

FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

NELSON R. A. QUINTA

DETERMINAÇÃO DO FACTOR DE INTENSIDADE DE
TENSÃO A PARTIR DE MEDIÇÕES FOTOELÁSTICAS
AFASTADAS DA EXTREMIDADE DA FENDA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
E GESTÃO INDUSTRIAL
TESE DE MESTRADO

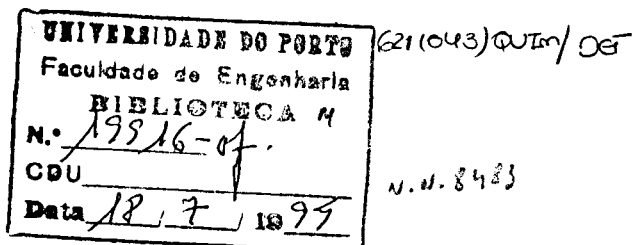
FACULDADE DE ENGENHARIA DA
UNIVERSIDADE DO PORTO

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
E GESTÃO INDUSTRIAL

TESE DE MESTRADO

NELSON R. A. QUINTA

DETERMINAÇÃO DO FACTOR DE INTENSIDADE DE
TENSÃO A PARTIR DE MEDIÇÕES FOTOELÁSTICAS
AFASTADAS DA EXTREMIDADE DA FENDA



Supervisor: Professor Doutor Joaquim Silva Gomes

1994

DISSERTAÇÃO APRESENTADA À FACULDADE DE ENGENHARIA DA
UNIVERSIDADE DO PORTO PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM ENGENHARIA MECÂNICA

043 M

Q 65 d

AGRADECIMENTOS

Para a realização deste trabalho contou o autor com diversas colaborações, as quais reconhecidamente agradece:

- * Ao Professor Doutor Joaquim Francisco Silva Gomes, orientador desta dissertação, o seu permanente apoio e disponibilidade;
- * Ao Professor Francisco Queirós de Melo pelo contínuo incentivo em todas as fases do trabalho;
- * Ao Engenheiro José Esteves a preciosa informação sobre os materiais e equipamento fotoelástico utilizado;
- * Ao Engenheiro Mário Vaz a sua dedicada colaboração no trabalho experimental;
- * Ao Engenheiro Fernando Pacheco a colaboração no desenvolvimento e análise informática;
- * Ao Engenheiro João Pinho o auxílio prestado no Gabinete de CAD do ISEP;
- * Aos funcionários das Oficinas Mecânicas do ISEP pela ajuda na maquinagem dos provetes e construção dos vários acessórios utilizados;
- * À minha esposa e aos meus filhos pela sua paciência

RESUMO

As técnicas convencionais de determinação dos factores de intensidade de tensão, normalmente utilizadas na mecânica da fractura linear elástica, consideram medidas muito próximas da extremidade da fenda e, portanto, podem conduzir-nos a imprecisões, devido às perturbações existentes na extremidade da fenda, não só pela existência de uma pequena zona plástica, mas também pela grande concentração de tensões aí existente e geometria dessa extremidade.

O objectivo do presente trabalho é a determinação dos factores de intensidade de tensão em modo I e modo misto, aplicando as técnicas fotoelásticas, mas com a consideração de serem tomadas medidas sobre as franjas isocromáticas mais afastadas da extremidade da fenda.

Assim, começamos por analisar os conceitos fundamentais da mecânica da fractura linear elástica, seguindo-se uma breve análise dos diversos processos de determinação dos factores de intensidade de tensão. Dos métodos experimentais dá-se particular ênfase às técnicas que utilizam a fotoelasticidade e que nos servem de base ao nosso trabalho.

Para que possamos considerar medidas, sobre as franjas isocromáticas, mais afastadas da extremidade da fenda, o campo de tensões é considerado sob a forma de desenvolvimento em série, conduzindo-nos a um sistema de equações não lineares. Resolvendo este sistema pelo método iterativo de Newton - Raphson associado ao processo de minimização dos mínimos quadrados, chegamos à determinação dos factores de intensidade de tensão em modo I e misto, que são comparados com os valores obtidos por outros processos.

INDICE

AGRADECIMENTOS	I
RESUMO	II
INDICE	III
SIMBOLOS UTILIZADOS	VII
1 - INTRODUÇÃO	1
2 - CONCEITOS FUNDAMENTAIS DA MECÂNICA DA FRACTURA LINEAR ELÁSTICA	3
2.1 - Introdução	3
2.2 - Modos de carregamento ou deformação	3
2.3 - Teoria de Griffith	4
2.4 - Extensão da teoria de Griffith	7
2.5 - Análise bidimensional de Irwin	10
2.5.1 - Teoria da elasticidade linear	10
2.5.2 - Funções de tensão de variável complexa	12
2.5.2.1 - Análise da solitação em modo I	13
2.5.2.2 - Análise da solitação em modo II	18
2.5.3 - Relação entre G e K	20
2.6 - Formulação de Williams	21
2.7 - Plasticidade na extremidade da fenda	24
2.7.1 - Modelo de Irwin	25
2.7.2 - Modelo de Dugdale	28
2.7.3 - Formas da zona de plastificação	29
2.7.3.1 - Critério de Von Mises	30
2.7.3.2 - Critério de Tresca	30
2.8 - Critérios de rotura	32
2.8.1 - Determinação experimental de K_{IC}	32
2.8.2 - Determinação de K_{IIC}	34
2.8.3 - Outros critérios	36
2.9 - Conclusão	36

3 - MÉTODOS DE DETERMINAÇÃO DOS FACTORES DE INTENSIDADE DE TENSÃO	38
3.1 - Introdução	38
3.2 - Métodos teóricos	39
3.2.1 - Métodos analíticos	39
3.2.1.1 - Função de tensão de Westergaard	39
3.2.1.2 - Função de tensão de Muskhelishvili	40
3.2.2 - Boundary collocation	41
3.2.3 - Transformação conforme	43
3.2.4 - Funções de Green e funções peso	44
3.2.5 - Transformadas integrais e modelos de deslocação	47
3.2.6 - Método dos elementos finitos	50
3.2.6.1 - Métodos directos	53
3.2.6.2 - Método da energia	54
3.2.6.3 - Utilização de elementos especiais	56
3.2.7 - Métodos de fronteira	57
3.2.8 - Método iterativo	58
3.2.9 - Método de sobreposição	59
3.3 - Métodos experimentais	61
3.3.1 - Introdução	61
3.3.2 - Extensometria	62
3.3.3 - Compliance	63
3.3.4 - Taxa de propagação da fenda	63
3.3.5 - Métodos ópticos	65
3.4 - Conclusão	67
4 - DETERMINAÇÃO DOS FACTORES DE INTENSIDADE DE TENSÃO K_I E K_{II} ATRAVÉS DA FOTOELASTICIDADE	69
4.1 - Introdução	69
4.2. - Semelhança em mecânica da fractura	69
4.3 - Princípios gerais	71
4.4 - Determinação do factor de intensidade de tensão em modo I	72
4.4.1 - Método de Irwin	72
4.4.2 - Método das diferenças de Schroedl e Smith	74
4.4.3 - Técnica de extrapolação de Schroedl e Smith	75
4.4.4 - Método dos três parâmetros	78

4.4.5 - Método das diferenças de Bradley e Kobayashi .	82
4.4.6 - Comparação dos métodos	83
4.5 - Modo misto	84
4.5.1 - Método de Smith D. G. e Smith C. W.	85
4.5.2 - Método de Theocaris e Gdoutos	86
4.5.3 - Método dos três pontos	88
4.5.4 - Método iterativo de Sanford e Dally	89
4.5.5 - Comparação dos métodos	90
 5 - DETERMINAÇÃO DOS FACTORES DE INTENSIDADE DE TENSÃO EM MODO I E MODO MISTO ATRAVÉS DE MEDIDAS FOTOELÁSTICAS AFASTADAS DA EXTREMIDADE DA FENDA	 92
5.1 - Introdução	92
5.2 - Perturbação na extremidade da fenda	93
5.2.1 - Geometria da extremidade da fenda	93
5.2.2 - Singularidade das tensões	94
5.2.3 - Localização da extremidade da fenda	94
5.2.4. - Conclusão	94
5.3 - Teoria do método	95
5.3.1 - Modo I	95
5.3.1.1 - Expressão da função complexa $Z(z)$	96
5.3.1.2 - Expressão da função $\eta(z)$	97
5.3.1.3 - Expressão do estado de tensão	99
5.3.2 - Modo II	100
5.3.2.1 - Expressão de $Z(z)$	100
5.3.2.2 - Expressão do estado de tensão	100
5.3.3 - Modo misto	101
5.3.4 - Resolução do sistema de equações	103
5.3.4.1 - Método de Newton - Raphson	105
5.3.4.2 - Minimização pelo método dos mínimos quadrados	105
5.3.4.3 - Conclusão	106
5.4 - Análise experimental	107
5.4.1 - Equipamento	107
5.4.2 - Determinação do factor de intensidade de tensão em modo I	109
5.4.2.1 - Tipo de provetes utilizados	109

5.4.2.2 - Resultados	110
5.4.2.2.1 - Método das diferenças de Schroedl e Smith	111
5.4.2.2.2 - Técnica de extrapolação de Schroedl e Smith	112
5.4.2.2.3 - Método analítico	113
5.4.2.2.4 - Aplicação do nosso método	114
5.4.2.2.5 - Comparação dos resultados	116
5.4.3 - Determinação dos factores de intensidade de tensão em modo misto	117
5.4.3.1 - Tipo de provetes utilizados	117
5.4.3.2 - Resultados	118
5.4.3.2.1 - Método analítico	120
5.4.3.2.2 - Aplicação do método proposto	120
5.4.3.2.3 - Comparação dos resultados	123
6 - CONCLUSÃO E SUGESTÕES	125
APÊNDICE 1	127
APÊNDICE 2	134
REFERÊNCIAS	145

SIMBOLOS UTILIZADOS

a	- comprimento da fenda, semi comprimento <u>$2a$</u>
a_m	- comprimento da fenda no modelo
A_n, B_m, C_p	- coeficientes das funções de tensão
$[B]$	- matriz de deformação
b_i	- vector de Burger
b_m	- largura do modelo
$[D]$	- matriz de elasticidade
$D_i (s)$	- densidade da distribuição das deslocações
d_p	- comprimento de plastificação
E	- módulo de Young
e, e_m, e_p	- espessura, espessura do modelo, espessura do protótipo
$f(x)$	- função de tensão
f_σ	- constante fotoelástica
$[F_e]$	- forças nodais equivalentes para o elemento
F_m	- carga aplicada ao modelo
$g(a, x)$	- função de Green
G, G_c	- taxa de libertação de energia de deformação e seu valor crítico
I	- intensidade de luz num polariscópio
I_m	- parte imaginária de
I_o	- intensidade de luz incidente
J	- linha integral
K_I, K_{II}	- factores de intensidade de tensão em modo I e II
K_{IC}, K_{IIc}	- valores críticos dos factores de intensidade de tensão
K_{ap}	- factor de intensidade de tensão aparente

K_m, K_p	- factor de intensidade de tensão do modelo e do protótipo
$[K_e]$	- matriz de rigidez para o elemento
l, m	- cossenos directores
$M(s, x)$	- núcleo da transformada
$m(a, x)$	- função peso
N	- ordem da franja isocromática
$[N]$	- funções de forma
$P(s)$	- função proporcional ao deslocamento das faces da fenda
$p(x)$	- pressão interna
R	- coeficiente de reflexão
R_e	- parte real de
r_m	- raio vector máximo
r_p	- comprimento de plastificação
r	- raio vector de um ponto em coordenadas polares
S_F	- factor de carga
S_L	- factor de escala
S_Y	- factor de forma
t	- comprimento de plastificação
T	- vector força actuando na normal à linha integral J ; coeficiente de transmissão
U	- energia de deformação elástica libertada
U_p	- energia consumida na deformação plástica
U_s	- energia de superfície
$\{u\}$	- campo de deslocamento de cada elemento
u, v	- componentes do deslocamento
x, y	- coordenadas cartesianas
$\bar{X}, \bar{Y}$	- componentes das forças de superfície por unidade de área
Y	- factor geométrico
Y_m	- factor geométrico para o modelo
W	- função de tensão
$z, \bar{z}$	- variável complexa e seu conjugado
Z, Z'	- função complexa e sua derivada
$\bar{Z}, \bar{Z}'$	- primeiro e segundo integrais de Z
$\alpha, \alpha', \Omega, \Omega', \delta$	- parâmetros proporcionais a σ_{ox}
β	- ângulo de inclinação da fenda

Δ	- retardação relativa
$\{\delta_e\}$	- vector dos deslocamentos nodais de cada elemento
$\{\epsilon\}$	- deformação de cada elemento
ϵ_x, ϵ_y	- componentes das deformações
$\eta(z)$	- função complexa
γ, θ	- ângulos polares
γ_p	- energia de deformação plástica
γ_s	- energia de tensão superficial
μ	- módulo de elasticidade transversal
ν	- coeficiente de Poisson
$\omega(\xi)$	- função de transformação
$\Phi(z), \phi(z), \psi(z), \Omega(z)$	- funções de variável complexa
θ_m	- ângulo polar máximo
Π_e	- energia potencial de cada elemento
$\{\sigma\}$	- campo de tensões de cada elemento
σ	- tensão remota
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	- tensões principais
σ_{ox}	- tensão não singular na direcção da fenda
σ_x, σ_y	- componentes normais das tensões em coordenadas cartesianas
σ_r, σ_θ	- componentes normais das tensões em coordenadas polares
σ_{ys}	- tensão de cedência
τ_m	- tensão de corte máxima
τ_{xy}	- componente da tensão de corte no plano xy
$\tau_{r\gamma}, \tau_{r\theta}$	- componente da tensão de corte em coordenadas polares

1. INTRODUÇÃO

O exame de estruturas, que sofreram rotura sob a acção de solicitações médias inferiores ao do seu limite elástico, mostra a existência prévia de defeitos através dos quais se deu a propagação rápida e que a teoria clássica da elasticidade não pode explicar. A análise estrutural que considera a extensão de fendas, como função da carga aplicada, chama-se mecânica da fractura.

