico superior	4.60	2.05	0.99	1.11	0.80	0.82	3.52
Característico inferior	-2.59	-1.38	-0.78	-1.43	-1.06	-0.65	-2.45
Frequente superior	1.60	0.63	0.33	0.35	0.25	0.23	1.06
Quase permanente	-0.13	-0.03	0.01	0.01	0.01	0.00	-0.06
Frequente inferior	-1.16	-0.52	-0.34	-0.38	-0.29	-0.20	-0.87
Tensões auto-equilibradas compatíveis com o diferencial:	1.20	1.325	1.05	0.60	0.375	0.15	0.00
Característico superior	1.56	0.67	-0.11	-0.21	-0.16	0.08	0.86
Característico inferior	0.44	0.28	0.14	-0.26	-0.19	0.13	0.49
Frequente superior	1.11	0.35	-0.12	-0.11	-0.12	0.01	0.65
Quase permanente	-0.17	-0.03	0.04	0.00	0.01	0.02	-0.10
Frequente inferior	-0.10	0.02	0.06	-0.04	-0.02	0.05	-0.06

Quadro 3.9 - Valores propostos para  $\psi_0$ ,  $\psi_1$  e  $\psi_2$  (Silveira, 1993).

Coeficiente	Variação de temperatura uniforme	Diferencial térmico	Valores regulamentares para a variação de temperatura uniforme
$\psi_0$	0.80	0.85	0.60
$\psi_1$	0.50	0.50	0.50
$\psi_2$	0.30	0.10	0.30

### **3.6 – CONSIDERAÇÕES FINAIS**

Este capítulo teve como objectivo principal descrever as técnicas desenvolvidas que serviram de suporte à modelação estrutural e, ainda, as variabilidades de alguns parâmetros que influenciam a análise estrutural.

Descreveu-se de forma generalizada a formulação de elementos finitos implementada. Foi também destacada a formulação de elementos com características especiais: descontinuidades nos elementos finitos e o elemento unidimensional curvilíneo no qual assenta a modelação do pré-esforço.

Abordou-se as variabilidades associadas à geometria dos elementos estruturais de betão e às acções consideradas no presente modelo tendo em conta dados experimentais e os valores propostos pelas actuais normas. Realçou-se ainda a caracterização das acções térmicas resultantes de variações de temperatura e apresentou-se a técnica utilizada para simular estas acções no modelo de elementos finitos.

## Capítulo 4

# MODELAÇÃO DO COMPORTAMENTO DO BETÃO ESTRUTURAL

### 4.1 – INTRODUÇÃO

O uso de modelos menos adequados para representar o comportamento do betão estrutural é frequentemente uma das causas limitativas na análise estrutural. Por isso, a adopção de relações constitutivas que tenham em conta os diversos factores que condicionam o seu comportamento não linear é de importância fundamental.

Neste capítulo aborda-se o comportamento dos materiais constituintes: o betão e o aço. Descreve-se de forma sumária os principais factores que condicionam as respectivas relações constitutivas, os valores correntemente prescritos, as variabilidades que lhes estão associadas e os modelos numéricos desenvolvidos para descrever o comportamento de estruturas de betão armado e pré-esforçado.

O modelo do betão tem em conta o seu comportamento instantâneo quando submetido a carregamentos monotónicos quase-estáticos e a sua evolução no tempo devido aos efeitos diferidos resultantes, essencialmente, da fluência, da retracção e do envelhecimento. O modelo de comportamento instantâneo utiliza o critério de resistência máxima proposto por Ottosen (1977) e também adoptado pelo Código Modelo do CEB-FIP (1993), sendo as relações constitutivas obtidas por aplicação das leis elasto-plásticas (Henriques, 1991, 1992a). O comportamento diferido do betão é simulado através das equações propostas pelo Código Modelo do CEB-FIP (1993) e por Bazant e Panula (1978), sendo incorporadas no modelo numérico numa formulação incremental (Póvoas, 1991).

A resposta instantânea do aço, que constitui as armaduras ordinárias e de pré-esforço, é aproximada por um modelo de comportamento elasto-plástico unidimensional, de acordo com

um diagrama multilinear de tensões-deformações. O comportamento diferido das armaduras é considerado através de um modelo de relaxação do aço de pré-esforço.

No final deste capítulo apresenta-se o estudo da resposta de vigas de betão pré-esforçado, tendo em conta o comportamento diferido dos materiais. A comparação dos resultados obtidos pelo presente modelo numérico com resultados experimentais e numéricos obtidos por outros autores permite avaliar o desempenho do modelo e discutir a validade das soluções calculadas.

## 4.2 – RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DO BETÃO

### 4.2.1 – Generalidades

O betão é um material heterogéneo constituído pela associação de inertes e pasta de cimento, incorporando assim elementos com diferentes propriedades. Wittman (1983) sugeriu uma classificação hierárquica para caracterizar os níveis de discretização deste material: o nível microscópico (*micro-level*), o nível médio (*meso-level*) e o nível macroscópico (*macro-level*). Em aplicações estruturais correntes as relações constitutivas do betão são definidas ao nível macroscópico, considerando um material homogéneo e contínuo. Os fenómenos observados a este nível são interpretados de acordo com os mecanismos verificados a um nível inferior, para o qual se considera o betão como um material fortemente heterogéneo constituído por um conjunto de inclusões dispersas numa matriz aproximadamente homogénea.

O comportamento do betão estrutural apresenta não linearidades assinaláveis devidas a diferentes mecanismos como a fendilhação em tracção, a plastificação em compressão, a fluência e a retracção do betão, e ainda pela interacção entre a armadura e o betão. Os modelos constitutivos consistem numa representação simplificada do comportamento real do material.

Os mecanismos referidos interagem entre si, sendo por isso extremamente complicado estabelecer um único modelo constitutivo que integre todos eles (Feenstra, 1993). A formulação deste tipo de modelos permite descrever o comportamento do material num determinado campo de aplicação previamente estabelecido.

Nas secções seguintes apresenta-se separadamente o modelo de comportamento do betão submetido a carregamentos monotónicos quase-estáticos e de curta duração (comportamento instantâneo) e a evolução da resposta no tempo devida essencialmente à fluência e à retracção do betão (comportamento diferido).



## 4.2.2 – Comportamento instantâneo

### 4.2.2.1 – Considerações iniciais

Tendo em conta o campo de aplicação do presente modelo, apresenta-se sumariamente o comportamento mecânico do betão submetido a carregamentos monotónicos, quase-estáticos e de curta duração. Esse comportamento é caracterizado através de testes uniaxiais e multiaxiais, distinguindo-se a resposta à compressão e à tracção.

O modelo apresentado caracteriza adequadamente o comportamento do betão correntemente utilizado, no entanto, as relações constitutivas definidas não são integralmente válidas para betões de alta resistência (CEB, 1995a).

### 4.2.2.2 – Comportamento uniaxial

Quando se inicia o carregamento de um provete já existem microfissuras na interface cimento-inertes devidas às tensões de tracção resultantes das variações de volume sofridas pela pasta de cimento durante a hidratação e ainda devidas à ocorrência da retracção de secagem (Wittman, 1983). Os ensaios uniaxiais em provetes de betão mostram que os diferentes tipos de rotura, que se obtêm para carregamentos em compressão e em tracção, são acompanhados pela formação de fendas no material.

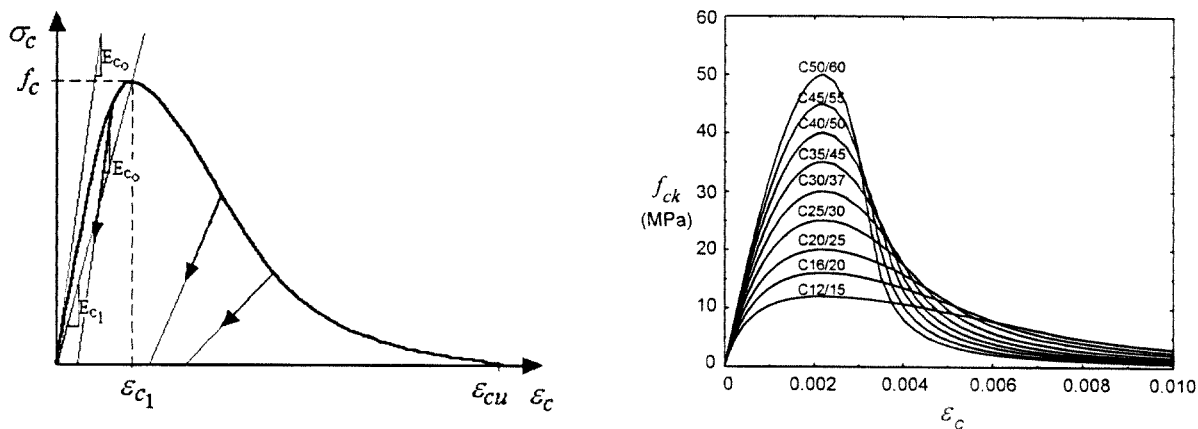
#### *Compressão*

O comportamento do betão comprimido (Fig. 4.1) depende dos mecanismos de propagação da microfissuração interna (Van Mier, 1984; Vonk, 1992). Verifica-se que o mecanismo de propagação de fendas e, conseqüentemente, a evolução da deformação após se ter atingido a resistência máxima, não pode ser objectivamente considerado através de propriedades intrínsecas do material. Ensaio experimentais (Kotsovos, 1983; Van Mier, 1984; Hordjik, 1991; Nooru, 1992; Vonk, 1992; CEB, 1993) mostraram que existem factores associados ao tipo de ensaio que influenciam estes resultados, nomeadamente, o tipo de equipamento, as propriedades das fronteiras entre o equipamento e os provetes, as dimensões dos provetes e a orientação da betonagem em relação à direcção de actuação da solicitação aplicada pelo equipamento.

Embora o modelo a apresentar considere somente carregamentos monotónicos, permite também simular situações de descarga e recarga que podem ocorrer como resultado de diferentes histórias de carga ou devido à própria natureza não linear dos materiais que conduz frequentemente a

descargas em algumas zonas da estrutura. Resultados de ensaios cíclicos uniaxiais (CEB, 1983; Yankelevsky, 1987a, 1987b, 1989) mostram que uma única curva é suficiente para envolver todas as histórias de carga neste tipo de ensaios, sendo essa curva coincidente aproximadamente com a curva do ensaio de carregamento monotónico. Verifica-se ainda que as rigidezes dos troços carregamento-descarregamento é idêntica à rigidez medida na origem, se o descarregamento se iniciou para uma deformação inferior à extensão correspondente à resistência máxima. Essas rigidezes são sucessivamente menores à medida que se avança no ramo descendente (Fig. 4.1a).

Ensaio experimentais efectuados por Vecchio e Collins (1982) permitiram verificar que a ocorrência de fendilhação antes do início do carregamento em compressão provoca uma degradação da resistência e da rigidez à compressão do betão (Fig. 4.2). Observaram também que o grau de degradação aumenta com a deformação de tracção. Essa degradação é introduzida na lei constitutiva do material através de um coeficiente  $\lambda$ , não superior à unidade, definido em função da extensão principal de tracção máxima atingida pelo betão.



a) Parâmetros relativos ao comportamento uniaxial    b) Diagramas tensões-extensões para vários betões

Fig. 4.1 - Relações constitutivas do betão à compressão.

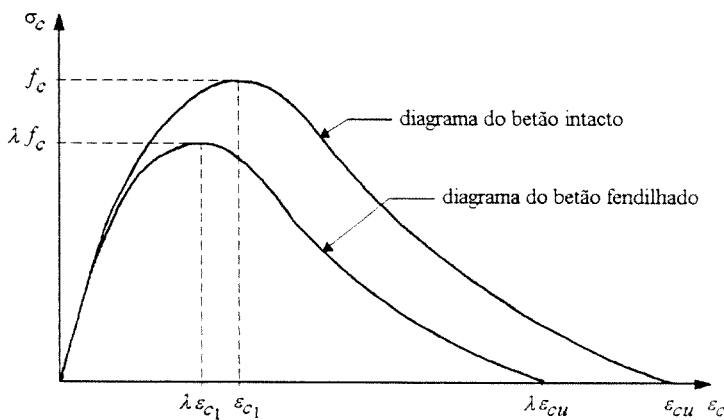


Fig. 4.2 - Degradação da resistência e da rigidez de compressão do betão fendilhado.

### Tracção

É usual definir a resposta dos provetes de betão traccionado em função de duas relações constitutivas distintas: uma relação tensão-extensão para as zonas não fendilhadas e uma relação tensão - largura de fenda (Fig. 4.3) nas zonas fendilhadas, sendo essa largura caracterizada em função da energia de fractura (Petersson, 1981; Hillerborg, 1985a, 1985b; Cornelissen, 1986; CEB-FIP, 1993; Barros, 1995).

Na análise de estruturas de betão armado, a simulação correcta da fendilhação assume importância vital no estudo do comportamento em serviço. A consideração adequada dos efeitos provocados pelos mecanismos de interacção entre o betão e as armaduras que atravessam as fendas é fundamental para definir o comportamento das zonas fendilhadas, que advém, fundamentalmente, da transferência de tensões entre os dois materiais. Este fenómeno é devido sobretudo aos seguintes mecanismos de interacção: a aderência entre o betão e a armadura, a resistência ao corte da armadura e a engrenagem verificada entre as faces das fendas (Gilbert, 1972; Floegl, 1982; Figueiras, 1983). A consideração da capacidade de retenção das tensões de tracção no betão entre fendas, correntemente designado de *tension-stiffening* (Fig. 4.4), no diagrama das relações constitutivas do betão fendilhado é uma técnica vulgarmente utilizada nos modelos que consideram a fendilhação distribuída nos elementos de discretização (Figueiras, 1983; Cervenka, 1985; Okamura, 1991).

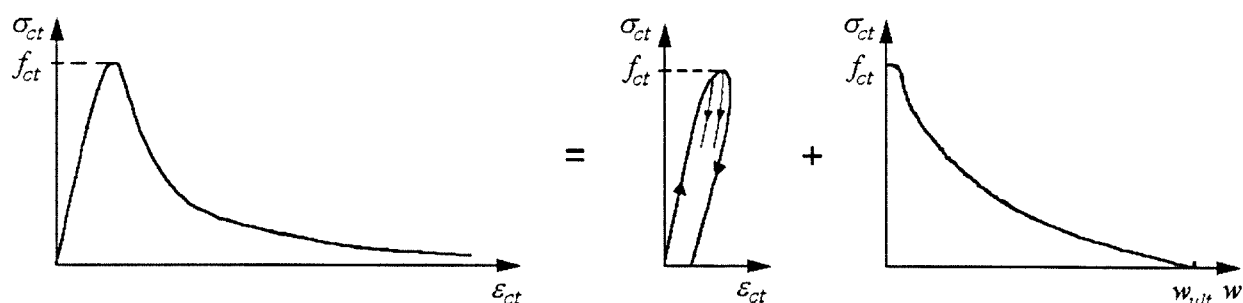


Fig. 4.3 - Relações constitutivas do betão à tracção.

### Parâmetros que caracterizam o comportamento uniaxial

Nos ensaios uniaxiais de provetes de betão o comportamento do material é caracterizado a partir dos seguintes parâmetros:

- o módulo de elasticidade longitudinal,  $E_c$ ;

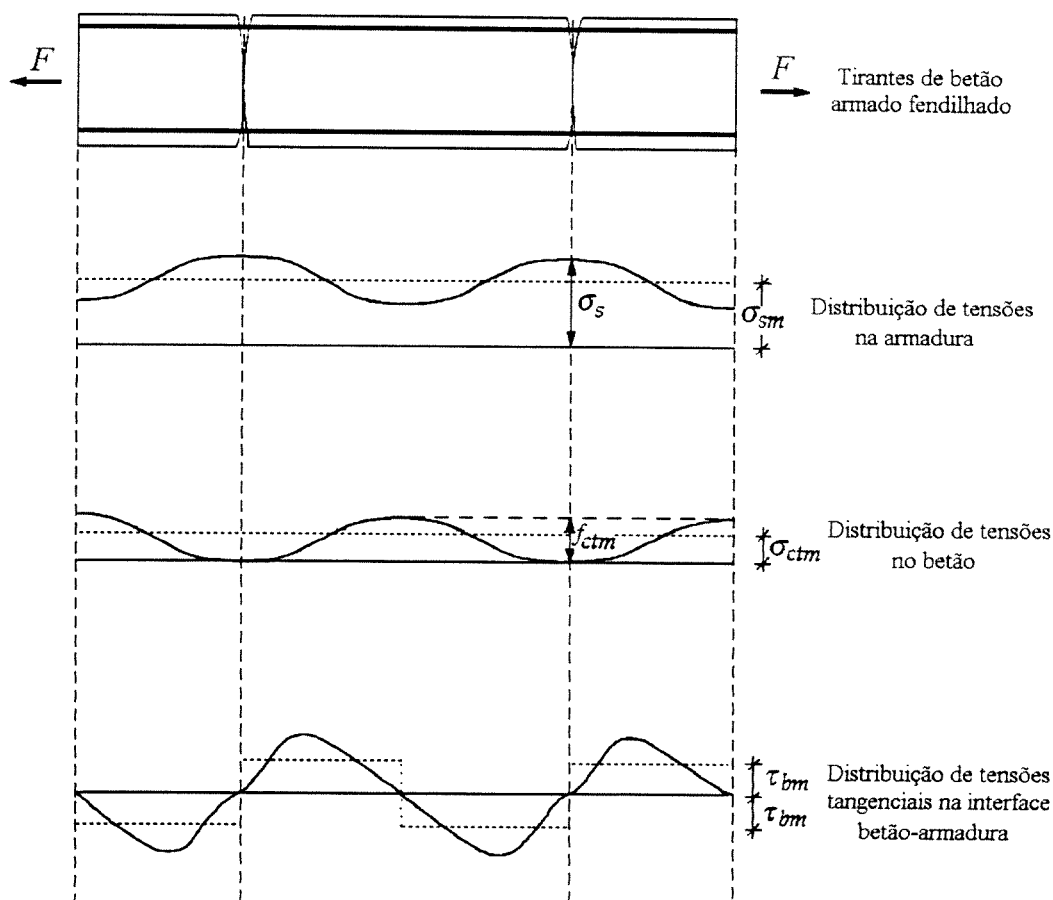


Fig. 4.4 - Representação esquemática da distribuição de tensões entre fendas.

- o coeficiente de Poisson,  $\nu$ , que relaciona a extensão lateral com a extensão axial num provete carregado axialmente;
- a resistência máxima (tensão de pico) identificada por  $f_c$  para o betão comprimido e por  $f_{ct}$  para o betão traccionado;
- a extensão associada à resistência máxima  $\varepsilon_{cl}$  e  $\varepsilon_{ctl}$  para o betão comprimido e para o betão traccionado, respectivamente;
- a extensão axial última do betão comprimido,  $\varepsilon_{cu}$ .

Relativamente à caracterização do betão fendilhado salientam-se os seguintes parâmetros:

- a energia de fractura,  $G_f$ , que define a quantidade de energia requerida para propagar uma fenda de superfície unitária;

- a largura máxima de fenda,  $w_u$ , para a qual deixa de se verificar transferência de tensões.

Os resultados experimentais mostram que os parâmetros  $E_c$  e  $f_{ct}$  dependem de forma notória da resistência do betão à compressão,  $f_c$ . Esta constatação está na base da definição de fórmulas empíricas, definidas na actual regulamentação, que permitem definir os valores de  $E_c$  e  $f_{ct}$  a partir de  $f_c$ . Por sua vez, o coeficiente de Poisson para o betão sujeito a compressão uniaxial mantém-se praticamente constante até aproximadamente 75% de  $f_c$ , tomando valores entre 0.15 e 0.22, sendo os valores compreendidos entre 0.18 e 0.20 os mais representativos. Próximo do colapso, a expansão do volume acompanhada por grandes extensões laterais traduz-se num acréscimo significativo do coeficiente de Poisson aparente, o qual pode tomar valores superiores a 0.5 na fase descendente do diagrama tensões-extensões. Em ensaios de tracção uniaxial obtém-se em geral valores ligeiramente superiores para o módulo de elasticidade e, inversamente, valores inferiores para o coeficiente de Poisson, em comparação com os respectivos valores obtidos em ensaios de compressão uniaxial. As diferenças são, no entanto, diminutas sendo por isso usualmente desprezadas.

Relativamente às extensões correspondentes às resistências máximas,  $\varepsilon_{c1}$  e  $\varepsilon_{ct1}$ , os respectivos valores são praticamente constantes para todos os tipos de betão, utilizando-se correntemente os valores de 0.0022 para  $\varepsilon_{c1}$  e 0.00015 para  $\varepsilon_{ct1}$ .

A determinação experimental da energia de fractura,  $G_f$ , fornece valores entre 50 e 200 Nm/m<sup>2</sup> para betões de resistência normal. O MC90 (CEB-FIP, 1993) propõe uma fórmula empírica para a determinação de  $G_f$  em função do valor característico da tensão máxima do betão à compressão,  $f_{ck}$ , e da dimensão máxima dos inertes,  $d_{max}$ . Finalmente, no que se refere ao valor último da largura de fenda,  $w_u$ , apesar das dificuldades inerentes à sua determinação, são apontados valores da ordem de 0.4mm (Guo, 1987) e de 0.5mm (Wecharatana, 1986).

#### 4.2.2.3 - Comportamento multiaxial

Na generalidade dos casos, as estruturas de betão encontram-se sujeitas a estados de tensão biaxiais e triaxiais. Resultados experimentais obtidos por Kupfer (1969, 1973) em provetes de betão sujeitos a carregamentos biaxiais encontram-se ilustrados na Fig. 4.5. Os ensaios consistiram em acréscimos sucessivos de carga, mantendo constante a relação entre as componentes principais de tensão (carregamento proporcional).

Como se pode observar na Fig. 4.5, para estados de compressão biaxial há um acréscimo da capacidade resistente do betão comparativamente com a capacidade obtida nos ensaios uniaxiais

e, além disso, obtêm-se respostas mais dúcteis (Fig. 4.6). A resistência máxima à compressão aumenta cerca de 16% para componentes de compressão iguais ( $\sigma_1 / \sigma_2 = 1.0$ ) e apresenta um acréscimo máximo de cerca de 25% para uma relação de tensões aproximadamente igual a  $\sigma_1 / \sigma_2 = 0.5$ . Este acréscimo de resistência nos casos de compressão biaxial é devido ao aumento da fricção interna e à melhoria das condições de transferência de esforços de corte por engrenagem entre as faces das fendas.

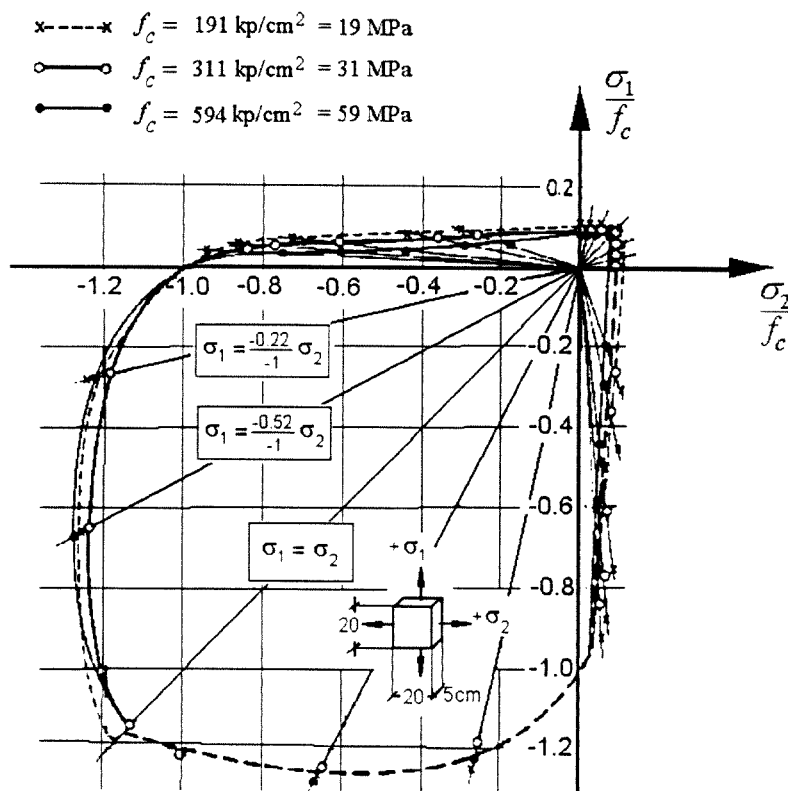


Fig. 4.5 - Resistência do betão sujeito a estados de tensão biaxiais (Kupfer, 1969).

Nos casos em que o estado de tensão biaxial é caracterizado por uma combinação de compressões e tracções verifica-se o seguinte: se o provete está sujeito principalmente a tensões de compressão e a tensões de tracção laterais, a capacidade resistente à compressão e o grau de ductilidade é inferior comparativamente com os valores obtidos do ensaio de compressão uniaxial (Figs. 4.5 e 4.6), devido à influência das tensões de tracção que favorecem a propagação da microfendilhação; por outro lado, se o provete está sujeito essencialmente a tensões de tracção, a presença de tensões de compressão laterais conduz a uma diminuição da capacidade resistente à tracção porque as tensões de compressão laterais introduzem tensões de tracção a um

nível microscópico devido à heterogeneidade do material, o que conduz a um aumento do processo de dano interno (Vonk, 1992).

Nos ensaios de tracção biaxial não se verificam variações significativas na capacidade resistente do betão, em comparação com os ensaios de tracção uniaxial.

A curva envolvente obtida nos ensaios biaxiais de Kupfer (Fig. 4.5), embora tenha sido obtida para carregamentos proporcionais, é válida também para carregamentos não proporcionais (Nelissen, 1972), sendo por isso independente da história de carga. Estes resultados permitem também confirmar a noção de que o *softening* (amolecimento) do betão devido a cargas externas de compressão ou de tracção, está associado ao mesmo tipo de mecanismo, isto é, um crescimento contínuo da fendilhação a um nível microscópico.

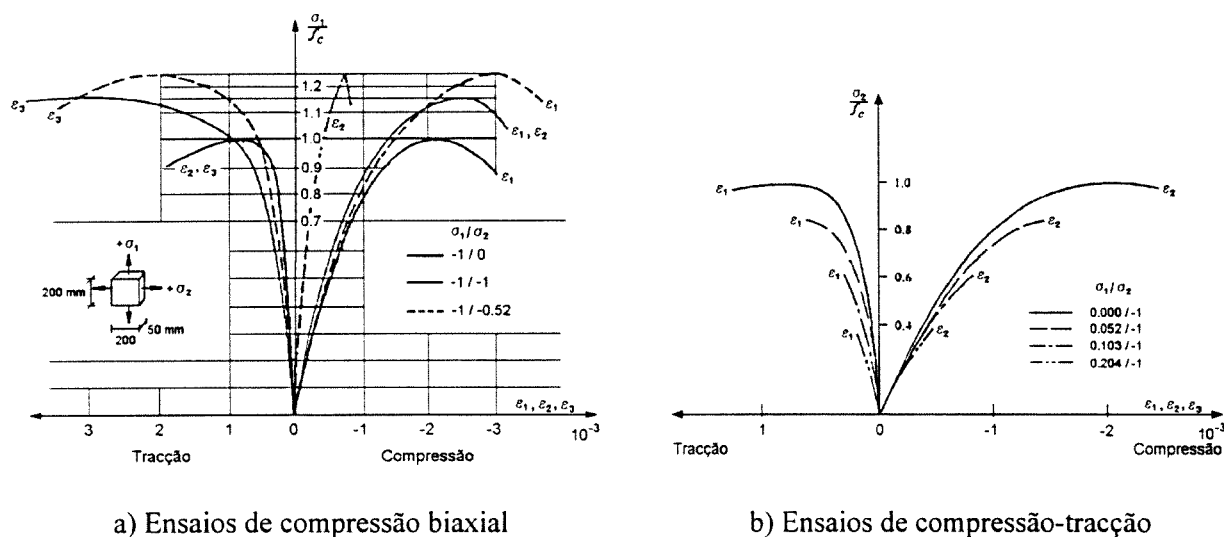


Fig. 4.6 - Relações tensões extensões obtidas em ensaios biaxiais (Kupfer, 1969).

Os modos de fractura associados a estados de tensão biaxial (Kupfer, 1969, 1973; Nelissen, 1972) são essencialmente comandados por um critério de deformação máxima de tracção (Tasuji, 1978), registando-se ligeiras variações no valor da deformação de tracção admissível em função do campo de tensões instalado. Os ensaios experimentais realizados por Kupfer (1969) permitiram caracterizar o tipo de fendas que conduzem à fractura do material, para várias relações entre as componentes de tensão (Fig. 4.7).

Em estados de tensão triaxiais, a superfície de resistência máxima do betão é convenientemente aproximada por uma função expressa em termos dos invariantes de tensões  $\xi$ ,  $\rho$  e  $\theta$ , que correspondem às coordenadas cilíndricas da superfície em questão no referencial de eixos

coordenados definido pelas tensões principais (Fig. 4.8a). Os planos perpendiculares ao eixo hidrostático  $\xi$  denominam-se planos de desvio, sendo aquele que passa pela origem ( $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ ) chamado de plano  $\pi$ . As tensões nos pontos situados no plano  $\pi$  representam estados de corte puro onde a componente de tensão hidrostática é nula. A intersecção da superfície de resistência máxima com os planos de desvio conduz à obtenção de curvas com a forma genérica ilustrada na Fig. 4.8b, as quais, partindo de uma forma aproximadamente triangular na região de tracção triaxial, se vão progressivamente arredondando à medida que aumenta o valor da tensão hidrostática de compressão correspondente.

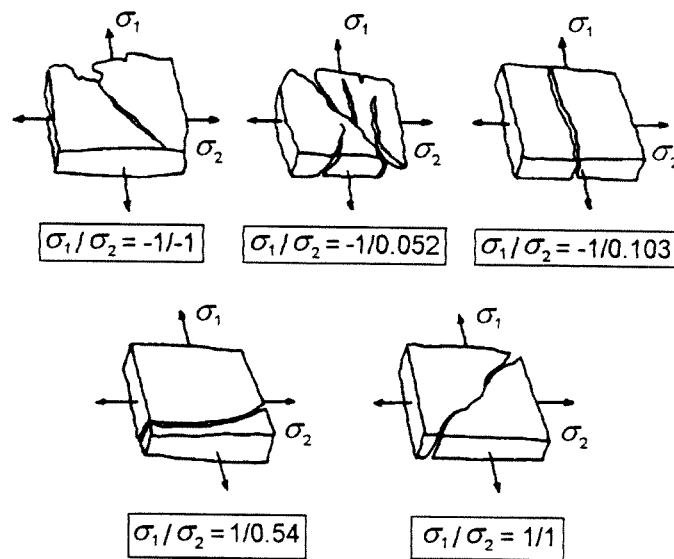
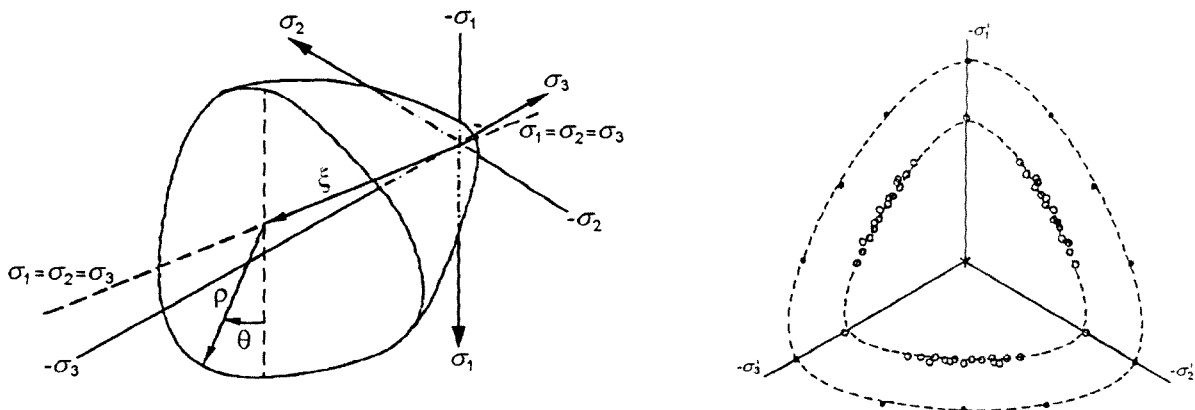


Fig. 4.7 - Modos de fractura em provetes sujeitos a tensões biaxiais (adaptado de Kupfer, 1969).



a) Superfície de resistência máxima do betão

b) Planos de desvio (Wastiels, 1981)

Fig. 4.8 - Caracterização da resistência do betão sujeito a estados de tensão triaxial.



#### 4.2.2.4 - Variabilidade do comportamento instantâneo do betão

A variabilidade das propriedades mecânicas do betão depende essencialmente das variações dos materiais constituintes (cimento, inertes, etc.), da relação água-cimento, do modo de execução, do transporte, do controlo de qualidade, da cura, da manutenção e da degradação dos materiais.

O parâmetro do betão mais estudado é a sua resistência à compressão. Este valor é utilizado para controlar a qualidade do betão durante a obra, sendo ainda usado pelas actuais normas para definir critérios de aceitação-rejeição (NP ENV 206, 1993). As correlações elevadas com outros parâmetros do betão, nomeadamente a resistência à tracção, a resistência ao corte, e o módulo de elasticidade, permitiram estabelecer relações empíricas que permitem determinar adequadamente valores esperados para esses parâmetros.

##### *Resistência do betão à compressão*

Na avaliação da resistência do betão deve-se distinguir: a resistência convencional e a resistência efectiva. A resistência convencional do betão é determinada a partir de ensaios normalizados, usando provetes (cilíndricos ou cúbicos) executados com betão fresco e conservados em condições de temperatura e de humidade constantes durante um período com duração fixa. A resistência assim determinada em laboratório numa amostra de tamanho limitado é também designada de resistência potencial. A resistência efectiva representa o valor real que se observa nas estruturas em serviço.

A resistência real pode ser determinada através de ensaios não destrutivos (por exemplo, medição da dureza superficial, velocidade de propagação dos ultra-sons), semi-destrutivos (por exemplo, ensaios de arranque) e destrutivos (ensaio de provetes extraídos da estrutura, vulgarmente designados por tarolos ou carotes). Os ensaios não destrutivos são os menos fiáveis, enquanto que nos ensaios destrutivos obtém-se informação mais exacta.

A avaliação fiável da resistência efectiva envolve geralmente custos elevados, limitando-se a situações extremas (aumento das acções, diminuição da resistência por fenómenos imprevistos, etc.), casos de dúvida (inexistência de controlo adequado, resultados obtidos em provetes são insatisfatórios, etc.) e no campo da investigação científica. Correntemente, a avaliação experimental da qualidade do betão é caracterizada através da resistência potencial, em função dos resultados obtidos em ensaios de compressão normalizados, utilizando provetes cilíndricos ou cúbicos.

A relação entre a resistência do betão medida nos provetes cilíndricos e nos provetes cúbicos depende essencialmente (Tassios, 1978): dos inertes (tipo, percentagem e máxima dimensão), da

resistência do betão, do acabamento das faces do provete, da deformabilidade dos pratos da máquina e da orientação da betonagem relativamente à direcção da solicitação aplicada pelo equipamento. Apesar da diversidade de factores intervenientes, L'Hermite (1955) propôs a seguinte expressão entre a tensão de rotura do cilindro com dimensões  $h = 2d = 30\text{cm}$  (sendo  $h$  e  $d$  a altura e o diâmetro, respectivamente) e do cubo com 20cm de aresta:

$$\frac{f_{cil}}{f_{cubo_{20}}} = 0.502 + 0.2 \log f_{cubo_{20}} ; \quad (\text{unidades: MPa}) . \quad (4.1)$$

Por sua vez, Petersons (1964) sugeriu a seguinte relação entre os valores obtidos em cilindros ( $h = 2d = 30\text{cm}$ ) e cubos com 15 cm de aresta:

$$\frac{f_{cil}}{f_{cubo_{15}}} = 0.85 - 0.21 \frac{f_{cubo_{15}}}{100} ; \quad (\text{unidades: MPa}) . \quad (4.2)$$

Refira-se ainda que, embora de forma pouco significativa, as resistências medidas em cubos apresentam distribuições mais dispersas que as distribuições obtidas com cilindros (CEB, 1975).

A variabilidade da resistência potencial depende directamente do controlo de qualidade que é realizado durante a betonagem e colocação em obra. Tendo em conta inúmeros ensaios de compressão realizados com provetes cilíndricos, constatou-se (Mirza, 1979a) que o coeficiente de variação da resistência do betão à compressão ( $CV_{f_c} = \sigma_{f_c} / \bar{f}_c$ , onde  $\bar{f}_c$  é o valor médio e  $\sigma_{f_c}$  o desvio padrão) varia entre 15% e 20% para níveis correntes de controlo de qualidade. Para níveis elevados o coeficiente de variação desce para valores entre 7% e 10%.

No Quadro 4.1 apresentam-se os valores sugeridos por Mirza para o coeficiente de variação  $CV_{f_c}$  e para o desvio padrão  $\sigma_{f_c}$ , em função do nível de controlo de qualidade e da resistência de compressão especificada no projecto, considerando ensaios em betão fabricado no local da obra. Os valores apresentados permitem verificar que a dispersão diminui para níveis de controlo mais rigorosos e para betões mais resistentes. De forma idêntica, o regulamento de betões de ligantes hidráulicos (RBLH, 1989) preconizava as mesmas grandezas em função da qualidade e da resistência média do betão (Quadro 4.2).

Rüsch (CEB, 1975) realizou um estudo sobre a qualidade dos betões usado na Alemanha em função do tipo de construção. Os resultados obtidos encontram-se descritos no Quadro 4.3. Ellingwood (1980) considerando dados recolhidos na construção de edifícios nos Estados Unidos da América, constatou que os valores de  $CV_{f_c}$  variam entre 15% e 18%. Almunia (1993) propôs valores que caracterizam a variabilidade da resistência do betão à compressão (Quadro 4.4), para obras de qualidade média e alta. Para isso considerou trabalhos desenvolvidos por outros autores

e os valores resultantes da recolha de dados relativos ao controlo sobre os materiais utilizados na construção de pontes de betão em Espanha.

Quadro 4.1 - Variabilidade da resistência do betão à compressão (Mirza, 1979a).

Nível do controlo de qualidade	Valor característico da tensão de rotura, $f_{ck}$	
	< 27 MPa Coeficiente de variação (%)	≥ 27 MPa Desvio padrão (MPa)
Excelente	10%	2.7
Médio	15%	4.0
Pobre	20%	5.4

Quadro 4.2 - Valores máximos dos parâmetros definidores da qualidade do betão (RBLH, 1989).

Qualidade do betão	Parâmetros definidores da qualidade	Valor médio da tensão de rotura (MPa)			
		Compressão		Flexão	
		≤ 35	> 35	≤ 5	> 5
1	Coeficiente de variação (%)	16	–	12	–
	Desvio padrão (MPa)	–	5.5	–	0.6
2	Coeficiente de variação (%)	20	–	16	–
	Desvio padrão (MPa)	–	7.0	–	0.8
3	Coeficiente de variação (%)	Sem especificação			
	Desvio padrão (MPa)				

Quadro 4.3 - Variabilidade da resistência do betão para diferentes tipos de construção (CEB, 1975).

Tipo de construção	Coeficiente de variação (%)	Resistência média, $f_{cm}$ (MPa)
Vigas de betão pré-fabricadas	6	66.4
Pistas de aeroportos	9	45.9
Barragem de betão nos Alpes	10	30.3
Ponte em betão pré-esforçado	13	53.7
Construção industrial com controlo elevado	15	34.2
Construção de pequenas casas	20	34.2
Construção de edifícios com controlo deficiente	28	21.5

Quadro 4.4 - Variabilidade da resistência do betão para obras de qualidade média e alta (Almunia, 1993).

Valor característico especificado para a resistência do betão, $f_{ck}$ (MPa)	7 dias		28 dias	
	desvio padrão (MPa)	Coefficiente variação (%)	desvio padrão (MPa)	Coefficiente variação (%)
25	1.8 - 3.3	8 - 11	2.6 - 3.5	9 - 11
30	4.7	14	4.1	11
35	2.8 - 3.8	7 - 8	3.0 - 3.9	7 - 10
40	2.5 - 4.2	5 - 9	3.3 - 4.2	6 - 7

A variabilidade total do betão referida nos últimos parágrafos inclui as dispersões resultantes de diferentes betonagens numa obra, ou seja, a variabilidade espacial ao longo de um mesmo elemento estrutural. Mirza (1979a) caracterizou os coeficientes de variação da resistência do betão obtido de diferentes lotes da mesma obra, em função do nível de controlo. Assim, obteve valores entre 4% e 5% para casos com controlo elevado, 5% a 6% para um controlo médio e acima de 6% para um controlo pobre. Esta variabilidade espacial é atribuída a variações de dosagem dos materiais, aos processos de fabrico de diferentes origens e às variações associadas aos ensaios.

Relativamente ao tipo de distribuição da resistência à compressão do betão apresentada pelos provetes, a maioria dos investigadores apresentam a lei gaussiana (normal) como aquela que melhor representa a distribuição da resistência do betão à compressão. No entanto, alguns autores sugerem a distribuição log-normal para betões com controlo pobre, enquanto que a distribuição normal é adequada para betões de boa qualidade (Mirza, 1979a; Almunia, 1993).

A resistência real das estruturas de betão (resistência efectiva) é geralmente inferior à resistência medida nos ensaios em provetes obtidos em condições de laboratório (resistência convencional). Esta diferença deve-se sobretudo às diferentes condições de cura, de compactação, de migração vertical da água nos elementos, do tamanho, da forma e dos diferentes estados de tensão instalados na estrutura e nos provetes.

De acordo com vários estudos (Campbell, 1967; Bloem, 1968; Petersons, 1968, Gonçalves, 1987), os valores médios da relação entre a resistência medida em tarolos e a resistência medida em cilindros variam entre 0.74 e 0.96, sendo o valor médio global de 0.87 (Mirza, 1979a). Petersons (1971) sugeriu que o aumento da resistência do betão se traduz numa diminuição da relação entre as tensões de rotura efectiva e convencional (Quadro 4.5).

Gonçalves (1987) descreveu os vários factores que influenciam a relação entre a resistência real e potencial. Na impossibilidade de analisar a influência de todos os factores, definiu um plano de trabalhos para a avaliação experimental da resistência do betão em elementos estruturais, em que variaram as condições de cura e compactação, a idade de ensaio e o tipo de elemento estrutural. As características do betão utilizado (classe C20/25) foram mantidas constantes a menos das variabilidades inerentes ao material. A resistência real foi medida em provetes cilíndricos (tarolos com  $h = d = 11.2\text{cm}$ ) extraídos dos elementos estruturais considerados (pilares, vigas e lajes), na direcção perpendicular à da moldagem. Uma parte dos tarolos foram conservados dentro de água até à data do ensaio e a outra parte mantidos ao ar livre no interior do laboratório. A resistência potencial foi controlada em provetes cúbicos com aresta de 20cm executados de forma corrente. Uma parte dos cubos foram mantidos em câmara saturada desde a data da betonagem até ao dia do ensaio e a outra parte permaneceu junto dos elementos estruturais correspondentes, sujeitos, por isso, às condições atmosféricas reais. Foram ainda consideradas duas condições de compactação: boa (betão vibrado) e má (betão não vibrado). Os resultados obtidos deste estudo para as diferentes condições consideradas, encontram-se sumariamente descritos nos Quadros 4.6 a 4.8. As medidas descritas dizem respeito a várias amostras de nove provetes cada.

Quadro 4.5 - Relação entre a tensão de rotura efectiva e convencional, em função da resistência do betão (Petersons, 1971).

Resistência do betão à compressão (MPa)	Relação entre a tensão de rotura efectiva e convencional
20	0.95
30	0.90
40	0.85
50	0.85

Da análise dos resultados obtidos por Gonçalves (Quadros 4.6 a 4.8) verifica-se que a relação entre a resistência real e a resistência potencial depende significativamente das condições de cura, da betonagem e do tipo de elemento estrutural. Observa-se que os valores obtidos para os pilares e para as vigas não apresentam diferenças significativas. Por outro lado, as resistências reais medidas nas lajes são menores que os respectivos valores referentes aos outros dois elementos estruturais. Estas diferenças explicam-se pelas condições de secagem em lajes serem mais gravosas devido à maior relação entre a área exposta e o volume.

Quadro 4.6 - Relação entre a resistência medida aos 28 dias em tarolos extraídos de pilares e em cubos (Gonçalves, 1987).

betonagem	cubos conservados em câmara saturada								cubos ao ar livre	
	betão vibrado				betão não vibrado				betão vibrado	
	tarolos saturados		tarolos não saturados		tarolos saturados		tarolos não saturados		tarolos não saturados	
	média	desvio padrão	média	desvio padrão	média	desvio padrão	média	desvio padrão	média	desvio padrão
Inverno	0.80	0.055	0.81	0.049	0.70	0.042	0.75	0.054	0.90	0.049
	0.84	0.038	0.86	0.042						
Primavera	0.87	0.067	0.91	0.046	0.81	0.048	0.88	0.064	0.90	0.047
	0.79	0.110	0.76	0.058						
Verão	0.83	0.076	0.88	0.070	0.80	0.103	0.84	0.095	0.93	0.068
	0.81	0.073	0.88	0.059						
Outono	0.90	0.062	0.91	0.060	0.85	0.063	0.89	0.055	0.92	0.058
	0.90	0.041	0.90	0.057						

Quadro 4.7 - Relação entre a resistência medida aos 28 dias em tarolos extraídos de vigas e em cubos (Gonçalves, 1987).

betonagem	cubos conservados em câmara saturada								cubos ao ar livre	
	betão vibrado				betão não vibrado				betão vibrado	
	tarolos saturados		tarolos não saturados		tarolos saturados		tarolos não saturados		tarolos não saturados	
	média	desvio padrão	média	desvio padrão	média	desvio padrão	média	desvio padrão	média	desvio padrão
Inverno	0.76	0.036	0.74	0.058	0.76	0.037	0.75	0.050	0.82	0.058
	0.74	0.032	0.80	0.050						
Primavera	0.86	0.052	0.94	0.034	—	—	—	—	1.02	0.027
	0.88	0.034	0.96	0.026						
Verão	0.88	0.031	0.95	0.037	0.68	0.058	0.71	0.063	0.96	0.049
	0.80	0.043	0.86	0.056						
Outono	0.97	0.046	0.99	0.031	0.86	0.119	0.87	0.084	1.00	0.030
	0.95	0.046	0.97	0.028						

Quadro 4.8 - Relação entre a resistência medida aos 28 dias em tarolos extraídos de lajes e em cubos (Gonçalves, 1987).

betonagem	cubos conservados em câmara saturada								cubos ao ar livre	
	betão vibrado				betão não vibrado				betão vibrado	
	tarolos saturados		tarolos não saturados		tarolos saturados		tarolos não saturados		tarolos não saturados	
	média	desvio padrão	média	desvio padrão	média	desvio padrão	média	desvio padrão	média	desvio padrão
Inverno	0.70	0.034	0.76	0.027	0.69	0.037	0.76	0.037	0.82	0.029
Primavera	0.83	0.035	0.87	0.029	0.76	0.042	0.84	0.030	0.94	0.026
Verão	0.69	0.039	0.73	0.065	0.54	0.038	0.59	0.049	0.77	0.068
Outono	0.81	0.034	0.87	0.043	0.78	0.026	0.81	0.049	0.88	0.044

### Outros parâmetros mecânicos do betão

Os restantes parâmetros mecânicos que são vulgarmente utilizados para caracterizar o comportamento instantâneo do betão encontram-se relacionados com a resistência à compressão. Entre esses parâmetros destacam-se a resistência à tracção,  $f_{ct}$ , e o módulo de elasticidade,  $E_c$ . A determinação de relações empíricas com a resistência à compressão do betão,  $f_c$ , tem sido objecto de vários estudos (CEB, 1979b; Mirza, 1979a).

O MC90 (CEB-FIP, 1993) e o EC2 (1991) recomendam a seguinte relação para determinar o valor médio da resistência do betão à tracção:

$$f_{ctm} = 0.30 \cdot f_{ck}^{2/3} \quad , \quad (4.3)$$

onde  $f_{ck}$  é o valor característico da tensão de rotura do betão à compressão. Jaccoud (1996) mostrou que a equação (4.3) não representa adequadamente a evolução de  $f_{ctm}$  para betões de alta resistência (classes superiores a C50). Embora a resistência à tracção dos betões das classes mais elevadas aumente com a resistência à compressão, esse crescimento dá-se de modo menos acentuado que aquele definido por (4.3). Assim, Jaccoud (1996) propõe para betões de classe superior a C50 a seguinte relação:

$$f_{ctm} = 0.315 \cdot f_{cm}^{0.6} \quad . \quad (4.4)$$

Mirza (1979a), recorrendo aos resultados de ensaios experimentais obtidos em betões entre as classes C20 e C45, caracterizou estatisticamente a relação entre  $f_{ct}$  e  $f_c$ . Recorrendo à técnica dos mínimos quadrados e considerando os dados relativos ao ensaio em 798 provetes cilíndricos, obteve coeficientes de regressão da ordem de 0.75. Os resíduos, considerados como a diferença entre os valores observados e os valores calculados pelo modelo de regressão, apresentaram uma distribuição normal com média nula. Quanto à dispersão dos valores observados da resistência à tracção, Mirza (1979a) verificou que de um modo geral é superior à dispersão da resistência à compressão. De acordo com os valores obtidos, sugeriu um coeficiente de variação entre 13% e 20%.

O módulo de elasticidade, vulgarmente utilizado para caracterizar a resposta elástica do betão, corresponde ao valor médio do módulo secante,  $E_{cm}$ , definido pelo declive do ramo de descarregamento da curva tensão-deformação para níveis de tensão moderados. O MC90 e o EC2 propõem a seguinte relação com o valor médio da resistência à compressão:

$$E_{cm} = 9500 \cdot f_{cm}^{1/3} \quad (\text{unidades: MPa}) \quad . \quad (4.5)$$

Tal como para a resistência à tração, Jaccoud (1996) verificou que a expressão (4.5) é estritamente válida para betões até à classe C50. Para betões de resistência superior, o crescimento de  $E_{cm}$  em função de  $f_{cm}$  é menor, sendo melhor traduzido pela seguinte equação:

$$E_{cm} = 11000 \cdot f_{cm}^{0.3} \quad (\text{unidades: MPa}) \quad . \quad (4.6)$$

De acordo com os resultados obtidos por Mirza (1979a), os coeficientes de regressão entre o módulo de elasticidade e a resistência do betão à compressão situaram-se entre 0.88 (regressão linear) e 0.91 (regressão exponencial). Os resíduos entre os valores observados e calculados por regressão apresentaram uma distribuição normal com média nula. O coeficiente de variação variou entre 7.7% (módulo de elasticidade inicial) e 12% (módulo de elasticidade secante). As diferenças entre os módulos de elasticidade obtidos em compressão e em tração foram estatisticamente muito pequenas.

#### 4.2.2.5 - Resultados experimentais obtidos em viadutos de betão pré-esforçado

Neste ponto apresenta-se sumariamente os resultados do tratamento estatístico do parâmetro mecânico mais controlado na fabricação do betão na construção de pontes e viadutos: a sua resistência à compressão,  $f_c$ . Os dados analisados são respeitantes à construção dos seguintes viadutos em betão armado e pré-esforçado: viaduto sobre o rio Pele na estrada nacional EN 310 em Vermoim (1992-1993), viaduto de Labriosque na auto-estrada Porto-Braga sub-lanço Cruz-Braga (1992-1993) e viaduto das Antas na Via de Cintura Interna (VCI) do Porto (1995-1997). Os betões analisados foram fabricados em centrais. O estudo efectuado não define a qualidade do betão utilizado na construção de viadutos em Portugal atendendo ao número bastante limitado de casos abordados, no entanto, permite apontar algumas características de interesse.

Os dados de  $f_c$  foram obtidos do controle de qualidade durante a construção realizado com provetes cúbicos de 20 cm de aresta moldados no local de betonagem e carregados até à rotura em condições normalizadas. Um estudo mais detalhado destes dados é apresentado no Anexo 2.

As classes especificadas para os betões analisados foram os seguintes:

- viaduto sobre o rio Pele:
  - classe B25 (C20/25) nas fundações e pilares;
  - classe B30 (C25/30) nos pilares e no tabuleiro.
- viaduto de Labriosque:
  - classe B30 (C25/30) nas estacas e sapatas;



- classe B35 (C30/37) nos pilares;
  - classe B40 (C35/45) no tabuleiro.
- viaduto das Antas:
- classe B35 (C30/37) no tabuleiro.

Os dados ilustrados nas Figs. 4.9 a 4.11 referem-se a valores controlados aos 28 dias. Para cada um dos diagramas representados apresenta-se:

- a distribuição dos valores de  $f_c$  observados nos controles de qualidade efectuados;
- uma curva correspondente à distribuição normal ("curva normal") com parâmetros (média e desvio padrão) iguais aos valores estimados com os dados observados;
- uma "curva normal" obtida da curva anterior corrigindo os valores de acordo com as relações obtidas por Gonçalves (ver Quadros 4.6 a 4.8) para a estimar a distribuição dos valores reais;
- uma "curva normal" correspondente ao betão especificado regulamentarmente.

Conforme se pode observar, as distribuições do tipo normal permitem um bom ajuste às distribuições experimentais, confirmando a hipótese regulamentar e as propostas de diversos autores sobre o tipo de distribuição para betões de média e boa qualidade. Como foi referido na secção anterior, os valores medidos em provetes traduzem uma resistência convencional que geralmente representa por defeito a resistência real. A "curva normal" obtida a partir dos valores corrigidos, supondo uma relação meramente multiplicativa entre os valores observados e os valores reais, permite estimar de uma forma simplista a distribuição que se pode esperar na estrutura. A comparação desta curva corrigida com a curva do betão especificada regulamentarmente é usada para discutir os valores propostos nas actuais normas.

As curvas referidas ilustram que há uma tendência para fabricar betões com resistência ligeiramente superior aos valores especificados. No entanto, esta constatação não se verifica de uma forma generalizada, uma vez que em alguns betões a resistência média observada (para os valores corrigidos) é idêntica aos valores médios regulamentares. A característica que mais fortemente se destaca nos dados obtidos é a menor dispersão relativamente ao valor especificado nas actuais normas. Este resultado está de acordo com resultados obtidos por outros autores em betões fabricados em centrais.

De acordo com a análise estatística efectuada, os valores especificados para a resistência característica e de cálculo do betão à compressão correspondem na realidade a probabilidades de ocorrência inferiores àquelas definidas nas normas.

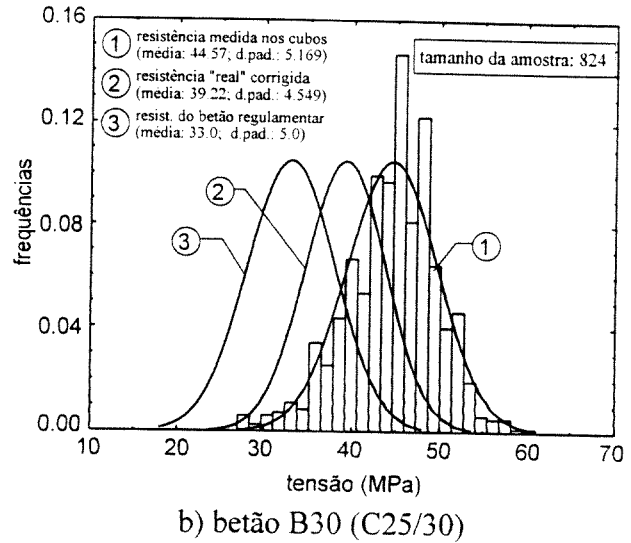
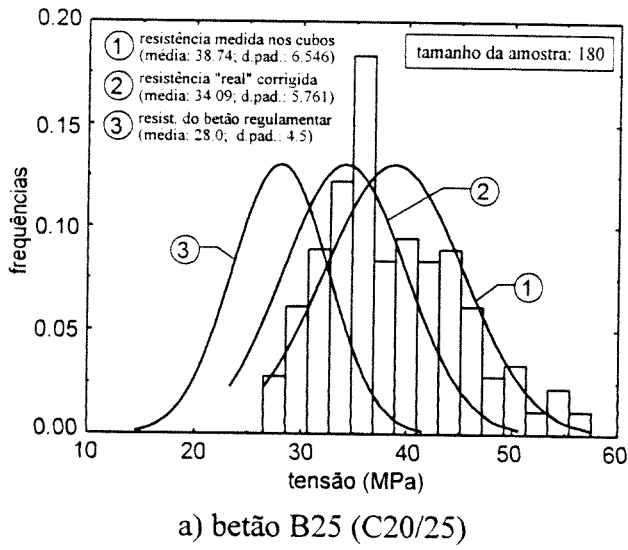


Fig. 4.9 - Análise estatística da resistência do betão à compressão - viaduto sobre o rio Pele.

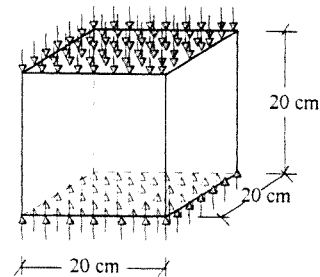
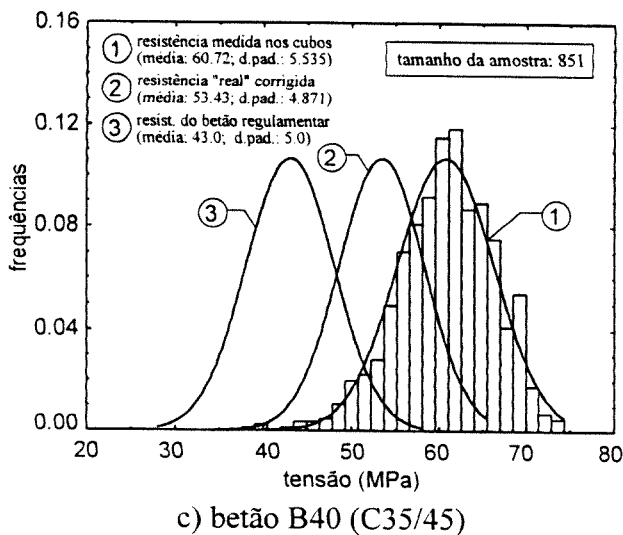
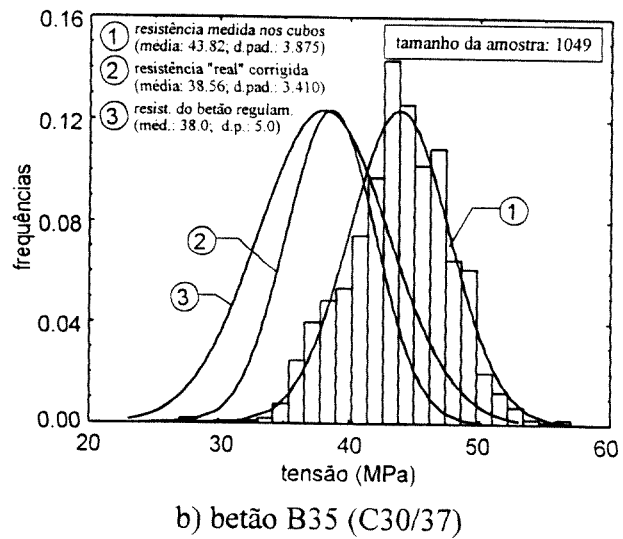
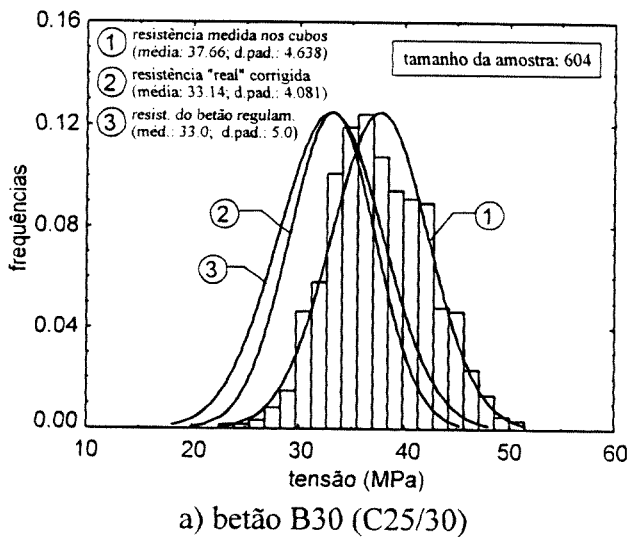


Fig. 4.10 - Análise estatística da resistência do betão à compressão - viaduto de Labriosque.

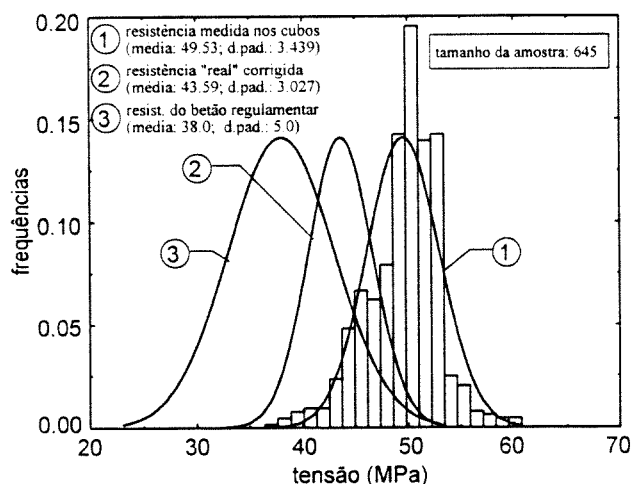


Fig. 4.11 - Análise estatística da resistência do betão à compressão - viaduto das Antas.

#### 4.2.2.6 - Modelo numérico de comportamento

O presente modelo é definido por: um critério de resistência máxima que caracteriza a capacidade portante máxima do material para qualquer estado de tensão e um conjunto de relações constitutivas que traduzem a evolução da resposta com o carregamento (Henriques, 1991, 1992a-b).

O critério de resistência máxima adoptado no presente modelo é baseado no critério proposto por Ottosen (1977) e sugerido também pelo MC90 (CEB-FIP, 1993). Na definição das relações constitutivas são consideradas três situações distintas: o betão não fendilhado (ou betão sem fendilhação macroscópica), o betão fendilhado (ou betão com fendilhação macroscópica devida à fractura por tracção) e o betão esmagado (ou betão desagregado na sequência de fractura por compressão).

O comportamento deformacional do betão não fendilhado é descrito através de um modelo elasto-plástico e na consideração de uma lei de endurecimento resultante da aplicação do critério proposto por Ottosen (1977). Por sua vez, o comportamento do betão fendilhado é descrito com base num modelo de fendilhação distribuída, identificando-se, por isso, o material fendilhado com um meio contínuo. Finalmente, para o betão com rotura por esmagamento considera-se que o material perde totalmente a sua capacidade portante e simultaneamente a sua rigidez é anulada.

### Critério de resistência máxima

Os critérios de resistência máxima de materiais isotrópicos sujeitos a estados de tensão homogêneos são independentes do referencial das tensões. É comum exprimir estes critérios em função dos três invariantes de tensão  $I_1$ ,  $J_2$  e  $J_3$  (sendo  $I_1$  o primeiro invariante do tensor das tensões e  $J_2$ ,  $J_3$  são o segundo e o terceiro invariante do tensor de desvio das tensões), da seguinte forma:

$$f(I_1, J_2, J_3) = 0 \quad . \quad (4.7)$$

Os três invariantes principais de tensão são definidos pelas seguintes expressões:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad , \quad (4.8)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) \quad , \quad (4.9)$$

$$J_3 = s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 \quad , \quad (4.10)$$

onde  $\sigma$  e  $s$  representam, respectivamente, o tensor das tensões e o tensor de desvio das tensões.

Em alternativa ao invariante  $J_3$  é possível considerar o ângulo de similaridade,  $\theta$  (ver Fig. 4.8a), relacionado com  $J_3$  pela seguinte relação:

$$\cos 3\theta = \frac{\sqrt{2} \cdot J_3}{\tau_{oct}^3} \quad , \quad (4.11)$$

sendo  $\tau_{oct}$  denominada por tensão tangencial octaedral, definida num plano que contém o ponto representativo do estado de tensão e que faz ângulos iguais com as direcções principais de tensão (o plano octaedral). A tensão tangencial  $\tau_{oct}$  é dada por:

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot J_2} \quad . \quad (4.12)$$

O critério de resistência máxima utilizado no presente modelo (Ottosen, 1977; CEB-FIP, 1993) é traduzido pela seguinte função:

$$f(I_1, J_2, \cos 3\theta) = a \cdot \frac{J_2}{f_c^2} + \lambda \cdot \frac{\sqrt{J_2}}{f_c} + b \cdot \frac{I_1}{f_c} - 1 = 0 \quad , \quad (4.13)$$

onde  $f_c$  é a resistência do betão à compressão (uniaxial),  $a$  e  $b$  são constantes associadas ao material e  $\lambda$  é um parâmetro função de  $\cos 3\theta$ :

$$\lambda = c_1 \cdot \cos\left[\frac{1}{3} \arccos(c_2 \cdot \cos 3\theta)\right], \quad \cos 3\theta \geq 0 \quad ; \quad (4.14a)$$

$$\lambda = c_1 \cdot \cos\left[\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \arccos(-c_2 \cdot \cos 3\theta)\right], \quad \cos 3\theta \leq 0 \quad ; \quad (4.14b)$$

onde os parâmetros  $c_1$  e  $c_2$  são, respectivamente, factores de tamanho e de forma, tendo em conta que as expressões (4.14) permitem considerar que a superfície projectada no plano de desvio deve mudar de aproximadamente triangular para aproximadamente circular com o aumento da tensão hidrostática (Chen, 1982).

Verifica-se ainda que a superfície cilíndrica do critério de Huber-Mises e a superfície cónica de Drucker-Prager, critérios largamente aplicados neste tipo de problemas, são casos particulares da presente formulação. O critério de Huber-Mises é obtido para valores de  $a = b = 0$  e  $\lambda = \text{constante}$  e o critério de Drucker-Prager resulta da consideração de  $a = 0$  e  $\lambda = \text{constante}$ .

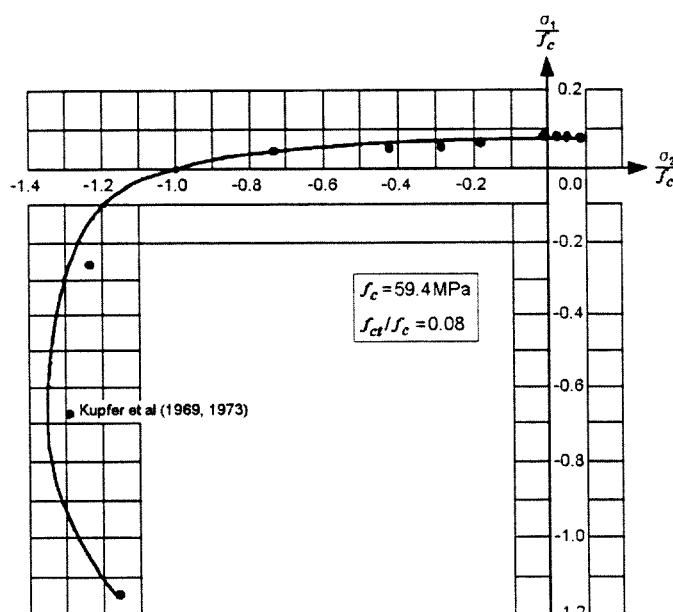


Fig. 4.13 - Comparação entre o critério de Ottosen e os testes biaxiais de Kupfer (1969, 1973). Adaptado de Ottosen (1977).

A determinação dos quatro parâmetros ( $a$ ,  $b$ ,  $c_1$  e  $c_2$ ) adoptados na definição do presente critério foi avaliada a partir dos seguintes testes experimentais (Ottosen, 1977):

- resistência à compressão uniaxial,  $f_c$  ( $\theta = 60^\circ$ );

- resistência à tracção uniaxial,  $f_{ct}$  ( $\theta = 0^\circ$ );
- resistência à compressão biaxial,  $f_{cb}$  ( $\theta = 0^\circ$ ), definido particularmente para  $\sigma_1 = \sigma_2 = -1.16f_c$ ,  $\sigma_3 = 0$ , correspondendo aos resultados experimentais de Kupfer (1969, 1973) que definem  $f_{cb} = 1.16f_c$  (ver Fig. 4.13);
- estado de tensão triaxial definido no meridiano de compressão ( $\theta = 60^\circ$ ) pelo ponto de coordenadas  $\sigma_{oct}/|f_c| = -5$  e  $\tau_{oct}/|f_c| = 4$  ( $\sigma_{oct} = I_1/3$ ), de forma a ajustar aos resultados obtidos por Balmer e Richard (ver Fig. 4.14; Chen, 1982).

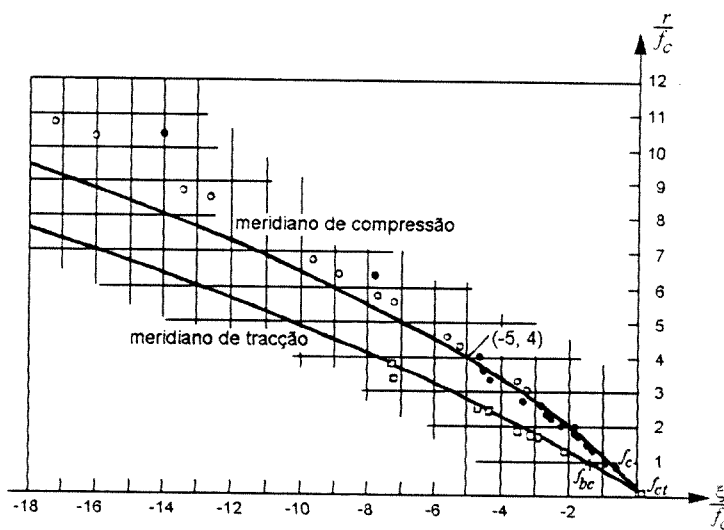


Fig. 4.14 - Comparação entre o critério de Ottosen e resultados experimentais nos planos meridianos: círculos abertos, Balmer (compressão); círculos a cheio, Richard (compressão); quadrados, Richard (tracção); cruces, Kupfer (tracção). Adaptado de Chen (1982).

Ottosen (1977) constatou que os parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $c_1$  e  $c_2$  apresentam uma considerável dependência da relação de resistência:

$$k = \frac{f_{ct}}{f_c} \quad , \quad (4.15)$$

onde  $f_{ct}$  e  $f_c$  representam a resistência do betão à tracção e à compressão, respectivamente. No Quadro 4.9 apresenta-se valores propostos por Ottosen para os parâmetros referidos. Os valores de  $c_1$  e  $c_2$  referidos no Quadro 4.9 correspondem aos valores de  $\lambda_t$  e  $\lambda_c$  (meridianos de tracção e de compressão, respectivamente) definidos no Quadro 4.10.

Quadro 4.9 - Parâmetros do material em função de  $k = f_{ct} / f_c$ .

$k$	$a$	$b$	$c_1$	$c_2$
0.08	1.8076	4.0962	14.4863	0.9914
0.10	1.2759	3.1962	11.7365	0.9801
0.12	0.9218	2.5969	9.9110	0.9647

Quadro 4.10 - Valores do parâmetro  $\lambda$  em função de  $k = f_{ct} / f_c$ .

$k$	$\lambda_t$	$\lambda_c$	$\lambda_c / \lambda_t$
0.08	14.4725	7.7834	0.5378
0.10	11.7109	6.5315	0.5577
0.12	9.8720	5.6979	0.5772

Considerando as funções que melhor se aproximam aos resultados descritos no Quadro 4.9, o MC90 (CEB-FIP, 1993) propôs as seguintes expressões para determinar os quatro parâmetros referidos:

$$a = \frac{1}{9k^{1.4}}; \quad b = \frac{1}{3.7k^{1.1}}; \quad c_1 = \frac{1}{0.7k^{0.9}}; \quad c_2 = 1 - 6.8(k - 0.07)^2 \quad . \quad (4.16 - 19)$$

#### *Comportamento do betão não fendilhado*

O comportamento não linear do betão não fendilhado (ou seja, sem fendilhação macroscópica) é traduzido por um modelo elasto-plástico. Este modelo permite representar adequadamente a componente recuperável de deformação, recorrendo à teoria da elasticidade; e, caracterizar as deformações plásticas responsáveis pela componente permanente, através da teoria da plasticidade.

As relações constitutivas são estabelecidas de forma incremental, associando-se a um modelo elasto-plástico com endurecimento através do seguinte conjunto de condições: o critério de cedência, a lei de fluxo ou de escoamento plástico e a lei de endurecimento.

- *Critério de cedência*

O betão é considerado como um material que apresenta um endurecimento isotrópico (Owen, 1980). As superfícies de carga, correspondentes a sucessivos níveis de tensão, são definidas através da seguinte relação:

$$F(\underline{\sigma}, K) = f(\underline{\sigma}) - \sigma_y(K) = 0 \quad , \quad (4.20)$$

onde  $f(\underline{\sigma})$  designa a função de cedência definida em função do tensor de tensões,  $\underline{\sigma}$ , e  $\sigma_y(K)$  representa a evolução da tensão de cedência, em função de um escalar  $K$  representativo do endurecimento, com a história de deformação plástica ocorrida (Owen, 1980; Chen, 1982).

No presente modelo a função de cedência é expressa em função dos três invariantes de tensão,  $I_1$ ,  $J_2$  e  $\cos 3\theta$ , coincidindo com a expressão estabelecida em (4.13) e adoptando os parâmetros definidos em (4.16) a (4.19). O escalar representativo do estado de tensão multiaxial, designado por tensão efectiva,  $\sigma_c$ , é obtido pela equação (4.13), resultando em:

$$\sigma_c = f(\underline{\sigma}) = \frac{1}{2} \left[ \left( \lambda \sqrt{J_2} + bI_1 \right) + \sqrt{\left( \lambda \sqrt{J_2} + bI_1 \right)^2 + 4aJ_2} \right] \quad . \quad (4.21)$$

Uma vez atingida a superfície de cedência limite (definida por  $\sigma_c = f(\underline{\sigma}) = f_c$ , em que  $f_c$  é a tensão efectiva máxima), o betão sofre uma quebra de resistência devido ao *softening* se o betão se encontra predominantemente sujeito à compressão, ou devido à fendilhação no caso da tracção ser dominante.

- *Lei de fluxo ou de escoamento plástico*

A lei de fluxo estabelece a relação entre as deformações plásticas e o nível de tensão instalado no betão. Essa relação é definida através de incrementos infinitesimais das componentes de deformação plástica pela seguinte expressão (Owen, 1980):

$$d\underline{\varepsilon}_p = d\lambda \frac{\partial g(\underline{\sigma})}{\partial \underline{\sigma}} \quad , \quad (4.22)$$

em que  $d\lambda$  é um infinitésimo não negativo, designado por multiplicador plástico, que representa a amplitude do incremento da deformação plástica,  $d\underline{\varepsilon}_p$ , segundo a direcção normal à superfície definida pela função  $g(\underline{\sigma})$ , correntemente designada por função de potencial plástico.

Para evitar os inconvenientes relativos à perda de simetria no cálculo da matriz de rigidez, utilizou-se uma lei de fluxo associada, isto é, a função de potencial plástico é identificada com a função de cedência,  $f(\underline{\sigma})$ , resultando em:

$$d\underline{\varepsilon}_p = d\lambda \cdot \frac{\partial f(\underline{\sigma})}{\partial \underline{\sigma}} = d\lambda \cdot \underline{a} \quad , \quad (4.23)$$

em que:



$$\underline{a} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_z} \quad \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} \quad \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \quad \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \right\}^T, \quad (4.24)$$

é o vector fluxo que define a direcção ortogonal à superfície de cedência no ponto de coordenadas  $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$ . As derivadas parciais,  $\partial f / \partial \sigma_{ij}$ , da função de cedência apresentada em (4.21), são definidas por:

$$a_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{J_2} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\lambda}{2\sqrt{J_2}} \cdot \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} + b \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}} + \right. \\ \left. (\lambda \cdot \sqrt{J_2} + bI_1) \cdot \left( \sqrt{J_2} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\lambda}{2\sqrt{J_2}} \cdot \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} + b \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}} \right) + 2a \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} \right. \\ \left. + \frac{\quad}{\sqrt{(\lambda \cdot \sqrt{J_2} + bI_1)^2 + 4aJ_2}} \right\}, \quad (4.25)$$

onde as derivadas parciais da função  $\lambda(\cos 3\theta)$ , expressa em (4.14), resultam em:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\sqrt{3}}{2} c_1 c_2 \frac{\text{sen} \left[ \frac{1}{3} \arccos(c_2 \cos 3\theta) \right] \cdot \left( J_2^{3/2} \cdot \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{3}{2} J_2^{1/2} \cdot J_3 \cdot \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} \right)}{J_2^3 [1 - (c_2 \cos 3\theta)^2]^{1/2}}, \quad \cos 3\theta \geq 0; \quad (4.26a)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\sqrt{3}}{2} c_1 c_2 \frac{\text{sen} \left[ \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \arccos(-c_2 \cos 3\theta) \right] \cdot \left( J_2^{3/2} \cdot \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{3}{2} J_2^{1/2} \cdot J_3 \cdot \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} \right)}{J_2^3 [1 - (c_2 \cos 3\theta)^2]^{1/2}}, \quad \cos 3\theta \leq 0. \quad (4.26b)$$

A determinação do multiplicador plástico,  $d\lambda$ , é feita tendo em conta que além da condição definida em (4.20) é preciso também verificar que:

$$dF = \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \cdot d\underline{\sigma} - \frac{\partial \sigma_Y}{\partial K} \cdot dK = 0 \quad (4.27)$$

Atendendo à condição de endurecimento (Owen, 1980), o escalar  $K$  pode ser identificado com a deformação plástica efectiva,  $\varepsilon_p$ , através da seguinte relação:

$$dK = d\varepsilon_p = c (d\underline{\varepsilon}_p^T \cdot d\underline{\varepsilon}_p)^{1/2}, \quad (4.28)$$

sendo  $c$  uma constante que toma o valor  $\sqrt{2/3}$  para materiais incompressíveis (Chen, 1982). Considerando as expressões (4.23) e (4.28) obtém-se:

$$d\varepsilon_p = d\lambda \cdot \bar{a} \quad , \quad (4.29)$$

com

$$\bar{a} = (c^2 \underline{a}^T \underline{a})^{1/2} \quad . \quad (4.30)$$

Sendo o acréscimo infinitesimal de deformação total,  $d\underline{\varepsilon}$ , dado pela soma das componentes de deformação efectiva,  $d\underline{\varepsilon}_e$ , e plástica,  $d\varepsilon_p$ ,

$$d\underline{\varepsilon} = d\underline{\varepsilon}_e + d\underline{\varepsilon}_p \quad , \quad (4.31)$$

e que

$$d\underline{\varepsilon}_e = \underline{D}^{-1} d\underline{\sigma} \quad , \quad (4.32)$$

onde  $\underline{D}$  representa a matriz de elasticidade do material. Considerando as expressões (4.27), (4.29), (4.31) e (4.32), o multiplicador plástico  $d\lambda$  vem definido pela seguinte expressão:

$$d\lambda = \frac{\underline{a}^T \cdot \underline{D} \cdot d\underline{\varepsilon}}{A + \underline{a}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{a}} \quad , \quad (4.33)$$

sendo

$$A = \frac{d\sigma_Y}{d\varepsilon_p} \cdot \bar{a} = H \cdot \bar{a} \quad , \quad (4.34)$$

em que  $A$  é o escalar que caracteriza o endurecimento do material, definido em função do parâmetro  $H$  que depende da lei de endurecimento adoptada.

Uma vez completamente caracterizado o vector fluxo,  $\underline{a}$ , e o multiplicador plástico,  $d\lambda$ , é possível definir a relação constitutiva em regime elasto-plástico em termos de acréscimos infinitesimais:

$$d\underline{\sigma} = \underline{D}_{ep} \cdot d\underline{\varepsilon} \quad , \quad (4.35)$$

em que a matriz elasto-plástica,  $\underline{D}_{ep}$ , atendendo às expressões (4.29) a (4.34), é expressa por:

$$\underline{D}_{ep} = \underline{D} - \frac{\underline{D} \cdot \underline{a} \cdot \underline{a}^T \cdot \underline{D}}{A + \underline{a}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{a}} \quad . \quad (4.36)$$

- *Lei de endurecimento*

A lei de endurecimento define as sucessivas posições da superfície de carga em função da tensão de cedência de referência,  $\sigma_Y$ , durante a deformação plástica. Este movimento é obtido através da identificação da tensão de cedência de referência,  $\sigma_Y$ , com a tensão efectiva,  $\sigma_c$ . Por sua vez, a tensão efectiva é definida em função da deformação plástica efectiva,  $d\varepsilon_p$ , que caracteriza o endurecimento do material obtido num ensaio uniaxial, isto é,

$$\sigma_Y = \sigma_c = H(\varepsilon_p) \quad . \quad (4.37)$$

Os conceitos de tensão efectiva e de deformação plástica efectiva permitem definir este movimento para um carregamento multiaxial genérico a partir de relações unidimensionais, extrapolando os resultados experimentais obtidos em ensaios uniaxiais.

No presente trabalho, a relação entre a tensão efectiva e a deformação plástica efectiva é obtida através da curva proposta pelo MC90 (CEB-FIP, 1993) para simular o comportamento do betão à compressão uniaxial (Fig. 4.15):

$$\sigma_c = \frac{\frac{E_c}{E_{cl}} \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cl}} - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cl}}\right)^2}{1 + \left(\frac{E_c}{E_{cl}} - 2\right) \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cl}}} \cdot f_c, \quad \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c,lim} \quad ; \quad (4.38a)$$

$$\sigma_c = \left[ \left( \frac{1}{\varepsilon_{c,lim} / \varepsilon_{cl}} \cdot \xi - \frac{2}{(\varepsilon_{c,lim} / \varepsilon_{cl})^2} \right) \cdot \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cl}}\right)^2 + \left( \frac{4}{\varepsilon_{c,lim} / \varepsilon_{cl}} - \xi \right) \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cl}} \right]^{-1} \cdot f_c, \quad \varepsilon_c \geq \varepsilon_{c,lim} ; \quad (4.38b)$$

com,

$$\frac{\varepsilon_{c,lim}}{\varepsilon_{cl}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{E_c}{E_{cl}} + 1 \right) + \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{E_c}{E_{cl}} + 1 \right)^2 - \frac{1}{2} \right]^{1/2}, \quad (4.39)$$

e,

$$\xi = \frac{4 \left[ \left( \frac{\varepsilon_{c,lim}}{\varepsilon_{cl}} \right)^2 \cdot \left( \frac{E_c}{E_{cl}} - 2 \right) + 2 \frac{\varepsilon_{c,lim}}{\varepsilon_{cl}} - \frac{E_c}{E_{cl}} \right]}{\left[ \frac{\varepsilon_{c,lim}}{\varepsilon_{cl}} \left( \frac{E_c}{E_{cl}} - 2 \right) + 1 \right]^2}, \quad (4.40)$$

em que  $E_c$ ,  $\varepsilon_{c1}$ ,  $E_{c1}$  e  $f_c$  encontram-se representados na Fig. 4.15, sendo sugerido para  $\varepsilon_{c1}$  o valor de 0.0022.

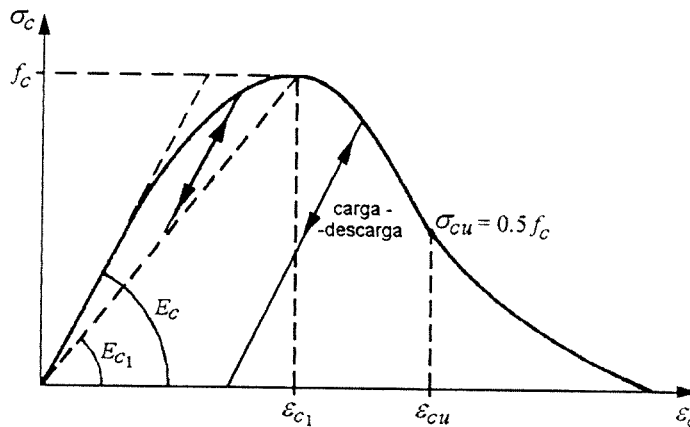


Fig. 4.15 - Diagrama tensões-deformações proposto pelo MC90 (CEB-FIP, 1993) para representar o comportamento do betão à compressão uniaxial.

O comportamento do betão não fendilhado à tracção uniaxial é simulado por uma curva obtida por uma expressão idêntica a (4.38a) até ser atingida a tensão de pico. Nesta expressão, o termo  $f_c$  é substituído por  $f_{ct}$  e a extensão,  $\varepsilon_{c1}$ , correspondente a este valor de pico é considerada igual a 0.00015.

Uma vez descrita a curva  $\sigma_c - \varepsilon_c$ , a lei de endurecimento é caracterizada pelo parâmetro  $A$  expresso em (4.34), sendo  $H$  definido pela equação:

$$H = \frac{d\sigma_Y}{d\varepsilon_p} = \frac{d\sigma_Y}{d\varepsilon_c - d\varepsilon_e} \quad (4.41)$$

Esta relação pode ser transformada em:

$$H = \frac{\frac{d\sigma_Y}{d\varepsilon_c}}{1 - \frac{d\sigma_Y}{d\varepsilon_e}} = \frac{E_t}{1 - \frac{E_t}{E_c}} \quad (4.42)$$

em que  $E_c$  é o módulo de elasticidade do betão e  $E_t$  é o módulo secante para o nível de deformação considerado, sendo determinado por derivação das expressões (4.38a) e (4.38b) em ordem a  $\varepsilon_c$ :

$$E_t = \frac{A - B \cdot C \cdot \varepsilon_c^2 - 2B\varepsilon_c}{(1 + C \cdot \varepsilon_c)^2} \cdot f_c, \quad \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c,lim} \quad ; \quad (4.43a)$$

$$E_t = -\frac{2D \cdot \varepsilon_c + F}{(D \cdot \varepsilon_c^2 + F \cdot \varepsilon_c)^2} \cdot f_c, \quad \varepsilon_c \geq \varepsilon_{c,lim} \quad ; \quad (4.43b)$$

sendo os parâmetros  $A, B, C, D$  e  $F$  definidos pelas seguintes relações:

$$A = \frac{E_c}{E_{cl} \cdot \varepsilon_{cl}}; \quad B = \frac{1}{\varepsilon_{cl}^2}; \quad C = \left( \frac{E_c}{E_{cl}} - 2 \right) \cdot \frac{1}{\varepsilon_{cl}}; \quad (4.44 - 46)$$

$$D = \left[ \frac{1}{\varepsilon_{c,lim} / \varepsilon_{cl}} \cdot \xi - \frac{2}{(\varepsilon_{c,lim} / \varepsilon_{cl})^2} \right] \cdot \frac{1}{\varepsilon_{cl}^2}; \quad F = \left( \frac{4}{\varepsilon_{c,lim} / \varepsilon_{cl}} - \xi \right) \cdot \frac{1}{\varepsilon_{cl}} \quad , \quad (4.47 - 48)$$

e em que as variáveis envolvidas mantêm os significados indicados anteriormente.

#### Comportamento do betão fendilhado

No presente modelo, a fendilhação no betão é considerada distribuída no domínio do ponto de amostragem do elemento, sendo o seu efeito traduzido por uma simples modificação das relações constitutivas do material. Assim, o betão fendilhado é definido como um material ortotrópico, sendo os eixos de ortotropia orientados segundo a direcção de fendilhação (Fig. 4.16). Desta forma, as fendas podem ser formadas numa direcção qualquer não modificando a discretização da topologia da estrutura.

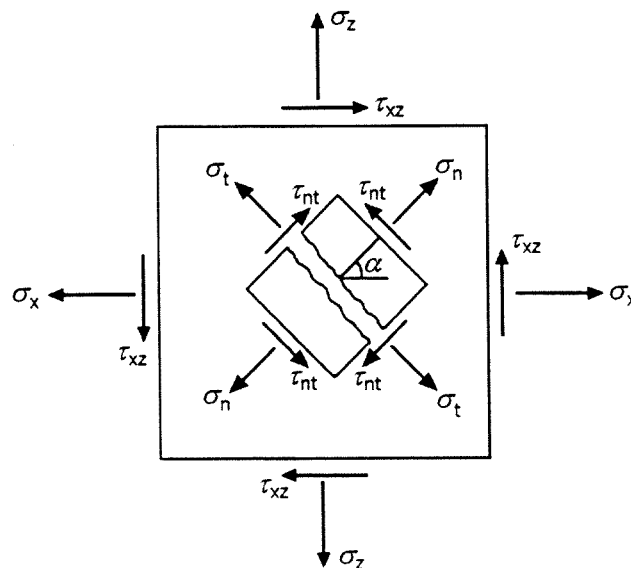


Fig. 4.16 - Definição dos eixos de referência local do betão fendilhado (caso bidimensional).

Considera-se que se inicia a fendilhação no betão quando o valor da tensão efectiva atinge o valor de pico,  $f_{ct}$ , do diagrama tensões-extensões. A direcção das fendas é definida perpendicularmente à direcção das tensões principais máximas, efectuando-se o cálculo das componentes de tensão relativamente ao referencial local de fendilhação (Fig. 4.16).

As relações constitutivas do betão fendilhado são definidas em função dos valores totais das tensões e das deformações, sendo representadas no referencial da fenda pela seguinte expressão:

$$\underline{\sigma}_{cr} = \underline{D}_{cr} \cdot \underline{\varepsilon}_{cr} \quad , \quad (4.49)$$

sendo a contribuição do betão fendilhado para a formação da matriz de rigidez da estrutura dada por:

$$\underline{D} = \underline{T}^T \cdot \underline{D}_{cr} \cdot \underline{T} \quad , \quad (4.50)$$

em que  $\underline{T}$  representa a matriz de transformação que relaciona os eixos do referencial da fenda com o referencial global.

A matriz de rigidez para o betão fendilhado expressa no referencial local  $(n, t, z')$  é explicitada por:

$$\underline{D}_{cr} = \begin{bmatrix} E_{nn} & E_{nt} & \cdot & \cdot & \cdot \\ E_{nt} & E_{tt} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & G_{nn} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & G_{nz'} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & G_{tz'} \end{bmatrix} \quad , \quad (4.51)$$

onde os módulos de rigidez  $E$  e  $G$  tomam valores variáveis de acordo com a configuração de fendilhação instalada e os diagramas que caracterizam as relações constitutivas. Após se iniciar a fendilhação,  $E_{nn}$  e  $E_{tt}$  só tomam valores diferentes de zero quando as fendas (em ambas as direcções,  $n$  e  $t$ ) se encontram totalmente fechadas.

As relações constitutivas do betão fendilhado são caracterizadas pelo diagrama de retenção de tensões de tracção (ou diagrama de tensões de tracção residuais) e pela definição do módulo de rigidez transversal reduzido.

- *Diagrama de retenção de tensões de tracção*

A componente da tensão normal ao plano da fenda,  $\sigma_{nn}$ , traduz quantitativamente a aderência entre a armadura e o betão (efeito de *tension-stiffening*), sendo definida pelo diagrama ilustrado na Fig. 4.17.

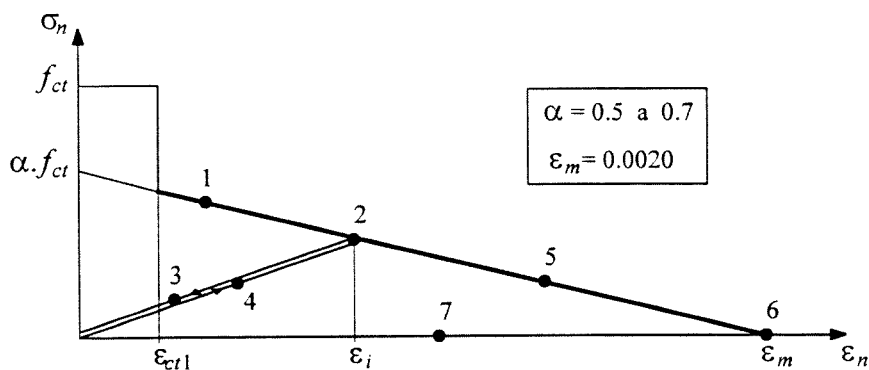


Fig. 4.17 - Diagrama de retenção de tensões de tracção para o betão fendilhado.

De acordo com as relações ilustradas na Fig. 4.17, o valor de  $\sigma_n$  será dado por:

$$\sigma_n = \alpha \cdot f_{ct} \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_m}\right) \quad , \quad (4.52)$$

para as situações correspondentes à abertura da fenda (pontos 1, 2, 5 e 6 da Fig. 4.17), e por:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \cdot \varepsilon_n \quad , \quad (4.53)$$

para as situações relativas ao fecho parcial da fenda (pontos 3 e 7 da Fig. 4.17) e subsequente reabertura (ponto 4).

Os parâmetros  $\alpha$  e  $\varepsilon_m$  (ver Fig. 4.17) são definidos em função das características geométricas e mecânicas dos elementos estruturais. Figueiras (1983) sugere valores entre 0.5 e 0.7 para  $\alpha$  e o valor 0.0020 para  $\varepsilon_m$ . Póvoas (1991) preconiza ainda que esses valores devem atender às limitações dos mecanismos de aderência e à força de tracção máxima suportada pelo aço, sendo por isso necessário impor as seguintes restrições:

$$\varepsilon_m \leq \frac{f_{sy}}{E_s} ; \quad \alpha < \frac{f_{sy} \cdot A_s}{f_{ct} \cdot A_c^+} \quad , \quad (4.54 - 55)$$

em que  $f_{sy}$  e  $E_s$  é a tensão de cedência e o módulo de elasticidade das armaduras, respectivamente,  $A_c^+$  representa a área de betão traccionado envolvente à armadura  $A_s$ .

Na aplicação deste modelo às técnicas dos elementos finitos, deve-se ter em conta que o efeito de *tension-stiffening* nos elementos (ou nas camadas) relativamente afastados das armaduras é praticamente inexistente. Nesses casos é conveniente considerar o parâmetro  $\alpha$  nulo.

- *Módulo de rigidez transversal para betão fendilhado*

A deterioração da capacidade de transferência das forças de corte ao longo das superfícies rugosas das fendas no betão fendilhado é traduzida pelo coeficiente de retenção da rigidez ao corte,  $\beta_n$ . Esta redução é realizada gradualmente através de um decréscimo linear, da forma apresentada na Fig. 4.18 (Cedolin, 1977; Figueiras, 1983) e expressa por:

$$\beta_n = \rho \left( 1 - \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{cv}} \right); \quad \varepsilon_n < \varepsilon_{cv} \quad , \quad (4.56a)$$

$$\beta_n = 0 \quad ; \quad \varepsilon_n \geq \varepsilon_{cv} \quad . \quad (4.56b)$$

onde  $\rho$  e  $\varepsilon_{cv}$  são parâmetros do material que assumem os valores indicados na Fig. 4.18.

O módulo de rigidez transversal para o betão fendilhado,  $G^c$ , é obtido a partir do módulo de elasticidade transversal,  $G$ , a partir da seguinte relação:

$$G^c = \beta_n \cdot G \quad . \quad (4.57)$$

Se ocorrer o fecho total da fenda, admite-se um contacto perfeito entre as superfícies de fractura, sendo reposto o módulo inicial,  $G$ , definido para o betão não fendilhado.

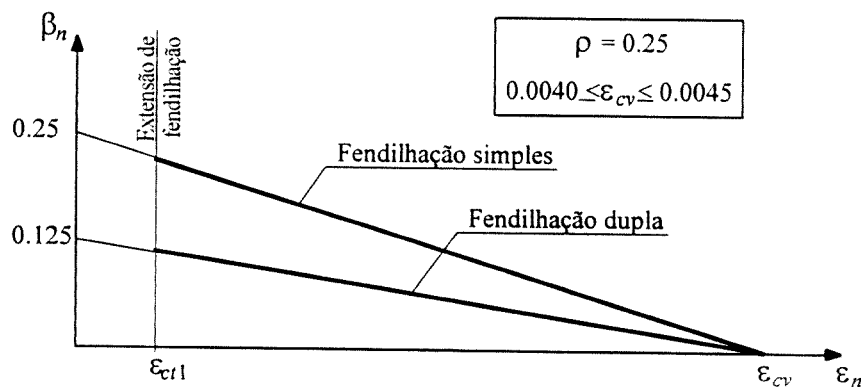


Fig. 4.18 - Coeficiente de retenção da rigidez ao corte no betão fendilhado.

- *Comportamento elasto-plástico do betão fendilhado*

O diagrama ilustrado na Fig. 4.17 traduz o comportamento do betão na direcção normal à fenda. Na direcção paralela à fenda verifica-se, em geral, a manutenção das características de rigidez e de resistência do betão. Admite-se portanto que nesta direcção o betão apresenta um



comportamento não linear traduzido pelo modelo elasto-plástico previamente definido para o betão não fendilhado.

Tendo em conta os resultados de Vecchio e Collins (1982), referidos na secção 4.2.2.2, considera-se uma redução da capacidade resistente do betão à compressão segundo a direcção paralela às fendas. A degradação da resistência à compressão transversal é modelada através da inclusão de um factor de redução,  $\lambda$ , na lei de endurecimento, como se ilustra na Fig. 4.2 (Cervenka, 1985). O factor  $\lambda$  é definido por:

$$\lambda = 1 - k \left( \frac{\varepsilon_n}{0.005} \right) \quad , \quad (4.58)$$

sendo  $k$  um parâmetro que toma valores entre 0.35 e 0.50.

### *Modos de rotura do betão*

Como se referiu anteriormente, o betão possui dois modos de rotura distintos: fractura por esmagamento, característico dos comportamentos do tipo compressão; e, fractura por fendilhação, para comportamentos do tipo tracção. Quando o betão se encontra submetido a um carregamento multiaxial há necessidade de definir qual o comportamento típico dominante.

De acordo com os resultados experimentais em ensaios biaxiais obtidos por Kupfer (1969) verifica-se que para uma relação de tensões principais  $|\sigma_1 / \sigma_2|$  inferior a 1/15 o comportamento do betão é do tipo de compressão, sendo do tipo de tracção para valores dessa relação superiores a 1/15. Este critério de diferenciação dos comportamentos típicos do betão foi utilizado no presente modelo.

A fractura por fendilhação é simulada de acordo com o modelo descrito para o betão fendilhado. Por sua vez, a fractura por esmagamento ocorre quando o efeito de *softening* atinge uma deformação efectiva elevada, a que corresponde um esgotamento total da capacidade resistente do betão.

## **4.2.3 - Comportamento diferido**

### **4.2.3.1 - Considerações iniciais**

O comportamento diferido do betão é condicionado sobretudo pelos fenómenos de retracção (variação de volume provocada pela variação de humidade interna), fluência (aumento das

deformações para um nível de tensão constante) e envelhecimento (variação das propriedades mecânicas com o tempo). Estes fenómenos são, por sua vez, influenciados por vários factores, que podem ser divididos em intrínsecos e extrínsecos (Bazant, 1982; 1988; Neville, 1983):

- factores intrínsecos (associados às características dos componentes do material)
  - percentagem e dimensão máxima dos inertes,
  - módulo de elasticidade,
  - quantidade e tipo de cimento,
  - relação água-cimento,
  - resistência (à compressão);
- factores extrínsecos (independentes das características do material)
  - temperatura e conteúdo de água específica (incluindo as suas histórias),
  - dimensões das peças,
  - as idades do carregamento e níveis de tensão,
  - o grau de hidratação e de carbonatação,
  - outros.

A fluência e a retracção são fenómenos complexos de difícil modelação. Considerar que a deformação por fluência é a que ocorre para além da retracção livre do betão não carregado, é uma aproximação simples da realidade. De facto, estes dois fenómenos não são independentes, não sendo por isso aditivos. No entanto, para a maioria das aplicações práticas essa aproximação é suficiente (Neville, 1983).

Considerando o betão como um material visco-elástico com envelhecimento, a deformação total  $\varepsilon_c$  de um elemento com idade  $t$  solicitado axialmente, pode ser decomposta da seguinte forma:

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_{ci}(t) + \varepsilon_{cc}(t) + \varepsilon_{cs}(t) + \varepsilon_{cT}(t) \quad , \quad (4.59)$$

sendo  $\varepsilon_{ci}(t)$  a deformação instantânea,  $\varepsilon_{cc}(t)$  a deformação de fluência,  $\varepsilon_{cs}(t)$  a deformação de retracção e  $\varepsilon_{cT}(t)$  a deformação térmica. As componentes de deformação  $\varepsilon_{ci}(t)$  e  $\varepsilon_{cc}(t)$  dependem do estado de tensão, sendo por isso também designadas por componentes de deformação mecânica. Por sua vez,  $\varepsilon_{cs}(t)$  e  $\varepsilon_{cT}(t)$  não dependem do estado de tensão, sendo também conhecidas por componentes de deformação não mecânica ou autogénea.

O desenvolvimento da investigação neste domínio, acompanhado pela evolução dos códigos computacionais, tem conduzido a modelos complexos de fluência e de retracção que permite ter em conta o efeito dos diferentes factores que influenciam o comportamento diferido do betão. As recentes formulações determinísticas parecem ter atingido um patamar de desenvolvimento para

além do qual mais tentativas de desenvolvimento podem conduzir a modelos pouco mais adequados se a aleatoriedade destes fenómenos não forem considerados (Tsubaki, 1988). A consideração de modelos probabilísticos para ter em conta directamente as variabilidades associadas a estes problemas parece ser o caminho a seguir para obter avanços mais significativos neste campo.

#### 4.2.3.2 - Envelhecimento do betão

Os resultados experimentais demonstram que as propriedades mecânicas do betão variam significativamente ao longo do tempo. Este efeito, vulgarmente conhecido por envelhecimento ou maturação do betão, resulta do processo de hidratação e de carbonatação no betão. A sua evolução é fortemente influenciada pelo tipo de cimento, temperatura e condições de cura.

No presente trabalho, o efeito do envelhecimento do betão é considerado através das relações propostas no MC90 (CEB-FIP, 1993) para a evolução da resistência do betão à compressão,  $f_c(t)$ , e à tracção,  $f_{ct}(t)$ , e para o módulo de elasticidade  $E_c(t)$ :

$$f_c(t) = \beta_c(t) \cdot f_{cm} \quad , \quad (4.60a)$$

$$f_{ct}(t) = \beta_c(t)^{2/3} \cdot f_{ctm} \quad , \quad (4.60b)$$

$$E_c(t) = \beta_c(t)^{1/2} \cdot E_c \quad , \quad (4.60c)$$

com,

$$\beta_c(t) = e^{s \left( 1 - \sqrt{\frac{28}{t}} \right)} \quad , \quad (4.60d)$$

onde  $s$  é um coeficiente que depende do tipo de cimento, tomando os seguintes valores:

$s = 0.20$ , para cimento de alta resistência com endurecimento rápido;

$s = 0.25$ , para cimento com endurecimento rápido;

$s = 0.38$ , para cimento normal ou com endurecimento lento.

Nas expressões (4.60)  $f_{cm}$ ,  $f_{ctm}$  e  $E_c$  referem-se aos valores médios da resistência à compressão, à tracção e ao módulo de elasticidade longitudinal do betão aos 28 dias, respectivamente.

Em termos de deformacionais o efeito do envelhecimento do betão traduz-se por um enrijecimento progressivo da resposta, conduzindo a uma diminuição da componente elástica de deformação de origem mecânica (Fig. 4.19).

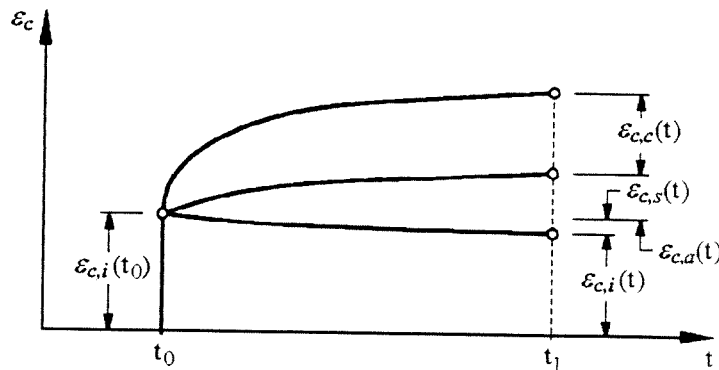


Fig. 4.19 - Representação esquemática da evolução das componentes de deformação com o tempo.

A correcção  $\varepsilon_{c,a}(t)$  resultante da variação ocorrida na componente elástica de deformação em consequência do efeito de envelhecimento (Fig. 4.19) é considerada somente na definição da superfície de esmagamento do betão e nas relações constitutivas definidas para o betão fendilhado (Póvoas, 1991). A consideração do aumento da capacidade resistente do betão é feita directamente nas respectivas relações constitutivas, de acordo com os valores actualizados definidos em (4.60).

#### 4.2.3.3 - Retracção do betão

A retracção ocorre antes e depois da presa do betão. A retracção que se dá antes da presa é devida ao assentamento dos materiais que constituem a massa de betão e à evaporação da água à superfície, sendo designada por retracção plástica. A retracção que se dá depois da presa distingue-se em: retracção autógena (devida à hidratação do cimento, sendo independente das condições de humidade), retracção de secagem (troca de água entre o interior e o exterior) e retracção de carbonatação (carbonatação dos componentes hidratados).

O presente modelo considera apenas a retracção que ocorre após a presa do betão, altura a partir da qual adquire as características necessárias para funcionar como material estrutural. As parcelas de retracção mais significativas (perda de água por evaporação e carbonatação dos componentes hidratados) processam-se essencialmente da superfície para o interior das peças.

Este fenómeno resulta numa distribuição não uniforme da deformação, originando um estado de coacção que pode resultar num empenamento das peças.

Os resultados experimentais têm mostrado que os factores intrínsecos, anteriormente referidos, condicionam a grandeza da retracção mas não influenciam a sua evolução no tempo. A utilização de adjuvantes e aditivos no fabrico de betões não afecta de forma significativa a retracção do betão a longo prazo, sendo-lhes atribuídas diferenças inferiores a 10%. Somente nas idades jovens essas variações podem ser mais importantes (Coutinho, 1994).

Por sua vez, os factores externos, nomeadamente a humidade relativa do meio ambiente e a geometria da peça, podem afectar significativamente a grandeza da retracção e a velocidade com que se processa.

No modelo adoptado, a quantificação da deformação resultante da retracção do betão é realizada através das expressões propostas por Bazant e Panula (1978) (ver também Póvoas, 1991) ou, em alternativa, pelo MC90 (CEB-FIP, 1993). Estas expressões podem ser descritas genericamente pela seguinte relação (Póvoas, 1991):

$$\varepsilon_{cs}(t) = \varepsilon_{csr} \cdot \beta_H \cdot S(t - t_{s0}) \quad , \quad (4.61)$$

em que  $\varepsilon_{cs}(t)$  corresponde à deformação de retracção no betão com idade  $t$ , ocorrida desde a idade correspondente ao início da retracção,  $t_{s0}$ ;  $\varepsilon_{csr}$  é a deformação de retracção de referência;  $\beta_H$  é o parâmetro que representa a influência da humidade relativa do meio ambiente;  $S(t - t_{s0})$  é a função que descreve a evolução da deformação de retracção com o tempo (onde se inclui um parâmetro adequado à consideração da influência da geometria da secção).

Embora exista alguma dependência entre a deformação de retracção e o nível de tensões aplicado (Bazant, 1985b, 1987), adopta-se a hipótese (simplificativa) presente na definição deste fenómeno que o considera independente da carga aplicada. Desta forma, a deformação incremental de retracção,  $\Delta\varepsilon_{cs}(t_n)$ , pode ser obtida directamente das expressões simbolizadas em (4.61).

Na introdução da deformação de retracção no modelo de análise estrutural considera-se que somente a deformação volumétrica do elemento de betão é afectada. Assim, só as componentes axiais do estado de tensão são afectadas pelo seguinte vector (para o caso tridimensional):

$$\underline{\varepsilon}_{cs} = (\varepsilon_{cs} \quad \varepsilon_{cs} \quad \varepsilon_{cs} \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T \quad . \quad (4.62)$$

A variabilidade associada à retracção é geralmente elevada. São várias as causas que conduzem à incerteza associada a este fenómeno, nomeadamente (Tsubaki, 1988):

- factores internos
  1. a natureza estocástica do mecanismo físico;
  2. as propriedades dos materiais;
- factores externos
  3. as condições ambientais, designadamente a temperatura e humidade;
  4. as técnicas de medição;
- factores relativos à formulação e à modelação
  5. a escolha de fórmulas de previsão;
  6. a escolha dos métodos numéricos, desde as simples análises quasi-estáticas até às análises sofisticadas por elementos finitos.

As parcelas de retracção responsáveis pela distribuição não uniforme das deformações ao longo da espessura têm, como já foi referido, um peso fundamental. A conjugação deste efeito com a heterogeneidade torna extremamente difícil definir um modelo estocástico que permita ter em conta o efeito da variabilidade dos diferentes factores que influenciam a retracção. No entanto, têm sido desenvolvidos modelos probabilísticos que permitem avaliar a incerteza deste fenómeno (Bazant, 1983, 1985a, 1985c; Çinlar, 1982; Navratil, 1993; Stewart, 1996; Tsubaki, 1988).

De acordo com uma longa série de valores experimentais relativos à deformação de retracção verificou-se que embora a dispersão dos resultados seja elevada (atingindo valores da ordem dos 30% a 40%), o coeficiente de variação associado à retracção devida aos factores intrínsecos do material é relativamente pequeno (da ordem dos 7%). Assim, constata-se que grande parte da variabilidade da retracção é devida aos efeitos provocados no betão pela aleatoriedade das condições ambientais e pela história da cura (Tsubaki, 1988).

Uma importante conclusão dos vários trabalhos sobre a incerteza associada à avaliação dos efeitos provocados por este fenómeno é que as fórmulas propostas devem indicar também a dispersão esperada quando são utilizadas no cálculo. Ou seja, além da ordem de grandeza esperada, devem também indicar os valores extremos ou os desvios em torno dos valores médios (coeficientes de variação).

Na Fig. 4.20 (Tsubaki, 1993) ilustra-se a comparação entre dados experimentais relativos à deformação de retracção e valores propostos pelos modelos do ACI-209 (ACI, 1982) e do CEB (CEB-FIP, 1993). Observa-se, para as extensões mais elevadas, que os valores previstos por ambos os modelos ficam significativamente aquém dos valores medidos. Sakata (1993) em estudo idêntico (Fig. 4.21) constatou as mesmas diferenças entre os valores teóricos e experimentais. Garcia (1995), recorrendo aos resultados obtidos da observação do comportamento de cinco pontes em Portugal (Valença, S. João, Alcácer, Arade e Guadiana),

verificou que as deformações previstas pelo modelo do Eurocódigo 2 (idêntico ao modelo proposto pelo MC90) ficam aquém dos valores medidos no interior das secções em caixão mas aproximam-se dos valores medidos em ambiente exterior (Fig. 4.22).

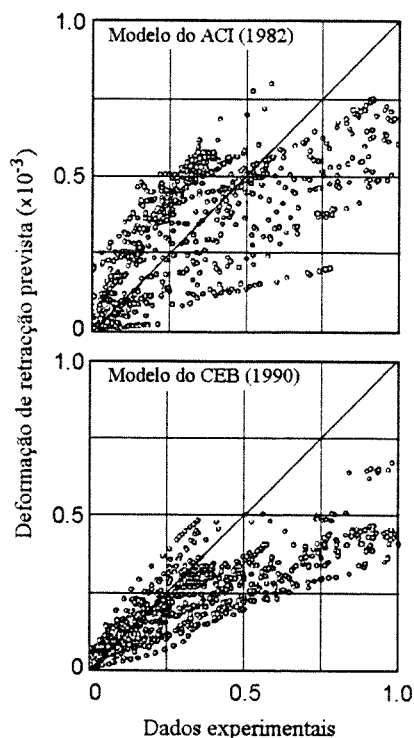


Fig. 4.20 - Comparação entre valores experimentais e numéricos (Tsubaki, 1993).

Considerando diferentes estudos comparativos (CEB, 1990b; Sakata, 1993; Tsubaki, 1988), verifica-se que a aproximação proposta pelo MC90 (CEB-FIP, 1993) fornece resultados mais adequados que o modelo anterior proposto no MC78 (CEB-FIP, 1978), como se pode constatar no Quadro 4.11 e nas Figs. 4.20 a 4.22. Verifica-se ainda que o modelo de Bazant-Panula (Bazant, 1978) apresenta os melhores resultados, atingindo coeficientes de variação da ordem dos 25% (Bazant, 1991).

De acordo com a publicação do CEB (1990b) os valores apresentados dizem respeito a coeficientes de variação médios. Considera-se ainda que os desvios apresentam uma distribuição normal, o que não condiz com os resultados ilustrados nas Figs. 4.20 e 4.21. Deve ser ainda atendido o facto de que os valores propostos são extremamente altos devido em grande parte à maior dispersão relativa observada nas idades jovens (nos primeiros meses). Se forem considerados somente os valores a longo prazo, os coeficientes de variação descem para valores de 34% para o MC78 e de 19% para o MC90 (CEB, 1990b).

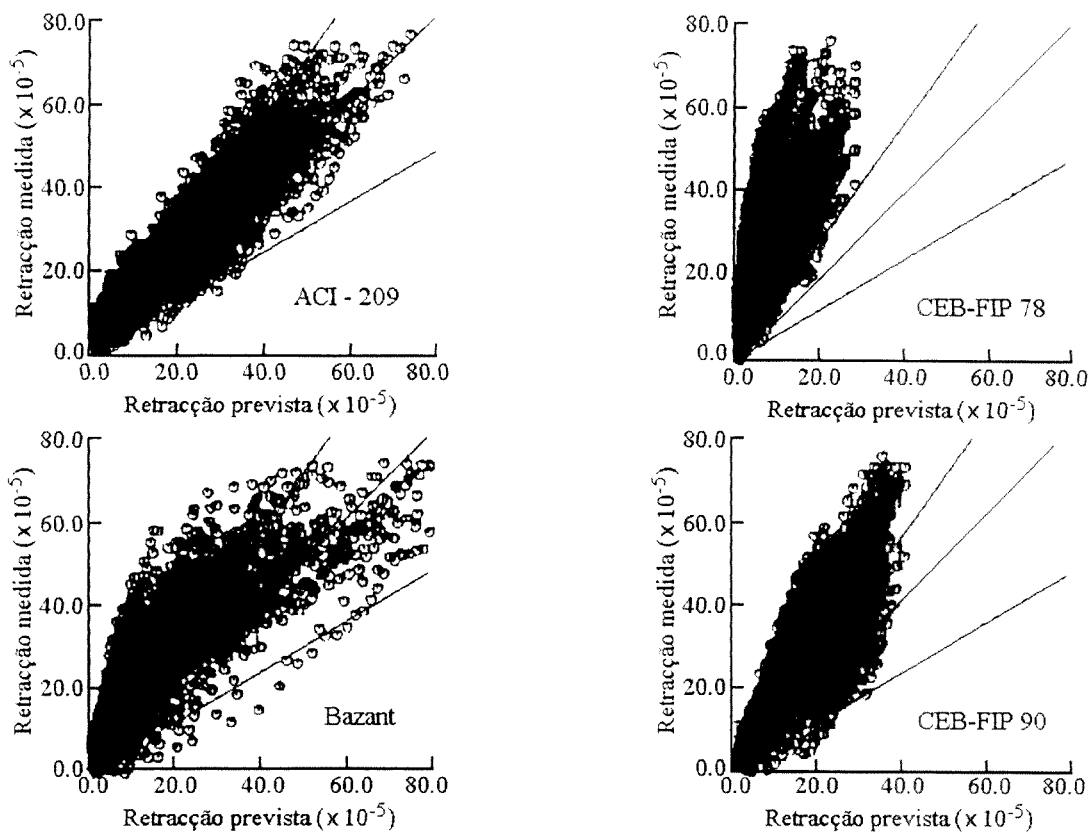
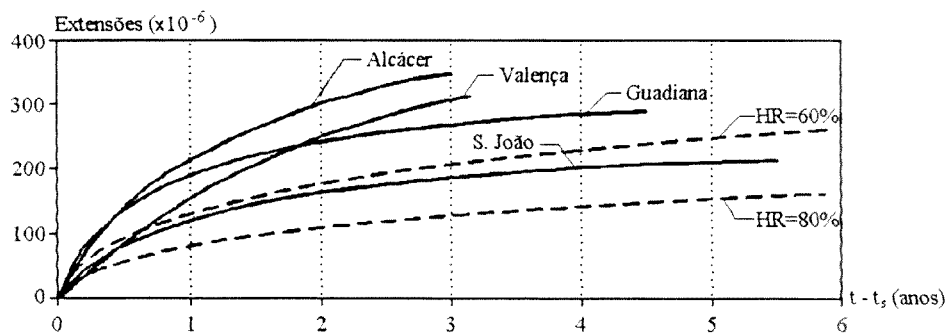
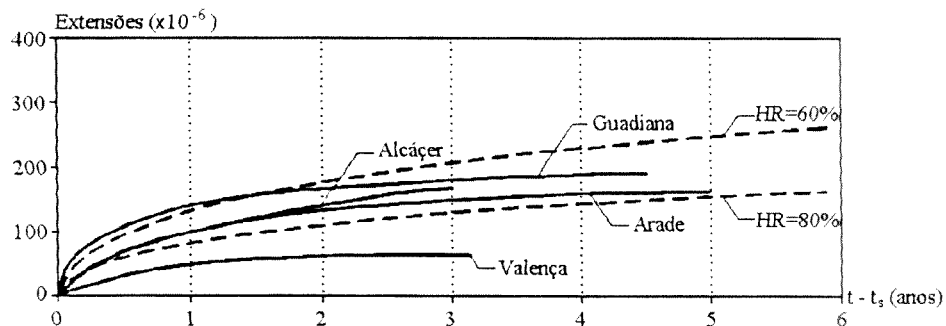


Fig. 4.21 - Comparação entre valores experimentais e numéricos (Sakata, 1993).



a) Prismas colocados no interior das secções em caixão



b) Prismas colocados no exterior

Fig. 4.22 - Comparação entre valores experimentais e numéricos (Garcia, 1995).



Quadro 4.11 - Valores da incerteza na avaliação da retração (CEB, 1990b).

Modelo de previsão	Coefficiente de variação
MC78	44.6%
MC90	32.9% (*)
(*) valor proposto pelo MC90 (CEB-FIP, 1993): 35%	

#### 4.2.3.4 - Fluência do betão

As deformações devidas à fluência do betão podem ser decompostas em duas componentes (Fig. 4.23): a fluência básica e a fluência de secagem. A extensão de fluência básica designa a componente que ocorre no betão carregado em ambiente selado (sem trocas de humidade com o exterior); a extensão de fluência de secagem representa o acréscimo de fluência resultante das trocas de humidade com o exterior. Normalmente, considera-se que a primeira componente está associada com as características do material, enquanto que a segunda depende essencialmente dos factores externos como a temperatura e a humidade relativa do meio ambiente (Bazant, 1987, 1988; Roelfstra, 1987; Wittmann, 1987). Nos modelos correntes não se faz, geralmente, a distinção entre estas duas grandezas, sendo considerado somente o seu valor total. Normalmente, a deformação de fluência de secagem é considerada através de um coeficiente correctivo definido em função da humidade relativa do ambiente exterior (Young, 1988).

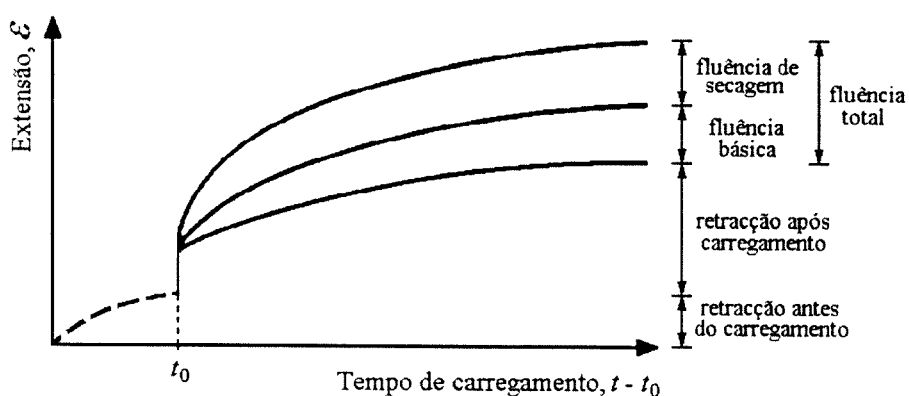


Fig. 4.23 - Evolução das componentes de deformação diferida.

Entre os resultados experimentais obtidos do estudo da importância da fluência no comportamento reológico de estruturas de betão destacam-se as principais características:

- Valores crescentes do módulo de elasticidade, da percentagem e da dimensão máxima dos inertes, assim como da resistência à compressão, conduzem a uma diminuição da deformação de fluência.
- Identicamente, os carregamentos em idades mais avançadas resultam em deformações de fluência menores (Fig. 4.24), ocorrendo a situação contrária com o aumento da temperatura.
- As dimensões do elemento estrutural e a humidade ambiente são os factores externos mais importantes, verificando-se, em ambos os casos, uma diminuição da fluência para valores crescentes destes parâmetros. Saliente-se o agravamento significativo dos efeitos da fluência quando os elementos de betão estão sujeitos a processos de secagem e a ciclos sucessivos com diferentes humidades relativas.
- A evolução da extensão de fluência apresenta três fases distintas (Fig. 4.25): fluência primária, fluência secundária e fluência terciária. Na fluência primária a velocidade de deformação é decrescente no tempo, na fluência secundária essa velocidade é praticamente constante e na fluência terciária (que só se manifesta para níveis de tensão superiores a cerca de 40% da resistência à compressão,  $0.4f_c$ ) a velocidade de deformação é crescente no tempo, podendo mesmo ocorrer a denominada rotura diferida para valores de tensão entre  $0.7f_c$  e  $0.9f_c$ .
- Se verificar o anulamento do carregamento num instante  $t_1 > t_0$ , a deformação diminui mas não se anula (Fig. 4.26). A deformação total pode ser decomposta nas seguintes componentes: deformação instantânea (recuperável instantaneamente), deformação elástica diferida (recuperável com o tempo) e deformação plástica diferida (não recuperável).
- Nas estruturas correntes de betão, o nível de tensões com carácter de permanência não ultrapassa, geralmente, 40% da resistência do betão. Não se verifica, por isso, a ocorrência de fluência terciária e normalmente não se distingue a fluência primária da secundária. Para estes níveis de tensão os efeitos da fluência são traduzidos por modelos lineares, sendo aplicável o princípio da sobreposição dos efeitos. No entanto, este princípio deixa de ser estritamente válido nos casos em que há um carregamento num instante  $t_1$  muito superior ao instante,  $t_0$ , referente ao carregamento inicial, devido ao fenómeno designado por adaptação (Fig. 4.27, Bazant, 1988).
- As deformações de fluência em compressão e em tracção não apresentam diferenças significativas, sendo por isso tratadas de forma idêntica.

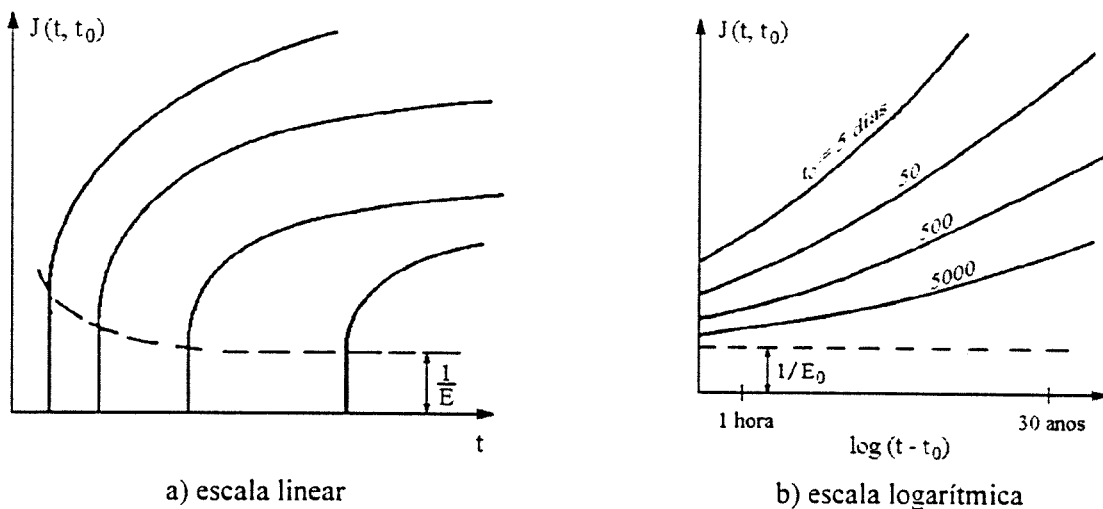


Fig. 4.24 - Curvas de fluência para várias idades de carga,  $t_0$ .

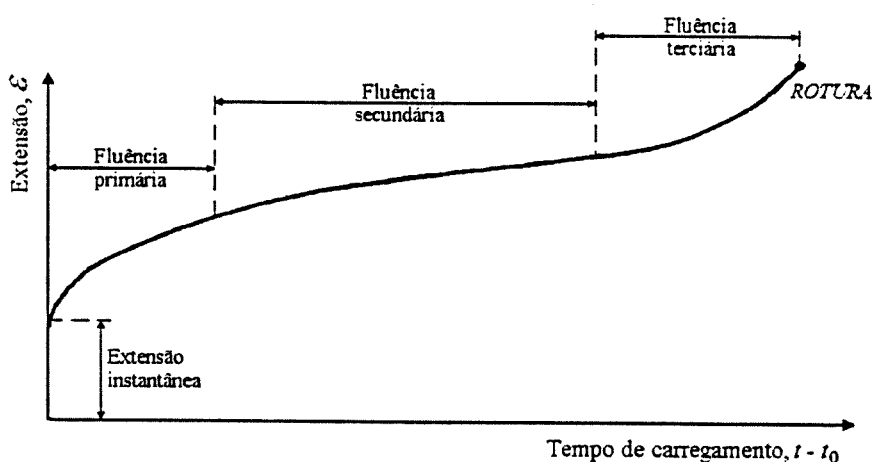


Fig. 4.25 - Representação esquemática da evolução da fluência do betão.

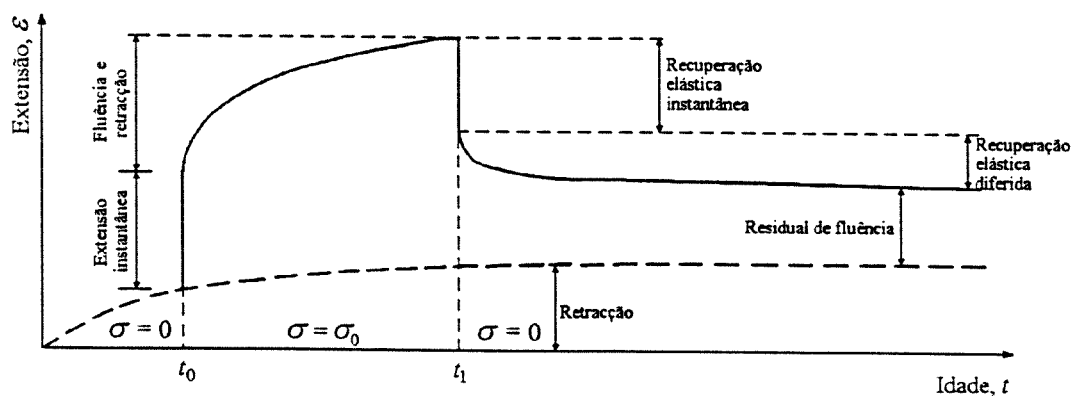


Fig. 4.26 - Evolução das deformações ao longo do tempo com carregamento e descarregamento em diferentes instantes

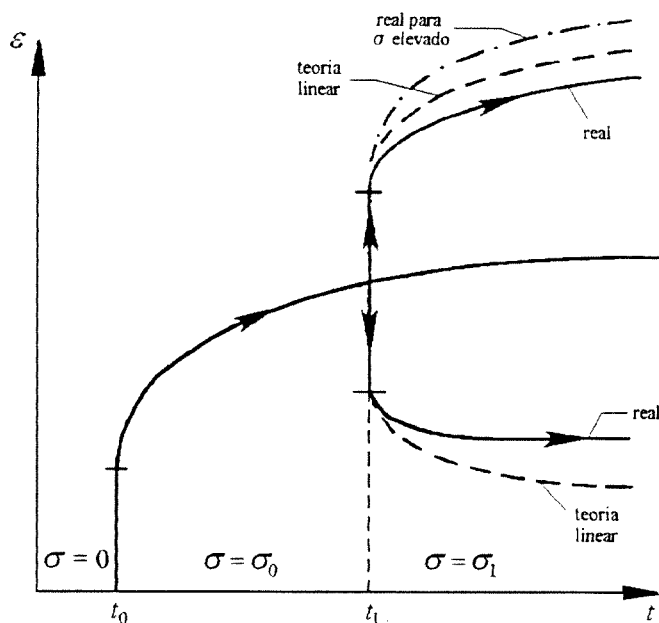


Fig. 4.27 - Desvios entre a teoria linear e os valores experimentais para tensões de serviço.

### Leis de fluência teóricas

Para níveis de tensão não superiores a  $0.4f_c$ , usuais em estruturas correntes de betão, é válida a aplicação do princípio da sobreposição dos efeitos. A deformação mecânica  $\varepsilon_{cm}(t, t_0)$ , no instante  $t$ , associada a uma tensão constante  $\sigma(t_0)$  actuando desde o instante  $t_0$ , é definida pela soma da deformação instantânea no instante  $t_0$ ,  $\varepsilon_{ci}(t_0)$ , com a deformação de fluência no instante  $t$ ,  $\varepsilon_{cc}(t, t_0)$ , ou seja:

$$\varepsilon_{cm}(t, t_0) = \varepsilon_{ci}(t_0) + \varepsilon_{cc}(t, t_0) = \sigma(t_0) \cdot \left[ \frac{1}{E_c(t_0)} + C(t, t_0) \right] \quad , \quad (4.63)$$

onde  $C(t, t_0)$  designa a fluência específica do material.

A expressão (4.63) pode ser ainda descrita de uma forma simplificada por:

$$\varepsilon_{cm}(t, t_0) = \sigma(t_0) \cdot J(t, t_0) \quad , \quad (4.64)$$

representando  $J(t, t_0)$  a deformação no betão de idade  $t$  produzida por uma tensão unitária constante aplicada no instante  $t_0$ . Assim, a deformação de fluência pode também ser obtida por:

$$\varepsilon_{cc}(t, t_0) = \sigma(t_0) \cdot C(t, t_0) = \sigma(t_0) \left[ J(t, t_0) - \frac{1}{E_c(t_0)} \right] \quad . \quad (4.65)$$

Considerando, em alternativa, a noção de coeficiente de fluência,

$$\phi(t, t_0) = E_c(t_0) \cdot C(t, t_0) \quad , \quad (4.66)$$

a deformação de fluência pode escrever-se na forma:

$$\varepsilon_{cc}(t, t_0) = \sigma(t_0) \cdot \frac{\phi(t, t_0)}{E_c(t_0)} \quad . \quad (4.67)$$

Os métodos práticos de avaliação da deformação de fluência adoptam, correntemente, as expressões (4.65) ou (4.67). No presente modelo utiliza-se, em alternativa, a lei de fluência por Bazant e Panula (1978) ou a lei definida no MC90 (CEB-FIP, 1993).

A lei de Bazant-Panula para a avaliação da fluência básica relativa ao instante  $t$  vem definida pela seguinte função de fluência, para uma temperatura de referência de 23°C:

$$J(t, t_0) = \frac{1}{E_0} + \frac{\phi_1}{E_0} (t_0^{-m} + \alpha)(t - t_0)^n \quad , \quad (4.68)$$

onde  $E_0$ ,  $\phi_1$ ,  $\alpha$ ,  $m$  e  $n$  são parâmetros que fazem intervir os diversos factores que influenciam a fluência do betão. Assim,  $E_0$  representa um módulo de elasticidade assintótico determinado para cargas de muito curta duração, sendo obtido através do módulo de elasticidade do betão aos 28 dias ou, em caso de não ser conhecido, a partir da massa volumétrica do betão e da resistência à compressão aos 28 dias. Os parâmetros  $\phi_1$ ,  $\alpha$ ,  $m$  e  $n$  são quantificados em função do tipo de cimento e das dosagens (em peso) dos componentes do betão, nomeadamente, de inertes, areia, cimento, água e brita ou godo. A formulação expressa em (4.68) pode ser alargada para uma temperatura diferente da temperatura de referência (Bazant, 1978), como para betões de alta resistência (Bazant, 1984).

