



FEUP Universidade do Porto
Faculdade de Engenharia

Métodos de Análise das Incertezas na Verificação da Segurança Estrutural em Engenharia Civil

José Miguel Gomes Costa Veiga

*Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
para obtenção do grau de Doutor em Ciências de Engenharia*

Projecto co-financiado pelo fundo Social Europeu no âmbito do concurso Público 2/5.3/PRODEP/2003, pedido de financiamento nº 1012.012, da medida 5/acção 5.3 – Formação Avançada de Docentes do Ensino Superior submetido pela Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Julho de 2008



UNIÃO EUROPEIA

Fundo Social Europeu



Resumo

A avaliação do comportamento de sistemas estruturais implica uma análise dos riscos e incertezas a eles associados. Para avaliar com maior precisão os riscos associados à segurança estrutural têm vindo a ser aplicados nos últimos anos, cada vez com maior frequência, métodos probabilísticos de fiabilidade. As dificuldades encontradas na aplicação mais generalizada destes métodos estão sobretudo associadas à pouca eficiência em resolver problemas estruturais de elevada dimensão.

As técnicas que utilizam processos de simulação, como o método de Monte Carlo, têm grandes custos computacionais para sistemas estruturais mais complexos mesmo quando a implementação computacional inclui técnicas de redução da variância. As técnicas de fiabilidade correntes, como os métodos FORM e SORM, são hoje geralmente aceites sendo as suas aplicações bastante simples quando existe uma formulação explícita do problema estrutural. No entanto, quando não há relações explícitas entre as variáveis, como por exemplo no método dos elementos finitos, a aplicação destas técnicas de fiabilidade para avaliar a incerteza da resposta estrutural torna-se mais exigente e pouco eficiente.

Neste trabalho apresenta-se um método eficiente para avaliar a incerteza da resposta estrutural que conjuga técnicas de perturbação com os métodos de elementos finitos. Esta metodologia permite, com uma única análise estrutural, avaliar o valor médio e o desvio padrão da resposta estrutural, em termos de deslocamentos ou forças, definindo *a priori* as distribuições de probabilidade das variáveis aleatórias básicas do problema. Consequentemente é realizada uma análise muito mais rápida quando comparada com os métodos mais frequentemente utilizados baseados nas técnicas correntes de fiabilidade. As variáveis aleatórias básicas são definidas através dos seus valores médios, desvios padrão e coeficientes de correlação. Os resultados obtidos são exactos quando a função da resposta estrutural é linear e as distribuições das variáveis aleatórias básicas são normais ou aproximadamente normais. Os resultados permanecem apropriados se forem utilizadas aproximações adequadas.

Descrevem-se os procedimentos necessários para implementar estas técnicas num programa de elementos finitos para vários tipos de distribuições de probabilidade. Este programa pode ser utilizado com métodos de fiabilidade de primeira ordem e com o método de simulação de Monte Carlo. Além disso, está preparado para variáveis aleatórias correlacionadas e/ou com distribuição não normal. Também se apresentam aplicações da metodologia desenvolvida assim como comparações com outros métodos.

Abstract

The assessment of behaviour of structural systems involves risk and uncertainty evaluation. To evaluate more accurately the risk associated to structural safety, probabilistic and reliability techniques have been applied increasingly in the last years. The generalized application of these techniques has been delayed by the inefficiency to solve complex or large problems.

Techniques employing simulation procedures, such as crude Monte Carlo method, have high computational cost in large structural systems even if the computational efficiency is implemented with variance reduction techniques. Current reliability techniques, such as FORM and SORM, are widely acceptable and their application is rather simple when an explicit formulation of the structural problem exists. However, when there are not explicit relations between variables, such as the finite element method, the application of these reliability techniques to evaluate the uncertainty of structural response is more difficult and less efficient.

In this work is presented an efficient method to evaluate structural uncertainty that couples perturbation techniques with the finite element method. This methodology allows, in only one structural analysis, to evaluate the mean value and the standard deviation of the structural response, in terms of displacements or forces, by defining previously the probability distribution of problem basic random variables. Consequently a much faster analysis is performed, when compared with the current methods based on reliability techniques. The structural random variables are described by their mean values, standard deviation and correlation coefficients. The results obtained are exact when structural response function is linear and normal or quasi-normal distributions of random variables are guaranteed. The results remain accurate if appropriate approximations are employed.

The necessary procedures to implement these techniques in a finite element program for some probability distributions are described. This program can be used with first order reliability methods and Monte Carlo simulation method. Furthermore, it allows correlated random variables and/or non normal distributions. Applications of the developed methodology and their comparison with other methods are also presented.

Résumé

L'évaluation du comportement de systèmes structurels implique une analyse des risques et des incertitudes à elles associées. Pour évaluer avec plus précision les risques associés à la sécurité structurelle ils sont venus à être appliqués ces dernières années, plus fréquemment, méthodes probabilistes de fiabilité. Les difficultés trouvées dans l'application généralisée de ces méthodes sont surtout associés au peu efficace de résolution de problèmes de grand dimension.

Les techniques qui utilise simulation, comme la méthode de Monte Carlo, ont de grands coûts informatiques pour des systèmes structurels plus complexes, même quand la mise en oeuvre informatique inclut des techniques de réduction de la variance. Les techniques de fiabilité, comme les méthodes FORM et SORM, sont en règle acceptés en étant leurs applications suffisamment simples quand existe une formulation explicite du problème structurel. Quand il n'y a pas relations explicites entre les variables, comme par exemple la méthode des éléments finis, l'application des techniques courantes de fiabilité pour évaluer l'incertitude de la réponse structurelle se rend plus exigeant et peu efficace.

Dans ce travail se présente une méthode de fiabilité structurelle efficace pour évaluer l'incertitude de la réponse structurelle qui conjugue des techniques de perturbation avec les méthodes d'éléments finis. Cette méthodologie permet, avec une seule analyse structurelle, évaluer la valeur moyenne et l'écart-type de la réponse structurelle, définie par disloquements ou forces, en définissant a priori les distributions de probabilité des variables aléatoires basiques du problème. En conséquence est réalisée une analyse plus rapide quand comparée avec les méthodes courantes basées dans les techniques de fiabilité. Les variables aléatoires basiques sont définies à travers de leurs valeurs moyennes, écart-types et coefficients de corrélation. Les résultats sont exacts quand la fonction de réponse structurelle est linéaire et les distributions des variables aléatoires basiques sont normaux ou approximativement normaux. Les résultats restent appropriés se soient utilisés des approches appropriées.

Ils se décrivent les procédures nécessaires pour mettre en oeuvre ces techniques dans un programme d'éléments finis pour plusieurs types de distributions de probabilité. Ce programme peut être utilisé avec des méthodes de fiabilité de première classe et avec la méthode de simulation de Monte Carlo. Il est préparé pour des variables aléatoires corrélées et/ou avec de la distribution non normale. Aussi ils si présente des applications de la méthodologie développée ainsi que des comparaisons avec autres méthodes.

PALAVRAS-CHAVE

Estruturas de betão
Fiabilidade estrutural
Formatos de segurança
Elementos finitos
Método de Monte Carlo
Método de perturbação
Análise de incertezas

KEYWORDS

Concrete structures
Structural reliability
Safety formats
Finite elements
Monte Carlo method
Perturbation method
Uncertainty analysis

MOTS CLÉ

Structures en béton
Fiabilité structural
Formats de sécurité
Elements finis
Méthode de Monte Carlo
Méthode de perturbation
Analyse d'incertain

Agradecimentos

Relativamente a esta tese de Doutoramento não posso deixar de expressar os meus agradecimentos a todos os que de uma forma directa ou indirecta colaboraram na sua realização.

Agradeço primeiro a minha esposa pelo constante apoio e encorajamento que sempre me deu, pelo acompanhamento e incentivos durante todo este trabalho. As suas sugestões, comentários e as muitas horas de trocas de opinião foram muito úteis e enriquecedoras para o desempenho de todo este trabalho. Agradeço também pelo filho que tivemos e que é uma fonte de motivação, inspiração e alegria.

Um agradecimento muito especial ao meu orientador Eng. Abel Henriques e co-orientador Eng. Jorge Delgado, não apenas por me terem dado a oportunidade de dedicar a esta área de pesquisa, como também pela disponibilidade demonstrada para assumirem a orientação e co-orientação desta tese, pela dedicação, boa vontade e nível de exigência durante o desenvolvimento deste trabalho. O conhecimento e empenho demonstrado por ambos durante todo o percurso, assim como nas sessões de esclarecimento sobre as diversas dúvidas que me foram surgindo ao longo de todo o trabalho, serviram como constante fonte de inspiração.

A meus pais e minha tia, sempre presentes, pelo suporte e incentivo que me têm dado em todos os momentos da vida, e da felicidade de tê-los como pais e tia madrinha.

A minha irmã pela amizade, apoio e compreensão. Saber que também terá sempre o meu apoio.

A toda a minha restante família, primos, primas, sogra, sobrinho, sobrinhas, cunhadas e cunhados, que sempre me apoiaram.

Aos meus amigos que directa ou indirectamente contribuíram para a finalização deste trabalho. Ao Rafael e Paula, Oliveira, Carlos, Rui e Paula. A todos os meus amigos de Évora, Lisboa e que fiz na Escola de Valença que apesar da distância é como se estivéssemos sempre juntos.

Minha gratidão a todos os que contribuíram para a formação da minha pessoa.

Índice

Capítulo 1

Introdução **1**

1.1 Objectivos, 1

1.2 Enquadramento do trabalho, 2

1.3 Organização da dissertação, 6

Capítulo 2

Avaliação das Incertezas e Verificação da Segurança Estrutural **9**

2.1 Introdução, 9

2.2 Incertezas na avaliação da segurança estrutural, 11

2.3 Variáveis básicas, 12

2.4 Estados limite, 12

2.5 Função de estado limite, 14

2.6 Verificação da segurança aos estados limite, 14

2.7 Probabilidade de rotura. Caso fundamental, 15

2.8 Índice de fiabilidade, 17	
2.8.1 Formulação base do índice de fiabilidade, 17	
2.8.2 Generalização do cálculo do índice de fiabilidade, 19	
2.9 Métodos de fiabilidade de primeira e segunda ordem, 21	
2.9.1 Métodos FOSM ou MVFOSM, 21	
2.9.2 Métodos AFOSM ou FORM para variáveis aleatórias normais (Método de Hasofer-Lind), 25	
2.9.3 Métodos AFOSM para variáveis aleatórias não normais, 31	
2.9.4 Métodos de fiabilidade de segunda ordem - SORM, 34	
2.10 Funções de estado limite implícitas, 44	
2.10.1 Métodos de superfície de resposta, 44	
2.10.2 Métodos probabilísticos de elementos finitos, 50	
2.10.2.1 Métodos para discretização de campos aleatórios, 52	
2.10.2.1.1 Métodos de discretização pontual, 55	
2.10.2.1.2 Métodos de discretização média, 57	
2.10.2.1.3 Métodos de expansão em séries, 59	
2.10.2.2 Métodos de perturbação, 64	
2.10.3 Redes neuronais artificiais, 70	
2.10.3.1 Redes neuronais perceptrão de múltiplas camadas, 92	
2.10.3.2 Redes neuronais de base radial, 95	
2.10.3.3 Redes neuronais artificiais conjugadas com métodos de análise de fiabilidade, 101	

Capítulo 3

Métodos de Transformação

105

3.1 Introdução, 105

- 3.2 Método de Cholesky, 106
 - 3.2.1 Método de eliminação de Gauss, 107
 - 3.2.2 Decomposição de Cholesky, 108
- 3.3 Transformações de variáveis aleatórias normais e correlacionadas, 110
- 3.4 Transformações de variáveis aleatórias não normais e independentes, 110
 - 3.4.1 Transformação: mesmo valor médio e percentil P, 111
 - 3.4.2 Transformação de caudas normais, 113
- 3.5 Transformações de variáveis aleatórias não normais e correlacionadas, 115
 - 3.5.1 Transformação de Rosenblatt, 115
 - 3.5.2 Transformação de Morgenstern, 118
 - 3.5.3 Transformação de Nataf, 120
 - 3.5.4 Exemplo de aplicação, 124

Capítulo 4

Métodos de Simulação

129

- 4.1 Introdução, 129
- 4.2 Método de simulação de Monte Carlo, 130
 - 4.2.1 Geração de números aleatórios, 132
 - 4.2.1.1 Geração de números aleatórios para variáveis aleatórias contínuas, 133
 - 4.2.1.1.1 Distribuição Uniforme, 134
 - 4.2.1.1.2 Distribuições de valores extremos, 135
 - 4.2.1.1.3 Distribuição Rayleigh, 144
 - 4.2.1.1.4 Distribuição Normal, 145
 - 4.2.1.1.5 Distribuição Lognormal, 146
 - 4.2.1.2 Geração de números aleatórios para variáveis aleatórias discretas, 148

- 4.3 Métodos de simulação pura, 149
- 4.4 Técnicas de redução da variância, 152
 - 4.4.1 Amostragem por importância, 152
 - 4.4.2 Amostragem estratificada, 155
- 4.5 Simulação de variáveis aleatórias correlacionadas, 157
 - 4.5.1 Simulação de variáveis aleatórias normais correlacionadas, 158
 - 4.5.2 Simulação de variáveis aleatórias não normais correlacionadas, 158

Capítulo 5

Método de Perturbação para a Avaliação das Incertezas em Sistemas Estruturais

165

- 5.1 Introdução, 165
- 5.2 Metodologia proposta, 166
 - 5.2.1 Incertezas em função de forças, 168
 - 5.2.2 Incertezas em função de deslocamentos, 172
 - 5.2.2.1 Um caso de carga, 172
 - 5.2.2.2 Vários casos de carga, 174
- 5.3 Exemplos de aplicação, 175
 - 5.3.1 Viga sujeita a uma carga, 175
 - 5.3.2 Viga sujeita a duas cargas, 182
- 5.4 Métodos de transformação, 189
 - 5.4.1 Exemplo: Distribuições Tipo I, 189
 - 5.4.2 Exemplo: Distribuições Lognormais, 194
- 5.5 Implementação computacional, 197

Capítulo 6

Aplicações 201

6.1 Introdução, 201

6.2 Pórtico sujeito a diferentes cargas, 202

6.3 Sistema com quatro molas submetido a duas forças, 205

6.4 Pórtico de aço sujeito a acções permanentes e sobrecargas, 207

6.5 Pórtico de três vãos e doze andares sujeito a forças nodais horizontais, 212

6.6 Treliza metálica, 218

6.7 Estrutura metálica com dez barras sujeita a duas forças, 222

6.8 Pórtico de dois vãos e vinte andares sujeito a forças horizontais e verticais, 225

6.9 Pórtico de três vãos e cinco andares sujeito a forças horizontais, 229

6.10 Conclusões, 233

Capítulo 7

Conclusões e Sugestões para Investigações Futuras 235

Anexos

Anexo 1

Software Desenvolvido 241

A1.1 Algoritmo, 241

A1.2 Ficheiro de dados, 246

A1.2.1 Definição das variáveis associadas ao dimensionamento, 246

A1.2.2 Estrutura do ficheiro de dados, 248

Anexo 2

Factores de Conversão entre Várias Unidades de Medida 253

A2.1 Tabela de Conversão, 253

Referências Bibliográficas 255

Capítulo 1

Introdução

1.1 Objectivos

A aplicação de técnicas probabilísticas na avaliação da segurança estrutural tem sofrido um enorme desenvolvimento nos últimos anos. As técnicas de fiabilidade estrutural e os métodos de simulação são hoje instrumentos indispensáveis na avaliação da integridade das estruturas e no desenvolvimento de novos formatos de segurança. Neste contexto, pretende desenvolver-se um estudo que permite contribuir para o desenvolvimento, ou melhoramento, de modelos de verificação de segurança estrutural. Uma das principais dificuldades na introdução destas técnicas é a morosidade na aplicação dos métodos mais utilizados, como os processos de simulação baseados no método de Monte Carlo, onde mesmo utilizando técnicas de redução do número de amostras, como sejam por exemplo a amostragem por importância, estratificada ou mesmo uma sua variante - o hipercubo latino; a aplicação em casos de alguma complexidade pode ser extraordinariamente morosa (Haldar e Mahadevan, 2000).

A aplicação de métodos de fiabilidade mais eficientes é o principal tema de investigação. Nomeadamente têm sido, recentemente, desenvolvidos métodos de fiabilidade que conjugam processos de optimização com o método dos elementos finitos. A utilização destes métodos baseia-se no cálculo da situação de rotura mais provável e da respectiva probabilidade de ocorrência. As suas análises permitem entrar em consideração com a

variabilidade dos diversos parâmetros que influenciam o comportamento da estrutura, resultando no cálculo do índice de fiabilidade. É assim possível analisar a segurança de uma estrutura de uma forma significativamente mais rápida do que o necessário para uma análise usando o método de Monte-Carlo.

Assim, o objectivo deste trabalho é desenvolver um método de análise da fiabilidade de um sistema estrutural que inclua modelos de análise de estruturas e que combinada com o método probabilístico de elementos finitos permita obter a probabilidade de rotura. Para desenvolver e aplicar este método construiu-se um programa de análise de fiabilidade que incluísse as várias incertezas, traduzidas por diferentes variáveis aleatórias básicas, e que cumprisse os objectivos propostos.

1.2 Enquadramento do trabalho

A análise de fiabilidade está relacionada com o tratamento das várias incertezas que envolvem os problemas de engenharia. Essas incertezas surgem da aleatoriedade dos vários parâmetros que envolvem os problemas estruturais, problemas na escolha dos modelos, parâmetros físicos, variações devidas à acção do homem, etc. As primeiras abordagens simplificavam os problemas considerando os parâmetros relacionados com as incertezas como constantes, através dos chamados coeficientes de segurança que se baseavam em experiências passadas. Para avaliar de forma racional a dispersão associada a um sistema estrutural sujeito a várias incertezas traduzidas por diferentes variáveis aleatórias básicas há que utilizar uma análise probabilística. Os primeiros estudos realizados sobre este tema foram efectuados por Freudenthal (1945, 1956) que aplicou métodos probabilísticos para avaliar a segurança de estruturas constituídas por diferentes materiais, apresentando os princípios básicos da teoria da fiabilidade estrutural. Na década de sessenta este assunto começou a ser tratado de uma forma mais aprofundada e consistente, como por exemplo nos trabalhos realizados por Freudenthal *et al.* (1966) e Bolotin (1965). Desde aí que a teoria sobre a análise da fiabilidade estrutural e suas aplicações tem vindo a ser discutida e desenvolvida por diversos autores. A quantidade de textos e literatura existente sobre este tema tem vindo a aumentar consideravelmente nos últimos anos. Alguns dos livros mais relevantes sobre o assunto foram apresentados por Ang e Tang (1975), Ditlevsen (1981a), Elishakoff (1999), Augusti, Baratta e Casciati (1984), Yao (1985), Thoft-Christensen e

Murotsu (1986), Melchers (1999), Haldar e Mahadevan (2000), Haldar e Mahadevan (2000a), Ditlevsen e Madsen (2005) ou Madsen *et al.* (2006).

A análise estrutural que combina o método dos elementos finitos com a teoria das probabilidades começou a desenvolver-se nos anos setenta. Estes métodos são os chamados métodos probabilísticos de elementos finitos que, basicamente, se podem dividir nos métodos de simulação, nos métodos de perturbação e nos métodos de fiabilidade (Liu e Kiureghian, 1989). O termo método estocástico, ou probabilístico, de elementos finitos (do inglês SFEM ou PFEM) é utilizado para referir um método de elementos finitos que tem em conta as incertezas na geometria e/ou propriedades dos materiais de uma estrutura, assim como das cargas aplicadas. Normalmente, essas incertezas são distribuídas espacialmente ao longo da estrutura e devem ser modeladas como campos aleatórios. Estes métodos tomam em consideração o efeito aleatório existente na matriz de rigidez e no vector das cargas. Além disso, há que ter em atenção à forma como se organizam no computador estruturas complexas com muitos graus de liberdade e muitas variáveis aleatórias pois daí podem advir problemas em termos de memória de computador. O interesse nesta área aumentou a partir do momento em que se percebeu que em algumas estruturas a resposta é bastante sensível às propriedades dos materiais e que mesmo pequenas incertezas podem afectar fortemente a fiabilidade estrutural. Nos últimos trinta anos o método probabilístico de elementos finitos tem sido muito utilizado em todos os campos estruturais. Os desenvolvimentos nesta área têm vindo a ser discutidos, de entre outros, por Vanmarcke *et al.* (1986), Nakagiri *et al.* (1987), Der Kiureghian e Ke (1988), Brenner (1991), Ghanem e Spanos (1991, 2003), Matthies *et al.* (1997), Kleiber e Hien (1992), Sudret e Kiureghian (2000, 2002).

O método de simulação de Monte Carlo foi utilizado neste trabalho como método de referência. Esta é uma poderosa ferramenta que pode ser adaptada para a análise probabilística de incertezas em todo o tipo de problemas e os resultados podem ser obtidos com a precisão desejada. Neste método são realizadas análises repetidas com os valores obtidos através das variáveis aleatórias básicas, os quais são gerados a partir das distribuições de probabilidade das respectivas variáveis. Desta forma, as estatísticas de resposta são obtidas a partir das amostras que vão sendo geradas. Este método pode ser aplicado a qualquer tipo de problema estrutural, sendo os resultados obtidos com uma precisão que irá depender do número de simulações efectuadas. À medida que o número de

simulações aumenta a probabilidade de rotura obtida pelo método de Monte Carlo fica cada vez mais próxima do valor exacto. No entanto, para sistemas estruturais mais complexos o número de simulações necessita de ser bastante elevado, o que torna este método um pouco moroso e logo pouco eficiente. Esta é uma das principais razões porque hoje em dia muitos autores consideram este método inadequado para aplicações práticas. No entanto, na actualidade, ele ainda é muito utilizado tendo inclusivamente outros autores desenvolvido algumas técnicas de redução da variância como forma de ultrapassar esse problema [Rubinstein (1981), Bucher (1988), Melchers (1999), Ditlevsen e Madsen (2005), Mahadevan e Raghothamachar (2000), Olsson *et al.* (2003), Schueller (2001)]. Apesar dos problemas que podem surgir na sua aplicação, este método ainda se deve considerar bastante válido como uma ferramenta de verificação no desenvolvimento de métodos mais refinados como os métodos de fiabilidade e perturbação.

Os métodos de perturbação envolvem expansões em séries de Taylor, de primeira ou segunda ordem, numa vizinhança dos valores médios das variáveis aleatórias básicas, relativamente às equações que definem o comportamento da estrutura. A variação da resposta estrutural é então obtida resolvendo um conjunto de equações determinísticas. Igualando os termos da mesma ordem, as médias e covariâncias da variável resposta podem ser determinadas em função das médias e covariâncias das variáveis aleatórias básicas. Se utilizarmos apenas expansões em séries de Taylor de primeira ordem, a resposta média é calculada como a solução das equações de ordem zero. Neste método as variáveis aleatórias básicas são caracterizadas apenas pelas suas médias e covariâncias não sendo necessário ter qualquer informação sobre as suas distribuições. O objectivo é calcular os dois primeiros momentos da variável resposta. A inclusão dos termos de segunda ordem, além de aumentarem consideravelmente os cálculos, estes têm um efeito apenas sobre os valores médios da variável resposta sendo normalmente considerados de pouca importância comparados com os termos de ordem zero (Teigen *et al.*, 1991a). Há que ter algum cuidado na aplicação dos métodos de perturbação pois a probabilidade de rotura é um pouco sensível às caudas das distribuições de probabilidade pois como estes métodos desenvolvem a equação de equilíbrio, entre as forças internas e externas, em torno dos valores médios das variáveis aleatórias básicas, o erro na estimação da probabilidade de rotura pode ser significativo (Liu e Kiureghian, 1989). Os métodos de perturbação foram utilizados por muitos autores nos últimos anos. Por exemplo, Baecher e Ingra (1981)

e Righetti e Harrop-Williams (1988) aplicaram este método a problemas geotécnicos; Handa e Anderson (1981) aplicaram-no a uma viga e a uma estrutura para estimar os dois primeiros momentos dos deslocamentos estruturais e forças; Hisada e Nakagiri (1981) aplicaram-nos a problemas lineares e não lineares; Grasa *et al.* (2006) utilizaram este método conjuntamente com uma extensão do método dos elementos finitos para estudar as incertezas relacionadas com falhas em problemas mecânicos.

Os métodos de fiabilidade de primeira ordem (do inglês FORM) e de segunda ordem (do inglês SORM) têm sido muito utilizados para estimar a probabilidade de rotura de sistemas estruturais. Nos últimos anos, o desenvolvimento da tecnologia permitiu o aparecimento de computadores cada vez mais rápidos e eficazes o que veio impulsionar e influenciar de forma significativa os desenvolvimentos nesta área. Os trabalhos mais recentes incluem, entre muitos, os de Wen (1990), Nowak e Collins (2000) e Ranganathan (1999). Shinozuka (1983) apresentou um trabalho sobre várias definições e cálculos de índices de fiabilidade. Ao longo dos tempos vários têm sido os autores a fazer algumas abordagens críticas sobre métodos para calcular a probabilidade de rotura, como por exemplo, Dolinski (1983), Ditlevsen e Bjerager (1986), Schueller e Stix (1987), Rackwitz (2001).

Kiureghian (1996) faz uma revisão sobre os métodos de avaliação da fiabilidade estrutural sob o ponto de vista da avaliação da segurança na presença de sismos. Já Cheng e Yang (1993) e Schueller (1997) apresentam um conjunto de trabalhos relacionados com aspectos teóricos e computacionais de mecânica estrutural. Também os métodos de simulação de campos aleatórios têm sido estudados e desenvolvidos por muitos autores, como por exemplo, Shinozuka e Deodatis (1991, 1996) e Spanos e Zeldin (1998). Num determinado número de artigos, Elishakoff (1995a, 1995b, 1998, 2000) analisou aspectos básicos relacionados com a modelação probabilística de incertezas estruturais e explorou alternativas para modelar essas incertezas. Também Yao (1985) e Melchers (2001) apresentaram os desenvolvimentos obtidos na análise de fiabilidade de estruturas existentes e apontaram a necessidade de continuar a aprofundar a investigação nesta área. Casciati *et al.* (1997) apresentam uma revisão sobre problemas dinâmicos e algoritmos dentro dos sistemas de fiabilidade estrutural. Problemas de fiabilidade relacionados com a variação no tempo e a aplicação de técnicas com combinação de cargas foram revistos por Rackwitz (1998). Outros factores que contribuíram para o crescimento de outras áreas são a disponibilidade cada vez maior de dados sobre fenómenos naturais, como por exemplo

sismos, e os recentes desenvolvimentos da tecnologia de sensores, como por exemplo a monitorização que já se utiliza em diversas ciências.

1.3 Organização da dissertação

Ao elaborar esta tese de Doutoramento teve-se em mente que ela constituísse igualmente um texto de apoio para todos aqueles que trabalham com o tratamento das várias incertezas que envolvem os problemas de engenharia, mais concretamente na área da segurança estrutural. O objectivo foi o de apresentar e discutir alguns métodos e técnicas que se aplicam na área da segurança e fiabilidade estrutural. Este trabalho desenvolve-se ao longo de sete capítulos. Em seguida faz-se uma descrição sumária de cada um dos capítulos:

Capítulo 1

Neste capítulo apresenta-se a informação base relacionada com o objectivo/motivação deste trabalho. Começam por se referir os objectivos a que este trabalho se propõe, fazendo de seguida uma pequena abordagem relativamente à evolução que a análise de fiabilidade teve ao longo dos tempos até à actualidade, referindo alguns dos trabalhos mais significativos dentro dessa área. Menciona-se a estrutura da tese organizada nos sete capítulos que a constituem.

Capítulo 2

Apresentam-se alguns conceitos básicos da análise de fiabilidade. Começa por referir-se quais as incertezas que poderão surgir na avaliação da segurança estrutural. Em seguida definem-se alguns conceitos relacionados com o tema como: variáveis aleatórias básicas, estados limite, função de estado limite e probabilidade de rotura. Para concluir, são revistos e discutidos alguns dos métodos de fiabilidade mais utilizados hoje em dia, expondo a evolução que estes tiveram ao longo do tempo.

Capítulo 3

Os métodos de fiabilidade desenvolvidos com base no pressuposto de variáveis aleatórias independentes com distribuição normal têm o seu campo de aplicação limitado. Daí que

neste capítulo se apresentem alguns métodos de transformação que podem ser úteis para casos em que as variáveis aleatórias básicas não têm distribuições normais e/ou nos casos de existirem correlações entre essas variáveis. Assim, apresentam-se métodos para transformar variáveis aleatórias normais correlacionadas em variáveis aleatórias equivalentes com distribuição normal e independentes. Da mesma forma, também se descrevem algumas das principais transformações para variáveis aleatórias não normais independentes, assim como transformações para variáveis aleatórias não normais correlacionadas.

Capítulo 4

Descrevem-se alguns dos métodos de simulação mais utilizados para o tratamento das várias incertezas que envolvem os problemas de engenharia, mais concretamente na área da segurança estrutural. Descreve-se o método de simulação de Monte Carlo, assim como duas técnicas de redução da variância. Além disso, apresenta-se a forma de gerar números aleatórios para variáveis aleatórias contínuas e discretas, assim como a simulação de variáveis aleatórias normais, e não normais, correlacionadas.

Capítulo 5

Descreve-se a metodologia proposta que permite obter um índice de fiabilidade para a avaliação da segurança estrutural. Neste capítulo apresenta-se o desenvolvimento de um método de fiabilidade estrutural eficiente que conjuga técnicas de perturbação com o método dos elementos finitos. Este método permite obter, com uma única análise estrutural, a resposta média e a sua dispersão em função das distribuições dos parâmetros básicos do problema, caracterizados por variáveis aleatórias. Desta forma obtém-se um procedimento de análise probabilística da segurança estrutural significativamente mais rápido do que os métodos frequentemente utilizados.

Considerando que o sistema estrutural em estudo, com n vigas e colunas, se encontra submetido a um carregamento caracterizado por $F \cdot \Phi = F \cdot [\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n]$; onde F representa a intensidade do carregamento e $[\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n]$ o vector da distribuição desse carregamento ao longo da estrutura. Aplicando o método dos elementos finitos, o equilíbrio do sistema é traduzido pela seguinte equação: $K(u) \cdot U = F \cdot \Phi$; onde $K(u)$ representa a matriz de rigidez tangente da estrutura, definida em função dos deslocamentos

nodais U , $F \cdot \Phi$ corresponde ao vector das forças nodais representativas das acções exteriores (inclui acções permanentes, sobrecargas, vento, etc.). Aplicando técnicas de perturbação a esta equação foi possível quantificar o valor médio e a dispersão da resposta estrutural, quer em termos de deslocamentos quer de forças. Além disso, são apresentados alguns detalhes relacionados com a implementação do software do modelo proposto.

Capítulo 6

Neste capítulo apresentam-se alguns exemplos comparativos entre os resultados obtidos por esta técnica e por outros métodos probabilísticos, permitindo avaliar as potencialidades da metodologia proposta.

Capítulo 7

Por fim, neste capítulo, apresentam-se as conclusões do trabalho desenvolvido assim como perspectivas de desenvolvimentos futuros.

Capítulo 2

Avaliação das Incertezas e Verificação da Segurança Estrutural

2.1 Introdução

Ao longo dos tempos a avaliação da segurança de estruturas era efectuada de uma forma empírica, muitas das decisões dependiam da experiência pessoal, da intuição e julgamento. Nos últimos anos, para avaliar com maior precisão os riscos associados à segurança estrutural têm vindo a ser aplicados, cada vez com maior frequência, métodos probabilísticos de fiabilidade. Estes métodos procuram avaliar as probabilidades de rotura de sistemas estruturais. Muitos trabalhos de investigação têm sido realizados dentro deste tema assim como têm surgido muitas publicações interessantes. Algumas noções, estudos e aplicações sobre a teoria da fiabilidade estrutural podem ser encontrados, por exemplo, em Madsen *et al.* (2006), Melchers (1999), Ditlevsen e Madsen (2005) e Haldar e Mahadevan (2000, 2000a). No entanto, a sua aplicação generalizada tem vindo a ser atrasada devido à pouca eficiência em resolver problemas de maior complexidade (Imai e Frangopol, 2000; Kharmanda *et al.*, 2002; Yu *et al.*, 1997).

Os critérios de rotura estrutural estão relacionados com as funções de estado limite, que definem as superfícies que separam a região de segurança da região de rotura. A determinação do índice de fiabilidade de sistemas estruturais é um problema de optimização no espaço normal padronizado (Hasofer e Lind, 1974; Shinozuka, 1983).

Existem dois métodos elementares para estimar a fiabilidade estrutural: o método de fiabilidade de primeira ordem (do inglês FORM) e o de segunda ordem (do inglês SORM). Os métodos de fiabilidade de primeira ordem foram utilizados por muitos autores para vários tipos de análises, como por exemplo, Kiureghian e Ke (1988) que os usaram para uma análise determinística de estruturas lineares com propriedades aleatórias. Este método envolve uma transformação das variáveis aleatórias para o espaço normal padronizado e aproxima a função de estado limite através de uma superfície linear (um hiperplano). O método de segunda ordem é semelhante ao de primeira ordem excepto que neste caso a função de estado limite é aproximada através de uma superfície de segunda ordem (um parabolóide). Se a superfície de estado limite não é linear uma aproximação de segunda ordem produzirá resultados mais fiáveis mas também será mais morosa e complicada. Caso contrário os dois métodos produzirão praticamente os mesmos resultados (Der Kiureghian *et al.*, 1987; Liu e Kiureghian, 1989).

As técnicas que utilizam processos de simulação, como o método de Monte Carlo, têm grandes custos computacionais para sistemas estruturais mais complexos mesmo quando a implementação computacional inclui técnicas de redução da variância (Mahadevan e Raghothamachar, 2000; Olsson *et al.*, 2003; Schueller, 2001). As técnicas de fiabilidade correntes, como os métodos FORM e SORM, são hoje geralmente aceites sendo as suas aplicações bastante simples quando existe uma formulação explícita do problema estrutural. No entanto, quando não há relações explícitas entre as variáveis, como por exemplo no método dos elementos finitos, a aplicação destas técnicas de fiabilidade para avaliar a incerteza da resposta estrutural torna-se mais exigente e pouco eficiente (Ghanem e Spanos, 2003; Haldar e Mahadevan, 2000a; Schenk e Schueller, 2005). Para muitos sistemas estruturais utiliza-se o método dos elementos finitos como ferramenta de análise de forma a obter resultados mais rigorosos. Esta é uma das razões pela qual a análise de fiabilidade de elementos finitos tem tido grandes desenvolvimentos nos últimos tempos.

Neste capítulo começam por apresentar-se alguns conceitos básicos da teoria da fiabilidade estrutural necessários para a compreensão do funcionamento dos vários métodos desenvolvidos e também como introdução ao tema em questão.

2.2 Incertezas na avaliação da segurança estrutural

Um sistema estrutural pode considerar-se como contendo incertezas quando não temos completo conhecimento sobre alguns aspectos que descrevem esse sistema e o seu comportamento, seja o modelo utilizado ou os valores dos seus parâmetros. Devido ao crescimento da complexidade dos sistemas estruturais, os parâmetros desconhecidos neles envolvidos tendem a aumentar em número e a ser cada vez mais correlacionados. Em seguida apresentam-se as principais fontes de incerteza que surgem na análise de fiabilidade e condicionam a avaliação do comportamento de uma estrutura.

A influência de diversos factores, como por exemplo, a impossibilidade de prever as condições de carga futuras, não saber com precisão as propriedades dos materiais, as limitações dos vários métodos que se podem aplicar, a utilização de hipóteses simplistas para prever o comportamento estrutural face às acções actuates; leva a que a segurança absoluta de uma estrutura nunca possa ser garantida. Verifica-se assim a existência de imensas fontes de incerteza na análise de fiabilidade que condicionam a avaliação do comportamento de uma estrutura. Essas incertezas que surgem, principalmente, devido a erros de estimação nos modelos teóricos utilizados nas análises, a imperfeições geométricas e à variabilidade dos materiais, das acções e intervenção humana, têm sido discutidas e analisadas por diversos autores, como por exemplo Matthies *et al.* (1997), Ayyub (1998), Henriques (1998), Delgado (2002), Faber e Stewart (2003), Gayton *et al.* (2004), no sentido de sistematizar e entender os parâmetros que mais influenciam a probabilidade de rotura de uma estrutura.

De uma forma geral as fontes de incerteza em problemas de engenharia estrutural podem ser agrupadas da seguinte forma (Der Kiureghian, 1989; Menezes e Schueller, 1996):

- Devido à acção do homem (ex. a resistência do betão usada nos modelos é diferente daquela que se obtém na obra pois os processos de fabricação, aplicação e cura estão sujeitos a muitas incertezas, tais como, a dosagem utilizada, a forma como é transportado, as condições climáticas quando é aplicado na obra, etc.). São consequência das suas falhas durante as várias fases da realização de uma determinada estrutura (documentação, dimensionamento, construção, etc.) resultantes, por exemplo da falta de conhecimento, omissões, erros, imprecisões, etc.

- Físicas, onde o homem não tem influência (ex. sobrecargas, vento, sismos, etc.). Resultam da impossibilidade de prever a variabilidade e simultaneidade das acções que actuam numa estrutura assim como da natureza incerta das propriedades dos materiais, da geometria dos elementos, etc. Para tentar controlar e estimar este tipo de incertezas há que obter o maior número possível de informação sobre as variáveis ou então recorrer a experiências anteriores.
- Dos modelos. Resultam da utilização de modelos que descrevem de forma aproximada o comportamento dos materiais e das simplificações na introdução das acções bem como dos seus efeitos. A diferença entre os valores observados na estrutura e os estimados pelo modelo pode ser considerada como uma medida desta incerteza.
- Estatísticas (ex. n.º limitado de observações influencia a estimação dos parâmetros estatísticos – média, desvio padrão, etc.). O número reduzido de dados disponíveis introduz incertezas nas estimativas dos parâmetros que caracterizam os modelos probabilísticos que podem ser minimizadas obtendo um maior número de informações e utilizando técnicas de inferência estatística.

2.3 Variáveis básicas

São variáveis que representam quantidades físicas e que caracterizam acções, propriedades dos materiais e dos solos e parâmetros geométricos. São as variáveis fundamentais que definem e caracterizam o comportamento e a segurança de uma estrutura, ou seja, são elas que representam toda a informação de *input* que é introduzida num modelo.

Cada variável básica é definida através de um determinado número de parâmetros tais como a média, o desvio padrão, etc.

2.4 Estados limite

Uma estrutura está sujeita a vários tipos de cargas ao longo do seu tempo de vida. A resposta estrutural a essas cargas pode ser encontrada sob a forma de deslocamentos, deformações, tensões ou esforços. O desempenho de uma estrutura é medido para

diferentes situações que podem ocorrer durante o seu período de funcionamento. Os danos ou a ruína podem surgir sempre que as acções aplicadas à estrutura excederem os valores da sua capacidade de resistir aos esforços desenvolvidos.

Um estado limite corresponde a uma representação discreta da resposta estrutural sob condições extremas de solicitação, à qual se pode associar um determinado nível de danos ou perdas (CEB, 1988).

A violação de um estado limite pode resultar de um único acontecimento ou de uma acumulação de danos, como por exemplo a rotura por fadiga. Pode ainda ser reversível e nesse caso o dano existente na estrutura apenas permanecerá enquanto a causa que o provocou esteja presente; ou irreversível e nesse caso o dano provocado permanecerá até que a estrutura seja reparada.

De acordo com as normas actuais de dimensionamento de estruturas, os estados limites dividem-se em duas categorias (RSA, 1984):

Estados limite últimos, de onde resultam prejuízos muito severos e que normalmente estão associados a uma capacidade de carga máxima da estrutura, ou parte dela, colocando em causa a segurança de pessoas e/ou equipamentos.

Estados limite de utilização, de onde resultam prejuízos pouco severos e aos quais estão associados os critérios que regulam as funções relacionadas com a normal utilização de uma estrutura, ou parte dela. Estes estados limite são ainda divididos em classes, normalmente associadas às durações de referência:

- *Muito curta* – poucas horas de vida da estrutura
- *Curta* – durações da ordem dos 5% da vida da estrutura
- *Longa* – durações da ordem dos 50% da vida da estrutura

A escolha dos estados limite a que uma estrutura deve obedecer depende dos materiais utilizados e do tempo de vida pretendido para a estrutura em causa. Esta sistematização do conceito de estado limite permitiu o estabelecimento de critérios de dimensionamento e verificação de segurança.

2.5 Função de estado limite

Para cada estado limite devem identificar-se as variáveis aleatórias básicas que o influenciam. Os modelos que descrevem o comportamento de uma estrutura devem ser definidos para cada estado limite. Os parâmetros desses modelos devem ser tratados como variáveis aleatórias básicas.

O estado limite pode ser descrito através de uma função das variáveis aleatórias básicas, $X = (X_1, X_2, \dots)$:

$$Z = G(X_1, X_2, \dots) \quad (2.1)$$

onde $G(\cdot)$ representa a relação entre os elementos do vector X (Freudenthal, 1956; Freudenthal *et al.*, 1966; Madsen *et al.*, 2006). Os elementos do vector X geralmente são incertezas, como por exemplo, parâmetros geométricos e materiais, cargas, etc. Além disso, estas quantidades podem estar correlacionadas.

Sendo Z a margem de segurança então $G(X) = 0$ é a função de estado limite. Considera-se que a estrutura está em segurança se $G(X) > 0$, sendo a região de rotura dada por $G(X) < 0$. Uma função de estado limite pode ser uma função explícita ou implícita das variáveis aleatórias básicas.

2.6 Verificação da segurança aos estados limite

Os critérios de verificação da segurança podem classificar-se em quatro níveis (Henriques, 1998; Delgado, 2002; Laranja, 2003):

Nível 0

As análises são puramente determinísticas, como por exemplo o método das tensões admissíveis. As variáveis têm valores estritamente determinísticos sendo as incertezas englobadas nos coeficientes globais de segurança que normalmente são estimados através de experiências passadas, da intuição do engenheiro ou do seu julgamento face ao problema em estudo.

Nível 1

As análises baseiam-se no formato semi-probabilístico de verificação de segurança que é actualmente o mais utilizado na regulamentação internacional para definir regras no dimensionamento estrutural. Para quantificar a variabilidade das acções e das resistências recorrem a valores representativos (nominais ou característicos) afectados de coeficientes parciais de segurança. Os valores representativos são utilizados na regulamentação de estruturas sendo definidos a partir do estudo estatístico da distribuição das variáveis básicas (normalmente, valores médios e desvios padrão). Os coeficientes parciais de segurança são aferidos por métodos probabilísticos de nível superior.

Nível 2

Inclui os métodos probabilísticos onde as variáveis básicas são definidas através de medidas estatísticas que descrevem a tendência central e a dispersão (normalmente, o valor médio e a variância). Procura-se determinar a probabilidade de ser atingido um determinado estado limite sendo a avaliação da segurança efectuada por técnicas numéricas aproximadas. A medida de segurança utilizada é o chamado índice de fiabilidade β que está directamente relacionado com a probabilidade de rotura p_f .

Nível 3

Inclui métodos puramente probabilísticos onde se utiliza a distribuição conjunta das variáveis básicas. A probabilidade de ser atingido um determinado estado limite é calculada analiticamente (de difícil aplicação, viável apenas para casos muito simples) ou recorrendo a métodos de simulação. Actualmente, embora estes métodos tenham grande aplicação em diversas áreas, em problemas com muitas variáveis, onde a complexidade dos algoritmos de análise não linear exige muito tempo de computação, a sua aplicação fica um pouco limitada.

2.7 Probabilidade de rotura. Caso fundamental

A formulação do problema básico da fiabilidade estrutural envolve apenas a resistência, R , e a solicitação, S , descritas pelas respectivas funções densidade de probabilidade f_R e f_S . A função de estado limite pode ser definida por:

$$Z = G(R, S) = R - S \quad (2.2)$$

Desta forma, a superfície que separa o domínio da segurança do domínio da rotura da estrutura será dada por:

$$Z = G(R, S) = R - S = 0 \quad (2.3)$$

De uma forma geral, a rotura de uma estrutura dá-se se a resistência do sistema estrutural, R , é menor do que as cargas actuantes, S . Nesta perspectiva, a probabilidade de rotura pode ser determinada integrando a função densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias R e S , $f_{R,S}$, dentro do domínio de falha $D = \{R, S : G(R, S) \leq 0\}$:

$$p_f = P\left(\frac{R}{S} \leq 1\right) = P(R - S \leq 0) = \iint_D f_{R,S}(r, s) dr ds \quad (2.4)$$

Como normalmente se assume que as variáveis aleatórias relacionadas com a resistência são estatisticamente independentes das que estão relacionadas com as acções, a função densidade de probabilidade conjunta em (2.4) pode ser substituída pelo produto das respectivas funções de densidade de probabilidade marginais:

$$p_f = \iint_D f_R(r) \cdot f_S(s) dr ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{S > R} f_R(r) \cdot f_S(s) dr ds \quad (2.5)$$

Considerando F_R como a função distribuição da resistência, integrando $f_R(r)$ obtém-se:

$$p_f = \int_{-\infty}^{+\infty} F_R(x) \cdot f_S(x) dx \quad (2.6)$$

Este integral é conhecido como o integral de convolução e representa todos os casos para os quais a resistência não excede as solicitações. Para a maior parte dos problemas a resolução analítica do integral da equação (2.6) é difícil. Normalmente calculam-se aproximações ao seu valor através de técnicas de integração numérica ou de procedimentos e medidas indirectas (Dai, 1992).

2.8 Índice de fiabilidade

A dificuldade em resolver o integral da equação (2.6) fez com que se desenvolvessem metodologias que permitissem avaliar a segurança de uma estrutura com base na sua probabilidade de rotura. Esta dificuldade levou a que nas últimas décadas se tenham vindo a desenvolver várias metodologias dentro da teoria da fiabilidade estrutural. Com o tempo foram surgindo vários métodos para determinar índices de fiabilidade que foram sendo estudados e apresentados por diversos autores, como por exemplo, Hasofer e Lind (1974), Rackwitz e Fiessler (1978), Chen e Lind (1983), Wu e Wirsching (1987), Liu e Der Kiureghian (1991a), Ditlevsen e Madsen (2005). Os trabalhos apresentados na década de sessenta por Freudenthal *et al.* (1966) foram as primeiras referências sobre o tema. Cornell (1969) apresenta o primeiro método de fiabilidade estrutural designado método do segundo momento de primeira ordem (do inglês FOSM). Com ele Cornell introduziu o conceito de índice de fiabilidade β que permite a obtenção da probabilidade de rotura e logo da segurança de uma estrutura. No entanto, rapidamente ficou claro que este método apresentava duas grandes limitações, o índice de fiabilidade não é constante para formulações equivalentes da função de estado limite e não incluía informação sobre as distribuições das variáveis aleatórias básicas, o que suscitou o aparecimento de novos métodos (Ditlevsen, 1973; Veneziano, 1974). Hasofer e Lind (1974) propõem um método que resolveu o problema da não invariância. Surgem assim os métodos FORM e SORM.

2.8.1 Formulação base do índice de fiabilidade

Para alguns casos especiais a equação (2.6) pode ser calculada com facilidade sem ter de se resolver o integral. Considere-se novamente uma formulação do problema básico da fiabilidade estrutural que envolve apenas a resistência, R , e a solicitação, S .

Se R e S são duas variáveis aleatórias estatisticamente independentes (o que é razoável assumir) com distribuição normal então $R \cap N(\mu_R, \sigma_R)$ e $S \cap N(\mu_S, \sigma_S)$. Desta forma, a função de estado limite definida por $Z = R - S = 0$, que define a margem de segurança, também é uma variável aleatória normal com $Z \cap N(\mu_R - \mu_S, \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2})$. Assim, a probabilidade de rotura é dada por (Cornell, 1969):

$$p_f = P(Z < 0) = \Phi\left(\frac{0 - (\mu_R - \mu_S)}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}\right) \quad (2.7)$$

onde $\Phi(\cdot)$ é a função distribuição da distribuição normal padronizada. A equação (2.7) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mu_R = \mu_S + \beta\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \quad (2.8)$$

onde $\beta = \Phi^{-1}(1 - p_f)$ representa o índice de fiabilidade. Assim, p_f pode representar-se da seguinte forma:

$$p_f = \Phi\left(-\frac{(\mu_R - \mu_S)}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}\right) = \Phi\left(-\frac{\mu_Z}{\sigma_Z}\right) = \Phi(-\beta) \quad (2.9)$$

Quanto maior for o índice de fiabilidade, β , menor será a probabilidade de rotura, p_f , ou seja, o risco associado nesse caso será menor. Na figura 2.1 representa-se o significado de β (Ferry-Borges e Castanheta, 1985).

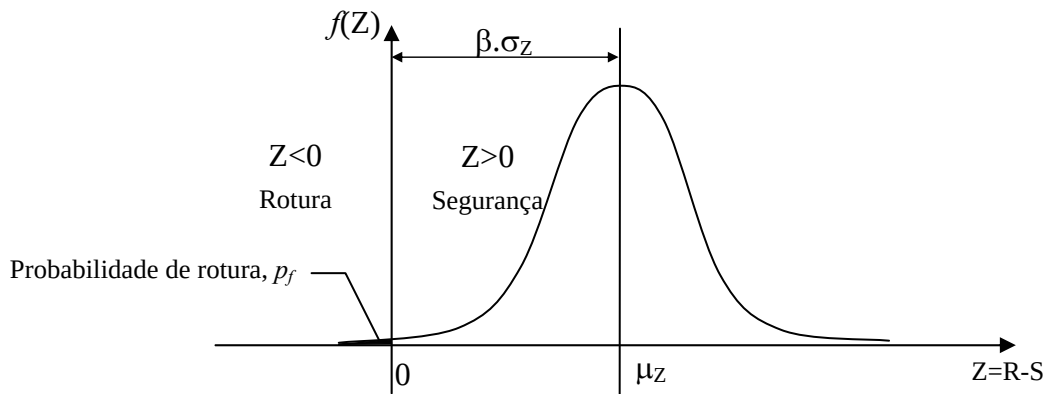


Figura 2.1 – Função densidade de probabilidade de $Z = R-S$ e índice de fiabilidade β .

Se R e S são duas variáveis aleatórias estatisticamente independentes com distribuição lognormal então $Z = \ln(R/S) = \ln R - \ln S$ é uma variável aleatória normal com probabilidade de rotura dada por:

$$p_f = 1 - \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{\mu_R}{\mu_S} \sqrt{\frac{1+V_S^2}{1+V_R^2}} \right)}{\sqrt{\ln \left[(1+V_R^2)(1+V_S^2) \right]}} \right) \quad (2.10)$$

onde $V_R = \sigma_R / \mu_R$ é o coeficiente de variação de R e $V_S = \sigma_S / \mu_S$ o coeficiente de variação de S. Se V_R e V_S não têm valores muito elevados (≤ 0.30) a equação (2.10) pode ser simplificada (Haldar e Mahadevan, 2000):

$$p_f \approx 1 - \Phi \left(\frac{\ln \mu_R - \ln \mu_S}{\sqrt{V_R^2 + V_S^2}} \right) \quad (2.11)$$

2.8.2 Generalização do cálculo do índice de fiabilidade

Em geral a resistência R é função das propriedades dos materiais e/ou das dimensões dos elementos que constituem um sistema estrutural enquanto a solicitação S é função das acções, existindo assim várias variáveis aleatórias a influenciar uma estrutura. Desta forma, normalmente, a função de estado limite $G(\cdot)$ depende de várias variáveis aleatórias que definem e caracterizam o comportamento e a segurança de uma estrutura $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, sendo expressa por:

$$Z = G(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0 \quad (2.12)$$

Esta equação estabelece a fronteira que divide o domínio numa região de segurança, $G(X) > 0$, e noutra de rotura, $G(X) < 0$.

Se as variáveis aleatórias básicas forem independentes e normalmente distribuídas e a função de estado limite for linear, do tipo:

$$G(X) = a_0 + a_1 X_1 + \dots + a_n X_n = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i \quad (2.13)$$

então o índice de fiabilidade pode ser obtido por (Hasofer e Lind, 1974):

$$\beta = \frac{a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_i a_j C_{ij})}} \quad (2.14)$$

onde μ é o vector das médias e C a matriz de covariâncias de X . No entanto, em muitos casos, algumas das variáveis aleatórias básicas não têm distribuições normais e a função de estado limite não é linear. Dessa forma, não são válidas as propriedades aditivas da lei normal pelo que se torna mais difícil calcular o valor médio e o desvio padrão de $G(\cdot)$, pois não se podem usar as expressões anteriores. Além disso, a resposta estrutural também pode não ser normal.

A probabilidade de rotura, p_f , será então obtida através da generalização de (2.4) aplicando uma integração múltipla a todas as variáveis aleatórias básicas:

$$p_f = \int \cdots \int_{G(X) \leq 0} f_X(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (2.15)$$

onde $f_X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é a função densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias básicas $(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Em geral $f_X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é praticamente impossível de obter e mesmo se essa informação estiver disponível o integral múltiplo dado em (2.15) é de difícil resolução. Inclusivamente as variáveis aleatórias básicas podem nem aparecer de forma explícita. Por estes motivos, para resolver o integral dado pela equação (2.15), normalmente recorrem-se a simplificações, a métodos numéricos ou mesmo a ambos. Estes métodos podem enquadrar-se em dois tipos de abordagens (Grigoriu, 1983):

- Aproximações numéricas por meio de simulações como por exemplo o método de Monte Carlo.
- Utilização de processos que permitam obter soluções aproximadas que sejam mais simples de calcular. Estes métodos podem ser agrupados em dois tipos: os métodos de fiabilidade de primeira ordem (do inglês FORM) e os de segunda ordem (do inglês SORM). Estes baseiam-se, respectivamente, em aproximações lineares (FORM) e quadráticas (SORM) à superfície de estado limite no ponto mais provável de rotura do espaço normal padronizado.

2.9 Métodos de fiabilidade de primeira e segunda ordem

As dificuldades em calcular o integral múltiplo da equação (2.15) motivaram o desenvolvimento dos métodos de fiabilidade dos segundos momentos de primeira ordem (FOSM). Devido à sua simplicidade estes tornaram-se muito populares desde o trabalho apresentado por Cornell, que utilizou uma formulação com apenas duas variáveis para explicar a sua abordagem (Cornell, 1969). Em vez de utilizar métodos numéricos aproximados para calcular a probabilidade de rotura de um problema de fiabilidade estrutural na sua forma mais geral aplica métodos mais simples onde a função integranda, $f_X(X_1, \dots, X_n)$ é simplificada.

O desenvolvimento dos métodos FORM está relacionado com os métodos dos segundos momentos (FOSM), que utilizam apenas a informação fornecida pelos dois primeiros momentos – o valor médio (μ) e o desvio padrão (σ) – para representar as variáveis aleatórias. Enquanto que nos métodos FOSM a informação sobre a distribuição das variáveis aleatórias é ignorada nos métodos FORM (também chamados de AFOSM) essa informação já é utilizada.

2.9.1 Métodos FOSM ou MVFOSM

Os métodos FOSM também são referidos na literatura como métodos do valor médio de primeira ordem e dos segundos momentos – MVFOSM (Cornell, 1969). Estes métodos baseiam-se numa aproximação em série de Taylor de primeira ordem da função de estado limite, linearizada nos valores médios das variáveis aleatórias, utilizando somente as estatísticas até aos segundos momentos das variáveis aleatórias básicas (médias e desvios padrão).

A formulação original deste método dada por Cornell (1969) utiliza apenas duas variáveis aleatórias, R e S , e uma equação de estado limite $Z = R - S$.

Tal como já foi referido no capítulo anterior, se R e S são estatisticamente independentes e normalmente distribuídas então a variável Z também é normalmente distribuída. A rotura acontece se $R < S \Leftrightarrow Z < 0$, sendo a probabilidade de rotura dada por:

$$p_f = 1 - \Phi\left(\frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}\right) \quad (2.16)$$

A probabilidade de rotura depende da razão entre μ_Z e σ_Z . Essa razão designa-se por *índice de segurança* ou *índice de fiabilidade* e geralmente representa-se por β mas neste caso vai representar-se por β_C pois foi definida por Cornell (1969):

$$\beta_C = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} . \quad (2.17)$$

Desta forma, a probabilidade de rotura pode ser definida por:

$$p_f = \Phi(-\beta_C) = 1 - \Phi(\beta_C) . \quad (2.18)$$

Já se viu que se $G(\mathbf{X})$ é um hiper-plano, e portanto linear, o índice de fiabilidade de Cornell é dado por:

$$\beta_C = \frac{a_0 + \mathbf{a}^T \boldsymbol{\mu}_X}{\sqrt{\mathbf{a}^T \mathbf{C}_X \mathbf{a}}} \quad (2.19)$$

onde $\boldsymbol{\mu}_X$ é o vector das médias e $\mathbf{C}_X$ a matriz de covariância de $\mathbf{X}$.

Se $G(\mathbf{X})$ não é linear, o que acontece em muitos casos, é necessário utilizar uma aproximação para a média e variância de Z (Bucher e Macke, 2003). Além disso, esta formulação pode generalizar-se a mais de duas variáveis aleatórias. Sendo $\mathbf{X}$ um vector com n variáveis aleatórias, a equação do estado limite é dada por:

$$Z = G(\mathbf{X}) = G(X_1, \dots, X_n) . \quad (2.20)$$

Aplicando uma expansão em série de Taylor à equação (2.20) em volta do ponto de dimensionamento $\mathbf{X}^* = (X_1^*, \dots, X_n^*)$ obtém-se:

$$\begin{aligned} Z = G(\mathbf{X}^*) &+ \sum_{i=1}^n (X_i - X_i^*) \frac{\partial G}{\partial X_i} \bigg|_{X_i=X_i^*} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (X_i - X_i^*) (X_j - X_j^*) \frac{\partial^2 G}{\partial X_i \partial X_j} \bigg|_{X_i=X_i^*, X_j=X_j^*} + \dots \end{aligned} \quad (2.21)$$

onde as derivadas parciais são calculadas no ponto de dimensionamento X^* . Este ponto deve ser tal que a diferença entre a probabilidade de rotura estimada, baseada na superfície utilizada como aproximação, e a verdadeira probabilidade de rotura seja mínima. Cornell sugeriu aproximar $G(X)$ pela sua expansão em série de Taylor de primeira ordem. Assim, truncando a série da equação (2.21) em relação aos termos lineares obtém-se uma aproximação de primeira ordem dada por:

$$Z \cong G(X^*) + \sum_{i=1}^n (X_i - X_i^*) \left. \frac{\partial G}{\partial X_i} \right|_{X_i=X_i^*} \quad (2.22)$$

A partir da equação (2.22) pode calcular-se o valor médio e variância de Z , que são dados por:

$$\mu_Z \approx G(X_1^*, \dots, X_n^*) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial G}{\partial X_i} (\mu_{X_i} - X_i^*) \quad (2.23)$$

$$\sigma_Z^2 \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial G}{\partial X_i} \frac{\partial G}{\partial X_j} \cdot Cov(X_i, X_j) \quad (2.24)$$

onde as derivadas parciais são calculadas no ponto de dimensionamento X^* , μ_{X_i} representa o valor médio de X_i e $Cov(X_i, X_j)$ é a covariância entre X_i e X_j . Se as variáveis não forem correlacionadas então a variância é dada por:

$$\sigma_Z^2 \approx \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial G}{\partial X_i} \right)^2 Var(X_i) . \quad (2.25)$$

O índice de fiabilidade dos segundos momentos e primeira ordem, β_{FOSM} , pode calcular-se a partir de (2.23) e (2.24) ou (2.25) utilizando a equação (2.17) e a partir desse valor determinar a probabilidade de rotura:

$$\beta_{FOSM} = \frac{G(X_1^*, \dots, X_n^*) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial G}{\partial X_i} (\mu_{X_i} - X_i^*)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial G}{\partial X_i} \frac{\partial G}{\partial X_j} \cdot Cov(X_i, X_j)}} \quad (2.26)$$

Cornell utilizou o valor médio, $X^* = \mu_X$, como ponto de dimensionamento. Este será o índice de fiabilidade do valor médio de primeira ordem e dos segundos momentos, β_{MVFOSM} , sendo dado por:

$$\beta_{MVFOSM} = \frac{G(\mu_{X_1}, \dots, \mu_{X_n})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial G}{\partial X_i} \frac{\partial G}{\partial X_j} \text{Cov}(X_i, X_j)}} \quad (2.27)$$

Este método aplica-se:

1. Se todas as variáveis aleatórias X_i são independentes e normalmente distribuídas e $G(X)$ é uma função linear das variáveis aleatórias X_i então $G(X)$ também é normalmente distribuída e a probabilidade de rotura é dada através de (2.18).
2. Se todas as variáveis aleatórias X_i são independentes e seguem uma distribuição lognormal e $G(X)$ é uma função que resulta do produto de funções de X_i então $Z = \ln(G(X))$ é normalmente distribuída e a probabilidade de rotura é dada através de (2.18).

No entanto, só em poucos casos é que se consegue determinar o valor exacto da probabilidade de rotura através deste método. De facto, na maior parte dos casos nem todas as variáveis são estatisticamente independentes, ou com distribuição normal ou lognormal, ou a função do estado limite resulta da soma ou produto das variáveis X_i . Nesses casos a probabilidade de rotura dá-nos um valor pouco preciso, apenas se fica com uma ideia do nível do risco utilizado no problema em estudo.

Este método de aproximação apresenta assim algumas deficiências na sua aplicação. As principais e mais importantes são as seguintes:

1. Este método não utiliza a informação (quando disponível) sobre a distribuição das variáveis aleatórias em estudo;
2. Quando $G(X)$ não é linear podem ser introduzidos erros significativos devido aos termos de segunda ordem e superior serem desprezados;

3. O valor do índice de fiabilidade dado por (2.26) não é constante para diferentes pontos de dimensionamento assim como para diferentes formulações, embora equivalentes, da mesma função de estado limite. O índice depende da formulação da equação de estado limite assim como dos pressupostos subjacentes acerca da sua distribuição. Por exemplo, as funções de estado limite definidas por $Z = R - S < 0$ e $Z = (R/S) < 1$ são equivalentes mas as probabilidades de rotura são diferentes para as duas formulações (Haldar e Mahadevan, 2000).

Essa falta de invâriança foi ultrapassada através dos métodos de fiabilidade dos segundos momentos de primeira ordem avançados (AFOSM ou FORM) propostos por Hasofer e Lind (1974) para variáveis com distribuição normal.

2.9.2 Métodos AFOSM ou FORM para variáveis aleatórias normais (Método de Hasofer-Lind)

O conceito relacionado com os métodos FORM baseia-se numa descrição do problema de fiabilidade no espaço normal padronizado (Rackwitz e Fiessler, 1978; Madsen *et al.*, 2006). Assim, sempre que as variáveis aleatórias básicas X de um problema estrutural são correlacionadas e/ou com distribuições não normais há que transformá-las em variáveis aleatórias não correlacionadas com distribuições normais padronizadas X'_i , com médias zero e desvios padrão unitários (Hohenbichler e Rackwitz, 1981; Der Kiureghian e Liu, 1986). Para isso, dependendo das características apresentadas pelas variáveis aleatórias básicas de cada problema podem utilizar-se vários métodos de transformação, como por exemplo a transformação de Nataf (Liu e Der Kiureghian, 1986) – ver capítulo 3.

Neste método transformam-se as variáveis aleatórias normais em normais reduzidas através da expressão:

$$X'_i = \frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}} \quad (i = 1, \dots, n) . \quad (2.28)$$

Esta equação é usada para transformar $G(\mathbf{X})=0$ na equação de estado limite reduzida $G(\mathbf{X}')=0$. O índice de fiabilidade é dado pela distância mínima entre a origem dos eixos e a superfície de estado limite no espaço normal padronizado:

$$\beta_{HL} = \sqrt{(\mathbf{X}'^*)^T \cdot (\mathbf{X}'^*)} . \quad (2.29)$$

Ao ponto que se encontra à distância mínima da origem do sistema de coordenadas reduzido e está sobre a superfície de estado limite chama-se o *ponto de dimensionamento* e representa-se pelo vector $\mathbf{X}'^*$. Se for no sistema de coordenadas original representa-se por $\mathbf{X}^*$. Para determinar a localização de $\mathbf{X}'^*$ podem utilizar-se vários procedimentos de optimização (Shinozuka, 1983).

Consideremos que a equação de estado limite é linear com duas variáveis:

$$Z = R - S = 0 . \quad (2.30)$$

As variáveis reduzidas serão dadas por:

$$R' = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R} \quad \text{e} \quad S' = \frac{S - \mu_S}{\sigma_S} . \quad (2.31)$$

Desta forma, a equação de estado limite no sistema de coordenadas reduzido será:

$$Z = G(\cdot) = \sigma_R R' - \sigma_S S' + \mu_R - \mu_S = 0 . \quad (2.32)$$

A distância da superfície de estado limite à origem do sistema de coordenadas reduzido é uma medida da fiabilidade do sistema. Quanto menor for a distância à origem maior será a probabilidade de rotura. Os pontos de intercepção da equação (2.32) com os eixos (R', S') são dados, respectivamente, por $\left[-(\mu_R - \mu_S)/\sigma_R, 0\right]$ e $\left[0, (\mu_R - \mu_S)/\sigma_S\right]$. Assim, utilizando as propriedades sobre a área de triângulos, podemos determinar a distância de (2.32) à origem, que nos dá o índice de fiabilidade do sistema:

$$\beta_{HL} = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} . \quad (2.33)$$

Esta expressão é idêntica à do índice de fiabilidade obtido através do método MVFOSM, para o caso em que R e S são consideradas estatisticamente independentes e normalmente distribuídas.

Daqui se conclui que se a equação de estado limite é linear e se as variáveis aleatórias R e S são estatisticamente independentes e normalmente distribuídas, o índice de fiabilidade é igual em ambos os métodos. No entanto, em outros casos isso não acontece.

No geral, o normal é a equação de estado limite $G(\mathbf{X}') = 0$ ser uma função não linear. Neste caso vai considerar-se que as variáveis aleatórias X'_i não são correlacionadas, representando $G(\mathbf{X}') < 0$ a região de rotura.

Da mesma forma que no caso em que $G(\mathbf{X}') = 0$ é linear, β_{HL} representa a distância mínima entre a origem do sistema de coordenadas reduzido e o ponto de dimensionamento situado sobre a superfície de estado limite, podendo ser obtido através de (2.29). Este pode ser utilizado para calcular uma aproximação de primeira ordem da probabilidade de rotura através da expressão $p_f = \Phi(-\beta_{HL})$. O ponto sobre a superfície de estado limite que está à distância mínima da origem, $\mathbf{X}'^*$, representa a pior combinação das variáveis aleatórias sendo por isso chamado o *ponto do dimensionamento* ou o *ponto mais provável de rotura*.

Para estados limites não lineares o cálculo da distância mínima é um problema de optimização:

$$\text{Minimizar } D = \sqrt{\mathbf{X}'^{*T} \mathbf{X}'^*} \quad (2.34)$$

$$\text{Sujeito a : } G(\mathbf{X}'^*) = G(\mathbf{X}'^*) = 0 \quad (2.35)$$

Aplicando o método dos multiplicadores de Lagrange, a distância mínima é dada por (Shinozuka, 1983):

$$\beta_{HL} = - \frac{\sum_{i=1}^n x'_i{}^* \left(\frac{\partial G}{\partial X'_i} \right)^*}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial G}{\partial X'_i} \right)^{2*}}} \quad (2.36)$$

onde $(\partial G / \partial X'_i)^*$ é a derivada parcial de G em ordem a X'_i calculada no ponto de dimensionamento $(x_1^*, \dots, x_n^*)$. O asterisco depois das derivadas parciais indica que estas são calculadas no ponto $(x_1^*, \dots, x_n^*)$. O ponto de dimensionamento nas coordenadas reduzidas é dado por:

$$x_i^* = -\alpha_i \beta_{HL} \quad (i=1, \dots, n) \quad (2.37)$$

Onde:

$$\alpha_i = \frac{\left(\frac{\partial G}{\partial X'_i} \right)^*}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial G}{\partial X'_i} \right)^{2*}}} \quad (2.38)$$

são os cossenos directores dos eixos coordenados X'_i . Os valores de α_i são os chamados factores de sensibilidade (Madsen *et al.*, 2006). Utilizando a equação (2.28) pode obter-se o ponto de dimensionamento no sistema de coordenadas original:

$$x_i^* = \mu_{X_i} - \alpha_i \sigma_{X_i} \beta_{HL} . \quad (2.39)$$

Rackwitz [1976, em Haldar (2000)] apresentou um algoritmo para calcular β_{HL} e X_i^* :

1. Definir a equação de estado limite
2. Escolher um valor inicial para o ponto de dimensionamento de coordenadas x_i^* , $i=1, \dots, n$. Normalmente, escolhem-se as médias das variáveis aleatórias. Em seguida obter as variáveis reduzidas $X_i^* = (X_i^* - \mu_{X_i}) / \sigma_{X_i}$
3. Calcular $(\partial G / \partial X'_i)^*$ e α_i no ponto $\mathbf{X}^*$
4. Obter o novo ponto de dimensionamento de coordenadas x_i^* , $i=1, \dots, n$ em função de β_{HL} utilizando a equação (2.37)

5. Substituir o novo ponto $\mathbf{X}'^*$ na equação de estado limite $G(\mathbf{X}'^*) = 0$ e resolver em ordem a β_{HL}
6. Calcular $x_i'^* = -\alpha_i \beta_{HL}$ usando o valor de β_{HL} obtido no passo 5.
7. Repetir os passos 3 a 6 até que β_{HL} convirja

Este algoritmo utiliza uma aproximação linear à superfície de estado limite em todos os pontos de cada iteração e determina a distância da origem até à superfície. Este processo continua até que o valor de β_{HL} convirja ou estabilize. Nos casos em que a equação de estado limite é linear o algoritmo só se aplica uma vez pois aí não são necessárias iterações.

Veneziano (1979) refere que apesar da simplicidade e generalidade de β_{HL} , este índice não é ainda completamente satisfatório pois não utiliza exhaustivamente toda a informação que está contida na região de segurança, no vector das médias e na matriz de covariâncias. Como consequência β_{HL} não é consistente e pode não ter em conta de forma adequada a geometria da região de segurança. Para contornar essas dificuldades Veneziano notou que se for dada uma caracterização completa, ou parcial, de $F(X)$ e $G(X)$ a probabilidade de rotura é limitada da seguinte forma:

$$p_f^L \leq p_f \leq p_f^U \quad (2.40)$$

onde p_f^L é o limite inferior e p_f^U o limite superior da probabilidade de rotura. Baseado nessa observação, Veneziano propôs um índice de fiabilidade alternativo:

$$\gamma = \left(p_f^U \right)^{-1/2}. \quad (2.41)$$

O índice γ varia de 1 a ∞ à medida que p_f^U varia de 0 a 1. Veneziano (1979) utilizou métodos baseados nos limites generalizados de Tchebysheff para avaliar γ dentro de uma variedade de regiões de segurança e para diversas caracterizações parciais de $F(X)$. Primeiro para problemas de fiabilidade univariados, depois para casos multivariados e finalmente para casos envolvendo processos estocásticos.

Ditlevsen (1979a) mostrou que para superfícies de estado limite não lineares β_{HL} não verifica uma propriedade a que chamou de comparabilidade. Ele considera esta como uma propriedade muito importante para qualquer medida de fiabilidade estrutural. A ideia baseia-se no seguinte, por exemplo: se se considerarem duas superfícies de estado limite, uma linear e outra não linear, as áreas correspondentes à região de rotura são diferentes para cada caso (Figura 2.2). Assim a fiabilidade estrutural em cada caso será diferente. No entanto, para ambas as superfícies os valores de β_{HL} são iguais, sugerindo igual fiabilidade nos dois casos. Para ultrapassar esta inconsistência Ditlevsen (1979a) introduziu um índice de fiabilidade generalizado dado por:

$$\beta_G = \Phi^{-1} \left(\int_{G(X') > 0} \dots \int \phi(x'_1) \dots \phi(x'_n) dx'_1 \dots dx'_n \right), \quad (2.42)$$

onde Φ e ϕ são, respectivamente, as funções distribuição e densidade de probabilidade de variáveis aleatórias com distribuição normal padrão e $G(X') > 0$ é a região de segurança no espaço normalizado das variáveis aleatórias. Este índice de fiabilidade foi definido para ser utilizado quando não existe mais nenhuma informação acerca das variáveis aleatórias básicas de um problema estrutural a não ser a superfície de estado limite e os primeiro e segundo momentos. Como o índice de fiabilidade inclui toda a região de segurança, este fornece um resultado consistente para o valor da fiabilidade. Devido à dificuldade do seu cálculo Ditlevsen (1979a) propôs aproximar a função de estado limite não linear através de hiper-planos tangentes em pontos seleccionados na superfície.

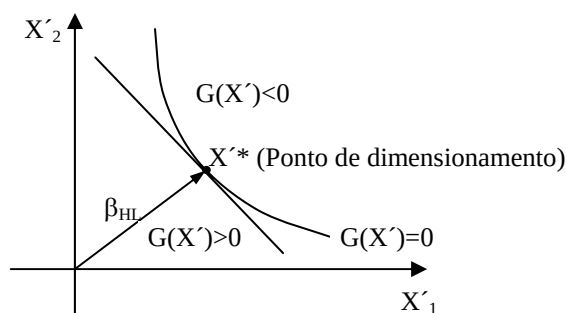


Figura 2.2 – Índice de fiabilidade para superfícies de estado limite linear e não linear.

Num trabalho realizado em paralelo Ditlevsen (1979b) demonstra a utilização prática do índice de fiabilidade da expressão (2.42), mesmo para sistemas estruturais com vários tipos de falhas.

De notar que quando X é um vector Gaussiano e $G(X)$ é uma função linear de X então $\beta_c = \beta_{HL} = \beta_G = \gamma$.

Der Kiureghian (1989) aborda o problema da definição de um índice de fiabilidade que inclua as incertezas devidas ao erro da estimação e à imperfeição dos modelos. Ele considerou que qualquer índice de fiabilidade deve satisfazer seis propriedades fundamentais (ser consistente, completo, invariável, simples, premiar o aumento de informação e manter a ordem).

2.9.3 Métodos AFOSM para variáveis aleatórias não normais

Se todas as variáveis aleatórias forem estatisticamente independentes e normalmente distribuídas e a superfície de estado limite for linear, pode usar-se o índice de fiabilidade de Hasofer-Lind para calcular a probabilidade de rotura de uma estrutura. Em qualquer outra situação este método não nos dá resultados exactos para a probabilidade de rotura.