Num material do tipo frágil, a propagação duma fenda que se produz através da deformação elástica e reduzida zona de deformação plástica na extremidade da fenda, tem um carácter irreversível, conduzindo à ruína dos materiais. É este o problema estudado na Mecânica da Fractura Linear Elástica.

Deve-se a Griffith a base da mecânica da fractura linear elástica, apesar de não ter sido reconhecido como tal por mais de 30 anos.

Mais tarde chega-se à caracterização do estado mecânico na extremidade da fenda através do factor de intensidade de tensão definido por Irwin, para cada um dos modos de fractura. O conhecimento deste factor é suficiente para descrever o estado de tensão e o campo de deslocamentos na extremidade da fenda, razão pela qual o seu cálculo se torna primordial.

Para a determinação experimental desse factor de intensidade de tensão é necessário a tomada de medidas junto à extremidade da fenda, o que devido às perturbações existentes nesse local, pode levar a que a precisão seja afectada.

O objectivo do presente trabalho é contornar as dificuldades referidas, através da fotoelasticidade, com medidas em zonas mais afastadas da extremidade da fenda.

Inicia-se este estudo no capítulo 2 com os conceitos fundamentais da mecânica da fractura frágil para problemas planos.

No capítulo 3 faz-se uma breve resenha sobre os diversos métodos de determinação do factor de intensidade de tensão, para a seguir, no capítulo 4 nos debruçarmos mais detalhadamente sobre as técnicas fotoelásticas para a determinação da singularidade existente na extremidade da fenda.

Para podermos fazer medidas em pontos mais afastadas da extremidade da fenda vamos representar o campo de tensões sob a forma de desenvolvimento em série. Sobre as franjas isocromáticas serão tomadas medidas, que introduzidas no campo de tensões, nos vão permitir a determinação do factor de intensidade de tensão por via numérica, associado a um método iterativo e de minimização. A análise será realizada sobre o modo I e misto. Este assunto será o objectivo do capítulo 5, bem como a análise e comparação dos resultados. Finalmente, no capítulo 6 reúnem-se as principais conclusões e apresentam-se algumas sugestões para trabalho posterior nesta área.

2. - CONCEITOS FUNDAMENTAIS DA MECÂNICA DA FRACTURA LINEAR ELÁSTICA

2.1. - INTRODUÇÃO

Os princípios fundamentais da mecânica da fractura foram desenvolvidos sobretudo depois da segunda guerra mundial, devido ao aparecimento de roturas catastróficas de estruturas, sem que nada o fizesse prever.

Neste capítulo vamos analisar, para um problema plano, a teoria da mecânica da fractura linear elástica, apresentando alguns princípios gerais que vão definir as equações de base que permitem exprimir o estado mecânico dos materiais com fendas, através do critério energético de Griffith, da aproximação de Irwin e de Williams, e, que nos vão permitir definir os parâmetros característicos ou sejam, os factores de intensidade de tensão K_I e K_{II} na extremidade da fenda.

Analisaremos ainda a zona plástica que se forma junto à extremidade da fenda, apresentando os modelos mais correntes.

Por fim, serão estabelecidos alguns critérios de rotura através do conhecimento do factor de intensidade crítico, quer para o modo I quer para o modo II.

2.2 - MODOS DE CARREGAMENTO OU DEFORMAÇÃO

Nos problemas planos existem fundamentalmente dois modos de fractura, como mostra a figura 2.1.

O modo I é caracterizado pelo deslocamento das superfícies da fenda na direcção perpendicular ao plano da fissura.

O modo II é definido pelo escorregamento das superfícies da fenda na direcção perpendicular à extremidade da fissura.

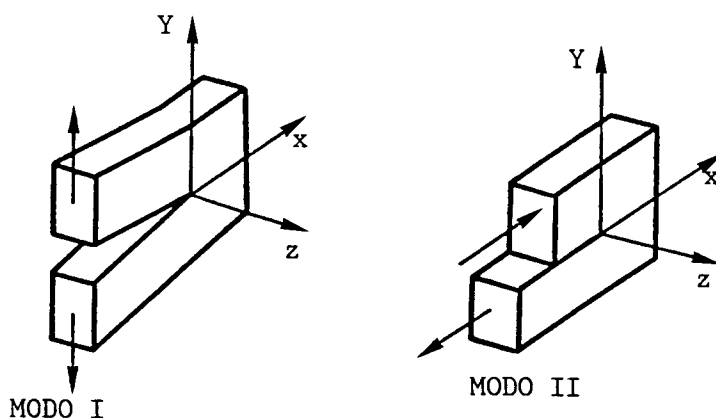


Fig. 2.1 - Modos de carregamento ou deformação para um problema plano.

O modo I é considerado o mais importante tecnicamente. No entanto, só muito raramente uma fenda é solicitado só em modo I ou só em modo II, sendo a situação mais frequente a existência simultânea dos dois modos, a que chamamos modo misto.

2.3 - TEORIA DE GRIFFITH

Griffith [1] admitiu que num material frágil, no caso concreto o vidro, a discrepância entre os valores teóricos e reais da resistência à rotura se deveria explicar pela presença de pequenas fissuras no material. Experimentalmente provou que para uma existência mínima possível (a tender para zero) de fissuras a resistência observada aproximava-se da teórica. Havia então que explicar como é que a presença de fissuras conduzia a uma menor resistência à rotura:

- Quando uma fenda se propaga súbitamente (fractura frágil) há um aumento da área dos lados da fenda a que corresponde um aumento da energia superficial U_s para vencer a força de coesão dos átomos. Este aumento de energia superficial só pode provir da

energia de deformação elástica U (energia potencial) que se liberta quando a fenda se propaga.

Griffith estabeleceu, então, o seguinte critério para a propagação de fendas: uma fenda propaga-se quando a diminuição da energia de deformação elástica é pelo menos igual à energia requerida para criar a nova superfície da fenda.

Considerando uma placa de espessura reduzida, como representado na figura 2.2, com uma fenda de comprimento $2a$ e solicitada pela tensão tractiva σ , a energia de deformação elástica que se liberta por unidade de

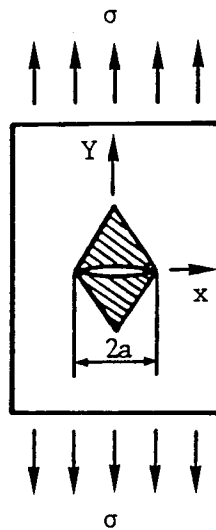


Fig. 2.2 - Modelo para o cálculo da energia de deformação elástica

espessura associada à zona tracejada do lado direito do eixo dos yy (fenda de comprimento a) é, para o estado plano de tensão, [1,15].

$$U = -\frac{\sigma^2}{2E} \pi a^2$$

e para o estado plano de deformação [1,15]

$$U = -\frac{\sigma^2}{2E} \pi a^2 (1 - \nu^2)$$

sendo ν o coeficiente de Poisson

A energia para a criação de uma fenda de comprimento a , ou seja a energia de superfície é

$$U_s = 2 \gamma_s a$$

Como U é proporcional a a^2 e U_s é proporcional a a , para valores muito pequenos de a não existirão as condições energéticas favoráveis à propagação da fenda. Porém, a partir dum certo valor de a , dar-se-á a situação inversa.

A condição de propagação é então (figura 2.3)

$$\left| \frac{\partial U}{\partial a} \right| \geq \left| \frac{\partial U_s}{\partial a} \right|$$

ou seja, para o estado plano de tensão:

$$\frac{\sigma^2 \pi a^2}{E} \geq 2 \gamma_s \quad (2.1)$$

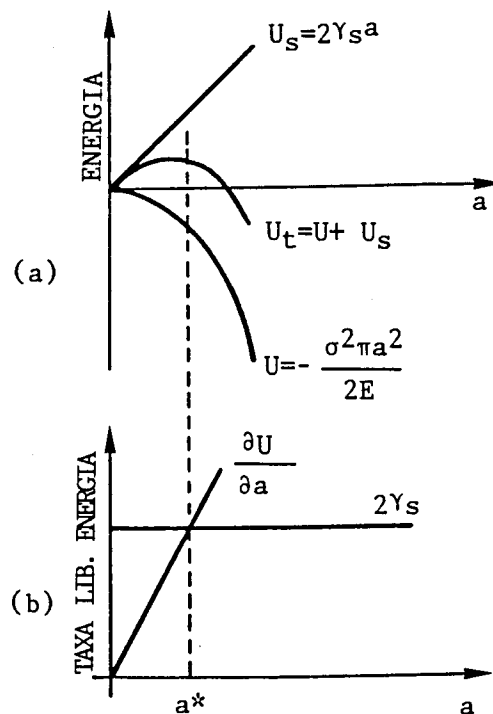


Fig. 2.3 - (a) Variação da energia com o comprimento da fenda
(b) Variação da taxa de libertação de energia com o comprimento da fenda.

e pode definir-se um valor crítico de a^* para uma determinada tensão aplicada, ou um valor crítico da tensão, σ_c , para cada valor de a , isto é,

$$\sigma_c = \left(\frac{2 E \gamma_s}{\pi a} \right)^{1/2} \quad (2.2)$$

Para o estado plano de deformação obtêm-se,

$$\sigma_c = \left[\frac{2 E \gamma_s}{\pi a (1 - \nu)} \right]^{1/2}$$

As duas expressões anteriores permitem calcular o valor da tensão requerida para propagar uma fenda num material frágil, em função do comprimento da fenda, para os problemas planos.

2.4 - EXTENSÃO DA TEORIA DE GRIFFITH

A teoria de Griffith prevê satisfatoriamente a resistência à rotura dum material completamente frágil, como o vidro.

Nos materiais metálicos que sofrem fractura completamente frágil, verifica-se a presença de alguma deformação plástica antes da fractura. Deste modo, a equação de Griffith não se deve aplicar para os metais.

Orowan sugeriu, por volta de 1950, [2,3] que a energia de deformação elástica libertada era consumida não só como energia de tensão superficial, mas também na deformação plástica associada ao processo de fractura (energia γ_p). A equação (2.2.) é então alterada pela inclusão do termo γ_p que define o trabalho plástico requerido para se verificar a propagação da fenda

$$\sigma_c = \left[\frac{2 E (\gamma_s + \gamma_p)}{\pi a} \right]^{1/2} \approx \left(\frac{E \gamma_p}{\pi a} \right)^{1/2}$$

onde se verifica que o termo $\gamma_p \gg \gamma_s$ e, conseqüentemente, γ_s pode ser desprezado.

Entretanto, Irwin [4] estabelece um critério semelhante que conduziu à criação da Mecânica da Fractura.

Assim a teoria de Griffith - Orowan - Irwin estabelece que quando a taxa de libertação de energia de deformação elástica $\frac{\partial U}{\partial a}$ excede a taxa de energia consumida na deformação plástica $\frac{\partial U_p}{\partial a}$ a instabilidade ocorre e a fenda propagar-se-á.

Para uma extensão infinitesimal da fenda, pode-se provar facilmente (ver, por exemplo, ref.^a [3,15]) que $\frac{\partial U}{\partial a} = G$ é independente da aplicação de carga, isto é, pode ser determinado em ensaios ou a carga constante ou a deslocamento constante, ou recorrendo a uma combinação de ambos.

Orowan e Irwin estabeleceram que, desde que os métodos da elasticidade linear possam ser aplicados, ou seja, a extensão da zona deformada plásticamente seja menor do que a , a resistência à fractura é dada pelo valor crítico de G , G_c , e portanto

$$\sigma_c = \left(\frac{E G_c}{\pi a} \right)^{1/2}$$

com $G_c = \frac{\partial U_p}{\partial a}$

Irwin admitiu também que a dissipação de energia de deformação plástica junto à extremidade da fenda G_c é uma propriedade do material e que pode ser determinada em ensaios normalizados. Como G depende das condições de carga e da geometria da fenda, o problema na Mecânica da Fractura linear elástica reduz-se à determinação daquele parâmetro, para os vários tipos de fendas.

A teoria de Griffith no que diz respeito ao balanço energético, bem como as subseqüentes modificações introduzidas por Orowan e Irwin dão uma condição necessária para o início da fractura, mas não caracterizam convenientemente todos os tipos de fractura que se observam.

Então Irwin propôs a utilização do campo de tensões local junto à extremidade da fenda, em vez da taxa de energia de deformação $\frac{\partial U}{\partial a}$, para se caracterizar a fractura.