A lei de fluência proposta pelo MC90 (CEB-FIP, 1993) contempla a influência da geometria do elemento estrutural e da humidade do meio ambiente. Por isso, ao contrário do modelo de Bazant-Panula, não define relações constitutivas mas somente propriedades médias das secções, visando a determinação de esforços e deslocamentos em estruturas. A deformação de fluência para a idade  $t$  associada a uma tensão constante aplicada no betão de idade  $t_0$ , para uma temperatura média de 20°C, vem expressa por:

$$\varepsilon_{cc}(t, t_0) = \frac{\sigma(t_0)}{E_c} \cdot \phi(t, t_0) \quad , \quad (4.69)$$

em que  $E_c$  é o módulo de elasticidade do betão aos 28 dias de idade, e:

$$\phi(t, t_0) = \phi_0 \cdot \beta_c(t - t_0) \quad , \quad (4.70)$$

o respectivo coeficiente de fluência. O coeficiente  $\beta_c(t - t_0)$  é definido em função da geometria do elemento e da humidade relativa do meio ambiente. Por sua vez, o coeficiente  $\phi_0$  além dos dois factores referidos faz também intervir a resistência média do betão à compressão. O MC90 inclui ainda a possibilidade de alargar o âmbito do modelo proposto, através da consideração de diferentes temperaturas, tipos de cimento e, ainda, da não linearidade associada a níveis de tensão entre  $0.4f_{cm}(t_0)$  e  $0.6f_{cm}(t_0)$ .

A generalização das formulações descritas para o caso multiaxial baseia-se na hipótese de um comportamento linear e isotrópico para o betão e na aplicação do princípio da sobreposição dos efeitos às relações (4.63) e (4.65) apresentadas para o caso uniaxial, obtendo-se as seguintes expressões generalizadas (ASCE, 1982; Bazant, 1988; CEB, 1984):

$$\underline{\varepsilon}_{cm}(t) = \left[ \frac{1}{E_c(t_0)} + C(t, t_0) \right] \cdot \underline{C} \cdot \underline{\sigma}(t_0) \quad , \quad (4.71)$$

e

$$\underline{\varepsilon}_{cc}(t, t_0) = C(t, t_0) \cdot \underline{C} \cdot \underline{\sigma}(t_0) \quad , \quad (4.72)$$

onde, para o caso tridimensional:

$$\underline{\sigma} = \left( \sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz} \right)^T \quad , \quad (4.73a)$$

$$\underline{\varepsilon} = \left( \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz} \right)^T \quad , \quad (4.73b)$$

se define a seguinte matriz de constantes:

$$\underline{C} = E_c \cdot (\underline{D}_e)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & \cdot & \cdot & \cdot \\ & 1 & -\nu & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 2(1+\nu) & \cdot & \cdot \\ \text{(simétrica)} & & & & 2(1+\nu) & \cdot \\ & & & & & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad , \quad (4.74)$$

sendo  $\underline{D}_e$  a matriz de elasticidade correspondente.

### Decomposição da história de carga - Série de Dirichlet

A avaliação das deformações de fluência para histórias de tensão variável no tempo é feita através da aplicação do princípio da sobreposição dos efeitos, decompondo a referida história em incrementos de tensão,  $d\sigma(t')$ , aplicados nos instantes  $t'$  e somando as deformações correspondentes de acordo com as relações constitutivas (4.64):

$$\varepsilon_{cm}(t, t_0) = \int_{t_0}^t d\varepsilon_{cm}(t, t_0) = \int_{t_0}^t J(t, t') \cdot d\sigma(t') \quad . \quad (4.75)$$

A relação constitutiva (4.75), relativa a materiais viscoelásticos com envelhecimento, é determinada numericamente dividindo o período de tempo em análise em sub-intervalos de tempo de tensão constante (Fig. 4.28) e integrando passo a passo a história de tensão resultante do tipo de aproximação adoptado. Assim, o integral presente na equação (4.75) é substituído por um somatório. As fórmulas de integração numérica mais frequentes são: a regra do rectângulo (aproximação de primeira ordem) e a regra do trapézio (aproximação de segunda ordem). A aplicação destes procedimentos numéricos requer o armazenamento de toda a história de tensões, para além de exigir a realização de somatórios sucessivamente crescentes, com o avanço da análise no domínio do tempo. Estas características penalizam fortemente a utilização destes métodos em modelos com elementos finitos.

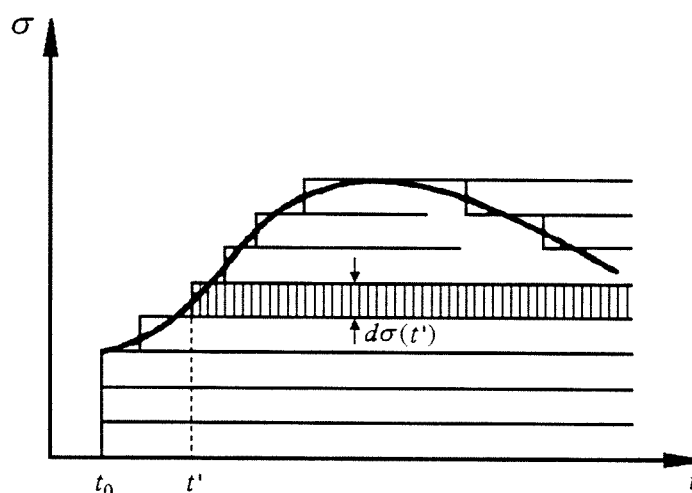


Fig. 4.28 - Decomposição da história de tensão com incrementos de tensão.

De forma a ultrapassar as dificuldades associadas aos métodos referidos, utiliza-se uma formulação diferencial. Definindo a função de fluência  $J(t, t_0)$  sob a forma exponencial:

$$J(t, t_0) = A(t_0) \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \right) \quad , \quad (4.76)$$

em que  $A(t_0)$  é um parâmetro que descreve o envelhecimento do material e que depende da idade do betão no instante de aplicação da carga;  $\tau$  é uma constante denominada por tempo de retardação.

Considerando a primeira e a segunda derivada da equação (4.75) é possível eliminar o integral e obter a seguinte relação:

$$\ddot{\epsilon}_{cm} + \frac{1}{\tau} \cdot \dot{\epsilon}_{cm} = \frac{A(t)}{\tau} \cdot \dot{\sigma} \quad , \quad (4.77)$$

que é equivalente à equação diferencial que rege o comportamento reológico do modelo de Kelvin representado esquematicamente na Fig. 4.29 (Bazant, 1973, 1988).

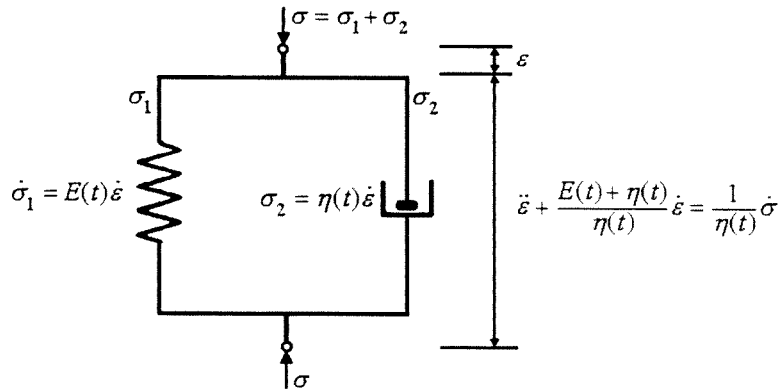


Fig. 4.29 - Modelo reológico: modelo de Kelvin.

Como geralmente uma função de fluência exponencial não se ajusta convenientemente aos dados experimentais, a função de fluência é aproximada por uma série de Dirichlet de  $N$  termos (Bazant, 1973, 1988):

$$J(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\bar{E}_i(t_0)} \left( 1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau_i}} \right) \quad , \quad (4.78)$$

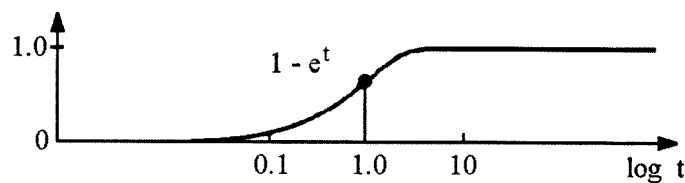


onde  $\bar{E}_i(t_0)$  são coeficientes dependentes da idade do betão no instante de aplicação da carga, com as dimensões de um módulo de elasticidade;  $\tau_i$  são constantes designadas por tempos de retardação (Fig. 4.30).

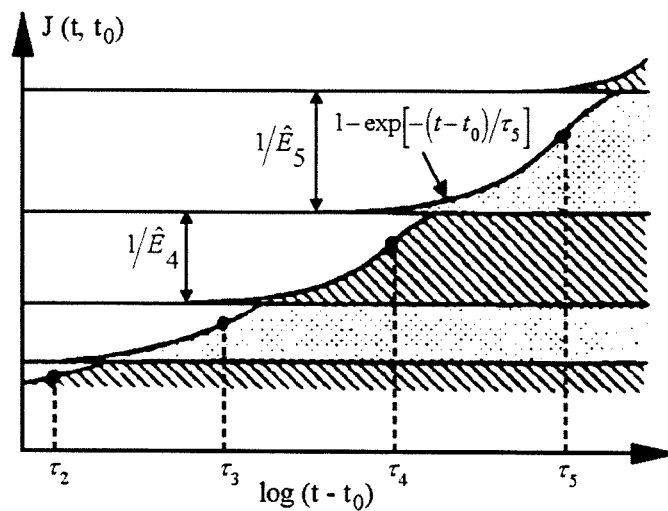
Tendo presente que a função de fluência expressa por (4.78) corresponde ao modelo reológico descrito pela cadeia de Kelvin (série de  $N$  unidades de Kelvin), os coeficientes  $\bar{E}_i(t_0)$  e  $\tau_i$  da série de  $N$  termos são determinados pelo seguinte sistema de equações:

$$\ddot{\varepsilon}_i + \frac{1}{\tau_i} \dot{\varepsilon}_i = \frac{1}{\tau_i \bar{E}_i(t)} \cdot \dot{\sigma} \quad , \quad i = 1, \dots, N \quad ; \quad (4.79)$$

sendo  $\varepsilon_i$  as deformações de cada unidade da cadeia.



a) curva de um termo da série



b) decomposição de uma função de fluência

Fig. 4.30 - Aproximação em série de Dirichlet de uma função de fluência.

### Deformação incremental de fluência

A deformação incremental de fluência é definida pela diferença dos valores obtidos entre dois instantes consecutivos:

$$\Delta \varepsilon_{cc}(t_n) = \varepsilon_{cc}(t_n) - \varepsilon_{cc}(t_{n-1}) \quad , \quad (4.80)$$

sendo a deformação de fluência correspondente ao instante  $t_n$ , determinada, de acordo com as relações (4.63-4.65) e (4.75), pela equação:

$$\varepsilon_{cc}(t_n) = \int_{t_0}^{t_n} C(t, t') \cdot d\sigma(t') \quad . \quad (4.81)$$

A adopção de algoritmos exponenciais, baseados na aproximação da fluência específica através de um somatório de funções exponenciais (cadeia de Kelvin):

$$\varepsilon_{cc}(t, t_0) = C(t, t_0) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\bar{E}_i(t_0)} \left( 1 - e^{-(t-t_0)/\tau_i} \right) \quad , \quad (4.82)$$

permite a integração da equação (4.81), para períodos de longa duração ( $t \gg t_0$ ), de uma forma económica através da utilização de intervalos de tempo relativamente longos. A integração é obtida de forma exacta se forem tomadas como válidas as seguintes duas hipóteses:

- i) as propriedades mecânicas dos materiais mantêm-se constantes durante cada intervalo de tempo, admitindo-se, no entanto, uma variação discreta entre intervalos;
- ii) a tensão aplicada é considerada constante em cada incremento de tempo, aceitando-se, contudo, a possibilidade de ocorrerem incrementos discretos de tensão.

A primeira hipótese não é demasiadamente restritiva porque é pouco significativa a variação registada nas propriedades do material, durante os diferentes intervalos de tempo.

A possibilidade de incrementos discretos de tensão referida na segunda hipótese é aceitável na ausência de fendilhação, atendendo a que em geral a variação da tensão é pouco acentuada durante os intervalos de tempo. Se, no entanto, existirem fendas a referida variação virá agravada, devendo utilizar-se incrementos de tempo inferiores.

De acordo com as histórias de tensão ilustradas na Fig. 4.31, no presente trabalho encontram-se disponíveis quatro formulações de algoritmos exponenciais: aproximação rectangular, aproximação trapezoidal, aproximação trapezoidal no ponto médio e aproximação linear. As expressões que permitem determinar a deformação incremental de fluência, de acordo com cada uma das quatro aproximações referidas, são obtidas através da consideração da série de Dirichlet expressa em (4.82) nas equações (4.80) e (4.81) (Póvoas, 1991).

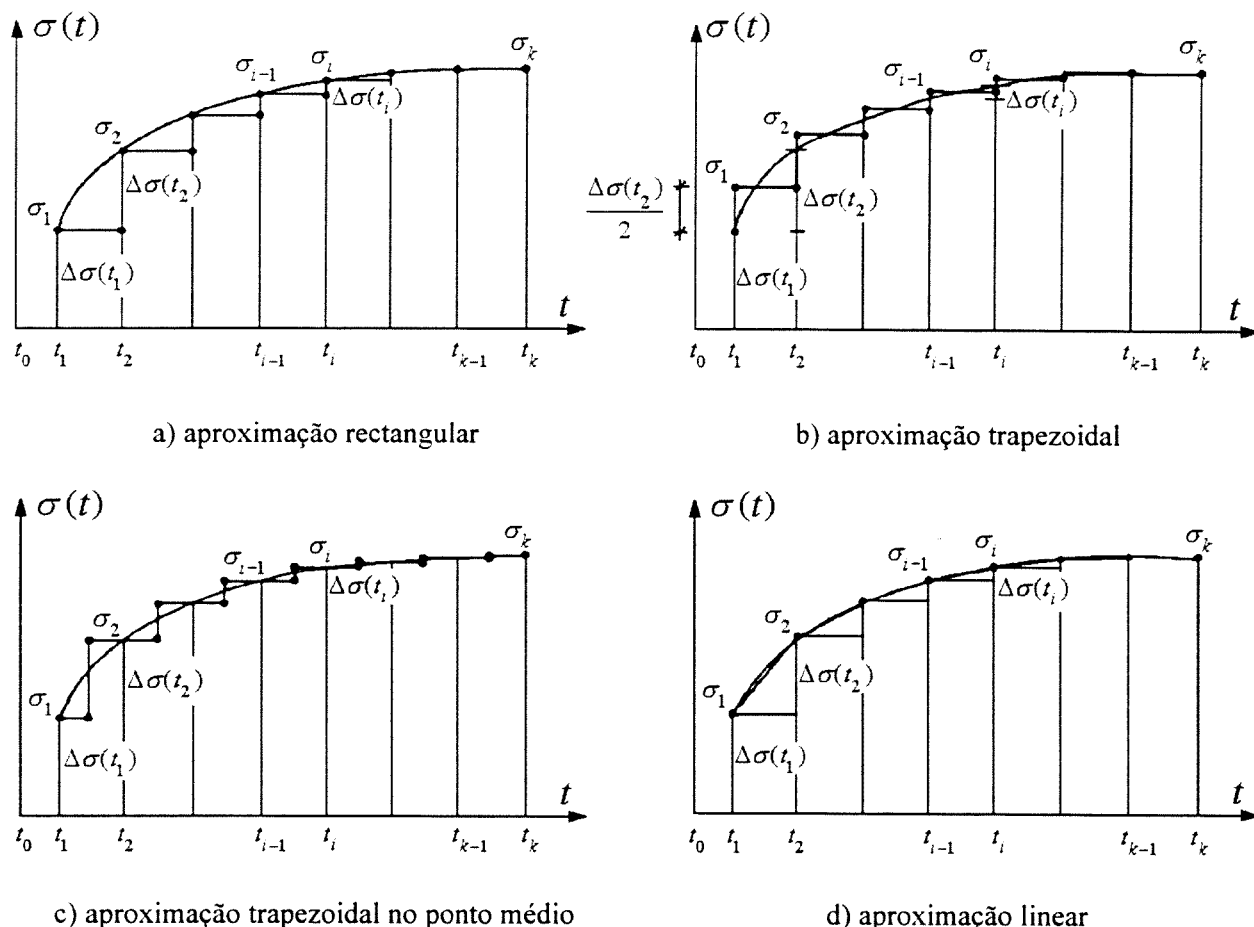


Fig. 4.31 - Algoritmo de solução.

*Variabilidade da fluência do betão e incerteza na previsão*

Os diversos factores responsáveis pela variabilidade da fluência do betão são os mesmos já enunciados para a retracção (os mecanismos associados a estes dois fenómenos têm natureza idêntica), acrescentados da influência da variabilidade do carregamento exterior. De uma forma geral, as deformações de fluência apresentam dispersões ligeiramente inferiores que as deformações devidas à retracção. No entanto, é possível observar variações da ordem dos 20% a 30% em elementos de betão sujeitos às mesmas hipóteses de carga e a condições ambientais idênticas (Çinlar, 1982).

Tal como se referiu para a retracção, os factores externos, nomeadamente as condições ambientais, têm um peso significativo na variabilidade do fenómeno de fluência (Tsubaki, 1988, 1993). Nos últimos anos têm sido desenvolvidos alguns modelos constitutivos probabilísticos de fluência (Tsubaki, 1988), no entanto, a incapacidade de conhecer rigorosamente os mecanismos internos da fluência e a importância vital dos factores externos, tornam a aplicação desses

modelos bastante limitada. Atendendo a este facto, tem sido dado maior ênfase ao tratamento estatístico e à definição da incerteza associada aos modelos de previsão deste fenómeno.

Nas Figs. 4.32 e 4.33 apresentam-se estudos comparativos entre valores medidos experimentalmente e valores propostos por diferentes modelos de fluência. Verifica-se que os modelos teóricos fornecem valores médios próximos dos dados experimentais para a gama mais baixa de valores ficando, no entanto, aquém para a gama superior. Refira-se que, tal como se tinha constatado para a retracção, o modelo de Bazant-Panula fornece melhores aproximações porque se aplica a uma maior variedade de casos.

Garcia (1995) no estudo realizado com base nos resultados obtidos da observação de cinco pontes em Portugal (referido anteriormente) constatou que na idade jovem os coeficientes de fluência medidos experimentalmente se aproximam da curva de fluência definida pelo Eurocódigo 2 (idêntico ao modelo proposto pelo MC90) para humidade relativa do meio ambiente de 60%, e ao fim de cerca de 2 anos esses valores se aproximam da curva relativa à humidade relativa de 80% (Fig. 4.34).

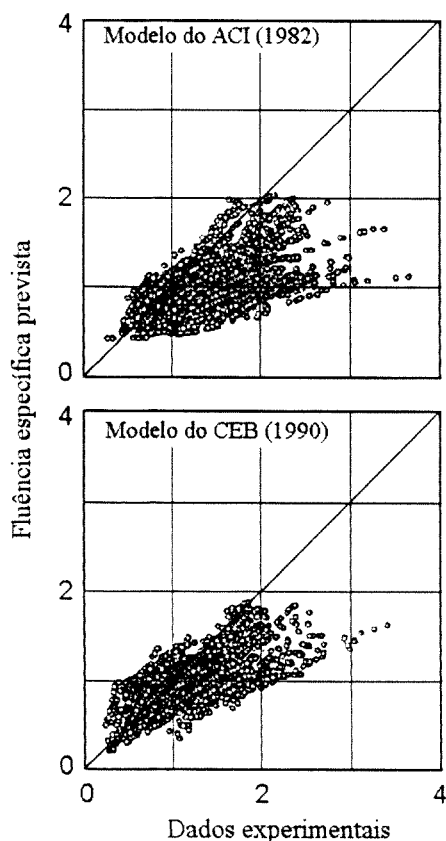


Fig. 4.32 - Comparação entre valores experimentais e analíticos (Tsubaki, 1993).

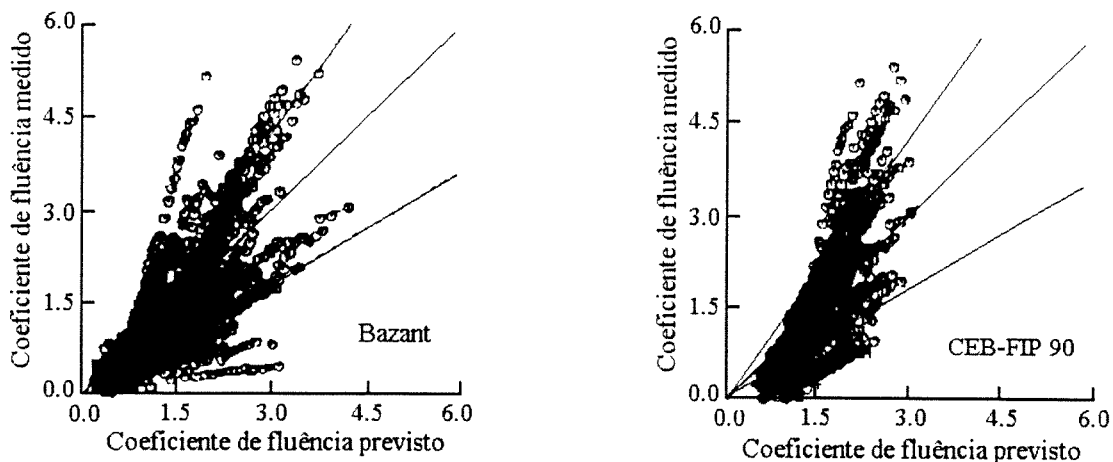


Fig. 4.33 - Comparação entre valores experimentais e analíticos (Sakata, 1993).

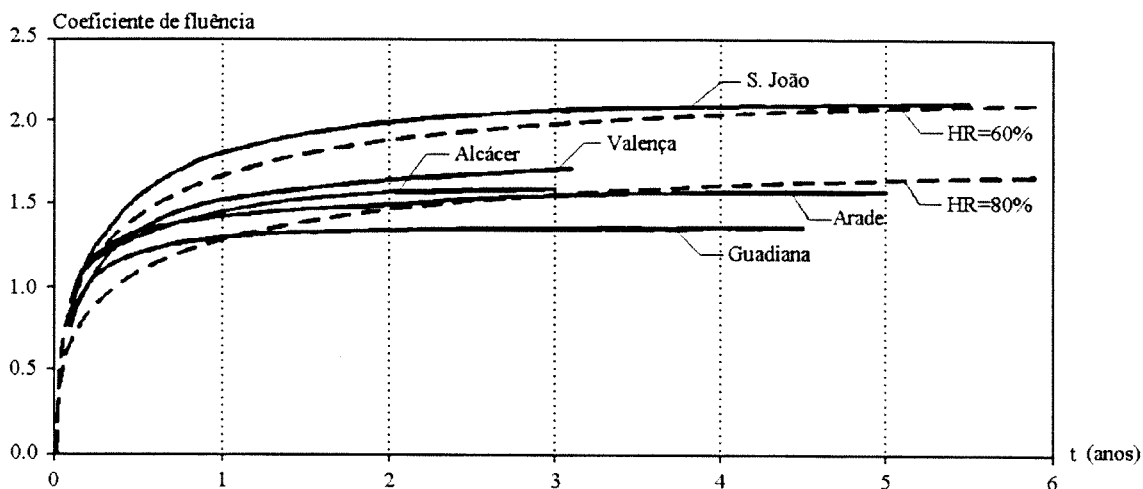


Fig. 4.34 - Comparação entre valores experimentais e analíticos (Garcia, 1995).

Madsen (1983) recorrendo a dados experimentais definiu a incerteza associada ao modelo proposto por Bazant-Panula (1978). Expressando a função de fluência em termos da componente básica,  $J_B(t, t_0)$ , e de secagem,  $J_D(t, t_0)$ , da seguinte forma:

$$J(t, t_0) = \psi_1 \cdot J_B(t, t_0) + \psi_2 \cdot J_D(t, t_0) \quad , \quad (4.83)$$

onde  $\psi_1$  e  $\psi_2$  são coeficientes que quantificam a incerteza associada a cada componente. Madsen obteve coeficientes de variação de 0.23 e 0.13 para os coeficientes  $\psi_1$  e  $\psi_2$ , respectivamente.

O MC90 (CEB-FIP, 1993) propõe um coeficiente de variação de 20% associado ao modelo de cálculo do coeficiente de fluência,  $\phi(t, t_0)$ . Indica ainda uma distribuição normal para o erro de previsão. Ainda de acordo com outra publicação do CEB (1990b), apresenta-se no Quadro 4.12 os valores da incerteza associada aos modelos definidos no MC78 e no MC90.

Quadro 4.12 - Valores da incerteza na avaliação da fluência (CEB, 1990b).

Modelo de previsão	Coeficiente de variação		
	fluência básica (HR ≥ 99%)	fluência de secagem (HR < 99%)	fluência média (HR ≤ 100%)
MC78	24.4%	22.7%	23.6%
MC90	19.4%	21.4%	20.4%

### 4.3 - RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DAS ARMADURAS

#### 4.3.1 - Generalidades

A consideração da contribuição da armadura para a análise do comportamento não linear da estrutura exige, para além da contribuição dos mecanismos de interacção com o betão e de transferência do pré-esforço, a definição de relações constitutivas que traduzam a sua resposta unidimensional.

De uma forma genérica, o comportamento mecânico das armaduras distingue-se pela sua capacidade resistente à tracção, pela tensão de cedência (ou de limite de proporcionalidade) e pela sua capacidade deformacional. No âmbito das estruturas de betão há necessidade de distinguir as armaduras ordinárias (ou passivas) das armaduras de pré-esforço (ou activas). Relativamente às armaduras passivas refira-se que recentemente a Comissão Europeia de Normalização publicou uma pré-norma europeia (CEN, 1994) onde só é normalizada uma classe de resistência - B500 (valor característico da tensão de cedência 500 MPa). Esta publicação acompanha a tendência actual da maioria dos países da Europa Comunitária que tendem a utilizar somente este tipo de aço para as armaduras passivas abandonando o uso de aços de classe inferior (Pipa, 1993).

Nas secções seguintes apresenta-se o modelo elasto-plástico de comportamento das armaduras sujeitas a acções quasi-estáticas e de curta duração, e o modelo de relaxação das armaduras de pré-esforço sujeitas a estados de deformação prolongados.

### 4.3.2 - Comportamento instantâneo

O comportamento elasto-plástico das armaduras é traduzido através de curvas tensões-extensões axiais. Na Fig. 4.35 ilustra-se um conjunto de diagramas obtidos em ensaios de tracção uniaxial de várias classes de aços. Como se pode observar, as curvas relativas às armaduras passivas apresentam um patamar de cedência após ter sido atingida a tensão de cedência. A rotura ocorre depois de se verificar um endurecimento da resposta. Note-se que os decréscimos verificados após se atingir a tensão máxima em regime plástico são fictícios pois as tensões são calculadas considerando a secção inicial e não a verdadeira secção que vem reduzida devida ao fenómeno de estrição.

Registe-se ainda que o patamar de cedência e a capacidade de deformação plástica diminui para aços de maior resistência. Verifica-se, inclusive, que os aços de alta resistência, correntemente utilizados nas armaduras de pré-esforço, são caracterizados globalmente pela ausência de patamar de cedência e por uma redução acentuada da ductilidade. Para estas armaduras não é nítido o início da plastificação sendo, por isso, o limite de elasticidade convencionalmente definido como a tensão à qual corresponde uma deformação residual de 0.2% ou 0.1%.

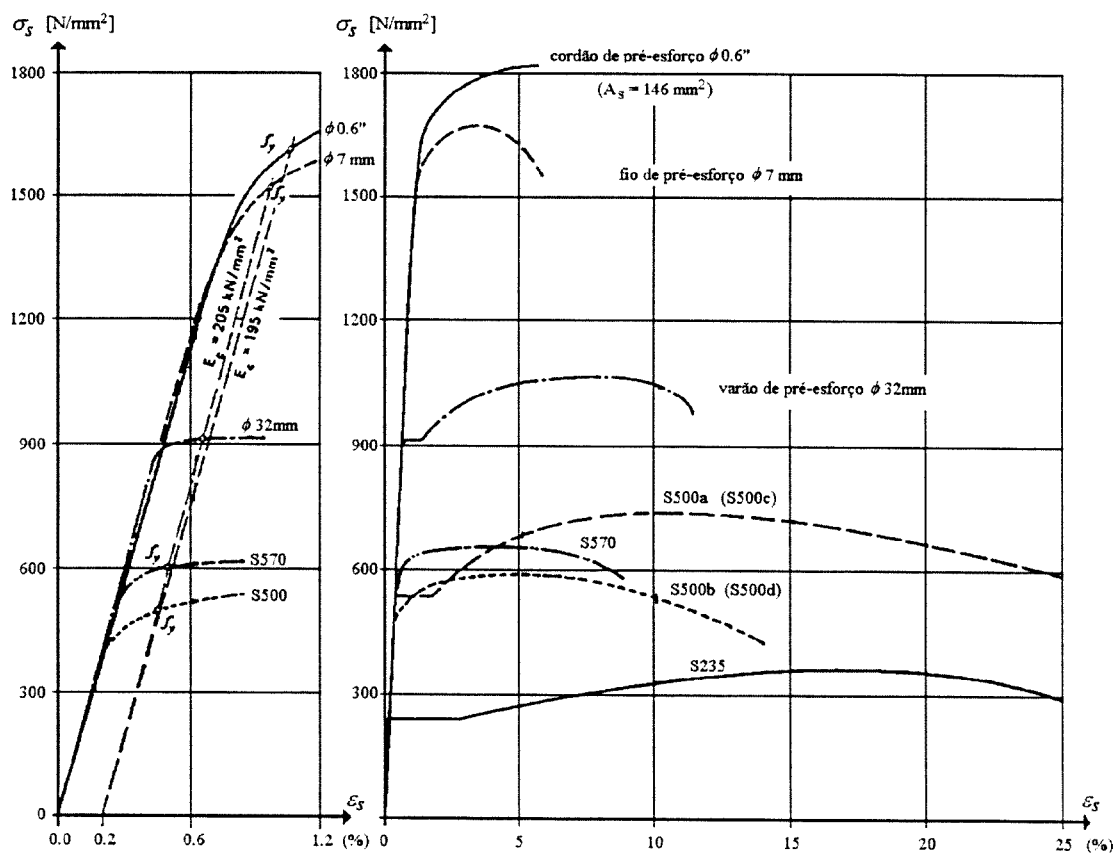


Fig. 4.35 - Curvas tensões-extensões de vários tipos de aço para armaduras.

A resposta unidimensional exibida pelo aço das armaduras ordinárias e de pré-esforço é totalmente caracterizada pelos seguintes parâmetros:

- módulo de elasticidade longitudinal,  $E_s$  e  $E_p$ ;
- tensão de cedência,  $f_{yy}$ , ou tensão limite convencional de proporcionalidade a 0.1% ou 0.2%,  $f_{py}$ ;
- extensão limite do patamar de cedência ou extensão de início de endurecimento,  $\epsilon_{cs}$  (só para os aços macios);
- resistência máxima,  $f_{su}$  e  $f_{pu}$ ;
- extensão de rotura,  $\epsilon_{su}$  e  $\epsilon_{pu}$ ;

Atendendo à inevitável encurvadura das armaduras sujeitas a esforços de compressão, a resistência máxima e a deformação última apresentam valores inferiores relativamente aos respectivos valores em tracção (Pipa, 1993). No entanto, essas diferenças não são muito significativas para elementos de betão armado, admitindo-se geralmente (tal como no presente modelo) serem válidos os mesmos limites.

Neste trabalho as relações tensões-extensões, que definem o comportamento das armaduras, são estabelecidas com base num modelo elasto-plástico de endurecimento isotrópico (Henriques, 1991) e na solução incremental proposta por Owen e Hinton (1980). Este modelo permite simular o aumento de resistência que se verifica após inversão de carga que conduziu anteriormente à plastificação da armadura (Fig. 4.36), através de um diagrama multilinear.

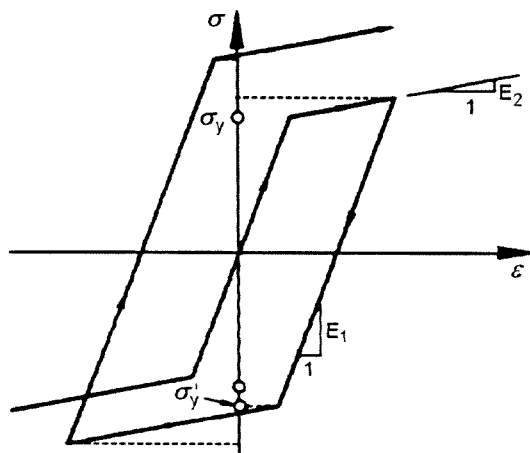


Fig. 4.36 - Modelo elasto-plástico com endurecimento isotrópico.



O diagrama multilinear (Fig. 4.37) é caracterizado através das seguintes relações:

- fase elástica:

$$\sigma_s = E_s \cdot \varepsilon_s, \quad \varepsilon_s \leq \varepsilon_{sy} \quad ; \quad (4.84a)$$

- fase elasto-plástica com endurecimento ou perfeitamente plástica (ramo  $i$ ):

$$\sigma_s = E_{s_i} \cdot (\varepsilon_s - \varepsilon_{s_{i-1}}) + \sigma_{s_{i-1}}, \quad \varepsilon_{s_{i-1}} \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{s_i} \quad ; \quad (4.84b)$$

- fase de descarregamento (elástico):

$$\Delta\sigma_s = E_s \cdot \Delta\varepsilon_s \quad . \quad (4.84c)$$

onde  $\varepsilon_{sy}$  é a extensão correspondente à tensão de cedência,  $f_{sy}$ ;  $\varepsilon_{s_{i-1}}$  e  $\varepsilon_{s_i}$  são os valores limites superiores das extensões correspondentes aos ramos  $i - 1$  e  $i$ , respectivamente;  $\sigma_{s_{i-1}}$  é a tensão associada à extensão  $\varepsilon_{s_{i-1}}$ .

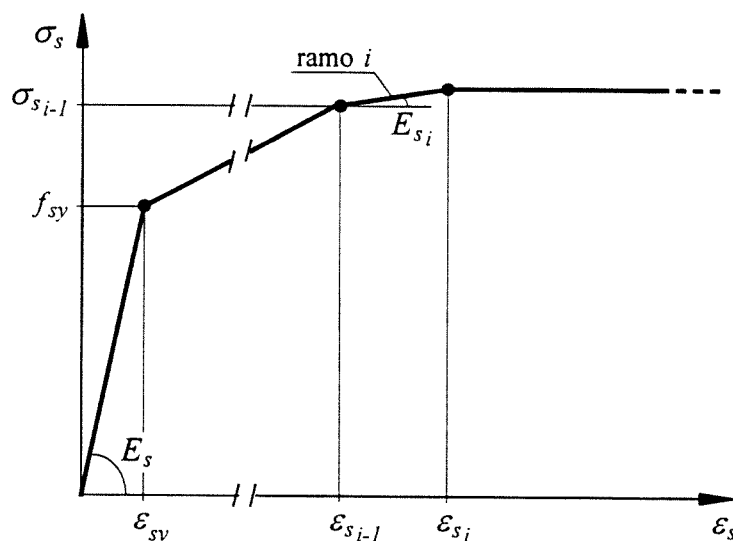


Fig. 4.37 - Diagrama multilinear para o aço.

### 4.3.3 - Relaxação das armaduras de pré-esforço

O fenómeno de relaxação do aço de pré-esforço é a manifestação mais significativa do comportamento diferido das armaduras. De acordo com a sua definição, a relaxação corresponde

à diminuição gradual da tensão por um material submetido a uma deformação imposta constante. Embora o aço de pré-esforço, em geral, não se encontre rigorosamente sujeito a deformações constantes ao longo do seu comprimento, aceita-se que o estado de deformação que prevalece é constante.

Entre os vários factores que influenciam a evolução da relaxação no tempo, os mais importantes são o tipo de aço, o nível de tensão e a temperatura. Na Fig. 4.38 ilustra-se algumas curvas experimentais típicas de relaxação em aços de alta resistência, obtidas para diferentes níveis de tensão inicial em ensaios realizados à temperatura de 20°C.

O modelo numérico utilizado para descrever a relaxação intrínseca do aço de pré-esforço, avaliada em ensaios de armaduras sob alongamento constante e realizados sem alteração das condições iniciais, foi inicialmente proposto por Magura (1964) e utilizado por vários autores (Kang, 1977; Mari, 1984; Roca, 1988; Póvoas, 1991; Cruz, 1994), vem expresso por:

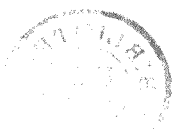
$$\Delta\sigma_{pt,r} = -\frac{\sigma_{p0}}{k} \left[ \log_{10} t \left( \frac{\sigma_{p0}}{f_{py}} - 0.55 \right) \right], \quad \text{se } \frac{\sigma_{p0}}{f_{py}} > 0.55 \quad , \quad (4.85)$$

em que  $\Delta\sigma_{pt,r}$  designa a diminuição de tensão ao fim de um período de  $t$  horas,  $\sigma_{p0}$  é a tensão inicial,  $f_{py}$  é o limite de elasticidade do aço,  $f_{pu}$  a resistência máxima e  $k$  é um parâmetro que depende do tipo de aço, sendo definido pelos seguintes valores (de acordo com os resultados experimentais obtidos por Magura):

- $k = 10$  e  $f_{py} = 0.85f_{pu}$ , para aços de relaxação normal;
- $k = 45$  e  $f_{py} = 0.90f_{pu}$ , para aços de baixa relaxação.

Esta expressão é válida somente para o caso em que o aço está submetido a uma tensão constante, no entanto, é generalizada para os casos de histórias de carga variáveis no tempo de acordo com o procedimento proposto inicialmente por Hernandez e Gamble (1975) e que consiste genericamente no seguinte (Fig. 4.39):

- conhecido o valor da tensão  $\sigma_p$  instalado no aço de pré-esforço no instante  $n-1$ , utiliza-se a expressão (4.85) para determinar a tensão fictícia  $\sigma_{p0,n-1}$ , que serve de base ao cálculo das perdas de tensão por relaxação,  $\Delta\sigma_{pt,r}$ , associadas ao instante seguinte.



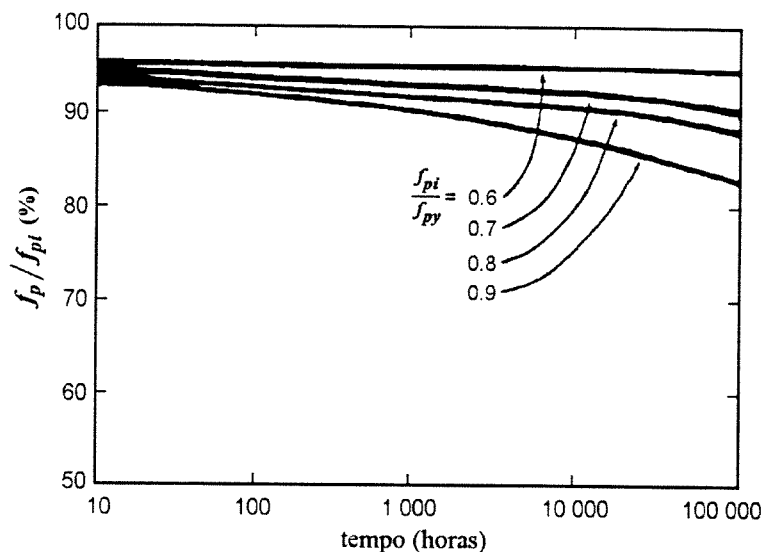


Fig. 4.38 - Curvas experimentais de relaxação de aços de alta resistência (Magura, 1964).

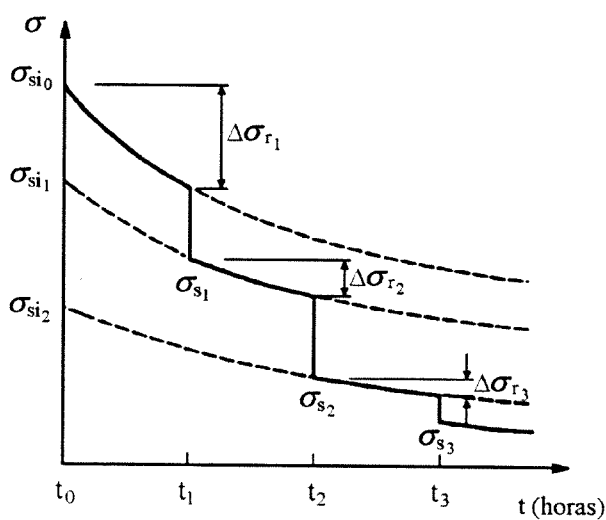


Fig. 4.39 - Correção da relaxação intrínseca.

### 4.3.4 - Variabilidade do comportamento mecânico das armaduras

#### 4.3.4.1 - Armaduras ordinárias

A variabilidade do comportamento mecânico das armaduras ordinárias depende principalmente dos seguintes factores:

- variações da resistência do material (matéria prima, processo de fabrico, fabricante, etc.);
- variações geométricas dos varões (área da secção transversal, tipo de superfície, etc.);
- diâmetro dos varões;
- degradação do material (corrosão);
- histórias de carga (fadiga);
- critérios de definição dos valores convencionais de resistência ( $f_{sy}$  e  $f_{su}$ ) e sua avaliação experimental (definição do ensaio, velocidade da carga, etc.).

O parâmetro do aço passivo mais estudado é a tensão de cedência,  $f_{sy}$ , embora existam também numerosos resultados sobre outros parâmetros, nomeadamente, a tensão de rotura,  $f_{su}$ , a extensão última,  $\epsilon_{su}$ , e a área da secção transversal,  $A_s$ . No Quadro 4.13 apresentam-se alguns resultados experimentais obtidos por diferentes autores relativamente à tensão de cedência de aços passivos. Esses dados referem-se essencialmente a países da Europa Ocidental e América do Norte.

Quadro 4.13 - Dados experimentais relativos à tensão de cedência.

Origem	Valor específico $f_{syk}$	Média $\bar{f}_{sy}$	Coef. Variação $CV_{f_{sy}}$
Dinamarca, 1968 (ver ref. em Almunia, 1993)	370 - 420 MPa	—	4 - 5% (a) 10% (b)
Suécia (ver ref. em Almunia, 1993)	—	—	8% (b)
EUA, Canadá e Europa Ocidental (Mirza, 1979c)	280 MPa 410 MPa	337 MPa 490 MPa	10.7% (b) 9.3% (b)
França (CEB, 1980b)	—	—	4% (a) 10% (b)
Espanha (Almunia, 1993)	500 MPa	602 MPa	8.1% (b)
Europa (Pipa, 1993)	400 MPa 500 MPa	496 MPa 585 MPa	4.7% (b) 5.2% (b)
Legenda: (a) Valores obtidos com amostras de um único lote ou de um único fabricante. (b) Valores obtidos com amostras de diferentes fabricantes.			

Os valores dos coeficientes de variação relativos à tensão de cedência das armaduras,  $f_{sy}$ , referidos no Quadro 4.13, incluem todas as fontes de incerteza, como os diferentes fabricantes (excepto nos casos assinalados), produção, material, diâmetro dos varões, etc.. Genericamente, o coeficiente de variação de  $f_{sy}$  oscila entre 4% e 5% para aços de um mesmo lote e entre 8% e 10% para aços de diferentes fabricantes. No entanto, a utilização de um "novo" processo de produção dos varões, genericamente designado por Tempcore, conduziu a menores dispersões. De acordo com o trabalho de Pipa (1993) sobre o processo de classificação dos varões do tipo Tempcore, recolheram-se várias amostras de varões produzidos por 14 produtores europeus, incluindo Portugal. Os resultados do tratamento estatístico dos dados experimentais conduziram a coeficientes de variação relativamente baixos, entre 4.7% e 5.2%.

As funções densidade de probabilidade sugeridas por vários autores correspondem, geralmente, à lei normal e à lei log-normal. Mirza (1979c) propõe também distribuições tipo Beta.

Relativamente a outros parâmetros mecânicos refira-se a proposta de Mirza baseada no trabalho de compilação e análise de dados experimentais provenientes dos Estados Unidos, Canadá e Europa Ocidental. Este autor constatou que as variações da resistência máxima,  $f_{su}$ , são idênticas às variações de  $f_{sy}$ . O valor médio de  $f_{su}$  é aproximadamente 55% superior ao valor médio de  $f_{sy}$ . Para as variações associadas à área da secção transversal,  $A_{s,real}$ , em relação aos valores nominais,  $A_{s,nom}$ , obteve:

- média:  $\frac{\bar{A}_{s,real}}{A_{s,nom}} = 0.96 \text{ a } 1.20$  ;
- coeficiente de variação:  $CV\left(\frac{A_{s,real}}{A_{s,nom}}\right) = 0.2\% \text{ a } 9\%$  ;

para os Estados Unidos foram obtidos os seguintes resultados, respectivamente, 0.99 e 2.4%. Finalmente, para o módulo de elasticidade,  $E_s$ , obteve variações muito menores. A distribuição normal ajustou-se aos dados compilados. As medidas estatísticas obtidas foram:

- média:  $\bar{E}_s = 201 \text{ GPa}$  ;
- coeficiente de variação:  $CV_{E_s} = 3.3\%$  .

Almunia (1993) realizou um trabalho de compilação e tratamento estatístico de resultados experimentais obtidos na construção de pontes em Espanha a partir de 1990. No Quadro 4.14 apresenta-se sumariamente os resultados obtidos para os parâmetros mecânicos controlados. Este autor propõe distribuições do tipo log-normal para os parâmetros mecânicos e uma distribuição do tipo normal para a relação  $A_{s,real} / A_{s,nom}$ .

Quadro 4.14 - Dados experimentais obtidos por Almunia (1993).

Parâmetro	Dimensão da amostra	Valor médio $\bar{X}$	$\frac{X_{\min}}{\bar{X}}$	$\frac{X_{\max}}{\bar{X}}$	Desvio padrão $\sigma$	Coef. variação CV (%)
Resistência máxima $f_{su}$ (MPa)	118	689.9	0.89	1.24	53.7	7.8
Tensão de cedência, $f_{sy}$ (MPa)	118	601.8	0.85	1.28	48.7	8.1
$f_{su}/f_{sy}$	118	1.147	0.92	1.09	0.045	4.0
Extensão última $\varepsilon_{su}$ (%)	118	23.28	0.54	1.30	2.95	12.7
$A_{s,real}/A_{s,nom}$	202	1.005	0.96	1.05	0.021	2.1

No Quadro 4.15 apresenta-se, sumariamente, os resultados do tratamento estatístico efectuado por Pipa (1993), referido anteriormente, relativos a varões do tipo Tempcore. As amostras estudadas foram produzidas por 14 produtores diferentes dos seguintes países Europeus: Portugal (1 produtor), Espanha (6), França (1), Alemanha (2), Itália (2) e Grã-Bretanha (2). A maioria destes produtores só produz varões na classe B500, de acordo com a actual tendência de consumo, pelo que a distribuição segundo as classes de aço é a seguinte: B400 - 7 produtores (Portugal e Espanha); B500 - 14 produtores.

Quadro 4.15 - Dados experimentais obtidos por Pipa (1993).

Parâmetro	Classe do aço	Dimensão da amostra	Valor médio $\bar{X}$	Valor mínimo $X_{\min}$	Valor máximo $X_{\max}$	Desvio padrão $\sigma$	Coef. variação (%)
Resistência máxima $f_{su}$ (MPa)	B400	361	598	552	646	19.8	3.3
	B500	343	680	613	752	28.5	4.2
Tensão de cedência $f_{sy}$ (MPa)	B400	361	496	431	544	23.3	4.7
	B500	343	585	519	656	30.3	5.2
Extensão última $\varepsilon_{su}$ (%)	B400	361	11.8	7.5	16.0	1.69	14.3
	B500	343	9.4	6.0	13.0	1.40	14.9
Extensão início de endurecimento $\varepsilon_{sh}$ (%)	B400	33	2.2	1.6	3.1	0.45	20
	B500	32	1.4	0.7	2.3	0.44	31
Módulo tangente de endurecimento $E_{sh}$ (MPa)	B400	34	3005	2170	5020	657	22
	B500	32	3510	2720	5330	534	15

De uma maneira geral, as actuais normas sugerem funções densidade do tipo normal para as distribuições dos parâmetros. O módulo de elasticidade e a área da secção transversal são considerados através de valores nominais identificados com os valores médios sendo  $E_s = 200$  GPa. Relativamente à tensão de cedência, o Eurocódigo 2 relativo a pontes de betão

(EC2-2, 1994) recomenda a seguinte relação entre o valor médio,  $f_{sym}$ , e o valor característico,  $f_{syk}$ :

$$f_{sym} = 1.10 f_{syk} \quad , \quad (4.86)$$

sendo  $f_{syk}$  definido pelo quantil de 5% da distribuição da tensão de cedência e admitindo uma lei normal, à relação (4.86) corresponde um coeficiente de variação de 5.5%.

Relativamente à resistência máxima à tracção,  $f_{su}$ , o MC90 (CEB-FIP, 1993) define as seguintes relações com  $f_{sy}$ , de acordo com as três classes de ductilidade dos aços:

- classe A:  $\frac{f_{suk}}{f_{syk}} \geq 1.08$ ,  $\varepsilon_{suk} \geq 5\%$  ;
- classe B:  $\frac{f_{suk}}{f_{syk}} \geq 1.05$ ,  $\varepsilon_{suk} \geq 2.5\%$  ;
- classe S:  $\frac{f_{suk}}{f_{syk}} \geq 1.15$ ,  $\varepsilon_{suk} \geq 6\%$  .

#### 4.3.4.2 - Armaduras de pré-esforço

O aço de pré-esforço é caracterizado pela sua alta resistência e pela sua elevada qualidade de produção. A variabilidade do seu comportamento mecânico depende, fundamentalmente, dos seguintes factores:

- variações da resistência do material (matéria prima, processo de fabrico, fabricante, etc.);
- variações geométricas e suas dimensões;
- degradação do material;
- história de cargas (fadiga);
- critérios de definição dos valores convencionais de resistência ( $f_{py}$  e  $f_{pu}$ ) e sua avaliação experimental (definição do ensaio, velocidade da carga, etc.).

Os parâmetros mais frequentemente controlados são o limite convencional de proporcionalidade,  $f_{py}$ , e a resistência máxima,  $f_{pu}$ . No Quadro 4.16 apresenta-se uma série de resultados obtidos em alguns estudos de compilação e tratamentos de dados experimentais. Almunia (1993) usou os dados do controlo de qualidade de um produtor espanhol de aços para pré-esforço para avaliar a variabilidade dos seus parâmetros mecânicos. Distinguindo os valores obtidos para os cordões de

0.5" e de 0.6", descrevem-se no Quadro 4.17 as medidas estatísticas resultantes da amostragem relativa a ensaios realizados durante três anos.

Quadro 4.16 - Dados experimentais relativos aos parâmetros  $f_{py}$  e  $f_{pu}$ .

Origem	Dimensão da amostra	Grandeza	Valor médio	Coefficiente de variação (%)
França (CEB, 1980b)	40.000	fios lisos	—	2.0 – 3.0
		$f_{py}$ fios não lisos		2.0 – 5.0
		varões		2.0 – 5.5
		fios lisos	—	1.5 – 3.0
		$f_{pu}$ fios não lisos		1.5 – 4.5
		varões		2.0 – 4.0
EUA (Nowak, 1991)	30 (varões)	$f_{py}$	—	3.0
		$f_{pu}$	—	1.0
EUA (Devalapura, 1992)	56 (cordões 0.5")	$f_{py}$	1767 MPa	1.3
		$f_{pu}$	1902 MPa	1.1

Quadro 4.17 - Dados experimentais obtidos por Almunia (1993).

a) Cordões de 0.5"

Parâmetro	Dimensão da amostra	Valor médio $\bar{X}$	$\frac{X_{min}}{\bar{X}}$	$\frac{X_{max}}{\bar{X}}$	Desvio padrão $\sigma$	Coefficiente Variação (%)
Carga p/ 0.1% (kN)	212	174.3	0.94	1.09	5.55	3.2
Carga p/ 0.2% (kN)	332	180.0	0.92	1.09	5.30	2.9
Carga p/ 1% (kN)	357	175.5	0.94	1.07	4.47	2.5
Carga de rotura (kN)	357	194.7	0.95	1.06	3.87	2.0
Módulo de elasticidade $E$ (GPa)	357	197.2	0.96	1.04	3.54	1.8

b) Cordões de 0.6"

Parâmetro	Dimensão da amostra	Valor médio $\bar{X}$	$\frac{X_{min}}{\bar{X}}$	$\frac{X_{max}}{\bar{X}}$	Desvio padrão $\sigma$	Coefficiente Variação (%)
Carga p/ 0.2% (kN)	460	247.2	0.94	1.08	5.37	2.2
Carga p/ 1% (kN)	461	242.8	0.97	1.07	4.21	1.7
Carga de rotura (kN)	462	271.8	0.96	1.07	4.94	1.8
Módulo de elasticidade $E$ (GPa)	462	196.5	0.95	1.06	3.64	1.9



Como se verifica nos resultados apresentados, os coeficientes de variação dos parâmetros  $f_{py}$  e  $f_{pu}$  são idênticos, com dispersões ligeiramente superiores para a distribuição dos valores de  $f_{py}$ . No entanto, saliente-se as pequenas dispersões observadas, entre 1% e 5.5% sendo o valor mais frequente aproximadamente igual a 3.5%.

A generalidade dos autores sugerem a função densidade tipo normal para descrever a distribuição dos parâmetros mecânicos do aço de pré-esforço referidos. Almunia sugere também funções distribuição tipo log-normal. Este último autor recomenda ainda para os modelos teóricos de distribuição a consideração de coeficientes de variação de 3.0% e 2.0% para a tensão correspondente à extensão de 0.2%,  $f_{p0.2}$ , e para a tensão de rotura,  $f_{pu}$ , respectivamente.

Relativamente aos valores propostos pelas normas recentes, o módulo de elasticidade é considerado com os seguintes valores nominais (identificado com os respectivos valores médios):

- $E_p = 205$  GPa , para fios e varões;
- $E_p = 195$  GPa , para cordões;

de acordo com a proposta do MC90 (CEB-FIP, 1993). O Eurocódigo 2 (EC2, 1991) propõe valores idênticos:

- $E_p = 200$  GPa , para fios e varões, com o valor real a oscilar entre 195 e 205 GPa;
- $E_p = 190$  GPa , para cordões, com o valor real a oscilar entre 175 e 195 GPa.

O Eurocódigo 2 relativo a pontes de betão (EC2-2, 1994) sugere a seguinte relação entre o valor médio,  $f_{pym}$ , e o valor característico,  $f_{pyk}$ , do limite convencional de proporcionalidade:

$$f_{pym} = 1.10 \cdot f_{pyk} \quad . \quad (4.87)$$

O MC90, a título indicativo, fornece as seguintes relações:

- para fios:  $f_{p0.2k} = 0.90 f_{puk}$  ,  $f_{p0.1k} = 0.86 f_{puk}$  ,  $\varepsilon_{puk} > 3.5\%$  ;
- para cordões:  $f_{p0.2k} = 0.90 f_{puk}$  ,  $f_{p0.1k} = 0.85 f_{puk}$  ,  $\varepsilon_{puk} > 3.5\%$  .

#### 4.4 - EXEMPLO DE VERIFICAÇÃO

O modelo numérico de análise estrutural desenvolvido com base nas relações constitutivas descritas no presente Capítulo tem sido objecto de vários testes comparativos com resultados experimentais (Henriques, 1991, 1992a). O exemplo apresentado nesta secção tem como

objectivo discutir a validade da solução numérica da resposta de vigas de betão pré-esforçado, tendo em conta o comportamento diferido dos materiais. Para o efeito considerou-se uma série de quatro vigas de betão parcialmente pré-esforçadas, ensaiadas entre 1981 e 1986 por Espion e Halleux (1991). Além dos resultados experimentais consideraram-se ainda soluções numéricas obtidas por outros autores.

As quatro vigas ensaiadas são simplesmente apoiadas, com 8 metros de vão e com as seguintes dimensões da secção transversal:  $b \times h = 340 \times 400\text{mm}^2$ . O carregamento consiste no peso próprio, no pré-esforço e em duas cargas verticais externas (Fig. 4.40). Os quatro testes distinguem-se pelo grau de pré-esforço e pela história de carregamento.

Consideram-se dois graus de pré-esforço  $\lambda$  (isto é, combinação de armaduras passivas e activas): um elevado, com  $\lambda = 0.8$  (vigas LT-0.8); e outro baixo, com  $\lambda = 0.5$  (vigas LT-0.5). A armadura de pré-esforço consiste em cordões não aderentes com diâmetro de 0.5". Na Fig. 4.40 e no Quadro 4.18 descreve-se o posicionamento das armaduras passivas e activas na secção de meio vão, para os dois tipos de vigas.

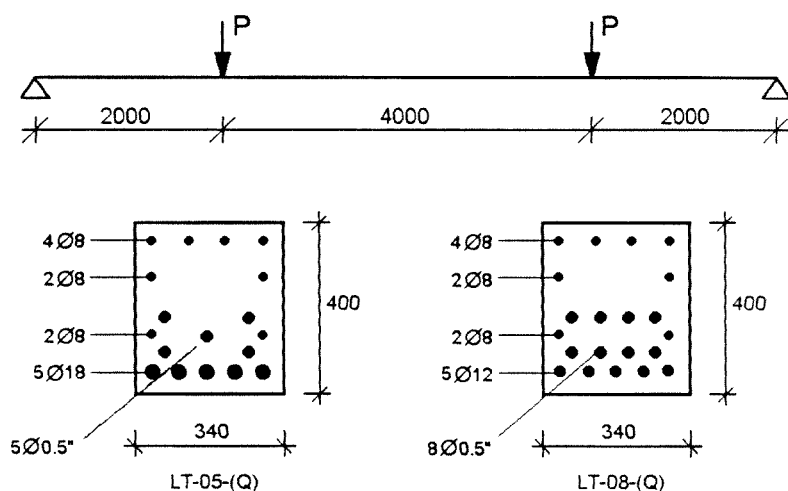


Fig. 4.40 - Geometria e esquema de carregamento das vigas.

As excentricidades dos cabos de pré-esforço são constantes para as vigas LT-0.8 e LT-0.8-Q. Nas vigas LT-0.5 e LT-0.5-Q existe uma variação linear do traçado dos cabos nas zonas entre os apoios e as forças exteriores, com uma inclinação de 3.2 graus.

O período de cura em cofragem das vigas foi de 1 dia. Posteriormente, foram submetidas a condições ambientais de humidade relativa constante de 60% e temperatura de 20°C. As

características mecânicas dos diferentes materiais encontram-se resumidamente definidas no Quadro 4.19.

Quadro 4.18 - Distribuição das armaduras.

	$\lambda = 0.8$		$\lambda = 0.5$	
Armadura ordinária	$A_s$ (mm <sup>2</sup> )	$d$ (mm)	$A_s$ (mm <sup>2</sup> )	$d$ (mm)
- camada superior	201 (4 $\phi$ 8)	27	201 (4 $\phi$ 8)	27
- segunda camada	100 (2 $\phi$ 8)	115	100 (2 $\phi$ 8)	115
- terceira camada	100 (2 $\phi$ 8)	285	100 (2 $\phi$ 8)	285
- camada inferior	565 (5 $\phi$ 12)	365	1272 (5 $\phi$ 18)	365
Armadura de pré-esforço	$A_p$ (mm <sup>2</sup> )	$d$ (mm)	$A_p$ (mm <sup>2</sup> )	$d$ (mm)
- camada superior	372 (4 $\phi$ 0.5")	260	186 (2 $\phi$ 0.5")	260
- camada intermédia	---	---	93 (1 $\phi$ 0.5")	285
- camada inferior	372 (4 $\phi$ 0.5")	310	186 (2 $\phi$ 0.5")	310

Quadro 4.19 - Propriedades dos materiais.

Betão	
Resistência à compressão aos 28 dias (MPa) (valores experimentais):	Valores estimados:
- viga LT-0.5 : $f_c = 37.2$	- Módulo de elasticidade: $E_c = 9500 f_c^{1/3}$ ; (MPa)
- viga LT-0.5-Q : $f_c = 33.9$	- Resistência à tracção : $f_{ct} = 3.0$ MPa
- viga LT-0.8 : $f_c = 36.8$	- Coeficiente de Poisson : $\nu = 0.20$
- viga LT-0.8-Q : $f_c = 34.9$	- Peso volúmico : $\gamma = 24.5$ kN/m <sup>3</sup> (valor experimental)
Aço passivo	Aço activo
Valores estimados:	Valores experimentais:
- Módulo de elasticidade: $E_s = 200$ GPa	- Módulo de elasticidade: $E_p = 200$ GPa
- Tensão de cedência: $f_{sy} = 500$ MPa	- Tensão para 0.2% : $f_{py0.2} = 1715$ MPa
	- Tensão de rotura : $f_{pu} = 1892$ MPa
	- Relaxação intrínseca às 1000 horas:
	• 1.48% ; $\sigma_p \leq 0.6 f_{pu}$
	• 1.55% ; $0.6 f_{pu} < \sigma_p \leq 0.7 f_{pu}$
	• 1.78% ; $0.7 f_{pu} < \sigma_p \leq 0.8 f_{pu}$

O pré-esforço,  $P$ , foi aplicado aos 14 dias em todas as vigas a partir de um extremo. Nesse extremo a força nos cabos, logo após a aplicação do pré-esforço, era de 122.8 kN. Em duas dessas vigas as únicas acções aplicadas foram o peso próprio e o pré-esforço (vigas LT-0.5 e LT-0.8). Nas restantes vigas (LT-0.5-Q e LT0.8-Q) aplicaram-se também duas forças concentradas,  $Q$ , de 63.75 kN de forma gradual, de acordo com o seguinte escalonamento:

– LT-0.5-Q: $t'_1 = 14d < t < t'_2 = 28d$	- $Q = 0$
$t'_2 = 28d < t < t'_3 = 84d$	- $Q = 16.5$ kN
$t > t'_3 = 84d$	- $Q = 63.75$ kN
– LT-0.8-Q: $t'_1 = 14d < t < t'_2 = 28d$	- $Q = 0$
$t'_2 = 28d < t < t'_3 = 85d$	- $Q = 16.7$ kN
$t > t'_3 = 85d$	- $Q = 63.75$ kN

Estes ensaios decorreram durante quatro anos e meio, tendo durante esse período as acções aplicadas mantido o seu valor, exceptuando o pré-esforço devido às perdas resultantes do fenómeno de relaxação das respectivas armaduras.

Atendendo à simetria existente e tendo presente que as perdas de pré-esforço devidas ao atrito são irrelevantes, estudou-se metade de cada viga, discretizando cada uma com dez elementos de viga de igual comprimento. A fluência e a retracção do betão foram simuladas através do modelo proposto pelo MC90 (CEB-FIP, 1993).

Na Fig. 4.41 ilustram-se os resultados obtidos na presente análise e, comparativamente, os resultados experimentais de Espion e Halleux (1991), assim como os resultados numéricos obtidos por Kanstad (1993) e Cruz (1994). Mais resultados numéricos sobre este exemplo foram obtidos por outros autores (Vonk, 1993; Ulm, 1993).

O comportamento diferido das vigas estudadas apresentam aspectos interessantes. A presença da armadura ordinária numa viga de betão pré-esforçado atrasa a evolução da flecha no tempo. Enquanto que na viga LT-0.8 a flecha aumenta e tende a estabilizar com o tempo, na viga LT-0.5, que apresenta uma maior percentagem de armadura ordinária, a flecha diminui logo após a aplicação do pré-esforço, chegando inclusivamente a ser negativa. Este tipo de comportamento não se verifica em estruturas pré-esforçadas com pequenas ou (nenhumas) quantidades de armadura ordinária, sendo típico de comportamentos que envolvem redistribuições significativas de tensão entre o betão e a armadura ordinária. Segundo Espion e Halleux, este fenómeno é de difícil simulação numérica, não sendo convenientemente traduzido por muitos métodos já publicados.

Da análise comparativa entre os resultados obtidos pela presente análise e por outros autores e, nomeadamente, com os valores experimentais, constata-se que as configurações das curvas (isto é, a forma como as flechas evoluem no tempo) está correcta. A concordância entre os resultados permite ilustrar bem a capacidade do presente modelo para reproduzir adequadamente os fenómenos que determinam o comportamento diferido de estruturas de betão.

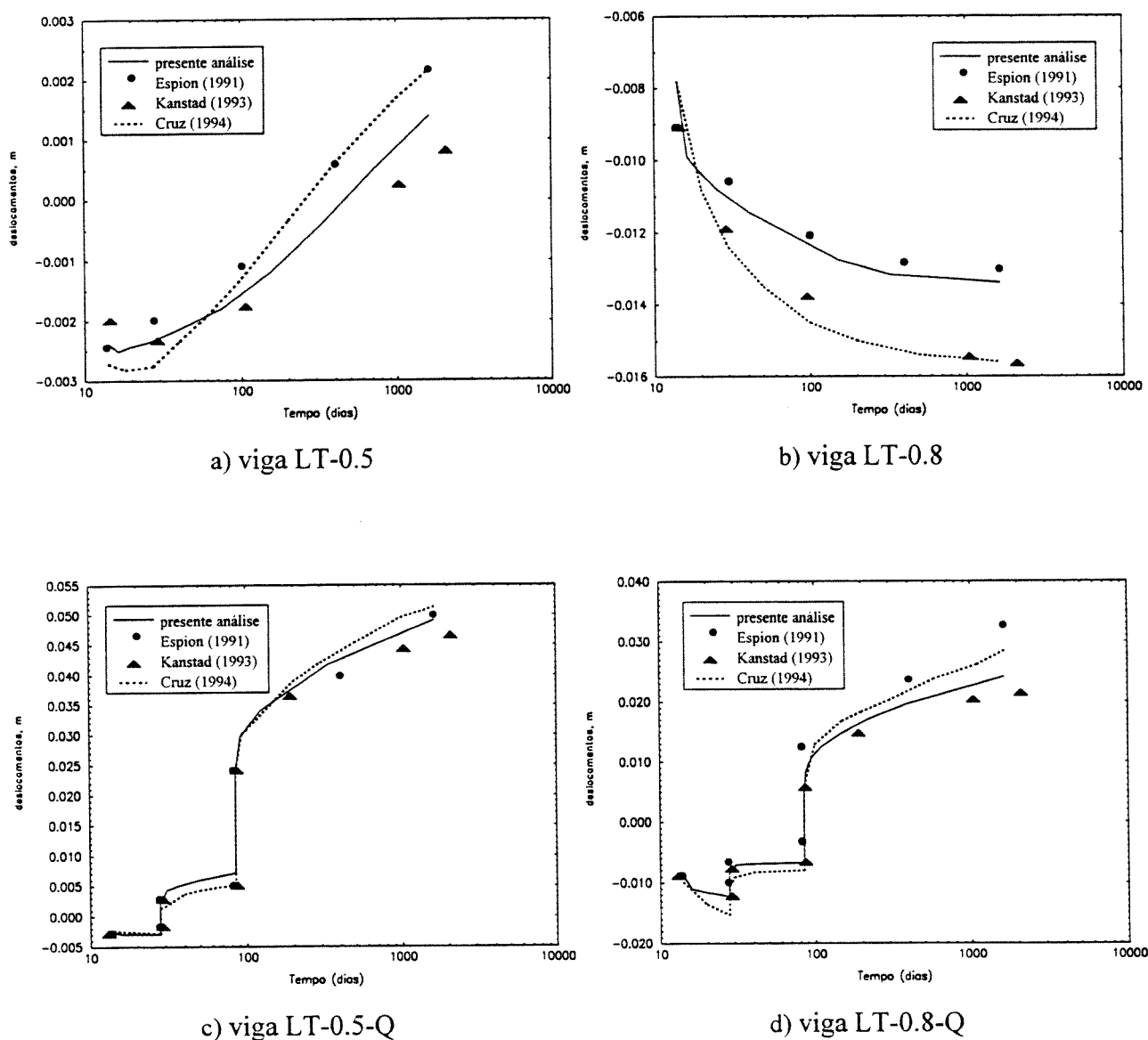


Fig. 4.41 - Evolução da flecha a meio vão com o tempo para as quatro vigas analisadas.

## 4.5 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente capítulo foi apresentada a formulação do modelo de comportamento não linear do betão estrutural, incluindo os efeitos diferidos. Foi também dado destaque às variabilidades que estão associadas aos parâmetros mecânicos mais importantes do betão e do aço. Realça-se ainda as diferenças entre as resistências dos betões medidas usualmente em provetes (resistência convencional) e as resistências que realmente se verificam nas estruturas (resistência efectiva).

As relações constitutivas, baseadas numa formulação multiaxial, resultaram da aplicação das leis elasto-plásticas ao critério proposto pelo MC90 para o betão não fendilhado e em diagramas de *tension-stiffening* para o betão fendilhado que permitem considerar a interacção armadura-betão envolvente. O comportamento diferido é traduzido de uma forma incremental através de relações propostas também pelo MC90 e por Bazant e Panula.

O comportamento não linear do aço é traduzido por um diagrama unidimensional multilinear de tensões-deformações. É também considerado a relaxação das armaduras de pré-esforço através do modelo proposto inicialmente por Magura.

O estudo de vigas pré-esforçadas e a comparação com resultados obtidos por outros autores permitiu constatar o bom desempenho do presente modelo.

## Capítulo 5

# METODOLOGIAS DE AVALIAÇÃO DA SEGURANÇA DE ESTRUTURAS

### 5.1 - INTRODUÇÃO

Os critérios de segurança são geralmente expressos em função dos efeitos das acções, tais como esforços, tensões, deformações e deslocamentos. De acordo com o formato semi-probabilístico proposto pelas actuais normas, a incerteza associada a este tipo de problemas é considerada através da utilização de coeficientes de segurança apropriados. A abordagem mais elaborada permite incluir informação estatística sobre as variáveis intervenientes e usar técnicas probabilísticas adequadas.

No estudo da fiabilidade estrutural, o comportamento estrutural é vulgarmente definido através de uma função do tipo  $g(X, r(X))$ , sendo  $X$  e  $r$  vectores representativos de dois conjuntos de variáveis. O vector  $X$  é constituído pelas variáveis aleatórias básicas que definem as propriedades dos materiais, a geometria dos componentes estruturais, as acções e, eventualmente, a incerteza do modelo. O vector  $r = r(X)$  simboliza a relação entre a resposta estrutural e as variáveis básicas. Considera-se que a igualdade  $g(X) = 0$  define o estado limite e que a desigualdade  $g(X) < 0$  indica a ocorrência de rotura (ou seja, a violação do estado limite). O objectivo principal na análise de fiabilidade é estimar a probabilidade de rotura (ou a probabilidade de ser violado o estado limite), isto é:

$$P_f = \int_{g(X, r(X)) \leq 0} f_X(x) dx \quad , \quad (5.1)$$

sendo  $f_X(x)$  a função densidade de probabilidade conjunta para o vector das variáveis básicas  $X$ . O domínio de integração, definido por  $g \leq 0$  define a rotura.

Na maioria dos problemas estruturais a relação  $r = r(X)$  não é explícita. Nesses casos, o domínio de integração só pode ser obtido pontualmente através de algoritmos de análise estrutural, como nos códigos computacionais baseados nas técnicas de elementos finitos. A consideração dos métodos de fiabilidade estrutural exige a necessidade de considerar técnicas específicas que permitam avaliar a segurança (ou o índice de fiabilidade) sem que a função de estado limite,  $g(X)$ , esteja explicitamente definida (por exemplo, as técnicas de avaliação numérica dos gradientes da função  $g(X)$ , abordadas na secção 2.4.3.3 do Capítulo 2). No entanto, este tipo de aproximações apresentam insuficiências quanto ao rigor quando se utilizam variáveis aleatórias não normais. Além disso, a identificação do índice de fiabilidade  $\beta$  com o espaço das variáveis normais limitam a aplicação destes métodos quando a resposta estrutural é francamente não normal. Quando se considera o comportamento não linear dos materiais, a ocorrência de respostas não normais pode ocorrer frequentemente. Por isso, a avaliação rigorosa da segurança de problemas estruturais não lineares exige a utilização de técnicas mais adequadas, como por exemplo os métodos de simulação.

A metodologia desenvolvida, com base nas técnicas de simulação de Monte Carlo, permitiu definir uma ferramenta de análise de segurança rigorosa. Embora o principal objectivo seja a avaliação de segurança de problemas estruturais não lineares, a presente metodologia é de aplicação geral. A implementação de técnicas estatísticas adequadas em simultâneo com o método de Monte Carlo levou à definição de procedimentos de avaliação da segurança com controle do erro de simulação e possibilitam ainda analisar a sensibilidade da resposta em relação às variáveis simuladas. As técnicas desenvolvidas para o controle do erro de simulação permitem reduzir significativamente o tamanho da amostra em relação ao método original de Monte Carlo. Neste capítulo descreve-se esta metodologia e os aspectos mais importantes na sua implementação computacional.

Nos problemas em que o comportamento estrutural apresenta um comportamento aproximadamente gausseano, as técnicas clássicas de fiabilidade são uma alternativa eficaz na avaliação da segurança devido ao menor esforço computacional em relação aos métodos de simulação. Sendo os métodos da superfície de resposta uma extensão às técnicas clássicas de fiabilidade (especialmente utilizados em problemas onde a função limite,  $g(X)$ , só pode ser obtida pontualmente), desenvolveu-se também uma metodologia baseada nestes conceitos. A eficácia e a generalidade (em termos de aplicação com modelos estruturais) tornam atractivos este tipo de métodos. A definição de um código computacional baseado nesta metodologia da superfície de resposta é também abordada neste capítulo.

A consideração de um exemplo numérico no presente capítulo permite clarificar a aplicação das técnicas desenvolvidas a problemas específicos. Além disso, torna mais clara a comparação entre



as metodologias implementadas, evidenciando as principais potencialidades e limitações de cada uma delas.

De forma a tirar partido das potencialidades das duas metodologias desenvolvidas e ultrapassar as respectivas limitações, implementou-se uma metodologia (designada por mista) baseada no conceito de amostragem por importância. Nesta metodologia, utiliza-se as técnicas de fiabilidade para definir a zona mais provável de rotura (região de interesse) e aplica-se o método de simulação tirando partido do conhecimento dessa zona. A aplicação desta metodologia ao exemplo anteriormente mencionado permite avaliar as suas potencialidades.

## **5.2 – METODOLOGIA BASEADA NO MÉTODO DE MONTE CARLO**

### **5.2.1 – Enquadramento geral**

Nos pontos seguintes descreve-se a metodologia de avaliação da segurança de estruturas de betão, aplicando o método de Monte Carlo com controlo da precisão na análise de fiabilidade e recorrendo a modelos de comportamento não linear baseados na técnica dos elementos finitos. Será ainda destacado as suas potencialidades na identificação das variáveis com maior preponderância na variabilidade da resposta estrutural (análise de sensibilidade) e na rápida reavaliação da segurança em caso de modificação de alguns parâmetros básicos.

A presente metodologia envolve a realização de várias análises determinísticas para uma série de parâmetros gerados de acordo com as respectivas distribuições. O tratamento estatístico das amostras assim obtidas permite estimar probabilidades de ser excedido determinados estados limites, controlar o erro das estimativas, analisar a contribuição relativa de cada variável básica para esses acontecimentos e propor modelos simplificados para descrever o comportamento estrutural.

O procedimento iterativo adoptado divide-se em quatro fases (Fig. 5.1):

- (1) simulação estocástica - aplicação do método de Monte Carlo para gerar amostras do problema, de acordo com as distribuições das variáveis aleatórias;
- (2) análise estrutural - avaliação da resposta estrutural das amostras geradas através de modelos que tenham em conta o comportamento não linear dos materiais (ver Capítulo 4) e apoiados na técnica dos elementos finitos (ver Capítulo 3);

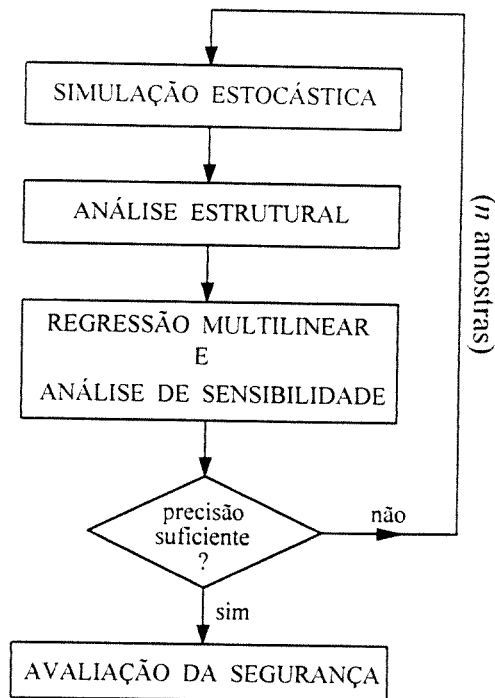


Fig. 5.1 - Descrição esquemática da presente metodologia.

- (3) regressão múltipla e análise de sensibilidade - cálculo dos coeficientes de correlação (linear) entre a resposta estrutural,  $Y$ , e as variáveis geradas (básicas),  $X$ , avaliação de um modelo de regressão  $Y=f(X)$  e estimação dos erros associados aos coeficientes desse modelo. A precisão deste processo iterativo é avaliada através dos erros estimados para os coeficientes de modelo de regressão. Se esses erros forem superiores aos valores admissíveis volta-se ao ponto (1) caso contrário segue para a fase seguinte;
- (4) avaliação da segurança - estimativa da probabilidade de rotura recorrendo a medidas estatísticas que melhor traduzam a distribuição da resposta estrutural na zona de interesse.

## 5.2.2 – Simulação estocástica

### 5.2.2.1 – Modelação do campo aleatório

O campo aleatório,  $V(X)$ , é constituído pelas variáveis aleatórias básicas,  $X$ , associadas à variabilidade no espaço das propriedades dos materiais, da geometria dos componentes

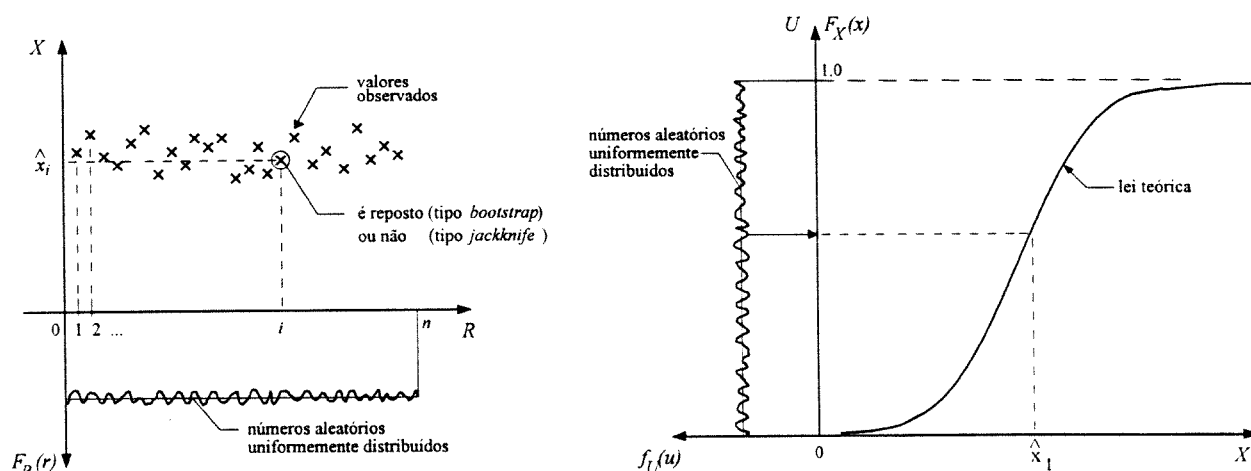
estruturais, ou das ações. A distribuição dessas variáveis pode ser caracterizada através de valores experimentais ou usando leis teóricas. No primeiro caso, os valores experimentais podem ser previamente tratados estatisticamente e aproximados por uma lei de probabilidade (e parte-se numa situação idêntica ao segundo caso). Se os dados forem insuficientes para fazer um adequado tratamento estatístico ou ainda se nenhuma das leis teóricas conhecidas forem suficientemente apropriadas para os descrever, adoptam-se técnicas de reamostragem de valores experimentais do tipo *bootstrap* ou *jackknife* (Hall, 1992; Efron, 1993). Nos parágrafos seguintes descreve-se cada um destes dois casos.

(1) *Amostragem usando técnicas do tipo bootstrap ou jackknife*

Esta técnica consiste em fazer (re-)amostragem através da escolha aleatória, sem reposição (técnica do tipo *jackknife*) ou com reposição (técnica do tipo *bootstrap*), de valores experimentais (Fig. 5.2a). A primeira técnica é preferencialmente usada quando o tamanho da amostra é suficientemente grande, ao invés a segunda utiliza-se quando o número de valores experimentais é restrito (mas representativo da distribuição real);

(2) *Amostragem usando leis teóricas*

A distribuição é caracterizada por um pequeno número de parâmetros (por exemplo para as distribuições gausseanas bastam dois parâmetros: a média e o desvio padrão), sendo a amostragem realizada por técnicas apropriadas que permitem considerar de forma adequada o formato da lei utilizada (Fig. 5.2b).



Legenda:  $R, U$  - variáveis com distribuição uniforme;  $N$  - número de valores experimentais;  
 $F$  - função acumulativa de probabilidade;  $X$  - variável aleatória em estudo;  
 $\hat{x}_i$  - simulação de  $x$  (amostra  $i$ )

a) amostragem com valores experimentais

b) amostragem com lei teórica

Fig. 5.2 - Amostragem usando um gerador de números aleatórios.

A escolha aleatória referida nas amostragens descritas consiste na geração de uma sequência de números aleatórios. Correntemente, os geradores de números pseudo-aleatórios em computadores fornecem uma sequência de números no intervalo  $]0,1[$  com uma distribuição uniforme. Os algoritmos embora gerem sequências de números com comportamento caótico são completamente determinísticos (daí a denominação de números pseudo-aleatórios). Baseando-se numa fórmula matemática recursiva, a sequência de números é gerada começando por uma condição inicial previamente definida, vulgarmente designada por "semente". Assim, toda a sequência pode ser repetida desde que se atribua a mesma "semente".

A transformação da sequência de números com distribuição uniforme no intervalo  $]0,1[$  numa distribuição diferente é realizada por técnicas que a seguir se descrevem.

- (i) *transformação de uma distribuição uniforme em  $]0,1[$  numa distribuição uniforme de números inteiros em  $1,2,\dots,n$*

Consiste simplesmente em transformar o intervalo da distribuição e considerar a parte inteira, de acordo com as regras correntes de arredondamento dos números gerados:

$$r = \text{Int}(n \cdot u) + 1 \quad , \quad (5.2)$$

sendo  $\text{Int}(\cdot)$  a função que define o número inteiro, por truncatura de uma operação,  $n$  é o limite superior do intervalo da distribuição transformada,  $u$  é um número real da distribuição uniforme gerada no intervalo  $]0,1[$  e  $r$  é um número inteiro da distribuição uniforme transformada para o intervalo  $1$  a  $n$ .

Esta transformação é utilizada na amostragem de valores experimentais (Fig. 5.2a), correspondendo os números gerados à ordem atribuída a cada um dos valores experimentais.

- (ii) *transformação de uma distribuição uniforme em  $]0,1[$  numa distribuição não uniforme - Método da transformação inversa*

O método da transformação inversa é a técnica mais geral de fazer este tipo de transformação (Fig. 5.2b). Seja  $X$  a variável aleatória com distribuição não uniforme e  $U$  a variável aleatória com distribuição uniforme em  $]0,1[$ . Considere-se a variável  $U$  definida por:

$$U = F_X(x) = P(X \leq x) \quad , \quad (5.3)$$

sendo  $F_X$  a função distribuição da variável  $X$ . Pode-se então definir a função distribuição de  $U$  da seguinte maneira:

$$F_U(u) = P(U \leq u) = P(F_X(x) \leq u) = P[P(X \leq x) \leq u] =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } u \leq 0 \\ P[X \leq F_X^{-1}(u)] & \text{se } 0 < u < 1 \\ 1 & \text{se } u \geq 1 \end{cases}, \quad (5.4)$$

restringindo a função  $F_U(u)$  para valores de  $u \in ]0,1[$ , vem:

$$F_U(u) = P[X \leq F_X^{-1}(u)] = F_X[F_X^{-1}(u)] = u, \quad (5.5)$$

portanto, nas condições acima mencionadas o facto da variável aleatória  $U$  ser uniforme em  $]0,1[$  é equivalente à variável aleatória  $X$  ter função distribuição de probabilidade  $F_X$ . A aplicação deste método de geração depende essencialmente da função distribuição poder ser invertida analiticamente.

O emprego deste método vai ser exemplificado com a geração da lei exponencial. Seja  $X = \exp(\lambda)$ , isto é:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}, \quad (5.6)$$

o cálculo da função inversa resulta:

$$F_X^{-1}(u) = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(1-u) \quad \text{se } 0 < u < 1. \quad (5.7)$$

(iii) *transformação de uma distribuição uniforme em  $]0,1[$  numa distribuição normal - Método de Box-Müller*

Existem técnicas especializadas para gerar variáveis aleatórias para distribuições específicas que são mais eficientes computacionalmente que o método da transformação inversa. O método de *Box-Müller* é uma dessas técnicas específicas para gerar distribuições normais. Este método consiste numa transformação directa de duas variáveis,  $U_1$  e  $U_2$ , aleatórias independentes e uniformes em  $]0,1[$ , em duas variáveis,  $X_1$  e  $X_2$ , aleatórias independentes normais reduzidas ( $N(0,1)$ , média nula e variância unitária):

$$\begin{aligned} X_1 &= (-2 \cdot \ln U_1)^{1/2} \cdot \cos 2\pi U_2 \\ X_2 &= (-2 \cdot \ln U_1)^{1/2} \cdot \sin 2\pi U_2 \end{aligned} \quad (5.8)$$

Uma distribuição de variáveis aleatórias log-normalmente distribuídas pode ser obtida através das expressões (5.8), fazendo a seguinte transformação:  $Y_i = \ln X_i$ .

A adequação da simulação depende sobretudo da qualidade do gerador de números pseudo-aleatórios. Essa qualidade deve ser sempre assegurada através do emprego de testes estatísticos apropriados que permitam averiguar a independência entre as diferentes variáveis aleatórias e o ajuste às leis teóricas consideradas. Na secção 5.2.2.3 serão abordados os testes estatísticos utilizados para verificar o ajuste às leis teóricas e a verificação da independência através do cálculo dos coeficientes de correlação linear (ver secção 5.2.4.2).

A geração de variáveis aleatórias correlacionadas é feita de forma idêntica à geração de variáveis aleatórias independentes. O procedimento a utilizar consiste em definir uma variável auxiliar que traduza o grau de correlação entre as variáveis. Por exemplo, considerando  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias com distribuições normais e parâmetros:

$$\begin{aligned} X &\rightarrow N(\mu_X, \sigma_X) \\ Y &\rightarrow N(\mu_Y, \sigma_Y) \end{aligned} \quad (5.9)$$

sendo  $\mu$  e  $\sigma$  a média e o desvio padrão, respectivamente, com os índices a indicar a variável que lhe está associada. Suponha-se ainda que essas duas variáveis estão correlacionadas, sendo essa correlação definida pelo coeficiente  $\rho$  definido por:

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}} = \frac{E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}} \quad (5.10)$$

sendo  $E(X)$  e  $E(Y)$  as esperanças matemáticas (valores médios) das variáveis  $X$  e  $Y$ ,  $E(X \cdot Y)$  a esperança matemática do produto  $X \cdot Y$ ,  $V(X)$  e  $V(Y)$  as variâncias dessas variáveis e  $\text{cov}(X,Y)$  a respectiva covariância. Como usualmente, a simulação destas duas variáveis é realizada através da utilização de um gerador da lei normal reduzida  $N(0,1)$ , utilizando as variáveis  $\alpha$  e  $\beta$  de forma que:

$$\begin{aligned} X &= \mu_X + \alpha \sigma_X \\ Y &= \mu_Y + \beta \sigma_Y \end{aligned} \quad (5.11)$$

com  $\alpha \rightarrow N(0,1)$  e  $\beta \rightarrow N(0,1)$ .

Como o coeficiente de correlação não é alterado pela transformação de variáveis definida em (5.11), então o problema inicial é idêntico à definição de duas distribuições normais reduzidas com:

$$\rho_{\alpha,\beta} = \rho_{X,Y} = \rho \quad . \quad (5.12)$$

Para a geração das variáveis  $\alpha$  e  $\beta$  considere-se uma variável auxiliar  $\varepsilon$  definida da seguinte forma:

$$\beta = \alpha + \varepsilon \quad , \quad (5.13)$$

então o procedimento a utilizar consiste em definir uma distribuição normal reduzida para  $\alpha$  e uma distribuição normal para  $\varepsilon$  com parâmetros que, através da transformação (5.13), permitem obter uma distribuição normal reduzida para  $\beta$  com uma correlação  $\rho$  com  $\alpha$ . Nos parágrafos seguintes apresenta-se a determinação dos parâmetros da distribuição de  $\varepsilon$ .

Sabendo que (na hipótese de distribuições normais reduzidas):

$$\begin{aligned} E(\alpha) &= E(\beta) = 0 \\ V(\alpha) &= V(\beta) = 1 \end{aligned} \quad . \quad (5.14)$$

Substituindo na expressão (5.10) obtém-se o coeficiente de correlação entre as variáveis  $\alpha$  e  $\beta$  do seguinte modo:

$$\rho_{\alpha,\beta} = E(\alpha \cdot \beta) = \rho \quad . \quad (5.15)$$

Considerando (pela expressão (5.13)):

$$\varepsilon = \beta - \alpha \quad , \quad (5.16)$$

então, os parâmetros da variável  $\varepsilon$  são os seguintes:

$$E(\varepsilon) = E(\beta - \alpha) = E(\beta) - E(\alpha) = 0 \quad , \quad (5.17)$$

$$V(\varepsilon) = V(\beta - \alpha) = \frac{\sum_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i)^2}{n} - \left[ \frac{\sum_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i)}{n} \right]^2 =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sum_{i=1}^n \beta_i^2}{n} + \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2}{n} - 2 \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i}{n} - \left( \frac{\sum_{i=1}^n \beta_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i}{n} \right)^2 = \\
 &= 1 + 1 - 2 \cdot \rho - (0 - 0) = \\
 &= 2 - 2\rho \qquad ; \qquad \qquad \qquad (5.18)
 \end{aligned}$$

ou seja, a distribuição normal de  $\varepsilon$  é definida por:

$$\varepsilon \rightarrow N(0, \sqrt{2-2\rho}) \quad . \qquad \qquad \qquad (5.19)$$

Por exemplo se as variáveis  $\alpha$  e  $\beta$  forem completamente correlacionadas, (isto é,  $\rho=1$ ) então  $V(\varepsilon) = 2 - 2 \times 1 = 0$ , como seria esperado. Por outro lado, se  $\alpha$  e  $\beta$  forem independentes ( $\rho = 0$ ) então  $V(\varepsilon) = 2$ .

Sumariamente, o processo a utilizar para gerar duas variáveis aleatórias,  $X$  e  $Y$ , normais e correlacionadas, é o seguinte:

- i) gerar as duas variáveis aleatórias normais reduzidas  $\alpha$  e  $\delta$ ;
- ii) definir a variável:  $\varepsilon = \delta \cdot \sqrt{2-2\rho}$ ;
- iii) definir a variável:  $\beta = \alpha + \varepsilon$
- iv) definir as variáveis:  $X = \mu_X + \alpha \sigma_X$  e  $Y = \mu_Y + \beta \sigma_Y$

### 5.2.2.2 – Discretização do campo aleatório

Em problemas estruturais de betão armado, os materiais, a geometria e as acções apresentam, geralmente, uma variabilidade espacial, isto é, as respectivas variáveis aleatórias não apresentam um comportamento constante ao longo da estrutura. A consideração desta variabilidade espacial é, por isso, essencial na definição de um procedimento de avaliação da segurança.

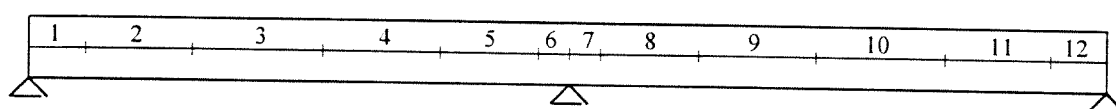
Tal como na técnica dos elementos finitos, a estrutura é discretizada em elementos. Cada um desses elementos apresenta diferentes características de variabilidade. A escolha apropriada de uma malha de elementos finitos e de uma malha para o campo aleatório é importante não só para traduzir adequadamente o comportamento estrutural e a variabilidade espacial, mas também para



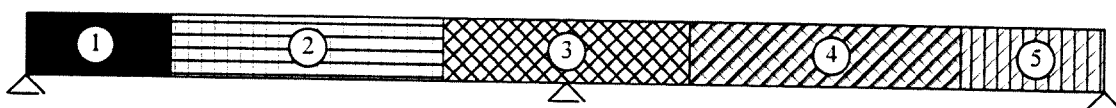
a eficiência do processo de cálculo. A discretização excessiva da variabilidade espacial implica a consideração de um grande número de variáveis aleatórias (uma por cada elemento) e, por consequência, um aumento do volume de cálculo.

Em muitas situações não é eficiente utilizar a mesma malha para os elementos finitos e para o campo aleatório, uma vez que os critérios de discretização são diferentes. Enquanto que para a malha de elementos finitos o tamanho dos elementos é controlado pelo gradiente de tensões esperado em cada região, para a malha de discretização do campo aleatório esse tamanho está associado com a flutuação das variáveis aleatórias ao longo da estrutura. Mesmo para o campo aleatório existem variáveis com flutuações diferenciadas sendo, nesses casos, conveniente utilizar diferentes discretizações consoante o tipo de variáveis aleatórias (Fig. 5.3).

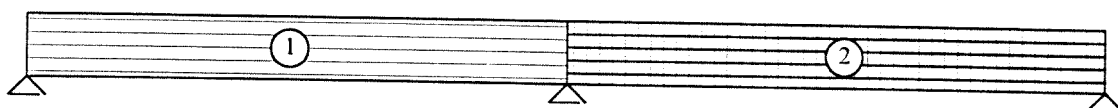
Existem vários métodos para representar campos aleatórios (Vanmarcke, 1983; Liu, 1989). Na presente metodologia a estrutura é dividida em vários elementos, de forma semelhante ao que é feito nos elementos finitos, com características aleatórias constantes dentro de cada elemento. Assim, a aleatoriedade no campo aleatório de um elemento é representado pela variável aleatória  $X_i$ , sendo  $X$  a variável aleatória de um certo tipo (de material, geometria ou ação) e  $i = 1, 2, \dots, n$  é o número do elemento da malha de discretização do campo aleatório.



a) malha de elementos finitos



b) discretização da variabilidade dos materiais ao longo da estrutura



c) discretização da variabilidade das ações verticais

Fig. 5.3 – Discretizações estruturais para diferentes fins.

### 5.2.2.3 – Verificação da modelação. Testes de hipóteses

A qualidade da simulação numérica, e por consequência do gerador pseudo-aleatório, é verificada através de testes. Estes testes podem ser divididos em duas classes: gráficos e numéricos.

Os testes gráficos consistem na representação das distribuições simuladas e das respectivas leis teóricas através de diagramas. Os casos mais simples consistem em traçar os histogramas e as curvas dos valores acumulados (Fig. 5.4), de forma a permitir a rápida visualização do ajuste por comparação com as curvas das respectivas leis teóricas. Estes testes são puramente qualitativos devendo por isso ser complementados por outras verificações. Existem outros tipos de testes gráficos que dão indicações mais precisas quanto ao ajuste. Geralmente, consistem na representação gráfica dos valores acumulados da distribuição simulada numa escala conveniente. Na Fig. 2.11 do Capítulo 2 indicam-se dois testes gráficos para distribuições normais e de extremos, respectivamente.

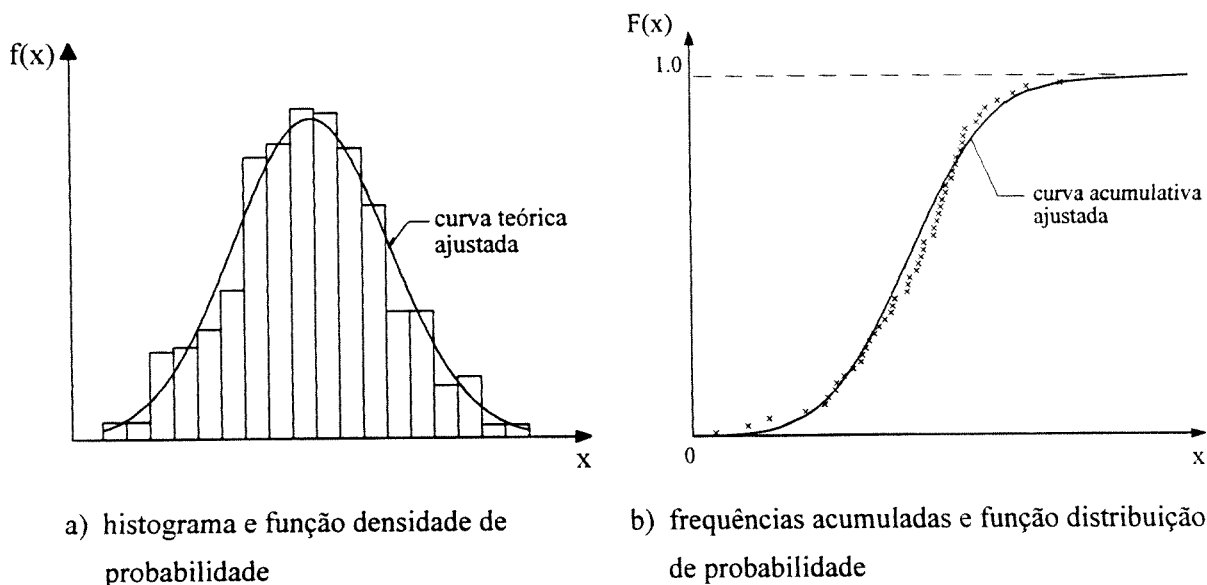


Fig. 5.4 – Testes de hipóteses baseados em representações gráficas.

Entre os testes de hipóteses numéricos, e sem pretender ser exaustivo, indicam-se os mais correntes (Aivazian, 1986): o teste de normalidade (aplicável somente a distribuições gaussianas) baseado nas estimativas dos coeficientes de assimetria,  $\hat{\gamma}_1$ , e de achatamento  $\hat{\gamma}_2$ , o teste do qui-quadrado, o teste de Kolmogorov-Smirnov e sua variante, o teste de Lilliefors (Lilliefors, 1967). O teste do qui-quadrado não é considerado no código computacional porque a

sua aplicação envolve a divisão dos valores observados em classes previamente definidas pelo utilizador. Assim, apesar das boas qualidades deste teste, a sua aplicação a numerosas variáveis tornava o processo de verificação pouco eficaz. Por sua vez, o teste de Kolmogorov-Smirnov só é aplicável se os parâmetros das leis teóricas não forem estimados com base nos valores observados. Como na presente metodologia esses parâmetros são obtidos através de estimação usando os valores observados (ou simulados) a aplicação deste teste não pode ser feita na versão original, sendo em contrapartida utilizada a versão modificada proposta por Lilliefors. Nos parágrafos seguintes apresenta-se os dois testes de hipóteses implementados no código computacional.

- *Teste de normalidade baseado nos coeficientes de assimetria e de achatamento*

A verificação aproximada das características gausseanas de uma distribuição observada (estatística) de uma variável aleatória é feita através de duas propriedades características da lei de distribuição normal: os coeficientes de assimetria,  $\gamma_1$ , e de achatamento  $\gamma_2$ , são nulos. Na prática, os valores estimados do coeficiente de assimetria,  $\hat{\gamma}_1(n)$ , e de achatamento,  $\hat{\gamma}_2(n)$ , estão inevitavelmente sujeitos a flutuações incontrolláveis da amostragem, por isso, não é possível exigir a igualdade a zero destes coeficientes. Assim, consideram-se aleatórios (não sistemáticos, ou seja, estatisticamente não significativos) os desvios em relação a zero dos valores de  $\hat{\gamma}_1(n)$  e  $\hat{\gamma}_2(n)$  não superior a uma vez e meia, ou duas vezes, os desvios padrão ( $\sigma_{\hat{\gamma}_1}$  e  $\sigma_{\hat{\gamma}_2}$ ) das características de amostragem correspondentes.

O procedimento de verificação da normalidade consiste nos seguintes passos:

1) estimativa dos coeficientes de assimetria,

$$\hat{\gamma}_1(n) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^3}{\left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2 \right]^{3/2}}, \quad (5.20)$$

e de achatamento,

$$\hat{\gamma}_2(n) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^4}{\left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2 \right]^2} - 3; \quad (5.21)$$

2) cálculo dos desvios padrão de  $\hat{\gamma}_1(n)$  e  $\hat{\gamma}_2(n)$ :

$$\sigma_{\hat{\gamma}_1} = \sqrt{\frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}} \quad , \quad (5.22)$$

$$\sigma_{\hat{\gamma}_2} = \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}} \quad ; \quad (5.23)$$

3) se forem verificadas as duas seguintes condições:

$$\left\{ \begin{array}{l} |\hat{\gamma}_1(n)| < 1.5\sigma_{\hat{\gamma}_1} \\ \left| \hat{\gamma}_2(n) + \frac{6}{n+1} \right| < 1.5\sigma_{\hat{\gamma}_2} \end{array} \right. \quad , \quad (5.24)$$

aceita-se a hipótese de normalidade da variável aleatória; se, pelo contrário, uma das seguintes condições :

$$\left\{ \begin{array}{l} |\hat{\gamma}_1(n)| \geq 2.0\sigma_{\hat{\gamma}_1} \\ \left| \hat{\gamma}_2(n) + \frac{6}{n+1} \right| \geq 2.0\sigma_{\hat{\gamma}_2} \end{array} \right. \quad , \quad (5.25)$$

se verifica, rejeita-se a hipótese de normalidade; nos restantes casos será necessário fazer uma verificação complementar usando testes mais rigorosos (como aquele que a seguir se apresenta).

- *Teste de Kolmogorov-Smirnov modificado – versão proposta por Lilliefors (1967)*

O presente teste consiste em verificar o ajuste da distribuição estatística da variável aleatória  $X$  a uma lei teórica de distribuição de qualquer tipo. Baseia-se no estudo estatístico das diferenças  $F(x) - F^*(x)$ , sendo  $F^*(x)$  a distribuição estatística (caracterizada pelos valores acumulados das frequências dos valores observados) da variável aleatória  $X$  e  $F(x)$  a função de distribuição da lei teórica a testar.

O procedimento de verificação do ajuste consiste nos seguintes passos:

- 1) ordenação (em forma crescente) dos  $n$  valores observados  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ;
- 2) cálculo das frequências acumuladas,  $F^*(x_i)$ , e da função distribuição da lei teórica considerada,  $F(x_i)$ , para todos os  $n$  valores;
- 3) cálculo do valor absoluto da máxima diferença:

$$D_n = \max_{1 \leq i \leq n} |F(x_i) - F^*(x_i)| \quad ; \quad (5.26)$$

4) cálculo do coeficiente de distribuição de  $\tilde{D}_n$  :

$$\tilde{D}_n = D_n(\sqrt{n} + 0.12 + 0.11/\sqrt{n}) \quad ; \quad (5.27)$$

5) verificação do ajuste através do cálculo da probabilidade (ver valores no Quadro 5.1):

$$P(\tilde{D}_n < \lambda) = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 \lambda^2} \quad . \quad (5.28)$$

Se  $P(\tilde{D}_n < \lambda) \leq \alpha$ , sendo  $\alpha$  o nível de significância exigido, rejeita-se a hipótese da lei teórica proposta, caso contrário aceita-se. Valores para  $\alpha$  da ordem de 0.05 são comuns para este tipo de teste.

Quadro 5.1 – Probabilidade do afastamento máximo entre  $F^*(x)$  e  $F(x)$  devido aos factores aleatórios seja não inferior ao valor observado.

$\tilde{D}_n$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	
$P(\tilde{D}_n < \lambda)$	1.000	1.000	1.000	1.000	0.997	0.964	0.864	0.711	0.544	0.393	
$\tilde{D}_n$	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
$P(\tilde{D}_n < \lambda)$	0.270	0.178	0.112	0.068	0.040	0.022	0.012	0.006	0.003	0.002	0.001

### 5.2.3 – Análise estrutural

A avaliação adequada da segurança estrutural depende essencialmente do grau de precisão da estimativa da resposta estrutural às acções aplicadas, ou seja, do modelo de análise estrutural. De facto, não basta a utilização de técnicas que permitam simular correctamente a variabilidade envolvida neste tipo de problemas. Se estas forem associadas a métodos que prevêm de forma deficiente o comportamento estrutural dificilmente se conseguirá obter avaliações satisfatórias da segurança, nomeadamente em estruturas com padrões pouco correntes. A utilização de métodos de análise estrutural que tenham em conta de forma adequada o comportamento não linear das estruturas de betão permitem uma avaliação mais efectiva da segurança.

A presente metodologia consiste na realização de várias análises determinísticas, levadas a cabo para séries de parâmetros gerados de acordo com as suas distribuições de probabilidade. Desta

forma, os modelos de análise apoiados na técnica dos elementos finitos, descritos anteriormente, são perfeitamente adaptáveis a este processo sem praticamente nenhuma alteração. Uma vez que esta metodologia envolve uma série de análises determinísticas, as principais implementações a realizar consistem em melhorar a eficiência do processo de cálculo e criar interfaces adequadas entre o modelo de análise estrutural e as técnicas de simulação estocástica e de tratamento estatístico dos resultados.

Como se tem vindo a verificar, esta metodologia é perfeitamente adaptável a qualquer tipo de problemas estruturais e, portanto, qualquer modelo estrutural pode ser utilizado. Será dado especial destaque à consideração dos modelos não lineares de comportamento dos materiais (descritos no Capítulo 4) apoiados na técnica dos elementos finitos (abordada no Capítulo 3). Pretende-se desta forma associar uma ferramenta poderosa para a análise de estruturas de betão, desde as mais simples às mais complexas, com as técnicas de análise probabilística.

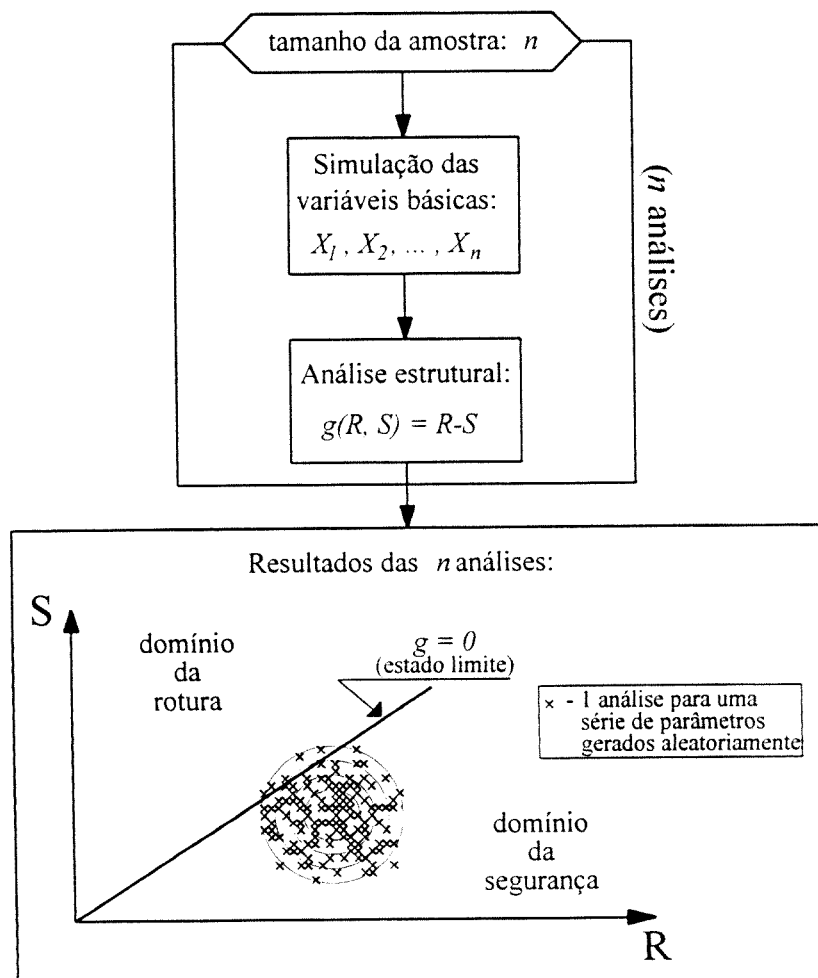


Fig. 5.5 – Resultados de uma série de análises no espaço  $R-S$ .

O objectivo principal deste módulo é definir a função  $g$  (ver expressão 5.1) que permite definir, numa fase posterior, a margem de segurança. Na definição dessa função é tido em conta a variabilidade dos materiais, da geometria e das acções, simulada através das técnicas descritas anteriormente. A função  $g$ , associada a um determinado estado limite, pode ser descrita de uma forma simplificada por (Fig. 5.5):

$$g(R, S) = R - S \quad , \quad (5.29)$$

sendo  $S$  o conjunto das acções aplicadas, correspondente ao estado limite em causa, e  $R$  a consequente resposta estrutural avaliada pelo modelo de análise estrutural. O estado limite é identificado pela igualdade  $g(R, S) = 0$ . Os estados de segurança e de rotura são atingidos quando a função  $g$  toma valores positivos,  $g(R, S) > 0$ , e negativos,  $g(R, S) < 0$ , respectivamente.

## 5.2.4 – Análise estatística da resposta. Avaliação da segurança

### 5.2.4.1 – Considerações iniciais

Esta secção descreve os procedimentos adoptados no tratamento estatístico dos resultados das análises efectuadas no módulo anterior. Este tratamento visa essencialmente a quantificação da margem de segurança e a avaliação da sensibilidade da resposta estrutural às variáveis básicas geradas. Assim, o tratamento estatístico é realizado em duas fases:

- Análise de sensibilidade para avaliar o efeito da variabilidade das variáveis básicas no comportamento global da estrutura. Esta análise consiste no estudo da dependência multilinear da resposta estrutural com as variáveis básicas, baseado na aplicação do método dos mínimos quadrados.
- Estudo da distribuição da resposta estrutural e quantificação da probabilidade de rotura associada a um determinado estado limite ou, inversamente, definir a resposta estrutural admissível fixando a probabilidade de rotura.

As técnicas utilizadas introduzem implementações ao método de Monte Carlo original, de forma a torná-lo mais eficiente sem, no entanto, perder o seu rigor. A eficiência é conseguida através do controlo adequado da precisão do ciclo iterativo que envolve sucessivas simulações (ver Fig. 5.1). A quantificação dessa precisão é feita através da avaliação dos erros de estimação dos coeficientes de regressão das variáveis básicas mais importantes (aquelas que mais afectam a variabilidade da resposta estrutural).

Será ainda destacada a possibilidade de reavaliação da segurança de uma forma rápida e eficiente, nos casos em que os valores obtidos na obra diferem daqueles previstos no projecto.

#### **5.2.4.2 – Análise de sensibilidade e estimação de erros**

O estudo da dependência multilinear entre as variáveis aleatórias envolvidas consiste numa análise de correlação – regressão e baseia-se na aplicação do método nos mínimos quadrados (Aivazian, 1978). Divide-se nas seguintes etapas (Fig. 5.6):

- cálculo das correlações entre a resposta estrutural (obtida da análise estrutural das amostras simuladas) e as variáveis aleatórias básicas (obtidas por simulação estocástica);
- identificação das variáveis básicas mais correlacionadas com a resposta estrutural, permitindo avaliar a sensibilidade da estrutura em relação aos vários parâmetros considerados;
- definição de um modelo de regressão multilinear em função de um número restrito de variáveis (aquelas que apresentam correlação significativa com a resposta da estrutura);
- avaliação dos resíduos entre o modelo de regressão e os valores obtidos directamente da análise estrutural, nomeadamente, o tipo de distribuição e a grandeza do erro desse modelo de regressão;
- quantificação dos erros associados aos coeficientes do modelo de regressão adoptado;
- avaliação da precisão do modelo de regressão e consequente decisão sobre a necessidade, ou não, de aumentar o número de amostras a analisar.

Este processo apresenta dois aspectos que interessa destacar na aplicação a problemas de estruturas:

- 1 – permite definir as principais causas que condicionaram a rotura, através da identificação das variáveis com maior correlação com a rotura e das zonas onde elas se situam (se for considerada variabilidade espacial);
- 2 – fornece um modelo simples de regressão em função de um número restrito de variáveis (as mais correlacionadas com a rotura), permitindo fazer facilmente uma



reavaliação do parâmetro de rotura para diferentes valores das variáveis básicas e consequentemente o novo grau de segurança.

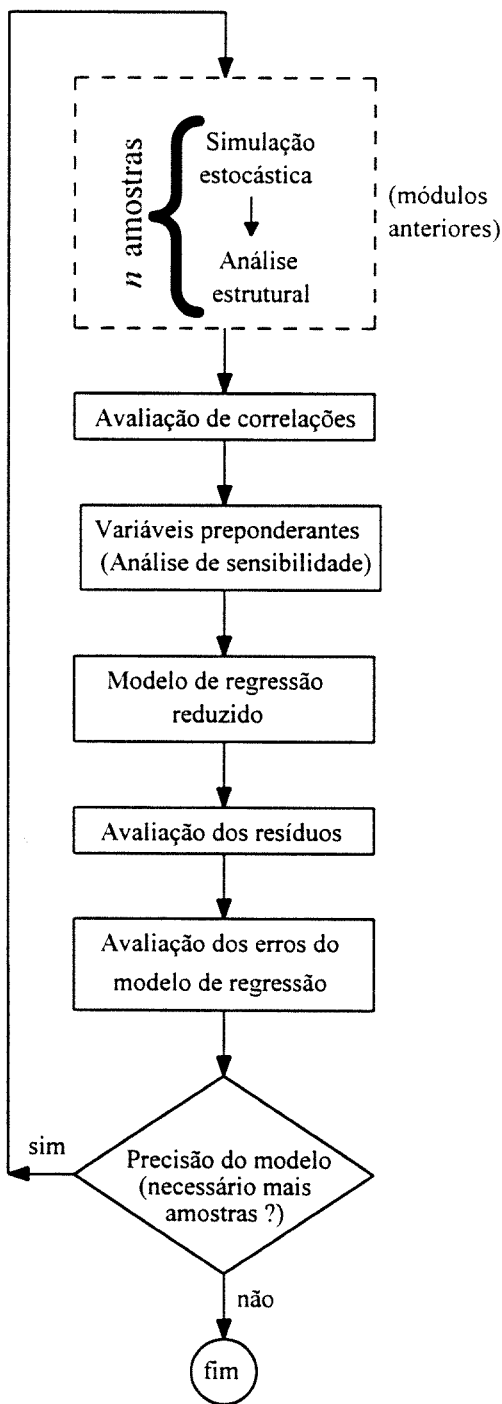


Fig. 5.6 – Etapas da análise de correlação-regressão.

Nos parágrafos seguintes apresenta-se de uma forma detalhada as etapas referidas anteriormente e ilustradas na Fig. 5.6, assim como as formulações matemáticas envolvidas.

- *Avaliação de correlações e identificação das variáveis preponderantes – aplicação do método dos mínimos quadrados*

O cálculo das correlações entre a resposta estrutural,  $R$ , e as variáveis aleatórias básicas,  $X$ , é efectuada através da aplicação directa do método dos mínimos quadrados. Assim, considera-se por hipótese um modelo de regressão multilinear do tipo:

$$R^c = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_p X_p \pm \varepsilon_R \quad , \quad (5.30)$$

em que  $R^c$  representa a resposta estrutural estimada pelo modelo de regressão,  $X_i$  são as variáveis aleatórias básicas,  $a_i$  são os coeficientes numéricos associados às variáveis  $X_i$ ,  $\varepsilon_R$  é o erro associado às estimativas deste modelo e  $p$  é o número de variáveis  $X_i$ .

Uma vez que os resultados da análise estrutural representados em gráficos do tipo  $R = f(X_i)$  correspondem, geralmente, a uma nuvem de pontos (Fig. 5.7), há necessidade de ajustar uma função analítica que melhor represente essa relação. Para isso, é preciso definir critérios apropriados para obter uma função adequada. Os critérios adoptados resultam da aplicação do método dos mínimos quadrados. Assim, dada uma forma analítica previamente fixada (equação 5.30), a superfície que melhor se adapta à nuvem de pontos dada é aquela que minimiza os afastamentos desses pontos à superfície (Fig. 5.7), isto é:

$$\min Q^2 \quad , \quad (5.31a)$$

$$Q^2 = \sum_{i=1}^n (R_i^o - R_i^c)^2 = \sum_{i=1}^n \left[ R_i - (a_0 + a_1 X_{1i} + a_2 X_{2i} + \dots + a_p X_{pi}) \right]^2 \quad , \quad (5.31b)$$

sendo  $R^o$  a resposta obtida na análise estrutural das  $n$  amostras consideradas na simulação.

Os coeficientes referidos em (5.30) são obtidos através do critério definido em (5.31). Para minimizar a função  $Q^2$  basta derivá-la em ordem a cada um dos parâmetros  $a_i$ , igualar a zero e resolver o seguinte sistema de  $p + 1$  equações às  $p + 1$  incógnitas  $a_i$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial Q^2}{\partial a_0} = 0 \\ \frac{\partial Q^2}{\partial a_k} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^n X_{1i} + a_2 \sum_{i=1}^n X_{2i} + \dots + a_p \sum_{i=1}^n X_{pi} = \sum_{i=1}^n R_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n X_{ki} + a_1 \sum_{i=1}^n X_{1i} X_{ki} + a_2 \sum_{i=1}^n X_{2i} X_{ki} + \dots + a_p \sum_{i=1}^n X_{pi} X_{ki} = \sum_{i=1}^n R_i X_{ki} \end{cases} \quad . \quad (5.32)$$

A resolução do sistema de equações (5.32) permite obter o modelo de regressão multilinear para as  $p$  variáveis envolvidas.

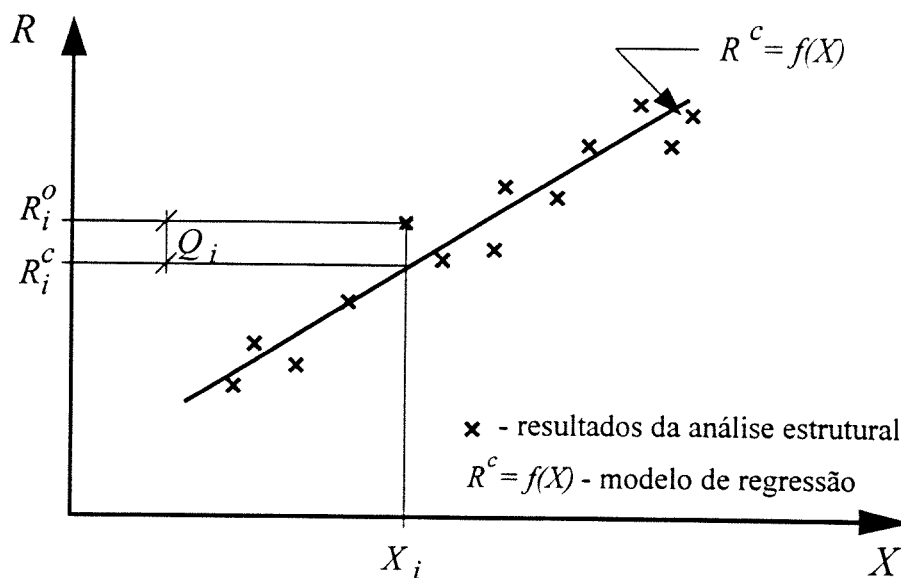


Fig. 5.7 – Ajuste de uma função de uma variável pelo método dos mínimos quadrados.

A correlação entre a resposta estrutural e as  $p$  variáveis consideradas no modelo de regressão (5.30) é quantificada através do coeficiente de correlação,  $r$ , obtido da seguinte forma:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (R_i^o - R_i^c)^2}{n} \quad (a) , \quad s_{corr}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (R_i^o - R_i^c)^2}{n - p - 1} \quad (b) ,$$

$$\sigma_{resid}^2 = s_{corr}^2 \quad (c) , \quad r^2 = \frac{\sigma^2 - s^2}{\sigma^2} \quad (d) ,$$
(5.33)

onde  $n$  é o tamanho da amostra,  $p$  é o número de parâmetros estimados e corresponde ao número de variáveis  $X_i$  consideradas no modelo (sendo  $n - p - 1$  denominado por graus de liberdade estatísticos),  $s_{corr}^2$  é a variância residual e  $\sigma^2$  é a variância de  $R^o$ .

Utilizando as expressões (5.30), (5.32) e (5.33) é possível obter a correlação da resposta estrutural,  $R$ , com qualquer número de variáveis  $X_i$ . Assim, para obter o coeficiente de correlação linear entre  $R$  e uma variável genérica  $X_k$ , considera-se a seguinte função:

$$R^c = a_0 + a_k X_k \quad , \quad (5.34)$$

determina-se os valores dos coeficientes  $a_0$  e  $a_k$  pela expressão (5.32) e obtém-se o grau de correlação,  $r_k$ , pela expressão (5.33). Repetindo este procedimento para todas as variáveis básicas consideradas no problema, é possível quantificar a correlação de  $R$  com cada uma das  $X_i$  variáveis, através dos coeficientes  $r_i$ , com  $i = 1, 2, \dots, p$ .

O conhecimento dos coeficientes  $r_i$  permite averiguar quais as variáveis  $X_i$  mais correlacionadas com  $R$ , isto é, as variáveis cuja variabilidade mais condiciona o comportamento estrutural e aquelas que não têm influência significativa. Ou seja, com este processo é possível medir a sensibilidade da estrutura em relação aos parâmetros que condicionam o seu comportamento.

- *Modelo de regressão reduzido*

É possível definir um modelo de regressão do tipo expresso em (5.30) considerando somente as variáveis preponderantes, isto é, aquelas que apresentam correlações significativas com a resposta estrutural. A escolha das variáveis na regressão é efectuada conservando a máxima correlação possível, tendo em conta que:

- i) são eliminadas as variáveis cuja correlação com o parâmetro de rotura seja inferior a um valor previamente fixado;
- ii) eliminam-se as variáveis com grande correlação directa com as variáveis eliminadas no passo anterior; e,
- iii) das restantes, vão sendo eliminadas as variáveis (por ordem de correlação) enquanto se mantiver próxima da máxima possível.

Considera-se que a máxima correlação possível é aquela que se obtém considerando todas as variáveis básicas. Refira-se ainda que o ponto ii) não faz sentido se as variáveis aleatórias básicas forem todas independentes entre si. Na Fig. 5.8 apresenta-se esquematicamente o procedimento utilizado e que é baseado nos três pontos referidos anteriormente.

O objectivo deste estudo é definir as variáveis cujos coeficientes têm que ser controlados de forma a definir a precisão do método. Permite ainda a reavaliação da segurança de uma forma rápida utilizando este modelo simples em função de um número restrito de variáveis.

- *Avaliação dos resíduos, dos erros e da precisão do modelo de regressão*

Os resíduos,  $Q$  (ver expressão 5.31b), entre o modelo de regressão definido com base nas variáveis preponderantes e os valores obtidos directamente da análise estrutural, devem ser sempre adequadamente analisados (Tomassone, 1983). O estudo da distribuição desses resíduos permite averiguar a existência de correlação não linear. Uma vez que o modelo de regressão é multilinear, a existência de uma distribuição de resíduos francamente não simétrica em relação à origem ( $Q = 0$ ) indica a existência de correlações não lineares significativas (Fig. 5.9).

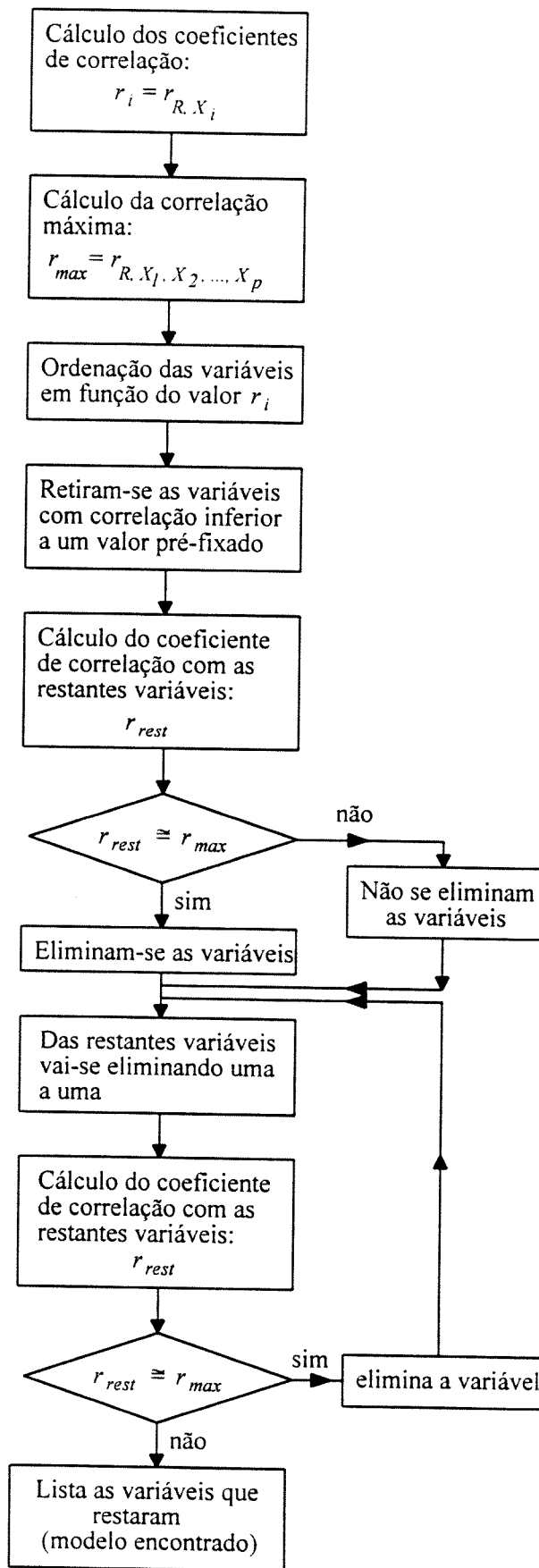
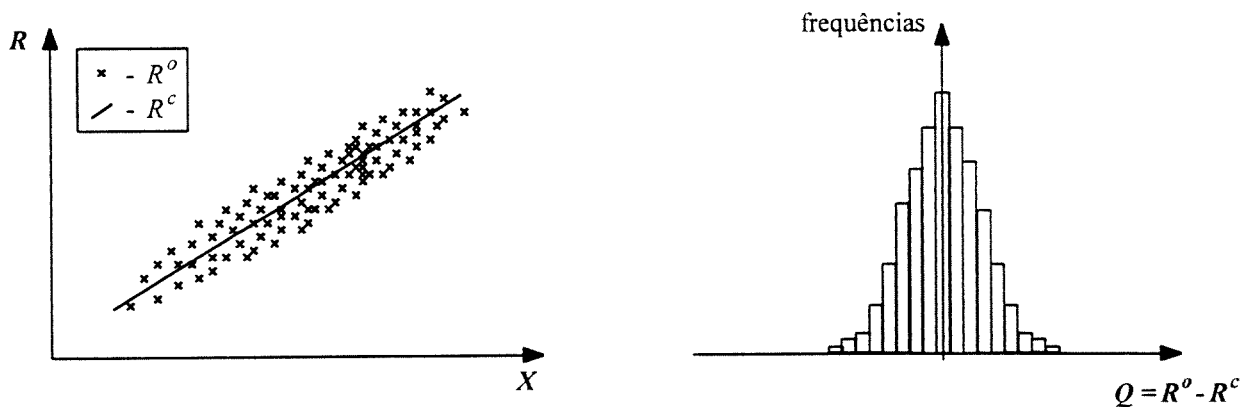
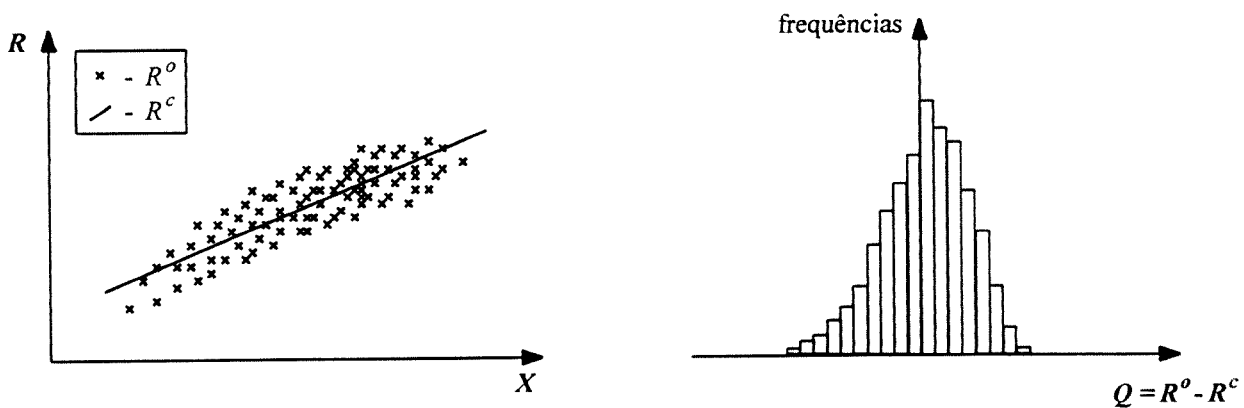


Fig. 5.8 – Escolha de variáveis na regressão.



a) Correlações lineares



b) Correlações não lineares

Fig. 5.9 – Averiguação sobre o tipo de correlação através do estudo da distribuição dos resíduos (para uma função de uma variável).

O erro de um modelo de regressão,  $\varepsilon_R$  (ver expressão 5.30), é estimado pela seguinte expressão (Tomassone, 1983):

$$\varepsilon_R = \sqrt{1-r^2} \cdot \sigma_Q \quad , \quad (5.35)$$

assumindo uma distribuição normal para os resíduos,  $Q$ , sendo  $r$  o coeficiente de correlação determinado por (5.33d) e  $\sigma_Q$  é o desvio padrão dos resíduos. A normalidade dos resíduos deve ser sempre verificada.

Os erros associados à estimativa dos coeficientes  $a_i$  do modelo de regressão são calculados, sob a hipótese de normalidade e independência, por (Tomassone, 1983):

$$\sigma^2(a_i) = \frac{\overline{\sigma}_Q^2}{n^2 \cdot S_{X_i}^2} \quad , \quad (5.36)$$

onde  $s_{X_i}^2$  é a variância amostral da variável aleatória genérica  $X_i$  e  $\bar{\sigma}_Q^2$  é a variância dos resíduos, tomada como estimativa não enviesada de  $\sigma_Q^2$ :

$$\bar{\sigma}_Q^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (R_i^0 - R_i^c)^2}{n - (p + 1)} \quad (5.37)$$

Os erros estimados pela expressão (5.36) permitem avaliar a precisão do modelo de regressão e servir como base à definição de um critério de paragem do método de simulação. Assim, quando os erros  $\sigma(a_i)$  forem inferiores a uma tolerância previamente definida, o processo de simulação pára (ver Fig. 5.10). Este procedimento torna a aplicação do método de Monte Carlo mais eficaz do que a formulação original. Tomando como exemplo o estudo de uma viga bi-encastrada em relação a situações de colapso e tendo em conta a variabilidade dos materiais, a Fig. 5.11 mostra a evolução dos coeficientes  $a_i$  do modelo de regressão, obtido de acordo com as condições definidas no ponto anterior, em relação ao tamanho da amostra. Se pretender avaliar a capacidade última para uma probabilidade de rotura,  $P_f$ , da ordem de  $10^{-4}$ , de acordo com a formulação de Monte Carlo original seria necessário realizar o seguinte número,  $N$ , de simulações (Broding, 1964):

$$N > \frac{-\ln(1 - C)}{P_f} \quad (5.38)$$

para um dado nível de confiança  $C$ . Ou seja, para  $C = 95\%$  e  $P_f = 10^{-4}$  seriam necessárias 30.000 simulações. Outros autores sugerem valores da ordem de  $10 / P_f$ , ou seja, 100.000 simulações. Para este exemplo verifica-se (Fig. 5.11) que para um tamanho da amostra entre 500 e 1000 os coeficientes  $a_i$  do modelo de regressão estabilizam não sendo, por isso, necessário considerar mais simulações.

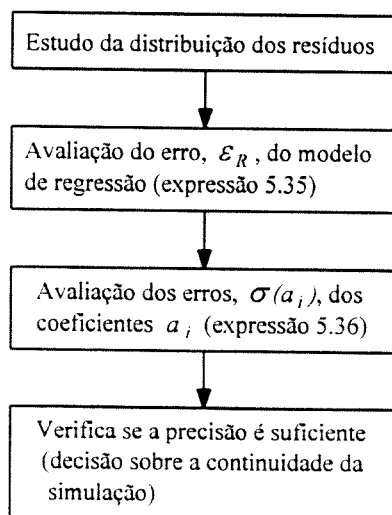


Fig. 5.10 – Estudo dos resíduos e verificação da precisão do modelo de regressão.