Nos métodos FORM a superfície de estado limite no espaço normal padronizado ou reduzido é substituída por um hiperplano tangente no ponto que está mais próximo da origem. Esse ponto, X^* , é o chamado ponto de dimensionamento, sendo a distância desse ponto à origem o índice de fiabilidade, β . Em muitos casos é possível que a superfície de estado limite tenha vários pontos cuja distância à origem é mínima. Nessas situações essa superfície é aproximada através de um poliedro utilizando técnicas de fiabilidade (Madsen *et. al.*, 2006). O grande desafio está em encontrar sobre a superfície de estado limite o ponto que está mais próximo da origem. Esse é um problema de optimização. Para resolver este tipo de problemas Hasofer e Lind, 1974; Rackwitz e Fiessler, 1978; Liu e Der Kiureghian, 1986a, 1988, 1989, 1991, 1991a; Haldar e Mahadevan, 2000, 2000a; entre outros incluíram a informação que as distribuições das variáveis aleatórias poderiam fornecer e desenvolveram vários algoritmos de optimização, tanto para casos em que a superfície de estado limite é linear como não linear. Por exemplo, Liu e Der Kiureghian, 1986a, 1988, 1989, 1991, 1991a apresentam e comparam cinco algoritmos de optimização

para tentar solucionar o problema e assim obterem o ponto de dimensionamento e o correspondente índice de fiabilidade. Der Kiureghian e Dakessian (1998) propuseram um método que determina sucessivamente os vários pontos de dimensionamento de um problema de fiabilidade. A ideia é em primeiro lugar determinar aproximações através de métodos FORM ou SORM em cada um dos pontos de dimensionamento e depois utilizar uma série de sistemas de análises de fiabilidade. Melchers *et. al.* (2003) examinaram métodos FORM para casos em que as variáveis aleatórias associadas à função de estado limite têm funções densidade de probabilidade truncadas ou descontínuas. Também referem as dificuldades que existem em transformar variáveis aleatórias com funções densidade de probabilidade truncadas ou descontínuas para o espaço normal padronizado e sugerem técnicas para evitar as dificuldades numéricas que estão associadas à aplicação dos respectivos algoritmos em métodos FORM. Haldar e Mahadevan (2000, 2000a) apresentam dois algoritmos de optimização. Neste trabalho apresenta-se um dos algoritmos mais utilizados hoje em dia para resolver problemas de optimização na fiabilidade estrutural. Proposto inicialmente por Hasofer e Lind (1974) para métodos FOSM e mais tarde desenvolvido por Rackwitz e Fiessler (1978) de forma a incluir informação sobre as distribuições. Alguns autores chamam-lhe o método HL-RF. Este é aplicado através de um processo iterativo e baseia-se numa fórmula recursiva do tipo Newton-Raphson:

$$X'_{k+1}^* = \frac{1}{|\nabla G(X_k^*)|^2} \left[\nabla G(X_k^*)^T X_k'^* - G(X_k^*) \right] \nabla G(X_k^*)^T \quad (2.43)$$

onde $\nabla G(X_k^*)$ é o vector gradiente da função de estado limite na k-ésima iteração e $X_k'^*$ um vector de componentes $\{x_{1k}'^*, x_{2k}'^*, \dots, x_{nk}'^*\}^T$, sendo n o número de variáveis aleatórias.

Se alguma, ou algumas, das variáveis aleatórias de uma equação de estado limite não têm distribuição normal há que calcular o desvio padrão, $\sigma_{X_i}^N$, e a média, $\mu_{X_i}^N$, da distribuição normal equivalente de todas as variáveis aleatórias com distribuições não normais – ver capítulo 3, expressões 3.13 e 3.14.

Este algoritmo lineariza a função de estado limite em cada iteração, e em vez de se resolver a equação de estado limite explicitamente em função de β utiliza as derivadas parciais para procurar o ponto de iteração seguinte. Pode ser descrito da seguinte forma:

1. Definir a equação de estado limite
2. Escolher um valor inicial para o ponto de dimensionamento de coordenadas x_i^* , $i = 1, \dots, n$. Quando não há informação, normalmente, escolhem-se as médias das variáveis aleatórias. Depois calcular o valor da função de estado limite nesse ponto, $G(X_i^*)$
3. Em seguida calcular as médias e desvios padrão das distribuições normais equivalentes de todas as variáveis aleatórias que não têm distribuição normal. Assim, as coordenadas do ponto de dimensionamento no espaço normal padrão equivalente serão dadas por $X_i'^* = (X_i^* - \mu_{X_i}^N) / \sigma_{X_i}^N$
4. Calcular as derivadas parciais $(\partial G / \partial X_i)$ no ponto X_i^*
5. Calcular as derivadas parciais $(\partial G / \partial X_i')$ no espaço normal padrão equivalente através da expressão:

$$\frac{\partial G}{\partial X_i'} = \frac{\partial G}{\partial X_i} \sigma_{X_i}^N . \quad (2.44)$$

De notar que $(\partial G / \partial X_i')$ são as componentes do vector gradiente da função de estado limite no espaço normal padronizado equivalente. As componentes dos vectores unitários correspondentes são os chamados cossenos directores da função de estado limite e que são dadas por:

$$\alpha_i = \frac{\left(\frac{\partial G}{\partial X_i} \right)^* \sigma_{X_i}^N}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial G}{\partial X_i} \sigma_{X_i}^N \right)^{2*}}} \quad (2.45)$$

Os cossenos directores dão-nos valores de grande interesse pois representam a sensibilidade da função de estado limite padronizada, $G(X')=0$, no ponto de dimensionamento (também chamado ponto de rotura ou ponto mais provável de rotura), X'^* , a alterações em X' (Bjeranger e Krenk, 1989; Hochenblicher e Rackwitz, 1988).

6. Obter as novas coordenadas do ponto de dimensionamento no espaço normal padrão equivalente X_i^* utilizando a fórmula recursiva da expressão (2.43).
7. Calcular a distância deste novo ponto à origem através da expressão:

$$\beta = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^*)^2} \quad (2.46)$$

Verificar o critério de convergência de β (Se $|\beta_k - \beta_{k-1}| \leq \delta$, pára.). Normalmente, o valor de δ é uma quantidade muito pequena, como por exemplo 0.001.

8. Calcular as novas coordenadas do ponto de dimensionamento no espaço original através da expressão:

$$x_i^* = \mu_{X_i}^N + \sigma_{X_i}^N x_i^* \quad (2.47)$$

9. Calcular o valor da função de estado limite, $G(\cdot)$, para esse novo ponto de dimensionamento e verificar o critério de convergência de $G(\cdot)$ (Se $|G(X_k^*)| \leq \varepsilon$, pára.). Normalmente, o valor de ε é uma quantidade muito pequena, como por exemplo 0.001.

Se ambos os critérios de convergência dos passos 7 e 9 se verificarem pára-se, caso contrário, repetir os passos 3 a 9 até obter convergência

2.9.4 Métodos de fiabilidade de segunda ordem - SORM

Para determinar a probabilidade de rotura de um problema estrutural podem surgir várias situações:

1. $G(X)$ é linear e X é um vector de variáveis aleatórias com distribuições normais
2. $G(X)$ é linear e X é um vector de variáveis aleatórias com distribuições não normais
3. $G(X)$ não é linear e X é um vector de variáveis aleatórias com distribuições normais
4. $G(X)$ não é linear e X é um vector de variáveis aleatórias com distribuições não normais

No primeiro caso consegue-se obter um valor exacto enquanto que nos outros normalmente é necessário utilizar aproximações. Além disso, os problemas de tipo 2 e 4 podem transformar-se, respectivamente, em problemas do tipo 1 e 3.

Nos métodos FORM a função de estado limite, $G(X)$, é substituída por uma função aproximada traduzida por uma expansão em série de Taylor de primeira ordem em torno de um determinado ponto, linearizando assim $G(X)$. Estes métodos fornecem uma boa aproximação da probabilidade de rotura se $G(X)$, no espaço normal padronizado, é linear ou aproximadamente linear em torno do ponto de dimensionamento. No entanto, a superfície de estado limite nem sempre é linear. De facto, a não linearidade da superfície de estado limite pode resultar de vários factores, como por exemplo, a equação de estado limite não ser linear, algumas variáveis aleatórias terem distribuições não normais ou terem de se transformar variáveis aleatórias correlacionadas noutras não correlacionadas.

Considere a função de estado limite não linear da Figura 2.3, $G(X') = 0$. A curvatura da função de estado limite é ignorada quando se faz uma aproximação através de métodos FORM. No entanto, a curvatura de qualquer função está relacionada com as derivadas parciais de segunda ordem em relação às variáveis aleatórias. Assim, para melhorar os resultados obtidos através de métodos FORM podem utilizar-se métodos SORM pois estes incluem informação adicional acerca da curvatura da função de estado limite.

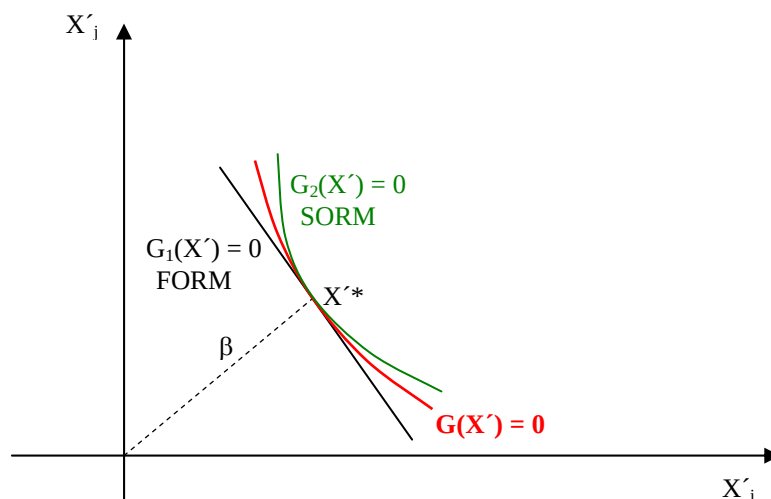


Figura 2.3 – Métodos FORM e SORM.

Nos métodos SORM têm de se obter os valores do vector gradiente e da matriz Hessiana de $G(X)$ no espaço normal padronizado com variáveis aleatórias independentes. A ideia é substituir a superfície de estado limite, $G(X)$, pela sua expansão em série de Taylor de segunda ordem em torno do ponto de dimensionamento $X^* = \{X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*\}^T$:

$$G(X) = G(X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*) + \sum_{i=1}^n (X_i - X_i^*) \frac{\partial G}{\partial X_i} \Big|_{X_i=X_i^*} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (X_i - X_i^*) (X_j - X_j^*) \frac{\partial^2 G}{\partial X_i \partial X_j} \Big|_{X_i=X_i^*, X_j=X_j^*} \quad (2.48)$$

A equação (2.48) pode ser expressa na forma matricial:

$$G(X) = G^* + \Delta X^T \nabla G^* + \frac{1}{2} \Delta X^T H^* \Delta X \quad (2.49)$$

onde $\Delta X = X - X^*$, ∇G é o vector das derivadas de primeira ordem ou o vector gradiente de $G(X)$ e H a matriz $(n \times n)$ das derivadas de segunda ordem de $G(X)$ ou a matriz Hessiana, sendo dadas por:

$$\nabla G = \left\{ \frac{\partial G}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial G}{\partial X_n} \right\}^T \quad (2.50)$$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 G}{\partial X_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 G}{\partial X_1 \partial X_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 G}{\partial X_n \partial X_1} & \dots & \frac{\partial^2 G}{\partial X_n^2} \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Como X^* , que é o ponto de dimensionamento ou o ponto mais provável de rotura, está sobre $G(X)$ então $G^* = G(X^*) = 0$. Desta forma, a equação (2.49) pode simplificar-se:

$$G(X) = \Delta X^T \nabla G^* + \frac{1}{2} \Delta X^T H^* \Delta X \quad (2.52)$$

Existem dois tipos de aproximações que se utilizam nos métodos SORM: o primeiro consiste em ajustar as curvaturas principais da superfície de estado limite às da superfície proposta no ponto de dimensionamento, a segunda utiliza um ajuste de pontos.

A aproximação através de métodos SORM foi desenvolvida e apresentada pela primeira vez por Fiessler *et. al.* (1979). No entanto, os seus resultados, obtidos a partir de várias superfícies quadráticas, na prática são de difícil resolução. Em estudos seguintes foram utilizadas aproximações através de parabolóides (Breitung, 1984; Der Kiureghian *et. al.*, 1987; Tvedt, 1984, 1985, 1990).

Breitung (1984) utilizou os resultados obtidos a partir da teoria das aproximações assintóticas nos métodos SORM (ver também Bleistein e Handelsman, 1975). Utilizando um ajustamento através de um parabolóide ele mostrou que a probabilidade de rotura pode ser dada, aproximadamente, da seguinte forma:

$$p_f \approx \Phi(-\beta_{FORM}) \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \beta_{FORM} k_i)^{-1/2} \quad (2.53)$$

onde k_i são as curvaturas principais da função de estado limite no ponto de dimensionamento e β_{FORM} o índice de fiabilidade utilizando métodos FORM. Breitung e Hohenbichler (1989) mostraram que a estimativa de p_f dada por (2.53) aproxima-se assintoticamente da estimativa de primeira ordem à medida que β_{FORM} tende para infinito e $\beta_{FORM} k_i$ permanece constante. Breitung (1989) refere que quando existem vários pontos $(P_1, \dots, P_k)$ na superfície de estado limite a igual distância mínima da origem a probabilidade de rotura pode ser dada assintoticamente através de:

$$p_f \approx \Phi(-\beta_{FORM}) \sum_{i=1}^k \left\{ \prod_{j=1}^{n-1} (1 - \beta_{FORM} k_{ij}) \right\} \quad (2.54)$$

onde k representa o número de pontos da superfície de estado limite para o qual $|P_i| = \beta_{FORM}$ e k_{ij} é a j -ésima curvatura em P_i . A aproximação dada por (2.53) é ligeiramente melhorada para pequenos valores de β_{FORM} , podendo ser obtida através da expressão (Hohenbichler e Rackwitz, 1988):

$$p_f \approx \Phi(-\beta_{FORM}) \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 + \frac{\phi(-\beta_{FORM}) k_i}{\Phi(-\beta_{FORM})} \right)^{-1/2} \quad (2.55)$$

Hong (1999) propôs um factor de correcção para (2.55), baseado na curvatura principal da função de estado limite no ponto de dimensionamento, que melhora as estimativas de p_f quando se utilizam métodos SORM. Também Hohenbichler *et. al.* (1987) desenvolveram e apresentaram uma teoria onde utilizam o conceito de aproximações assintóticas em métodos FORM e SORM. Breitung (1991) determinou p_f para casos em que as variáveis aleatórias básicas têm distribuições não normais. Ao transformar as variáveis aleatórias não normais em normais equivalentes surgiram-lhe alguns problemas, como por exemplo, a superfície de estado limite original passou a ter outra forma com a transformação, deixando esta nova superfície de ter uma interpretação clara em termos das variáveis aleatórias originais. Para evitar todos os problemas resultantes dessas transformações Breitung considerou que o ponto de dimensionamento fosse determinado através da maximização da função de verosimilhança, proposta já feita antes por Shinozuka (1983). Ele considerou que se podem obter aproximações de p_f se se encontrarem os pontos onde a função de verosimilhança tem máximos. Para tal ele aproximou a função de verosimilhança através de uma expansão em série de Taylor de segunda ordem e assim obteve novas interpretações para métodos FORM e SORM.

Uma equação muito mais precisa do que a (2.55) é a chamada fórmula do integral duplo de Tvedt (1985):

$$p_f \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \phi(\beta_{FORM}) \operatorname{Re} \int_0^\infty \int_0^\infty \prod_{j=1}^{n-1} \left(r_p \left[1 + (\beta_{FORM}^2 + 2s)^{1/2} k_j + \sqrt{2} i u k_j \right]^{-1/2} \right) \times \quad (2.56)$$

$$\times (\beta_{FORM}^2 + 2s)^{-1/2} \exp(-s - u^2) ds du$$

onde $r_p \{ \cdot \}$ representa a raiz com parte real positiva, k_j as curvaturas principais, $i = \sqrt{-1}$ e $\operatorname{Re}(\cdot)$ a parte real de um número complexo. Posteriormente, Tvedt (1988) apresentou uma fórmula de um integral exacto para o cálculo aproximado de p_f :

$$p_f \approx \Phi(\beta_{FORM}) \sum_{j=1}^k w_j \operatorname{Re} \left\{ \left[\det \left(I + \left((\beta_{FORM}^2 + 2s_j)^{\frac{1}{2}} + i \right) A \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} (\beta_{FORM}^2 + 2s_j)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.57)$$

onde o somatório representa a aproximação da quadratura de Gauss-Laguerre a k pontos com pesos w_j e abscissas s_j , $i = \sqrt{-1}$, $\operatorname{Re}(\cdot)$ é a parte real de um número complexo, $\det(\cdot)$ o determinante de uma matriz, I a matriz identidade e A a matriz $(n-1) \times (n-1)$ das segundas derivadas da superfície de estado limite no espaço rodado (obtido através de uma transformação ortogonal do espaço normal padronizado). Tvedt (1990) aproximou a superfície de estado limite através de um parabolóide no espaço rodado. Não utilizou aproximações assintóticas mas sim aproximações de segunda ordem à superfície de estado limite através de procedimentos baseados nas características das distribuições das variáveis aleatórias para estimar p_f . A seguinte fórmula de três termos foi apresentada por Tvedt (1990) para estimar p_f , sendo uma aproximação baseada em expansões de séries de potências:

$$p_f \approx T_1 + T_2 + T_3 \quad (2.58)$$

$$T_1 = \Phi(-\beta_{FORM}) \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \beta_{FORM} k_i)^{-1/2} \quad (2.59)$$

$$T_2 = \{ \beta_{FORM} \Phi(-\beta_{FORM}) - \phi(\beta_{FORM}) \} \times \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \beta_{FORM} k_i)^{-1/2} - \prod_{i=1}^{n-1} (1 + (\beta_{FORM} + 1) k_i)^{-1/2} \right\} \quad (2.60)$$

$$T_3 = (\beta_{FORM} + 1) \{ \beta_{FORM} \Phi(-\beta_{FORM}) - \phi(\beta_{FORM}) \} \times \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \beta_{FORM} k_i)^{-1/2} - \operatorname{Re} \left[\prod_{i=1}^{n-1} (1 + (\beta_{FORM} + i) k_i)^{-1/2} \right] \right\} \quad (2.61)$$

onde k_i são as curvaturas principais da função de estado limite no ponto de dimensionamento, $i = \sqrt{-1}$ e $Re[.]$ é a parte real de um número complexo.

Der Kiureghian *et. al.* (1987) verificaram que o ajuste do parabolóide à superfície de estado limite se baseia nas curvaturas no ponto de dimensionamento e que para isso há que determinar os valores próprios da matriz Hessiana de $G(X)$ nesse ponto. Quando o algoritmo para calcular $G(X)$ é complexo o cálculo da matriz Hessiana envolve métodos aproximados que introduzem muitos erros e diminuem a precisão dos resultados. Para evitarem o cálculo completo da matriz Hessiana, Der Kiureghian *et. al.* (1987) aproximaram a superfície de estado limite através de duas semiparábolas ajustando as curvas num conjunto de pontos numa vizinhança do ponto de dimensionamento e utilizaram o conjunto de curvaturas na fórmula (2.53) de Breitung. Num estudo posterior Der Kiureghian e Stefano (1991) propuseram um algoritmo iterativo, que utiliza apenas o gradiente de $G(X)$, para calcular as curvaturas principais da superfície de estado limite sem ser necessário determinar a matriz Hessiana. Este método mostrou-se vantajoso para problemas com muitas variáveis aleatórias.

Cai e Elishakoff (1994) apresentaram uma aproximação para determinar a probabilidade de rotura:

$$1 - p_f \approx \Phi(\beta_{FORM}) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\beta_{FORM}^2}{2}\right\} (D_1 + D_2 + D_3) \quad (2.62)$$

onde:

$$D_1 = \sum_j k_j \quad (2.63)$$

$$D_2 = -\frac{1}{2} \beta_{FORM} \left(3 \sum_j k_j^2 + \sum_{j \neq i} k_j k_i \right) \quad (2.64)$$

$$D_3 = \frac{1}{6} (\beta_{FORM}^2 - 1) \left\{ 15 \sum_j k_j^3 + 9 \sum_{j \neq i} k_j^2 k_i + \sum_{j \neq i \neq l} k_j k_i k_l \right\} \quad (2.65)$$

sendo k_i as curvaturas principais. A aplicação desta fórmula foi utilizada num exemplo com três variáveis aleatórias normais e onde a função de estado limite não é linear. Os resultados obtidos foram comparados com os valores exactos tendo-se verificado que o método proposto fornece resultados aceitáveis mesmo quando a superfície de estado limite está perto da origem e com grandes curvaturas. Zhao e Ono (1999a, 1999b) analisaram a precisão de várias fórmulas utilizadas em métodos SORM para um grande conjunto de valores de curvaturas, número de variáveis aleatórias e índices de fiabilidade obtidos através de métodos FORM, β_{FORM} . Propuseram então uma fórmula empírica para estimar índices de fiabilidade através de métodos SORM baseada na análise de regressão, evitando assim a utilização da matriz Hessiana de $G(X)$. Noutro estudo, Zhao e Ono (1999c) verificaram que o desenvolvimento de métodos que evitam o cálculo da matriz Hessiana representa um avanço promissor na utilização de métodos SORM. Nesse estudo propõem um ajuste através de pontos a uma superfície quadrática que evita o cálculo da matriz Hessiana ou dos gradientes de $G(X)$.

Papadimitriou *et. al.* (1995, 1997) desenvolveram aproximações assintóticas para avaliar a fiabilidade de sistemas dinâmicos sujeitos a oscilações aleatórias. A ideia base do seu estudo é que a probabilidade de rotura, condicionada pelos parâmetros do sistema em estudo, é obtida pelo menos de uma forma aproximada. A probabilidade de rotura foi definida através da seguinte expressão:

$$p_f = \int_{\Theta} F(\theta) p(\theta) d\theta \quad (2.66)$$

onde $F(\theta)$ é a probabilidade condicional de rotura de uma estrutura para um dado valor de θ , $p(\theta)$ é a função densidade de probabilidade e $\theta \in \Theta \subset IR^n$. Uma vez que este integral é de difícil resolução Papadimitriou *et. al.* (1997) apresentaram uma aproximação assintótica baseada numa expansão do logaritmo da função integranda em relação ao máximo dessa função. Considerando que existe apenas um máximo $\theta^* \in \Theta$ reformularam (2.66) da seguinte forma:

$$p_f = \int_{\Theta} \exp[l(\theta)] d\theta \quad (2.67)$$

onde $l(\theta) = \ln F(\theta) + \ln p(\theta)$ e expandiram $l(\theta)$ em relação ao seu valor máximo que também é θ^* . Obtiveram, assim, uma aproximação assintótica de p_f dada por:

$$p_f \approx (2\pi)^{n/2} \frac{F(\theta^*) p(\theta^*)}{\sqrt{\det[L(\theta^*)]}} \quad (2.68)$$

onde $L(\theta)$ é a matriz Hessiana de $-l(\theta)$ cuja componente (i, j) é dada por:

$$L_{ij}(\theta) = -\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \quad (2.69)$$

No caso de existir mais do que um máximo, por exemplo θ_j^* , $j=1, \dots, r$ basta somar as contribuições assintóticas (2.68) de cada ponto máximo, ou seja:

$$p_f \approx \sum_{j=1}^r p_f(\theta_j^*) \quad (2.70)$$

A utilização de aproximações assintóticas como a da expressão (2.68) também foram estudadas por Polidori *et. al.* (1999) para aplicação em métodos SORM. No seu artigo apresentaram uma nova aproximação assintótica para métodos SORM. A probabilidade de rotura pode ser dada por:

$$p_f = \int_F \phi(X) dX \quad (2.71)$$

onde $F = \{X \in IR^n : G(X) < 0\}$. Para construir um parabolóide que servirá como aproximação à superfície de estado limite primeiro há que aplicar uma rotação às coordenadas do espaço normal padronizado, Y , através de uma transformação ortogonal, obtendo novas coordenadas Y' de forma que o novo eixo y'_n coincide com o ponto de dimensionamento. Além disso, como os eixos coordenados, y'_i , $i=1, \dots, n-1$ coincidem com os eixos principais da superfície de estado limite o parabolóide pode definir-se da seguinte forma:

$$y'_n = \beta_{FORM} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} k_i y_i'^2 \quad (2.72)$$

onde k_i são as curvaturas principais. Assim, o integral (2.71) pode ser apresentado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 p_f &= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\beta_{FORM} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m k_i y_i'^2}^{\infty} \phi(y_n') dy_n' \right) \phi(y) dy = \\
 &= \int_{\mathbb{R}^m} \Phi \left(-\beta_{FORM} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m k_i y_i'^2 \right) \phi(y) dy
 \end{aligned} \tag{2.73}$$

onde $m = n - 1$, $y = (y_1', \dots, y_{n-1}')$ e as curvaturas são ordenadas de forma que $k_1 \leq \dots \leq k_m$. Esta equação é da mesma forma da equação (2.66) e assim a aproximação assintótica dada por (2.68) também é aqui aplicável. Uma discussão sobre este estudo e uma resposta dos autores pode ser vista, respectivamente, em Breitung (2001) e Polidori *et. al.* (2001).

Uma aproximação assintótica à probabilidade de rotura para problemas com vários pontos de dimensionamento foi proposta por Au *et. al.* (1999a). A contribuição de cada ponto de dimensionamento para a probabilidade de rotura é dada através da equação (2.68), sendo a aproximação assintótica total obtida através da soma das contribuições de todos os pontos de dimensionamento.

Quando a distância entre a origem e o ponto mais provável de rotura, β , tende para infinito os métodos FORM e SORM fornecem apenas soluções assintóticas. Se essa distância for finita, para problemas que envolvam funções de estado limite com não linearidade acentuada, as aproximações lineares ou quadráticas podem não ser adequadas e consequentemente os resultados obtidos através de métodos FORM ou SORM devem ser interpretados com algum cuidado (Nie e Ellingwood, 2000; Wei e Rahman, 2007). Além disso, a existência de múltiplos pontos mais prováveis de rotura podem originar grandes erros se se utilizarem aproximações obtidas através de métodos FORM ou SORM (Ditlevsen e Madsen, 2005; Der Kiureghian e Dakessian, 1998; Wei e Rahman, 2007). Nesses casos devem utilizar-se métodos adaptados para múltiplos pontos de forma a melhorar os resultados da análise de fiabilidade (Nie e Ellingwood, 2000; Au *et. al.*, 1999a). Controvérsias acerca das limitações dos métodos FORM e SORM já vêm a ser discutidas há muito tempo (Dolinski, 1983; Shinozuka, 1983; Ditlevsen, 1985; Schueller e Stix, 1987).

2.10 Funções de estado limite implícitas

Os métodos de simulação de Monte Carlo (MMC), os métodos FORM e os SORM são os métodos que mais se têm utilizado para estimar a probabilidade de rotura de sistemas estruturais quando a função de estado limite, $G(X)$, está expressa numa forma explícita. Nos dois últimos métodos podem calcular-se facilmente as derivadas parciais de $G(X)$ em ordem às variáveis aleatórias do problema para depois se determinarem, no espaço normal reduzido, os pontos de $G(X)$ que estão à distância mínima da origem. No entanto, na maior parte dos casos $G(X)$ é dada de forma implícita. Na análise de fiabilidade de sistemas estruturais onde essa situação ocorre várias são as aproximações que se podem utilizar, como por exemplo métodos de simulação de Monte Carlo (ver capítulo 4), métodos de superfície de resposta e métodos probabilísticos de elementos finitos. Nos últimos anos, apareceram métodos alternativos, como as técnicas baseadas em redes neuronais e os métodos fuzzy, para a avaliação mais eficiente da incerteza estrutural (Ayyub e Gupta, 1997; Biondini et al, 2004). No entanto, apesar de mostrarem desempenhos interessantes em termos de eficiência nos resultados e na implementação em conjunto com os modelos estruturais existentes, ainda exigem a realização de várias análises estruturais para avaliar a incerteza da resposta estrutural.

2.10.1 Métodos de superfície de resposta

Em problemas onde as funções de estado limite são implícitas pode utilizar-se o método de superfície de resposta (do inglês RSM). Este método é uma ferramenta bastante útil para modelar a resposta quando esta é influenciada por várias variáveis aleatórias em estruturas bastante complexas. O princípio deste método consiste na substituição da superfície de estado limite por funções aproximadas mais simples numa vizinhança dos pontos de dimensionamento. Então, a função de estado limite é substituída por uma superfície de resposta que normalmente apresenta uma forma mais simples e muitas vezes é representada por uma função explícita. Em seguida, pode utilizar-se qualquer um dos métodos clássicos para avaliar a fiabilidade estrutural para funções de estado limite explícitas mas agora utilizando a superfície de resposta em substituição da função de estado limite (Myers e Montgomery, 1995; Long e Narciso, 1999; Gomes e Awruch, 2004).

Desde Box e Wilson (1951), que desenvolveram o método de superfície de resposta, este tem vindo a ser bastante utilizado em diversas áreas. Wong (1984, 1985) utilizou métodos de superfície de resposta na análise estatística de problemas de engenharia geotécnica, quer para avaliar o efeito das incertezas nos parâmetros sobre a resposta em sistemas dinâmicos de estruturas de solos, quer para analisar a fiabilidade em terrenos inclinados. O autor utiliza métodos de simulação e depois de regressão para ajustar a superfície de resposta. À superfície assim aproximada são aplicados métodos de simulação de Monte Carlo. Faravelli (1989, 1992) utilizou o método de superfície de resposta para resolver problemas de análise não linear de elementos finitos. Para ajustar a função de estado limite utilizou superfícies quadráticas incluindo os seus termos cruzados. Breitung e Faravelli (1996) definiram vários passos na implementação de métodos de superfície de resposta: primeiro escolher uma função, dentro de uma determinada família de funções, que se aproxime de $G(X)$; depois utilizar planeamentos de experiências para estimar os parâmetros dessa função; em seguida aplicar testes estatísticos ou outros métodos para validar a aproximação e por fim testar a significância dos termos na função aproximada (por exemplo, num polinómio de segunda ordem se os termos de ordem dois não são significativos pode utilizar-se um modelo mais simples sem esses termos).

Nos métodos de superfície de resposta a função de estado limite implícita é aproximada através de uma função polinomial, ou seja, normalmente a superfície de resposta é construída a partir de uma função polinomial e ajustada à função implícita num determinado número de pontos (Schueller, 1998). Normalmente apenas se seleccionam os pontos suficientes para definir completamente a superfície de resposta. Noutros casos são necessários mais pontos e utiliza-se a análise de regressão para ajustar a superfície de resposta à superfície de estado limite dentro da malha de pontos seleccionados. A superfície ajustada passa a ser a função explícita equivalente da função de estado limite implícita. Em seguida pode então aplicar-se directamente um método de análise de fiabilidade para casos onde a função de estado limite é explícita (Melchers, 1990). Um dos problemas deste método é que não existe nenhuma teoria que defina com precisão a forma como a selecção dos pontos de amostragem deve ser feita. Daí que, nos últimos anos, esses pontos tenham sido seleccionados de diferentes maneiras por vários autores. Por exemplo, Bucher e Bourgund (1990) utilizaram polinómios de ordem dois sem os termos cruzados. Propuseram uma aproximação rápida e eficiente para construir a superfície de resposta

utilizando técnicas de amostragem por importância. A superfície de resposta utilizada para representar $G(X)$ pode ser dada por:

$$G_1(X) = a + \sum_{i=1}^n b_i X_i + \sum_{i=1}^n c_i X_i^2 \quad (2.74)$$

onde a , b_i e c_i são os parâmetros do modelo. A equação (2.74) indica que apenas são necessárias $2n+1$ amostras para ajustar o polinómio. As amostras são obtidas ao longo dos eixos coordenados de cada variável a uma distância $x_i = \mu_i \pm h_i \sigma_i$ onde h_i é um factor arbitrário e μ_i e σ_i são o valor médio e o desvio padrão de X_i . Desta forma obtiveram estimativas para os parâmetros do modelo. Depois de ajustarem a superfície de resposta através de uma análise de regressão procuram, no espaço normal padronizado não correlacionado, a distância mínima da origem a $G_1(X)$. Desta forma obtêm o índice de fiabilidade e o ponto de dimensionamento no espaço original, X^* . No entanto, a posição desse ponto pode ser melhorada através de interpolação, usando a equação:

$$\mu_{i+1} = \mu_i + (X_i^* - \mu_i) \frac{G(\mu_i)}{[G(\mu_i) - G(X_i^*)]} \quad (2.75)$$

onde $G(\cdot)$ é a função de estado limite, X_i^* é o ponto de dimensionamento no espaço original e μ_i o valor médio das variáveis no ponto central das amostras na i -ésima iteração. Assim, são geradas $2n+1$ novas amostras em cada iteração, centradas no novo ponto central. Em seguida utilizam a superfície de resposta conjuntamente com técnicas de simulação de Monte Carlo (amostragens por importância) para obter estimativas da fiabilidade estrutural. Posteriormente, Rajashekhar e Ellingwood (1993, 1995) examinaram o problema relacionado com a escolha dos pontos de amostragem e sugeriram modificações à aproximação utilizada por Bucher e Bourgund (1990). Os autores indicaram alguns problemas relacionados com os pontos de amostragem e propuseram a inclusão de informação relativa às distribuições de probabilidade para seleccionar esses pontos e dessa forma melhorar o modelo relativo ao método de superfície de resposta. Além disso, estudaram a selecção de pontos de dimensionamento perto das caudas das distribuições de probabilidade das variáveis aleatórias básicas e a inclusão dos termos

cruzados na equação da superfície de resposta. Uma modificação ao método apresentado por Bucher e Bourgund (1990), na qual a aproximação para estimar os parâmetros da superfície de resposta se continua a fazer até que um critério de convergência seja satisfeito, foi proposto por Liu e Moses (1994). Yao e Wen (1996) aplicaram o método de superfície de resposta em estruturas sujeitas a cargas que variam ao longo do tempo, com o objectivo de obterem uma formulação da função de estado limite que seja mais simples para resolver em termos computacionais. A fiabilidade estrutural pode assim calcular-se de forma mais rápida através de métodos FORM, SORM ou de Monte Carlo. Kim e Na (1997) utilizaram funções de superfície de resposta lineares da forma:

$$G_1(X) = a + \sum_{i=1}^n b_i X_i \quad (2.76)$$

e propuseram uma técnica de aproximação sequencial para ajustar uma superfície de resposta que garanta a convergência do índice de fiabilidade. Utilizaram uma técnica de projecção do gradiente para escolher os pontos de amostragem. O seu método garante que esses pontos se situam numa região próxima da superfície de estado limite. Guan e Melchers (2000, 2001) apresentaram um estudo paramétrico sobre métodos de superfície de resposta. Nesse estudo utilizaram alguns exemplos para testarem o factor arbitrário h_i , utilizado para determinar os pontos de amostragem, com diferentes valores para investigar os seus efeitos sobre a estimativa de p_f . Os resultados mostraram que não existe um valor único para h_i e que o valor escolhido pode afectar significativamente o cálculo de p_f .

Nos métodos de superfície de resposta o objectivo é construir uma aproximação polinomial, normalmente de primeira ou segunda ordem, a $G(X)$. Para obter a superfície de resposta há que aplicar uma análise de regressão. Quando a superfície de resposta já está ajustada a $G(X)$, utilizando um conjunto de pontos de amostragem com alguma precisão, pode aplicar-se a análise de fiabilidade, sendo a probabilidade de rotura calculada através de métodos FORM, SORM ou métodos de simulação de Monte Carlo. O essencial é ajustar correctamente os polinómios a $G(X)$ utilizando os pontos de amostragem numa vizinhança dos pontos de dimensionamento. A precisão com que se estima p_f está directamente relacionada com a escolha da forma da superfície de resposta, $G_1(X)$, e da

localização dos pontos de amostragem, a partir dos quais se estimam os parâmetros de $G_1(X)$. Algumas técnicas de amostragem foram propostas para se proceder ao ajuste:

1. Planeamentos factoriais (Wong, 1984, 1985; Faravelli, 1989, 1992; Huh e Haldar, 2002)
2. Planeamentos factoriais fraccionados
3. Planeamentos completamente aleatorizados
4. Planeamento com blocos incompletos parcialmente equilibrados
5. Método utilizado por Bucher e Bourgund (1990)
6. Processos baseados em redes neuronais (Papadrakakis *et. al.*, 1996; Hurtado e Alvarez, 2001; Gomes e Awruch, 2004; Hurtado, 2004)

Normalmente, as funções polinomiais utilizadas nos métodos de superfície de resposta como aproximação à função de estado limite têm uma forma quadrática. Os polinómios de ordem superior não são utilizados pois têm muitos coeficientes a ajustar e em muitos casos apresentam formas irregulares. Pode obter-se uma estimativa da probabilidade de rotura com alguma precisão desde que a função polinomial utilizada se ajuste bem à função de estado limite. No entanto, para problemas que envolvem um grande número de variáveis aleatórias correlacionadas, cujas combinações não são lineares, o método de superfície de resposta torna-se impraticável em termos computacionais. Além disso, nunca existe uma garantia de que a função aproximada se ajusta bem em todas as regiões de interesse assim como há que saber qual o ponto de dimensionamento para poder obter uma superfície de resposta apropriada (Der Kiureghian, 1996). Outras aproximações são os chamados métodos de superfície de múltiplos planos e os métodos de superfície de múltiplos planos tangentes (Guan e Melchers, 1997). Mais recentemente, Bauer e Pula (2000) referem que os métodos de superfície de resposta podem, em muitos casos, levar a falsos pontos de dimensionamento.

Problemas de análise de fiabilidade com variação ao longo do tempo onde se utilizam métodos de superfície de resposta foram estudados por Brenner e Bucher, 1995; Yao e Wen, 1996 e Zhao *et. al.*, 1999. Já a utilização destes métodos em problemas de

otimização foi desenvolvido por Oakley *et. al.*, 1998. O objectivo é maximizar a performance de sistemas mecânicos, como por exemplo a eficiência aerodinâmica.

Um dos aspectos que influencia a estimativa de p_f nos métodos de superfície de resposta é a escolha da forma para a superfície de resposta. Pouca importância tem sido dada para esse aspecto pois normalmente utilizam-se polinómios lineares ou quadráticos (com ou sem os termos cruzados). No entanto, essas escolhas podem não ser apropriadas uma vez que a forma da função de estado limite pode não ser linear nem quadrática. Representações alternativas têm vindo a ser propostas por alguns autores. Nelder (1966) propôs um ajuste através de uma função que é o inverso de funções polinomiais e mostrou que a sua utilização não envolve mais trabalho do que um ajuste através de funções polinomiais lineares ou quadráticas. Os problemas relacionados com a falta de ajuste que em muitos casos surgem quando se utilizam polinómios de primeira ou segunda ordem podem ser reduzidos introduzindo algumas modificações no método de superfície de resposta. Por exemplo, os pontos de amostragem podem ser escolhidos em torno do ponto de dimensionamento (Rajashekhar e Ellingwood, 1993), ou pode utilizar-se uma técnica de projecção vectorial para colocar os pontos de amostragem perto da superfície de resposta (Kim e Na, 1997), ou desenvolver um algoritmo de forma a construir a superfície de resposta através de um processo cumulativo (começa-se por ajustar uma superfície de resposta linear para em seguida melhorá-la adicionando os termos de segunda ordem. Se mesmo assim a função de superfície de resposta não for satisfatória, esta pode ser melhorada adicionando os termos cruzados e retirando alguns dos termos de segunda ordem - Zheng e Das, 2000; Das e Zheng, 2000). Impollonia e Sofi (2003) sugeriram um método de superfície de resposta alternativo que utiliza funções que são a razão de polinómios para representar a superfície de resposta. Esta escolha é comprovada por alguns resultados obtidos em estruturas estocásticas lineares (Falsone e Impollonia, 2002 – as duas últimas páginas deste artigo foram corrigidas em Falsone e Impollonia, 2003). Falsone e Impollonia (2004) mostraram que este tipo de ajuste à superfície de estado limite permite obter respostas exactas em estruturas determinísticas e respostas aproximadas com uma boa precisão em estruturas não determinísticas. Gayton *et. al.* (2003) propuseram um método, a que chamaram CQ2RS (superfície de resposta quadrática completa com reamostragem), para construir superfícies de resposta que tem em conta qualquer informação *a priori* que se possa ter acerca da forma da superfície de estado limite e/ou da

localização do ponto de dimensionamento. Romero *et al.* (2004) examinaram algumas técnicas de ajustamento de dados, como por exemplo interpolações e regressão polinomial, que podem ser utilizadas para construir uma sequência de melhoramentos progressivos para a superfície de resposta.

Para aplicar o método clássico de superfície de resposta podem seguir-se as etapas:

1. Seleccionar os pontos de amostragem, obtidos a partir das variáveis aleatórias, através de planeamentos de experiências para avaliar a função de estado limite $G(X)$. As amostras são obtidas ao longo dos eixos coordenados de cada variável a uma distância $x_i = \mu_i \pm h_i \sigma_i$.
2. Através da análise de regressão construir um modelo de primeira ou segunda ordem e assim obter uma superfície de resposta aproximada para $G(X)$. Se o número de parâmetros do modelo é igual ao número de pontos de amostragem então os parâmetros podem ser obtidos através da resolução de um sistema de equações sem ser necessário aplicar uma análise de regressão.
3. Com a superfície de resposta obtida no passo 3 pode assim calcular-se uma estimativa para p_f através de métodos FORM, SORM ou de Monte Carlo.

Os métodos de superfície de resposta fornecem uma superfície aproximada para $G(X)$ baseada nos pontos seleccionados no passo 1. A superfície aproximada obtida através da análise de regressão é válida apenas dentro da amplitude de valores considerados. A extrapolação para valores fora dessa amplitude pode levar a estimações de p_f pouco precisas.

2.10.2 Métodos probabilísticos de elementos finitos

A análise de fiabilidade é facilitada quando a função de estado limite é dada de forma explícita. No entanto, para funções de estado limite implícitas é necessário utilizar abordagens apropriadas. Uma das hipóteses é utilizar métodos probabilísticos de elementos finitos (do inglês SFEM). Estes são utilizados quando se quer aplicar o método dos elementos finitos que tem em conta as incertezas nas propriedades geométricas e/ou dos

materiais de um sistema estrutural, assim como das cargas aplicadas. Normalmente, essas incertezas estão distribuídas espacialmente ao longo da estrutura sendo modeladas através de campos aleatórios. Estes métodos são uma ferramenta muito poderosa, sendo muito utilizados em variadíssimas áreas, como por exemplo na análise de sistemas estruturais. Os primeiros trabalhos limitavam-se a estruturas com comportamento linear ou não linear mas traduzido por relações simplistas. O interesse nestes métodos aumentou a partir do momento em que se percebeu que em algumas estruturas a resposta é bastante sensível às propriedades dos materiais, e que mesmo pequenas oscilações podem afectar severamente a fiabilidade estrutural principalmente em problemas onde há grande não linearidade (Der Kiureghian, 1985; Vanmarcke *et al.*, 1986; Nakagiri *et al.*, 1987; Benaroya e Rehak, 1987; Shinozuka e Deodatis, 1988; Yamazaki *et al.*, 1988; Der Kiureghian e Ke, 1988; Spanos e Ghanem, 1989; Bjerager, 1990; Brenner, 1991; Shinozuka, 1991; Der Kiureghian *et al.*, 1991; Kleiber e Hien, 1992; Frangopol *et al.*, 1996; Schueller, 1997; Matthies *et al.*, 1997; Ghanem, 1999; Frangopol e Imai, 2000; Haldar e Mahadevan, 2000a; Sudret e Der Kiureghian, 2002; Ghanem e Spanos, 1991, 2003). Estes métodos foram desenvolvidos de forma a incorporarem as incertezas dos parâmetros estruturais, como por exemplo o efeito aleatório na matriz de rigidez e nos vectores das forças (Chaudhuri e Chakraborty, 2006).

Em seguida vai apresentar-se uma pequena revisão sobre métodos de avaliação da segurança estrutural identificando algumas áreas, dentro da imensa vastidão que existe hoje em dia, que requerem alguma atenção.

A maior parte das investigações e aplicações dentro da área dos métodos probabilísticos de elementos finitos têm sido limitadas a estruturas lineares elásticas. No entanto, alguns autores estudaram os efeitos das incertezas nas propriedades de materiais com comportamento não linear, como por exemplo, Zhang e Ellingwood (1996), Liu e Der Kiureghian (1991a) e Teigen *et al.* (1991a, 1991b). Métodos de simulação em campos aleatórios foram revistos por Shinozuka e Deodatis (1991, 1996). Já na área da avaliação da segurança contra sismos Der Kiureghian (1996) apresenta uma revisão de métodos para a avaliação da fiabilidade estrutural. Os artigos apresentados por Ibrahim (1987), Casciati *et al.*, (1997), Manoharand e Ibrahim (1999) e Di Paola *et al.* (2004) fornecem alguns progressos que foram surgindo em problemas de dinâmica estrutural com incertezas nos parâmetros assim como alguns algoritmos de aplicação. Rackwitz (1998) apresenta algumas técnicas computacionais de fiabilidade relacionadas com combinações de cargas

com aplicações em problemas com variações ao longo do tempo. Rackwitz (2000) apresenta uma discussão com exemplos que indiciam possíveis falhas em alguns métodos de análise de fiabilidade. Yao (1985) e Melchers (2001) apresentam alguns desenvolvimentos na análise de fiabilidade de estruturas existentes e referem a necessidade de continuar a investigação dentro desta área. Os trabalhos realizados por Cheng e Yang (1993) e Schueller (1997) abordam aspectos teóricos assim como a evolução em termos computacionais na área da mecânica estrutural. Aliás, tal como noutros ramos da engenharia e não só, o aparecimento, nos últimos anos, de computadores cada vez mais rápidos tem influenciado bastante os desenvolvimentos ocorridos nesta área (Johnson *et al.*, 2001). Outros factores que também contribuíram para esse desenvolvimento são o aumento da disponibilidade de dados sobre fenómenos naturais raros e/ou aleatórios como por exemplo os sismos e os recentes desenvolvimentos da tecnologia de sensores no campo da monitorização.

2.10.2.1 Métodos para discretização de campos aleatórios

Tal como já foi referido, a variabilidade espacial das propriedades geométricas e mecânicas de um sistema estrutural assim como a intensidade das cargas podem ser representadas através de campos aleatórios. O conceito de campo aleatório é muitas vezes utilizado para modelar a variabilidade espacial dos parâmetros de um problema (Vanmarcke, 1988). Como consequência do facto de ser um modelo contínuo, um campo aleatório necessita de uma discretização apropriada (Zeldin e Spanos, 1998). Além disso, devido à natureza discreta do método dos elementos finitos um campo aleatório deve ser discretizado em variáveis aleatórias. Assim, em todos os métodos a natureza aleatória de um problema é transformada numa estrutura equivalente com um número finito de variáveis aleatórias. Desta forma, um campo aleatório pode ser visto como uma extensão espacial de uma variável aleatória, sendo definido pela sua média e covariância. Foram desenvolvidos vários processos para a discretização de campos aleatórios utilizados com os SFEM. Na literatura estão disponíveis muitos estudos que permitem passar de um campo aleatório para um conjunto de variáveis aleatórias (Vanmarcke, 1983, 1988; Vanmarcke *et al.*, 1986; Yamazaki *et al.*, 1988; Li e Der Kiureghian, 1993; Liu *et al.*, 1986, 1995; Ditlevsen, 1996; Matthies *et al.*, 1997).

Seja $H(X)$ um campo aleatório que modela a variabilidade da propriedade de um material, da geometria ou da quantidade de carga de uma estrutura no espaço. Diz-se que um campo aleatório é univariado ou multivariado dependendo se $H(X)$, que está relacionado com o ponto X , é uma variável aleatória ou um vector aleatório. Normalmente, assume-se que $H(X)$ é Gaussiano pois dessa forma ele pode ser completamente definido através da sua função média $\mu_H(X)$, variância $\sigma_H^2(X)$ e coeficiente de correlação $\rho_{HH}(X_i, X_j)$. Além disso $H(X)$ é homogêneo, como na prática normalmente se assume, se as funções média e variância são constantes e $\rho_{HH}(\cdot)$ é apenas função de $X_j - X_i$. Estas propriedades simplificam a modelação de campos aleatórios.

Um dos primeiros aspectos a ter em conta quando se analisa um modelo matemático é a sua consistência, não só do modelo em si mas também com a realidade que representa. Assim, embora a utilização de campos Gaussianos seja conveniente, não é consistente assumir que, por exemplo, o módulo de elasticidade E ou a área A de um elemento estrutural possam ser representados por um campo aleatório Gaussiano. Se tal for considerado algumas das realizações dessas variáveis não terão solução e além disso os resultados terão variância infinita (Ditlevsen, 1995). Para descrever essas variáveis é necessário a utilização de modelos não Gaussianos. Para contornar essa dificuldade Yamazaki *et al.* (1988) e Wall e Deodatis (1994) restringiram a variação das amostras de campos Gaussianos da seguinte forma:

$$-1 + \varepsilon \leq f(x) \leq 1 - \varepsilon ; \quad 0 < \varepsilon < 1 . \quad (2.77)$$

A limitação é realizada de forma a obter uma simetria nas variações em torno dos valores determinísticos. Aproximações a campos aleatórios Gaussianos semelhantes a esta utilizando distribuições com amplitudes limitadas foram apresentadas também por Iwan e Jensen (1993). Uma forma mais sistemática de obter campos aleatórios não Gaussianos é através transformações não lineares. Isto pode ser conseguido considerando $w(x) = T[u(x)]$, onde T é uma função não linear e $u(x)$ um campo Gaussiano (Grigoriu, 1984; Der Kiureghian e Liu, 1986; Der Kiureghian, 1987; Yamazaki e Shinozuka, 1988). Este tipo de transformações permite caracterizar $w(x)$ em função da média e covariância de $u(x)$. Uma destas transformações é a distribuição de Nataf que é referida no capítulo 3,

secção 3.5.3., sendo muito utilizada para modelar campos não Gaussianos. Se $w(x)$ é um campo não Gaussiano com média $\mu_w(x)$, covariância $C_{ww}(x, x')$ e função distribuição $F_w(w, x)$, de acordo com o modelo de Nataf a transformação:

$$u(x) = \Phi^{-1}[F_w(w, x)] \quad (2.78)$$

é Gaussiana. Assim, $u(x)$ tem média zero, variância unitária e covariância $C(x, x')$ dada pela equação:

$$C_{ww}(x, x') = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_w^{-1}[\Phi(t)] - \mu_w(x)}{\sigma_w(x)} \frac{F_w^{-1}[\Phi(s)] - \mu_w(x')}{\sigma_w(x')} \phi[t, s, C(x, x')] dt ds \quad (2.79)$$

onde $\phi[\cdot]$ representa a função densidade de probabilidade conjunta de (T, S) . Normalmente $|C_{ww}(x, x')| \leq |C(x, x')|$ e embora para a maior parte das transformações $C_{ww}(x, x') \approx C(x, x')$ Der Kiureghian *et al.* (1991) apresentam um conjunto de fórmulas empíricas que relacionam $C(x, x')$ com $C_{ww}(x, x')$ para algumas das distribuições mais utilizadas. Manohar *et al.* (1999) apresentou um conjunto de problemas onde as propriedades dos materiais têm variabilidade espacial e a informação disponível sobre essa variabilidade se resume apenas à média, amplitude e covariância dos campos aleatórios. Outros trabalhos desenvolvidos por alguns autores sobre modelos de campos aleatórios não Gaussianos para as propriedades dos materiais podem ser vistos em Elishakoff *et al.* (1995) e Sobczyk *et al.* (1996). Também Grigoriu (1995) apresentou um trabalho bastante extensivo sobre dados não Gaussianos, modelos matemáticos que geram campos não Gaussianos assim como classes de campos não Gaussianos. Schevenels *et al.* (2004) apresentam uma adaptação do SFEM para calcular a resposta de sistemas não Gaussianos.

A qualidade de uma discretização depende do número de variáveis aleatórias introduzidas na formulação do problema (este aspecto está directamente relacionado com o esforço computacional) assim como do tamanho da malha de elementos finitos. O problema relacionado com a selecção e refinamento do tamanho da malha de elementos finitos para a discretização de campos aleatórios em problemas de fiabilidade foi analisado e apresentado por Liu e Liu (1993).

Os métodos de discretização podem ser divididos em métodos de discretização pontual, métodos de discretização média ou métodos de discretização por expansão em séries. Em seguida vão apresentar-se oito métodos para representar campos aleatórios em função de variáveis aleatórias. A aplicação do método da média espacial e dos dois primeiros métodos de expansão em série estão limitados a campos aleatórios Gaussianos. Os métodos do ponto médio, dos pontos nodais, da expansão de caos homogénea e da expansão em série de Taylor são numericamente estáveis e podem aplicar-se a todos os tipos de campos aleatórios.

2.10.2.1.1 Métodos de discretização pontual

Os métodos de discretização pontual são utilizados para representar as incertezas de um campo aleatório, $H(X)$, através de valores situados em um ou mais pontos específicos (Matthies *et al.*, 1997). Para um campo aleatório $H(X)$, o valor discretizado num determinado ponto i é dado por:

$$H_i = H(X_i) \quad (2.80)$$

onde X_i representa as coordenadas do ponto i .

1. Método do ponto médio

Este método, proposto e utilizado inicialmente por Dendrou e Houstis (1978), Hisada e Nakagiri (1985), Shinozuka e Dasgupta (1986), Der Kiureghian e Ke (1988), Yamazaki *et al.* (1988), Shinozuka e Yamazaki (1988), Deodatis (1989) e Hisada e Noguchi (1989), é utilizado para representar um campo aleatório através de uma ou mais variáveis aleatórias. Neste caso, o método consiste em aproximar o campo aleatório em cada elemento através de uma variável aleatória definida como o valor do campo no centróide desse elemento. Assim, a variação do elemento i de um campo aleatório é representada através da variável aleatória:

$$H_i = H(X_i^*) \quad (2.81)$$

onde:

$$X_i^* = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N X_j^{(i)} \quad (2.82)$$

são as coordenadas do centróide, N o número de nós do elemento do campo aleatório e $X_j^{(i)}$ são as coordenadas nodais do elemento i .

As vantagens deste método estão na facilidade com que se obtém a matriz de correlações e na possibilidade de representar também campos não Gaussianos. O tamanho da malha de elementos finitos tem de ser relativamente pequeno de forma a poder assumir-se que o campo aleatório é constante ao longo de cada elemento. No entanto, há que ter algum cuidado em relação a este aspecto pois à medida que o tamanho da malha diminui as dimensões das matrizes para a análise estrutural aumentam e consequentemente também o tempo e o esforço computacional aumenta. Além disso, este método tende a sobrevalorizar a variabilidade do campo aleatório dentro de cada elemento.

2. Método do ponto nodal

Este método, implementado por Hisada e Nakagiri (1981), é semelhante ao método do ponto médio. A diferença é que neste caso os valores atribuídos às variáveis aleatórias que representam o campo aleatório correspondem aos pontos nodais. Neste caso a variação do campo no nó i é dada por:

$$H_i = H(X_i^*) \quad (2.83)$$

onde $X_i^* = X_i$ são as coordenadas do i -ésimo nó global.

3. Método de interpolação

Também chamado método das funções de forma foi introduzido por Liu *et al.* (1986, 1986a, 1987, 1989) onde os autores sugeriram a discretização de um campo aleatório $H(X)$ em q valores nodais aleatórios H_i , $i = 1, \dots, q$. Assim, este método aproxima $H(\cdot)$ em cada elemento através de q valores nodais X_i utilizando funções de forma $N_i(X)$ com a seguinte expressão:

$$H(X) = \sum_{i=1}^q N_i(X) H_i \quad (2.84)$$

onde q é o número de nós do elemento, H_i é o valor de $H(X)$ no nó X_i , X_i são as coordenadas do i -ésimo nó e $N_i(X)$ são as funções de forma polinomiais associadas ao elemento. O número de pontos nodais não necessita de ser igual ao número de elementos finitos. Pode dizer-se que a escolha das funções de forma e dos pontos nodais é arbitrária. O valor esperado e a variância do campo aleatório são dados por:

$$E[H(X)] = \sum_{i=1}^q N_i(X) E[H_i] \quad (2.85)$$

$$Var[H(X)] = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q N_i(X) N_j(X) C_{HH}(X_i, X_j) \quad (2.86)$$

onde $C_{HH}(X_i, X_j)$ é a covariância do campo aleatório.

Se os nós são os centróides dos elementos do campo aleatório e se assume que as funções de forma são iguais à unidade dentro de cada elemento e zero fora dele, o método de interpolação reduz-se ao método do ponto médio (Liu e Kiureghian, 1989).

2.10.2.1.2 Métodos de discretização média

1. Método da média espacial

Também chamado o método da média local, proposto por Vanmarcke (1977) e Vanmarcke e Grigoriu (1983), foi utilizado em combinação com os SFEM e alguns outros métodos (Vanmarcke *et al.*, 1986; Shinozuka e Deodatis, 1988; Fenton e Vanmarcke, 1990; Zhu *et al.*, 1992). Para um determinado campo aleatório, o valor discretizado de um elemento i é dado por:

$$H_i = \frac{\int_{\Omega_i} H(X) d\Omega_i}{|\Omega_i|} \quad (2.87)$$

onde Ω_i é o domínio do elemento.

Quando utilizado com SFEM o domínio representa a área do i -ésimo elemento. Já para o caso de processos estocásticos o domínio representa um tempo médio obtendo-se uma família de médias móveis (Vanmarcke *et al.*, 1986). Para campos aleatórios homogêneos foram desenvolvidas expressões para as covariâncias das variáveis discretizadas H_i em função das covariâncias $C_{HH}(X_i, X_j)$, de $H(X)$ para o caso em que os elementos são rectangulares e paralelos aos eixos coordenados (Vanmarcke, 1983), assim como para o caso em que os elementos são cilíndricos e simétricos em relação aos eixos coordenados (Phoon *et al.*, 1990).

Existem duas dificuldades na aplicação deste método na análise de fiabilidade de elementos finitos (Liu e Kiureghian, 1989; Matthies *et al.*, 1997):

- Nem sempre é possível discretizar um campo aleatório em elementos rectangulares. Para os casos onde os elementos não são rectangulares Vanmarcke (1983) sugeriu que cada elemento seja substituído por um conjunto de elementos rectangulares adjacentes que não ultrapassem o elemento original de forma a depois se poder aplicar a mesma teoria (e portanto usar as mesmas fórmulas) dos casos em que os elementos são rectangulares. Estas aproximações introduzem erros no cálculo da matriz de covariâncias de H_i o que pode levar a que essa matriz seja definida não positiva e consequentemente poder impedir a aplicação de métodos FORM e SORM.
- A distribuição de probabilidade da variável aleatória H_i é difícil, ou mesmo impossível, de obter a não ser que o campo aleatório seja Gaussiano pois aí também H_i é Gaussiano.

Para campos Gaussianos este método dá resultados precisos mesmo quando a malha de elementos finitos é um pouco grosseira (Kiureghian e Ke, 1988).

2.10.2.1.3 Métodos de expansão em séries

Neste caso os campos aleatórios são representados por séries que envolvem variáveis aleatórias e funções espaciais determinísticas. A aproximação é obtida truncando a série respectiva (Sudret e Der Kiureghian, 2000).

1. Método da variável aleatória base

Este método, proposto por Lawrence (1987, 1989), é utilizado para representar um campo aleatório $H(X)$, do qual se conhecem os primeiro e segundo momentos, através de uma expansão em série da seguinte forma:

$$H(X) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} h_{ij} e_i \phi_j(X) \quad (2.88)$$

onde $\phi_j(X)$ representa um conjunto funções de forma linearmente independentes, os coeficientes h_{ij} são determinados através de um ajustamento pelo método dos mínimos quadrados aos momentos do campo aleatório e e_i são variáveis aleatórias base estatisticamente independentes com as seguintes propriedades:

$$E[e_i] = \begin{cases} 1 & i = 0 \\ 0 & i = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.89)$$

$$E[e_i e_j] = \delta_{ij} \quad (2.90)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. Os valores esperados de três ou mais variáveis aleatórias base são iguais a zero.

Se a série é truncada utilizando apenas N variáveis aleatórias base e M funções determinísticas linearmente independentes então a equação (2.88) passa a:

$$H(X) \approx \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^M h_{ij} e_i \phi_j(X) \quad (2.91)$$

O número M a utilizar depende da precisão desejada e da covariância do campo aleatório. Lawrence (1987) utilizou polinómios de Legendre para as funções de forma determinísticas $\phi_j(X)$.

2. Método de expansão de Kernel

Este método, proposto por Spanos e Ghanem (1989) e Ghanem e Spanos (1991, 1991a), utiliza a expansão ortogonal de Karhunen-Loeve (Loeve, 1977) para decompor um campo aleatório unidimensional. Daí também ser conhecido como a expansão de Karhunen-Loeve. Este método é aplicável quer a campos aleatórios homogêneos como não homogêneos (Schueller, 2001). O campo aleatório é expandido da seguinte forma (Bucher, 2003):

$$H(X) = \sum_{i=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} H_i \phi_i(X) \quad (2.92)$$

onde $\{H_i\}$ representa um conjunto infinito de variáveis aleatórias ortogonais (não correlacionadas) com média zero e variância unitária, λ_i é uma constante e $\phi_i(X)$ são funções determinísticas ortogonais.

Depois de alguma derivação e truncando a série de forma a ficar com N termos, o campo aleatório pode ser representado da seguinte forma:

$$H(X) = \bar{H}(X) + \sum_{i=1}^N H_i \sqrt{\lambda_i} \phi_i(X) \quad (2.93)$$

onde $\bar{H}(X)$ é o valor esperado do campo aleatório, H_i são variáveis aleatórias independentes de X , e λ_i e $\phi_i(X)$ são, respectivamente, os valores próprios e as funções próprias da covariância de $H(X)$ que podem ser obtidas como as soluções do problema de valores próprios (Matthies e Bucher, 1999):

$$\int_{\Omega} \text{Cov}(X, t) \phi_i(X) dt = \lambda_i \phi_i(X) \quad (2.94)$$

onde $Cov(X, t)$ é a covariância do campo aleatório. As variáveis aleatórias da equação (2.93) têm propriedades semelhantes às variáveis aleatórias base do método anterior, ou seja:

$$E[H_i] = 0 \quad (2.95)$$

$$E[H_i H_j] = \delta_{ij} \quad (2.96)$$

Uma dificuldade na aplicação deste método é a resolução do problema da equação (2.94). Ghanem e Spanos (1991a, 2003) apresentam uma solução numérica para resolver esse integral. Como os termos da decomposição não são correlacionados este método é a decomposição mais eficiente de um campo aleatório pois ele minimiza o erro devido ao truncar da série num determinado número de termos (Schevenels *et al.*, 2004).

Se a matriz de covariâncias é definida positiva, limitada e simétrica sobre o domínio Ω então os valores próprios λ_i são valores reais positivos (Ghanem e Spanos, 1991). Estes valores são as variâncias das componentes aleatórias $H_i \sqrt{\lambda_i} \phi_i(X)$. Assim, o erro resultante de se truncar a série da equação (2.92) em N termos pode ser medido através da seguinte expressão (Nieuwenhof e Coyette, 2002):

$$e = \frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i}{|\Omega|} - \sigma_H^2 \quad (2.97)$$

onde σ_H^2 é a variância do campo aleatório.

3. Método da expansão de caos homogênea

Este é mais um método que se pode utilizar para acelerar a convergência, proposto e apresentado por Ghanem e Spanos (1990, 1991, 1991a, 2003), utiliza a expansão ortogonal de Karhunen-Loeve (Loeve, 1977) para decompor um campo aleatório (ou processo estocástico) através de um conjunto de polinômios ortogonais Γ_p que não excedam a

ordem p . Daí este método também ser conhecido como a expansão de caos polinomial. Este é um método não linear que pode ser aplicado quer a campos aleatórios Gaussianos como não Gaussianos (Matthies *et al.*, 1997).

Este método permite aproximar um campo aleatório (ou processo estocástico) $H(X)$ através de polinómios ortogonais, que são funções de variáveis aleatórias Gaussianas X , como um conjunto de séries convergentes dadas por (Field, 2002; Choi *et al.*, 2004):

$$H(X) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \Gamma_j(X) \quad (2.98)$$

onde $\Gamma_n(X)$ é o caos polinomial generalizado de grau n que é função de variáveis aleatórias multi-dimensionais $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$. Cada $\Gamma_n(X)$ é um polinómio hipergeométrico multivariado. No caso em que $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com $X_i \cap N(0,1)$; $\forall_i$, usam-se polinómios de Hermite. Assim, a equação (2.98) pode ser dada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} H(X) = & a_0 \Gamma_0 + && \leftarrow \text{grau } 0 \\ & + \sum_{i_1=1}^{\infty} a_{i_1} \Gamma_1(X_{i_1}) + && \leftarrow \text{grau } 1 \\ & + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} a_{i_1 i_2} \Gamma_2(X_{i_1}, X_{i_2}) + && \leftarrow \text{grau } 2 \quad (2.99) \\ & + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} a_{i_1 i_2 i_3} \Gamma_3(X_{i_1}, X_{i_2}, X_{i_3}) + && \leftarrow \text{grau } 3 \\ & + \dots \end{aligned}$$

onde $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ é um conjunto de variáveis aleatórias Gaussianas, $a_{i_1 \dots i_p}$ são constantes, $\Gamma_p(X_{i_1}, \dots, X_{i_p})$ é um elemento geral de um conjunto de polinómios de Hermite multivariados, chamados normalmente caos homogéneo de ordem p .

Uma expressão geral para obter os polinómios probabilísticos de Hermite multivariados pode ser dada por:

$$\Gamma_n(X_{i_1}, \dots, X_{i_n}) = (-1)^n e^{\frac{1}{2}\bar{X}^T \bar{X}} \frac{\partial^n e^{-\frac{1}{2}\bar{X}^T \bar{X}}}{\partial X_{i_1} \dots \partial X_{i_n}} \quad (2.100)$$

onde $\bar{X} = (X_{i_1}, \dots, X_{i_n})$.

A equação (2.99) pode ser escrita de uma forma mais simples:

$$H(X) = \sum_{i=0}^p b_i \Psi_i(\bar{X}) \quad (2.101)$$

onde b_i e $\Psi_i(\bar{X})$ são expressões idênticas a, respectivamente, $a_{i_1 \dots i_p}$ e $\Gamma_p(X_{i_1}, \dots, X_{i_p})$.

O método de expansão de caos homogénea é uma expansão convergente de médias quadradas de funções multivariadas de variáveis Gaussianas. No entanto, também pode ser utilizada para campos aleatórios não Gaussianos, embora nesses casos a equação (2.99) possa convergir mais lentamente (Xiu e Karniadakis, 2002). Assim, os polinómios $\Psi_i(\bar{X})$ da equação (2.101) não se limitam apenas aos polinómios de Hermite. Por exemplo, para distribuições Gama os polinómios de Laguerre são a escolha mais apropriada. Na tabela 2.1 apresentam-se os tipos de polinómios mais apropriados para algumas das principais distribuições de variáveis aleatórias (Pettit *et al.*, 2002).

Tabela 2.1 – Polinómios ortogonais.

Distribuições	FDP (X)	Polinómios Ortogonais (I)	Amplitude
Contínuas	Gaussiana	Hermite	$(-\infty, +\infty)$
	Gama	Laguerre	$[0, +\infty)$
	Beta	Jacobi	$[a, b]$
	Uniforme	Legendre	$[a, b]$
Discretas	Poisson	Charlier	$\{0, 1, \dots\}$
	Binomial	Krawtchouk	$\{0, 1, \dots, N\}$
	Binomial Negativa	Meixner	$\{0, 1, \dots\}$
	Hipergeométrica	Hahn	$\{0, 1, \dots, N\}$

4. Método da expansão em série de Taylor

Aproximações em séries de Taylor a campos aleatórios $H(X)$ têm vindo a ser descritas por muitos autores, como por exemplo, Vanmarcke (1983), Shinozuka e Yamazaki (1988), Ghanem e Spanos (1991a, 2003). O campo aleatório é discretizado através de N variáveis aleatórias $h_i(X)$, $i = 1, \dots, N$; sendo depois desenvolvido em torno do valor médio dessas variáveis obtendo-se:

$$\begin{aligned}
 H(X) &= H(h_1(X), \dots, h_N(X)) = \\
 &= H(\bar{h}_1(X), \dots, \bar{h}_N(X)) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial H(\bar{h}_1(X), \dots, \bar{h}_N(X))}{\partial h_i(X)} [h_i(X) - \bar{h}_i(X)] + \\
 &\quad + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 H(\bar{h}_1(X), \dots, \bar{h}_N(X))}{\partial h_i(X) \partial h_j(X)} [h_i(X) - \bar{h}_i(X)] [h_j(X) - \bar{h}_j(X)] + \dots \quad (2.102) \\
 &= \bar{H} + \sum_{i=1}^N \bar{H}_i^I \varepsilon_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \bar{H}_{ij}^{II} \varepsilon_i \varepsilon_j + \dots
 \end{aligned}$$

2.10.2.2 Métodos de perturbação

Hoje em dia o método de simulação de Monte Carlo é o mais utilizado de entre os métodos de análise probabilística de sistemas estruturais. No entanto, à medida que o número de graus de liberdade de uma estrutura, assim como o número de parâmetros desconhecidos, vai aumentando, a análise estrutural vai ficando cada vez mais pesada em termos computacionais. Por essa razão é que foram surgindo cada vez mais alternativas, muitas delas baseadas em técnicas de perturbação, de forma que os métodos SFEM são normalmente identificados com o método clássico de elementos finitos conjugado com métodos de perturbação (Nakagiri e Hisada, 1982; Elishakoff *et al.*, 1995a; Bathe, 1996; Muscolino *et al.*, 2000).

Os métodos de perturbação introduzidos nos finais dos anos 70 têm vindo a ser utilizados numa grande diversidade de problemas. No entanto, há que ter um certo cuidado na sua aplicação pois em casos onde o sistema tem um comportamento não linear acentuado e/ou

quando os parâmetros têm distribuições muito assimétricas com grandes níveis de incerteza estes métodos podem ser menos precisos e pouco eficientes em termos computacionais (Shinozuka e Yamazaki, 1988; Igusa e Der Kiureghian, 1988; Madsen *et al.*, 2006). Dificuldades associadas a estes métodos e suas aplicações assim como sugestões e medidas para contornar essas limitações são discutidas por muitos autores como por exemplo (Kleiber e Hien, 1992; Liu *et al.*, 1992; Katafygiotis e Beck, 1995). Trabalhos de Contreras (1980), Hisada e Nakagiri (1981, 1985), Liu *et al.* (1986, 1986a, 1988), Phoon *et al.* (1990), Chang e Chang (1997), Brennan *et al.* (2001), Falsone e Impollonia (2002), Grasa *et al.* (2006) representam algumas das aplicações deste método à segurança estrutural e análise de fiabilidade quer para problemas lineares como não lineares. Chen *et al.* (1992) utilizou métodos de perturbação para avaliar a importância das variações nas propriedades geométricas e materiais através de exemplos em estruturas metálicas e de betão. Chang (1993) e Chang e Chang (1994) aplicaram a teoria dos métodos de perturbação para estudarem formas de obter respostas estatísticas rápidas em sistemas estruturais assim como a fiabilidade de vigas com variações no módulo de elasticidade. Problemas dinâmicos não lineares têm vindo a ser estudados utilizando métodos de perturbação (Liu *et al.*, 1986; Connor e Ellingwood, 1988; Chang e Yang, 1991; Koyluoglu *et al.*, 1995).

Um aspecto vantajoso deste método é que a matriz de rigidez é invertida uma única vez ao contrário dos métodos de simulação de Monte Carlo ou dos métodos de superfície de resposta onde são necessárias muitas inversões da matriz de rigidez. Para obter uma solução do problema utilizando este método há que determinar as matrizes das derivadas parciais da rigidez, deslocamentos e cargas.

Dividindo o espaço contínuo num número finito de elementos e assumindo padrões de deslocamento (funções de forma) $N_i(X)$ pode obter-se uma solução aproximada para o campo de deslocamentos global u_k ; $k = 1, \dots, n$ através da seguinte expressão:

$$u_k(X, t) = \sum_{i=1}^n N_i(X) u_i^{(k)}(t) = [N_1(X), \dots, N_n(X)] \begin{bmatrix} u_1^{(k)}(t) \\ \vdots \\ u_n^{(k)}(t) \end{bmatrix} = N^T(X) u(t) \quad (2.103)$$

onde n é o número de nós da discretização. A expressão $u_i^{(k)}(t)$ representa os deslocamentos nos nós assim como $N_i(X)$ representa os padrões de deslocamento, que no fundo são funções de forma polinomiais. Isso faz com que se adaptem melhor a geometrias mais complicadas e sejam mais fáceis de tratar em termos computacionais. Além disso, como as funções de forma são diferentes de zero apenas nos elementos correspondentes aos nós à qual pertencem, o sistema de equações, que se resolve em ordem aos coeficientes desconhecidos u_k , torna-se mais fácil de resolver pois contém apenas alguns elementos diferentes de zero por linha. Neste trabalho apenas se vão analisar os casos de problemas determinísticos.

De acordo com o método dos elementos finitos a equação de equilíbrio para problemas determinísticos é definida através da seguinte expressão:

$$K(\alpha_i) \cdot u(\alpha_i) = F(\alpha_i) \quad (2.104)$$

onde K é a matriz de rigidez tangente do sistema estrutural, F o vector das forças nodais que representa as acções externas e u o vector dos deslocamentos nodais, os quais são funções das variáveis aleatórias α_i . Para utilizar o método das perturbações de forma a quantificar a resposta estrutural média e a sua dispersão é necessário aplicar uma expansão em série de Taylor em cada termo da equação (2.104) em torno do valor médio de cada variável aleatória. Como forma de simplificar as expressões, daqui para a frente assume-se que o valor médio das variáveis aleatórias será igual a zero.