A relação entre $\frac{\partial U}{\partial a}$ e o campo de tensões pode ser obtida considerando o problema inverso, onde um pequeno segmento de uma fenda contida num corpo em estado plano é fechada por uma força $\sigma_y dx$ actuando na superfície da fenda, figura 2.4

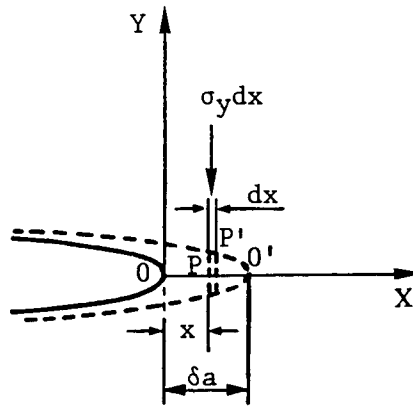


Fig. 2.4 - Fecho da extremidade da fenda

A energia de deformação no fecho da fenda tem de ser igual à energia de deformação libertada quando a fenda se estende de δa , que por sua vez é igual a $G\delta a$

$$\partial U = G\delta a = \int_0^{\delta a} v \cdot \sigma_y(x) dx \quad (2.3)$$

onde v é o deslocamento, à distância x da origem das coordenadas, dum comprimento elementar dx sujeito à força $\sigma_y dx$

Admitindo que a região deformada plásticamente à frente da extremidade da fenda não muda o estado de tensão significativamente, então $\underline{v}$ e σ_y podem ser determinados, tomando em consideração a existência dum estado elástico na vizinhança da ponta da fissura, dedução essa que será analisada mais adiante.

Neste caso $\underline{v}$ é o deslocamento dum ponto da fenda, à distância x da origem das coordenadas considerando-se a extremidade da fenda nessa origem, enquanto σ_y é a tensão do fecho da fenda associada ao deslocamento $\underline{v}$ e é igual à tensão normal à frente da extremidade da fenda e resultante da fenda inicial pelo fecho dum comprimento ∂a .

Para a determinação do valor da energia absorvida no fecho da fenda torna-se necessário conhecer as expressões analíticas de $\underline{v}$ e σ_y . Então, todos os problemas da mecânica da fractura linear elástica podem agora ser convertidos em problemas de elasticidade linear, como veremos a seguir.

2.5 - ANÁLISE BIDIMENSIONAL DE IRWIN

2.5.1 - TEORIA DA ELASTICIDADE LINEAR

Num problema de elasticidade, em estado plano de tensão, considerando a ausência de forças de volume, as equações de equilíbrio são

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0$$

Podendo ainda considerar-se a seguinte equação de compatibilidade

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (2.5)$$

onde ∇^2 é o operador de Laplace.

São estas as três equações a partir das quais, nos problemas planos, se vão calcular as componentes σ_x , σ_y e τ_{xy} .

O método de resolução destas equações consiste na introdução de uma nova função, chamada função de tensão de Airy. As equações (2.4) são satisfeitas tomando uma função $W(x, y)$ e considerando as seguintes expressões para as componentes das tensões

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$$

A equação de compatibilidade (2.5) será satisfeita se e só se for

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = 0 \quad (2.6)$$

ou seja,

$$\nabla^4 W = 0$$

Assim, a solução dum problema bidimensional reduz-se a encontrar uma solução da equação (2.6), mas que só será solução do problema se verificar as condições de fronteira correspondentes à solitação exterior, isto é

$$\bar{X} = l \sigma_x + m \tau_{xy}$$

$$\bar{Y} = l \tau_{xy} + m \sigma_y$$

onde

$\bar{X}, \bar{Y}$ - componentes das forças de superfície por unidade de área.

l, m - cossenos directores da normal à fronteira

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ - componentes da tensão no corpo

Uma função de tensão de Airy que satisfaz $\nabla^4 W = 0$ pode ser representada por variáveis complexas [5], de acordo com o esquema que se apresenta a seguir.

2.5.2 - FUNÇÕES DE TENSÃO DE VARIÁVEL COMPLEXA

Demonstra-se [6,7,8] que qualquer função biarmónica W , definida no parágrafo anterior, pode ser expressa com a ajuda de duas funções $\Phi(z)$ e $\varphi(z)$ de variável complexa $z = x + iy$, de tal modo que

$$W = R_e [\bar{z} \Phi(z) + \varphi(z)]$$

onde

R_e significa a "parte real de"

$\bar{z}$ é o conjugado de z , ou seja $\bar{z} = x - iy$

Considerando a função $\Psi(z) = \varphi'(z)$ (derivada de φ), num ponto de coordenadas (x, y) , a representação complexa das componentes do tensor das tensões e do campo de deslocamentos a partir dos potenciais complexos Φ e Ψ é

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4 R_e [\Phi'(z)] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i \tau_{xy} &= 2 [\bar{z} \Phi''(z) + \Psi'(z)] \\ 2\mu (u + iv) &= k \Phi(z) - z \bar{\Phi}'(z) - \bar{\Psi}(z) \end{aligned} \quad (2.7)$$

sendo

$\kappa = 3 - 4\nu$ para o estado plano de deformação

$\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$ para o estado plano de tensão

μ o módulo de elasticidade transversal

ν o coeficiente de Poisson

As relações (2.7) representam a formulação geral para o estado plano, pelo que convirá agora fazer a sua análise para cada um dos modos fundamentais de carregamento, no estado plano de tensão.

2.5.2.1. - Análise da Solicitação em Modo I

Consideremos uma placa infinita, que apresenta uma fenda de comprimento $2a$, solicitada em modo I como se indica na figura 2.5

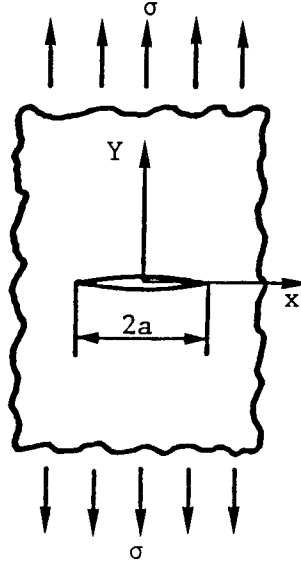


Fig. 2.5 - Fenda solicitada em modo I

A partir das relações (2.7) temos

$$\sigma_y + i \tau_{xy} = 2 \operatorname{Re} [\Phi'(z)] + [\bar{z} \Phi''(z) + \Psi'(z)]$$

Atendendo às condições de simetria $\tau_{xy} = 0$ e a que $z = \bar{z}$ ao longo do eixo dos xx

$$\operatorname{Im} [z \Phi''(z) + \Psi'(z)] = 0 \quad \text{para } y = 0$$

Esta equação é satisfeita por [9,10]

$$z \Phi''(z) + \Psi'(z) = A \quad (2.8)$$

onde A é uma constante real.

As equações (2.7) podem ser transformadas, tomando a forma

$$\sigma_x = 2 \operatorname{Re} [\Phi'(z)] - \operatorname{Re} [\Psi'(z)] - x \operatorname{Re} [\Phi''(z)] - y \operatorname{Im} [\Phi''(z)]$$

$$\sigma_y = 2 \operatorname{Re} [\Phi'(z)] + \operatorname{Re} [\Psi'(z)] + x \operatorname{Re} [\Phi''(z)] + y \operatorname{Im} [\Phi''(z)] \quad (2.9)$$

$$\tau_{xy} = -y R_e [\Phi''(z)] + x I_m [\Phi''(z)] + I_m [\Psi'(z)]$$

A equação (2.8) é equivalente ao par de equações

$$x R_e [\Phi''(z)] - y I_m [\Phi''(z)] + R_e [\Psi'(z)] - A = 0$$

$$x I_m [\Phi''(z)] + y R_e [\Phi''(z)] + I_m [\Psi'(z)] = 0$$

que introduzidas nas equações (2.9), conduzem às seguintes equações do estado de tensão

$$\sigma_x = 2 R_e [\Phi'(z)] - 2 y I_m [\Phi''(z)] - A$$

$$\sigma_y = 2 R_e [\Phi'(z)] + 2 y I_m [\Phi''(z)] + A$$

$$\tau_{xy} = -2 y R_e [\Phi''(z)]$$

ou, mais usualmente, considerando a função de tensão $Z(z)$ em que $Z = 2 \Phi'(z) + A$

$$\sigma_x = R_e [Z] - y I_m [Z'] - 2 A$$

$$\sigma_y = R_e [Z] + y I_m [Z']$$

$$\tau_{xy} = -y R_e [Z']$$

Estas equações dão-nos as duas situações bem conhecidas, ou seja, para

$A = 0$ - Temos a placa a sofrer uma solitação biaxial e encontramos as equações de Westergaard [5]

$A = \sigma_{ox}$ - a solitação será uniaxial e temos as equações devidas a Irwin [4].

Examinemos então, por exemplo, o caso de uma fenda de comprimento 2a segundo o eixo xx numa placa sujeita às solitações $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ no infinito, representada na figura 2.6

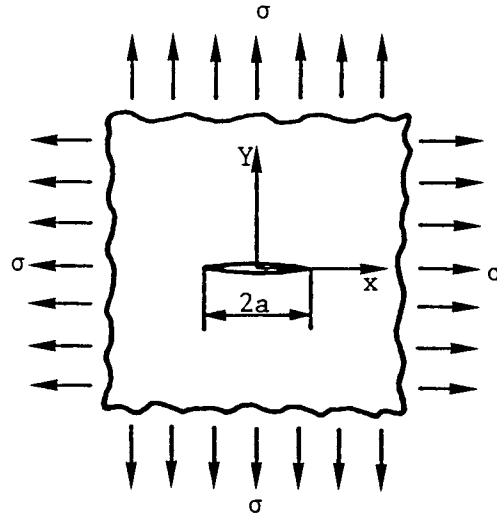


Fig. 2.6 - Placa com fenda submetida à tensão biaxial σ .

Então a função de tensão de Westergaard para o modo I de deformação, com as extremidades da fenda em $(-a, 0)$ e $(0, +a)$ pode ser representada por

$$Z = \frac{g(z)}{(z^2 - a^2)^{1/2}}$$

onde $g(z)$ é uma função analítica dependente da geometria e das condições de fronteira e que para o caso será $g(z) = \sigma z$.

Então

$$Z = \frac{\sigma z}{(z^2 - a^2)^{1/2}} = \frac{\sigma z}{[(z + a)(z - a)]^{1/2}} \quad (2.10)$$

No entanto é preferível formular a função de tensão na extremidade da fenda, o que vai permitir pôr em evidência os factores de intensidade de tensão.

Assim, para um sistema de eixos com origem na extremidade da fenda, figura 2.7, temos $\xi = z - a$

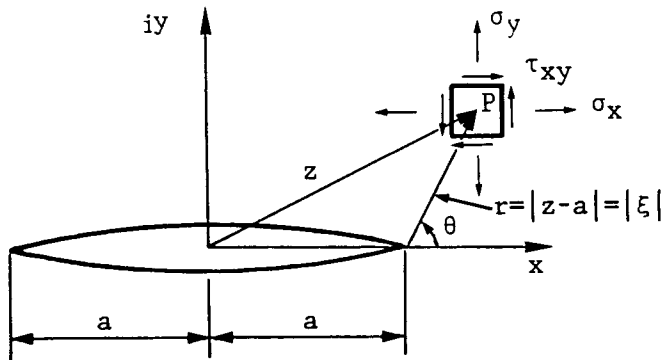


Fig. 2.7 - Estado de tensão na vizinhança da extremidade da fenda

e de (2.10) vem

$$Z = \frac{\sigma (\xi + a)}{[\xi (\xi + 2a)]^{1/2}}$$

e, quando $\xi \rightarrow 0$,

$$Z = \frac{\sigma a}{(\xi 2a)^{1/2}} = \frac{\sigma a^{1/2}}{(2\xi)^{1/2}} = \frac{\sigma(\pi a)^{1/2}}{(2\pi\xi)^{1/2}}$$

Irwin introduziu então o factor $K_I = \sigma(\pi a)^{1/2}$ que é o factor de intensidade de tensão, e então

$$Z = \frac{K_I}{(2\pi)^{1/2}} \xi^{-1/2}$$

Logo, por definição

$$K_I = \lim_{\xi \rightarrow 0} Z (2\pi\xi)^{1/2}$$

Para um ponto P de coordenadas (r, θ) situado junto à extremidade da fenda, figura 2.7, as componentes do tensor das tensões será, atendendo a que $\xi = re^{i\theta}$

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\
\sigma_y &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\
\tau_{xy} &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3\theta}{2}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Pelo que já foi referido, para uma solicitação uniaxial não nos devemos esquecer de sobrepor a este estado de tensões a tensão σ_{ox} segundo o eixo da fenda.

Quanto aos deslocamentos, em estado de tensão plana, vem

$$\begin{aligned}
u &= \frac{K_I}{\mu} \left(\frac{r}{2\pi} \right)^{1/2} \cos \frac{\theta}{2} \cdot \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\
v &= \frac{K_I}{\mu} \left(\frac{r}{2\pi} \right)^{1/2} \sin \frac{\theta}{2} \cdot \left(\frac{2}{1+\nu} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)
\end{aligned} \tag{2.12}$$

A formulação de Irwin põe em evidência a existência na extremidade da fenda duma singularidade de tensões em $r^{-1/2}$, sendo K_I o responsável por essa singularidade.