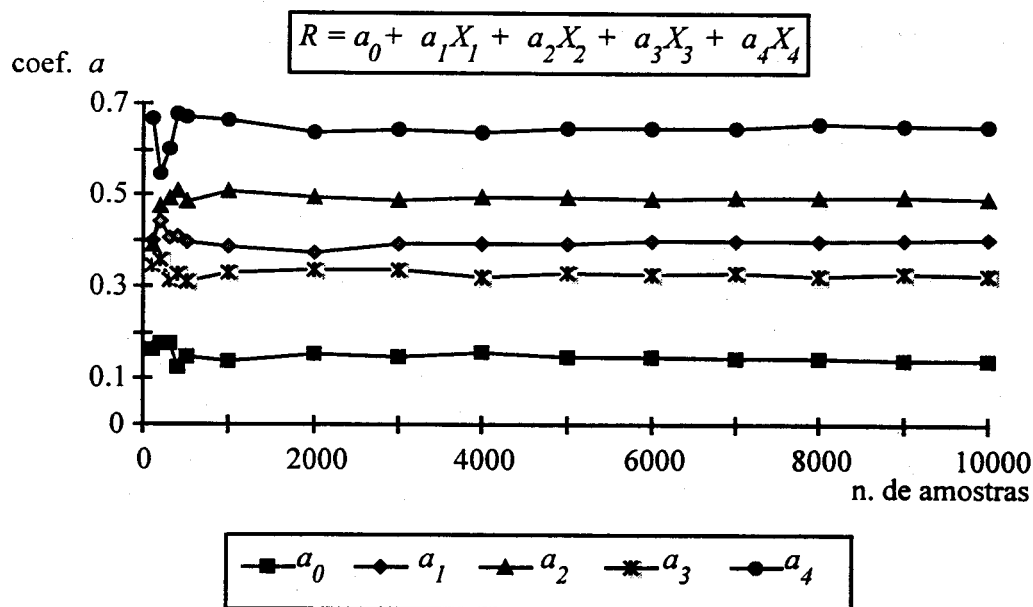


Fig. 5.11 – Variação dos coeficientes do modelo de regressão com o tamanho da amostra. Exemplo estudado.

### 5.2.4.3 – Quantificação da segurança estrutural

A segurança estrutural é quantificada através da probabilidade de ocorrência de um estado limite previamente definido (designada vulgarmente por probabilidade de rotura).

Na abordagem probabilística de avaliação da segurança estrutural, distinguem-se dois tipos de problemas:

- *Problema directo*: avaliação da probabilidade de rotura associada, geralmente, um determinado nível de carregamento.
- *Problema inverso*: avaliação do parâmetro de rotura admissível (por exemplo, carga de colapso para um estado limite último, ou deslocamento para um estado limite de deformação) dada uma probabilidade de rotura.

A estratégia utilizada para resolver estes tipos de problemas encontra-se esquematizada na Fig. 5.12 e descreve-se de forma mais detalhada nos parágrafos seguintes.



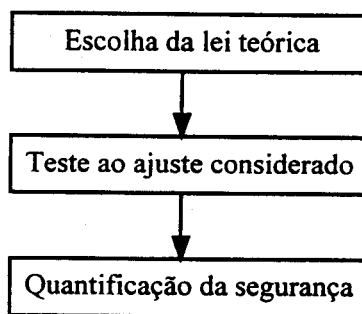


Fig. 5.12 – Estratégia adoptada na quantificação da segurança estrutural.

- *Escolha da lei teórica*

A quantificação da segurança é obtida aproximando previamente uma lei teórica de probabilidade à distribuição observada (obtida da análise estrutural). Essa aproximação deverá privilegiar a zona das probabilidades pequenas, comuns em problemas estruturais (Fig. 5.13). A representação gráfica da distribuição observada através de histogramas e curvas cumulativas de frequência (ver Fig. 5.4) é uma ajuda preciosa na escolha da distribuição teórica de entre as várias leis disponíveis.

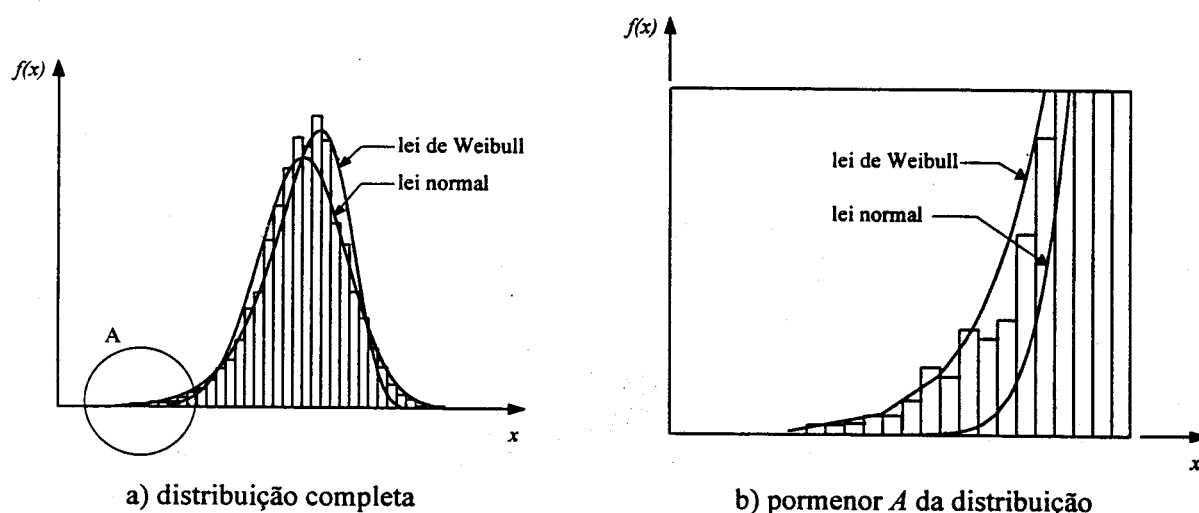


Fig. 5.13 – Ajuste de leis teóricas às distribuições observadas.

Uma vez feita a escolha a estimativa dos parâmetros é realizada através do cálculo de medidas estatísticas como a média, a variância e outros momentos de ordem superior. Por exemplo, a lei normal é caracterizada somente por dois parâmetros: a média e o desvio padrão (ou variância). A estimativa destas duas medidas através dos valores observados,

– Média (ou esperança matemática): 
$$E(X) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \quad , \quad (5.39)$$

– Variância:  
(desvio padrão:  $\sigma = \sqrt{V(X)}$ ) 
$$V(X) = \frac{\sum_{i=1}^n [X_i - E(X)]^2}{n-1} \quad , \quad (5.40)$$

permite definir rapidamente a respectiva lei normal.

• *Teste ao ajuste da lei teórica à distribuição observada*

Uma vez escolhida e caracterizada a lei teórica é testado o ajuste à distribuição observada, com especial atenção à zona onde ocorre a rotura (valores com pequena probabilidade). Os testes de hipóteses utilizados são aqueles descritos na secção 5.2.2.3, destacando-se o teste de Lilliefors pelo seu rigor e facilidade de utilização em aplicações computacionais.

• *Quantificação da segurança*

A quantificação da segurança consiste essencialmente em operar com a função de distribuição de probabilidade,  $F_R(r)$ , perfeitamente definida nos dois pontos anteriores. Assim, consoante o problema a resolver a segurança é quantificada do seguinte modo:

– *Problema directo:*

$$P_f = F_R(r_d) \quad , \quad (5.41)$$

sendo  $r_d$  o nível de carregamento exigido. Se a lei a considerar for gausseana, a probabilidade de rotura é avaliada da seguinte forma:

$$\beta = \frac{r_d - \mu}{\sigma} \quad , \quad (5.42a)$$

$$P_f = \Phi(\beta) \quad , \quad (5.42b)$$

sendo  $\mu$  e  $\sigma$  os parâmetros da lei normal (média e desvio padrão, respectivamente),  $\beta$  é a variável reduzida normal também, correntemente, designada por índice de fiabilidade e  $\Phi$  é a função de distribuição de probabilidade da lei normal reduzida.

– *Problema inverso:*

$$r_d = F_R^{-1}(P_f) \quad , \quad (5.43)$$

onde  $r_d$  é o parâmetro de rotura admissível. Se a lei teórica for gausseana, a avaliação desse parâmetro é realizada da seguinte maneira:

$$\beta = 1 - \Phi^{-1}(P_f) \quad , \quad (5.44a)$$

$$r_d = \mu - \beta \cdot \sigma \quad . \quad (5.44b)$$

Quando a distribuição é descrita não somente por uma lei teórica mas por uma composição de diferentes leis teóricas (Fig. 5.14), a avaliação da segurança é feita do seguinte modo:

– *Problema directo:*

$$P_f = \max\{\alpha_1 P_{f1}, \alpha_2 P_{f2}, \dots, \alpha_n P_{fn}\} \quad \text{com} \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1 \quad , \quad (5.45)$$

sendo  $P_{f_i}$  a probabilidade de rotura associada à lei teórica correspondente ao modo de rotura  $i$  e  $\alpha_i$  é o peso desse modo na distribuição total.

– *Problema inverso:*

$$r_d = \min\left\{F_R^{-1}\left(\frac{P_{f1}}{\alpha_1}\right), F_R^{-1}\left(\frac{P_{f2}}{\alpha_2}\right), \dots, F_R^{-1}\left(\frac{P_{fn}}{\alpha_n}\right)\right\} \quad \text{com} \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1 \quad , \quad (5.46)$$

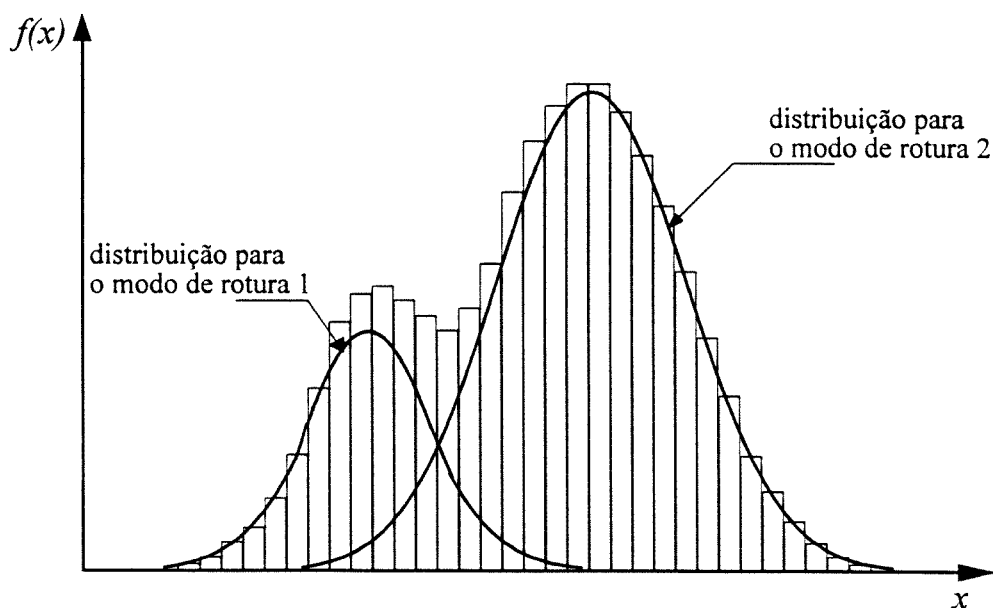


Fig. 5.14 – Distribuição descrita por uma composição de leis teóricas.

### 5.2.5 – Implementação computacional

A implementação da presente metodologia num código computacional consiste em combinar técnicas estocásticas e estatísticas com técnicas de elementos finitos. O desenvolvimento do programa de cálculo automático obedeceu a quatro princípios fundamentais, por ordem decrescente de importância: o rigor, a eficiência, a modularidade e a generalidade. Deu-se especial atenção ao rigor tanto no estudo do comportamento de estruturas de betão, através de comparações com vários resultados experimentais, como no efeito desse comportamento não linear na avaliação da segurança, através de uma abordagem probabilística elaborada. A eficiência tanto no tempo de computação como na armazenagem de variáveis, mereceu especial atenção. Utilizar a memória disponível e evitar guardar variáveis em disco foram opções que melhoraram significativamente a eficiência, tornando o processo de cálculo mais rápido. Em várias situações o rigor mostrou ser contrário à procura da eficácia, nomeadamente, o processo de simulação que exige várias análises estruturais para avaliar a segurança. Nesta metodologia, em situações de confronto entre rigor e eficiência privilegiou-se a primeira. A modularidade do código computacional é essencial para a sua manutenção e para a realização de futuras implementações. A investigação tanto nos modelos de análise estrutural como nos métodos de fiabilidade não se esgota com a conclusão do presente trabalho. Por isso, é importante manter o código preparado para a introdução de novas implementações simultaneamente nos dois campos de investigação, análise e fiabilidade, ou num deles isoladamente. Assim, o código está estruturado de modo que seja possível desenvolver e implementar ou alterar uma subrotina ou um novo método computacional de fiabilidade sem ter que alterar significativamente o segmento principal do programa (como se irá constatar na secção 5.3). Desta forma permite-se também a extensão a outros problemas de engenharia civil através da substituição do módulo correspondente à análise estrutural.

O código computacional baseado na presente metodologia encontra-se dividido em dois segmentos principais:

- *Processamento de informação*: este é o segmento que tem o peso mais importante no que diz respeito ao volume de cálculo e ao tempo de computação. A sua função principal é a obtenção da distribuição da resposta estrutural do problema em estudo. Envolve a leitura de toda a informação relativa a esse problema, a geração de amostras através de técnicas estocásticas descritas, a análise estrutural dessas amostras e o estudo de correlação-regressão que permite avaliar a precisão do método à medida que o tamanho da amostragem cresce.

- *Pós-processamento*: este segmento tem como objectivo principal quantificar a segurança estrutural através do tratamento estatístico da distribuição da resposta estrutural obtida no segmento anterior.

Nas Figs. 5.15 e 5.16 apresenta-se a estruturação dos dois segmentos, com a indicação da ordem de execução dos diferentes módulos. No segmento correspondente ao processamento da informação as subrotinas correspondentes às técnicas estocásticas e estatísticas não chamam as subrotinas correspondentes à análise por elementos finitos e vice-versa. A interface entre essas subrotinas é feita através da transferência de valores usando variáveis adequadas. Esta característica torna o programa bastante flexível, sendo a introdução de modificações uma operação fácil.

- *Descrição do segmento de processamento da informação*

Este segmento é composto por três grupos principais: a simulação estocástica para gerar as amostras, a análise estrutural para calcular as respostas estruturais das amostras geradas e a análise de correlação-regressão para avaliar a precisão obtida da amostragem. Seguidamente descreve-se os módulos ilustrados na Fig. 5.15.

No módulo da definição do problema, o programa faz a leitura dos seguintes dados: geometria da malha de elementos finitos, parâmetros que caracterizam o comportamento mecânico dos materiais, ligações ao exterior, acções exteriores e de pré-esforço, variáveis aleatórias básicas que caracterizam a variabilidade estrutural incluindo a discretização do campo aleatório, os parâmetros que caracterizam as distribuições das variáveis aleatórias e outros dados menores.

No módulo seguinte guarda-se no disco os dados relativos à discretização do campo aleatório e os parâmetros das distribuições para serem utilizados no segmento de pós-processamento.

Antes de se iniciar a geração das amostras, define-se a condição inicial ("semente") para a sequência de números pseudo-aleatórios fornecida pelo computador. A escolha da "semente" pode ser feita automaticamente utilizando, por exemplo, o indicador dos minutos e dos segundos fornecido também pelo computador, ou pelo utilizador permitindo a reconstituição completa de uma sequência anterior. Este processo, vulgarmente denominado por "aquecimento do gerador", consiste em gerar uma série de números da sequência até ser atingida a "semente", sendo esta o ponto de partida para a geração das amostras.

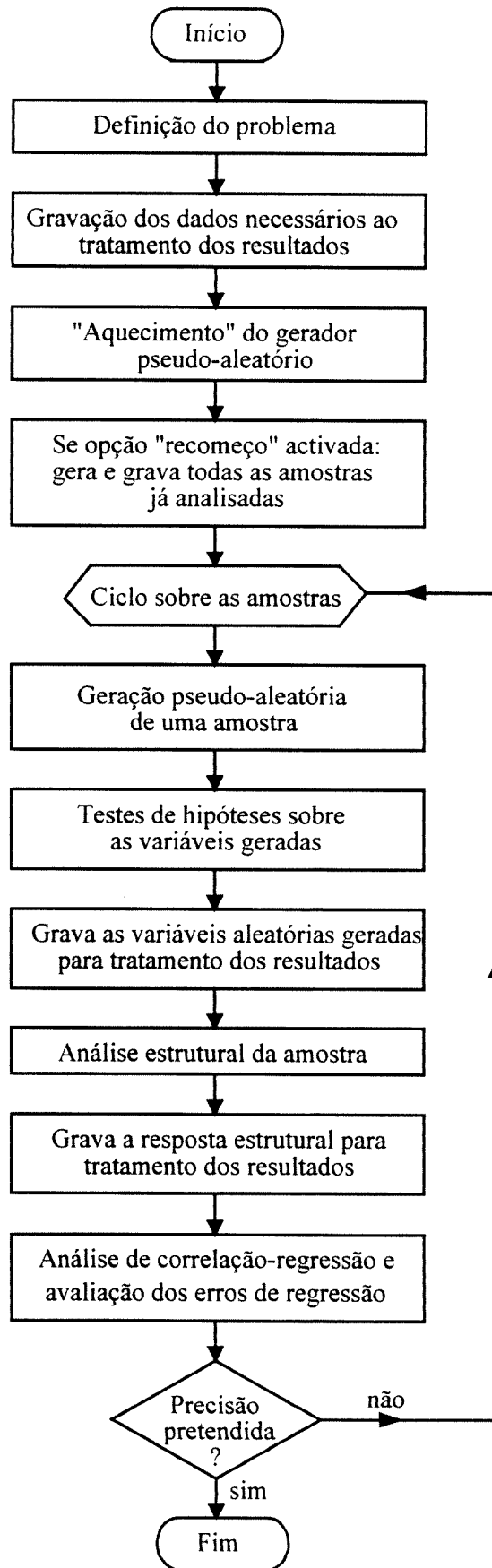


Fig. 5.15 – Estrutura do segmento de processamento da informação.

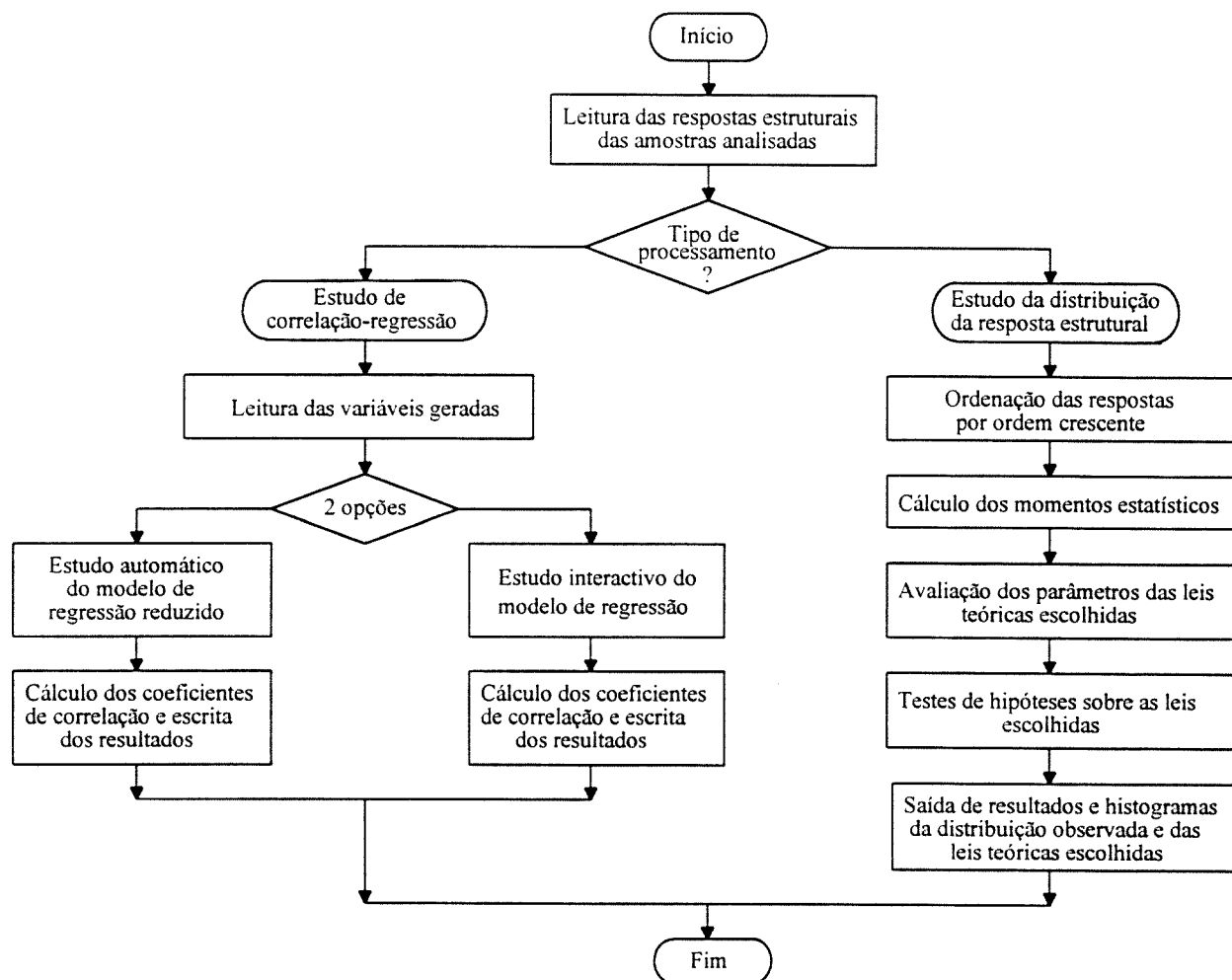


Fig. 5.16 – Estrutura do segmento de pós-processamento.

O elevado tempo de computação que pode envolver a resolução de problemas deste tipo exige a necessidade de considerar procedimentos adequados que permitam o recomeço do processo de cálculo. Alguns acidentes, como cortes de energia ou falhas do sistema, podem ocorrer durante o processo de cálculo. Reiniciar o processo desde o princípio quando o sistema volta a funcionar em condições normais seria muito penoso em termos de tempo. Assim, nestas situações procede-se à geração das variáveis aleatórias de todas as amostras já analisadas, sem efectuar qualquer análise estrutural. Estas variáveis são guardadas em disco para um tratamento posterior dos resultados.

De seguida inicia-se (ou reinicia-se se a opção recomeço é activada) a simulação estocástica através de um ciclo sobre uma série de amostras.

O módulo da geração pseudo aleatória de amostras consiste em utilizar as técnicas descritas na secção 5.2.2.1 e recorrendo ao gerador de números com distribuição uniforme fornecido pelo

computador. As leis teóricas das distribuições disponíveis são: lei uniforme, lei normal, lei log-normal e as leis de extremos de Gumbel e de Weibull.

O ajuste das distribuições geradas às respectivas leis teóricas é verificado no módulo seguinte, de acordo com os testes de hipóteses descritos na secção 5.2.2.3.

Segue-se a gravação em disco das variáveis geradas para serem utilizadas no segmento de pós-processamento.

O cálculo da resposta estrutural da amostra corrente é realizado pelo módulo da análise estrutural. Este módulo consiste no programa de análise não linear de estruturas de betão armado e pré-esforçado tendo em conta os efeitos diferidos, abordado nos Capítulos 3 e 4. O programa de análise estrutural não sofreu alterações significativas, sendo a interface realizada através de variáveis que caracterizam a variabilidade das amostras.

A resposta estrutural é guardada em disco para posterior tratamento, nomeadamente para a quantificação de segurança estrutural e para determinar as correlações com as variáveis geradas.

No módulo seguinte determina-se a dependência da resposta estrutural das variáveis aleatórias consideradas, através da análise de correlação-regressão descrita na secção 5.2.4.2. São ainda estimados os erros da regressão que servem de base à decisão sobre a continuidade ou não da simulação numérica.

- *Descrição do segmento de pós-processamento*

Este segmento é composto por duas opções de pós-processamento: estudo de correlação-regressão que permite complementar a avaliação efectuada no segmento anterior, e estudo da distribuição da resposta estrutural que permite quantificar a segurança estrutural.

O segmento inicia-se com a leitura das respostas estruturais de todas as amostras analisadas no segmento anterior.

De acordo com a opção de pós-processamento escolhida pelo utilizador, é efectuado alternativamente:

- o estudo de correlação-regressão descrita na secção 5.2.4.2, de uma forma automática idêntica à do segmento de processamento da informação, ou de uma forma interactiva, na qual o utilizador escolhe as variáveis a serem consideradas na regressão;
- o estudo da distribuição da resposta estrutural que serve de base à quantificação da segurança estrutural. Assim, é efectuado sucessivamente: a ordenação dos valores das



respostas de forma crescente, que permite calcular as frequências simples em classes previamente definidas pelo utilizador e as frequências acumuladas; o cálculo dos momentos estatísticos (como a média e a variância) até à quarta ordem; a avaliação dos parâmetros das leis teóricas escolhidas pelo utilizador a partir dos momentos estatísticos determinados para a distribuição; de seguida verifica o ajuste das leis teóricas consideradas à distribuição observada, através dos testes descritos na secção 5.2.2.3. Finalmente, escreve os resultados mais significativos, nomeadamente, os parâmetros das leis escolhidas e os resultados dos testes efectuados, constrói ainda os histogramas da distribuição observada e das leis teóricas escolhidas.

## 5.2.6 – Exemplo numérico

### 5.2.6.1 – Descrição do exemplo

Nesta secção apresenta-se a análise de segurança de duas vigas simétricas bi-encastradas de betão armado de igual geometria e sujeitas ao mesmo tipo de carregamento mas com diferentes quantidades de armadura. O objectivo deste problema é definir as cargas de colapso admissíveis associadas a uma probabilidade de rotura de  $10^{-4}$ , considerando a variabilidade do comportamento estrutural (problema inverso). Com este exemplo pretende-se clarificar a aplicação das técnicas envolvidas na metodologia apresentada.

Na Fig. 5.17 ilustra-se a geometria (atendendo à simetria considerou-se metade das vigas), o tipo de carregamento e a discretização das peças em elementos de viga de três nós. Os materiais considerados são o betão da classe C25/30 e o aço da classe S500. As propriedades mecânicas dos materiais encontram-se sumarizadas no Quadro 5.2. A variabilidade do comportamento estrutural resultou da incerteza associada ao comportamento dos materiais e à geometria da peça. Essa incerteza é caracterizada através de variáveis aleatórias associadas aos parâmetros mais preponderantes. No Quadro 5.3 é feita a descrição das variáveis aleatórias consideradas e as respectivas distribuições. Foi também considerada uma variabilidade espacial, sendo os campos aleatórios relativos a cada uma das variáveis aleatórias básicas definidos por iguais malhas que, por sua vez, são coincidentes com a malha de elementos finitos. Foi considerada independência entre as variáveis aleatórias básicas e independência espacial, isto é, as variáveis são independentes entre si e entre os diferentes elementos.

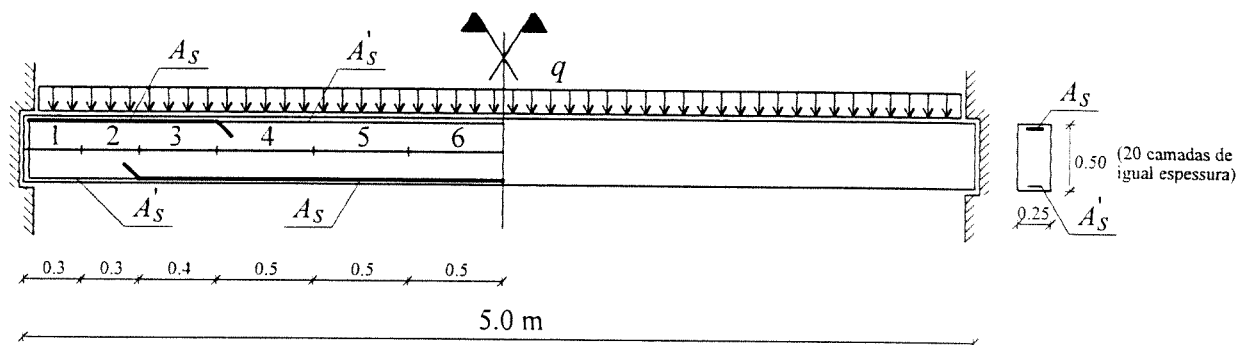


Fig. 5.17 - Geometria, carregamento e discretização da viga estudada.

Quadro 5.2 – Propriedades mecânicas dos materiais.

Betão C25/30		Aço S500	
Módulo de Young:	(ver Quadro 5.3)	Módulo de Young:	$E_s = 200 \text{ GPa}$
Coefficiente de Poisson:	$\nu = 0.20$		$E'_s = 2 \text{ GPa}$
Resistência à compressão:	(ver Quadro 5.3)	Tensão de cedência:	(ver Quadro 5.3)
Resistência à tracção:	(ver Quadro 5.3)	Resistência última:	(ver Quadro 5.3)

Quadro 5.3 – Caracterização das variáveis aleatórias.

Variáveis		descrição	lei-tipo	média	desvio padrão
variáveis básicas	$f_c$	resistência do betão à compressão	normal	33 MPa	5 MPa
	$f_{sy}$	tensão de cedência das armaduras	normal	550 MPa	30 MPa
	$\Delta h$	variação da altura da secção	normal	0	7 mm
variáveis dependentes	$E_c$	módulo de elasticidade do betão	$9500 f_{cm}^{1/3}$ ; [MPa]		
	$f_{ct}$	resistência do betão à tracção	$0.25 f_{cm}^{2/3} \cong 0.30 f_{ck}^{2/3}$ ; [MPa]		
	$f_{su}$	resistência última das armaduras	$1.05 f_{sy}$		

As duas vigas estudadas distinguem-se pela quantidade de armadura considerada. Assim, a denominada viga 1 é medianamente armada, apresentando uma armadura de tracção igual a  $A_s=11.25\text{cm}^2$  ( $\rho = 1.0\%$ ) nas secções mais esforçadas; enquanto que a viga 2 é fortemente

armada, contendo uma armadura de tracção igual a  $A_s=22.50\text{cm}^2$  ( $\rho = 2.0\%$ ). Não foi considerada armadura de compressão em ambas as vigas.

O critério de paragem do processo de simulação é definido em função do erro obtido na análise de regressão. Admite-se para o modelo de regressão um erro relativo máximo de 1.0%. De forma a assegurar este valor, os erros associados à estimativa dos coeficientes do modelo de regressão (expressão 5.36), definido em função das variáveis com correlação significativa com a carga de colapso, deverão garantir dois algarismos significativos exactos (erro relativo de  $\pm 0.5 \times 10^{-2}$ ). Considera-se que a correlação significativa é obtida para coeficientes de correlação,  $r$  (ver expressão 5.33), superiores a  $r_{corr}^2 = 0.01$ .

Considerando o critério de paragem descrito no parágrafo anterior, o número de simulações utilizado nas vigas 1 e 2 foi de 205 e de 485, respectivamente. Mais adiante será feita uma análise e uma discussão sobre estes dois números.

#### 5.2.6.2 – Simulação estocástica

A simulação da variabilidade do comportamento dos materiais e da geometria foi realizada através da consideração da geração sucessiva de valores para as variáveis aleatórias, de acordo com as distribuições pré-estabelecidas. Essa geração foi realizada através de um gerador de números pseudo-aleatórios com distribuição uniforme em  $]0, 1[$ , considerando a sequência fornecida pelo computador. A transformação em distribuições normais foi obtida através do método de *Box-Muller*. As amostras obtidas para cada uma das variáveis básicas foram sujeitas ao teste de normalidade para garantir a qualidade da geração. No Quadro 5.4 apresenta-se os parâmetros estatísticos das distribuições simuladas e os resultados dos testes de normalidade.

#### 5.2.6.3 – Análise estrutural das amostras

A distribuição da carga de colapso foi obtida através de sucessivas análises estruturais não lineares das vigas simuladas. Na Fig. 5.18 representa-se as curvas carga - flecha máxima que traduzem a resposta estrutural para algumas amostras representativas do comportamento das vigas em estudo. Estas curvas permitem visualizar a gama de respostas possíveis de ocorrer e prever a sua distribuição. As curvas relativas à viga 1 apresentam todas idênticas configurações, isto é, a rotura ocorre após se verificar uma plastificação significativa das secções críticas.

Quadro 5.4 – Resultados da simulação das variáveis básicas e dos testes de normalidade.

	variável	aleatória	média amostral	desvio padrão	coeficiente assimetria	coeficiente achatamento	teste de normalidade
	parâmetro	elemento					
VIGA 1 - tamanho da amostra: 205	$f_c$ (MPa)	1	32.4	4.94	0.20	0.13	+
		2	33.2	4.94	0.13	0.03	+
		3	33.1	5.11	-0.25	0.67	+/-
		4	32.5	5.49	-0.32	0.25	+/-
		5	33.4	4.71	-0.01	-0.26	+
		6	33.3	4.90	0.03	-0.16	+
	$f_{sy}$ (MPa)	1	552.1	29.22	-0.22	0.21	+
		2	551.8	29.59	-0.11	0.28	+
		3	550.1	30.90	-0.17	-0.10	+
		4	553.0	28.09	-0.28	0.15	+/-
		5	550.2	29.41	0.32	-0.24	+/-
		6	550.8	27.72	0.09	0.12	+
	$\Delta h$ (mm)	1	0.0	6.9	0.10	-0.36	+
		2	0.7	7.8	-0.22	-0.33	+
		3	-1.0	7.1	-0.12	0.14	+
		4	-0.1	6.8	-0.26	0.13	+/-
		5	-0.7	6.7	0.22	-0.13	+
		6	0.2	6.9	-0.25	0.44	+
VIGA 2 - tamanho da amostra: 485	$f_c$ (MPa)	1	32.8	4.95	0.17	0.01	+/-
		2	33.1	4.94	-0.06	0.06	+
		3	33.1	4.98	-0.05	0.12	+
		4	32.8	5.26	-0.20	0.03	+/-
		5	33.0	4.94	0.09	-0.08	+
		6	33.2	4.67	0.03	0.15	+
	$f_{sy}$ (MPa)	1	551.3	28.81	0.02	0.10	+
		2	550.9	31.59	0.08	-0.14	+
		3	549.7	32.04	-0.15	0.07	+
		4	548.6	29.47	-0.10	-0.07	+
		5	550.1	28.94	0.19	-0.26	+/-
		6	551.1	29.33	-0.09	0.46	+/-
	$\Delta h$ (mm)	1	-0.4	7.3	0.11	-0.06	+
		2	0.6	7.6	-0.15	-0.08	+
		3	-0.8	6.9	-0.05	-0.17	+
		4	-0.1	6.7	-0.02	0.11	+
		5	-0.5	6.9	0.02	-0.26	+
		6	0.5	6.9	-0.24	0.15	+/-
<p>Obs.: valores relativos ao teste de normalidade (ver expressões 5.22 e 5.23):</p> <p>- viga 1: <math>\sigma_{\hat{\gamma}_1} = 0.17</math></p> <p>- viga 2: <math>\sigma_{\hat{\gamma}_1} = 0.11</math></p> <p><math>\sigma_{\hat{\gamma}_2} = 0.33</math></p> <p><math>\sigma_{\hat{\gamma}_2} = 0.22</math></p> <p>legenda:</p> <p>+ - aceita-se a normalidade;</p> <p>+/- - não se aceita nem se rejeita a normalidade;</p> <p>- - rejeita-se a normalidade.</p>							

Na viga 2 verifica-se que as curvas correspondentes às cargas de colapso menores têm uma configuração diferente das restantes, correspondendo a roturas sem plastificação significativa (ou mesmo sem qualquer plastificação) das secções críticas. Ao contrário do que acontece na viga 1, na viga 2 os valores mínimos da resposta encontram-se francamente mais afastados da curva correspondente aos 50% do que os valores máximos em relação à mesma curva, sendo de prever uma distribuição assimétrica da resposta última com uma cauda mais pronunciada para o extremo mínimo.

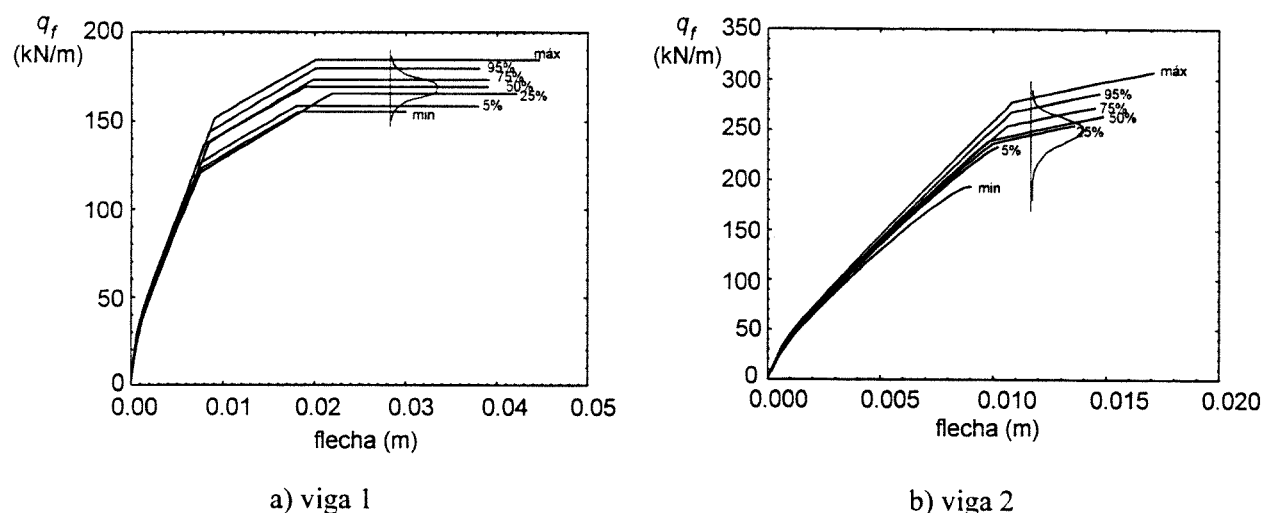


Fig. 5.18 - Variabilidade das respostas estruturais.

#### 5.2.6.4 – Análise de correlação-regressão

Os resultados da análise de dependência multilinear da carga de colapso,  $q_f$ , em função das variáveis básicas simuladas encontram-se descritos nos Quadros 5.5 e 5.6 e ilustrados nas Figs. 5.19 e 5.20 para a viga 1 e viga 2, respectivamente. Observa-se que as variáveis aleatórias da mesma natureza apresentam correlações bastante diferentes nas vigas 1 e 2. Assim, na viga 1 as variáveis associadas aos elementos 1 e 6, que contêm as secções críticas (encastramento e meio vão, respectivamente), apresentam correlações significativas com  $q_f$ . O parâmetro que mais condiciona a rotura é a tensão de cedência das armaduras,  $f_{sy}$ , de forma praticamente idêntica nas secções críticas referidas. Por outro lado, na viga 2 somente as variáveis associadas à secção de encastramento (contida no elemento 1) apresentam correlações significativas com  $q_f$ , assumindo a resistência do betão,  $f_c$ , um peso significativamente maior que os restantes parâmetros. De uma forma sumária constata-se que o comportamento à rotura da viga 1 é fortemente condicionado

peelo comportamento das armaduras nos encastramentos e a meio vão, enquanto que a viga 2 é extremamente condicionada pelo comportamento do betão nos encastramentos.

Quadro 5.5 – Resultados obtidos da análise de correlação para a viga 1 (205 amostras).

elementos correlações	coeficientes de correlação linear corrigidos, $r_{corr}$					
	1	2	3	4	5	6
$q_f$ .vs. $f_c$	0.327	0.000	0.094	0.000	0.000	0.070
$q_f$ .vs. $f_{sy}$	0.670	0.000	0.000	0.000	0.043	0.591
$q_f$ .vs. $\Delta h$	0.072	0.000	0.000	0.052	0.000	0.110

Quadro 5.6 – Resultados obtidos da análise de correlação para a viga 2 (485 amostras).

elementos correlações	coeficientes de correlação linear corrigidos, $r_{corr}$					
	1	2	3	4	5	6
$q_f$ .vs. $f_c$	0.858	0.026	0.058	0.000	0.000	0.095
$q_f$ .vs. $f_{sy}$	0.192	0.000	0.000	0.046	0.000	0.000
$q_f$ .vs. $\Delta h$	0.112	0.071	0.000	0.050	0.000	0.092

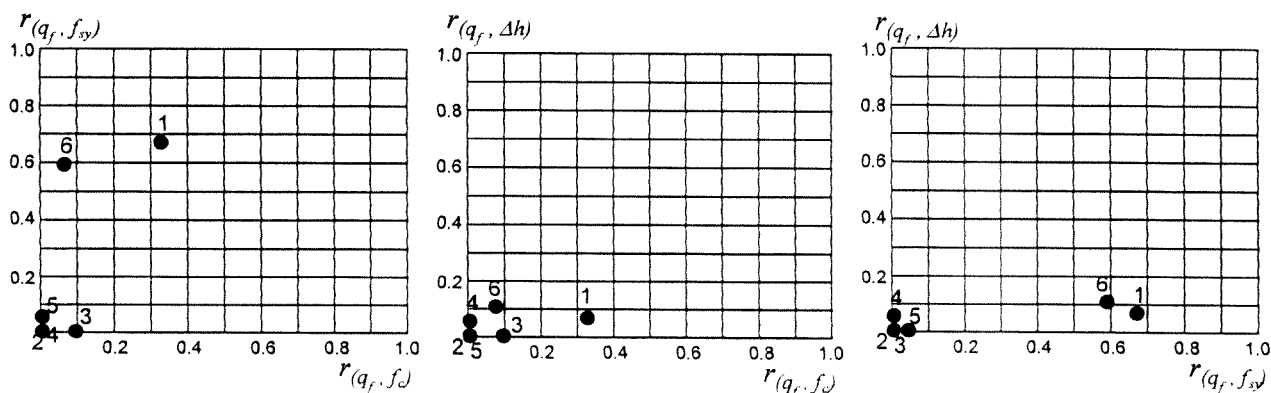


Fig. 5.19 - Representação das correlações lineares entre a carga de colapso e as variáveis básicas. Viga 1.

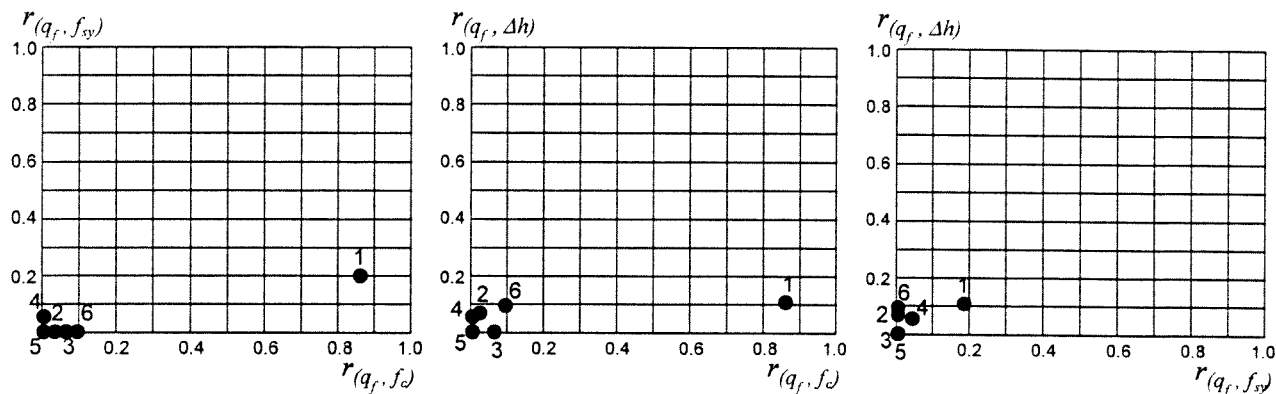


Fig. 5.20 - Representação das correlações lineares entre a carga de colapso e as variáveis básicas. Viga 2.

Considerando as variáveis preponderantes em situações de colapso, os modelos de regressão multilíneares obtidos para as duas vigas são os seguintes:

– para a viga 1:

$$\hat{q}_f = -0.41 + 0.291f_{c_1} + 0.226f_{c_6} + 0.140f_{sy_1} + 0.136f_{sy_6} + 29.7\Delta h_1 + 21.6\Delta h_6 \quad ; \quad (5.47)$$

– para a viga 2:

$$\hat{q}_f = 90.3 + 2.87f_{c_1} + 0.34f_{c_6} + 0.101f_{sy_1} + 0.021f_{sy_6} + 105.9\Delta h_1 + 18.0\Delta h_6 \quad ; \quad (5.48)$$

onde as tensões,  $f_c$  e  $f_{sy}$ , são expressas em megapascal,  $\Delta h$  em metros e o valor estimado para a carga de colapso,  $\hat{q}_f$ , por quilonewton por metro linear. Os índices associados às variáveis básicas identificam os elementos da discretização.

A validade destes modelos de regressão multilíneares é confirmada pelos valores dos coeficientes de correlação linear obtidos e que se encontram descritos no Quadro 5.7. Verifica-se que estes coeficientes tomam valores próximos da unidade, o que permite concluir que as relações lineares traduzem praticamente toda a dependência da carga de colapso em relação às variáveis básicas. Constata-se ainda que as variáveis utilizadas na definição dos modelos de regressão expressos em (5.47) e (5.48) traduzem toda a correlação linear possível, dado que os coeficientes associados aos modelos de regressão referidos são idênticos aos coeficientes que se obtêm quando se consideram todas as variáveis básicas.

Quadro 5.7 – Coeficientes de correlação linear corrigidos,  $r_{corr}$ .

	Modelo de regressão	$r_{corr}$
VIGA 1 (tamanho da amostra: 205)	$\hat{q}_f = f(\text{todas as variáveis})$	0.986
	expressão (5.47)	0.986
VIGA 2 (tamanho da amostra: 485)	$\hat{q}_f = f(\text{todas as variáveis})$	0.908
	expressão (5.48)	0.900

Os resíduos associados aos modelos de regressão (5.47) e (5.48) (calculados como a diferença entre os valores de  $q_f$  obtidos da análise estrutural e os valores estimados,  $\hat{q}_f$ , por regressão) apresentam uma distribuição aproximadamente normal com os seguintes parâmetros:

– para os resíduos associados ao modelo (5.47) - viga 1:

- média =  $-0.12 \times 10^{-2}$  ,
- desvio padrão = 0.957 ;

– para os resíduos associados ao modelo (5.48) - viga 2:

- média =  $0.37 \times 10^{-2}$  ,
- desvio padrão = 7.067 .

Tendo presente as distribuições dos resíduos, é possível estimar os erros associados aos valores de  $\hat{q}_f$  obtidos pelos modelos de regressão. Considerando a expressão (5.35) e assumindo distribuições normais para os resíduos, os erros dos modelos de regressão são os seguintes:

– para o modelo (5.47) - viga 1:

$$\varepsilon_{\hat{q}_f} = \sqrt{1 - 0.986^2} \cdot 0.957 = 0.16 \text{ kN/m} \quad ; \quad (5.49)$$

– para o modelo (5.48) - viga 2:

$$\varepsilon_{\hat{q}_f} = \sqrt{1 - 0.900^2} \cdot 7.067 = 3.1 \text{ kN/m} \quad . \quad (5.50)$$

Estes erros quantificam a discrepância entre os modelos de regressão propostos e modelos com uma correlação total entre a resposta e as variáveis básicas. Assim, atendendo aos valores obtidos em (5.49) e (5.50) quando comparados com os valores médios da resposta, respectivamente



168.4 e 262.5 (ver Fig. 5.21), verifica-se que os modelos de regressão traduzem de forma adequada o comportamento último. Esta conclusão pode ser confirmada, por exemplo, através da estimativa das respostas obtidas com os valores médios das variáveis básicas e comparando-as com os valores médios das distribuições observadas. Sabendo que  $f_{cm} = 33$  MPa,  $f_{sym} = 550$  MPa e  $\Delta h = 0$  (ver Quadro 5.3), substituindo em (5.47) e (5.48) obtém-se os valores  $\hat{q}_f = 168.5$  kN/m e  $\hat{q}_f = 263.3$  kN/m, respectivamente para a viga 1 e viga 2, que se aproximam bastante dos correspondentes valores das distribuições observadas (Fig. 5.21).

Sendo o tempo de cálculo condicionado sobretudo pelo número de simulações (ou seja, pelo tamanho da amostra) e sabendo ainda que o critério de paragem é definido em função dos erros associados à estimativa dos coeficientes do modelo de regressão (de acordo com a expressão 5.36) é interessante verificar qual seria a redução do tamanho da amostra se fosse admitido um erro no modelo de regressão superior àquele imposto. Assim, se fosse admissível um erro relativo de 2.5% (isto é, desvios de  $\pm 0.125 \times 10^{-1}$ ), em vez de um erro de 1.0% considerado, o valor esperado para o tamanho da amostra seria estimado de acordo com a expressão (5.36), da seguinte forma:

– viga 1 (estimativa da variância dos resíduos:  $\bar{\sigma}_{q_f}^2 = 0.949$ ):

- para as variáveis  $f_c$ :

$$\sigma^2(f_c) = \frac{0.949}{n_{f_c}^2 \cdot 5^2} \leq (0.125 \times 10^{-1} \times 0.29)^2 \Rightarrow n_{f_c} \geq 54 \quad ; \quad (5.51)$$

- para as variáveis  $f_{sv}$ :

$$\sigma^2(f_{sv}) = \frac{0.949}{n_{f_{sv}}^2 \cdot 30^2} \leq (0.125 \times 10^{-1} \times 0.14)^2 \Rightarrow n_{f_{sv}} \geq 19 \quad ; \quad (5.52)$$

$$n = \max\{n_{f_c}, n_{f_{sv}}\} \geq 54 \quad . \quad (5.53)$$

– viga 2 (estimativa da variância dos resíduos:  $\bar{\sigma}_{q_f}^2 = 50.67$ ):

- para as variáveis  $f_c$ :

$$\sigma^2(f_c) = \frac{50.67}{n_{f_c}^2 \cdot 5^2} \leq (0.125 \times 10^{-1} \times 2.87)^2 \Rightarrow n_{f_c} \geq 40 \quad ; \quad (5.54)$$

- para as variáveis  $f_{sv}$ :

$$\sigma^2(f_{sv}) = \frac{50.67}{n_{f_{sv}}^2 \cdot 30^2} \leq (0.125 \times 10^{-1} \times 0.10)^2 \Rightarrow n_{f_{sv}} \geq 190 \quad ; \quad (5.55)$$

$$n = \max \left\{ n_{f_c}, n_{f_w} \right\} \geq 190 \quad . \quad (5.56)$$

De acordo com a presente metodologia, os tamanhos de amostras estimados em (5.53) e (5.56) tiveram em conta somente as variáveis mais correlacionadas com a resposta estrutural. Saliente-se a redução significativa dos tamanhos de amostras obtidos para erros admissíveis de 2.5% em vez de erros de 1.0% considerados.

### 5.2.6.5 – Quantificação da segurança estrutural

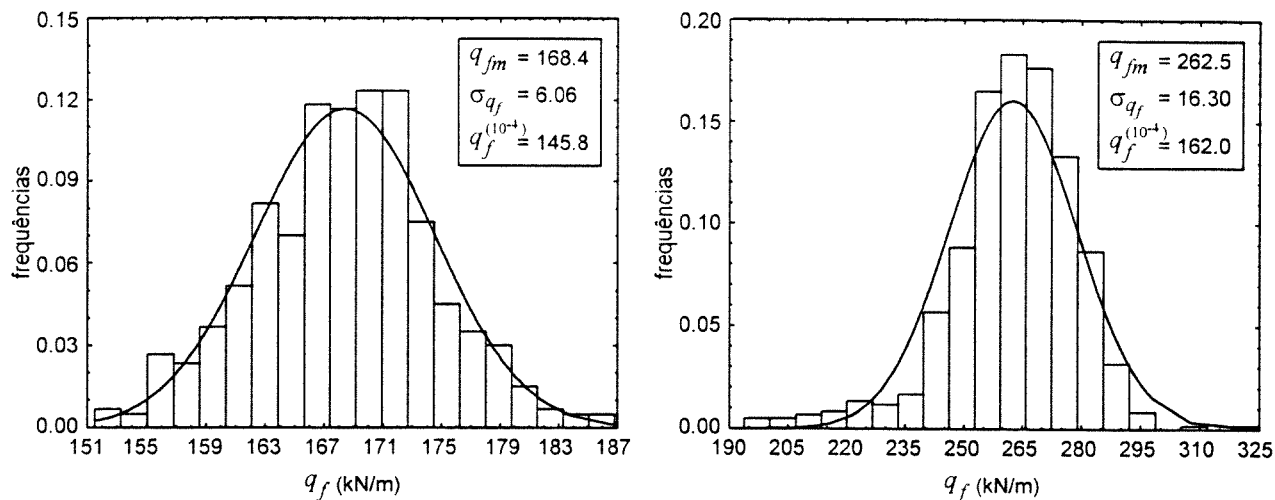
A Fig. 5.21 ilustra os histogramas que representam as distribuições das cargas de colapso das vigas 1 e 2, respectivamente, e que resultaram das análises estruturais das amostras simuladas. Comparativamente, encontram-se traçadas as funções densidade de probabilidade das leis normais com parâmetros estimados a partir dos valores observados.

Constata-se que a distribuição da carga de colapso da viga 1 se aproxima da lei normal. Por sua vez, a distribuição da carga de colapso da viga 2 é assimétrica apresentando um alongamento pronunciado da extremidade inferior, afastando-se da distribuição normal. Os testes de normalidade confirmaram estas observações aceitando uma aproximação à distribuição normal da carga de colapso da viga 1 e rejeitando essa hipótese para a viga 2.

A análise mais detalhada dos resultados obtidos nas análises estruturais das amostras permitiu constatar que em todos os casos simulados referentes à viga 1 o colapso ocorreu após plastificação pronunciada das secções críticas. Por outro lado, para a viga 2 em 6% dos casos analisados o colapso ocorreu sem plastificação significativa (ou mesmo sem qualquer plastificação) das armaduras. Assim, dividiu-se os valores observados para a viga 2 em respostas sem plastificação significativa e em resposta com grande plastificação. O ajuste de uma composição de duas leis normais, com parâmetros estimados de acordo com a divisão efectuada, revelou-se adequada (Fig. 5.22).

Adoptando a hipótese de normalidade para a distribuição da carga de colapso da viga 1, a estimativa do valor admissível para uma probabilidade de rotura,  $p_f$ , igual a  $10^{-4}$  ( $\beta = 3.72$ ) é a seguinte (ver expressão 5.44):

$$q_f^{viga1}(10^{-4}) = 168.4 - 3.72 \times 6.06 = 145.8 \text{ kN/m} \quad . \quad (5.57)$$



a) viga 1 (tamanho da amostra: 205)

b) viga 2 (tamanho da amostra: 485)

Fig. 5.21 - Distribuição das cargas de colapso para as vigas analisadas.

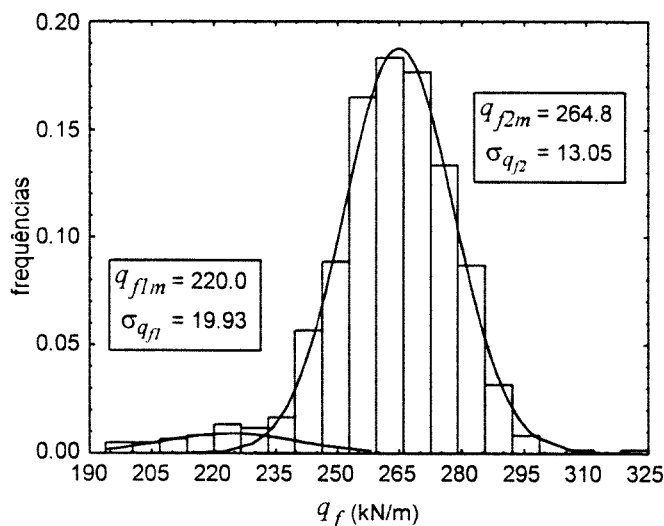


Fig. 5.22 - Decomposição da distribuição da carga de colapso da viga 2.

Considerando a mistura de duas leis normais para descrever a distribuição da carga de colapso da viga 2, a estimativa do valor admissível para a mesma probabilidade de rotura considerada no parágrafo anterior é a seguinte (ver expressão 5.46):

$$q_f^{viga2}(10^{-4}) = \min \left\{ F_{q_{r1}}^{-1} \left( \frac{10^{-4}}{\alpha_1} \right), F_{q_{r2}}^{-1} \left( \frac{10^{-4}}{\alpha_2} \right) \right\} \quad , \quad (5.58a)$$

com  $\alpha_1 = 5.7\%$  e  $\alpha_2 = 94.3\%$ , então:

$$q_{f_1}^{viga2} = F_{q_{f_1}}^{-1}(1.8 \times 10^{-3}) = 220.0 - 2.91 \times 19.93 = 162.0 \quad , \quad (5.58b)$$

$$q_{f_2}^{viga2} = F_{q_{f_2}}^{-1}(1.1 \times 10^{-4}) = 264.8 - 3.70 \times 13.05 = 216.5 \quad , \quad (5.58c)$$

resultando em:

$$q_f^{viga2}(10^{-4}) = \min(162.0; 216.5) = 162.0 \text{ kN/m} \quad . \quad (5.58d)$$

## 5.3 – METODOLOGIA BASEADA NA SUPERFÍCIE DE RESPOSTA

### 5.3.1 – Enquadramento geral

A aplicação do método da superfície de resposta em alternativa às técnicas de simulação de Monte Carlo permite reduzir o esforço computacional através da redução do número de análises estruturais por elementos finitos. Obtém-se assim uma metodologia, geralmente, mais eficiente que a anterior, embora menos rigorosa porque envolve mais aproximações, tanto ao nível da simulação como na avaliação final da probabilidade de rotura.

Este método consiste na aproximação, na região de interesse, das relações entre as variáveis aleatórias básicas e a resposta estrutural, através de uma superfície de resposta definida por uma função polinomial. A variabilidade inerente a este tipo de problemas é tratada de uma forma indirecta (ao contrário do que acontece com o método de Monte Carlo) através da função aproximada. Uma vez ajustada a superfície de resposta, a distribuição da resposta estrutural pode ser obtida a partir dessa superfície utilizando a simulação de Monte Carlo (que é agora um procedimento rápido devido à simplificação efectuada para traduzir as relações que definem o comportamento estrutural), ou introduzindo os métodos clássicos da teoria da fiabilidade (que se aplicam agora de uma forma directa porque a resposta estrutural é traduzida por uma função matemática explícita).

Como se referiu anteriormente, o método de superfície de resposta é computacionalmente eficiente na avaliação da fiabilidade de problemas mecânicos complexos. No entanto, como o ajuste da superfície de resposta depende do número de variáveis aleatórias envolvidas, a eficiência perde-se quando esse número é elevado. Há ainda um aspecto mais crítico a salientar neste método: a determinação adequada da função aproximada que traduz a superfície de resposta. De facto, a avaliação da fiabilidade estrutural depende essencialmente da descrição do critério de rotura.

A metodologia desenvolvida apresenta algoritmos que permitem tornar eficiente a aplicação do método da superfície de resposta a problemas estruturais com grande número de variáveis aleatórias e critérios para avaliar a qualidade do ajuste da função polinomial. Será ainda destacada a aplicação das técnicas baseadas na teoria da fiabilidade para a avaliação da segurança. O modelo computacional, baseado na presente metodologia, divide-se nos seguintes grupos (Fig. 5.23):

- 1) *filtragem das variáveis mais importantes* – consiste num algoritmo que permite identificar quais as variáveis aleatórias relevantes para definir a variabilidade da resposta estrutural. As variáveis aleatórias irrelevantes serão consideradas com carácter determinístico. Desta forma, o número de variáveis aleatórias básicas pode ser substancialmente diminuído permitindo tornar o processo de ajuste da superfície de resposta mais eficiente;
- 2) *ajuste da superfície de resposta* – o processo baseia-se numa aproximação iterativa duma função polinomial com (no máximo) grau dois. A escolha dirigida de valores para as variáveis aleatórias na determinação das respostas estruturais associada com técnicas de fiabilidade para descrever a zona de rotura, permite definir a função polinomial na região de interesse. Utiliza-se um procedimento numérico para avaliar a qualidade do ajuste.

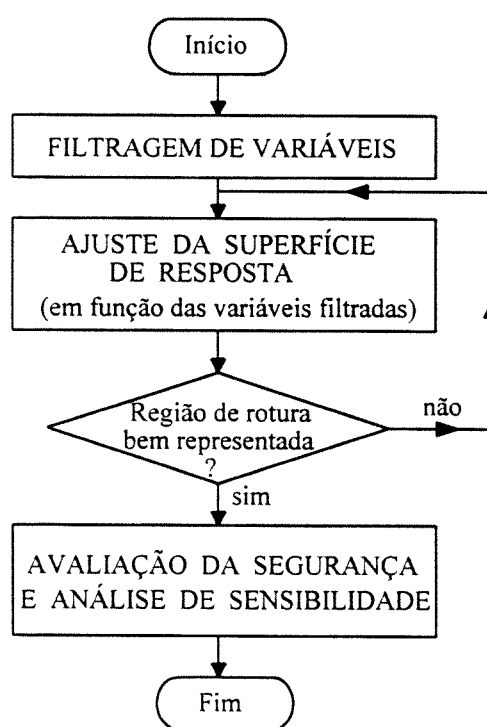


Fig. 5.23 – Descrição esquemática da presente metodologia.

- 3) *Avaliação da segurança* – a estimativa da probabilidade de rotura é realizada com base na superfície de resposta. Destaca-se a aplicação da teoria da fiabilidade usando a função aproximada e a avaliação da sensibilidade da resposta estrutural em relação às variáveis básicas.

### 5.3.2 – Filtragem de variáveis

Os modelos numéricos de análise estrutural envolvem geralmente um grande número de parâmetros com características aleatórias. A aplicação do método da superfície de resposta é eficaz quando somente uma pequena parcela desses parâmetros influencia a variabilidade da resposta. Assim, a primeira tarefa a efectuar é seleccionar as variáveis de interesse para avaliar a função aproximada de resposta. A consideração de variáveis irrelevantes na definição da superfície de resposta pode tornar o processo de ajuste excessivamente dispendioso em termos de esforço computacional e resultar num modelo desnecessariamente complicado. Além disso, a filtragem das variáveis mais importantes pode por si só ser um processo demorado se o número de variáveis aleatórias for excessivo. O algoritmo proposto consiste na aplicação de uma técnica baseada no conceito de filtragem de agrupamentos de variáveis (Lo, 1989).

Os métodos correntes de filtragem de variáveis ("*variables screening procedures*") consideram somente os coeficientes lineares que descrevem a relação entre as variáveis básicas e a resposta. Os efeitos devidos aos termos de ordem superior são, geralmente, pouco significativos em comparação com os de primeira ordem. Um dos métodos mais simples para avaliar a sensibilidade da resposta,  $Y$ , em relação às variáveis básicas,  $X$ , consiste na determinação das derivadas parciais de  $Y$  em relação a cada variável  $X$ , isto é:

$$a_j = \left| \frac{\partial Y}{\partial X_j} \right| , \quad (5.59)$$

onde  $a_j$  é uma medida de sensibilidade que representa a tangente da função de resposta,  $Y$ , em função da variável  $X_j$ . A avaliação numérica dessa sensibilidade é efectuada por diferenças finitas através de uma linearização secante do declive da função de resposta na região de interesse (Fig. 5.24). Para cada variável básica,  $X_j$ , os coeficientes de sensibilidade,  $b_j$ , são avaliados de acordo com a expressão:

$$b_j = \left| \frac{\Delta Y}{\Delta X_j} \right| . \quad (5.60)$$

A determinação deste quociente é realizada através da consideração de duas realizações idênticas do vector  $X$ , excepto nas componentes  $X_j$  que diferem entre si de uma quantidade finita (por exemplo, duas vezes o desvio padrão de  $X_j$ ,  $2 \cdot \sigma_{X_j}$ ). Se o produto  $b_j \cdot \sigma_{X_j}$  for inferior a uma percentagem de 1% a 10% do valor máximo das quantidades  $b_i \cdot \sigma_{X_i}$ , a variável  $X_j$  é considerada irrelevante não devendo, por isso, ser incluída na definição da superfície de resposta. As restantes variáveis são consideradas relevantes devendo, por isso, ser incluídas na definição da superfície de resposta.

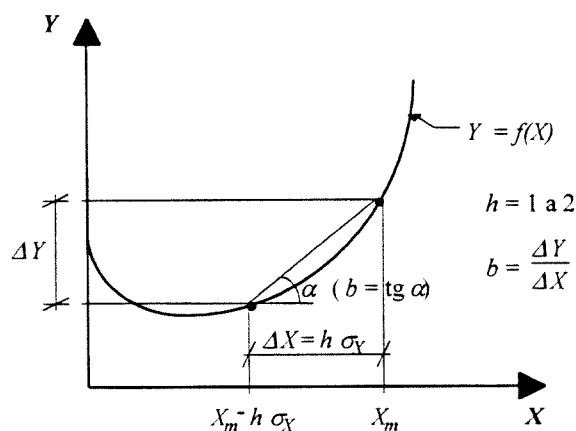


Fig. 5.24 – Avaliação dos coeficientes de sensibilidade  $b_j$ .

Supondo que existem à partida  $p$  variáveis aleatórias para serem filtradas, utilizando o procedimento descrito para avaliar os coeficientes de sensibilidade  $b_j$ , serão necessárias no mínimo  $p+1$  análises estruturais para calcular todos os  $b_j$ . Ou seja, uma análise com os valores de referência (por exemplo, os valores médios) e para cada uma das  $p$  variáveis  $X_j$  considerar os valores de referência excepto a componente  $j$  desfasada da quantidade  $h \cdot \sigma_{X_j}$ . Quando  $p$  é grande mas o número de variáveis relevantes é pequeno, este procedimento é pouco eficiente porque envolve um número elevado de análises. Neste caso, utiliza-se um método de filtragem por fases baseado no conceito de filtragem de agrupamentos de variáveis, que a seguir se apresenta (Fig. 5.25).

O método de filtragem por fases consiste em agrupar variáveis de natureza similar e avaliar o grau de importância de cada um dos grupos em vez de tratar cada uma das variáveis isoladamente. Assim, numa primeira fase é realizada uma filtragem dos grupos de variáveis. Seguidamente, os grupos relevantes são divididos em grupos mais pequenos e voltam a ser filtrados, até que as variáveis são filtradas individualmente. Dependendo da sensibilidade do utilizador para estimar à partida a importância das variáveis, normalmente, duas fases de agrupamento são suficientes até realizar a filtragem das variáveis individualmente. Na Fig. 5.25 ilustra-se o algoritmo decorrente deste método e cujos passos se descreve:

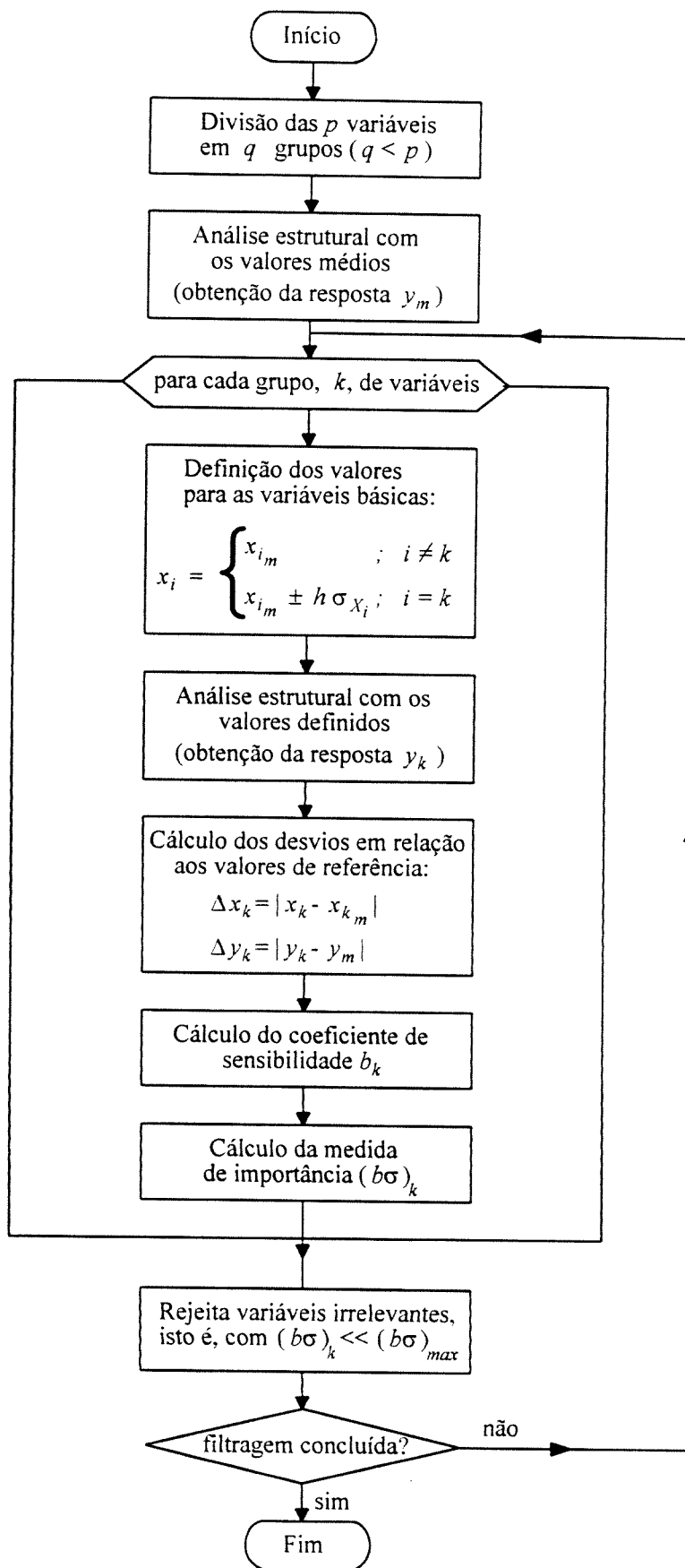


Fig. 5.25 – Algoritmo de filtragem de variáveis.



- as  $p$  variáveis aleatórias básicas são divididas em  $q$  grupos ( $q < p$ ), de acordo com as opções definidas pelo utilizador;
- o processo de cálculo inicia-se com a realização de uma análise estrutural considerando os valores médios,  $X_m$ , de todas as variáveis aleatórias básicas. A resposta assim obtida é designada por  $Y_m$  (não confundir com o valor médio da resposta). Estes valores servem como referência para a avaliação dos desvios  $\Delta X$  e  $\Delta Y$ ;
- seguidamente são avaliados os coeficientes de sensibilidade,  $b_k$ , e as medidas de importância,  $(b\sigma)_k$ , para cada grupo,  $k$ , de variáveis, através das seguintes etapas:
  - definição dos valores a atribuir às variáveis, considerando aquelas que não pertencem ao grupo  $k$  com os valores médios e as que pertencem a esse grupo desfasadas da quantidade  $h \cdot \sigma_{X_i}$  dos valores médios, ou seja:

$$x_i = \begin{cases} x_{im} & ; i \neq k \\ x_{im} \pm h \cdot \sigma_{X_i} & ; i = k \end{cases} \quad (h = 2) \quad , \quad (5.61)$$

onde  $x_{im}$  é o valor médio da variável  $X_i$ ,  $\sigma_{X_i}$  é o seu desvio padrão e  $h$  é um coeficiente que define o desfasamento (na presente metodologia considera-se  $h = 2$ ), sendo esse desfasamento negativo se a variável contribui para a capacidade resistente da estrutura e positivo se a variável contribui para as acções aplicadas;

- procede-se à análise estrutural considerando os valores definidos no ponto anterior, obtendo a resposta designada por  $y_k$  ;
- avaliam-se os desvios das variáveis aleatórias em relação aos valores de referência utilizados na primeira análise:

$$\Delta x_k = |x_k - x_{km}| = h \cdot \sigma_{Xk} \quad , \quad (5.62a)$$

$$\Delta y_k = |y_k - y_m| \quad ; \quad (5.62b)$$

- cálculo do coeficiente de sensibilidade através da seguinte expressão (que resulta da generalização da equação (5.60) para um grupo de variáveis):

$$b_k = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{(\Delta y_k / y_m)}{(\Delta x_{ik} / x_{im})} \quad , \quad (5.63)$$

onde  $n$  é um número de variáveis que pertencem ao grupo  $k$ ,  $(\Delta y_k / y_m)$  e  $(\Delta x_{ik} / x_{im})$  são os desvios relativos obtidos dos valores calculados pela expressão

(5.62) dividindo pelos respectivos valores de referência. Repare-se que esta expressão utiliza os desvios relativos em vez dos desvios absolutos, como acontece em (5.60), para evitar o efeito das dimensões quando se comparam variáveis de diferente natureza;

- cálculo da medida de importância resultante do produto do coeficiente de sensibilidade com o desvio padrão relativo (coeficiente de variação se o valor de referência for o valor médio):

$$(b\sigma)_k = b_k \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_{Xi}}{x_{im}} \quad . \quad (5.64)$$

- Uma vez concluído o ciclo sobre todos os grupos, determina o valor máximo,  $(b\sigma)_{\max}$ , das medidas de importância,  $(b\sigma)_i$ , obtidas para cada grupo. De seguida calcula os valores das medidas de importância relativa,  $(b\sigma)_i^{rel}$ , em função do valor máximo mencionado:

$$(b\sigma)_i^{rel} = \frac{(b\sigma)_i}{(b\sigma)_{\max}} \times 100\% \quad . \quad (5.65)$$

Os grupos considerados irrelevantes, e por isso são rejeitados, são aqueles cujo valor  $(b\sigma)^{rel}$  é inferior a uma percentagem pré-definida pelo utilizador (entre 1% e 10%);

- o processo termina quando não houver sub-grupos de variáveis a considerar e as variáveis resultantes do processo de rejeição foram analisadas individualmente.

Como se pode verificar, de acordo com a descrição efectuada, um aspecto importante a considerar na filtragem por grupos de variáveis, é a definição apropriada das variáveis pelos diversos grupos. Este ponto depende sobretudo da experiência e do conhecimento que o utilizador tem sobre o comportamento estrutural e a forma como as variáveis o influenciam. No entanto, deve-se ter em conta que em cada grupo só deverá existir variáveis da mesma natureza física, uma vez que é mais provável que sejam simultaneamente preponderantes ou não preponderantes para a resposta. O agrupamento de variáveis de diferente natureza física poderia eventualmente atenuar significativamente, ou mesmo anular, os seus efeitos. Mesmo que se tenha em atenção este aspecto, há possibilidade de um grupo ser rejeitado porque os efeitos das variáveis desse grupo seriam anulados uns com os outros. No entanto, a probabilidade de isso acontecer é muito pequena. Além disso, na fase seguinte quando se fizer a avaliação da superfície de resposta é possível analisar o erro de aproximação dessa superfície aos valores obtidos directamente da análise estrutural. Se a grandeza do erro é suficientemente pequena e se a sua

distribuição for aproximadamente normal então é de supor que as variáveis filtradas descrevem bem a variabilidade da resposta. Este será um dos aspectos a abordar seguidamente.

### 5.3.3 – Superfície de resposta e avaliação da segurança

#### 5.3.3.1 – Conceitos básicos

A resposta estrutural,  $Y$ , depende de um conjunto de variáveis aleatórias básicas,  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ . Apesar dessa resposta ser uma função das variáveis básicas,  $Y = g(X_1, \dots, X_n)$ , ela não é definida de uma forma explícita, mas através de um modelo numérico que permite simular experiências com a estrutura. Cada experiência  $j$  pode ser representada por um ponto com coordenadas  $(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj})$  num espaço de dimensão  $n$ . Para cada ponto observa-se o valor  $y_j$ . O ajuste de uma superfície de resposta consiste em aproximar uma função polinomial,  $\tilde{g}(x)$  (cujos coeficientes se desconhecem), à função  $g(x)$  implícita no modelo de análise estrutural, ou seja:

$$Y = \tilde{g}(x) + \lambda(x) + \varepsilon \quad , \quad (5.66)$$

onde  $\lambda(x)$  é o erro de ajuste ("*lack of fit*"), isto é, a insuficiência que a função  $\tilde{g}(x)$  tem para representar com exactidão o efeito de  $X$  em  $Y$ ;  $\varepsilon$  é o erro devido à não consideração das variáveis supostas irrelevantes em  $X$ . Existem portanto duas aproximações a controlar, por um lado a superfície de resposta deve representar convenientemente os "valores experimentais" e, por outro lado, o erro de aproximação deve ser mínimo na região de interesse. Para isso, realiza-se um número estritamente suficiente de análises nos pontos  $x_i$ , para determinar os coeficientes do polinómio.

De acordo com a generalidade dos trabalhos de investigação sobre a aplicação deste tipo de métodos a problemas estruturais, utilizam-se funções polinomiais do segundo grau para definir a superfície de resposta mais adequada:

$$\tilde{g}(x) = a + \sum_{i=1}^p b_i X_i + \sum_{i=1}^p \sum_{j \geq i=1}^p c_{ij} X_i X_j \quad , \quad (5.67a)$$

ou numa forma condensada,

$$\tilde{g}(x) = A + X^T B + X^T C X \quad , \quad (5.67b)$$

com,

$$A = a \quad , \quad (5.67c)$$

$$B^T = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_p] \quad , \quad (5.67d)$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1p} \\ & \ddots & \\ \text{(simétrica)} & & c_{pp} \end{bmatrix} \quad , \quad (5.67e)$$

$$X^T = [X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_p] \quad . \quad (5.67f)$$

Refira-se que alguns dos coeficientes de (5.67) podem ser nulos.

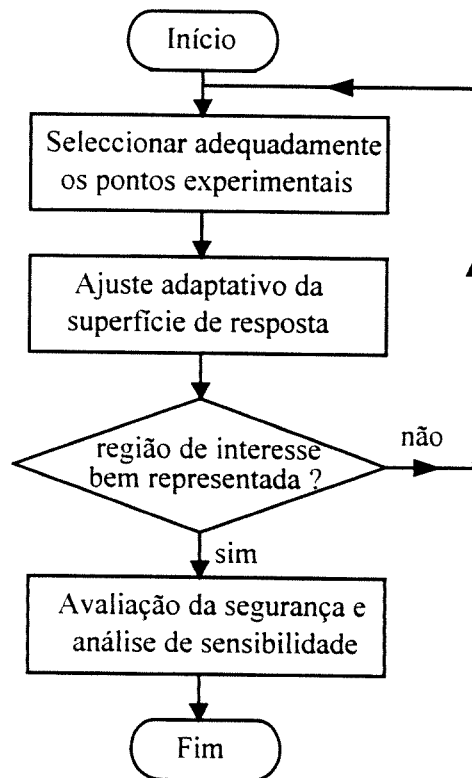


Fig. 5.26 – Representação esquemática do processo utilizado para a análise de segurança com superfície de resposta.

O procedimento adoptado na presente metodologia (Fig. 5.26) consiste numa técnica adaptativa na avaliação da superfície de resposta. Assim, o processo inicia com um modelo linear e vai juntando termos de ordem superior até que o erro de ajuste,  $\lambda$ , seja suficientemente pequeno. Por sua vez o erro  $\varepsilon$  devido à não consideração das variáveis irrelevantes é minorado através da

procura direccionada dos pontos experimentais na região de interesse. Finalmente, a segurança do sistema é avaliada aplicando as técnicas correntes da fiabilidade clássica ou, em alternativa, o método de Monte Carlo, sendo o critério de rotura definido pela superfície de resposta.

### 5.3.3.2 – Localização dos pontos experimentais

A escolha apropriada dos pontos experimentais é importante para definir a superfície de resposta mais adequada na região de interesse. Essa escolha deve satisfazer os seguintes requisitos:

- 1) os dados gerados devem ser suficientes para estimar os coeficientes do polinómio definidos em (5.67) e para avaliar o erro de ajuste  $\lambda$ , descrito em (5.66);
- 2) os pontos experimentais devem representar adequadamente a região de interesse para assegurar a validade do critério de rotura inferido na análise de segurança;
- 3) o processo de ajuste deve ser moderado, isto é, o número de pontos (análises estruturais) deve ser o menor possível;
- 4) este processo deve ser ainda aumentativo. Assim, quando o modelo cresce devido à consideração de termos de ordem superior, a experimentação (numérica) deve considerar somente os pontos relevantes para estimar os novos coeficientes;
- 5) os pontos experimentais devem ser escolhidos de forma que se evite a colinearidade e resultem em estimativas dos coeficientes com precisões idênticas.

O primeiro requisito exige que o número de pontos linearmente independentes (graus de liberdade estatísticos) seja superior ao número de incógnitas. Este requisito em conjunto com o segundo formam duas condições necessárias para aceitar o ajuste efectuado. O terceiro e o quarto requisitos são de particular importância quando se utilizam códigos computacionais que exigem grande tempo de cálculo por cada análise. O último requisito permite assegurar um bom ajuste.

Um procedimento simples que assegure os requisitos enunciados deve compreender dois tipos de pontos experimentais: (i) um conjunto de pontos centrados na região de interesse, com o objectivo principal de estimar os coeficientes do polinómio; (ii) um conjunto de pontos dispersos, com o intuito primário de avaliar a qualidade da aproximação efectuada. A vantagem deste processo é permitir expandir somente o conjunto de pontos centrados na região de interesse quando se aumenta o modelo com termos de ordem superior. Além disso, permite ainda servir de base a uma avaliação estatística consistente do ajuste adaptativo da superfície de resposta.

O ajuste adaptativo da superfície de resposta é baseado num processo iterativo (Bucher, 1990; Rajashekhar, 1993, 1995) que será descrito na secção seguinte. Na análise "experimental" em cada iteração localizam-se tantos pontos quantos os coeficientes do polinómio a determinar. A estratégia adoptada na localização desses pontos encontra-se ilustrada na Fig. 5.27 e obedece às seguintes condições:

- antes de começar o processo iterativo realizam-se duas experiências numéricas com a finalidade de servirem de base à avaliação da qualidade da aproximação efectuada (são os pontos dispersos anteriormente referidos). Na presente metodologia estas duas experiências correspondem a duas análises estruturais com valores supostamente representativos da zona de interesse (por exemplo, os valores definidos nas regulamentações como característicos e de cálculo, respectivamente);
- quando se inicia o ciclo iterativo, e na ausência de informações adicionais, os pontos experimentais escolhidos são o ponto médio,  $X_m$ , e os pontos localizados em torno dos valores médios de acordo com a seguinte condição (Fig. 5.28):

$$X = X_m \pm h\sigma_X \quad , \quad (5.68)$$

onde  $h$  é um coeficiente arbitrário e  $\sigma_X$  representa os desvios padrão das variáveis;

- nas iterações posteriores o ponto central é definido de acordo com a estratégia de ajuste da superfície de resposta na região de interesse, que se apresenta na secção seguinte. Os restantes pontos são localizados em torno do novo ponto central de acordo com a mesma condição (5.68);
- o coeficiente  $h$  toma valor 2 na primeira iteração e 1 nas restantes iterações;
- os pontos situados nos eixos definem o efeito de cada variável e são necessários para determinar os coeficientes dos termos que envolvem cada uma das variáveis, isto é,  $X_i$  e  $X_i^2$ . Os pontos no plano  $X_i X_j$  definem a interacção das variáveis  $X_i$  e  $X_j$  e são necessários para determinar os coeficientes dos termos cruzados, isto é,  $X_i \cdot X_j$ ;
- a escolha dos pontos experimentais, definidos de acordo com (5.68), é feita de acordo com o processo aumentativo de ajuste da superfície de resposta:
  - o processo de ajuste inicia-se com a consideração de um modelo linear:

$$\tilde{g}(x) = a + \sum_{i=1}^p b_i X_i \quad , \quad (5.69)$$

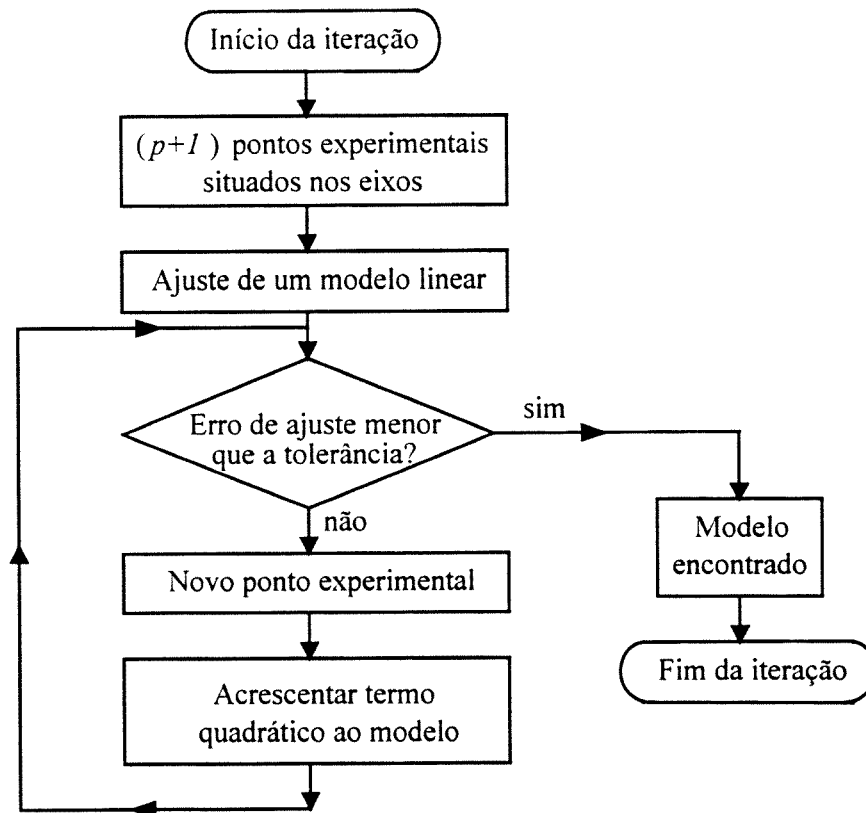


Fig. 5.27 – Ajuste da função polinomial numa iteração do processo adaptativo de avaliação da superfície de resposta.

para o qual são necessários  $(p + 1)$  pontos para definir o coeficiente  $a$  e os  $p$  coeficientes  $b_i$ . As respectivas localizações são o ponto médio,

$$X_m = (x_{1m}, x_{2m}, \dots, x_{pm}) \quad , \quad (5.70)$$

e  $p$  pontos situados nos eixos,

$$X_i = (x_{1m}, \dots, x_i, \dots, x_{pm}) \quad , \quad (5.71)$$

onde

$$x_i = x_{im} - h \cdot \sigma_{Xi} \quad , \quad (5.72a)$$

para as variáveis com características resistentes e

$$x_i = x_{im} + h \cdot \sigma_{Xi} \quad , \quad (5.72b)$$

para as variáveis com características de solicitação;

- enquanto o erro de ajuste,  $\lambda$ , for superior à tolerância previamente definida pelo utilizador, acrescenta-se um novo termo quadrático, começando pelos termos com as variáveis mais relevantes. Para isso considera-se um ponto experimental definido no eixo para o termo  $x_i^2$ ,

$$X_i = (x_{1m}, \dots, x_i, \dots, x_p) \quad , \quad (5.73)$$

sendo  $x_i$  simétrico ao valor definido em (5.72); ou um ponto experimental definido no plano  $X_i X_j$  para o termo cruzado  $X_i X_j$ ,

$$X_i = (x_{1m}, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) \quad , \quad (5.74)$$

sendo  $x_i$  e  $x_j$  definidos de acordo com as expressões (5.72).

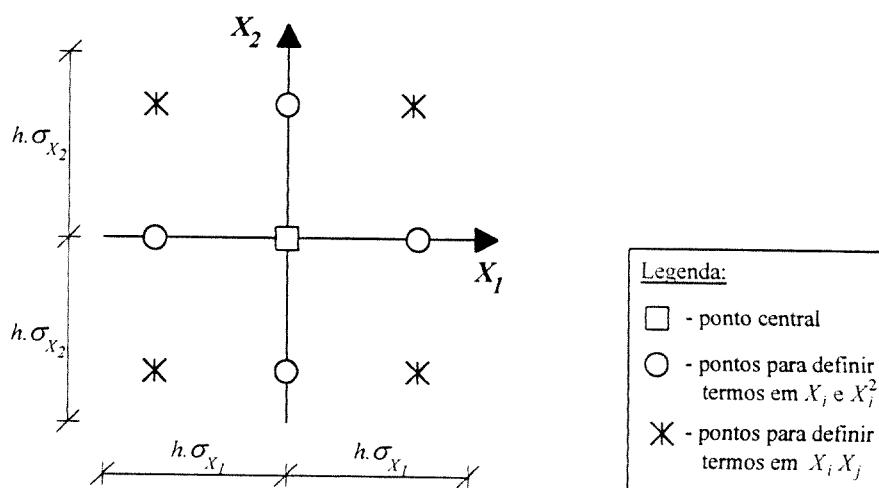


Fig. 5.28 – Localização dos pontos experimentais num problema com duas variáveis.

### 5.3.3.3 – Ajuste e avaliação da superfície de resposta

A estimativa dos coeficientes da função polinomial que traduzem a superfície de resposta é feita através de um critério de optimização de aplicação corrente, o método dos mínimos quadrados, já abordado na secção 5.2.4.2 (ver expressões 5.30 a 5.32). Como já foi referido, este método de regressão consiste na minimização da soma dos resíduos quadrados (diferenças entre os valores



"experimentais" e os valores obtidos do modelo a ajustar). Assim, para um polinómio do segundo grau, como foi definido na expressão (5.67), os coeficientes  $a$ ,  $b_i$  e  $c_{ij}$  são o resultado do seguinte sistema de equações simétrico:

$$\begin{cases} a \cdot n + \sum_{i=1}^p b_i \left( \sum_{k=1}^n x_{ik} \right) + \sum_{i=1}^p c_{ii} \left( \sum_{k=1}^n x_{ik}^2 \right) + \sum_{i=1}^p \sum_{j>i=1}^p c_{ij} \left( \sum_{k=1}^n x_{ik} \cdot x_{jk} \right) & = \sum_{k=1}^n y_k \\ a \sum_{k=1}^n x_{\alpha k} + \sum_{i=1}^p b_i \left( \sum_{k=1}^n x_{ik} x_{\alpha k} \right) + \sum_{i=1}^p c_{ii} \left( \sum_{k=1}^n x_{ik}^2 x_{\alpha k} \right) + \sum_{i=1}^p \sum_{j>i=1}^p c_{ij} \left( \sum_{k=1}^n x_{ik} x_{jk} x_{\alpha k} \right) & = \sum_{k=1}^n x_{\alpha k} y_k \\ a \sum_{k=1}^n x_{\alpha k}^2 + \sum_{i=1}^p b_i \left( \sum_{k=1}^n x_{ik} x_{\alpha k}^2 \right) + \sum_{i=1}^p c_{ii} \left( \sum_{k=1}^n x_{ik}^2 x_{\alpha k}^2 \right) + \sum_{i=1}^p \sum_{j>i=1}^p c_{ij} \left( \sum_{k=1}^n x_{ik} x_{jk} x_{\alpha k}^2 \right) & = \sum_{k=1}^n x_{\alpha k}^2 y_k \\ a \sum_{k=1}^n x_{\alpha k} x_{\beta k} + \sum_{i=1}^p b_i \left( \sum_{k=1}^n x_{ik} x_{\alpha k} x_{\beta k} \right) + \sum_{i=1}^p c_{ii} \left( \sum_{k=1}^n x_{ik}^2 x_{\alpha k} x_{\beta k} \right) + \sum_{i=1}^p \sum_{j>i=1}^p c_{ij} \left( \sum_{k=1}^n x_{ik} x_{jk} x_{\alpha k} x_{\beta k} \right) & = \sum_{k=1}^n x_{\alpha k} x_{\beta k} y_k \end{cases} \quad (5.75)$$

com  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ ;  $\beta = 1, 2, \dots, p$ ;  $p$  é o número de variáveis  $X_i$  e  $n$  é o número de pontos utilizados na regressão.

- | - No sistema de equações considera-se somente os termos lineares,  $x_i$ , do polinómio.
- | - No sistema de equações considera-se os termos lineares e quadráticos do polinómio que envolvem uma variável,  $x_i$  e  $x_i^2$ .
- | - No sistema de equações considera-se todos os termos do polinómio,  $x_i$ ,  $x_i^2$  e  $x_i \cdot x_j$ .

O sistema de equações (5.75) tem uma dimensão igual a:

- $(p+1)(p+2)/2$ , quando se consideram todos os termos do polinómio de segundo grau;
- $(2p+1)$ , quando os termos cruzados,  $x_i \cdot x_j$ , não são considerados;
- $(p+1)$ , no caso do modelo linear.

O próximo passo consiste em validar o modelo determinado antes dele ser usado na análise de segurança. Os critérios utilizados nessa validação têm que considerar dois aspectos:

- avaliar o ajuste aos pontos considerados;
- verificar se a região de interesse é bem representada.

A avaliação do ajuste aos pontos considerados é feita através da comparação dos valores "experimentais" com os correspondentes valores definidos pelo modelo ajustado (erro de ajuste,  $\lambda$ ). A estimativa da variância deste erro serve de base à definição do critério de avaliação da qualidade do ajuste. A diminuição do erro  $\lambda$  é normalmente conseguido através da consideração de um número maior de termos quadráticos. Assim, esta avaliação serve como base ao critério de paragem do processo aumentativo da superfície de resposta anteriormente descrito. A variância do erro de ajuste,  $V(\lambda)$ , é estimada por:

$$V(\lambda) = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i^o - y_i^c)^2}{n-t} \quad , \quad (5.76)$$

sendo  $y_i^o$  e  $y_i^c$  os valores "experimentais" e os correspondentes valores calculados pelo modelo, respectivamente,  $n$  é o número de pontos experimentais considerados na regressão e  $t$  é o número de termos do modelo. Em termos computacionais o critério de paragem do processo aumentativo é definido através do erro relativo,  $\delta(\lambda)$ , definido em função da variância expressa em (5.76):

$$\delta(\lambda) = \frac{\sqrt{V(\lambda)}}{\sum_{i=1}^n \frac{y_i^o}{n}} \times 100\% \leq \text{tolerância} \quad . \quad (5.77)$$

O critério para melhorar a aproximação do modelo da superfície de resposta à região de interesse consiste em privilegiar o posicionamento dos pontos experimentais mais próximo possível dessa zona. Como à partida se desconhece a localização da rotura, é necessário utilizar técnicas adequadas para indicar o ponto provável dessa rotura. A aplicação dos métodos clássicos de fiabilidade revelam-se eficazes para este fim. O critério assim resultante consiste num esquema iterativo (Fig. 5.26) onde o ponto central corresponde ao ponto provável de rotura em cada iteração. Esse ciclo iterativo termina quando o ponto central (Fig. 5.28), que serve de base à localização dos pontos experimentais, se encontra suficientemente próximo (a menos de uma tolerância definida pelo utilizador) da superfície de resposta determinada. O esquema iterativo consiste nos seguintes passos (Fig. 5.29):

- 1) o processo inicia-se com a consideração dos valores médios para ponto central;
- 2) localização dos pontos experimentais em torno do ponto central (Fig. 5.28);
- 3) ajuste da função polinomial aos pontos experimentais pelo método dos mínimos quadrados;

- 4) determinação do ponto de rotura (ou ponto de dimensionamento),  $X_d^{(i)}$  da superfície de resposta definida no ponto anterior;
- 5) cálculo da distância,  $\delta^{(i)}$ , entre os pontos  $X_m^{(i)}$  e  $X_d^{(i)}$ ;
- 6) se o valor de  $\delta^{(i)}$  for inferior a um valor previamente definido pelo utilizador, a superfície de resposta determinada será aquela que irá ser usada na análise de segurança, caso contrário, define-se o novo ponto central por interpolação linear entre  $X_m^{(i)}$  e  $X_d^{(i)}$ :

$$X_m^{(i+1)} = X_m^{(i)} + (X_d^{(i)} - X_m^{(i)}) \frac{g(X_m^{(i)})}{[g(X_m^{(i)}) - g(X_d^{(i)})]} \quad , \quad (5.78)$$

e volta ao passo 2).

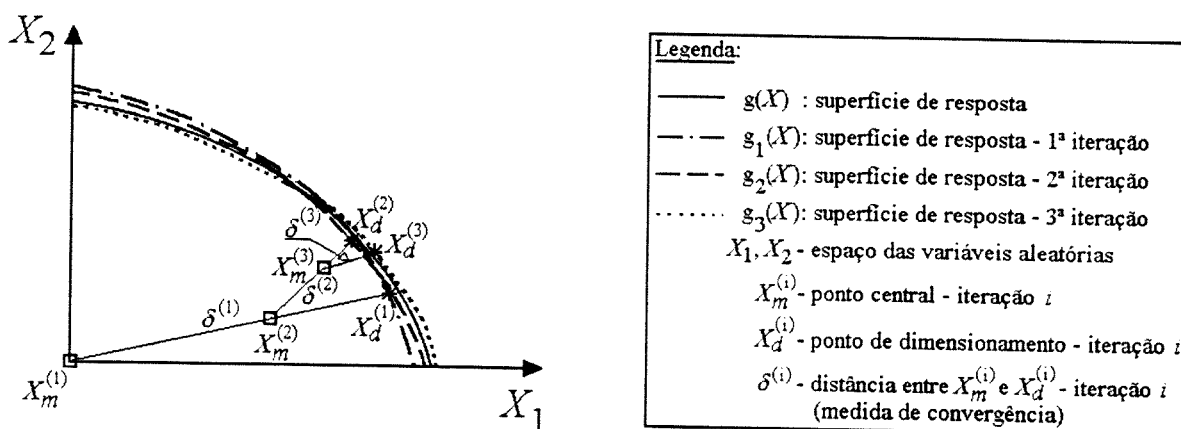


Fig. 5.29 – Ilustração do esquema iterativo utilizado para melhorar o ajuste da superfície de resposta à região de interesse.

### 5.3.3.4 – Análise da segurança e avaliação da sensibilidade da resposta

A avaliação da segurança é feita considerando que o critério de rotura é definido pela superfície de resposta determinada pelo procedimento descrito na secção anterior. O efeito da variabilidade associada a este tipo de problemas e a quantificação da probabilidade de rotura pode ser obtido de duas formas distintas: através dos métodos de integração baseados na simulação de Monte Carlo, ou fazendo estimativas da fiabilidade de acordo com as técnicas clássicas baseadas nas

aproximações de primeira ordem. A aplicação do método de Monte Carlo é idêntica àquela descrita na secção 5.2, no entanto, agora o procedimento de avaliação da segurança é extremamente rápido em comparação com o anterior porque o modelo de análise estrutural é substituído pela superfície de resposta. Nesta secção será destacada a aplicação das técnicas de fiabilidade de primeira ordem.

Os métodos de fiabilidade baseados na teoria de primeira ordem foram apresentados no Capítulo 2, por isso, serão aqui revistos somente os aspectos de interesse para elucidar o algoritmo que se vai descrever.

A probabilidade de rotura,  $p_f$ , é definida por:

$$p_f = \Phi(-\beta) \quad , \quad (5.79)$$

onde  $\beta$  é o índice de fiabilidade, definido como a menor distância da superfície de rotura à origem do espaço das variáveis,  $Y$ , normais reduzidas e não correlacionadas (Fig. 5.30);  $\Phi$  é a função de distribuição da lei normal reduzida (média nula e desvio padrão unitário).

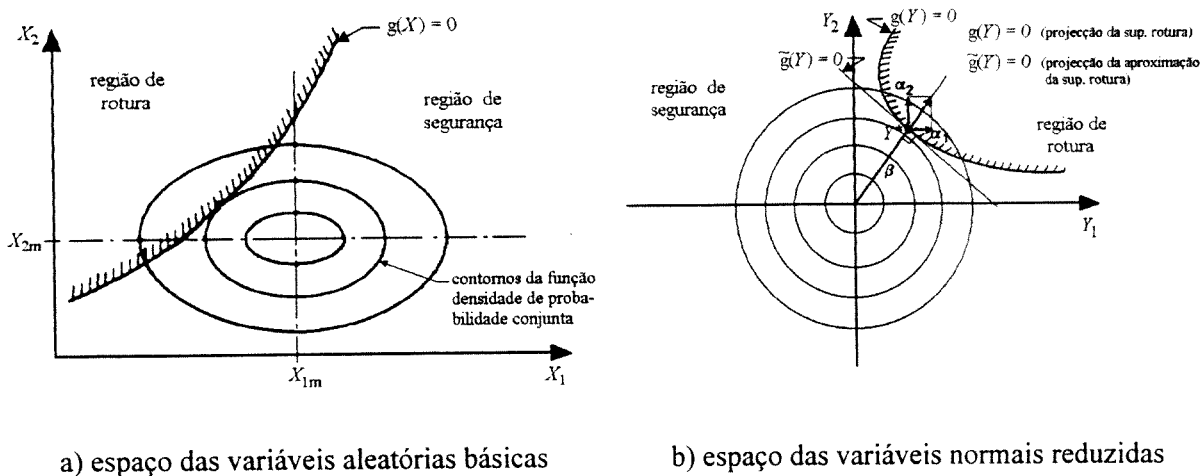


Fig. 5.30 – Definição do índice de fiabilidade  $\beta$ .

Para determinar o índice de fiabilidade  $\beta$  associado às variáveis aleatórias básicas,  $Z$ , com distribuição qualquer, deverá primeiro ser efectuada uma transformação dessas variáveis em variáveis,  $X$ , não correlacionadas e normais equivalentes na região de interesse. Seguidamente procede-se à sua normalização, transformando-as em variáveis,  $Y$ , normais reduzidas e não correlacionadas (distribuição normal com média nula e variância unitária) da seguinte forma:

$$Y_i = \frac{X_i - X_{im}}{\sigma_{.X_i}} \quad , \quad (5.80)$$

onde  $X_i$  e  $\sigma_{.X_i}$  são o valor médio e o desvio padrão da variável normal  $X_i$ . De igual forma, a superfície de rotura (ou de resposta) deve ser transformada para o espaço das variáveis  $Y$ .

A localização do ponto de dimensionamento,  $Y^*$  (Fig. 5.30), é determinada através dos termos de primeira ordem do desenvolvimento de Taylor da superfície de rotura,  $g(\cdot) = 0$ , em relação a  $Y^*$ :

$$g(Y^{*(m+1)}) \cong g(Y^{*(m)}) + \left. \frac{\partial g}{\partial Y} \right|_{Y^{*(m)}} \cdot (Y^{*(m+1)} - Y^{*(m)}) = 0 \quad . \quad (5.81)$$

Como se pode constatar pela Fig. 5.30b:

$$Y^{*(m)} = -\alpha^{(m)} \cdot \beta^{(m)} \quad , \quad (5.82)$$

$$\beta^{(m)} = \sqrt{Y_1^{(m)^2} + Y_2^{(m)^2} + \dots + Y_n^{(m)^2}} \quad , \quad (5.83)$$

$$\alpha^{(m)} = \frac{\left. \frac{\partial g}{\partial Y} \right|_{Y^{*(m)}}}{\left[ \sum_{i=1}^n \left( \left. \frac{\partial g}{\partial Y_i} \right|_{Y^{*(m)}} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad , \quad (5.84)$$

onde  $m$  e  $(m + 1)$  são aproximações sucessivas à solução do problema,  $n$  é o número de variáveis não correlacionadas e  $\alpha$  representa os cosenos directores da superfície  $g(\cdot)$  no ponto de dimensionamento  $Y^*$ . Substituindo a expressão (5.82) em (5.81) e rearranjando os produtos obtém-se:

$$Y^{*(m+1)} = -\alpha^{(m)} \left[ \beta^{(m)} + \frac{g(Y^{*(m)})}{\left[ \sum_{i=1}^n \left( \left. \frac{\partial g}{\partial Y_i} \right|_{Y^{*(m)}} \right)^2 \right]^{1/2}} \right] \quad . \quad (5.85)$$

As expressões (5.83) a (5.85) servem de base ao processo iterativo de determinação do ponto de dimensionamento  $Y^*$  e do índice de fiabilidade  $\beta$ .

Das expressões apresentadas há dois aspectos a salientar. O primeiro diz respeito ao cálculo das derivadas parciais  $\partial g/\partial y$ . Não é necessário definir explicitamente a superfície de rotura,  $g(\cdot)$ , em função das variáveis  $Y$ . Basta definir a matriz do Jacobiano,  $J$ , da transformação de  $X$  em  $Y$ :

$$\frac{\partial g}{\partial Y} = \frac{\partial g}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial Y} = \frac{\partial g}{\partial X} \cdot J^{-1} \quad (5.86)$$

com

$$J = \frac{\partial Y}{\partial X} = \left[ \frac{\partial Y_i}{\partial X_j} \right] \quad (5.87)$$

Outro aspecto a salientar diz respeito aos cosenos directores  $\alpha_i$ . No espaço de variáveis não correlacionadas, os valores de  $\alpha_i$  representam a sensibilidade da função  $g(\cdot)$ , no ponto de dimensionamento, às variações dessas variáveis (Fig. 5.31). Se as variáveis forem correlacionadas, os cosenos directores  $\alpha_i$  não têm significado físico especial, devido à transformação que é feita para o espaço normalizado independente.

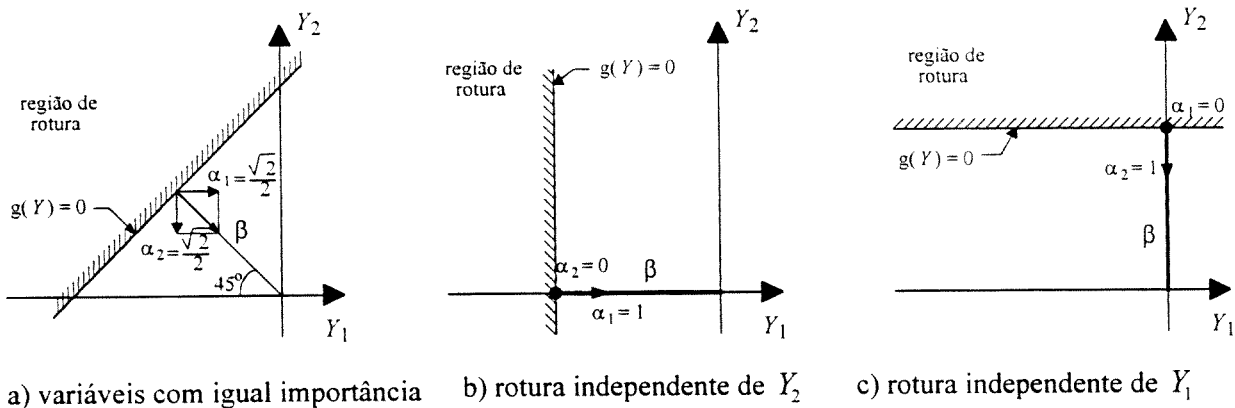


Fig. 5.31 – Cosenos directores,  $\alpha_i$ , como medidas da sensibilidade da rotura em relação às variáveis aleatórias básicas não correlacionadas.

O procedimento iterativo de determinação do ponto de dimensionamento,  $Y^*$ , é baseado no seguinte algoritmo:

- 1) arbitrar um ponto inicial  $Y^* = Y^{(1)}$ , onde  $Y^{(1)}$  pode corresponder aos valores médios das variáveis,  $Y^{(1)} = (0, 0, \dots, 0)$ ;

- 2) calcular o vector tangente,  $\left. \frac{\partial g^{(m)}}{\partial Y} \right|_{Y^{*(m)}}$ , tendo em conta as transformações de variáveis;
- 3) calcular a norma do vector tangente,  $\left[ \sum_{i=1}^n \left( \left. \frac{\partial g^{(m)}}{\partial Y_i} \right|_{Y^{*(m)}} \right)^2 \right]^{1/2}$ ;
- 4) calcular o índice de fiabilidade  $\beta$  de acordo com a expressão (5.83);
- 5) calcular  $g(Y^{*(m)})$ , tendo em conta as transformações de variáveis;
- 6) calcular o novo ponto de dimensionamento,  $Y^{*(m+1)}$ , de acordo com a expressão (5.85);
- 7) verificar a convergência: se  $|\beta^{(m+1)} - \beta^{(m)}|$  for menor que a tolerância definida pelo utilizador, o processo termina; caso contrário, volta ao ponto 2).

Nos pontos seguintes indicam-se as operações a efectuar para transformar variáveis não normais correlacionadas em variáveis normais não correlacionadas (ver também secção 2.4.2.3 do Capítulo 2)

- *Transformação de variáveis não normais em variáveis normais equivalentes (na região de interesse)*

Este tipo de transformações consiste em definir o valor médio,  $E(X)$ , e o desvio padrão,  $\sigma_X$ , da lei normal equivalente na região próxima do colapso:

- para as distribuições log-normais,  $X = \ln Z$ :

$$E(X) = E(\ln Z) = \ln E(Z) - \frac{1}{2} \ln(CV_Z^2 + 1) \cong \ln E(Z) \quad , \quad (5.88)$$

$$\sigma_X^2 = \sigma^2(\ln Z) = \ln(CV_Z^2 + 1) \cong CV_Z^2 \quad , \quad (5.89)$$

onde  $CV_Z$  é o coeficiente de variação ( $CV_Z = E(Z)/\sigma_Z$ ) da variável  $Z$ .

- para outros tipos de distribuição:

A aproximação é feita na vizinhança do ponto de dimensionamento, de forma que a função de distribuição,  $F_X(\cdot)$ , e a função densidade de probabilidade,  $f_X(\cdot)$ , da lei normal equivalente sejam idênticas às respectivas funções da lei original,  $F_Z(\cdot)$  e  $f_Z(\cdot)$ , isto é:

$$F_Z(X^*) = F_X(X^*) = \Phi\left(\frac{X^* - E(X)}{\sigma_X}\right) \quad , \quad (5.90)$$

$$f_Z(X^*) = f_X(X^*) = \varphi\left(\frac{X^* - E(X)}{\sigma_X}\right) \cdot \frac{1}{\sigma_X} \quad , \quad (5.91)$$

onde  $\Phi$  e  $\varphi$  são a função de distribuição e a função densidade de probabilidade da lei normal reduzida.

Invertendo a expressão (5.90) e considerando a expressão (5.91), resulta o desvio padrão da lei normal equivalente,

$$\sigma_X = \frac{\varphi\left\{\Phi^{-1}\left[F_Z(X^*)\right]\right\}}{f_Z(X^*)} \quad , \quad (5.92)$$

e o respectivo valor médio,

$$E(X) = X^* - \frac{\varphi\left\{\Phi^{-1}\left[F_Z(X^*)\right]\right\} \cdot \Phi^{-1}\left[F_Z(X^*)\right]}{f_Z(X^*)} \quad . \quad (5.93)$$

• *Transformação de variáveis correlacionadas em variáveis não correlacionadas*

Seja  $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$  o vector de variáveis aleatórias correlacionadas  $E(Z) = [E(Z_1), E(Z_2), \dots, E(Z_n)]$  o respectivo vector das médias, e a matriz de covariância definida por:

$$C_Z = \begin{bmatrix} V_{Z1} & cov(Z_1, Z_2) & \dots & cov(Z_1, Z_n) \\ & V_{Z2} & \dots & cov(Z_2, Z_n) \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & V_{Zn} \end{bmatrix} \quad , \quad (5.94)$$

(simétrica)

onde  $V_{Zi}$  é a variância da variável  $Z_i$  e  $cov(Z_i, Z_j)$  é a covariância entre as variáveis  $Z_i$  e  $Z_j$ .

Seja  $X$  o vector de variáveis aleatórias não correlacionadas resultante da transformação das variáveis  $Z$ :

$$X = A^T \cdot Z \quad , \quad (5.95)$$

a matriz  $A$  é uma matriz ortogonal com vectores coluna iguais aos vectores próprios da matriz de covariância  $C_Z$ . O vector das médias de  $X$  será dado por:



$$E(X) = A^T \cdot E(Z) \quad , \quad (5.96)$$

e a respectiva matriz (diagonal) de covariância vem:

$$C_X = A^T \cdot C_Z \cdot A = \begin{bmatrix} V_{x_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & V_{x_n} \end{bmatrix} \quad . \quad (5.97)$$

O cálculo da matriz  $A$  consiste num problema de determinação de valores próprios e vectores próprios, envolvendo as seguintes etapas:

- 1) determinar os valores próprios,  $\lambda_i$ , da matriz  $C_X$ , igualando a zero o determinante  $|C_X - \lambda I| = 0$ , onde  $I$  é a matriz identidade;
- 2) para cada um dos valores próprios,  $\lambda_i$ , define-se os correspondentes vectores próprios,  $v_i$ , através da equação:

$$(C_X - \lambda_i I) \cdot v_i = 0 \quad ; \quad (5.98)$$

- 3) a matriz  $A$  será constituída pelos vectores próprios colocados em coluna.

### 5.3.4 – Implementação computacional

Os princípios e os objectivos que conduziram à implementação da presente metodologia num código computacional são idênticos aos enunciados na secção 5.2.5 para a metodologia descrita na secção 5.2. Procurou-se o mais possível manter a mesma estrutura do programa de forma a facilitar futuras implementações que se realizem simultaneamente nas duas metodologias.

O presente código computacional é composto por dois segmentos principais:

- *análise de fiabilidade* – este é o segmento que engloba praticamente todas as técnicas descritas na presente metodologia, nomeadamente, a filtragem das variáveis relevantes para a variabilidade da resposta estrutural e a avaliação da fiabilidade estrutural através do método da superfície de resposta em conjunto com as técnicas de fiabilidade de primeira ordem.
- *Pós-processamento* – permite reanalisar a fiabilidade estrutural, quer aplicando em alternativa o método de Monte Carlo à superfície de resposta estimada no segmento

anterior, quer aplicando o método de fiabilidade de primeira ordem a superfícies de resposta fixadas pelo utilizador.

Na Fig. 5.32 apresenta-se a estruturação do segmento correspondente à análise de fiabilidade, com a indicação da ordem de execução dos diferentes módulos.

O segmento de análise de fiabilidade permite fazer alternadamente dois tipos de análise, a filtragem das variáveis relevantes e a análise de fiabilidade propriamente dita, através do método da superfície de resposta. Seguidamente descreve-se os módulos ilustrados na Fig. 5.32.

No módulo da definição do problema caracteriza-se o problema a estudar: geometria da malha de elementos finitos, parâmetros que caracterizam o comportamento mecânico dos materiais, ligações ao exterior, acções exteriores e de pré-esforço, variáveis aleatórias básicas que caracterizam a variabilidade estrutural incluindo a discretização do campo aleatório, os parâmetros que caracterizam as distribuições das variáveis aleatórias, condições impostas à superfície de resposta e outros dados menores.

No módulo seguinte guarda-se no disco os dados relativos à discretização do campo aleatório e os parâmetros das distribuições para serem utilizados no segmento de pós-processamento.

Os resultados das análises do problema em estudo, eventualmente, realizadas anteriormente são lidos do disco.

Inicia-se o ponto central considerando os valores médios das variáveis aleatórias. Será em função deste ponto central que se faz a localização dos outros pontos experimentais tanto para a análise de filtragem como para a análise de fiabilidade.

Se a opção de cálculo corresponder à análise de fiabilidade, define-se os produtos cruzados que não interessam considerar na definição da superfície de resposta, de acordo com as opções definidas pelo utilizador.

Define-se os pontos experimentais de acordo com a expressão (5.61) para a análise de filtragem, ou de acordo com a estratégia descrita na secção 5.3.3.2 para a análise de fiabilidade.

Seguidamente procede-se às análises estruturais para os pontos experimentais definidos. Este módulo consiste no programa de análise não linear de estruturas de betão armado e pré-esforçado tendo em conta os efeitos diferidos, abordado nos Capítulos 3 e 4.

As respostas estruturais obtidas são guardadas em disco para eventual tratamento posterior dos resultados.

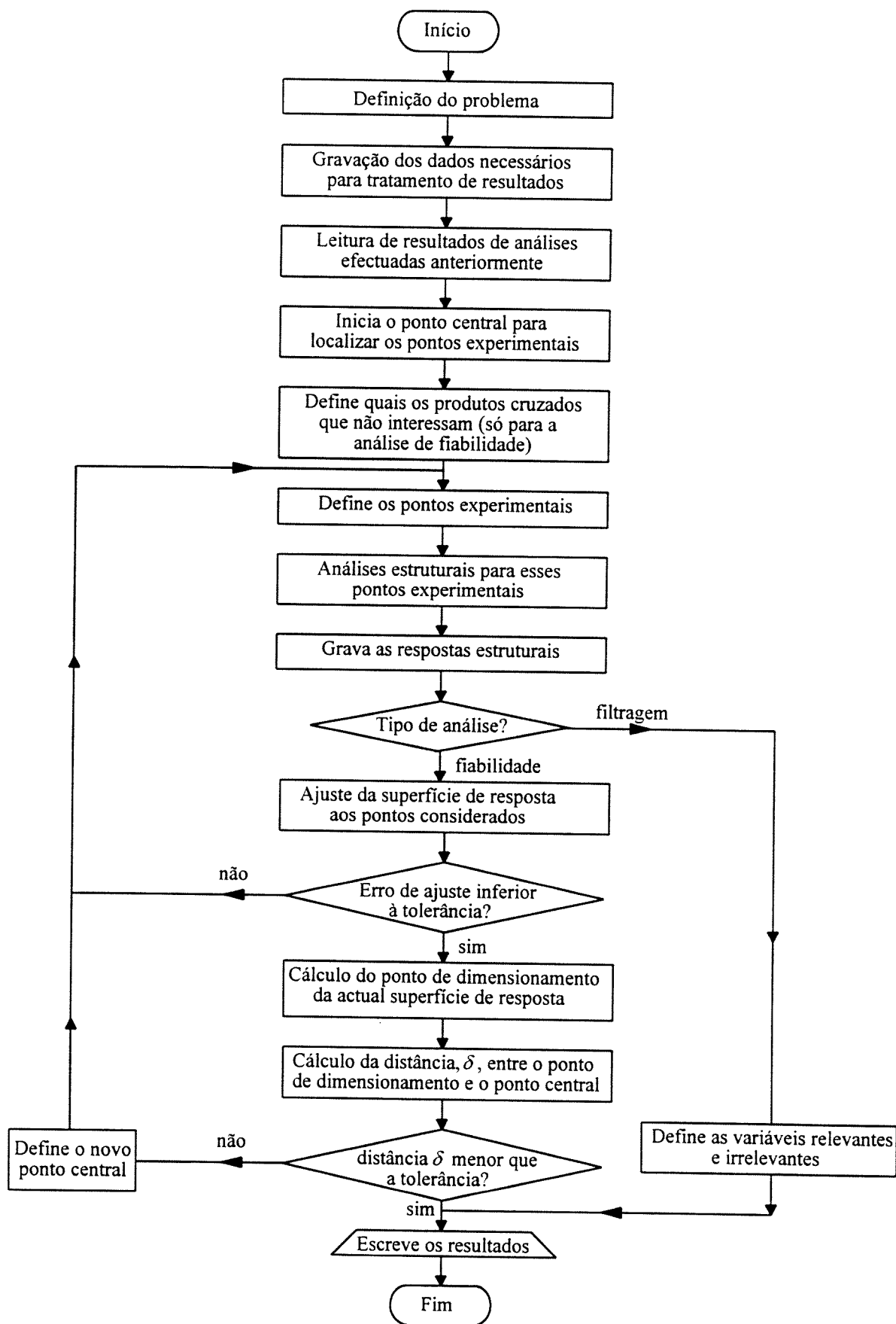


Fig.5.32 – Estrutura do segmento de análise de fiabilidade.

De acordo com a opção de cálculo escolhida, o programa prossegue com a filtragem de variáveis ou com a análise de fiabilidade.

Se a opção é a filtragem de variáveis, então faz-se a avaliação da relevância das variáveis aleatórias envolvidas, de acordo com o procedimento descrito na secção 5.3.2 e o programa termina após a saída de resultados.

Se a opção é a análise de fiabilidade, então procede-se ao ajuste da superfície de resposta aos pontos experimentais considerados através da aplicação do método dos mínimos quadrados (ver expressão 5.75) e tendo em conta o processo aumentativo, descrito na secção 5.3.3.2, que se inicia com o modelo linear e vai acrescentando termos quadráticos, um a um, enquanto o erro de ajuste for superior à tolerância pré-estabelecida.

Se o erro de ajuste não verifica a tolerância pretendida volta para o módulo de definição dos pontos experimentais, definindo um novo ponto que permite acrescentar um novo termo quadrático ao modelo de regressão. Quando o erro for inferior à tolerância prossegue para o módulo seguinte.

Efectua o cálculo do ponto de dimensionamento da actual superfície de resposta, recorrendo ao algoritmo descrito na secção 5.3.3.4, baseado no método de fiabilidade de primeira ordem.

Calcula a distância do ponto de dimensionamento determinado no módulo anterior ao actual ponto central.

Seguidamente, verifica se essa distância é inferior à tolerância pré-definida. Se não for, define novo ponto central, de acordo com a expressão (5.78), e recomeça um novo ciclo iterativo voltando ao módulo de definição de pontos experimentais. Caso contrário, o programa termina após a saída de resultados relevantes.

### **5.3.5 – Exemplo numérico**

#### **5.3.5.1 – Considerações iniciais**

Nesta secção apresenta-se a avaliação da segurança das duas vigas descritas na secção 5.2.6, usando a metodologia baseada na superfície de resposta. Este exemplo além de clarificar a aplicação da presente metodologia permite ainda comparar o desempenho dos dois procedimentos de análise da segurança descritos neste Capítulo.

### 5.3.5.2 – Filtragem das variáveis

Numa primeira fase procedeu-se à selecção das variáveis de interesse na avaliação do comportamento último das vigas. De acordo com o algoritmo definido para a filtragem de variáveis, as variáveis aleatórias associadas aos diferentes elementos foram agrupadas em possíveis zonas de importância distinta e tendo em conta os diferentes tipos de variáveis. No Quadro 5.8 apresenta-se o agrupamento de variáveis considerado, onde os sub-índices associados às variáveis aleatórias indicam os elementos de discretização da variabilidade espacial. As variáveis foram agrupadas em três zonas distintas: encastramento (elemento 1), meio-vão (elemento 6) e restantes. Como existem três tipos de variáveis aleatórias (resistência do betão à compressão,  $f_c$ , tensão de cedência das armaduras,  $f_{sy}$ , e variação de altura das secções,  $\Delta h$ ), o número de grupos é de 9.

Quadro 5.8 – Descrição do agrupamento de variáveis considerado na análise de filtragem.

Grupo	Variáveis aleatórias
1	$f_{c_1}$
2	$f_{c_2}, f_{c_3}, f_{c_4}, f_{c_5}$
3	$f_{c_6}$
4	$f_{sy_1}$
5	$f_{sy_2}, f_{sy_3}, f_{sy_4}, f_{sy_5}$
6	$f_{sy_6}$
7	$\Delta h_1$
8	$\Delta h_2, \Delta h_3, \Delta h_4, \Delta h_5$
9	$\Delta h_6$

Na avaliação dos coeficientes de sensibilidade associados a cada um dos grupos de variáveis foram considerados desfasamentos de  $h=-2$  (ver expressão 5.61). Nos Quadros 5.9 e 5.10 apresentam-se os resultados das análises de filtragem das variáveis para as vigas 1 e 2, respectivamente. Encontram-se expressos sucessivamente os desvios relativos das respostas,  $\Delta q_f / q_{fm}$ , e as medidas de sensibilidade  $(b\sigma)$  e  $(b\sigma)^{rel}$  (ver expressões 5.64 e 5.65), resultantes das 10 análises estruturais, uma com valores médios e as restantes 9 com valores para as variáveis básicas desfasadas de acordo com o algoritmo descrito.

De acordo com os resultados obtidos para a viga 1 (Quadro 5.9) a variabilidade do comportamento mecânico das armaduras nas secções críticas tem o peso mais significativo na variabilidade da resposta última da viga. De seguida, e por ordem decrescente de importância,

aparecem as variáveis relativas à resistência do betão e à variação de altura, também nas secções de encastramento e a meio vão. Nas restantes zonas da viga, a variação das variáveis básicas não se traduziu em desvios significativos em relação à resposta obtida com valores médios.

Quadro 5.9 – Resultados da análise de filtragem das variáveis - viga 1.

Grupo	Desvios relativos de $q_f$ $\Delta q_f / q_{fm}$ (%)	Medidas de sensibilidade	
		$(b\sigma)$ (%) (expressão 5.64)	$(b\sigma)^{rel}$ (%) (expressão 5.65)
1	2.9	1.46	58.9
2	0.0	0.01	0.5
3	2.3	1.15	46.1
4	5.0	2.49	100.0
5	0.0	0.00	0.0
6	4.9	2.45	98.5
7	1.0	0.49	19.8
8	0.3	0.15	6.0
9	1.2	0.61	24.5

Quadro 5.10 – Resultados da análise de filtragem das variáveis - viga 2.

Grupo	Desvios relativos de $q_f$ $\Delta q_f / q_{fm}$ (%)	Medidas de sensibilidade	
		$(b\sigma)$ (%) (expressão 5.64)	$(b\sigma)^{rel}$ (%) (expressão 5.65)
1	20.9	10.44	100.0
2	0.7	0.34	3.2
3	3.3	1.66	15.9
4	2.1	1.05	10.1
5	0.0	0.00	0.0
6	0.0	0.00	0.0
7	2.1	1.07	10.2
8	1.2	0.61	5.8
9	0.8	0.41	3.9

Relativamente aos resultados obtidos para a viga 2 (Quadro 5.10) realce-se a extrema importância da resistência do betão, ao nível da secção de encastramento, na variação da resposta estrutural. Em comparação com os resultados da análise da viga 1, o comportamento das armaduras e as imperfeições geométricas têm uma importância relativa muito menor. Verifica-se ainda que a secção a meio vão tem uma influência muito menor que a secção de encastramento,

ao contrário do que sucedia na viga 1 onde essas secções tinham medidas de sensibilidade idênticas.

Comparando os resultados descritos nos Quadros 5.9 e 5.10 com os resultados da análise de correlação apresentada na secção 5.2.6 (ver Quadros 5.5 e 5.6), constata-se a analogia das sensibilidades relativas das diferentes variáveis aleatórias obtidas pelas duas metodologias. Tanto a importância relativa das secções críticas como das variáveis básicas foi avaliada de idêntica forma pelos dois procedimentos.

Como consequência do estudo da importância das diferentes variáveis na resposta última das vigas, foram consideradas como variáveis relevantes aquelas que estão associadas com as secções de encastramento e do meio vão ( $f_{c_1}$ ,  $f_{c_6}$ ,  $f_{sy_1}$ ,  $f_{sy_6}$ ,  $\Delta h_1$ ,  $\Delta h_6$ ), ou seja 6 variáveis. Eventualmente, para a viga 2 este número poderia ser reduzido para quatro atendendo aos valores relativamente baixos para as medidas de sensibilidade associadas a  $f_{sy_6}$  e  $\Delta h_6$ .

### 5.3.5.3 – Ajuste da superfície de resposta

De acordo com a presente metodologia, o ajuste da superfície de resposta é baseado num processo iterativo, com uma escolha apropriada dos pontos representativos da resposta de forma a descrever adequadamente a região de interesse. Este procedimento iterativo resulta assim numa escolha dirigida dos pontos de amostragem. Uma vez que neste exemplo se pretende definir uma função polinomial que traduza a resistência da estrutura, é preciso definir à partida o nível de solicitação para o qual se pretende determinar a capacidade resistente. Para o presente exemplo fixaram-se níveis de solicitação de 145.8 kN/m e de 162.0 kN/m para a viga 1 e viga 2, respectivamente, cujos valores foram obtidos na secção 5.2.6 para uma probabilidade de rotura de  $10^{-4}$ .

O critério de paragem deste processo iterativo é definido em função do erro de ajuste da superfície de resposta,  $\delta(\lambda)$  (expressão 5.77), e da distância,  $\delta(i)$  (Fig. 5.29), entre os pontos de dimensionamento obtidos em duas iterações sucessivas  $i$  e  $i-1$ . Os valores admissíveis para este exemplo foram fixados em 1.0%, tanto para  $\delta(\lambda)$  como para  $\delta(i)$ .

Nestas condições tanto a viga 1 como a viga 2 exigiram somente duas iterações para obter a superfície de resposta. No entanto, enquanto que o modelo de ajuste para a viga 1 só contém termos lineares o modelo relativo à viga 2 contém, além dos termos lineares, um termo quadrático em relação a  $f_{c_1}^2$ . Isto conduziu a que para a viga 1 fossem necessárias 16 análises estruturais para definir o modelo, enquanto que na viga 2 realizaram-se 18 análises estruturais.

Há ainda um dado importante a salientar relativamente às análises estruturais efectuadas. Na viga 1 verificou-se em todas as análises que a rotura ocorreu com plastificação significativa das armaduras nas secções críticas, enquanto que na viga 2 em 9 análises estruturais (de um total de 18) o colapso deu-se sem plastificação das armaduras.

O ajuste de funções polinomiais aos pontos definidos nas diferentes análises estruturais permitiu então definir as seguintes superfícies de resposta:

– para a viga 1:

$$\hat{q}_f = 3.15 + 0.287f_{c_1} + 0.211f_{c_6} + 0.138f_{s_{y1}} + 0.132f_{s_{y6}} + 29.1\Delta h_1 + 24.4\Delta h_6 \quad ; \quad (5.99)$$

– para a viga 2:

$$\begin{aligned} \hat{q}_f = & 45.6 + 8.38f_{c_1} + 0.04f_{c_6} - 0.2 \times 10^{-4} f_{s_{y1}} - 0.1 \times 10^{-3} f_{s_{y6}} + \\ & + 61.1\Delta h_1 - 6.4\Delta h_6 - 0.039f_{c_1}^2 \end{aligned} \quad (5.100)$$

Os índices de fiabilidade,  $\beta$ , os pontos de dimensionamento e os cosenos directores  $\alpha$  (expressão 5.84) associados às soluções convergidas expressas em (5.99) e (5.100) são apresentadas nos Quadros 5.11 e 5.12 para as vigas 1 e 2, respectivamente. Como foi referido na descrição da presente metodologia, os cosenos directores no espaço de variáveis não correlacionadas representam a sensibilidade da superfície de resposta,  $\hat{q}_f$ , no ponto de dimensionamento, às variações das variáveis básicas. Assim, as grandezas obtidas para os cosenos directores representam a importância relativa de cada uma das variáveis básicas. De uma maneira geral, esses valores confirmam os resultados das análises de filtragem realizadas previamente. Saliente-se, no entanto, que na viga 2 a superfície de resposta é condicionada quase exclusivamente pela variável  $f_{c_1}$ , sendo os restantes valores, por consequência extremamente reduzidos sendo alguns inclusivamente negativos mas com significado reduzido. Refira-se finalmente que os índices de fiabilidade obtidos,  $\beta = 3.70$  para e  $\beta = 3.64$  para a viga 2, correspondem aproximadamente a probabilidades de rotura iguais a  $10^{-4}$ , nível para o qual foi fixado o nível de solicitação considerado.

#### 5.3.5.4 – Discussão da validade dos resultados obtidos

A análise de segurança exige que a variabilidade da resposta na zona de interesse, ou seja, para os valores mínimos, seja convenientemente representada. Para avaliar a adequação dos resultados obtidos nas análises efectuadas na presente secção recorreu-se ao método de Monte Carlo.



Quadro 5.11 – Resultados referentes à solução convergida - viga 1.

Variáveis consideradas	cosenos directores $\alpha$	coordenadas do ponto de dimensionamento
$f_{c_1}$	0.238	28.6 MPa
$f_{c_s}$	0.175	29.8 MPa
$f_{sy_1}$	0.687	473.7 MPa
$f_{sy_s}$	0.657	477.0 MPa
$\Delta h_1$	0.068	-0.002 m
$\Delta h_s$	0.057	-0.001 m

Quadro 5.12 – Resultados referentes à solução convergida - viga 2.

Variáveis consideradas	cosenos directores $\alpha$	coordenadas do ponto de dimensionamento
$f_{c_1}$	0.999	14.8 MPa
$f_{c_s}$	0.006	32.9 MPa
$f_{sy_1}$	$-0.2 \times 10^{-4}$	550.0 MPa
$f_{sy_s}$	$-0.8 \times 10^{-3}$	550.0 MPa
$\Delta h_1$	0.047	-0.001 m
$\Delta h_s$	-0.005	$0.1 \times 10^{-3}$ m

Obtiveram-se duas distribuições da carga de colapso, uma para cada viga analisada. Uma das distribuições foi obtida através da aplicação da metodologia baseada no método de Monte Carlo (M.M.C.). A outra distribuição foi obtida também por simulação de Monte Carlo sendo, no entanto, a carga de colapso definida pela superfície de resposta (M.S.R.) em vez do modelo de análise estrutural. De forma a atenuar os erros associados ao tamanho finito da amostragem, considerou-se uma amostra de tamanho 1000 para a primeira e 10000 para a segunda.

Uma vez que interessa conhecer o desempenho das distribuições obtidas pela superfície de resposta para os valores mínimos (região de interesse), realçou-se a comparação dos valores obtidos pelos dois procedimentos nesta zona. Nas Figs. 5.33 e 5.34 apresenta-se a comparação dos resultados obtidos pelas duas metodologias, respectivamente, para a viga 1 e para a viga 2. Nos gráficos ilustrados nessas figuras destaca-se a extremidade inferior das distribuições, sendo representado em ordenadas o logaritmo natural das frequências acumuladas. Conforme se pode observar, os valores obtidos pelas duas metodologias são bastante aproximados para a viga 1, enquanto que na viga 2 as distribuições dos valores mínimos se afastam significativamente. A consideração de uma superfície de resposta dividida em duas parcelas, uma para as roturas com plastificação significativa das armaduras e a outra para as roturas sem plastificação das

armaduras, permitiu obter uma distribuição (curva 3 da Fig. 5.34) mais aproximada da distribuição obtida pela metodologia descrita na secção 5.2, embora ainda apresente um desfasamento significativo.