A aplicação da expansão em série de Taylor descrita no ponto 4 da secção anterior sobre a matriz de rigidez, considerando que o campo aleatório $H(X)$ tem de ser discretizado por N variáveis aleatórias com média igual a zero α_i , $i = 1, \dots, N$; pode ser dada por:

$$K = \bar{K} + \sum_{i=1}^N K_i^I \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K_{ij}^{II} \alpha_i \alpha_j + \dots \quad (2.105)$$

onde $\bar{K}$ é a matriz de rigidez avaliada no valor médio do vector das variáveis aleatórias $\alpha = 0$, K_i^I é o gradiente de K em relação às variáveis aleatórias em $\alpha = 0$ e K_{ij}^{II} a matriz Hessiana em $\alpha = 0$:

$$K_i^I = \left. \frac{\partial K}{\partial \alpha_i} \right|_{\alpha=0} ; \quad K_{ij}^{II} = \left. \frac{\partial^2 K}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right|_{\alpha=0} \quad (2.106)$$

onde $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_N]^T$. Da mesma forma, a expansão em série de Taylor do vector das forças externas F é dada por:

$$F = \bar{F} + \sum_{i=1}^N F_i^I \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N F_{ij}^{II} \alpha_i \alpha_j + \dots \quad (2.107)$$

onde:

$$F_i^I = \left. \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} \right|_{\alpha=0} ; \quad F_{ij}^{II} = \left. \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right|_{\alpha=0} \quad (2.108)$$

De notar que as derivadas parciais das equações (2.108) são zero quando F é determinística. A expansão em série de Taylor do vector dos deslocamentos em função das variáveis aleatórias α_i é dada por:

$$u = \bar{u} + \sum_{i=1}^N u_i^I \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N u_{ij}^{II} \alpha_i \alpha_j + \dots \quad (2.109)$$

onde:

$$u_i^I = \left. \frac{\partial u}{\partial \alpha_i} \right|_{\alpha=0} ; \quad u_{ij}^{II} = \left. \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right|_{\alpha=0} \quad (2.110)$$

Substituindo (2.105), (2.107) e (2.109) em (2.104) e agrupando os termos com a mesma ordem obtém-se:

$$\bar{K} \cdot \bar{u} = \bar{F} \quad (2.111)$$

$$\left. \frac{\partial K}{\partial \alpha_i} \right|_{\alpha=0} \bar{u} + \bar{K} \left. \frac{\partial u}{\partial \alpha_i} \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} \right|_{\alpha=0} \quad (2.112)$$

$$\left. \frac{\partial^2 K}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right|_{\alpha=0} \bar{u} + \left. \frac{\partial K}{\partial \alpha_i} \right|_{\alpha=0} \left. \frac{\partial u}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha=0} + \left. \frac{\partial K}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha=0} \left. \frac{\partial u}{\partial \alpha_i} \right|_{\alpha=0} + \bar{K} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right|_{\alpha=0} \quad (2.113)$$

Utilizando a mesma notação das expressões (2.106), (2.108) e (2.110) os vectores de resposta da equação (2.109) podem ser obtidos através de um conjunto de fórmulas recursivas (Sudret e Der Kiureghian, 2000):

$$\bar{u} = \bar{K}^{-1} \cdot \bar{F} \quad (2.114)$$

$$u_i^I = \bar{K}^{-1} (F_i^I - K_i^I \bar{u}) \quad (2.115)$$

$$u_{ij}^{II} = \bar{K}^{-1} (F_{ij}^{II} - K_i^I u_j^I - K_j^I u_i^I - K_{ij}^{II} \bar{u}) \quad (2.116)$$

De forma similar é possível determinar os termos de ordem superior da expansão em série de Taylor do campo de deslocamentos. O vector α nem sempre tem média igual a zero. Nesses casos as variáveis aleatórias α_i e α_j das equações (2.105), (2.107) e (2.109) têm de ser substituídas, respectivamente, por $\Delta \alpha_i$ e $\Delta \alpha_j$ onde $\Delta \alpha_i = \alpha_i - \bar{\alpha}_i$ e $\Delta \alpha_j = \alpha_j - \bar{\alpha}_j$.

Uma aproximação de primeira ordem para os deslocamentos pode ser obtida truncando a equação (2.109) depois do segundo termo. Desta forma, o valor médio e a matriz de covariâncias podem calcular-se explicitamente através das equações:

$$E_1[u] = \bar{u} \quad (2.117)$$

$$Cov_1[u, u] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N u_i^I (u_j^I)^T E[\alpha_i \alpha_j] \quad (2.118)$$

Como se está a considerar $\alpha = 0$ o valor esperado $E[\alpha_i \alpha_j]$ é obtido através da covariância do campo aleatório. Se as variáveis aleatórias forem independentes a matriz de covariância é diagonal sendo a variância dada por:

$$Var_1[u] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N diag \left[u_i^I (u_j^I)^T E[\alpha_i \alpha_j] \right] \quad (2.119)$$

Da mesma forma pode obter-se uma aproximação de segunda ordem para o vector u truncando a equação (2.109) depois do terceiro termo. Neste caso, e uma vez que se estão a assumir variáveis aleatórias Gaussianas com média zero, o valor médio e a matriz de covariâncias podem calcular-se através das equações:

$$E_2[u] = E_1[u] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N u_{ij}^{II} E[\alpha_i \alpha_j] \quad (2.120)$$

$$Cov_2[u, u] = Cov_1[u, u] + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N u_{ij}^{II} (u_{kl}^{II})^T \times \\ \times (E[\alpha_i \alpha_l] E[\alpha_j \alpha_k] + E[\alpha_i \alpha_k] E[\alpha_j \alpha_l]) \quad (2.121)$$

pois como as variáveis são Gaussianas:

$$E[\alpha_i \alpha_j \alpha_k] = 0 \quad (2.122)$$

$$E[\alpha_i \alpha_j \alpha_k \alpha_l] = E[\alpha_i \alpha_j] E[\alpha_k \alpha_l] + E[\alpha_i \alpha_l] E[\alpha_j \alpha_k] + E[\alpha_i \alpha_k] E[\alpha_j \alpha_l] \quad (2.123)$$

Se as variáveis aleatórias forem independentes a variância é dada por:

$$Var_2[u, u] = Var_1[u, u] + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N diag \left[u_{ij}^{II} (u_{kl}^{II})^T \right] \times \\ \times (E[\alpha_i \alpha_l] E[\alpha_j \alpha_k] + E[\alpha_i \alpha_k] E[\alpha_j \alpha_l]) \quad (2.124)$$

Para variáveis aleatórias não normais há que determinar expressões alternativas à expansão em série de Taylor de u de forma a poder obter aproximações de segunda ordem. Para isso, calcula-se a distribuição de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias, mas como esse procedimento é complexo e o aumento da precisão é pequeno em comparação com o

aumento do esforço computacional normalmente assume-se que as variáveis aleatórias são Gaussianas (Matthies *et al.*, 1997).

2.10.3 Redes neuronais artificiais

Nas duas últimas décadas tem vindo a desenvolver-se cada vez mais a investigação em redes neuronais artificiais. Grande parte do esforço foi direccionado para o desenvolvimento de princípios fundamentais, novos algoritmos e aplicações. Estas técnicas oferecem um conjunto de ferramentas que permitem resolver muitos tipos de problemas, sendo utilizadas por exemplo como funções de aproximação na modelação da memória associativa, no reconhecimento de padrões, na representação de funções contínuas, em optimização de sistemas; nas mais diversas áreas como por exemplo, na física, na engenharia civil, robótica, medicina, biometria, economia, gestão, seguros, indústria aeroespacial, indústria de telecomunicações, indústria electrónica e indústria de prospecção petrolífera (Hornick *et al.*, 1989, 1990; Cardaliaguet e Euvrand, 1992; Rao e Rao, 1995; Bishop, 1995; Bose and Liang, 1996; Anjum *et al.*, 1997; Ayyub e Gupta, 1997; Haykin, 1999; Schueremans e Van Gemert, 2005; Deng, 2006). As redes neuronais artificiais são técnicas computacionais com propriedades particulares como a possibilidade de aprendizagem, de generalizar, classificar e organizar dados (Garrett, 1994; Gomes e Awruch, 2004).

Recentemente tem sido introduzida a noção de redes neuronais artificiais na teoria da análise de fiabilidade. Basicamente as redes neuronais funcionam como ferramentas de interpolação podendo ser utilizadas, por exemplo, em substituição das funções de resposta quadráticas (dos métodos de superfície de resposta) como aproximação à função de estado limite. De facto, um dos aspectos importantes relacionado com a aplicação de redes neuronais está associado ao ajustamento de curvas polinomiais (Bishop, 1995). O problema está em ajustar um polinómio a um conjunto de N pontos através da minimização de uma função erro. Considerando um polinómio de ordem M :

$$y(x) = w_0 + w_1x + \dots + w_Mx_M = \sum_{j=0}^M w_jx_j, \quad (2.125)$$

este pode ser considerado como um mapeamento não linear onde x são os valores de *input* e y o valor de *output*. A forma da função polinomial depende dos valores dos parâmetros que são dados pelo vector $w = (w_0, \dots, w_M)$; que pode ser considerado como os pesos de uma rede neuronal. Dentro da teoria das redes neuronais, como se verá mais à frente, os valores desses parâmetros podem ser obtidos através de um algoritmo de aprendizagem com supervisão. Neste caso utiliza-se um conjunto de valores de treino (treino da rede) onde já se conhecem as respostas correctas (*output* - valores que se desejam obter, também referidos como valores alvo) para as diferentes entradas de dados (*input*). Com estes valores conhecidos escolhem-se os pesos e os desvios, de forma a minimizar uma função erro dada por:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (y(x_n, w) - d_n)^2 \quad (2.126)$$

onde N é o número de pontos, $y(x_n, w)$ o valor obtido através da aplicação da rede (*output*) para o *input* x_n e d_n o valor conhecido que se deseja obter. Como E é uma função de w então o polinómio pode ser ajustado aos N pontos escolhendo um valor para w , que se vai designar por w^* , que minimiza E . Para generalizar a novos valores utiliza-se um novo conjunto de elementos para testar a rede (validação da rede). De forma a avaliar a capacidade do polinómio em generalizar novos dados deve considerar-se a raiz quadrada do erro quadrático médio que é dado por (Bishop, 1995):

$$E_{REQM} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (y(x_n, w^*) - d_n)^2} \quad (2.127)$$

Utilizando um conjunto de dados do tipo input/output as redes neuronais artificiais podem produzir valores de resposta fiáveis para um dado input de forma relativamente fácil e rápida.

As redes neuronais artificiais são modelos simplificados do cérebro humano. Uma rede deste tipo é como um processador paralelo composto por unidades celulares mais simples independentes designadas por neurónios que podem comunicar entre si através de sinapses. A comunicação é realizada por sinais eléctricos no interior de cada célula e químicos nas regiões terminais por impulsos. Estes são desencadeados em cada neurónio sempre que um

certo potencial de activação é ultrapassado, tendo os sinais nervosos um peso diferenciado sempre que atravessam as diferentes sinapses de um neurónio. Esta é a ideia base de qualquer rede neuronal. Mais formalmente elas podem ser modeladas por grafos com determinadas características e propriedades. Assim, os nós designam-se por neurónios, unidades computacionais ou nodos e os caminhos por arestas, ligações, conexões ou sinapses (Figura 2.4). O conhecimento é obtido a partir de um conjunto de dados de input através de um processo de aprendizagem (utilizando algoritmos de treino), durante o qual os pesos das conexões são ajustados.

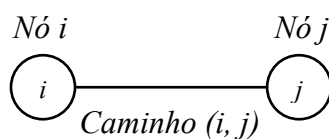


Figura 2.4 – Modelo genérico da relação entre dois nós.

Um neurónio artificial é considerado uma unidade de processamento de informação fundamental para o funcionamento de uma rede neuronal. Estas unidades estão ligadas entre si através de pesos que determinam o efeito de saída que uma unidade tem sobre a entrada da unidade seguinte.

As aplicações das redes neurais artificiais estão intimamente relacionadas com a sua arquitectura, processo de aprendizagem e comportamento dinâmico. Em seguida vão abordar-se estes aspectos. Assim, para o desenvolvimento de um modelo é necessário definir o problema em estudo, definir os dados para o treino e teste, escolher a arquitectura de rede, realizar o treino e fazer o teste (validação da rede).

Modelos de um neurónio

O primeiro modelo lógico matemático de um neurónio artificial foi proposto por Warren McCulloch e Walter Pitts em 1943 tendo sido designado por TLU (do inglês Threshold Logic Unit). Consiste numa unidade computacional que opera com sinais binários simples (0/1) que combina várias entradas e gera um sinal de saída. Neste caso a rede é constituída por neurónios binários e ligações binárias. Na Figura 2.5 apresenta-se o modelo de McCulloch-Pitts de um neurónio com n entradas (*input*) x_i (Pandya e Macy, 1995).

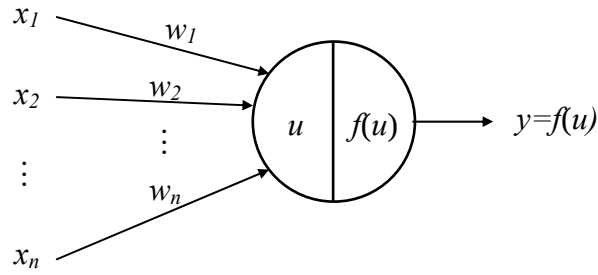


Figura 2.5 – Modelo de McCulloch-Pitts de um neurónio.

Para cada entrada x_i há um peso correspondente w_i . Um peso é positivo se a ligação é excitada e negativo se é inibida. Além disso, considerando θ o valor do desvio do neurónio, este valor necessita de ser excedido pela soma pesada das entradas u para que o neurónio seja igual a 1. A regra é definida da seguinte forma:

$$y = f(u) = f\left(\sum_{i=1}^n w_i x_i\right) \quad (2.128)$$

onde $f(\cdot)$ é a função de activação definida por:

$$f(u) = \begin{cases} 1 & \text{se } u \geq \theta \\ 0 & \text{se } u < \theta \end{cases} \quad (2.129)$$

O modelo geral de um neurónio, que não é mais do que uma generalização do modelo de McCulloch e Pitts, é apresentado na Figura 2.6. O neurónio k pode ser descrito através das seguintes equações:

$$y_k = f(v_k) = f(u_k + \theta_k) \quad (2.130)$$

$$u_k = \sum_{j=1}^m w_{kj} x_j \quad (2.131)$$

onde $x_1, \dots, x_m$ são os valores de entrada, $w_{k1}, \dots, w_{km}$ são os pesos, u_k é uma soma pesada dos valores de entrada, θ_k é o desvio que é um parâmetro externo do neurónio artificial,

$f(\cdot)$ é a função de activação que pode assumir várias formas (normalmente não lineares) e y_k o valor de saída do neurónio k . De uma forma equivalente, alguns autores apresentam as equações (2.130) e (2.131) através da expressão:

$$y_k = f(v_k) = f\left(\sum_{j=0}^m w_{kj} x_j\right) . \quad (2.132)$$

Neste caso o desvio θ_k é substituído por uma nova ligação cuja entrada tem um valor fixo, $x_0 = 1$, e um peso $w_{k0} = \theta_k$. Este modelo embora tenha uma apresentação diferente é equivalente ao anterior.

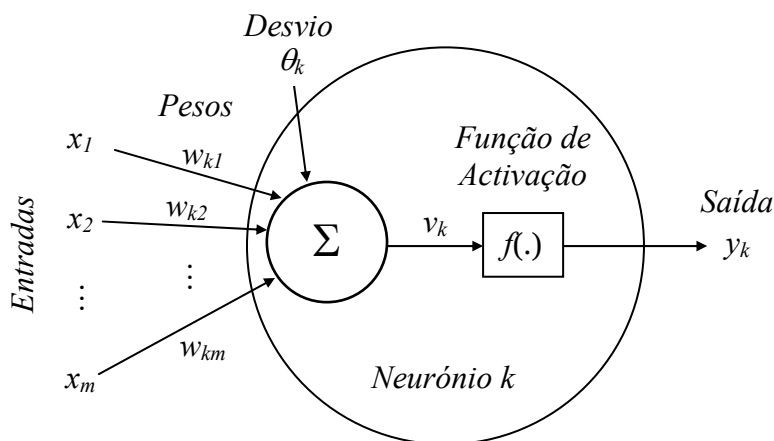


Figura 2.6 – Modelo não linear de um neurónio k .

No modelo da Figura 2.6 um neurónio recebe os sinais resultantes do processamento das diversas unidades com as quais está relacionado. Estes sinais são multiplicados pelos pesos correspondentes e no fim todos esses produtos são somados. A esse valor ainda se adiciona a entrada independente do neurónio (desvio), obtendo-se o valor total de entrada na unidade em questão. Utilizando a função de activação do neurónio, este processa então o valor total de entrada produzindo um valor de saída que será o sinal a ser enviado para as unidades da camada seguinte.

Tipos de função de activação

Uma função de activação, $f(x)$, define a saída de um neurónio e pode ser linear ou não linear. Quando numa rede por camadas algumas delas possuem neurónios cuja função de activação é linear então essas camadas designam-se lineares. Uma rede onde todas as camadas são lineares designa-se rede linear. As redes com uma ou mais camadas não lineares designam-se redes não lineares.

Existem várias funções de activação que são aplicadas conforme o tipo de rede neuronal que se está a utilizar, o intervalo de resultados que se pretende e do problema em questão. Vários são os tipos de funções que se podem aplicar, como por exemplo (Haykin, 1999):

1. Linear: o valor de saída é igual ao de entrada, $f(x) = x$ (2.133)

2. Degrau:
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (2.134)$$

Esta função é a utilizada no modelo de McCulloch e Pitts (equação (2.129)).

3. Rampa: são também funções lineares mas com contradomínio igual a um intervalo fechado. Um exemplo é a função:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0.5 \\ x & \text{se } -0.5 < x < 0.5 \\ 0 & \text{se } x \leq -0.5 \end{cases} \quad (2.135)$$

4. Trigonométricas: por exemplo, $f(x) = \sin x$ (2.136)

5. Sigmoidais: são as funções de activação mais utilizadas na construção de redes neuronais artificiais. São funções crescentes de classe C^∞ e contradomínio igual a $[0,1]$

ou $[-1,1]$ tais que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ ou -1 . Um exemplo é a função logística dada por (Flood e Kartam, 1994):

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-\beta x}} \quad (2.137)$$

onde β é o declive e o parâmetro da função. Outro exemplo muito usado é a função tangente hiperbólica:

$$f(x) = \tanh(x) \quad (2.138)$$

6. Competitivas: Normalmente são funções de contradomínio $\{0,1\}$ que podem utilizar-se nas unidades de saída de uma rede neuronal. Estas funções activam apenas a unidade de saída mais excitada. Considerando y como o vector dos potenciais de activação das unidades de saída de uma rede neuronal artificial então:

$$[f(y)]_i = \begin{cases} 1 & \text{se } y_i \text{ é máximo} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.139)$$

Arquitecturas de rede

A arquitectura, ou topologia, está relacionada com a forma como os neurónios se interligam numa estrutura de rede. Esta está intimamente relacionada com o algoritmo de aprendizagem utilizado para treinar a rede. Existem muitos tipos de arquitecturas, como por exemplo as redes perceptrão de múltiplas camadas (do inglês *multilayer perceptrons* - MLP) ou as redes de funções de base radial (do inglês *radial basis function* – RBF), cada uma com as suas características podendo no entanto dividir-se em duas categorias principais (Haykin, 1999):

1. Unidireccionais

Nestas redes, também chamadas de alimentação directa (do inglês *feedforward*) ou progressivas, as ligações propagam-se sempre numa só direcção. São aquelas que não têm

ciclos. Normalmente estão organizadas por camadas. A primeira designa-se por camada de entrada (*input*), a última por camada de saída (*output*) e as camadas intermédias são também conhecidas por camadas escondidas. Na contagem do número de camadas de uma rede alguns autores não entram em consideração com a primeira camada pois consideram que nessa fase ainda não foi realizado qualquer cálculo (Haykin, 1999). Neste trabalho vai incluir-se essa primeira camada na contagem. As redes de camadas com alimentação directa onde a informação de saída é constituída por padrões binários são designadas por alguns autores por redes de perceptrões. Um perceptrão é assim considerado uma unidade computacional que calcula o sinal de uma combinação linear das variáveis de entrada.

As primeiras redes de alimentação directa a aparecerem na literatura foram a Perceptrão (Rosenblatt, 1962) e Adaline (Widrow, 1987). Este tipo de redes é actualmente muito utilizado principalmente por existirem bastantes métodos de aprendizagem de rápida e fácil aplicação (Figura 2.7).

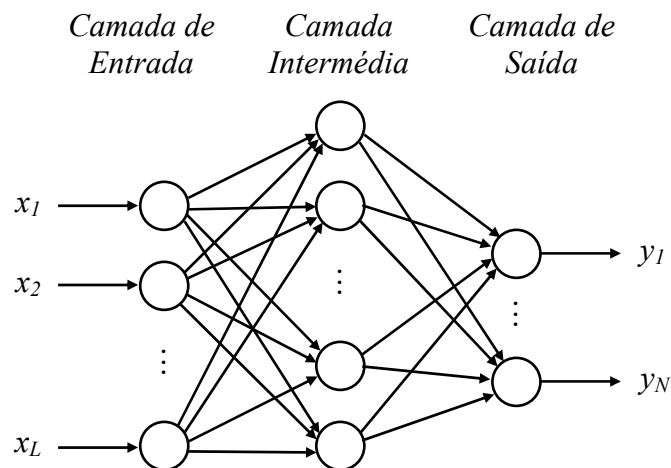


Figura 2.7 – Rede de alimentação directa com 3 camadas.

2. Recorrentes

Estas são redes com ciclos (também referidas como redes com realimentação, retroacção ou do inglês *feedback*) e por isso as saídas (*outputs*) não são exclusivamente função das ligações entre os neurónios pois aplica-se um cálculo recursivo que obedecerá a uma certa condição de paragem (Figura 2.8). Nestas redes a saída de uma unidade pode ligar-se a

uma outra anterior que foi sua entrada ou mesmo a uma unidade da mesma camada. Um exemplo deste tipo de rede bastante utilizado é o modelo de Hopfield (Hopfield, 1982).

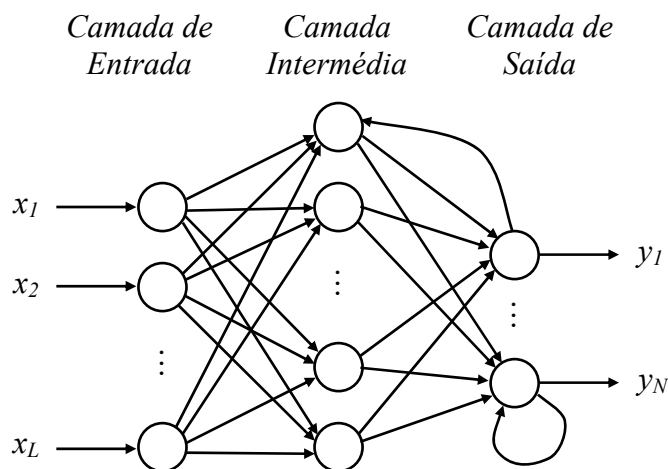


Figura 2.8 – Rede com ciclos.

Uma das tarefas mais difíceis é determinar o número de neurónios em cada camada intermédia assim como o número de camadas intermédias a utilizar num determinado problema (Flood e Kartam, 1994). Não existem regras para este problema. No entanto, embora não indiquem o número de neurónios que deve ter, alguns estudos demonstram que uma camada intermédia é suficiente para representar qualquer função ou para resolver a maioria dos problemas de generalização.

Funções erro

Existem muitas escolhas possíveis de funções erro que podem ser utilizadas, dependendo a sua aplicação do problema que se quer estudar (Bishop, 1995). Para problemas de regressão e classificação pode utilizar-se a função soma de quadrados dos erros. No geral, para problemas de regressão podem utilizar-se, por exemplo, a função soma de quadrados dos erros, a função erro de Minkowski-R ou a função variância dependente das entradas. Para problemas de classificação podem utilizar-se, por exemplo, a função soma de quadrados dos erros, a função entropia ou a função entropia cruzada para múltiplas classes. Em seguida vão apresentar-se duas das funções erro mais utilizadas.

1. Soma de quadrados dos erros

Neste caso consideram-se existir c variáveis alvo d_k , $k = 1, \dots, c$. A função erro é dada através de uma soma sobre todas as amostras do conjunto de treino (também chamadas padrões) e sobre todos os valores de saída (Bishop, 1994):

$$E(w) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^c \{y_k(x_n, w) - d_{n,k}\}^2 \quad (2.140)$$

onde $y_k(x_n, w)$ é o valor de saída da unidade k e função do vector de entrada x_n e do vector de pesos w , N é o número de amostras do conjunto de treino, c o número de saídas e $d_{n,k}$ representa o valor alvo (saídas conhecidas ou desejadas) da unidade de saída k quando o vector de entrada é x_n .

Em muitos casos, para avaliar a performance de uma rede, é conveniente utilizar uma função erro diferente da utilizada para o seu treino. Por exemplo, num problema de interpolação a rede pode ser treinada utilizando a função erro da equação (2.140) enquanto que para a testar será melhor utilizar a função erro raiz média quadrática dada por:

$$E = \frac{\sum_{n=1}^{N'} \sum_{k=1}^c \{y_k(x_n, w^*) - d_{n,k}\}^2}{\sum_{n=1}^{N'} \sum_{k=1}^c \{d_{n,k} - \bar{d}\}^2} \quad (2.141)$$

onde w^* é o vector dos pesos obtidos da rede treinada, N' é o número de amostras do conjunto de teste e $\bar{d}$ é o vector alvo médio do conjunto de teste dado por:

$$\bar{d} = \frac{1}{N'} \sum_{n=1}^{N'} \sum_{k=1}^c d_{n,k} \quad (2.142)$$

2. Erro de Minkowski

Para minimizar a função soma de quadrados dos erros, as suas derivadas são obtidas através do método de máxima verosimilhança sob o pressuposto de que os valores alvo

têm uma distribuição Gaussiana. Considerando uma generalização da distribuição Gaussiana obtém-se uma função erro mais geral que a anterior da forma (Bishop, 1995):

$$E(w) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^c |y_k(x_n, w) - d_{n,k}|^R \quad (2.143)$$

onde R é uma constante que se designa erro de Minkowski-R. Quando $R = 2$ reduz-se ao caso anterior.

Aprendizagem em redes neurais artificiais

A aprendizagem é um processo onde os parâmetros de uma rede são ajustados através de uma forma continuada de estímulos do ambiente onde a rede está a funcionar, sendo o tipo de aprendizagem definido pela forma como ocorrem os ajustes. É nesta fase que se aplicam os algoritmos de treino, também chamados algoritmos de optimização de parâmetros. O algoritmo utilizado pode classificar a rede em que se aplica. As redes neurais artificiais são assim capazes de aprender através do treino (utilizando exemplos onde são conhecidos os valores de entrada – *inputs*, e de saída – *outputs*) e encontrar soluções sem a necessidade de definir as relações entre as variáveis. Podem também descobrir interacções complexas e não lineares entre variáveis de um sistema (Masters, 1993; Goh e Kulhawy, 2003).

Para um determinado conjunto de dados o algoritmo de aprendizagem deve permitir o cálculo dos parâmetros da rede de forma que num número finito de iterações haja convergência para uma solução. O critério de convergência varia de acordo com o algoritmo utilizado assim como com o modelo de aprendizagem, que pode envolver por exemplo a variação do erro de saída ou a variação das magnitudes dos pesos. A aplicação do processo de aprendizagem numa rede neuronal envolve a alteração do seu padrão de ligações, quer através do desenvolvimento de novas ligações, quer da perda de ligações existentes, quer da modificação dos pesos de ligações existentes (Kovacs, 1996).

Existem dois tipos fundamentais de aprendizagem que se descrevem a seguir (Flood e Kartam, 1994a). Outras abordagens normalmente derivam destas duas.

Aprendizagem com supervisão

O processo de aprendizagem (no fundo a escolha dos pesos associados a cada ligação) de uma rede neuronal artificial pode ser realizado sob supervisão. Neste tipo de aprendizagem são conhecidas *a priori* as respostas correctas correspondentes a um certo conjunto de dados de entrada. Assim, conhecendo as respostas correctas da rede a diferentes entradas de dados pretende-se escolher os pesos e os desvios das diferentes ligações e neurónios que melhor contribuam para que a rede modele adequadamente o problema em estudo. Em seguida apresentam-se alguns dos principais algoritmos de aprendizagem com supervisão (Tivive e Bouzerdoun, 2005):

1. Algoritmo de Widrow-Hoff: também conhecido pelo algoritmo do mínimo quadrado médio ou regra delta e aplica-se em redes neuronais lineares (Widrow, 1987a; Widrow e Lehr, 1990)

2. Retropropagação do erro: também conhecido como regra delta generalizada, constitui uma generalização do método anterior a redes lineares ou não lineares (Kovacs, 1996). Neste grupo incluem-se as redes não lineares com camadas intermédias de alimentação directa, conhecidas por redes de retropropagação de alimentação directa (do inglês *feedforward backpropagation networks*). Este algoritmo calcula o gradiente da função erro através da regra da cadeia. Depois de calcular o erro de uma forma directa (das unidades de entrada para as de saída), este é propagado de forma inversa a partir das unidades de saída, camada por camada (Cun, 1985; Rumelhart *et al.*, 1986a, 1986b, 1995; Werbos, 1994)

3. Método do gradiente decrescente: para melhorar a convergência deste método podem utilizar-se a técnica do momento ou da taxa adaptativa de aprendizagem (Bose e Liang, 1996)

4. Método de Levenberg-Marquardt: aplicável a redes não lineares (Bishop, 1995)

5. Métodos heurísticos: por exemplo os algoritmos evolutivos

Aprendizagem sem supervisão

Neste tipo de aprendizagem não há uma resposta desejada que seja fornecida à rede. Ela aprende por si sem obter qualquer valor de erro. Neste caso a rede utiliza padrões, regularidades e correlações para agrupar os dados em classes. Aquilo que a rede vai aprender sobre os dados pode variar em função do tipo de arquitectura utilizada e do algoritmo de aprendizagem.

Normalmente, este tipo de aprendizagem é aplicada em sistemas de memória associativa e de reconhecimento de padrões (Bishop, 1995; Pandya e Macy, 1995). Em seguida apresentam-se alguns dos principais algoritmos de aprendizagem sem supervisão:

1. Algoritmos de estimulação pela entrada (do inglês *reinforcement algorithms*): também são conhecidos por algoritmos de aprendizagem associativa. Os exemplos mais usados são o método de Hebb (Hebb, 1949) e o método Instar e Outstar (Grossenberg, 1982).

2. Algoritmos de aprendizagem competitiva: Um exemplo é o método de Kohonen (Kohonen, 1987; Tivive e Bouzerdoun, 2005).

Em seguida vão apresentar-se dois dos algoritmos mais utilizados em redes neuronais artificiais.

Método do gradiente decrescente

O algoritmo de retropropagação, o algoritmo de Widrow-Hoff assim como a regra de Hopfield são métodos do tipo do gradiente decrescente pois procuram os pontos onde o gradiente é zero (Muller e Reinhardt, 1991). O objectivo é em cada iteração escolher um ponto ao longo da direcção onde a função decresce mais rápido, ou seja, onde o gradiente é negativo. O método é definido pela iteração (Tivive e Bouzerdoun, 2005):

$$x_{k+1} = x_k - \eta \nabla f(x_k) \Leftrightarrow \Delta x = -\eta \frac{\partial f}{\partial x_k} \quad (2.144)$$

onde $\eta > 0$ é o tamanho do passo (uma constante de pequeno valor que especifica a alteração em x). No caso ideal o tamanho do passo deve ser escolhido de forma que $f(x_{k+1})$ seja um mínimo de $f(x)$ ao longo da direcção onde o gradiente é negativo. O ponto x_{k+1} é obtido procurando ao longo dessa linha. O critério de paragem é definido pelas expressões:

$$|f(x_{k+1}) - f(x_k)| < \varepsilon \quad e \quad |x_{k+1} - x_k| < \delta . \quad (2.145)$$

A combinação destas duas expressões é necessária, pois utilizando apenas a primeira expressão pode surgir o problema exemplificado na Figura 2.9. Utilizando apenas a segunda pode surgir o problema exemplificado na Figura 2.10.

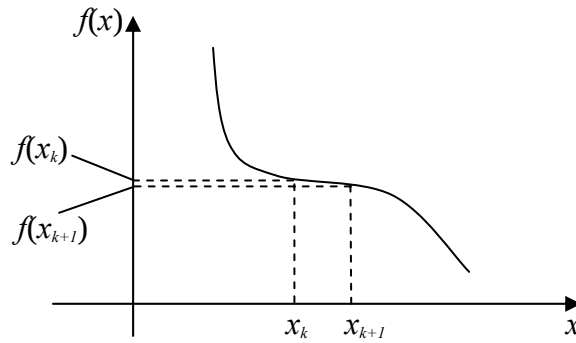


Figura 2.9 – O algoritmo pára em x_{k+1} , no entanto este ponto não é minimizante.

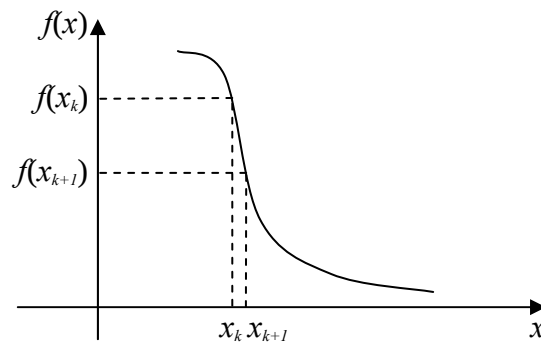


Figura 2.10 – O algoritmo pára em x_{k+1} , no entanto este ponto não é minimizante.

Uma dificuldade que surge na aplicação deste tipo de método é que ele pode parar em qualquer mínimo local e poder gerar confusão com o mínimo absoluto. No entanto quando $f(x)$ é quadrática existe apenas um extremo. Assim, quando o método converge sabe-se que se está na presença de um mínimo ou máximo absoluto. Quando $f(x)$ não é quadrática, esta pode ser aproximada localmente por uma função quadrática utilizando a matriz Hessiana (Bose e Liang, 1996).

Regra delta generalizada

Também conhecida como algoritmo de retropropagação, trata o treino de uma rede neuronal como um problema de optimização global sem restrições. A ideia deste algoritmo é propagar o erro encontrado na última camada da rede (erro que é a diferença entre a resposta da rede e a resposta desejada ou conhecida) para as camadas anteriores da rede, e desta forma permitir o ajuste dos pesos, até chegar à camada de entrada da rede. Este processo iterativo é realizado até que o erro atinja um valor mínimo desejado. Desta forma, esta regra de aprendizagem por retropropagação do erro consiste na generalização do método do gradiente decrescente a redes neuronais com três ou mais camadas implementando um sistema de cálculo sucessivo das derivadas parciais numa direcção contrária à da normal propagação da informação através da rede.

Para simplificar a notação e evitar ambiguidades vai adaptar-se a notação utilizada na equação (2.140) com um mínimo de alterações. Assim, seja um conjunto de treino dado por $\{x_n, d_n\}_{n=1}^N$, onde x_n é o vector das entradas na rede e d_n o vector das saídas desejadas para as entradas x_n . O peso da ligação entre a unidade i , de uma camada, e a unidade j na seguinte é dado por w_{ij} . Além disso, o valor t em $w_{ij}^{(t)}$ é usado para referir que a camada que contém a unidade j está t camadas atrás da camada de saída. Para a camada de saída $t = 0$, podendo o valor ser omitido na notação. Sendo c o número de unidades de saída, a função erro quadrático é dada através da soma sobre todas as unidades de saída da n -ésima amostra do conjunto de treino (Gouvêa e Terra, 1999):

$$E_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^c [d_{n,k} - y_{n,k}]^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^c e_{n,k}^2 \quad (2.146)$$

onde $y_{n,k}$ é o valor de saída da unidade k para o vector de entrada x_n , c é o número de unidades de saída e $d_{n,k}$ representa o valor desejado de saída da k -ésima unidade de saída quando o vector de entrada é x_n . O erro total relativo às N amostras do conjunto de treino é dado por:

$$E = \sum_{n=1}^N E_n \quad . \quad (2.147)$$

O objectivo do processo de aprendizagem é ajustar os parâmetros da rede de forma a minimizar a equação (2.147), que é função dos pesos das ligações e desvios.

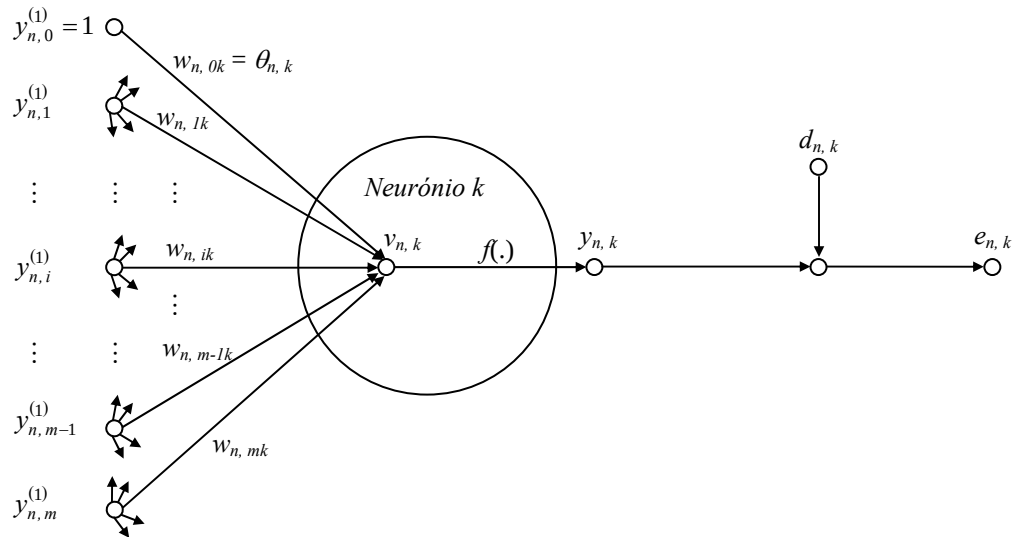


Figura 2.11 – Modelo do k -ésimo neurónio da camada de saída de uma rede.

Na Figura 2.11 representa-se o k -ésimo neurónio da camada de saída, que é alimentado por um conjunto de valores (sinais) de m funções produzidas pela camada anterior. O sinal de entrada associado a este neurónio, antes de se aplicar a sua função de activação, é dado pela equação:

$$v_{n,k} = \sum_{i=1}^m y_{n,i}^{(1)} w_{n,ik} + \theta_{n,k} = \sum_{i=0}^m y_{n,i}^{(1)} w_{n,ik} \quad (2.148)$$

onde m é o número total de entradas (sem contar com o desvio) aplicadas ao neurónio e $y_{n,i}^{(1)}$ é a saída da i -ésima unidade da primeira camada antes da camada de saída. Assim, o sinal da função $y_{n,k}$ correspondente à saída do k -ésimo neurónio é dado por:

$$y_{n,k} = f_k(v_{n,k}) \quad (2.149)$$

De uma forma semelhante à regra delta, o algoritmo da retropropagação aplica uma correcção, $\Delta w_{n,ik}$, aos pesos $w_{n,ik}$ que é dada por:

$$\Delta w_{n,ik} = -\eta \frac{\partial E_n}{\partial w_{n,ik}} \quad (2.150)$$

onde η é a taxa de aprendizagem (normalmente um valor entre 0 e 1) do algoritmo. Utilizando a regra da cadeia obtém-se:

$$\frac{\partial E_n}{\partial w_{n,ik}} = \frac{\partial E_n}{\partial v_{n,k}} \frac{\partial v_{n,k}}{\partial w_{n,ik}} = \frac{\partial E_n}{\partial y_{n,k}} \frac{\partial y_{n,k}}{\partial v_{n,k}} \frac{\partial v_{n,k}}{\partial w_{n,ik}} \quad (2.151)$$

onde $\partial E_n / \partial v_{n,k}$ e $\partial E_n / \partial y_{n,k}$ representam a forma como o erro, E_n , é afectado, respectivamente, pelos valores de entrada e saída, da k -ésima unidade da camada de saída. Para obter o valor de (2.151) há que determinar:

$$\frac{\partial E_n}{\partial y_{n,k}} = -(d_{n,k} - y_{n,k}) = -e_{n,k} \quad (2.152)$$

$$\frac{\partial y_{n,k}}{\partial v_{n,k}} = f'_k(v_{n,k}) \quad (2.153)$$

$$\frac{\partial v_{n,k}}{\partial w_{n,ik}} = y_{n,i}^{(1)} \quad (2.154)$$

Assim:

$$\Delta w_{n,ik} = \eta \delta_{n,k} y_{n,i}^{(1)} \quad (2.155)$$

onde o gradiente local, $\delta_{n,k}$, é dado por:

$$\delta_{n,k} = e_{n,k} f'_k(v_{n,k}) \quad (2.156)$$

A partir das equações (2.155) e (2.156) verifica-se que o factor principal relacionado com o cálculo dos ajustes dos pesos, $\Delta w_{n,ik}$, é o sinal do erro $e_{n,k}$ à saída do neurónio k . Surgem assim dois casos que dependem da localização do neurónio k dentro da rede:

Caso 1: O neurónio k está na camada de saída

Neste caso utiliza-se a equação $e_{n,k} = d_{n,k} - y_{n,k}$ para determinar o sinal do erro associado a este neurónio. Depois disso utiliza-se a equação (2.156) para calcular o gradiente local $\delta_{n,k}$.

Caso 2: O neurónio k está numa camada intermédia

Neste caso o sinal do erro tem de ser determinado recursivamente em função dos sinais dos erros de todos os neurónios ao qual este neurónio k está directamente ligado. Vai-se então determinar como é que o erro é afectado pelos pesos das ligações entre unidades localizadas em camadas que estão duas ou mais camadas atrás da camada de saída. Considerando $w_{n,jk}^{(t)}$ o peso da ligação feita à unidade k da camada que está t níveis (camadas) antes da camada de saída a partir da unidade j da camada que está $t+1$ níveis antes da camada de saída, então o sinal de entrada associado ao neurónio k da camada que está t níveis antes da camada de saída, e antes de se aplicar a sua função de activação, é representado por $v_{n,k}^{(t)}$ e a saída dessa unidade k é dada por:

$$y_{n,k}^{(t)} = f_k^{(t)}(v_{n,k}^{(t)}) = f_k^{(t)}\left(\sum_{j=1}^r y_{n,j}^{(t+1)} w_{n,jk}^{(t)} + \theta_{n,k}^{(t)}\right) \quad (2.157)$$

onde r é o número total de entradas (sem contar com o desvio) aplicadas ao neurónio k . Utilizando a regra da cadeia e considerando $t = I$:

$$\frac{\partial E_n}{\partial w_{n,jk}^{(1)}} = \frac{\partial E_n}{\partial y_{n,k}^{(1)}} \frac{\partial y_{n,k}^{(1)}}{\partial v_{n,k}^{(1)}} \frac{\partial v_{n,k}^{(1)}}{\partial w_{n,jk}^{(1)}} = \frac{\partial E_n}{\partial y_{n,k}^{(1)}} f_k'^{(1)}(v_{n,k}^{(1)}) y_{n,j}^2 \quad (2.158)$$

Assim, o gradiente local, $\delta_{n,k}$, neste caso é dado por:

$$\delta_{n,k} = -\frac{\partial E_n}{\partial y_{n,k}^{(1)}} f_k'^{(1)}(v_{n,k}^{(1)}) \quad (2.159)$$

A saída da unidade k pode estar ligada a mais de uma unidade da camada seguinte. Somando todas as ligações que saem da unidade k para a camada seguinte e utilizando a regra da cadeia tem-se:

$$\frac{\partial E_n}{\partial y_{n,k}^{(1)}} = \sum_l \frac{\partial E_n}{\partial v_{n,l}} w_{n,kl} \quad (2.160)$$

Utilizando as equações (2.146) e (2.157) tendo em conta que a soma é sobre l obtém-se:

$$\frac{\partial E_n}{\partial y_{n,k}^{(1)}} = -\sum_l e_{n,l} f_k'(v_{n,l}) w_{n,kl} = -\sum_l \delta_{n,l} w_{n,kl} \quad (2.161)$$

O procedimento utilizado na equação (2.158) para $t = 1$ repete-se até que $\partial E_n / \partial w_{n,jk}^{(t)}$ seja calculado para todas as ligações. Substituindo a equação (2.161) em (2.159) obtém-se:

$$\delta_{n,k} = f_k'^{(1)}(v_{n,k}^{(1)}) \sum_l \delta_{n,l} w_{n,kl} \quad (2.162)$$

Em conclusão, a correcção, $\Delta w_{n,ik}$, aplicada ao peso da ligação entre o neurónio i e o neurónio k é definida por:

$$\begin{pmatrix} \text{Correcção} \\ \text{do Peso} \\ \Delta w_{n,ik} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Taxa de} \\ \text{Aprendizagem} \\ \eta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{Gradiente} \\ \text{Local} \\ \delta_{n,k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{Input do} \\ \text{Neurónio } k \\ y_{n,i} \end{pmatrix} \quad (2.163)$$

O valor do gradiente local, $\delta_{n,k}$, depende se o neurónio k está numa camada intermédia ou na camada de saída:

1. Se o neurónio k está na camada de saída o valor de $\delta_{n,k}$ é dado por (2.156)
2. Se o neurónio k está numa camada intermédia o valor de $\delta_{n,k}$ é dado pelo produto da derivada associada ao neurónio, $f'_k(v_{n,k}^{(t)})$, e da soma pesada dos vários valores de δ calculados para os neurónios da camada seguinte que estão ligados ao neurónio k – ver por exemplo (2.162)

Neste algoritmo quanto mais pequeno for o valor da taxa de aprendizagem, ou passo de treino, η mais pequenos serão os ajustes dos pesos na rede de uma iteração para a outra. No entanto, esta melhoria implica uma lenta convergência e desta forma o algoritmo pode facilmente parar num mínimo local dentro do espaço dos pesos e não identificar o mínimo absoluto do problema em causa. Se, ao contrário, η for muito grande de forma a acelerar a aprendizagem a rede pode ficar instável (com oscilações). Um método simples que permite acelerar a convergência e evitar os mínimos locais e a instabilidade na rede é modificar a equação (2.155) incluindo um termo chamado momento (Rumelhart *et al.*, 1986b; Warnes *et al.*, 1998; Haykin, 1999; Hurtado e Alvarez, 2001):

$$\Delta w_{n,ik} = \eta \delta_{n,k} y_{n,i}^{(1)} + \alpha \Delta w_{n-1,ik} \quad (2.164)$$

onde α é normalmente um número positivo chamado a constante momento. Para que o processo iterativo utilizando a equação (2.164) seja convergente a constante momento $0 \leq |\alpha| < 1$. Além disso, a inclusão deste termo no algoritmo de retropropagação tende a acelerar a convergência e estabilizar a rede (Watrous, 1987; Jacobs, 1988). Também a taxa de aprendizagem pode não ser constante para toda a rede. Esta pode tomar distintos valores para diferentes partes da rede. Assim como na aplicação do algoritmo de retropropagação do erro pode impor-se que um determinado número de pesos da rede permaneçam fixos durante o processo de ajustamento. Isto pode ser feito igualando a zero a taxa de aprendizagem dos pesos que se querem fixar (Haykin, 1999).

Classificação quanto à dinâmica

A transferência de informação através das ligações e entre os diferentes neurónios de uma rede neuronal pode processar-se das seguintes formas:

- 1. Sequencialmente, de uma forma não síncrona ou assíncrona:** em cada iteração só parte dos neurónios da rede transfere informação aos neurónios seguintes.
- 2. Simultaneamente ou de uma forma síncrona:** a transferência de informação é realizada ao mesmo tempo por todos os neurónios da rede.
- 3. Estocástica:** o mecanismo de activação de cada neurónio não tem uma natureza determinista sendo regido por uma lei probabilística.

Treino de uma rede neuronal artificial

O treino de uma rede neuronal artificial ocorre através de um algoritmo que funciona como um processo iterativo de ajuste dos pesos que representam as ligações entre as unidades da rede assim como das entradas independentes – os desvios de cada unidade. O processamento dos dados consiste na transmissão dos dados de entrada para as unidades da primeira camada, onde estes são processados, gerando informações que serão passadas para a camada seguinte e assim sucessivamente até serem obtidos os resultados na camada de saída da rede.

Espera-se que uma rede neuronal artificial tenha uma boa capacidade de generalização independentemente de ter sido controlada durante o treino. Embora a generalização surja naturalmente como consequência da aprendizagem, o conceito actual é que aprendizagem e generalização funcionem em simultâneo.

Por exemplo, considerando que se pretende treinar uma rede com uma camada de entrada, uma camada intermédia e uma de saída, contendo esta última c elementos. Em problemas de aproximação, classificação e previsão o objectivo do treino da rede é a determinação de um vector de pesos w^* que minimize o erro quadrático em relação a um conjunto de treino composto por pares de valores (x_n, d_n) ; $n = 1, \dots, N$ onde N é o número de amostras do

conjunto de treino, d_n são os valores de saída desejados (conhecidos) para os valores de entrada x_n . O ajuste dos pesos deve modificar os valores de saída da rede y_k ; $k = 1, \dots, c$; de forma que a diferença entre y_k e $d_{n,k}$ diminua em cada iteração. Considerando ainda, por exemplo, que o algoritmo de treino a aplicar é a regra delta generalizada ou retropropagação do erro (Kovacs, 1996), a equação a utilizar para o ajuste dos pesos é dada por:

$$w_{k+1} = w_k - \eta \frac{dE(w_k)}{dw_k} \quad (2.165)$$

onde η é o tamanho do passo de treino, k é o número da iteração do processo de treino e o erro quadrático $E(w_k)$ é dado pela equação (2.140). A iteração para a correcção dos pesos deve ser repetida até que se chegue a um valor do erro quadrático inferior a um determinado parâmetro ε previamente estabelecido.

Durante o treino de uma rede neuronal artificial há que ter em atenção alguns factores que têm alguma influência nos resultados. Por exemplo, a utilização de passos de treino pequenos (normalmente muito menores que 1), apesar de tornar a convergência do erro mais lenta inibe a ocorrência de oscilações durante o treino o que beneficia o processo de convergência. Outro aspecto importante é a escala utilizada para os dados de entrada e saída do problema. Embora pareça desnecessário, os valores reais do problema devem ser alterados para intervalos da mesma ordem de grandeza dos valores envolvidos no processo de treino da rede pois isso melhora o desempenho desta e resulta numa convergência mais rápida do erro. Outro aspecto a ter em conta é o número de casos conhecidos a utilizar no treino da rede. Um número reduzido de casos facilita o treino não só porque reduz o número de operações necessárias em cada iteração mas também porque exige que a rede se adapte a um número reduzido de situações. De facto uma rede deve ser capaz de relacionar de forma coerente um pequeno número de valores, embora isso possa comprometer o seu desempenho futuro. Por este motivo é que se necessita de testar a rede, para avaliar se mesmo com um erro satisfatório resultante do treino esta é capaz de apresentar um erro também satisfatório quando aplicada a outros casos não utilizados no treino – teste da rede. Um bom desempenho no teste é que qualifica a rede neuronal artificial para utilização em novos casos. O importante é obter um equilíbrio entre o tamanho da amostra no conjunto

de treino e os resultados na aplicação do teste da rede de forma a garantir um bom desempenho desta sem implicar custos elevados (Lastiri e Pauletti, 2004).

Depois do treino, obtendo os pesos ideais para a rede, esta deve ser testada. Normalmente, o conjunto de treino utiliza 90% dos valores enquanto o conjunto de teste os restantes 10%. O teste é realizado utilizando os valores de problemas cujas soluções são conhecidas e que não foram usados no treino da rede. O objectivo é verificar se para os valores de entrada desses problemas a rede neuronal apresenta como resultado a solução esperada. Se o teste for bem sucedido então pode usar-se a rede para a obtenção da solução de outros problemas semelhantes.

Em seguida vão apresentar-se dois dos modelos de redes neuronais mais utilizados e divulgados na literatura, sendo de grande interesse pois formam a base para a maioria das aplicações práticas. São conhecidos como redes perceptrão de múltiplas camadas (Rumelhart e McClelland, 1986) e redes de funções de base radial (Broomhead e Lowe, 1988). Estes modelos formam parte de uma classe de redes conhecidas como redes de alimentação directa (do inglês *feedforward*).

2.10.3.1 Redes neuronais perceptrão de múltiplas camadas

As redes neuronais perceptrão de múltiplas camadas treinadas através do algoritmo de retropropagação são actualmente das redes neuronais mais vulgarmente utilizadas (Karunanithi, *et al.*, 1994; Hagan *et al.*, 1996; Tsai e Hsu, 2002; Deng *et al.*, 2005). Estas redes foram fundamentalmente desenvolvidas como aproximações às funções de estado limite (Shao e Murotso, 1997; Haykin, 1999; Sasaki, 2001; Goh e Kulhawy, 2003; Gomes e Awruch, 2004). Deng *et al.* (2005), no seu artigo descrevem como e porque é que se deve utilizar esta técnica como aproximação às funções de estado limite implícitas assim como variações que permitem utilizá-la conjuntamente com os métodos de simulação de Monte Carlo, FORM e SORM na análise de fiabilidade. Estes métodos utilizam redes neuronais artificiais de múltiplas camadas com alimentação directa. Estas redes são as mais populares e utilizadas sendo os seus algoritmos também bons aproximadores universais (Hornik *et al.*, 1989, 1990; Rajpal *et al.*, 2006).

Arquitectura das redes neuronais percepção de múltiplas camadas

Este tipo de redes contém uma ou mais camadas intermédias, uma camada de entrada e outra de saída. Os sinais de entrada propagam-se através da rede numa única direcção camada-por-camada (alimentação directa).

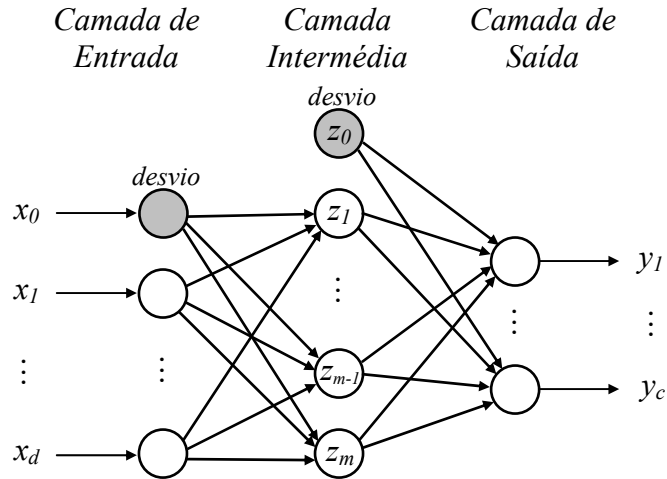


Figura 2.12 – Arquitectura de uma rede percepção multicamadas com uma camada intermédia.

Neste caso vai considerar-se uma rede com três camadas, uma camada de entrada com d neurónios mais o desvio, uma camada intermédia com m neurónios mais o desvio e uma camada de saída com c neurónios (Figura 2.12). O valor de saída do j -ésimo neurónio da camada intermédia é dado por:

$$z_j = f\left(\sum_{i=0}^d w_{ji}x_i\right) \quad (2.166)$$

onde w_{ji} é o peso da ligação entre o neurónio de entrada i e o neurónio da camada intermédia j e $f(.)$ é a função de activação. Neste caso o desvio θ_j é substituído por uma nova ligação cuja entrada tem um valor fixo, $x_0 = 1$, e um peso $w_{j0} = \theta_j$. As saídas da rede são obtidas transformando novamente as saídas dos z neurónios da camada intermédia. Assim, o valor de saída do k -ésimo neurónio da camada de saída é dado por:

$$y_k = f^* \left(\sum_{j=0}^m w_{kj}^* z_j \right) = f^* \left(\sum_{j=0}^m w_{kj}^* f \left(\sum_{i=0}^d w_{ji} x_i \right) \right) \quad (2.167)$$

onde w_{kj}^* é o peso da ligação entre o neurónio da camada intermédia j e o neurónio da camada de saída k e $f^*(.)$ é a função de activação. Neste caso o desvio θ_k é substituído por uma nova ligação cuja entrada tem um valor fixo, $z_0 = 1$, e um peso $w_{k0} = \theta_k$. As funções de activação têm notações diferentes porque não é obrigatório que sejam iguais. A função de activação aplicada às unidades de saída pode ser diferente da função de activação das unidades intermédias.

O número de neurónios a incluir na camada intermédia é seleccionado através da experiência e do erro. Normalmente assume o valor 3, 5, 7, 9 ou 11. A capacidade da rede em fazer previsões aumenta à medida que o número de neurónios da camada intermédia aumenta. No entanto, vários testes indicam que essa capacidade da rede fazer previsões começa a diminuir a partir do momento em que a rede tem mais de sete neurónios (Flood e Kartam, 1994; Deng *et al.*, 2003).

Funções de activação

O modelo de cada neurónio da rede inclui uma função de activação não linear. As funções mais utilizadas são as sigmoidais, sendo as mais comuns as funções logística e tangente hiperbólica (Flood e Kartam, 1994; Karunanithi, *et al.*, 1994; Santosh *et al.*, 2007):

$$y_k = \frac{1}{1 + e^{-v_k}} \quad (2.168)$$

$$y_k = \tanh(v_k) = \frac{e^{v_k} - e^{-v_k}}{e^{v_k} + e^{-v_k}} \quad (2.169)$$

onde v_k é a soma pesada de todas as entradas mais o desvio do neurónio k e y_k é a saída do neurónio. Estas funções são muito usadas pois as suas derivadas são fáceis de calcular, o que vai ajudar na fase de treino da rede.

Aprendizagem da rede

O tipo de aprendizagem que normalmente mais se utiliza é a aprendizagem com supervisão através do algoritmo da retropropagação do erro (Goh, 1995). Este algoritmo baseia-se na regra de aprendizagem com correcção do erro.

Treino e teste da rede

Neste caso o ajuste da rede ao conjunto de treino é realizado procurando o conjunto de valores dos pesos e desvios que minimizam uma função erro, que normalmente é a soma dos quadrados dos erros da equação (2.140). É aqui que se aplica o algoritmo de aprendizagem.

2.10.3.2 Redes neuronais de base radial

Recentemente as redes neuronais de funções de base radial, também chamadas redes de base radial, têm vindo a ganhar cada vez mais adeptos e a atrair atenções pois o treino destas redes é realizado de forma mais rápida do que os métodos utilizados para o treino das outras redes que também se usam bastante - perceptrão de múltiplas camadas (Moody e Darken, 1989; Park e Sandberg, 1993; Gagarin *et al.*, 1994; Bishop, 1994, 1995; Billings e Zheng, 1995; Chen e Chen, 1995; Warnes *et al.*, 1998; Haykin, 1999; Ricotti e Zio, 1999; McDonald *et al.*, 2000; Hurtado e Alvarez, 2001; Hurtado, 2002; Mai-Duy e Tran-Cong, 2003; Gomes e Awruch, 2004). As redes RBF são as que permitem uma melhor aproximação, pois dentro do conjunto de funções de aproximação que se podem utilizar num problema, estas são as que têm um erro de aproximação mínimo qualquer que seja a função a aproximar (Girosi e Poggio, 1990; Bishop, 1995). Estas redes foram construídas de forma a aproximar funções de estado limite implícitas e derivadas de primeira e segunda ordem com pouco esforço e sem perder precisão. Hurtado e Alvarez (2001) comparam dois tipos de redes neuronais artificiais, as redes MLP e as RBF. Para obter a probabilidade de rotura, estas redes são utilizadas em conjunto com o método de simulação de Monte Carlo puro. Analisando alguns exemplos os autores concluíram que a rede RBF fornece melhores resultados com um número menor de amostras. Li (1996) demonstrou que qualquer função multivariada e todas as suas derivadas podem ser

simultaneamente aproximadas por uma rede RBF. Mai-Duy e Tran-Cong (2003) apresentam uma aproximação numérica baseada em redes RBF para aproximar uma função e as suas derivadas. Gomes e Awruch (2004) compararam o método de superfície de resposta e redes RBF e MLP com outras alternativas para avaliar a fiabilidade estrutural, onde as redes são utilizadas para aproximação às funções de estado limite.

Arquitectura das redes neuronais de base radial

Tal como nas redes perceptrão de múltiplas camadas, este tipo de rede também é constituída por camadas e contém uma ou mais camadas intermédias, uma camada de entrada e outra de saída. Os valores de entrada propagam-se através da rede numa única direcção camada-por-camada (alimentação directa). Sendo também, normalmente, redes não lineares e aproximadores universais. Neste caso vai considerar-se uma rede com três camadas, uma camada de entrada com d neurónios, uma camada intermédia com m neurónios mais o desvio e uma camada de saída com c neurónios (Figura 2.13).

A camada intermédia consiste num conjunto de funções de base radial. Associado a cada neurónio da camada intermédia está um vector de parâmetros que não é mais do que o centro da função de base radial desse neurónio. O neurónio calcula então a distância Euclideana entre o vector do centro e o vector de entrada e passa o resultado a uma função de base radial (Gomes e Awruch, 2004). Normalmente, todas as funções de base radial dos neurónios de uma camada intermédia são iguais mas isso pode também não acontecer.

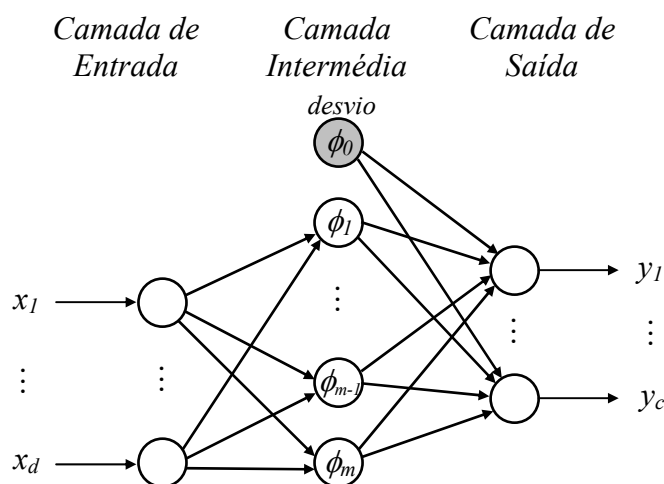


Figura 2.13 – Arquitectura de uma rede de funções de base radial com uma camada intermédia.

O valor de saída do k -ésimo neurónio, $k = 1, \dots, c$ da camada de saída é dado por:

$$y_k(v) = \sum_{j=0}^m w_{kj} \phi_j(v) \quad (2.170)$$

onde $v = \|x - x_j\|$ é um número não negativo, $\|\cdot\|$ representa a norma Euclideana, x_j é o vector dos centros das funções de base radial ϕ_j , x o vector das entradas na rede, w_{kj} é o peso da ligação entre o neurónio da camada intermédia j e o neurónio de saída k e ϕ_j é a função de activação de base radial do j -ésimo neurónio da camada intermédia. Neste caso o desvio θ_k é substituído por uma função de base radial extra cuja entrada tem um valor fixo, $\phi_0(v) = 1$, e um peso $w_{k0} = \theta_k$.

Enquanto que a camada de saída de uma rede de base radial é linear, nas redes de percepção de múltiplas camadas utilizadas para classificação de padrões essa camada é não linear.

Nestas redes os centros das funções de base radial dos neurónios intermédios não são coincidentes com os valores de entrada. A sua definição passa a ser parte do problema (corresponde à primeira fase do treino da rede).

A arquitectura das redes de base radial é bastante flexível dispondo de um número maior de parâmetros dos que as redes percepção de múltiplas camadas, como sejam o número de funções de base radial a utilizar na camada intermédia (está relacionado com a complexidade da função a ajustar pela rede), os centros das funções (são determinados como parte do processo de aprendizagem), a largura das funções de base radial e os pesos.

Funções de activação

As funções de activação destas redes são as chamadas funções de base radial. Normalmente, estas são funções não lineares cujo valor cresce ou decresce à medida que a distância a um ponto central aumenta. A esse ponto chama-se o *centro* da função de base radial. Ao contrário das redes percepção de múltiplas camadas cujas unidades se baseiam no cálculo de uma função não linear do produto escalar entre o vector das entradas e o vector dos pesos, nas redes de base radial a função de activação de uma unidade intermédia

é obtida através da distância Euclideana entre o vector de entrada e o vector correspondente ao centro da função de base radial dessa unidade.

Os métodos relacionados com as funções de base radial têm a sua origem na teoria da interpolação exacta de um conjunto de pontos no espaço multi-dimensional (Powell, 1987). A técnica relacionada com as funções de base radial consiste em escolher uma função $f(\cdot)$ com a forma:

$$f(x) = \sum_{i=1}^N w_i \phi(\|x - x_i\|) \quad (2.171)$$

onde $\phi(\|x - x_i\|)$ é um conjunto de N funções não lineares, conhecidas como funções de base radial, $\|\cdot\|$ representa a norma Euclideana, x_i o vector dos centros das funções de base radial, x o vector das entradas na rede e w_i o vector dos pesos.

Aplicando a teoria da interpolação e utilizando uma forma matricial, pode escrever-se:

$$\Phi w = d \quad (2.172)$$

onde $d = d_i$, $i = 1, \dots, N$ é o vector das respostas desejadas (conhecidas), $w = w_i$, $i = 1, \dots, N$ é o vector dos pesos (desconhecidos) e a matriz quadrada Φ tem elementos $\Phi_{ji} = \phi(\|x_j - x_i\|)$. Assumindo que Φ é não singular, e portanto admite inversa, então:

$$w = \Phi^{-1} d \quad (2.173)$$

Micchelli (1986) demonstrou que um grande número de classes de funções de base radial garante essa propriedade. As que mais se utilizam nas redes de base radial são (Bishop, 1995; Billings e Zheng, 1995; Haykin, 1999; Mai-Duy e Trinh-Cong, 2003; Deng, 2006):

1. Gaussiana:
$$\phi(v) = e^{-\frac{v^2}{2\beta^2}}, \beta > 0 \quad (2.174)$$

2. Multi-quadrática (Hardy, 1971):
$$\phi(v) = \sqrt{v^2 + \beta^2}, \beta > 0 \quad (2.175)$$

3. Multi-quadrática Inversa (Hardy, 1971):
$$\phi(v) = \frac{1}{\sqrt{v^2 + \beta^2}}, \beta > 0 \quad (2.176)$$

4. A função:
$$\phi(v) = v^2 \ln(v), v > 0 \quad (2.177)$$

5. A função:
$$\phi(v) = v^3, v > 0 \quad (2.178)$$

onde $v = \|x - x_i\|$ é um número não negativo, $\|\cdot\|$ representa a norma Euclideana, x_i o vector dos centros das funções de base radial, x o vector das entradas na rede e β a largura das funções de base radial.

Relativamente às funções de base radial, por exemplo, Chen *et al.* (1990, 1992) utilizaram a função 4 enquanto que Moody e Darken (1989), Broomhead e Lowe (1988) e Poggio e Girosi (1990) utilizaram a Gaussiana e a multi-quadrática.

Aprendizagem da rede

Recentemente têm vindo a ser desenvolvidos algoritmos de aprendizagem que incorporam mecanismos de selecção estrutural (Chen *et al.*, 1990; Holcomb e Morari, 1991; Lee e Rhee, 1991; Musavi *et al.*, 1992) – ver treino e teste da rede. Em Chen *et al.* (1990) a rede é treinada utilizando um algoritmo ortogonal de mínimos quadrados. Utilizaram o critério de informação de Akaike (este critério não é um teste ao modelo da rede no sentido de um teste de hipóteses, mas sim uma ferramenta para seleccionar um modelo. Dado um conjunto de dados podem ordenar-se vários modelos de acordo com a informação de Akaike de cada um, sendo o melhor o que tem menor valor.) para determinar o número de neurónios da camada intermédia e o algoritmo da razão de redução do erro para determinar os centros das funções de base radial.

Treino e teste da rede

A determinação de uma estrutura apropriada para uma determinada rede está intimamente relacionada com o treino e com o erro. Os procedimentos utilizados para treinar este tipo de redes são mais rápidos do que os métodos utilizados para treinar redes perceptrão de múltiplas camadas (Bishop, 1995). A maior parte dos algoritmos de treino começam com uma estrutura de rede que é escolhida com base em conhecimentos ou experiências passadas. Recentemente têm vindo a ser desenvolvidas várias abordagens para treinar este tipo de redes. A maior parte delas pode ser dividida em duas fases (Moody e Darken, 1989; Chen *et al.*, 1992a; Kaviori e Venkata Subramanian, 1993; Vogt, 1993; Xu *et al.*, 1993):

1. Na primeira fase os parâmetros das funções de base radial (os centros dessas funções), das unidades da camada intermédia, são determinados utilizando métodos de aprendizagem sem supervisão que usam apenas os dados de entrada da rede. Além disso, também é calculado o número de neurónios a usar na camada intermédia.
2. Na segunda fase determinam-se os pesos das ligações entre a camada intermédia e a camada de saída. Nesta fase os algoritmos de aprendizagem têm definido *a priori* a estrutura da rede assim como o número de neurónios da camada intermédia.

Independentemente da estratégia de treino considerada é desejável que a rede treinada seja validada de forma a ter-se uma estimativa do seu comportamento quando submetida a dados desconhecidos. Assim, é comum dividir a amostra do conjunto de treino em dois grupos chamados conjuntos de treino e de teste. Os valores da amostra para treino são utilizados para se ajustarem os parâmetros da rede. O conjunto de teste é utilizado com a rede já treinada e portanto não influencia a configuração desta, servindo como um indicador da sua qualidade.

2.10.3.3 Redes neuronais artificiais conjugadas com métodos de análise de fiabilidade

O objectivo é construir uma rede neuronal artificial para aproximação de uma função de estado limite implícita [Deng (2006) utiliza para o mesmo processo uma rede neuronal artificial de funções de base radial (do inglês RBF)]. Depois facilmente se obtêm valores dessa função devido à capacidade de generalização de uma rede neuronal artificial. Também se podem obter valores das derivadas parciais de primeira ou segunda ordem de uma função de estado limite implícita a partir da rede neuronal treinada. Desta forma, podem implementar-se métodos de simulação de Monte Carlo, FORM ou SORM conjugados com redes neuronais artificiais (Deng *et al.*, 2005).

As redes neuronais artificiais têm vindo a ser aplicadas em imensas áreas onde está envolvida a obtenção de informação a partir de um conjunto de dados. Os problemas de análise de fiabilidade onde se pretendem realizar aproximações a funções de estado limite implícitas envolvem vários tipos de métodos que se podem aplicar. Hornik *et al.* (1989, 1990) mostram que as redes de múltiplas camadas de alimentação directa com uma camada de entrada, uma intermédia e outra de saída e com função de activação sigmoideal na camada intermédia são capazes de funcionar como bons aproximadores de qualquer função e suas derivadas.

Rede neuronal artificial conjugada com o método de simulação de Monte Carlo

Em primeiro lugar há que definir as variáveis aleatórias e a função de estado limite $G(X)$. Depois, se existirem variáveis aleatórias correlacionadas há que transformá-las em variáveis aleatórias não correlacionadas e passar $G(X)$ para uma nova função de variáveis não correlacionadas. Em seguida, determina-se a estrutura e os parâmetros da rede neuronal [Deng (2006) utiliza para o mesmo processo uma rede neuronal artificial de funções de base radial]. Escolhem-se as amostras para os conjuntos de treino e teste e passa-se ao treino da rede parando quando se obtiverem erros aceitáveis. Podendo então passar à generalização da rede. Por fim já se pode determinar a probabilidade de rotura com base nos resultados obtidos através da rede neuronal. Supondo que dos N valores obtidos através da rede, $N_f < 0$. A probabilidade de rotura pode ser estimada através da equação:

$$p_f = P[G(X) < 0] = \frac{N_f}{N} \quad (2.179)$$

Rede neuronal artificial conjugada com FORM

Neste caso utiliza-se uma rede neuronal artificial para aproximação à função de estado limite e às suas derivadas parciais de primeira ordem [Deng (2006) utiliza para o mesmo processo uma rede neuronal artificial de funções de base radial]. Considerando um problema com n variáveis aleatórias básicas $X = X_1, \dots, X_n$ onde $G(X)$ é a função de estado limite, $X' = \{X'_1, \dots, X'_n\}$ é o vector das variáveis aleatórias básicas no espaço normal reduzido, $x^* = \{x_1^*, \dots, x_n^*\}$ o vector do ponto de dimensionamento e $x'^* = \{x'_1, \dots, x'_n\}$ o vector correspondente ao ponto de dimensionamento no espaço normal reduzido, então para aplicar este método:

1. Definir as variáveis aleatórias (médias e coeficientes de variação) e $G(X)$
2. Escolher um valor inicial para x^* (pode ser o vector das médias) e calcular $G(x^*)$
3. Para as variáveis com distribuição não normal calcular as suas distribuições normais equivalentes e determinar a média μ^N e desvio padrão σ^N no ponto de dimensionamento (Rackwitz e Fiessler, 1976). As coordenadas deste ponto no espaço normal reduzido são dadas por:

$$x'_i{}^* = \frac{x_i^* - \mu^N}{\sigma^N} \quad (2.180)$$

4. Definir um modelo para $G(X)$ utilizando uma rede neuronal artificial [Deng (2006) utiliza para o mesmo processo uma rede neuronal artificial de funções de base radial] e calcular as derivadas parciais $\left. \frac{\partial G}{\partial X_i} \right|_{x_i^*}$ também através da rede.

5. Calcular $\left. \frac{\partial G}{\partial X'_i} \right|_{x'_i{}^*} = \left(\left. \frac{\partial G}{\partial X_i} \right|_{x_i^*} \right) \sigma^N$

6. Calcular os novos valores do ponto de dimensionamento no espaço normal reduzido através da fórmula recursiva:

$$x'_{k+1} = \frac{1}{|\nabla G(x'_k)|^2} \left[\nabla G(x'_k)^T x'_k - G(x'_k) \right] \nabla^T G(x'_k) \quad (2.181)$$

onde $G(x'_k)$ e $\nabla G(x'_k)$ são, respectivamente, o valor e o vector gradiente da função de estado limite no ponto x'_k da k -ésima iteração

7. Calcular a distância da origem do espaço normal reduzido a x'_{k+1} , $\beta = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x'_i)^2}$, e

verificar o critério de convergência, $|\Delta\beta| \leq \varepsilon_1$, onde ε_1 é um valor predefinido, por exemplo 0.001

8. Calcular o novo valor $x_i^* = \mu^N + \sigma^N x'_i$, determinar $G(x_i^*)$ e verificar o critério de convergência, $|G(.)| \leq \varepsilon_2$, onde ε_2 é um valor predefinido, por exemplo 0.001

9. Se ambos os critérios de convergência se verificam pára-se, caso contrário repetir passos 3 a 8 até à convergência simultânea dos dois critérios.