Vimos o caso de uma placa de dimensões infinitas, mas os casos gerais são de dimensões finitas e então teremos

$$K_I = Y \sigma (\pi a)^{1/2} \tag{2.13}$$

sendo Y um factor de correcção que traduz a geometria do corpo e distribuição da carga, sendo dado para numerosos casos de interesse prático nas referências [11, 12, 13].

Da expressão (2.13) se infere que K_I só depende da tensão remota σ e da geometria do corpo, sendo independente das características do material.

2.5.2.2. - Análise da Solicitação em Modo II

Consideremos agora uma fenda de comprimento $2a$ solicitada em modo II como se representa na figura 2.8

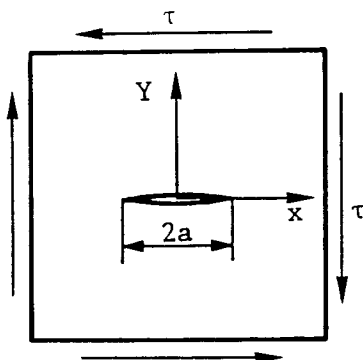


Fig. 2.8 - Fenda solicitada em modo II

Atendendo às condições de simetria, temos

$$\sigma_y = 0 \quad \text{sobre o eixo } y = 0$$

Utilizando a representação complexa das tensões, esta condição é satisfeita para

$$\Psi(z) = -2\Phi'(z) - z\Phi''(z)$$

Considerando $Z = -2i\Phi'(z)$, obtemos para as componentes do tensor das tensões

$$\sigma_x = 2 \operatorname{Im}[Z] + y \operatorname{Re}[Z']$$

$$\sigma_y = -y \operatorname{Re}[Z']$$

$$\tau_{xy} = \operatorname{Re}[Z] - y \operatorname{Im}[Z']$$

Para a solicitação e geometria definida na figura 2.8, podemos escrever, seguindo um raciocínio idêntico ao considerado para o modo I

$$Z = \frac{\tau z}{[(z+a)(z-a)]^{1/2}}$$

Na vizinhança da extremidade da fenda obteríamos, dum modo análogo,

$$Z = \frac{\tau a}{\xi^{1/2} (2a)^{1/2}}$$

ou seja,

$$Z = \frac{K_{II}}{(2\pi)^{1/2}} \xi^{-1/2} \quad \text{com } K_{II} = \tau (\pi a)^{1/2}$$

sendo K_{II} o factor de intensidade de tensão em modo II, que por definição será

$$K_{II} = \lim_{\xi \rightarrow 0} Z (2\pi\xi)^{1/2}$$

Num ponto P de coordenadas (r, θ) situado junto à extremidade da fenda, a representação do estado de tensões será

$$\sigma_x = - \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3\theta}{2} \right)$$

$$\sigma_x = \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3\theta}{2}$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$

e o campo dos deslocamentos, para o estado plano de tensão será

$$u = \frac{K_{II}}{\mu} \left(\frac{r}{2\pi} \right)^{1/2} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \left(\frac{2}{1+\nu} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

$$v = \frac{K_{II}}{\mu} \left(\frac{r}{2\pi} \right)^{1/2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

Analogamente ao modo I, estas equações traduzem a existência, na extremidade da fenda, duma singularidade de tensões em $r^{-1/2}$ e que é governada pelo factor de intensidade de tensão K_{II} .

2.5.3. - RELAÇÃO ENTRE G e K

Como vimos em 2.4. o trabalho ∂U pode ser calculado a partir do conhecimento das tensões e dos deslocamentos existentes na vizinhança da extremidade da fenda através da relação (2.3).

Consideremos, novamente, a figura 2.4 onde dx é um elemento nas faces da fenda com a abcissa $0 < x < \partial a$. Antes do fecho da fenda este elemento encontra-se em P' e depois do fecho ($0' \rightarrow 0$) esse elemento vai para a posição P , através da força $\sigma_y dx$, efectuando o deslocamento PP' , que é igual ao deslocamento da fenda de extremidade $0'$ e que é dado pelas equações (2.12), com $r = \partial a - x$ e $\theta = \pi$, ou seja

$$v = \frac{4 K_I}{E} \left(\frac{\partial a - x}{2\pi} \right)^{1/2} \quad (2.14)$$

e o campo das tensões, definido pelas equações (2.11), virá para esse valor elementar, com $r = x$ e $\theta = 0$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{(2\pi x)^{1/2}} \quad (2.15)$$

substituindo as equações (2.14) e (2.15) na equação (2.3) vem

$$\partial U = \frac{2K_I^2}{\pi E} \int_0^{\partial a} \left(\frac{\partial a - x}{x} \right)^{1/2} dx = G \partial a$$

ou seja, para o estado plano de tensão

$$G = \frac{K_I^2}{E}$$

e para o estado plano de deformação

$$G = \frac{K_I^2}{E} (1 - \nu^2)$$

Um estudo semelhante para o modo II conduzir-nos-ia a expressões semelhantes.

Estes resultados mostram a equivalência entre o factor de intensidade de tensão K , característica da intensidade da singularidade de tensões na extremidade da fenda, e o parâmetro físico G que pode ser considerado como uma força por unidade de espessura que se opõe à propagação da fenda.

2.6. - FORMULAÇÃO DE WILLIAMS

Uma técnica alternativa para resolver a equação $\nabla^4 W = 0$ consiste em usar funções de tensão escritas como séries polinomiais em vez de simples funções algébricas como as do tipo empregado por Westergaard. A aplicação directa deste método ao cálculo da fenda deve-se a Williams [14].

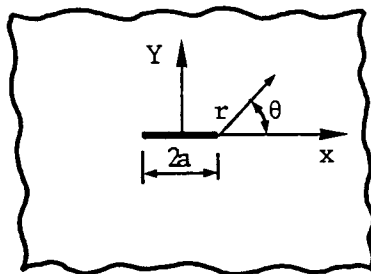


Fig. 2.9 - Fenda em corpo com forma, tamanho e carga arbitrárias

O problema será tratado em coordenadas polares. Assim num ponto de coordenadas (r, θ) , figura 2.9, a equação biarmónica é

$$\nabla^2 \nabla^2 W(r, \theta) = 0 \quad (2.16)$$

com

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

e as componentes da tensão, são

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2}$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \quad (2.17)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial W}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial \theta}$$

as quais satisfazem, naturalmente, as equações de equilíbrio.

Considere-se, então, a função de tensão de Airy [10, 14]

$$W(r, \theta) = r^{\lambda+1} F(\theta) \quad \text{com } \lambda \in \mathbb{R}^+ \quad (2.18)$$

A equação de compatibilidade (2.16) é satisfeita se $F(\theta)$ for solução da seguinte equação diferencial

$$\frac{d^4 F}{d\theta^4} + [(\lambda-1)^2 + (\lambda+1)^2] \frac{d^2 F}{d\theta^2} + [(\lambda-1)^2 (\lambda+1)^2] F = 0$$

ou seja

$$F(\theta) = A \cos(\lambda+1)\theta + B \sin(\lambda+1)\theta + C \cos(\lambda-1)\theta + D \sin(\lambda-1)\theta \quad (2.19)$$

sendo A, B, C e D constantes a determinar.

A equação biarmónica definida por (2.18) e a função (2.19) podem ser usadas para resolverem problemas como o ilustrado na figura 2.9, em que a forma e tamanho do corpo é arbitrário, bem com as tracções aplicadas à fronteira exterior.

Para maior facilidade de cálculo é usual considerar as coordenadas polares (r, γ) da figura 2.10

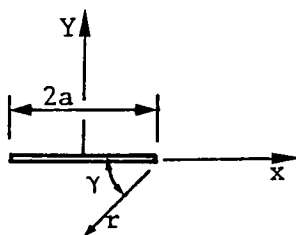


Fig. 2.10 - Geometria da fenda e sistema de coordenadas

Relativamente a este sistema de coordenadas e atendendo a (2.17), (2.18) e (2.19) temos

$$\sigma_r = r^{\lambda-1} [F''(\gamma) + (\lambda + 1) F(\gamma)]$$

$$\sigma_\gamma = r^{\lambda-1} [\lambda (\lambda+1) F(\gamma)]$$

$$\tau_{r\gamma} = - r^{\lambda-1} [\lambda F'(\gamma)]$$

As condições de fronteira nas superfícies da fenda sob tracção específica que

$$\sigma_\gamma(r, 0) = \sigma_\gamma(r, 2\pi) = 0 \quad (2.20)$$

$$\tau_{r\gamma}(r, 0) = \tau_{r\gamma}(r, 2\pi) = 0$$

e por outro lado

$$F(0) = F(2\pi) = 0$$

$$F'(0) = F'(2\pi) = 0$$

e estas quatro equações são satisfeitas para

$$A = -C$$

$$B = -\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} D$$

assumindo λ infinitos valores

$$\lambda_n = \frac{n}{2} \quad \text{com } n = 1, 2, 3, \dots$$

Voltando ao sistema de coordenadas polares (r, θ) inicial (figura 2.9), ou seja, fazendo $\gamma = \theta + \pi$, para cada conjunto λ_n correspondem $W_n(r, \theta)$ que satisfazem a equação (2.16) e as condições de fronteira (2.20), e a solução geral é uma combinação linear de cada uma das soluções, sendo a função de tensão de Airy

$$W_n(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} r^{\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \cdot F_n(\theta) \quad (2.21)$$

onde

$$F_n(\theta) = C_n \left\{ \cos \left[\left(\frac{n}{2} - 1 \right) (\theta + \pi) \right] - \cos \left[\left(\frac{n}{2} + 1 \right) (\theta + \pi) \right] \right\} + \\ + D_n \left\{ \sin \left[\left(\frac{n}{2} - 1 \right) (\theta + \pi) \right] - \frac{n-2}{n+2} \cdot \sin \left[\left(\frac{n}{2} + 1 \right) (\theta + \pi) \right] \right\}$$

e conjugando as equações (2.17) e (2.21) vem

$$\sigma_r = \sum_{n=1}^{\infty} r^{\left(\frac{n}{2} - 1\right)} \left[F_n''(\theta) + \left(\frac{n}{2} + 1 \right) F_n(\theta) \right]$$

$$\sigma_\theta = \sum_{n=1}^{\infty} r^{\left(\frac{n}{2} - 1\right)} \left[\frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} + 1 \right) F_n(\theta) \right]$$

$$\tau_{r\theta} = - \sum_{n=1}^{\infty} r^{\left(\frac{n}{2} - 1\right)} \frac{n}{2} F_n'(\theta)$$

Se nestas equações considerarmos só o primeiro termo, encontraremos a formulação de Irwin, com

$$D_1 = - \frac{K_I}{(2\pi)^{1/2}} \quad \text{e} \quad C_1 = \frac{K_{II}}{(2\pi)^{1/2}}$$

2.7. - PLASTICIDADE NA EXTREMIDADE DA FENDA

A teoria da elasticidade conduz-nos, como vimos, a uma expressão das tensões, na vizinhança da extremidade da fenda, que traduz uma singularidade em $r^{-1/2}$.

Chega-se assim a uma impossibilidade física, ou seja as tensões são infinitas na extremidade da fenda, figura 2.11, conduzindo ao paradoxo de

um meio perfeitamente elástico contendo uma fenda, não poder suportar nenhuma carga.

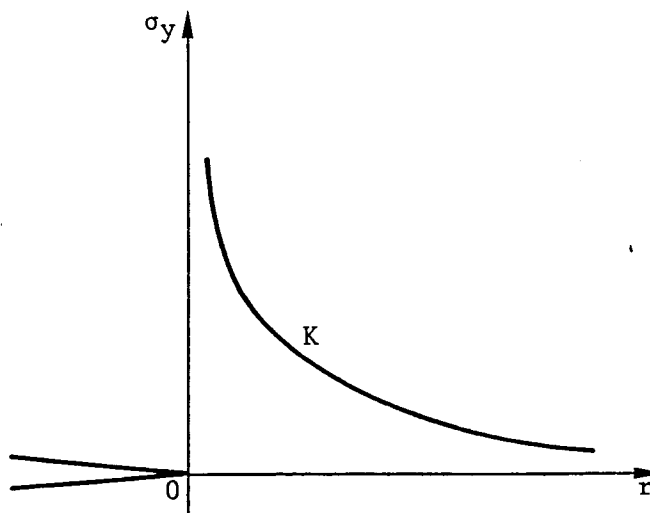


Fig. 2.11 - Variação das tensões em função de r

Então, para descrever o estado de tensões, considera-se a existência de uma pequena zona plástica à frente da extremidade da fenda.

A seguir tratar-se-ão brevemente os aspectos particularmente mais relevantes, nomeadamente o tamanho e forma, da zona plástica na extremidade da fenda.

2.7.1. - MODELO DE IRWIN

Consideremos uma placa com uma fenda de comprimentos $2a$, solicitada em modo I no estado plano de tensões.

Atendendo ao analisado anteriormente, admite-se que o material tem um comportamento elasto-plástico sem endurecimento, numa zona muito restrita, junto à extremidade da fenda.