As comparações ilustradas nas Figs. 5.33 e 5.34 permitiram verificar que a metodologia baseada na superfície de resposta permite obter resultados adequados nos casos em que a função de resposta tem uma distribuição aproximadamente normal, enquanto que a validade dos resultados obtidos por esta metodologia é discutível quando a resposta é não normal.

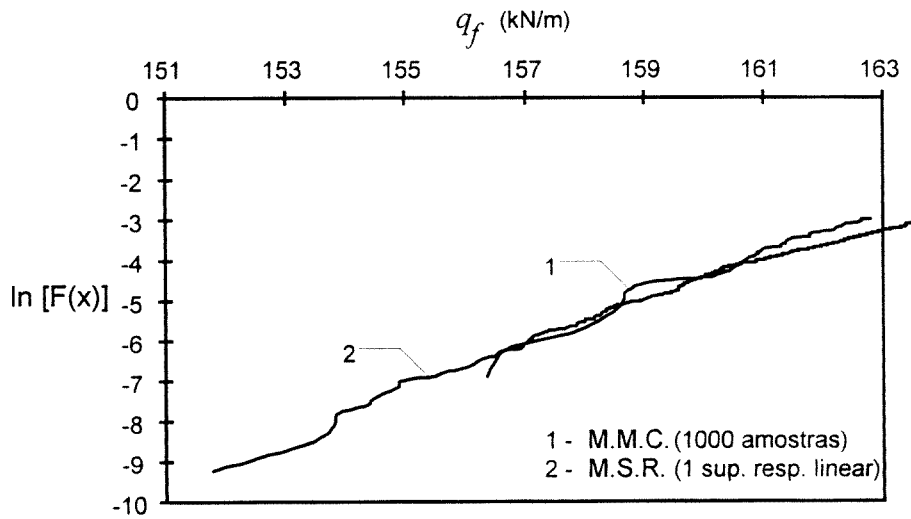


Fig. 5.33 - Análise comparativa entre as duas metodologias descritas neste Capítulo - viga 1.

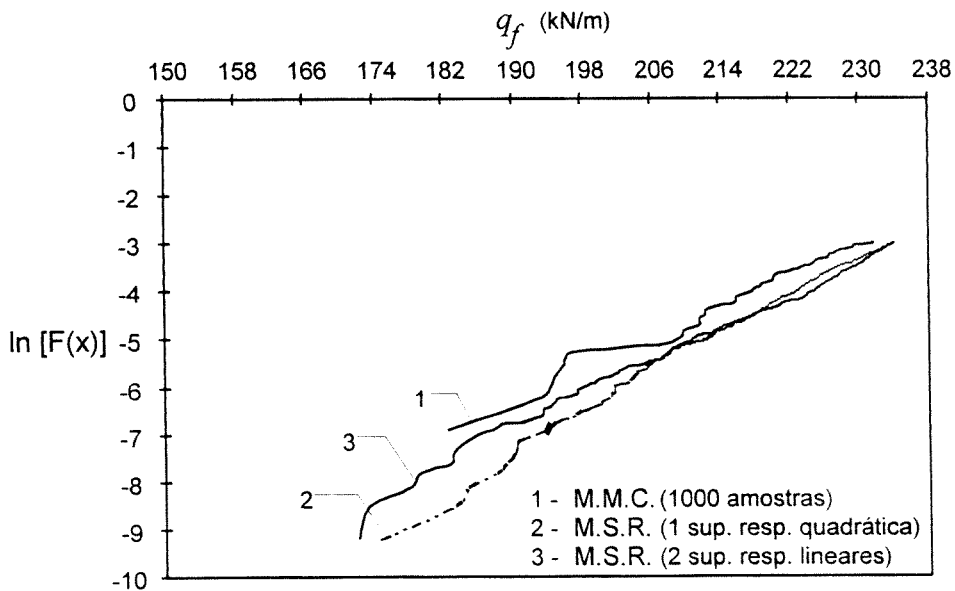


Fig. 5.34 - Análise comparativa entre as duas metodologias descritas neste Capítulo - viga 2.

## **5.4 – COMPARAÇÃO ENTRE AS DUAS METODOLOGIAS E DEFINIÇÃO DA METODOLOGIA MISTA**

### **5.4.1 – Introdução**

Nesta secção salientam-se as características mais importantes das duas metodologias de avaliação da segurança estrutural descritas neste capítulo. Faz-se uma comparação entre essas duas metodologias destacando-se as suas qualidades e as suas limitações. Indicam-se ainda as insuficiências dos métodos probabilísticos correntes na abordagem a problemas de análise da segurança de estruturas de betão quando se tem em conta o seu comportamento não linear, que estiveram na base da escolha das técnicas utilizadas nos procedimentos propostos.

De forma a colmatar as limitações das metodologias apresentadas, apresenta-se uma metodologia mista que tira partido do rigor que se obtém da simulação de Monte Carlo aplicada à análise estrutural e a eficácia do método desenvolvido na obtenção da superfície de resposta para definir a região de interesse.

Finalmente, aplica-se a metodologia mista à avaliação da segurança do exemplo analisado anteriormente pelas outras duas metodologias. Os resultados são analisados e comparados com aqueles obtidos anteriormente.

### **5.4.2 – Qualidades e limitações das metodologias propostas, incluindo métodos probabilísticos correntes**

A metodologia baseada na aplicação do método de Monte Carlo e com controle da precisão das estimativas da resposta estrutural, descrita na secção 5.2, consiste essencialmente: (1) na simulação de Monte Carlo da variabilidade das variáveis aleatórias básicas do problema; (2) análise estrutural das amostras geradas pelo processo de simulação através de um modelo numérico de elementos finitos, que tem em conta o comportamento não linear dos materiais; (3) avaliação da precisão da estimativa da resposta estrutural através de uma análise de regressão múltipla, permitindo adicionalmente medir a sensibilidade da variabilidade da resposta em relação às variáveis básicas; (4) tratamento estatístico da distribuição da resposta para avaliar a segurança.

A metodologia baseada na aplicação do método da superfície de resposta em conjunto com as técnicas de fiabilidade de primeira ordem, descrita na secção 5.3, consiste essencialmente: (1) na identificação das variáveis aleatórias relevantes para a variabilidade da resposta estrutural; (2)

escolha de valores experimentais (conjunto de valores das variáveis básicas e das respectivas respostas estruturais, obtidas pelo modelo numérico não linear de elementos finitos) representativos da região de interesse para a análise da segurança; (3) ajuste adaptativo de uma função polinomial com grau não superior a dois (superfície de resposta) aos valores experimentais, controlando estatisticamente a qualidade do ajuste e a representatividade da região de interesse; (4) estimativa da probabilidade de rotura, ou do índice de fiabilidade  $\beta$ , e avaliação da sensibilidade da resposta em relação às variáveis básicas.

A escolha das técnicas e dos procedimentos utilizados nestas duas metodologias teve como principais objectivos ultrapassar as limitações dos métodos probabilísticos correntes na avaliação da segurança de estruturas de betão quando se tem em conta o comportamento não linear dos materiais.

O método da superfície de resposta deriva da aplicação das técnicas de fiabilidade. O objectivo principal dos métodos de fiabilidade é a avaliação da probabilidade de rotura nas estruturas, ou seja, do índice de fiabilidade  $\beta$  (ver Capítulo 2). Os métodos de primeira ordem consistem na transformação das variáveis aleatórias para o espaço de variáveis normais reduzidas e na substituição da superfície limite por um hiperplano tangente no ponto situado à mínima distância da origem (ponto do dimensionamento). Estes métodos são exactos se todas as variáveis aleatórias tiverem uma distribuição normal e se o estado limite for caracterizado por uma função linear. Os métodos de fiabilidade aplicados aos modelos com elementos finitos são, geralmente, bastante eficientes desde que o número de variáveis aleatórias básicas não seja grande. No entanto, quando se utilizam variáveis não normais, as aproximações a leis normais equivalentes que se fazem na aplicação deste tipo de métodos, conduzem a erros com alguma importância na avaliação da probabilidade de rotura. Esses erros serão tanto maiores quanto maior for a preponderância das variáveis não normais e quanto maiores as suas dispersões. Além disso, estes métodos apesar de terem em conta a distribuição das variáveis básicas (embora de forma aproximada), não têm em conta a distribuição da resposta estrutural. Partindo do pressuposto de normalidade, a medida  $\beta$  definida como o melhor índice de fiabilidade não tem em conta a verdadeira geometria do domínio da segurança (se não for gausseano). Como se pode observar na Fig. 5.35, para iguais valores de  $\beta$ , a probabilidade de rotura no caso da Fig. 5.35b é provavelmente maior que no caso da Fig. 5.35a e menor que no caso da Fig. 5.35c. No caso de estruturas de betão que apresentem diferentes comportamentos em rotura originando distribuições da resposta claramente não normais, a avaliação da probabilidade de rotura através deste tipo de métodos pode ser deficiente.

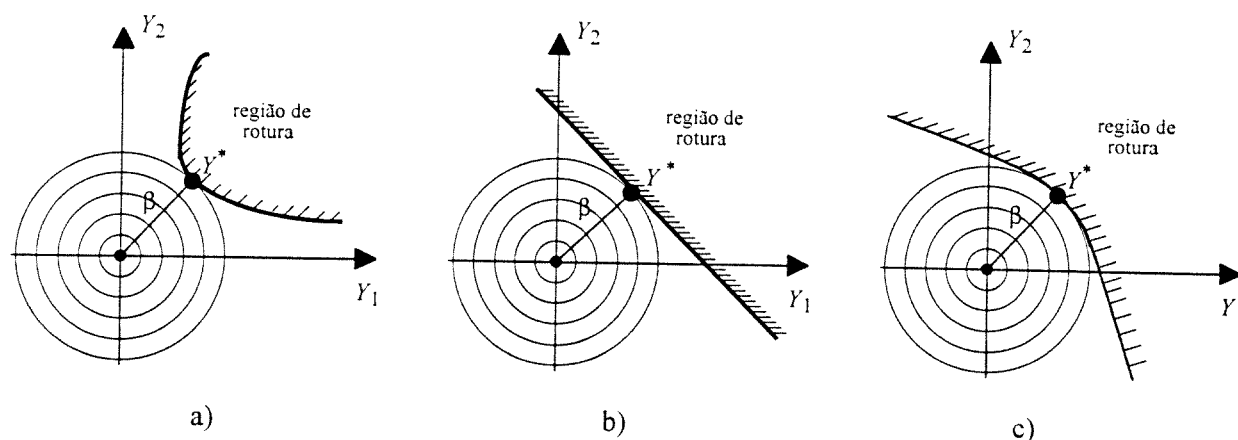


Fig. 5.35 – Índice de fiabilidade  $\beta$  igual para diferentes superfícies limites.

O método de Monte Carlo é aplicável a todos os tipos de estrutura de uma forma extremamente simples. A probabilidade de rotura é obtida com a precisão desejada. Fornece ainda uma quantidade enorme de informações que permite um tratamento estatístico adequado. No entanto, apresenta um grande inconveniente. Para os problemas correntes de estruturas que envolvem probabilidades muito pequenas, este método é extremamente dispendioso em termos de tempo de cálculo. É comum para amostras de grande tamanho (ordem das centenas) obter estimativas de probabilidades com variações muito grandes, incompatíveis com a grandeza de probabilidades em consideração. As técnicas de redução da variância (por exemplo, amostragem estratificada ou amostragem pelo hipercubo latino) tornam a aplicação do método de Monte Carlo mais eficiente porque permite reduzir substancialmente o tamanho da amostragem. No entanto, no caso de estruturas de betão que apresentem diferentes modos de rotura, conduzindo a distribuições de resposta com misturas de comportamento (como se observou num dos exemplos analisados pelas duas metodologias propostas), a importância dos diferentes modos de rotura (isto é, o peso relativo na distribuição total) pode não ser suficientemente bem avaliada. Nestes casos, seria necessário a consideração de um plano de amostragem mais refinado para definir adequadamente os pesos relativos de cada um dos modos de rotura para a avaliação da probabilidade de rotura. Isto implicaria a perda de grande parte da eficácia destas técnicas, mas em contrapartida os resultados seriam mais rigorosos.

As metodologias descritas nas secções 5.2 e 5.3 apresentam basicamente as qualidades e as limitações das técnicas que estiveram na génese do seu desenvolvimento, ou seja, das técnicas de simulação para a primeira e dos métodos de fiabilidade para a segunda.

É feita de seguida uma comparação completa entre as duas metodologias em função dos seguintes aspectos: generalidade nas aplicações, simplicidade, precisão, eficiência, informação produzida e reavaliação da segurança. Nas descrições que se seguem a metodologia baseada no

método de Monte Carlo com controlo de precisão é identificada pela sigla MMC e a metodologia baseada na superfície de resposta é identificada pela sigla MSR.

- *Generalidade nas aplicações*

Ambas as metodologias são de aplicação geral na avaliação da segurança a todos os tipos de estruturas de betão, incluindo aquelas em que o comportamento não linear é tido em conta. Nos casos de respostas com distribuição claramente não normal a aplicação da MSR merece algumas reservas.

- *Simplicidade*

A MMC é de aplicação muito simples. A MSR é também de aplicação simples desde que a resposta seja normal ou aproximadamente normal, caso contrário, podem surgir dificuldades na escolha dos pontos experimentais e da superfície de resposta adequada à avaliação da probabilidade de rotura.

- *Precisão*

A MMC converge para a solução exacta para um tamanho da amostra a tender para infinito. Dependendo do número de variáveis e do tipo de distribuição, o tamanho da amostra pode atingir a ordem das várias centenas para atingir a precisão desejada. A MSR permite obter resultados bastante precisos se as variáveis básicas e a resposta estrutural tiverem uma distribuição aproximadamente normal. Essa precisão pode diminuir de forma significativa se essas variáveis forem claramente não normais e, sobretudo, se a resposta apresentar misturas de comportamento.

- *Eficiência*

Este é um dos aspectos em que a MSR ultrapassa largamente a MMC, desde que as variáveis envolvidas, incluindo a resposta, sejam aproximadamente normais e o número de variáveis relevantes seja pequeno. Um grande número de variáveis preponderantes no comportamento estrutural e uma resposta com distintos modos de rotura de importâncias comparáveis diminuem drasticamente a eficiência da MSR, podendo eventualmente torná-la mais ineficaz.

- *Informação produzida*

A MSR fixa uma função de resposta que inclui coeficientes de sensibilidade de primeira ordem e permite definir uma função de distribuição de probabilidade. A MMC produz uma amostra aleatória da resposta que permite um tratamento estatístico completo, resultando num

procedimento para controlar a precisão das estimativas, analisar a sensibilidade da resposta às variáveis básicas e definir modelos simples de regressão.

- *Reavaliação da segurança*

O processo de correlação-regressão utilizado na MMC permite definir um modelo simples de regressão em função unicamente das variáveis com correlação significativa com a resposta. Este modelo pode ser utilizado na reavaliação da segurança da estrutura em substituição do modelo de análise estrutural, resultando assim num processo extremamente rápido. A MSR permite também uma fácil reavaliação da segurança. Como a superfície de resposta não depende da distribuição das variáveis básicas, a reavaliação é feita partindo da função polinomial avaliada anteriormente.

Em suma, a MMC tem em conta todo o espaço amostral conduzindo a resultados rigorosos. No entanto, esse rigor só é, geralmente, obtido à custa de numerosas análises estruturais. A MSR é mais eficiente sobretudo se o número de variáveis básicas relevantes for relativamente pequeno e se as variáveis aleatórias, incluindo a resposta, forem aproximadamente normais. A existência de um grande número de variáveis relevantes (mais de vinte, por exemplo) diminui significativamente a eficiência. Além disso, as aproximações de leis não normais a leis normais equivalentes e a consideração de uma medida de fiabilidade,  $\beta$ , que não tem em conta a distribuição da resposta, podem conduzir a resultados menos rigorosos. Mesmo quando se aplica o método de Monte Carlo à função de resposta para obter uma distribuição de probabilidade, o rigor não vem significativamente melhorado. De facto, como a superfície de resposta é aproximada na região de interesse, se o comportamento for claramente não normal, a distribuição que assim se obtém não é a verdadeira.

### 5.4.3 – Metodologia mista

A metodologia mista resulta de uma conjugação das duas metodologias apresentadas nas secções 5.2 e 5.3. O objectivo principal é tirar partido dos aspectos positivos dessas duas metodologias, o rigor da MMC e a eficácia da MSR.

Basicamente, a metodologia mista divide-se nas seguintes fases (Fig. 5.36):

- Avaliação do ponto de dimensionamento* – consiste na aplicação da MSR para determinar o ponto situado à mínima distância da origem do espaço das variáveis normais reduzidas (o ponto de dimensionamento).

- ii) *Definição da região de interesse* – zona centrada no ponto de dimensionamento (Fig. 5.37) e limitada por uma superfície definida pelos pontos caracterizados por:

$$x_i = x_i^* \pm h \cdot \sigma_{X_i} \quad , \quad (5.101)$$

onde  $x_i^*$  é a coordenada do ponto de dimensionamento em relação à variável  $X_i$ ,  $\sigma_{X_i}$  é o desvio padrão da variável  $X_i$  e  $h$  é um coeficiente com valor entre 1 e 2.

- iii) *Simulação e análise na região de interesse* – aplicação das técnicas de simulação de Monte Carlo para geração de amostras, considerando a distribuição das variáveis aleatórias básicas. Dessas amostras verifica quais as que se encontram no interior da região de interesse. Do total de amostras geradas, só faz a análise estrutural das amostras situadas na região de interesse.
- iv) *Avaliação da segurança* – os valores obtidos das amostras analisadas representam a extremidade da distribuição que interessa analisar para obter a probabilidade de rotura associada a um determinado nível de carregamento ou, inversamente, o carregamento admissível para uma probabilidade de rotura previamente estabelecida.

Para isso, ajusta-se uma função adequada aos valores observados das frequências acumuladas, a qual passa a representar a função distribuição dos valores extremos. A avaliação dessa função distribuição e, por consequência, da probabilidade de rotura é feita através de conceitos bayesianos:

$$P(rot.) = P(rot.|int.) \cdot P(int.) + P(rot.|\overline{int.}) \cdot P(\overline{int.}) \quad , \quad (5.102)$$

em que  $P(rot.)$  é a probabilidade de rotura,  $P(int.)$  é a probabilidade de ocorrer uma amostra na região de interesse,  $P(\overline{int.})$  é a probabilidade de ocorrer uma amostra fora da região de interesse,  $P(rot.|int.)$  é a probabilidade de rotura na região de interesse e  $P(rot.|\overline{int.})$  é a probabilidade de rotura fora da região de interesse. Como por hipótese:

$$P(rot.|\overline{int.}) = 0 \quad , \quad (5.103)$$

então:

$$P(rot.) \cong P(rot.|int.) \cdot \frac{n}{N} \quad , \quad (5.104)$$

em que  $n$  é o número de amostras geradas que pertencem à região de interesse e  $N$  é o número total de amostras.



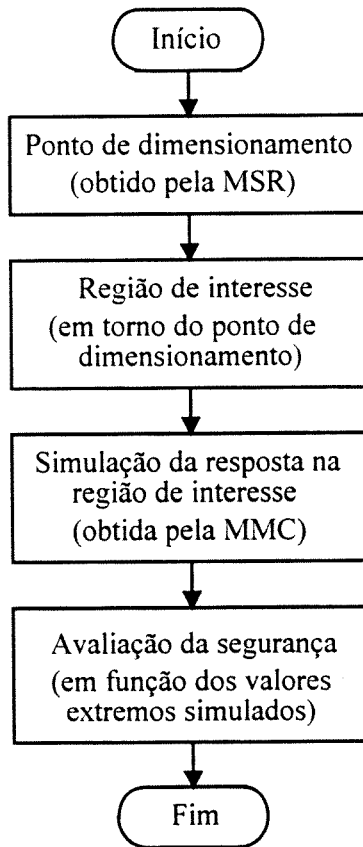


Fig. 5.36 – Representação esquemática da metodologia mista.

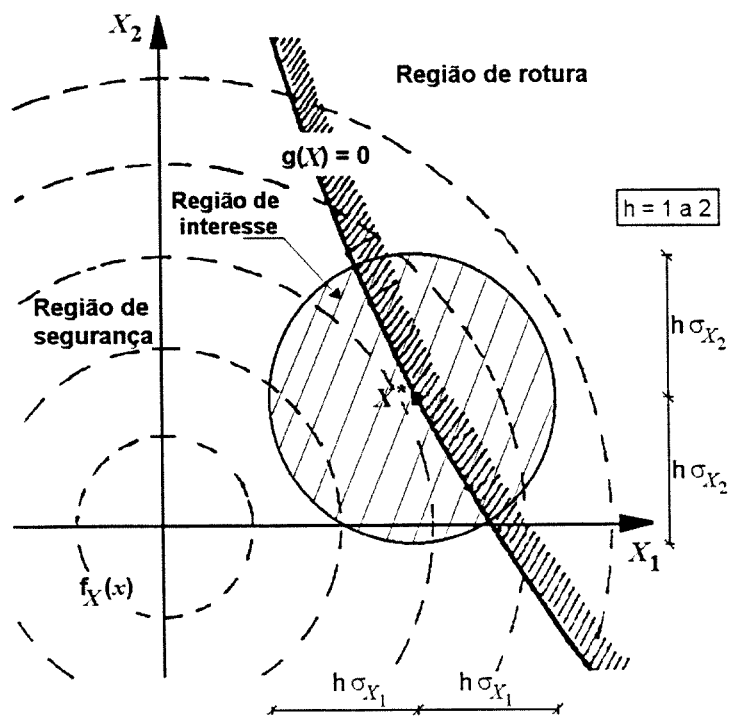


Fig. 5.37 – Definição da região de interesse.

A metodologia mista permite ultrapassar as limitações da MSR no que diz respeito ao estudo de problemas com distribuições da resposta francamente não normais. Este método permite obter resultados mais eficazmente que a MMC sem perder significativamente o rigor.

#### 5.4.4 – Exemplo numérico

Nesta secção apresenta-se a aplicação da metodologia mista ao exemplo já abordado nas secções 5.2.6 e 5.3.5. Como se constatou na secção 5.3.5, a MSR forneceu resultados bastante aproximados da MMC para o exemplo referente à viga 1. No entanto, a ocorrência de respostas estruturais de diferente tipo verificada na viga 2, originando em consequência distribuições marcadamente não normais, levou a que a variabilidade da resposta na zona de interesse (valores mínimos) não fosse convenientemente representada pela MSR.

Atendendo a que a metodologia mista pretende aliar o rigor da MMC e a eficácia da MSR, e tendo em conta ainda as limitações observadas pela MSR na análise de segurança da viga 2, será dado destaque à aplicação da metodologia mista na descrição da variabilidade da carga de colapso da viga 2 na zona de interesse. O desempenho desta metodologia será avaliado através da comparação com os resultados obtidos com a MMC.

De acordo com a avaliação do ponto de dimensionamento efectuada pela MSR para a viga 2 (ver Quadro 5.12), os valores mínimos da resposta ocorrem quando a resistência do betão na secção de encastramento é baixa ( $f_{c_i}^* = 14.8$  MPa) e os restantes valores de resistência são relativamente altos (próximos dos valores médios). Nesta situação, a rotura ocorre por esgotamento da capacidade resistente do betão na secção de encastramento sem que haja previamente uma transferência significativa de esforços entre as secções críticas. Em suma, este tipo de colapso é característico das roturas frágeis.

Tendo em conta as características que condicionam os valores mínimos das roturas possíveis de ocorrerem para a viga 2, foi definida uma região de interesse centrada nos seguintes valores:  $f_{c_i}^* = 14.8$  MPa,  $f_{c_e}^* = 33.0$  MPa,  $f_{sv_1}^* = f_{sv_6}^* = 550$  MPa; e limitada por uma superfície definida pelas seguintes desigualdades:  $X = X^* \pm h \cdot \sigma_X$ , onde  $h = 1.5$ , ou seja:

$$7.3 \text{ MPa} \leq f_{c_i} \leq 22.3 \text{ MPa} \quad , \quad (5.105a)$$

$$25.5 \text{ MPa} \leq f_{c_e} \leq 40.5 \text{ MPa} \quad , \quad (5.105b)$$

$$505 \text{ MPa} \leq f_{sv_1}, f_{sv_6} \leq 595 \text{ MPa} \quad . \quad (5.105c)$$

Como as respostas frágeis ocorrem para valores baixos de  $f_{c1}$  e valores altos de  $f_{sy}$ , eventualmente é possível obter melhores resultados se a condição (5.105c) não for limitada superiormente.

Uma vez definida a região de interesse (expressa em 5.105), recorreu-se às técnicas de simulação de Monte Carlo. Das 1000 amostras geradas (pseudo-aleatoriamente e usando a mesma "semente" utilizada na secção 5.2.6) somente 28 verificaram as condições definidas em (5.105), ou seja das 1000 amostras simuladas somente 28 estão contidas na suposta região de interesse.

As 28 amostras referidas foram analisadas pelo programa de análise estrutural, obtendo-se assim a distribuição dos valores mínimos da carga de colapso da viga 2. Na Fig. 5.38 apresenta-se as extremidades inferiores das distribuições obtidas pelas diferentes metodologias para a viga 2, sendo representado em ordenadas o logaritmo natural das frequências acumuladas de forma a destacar os valores mínimos. Como se pode observar, os valores obtidos pela metodologia mista permitiu obter a distribuição dos valores mínimos da capacidade resistente da viga 2. Além de apresentar valores idênticos à distribuição obtida pela MMC, o número de análises estruturais necessário para obter esses valores foi consideravelmente mais baixo (18 análises estruturais para definir o ponto de dimensionamento e mais 28 análises para avaliar a resposta na zona de interesse) contra as 1000 análises utilizadas na MMC.

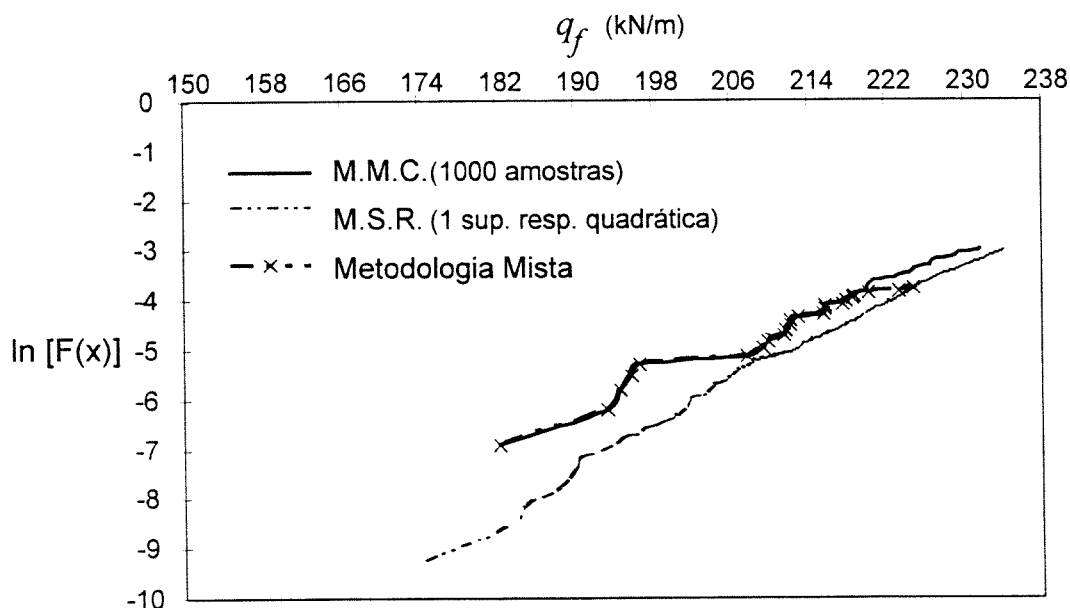


Fig. 5.38 - Análise comparativa dos valores mínimos das distribuições obtidas pelas três metodologias - viga 2.

## **5.5 – CONSIDERAÇÕES FINAIS**

Neste Capítulo foram apresentadas as metodologias de análise de segurança estrutural desenvolvidas com base em conceitos probabilísticos. Embora o objectivo principal deste trabalho seja a avaliação da segurança de problemas estruturais de betão considerando o comportamento não linear, as metodologias desenvolvidas são de aplicação geral.

A metodologia baseada no método de Monte Carlo permite avaliar com rigor a segurança estrutural. Foram desenvolvidas técnicas estatísticas que permitem controlar o erro de simulação de forma a reduzir o esforço computacional em relação à formulação original do método de Monte Carlo. Destacou-se ainda os procedimentos que permitem analisar a sensibilidade da rotura relativamente às variáveis básicas, baseados em análises de correlação-regressão. Salienta-se ainda a possibilidade de reavaliação da segurança de uma forma expedita.

Foi também desenvolvida uma metodologia baseada no conceito de superfície de resposta. Este método permite aplicar eficazmente as técnicas clássicas de fiabilidade a problemas em que a definição da função limite é definida pontualmente através de sucessivas análises estruturais. No entanto, o seu rigor é extremamente afectado em problemas com comportamento marcadamente não gausseano.

Finalmente, desenvolveu-se uma metodologia que permite tirar partido das potencialidades dos métodos de Monte Carlo e de superfície de resposta (o rigor do primeiro e o menor esforço computacional do segundo) e evitar as respectivas limitações.

O exemplo numérico apresentado tornou mais claro e cabal a comparação e a aplicação das metodologias descritas.

## Capítulo 6

# PARA UM NOVO CONCEITO DE SEGURANÇA AOS ESTADOS LIMITES REGULAMENTARES

### 6.1 - INTRODUÇÃO

O projecto de estruturas de betão deve cumprir com segurança as condições de adequado funcionamento em serviço e em situações últimas. A importância dos modelos de análise não linear para o dimensionamento racional de estruturas de betão é actualmente reconhecida por técnicos e por agentes da construção. A acessibilidade de computadores pessoais cada vez mais rápidos e potentes tornou possível o desenvolvimento de modelos não lineares de estruturas baseados em técnicas refinadas de análise e em relações constitutivas realistas. Simultaneamente, estimulou-se a utilização mais generalizada e corrente deste tipo de métodos na prática. As actuais normas europeias, como o Eurocódigo 2 (EC2, 1991) e o Código Modelo do CEB-FIP (MC90) (CEB-FIP, 1993), revelam esta tendência ao propor regras práticas para o uso de métodos de análise não linear.

A consideração de relações constitutivas realistas na análise não linear permite ter em conta a evolução da rigidez da estrutura e a distribuição adequada dos esforços com o nível de carregamento. Assim, este tipo de métodos torna possível a verificação da segurança aos estados limites de utilização e últimos recorrendo a uma única análise. O formato de segurança sugerido nas actuais normas europeias é baseado na metodologia clássica assente nos valores característicos e de cálculo (obtidos por aplicação de coeficientes parciais de segurança) e na verificação da segurança ao nível das secções para os estados limites últimos. No entanto, a aplicação deste formato simples de segurança não permite tirar partido do conhecimento mais rigoroso que se obtém quando a análise é baseada em relações constitutivas não lineares.

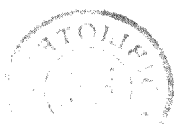


A necessidade de definir um novo formato de segurança lógico e consistente tem sido objecto de discussão no seio da comunidade técnica e científica internacional (CEB, 1995b, 1997). De uma maneira geral é aceite a constatação das limitações destes formatos, no entanto, não existe nenhuma estratégia estabelecida para contornar este problema. De facto, existe actualmente uma grande controvérsia em torno deste assunto. Por um lado há uma corrente que é favorável à adopção de uma metodologia baseada nos coeficientes parciais de segurança e, eventualmente, numa verificação ao nível das secções. Por outro lado, estão aqueles que defendem a adopção de um formato que permita a avaliação global da segurança. Nestes últimos anos têm sido várias as propostas de regras práticas para a verificação da segurança de estruturas de betão quando se utilizam modelos de análise não linear (como se verá adiante). Embora de aplicação fácil, estas propostas apresentam insuficiências quando se procura generalizar, umas por não se adaptarem a todos os casos de rotura e outras por desvirtuarem o comportamento dos materiais.

As metodologias desenvolvidas no presente trabalho permitem abordar de uma forma consistente estes problemas, servindo como base probabilística à definição de regras simplificadas coerentes. Neste capítulo abordam-se dois tipos de problemas correntes no dimensionamento de estruturas de betão: a quantificação da armadura mínima tendo em conta critérios de fendilhação do betão e de plastificação das armaduras; e, a avaliação da segurança de estruturas porticadas aos estados limites últimos de resistência quando se utilizam métodos de análise não linear.

No problema da quantificação da armadura mínima utilizaram-se critérios estabelecidos na actual regulamentação e por outros autores. No presente capítulo realça-se sumariamente os aspectos mais importantes da abordagem probabilística efectuada, nomeadamente a proposta de valores alternativos, remetendo para o Anexo 3 a consulta detalhada do estudo realizado. Nas secções seguintes apresenta-se o estudo da segurança aos estados limites últimos de secções e estruturas reticuladas correntes de betão armado. De uma forma genérica, descreve-se e discute-se os formatos e os critérios vulgarmente utilizados para abordar estes problemas. É feita uma abordagem probabilística considerando vários exemplos correntes e que permitem caracterizar de forma completa a gama de casos possíveis de ocorrer. A análise e o tratamento dos resultados obtidos servem de base à proposta de valores e formatos alternativos ou complementares àqueles existentes.

As propostas apresentadas neste Capítulo deverão ser encaradas não como resultados finais mas sim como um ponto de partida para novas regras (ou regras adicionais) de dimensionamento.



## 6.2 – QUANTIFICAÇÃO DA ARMADURA MÍNIMA

Nesta secção é abordado o problema da avaliação da área mínima de armadura necessária para limitar a fendilhação resultante de deformações impostas em estruturas de betão. No estudo realizado (que é apresentado em detalhe no Anexo 3), estabeleceram-se duas condições para a determinação dessa armadura: não devem plastificar quando aparecem as primeiras fendas (critério de não plastificação da armadura) e a largura das fendas não deverá ultrapassar limites específicos (critério da largura de fendas).

Numa primeira fase da abordagem probabilística verificou-se de uma forma simplificada qual a possibilidade de ocorrer fendilhação em elementos correntes de betão armado sujeitos unicamente a tensões de tracção provocadas por impedimentos a deformações devidas à retracção do betão. Não foram considerados os efeitos provocados por eventuais variações de temperatura e pela fluência do betão.

Neste estudo considerou-se uma viga com as extremidades fixas sujeita a uma retracção não uniforme ao longo da sua espessura (Fig. 6.1). Na avaliação da variabilidade da quantidade de armadura mínima teve-se em conta a aleatoriedade dos parâmetros mais significativos, nomeadamente, a extensão de retracção do betão,  $\epsilon_{cs}$ , a resistência do betão à compressão,  $f_c$ , e à tracção,  $f_{ct}$ , o seu módulo de elasticidade,  $E_c$  e a tensão de cedência das armaduras,  $f_{sy}$ .

As distribuições da armadura mínima foram obtidas através da aplicação do método de Monte Carlo. Na Fig. 6.2 apresenta-se os valores obtidos por simulação de uma viga de betão da classe C20/25 e para uma humidade relativa do meio ambiente de 60% (ver restantes casos analisados no Anexo 3). Os valores nulos observados nessas distribuições correspondem aos casos simulados em que não ocorreu qualquer fendilhação, sendo os valores não nulos obtidos através do critério de não plastificação das armaduras. Os resultados obtidos permitiram constatar que para valores correntes da humidade relativa do meio ambiente (valores entre 60% a 80%) a probabilidade de ocorrer fendilhação devida à retracção é elevada (entre 85% e 97% para os casos analisados).

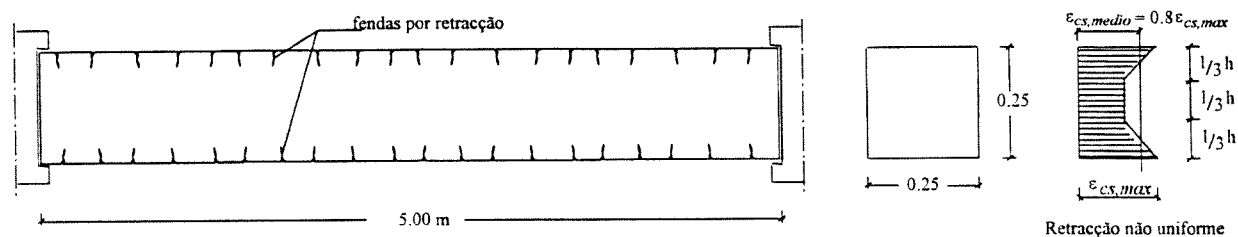


Fig. 6.1 – Geometria da viga analisada e diagrama de retracção não uniforme ao longo da altura da viga.

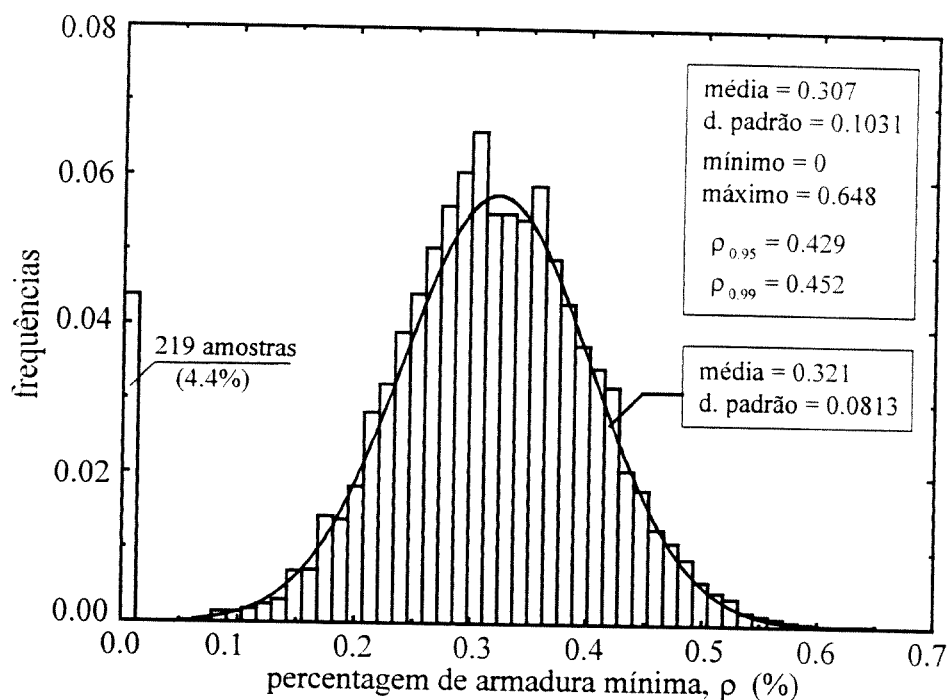


Fig. 6.2 – Distribuição da quantidade mínima de armadura de uma viga sujeita a retracção diferencial. Dados: betão C20/25, aço A500;  $HR = 60\%$ ;  $b \times h = 0.25 \times 0.25 \text{ m}^2$ ;  $n^\circ$  de amostras = 5000.

Tendo em conta os resultados obtidos na primeira fase, avançou-se para a segunda fase da abordagem probabilística. Partindo da hipótese que ocorre sempre fendilhação (suposição conservativa mas não muito afastada da realidade, de acordo com os resultados obtidos anteriormente), estudaram-se as distribuições da quantidade de armadura mínima aplicando os dois critérios referidos no início desta secção e considerando a variabilidade dos parâmetros mecânicos mais relevantes dos materiais.

Tendo presente que probabilidades de rotura da ordem do 1% é corrente para este tipo de estados limites, os resultados obtidos nesta segunda fase são apresentados nas Figs. 6.3 a 6.6 através do quantil de 99% da distribuição da percentagem da armadura mínima,  $\rho_{0.99}$  (identificados como resultados obtidos pela hipótese 1 no Anexo 3). Os gráficos ilustrados foram traçados a partir dos valores de  $\rho_{0.99}$  referentes a várias classes de betão e de aço, para diferentes diâmetros dos varões e considerando dois valores admissíveis para o valor de cálculo da largura de fendas,  $w_k$ , 0.3mm e 0.2mm. Na Fig. 6.3 representa-se os valores de  $\rho_{0.99}$  obtidos a partir do critério de não plastificação da armadura, enquanto que nas Fig. 6.4 e 6.5 ilustram-se os resultados obtidos pela aplicação do critério de largura de fendas para os valores especificados de  $w_k = 0.3 \text{ mm}$  e  $w_k = 0.2 \text{ mm}$ , respectivamente. A consideração simultânea dos resultados referentes aos dois critérios é ilustrada na Fig. 6.6.



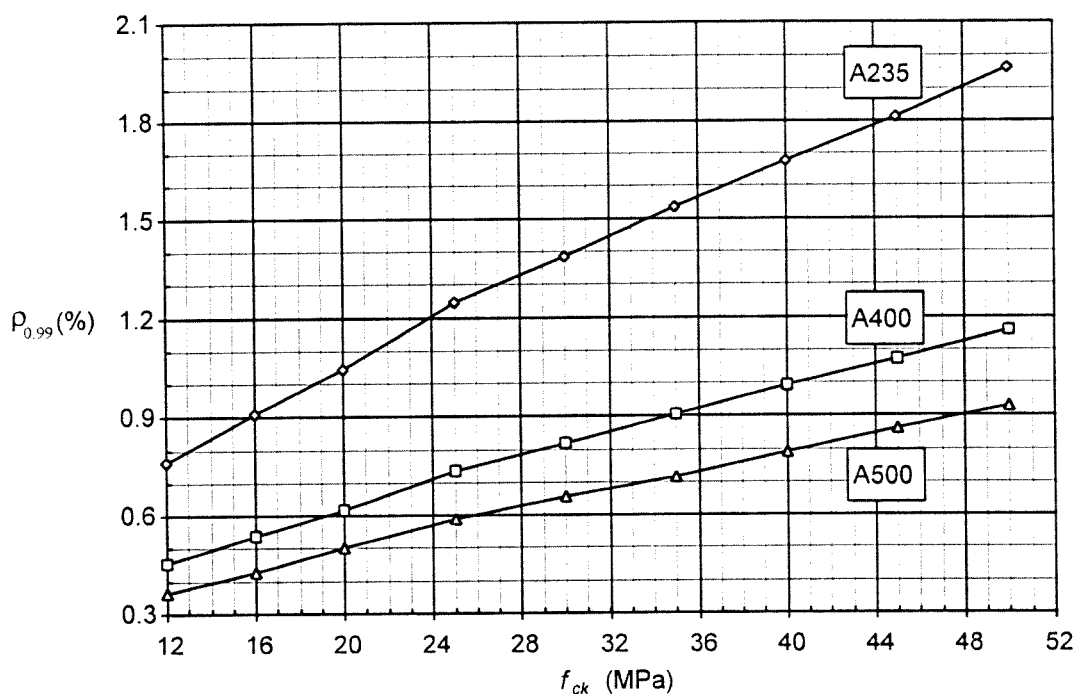


Fig. 6.3 – Armadura mínima no caso de tracção simples, para elementos de betão armado com espessura inferior a 30 cm - critério de não plastificação da armadura.

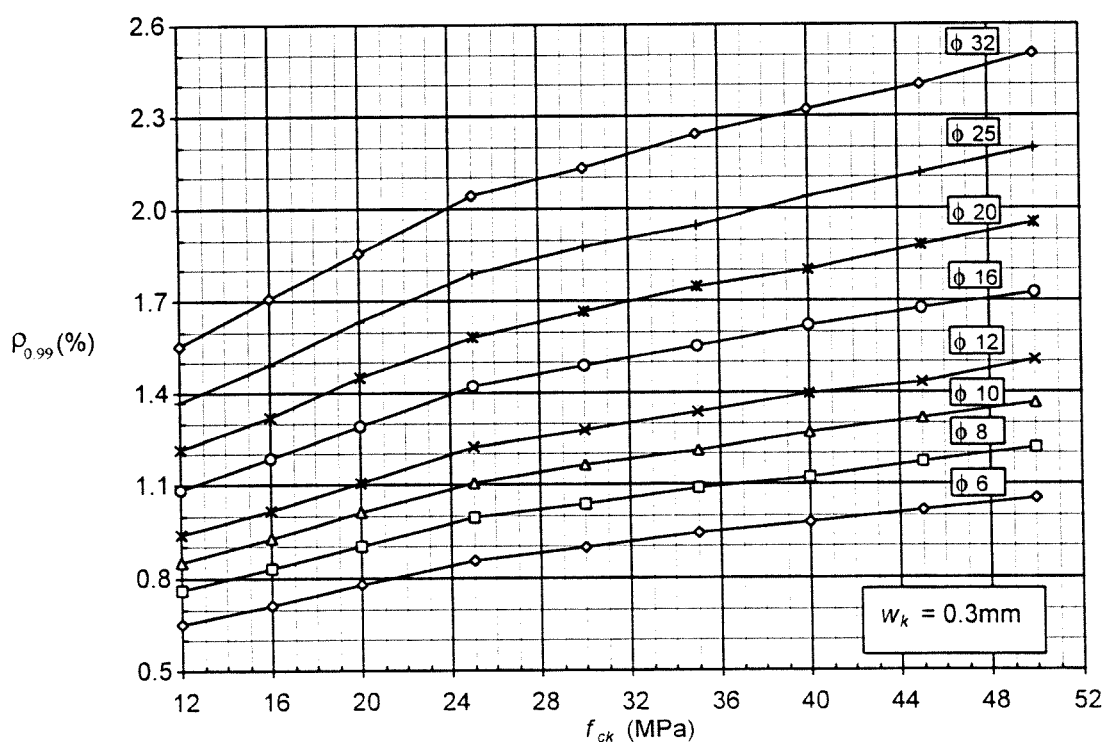


Fig. 6.4 – Armadura mínima no caso de tracção simples, para elementos de betão armado com espessura inferior a 30 cm - critério de largura de fendas:  $w_k = 0.3\text{mm}$ .

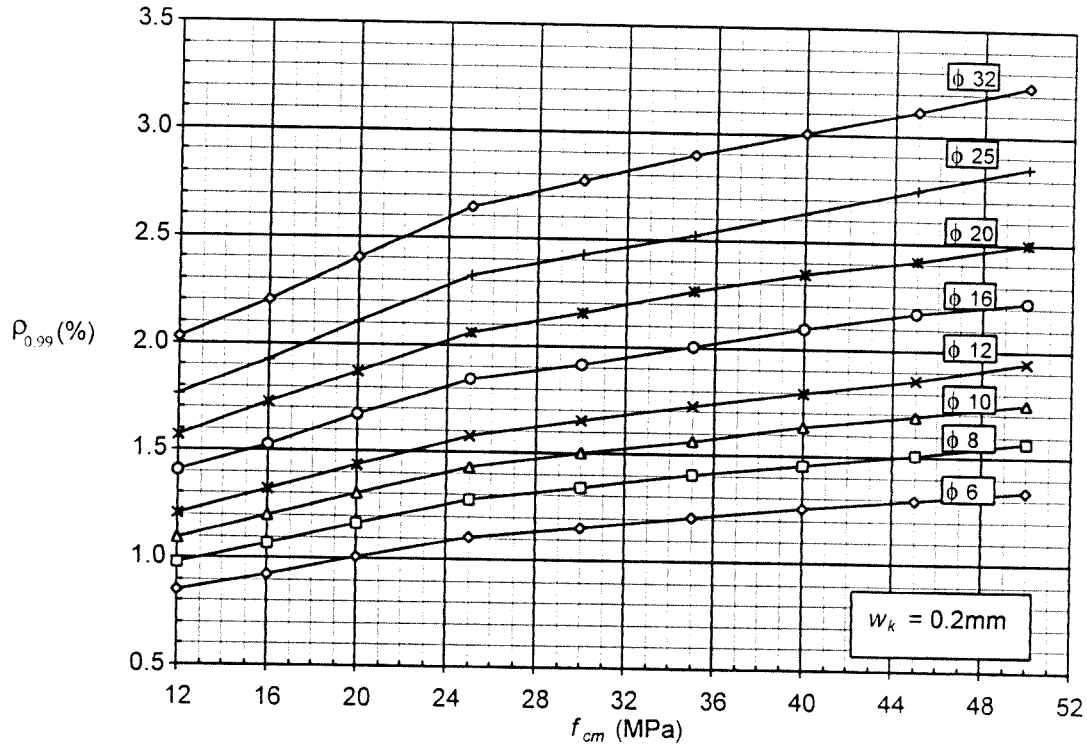


Fig. 6.5 – Armadura mínima no caso de tracção simples, para elementos de betão armado com espessura inferior a 30 cm - critério de largura de fendas:  $w_k = 0.2\text{mm}$ .

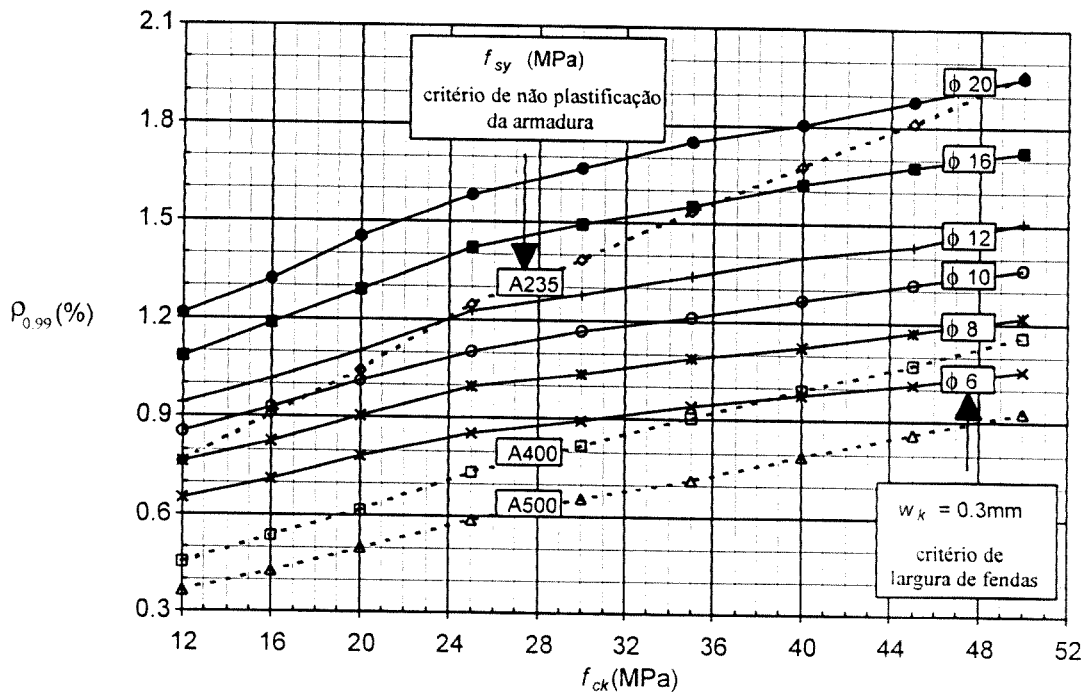


Fig. 6.6 – Armadura mínima no caso de tracção simples, para elementos de betão armado com espessura inferior a 30 cm.

Este exemplo permitiu verificar a eficácia da presente metodologia na abordagem de aspectos regulamentares ligados com a verificação da segurança de estruturas de betão. Destacou-se o problema da quantificação da armadura mínima necessária para controlar e limitar a fendilhação resultante do impedimento da estrutura, ou parte dela, a deformações impostas pela retracção do betão. Como corolário deste estudo foram propostos ábacos (Figs. 6.3 a 6.6, ver ainda gráficos apresentados no Anexo 3) para a avaliação da armadura mínima em função da classe do betão e do aço, do diâmetro dos varões e do valor limite admissível para a largura de fendas.

## **6.3 - AVALIAÇÃO DA SEGURANÇA AOS ESTADOS LIMITES ÚLTIMOS USANDO A ANÁLISE NÃO LINEAR**

### **6.3.1 - A análise não linear como referência na avaliação do comportamento de estruturas**

Até à publicação da mais recente regulamentação de estruturas de betão (EC2, 1991; CEB-FIP, 1993), o dimensionamento partia da hipótese, usada de forma quase universal, de comportamento linear dos sistemas estruturais. Este procedimento, vulgarmente usado nas aplicações práticas, é ainda o mais utilizado no dimensionamento de elementos estruturais correntes de betão. A sua aplicação é efectuada em duas fases: na primeira o sistema estrutural é simulado por um número restrito de parâmetros (geometria, módulos de elasticidade) servindo como base ao cálculo dos esforços supondo um comportamento linear; na segunda fase, é realizado o dimensionamento das secções críticas considerando a distribuição dos esforços obtida na fase anterior e uma descrição do comportamento dos materiais através de leis constitutivas não lineares. A segurança é então garantida se a capacidade resistente das secções críticas for superior aos esforços calculados anteriormente, para um determinado nível de risco implícito nos coeficientes de segurança. O comportamento linear das estruturas é em geral uma representação grosseira da realidade. Assim, como alternativa à metodologia proposta, os esforços calculados usando a teoria de elasticidade linear são corrigidos através da consideração de redistribuições dos esforços até um certo grau. Outro procedimento sugerido consiste no cálculo dos esforços recorrendo à teoria da plasticidade impondo valores limites para a capacidade plástica de rotação nas secções.

A aplicação na análise estrutural da hipótese de linearidade elástica para os estados limites últimos pode conduzir a distribuições de esforços na estrutura que se afastam significativamente dos valores reais. É por isso reconhecida a necessidade de ter em conta a não linearidade na determinação dos esforços resultantes das acções actuantes na estrutura, através de relações

constitutivas que traduzam o comportamento não linear dos materiais. Em termos gerais, podem-se expor os seguintes argumentos que justificam o uso da aproximação não linear:

- É a melhor ferramenta para descrever correctamente a resposta estrutural, por isso, deve ser considerada como o método de referência para controlar os resultados obtidos por outras aproximações simplificadas que traduzem com menor adequação a realidade física (nomeadamente, o cálculo linear com ou sem redistribuição e o cálculo plástico).
- Tira partido da redistribuição dos esforços, explorando as reservas de resistência em estruturas estaticamente indeterminadas, resultando em muitos casos numa substancial economia de material e simplificações no projecto (na forma das secções e no detalhe das armaduras). Além disso, a aproximação não linear permite avaliar de forma adequada a resposta estrutural a condições não usuais de carregamento ou de resistência. Permite também a reavaliação de estruturas anteriormente projectadas com determinado grau de redistribuição de esforços.
- Permite estimar a capacidade resistente residual de estruturas danificadas e a interpretação das causas do colapso.
- Tem vantagens significativas na avaliação do efeito de deformações impostas para além dos limites de aplicação da teoria da elasticidade linear e pode ser usado com resultados frutuosos na clarificação dos efeitos do pré-esforço em estruturas hiperstáticas.
- Permite identificar com clareza as roturas não dúcteis.

Há, no entanto, algumas desvantagens inerentes à adopção dos modelos de análise não linear. Destas destacam-se a impossibilidade de aplicar o princípio da sobreposição dos efeitos e, por isso, a necessidade de considerar um grande número de condições de carregamento distintos e a exigência de cálculos mais complexos e demorados. Este conjunto de desvantagens tem impedido a aplicação das técnicas de análise não linear de uma forma mais generalizada. No entanto, estes aspectos podem ser menos restritivos do que parecem à primeira vista.

Como já foi referido, a impossibilidade de aplicar o princípio da sobreposição dos efeitos tem como consequência a necessidade de considerar separadamente todas as combinações possíveis de acções. No caso de construções complexas isto pode conduzir a um número proibitivo de verificações. No entanto, os problemas apresentam frequentemente um número reduzido de casos que condicionam a análise da segurança e dentro destes é possível com aproximações lineares apontar quais são os mais críticos. Relativamente ao volume de cálculo envolvido neste tipo de

métodos, ele já não representa o impedimento que se verificava até à alguns anos atrás. A actual abundância de procedimentos numéricos e de códigos computacionais, associados com o aparecimento de pequenos computadores cada vez mais rápidos e mais acessíveis, reduziram de modo significativo o impacto desta desvantagem. Há, no entanto, um aspecto que embora não condicione irremediavelmente a aplicação dos modelos de análise não linear, tem sido fonte de grande polémica e de alguma indefinição mesmo no âmbito dos actuais regulamentos em vigor. Esse aspecto diz respeito à definição de um formato de segurança adequado quando se aplicam métodos de análise não linear.

### 6.3.2 - Formatos de segurança propostos pelas actuais regulamentações

Os formatos "básicos" sugeridos pelo Eurocódigo 2 (EC2, 1991) e pelo Código Modelo do CEB-FIP 1990 (MC90) (CEB-FIP, 1993), quando se utilizam métodos de análise não linear, são baseados nas tradicionais metodologias de dimensionamento. Trata-se de um método semi-probabilístico fundamentado na definição de estados limites para traduzir as situações de ruína ou de incapacidade para desempenhar as funções que são atribuídas (ver Capítulo 2).

Segundo o EC2, os métodos de análise não linear podem ser utilizados quer para os estados limites de utilização quer para os estados limites últimos, desde que satisfaçam as condições de equilíbrio e de compatibilidade. A metodologia proposta assenta em duas etapas: na primeira as deformações, e por consequência a distribuição dos esforços na estrutura, são calculadas com base nos valores médios das propriedades dos materiais (por exemplo  $E_{cm}$ ,  $f_{cm}$ ,  $f_{sym}$ , etc.), no entanto, para os estados limites últimos deverão considerar-se os valores de cálculo dessas propriedades nas zonas (secções) críticas (Fig. 6.7); numa segunda etapa a resistência última é avaliada ao nível das secções críticas considerando leis constitutivas não lineares e os valores de cálculo das propriedades dos materiais (Fig. 6.8). A solução estrutural resultante do dimensionamento deverá obedecer à condição de que a resistência última assim calculada deverá ser superior aos efeitos devidos ao valor de cálculo das acções.

O formato proposto pelo MC90 é idêntico ao descrito no parágrafo anterior, apresentando uma ligeira diferença na forma como é realizada a análise não linear estrutural para a verificação da segurança aos estados limites últimos. Assim, é proposta a utilização dos valores médios para as propriedades dos materiais em toda a estrutura até ser atingido o valor de cálculo da tensão de cedência da armadura. A partir daí serão usados os valores de cálculo para as propriedades dos materiais (aço e betão, Fig. 6.9).

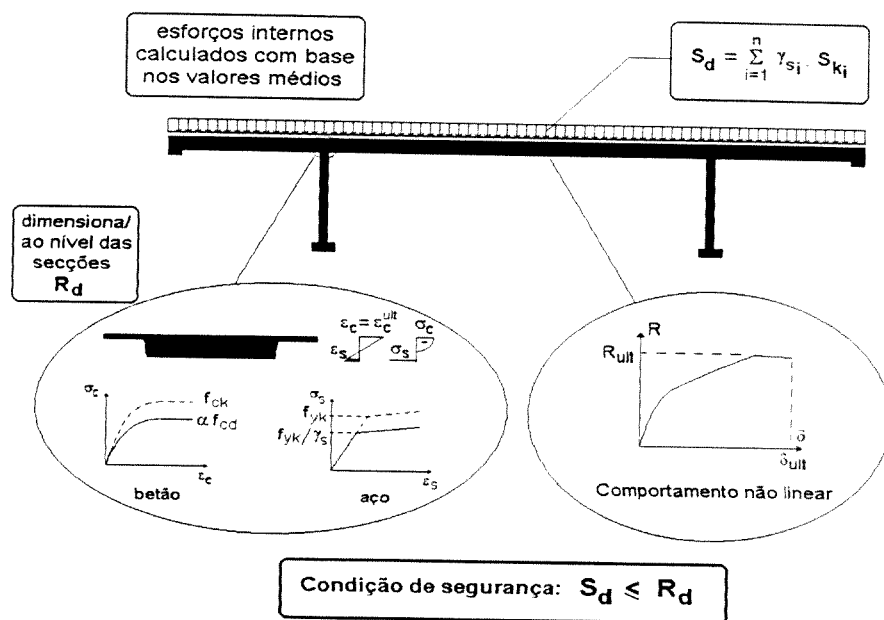


Fig. 6.7 - Formato "básico" de segurança.

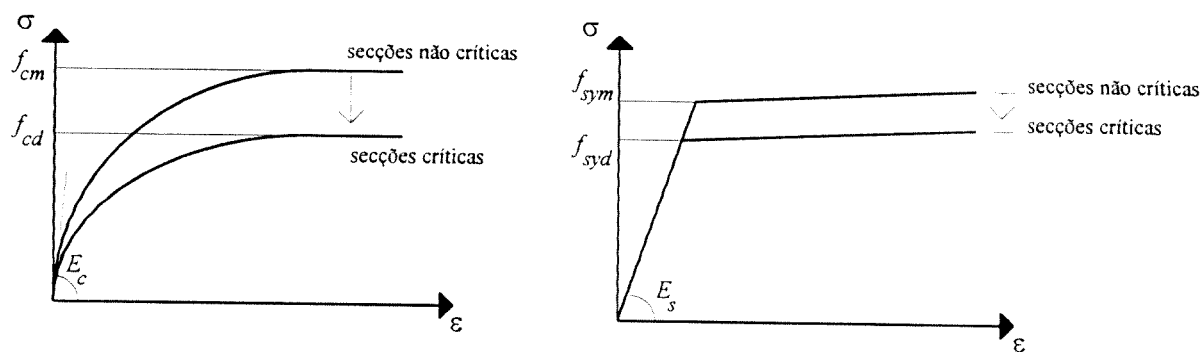


Fig. 6.8 - Propriedades dos materiais nas secções críticas e não críticas (Eurocódigo 2).

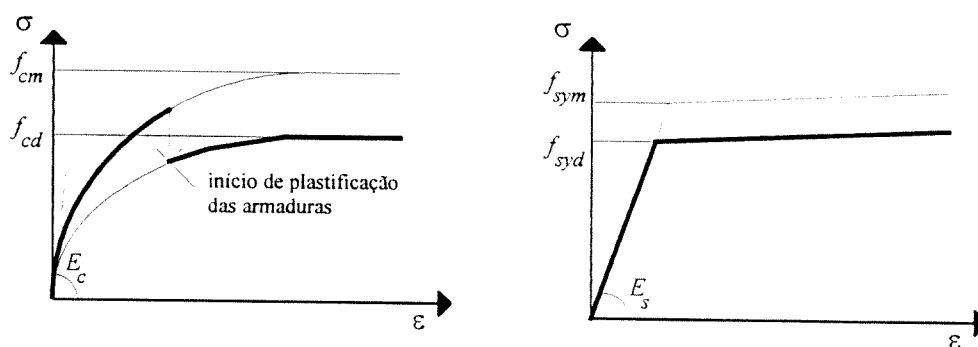


Fig. 6.9 - Propriedades dos materiais para a análise de segurança (MC90).

Estes formatos de segurança são baseados na determinação dos esforços seguido de dimensionamento ao nível das secções, embora tanto o EC2 como o MC90 refiram que para certos elementos estruturais complexos os métodos de análise utilizados (como, por exemplo, a análise por elementos finitos) permitam determinar tensões, extensões e deslocamentos em vez de esforços. Contudo, assumindo que o dimensionamento a partir destes resultados exige a consideração de outro tipo de métodos, não fornecem nenhuma indicação suplementares.

O projecto da parte 2 do Eurocódigo 2 (EC2-2, 1994), relativo a pontes de betão, sugere no seu anexo B um formato alternativo de segurança quando se utilizam métodos de análise não linear. A novidade apresentada diz respeito à forma como é definida a capacidade resistente estrutural. Afasta-se do conceito de verificação da segurança ao nível das secções críticas e adopta um formato definido em termos de acções. A metodologia proposta é a seguinte:

- A análise não linear da estrutura é realizada considerando os valores médios das propriedades resistentes dos materiais, tomados da seguinte forma (Fig. 6.10):

$$f_{ym} = 1.1 f_{yk} \quad , \quad (6.1a)$$

$$f_{pm} = 1.1 f_{pk} \quad , \quad (6.1b)$$

$$f_{cm} = 1.1 f_{ck} \quad , \quad (6.1c)$$

indicando os índices  $m$  e  $k$  os valores médios e os valores característicos, respectivamente;  $f_y$  a tensão de cedência à tracção das armaduras passivas;  $f_p$  a resistência à tracção das armaduras de pré-esforço; e  $f_c$  a resistência do betão à compressão.

- O estado limite último de resistência é superado quando em qualquer ponto da estrutura é atingida a extensão última na armadura,  $\varepsilon_{su}$  ou  $\varepsilon_{pu}$ , ou a extensão de compressão última no betão,  $\varepsilon_{cu}$ , ou ainda quando se atinge um estado de equilíbrio crítico.
- O valor de cálculo da capacidade resistente da estrutura,  $R_d$ , é obtido dividindo o valor para o qual se atingiu o estado limite último de resistência,  $R_m$ , por um coeficiente parcial de segurança,  $\gamma_R$ :

$$R_d = \frac{R_m}{\gamma_R} \quad , \quad \text{com } \gamma_R = 1.4 \quad . \quad (6.2)$$

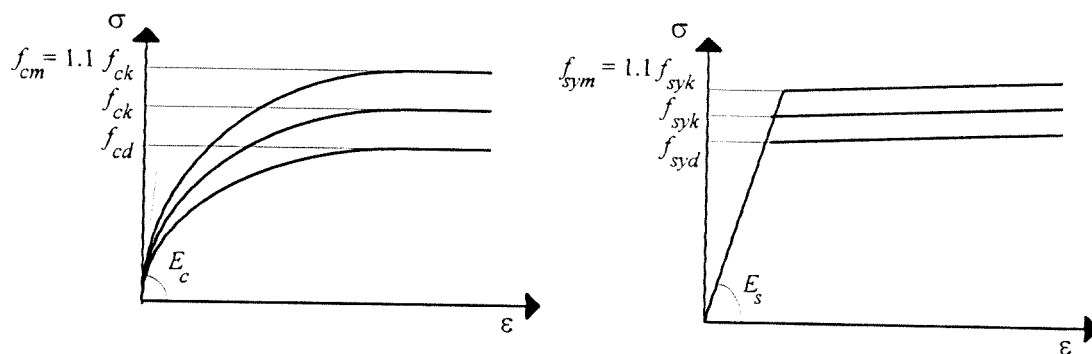


Fig. 6.10 - Propriedades dos materiais para a análise da segurança (EC2-2, 1994).

### 6.3.3 - Discussões sobre os formatos de segurança no seio do CEB

Presentemente existe no seio do Comité Europeu do Betão (CEB) um grupo de trabalho denominado por "Non Linear Analysis and Safety Concepts (CEB/TG I.1)", da Comissão 1 "General Concepts", que trabalha no desenvolvimento de um novo conceito de segurança a ser usado quando na análise se utilizam métodos numéricos refinados que usam as leis não lineares dos materiais na definição das relações constitutivas. O objectivo principal deste novo conceito é a consideração do comportamento real dos materiais permitindo conhecer a sensibilidade da capacidade resistente de forma a estabelecer margens de segurança mais adequadas.

Dentro do CEB existem duas correntes opostas sobre a definição deste novo conceito, por um lado os adeptos da metodologia corrente baseada nos coeficientes parciais de segurança e na verificação da segurança ao nível das secções, por outro lado os adeptos da definição de um novo formato de segurança que permita avaliar a segurança de uma forma global.

Os primeiros (Levi, 1995; Macchi, 1995) consideram que a actual metodologia, baseada nos estados limites, nos coeficientes parciais de segurança e na verificação da segurança ao nível das secções, tem toda a validade mesmo quando se utilizam métodos de análise não linear. Por um lado, a análise deverá ser efectuada com os valores representativos das acções suficientemente improváveis de ocorrer (valores característicos ou de cálculo) e, por outro lado, na verificação local, ao nível das secções, o uso de valores médios também não têm em conta de forma apropriada a natureza aleatória do comportamento dos materiais, eventualmente, a segurança requerida pode não ser assegurada. Deve-se usar os valores mínimos para a resistência dos materiais de forma a ter em conta as diferentes variabilidades dos materiais (como o aço e o betão). No entanto, para obter os valores mais prováveis de distribuição de esforços, deve-se usar



os valores médios de rigidez dos elementos estruturais. Por isso, segundo esta corrente, não há inconsistência no actual formato de segurança proposto pelo MC90.

Os adeptos da segunda corrente (Eibl, 1995; König, 1995) consideram que a distinção feita pelos actuais formatos de segurança, entre a determinação dos esforços na estrutura e o dimensionamento ao nível das secções, apresenta fortes inconsistências. Por exemplo, as deformações calculadas na primeira fase são distintas das que são calculadas ao nível das secções. Como consequência, os esforços considerados para o estado de deformação obtido na análise não são coerentes com o estado de deformação das secções e, por isso, os esforços considerados caracterizam um estado de equilíbrio arbitrário. A proposta de efectuar a análise não linear considerando os valores médios até ser atingido o valor de cálculo de início de plastificação das armaduras na secção mais esforçada e a partir daí usar os valores de cálculo das características resistentes dos materiais, também não é a mais adequada. Além de eventualmente provocar instabilidades indesejáveis nos procedimentos numéricos de análise, desvirtua o comportamento realista da estrutura, podendo eventualmente ocorrer roturas de tipo diferente. O conhecimento mais aprofundado da capacidade resistente das estruturas, para o qual é geralmente exigido um grande volume de cálculo e um maior período de tempo, é completamente ignorado pelo actual formato de segurança.

#### 6.3.4 - Propostas alternativas de formatos de segurança

Nos últimos anos a comunidade técnica e científica tem manifestado dúvidas e apresentado propostas alternativas ao formato de segurança definido nas actuais normas de dimensionamento.

Nos seus trabalhos de 1990 e de 1992, Figueiras *et al* (Figueiras, 1990; Lourenço, 1992) sugere uma metodologia simples de verificação da segurança quando se utilizam métodos de análise não linear adequados ao estudo de estruturas laminares. Os valores das propriedades dos materiais e das acções adoptados na análise são os valores característicos. A justificação para esta escolha prende-se com o facto da verificação da segurança se encontrar definida regulamentarmente em termos de coeficientes de segurança obtidos através de valores característicos e valores de cálculo, ao contrário, os valores médios não são convenientemente definidos para esse fim. A verificação da segurança é realizada em termos de acções. Assim, o factor de carga de colapso obtido da análise estrutural,  $\lambda_{ult}$ , deverá superar o coeficiente de segurança global,  $\gamma_{global}$ :

$$\lambda_{ult} > \gamma_{global} = \gamma_M \cdot \gamma_F \quad , \quad (6.3)$$

sendo  $\gamma_F$  o coeficiente de segurança das acções e que corresponde um valor de 1.50 e  $\gamma_M$  é o coeficiente de segurança atribuído às características resistentes da estrutura, tomando os seguintes valores consoante o tipo de rotura:

- $\gamma_M \equiv \gamma_s = 1.15$ , se a rotura ocorrer por esgotamento da capacidade deformacional do aço (cedência acentuada da armadura);
- $\gamma_M \equiv \gamma_c = 1.50$ , se a rotura ocorrer por esmagamento do betão comprimido (apresentando o aço ainda plastificação nula ou moderada).

Em anexo ao projecto do Eurocódigo 2 para pontes (EC2-2, 1994) Novák e Tue (Novák, 1994) definem um procedimento prático de dimensionamento de uma ponte (estrutura porticada) recorrendo a um programa de cálculo automático baseado na técnica dos elementos finitos e tendo em conta as relações não lineares momentos-curvaturas em estado fendilhado. A verificação da segurança é baseada no procedimento proposto no anexo B desse documento (ver expressões 6.13 e 6.2). Apresenta, no entanto, um processo alternativo para determinar o valor de cálculo da capacidade resistente da estrutura, idêntico à proposta anterior. Assim, o coeficiente de segurança,  $\gamma_R$ , é definido da seguinte forma:

- $\gamma_R = 1.1\gamma_s = 1.1 \times 1.15 \cong 1.30$ , se for atingida a extensão última da armadura,  $\varepsilon_{su}$ ;
- $\gamma_R = 1.1\gamma_c = 1.1 \times 1.50 = 1.65$ , se for atingida a extensão última do betão à compressão,  $\varepsilon_{cu}$ ;

sendo  $\gamma_s$  o coeficiente parcial de segurança para o aço das armaduras e  $\gamma_c$  o coeficiente parcial de segurança para o betão. A constante 1.1 corresponde ao coeficiente que relaciona as tensões médias com as características (ver expressão 6.1).

No seu trabalho de 1994, Câmara *et al* apresenta uma proposta de verificação de segurança para o estudo de estruturas porticadas (Câmara, 1994). A metodologia proposta consiste em proceder a ligeiras adaptações das curvas de comportamento dos materiais, em particular do betão, de modo a permitir realizar com uma única análise não linear a verificação do comportamento em serviço e as condições de segurança à rotura. Assim, considera um módulo de elasticidade na origem compatível com as condições do comportamento em serviço (uma vez que em termos de resistência última a rigidez na origem da curva tensões-deformações do betão tem uma influência absolutamente desprezável) e os valores de cálculo da resistência máxima do betão e do aço. A segurança é verificada de acordo com a técnica tradicional recorrendo a coeficientes parciais de segurança:

$$R_d \left( \frac{f_{ck}}{\gamma_c}; \frac{f_{syk}}{\gamma_s}; E_{cm}; E_{sm}; f_{ctm}; \dots \right) \geq \gamma_G G + \gamma_Q Q \quad (6.4)$$

Segundo Câmara este procedimento permite considerar a interdependência das características do comportamento dos materiais na resposta do conjunto (o que não acontecia nas propostas anteriores), isto é, contabiliza a influência do comportamento do betão na rotura do aço e vice-versa.

Em 1995, König propôs um formato de segurança em termos de acções (König, 1995). Nesta proposta define-se um coeficiente parcial de segurança,  $\gamma_R$ , relativo à capacidade resistente da estrutura. Diferindo da noção tradicional de verificação de segurança ao nível das secções, este coeficiente de segurança é interpretado como uma reserva de segurança da estrutura. Deverá ser suficientemente grande para evitar roturas em elementos estruturais se as propriedades dos materiais descerem para valores baixos (valores de cálculo) ao nível das secções. Esse coeficiente é definido da seguinte forma:

$$\gamma_R = \frac{R_m}{R_d} \cdot a \quad (6.5)$$

em que  $R_m$  e  $R_d$  representam os valores médios e os valores de cálculo, respectivamente, da capacidade resistente da secção crítica mais relevante; e,  $a$  é um parâmetro dependente dos graus de redistribuição dos esforços obtidos com os valores de cálculo e com os valores médios. A relação  $R_m/R_d$  traduz a influência da variabilidade das propriedades dos materiais na capacidade resistente das secções, enquanto que o parâmetro  $a$  tem em conta o efeito da redistribuição dos esforços em estruturas hiperstáticas. É sugerido o estudo de estruturas de diversos tipos e analisar estatisticamente os resultados obtidos para a definição de um coeficiente de segurança  $\gamma_R$  adequado.

Eibl (1995), pioneiro na crítica da aplicabilidade dos formatos de segurança definidos nas actuais normas quando se utiliza a análise não linear (Eibl, 1990, 1991), propôs um coeficiente global de segurança,  $\gamma_R$ , que permite garantir uma probabilidade de rotura pré-seleccionada:

$$\gamma_R = \frac{R_m}{S_d} \quad (6.6)$$

em que  $R_m$  representa o valor médio da capacidade resistente estrutural e  $S_d$  é um quantil adequado da distribuição das acções (aproximadamente o valor correspondente a 99.98%). Eibl propõe a utilização de métodos probabilísticos como base para a definição de valores adequados de  $\gamma_R$ .

Em 1997, König propôs um novo formato de segurança (König, 1997). De acordo com este autor a utilização dos valores médios propostos pelo EC2-2 (1994) para a avaliação da capacidade resistente das estruturas (ver expressões 6.1a-c) resulta num coeficiente global de segurança,  $\gamma_R$ , que varia aproximadamente entre 1.3 e 1.7, sendo 1.3 para estruturas em que a rotura ocorre pelo aço ( $\gamma_R \cong 1.1 \times 1.15 \cong 1.3$ ) e 1.7 para os casos em que a rotura ocorre pelo betão ( $\gamma_R \cong 1.1 \times 1.50 \cong 1.7$ ). Considerando resultados estatísticos por si obtidos, a relação entre o valor correspondente ao quantil de 5% da resistência medida nos elementos estruturais,  $f_{c,estrutura}$ , e a resistência característica do betão,  $f_{ck}$ , é 0.85:

$$\frac{f_{c,estrutura}}{f_{ck}} = 0.85 \quad . \quad (6.7)$$

Considerando esta relação, König propõe considerar os seguintes valores "médios" para avaliar a capacidade resistente das estruturas:

$$f_{cm} = 0.85 f_{ck} \quad , \quad (6.8a)$$

$$f_{ym} = 1.10 f_{yk} \quad . \quad (6.8b)$$

Desta forma, consideram-se coeficientes parciais de segurança para o aço e para o betão que são aproximadamente iguais:

$$\gamma_s = 1.1 \times 1.15 = 1.27; \quad \gamma_c = 0.85 \times 1.50 = 1.28 \quad . \quad (6.9)$$

De acordo com este autor, a vantagem deste formato é a possibilidade de definir um coeficiente global de segurança,  $\gamma_R$ , que é praticamente constante, independentemente dos mecanismos de rotura possíveis de ocorrer. Salienta, no entanto, que esta proposta necessita de ser ainda convenientemente investigada através de comparações com cálculos (determinísticos e probabilísticos) para exemplos seleccionados.

### 6.3.5 - Breve discussão sobre os formatos propostos

Os formatos de segurança propostos pelas actuais normas, idênticos à metodologia tradicional, revelam inconsistências que limitam as potencialidades dos métodos de análise mais refinados. O conhecimento mais aprofundado da capacidade resistente das estruturas, para o qual é exigido um maior volume de cálculo e um maior dispêndio de tempo, é ignorado pelo actual formato de segurança.

As propostas de regras práticas para o dimensionamento de estruturas quando se utilizam modelos de análise não lineares, embora de aplicação fácil, apresentam geralmente insuficiências na aplicação a casos gerais, umas por não se adaptarem a todos os casos de rotura e outras por desvirtuarem o comportamento dos materiais. As propostas que consistem em proceder a ligeiras adaptações das curvas de comportamento dos materiais, em particular do betão, permitem realizar com uma única análise não linear a verificação do comportamento em serviço e as condições de segurança à rotura. Embora práticos, estes processos podem em certas situações conduzir a níveis de fiabilidade incorrectos porque utilizam relações constitutivas fictícias. Se o objectivo principal dos modelos de análise não linear é obter análises realistas da resposta estrutural, então esse objectivo não é atingido com este tipo de procedimentos.

O outro tipo de processos consiste em determinar o valor de cálculo da capacidade resistente da estrutura dividindo o valor dessa capacidade resistente, obtida considerando valores representativos da estrutura, por um coeficiente de segurança adequado. Esse coeficiente de segurança pode tomar dois valores: um valor associado com o coeficiente parcial de segurança do aço,  $\gamma_s$ , se a rotura ocorre por esgotamento da capacidade última de deformação do aço; ou associado com o coeficiente parcial de segurança do betão,  $\gamma_c$ , se a rotura ocorre por esmagamento do betão. A aplicação deste critério a estruturas porticadas pode ser insuficiente ao não considerar a gama de valores que pode ocorrer entre  $\gamma_s$  e  $\gamma_c$  quando a rotura ocorre com uma participação conjunta de ambos os materiais.

O formato de segurança adequado deverá privilegiar a consideração dos valores mais representativos do comportamento dos materiais, evitando desvirtuar o comportamento real das estruturas. Nas secções seguintes apresenta-se o estudo de segurança de estruturas de betão com o objectivo de definir um formato adequado para a avaliação da segurança de estruturas porticadas quando se utilizam métodos de análise não linear. Partindo de uma abordagem probabilística elaborada, os resultados obtidos servirão para a definição de regras simples.

## 6.4 - ESTUDO DE SECÇÕES DE BETÃO ARMADO SUJEITAS À FLEXÃO

### 6.4.1 - Generalidades

O objectivo desta secção é o estudo da segurança de secções de betão armado sujeitas à flexão e a definição de um coeficiente parcial de segurança da resposta estrutural,  $\gamma_{sec}$ , usando métodos de análise não linear:

$$\gamma_{sec} = \frac{R_m}{R_d} \quad , \quad (6.10)$$

sendo  $R_m$  o valor médio da distribuição da capacidade resistente da secção de betão e  $R_d$  o valor associado a uma probabilidade de rotura previamente definida.

Analisa-se a gama de valores de  $\gamma_{sec}$  obtida para um conjunto de exemplos estudados, avalia-se os factores que condicionam esse coeficiente e propõe-se expressões para a sua quantificação.

A análise de secções à flexão serve como ponto de partida para definir um formato simples para a análise de segurança de sistemas estruturais de betão quando se utilizam métodos de análise não linear.

#### 6.4.2 - Caracterização dos exemplos estudados

Foram analisadas várias secções de betão armado, tendo sido considerados os seguintes aspectos (ver Quadro 6.1):

- secções rectangulares maciças com  $d/h = 0.9$  (sendo  $d$  a altura útil da secção e  $h$  a altura total)<sup>1</sup>;
- percentagens de armadura de tracção,  $\rho$ , entre os valores mínimos e máximos regulamentares, isto é, entre 0.12% a 4.0% com intervalos de 0.25% a partir de  $\rho = 0.25\%$ ;
- secções com e sem armadura de compressão;
- betões de todas as classes definidas no EC2, desde a classe C12/15 à classe C50/60;
- uma classe de aço, A500.

Na abordagem probabilística consideraram-se as seguintes opções:

- variáveis básicas (com natureza aleatória):
  - resistência do betão à compressão,  $f_c$ ;
  - resistência do betão à tracção,  $f_{ct}$ ;
  - módulo de elasticidade do betão,  $E_c$ ;

---

<sup>1</sup> Em trabalho realizado anteriormente pelo autor (Henriques, 1996b) constatou-se que o coeficiente  $\gamma_{sec}$  não é alterado com a variação das dimensões das secções, nem significativamente afectado para as relações usuais de  $d/h$ .

- tensão de cedência das armaduras,  $f_{sy}$ ;
  - tensão máxima das armaduras,  $f_{su}$ ;
  - variação da altura da secção (imperfeições geométricas),  $\Delta h$ ;
- estado limite último de resistência definido para uma probabilidade de rotura igual a  $p_f = 10^{-4}$ , sendo este um dos valores mais representativos para este tipo de situações (CEB-FIP, 1978).

Quadro 6.1 - Opções consideradas no estudo de  $\gamma_{sec}$ .

classes de betão: C12/15 a C50/60		classe do aço: A500			
dimensões da secção	$b \times h = 0.25 \times 0.50 \text{m}^2$ ; $d/h = 0.90$ ( $b$ - largura; $h$ - altura; $d$ - altura útil)				
percentagem de armadura de tracção, $\rho$	0.12; 0.25; 0.50; 0.75; 1.00; 1.25; 1.50; 1.75; 2.00; 2.25; 2.50; 2.75; 3.00; 3.25; 3.50; 3.75; 4.00				
armadura de compressão $\rho'/\rho$	0.00	0.10	0.25	0.50	0.75
variáveis básicas	descrição	lei-tipo	média	d. padrão	
$f_c$	resistência do betão à compressão	normal	$f_{ck} + 8$ [MPa]	5.0 MPa	
$f_{sy}$	tensão de cedência das armaduras	normal	550 MPa	30 MPa	
$\Delta h$	variação da altura da secção	normal	0	7 mm	
$f_{ct}$	resistência do betão à tracção	$0.25 f_{cm}^{2/3} \cong 0.30 f_{ck}^{2/3}$ ; [MPa]			
$E_c$	módulo de elasticidade do betão	$9500 f_{cm}^{1/3}$ ; [MPa]			
$f_{su}$	resistência das armaduras	$1.05 f_{sy}$			

Refira-se que a consideração de uma única classe de aço teve como intenção principal evitar um número volumoso de diferentes tipos de secção a analisar. A escolha do aço da classe A500, em vez por exemplo do A400, deve-se à sua maior resistência entre os tipos de aço correntemente usados para as armaduras ordinárias. Como as roturas devidas ao esmagamento do betão são mais perigosas do que as roturas condicionadas pelo aço, então o uso deste tipo de aço proporciona a ocorrência de situações limites mais gravosas no conjunto aço/betão, porque quanto maior a resistência do aço maior é a possibilidade de a rotura ocorrer pelo betão (para o mesmo valor de  $\rho$ ). Além disso, os aços das classes 500 são os únicos com normalização europeia.

O procedimento usado na avaliação deste coeficiente de segurança foi baseado na metodologia de Monte Carlo descrita no Capítulo 5. As respostas estruturais das secções estudadas foram

determinadas por um programa de cálculo automático (Henriques, 1996b) que tem em conta as relações constitutivas não lineares para o betão e para o aço descritas no Capítulo 4. A capacidade resistente à flexão,  $R$ , das secções de betão armado é definida pelo valor máximo do momento flector obtido na curva de resposta momentos-curvaturas (Fig. 6.11).

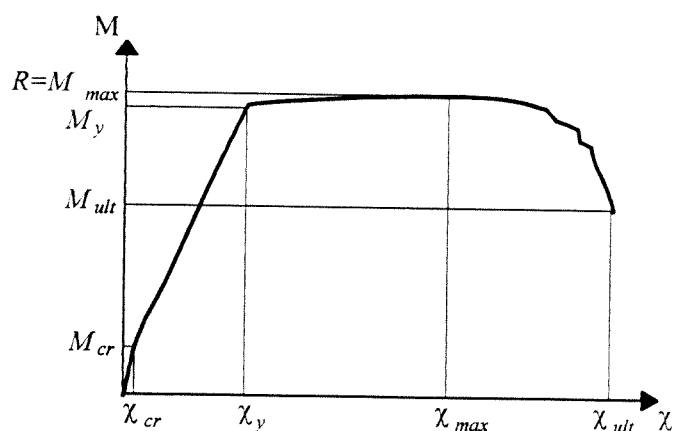


Fig. 6.11 - Identificação das diversas grandezas numa curva momentos-curvaturas.

### 6.4.3 - Avaliação da resposta última de secções de betão armado flectidas

Antes de se iniciar a abordagem probabilística da segurança das secções de betão armado sujeitas a esforços de flexão, realizaram-se uma série de análises determinísticas para avaliar os tipos de comportamento das diferentes secções ao estado limite último de resistência e averiguar os possíveis factores que condicionam de forma preponderante o coeficiente parcial de segurança  $\gamma_{sec}$ . Nas análises determinísticas efectuadas consideraram-se os valores característicos e de cálculo regulamentares para as propriedades dos materiais.

Na Fig. 6.12 apresenta-se curvas de resposta momentos-curvaturas para algumas opções consideradas no Quadro 6.1. Essas curvas, sendo representativas do comportamento de secções de betão armado sujeitas a esforços de flexão simples, permitem constatar o seguinte:

- Há um aumento significativo da capacidade resistente com o acréscimo da quantidade de armadura de tracção, para valores de  $\rho$  (percentagem de armadura de tracção) até cerca 1.0% a 1.5%, para valores de  $\rho$  superiores esse crescimento vai-se sucessivamente atenuando. Isto acontece para grandes percentagens de armadura porque o acréscimo do momento flector resistente provocado pelo aumento das forças



de compressão no betão,  $F_c$ , e de tracção no aço,  $F_s$ , é atenuado pela diminuição do braço entre estas duas forças (Fig. 6.13).

- Existem dois tipos de curvas distintas, estando associadas respectivamente a respostas dúcteis e frágeis (Fig. 6.14). Nas respostas do tipo dúctil o esgotamento da capacidade resistente da secção é acompanhado por deformações plásticas significativas das armaduras traccionadas, ao qual está associado o aparecimento de um patamar nas curvas de resposta. Este tipo de resposta pode ainda ser dividido em dois sub-grupos: respostas dúcteis com grande plastificação (para valores baixos da quantidade de armadura) e respostas dúcteis com pequena plastificação. Nas respostas do tipo frágil, o esgotamento da capacidade resistente da secção ocorre por esmagamento do betão sem que as armaduras atinjam o regime plástico. A este tipo de roturas estão associadas pequenas deformações últimas.
- Sendo as respostas últimas das secções condicionadas pelo tipo de rotura dos materiais, então a relação entre a capacidade resistente do betão à compressão e a resistência do aço à tracção,  $f_c/f_{sy}$ , desempenha um papel fundamental. Assim, para o mesmo valor de  $\rho$  as respostas têm maior ductilidade quanto maior for a relação  $f_c/f_{sy}$ , estabilizando o nível de ductilidade a partir de um determinado ponto.
- A introdução de armadura de compressão ( $\rho'$  é a percentagem de armadura de compressão) constitui como que um reforço da capacidade resistente à compressão, conduzindo a um acréscimo da ductilidade da resposta.

Observando a evolução das deformações últimas para as diferentes classes de betão e percentagens de armaduras consideradas, verifica-se que existe inicialmente um ligeiro crescimento para os valores baixos de armadura de tracção seguido de uma diminuição progressiva. Esta constatação leva a pressupor que existe inicialmente um ligeiro aumento de ductilidade e a partir de um determinado valor se vai tornando sucessivamente menos dúctil. De forma a clarificar melhor este aspecto, associou-se a noção de ductilidade à energia que é libertada para que ocorra a deformação plástica da secção e definiu-se uma grandeza que quantifica o trabalho plástico realizado até se esgotar a capacidade resistente. Essa grandeza,  $E_{m-c}$ , é associada à relação entre a área do diagrama momentos-curvaturas entre o início da plastificação das armaduras traccionadas,  $A_{m-c}^{plast}$ , e a sua área total,  $A_{m-c}^{total}$ , (Fig. 6.15) através do seguinte quociente:

$$E_{m-c} = \frac{A_{m-c}^{plast}}{A_{m-c}^{total}} \quad ; \quad 0 \leq E_{m-c} \leq 1 \quad . \quad (6.11)$$

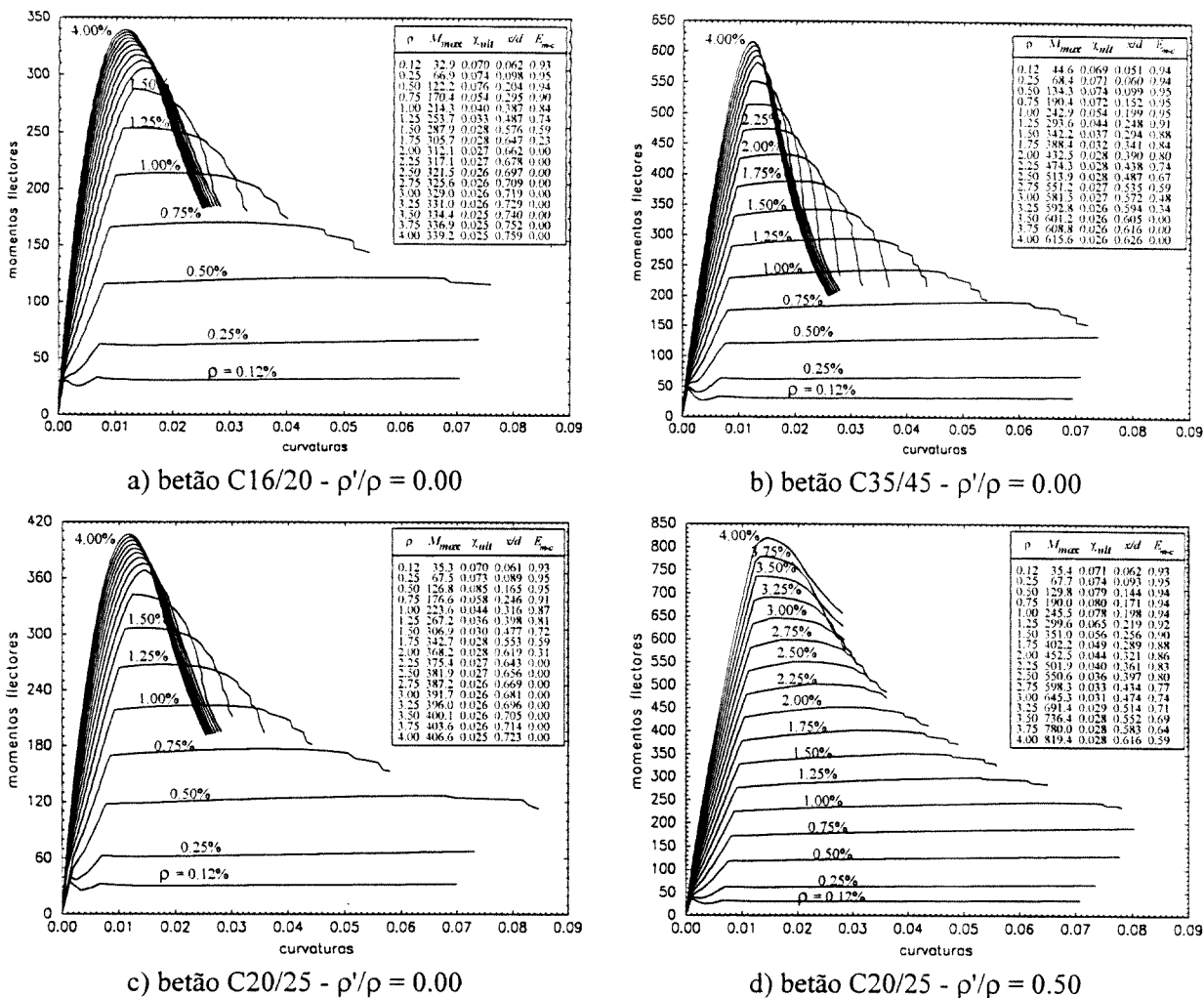


Fig. 6.12 - Curvas momentos-curvaturas para alguns casos analisados (usando valores característicos).

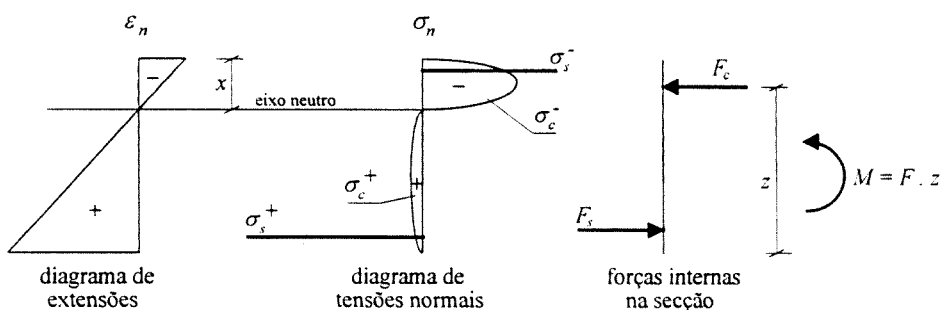


Fig. 6.13 - Diagramas de deformações e tensões na secção.

Nos diagramas ilustrados na Fig. 6.12 encontram-se os valores de  $E_{m-c}$  obtidos para as várias curvas. Observa-se que a energia plástica relativa,  $E_{m-c}$ , apresenta inicialmente valores praticamente constantes, diminuindo depois gradualmente para valores de  $\rho$  crescentes.

Refira-se ainda que a percentagem mínima de armadura ( $\rho_{min} = 0.12\%$ ) revela-se insuficiente para betões de classes médias e altas. Na Fig. 6.12 verifica-se que para essa quantidade de armadura os diagramas momentos-curvaturas sofrem uma quebra acentuada logo após o início da fendilhação, sendo essa quebra tanto maior quanto maior for a resistência do betão. Após essa quebra, a secção é incapaz de voltar a atingir a carga de fendilhação.

Com o objectivo de avaliar os parâmetros que melhor descrevessem o coeficiente parcial de segurança  $\gamma_{sec}$  estudou-se a relação  $R_k/R_d$ , representando  $R_k$  e  $R_d$  as capacidades resistentes das secções obtidas com os valores característicos e de cálculo regulamentares, respectivamente. Este estudo deve ser encarado meramente pelo seu aspecto qualitativo, uma vez que a abordagem probabilística a apresentar seguidamente servirá para propôr valores para  $\gamma_{sec}$ .

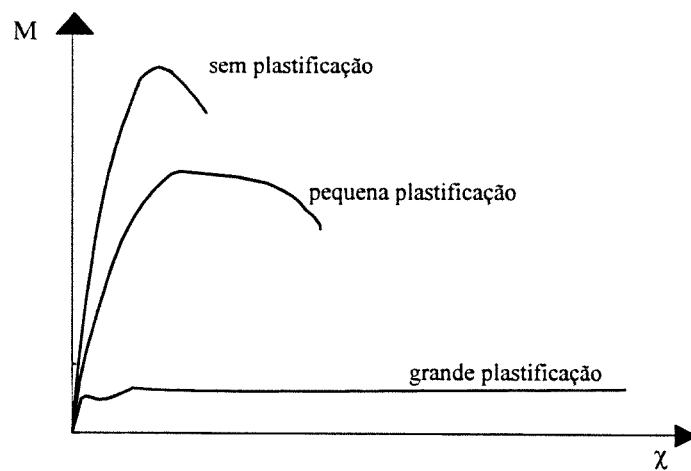


Fig. 6.14 - Diagramas típicos de respostas de secções de betão armado sujeitas à flexão.

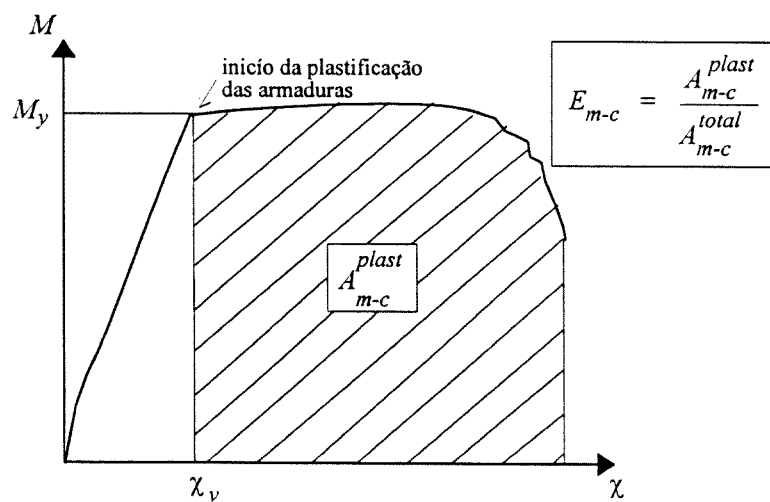


Fig. 6.15 - Definição do parâmetro energético de ductilidade,  $E_{m-c}$ .

Na Fig. 6.16 apresenta-se os resultados obtidos para a relação  $R_k/R_d$  (indicados através de marcas) para as várias classes de betão e para as várias percentagens de armadura consideradas no Quadro 6.1. Uma vez que  $R_k/R_d$  depende da relação entre a capacidade resistente do betão à compressão e do aço à tracção, optou-se por um factor que melhor caracterizasse essa relação. Assim, escolheu-se a posição relativa do eixo neutro,  $x/d$  (sendo  $x$  a distância do eixo neutro à fibra extrema comprimida da secção, e  $d$  a altura útil da secção), dado que em flexão este parâmetro define qual a parcela do betão comprimido e está relacionado com o braço do momento flector.

Os diagramas ilustrados na Fig. 6.16 mostram claramente que existe uma variação de  $R_k/R_d$  entre valores da ordem de 1.15 a 1.50, correspondendo aos coeficientes parciais de segurança do aço,  $\gamma_s$ , e do betão,  $\gamma_c$ , respectivamente. As curvas referidas mostram ainda que a relação  $R_k/R_d$ :

- aumenta para valores crescentes da posição do eixo neutro;
- diminui para valores crescentes da quantidade de armadura de compressão;
- tem um mínimo aproximadamente igual a 1.15 que é atingido para valores baixos de  $x/d$ , independentemente da classe de betão e da quantidade de armadura de compressão (as perturbações observadas nas extremidades inferiores devem-se aos valores correspondentes a  $\rho = 0.12\%$ , já assinaladas anteriormente);
- apresenta valores máximos para valores elevados de  $x/d$ , variando com as classes de betão e com a quantidade de armadura de compressão.

Os gráficos apresentados na Fig. 6.16 ilustram de forma inequívoca que, para uma percentagem de armadura de compressão constante, a relação  $R_k/R_d$  tem uma forte correlação com  $x/d$ . Na Fig. 6.16a, correspondente aos casos em que não há armadura de compressão, é possível observar a existência de três zonas que se distinguem no crescimento de  $R_k/R_d$ . Na primeira zona a curva estende-se até cerca de  $x/d = 0.45$ , verificando-se um crescimento gradual e com inclinação praticamente constante para valores aproximados de  $R_k/R_d$  entre 1.15 e 1.24. Na segunda zona, situada entre  $x/d \cong 0.45$  e 0.65, verifica-se um crescimento acentuado de  $R_k/R_d$  que varia entre 1.24 e 1.39, aproximadamente. Finalmente no último troço o crescimento da curva volta a ser atenuado, obtendo-se para  $x/d = 0.80$  um valor de  $R_k/R_d$  aproximadamente igual a 1.45.

A consideração de percentagens de armadura de compressão sucessivamente crescentes vai originar a diminuição da relação  $R_k/R_d$  para toda a gama de valores de  $x/d$  (exceptuando o valor mínimo 1.15 que permanece inalterável). Assim o crescimento de  $R_k/R_d$  vai sendo atenuado à medida que a relação  $\rho'/\rho$  cresce, provocando também uma diminuição na amplitude de valores de  $x/d$ .

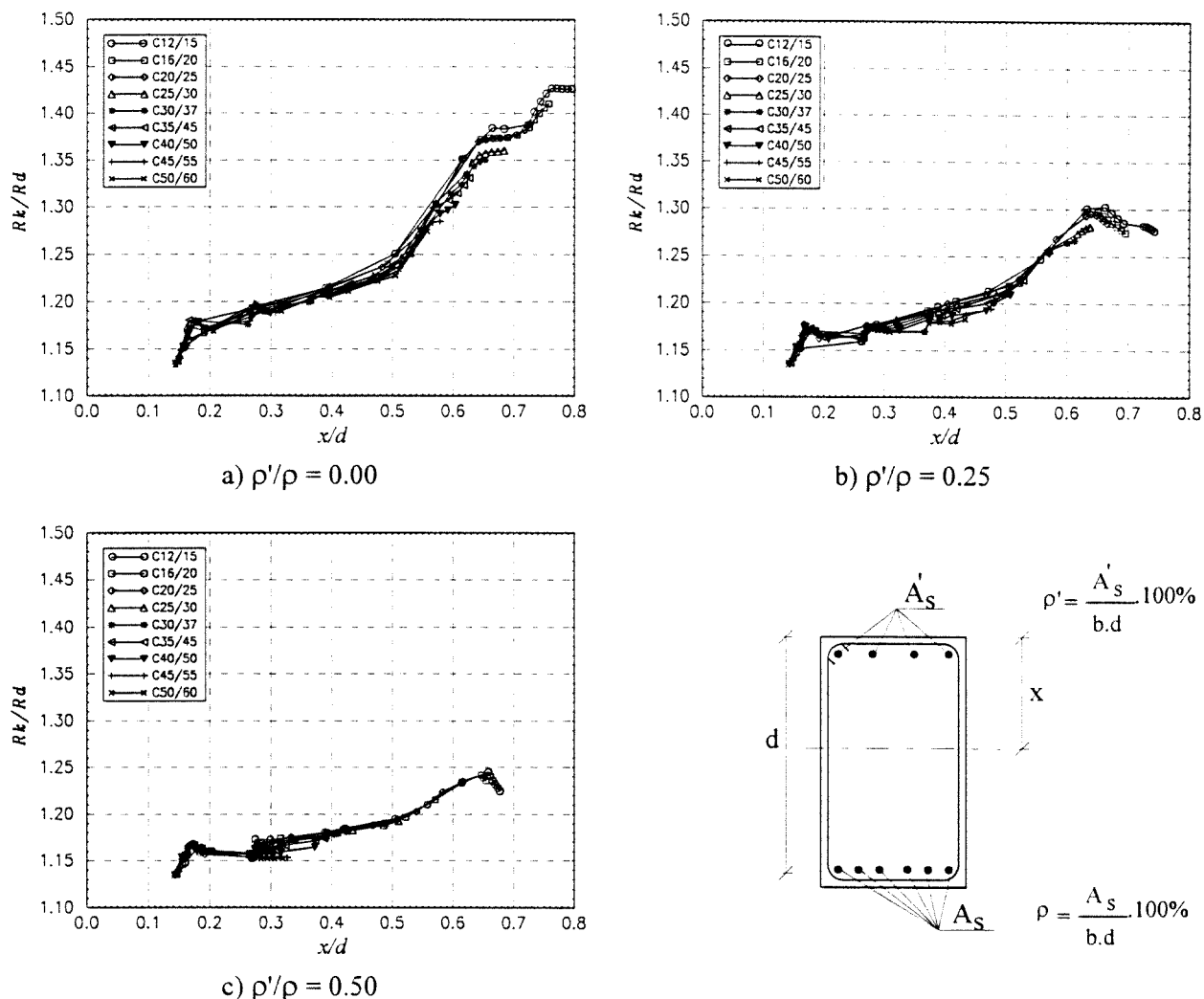


Fig. 6.16 - Evolução da relação  $R_k/R_d$  em função da posição relativa do eixo neutro  $x/d$ .

### 6.4.4 - Abordagem probabilística

Utilizando a metodologia de Monte Carlo descrita no Capítulo 5, obtiveram-se as distribuições das respostas para as diversas secções de betão armado analisadas. Na Fig. 6.17 apresenta-se algumas curvas momentos-curvaturas que caracterizam a distribuição dos traçados da resposta das secções para algumas das opções consideradas. Desses diagramas pode-se constatar que para valores baixos de  $\rho$  a distribuição apresenta respostas com grande ductilidade conduzindo a dispersões relativamente pequenas. Para valores sucessivamente crescentes de  $\rho$  essa ductilidade vai progressivamente diminuindo até que a mesma distribuição apresenta amostras com respostas de ductilidade significativa e amostras com respostas frágeis. Esta situação é acompanhada pelo acréscimo significativo da dispersão. A consideração da armadura de compressão permite obter

respostas mais dúcteis para a mesma quantidade de armadura de tracção, atenuando o efeito descrito.

Estes resultados estão de acordo com o comportamento das secções aos estados limites últimos registados na secção anterior. De facto, para pequenas quantidades de armadura de tracção a rotura é devida exclusivamente à deformação limite do aço independentemente da resistência do betão, sendo a dispersão da resposta condicionada pela dispersão do aço. Para valores crescentes da quantidade de armadura a contribuição do betão passa a ser cada vez mais preponderante, nomeadamente quando numa distribuição é provável que ocorra em algumas situações respostas frágeis. Para valores elevados da quantidade de armadura de tracção a dispersão da resposta estabiliza para valores de dispersão próximos daqueles ocorridos no betão.

Nos Quadros A4.1 a A4.7 (ver Anexo 4) apresentam-se os resultados das análises probabilísticas efectuadas, constando para cada secção estudada:

- o valor médio da distribuição obtida para a capacidade de resistência última da secção sujeita a esforços de flexão (momento flector resistente),  $\bar{M}$ ;
- o desvio padrão da distribuição,  $\sigma_M$ , e o coeficiente de variação da distribuição,  $C.V. = \bar{M}/\sigma_M$ ;
- o valor do momento flector resistente correspondente a uma probabilidade de rotura igual a  $10^{-4}$ ,  $M(10^{-4})$ ;
- o coeficiente parcial de segurança estrutural,  $\gamma_{sec}$ , definido pelo quociente  $\bar{M}/M(10^{-4})$ ;
- o valor médio da posição relativa do eixo neutro para a distribuição considerada,  $(\bar{x}/d)$ ;
- o valor médio do parâmetro relativo de trabalho plástico, definido na expressão (6.11) para a distribuição considerada,  $\bar{E}_{m-c}$ .

Os resultados expressos nos Quadros A4.1 a A4.7 (ver Anexo 4) encontram-se ilustrados na Fig. 6.18 e mostram que o coeficiente parcial de segurança estrutural  $\gamma_{sec}$  tem, na generalidade, um comportamento idêntico àquele que foi observado para a relação  $R_k/R_d$ . Os comentários desses resultados são praticamente todos válidos para o estudo agora apresentado. Assim, será dado realce aos aspectos mais singulares resultantes da análise probabilística.

Tal como foi anteriormente observado, o coeficiente de segurança  $\gamma_{sec}$  apresenta três zonas de variação: a primeira definida para valores de  $x/d$  inferiores a 0.45, a segunda situada entre 0.45 e 0.60, e a última para valores superiores a 0.60. Os valores observados variam, aproximadamente,

entre o valor correspondente à relação definida para o aço  $f_{sym}/f_{syd}$ , até valores máximos que se aproximam, sem no entanto atingir, a relação  $f_{cm}/f_{cd}$ . Os diagramas da Fig. 6.18 mostram que o coeficiente  $\gamma_{sec}$  depende essencialmente de três factores: da posição (relativa) do eixo neutro,  $x/d$ , da relação entre as quantidades de armadura de compressão e de tracção,  $\rho'/\rho$ , e da relação  $f_{cm}/f_{sym}$ . Continua a verificar-se a existência de três zonas e com o mesmo tipo de evolução de  $\gamma_{sec}$  em função de  $x/d$ . A distinção entre essas zonas é tanto mais vincada quanto menor for a quantidade de armadura de compressão.

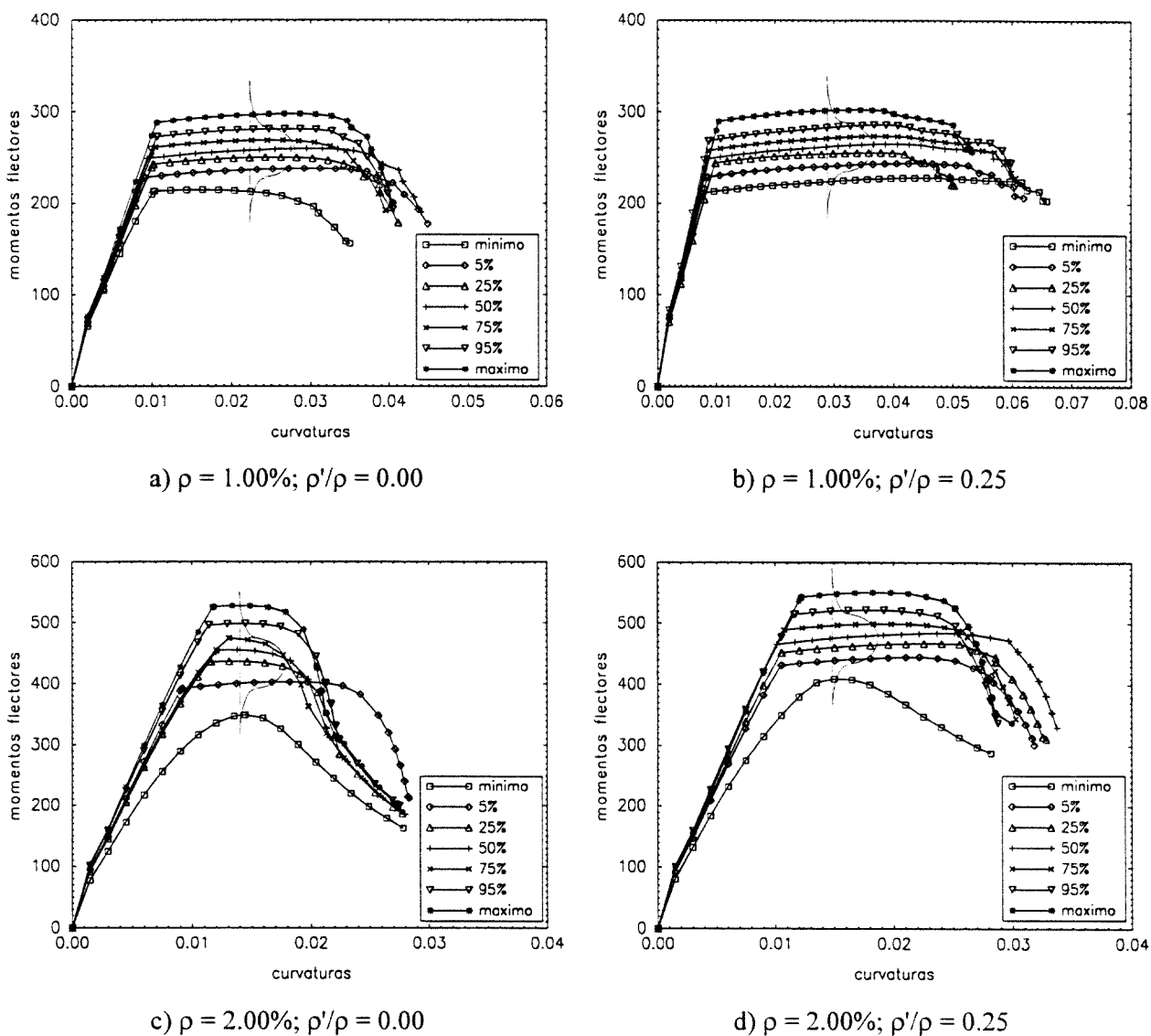


Fig. 6.17 - Distribuições das respostas da secção. Materiais: C25/30 e A500

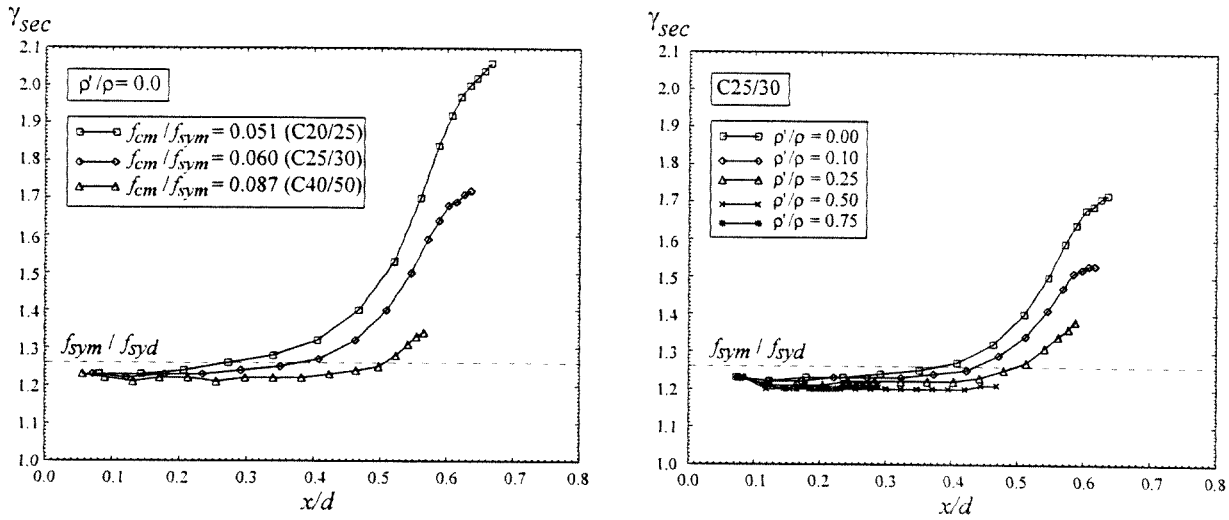


Fig. 6.18 - Evolução do coeficiente  $\gamma_{sec}$  em função de  $x/d$ ,  $f_{cm}/f_{sym}$  e  $\rho'/\rho$ .

Usando os resultados obtidos nas análises efectuadas definiram-se expressões que traduzem a relação entre o coeficiente  $\gamma_{sec}$  e os três factores anteriormente mencionados,  $x/d$ ,  $\rho'/\rho$  e  $f_{cm}/f_{sym}$ :

$$\gamma_{sec} = \frac{R_m}{R_{(10^{-4})}} = \begin{cases} \left( \frac{f_{sym}}{f_{synd}} + 0.20 \frac{x}{d} \right) \left( 1 - 0.36 \frac{x}{d} \frac{\rho'}{\rho} \right) \cdot f_1 \left( \frac{x}{d}; \frac{f_{cm}}{f_{sym}} \right) & ; 0 \leq \frac{x}{d} \leq 0.45 \wedge \frac{\rho'}{\rho} \leq 1 \\ \left[ 1.35 + 2.30 \left( \frac{x}{d} - 0.45 \right) \right] \left[ 1 + \left( 1.43 - 3.53 \frac{x}{d} \right) \frac{\rho'}{\rho} \right] \cdot f_2 \left( \frac{x}{d}; \frac{f_{cm}}{f_{sym}} \right) & ; 0.45 \leq \frac{x}{d} \leq 0.60 \wedge \frac{\rho'}{\rho} \leq 0.75 \\ \left[ 1.70 + 0.70 \left( \frac{x}{d} - 0.60 \right) \right] \left[ 1 + \left( 2.00 - 4.50 \frac{x}{d} \right) \frac{\rho'}{\rho} \right] \cdot f_3 \left( \frac{x}{d}; \frac{f_{cm}}{f_{sym}} \right) & ; \frac{x}{d} > 0.60 \wedge \frac{\rho'}{\rho} \leq 0.50 \end{cases}$$

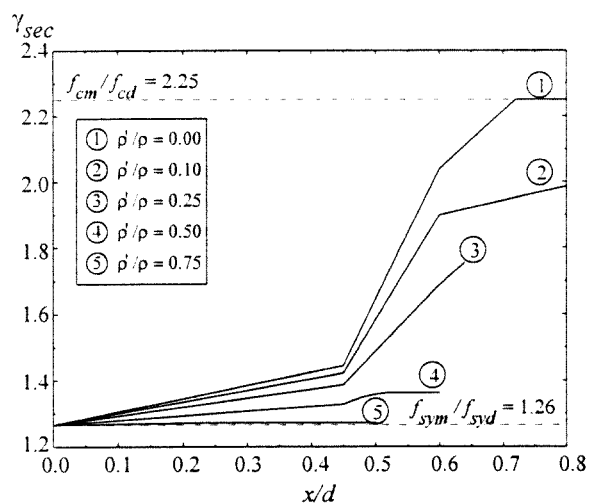
com, (6.12)

$$\begin{aligned} f_1 \left( \frac{x}{d}; \frac{f_{cm}}{f_{sym}} \right) &= 1 + \left( 0.41 - 6.00 \frac{f_{cm}}{f_{sym}} \right) \frac{x}{d} \quad ; \\ f_2 \left( \frac{x}{d}; \frac{f_{cm}}{f_{sym}} \right) &= 16.70 \frac{f_{cm}}{f_{sym}} - 0.06 + \left( 2.77 - 43.1 \frac{f_{cm}}{f_{sym}} \right) \frac{x}{d} \quad ; \\ f_3 \left( \frac{x}{d}; \frac{f_{cm}}{f_{sym}} \right) &= 1 - 1.17 \frac{f_{cm}}{f_{sym}} + \left( 1.00 - 13.3 \frac{f_{cm}}{f_{sym}} \right) \frac{x}{d} \quad . \end{aligned}$$

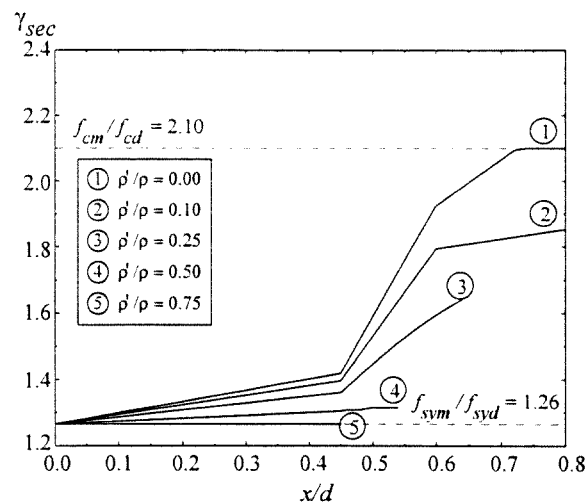
(Nota: os valores de  $\gamma_{sec}$  obtidos por esta expressão deverão estar compreendidos entre  $f_{sym}/f_{synd}$  e  $f_{cm}/f_{cd}$ ).

Na Fig. 6.19 encontram-se ilustradas curvas que traduzem a evolução de  $\gamma_{sec}$ , para algumas classes de betão, de acordo com a expressão (6.12).

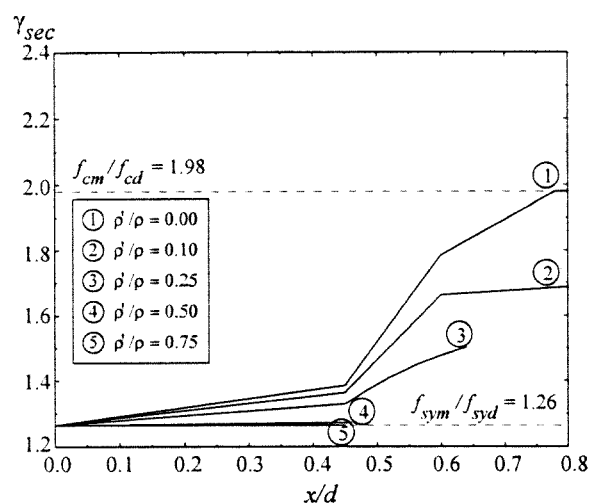




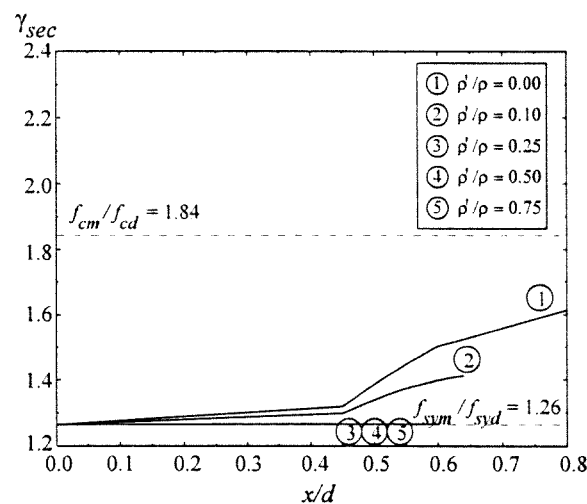
a) para o betão C16/20 e aço A500



b) para o betão C20/25 e aço A500



c) para o betão C25/30 e aço A500



d) para o betão C35/45 e aço A500

Fig. 6.19 - Representação gráfica dos valores de  $\gamma_{sec}$  obtidos pela expressão (6.12).

## 6.5 - ESTUDO DE ESTRUTURAS RETICULADAS DE BETÃO ARMADO

### 6.5.1 - Generalidades

Nesta secção será estendido o conceito de coeficiente de segurança, definido para secções, a estruturas reticuladas de betão armado sujeitas à flexão. Assim, propõe-se e discute-se um

coeficiente de segurança global de aplicação prática, que tenha em conta a variabilidade do comportamento dos materiais e as consequências que daí advêm para a resposta da estrutura. De uma forma simplificada, este coeficiente de segurança global,  $\gamma_R$ , é definido pelo quociente entre o valor médio da capacidade de resistência última da estrutura,  $F_m$ , e o valor dessa capacidade associado a um risco de colapso aceitável,  $F_d$ :

$$\gamma_R = \frac{F_m}{F_d} \quad (6.13)$$

O procedimento utilizado para a avaliação deste coeficiente de segurança é idêntico ao utilizado para o estudo de secções de betão armado. Desta forma, as distribuições dos parâmetros mais significativos das propriedades dos materiais foram considerados directamente na avaliação da distribuição das respostas estruturais e as suas influências consideradas na quantificação de  $\gamma_R$ .

O comportamento das estruturas reticuladas de betão armado (vigas, pórticos, ...) em situações últimas de resistência é extremamente condicionado pelas zonas (secções) onde se concentram as deformações inelásticas. Normalmente, essas secções críticas encontram-se localizadas nas zonas onde os esforços atingem os seus valores máximos (no caso da geometria das peças não sofrer grandes variações). Além disso, nas estruturas estaticamente indeterminadas (hiperestáticas) ocorrem geralmente redistribuições de esforços entre as secções mais esforçadas que influenciam fortemente a capacidade resistente última da estrutura. O grau destas redistribuições depende sobretudo da capacidade de deformação plástica da estrutura, ou seja da sua ductilidade. Por isso, um dos objectivos desta secção é avaliar a influência da ductilidade na redistribuição de esforços em estruturas hiperestáticas e, conseqüentemente, na capacidade resistente dessas estruturas.

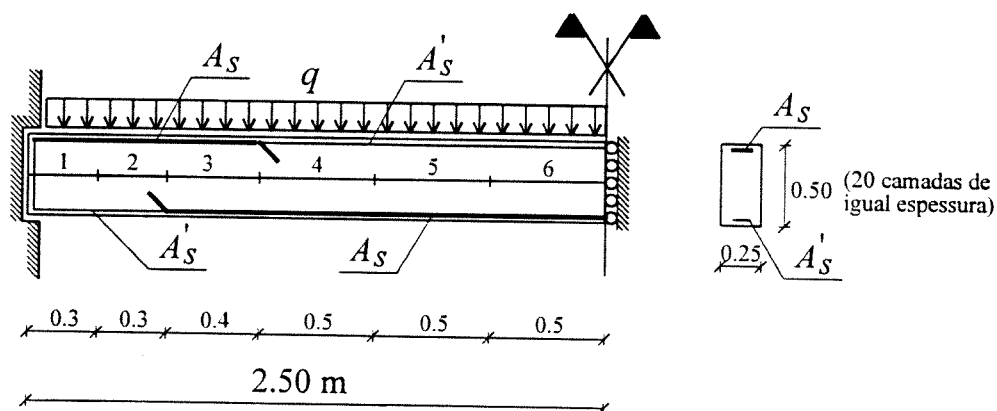
Foram analisados vários casos de vigas e pórticos de betão armado e os resultados obtidos são apresentados e analisados à luz da avaliação da segurança usando métodos de análise não linear. Finalmente, avalia-se e define-se um coeficiente de segurança global com base nos resultados obtidos.

### **6.5.2 - Análise de vigas de betão armado sujeitas à flexão**

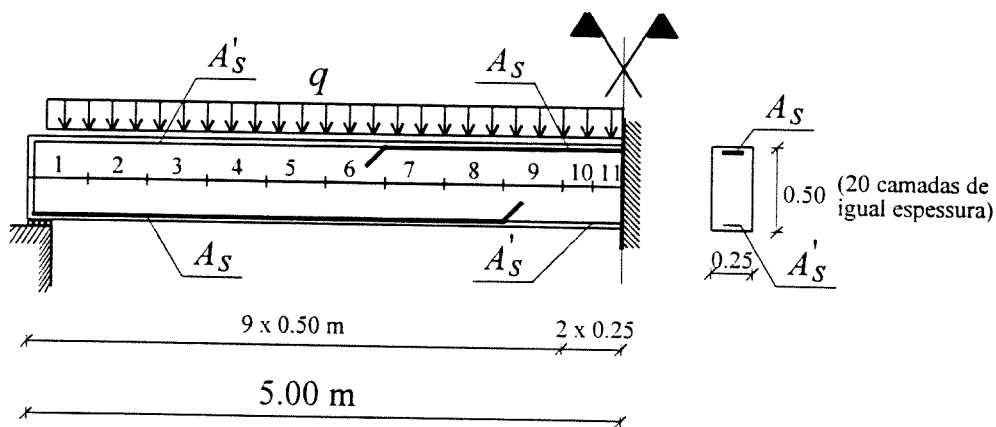
De uma forma genérica, as vigas de betão armado podem ser divididas (quanto ao tipo estrutural) em dois grupos: as vigas isostáticas e as vigas hiperestáticas. No primeiro grupo estão incluídas as vigas simplesmente apoiadas cujo comportamento à rotura depende unicamente de uma secção crítica (será a secção a meio vão no caso de vigas simplesmente apoiadas simétricas e com carregamento também simétrico), então a segurança à flexão simples é totalmente caracterizada e avaliada através da análise dessa secção. Assim, o coeficiente  $\gamma_R$  de vigas isostáticas é igual ao

coeficiente  $\gamma_{sec}$  que se obtém para a secção mais esforçada e que foi definido na secção anterior. As vigas bi-encastadas e as vigas de dois vãos são os elementos estruturais mais simples representativos dos casos mais comuns de vigas hiperstáticas. Qualquer outro tipo de vigas hiperstáticas pode ser obtido como uma composição destas.

Na presente secção são analisados diferentes casos que pretendem representar os casos típicos que podem ocorrer em vigas hiperstáticas de betão armado sujeitas à flexão simples, nomeadamente, diferentes condições de ligação ao exterior, diferentes materiais e várias percentagens de armadura. Consideraram-se os dois tipos básicos referidos no parágrafo anterior: vigas bi-encastadas e vigas de 2 vãos de igual comprimento (Fig. 6.20).



a) Discretização da viga bi-encastada (simetria)



b) Discretização da viga de dois vãos (simetria)

Fig. 6.20 - Representação das vigas analisadas (discretização estrutural).

No Quadro 6.2 indicam-se as opções principais consideradas nas análises das vigas estudadas, nomeadamente, as classes dos materiais, a geometria da secção transversal, as diferentes quantidades de armadura de tracção e de compressão e a caracterização das variáveis aleatórias. Tal como se indica na Fig. 6.20, as quantidades de armadura são iguais nas secções mais esforçadas.

Na avaliação probabilística do coeficiente de segurança  $\gamma_R$ , considerou-se que o estado limite último de resistência era atingido com uma probabilidade igual a  $p_f = 10^{-4}$  (CEB-FIP, 1978).

A variabilidade do comportamento estrutural das vigas analisadas resultou não só da aleatoriedade dos materiais (betão e aço) e da geometria, mas também da variabilidade espacial ao longo das peças. Essa variabilidade espacial foi considerada através da definição de diferentes variáveis aleatórias para cada um dos elementos da malha de elementos finitos em que as vigas foram discretizadas (ver Fig. 6.20). Assim, por exemplo, a resistência do betão no elemento 1 é diferente do elemento 2 que, por sua vez, é diferente do elemento 3 e assim sucessivamente. Os parâmetros foram caracterizados através de variáveis aleatórias estatisticamente independentes entre si e entre os diferentes elementos.

Quadro 6.2 - Opções consideradas no estudo de  $\gamma_R$ .

classes de betão: C20/25, C25/30 e C40/50			classe do aço: A500		
dimensões da secção	$b \times h = 0.25 \times 0.50 \text{m}^2$ ; $d/h = 0.90$ ( $b$ - largura; $h$ - altura; $d$ - altura útil)				
Percentagem de armadura de tracção, $\rho$	0.25; 0.50; 0.75; 1.00; 1.25; 1.50; 1.75; 2.00; 2.25; 2.50; 2.75; 3.00; 3.25; 3.50; 3.75; 4.00				
armadura de compressão $\rho'/\rho$	0.00	0.10	0.25	0.50	0.75
variáveis básicas	descrição	lei-tipo	média	d. padrão	
$f_c$	resistência do betão à compressão	normal	$f_{ck} + 8$ [MPa]	5.0 Mpa	
$f_{sy}$	tensão de cedência das armaduras	normal	550 MPa	30 Mpa	
$\Delta h$	variação da altura da secção	normal	0	7 mm	
$f_{ct}$	resistência do betão à tracção	$0.25 f_{cm}^{2/3} \cong 0.30 f_{ck}^{2/3}$ ; [MPa]			
$E_c$	módulo de elasticidade do betão	$9500 f_{cm}^{1/3}$ ; [MPa]			
$f_{su}$	resistência das armaduras	$1.05 f_{sy}$			

### *Avaliação do comportamento estrutural até ao colapso das vigas de betão armado*

Tendo como objectivo averiguar as diferentes respostas que podem ocorrer neste tipo de elementos estruturais, efectuaram-se uma série de análises determinísticas considerando os valores médios dos parâmetros que caracterizam o comportamento mecânico dos materiais. Estas análises serão importantes para entender e discutir os valores que o coeficiente de segurança  $\gamma_R$  pode tomar.

As Figs. 6.21 e 6.22 ilustram algumas curvas cargas-flechas máximas representativas de alguns casos analisados. De um modo geral, essas curvas são caracterizadas por uma grande rigidez inicial, verificando-se a primeira quebra quando se inicia a fendilhação. A segunda quebra é provocada pela entrada em plastificação da armadura na secção crítica mais esforçada (encastramento nas vigas bi-encastradas e apoio intermédio nas vigas de 2 vãos). A entrada em patamar plástico dá-se com o início de plastificação da armadura na secção crítica do vão. Nos exemplos estudados existem portanto duas secções críticas (considerando a simetria). Isso conduz à existência de três configurações distintas nas curvas das respostas (Fig. 6.23):

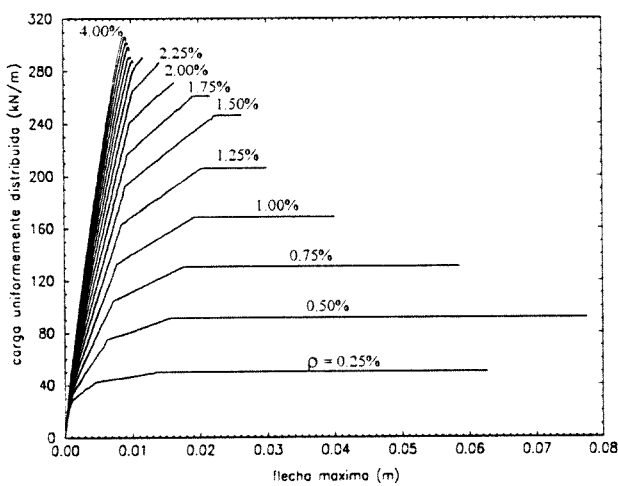
- I - a rotura ocorre após a plastificação das armaduras em todas as secções críticas, sendo acompanhada por um patamar plástico;
- II - a rotura acontece após a plastificação da armadura na secção crítica mais esforçada, sem que haja qualquer plastificação na outra;
- III - a rotura dá-se sem que se verifique qualquer plastificação das armaduras.