Rede neuronal artificial conjugada com SORM

Neste caso, utilizando um método SORM, a probabilidade de rotura vai ser dada através da equação (2.53) (Breitung, 1984). Esta equação mostra que os SORM melhoram os FORM através da inclusão de informação adicional acerca da curvatura de $G(X)$. Neste método utiliza-se uma rede neuronal artificial para determinar as derivadas parciais de primeira e segunda ordem de $G(X)$ [Deng (2006) utiliza para o mesmo processo uma rede neuronal artificial de funções de base radial]. Para determinar as curvaturas principais:

1. Transformar X para o espaço normal reduzido de variáveis não correlacionadas equivalente Y . Considerando que todas as variáveis X não são correlacionadas então

$$Y_i = \frac{X_i - \mu_{X_i}^N}{\sigma_{X_i}^N}, \text{ onde } \mu_{X_i}^N \text{ e } \sigma_{X_i}^N \text{ são, respectivamente, a média e desvio padrão da}$$

distribuição normal reduzida equivalente no ponto de dimensionamento x_i^* . A transformação de X_i para Y_i para variáveis correlacionadas é apresentada em Shinozuka (1983) e Haldar e Mahadevan (2000)

2. Aplicar a transformação ortogonal $Y' = RY$, onde R é a matriz rotação. Por exemplo, sendo θ o ângulo de rotação, para duas variáveis aleatórias:

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.182)$$

Para mais do que duas variáveis aleatórias a matriz R é calculada em duas fases (Haldar e Mahadevan, 2000)

3. Calcular a matriz A cujos elementos são dados por:

$$a_{ij} = \frac{(RDR^T)_{ij}}{|\nabla G(y^*)|} ; \quad i, j = 1, \dots, n-1 \quad (2.183)$$

onde D é uma matriz $n \times n$ das derivadas parciais de segunda ordem de $G(y^*)$ sendo y^* o ponto de dimensionamento no espaço normal reduzido. D e $|\nabla G(y^*)|$ são determinados através da rede neuronal artificial [Deng (2006) utiliza para o mesmo processo uma rede neuronal artificial de funções de base radial].

4. Calcular os valores próprios da matriz A para obter as curvaturas principais k_i .

Capítulo 3

Métodos de Transformação

3.1 Introdução

Nos primórdios os métodos de fiabilidade eram válidos apenas para variáveis aleatórias independentes com distribuição normal padrão. Cada conjunto de n variáveis aleatórias definidas no espaço original, $\mathbf{X}$, é transformado num conjunto de m variáveis aleatórias ($m \leq n$) definido no espaço normal padronizado independente, $\mathbf{U}$ (Hasofer e Lind, 1974).

Variáveis aleatórias independentes com distribuição não normal podem ser transformadas em variáveis normais padrão independentes através da transformação de caudas normais (Melchers, 1999). No caso de variáveis aleatórias não normais correlacionadas existem vários métodos para transformar essas variáveis em variáveis aleatórias normais padrão não correlacionadas, como por exemplo a transformação de Rosenblatt (Rosenblatt, 1952) e de Nataf (Liu e Kiureghian, 1986).

Em seguida são apresentadas as condições para a validação de cada método assim como a sua aplicabilidade.

Antes de se apresentarem os vários casos que podem surgir, vai apresentar-se um método que se utiliza com frequência na transformação de variáveis aleatórias correlacionadas e normalmente distribuídas; o método de Cholesky.

3.2 Método de Cholesky

A factorização, ou decomposição, de Cholesky é um caso particular da chamada decomposição LU que, por sua vez, é uma consequência do método de eliminação de Gauss. A decomposição LU e de Cholesky são métodos utilizados na resolução de sistemas de equações lineares $Ax = b$. O objectivo é decompor a matriz A , no 1º caso em $A = LU$ e no 2º em $A = L.L^T$.

Os métodos de decomposição são muito importantes para a resolução de muitos problemas, como se verá a seguir.

Definição: *Matriz triangular inferior e superior*

Uma matriz triangular é um caso especial de uma matriz quadrada em que os elementos abaixo ou acima da diagonal principal são iguais a zero. Uma matriz da forma:

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

chama-se *matriz triangular inferior* ou *matriz triangular esquerda*. Uma matriz da forma:

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

chama-se *matriz triangular superior* ou *matriz triangular direita*.

Definição: *Matriz simétrica*

Uma matriz A é simétrica se $A = A^T$, ou seja, relativamente aos seus elementos $\forall_{i,j} a_{ij} = a_{ji}$.

Teorema:

Uma matriz simétrica A é definida positiva se e só se cada uma das suas submatrizes principais têm determinante positivo.

Teorema:

Uma matriz simétrica A é definida positiva se e só se o processo de eliminação de Gauss pode ser realizado sem permutações de linhas ou colunas e tem todos os elementos pivots positivos.

3.2.1 Método de eliminação de Gauss

Este método é utilizado para resolver sistemas de equações lineares. Consiste em transformar a matriz ampliada do sistema A noutra equivalente que seja triangular superior, utilizando apenas operações elementares sobre as linhas de A . Quando o sistema estiver na forma triangular superior, a solução será obtida através da substituição inversa.

Seja o sistema $Bx = b$ e A a matriz ampliada. Em seguida vão apresentar-se os passos principais a seguir na aplicação deste método. Em cada passo k vai definir-se $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})$ como a matriz obtida após esse passo.

1. Eliminar a_{k1} ; $k = 2, \dots, n$ obtendo $A^{(1)}$.
2. Eliminar em $A^{(1)}$ a_{k2} ; $k = 3, \dots, n$ e assim sucessivamente até ao passo $(n-1)$, cujo objectivo é eliminar a_{nn-1}

Aos elementos $a_{11}, a_{22}^{(1)}, a_{33}^{(2)}, \dots, a_{nn}^{(n-1)}$ são chamados pivots e aos $m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$,

$i = k+1, \dots, n$ são chamados os multiplicadores.

Para minimizar os erros que poderão surgir, como por exemplo pivot nulo ou próximo de zero, deve adoptar-se uma estratégia na escolha do pivot que consiste em cada passo escolher para pivot o maior elemento em módulo da coluna a eliminar.

Decomposição LU:

É uma variante do método de eliminação de Gauss.

Qualquer matriz quadrada A pode ser escrita como o produto de uma matriz triangular inferior L por outra triangular superior U : $A = LU$.

3.2.2 Decomposição de Cholesky

Esta técnica deve o seu nome ao engenheiro francês André-Louis Cholesky que formulou o seguinte:

Se uma matriz $A_{n \times n}$ é simétrica e definida positiva então ela pode ser decomposta num produto de duas outras: $A = L.L^T$, onde L é uma matriz triangular inferior com elementos positivos na diagonal principal que pode ser considerada como a “raiz quadrada” de A ; $L = A^{1/2}$ (Hurst e Knop, 1972). L é o chamado triângulo de Cholesky da matriz A .

Comparando esta decomposição com a LU pode então dizer-se que se A é simétrica e definida positiva então $U = L^T$ e assim $A = L.L^T$.

Esta técnica é duas vezes mais eficiente do que a decomposição LU , sendo utilizada em muitas situações.

É aplicada principalmente na resolução de sistemas de equações lineares do tipo $Ax = b$. Sabendo que $A = L.L^T$, então basta resolver dois sistemas de equações lineares mais simples: primeiro resolve-se $Ly = b$ para obter y e depois $L^T x = y$ para obter x .

Conforme se irá ver no próximo capítulo, também se aplica no Método de Monte Carlo para simular sistemas com múltiplas variáveis correlacionadas. Por exemplo, para simular variáveis aleatórias normais correlacionadas em primeiro lugar deve aplicar-se a decomposição de Cholesky à matriz de covariâncias Σ de forma que $\Sigma = L.L^T$, onde L é uma matriz triangular inferior com elementos positivos na diagonal principal. Assim, se $Z = (Z_i)_{i=1, \dots, n}$ são n variáveis aleatórias normais independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) então a matriz $(N_i)_{i=1, \dots, n} = N = L.Z$ contém n variáveis aleatórias normalmente distribuídas com covariâncias Σ .

Teorema (Cholesky)

Uma matriz simétrica A é definida positiva se, e só se, pode ser definida através do produto $L.L^T$, onde L é uma matriz triangular inferior com elementos positivos na diagonal.

Algoritmo de Cholesky

A matriz L obtém-se através da seguinte igualdade:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ 0 & l_{22} & \cdots & l_{n2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & l_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Existem diversas técnicas para calcular a decomposição de Cholesky. Normalmente são versões modificadas do algoritmo de Gauss. Dois dos algoritmos que normalmente mais se utilizam são: o algoritmo de Cholesky-Banachiewicz (a sua aplicação começa a partir do canto superior esquerdo da matriz L e desenvolve-se até ao fim linha a linha) e o algoritmo de Cholesky-Crout. No presente trabalho vai mencionar-se o segundo.

Algoritmo de Cholesky-Crout

A sua aplicação também começa a partir do canto superior esquerdo da primeira coluna da matriz L e vai desenvolver-se coluna a coluna.

Considere-se uma matriz $A_{n \times n}$ em que $A = L.L^T$, para obter os coeficientes l_{ij} da matriz L devem seguir-se os passos:

Passo 1: $l_{11} = \sqrt{a_{11}}$

Passo 2: $l_{j1} = \frac{a_{j1}}{l_{11}}$, para $j = 2, \dots, n$

Passo 3: Para $i = 2, \dots, n-1$ vão aplicar-se os passos 4 e 5 sucessivamente

$$\textbf{Passo 4: } l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}$$

$$\textbf{Passo 5: } l_{ji} = \frac{a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} \cdot l_{ik}}{l_{ii}}, \text{ para } j = i+1, \dots, n$$

$$\textbf{Passo 6: } l_{nn} = \sqrt{a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}^2}$$

3.3 Transformações de variáveis aleatórias normais e correlacionadas

Considere-se uma transformação das variáveis aleatórias básicas $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ de um problema, $\mathbf{Y} = T(\mathbf{X})$, de forma que $\mathbf{Y}$ seja um vector constituído por n variáveis aleatórias independentes com distribuição Gaussiana com média zero e matriz de covariância unitária.

Neste caso, $\mathbf{X}$ é um vector aleatório Gaussiano com média μ_X e matriz de covariância Σ_{XX} . A diagonalização da matriz simétrica definida positiva Σ_{XX} permite escrever:

$$\mathbf{X} = \mathbf{L}\mathbf{Y} + \mu_X \quad (3.4)$$

onde $\mathbf{L}$ é uma matriz triangular inferior com elementos positivos na diagonal principal obtida através da aplicação da decomposição de Cholesky à matriz $\Sigma_{XX} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$. A partir da equação (3.4) pode obter-se o vector $\mathbf{Y}$ da seguinte forma:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{L}^{-1} \cdot (\mathbf{X} - \mu_X) \quad (3.5)$$

3.4 Transformações de variáveis aleatórias não normais e independentes

Tal como é comum em problemas de engenharia, nem todas as variáveis aleatórias básicas são normalmente distribuídas. Nesses casos é necessário transformar as variáveis não

normais noutras equivalentes que sejam normalmente distribuídas. Em seguida vão apresentar-se algumas regras que poderão auxiliar sempre que se pretender transformar variáveis aleatórias básicas não normais e estatisticamente independentes em variáveis equivalentes cuja distribuição é normal ou aproximadamente normal.

Neste caso, X é um vector de variáveis aleatórias independentes com distribuição não normal cujas funções densidade de probabilidade marginal $f_{x_i}(x_i)$ e função distribuição marginal $F_{x_i}(x_i)$ são dadas.

Uma vez que qualquer variável aleatória normalmente distribuída pode ser descrita apenas por dois parâmetros, o seu valor médio e a variância (ou desvio padrão), então desde que se consigam definir duas condições apropriadas estas podem ser usadas para conseguir a transformação pretendida.

3.4.1 Transformação: mesmo valor médio e percentil P

Paloheimo [1973, em Haldar e Mahadevan (2000)] sugeriu uma forma de aproximar uma distribuição não normal por outra que seja normalmente distribuída. Para isso basta que ambas tenham o mesmo valor médio e um percentil igual, P. Criou assim duas condições em que considera $P = p_f$ se a variável aleatória representa uma acção e $P = 1 - p_f$ se a variável aleatória representa uma resistência.

Considerando X como a variável aleatória básica original, U a sua transformada normal e que Z segue uma distribuição normal padrão, então segundo Paloheimo:

Para uma variável aleatória representando uma Acção:

$$F_X(x_0) = p_f \quad \Rightarrow \quad x_0 = F_X^{-1}(p_f) \quad (3.6)$$

$$\Phi(z_0) = p_f \quad \Rightarrow \quad z_0 = \Phi^{-1}(p_f) \quad (3.7)$$

Através de (3.6) e (3.7) obtemos os valores de x_0 e z_0 . Como se assume que os valores médios das variáveis original e transformada são iguais, o valor de σ_u pode ser obtido através da expressão:

$$z_0 = \frac{x_0 - \mu_u}{\sigma_u} \Rightarrow \sigma_u = \frac{|x_0 - \mu_u|}{|z_0|} . \quad (3.8)$$

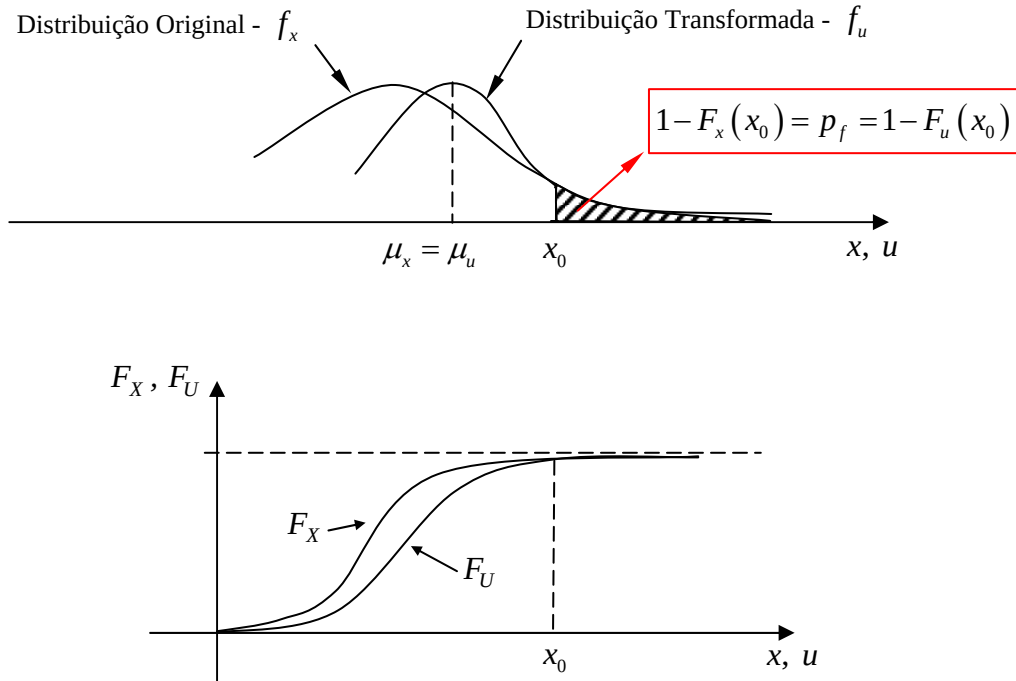


Figura 3.1 – Funções de densidade de probabilidade das variáveis original e transformada e as correspondentes funções de distribuição.

Para uma variável aleatória representando um parâmetro Resistente:

$$F_x(x_0) = 1 - p_f \Rightarrow x_0 = F_x^{-1}(1 - p_f) \quad (3.9)$$

$$\Phi(z_0) = 1 - p_f \Rightarrow z_0 = \Phi^{-1}(1 - p_f) \quad (3.10)$$

Através de (3.9) e (3.10) obtêm-se os valores de x_0 e z_0 . Como se assume que os valores médios das variáveis original e transformada são iguais, o valor de σ_u pode ser obtido através da expressão:

$$z_0 = \frac{x_0 - \mu_u}{\sigma_u} \Rightarrow \sigma_u = \frac{|x_0 - \mu_u|}{|z_0|} . \quad (3.11)$$

3.4.2 Transformação de caudas normais

Rackwitz e Fiessler [1976, em Haldar e Mahadevan (2000)] apresentaram um método que permite transformar uma variável aleatória básica independente X com distribuição não normal numa outra variável aleatória equivalente Z com distribuição normal padrão. Matematicamente pode definir-se da seguinte forma:

$$z = \Phi^{-1}[F_X(x)] \quad (3.12)$$

A transformação do espaço original X para o espaço das variáveis normais padronizadas U é realizada através da aproximação da função distribuição das variáveis originais $F_{X_i}(x_i)$ à função distribuição de uma normal padrão $\Phi((x_i - \mu_i)/\sigma_i)$ de forma que coincidam e tenham a mesma derivada no ponto de dimensionamento x_i^* (Ditlevsen, 1981b).

Para estimar os parâmetros da distribuição normal equivalente, $\mu_{X_i}^N$ e $\sigma_{X_i}^N$, utilizaram duas condições. Consideraram que as funções distribuição e densidade de probabilidade das variáveis aleatórias originais e das variáveis normais equivalentes deviam ser iguais no ponto de dimensionamento $(x_1^*, \dots, x_n^*)$. Assim, para cada uma das variáveis originais não normais e independentes, X_i , igualaram a sua função distribuição, $F_{X_i}(x_i^*)$, à da variável normal equivalente no ponto $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ obtendo:

$$F_{X_i}(x_i^*) = \Phi\left(\frac{x_i^* - \mu_{X_i}^N}{\sigma_{X_i}^N}\right) \Leftrightarrow \mu_{X_i}^N = x_i^* - \Phi^{-1}(F_{X_i}(x_i^*))\sigma_{X_i}^N \quad (3.13)$$

Procedendo da mesma forma relativamente às funções densidade de probabilidade das variáveis aleatórias originais e suas equivalentes normais obtém-se:

$$\frac{1}{\sigma_{X_i}^N} \phi\left(\frac{x_i^* - \mu_{X_i}^N}{\sigma_{X_i}^N}\right) = f_{X_i}(x_i^*) \Leftrightarrow \sigma_{X_i}^N = \frac{\phi\{\Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i^*)]\}}{f_{X_i}(x_i^*)} \quad (3.14)$$

Depois de determinar os valores de $\mu_{X_i}^N$ e $\sigma_{X_i}^N$ pode utilizar-se o algoritmo de Rackwitz, apresentado no método de Hasofer-Lind, para calcular β_{HL} e obter a probabilidade de rotura através da expressão $p_f = \Phi(-\beta) = 1 - \Phi(\beta)$.

Neste tipo de transformações, onde se aproximam distribuições não normais a outras distribuições normais equivalentes, há certos cuidados a ter em conta pois à medida que a assimetria da distribuição não normal, da variável aleatória original, vai aumentando a precisão da aproximação a uma normal equivalente vai diminuindo. Aliás, em distribuições não normais com grandes assimetrias as expressões dadas por (3.13) e (3.14) para obter $\mu_{X_i}^N$ e $\sigma_{X_i}^N$ necessitam de ajustes. Neste caso, Rackwitz e Fiessler (1978) referem que a média e o desvio padrão da variável normal equivalente podem ser estimados através das expressões:

$$\mu_{X_i}^N = F_{X_i}^{-1}(0.5) = \text{mediana de } X_i \quad (3.15)$$

$$\sigma_{X_i}^N = \frac{x_i^* - \mu_{X_i}^N}{\Phi^{-1}\left(F_{X_i}(x_i^*)\right)} \quad (3.16)$$

Se as variáveis aleatórias básicas têm distribuições com grandes assimetrias, são correlacionadas e têm valores de x_i^* elevados, então usando (3.13) $\mu_{X_i}^N$ terá valores muito pequenos. Isto pode trazer alguns problemas pois em certos casos a validade da distribuição de uma variável aleatória pode ficar restringida apenas a uma parte do seu domínio. Para contornar este problema é sugerido um limite inferior para o valor de $\mu_{X_i}^N$ igual a zero. Desta forma, obtêm-se estimativas relativamente precisas para β e p_f . Assim, se $\mu_{X_i}^N < 0$ então:

$$\mu_{X_i}^N = 0 \quad (3.17)$$

$$\sigma_{X_i}^N = \frac{x_i^*}{\Phi^{-1}\left(F_{X_i}(x_i^*)\right)} \quad (3.18)$$

caso contrário devem usar-se as equações (3.13) e (3.14).

3.5 Transformações de variáveis aleatórias não normais e correlacionadas

Na engenharia, tal como noutras ciências, utilizam-se com frequência modelos multivariados para descrever a dependência entre variáveis aleatórias.

Neste caso $\mathbf{X}$ é um vector constituído por variáveis aleatórias correlacionadas com distribuição não normal. Devido à natureza dos seus problemas e ao tipo de dados utilizados, em muitas aplicações a função densidade de probabilidade conjunta dessas variáveis não é conhecida. A informação disponível muitas vezes reduz-se à matriz de correlações existente entre as variáveis aleatórias, $\mathbf{R}$, cujos coeficientes são dados por:

$$\rho_{ij} = \frac{\text{Cov}(X_i, X_j)}{\sigma_i \cdot \sigma_j} \quad (3.19)$$

assim como às suas distribuições marginais (função densidade de probabilidade e função distribuição). Nesses casos podem aplicar-se as transformações de Morgenstern ou de Nataf de forma a obter um conjunto de variáveis aleatórias independentes com distribuição normal para aplicar nos métodos FORM. Uma possível alternativa quando as funções densidade de probabilidade condicionais de $\mathbf{X}$ são conhecidas é a transformação de Rosenblatt (Minguez *et al.*, 2006).

3.5.1 Transformação de Rosenblatt

Quando a função densidade de probabilidade conjunta e a função distribuição conjunta são conhecidas pode aplicar-se a transformação de Rosenblatt e assim obter um conjunto de variáveis aleatórias independentes normalmente distribuídas que podem depois ser utilizadas nos métodos FORM.

Na sua forma mais geral, pode dizer-se que um conjunto de n variáveis aleatórias dependentes $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$, com função distribuição conjunta $F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n)$, pode ser transformado num conjunto de n variáveis aleatórias independentes e uniformemente distribuídas $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_n)$ através da transformação de Rosenblatt $\mathbf{R} = T(\mathbf{X})$ (Rosenblatt, 1952):

$$\begin{aligned}
 r_1 &= F_{X_1}(x_1) \\
 r_2 &= F_{X_2}(x_2 | x_1) \\
 &\vdots \\
 r_n &= F_{X_n}(x_n | x_1, \dots, x_{n-1})
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

onde $F_{X_i}(x_i | x_1, \dots, x_{i-1})$ é a função distribuição condicional de X_i . Se a função densidade de probabilidade conjunta é conhecida então pode obter-se a função distribuição condicional da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 f(x_1, \dots, x_n) &= f_1(x_1) \cdot f_2(x_2 | x_1) \cdots f_n(x_n | x_1, \dots, x_{n-1}) = \\
 &= f_1(x_1) \prod_{i=2}^n f_i(x_i | x_1, \dots, x_{i-1})
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

onde:

$$f_i(x_i | x_1, \dots, x_{i-1}) = \frac{f_{X_i}(x_1, \dots, x_i)}{f_{X_{i-1}}(x_1, \dots, x_{i-1})} , \tag{3.22}$$

sendo

$$f_{X_j}(x_1, \dots, x_j) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_{j+1} \cdots dx_n \tag{3.23}$$

a função densidade de probabilidade marginal de $(X_1, \dots, X_j)$.

Assim, a função distribuição condicional pode ser obtida através da expressão:

$$F_{X_i}(x_i | x_1, \dots, x_{i-1}) = \int_{-\infty}^{x_i} f_i(x_i | x_1, \dots, x_{i-1}) dx_i . \tag{3.24}$$

Depois de calcular todas estas funções, $F_{X_i}(\cdot | \cdot)$, as expressões em (3.20) podem ser invertidas até obter:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= F_{X_1}^{-1}(r_1) \\
 x_2 &= F_{X_2}^{-1}(r_2 | x_1) \\
 &\vdots \\
 x_n &= F_{X_n}^{-1}(r_n | x_1, \dots, x_{n-1})
 \end{aligned} . \tag{3.25}$$

Uma das dificuldades na aplicação das expressões (3.25) é que se as funções $F_{X_i}(\cdot|\cdot)$ não tiverem uma forma simples a inversa terá de ser obtida numericamente (Hohenbichler e Rackwitz, 1981). Além disso, há $n!$ formas de escrever as expressões (3.20) (Rosenblatt, 1952). Esta liberdade pode levar a que surjam algumas diferenças na resolução de (3.25).

Um caso particular de grande interesse na aplicação desta transformação é quando queremos transformar uma distribuição noutra aplicando (3.20) duas vezes e utilizando $\mathbf{R}$ como variável intermédia. Como por exemplo, para converter variáveis aleatórias correlacionadas com distribuição não normal em variáveis aleatórias equivalentes com distribuição normal padrão e independentes.

Seja $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_n)$ um vector de variáveis aleatórias uniformemente distribuídas. Estas serão as variáveis intermédias entre as variáveis aleatórias correlacionadas com distribuição não normal, definidas no espaço original e representadas pelo vector $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$, e as variáveis aleatórias equivalentes com distribuição normal padrão e independentes, representadas pelo vector $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)$. Assim, aplicando a transformação de Rosenblatt:

$$\begin{aligned}\Phi(z_1) &= r_1 = F_{X_1}(x_1) \\ \Phi(z_2) &= r_2 = F_{X_2}(x_2 | x_1) \\ &\vdots \\ \Phi(z_n) &= r_n = F_{X_n}(x_n | x_1, \dots, x_{n-1})\end{aligned}\tag{3.26}$$

onde $\Phi(\cdot)$ é a função distribuição da lei normal padrão. Aplicando a transformação inversa às equações (3.26) obtêm-se as variáveis aleatórias com distribuição normal padrão não correlacionadas, $(Z_1, \dots, Z_n)$:

$$\begin{aligned}z_1 &= \Phi^{-1}[F_{X_1}(x_1)] \\ z_2 &= \Phi^{-1}[F_{X_2}(x_2 | x_1)] \\ &\vdots \\ z_n &= \Phi^{-1}[F_{X_n}(x_n | x_1, \dots, x_{n-1})]\end{aligned}\tag{3.27}$$

Em algumas aplicações pode ser necessário calcular a transformação inversa das equações (3.27), $\mathbf{X} = T^{-1}(\mathbf{Z})$. A partir dessas equações podem realizar-se com facilidade as n transformações unidimensionais, obtendo-se:

$$\begin{aligned}x_1 &= F_{x_1}^{-1}[\Phi(z_1)] \\x_2 &= F_{x_2}^{-1}[\Phi(z_2) | x_1] \\&\vdots \\x_n &= F_{x_n}^{-1}[\Phi(z_n) | x_1, \dots, x_{n-1}]\end{aligned}\tag{3.28}$$

Melchers (1999) refere que esta transformação sendo normalmente atribuída a Rosenblatt (1952) parece ter sido dada anteriormente por Segal (1938) e sugerida pela primeira vez para aplicação na fiabilidade estrutural por Hohenbichler e Rackwitz (1981).

Se as variáveis aleatórias X_i são independentes todas as expressões condicionais de (3.26) a (3.28) desaparecem, passando a transformação a ser idêntica da apresentada na secção 4.4.2 e dada por (3.12).

Na prática, os dados necessários para descrever completamente a função densidade de probabilidade conjunta $f_x(x_1, \dots, x_n)$ podem não estar disponíveis. Muitos dos problemas relacionados com a fiabilidade estrutural que estão sujeitos a uma informação probabilística incompleta estão relacionados com o método dos segundos momentos, onde apenas o vector dos valores médios e a matriz de covariâncias das variáveis aleatórias básicas são conhecidos (Ditlevsen, 1979a; Hasofer e Lind, 1974; Madsen *et. al.*, 2006). Nestes casos, se apenas as distribuições de probabilidade marginais (funções de densidade de probabilidade e funções distribuição) e a matriz de correlações estão disponíveis, mesmo para variáveis aleatórias com distribuição não normal, podem aplicar-se as transformações de Nataf ou de Morgenstern para obter um conjunto de variáveis aleatórias independentes com distribuição normal padrão e poder usá-las nos métodos FORM.

3.5.2 Transformação de Morgenstern

Este método foi desenvolvido por Morgenstern para duas variáveis aleatórias X_1 e X_2 com covariância e funções de distribuição marginais conhecidas $F_{x_1}(X_1)$ e $F_{x_2}(X_2)$ mas foi S.

Kotz quem sugeriu a sua generalização a n variáveis aleatórias $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ (Liu e Der Kiureghian, 1986).

A função distribuição conjunta de $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ é dada por:

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i) \left\{ 1 + \sum_{i < j} \alpha_{ij} [1 - F_{X_i}(x_i)] [1 - F_{X_j}(x_j)] + \right. \\ \left. + \sum_{i < j < k} \alpha_{ijk} [1 - F_{X_i}(x_i)] [1 - F_{X_j}(x_j)] [1 - F_{X_k}(x_k)] + \dots \right\}, \quad (3.29)$$

sendo a função densidade probabilidade conjunta:

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) \left\{ 1 + \sum_{i < j} \alpha_{ij} [1 - 2F_{X_i}(x_i)] [1 - 2F_{X_j}(x_j)] + \right. \\ \left. + \sum_{i < j < k} \alpha_{ijk} [1 - 2F_{X_i}(x_i)] [1 - 2F_{X_j}(x_j)] [1 - 2F_{X_k}(x_k)] + \dots \right\}. \quad (3.30)$$

Esta técnica é válida se $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) \geq 0$, ou seja, quando para todos os parâmetros α se tem $|\alpha_{ij}| \leq 1$, $|\alpha_{ijk}| \leq 1$, etc. (De notar que $|\alpha_{ij}| \leq 1$ são apenas condições suficientes para garantir que para cada X_i e X_j $f_{X_i X_j}(x_i, x_j) \geq 0$).

Os parâmetros α estão relacionados com os coeficientes de correlação ρ da seguinte forma:

$$\alpha_{12\dots k} = \frac{\rho_{12\dots k}}{(-2)^k \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot \dots \cdot Q_k} \quad (3.31)$$

onde:

$$Q_i = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right) \cdot f_{X_i}(x_i) \cdot F_{X_i}(x_i) dx_i. \quad (3.32)$$

Alguns exemplos com valores de Q_i para distribuições que se podem reduzir à sua forma padrão através de uma transformação linear e distribuições que não são redutíveis a uma forma padrão podem ser obtidos em Liu e Der Kiureghian (1986).

Esta técnica só deve ser utilizada apenas para variáveis aleatórias com baixos coeficientes de correlação: $|\rho_{ij}| \leq 0.3$ (Liu e Der Kiureghian, 1986). Daí que em muitas aplicações este método não se possa utilizar.

3.5.3 Transformação de Nataf

Tal como já foi referido, para aplicar a transformação de Rosenblatt é necessário conhecer a função densidade de probabilidade conjunta $f_X(x_1, \dots, x_n)$ para obter as variáveis aleatórias não correlacionadas com distribuição normal padrão. No entanto, em muitas aplicações de engenharia essa função não é conhecida e a única informação disponível sobre as variáveis aleatórias está limitada à média μ_X , à matriz de correlações ρ e às funções de distribuição marginais $F_{X_i}(x_i)$. Nestes casos, como já foi referido, pode utilizar-se a transformação de Morgenstern. No entanto, devido às suas limitações em termos de coeficientes de correlação, geralmente utiliza-se a transformação de Nataf.

A transformação de Nataf pode ser aplicada a uma maior amplitude de valores de coeficientes de correlação mas se as variáveis aleatórias têm uma distribuição muito afastada da normal as funções densidade de probabilidade podem ter um comportamento não desejável (Liu e Der Kiureghian, 1986; Minguez *et al.*, 2006).

Supondo que $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ é um vector de n variáveis aleatórias correlacionadas com distribuição não normal, com matriz de correlações ρ e funções densidade de probabilidade marginais $f_{X_i}(x_i)$ e funções de distribuição marginais $F_{X_i}(x_i)$ dadas.

Se for aplicada a transformação de caudas normais às variáveis aleatórias originais vai obter-se um conjunto de variáveis correlacionadas equivalentes mas com distribuição normal $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$. Nesse caso considera-se para $i = 1, \dots, n$:

$$\Phi(y_i) = F_{X_i}(x_i) \Leftrightarrow y_i = \Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i)] \Leftrightarrow x_i = F_{X_i}^{-1}[\Phi(y_i)] \quad (3.33)$$

onde $\Phi(\cdot)$ é a função distribuição da normal padrão. Como $\mathbf{Y}$ é o vector constituído por n variáveis aleatórias normais, equivalentes às variáveis originais, Rackwitz e Fiessler (1978) utilizaram o ponto de dimensionamento para estabelecerem a seguinte relação:

$$x_i = \sigma_{x_i}^E \cdot y_i + \mu_{x_i}^E \quad (3.34)$$

onde $\mu_{x_i}^E$ e $\sigma_{x_i}^E$ são a média e o desvio padrão das variáveis aleatórias normais equivalentes às variáveis originais. A equação (3.34) pode ser definida na forma matricial através da seguinte expressão:

$$\mathbf{X}^T = [\sigma^E] \mathbf{Y}^T + (\mu^E)^T \quad (3.35)$$

onde

$$[\sigma^E] = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{x_2}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{x_n}^E \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

Através da equação (3.33) obtém-se a seguinte expressão:

$$\phi(y_i) = f_{x_i}(x_i) \frac{dx_i}{dy_i} = \sigma_{x_i}^E f_{x_i}(x_i). \quad (3.37)$$

Desta forma podemos estabelecer as seguintes relações:

$$\sigma_{x_i}^E = \frac{\phi(y_i)}{f_{x_i}(x_i)} = \frac{\phi\{\Phi^{-1}[F_{x_i}(x_i)]\}}{f_{x_i}(x_i)} \quad (3.38)$$

$$\mu_{x_i}^E = x_i - \Phi^{-1}[F_{x_i}(x_i)] \cdot \sigma_{x_i}^E \quad (3.39)$$

Como $(X_1, \dots, X_n)$ são variáveis aleatórias com matriz de correlação ρ a transformação de caudas normais irá transformá-las em variáveis normais $(Y_1, \dots, Y_n)$ que também estão correlacionadas. No entanto, a matriz de correlação que se obtém depois de aplicar a transformação de caudas normais, ρ' , não é igual à matriz de correlação das variáveis originais, ρ . Desta forma há que determinar esta nova matriz de correlações ρ' . De acordo com Nataf (Der Kiureghian e Liu, 1986; Liu e Der Kiureghian, 1986; Haukaas e Der Kiureghian, 2004) a função densidade de probabilidade conjunta de $\mathbf{X}$ é dada por:

$$f_x(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \phi_n(y_1, \dots, y_n; \rho') =$$

$$= \frac{f_{x_1}(x_1) \cdots f_{x_n}(x_n)}{\phi(y_1) \cdots \phi(y_n)} \phi_n(y_1, \dots, y_n; \rho') \quad (3.40)$$

onde:

$$\frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \frac{f_{x_1}(x_1) \cdots f_{x_n}(x_n)}{\phi(y_1) \cdots \phi(y_n)} \quad (3.41)$$

é o jacobiano da transformação, y_i é dado por (3.33), $\phi(\cdot)$ a função densidade de probabilidade da distribuição normal padrão e $\phi_n(y_1, \dots, y_n; \rho')$ a função densidade de probabilidade da distribuição normal n-dimensional com valores médios zero, desvios padrão unitários e matriz de correlações ρ' , sendo dada por:

$$\phi_n(\mathbf{Y}; \rho') = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\rho'|}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{Y}^T \rho'^{-1} \mathbf{Y}\right). \quad (3.42)$$

Os elementos ρ'_{ij} de ρ' são definidos em função dos coeficientes de correlação ρ_{ij} , relativo a X_i e X_j , através do integral (Der Kiureghian e Liu, 1986; Liu e Der Kiureghian, 1986):

$$\rho_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right) \left(\frac{x_j - \mu_j}{\sigma_j} \right) \frac{f_{x_i}(x_i) f_{x_j}(x_j)}{\phi(y_i) \phi(y_j)} \phi_2(y_i, y_j, \rho'_{ij}) dx_i dx_j =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right) \left(\frac{x_j - \mu_j}{\sigma_j} \right) \phi_2(y_i, y_j, \rho'_{ij}) dy_i dy_j \quad (3.43)$$

Para cada par de variáveis aleatórias X_i e X_j , com funções densidade de probabilidade marginais e coeficiente de correlação ρ_{ij} dados, a equação (3.43) pode ser resolvida através de um processo iterativo para obter o valor de ρ'_{ij} . De forma a evitar os cálculos bastante morosos para resolver essa equação, Liu e Der Kiureghian (1986) desenvolveram

um conjunto de fórmulas que relacionam ρ'_{ij} com ρ_{ij} e se baseiam em algumas propriedades fundamentais da equação (3.43). Para obter a solução de ρ'_{ij} propuseram a seguinte fórmula aproximada:

$$\rho'_{ij} = F_{ij} \cdot \rho_{ij} \quad (3.44)$$

onde $F_{ij} \geq 1$ é função de ρ_{ij} , $\delta_i (= \sigma_i / \mu_i)$ e $\delta_j (= \sigma_j / \mu_j)$. Os valores aproximados para F_{ij} podem ser obtidos na literatura e variam em função das distribuições que as variáveis aleatórias básicas apresentam (Liu e Der Kiureghian, 1986).

Assim, obtemos um conjunto de variáveis aleatórias, $(Y_1, \dots, Y_n)$, com distribuição normal e matriz de correlações ρ' . Para obter variáveis aleatórias não correlacionadas equivalentes com distribuição normal padrão, $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$, é necessário aplicar outra transformação que pode ser dada através da seguinte expressão:

$$Y^T = [L] Z^T \Leftrightarrow Z^T = [L]^{-1} Y^T \quad (3.45)$$

onde $[L]$ é a matriz triangular inferior obtida através da decomposição de Cholesky da matriz de correlações ρ' (Rubinstein, 1981):

$$[\rho'] = [L][L]^T \quad (3.46)$$

$$L_{ij} = \frac{\rho_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} L_{jk}}{\left(\rho_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{jk}^2 \right)^{1/2}} \quad (3.47)$$

onde

$$\sum_{k=1}^0 L_{ik} L_{jk} = 0, \quad 1 \leq j \leq i \leq n. \quad (3.48)$$

Como $[L]$ é uma matriz ortogonal $[L]^{-1} = [L]^T$. Utilizando a equação (3.35), podemos escrever a equação (3.45) utilizando as variáveis aleatórias originais:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}^T &= [\mathbf{L}]^{-1} \mathbf{Y}^T = \\ &= [\mathbf{L}]^{-1} [\boldsymbol{\sigma}^E]^{-1} [\mathbf{X}^T - (\boldsymbol{\mu}^E)^T] = \\ &= [\mathbf{T}]^{-1} [\mathbf{X}^T - (\boldsymbol{\mu}^E)^T] \end{aligned} \quad (3.49)$$

onde $[\mathbf{T}] = [\boldsymbol{\sigma}^E][\mathbf{L}]$.

Assim, as variáveis aleatórias correlacionadas com distribuição não normal $(X_1, \dots, X_n)$ podem ser obtidas através das variáveis aleatórias não correlacionadas com distribuição normal padrão $(Z_1, \dots, Z_n)$ utilizando a expressão:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^T &= [\boldsymbol{\sigma}^E][\mathbf{L}]\mathbf{Z}^T + (\boldsymbol{\mu}^E)^T = \\ &= [\mathbf{T}]\mathbf{Z}^T + (\boldsymbol{\mu}^E)^T \end{aligned} \quad (3.50)$$

Uma área da engenharia onde a transformação de Nataf é muito utilizada é na avaliação da fiabilidade estrutural. Normalmente quando se quer transformar variáveis aleatórias $\mathbf{X}$ para o espaço normal padronizado.

3.5.4 Exemplo de aplicação

Considere-se $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_5)$ um vector com *cinco* variáveis aleatórias correlacionadas com distribuição não normal e com funções densidade de probabilidade marginais $f_{x_i}(x_i)$ e funções de distribuição marginais $F_{x_i}(x_i)$ conhecidas. As distribuições das variáveis aleatórias são:

X_1 segue uma distribuição de Tipo I (Gumbel de máximos) de parâmetros $\mu = 135KN$, $\sigma = 40KN$ com coeficiente de variação $\delta_1 = 0.296$;

X_2 segue uma distribuição Lognormal de parâmetros $\mu = 65KN$, $\sigma = 20KN$ com coeficiente de variação $\delta_2 = 0.30769$;

X_3 segue uma distribuição de Tipo I (Gumbel de máximos) de parâmetros $\mu = 160KN$, $\sigma = 35KN$ com coeficiente de variação $\delta_3 = 0.21875$;

X_4 segue uma distribuição Lognormal de parâmetros $\mu = 50KN$, $\sigma = 15KN$ com coeficiente de variação $\delta_4 = 0.3$;

X_5 segue uma distribuição de Tipo I (Gumbel de máximos) de parâmetros $\mu = 150KN$, $\sigma = 30KN$ com coeficiente de variação $\delta_5 = 0.2$.

A matriz de correlações é dada por:

$$\rho = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.3 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.3 & 1.0 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 1.0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 & 1.0 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

Como as distribuições não são normais vai aplicar-se a transformação de caudas normais às variáveis aleatórias originais para obter um conjunto de variáveis correlacionadas equivalentes mas com distribuição normal $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_5)$.

Para obter o valor médio e o desvio padrão das variáveis aleatórias normais equivalentes às variáveis originais vão utilizar-se as equações (3.38) e (3.39) considerando o ponto de dimensionamento igual ao valor médio de cada uma das variáveis aleatórias (Rackwitz e Fiessler, 1978). Para melhorar o ajuste das caudas das distribuições original e normal equivalente utilizaram-se os valores dos parâmetros da variável original aplicando-se uma nova transformação escolhendo o ponto de dimensionamento de forma a manter constante o desvio padrão da distribuição normal equivalente (obtida a partir da transformação de caudas normais) – ver capítulo 5, secção 5.4. As novas variáveis passarão a ter os seguintes parâmetros:

Y_1 segue distribuição Normal com $\mu = 142KN$, $\sigma = 42.3KN$ e $\delta_1 = 0.298$;

Y_2 segue distribuição Normal com $\mu = 68.2KN$, $\sigma = 21.5KN$ e $\delta_2 = 0.315$;

Y_3 segue distribuição Normal com $\mu = 166.2KN$, $\sigma = 35.9KN$ e $\delta_3 = 0.216$;

Y_4 segue distribuição Normal com $\mu = 52.3KN$, $\sigma = 16.1KN$ e $\delta_4 = 0.308$;

Y_5 segue distribuição Normal com $\mu = 155.3KN$, $\sigma = 30.75KN$ e $\delta_5 = 0.198$.

A nova matriz de correlações ρ' , que se obtém depois de aplicar a transformação de caudas normais, pode ser obtida através da equação (3.44) onde os valores aproximados para F_{ij} podem ser obtidos em Liu e Der Kiureghian (1986). Assim, neste caso a matriz ρ' pode ser obtida através do seguinte procedimento:

Se:

X_i = variável com distribuição Lognormal e X_j = variável com distribuição Lognormal

Neste caso F_{ij} é função de ρ_{ij} , $\delta_i (= \sigma_i / \mu_i)$ e $\delta_j (= \sigma_j / \mu_j)$, sendo obtido através da equação:

$$F_{ij} = \frac{\ln(1 + \rho_{ij} \delta_i \delta_j)}{\rho_{ij} \sqrt{\ln(1 + \delta_i^2) \ln(1 + \delta_j^2)}} \quad (3.52)$$

Se:

X_i = variável com distribuição Tipo I (Gumbel de máximos),

X_j = variável com distribuição Tipo I (Gumbel de máximos)

Neste caso F_{ij} é apenas função de ρ_{ij} , sendo obtido através da equação:

$$F_{ij} = 1.064 - 0.069\rho_{ij} + 0.005\rho_{ij}^2 \quad (3.53)$$

Se:

X_i = variável com distribuição Tipo I (Gumbel de máximos),

X_j = variável com distribuição Lognormal

Neste caso F_{ij} é função de ρ_{ij} e $\delta_j (= \sigma_j / \mu_j)$, sendo obtido através da equação:

$$F_{ij} = 1.029 + 0.001\rho_{ij} + 0.014\delta_j + 0.004\rho_{ij}^2 + 0.233\delta_j^2 - 0.197\rho_{ij}\delta_j \quad (3.54)$$

Desta forma, neste exemplo obtêm-se os seguintes valores:

$$\begin{aligned} F_{12} &= 1.029 + 0.001 \times 0.3 + 0.014 \times 0.30769 + 0.004 \times 0.3^2 + \\ &\quad + 0.233 \times 0.30769^2 - 0.197 \times 0.3 \times 0.30769 = \\ &= 1.0378420217113 \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$F_{13} = 1.064 - 0.069 \times 0.2 + 0.005 \times 0.2 = 1.0512 \quad (3.56)$$

$$F_{24} = \frac{\ln(1 + 0.1 \times 0.30769 \times 0.3)}{0.1 \sqrt{\ln(1 + 0.30769^2) \times \ln(1 + 0.3^2)}} = 1.040691966 \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} F_{32} &= 1.029 + 0.001 \times 0.2 + 0.014 \times 0.30769 + 0.004 \times 0.2^2 + \\ &\quad + 0.233 \times 0.30769^2 - 0.197 \times 0.2 \times 0.30769 = \\ &= 1.0436035147113 \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} F_{54} &= 1.029 + 0.001 \times 0.3 + 0.014 \times 0.3 + 0.004 \times 0.3^2 + \\ &\quad + 0.233 \times 0.3^2 - 0.197 \times 0.3 \times 0.3 = \\ &= 1.0371 \end{aligned} \quad (3.59)$$

Consequentemente:

$$\rho'_{12} = F_{12} \times \rho_{12} = 1.0378420217113 \times 0.3 = 0.31135 = \rho'_{21} \quad (3.60)$$

$$\rho'_{13} = F_{13} \times \rho_{13} = 1.0512 \times 0.2 = 0.21024 = \rho'_{31} \quad (3.61)$$

$$\rho'_{24} = F_{24} \times \rho_{24} = 1.040691966 \times 0.1 = 0.10407 = \rho'_{42} \quad (3.62)$$

$$\rho'_{32} = F_{32} \times \rho_{32} = 1.0436035147113 \times 0.2 = 0.20872 = \rho'_{23} \quad (3.63)$$

$$\rho'_{54} = F_{54} \times \rho_{54} = 1.0371 \times 0.3 = 0.31113 = \rho'_{45} \quad (3.64)$$

A nova matriz de correlações ρ' é dada por:

$$\rho' = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.31135 & 0.21024 & 0 & 0 \\ 0.31135 & 1.0 & 0.20872 & 0.10407 & 0 \\ 0.21024 & 0.20872 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.10407 & 0 & 1.0 & 0.31113 \\ 0 & 0 & 0 & 0.31113 & 1.0 \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

Assim, obtém-se um conjunto de cinco variáveis aleatórias, $(Y_1, \dots, Y_5)$, com distribuição normal e matriz de correlações ρ' . Aplicando a equação (3.49) obtêm-se cinco variáveis aleatórias não correlacionadas equivalentes com distribuição normal padrão, $Z = (Z_1, \dots, Z_5)$.

Capítulo 4

Métodos de Simulação

4.1 Introdução

Como já foi visto anteriormente a probabilidade de rotura, na sua forma mais geral, é definida através do integral múltiplo da função densidade de probabilidade conjunta do vector X , de dimensão n , das variáveis aleatórias básicas no domínio da rotura definida pela função de estado limite $G(X)$, ou seja:

$$p_f = P(G(X) \leq 0) = \int \dots \int_{G(X) \leq 0} f_X(X) dX \quad (4.1)$$

O cálculo exacto deste integral é possível apenas para alguns casos especiais de pouco interesse prático.

Muitos dos métodos numéricos utilizados na teoria de fiabilidade clássica para estimar o índice de segurança, ou a probabilidade de rotura, são aplicáveis quando as equações que traduzem o estado limite são funções explícitas das variáveis aleatórias do problema. Também há casos em que a avaliação da segurança de uma estrutura está relacionada com equações de estado limite que são funções implícitas das variáveis aleatórias do problema. De qualquer forma a utilização destas técnicas para estimar a probabilidade de rotura

requer bastantes conhecimentos na área das probabilidades e estatística, já para não falar nos casos em que o cálculo dessa probabilidade é impraticável.

De facto, geralmente, esse cálculo é de difícil resolução mesmo nos casos em que a função de estado limite é linear, ou as cargas e resistências têm distribuições normais, ou as variáveis aleatórias básicas são todas normalmente distribuídas ou quando se utilizam técnicas numéricas usuais. No entanto, normalmente, as funções de estado limite não são lineares assim como é pouco provável que as variáveis aleatórias básicas de um problema estrutural sejam todas normalmente distribuídas. Para lidar com estes problemas costumam utilizar-se técnicas de simulação que permitem obter estimativas não enviesadas do integral (4.1) em problemas para os quais a função de estado limite $G(X) = 0$ pode ter qualquer forma e as variáveis aleatórias básicas X_i qualquer distribuição.

A acessibilidade que existe hoje em dia a computadores e software torna as técnicas de simulação em processos muito simples, sendo possível calcular a probabilidade de rotura tanto para funções de estado limite implícitas como explícitas sem a necessidade de ter grandes conhecimentos na área das probabilidades e estatística. Este é um dos grandes motivos pelo que quando se quer desenvolver ou melhorar modelos de verificação de segurança subjacentes à teoria da fiabilidade clássica ou se quer testar uma nova técnica, os métodos de simulação são utilizados como forma de comparação através do cálculo da probabilidade de rotura.

4.2 Método de simulação de Monte Carlo

As técnicas de simulação que mais se utilizam baseiam-se no método de Monte Carlo. Este é considerado muito útil como uma ferramenta de verificação no desenvolvimento de métodos mais refinados como os métodos de fiabilidade e perturbação.

Na análise da fiabilidade estrutural simula-se cada uma das variáveis aleatórias básicas do problema X_i com base nas suas distribuições para obter de cada uma um valor amostral $\hat{x}_i$. Em seguida testa-se a função de estado limite $G(\hat{X}) = 0$ e se este é violado $G(\hat{X}) \leq 0$ considera-se que a estrutura teve uma falha. Se a experiência é repetida N vezes, onde em

cada uma delas se utiliza um vector aleatório distinto $\hat{X}$ de valores $\hat{x}_i$, a probabilidade de rotura é dada aproximadamente por:

$$p_f \approx \frac{n(G(\hat{X}) \leq 0)}{N} , \quad (4.2)$$

onde $n(G(\hat{X}) \leq 0)$ representa o número de experiências para o qual $G(\hat{X}) \leq 0$.

A simulação das variáveis aleatórias básicas é feita através de um gerador de números aleatórios cujos valores têm distribuições idênticas às respectivas variáveis. Para isso utiliza-se um algoritmo disponível em todos os sistemas de computadores actuais que permite gerar uma sequência de números pseudo-aleatórios com distribuição uniforme no intervalo $]0, 1[$. Designam-se pseudo-aleatórios porque os valores não são puramente aleatorizados, o algoritmo utilizado é baseado numa fórmula matemática recursiva que a partir de um determinado número, definido a priori (normalmente chamado *semente* por ser o valor que dá origem a uma sequência de números aleatórios), permite gerar todos os seguintes. Por isso sempre que se parte da mesma semente obtém-se sempre a mesma sequência de números aleatórios. Existem vários algoritmos para gerar números deste tipo, devendo a sua qualidade ser testada de forma a garantir a independência e uniformidade da distribuição (Rubinstein, 1981).

O número de experiências a realizar depende da probabilidade de rotura que se pretende fixar e da função que descreve o estado limite. A irregularidade de $G(X)$ assim como probabilidades muito pequenas faz com que esse número tenda a aumentar. Estes são os principais inconvenientes do método de Monte Carlo.

Se o número de simulações N tender para infinito e o gerador de números pseudo-aleatórios verificar as propriedades de independência e uniformidade o método de Monte Carlo fornece resultados exactos:

$$p_f = P(G(\hat{X}) \leq 0) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{n(G(\hat{X}) \leq 0)}{N} . \quad (4.3)$$

Na aplicação do método de Monte Carlo a problemas de fiabilidade estrutural podem considerar-se seis fases distintas:

1. Definição de todas as variáveis aleatórias básicas do problema;
2. Definição das suas distribuições e parâmetros;
3. Simulação de valores para essas variáveis aleatórias com base nas suas distribuições:

$$X^{(i)} = \left(X_1^{(i)}, \dots, X_n^{(i)} \right); \quad i = 1, \dots, \text{número total de elementos da amostra};$$

n = número total de variáveis aleatórias básicas;

4. Obtenção de uma resposta estrutural, $Y^{(i)}$, a partir de cada conjunto de simulações das variáveis aleatórias básicas, $X^{(i)}$;
5. Avaliação das respostas estruturais (a partir de N realizações do passo 4);
6. Determinar a precisão e eficiência da simulação realizada.

4.2.1 Geração de números aleatórios

A geração de números aleatórios para uma determinada distribuição é o aspecto fulcral da técnica de simulação de Monte Carlo.

Um número aleatório é um número escolhido ao acaso de uma determinada distribuição de forma que a selecção de uma grande quantidade desses números possa reproduzir a distribuição subjacente. Normalmente, impõe-se que esses números sejam independentes de forma a não existirem correlações entre valores sucessivos. Hoje em dia qualquer computador consegue gerar números pseudo-aleatórios.

Numa experiência pode ser necessário obter um valor amostral para cada variável aleatória básica através de um processo aleatório. Uma variável aleatória que vai ser gerada pode ser discreta ou contínua. Embora qualquer quantidade de números aleatórios relacionados com uma dada função distribuição, $F_X(X)$, discretos ou contínuos, possa ser gerada a partir de

números aleatórios uniformemente distribuídos no intervalo $]0, 1[$, vai analisar-se cada um dos casos em separado.

4.2.1.1 Geração de números aleatórios para variáveis aleatórias contínuas

Como já foi referido, na prática qualquer computador tem capacidade para gerar números “pseudo-aleatórios” uniformemente distribuídos no intervalo $]0, 1[$. Esse nome deve-se ao facto da maior parte dos geradores de números aleatórios utilizarem um algoritmo que necessita da especificação de um valor inicial que é utilizado como ponto de partida, ao qual se chama *semente*. Sempre que se altera aleatoriamente a semente, que num computador pode ser por exemplo um valor temporal (segundos, minutos, etc.), a sequência de números aleatórios também se altera mas para cada semente essa sequência é sempre igual.

Em muitos casos há que transformar os números aleatórios uniformemente distribuídos, u_i , do intervalo $]0, 1[$, obtidos de uma tabela de números aleatórios ou gerados por um computador, para números aleatórios com determinadas características. A técnica matemática mais geral para o fazer é o chamado método da transformação inversa.

Considere-se uma variável aleatória básica X_i com função distribuição $F_X(x_i)$. Tal como se pode observar na figura 4.1, nesta técnica gera-se um número aleatório uniformemente distribuído, u_i ($0 \leq u_i \leq 1$), e iguala-se esse valor a $F_X(x_i)$ para obter x_i , ou seja:

$$F_X(x_i) = u_i \Leftrightarrow x_i = F_X^{-1}(u_i) . \quad (4.4)$$

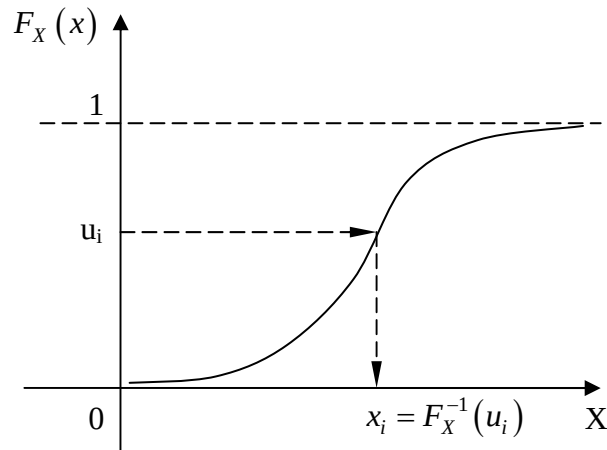


Figura 4.1 – Método da transformação inversa para gerar variáveis aleatórias.

Este método pode ser aplicado desde que exista uma expressão analítica para a função inversa $F_X^{-1}(u_i)$ (como por exemplo para as distribuições Weibull, Gumbel, exponencial, etc.), sendo nestes casos a técnica mais eficiente. Noutros casos, onde não existe inversa, utilizam-se outras expressões que nos dão valores aproximados das distribuições como por exemplo na distribuição normal. Em seguida apresentam-se alguns exemplos.

4.2.1.1.1 Distribuição Uniforme

Considere-se uma variável aleatória X que segue uma distribuição uniforme de parâmetros a e b , $X \sim U(a,b)$. A função densidade de probabilidade e a função distribuição são dadas pelas expressões:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, &]-\infty, a[\cup]b, +\infty[\end{cases} \quad (4.5)$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases} \quad (4.6)$$

Neste caso:

$$\mu = \frac{a+b}{2}, \quad \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \quad \text{e} \quad \gamma_1(x) = 0 \quad (4.7)$$

Nesta distribuição temos as propriedades:

1. Se $X \cap U(a,b) \Rightarrow \frac{x-a}{b-a} = Y \cap U(0,1)$
2. Se $Y \cap U(0,1) \Rightarrow X = a + (b-a)Y \cap U(a,b)$

A geração de números aleatórios para uma distribuição uniforme pode ser realizada através da expressão (4.4). No fundo utiliza-se a propriedade 2. Considerando u_i um número aleatório uniformemente distribuído no intervalo $]0, 1[$ então:

$$u_i = F_x(x_i) = \frac{x-a}{b-a} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_i = a + (b-a)u_i \quad (4.8)$$

Desta forma, para cada valor de u_i o valor de x_i correspondente a uma distribuição uniforme de parâmetros a e b pode ser calculado através da equação (4.8).

4.2.1.1.2 Distribuições de valores extremos

Na engenharia o sucesso ou a rotura de um sistema estrutural pode depender apenas da sua capacidade de funcionar sob cargas extremas, à qual poderá vir a estar sujeito, e não da capacidade de funcionar com cargas usuais. A teoria probabilística de valores extremos está relacionada com o comportamento estocástico dos máximos e dos mínimos de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.). Desta forma, as distribuições de valores extremos são as distribuições limites para o mínimo ou máximo de um grande número de observações aleatórias da mesma distribuição. As propriedades das

distribuições de extremos (máximos ou mínimos), das estatísticas ordinais intermédias e excedências para além de grandes valores (ou para baixo de pequenos valores) são determinadas pelas caudas superior e inferior da distribuição subjacente.

Dependendo das características, as distribuições de valores extremos podem ser divididas em três famílias: Tipo I (Gumbel), Tipo II (Fréchet) e Tipo III (Weibull).

Destas famílias, a distribuição de tipo I é a mais referida em problemas que envolvam valores extremos. Daí muitos autores a chamarem de distribuição de valores extremos. Em referências mais antigas a esta distribuição também a chamavam exponencial dupla devido à forma da sua função distribuição.

As distribuições de tipo II e III podem ser transformadas numa de tipo I através, respectivamente, das expressões:

$$z = \ln(x - \alpha) \quad \text{e} \quad z = -\ln(\alpha - x) . \quad (4.9)$$

Os três tipos de distribuição (I, II e III) podem ser representadas como membros de uma família de distribuição generalizada com função distribuição dada por:

$$P(X \leq x) = \left[1 + \xi \left(\frac{x - \alpha}{\beta} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}}, \quad 1 + \xi \left(\frac{x - \alpha}{\beta} \right) > 0, \quad -\infty < \xi < +\infty, \quad \beta > 0 . \quad (4.10)$$

Para:

$\xi > 0$ obtém-se uma distribuição da mesma forma do tipo II

$\xi < 0$ obtém-se uma distribuição da mesma forma do tipo III

$\xi \rightarrow +\infty$ ou $-\infty$ obtém-se uma distribuição da mesma forma do tipo I

A esta distribuição dá-se o nome de distribuição generalizada de valores extremos, também chamada distribuição de valores extremos do tipo Von Mises ou distribuição do tipo Von Mises-Jenkinson.

Se um sistema estrutural é constituído por n elementos estruturais e o sistema entra em rotura quando o primeiro elemento de entre os n entra em colapso, então a probabilidade de rotura do sistema estrutural é o mínimo das n probabilidades de rotura aleatórias dos

seus elementos. Da mesma forma, a rotura de um elemento estrutural ocorre quando o primeiro dos vários processos que o podem levar ao colapso atinge o seu ponto crítico. Desta forma, na modelação de sistemas estruturais em análise de fiabilidade utilizam-se, em alguns casos, distribuições de valores extremos para o mínimo.

Em resumo, a distribuição de valores extremos a utilizar em determinado problema depende do que estamos interessados em analisar, se o máximo ou o mínimo e ainda se as observações (valores de x) são limitadas superiormente ou inferiormente, isto é, se não há restrições no intervalo correspondente ao domínio de x .

Tipo I - Gumbel

Esta distribuição tem duas formas. Uma é baseada na distribuição limite do mínimo de um grande número de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com caudas não limitadas (isto é, $-\infty < x < +\infty$) e momentos finitos. A outra baseia-se no extremo maior (máximo). Neste caso, se X representa a distribuição dos máximos de uma distribuição de N elementos independentes Y_i então X segue uma distribuição Gumbel (também conhecida como distribuição de valores extremos de tipo I, Fisher-Tippett ou log-Weibull).

Os parâmetros desta distribuição são a moda, α , e β que representa uma medida da dispersão de X . O valor de β é conhecido como o declive da distribuição podendo ser obtido através da representação do papel de probabilidades da Gumbel.

Fórmulas gerais:

1. Distribuição do máximo

Se X é uma variável aleatória com distribuição Gumbel de máximos de parâmetros α e β , $X \sim G(\alpha, \beta)$, então a função densidade de probabilidade e a função distribuição são, assintoticamente, dadas pelas expressões:

$$f_X(x) = \frac{1}{\beta} \cdot e^{\left[-\frac{(x-\alpha)}{\beta} - e^{-\frac{(x-\alpha)}{\beta}} \right]}, \quad -\infty < x < +\infty \quad (4.11)$$

$$F_X(x) = e^{\left[-e^{-\frac{(x-\alpha)}{\beta}} \right]}, \quad -\infty < x < +\infty \quad (4.12)$$

onde $\alpha \in IR$ é o parâmetro de localização e $\beta > 0$ o parâmetro de escala. Tanto α como β podem ser obtidos através dos momentos desta distribuição:

$$E(X) = \mu_X = \alpha + \gamma \cdot \beta \Leftrightarrow \alpha = \mu_X - \gamma \cdot \beta \quad (4.13)$$

$$Var(X) = \sigma_X^2 = \frac{\pi^2 \beta^2}{6} \Leftrightarrow \beta = \frac{\sqrt{6} \sigma_X}{\pi} \quad (4.14)$$

onde $\gamma = 0.5772156649015...$ é a constante de Euler-Mascheroni. Também chamada a constante de Euler, pode ser obtida, de entre as várias expressões desenvolvidas e apresentadas por diversos autores, através da seguinte expressão (Finch, 2003):

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right). \quad (4.15)$$

Foi definida pela primeira vez por Leonhard Euler em 1734 que usou a letra C e referiu que este valor era digno de consideração (Havil, 2003). O símbolo γ foi usado pela primeira vez pelo geômetra Lorenzo Mascheroni em 1790. Em 1736 foi calculado com 16 dígitos por Euler e em 1790 com 32 casas decimais por Mascheroni. Em 1809, Johann Von Soldner verificou que apenas as 19 primeiras casas decimais estavam correctas e calculou esse valor com 40 casas decimais correctas, confirmadas por Gauss e Nicolai em 1812 (Havil, 2003). Em 1988, Bailey refere que não há nenhum algoritmo quadrático que convirja para obter o valor de γ . Em Outubro de 1999 X. Gourdon e P. Demichel conseguiram um recorde de 108 milhões de dígitos para γ (Gourdon e Sebah, 2004).

A (as)simetria é o principal traço caracterizador da forma de uma distribuição de frequências. A assimetria é a falta de simetria do histograma ou do gráfico de barras em relação à recta vertical que passa pela abcissa correspondente à média aritmética. O

método mais simples para medir o grau de assimetria de uma distribuição consiste em comparar as caudas da distribuição ou as medidas de tendência central: a média, a moda e a mediana. Se a cauda esquerda é mais pronunciada do que a direita diz-se que a distribuição tem uma assimetria negativa. Caso contrário diz-se que a assimetria é positiva. Se as caudas são mais ou menos iguais a assimetria é nula. Existem também varias medidas quantitativas do grau de assimetria de uma distribuição, a mais geral é dada por:

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} \quad (4.16)$$

onde μ_i é o momento centrado de ordem i . A notação γ_1 é devida a Karl Pearson mas na diversa bibliografia sobre o assunto também se encontram α_3 (devida a Kenney e Keeping) e $\sqrt{\beta_1}$ (devida a R. A. Fisher).

Na distribuição Gumbel de máximos tem-se:

$$\text{Moda} = \alpha$$

$$\text{Mediana} = \alpha - \beta \ln(\ln 2)$$

$$\alpha_3(x) = \sqrt{\beta_1(x)} = \gamma_1(x) = 1.13955 = \frac{12\sqrt{6}.\zeta(3)}{\pi^3} \quad (4.17)$$

onde $\zeta(3) = 1.2020569...$ é a constante de Apéry, sendo $\zeta(z)$ a função zeta de Riemann. Em 1979, Apéry provou que $\zeta(3)$ é irracional mas não se sabe se é normal (Bailey e Crandall, 2003).

A geração de números aleatórios para uma distribuição Gumbel de máximos pode ser facilmente realizada através da expressão (4.4). Considerando u_i um número aleatório uniformemente distribuído no intervalo $]0, 1[$ então:

$$u_i = F_x(x_i) = e^{\left[-e^{-\frac{(x_i - \alpha)}{\beta}} \right]} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_i = \frac{-\ln[-\ln(u_i)] - \gamma}{\frac{\pi}{\sqrt{6}}} \cdot \sigma_X + \mu_X \quad (4.18)$$

Desta forma, para cada valor de u_i o valor de x_i correspondente a uma distribuição Gumbel de máximos pode ser calculado através da equação (4.18).

2. Distribuição do mínimo

Se X é uma variável aleatória com distribuição Gumbel de mínimos de parâmetros α e β , $X \in G(\alpha, \beta)$, então a função densidade de probabilidade e a função distribuição são, assintoticamente, dadas pelas expressões:

$$f_X(x) = \frac{1}{\beta} \cdot e^{\left[\frac{(x-\alpha)}{\beta} - e^{\frac{(x-\alpha)}{\beta}} \right]} \quad , \quad -\infty < x < +\infty \quad (4.19)$$

$$F_X(x) = 1 - e^{\left[-e^{\frac{(x-\alpha)}{\beta}} \right]} \quad , \quad -\infty < x < +\infty \quad (4.20)$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ é o parâmetro de localização e $\beta > 0$ o parâmetro de escala. Tanto α como β podem ser obtidos através dos momentos desta distribuição:

$$E(X) = \mu_X = \alpha - \gamma \cdot \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \mu_X + \gamma \cdot \beta \quad (4.21)$$

$$\text{Var}(X) = \sigma_X^2 = \frac{\pi^2 \beta^2}{6} \quad \Leftrightarrow \quad \beta = \frac{\sqrt{6} \sigma_X}{\pi} \quad (4.22)$$

A geração de números aleatórios para uma distribuição Gumbel de mínimos pode ser facilmente realizada através da expressão (4.4). Considerando u_i um número aleatório uniformemente distribuído no intervalo $]0, 1[$ então:

$$u_i = F_X(x_i) = 1 - e^{\left[-e^{\frac{(x_i-\alpha)}{\beta}} \right]} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_i = \frac{\ln[-\ln(1-u_i)] + \gamma}{\frac{\pi}{\sqrt{6}}} \cdot \sigma_X + \mu_X \quad (4.23)$$

Desta forma, para cada valor de u_i o valor de x_i , correspondente a uma distribuição Gumbel de mínimos, pode ser calculado através da equação (4.23).

No caso particular em que $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ obtém-se a chamada distribuição de Gumbel padrão:

1. Distribuição do máximo

Se X é uma variável aleatória com distribuição Gumbel de máximos de parâmetros 0 e 1, $X \cap G(0, 1)$, então a função densidade de probabilidade e a função distribuição são, assintoticamente, dadas pelas expressões:

$$f_X(x) = e^{(-x-e^{-x})}, \quad -\infty < x < +\infty \quad (4.24)$$

$$F_X(x) = e^{-e^{-x}}, \quad -\infty < x < +\infty \quad (4.25)$$

Sendo:

$$E(X) = \mu_X = \gamma, \quad Var(X) = \sigma_X^2 = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{e} \quad \gamma_1(x) = \frac{12\sqrt{6} \cdot \zeta(3)}{\pi^3} \quad (4.26)$$

A geração de números aleatórios para uma distribuição Gumbel padrão de máximos pode ser realizada através da expressão (4.4). Considerando u_i um número aleatório uniformemente distribuído no intervalo $]0, 1[$ então:

$$u_i = F_X(x_i) = e^{-e^{-x_i}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_i = -\ln[-\ln(u_i)] \quad (4.27)$$

2. Distribuição do mínimo

Se X é uma variável aleatória com distribuição Gumbel de mínimos de parâmetros 0 e 1, $X \in G(0, 1)$, então a função densidade de probabilidade e a função distribuição são, assintoticamente, dadas pelas expressões:

$$f_X(x) = e^{[x-e^x]} \quad , \quad -\infty < x < +\infty \quad (4.28)$$

$$F_X(x) = 1 - e^{-e^x} \quad , \quad -\infty < x < +\infty \quad (4.29)$$

Sendo:

$$E(X) = \mu_X = -\gamma \quad , \quad Var(X) = \sigma_X^2 = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{e} \quad \gamma_1(x) = \frac{12\sqrt{6}\zeta(3)}{\pi^3} \quad (4.30)$$

A geração de números aleatórios para uma distribuição Gumbel padrão de mínimos pode ser facilmente realizada através da expressão (4.4). Considerando u_i um número aleatório uniformemente distribuído no intervalo $]0, 1[$ então:

$$\begin{aligned} u_i = F_X(x_i) = 1 - e^{-e^{x_i}} & \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x_i = \ln[-\ln(1-u_i)] & \end{aligned} \quad (4.31)$$

Se os valores de x na função densidade de probabilidade são limitados inferiormente (como por exemplo em intervalos de tempo até à falha, $[0, +\infty[$) a distribuição limite é a Weibull.

Tipo III - Weibull

As fórmulas gerais desta distribuição são:

$$f_X(x) = \frac{\alpha}{\beta^\alpha} (x - \mu)^{\alpha-1} \exp\left[-\left(\frac{x - \mu}{\beta}\right)^\alpha\right] \quad , \quad x \geq \mu \quad \alpha, \beta > 0 \quad \text{e} \quad \mu \in \mathbb{R} \quad (4.32)$$

$$F_X(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x-\mu}{\beta}\right)^\alpha}, \quad x \geq \mu \quad \alpha, \beta > 0 \quad \text{e} \quad \mu \in \mathbb{R} \quad (4.33)$$

onde α é o parâmetro de forma, μ o parâmetro de localização e β o parâmetro de escala.

O caso onde $\mu = 0$ é a expressão da distribuição Weibull que, no geral, mais se encontra e a que se chama distribuição Weibull de dois parâmetros; onde:

$$f_X(x) = \frac{\alpha}{\beta^\alpha} x^{\alpha-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right], \quad x \geq 0 \quad \alpha, \beta > 0 \quad (4.34)$$

$$F_X(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha}, \quad x \geq 0 \quad \alpha, \beta > 0 \quad (4.35)$$

Neste caso:

$$\mu = E(X) = \beta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \quad (4.36)$$

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = \beta^2 \Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - E^2(X) \quad (4.37)$$

$$\gamma_1(x) = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{3}{\alpha}\right) \beta^3 - 3\mu\sigma^2 - \mu^3}{\sigma^3} \quad (4.38)$$

Mendenhall e Sincich (1995) propuseram uma forma ligeiramente diferente para esta distribuição:

$$f_X(x) = \frac{\alpha}{\beta} x^{\alpha-1} \exp\left[-\frac{x^\alpha}{\beta}\right], \quad x \geq 0 \quad \alpha, \beta > 0 \quad (4.39)$$

$$F_X(x) = 1 - e^{-\frac{x^\alpha}{\beta}}, \quad x \geq 0 \quad \alpha, \beta > 0 \quad (4.40)$$

Onde:

$$\mu = E(X) = \beta^{1/\alpha} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \quad (4.41)$$

$$\sigma^2 = Var(X) = \beta^{2/\alpha} \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \right] \quad (4.42)$$

No caso em que $\mu = 0$ e $\beta = 1$ obtém-se a distribuição Weibull padrão. Neste caso:

$$f_X(x) = \alpha x^{\alpha-1} e^{-x^\alpha}, \quad x \geq 0 \quad \alpha > 0 \quad (4.43)$$

$$F_X(x) = 1 - e^{-x^\alpha}, \quad x \geq 0 \quad \alpha > 0 \quad (4.44)$$

A geração de variáveis aleatórias com distribuição Weibull pode ser facilmente realizada através da expressão (4.4). Considerando U uma variável aleatória obtida a partir de uma distribuição uniforme no intervalo $(0, 1]$, então a variável X :

$$\begin{aligned} U = F_X(X) &= 1 - e^{-\left(\frac{X-\mu}{\beta}\right)^\alpha} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow X &= \mu + \beta \left[-\ln(1-U) \right]^{1/\alpha} \end{aligned} \quad (4.45)$$

tem uma distribuição Weibull de parâmetros α , μ e β .

Esta distribuição é muito utilizada em problemas que envolvem tempos de vida de objectos (modelar o tempo até à falha de componentes), assim como na teoria de valores extremos, na teoria da fiabilidade estrutural e análise de rotura ou em sistemas de radar para modelar a dispersão do nível dos sinais recebidos.