A extensão da zona deformada plásticamente pode ser avaliada, admitindo que [3, 15]

$$\sigma_y = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \leq \sigma_{ys} \quad \text{para } r = r_p$$

sendo σ_{ys} a tensão de cedência do material, figura 2.12, resultando, em

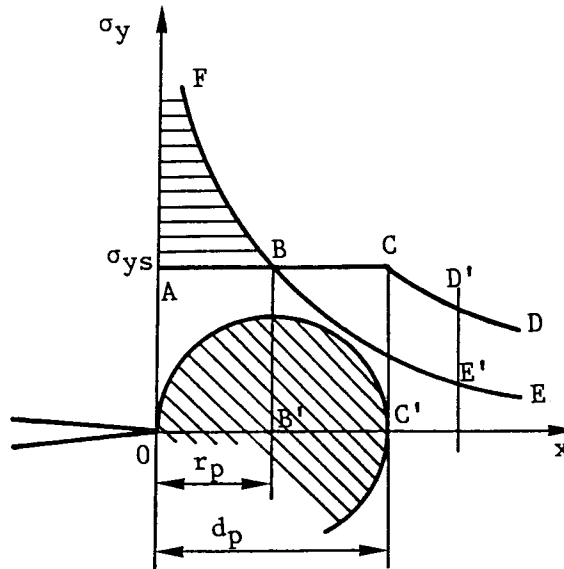


Fig. 2.12 - Zona plástica na extremidade da fenda

estado plano de tensão

$$r_p = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2 \quad (2.22)$$

e em estado de deformação plano

$$r_p = \frac{1}{6\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2$$

No entanto o valor de (2.22) não é correcto, pois estamos a desprezar a área tracejada ABF. Assim, considerando que as áreas CC'D e BB'E são iguais, pois que o perfil CD se deduz do perfil BE pela translação de BC, temos

$$\text{área OACC}' = \text{área OFBB}'$$

e podemos escrever

$$dy \sigma_{ys} = \int_0^{r_p} \sigma_y dr = \frac{2K_I}{(2\pi)^{1/2}} r_p^{1/2}$$

ou seja, a extensão da zona deformada plásticamente será

$$d_p = 2 r_p$$

então para $r < d_p$ existe plastificação e a tensão é limitada a σ_{ys} .

Irwin mostrou que o estado de tensão fora da zona plástica era o mesmo que numa fenda fictícia, suposta perfeitamente elástica, figura 2.13, de comprimento $(a + r_p)$

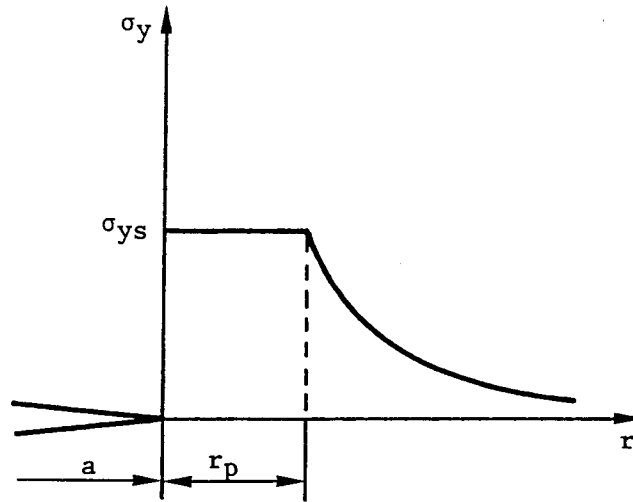


Fig. 2.13 - Modelo de Irwin

É conveniente considerar neste caso um factor de intensidade de tensão modificado K_I' , tal que

$$K_I' = \alpha_I \sigma [\pi (a + r_p)]^{1/2}$$

Esta correcção pode ser desprezada se o comprimento da fenda a for superior a $2.5 \left(\frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2$.

Note-se que este modelo se fundamenta na hipótese de que a região plástica na extremidade da fenda é circular.

2.7.2. - MODELO DE DUGDALE

Considere-se a figura 2.14 que representa uma fenda de comprimento $2a$ numa placa sujeita à tensão remota σ .

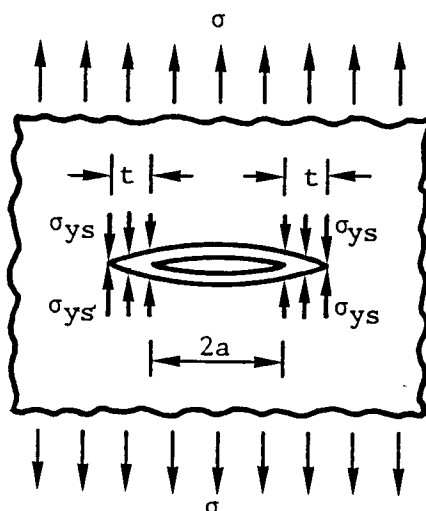


Fig. 2.14 - Modelo de Dugdale

Dugdale supôs uma plastificação no prolongamento da fenda sobre um comprimento t , que se produz logo que σ_y é igual a σ_{ys} sobre este comprimento.

Para determinar o comprimento t , considera-se a fenda fictícia de comprimento $2(a + t)$, com uma compressão igual à tensão de cedência σ_{ys} sobre t .

Para tal estado de solicitações, podem calcular-se os factores de intensidade de tensão correspondentes à tensão remota σ

$$K = \sigma [\pi (a + t)]^{1/2} \arccos \left(\frac{a}{a + t} \right) \quad (2.23)$$

e à tensão σ_{ys} sobre os comprimentos t , que se demonstra ser [15]

$$K = -2 \sigma_{ys} \left(\frac{a+t}{\pi} \right)^{1/2} \arccos \left(\frac{a}{a+t} \right) \quad (2.24)$$

Atendendo à aditividade dos factores de intensidade de tensão para o modo I de carregamento, o valor de t é encontrado com base no desaparecimento da singularidade do estado de tensão na extremidade de $(a + t)$, e de (2.23) e (2.24) vem

$$\sigma [\pi (a+t)]^{1/2} - 2 \sigma_{ys} \left(\frac{a+t}{\pi} \right)^{1/2} \arccos \left(\frac{a}{a+t} \right) = 0$$

ou seja

$$t = a \left[\frac{1}{\cos \left(\frac{\pi \sigma}{2 \sigma_{ys}} \right)} - 1 \right] \quad (2.25)$$

Para uma tensão $\sigma \ll \sigma_{ys}$, e considerando o desenvolvimento em série do cosseno, a equação (2.25) virá

$$t = \frac{\pi}{8} \left(\frac{K}{\sigma_{ys}} \right)^2$$

que é uma solução pouco diferente da encontrada por Irwin em (2.22) com $t = d_p = 2r_p$.

2.7.3. - FORMAS DA ZONA DE PLASTIFICAÇÃO

Irwin determinou o comprimento da zona plástica no prolongamento da fenda ($\theta = 0$), supondo que esta dimensão era a mesma em todas as direcções, o que conduz a uma forma circular de plastificação na extremidade da fenda.

Para estudarmos a forma e dimensão da zona plástica em função de θ poderemos utilizar os critérios de Von Mises e de Tresca [15, 19].

2.7.3.1. - Critério de Von Mises

O critério de Von Mises estabelece que

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2 \sigma_{ys}^2 \quad (2.26)$$

sendo $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ as tensões principais e que são dadas por

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2]^{1/2} \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.27)$$

$\sigma_3 = 0$ em estado plano de tensão

$\sigma_3 = \nu (\sigma_1 + \sigma_2)$ em estado de deformação plano

e substituindo as equações (2.11) nas equações (2.27) e estas em (2.26) em estado plano de tensão obtém-se

$$r_p = \frac{K_I^2}{2} \left(1 + \frac{3}{2} \sin^2 \theta + \cos \theta \right) \quad (2.28)$$

e em estado plano de deformação

$$r_p = \frac{K_I^2}{2} \left[\frac{3}{2} \sin^2 \theta + (1 - 2\nu)^2 (1 + \cos \theta) \right] \quad (2.28a)$$

Em representação gráfica, estas duas situações correspondem ao esquematizado na figura 2.15(a).

2.7.3.2. - Critério de Tresca

Este critério estabelece que

$$\sigma_{ys} = \sigma_1 \quad \text{em estado plano de tensão}$$

$$\sigma_{ys} = \sigma_1 - \sigma_3 \text{ ou } \sigma_{ys} = \sigma_1 - \sigma_2 \quad \text{em estado plano de deformação}$$

e após manipulações idênticas ao caso anterior, obtém-se em estado plano de tensão

$$r_p = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_{ys}} \left[\cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \right) \right]^2 \quad (2.29)$$

e em estado plano de deformação

$$r_p = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_{ys}} \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(1 - 2\nu + \sin \frac{\theta}{2} \right)^2 \quad (2.29a)$$

ou

$$r_p = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_{ys}} \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

cuja visualização gráfica pode ser observada na figura 2.15 (b).

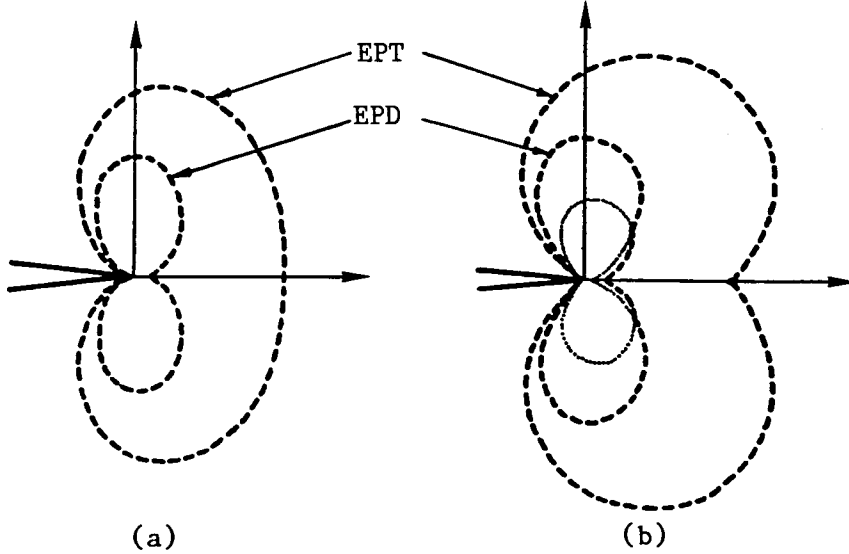


Fig. 2.15 - Forma das zonas plásticas. (a) Critério de Von Mises. (b) Critério de Tresca

Analizando estes resultados, verifica-se que a zona plástica encontrada por Tresca é sensivelmente mais larga do que a de Von Mises.

Substituindo $\theta = 0$ nas equações (2.28) e (2.28a) obtemos um valor de r_p que é metade do valor dado pela equação (2.22) estabelecido por Irwin, verificando-se assim que não há coincidência de resultados.

Outros analistas se têm debruçado sobre o assunto, quer através de estudos analíticos, quer experimentais das dimensões e forma da verdadeira zona plástica na extremidade da fenda, e, embora haja alguma convergência de resultados a investigação continua.

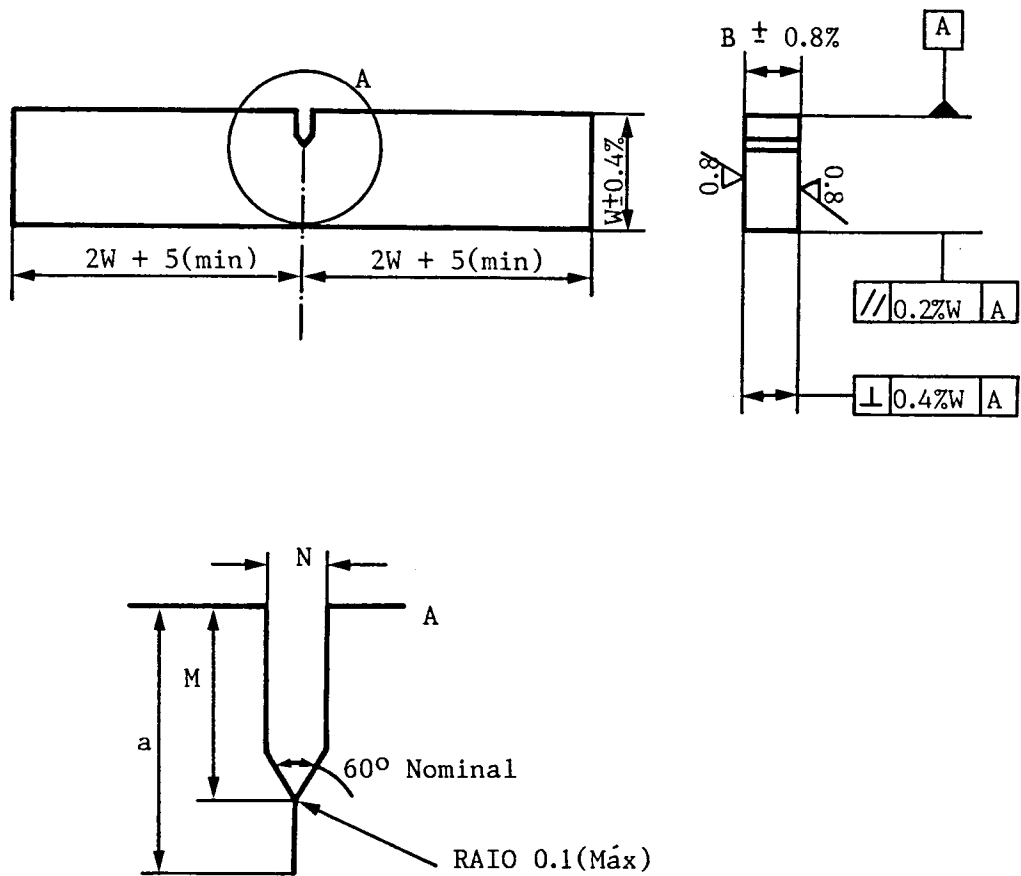
2.8. - CRITÉRIOS DE ROTURA

Vimos em 2.4., que se a taxa de libertação de energia de deformação elástica G for superior à energia crítica G_c dar-se-à a propagação da fenda. Do mesmo modo existirá um factor de intensidade de tensão crítico K_{Ic} e a fenda propagar-se-à catastróficamente se $K_I \geq K_{Ic}$. K_{Ic} é então uma característica mecânica do material que traduz a resistência à propagação de uma fenda em modo I e que se designa por tenacidade.