As respostas das vigas analisadas apresentam comportamentos idênticos àqueles já evidenciados na análise das secções. Continua a ser constatado o seguinte:

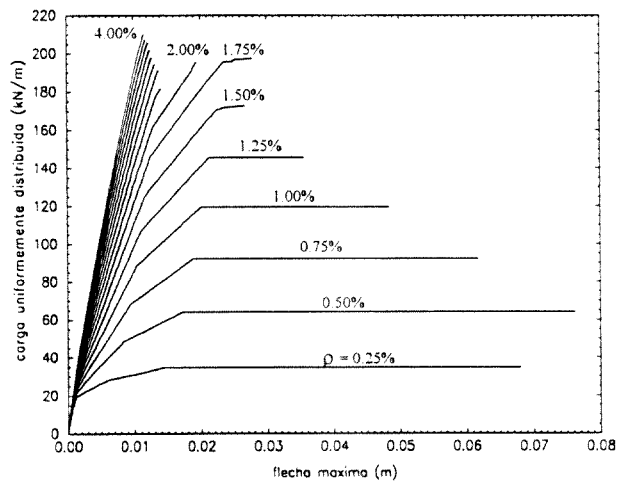
- As respostas mais dúcteis ocorrem para baixas percentagens de armadura de tracção e ainda quando existe armadura de compressão em quantidade assinalável.
- As roturas condicionadas pelo aço caracterizam-se por roturas dúcteis enquanto que as condicionadas pelo betão são caracterizadas por roturas frágeis.
- A interdependência do betão e do aço conduz a uma vasta gama de respostas de diferentes ductilidades, sendo a importância que cada material assume na rotura, traduzida de forma estreita com o grau de ductilidade da resposta.
- Para quantidades crescentes de armadura de tracção, verifica-se inicialmente um aumento acentuado na capacidade resistente da estrutura, sendo progressivamente atenuado até se manter quase constante para percentagens elevadas. A presença de armaduras de compressão atenua este efeito.

Há, no entanto, uma série de características próprias da resposta deste tipo de peças que não se observam na análise de secções. Isso deve-se ao grau de hiperstaticidade apresentado pelas vigas analisadas. Entre essas características distintas destaca-se:

- A capacidade de redistribuição é extremamente influenciada pelo grau de ductilidade apresentado pela resposta da estrutura.
- As respostas são extremamente condicionadas pelo comportamento das secções críticas e do grau de redistribuição de esforços que pode ocorrer entre essas secções.

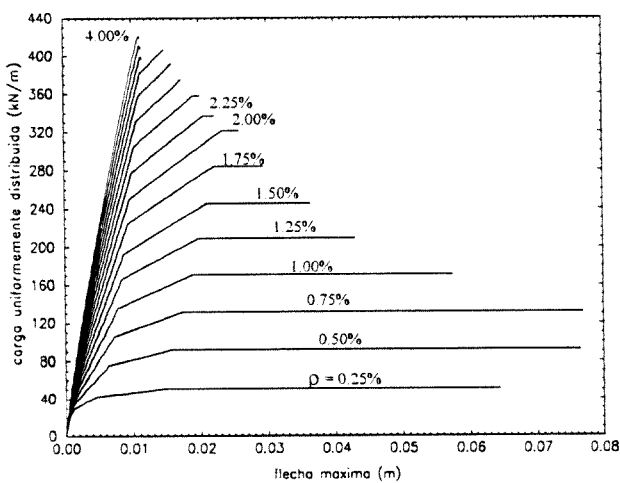


a) vigas bi-encastadas ( $\rho'/\rho = 0$ )

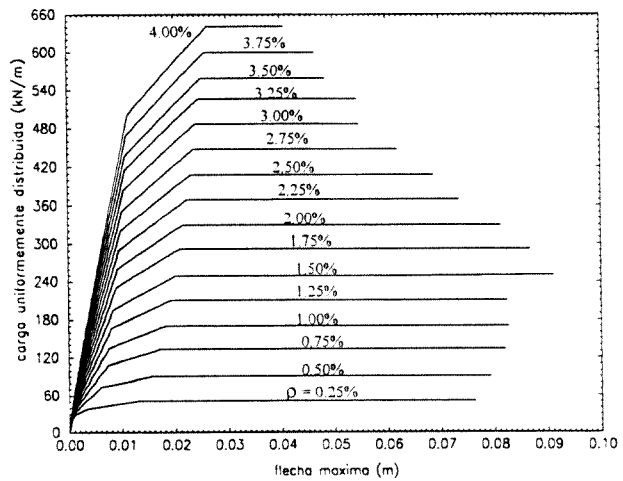


b) vigas de 2 vãos ( $\rho'/\rho = 0$ )

Fig. 6.21 - Curvas cargas-flechas máximas para vigas sem armadura de compressão. Betão: C25/30.



a)  $\rho'/\rho = 0.25$



b)  $\rho'/\rho = 0.75$

Fig. 6.22 - Curvas cargas-flechas máximas para vigas bi-encastadas com armadura de compressão. Betão: C25/30.

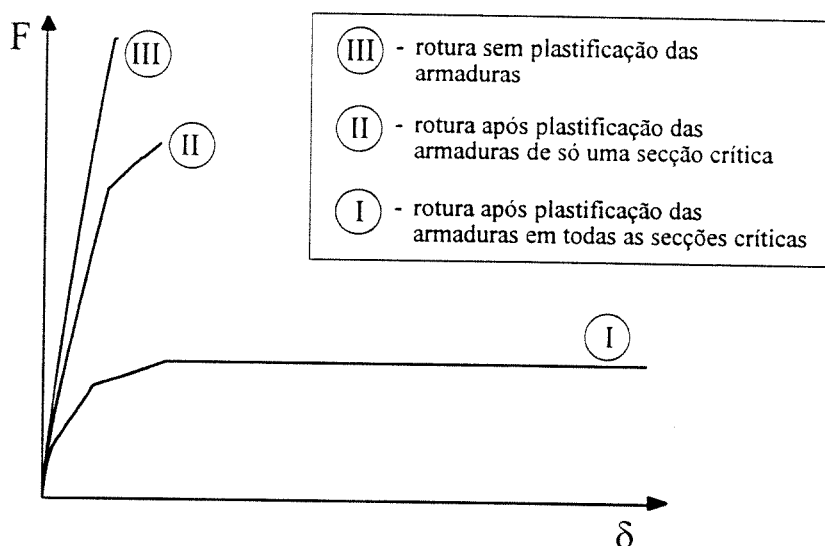


Fig. 6.23 - Configurações-tipo das curvas de resposta das vigas analisadas.

A evolução das configurações das respostas do tipo I para o tipo II e do tipo II para o tipo III (ver Fig. 6.23) dá-se para percentagens de armadura de tracção sucessivamente crescentes. Esta evolução é, geralmente, acompanhada pelo aumento da capacidade resistente das vigas e pela diminuição da ductilidade. Nas Figs. 6.21 e 6.22 pode-se observar que há excepções quanto ao crescimento da capacidade resistente. Nos vários casos analisados verifica-se que nas curvas onde se dá a transição das configurações do tipo II para o tipo III, a capacidade resistente em alguns casos diminuiu quando se aumentou a quantidade de armadura. Este aparente paradoxo explica-se pela incapacidade que as configurações do tipo III apresentam para se dar a redistribuição de esforços entre as secções.

#### *Descrição e ilustração dos resultados obtidos da análise probabilística*

Os resultados relativos à capacidade resistente,  $F$ , das vigas estudadas encontram-se descritos nos Quadros A4.8 a A4.15 (ver Anexo 4) através das seguintes grandezas:

- valor médio da capacidade resistente,  $F_m$ ;
- desvio-padrão da distribuição da capacidade resistente das vigas,  $\sigma_F$  e respectivo coeficiente de variação,  $CV = F_m / \sigma_{Fm}$ ;
- valor da capacidade resistente para uma probabilidade de rotura igual a  $10^{-4}$ ,  $F_{10^{-4}}$ ;
- valor médio da posição relativa do eixo neutro quando se atinge a capacidade de resistência máxima da viga, na secção crítica onde ocorre a rotura,  $\overline{x/d}$ ;

- valor médio do parâmetro energético (expressão 6.14),  $\bar{E}_{p-t}$ ;
- coeficiente de assimetria da distribuição da capacidade resistente,  $\gamma_1$ ;
- coeficiente de achatamento da distribuição da capacidade resistente,  $\gamma_2$ ;
- coeficiente de segurança global,  $\gamma_R = F_m / F_{10^{-4}}$ .

O parâmetro energético,  $E_{p-t}$ , permite comparar o trabalho realizado pela estrutura a partir do início da plastificação das armaduras traccionadas, com o trabalho total. Representa uma medida de ductilidade da estrutura, sendo o seu significado idêntico àquele definido para a expressão (6.11). É definido através da seguinte relação:

$$E_{p-t} = \frac{W_{p-t}^{plast}}{W_{p-t}^{total}} \quad ; \quad 0 \leq E_{p-t} \leq 1 \quad , \quad (6.14a)$$

sendo,

$$W_{p-t}^{plast} = \int_{D(\sigma_{st} > f_{sy})} \underline{b} \underline{\delta} dV \quad \text{e} \quad W_{p-t}^{total} = \int_D \underline{b} \underline{\delta} dV \quad , \quad (6.14b, c)$$

onde  $W_{p-t}^{plast}$  é o trabalho (plástico) realizado desde o início da plastificação das armaduras traccionadas na secção crítica ( $\sigma_{st} > f_{sy}$ ),  $W_{p-t}^{total}$  é o trabalho total,  $\underline{b}$  é o vector das forças nodais e  $\underline{\delta}$  é o vector dos deslocamentos nodais.

Na Fig. 6.24 apresentam-se alguns histogramas representativos das diversas distribuições das capacidades resistentes das vigas analisadas (ver também em Henriques, 1996b). Nesta figura é possível observar a evolução característica das distribuições das capacidades resistentes para este tipo de elementos estruturais, quando se consideram quantidades de armadura sucessivamente crescentes.

Os resultados obtidos (ver Quadros A4.8 a A4.15 no Anexo 4 e Fig. 6.24) mostram que os tipos de distribuições observadas estão grandemente relacionadas com a posição do eixo neutro,  $x/d$ , da secção crítica onde ocorre a rotura e com o parâmetro energético  $E_{p-t}$ . Como consequência, o coeficiente de segurança global,  $\gamma_R$ , encontra-se fortemente relacionado com  $x/d$  e  $E_{p-t}$ . As Figs. 6.25 e 6.26 mostram a evolução do coeficiente  $\gamma_R$  em função de  $x/d$  e  $E_{p-t}$ , respectivamente.



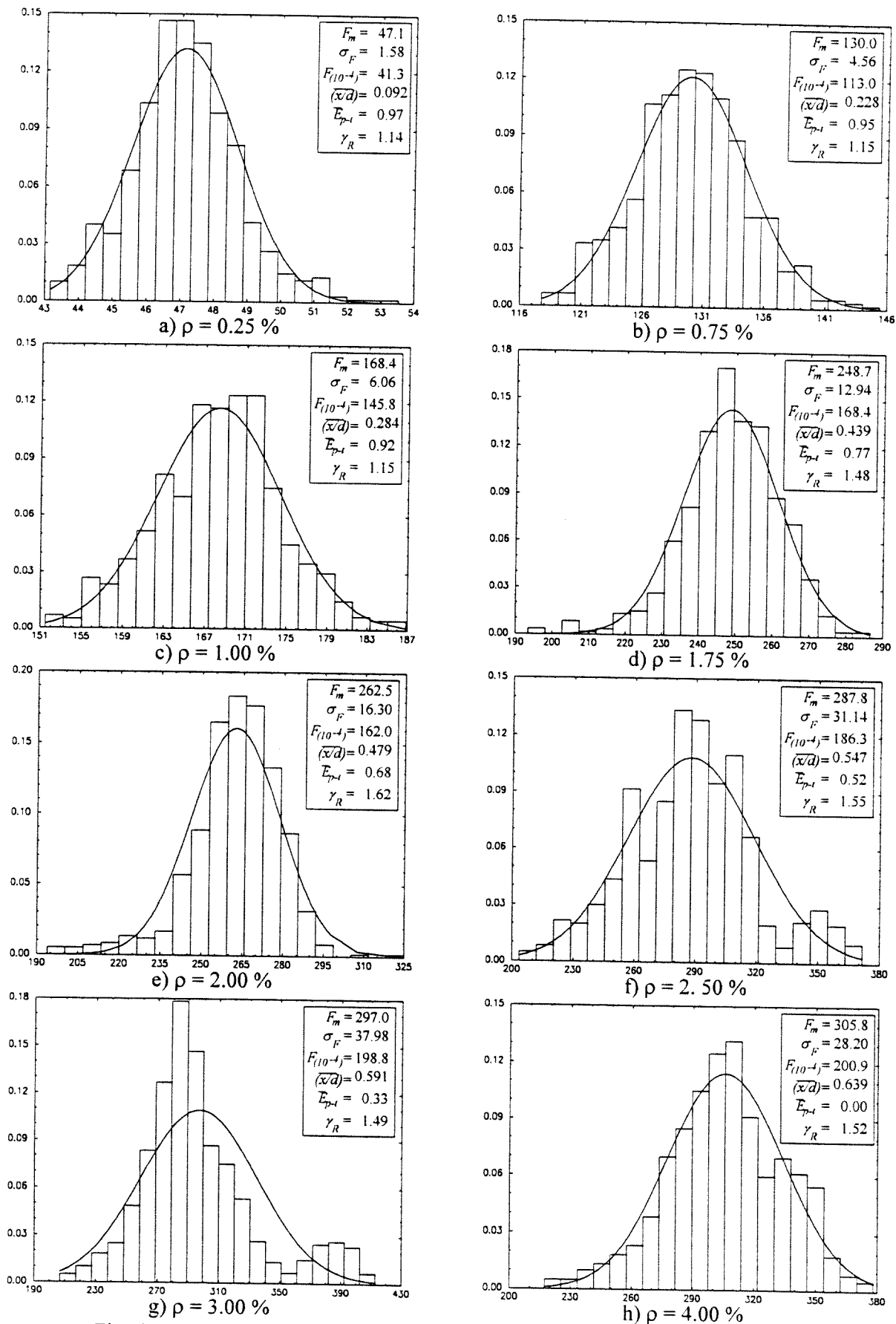


Fig. 6.24 - Distribuições da capacidade resistente de algumas vigas analisadas. Vigas bi-encastadas sem armadura de compressão: betão C25/30.

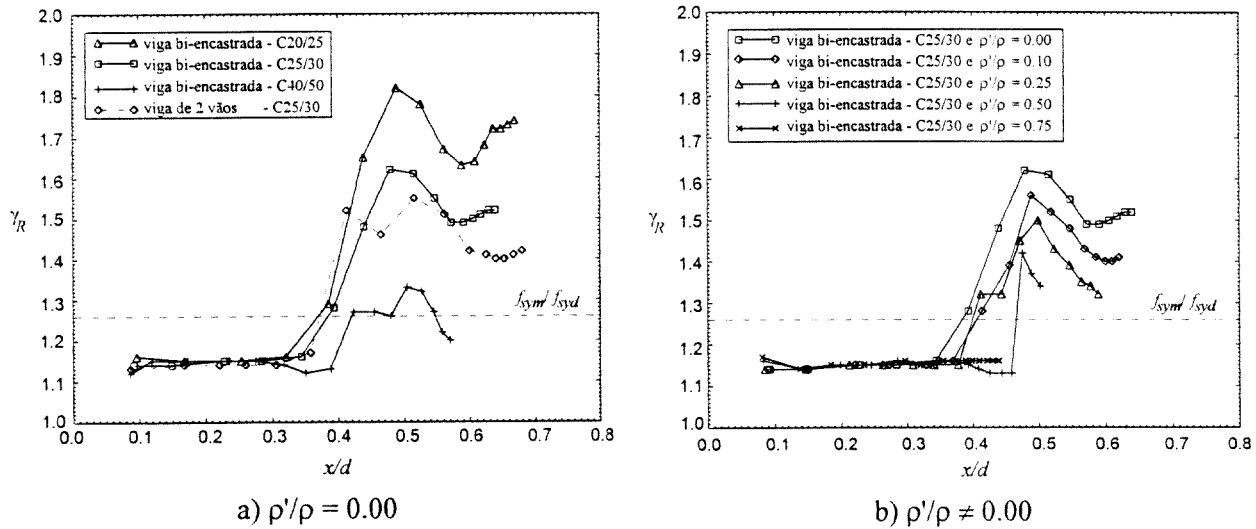


Fig. 6.25 - Evolução do coeficiente  $\gamma_R$  em função de  $x/d$  (da secção onde ocorre a rotura).

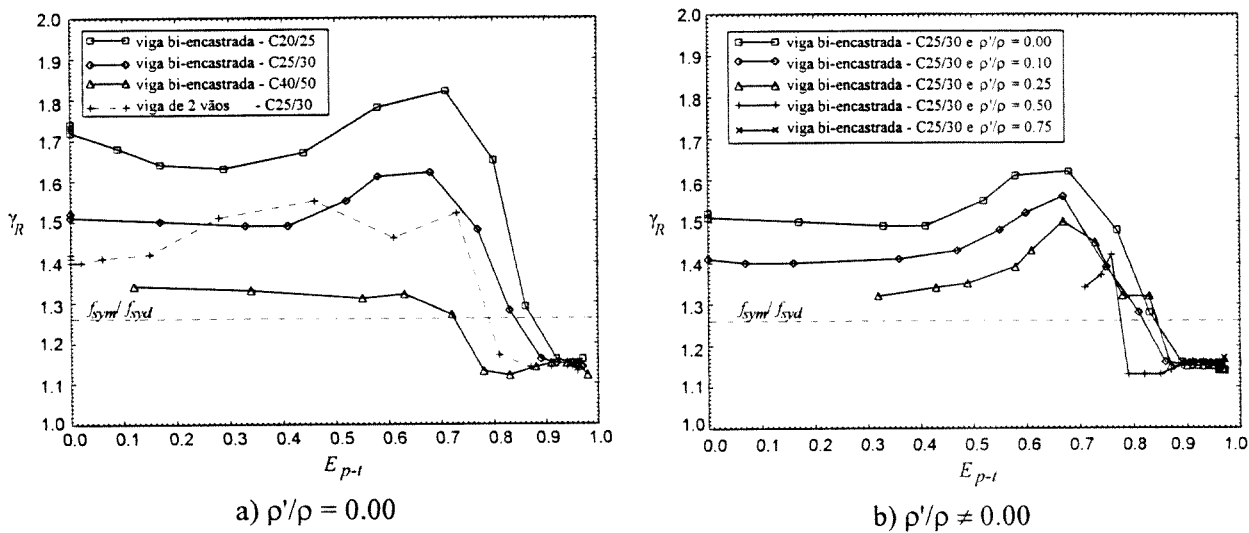


Fig. 6.26 - Evolução do coeficiente  $\gamma_R$  em função de  $E_{p-t}$ .

### Análise dos resultados obtidos

As distribuições das capacidades resistentes das vigas analisadas (Fig. 6.24) aproximam-se da lei normal para percentagens baixas de armadura (roturas condicionadas pelo aço, Fig. 6.27a). O aumento da quantidade de armadura de tracção conduz ao aparecimento gradual de uma "cauda" mais prolongada para os valores mínimos, conduzindo a distribuições bi-modais (Fig. 6.27b). Para valores sucessivamente crescentes da quantidade de armadura a primeira "bossa" da distribuição (valores mais baixos de  $F$ ) vai aumentando e, por consequência, a segunda "bossa" diminui (Fig. 6.27c). Para percentagens mais elevadas de armadura a segunda "bossa" desaparece, voltando a uma distribuição unimodal e normal (Fig. 6.27d).

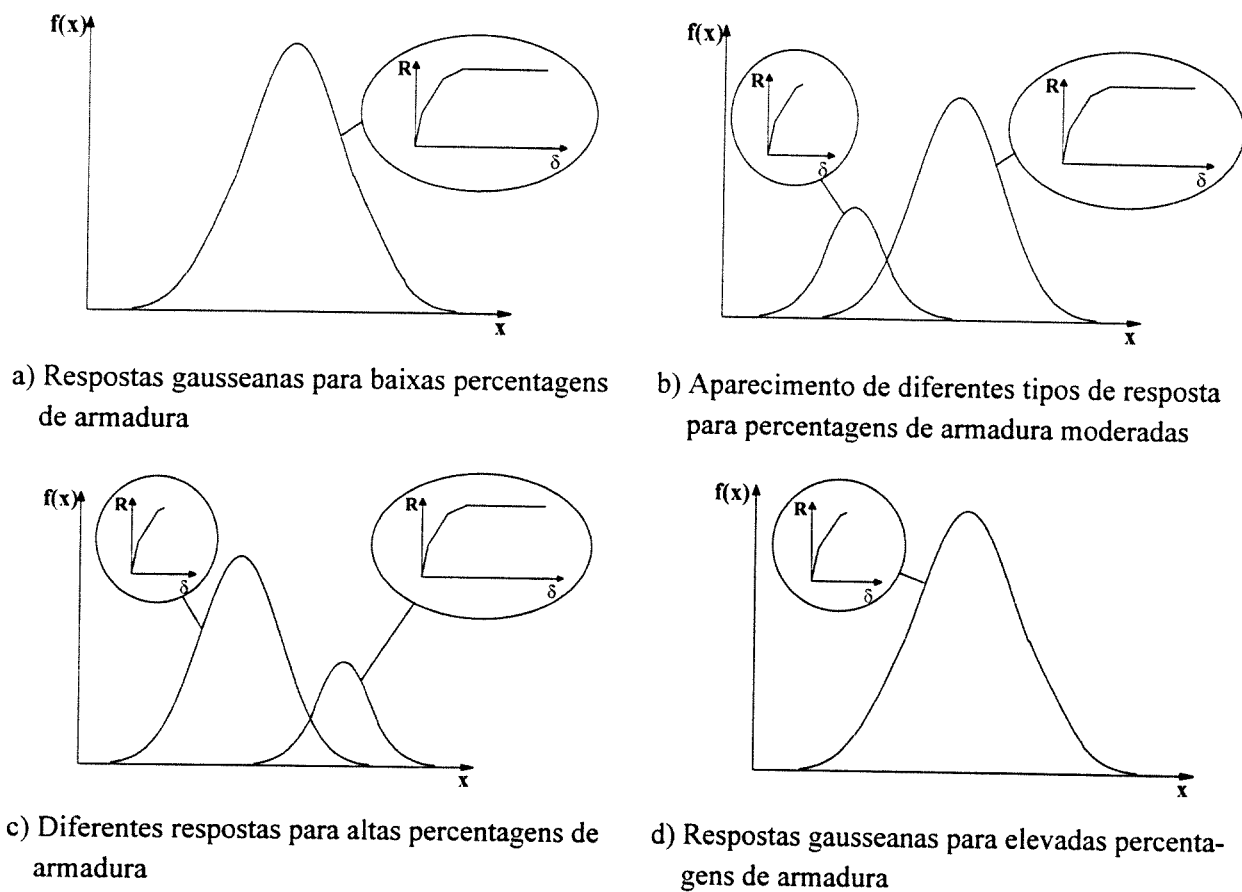


Fig. 6.27 - Ilustração da evolução das distribuições da capacidade resistente das vigas.

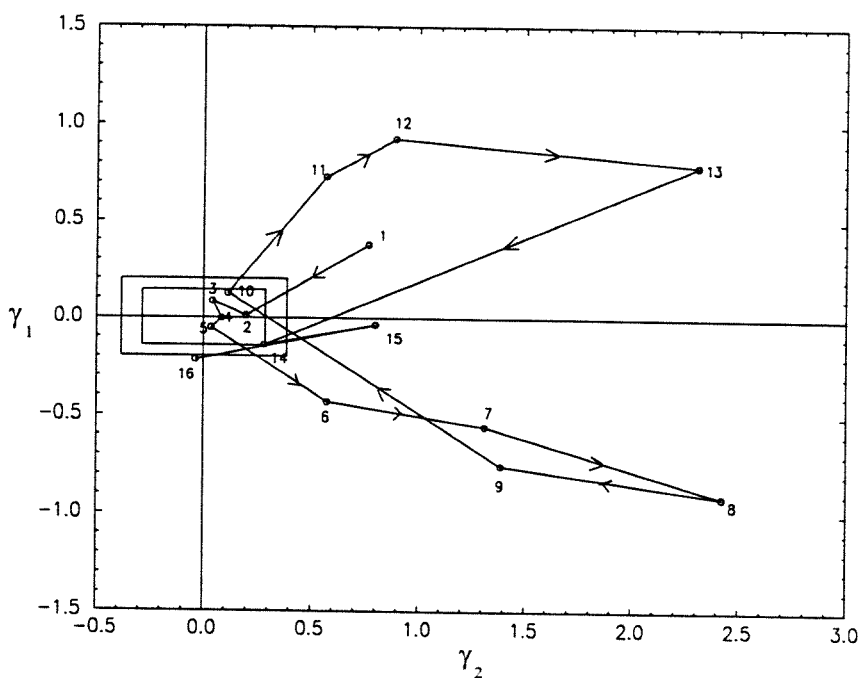


Fig. 6.28 - Representação de  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  para as distribuições obtidas nas vigas bi-encastadas sem armadura de compressão. Betão C25/30, aço A500.

Este resultado é confirmado pelos testes de normalidade efectuados a partir das estimativas dos coeficientes de assimetria,  $\gamma_1$ , e de achatamento,  $\gamma_2$ . Na Fig. 6.28 encontram-se representados os valores destes coeficientes calculados para as distribuições obtidas para as vigas bi-encastradas sem armadura de compressão. Os rectângulos em torno da origem do sistema de eixos  $O\gamma_1\gamma_2$  representam os limites de aceitação da lei normal. Os números associados a cada ponto representam as quantidades de armadura consideradas, sendo o número 1 associado à percentagem  $\rho = 0.25\%$  até ao número 16 associado a  $\rho = 4.00\%$ .

A evolução das distribuições observada explica-se pelo tipo de respostas que dependem da relação entre as quantidades de materiais. Como foi referido anteriormente, estas vigas apresentam três tipos de resposta (ver Fig. 6.23): respostas com ductilidade elevada, respostas com ductilidade moderada e respostas frágeis. Nas vigas com ductilidade elevada os resultados obtidos nas simulações efectuadas apresentaram todos respostas com plastificação das armaduras nas secções críticas. Nas vigas com ductilidade moderada a variabilidade considerada para os materiais originou que numas amostras a rotura ocorresse após a plastificação das armaduras em todas as secções críticas e noutras só ocorresse plastificação numa única secção crítica e, ainda noutras amostras não ocorresse qualquer plastificação das armaduras. Nestes casos, a variabilidade da resposta foi condicionada pelos diferentes tipos de resposta, conduzindo a distribuições bi-modais com caudas mais prolongadas nos extremos inferiores. Finalmente, para percentagens elevadas de armadura, as respostas obtidas em todas as amostras apresentaram comportamento frágil, portanto um único tipo de resposta, conduzindo por isso também a distribuições normais. A presença de quantidades de armadura de compressão crescentes (relações  $\rho'/\rho$  sucessivamente maiores) aumenta a ductilidade das respostas atenuando, por isso, os efeitos descritos.

Os valores obtidos para o coeficiente de segurança global,  $\gamma_R$ , mostram a existência de três zonas distintas. Na primeira zona os valores de  $\gamma_R$  têm um crescimento muito pequeno, situando-se próximos dos valores mínimos. Na segunda zona verifica-se um crescimento rápido, associado às distribuições bi-modais, estabilizando novamente na terceira zona. Verifica-se, portanto, que a evolução do coeficiente  $\gamma_R$  é do tipo já evidenciado para as secções de betão armado, no entanto, existem duas diferenças a assinalar: a primeira diz respeito aos valores apresentados na primeira zona, os valores das vigas são menores que os verificados nas secções e têm uma menor variação; a segunda diz respeito à zona de crescimento rápido (a segunda zona), a variação observada nas vigas é muito maior que nas secções, já que partem de valores mais baixos e atingem valores mais altos. Este crescimento rápido de  $\gamma_R$  é uma consequência directa do aumento acentuado das dispersões quando ocorrem distribuições bi-modais. Assim, verifica-se nesta zona que os valores médios das distribuições,  $F_m$ , têm valores sucessivamente crescentes (embora esse acréscimo se vá atenuando) enquanto que os valores extremos,  $F_d$ , sofrem um

decréscimo provocado pelo crescimento acentuado das dispersões (Fig. 6.29) originando um grande crescimento de  $\gamma_R$ .

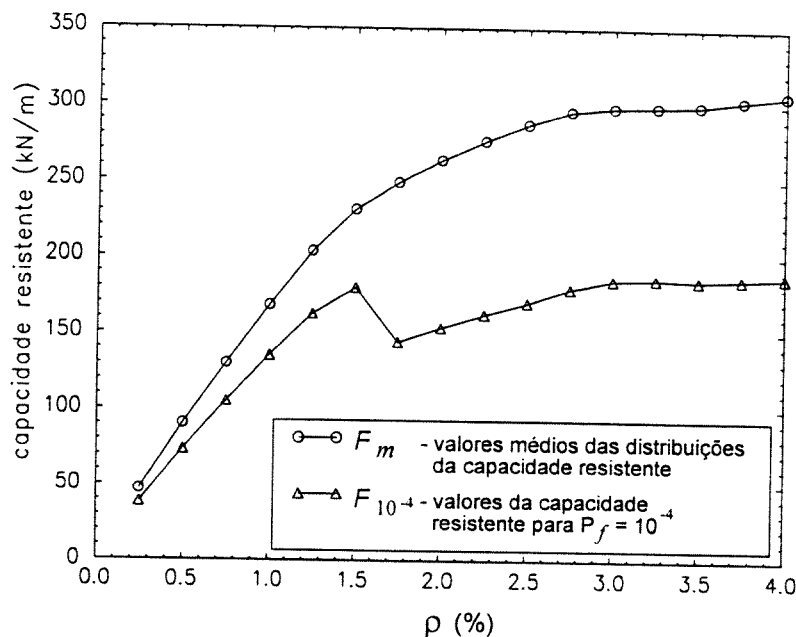


Fig. 6.29 - Evolução dos valores de  $F_m$  e  $F_d$  para as vigas bi-encastadas sem armadura de compressão ( $\rho'/\rho = 0$ ). Betão C25/30 e aço A500.

A análise dos resultados mostra a dependência do coeficiente de segurança global das vigas,  $\gamma_R$ , do coeficiente de segurança,  $\gamma_{sec}$ , da secção crítica onde ocorre a rotura. As discrepâncias observadas podem ser descritas pela capacidade que a estrutura tem para redistribuir os esforços entre as secções críticas. Esta capacidade está naturalmente associada à ductilidade da estrutura que, por sua vez, depende da posição do eixo neutro na secção crítica onde ocorre a rotura quando o nível de carregamento for máximo, ou ainda do parâmetro,  $E_{p-l}$ , que mede a energia plástica relativa da estrutura. Assim, quando a capacidade de redistribuição da estrutura não é totalmente mobilizada (ductilidade reduzida) o coeficiente de segurança global,  $\gamma_R$ , sobe de forma acentuada, podendo atingir valores mais elevados que o apresentado pela secção crítica.

De acordo com o que foi escrito no parágrafo anterior, a definição de um coeficiente de segurança global adequado deverá favorecer (através de valores baixos) as soluções estruturais que apresentem respostas suficientemente dúcteis para mobilizar toda a capacidade de redistribuição de esforços, e penalizar (através de valores altos) as soluções estruturais com ductilidade reduzida.

### *Discussão sobre a importância da variabilidade espacial*

De acordo com os resultados obtidos, os valores de  $\gamma_R$  relativos aos casos em que a rotura foi condicionada preponderantemente pelo aço (ductilidade elevada) são significativamente inferiores à relação  $f_{sym}/f_{syd}$  e aos valores de  $\gamma_{sec}$  obtidos no estudo da segurança de secções de betão armado ( $\gamma_R \cong 1.1$  e  $\gamma_{sec} \cong 1.25$ ). Esta discrepância não se deve à consideração de dispersões reduzidas na variabilidade do comportamento dos materiais, mas sim à variabilidade espacial dos parâmetros aleatórios definidos nas análises probabilísticas das vigas. A consideração de diferentes variabilidades nos elementos resultou numa menor probabilidade de ocorrência de valores mínimos simultaneamente em todas as secções críticas. Isso conduziu a respostas estruturais com menores dispersões do que aquelas que resultariam se os elementos da malha tivessem todos parâmetros de igual resistência.

De forma a averiguar a importância da variabilidade espacial dos parâmetros aleatórios na diminuição de  $\gamma_R$ , foi analisada a evolução deste coeficiente para as vigas bi-encastadas consideradas anteriormente, utilizando o betão da classe C25/30, o aço da classe A500 e os parâmetros definidos no Quadro 6.2 sem variabilidade espacial (isto é, com os elementos da malha a apresentarem as mesmas características). Os resultados destas análises encontram-se descritos no Quadro A4.16 do Anexo 4.

Na Fig. 6.30 compara-se os valores obtidos do coeficiente  $\gamma_R$  em função de  $x/d$  (na secção onde ocorre a rotura) para os casos em que foi considerada variabilidade espacial e os casos em que não existe variabilidade espacial. Complementarmente representa-se a curva que se obtém pela aplicação da expressão proposta para  $\gamma_{sec}$  em (6.12). Os resultados obtidos estão de acordo com a hipótese expressa anteriormente sobre a discrepância dos resultados observada. Verifica-se que essas discrepâncias são maiores para os valores mais baixos de  $x/d$ , isto é, quando a rotura é condicionada fundamentalmente pelo aço. Para os restantes valores de  $x/d$ , isto é, quando o betão apresenta uma contribuição assinalável para a resposta última da estrutura, as discrepâncias são muito ligeiras. Esta situação acontece devido à capacidade (ou falta dela) que as estruturas de betão apresentam para redistribuir os esforços máximos entre as secções.

Nos casos em que não há mistura de comportamentos nas distribuições (diferentes tipos de resposta) a frequência com que ocorrem valores mínimos simultaneamente nas duas secções críticas é inferior no caso da variabilidade espacial. Isto conduz a dispersões menores na resposta última da estrutura e, conseqüentemente, a valores menores de  $\gamma_R$ . Quando há mistura de comportamentos, a frequência com que ocorrem os diferentes tipos de resposta tem mais importância para a quantificação do coeficiente de segurança  $\gamma_R$  que o efeito da variabilidade dos materiais nas secções.

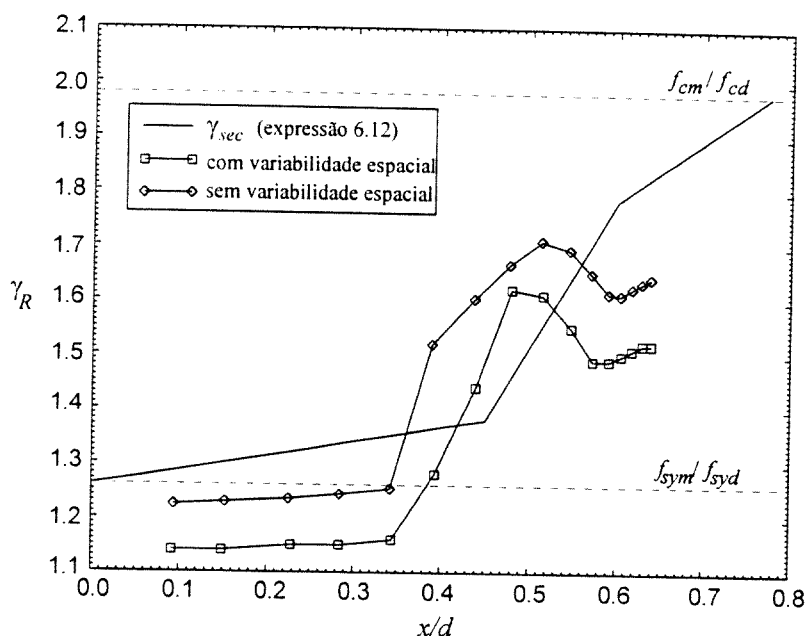


Fig. 6.30 - Evolução do coeficiente  $\gamma_R$  em função de  $x/d$ . Comparação de resultados considerando exemplos com variabilidade espacial e sem variabilidade espacial.

Quando se faz a avaliação da segurança de estruturas de betão há necessidade de saber qual é a opção mais realista: considerar ou não a variabilidade espacial dos parâmetros de resistência? A resposta a esta questão envolve diversos aspectos, alguns dos quais não estão na actualidade completamente definidos. De seguida expõe-se alguns desses aspectos.

O betão é um material heterogêneo. Dependendo das dimensões das peças, a betonagem envolve muitas vezes a realização de várias amassaduras que podem conduzir a betões, embora da mesma classe, com diferentes resistências. Poderá não ser muito realista definir o betão com características independentes de elemento para elemento, como foi considerado no presente trabalho. Eventualmente será mais adequado a consideração de uma correlação espacial entre as suas propriedades. No entanto, embora estudos efectuados apontem para esta ideia, as propostas apresentadas são ainda muito insuficientes e pouco concludentes quanto ao grau dessa correlação.

O aço, ao contrário do betão, é um material com fabrico altamente industrializado e com maior controlo de qualidade. Desta forma, além de apresentar menores valores de dispersão nas propriedades mecânicas, a variabilidade espacial dos varões de aço obtidos de uma mesma cozedura é irrelevante. Essa variabilidade espacial passará a ter alguma relevância para varões obtidos de diferentes cozeduras ou de diferentes fabricantes. Por exemplo, nas vigas bi-encastradas há dois tipos de secções críticas, aquelas situadas nos encastramentos e a meio vão. As armaduras de tracção nas secções críticas estão colocadas em camadas distintas (junto às

fibras superiores nos encastramentos e junto às fibras inferiores a meio vão). Dependendo também das dimensões das peças, há grandes possibilidades dos varões utilizados na secção de meio vão e dos varões utilizados nos encastramentos serem obtidos de diferentes origens.

Estes e outros aspectos podem ser enumerados sobre a problemática de "o que variar" e "como variar". A resposta completa e adequada a estas questões envolveria uma campanha de testes experimentais e de uma colecção de resultados já obtidos que sai fora dos limites impostos para este trabalho.

Para o objectivo em causa, na definição do coeficiente de segurança  $\gamma_R$  será mais prudente considerar os casos mais gravosos, ou seja, aqueles que conduzem aos maiores valores do coeficiente de segurança global.

#### *A influência da distribuição da armadura na estrutura*

Nos estudos apresentados sobre a verificação da segurança de vigas de betão armado sujeitas à flexão considerou-se sempre o mesmo tipo de distribuição das armaduras ao longo do vão, ou seja, igual quantidade de armadura nas secções. De forma a averiguar a influência de outros tipos de distribuição de armadura na definição do coeficiente de segurança global,  $\gamma_R$ , estudaram-se algumas vigas com diferentes tipos de armação.

No estudo que a seguir se apresenta analisaram-se vigas bi-encastradas com geometria igual às vigas anteriormente analisadas (Fig. 6.20a) e com os mesmos parâmetros considerados nas análises probabilísticas (Quadro 6.2), excepto nas opções relativas às armaduras. Os casos analisados dizem respeito a vigas sem armadura de compressão e com uma distribuição de armadura de tracção que se aproxima da solução elástica:  $A_{s,apoio} = 2 \times A_{s,vão}$  (sendo  $A_{s,apoio}$  a quantidade de armadura de tracção, junto à face superior da viga, na zona dos encastramentos e  $A_{s,vão}$  a quantidade de armadura de tracção, junto à face inferior da viga, na zona do vão).

A variabilidade espacial não foi considerada neste estudo, por isso, todos os elementos da malha de discretização estrutural apresentam iguais propriedades mecânicas e iguais dimensões na secção transversal.

Os resultados das análises probabilísticas encontram-se descritos no Quadro A4.17 do Anexo 4. A comparação entre os valores de  $\gamma_R$  obtidos nas presentes análises ( $A_{s,apoio} = 2 \times A_{s,vão}$ ) e nas análises apresentadas no ponto anterior ( $A_{s,apoio} = A_{s,vão}$ ), ambas não considerando a variabilidade espacial, encontra-se ilustrada na Fig. 6.31. Os resultados obtidos mostram que não há diferenças significativas entre as duas curvas  $\gamma_R - x/d$ . Complementarmente representa-se a curva que se obtém pela aplicação da expressão proposta para  $\gamma_{sec}$  em (6.12).



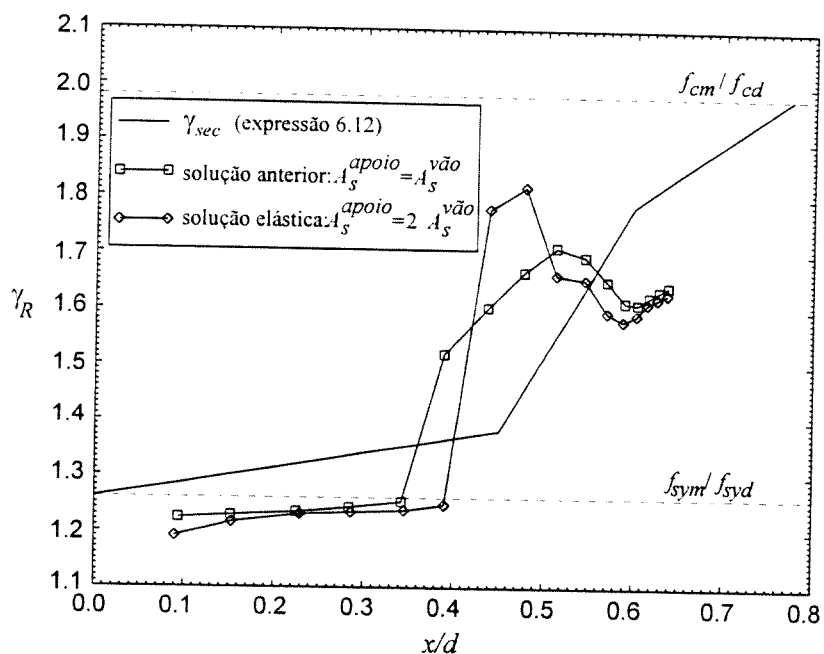


Fig. 6.31 - Evolução do coeficiente  $\gamma_R$  em função de  $x/d$  (sem variabilidade espacial). Comparação de resultados entre a solução  $A_s^{apoiado} = 2 \times A_s^{vão}$  e  $A_s^{apoiado} = A_s^{vão}$ .

*Definição do coeficiente de segurança global,  $\gamma_R$ , baseada nos resultados obtidos*

Da análise dos resultados obtidos do estudo da segurança das vigas consideradas constatou-se que o coeficiente de segurança  $\gamma_R$  é extremamente dependente do grau de ductilidade da estrutura até à rotura. O parâmetro que se revelou como aquele que melhor descreve a ductilidade da estrutura foi a posição (relativa) do eixo neutro,  $x/d$ , da secção crítica onde ocorre a rotura. Em alternativa definiu-se um parâmetro energético,  $E_{p-t}$  (ver expressão 6.14), definido em função do trabalho de deformação plástica que também descreve adequadamente o grau de ductilidade da estrutura até à rotura.

Uma vez que a verificação de segurança das vigas analisadas foram fortemente condicionadas pela secção crítica onde ocorreu a rotura, foi estudada uma formulação baseada na proposta de König (1995):

$$\gamma_R = \gamma_{sec} \cdot a \quad (6.15)$$

Nos Quadros A4.18 a A4.27 (ver Anexo 4) encontram-se definidos os valores de  $a$  para as análises efectuadas. Estes valores foram obtidos através do quociente entre os valores de  $\gamma_R$  e os valores de  $\gamma_{sec}$  definidos pela expressão (6.12). Associados a estes valores encontram-se ainda definidos a posição relativa do eixo neutro na secção crítica onde ocorreu a rotura e o parâmetro

energético  $E_{p-t}$ . Como se pode constatar nos resultados relativos aos casos em que se considerou parâmetros aleatórios com variabilidade espacial, o factor  $a$  apresenta valores praticamente constantes (entre 0.93 e 0.95) quando  $x/d$  é inferior a cerca de 0.35 e  $E_{p-t}$  é superior a cerca de 0.90. Quando  $x/d$  se encontra entre 0.35 e 0.53, aproximadamente, e  $E_{p-t}$  entre cerca de 0.50 e 0.90, o valor de  $a$  sofre um aumento significativo, apresentando um máximo na zona intermédia desse intervalo (geralmente superior à unidade). Esse aumento varia com a classe dos materiais e com a quantidade de armadura de compressão, sendo  $a$  tanto menor quanto maior a classe de betão e quanto maior a quantidade de armadura de compressão. Para valores de  $x/d$  superiores a cerca de 0.53 e de  $E_{p-t}$  inferiores a cerca de 0.50, o factor  $a$  estabiliza novamente para valores inferiores à unidade. Nos resultados relativos aos casos em que se considerou parâmetros aleatórios sem variabilidade espacial o parâmetro  $a$  tem o mesmo tipo de evolução, mas realçe-se que no primeiro tramo os valores são da ordem da unidade.

As expressões (6.16) e (6.17) que a seguir se apresentam traduzem a evolução que o factor  $a$  apresentou nos casos analisados, tendo-se optado por considerar valores unitários para as respostas frágeis ( $x/d > 0.53$  e  $E_{p-t} < 0.50$ ), que embora traduza uma penalização em comparação com os resultados observados se justifica pelo carácter gravoso deste tipo de roturas. Na Fig. 6.32 ilustra-se a evolução do factor  $a$  de acordo com as expressões (6.16) e (6.17).

Considerando a expressão (6.15) e os valores dos Quadros A4.18 a A4.27 (ver Anexo 4), o coeficiente  $\gamma_R$  pode ser obtido da expressão (6.12) multiplicando pela seguinte expressão que permite definir o parâmetro  $a$  em função da posição relativa do eixo neutro da secção crítica onde ocorre a rotura:

$$a = \begin{cases} 1.0 & ; \quad 0 \leq \frac{x}{d} \leq 0.35 \\ f\left(\frac{x}{d}; \frac{\rho'}{\rho}; \frac{f_{cm}}{f_{sym}}\right) \geq 1.0 & ; \quad 0.35 \leq \frac{x}{d} \leq 0.53 \\ 1.0 & ; \quad \frac{x}{d} > 0.53 \end{cases} ,$$

com, (6.16)

$$f\left(\frac{x}{d}; \frac{\rho'}{\rho}; \frac{f_{cm}}{f_{sym}}\right) = \left[ 1.00 + 8.00\left(\frac{x}{d} - 0.35\right) - 42.6\left(\frac{x}{d} - 0.35\right)^2 \right] \cdot \left[ 1 - 0.92\left(\frac{x}{d} - 0.32\right) \frac{\rho'}{\rho} \right] \cdot \left[ 0.48 + 10.3 \frac{f_{cm}}{f_{sym}} + \left( 1.50 - 29.4 \frac{f_{cm}}{f_{sym}} \right) \frac{x}{d} \right] ;$$

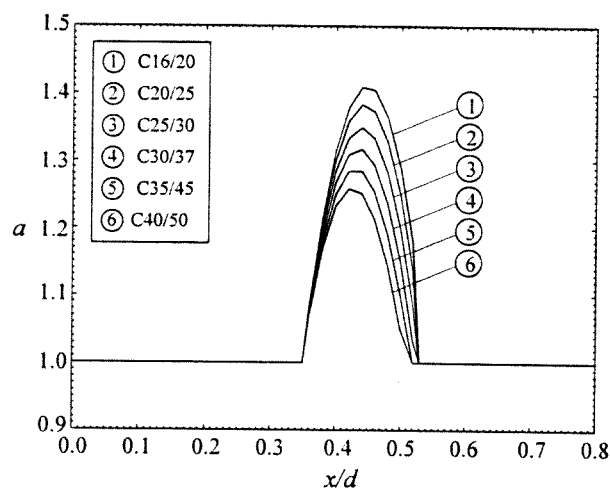
ou usando o parâmetro energético  $E_{p-t}$ :

$$a = \begin{cases} 1.0 & ; 0.90 \leq E_{p-t} \leq 1.00 \\ f\left(E_{p-t}; \frac{\rho'}{\rho}; \frac{f_{cm}}{f_{sym}}\right) \geq 1.0 & ; 0.50 \leq E_{p-t} \leq 0.90 \\ 1.0 & ; E_{p-t} < 0.50 \end{cases},$$

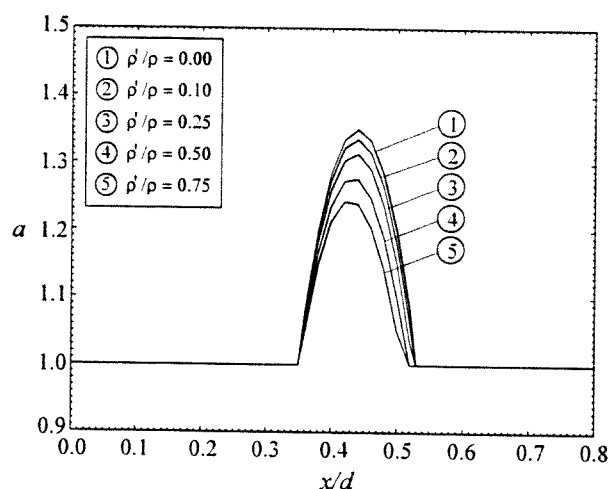
com,

(6.17)

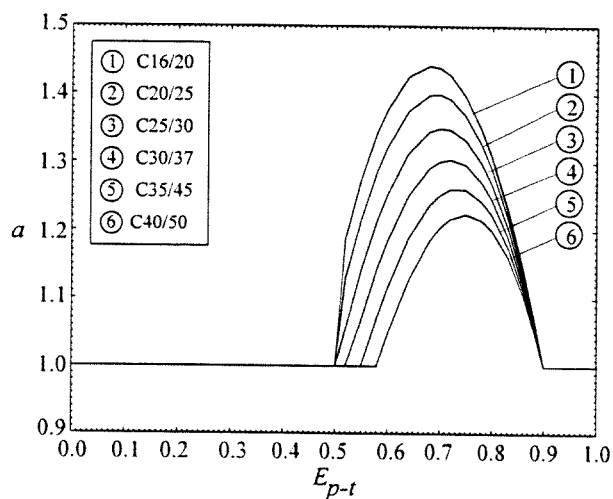
$$f\left(E_{p-t}; \frac{\rho'}{\rho}; \frac{f_{cm}}{f_{sym}}\right) = \left[ 1.00 - 3.85(E_{p-t} - 0.90) - 9.25(E_{p-t} - 0.90)^2 \right] \cdot \left[ 1 + 0.60(E_{p-t} - 0.90) \frac{\rho'}{\rho} \right] \cdot \left[ 1.88 - 17.2 \frac{f_{cm}}{f_{sym}} + \left( 19.1 \frac{f_{cm}}{f_{sym}} - 0.98 \right) E_{p-t} \right]$$



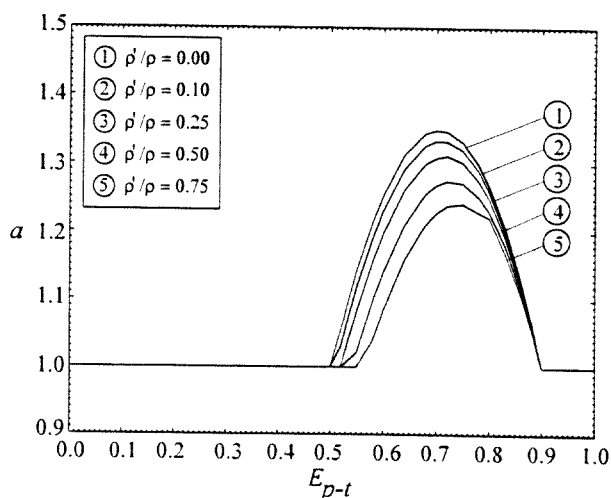
a) expressão (6.16):  $\rho'/\rho = 0.0$ ; aço A500



b) expressão (6.16): betão C25/30; aço A500



c) expressão (6.17):  $\rho'/\rho = 0.0$ ; aço A500



d) expressão (6.17): betão C25/30; aço A500

Fig. 6.32 - Evolução do coeficiente  $a$  de acordo com as expressões (6.16) e (6.17).

### 6.5.3 - Análise de pórticos de betão armado sujeitos à flexão

O estudo da segurança de pórticos de betão armado sujeitos à flexão (simples e composta) tem como objectivo testar e complementar as expressões do coeficiente de segurança global,  $\gamma_R$ , propostas na secção anterior para ter em conta a presença de esforços axiais em conjunto com os momentos flectores.

Estudaram-se vários casos de pórticos sujeitos à flexão. Traçou-se o comportamento desde o estado de repouso até ao colapso e avaliou-se o desempenho das secções críticas ao longo do carregamento. A segurança é avaliada através do coeficiente de segurança global  $\gamma_R$  (definido pela expressão 6.13) em função da resposta das várias secções críticas existentes num pórtico para um determinado carregamento.

#### Caracterização dos casos analisados

Na análise de estruturas de betão armado sujeitas à flexão tomou-se como base um pórtico de um vão constituído por dois pilares encastrados na base e uma viga a ligar o topo desses pilares (Fig. 6.33). Foram consideradas várias quantidades de armadura e com diferentes distribuições da armadura ao longo da estrutura. O carregamento da estrutura é composto por uma força horizontal aplicada ao nível da viga e duas forças verticais descendentes aplicadas nos pilares. Consideraram-se várias combinações de valores para as forças aplicadas.

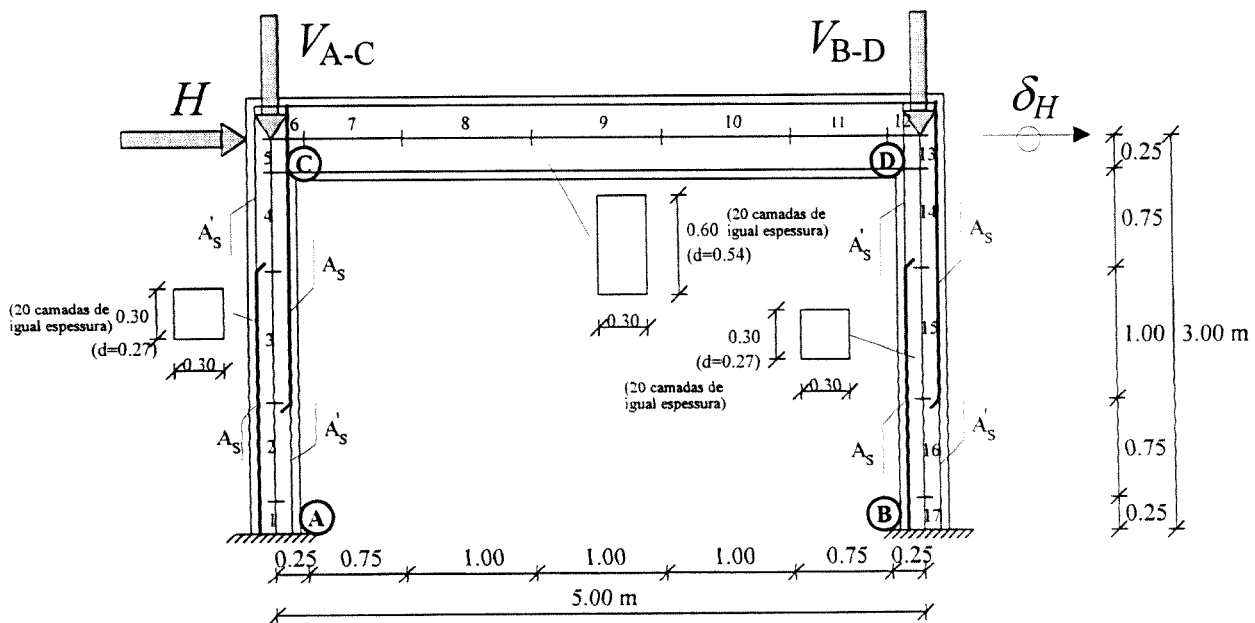


Fig. 6.33 - Caracterização da estrutura estudada (discretização da estrutura).

Para o carregamento proposto identificaram-se as quatro secções críticas,  $A$  e  $B$  nos encastramentos e  $C$  e  $D$  nas intersecções dos pilares com a viga (Fig. 6.33). A distribuição das armaduras ao longo do pórtico foi definida em função da armação das secções críticas  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ . No Quadro 6.3 indicam-se as distribuições das armaduras para os casos base estudados, os materiais considerados e as dimensões das secções transversais.

Quadro 6.3 - Opções consideradas nas análises dos pórticos.

Distribuições-tipo das armaduras no pórtico (em relação às secções críticas)	①	$\rho_A = \rho_B = \rho_C = \rho_D$	$\rho_X$ - percentagem de armadura de tracção na secção X; $\rho_X = A_{sx} / (b_x \cdot d_x) \cdot 100\%$
	②	$\rho_A = \rho_B \neq \rho_C = \rho_D$	
	③	$\rho_A = \rho_C \neq \rho_B = \rho_D$	
	④	$\rho_A \neq \rho_B \neq \rho_C \neq \rho_D$	
materiais	betão da classe C25/30; aço da classe A500		
propriedades dos materiais	parâmetros definidos no Quadro 6.2		
dimensões das secções	pilares: $b \times h = 0.30 \times 0.30 \text{ m}^2$ ; $d/h = 0.90$ viga: $b \times h = 0.30 \times 0.60 \text{ m}^2$ ; $d/h = 0.90$ ( $b$ - largura; $h$ - altura; $d$ - altura útil)		

### *Avaliação das respostas estruturais através de análises determinísticas*

O traçado da resposta dos pórticos foi obtido através do incremento sucessivo da força horizontal até ao colapso, mantendo as forças verticais nos pilares com valor constante. Pretendeu-se com este procedimento realçar o comportamento dos pilares à flexão composta. Foi também destacado o comportamento das secções críticas,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  (ver Fig. 6.33) na resposta global da estrutura.

Nos parágrafos seguintes são apresentadas e descritas as respostas estruturais obtidas para os casos propostos no Quadro 6.4, considerando os valores médios das propriedades dos materiais e recorrendo a análises determinísticas.

- Caso ① - armaduras iguais em todas as secções críticas ( $\rho_A = \rho_B = \rho_C = \rho_D$ ;  $\rho'/\rho = 0$ )

Na Fig. 6.34 ilustra-se as curvas que traduzem a resposta estrutural dos pórticos, através da relação entre os valores da força horizontal,  $H$ , aplicada ao nível da viga e o deslocamento horizontal,  $\delta_H$ , ao mesmo nível. Essas curvas dizem respeito a exemplos com iguais quantidades de armadura (de tracção) nas quatro secções críticas  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ . Consideraram-se percentagens de armadura entre 0.25 e 2.50% (ver Quadro 6.4).

Quadro 6.4 - Descrição dos exemplos analisados para cada um dos quatro casos indicados no Quadro 6.3.

casos	descrição	$\rho_A$ (%)	$\rho_B$ (%)	$\rho_C$ (%)	$\rho_D$ (%)	forças nos pilares	
						$V_{A-C}$ (kN)	$V_{B-D}$ (kN)
①	$\rho_A = \rho_B = \rho_C = \rho_D$ ( $\rho'/\rho = 0$ ; $V = 0$ )	0.25	0.25	0.25	0.25	0	0
		0.50	0.50	0.50	0.50	0	0
		0.75	0.75	0.75	0.75	0	0
		1.00	1.00	1.00	1.00	0	0
		1.25	1.25	1.25	1.25	0	0
		1.50	1.50	1.50	1.50	0	0
		1.75	1.75	1.75	1.75	0	0
		2.00	2.00	2.00	2.00	0	0
	2.50	2.50	2.50	2.50	0	0	
	$\rho_A = \rho_B = \rho_C = \rho_D$ ( $\rho'/\rho = 0$ ; $V \neq 0$ )	0.75	0.75	0.75	0.75	100	100
0.75		0.75	0.75	0.75	500	500	
0.75		0.75	0.75	0.75	1000	1000	
②	$\rho_A = \rho_B < \rho_C = \rho_D$ ( $\rho'/\rho = 0$ ; $V = 0$ )	0.50	0.50	1.50	1.50	0	0
		0.75	0.75	1.25	1.25	0	0
		1.00	1.00	1.50	1.50	0	0
		1.25	1.25	2.50	2.50	0	0
	$\rho_A = \rho_B > \rho_C = \rho_D$ ( $\rho'/\rho = 0$ ; $V = 0$ )	1.25	1.25	0.75	0.75	0	0
		1.50	1.50	1.00	1.00	0	0
③	$\rho_A = \rho_C < \rho_B = \rho_D$ ( $\rho'/\rho = 0$ ; $V = 0$ )	0.75	1.25	0.75	1.25	0	0
		1.00	1.50	1.00	1.50	0	0
	$\rho_A = \rho_C < \rho_B = \rho_D$ ( $\rho'/\rho = 1.0$ ; $V \neq 0$ )	0.75	1.50	0.75	1.50	100	200
		0.75	1.50	0.75	1.50	100	500
		0.75	1.50	0.75	1.50	250	500
		0.75	1.50	0.75	1.50	250	750
		0.75	1.50	0.75	1.50	500	750
0.75	1.50	0.75	1.50	500	1000		
④	$\rho_A < \rho_B < \rho_C < \rho_D$ ( $\rho'/\rho = 0$ ; $V = 0$ )	0.50	1.00	1.50	2.00	0	0
		0.50	1.00	1.50	2.25	0	0
		0.50	1.00	1.50	2.50	0	0
		0.75	1.00	1.25	1.50	0	0
		0.75	1.50	2.50	3.00	0	0
		1.00	1.50	2.50	3.00	0	0

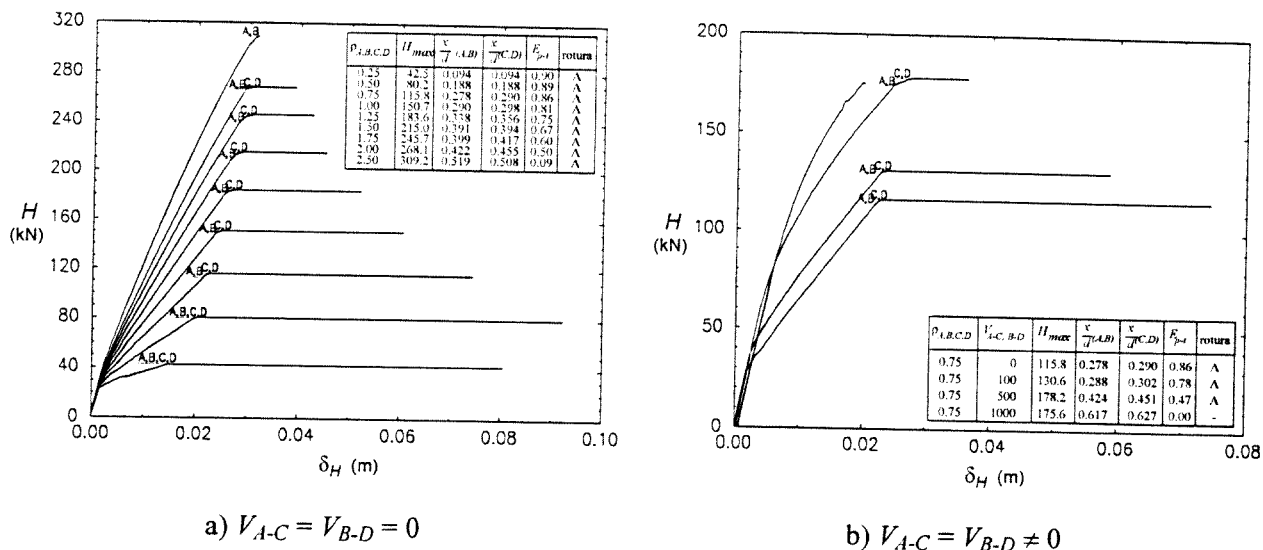


Fig. 6.34 - Curvas de resposta  $H - \delta_H$  para o caso ①:  $\rho_A = \rho_B = \rho_C = \rho_D$ ;  $\rho'/\rho = 0$ .

Os resultados obtidos das análises encontram-se descritos na Fig. 6.34, nomeadamente, a carga horizontal máxima,  $H_{max}$ ; o quociente entre a posição do eixo neutro e a altura útil,  $x/d$ , nas secções críticas  $A, B, C$  e  $D$ ; o parâmetro energético relativo ao trabalho plástico,  $E_{p-i}$ ; e, a secção crítica onde ocorreu a rotura. Os valores respeitantes às respostas obtidas e que se encontram indicados na figura, estão ordenados para cargas de colapso crescentes.

As curvas ilustradas apresentam todas uma evolução idêntica. O troço inicial é caracterizado por possuir uma rigidez elevada, correspondendo à resposta da estrutura em regime não fendilhado. A iniciação e a conseqüente propagação da fendilhação origina a primeira quebra visível nas curvas representadas. As armaduras iniciam a sua plastificação nas quatro secções críticas para valores da força horizontal muito próximos entre si, conduzindo a uma rigidez praticamente nula até ser esgotada a capacidade deformacional de uma das secções críticas, em geral as secções de encastramento  $A$  e  $B$ .

Na Fig. 6.34a observa-se que o grau de ductilidade da resposta estrutural vai sucessivamente diminuindo para percentagens de armadura crescente, verificando-se inclusivamente que para o valor de  $\rho = 2.50\%$  a rotura ocorre sem que haja qualquer plastificação das armaduras nas secções  $C$  e  $D$ . Na Fig. 6.34b representam-se os resultados dos exemplos com iguais quantidade de armadura ( $\rho = 0.75\%$ ) mas com diferentes valores de forças de compressão aplicadas nos pilares. Verifica-se uma diminuição acentuada da ductilidade da resposta e, em geral, um aumento considerável da capacidade resistente da estrutura para valores sucessivamente crescentes do esforço axial nos pilares. A excepção ocorreu para valores de  $V = 1000$  kN

onde a rotura aconteceu sem qualquer plastificação das armaduras e, por isso, a capacidade resistente não sofreu acréscimo relativamente ao caso correspondente a  $V = 750$  kN.

Saliente-se ainda que nas Figs. 6.34a e 6.34b se observa que as respostas que apresentam plastificação das armaduras nas quatro secções críticas, os valores de  $x/d$  nas secções de encastramento ( $A$  e  $B$ ) e dos nós pilar-viga ( $C$  e  $D$ ) são inferiores a 0.43 e 0.46, respectivamente. Por sua vez, para essas situações, o parâmetro  $E_{p-t}$  apresentou valores superiores a 0.50.

• Caso ② - armaduras nos encastramentos diferentes das armaduras nos nós pilar-viga

$$(\rho_A = \rho_B \neq \rho_C = \rho_D; \rho'/\rho = 0)$$

Na Fig. 6.35 encontram-se ilustradas as curvas de resposta para os casos em que as quantidades de armadura nas secções  $A$  e  $B$  (encastramentos) são diferentes das quantidades de armadura nas secções  $C$  e  $D$  (nós pilar-viga). A configuração dessas curvas apresentam quatro tramos distintos, mais um que o caso anterior dado que há uma clara distinção entre os valores de carga correspondentes ao início de plastificação das armaduras nas secções de encastramento ( $A$  e  $B$ ) e nos nós pilar-viga ( $C$  e  $D$ ).

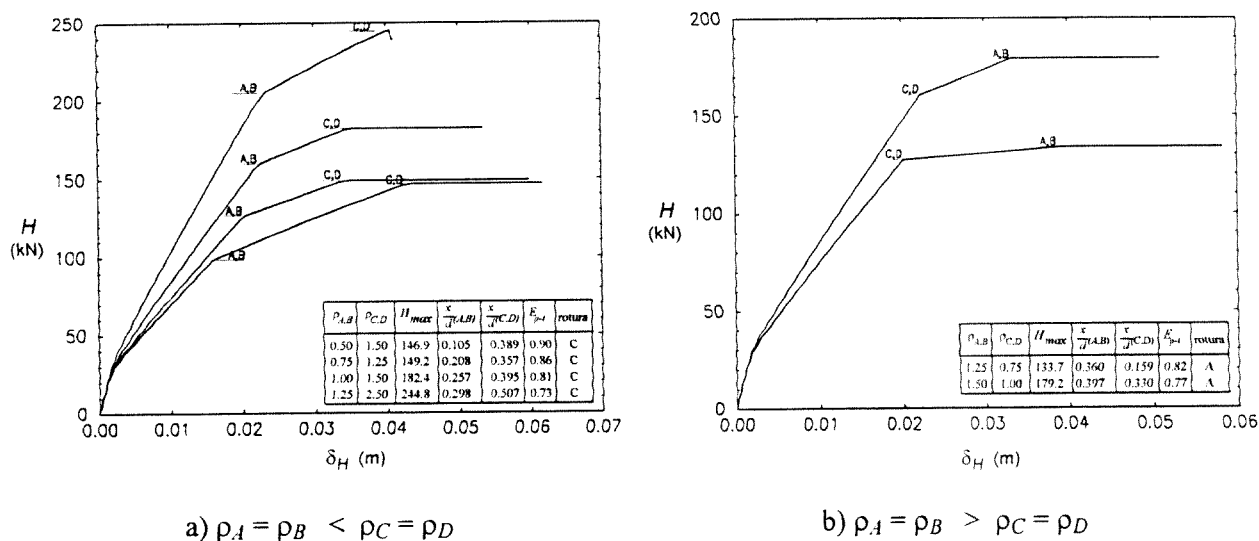


Fig. 6.35 - Curvas de resposta  $H - \delta_H$  para o caso ②:  $\rho_A = \rho_B \neq \rho_C = \rho_D; \rho'/\rho = 0$ .

Saliente-se que nas curvas ilustradas a rotura ocorreu na secção crítica superior  $C$  para os casos em que  $\rho_A = \rho_B < \rho_C = \rho_D$  e nos casos em que  $\rho_A = \rho_B > \rho_C = \rho_D$  a rotura ocorreu no encastramento  $A$ . Repare-se que em ambas as situações a rotura não ocorreu nas secções onde se iniciou a plastificação das armaduras, mas sim naquelas onde esse fenómeno aconteceu posteriormente. As secções onde ocorreram as roturas apresentavam maior percentagem de



armadura, logo maiores capacidades resistentes, mas menor capacidade deformacional. Como consequência, apesar do início de plastificação nessas secções ocorrer mais tarde, o valor de deformação última é atingido mais rapidamente. É, no entanto, de ressaltar a possibilidade de ocorrerem casos em que a diferença entre as capacidades deformacionais das referidas secções não seja suficientemente grande para que estas situações aconteçam. Assim, ao contrário dos exemplos analisados, poderão ocorrer roturas devido ao esgotamento da capacidade deformacional das secções onde ocorreram as primeiras plastificações da armadura (como aconteceu nas vigas anteriormente analisadas).

Nas curvas ilustradas na Fig. 6.35 somente uma não apresenta "patamar" plástico. Os valores de  $x/d$  referentes a essa curva são de 0.298 e 0.507 nas secções inferior e superior, respectivamente. O valor de  $E_{p-t}$  correspondente é de 0.73.

• Caso ③ - armaduras constantes nos pilares e diferentes entre si ( $\rho_A = \rho_C \neq \rho_B = \rho_D$ )

No presente caso considerou-se iguais quantidades de armadura nas secções críticas de cada pilar, apresentando o pilar da esquerda menor quantidade de armadura que o pilar da direita. Na Fig. 6.36 encontram-se traçadas as curvas de resposta que traduzem o comportamento estrutural para diferentes quantidades de armadura. Dessas curvas destaca-se a ordem de entrada em plastificação das armaduras nas secções críticas. Assim, as armaduras nas duas secções críticas do pilar da esquerda (secções A e C) entram, praticamente em simultâneo, em plastificação. Para um valor maior da carga horizontal inicia-se a plastificação das armaduras na secção de encastramento do pilar da direita (secção B), numa fase posterior inicia-se a plastificação das armaduras situadas no topo desse pilar (secção D).

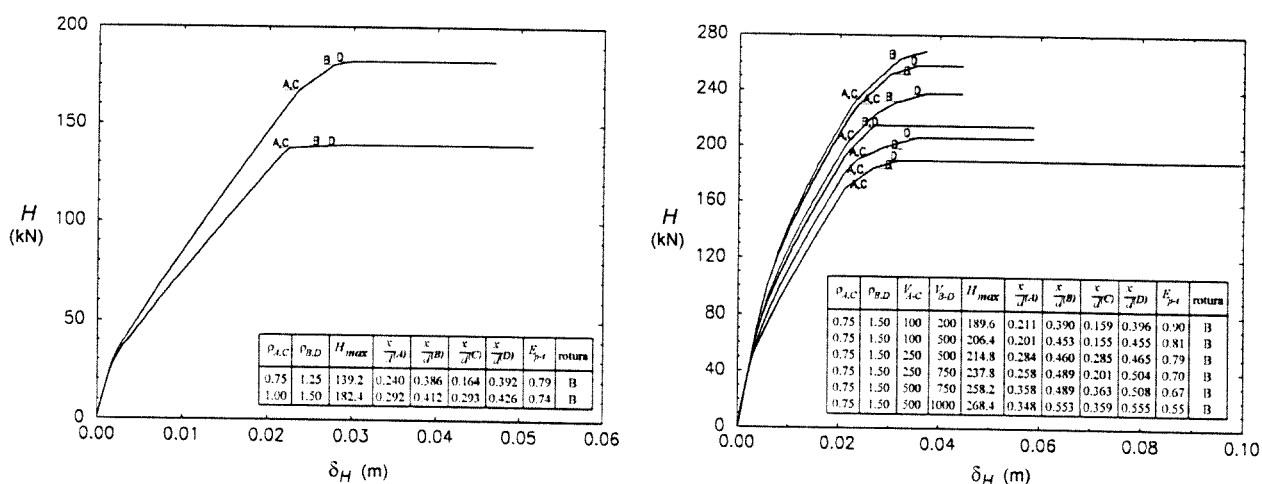


Fig. 6.36 - Curvas de resposta H -  $\delta_H$  para o caso ③:  $\rho_A = \rho_C \neq \rho_B = \rho_D$ .

Tal como se verificou anteriormente, a capacidade resistente e o grau de ductilidade da estrutura depende da quantidade de armadura e do valor do esforço axial. No entanto, há um aspecto a salientar, nos exemplos considerados na Fig. 6.36b, no que respeita à influência dos esforços axiais no comportamento estrutural. Como se encontra indicado nessa figura, consideraram-se diferentes valores de esforço axial nos dois pilares (valor maior no pilar da direita). Em todos os exemplos analisados verificou-se que um maior nível de carregamento em compressão corresponde uma capacidade resistente maior. Por outro lado, para diferentes níveis de compressão nem sempre se verifica grandes alterações do grau de ductilidade da resposta estrutural. Observa-se que o grau de ductilidade diminui quando se aumenta a força de compressão no pilar onde ocorre a rotura, permanecendo praticamente constante se a força axial no pilar da direita não se alterar independentemente de o nível de compressão no pilar da esquerda aumentar. Por exemplo, compare-se os seguintes pares de respostas ( $V_{A-C} = 100\text{kN}$ ,  $V_{B-D} = 200\text{kN}$ ) com ( $V_{A-C} = 100\text{kN}$ ,  $V_{B-D} = 500\text{kN}$ ), ( $V_{A-C} = 250\text{kN}$ ,  $V_{B-D} = 500\text{kN}$ ) com ( $V_{A-C} = 250\text{kN}$ ,  $V_{B-D} = 750\text{kN}$ ) e ( $V_{A-C} = 500\text{kN}$ ,  $V_{B-D} = 750\text{kN}$ ) com ( $V_{A-C} = 500\text{kN}$ ,  $V_{B-D} = 1000\text{kN}$ ). Estes pares de respostas caracterizam-se por terem forças de compressão iguais no pilar da esquerda e diferentes no pilar da direita, obtendo-se respostas com graus de ductilidade bastante diferenciados. Compare-se agora os seguintes pares de respostas: ( $V_{A-C} = 100\text{kN}$ ,  $V_{B-D} = 500\text{kN}$ ) com ( $V_{A-C} = 250\text{kN}$ ,  $V_{B-D} = 500\text{kN}$ ) e ( $V_{A-C} = 250\text{kN}$ ,  $V_{B-D} = 750\text{kN}$ ) com ( $V_{A-C} = 500\text{kN}$ ,  $V_{B-D} = 750\text{kN}$ ). Estes pares de respostas caracterizam-se por terem forças de compressão diferentes no pilar da esquerda e iguais no pilar da direita, obtendo-se respostas com graus de ductilidade idênticos.

Em todos os exemplos analisados, no presente caso, o colapso da estrutura ocorreu por esgotamento da capacidade deformacional da secção de encastramento do pilar da direita (secção B). Em praticamente todos ocorreu plastificação das armaduras nas quatro secções críticas. A excepção aconteceu no exemplo ilustrado na Fig. 6.36b quando os níveis de compressão são, respectivamente,  $V_{A-C} = 500\text{ kN}$  e  $V_{B-D} = 1000\text{ kN}$ .

• *Caso ④ - armaduras diferentes em todas as secções críticas* ( $\rho_A \neq \rho_C \neq \rho_B \neq \rho_D$ )

Este caso teve como objectivo promover uma sequência distinta de plastificação das armaduras nas quatro secções críticas. Os exemplos considerados e as respostas estruturais obtidas encontram-se ilustrados na Fig. 6.37.

Nos exemplos em que ocorreu plastificação em todas as secções críticas é visível a formação dos diferentes tramos. Cada tramo corresponde à entrada em plastificação das armaduras nas secções críticas de uma forma sequencial, ditada pela ordem correspondente às quantidades de armadura consideradas,  $\rho_A < \rho_B < \rho_C < \rho_D$ .

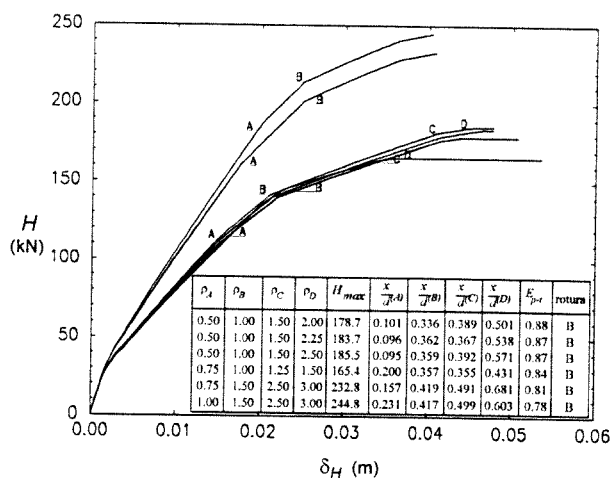


Fig. 6.37 - Curvas de resposta  $H - \delta_H$  para o caso ④:  $\rho_A \neq \rho_B \neq \rho_C \neq \rho_D$ ;  $\rho'/\rho = 0$ .

*Avaliação das respostas estruturais através de análises probabilísticas*

No estudo da segurança dos exemplos analisados consideraram-se as opções definidas no Quadro 6.3. Foram considerados somente os casos ③ e ④ expressos nesse quadro e passaram a ser renumerados por ② e ①, respectivamente. A metodologia usada foi igual à utilizada na análise de segurança das vigas. Considerou-se também uma variabilidade espacial dos parâmetros com natureza aleatória, isto é, os elementos são definidos com características diferentes e independentes entre si.

Nos parágrafos seguintes são apresentadas e descritas as distribuições da capacidade resistente dos pórticos sugeridos (ver Quadro 6.5). Será analisada a segurança através do coeficiente de segurança global,  $\gamma_R$ , em função das posições relativas do eixo neutro,  $x/d$ , nas secções críticas e do parâmetro energético relativo ao trabalho plástico,  $E_{p-r}$ .

- Caso ① - armaduras diferentes em todas as secções críticas ( $\rho_A \neq \rho_C \neq \rho_B \neq \rho_D$ )

Na Fig. 6.38 encontram-se ilustradas as distribuições da capacidade resistente dos pórticos com armaduras diferentes em todas as secções críticas, sem armadura de compressão e sem cargas axiais de compressão nos pilares.

A ordenação das distribuições ilustradas na Fig. 6.38 corresponde a quantidades de armadura sucessivamente crescentes, embora em diferentes proporções pelas secções críticas. Essa ordenação resulta, em média, em posições relativas do eixo neutro,  $x/d$ , crescentes em todas as

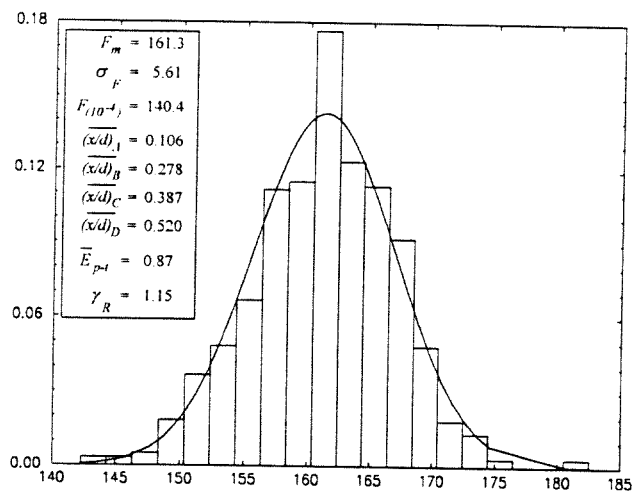
secções críticas e em parâmetros energéticos relativos ao trabalho plástico,  $E_{p-t}$ , decrescentes (ou seja, em média o grau de ductilidade decresce).

Quadro 6.5 - Descrição dos exemplos analisados para cada um dos dois casos analisados.

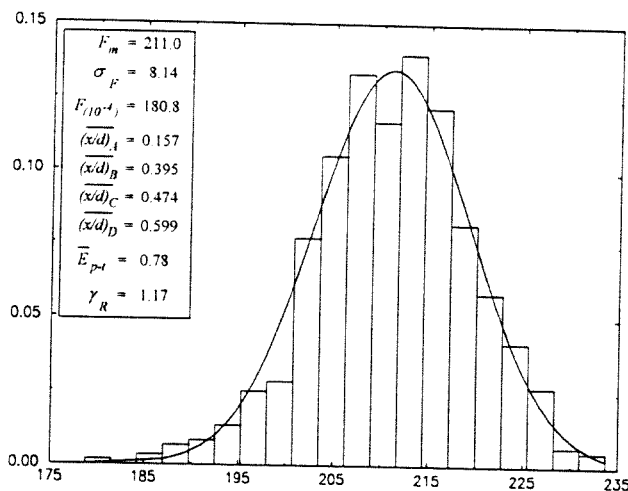
casos	descrição	$\rho_A$ (%)	$\rho_B$ (%)	$\rho_C$ (%)	$\rho_D$ (%)	forças nos pilares	
						$V_{A-C}$ (kN)	$V_{B-D}$ (kN)
①	$\rho_A < \rho_B \leq \rho_C < \rho_D$ ( $\rho'/\rho = 0$ ; $V \neq 0$ )	0.50	1.00	1.50	2.50	0	0
		0.75	1.50	2.50	3.50	0	0
		0.85	1.70	2.50	3.50	0	0
		1.00	2.00	2.50	3.50	0	0
		1.25	2.50	2.50	3.50	0	0
		1.50	3.00	3.00	3.50	0	0
②	$\rho_A = \rho_C < \rho_B = \rho_D$ ( $\rho'/\rho = 1.0$ ; $V \neq 0$ )	0.75	1.50	0.75	1.50	100	200
		0.75	1.50	0.75	1.50	250	500
		0.75	1.50	0.75	1.50	250	750
		0.75	1.50	0.75	1.50	500	1000

As duas primeiras distribuições (Figs. 6.38a e 6.38b) aproximam-se da lei gausseana (lei normal) e apresentam em média um elevado grau de ductilidade ( $E_{p-t} = 0.87$  e  $E_{p-t} = 0.78$ , respectivamente). A terceira distribuição e as seguintes (Figs. 6.38c a 6.38f) apresentam uma assimetria com uma "cauda" mais acentuada na zona dos valores mínimos, traduzindo-se num acréscimo acentuado do coeficiente  $\gamma_R$ .

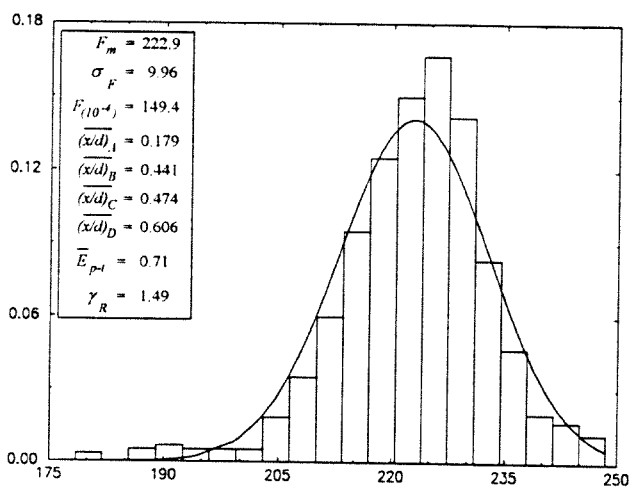
De uma maneira geral, nas amostras analisadas para cada um dos exemplos, a plastificação das armaduras iniciou-se na secção crítica  $A$  (encastramento do pilar da esquerda), tendo o colapso ocorrido na maioria das vezes na secção crítica  $B$  (encastramento do pilar da direita). Considerando a evolução do coeficiente de segurança global,  $\gamma_R$ , em função da posição relativa do eixo neutro,  $x/d$ , nas várias secções críticas (Fig. 6.39a), em comparação com as curvas definidas para as vigas analisadas anteriormente com os mesmos materiais e considerando variabilidade espacial e a mesma relação  $\rho'/\rho = 0$ , verifica-se que a curva relativa à secção  $B$  (onde ocorre preferencialmente o colapso) é a que mais se aproxima. A Fig. 6.39b apresenta as curvas que traduzem a evolução de  $\gamma_R$  com o parâmetro  $E_{p-t}$ , respectivamente, para os exemplos dos pórticos analisados e para as vigas mencionadas. Verifica-se que as curvas se aproximam bastante.



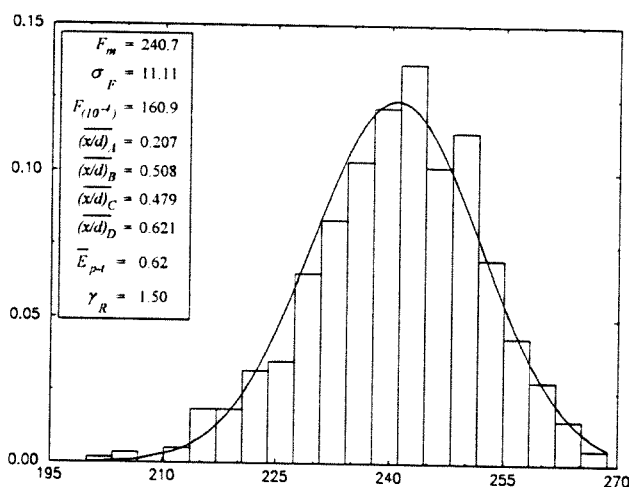
a)  $\rho_A=0.50\%$ ;  $\rho_B=1.00\%$ ;  $\rho_C=1.50\%$ ;  $\rho_D=2.50\%$



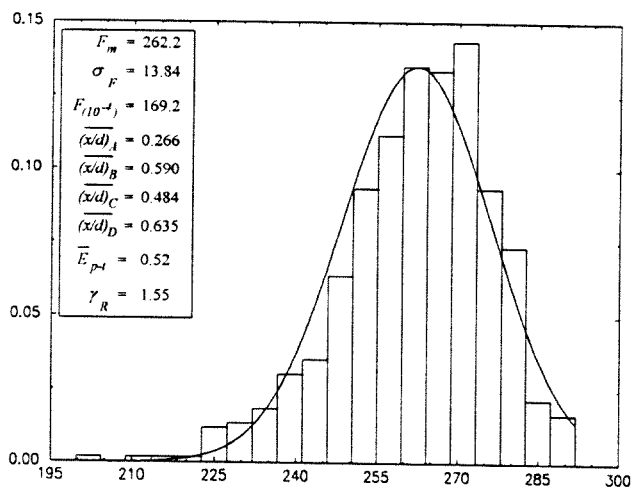
b)  $\rho_A=0.75\%$ ;  $\rho_B=1.50\%$ ;  $\rho_C=2.50\%$ ;  $\rho_D=3.50\%$



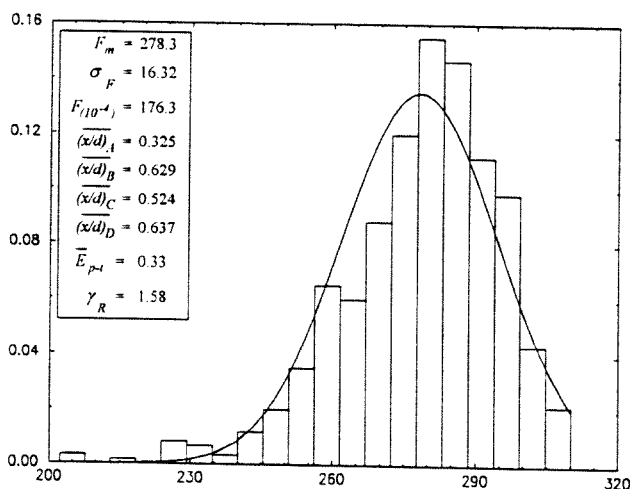
c)  $\rho_A=0.85\%$ ;  $\rho_B=1.70\%$ ;  $\rho_C=2.50\%$ ;  $\rho_D=3.50\%$



d)  $\rho_A=1.00\%$ ;  $\rho_B=2.00\%$ ;  $\rho_C=2.50\%$ ;  $\rho_D=3.50\%$



e)  $\rho_A=1.25\%$ ;  $\rho_B=2.50\%$ ;  $\rho_C=2.50\%$ ;  $\rho_D=3.50\%$



f)  $\rho_A=1.50\%$ ;  $\rho_B=3.00\%$ ;  $\rho_C=3.00\%$ ;  $\rho_D=3.50\%$

Fig. 6.38 - Distribuição da capacidade resistente dos pórticos para o caso ①:  $\rho_A < \rho_B \leq \rho_C = \rho_D$ ;  $\rho'/\rho = 0$ ;  $V = 0$ .

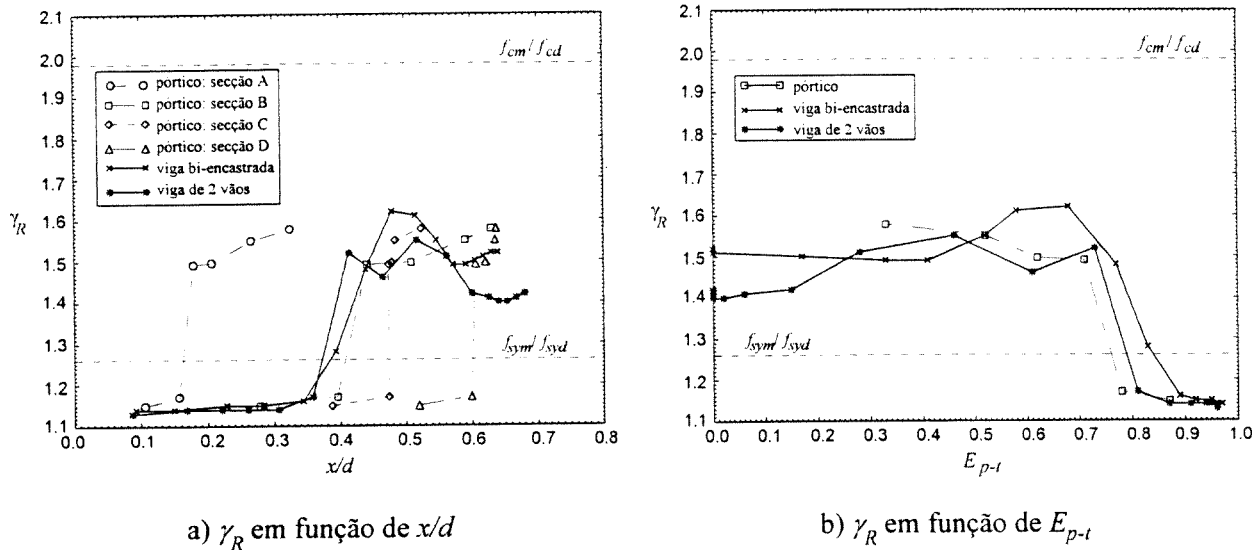


Fig. 6.39 - Evolução do coeficiente de segurança global,  $\gamma_R$ , para os exemplos analisados e comparação com os resultados das vigas - caso ①.

• Caso ② - armaduras constantes nos pilares e diferentes entre si ( $\rho_A = \rho_C \neq \rho_B = \rho_D$ )

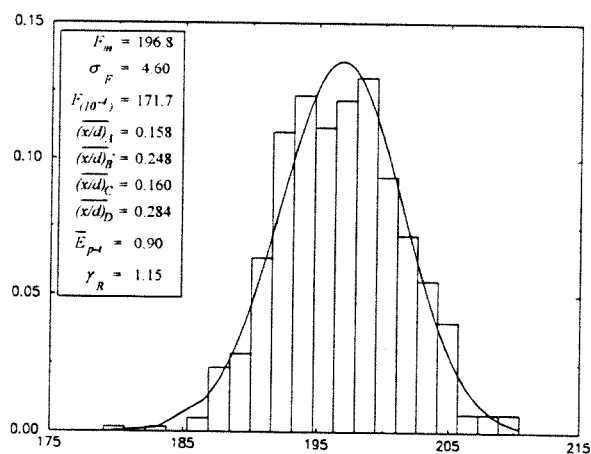
Na Fig. 6.40 encontram-se ilustradas as distribuições da capacidade resistente dos pórticos com armaduras constantes ao longo dos pilares (armadura de tracção igual à armadura de compressão e constantes em altura) mas com quantidades diferentes entre os dois pilares. Aplicaram-se ainda cargas axiais de compressão de diferente valor nos pilares. Nos quatro exemplos apresentados na Fig. 6.40 considerou-se a mesma distribuição da armadura ao longo da estrutura, mas diferentes carregamentos nos pilares.

Tal como no caso anterior, de um modo geral a plastificação das armaduras dá-se inicialmente na secção A (secção de encastramento do pilar da esquerda), ocorrendo o colapso da estrutura por esgotamento da capacidade deformacional da secção B (secção de encastramento do pilar da direita). A Fig. 6.40 mostra a existência de duas distribuições aproximadamente gausseanas (Figs. 6.40a e 6.40b) e outras duas distribuições francamente assimétricas, com uma "cauda" prolongada para os valores mínimos. Desta figura constata-se que os acréscimos das forças de compressão nos pilares originam uma diminuição do grau de ductilidade da resposta da estrutura e, ainda, uma diminuição da segurança, traduzindo-se num aumento do coeficiente  $\gamma_R$ .

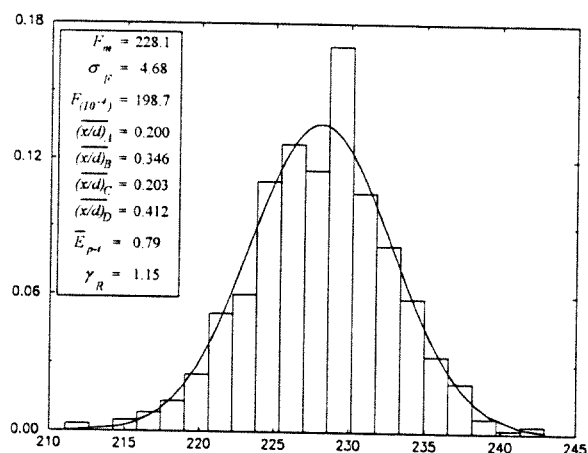
Na Fig. 6.41 mostra-se a evolução do coeficiente  $\gamma_R$  em função das posições relativas do eixo neutro,  $x/d$  (Fig. 6.41a), e em função do parâmetro energético,  $E_{p-t}$  (Fig. 6.41b). De forma a permitir a comparação, representam-se também os valores obtidos anteriormente para as vigas bi-encastadas considerando os mesmos materiais, parâmetros com variabilidade espacial e duas relações diferentes de armaduras,  $\rho'/\rho = 0$  e  $\rho'/\rho = 0.75$ . Observa-se que os valores dos pórticos

têm um comportamento que se aproxima da curva obtida nas vigas quando  $\rho'/\rho = 0$ , o que leva a constatar que em flexão composta (com esforços de compressão) o parâmetro  $\rho'/\rho$  tem uma influência menor na determinação de  $\gamma_R$  do que aquela verificada em flexão simples. Assim, pode considerar-se, de forma aproximada, que quando existem esforços axiais de compressão o valor a atribuir a  $\gamma_R$  não é controlado pelo parâmetro  $\rho'/\rho$  (ou seja, deverá considerar-se  $\rho'/\rho = 0$ ).

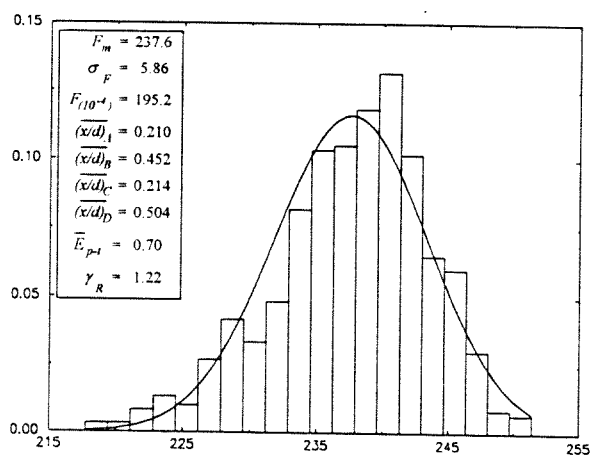
Outro aspecto a destacar é a preponderância da posição do eixo neutro na secção crítica onde ocorre, geralmente a rotura (secção B) na evolução de  $\gamma_R$ , comparativamente com as restantes secções críticas. Tal como no caso anterior, a secção onde se inicia a plastificação das armaduras em toda a estrutura, a secção A (ou seja, a secção mais esforçada da estrutura se fosse realizada uma simples análise linear elástica) não condiciona de forma preponderante o coeficiente de segurança global  $\gamma_R$ , ao contrário da secção onde ocorre a rotura (secção B).



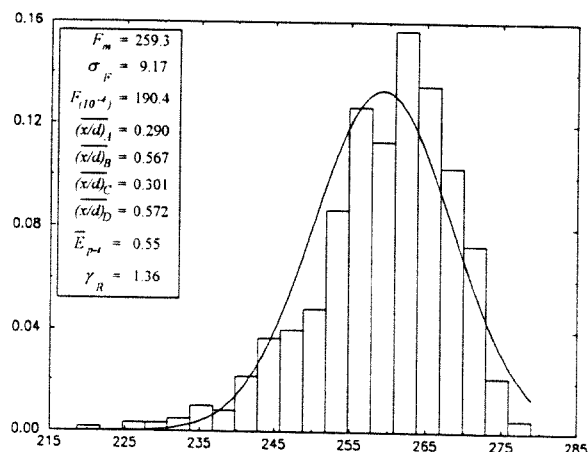
a)  $V_{A-C} = 100$  kN;  $V_{B-D} = 200$  kN



b)  $V_{A-C} = 250$  kN;  $V_{B-D} = 500$  kN



c)  $V_{A-C} = 250$  kN;  $V_{B-D} = 750$  kN



d)  $V_{A-C} = 500$  kN;  $V_{B-D} = 1000$  kN

Fig. 6.40 - Distribuição da capacidade resistente dos pórticos para o caso ②:  $\rho_A = \rho_C = 0.75\%$ ,  $\rho_B = \rho_D = 1.50\%$  e  $\rho'/\rho = 1.0$ .

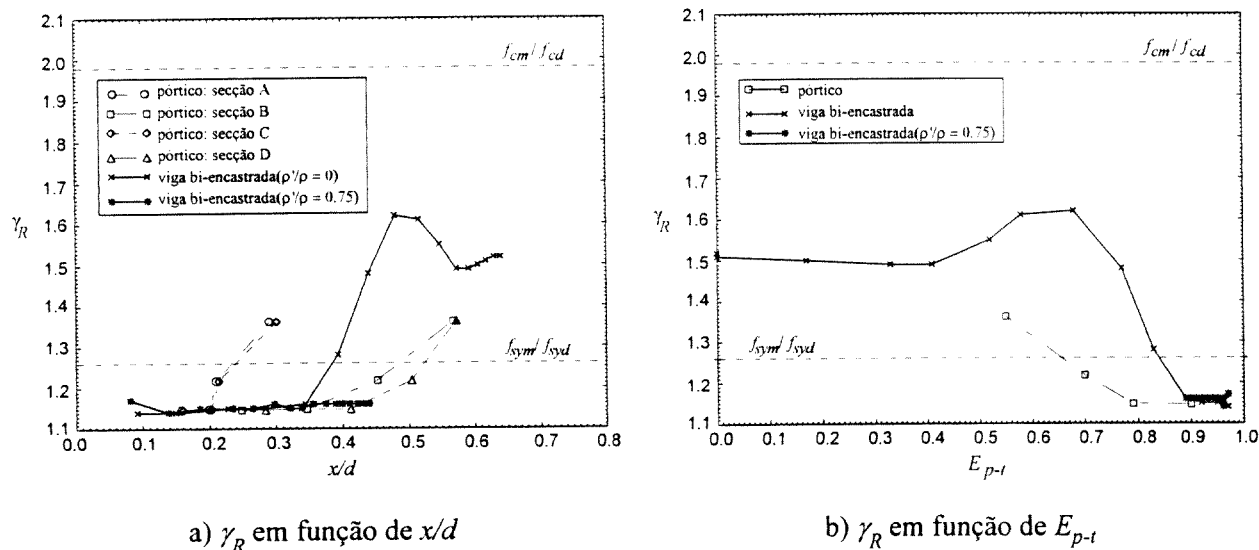


Fig. 6.41 - Evolução do coeficiente de segurança global,  $\gamma_R$ , para os exemplos analisados e comparação com os resultados das vigas - caso ②.

### 6.6 - ESTRUTURA DO FORMATO DE SEGURANÇA PROPOSTO

O formato de segurança proposto neste trabalho é adequado ao estudo de estruturas porticadas sujeitas a esforços de flexão, quando se utilizam métodos de análise não linear. Este formato é baseado numa verificação em termos de ações e na utilização dos valores médios das características resistentes na análise da estrutura. De forma sumária, divide-se nas seguintes fases (Fig. 6.42):

- análise da estrutura considerando os valores médios das propriedades e recorrendo a modelos não lineares e a técnicas de análise que simulem adequadamente todo o comportamento estrutural, incluindo a sua capacidade deformacional última;
- identificação das secções críticas da estrutura e verificação da existência de formação de rótulas plásticas nessas secções (plastificação das armaduras traccionadas);
- identificação da secção crítica onde ocorre a rotura por esgotamento da sua capacidade deformacional;
- avaliação da posição do eixo neutro na secção crítica onde ocorre a rotura;
- avaliação do coeficiente parcial de segurança,  $\gamma_{sec}$ , nessa secção (expressão 6.12);



- avaliação do parâmetro  $a$  que define a capacidade de redistribuição de esforços na estrutura (expressão 6.16);
- avaliação do coeficiente de segurança global,  $\gamma_R$ , através do produto entre  $\gamma_{sec}$  e  $a$ ;
- avaliação do valor de cálculo da capacidade resistente da estrutura,  $R_d$ , através do quociente entre o valor da capacidade resistente obtido da análise estrutural (usando valores médios) e o coeficiente de segurança  $\gamma_R$ .

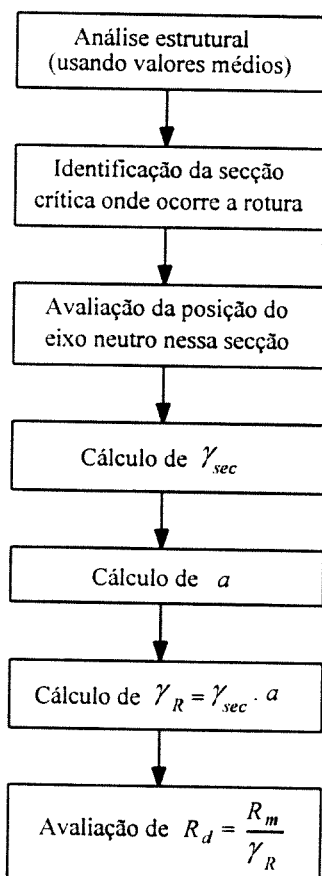


Fig. 6.42 - Formato de segurança proposto.

## 6.7 - CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Abordou-se o problema da avaliação da armadura mínima com o intuito de controlar e limitar a fendilhação em estruturas de betão. Destacam-se os casos em que essa fendilhação resulta do impedimento da estrutura, ou parte dela, a deformações impostas pela retracção do betão.

Propuseram-se ábacos para avaliar a armadura mínima em função da classe do betão e do aço, do diâmetro dos varões e do valor limite admissível para a largura de fendas.

Apontaram-se as inconsistências dos formatos de segurança propostos pela recente regulamentação de estruturas de betão (EC2, 1991; CEB-FIP, 1993). A necessidade de definir critérios lógicos e consistentes, nomeadamente quando se utilizam métodos de análise não linear, tem sido objecto de discussão no seio da comunidade técnica e científica no âmbito das estruturas de betão. Recentemente, vários autores têm proposto regras práticas para a verificação da segurança de estruturas de betão quando se utilizam métodos de análise refinados.

Na presente secção propôs-se um formato simplificado de segurança aos estados limites últimos de estruturas porticadas baseado numa verificação em termos de acções. Este formato tem em conta a influência da variabilidade das propriedades dos materiais na capacidade resistente das secções críticas e do efeito da redistribuição dos esforços em estruturas hiperstáticas. Assim, o formato de segurança é baseado na definição de um coeficiente de segurança global,  $\gamma_R$ , em função de um coeficiente parcial de segurança ao nível das secções,  $\gamma_{sec}$ , e de um parâmetro  $\alpha$  que traduz a redistribuição de esforços entre as secções.

O procedimento utilizado para a definição do coeficiente de segurança  $\gamma_R$  foi baseado nas seguintes fases: (i) avaliação do coeficiente  $\gamma_{sec}$  através do estudo de diferentes secções; (ii) avaliação do coeficiente  $\gamma_R$  através do estudo de estruturas hiperstáticas que incluam as secções analisadas na fase anterior; (iii) avaliação do efeito da redistribuição dos esforços entre as secções críticas (definição do parâmetro  $\alpha$ ) através da comparação dos resultados obtidos para  $\gamma_R$  e  $\gamma_{sec}$ .

Do estudo da segurança das secções sujeitas à flexão simples verificou-se que é possível definir adequadamente um coeficiente de segurança através da relação entre as capacidades resistentes da secção obtidas pela consideração dos valores médios das características resistentes e dos respectivos valores de cálculo. Constatou-se também que a variação do coeficiente  $\gamma_{sec}$  é independente das dimensões da secção. O nível de segurança, em termos de resposta última, depende do desempenho dos materiais e da importância que cada um teve na rotura. Assim, identificaram-se três factores que caracterizam convenientemente o coeficiente de segurança  $\gamma_{sec}$ : a posição do eixo neutro dividido pela altura útil,  $x/d$ , a relação entre as quantidades de armadura de compressão e de tracção,  $\rho'/\rho$ , e a relação entre a capacidade resistente dos materiais,  $f_{cm}/f_{sym}$ .

O estudo de peças lineares e de estruturas porticadas de betão armado sujeitas a esforços de flexão, revelou que a segurança é extremamente dependente do comportamento das secções críticas e do grau de redistribuição dos esforços entre essas secções. Constatou-se, também, que o grau de ductilidade apresentado pelas respostas estruturais está extremamente relacionado com o

grau de segurança estrutural, uma vez que esse grau é o resultado directo do comportamento das secções e da capacidade da estrutura em realizar a redistribuição dos esforços.

O coeficiente de segurança global,  $\gamma_R$ , é fortemente identificado com o coeficiente parcial de segurança ao nível das secções, excepto quando há mistura de comportamentos, ou seja, de diferentes tipos de resposta (resultando em dispersões elevadas das distribuições das capacidades resistentes). O coeficiente  $\gamma_{sec}$  definido na secção onde ocorre a rotura revelou-se como aquele que melhor traduz o coeficiente de segurança global  $\gamma_R$ .

Tal como nas secções, o coeficiente de segurança  $\gamma_R$  é convenientemente caracterizado pelos três factores mencionados anteriormente,  $x/d$ ,  $\rho'/\rho$  e  $f_{cm}/f_{sym}$ , excepto quando existe flexão composta associada a esforços de compressão onde o parâmetro  $\rho'/\rho$  deixa de ter grande preponderância.

A utilização alternativa do parâmetro energético associado com o trabalho plástico da resposta estrutural,  $E_{p-t}$ , para definir um formato de segurança para outro tipo de estruturas não abordadas neste trabalho (por exemplo, estruturas laminares), onde o conceito de secção crítica não é o mais adequado, revelou-se "prometedor". No entanto, a sua aplicação generalizada a todos os tipos de estruturas de betão exige mais investigação, nomeadamente, na consideração de várias classes de aço com diferentes capacidades de deformação última (uma vez que o parâmetro  $E_{p-t}$  depende da extensão do "patamar" plástico da resposta estrutural, ou seja da capacidade deformacional da estrutura) e, obviamente, na consideração de outros tipos de estruturas.

## Capítulo 7

# EXEMPLO DE APLICAÇÃO - AVALIAÇÃO DA SEGURANÇA DE UM VIADUTO

### 7.1 – INTRODUÇÃO

A aplicação das metodologias probabilísticas desenvolvidas ao estudo de uma estrutura de betão pré-esforçado é o tema deste capítulo. Pretende-se neste exemplo prático aferir o grau de segurança da solução de projecto e, ao mesmo tempo, aprofundar o conhecimento do comportamento estrutural, usando os modelos computacionais probabilísticos apresentados.

O exemplo em estudo consiste numa passagem superior da auto-estrada Porto-Braga (Rito, 1987). Os parâmetros mais importantes (materiais, geometria e acções) que caracterizam o comportamento estrutural, são identificados por variáveis aleatórias com distribuições adequadas. Neste estudo são tidos em conta os efeitos diferidos do comportamento dos materiais, nomeadamente, o envelhecimento, a fluência e a retracção do betão e a relaxação das armaduras de pré-esforço.

O comportamento obtido através do modelo de discretização utilizado na análise estrutural é aferido com resultados experimentais de carregamentos estáticos para níveis de acções de serviço.

Realiza-se uma avaliação (qualitativa) pormenorizada do comportamento estrutural para várias situações de carregamento através de análises determinísticas. Este estudo além de permitir compreender o funcionamento da estrutura, é também uma base para explicar fisicamente as implicações das diferentes variáveis intervenientes.

A avaliação da segurança é realizada através das metodologias probabilísticas desenvolvidas tendo em conta as combinações de acções e os estados limites definidos nos Eurocódigos. Este

aspecto resulta numa simplificação na abordagem probabilística. De facto, o estudo da fiabilidade num problema estrutural variável no tempo envolve a utilização de processos estatísticos que tenham em conta a variação temporal da resistência e das acções. A utilização de processos estocásticos (Orsero, 1994) em problemas de segurança variáveis no tempo está fora dos objectivos deste trabalho. Assim, a segurança é avaliada em determinados instantes do tempo, geralmente, quando se inicia a aplicação do valor da acção variável de combinação e no final da vida da estrutura.

Os resultados obtidos da análise permitem identificar as variáveis mais significativas para cada um dos estados limites estudados. A interpretação e a discussão desses resultados conduzem a uma aferição adequada da solução de projecto e a propostas alternativas a essa solução.

É também feita uma análise comparativa entre os resultados obtidos com a metodologia baseada no método de Monte Carlo e a metodologia baseada na análise da superfície de resposta.

## **7.2 – CARACTERIZAÇÃO DO PROBLEMA**

### **7.2.1 – Geometria e discretização da estrutura**

A passagem superior em estudo localiza-se no sublanço Famalicão-Cruz da auto-estrada Porto-Braga e denomina-se por PS41 (BRISA, 1988). Consiste numa estrutura em pórtico com três vãos, respectivamente de 13.0m, 34.0m e 13.0m (Fig. 7.1). O tabuleiro com uma largura de 9.60m é constituído por uma laje com duas nervuras longitudinais pré-esforçadas e por duas travessas sobre os pilares também pré-esforçadas.

Os resultados apresentados referentes à análise do comportamento estrutural e da verificação da segurança privilegiam o desempenho da estrutura em relação aos esforços longitudinais. Por isso, será destacado o estudo efectuado para avaliar o comportamento da estrutura na direcção longitudinal. Essa avaliação teve como base a discretização da estrutura em elementos finitos de viga de três nós com divisão por camadas em altura (na Fig. 7.2 representa-se a estrutura idealizada adoptada na análise, tirando partido da simetria). Os cabos de pré-esforço longitudinal são simulados por um cabo resultante, tendo sido representados por elementos discretos unidimensionais. A armadura ordinária foi considerada através de camadas embebidas nos elementos de betão. Relativamente às ligações ao exterior, considerou-se o tabuleiro simplesmente apoiado nos encontros (com impedimento de deslocamento na direcção vertical) e



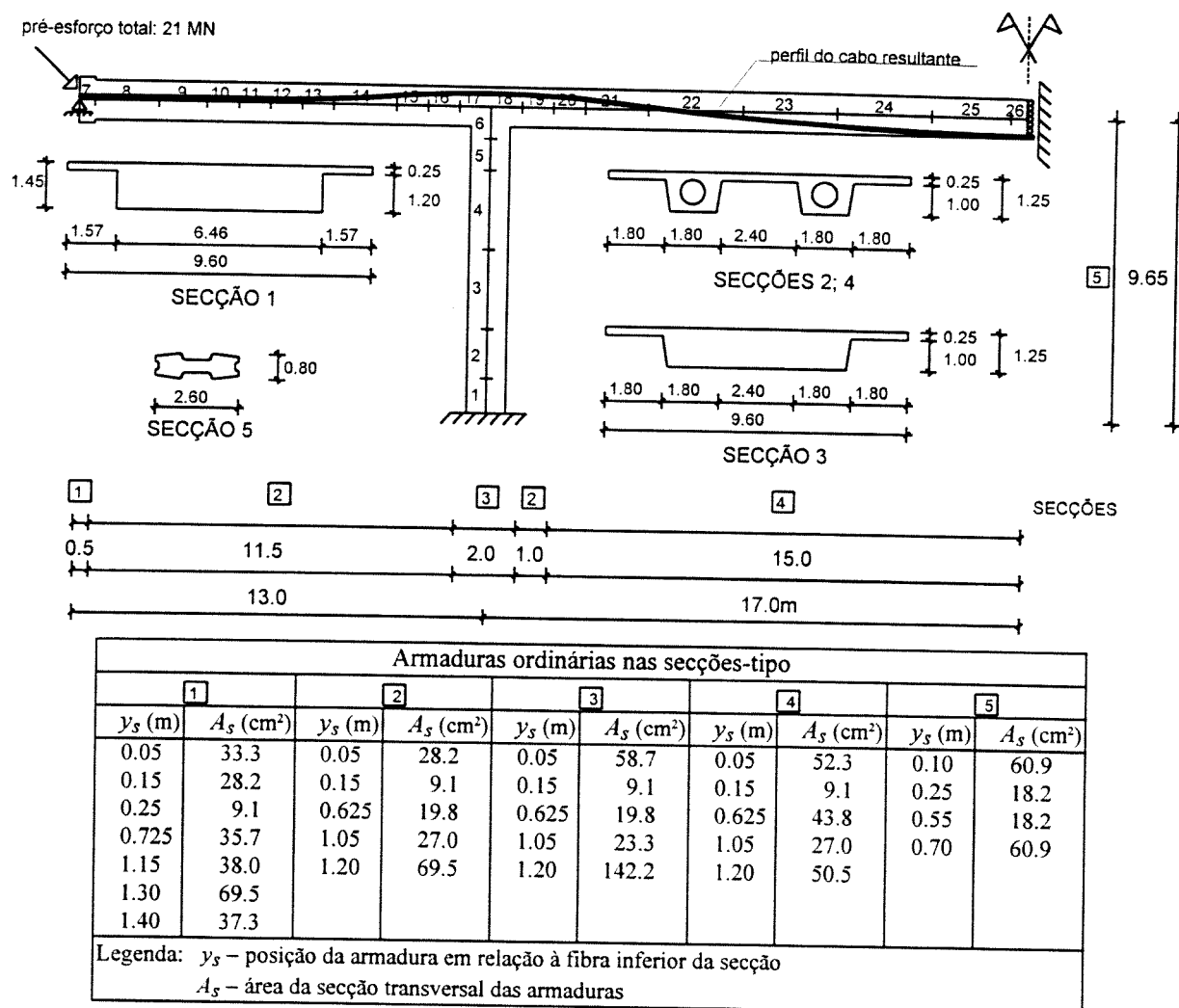


Fig. 7.2 - Discretização da passagem superior PS41.

## 7.2.2 – Características mecânicas dos materiais e cargas actuates

### 7.2.2.1 – Propriedades dos materiais

Os materiais utilizados para a super-estrutura foram o betão da classe C25/30 (B30.1), o aço A400 para as armaduras ordinárias e o aço A1680/1860 para as armaduras de pré-esforço. As propriedades mecânicas dos materiais encontram-se sumarizadas nos Quadros 7.1 e 7.2, sendo os respectivos parâmetros com comportamento aleatório caracterizados no Quadro 7.5. Os valores que caracterizam o comportamento não linear dos materiais foram definidos de acordo com o MC90, tendo em conta os modelos de comportamento descritos no Capítulo 4 e que são

utilizados no presente código computacional. Os parâmetros do material adoptados na definição do comportamento reológico do betão e do aço de pré-esforço, foram estimados com base nas leis de fluência e retracção propostas pelo EC2 (EC2, 1991) e MC90 (1993) e no modelo de relaxação apresentado no Capítulo 4.

Quadro 7.1 - Características do comportamento não linear dos materiais (C25/30, A400, A1680/1860).

BETÃO	AÇO
Módulo de Young: $E_c$ : (Quadro 7.5)	Módulo de Young: $E_s = 200$ GPa $E_p = 200$ GPa
Coefic. de Poisson: $\nu = 0.20$	$E'_s = 0.1$ GPa $E'_p = 2$ GPa
Resist. compressão: $f_c$ : (Quadro 7.5)	$E''_s = 0$ $E''_p = 0$
$\varepsilon_{c1} = 0.0022$	Tensão cedência: $f_{sy}$ : (Quadro 7.5) $f_{py} = 0.90 f_{pu}$
Resist. tracção: $f_{ct}$ : (Quadro 7.5)	Tensão última: $f_{su} = 1.05 f_{sy}$ $f_{pu}$ : (Quadro 7.5)
$\varepsilon_{ct1} = 0.00015$	Dados do projecto relativos ao cálculo das perdas instantâneas de pré-esforço:
<i>Tension-stiffening</i> : $\alpha = 0.6$	Coeficiente de atrito: $\mu = 0.19 \text{ rad}^{-1}$
$\varepsilon_{crult}$ (Quadro 7.5)	Desvio angular parasita: $k = 0.0008 \text{ rad/m}$
$G^c = 0.25$	Escorregamento nas cunhas: $\Delta s = 6 \text{ mm}$
$\varepsilon_{cv} = 0.0045$	

Quadro 7.2 - Características do comportamento reológico dos materiais (C25/30, A400, A1680/1860).

<b>BETÃO</b>	
Leis de maturação, fluência e retracção: MC90 (1993) e EC2 (1991) - ver Capítulo 4	
Resistência média à compressão (idade de 28 dias)	$f_{cm} = 33.0$ MPa
Humidade relativa do meio ambiente	$RH = 70\%$
Coeficiente dependente da geometria	$h = 555.0$ mm
Coeficiente dependente do tipo de cimento	$s = 0.38$
Lei de fluência	$\phi_{RH} = 1.365$
Parâmetros de fluência	$\beta_{fc} = 2.918$
	$\beta_H = 1118.6$
<b>AÇO DE PRÉ-ESFORÇO</b>	
Lei de relaxação: Magura <i>et al</i> (1964) - ver Capítulo 4	
Idade de aplicação da tensão de pré-esforço inicial	$t_0 = 10$ dias
Aço de baixa relaxação	$k = 45$



### 7.2.2.2 – Caracterização das acções

As acções consideradas na passagem superior estão representadas esquematicamente na Fig. 7.3, compreendendo:

- o peso próprio da estrutura,  $G_i$ ;
- restantes acções permanentes actuantes,  $G_a$ , após a aplicação do pré-esforço, devidas ao peso próprio do pavimento de betuminoso, guarda-corpos, vigas de bordadura, lancis e passeios;
- a sobrecarga de utilização,  $Q$ , onde foram consideradas duas hipóteses alternativas:
  - i) sobrecarga actuando no vão central constituída por uma carga uniformemente distribuída e por uma única carga transversal com distribuição linear e uniforme aplicada a meio vão;
  - ii) veículo de três eixos equidistantes, actuando numa das faixas de rodagem e a meio vão do tramo central;
- variação de temperatura,  $\Delta T$ , com evolução não linear ao longo da altura do tabuleiro.

O posicionamento e a distribuição das sobrecargas de utilização,  $Q$ , tem em consideração a situação crítica de momentos flectores máximos positivos no tramo central. Em relação ao posicionamento transversalmente assimétrico do veículo de três eixos equidistantes (actuando numa das faixas de rodagem) verificou-se, através de uma análise elástica com elementos de casca, que cerca de 86% desta sobrecarga é transmitida à viga correspondente à faixa de rodagem considerada. Desta forma, no estudo comparativo entre a importância relativa entre as duas sobrecargas de utilização efectuado na secção 7.4.3 considerou-se a viga mais carregada na hipótese conservadora (porque não tem em conta as eventuais redistribuições que podem ocorrer em estados limites últimos para níveis de carregamento que conduzam a não linearidades significativas) de 86% da sobrecarga devida ao veículo Ihe ser transmitida.

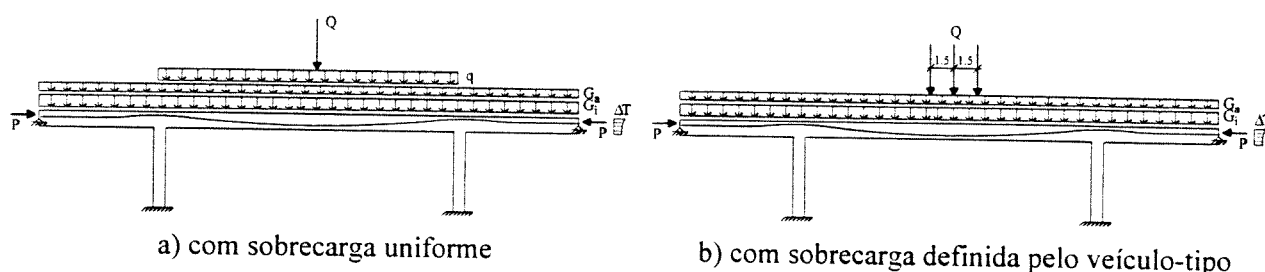


Fig. 7.3 - Representação esquemática das acções actuantes.

No Quadro 7.3 encontram-se quantificadas as acções descritas, tomando como referência os valores característicos definidos de acordo com a regulamentação em vigor (RSA, 1983)<sup>2</sup> à data do projecto, com excepção da variação de temperatura onde se indicam os valores médios, propostos pela literatura especializada (Silveira, 1993; ver também o Capítulo 3). Exceptuando os dados referentes ao pré-esforço, os restantes valores podem não coincidir exactamente com os do projecto.

Quadro 7.3 - Quantificação das acções actuantes (valores característicos, exceptuando  $\Delta T$  onde se indicam os valores médios).

DESCRIÇÃO	ACÇÕES
Pré-esforço, $P$	(ver Quadro 7.4)
Peso próprio da estrutura, $G_i$	Definido com base no peso volúmico do material ( $\gamma = 25 \text{ kN/m}^3$ )
Acções permanentes adicionais, $G_a$	<ul style="list-style-type: none"> <li>- pavimento de betuminoso (<math>24 \times 0.06 \times 6.5</math>): 9.3 kN/m</li> <li>- guarda-corpos: 1.0 kN/m</li> <li>- vigas de bordadura: 4.2 kN/m</li> <li>- lancis: 2.5 kN/m</li> <li>- passeios: <u>2.5 kN/m</u></li> </ul> <p style="text-align: right;">total: 19.5 kN/m</p>
<p>Sobrecarga de utilização, <math>Q</math></p> <p>i) carga uniformemente distribuída actuando no vão central, com valores de <math>4.0 \text{ kN/m}^2</math> na faixa de rodagem e de <math>3.0 \text{ kN/m}^2</math> nos passeios: e, sobrecarga adicional constituída por carga transversal com distribuição linear e uniforme (<math>50 \text{ kN/m}</math>), limitada à faixa de rodagem e aplicada a meio vão do tramo central:</p> <p>ii) veículo de três eixos equidistantes afastados de <math>1.50 \text{ m}</math> com uma carga de <math>200 \text{ kN}</math> por eixo:</p>	<p><math>q = 4.0 \times 6.50 + 3.0 (2 \times 1.30) \cong 34 \text{ kN/m}</math></p> <p><math>Q = 50 \times 6.50 = 325 \text{ kN}</math></p> <div style="text-align: center;"> <p>200 200kN 200 ↓ 1.5 1.5m ↓</p> </div> <p><math>Q</math>:</p>
<p>Variação de temperatura, <math>\Delta T</math>, em relação à temperatura de referência de <math>20 \text{ }^\circ\text{C}</math>, com distribuição não linear ao longo da altura do tabuleiro (valores médios)</p> <div style="text-align: center;"> </div>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Situações de Verão: <math>\begin{cases} \Delta T^{\text{sup}} = 28.3^\circ \text{C} \\ \Delta T^{\text{med}} = 15.2^\circ \text{C} \\ \Delta T^{\text{inf}} = 13.8^\circ \text{C} \end{cases}</math></li> <li>- Situações de Inverno: <math>\begin{cases} \Delta T^{\text{sup}} = -19.4^\circ \text{C} \\ \Delta T^{\text{med}} = -17.4^\circ \text{C} \\ \Delta T^{\text{inf}} = -17.1^\circ \text{C} \end{cases}</math></li> </ul>

<sup>2</sup> De acordo com o ponto 4 do artigo 8º do RSA, quando a verificação da segurança aos estados limites é baseada em teorias probabilísticas, as distribuições a considerar para representar as acções devem respeitar os respectivos valores característicos que são atribuídos pelo regulamento.

Os valores que se indicam no Quadro 7.4 referem-se ao projecto de aplicação de pré-esforço. Foram adoptados em cada nervura 4 cabos com 19 cordões de 0.5", aos quais corresponde uma área total de 75.0cm<sup>2</sup>, cada cabo possui ancoragens activas nas duas extremidades. A força de pré-esforço a aplicar nos cabos de cada nervura é de 2616.0 kN por cabo. No Quadro 7.4 indica-se, para além do pré-esforço aplicado por nervura, a geometria do cabo resultante e os valores referentes às perdas instantâneas.

Quadro 7.4 - Quantificação do pré-esforço (valores retirados do projecto de aplicação de pré-esforço).

Pré-esforço aplicado por nervura: 10464.2 kN						
Secções (secções simétricas)	1 (11)	2 (10)	3 (9)	4 (8)	5 (7)	6
comprimento do cabo (m)	0 (60.621)	5.465 (55.156)	9.369 (51.253)	13.273 (47.348)	16.682 (43.939)	30.311
excentricidade relativamente à face inferior (m)	0.81 (0.81)	0.81 (0.81)	0.955 (0.955)	1.123 (1.123)	0.91 (0.91)	0.15
ângulo de desvio	0 (0.7922)	0 (0.7922)	0.0742 (0.7180)	0.1602 (0.6321)	0.2848 (0.5074)	0.3961
pré-esforço descontado das perdas de atrito	10464.2	10418.6	10240.6	10043.3	9781.6	9473.0
perdas por reentrada das cunhas	-951.5	-860.2	-504.4	-109.8	0	0

Tendo presente o conjunto de cargas indicado, a análise não linear no domínio do tempo foi realizada com base na seguinte história de carga:

- para as combinações relativas aos estados limites de utilização (Fig. 7.4):
  - i) aplicação do pré-esforço, com mobilização do peso próprio da estrutura, para uma idade do betão de 10 dias ( $G_i + P_0$ );
  - ii) após 30 dias de intervalo são incluídas as restantes acções permanentes ( $G_i + G_a + P$ )<sub>40 dias</sub>;
  - iii) mais 30 dias e considera-se a aplicação incremental das acções variáveis até ser atingido o valor quase permanente ( $G + P + \sum_{j=1}^2 \psi_{2j} \cdot S_{Qj}$ )<sub>70 dias</sub>, seguindo para o passo vi) se o estado limite a considerar for de longa duração (combinações quase permanentes);
  - iv) ainda mais 30 dias e incrementa-se as acções variáveis até se atingir o respectivo valor frequente ( $G + P + \psi_1 S_{Q1} + \sum_{j=1}^1 \psi_{2j} S_{Qj}$ )<sub>100 dias</sub>, seguindo para o passo vi) se o estado limite a considerar for de curta duração (combinações frequentes);

- v) decorrem mais 90 dias, após o qual se incrementa as ações variáveis até ao seu valor nominal  $(G + P + S_{Q1} + \sum_{j=1}^1 \psi_{1j} S_{Qj})_{190 \text{ dias}}$ ;
- vi) o nível de carga correspondente à combinação de ações é mantido constante até se atingir os 100 anos de idade da estrutura.

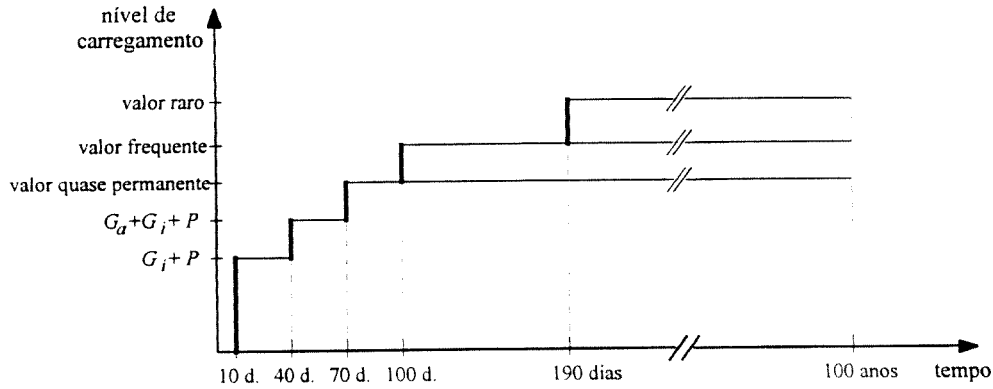


Fig. 7.4 - História de carregamento para os estados limites de utilização.

- para as combinações relativas ao estado limite último (utilizou-se o procedimento proposto pelo MC90 quando se realizam análises não lineares para verificar a segurança aos estados limites últimos) (Fig. 7.5):
  - i),ii), iii) os três primeiros pontos são idênticos aos descritos para as combinações relativas aos estados limites de utilização;

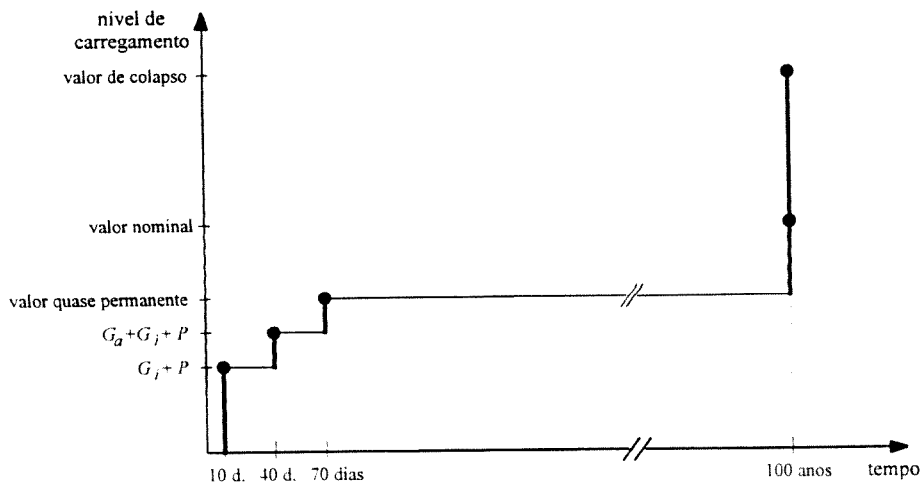


Fig. 7.5 - História de carregamento para os estados limites últimos.