4.2.1.1.3 Distribuição Rayleigh

Esta distribuição é um caso especial de uma distribuição de Weibull com parâmetros $\alpha = 2$ e $\beta = 2\theta^2$. A função densidade de probabilidade e função distribuição são dadas pelas expressões:

$$f_X(x) = \frac{x e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}}{\theta^2}, \quad x \geq 0 \quad (4.46)$$

$$F_X(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}, \quad x \geq 0 \quad (4.47)$$

onde θ é o parâmetro da distribuição. Neste caso:

$$\mu = E(X) = \theta \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (4.48)$$

$$\sigma^2 = Var(X) = \frac{4-\pi}{2} \theta^2 \quad (4.49)$$

Nesta distribuição há uma relação entre a média e a variância (ou desvio padrão):

$$Var(X) = \frac{4-\pi}{2} \cdot E^2(X) \frac{2}{\pi} \Leftrightarrow E(X) = \sigma(X) \sqrt{\frac{\pi}{4-\pi}} \quad (4.50)$$

A geração de variáveis aleatórias com distribuição Rayleigh pode ser realizada através da expressão (4.4). Considerando U uma variável aleatória gerada por uma distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$ então, como U e $1-U$ têm distribuições idênticas, a variável X :

$$X = \theta \sqrt{-2 \ln(1-U)} = \theta \sqrt{-2 \ln U} \quad (4.51)$$

segue uma distribuição Rayleigh com parâmetro θ (Gentle, 2002 e Elishakoff, 1999).

4.2.1.1.4 Distribuição Normal

Considere-se uma variável aleatória X que segue uma distribuição normal de parâmetros μ_X e σ_X , $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X)$. Como a função distribuição de uma normal não admite inversa não se pode aplicar o método descrito anteriormente. Para este caso específico aplica-se uma transformação proposta por Box e Muller (apresentada pela primeira vez em

1958 nos *Ann. Math. Stat.* n.º 29, pág. 610-611 com o título “A note on the generation of normal deviates”) que permite gerar números aleatórios de variáveis aleatórias normais padrão de uma forma bastante eficiente em termos computacionais. Este método produz um par de valores para duas variáveis aleatórias independentes de uma distribuição normal padrão, v_1 e v_2 , dados por:

$$v_1 = \sqrt{-2 \ln u_1} \cdot \sin(2\pi u_2) \quad (4.52)$$

$$v_2 = \sqrt{-2 \ln u_1} \cdot \cos(2\pi u_2) \quad (4.53)$$

onde u_1 e u_2 são valores gerados por duas variáveis aleatórias independentes contínuas e uniformemente distribuídas no intervalo $]0, 1[$.

Depois de gerar os valores de u_i e transformá-los em v_i através de (4.52) e (4.53) podem finalmente obter-se números aleatórios para a variável X através da expressão:

$$x_i = \mu_X + v_i \cdot \sigma_X \quad (4.54)$$

4.2.1.1.5 Distribuição Lognormal

Uma distribuição lognormal resulta do produto de um grande número de variáveis independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) assim como uma distribuição normal resulta da soma de um grande número de variáveis i.i.d. . Uma variável aleatória X segue uma distribuição lognormal se o logaritmo neperiano de X seguir uma distribuição normal.

Seja X uma variável aleatória com distribuição lognormal de parâmetros:

$$\lambda = E(\ln x) = \mu_{\ln x}$$

e

$$\varepsilon^2 = \text{Var}(\ln x) = \sigma_{\ln x}^2 .$$

Uma distribuição deste tipo é um caso geral da distribuição de Gibrat, que se obtém a partir da distribuição lognormal considerando $\varepsilon = 1$ e $\lambda = 0$. As funções densidade de probabilidade e distribuição são dadas por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot x \cdot \varepsilon} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x - \lambda}{\varepsilon} \right)^2}, \quad 0 \leq x < +\infty, \quad \varepsilon > 0 \quad (4.55)$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\ln x - \lambda}{\varepsilon \sqrt{2}} \right) \right] = \Phi \left(\frac{\ln x - \lambda}{\varepsilon} \right), \quad x \geq 0, \quad \varepsilon > 0 \quad (4.56)$$

onde $\operatorname{erf}(x)$ é a “função erro” obtida quando se integra a função densidade de probabilidade da distribuição normal e é dada por:

$$\operatorname{erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad (4.57)$$

Tal como no caso de uma normal, a função distribuição de uma lognormal também não admite inversa pelo que não se pode aplicar o método da transformação inversa. Nesta distribuição aplica-se a seguinte propriedade:

$$\text{Se } X \cap LN(\mu_X, \sigma_X^2) \Rightarrow U = \ln X \cap \mathcal{N}(\mu_U, \sigma_U^2) \Rightarrow Y = \frac{U - \mu_U}{\sigma_U} \cap \mathcal{N}(0, 1)$$

Sendo CV_X o coeficiente de variação de X , numa distribuição lognormal os momentos são dados por:

$$E(X) = \mu_X = e^{\mu_U + \frac{1}{2}\sigma_U^2} \Leftrightarrow \lambda = \mu_U = \ln \mu_X - \frac{1}{2}\sigma_U^2 \quad (4.58)$$

$$\operatorname{Var}(X) = \sigma_X^2 = \mu_X^2 (e^{\sigma_U^2} - 1) \Leftrightarrow \varepsilon^2 = \sigma_U^2 = \ln(1 + CV_X^2) \quad (4.59)$$

A geração de números aleatórios para uma distribuição lognormal pode ser realizada através das expressões (4.58) e (4.59). Considerando y_i um número aleatório gerado de uma distribuição normal padrão (ver equações (4.52) ou (4.53)) então:

$$y_i = \frac{u_i - \mu_U}{\sigma_U} = \frac{\ln x_i - \ln \mu_X + \frac{1}{2} \ln(1 + CV_X^2)}{\sqrt{\ln(1 + CV_X^2)}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_i = \frac{\mu_X \cdot e^{y_i \cdot \sqrt{\ln(1 + CV_X^2)}}}{\sqrt{1 + CV_X^2}} \quad (4.60)$$

Desta forma, para cada valor de y_i o valor de x_i correspondente a uma distribuição lognormal pode ser calculado através da equação (4.60).

Se $CV_X < 0.3$ então $\mu_U \approx \ln \mu_X$ e $\sigma_U^2 \approx CV_X^2$ pelo que a equação (4.60) pode ser simplificada:

$$y_i = \frac{u_i - \mu_U}{\sigma_U} \approx \frac{\ln x_i - \ln \mu_X}{CV_X} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_i \approx \mu_X \cdot e^{y_i \cdot CV_X} \quad (4.61)$$

4.2.1.2 Geração de números aleatórios para variáveis aleatórias discretas

Se X é uma variável aleatória discreta a sua função distribuição é dada por:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_X(x_i) \quad (4.62)$$

onde $p_X(x_i)$ é a sua função massa de probabilidade.

O método da transformação inversa também pode ser usado para gerar números aleatórios discretos. Depois de gerar um número aleatório uniformemente distribuído, u_i , o valor de x_i é o inteiro mais pequeno que verifica a condição:

$$u_i \leq F_X(x_i) \quad (4.63)$$

4.3 Métodos de simulação pura

As aplicações do método de simulação de Monte Carlo na análise estatística das incertezas em sistemas estruturais podem basear-se na técnica apresentada anteriormente, sendo essa a abordagem mais simples pois é um método de simulação pura, mas não a mais eficiente.

Conhecendo *a priori* as distribuições de probabilidade das variáveis aleatórias básicas de um dado problema estrutural, através deste método é possível simular por computador essas variáveis e calcular a resposta estrutural assim como verificar a função de estado limite. A probabilidade de rotura do problema estrutural em causa tenderá para o valor exacto quanto maior for o número de simulações. Esta é a ideia base do método de simulação de Monte Carlo.

A probabilidade de rotura pode ser descrita da seguinte forma:

$$p_f = \int \dots \int I[G(X)] \cdot f_X(X) dX \quad (4.64)$$

onde $I[G(X)]$ é uma função indicatriz dada por:

$$I[G(X)] = \begin{cases} 1, & G(X) \leq 0 \quad (\text{região de rotura}) \\ 0, & G(X) > 0 \quad (\text{região de segurança}) \end{cases} \quad (4.65)$$

O método de Monte Carlo utiliza sucessivas simulações pelo que se aplicam técnicas discretas de integração. Desta forma o integral da expressão (4.64) pode ser aproximado através do somatório (Melchers, 1999):

$$p_f \approx \tilde{p}_f = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N I[G(X_j) \leq 0] = \frac{n_f}{N} \quad (4.66)$$

onde N é o número total de simulações, X_j o vector das variáveis básicas referente à simulação j e n_f o número total de falhas.

As estimativas obtidas através de (4.66) podem ser melhoradas ajustando uma função distribuição apropriada na zona de interesse - $G(X) \leq 0$. No entanto, a escolha dessa

função pode ser de difícil resolução, principalmente se a resposta estrutural próximo da zona de rotura apresentar um comportamento irregular. Nesse caso, a escolha dos parâmetros da função distribuição podem não estabilizar até que N seja suficientemente elevado.

O problema que se põe é saber qual o número de simulações a realizar para um determinado nível de confiança α .

A precisão da equação (4.66) depende do número total de simulações realizadas, podendo ser expressa de diversas formas. Quando N é suficientemente elevado $\tilde{p}_f$ aproxima-se do verdadeiro valor da probabilidade de rotura p_f .

Uma das formas é avaliar a variância ou o coeficiente de variação (COV) de $\tilde{p}_f$ (Haldar e Mahadevan, 2000a). A sua variância ou COV pode ser estimada considerando que cada simulação constitui uma prova de Bernoulli. Desta forma, o número de falhas em N provas de Bernoulli segue uma distribuição Binomial. Assim, a variância de $\tilde{p}_f$ pode ser dada aproximadamente por:

$$\sigma_{\tilde{p}_f}^2 \approx \frac{(1 - \tilde{P}_f) \tilde{P}_f}{N} . \quad (4.67)$$

Desta forma, o COV pode ser obtido através da expressão:

$$COV_{\tilde{p}_f} \approx \sqrt{\frac{(1 - \tilde{P}_f) \tilde{P}_f}{N}} / \tilde{P}_f . \quad (4.68)$$

Quanto menor for o coeficiente de variação maior será a precisão na obtenção de uma estimativa para a probabilidade de rotura.

Outra forma de estudar o erro associado ao número de simulações é aproximar a distribuição binomial a uma normal e obter um intervalo com 95% de confiança para p_f .

O teorema do limite central diz-nos que a distribuição de $\tilde{p}_f$ se aproxima de uma distribuição normal à medida que N tende para infinito. O valor médio e variância dessa distribuição são dados por:

$$E(\tilde{p}_f) = E\left(I\left[G(X_j)\right] \leq 0\right) \quad (4.69)$$

$$\sigma_{\tilde{p}_f}^2 = \frac{\sigma_{I[G(X_j) \leq 0]}^2}{N} \quad (4.70)$$

Através de (4.70) verifica-se que o desvio padrão de $\tilde{p}_f$ varia directamente com o desvio padrão da função indicatriz e inversamente com $\sqrt{N}$.

Com base no teorema do limite central o número de simulações a realizar pode ser obtido através do intervalo de confiança:

$$P(-k\sigma < \tilde{p}_f - \mu < k\sigma) = \alpha \quad (4.71)$$

onde μ é dado por (4.69) e σ por (4.70). Como $\sigma_{I[G(X_j) \leq 0]}$ é desconhecido, este pode ser estimado através da expressão:

$$S_{I[G(X_j) \leq 0]}^2 = \frac{1}{N-1} \left(\left\{ \sum_{j=1}^N I^2[G(X_j) \leq 0] \right\} - N \left\{ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N I[G(X_j) \leq 0] \right\}^2 \right) \quad (4.72)$$

Assim, para um nível de confiança $\alpha = 95\%$ obtém-se um valor de $k = 1.96$, tal como se pode verificar através de qualquer tabela da distribuição normal padrão.

De acordo com Shooman [1968 (em Haldar e Mahadevan, 2000a)] o número de simulações a realizar pode ser obtido a partir da expressão (4.71) considerando $k = 2$, $\mu = P_f$ e $\sigma = \sqrt{(1-P_f)P_f/N}$. Assim, o erro percentual relacionado com $\tilde{p}_f$ pode ser obtido através da expressão:

$$\text{Erro \%} = \sqrt{\frac{1-\tilde{P}_f}{N \cdot \tilde{P}_f}} \cdot 200\% \quad (4.73)$$

Broding *et al.* [1964 (em Melchers, 1999)] sugeriu que para um dado nível de confiança α e uma probabilidade de rotura p_f uma primeira estimativa para o número de simulações poderia ser obtida a partir da expressão:

$$N > \frac{-\ln(1-\alpha)}{p_f} . \quad (4.74)$$

Normalmente, o valor de $\tilde{p}_f$ vai diminuindo à medida que o número de simulações vai aumentando sendo obtida uma certa estabilidade quando N é suficientemente elevado. A velocidade dessa convergência assim como a estabilidade do valor dependem em certa medida da qualidade do gerador de números aleatórios utilizado no Método de Monte Carlo.

4.4 Técnicas de redução da variância

Como se viu anteriormente o Método de Monte Carlo puro é de fácil aplicação mas em contrapartida exige um número relativamente elevado de simulações para se obterem resultados com um certo rigor. Para aumentar a eficiência deste método é necessário reduzir o número de simulações, o que não é muito aconselhável pois perde-se precisão. Uma boa alternativa é tentar reduzir a variância de $\tilde{p}_f$, $\sigma_{\tilde{p}_f}^2$, sem que para isso seja necessário alterar o seu valor médio, $E(\tilde{p}_f)$, nem aumentar o número de simulações, N . Como já se tinha visto na expressão (4.70) a variância de $\tilde{p}_f$ varia directamente com a variância da função indicatriz, pelo que o procedimento essencial é encontrar uma forma de reduzir $\sigma_{I[G(X_j) \leq 0]}^2$. Esta necessidade levou ao desenvolvimento de diversas *técnicas de redução da variância*. No entanto, para se conseguir uma redução da variância há que utilizar informação adicional (*a priori*) acerca do problema que se pretende resolver. Daí que, das várias técnicas que se podem aplicar, em cada caso é utilizada informação acerca do problema em estudo de forma a limitar a simulação às regiões de interesse. Em seguida vão apresentar-se alguns exemplos.

4.4.1 Amostragem por importância

O objectivo desta técnica, cujos conceitos foram inicialmente apresentados por Shinozuka (1983) e Harbitz (1983), é concentrar a distribuição dos pontos amostrais na área que mais contribui para a probabilidade de rotura em vez de considerar todos os possíveis valores

que as variáveis básicas podem assumir. Nesse caso o centro da amostra é deslocado da origem do espaço normal padronizado para o ponto mais provável de rotura, ou ponto de dimensionamento, que se situa sobre a superfície de estado limite (Schueller e Stix, 1987). Assim, a probabilidade de rotura pode ser dada através do integral múltiplo, equivalente ao da expressão (4.64):

$$p_f = \int \dots \int \left[I[G(X)] \cdot \frac{f_X(X)}{h(X)} \right] \cdot h(X) dX \quad (4.75)$$

onde $h(x)$ representa a função densidade de probabilidade da região do espaço amostral onde se aplica a amostragem. De forma semelhante à expressão (4.66), uma estimativa de p_f pode ser dada por:

$$\tilde{p}_f = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left\{ I[G(\hat{X}_j) \leq 0] \cdot \frac{f_X(\hat{X}_j)}{h(\hat{X}_j)} \right\} \quad (4.76)$$

onde N é o número de simulações e $\hat{X}_j$ o vector correspondente à simulação j constituído por valores amostrais das variáveis aleatórias básicas, obtidos através da função densidade de probabilidade correspondente à amostragem por importância $h(x)$. Daqui se conclui que $h(x)$ influencia os valores amostrais e daí a importância na sua escolha de forma a melhorar a precisão na estimativa de p_f . Normalmente utiliza-se a distribuição normal padronizada multivariada com desvios padrão unitários mas também se podem escolher outras distribuições de amostragem assim como outros centros de amostragem podendo mesmo estes vir a ser mais eficientes (Melchers, 1989, 1990a; Englund e Rackwitz, 1993; Olsson *et. al.*, 2003). Simplificando em termos de notação, neste caso a variância de $\tilde{p}_f$ é dada por:

$$\sigma_{\tilde{p}_f}^2 = \frac{\sigma_{\frac{I \cdot f}{h}}^2}{N} \quad (4.77)$$

onde, por definição:

$$\sigma_{\frac{I \cdot f}{h}}^2 = \int \dots \int \left\{ I[G(X) \leq 0] \cdot \frac{f_X(X)}{h(X)} \right\}^2 \cdot h(X) dX - E^2 \left(\frac{I \cdot f}{h} \right) \quad (4.78)$$

Para minimizar a variância de $\tilde{p}_f$ há que minimizar (4.78). Esta expressão mostra que quanto melhor for a escolha de $h(x)$ mais precisos serão os resultados obtidos através do método de Monte Carlo. Uma distribuição apropriada para $h(x)$ pode ser considerada a seguinte (Engelund e Rackwitz, 1993):

$$h(X) = \Phi(X, C_X)$$

com $E(X) = [\mu_{h,1} \dots \mu_{h,n}]$ e onde C_X é uma matriz diagonal dada por $C_X = \begin{bmatrix} \sigma_{h,1}^2 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & \sigma_{h,n}^2 \end{bmatrix}$,

sendo n o número de variáveis aleatórias.

É claro que a escolha da distribuição estará sempre dependente da informação que inicialmente se tem do problema em estudo. Quando essa informação *a priori* não existe a amostragem por importância pode não ser eficiente. No entanto, à medida que se vão efectuando as amostragens passa-se a ter informação disponível. Assim, a função densidade da amostragem por importância pode-se ir adaptando durante as amostragens. Esta é a chamada amostragem por importância adaptada (Au e Beck, 1999; Maes *et al.*, 1993a, 1993b; Melchers, 1999). Quantas mais amostras se recolherem melhor será a aproximação da função densidade à função de amostragem ideal.

Em problemas onde estão envolvidas uma ou mais variáveis aleatórias básicas discretas, se não for possível transformar essas variáveis aleatórias para o espaço normal padronizado pode aplicar-se a amostragem por importância deslocando o centro de amostragem de acordo com informações de amostragens realizadas anteriormente (Bucher, 1988; Dey e Mahadevan, 1988; Melchers, 1990a).

Nos métodos de amostragem por importância direccionais a intersecção com a superfície de estado limite é calculada para um conjunto de direcções a partir da origem. Assim, a amostragem é aplicada com maior intensidade perto das regiões onde a superfície de estado limite está perto da origem (Bjerager, 1988; Ditlevsen *et al.*, 1990; Kijawatworawet *et al.*, 1998; Moarefzadeh e Melchers, 1999). Bjerager (1990) e Hurtado e Barbat (1998) apresentam alguns desenvolvimentos sobre métodos de amostragem por importância.

4.4.2 Amostragem estratificada

A ideia base desta técnica é semelhante à da amostragem por importância. Neste método o domínio de integração é dividido em várias regiões de forma a podermos aplicar mais simulações nas regiões que mais contribuem para a probabilidade de rotura, ou seja, onde há maior possibilidade de ocorrerem falhas. Assim, todo o domínio de integração, Ω , é dividido em n regiões mutuamente exclusivas Ω_i , ($i = 1, \dots, n$):

$$\bigcup_{i=1}^n \Omega_i = \Omega \quad ; \quad i = 1, \dots, n \quad (4.79)$$

$$\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \quad ; \quad i \neq j \quad i, j = 1, \dots, n$$

A probabilidade de rotura associada a cada região é dada por:

$$p_{f_i} = \int \dots \int_{\Omega_i} I[G(X)] \cdot f_X(X) \cdot h(X) dX \quad (4.80)$$

onde a probabilidade de ocorrer cada uma das regiões é obtida através da expressão:

$$P(\Omega_i) = \int \dots \int_{\Omega_i} f_X(X) \cdot h(X) dX \quad ; \quad \text{sendo} \quad \sum_{i=1}^n P(\Omega_i) = 1 \quad . \quad (4.81)$$

Desta forma, a probabilidade de rotura total é definida por:

$$\begin{aligned} p_f &= \int \dots \int_{\Omega} I[G(X)] \cdot f_X(X) \cdot h(X) dX = \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \int \dots \int_{\Omega_i} I[G(X)] \cdot f_X(X) \cdot h(X) dX \right\} = \sum_{i=1}^n p_{f_i} \end{aligned} \quad (4.82)$$

Considerando:

$$I_i[G(X)] = \begin{cases} I[G(X)] & ; \text{ se } X \in \Omega_i \\ 0 & ; \text{ se } X \notin \Omega_i \end{cases} \quad (4.83)$$

então o integral da expressão (4.80) pode ser definido da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 p_{f_i} &= \int \dots \int_{\Omega_i} P_i \cdot I[G(X)] \cdot \frac{f_X(X) \cdot h(X)}{P_i} dX = \\
 &= P_i \int \dots \int_{\Omega} I_i[G(X)] \cdot \frac{f_X(X) \cdot h(X)}{P_i} dX = P_i \cdot E(I_i[G(X)])
 \end{aligned} \tag{4.84}$$

onde $\int \dots \int_{\Omega_i} \frac{f_X(X) \cdot h(X)}{P_i} dX = 1$. Assim, pode estimar-se a probabilidade de rotura usando a expressão:

$$\tilde{p}_f = \sum_{i=1}^n \left[P(\Omega_i) \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} I_i[G(\hat{X}_j)] \right] \tag{4.85}$$

onde N_i é o número de simulações realizadas na região Ω_i .

Neste caso a variância de $\tilde{p}_f$ é dada por:

$$\sigma_{\tilde{p}_f}^2 = \sum_{i=1}^n \frac{P^2(\Omega_i)}{N_i} \sigma^2(I_i[G(X)]) \tag{4.86}$$

onde:

$$\sigma^2(I_i[G(X)]) = \frac{1}{P(\Omega_i)} \int \dots \int_{\Omega_i} [I_i[G(X)]]^2 \cdot f_X(X) \cdot h(X) dX - \frac{p_{f_i}^2}{P^2(\Omega_i)} \tag{4.87}$$

Uma partição adequada do domínio de integração pode reduzir de forma significativa a variância. Depois de definir as regiões $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ o passo seguinte é saber qual o número ideal de amostras a atribuir a cada uma. Seja N_i o número de amostras aplicadas

em Ω_i onde $\sum_{i=1}^n N_i = N$. De forma a obter um equilíbrio entre os custos da amostragem e

o grau de precisão desejado, o valor óptimo para cada N_i é obtido através da expressão

$$N_i = N \cdot P(\Omega_i).$$

Dentro do grupo dos métodos de amostragem estratificada, um dos que normalmente se utiliza é o método do hipercubo latino. A ideia base é a seguinte:

Depois de definir as variáveis básicas X_j de um problema estrutural e caracterizar as suas distribuições, divide-se o domínio de cada uma em N intervalos disjuntos de igual probabilidade $1/N$, onde cada intervalo passa a ser definido por uma amostra. Em seguida, para cada uma das variáveis, determinam-se aleatoriamente os pontos representativos de cada intervalo. Se o número de intervalos é suficientemente elevado, esses pontos são dados pelos centros de gravidade de cada um, designados por centróides C_{ij} (centro de gravidade do intervalo i e variável j).

O processo de simulação consiste em determinar aleatoriamente, para cada variável básica, uma sequência de N valores C_{ij} onde cada intervalo é usado uma única vez, obtendo assim N amostras com os valores pretendidos. Cada amostra é constituída por j centróides C_{ij} . Em seguida há que associar a cada centróide C_{ij} o valor correspondente ao seu intervalo i da variável X_j . Desta forma obtêm-se os valores representativos das variáveis para cada amostra.

Este método restringe o número total de simulações ao número de intervalos utilizados na partição do espaço amostral. Isto representa uma melhoria na eficiência mas os resultados deste método só serão fiáveis se as variáveis básicas utilizadas tiverem uma distribuição normal ou aproximadamente normal. Este é um dos pressupostos fundamentais na sua aplicação. Para mais desenvolvimentos sobre este tipo de amostragem podem consultar-se entre outros Olsson *et al.* (2003), Bucher (2005) e Delgado (2002).

4.5 Simulação de variáveis aleatórias correlacionadas

Até agora assumiu-se sempre que todas as variáveis aleatórias não são correlacionadas. No entanto, em grande parte dos problemas estruturais onde se pretende estimar a probabilidade de rotura algumas, ou mesmo todas, as variáveis aleatórias são correlacionadas. Nesses casos há que transformar as variáveis aleatórias correlacionadas em variáveis estatisticamente independentes modificando a função de estado limite inicial transformando-a numa outra que depende das novas variáveis independentes. Existem

vários métodos que se podem utilizar para o efeito tal como os métodos propostos por Morgenstern e Nataf (Liu e Der Kiureghian, 1986) apresentados no capítulo 3.

4.5.1 Simulação de variáveis aleatórias normais correlacionadas

Consideremos um vector aleatório Gaussiano $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_n\} = (\mathbf{X}_i)_{i=1, \dots, n}$ constituído por n variáveis aleatórias básicas de um sistema estrutural, com média $\boldsymbol{\mu}_X$ e matriz de covariância $\boldsymbol{\Sigma}$. Para simular $\mathbf{X}$ devem seguir-se os passos:

1. Aplicar a decomposição de Cholesky à matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}$ de forma que $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T$ e determinar $\mathbf{L}$ (matriz triangular inferior com elementos positivos na diagonal principal).
2. Gerar n variáveis aleatórias normais padrão independentes e identicamente distribuídas, $\mathbf{Z} = (\mathbf{Z}_i)_{i=1, \dots, n}$.
3. Calcular os valores simulados de $\mathbf{X}$ através da expressão $\mathbf{X} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{Z} + \boldsymbol{\mu}_X$.

No caso de se utilizar a matriz de correlações $\mathbf{C}$ em vez da matriz $\boldsymbol{\Sigma}$ deve utilizar-se uma outra expressão para $\mathbf{X}$ no passo 3 (Der Kiureghian e Liu, 1986):

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\sigma}_X \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{Z} + \boldsymbol{\mu}_X, \quad (4.88)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}_X$ é uma matriz diagonal dos desvios padrão σ_i e $\mathbf{L}$ é uma matriz triangular inferior obtida a partir da decomposição de Cholesky da matriz de correlações $\mathbf{C}$ tal que $\mathbf{C} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T$.

4.5.2 Simulação de variáveis aleatórias não normais correlacionadas

Considere-se um vector $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_n\} = (\mathbf{X}_i)_{i=1, \dots, n}$ constituído por n variáveis aleatórias básicas correlacionadas com distribuições não normais, onde são conhecidas as funções densidade de probabilidade marginais $f_{X_i}(x_i)$, as funções de distribuição marginais $F_{X_i}(x_i)$ e a matriz de correlações $\boldsymbol{\rho}$. Para simular $\mathbf{X}$ devem seguir-se os passos:

1. Transformar as variáveis aleatórias correlacionadas originais em variáveis normais padrão equivalentes e correlacionadas $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_i)_{i=1, \dots, n}$, obtendo as médias e desvios padrão das variáveis normais padrão equivalentes, $\mu_{X_i}^E$ e $\sigma_{X_i}^E$, através das seguintes expressões (Rackwitz e Fiessler, 1978):

$$\sigma_{X_i}^E = \frac{\phi\left\{\Phi^{-1}\left[F_{X_i}(x_i^*)\right]\right\}}{f_{X_i}(x_i^*)} \quad (4.89)$$

$$\mu_{X_i}^E = x_i^* - \Phi^{-1}\left[F_{X_i}(x_i^*)\right] \cdot \sigma_{X_i}^E \quad (4.90)$$

onde x_i^* é o ponto de dimensionamento. Se não tivermos informação sobre o ponto de dimensionamento este pode ser substituído pelo ponto médio de cada variável original (Melchers, 1999).

2. Se as variáveis aleatórias originais não têm distribuição normal, os seus coeficientes de correlação alteram-se quando se aplica a transformação para variáveis normais equivalentes. Desta forma, a matriz de correlações depois da transformação ρ' não será igual à matriz ρ . Para obter os valores de ρ' Liu e Der Kiureghian (1986) propuseram a seguinte expressão:

$$\rho'_{ij} = F_{ij} \cdot \rho_{ij} \quad (4.91)$$

Der Kiureghian e Liu (1986) desenvolveram fórmulas semi-empíricas onde $F_{ij} \geq 1$ é função de ρ_{ij} , $\delta_i (= \sigma_i / \mu_i)$ e $\delta_j (= \sigma_j / \mu_j)$, para calcular um valor aproximado para F_{ij} com uma precisão razoável – ver capítulo 3.

3. Aplicar a decomposição de Cholesky à matriz de covariâncias ρ' de forma que $\rho' = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T$ e determinar a matriz triangular inferior $\mathbf{L}$ (Rubinstein, 1981).
4. Gerar n variáveis aleatórias normais padrão independentes e identicamente distribuídas, $\mathbf{Z} = (\mathbf{Z}_i)_{i=1, \dots, n}$.
5. Calcular os valores simulados de $\mathbf{X}$ através da expressão $\mathbf{X} = \sigma_x^E \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{Z} + \mu_x^E$.

Na figura 4.2 apresentam-se todos os passos a seguir, através de um fluxograma, para aplicar o método de simulação pura de Monte Carlo de forma a avaliar a probabilidade de rotura num caso geral em que existem variáveis aleatórias correlacionadas com distribuição não normal. Neste caso, fixando *a priori* o número total de simulações a efectuar N_{max} e a precisão com que se quer estimar P_f , traduzida pelo coeficiente de variação de $\tilde{P}_f$, cov^* , e conhecendo a função de estado limite $G(\mathbf{X})$, as funções de distribuição marginais $F_{x_i}(x_i)$ e a matriz de correlações $[\rho]$ pode obter-se uma estimativa para a probabilidade de rotura de um sistema estrutural. Aplicando a decomposição de Cholesky à matriz de correlações $[\rho]$ obtém-se a matriz triangular inferior $[L]$.

Na figura 4.3 apresenta-se o método de simulação de Monte Carlo com a aplicação de uma técnica de redução da variância - *amostragem por importância*, de forma a avaliar a probabilidade de rotura num caso geral em que existem variáveis aleatórias correlacionadas com distribuição não normal. A expressão da probabilidade de rotura para este caso pode ser obtida da seguinte forma:

Se as variáveis aleatórias originais são transformadas para o espaço das variáveis aleatórias não correlacionadas com distribuição normal padrão a probabilidade de rotura é dada por:

$$p_f = \int \cdots \int_{G(\mathbf{Z}) \leq 0} \phi(z_1) \cdots \phi(z_n) dz_1 \cdots dz_n . \quad (4.92)$$

Se se concentrar a distribuição dos pontos amostrais das variáveis aleatórias uniformes $\mathbf{U} = \{u_1, \dots, u_n\}$ em torno do ponto de dimensionamento (ou ponto com maior probabilidade de rotura) $\mathbf{Z}^* = \{z_1, \dots, z_n\}$, obtém-se:

$$u_i = \Phi(z_i - z_i^*) , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.93)$$

A partir da expressão anterior obtém-se:

$$du_i = \phi(z_i - z_i^*) dz_i , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.94)$$

Da equação (4.93):

$$z_i = \Phi^{-1}(u_i) + z_i^* , \quad i = 1, 2, \dots, n . \quad (4.95)$$

Substituindo a equação (4.94) na equação (4.92) obtém-se a expressão da probabilidade de rotura para o caso em que se aplica uma técnica de redução da variância - *amostragem por importância*:

$$\begin{aligned}
 p_f &= \int \cdots \int_{G(\mathbf{z}) \leq 0} \frac{\phi(z_1)}{\phi(z_1 - z_1^*)} \frac{\phi(z_2)}{\phi(z_2 - z_2^*)} \cdots \frac{\phi(z_n)}{\phi(z_n - z_n^*)} du_1 \cdots du_n \approx \\
 &\approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \prod_{i=1}^n \left\{ \frac{\phi(z_i)}{\phi(z_i - z_i^*)} \right\}_{G(\mathbf{U}) \leq 0} .
 \end{aligned} \tag{4.96}$$

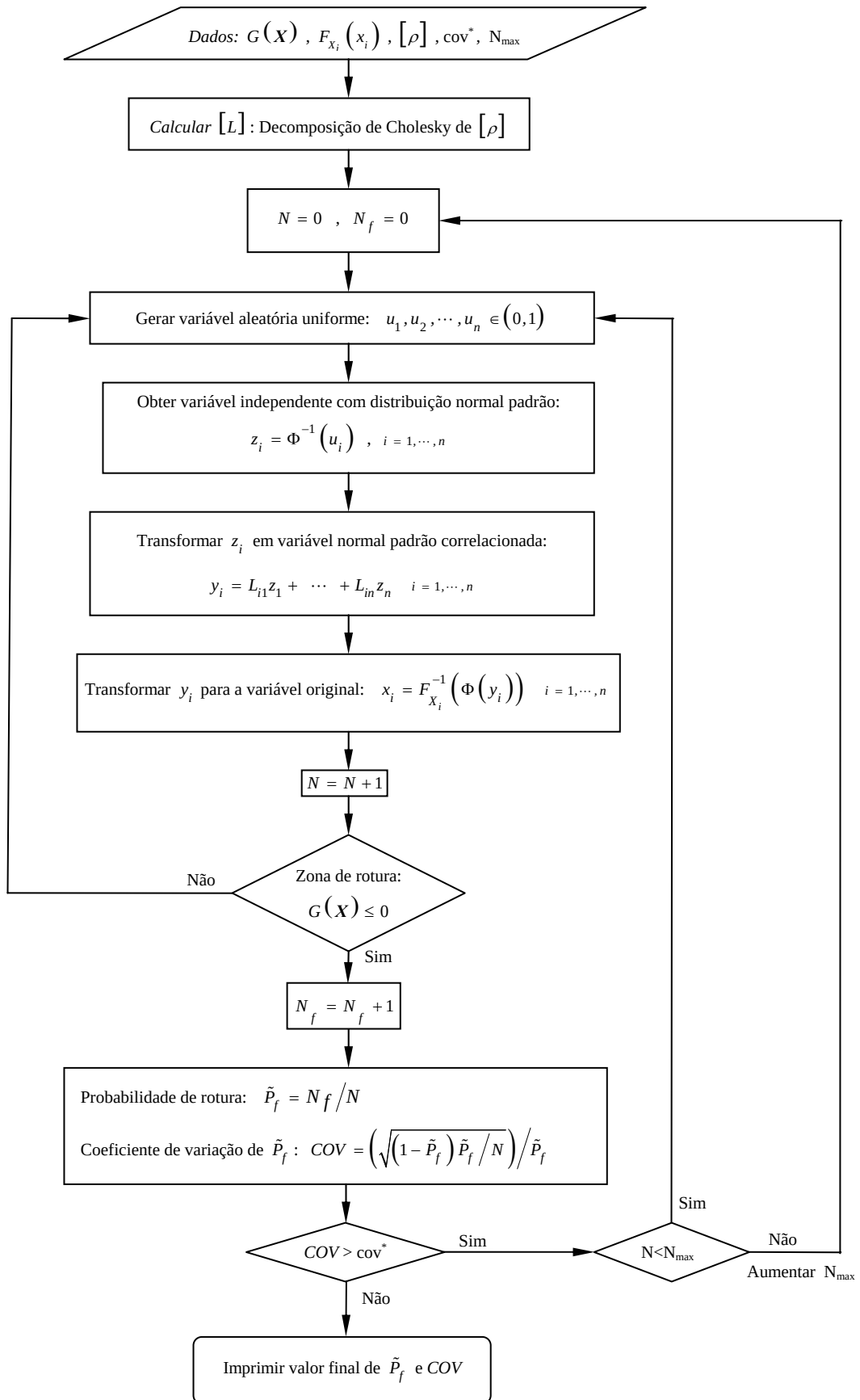


Figura 4.2 – Método de simulação pura de Monte Carlo para variáveis aleatórias correlacionadas.

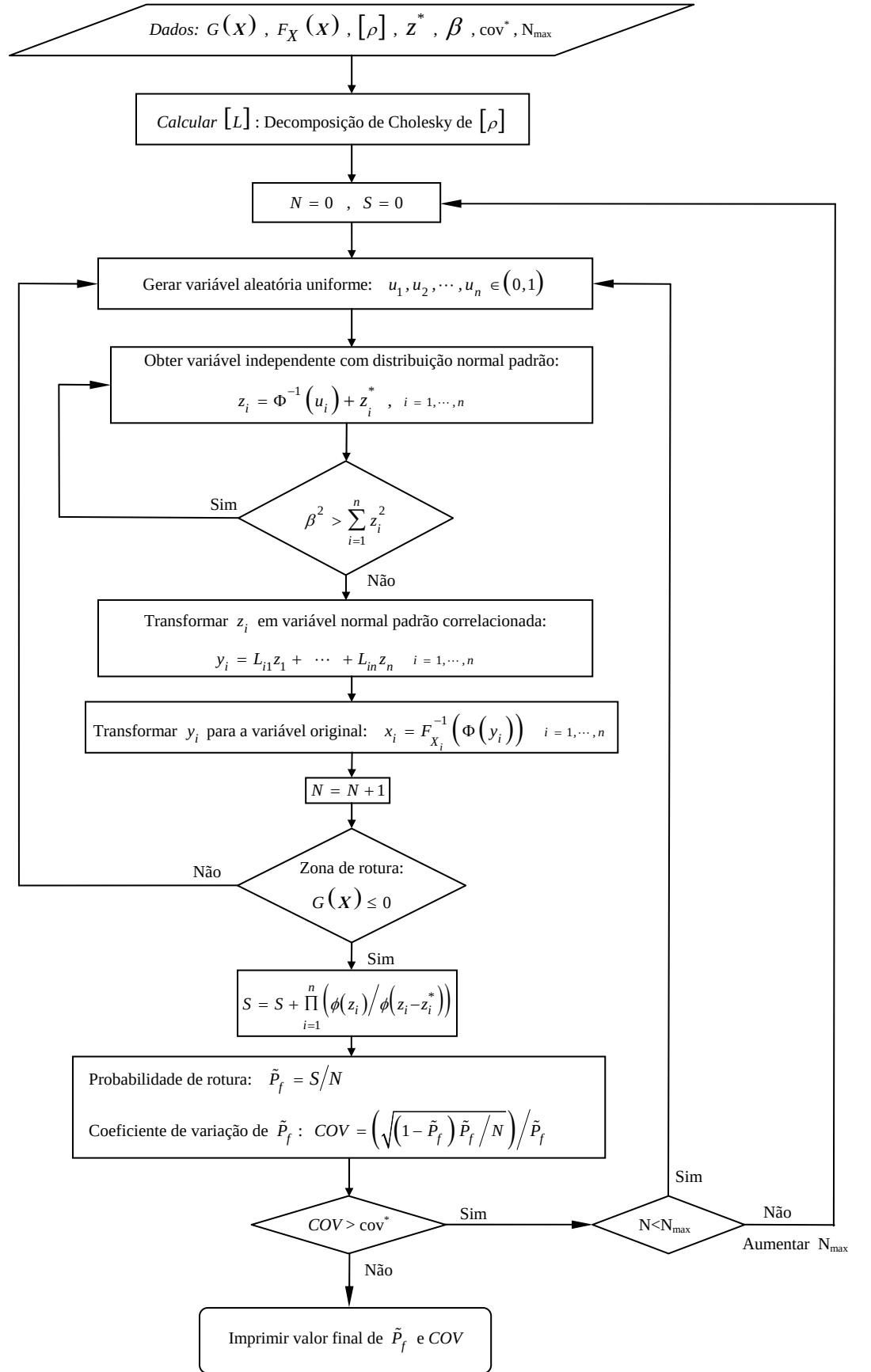


Figura 4.3 – Método de simulação de Monte Carlo aplicando uma amostragem por importância para variáveis aleatórias correlacionadas.

Capítulo 5

Método de Perturbação para a Avaliação das Incertezas em Sistemas Estruturais

5.1 Introdução

A necessidade de enquadrar o problema da variabilidade estrutural num contexto de maior exigência levou a que ao longo dos tempos se passasse de uma simples abordagem determinística para uma abordagem probabilística. No entanto, um dos principais problemas na introdução destas técnicas é o imenso tempo computacional necessário para a sua aplicação, principalmente quando são utilizados métodos de simulação como por exemplo o método de Monte Carlo, mesmo quando são adoptadas técnicas de redução da variância.

Na análise de sistemas estruturais está sempre associado um determinado grau de risco devido às incertezas envolvidas. Estas surgem devido às variabilidades inerentes à actividade humana, ao erro de estimação dos modelos usados, à variabilidade dos materiais utilizados, à dispersão das acções actuantes e às imperfeições geométricas. De forma a avaliar adequadamente o risco associado à segurança estrutural, tem-se verificado uma utilização crescente de técnicas de fiabilidade estrutural com base em conceitos probabilísticos. A aplicação dessas técnicas é relativamente simples quando existe uma formulação explícita do problema estrutural. No entanto, quando não existem relações explícitas entre as variáveis do problema, como por exemplo no método dos elementos

finitos, é necessário efectuar várias análises do mesmo problema para avaliar a incerteza associada à resposta estrutural (Teigen *et al.*, 1991a; Teigen *et al.*, 1991b; Ditlevsen e Madsen, 2005; Reddy, 1993; Ghanem e Spanos, 2003; Schenk e Schueller, 2005).

Neste trabalho apresenta-se um método eficiente que conjuga técnicas de perturbação com o método dos elementos finitos de forma a avaliar a incerteza da resposta estrutural (Eibl e Schmidt-Hurtienne, 1991; Henriques, 2006; Veiga *et al.*, 2006). As variáveis do problema estrutural com características aleatórias são descritas através dos seus valores médios, desvios padrão e coeficientes de correlação que quantificam a dependência entre essas variáveis. Definindo *a priori* as distribuições de probabilidade das variáveis aleatórias básicas do problema, a presente metodologia permite avaliar numa única análise estrutural o valor médio e o desvio padrão da resposta estrutural. Os resultados obtidos são exactos para problemas lineares e quando a distribuição de todas as variáveis aleatórias é normal. O desenvolvimento de procedimentos apropriados para ter em conta variáveis aleatórias com distribuições não normais e problemas não lineares é efectuado de forma a obter resultados com um grau de aproximação adequado.

A aplicação desta metodologia a alguns exemplos concretos, apresentados e desenvolvidos no próximo capítulo, permite visualizar as suas potencialidades, nomeadamente, a sua extrema eficiência em comparação com outros métodos, assim como a adequação dos resultados obtidos.

5.2 Metodologia proposta

Este conceito de segurança baseia-se na comparação entre a capacidade resistente de uma estrutura e o nível de carga aplicada. O método de perturbação utilizado é aplicado numa formulação de elementos finitos seguindo os passos de uma análise determinística (Reh *et al.*, 2006; Thomos e Trezos, 2006). Este baseia-se numa expansão em série de Taylor das equações de equilíbrio do sistema estrutural. A incerteza do comportamento estrutural é avaliada tendo em conta os termos em torno dos valores médios das variáveis aleatórias básicas uma vez que estes representam a amplitude de valores com maior probabilidade de ocorrência. A média e variância da resposta estrutural são obtidas a partir da média, variância e correlações das variáveis aleatórias básicas (Altus *et al.*, 2005; Zhang and Ellingwood, 1996).

Considere-se uma estrutura com n elementos, onde os parâmetros do sistema são distribuídos aleatoriamente, que está sujeita a diferentes cargas, $F.\Phi_i$, ou seja, $F.[\Phi_1, \dots, \Phi_n] = F.\Phi$ e é testada até ao estado limite. Enquanto a intensidade da carga aplicada, F , aumenta proporcionalmente o vector de distribuição das cargas, Φ , mantém-se constante (figura 5.1).

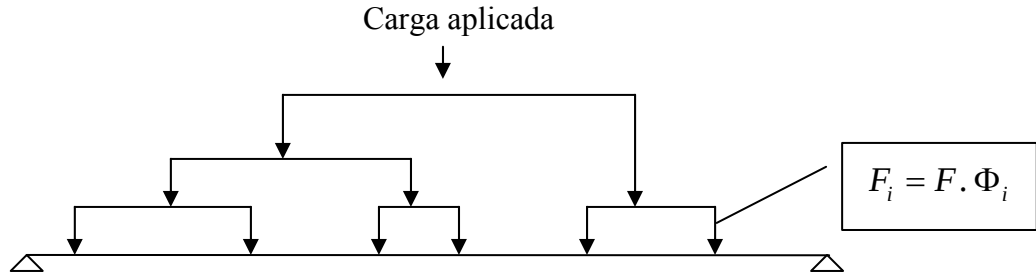


Figura 5.1 – Função de distribuição da carga Φ num elemento estrutural.

De acordo com o método dos elementos finitos o equilíbrio de um sistema estrutural é definido pela equação:

$$K . u = F . \Phi \quad (5.1)$$

onde u é o vector dos deslocamentos nodais, $F.\Phi$ o vector das forças nodais que representa as acções externas, sendo F a intensidade da carga aplicada ao sistema estrutural e $\Phi = [\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n]$ o vector da distribuição da carga ao longo da estrutura com n graus de liberdade e K a matriz de rigidez tangente do sistema estrutural, definida como função dos deslocamentos nodais u .

Aplicando técnicas de perturbação à equação (5.1) é possível quantificar a resposta estrutural média e a sua dispersão em função de deslocamentos ou forças. Assim, obtém-se:

$$(\bar{K} + \delta K) . (\bar{u} + \delta u) = (\bar{F} + \delta F) . \Phi \quad (5.2)$$

Resolvendo a equação (5.2) em relação aos termos de primeira ordem e desprezando os de segunda ordem, obtém-se a seguinte expressão:

$$\delta K . \bar{u} + \bar{K} . \delta u = \delta F . \Phi \quad (5.3)$$

A incerteza da resposta estrutural pode ser definida através de (figura 5.2):

- a) forças, para uma deformação máxima fixa;
- b) deslocamentos, para uma determinada carga predefinida.

Em seguida apresenta-se para cada caso a avaliação da incerteza através de uma técnica de perturbação.

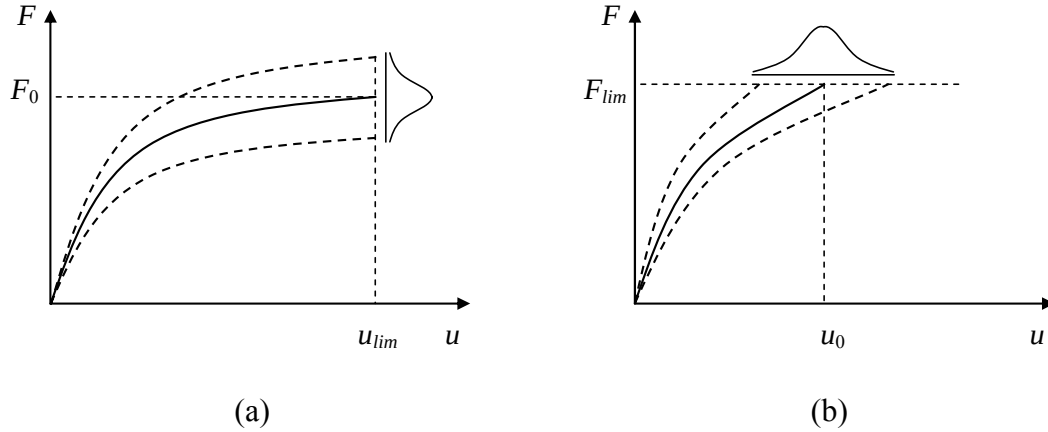


Figura 5.2 – Definição da resposta através de: (a) Forças, (b) Deslocamentos.

5.2.1 Incertezas em função de forças

A incerteza da resposta estrutural em termos de forças, δF , deve ser avaliada no valor médio dos deslocamentos onde a extensão é máxima $\bar{u}_i|_{\varepsilon_{max}=\varepsilon_u}$, isto é, no ponto onde o deslocamento é máximo. Nesse ponto pode dizer-se que $\delta u_{i,max} = 0$. Dessa forma, a equação (5.3) pode ser definida por:

$$\delta K \cdot \bar{u} + \bar{K} \cdot \delta u \Big|_{\delta u_i=0|_{\varepsilon_{max}=\varepsilon_u}} = \delta F \cdot \Phi \quad (5.4)$$

Então:

$$\begin{aligned} \delta K \cdot \bar{u} &= \delta F_{i,max} \cdot \Phi - \bar{K} \cdot \delta u \Big|_{\delta u_{i,max}=0} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \delta K \cdot \bar{u} &= -K_M \cdot \delta q \quad , \end{aligned} \quad (5.5)$$

onde o vector δq e a matriz K_M são definidas por (Eibl e Schmidt-Hurtienne, 1991):

$$\delta q = \begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \vdots \\ \delta u_{i-1} \\ \delta F_{i,max} \\ \delta u_{i+1} \\ \vdots \\ \delta u_n \end{bmatrix} \quad K_M = \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1i-1} & -\Phi_1 & k_{1i+1} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{i-11} & \cdots & k_{i-1i-1} & -\Phi_{i-1} & k_{i-1i+1} & \cdots & k_{i-1n} \\ k_{i1} & \cdots & k_{ii-1} & -\Phi_i & k_{ii+1} & \cdots & k_{in} \\ k_{i+11} & \cdots & k_{i+1i-1} & -\Phi_{i+1} & k_{i+1i+1} & \cdots & k_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & \cdots & k_{ni-1} & -\Phi_n & k_{ni+1} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} .$$

Depois de se calcular a média dos deslocamentos nodais, $\bar{u}$, através da equação (5.1) pode determinar-se δq , e em particular $\delta F_{i,max}$, a partir da equação (5.5) obtendo:

$$\delta q = -K_M^{-1} \cdot \delta K \cdot \bar{u} \quad (5.6)$$

Durante o processo de construção as propriedades dos materiais assim como as dimensões de um membro estrutural estão sujeitos a pequenas variações aleatórias. Essas flutuações aleatórias são consideradas como campos aleatórios contínuos (Vanmarcke, 1983). Assim, um parâmetro do sistema estrutural que apresente variações aleatórias em torno do seu valor médio pode ser descrito através da expressão:

$$\beta = \bar{\beta} \cdot (1 + \alpha(x)) \quad , \quad (5.7)$$

onde $\alpha(x)$ é uma variável aleatória.

O método probabilístico de elementos finitos discretiza a estrutura em elementos aleatórios. Dessa forma, a variável aleatória contínua $\alpha(x)$ é aproximada através de n graus de liberdade α_i e funções de forma $N_i(\lambda)$ (Liu *et al.*, 1986). O elemento k seria dado por:

$$\alpha^{(k)} = \sum_{i=1}^n N_i(\lambda) \cdot \alpha_i^{(k)} \quad , \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (5.8)$$

Como o conhecimento sobre o comportamento aleatório dos parâmetros dentro de um membro estrutural é escasso, normalmente assume-se que $\alpha^{(k)}$ se mantém constante ao

longo de cada elemento aleatório ($N_i(\lambda)=1$). Ao fazer coincidir o tamanho desses elementos com o dos elementos finitos o número de graus de liberdade aleatórios passa a ser igual ao número de elementos estruturais. Dessa forma, através do método probabilístico de elementos finitos é possível determinar as covariâncias das variáveis do sistema a partir das covariâncias das variáveis aleatórias. A matriz de covariâncias do vector $\mathbf{q}$ é dada por:

$$C_q = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \alpha} \cdot C_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \alpha}^T \quad (5.9)$$

onde C_q é a matriz de covariâncias das variáveis do sistema e C_α é a matriz de covariâncias das variáveis aleatórias.

A covariância de uma variável aleatória α_i pode ser definida pelo seu desvio padrão $\delta\alpha_i$ e pela autocorrelação espacial entre as variáveis aleatórias ρ_{ij} (descreve a interdependência aleatória entre as variáveis aleatórias α_i e α_j):

$$C_\alpha = \delta\alpha \cdot C_\rho \cdot \delta\alpha^T \quad (5.10)$$

onde C_ρ é a matriz de correlação das variáveis aleatórias e $\delta\alpha$ é a matriz dos desvios padrão das variáveis aleatórias.

Considerando a influência de diferentes campos aleatórios sobre a resistência estrutural (por exemplo, α_c =betão e α_s =aço) e assumindo a existência de apenas uma distribuição global para as variáveis aleatórias em todos os elementos (α_{ck} e α_{sk} $k=1,\dots,n$), a seguinte simplificação aplica-se a todos os n elementos:

$$\begin{aligned} \delta\alpha_c &= \delta\alpha_{c1} = \dots = \delta\alpha_{cn} \\ \delta\alpha_s &= \delta\alpha_{s1} = \dots = \delta\alpha_{sn} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Assim, por exemplo, se a variação da rigidez estrutural δK , na equação (5.6), resulta da dispersão da variável aleatória α_k , o desvio da resposta estrutural pode ser dada por:

$$\delta q = \frac{\partial q}{\partial \alpha_k} \cdot \delta\alpha_k = -K_M^{-1} \cdot \frac{\partial K}{\partial \alpha_k} \cdot \bar{u} \cdot \delta\alpha_k \quad (5.12)$$

Tendo em conta as equações (5.9), (5.10) e (5.12) obtém-se:

$$C_q = K_M^{-1} \cdot \frac{\partial K}{\partial \alpha} \cdot \bar{u} \cdot \delta \alpha \cdot C_p \cdot \delta \alpha^T \cdot \bar{u}^T \cdot \frac{\partial K^T}{\partial \alpha} \cdot K_M^{-T} =$$

$$\begin{matrix} (m \times m) & \dots & (1 \times n) & (n \times n) & (n \times 1) & \dots & (m \times m) \end{matrix}$$
(5.13)

$$= \overbrace{\left(K_M^{-1} \cdot \frac{\partial K}{\partial \alpha_1} \cdot \bar{u} \cdot \delta \alpha_1, \dots, K_M^{-1} \cdot \frac{\partial K}{\partial \alpha_n} \cdot \bar{u} \cdot \delta \alpha_n \right)}^A \cdot C_p \cdot A^T$$

$$\begin{matrix} ((m \times m)(m \times m)(m \times 1)(1 \times 1), & \dots & , & (m \times 1) &)(n \times n)(n \times m) \end{matrix}$$

onde m é o número de graus de liberdade da estrutura e n é o número de variáveis aleatórias básicas.

Se $\delta \alpha$ e C_p são conhecidos, a expressão (5.13) dá-nos um valor para C_q . Esta matriz fornece as variâncias de todos os deslocamentos nodais assim como a variância, segundo a direcção e sentido, da força aplicada à estrutura.

Em conclusão, uma vez conhecidas as médias e os desvios padrão das variáveis aleatórias básicas assim como as correlações entre elas e a média da força aplicada na estrutura, este método permite obter uma variabilidade para a força. Desta forma obtém-se o desvio padrão da força que conduz a uma deformação (ou deslocamento) previamente fixada.

Quando faltam alguns dados experimentais os valores da correlação entre duas variáveis aleatórias são aproximados através de uma função exponencial que descreve a dependência entre elas utilizando uma função da distância espacial entre o centro de dois elementos Δx_{kl} e o comprimento da correlação, λ :

$$\rho_{kl} = \rho(\alpha_k, \alpha_l) = e^{-\frac{\Delta x_{kl}}{\lambda}} \quad (5.14)$$

5.2.2 Incertezas em função de deslocamentos

Quando se conhece a variabilidade da força aplicada a uma estrutura, traduzida pelo respectivo coeficiente de variação, pode utilizar-se uma variante do método anterior para obter a média e o desvio padrão dos deslocamentos nodais da estrutura. Neste caso, conhecidas as médias e os desvios padrão das variáveis aleatórias básicas relacionadas com o material e geometria assim como as correlações entre elas e a média e coeficiente de variação da força aplicada na estrutura, este método permite obter para cada grau de liberdade as respectivas médias e desvios padrão dos deslocamentos nodais.

Pode ser aplicado em situações com um ou mais casos de carga, tendo em conta que no mesmo caso de carga só podem estar forças da mesma natureza (como por exemplo vento, neve, sismos, cargas permanentes, sobrecargas); com o mesmo coeficiente de variação e o mesmo tipo de distribuição.

5.2.2.1 Um caso de carga

Considere-se apenas um caso de carga, ou seja, uma única força global F . Os pressupostos deste método são os mesmos do anterior. Parte-se da mesma equação determinística (5.1) até chegar à equação:

$$\delta K \cdot \bar{u} + \bar{K} \cdot \delta u = \delta F \cdot \Phi \quad (5.15)$$

A incerteza da resposta estrutural em termos de deslocamentos pode ser avaliada através da expressão:

$$\delta u = -\bar{K}^{-1} \cdot \delta K \cdot \bar{u} + \bar{K}^{-1} \cdot \delta F \cdot \Phi \quad (5.16)$$

Aplicando os mesmos pressupostos do método anterior, através do método probabilístico de elementos finitos é possível determinar as covariâncias das variáveis do sistema a partir das covariâncias das variáveis aleatórias. A matriz de covariâncias do vector u é dada por:

$$C_u = \frac{\partial u}{\partial \alpha} \cdot \delta \alpha \cdot C_p \cdot \delta \alpha^T \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha}^T \quad (5.17)$$

onde:

$$C_u = \text{matriz de covariâncias das variáveis do sistema}$$

$$C_p = \text{matriz de correlação das variáveis aleatórias}$$

$$\delta\alpha = \text{matriz dos desvios padrão das variáveis aleatórias}$$

Por exemplo, se os desvios da matriz de rigidez δK e das forças δF na equação (5.16) resultam da dispersão das variáveis aleatórias α_k ($n=1$), então a incerteza da resposta estrutural em termos de deslocamentos pode ser definida por:

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial \alpha_k} \cdot \delta \alpha_k = -\bar{K}^{-1} \cdot \frac{\partial K}{\partial \alpha_k} \cdot \bar{u} \cdot \delta \alpha_k + \bar{K}^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial \alpha_k} \cdot \Phi \cdot \delta \alpha_k \quad (5.18)$$

Tendo em conta as equações (5.17) e (5.18) obtém-se:

$$C_u = \left(\underbrace{-\bar{K}^{-1} \cdot \frac{\partial K}{\partial \alpha} \cdot \bar{u} \cdot \delta \alpha + \bar{K}^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial \alpha} \cdot \Phi \cdot \delta \alpha}_{(m \times n)} \right) \cdot \underbrace{C_p}_{(n \times n)} \cdot \left(\underbrace{-\delta \alpha^T \cdot \bar{u}^T \cdot \frac{\partial K^T}{\partial \alpha} \cdot \bar{K}^{-T} + \delta \alpha^T \cdot \Phi^T \cdot \frac{\partial F^T}{\partial \alpha} \cdot \bar{K}^{-T}}_{(n \times m)} \right) = \quad (5.19)$$

$$= \left(\overbrace{-\bar{K}^{-1} \cdot \frac{\partial K}{\partial \alpha_1} \cdot \bar{u} \cdot \delta \alpha_1 + \bar{K}^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial \alpha_1} \cdot \Phi_1 \cdot \delta \alpha_1, \dots, -\bar{K}^{-1} \cdot \frac{\partial K}{\partial \alpha_n} \cdot \bar{u} \cdot \delta \alpha_n + \bar{K}^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial \alpha_n} \cdot \Phi_n \cdot \delta \alpha_n}^A \right) \cdot C_p \cdot A^T$$

$(m \times 1) \qquad \qquad \qquad (m \times 1) \qquad \qquad \qquad (n \times n)(n \times m)$

onde:

m = Número de graus de liberdade da estrutura

n = Número de variáveis aleatórias básicas

Se $\delta\alpha$ e C_p são conhecidos, a expressão (5.19) dá-nos um valor para C_u . Esta matriz fornece as variâncias de todos os deslocamentos nodais da estrutura.

Em conclusão, uma vez conhecidas as médias e os desvios padrão das variáveis aleatórias básicas aplicadas na estrutura assim como as correlações entre elas, este método permite obter os deslocamentos médios e os respectivos desvios padrão.

5.2.2.2 Vários casos de carga

Com dois ou mais casos de carga, cada um com forças que têm o mesmo coeficiente de variação e o mesmo tipo de distribuição, o método aqui desenvolvido aplica-se de forma semelhante, apenas se tem de fazer um ajuste relativamente aos vários casos de carga. Para n casos de carga, a equação de equilíbrio será dada por:

$$K \cdot u = \sum_{i=1}^n F_i \cdot \Phi_i \quad (5.20)$$

Se a variação da rigidez e das forças que actuam na estrutura resultam de uma variação da variável aleatória α_k , então a segunda parcela da equação (5.18) pode ser obtida através da seguinte expressão:

$$\bar{K}^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial \alpha_k} \cdot \Phi \cdot \delta \alpha_k = \sum_{i=1}^n \left(\bar{K}^{-1} \cdot \frac{\partial F_i}{\partial \alpha_k} \cdot \Phi_i \cdot \delta \alpha_k \right) \quad (5.21)$$

Este vector condensa a influência, ou a acção, que todos os casos de carga têm sobre a estrutura. Assim, a incerteza da resposta estrutural em termos de deslocamentos pode ser avaliada através da equação:

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial \alpha_k} \cdot \delta \alpha_k = -\bar{K}^{-1} \cdot \frac{\partial K}{\partial \alpha_k} \cdot \bar{u} \cdot \delta \alpha_k + \sum_{i=1}^n \left(\bar{K}^{-1} \cdot \frac{\partial F_i}{\partial \alpha_k} \cdot \Phi_i \cdot \delta \alpha_k \right) \quad (5.22)$$

Neste caso a primeira parcela de δu , definida na equação (5.22), é influenciada por todas as variáveis aleatórias básicas do problema que estão relacionadas com a matriz de rigidez e a seguinte pelas forças que actuam na estrutura. Tendo em conta (5.17) e (5.21) obtém-se:

$$C_u = \overbrace{\left(-\bar{K}^{-1} \cdot \frac{\partial K}{\partial \alpha} \cdot \bar{u} \cdot \delta \alpha + \bar{K}^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial \alpha} \cdot \Phi \right)}^A \cdot C_p \cdot A^T \quad (5.23)$$

$(m \times s) \qquad (s \times s)(s \times m)$

onde m é o número de graus de liberdade da estrutura e s é igual ao número de variáveis aleatórias básicas menos o número de casos de carga mais uma unidade.

Se $\delta\alpha$ e C_p são conhecidos a expressão (5.23) dá-nos um valor para C_u . Esta matriz fornece as variâncias de todos os deslocamentos nodais da estrutura.

5.3 Exemplos de aplicação

Em seguida apresentam-se dois exemplos simples para ilustrar de forma detalhada a aplicação da metodologia proposta. No primeiro exemplo procura-se calcular a dispersão de uma força que é aplicada numa viga, no outro procura-se calcular a dispersão do deslocamento numa viga onde se aplicam duas forças. Em ambos os casos cada elemento é composto por dois nós e por três graus de liberdade por nó (figura 5.3).

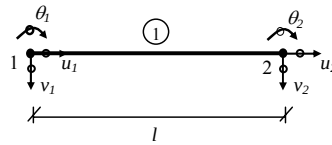


Figura 5.3 – Elemento de barra de dois nós.

5.3.1 Viga sujeita a uma carga

Considere-se uma viga onde é aplicada uma força nodal vertical a meio vão com uma grandeza de forma que a resposta estrutural se desenvolve em regime linear elástico (figura 5.4). O sistema estrutural é constituído por duas variáveis aleatórias básicas, a inércia I e o módulo de elasticidade E com distribuições normais (tabela 5.1). Os restantes parâmetros relacionados com a geometria da estrutura são considerados determinísticos. As componentes dos deslocamentos nos nós 1, 2 e 3 ($\theta_1, v_1, u_1, \theta_2, v_2, u_2, \theta_3, v_3, u_3$) serão caracterizadas através dos seus valores médios e desvios padrão, tendo em conta as características de dispersão do módulo de elasticidade e da inércia.

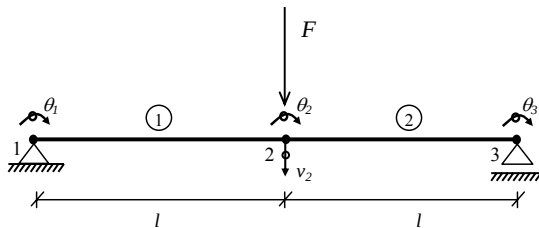


Figura 5.4 – Viga sujeita a uma carga F .

Neste exemplo foram considerados os seguintes parâmetros: vão $2l = 6m$, base da secção da viga $b = 0.25m$, altura da secção da viga $h = 0.5m$, inércia com um valor médio de $I = bh^3/12 = 1/384 m^4$ e um coeficiente de variação de 5%, módulo de elasticidade E com um valor médio de $30GPa$ e um coeficiente de variação de 8%, carga aplicada $F = 100KN$. As duas variáveis aleatórias, módulo de elasticidade e inércia, não são correlacionadas entre si.

Tabela 5.1 – Resumo das características dos parâmetros do sistema.

Variáveis Aleatórias	Distribuições	Valor Médio	Desvio Padrão
E	Normal	$30GPa$	$2.4GPa$
I	Normal	$\frac{1}{384} m^4$	$\frac{5}{38400} m^4$

Conforme se pode observar na figura 5.4 a viga é constituída por dois elementos e três nós, cada um com três graus de liberdade (um momento, um deslocamento vertical e um deslocamento horizontal). Começa-se por definir a matriz de rigidez da viga e o vector das forças nodais, sendo a matriz de rigidez do elemento i , K_{e_i} , e o vector das forças nodais do elemento i , F_{e_i} , dados por:

$$K_{e_1} = K_{e_2} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} \\ \frac{2EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 \\ -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

$$F_{e_1} = \{ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 50 \ 0 \}^T \quad (5.25)$$

$$F_{e_2} = \{ 0 \ 50 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \}^T \quad (5.26)$$

Agrupando as matrizes de rigidez e os vectores das forças nodais dos dois elementos obtém-se a matriz de rigidez K e o vector das forças nodais F da viga:

$$K = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 4 & \frac{6}{l} & 0 & 2 & -\frac{6}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & 0 & \frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A}{I} & 0 & 0 & -\frac{A}{I} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{6}{l} & 0 & 8 & 0 & 0 & 2 & -\frac{6}{l} & 0 \\ -\frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & 0 & 0 & \frac{24}{l^2} & 0 & \frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{A}{I} & 0 & 0 & \frac{2A}{I} & 0 & 0 & -\frac{A}{I} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{6}{l} & 0 & 4 & -\frac{6}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & 0 & -\frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{A}{I} & 0 & 0 & \frac{A}{I} \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

$$F = \{ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 100 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \}^T \quad (5.28)$$

O vector dos deslocamentos U é definido por:

$$U = \{ \theta_1 \quad v_1 \quad u_1 \quad \theta_2 \quad v_2 \quad u_2 \quad \theta_3 \quad v_3 \quad u_3 \}^T \quad (5.29)$$

Tendo em conta as restrições impostas pelos apoios (apoio duplo no nó 1 – impedimento de deslocamento vertical e horizontal e apoio simples no nó 3 – impedimento apenas no deslocamento vertical), as componentes de deslocamento v_1 , u_1 , u_2 , v_3 e u_3 são nulas. Desta forma, o vector das incógnitas, U , será composto pelas componentes de deslocamento: θ_1 , θ_2 , v_2 e θ_3 e pelas reacções nos apoios: R_1 e R_3 (reacções verticais nos nós 1 e 3). Assim, o sistema de equações que traduz o equilíbrio estático da viga é dado por:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & 0 & 0 & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{l^2} & 1 & 0 & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{AE}{l} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2EI}{l} & 0 & 0 & \frac{8EI}{l} & 0 & 0 & \frac{2EI}{l} & 0 & 0 \\ -\frac{6EI}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{24EI}{l^3} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2AE}{l} & 0 & 0 & -\frac{AE}{l} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{4EI}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{AE}{l} & 0 & 0 & \frac{AE}{l} \end{bmatrix}}_{[K]} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \theta_1 \\ R_1 \\ 0 \\ \theta_2 \\ v_2 \\ 0 \\ \theta_3 \\ R_3 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\{U\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\{F\}} \quad (5.30)$$

A matriz de rigidez K e o vector das forças nodais F a considerar nas fases seguintes serão as definidas em (5.30).

Para determinar a matriz de covariâncias das variáveis do sistema, C_q , e daí obter as variâncias de todos os deslocamentos nodais assim como a variância, segundo a direcção e sentido, da força aplicada à estrutura, F , é necessário calcular as derivadas parciais da matriz K em ordem às variáveis aleatórias E e I , a matriz K_M e a sua inversa K_M^{-1} e o vector dos deslocamentos médios nodais, $\bar{U}$. As derivadas parciais da matriz K em ordem às variáveis aleatórias E e I são dadas por:

$$\frac{\partial K}{\partial E} = \frac{I}{l} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 & -\frac{6}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{l} & 0 & 0 & \frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{A}{I} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -\frac{6}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{24}{l^2} & 0 & \frac{6}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2A}{I} & 0 & 0 & -\frac{A}{I} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{6}{l} & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & 0 & -\frac{6}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{A}{I} & 0 & 0 & \frac{A}{I} \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

$$\frac{\partial K}{\partial I} = \frac{E}{l} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 & -\frac{6}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{l} & 0 & 0 & \frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -\frac{6}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{24}{l^2} & 0 & \frac{6}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{6}{l} & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & 0 & -\frac{6}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

Uma vez definida a matriz K e o vector F é possível calcular o valor médio das incógnitas, $\bar{U}$. Tendo em conta que o valor médio do produto $EI = 30 \times 10^6 \times (1/384) = 78125 \text{KN.m}^2$, que $l = 3\text{m}$, $A = 0.125\text{m}^2$ e $F = 100\text{KN}$, substituindo estes valores no sistema de equações (5.30) obtém-se:

$$\bar{U} = \begin{Bmatrix} \bar{\theta}_1 \\ \bar{R}_1 \\ 0 \\ \bar{\theta}_2 \\ \bar{v}_2 \\ 0 \\ \bar{\theta}_3 \\ \bar{R}_3 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.00288 \text{ rad} \\ 50 \text{ KN} \\ 0 \\ 0 \\ 0.00576 \text{ m} \\ 0 \\ -0.00288 \text{ rad} \\ 50 \text{ KN} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.33)$$

A matriz K_M obtém-se a partir da matriz K definida na expressão (5.30) sendo dada por:

$$K_M = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & 0 & 0 & \frac{2EI}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{l^2} & 1 & 0 & \frac{6EI}{l^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{AE}{l} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2EI}{l} & 0 & 0 & \frac{8EI}{l} & 0 & 0 & \frac{2EI}{l} & 0 & 0 \\ -\frac{6EI}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{6EI}{l^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2AE}{l} & 0 & 0 & -\frac{AE}{l} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2EI}{l} & 0 & 0 & \frac{4EI}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{AE}{l} & 0 & 0 & \frac{AE}{l} \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

A matriz K_M^{-1} é a inversa da matriz K_M que pode obter-se utilizando o método de condensação de Gauss, sendo dada por:

$$K_M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{8EI} & 0 & 0 & -\frac{1}{4EI} & 0 & 0 & \frac{1}{8EI} & 0 & 0 \\ -\frac{5}{12} & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{4EI} & 0 & 0 & \frac{1}{2EI} & 0 & 0 & -\frac{1}{4EI} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16EI} & 0 & 0 & \frac{1}{16EI} \\ \frac{1}{8EI} & 0 & 0 & -\frac{1}{4EI} & 0 & 0 & \frac{7}{8EI} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{12} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{5}{12} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16EI} & 0 & 0 & \frac{1}{8EI} \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

Convém notar que o produto dado pela expressão $K_M^{-1} \cdot \frac{\partial K}{\partial \alpha} \cdot \bar{u} \cdot \delta \alpha$, definida na equação (5.13), resulta numa matriz com dimensão $(m \times n)$, onde m é o número de graus de liberdade da estrutura (neste exemplo $m = 9$) e n é o número de graus de liberdade estocásticos, ou seja, o número de variáveis aleatórias básicas (neste exemplo $n = 2$). Nesta matriz cada coluna corresponde à contribuição de cada variável aleatória.

A matriz $\bar{K}_M^{-1}$ obtém-se a partir da matriz K_M^{-1} definida em (5.35) substituindo os parâmetros pelos seus valores médios. Assim como as matrizes das derivadas parciais $\partial \bar{K} / \partial \alpha$ são obtidas a partir das expressões (5.31) e (5.32) substituindo os parâmetros pelos seus valores médios. A expressão $\delta \alpha$ representa os desvios padrão das variáveis aleatórias básicas E e I , que são $\delta E = 30 \times 0.08 = 2.4 \text{ GPa}$ e $\delta I = 1/384 \times 0.05 = 5/38400 \text{ m}^4$.