2.8.1. - DETERMINAÇÃO EXPERIMENTAL DE K_{Ic}

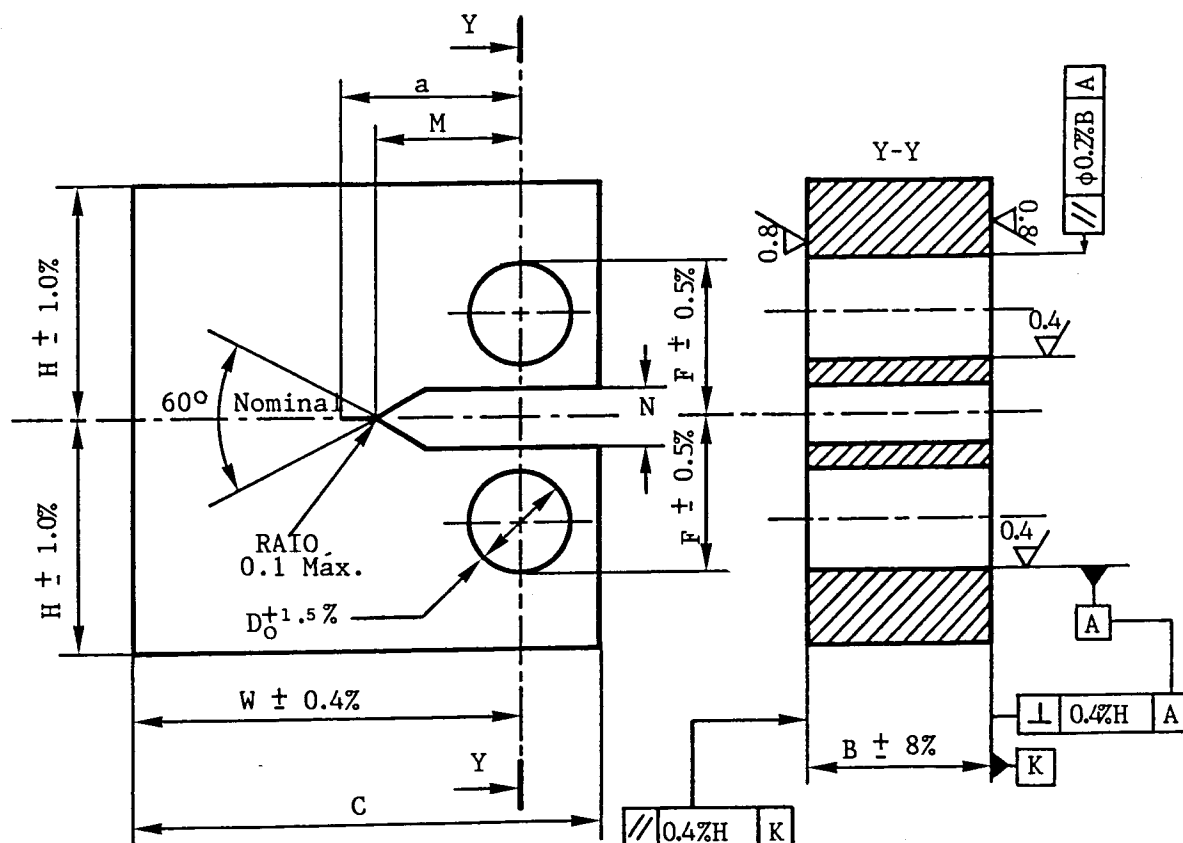
Um dos processos de determinação da tenacidade K_{Ic} é a via experimental, podendo serem utilizados vários tipos de provetes normalizados, designadamente pela A.S.T.M. [16] e pelas B. S. [17].

As figuras 2.16 e 2.17 representam dois dos tipos de provetes mais utilizados, o "3P.B." (Three Point Bend) e o "C.T.S." (Compact Tension Specimen), indicando-se as proporções que as diversas dimensões características dos provetes devem manter entre si.



LARGURA = W
 ESPESSURA = $B = 0.5W$
 SEMI DISTÂNCIA ENTRE APOIOS = $L = 2W$
 LARGURA DO ENTALHE = $N = 0.065W$ (ou 1.5mm SE $W < 25\text{mm}$)
 COMP. DO ENTALHE = $M = 0.25W$ a $0.45W$
 COMP. EFECTIVO DA FENDA = $a = 0.45W$ a $0.55W$

Fig. 2.16 - Proporções e Tolerâncias para Provete 3PB



LARGURA UTIL = W
LARGURA TOTAL = C = 1.25W
ESPESSURA = B = 0.5W
SEMI ALTURA = H = 0.6W
DIÂMETRO ORIFÍCIO PINO = D = 0.25W
F = 1.6D
LARGURA DO ENTALHE = N = 0.065W
COMP. DO ENTALHE = M = 0.25W a 0.40W
COMP. EFECTIVO DA FENDA = a = 0.45W a 0.55W

Fig. 2.17 - Proporções e Tolerâncias para Provetes CTS

2.8.2. - DETERMINAÇÃO DE K_{LIC}

Em modo misto, o critério de Griffith deveria indicar que a fenda propagar-se-ia na direcção para a qual a taxa de libertação de energia por

unidade de comprimento é máxima e a fenda tornar-se-ia instável se a taxa atingisse um valor crítico.

Para uma fenda solicitada em modo II ou misto, vários critérios têm sido propostos, sem, no entanto, se ter chegado a um consenso geral, sendo o critério de Sih [18] o mais generalizado.

Atendendo a que o cálculo de G_{IIc} era difícil Sih estabeleceu as seguintes hipóteses:

- a fenda propaga-se numa direcção radial θ_0 para a qual a tensão σ_θ é máxima e a tensão de corte $\tau_{r\theta}$ é nula.

- a fenda torna-se instável logo que $\sigma_\theta (2\pi r)^{1/2} = K_{IC}$ (2.30)

Considerando as tensões em coordenadas polares

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{1}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left[K_I \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + 2K_{II} (3 \cos \theta - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right] \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left[K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right] \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left[K_I \sin \theta + K_{II} (3 \cos \theta - 1) \right]\end{aligned}\quad (2.31)$$

então, devido à primeira hipótese

$$K_I \sin \theta_0 + K_{II} (3 \cos \theta_0 - 1) = 0$$

vindo

$$\theta_0 = 0 \text{ considerando só o modo I}$$

$$\theta_0 = 70,5^\circ \text{ só para o modo II}$$

Substituindo σ_θ da equação (2.31) em (2.20) vem

$$\cos \frac{\theta}{2} \left[K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right] = K_{IC}$$

e atendendo ao valor de θ_0 , temos para os dois modos fundamentais

$$K_I = K_{IC} \text{ em modo I}$$

$$K_{II} = 0,866 K_{IC} \text{ em modo II}$$

2.8.3. - OUTROS CRITÉRIOS

O cálculo experimental da tenacidade, não está só confinado ao descrito em 2.8.1., pelo que se poderão destacar, por exemplo, os métodos que são utilizados em materiais com microestrutura grosseira (porosos) ou para medidas a altas temperaturas e que são normalmente conhecidos como "a K constante".

Mais recentemente, para materiais com uma microestrutura bastante fina e homogênea, foi desenvolvido o método de determinação de K_{IC} por penetração, onde o defeito criado artificialmente corresponde a uma impressão de microdurezas (Vickers ou Knopp). O estudo da zona elasto-plástica na vizinhança da impressão permite o cálculo de K_{IC} .

Existem outros critérios, quer baseados em considerações energéticas, quer fundamentados em relações empíricas, que estabelecem relações entre K_I , K_{II} e K_{IC} , mas cujo consenso não é geral.

2.9. - CONCLUSÃO

Os factores de intensidade de tensão, introduzidos por Irwin, são parâmetros característicos dos materiais na vizinhança da extremidade de fendas para cada um dos modos I e II, fundamentando a mecânica da fractura linear elástica. Estes factores são independentes das características mecânicas dos materiais e traduzem a intensidade da singularidade das tensões na extremidade da fenda.

A aproximação de Griffith dá um significado físico aos factores de intensidade de tensão, exprimindo a energia G da criação da superfície livre em função de K_I e K_{II} .

Os critérios de rotura permitem estabelecer uma relação entre K_I e K_{II} e o seu valor crítico, características do material, e prever o momento a partir do qual se dá a instabilidade da fenda.

Eis porque, a maior preocupação da mecânica da fractura linear elástica é a determinação dos factores K_I e K_{II} .

3. - MÉTODOS DE DETERMINAÇÃO DOS FACTORES DE INTENSIDADE DE TENSÃO

3.1 - INTRODUÇÃO

Dum modo geral podemos dizer que o controle da rotura é baseado em dois tipo de análise:

- a análise de esforços residuais, que determinam o máximo comprimento que se pode tolerar para uma fenda.
- a análise da extensão crítica da fenda (normalmente devido a fadiga ou tensão por corrosão) para calcular o tempo de crescimento de uma fenda de um determinado comprimento até ao valor máximo tolerável, estabelecendo a segurança ou o intervalo de inspecção da estrutura.

O conhecimento do factor de intensidade de tensão é, então, de primordial importância para o controle da fractura.

Como o factor de intensidade de tensão pode ser sempre expresso por uma expressão do tipo (2.13):

$$K = Y (\pi a)^{1/2}$$

o problema reside na determinação do factor geométrico Y que depende da forma da fenda, sua orientação e proximidade de outras fendas ou fronteiras.

Depois das bases introduzidas por Griffith, Irwin e Orowan para o estabelecimento da mecânica da fractura, muitos trabalhos têm sido desenvolvidos para conseguir soluções de Y para diversas configurações [9,10,11].

No entanto, para configurações estruturais complicadas esses manuais não nos dão directamente essas soluções, podendo no entanto, resolver-se o problema por sobreposição de um número de casos para os

quais a intensidade de tensão é conhecida, como se verá mais à frente. Esta sobreposição diz respeito aos factores de intensidade de tensão e não aos factores de forma.

Não se conseguindo a sobreposição existem outras vias para a determinação do factor de intensidade de tensão.

Não se pretende neste trabalho fazer uma enumeração e um desenvolvimento exaustivo das diversas técnicas de determinação do factor de intensidade de tensão. Assim, cada método será descrito com o mínimo detalhe matemático possível, sendo dadas as referências onde cada caso pode ser apreciado mais desenvolvidamente [15,19,20].

3.2 - MÉTODOS TEÓRICOS

3.2.1 - MÉTODOS ANALITICOS

Os métodos analíticos para a determinação do factor de intensidade de tensão constituem a base do estabelecimento da mecânica da fractura.

A partir destes métodos constituíram-se as equações básicas da tensão e do campo de deslocamentos na extremidade de fendas e, ainda hoje, servem de partida para muitas outras soluções.

Porém, estes métodos são bastante limitados, aplicando-se essencialmente, a geometrias simples de corpos ou placas infinitas, para os quais as condições de fronteira são satisfeitas exactamente.

Como já vimos em 2.5, a solução analítica baseia-se em encontrar, por exemplo, uma função de tensão que satisfaça $\nabla^4 W = 0$, e que pode ser representada por variáveis complexas.

3.2.1.1 - Função de Tensão de Westergaard

Para uma placa infinita, fig. 2.6, que apresenta uma fenda central de comprimento $2a$ e solicitada em modo I, a função de tensão de Airy estabelecida por Westergaard [5], tem a forma:

$$W = R_e \bar{\bar{Z}} + y I_m \bar{Z} \quad (3.1)$$

onde Z é a função de tensão complexa e $\bar{Z}$ e $\overline{\bar{Z}}$ são definidas por:

$$\bar{Z} = \frac{d\overline{\bar{Z}}}{dz} \quad \text{e} \quad Z = \frac{d\bar{Z}}{dz}$$

com $z = x + iy$

Para a configuração descrita a função de tensão de Westergaard é

$$Z = \sigma z (z^2 - a^2)^{-1/2} \quad (3.2)$$

e o factor de intensidade de tensão será

$$K = (2\pi)^{1/2} \lim_{z \rightarrow a} [(z - a)^{1/2} Z] \quad (3.3)$$

3.2.1.2. - Função de Tensão de Muskhelishvili

A função da tensão estabelecida por Muskhelishvili [6] é expressa em termos de duas funções complexas $\Phi(z)$ e $\varphi(z)$ já definidas em 2.5.2, de tal modo que

$$W = R_e \left[\bar{z} \Phi(z) + \varphi(z) \right] \quad (3.4)$$

conduzindo-nos à representação complexa das componentes do tensor das tensões e de deslocamentos dados pelas equações (2.7).