- iv) o nível de carga correspondente à combinação quase permanente de acções é mantido constante até se atingir os 100 anos de idade da estrutura, após o qual se incrementa as acções variáveis até ao seu valor nominal  $(G + P + S_{Q1} + \sum_{j=1}^1 \psi_{1j} S_{Qj})_{100 \text{ anos}}$ ;
- v) finalmente, efectua-se a majoração de todas as acções permanentes e variáveis previamente consideradas (exceptuando a força de pré-esforço), até que ocorra o colapso da estrutura  $[P + \gamma(G + Q_1 + \sum_{j=1}^1 \psi_{0j} Q_j)]$ .

### 7.2.2.3 – Variáveis aleatórias - Identificação e caracterização

Na verificação da segurança é essencial conhecer o mais adequadamente possível a variabilidade do comportamento estrutural para todos os casos com possibilidade de ocorrência. A utilização de um procedimento baseado em teorias probabilísticas requer a definição de distribuições adequadas para as variáveis que desempenham um papel preponderante nessa variabilidade. Partindo destes pressupostos, definiram-se variáveis aleatórias que permitem traduzir de forma objectiva a incerteza do comportamento estrutural em função da variabilidade associada ao comportamento mecânico dos materiais, às imperfeições geométricas e às acções actuantes. Relacionado com estes três factores está um conjunto de variáveis que a seguir se descreve:

- Variáveis aleatórias associadas ao comportamento mecânico dos materiais:
  - *para o betão*:
    - resistência à compressão,  $f_c$ ;
    - resistência à tracção,  $f_{ct}$ ;
    - módulo de elasticidade,  $E_c$ ;
    - deformação máxima em fendilhação (associada à extensão máxima no diagrama de *tension-stiffening*),  $\varepsilon_{ct,max}$ ;
    - coeficiente de fluência,  $\varphi$ ;
    - extensão de retracção,  $\varepsilon_{cs}$ ;
  - *para as armaduras ordinárias*:
    - tensão de cedência,  $f_{sy}$ ;
    - resistência última,  $f_{su}$ ;
  - *para as armaduras de pré-esforço*:
    - limite convencional de proporcionalidade a 0.1%,  $f_{p0.1}$ ;

- resistência última,  $f_{pu}$ .
- Variáveis aleatórias associadas a imperfeições geométricas:
  - altura das secções,  $h$ ;
  - traçado da armadura de pré-esforço,  $y_p$ ;
- Variáveis aleatórias associadas às acções:
  - pré-esforço,  $P$ ;
  - peso próprio,  $G_i$ ;
  - acções permanentes adicionais,  $G_a$ ;
  - sobrecarga uniformemente distribuída no tramo central,  $q$ ;
  - sobrecarga adicional aplicada a meio vão do tramo central,  $Q$ ;
  - variação de temperatura,  $\Delta T$ ;

Quadro 7.5 - Caracterização das variáveis aleatórias.

Variável aleatória	Distribuição tipo	Parâmetros da distribuição		Observações
		média	coef. de variação	
$f_c$	normal	33.0 MPa	15.2%	correlacionada com $f_c$ : $r_{f_{ct}, f_c} = 0.70(*)$
$f_{ct}$	normal	2.6 MPa	18.0%	
$E_c$	normal	30.5 GPa	7.2%	correlacionado com $f_c$ : $r_{E_c, f_c} = 0.90(*)$
$\varepsilon_{ct, max}$	normal	0.0020	20.0%	
$\varphi$	normal	nominal	20.0%	
$\varepsilon_{cs}$	normal	nominal	35.0%	
$f_{sy}$	normal	440 MPa	5.6%	
$f_{su}$	$1.05 \times f_{sy}$	—	—	
$f_{pu}$	normal	1947 MPa	2.0 %	
$f_{p0.1}$	$0.90 \times f_{pu}$	—	—	
$h$	normal	nominal	2.7 %	
$y_p$	uniforme	—	—	desvio máximo $\pm 0.03m$
$P$	normal	nominal	6.0 %	
$G_i$	normal	nominal	8.2 %	
$G_a$	normal	19.5 kN/m	8.2 %	
$q$	Gumbel (máx.)	—	11.0 %	valor característico (98%): 34.0kN/m
$Q$	Gumbel (máx.)	—	11.0 %	valor característico (98%): 325kN/m
$\Delta T$	Gumbel (máx.)	(ver Quadro 7.3)	8.0 %	

Nota: (\*) -  $r_{X_1, X_2}$  - coeficiente de correlação linear entre as variáveis  $X_1$  e  $X_2$ .

No Quadro 7.5 define-se o tipo de distribuição e os respectivos parâmetros para cada uma das variáveis aleatórias descritas. Refira-se ainda que as variáveis associadas ao comportamento mecânico dos materiais e às imperfeições geométricas têm uma variabilidade espacial ao longo da estrutura com uma distribuição idêntica à malha de elementos finitos (isto é, para cada elemento finito define-se diferentes variáveis do mesmo género, por exemplo; elemento 1 está associado  $f_{c1}$ , para o elemento 2 está associado  $f_{c2}$ , etc.). Essa distribuição espacial é caracterizada por um conjunto de variáveis estatisticamente independentes entre si, exceptuando as variáveis relativas às imperfeições geométricas.

Os parâmetros das distribuições indicados foram definidos de forma a ter em conta os valores característicos (valores médios para as acções permanentes) e de cálculo definidos regulamentarmente. Nos casos omissos adoptaram-se valores propostos na literatura especializada (ver Capítulo 3).

Tomando como exemplo as acções permanentes e as sobrecargas de utilização, os respectivos parâmetros de distribuição foram obtidos da seguinte forma:

- para as acções permanentes:

$$G_d = 1.35G_m \text{ (segundo a proposta regulamentar);}$$

$$G_d = G_m + \beta \cdot \sigma_G \text{ (de acordo com a abordagem probabilística para uma lei normal);}$$

sendo  $G_m$  e  $G_d$  os valores médios e de cálculo, respectivamente, da acção permanente,  $\sigma_G$  o desvio padrão de  $G$  e  $\beta$  o índice de segurança ( $\beta = 4.265$  para uma probabilidade de rotura de  $10^{-5}$ , corrente neste tipo de estruturas). Igualando as duas expressões anteriores obtém-se:

$$\sigma_G = \frac{0.35}{4.265} \cdot G_m = 0.082 \cdot G_m ,$$

ou seja um coeficiente de variação igual a 8.2%.

- para as sobrecargas de utilização:

$$\left. \begin{array}{l} Q_d = 1.5 \cdot Q_k \\ Q_k = Q_{prob=98\%} \end{array} \right\} \text{ segundo a proposta regulamentar o valor de cálculo é 1.5} \\ \text{vezes o valor característico, correspondendo o valor} \\ \text{característico a uma probabilidade de ocorrência de 98\%} \\ \text{(EC1, 1994);}$$

$$1 - p_f = \exp[-\alpha(Q_d - u)], \text{ de acordo com a abordagem probabilística para uma lei de} \\ \text{Gumbel de máximos com parâmetros } \alpha \text{ e } u.$$

Igualando as expressões anteriores e operando convenientemente, obtém-se um coeficiente de variação igual a 11%.

### 7.2.2.4 – Combinações de acções associadas aos estados limites

A verificação da segurança da estrutura é feita em relação aos estados limites regulamentares. A utilização de uma abordagem probabilística baseada nas metodologias descritas no Capítulo 5 implica que a condição de segurança seja definida em termos de probabilidades de ocorrência do estado limite (em vez da utilização dos valores característicos e de cálculo):

$$P(R - S \leq 0) \leq P_f \quad , \quad (7.1)$$

onde  $S$  e  $R$  são variáveis aleatórias que caracterizam o efeito das acções e da capacidade resistente, respectivamente,  $P$  é a função de probabilidade e  $P_f$  é a probabilidade admissível para violar o estado limite (vulgarmente denominado por probabilidade de rotura).

Na verificação da segurança aos estados limites devem ser consideradas as combinações de acções cuja actuação simultânea seja verosímil e mais desfavorável. Tendo em conta este princípio descreve-se, no Quadro 7.6, as combinações de acções estudadas para os diferentes estados limites.

Quadro 7.6 - Combinações de acções estudadas.

Estados	Tipos de combinação	Acção variável de base	Descrição		
Utilização	Quase permanente		(1) $G + P + \psi_{2Q}Q + \psi_{2\Delta T}\Delta T_{Verão}$ (2) $G + P + \psi_{2Q}Q + \psi_{2\Delta T}\Delta T_{Inverno}$		
		Frequente	Sobrecarga	(3) $G + P + \psi_{1Q}Q + \psi_{2\Delta T}\Delta T_{Verão}$ (4) $G + P + \psi_{1Q}Q + \psi_{2\Delta T}\Delta T_{Inverno}$	
	Variação de temperatura			(5) $G + P + \psi_{2Q}Q + \psi_{1\Delta T}\Delta T_{Verão}$ (6) $G + P + \psi_{2Q}Q + \psi_{1\Delta T}\Delta T_{Inverno}$	
			Rara	Sobrecarga	(7) $G + P + Q + \psi_{1\Delta T}\Delta T_{Verão}$ (8) $G + P + Q + \psi_{1\Delta T}\Delta T_{Inverno}$
	Variação de temperatura				(9) $G + P + \psi_{1Q}Q + \Delta T_{Verão}$ (10) $G + P + \psi_{1Q}Q + \Delta T_{Inverno}$
		Últimos		Fundamental (*)	Sobrecarga
	(*) Não se considerou as combinações fundamentais com acção base da variação de temperatura porque em situações de colapso não são as mais gravosas (ver secção 7.4.5)				

No Quadro 7.7 indicam-se os coeficientes  $\psi$  que foram utilizados para definir os valores reduzidos das acções variáveis, obtidos de acordo com o RSA (1983). Refira-se que os coeficientes  $\psi$  são relacionados, regulamentarmente, com os valores característicos. No critério



adoptado para a verificação da segurança não se utilizam valores determinísticos mas sim distribuições de probabilidade. Embora os critérios sejam diferentes, na sua génese esses coeficientes têm o mesmo significado. Assim, tal como está implícito na definição regulamentar, e como se pretende neste procedimento, os coeficientes  $\psi$  traduzem o facto de ser pouco provável que nas situações mais gravosas as diferentes acções variáveis atinjam simultaneamente os valores máximos.

Quadro 7.7 - Valores dos coeficientes  $\psi$  para as acções variáveis.

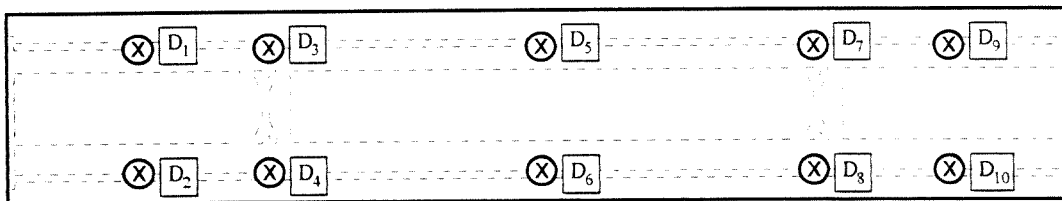
Tipo de acção variável	$\psi_0$	$\psi_1$	$\psi_2$
Sobrecarga de utilização, $Q^{(1)}$	0.6	0.4	0.2
Variação de temperatura, $\Delta T^{(1),(2)}$	0.6	0.5	0.3
notas: (1) as acções foram definidas tendo como referência as propostas da regulamentação em vigor à data do projecto (RSA, 1983) tendo, por isso, sido utilizados os coeficientes $\psi$ aí definidos; (2) os valores definidos para a variação de temperatura estão de acordo com os propostos pelo RSA e pelo estudo de Silveira (1993) neste domínio.			

### 7.3 – ESTUDO COMPARATIVO ENTRE O MODELO NUMÉRICO E MEDIÇÕES EXPERIMENTAIS

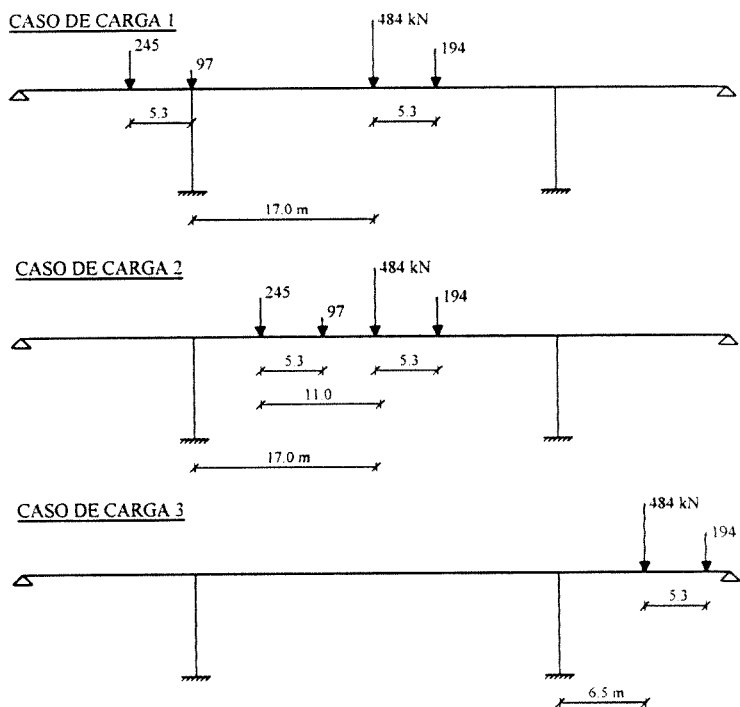
O Núcleo de Observação de Estruturas (NOE) do Laboratório Nacional de Engenharia Civil (LNEC) realizou ensaios na passagem superior PS41 (LNEC, 1990), objecto deste estudo. As medições dos deslocamentos verticais em pontos significativos do tabuleiro foram utilizados para aferir os resultados obtidos pelo modelo numérico utilizado.

Os ensaios estáticos de carga consistiram em aplicar uma percentagem das acções máximas verticais previstas, por forma a não provocar a fendilhação precoce do tabuleiro. Na Fig. 7.6 indica-se a posição dos deflectómetros utilizados para registar os deslocamentos verticais e os casos de carga considerados neste estudo. O comboio de cargas foi composto por três camiões pesando no total 1020 kN (Fig. 7.6b), dispostos simetricamente em relação ao eixo longitudinal.

Na Fig. 7.7 apresentam-se as deformadas da passagem superior PS41 obtidas da presente análise numérica para os casos de carga ilustrados na Fig. 7.6b. São ainda indicadas as secções onde se mediram os deslocamentos. No Quadro 7.8 apresentam-se as flechas medidas experimentalmente e os respectivos valores obtidos numericamente. Comparando os deslocamentos verticais registados nos deflectómetros com as flechas obtidas da análise numérica, verifica-se uma boa concordância de valores. Esta constatação permite confirmar a adequação do modelo definido para a gama de cargas testada.



a) posição dos deflectómetros de medida dos deslocamentos verticais



b) Casos de carga considerados

Fig. 7.6 - Caracterização dos ensaios experimentais.

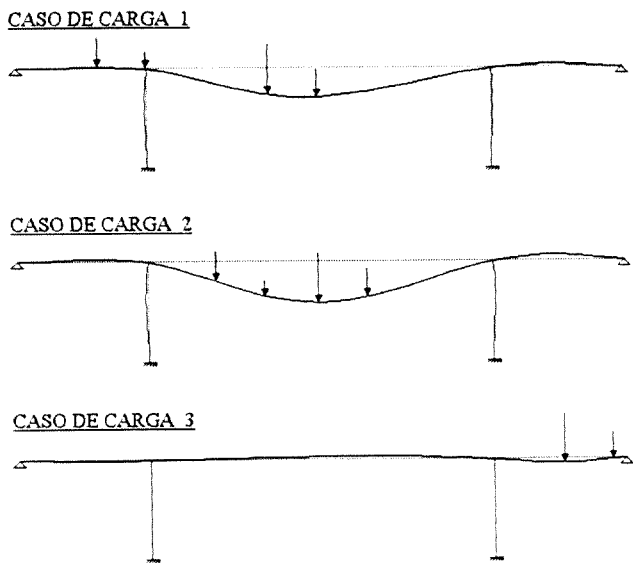


Fig. 7.7 - Deformadas obtidas da análise numérica.

Quadro 7.8 - Deslocamentos verticais medidos experimentalmente e numericamente (em mm).

Casos de carga	Posicionamento dos deflectómetros e respectivas secções									
	1, 2		3, 4		5, 6		7, 8		9, 10	
	experim.	numérico	experim.	numérico	experim.	numérico	experim.	numérico	experim.	numérico
1	-0.3	-0.2	0.3	0.2	5.4	5.6	0.1	0.1	-0.4	-0.6
	-0.2		0.2		5.5		0.2		-0.4	
2	-0.8	-0.6	0.3	0.2	8.1	8.1	0.2	0.1	-0.7	-0.8
	-0.7		0.2		8.1		0.2		-0.7	
3	0.4	0.3	0.1	0	-0.6	-0.6	0.1	0.1	0.9	0.8
	0.3		0.1		-0.6		0.1		0.8	

## 7.4 – ESTUDO DO COMPORTAMENTO ESTRUTURAL

### 7.4.1 – Considerações iniciais

Nesta secção analisa-se o comportamento da estrutura aos estados limites. Consideraram-se as combinações de acções descritas no Quadro 7.6. De forma a detalhar e comparar as diferentes respostas, utilizaram-se valores determinísticos (geralmente os valores médios) das variáveis envolvidas. Essas respostas foram avaliadas e comparadas com base nas seguintes grandezas: deslocamentos, esforços, deformações e tensões.

O objectivo principal deste estudo é compreender o funcionamento da estrutura para as diferentes acções a que está sujeita ao longo da sua vida. É ainda essencial para interpretar, discutir e validar os resultados da análise de segurança. Refira-se que embora nesta secção se façam comparações entre os resultados obtidos para cada uma das combinações de acções, a importância relativa dessas acções só pode ser convenientemente avaliada através de análises que tenham em conta as características de dispersão das variáveis, como é feito na secção 7.5.

### 7.4.2 – Efeito das diferentes acções na estrutura

A resposta da estrutura varia para acções de diferente natureza. O comportamento estrutural devido à combinação dessas diferentes acções é o resultado da combinação (não linear) dos seus efeitos. Assim, essa resposta pode ser amplificada se as diferentes acções actuam no mesmo sentido, ou pode ser significativamente atenuada se as acções tiverem efeitos opostos. De forma a facilitar a interpretação da resposta estrutural para as diferentes combinações de acções, ilustra-se

o comportamento da passagem superior quando se encontra sujeita às diferentes acções actuando isoladamente.

Na Fig. 7.8 ilustra-se o comportamento da estrutura sujeita a diferentes acções, através da sua deformada e dos diagramas de tensões normais nas secções críticas, as secções do tabuleiro sobre o pilar e a meio vão do tramo central. As acções consideradas encontram-se divididas nos seguintes grupos:

- peso próprio em conjunto com o pré-esforço,  $G_i + P$  ;
- acções permanentes que actuam após a aplicação do pré-esforço,  $G_a$  ;
- sobrecarga uniformemente distribuída no tramo central, incluindo carga transversal aplicada a meio vão,  $Q_{unif}$  ;
- sobrecarga correspondente ao veículo-tipo,  $Q_{v-t}$  ;
- variação de temperatura correspondente à situação de Verão,  $\Delta T_{Ver}$  ;
- variação de temperatura correspondente à situação de Inverno,  $\Delta T_{Inv}$  ;
- retracção no final da vida útil da estrutura (100 anos).

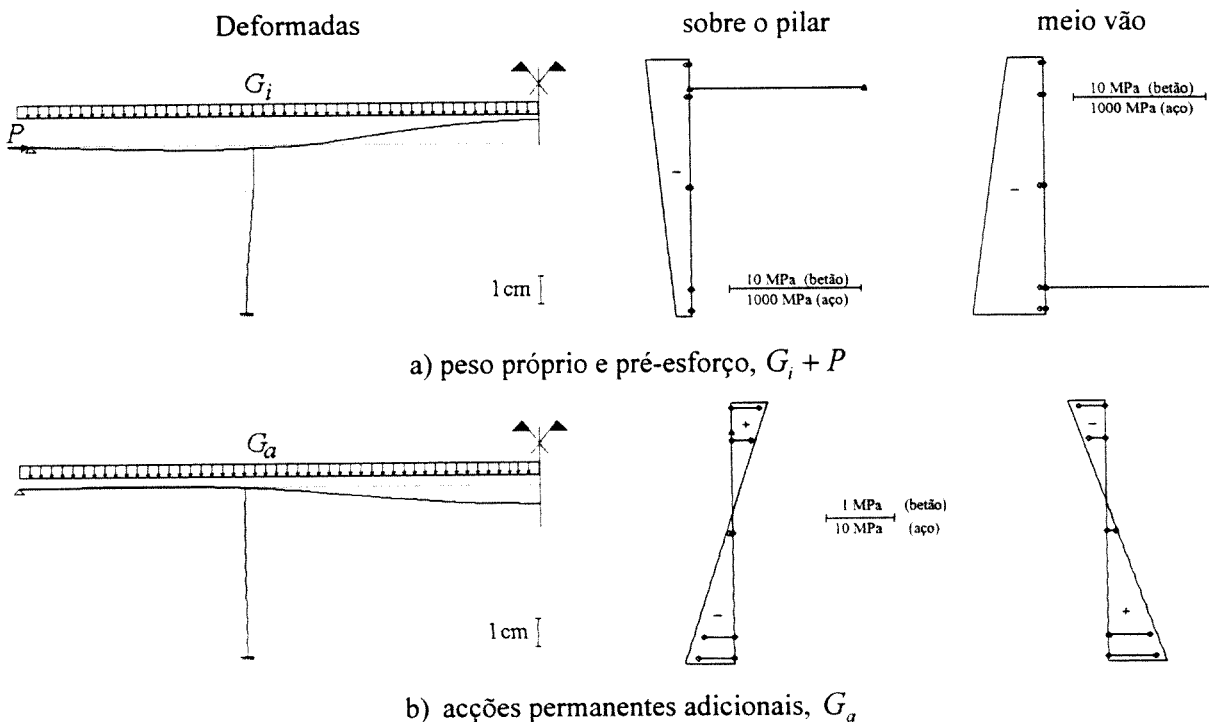


Fig. 7.8 - Comportamento da estrutura para diferentes acções (continua).

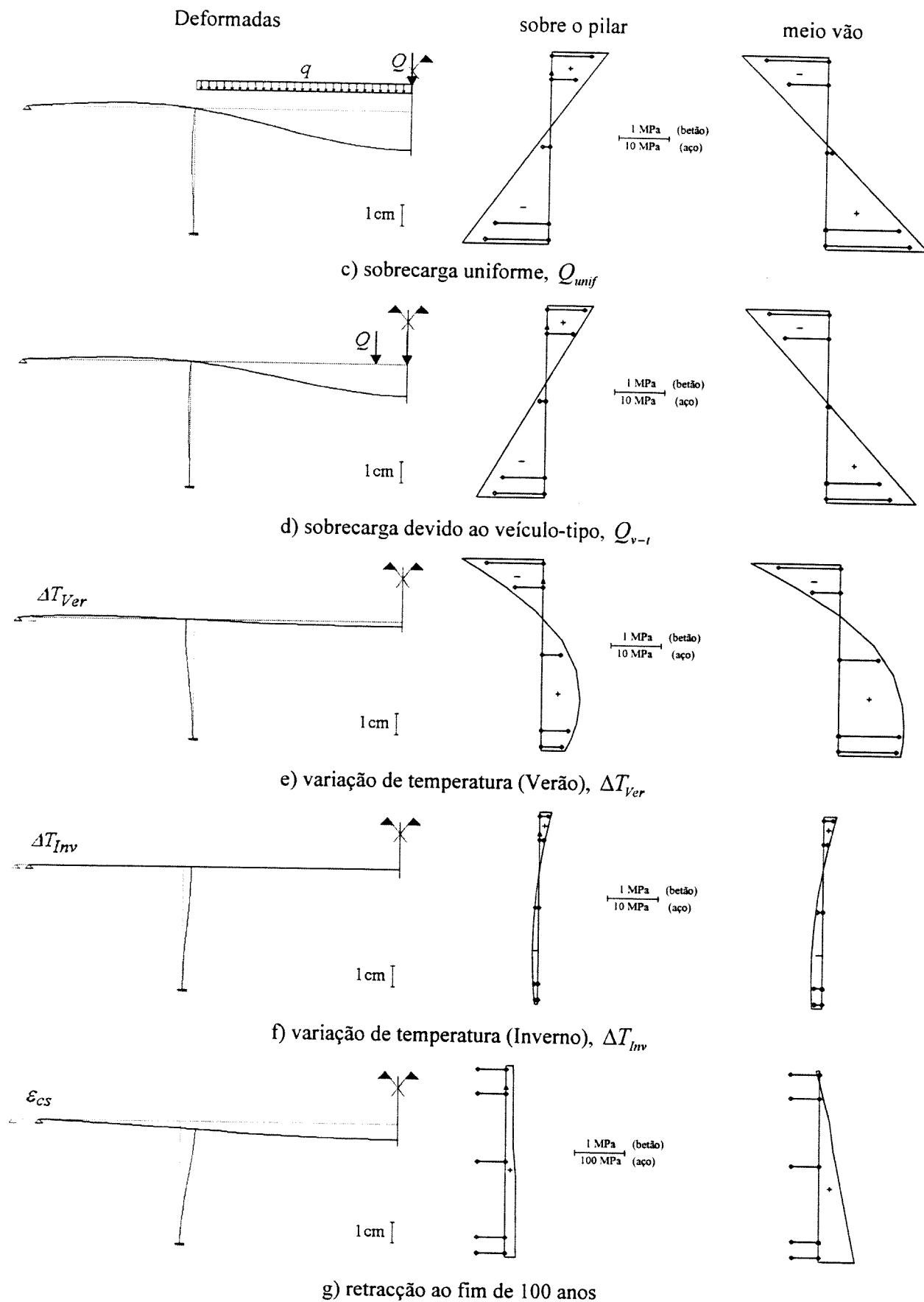


Fig. 7.8 - Comportamento da estrutura para diferentes acções (continuação).

As ordens de grandezas dos deslocamentos e das tensões apresentadas nos diagramas da Fig. 7.8 são proporcionais ao efeito provocado pelos valores médios das acções referidas. Saliente-se a deformada referente a  $G_i + P$  que permite verificar que o efeito ascendente devido ao pré-esforço supera o efeito descendente provocado pelo peso próprio da estrutura. Destaque-se ainda a grandeza dos efeitos provocados pelas deformações impostas devidas às variações de temperatura,  $\Delta T_{ver}$  e  $\Delta T_{inv}$ , e à retracção. Refira-se que os respectivos valores das tensões de tracção em conjunto com as tensões de tracção resultantes das acções verticais descendentes podem conduzir a grandezas que ultrapassam os valores impostos para verificar a segurança aos estados limites de utilização. A aplicação de um pré-esforço adequado deve evitar que essas tensões ultrapassem valores admissíveis ou fendilhação excessiva. Finalmente, tendo em conta que as duas sobrecargas referidas são consideradas alternativamente, é de todo o interesse avaliar qual delas provoca efeitos mais gravosos na estrutura, comparando os resultados ilustrados para os valores médios das duas sobrecargas, verifica-se que as flechas e as tensões são maiores para a sobrecarga uniformemente distribuída.

Um estudo comparativo mais detalhado entre as respostas estruturais originadas por essas duas sobrecargas, é apresentado no ponto seguinte.

### 7.4.3 – Análise comparativa entre as duas sobrecargas

De acordo com o RSA (1983), em pontes rodoviárias deve considerar-se nas faixas de rodagem a actuação separada dos dois tipos de sobrecarga caracterizados no Quadro 7.3. Para efeitos de dimensionamento e de verificação da segurança deve ser considerada a sobrecarga que conduz aos efeitos mais gravosos na estrutura. De forma a analisar a importância relativa das duas sobrecargas fizeram-se várias análises determinísticas, tanto em condições de serviço como em situações de colapso.

O comportamento da estrutura para as condições de serviço foi avaliado através da consideração dos valores médios dos parâmetros envolvidos na análise (dos materiais e das acções) e considerando as combinações-tipo<sup>3</sup> correntes para os estados limites de utilização. No estudo do comportamento em situações de colapso, além dos valores médios foram também considerados em alternativa os valores de cálculo das propriedades mecânicas dos materiais.

---

<sup>3</sup> A designação combinações-tipo indica que neste estudo essas combinações são definidas em função dos valores médios das acções, enquanto que as combinações de acções regulamentares são definidas em função dos valores característicos.

A análise comparativa em condições de serviço foi efectuada a partir dos resultados da resposta estrutural em termos de:

- flechas máximas para combinações-tipo quase permanentes;
- tensões máximas de compressão no betão nas secções críticas (sobre os pilares e a meio vão do tramo central), para as combinações-tipo quase permanentes e raras;
- tensões máximas de tracção (caso existam) nas referidas secções críticas, para as combinações-tipo frequentes;
- fendilhação (se ocorrer) para as combinações-tipo frequentes e raras;
- tensões na armadura de pré-esforço para as combinações-tipo quase permanentes e raras.

Em situações de colapso a análise comparativa foi efectuada através da quantificação das combinações-tipo últimas de acções que conduziu à rotura final.

- *Análise comparativa em condições de serviço*

No Quadro 7.9 apresentam-se os resultados a longo prazo dos deslocamentos verticais a meio vão do tramo central,  $y_{\max}$ ; das tensões máximas de compressão,  $\sigma_c$ , e de tracção,  $\sigma_{ct}$ , no betão; da fendilhação no betão; e, das tensões,  $\sigma_p$ , na armadura de pré-esforço. Nesse quadro caracteriza-se ainda as combinações de acções usadas na obtenção desses resultados.

Como se pode observar dos resultados descritos no Quadro 7.9, a sobrecarga uniforme conduz a efeitos mais gravosos, nomeadamente, as flechas máximas e as tensões no betão. Assim, comparando as duas sobrecargas, é de esperar que a verificação da segurança aos estados limites de utilização seja condicionada pela sobrecarga uniforme.

- *Análise comparativa em situações de colapso*

A determinação das combinações de acções que conduzem ao colapso da estrutura foi realizada de acordo com o procedimento proposto na secção 7.2.2.2, para os estados limites últimos. A incrementação das acções foi realizada de forma que o acréscimo das acções permanentes e das acções variáveis se faça na proporção de 1.35 para 1.50, valores propostos pelo EC2 para os coeficientes de segurança dessas acções. Relembre-se que foram realizadas alternativamente análises com valores médios e valores de cálculo das propriedades mecânicas dos materiais. No Quadro 7.10 apresenta-se os resultados obtidos.

Quadro 7.9 - Resultados das análises em condições de serviço.

para a sobrecarga uniforme									
Combinação de acções	Caracterização das combinações	$y_{\max}$ (cm)	$\sigma_c$ (MPa)		$\sigma_{ct}$ (MPa)		fendi-lhação	$\sigma_p$ (MPa)	
			s/ os pilares	meio vão	s/ os pilares	meio vão		s/ os pilares	meio vão
quase permanentes	$G+P+0.2Q+0.3\Delta T_{Ver.}$	1.30	-3.1	-4.0	-	-	-	1220	1156
	$G+P+0.2Q+0.3\Delta T_{Inv.}$	1.31	-2.9	-3.6	-	-	-	1224	1152
frequentes	$G+P+0.4Q+0.3\Delta T_{Ver.}$	-	-	-	< 0	< 0	não há	-	-
	$G+P+0.4Q+0.3\Delta T_{Inv.}$	-	-	-	< 0	< 0	não há	-	-
raras	$G+P+Q+0.5\Delta T_{Ver.}$	-	-5.0	-5.5	-	-	a meio vão	1237	1290
	$G+P+Q+0.5\Delta T_{Inv.}$	-	-4.0	-4.3	-	-	não há	1239	1195

para a sobrecarga veículo-tipo									
Combinação de acções	Caracterização das combinações	$y_{\max}$ (cm)	$\sigma_c$ (MPa)		$\sigma_{ct}$ (MPa)		fendi-lhação	$\sigma_p$ (MPa)	
			s/ os pilares	meio vão	s/ os pilares	meio vão		s/ os pilares	meio vão
quase permanentes	$G+P+0.2Q+0.3\Delta T_{Ver.}$	1.10	-2.9	-3.9	-	-	-	1219	1155
	$G+P+0.2Q+0.3\Delta T_{Inv.}$	1.11	-2.8	-3.5	-	-	-	1223	1150
frequentes	$G+P+0.4Q+0.3\Delta T_{Ver.}$	-	-	-	< 0	< 0	não há	-	-
	$G+P+0.4Q+0.3\Delta T_{Inv.}$	-	-	-	< 0	< 0	não há	-	-
raras	$G+P+Q+0.5\Delta T_{Ver.}$	-	-4.2	-5.4	-	-	não há	1233	1207
	$G+P+Q+0.5\Delta T_{Inv.}$	-	-3.8	-4.7	-	-	não há	1235	1192

Quadro 7.10 - Resultados das análises ao colapso.

Caracterização das combinações	sobrecarga uniforme		sobrecarga veículo-tipo	
	valores médios	valores cálculo	valores médios	valores cálculo
$P + \left( \gamma \cdot \frac{1.35}{1.50} \right) G + \gamma (Q + 0.6\Delta T_{Ver.})$	2.60	2.10	2.71	2.15
$P + \left( \gamma \cdot \frac{1.35}{1.50} \right) G + \gamma (Q + 0.6\Delta T_{Inv.})$	2.56	2.04	2.68	2.13

Tal como se observou para o estudo em condições de serviço, também em situações de colapso a sobrecarga uniforme é mais condicionante que a sobrecarga devida ao veículo tipo.

Da análise comparativa efectuada entre a importância relativa das duas sobrecargas, e tendo em conta que ambas as sobrecargas apresentam dispersões idênticas, conclui-se que a sobrecarga devida ao veículo-tipo tem um peso menor na verificação da segurança aos parâmetros considerados. Por isso, nas análises de segurança que a seguir se apresentam será considerada somente a sobrecarga uniforme.



#### 7.4.4 – Comportamento aos estados limites de utilização

Usando um procedimento idêntico ao da secção anterior, será comparado o comportamento em serviço da estrutura para cada uma das combinações de acções definidas no Quadro 7.6.

A resposta da estrutura será avaliada através:

- das deformações máximas (deslocamentos verticais) para as combinações quase permanentes;
- do estado de fendilhação e de descompressão para combinações frequentes, através da largura de fendas (se existirem) e da verificação da existência de tensões de tracção, respectivamente;
- das tensões de compressão no betão e das tensões de tracção nas armaduras para combinações quase permanentes e raras.

Na avaliação destas grandezas consideraram-se os efeitos diferidos, sendo os parâmetros caracterizados pelos valores médios. Nos parágrafos seguintes apresentam-se os resultados obtidos para as grandezas descritas considerando as combinações de acções em serviço.

- *Flechas máximas (estado limite de deformação)*

No estudo da evolução das flechas máximas consideraram-se as duas seguintes combinações dos valores médios das acções:

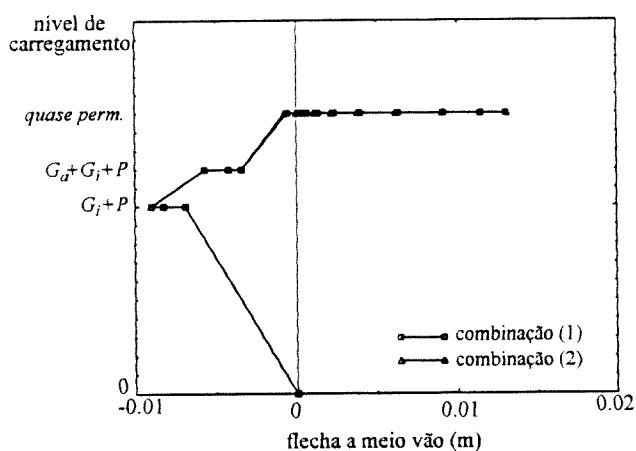
$$(1) \quad G + P + 0.2Q + 0.3\Delta T_{ver};$$

$$(2) \quad G + P + 0.2Q + 0.3\Delta T_{inv}.$$

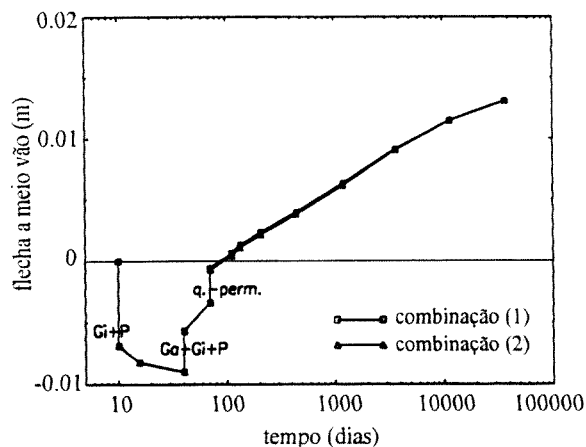
Na Fig. 7.9 ilustra-se a evolução da flecha máxima. Essa evolução é caracterizada pelos acréscimos sucessivos do carregamento ao longo do tempo, de acordo com o critério ilustrado na Fig. 7.4. No Quadro 7.11 apresentam-se os valores mais significativos das flechas, no momento de aplicação do pré-esforço e para os valores quase permanentes ao fim do tempo de vida útil da estrutura.

Quadro 7.11 - Flechas máximas (a meio vão do tramo central) para combinações quase permanentes.

Combinação-tipo	flecha (ascendente) devido a $G_i + P$ : $y_i$ (cm)	flecha final $y_f$ (cm)	amplitude das flechas $y_f - y_i$ (cm)
(1)	-0.90	1.30	2.20
(2)	-0.90	1.31	2.21



a) curva cargas-flechas



b) curva flechas-tempo

Fig. 7.9 - Evolução da flecha máxima para combinações quase permanentes.

• *Fendilhação e descompressão*

O comportamento estrutural em termos de fendilhação e de descompressão foi avaliado para as seguintes quatro combinações dos valores médios das acções:

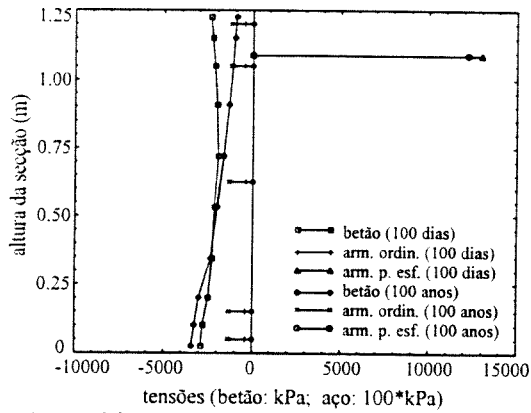
- (3)  $G + P + 0.4Q + 0.3\Delta T_{ver}$  ;
- (4)  $G + P + 0.4Q + 0.3\Delta T_{inv}$  ;
- (5)  $G + P + 0.2Q + 0.5\Delta T_{ver}$  ;
- (6)  $G + P + 0.2Q + 0.5\Delta T_{inv}$  .

Na Fig. 7.10 ilustra-se os diagramas de tensões normais nas secções críticas, aos 100 dias e aos 100 anos, para as quatro combinações referidas. Conforme se pode observar nessa figura não ocorre qualquer tracção no betão não se registando, por isso, qualquer fendilhação quando se consideram valores médios.

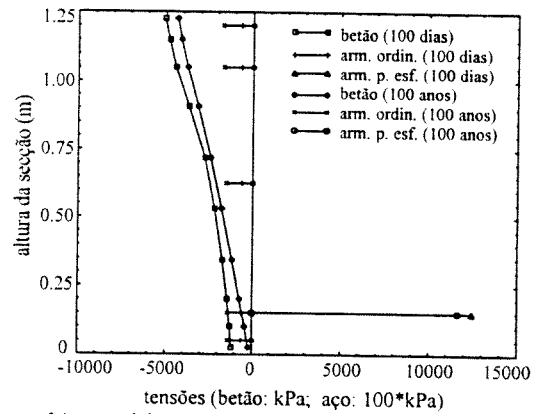
• *Controlo de tensões de compressão no betão e das tensões de tracção nas armaduras*

O nível de tensões de compressão no betão e de tracção nas armaduras foi avaliado para as duas combinações identificadas anteriormente por (1) e (2) e ainda pelas seguintes quatro combinações:

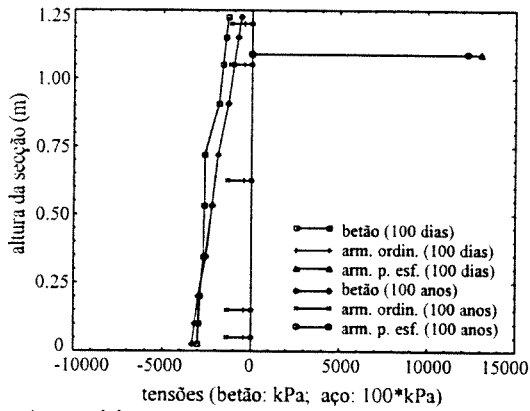
- (7)  $G + P + Q + 0.5\Delta T_{ver}$  ;
- (8)  $G + P + Q + 0.5\Delta T_{inv}$  ;
- (9)  $G + P + 0.4Q + \Delta T_{ver}$  ;
- (10)  $G + P + 0.4Q + \Delta T_{inv}$  .



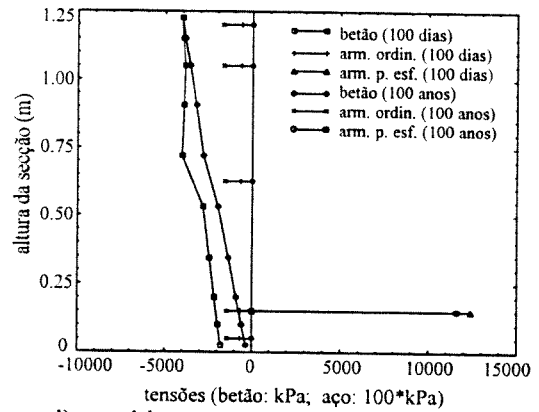
a) combinação (3). Seção sobre os pilares



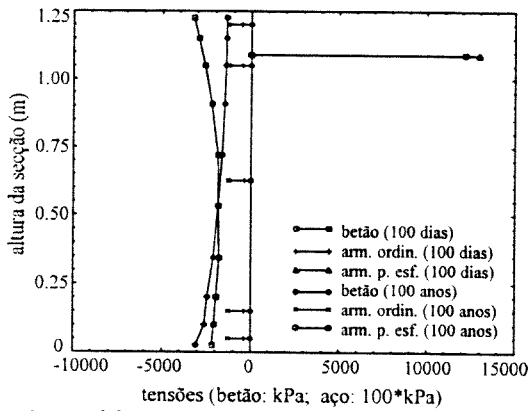
b) combinação (3). Seção a meio vão



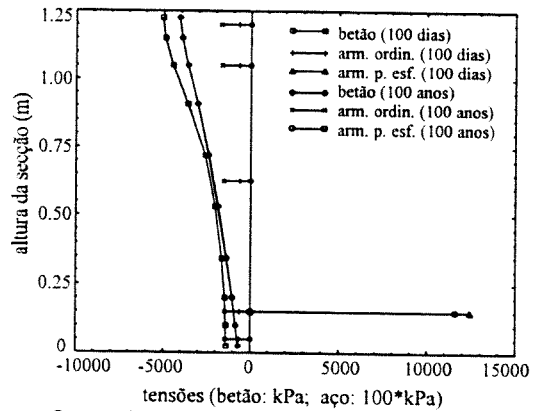
c) combinação (4). Seção sobre os pilares



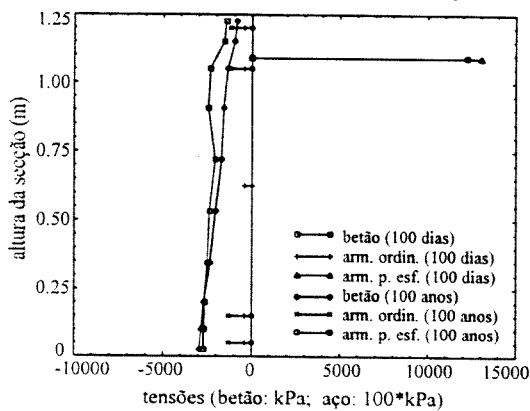
d) combinação (4). Seção a meio vão



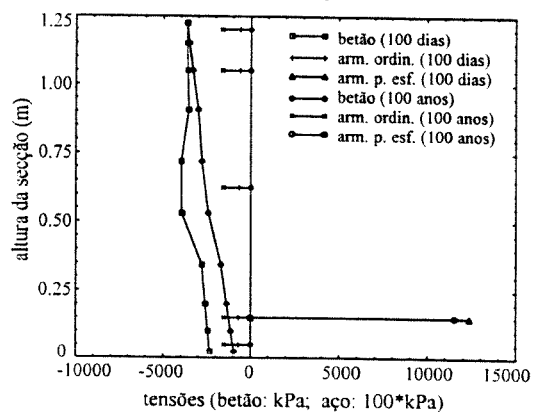
e) combinação (5). Seção sobre os pilares



f) combinação (5). Seção a meio vão



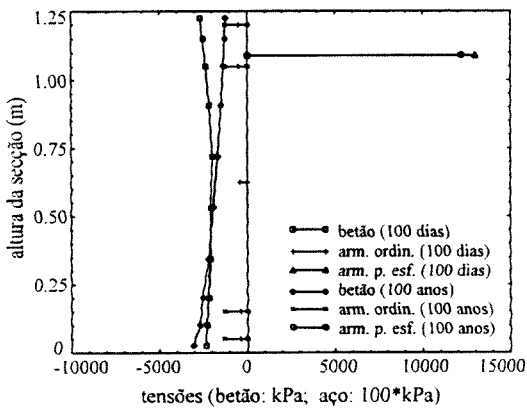
g) combinação (6). Seção sobre os pilares



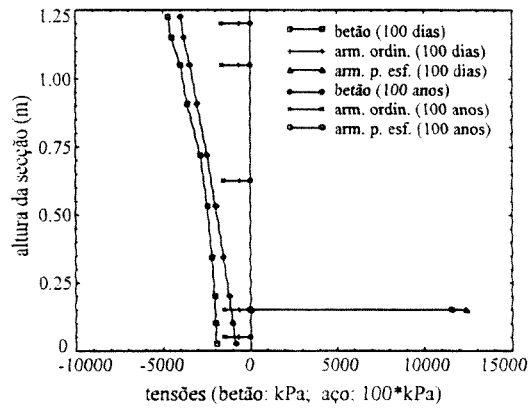
h) combinação (6). Seção a meio vão

Fig. 7.10 - Diagramas de tensões normais para as combinações (3) a (6).

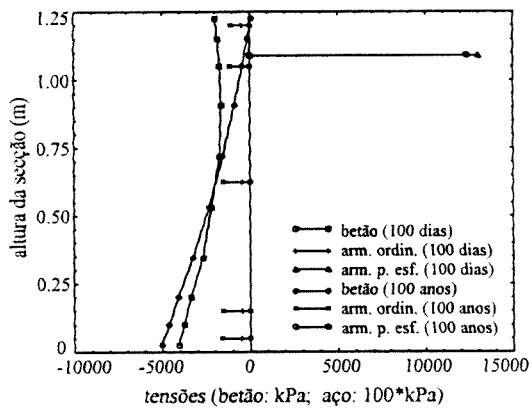
Na Fig. 7.11 ilustram-se os diagramas de tensões normais nas secções críticas, quando se aplica o valor da combinação e aos 100 anos, para algumas das combinações de acções referidas. No Quadro 7.12 apresentam-se os valores obtidos nas secções críticas das tensões máximas de compressão e de tracção nas armaduras de pré-esforço, no início do valor da combinação e aos 100 anos. Refira-se que em nenhuma das seis combinações referidas se verificaram tensões de tracção significativas na armadura ordinária.



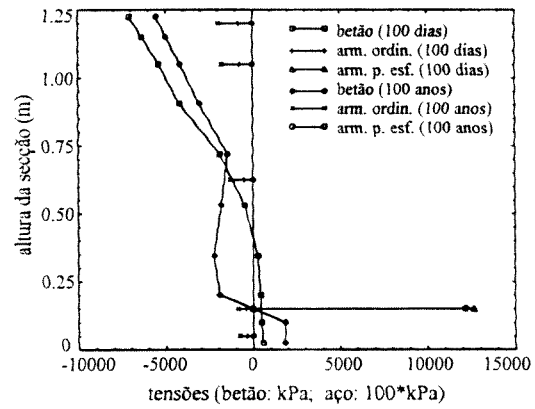
a) combinação (1). Secção sobre os pilares



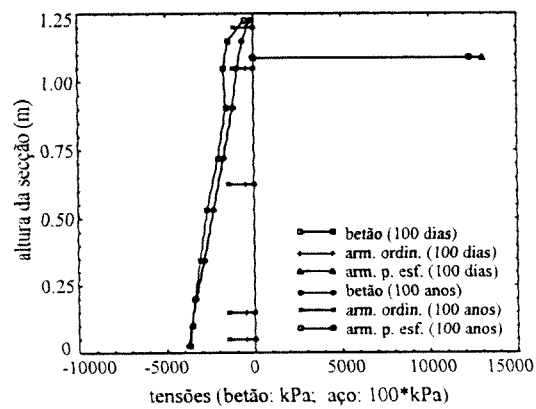
b) combinação (1). Secção a meio vão



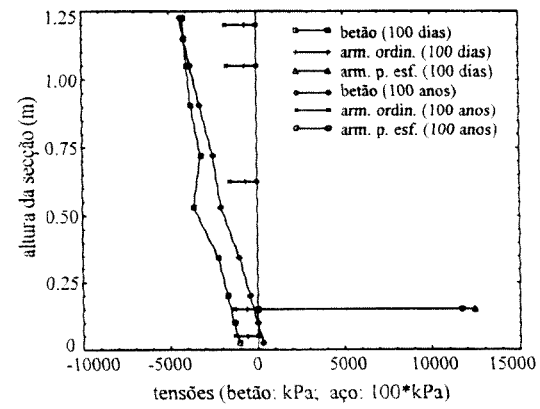
c) combinação (7). Secção sobre os pilares



d) combinação (7). Secção a meio vão



e) combinação (10). Secção sobre os pilares



f) combinação (10). Secção a meio vão

Fig. 7.11 - Diagramas de tensões normais para as combinações (1), (7) e (10).

Quadro 7.12 - Resultados obtidos para as tensões normais (em MPa).

Combinações		Tensões de compressão no betão (MPa)				Tensões de tracção na arm. pré-esf. (MPa)			
		sobre os pilares		a meio-vão		sobre os pilares		a meio-vão	
		inicial	100 anos	inicial	100 anos	inicial	100 anos	inicial	100 anos
quase permanentes	(1)	-2.7	-3.1	-4.7	-4.0	1298	1220	1239	1156
	(2)	-2.5	-2.9	-4.0	-3.6	1302	1224	1235	1152
raras	(7)	-4.1	-5.0	-7.1	-5.5	1302	1237	1266	1220
	(8)	-4.3	-4.5	-5.1	-5.2	1308	1239	1251	1190
	(9)	-3.3	-4.0	-7.2	-4.3	1297	1239	1263	1195
	(10)	-3.7	-3.8	-4.2	-4.4	1307	1233	1242	1170

- *Comentários aos resultados obtidos*

Os valores obtidos para as flechas máximas, ilustrados na Fig. 7.9 e descritos no Quadro 7.11, mostram que em termos de deformações as combinações (1) e (2) conduzem a respostas idênticas. Verifica-se que o efeito ascendente do pré-esforço ultrapassa o efeito gravítico do peso próprio da estrutura, sendo essa preponderância acentuada nos dias seguintes à aplicação do pré-esforço traduzida pelo aumento da flecha no sentido ascendente. Refira-se que nos primeiros dias o aumento da flecha, para cargas constantes, é devido sobretudo à fluência (como se pode verificar nas Figs. 7.12 e 7.13 a fluência desenvolve-se mais rapidamente que a retracção do betão). Verifica-se que, em termos de valores médios, o efeito ascendente do pré-esforço só é anulado quando se aplica o valor quase permanente de acções aos 70 dias.

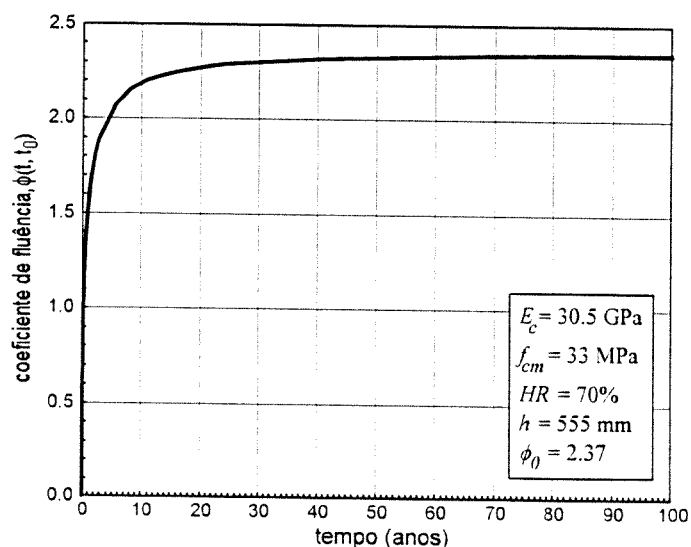


Fig. 7.12 - Curva de fluência de acordo com os valores médios.

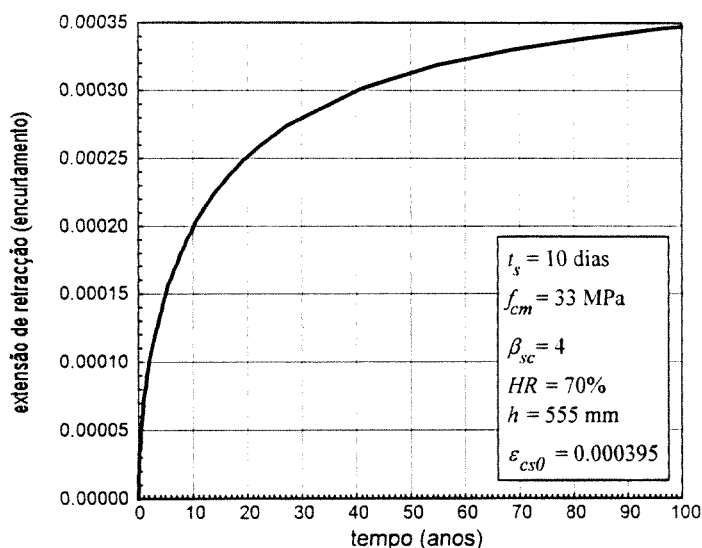


Fig. 7.13 - Curva de retração de acordo com os valores médios.

Relativamente ao nível de tensões no betão e nas armaduras verifica-se que:

- as tensões de compressão no betão apresentam valores bastante moderados tanto para as combinações-tipo quase permanentes como para as raras;
- não se verificam tensões de tracção no betão para as combinações-tipo frequente, logo não ocorre qualquer fendilhação para este nível de carregamento; a fendilhação ocorreu somente para as combinações-tipo raras com acção base sobrecarga uniforme;
- não ocorreram tensões de tracção significativas na armadura ordinária nas combinações de acções consideradas;
- as tensões de tracção obtidas na armadura de pré-esforço para combinações-tipo quase permanentes após consideradas todas as perdas (ao fim de 100 anos) ultrapassam o valor proposto pelo projecto da parte 2 do Eurocódigo 2 relativo a pontes de betão (EC2-2, 1994),  $0.65f_{pk} = 1204$  MPa, por isso é de pressupor que haja um ligeiro excesso na força de pré-esforço. Assim este ponto deverá merecer especial atenção quando se efectuar a verificação da segurança.

Os diagramas de tensões normais apresentados mostram ainda mais alguns aspectos a salientar:

- o efeito das variações de temperatura é bem visível nas tensões instaladas no betão pelo facto de apresentarem uma variação não linear ao longo da altura das secções;
- o efeito da retração do betão é também visível nas tensões instaladas nas armaduras ordinárias a longo prazo; de facto, é possível observar tensões de compressão nessas armaduras em zonas de betão traccionado;

- a comparação dos vários diagramas não mostra nenhuma preponderância de umas combinações sobre outras.

Refira-se finalmente que o estudo apresentado permitiu somente avaliar a forma como a estrutura se comporta para as acções de serviço. Os resultados apresentados não são suficientes para determinar a segurança da estrutura. Para avaliar adequadamente essa segurança não basta considerar os valores médios dos parâmetros dos materiais, é preciso também ter em conta as suas dispersões.

#### 7.4.5 – Comportamento aos estados limites últimos

O comportamento último da estrutura foi estudado através da incrementação sucessiva dos valores médios das acções, de acordo com o procedimento proposto na secção 7.2.2.2 para os estados limites últimos. Tal como foi considerado em 7.4.3, o acréscimo das acções permanentes e das acções variáveis faz-se na proporção de 1.35 para 1.50. A análise dos resultados obtidos apoia-se num conjunto de figuras que permitem avaliar o comportamento estrutural, para sucessivos níveis de carga, através das seguintes características:

- distribuição das tensões principais no betão;
- padrão de fendilhação e de plastificação das armaduras;
- diagramas de momentos flectores;
- traçado das flechas máximas a meio vão do tramo central;
- evolução das tensões instaladas nas armaduras, nas secções críticas;
- diagramas de tensões normais, também nas secções críticas.

No presente estudo foram consideradas quatro combinações dos valores médios das acções, duas tendo como acção base a sobrecarga uniforme e as outras duas como acção base a variação de temperatura:

$$(1) \quad P + \left( \gamma \cdot \frac{1.35}{1.50} \right) G + \gamma (Q + 0.6 \Delta T_{ver});$$

$$(2) \quad P + \left( \gamma \cdot \frac{1.35}{1.50} \right) G + \gamma (Q + 0.6 \Delta T_{inv});$$

$$(3) \quad P + \left( \gamma \cdot \frac{1.35}{1.50} \right) G + \gamma (0.6Q + \Delta T_{ver});$$

$$(4) \quad P + \left( \gamma \cdot \frac{1.35}{1.50} \right) G + \gamma (0.6Q + \Delta T_{inv}).$$

Na Fig. 7.14 apresenta-se os traçados das flechas máximas, em função do carregamento e do tempo, para as quatro combinações de acções referidas. Conforme se pode observar, as respostas que apresentam a mesma acção base são idênticas entre si. Assim, verifica-se que as curvas correspondentes à combinação (1) são semelhantes às curvas da combinação (2) e, analogamente, as curvas das combinações (3) e (4) são aproximadamente iguais. Além disso, constata-se que os valores de colapso,  $\gamma_{ult}$ , apresentados pelas combinações com acção base sobrecarga uniforme (combinações (1) e (2)) são significativamente inferiores aos valores obtidos para as combinações com acção base variação de temperatura (combinações (3) e (4)). Atendendo à diferença verificada e tendo em conta que, geralmente, os efeitos da variação da temperatura em pontes não são condicionantes para as situações de colapso, as combinações (3) e (4) não são consideradas na verificação da segurança aos estados limites últimos. Nos parágrafos e nas figuras seguintes será destacado o comportamento da estrutura para as combinações tendo como acção base a sobrecarga uniforme.

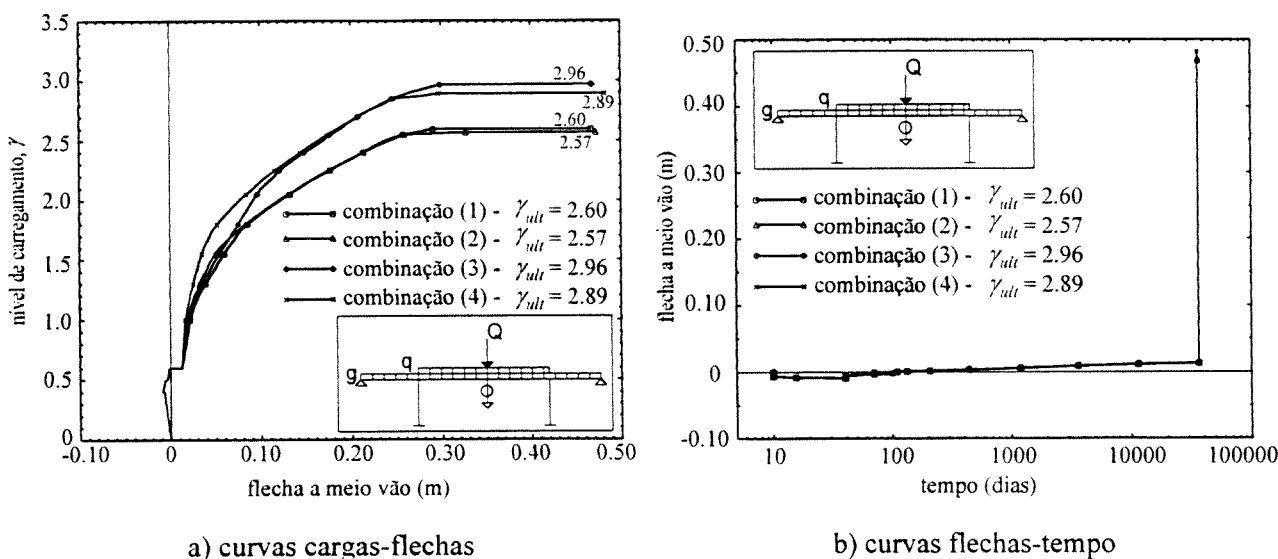
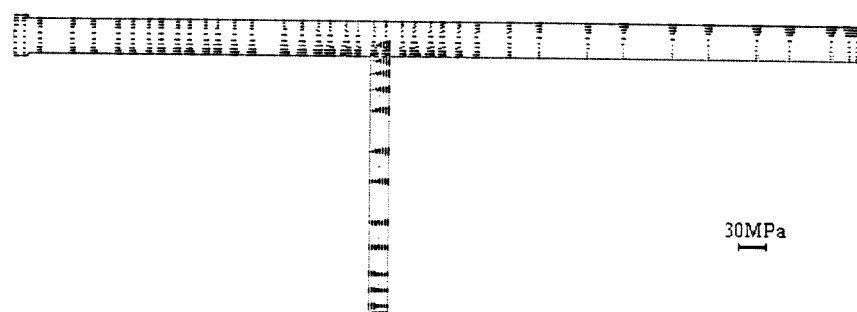


Fig. 7.14 - Traçados das flechas máximas para as quatro combinações de acções.

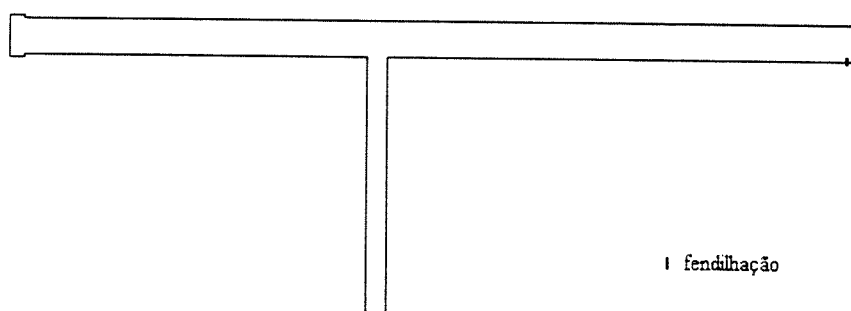
A Fig. 7.14 mostra que a resposta da estrutura às quatro combinações de acções apresenta configurações semelhantes. A resposta é praticamente linear até ao valor nominal ( $\gamma = 1.0$ ), como já tinha sido observado na secção anterior, a menos das variações temporais. Observa-se uma primeira quebra significativa da rigidez quando se inicia a fendilhação na secção de meio vão (ver Fig. 7.15b), para valores de  $\gamma \cong 1.15$  e  $\gamma \cong 1.30$  nas combinações (1) e (2), respectivamente, e



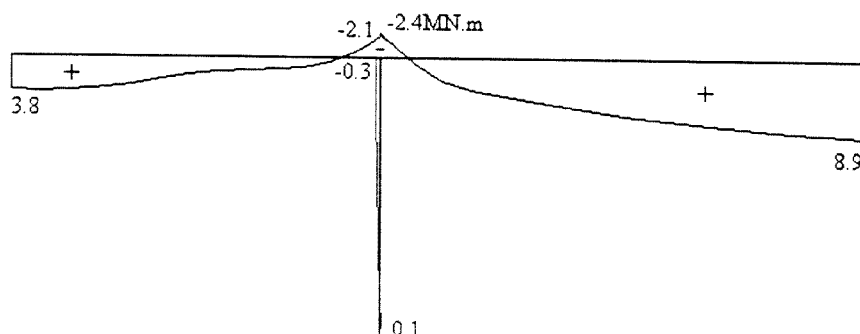
$\gamma \cong 1.20$  e  $\gamma \cong 1.55$  nas combinações (3) e (4). A rigidez vai sucessivamente diminuindo até estabilizar a fendilhação para valores de  $\gamma \cong 1.80$ . A partir desses valores as flechas evoluem com uma rigidez praticamente constante mas com valor significativamente menor que o inicial. A plastificação das armaduras nas secções críticas dá-se para níveis de carregamento idênticos. Assim, a plastificação das armaduras a meio vão do tramo central ocorre com  $\gamma \cong 2.4$  para combinações (1) e (2) e  $\gamma \cong 2.7$  para combinações (3) e (4), enquanto que nas secções sobre os pilares ocorre com  $\gamma \cong 2.5$  para combinações (1) e (2) e  $\gamma \cong 2.8$  para combinações (3) e (4). A partir destes pontos a rigidez da estrutura torna-se praticamente nula até se atingir o colapso por rotura das secções sobre os pilares.



a) distribuição das tensões principais no betão

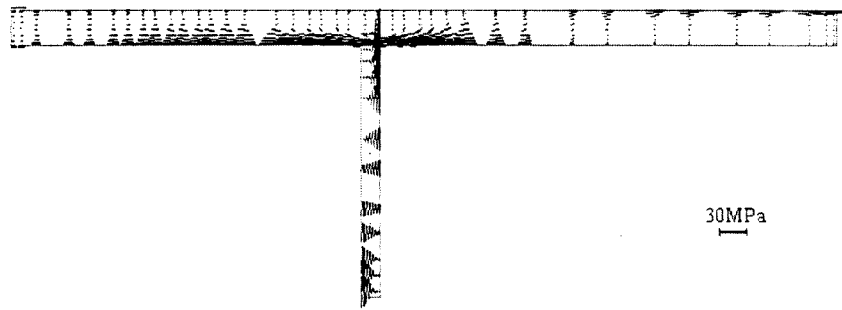


b) configuração da fendilhação

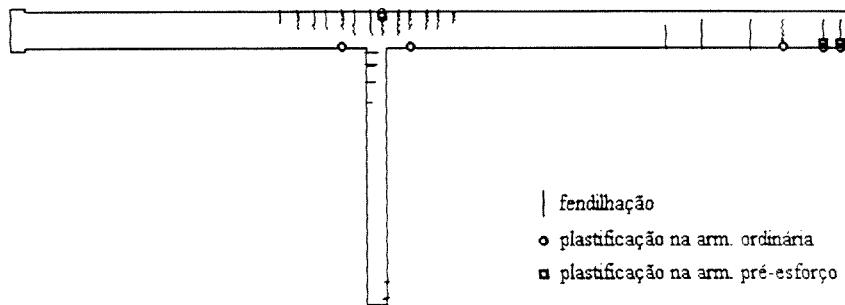


c) diagrama de momentos flectores

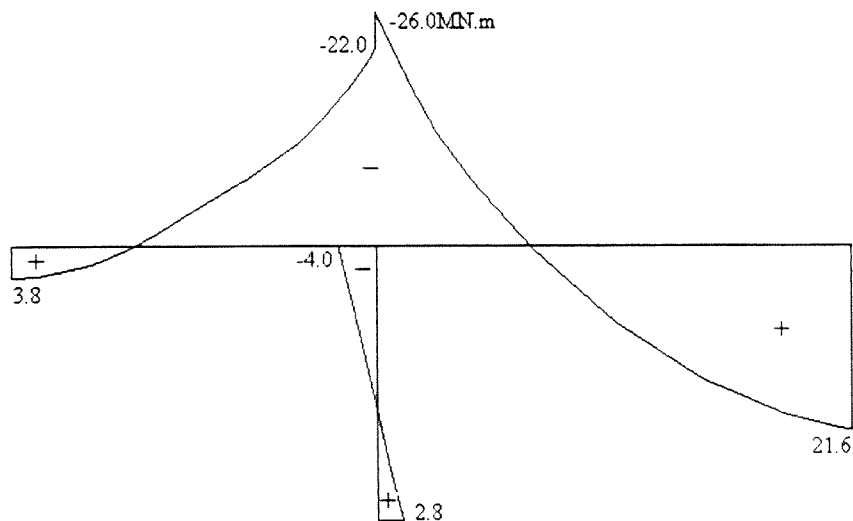
Fig. 7.15 - Estado global da estrutura quando se inicia a fendilhação. Combinação (1):  $\gamma \cong 1.15$ .



a) distribuição das tensões principais no betão



b) configuração da fendilhação e identificação das armaduras plastificadas



c) diagrama de momentos flectores

Fig. 7.16 - Estado global da estrutura próximo do colapso. Combinação (1):  $\gamma \cong 2.60$ .

Nas Figs. 7.15 e 7.16 ilustra-se o comportamento global da estrutura, devido às acções envolvidas na combinação (1) (para a combinação (2) é idêntico), quando se inicia a fendilhação e para o último incremento convergido antes de ocorrer o colapso.

O traçado das tensões principais e o diagrama de momentos flectores representados na Fig. 7.15 permitem ainda verificar a influência das forças de compressão introduzidas pelos cabos de pré-esforço. O efeito devido aos esforços de flexão são atenuados de forma relevante pelo pré-esforço verificando-se para este nível de carregamento que as zonas traccionadas estão consideravelmente restringidas nas secções críticas. Por outro lado, verifica-se que o dano introduzido no betão comprimido é reduzido, verificando-se os valores máximos a meio vão do tramo central devido ao facto de ser aí que se inicia a fendilhação.

Na Fig. 7.16 observa-se o comportamento da estrutura próximo do colapso. A distribuição das tensões principais no betão permite constatar a formação do arco de compressão que se forma entre as fibras inferiores das secções sobre os pilares e as fibras superiores na zona central do viaduto. Esse arco ilustra a influência marcante do efeito de flexão, devido às cargas verticais aplicadas, como se pode verificar no diagrama de momentos flectores. Em concordância com a orientação das tensões principais apresentadas obtiveram-se os padrões de fendilhação e as zonas plastificadas das armaduras. É possível observar a concentração da fendilhação e da plastificação nas secções críticas referidas.

A Fig. 7.17 ilustra a variação das tensões nas armaduras ordinárias e de pré-esforço nas secções críticas, ao longo do carregamento. É possível observar que os acréscimos de tensões nas armaduras são maiores quando a fendilhação do betão atinge valores elevados. As curvas ilustradas permitem verificar ainda a importância relativa das armaduras ordinárias colocadas em diferentes posições.

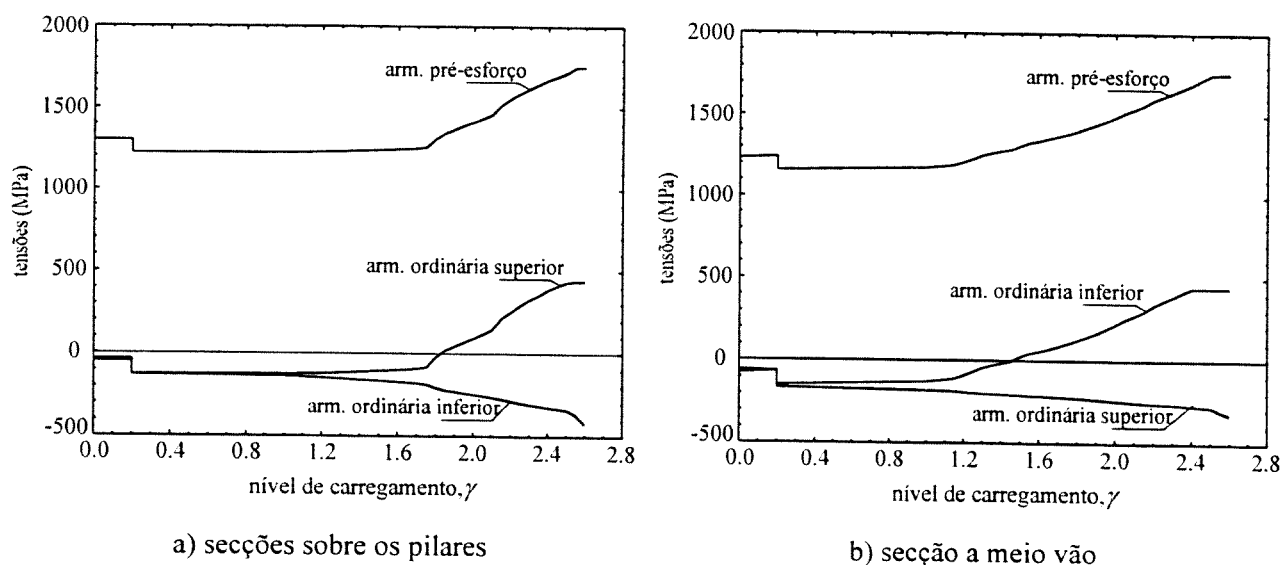


Fig. 7.17 - Curvas carga-tensões nas armaduras. Combinação (1).

Nas Figs. 7.18 e 7.19 apresentam-se os diagramas de tensões normais nas secções críticas para níveis de carregamento correspondentes ao início da fendilhação e próximo do colapso, respectivamente. Estes diagramas estão de acordo com o comportamento apresentado nas figuras anteriores. Para o diagrama correspondente à situação última nas secções sobre os pilares o estado de tensão revela um decréscimo da resistência à compressão nas fibras inferiores devido ao efeito de *softening* no betão. Este efeito acompanhado por um esgotamento da contribuição do mecanismo de interacção aço-betão à tracção até zonas próximas das fibras inferiores conduz ao colapso da estrutura.

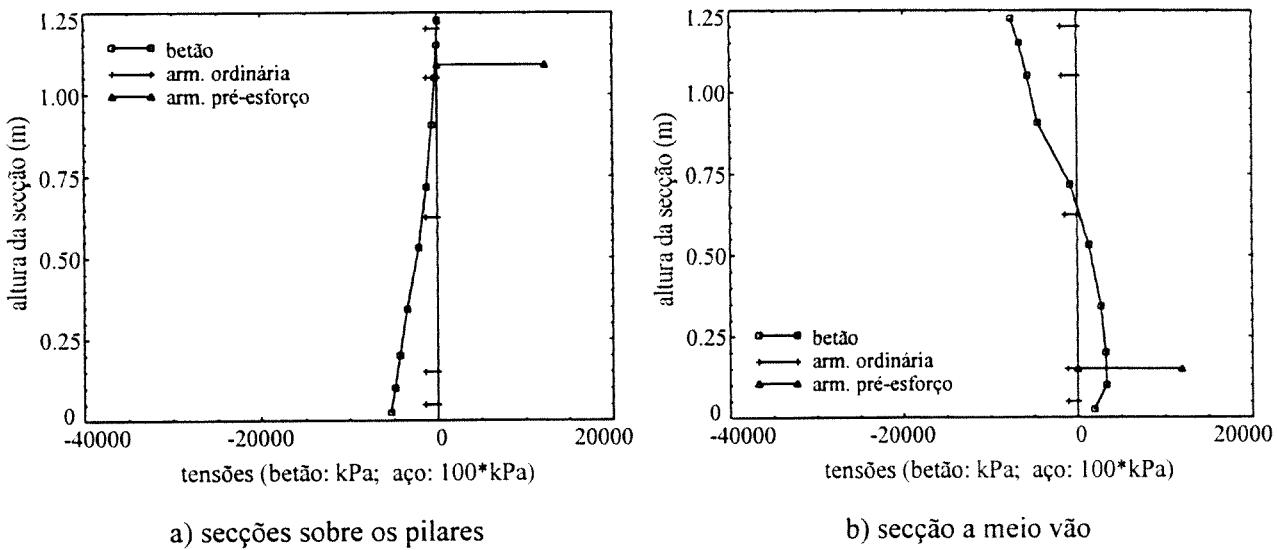


Fig. 7.18 - Diagramas de tensões normais. Combinação (1):  $\gamma = 1.15$ .

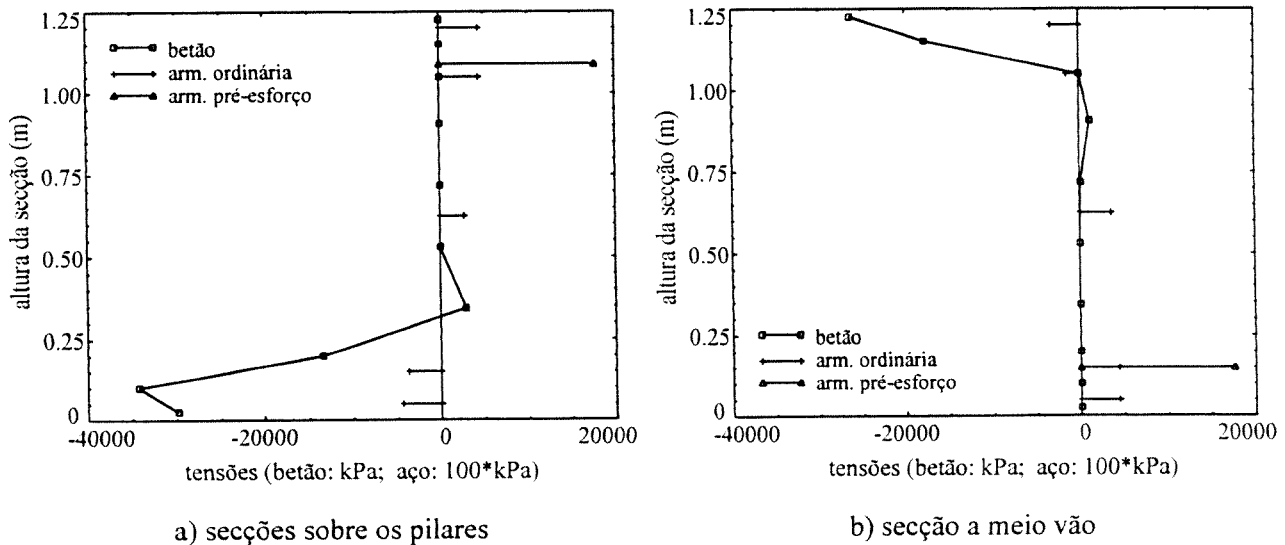


Fig. 7.19 - Diagramas de tensões normais. Combinação (1):  $\gamma = 2.60$ .

## 7.5 – VERIFICAÇÃO DA SEGURANÇA. ABORDAGEM PROBABILÍSTICA

### 7.5.1 – Considerações iniciais

A segurança da estrutura é avaliada em relação aos estados limites regulamentares, de acordo com o critério descrito na secção seguinte. É feita uma abordagem probabilística através da metodologia baseada na aplicação do método de Monte Carlo (ver Capítulo 5). Na verificação da segurança aos estados limites últimos aplicou-se também a metodologia baseada no método da superfície de resposta. Os resultados obtidos com as duas metodologias são analisados e discutidos.

A análise de segurança aos estados limites de utilização é realizada através do estudo das distribuições obtidas para a resposta estrutural em função dos parâmetros a controlar (deslocamentos, tensões e largura de fendas) para as várias combinações de acções. É ainda analisada a sensibilidade desses parâmetros às variáveis aleatórias básicas, permitindo avaliar aquelas que mais condicionam o comportamento da estrutura aos estados limites.

Na análise da segurança aos estados limites últimos é, também, realizado o estudo da distribuição do parâmetro de colapso e da sua sensibilidade em relação às variáveis aleatórias básicas. Apresenta-se ainda a reavaliação da segurança quando alguma das variáveis básicas sofre alterações relativamente às condições previstas inicialmente. Destaca-se o estudo de regressão necessário para essa reavaliação, com a descrição detalhada dos vários passos e dos aspectos relevantes.

Finalmente, será discutido o nível de segurança global da estrutura a partir das verificações realizadas. Discute-se ainda a adequação dos resultados obtidos pela metodologia baseada na superfície de resposta.

### 7.5.2 – Critério de verificação

A verificação da segurança aos estados limites últimos compreende o estudo da capacidade resistente da estrutura aos esforços normais e de flexão que caracterizam o efeito das acções actuantes descritas no Quadro 7.3. A capacidade resistente é identificada com a carga que resulta do incremento sucessivo das acções da combinação em questão até ser atingido o colapso da estrutura. A probabilidade admissível para violar este estado limite foi fixada em  $10^{-5}$ , valor corrente para este tipo de estrutura.

A verificação da segurança aos estados limites de utilização abrange os seguintes estados limites correntes: limitação de tensões; controlo de fendilhação e controlo da deformação.

O valor da probabilidade de rotura mínima exigida para os estados limites de utilização foi fixado em  $10^{-2}$  (1%). Os valores admissíveis das tensões, da fendilhação e das flechas, que estão associadas a estes estados limites, foram definidos de acordo com as propostas do EC2 e EC2-2.

- *Limitação de tensões*

De forma a evitar a formação de fendas longitudinais que podem conduzir a micro-fendilhação do betão ou a níveis de fluência mais elevados que os previstos, a tensão de compressão no betão sob as acções de serviço é limitada pelos seguintes valores:

$$- |\sigma_c^-| \leq 0.6 f_{ck}, \quad \text{para a combinação rara de acções;}$$

$$- |\sigma_c^-| \leq 0.45 f_{ck}, \quad \text{para acções quase permanentes.}$$

De forma a evitar tensões na armadura que conduzam a deformações não elásticas e, por isso, grandes fendas permanentemente abertas, essas tensões são limitadas pelos seguintes valores:

$$- |\sigma_s| \leq 0.8 f_{yk}, \quad \text{nas armaduras ordinárias, para a combinação rara de acções;}$$

$$- |\sigma_p| \leq 0.75 f_{pk}, \quad \text{nas armaduras de pré-esforço, para a combinação rara de acções e depois de consideradas as perdas;}$$

$$- |\sigma_p| \leq 0.65 f_{pk}, \quad \text{condição alternativa à anterior proposta pelo projecto da parte 2 do Eurocódigo 2 relativo a pontes de betão (EC2-2, 1994), nas armaduras de pré-esforço, para a combinação quase-permanente e depois de consideradas todas as perdas.}$$

- *Controlo de fendilhação*

De acordo com o EC2 o critério de controlo de largura de fendas é caracterizado pelo valor de cálculo da largura de fendas,  $w_k$ , para a combinação frequente de acções. Este valor é definido em função da classe de exposição relativa às condições ambientais e do tipo de pré-esforço. Assim, considerando que o presente viaduto se encontra exposto a um ambiente húmido (classe de exposição 2) e que a armadura de pré-esforço é pós-tensionada, o valor admissível é  $w_k = 0.2 \text{ mm}$ .

O valor de cálculo da largura das fendas é obtido da relação:

$$w_k = \beta \cdot s_{rm} \cdot \varepsilon_{sm} \quad , \quad (7.2)$$

onde  $s_{rm}$  é a distância média final entre fendas,  $\varepsilon_{sm}$  é a extensão média identificada com a extensão máxima instalada no betão na direcção normal ao plano da fenda,  $\beta$  é um coeficiente relacionando a largura média das fendas com o valor de cálculo e que toma o valor 1.7 para fendilhação devida a acções aplicadas (EC2-1, 1991).

A distância média final entre fendas para elementos sujeitos predominantemente a flexão ou a tracção é calculada a partir da expressão:

$$s_{rm} = 50 + 0.25 \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot \phi \cdot \rho_r, \quad (\text{mm}) \quad ; \quad (7.3)$$

em que  $\phi$  é o diâmetro médio dos varões em mm,  $k_1$  é um coeficiente que tem em conta as propriedades de aderência dos varões (0.8 para varões de alta aderência e 1.6 para varões lisos),  $k_2$  é um coeficiente que tem em conta a distribuição das extensões na secção (0.5 para flexão, 1.0 para tracção simples e  $k_2 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) / 2\varepsilon_1$ , para tracção excêntrica, com  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  a maior e a menor extensão de tracção nas fibras extremas com base na secção fendilhada) e  $\rho_r$  é a percentagem efectiva de armadura.

- *Controlo da deformação*

O aspecto e as condições de utilização não devem ser afectados por uma deformação excessiva da estrutura. De acordo com o EC2-2, as flechas em pontes rodoviárias devem ser limitadas pelos seguintes valores:

$$- y \leq \frac{l+40}{2000} \quad (\text{m}), \quad l \text{ é o comprimento do vão (em metros). Esta condição deve ser verificada para cargas quase permanentes, se não se fizer um controlo de fendilhação durante a betonagem};$$

$$- y \leq \frac{l}{300}, \quad \text{esta condição deve ser verificada para cargas quase permanentes se houver controlo de fendilhação durante a betonagem.}$$

### 7.5.3 – Verificação da segurança aos estados limites de utilização

Neste ponto apresenta-se a análise da segurança em serviço, através do controlo da deformação, da fendilhação e das tensões.

• Estado limite de deformação

A avaliação da segurança ao estado limite de deformação foi realizada através das distribuições das flechas máximas a longo prazo, considerando as duas combinações quase permanente de acções (ver Quadro 7.6):

$$(1) \quad G + P + 0.2Q + 0.3\Delta T_{ver};$$

$$(2) \quad G + P + 0.2Q + 0.3\Delta T_{mv}.$$

A variabilidade da resposta, em termos de flechas a meio vão do tramo central ( $y_{max}$ ), foi obtida por simulação de Monte Carlo (ver Capítulo 5). O procedimento utilizado teve em conta as distribuições das variáveis aleatórias básicas descritas no Quadro 7.5 e a discretização do campo aleatório (coincidente com a malha de elementos finitos) ilustrada na Fig. 7.2.

Da análise de correlação-regressão efectuada obtiveram-se os coeficientes de correlação linear corrigidos,  $s_{corr}$  (expressão 5.33, no Capítulo 5), entre  $y_{max}$  e cada uma das variáveis básicas. Na Fig. 7.20 representa-se graficamente esses coeficientes, destacando-se os valores nas zonas críticas das variáveis com variabilidade espacial.

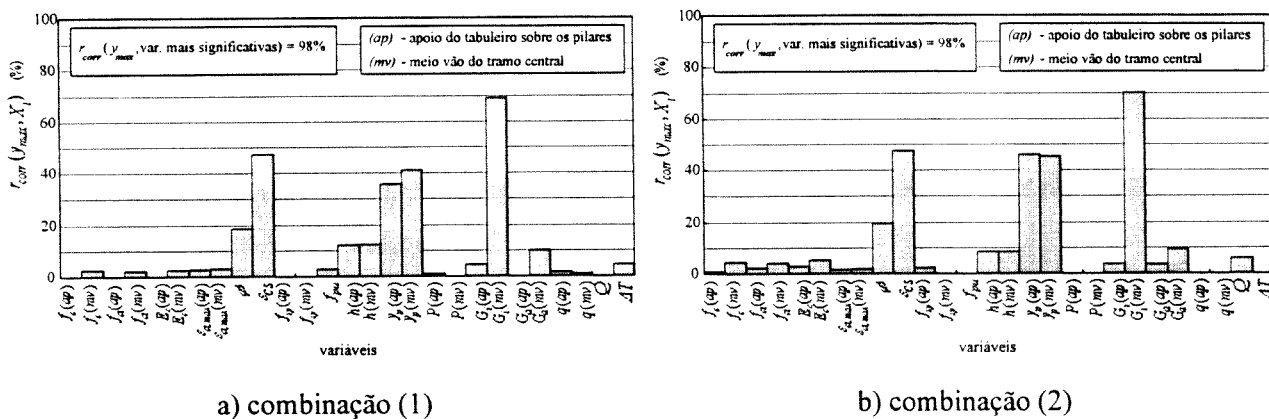


Fig. 7.20 - Sensibilidade da flecha máxima às variáveis básicas, para combinações quase permanentes.

Os valores obtidos para as duas combinações são idênticos. Verifica-se que a variabilidade da flecha máxima é praticamente toda explicada através da correlação linear ( $r_{corr} = 98\%$ ) com um número reduzido de variáveis:  $G_{imv}$ ,  $\epsilon_{cs}$ ,  $y_{pap}$ ,  $y_{pmp}$ ,  $\varphi$ ,  $h_{mv}$ .

Tal como seria de esperar, no grupo de variáveis relevantes para a resposta estrutural só intervêm as variáveis que caracterizam a acção principal, os efeitos diferidos que ampliam significativamente as deformações ao longo do tempo e as características geométricas que



influenciam a acção do pré-esforço ( $y_p$ ) e a rigidez inicial da estrutura ( $h$ ). Nenhuma das variáveis que caracterizam as propriedades mecânicas dos materiais teve importância significativa. Isso deve-se ao facto do nível de carga aplicado conduzir a uma resposta praticamente linear, sendo por isso independente do comportamento (não linear) dos materiais. Relativamente às variáveis que caracterizam o comportamento diferido do betão, saliente-se a preponderância do efeito da retracção sobre a fluência.

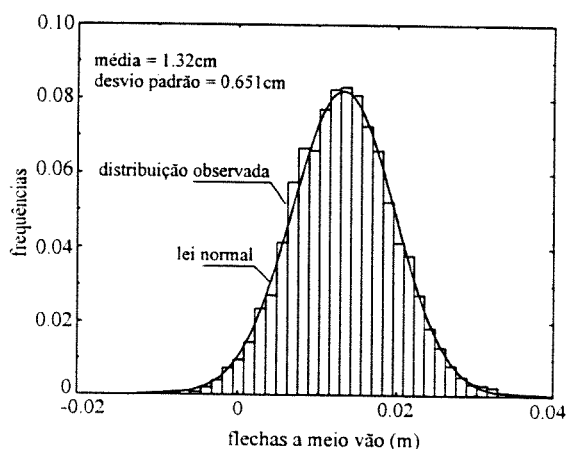
As variabilidades obtidas para a flecha máxima são bem caracterizadas por distribuições normais, como se pode observar na Fig. 7.21. No Quadro 7.13 definem-se os valores médios e os desvios-padrão das distribuições, assim como o valor associado à probabilidade de ser excedido o estado limite ( $p_f = 10^{-2}$ ). Como as distribuições são gausseanas, o índice de segurança,  $\beta$ , associado à probabilidade de rotura  $10^{-2}$  é  $\beta \cong 2.33$ . Assim, o valor da flecha associado será determinado pela seguinte expressão:

$$y_{(p_f=10^{-2})} = y_m + 2.33 \cdot \sigma_y \quad (7.4)$$

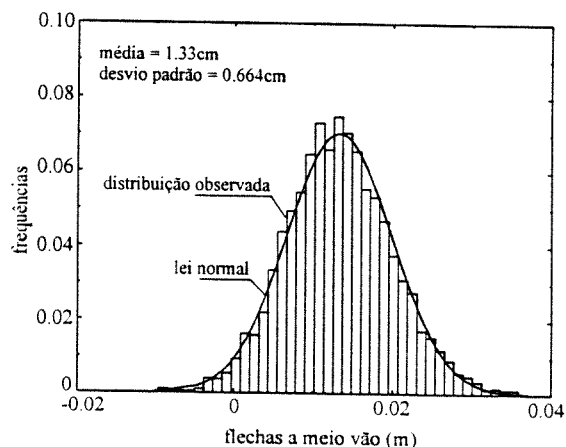
Adicionalmente, apresenta-se os valores característicos da flecha, associados a uma probabilidade de rotura igual a 5% ( $\beta \cong 1.64$ ).

Quadro 7.13 - Flechas máximas a longo prazo (100 anos) para combinações quase permanentes. Unidades: cm.

Combinação de acções	valor médio	desvio padrão	tipo de distribuição	valor característico 95% ( $\beta \cong 1.64$ )	valor associado a $p_f=10^{-2}$ ( $\beta \cong 2.33$ )
(1)	1.32	0.651	normal	2.39	2.84
(2)	1.33	0.664	normal	2.42	2.88



a) combinação (1)



b) combinação (2)

Fig. 7.21 - Distribuições da flecha a longo prazo (100 anos) para combinações quase permanentes.

Tal como se verificou no estudo do comportamento estrutural em condições de serviço através de análises determinísticas, os deslocamentos verticais máximos correspondentes às combinações de acções (1) e (2) são semelhantes. Os valores associados à probabilidade de rotura satisfazem o valor limite imposto para as flechas em pontes rodoviárias pelo EC2-2:

$$y_{(10^{-2})} = 2.9 \text{ cm} < \frac{l+40}{2000} = \frac{34+40}{2000} = 0.037 \text{ m} \quad . \quad (7.5)$$

- *Estado limite de fendilhação*

No estudo da segurança ao estado limite de fendilhação foram verificadas as eventuais ocorrências de fendas para as combinações frequentes de acções. Foi também analisada a distribuição das tensões máximas de tracção no betão. Consideraram-se quatro combinações frequentes de acções, duas caracterizadas por terem como acção-base a sobrecarga uniforme:

$$(3) \quad G + P + 0.4Q + 0.3\Delta T_{ver};$$

$$(4) \quad G + P + 0.4Q + 0.3\Delta T_{inv};$$

e as outras duas com acção-base a variação de temperatura:

$$(5) \quad G + P + 0.2Q + 0.5\Delta T_{ver};$$

$$(6) \quad G + P + 0.2Q + 0.5\Delta T_{inv}.$$

No estudo de simulação efectuado utilizou-se um tamanho de amostragem (5000) relativamente alto para os valores de probabilidade em causa, da ordem dos  $10^{-2}$ . Mesmo para este tamanho de amostragem, não se verificou qualquer fendilhação nas combinações (3), (4) e (6). Somente para a combinação (5) se verificou a ocorrência de fendilhação em cinco amostras. Assim, para esta combinação o valor esperado para a probabilidade de ocorrer fendilhação é de:

$$\text{Prob}(\text{"ocorrer fendilhação"}) \cong \frac{5}{5000} = 10^{-3} \quad , \quad (7.6)$$

ou, complementarmente,

$$\text{Prob}(\text{"não ocorrer fendilhação"}) \cong 1 - 10^{-3} = 0.999 \quad . \quad (7.7)$$

Verifica-se, além disso, que entre essas cinco amostras o maior valor registado para a largura de fendas foi de  $w = 0.11 \text{ mm}$ , que é inferior ao valor limite admissível de  $0.2 \text{ mm}$ .

No Quadro 7.14 apresenta-se os valores que caracterizam as distribuições das tensões máximas de tracção no betão (ou os menores valores das tensões de compressão nas amostras onde não foi

registado qualquer tracção). Os resultados descritos dizem respeito aos valores máximos registados no tabuleiro, nas secções do tabuleiro que apoiam sobre os pilares e na secção de meio vão do tramo central. Distinguem-se também os valores referentes à altura de aplicação do valor frequente das acções variáveis (100 dias) e os valores a longo prazo (100 anos).

Os resultados apresentados permitem constatar o seguinte:

- não se verifica o estado limite de descompressão para nenhuma das quatro combinações (não era, no entanto, uma condição a ser verificada para este tipo de estrutura);
- os valores relativos à secção central são mais gravosos que aqueles relativos aos apoios sobre os pilares, o que está de acordo com o estudo do comportamento da estrutura, realizado anteriormente, onde se previa que a fendilhação ocorresse primeiramente na secção central;
- as combinações com acção base de variação de temperatura conduzem a tensões de tracção mais altas, em termos de valores extremos máximos;
- os valores das tensões de tracção são significativamente mais altos a longo prazo devido, sobretudo, à influência da retracção do betão, como se pode observar na Fig. 7.22.

Da análise de sensibilidade das tensões máximas de tracção no betão à variabilidade das variáveis básicas (Fig. 7.22), realce para extrema importância da retracção do betão para os valores registados a longo prazo. Por outro lado, os valores correspondentes aos 100 dias não apresentam variáveis extremamente preponderantes realçando-se, em oposição à situação a longo prazo, o peso insignificante da retracção do betão.

#### • *Limitação de tensões*

O EC2 impõe limites aos valores das tensões de compressão no betão e de valores das tensões (de tracção) nas armaduras. Esses limites são definidos para os valores quase permanentes das acções e para os valores raros. Desta forma, na avaliação da segurança efectuada, consideraram-se as combinações quase permanentes de acções (1) e (2) e as quatro combinações raras de acções, duas caracterizadas por terem como acção-base a sobrecarga uniforme:

$$(7) \quad G + P + Q + 0.5\Delta T_{ver};$$

$$(8) \quad G + P + Q + 0.5\Delta T_{inv};$$

e as outras duas com acção base a variação de temperatura:

$$(9) \quad G + P + 0.4Q + \Delta T_{ver} ;$$

$$(10) \quad G + P + 0.4Q + \Delta T_{inv} .$$

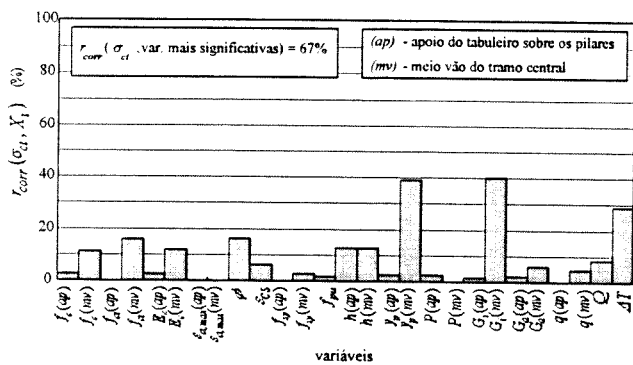
Começando por analisar as tensões obtidas para as combinações quase permanentes de acções, apresenta-se nas Figs. 7.23 e 7.24 as correlações obtidas para os valores máximos na estrutura das tensões de compressão no betão e nas armaduras de pré-esforço, respectivamente.

Quadro 7.14 - Tensões de tracção máximas (ou menores valores de compressão) no betão, para combinações frequentes). Unidades: kPa.

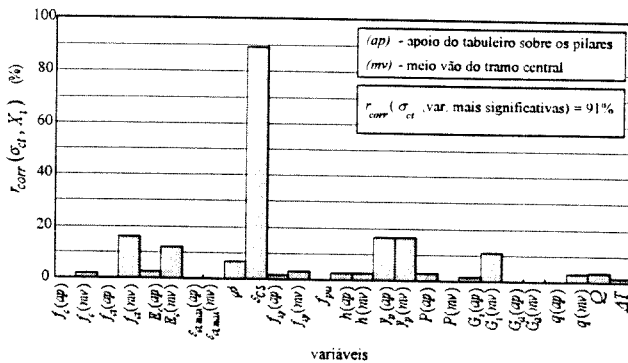
Combinação	idade	zona	valor médio	desvio padrão	tipo de distribuição	valor característico 95% ( $\beta \cong 1.64$ )	valor associado a $p_f=10^{-2}$ ( $\beta \cong 2.33$ )
(3)	100 dias	max. est.	-838	269	assimétrica	-412	-82
		apoio s/ pil.	-1944	95	normal	-1787	-1722
		meio-vão	-1128	457	normal	-376	-65
	100 anos	max. est.	-48	528	assimétrica	982	1395 <sup>(*)</sup>
		apoio s/ pil.	-935	300	normal	-459	-255
		meio-vão	-2415	498	normal	-1596	-1256
(4)	100 dias	max. est.	-696	149	assimétrica	-460	-362
		apoio s/ pil.	-1316	215	normal	-962	-816
		meio-vão	-1783	472	normal	-1007	-686
	100 anos	max. est.	138	620	assimétrica	1295	1657 <sup>(*)</sup>
		apoio s/ pil.	-601	267	normal	-162	20 <sup>(*)</sup>
		meio-vão	-326	537	normal	617	1008 <sup>(*)</sup>
(5)	100 dias	max. est.	-418	740	assimétrica	1112	2002 <sup>(*) (**)</sup>
		apoio s/ pil.	-1662	396	assimétrica	-988	115 <sup>(*)</sup>
		meio-vão	-1319	466	normal	-552	-234
	100 anos	max. est.	-107	627	assimétrica	1152	1606 <sup>(*) (**)</sup>
		apoio s/ pil.	-1328	285	assimétrica	-830	-602
		meio-vão	-742	493	normal	68	404 <sup>(*)</sup>
(6)	100 dias	max. est.	-679	179	normal	-384	-262
		apoio s/ pil.	-1443	262	normal	-1013	-834
		meio-vão	-2397	453	assimétrica	-1614	-1286
	100 anos	max. est.	389	712	assimétrica	1556	1952 <sup>(*)</sup>
		apoio s/ pil.	-854	282	normal	-390	-198
		meio-vão	-968	568	normal	-33	354 <sup>(*)</sup>

Nota: (\*) - não verifica o estado limite de descompressão

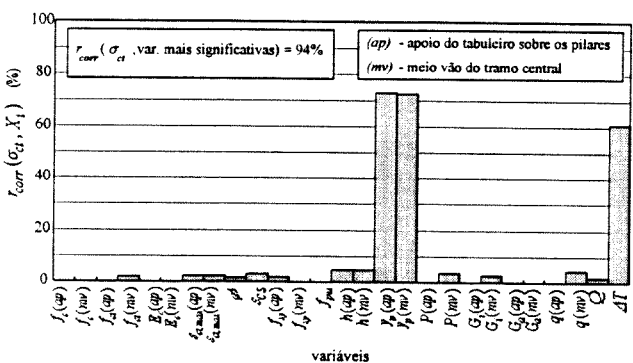
(\*\*) - ocorreu fendilhação ( $w_{max} = 0.11$  mm)



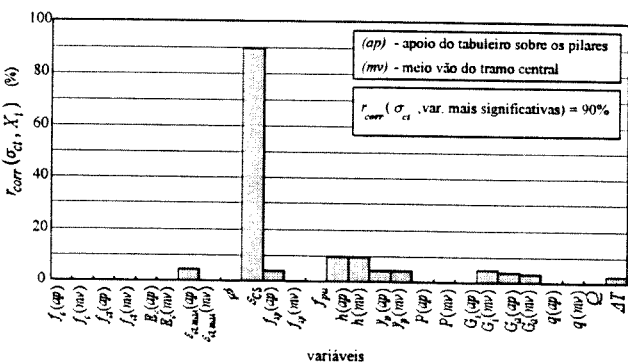
a) combinação (3) - 100 dias



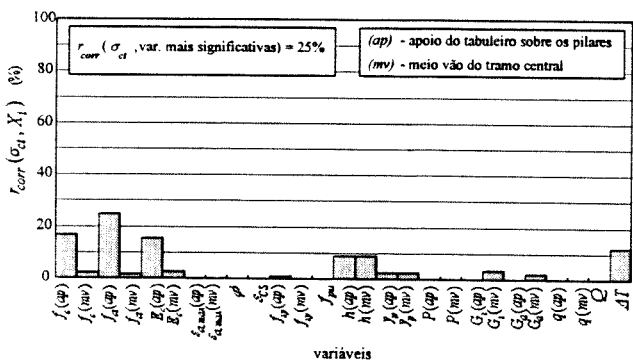
b) combinação (3) - 100 anos



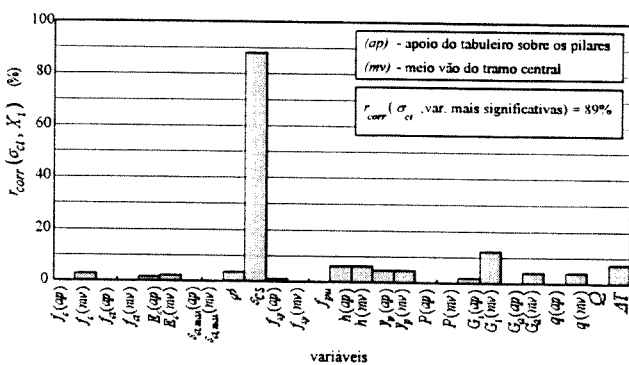
c) combinação (4) - 100 dias



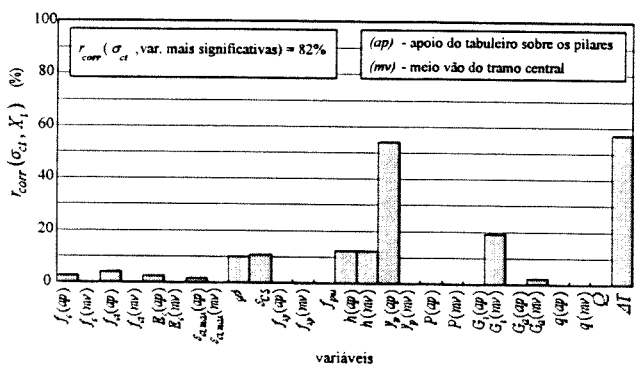
d) combinação (4) - 100 anos



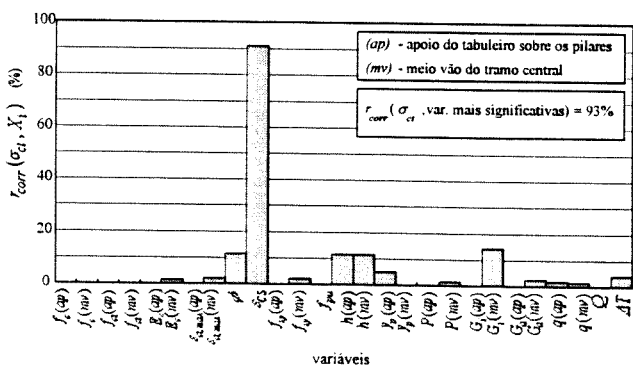
e) combinação (5) - 100 dias



f) combinação (5) - 100 anos



g) combinação (6) - 100 dias



h) combinação (6) - 100 anos

Fig. 7.22 - Sensibilidade das tensões máximas de tracção no betão às variáveis básicas, para combinações frequentes.

Distinguem-se os instantes correspondentes à aplicação dos valores quase permanentes (aos 70 dias) e a longo prazo (100 anos). Das variáveis relevantes para a variabilidade das tensões máximas de compressão no betão, destaque-se a variação de temperatura, a fluência do betão e a força de pré-esforço que apresentam alguma correlação preponderante aos 70 dias, mas a longo prazo perdem significado. Ao contrário, a retracção do betão, o peso próprio da estrutura e a geometria da armadura de pré-esforço (traduzindo o efeito de flexão provocado pelo pré-esforço) ganham preponderância com o tempo. Mas o aspecto com mais interesse diz respeito às tensões máximas na armadura de pré-esforço. Tanto no instante inicial como a longo prazo, são os parâmetros que traduzem o comportamento diferido do betão que apresentam uma preponderância elevada. No instante em que se aplica o valor quase permanente da sobrecarga, a variabilidade da fluência do betão é aquela que mais influencia a variabilidade dessas tensões. A longo prazo, a fluência do betão deixa de ser dominante e passa a ser a retracção do betão a variável mais significativa. Estes resultados estão de acordo com a evolução no tempo dos parâmetros que traduzem o comportamento diferido no betão. Como já foi observado nas Figs. 7.12 e 7.13, o coeficiente de fluência cresce muito rapidamente nos primeiros dias, atingindo valores significativos. Por sua vez, a retracção do betão é um fenómeno de crescimento mais gradual, atingindo valores significativos só ao fim de alguns anos.

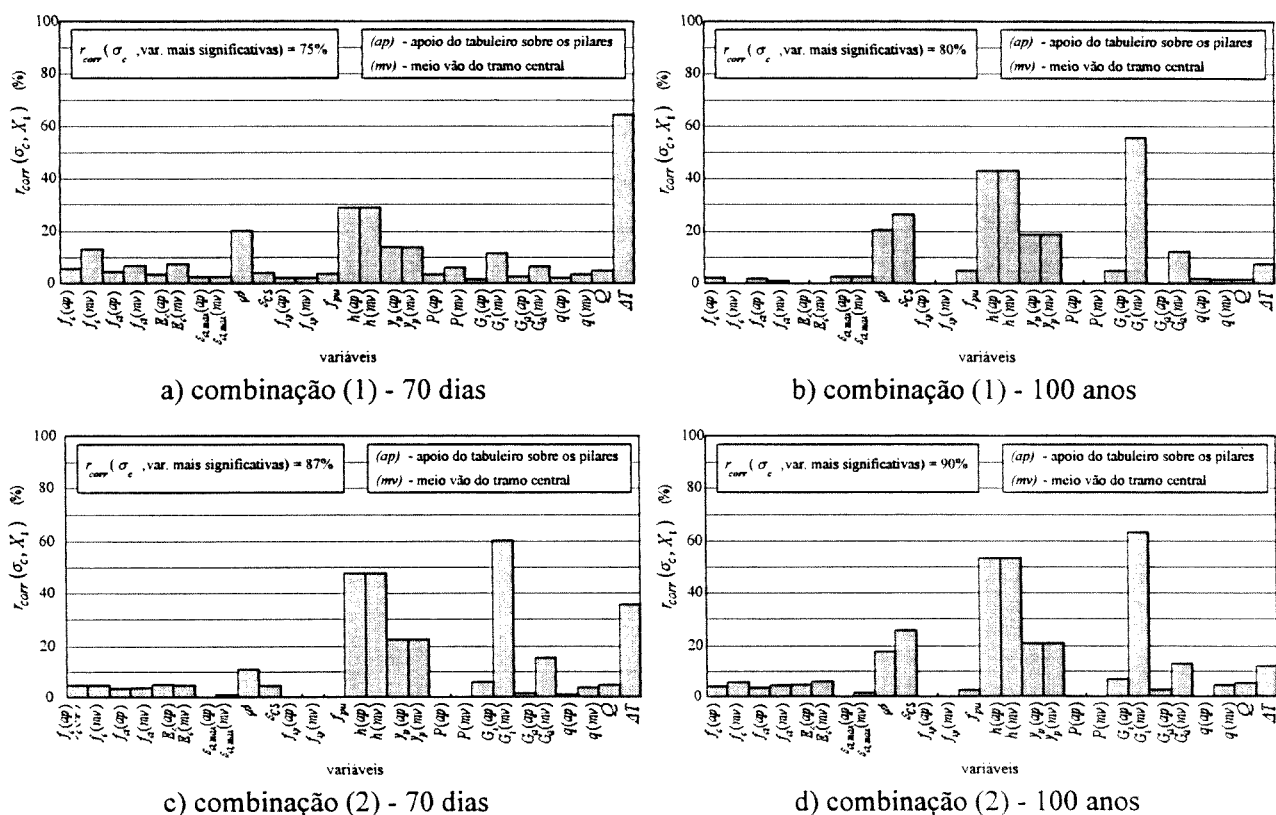


Fig. 7.23 - Sensibilidade das tensões máximas de compressão no betão às variáveis básicas, para combinações quase permanentes.

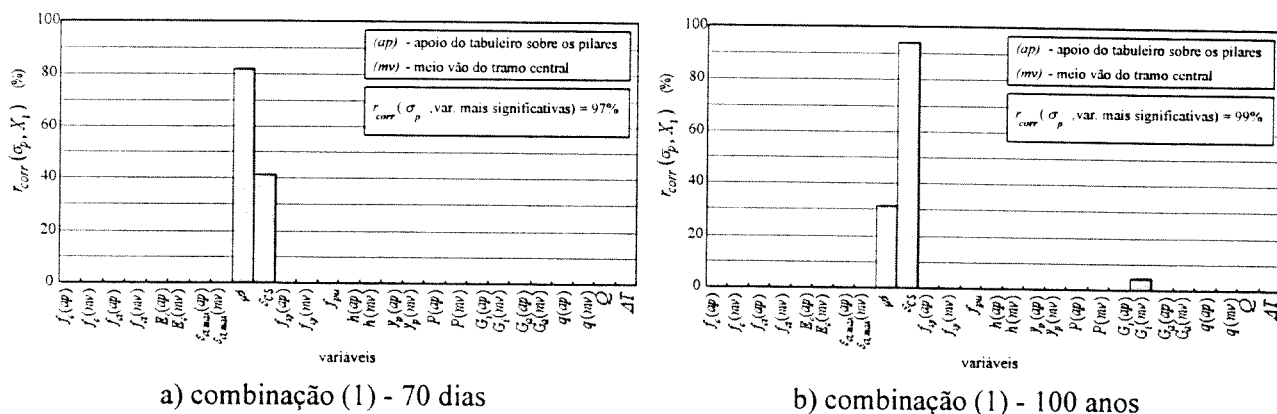


Fig. 7.24 - Sensibilidade das tensões máximas de tracção na armadura de pré-esforço às variáveis básicas, para combinações quase permanentes.

Nos Quadros 7.15 e 7.16 apresentam-se os resultados obtidos para as distribuições das tensões de compressão no betão e de tracção na armadura de pré-esforço. Nas Figs. 7.25 e 7.26 ilustram-se algumas distribuições dessas tensões. De acordo com os resultados apresentados, verifica-se que as tensões máximas de compressão no betão aproximam-se, de uma forma geral, da distribuição log-normal. Por sua vez as tensões máximas de tracção na armadura de pré-esforço ajustam-se à distribuição normal.

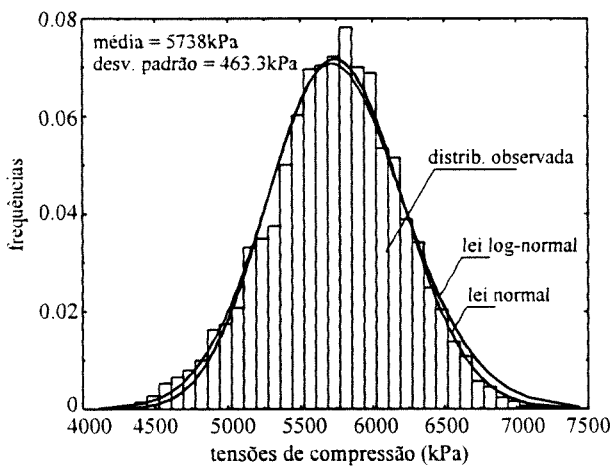
Quadro 7.15 - Tensões de compressão no betão, para combinações quase permanentes. Unidades: kPa.

Combinação	idade	zona	valor médio	desvio padrão	tipo de distribuição	valor característico 95% ( $\beta \cong 1.64$ )	valor associado a $p_F=10^{-2}$ ( $\beta \cong 2.33$ )
(1)	100 dias	max. est.	-5430 (8.598)	336 (0.0611)	log-normal	-5992	-6247
		apoio s/ pil.	-2733 (7.911)	194 (0.0697)	log-normal	-3057	-3206
		meio-vão	-4652 (8.442)	350 (0.0752)	log-normal	-5250	-5526
	100 anos	max. est.	-5738	463	normal	-6501	-6816
		apoio s/ pil.	-3042	284	normal	-3510	-3703
		meio-vão	-3992 (8.290)	282 (0.0705)	log-normal	-4472	-4692
(2)	100 dias	max. est.	-5030 (8.521)	347 (0.0683)	log-normal	-6141	-6422
		apoio s/ pil.	-2669 (7.888)	158 (0.0575)	log-normal	-2929	-3046
		meio-vão	-3198 (8.293)	153 ~(0.0383)	log-normal	-4254	-4367
	100 anos	max. est.	-5523 (8.615)	362 (0.0657)	log-normal	-6141	-6422
		apoio s/ pil.	-2896 (7.967)	254 (0.088)	log-normal	-3334	-3541
		meio-vão	-3647 (8.199)	255 (0.0699)	log-normal	-4082	-4281

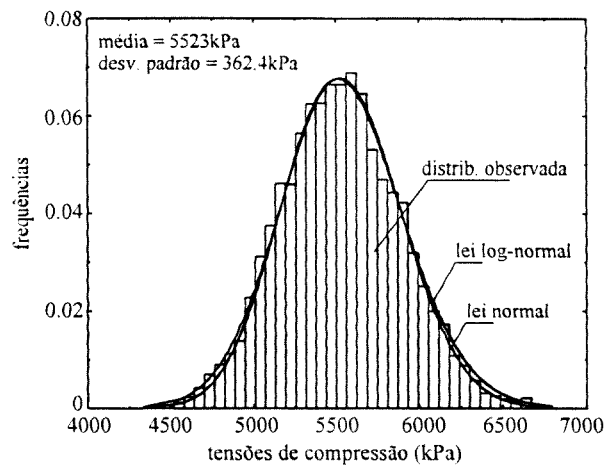
Nota: Os valores entre parêntesis referem-se às distribuições dos logaritmos (ln)

Quadro 7.16 - Tensões de tracção a longo prazo na armadura de pré-esforço, para combinações quase permanentes. Unidades: MPa.

combinação	idade	zona	valor médio	desvio padrão	tipo de distribuição	valor característico 95% ( $\beta \approx 1.64$ )	valor associado a $p_f = 10^{-2}$ ( $\beta \approx 2.33$ )
(1)	100 anos	max. est.	1222	23.5	normal	1261	1277
		apoio s/ pil.	1220	23.8	normal	1260	1276
		meio-vão	1157	24.5	normal	1197	1214
(2)	100 anos	max. est.	1226	23.5	normal	1265	1281
		apoio s/ pil.	1224	23.8	normal	1264	1280
		meio-vão	1153	24.4	normal	1193	1210

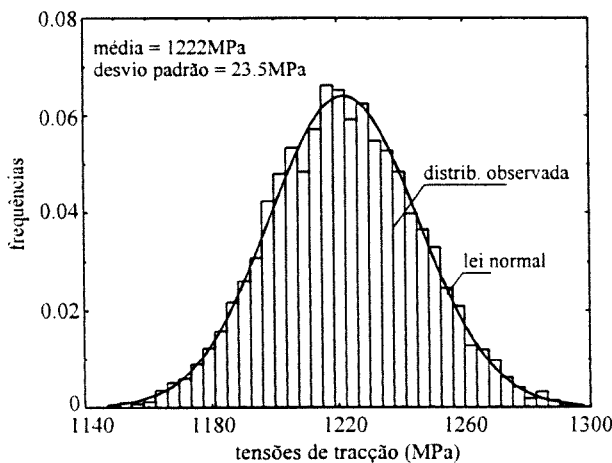


a) combinação (1)

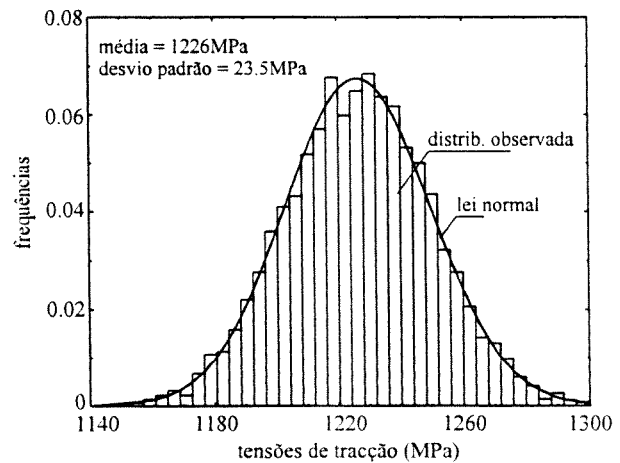


b) combinação (2)

Fig. 7.25 - Distribuição das tensões máximas de compressão no betão aos 100 anos, para combinações quase permanentes.



a) combinação (1)



b) combinação (2)

Fig. 7.26 - Distribuição das tensões máximas de tracção na armadura de pré-esforço aos 100 anos, para combinações quase permanentes.



Os valores das tensões de compressão no betão associados à probabilidade de rotura  $10^{-2}$  (o maior valor observado no Quadro 7.15 é 6.8 MPa) satisfazem largamente o valor limite imposto para as acções permanentes:

$$\sigma_{c,max} = 6.8 \text{ MPa} < 0.45 f_{ck} = 11.2 \text{ MPa} \quad (7.8)$$

Por sua vez, os valores das tensões de tracção na armadura de pré-esforço associadas a  $p_f = 10^{-2}$  (o maior valor observado no Quadro 7.16 é 1281 MPa) ultrapassa ligeiramente o valor limite imposto em pontes rodoviárias para acções permanentes e depois de consideradas todas as perdas:

$$\sigma_{p,max} = 1281 \text{ MPa} > 0.65 f_{pk} = 1209 \text{ MPa} \quad (7.9)$$

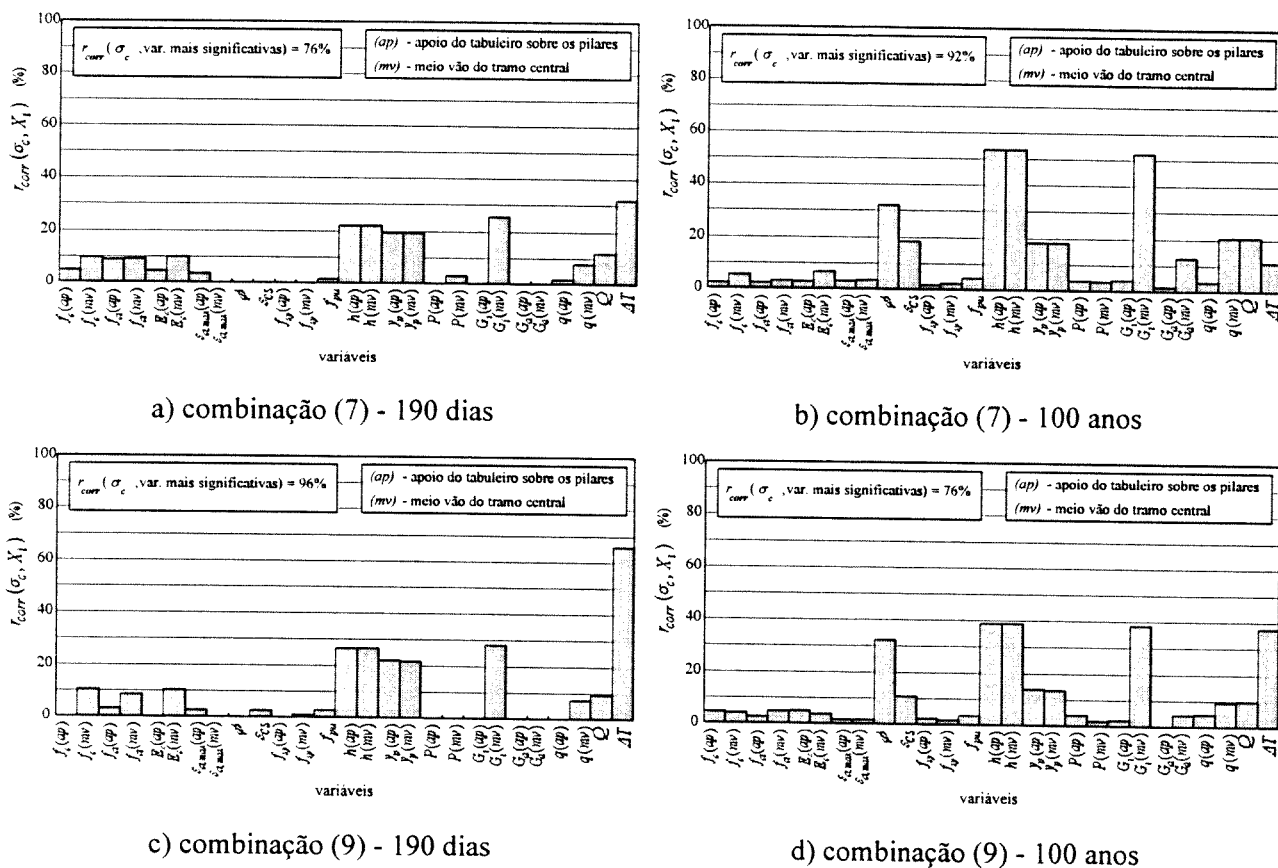


Fig. 7.27 - Sensibilidade das tensões máximas de compressão no betão às variáveis básicas, para combinações raras.

Analisando agora as tensões obtidas para as combinações raras de acções, apresenta-se nas Figs.7.27 e 7.28 as correlações obtidas para as tensões máximas de compressão no betão e nas

armaduras de pré-esforço, respectivamente, para as combinações mais representativas. As observações efectuadas para as combinações quase permanentes continuam a ser válidas para as combinações raras, nomeadamente, aquelas relativas aos parâmetros que caracterizam o comportamento diferido. Adicionalmente, nota-se uma maior preponderância das sobrecargas, devido aos maiores valores que atingem para estas combinações; e, dos parâmetros que caracterizam o comportamento do betão como resultado do maior nível de carregamento para o qual a não linearidade do betão se faz sentir com algum significado.

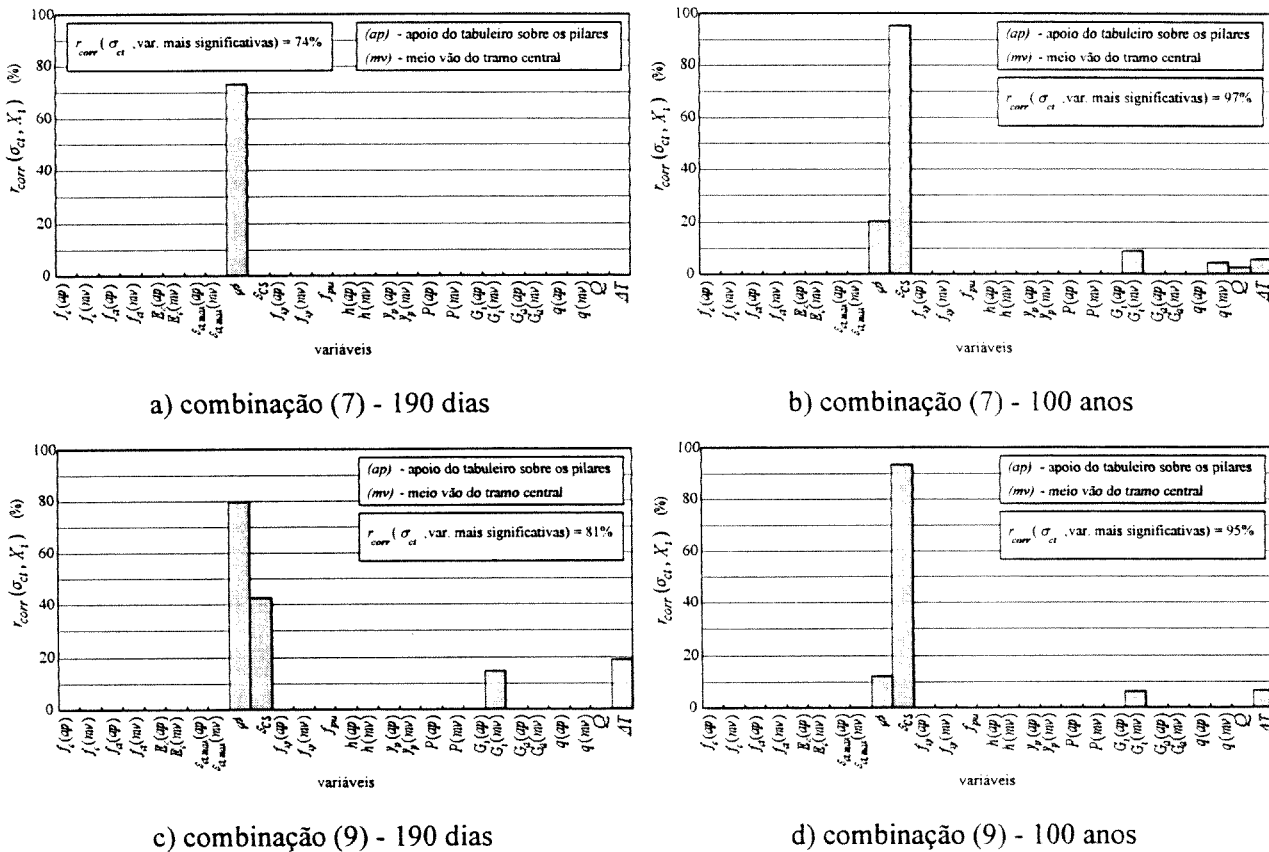
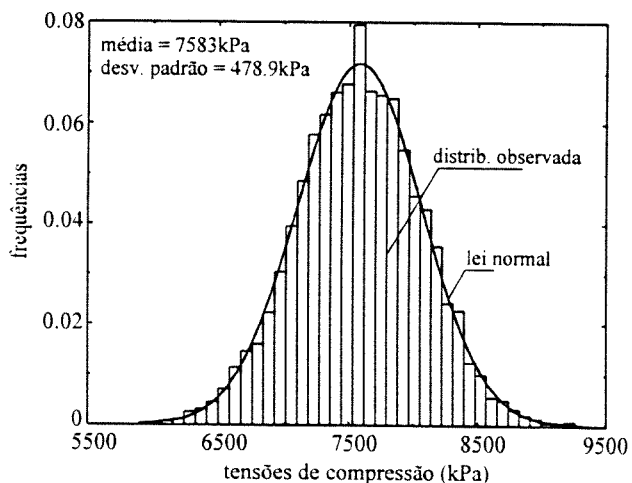


Fig. 7.28 - Sensibilidade das tensões máximas de tracção na armadura de pré-esforço às variáveis básicas, para combinações raras.

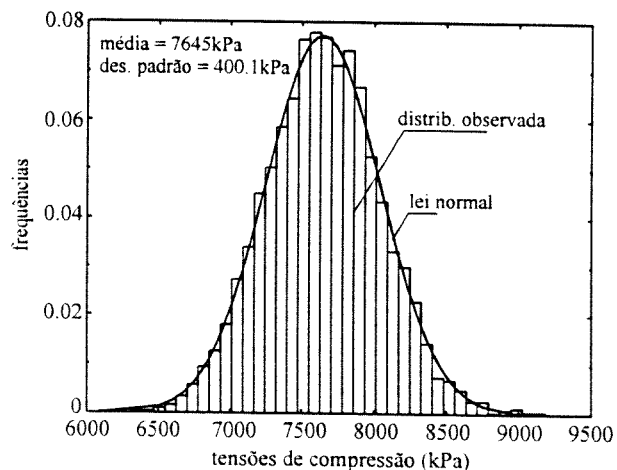
Nos Quadros 7.17 e 7.18 apresentam-se os resultados obtidos para as distribuições das tensões de compressão no betão e de tracção na armadura de pré-esforço. Nas Figs. 7.29 e 7.30 ilustram-se algumas distribuições dessas tensões. De uma forma geral não se verificam tracções nas armaduras ordinárias (cerca de 99% das amostras consideradas).

Quadro 7.17 - Tensões de compressão no betão, para combinações raras. Unidades: kPa.

combinação	idade	zona	valor médio	desvio padrão	tipo de distribuição	valor característico 95% ( $\beta \approx 1.64$ )	valor associado a $p_f = 10^{-2}$ ( $\beta \approx 2.33$ )
(7)	190 dias	max. est.	-7198	718	assimétrica	-8279	-10497
		apoio s/ pil.	-4128	546	assimétrica	-4766	-6680
		meio-vão	-6954 (8.850)	481 (0.0689)	log-normal	-7770	-8143
	100 anos	max. est.	-8281	487	normal	-9083	-9415
		apoio s/ pil.	-5029 (8.520)	375 (0.0744)	log-normal	-5668	-5963
		meio-vão	-5644 (8.637)	338 (0.0596)	log-normal	-6214	-6472
(8)	190 dias	max. est.	-7583	479	normal	-8370	-8697
		apoio s/ pil.	-4294	350	normal	-4868	-5107
		meio-vão	-5140 (8.542)	383 (0.0746)	log-normal	-5794	-6096
	100 anos	max. est.	-7645	400	normal	-8303	-8576
		apoio s/ pil.	-4508 (8.412)	299 (0.0663)	log-normal	-5017	-5249
		meio-vão	-5222 (8.559)	315 (0.0603)	log-normal	-5757	-5998
(9)	190 dias	max. est.	-7249	622	assimétrica	-8259	-9127
		apoio s/ pil.	-3532	525	assimétrica	-4248	-4562
		meio-vão	-7056 (8.859)	565 (0.0797)	log-normal	-8019	-8466
	100 anos	max. est.	7263	641	assimétrica	-8168	-8488
		apoio s/ pil.	-4046	519	assimétrica	-4846	-5104
		meio-vão	-4684	483	assimétrica	-5421	-5969
(10)	190 dias	max. est.	-6892	560	normal	-7813	-8195
		apoio s/ pil.	-3708	395	normal	-4357	-4626
		meio-vão	-4314	345	assimétrica	-4935	-5266
	100 anos	max. est.	-6688	371	normal	-7298	-7550
		apoio s/ pil.	-3783	282	normal	-4247	-4439
		meio-vão	-4384	292	normal	-4863	-5062



a) combinação (8) - 190 dias

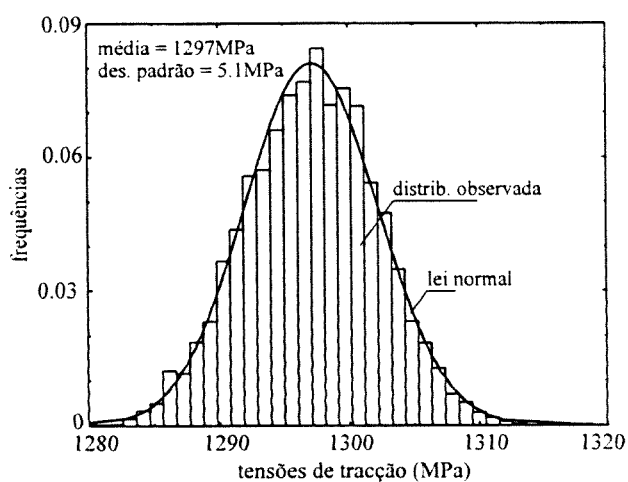


b) combinação (8) - 100 anos

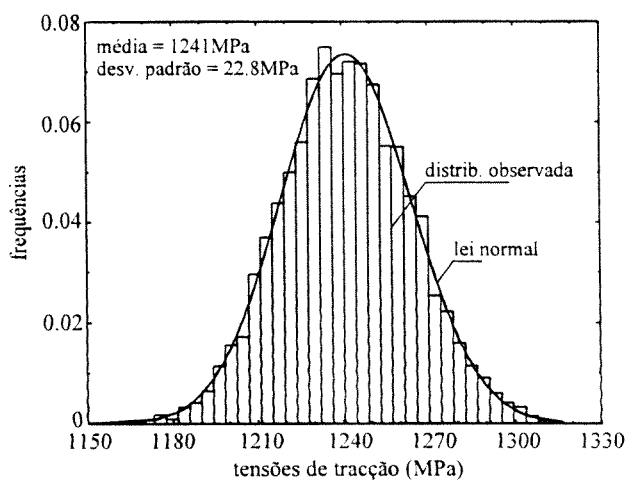
Fig. 7.29 - Distribuição das tensões máximas de compressão no betão para a combinação rara (8).