Para obter os elementos da coluna correspondente à contribuição da variável aleatória E deve calcular-se a seguinte expressão:

$$\bar{K}_M^{-1} \cdot \frac{\partial \bar{K}}{\partial E} \cdot \bar{u} \cdot \delta E =$$

$$= \begin{bmatrix} 11.2 \times 10^{-6} & 0 & 0 & -3.2 \times 10^{-6} & 0 & 0 & 1.6 \times 10^{-6} & 0 & 0 \\ -0.41(6) & 1 & 0 & -0.1(6) & 0 & 0 & 0.08(3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3.2 \times 10^{-6} & 0 & 0 & 6.4 \times 10^{-6} & 0 & 0 & -3.2 \times 10^{-6} & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 \times 10^{-6} & 0 & 0 & 0.8 \times 10^{-6} \\ 1.6 \times 10^{-6} & 0 & 0 & -3.2 \times 10^{-6} & 0 & 0 & 11.2 \times 10^{-6} & 0 & 0 \\ -0.08(3) & 0 & 0 & 0.1(6) & 0 & 0 & 0.41(6) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 \times 10^{-6} & 0 & 0 & 1.6 \times 10^{-6} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \frac{1}{1152} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & -\frac{12}{9} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -48 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & \frac{24}{9} & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 96 & 0 & 0 & -48 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -\frac{12}{9} & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -48 & 0 & 0 & 48 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.00288 \\ 50 \\ 0 \\ 0 \\ 0.00576 \\ 0 \\ -0.00288 \\ 50 \\ 0 \end{bmatrix} \times 2.4 \times 10^{-6} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ -8 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

Para obter os elementos da coluna correspondente à contribuição da variável aleatória I deve calcular-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} & \bar{K}_M^{-1} \cdot \frac{\partial \bar{K}}{\partial I} \cdot \bar{u} \cdot \delta I = \\ & = \begin{bmatrix} 11.2 \times 10^{-6} & 0 & 0 & -3.2 \times 10^{-6} & 0 & 0 & 1.6 \times 10^{-6} & 0 & 0 \\ -0.41(6) & 1 & 0 & -0.1(6) & 0 & 0 & 0.08(3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3.2 \times 10^{-6} & 0 & 0 & 6.4 \times 10^{-6} & 0 & 0 & -3.2 \times 10^{-6} & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 \times 10^{-6} & 0 & 0 & 0.8 \times 10^{-6} \\ 1.6 \times 10^{-6} & 0 & 0 & -3.2 \times 10^{-6} & 0 & 0 & 11.2 \times 10^{-6} & 0 & 0 \\ -0.08(3) & 0 & 0 & 0.1(6) & 0 & 0 & 0.41(6) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 \times 10^{-6} & 0 & 0 & 1.6 \times 10^{-6} \end{bmatrix} \times \\ & \times \frac{30 \times 10^6}{3} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & -\frac{12}{9} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & \frac{24}{9} & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -\frac{12}{9} & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.00288 \\ 50 \\ 0 \\ 0 \\ 0.00576 \\ 0 \\ -0.00288 \\ 50 \\ 0 \end{bmatrix} \times \frac{5}{38400} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2.5 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ -2.5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.37) \end{aligned}$$

Considerando a equação (5.13) e tendo em conta que as variáveis aleatórias E e I não estão correlacionadas entre si (assim, a matriz C_ρ é uma matriz identidade) é calculada a matriz de covariâncias da resposta estrutural:

$$C_q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -4 & -2.5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -8 & -5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -4 & -2.5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -2.5 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & -2.5 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C_q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 22.25 & 0 & 0 & 44.5 & 0 & 0 & 22.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 44.5 & 0 & 0 & 89 & 0 & 0 & 44.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 22.25 & 0 & 0 & 44.5 & 0 & 0 & 22.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

A variância da componente da força F corresponde ao valor obtido na diagonal principal, na linha (ou coluna) 5. Desta forma, o respectivo desvio padrão é dado por:

$$\delta F = \sqrt{89} = 9.43 \text{ kN}$$

5.3.2 Viga sujeita a duas cargas

Considere-se uma viga submetida a duas acções, uma carga uniformemente distribuída p e uma força nodal horizontal Q no extremo da viga (figura 5.5). O sistema estrutural é constituído por três variáveis aleatórias básicas, o módulo de elasticidade E e as duas acções aplicadas Q e p com distribuições normais (tabela 5.2). Os restantes parâmetros relacionados com a geometria da estrutura são considerados determinísticos. As componentes dos deslocamentos nos nós 1, 2 e 3 ($\theta_1, v_1, u_1, \theta_2, v_2, u_2, \theta_3, v_3, u_3$) serão caracterizadas através dos seus valores médios e desvios padrão, tendo em conta as características de dispersão do módulo de elasticidade e das duas cargas. O estudo vai incidir sobre a avaliação da incerteza do deslocamento vertical a meio vão da viga, v_2 .

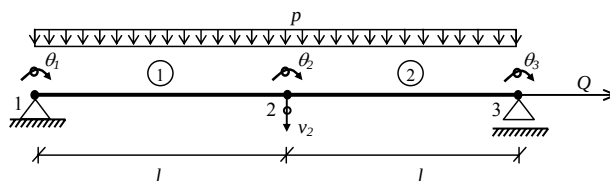


Figura 5.5 – Viga sujeita a duas cargas Q e p .

Neste exemplo foram considerados os seguintes parâmetros: vão $2l = 5\text{m}$, área da secção da viga $A = 0.0012\text{m}^2$, inércia $I = 2.5 \times 10^{-5}\text{m}^4$, módulo de elasticidade E com um valor médio de 200GPa e um coeficiente de variação de 5%, carga uniformemente distribuída p com um valor médio de 15kN/m e um desvio padrão de 2kN/m e força nodal horizontal Q com um valor médio de 50kN e um coeficiente de variação de 15%. As três variáveis

aleatórias, módulo de elasticidade, carga p e força Q não são correlacionadas entre si.

Tabela 5.2 – Resumo das características dos parâmetros do sistema.

Variáveis Aleatórias	Distribuições	Valor Médio	Desvio Padrão
E	Normal	200GPa	10GPa
p	Normal	15kN/m	2kN/m
Q	Normal	50kN	7.5kN

Conforme se pode observar na figura 5.5 a viga é constituída por dois elementos e três nós, cada um com três graus de liberdade (um momento, um deslocamento vertical e um deslocamento horizontal). Começa-se por definir a matriz de rigidez da viga e o vector das forças nodais. Tal como no exemplo anterior, cada elemento é composto por dois nós e por três graus de liberdade por nó (figura 5.3), sendo a matriz de rigidez do elemento i , K_{e_i} , e o vector das forças nodais do elemento i , F_{e_i} , dadas por:

$$K_{e_1} = K_{e_2} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} \\ \frac{2EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 \\ -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

$$F_{e_1} = \left\{ \frac{pl^2}{12} \quad \frac{pl}{2} \quad 0 \quad -\frac{pl^2}{12} \quad \frac{pl}{2} \quad 0 \right\}^T \quad (5.40)$$

$$F_{e_2} = \left\{ \frac{pl^2}{12} \quad \frac{pl}{2} \quad 0 \quad -\frac{pl^2}{12} \quad \frac{pl}{2} \quad Q \right\}^T \quad (5.41)$$

Agrupando as matrizes de rigidez e os vectores das forças nodais dos dois elementos obtém-se a matriz de rigidez K e o vector das forças nodais Q da viga:

$$F = \left\{ \frac{pl^2}{12} \quad \frac{pl}{2} \quad 0 \quad 0 \quad pl \quad 0 \quad -\frac{pl^2}{12} \quad \frac{pl}{2} \quad Q \right\}^T \quad (5.42)$$

$$K = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 4 & \frac{6}{l} & 0 & 2 & -\frac{6}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & 0 & \frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A}{I} & 0 & 0 & -\frac{A}{I} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{6}{l} & 0 & 8 & 0 & 0 & 2 & -\frac{6}{l} & 0 \\ -\frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & 0 & 0 & \frac{24}{l^2} & 0 & \frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{A}{I} & 0 & 0 & \frac{2A}{I} & 0 & 0 & -\frac{A}{I} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{6}{l} & 0 & 4 & -\frac{6}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & 0 & -\frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{A}{I} & 0 & 0 & \frac{A}{I} \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

O vector de deslocamentos U é definido por:

$$U = \{\theta_1 \ v_1 \ u_1 \ \theta_2 \ v_2 \ u_2 \ \theta_3 \ v_3 \ u_3\}^T \quad (5.44)$$

Tendo em conta as restrições impostas pelos apoios (apoio duplo no nó 1 – impedimento de deslocamento vertical e horizontal e apoio simples no nó 3 – impedimento apenas no deslocamento vertical) e a força Q aplicada no nó 3, as componentes de deslocamento v_1 , u_1 e v_3 são nulas. Desta forma, o vector das incógnitas, U , será composto pelas componentes de deslocamento: θ_1 , θ_2 , v_2 , u_2 , θ_3 e u_3 e pelas reacções nos apoios: V_1 e V_3 (reacções verticais nos nós 1 e 3) e H_1 (reacção horizontal no nó 1). Assim, o sistema de equações que traduz o equilíbrio estático da viga é dado por:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & 0 & 0 & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{l^2} & 1 & 0 & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{AE}{l} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2EI}{l} & 0 & 0 & \frac{8EI}{l} & 0 & 0 & \frac{2EI}{l} & 0 & 0 \\ -\frac{6EI}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{24EI}{l^3} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2AE}{l} & 0 & 0 & -\frac{AE}{l} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{4EI}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{AE}{l} & 0 & 0 & \frac{AE}{l} \end{bmatrix}}_{[K]} \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ V_1 \\ H_1 \\ \theta_2 \\ v_2 \\ u_2 \\ \theta_3 \\ V_3 \\ u_3 \end{Bmatrix}}_{\{U\}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} pl^2/12 \\ pl/2 \\ 0 \\ 0 \\ pl \\ 0 \\ -pl^2/12 \\ pl/2 \\ Q \end{Bmatrix}}_{\{F\}} \quad (5.45)$$

A matriz de rigidez K e o vector das forças nodais F a considerar nas fases seguintes serão as definidas em (5.45).

Para determinar a matriz de covariâncias das variáveis do sistema, C_u , e daí obter as variâncias de todos os deslocamentos nodais é necessário calcular as derivadas parciais da matriz K e do vector F em ordem às variáveis aleatórias E , p e Q , a matriz $\bar{K}^{-1}$ e o vector dos deslocamentos médios nodais, $\bar{U}$. As derivadas parciais da matriz K e do vector F em ordem às variáveis aleatórias E , p e Q são dadas por:

$$\frac{\partial K}{\partial Q} = \frac{\partial K}{\partial p} = \frac{\partial F}{\partial E} = 0 \quad (5.46)$$

$$\frac{\partial K}{\partial E} = \frac{I}{l} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 & -\frac{6}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{l} & 0 & 0 & \frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{A}{I} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -\frac{6}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{24}{l^2} & 0 & \frac{6}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2A}{I} & 0 & 0 & -\frac{A}{I} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{6}{l} & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & 0 & -\frac{6}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{A}{I} & 0 & 0 & \frac{A}{I} \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

$$\frac{\partial F}{\partial p} = \frac{l}{2} \left\{ \frac{l}{6} \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad -\frac{l}{6} \quad 1 \quad 0 \right\}^T \quad (5.48)$$

$$\frac{\partial F}{\partial Q} = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1\}^T \quad (5.49)$$

Uma vez definida a matriz K e o vector F é possível calcular o valor médio das incógnitas, $\bar{U}$. Tendo em conta que o valor médio do produto $EI = 200 \times 10^6 \times 2.5 \times 10^{-5} = 5000 \text{KN.m}^2$, que $l = 2.5\text{m}$, $A = 0.0012\text{m}^2$, $p = 15\text{kN/m}$ e $Q = 50\text{kN}$, substituindo estes valores no sistema de equações (5.45) obtém-se:

$$\bar{U} = \begin{Bmatrix} \bar{\theta}_1 \\ \bar{V}_1 \\ \bar{H}_1 \\ \bar{\theta}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{\theta}_3 \\ \bar{V}_3 \\ \bar{u}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.015625 \text{ rad} \\ 37.5 \text{ KN} \\ 50 \text{ KN} \\ 0 \\ 0.0244140625 \text{ m} \\ 0.0005208(3) \text{ m} \\ -0.015625 \text{ rad} \\ 37.5 \text{ KN} \\ 0.001041(6) \text{ m} \end{Bmatrix} \quad (5.50)$$

A soma dada pela expressão $\left(-\bar{K}^{-1} \cdot \frac{\partial \bar{K}}{\partial \alpha} \cdot \bar{U} \cdot \delta \alpha + \bar{K}^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial \alpha} \cdot \Phi \cdot \delta \alpha \right)$, definida na equação (5.19), resulta numa matriz com dimensão $(m \times n)$, onde m é o número de graus de liberdade da estrutura (neste exemplo $m = 9$) e n é o número de graus de liberdade estocásticos, ou seja, o número de variáveis aleatórias básicas (neste exemplo $n = 3$). Nesta matriz cada coluna corresponde à contribuição de cada variável aleatória.

A matriz $\bar{K}^{-1}$ obtém-se a partir da matriz K definida em (5.45) substituindo os parâmetros pelos seus valores médios e invertendo a matriz assim obtida. As matrizes das derivadas parciais $\partial \bar{K} / \partial \alpha$ e $\partial F / \partial \alpha$ são obtidas a partir das expressões (5.46) a (5.49) substituindo os parâmetros pelos seus valores médios. A expressão $\delta \alpha$ representa os desvios padrão das variáveis aleatórias básicas E , p e Q , que são $\delta E = 200 \times 0.05 = 10 \text{ GPa}$, $\delta p = 2 \text{ kN/m}$ e $\delta Q = 50 \times 0.15 = 7.5 \text{ kN}$.

Como $\partial F / \partial E = 0$, para obter os elementos da coluna correspondente à contribuição da variável aleatória E basta calcular a seguinte expressão:

$$-\bar{K}^{-1} \cdot \frac{\partial \bar{K}}{\partial E} \cdot \bar{U} \cdot \delta E =$$

$$= - \begin{bmatrix} 3.(3) \times 10^{-4} & 0 & 0 & -4.1(6) \times 10^{-5} & 3.125 \times 10^{-4} & 0 & -1.(6) \times 10^{-4} & 0 & 0 \\ -0.2 & 1 & 0 & -0.2 & 0.5 & 0 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -4.1(6) \times 10^{-5} & 0 & 0 & 0.8(3) \times 10^{-4} & 0 & 0 & -4.1(6) \times 10^{-5} & 0 & 0 \\ 3.125 \times 10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 5.208(3) \times 10^{-4} & 0 & 3.125 \times 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10.42 \times 10^{-6} & 0 & 0 & 10.42 \times 10^{-6} \\ -1.(6) \times 10^{-4} & 0 & 0 & -4.1(6) \times 10^{-5} & -3.125 \times 10^{-4} & 0 & 3.(3) \times 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0.5 & 0 & 0.2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10.42 \times 10^{-6} & 0 & 0 & 20.83 \times 10^{-6} \end{bmatrix} \times$$

$$\times 10^{-5} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 & -2.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.4 & 0 & 0 & 2.4 & -1.92 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -48 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2.4 & 0 & 0 & 0 & 3.84 & 0 & 2.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 96 & 0 & 0 & -48 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2.4 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.4 & -1.92 & 0 & -2.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -48 & 0 & 0 & 48 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.015625 \\ 37.5 \\ 50 \\ 0 \\ 0.0244140625 \\ 0.0005208(3) \\ -0.015625 \\ 37.5 \\ 0.001041(6) \end{bmatrix} \times 10^7 = \begin{bmatrix} -7.81 \times 10^{-4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1.22 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 7.81 \times 10^{-4} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

Como $\partial K / \partial p = 0$, para obter os elementos da coluna correspondente à contribuição da variável aleatória p basta calcular a seguinte expressão:

$$\bar{K}^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial p} \cdot \Phi \cdot \delta p =$$

$$= \begin{bmatrix} 3.(3) \times 10^{-4} & 0 & 0 & -4.1(6) \times 10^{-5} & 3.125 \times 10^{-4} & 0 & -1.(6) \times 10^{-4} & 0 & 0 \\ -0.2 & 1 & 0 & -0.2 & 0.5 & 0 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -4.1(6) \times 10^{-5} & 0 & 0 & 0.8(3) \times 10^{-4} & 0 & 0 & -4.1(6) \times 10^{-5} & 0 & 0 \\ 3.125 \times 10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 5.208(3) \times 10^{-4} & 0 & 3.125 \times 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10.42 \times 10^{-6} & 0 & 0 & 10.42 \times 10^{-6} \\ -1.(6) \times 10^{-4} & 0 & 0 & -4.1(6) \times 10^{-5} & -3.125 \times 10^{-4} & 0 & 3.(3) \times 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0.5 & 0 & 0.2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10.42 \times 10^{-6} & 0 & 0 & 20.83 \times 10^{-6} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 0.5208(3) \\ 1.25 \\ 0 \\ 0 \\ 2.5 \\ 0 \\ -0.5208(3) \\ 1.25 \\ 0 \end{bmatrix} \times 2 = \begin{bmatrix} 2.08 \times 10^{-3} \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 3.25 \times 10^{-3} \\ 0 \\ -2.08 \times 10^{-3} \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

Como $\partial K / \partial Q = 0$, para obter os elementos da coluna correspondente à contribuição da variável aleatória Q basta calcular a seguinte expressão:

$$\bar{K}^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial Q} \cdot \Phi \cdot \delta Q =$$

$$= \begin{bmatrix} 3.(3) \times 10^{-4} & 0 & 0 & -4.1(6) \times 10^{-5} & 3.125 \times 10^{-4} & 0 & -1.(6) \times 10^{-4} & 0 & 0 \\ -0.2 & 1 & 0 & -0.2 & 0.5 & 0 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -4.1(6) \times 10^{-5} & 0 & 0 & 0.8(3) \times 10^{-4} & 0 & 0 & -4.1(6) \times 10^{-5} & 0 & 0 \\ 3.125 \times 10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 5.208(3) \times 10^{-4} & 0 & 3.125 \times 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10.42 \times 10^{-6} & 0 & 0 & 10.42 \times 10^{-6} \\ -1.(6) \times 10^{-4} & 0 & 0 & -4.1(6) \times 10^{-5} & -3.125 \times 10^{-4} & 0 & 3.(3) \times 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0.5 & 0 & 0.2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10.42 \times 10^{-6} & 0 & 0 & 20.83 \times 10^{-6} \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times 7.5 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7.5 \\ 0 \\ 0 \\ 7.815 \times 10^{-5} \\ 0 \\ 0 \\ 1.56225 \times 10^{-4} \end{Bmatrix} \quad (5.53)$$

Considerando a equação (5.23) e tendo em conta que as variáveis aleatórias E , p e Q não estão correlacionadas entre si (assim, a matriz C_p é uma matriz identidade) é calculada a matriz de covariâncias da resposta estrutural através da seguinte expressão:

$$C_u = \begin{bmatrix} -7.81 \times 10^{-4} & 0 & 2.08 \times 10^{-3} \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 7.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1.22 \times 10^{-3} & 0 & 3.25 \times 10^{-3} \\ 0 & 7.815 \times 10^{-5} & 0 \\ 7.81 \times 10^{-4} & 0 & -2.08 \times 10^{-3} \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1.56225 \times 10^{-4} & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} -7.81 \times 10^{-4} & 0 & 0 & 0 & -1.22 \times 10^{-3} & 0 & 7.81 \times 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7.5 & 0 & 0 & 7.815 \times 10^{-5} & 0 & 0 & 1.56225 \times 10^{-4} \\ 2.08 \times 10^{-3} & 5 & 0 & 0 & 3.25 \times 10^{-3} & 0 & -2.08 \times 10^{-3} & 5 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C_u = \begin{bmatrix} 4.93 \times 10^{-6} & 10.37 \times 10^{-3} & 0 & 0 & 7.7 \times 10^{-6} & 0 & -4.93 \times 10^{-6} & 10.37 \times 10^{-3} & 0 \\ 10.37 \times 10^{-3} & 24.88 & 0 & 0 & 16.2 \times 10^{-3} & 0 & -10.37 \times 10^{-3} & 24.88 & 0 \\ 0 & 0 & 56.25 & 0 & 0 & 585.94 \times 10^{-6} & 0 & 0 & 1.17 \times 10^{-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7.7 \times 10^{-6} & 16.2 \times 10^{-3} & 0 & 0 & 12.03 \times 10^{-6} & 0 & -7.7 \times 10^{-6} & 16.2 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 585.94 \times 10^{-6} & 0 & 0 & 6.1 \times 10^{-9} & 0 & 0 & 12.21 \times 10^{-9} \\ -4.93 \times 10^{-6} & -10.37 \times 10^{-3} & 0 & 0 & -7.7 \times 10^{-6} & 0 & 4.93 \times 10^{-6} & -10.37 \times 10^{-3} & 0 \\ 10.37 \times 10^{-3} & 24.88 & 0 & 0 & 16.2 \times 10^{-3} & 0 & -10.37 \times 10^{-3} & 24.88 & 0 \\ 0 & 0 & 1.17 \times 10^{-3} & 0 & 0 & 12.21 \times 10^{-9} & 0 & 0 & 24.41 \times 10^{-9} \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

A variância do deslocamento vertical a meio vão, v_2 , corresponde ao valor obtido na diagonal principal de C_u na linha (ou coluna) 5. Desta forma, o respectivo desvio padrão é dado por:

$$\delta v_2 = \sqrt{1.203358 \times 10^{-5}} = 3.468945 \times 10^{-3} m$$

5.4 Métodos de transformação

A aplicação do método proposto tem por base o pressuposto de que todas as variáveis aleatórias básicas têm uma distribuição normal de parâmetros μ e σ . Na realidade esse pressuposto nem sempre se verifica. Nesses casos é aplicada a transformação de caudas normais às variáveis aleatórias que não têm distribuição normal, igualando a sua função densidade de probabilidade à função densidade de probabilidade de uma normal padrão e a sua função distribuição à função distribuição de uma normal padrão no ponto de dimensionamento, que neste caso vai ser considerado igual ao valor médio de cada variável aleatória ($x_i^* = \mu_{x_i}$), de forma a ajustar uma distribuição não normal de uma variável aleatória básica a uma normal equivalente (Rackwitz e Fiessler, 1978).

No entanto, a aplicação desta transformação revelou-se pouco precisa (ver exemplos 5.4.1 e 5.4.2), uma vez que se notou que as caudas das distribuições das variáveis originais e das normais equivalentes não se ajustam de forma adequada. Assim, para melhorar a aproximação utilizaram-se os valores dos parâmetros da variável original (μ_{x_i} e σ_{x_i}) aplicando-se uma nova transformação escolhendo um ponto X na distribuição original (correspondente ao ponto de dimensionamento da transformação de caudas normais, x_i^*) de forma a manter constante o desvio padrão da distribuição normal equivalente (obtida a partir da transformação de caudas normais). Desta forma apenas as medidas de localização se alteram em relação à primeira transformação e a distribuição sofre uma translação de forma que as caudas das duas distribuições (da variável original e da normal equivalente) passam a coincidir com maior precisão.

5.4.1 Exemplo: Distribuições Tipo I

Considere-se uma variável aleatória X que segue uma distribuição de Tipo I (Gumbel de máximos), ou seja, $X \sim G(\alpha, \beta)$ onde $\alpha \in \mathbb{R}$ é o parâmetro de localização e $\beta > 0$ o parâmetro de escala. Depois de aplicar a transformação de caudas normais, obtendo uma distribuição normal equivalente com um novo valor médio e desvio padrão, há que utilizar os valores dos parâmetros da variável original e escolher o ponto X de forma a manter constante o desvio padrão da distribuição normal equivalente para obter os valores de α e

β através das seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
 \Phi\left(\frac{x_i^* - \mu}{\sigma}\right) &= F(x_i^*) = e^{-e^{-\frac{x_i^* - \alpha}{\beta}}} && \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow -\ln\left[\Phi\left(\frac{x_i^* - \mu}{\sigma}\right)\right] &= e^{-\frac{x_i^* - \alpha}{\beta}} && \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow -\ln\left(-\ln\left(\Phi\left(\frac{x_i^* - \mu}{\sigma}\right)\right)\right) &= \frac{x_i^* - \alpha}{\beta} && \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \alpha &= x_i^* - \beta \left[-\ln\left(-\ln\left(\Phi\left(\frac{x_i^* - \mu}{\sigma}\right)\right)\right) \right] \\
 \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{x_i^* - \mu}{\sigma}\right) &= f(x_i^*) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x_i^* - \alpha}{\beta}} e^{-\frac{x_i^* - \alpha}{\beta}} && \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \beta &= \frac{\sigma}{\phi\left(\frac{x_i^* - \mu}{\sigma}\right)} e^{\ln\left(-\ln\left(\Phi\left(\frac{x_i^* - \mu}{\sigma}\right)\right)\right) - e^{\ln\left(-\ln\left(\Phi\left(\frac{x_i^* - \mu}{\sigma}\right)\right)\right)}} && (5.56)
 \end{aligned}$$

Por exemplo se $X \cap G(0.82, 0.312)$, aplicando a transformação de caudas normais obtém-se uma distribuição normal equivalente onde $X \cap N(0.932, 0.382)$. Aplicando uma nova transformação, utilizando como ponto de partida os valores dos parâmetros da variável original, μ_{x_i} e σ_{x_i} , e procurando X de forma que $\sigma_N = 0.382$, obtém-se uma nova distribuição normal equivalente onde $X \cap N(1.0753, 0.382)$, melhorando a aproximação entre as duas distribuições nas caudas. Nas Figuras 5.7 e 5.8 o ponto $X = 2.2$ foi escolhido arbitrariamente na cauda a título de exemplo. Assim, considerando:

- Distribuição Tipo I (Gumbel de máximos): $X \cap G(\alpha, \beta)$
- Normal Equivalente (Transformação de caudas)
- Normal Equivalente (Nova transformação)

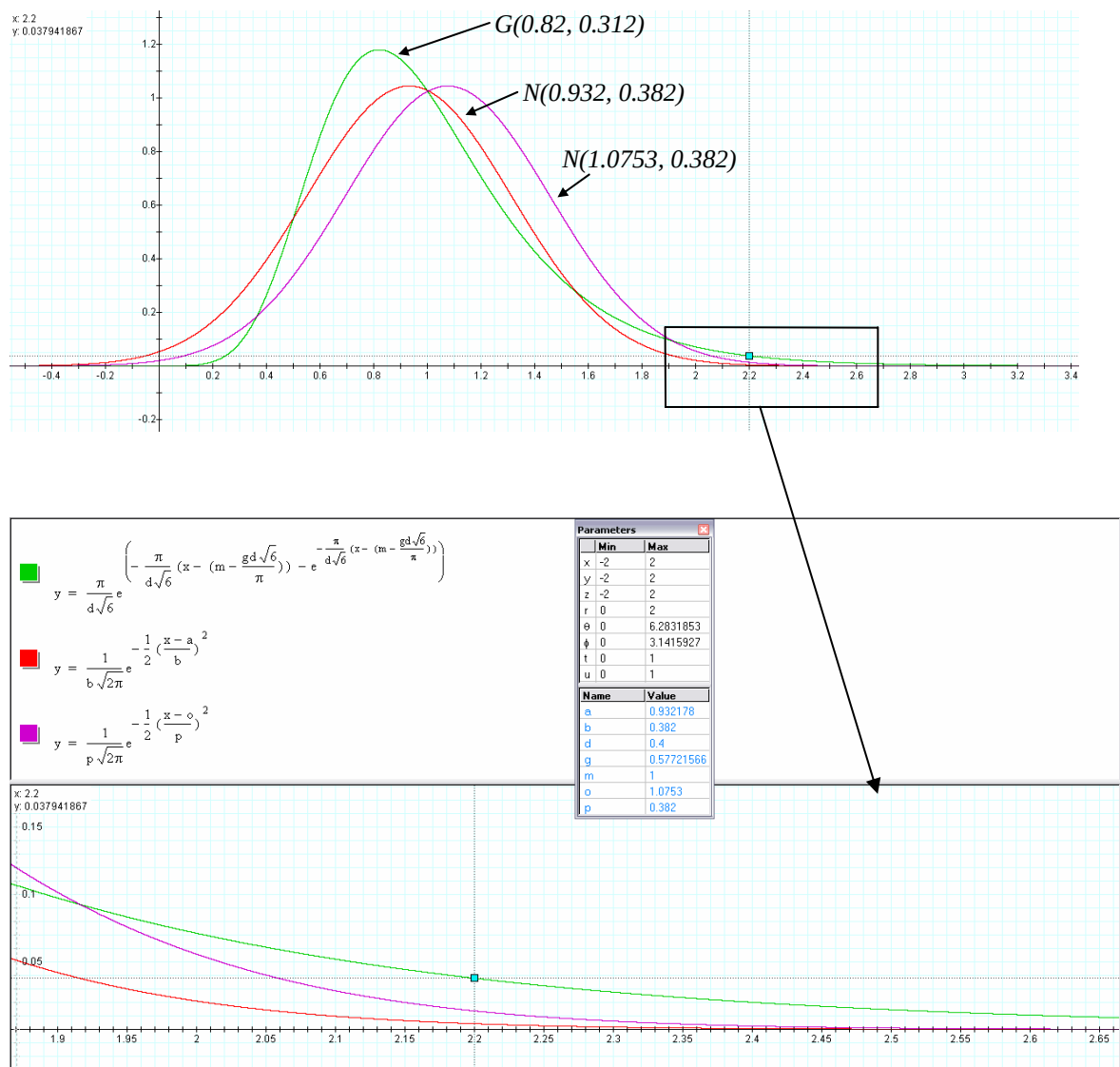


Figura 5.7 – Transformação de uma distribuição de Tipo I numa normal equivalente.

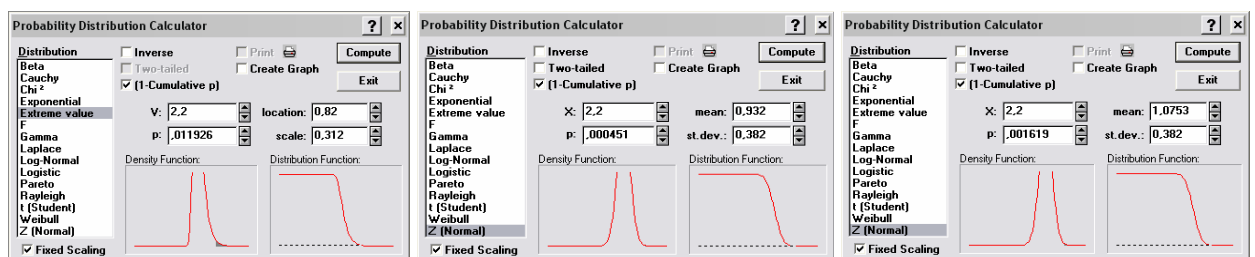


Figura 5.8 – $P(X \geq 2.2)$ onde $X \cap G(0.82, 0.312)$, $X \cap N(0.932, 0.382)$ e $X \cap N(1.0753, 0.382)$.

Através da figura 5.8 pode observar-se que se $X \cap G(0.82, 0.312)$ a $P(X \geq 2.2) = 0.11926$, se $X \cap N(0.932, 0.382)$ a $P(X \geq 2.2) = 0.000451$ e se $X \cap N(1.0753, 0.382)$ a $P(X \geq 2.2) = 0.001619$. Portanto com a última transformação verifica-se uma melhoria da aproximação nas caudas.

Por exemplo se $X \cap G(0.662, 0.585)$, aplicando a transformação de caudas normais obtém-se uma distribuição normal equivalente onde $X \cap N(0.873, 0.717)$. Aplicando uma nova transformação obtém-se uma nova distribuição normal equivalente onde $X \cap N(1.141, 0.717)$, melhorando a aproximação entre as duas distribuições nas caudas. Nas Figuras 5.9 e 5.10 o ponto $X = 3.3$ foi escolhido arbitrariamente na cauda a título de exemplo.

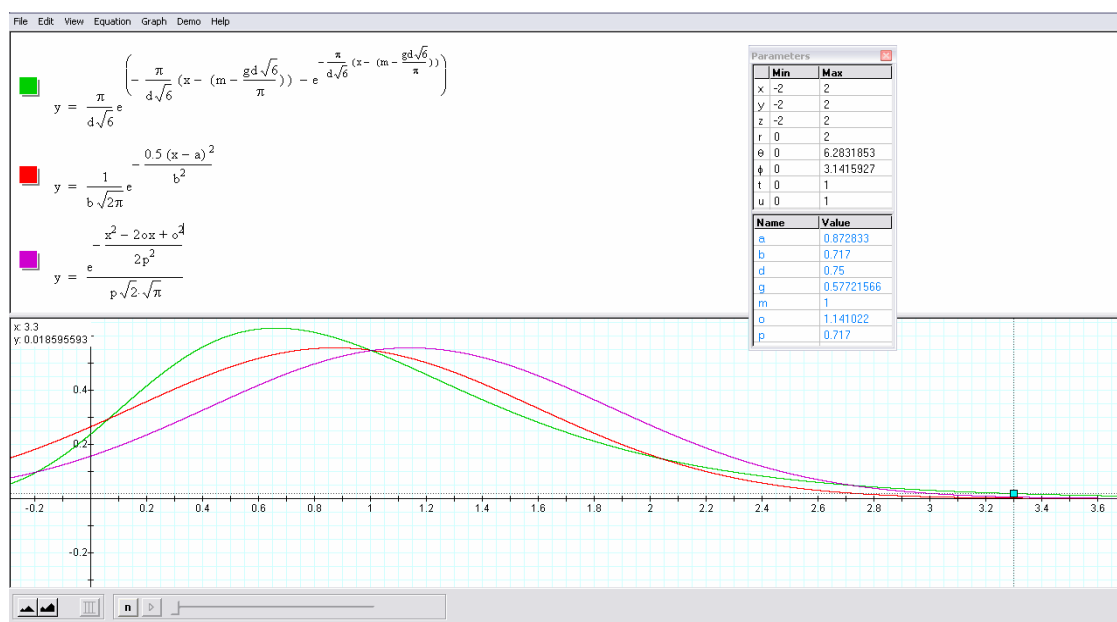


Figura 5.9 – Transformação de uma distribuição de Tipo I numa normal equivalente.

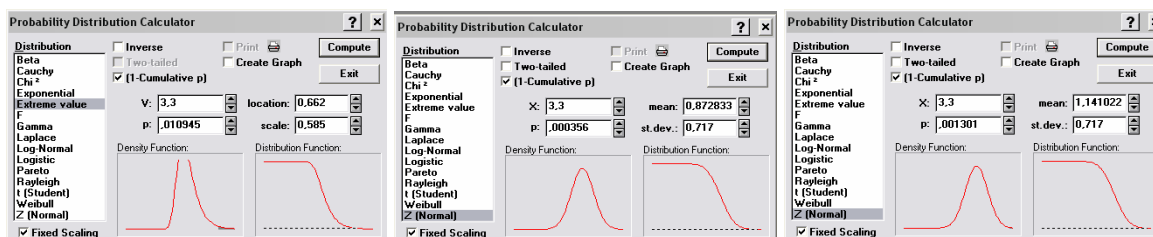


Figura 5.10 – $P(X \geq 3.3)$ onde $X \cap G(0.662, 0.585)$, $X \cap N(0.873, 0.717)$ e $X \cap N(1.141, 0.717)$.

Através da figura 5.10 pode ver-se que se $X \cap G(0.662, 0.585)$ a $P(X \geq 3.3) = 0.010945$, se $X \cap N(0.873, 0.717)$ a $P(X \geq 3.3) = 0.000356$ e se $X \cap N(1.141, 0.717)$ a $P(X \geq 3.3) = 0.001301$. Portanto com a última transformação verifica-se uma melhoria na aproximação.

Por exemplo se $X \cap G(4.437, 0.975)$, aplicando a transformação de caudas normais obtém-se uma distribuição normal equivalente onde $X \cap N(4.788, 1.195)$. Aplicando uma nova transformação obtém-se uma nova distribuição normal equivalente onde $X \cap N(5.235, 1.195)$, melhorando a aproximação entre as duas distribuições nas caudas. Nas Figuras 5.11 e 5.12 o ponto $X = 8$ foi escolhido arbitrariamente na cauda a título de exemplo.

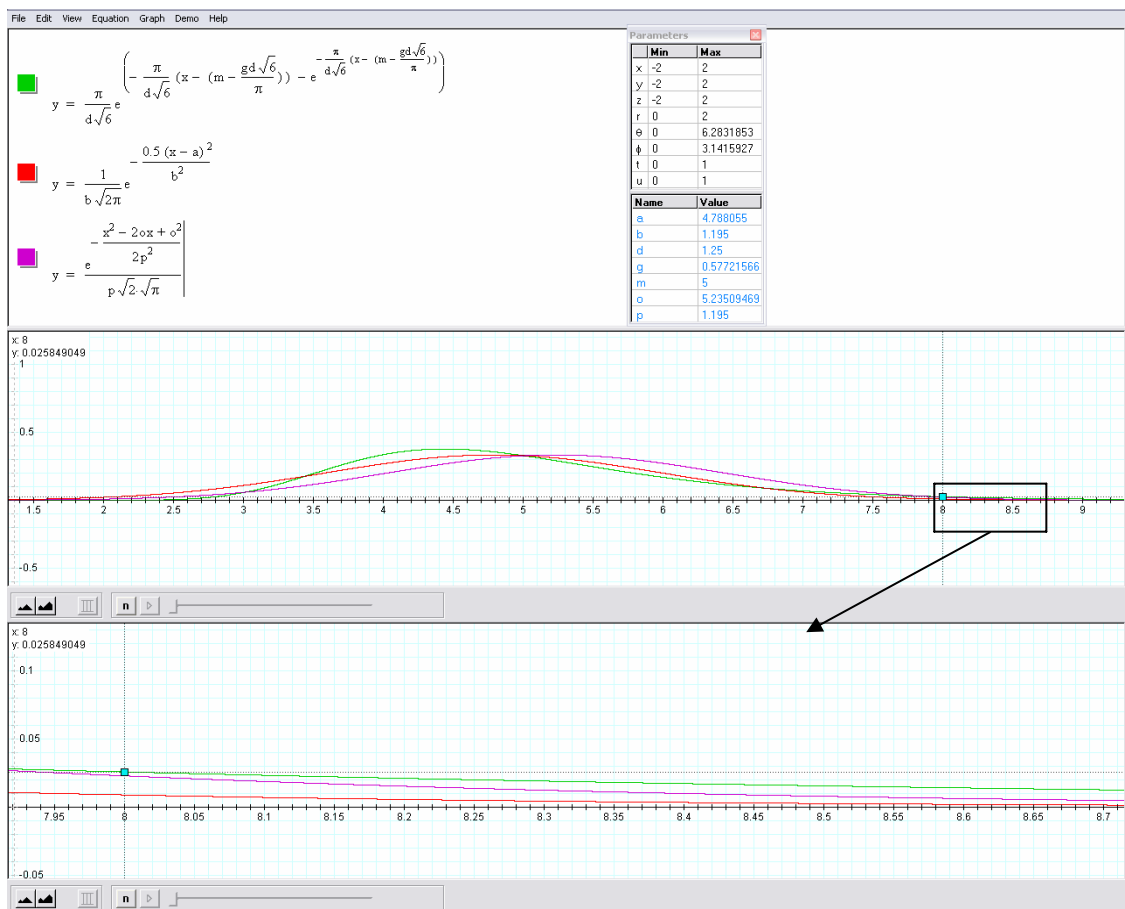


Figura 5.11 – Transformação de uma distribuição de Tipo I numa normal equivalente.

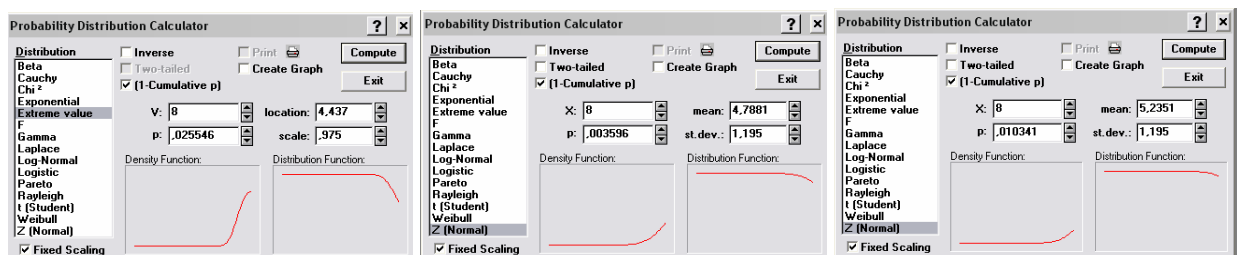


Figura 5.12 – $P(X \geq 8)$ onde $X \cap G(4.437, 0.975)$, $X \cap N(4.788, 1.195)$ e $X \cap N(5.235, 1.195)$.

Através da Figura 5.12 pode observar-se que se $X \cap G(4.437, 0.975)$ a $P(X \geq 8) = 0.025546$, se $X \cap N(4.788, 1.195)$ a $P(X \geq 8) = 0.003596$ e se $X \cap N(5.235, 1.195)$ a $P(X \geq 8) = 0.010341$. Portanto com a última transformação verifica-se uma melhoria na aproximação.

5.4.2 Exemplo: Distribuições Lognormais

Por exemplo, considere-se uma variável aleatória X que segue uma distribuição Lognormal com λ como o parâmetro de localização e $\varepsilon > 0$ o parâmetro de escala. Depois de aplicar a transformação de caudas normais, obtendo uma distribuição normal equivalente com um novo valor médio e desvio padrão, há que utilizar os valores dos parâmetros da variável original e escolher o ponto de dimensionamento de forma a manter constante o desvio padrão da distribuição normal equivalente para obter os valores de λ e ε através das seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{x_i^* - \mu}{\sigma}\right) &= F(x_i^*) = \Phi\left(\frac{\ln x_i^* - \lambda}{\varepsilon}\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{x_i^* - \mu}{\sigma} &= \frac{\ln x_i^* - \lambda}{\varepsilon} \Leftrightarrow \end{aligned} \quad (5.57)$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \ln x_i^* - \varepsilon \left(\frac{x_i^* - \mu}{\sigma} \right)$$

$$\frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{x_i^* - \mu}{\sigma}\right) = f(x_i^*) = \frac{1}{\varepsilon x_i^* \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x_i^* - \lambda}{\varepsilon} \right)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon = \frac{\sigma e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_i^* - \mu}{\sigma} \right)^2}}{\phi\left(\frac{x_i^* - \mu}{\sigma}\right) x_i^* \sqrt{2\pi}} \Leftrightarrow \quad (5.58)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon = \frac{\sigma \phi\left(\frac{x_i^* - \mu}{\sigma}\right)}{\phi\left(\frac{x_i^* - \mu}{\sigma}\right) x_i^*} = \frac{\sigma}{x_i^*}$$

Por exemplo se $X \sim LN(3.94, 0.155236)$, aplicando a transformação de caudas normais obtém-se uma distribuição normal equivalente $X \sim N(3.92, 0.393)$. Aplicando uma nova transformação obtém-se uma distribuição normal equivalente $X \sim N(3.9596, 0.393)$, melhorando a aproximação nas caudas (Figura 5.13). Assim, considerando:

- Distribuição Lognormal
- Normal Equivalente (Transformação de caudas)
- Normal Equivalente (Nova transformação)

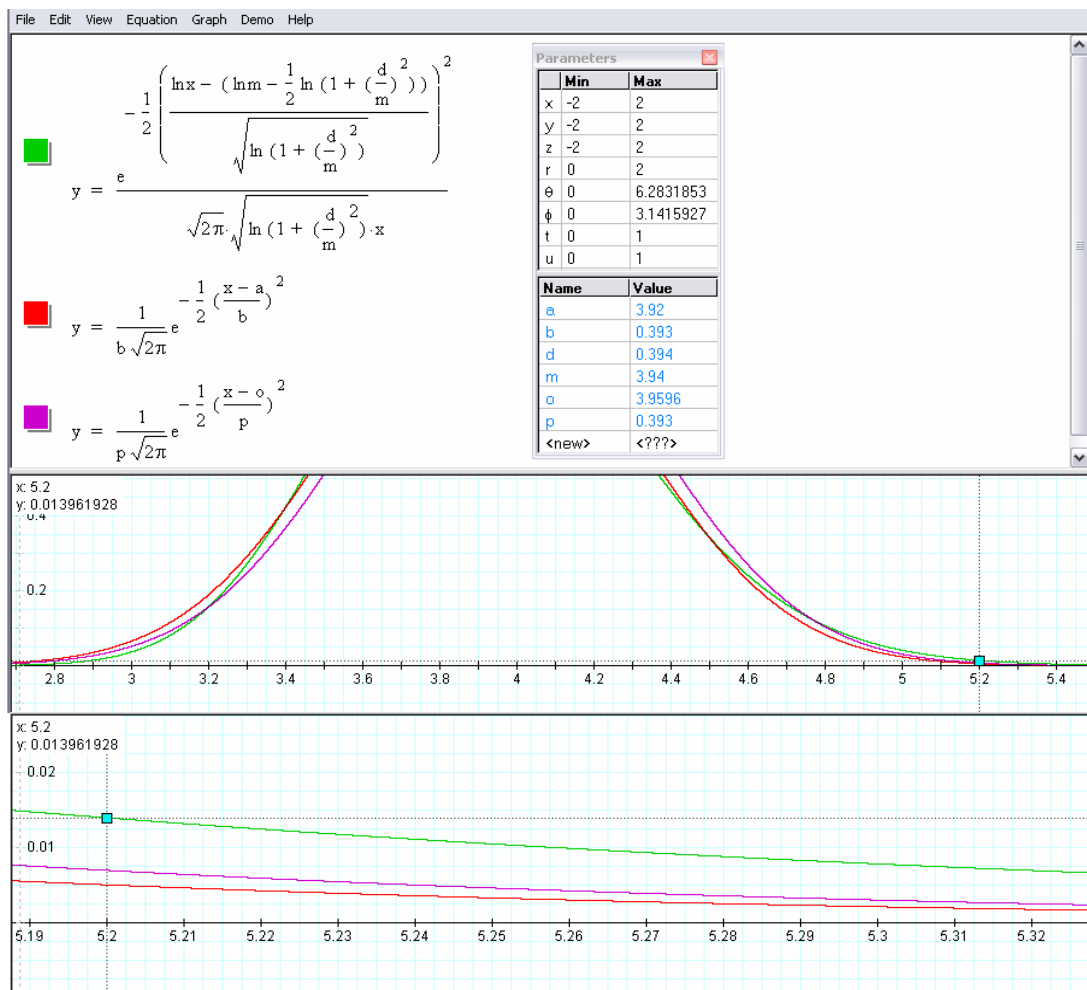


Figura 5.13 – Transformação de uma distribuição Lognormal numa normal equivalente.

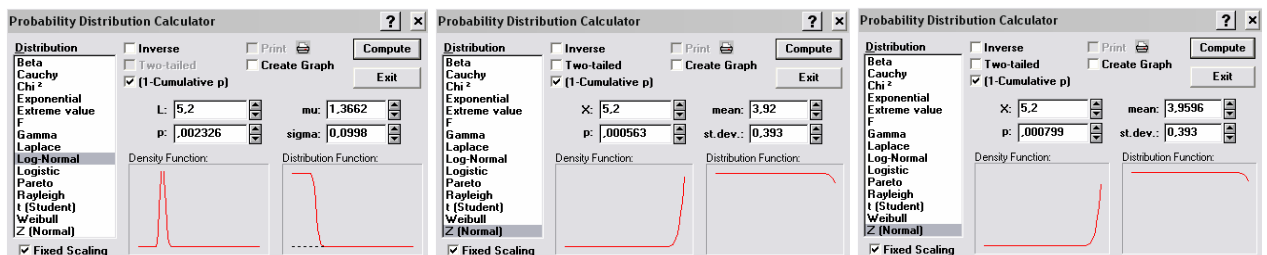


Figura 5.14 – $P(X \geq 5.2)$ onde $X \sim LN(3.94, 0.155236)$, $X \sim N(3.92, 0.393)$ e $X \sim N(3.9596, 0.393)$.

Nas Figuras 5.13 e 5.14 o ponto $X = 5.2$ foi escolhido arbitrariamente na cauda a título de exemplo. Através da Figura 5.14 pode observar-se que se $X \cap LN(3.94, 0.155236)$ a $P(X \geq 5.2) = 0.002326$, se $X \cap N(3.92, 0.393)$ a $P(X \geq 5.2) = 0.000563$ e se $X \cap N(3.9596, 0.393)$ a $P(X \geq 5.2) = 0.000799$. Portanto com a última transformação verifica-se uma melhoria na aproximação.

Por exemplo se $X \cap LN(5, 1.5625)$, aplicando a transformação de caudas normais obtém-se uma distribuição normal equivalente onde $X \cap N(4.8484, 1.2311)$. Aplicando uma nova transformação obtém-se uma nova distribuição normal equivalente onde $X \cap N(5.1496, 1.2311)$, melhorando a aproximação entre as duas distribuições nas caudas (Figura 5.15).

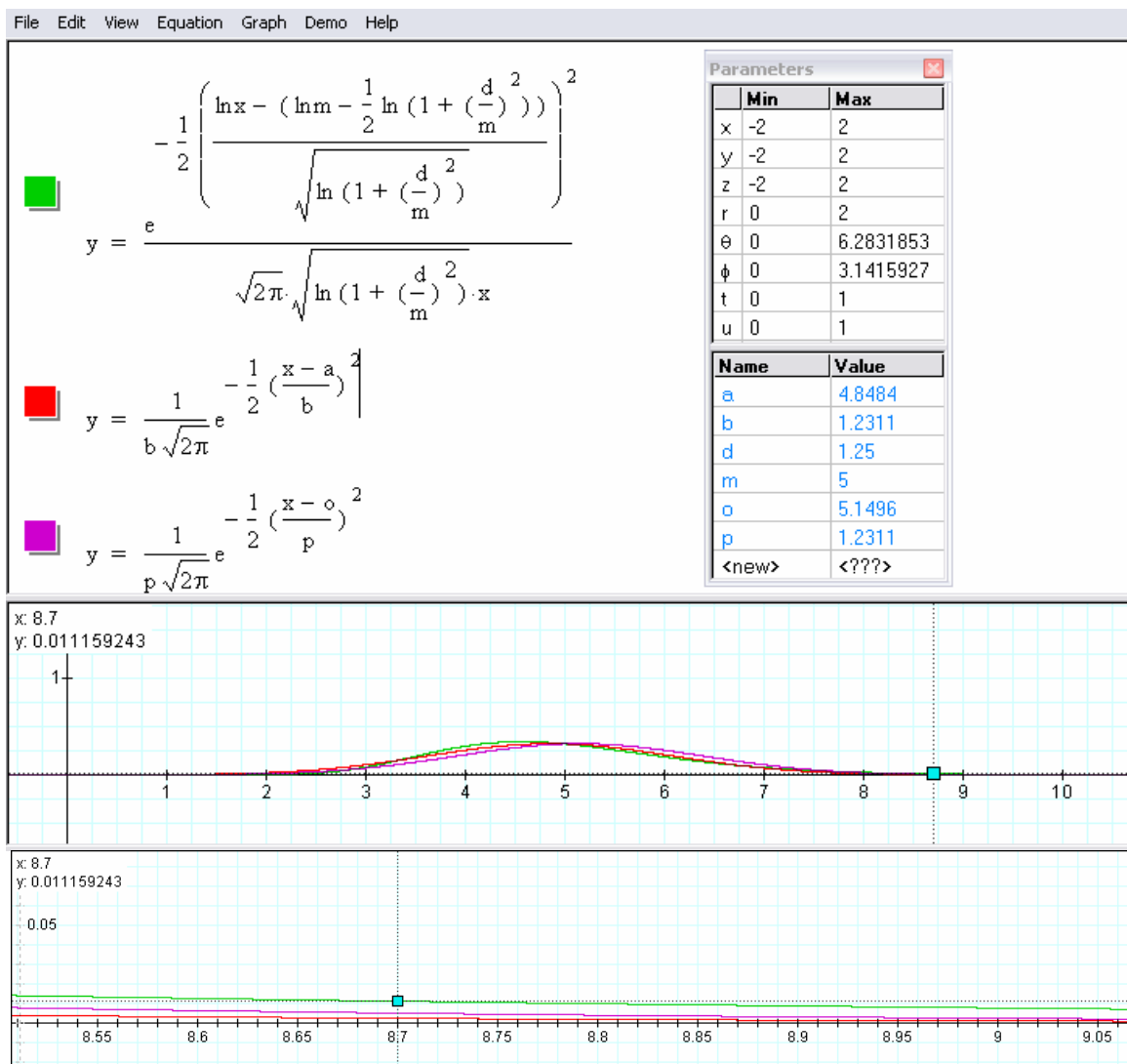


Figura 5.15 – Transformação de uma distribuição Lognormal numa normal equivalente.

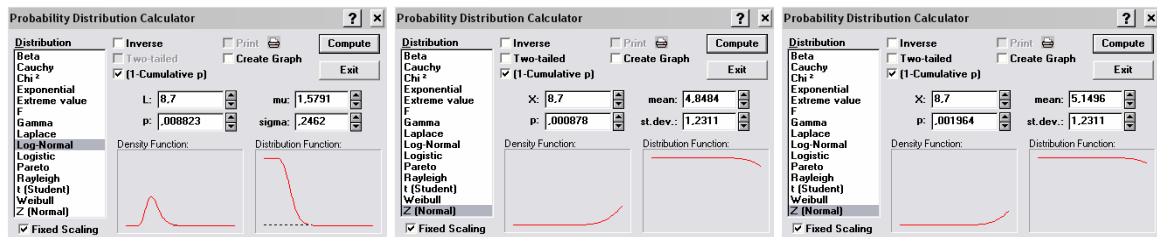


Figura 5.16 – $P(X \geq 8.7)$ onde $X \cap LN(5, 1.5625)$, $X \cap N(4.8484, 1.2311)$ e $X \cap N(5.1496, 1.2311)$.

Nas Figuras 5.15 e 5.16 o ponto $X = 8.7$ foi escolhido arbitrariamente na cauda a título de exemplo. Através da Figura 5.16 pode observar-se que se $X \cap LN(5, 1.5625)$ a $P(X \geq 8.7) = 0.008823$, se $X \cap N(4.8484, 1.2311)$ a $P(X \geq 8.7) = 0.000878$ e se $X \cap N(5.1496, 1.2311)$ a $P(X \geq 8.7) = 0.001964$. Portanto com a última transformação verifica-se uma melhoria na aproximação.

No caso de existirem correlações entre as variáveis aleatórias básicas X aplicou-se às variáveis a transformação de Nataf (Liu e Kiureghian, 1986 e Kiureghian e Liu, 1986), $Y = T(X)$, onde a transformação T é aplicada às distribuições de X de forma a obter aproximações no espaço das variáveis normais padrão (médias nulas e desvios padrão unitários) não correlacionadas, Y .

5.5 Implementação computacional

A aplicação da metodologia proposta a uma malha de elementos finitos tem em atenção os seguintes aspectos:

- Caracterização do campo aleatório através de variáveis aleatórias (valores médios, desvios padrão e correlações);
- Avaliação da resposta estrutural média através de uma análise determinística utilizando as médias das variáveis aleatórias;
- Avaliação da matriz de covariâncias relacionada com a resposta estrutural (deslocamentos ou forças), a partir da qual se calculam os desvios padrão.

A implementação do algoritmo a programas correntes de elementos finitos requer a inclusão de uma avaliação da matriz de covariâncias da resposta estrutural. Para tal é necessário proceder ao cálculo da inversa da matriz de rigidez global $\mathbf{K}^{-1}$ (ou $\mathbf{K}_M^{-1}$ no caso de se quererem estudar as forças) e das derivadas parciais da matriz de rigidez global $\partial\mathbf{K}/\partial\mathbf{X}$ e do vector das forças nodais $\partial\mathbf{F}\Phi/\partial\mathbf{X}$ em ordem às variáveis aleatórias básicas.

O algoritmo foi adaptado a um programa de elementos finitos que de uma forma resumida pode ser dividido nos seguintes passos (Figura 5.17):

1. Leitura dos dados do problema estrutural: geometria da malha de elementos finitos, propriedades dos materiais e cargas aplicadas.
2. Leitura dos dados que caracterizam as variáveis aleatórias básicas: valores médios, desvios padrão e matriz de correlações.
3. Calcular as forças nodais $F_0\Phi$ correspondentes às cargas definidas.
4. Determinar a matriz de rigidez $\mathbf{K}_0$.
5. Calcular o vector dos deslocamentos $\mathbf{u}_0$ resolvendo a equação: $\mathbf{K}_0 \mathbf{u}_0 = F_0\Phi$.
6. Dependendo da opção escolhida para avaliar a resposta estrutural, calcula a inversa da matriz de rigidez global $\mathbf{K}_0^{-1}$ ou define a matriz $\mathbf{K}_M$ e calcula a sua inversa $\mathbf{K}_M^{-1}$.
7. Calcula as derivadas parciais da matriz de rigidez $\partial\mathbf{K}/\partial\mathbf{X}$ e das forças $\partial\mathbf{F}\Phi/\partial\mathbf{X}$ em relação às variáveis aleatórias $\mathbf{X}$.
8. Dependendo da opção anterior, calcula a matriz de covariâncias das forças $\mathbf{C}_q$ ou a matriz de covariâncias dos deslocamentos $\mathbf{C}_u$.
9. Calcula o desvio padrão da resposta estrutural a partir dos elementos da diagonal principal da matriz de covariâncias.

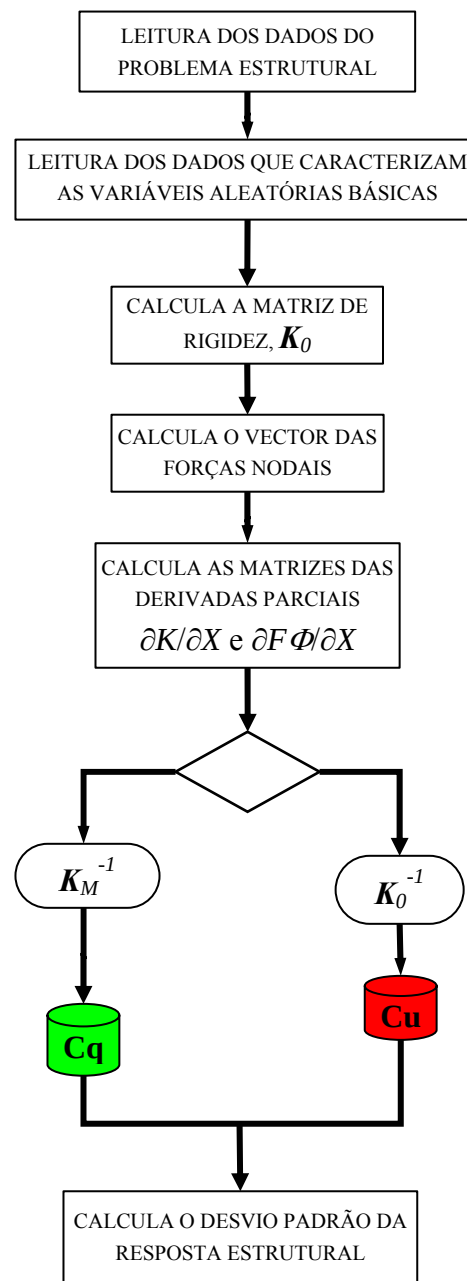


Figura 5.17 – Fluxograma do algoritmo de elementos finitos para a obtenção da matriz de covariâncias relacionada com a resposta estrutural (deslocamentos ou forças).

Capítulo 6

Aplicações

6.1 Introdução

Para avaliar as potencialidades e a adequação do método proposto no capítulo anterior vão ser analisados alguns exemplos. Os resultados obtidos através deste método são comparados com os valores obtidos através de metodologias alternativas propostas por outros autores e/ou com os valores resultantes da aplicação do método de simulação de Monte Carlo (MMC). Os resultados obtidos pelo MMC serão considerados como valores de referência. Será essencialmente analisada a eficiência computacional dos vários métodos em diferentes aplicações, assim como as estimativas obtidas para as incertezas da resposta estrutural ou para a probabilidade de ocorrência de um determinado estado limite.

As variáveis do problema estrutural com características aleatórias são descritas através dos seus valores médios, desvios-padrão e coeficientes de correlação que quantificam a dependência entre essas variáveis. A presente metodologia permite avaliar numa única análise estrutural a resposta média e a sua dispersão. Os resultados obtidos são exactos para problemas lineares e quando a distribuição de cada uma das variáveis é normal ou quase normal. Continuam a ser fiáveis para problemas não lineares se puderem ser aproximados através de uma combinação linear das variáveis aleatórias básicas. Como o método proposto não é mais do que um método de primeira ordem que utiliza apenas os dois primeiros momentos (média e desvio padrão) sem usar qualquer informação acerca

das distribuições das variáveis aleatórias do problema, a precisão dos resultados não pode ser garantida para problemas com acentuada não linearidade e distribuições não normais. Nesses casos, o desenvolvimento de procedimentos apropriados para ter em conta distribuições não normais e problemas não lineares é efectuado de forma a obter resultados com um grau de aproximação adequado. Para tal, os exemplos apresentados foram divididos em casos onde as variáveis aleatórias básicas têm distribuições normais e nos casos que têm variáveis com distribuições não normais. Nestes últimos casos serão discutidas as várias hipóteses de aproximação de leis não normais a normais.

6.2 Pórtico sujeito a diferentes cargas

Este é um exemplo de aplicação com variáveis que apresentam distribuições normais. Nele apresenta-se um pórtico simples constituído por dois pilares e uma viga com dois vãos (Figura 6.1). No pórtico em estudo é aplicada uma carga uniformemente distribuída, F_1 , ao longo da viga e uma força nodal no seu extremo, F_2 . O sistema é constituído por três variáveis aleatórias básicas F_1 , F_2 e o módulo de elasticidade E com distribuições normais. Os valores relacionados com a geometria da estrutura são definidos através de parâmetros determinísticos. O sistema estrutural é constituído por seis nós, cada um com três graus de liberdade (uma rotação e dois deslocamentos). Os resultados obtidos pelo método proposto são comparados com os valores resultantes da aplicação do método de simulação de Monte Carlo (MMC).

Neste exemplo são estudados seis casos diferentes, correspondentes a diferentes parâmetros da distribuição de F_2 e diferentes correlações entre F_1 e F_2 . Os parâmetros estatísticos são apresentados na Tabela 6.1 para todos os casos de carga considerados. Nos casos 1 a 4 as variáveis não são correlacionadas enquanto que nos casos 5 e 6 as forças F_1 e F_2 são correlacionadas. Do caso 1 para o 2 só a força F_2 se altera de 7.5kN para 20kN. Os casos 3 e 4 são semelhantes ao 1 e 2 com a diferença da média de F_2 ser negativa. Para avaliar a importância das correlações entre as forças consideraram-se os casos 5 e 6 iguais ao 1 excepto na correlação entre as forças, sendo no caso 5 o coeficiente de correlação, $R_{F_1,F_2} = 0.50$ e no caso 6, $R_{F_1,F_2} = 0.75$. O estudo vai incidir sobre a avaliação da incerteza do deslocamento vertical a meio vão da viga, Δ_1 , e no extremo desta, Δ_2 .

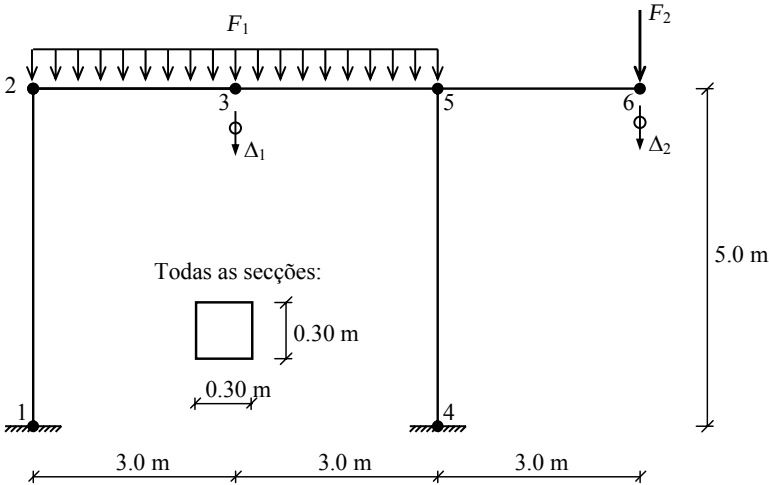


Figura 6.1 – Pórtico sujeito a cargas verticais.

Tabela 6.1 – Parâmetros estatísticos para os diferentes casos.

Casos	E (GPa)		F ₁ (kN/m)		F ₂ (kN)		R _{F₁,F₂}
	Média	Desvio padrão	Média	Desvio padrão	Média	Desvio padrão	
1	29	2	20	2	50	7.5	0
2	29	2	20	2	50	20	0
3	29	2	20	2	-50	7.5	0
4	29	2	20	2	-50	20	0
5	29	2	20	2	50	7.5	0.50
6	29	2	20	2	50	7.5	0.75

A incerteza dos deslocamentos verticais, Δ_1 e Δ_2 , obtida através do método proposto e do MMC foi avaliado utilizando um programa computacional que foi desenvolvido e se baseia numa formulação de elementos finitos.

Na Tabela 6.2 apresentam-se os resultados obtidos através dos dois métodos. Nos casos 1, 2, 5 e 6 o deslocamento Δ_1 é atenuado devido à força F_2 . Nos casos 3 e 4 os deslocamentos Δ_1 e Δ_2 são maiores devido às direcções opostas das forças F_1 e F_2 . Como seria de esperar o valor de Δ_2 é bastante influenciado pela força F_2 , enquanto que Δ_1 já não depende tanto dessa força. Para obter esses resultados no MMC foram utilizadas 15000 simulações enquanto que no método proposto apenas foi necessária uma análise.

As percentagens de erro entre os resultados obtidos pelo método de referência (MMC) e pelo método proposto são extremamente reduzidas sendo no máximo de 2,3% (Tabela 6.3).

Na Figura 6.2 pode observar-se a evolução dos deslocamentos em função dos coeficientes de variação quando a correlação entre as forças varia. À medida que as correlações aumentam, os valores dos coeficientes de variação de Δ_1 e Δ_2 diminuem, sendo a diminuição associada a Δ_1 mais acentuada. Isto deve-se ao facto de Δ_1 depender da variação de F_1 e F_2 enquanto que a variação de Δ_2 é muito dependente da variação de F_2 , sendo a contribuição de F_1 pouco significativa.

Tabela 6.2 – Resultados comparativos para os diferentes casos. Deslocamentos em mm.

Casos	Método proposto				Método de Monte Carlo			
	Δ_1		Δ_2		Δ_1		Δ_2	
	Média	Desvio padrão	Média	Desvio padrão	Média	Desvio padrão	Média	Desvio padrão
1	2.60	1.087	34.92	6.922	2.62	1.081	34.98	6.951
2	2.60	2.159	34.92	17.358	2.65	2.173	34.77	17.345
3	12.65	1.383	-50.94	7.379	12.68	1.402	-51.00	7.409
4	12.65	2.321	-50.94	17.546	12.65	2.328	-50.92	17.555
5	2.60	0.779	34.92	6.538	2.61	0.779	35.15	6.572
6	2.60	0.565	34.92	6.338	2.61	0.566	35.03	6.394

Tabela 6.3 – Diferenças entre os resultados obtidos pelos dois métodos. Erros em %.

Casos	Deslocamento Δ_1		Deslocamento Δ_2	
	Média	Desvio padrão	Média	Desvio padrão
1	0.84	-0.55	0.16	0.43
2	2.28	0.67	0.44	-0.08
3	0.19	1.39	0.12	0.41
4	-0.07	0.29	-0.04	0.05
5	0.65	-0.06	0.65	0.51
6	0.57	0.05	0.31	0.88

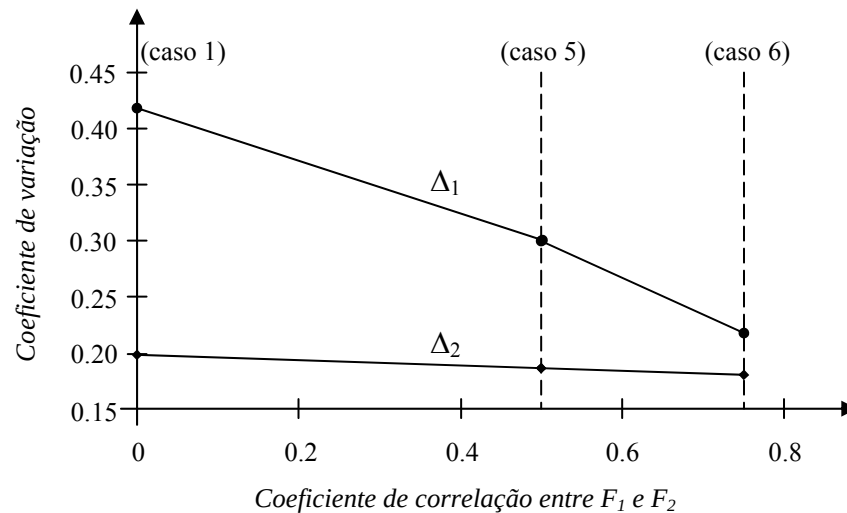


Figura 6.2 – Coeficiente de variação vs Correlação entre F_1 e F_2 para os dois deslocamentos.

Quando as relações entre as variáveis não são explícitas podem-se utilizar ambos os métodos. No entanto os custos computacionais para cada um deles são diferentes. Neste exemplo utilizaram-se 15000 análises de elementos finitos para o MMC enquanto que para o método de perturbação proposto apenas se realizou uma única análise de elementos finitos. Na Tabela 6.2 apresentam-se as médias e desvios padrão para cada um dos seis casos. Os valores são praticamente iguais em ambos os métodos. Isto é traduzido na Tabela 6.3 onde se apresentam as diferenças entre os resultados traduzidas pela percentagem de erro entre valores, que não ultrapassa os 2.3%.

Em conclusão, neste exemplo apresenta-se a variação da incerteza da resposta estrutural em termos de deslocamentos. O método de perturbação proposto pode ser aplicado de uma forma eficiente em problemas estruturais quando não existem formulações explícitas das variáveis aleatórias básicas, tal como no método dos elementos finitos, pois apenas requer uma análise estrutural. A precisão dos resultados é confirmada para variáveis normais dependentes ou independentes.

6.3 Sistema com quatro molas submetido a duas forças

Neste exemplo, já analisado e apresentado por Olsson *et al* (2003), vai estudar-se um sistema de molas simples submetido a duas forças F_1 e F_2 (Figura 6.3). Os parâmetros do sistema são a rigidez das quatro molas e a intensidade das duas forças (Tabela 6.4). Desta

forma, existem seis variáveis aleatórias básicas independentes. A ruína do sistema ocorrerá se o deslocamento d_2 exceder um valor pré-fixado. Vão considerar-se dois casos:

1. Considera-se que a ruína ocorre quando $d_2 > 2.30\text{m}$, o que deverá corresponder a uma probabilidade de rotura de 0.01.
2. A ruína ocorre se $d_2 > 2.98\text{m}$, o que deverá corresponder a uma probabilidade de rotura de 0.0001.

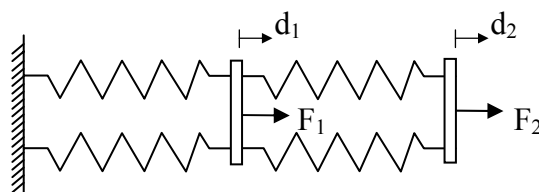


Figura 6.3 – Sistema com quatro molas submetido a duas forças.

Em ambos os casos considerou-se um sistema estrutural com oito elementos, oito nós e dois tipos de material (Figura 6.4). Todos os elementos do sistema têm uma área $A = 1\text{m}^2$ e uma inércia $I = 1\text{m}^4$. Os elementos 5 a 8, que correspondem às barras onde estão aplicadas as forças, têm um módulo de elasticidade $E = 10\text{GPa}$.

Tabela 6.4 – Resumo das características dos parâmetros do sistema.

Variáveis Aleatórias	Distribuições	Valor Médio	Desvio Padrão
E_{molas}	Lognormal	10kPa	2kPa
F_1	Lognormal	10kN	2kN
F_2	Lognormal	10kN	2kN

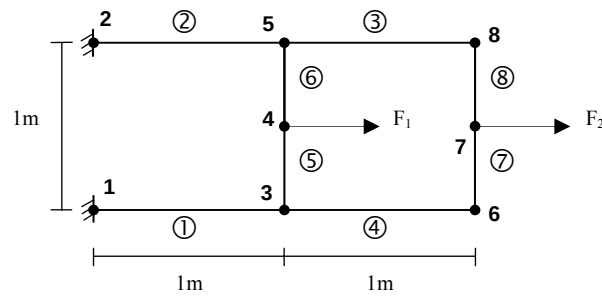


Figura 6.4 – Sistema estrutural com 8 elementos, 8 nós e 2 forças.

Devido ao pressuposto da normalidade das variáveis envolvidas no método proposto, foi aplicada a transformação de caudas normais para ajustar a distribuição lognormal de cada variável aleatória básica a uma normal equivalente, considerando para tal o ponto de dimensionamento igual ao valor médio de cada variável, $x_i^* = \mu_{x_i}$ (Haldar e Mahadevan, 2000). Assim, obtiveram-se novas distribuições normais com médias $\mu = 10.19$ e desvios padrão $\sigma = 1.98$.

Para ambos os casos estudou-se o deslocamento horizontal do nó 7. Aplicando o método proposto obteve-se uma resposta estrutural (deslocamento) que segue uma distribuição normal com média $\mu_{d_2} = 1.5m$ e desvio padrão $\sigma_{d_2} \approx 0.4m$. Assim, no primeiro caso pode calcular-se uma estimativa da probabilidade de rotura através da expressão $p_f = P(d_2 > 2.30m) = 0.02275$. Para o segundo caso a estimativa da probabilidade de ruína é dada por $p_f = P(d_2 > 2.98m) = 0.000108$. Com estes resultados pode concluir-se que o método dá uma boa estimativa para o segundo caso mas para o primeiro a aproximação é pior. Isto quer dizer que no primeiro caso a superfície de estado limite não é muito próxima de um hiperplano e que o ajuste é melhor para as caudas da distribuição devido ao tipo de transformação utilizada.

6.4 Pórtico de aço sujeito a acções permanentes e sobrecargas

Neste exemplo, já analisado e apresentado anteriormente em Neves *et. al.* (2002), estuda-se um pórtico de aço simples com um único vão sujeito a acções permanentes e sobrecarga (Figura 6.5). As ligações entre as vigas e os pilares são consideradas rígidas.

Para avaliar o estado limite de utilização da estrutura vai estudar-se o deslocamento vertical a meio vão da viga, d . As variáveis aleatórias básicas do problema são consideradas não correlacionadas e estão intimamente relacionadas com as propriedades dos elementos (geométricas e materiais) e das acções (Tabela 6.5).

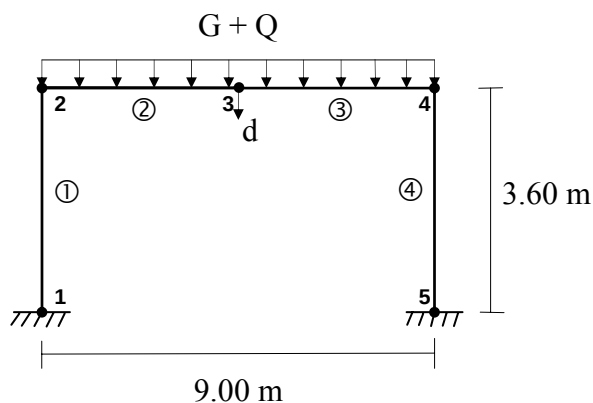


Figura 6.5 – Pórtico simples sujeito a cargas permanentes, G , e sobrecarga, Q .

Tabela 6.5 – Características das variáveis aleatórias.