Atendendo às propriedades de Φ' e considerando a extremidade da fenda em z_1 obtemos para o modo misto

$$K_I - i K_{II} = 2 (2\pi)^{1/2} \lim_{z \rightarrow z_1} \left[(z - z_1)^{1/2} \Phi'(z) \right] \quad (3.5)$$

Uma das vantagens da aproximação dada pela função de tensão complexa é a sua extensão a problemas que permitem a "representação conforme" como se referirá mais adiante.

3.2.2. - "BOUNDARY COLLOCATION"

Básicamente, o método aplicado à elasticidade bidimensional, consiste em tomar a expansão de séries algébricas exactas que resolvem a equação diferencial biarmónica $\left(\nabla^4 W = 0\right)$, na qual os coeficientes das séries são as incógnitas, fazendo a sua truncagem para um dado número de termos. Alguns coeficientes, atendendo à geometria e condições de simetria, podem considerar-se iguais a zero.

Os valores das incógnitas são determinados através dum sistema de equações lineares que satisfazem as conhecidas condições de tensão, força ou deslocamento na fronteira.

As soluções das séries assim obtidas normalmente satisfazem exactamente algumas condições no interior da região (por exemplo, a condição de tensão na superfície da fenda) e dum modo aproximado as condições noutras fronteiras.

A convergência da técnica de colocação para a solução correcta não está ainda rigorosamente provada, no entanto o seu uso tem sido aplicado a vários casos com erros inferiores a 1% relativamente a outros métodos.

As duas formulações da função de tensão mais utilizadas para a solução por "boundary collocation" são a função de tensão de Williams e a função de tensão complexa de Muskhelishvili.

Básicamente a técnica de "boundary collocation" utilizando a função de tensão de Williams (analisada no parágrafo 2.6) consiste:

- Determinação da função de tensão de Airy para o corpo sem fenda [8].
- Cálculo dessa função e da sua derivada normal para um determinado número de pontos (colocação) em torno da fronteira.
- Substituição da função de Airy e da sua derivada em cada ponto na função de tensão de Williams, obtendo um sistema de equações lineares que permitem calcular os coeficientes da função de Williams.

Este processo tem sido usado essencialmente para placas com fendas laterais, incluindo o modo II [21].

A formulação da colocação através das funções de tensão complexas deriva directamente do que já foi visto em 2.5. [6].

Os factores de intensidade de tensão em corpos bidimensionais, com ligações múltiplas, sujeitos a cargas no seu plano, podem ser determinados através da utilização de duas funções complexas $\Phi(z)$ e $\bar{\Omega}(z)$, em que a primeira já foi definida anteriormente e a segunda por [15,22]

$$\bar{\Omega}(z) = \Phi'(z) + z \Phi''(z) + \Psi'(z) \quad (3.6)$$

As tensões e os deslocamentos virão então

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2 \left[\Phi'(z) + \overline{\Phi'(z)} \right] = 4 \operatorname{Re} \left[\Phi'(z) \right] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2 \left[(\bar{z} - z) \Phi''(z) - \Phi'(z) + \bar{\Omega}(z) \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$2\mu(u + iv) = k \int_0^z \Phi'(z) dz - \int_0^{\bar{z}} \bar{\Omega}(\bar{z}) d\bar{z} - (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)}$$

As funções de tensão complexa podem ser expandidas em série, da forma:

$$\Phi'(z) = (z^2 - a^2)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} D_n z^n \quad (3.8)$$

$$\bar{\Omega}(z) = (z^2 - a^2)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} D_n z^n$$

satisfazendo as condições de fronteira, e impondo as condições de equilíbrio e compatibilidade.

No entanto numa fenda interna é necessário satisfazer uma condição de compatibilidade suplementar, para garantir valores singulares para os deslocamentos junto à fenda, o que é conseguido por:

$$\kappa \oint_C \Phi'(z) dz - \oint_C \Omega(\bar{z}) d\bar{z} = 0 \quad (3.9)$$

onde C representa o contorno da fronteira interna.

O método consiste, portanto, na determinação dos coeficientes C_n e D_n por "colocação" da tensão em torno da fronteira e tendo em conta os valores singulares para os deslocamentos.

O factor de intensidade de tensão é então definido por (3.5).

Vários casos foram analisados por este meio. Kobayashi, Cherepy e Kinsell [22] fizeram a determinação do factor de intensidade de tensão considerando uma placa com fenda central em tensão uniaxial, obtendo resultados com a precisão de $\pm 1\%$ a 3% .

Outros estudos foram feitos por Isida analisando placas com fenda central considerando três tipos de condições de fronteira, condições de tensão, de deslocamento, ou a combinação de ambas [23], fendas em placas posicionadas excentricamente [24] ou ainda fendas próximas de uma mudança de espessura ou de rigidez e fendas próximas de orifícios em estruturas em chapa [25].

O "boundary collocation" foi ainda aplicado à determinação do factor de intensidade de tensão de fendas em placas poligonais [26] utilizando a função de tensão de Westergaard.

3.2.3. - TRANSFORMAÇÃO CONFORME

Uma das vantagens das funções de tensão complexas, relativamente às funções de tensão de Westergaard é a sua utilização em transformação conforme [6].

Considerando a expressão de transformação

$$z = \omega(\xi)$$

e a extremidade da fenda em ξ_1 , no plano de transformação ξ , a equação (3.5) virá:

$$K_I - i K_{II} = 2 (2\pi)^{1/2} \lim_{\xi \rightarrow \xi_1} [\omega(\xi) - \omega(\xi_1)]^{1/2} \frac{\Phi'(\xi)}{\omega'(\xi)} \quad (3.10)$$

Além da aplicação desta técnica a casos simples, como fendas em placas infinitas, alguns problemas mais complicados como, por exemplo, fendas que se propagam através de furos foram analisados por Bowie [27,28] em que se usou a expansão em série da expressão de transformação. Bowie e Neal [29] estabeleceram um outro processo para a determinação do factor de intensidade de tensão, combinando a expressão de transformação com a "boundary collocation", aplicado a um disco circular com fenda no seu interior e submetido a uma tensão hidrostática exterior. Várias outras situações, quer em termos de configuração, quer de carga, foram analisados por estes e outros especialistas.

3.2.4 - FUNÇÕES DE GREEN E FUNÇÕES PESO

O princípio de Bueckner [30] e analisado em [31] é muito importante para a determinação do factor de intensidade de tensão, quer quando se utilizam funções de Green ou funções peso. O problema da determinação do factor de intensidade de tensão para uma fenda livre de tensões, dum corpo sujeito a determinadas solicitações, é substituído pelo mesmo corpo com a mesma fenda, mas agora sujeita a pressões normais às suas superfícies.

A figura 3.1 mostra esquematicamente o princípio de Bueckner.

A figura 3.1 (a) representa um corpo elástico, com uma fenda AB livre de tensões no interior da fronteira O que está dividida em O₁ e O₂. A figura 3.1 (b) representa a fronteira O₁ sujeita às tracções T e O₂ aos deslocamentos V e no seu interior as forças F. Com este sistema de carga e deslocamentos o factor de intensidade de tensão será K_b. Na figura 3.1 (c) considera-se o corpo sem fenda, mas sujeito às tensões T, deslocamentos V e forças interna F. A distribuição da tensão resultante onde se situava a fenda AB será $\sigma(x)$.

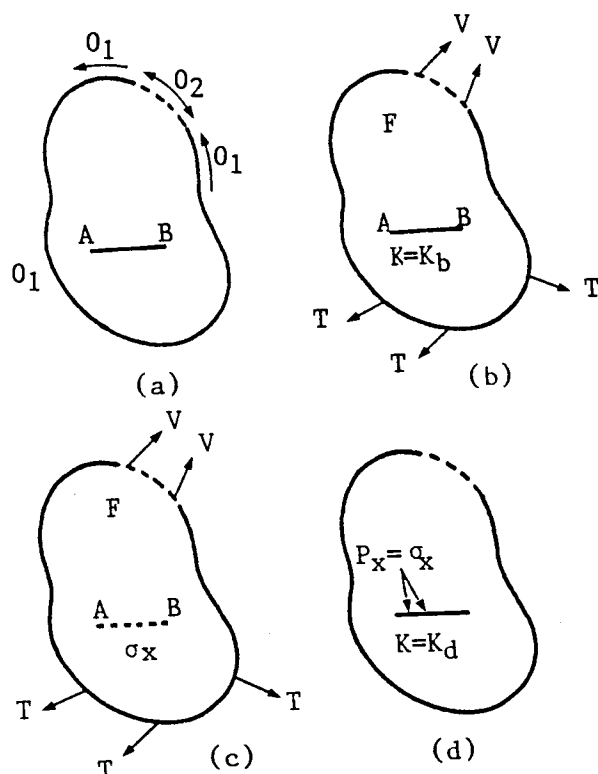


Fig. 3.1 - Corpo elástico sujeito a tracções e deslocamentos arbitrários.

A figura 3.1 (d) representa o corpo com a fenda AB mas agora sujeita á distribuição de pressão $p(x)$ aplicada às suas superfícies, sendo as condições de fronteira $T=V=0$ com $F=0$. Com esta distribuição de pressão o factor de intensidade de tensão será $K=K_d$. Então o princípio de Bueckner estabelece que se $\sigma(x) = p(x)$ então o factor de intensidade de tensão para a fenda nas figuras 3.1 (b) e (d) são iguais

$$K_b = K_d$$

Então, se conhecermos a distribuição de tensões na zona da fenda, do corpo sem fenda (figura 3.1 (c)), a determinação do factor de intensidade de tensões é estabelecido para o problema simples da figura 3.1 (d) que é equivalente ao problema inicial da figura 3.1 (b).

A determinação do factor de intensidade de tensão usando funções de Green ou funções peso envolve normalmente o princípio de Bueckner e o cálculo dum integral da forma:

$$K = \int_0^a \sigma(x) \cdot H(a, x) dx \quad (3.11)$$

onde a é o comprimento da fenda e x um ponto da mesma. A tensão $\sigma(x)$ representa a distribuição da tensão ou pressão na zona onde deverá existir a fenda (corpo sem fenda) e $H(a, x)$ é uma função que depende da geometria do corpo, sendo independente das tracções aplicadas, mas podendo depender de algumas condições impostas pelos deslocamentos.

A função $H(a, x)$ pode ser determinada como o factor de intensidade de tensão resultante de uma carga unitária aplicada à superfície da fenda. Neste caso, esta função é proporcional à função de Green $g(a, x)$ para uma fenda de comprimento a com a carga pontual localizada à distância x , sobre a superfície da fenda. O integral (3.11) tomará a forma:

$$K = \left(\frac{2}{\pi a}\right)^{1/2} \int_0^a \sigma(x) \cdot g(a, x) dx \quad (3.12)$$

Mais detalhes, juntamente com algumas soluções técnicas, utilizando as funções de Green para a determinação do factor de intensidade de tensão podem ser analisadas em [32].

Por outro lado a função $H(a, x)$ pode ser determinada como uma função peso [33,34] $m(a, x)$ definida por:

$$m(a, x) = \frac{8\mu}{(1+\kappa)} \cdot \frac{1}{K^*} \frac{\partial v^*(a, x)}{\partial a} \quad (3.13)$$

onde

μ é o módulo de elasticidade transversal

$k = 3 - 4\nu$ no estado plano de deformação

$k = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$ no estado plano de tensão

K^* é o factor de intensidade de tensão conhecido para uma determinada configuração geométrica.

$v^*(a, x)$ é o deslocamento na direcção yy do ponto de posição x da fenda, da configuração geométrica a que se refere K^* .

A equação (3.11) tomará, então, a forma:

$$K = \int_0^a \sigma(x) \cdot m(a, x) dx \quad (3.14)$$

Alguns exemplos poderão também ser observados em [15,31], bem como muitos outros cujas referências estão incluídas nessas obras, como por exemplo [35] que trata do estabelecimento da função peso para o caso de fendas radiais em tubos e anéis.

Como vimos, a análise do factor de intensidade de tensão utilizando funções peso ou funções de Green é feito através do cálculo dum integral da forma (3.11). Vários autores calcularam esses integrais, para configurações particulares, considerando $\sigma(x)$ expresso na forma polinomial.

3.2.5 - TRANSFORMADAS INTEGRAIS E MODELOS DE DESLOCAÇÃO

Neste método o problema elástico é considerado como um problema misto de valor de fronteira e resolvido usando técnicas standard das transformadas integrais.

Este processo reduz-se normalmente à solução de uma equação integral da forma [15]

$$\int_a^b \frac{M(s, x) \cdot P(s)}{[(s-a)(b-s)]^{1/2}} ds = -f(x) \quad (3.15)$$

onde $f(x)$ é uma função de tensão conhecida na zona da fenda, para o corpo sem fenda. O núcleo da transformada tem a forma:

$$M(s, x) = \frac{1}{s - x} + F(s, x) \quad (3.16)$$

sendo $F(s, x)$ não singular para $a < s < b$ e $a < x < b$. A função desconhecida $P(s)$ é proporcional ao deslocamento relativo das faces da fenda:

$$v(x) = -\frac{2(1-\nu)^2}{E} \int_x^b \frac{P(s)}{(s-a)(b-s)} ds \quad (3.17)$$

Então, conhecendo $P(s)$, torna-se possível determinar o factor de intensidade de tensão, que na extremidade a , vem:

$$K_a = \frac{E}{2(1-\nu)^2} \lim_{x \rightarrow a} \left\{ \left[2\pi(x-a)^{1/2} \right] \frac{\partial v(x)}{\partial x} \right\} \quad (3.18)$$

comparando (3.17) com (3.18) tem-se:

$$K_a = P(a)$$

e dum modo semelhante

$$K_b = P(b)$$

logo, a solução da equação (3.15), considerando $P(s)$ como uma função da posição da fenda, conduz-nos ao factor de intensidade de tensão pretendido.