Quadro 7.18 - Tensões de tracção na armadura de pré-esforço, para combinações raras. Unidades: MPa.

combinação	idade	zona	valor médio	desvio padrão	tipo de distribuição	valor característico 95% ( $\beta \cong 1.64$ )	valor associado a $p_f=10^{-2}$ ( $\beta \cong 2.33$ )
(7)	190 dias	max. est.	1303	5.0	normal	1311	1314
		apoio s/ pil.	1302	5.0	normal	1311	1314
		meio-vão	1267	9.5	normal	1283	1289
	100 anos	max. est.	1240	22.6	normal	1277	1293
		apoio s/ pil.	1240	22.8	normal	1277	1293
meio-vão		1226	21.1	normal	1260	1275	
(8)	190 dias	max. est.	1309	4.9	normal	1317	1320
		apoio s/ pil.	1308	5.0	normal	1317	1320
		meio-vão	1251	8.2	normal	1264	1270
	100 anos	max. est.	1241	22.5	normal	1278	1293
		apoio s/ pil.	1240	22.7	normal	1277	1293
meio-vão		1191	22.4	normal	1228	1243	
(9)	190 dias	max. est.	1297	5.1	normal	1306	1309
		apoio s/ pil.	1297	5.1	normal	1305	1309
		meio-vão	1264	9.6	normal	1280	1287
	100 anos	max. est.	1241	22.8	normal	1279	1294
		apoio s/ pil.	1239	23.0	normal	1277	1293
meio-vão		1204	24.4	normal	1244	1261	
(10)	190 dias	max. est.	1307	5.0	normal	1316	1319
		apoio s/ pil.	1306	5.1	normal	1315	1318
		meio-vão	1242	8.1	normal	1256	1261
	100 anos	max. est.	1235	23.2	normal	1273	1289
		apoio s/ pil.	1233	23.4	normal	1272	1288
meio-vão		1171	23.6	normal	1210	1226	



a) combinação (9) - 190 dias



b) combinação (9) - 100 anos

Fig. 7.30 - Distribuição das tensões máximas de tracção na armadura de pré-esforço para a combinação rara (9).

Os valores das tensões de compressão no betão associados à probabilidade de rotura  $10^{-2}$  (o maior valor observado no Quadro 7.17 é 9.4 MPa) satisfazem largamente o valor limite imposto para as acções raras:

$$\sigma_{c,\max} = 9.4 \text{ MPa} < 0.6f_{ck} = 15.0 \text{ MPa} \quad . \quad (7.10)$$

Por sua vez, os valores das tensões de tracção na armadura de pré-esforço associadas a  $p_f = 10^{-2}$  (o maior valor observado no Quadro 7.18 é 1320 MPa) satisfazem o valor limite imposto para as acções raras:

$$\sigma_{p,\max} = 1320 \text{ MPa} > 0.75f_{pk} = 1395 \text{ MPa} \quad . \quad (7.11)$$

- *Considerações sobre os resultados obtidos*

De uma maneira geral, a estrutura observa as condições impostas aos estados limites de utilização. Excepção é feita ao nível da tensão instalada na armadura de pré-esforço para as acções quase permanentes. Verifica-se que excede ligeiramente o valor máximo imposto de  $0.65f_{pk}$ . No entanto, como para as acções raras esse nível de tensão não ultrapassa o valor admissível de  $0.75f_{pk}$ , aquela excedência não é muito significativa.

Verifica-se que em termos das grandezas a controlar no betão, tensões de compressão e fendilhação, os valores estão muito aquém dos limites máximos impostos. Este facto, associado com a constatação do parágrafo anterior, faz pressupor que o efeito produzido pelo pré-esforço sobrepõe-se fortemente ao efeito de flexão provocado pelas acções verticais descendente. Além disso, como existe alguma reserva de segurança ao estado limite de deformação, a força de pré-esforço poderia ser diminuída permitindo assim ser considerada uma menor quantidade de armadura.

Finalmente, saliente-se a importância relativa dos parâmetros que caracterizam o comportamento diferido. Assim, a análise de sensibilidade permitiu constatar que a fluência tem uma importância significativa nos primeiros tempos, sendo numa fase posterior a retracção do betão aquela que mais condiciona o comportamento diferido. Esta importância preponderante da retracção do betão a longo prazo em relação à fluência só é possível, devido ao nível de pré-esforço instalado que atenua significativamente o efeito de flexão referido.

#### 7.5.4 – Verificação da segurança aos estados limites últimos

Neste ponto apresenta-se a análise da segurança em relação aos estados limites últimos de resistência. No estudo realizado consideraram-se duas combinações fundamentais (ver Quadro 7.6):

$$(1) \quad P + \gamma(G + Q + 0.6\Delta T_{ver});$$

$$(2) \quad P + \gamma(G + Q + 0.6\Delta T_{inv}).$$

A resposta estrutural, em termos de capacidade resistente, é definida pelo coeficiente  $\gamma$  associado à combinação de acções que conduz ao colapso. A variabilidade da resposta foi obtida por simulação de Monte Carlo. Comparativamente aplicaram-se também as técnicas da superfície de resposta.

Nos parágrafos seguintes apresentam-se os resultados da análise de segurança ordenados pelas seguintes etapas: sensibilidade do coeficiente de colapso,  $\gamma$ , às variáveis aleatórias básicas obtida pelo estudo de correlação-regressão da metodologia baseada no método de Monte Carlo (MMC) e pelo estudo de filtragem de variáveis da metodologia baseada na superfície de resposta (MSR); e, quantificação da probabilidade de rotura através do estudo da distribuição do coeficiente  $\gamma$ , obtido por simulação de Monte Carlo e pelas técnicas de fiabilidade aplicadas à superfície de rotura.

- *Análise de sensibilidade*

Na Fig. 7.31 apresenta-se os coeficientes de correlação linear corrigidos,  $s_{corr}$ , obtidos da análise de correlação-regressão entre  $\gamma$  e as variáveis básicas, recorrendo à simulação de Monte Carlo. O efeito da variabilidade espacial é ilustrado na Fig. 7.32, através da representação dos coeficientes de correlação de algumas variáveis mais relevantes. Na Fig. 7.33 ilustra-se o estudo de filtragem realizado com a metodologia baseada na superfície de resposta, através da representação dos coeficientes  $(b\sigma)^{rel}$  definidos pela expressão (5.65).

Antes de se analisar a importância relativa das variáveis básicas para a capacidade resistente da estrutura, destaque-se a semelhança dos resultados obtidos pelas duas metodologias e o facto dos valores associados às duas combinações últimas serem idênticos. Assim, a consideração de diferentes valores reduzidos da acção térmica, nas duas combinações referidas, não influenciou significativamente as sensibilidades relativas. No que diz respeito à semelhança dos resultados obtidos pela MMC e pela MSR, constata-se que ambas as metodologias identificam as mesmas variáveis relevantes com graus de importância idênticos.

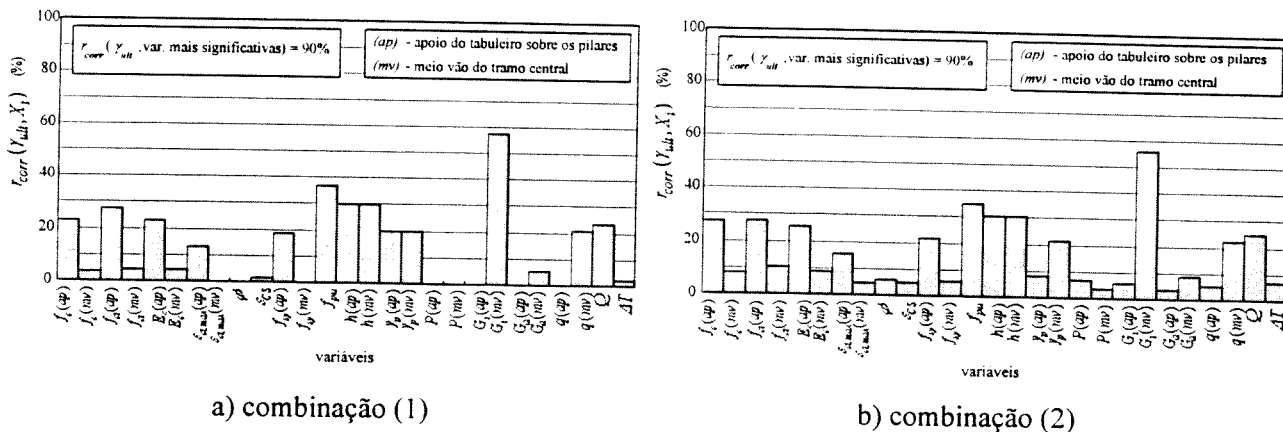


Fig. 7.31 - Sensibilidade do coeficiente de colapso,  $\gamma$ , às variáveis básicas para combinações últimas, pela MMC.

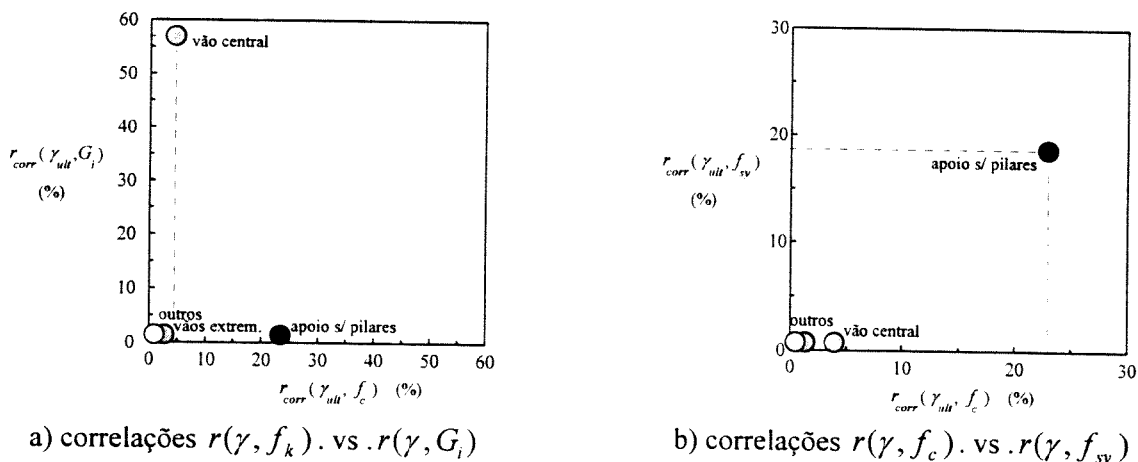


Fig. 7.32 - Sensibilidade do coeficiente de colapso,  $\gamma$ , a algumas variáveis básicas, para combinações últimas, pela MMC.

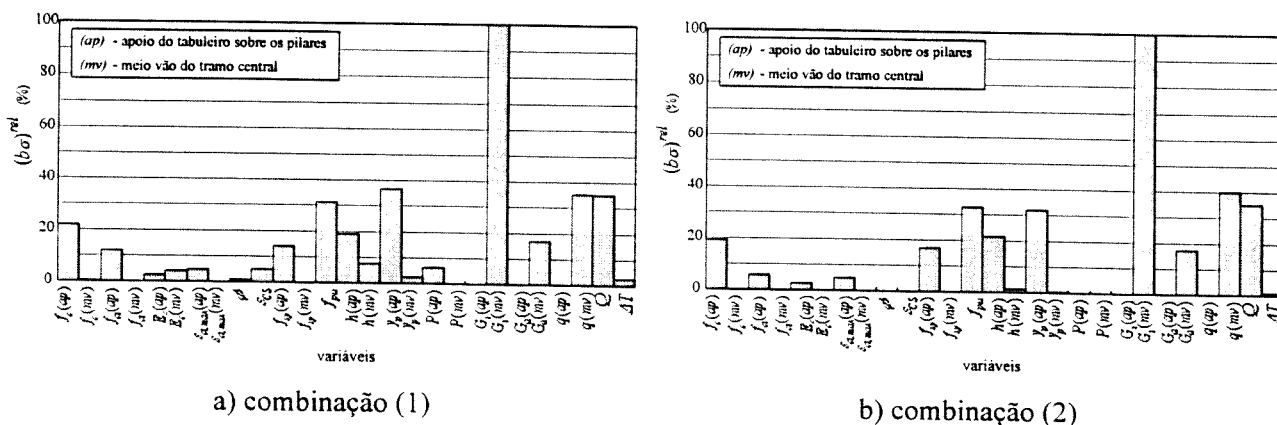


Fig. 7.33 - Sensibilidade do coeficiente de colapso,  $\gamma$ , às variáveis básicas para combinações últimas, pela MSR.

De acordo com os resultados ilustrados nas Figs. 7.31 a 7.33 verifica-se que:

- as zonas críticas, meio vão do tramo central e zonas do tabuleiro apoiadas sobre os pilares, desempenham um papel fundamental no comportamento último da estrutura;
- as variáveis preponderantes são aquelas que representam as acções verticais, especialmente o peso próprio, e os parâmetros que traduzem o comportamento não linear dos materiais,  $f_c$ ,  $f_{sy}$  e  $f_{pu}$  (note-se que a discrepância dos resultados referentes a  $f_{ct}$  e  $E_c$  resultam do facto da análise de sensibilidade pela MMC ter em conta a correlação elevada dessas variáveis com  $f_c$  enquanto que no processo de filtragem da MSR essa correlação não é considerada), a geometria da estrutura,  $h$ , e o efeito de flexão do pré-esforço traduzido pela geometria da armadura de pré-esforço,  $\gamma_p$ ;
- as variáveis que traduzem o comportamento diferido do betão têm uma importância insignificante para a variabilidade da carga de colapso;
- a variação de temperatura,  $\Delta T$ , a variabilidade da força de pré-esforço,  $P$  (traduzida pela incerteza associada às perdas) e a deformação última do betão fendilhado,  $\epsilon_{ctm}$ , têm também uma importância relativamente pequena para a variabilidade da resposta última.

• Variabilidade da resposta última

A simulação de Monte Carlo, tendo em conta a variabilidade das variáveis básicas definida no Quadro 7.5, resultou nas distribuições ilustradas na Fig. 7.34 para as combinações últimas (1) e (2). Conforme se pode observar, a distribuição é praticamente simétrica, mas apresenta a extremidade inferior ligeiramente prolongada, afastando-se da distribuição normal.

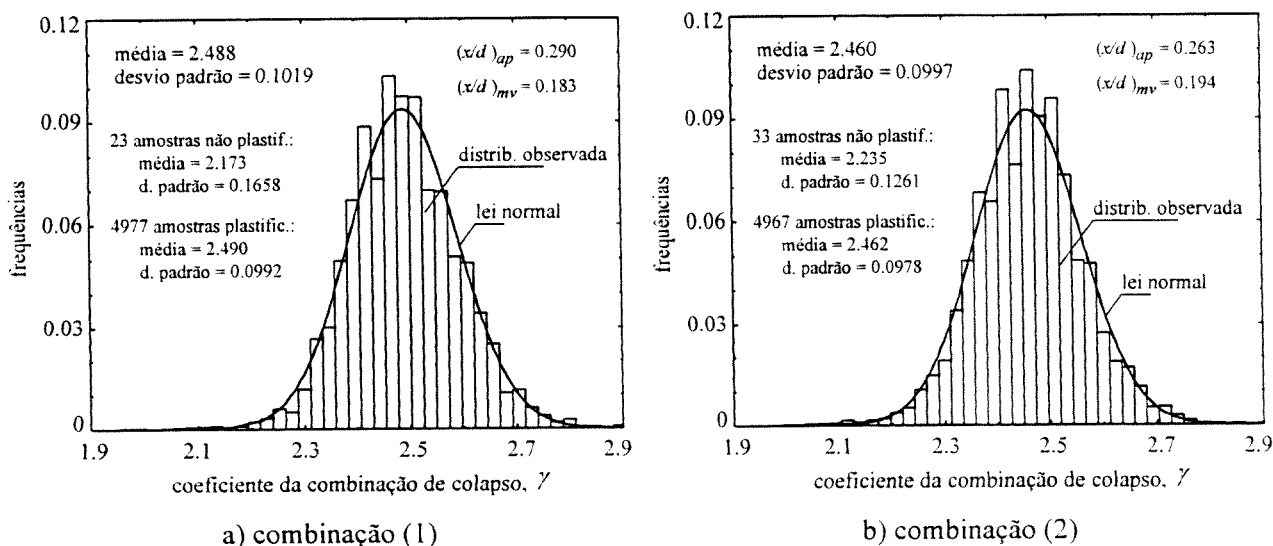


Fig. 7.34 - Distribuição do coeficiente  $\gamma$  para combinações últimas, obtidas pela MMC.



Os resultados referentes às distribuições referidas encontram-se descritos no Quadro 7.19. Verifica-se que em praticamente todas as amostras (99%) a rotura da estrutura foi acompanhada por plastificação das armaduras. A distribuição global do coeficiente último,  $\gamma$ , resulta da mistura de duas distribuições associadas, respectivamente, a respostas dúcteis (roturas com plastificação das armaduras) e respostas frágeis (roturas sem plastificação das armaduras).

Quadro 7.19 - Caracterização das distribuições obtidas pela MMC.

Casos	Combinação (1)	Combinação (2)
Todas as amostras	valor médio: 2.488 desvio padrão: 0.1019 distribuição tipo: mistura de duas leis normais informações adicionais: - posições relativas do eixo neutro: • apoio sobre pilares: $x/d = 0.390$ • meio vão central: $x/d = 0.183$ - tipo de rotura mais frequente: • esgotamento da capacidade resistente na secção de apoio sobre os pilares acompanhado por plastificação das armaduras.	valor médio: 2.460 desvio padrão: 0.0997 distribuição tipo: mistura de duas leis normais informações adicionais: - posições relativas do eixo neutro: • apoio sobre pilares: $x/d = 0.263$ • meio vão central: $x/d = 0.194$ - tipo de rotura mais frequente: • esgotamento da capacidade resistente na secção de apoio sobre os pilares acompanhado por plastificação das armaduras.
Amostras com rotura dúctil	valor médio: 2.490 desvio padrão: 0.0992 coef. assimetria: 0.21 coef. achatamento: 0.24 distribuição tipo: normal percentagem de amostras p/ este caso: 99.5%	valor médio: 2.490 desvio padrão: 0.0992 coef. assimetria: 0.18 coef. achatamento: 0.35 distribuição tipo: normal percentagem de amostras p/ este caso: 99.3%
Amostras com rotura frágil (sem plastificação das armaduras)	valor médio: 2.173 desvio padrão: 0.1658 coef. assimetria: -0.14 coef. achatamento: 0.26 distribuição tipo: normal percentagem de amostras p/ este caso: 0.5%	valor médio: 2.235 desvio padrão: 0.1261 coef. assimetria: -0.15 coef. achatamento: -0.75 distribuição tipo: normal percentagem de amostras p/ este caso: 0.7%

• *Avaliação da segurança*

A segurança da estrutura aos estados limites últimos de resistência, avaliada através das distribuições obtidas pela MMC, é definida através das expressões (5.45) e (5.46) apresentadas no Capítulo 5. Assim, é possível determinar, alternadamente, qual a probabilidade de rotura associada ao coeficiente  $\gamma$  que identifica a condição mínima de rotura ( $S = R \Rightarrow \gamma = 1$ , representando  $S$  o efeito das acções e  $R$  a capacidade resistente), ou o valor admissível,  $\gamma_{adm}$ ,

associado à probabilidade de rotura  $p_f = 10^{-5}$  (valor previamente definido para este tipo de estrutura).

Utilizando os valores apresentados no Quadro 7.19, a probabilidade de ser violado o estado limite último de resistência é estimada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 p_f = P(\gamma \leq 1) &= \max\{P_f^{ductil}; P_f^{fragil}\} \\
 &= \max\left\{0.995 \cdot \Phi\left(\frac{1-\mu}{\sigma}\right); 0.005 \cdot \Phi\left(\frac{1-\mu}{\sigma}\right)\right\} \\
 &= \max\left\{0.995 \cdot \Phi\left(\frac{1-2.490}{0.0992}\right); 0.005 \cdot \Phi\left(\frac{1-2.173}{0.1658}\right)\right\} \\
 &= 0.5 \times 10^{-12}
 \end{aligned} \quad (7.12)$$

Alternativamente o valor admissível para a probabilidade de rotura  $10^{-5}$  é estimado da forma seguinte:

$$\begin{aligned}
 \gamma_{adm} &= \min\{\gamma_{adm}^{ductil}; \gamma_{adm}^{fragil}\} \\
 &= \min\left\{\gamma\left[\Phi^{-1}\left(\frac{10^{-5}}{0.995}\right)\right]; \gamma\left[\Phi^{-1}\left(\frac{10^{-5}}{0.005}\right)\right]\right\} \\
 &= \min\{\gamma[\beta=4.27]; \gamma[\beta=2.88]\} \\
 &= \min\{2.490 - 4.27 \times 0.0992; 2.173 - 2.88 \times 0.1658\} \\
 &= 1.69
 \end{aligned} \quad (7.13)$$

Comparativamente, aos resultados obtidos nas expressões (7.12) e (7.13) pela MMC, apresenta-se a avaliação da segurança de acordo com a análise efectuada pela aplicação da MSR. Atendendo à semelhança de resultados obtidos para as duas combinações, apresenta-se somente os valores relativos à combinação (1). Os coeficientes de sensibilidade (cosenos directores do vector tangente à superfície de resposta no ponto de dimensionamento), as coordenadas do ponto de dimensionamento,  $X^*$  (distância mínima da superfície de resposta à origem do espaço das variáveis normais reduzidas) e o índice de fiabilidade,  $\beta$ , obtidos através da MSR encontram-se indicados no Quadro 7.20.

Uma vez conhecido o índice de fiabilidade,  $\beta$ , é possível estimar a probabilidade de rotura através da função distribuição da lei normal reduzida:

$$p_f = \phi(-\beta) = \phi(-7.52) = 0.3 \times 10^{-13} \quad (7.14)$$

Este valor é da ordem de grandeza da probabilidade de rotura estimada pela MMC (ver expressão 7.12). A discrepância de valores deve-se, sobretudo, à não normalidade de algumas variáveis

básicas preponderantes e à ligeira não normalidade da resposta observada na simulação através da MMC. Quanto aos valores de  $X^*$  e  $\alpha_i$ , confirmam a análise de filtragem efectuada quanto à importância relativa das variáveis básicas.

Quadro 7.20 - Resultados da análise de segurança aos estados limites últimos pela MSR, para a combinação (1).

Índice de fiabilidade: $\beta = 7.52$												
Variáveis do modelo	$f_c^{ap}$ (MPa)	$f_{sy}^{ap}$ (MPa)	$\Delta h^{ap}$ (m)	$\Delta h^{mv}$ (m)	$f_{pu}$ (MPa)	$\Delta y_p^{ap}$ (m)	$\Delta y_p^{mv}$ (m)	$g^{mv}$ (kN/m)	$q^{mv}$ (kN/m)	$Q$ (kN)	$f_{ct}^{ap}$ (MPa)	$E_c^{ap}$ (MPa)
Coordenadas do ponto de dimensionamento, $X^*$	32.0	429	-0.017	-0.012	1911	0.009	-0.008	-150	-103	-174	2.4	30.1
Coefficientes de sensibilidade, $\alpha_i$	0.03	0.06	0.08	0.06	0.12	-0.06	0.05	0.43	0.87	0.10	0.06	0.03

- *Considerações sobre os resultados obtidos*

A comparação entre os resultados obtidos pela MMC e pela MSR permitem confirmar a adequação da análise usando superfícies de resposta, desde que as distribuições das variáveis aleatórias do problema não se afastem muito do comportamento estatístico normal. As diferenças observadas em termos de avaliação da segurança ficaram-se a dever em grande parte à não normalidade presente em algumas variáveis aleatórias (incluindo a resposta).

Registe-se também o número relativamente pequeno de variáveis relevantes para a resposta última, quando comparado com o número total de variáveis básicas consideradas inicialmente (incluindo as variáveis independentes que resultam da consideração da variabilidade espacial). Este aspecto é relevante em termos da diminuição do volume de cálculo e caracteriza a situação típica em termos de variáveis relevantes para um problema de análise de segurança estrutural. No que diz respeito aos tempos de computação envolvidos na análise deste exemplo, observaram-se os seguintes valores: 640 minutos na MMC e 205 minutos na MSR (incluindo a fase de filtragem das variáveis). Estes tempos, obtidos num computador HP 9000 série 700, devem-se sobretudo ao cálculo das respostas estruturais correspondentes às sucessivas amostragens. Desta forma constata-se a maior eficácia da MSR na resolução deste exemplo.

Por fim, refira-se que a presente estrutura verifica, por ampla margem, a segurança aos estados limites últimos de resistência para as combinações que envolvam as acções consideradas neste estudo.

### 7.5.5 – Reavaliação da segurança

A reavaliação da segurança de uma estrutura, quando alguma das variáveis aleatórias básicas sofre alterações relativamente às condições inicialmente previstas, pode ser realizada de forma simples e rápida. Relativamente à MSR, a reavaliação consiste em utilizar a mesma função de resposta, uma vez que não depende da distribuição das variáveis. Por sua vez, na MMC a reavaliação é feita por simulação usando o modelo de regressão multilinear obtido da análise de correlação-regressão.

Atendendo ao facto da reavaliação da segurança através da MSR não conduzir a alterações significativas na metodologia utilizada, uma vez conhecida a função de resposta, será destacada a reavaliação utilizando a MMC.

A ilustração da reavaliação da segurança será feita considerando a combinação última de acções, identificada por combinação (1). Será considerado o caso demonstrativo em que a sobrecarga é superior aos valores considerados na análise efectuada.

De acordo com a análise de correlação-regressão realizada, o modelo de regressão multilinear é caracterizado pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \gamma = & 2.32 + 1.63 \times 10^{-3} f_c^{ap} + 0.695 \times 10^{-3} f_{sy}^{ap} + 1.14 \Delta h^{ap} + 0.78 \Delta h^{mv} + \\ & 0.94 \times 10^{-3} f_{pu} - 0.87 \Delta y_p^{mv} + 0.78 \Delta y_p^{ap} - 0.013 g^{mv} - 0.013 q^{mv} - 0.001 Q + \\ & 0.35 \times 10^{-3} f_{ct}^{ap} + 3.35 \times 10^{-6} E_c^{ap} \end{aligned} \quad , \quad (7.15)$$

(Unidades: tensões - MPa; geometria - m; acções kN/m e kN),

onde as variáveis têm o significado descrito no Quadro 7.5, sendo a variabilidade espacial traduzida pelos sobre-índices  $ap$  e  $mv$  que indicam, respectivamente, as zonas do tabuleiro apoiada sobre os pilares e o meio vão central. O coeficiente de correlação corrigido obtido para este modelo é  $r_{corr} = 0.90$ .

A determinação dos resíduos entre os valores obtidos da simulação de Monte Carlo e os valores correspondentes ao modelo de regressão identificado pela expressão anterior (Fig. 7.35), permite avaliar a qualidade desse modelo.

Os resíduos apresentam uma média nula e um desvio padrão de 0.0426. O erro associado ao cálculo de  $\gamma$  pela equação (7.15) é estimado por (ver expressão 5.35 do Capítulo 5):

$$\varepsilon_\gamma = \sqrt{1 - 0.90^2} \cdot 0.0426 = 0.019 \quad . \quad (7.16)$$

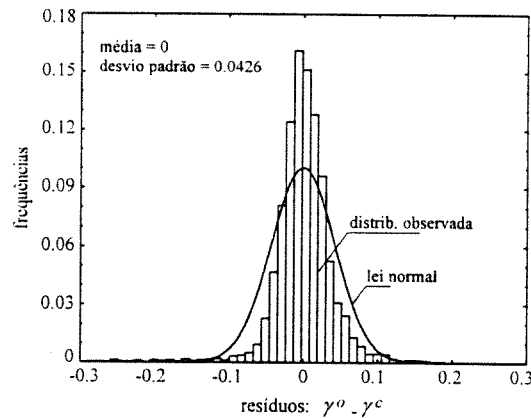


Fig. 7.35 - Distribuição dos resíduos do modelo de regressão multilinear.

De acordo com a expressão (7.16) o erro associado ao modelo de regressão é relativamente pequeno. No entanto, os resíduos apresentam uma distribuição não normal, por isso, o erro esperado pode ser superior àquele estimado.

Supondo, por hipótese, que as sobrecargas aumentavam em média 20% em relação aos valores considerados na análise. A simulação de Monte Carlo, usando o modelo de regressão multilinear (7.15) resulta numa nova distribuição do coeficiente último,  $\gamma'$ , aproximadamente normal e com os seguintes parâmetros:

- valor médio:  $\gamma'_m = 2.213$ ;
- desvio padrão:  $\sigma_{\gamma'} = 0.1584$ .

Considerando a probabilidade de rotura de  $10^{-5}$  ( $\beta = 4.27$ ), o novo valor admissível para  $\gamma$  seria:

$$\gamma'_{adm} = 2.213 - 4.27 \times 0.1584 = 1.54 \quad . \quad (7.17)$$

Comparando com o valor obtido em (7.13), verifica-se que houve um decréscimo de cerca de 10%, embora se continue a verificar a condição de segurança.

### 7.5.6 – Conclusões

As conclusões respeitantes à análise da segurança aos estados limites já foram apresentadas durante a análise dos resultados. Neste ponto são salientadas as mais importantes.

De acordo com os resultados obtidos é possível concluir que a estrutura em causa oferece segurança adequada aos fins a que se destina. Seria, no entanto, de aconselhar a aplicação de uma força de pré-esforço menos elevada atendendo, sobretudo, ao nível de tensão instalado na

respectiva armadura para as combinações quase permanente de acções e à reserva de segurança avaliada.

Em relação ao estudo das condições de serviço verifica-se que o efeito provocado pelo pré-esforço instalado atenua fortemente o efeito da flexão provocado pelas acções verticais. Este efeito repercutiu-se no comportamento diferido da estrutura, ao diminuir a importância da fluência do betão relativamente às deformações a longo prazo provocadas pela retracção do mesmo betão.

Para além da verificação de tensões na armadura de pré-esforço para as acções permanentes, o estado limite que conduziu a valores com menor margem de segurança foi o estado limite de deformação. No entanto, essa margem de segurança é ainda suficiente para assegurar a segurança se, por exemplo, o pré-esforço instalado fosse ligeiramente menor.

A comparação da MMC e da MSR efectuada na verificação da segurança aos estados limites últimos permitiu constatar a adequação da MSR no estudo deste tipo de problemas, desde que as variáveis aleatórias relevantes em jogo (incluindo a resposta estrutural) tenham uma distribuição que não se afaste em demasia da lei normal. Constatou-se ainda que a reavaliação da segurança através de uma destas metodologias resulta num processo simples e rápido.

## **7.6 – CONSIDERAÇÕES FINAIS**

A caracterização pormenorizada da resposta estrutural de uma passagem superior da auto-estrada Porto-Braga, acompanhada por uma análise probabilística exaustiva, foram apresentadas no presente capítulo. Este exemplo permitiu também mostrar a utilidade prática das metodologias descritas no Capítulo 5 na análise do desempenho estrutural e na avaliação da segurança de estruturas de betão. O modelo numérico estrutural foi aferido através da comparação com resultados experimentais obtidos pelo Núcleo de Observação de Estruturas do LNEC.

A avaliação da segurança aos estados limites foi realizada através de critérios que permitem ter em conta a variabilidade das principais grandezas através de distribuições adequadas. Foram também considerados os efeitos diferidos (envelhecimento, fluência e retracção do betão e relaxação na armadura de pré-esforço) na análise efectuada.

O estudo realizado permitiu, além da quantificação da segurança, identificar as variáveis e as zonas relevantes para cada um dos estados limites abordados. A análise e a discussão dos resultados obtidos permitiu aferir a solução de projecto utilizada e apontar alguns aspectos que, eventualmente, poderiam ser considerados em alternativa.

## Capítulo 8

# CONCLUSÕES

### 8.1 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na avaliação adequada da segurança não basta a consideração de técnicas que descrevam com rigor as variabilidades envolvidas se os métodos de análise não traduzirem convenientemente o comportamento estrutural. Por outro lado, a consideração de modelos complexos que descrevam realisticamente o comportamento estrutural não são suficientes se não traduzirem adequadamente a aleatoriedade dos fenómenos envolvidos neste tipo de problemas.

Presentemente, as inconsistências observadas nos principais regulamentos de estruturas de betão e a indefinição quanto à forma mais adequada de lidar com as incertezas associadas a este tipo de problemas têm-se revelado como o principal entrave à aplicação prática de métodos mais rigorosos. Assim, o caminho a seguir para obter avanços mais significativos na aplicação deste tipo de métodos de análise estrutural deverá ser a consideração de regras adequadas sem qualquer tipo de ambiguidades. Essas regras deverão ter uma base probabilística e ter em conta directamente as variabilidades associadas a estes problemas.

No âmbito da presente dissertação desenvolveram-se modelos de análise não linear, em regime permanente ou transitório, de estruturas de betão e métodos probabilísticos e estatísticos para a avaliação da segurança. A conjugação destas técnicas resultou na elaboração de metodologias avançadas de análise de segurança. Como se constatou neste trabalho, estas metodologias permitiram:

- servir de base à definição de propostas de regras simplificadas de verificação da segurança que podem complementar os formatos regulamentares;

- avaliar o comportamento e a segurança de estruturas com padrões desde os mais correntes aos menos usuais, possibilitando inclusivamente a consideração de dados experimentais obtidos directamente da obra ou através de bases de dados;
- reavaliação adequada da segurança de estruturas através da consideração dos valores reais.

Tendo em conta as potencialidades dos métodos desenvolvidos e as aplicações efectuadas, considera-se que os objectivos inicialmente propostos foram plenamente atingidos.

## 8.2 - CONCLUSÕES E OBSERVAÇÕES FINAIS

A aplicação de métodos probabilísticos na verificação da segurança quando se utilizam modelos de análise não linear baseados nas técnicas de elementos finitos está, sobretudo, condicionada por dois factores: o rigor e a eficácia. O primeiro requisito é essencial para obter resultados fiáveis. Neste aspecto, a consideração do comportamento não linear das estruturas condiciona fortemente a aplicação de algumas técnicas de fiabilidade clássicas baseadas no conceito de normalidade da resposta estrutural. Por outro lado, os métodos de simulação básicos requerem a consideração de amostras de tamanho elevado para garantirem erros de estimação pequenos. Esta característica pode conduzir a tempos de cálculo proibitivos quando se utilizam modelos não lineares usando elementos finitos.

Tendo em vista estabelecer bases sólidas para as formulações desenvolvidas, efectuou-se um trabalho de pesquisa bibliográfica no campo da avaliação da segurança (ou fiabilidade) de estruturas.

Nos parágrafos seguintes destacam-se sumariamente as conclusões mais relevantes que se podem extrair do trabalho de investigação realizado.

### *Modelação estrutural e acções*

- Desenvolveram-se e implementaram-se formulações para os seguintes tipos de elementos finitos: elemento de viga de Timoshenko, elemento quadrático plano, elemento de casca plana, elemento de descontinuidade e elemento unidimensional curvilíneo.
- Os elementos finitos adoptados revelaram-se eficazes e adequados na idealização dos problemas analisados.



- A formulação específica implementada para representar o comportamento singular de zonas das estruturas, nomeadamente, as descontinuidades resultantes da geometria (por exemplo, aparelhos de apoio) ou da evolução da resposta ao longo do carregamento (por exemplo, concentração de elevados graus de plastificação em secções críticas - rótulas plásticas), revelou-se bastante adequada e versátil.
- A simulação de cabos de pré-esforço através de um elemento finito apropriado permitiu definir com rigor a sua contribuição para a matriz de rigidez da estrutura e a introdução natural da força de pré-esforço associando-a ao alongamento provocado na respectiva armadura, que é posteriormente transmitida à estrutura.
- A contribuição das diferentes acções (com carácter mecânico e não mecânico) para a definição do vector das forças nodais equivalentes permite traduzir com rigor os respectivos efeitos na estrutura.
- A abordagem das variabilidades correntes na geometria dos elementos estruturais de betão e nas acções contempladas pelo presente modelo permitiram estabelecer uma base de dados (regulamentares e experimentais) para a definição de modelos probabilísticos adequados à análise de segurança.

### *Modelos constitutivos*

- O modelo de comportamento do betão estrutural mostrou-se adequado à análise não linear e transitória tendo em conta os efeitos diferidos.
- As relações constitutivas adoptadas para descrever o comportamento instantâneo do betão têm em conta:
  - o critério de resistência máxima proposto pelo MC90 que mostrou ser bastante eficaz na determinação da capacidade portante do betão quando sujeito a estados de tensão multiaxial;
  - a formulação elasto-plástica aplicada ao critério mencionado no parágrafo anterior para a representação do comportamento do betão não fendilhado;
  - o modelo de fendilhação distribuída que considera os mecanismos de interacção entre as armaduras e o betão envolvente;
  - dois modos de fractura: esmagamento por compressão e fendilhação por tracção.

- O comportamento diferido do betão é convenientemente traduzido através de relações adequadas que descrevem o seu envelhecimento, a retracção e a fluência.
- A definição do modelo de comportamento elasto-plástico unidimensional para o aço e a consideração da relaxação das armaduras pré-esforçadas teve, de modo idêntico aos anteriores, um adequado desempenho.
- Abordaram-se as variabilidades associadas aos parâmetros mecânicos mais relevantes dos materiais, tendo-se realçado as diferenças entre os resultados medidos em provetes e os valores realmente obtidos nas estruturas; e, as diferenças entre os valores experimentais da retracção e da fluência e os valores estimados pelas relações teóricas.
- O estudo de exemplos comparativos com resultados fornecidos por outros autores permitiu comprovar a adequação do modelo desenvolvido.

#### *Metodologias de avaliação da segurança*

- A metodologia de verificação da segurança, definida com base nos princípios de simulação de Monte Carlo e em técnicas estatísticas de tratamento de resultados, permitiu desenvolver uma ferramenta de aplicação geral, rigorosa e mais eficiente que as técnicas de simulação básicas.
- Os procedimentos implementados com base nesta metodologia permitem controlar, durante o processo de amostragem, o erro de simulação e possibilitam ainda analisar a sensibilidade da resposta em relação às variáveis básicas.
- A metodologia da superfície de resposta desenvolvida com base nas técnicas clássicas de fiabilidade revelaram-se mais eficazes desde que o número de variáveis aleatórias relevantes para a variabilidade da resposta não seja elevado (inferior a cerca de 20), no entanto, em respostas estruturais que apresentem uma distribuição marcadamente não gausseana o rigor desta metodologia vem acentuadamente afectado.
- A metodologia mista baseada no conceito de amostragem por importância revelou potencialidades a serem desenvolvidas, ao tirar partido do rigor da metodologia de Monte Carlo e a eficiência da metodologia da superfície de resposta.
- As metodologias de segurança desenvolvidas permitem a consideração adequada da variabilidade real dos parâmetros envolvidos na definição do comportamento estrutural, permitindo não só a avaliação de estruturas novas como a reavaliação de estruturas existentes, ou seja, sempre que haja informação nova relevante.

- Na implementação computacional destas metodologias além do rigor e da generalidade, deu-se especial atenção à eficiência e à modularidade. Assim, maximizou-se a utilização da memória disponível no computador e evitou-se o armazenamento de variáveis em disco, tornando o processo de cálculo mais rápido. Por sua vez, a modularidade facilita a realização de futuras implementações simultaneamente nos dois campos de investigação, análise e fiabilidade, ou num deles isoladamente.

### *Aplicações*

- A aplicação das metodologias desenvolvidas na discussão de propostas alternativas aos formatos de segurança e aos valores propostos pela actual regulamentação permitiu confirmar as potencialidades dos modelos computacionais implementados.
- O estudo de avaliação da quantidade mínima de armadura através da presente abordagem probabilística forneceu um conjunto de valores perfeitamente adaptado para o projecto de estruturas de betão, de acordo com as variabilidades e os níveis de risco fixados regulamentarmente.
- A aplicação da metodologia de Monte Carlo na avaliação da segurança última de estruturas porticadas permitiu realçar os principais problemas associados aos formatos de segurança regulamentares quando aplicados a métodos de análise não linear. Os resultados obtidos desta aplicação permitiram constatar a importância das respostas dúcteis e frágeis na fixação do coeficiente de segurança. Permitiram ainda constatar o papel fundamental, entre outros parâmetros, da posição do eixo neutro nas secções críticas, nomeadamente, na secção onde ocorre a rotura. O formato de segurança proposto com base neste estudo revelou-se adequado para o estudo de estruturas porticadas sujeitas predominantemente a esforços de flexão.
- A utilidade prática do presente trabalho é demonstrada na análise do desempenho estrutural e na avaliação da segurança de um viaduto. O estudo efectuado para os vários estados limites permitiram confirmar que a estrutura oferece segurança adequada às acções e às variabilidades consideradas. Verificou-se também que os estados limites de utilização são aqueles que mais condicionam a solução de dimensionamento. Observou-se ainda que em condições de serviço, o efeito provocado pelo pré-esforço sobrepõe-se ao efeito de flexão devido às acções verticais. Assim, verificou-se que o grau de pré-esforço poderia ser diminuído.
- Neste exemplo foi possível também constatar a simplicidade na reavaliação da segurança com as presentes metodologias.

### 8.3 - ORIENTAÇÕES PARA FUTUROS DESENVOLVIMENTOS

Nos parágrafos seguintes sugerem-se algumas orientações de especial interesse para eventuais desenvolvimentos futuros no domínio de aplicação em que se insere o presente trabalho. Assim, de uma forma genérica salientam-se os seguintes temas:

- A recolha de dados sobre os valores das grandezas envolvidas na avaliação da segurança e a realização de ensaios experimentais que caracterizem o comportamento realista das estruturas é fundamental para a calibração dos modelos numéricos, a aferição das metodologias desenvolvidas e o estabelecimento de modelos adequados às incertezas dessas grandezas. A construção de uma vasta base de dados que permita colmatar o conhecimento escasso tanto ao nível dos materiais (por exemplo, as grandezas relativas ao comportamento reológico), como da geometria dos elementos estruturais e das acções, é essencial para apoiar de forma fundamentada a definição e o estudo de conceitos alternativos de segurança.
- A reavaliação da segurança de estruturas existentes é um problema de interesse actual no campo da reabilitação e manutenção do património arquitectónico e habitacional, não sendo abordado na maioria das presentes normas e recomendações. A possibilidade de ter em conta os dados efectivamente medidos na verdadeira estrutura permite a aplicação rigorosa e completa das metodologias desenvolvidas no presente trabalho. Deste modo, é possível estabelecer de forma mais objectiva soluções para a resolução deste tipo de problemas.
- A realização de estudos em estruturas reticuladas com variadas geometrias é um trabalho que precisa de ser efectuado para aferir e, possivelmente, complementar o formato proposto no Capítulo 6 para a verificação da segurança aos estados limites últimos de estruturas porticadas sujeitas a esforços de flexão, quando se aplicam métodos de análise não linear.
- Extensão do formato simplificado de segurança referido no ponto anterior a estruturas porticadas onde o efeito de corte seja preponderante e, ainda, a estruturas laminares (por exemplo, lajes) onde o conceito de secção crítica não se aplica convenientemente. Neste último caso, será de interesse tirar partido do conceito de energia de deformação plástica referido no Capítulo 6 para definir um formato simplificado.
- A avaliação do ganho de eficácia da metodologia mista (ver Capítulo 5) em relação às metodologias de Monte Carlo (MMC) e da superfície de resposta (MSR), desenvolvidas no presente trabalho, é um estudo que deverá ser efectuado de uma

forma mais exaustiva através da consideração de um conjunto mais vasto de exemplos. Eventualmente, este estudo poderá conduzir a implementações que permitam ainda um ganho acrescido de eficácia.

- Desenvolvimento de metodologias simplificadas de avaliação da segurança com base probabilística (por exemplo, métodos de perturbação), com possibilidade de detecção dos casos em que as hipóteses simplificativas subjacentes a este tipo de métodos não se aplicam. A implementação do processo de escolha de variáveis relevantes a conservar na análise probabilística e da análise de misturas estatísticas é de grande interesse no campo da fiabilidade de sistemas não lineares.
- Tendo presente que os parâmetros de resistência,  $R(t)$ , e das solicitações,  $S(t)$ , podem variar com o tempo, o problema geral de avaliação da fiabilidade estrutural deverá também ter em conta essa variação temporal (ver secção 2.2.5.6 no Capítulo 2). Embora não fosse um dos objectivos propostos para este trabalho, o estudo da variabilidade temporal é um assunto importante sobretudo na modelação de algumas acções como, por exemplo, a sobrecarga do tráfego em pontes, o sismo, o vento, etc., assim como na evolução do comportamento diferido das estruturas.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

### A

- AASHTO - American Association of State Highway and Transportation Officials (1989) – "Guidelines for strength evaluation of existing steel and concrete bridges".
- ACI Committee 209 (1982) – "Prediction of creep, shrinkage and temperature effects in concrete structures", Designing for Creep and Shrinkage in Concrete Structures, ACI SP-76, American Concrete Institute, pp. 193-301.
- Ahmad, S.; Irons, B.M.; Zienkiewicz, O.C. (1970) – "Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements", Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 2, pp. 419-451.
- Aïvazian, S.; Énukov, I.; Méchalkine, L. (1986) – "Éléments de modélisation et traitement primaire des données" – Édition MIR-Moscou.
- Aïvazian, S. (1978) – "Étude statistique des dependences", Édition MIR-Moscou, 2ème édition.
- Allen, D.E. (1993) – "Safety criteria for the evaluation of existing structures", IABSE Colloquium 'Remaining Structural Capacity', Copenhagen, pp. 77-84.
- Almunia, J.A.S. (1993) – "Evaluación del comportamiento funcional y de la seguridad estructural de puentes existentes de hormigón armado y pretensado", Tesis Doctoral, Escola Tècnica Superior D'Enginyers de Camins, Canals I Ponts, Universitat Politècnica de Catalunya.
- Andersen, E.Y.; Andersen, N.H. (1988) – "Structural reliability of existing bridges", International Symposium on Re-evaluation of Concrete Structures, Reliability and load carrying capacity, Technical University of Denmark, Copenhagen-Lingby, pp. 415-426.
- Ang, A.H.-S.; Amin, M. (1968) – "Reliability of structural systems", ASCE J. Eng. Mech. Div., Vol. 94, N° EM2.
- Ang, A.H.-S.; Tang, W.H. (1975) – "Probability concepts in engineering planning and design, Vol. I: Basic principles", John Wiley & Sons, New York.

Ang, A.H.-S.; Tang, W.H. (1984) – "Probability concepts in engineering planning and design", Vol. II, John Wiley & Sons, New York.

ASCE Task Committee (1982) – "Finite element analysis of reinforced concrete (state of the art report)", ASCE, New York.

Augusti, G.; Baratta, A.; Casciati, F. (1984) – "Probabilistic methods in structural engineering", Chapman and Hall.

Ayyub, B.M.; White, G.J. (1987) – "Reliability-conditioned partial safety factors", ASCE J. Struct. Div., Vol. 113, N° 2, pp. 279-294.

## **B**

Baecher, G. (1982) – "Sampling with decomposed variance", ASCE J. Mech. Div., N° EM5.

Barbosa, J.A.T. (1992) – "Análise não linear por elementos finitos de placas e cascas reforçadas", Tese de Doutorado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

Barros, J.A.O. (1995) – "Comportamento do betão reforçado com fibras. Análise experimental e simulação numérica", Tese de Doutorado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

Basler, E. (1961) – "Untersuchung über der sicherheitsbegriff von bauwerken", Schweizerarchiv für angewandts wissenschaft un Technik, Heft 4.

Bathe, K.J. (1982) – "Finite element procedures in engineering analysis", Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

Bazant, Z.P. (1982) – "Mathematical models for creep and shrinkage of concrete", Creep and Shrinkage in Concrete Structures, Z.P. Bazant and F.H. Witmann ed., John Wiley and Sons, pp. 163-256.

Bazant, Z.P. (1983) – "Probabilistic problems in prediction of creep and shrinkage effects in structures", Fourth International Conference on Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering, G. Augusti *et al* eds., University of Florence, Italy, Pitagora Editrice, Bologna, pp. 325-356.

Bazant, Z.P. (1985a) – "Probabilistic analysis of creep effects in concrete structures", 4th International Conference on Structural Safety and Reliability (ICOSSAR'85), I. Konishi, A.H.-S. Ang and M. Shinozuka ed., Kobe, Japan, Vol. 1, pp. I.331-I.341.

Bazant, Z.P. (1988) – "Material models for structural creep analysis", Mathematical Modelling of Creep and Shrinkage of Concrete, Z.P. Bazant ed., John Wiley and Sons, pp. 99-215.

Bazant, Z.P.; Chern, J.C. (1985b) – "Concrete creep at variable humidity", RILEM Materials and Structures, Vol. 18, N° 103, pp. 1-20.

- Bazant, Z.P.; Chern, J.C. (1987) – "Stress-induced thermal and shrinkage strains in concrete", ASCE J. Eng. Mech., Vol. 111, N° 10, pp. 1493-1511.
- Bazant, Z.P.; Kim, J.-K.; Panula, L. (1991) – "Improved prediction model for time-dependent deformation of concrete, part I: Shrinkage", Mat. and Struct., Vol. 24, N° 143, pp. 327-345.
- Bazant, Z.P.; Liu, K.-L. (1985c) – "Random creep and shrinkage in structures: sampling", ASCE J. Struct. Eng., Vol. 111, N° ST5, pp. 1113-1134.
- Bazant, Z.P.; Panula, L. (1978) – "Practical prediction of time-dependent deformations of concrete", RILEM Materials and Structures, Vol. 11, N° 65, pp. 307-328, Vol. 11, N° 66, pp. 415-434, (1979), Vol. 12, N° 69, pp. 169-183.
- Bazant, Z.P.; Panula, L. (1984) – "Practical prediction of creep and shrinkage of high strength concrete", RILEM Matériaux et Constructions, Vol. 17, N° 101, pp. 375-378.
- Bazant, Z.P.; Wu, S.T. (1973) – "Dirichlet series creep function of aging concrete", ASCE J. Eng. Mech. Div., Vol. 99, N° 2, pp. 367-387.
- Bea, R.G. (1980) – "Reliability considerations in offshore platform criteria", ASCE J. Struct. Div., Vol. 106, ST9, pp. 1835-1852.
- Beer, G. (1985) – "An isoparametric joint/interface element for finite element analysis", Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 21, pp. 585-600.
- Belytschko, T.; Tsay, C.S.; Liu, W.K. (1981) – "A stabilization matrix for the bilinear Mindlin plate element", Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 29, pp. 313-327.
- Benjamin, J.R.; Cornell, C.A. (1970) – "Probability, statistics and decision for civil engineers", McGraw-Hill, New York.
- Bez, R. (1989) – "Modélisation des charges dues au trafic routier", These N° 793. École Polytechnique Federale de Lausanne.
- Bjæger, P. (1990) – "Methods for structural reliability computations", Course on: General Principles and Applications in Mechanics of Solids and Structures, International Center for Mechanical Sciences, Udine, Italy.
- Bloem, D.L. (1968) – "Concrete strength in structures", American Concrete Institute, Vol. 65, N° 3, pp. 178-187.
- Bolotin, V.V. (1965) – "Statistical methods in structural mechanics", Holden-Day Inc., London.
- Bouberguig, A. (1983) – "Calcul static des coques nervurées et précontraintes", Thèse de Doctorat, Ec. Pol. Féd. Lausanne.



- Branco, F.A. (1984) – "Pontes mistas em caixão - Aspectos de comportamento na fase construtiva", Tese de Doutoramento, Instituto Superior Técnico, Lisboa.
- Branco, F.A.; Mendes, P. (1993) – "Thermal actions for concrete bridge design", ASCE J. Struct. Eng. Div., Vol. 119, Nº 8.
- Breitung, K. (1984) – "Asymptotic approximations for multinormal integrals", ASCE J. Eng. Mech., Vol. 110, Nº 3, pp. 357-366.
- BRISA (1988) – "Passagem superior 41, auto-estrada Porto-Braga, sub-lanço Famalicão-Cruz", BRISA, Auto-Estradas de Portugal, S.A..
- Broding, W.C.; Diederich, F.W.; Parker, P.S. (1964) – "Structural optimization and design based on a reliability design criterion", J. Spacecraft, Vol. 1, nº 1, pp. 56-61.
- Bruls, A.; Calgaro, J.A.; Mathieu, H.; Prat, M. (1996) – "The main models of traffic loads on road bridges. Background studies", IABSE Reports, Vol. 74, IABSE Conference 'Basis of Design and Actions on Structures. Background and application of Eurocode 1', Delft, pp. 215-227.
- Bucher, C.G.; Bourgund, U. (1990) – "A fast and efficient response surface approach for structural reliability problems", Structural Safety, Vol. 7, pp. 57-66.

## C

- Calgaro, J.A. (1996) – "Introduction aux Eurocodes. Sécurité des constructions et bases de la théorie de la fiabilité", Presses de L'École Nationale de Ponts et Chaussées, Paris.
- Calgaro, J.A.; Sedlacek, G. (1992) – "Traffic loads on bridges", IABSE Reports, Vol. 65, IABSE Conference 'Structural Eurocodes', Davos, pp. 81-87.
- Calvi, G.M.; Gobetti, A. (1987) – "Numerical models for the nonlinear analysis of prestressed concrete frames", IABSE Colloquium, Delft, pp. 229-236.
- Câmara, J.; Vinagre, J.; Pinto, A. (1994) – "Metodologia para verificação da segurança em análises não lineares", Encontro Nacional 'Betão Estrutural 1994', incluindo o 5º Encontro Nacional sobre Estruturas Pré-Esforçadas, Fac. de Engenharia da Univ. do Porto, pp. 373-383.
- Campbell, R.H.; Tobin, R.E. (1967) – "Core and cylinder strengths of natural and lightweight concrete", American Concrete Institute, Vol. 64, Nº 4, pp. 190-195.
- Casciati, F.; Negri, I.; Rackwitz, R. (1991) – "Geometrical variability in structural members and systems. A critical review of available data on buildings", Joint Committee on Structural Safety, IABSE, Zürich.
- CEB, Comité Euro-International du Béton (1975) – "Manuel sécurité des structures. Concepts généraux, charges et actions - 2<sup>ème</sup> partie", Bulletin d'Information Nº 107.

- CEB, Comité Euro-International du Béton (1980a) – "Manuel de Sécurité", Bulletin d'Information N° 127.
- CEB, Comité Euro-International du Béton (1980b) – "Manuel de Sécurité", Bulletin d'Information N° 128.
- CEB, Comité Euro-International du Béton (1983) – "Response of structural concrete critical regions under large amplitude reversed actions", Bulletin d'Information N° 161.
- CEB, Comité Euro-International du Béton (1984) – "Structural effects of time-dependent behaviour of concrete", Bulletin d'Information N° 142/142 Bis.
- CEB, Comité Euro-International du Béton (1985) – "Thermal effects in concrete structures", Bulletin d'Information N° 167.
- CEB, Comité Euro-International du Béton (1990a) – "CEB-FIP Model Code 1990. First Draft", Bulletin d'Information N° 195-196.
- CEB, Comité Euro-International du Béton (1990b) – "Evaluation of the time dependent behaviour of concrete", Bulletin d'Information N° 199.
- CEB, Comité Euro-International du Béton (1993) – "Ductility-reinforcement", Progress report of Task Group 2.2 - 'Ductility requirements for structural concrete-reinforcement', Bulletin d'Information n° 218.
- CEB, Comité Euro-International du Béton (1995a) – "High performance concrete: recommended extensions to the Model Code 90", Bulletin d'Information n° 228.
- CEB, Comité Euro-International du Béton (1995b) – "New developments in non-linear analysis methods", Bulletin d'Information n° 229.
- CEB, Comité Euro-International du Béton (1997) – "Non-linear analysis. Discussion papers from the working party in comission 1", Bulletin d'Information n° 239.
- CEB-FIP, Comité Euro-International du Béton (1978) – "International system of unified standard codes of practice for structures", Volume I, 'Common unified rules for different types of construction and material', CEB-FIP International Recommendations, 3<sup>rd</sup> Edition.
- CEB-FIP, Comité Euro-International du Béton (1993) – "CEB-FIP Model Code 1990 - Design code", Ed. Thomas Telford.
- Cedolin, L.; Dei Poli, S. (1977) – "Finite element studies of shear - critical RC beams", ASCE J. Eng. Mech. Div., Vol. 103, N° 3, pp. 395-410.
- CEN, Comité Européen de Normalisation (1994) – "Steel for the reinforcement of concrete weldable ribbed reinforcing steel B500 - Technical delivery conditions for bars, coils and welded fabric", European Prestandard - prEnv 10080.

- Cervenka, V. (1985) – "Constitutive model for cracked reinforced concrete", *ACI Journal*, Vol. 82, Nº 6, pp. 877-882.
- Chen, W.F. (1982) – "Plasticity in reinforced concrete", McGraw-Hill, New York.
- Çinlar, E. (1982) – "Probabilistic approach to deformations of concrete", *Creep and shrinkage in Concrete Structures*, Z.P. Bazant and F.H. Wittmann eds., John Wiley and Sons, pp. 51-86.
- CIRIA - Construction Industry Research and Information Association (1977) – "Rationalisation of safety and serviceability factors in structural codes", Report 63, CIRIA, London.
- Coelho, E.P.M.F. (1992) – "Comportamento sísmico de estruturas em pórtico de betão armado", Tese de Doutoramento, Instituto Superior Técnico, Lisboa.
- Cornelissen, H.A.W.; Hordjik, D.A., Reinhardt, H.W. (1986) – "Experiments and theory for the application of fracture mechanics to normal and lightweight concrete", *Fracture Toughness and Fracture Energy*, F.H. Wittmann ed., Elsevier, pp. 565-575.
- Cornell, C.A. (1969) – "A probability based structural code", *J. Amer. Conc. Inst.*, Vol. 66, Nº 12, pp. 974-985.
- Coutinho, A.S.; Gonçalves, A. (1994) – "Fabrico e propriedades do betão", Vol. III, LNEC, Lisboa.
- Crisfield, M.A. (1991) – "Non-linear finite element analysis of solid and structures", Vol. 1 - Essentials, John Wiley and Sons, Chichester, U.K..
- Croce, P.; Salvatore, W.; Sanpaolesi (1997) – "Stochastic modelling of traffic loads for multilane effect evaluation", *Advances in Safety and Reliability, ESREL'97 International Conference on Safety and Reliability*, Lisbon, Pergamon, pp. 1237-1244.
- Cruz, P.J.S. (1994) – "Un modelo para el análisis no lineal y diferido de estructuras de hormigón y acero construidas evolutivamente", Univ. Politècnica de Catalunya, Barcelona.

## **D**

- Delgado, R.M. (1986) – "O método dos elementos finitos na análise dinâmica de barragens incluindo a interacção sólido-líquido", Tese de Doutoramento, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- Devalapura; Tadros (1992) – "Critical assessment of ACI-318 eq. 18-3 for prestressing steel stress at ultimate flexure", *ACI Struct. Journal*, pp. 538-546.
- Devictor, N.; Marques, M.; Lemaire, M. (1997) – "Adaptive use of response surfaces in the reliability computations of mechanical components", *Advances in Safety and Reliability, ESREL'97 International Conference on Safety and Reliability*, Lisbon, Pergamon, pp. 1269-1277.

Ditlevsen, O. (1982) – "System reliability bounds by conditioning", ASCE J. Eng. Mech. Div., Vol. 108, N° EM5.

Ditlevsen, O. (1991) – "Bayesian decision analysis as a tool for structural engineering decisions", COMMET-Advanced Short Course on Structural Reliability and Load Modelling, Lingby (Copenhagen).

Ditlevsen, O.; Madsen, H.O. (1991) – "Proposal for a code for the direct use of reliability methods in structural design", COMMET-Advanced Short Course on Structural Reliability and Load Modelling, Lingby (Copenhagen).

## **E**

EC1-1 (1994) – CEN, European Prestandard ENV 1991-1, "Eurocode 1 - Basis of design and actions on structures. Part 1: Basis of design".

EC1-2 (1994) – CEN, European Prestandard ENV 1991-2-4, "Eurocode 1 - Part 2.4: Imposed loads on buildings".

EC1-3 (1994) – CEN, European Prestandard ENV 1991-3, "Eurocode 1 - Part 3: Traffic loads on bridges".

EC2-1 (1991) – CEN, European Prestandard ENV 1992-1-1, "Eurocode 2 - Design of concrete structures".

EC2-2 (1994) – CEN, European Prestandard prENV 1992-2, "Eurocode 2 - Design of concrete structures. Part 2: Concrete bridges".

Efron, B. (1982) – "The jackknife, the bootstrap and other resampling plans", CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, Vol. 38, SIAM.

Efron, B.; Tibshirani, R.J. (1993) – "An introduction to the bootstrap", Chapman and Hall.

Eibl, J. (1990) – "Open problems and identification of possible future work within CEB", CEB - Bulletin d'Information N° 194, pp. 105-116.

Eibl, J. (1991) – "Safety considerations for nonlinear analysis", IABSE, Vol. 62, Stuttgart, pp. 337-342.

Eibl, J.; Schmidt-Hurtienne, B. (1995) – "General outline of a new safety format", CEB - Bulletin d'Information N° 229, pp. 33-48.

Ellingwood, B.; Galambos, T.V.; MacGregor, J.G.; Cornell, C.A. (1980) – "Development of a probability based load criterion for american national standard A58", National Bureau of Standards, NBS Special Publication 577, Washington, D.C..

Engelund, S.; Rackwitz, R. (1992) – "Experiences with experimental design schemes for failure surface estimation and reliability", Sixth Speciality Conference on Probabilistic Mechanics and Structural and Geotechnical Reliability, ASCE, pp. 252-255.

Espion, B. (1993) – "Benchmark examples for creep and shrinkage analysis computer programs", Fifth International RILEM Symposium, Creep and Shrinkage of Concrete, Z.P. Bazant and I. Carol ed., Barcelona, E & FN Spon, pp. 877-888.

## **F**

Faber, M.H.; Lauridsen, J. (1996) – "Reliability based reassessment of an existing concrete bridge - A case study", Bridge Management 3, Ed. J.E. Harding, G.E.R. Parke and M.J. Ryall, E & FN Spon.

Faravelli, L. (1989) – "Response surface approach for reliability analysis", ASCE J. Eng. Mech. Div., Vol. 115, Nº 12, 2763-2781.

Farra, B. (1995) – "Influence de la résistance du béton et de son adhérence avec l'armature sur la fissuration", Ph.D. Thesis at École Polytechnique Fédérale de Lausanne, nº 1359.

Feenstra, P.H. (1993) – "Computational aspects of biaxial stress in plain and reinforced concrete", Dissertation, Delft University of Technology.

Ferry-Borges, J.; Castanheta, M. (1968) . "Structural safety", Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa.

Ferry-Borges, J. (1982) . "Quality assurance and reliability of concrete structures", CEB Bulletin d'Information Nº 147.

Fiessler, B.; Neumann, H.-J.; Rackwitz, R. (1979) – "Quadratic limit states in structural reliability", ASCE J. Eng. Mech., Vol. 105, Nº 4, pp. 661-676.

Figueiras, J.A. (1983) - Ultimate load analysis of anisotropic and reinforced concrete plates and shells", Ph. D. Thesis, C/Ph/72/83, Univ. College of Swansea.

Figueiras, J.A. (1997) – "Verificação aos estados limites de utilização", Curso sobre a nova Regulamentação para o Projecto de Estruturas de Betão. DECivil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

Figueiras, J.A.; Póvoas, R.H.C.F.; Henriques, A.A.R. (1990) – "Análise da zona de apoio de vigas pré-esforçadas (Ponte de Macau)", 2<sup>as</sup> Jornadas Portuguesas de Engenharia de Estruturas, incluindo o 3º Encontro Nacional sobre Estruturas Pré-Esforçadas, Lisboa, pp. B.111-B.122.

Floegl, H.; Mang, H.A. (1982) – "Tension stiffening concept based on bond slips", ASCE J. Struct. Div., Vol. 108, Nº 12, pp. 2681-2701.

Florian, A. (1992) – "An efficient sampling scheme: updated latin hypercube sampling", Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 7, pp. 123-130.

Freudenthal, A.M. (1947) – "The safety of structures", Transaction, ASCE. Vol. 112, pp. 125-180.

Freudenthal, A.M. (1956) – "Safety and the probability of structural failure", Transaction, ASCE, Vol. 121, pp. 1137-1197.

Freudenthal, A.M.; Garrelts, J.M.; Shinozuka, M. (1966) – "The analysis of structural safety", ASCE J. Struct. Div., Vol. 92, ST2.

## G

Garcia, M.T.P.O.S.L. (1995) – "Retracção e fluência do betão observadas *in situ*", Tese de Mestrado, Instituto Superior Técnico, Lisboa.

Gilbert, R.I.; Warner, R.F. (1978) – "Tension stiffening in reinforced concrete slabs", ASCE J. Struct. Div., Vol. 104, N° 2, pp. 1885-1900.

Gomes, R.J. (1962) – "Condiçõamentos climáticos da envolvente de edifícios para habitação", Memória n° 181, Laboratório Nacional de Engenharia Civil.

Gonçalves, A.F. (1987) – "Resistência do betão nas estruturas", Tese, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa.

Goyet, J. (1994) – "Fiabilité des structures: état de l'art. Application a la calibration des codes et à la requalification des structures existantes", Sollicitations Aléatoires - Principes et Applications Industrielles, IPSI - Institut Pour la Formation des Sciences de l'Ingenieur, Vol. XVIII, N° 1.

Grigoriu, M.D. (1983) – "Reliability of chain and ductile paralell systems", ASCE J. Eng. Mech. Div., Vol. 109.

Gulvanessian, H. (1996) – "ENV 1991-1: Eurocode 1 - Part 1: Basis of design. Introduction, development and Research Needs", IABSE Colloquium, Delft.

Guo, Z.; Zhang, X. (1987) – "Investigation of concrete stress-deformation curves for concrete in tension", ACI Materials Journal, Vol. 84, N° 4, pp. 278-285.

## H

Hall, P. (1992) – "The bootstrap and edgeworth expansion", Springer-Verlag.

Hasofer, A.M.; Lind, M.C. (1974) – "An exact and invariant first order reliability format", ASCE J. Mech. Eng. Div., Vol. 100, EM1.

- Henriques, A.A.R. (1991) – "Análise não linear de estruturas planas de betão pré-esforçado", Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- Henriques, A.A.R.; Calheiros, F.; Figueiras, J.A. (1994) – "A structural safety approach applied to non-linear methods of analysis", Computational Modelling of Concrete Structures, EURO-C 1994 International Conference, Vol. 2, Innsbruck, Austria, Pineridge, pp. 975-986.
- Henriques, A.A.R.; Calheiros, F.; Figueiras, J.A. (1996a) – "Methodology for the assessment of the structural behaviour of concrete bridges", Bridge Management 3, Ed. J.E. Harding, G.E.R. Parke and M.J. Ryall. E & FN Spon, pp. 138-146.
- Henriques, A.A.R.; Calheiros, F.; Figueiras, J.A. (1996b) – "Para um formato de segurança adequado à análise não linear de estruturas porticadas de betão", Relatório Técnico, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- Henriques, A.A.R.; Figueiras, J.A. (1988) – "Modelo de análise de vigas pré-esforçadas", 2º Encontro Nacional sobre Estruturas Pré-esforçadas, Porto.
- Henriques, A.A.R.; Figueiras, J.A. (1992a) – "Computational modelling of the nonlinear behaviour of concrete plate structures", Third International Conference on Computational Plasticity: Fundamentals and Applications, part I, Barcelona, Ed. D.R.J. Owen, E. Oñate and E. Hinton, Pineridge Press, pp. 729-740.
- Henriques, A.A.R.; Figueiras, J.A. (1992b) – "Análise de estruturas planas", 4º Encontro Nacional sobre Estruturas Pré-esforçadas, Grupo Português de Pré-Esforçado, Lisboa, pp. 1.1-1.13.
- Hillerborg, A. (1985a) – "The theoretical basis of a method to determine the fracture energy  $G_f$  of concrete", RILEM Materials and Structures, Vol. 18, N° 106, pp. 291-296.
- Hillerborg, A. (1985b) – "Results of three comparative test series for determining the fracture energy  $G_f$  of concrete", RILEM Materials and Structures, Vol. 18, N° 107, pp. 407-413.
- Hinton, E.; Owen, D.R.J. (1977) – "Finite element programming", Academic Press, London.
- Hinton, E.; Owen, D.R.J. (1981) – "An introduction to finite element computations", Pineridge Press Limited, Swansea, U.K..
- Hohenbichler, M.; Rackwitz, R. (1981) – "Non-normal dependent vectors in structural safety", ASCE J. Eng. Mech. Div., Vol. 107, N° 6, pp. 1227-1238.
- Holicky, M.; Vrouwenvelder, T. (1997) – "Time variant reliability of a reinforced concrete column", Advances in Safety and Reliability, ESREL'97 International Conference on Safety and Reliability, Lisbon, Pergamon, pp. 1307-1314.
- Hordjik, D.A. (1991) – "Local approach to fatigue of concrete", Dissertation, Delft University of Technology.

Hughes, T.R.J.; Cohen, M.; Haroun, M. (1978) – "Reduced and selective integration techniques in the finite element analysis of plates", Nuclear Engng. and Design, Vol. 46, pp. 203-222.

**I**

Ibrahim, Y. (1991) – "General strategy for structural systems reliability analysis", ASCE J. Struct. Div., Vol. 117, N° 3.

**J**

Jaccoud, J.-P (1995a) – "Proposition d'adaptation des normes pour le contrôle de la fissuration des structures en BHP. Contribution in structures en béton à hautes performances: Fissuration – Etanchéité – Durabilité", Journée d'étude SIA du 23 mars à l'EPFL. Published by Société Suisse de Ingénieurs et des Architectes in Documentation D0702, pp. 59-66.

Jaccoud, J.-P.; Farra, B.; Leclercq, A. (1995b) – "Tensile strength of concrete – Modulus of elasticity – Bond – Tension stiffening – Limit of Cracking", Internal report to the joint CEB/FIP Working Group on HSC/HPC. IBAP-EPF Lausanne.

Jaccoud, J.-P.; Leclercq, A. (1996) – "Some aspects concerning extension of present design rules to HPC-structures", IBAP, n° 143, EPF, Lausanne.

**K**

Kang, Y.J. (1977) – "Nonlinear geometric, material and time dependent analysis of reinforced and prestressed concrete frames", Ph.D. Dissertation, University of California, Berkeley.

Kang, Y.J.; Scordelis, A.C. (1980) – "Nonlinear analysis of prestressed concrete frames" ASCE J. Struct. Div., Vol. 106, N° 2, pp. 445-461.

Kanstad, T. (1993) – "Contribution to benchmark test n° 1, 2 and 3", Fifth International RILEM Symposium, Creep and Shrinkage of Concrete, Z.P. Bazant and I. Carol ed., Barcelona, E & FN Spon, pp. 901-911.

Kayser, J.R.; Nowak, A.S. (1989) – "Reliability of corroded steel girder bridges", Structural Safety, N° 6, pp. 53-66.

Kiureghian, A.D.; Ke, B.-J. (1988) – "The stochastic finite element method in structural reliability", Probabilist. Eng. Mech., Vol. 3, N° 2, pp. 83-91.

Kiureghian, A.D.; Lin, H.-Z.; Hwang, S.-J. (1987) – "Second-order reliability approximations", ASCE J. Eng. Mech. Div., Vol. 113, N° 8, pp. 1208-1225.

Kotsovos, M.D. (1983) – "Effect of testing techniques on the post-ultimate behaviour of concrete in compression", RILEM Materials and Structures, Vol. 16, N° 91, pp. 3-12.



- König, G.; Hosser, D.; Wittke, B. (1985) – "Basic notes on model uncertainties", CEB-Bulletin d'Information N° 170.
- König, G.; Nguyen, T.; Ahner, C. (1997) – "Consistent safety format", CEB-Bulletin d'Information N° 239, pp. 1-16.
- König, G.; Tue, N.; Pommerening, D. (1995) – "Safety concept for the application of nonlinear analysis in the design of concrete structures. General considerations", CEB-Bulletin d'Information N° 229, pp. 13-31.
- Kraker, A.; Tichler, J.W.; Vrowenvelder, T. (1987) – "Safety, reliability and service life of structures", HERON, Vol. 27, N° 1, Delft.
- Kupfer, H.B.; Gerstle, K.H. (1973) – "Behaviour of concrete under biaxial stresses", ASCE J. Eng. Div., Vol. 99, N° 4, pp. 853-866.
- Kupfer, H.B.; Hilsdorf, H.K.; Rusch, H. (1969) – "Behaviour of concrete under biaxial stresses", ACI Journal, Vol. 66, N° 8, pp. 656-666.

## L

- Leira, B.J. (1997) – "Design scenarios and code calibration reliability methods", Advances in Safety and Reliability, ESREL'97 International Conference on Safety and Reliability, Lisbon, Pergamon, pp. 1435-1442.
- Leitch, R.D. (1995) – "Reliability analysis for engineers. An introduction", Oxford University Press, London.
- Levi, F.; Marro, P.; Viara, G. (1995) – "Non-linear analysis of beams and frames", CEB - Bulletin d'Information N° 227.
- L'Hermite, R.(1955) – "Idées actuelles sur la technologie du béton", Ed. Inst. Tech. Bat. Trav. Publ., Paris.
- Lilliefors, H.W. (1967) – "On the Kolmogorov-Smirnov tests for normality with mean and variance unknown", Journ. Amer. Statist. Assoc., Vol. 62.
- Liu, P.-L.; Kiureghian, A.D. (1989) – "Finite element reliability methods for geometrically nonlinear stochastic structures", Report n° UCB/SEMM-89/05, Department of Civil Engineering, Division of Structural Mechanics, University of California, Berkeley.
- Liu, P.-L.; Kiureghian, A.D. (1991) – "Finite-element reliability of geometrically nonlinear uncertain structures", ASCE J. Eng. Mech. Div., Vol. 117, N° 8, pp. 1806-1825.
- Liu, W.K.; Besterfield, G.H.; Belytschko, T. (1988) – "Variational approach to probabilistic finite elements", ASCE J. Eng. Mech. Div., Vol. 114, N° 12, pp. 2115-2133.

LNEC (1990) – "Ensaio das obras de arte do lanço Maia-Cruz. Auto-estrada Porto-Braga", Relatório 9/90-NOE, Laboratório Nacional de Engenharia Civil.

Lo, S.-H. (1989) – "Stochastic finite element analysis", Ph.D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology.

Lourenço, P.B.; Póvoas, R.H.C.F.; Figueiras, J.A. (1992) – "Compared study of non-linear finite element analysis and the strut-and-tie model for concrete structures. A designer perspective", International Conference on Education, Practice and Promotion of Computational Methods in Engineering using Small Computers - EPMESC IV, Dalian, China.

## **M**

Macchi, G. (1995) – "Non-linear analysis. The CEB approach", CEB - Bulletin d'Information N° 229, pp. 7-12.

Madsen, H.O. (1988) – "Reliability updating of two offshore concrete structures", International Symposium on Re-evaluation of concrete structures, Reliability and load carrying capacity, Technical University of Denmark, Copenhagen-Lingby, pp. 299-307.

Madsen, H.O.; Krenk, S.; Lind, N.C. (1986) – "Methods of structural safety", Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J..

Magnan, J.P. (1982) – "Les méthodes statistiques et probabilistes en mécanique des sols", Presses de l'École National de Ponts et Chaussées.

Magura, D.D.; Sozen, M.A.; Siess, C.P. (1964) – "A study of stress relaxation in prestressing reinforcement", PCI Journal, Vol. 9, N° 2, pp. 13-57.

Mari, A.R. (1984) – "Nonlinear, geometrial, material and time dependent analysis of three dimensional reinforced and prestressed concrete frames", Report UCB/SESM-84/12, University of California, Berkeley.

Marchante, E.M. (1997) – "Monte Carlo simulation challenges in structural mechanics: an approach with PROMENVIR", Advances in Safety and Reliability, ESREL'97 International Conference on Safety and Reliability, Lisbon, Pergamon, pp. 1287-1292.

Mascarenhas, A.T. (1985) – "Utilidade sócio-económica, segurança estrutural e garantia de qualidade", ITES, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa.

Mascarenhas, A.T. (1992) – "Qualidade, segurança estrutural e riscos em engenharia de estruturas", Memória n° 784, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa.

Mayer, M. (1926) – "Die Sicherheit der Bauwerke und ihre Berechnung nach Grenzkraften anstatt nach zulässigen spanungen", Vorlag von Julius Springer, Berlin (traduções em inglês e espanhol publicadas por Intemac, Madrid, 1975).

- McKay, M.D.; Beckman, R.J.; Conover, W.J. (1979) – "A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code", *Technometrics*, 2, pp. 239-245.
- Melchers, R.E. (1987) – "Structural reliability. Analysis and prediction", Ellis Horwood Series in Civil Engineering.
- Mendes, P.A.M. (1989) – "Acção térmica diferencial em pontes de betão", Dissertação de Mestrado, Instituto Superior Técnico, Lisboa.
- Mendes, P.; Reis, A.J.; Branco, F. (1987) – "Acções térmicas diferenciais em tabuleiros de pontes em laje: Caracterização da situação portuguesa", *Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas*, Nº 28.
- Meyer, P.L. (1984) – "Probabilidade - Aplicações à estatística", Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2ª Edição, Rio e Janeiro, Brasil.
- Mirza, S.A.; Hatzinikolas, M.; MacGregor, J.M. (1979a) – "Statistical descriptions of strength of concrete", *ASCE J. Struct. Div.*, Vol. 105, Nº ST6, pp. 1021-1037.
- Mirza, S.A.; MacGregor, J.M. (1979b) – "Variations in dimensions of reinforced concrete members", *ASCE J. Struct. Div.*, Vol. 105, Nº ST4, pp. 751-766.
- Mirza, S.A.; MacGregor, J.M. (1979c) – "Variability of mechanical properties of reinforced bars", *ASCE J. Struct. Div.*, Vol. 105, Nº ST6, pp. 921-937.
- Moore, D.S.; McCabe. G.P. (1989) – "Introduction to the practice of statistics", W. H. Freeman and Company, New York.
- Moses, F. (1974) – "Reliability of structural systems", *ASCE J. Struct. Div.*, Vol. 100, Nº ST9, pp. 1813-1820.
- Moses, F. (1982) – "System reliability developments in structural engineering", *Structural Safety*, Vol. 1, pp. 3-13.

## N

- Navratil, J.; Florian, A. (1993) – "Time-dependent analysis of a cable stayed bridge with uncertainties in input parameters", Fifth International RILEM Symposium, Creep and Shrinkage of Concrete, Z.P. Bazant and I. Carol ed., Barcelona, Spain, E & FN Spon, pp. 623-628.
- Nelissen, L.J.M. (1972) – "Biaxial testing of normal concrete", *Heron*, Vol. 18, Nº 1, pp. 3-90.
- Neville, A.M.; Dilger, W.H.; Brooks, J.J. (1983) – "Creep of plain and structural concrete", Construction Press-Logman, London, U.K..
- NG (1996) – "Prediction of bridge service life using time-dependent reliability analysis", *Bridge Management* 3, Ed. J.E. Harding, G.E.R. Parke and M.J. Ryall, E & FN Spon.

- Novák, B.; Tue, N. (1994) – "Example 6 - Frame bridge", Eurocode 2 - Design of concrete structures. Part 2 - Concrete Bridges.
- Nowak, A.S. (1991) – "Calibration of LRDF bridge design code", Report NCHRP Project 12-33, Dept. Civil and Environmental Engineering, University of Michigan, Ann-Arbor.
- Nowak, A.S.; Tharmabala, T. (1988) – "Bridge reliability evaluation using load tests", ASCE J. Struct. Eng., Vol. 114, Nº 10, pp. 2268-2279.
- Nooru, M.B.-M. (1992) – "Mixed-mode fracture of concrete: an experimental approach", Dissertation, Delft University of Technology.
- NP ENV 206, Norma Portuguesa (1993) – "Betões: Comportamento, produção, colocação e critérios de conformidade", Instituto Português de Qualidade, Lisboa.

## O

- OCDE (1992) – "Bridge Management. Road transportation research", Paris.
- Okamura, H.; Maekawa, K. (1991) – "Nonlinear analysis and constitutive models of reinforced concrete", University of Tokyo, Japan.
- Oñate, E. (1992) – "Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos. Análisis estático lineal", Centro Int. de Métodos Numéricos en Ingeniería, 1ª Ed..
- Oñate, E.; Hinton, E.; Glober, N. (1978) – "Techniques for improving the performance of Ahmad shell elements", Rep. Nº C/R 313/78, Univ. College of Wales, Swansea.
- Onn, C.C. (1984) – "Nonlinear analysis of creep and shrinkage effects on reinforced concrete beams", Master of Science Thesis, C/M/182/84, Swansea, U.K..
- Orsero, P. (1994) – "Principles et méthodes de la dynamique aléatoire", Sollicitations Aléatoires - Principes et Applications Industrielles, IPSI - Institut Pour la Formation des Sciences de l'Ingenieur, Vol. XVIII, Nº 1.
- Ottosen, N.S. (1977) – "A failure criterion for concrete", ASCE J. Eng. Mech. Div., Vol. 103, Nº 4, pp. 527-535.
- Owen, D.R.J.; Hinton, E. (1980) – "Finite elements in plasticity: Theory and practice", Pineridge Press, Swansea, U.K..

## P

- Petersons, N. (1964) – "Strength of concrete in finished structures", Transactions of the Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden.
- Petersons, N. (1968) – "Should standard cube test specimens be replaced by test specimens taken from structures", Materiaux et Constructions, Vol. 1, Nº 5, pp. 425-435.
- Petersons, N. (1971) – "Recommendations for estimation of quality of concrete in finished structures", Materiaux et Constructions, Vol. 4, Nº 24.

- Petersson, P.E. (1981) – "Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials", Report TVBM-1006, Lund Institute of Technology, Division of Building Materials.
- Pipa, M.J.A.L. (1995) – "Ductilidade de elementos de betão armado sujeitos a acções cíclicas. Influência das características mecânicas das armaduras", Tese de Doutoramento, Instituto Superior Técnico, Lisboa.
- Póvoas, R.H.C.F. (1991) – "Modelos não-lineares de análise e dimensionamento de estruturas laminares de betão incluindo efeitos diferidos", Tese de Doutoramento, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- Póvoas, R.H.C.F.; Figueiras, J.A. (1989) – "Nonlinear analysis of prestressed concrete shells: Tendon formulation", Second International Conference on Computational Plasticity - Models, Software and Applications, Ed. D.R.J. Owen, E. Oñate and E. Hinton, Pineridge Press, Swansea, pp. 1379-1394.
- R**
- Rackwitz, R. (1982) – "First-order structural reliability - one methodological basis for the design of codes", CEB, Bulletin d'Information N° 147.
- Rackwitz, R.; Fiessler, B. (1978) – "Structural reliability under combined random load sequences", Computers and Structures, 9.
- Rajashekhar, M.R.; Ellingwood, B.R. (1993) – "A new look at the response approach for reliability analysis", Structural Safety, Vol. 12, pp. 205-220.
- Rajashekhar, M.R.; Ellingwood, B.R. (1995) – "Reliability of reinforced-concrete cylindrical shells", ASCE J. Struct. Div., Vol. 121, N° 2, pp. 336-347.
- Ranganathan, R.; Mistry, Z. (1992) – "Reliability analysis of a highway bridge", IABSE Colloquium 'Remaining Structural Capacity', Copenhagen, pp. 361-368.
- RBLH, Regulamento de Betões de Ligantes Hidráulicos (1989) – Decreto-Lei N° 445/89, Imprensa Nacional - Casa da Moeda, Lisboa.
- Reddy, J.N. (1985) – "An introduction to the finite element method", McGraw-Hill.
- Reis, A.J.; Appleton, J. (1983) – "Thermal-viscoelastic effects in prestressed concrete beams", Int. Symp. on Nonlinearity and Continuity in Prestressed Concrete Structures, Waterloo, Canada.
- Rito, A. (1987) – Projecto de estruturas da passagem superior 41. Auto estrada Porto-Braga, sublanço Famalicão-Cruz.

Roca, P. (1988) – "Un modelo de análisis no lineal para el estudio del comportamiento de estructuras laminares de hormigón pretensado", Tesis Doctoral, Univ. Politécnica de Cataluña, Barcelona

Roelfstra, P.E. (1987) – "Numerical simulation of time-dependent deformations under hygral and thermal transient conditions", Transactions of the 9<sup>th</sup> Int. Conf. on Struct. Mech. in Reactor Tech., Vol. H, F.H. Wittmann ed., Balkema, pp. 83-102.

RSA, Regulamento de Segurança e Acções para Estruturas de Edifícios e Pontes (1983) – Decreto-Lei nº 235/83, Imprensa Nacional - Casa da Moeda, Lisboa.

Rubinstein, R.Y. (1981) – "Simulation and the Monte Carlo method", John Wiley and Sons, New York.

## S

Sakata, K. (1993) – "Prediction of concrete creep and shrinkage", Fifth International RILEM Symposium, Creep and Shrinkage of Concrete, Z.P. Bazant and I. Carol, Barcelona, Spain, E & FN Spon, pp. 649-654.

Santos, J.A. (1993) – Prefácio de "Human factors in road traffic", Ed. Erches, Lisboa.

Santos, J.C.V.N. (1997) – "Avaliação dos efeitos de 2<sup>a</sup> ordem em edifícios de betão armado", Tese de Doutoramento, Instituto Superior Técnico, Lisboa.

Schellekens, J.C.J. (1990) – "Interface elements in finite element analysis", TU-Delft report nº 25-2-90-5-17.

Scordelis, A.C. (1983) – "Analytical models for nonlinear material, geometrical and time-dependent effects", International Symposium on Nonlinearity and Continuity in Prestressed Concrete, Vol. 2, Ed. M.Z. Cohn, pp. 25-43.

Sedlacek, G. (1992) – "Imposed loads on buildings", IABSE Reports, Vol. 65, IABSE Conference 'Structural Eurocodes', Davos, pp. 51-57.

Sedlacek, G.; Gulvanessian, H. (1996) – "Basis of design and actions on structures. Part 2.1: densities, self weight, imposed loads", IABSE Reports, Vol. 74, IABSE Conference 'Basis of Design and Actions on Structures. Background and application of Eurocode 1', Delft, pp. 61-70.

Shinozuka, M.; Deodatis, G. (1988) – "Response variability of stochastic finite element systems", ASCE J. Eng. Mech. Div., Vol. 114, Nº 3, pp. 499-519.

Shinozuka, M.; Zhang, R. (1996) – "Equivalence between Kriging and CPDF methods for conditional simulation", ASCE J. Eng. Mech. Div., Vol. 122, Nº 6, pp. 530-538.

Siemes, T.; Rostan, S. (1996) – "Durable safety and serviceability - a performance based design format", IABSE Colloquium, Delft, pp. 41-50.

- Silva, V.C.; Soares, I. (1996) – "Utilização do betão armado no reforço sísmico de edifícios de alvenaria. Caso dos edifícios 'de placa'", *Betão Estrutural* 1996, incluindo o 6º Encontro Nacional sobre Estruturas Pré-Esforçadas, LNEC, pp. 2.127-2.146.
- Silveira, A.P.C. (1993) – "A influência das acções térmicas no comportamento de pontes de betão armado pré-esforçado", Tese de Doutoramento, Instituto Superior Técnico, Lisboa.
- Spanos, P.D.; Ghanem, R. (1989) – "Stochastic finite element expansion for random media", *ASCE J. Eng. Mech. Div.*, Vol. 115, Nº 5, pp. 1035-1053.
- Stewart, M.G: (1996) – "Serviceability reliability analysis of reinforced concrete structures", *ASCE J. Struct. Eng.*, Vol. 122, Nº 7, pp. 794-803.
- T**
- Tassi, P. (1989) – "Methodes statistiques", 2º Édition, Collection 'Économie et statistiques avancées', Economica, Paris.
- Tassios, T. (1978) – "Relations multiples agissant sur la relation entre les resistances sur cylindres et sur cubes", *Mat. et Const.*, Vol. 11, Nº 62.
- Tasuji, M.E.; Slate, F.O.; Nilson, A.H. (1978) – "Stress-strain response and fracture of concrete in biaxial loading", *ACI Journal*, Vol. 75, Nº 7, pp. 306-312.
- Teigen, J.G.; Frangopol, D.M.; Sture, S. (1991a) – "Probabilistic FEM for nonlinear concrete structures. I: Theory", *ASCE J. Struct. Eng.*, Vol. 117, Nº 9, pp. 2674-2689.
- Teigen, J.G.; Frangopol, D.M.; Sture, S. (1991b) – "Probabilistic FEM for nonlinear concrete structures. II: Applications", *ASCE J. Struct. Eng.*, Vol. 117, Nº 9, pp. 2690-2707.
- Teles, M. (1985) – "Comportamento térmico de barragens de betão", Tese de Doutoramento, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- Thoft-Christensen, P.; Baker, M.J. (1982) – "Structural reliability theory and its application", Springer-Verlag.
- Thoft-Christensen, P.; Murotsu, Y. (1986) – "Application of structural systems reliability theory", Springer-Verlag, Berlin.
- Tiago de Oliveira, J. (1990) – "Probabilidades e estatística. Conceitos, métodos e aplicações", Volume I, McGraw-Hill.
- Ting, S.-C.; Nowak, A.S. (1991) – "Effect of tendon-area loss on flexural behaviour of P/C beams", *ASCE J. Struct. Eng.*, Vol. 117, Nº 4, pp. 1127-1143.
- Tomassone, R.; Lesquoy, E.; Miller, C. (1983) – "La régression – nouveaux regards sur une ancienne méthode statistique", Masson.
- Tsubaki, T. (1993) – "Uncertainty of prediction", Fifth International RILEM Symposium, Creep and Shrinkage of Concrete, Z.P. Bazant and I. Carol ed., Barcelona, Spain, E & FN Spon, pp. 831-847.

Tsubaki, T. *et al* (1988) – "Probabilistic models", *Mathematical Modelling of Creep and Shrinkage of Concrete*, Z.P. Bazant ed., John Wiley and Sons, pp. 311-383.

Tvedt, L. (1990) – "Distribution of quadratic forms in normal space - application to structural reliability", *ASCE J. Eng. Mech.*, Vol. 116, N° 6, pp. 1183-1197.

## U

UK-NAD (1996) – "UK National application document for ENV 1991:1", BSI.

Ulm, F.J. (1993) – "Deflections of simply supported partially prestressed concrete beam - Beam LT-0.5-Q", *Fifth International RILEM Symposium, Creep and Shrinkage of Concrete*, Z.P. Bazant and I. Carol ed., Barcelona, E & FN Spon, pp. 919-922.

## V

Val, D.; Bljoger, F.; Yankelevsky, D. (1994) – "Probabilistic analysis of R/C structures", *Computational Modelling of Concrete Structures, EURO-C 1994 International conference*, Vol. 2, Innsbruck, Austria, Pineridge, pp. 935-944.

Van Mier, J.G.M. (1984) – "Strain-softening of concrete under multiaxial loading conditions", *Dissertation, Eindhoven University of Technology*.

Van Zyl, S.F.; Scordelis, A.C. (1979) – "Analysis of curved, prestressed, segmental bridges", *ASCE J. Struct. Div.*, Vol. 105, N° 11, pp. 2399-2417.

Vanmarcke, E.H.; Grigoriu, M. (1983) – "Stochastic finite element analysis of simple beams", *ASCE – J. of Eng. Mech. Div.*, Vol. 109, N° 5, pp. 1203-1214.

Vaz, C.J.A.M.T. (1993) – "Comportamento sísmico de pontes com pilares de betão armado: verificação da segurança", *Tese de Doutoramento, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto*.

Vecchio, F.; Collins, M.P. (1982) – "The response of reinforced concrete to in-plane shear and normal stresses", *Publication N° 82-03, Department of Civil Engineering, University of Toronto*.

Verma, D. (1989) – "Calibration of bridge-strength evaluation code", *ASCE J. Struct. Div.*, Vol. 115, N° 6.

Vonk, R.A. (1992) – "Softening of concrete loaded in compression", *Dissertation, Eindhoven University of Technology*.

Vonk, R.A.; Rots, J.G. (1993) – "Simulation of time-dependent behaviour of concrete beams with Diana", *Fifth International RILEM Symposium, Creep and Shrinkage of Concrete*, Z.P. Bazant and I. Carol ed., Barcelona, E & FN Spon, pp. 892-900.



Vrouwenvelder, A. (1991) – "Joint Committee on Structural Safety", COMMET - Advanced Short Course on Structural Reliability and Load Modelling, Lingby (Copenhagen).

**W**

Wastiels, J. (1981) – "Failure criteria for concrete subjected to multiaxial stresses", Lecture held at Univ. of Illinois at Chicago Circle, Dept. of Material Engineering.

Wecharatana, M. (1986) – "Specimen size effects of non-linear fracture parameters in concrete", Fracture Toughness and Fracture Energy, F.H. Wittmann ed. Elsevier, pp. 437-440.

Wittmann, F.H. (1983) – "Structure of concrete with respect to crack formation", Fracture Mechanics of Concrete, F.H. Wittmann ed., Elsevier, pp. 43-74.

Wittmann, F.H.; Roelfstra, P.E. (1987) – "Constitutive relations for transient conditions", IABSE Coll. on Computational Mechanics of Concrete Structures - Advances and Applications, IABSE Reports, Vol. 54, pp. 239-259.

**Y**

Yankelevsky, D.Z.; Reinhardt, H.W. (1987a) – "Model for cyclic compressive behaviour of concrete", ASCE J. Struct. Eng. Div., Vol. 113, N° 2, pp. 228-240.

Yankelevsky, D.Z.; Reinhardt, H.W. (1987b) – "Response of plain concrete to cyclic tension", ACI Mat. Journal, Vol. 84, N° 5, pp. 365-373.

Yankelevsky, D.Z.; Reinhardt, H.W. (1989) – "Uniaxial behaviour of concrete in cyclic tension", ASCE J. Struct. Eng. Div., Vol. 115, N° 1, pp. 166-181.

Young, J.F. *et al* (1988) – "Physical mechanisms and their mathematical descriptions", Mathematical Modelling of Creep and Shrinkage of Concrete, Z.P. Bazant ed., John Wiley and Sons, pp. 63-98.

**Z**

Zhang, J.; Ellingwood, B. (1996) – "SFEM for reliability with material nonlinearities", ASCE J. Struct. Div., Vol. 122, N° 6, pp. 701-704.

Zienkiewicz, O.C. (1977) – "The finite element method", 3<sup>rd</sup> ed., McGraw-Hill, London.

Zienkiewicz, O.C.; Owen, D.R.J.; Phillips, D.V.; Nayak, G.C. (1972) – "Finite element methods in the analysis of reactor vessels", Nuclear Engng. and Design, Vol. 20, N° 2, pp. 507-541.

Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L.; Too, J.M. (1971) – "Reduced integration technique in general analysis of plates and shells", Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 3, pp. 275-290.

## **ANEXOS**

## Anexo 1

# DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE CORRENTES

### A1.1 - LEIS DE PROBABILIDADE DISCRETAS

#### A1.1.1 - Lei binomial, $B(n, p)$

Determina a probabilidade de obter exactamente  $x$  "sucessos" em  $n$  tentativas independentes.

Função de probabilidade:  $p(x) = C_x^n \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$ ,  $x = 0, 1, 2, \dots, n$

Moda:  $p \cdot (n+1) - 1 \leq Mo_x \leq p \cdot (n+1)$

Média:  $\mu_x = n \cdot p$

Desvio padrão:  $\sigma_x = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

Coefficiente de assimetria:  $\gamma_1 = \frac{1-2 \cdot p}{[n \cdot p \cdot (1-p)]^{1/2}}$

Coefficiente de achatamento:  $\gamma_2 = \frac{1-6 \cdot p \cdot (1-p)}{n \cdot p \cdot (1-p)}$

Notas:

1) 
$$C_x^n = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

2)  $p$  é a probabilidade de "sucesso" numa experiência com duas alternativas possíveis.

### A1.1.2 - Lei geométrica, $G(p)$

Determina a probabilidade da  $n$ -ésima tentativa ser "sucesso" depois das primeiras  $n-1$  tentativas terem sido "insucessos".

Função distribuição: 
$$F(n) = \sum_{k=0}^n (1-p)^{k-1} \cdot p = 1 - (1-p)^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Função de probabilidade: 
$$p(n) = (1-p)^{n-1} \cdot p, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Média: 
$$\mu_N = 1/p$$

Desvio padrão: 
$$\sigma_X = \sqrt{(1-p)/p^2}$$

Nota:  $p$  é a probabilidade de "sucesso" numa experiência com duas alternativas possíveis.

### A1.1.3 - Lei binomial negativa, $BN(k, p)$

Determina a probabilidade da  $k$ -ésima ocorrência de "sucesso" se dê na  $t$ -ésima tentativa.

Função de probabilidade: 
$$p(t) = C_{k-1}^{t-1} (1-p)^{t-k} \cdot p^k, \quad t = k, k+1, \dots$$

Média: 
$$\mu_T = k \cdot (1-p)/p$$

Desvio padrão: 
$$\sigma_X = \sqrt{k \cdot (1-p)/p^2}$$

Coefficiente de assimetria: 
$$\gamma_1 = \frac{2-p}{[k \cdot (1-p)]^{1/2}}$$

Coefficiente de achatamento: 
$$\gamma_2 = \frac{6 \cdot (1-p) + p^2}{k \cdot (1-p)}$$

Notas:

1) 
$$C_{k-1}^{t-1} = \frac{(t-1)!}{(k-1)!(t-k)!}$$

2)  $p$  é a probabilidade de "sucesso" numa experiência com duas alternativas possíveis

### A1.1.4 - Lei de Poisson, $P(\lambda)$

Determina a probabilidade de um dado número de ocorrências num intervalo (de tempo) definido, sabendo a taxa média de ocorrências,  $\lambda$ .

Função distribuição: 
$$F(x) = \sum_{k=0}^x \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

Função de probabilidade: 
$$p(x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}$$

Moda: 
$$\lambda - 1 \leq Mo_x \leq \lambda$$

Mediana: 
$$\lambda - 1 \leq Me_x \leq \lambda + 1$$

Média: 
$$\mu_x = \lambda$$

Desvio padrão: 
$$\sigma_x = \sqrt{\lambda}$$

Coeficiente de assimetria: 
$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

Coeficiente de achatamento: 
$$\gamma_2 = \frac{1}{\lambda}$$

## A1.2 - LEIS DE PROBABILIDADE CONTÍNUAS

### A1.2.1 - Lei normal ou gausseana, $N(\mu, \sigma)$

Distribuição frequentemente utilizada em casos práticos como caso limite de outras distribuições de probabilidade

Função distribuição: 
$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_x} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{s - \mu_x}{\sigma_x}\right)^2\right] ds, \quad x \in \mathfrak{R}$$

Função densidade: 
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_x} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x}\right)^2\right], \quad x \in \mathfrak{R}$$

Moda: 
$$Mo_x = \mu_x$$

Mediana: 
$$Me_x = \mu_x$$

Média: 
$$\mu_x$$

Desvio padrão:  $\sigma_X$

Coefficiente de assimetria:  $\gamma_1 = 0$

Coefficiente de achatamento:  $\gamma_2 = 0$

Nota: A lei normal encontra-se normalmente tabelada em função da variável normal reduzida

$$(\mu_T = 0, \sigma_T = 1) \text{ definida por: } T = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$$

### A1.2.2 - Lei lognormal, $LN(\lambda, \xi)$

Nesta distribuição é o logaritmo natural da variável aleatória  $X$  que tem uma distribuição normal em vez da própria variável  $X$ .

Função distribuição: 
$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \xi} \int_0^x \frac{1}{s} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln s - \lambda}{\xi}\right)^2\right] ds, \quad x \in \mathfrak{R}^+$$

Função densidade: 
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \xi \cdot x} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x - \lambda}{\xi}\right)^2\right], \quad x \in \mathfrak{R}^+$$

Moda: 
$$Mo_X = \lambda \cdot \exp(-\xi^2)$$

Mediana: 
$$Me_X = \lambda$$

Média: 
$$\mu_X = \exp\left(\lambda + \frac{1}{2}\xi^2\right)$$

Desvio padrão: 
$$\sigma_X = \mu_X \cdot \sqrt{e^{\xi^2} - 1}$$

Coefficiente de assimetria: 
$$\gamma_1 = \left[\exp^2(\xi^2) + 2\right] \cdot \left[\exp(\xi^2) - 1\right]^{1/2}$$

Coefficiente de achatamento: 
$$\gamma_2 = \exp^4(\xi^2) + 2 \cdot \exp^3(\xi^2) + 3 \cdot \exp^2(\xi^2) - 6$$

Notas:

- 1) A lei lognormal pode ser obtida da lei normal reduzida efectuando a seguinte transformação: 
$$T = \frac{\ln X - \lambda}{\xi}$$
- 2) os parâmetros  $\lambda$  e  $\xi$  correspondem à média e ao desvio padrão de  $\ln X$ , isto é: 
$$\lambda = \mu_{\ln X} = Me_X \quad \text{e} \quad \xi = \sigma_{\ln X}$$

### A1.2.3 - Lei exponencial, $E(\nu)$

Define probabilidade da primeira ocorrência de um acontecimento num dado período de tempo, para acontecimentos que seguem processos de Poisson.

Função distribuição:  $F(t) = 1 - e^{-\nu t}$  ,  $\nu > 0$  ,  $t \geq 0$

Função densidade:  $f(t) = \nu \cdot e^{-\nu t}$

Mediana:  $Me_T = \frac{\ln 2}{\nu}$

Média:  $\mu_T = 1/\nu = \overline{\Delta t}$

Desvio padrão:  $\sigma_T = (1/\nu) = \overline{\Delta t}$

Nota:  $\overline{\Delta t}$  é o tempo médio entre duas ocorrências de um acontecimento.

### A1.2.4 - Lei gama, $GM(k, \nu)$

Define a probabilidade da  $k$ -ésima ocorrência de um acontecimento se dê num período de tempo  $T$ , para acontecimentos que seguem processos de Poisson.

Função distribuição: 
$$F(t) = 1 - \sum_{x=0}^{k-1} \frac{(\nu t)^x}{x!} e^{-\nu t} , \quad t \geq 0 , \quad k \text{ inteiro}$$

$$= \frac{\Gamma(k, \nu t)}{\Gamma(k)} , \quad t \geq 0 , \quad k \text{ qualquer}$$

Função densidade:  $f(t) = \frac{\nu \cdot (\nu t)^{k-1}}{\Gamma(k)} \cdot e^{-\nu t} , \quad t \geq 0$

Moda:  $Mo_T = \frac{k-1}{\nu}$

Mediana:  $\Gamma(k, Me_T \cdot \nu) = \frac{1}{2}$

Média:  $\mu_X = \frac{k}{\nu}$

Desvio padrão:  $\sigma_X = \frac{\sqrt{k}}{\nu}$

Coefficiente de assimetria:  $\gamma_1 = 2 \cdot k^{-1/2}$

Coeficiente de achatamento:  $\gamma_2 = \frac{6}{k}$

Nota: A função gama  $\Gamma(k)$  define-se por:  $\Gamma(k, x) = \int_0^x e^{-u} u^{k-1} du$ . Esta função encontra-se tabelada em diversos livros de texto sobre probabilidades e estatística.

### A1.2.5 - Lei beta, $\beta(a, b)$

A principal característica desta lei é a sua versatilidade no ajuste a dados observados.

Função densidade:  $f(x) = \frac{x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1}}{\beta(a, b)}$  ,  $0 \leq x \leq 1$  ,  $a > 0$  ,  $b > 0$

$$\beta(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1} dx =$$

sendo a função  $\beta(a, b)$  dada por:

$$= \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} =$$

$$= \frac{(a-1)! (b-1)!}{(a+b-1)!}$$

Moda:  $Mo_X = \frac{a-1}{a+b-2}$  ,  $a > 1$  ,  $b > 1$

Mediana:  $\frac{1}{2} = I_{Me_X}$  ;  $I_X(a, b)$  é a função beta incompleta relativa

Média:  $\mu_X = \frac{a}{a+b}$

Desvio padrão:  $\sigma_X = \left[ \frac{a \cdot b}{(a+b+1) \cdot (a \cdot b)^2} \right]^{1/2}$

Coeficiente de assimetria:  $\gamma_1 = \frac{2 \cdot (b-a) \cdot (a+b+1)^{1/2}}{(a+b+2) \cdot (a \cdot b)^{1/2}}$

Coeficiente de achatamento:  $\gamma_2 = \frac{3 \cdot (a+b) \cdot (a+b+1) \cdot (a+1) \cdot (2 \cdot b - a)}{a \cdot b \cdot (a+b+2) \cdot (a+b+3)} + \frac{a \cdot (a-b)}{a-b} - 3$



### A1.2.6 - Lei de extremos tipo I ou lei de Gumbel, $E-I(u, \alpha)$ - Distribuição de máximos

Aplica-se sobretudo à definição da distribuição de valores máximos relativos a fenómenos naturais como o vento, as cheias, etc.

Função distribuição:  $F(x) = \exp[-e^{-\alpha(x-u)}]$  ,  $\alpha > 0$  ,  $x \in \mathfrak{R}$

Função densidade:  $f(x) = \alpha \cdot \exp[-\alpha(x-u) - e^{-\alpha(x-u)}]$  ,  $\alpha > 0$  ,  $x \in \mathfrak{R}$

Moda:  $Mo_x = u$

Mediana:  $Me_T = u - \ln(\ln 2)/\alpha$

Média:  $\mu_x = u + \gamma/\alpha$  ,  $\gamma = 0.5772156649\dots$  (constante de Euler)

Desvio padrão:  $\sigma_x = \frac{\pi}{\sqrt{6} \alpha}$

Coeficiente de assimetria:  $\gamma_1 = 1.1396$

Coeficiente de achatamento:  $\gamma_2 = 2.4$

### A1.2.7 - Lei de extremos tipo II ou lei de Frechet, $E-II(u, k)$ - Distribuição de máximos

Esta lei descreve melhor as distribuições com caudas mais alongadas para os valores máximos ( $x \geq 0$ ) que as distribuições de extremos do tipo I.

Função distribuição:  $F(x) = \exp[-(u/x)^k]$  ,  $x \geq 0$

Função densidade:  $f(x) = \frac{k}{x} \left(\frac{u}{x}\right)^k \exp[-(u/x)^k]$  ,  $x \geq 0$

Moda:  $Mo_x = u \left(\frac{k}{k+1}\right)^{1/k}$

Mediana:  $Me_T = u \cdot \left(-\ln \frac{1}{2}\right)^{-1/k}$

Média:  $\mu_x = u \cdot \Gamma\left(1 - \frac{1}{k}\right)$  ,  $k > 1$  ( $\Gamma$  é a função gama - ver secção A1.2.4)

Desvio padrão:  $\sigma_x = u \cdot \left[\Gamma\left(1 - \frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right]^{1/2}$

**A1.2.8 - Lei de extremos tipo III ou lei de Weibull, E-III ( $\varepsilon, u, k$ ) - Distribuição de mínimos**

Esta lei aplica-se geralmente para descrever a distribuição dos valores mínimos, sendo a distribuição dos máximos de interesse reduzido.

Função distribuição: 
$$F(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x - \varepsilon}{u - \varepsilon}\right)^k\right], \quad x \geq \varepsilon, \quad k > 0, \quad u > \varepsilon \geq 0$$

Função densidade: 
$$f(x) = \frac{k}{u - \varepsilon} \left(\frac{x - \varepsilon}{u - \varepsilon}\right)^{k-1} \exp\left[-\left(\frac{x - \varepsilon}{u - \varepsilon}\right)^k\right], \quad x \geq \varepsilon, \quad k > 0, \quad u > \varepsilon \geq 0$$

Moda: 
$$Mo_x = \varepsilon + (u - \varepsilon)(1 - 1/k)^{1/k}, \quad k > 1$$

Mediana: 
$$Me_T = \varepsilon + (u - \varepsilon)(\ln 2)^{1/k}$$

Média: 
$$\mu_x = \varepsilon + (u - \varepsilon) \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right), \quad (\Gamma \text{ é a função gama - ver secção A1.2.4})$$

Desvio padrão: 
$$\sigma_x = (u - \varepsilon) \cdot \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right]^{1/2}$$

## Anexo 2

# RESULTADOS EXPERIMENTAIS DA RESISTÊNCIA DO BETÃO À COMPRESSÃO OBTIDOS NA CONSTRUÇÃO DE TRÊS VIADUTOS

Neste anexo apresenta-se resumidamente o tratamento estatístico dos resultados obtidos do controle de qualidade do betão utilizado na execução de três viadutos: o viaduto sobre o rio Pele na estrada nacional EN 310 em Vermoim (1992-1993), o viaduto de Labriosque na auto-estrada Porto-Braga sub-lanço Cruz-Braga (1992-1993) e o viaduto das Antas na Via de Cintura Interna (VCI) do Porto (1995-1997).

Os dados experimentais recolhidos referem-se à resistência à compressão do betão,  $f_c$ , tendo sido obtidos através de ensaios em provetes cúbicos de 20 cm de aresta moldados no local de fabrico e carregados até à rotura em condições normalizadas.

O tratamento estatístico destes valores encontra-se resumido nos quadros seguintes. É feita a ilustração da evolução da resistência à compressão do betão com idade de 28 dias ao longo da execução das obras e, ainda, o endurecimento verificado no betão até aos 28 dias de idade. Enquanto que o primeiro grupo de figuras ilustra a variação da qualidade do betão ao longo da obra, o segundo mostra o tipo de endurecimento apresentado pelos diferentes betões. A ilustração dos resultados deste tratamento estatístico é complementada pelas Figs. 4.9 a 4.11, no Capítulo 4, onde se apresentam as distribuições dos valores obtidos e o ajuste de leis teóricas.

Quadro A2.1 - Resistência à compressão do betão - viaduto sobre o rio Pele.

Betão especificado	idade (dias)	N	$f_{c,min}$ (MPa)	$f_{c,max}$ (MPa)	$\bar{f}_c$ (MPa)	$\sigma_{fc}$ (MPa)	$CV_{fc}$	$\gamma_1$	$\gamma_2$
B25 (C20/25)	7	82	20.3	42.8	31.31	4.484	0.143	0.483	0.241
	28	180	26.5	57.5	38.74	6.546	0.169	0.591	-0.192
B30 (C25/30)	7	385	17.5	50.5	36.02	5.517	0.153	-0.400	0.665
	28	824	27.0	61.0	44.57	5.169	0.116	-0.410	0.519

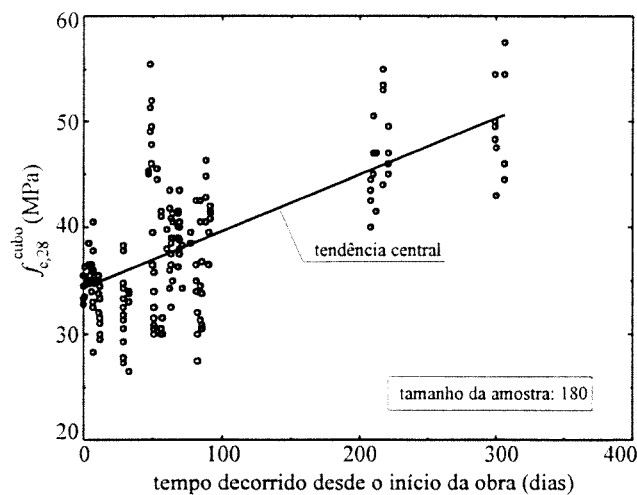
Quadro A2.2 - Resistência à compressão do betão - viaduto de Labriosque.

Betão especificado	idade (dias)	N	$f_{c,min}$ (MPa)	$f_{c,max}$ (MPa)	$\bar{f}_c$ (MPa)	$\sigma_{fc}$ (MPa)	$CV_{fc}$	$\gamma_1$	$\gamma_2$
B30 (C25/30)	7	306	19.8	38.5	29.73	3.578	0.120	0.668	-0.428
	28	604	22.5	51.5	37.66	4.638	0.123	0.108	-0.156
B35 (C30/37)	7	528	23.0	54.5	33.41	3.574	0.107	0.834	4.099
	28	1049	27.0	57.0	43.82	3.875	0.088	-0.203	0.353
B40 (C35/45)	7	426	31.5	66.8	49.60	5.551	0.112	-0.635	0.410
	28	851	37.5	74.3	60.72	5.535	0.091	-0.464	0.513

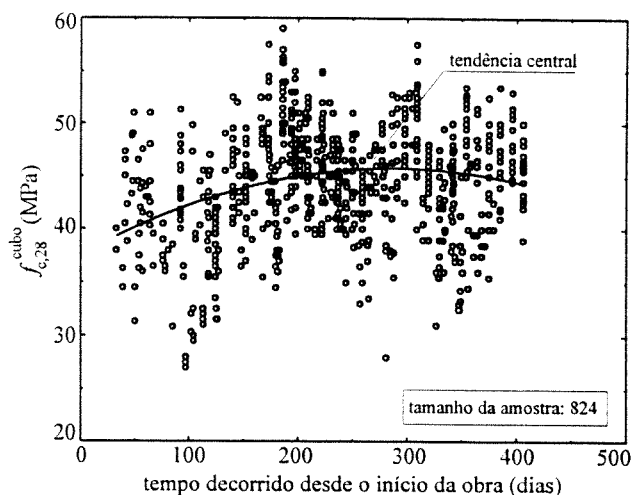
Quadro A2.3 - Resistência à compressão do betão - viaduto das Antas.

Betão especificado	idade (dias)	N	$f_{c,min}$ (MPa)	$f_{c,max}$ (MPa)	$\bar{f}_c$ (MPa)	$\sigma_{fc}$ (MPa)	$CV_{fc}$	$\gamma_1$	$\gamma_2$
B35 (C30/37)	28	645	36.4	60.7	49.53	3.439	0.069	-0.451	0.927

Legenda: N - tamanho da amostra;  $f_{c,min}$  - valor mínimo observado;  
 $f_{c,max}$  - valor máximo observado;  $\bar{f}_c$  - valor médio;  
 $\sigma_{fc}$  - desvio padrão;  $CV_{fc}$  - coeficiente de variação;  
 $\gamma_1$  - coeficiente de assimetria;  $\gamma_2$  - coeficiente de achatamento.

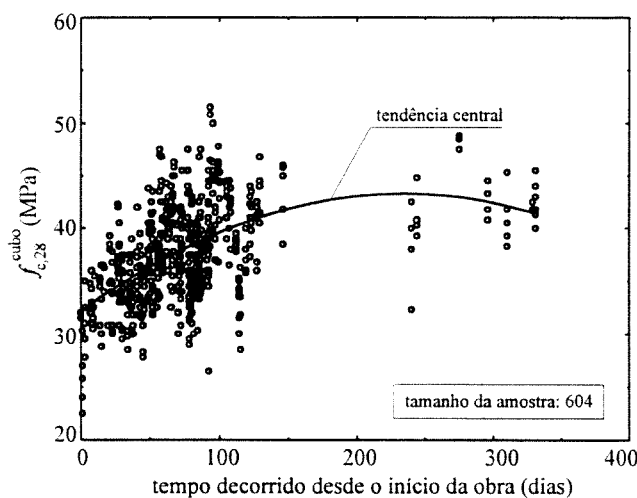


a) betão B25 (C20/25)

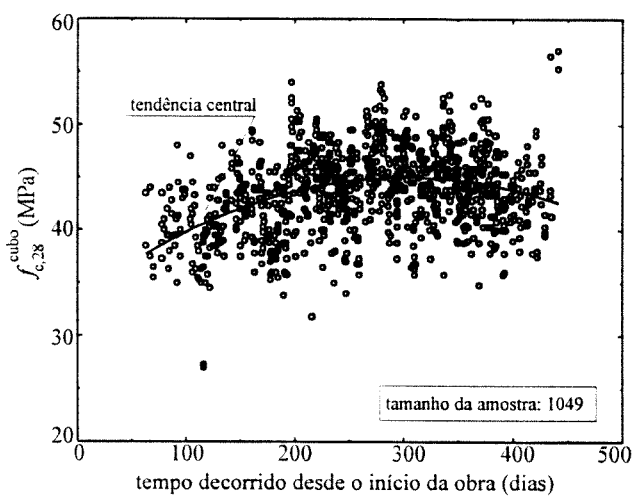


b) betão B30 (C25/30)

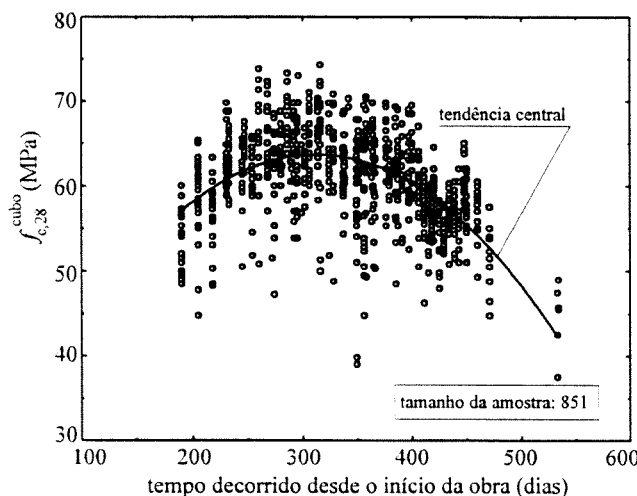
Fig. A2.1 - Evolução de  $f_{c,28}$  ao longo da construção - viaduto sobre o rio Pele.



a) betão B30 (C25/30)



b) betão B35 (C30/37)



c) betão B40 (C35/45)

Fig. A2.2 - Evolução de  $f_{c,28}$  ao longo da construção - viaduto de Labriosque.

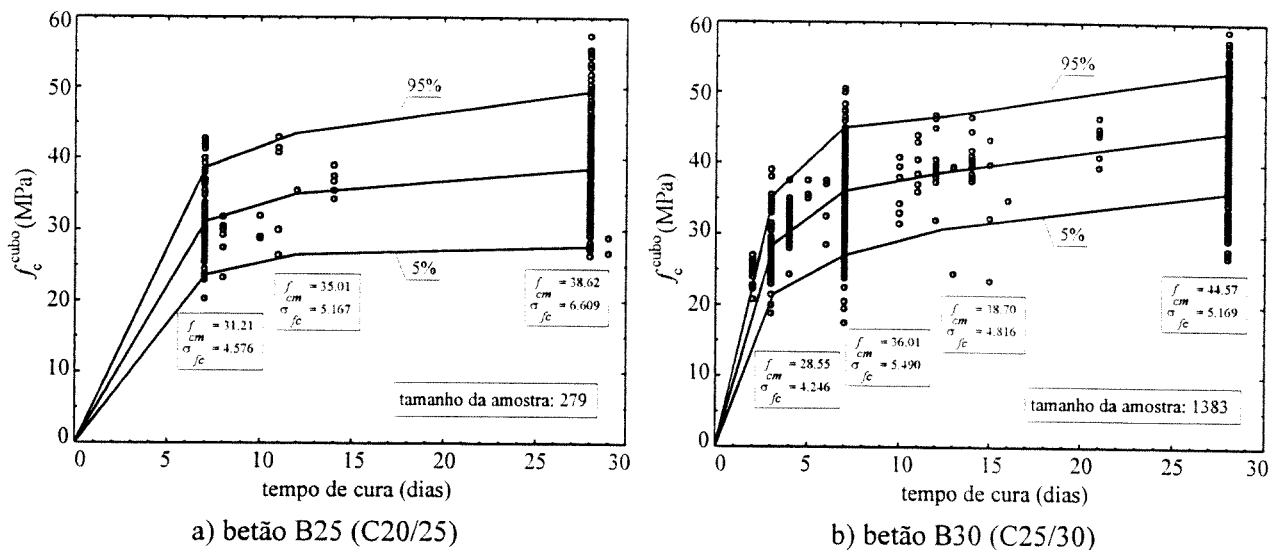


Fig. A2.3 - Endurecimento do betão até aos 28 dias - viaduto sobre o rio Pele.

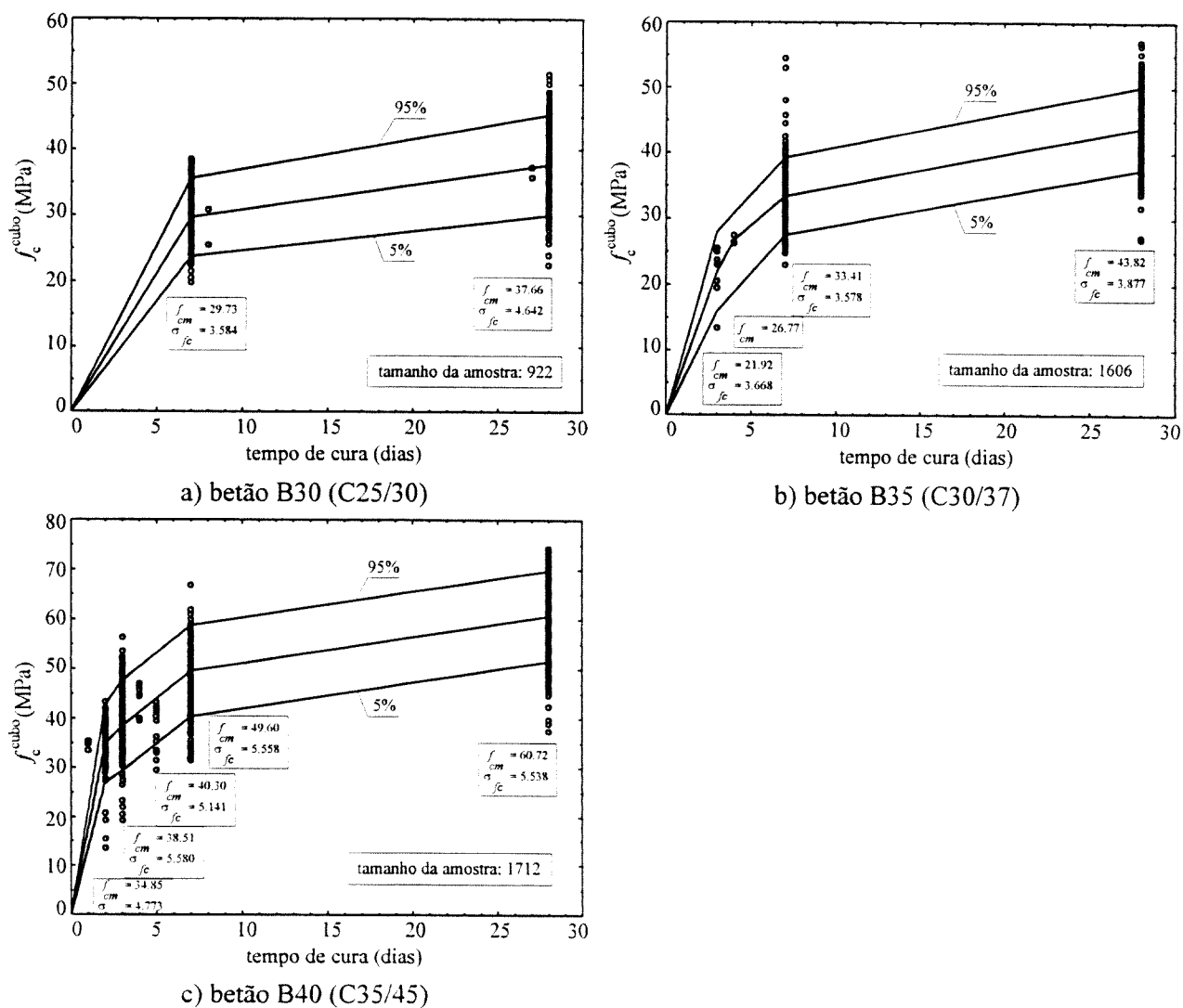


Fig. A2.4 - Endurecimento do betão até aos 28 dias - viaduto de Labriosque.

## **Anexo 3**

# **ESTUDO SOBRE A QUANTIFICAÇÃO DA ARMADURA MÍNIMA EM ESTRUTURAS DE BETÃO ARMADO**

### **A3.1 - CONSIDERAÇÕES INICIAIS**

A fendilhação é a causa mais corrente dos problemas de durabilidade e aparência desagradável das estruturas de betão. Verifica-se, de um modo geral, que as fendas resultantes do uso da estrutura não originam problemas graves desde que pelo menos a quantidade de armadura exigida pelo cálculo seja colocada. As formas de fendilhação mais típicas resultam da utilização de processos construtivos inadequados (por exemplo, betonagem e/ou cura do betão incorrectas) e da avaliação deficiente ou não consideração das tensões de tracção resultantes do impedimento da estrutura, ou parte dela, a deformações que lhe são impostas quer interiormente (por exemplo, impedimento à retracção ou à variação de temperatura) quer exteriormente (por exemplo, assentamento diferencial das fundações).

Neste anexo apresenta-se detalhadamente o estudo efectuado sobre o problema da quantificação da área mínima de armadura necessária para controlar e limitar a fendilhação em estruturas de betão, que foi abordado no Capítulo 6. A informação e os resultados contidos neste anexo complementam a apresentação realizada nesse capítulo.

De uma forma sumária descrevem-se os critérios utilizados para quantificar a armadura mínima e que serviram de base aos valores propostos nos actuais códigos, MC90 (CEB-FIP, 1993) e EC2 (1991). Apresentam-se também propostas de outros autores. Faz-se uma abordagem probabilística deste problema através da metodologia de Monte Carlo e tendo em conta a variabilidade dos materiais (betão e aço). Finalmente, propõe-se valores para a armadura mínima de acordo com os resultados obtidos dessa abordagem.

### **A3.2 – IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA**

O aparecimento de fendas é provocado por valores de tensões de tracção que ultrapassam valores admissíveis do betão, é, por isso, essencial conhecer os principais mecanismos que originam essas tensões e avaliar correctamente o comportamento e a resistência dos materiais quando estão sujeitos a esforços de tracção.

Os principais mecanismos possíveis que podem provocar fendilhação em estruturas de betão armado são (Figueiras, 1997):

- i) fendilhação devida a acções directas;
- ii) fendilhação resultante de deformações impostas (em estruturas com impedimentos dessas deformações);
- iii) fendilhação devida à retracção plástica e ao assentamento do betão fresco (que ocorre, geralmente, logo após os primeiros dias após a colocação em obra);
- iv) fendilhação devida à corrosão (provocada pela expansão causada pelos produtos de corrosão).

Dos quatro grupos de mecanismos referidos somente os dois primeiros (fendilhação devida a acções directas e fendilhação resultante de deformações impostas) podem ser controladas pela colocação de uma quantidade de armadura apropriada. Pelo contrário, a armadura pode ser causa de fendilhação nos dois últimos grupos. Geralmente, o primeiro tipo de fendilhação é analisado em função dos valores admissíveis para a abertura de fendas e pela teoria de fendilhação que consta na regulamentação de estruturas de betão, sendo o segundo tipo controlado pela consideração de uma quantidade mínima de armadura e pela imposição de uma tensão limite na armadura. Assim, a avaliação da secção mínima de armadura para controlar a fendilhação do betão estrutural tem em conta a distribuição das tensões de tracção que resultam do impedimento de deformações impostas, distinguindo-se dois grupos possíveis de ocorrer:

- impedimento a deformações intrínsecas – onde as tensões de tracção são geradas por alterações dimensionais dos elementos estruturais que estão impedidos a esse tipo de modificações (por exemplo, a retracção desses elementos);
- impedimento a deformações extrínsecas – onde as tensões de tracção são geradas nos elementos por reacção a deformações aplicadas exteriormente (por exemplo, assentamentos diferenciais das fundações).



### A3.3 – ARMADURA MÍNIMA – ASPECTOS REGULAMENTARES

#### A3.3.1 – Caracterização dos critérios utilizados

Os códigos recentes como o MC90 (CEB-FIP, 1993) e o EC2 (1991) estipulam para casos especiais o cálculo da largura de fendas e a sua verificação dentro de certos limites. No entanto, em geral o controlo da fendilhação é obtido de forma satisfatória sem efectuar explicitamente o cálculo da largura de fendas desde que se verifiquem simultaneamente as seguintes duas condições:

- garante-se uma quantidade mínima de armadura, de forma a evitar pelo menos a sua plastificação quando aparecem as primeiras fendas ou, eventualmente, evitar que a largura das fendas ultrapasse os limites especificados;
- limitação das tensões na armadura (calculadas em estado fendilhado e dos diâmetros dos varões de acordo com a largura de fendas admissível).

Embora as duas condições não sejam independentes entre si, pode-se associar, respectivamente, dois critérios para avaliar a armadura mínima: o critério de não plastificação da armadura e o critério da largura de fendas.

#### – *Critério de não plastificação da armadura*

O critério de não plastificação é a primeira condição a satisfazer, embora não suficiente, para definir uma área mínima de armadura. De facto, se a armadura não plastificar poderão formar-se várias fendas, conduzindo a um comportamento dúctil do elemento estrutural. Por outro lado, se a armadura plastifica quando se forma a primeira fenda, não é possível transmitir ao betão (pelos mecanismos de aderência) uma força capaz para gerar nova fendilhação, e a fenda inicial aumentará rapidamente de largura com o aumento da solicitação (ver Fig. A3.1).

Para quantificar a armadura mínima é necessário distinguir entre dois tipos de distribuição de tensões na secção de um elemento no início da fendilhação:

- *tracção* – em que toda a secção está sujeita a tensões de tracção;
- *flexão* – em que a distribuição de tensões de tracção na secção é triangular (isto é, uma parte mantém-se em compressão).

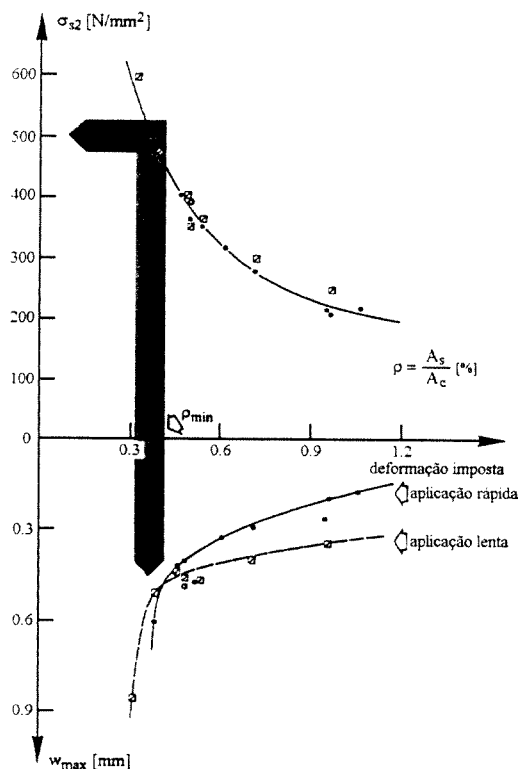


Fig. A3.1 – Resultados de ensaios realizados sobre tirantes de betão armado realizados com betão C25/30 e aço A500 (Jaccoud, 1996).

• *Tracção*

A condição de não plastificação da armadura num tirante de betão armado sujeito a um esforço axial de tracção (Fig. A3.2) é a seguinte:

$$A_c \cdot f_{ct,ef} \leq A_s \cdot f_{syk} \Rightarrow A_{s,min} = A_c \cdot \frac{f_{ct,ef}}{f_{syk}} \quad , \quad (A3.1)$$

sendo  $A_c$  e  $A_s$  as áreas da secção de betão e da armadura na zona traccionada, respectivamente,  $f_{syk}$  é o valor característico da tensão de cedência da armadura e  $f_{ct,ef}$  é a resistência do betão à tracção efectiva na altura em que se prevê que, pela primeira vez, se possam formar fendas.

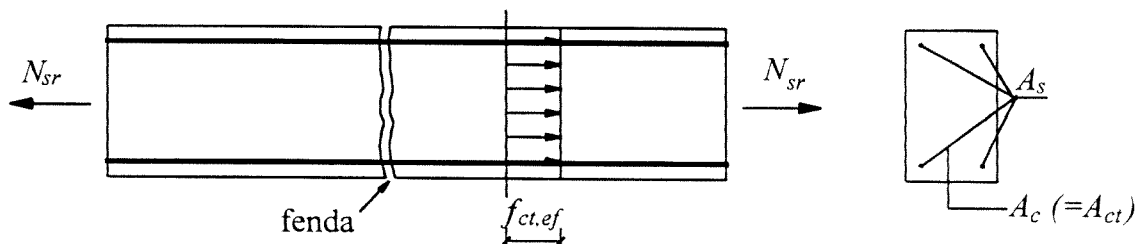


Fig. A3.2 – Tirante de betão armado solicitado pelo esforço que provoca a primeira fenda.