Variáveis Aleatórias	Símbolo	Distribuição	Média	Desvio Padrão
Módulo de Young (GPa)	E	Lognormal	200	12
Inércia (cm^4)	I	Lognormal	8360	418
Área (cm^2)	A	Lognormal	53.8	2.69
Acções Permanentes (KN/m)	G	Lognormal	3.94	0.394
Sobrecarga (KN/m)	Q	Tipo I	5	1.25

A função de estado limite definida para o estado limite de utilização em estudo é dada pela expressão:

$$g(X) = 1 - \frac{u}{u_{lim}}$$

onde u é o deslocamento a meio da viga e $u_{lim} = l/400 = 9/400 = 2.25\text{cm}$ é o deslocamento máximo admissível. Desta forma, a probabilidade de ruína pode ser definida por:

$$p_f = P[g(X) \leq 0] = \Phi(-\beta)$$

onde $\beta = \mu_g/\sigma_g$. Como u tem uma distribuição normal com média μ_u e desvio padrão σ_u , então:

$$\mu_g = E\left(1 - \frac{u}{2.25}\right) = 1 - \frac{\mu_u}{2.25}$$

$$\sigma_g^2 = \text{Var}\left(1 - \frac{u}{2.25}\right) = \frac{\sigma_u^2}{2.25^2} \Leftrightarrow \sigma_g = \frac{\sigma_u}{2.25}$$

e assim neste caso:

$$\beta = \frac{2.25 - \mu_u}{\sigma_u}.$$

Para aplicar o método proposto utilizaram-se duas transformações: uma de caudas normais em que se considerou o ponto de dimensionamento igual ao valor médio de cada variável ($x_i^* = \mu_{x_i}$) e outra proposta por Paloheimo (Haldar, 2000). Estas transformações são utilizadas para ajustar a distribuição lognormal de cada uma das variáveis E, I, A e G, assim como a distribuição de Gumbel da variável Q, a uma normal equivalente (Tabela 6.6). Como a variável Q representa uma acção, a sua distribuição é assumida como uma lei de Gumbel de máximos.

Além do método proposto também se utilizou o método de Monte Carlo (MMC) que servirá como referência para a comparação de resultados. O programa computacional utilizado para o efeito foi ajustado de forma a poder ser aplicado em variáveis aleatórias cuja distribuição seja normal, lognormal ou Gumbel de máximos.

Em primeiro lugar aplicou-se o método proposto e o MMC assumindo os parâmetros de todas as variáveis como sendo normais. Este procedimento foi adoptado para verificar se os valores dos índices de fiabilidade seriam aproximados, na hipótese de as variáveis aleatórias serem normais. Os resultados obtidos foram idênticos (Tabela 6.7 – no MMC obteve-se $\beta = 2.75$ e no presente método $\beta = 2.76$). Assim, pode dizer-se que no caso de todas as variáveis aleatórias serem normais o método proposto é bastante eficiente com a

vantagem de ser mais rápido pois basta fazer uma única análise de elementos finitos enquanto que no MMC foram necessárias 15000 análises.

Tabela 6.6 – Resultados da aplicação das 2 transformações às 5 variáveis aleatórias básicas.

Variáveis Aleatórias	Distribuição Original	Distribuição Normal Equivalente				
		Transformação: Caudas Normais Paloheimo				
					$x_i^* = \mu_{x_i}$	$p_f = 10^{-2}$
E (GPa)	Lognormal	Média	200	Média	200.36	200
		D.P.	12	Desvio Padrão	11.989	12.686
I (cm ⁴)	Lognormal	Média	8360	Média	8370.4	8360
		D.P.	418	Desvio Padrão	417.7	447.1
A (cm ²)	Lognormal	Média	53.8	Média	53.87	53.8
		D.P.	2.69	Desvio Padrão	2.688	2.82
G (KN/m)	Lognormal	Média	3.94	Média	3.96	3.94
		D.P.	0.394	Desvio Padrão	0.393	0.357
Q (KN/m)	Tipo I	Média	5	Média	5.235	5
		D.P.	1.25	Desvio Padrão	1.195	0.914

Em seguida aplicou-se o MMC considerando as distribuições originais usando 15000 e 100000 amostras (em cada amostra aplica-se uma análise de elementos finitos). O objectivo foi o de verificar se com mais análises o valor do índice de fiabilidade seria significativamente diferente. Os resultados mostraram valores idênticos. As diferenças não são significativas pelo que os valores obtidos com 15000 amostras são fiáveis.

A aplicação do método proposto com a transformação de Paloheimo (Haldar, 2000) dá um valor inadequado para o índice de fiabilidade. O valor obtido, quando comparado com todos os outros casos, é significativamente maior. Isto poderá querer dizer que este tipo de transformação não é adequado em casos que envolvam distribuições de extremos.

A aplicação do método proposto com a transformação de caudas normais dá-nos um valor para β muito mais próximo do obtido através do MMC e praticamente igual ao obtido por Neves *et. al.* (2002) no seu artigo ($\beta = 2.67$). Este método revela-se bastante eficiente no

caso de se utilizar uma transformação de caudas normais onde com uma única análise de elementos finitos se obtém um índice de fiabilidade.

Tabela 6.7 – Resultados da aplicação dos dois métodos aos vários casos considerados.

	<i>MMC</i>			<i>Método Proposto</i> (1 única análise)		
	Dist.	Dist. LN e	Dist. LN e	Transformação		
	Normais	$G_{\max}$	$G_{\max}$	Dist.	Caudas	Paloheimo
	(15 mil	(15 mil	(100 mil	Normais	Normais	
	amostras)	amostras)	amostras)			
$\bar{u}$ (cm)	1.546	1.557	1.556	1.543	1.582	1.543
σ_u (cm)	0.256	0.267	0.266	0.256	0.249	0.212
C.V.	0.166	0.172	0.171	0.166	0.157	0.137
β	2.75	2.60	2.61	2.76	2.68	3.34

Em resumo, para melhor se compararem, podem representar-se numa recta os valores de β para todos os casos estudados:

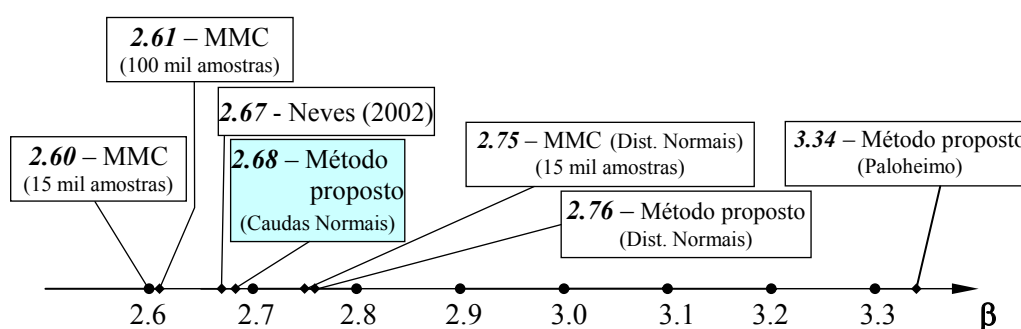


Figura 6.6 – Valores de β obtidos através dos dois métodos para os vários casos.

6.5 Pórtico de três vãos e doze andares sujeito a forças nodais horizontais

Neste exemplo, analisado e apresentado por Das e Zheng (2000), os autores aplicaram métodos de superfície de resposta para obterem estimativas da fiabilidade estrutural (Tabela 6.11). Vai estudar-se um pórtico com três vãos e doze andares sujeito a forças horizontais, P , (Figura 6.7). Nesta figura apresenta-se um pórtico sujeito a forças horizontais com o tipo de elementos que o constituem, respectivas dimensões em metros e malha de elementos finitos, constituída por cinquenta e dois nós e oitenta e quatro elementos.

Este problema também foi analisado anteriormente por Zhao (1996) e posteriormente por Deng (2006), onde o primeiro autor utilizou métodos de superfície de resposta sem usar os termos cruzados e o método de simulação de Monte Carlo com amostragem por importância e o segundo autor redes neuronais artificiais, mais precisamente uma rede de funções de base radial (também conhecida como redes de base radial) em conjugação com o método de simulação de Monte Carlo.

Analizou-se o deslocamento horizontal ao nível do último piso do pórtico. A estrutura está sujeita a forças nodais horizontais aplicadas da esquerda para a direita com uma intensidade P . As forças P são aleatórias com distribuições Tipo I de máximos. As outras variáveis aleatórias são as cinco áreas das secções, A_i , $i = 1, \dots, 5$ relativas aos vários elementos da estrutura. Desta forma, o sistema estrutural apresentado na Figura 6.7 é caracterizado por seis variáveis aleatórias básicas: uma força horizontal e cinco áreas de secções correspondentes aos vários pilares e vigas da estrutura; sendo as suas distribuições e respectivos parâmetros apresentados na Tabela 6.9. Além disso, as diferentes áreas, A_i , $i = 1, \dots, 5$ e a força horizontal, P , são tratadas como variáveis aleatórias independentes. Os momentos de inércia assim como o módulo de elasticidade de todos os elementos do sistema estrutural são tratados como determinísticos, sendo dados, respectivamente, por $I_i = \alpha_i A_i^2$; onde $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.0833$, $\alpha_4 = 0.2667$ e $\alpha_5 = 0.2$ e $E = 2.0 \times 10^7 \text{ KPa}$.

Para aplicar o método proposto considerou-se que o sistema estrutural tem cinquenta e dois nós e oitenta e quatro elementos (Figura 6.7), sendo as suas propriedades apresentadas na Tabela 6.8.

Tabela 6.8 – Propriedades dos elementos que constituem o sistema estrutural.

<i>Elemento</i>	<i>Módulo de Young</i>	<i>Momento de Inércia</i>	<i>Área</i>
E_1	$E = 2 \times 10^7 \text{ KPa}$	$I_1 = 0.00520625 \text{ m}^4$	A_1
E_2	$E = 2 \times 10^7 \text{ KPa}$	$I_2 = 0.00213248 \text{ m}^4$	A_2
E_3	$E = 2 \times 10^7 \text{ KPa}$	$I_3 = 0.01079568 \text{ m}^4$	A_3
E_4	$E = 2 \times 10^7 \text{ KPa}$	$I_4 = 0.010668 \text{ m}^4$	A_4
E_5	$E = 2 \times 10^7 \text{ KPa}$	$I_5 = 0.0045 \text{ m}^4$	A_5

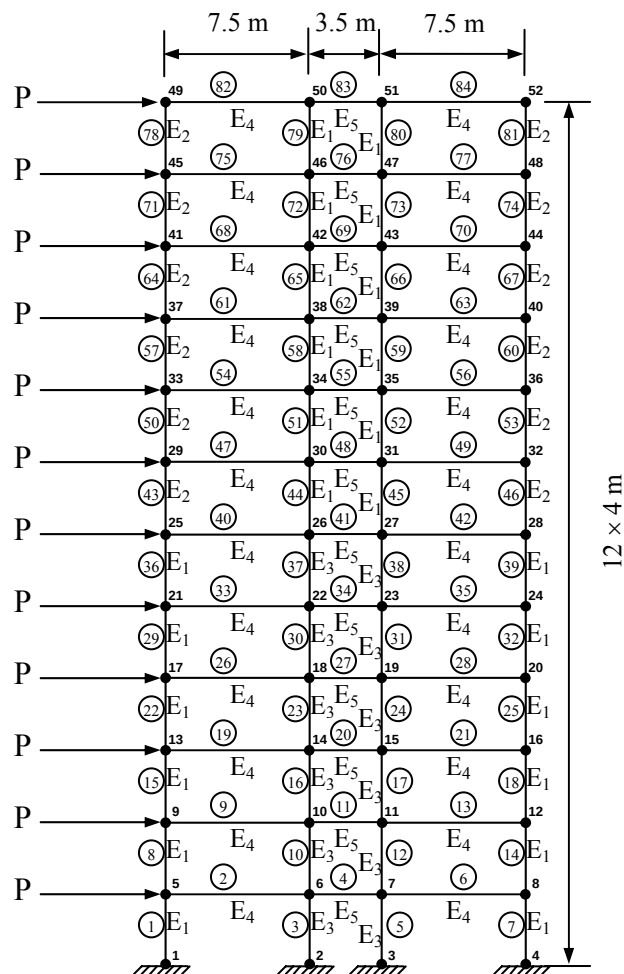


Figura 6.7 – Pórtico analisado.

A função que traduz o estado limite de utilização é dada por:

$$G(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, P) = 0.096m - u_{\max}(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, P)$$

onde $u_{max}(\cdot)$ é o deslocamento máximo horizontal no nó cinquenta e dois (unidade: m).

Neste caso a probabilidade de rotura é dada por:

$$p_f = P[G(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, P) \leq 0] = \Phi(-\beta)$$

onde $\beta = \frac{\mu_G}{\sigma_G}$. Como $u_{max} \cap N(\mu_u, \sigma_u)$ então:

$$\mu_G = E[G(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, P)] = 0.096 - \mu_u$$

$$\sigma_G^2 = \text{Var}[G(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, P)] = \sigma_u^2 \Leftrightarrow \sigma_G = \sigma_u$$

e assim neste caso $\beta = \frac{0.096 - \mu_u}{\sigma_u}$.

Para utilizar o método proposto aplicou-se a cada uma das variáveis aleatórias, cuja distribuição não é normal, a transformação de caudas normais, considerando o ponto de dimensionamento igual ao valor médio de cada uma das variáveis ($x_i^* = \mu_{x_i}$), de forma a obter variáveis aleatórias normais equivalentes (Tabela 6.9).

Além do método proposto também se utilizou o método de Monte Carlo (MMC) que servirá como referência para comparação de resultados.

Tabela 6.9 – Dados estatísticos das variáveis aleatórias do sistema estrutural com as respectivas unidades de medida e resultados da aplicação da transformação de caudas normais às 6 variáveis.

				<i>Distribuição Normal Equivalente</i>	
<i>Distribuição Original</i>				<i>Transformação Caudas Normais</i> $x_i^* = \mu_{x_i}$	
<i>Variáveis</i>		<i>Média</i>	<i>Desvio Padrão</i>	<i>Média</i>	<i>C. V.</i>
A_1 (m^2)	Lognormal	0.25	0.025	0.2512	0.1
A_2 (m^2)	Lognormal	0.16	0.016	0.1608	0.1
A_3 (m^2)	Lognormal	0.36	0.036	0.3618	0.1
A_4 (m^2)	Lognormal	0.20	0.020	0.2010	0.1
A_5 (m^2)	Lognormal	0.15	0.015	0.1507	0.1
P (KN)	Tipo I de máximos	30.00	7.5	31.33	0.25

Em primeiro lugar aplicou-se o MMC considerando as distribuições originais usando 15000 e 100000 amostras. O objectivo deste último caso foi o de verificar se com mais amostras o valor do índice de fiabilidade seria significativamente diferente. Os resultados dizem-nos o contrário. As diferenças não são significativas pelo que basta utilizar 15000 amostras para obter um resultado fiável e de uma forma mais rápida (Tabela 6.10).

A aplicação do método proposto com a transformação de caudas normais dá-nos um valor para β muito próximo do obtido através do MMC assim como também muito próximo aos obtidos por Das e Zheng (2000) considerando $N = 26$, funções de superfície de resposta $G''(\cdot)$ e $\hat{G}(\cdot)$ (de notar que estas superfícies de resposta são as melhoradas como aproximação à superfície de estado limite $G(\cdot)$) e para valores de β_2 e β_3 (Tabelas 6.10 e 6.11). Além disso, também está relativamente próximo dos valores obtidos por Zhao (1996) e Deng (2006). O primeiro autor, utilizando o método de superfície de resposta sem usar os termos cruzados obteve um valor de $\beta = 1.453$ e com o método de simulação de Monte Carlo com amostragens por importância utilizando duas mil amostras obtém um valor de $\beta = 1.439$. O segundo autor, utilizando redes neuronais artificiais de base radial conjugadas com o método de simulação de Monte carlo, obtém um valor de $\beta = 1.446$.

Consequentemente, verifica-se que a metodologia proposta é aplicável a problemas de fiabilidade estrutural com um grande leque de variações, quer relativamente ao número de variáveis aleatórias, quer ao tipo de distribuições das variáveis aleatórias assim como à forma da função de estado limite; revelando-se bastante eficiente no caso de se utilizar uma transformação de caudas normais.

Tabela 6.10 – Resultados da aplicação dos dois métodos aos vários casos considerados.

	MMC		Portic (1 única análise)
	Dist. LN e $G_{\max}$ (15 mil amostras)	Dist. LN e $G_{\max}$ (100 mil amostras)	Transformação Caudas Normais
$\bar{u}$ (cm)	6.98661	6.98532	6.9771
σ_u (cm)	1.75717	1.74899	1.745058
CV	0.2515	0.2504	0.2501
β	1.4873	1.495	1.503

Os resultados apresentados por Das e Zheng (2000) foram obtidos através de uma construção progressiva da superfície de resposta (Tabela 6.11). Em primeiro lugar utilizaram uma superfície de resposta linear da forma:

$$G'(x) = a + \sum_{i=1}^n b_i x_i ,$$

onde $a, b_1, \dots, b_n$ são os parâmetros obtidos através do método dos mínimos quadrados (MMQ). Em seguida, a superfície de resposta é melhorada adicionando os termos quadráticos:

$$G''(x) = a + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i=1}^n c_i x_i^2 ,$$

onde estimaram os $2n+1$ coeficientes pelo MMQ. Se a superfície de resposta não for satisfatória ainda pode ser melhorada adicionando os termos cruzados e removendo alguns dos termos de segunda ordem, obtendo:

$$\hat{G}(x) = a + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i=1}^n c_i x_i^2 + \sum_{i \neq j}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_i x_j$$

Na Tabela 6.11, N é o número de pontos de amostragem utilizados para formar a função de superfície de resposta, β_1 é o índice de fiabilidade obtido através de métodos FORM, β_2 é o índice de fiabilidade obtido através de métodos SORM e β_3 é o índice de fiabilidade obtido através do método de simulação direccionada utilizando 100.000 amostras geradas pela função de superfície de resposta.

Tabela 6.11 – Resultados do problema dado em Das e Zheng (2000).

<i>Função de Superfície de Resposta</i>	<i>N</i>	<i>β_1</i>	<i>β_2</i>	<i>β_3</i>
G'	13	2.002	2.012	2.021
G''	13	1.600	1.629	1.615
$\hat{G}$	13	1.624	1.637	1.632
G'	26	1.615	1.627	1.627
G''	26	1.656	1.550	1.543
$\hat{G}$	26	1.654	1.405	1.307

Os resultados apresentados por Deng (2006) foram obtidos através da aplicação de uma rede neuronal artificial de base radial conjugada com o método de simulação de Monte Carlo. Para representar a função de estado limite implícita Deng (2006) aplicou uma rede de base radial com três camadas. A camada de entrada é constituída por seis nodos, ou neurónios, e a camada de saída por um nodo. As seis variáveis aleatórias básicas do problema são consideradas as variáveis de *input* e a função de estado limite a variável de *output*. O treino e teste da rede neuronal foram constituídos por, respectivamente, 257 e 20 amostras. O treino da rede de base radial foi aplicado para determinar os parâmetros desconhecidos – os pesos de cada conexão.

Em relação a cada uma das seis variáveis aleatórias básicas foram gerados 100000 valores amostrais de acordo com as suas distribuições de probabilidade. Estes valores foram então aplicados à rede neuronal como vectores de *input* originando a rede de 100000 valores de *output* correspondentes à função de estado limite. A partir destes 100000 valores obtiveram-se as características probabilísticas (função distribuição ou função densidade de probabilidade) da função de estado limite e assim estimou-se a probabilidade de rotura ou a fiabilidade. Neste problema Deng (2006) obteve um valor de $\beta = 1.446$.

Em resumo, para melhor se compararem, podem representar-se numa recta os valores de β para todos os casos estudados:

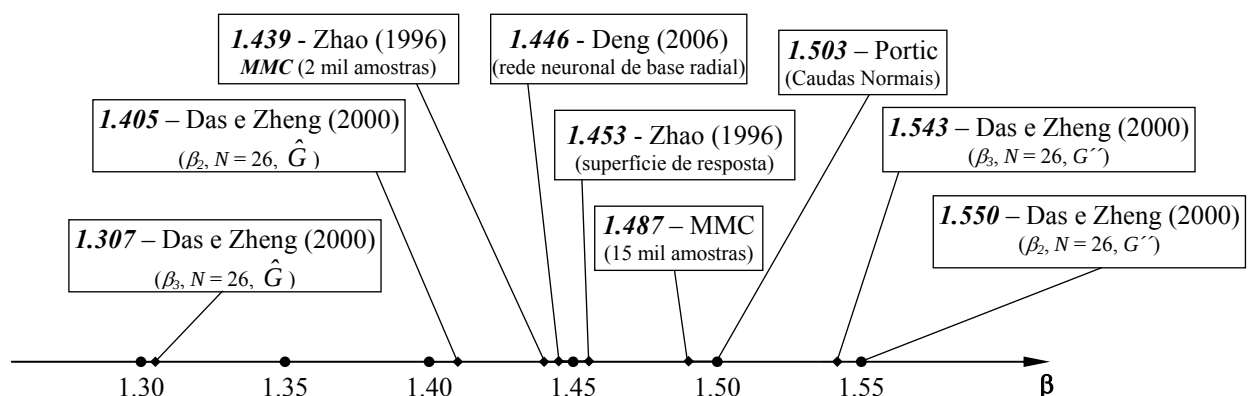


Figura 6.8 – Valores de β obtidos para os vários casos.

6.6 Treliça metálica

Neste exemplo, analisado e apresentado por Kim e Na (1997), os autores aplicaram métodos de superfície de resposta para obterem estimativas da fiabilidade estrutural de uma treliça metálica sujeita a forças nodais verticais, P_i , $i = 1, \dots, 6$ (Figura 6.9).

Neste problema vai analisar-se o deslocamento vertical a meio vão. A treliça vai ser estudada quanto ao estado limite de utilização relacionado com a deformação. A estrutura está sujeita a forças nodais verticais descendentes com uma intensidade P_i . As forças P_i são aleatórias com distribuições Tipo I de máximos. As outras variáveis aleatórias são as duas áreas das secções, A_i , $i = 1, 2$ e os dois módulos de elasticidade E_i , $i = 1, 2$ relativos aos vários elementos da estrutura. Neste exemplo vão chamar-se elementos principais a todos os elementos da figura 6.9 que são horizontais. Desta forma a estrutura tem onze elementos principais (todos os elementos pares – de 2 a 22) e doze elementos diagonais (todos os elementos ímpares – de 1 a 23) (Figura 6.9). Assim, E_1 e A_1 corresponderão, respectivamente, ao módulo de elasticidade e à área de um elemento principal e E_2 e A_2 ao de um elemento diagonal. O sistema estrutural apresentado na Figura 6.9 é caracterizado por dez variáveis aleatórias básicas: seis forças verticais, dois módulos de elasticidade e duas áreas de secções; sendo as suas distribuições e respectivos parâmetros apresentados na Tabela 6.13. Além disso, as diferentes áreas, A_i ; os dois módulos de elasticidade E_i e as seis forças verticais, P_i , são tratadas como variáveis aleatórias independentes. Os momentos de inércia de todos os elementos da estrutura são tratados como determinísticos.

Para aplicar o método proposto considerou-se que a malha de elementos finitos aplicada ao sistema estrutural, constituído por uma treliça metálica sujeita a seis forças verticais, tem treze nós e vinte e três elementos (Figura 6.9), sendo as suas propriedades apresentadas na Tabela 6.12.

Tabela 6.12 – Propriedades dos elementos que constituem o sistema estrutural.

<i>Elemento</i>	<i>Módulo de Young</i>	<i>Momento de Inércia</i>	<i>Área</i>
Principal	E_1	$I_1 = 9 \times 10^3 \text{ cm}^4$	A_1
Diagonal	E_2	$I_2 = 9 \times 10^3 \text{ cm}^4$	A_2

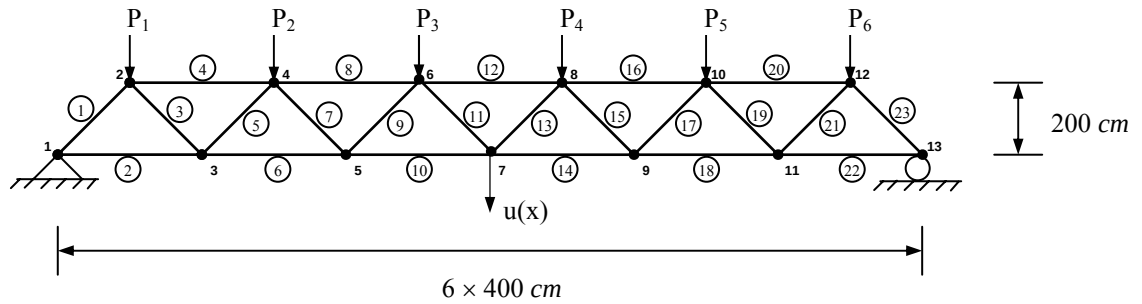


Figura 6.9 – Treliça metálica analisada.

A função que traduz o estado limite de utilização é dada por:

$$G(X) = 11.0 \text{ cm} - u(X)$$

onde $u(\cdot)$ é o deslocamento vertical no centro da viga (nó sete – Figura 6.9). Neste caso a probabilidade de rotura é dada por:

$$p_f = P[G(X) \leq 0] = \Phi(-\beta)$$

onde $\beta = \frac{\mu_G}{\sigma_G}$. Como $u_x \cap N(\mu_u, \sigma_u)$ então:

$$\mu_G = E[G(X)] = 11 - \mu_u$$

$$\sigma_G^2 = \text{Var}[G(X)] = \sigma_u^2 \Leftrightarrow \sigma_G = \sigma_u$$

e assim neste caso $\beta = \frac{11 - \mu_u}{\sigma_u}$.

Tabela 6.13 – Dados estatísticos das variáveis aleatórias do sistema estrutural e respectivas unidades de medida (Kim e Na, 1997).

<i>Variáveis Aleatórias</i>	<i>Distribuição</i>	<i>Média</i>	<i>Desvio Padrão</i>
E_1 (Kg/cm^2)	Log-normal	2100000	210000
A_1 (cm^2)	Log-normal	20	2
E_2 (Kg/cm^2)	Log-normal	2100000	210000
A_2 (cm^2)	Log-normal	10	1
P_1 (Kg)	Tipo I de máximos	5000	750
P_2 (Kg)	Tipo I de máximos	5000	750
P_3 (Kg)	Tipo I de máximos	5000	750
P_4 (Kg)	Tipo I de máximos	5000	750
P_5 (Kg)	Tipo I de máximos	5000	750
P_6 (Kg)	Tipo I de máximos	5000	750

Para aplicar a metodologia proposta transformaram-se as unidades de medida dos dados originais do problema para o sistema internacional (S. I.) – Anexo 2. A cada uma das variáveis em que a distribuição não é normal aplicou-se a transformação de caudas normais, considerando o ponto de dimensionamento igual ao valor médio de cada uma delas ($x_i^* = \mu_{x_i}$), de forma a obter variáveis aleatórias normais equivalentes (Tabela 6.14).

Tabela 6.14 – Dados estatísticos das variáveis aleatórias do sistema estrutural com as respectivas unidades de medida e resultados da aplicação da transformação de caudas normais às 10 variáveis.

<i>Variáveis</i>	<i>Distribuição Original</i>		<i>Distribuição Normal Equivalente</i>	
	<i>Média</i>	<i>Desvio Padrão</i>	<i>Transformação Caudas Normais $x_i^* = \mu_{x_i}$</i>	
			<i>Média</i>	<i>C. V.</i>
E_1 (KPa)	205939650	20593965	206961748	0.1
A_1 (m^2)	0.002	0.0002	0.002011445	0.1
E_2 (KPa)	205939650	20593965	206961748	0.1
A_2 (m^2)	0.001	0.0001	0.001009363	0.1
P_1 (KN)	49.03325	7.3549875	50.41658	0.15
P_2 (KN)	49.03325	7.3549875	50.41658	0.15
P_3 (KN)	49.03325	7.3549875	50.41658	0.15
P_4 (KN)	49.03325	7.3549875	50.41658	0.15
P_5 (KN)	49.03325	7.3549875	50.41658	0.15
P_6 (KN)	49.03325	7.3549875	50.41658	0.15

Além do método proposto também se utilizou o método de Monte Carlo (MMC) que servirá como referência para comparação de resultados.

Em primeiro lugar aplicou-se o MMC considerando as distribuições originais usando 15.000, 100.000 e 200.000 amostras. O objectivo deste último caso foi o de comparar com o resultado obtido em Kim e Na (1997), que foi de $\beta = 2.492$, que também utilizaram o mesmo número de amostras com o MMC. Os resultados são praticamente iguais (Tabela 6.15 e 6.16). Além disso, os dois últimos casos também serviram para verificar se com mais amostras o valor do índice de fiabilidade seria significativamente diferente. Os resultados dizem-nos que as diferenças não são significativas pelo que basta utilizar 15000 amostras para obter um resultado fiável e de uma forma mais rápida (Tabela 6.15).

A aplicação do método proposto com a transformação de caudas normais dá um valor para β relativamente próximo do obtido através do MMC assim como também muito próximo ao obtido por Kim e Na (1997) considerando o método com superfície de resposta linear quer para $h_i = 1.0$ como para $h_i = 1.5$. Além disso, também se pode considerar relativamente próximo do valor obtido pelo método desenvolvido por Kim e Na (1997) para $h_i = 1.0$ (Tabelas 6.15 e 6.16). Desta forma, o método proposto (Portic) revela-se bastante eficiente no caso de se utilizar uma transformação de caudas normais.

Tabela 6.15 – Resultados da aplicação dos dois métodos aos vários casos considerados.

	MMC			Portic (1 única análise)
	Dist. LN e $G_{\max}$ (15 mil amostras)	Dist. LN e $G_{\max}$ (100 mil amostras)	Dist. LN e $G_{\max}$ (200 mil amostras)	Transformação Caudas Normais
$\bar{u}$ (cm)	7.37367	7.38121	7.37602	7.3653
σ_u (cm)	1.46524	1.46693	1.46688	1.440263
CV	0.1987	0.1987	0.1989	0.1956
β	2.475	2.467	2.471	2.524

Os resultados apresentados por Kim e Na (1997) foram obtidos através da utilização de funções de superfície de resposta lineares onde os autores propuseram uma técnica de aproximação sequencial para ajustar a superfície de resposta de forma a garantir a convergência do índice de fiabilidade (Tabela 6.16). Nesta Tabela, o valor de β , resultante da aplicação do MMC, é obtido utilizando 200.000 simulações. Também aplicaram, além

do método que desenvolveram com $h_i = 1.0$ e 1.5 , um método de superfície de resposta onde a superfície a aproximar à função de estado limite é linear com $h_i = 1.0$ e 1.5 .

Tabela 6.16 – Resultados do problema dado em Kim e Na (1997).

<i>Método</i>		β
Método Simulação de Monte Carlo		2.492
Superfície de Resposta Linear	$h_1 = 1.0$	2.551
	$h_2 = 1.5$	2.527
Método Desenvolvido por Kim e Na (1997)	$h_1 = 1.0$	2.513
	$h_2 = 1.5$	2.434

Em resumo, para melhor se compararem, podem representar-se numa recta os valores de β para todos os casos estudados:

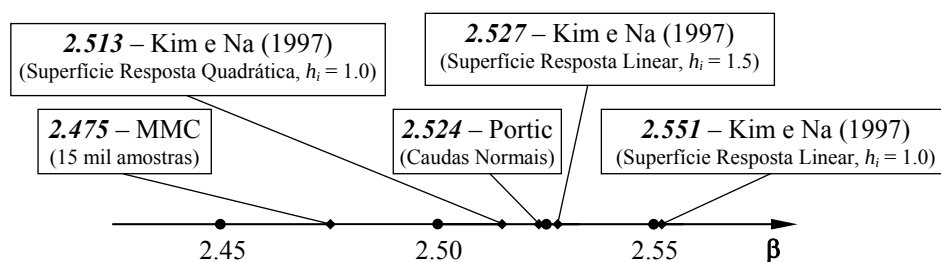


Figura 6.10 – Valores de β obtidos para os vários casos.

6.7 Estrutura metálica com dez barras sujeita a duas forças

Neste exemplo, analisado e apresentado por Wei e Rahman (2007) onde os autores aplicaram um método de decomposição univariado baseado em aproximações lineares e quadráticas na direcção do ponto mais provável de rotura e integrações numéricas univariadas de forma a analisarem a fiabilidade estrutural, vai estudar-se uma estrutura de suporte metálica que está sujeita a duas forças verticais, F_1 e F_2 (Figura 6.11).

Neste problema é controlado o deslocamento vertical no nó 3. Esta estrutura está sujeita a duas forças verticais descendentes aplicadas nos nós 2 e 3 com intensidades dadas por $F_1 = 444.8222 \text{ KN}$ e $F_2 = 444.8222 \text{ KN}$ (Figura 6.11). As forças são consideradas determinísticas. Também o módulo de elasticidade de cada um dos elementos da estrutura assim como o momento de inércia são considerados determinísticos sendo dados, respectivamente, por $E = 68947572.9 \text{ KPa}$ e $I = 0.00085 \text{ m}^4$. As variáveis aleatórias básicas do sistema estrutural apresentado na Figura 6.11 são as dez áreas das secções, A_i , $i = 1, \dots, 10$ de cada uma das barras. A área de cada barra é uma variável aleatória que segue uma distribuição normal truncada no ponto $x=0$ com valor médio $\mu = 0.0016129 \text{ m}^2$ e desvio padrão $\sigma = 0.00032258 \text{ m}^2$. Além disso, as diferentes áreas, A_i , $i = 1, \dots, 10$, são tratadas como variáveis aleatórias independentes.

Para aplicar a metodologia proposta transformaram-se as unidades de medida dos dados originais do problema (Wei e Rahman, 2007) para o sistema internacional (S. I.) – Anexo 2. Além disso, considerou-se que a malha de elementos finitos do sistema estrutural, constituído por uma estrutura metálica para suporte sujeita a duas forças nodais verticais tem seis nós e dez elementos (Figura 6.11).

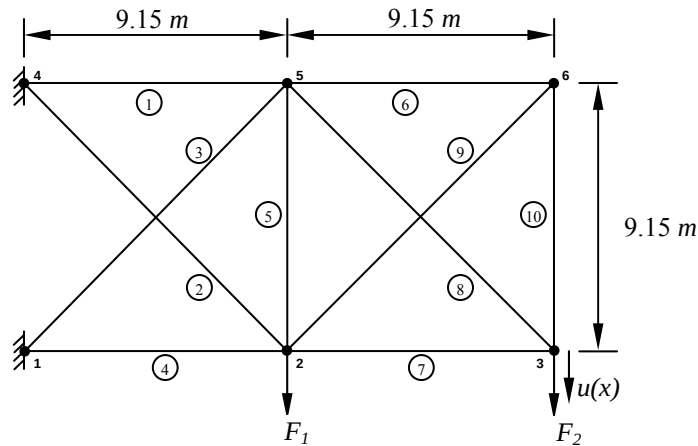


Figura 6.11 – Estrutura metálica analisada.

De acordo com as condições de carga o deslocamento vertical máximo, $u(x)$, ocorre no nó 3 onde o deslocamento permitido está limitado a um valor de 45.72 cm . Desta forma, a função que traduz o estado limite é dada por:

$$G(A_1, \dots, A_{10}) = 45.72 \text{ cm} - u(A_1, \dots, A_{10}) .$$

A probabilidade de rotura é dada por:

$$p_f = P[G(A_1, \dots, A_{10}) \leq 0] = \Phi(-\beta)$$

onde $\beta = \frac{\mu_G}{\sigma_G}$. Como $u_x \cap N(\mu_u, \sigma_u)$ então:

$$\mu_G = E[G(A_1, \dots, A_{10})] = 45.72 \text{ cm} - \mu_u$$

$$\sigma_G^2 = \text{Var}[G(A_1, \dots, A_{10})] = \sigma_u^2 \Leftrightarrow \sigma_G = \sigma_u$$

e assim neste caso $\beta = \frac{45.72 \text{ cm} - \mu_u}{\sigma_u}$.

Além do método proposto também se utilizou o método de Monte Carlo (MMC) que servirá como referência para comparação de resultados.

O MMC foi aplicado considerando as distribuições originais usando 15.000 e 100.000 amostras. Os resultados serviram para verificar se com mais amostras o valor do índice de fiabilidade seria significativamente diferente. Os resultados mostram que as diferenças não são significativas pelo que basta utilizar 15000 amostras para obter um resultado fiável e de uma forma mais rápida (Tabela 6.17). A aplicação do método proposto dá um valor para β relativamente próximo ao obtido por Wei e Rahman (2007) considerando o método FORM assim como da variante do método SORM devido a Breitung (Tabelas 6.17 e 6.18).

Tabela 6.17 – Resultados da aplicação dos dois métodos aos vários casos considerados.

	<i>MMC</i>		<i>Portic</i> (1 única análise)
	Dist. LN e $G_{\text{máx}}$ (15 mil amostras)	Dist. LN e $G_{\text{máx}}$ (100 mil amostras)	Transformação Caudas Normais
$\bar{u}$ (cm)	38.16	38.1704	36.908
σ_u (cm)	7.04557	7.06616	6.820146
CV	0.185	0.185	0.185
β	1.073	1.068	1.292

Os resultados apresentados por Wei e Rahman (2007) foram obtidos através da utilização de vários métodos (Tabela 6.18). Comparando os resultados pode dizer-se que o método proposto neste trabalho se revela relativamente preciso e mais eficiente pois é obtido através de uma única análise.

Tabela 6.18 – Resultados do problema dado em Wei e Rahman (2007).

<i>Método</i>	<i>β</i>
Desenvolvido por Wei e Rahman:	
Aproximação Linear	1.055
Aproximação Quadrática	1.080
Com Simulação	1.052
FORM	1.3645
SORM – variante de Breitung	1.133
SORM – variante de Hohenbichler	1.026
SORM – variante de Cai e Elishakoff	1.051

6.8 Pórtico de dois vãos e vinte andares sujeito a forças horizontais e verticais

Neste exemplo, adaptado de Foschi *et al.* (2002), vai estudar-se um pórtico com dois vãos (cada um com oito metros de comprimento) e vinte andares sujeito a forças verticais e horizontais (Figura 6.12). Neste caso vão ser controlados os deslocamentos horizontais ao nível dos pisos 15 e 20. A estrutura está sujeita a uma força horizontal triangular uniformemente distribuída aplicada da esquerda para a direita, com uma intensidade máxima q e a forças nodais verticais P , ao nível do telhado. As forças q e P são aleatórias com distribuições normais e de Tipo I de máximos, respectivamente. As outras variáveis aleatórias são o módulo de elasticidade dos pilares, E_c , e as suas secções com largura B e altura H . Ao longo da altura do edifício, com 80m e 20 andares, os pilares têm três secções diferentes, com dimensões B_i e H_i , $i = 1, 2, 3$. As secções dos pilares permanecem constantes para os primeiros sete andares (B_1 e H_1), depois passam a ter outras medidas do 8º andar até ao 14º andar (B_2 e H_2) e finalmente ainda outras medidas do 15º andar até ao topo (B_3 e H_3). Desta forma, o sistema estrutural apresentado é caracterizado por nove variáveis aleatórias básicas: uma força triangular horizontal, uma força nodal vertical, um módulo de elasticidade, três larguras de pilar e três alturas de pilar; sendo as suas distribuições e respectivos parâmetros apresentados na Tabela 6.19. Todas as vigas do

edifício têm um módulo de elasticidade $E_v = 20 \times 10^6 \text{ KN/m}^2$, uma largura $B_v = 0.5 \text{ m}$ e uma altura $H_v = 0.85 \text{ m}$, sendo estes valores considerados determinísticos. Para controlar o edifício durante a sua utilização estudaram-se os deslocamentos horizontais ao nível do telhado (nó 63) e do 15º andar (nó 48).

Tabela 6.19 – Dados estatísticos das variáveis aleatórias do sistema estrutural e respectivas unidades de medida (adaptado de Foschi *et al.*, 2002).

<i>Variáveis Aleatórias</i>	<i>Distribuição</i>	<i>Média</i>	<i>Desvio Padrão</i>
q (KN/m)	Tipo I de máximos	4	0.8
P (KN)	Normal	100	20
E_c (KPa)	Log-normal	20×10^6	2×10^6
B_1 (mm)	Normal	750	7.5
H_1 (mm)	Normal	1000	10
B_2 (mm)	Normal	600	6
H_2 (mm)	Normal	800	8
B_3 (mm)	Normal	450	4.5
H_3 (mm)	Normal	600	6

Para aplicar a metodologia proposta considerou-se que a malha de elementos finitos do sistema estrutural, constituído por um pórtico com dois vãos e vinte andares sujeito a forças horizontais e verticais tem sessenta e três nós e cem elementos (Figura 6.12).

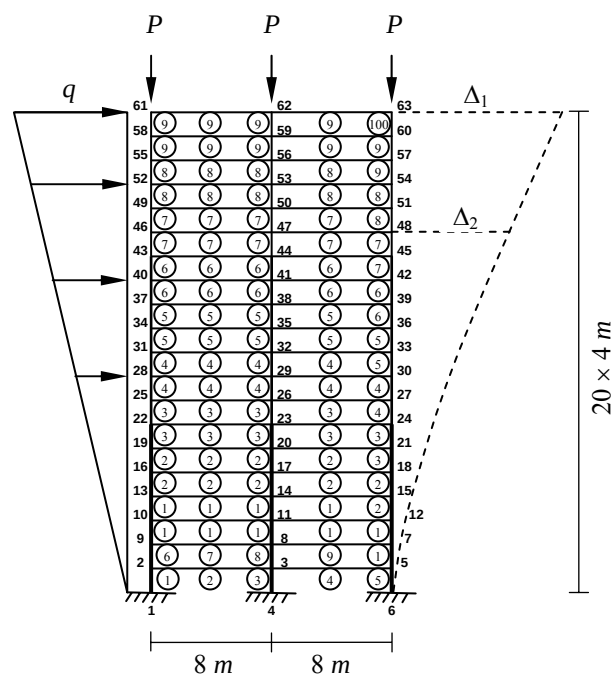


Figura 6.12 – Edifício sujeito a forças verticais e horizontais.

As equações que traduzem os estados limites de utilização são dadas por:

$$G_1(X_1, \dots, X_9) = L_1 - \Delta_1(X_1, \dots, X_9)$$

$$G_2(X_1, \dots, X_9) = L_2 - \Delta_2(X_1, \dots, X_9)$$

onde Δ_1 é o deslocamento horizontal no nó 63 e Δ_2 o deslocamento horizontal no nó 48. Neste caso, Δ_2 é dado como uma proporção da altura do edifício. Além disso, L_1 e L_2 são os limites de deformação de, respectivamente, 0.05 m e $h/1500$ m, sendo h a altura do edifício no ponto onde se vai estudar o deslocamento. A probabilidade de rotura é dada por:

$$p_f = P[G(X_1, \dots, X_9) \leq 0] = \Phi(-\beta)$$

onde $\beta = \frac{\mu_G}{\sigma_G}$. Como $\Delta_1 \cap N(\mu_{\Delta_1}, \sigma_{\Delta_1})$ e $\Delta_2 \cap N(\mu_{\Delta_2}, \sigma_{\Delta_2})$ então:

$$\mu_{G_1} = E[G_1(X_1, \dots, X_9)] = L_1 - \mu_{\Delta_1}$$

$$\sigma_{G_1}^2 = \text{Var}[G_1(X_1, \dots, X_9)] = \sigma_{\Delta_1}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{G_1} = \sigma_{\Delta_1}$$

$$\mu_{G_2} = E[G_2(X_1, \dots, X_9)] = L_2 - \mu_{\Delta_2}$$

$$\sigma_{G_2}^2 = \text{Var}[G_2(X_1, \dots, X_9)] = \sigma_{\Delta_2}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{G_2} = \sigma_{\Delta_2}$$

e assim neste caso $\beta_1 = \frac{L_1 - \mu_{\Delta_1}}{\sigma_{\Delta_1}}$ e $\beta_2 = \frac{L_2 - \mu_{\Delta_2}}{\sigma_{\Delta_2}}$.

A cada uma das variáveis em que a distribuição não é normal aplicou-se a transformação de caudas normais, considerando o ponto de dimensionamento igual ao valor médio de cada uma delas ($x_i^* = \mu_{x_i}$), de forma a obter variáveis aleatórias normais equivalentes (Tabela 6.20).

Tabela 6.20 – Dados estatísticos das variáveis aleatórias não normais do sistema estrutural com as respectivas unidades de medida e resultados da aplicação da transformação de caudas normais.

<i>Variáveis</i>	<i>Distribuição Original</i>		<i>Distribuição Normal Equivalente</i>	
	<i>Média</i>	<i>Desvio Padrão</i>	<i>Transformação Caudas Normais $x_i^* = \mu_{x_i}$</i>	
			<i>Média</i>	<i>C. V.</i>
q (KN/m)	4	0.8	4.142386	0.2
E (KPa)	20×10^6	2×10^6	20099262	0.1

Além do método proposto também se utilizou o método de Monte Carlo (MMC) que servirá como referência para comparação de resultados.

Em primeiro lugar aplicou-se o MMC considerando as distribuições originais usando 15.000 e 100.000 amostras. Os resultados serviram para verificar se com mais amostras o valor do índice de fiabilidade seria significativamente diferente. Os resultados mostram que as diferenças não são significativas pelo que basta utilizar 15000 amostras para obter um resultado fiável e de uma forma mais rápida (Tabela 6.21).

A aplicação do método proposto com a transformação de caudas normais fornece um valor para β relativamente próximo do obtido através do MMC. Desta forma, o método proposto (Portic) revela-se bastante eficiente no caso de se utilizar uma transformação de caudas normais.

Tabela 6.21 – Resultados da aplicação dos dois métodos aos vários casos considerados.

		<i>MMC</i>		<i>Portic</i> (1 única análise)
		Dist. LN e $G_{\max}$ (15 mil amostras)	Dist. LN e $G_{\max}$ (100 mil amostras)	Transformação Caudas Normais
Nó 63	$\bar{u}$ (cm)	3.742	3.741	3.845
	σ_u (cm)	0.778	0.770	0.789
	CV	0.208	0.206	0.205
	β	1.617	1.636	1.464
Nó 48	$\bar{u}$ (cm)	3.009	3.003	3.092
	σ_u (cm)	0.618	0.614	0.630
	CV	0.205	0.204	0.204
	β	1.604	1.624	1.441

6.9 Pórtico de três vãos e cinco andares sujeito a forças horizontais

Neste exemplo, adaptado de Liu e Der Kiureghian (1986a), vai analisar-se a fiabilidade de um pórtico com três vãos e cinco andares sujeito a forças nodais horizontais (Figura 6.13). As ligações entre as vigas e os pilares são consideradas rígidas. Este problema, já com alguma complexidade, também foi analisado posteriormente por Bucher e Bourgund (1990), novamente por Liu e Der Kiureghian (1989, 1991), Guan e Melchers (2001) e Wei e Rahman (2007). Vai analisar-se o pórtico quanto ao estado limite de utilização. O sistema estrutural apresentado na Figura 6.13 é caracterizado por 21 variáveis aleatórias básicas: três cargas, dois módulos de elasticidade, oito momentos de inércia e oito áreas; sendo as suas distribuições e respectivos parâmetros apresentados na Tabela 6.23. Além disso, existem correlações entre as cargas, as propriedades dos materiais e as dimensões dos elementos (Tabela 6.24).

Para aplicar a metodologia proposta considerou-se que a malha de elementos finitos do sistema estrutural, constituído por um pórtico com três vãos e cinco andares sujeito a forças horizontais, tem vinte e quatro nós e trinta e cinco elementos (Figura 6.13), sendo as suas propriedades apresentadas na Tabela 6.22.

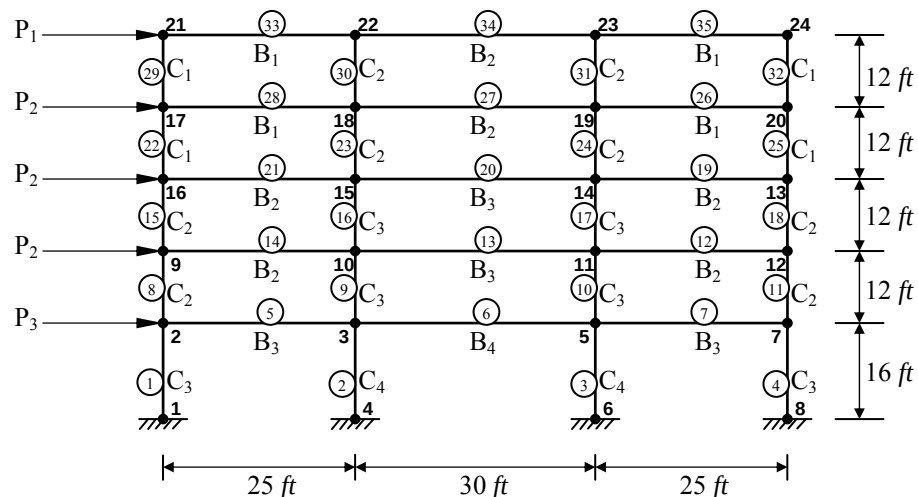


Figura 6.13 – Sistema estrutural analisado.

Tabela 6.22 – Propriedades dos elementos que constituem o sistema estrutural.

<i>Elemento</i>	<i>Módulo de Young</i>	<i>Momento de Inércia</i>	<i>Área</i>
B ₁	E ₄	I ₁₀	A ₁₈
B ₂	E ₄	I ₁₁	A ₁₉
B ₃	E ₄	I ₁₂	A ₂₀
B ₄	E ₄	I ₁₃	A ₂₁
C ₁	E ₅	I ₆	A ₁₄
C ₂	E ₅	I ₇	A ₁₅
C ₃	E ₅	I ₈	A ₁₆
C ₄	E ₅	I ₉	A ₁₇

Tabela 6.23 – Dados estatísticos das variáveis do sistema estrutural e respectivas unidades de medida (adaptado de Liu e Der Kiureghian, 1986a).

<i>Variáveis</i>	<i>Distribuição</i>	<i>Média</i>	<i>Desvio Padrão</i>
P ₁ (Kips)	Tipo I de máximos	50	15
P ₂ (Kips)	Tipo I de máximos	30	12
P ₃ (Kips)	Tipo I de máximos	25	10
E ₄ (Kips/ft ²)	Normal	454000.00	40000.00
E ₅ (Kips/ft ²)	Normal	497000.00	40000.00
I ₆ (ft ⁴)	Normal	0.94	0.12
I ₇ (ft ⁴)	Normal	1.33	0.15
I ₈ (ft ⁴)	Normal	2.47	0.30
I ₉ (ft ⁴)	Normal	3.00	0.35
I ₁₀ (ft ⁴)	Normal	1.25	0.30
I ₁₁ (ft ⁴)	Normal	1.63	0.40
I ₁₂ (ft ⁴)	Normal	2.69	0.65
I ₁₃ (ft ⁴)	Normal	3.00	0.75
A ₁₄ (ft ²)	Normal	3.36	0.60
A ₁₅ (ft ²)	Normal	4.00	0.80
A ₁₆ (ft ²)	Normal	5.44	1.00
A ₁₇ (ft ²)	Normal	6.00	1.20
A ₁₈ (ft ²)	Normal	2.72	1.00
A ₁₉ (ft ²)	Normal	3.13	1.10
A ₂₀ (ft ²)	Normal	4.01	1.30
A ₂₁ (ft ²)	Normal	4.50	1.50

Algumas das variáveis aleatórias básicas do sistema estrutural estão correlacionadas da seguinte forma (Tabela 6.24):

- Todas as cargas aplicadas ao sistema estrutural têm uma correlação de $\rho = 0.5$
- A área das secções e o momento de inércia de cada elemento do mesmo tipo estão altamente correlacionados, tendo um coeficiente de correlação $\rho = 0.95$
- Os dois tipos de elasticidade têm um coeficiente de correlação $\rho = 0.9$
- Para $\forall_{i \neq j}$ tem-se: $\rho_{A_i A_j} = \rho_{I_i I_j} = \rho_{I_i A_j} = 0.13$
- As correlações entre os restantes elementos são iguais a zero.

Tabela 6.24 – Matriz de correlações do sistema estrutural.

	E_4	I_{10}	A_{18}	I_{11}	A_{19}	I_{12}	A_{20}	I_{13}	A_{21}	E_5	I_6	A_{14}	I_7	A_{15}	I_8	A_{16}	I_9	A_{17}	P_1	P_2	P_3
E_4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0.9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
I_{10}		1	0.95	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0	0	0
A_{18}			1	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0	0	0
I_{11}				1	0.95	0.13	0.13	0.13	0.13	0	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0	0	0
A_{19}					1	0.13	0.13	0.13	0.13	0	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0	0	0
I_{12}						1	0.95	0.13	0.13	0	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0	0	0
A_{20}							1	0.13	0.13	0	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0	0	0
I_{13}								1	0.95	0	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0	0	0
A_{21}									1	0	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0	0	0
E_5										1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
I_6											1	0.95	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0	0	0
A_{14}												1	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0	0	0
I_7													1	0.95	0.13	0.13	0.13	0.13	0	0	0
A_{15}														1	0.13	0.13	0.13	0.13	0	0	0
I_8															1	0.95	0.13	0.13	0	0	0
A_{16}																1	0.13	0.13	0	0	0
I_9																	1	0.95	0	0	0
A_{17}																		1	0	0	0
P_1																			1	0.52	0.52
P_2																				1	0.52
P_3																					1

Para aplicar a metodologia proposta transformaram-se as unidades de medida dos dados originais do problema para o sistema internacional (S. I.) – Anexo 2.

A cada uma das forças P_1 , P_2 e P_3 , cujas distribuições não são normais, aplicou-se a transformação de caudas normais, considerando o ponto de dimensionamento igual ao

valor médio de cada uma das variáveis ($x_i^* = \mu_{x_i}$). Além disso, como têm distribuição de Tipo I de máximos e são correlacionadas aplicou-se a transformação de Nataf de forma a obter variáveis normais equivalentes não correlacionadas (Tabela 6.24 e 6.25).

Tabela 6.25 – Dados estatísticos das variáveis aleatórias não normais do sistema estrutural com as respectivas unidades de medida e resultados da aplicação da transformação de caudas normais.

<i>Variáveis</i>	<i>Distribuição Original</i>		<i>Distribuição Normal Equivalente</i>	
	<i>Média</i>	<i>Desvio Padrão</i>	<i>Transformação Caudas Normais $x_i^* = \mu_{x_i}$</i>	
			<i>Média</i>	<i>C. V.</i>
P_1 (kN)	222.411	66.723	234.96	0.3
P_2 (kN)	133.447	53.379	143.48	0.4
P_3 (kN)	111.206	44.482	119.57	0.4

Neste problema vai estudar-se qual a probabilidade de o deslocamento horizontal no nó 21 exceder os 6.096cm. A obtenção do deslocamento horizontal u_x passa pela construção de uma matriz $m \times n$ e da solução de m equações simultâneas, onde $m = 72$ é o número de graus de liberdade da estrutura e $n = 21$ o número de variáveis aleatórias básicas. A equação que traduz o estado limite de utilização é dada por:

$$G(u) = 6.096\text{cm} - u_x .$$

A probabilidade de rotura é dada por:

$$p_f = P[G(U) \leq 0] = \Phi(-\beta)$$

onde $\beta = \frac{\mu_G}{\sigma_G}$. Como $u_x \cap N(\mu_u, \sigma_u)$ então:

$$\mu_G = E[G(U)] = 6.096 - \mu_u$$

$$\sigma_G^2 = \text{Var}[G(U)] = \sigma_u^2 \Leftrightarrow \sigma_G = \sigma_u$$

e assim neste caso $\beta = \frac{6.096 - \mu_u}{\sigma_u}$.

Além do método proposto também se utilizou o método de Monte Carlo (MMC) que servirá como referência para comparação de resultados.

Em primeiro lugar aplicou-se o MMC considerando as distribuições originais usando 15000 e 100000 amostras. O objectivo deste último caso foi o de verificar se com mais amostras o valor do índice de fiabilidade seria significativamente diferente. Os resultados mostram o contrário. As diferenças não são significativas pelo que basta utilizar 15000 amostras para obter um resultado fiável e de uma forma mais rápida (Tabela 6.26).

A aplicação do método proposto com as transformações de caudas normais e de Nataf fornece um valor para β muito próximo do obtido através do MMC. Consequentemente, a metodologia proposta (Portic) revela-se bastante eficiente mesmo em casos onde existe um grande número de variáveis aleatórias correlacionadas e de se terem de utilizar transformações de caudas normais e de Nataf.

Tabela 6.26 – Resultados da aplicação dos dois métodos aos vários casos considerados.

	MMC		Portic (1 única análise)
	Dist. $G_{\max}$ (15 mil amostras)	Dist. $G_{\max}$ (100 mil amostras)	Transformação Caudas Normais
$\bar{u}$ (cm)	2.676	2.681	2.744
σ_u (cm)	0.913	0.934	0.910
CV	0.341	0.348	0.332
β	3.746	3.656	3.683

6.10 Conclusões

A crescente evolução dos meios computacionais, a disponibilidade cada vez maior e mais variada de dados experimentais, o emprego de modelos de análise mais realistas e a utilização mais frequente de padrões estruturais menos comuns, tem aumentado a necessidade de aplicar técnicas de fiabilidade para a avaliação da segurança estrutural.

A aplicação de metodologias probabilísticas para resolver problemas estruturais relacionados com incertezas e aleatorização de forma a obter resultados fiáveis tem sido

restringida pela dificuldade na caracterização estatística das variáveis e, sobretudo, devido à necessidade de realizar inúmeras simulações para o mesmo problema estrutural. O método proposto, baseado em técnicas de perturbação, avalia a incerteza do comportamento estrutural com apenas uma única análise permitindo obter o valor médio e o desvio padrão da resposta estrutural. Esta é uma contribuição muito importante pois foi possível desenvolver uma metodologia extremamente eficiente que permite avaliar a incerteza da resposta de sistemas estruturais tendo em conta os parâmetros estatísticos das variáveis.

A implementação da técnica aqui desenvolvida numa malha de elementos finitos requer que se calcule a inversa da matriz de rigidez global do sistema estrutural, se obtenham as derivadas parciais de algumas matrizes, como por exemplo as derivadas parciais da matriz de rigidez global em ordem às variáveis aleatórias básicas do problema, e se efectuem alguns produtos de matrizes para calcular a matriz de covariâncias da resposta estrutural. Além disso, também foi introduzida a possibilidade de incluir correlações entre variáveis aleatórias básicas, sendo as informações acerca das incertezas nas variáveis definidas apenas por dois parâmetros (valor médio e desvio padrão).

O estudo dos vários exemplos aqui apresentados ilustra a aplicabilidade e eficiência da metodologia proposta. A comparação dos resultados obtidos com este método e com outras metodologias permitiram constatar a eficiência da técnica proposta quando as distribuições das variáveis aleatórias básicas são normais ou aproximadamente normais. Nos casos em que as distribuições não são normais, os procedimentos de aproximação desenvolvidos permitiram obter valores com erros pouco apreciáveis. No entanto, para problemas não lineares acentuados a eficiência dos resultados obtidos através do método proposto não pode ser garantida.

Capítulo 7

Conclusões e Sugestões para Investigações Futuras

Na análise de fiabilidade existem muitos métodos distintos cuja aplicação está sempre dependente de alguns factores. No entanto, existe um aspecto comum a todos eles que é o facto de precisarem sempre de uma avaliação repetitiva da resposta ou da função de estado limite para avaliar a incerteza associada à resposta estrutural (Teigen *et al.*, 1991a; Ghanem e Spanos, 2003; Schenk e Schueller, 2005; Ditlevsen e Madsen, 2005). Por esse motivo é que, ao longo dos tempos, o desenvolvimento de métodos de fiabilidade teve sempre em mente a diminuição do número de simulações. Nesta perspectiva pode dizer-se que se a avaliação é sobre a resposta podem utilizar-se, por exemplo:

- Método de Simulação de Monte Carlo Puro
- Métodos de Perturbação

Se for sobre a função de estado limite podem usar-se, por exemplo:

- Método de Simulação de Monte Carlo Puro
- Método de Simulação de Monte Carlo utilizando Amostragem por Importância
- FORM
- SORM

- Métodos de Superfície de Resposta

Uma pergunta que se pode fazer é se os métodos FORM/SORM e outros relacionados podem ser substituídos por outros métodos. Hoje em dia a resposta é normalmente “não”. Isto porque a integração numérica ainda está limitada a problemas de pequenas dimensões (normalmente $n < 5$). Quando a dimensão dos problemas aumenta os algoritmos existentes não só envolvem um esforço numérico muito grande como tendem a produzir erros numéricos que não são detectáveis.

Neste trabalho desenvolveu-se um método de análise da fiabilidade de sistemas estruturais que inclui modelos de análise de estruturas combinados com o método probabilístico de elementos finitos. As suas análises permitem entrar em consideração com a variabilidade dos diversos parâmetros que influenciam o comportamento da estrutura, resultando no cálculo do índice de fiabilidade. É assim possível analisar a segurança de uma estrutura de uma forma significativamente mais rápida do que o necessário para uma análise usando o método de Monte-Carlo (utilizado como método de referência). De facto, a aplicação de metodologias baseadas nas técnicas de simulação de Monte Carlo, apesar da sua simplicidade, tem custos computacionais bastante elevados em sistemas estruturais de alguma complexidade, mesmo quando se utilizam técnicas de redução da variância (Imai e Frangopol, 2000; Schueremans e Gemert, 2003).

Na análise de sistemas estruturais está sempre associado um determinado grau de risco devido às incertezas envolvidas que importa controlar da forma mais rigorosa e eficiente possível. Estas surgem devido às variabilidades inerentes à actividade humana, ao erro de estimação dos modelos utilizados, à variabilidade dos materiais, à dispersão das acções e imperfeições geométricas. Para avaliar de forma mais eficiente o risco associado à segurança estrutural em problemas de Engenharia Civil, descreve-se a formulação de um método de fiabilidade estrutural eficiente que conjuga técnicas de perturbação com os métodos probabilísticos de elementos finitos. As variáveis aleatórias básicas do problema estrutural são caracterizadas através dos seus valores médios, desvios padrão e coeficientes de correlação que quantificam a dependência entre essas variáveis. A incerteza do comportamento estrutural é avaliada através da matriz de covariâncias da resposta. Apresenta-se ainda o procedimento usado para implementar este método num programa de elementos finitos. O programa computacional desenvolvido permite avaliar numa única

análise estrutural a resposta média e a sua dispersão, definida em termos de forças ou de deslocamentos. Desta forma, pode realizar-se uma análise muito mais rápida quando comparada com os métodos mais frequentemente utilizados, baseados em técnicas de fiabilidade. Para demonstrar as potencialidades e a adequação da metodologia proposta aplicou-se esta na avaliação da incerteza da resposta em diferentes estruturas. Para isso, analisaram-se vários exemplos cujos resultados foram comparados com os valores obtidos através de metodologias alternativas propostas por outros autores e/ou com os valores resultantes da aplicação do método de simulação de Monte Carlo. Os resultados obtidos são exactos para problemas com função de resposta linear e quando a distribuição de cada uma das variáveis aleatórias é normal ou quase normal. Continuam com rigor adequado para problemas não lineares desde que a função de resposta possa ser aproximada através de uma combinação linear das variáveis aleatórias básicas envolvidas. Como o método proposto consiste numa aproximação de primeira ordem que utiliza somente os dois primeiros momentos estatísticos (média e desvio padrão) sem usar qualquer informação acerca das distribuições das variáveis aleatórias do problema, a precisão dos resultados não pode ser garantida para problemas com acentuada não linearidade e distribuições não normais. Nesses casos, o desenvolvimento de procedimentos apropriados para ter em conta distribuições não normais e problemas não lineares é efectuado de forma a obter resultados com um grau de aproximação adequado.

Consequentemente, verifica-se que a metodologia proposta é aplicável a problemas de fiabilidade estrutural com um grande leque de variações, quer relativamente ao número de variáveis aleatórias, quer ao tipo de distribuições das variáveis aleatórias assim como à forma da função de estado limite; revelando-se bastante eficiente (permite avaliar numa única análise estrutural a resposta média e a sua dispersão, quer em termos de forças quer de deslocamentos) no caso de problemas lineares e/ou onde a distribuição de cada uma das variáveis aleatórias é normal ou quase normal. Além disso, esta metodologia continua com rigor adequado para problemas com variáveis aleatórias básicas correlacionadas e/ou com distribuições não normais desde que se apliquem, respectivamente, transformações de Nataf e/ou de caudas normais.

Um dos aspectos que se pode vir a desenvolver no futuro relativamente à metodologia proposta neste trabalho é comprovar a eficiência do método desenvolvido e as suas potencialidades na aplicação em modelos de análise de estruturas mais avançadas, como

por exemplo modelos que tenham em conta o comportamento não linear dos materiais assim como modelos que tenham em conta o comportamento dinâmico das estruturas.

ANEXOS

Anexo 1

Software Desenvolvido

A1.1 Algoritmo

O algoritmo foi desenvolvido utilizando várias subrotinas, podendo de uma forma mais pormenorizada ser dividido nos seguintes passos:

1. **INPUT1**: lê os parâmetros de controlo (n.º total de nós, n.º total de barras, n.º de nós ligados ao exterior, n.º de materiais, n.º de propriedades por material, n.º de nós por barra, n.º de graus de liberdade por nó, n.º de coordenadas por nó, n.º de variáveis por barra, n.º total de variáveis, n.º de casos de carga e n.º de combinações) e verifica as dimensões do problema.
2. **CHECK**: verifica os parâmetros de controlo.
3. **INPUT2**: lê a topologia da malha e as características das secções tipo (leitura das ligações nodais das barras e do n.º do material, leitura das coordenadas dos nós, leitura das ligações ao exterior, leitura das propriedades das secções tipo e cálculo do comprimento e inclinação das barras).
4. **PLOT**: escrita de um ficheiro de desenho. Prepara ficheiros para “Plotting” utilizando o “Drawmesh”. Malha inicial e deformada.

5. **STIFPT**: calcula a matriz de rigidez “STIFK” de cada barra no referencial global e procede ao respectivo espalhamento na matriz global “GSTIF”, tendo em conta os apoios ao exterior (graus de liberdade fixos).

6. Introdução das cargas (ICASE = 1, NCASE)

6.1 **LOADPT**: (Input-Cargas) Calcula o vector de solicitação global:

6.1.1 Identificam-se os parâmetros definidores dos tipos de carga:

- Carga concentrada nodal
- Carga concentrada em barras
- Carga distribuída trapezoidal
- Carga térmica (variações de temperatura)
- Assentamento de apoio

6.1.2 Espalhamento da contribuição “ELOAD” de cada barra no vector de solicitação global “GLOAD”.

6.2 **GAUSS**: Efectua a resolução e retrossubstituição de Gauss.

6.3 **FORCES**: Calcula os esforços finais nas extremidades das barras.

6.4 **OUTPUT**: Escrita de resultados do caso de carga: Escreve deslocamentos, reacções e esforços nas extremidades das barras.

6.5 **PLOT**: Escrita de um ficheiro de desenho: Prepara ficheiros para “Plotting” utilizando o “Drawmesh”.

7. **COMBIN**: Cálculo das combinações dos casos de carga. Lê os factores de carga e combina as acções.

8. Cálculo das derivadas parciais da matriz de rigidez em ordem às variáveis aleatórias básicas (NUMAT=1, NMATS)

8.1 **STIFdpE**, **STIFdpB**, **STIFdpH**, **STIFdpI** e **STIFdpA**: Cálculo das derivadas parciais em relação a E_i , B_i , H_i , I_i e A_i da matriz de rigidez global da estrutura.

8.2 **STIFdpL**: Cálculo da derivada parcial em relação a L da matriz de rigidez global da estrutura.

9. Se $CV(1) \neq 0$:

9.1 **STIFdpF**: Cálculo da derivada parcial em relação a F_i da matriz de rigidez global da estrutura.

9.2 **INVK**: Cálculo da inversa da matriz de rigidez global K .

9.3 **Cu**: Determinação da matriz de covariâncias dos deslocamentos C_u das variáveis do sistema:

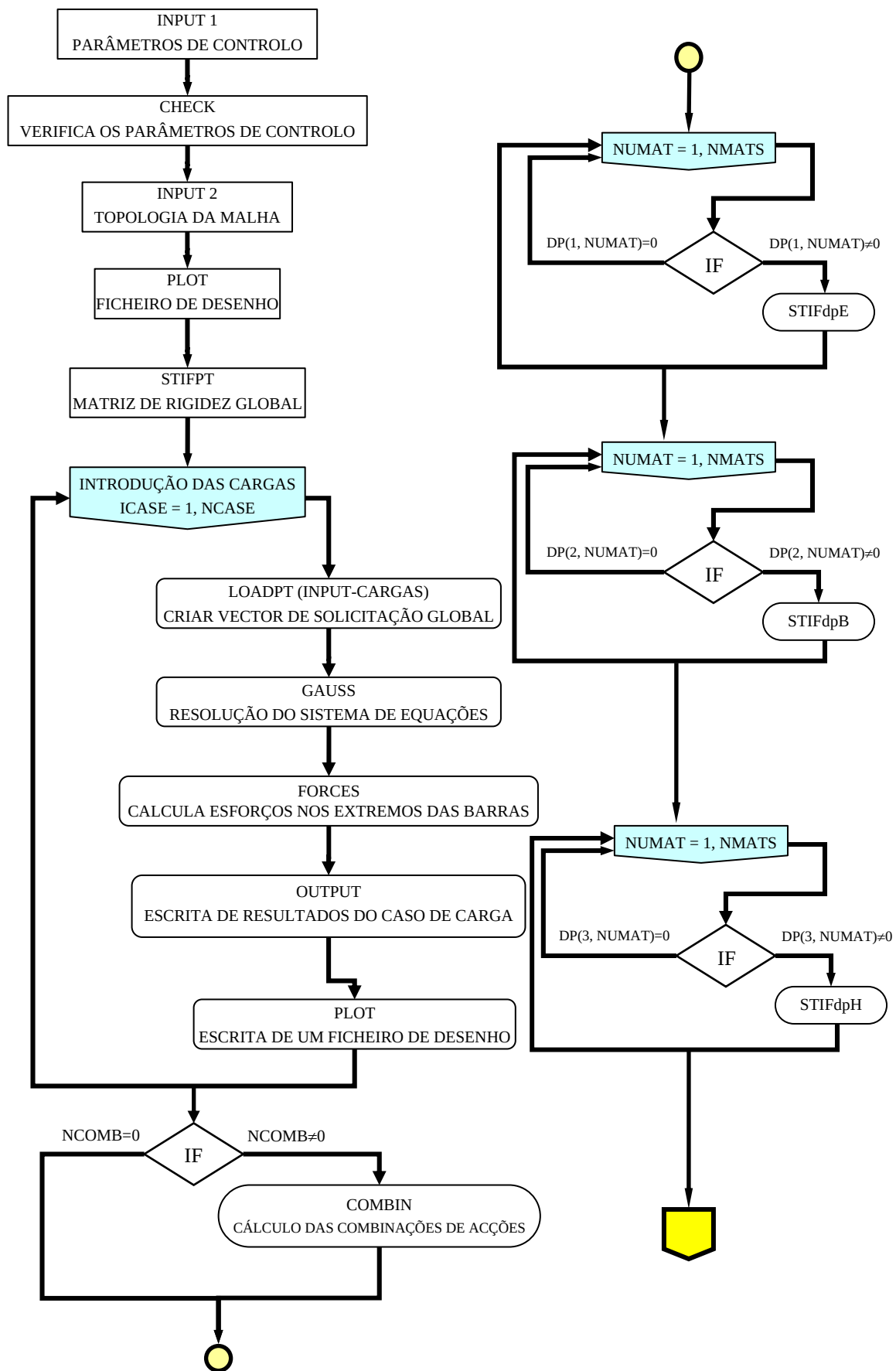
- Cálculo da matriz dos deslocamentos médios U
- Cálculo do vector da distribuição das cargas F_i para cada ICASE
- Determinação dos vectores coluna $K^{-1} \cdot \frac{\partial K}{\partial \alpha} U \cdot \delta \alpha - K^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial \alpha} \cdot \delta \alpha$
- Determinação de C_u

10. Se $CV(1) = 0$:

10.1 **INVKM**: Determinação da matriz K_M e da sua inversa K_M^{-1}

10.2 **Cq**: Determinação da matriz de covariâncias das forças C_q das variáveis do sistema:

- Cálculo da matriz dos deslocamentos médios U
- Determinação dos vectores coluna $K_M^{-1} \cdot \frac{\partial K}{\partial \alpha} U \cdot \delta \alpha$
- Determinação de C_q



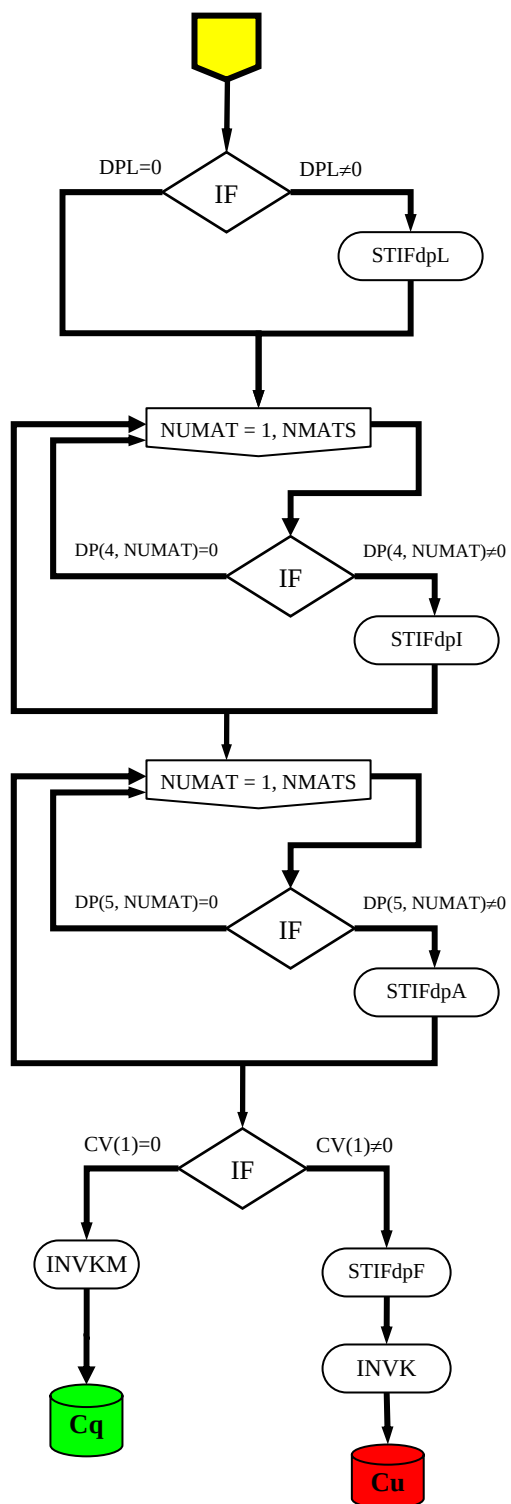


Figura A.1 – Fluxograma do algoritmo de elementos finitos para a obtenção da matriz de covariâncias relacionada com a resposta estrutural (deslocamentos ou forças).