• Flexão

Para um elemento de betão armado sujeito à flexão (Fig. A3.3), a condição de não plastificação resulta em:

$$\begin{aligned}
 N_{ct} \cdot z_c &\leq N_{st} \cdot z_s && \text{(admitindo } z_c \cong 0.8z_s \text{)} \\
 0.8N_{ct} &\leq N_{st} \\
 A_{s,\min} &= 0.4 \cdot A_{ct} \cdot \frac{f_{ct,ef}}{f_{syk}}
 \end{aligned}
 \tag{A3.2}$$

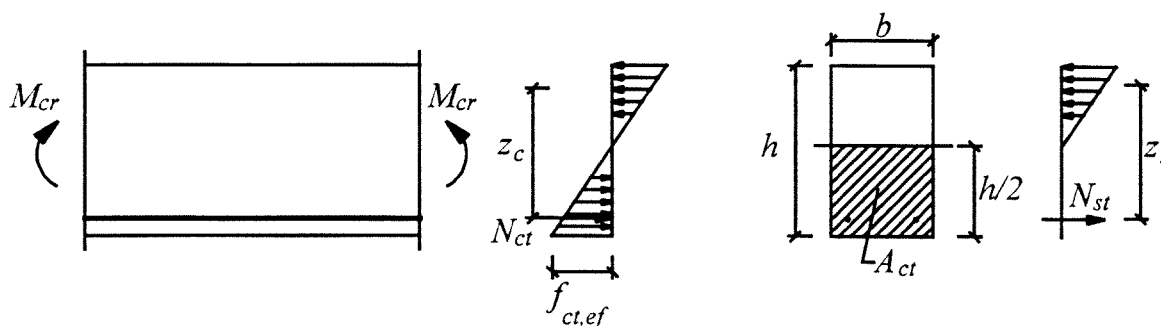


Fig. A3.3 – Elemento de betão armado solicitado pelo momento de fendilhação.

• Efeito das tensões auto-equilibradas

As tensões auto-equilibradas que podem existir na secção antes da aplicação da solicitação (por exemplo, devido à retracção diferencial no elemento de betão armado) têm um efeito de antecipar a fendilhação, isto é, o esforço que provoca o início da fendilhação é menor que o valor desse esforço numa situação em que as tensões auto-equilibradas são nulas. Este efeito tem consequências benéficas para a quantificação da armadura mínima (Fig. A3.4).

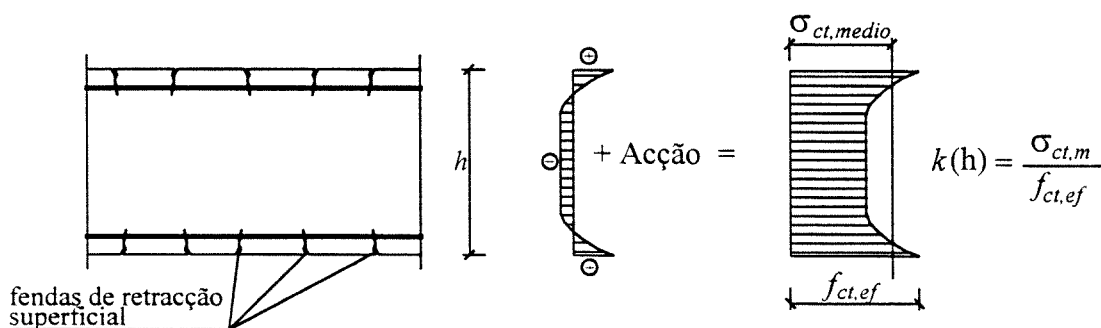


Fig. A3.4 – Efeito das tensões auto-equilibradas.

– **Critério de largura de fendas**

A avaliação da largura provável das fendas pode ser efectuada através do mecanismo de comportamento de um elemento de betão armado na vizinhança de uma simples fenda. Considerando as condições de equilíbrio e de compatibilidade na vizinhança da fenda, assim como as condições de aderência entre o betão e o aço, é possível determinar o comprimento,  $l_t$ , ao longo do qual se desenvolvem as tensões tangenciais de aderência  $\tau_x$  e o valor médio provável da largura da fenda  $w_m$  (Fig. A3.5). Nos últimos anos vários autores têm apresentado propostas para o cálculo de  $w_m$ . Na generalidade dos casos essas propostas resultam da integração do modelo que traduz a relação entre as tensões de aderência,  $\tau_x$ , e o escorregamento,  $s_x$ , entre a armadura e o betão (Fig. A3.6). Entre as várias propostas saliente-se, pela sua adequação aos resultados experimentais, aquela apresentada por Farra (1995):

$$w_m = 2 \left[ \frac{(1+b) \cdot \phi \cdot f_{ct,ef}^2 \cdot (1 + \alpha \cdot \rho)}{8 \cdot a_1 \cdot f_{cm}^{a_2} \cdot E_s \cdot \rho^2} \right]^{1/(1+b)}, \quad (A3.3)$$

onde:

- $a_1, a_2$  e  $b$  - são coeficientes de forma adoptados para a relação tensão de aderência,  $\tau_x$ , e o escorregamento,  $s$  (Fig. A3.6);
- $\phi$  - é o diâmetro dos varões da armadura;
- $E_s$  - é o módulo de elasticidade das armaduras;
- $\rho = A_s/A_{ct}$  - é a percentagem efectiva de armadura;
- $\alpha$  - é o coeficiente de homogeneização definido por  $E_s/E_{cm}$ ;
- $f_{ct,ef} = k(h) \cdot k(\varepsilon) \cdot k(t) \cdot f_{cm}$  - é a resistência do betão à tracção efectiva na altura em que se prevê que pela primeira vez se possam formar fendas;
- $f_{cm}$  - é o valor médio convencional da resistência do betão à compressão aos 28 dias;
- $k(h)$  - é um coeficiente de correcção que tem em conta o efeito das tensões auto-equilibradas ao longo da espessura do elemento (Fig. A3.4); consideram-se os seguintes valores para diversas situações:
  - tensões de tracção devidas a impedimentos
  - a deformações intrínsecas em geral:  $k(h) = 0.8$ ;
  - para secções rectangulares:  $k(h) = 0.8$ , para  $h \leq 0.3m$ ,  
 $k(h) = 0.5$ , para  $h \geq 0.8m$ ;

- tensões de tracção devidas a impedimentos a deformações extrínsecas:  $k(h) = 1.0$ ;

$k(\varepsilon)$

- é um coeficiente de correcção que tem em conta a dispersão da resistência do betão à tracção no elemento, de acordo com as diversas situações consideram-se os seguintes valores:

- quando ocorrem as primeiras fendas:  $k(\varepsilon) = 1.0$ ;
- no caso de impedimentos a deformações impostas em geral ( $\varepsilon_{imp} \cong 0.4\%$ ):  $k(\varepsilon) = 1.06$ ;
- para níveis de cargas elevadas, quando se assume que o padrão de fendilhação está completamente formado:  $k(\varepsilon) = 1.35$ ;

$k(t)$

é um coeficiente de correcção que permite ter em conta a idade do betão quando ocorrem as primeiras fendas, considerando-se os seguintes valores:

- para  $t < 28$  dias:  $k(t) < 1.0$ ;
- para  $t \geq 28$  dias (de acordo com Jaccoud, 1996):  $k(t) = 1.0$ .

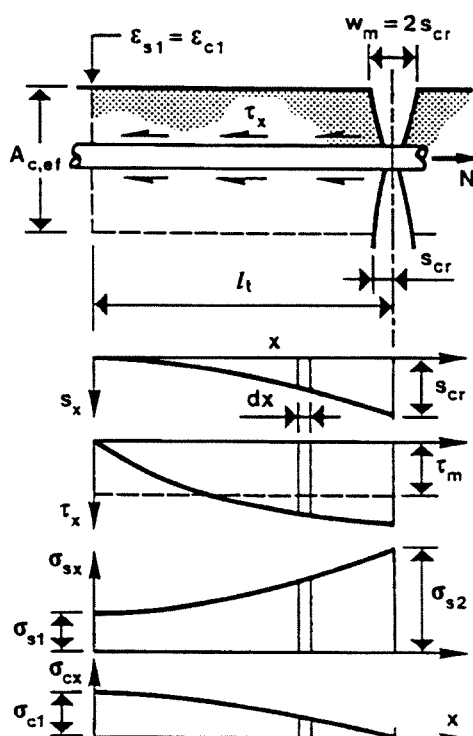


Fig. A3.5 – Distribuição das tensões e das deformações na vizinhança de uma única fenda.

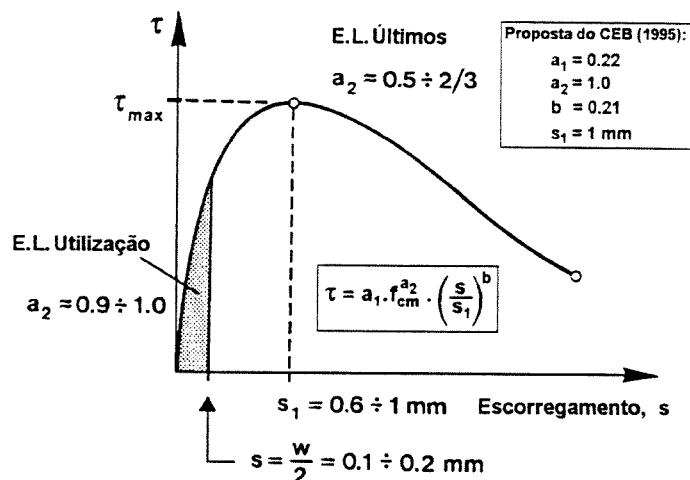


Fig. A3.6 – Relação entre as tensões de aderência,  $\tau$ , e o escorregamento,  $s$ , ocorrido numa fenda entre o betão e a armadura, para um carregamento monotónico de curta duração e para varões de alta aderência.

Da expressão (A3.3) para o cálculo da abertura de fendas pode-se verificar que os factores predominantes que influenciam esta abertura são:

- a resistência do betão à tracção efectiva;
- as propriedades de aderência entre o betão e os varões da armadura;
- a quantidade de armadura (através de  $\rho$ ) e a sua distribuição (através de  $\phi$ ).

Considerando a equação (A3.3) é possível definir a abertura de fendas em função da tensão na armadura,  $\sigma_{s2}$ . Na Fig. A3.7 apresenta-se o resultado deste procedimento e a comparação com os valores propostos pelo MC90, para o betão da classe C30/37. Para cada tipo de betão existem várias curvas  $\sigma_{s2}-\phi$ , uma para cada valor de  $\rho$ . Na Fig. A3.8 apresenta-se para cada valor de  $\phi$  o valor mínimo de  $\sigma_{s2}$ , qualquer que seja o valor de  $\rho$ .

Para efeitos de verificação da segurança o valor de cálculo da largura das fendas,  $w_k$ , é obtido a partir do valor médio,  $w_m$ , a partir da relação:  $w_k = \beta \cdot w_m$ , sendo  $\beta = 1.3$  para fendilhação devida a deformações impedidas em secções onde a menor dimensão é inferior a 300mm (EC2-1, 1991).

### A3.3.2 – Quantificação pelo Eurocódigo 2 e Código-Modelo MC90

A não ser que se possa justificar através de um cálculo mais rigoroso, as áreas mínimas de armadura podem ser calculadas a partir da relação:

$$A_s = k_c \cdot k \cdot f_{ct,ef} \cdot A_{ct} / \sigma_s \quad , \quad (A3.4)$$

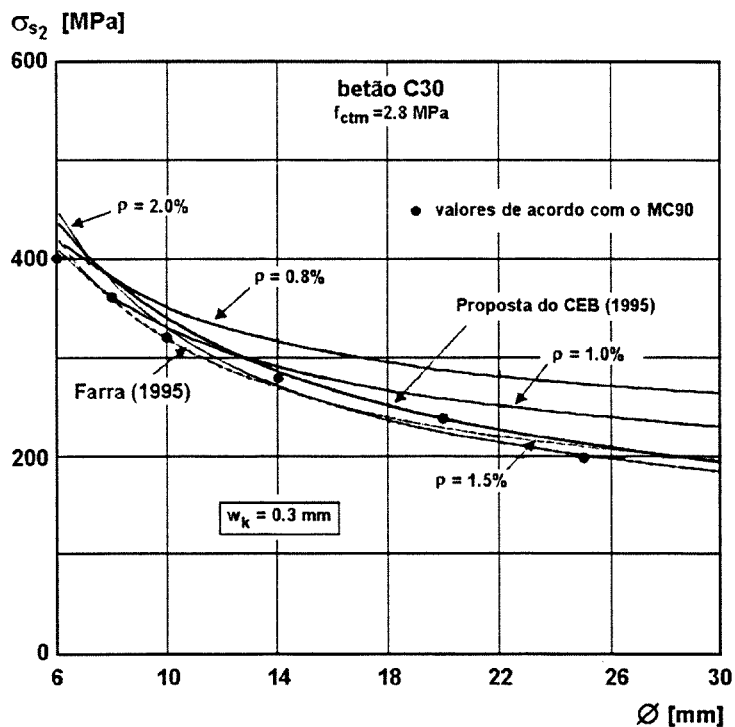


Fig. A3.7 – Controlo da fendilhação através da limitação das tensões na armadura em função do diâmetro dos varões. Betão C30/37.

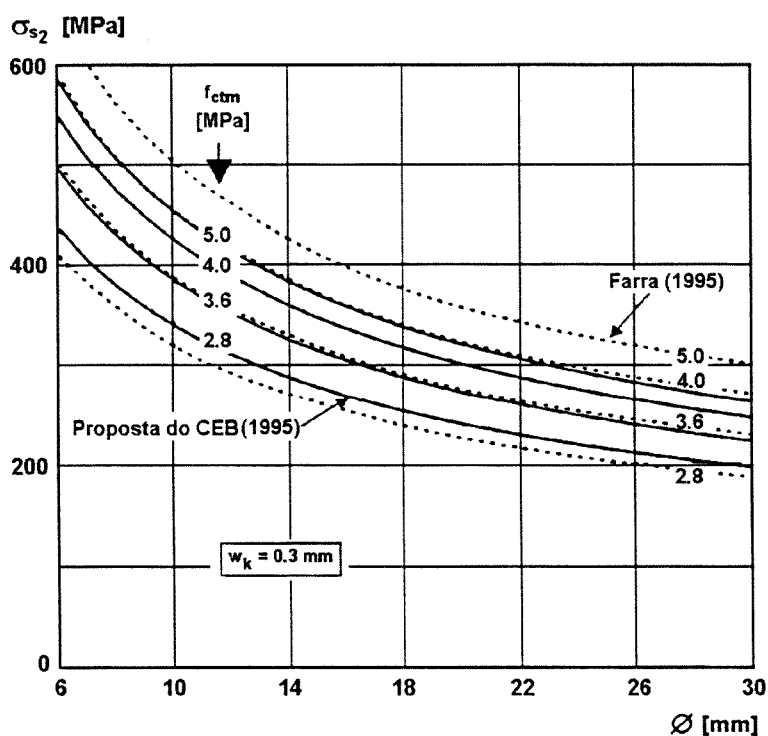


Fig. A3.8 – Controlo da fendilhação através da limitação das tensões na armadura em função do diâmetro dos varões. Várias classes de betão.

em que,

- $A_s, A_{ct}, f_{ct,ef}$  - já foram definidos anteriormente (ver expressões A3.1 e A3.2). Refira-se, no entanto, que se a fendilhação ocorrer numa data posterior aos 28 dias o EC2 sugere a adopção de uma resistência mínima à tracção de 3.0 MPa;
- $\sigma_s$  - tensão máxima permitida na armadura imediatamente após a formação da fenda. Poderá ser considerada como 100% da tensão de cedência da armadura,  $f_{yk}$ . No entanto, poderá ser necessário um valor mais baixo para satisfazer as exigências relativas à largura máxima das fendas (Fig. A3.9);
- $k_c$  - coeficiente que tem em conta a natureza da distribuição de tensões na secção, imediatamente antes da fendilhação (ver expressões A3.1 e A3.2 e as Figs. A3.2 e A3.3):
- para tracção simples:  $k_c = 1.0$ ;
  - para flexão sem esforço normal de compressão:  $k_c = 0.4$ ;
- $k$  - coeficiente que considera o efeito das tensões auto-equilibradas não uniformes (ver Fig. A3.4). Na expressão (A3.3) são indicados valores de  $k$  para diversas situações (ver em valores de  $k(h)$ ). O EC2 sugere ainda que algumas partes de secções distantes da armadura de tracção principal, como por exemplo as partes salientes de uma secção ou as almas de secções de grande altura, podem ser consideradas como estando sujeitas a deformações impostas pelo banzo traccionado do elemento. Nestes casos, será apropriado um valor da ordem de  $0.5 < k < 1.0$ .

O EC2 fornece ainda mais algumas regras a aplicar a elementos pré-esforçados.

Tensão na Armadura (MPa)	Diâmetros máximos dos varões (mm)	
	Secções armadas	Secções pré-esforçadas
160	32	25
200	25	16
240	20	12
280	16	8
320	12	6
360	10	5
400	8	4
450	6	—

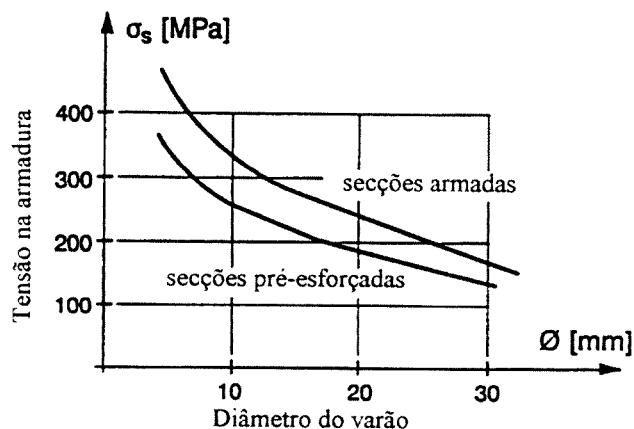


Fig. A3.9 – Diâmetros máximos para varões de alta aderência. Controlo da fendilhação para deformações impostas ou cargas aplicadas, para valores de  $h = 40\text{cm}$ ;  $d/h = 0.90$  e  $f_{ctm} = 2.5\text{MPa}$ .



### A3.3.3 – Propostas recentes de outros autores

Partindo do princípio que a armadura mínima deve limitar a abertura de fendas para valores admissíveis, Farra (1995) e Jaccoud (1995 a, b) propõem valores para a área dessa armadura, recorrendo à expressão (A3.3) e observando a condição de não plastificação que é traduzida pelas equações (A3.1) e (A3.2).

A Fig. A3.10 ilustra os resultados obtidos para um caso particular (Farra, 1995). Desta figura pode-se estabelecer para valores fixados das dimensões do elemento, do diâmetro dos varões e do nível de qualidade (isto é, o valor admissível para a largura das fendas,  $w_k$ ), que:

- se a condição de largura de fendas é predominante e desde que a armadura não plastifique quando aparecem as primeiras fendas, o crescimento do valor necessário de armadura mínima é muito pequeno em função do aumento da resistência do betão (eventualmente, pode-se desprezar este crescimento, comparando com as dispersões dos outros factores).
- pelo contrário, se a condição de não plastificação das armaduras for predominante, o valor necessário de armadura mínima cresce proporcionalmente com a resistência do betão à tracção. Nestes casos pode ser interessante, de um ponto de vista económico, usar classes de aço mais elevados.

Os resultados obtidos por Farra (1995), como ilustra a Fig. A3.10, mostram que a percentagem de armadura mínima não cresce proporcionalmente com a resistência do betão à tracção, como pode parecer na equação (A3.3). O que se verifica em muitos casos é o aumento da tensão permitida no aço,  $\sigma_{s2}$ , devido às boas condições de aderência em betões de qualidade superior.

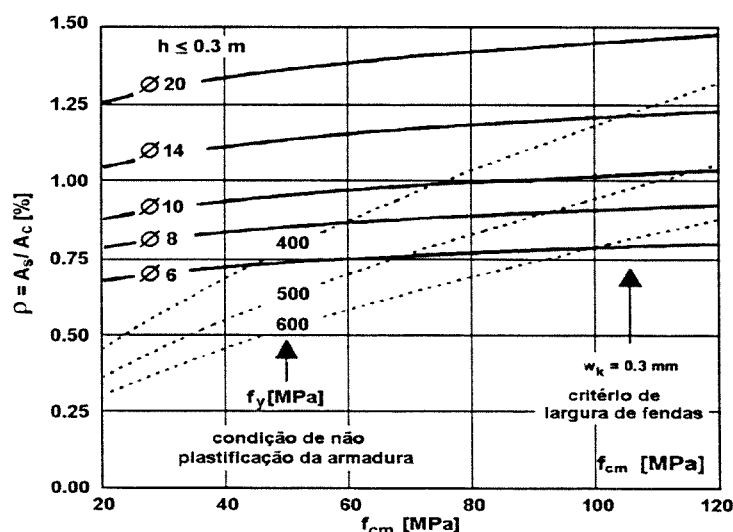


Fig. A3.10 – Armadura mínima no caso de tracção simples, para elementos de betão armado com espessura inferior a 30cm (Farra, 1995).

## A3.4 – ABORDAGEM PROBABILÍSTICA DO PROBLEMA

### A3.4.1 – Descrição do procedimento utilizado

O objectivo deste estudo é a quantificação da armadura mínima necessária para assegurar o controlo da fendilhação em elementos de betão armado sujeitos a tensões de tracção resultantes do impedimento de deformações impostas, tendo em conta a variabilidade dos factores mais preponderantes. A armadura mínima é avaliada através dos dois critérios referidos no ponto anterior (critério de não plastificação da armadura e critério da largura de fendas).

O procedimento adoptado para a avaliação da armadura mínima divide-se em duas fases:

– 1.<sup>a</sup> fase

na primeira fase procurou-se de uma forma sumária verificar qual a possibilidade de ocorrer fendilhação em elementos correntes de betão armado sujeitos unicamente a tensões de tracção provocadas por impedimentos a deformações devidas à retracção do betão. Não foram considerados os efeitos provocados por eventuais variações de temperatura e pela fluência do betão. Considerou-se uma viga com as extremidades fixas sujeita a uma retracção não uniforme ao longo da sua espessura (ver Fig. A3.11) e com as seguintes opções:

- secção com dimensões  $b \times h = 0.25 \times 0.25\text{m}^2$  (portanto  $h < 0.30\text{m}$ );
- betões da classe C20/25 e C35/45 caracterizados pelos seguintes parâmetros com características aleatórias:
  - resistência à compressão,  $f_c$ ;
  - resistência à tracção,  $f_{ct}$ ;
  - módulo de elasticidade,  $E_c$ ;
- aço da classe A500 caracterizado pelo seguinte parâmetro com características aleatórias:
  - tensão de cedência,  $f_{sy}$ ;
- extensão de retracção do betão com carácter aleatório;
- três níveis de humidade relativa do meio ambiente: 60%, 80% e 99%;
- idade correspondente ao início da retracção,  $t_s = 28$  dias;
- período correspondente à evolução da retracção,  $t_f = 50$  anos;

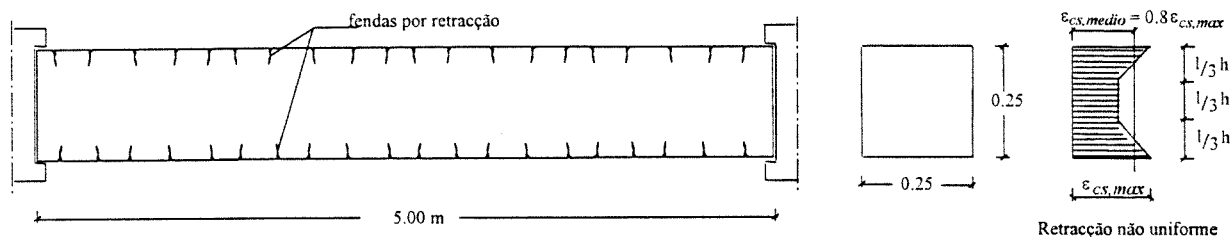


Fig. A3.11 – Geometria da viga analisada e diagrama de retração não uniforme ao longo da altura.

As distribuições da armadura mínima foram obtidas através da aplicação do método de Monte Carlo. Os valores nulos observados nessas distribuições correspondem aos casos simulados em que não ocorreu qualquer fendilhação, sendo os valores não nulos obtidos através do critério de não plastificação das armaduras de acordo com a expressão (A3.4), com  $k_c = 1.0$  e  $k = 0.8$ .

#### – 2ª fase

Na segunda fase, partindo do pressuposto que há uma grande probabilidade de ocorrer fendilhação na situação considerada anteriormente (secções retangulares, tracção simples e deformações impostas intrínsecas), estudou-se as distribuições dos valores para as armaduras mínimas considerando os dois critérios já referidos. Consideraram-se variabilidades nos parâmetros com maior predominância no comportamento dos materiais para o caso em estudo, nomeadamente:

- para betões desde a classe C12/15 à classe C50/60:
  - resistência à compressão,  $f_c$ ;
  - resistência à tracção,  $f_{ct}$ ;
  - módulo de elasticidade,  $E_c$ ;
- para os aços das classes A235, A400 e A500:
  - tensão de cedência,  $f_{sy}$ ;

Tal como na fase anterior, as distribuições da armadura mínima para os dois critérios mencionados foram obtidas através da aplicação do método de Monte Carlo.

A caracterização das distribuições das variáveis aleatórias, consideradas nas duas fases descritas, foi realizada de forma a obter valores coerentes com os dados regulamentares, nomeadamente com o MC90 e o EC2. Consideraram-se para todas as variáveis atrás referidas distribuições gausseanas. Em relação à resistência do betão à compressão,  $f_c$ , caracteriza-se pelo seu valor

médio,  $f_{cm}$ , ser definido em função do respectivo valor característico,  $f_{ck}$ , (que corresponde ao quantil de 5%) pela relação definida no MC90 e no EC2, para todas as classes de betão:

$$f_{cm} = f_{ck} + 8 \quad , \quad [\text{MPa}] \quad . \quad (\text{A3.5})$$

Como para uma distribuição gausseana o quantil de 5% dista 1.64 desvios padrão do valor médio, então o valor do desvio padrão vem:

$$\left. \begin{array}{l} f_{cm} - f_{ck} = 8 \\ f_{cm} - f_{ck} = 1.64\sigma_{fc} \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma_{fc} = \frac{8}{1.64} \cong 5 \text{MPa} \quad . \quad (\text{A3.6})$$

Relativamente à resistência do betão à tracção,  $f_{ct}$ , o MC90 e o EC2 definem a seguinte relação entre o quantil de 95% e o valor médio para todas as classes de betão:

$$f_{ctk,\max} = 1.30f_{ctm} \quad , \quad (\text{A3.7})$$

logo,

$$1.64\sigma_{f_{ct}} = 0.3f_{ctm} \Rightarrow CV_{f_{ct}} = \frac{\sigma_{f_{ct}}}{f_{ctm}} \cong 18\% \quad . \quad (\text{A3.8})$$

Embora teoricamente as recentes normas adoptem o princípio de dispersões idênticas para a resistência à tracção de todas as classes de betão (coeficiente de variação constante), na realidade é de esperar dispersões menores à medida que cresce a resistência do betão (Jaccoud, 1996), de forma idêntica ao que acontece com a resistência à compressão. Assim, como hipótese alternativa considerou-se um coeficiente de variação constante e igual a 20% para a resistência à tracção dos betões das classes C12/15 a C25/30 e para as classes superiores um desvio padrão constante igual a 0.55MPa, ou seja:

$$\begin{array}{l} - CV_{f_{ct}} = 20\% \quad , \quad \text{para } f_{ctm} \leq 2.6 \text{ MPa} \\ - \sigma_{f_{ct}} = 0.55 \text{ MPa} \quad , \quad \text{para } f_{ctm} > 2.6 \text{ MPa} \end{array} \quad . \quad (\text{A3.9})$$

Em consequência adoptou-se, como alternativa, dispersões idênticas (coeficiente de variação igual) para a resistência à compressão para as classes de betão mais baixas, da seguinte forma:

$$\begin{array}{l} - CV_{f_c} = 20\% \quad , \quad \text{para } f_{cm} \leq 30 \text{ MPa} \\ - \sigma_{f_c} = 5.0 \text{ MPa} \quad , \quad \text{para } f_{cm} > 30 \text{ MPa} \end{array} \quad . \quad (\text{A3.10})$$

Quanto ao módulo de elasticidade do betão,  $E_c$ , considerou-se um valor corrente de dispersão relativa (coeficiente de variação) de 7.2%. A distribuição da tensão de cedência das armaduras é definido segundo o EC2-2 (1994) por:

$$f_{sym} = 1.1f_{syk} \quad , \quad (A3.11)$$

logo,

$$1.64\sigma_{f_{sv}} = 0.1f_{syk} \Rightarrow CV_{f_{sv}} = \frac{\sigma_{f_{sv}}}{f_{sym}} \cong 5.5\% \quad . \quad (A3.12)$$

Dada a sua pequena variabilidade, o valor do módulo de elasticidade,  $E_s$ , foi considerado com o seu valor nominal.

No Quadro A3.1 encontram-se definidos os parâmetros que caracterizam as variáveis aleatórias envolvidas no presente estudo. Saliente-se, de novo, que todas as variáveis seguem um comportamento aleatório caracterizado pela lei normal.

Quadro A3.1 – Caracterização das variáveis aleatórias consideradas.

Classes de betão	Resistência à compressão, $f_c$ (MPa)				Resistência à tracção, $f_{ct}$ (MPa)				Módulo de elasticidade $E_c$ (MPa)	
	Hipótese "regulamentar"		Hipótese "alternativa"		Hipótese "regulamentar"		Hipótese "alternativa"			
	média	d. padrão	média	d. padrão	média	d. padrão	média	d. padrão	média	d. padrão
C12/15	20	5.0	20	3.2	1.6	0.29	1.6	0.32	26.0	1.9
C16/20	24	5.0	24	3.8	1.9	0.34	1.9	0.38	27.5	2.0
C20/25	28	5.0	28	4.5	2.2	0.40	2.2	0.44	29.0	2.1
C25/30	33	5.0	33	5.0	2.6	0.47	2.6	0.52	30.5	2.2
C30/37	38	5.0	38	5.0	2.9	0.52	2.9	0.55	32.0	2.3
C35/45	43	5.0	43	5.0	3.2	0.58	3.2	0.55	33.5	2.4
C40/50	48	5.0	48	5.0	3.5	0.63	3.5	0.55	35.0	2.5
C45/55	53	5.0	53	5.0	3.8	0.68	3.8	0.55	36.0	2.6
C50/60	58	5.0	58	5.0	4.1	0.74	4.1	0.55	37.0	2.7
Classes de aço	Tensão de cedência, $f_{sy}$ (MPa)		Mód. Elasticidade $E_s$ (GPa) - nominal		Outros dados (somente para a 1ª fase)					
	Média	desvio-padrão								
A235	260	14.5	200		coef.varia. da ext. retracção: 35% idade no início da retracção: 28 d. período de análise: 50 anos cimento c/ endurecimento normal $k = 0.8$ ( $h = 0.25m < 0.30m$ ) humidade relat.: 60%, 80%; 99%					
A400	440	24.0	200							
A500	550	30.0	200							
Nota: Todas as variáveis aleatórias seguem distribuição normal.										

### A3.4.2 – Resultados obtidos na primeira fase

As Figs. A3.12 a A3.14 ilustram, para diferentes condições, as distribuições da percentagem de armadura mínima da viga representada na Fig. A3.11, que se encontra totalmente traccionada por efeito única e exclusivamente da retracção diferencial considerada. No exemplo da Fig. A3.12 utilizou-se um betão corrente da classe C20/25 e um aço da classe A500. A humidade relativa do meio ambiente,  $HR$ , é de 60%. Nos exemplos referentes às Figs. A3.13 e A3.14 utilizaram-se como base os mesmos dados modificando-se somente o valor de  $HR$  para 80% no primeiro e a classe do betão (C35/45) no segundo. Os resultados mais importantes, obtidos por aplicação do método de Monte Carlo, encontram-se indicados nessas figuras. Entre eles refiram-se as percentagens de amostras em que não ocorreu fendilhação, os valores médios e os desvios padrão da distribuição de todas as amostras e somente das amostras com as armaduras não nulas, respectivamente.

Nos exemplos estudados em que se considerou um ambiente praticamente saturado (humidade relativa igual a 99%) não se verificou qualquer fendilhação nas amostras estudadas, daí que não houve necessidade de considerar qualquer armadura para ter em conta a retracção diferencial do betão.

Comparando os valores obtidos dos exemplos considerados nas Figs. A3.12 a A3.14, verifica-se que os resultados obtidos estão de acordo com o comportamento dos materiais relativamente aos fenómenos envolvidos. Assim, verifica-se que:

- por comparação dos resultados apresentados nas Figs. A3.12 e A3.13, observa-se que quanto maior  $HR$ , maior a probabilidade de não ocorrer fendilhação (amostras que têm valores nulos para a armadura: 4.4% para  $HR = 60\%$  e 15.1% para  $HR = 80\%$ );
- a distribuição das amostras em que ocorreu fendilhação não se altera com a variação do número de amostras que fendilharam (valores da média,  $\mu$ , e do desvio padrão,  $\sigma$ , idênticos aos valores das amostras que necessitam de armadura, como se verifica nas Figs. A3.12 e A3.13:  $\mu = 0.321$  e  $\sigma = 0.0813$  na primeira; e,  $\mu = 0.320$  e  $\sigma = 0.0816$  na segunda);
- por comparação dos resultados apresentados nas Figs. A3.12 e A3.14 observa-se que quanto maior a resistência do betão à tracção, maior a probabilidade de não ocorrer fendilhação (4.4% para o betão C20/25 e 6.4% para o betão C35/45) e maior a quantidade mínima de armadura (valor médio igual a 0.307 para o betão C20/25 e igual a 0.438 para o betão C35/45).

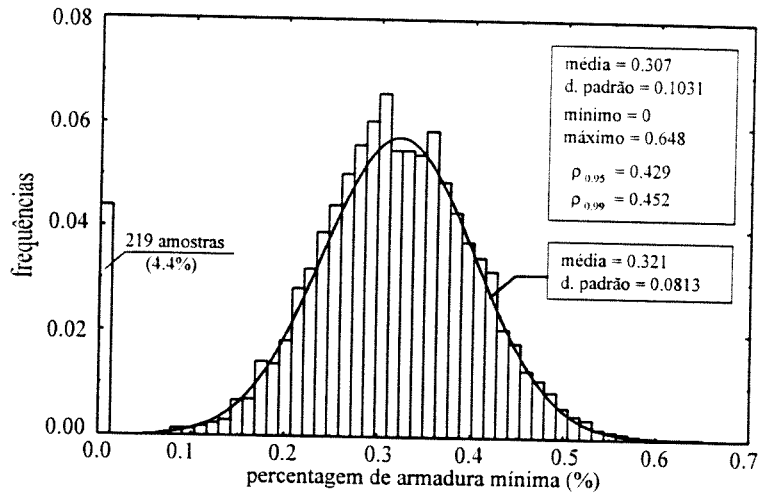


Fig. A3.12 – Distribuição da quantidade mínima de armadura de uma viga sujeita a retracção diferencial.  
 Dados: betão C20/25, aço A500;  $HR = 60\%$ ;  $b \times h = 0.25 \times 0.25 m^2$ ;  $n^\circ$  de amostras = 5000.

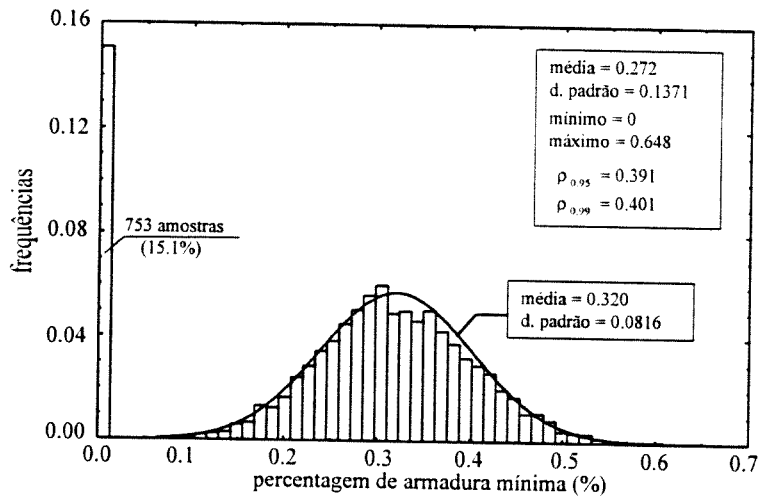


Fig. A3.13 – Distribuição da quantidade mínima de armadura de uma viga sujeita a retracção diferencial.  
 Dados: betão C20/25, aço A500;  $HR = 80\%$ ;  $b \times h = 0.25 \times 0.25 m^2$ ;  $n^\circ$  de amostras = 5000.

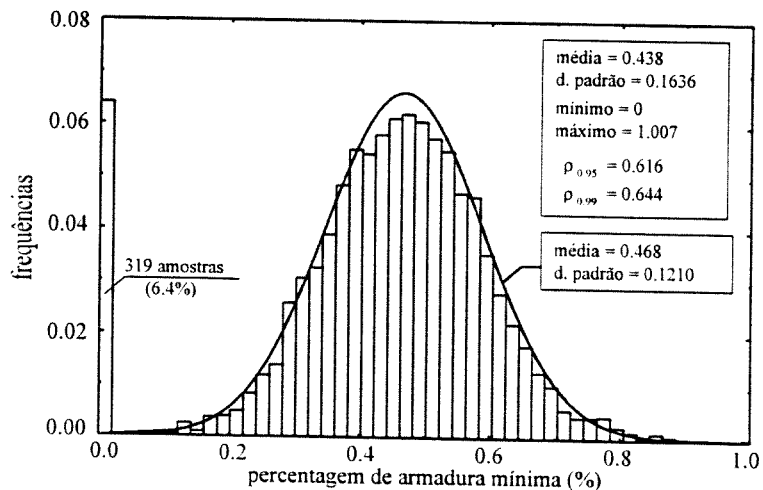


Fig. A3.14 – Distribuição da quantidade mínima de armadura de uma viga sujeita a retracção diferencial.  
 Dados: betão C35/45, aço A500;  $HR = 60\%$ ;  $b \times h = 0.25 \times 0.25 m^2$ ;  $n^\circ$  de amostras = 5000.

Como conclusão final refira-se que para valores correntes da humidade relativa do meio ambiente (valores entre 60% a 80%) a probabilidade de ocorrer fendilhação devida à retracção é elevada (entre 84.9% e 96.6% para o betão C20/25, de acordo com os resultados obtidos). Por isso, o estudo das distribuições da quantidade de armadura mínima, partindo da hipótese que ocorre sempre fendilhação (suposição conservativa), aproxima-se suficientemente dos valores reais. Partindo desta suposição, a distribuição da armadura mínima pode ser obtida exclusivamente através dos critérios definidos em A3.3.1. No ponto seguinte apresenta-se os resultados obtidos considerando esta hipótese.

### A3.4.3 – Resultados obtidos na segunda fase

Os resultados que a seguir se apresentam foram obtidos por aplicação do método de Monte Carlo e considerando os critérios anteriormente descritos, para a quantificação da armadura mínima (definidos através das expressões (A3.3) e (A3.4), com  $k_c = 1.0$  para tracção simples e  $k = 0.8$  para deformações intrínsecas). Distinguem-se ainda os resultados obtidos para cada uma das hipóteses utilizadas na caracterização das variáveis aleatórias  $f_c$  e  $f_{ct}$  (ver Quadro A3.1). Assim, passará a designar-se por:

- *Hipótese 1* – variáveis aleatórias  $f_c$  e  $f_{ct}$  caracterizadas de acordo com a hipótese "regulamentar" descrita na secção A3.4.1 e explicitada no Quadro A3.1. Distingue-se pelo facto do desvio padrão de  $f_c$  e do coeficiente de variação de  $f_{ct}$  serem iguais para todas as classes de betão;
- *Hipótese 2* – variáveis aleatórias  $f_c$  e  $f_{ct}$  caracterizadas de acordo com a hipótese "alternativa" descrita na secção A3.4.1 e explicitada no Quadro A3.1. Distingue-se pelos coeficientes de variação serem constantes para betões de resistência mais baixa e os desvios padrão serem constantes para os betões de resistência mais elevada, de acordo com as expressões (A3.9) e (A3.10).

No Quadro A3.2 apresenta-se os resultados obtidos pela aplicação do critério de não plastificação das armaduras (expressão A3.4), nomeadamente, os valores que caracterizam a distribuição da percentagem de armadura mínima,  $\rho$ , assim como o quantil de 95%,  $\rho_{0,95}$  (identificado por valor característico), e o quantil de 99%,  $\rho_{0,99}$  (correspondente a uma probabilidade de rotura de 1%, corrente neste tipo de problemas, e identificado por valor de cálculo), para várias classes de betão. Nas Figs. A3.15 e A3.16 representam-se os valores descritos no Quadro A3.2, respectivamente para a hipótese 1 e hipótese 2.



Nos Quadros A3.3 a A3.6 apresenta-se os resultados obtidos pela aplicação do critério da largura de fendas (expressão A3.3), respectivamente para a hipótese 1 e hipótese 2. Estes resultados são definidos através dos valores que caracterizam a distribuição da percentagem de armadura mínima,  $\rho$ , os quantis  $\rho_{0,95}$  e  $\rho_{0,99}$ , para várias classes de betão, diâmetro de varões e considerando dois valores admissíveis para a largura de fendas,  $w_k$ , 0.3mm e 0.2mm ( $w_k = 1.3 w_m$ , para casos de deformações impostas e com a menor dimensão inferior a 0.3m). Nas Figs. A3.17 e A3.18 ilustram-se os valores dos Quadros A3.3 a A3.6, respectivamente.

Quadro A3.2 – Resultados obtidos para a percentagem de armadura mínima pelo critério de não plastificação da armadura.

Classes de aço	Classes de betão	Percentagem de armadura mínima							
		Hipótese 1				Hipótese 2			
		média	desvio padrão	V. car. $\rho_{0,95}$	V.calc. $\rho_{0,99}$	média	desvio padrão	V. car. $\rho_{0,95}$	V.calc. $\rho_{0,99}$
A235	C12/15	0.493	0.1166	0.685	0.764	0.496	0.1282	0.707	0.794
	C16/20	0.586	0.1387	0.814	0.909	0.587	0.1527	0.838	0.942
	C20/25	0.679	0.1571	0.937	1.044	0.681	0.1762	0.971	1.091
	C25/30	0.805	0.1890	1.116	1.245	0.805	0.2084	1.148	1.290
	C30/37	0.896	0.2102	1.242	1.385	0.894	0.2159	1.249	1.396
	C35/45	0.991	0.2337	1.375	1.535	0.989	0.2176	1.347	1.495
	C40/50	1.085	0.2540	1.503	1.676	1.080	0.2180	1.439	1.587
	C45/55	1.175	0.2741	1.626	1.813	1.176	0.2256	1.547	1.701
	C50/60	1.267	0.2978	1.757	1.960	1.263	0.2205	1.626	1.776
A400	C12/15	0.293	0.0687	0.406	0.453	0.293	0.0757	0.418	0.469
	C16/20	0.348	0.0810	0.481	0.536	0.346	0.0876	0.490	0.550
	C20/25	0.401	0.0926	0.553	0.616	0.402	0.1042	0.573	0.644
	C25/30	0.475	0.1119	0.659	0.735	0.475	0.1240	0.679	0.763
	C30/37	0.530	0.1238	0.734	0.818	0.532	0.1307	0.747	0.836
	C35/45	0.586	0.1372	0.812	0.905	0.585	0.1308	0.800	0.889
	C40/50	0.639	0.1517	0.889	0.992	0.640	0.1319	0.857	0.947
	C45/55	0.694	0.1623	0.961	1.072	0.694	0.1342	0.915	1.006
	C50/60	0.749	0.1761	1.039	1.159	0.748	0.1340	0.968	1.060
A500	C12/15	0.235	0.0552	0.326	0.363	0.234	0.0607	0.334	0.375
	C16/20	0.277	0.0645	0.383	0.427	0.278	0.0716	0.396	0.445
	C20/25	0.323	0.0760	0.448	0.500	0.321	0.0812	0.455	0.510
	C25/30	0.381	0.0893	0.528	0.589	0.380	0.0987	0.542	0.610
	C30/37	0.423	0.1000	0.587	0.656	0.423	0.1058	0.597	0.669
	C35/45	0.466	0.1075	0.643	0.716	0.466	0.1048	0.638	0.710
	C40/50	0.510	0.1199	0.707	0.789	0.510	0.1054	0.683	0.755
	C45/55	0.556	0.1306	0.771	0.860	0.555	0.1060	0.729	0.802
	C50/60	0.599	0.1424	0.833	0.930	0.599	0.1072	0.776	0.849

Quadro A3.3 – Resultados obtidos para a percentagem de armadura mínima pelo critério de largura de fendas: Hipótese 1 - valor de cálculo da largura de fendas admissível:  $w_k = 0.3\text{mm}$ .

classe betão	$f_{ck}$ (MPa)	$\phi = 6\text{mm}$		$\phi = 8\text{mm}$		$\phi = 10\text{mm}$		$\phi = 12\text{mm}$		$\phi = 16\text{mm}$		$\phi = 20\text{mm}$		$\phi = 25\text{mm}$		$\phi = 32\text{mm}$	
		$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$
C12/15	12	0.490	0.0702	0.569	0.0838	0.637	0.0927	0.699	0.1033	0.808	0.1184	0.909	0.1316	1.022	0.1499	1.161	0.1689
C16/20	16	0.530	0.0786	0.614	0.0920	0.687	0.1039	0.754	0.1129	0.875	0.1331	0.984	0.1444	1.100	0.1682	1.255	0.1946
C20/25	20	0.567	0.0919	0.657	0.1059	0.736	0.1184	0.808	0.1274	0.938	0.1507	1.052	0.1709	1.184	0.1921	1.342	0.2203
C25/30	25	0.616	0.1030	0.715	0.1208	0.801	0.1304	0.879	0.1484	1.021	0.1714	1.144	0.1882	1.288	0.2149	1.469	0.2473
C30/37	30	0.641	0.1093	0.742	0.1267	0.832	0.1432	0.913	0.1564	1.063	0.1831	1.191	0.2036	1.339	0.2321	1.517	0.2635
C35/45	35	0.666	0.1185	0.770	0.1362	0.863	0.1495	0.946	0.1681	1.097	0.1954	1.235	0.2203	1.384	0.2405	1.580	0.2835
C40/50	40	0.689	0.1236	0.796	0.1398	0.894	0.1604	0.985	0.1767	1.142	0.2057	1.278	0.2250	1.435	0.2584	1.632	0.2959
C45/55	45	0.714	0.1287	0.823	0.1494	0.927	0.1675	1.016	0.1793	1.174	0.2160	1.321	0.2403	1.481	0.2725	1.688	0.3062
C50/60	50	0.737	0.1362	0.850	0.1579	0.954	0.1768	1.050	0.1955	1.214	0.2191	1.363	0.2536	1.529	0.2852	1.745	0.3263
valores característicos ( $\rho_{0,95}$ ) e valores de cálculo ( $\rho_{0,99}$ )																	
classe betão	$f_{ck}$ (MPa)	$\phi = 6\text{mm}$		$\phi = 8\text{mm}$		$\phi = 10\text{mm}$		$\phi = 12\text{mm}$		$\phi = 16\text{mm}$		$\phi = 20\text{mm}$		$\phi = 25\text{mm}$		$\phi = 32\text{mm}$	
		$\rho_{0,95}$	$\rho_{0,99}$	$\rho_{0,95}$	$\rho_{0,99}$	$\rho_{0,95}$	$\rho_{0,99}$	$\rho_{0,95}$	$\rho_{0,99}$	$\rho_{0,95}$	$\rho_{0,99}$	$\rho_{0,95}$	$\rho_{0,99}$	$\rho_{0,95}$	$\rho_{0,99}$	$\rho_{0,95}$	$\rho_{0,99}$
C12/15	12	0.605	0.653	0.707	0.764	0.789	0.853	0.869	0.939	1.003	1.083	1.125	1.215	1.269	1.371	1.439	1.554
C16/20	16	0.659	0.713	0.765	0.828	0.858	0.929	0.940	1.017	1.094	1.185	1.222	1.320	1.377	1.491	1.575	1.708
C20/25	20	0.718	0.781	0.831	0.903	0.931	1.011	1.018	1.104	1.186	1.289	1.333	1.450	1.500	1.631	1.704	1.854
C25/30	25	0.785	0.856	0.914	0.996	1.015	1.104	1.123	1.224	1.303	1.420	1.454	1.582	1.641	1.788	1.876	2.044
C30/37	30	0.821	0.895	0.950	1.037	1.068	1.165	1.170	1.277	1.364	1.489	1.526	1.665	1.721	1.879	1.950	2.130
C35/45	35	0.861	0.942	0.994	1.087	1.109	1.211	1.222	1.337	1.418	1.552	1.597	1.747	1.780	1.943	2.046	2.240
C40/50	40	0.892	0.977	1.026	1.121	1.158	1.267	1.276	1.396	1.480	1.621	1.648	1.801	1.860	2.036	2.119	2.320
C45/55	45	0.926	1.013	1.069	1.171	1.203	1.317	1.311	1.433	1.529	1.676	1.716	1.880	1.929	2.115	2.192	2.401
C50/60	50	0.961	1.054	1.110	1.217	1.245	1.365	1.372	1.505	1.574	1.724	1.780	1.953	1.998	2.192	2.282	2.504

Quadro A3.4 – Resultados obtidos para a percentagem de armadura mínima pelo critério de largura de fendas: Hipótese 1 - valor de cálculo da largura de fendas admissível:  $w_k = 0.2\text{mm}$ .

classe betão	$f_{ck}$ (MPa)	$\phi = 6\text{mm}$		$\phi = 8\text{mm}$		$\phi = 10\text{mm}$		$\phi = 12\text{mm}$		$\phi = 16\text{mm}$		$\phi = 20\text{mm}$		$\phi = 25\text{mm}$		$\phi = 32\text{mm}$	
		$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$
C12/15	12	0.632	0.0925	0.730	0.1067	0.818	0.1175	0.899	0.1319	1.045	0.1550	1.174	0.1697	1.320	0.1896	1.503	0.2258
C16/20	16	0.681	0.1028	0.791	0.1191	0.887	0.1335	0.975	0.1476	1.128	0.1717	1.270	0.1954	1.426	0.2136	1.626	0.2489
C20/25	20	0.732	0.1173	0.846	0.1359	0.948	0.1514	1.044	0.1687	1.213	0.1967	1.356	0.2214	1.524	0.2500	1.741	0.2835
C25/30	25	0.795	0.1323	0.920	0.1534	1.029	0.1732	1.135	0.1891	1.322	0.2219	1.480	0.2476	1.662	0.2841	1.893	0.3220
C30/37	30	0.825	0.1393	0.957	0.1650	1.069	0.1855	1.179	0.2030	1.370	0.2335	1.536	0.2661	1.728	0.2994	1.966	0.3442
C35/45	35	0.854	0.1521	0.993	0.1762	1.112	0.1928	1.222	0.2153	1.418	0.2513	1.599	0.2856	1.791	0.3140	2.041	0.3682
C40/50	40	0.883	0.1585	1.024	0.1846	1.153	0.2063	1.265	0.2264	1.473	0.2668	1.651	0.2988	1.849	0.3369	2.107	0.3855
C45/55	45	0.911	0.1655	1.062	0.1909	1.189	0.2161	1.305	0.2380	1.519	0.2801	1.703	0.3048	1.918	0.3565	2.183	0.4012
C50/60	50	0.945	0.1705	1.093	0.2039	1.222	0.2277	1.348	0.2547	1.563	0.2839	1.756	0.3199	1.979	0.3763	2.248	0.4233
valores característicos ( $\rho_{0,95}$ ) e valores de cálculo ( $\rho_{0,99}$ )																	
classe betão	$f_{ck}$ (MPa)	$\phi = 6\text{mm}$		$\phi = 8\text{mm}$		$\phi = 10\text{mm}$		$\phi = 12\text{mm}$		$\phi = 16\text{mm}$		$\phi = 20\text{mm}$		$\phi = 25\text{mm}$		$\phi = 32\text{mm}$	
		$\rho_{0,95}$	$\rho_{0,99}$	$\rho_{0,95}$	$\rho_{0,99}$	$\rho_{0,95}$	$\rho_{0,99}$	$\rho_{0,95}$	$\rho_{0,99}$	$\rho_{0,95}$	$\rho_{0,99}$	$\rho_{0,95}$	$\rho_{0,99}$	$\rho_{0,95}$	$\rho_{0,99}$	$\rho_{0,95}$	$\rho_{0,99}$
C12/15	12	0.784	0.847	0.906	0.978	1.011	1.091	1.116	1.206	1.300	1.406	1.453	1.569	1.632	1.761	1.874	2.028
C16/20	16	0.850	0.920	0.987	1.068	1.107	1.198	1.218	1.318	1.410	1.527	1.591	1.725	1.777	1.923	2.035	2.205
C20/25	20	0.925	1.005	1.070	1.162	1.197	1.300	1.321	1.436	1.537	1.671	1.720	1.871	1.935	2.106	2.207	2.401
C25/30	25	1.013	1.103	1.172	1.277	1.314	1.432	1.446	1.575	1.687	1.838	1.887	2.056	2.129	2.323	2.423	2.642
C30/37	30	1.054	1.149	1.228	1.341	1.374	1.501	1.513	1.651	1.754	1.913	1.974	2.155	2.220	2.425	2.532	2.767
C35/45	35	1.104	1.208	1.283	1.403	1.429	1.561	1.576	1.723	1.831	2.003	2.069	2.263	2.307	2.521	2.647	2.898
C40/50	40	1.144	1.252	1.328	1.453	1.492	1.633	1.637	1.792	1.912	2.094	2.142	2.346	2.403	2.633	2.741	3.004
C45/55	45	1.183	1.296	1.376	1.506	1.544	1.692	1.696	1.859	1.980	2.171	2.204	2.412	2.504	2.747	2.843	3.116
C50/60	50	1.225	1.342	1.428	1.567	1.597	1.752	1.767	1.941	2.030	2.223	2.282	2.500	2.598	2.854	2.944	3.233

Quadro A3.5 – Resultados obtidos para a percentagem de armadura mínima pelo critério de largura de fendas: Hipótese 2 - valor de cálculo da largura de fendas admissível:  $w_k = 0.3\text{mm}$ .

classe betão	$f_{ck}$ (MPa)	$\phi = 6\text{mm}$		$\phi = 8\text{mm}$		$\phi = 10\text{mm}$		$\phi = 12\text{mm}$		$\phi = 16\text{mm}$		$\phi = 20\text{mm}$		$\phi = 25\text{mm}$		$\phi = 32\text{mm}$	
		$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$
C12/15	12	0.487	0.0911	0.563	0.1059	0.630	0.1184	0.695	0.1299	0.803	0.1512	0.902	0.1728	1.012	0.1912	1.150	0.2188
C16/20	16	0.527	0.0987	0.610	0.1147	0.686	0.1281	0.753	0.1377	0.874	0.1632	0.981	0.1847	1.104	0.2069	1.248	0.2374
C20/25	20	0.565	0.1059	0.656	0.1196	0.734	0.1346	0.807	0.1512	0.938	0.1763	1.047	0.1999	1.179	0.2160	1.342	0.2530
C25/30	25	0.616	0.1133	0.714	0.1347	0.805	0.1515	0.880	0.1659	1.020	0.1971	1.144	0.2189	1.283	0.2407	1.460	0.2811
C30/37	30	0.641	0.1157	0.741	0.1360	0.832	0.1526	0.916	0.1673	1.060	0.1970	1.190	0.2172	1.337	0.2454	1.521	0.2739
C35/45	35	0.664	0.1105	0.771	0.1275	0.865	0.1431	0.951	0.1579	1.100	0.1841	1.235	0.2000	1.392	0.2324	1.579	0.2643
C40/50	40	0.690	0.1042	0.800	0.1206	0.895	0.1354	0.981	0.1509	1.140	0.1696	1.283	0.1959	1.433	0.2205	1.637	0.2510
C45/55	45	0.712	0.1000	0.825	0.1129	0.925	0.1270	1.018	0.1440	1.176	0.1673	1.322	0.1847	1.485	0.2096	1.687	0.2394
C50/60	50	0.733	0.0954	0.851	0.1107	0.958	0.1242	1.049	0.1355	1.215	0.1551	1.363	0.1777	1.533	0.2006	1.743	0.2229
valores característicos ( $\rho_{0,95}$ ) e valores de cálculo ( $\rho_{0,99}$ )																	
classe betão	$f_{ck}$ (MPa)	$\phi = 6\text{mm}$		$\phi = 8\text{mm}$		$\phi = 10\text{mm}$		$\phi = 12\text{mm}$		$\phi = 16\text{mm}$		$\phi = 20\text{mm}$		$\phi = 25\text{mm}$		$\phi = 32\text{mm}$	
		$\rho_{0,95}$	$\rho_{0,99}$	$\rho_{0,95}$	$\rho_{0,99}$	$\rho_{0,95}$	$\rho_{0,99}$	$\rho_{0,95}$	$\rho_{0,99}$	$\rho_{0,95}$	$\rho_{0,99}$	$\rho_{0,95}$	$\rho_{0,99}$	$\rho_{0,95}$	$\rho_{0,99}$	$\rho_{0,95}$	$\rho_{0,99}$
C12/15	12	0.637	0.699	0.737	0.809	0.825	0.905	0.909	0.997	1.052	1.155	1.186	1.304	1.326	1.457	1.510	1.659
C16/20	16	0.689	0.757	0.799	0.877	0.897	0.984	0.979	1.073	1.142	1.254	1.285	1.411	1.444	1.585	1.638	1.800
C20/25	20	0.739	0.811	0.853	0.934	0.955	1.047	1.056	1.159	1.228	1.348	1.376	1.512	1.534	1.681	1.758	1.931
C25/30	25	0.802	0.880	0.936	1.027	1.054	1.157	1.153	1.266	1.344	1.479	1.504	1.653	1.679	1.843	1.922	2.114
C30/37	30	0.831	0.910	0.965	1.057	1.083	1.187	1.191	1.305	1.384	1.518	1.547	1.695	1.741	1.908	1.972	2.158
C35/45	35	0.846	0.921	0.981	1.068	1.100	1.198	1.211	1.318	1.403	1.528	1.564	1.700	1.774	1.933	2.014	2.194
C40/50	40	0.861	0.932	0.998	1.081	1.118	1.210	1.229	1.332	1.419	1.535	1.605	1.739	1.796	1.946	2.050	2.221
C45/55	45	0.876	0.945	1.011	1.088	1.134	1.220	1.255	1.353	1.451	1.565	1.626	1.752	1.830	1.973	2.081	2.244
C50/60	50	0.890	0.955	1.033	1.109	1.162	1.247	1.272	1.364	1.470	1.576	1.655	1.776	1.863	2.000	2.110	2.262

Quadro A3.6 – Resultados obtidos para a percentagem de armadura mínima pelo critério de largura de fendas: Hipótese 2 - valor de cálculo da largura de fendas admissível:  $w_k = 0.2\text{mm}$ .

classe betão	$f_{ck}$ (MPa)	$\phi = 6\text{mm}$		$\phi = 8\text{mm}$		$\phi = 10\text{mm}$		$\phi = 12\text{mm}$		$\phi = 16\text{mm}$		$\phi = 20\text{mm}$		$\phi = 25\text{mm}$		$\phi = 32\text{mm}$	
		$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$
C12/15	12	0.625	0.114	0.725	0.1364	0.811	0.1535	0.893	0.1685	1.037	0.1954	1.163	0.2137	1.307	0.2490	1.489	0.2772
C16/20	16	0.681	0.1267	0.786	0.1459	0.882	0.1614	0.969	0.1823	1.122	0.2131	1.265	0.2385	1.423	0.2682	1.620	0.3092
C20/25	20	0.727	0.1367	0.844	0.1601	0.947	0.1802	1.039	0.1954	1.206	0.2270	1.354	0.2574	1.524	0.2871	1.730	0.3319
C25/30	25	0.793	0.1458	0.919	0.1741	1.030	0.1906	1.131	0.2170	1.314	0.2528	1.480	0.2837	1.665	0.3208	1.896	0.3692
C30/37	30	0.825	0.1527	0.955	0.1704	1.070	0.1995	1.181	0.2150	1.368	0.2517	1.533	0.2841	1.730	0.3180	1.968	0.3716
C35/45	35	0.858	0.1420	0.989	0.1650	1.113	0.1847	1.222	0.2042	1.418	0.2382	1.594	0.2682	1.789	0.3047	2.040	0.3433
C40/50	40	0.887	0.1355	1.025	0.1568	1.152	0.1784	1.266	0.1932	1.470	0.2242	1.651	0.2470	1.854	0.2797	2.117	0.3282
C45/55	45	0.918	0.1286	1.060	0.1458	1.188	0.1681	1.310	0.1842	1.517	0.2098	1.708	0.2444	1.919	0.2686	2.187	0.3147
C50/60	50	0.947	0.1234	1.095	0.1429	1.228	0.1601	1.350	0.1752	1.565	0.2057	1.760	0.2318	1.980	0.2647	2.254	0.2981
valores característicos ( $\rho_{0,95}$ ) e valores de cálculo ( $\rho_{0,99}$ )																	
classe betão	$f_{ck}$ (MPa)	$\phi = 6\text{mm}$		$\phi = 8\text{mm}$		$\phi = 10\text{mm}$		$\phi = 12\text{mm}$		$\phi = 16\text{mm}$		$\phi = 20\text{mm}$		$\phi = 25\text{mm}$		$\phi = 32\text{mm}$	
		$\rho_{0,95}$	$\rho_{0,99}$	$\rho_{0,95}$	$\rho_{0,99}$	$\rho_{0,95}$	$\rho_{0,99}$	$\rho_{0,95}$	$\rho_{0,99}$	$\rho_{0,95}$	$\rho_{0,99}$	$\rho_{0,95}$	$\rho_{0,99}$	$\rho_{0,95}$	$\rho_{0,99}$	$\rho_{0,95}$	$\rho_{0,99}$
C12/15	12	0.813	0.891	0.949	1.042	1.063	1.168	1.170	1.285	1.358	1.492	1.515	1.660	1.717	1.886	1.945	2.134
C16/20	16	0.889	0.976	1.026	1.125	1.147	1.257	1.269	1.393	1.473	1.6218	1.657	1.820	1.864	2.047	2.129	2.339
C20/25	20	0.952	1.045	1.107	1.216	1.243	1.366	1.360	1.494	1.579	1.734	1.777	1.953	1.996	2.192	2.276	2.502
C25/30	25	1.033	1.132	1.205	1.324	1.344	1.473	1.488	1.636	1.730	1.902	1.947	2.140	2.193	2.411	2.503	2.755
C30/37	30	1.076	1.180	1.235	1.351	1.398	1.534	1.535	1.681	1.782	1.954	2.000	2.194	2.253	2.470	2.579	2.832
C35/45	35	1.092	1.188	1.260	1.373	1.417	1.543	1.558	1.697	1.810	1.972	2.035	2.218	2.290	2.498	2.605	2.839
C40/50	40	1.110	1.202	1.283	1.390	1.445	1.567	1.584	1.715	1.839	1.992	2.057	2.226	2.314	2.505	2.657	2.881
C45/55	45	1.130	1.217	1.300	1.399	1.464	1.579	1.613	1.739	1.862	2.005	2.11	2.277	2.361	2.544	2.705	2.919
C50/60	50	1.150	1.234	1.330	1.427	1.491	1.600	1.638	1.758	1.903	2.044	2.141	2.299	2.415	2.596	2.744	2.947

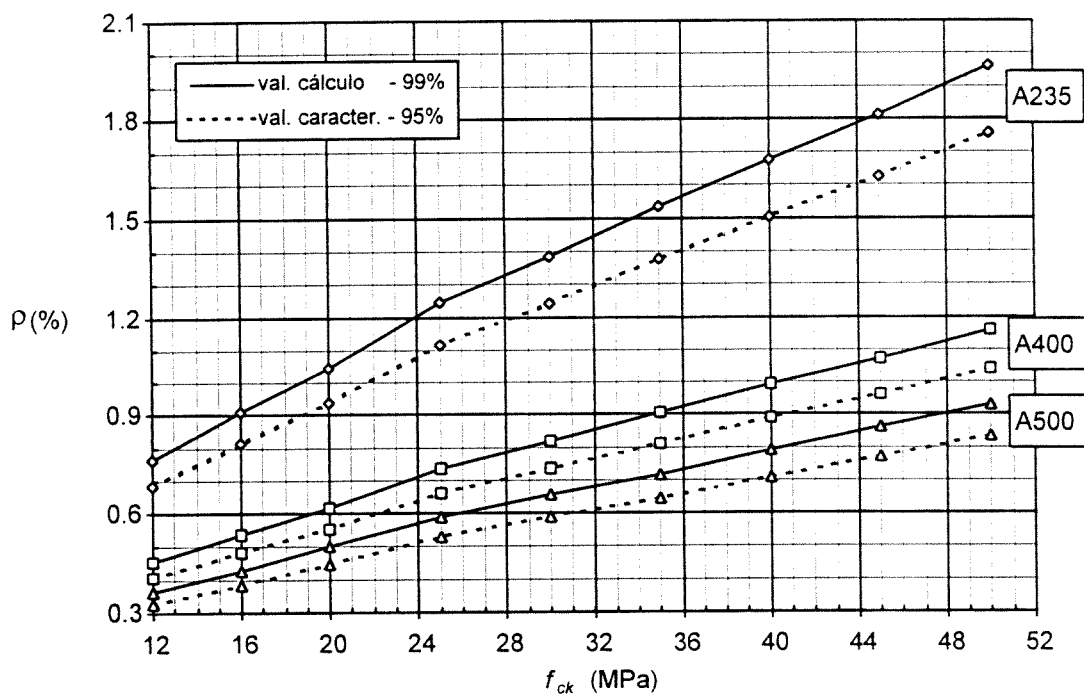


Fig. A3.15 – Armadura mínima para tracção simples pelo critério de não plastificação da armadura. Hipótese 1.

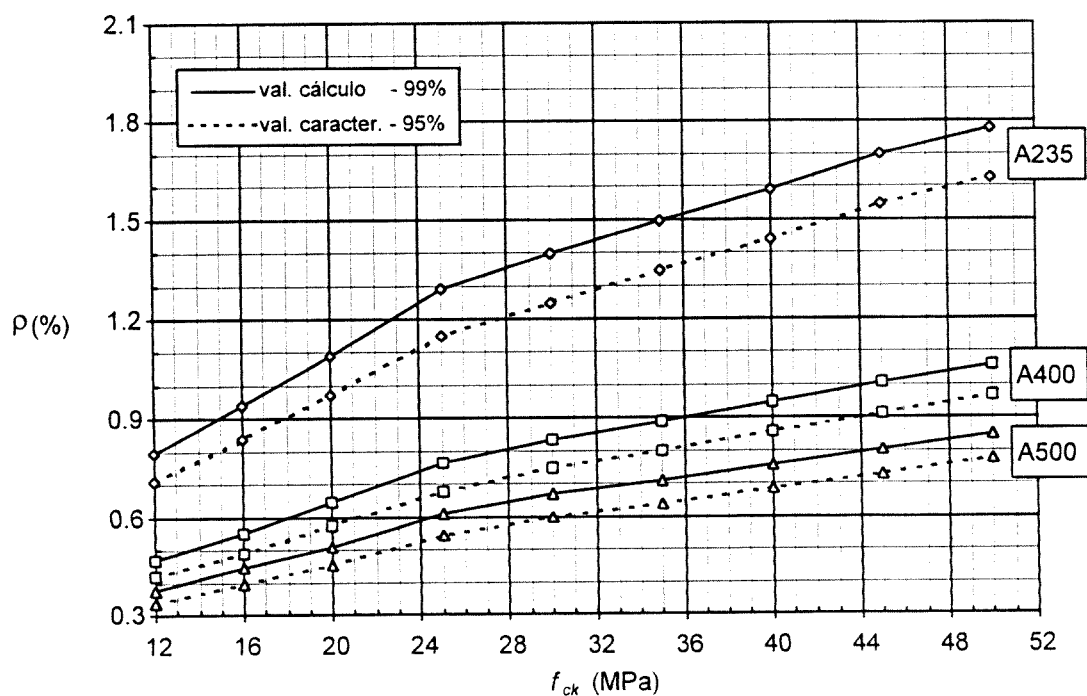
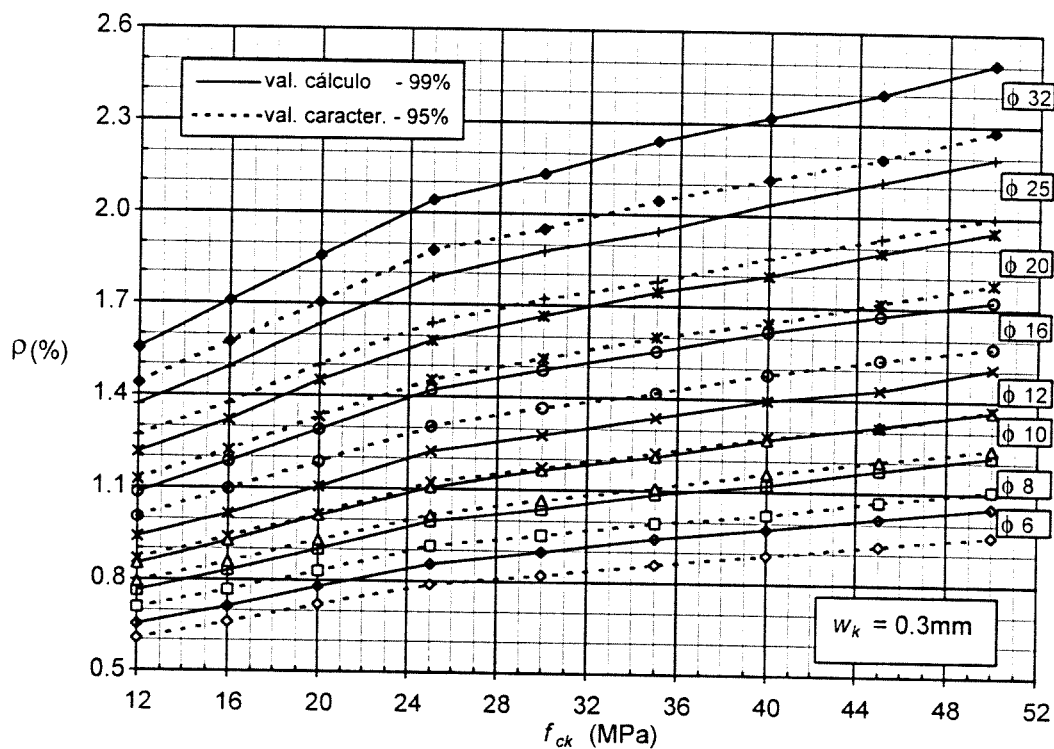
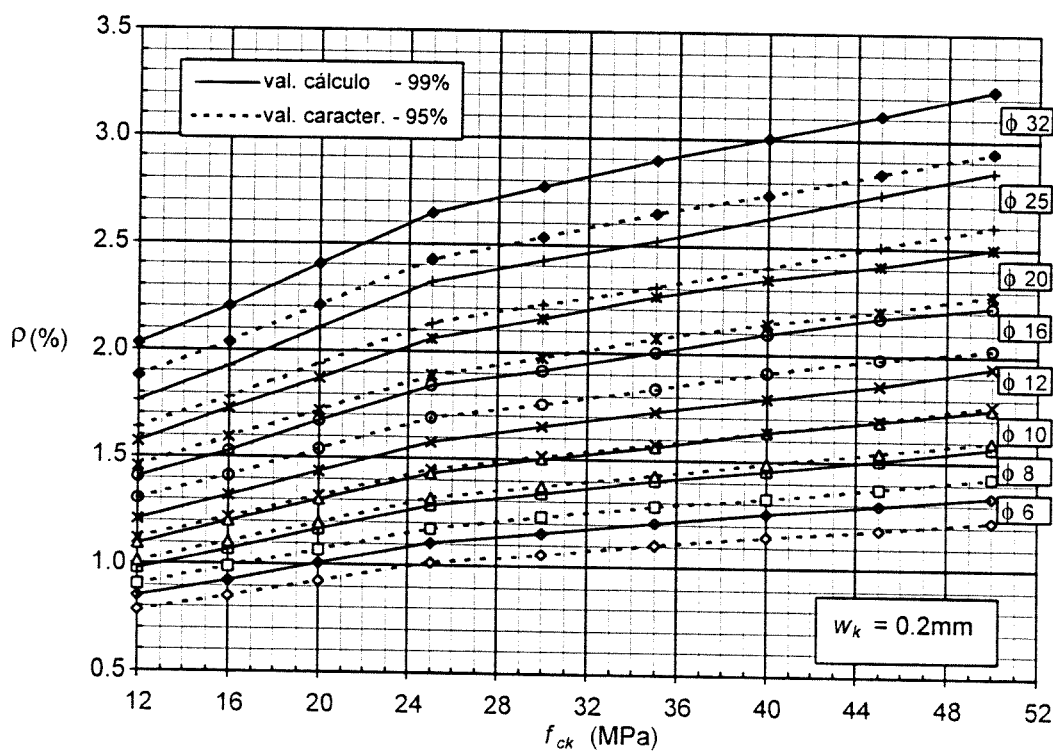


Fig. A3.16 – Armadura mínima para tracção simples pelo critério de não plastificação da armadura. Hipótese 2.

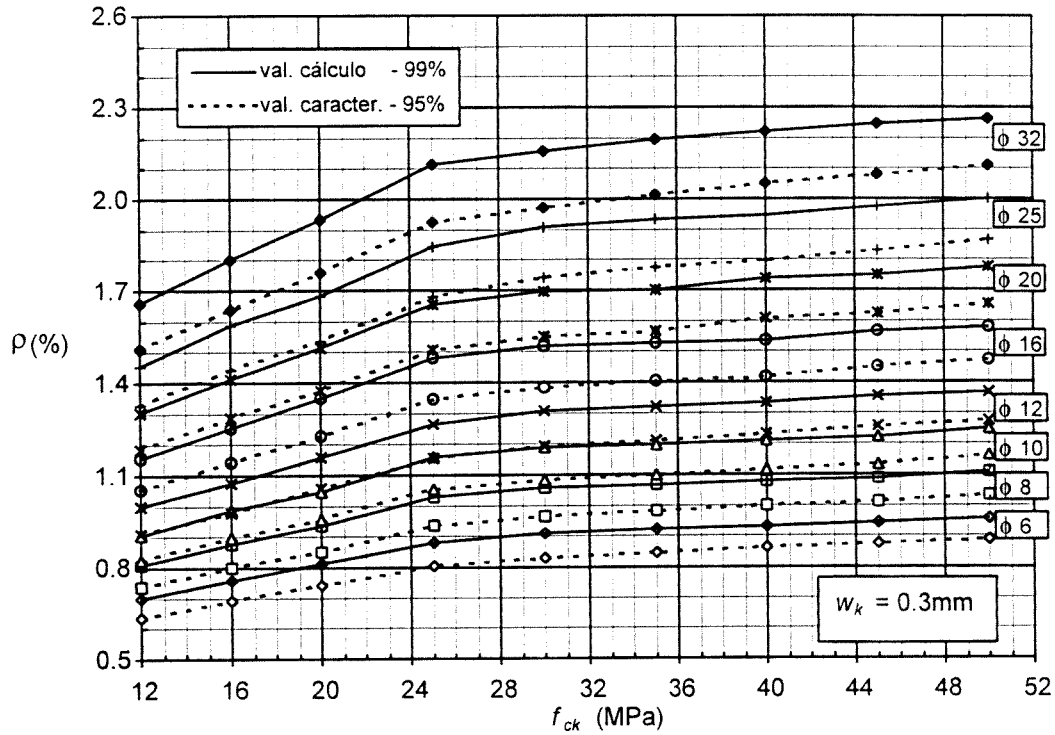


a) valor de cálculo da largura de fendas admissível:  $w_k = 0.3\text{mm}$

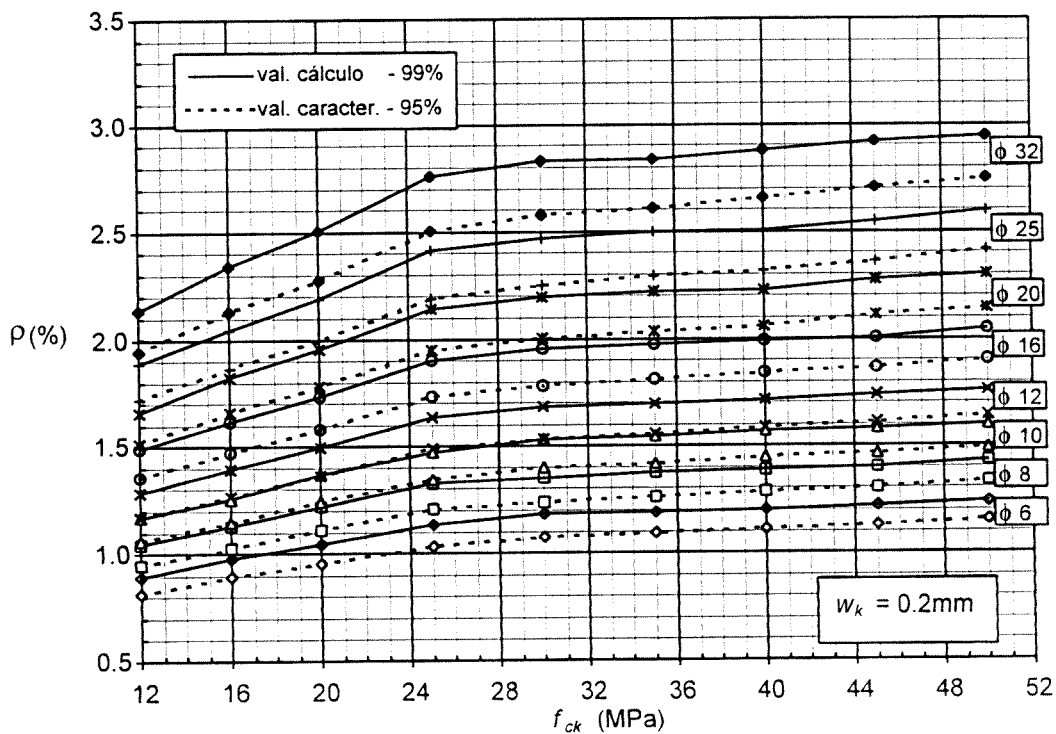


b) valor de cálculo da largura de fendas admissível:  $w_k = 0.2\text{mm}$

Fig. A3.17 – Armadura mínima para tracção simples pelo critério de largura de fendas. Hipótese 1.



a) valor de cálculo da largura de fendas admissível:  $w_k = 0.3\text{mm}$



b) valor de cálculo da largura de fendas admissível:  $w_k = 0.2\text{mm}$

Fig. A3.18 – Armadura mínima para tracção simples pelo critério de largura de fendas. Hipótese 2.

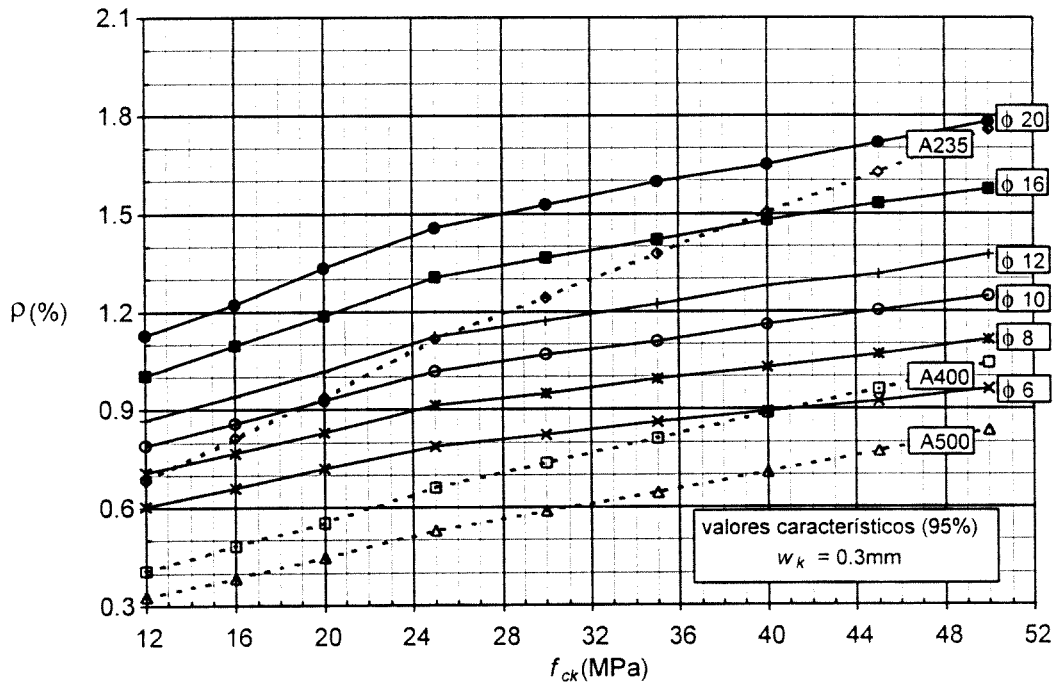
Dos resultados ilustrados nas Figs. A3.15 a A3.18, saliente-se alguns aspectos interessantes:

- Tal como se esperava, a quantidade de armadura mínima cresce proporcionalmente com a resistência do betão à tracção e decresce com a resistência (ou tensão de cedência) das armaduras. No entanto, essa variação é distinta consoante os critérios considerados. Assim, para o critério de não plastificação das armaduras verifica-se um crescimento apreciável da quantidade de armadura mínima em função da resistência do betão. Comparativamente, quando se considera o critério de largura de fendas esse crescimento é mais moderado.
- Comparando os resultados obtidos através da consideração da hipótese 1 ("regulamentar") e aqueles da hipótese 2 ("alternativa"), verifica-se que na primeira o declive das curvas  $\rho - f_c$  é praticamente constante, enquanto que, na segunda o declive dessas curvas sofre um decréscimo a partir do valor de  $f_c$  de cerca de 33MPa (betão C25/30). Nos resultados referentes ao critério de largura de fendas esta constatação é mais evidente, verificando-se na hipótese 2 que a quantidade de armadura mínima para betões a partir da classe C25/30 permanece praticamente constante. Assim, para esta hipótese, se o critério de largura de fendas for predominante, é razoável considerar, para varões de diâmetro  $\phi$ , um valor de  $\rho$  constante para todas as classes de betão;
- os valores de  $\rho$  obtidos para o quantil de 99% ( $\rho_{0,99}$ ) apresentam um comportamento e ordens de grandeza idênticos aos valores propostos por outros autores (ver Fig. A3.10), nomeadamente os que foram obtidos através da consideração da hipótese 2.

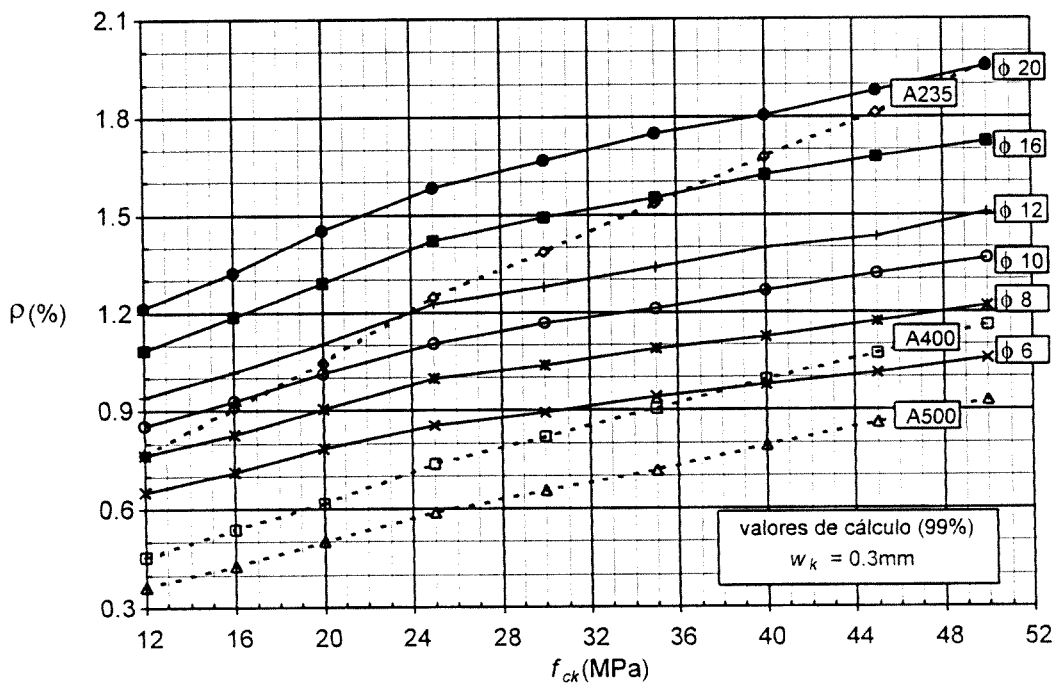
A consideração simultânea dos resultados referentes aos dois critérios permitem avaliar a quantidade de armadura mínima necessária para evitar a plastificação das armaduras e limitar o nível de fendilhação para uma probabilidade de ocorrência (entre 95% e 99%) quando se consideram deformações intrínsecas originando tracção simples. As Figs. A3.19 e A3.20 permitem definir os valores de  $\rho$  nestas condições, respectivamente, para a hipótese 1 ("regulamentar") e hipótese 2 ("alternativa"). Pretende-se com estes gráficos fornecer uma forma simples e rápida de avaliar a armadura mínima de acordo com as condições impostas pelo projecto.

### A3.5 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

Abordou-se o problema da avaliação da armadura mínima com o intuito de controlar e limitar a fendilhação em estruturas de betão. Destacam-se os casos em que essa fendilhação resulta do impedimento da estrutura, ou parte dela, a deformações impostas pela retracção do betão.



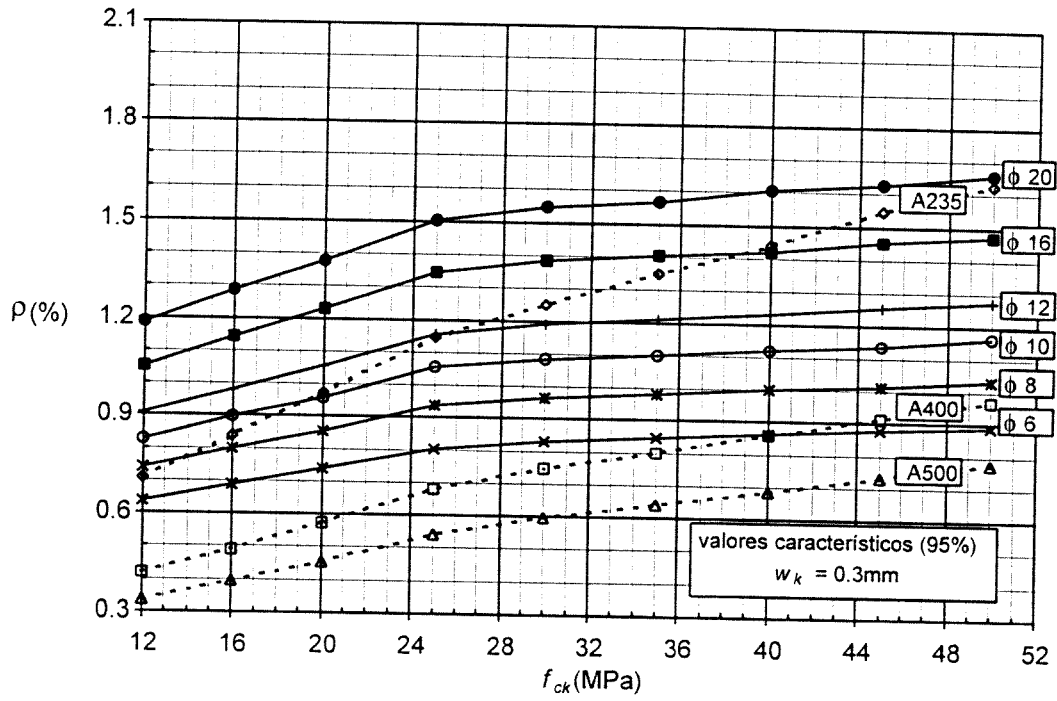
a) valores característicos



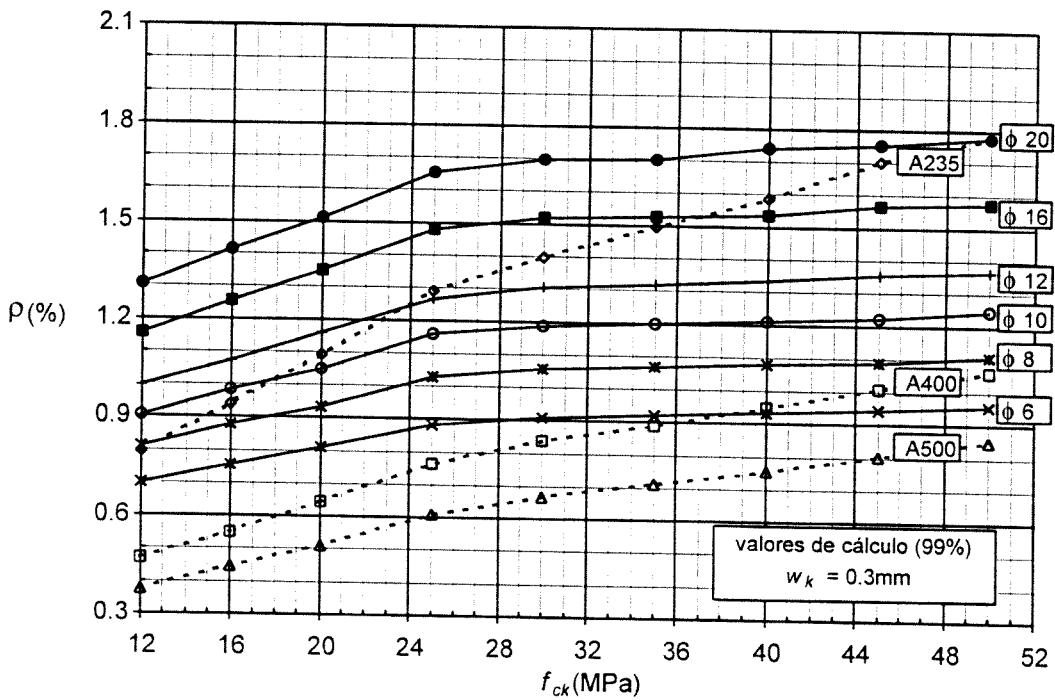
b) valores de cálculo

Fig. A3.19 – Armadura mínima no caso de tracção simples para elementos de betão de pequena espessura ( $h \leq 0.3\text{m}$ ). Hipótese I ("regulamentar") -  $w_k = 0.3\text{mm}$ .





a) valores característicos



b) valores de cálculo

Fig. A3.20 – Armadura mínima no caso de tracção simples para elementos de betão de pequena espessura ( $h \leq 0.3\text{m}$ ). Hipótese 2 ("alternativa") -  $w_k = 0.3\text{mm}$ .

Descreveu-se os critérios mais comuns para quantificar a armadura mínima, o critério de não plastificação da armadura e o critério de largura de fendas, e que serviram de base à definição dos valores propostos no MC90 e no EC2. Salientou-se, de forma sumária, os aspectos regulamentares associados a este problema e apresentaram-se propostas de outros autores.

Avaliou-se a armadura mínima através de uma abordagem probabilística onde se tem em conta a variabilidade dos parâmetros mais importantes que caracterizam o comportamento dos materiais. O procedimento adoptado dividiu-se em duas fases. Na primeira avaliou-se a possibilidade de ocorrer fendilhação em elementos de betão sujeitos a tensões de tracção provocadas por impedimento de deformações impostas pela retracção do betão. Na segunda fase obtiveram-se as distribuições da quantidade de armadura mínima por aplicação do método de Monte Carlo aos critérios anteriormente referidos. Dos resultados obtidos verificou-se que há uma grande probabilidade de ocorrer fendilhação quando existe impedimento à retracção do betão, logo há necessidade de utilizar armadura para ter em conta este efeito.

Finalmente, como corolário dos resultados obtidos na segunda fase propuseram-se ábacos para avaliar a armadura mínima em função da classe do betão e do aço, do diâmetro dos varões e do valor limite admissível para a largura de fendas.

## Anexo 4

### RESULTADOS COMPLEMENTARES DOS PROBLEMAS ABORDADOS NO CAPÍTULO 6

Neste anexo apresentam-se resultados complementares relativos aos problemas de segurança para os estados limites últimos estudados no Capítulo 6. Os resultados que se apresentam nos Quadros A4.1 a A4.7 dizem respeito aos resultados da abordagem probabilística do estudo da segurança de secções de betão armado apresentada nesse capítulo. Os resultados que se apresentam nos Quadros A4.8 a A4.27 dizem respeito aos resultados da abordagem probabilística do estudo da segurança de vigas de betão armado.

Quadro A4.1 - Resultados das análises probabilísticas. Materiais: betão C20/25 e aço A500.  $\rho'/\rho = 0.0$ .

$\rho$	$\bar{M}$	$\sigma_M$	C.V. (%)	$M(10^{-4})$	$(\bar{x}/d)$	$\bar{E}_{m-c}$	$\gamma_{sec}$
0.25	74.3	3.67	4.9	60.6	0.082	0.94	1.23
0.50	140.8	7.08	5.0	114.5	0.144	0.95	1.23
0.75	198.6	10.4	5.3	159.8	0.207	0.91	1.24
1.00	253.1	13.9	5.5	201.2	0.273	0.86	1.26
1.25	304.2	17.8	5.9	237.9	0.340	0.80	1.28
1.50	351.3	22.8	6.5	266.6	0.406	0.72	1.32
1.75	393.5	30.3	7.7	280.9	0.468	0.62	1.40
2.00	428.8	40.0	9.3	280.0	0.521	0.47	1.53
2.25	454.6	50.1	11.0	268.2	0.561	0.29	1.70
2.50	471.2	57.8	12.3	256.2	0.588	0.17	1.84
2.75	482.0	62.2	12.9	250.4	0.607	0.00	1.92
3.00	490.3	65.0	13.3	248.3	0.621	0.00	1.97
3.25	497.4	66.9	13.5	248.5	0.634	0.00	2.00
3.50	503.7	68.4	13.6	249.0	0.645	0.00	2.02
3.75	509.4	69.9	13.7	249.5	0.656	0.00	2.04
4.00	514.7	71.2	13.8	249.8	0.666	0.00	2.06

Quadro A4.2 - Resultados das análises probabilísticas. Materiais: betão C25/30 e aço A500.  $\rho'/\rho = 0.0$ .

$\rho$	$\bar{M}$	$\sigma_M$	C.V. (%)	$M(10^{-4})$	$(\bar{x}/d)$	$\bar{E}_{m-c}$	$\gamma_{sec}$
0.25	74.5	3.72	5.0	60.7	0.072	0.94	1.23
0.50	143.7	6.98	4.9	117.7	0.122	0.95	1.22
0.75	203.0	10.11	5.0	165.4	0.179	0.92	1.23
1.00	259.4	13.26	5.1	210.0	0.235	0.88	1.23
1.25	312.9	16.41	5.2	251.8	0.292	0.83	1.24
1.50	363.6	19.69	5.4	290.3	0.351	0.77	1.25
1.75	410.9	23.64	5.8	323.0	0.408	0.69	1.27
2.00	454.0	29.34	6.5	344.9	0.463	0.58	1.32
2.25	490.7	37.39	7.6	351.6	0.510	0.47	1.40
2.50	518.2	46.30	8.9	346.0	0.547	0.29	1.50
2.75	536.4	53.48	10.0	337.4	0.572	0.17	1.59
3.00	548.3	57.78	10.5	333.4	0.589	0.00	1.64
3.25	557.6	60.46	10.8	332.7	0.603	0.00	1.68
3.50	565.5	62.20	11.0	334.2	0.615	0.00	1.69
3.75	572.7	63.67	11.1	335.8	0.626	0.00	1.71
4.00	579.2	65.01	11.2	337.4	0.636	0.00	1.72

Quadro A4.3 - Resultados das análises probabilísticas. Materiais: betão C25/30 e aço A500.  $\rho'/\rho = 0.10$ .

$\rho$	$\bar{M}$	$\sigma_M$	C.V. (%)	$M(10^{-4})$	$(\bar{x}/d)$	$\bar{E}_{m-c}$	$\gamma_{sec}$
0.25	74.8	3.74	5.0	60.9	0.075	0.94	1.23
0.50	143.9	6.90	4.8	118.3	0.121	0.95	1.22
0.75	204.0	9.91	4.9	167.2	0.172	0.93	1.22
1.00	261.5	12.94	4.9	213.3	0.221	0.89	1.23
1.25	316.6	15.92	5.0	257.3	0.272	0.85	1.23
1.50	369.3	18.86	5.1	299.2	0.323	0.80	1.23
1.75	419.6	21.93	5.2	338.0	0.373	0.74	1.24
2.00	467.2	25.50	5.5	372.3	0.423	0.67	1.25
2.25	511.2	30.64	6.0	397.2	0.471	0.58	1.29
2.50	550.2	37.46	6.8	410.8	0.512	0.47	1.34
2.75	581.8	45.09	7.8	414.0	0.546	0.33	1.41
3.00	605.4	51.82	8.6	412.6	0.569	0.17	1.47
3.25	623.0	56.21	9.0	413.9	0.585	0.09	1.51
3.50	637.6	58.96	9.2	418.3	0.598	0.00	1.52
3.75	650.8	60.74	9.3	424.9	0.608	0.00	1.53
4.00	663.2	62.06	9.4	432.3	0.617	0.00	1.53

Quadro A4.4 - Resultados das análises probabilísticas. Materiais: betão C25/30 e aço A500.  $\rho'/\rho = 0.25$ .

$\rho$	$\bar{M}$	$\sigma_M$	C.V. (%)	$M(10^{-4})$	$(\bar{x}/d)$	$\bar{E}_{m-c}$	$\gamma_{sec}$
0.25	75.1	3.76	5.0	61.1	0.078	0.94	1.23
0.50	144.2	6.81	4.7	118.9	0.120	0.95	1.21
0.75	205.4	9.66	4.7	169.5	0.163	0.94	1.21
1.00	264.5	12.54	4.7	217.8	0.204	0.91	1.21
1.25	321.7	15.34	4.8	264.6	0.243	0.88	1.22
1.50	377.2	18.03	4.8	310.1	0.283	0.85	1.22
1.75	431.1	20.62	4.8	354.4	0.323	0.81	1.22
2.00	483.4	23.22	4.8	397.0	0.363	0.76	1.22
2.25	534.0	25.91	4.9	437.6	0.403	0.71	1.22
2.50	582.5	29.09	5.0	474.3	0.442	0.64	1.23
2.75	628.5	33.40	5.3	504.2	0.479	0.57	1.25
3.00	670.9	38.80	5.8	526.6	0.513	0.47	1.27
3.25	708.3	44.73	6.3	541.9	0.541	0.38	1.31
3.50	740.2	50.55	6.8	552.1	0.562	0.23	1.34
3.75	766.7	55.02	7.2	562.1	0.577	0.17	1.36
4.00	789.8	57.98	7.3	574.1	0.588	0.09	1.38

Quadro A4.5 - Resultados das análises probabilísticas. Materiais: betão C25/30 e aço A500.  $\rho'/\rho = 0.50$ .

$\rho$	$\bar{M}$	$\sigma_M$	C.V. (%)	$M(10^{-4})$	$(\bar{x}/d)$	$\bar{E}_{m-c}$	$\gamma_{sec}$
0.25	75.5	3.80	5.0	61.3	0.082	0.94	1.23
0.50	144.6	6.76	4.7	119.4	0.118	0.95	1.21
0.75	207.6	9.41	4.5	172.6	0.154	0.95	1.20
1.00	269.6	11.86	4.4	225.5	0.184	0.94	1.20
1.25	329.6	14.71	4.5	274.9	0.208	0.92	1.20
1.50	388.9	17.37	4.5	324.3	0.231	0.91	1.20
1.75	447.3	20.01	4.5	372.9	0.254	0.89	1.20
2.00	505.1	22.63	4.5	421.0	0.277	0.86	1.20
2.25	562.3	25.17	4.5	468.6	0.300	0.84	1.20
2.50	618.8	27.70	4.5	515.7	0.323	0.82	1.20
2.75	674.6	30.24	4.5	562.1	0.347	0.79	1.20
3.00	729.7	32.83	4.5	607.6	0.371	0.76	1.20
3.25	784.1	35.43	4.5	652.3	0.395	0.73	1.20
3.50	837.7	38.10	4.5	696.0	0.420	0.69	1.20
3.75	890.3	40.82	4.6	738.4	0.444	0.66	1.21
4.00	941.7	43.85	4.7	778.6	0.468	0.62	1.21

Quadro A4.6 - Resultados das análises probabilísticas. Materiais: betão C25/30 e aço A500.  $\rho'/\rho = 0.75$ .

$\rho$	$\bar{M}$	$\sigma_M$	C.V. (%)	$M(10^{-4})$	$(\bar{x}/\bar{d})$	$\bar{E}_{m-c}$	$\gamma_{sec}$
0.25	75.7	3.83	5.1	61.5	0.084	0.94	1.23
0.50	144.8	6.76	4.7	119.6	0.116	0.95	1.21
0.75	209.1	9.41	4.5	174.1	0.145	0.95	1.20
1.00	274.5	12.55	4.6	227.8	0.165	0.94	1.20
1.25	341.0	15.73	4.6	282.4	0.178	0.94	1.21
1.50	406.8	18.44	4.5	338.2	0.188	0.94	1.20
1.75	470.0	21.03	4.5	391.8	0.198	0.94	1.20
2.00	531.6	24.08	4.5	442.0	0.206	0.93	1.20
2.25	592.7	26.99	4.5	492.3	0.214	0.92	1.20
2.50	653.4	29.78	4.6	542.6	0.224	0.91	1.20
2.75	713.6	32.66	4.6	592.1	0.235	0.90	1.21
3.00	773.7	35.68	4.6	641.0	0.245	0.89	1.21
3.25	833.6	38.73	4.6	689.5	0.256	0.88	1.21
3.50	893.3	41.72	4.7	738.1	0.266	0.87	1.21
3.75	952.8	44.63	4.7	786.7	0.276	0.86	1.21
4.00	1012.0	47.52	4.7	835.2	0.287	0.85	1.21

Quadro A4.7 - Resultados das análises probabilísticas. Materiais: betão C40/50 e aço A500.  $\rho'/\rho = 0.00$ .

$\rho$	$\bar{M}$	$\sigma_M$	C.V. (%)	$M(10^{-4})$	$(\bar{x}/\bar{d})$	$\bar{E}_{m-c}$	$\gamma_{sec}$
0.25	74.5	3.74	5.0	60.6	0.057	0.94	1.23
0.50	147.8	7.17	4.9	121.1	0.090	0.95	1.22
0.75	212.1	9.83	4.6	175.6	0.132	0.95	1.21
1.00	271.6	12.99	4.8	223.3	0.171	0.92	1.22
1.25	329.2	15.95	4.8	269.8	0.213	0.88	1.22
1.50	384.9	17.79	4.6	318.7	0.255	0.82	1.21
1.75	438.6	21.50	4.9	358.6	0.298	0.77	1.22
2.00	490.3	24.10	4.9	400.6	0.340	0.71	1.22
2.25	539.9	26.61	4.9	440.9	0.382	0.64	1.22
2.50	587.1	29.13	5.0	478.7	0.424	0.57	1.23
2.75	630.5	32.27	5.1	510.5	0.464	0.47	1.24
3.00	667.3	36.25	5.4	532.5	0.498	0.33	1.25
3.25	694.8	41.19	5.9	541.6	0.524	0.23	1.28
3.50	713.4	45.38	6.4	544.6	0.542	0.10	1.31
3.75	726.8	48.28	6.6	547.2	0.555	0.00	1.33
4.00	737.6	50.17	6.8	551.0	0.566	0.00	1.34

Quadro A4.8 - Resultados obtidos para as vigas bi-encastadas ( $\rho'/\rho = 0$ ). Betão C20/25, aço A500.

$\rho$	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50	3.75	4.00
$F_m$	46.6	89.3	128.2	165.2	197.4	217.6	231.06	241.9	249.8	254.7	258.3	260.8	263.7	266.9	270.1	272.8
$\sigma_F$	1.69	3.09	4.60	6.19	8.96	14.06	18.54	22.87	28.92	32.96	33.86	31.02	29.78	30.28	30.73	31.24
C.V.(%)	3.6	3.5	3.6	3.7	4.5	6.5	8.0	9.5	11.6	12.9	13.1	11.9	11.3	11.3	11.4	11.4
$F_{10^{-4}}$	40.4	77.8	111.1	142.2	153.0	131.9	127.0	136.0	149.6	155.8	157.6	155.0	153.9	154.8	155.9	157.1
$\overline{x/d}$	0.096	0.168	0.254	0.321	0.385	0.438	0.485	0.526	0.561	0.588	0.608	0.623	0.636	0.648	0.659	0.669
$\overline{E}_{p-t}$	0.97	0.96	0.95	0.92	0.86	0.80	0.71	0.58	0.44	0.29	0.17	0.09	0.00	0.00	0.00	0.00
$\gamma_1$	0.32	0.02	0.04	-0.07	-0.63	-1.13	-1.27	-1.00	-0.28	0.34	0.64	0.29	-0.17	-0.15	-0.16	-0.17
$\gamma_2$	0.53	0.07	0.05	0.23	1.06	2.75	2.50	1.04	-0.09	0.39	1.20	1.25	0.04	0.05	-0.05	0.04
$\gamma_R = F_m/F_d$	1.16	1.15	1.15	1.16	1.29	1.48	1.82	1.78	1.67	1.63	1.64	1.68	1.72	1.72	1.73	1.74

Quadro A4.9 - Resultados obtidos para as vigas bi-encastadas ( $\rho'/\rho = 0$ ). Betão C25/30, aço A500.

$\rho$	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50	3.75	4.00
$F_m$	47.1	90.4	130.0	168.4	204.3	231.6	248.7	262.5	275.9	287.8	293.3	297.0	297.0	298.9	302.6	305.8
$\sigma_F$	1.58	3.02	4.56	6.06	7.43	10.06	12.94	16.30	21.44	31.14	36.76	37.98	31.71	27.46	28.18	28.20
C.V.(%)	3.3	3.3	3.5	3.6	3.6	4.3	5.2	6.2	7.8	10.8	12.5	12.8	10.7	9.2	9.3	9.2
$F_{10^{-4}}$	41.3	79.1	113.0	145.8	176.6	180.5	168.4	162.0	171.9	186.3	196.6	198.8	198.4	198.0	199.7	200.9
$\overline{x/d}$	0.092	0.149	0.228	0.284	0.344	0.393	0.439	0.479	0.515	0.547	0.572	0.591	0.605	0.617	0.629	0.639
$\overline{E}_{p-t}$	0.97	0.96	0.95	0.92	0.89	0.83	0.77	0.68	0.58	0.52	0.41	0.33	0.17	0.00	0.00	0.00
$\gamma_1$	0.38	0.01	0.08	0.00	-0.05	-0.43	-0.56	-0.92	-0.76	0.12	0.73	0.92	0.79	-0.14	-0.03	-0.22
$\gamma_2$	0.77	0.20	0.04	0.08	0.04	0.57	1.31	2.42	1.39	0.11	0.57	0.89	2.31	0.28	0.80	-0.04
$\gamma_R = F_m/F_d$	1.14	1.14	1.15	1.15	1.16	1.28	1.48	1.62	1.61	1.55	1.49	1.49	1.50	1.51	1.52	1.52

Quadro A4.10 - Resultados obtidos para as vigas bi-encastadas ( $\rho'/\rho = 0.10$ ). Betão C25/30, aço A500.

$\rho$	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50	3.75	4.00
$F_m$	47.1	90.3	130.2	169.1	206.1	240.2	263.0	279.6	294.3	310.2	324.9	333.2	338.0	340.0	344.9	350.2
$\sigma_F$	1.60	3.02	4.59	6.08	7.37	8.86	11.55	13.71	16.83	23.34	33.40	38.98	39.69	33.02	29.55	27.32
C.V.(%)	3.4	3.3	3.5	3.6	3.6	3.7	4.4	4.9	5.7	7.5	10.3	11.7	11.7	9.7	8.6	7.8
$F_{10^{-4}}$	41.2	79.1	113.1	146.5	178.7	207.2	205.1	200.6	188.4	204.3	220.2	232.8	239.1	243.4	246.8	248.6
$\overline{x/d}$	0.090	0.150	0.221	0.273	0.329	0.370	0.414	0.455	0.489	0.519	0.547	0.569	0.586	0.600	0.610	0.620
$\overline{E}_{p-t}$	0.97	0.96	0.96	0.94	0.91	0.86	0.81	0.75	0.67	0.60	0.55	0.47	0.36	0.16	0.07	0.00
$\gamma_1$	0.10	0.00	0.08	0.06	0.04	-0.27	-0.32	-0.50	-0.96	-0.30	0.38	0.78	1.08	1.05	0.59	-0.05
$\gamma_2$	0.73	0.15	-0.02	0.14	0.11	0.06	0.33	0.92	2.34	1.58	0.38	0.54	1.31	2.90	2.73	1.18
$\gamma_R = F_m/F_d$	1.14	1.14	1.15	1.15	1.15	1.16	1.28	1.39	1.56	1.52	1.48	1.43	1.41	1.40	1.40	1.41

Quadro A4.11 - Resultados obtidos para as vigas bi-encastadas ( $\rho'/\rho = 0.25$ ). Betão C25/30, aço A500.

$\rho$	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50	3.75	4.00
$F_m$	47.2	90.4	130.5	169.7	207.8	245.4	280.2	306.5	326.4	344.1	361.2	379.2	397.3	408.2	419.0	426.2
$\sigma_F$	1.64	3.01	4.59	5.99	7.39	8.83	9.57	12.01	13.26	16.02	19.51	26.24	36.56	40.98	45.33	43.14
C.V.(%)	3.5	3.3	3.5	3.5	3.6	3.6	3.4	3.9	4.1	4.7	5.4	6.9	9.2	10.0	10.8	10.1
$F_{10^{-4}}$	41.5	79.2	113.4	147.5	180.3	212.6	244.6	232.3	246.8	236.8	241.0	265.6	285.7	302.3	313.4	323.3
$\overline{x/d}$	0.085	0.146	0.212	0.263	0.309	0.341	0.378	0.412	0.443	0.472	0.499	0.523	0.546	0.564	0.578	0.589
$\overline{E}_{p-t}$	0.97	0.96	0.96	0.95	0.93	0.90	0.87	0.83	0.78	0.73	0.67	0.61	0.58	0.49	0.43	0.32
$\gamma_1$	0.40	0.00	0.07	0.07	0.06	0.05	-0.09	-0.82	-0.33	-0.62	-0.68	0.06	0.67	0.87	1.15	1.42
$\gamma_2$	0.58	0.11	0.05	0.06	0.08	0.01	-0.08	2.83	0.40	2.26	2.68	1.97	0.94	0.87	1.19	2.42
$\gamma_R = F_m/F_d$	1.14	1.14	1.15	1.15	1.15	1.15	1.15	1.32	1.32	1.45	1.50	1.43	1.39	1.35	1.34	1.32

Quadro A4.12 - Resultados obtidos para as vigas bi-encastadas ( $\rho'/\rho = 0.50$ ). Betão C25/30, aço A500.

$\rho$	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50	3.75	4.00
$F_m$	47.3	90.3	130.8	170.6	209.7	248.1	286.6	324.4	362.0	398.5	430.2	456.6	480.4	503.3	527.1	550.4
$\sigma_F$	1.77	3.00	4.60	6.02	7.57	8.84	10.38	11.72	12.81	13.47	13.40	14.37	14.87	16.36	19.39	24.87
C.V.(%)	3.7	3.3	3.5	3.5	3.6	3.6	3.6	3.6	3.5	3.4	3.1	3.1	3.1	3.3	3.7	4.5
$F_{10^{-4}}$	40.8	79.2	113.7	148.2	181.5	215.2	247.9	280.9	314.3	348.4	380.4	403.1	425.1	453.9	484.4	510.4
$\overline{x/d}$	0.083	0.142	0.199	0.246	0.285	0.322	0.344	0.370	0.393	0.408	0.425	0.443	0.458	0.475	0.489	0.502
$\overline{E}_{p-t}$	0.97	0.96	0.96	0.96	0.96	0.94	0.93	0.91	0.89	0.87	0.85	0.82	0.79	0.76	0.74	0.71
$\gamma_1$	0.38	0.02	0.06	0.08	0.08	0.06	0.09	0.06	0.08	0.02	0.06	0.03	-0.04	-0.30	-0.27	-0.06
$\gamma_2$	0.23	0.04	0.11	0.08	0.03	0.06	0.20	-0.03	0.06	-0.14	0.07	-0.13	-0.08	0.76	3.08	4.79
$\gamma_R = F_m/F_d$	1.16	1.14	1.15	1.15	1.16	1.15	1.16	1.16	1.15	1.14	1.13	1.13	1.13	1.42	1.37	1.34

Quadro A4.13 - Resultados obtidos para as vigas bi-encastadas ( $\rho'/\rho = 0.75$ ). Betão C25/30, aço A500.

$\rho$	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50	3.75	4.00
$F_m$	47.4	90.3	131.2	171.1	210.9	250.1	289.3	328.6	367.7	406.5	445.3	484.6	523.8	562.9	602.1	641.3
$\sigma_F$	1.84	3.02	4.61	6.01	7.50	9.09	10.34	11.71	13.28	14.75	16.11	17.55	19.12	20.67	21.96	23.24
C.V.(%)	3.9	3.3	3.5	3.5	3.6	3.6	3.6	3.6	3.6	3.6	3.6	3.6	3.6	3.7	3.6	3.6
$F_{10^{-4}}$	40.6	79.1	114.1	148.7	183.0	216.3	250.8	285.1	318.3	351.6	385.4	419.4	452.7	486.0	520.4	554.8
$\overline{x/d}$	0.081	0.138	0.185	0.235	0.265	0.297	0.321	0.338	0.355	0.374	0.389	0.399	0.410	0.422	0.430	0.439
$\overline{E}_{p-t}$	0.97	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96	0.95	0.94	0.94	0.93	0.92	0.91	0.90	0.89
$\gamma_1$	0.30	0.10	0.07	0.06	0.08	0.06	0.05	0.11	0.12	0.10	0.11	0.11	0.09	0.08	0.10	0.08
$\gamma_2$	-0.06	0.02	-0.00	0.01	0.02	0.02	0.02	0.12	0.09	0.04	0.03	0.07	0.02	0.03	0.02	0.04
$\gamma_R = F_m/F_d$	1.17	1.14	1.15	1.15	1.15	1.16	1.15	1.15	1.16	1.16	1.16	1.16	1.16	1.16	1.16	1.16



Quadro A4.14 - Resultados obtidos para as vigas bi-encastreadas ( $\rho'/\rho = 0.0$ ). Betão C40/50, aço A500.

$\rho$	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50	3.75	4.00
$F_m$	48.2	92.3	133.5	173.0	212.0	249.1	278.7	298.1	314.9	331.9	349.7	372.2	387.0	388.4	382.5	381.0
$\sigma_F$	1.34	3.20	4.60	6.03	7.64	8.37	8.18	9.11	9.99	13.02	17.10	32.05	41.11	43.84	34.71	24.93
C.V.(%)	2.8	3.5	3.4	3.5	3.6	3.4	2.9	3.1	3.2	3.9	4.9	8.6	10.6	11.3	6.5	6.5
$F_{10^{-4}}$	43.2	80.4	116.4	150.6	183.6	218.0	248.3	264.2	247.3	261.7	276.8	280.0	292.3	305.9	321.3	316.9
$\bar{x}/\bar{d}$	0.087	0.119	0.172	0.236	0.275	0.318	0.350	0.388	0.423	0.454	0.480	0.505	0.527	0.545	0.558	0.570
$\bar{E}_{p-t}$	0.98	0.96	0.96	0.94	0.91	0.88	0.83	0.78	0.72	0.65	0.59	0.62	0.63	0.55	0.34	0.12
$\gamma_1$	0.29	-0.08	0.07	0.07	0.08	-0.05	-0.08	-0.00	-0.05	1.66	1.66	1.24	0.77	1.08	1.88	2.40
$\gamma_2$	0.73	0.04	0.08	0.14	0.04	0.00	0.00	0.01	0.36	9.87	5.78	1.05	-0.53	-0.07	3.53	10.39
$\gamma_R = F_m/F_d$	1.12	1.15	1.15	1.15	1.15	1.14	1.12	1.13	1.27	1.27	1.26	1.33	1.32	1.27	1.22	1.20

Quadro A4.15 - Resultados obtidos para as vigas de 2 vãos ( $\rho'/\rho = 0.0$ ). Betão C25/30, aço A500.

$\rho$	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50	3.75	4.00
$F_m$	34.2	63.3	91.9	118.4	143.9	167.6	183.6	189.4	192.0	195.6	200.7	205.2	208.4	211.6	215.4	217.8
$\sigma_F$	1.04	2.07	3.00	3.81	4.64	5.60	11.18	16.00	17.79	16.23	15.87	16.45	16.13	16.62	17.15	17.78
C.V.(%)	3.1	3.3	3.3	3.3	3.2	3.3	6.1	8.4	9.1	8.3	7.9	8.0	7.7	7.9	8.0	8.2
$F_{10^{-4}}$	30.3	55.6	80.8	104.2	126.6	143.8	120.9	123.7	123.6	129.2	141.0	145.8	149.3	151.0	152.7	153.1
$\bar{x}/\bar{d}$	0.087	0.168	0.221	0.260	0.306	0.358	0.413	0.465	0.516	0.562	0.600	0.625	0.640	0.653	0.667	0.680
$\bar{E}_{p-t}$	0.96	0.95	0.94	0.91	0.87	0.81	0.73	0.61	0.46	0.28	0.15	0.06	0.02	0.00	0.00	0.00
$\gamma_1$	-0.05	-0.10	-0.06	-0.04	-0.09	-0.19	-1.59	-0.93	-0.33	-0.17	-0.45	-0.32	-0.42	-0.31	-0.20	-0.43
$\gamma_2$	-0.06	0.369	0.06	-0.04	0.13	0.34	3.63	0.28	-0.68	0.29	0.76	0.53	1.03	1.21	0.89	0.83
$\gamma_R = F_m/F_d$	1.13	1.14	1.14	1.14	1.14	1.17	1.52	1.46	1.55	1.51	1.42	1.41	1.40	1.40	1.41	1.42

Quadro A4.16 - Resultados obtidos para as vigas bi-encastreadas sem variabilidade espacial ( $\rho'/\rho = 0.0$ ). Betão C25/30, aço A500.

$\rho$	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50	3.75	4.00
$F_m$	47.0	90.4	129.8	168.0	203.5	231.1	248.8	263.5	276.3	287.2	295.7	298.2	298.9	299.8	303.4	306.8
$\sigma_F$	2.31	4.53	6.64	8.83	11.03	13.82	16.68	19.11	25.06	32.82	41.44	42.94	38.65	31.55	32.09	32.24
C.V.(%)	4.9	5.0	5.1	5.3	5.4	6.0	6.7	7.3	9.1	11.4	14.0	14.4	12.9	10.5	10.6	10.5
$F_{10^{-4}}$	38.4	73.5	105.1	135.2	162.4	152.1	155.2	158.1	161.6	169.6	179.1	184.8	185.6	184.6	185.7	186.8
$\bar{x}/\bar{d}$	0.094	0.152	0.225	0.284	0.342	0.389	0.437	0.477	0.513	0.545	0.570	0.590	0.604	0.617	0.628	0.638
$\bar{E}_{p-t}$	0.97	0.96	0.95	0.93	0.89	0.84	0.77	0.69	0.59	0.51	0.47	0.36	0.20	0.02	0.00	0.00
$\gamma_1$	0.40	-0.17	0.10	0.06	-0.12	-0.80	-0.86	-1.12	-0.73	-0.15	0.50	0.96	1.02	-0.32	-0.30	-0.43
$\gamma_2$	0.15	0.07	-0.30	-0.31	-0.03	2.02	2.19	2.68	1.31	0.40	0.27	1.44	3.16	0.44	0.54	0.09
$\gamma_R = F_m/F_d$	1.22	1.23	1.24	1.24	1.25	1.52	1.60	1.67	1.71	1.69	1.65	1.61	1.61	1.62	1.63	1.64

Quadro A4.17 - Resultados obtidos para as vigas bi-encastadas (sem variabilidade espacial) com armadura distribuída de acordo com a solução "elástica" ( $A_s^{\text{apoio}}=2 \times A_s^{\text{vão}}$ ). Betão C25/30, aço A500.

$\rho$	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50	3.75	4.00
$F_m$	36.5	69.4	100.3	130.0	158.1	184.9	209.6	230.8	246.5	257.5	264.6	269.1	272.1	275.1	278.8	282.3
$\sigma_F$	1.58	3.32	5.07	6.62	8.16	9.87	12.03	15.06	19.86	25.06	29.21	30.86	29.76	28.38	28.82	29.31
C.V.(%)	4.3	4.8	5.1	5.1	5.2	5.3	5.7	6.5	8.1	9.7	11.0	11.5	10.9	10.3	10.3	10.4
$F_{10^{-4}}$	30.6	57.1	81.5	105.4	127.7	148.2	117.8	127.0	148.4	155.8	165.9	170.3	171.0	170.7	172.0	173.3
$\bar{x}/d$	0.094	0.153	0.229	0.286	0.345	0.390	0.438	0.478	0.513	0.545	0.570	0.588	0.603	0.615	0.626	0.637
$\bar{E}_{p-t}$	0.96	0.95	0.94	0.92	0.89	0.85	0.78	0.70	0.59	0.52	0.48	0.39	0.22	0.04	0.01	0.00
$\gamma_1$	0.19	-0.09	0.06	0.03	0.05	-0.12	-0.54	-0.98	-1.02	-0.73	-0.25	0.07	-0.01	-0.40	-0.42	-0.43
$\gamma_2$	0.14	0.06	-0.24	-0.34	-0.33	-0.12	1.39	2.78	1.46	0.26	-0.23	0.05	0.55	0.15	0.10	0.06
$\gamma_R = F_m/F_d$	1.19	1.22	1.23	1.23	1.24	1.25	1.78	1.82	1.66	1.65	1.60	1.58	1.59	1.61	1.62	1.63

Quadro A4.18 - Estudo do factor  $\alpha$ : vigas bi-encastadas ( $\rho'/\rho = 0.0$ ): betão C20/25; aço A500 (com variabilidade espacial).

$\rho$	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50	3.75	4.00
$x/d$	0.096	0.168	0.254	0.321	0.385	0.438	0.485	0.526	0.561	0.588	0.608	0.623	0.636	0.648	0.659	0.669
$E_{p-t}$	0.97	0.96	0.95	0.92	0.86	0.80	0.71	0.58	0.44	0.29	0.17	0.09	0.00	0.00	0.00	0.00
$\gamma_R$	1.16	1.15	1.15	1.16	1.25	1.31	1.82	1.78	1.67	1.63	1.64	1.68	1.72	1.72	1.73	1.74
$\gamma_{sec}$	1.24	1.24	1.25	1.27	1.31	1.36	1.44	1.55	1.70	1.84	1.92	1.97	2.00	2.02	2.05	2.06
$\alpha = \gamma_R/\gamma_{sec}$	0.94	0.93	0.92	0.91	0.95	0.96	1.26	1.15	0.98	0.89	0.85	0.85	0.86	0.85	0.84	0.84

Quadro A4.19 - Estudo do factor  $\alpha$ : vigas bi-encastadas ( $\rho'/\rho = 0.0$ ): betão C25/30; aço A500 (com variabilidade espacial).

$\rho$	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50	3.75	4.00
$x/d$	0.092	0.149	0.228	0.284	0.344	0.393	0.439	0.479	0.515	0.547	0.572	0.591	0.605	0.617	0.629	0.639
$E_{p-t}$	0.97	0.96	0.95	0.92	0.89	0.83	0.77	0.68	0.58	0.52	0.41	0.33	0.17	0.00	0.00	0.00
$\gamma_R$	1.14	1.14	1.15	1.15	1.16	1.28	1.44	1.62	1.61	1.55	1.49	1.49	1.50	1.51	1.52	1.52
$\gamma_{sec}$	1.23	1.23	1.23	1.24	1.25	1.27	1.30	1.35	1.41	1.50	1.59	1.65	1.68	1.69	1.71	1.72
$\alpha = \gamma_R/\gamma_{sec}$	0.93	0.93	0.93	0.93	0.93	1.01	1.11	1.20	1.14	1.03	0.94	0.90	0.89	0.89	0.89	0.88

Quadro A4.20 - Estudo do factor  $\alpha$ : vigas bi-encastadas ( $\rho'/\rho = 0.10$ ): betão C25/30; aço A500 (com variabilidade espacial).

$\rho$	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50	3.75	4.00
$x/d$	0.090	0.150	0.221	0.273	0.329	0.370	0.414	0.455	0.489	0.519	0.547	0.569	0.586	0.600	0.610	0.620
$E_{p-t}$	0.97	0.96	0.96	0.94	0.91	0.86	0.81	0.75	0.67	0.60	0.55	0.47	0.36	0.16	0.07	0.00
$\gamma_R$	1.14	1.14	1.15	1.15	1.15	1.16	1.28	1.39	1.56	1.52	1.48	1.43	1.41	1.40	1.40	1.41
$\gamma_{sec}$	1.22	1.22	1.23	1.23	1.23	1.24	1.25	1.28	1.31	1.35	1.41	1.47	1.51	1.52	1.53	1.53
$\alpha = \gamma_R/\gamma_{sec}$	0.93	0.93	0.93	0.93	0.93	0.94	1.02	1.09	1.19	1.13	1.05	0.97	0.93	0.92	0.92	0.92

Quadro A4.21 - Estudo do factor  $\alpha$ : vigas bi-encastadas ( $\rho'/\rho = 0.25$ ): betão C25/30; aço A500 (com variabilidade espacial).

$\rho$	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50	3.75	4.00
$x/d$	0.085	0.146	0.212	0.263	0.309	0.341	0.378	0.412	0.443	0.472	0.499	0.523	0.546	0.564	0.578	0.589
$E_{p-t}$	0.97	0.96	0.96	0.95	0.93	0.90	0.87	0.83	0.78	0.73	0.67	0.61	0.58	0.49	0.43	0.32
$\gamma_R$	1.14	1.14	1.15	1.15	1.15	1.15	1.15	1.32	1.32	1.45	1.50	1.43	1.39	1.35	1.34	1.32
$\gamma_{sec}$	1.21	1.21	1.21	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.23	1.25	1.26	1.29	1.32	1.34	1.36	1.38
$\alpha = \gamma_R/\gamma_{sec}$	0.94	0.94	0.95	0.94	0.94	0.94	0.94	1.08	1.07	1.16	1.19	1.11	1.05	1.01	0.99	0.96

Quadro A4.22 - Estudo do factor  $\alpha$ : vigas bi-encastadas ( $\rho'/\rho = 0.50$ ): betão C25/30; aço A500 (com variabilidade espacial).

$\rho$	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50	3.75	4.00
$x/d$	0.083	0.142	0.199	0.246	0.285	0.322	0.344	0.370	0.393	0.408	0.425	0.443	0.458	0.475	0.489	0.502
$E_{p-t}$	0.97	0.96	0.96	0.96	0.96	0.94	0.93	0.91	0.89	0.87	0.85	0.82	0.79	0.76	0.74	0.71
$\gamma_R$	1.16	1.14	1.15	1.15	1.16	1.15	1.16	1.16	1.15	1.14	1.13	1.13	1.13	1.42	1.37	1.34
$\gamma_{sec}$	1.21	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.21	1.21	1.21	1.21	1.21
$\alpha = \gamma_R/\gamma_{sec}$	0.96	0.95	0.96	0.96	0.97	0.96	0.97	0.97	0.96	0.95	0.94	0.93	0.93	1.17	1.13	1.11

Quadro A4.23 - Estudo do factor  $\alpha$ : vigas bi-encastadas ( $\rho'/\rho = 0.75$ ): betão C25/30; aço A500 (com variabilidade espacial).

$\rho$	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50	3.75	4.00
$x/d$	0.081	0.138	0.185	0.235	0.265	0.297	0.321	0.338	0.355	0.374	0.389	0.399	0.410	0.422	0.430	0.439
$E_{p-t}$	0.97	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96	0.95	0.94	0.94	0.93	0.92	0.91	0.90	0.89
$\gamma_R$	1.17	1.14	1.15	1.15	1.15	1.16	1.15	1.15	1.16	1.16	1.16	1.16	1.16	1.16	1.16	1.16
$\gamma_{sec}$	1.23	1.21	1.20	1.21	1.21	1.21	1.21	1.21	1.21	1.21	1.21	1.21	1.21	1.21	1.21	1.21
$\alpha = \gamma_R/\gamma_{sec}$	0.95	0.94	0.96	0.95	0.95	0.96	0.95	0.95	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96



Quadro A4.24 - Estudo do factor  $\alpha$ : vigas bi-encastadas ( $\rho'/\rho = 0.0$ ): betão C25/30; aço A500 (sem variabilidade espacial).

$\rho$	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50	3.75	4.00
$x/d$	0.094	0.152	0.225	0.284	0.342	0.389	0.437	0.477	0.513	0.545	0.570	0.590	0.604	0.617	0.628	0.638
$E_{p-t}$	0.97	0.96	0.95	0.93	0.89	0.84	0.77	0.69	0.59	0.51	0.47	0.36	0.20	0.02	0.00	0.00
$\gamma_R$	1.22	1.23	1.24	1.24	1.25	1.52	1.60	1.67	1.71	1.69	1.65	1.61	1.61	1.62	1.63	1.64
$\gamma_{sec}$	1.23	1.23	1.23	1.24	1.25	1.27	1.30	1.34	1.40	1.49	1.59	1.64	1.68	1.69	1.70	1.72
$\alpha = \gamma_R/\gamma_{sec}$	0.99	1.00	1.01	1.00	1.00	1.20	1.23	1.25	1.22	1.13	1.04	0.98	0.96	0.96	0.96	0.95

Quadro A4.25 - Estudo do factor  $\alpha$ : vigas bi-encastadas (solução "elástica",  $\rho'/\rho = 0.0$ ): betão C25/30; aço A500 (sem variabilidade espacial).

$\rho$	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50	3.75	4.00
$x/d$	0.094	0.153	0.229	0.286	0.345	0.390	0.438	0.478	0.513	0.545	0.570	0.588	0.603	0.615	0.626	0.637
$E_{p-t}$	0.96	0.95	0.94	0.92	0.89	0.85	0.78	0.70	0.59	0.52	0.48	0.39	0.22	0.04	0.01	0.00
$\gamma_R$	1.19	1.22	1.23	1.23	1.24	1.25	1.78	1.82	1.66	1.65	1.60	1.58	1.59	1.61	1.62	1.63
$\gamma_{sec}$	1.23	1.23	1.23	1.24	1.25	1.27	1.30	1.34	1.40	1.49	1.59	1.64	1.68	1.69	1.70	1.72
$\alpha = \gamma_R/\gamma_{sec}$	0.97	0.99	1.00	0.99	0.99	0.98	1.37	1.36	1.19	1.11	1.01	0.96	0.95	0.95	0.95	0.95

Quadro A4.26 - Estudo do factor  $\alpha$ : vigas bi-encastadas ( $\rho'/\rho = 0.0$ ): betão C40/50; aço A500 (com variabilidade espacial).

$\rho$	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50	3.75	4.00
$x/d$	0.087	0.119	0.172	0.236	0.275	0.318	0.350	0.388	0.423	0.454	0.480	0.505	0.527	0.545	0.558	0.570
$E_{p-t}$	0.98	0.96	0.96	0.94	0.91	0.88	0.83	0.78	0.72	0.65	0.59	0.62	0.63	0.55	0.34	0.12
$\gamma_R$	1.12	1.15	1.15	1.15	1.15	1.14	1.12	1.13	1.27	1.27	1.26	1.33	1.32	1.27	1.22	1.20
$\gamma_{sec}$	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.23	1.24	1.25	1.26	1.28	1.31	1.33	1.34
$\alpha = \gamma_R/\gamma_{sec}$	0.92	0.94	0.94	0.94	0.94	0.93	0.92	0.93	1.03	1.02	1.01	1.06	1.03	0.97	0.92	0.90

Quadro A4.27 - Estudo do factor  $\alpha$ : vigas de 2 vãos ( $\rho'/\rho = 0.0$ ): betão C25/30; aço A500 (com variabilidade espacial).

$\rho$	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50	3.75	4.00
$x/d$	0.087	0.168	0.221	0.260	0.306	0.358	0.413	0.465	0.516	0.562	0.600	0.625	0.640	0.653	0.667	0.680
$E_{p-t}$	0.96	0.95	0.94	0.91	0.87	0.81	0.73	0.61	0.46	0.28	0.15	0.06	0.02	0.00	0.00	0.00
$\gamma_R$	1.13	1.14	1.14	1.14	1.14	1.17	1.52	1.46	1.55	1.51	1.42	1.41	1.40	1.40	1.41	1.42
$\gamma_{sec}$	1.23	1.23	1.23	1.24	1.24	1.25	1.28	1.32	1.41	1.55	1.68	1.71	1.72	1.72	1.72	1.72
$\alpha = \gamma_R/\gamma_{sec}$	0.92	0.93	0.93	0.92	0.92	0.92	0.94	1.19	1.11	1.10	0.97	0.85	0.82	0.81	0.82	0.83