A1.2 Ficheiro de dados

A1.2.1 Definição das variáveis associadas ao dimensionamento

MPOIN = Número máximo de nós.

MELEM = Número máximo de barras ou elementos (vigas e colunas).

MMATS = Número máximo de tipo de materiais (áreas, betão, aço, ...).

MCASE = Número máximo de casos de carga.

MTOTV = Número máximo de graus de liberdade da estrutura.

NNODE = Número de nós de um elemento (1, 2).

NDOFN = Número de graus de liberdade/nó.

NDIME = Número de dimensões do problema (X, Y) ou número de coordenadas/nó.

NPROP = Número de propriedades dos materiais:

E = Módulo de elasticidade

b = Base

h = Altura

I = Inércia

A = Área

Alfa/°C = Temperatura

NEVAB = Número de graus de liberdade de uma barra.

NTOTV = Número total de graus de liberdade da estrutura.

NMATS = Número de materiais distintos.

NUMAT = Número de materiais.

IPOIN = Nó onde se aplica a força.

IFFIX = Vector dos códigos dos graus de liberdade nos nós (0-LIVRE, 1-FIXO, 2-MOLA).

NVFIX = Número de valores (graus de liberdade da estrutura) fixos ou número de nós ligados ao exterior.

NPOIN = Número total de nós da estrutura.

NELEM = Número total de barras ou elementos (vigas e colunas).

NCASE = Número de casos de carga.

NCOMB = Número de combinações.

TLENG = Comprimento de cada elemento.

ANGLE = Ângulo que cada elemento faz com os eixos do referencial global.

DDISP = U = Deslocamentos.

GLOAD = Carga global (forças nodais globais).

ELOAD = Carga aplicada em cada elemento (forças nodais/elemento).

REACT = Reacções.

BARRA = Número da barra ou do elemento (viga ou coluna).

MATNO = Número do material.

EXT.1 = Número do nó da extremidade inicial da barra ou do elemento (viga ou coluna).

EXT.2 = Número do nó da extremidade final da barra ou do elemento (viga ou coluna).

A1.2.2 Estrutura do ficheiro de dados

Linha 1 }
 2 } Título (Só se podem escrever palavras)
 3 }

4 NPOIN, NELEM, NVFIX, NMATS, NCASE, NCOMB

5 Barra, MATNO, Ext. 1 = LNODS (I, J), Ext. 2 = LNODS (I, J)

...

(Há tantas linhas quanto o número de barras)

⇒ Nó = Número do nó, X = Coordenada do eixo do xx do nó, Y

...

(Há tantas linhas quanto o número de nós) –

A origem do referencial é escolhida no princípio e depois é sempre fixo.

⇒	Nó	,	Cod.	,	Constantes de Mola
	Número do nó ligado ao		Código de 3 dígitos (JCODE)		CMOLA(I)
	exterior onde se aplica a		(um para cada grau de		Colocam-se 3 valores
	força (IPOIN)		liberdade)		separados, um correspondente
			0 = Livre, 1 = Fixo, 2 = Mola		a cada grau de liberdade

...

(Há tantas linhas quanto o número de nós ligados ao exterior)

⇒ Número do Material (NUMAT)

⇒ Elasticidade – E (KPa), Base – B (m), Altura – H (m), Inércia – Ix (m⁴),
 Área – A (m²), Alfatemperatura (°C), DPE (KPa), DPB (m), DPH (m),
 DPI (m⁴), DPA (m²), DPAlfaT (°C), DPL (m)

...

(Há tantas linhas quanto o número de materiais diferentes (NMATS))

(apenas no Método de Monte Carlo)

E B H I A Alfa TLENG
 ⇒ DIST(1), DIST(2), DIST(3), DIST(4), DIST(5), DIST(6), DIST(7)
 (Tipo de distribuição de cada variável relacionada com os materiais)

$$DIST(i) = \begin{cases} N & \rightarrow Normal \\ LN & \rightarrow Lognormal \\ G & \rightarrow Gumbel de Máximos \end{cases}, i = 1, \dots, 17$$

⇒ NCORR = Número de linhas ou colunas da matriz de correlações.
 (0 ou igual ao n.º de linhas ou colunas da matriz de correlações)

Se for 0: passa-se para a linha seguinte - Título do caso de carga

Se for ≠ 0: na linha seguinte coloca-se a matriz de correlações completa e
 passa-se para a linha seguinte - Título do caso de carga

⇒ Título do caso de carga

⇒	①	②	③	④	⑤	⑥	(Parâmetros de controlo)
	IPNOD	IPBAR	IDIST	ITERM	ISETL	IWRIT	
	Carga	Carga	Carga	Carga	Assentamento	Flag de	0 = Não
	Concentrada	Concentrada	Distribuída	Térmica	de Apoio	escrita do	1 = Sim
	Nodal	em Barras	Trapezoidal			vector de	
						carga	

Se Sim:

⇒ CV(ICASE) – c.v. das forças aplicadas em cada ICASE

⇒ (apenas no M.M.C.)

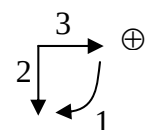
DIST(ICASE+7) – Tipo de distribuição (N, LN ou G) das forças em cada ICASE

① ⇒ Número de nós carregados (NPNOD)

⇒ Número do nó, Mom. (KN.m), F_y (KN), F_x (KN)

...

(Há tantas linhas quanto o número de nós carregados)



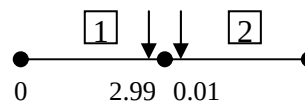
Repete-se tantas vezes quanto o número de casos de carga (NCASE)

② ⇒ Número de cargas concentradas (NPBAR)

⇒ Barra , S(m) , Mom. (KN.m) , F_y (KN) , F_x (KN)

marca-se a distância
da esq. para a dir. a
começar em 0

Ex. de 2 barras com 3m:



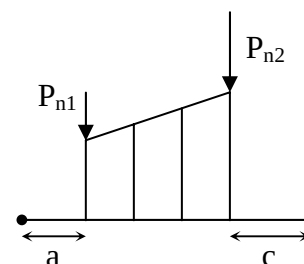
...

(Há tantas linhas quanto o número de cargas)

③ ⇒ Número de barras carregadas (NDIST)

⇒ Barra, a(m), c(m), P_{n1} (KN), P_{n2} (KN)

...



(Há tantas linhas quanto o número de barras carregadas)

④ ⇒ Número de barras com acção térmica (NTERM)

⇒ Barra, delt. t_{sup} (°C), delt. t_{inf} (°C)

...

(Há tantas linhas quanto o número de barras com acção térmica)

⑤ ⇒ Número de nós com deslocamentos prescritos (NSETL) – assentamentos de apoio

⇒ Nó, d_1 (rad), d_2 (m), d_3 (m)

...

(Há tantas linhas quanto o número de nós com deslocamentos)

⑥ Se IWRIT = 1 (escreve o vector de solicitação – Forças (cargas))

= 0 (não escreve)

Se há combinações de acções: (NCOMB $\neq$ 0)

$\Rightarrow$ Título

$\Rightarrow$ Factor de carga 1, Factor de carga 2, ...

(são constantes, ex: 1.5, 0.9, etc. – tantas quanto o número de casos de carga (NCASE))

...

(Há tantas linhas quanto o número de combinações)

$\Rightarrow$ (apenas na Metodologia Proposta)

NVAR = Número de linhas ou colunas da matriz de correlações.

Se não há correlações NVAR = 0 e pára-se

Se há correlações NVAR = n.º de linhas ou colunas da matriz de correlações

(Apresenta-se apenas a matriz diagonal superior com NVAR-1 colunas e NVAR-1 linhas)

Ex: Se NVAR = 5, cuja matriz de correlação é dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & 1 & 0.5 & 0.6 & 0.7 \\ 0.2 & 0.5 & 1 & 0.8 & 0.9 \\ 0.3 & 0.6 & 0.8 & 1 & 0.1 \\ 0.4 & 0.7 & 0.9 & 0.1 & 1 \end{bmatrix}$$

Colocam-se apenas os valores que estão dentro do triângulo (matriz diagonal superior).

Anexo 2

Factores de Conversão entre Várias Unidades de Medida

A2.1 Tabela de Conversão

O algoritmo foi desenvolvido utilizando várias subrotinas, podendo de uma forma mais Para aplicar a metodologia proposta transformaram-se as unidades de medida dos dados originais dos problemas analisados para o sistema internacional (S. I.) utilizando para tal os valores da Tabela A.2.

As transformações com * são exactas. As que nada têm são aproximadas com um determinado nível de precisão.

Tabela A.2 – Factores de conversão entre várias unidades de medida.

$1 \text{ Kg} - \text{força}$	=	0.00980665 KN	*
$1 \text{ Kg} - \text{força}/\text{cm}^2$	=	98.0665 KPa	*
1 cm^2	=	0.0001 m^2	*
1 psi	=	6894.75729 Pa	
1 lb	=	4.448222 N	
1 in	=	0.0254 m	*
1 in^2	=	0.00064516 m^2	*
1 Polegada	=	0.0254 m	*
1 ft	=	0.3048 m	*
1 ft	=	12 Polegadas	*
1 ft^2	=	0.09290304 m^2	*
1 ft^4	=	$0.0086309748412416 \text{ m}^4$	*
1 Kips	=	4448.222 N	
1 KN	=	1000 N	*
$1 \text{ KN}/\text{m}^2$	=	1 KPa	*
$1 \text{ Kips}/\text{ft}^2$	=	$4.448222/0.09290304 \text{ KPa}$	

Referências Bibliográficas

A

- Altus E., E. Totry and S. Givli. 2005. Optimized functional perturbation method and morphology based effective properties of randomly heterogeneous beams. *ELSEVIER - International Journal of Solids and Structures*, n.º42: 2345-2359
- Ang, A. H. S. and W. H. Tang. 1975. *Probability Concepts in Engineering Planning and Design. Volume 1 - Basic principles*, John Wiley & Sons, New York
- Anjum, M. F.; T. Imran and A.-S. Khaled. 1997. Response surface methodology: a neural network approach. *European Journal of Operational Research*, Vol. 101, pp. 65–73
- Au, S. K. and J. L. Beck. 1999. A new adaptive importance sampling scheme for reliability calculations. *Structural Safety*, Vol. 21, pp. 135-158
- Au, S. K., C. Papadimitrou and J. L. Beck. 1999a. Reliability of uncertain dynamical systems with multiple design points. *Structural Safety*, Vol. 21, pp. 113-133
- Augusti, G. ; A. Baratta e F. Casciati. 1984. *Probabilistic Methods in Structural Engineering*, Chapman and Hall, New York
- Ayyub, B. M. and M. M. Gupta. 1997. *Uncertainty Analysis in Engineering and Sciences: Fuzzy Logic, Statistics, and Neural Network Approach*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 370 pp.
- Ayyub, B. M. 1998. *Uncertainty Modelling and Analysis in Civil Engineering*. CRC Press, Boca Raton, Florida

B

- Baecher, G. B. e T. S. Ingra. 1981. Stochastic FEM in settlement predictions. *Journal of Geotechnical Engineering*, Vol. 107, n.º4, pp. 449-463
- Bailey, David H. and Richard E. Crandall. 2003. Random Generators and Normal Numbers, disponível em <http://www.nersc.gov/~dhbailey/dhbpapers/bcnormal.pdf>

- Bathe, K. J. 1996. *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall, New Jersey
- Bauer, J. and W. Pula. 2000. Reliability with respect to settlement limit states of shallow foundations on linearly deformable subsoil. *Computers and Geotechnics*, Vol. 26, No. 3-4, pp. 281-308
- Benaroya, H. and M. Rehak. 1987. Finite element methods in probabilistic structural analysis: a selective review. *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 41, No. 5, pp. 201-213
- Benjamin, J. R. and C. A. Cornell. 1970. *Probability, Statistics and Decision for Civil Engineers*, McGraw-Hill Book Company, New York
- Billings, S. A. and G. L. Zheng. 1995. Radial basis function network configuration using genetic algorithms. *Neural Networks*, Vol. 8, No. 6, pp. 877-890
- Biondini, F.; F. Bontempi e P. G. Malerba. 2004. Fuzzy reliability analysis of concrete structures. *Computers & Structures*, Vol. 82, pp. 1033-1052
- Bishop, C. M. 1994. Neural Networks and their applications, *Review of Scientific Instruments*, Vol. 65, No. 6, pp. 1803-1832
- Bishop, C. M. 1995. *Neural Networks for Pattern Recognition*, Oxford University Press
- Bjerager, P. 1988. Probability integration by directional simulation. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 114, No. 8, pp. 1285-1302
- Bjerager, P. and S. Krenk. 1989. Parametric sensitivity in first order reliability theory. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 115, No. 7, pp. 1577-1582
- Bjerager, P. 1990. On computational methods for structural reliability analysis. *Structural Safety*, Vol. 9, No. 2, pp. 79-96
- Bleistein, N. and R. A. Handelsman. 1975. *Asymptotic expansions of integrals*. New York: Holt, Rinehart and Winston, New York
- Bolotin, V. V. 1965. *Statistical methods in structural mechanics*. Holden-Day Inc., London
- Bose, N. K. and P. Liang. 1996. *Neural network fundamentals with graphs, algorithms, and applications*. McGraw-Hill Series in Electrical and Computer Engineering, New York
- Box, G. E. P. and K. B. Wilson. 1951. On the Experimental Attainment of Optimum Conditions. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, Vol. 13, pp. 1-38
- Breitung, K. 1984. Asymptotic approximations for multinormal integrals. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 110, No. 3, pp. 357-366
- Breitung, K. 1989. Asymptotic approximations for probability integrals. *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 4, No. 4, pp. 187-190

- Breitung, K. and M. Hohenbichler. 1989. Asymptotic approximations for multivariate integrals with an application to multinormal probabilities. *Journal of Multivariate Analysis*. Vol. 30, No. 1, pp. 80–97
- Breitung, K. 1991. Probability approximations by log likelihood maximization. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 117, No. 3, pp. 457-477
- Breitung, K. and L. Faravelli. 1996. Chapter 5: Response surface methods and asymptotic approximations. In F. Casciati and J. B. Roberts editors, *Mathematical models for structural reliability analysis*. CRC Press, New York
- Breitung, K. 2001. Discussion on “New approximations for reliability integrals”. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 127, No. 2, pp. 207
- Brennan, D.; U. Akpan, I. Konuk and A. Zebrowski. 2001. Random Field Modelling of Rainfall Induced Soil Movement. *Martec Report No.: TR-01-02*. Martec Limited, Advanced Engineering and Research Consultants, Geological Survey of Canada, Terrain Sciences Division, Ottawa
- Brenner, C. E. 1991. *Stochastic finite elements (Literature review)*. Technical Report Internal working report No. 35-91, Institute of engineering mechanics, University of Innsbruck, Austria
- Brenner, C. E. and C. G. Bucher. 1995. A contribution to the SFE-based reliability assessment of nonlinear structures under dynamic loading. *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 10, pp. 265-273
- Broomhead, D. S. and D. Lowe. 1988. Multivariable function interpolation and adaptativo networks. *Complex Systems*, Vol. 2, pp. 321-355
- Bucher, C. 1988. Adaptive sampling—an iterative fast Monte Carlo procedure. *Structural Safety*, Vol. 5, No. 2, pp. 119–126
- Bucher, C. 2003. Structural Reliability and Stochastic Finite Elements. *NAFEMS Seminar: Use of Stochastics in FEM Analyses*, Institute of Structural Mechanics, Bauhaus-University, Weimar, Germany
- Bucher, C. 2005. Stochastic Analysis in Structural Optimization. *Institute of Structural Mechanics*, Bauhaus-Universität Weimar, Germany
- Bucher, C. and U. Bourgund. 1990. A Fast and Efficient Response Surface Approach for Structural Reliability Problems. *Structural Safety*, Vol. 7, No. 1, pp. 57-66
- Bucher, C. and M. Macke. 2003. Stochastic Computational Mechanics. *AMAS Lecture Notes, AMASart.cls*, Warsaw, pp. 1-58

C

- Cai, G. Q. and I. Elishakoff. 1994. Refined second-order reliability analysis. *Structural Safety*, Vol. 14, pp. 267-276

- Casciati, F., M. Grigoriu, A. Der Kiureghian, Y. K. Wen and T. Vrouwenvelder. 1997. Report of the working group on dynamics. *Structural Safety*, Vol. 19, n.º3, pp. 271-282
- Cardaliaguet, P. and G. Euvrand. 1992. Approximation of a function and its derivatives with a neural network. *Neural Networks*, Vol. 5, pp. 207-220
- CEB, Comité Euro-International du Béton. 1988. *General principles on reliability for structures*. Bulletin d'Information n.º 191
- Chang, C. C. and H. T. Y. Yang. 1991. Random vibration of flexible uncertain beam element. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 117, No. 10, pp. 2329-2349
- Chang, T.-P. 1993. Dynamic finite element analysis of a beam on random foundation. *Computers and Structures*, Vol. 48, No. 4, pp. 583-589
- Chang, T.-P. and H. C. Chang. 1994. Stochastic dynamic finite element analysis of a nonuniform beam. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 31, No. 5, pp. 587-597
- Chang, T.-P. and H.-C. Chang. 1997. Perturbation method for probabilistic dynamic finite element analysis of a rectangular plate. *Mech. Struct. Mach.*, Vol. 25, No. 4, pp. 397-415
- Chaudhuri, A. and S. Chakraborty. 2006. Reliability of linear structures with parameter uncertainty under non-stationary earthquake. *Structural Safety*, Vol. 28, pp. 231-246
- Chen, X. and N. C. Lind. 1983. Fast probability integration by three parameter normal tail approximation. *Structural Safety*, Vol. 1, pp. 269-276
- Chen, S. H.; S. A. Billings, C. F. N. Cowan and P. W. Grant. 1990. Practical identification of narmax models using radial basis functions. *International Journal Control*, Vol. 52, No. 6, pp. 1327-1350
- Chen, S. H.; Z. S. Liu and Z. F. Zhang. 1992. Random vibration analysis of large structures with random parameters. *Computers and Structures*, Vol. 51, No. 3, pp. 309-313
- Chen, S. H.; S. A. Billings and P. W. Grant. 1992a. Recursive hybrid algorithm for nonlinear system identification using radial basis function network. *International Journal of Control*, Vol. 55, No. 5, pp. 1051-1070
- Chen, T. and H. Chen. 1995. Approximation capability to functions of several variables, nonlinear functional and operators by radial basis function neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, Vol. 32, No. 6, pp. 904-910
- Cheng, A. H. D. and C. Y. Yang editors. 1993. *Computational Stochastic Mechanics*. Elsevier Applied science, Prentice Hall, Engelwood Cliffs, NJ
- Choi, S.-K.; R. V. Grandhi and R. A. Canfield. 2004. Structural reliability under non-Gaussian stochastic behaviour. *Computers & Structures*, Vol. 82, pp. 1113-1121

- Connor, J. M. and B. Ellingwood. 1988. Reliability of nonlinear structures with seismic loading. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Vol. 113, No. 5, pp. 1011-1028
- Contreras, H. 1980. The stochastic finite element. *Computers and Structures*, Vol. 12, pp. 341-348
- Cornell, A. C. 1969. A Probability-Based Structural Code. *Journal Amer. Concrete Inst.*, Vol. 66, n.º 12, pp. 974-985
- Cun, Y. L. 1985. Une procedure d'apprentissage pour réseau à seuil asymétrique. in *In Cognitiva 85 : À la Frontière de l'Intelligence Artificielle des Sciences de la Connaissance des Neurosciences*, CESTA, Paris, pp. 599-604

D

- Dai, S.-H. and Ming-O Wang. 1992. *Reliability Analysis in Engineering Applications*. Van Nostrand Reinhold, New York
- Das, P. K. and Y. Zheng. 2000. Cumulative formation of response surface and its use in reliability analysis. *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 15, No. 4, pp. 309-315
- Davids, Gordon B. e Thomas R. Hoffmann. 1983. *FORTRAN77: A Structured, Disciplined Style*. 2ª Edição. McGRAW-HILL, Singapore
- Delgado, J. M. 2002. Avaliação de segurança de estruturas reticuladas com comportamento não linear material e geométrico. Dissertação para Doutoramento em Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto
- Dendrou, B. A. and E. N: Houstis. 1978. *An Inference-Finite Element Model for Field Applications*. Applied Mathematical Modelling, Vol. 1, IPC Science and Technology Publications, Guildford, England
- Deng, J.; Z. Q. Yue; L. G. Tham and H. H. Zhu. 2003. Pillar design by combining finite methods, neural networks and reliability: a case study of the Feng Huangshan copper mine, China. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, Vol. 40, pp. 585-599
- Deng, J.; D. S. Gu; X. B. Li and Z. Q. Yue. 2005. Structural reliability analysis for implicit performance function using artificial neural network. *Structural Safety, ASCE*, Vol. 25, No. 1, pp. 25-48
- Deng, J. 2006. Structural reliability analysis for implicit performance function using radial basis function network. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, pp. 3255-3291
- Deodatis, G. 1989. Stochastic FEM sensitivity analysis of nonlinear dynamic problems. *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 4, n.º 3, pp. 135-141
- Der Kiureghian, A. 1985. Finite element method in structural safety studies. in J. T.-P. Yao *et al.* Editors, *Structural Safety Studies*, ASCE, New York, pp. 40-52

- Der Kiureghian, A. 1987. Multivariate distribution models for structural reliability. in *Transactions*, the 9th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, Vol. M, Lausanne, Switzerland, pp. 373-379
- Der Kiureghian, A. 1989. Measures of structural safety under imperfect states of knowledge. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 115, No. 5, pp. 1119-1140
- Der Kiureghian, A. 1996. Structural reliability methods for seismic safety assessment: a review. *Engineering Structures*, Vol. 18, n.º 6, pp. 412-424
- Der Kiureghian, A. and P.-L. Liu. 1986. Structural Reliability Under Incomplete Probability Information. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 112, pp. 85-104
- Der Kiureghian, A., H.-Z. Lin e S.-J. Hwang. 1987. Second-order reliability approximations. *Journal of Engineering Mechanics*; Vol. 113, n.º8, pp. 1208-1225
- Der Kiureghian, A. e J. B. Ke. 1988. The stochastic finite element method in structural reliability. *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 3, n.º 2, pp. 83-91
- Der Kiureghian, A. and M. D. Stefano. 1991. Efficient algorithm for second order reliability analysis. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 117, No. 12, pp. 2904-2923
- Der Kiureghian, A.; C. C. Li and Y. Zhang. 1991. Recent developments in stochastic finite elements. in R. Rackwitz and P. Thoft-Christensen editors, *Proceedings of 4th IFIP WG 7.5 conference*, Munich, Germany, pp. 19-38
- Der Kiureghian, A. and T. Dakeessian. 1998. Multiple design points in first and second order reliability. *Structural Safety*, Vol. 20, No. 1, pp. 37-49
- Dey, A. and S. Mahadevan. 1988. Ductile structural system reliability analysis using adaptive importance sampling. *Structural Safety*, Vol. 20, No. 2, pp. 137-154
- Di Paola, M.; A. Pirotta and M. Zingales. 2004. Stochastic dynamics of linear elastic trusses in presence of structural uncertainties (virtual distortion approach). *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 19, No. 1-2, pp. 41-51
- Ditlevsen, O. 1973. Structural reliability and the invariance problem. Res. Rep. No. 22, Solid Mechanics Division, University of Waterloo, Ontario, Canada
- Ditlevsen, O. 1979a. Generalized Second Moment Reliability Index. *Journal of Structural Mechanics*, Vol. 7, n.º 4, pp. 435-451
- Ditlevsen, O. 1979b. Narrow Reliability Bounds for Structural Systems. *Journal of Structural Mechanics*, Vol. 7, n.º 4, pp. 453-472

- Ditlevsen, O. 1981a. *Uncertainty modeling with applications to multidimensional civil engineering systems*. McGraw-Hill, New York
- Ditlevsen, O. 1981b. Principle of Normal Tail Approximation. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 107, EM6, pp. 1191-1208
- Ditlevsen, O. 1982. Principle of Normal Tail Approximation - Errata. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 108, EM3, pp. 579-581
- Ditlevsen, O. 1985. Comments on "First-order second-moment approximation in reliability of structural systems: critical review and alternative approach", by Krzysztof Dolinski. *Structural Safety*, Vol. 3, pp. 59-61
- Ditlevsen, O. and P. Bjerager. 1986. Methods of Structural Systems Reliability. *ELSEVIER - Structural Safety*, Vol. 3, pp. 195-229
- Ditlevsen, O.; R. E. Melchers and H. Gluwer. 1990. General multi-dimensional probability integration by directional simulation. *Computers & Structures*, Vol. 36, No. 2, pp. 355-368
- Ditlevsen, O. 1995. *Discretization of random fields in beam theory*. in *Proceedings of 7th International Conference of Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering*
- Ditlevsen, O. 1996. Dimension reduction and discretization in stochastic problems by regression method. in F. Casciati and B. Roberts editors, *Mathematical Models for Structural Reliability Analysis*, *CRC Mathematical Modelling Series*, Vol. 2, pp. 51-138
- Ditlevsen, O. and H. O. Madsen. 2005. *Structural Reliability Methods*. Monograph, Coastal, Maritime and Structural Engineering, Department of Mechanical Engineering, Technical University of Denmark, disponível em <http://www.mek.dtu.dk/staff/od/books.htm>
- Dolinski, K. 1983. First-order second-moment approximation in reliability of structural systems: critical review and alternative approach. *Structural Safety*, Vol. 1, pp. 211-231

E

- Eibl, J. e B. Schmidt-Hurtienne. 1991. General outline of a new safety format. New developments in non-linear analysis methods. *CEB Bulletin d'Information*, Vol. 229, pp. 33-48
- Elishakoff, I. 1995a. Essay on uncertainties in elastic and viscoelastic structures: from A. M. Freudenthal's criticisms to modern convex modeling. *Computers and Structures*, Vol. 56, n.º6, pp. 871-895
- Elishakoff, I. 1995b. Random vibration of structures: a personal perspective. *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 48, n.º12, pp. 809-825
- Elishakoff, I. 1998. Three versions of the finite element method based on concepts of either stochasticity, fuzziness, or anti-optimization. *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 51, n.º 3, pp. 809-825

- Elishakoff, I. 1999. *Probabilistic Theory of Structures*. 2ª Edição, Dover Publications, Mineola, New York
- Elishakoff, I. 2000. Possible limitations of probabilistic methods in engineering. *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 53, n.º2, pp. 19-36
- Elishakoff, I.; Y. J. Ren and M. Shinozuka. 1995. Some exact solutions for the bending of beams with spatially stochastic properties. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 32, No. 16, pp. 2315-2327
- Elishakoff, I.; Y. J. Ren and M. Shinozuka. 1995a. Improved finite element method for stochastic structures. *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 5, No. 5, pp. 833-846
- Engelund, S. and R. Rackwitz. 1993. A benchmark study on importance sampling techniques in structural reliability. *Structural Safety*, Vol. 12, n.º4, pp. 255-276

F

- Faber, M. H. 2001. *Methods of Structural Reliability Theory – an Introduction*. Lecture Notes on Risk and Reliability in Civil Engineering, Swiss Federal Institute of Technology
- Faber, M. H. e M. G. Stewart. 2003. Risk assessment for civil engineering facilities: critical overview and discussion. *Reliability Engineering & System Safety*, Vol. 80, pp. 173-184
- Falsone, G. and N. Impollonia. 2002. A new approach for the stochastic analysis of finite element modelled structures with uncertain parameters, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, Vol. 191, No. 44, pp. 5067–5085
- Falsone, G. and N. Impollonia. 2003. Erratum to “A new approach for the stochastic analysis of finite element modelled structures with uncertain parameters” [Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 191 (44) (2002) 5067–5085]. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 192, No. 16-18, pp. 2187-2188
- Falsone, G. and N. Impollonia. 2004. About the accuracy of a novel response surface method for the analysis of finite element modeled uncertain structures. *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 19, pp. 53-63
- Faravelli, L. 1989. Response Surface Approach for Reliability Analysis. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 115, No. 12, pp. 2763-2781
- Faravelli, L. 1992. Structural reliability via response surface. In N. Bellomo and F. Casciati editors, *Proceedings of the IUTAM symposium on Nonlinear Stochastic Mechanics*, Springer Verlag, Heidelberg, pp. 213-223
- Fenton, A. G. and E. H. Vanmarcke. 1990. Simulation of random fields via local average subdivision. *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 116, No. 8

- Ferry-Borges, J. e M. Castanheta. 1985. *Structural Safety*. Curso 101, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa
- Field, R. V. 2002. Numerical methods to estimate the coefficients of the polynomial chaos expansion. in *Proceedings of the 15th ASCE Engineering Mechanics Conference*, Columbia University, New York, pp. 1-7
- Fiessler, B., H. J. Neumann and R. Rackwitz. 1979. Quadratic limit states in structural reliability. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 115, No. 12, pp. 2763-2781
- Finch, S. R. 2003. *Mathematical Constants*. England: Cambridge University Press, Cambridge
- Flood, I. and N. Kartam. 1994. Neural networks in civil engineering. I: Principles and Understanding." *Journal of Computing in Civil Engineering*, ASCE, Vol. 8, No. 2, pp. 131-148
- Flood, I. and N. Kartam. 1994a. Neural networks in civil engineering. II: Systems and application. *Journal of Comp. in Civil Engineering*, ASCE, Vol. 8, No. 2, pp. 149-162
- Foschi, R. O.; H. Li and J. Zhang. 2002. Reliability and performance-based design: a computational approach and applications. *Structural Safety*, Vol. 24, pp. 205-218
- Frangopol, D. M.; Y.-H. Lee and K. William. 1996. Nonlinear finite element reliability analysis of concrete. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 122, No. 12, pp. 1174-1182
- Frangopol, D. M. and K. Imai. 2000. Geometrically nonlinear finite element reliability analysis of structural systems. II: applications. *Computers & Structures*, Vol. 77, No. 6, pp. 693-709
- Freudenthal, A. M. 1945. The safety of structures. *Transactions of ASCE*, pages 125-159
- Freudenthal, A. M. 1956. Safety and the probability of structural failure. *Transactions of ASCE*, Vol. 121, pp. 1137-1197
- Freudenthal, A. M., J. M. Garrelts e M. Shinozuka. 1966. The analysis of structural safety. *ASCE, Journal of Structural Division*, Vol. 92, ST2

G

- Gagarin, N.; I. Flood and P. Albrecht. 1994 Computing Truck Attributes with Artificial Neural Networks. *Journal of Computing in Civil Engineering*, Vol. 8, No. 2, pp. 179-200
- Garrett, J. H. J. 1994. Where and why artificial neural networks are applicable in civil engineering. *Journal of Computing in Civil Engineering*, ASCE, Vol. 8, No. 2, pp. 129-130
- Gayton, N., J. M. Bourinet and M. Lemaire. 2003. CQ2RS: a new statistical approach to the response surface method for reliability analysis. *Structural Safety*, Vol. 25, No. 1, pp. 99-121

- Gayton, N., A. Mohamed, J. D. Sorensen, M. Pendola e M. Lemaire. 2004. Calibration methods for reliability-based design codes. *Structural Safety*, Vol. 26, pp. 91-121
- Gentle, J. E. 1998. *Numerical Linear Algebra for Applications in Statistics*. Springer-Verlag, Berlin
- Gentle, J. E. 2002. *Random Number Generation and Monte Carlo Methods*. 2ª Edição. Springer-Verlag, Berlin.
- Ghanem, R. G. 1999. Ingredients for a general purpose stochastic finite elements implementation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 168, pp. 19-34
- Ghanem, R. G. and P. D. Spanos. 1990. Polynomial chaos in stochastic finite elements. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 57, No. 1, pp. 197-202
- Ghanem, R. G. e P. D. Spanos. 1991. Spectral stochastic finite-element formulation for reliability analysis. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 117, n.º 10, pp. 2351-2372
- Ghanem, R. G. e P. D. Spanos. 1991a. *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*. Springer, Berlin
- Ghanem, R. G. e P. D. Spanos. 2003. *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*. Courier Dover Publications, New York
- Girosi, F. and T. Poggio. 1990. Networks and the best approximation property. *Biological Cybernetics*, Vol. 63, pp. 169-176
- Goh, A. T. C. 1995. Back-propagation neural networks for modelling complex systems. *Artificial Intelligence in Engineering*, UK: Elsevier Science Limited, vol. 9, pp. 143-151
- Goh, A. T. C. and F. H. Kulhawy. 2003. Neural network approach to model the limit state surface for reliability analysis. *Canadian Geotechnical journal*, Vol. 40, No. 6, pp. 1235-1244
- Golub, Gene H. and Charles F. VanLoan. 1996. *Matrix Computations*. 3ª Edição. Johns Hopkins University Press, Baltimore
- Gomes, H. M. and A. M. Awruch. 2004. Comparison of response surface and neural network with other methods for structural reliability methods. *Structural Safety*, Vol. 26, No. 1, pp. 49-67
- Gourdon, X. and P. Sebah. 2003. A Collection of Formulae for the Euler Constant, disponível em <http://numbers.computation.free.fr/Constants/Gamma/gammaFormulas.pdf>
- Gourdon, X. and P. Sebah. 2004. The Euler Constant: γ , disponível em <http://numbers.computation.free.fr/Constants/Gamma/gamma.html>
- Gouvêa, M. M. e L. D. B. Terra. 1999. Avaliação e melhoria da margem de colapso de tensão utilizando rede neural artificial. *IV Congresso Brasileiro de Redes Neurais*, SP, Brasil, pp. 130-135

- Grasa, J., J. A. Bea, J. F. Rodríguez e M. Doblaré. 2006. The perturbation method and the extended finite element method. An application to fracture mechanics problems. *Fatigue Fract. Engineering Mater. Struct.*, Vol. 29, pp. 581-587
- Grigoriu, M. 1983. Methods for approximate reliability analysis. *Structural Safety*, Vol. 1, pp. 155-165
- Grigoriu, M. 1984. Crossings of non-Gaussian translation processes. *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 110, No. 4, pp. 610-620
- Grigoriu, M. 1995. *Applied non-Gaussian processes. Examples, theory, simulation, linear random vibration and MATLAB solutions*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall
- Grossenberg, S. 1982. *Studies of the Mind and Brain*. Holland: Reidel Press, Dordrecht
- Guan, X. L. and R. E. Melchers. 1997. Multitangent-plane surface method for reliability calculation. *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 123, No. 10, pp. 996-1002
- Guan, X. L. and R. E. Melchers. 2000. A parametric study on the response surface method. In *8th ASCE Speciality Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability*. ASCE, New York
- Guan, X. L. and R. E. Melchers. 2001. Effect of response surface parameter variation on structural reliability estimation. *Structural Safety*, Vol. 23, No. 4, pp. 429-444

H

- Hagan, M. T.; H. B. Demuth and M. Beale. 1996. *Neural network design*. Boston: PWS
- Haldar, A. e S. Mahadevan. 2000. *Probability, Reliability and Statistical Methods in Engineering Design*. John Wiley & Sons, New York
- Haldar, A. e S. Mahadevan. 2000a. *Reliability Assessment Using Stochastic Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, New York
- Handa, K. e K. Anderson. 1981. *Application of finite element methods in the statistical analysis of structures*. Third International Conference on Structural Safety and Reliability, Norway, pp. 409-417
- Harbitz, A. 1983. *Efficient and accurate probability of failure calculation by use of the importance sampling technique*. in: *Proceedings of the 4th International Conference on App. of Statistics and Prob. in Soils and Structural Engineering, ICASP-4*, Pitagora Editrice Bologna, pp. 825-836
- Hardy, R. L. 1971. Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces. *Journal of Geophysics Research*, Vol. 76, pp. 1905-1915
- Hasofer, A. M. and N. C. Lind. 1974. Exact and invariant second-moment code format. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 100, EM1, pp. 111-121

- Haugh, M. 2004. The Monte Carlo Framework, Examples from Finance and Generating Correlated Random Variables. *Monte Carlo Simulation: IEOR E4703*
- Haukaas, T. and A. Der Kiureghian. 2004. Finite Element Reliability and Sensitivity Methods for Performance-Based Earthquake Engineering. *PEER Report 2003/14*, Pacific Earthquake Engineering Research Center, College of Engineering, University of California, Berkeley
- Havil, J. 2003. *Gamma: Exploring Euler's Constant*. Princeton, NJ: Princeton University Press
- Haykin, S. 1999. *Neural Networks: A Comprehensive Foundation*, second edition, Prentice Hall, New Jersey
- Hebb, D. 1949. *The Organization of Behaviour*. JohnWiley, New York
- Henriques, A. A. R. 1998. Aplicação de novos conceitos de segurança no dimensionamento do betão estrutural. Dissertação para Doutoramento em Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto
- Henriques, A. A. R. 2006. Avaliação eficiente da incerteza estrutural aplicando técnicas de perturbação. *Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas*, No. 55, pp. 5-13
- Hisada, T. e S. Nakagiri. 1981. *Stochastic finite element method developed for structural safety and reliability*. in *Proceedings*, Third International Conference on Structural Safety and Reliability, Trondheim, Norway, pp. 395-408
- Hisada, T. e S. Nakagiri. 1985. *Role of the stochastic finite element method in structural safety and reliability*. in *Proceedings*, 4th International Conference on Structural Safety and Reliability, Kobe, Japan, pp. 385-394
- Hisada, T. e H. Noguchi. 1989. *Development of a nonlinear stochastic FEM and its application*. In: AH-S Ang, M. Shinozuka, G. I. Schueller, editors. *Structural Safety and Reliability. Proceedings of the 5th International Conference on Structural Safety and Reliability*, San Francisco: ASCE, pp. 1097-1104
- Hohenbichler, M. e R. Rackwitz. 1981. Non-normal dependent vectors in structural safety. *J. Engineering Mechanics Div.*, ASCE, Vol. 107, EM6, pp. 1227-1237
- Hohenbichler, M., S. Gollwitzer, W. Kruse and R. Rackwitz. 1987. New light on first- and second-order reliability methods. *Structural Safety*, Vol. 4, pp. 267-284
- Hohenbichler, M. and R. Rackwitz. 1988. Improvements of Second-Order Reliability Estimates by Importance Sampling. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 114, No. 12, pp. 2195-2199
- Holcomb, T. and M. Morari. 1991. Local training for radial basis function networks: towards solving the hidden unit problem. *Proceedings of American Control Conference*, pp. 2331-2336
- Hong, H. P. 1999. Simple Approximations for Improving Second-Order Reliability Estimates. *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 125, No. 5, pp. 592-595

- Hopfield, J. J. 1982. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proc. Natl. Acad. Sci.*, Vol. 79, pp. 2554-2558
- Hornik, K.; M. Stinchcombe and H. White. 1989. Multi-layer feed-forward networks are universal approximators. *Neural Networks*, Vol. 2, pp. 359-368
- Hornik, K.; M. Stinchcombe and H. White. 1990. Universal approximation of an unknown mapping and its derivatives using multi-layer feed-forward networks. *Neural Networks*, Vol. 3, pp. 551-560
- Huh, J. and A. Haldar. 2002. Seismic reliability of nonlinear frames with PR connections using systematic RSM. *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 17, pp. 177-190
- Hurst, Rex L. and Robert E. Knop. 1972. Algorithm 425: Generation of Random Correlated Normal Variables [G5]. *ACM* Vol. 15, n.º5, pp. 355-357
- Hurtado, J. E. and A. H. Barbat. 1998. Monte Carlo techniques in computational stochastic mechanics. *Archives of Computational Methods in Engineering*, Vol. 5, No. 1, pp. 3-30
- Hurtado, J. E. and D. A. Alvarez. 2001. Neural network-based reliability analysis: a comparative study. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 191, No. 1-2, pp. 113-132
- Hurtado, J. E. 2002. Analysis of one-dimensional stochastic finite elements using neural networks. *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 17, pp. 35-44
- Hurtado, J. E. 2004. An examination of methods for approximating implicit limit state functions from the viewpoint of statistical learning theory. *Structural Safety*, Vol. 26, No. 3, pp. 271-293

I

- Ibrahim, R. A. 1987. Structural dynamics with parameter uncertainties. *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 40, No. 3, pp. 309-328
- Igusa, T. and A. Der Kiureghian. 1988. Response of uncertain systems to stochastic excitation. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 114, No. 5, pp. 812-832
- Imai, K. e D. M. Frangopol. 2000. Geometrically nonlinear finite element reliability analysis of structural systems. I: theory. *Computers & Structures*, Vol. 77, No. 6, pp. 677-691
- Impollonia, N. and A. Sofi. 2003. A response surface approach for the static analysis of stochastic structures with geometrical nonlinearities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 192, No. 37-38, pp. 4109-4129
- Iwan, W. D. and H. Jensen. 1993. On the dynamic response of continuous systems including model uncertainty. *Journal of Applied Mechanics, ASME*, Vol. 60, pp. 484-490

J

- Jacobs, R. A. 1988. Increased rates of convergence through learning rate adaptation. *Neural Networks*, Vol. 1, pp. 295-307
- Johnson, E. A.; R. B. Corotis and G. I. Schueller. 2001. Computational challenges and breakthroughs: A panel discussion. in R. B. Corotis, G. I. Schueller and M. Shinozuka editors, *8th International Conference on Structural Stability and Reliability (ICOSSAR 01)*. Swets and Zeitinger

K

- Karunanithi, Nachimuthu; William J. Grenney, Darrell Whitley and Ken Bovee. 1994. Neural Networks for River Flow Prediction. *Journal of Computing in Civil Engineering*, Vol. 8, No. 2, pp. 201-220
- Katafygiotis, L. S. and J. L. Beck. 1995. A very efficient moment calculation method for uncertain linear dynamic systems. *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 10, No. 2, pp. 117-128
- Kaviori, S. N. and V. Venkata Subramanian. 1993. Using fuzzy clustering with ellipsoidal units in neural networks for robust fault classification. *Computers & Chemical Engineering*, Vol. 17, No. 8, pp. 765-784
- Kharmanda, G., A. Mohamed e M. Lemaire. 2002. Efficient reliability-based design optimization using a hybrid space with application to finite element analysis. *Structural Multidisc. Optimization*, Vol. 24, pp. 233-245
- Kijawatworawet, W.; H. J. Pradlwarter and G. S. Schueller. 1998. *Structural reliability estimation by adaptive importance directional sampling*. in: *Proceedings ICOSSAR 97*, Balkema, pp. 891-897
- Kim, S. H. and S. W. Na. 1997. Response Surface Method using Vector Projected Sampling Points. *Structural Safety*, Vol. 19, No. 1, pp. 3-19
- Kleiber, M. e T. D. Hien. 1992. *The Stochastic Finite Element Method*. John Willey & Sons Ltd, New York
- Kohonen, T. 1987. *Self-Organization and Associative Memory*. 2nd Edition, Springer
- Kovacs, Z. L. 1996. *Redes Neurais Artificiais: Fundamentos e Aplicações*. SP – Livraria da Física Editora, São Paulo
- Koyluoglu, H. U.; S. R. K. Nielsen and A. S. Cakmak. 1995. Stochastic dynamics of nonlinear structures with random properties subject to stationary random excitation. *Technical Report Paper No 133*, Department of Building technology and structural engineering, Aalborg University, Denmark

L

- Laranja, R. e J. de Brito. Maio 2003. “Fiabilidade estrutural e formatos de verificação da segurança”. *Ingenium*. 2ª Série. n.º 75: 69-74.

- Lastiri, C. P. e R. M. O. Pauletti. 2004. Aplicação de Redes Neurais Artificiais à Engenharia de Estruturas. in: *XXXI Jornadas Sud-Americanas de Ingenieria Estructural*, FIUNC, Mendoza, Argentina
- Lawrence, M. A. 1987. Basis random variables in finite element analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 24, pp. 1849-1863
- Lawrence, M. A. 1989. An introduction to reliability methods. in *Computational Mechanics of Probabilistic and Reliability Analysis*, eds. W. K. Liu and T. Belytschko. Computational Mechanics of Probabilistic and Reliability Analysis, Elmeppress International, Lausanne, Switzerland, pp. 9-46
- Lee, S. and M. K. Rhee. 1991. A gaussian potential function network with hierarchically self-organizing learning. *Neural Networks*, Vol. 4, pp. 207-224
- Li, C.-C. and A. Der Kiureghian. 1993. Optimal discretization of random fields. *Journal of Engineering Mechanics*. Vol. 119, No. 6, pp. 1136–1154
- Li, X. 1996. Simultaneous approximations of multivariate functions and derivatives by neural networks with one hidden layer. *Neurocomputing*, Vol. 12, pp. 327-343
- Liu, P.-L. and A. Der Kiureghian. 1986. Multivariate distribution models with prescribed marginals and covariances. *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 1, pp. 105–112
- Liu, P.-L. e A. Der Kiureghian. 1986a. *Optimization Algorithms for Structural Reliability Analysis*. Report No. UCB/SESM-86/09. Department of Civil Engineering, Division of Structural Engineering and Structural Mechanics, University of California, Berkeley, CA
- Liu, P.-L. e A. Der Kiureghian. 1988. *Optimization Algorithms for Structural Reliability*, in *Proceedings, Joint ASME/SES Applied Mechanics and Engineering Sciences Conference*, pp. 185-196, Berkeley, CA
- Liu, P.-L. e A. Der Kiureghian. 1989. *Finite-element reliability methods for geometrically nonlinear stochastic structures*. Report No. UCB/SEMM-89/05. Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, CA
- Liu, P.-L. and A. Der Kiureghian. 1991. Optimization Algorithms for Structural Reliability. *Structural Safety*, Vol. 9, n.º 3, pp. 161-177
- Liu, P.-L., and A. Der Kiureghian. 1991a. Finite element reliability of geometrically nonlinear uncertain structures. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 117, No. 8, pp. 1806–1825
- Liu, P.-L. and K. G. Liu. 1993. Selection of random field mesh in finite element reliability analysis. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 119, No. 4, pp. 667-680
- Liu, Y. W. and F. Moses. 1994. A sequential response surface method and its application in the reliability analysis of aircraft structural systems. *Structural Safety*, Vol. 16, pp. 39-46

- Liu, W. K.; T. Belytschko and A. Mani. 1986. Random field finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, No. 10, pp. 1831-1845
- Liu, W. K.; T. Belytschko and A. Mani. 1986a. Probabilistic finite elements for non linear structural dynamics. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 56, No. 1, pp. 61-81
- Liu, W. K.; A. Mani and T. Belytschko. 1987. Finite element methods in probabilistic mechanics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 2, No. 4
- Liu, W. K.; G. H. Besterfield and T. Belytschko. 1988. Variational Approach to Probabilistic Finite Elements, ASCE, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 114, No. 12, pp. 2115-2133
- Liu, W. K.; T. B. Belytschko and G. H. Besterfield. 1989. Probabilistic finite element method. in *Computational Mechanics of Probabilistic and Reliability Analysis*, eds. W. K. Liu and T. Belytschko. Elmeppress International, Lausanne, pp. 115-140
- Liu, W. K.; T. Belytschko and Y. J. Lua. 1992. Stochastic computational mechanics for aerospace structures. in S. N. Atluri editor, *Progress in Astronautics and Aeronautics*, AIAA, volume 146, pp. 245-278
- Liu, W. K., T. Belytschko e Y. J. Lua. 1995. *Probabilistic Structural Mechanics Handbook: Theory and Industrial Applications*, 4ª Edição, Springer-Verlag, New York
- Loeve, M. 1977. *Probability Theory*, 4th edition, Springer-Verlag, New York
- Long, M. W. and J. D. Narciso. 1999. Probabilistic Design Methodology for Composite Aircraft Structures. *Report No. DOT/FAA/AR-99/2*. U. S. Department of Transportation, Federal Aviation Administration, Office of Aviation Research, Washington

M

- Madsen, H. O.; S. Krenk e N. C. Lind. 2006. *Methods of Structural Safety*. 2ª edição. Dover Publications, Mineola, New York
- Maes, M. A.; Ph. Geyskens and K. Breitung. 1993a. *MAIS: Monte Carlo Asymptotic Importance Sampling for reliability analysis*. University of Calgary
- Maes, M. A.; K. Breitung and D. J. Dupois. 1993b. Asymptotic Importance Sampling. *Structural Safety*, Vol. 12, n.º3, pp. 167-186
- Mahadevan, S. e P. Raghoeamachar. 2000. Adaptive simulation for system reliability analysis of large structures. *Comput. Struct.*, Vol. 77, n.º6, pp. 725-734
- Mai-Duy, N. and T. Tran-Cong. 2003. Approximation of function and its derivatives using radial basis function networks. *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 27, No. 3, pp. 197-220

- Manohar, C. S. and R. A. Ibrahim. 1999. Progress in structural dynamics with stochastic parameter variations 1987-1998. *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 52, No. 5, pp. 177-197
- Manohar, C. S.; S. Adhikari and S. Bhattacharyya. 1999. *Statistical energy analysis of structural dynamical systems*. Technical Report DST Report, Project No. III 5(1)/95-ET, Department of Civil Engineering, Indian Institute of Science
- Marek, P.; J. Brozzetti, M. Gustar and P. Tikalsky. 2003. Probabilistic Assessment of Structures using Monte Carlo Simulation: Background, Exercises and Software. 2ª Edição. *Institute of Theoretical and Applied Mechanics*, Academy of Sciences of the Czech Republic, Praha
- Masters, T. 1993. *Practical Neural Network Recipes in C++*. Academic Press, San Diego
- Matthies, H. G.; C. E. Brenner, C. G. Bucher and C. G. Soares. 1997. Uncertainties in Probabilistic Numerical Analysis of Structures and Solids-Stochastic Finite Elements. *ELSEVIER - Structural Safety*, Vol. 19, n.º3: 283-336
- Matthies, H. G. and C. Bucher. 1999. Finite Elements for Stochastic Media Problems. *ELSEVIER – Computer Methods in Appl. Mech. and Engineering*. Vol. 168, pp. 3-17
- McDonald, D. B.; W. J. Grantham and W. L. Tabor. 2000. Response surface model development for global/local optimization using radial basis functions. in: 8th *Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization (AIAA 2000-4776)*, 6-8, Long Beach, CA
- Melchers, R. E. 1989. Improved importance sampling methods for structural reliability calculations. in A. H.-S. Ang, M. Shinozuka and G. I. Schueller editors, *Proceedings of the 5th International Conference on Structural Safety and Reliability (ICOSSAR'89)*, ASCE, New York, pp. 1185-1192
- Melchers, R. E. 1990. Radial importance sampling for structural reliability. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*; Vol. 116, No. 1, pp. 189–203
- Melchers, R. E. 1990a. Search-based importance sampling. *ELSEVIER - Structural Safety*, Vol. 9, No. 2, pp. 117–128
- Melchers, R. E. 1999. *Structural Reliability Analysis and Prediction*. 2ª edição. John Wiley & Sons, Chichester
- Melchers, R. E. 2001. Assessment of existing structures-approaches and research needs. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Vol. 127, n.º4, pp. 406-411
- Melchers, R. E., M. Ahammed and C. Middleton. 2003. FORM for discontinuous and truncated probability density functions. *Structural Safety*, Vol. 25, pp. 305-313
- Mendenhall, W. and T. Sincich. 1995. *Statistics for Engineering and the Sciences*. 4ª Edição. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall

- Menezes, R. C. R. and G. I. Schueller. 1996. On structural reliability assessment considering mechanical model uncertainties. in H. G. Natke and Y. Ben Haim editors, *Proceedings of the International workshop on Uncertainty: models and measures, Lambrecht, Germany*, pp. 173-186
- Micchelli, C. A. 1986. Interpolation of scattered data: Distance matrices and conditionally positive definite functions. *Constructive Approximation*, Vol. 2, pp. 11-22
- Mínguez, R.; A. J. Conejo and A. S. Hadi. 2006. Non Gaussian State Estimation in Power Systems. in *Proceedings of International Conference on Mathematical and Statistical Modeling*, pp. 1-23
- Moarefzadeh, M. R. and R. E. Melchers. 1999. Directional importance sampling for ill-proportioned spaces. *Structural Safety*, Vol. 21, No. 1, pp. 1-22
- Moody, J. and C. J. Darken. 1989. Fast learning in networks of locally tuned processing units. *Neural Computation*, Vol. 1, pp. 281-294
- Muller, B. and J. Reinhardt. 1991. *Neural networks—An introduction*. New York: Springer-Verlag
- Musavi, M. T.; W. Ahmed; K. H. Chan; K. B. Faris and D. M. Hummels. 1992. On the training of radial basis function classifiers. *Neural Networks*, Vol. 5, pp. 595-603
- Muscolino, G.; G. Ricciardi and N. Impollonia. 2000. Improved dynamic analysis of structures with mechanical uncertainties under deterministic input. *Probabilistic Engineering Mechanics*. Vol. 15, No. 2, pp. 199–212
- Myers, R. H. and D. C. Montgomery. 1995. *Response Surface Methodology*. John Wiley & Sons, Inc., New York

N

- Nakagiri, S. and T. Hisada. 1982. Stochastic finite element method applied to structural analysis with uncertain parameters. in: *Proceedings of the International Conference on Finite Element Methods*, Aachen, Germany, pp. 206–211
- Nakagiri, S., H. Takabatake e S. Tani. 1987. Uncertain eigenvalue analysis of composite laminated plates by the stochastic finite element method. *Journal of Engineering for Industry, ASME*, Vol. 109, pp. 9-12
- Nash, J. C. 1990. *Compact Numerical Methods for Computers; Linear Álgebra and Function Minimisation*. 2ª Edição. England: Adam Hilger, Bristol
- Natrella, M. 2005. Extreme Value Distributions. *Engineering Statistics Handbook. NIST/SEMATECH*. §8.1.6.3, disponível em <http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/apr/section1/apr163.htm>
- Nelder, J. A. 1966. Inverse polynomials, a useful group of multifactor response function, *Biometrics*, Vol. 22, pp. 128–141

- Neves, L. A. C., P. J. S. Cruz e A. A. R. Henriques. 2002. SFEM reliability of steel frames. *Eurosteel - Coimbra*: 1531-1540
- Nie, J. and B. R. Ellingwood. Directional methods for structural reliability analysis. *Structural Safety*, Vol. 22, pp. 233-249
- Nieuwenhof, B. Van den and J.-P. Coyette. 2002. *A perturbation stochastic finite element method for the time-harmonic analysis of structures with random mechanical properties*. in *Proceedings of Fifth World Congress on Computational Mechanics*, Eds.: H. A. Mang, F. G. Rammerstorfer, J. Eberhardsteiner, Vienna, Austria, pp. 1-10
- Nowak, A. S. and K. R. Collins. 2000. *Reliability of structures*. McGraw-Hill, Singapore
- O**
- Oakley, D. R., R. H. Sues and G. S. Rhodes. 1998. Performance optimization of multidisciplinary mechanical systems subject to uncertainties. *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 13, No. 1, pp. 15-26
- Olsson, A., G. Sandberg and O. Dahlblom. 2003. On Latin hypercube sampling for structural reliability analysis. *ELSEVIER - Structural Safety*, Vol. 25, pp. 47-68
- P**
- Pandya, A. S. and R. B. Macy. 1995. *Pattern Recognition with Neural Networks in C++*. CRC Press and IEEE Press, Florida Atlantic University, Florida
- Papadimitriou, C., J. L. Beck and L. S. Katafygiotis. 1995. Asymptotic expansions for reliabilities and moments of uncertain dynamic systems. *Tech. Rep. EERL 95-05*, California Institute of Technology, Pasadena, California
- Papadimitriou, C., J. L. Beck and L. S. Katafygiotis. 1997. Asymptotic expansions for reliability and moments of uncertain systems. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 123, No. 12, pp. 1219-1229
- Papadrakakis, M., V. Papadopoulos and N. D. Lagaros. 1996. Structural reliability analysis of elastic-plastic structures using neural networks and Monte Carlo simulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 136, No. 1-2, pp. 145-163
- Papoulis, A. 1984. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. 2ª Edição. MacGraw-Hill, New York
- Park, J. and I. Sandberg. 1993. Approximation and radial-basis-function networks. *Neural Computation*, Vol. 5, pp. 305-316

- Pettit, C. L.; R. A. Canfield and R. Ghanem. 2002. Stochastic analysis of an aeroelastic system. in *Proceedings of the 15th ASCE Engineering Mechanics Conference*, Columbia University, New York
- Phoon, K. K.; S. T. Quek; Y. K. Chow and S. L. Lee. 1990. Reliability analysis of pile settlement. *Journal of Geotechnical Engineering*, Vol. 116, No. 11
- Plouffe, S. 2000. Table of Current Records for the Computation of Constants, disponível em http://pi.lacim.uqam.ca/eng/records_en.html
- Poggio, T. and F. Girosi. 1990. Network for approximation and learning. *Proceedings of the IEEE*, Vol. 78, No. 9, pp. 1481-1497
- Polidori, D. C., J. L. Beck and C. Papadimitriou. 1999. New approximations for reliability integrals. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 125, No. 4, pp. 466-475
- Polidori, D. C., J. L. Beck and C. Papadimitriou. 2001. Closure to “New approximations for reliability integrals”. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 127, No. 2, pp. 207-209
- Powell, M. J. D. 1987. Radial basis functions for multivariable interpolation: a review. in J. C. Mason and M. G. Cox, Editors, *Algorithms for Approximation*, Oxford: Clarendon Press, pp. 143-167
- Press, W. H.; B. P. Flannery, S. A. Teukolsky e W. T. Vetterling. 1992. *Numerical Recipes in FORTRAN: The Art of Scientific Computing*. 2.^a Edição. Cambridge, England: Cambridge University Press

R

- Rackwitz, R. and B. Fiessler. 1978. Structural Reliability Under Combined Random Load Sequences. *Computers & Structures*, Vol. 9, pp. 489-494
- Rackwitz, R. 1998. Computational techniques in stationary and non-stationary load combination. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Vol. 25, n.º1, pp. 1-20
- Rackwitz, R. 2000. Reliability analysis past, present and future. in *Proceedings of 8th ASCE Speciality Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability*.
- Rackwitz, R. 2001. Reliability analysis-a review and some perspectives. *Structural Safety*, Vol. 23, pp. 365-395
- Rajashekhar, M. R. and B. R. Ellingwood. 1993. A New Look at the Response Surface Approach for Reliability Analysis. *Structural Safety*, Vol. 12, No. 3, pp. 205-220
- Rajashekhar, M. R. and B. R. Ellingwood. 1995. Reliability of reinforced-concrete cylindrical shells. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Vol. 121, No. 2, pp. 336-347

- Rajpal, P. S.; K. S. Shishodia and G. S. Sekhon. 2006. An artificial neural network for modelling reliability, availability and maintainability of a repairable system. *Reliability Engineering and System Safety*, Vol. 91, pp. 809–819
- Ranganathan, R. 1999. *Structural reliability analysis and design*. Jaico Publishing House, Mumbai
- Rao, V. B. and H. V. Rao. 1995. *C++ Neural networks and fuzzy logic*. 2ª edição, MIS:Press, New York
- Reddy, J. N. 1993. *An Introduction to the Finite Element Method*. 2ª edição, MacGraw-Hill, Singapore
- Reh, S.; J.-D. Beley, S. Mukherjee and E. H. Khor. 2006. Probabilistic finite element analysis using ANSYS. *ELSEVIER - Structural Safety*, Vol. 28: 17-43
- Ricotti, M. E. and E. Zio. 1999. Neural network approach to sensitivity and uncertainty analysis. *Reliability Engineering and System Safety*. Vol. 64, pp. 59–71
- Righetti, G. e K. Harrop-Williams. 1988. Finite element analysis of random soil media. *Journal of Geotechnical Engineering*, Vol. 114, n.º1, pp. 59-75
- Rohatgi, V. K. and A. K. Md. E. Saleh. 2001. *An Introduction to Probability and Statistics*. 2ª edição. John Wiley & Sons, New York
- Romero, V. J., L. P. Swiler and A. A. Giunta. 2004. Construction of response surfaces based on progressive lattice sampling experimental designs with application to uncertainty propagation. *Structural Safety*, Vol. 26, No. 2, pp. 201-219
- Rosenblatt, M. 1952. Remarks on a Multivariate Transformation. *The Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 23, n.º 3, pp. 470-472
- Rosenblatt, F. 1962. *Principles of Neurodynamics*. Spartan Books, Washington, DC
- RSA, 1984. *Regulamento de segurança e acções para estruturas de edifícios e pontes*. Decreto-Lei n.º 349-C/83, Casa da Moeda
- Rubinstein, R. Y. 1981. *Simulation and the Monte Carlo Method*. John Wiley & Sons, New York
- Rumelhart, D. E. and J. L. McClelland. 1986. *Parallel Distributed Processing: Explorations in the Microstructure of Cognition*. Vol. 1: Foundations, MIT Press, Cambridge, MA
- Rumelhart, D. E.; G. E. Hinton and R. J. Williams. 1986a. Learning internal representations by error propagation. in D. E. Rumelhart, J. L. McClelland and the PDP research group, Editors, *Parallel Distributed Processing, Vol 1: Foundations*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, pp. 318–362
- Rumelhart, D. E.; G. E. Hinton and R. J. Williams. 1986b. Learning representations by back-propagating errors. *Nature*, Vol. 323, pp. 533–536

Rumelhart, D. E.; R. Durbin, R. Golden and Y. Chauvin. 1995. Backpropagation: the basic theory. in Y. Chauvin and D. E. Rumelhart, Editors, *Backpropagation: Theory, Architectures, and Applications*, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, pp. 1–34

S

Santosh, T. V.; Gopika Vinod, R. K. Saraf, A. K. Ghosh and H. S. Kushwaha. 2007. Application of artificial neural networks to nuclear power plant transient diagnosis. *Reliability Engineering and System Safety*, Vol. 92, pp. 1468-1472

Sasaki, T. 2001. A neural network-based response surface approach for computing failure probabilities. in: R. B. Corotis, G. I. Schueller and M. Shinozuka (editors), *8th International Conference on Structural Safety and Reliability (ICOSSAR2001)*, USASchenk, C. A. e G. I. Schueller. 2005. *Uncertainty Assessment of Large Finite Element Systems*. Springer, Berlin Heidelberg New York

Schevenels, M.; G. Lombaert and G. Degrande. 2004. *Application of the stochastic finite element method for Gaussian and non-Gaussian systems*. in *Proceedings of ISMA*, pp. 3299-3313

Schueller, G. I. and R. Stix. 1987. A critical appraisal of methods to determine failure probabilities. *Structural Safety*, n.º 4: 239-309

Schueller, G. I. 1997. A state-of-the-art report on computational stochastic mechanics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 12, n.º 4, pp. 198-231

Schueller, G. I. 1998. *Structural reliability—recent advances*. in: *Proceedings of 7th ICOSSAR'97*, Kyoto, Balkema, Rotterdam, pp. 3–33

Schueller, G. I. 2001. Computational stochastic mechanics - recent advances. *Comput. Struct.*, Vol. 79, n.º 22-25, pp. 2225-2234

Schueremans, L. and D. Van Gemert. 2003. *System reliability methods using advanced sampling techniques*. in T. Bedford and P. Van Gelder editors. *Safety and Reliability, Proceedings of the Esrel 2003 Conference*, Maastricht, The Netherlands, pp. 1425-1432

Schueremans, L. and D. Van Gemert. 2005. Benefit of splines and neural networks in simulation based structural reliability analysis. *Structural Safety*, Vol. 27, pp. 246–261

Segal, I. E. 1938. Fiducial distribution of several parameters with applications to a normal system. *Proc. Cambridge Philosophical Society*, Vol. 34, pp. 41-47

Shao, S. and Y. Murotso. 1997. Structural reliability analysis using neural networks. *Japanese Society in Mechanical Engineering (JSME) International Journal, Series A*, Vol. 40, No. 3, pp. 242-246

Shinozuka, M. 1983. Basic analysis of structural safety. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Vol. 109, n.º3, pp. 721-740

- Shinozuka, M. 1991. Freudenthal lecture: Developments in structural reliability. in *Proceedings of 5th International Conference on Structural Safety and Reliability, (ICOSSAR'89)*, ASCE, New York, pp. 1-20
- Shinozuka, M. and G. Dasgupta. 1986. *Stochastic finite element methods in dynamics*. in *Proceedings, 3rd ASCE EMD Specialty Conference on Dynamic Response of Structures*, University of California at Los Angeles, Los Angeles, CA, pp. 44-54
- Shinozuka, M. and G. Deodatis. 1988. Response Variability of Stochastic Finite Element Systems. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Vol. 114, No. 3, pp. 499-519
- Shinozuka, M. and F. Yamazaki. 1988. *Stochastic finite element analysis: an introduction*. in S. T. Ariaratnam, G. I. Schueller, and I. Elishakoff editors, *Stochastic structural dynamics: Progress in theory and applications*. Elsevier Applied Science Publishers Ltd, London
- Shinozuka, M. and G. Deodatis. 1991. Simulation of stochastic processes by spectral representation. *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 44, pp. 191-203
- Shinozuka, M. and G. Deodatis. 1996. Simulation of multidimensional Gaussian stochastic fields by spectral representation. *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 49, pp. 29-53
- Sobczyk, K.; S. Wedrychowicz and B. F. Spencer. 1996. Dynamics of structural systems with spatial randomness. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 33, No. 11, pp. 1651-1669
- Spanos, P. D. and R. G. Ghanem. 1989. Stochastic finite element expansion for random media. *ASCE, Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 115, No. 5, pp. 1035-1053
- Spanos, P. D. and B. A. Zeldin. 1998. Monte Carlo treatment of random fields: A broad perspective. *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 51, n.º 3, pp. 219-237
- Sudret, B. and A. Der Kiureghian. 2000. Stochastic Finite Element Methods and Reliability: A State-of-the-Art Report. *Report No. UCB/SEMM-2000/08*. Department of Civil & Environmental Engineering, Division of Structural Engineering, Mechanics and Materials, University of California, Berkeley
- Sudret, B. and A. Der Kiureghian. 2002. Comparison of finite element reliability methods. *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 17, pp. 337-348

T

- Teigen, J. G.; D. M. Frangopol; S. Sture e C. A. Felippa. 1991a. Probabilistic FEM for nonlinear concrete structures. I: Theory. *J. Struct. Engrg.*, ASCE, Vol. 117, n.º 9: 2674-2689
- Teigen, J. G.; D. M. Frangopol; S. Sture e C. A. Felippa. 1991b. Probabilistic FEM for nonlinear concrete structures. II: Applications. *J. Struct. Engrg.*, ASCE, Vol. 117, n.º 9: 2690-2707

- Thoft-Christensen, P. and Murotsu, Y. 1986. *Application of structural systems reliability theory*. Springer-Verlag, Berlin
- Thomos, G. C. e C. G. Trezos. 2006. Examination of the probabilistic response of reinforced concrete structures under static non-linear analysis. *ELSEVIER - Engineering Structures*, Vol. 28: 120-133
- Tivive, F. H. C. and A. Bouzerdoun. 2005. Efficient training algorithms for a class of shunting inhibitory convolutional neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, Vol. 16, No. 3, pp. 541-556
- Tsai, Chung-Huei and Deh-Shiu Hsu. 2002. Diagnosis of Reinforced Concrete Structural Damage Base on Displacement Time History using the Back-Propagation Neural Network Technique. *Journal of Computing in Civil Engineering*, Vol. 16, No. 1, pp. 49-58
- Tvedt, L. 1984. Two Second-Order Approximations to the Failure Probability. A/S Veritas Research Report, Hovik, Norway
- Tvedt, L. 1985. On the Probability Content of a Parabolic Failure Set in a Space of Independent Standard Normally Distributed Random Variables. A/S Veritas Research Report, Hovik, Norway
- Tvedt, L. 1988. Second-Order Probability by an Exact Integral. A/S Veritas Research Report, Hovik, Norway
- Tvedt, L. 1990. Distribution of quadratic forms in normal space: application to structural reliability. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 116, No. 6, pp. 1183-1197

V

- Vanmarcke, E. H. 1977. Probabilistic modelling of soil profiles. *Journal of Geotechnical Engineering*, Vol. 103, n.º 11, pp. 1227-1246
- Vanmarcke, E. H. 1983. *Random Fields: Analysis and Synthesis*, The MIT Press Cambridge, Massachusetts
- Vanmarcke, E. H. and M. Grigoriu. 1983. Stochastic finite element analysis of simple beams. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 109, No. 5, pp. 1203-1214
- Vanmarcke, E. H., M. Shinozuka, S. Nakagiri, G. I. Schueller e M. Grigoriu. 1986. Random fields and stochastic finite elements. *Structural Safety*, Vol. 3, n.º 3, pp. 143-166
- Vanmarcke, E. H. 1988. *Random Fields: Analysis and Synthesis*, The MIT Press, London, England
- Veiga, José M. G. C.; A. A. R. Henriques e J. M. Delgado. 2006. An efficient evaluation of structural safety applying perturbation techniques. *III European Conference on Computational Mechanics*, Lisboa, Springer, **126**
- Veneziano, D. 1974. Contributions to second moment reliability theory. Res. Rep. R74-33, Department of Civil Engineering, MIT, Massachusetts

- Veneziano, D. 1979. New index of reliability. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 105, EM2, pp. 277-296
- Vogt, M. 1993. Combination of radial basis function neural networks with optimized vector quantization. *Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks*, Vol. 3, pp. 1841-1846
- W**
- Wall, F. J. and G. Deodatis. 1994. Variability response functions of stochastic plane stress/strain problems. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 120, No. 9, pp. 1963-1982
- Warnes, R. M.; J. Glassey; A. G. Montague and B. Kara. 1998. Application of radial basis function and feedforward artificial neural networks to the *Escherichia coli* fermentation process. *Neurocomputing*, Vol. 20, pp. 67-82
- Watrous, R. L. 1987. Learning algorithms for connectionist networks: Applied gradient methods of nonlinear optimization. in *First IEEE International Conference on Neural Networks*, San Diego, Vol. 2, pp. 619-627
- Wei, D. and S. Rahman. 2007. Structural reliability analysis by univariate decomposition and numerical integration. *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 22, pp. 27-38
- Weisstein, Eric W. 2006. Cholesky Decomposition. From *MathWorld-A Wolfram Web Resource*, disponível em <http://mathworld.wolfram.com/CholeskyDecomposition.html>
- Weisstein, Eric W. 2006. Extreme Value Distribution. From *MathWorld-A Wolfram Web Resource*, disponível em <http://mathworld.wolfram.com/ExtremeValueDistribution.html>
- Wen, Y. K. 1990. *Structural load modeling and combination for performance and safety evaluation*. Elsevier, Amsterdam
- Werbos, P. J. 1994. *The Roots of Backpropagation*. John Wiley and Sons, Inc., New York
- Widrow, B. 1987. The original adaptive neural net broom-balancer. in *Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems*. Philadelphia, PA, pp. 351-357
- Widrow, B. 1987a. Adaline and Madaline: plenary speech. in *Proceedings of 1st IEEE International Conference of Neural Networks, San Diego*, The IEEE Inc., Piscataway, NJ, pp. 143-158
- Widrow, B. and M. A. Lehr. 1990. Thirty years of adaptive neural networks: Perceptron, Madaline and backpropagation. *Proc. IEEE*, Vol. 78, pp. 1415-1442
- Wong, F. S. 1984. Uncertainties in dynamic soil-structure interaction. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 110, No. 2, pp. 308-324
- Wong, F. S. 1985. Slope reliability and response surface method. *Journal of Geotechnical Engineering, ASCE*, Vol. 111, No. 1, pp. 32-53

Wu, Y.-T. and P. H. Wirsching. 1987. New algorithm for structural reliability estimation. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 113, No. 9, pp. 1319-1336

X

Xiu, D. and G. Karniadakis. 2002. The Wiener–Askey polynomial chaos for stochastic differential equations. *SIAM. Journal of Sci. Comput.*, Vol. 24, No. 2, pp. 619–644

Xu, L.; A. Krzyzak and E. Oja. 1993. Rival penalized competitive learning for clustering analysis, rbf net, and curve detection. *IEEE Transactions on Neural Networks*, Vol. 4, No. 4, pp. 636-649

Y

Yamazaki, F. and M. Shinozuka. 1988. Digital generation of non-Gaussian stochastic fields. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 114, No. 7, pp. 1183-1197

Yamazaki, F., M. Shinozuka and G. Dasgupta. 1988. Neumann Expansion for Stochastic Finite Element Analysis. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 114, No. 8, pp. 1335-1354

Yao, James T. P. 1985. *Safety and Reliability of Existing Structures*. Pitman Publishing Limited, London

Yao, T. H.-J. and Y.-K. Wen. 1996. Response Surface Method for Time-Variant Reliability Analysis. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Vol. 122, pp. 193-201

Yu, X., K. K. Choi e K.-H. Chang. 1997. A mixed design approach for probabilistic structural durability. *Structural Optimization*, Vol. 14, pp. 81-90

Z

Zeldin, B. A. and P. D. Spanos. 1998. On random field discretization in stochastic finite elements. *Journal of Applied Mechanics, ASME*, Vol. 65, No. 2, pp. 320–327

Zhang, J. e B. Ellingwood. 1996. SFEM for reliability of structures with material nonlinearities. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Vol. 122, n.º6: 701-704

Zhao, Y. G., T. Ono and H. Idota. 1999. Response uncertainty and time-variant reliability analysis for hysteretic mdof structures. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 28, pp. 1187-1213

Zhao, Y.-G. and T. Ono. 1999a. A general procedure for first/second-order reliability method (FORM/SORM). *Structural Safety*, Vol. 21, No. 2, pp. 95-112

Zhao, Y.-G. and T. Ono. 1999b. New approximations for SORM: Part I. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 125, No. 1, pp. 79-85

Zhao, Y.-G. and T. Ono. 1999c. New approximations for SORM: Part II. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 125, No. 1, pp. 86-93

- Zhao, G. 1996. Reliability theory and its applications for engineering structures. Dalian: Dalian University of Technology Press
- Zheng, Y. and P. K. Das. 2000. Improved response surface method and its application to stiffened plate reliability analysis, *Engrg. Struct.*, Vol. 22, No. 5, pp. 544–551
- Zhu, W. Q.; Y. J. Ren and W. Q. Wu. 1992. Stochastic FEM based on local averages of random vector fields. *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 118, No. 3, pp. 496-511