A resolução da equação integral (3.15) pode ser conseguida em alguns casos através da quadratura de Gauss-Chebyshev convencional ou modificada [36].

A utilização das transformadas integrais para a determinação do factor de intensidade de tensão, para fendas com diversas configurações, podem ser analisadas em diversos trabalhos, dos quais se destacam os de Sneddon e Lowengrub [37,38], onde se faz a análise de fendas simples dispostas em série, cruciformes, circulares, etc.

Um outro método [20] que conduz a equações integrais idênticas a (3.15) é aquele que se baseia nas deslocções contínuas.

As fendas são representadas como sendo uma distribuição de deslocações, sendo a densidade dessa distribuição determinada de modo a satisfazer as condições de fronteira.

Para fendas em meios elásticos contínuos, para uma deslocação infinitesimal e densidade $D_i(s)$ na posição $\underline{s}$, o vector de Burger é:

$$D_i(s) ds$$

Por analogia com a definição física de deslocação, o vector de Burger para um conjunto contínuo de deslocação é dado por:

$$b_i = \int_s D_i(s) ds$$

onde $\underline{s}$ é o contorno da distribuição das deslocações.

Para uma fenda central de extremidade $-\underline{a}$ e $+\underline{a}$, numa placa infinita sob a acção de uma pressão interna $p(x)$, a abertura dessa fenda pode ser representada por um conjunto de deslocações contínuas de densidade $D_y(s)$ para $y = 0, |x| < a$ e sendo o vector de Burger $b_y = \int_s D_y(s) ds$. Então, para $y = 0$,

estas deslocações produzem as tensões:

$$\sigma_y = -\sigma_x = \frac{2\mu}{\pi(1+\kappa)} \int_{-a}^{+a} \frac{D_y(s)}{x-s} ds$$

e

$$\tau_{xy} = 0$$

As condições de fronteira em $y = 0$ são:

$$\sigma_y = -p(x) \quad \text{para } |x| < a$$

$$\tau_{xy} = 0 \quad \text{para qualquer } x$$

Estas condições conduzem a equação (3.19) a:

$$p(x) + \frac{2\mu}{\pi(1+\kappa)} \int_{-a}^{+a} \frac{D_y(s)}{x-s} ds = 0$$

Para os deslocamentos terem um valor próprio na zona envolvente da fenda, não deve existir o vector de Burger em torno da fenda, ou seja:

$$\int_{-a}^{+a} D_y(s) ds = 0 \quad (3.21)$$

Determinando $D_y(s)$ através das equações (3.20) e (3.21) o factor de intensidade de tensão será:

$$K_I = \frac{2 (2\pi)^{1/2} \mu}{(1+k)} \lim_{x \rightarrow a} \left[(a-x)^{1/2} D_y(x) \right] \quad (3.22)$$

Formulações semelhantes podem ser feitas quer para o modo II quer para o modo III.

Para configurações mais complexas a equação (3.19) contem termos que têm em conta a interacção da deslocação com fronteiras adicionais [39].

Um método aproximado ao das deslocações é anunciado em [20] e proposto por Hisitani, H.. Neste processo são aplicadas forças pontuais ao longo do segmento onde vai existir a fenda. A densidade desconhecida destas forças é determinada de modo a que as condições de fronteira, no segmento correspondente à fenda, sejam satisfeitas.

3.2.6. - MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O método dos elementos finitos [40] é considerado uma ferramenta poderosa para a resolução de problemas em engenharia de certa complexidade, e por isso é um método largamente utilizado.

Num meio contínuo, em que o número de graus de liberdade é infinito, apenas em certos casos é possível obter-se uma solução analítica exacta da distribuição das tensões e das deformações, por isso se utilizam as soluções numéricas, que, embora aproximadas, são sempre possíveis. Uma dessas soluções numéricas, o já referido método dos elementos finitos, pressupõe o meio contínuo dividido num número finito de elementos ligados entre si por um número finito de pontos, designados por pontos nodais.

No método dos deslocamentos em elementos finitos, considera-se que esses elementos apenas têm valores desconhecidos nos pontos nodais. Assim o campo de deslocamentos de cada elemento $\{u\}$ é definido a partir dos valores nodais por meio de funções interpoladoras:

$$\{u\} = [N] \{\delta_e\} \quad (3.23)$$

onde $[N]$ é o conjunto das funções interpoladoras, designadas funções de forma, e $\{\delta_e\}$ é o vector dos deslocamentos nodais para cada elemento.

A deformação de cada elemento será:

$$\{\varepsilon\} = [B] \{\delta_e\} \quad (3.24)$$

onde $[B]$ representa a matriz de deformação, formada pelas derivadas das funções de forma.

E para as tensões

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \quad (3.25)$$

sendo $[D]$ a matriz de elasticidade.

A partir do momento em que as funções de forma foram escolhidas, a energia potencial do meio contínuo Π é a soma das contribuições de energia dos elementos individuais Π_e , ou seja:

$$\Pi = \sum \Pi_e$$

Minimizando a energia do elemento relativamente aos deslocamentos nodais δ_e , temos:

$$\frac{\partial \Pi_e}{\partial \{\delta_e\}} = \left\{ \frac{\partial \Pi_e}{\partial \delta_1} \dots \frac{\partial \Pi_e}{\partial \delta_m} \right\}^T \quad (3.26)$$

Atendendo a que a equação da energia potencial do sistema, não considerando as tensões térmicas e as forças de volume, é:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_v \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dv - \int_s \{u\}^T \{X\} ds \quad (3.27)$$

onde $\{\sigma\}$, $\{\epsilon\}$, $\{u\}$ e $\{X\}$ representam a tensão, deformação, deslocamento e as cargas aplicadas respectivamente, a equação (3.26) pode expressar-se em termos da matriz de rigidez $[K_e]$ e das forças nodais equivalentes $\{F_e\}$ para o elemento:

$$\frac{\partial \Pi_e}{\partial \{\delta_e\}} = [K_e] \{\delta_e\} - \{F_e\} \quad (3.28)$$

com

$$[K_e] = \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dv \quad (3.29)$$

e

$$[F_e] = \int_{S_e} [N]^T \{X\} ds \quad (3.30)$$

A soma de todos os termos $\frac{\partial \Pi_e}{\partial \{\delta_e\}}$ estendida a todos os elementos é igualada a zero, resultando um sistema de equações de equilíbrio para a totalidade do meio contínuo. Resolvido este sistema obtemos os deslocamentos nodais e os campos de deformação e de tensão, no interior de cada elemento, que podem ser obtidos pelas expressões (3.24) e (3.25) respectivamente.

Resumindo, para se encontrar uma solução por elementos finitos relativamente a um problema de equilíbrio, devemos seguir os seguintes passos:

- Subdivisão do meio contínuo em elemento finitos;
- Definição da matriz de rigidez e do vector de solicitação de cada elemento;
- Reunião das matrizes de rigidez e dos vectores de solicitação de cada um dos elementos numa matriz de rigidez e de solicitação globais;
- Resolução do sistema e equações para determinar os deslocamentos nodais da estrutura;

- Determinação dos campos de deformação e de tensão no interior de cada elemento.

As técnicas para a determinação do factor de intensidade de tensão utilizando elementos finitos caem, normalmente, numa das categorias:

- A primeira, aquela em que o factor de intensidade de tensão pode ser determinado directamente.
- A segunda dum modo indirecto, através da variação da energia devido à presença da fenda.
- E por último, a que considera a utilização de elementos especiais.

3.2.6.1 - Métodos Directos

Neste tipo existe a necessidade de um refinamento da malha dos elementos finitos muito próximos da extremidade da fenda de modo a podermos ter uma representação adequada da singularidade da fenda.

Os dois processos mais utilizados são o método da tensão e dos deslocamentos.

Assim, o método da tensão estabelece a relação entre as tensões existentes nos pontos nodais da malha dos elementos finitos e a tensão junto à extremidade da fenda que é dada por :

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = K_N (2\pi r)^{-1/2} \cdot f_{ij}(\theta) \quad (3.31)$$

sendo r, θ as coordenadas polares centradas na extremidade da fenda e $f_{ij}(\theta)$ uma função conhecida de θ [41].

Para o modo de abertura ($N=I$) a equação (3.31) pode ser escrita:

$$K_I = (2\pi r)^{1/2} \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_y$$

podendo, então, determinar-se o factor de intensidade de tensão a partir do conhecimento de σ_y muito perto da extremidade da fenda.

Vários autores verificaram que este método não é tão preciso como o método dos deslocamentos, que consiste no estabelecimento da relação entre os deslocamentos dos pontos nodais da malha de elementos finitos e o deslocamento da superfície da fenda para distâncias muito próximas da extremidade da fenda.

Para o modo de abertura, em estado plano de deformação temos:

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{E \nu}{4 (1 - \nu^2)} \left(\frac{2\pi}{r} \right)^{1/2}$$

e através do conhecimento do deslocamento da superfície da fenda $\underline{v}$ junto à extremidade da fenda, determinamos K_I .

Vários trabalhos utilizando este método encontram-se referenciados em [20].

3.2.6.2. - Método da Energia

A vantagem deste método, relativamente aos anteriores é de não necessitar de um refinamento da malha tão grande junto à extremidade da fenda, permitindo alargar a malha na ponta da fenda sem diminuir a precisão significativamente. Têm no entanto a desvantagem de, em modo misto, K_I e K_{II} não poderem ser determinados separadamente [42].

Um dos métodos utiliza a taxa de libertação de energia de deformação por unidade de espessura:

$$G = \frac{\partial U}{\partial a}$$

sendo U a energia de deformação do sistema para um determinado comprimento da fenda a . Basicamente, o processo consiste em calcular a energia de deformação armazenada para uma dada fenda e posteriormente recalcular a energia de deformação quando se deu uma pequena extensão da fenda, através dos elementos finitos.

A taxa de libertação de energia por unidade de espessura, pode também ser dada em função da "compliance" C [41]:

$$G = \frac{P^2}{2} \cdot \frac{\partial C}{\partial a}$$

onde P é a carga aplicada e a partir da qual se obtém:

$$K_I = P \left(\frac{E}{2} \frac{\partial C}{\partial a} \right)^{1/2} \quad (3.32)$$

no estado plano de tensão, e no estado plano de deformação:

$$K_I = P \left[\frac{E}{2(1-\nu)} \cdot \frac{\partial C}{\partial a} \right]^{1/2} \quad (3.33)$$

Determinando a "compliance" para diferentes comprimentos da fenda através da técnica dos elementos finitos, podemos obter o factor de intensidade de tensão através das equações (3.32) ou (3.33).

O factor de intensidade de tensão pode também ser determinado através da linha integral J :

$$J = \int_{\Gamma} \left(U dy - T \frac{\partial u}{\partial x} ds \right)$$

onde Γ é o contorno arbitrário junto à extremidade da fenda, figura 3.2, U a densidade de energia de deformação, u deslocamento, T é o vector força actuando na normal a Γ e ds o comprimento ao longo da linha Γ .

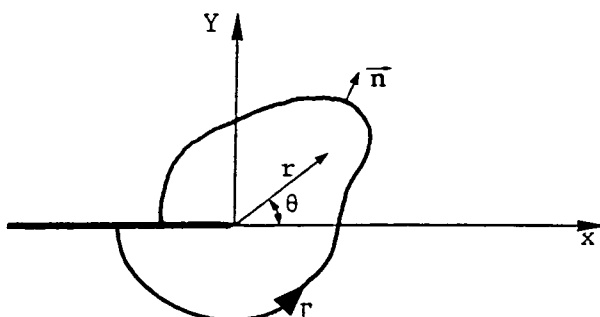


Fig. 3.2 - Contorno arbitrário Γ contendo uma fenda

Na elasticidade linear o integral J é igual a G e então, para o modo I em estado plano de tensão, será:

$$K_I = (J E)^{1/2}$$

e para o estado plano de deformação:

$$K_I = \left(\frac{J E}{1 - \nu} \right)^{1/2}$$

O integral J pode então ser determinado numericamente através dos elementos finitos, considerando a discretização em torno da extremidade da fenda, e consequentemente, a determinação do factor de intensidade de tensão.

Para uma malha com dimensões idênticas, o factor de intensidade de tensão calculado através do integral J dá, na maioria dos casos, melhores aproximações que os métodos da tensão ou deslocamento [42].

3.2.6.3 - Utilização de Elementos Especiais

Existem vários tipos de elementos especiais utilizados para a determinação do factor de intensidade de tensão e aplicados a diversas configurações [42], podendo distinguir-se dois grupos:

- No primeiro, a extremidade da fenda é incluída no interior do elemento, figura 3.3

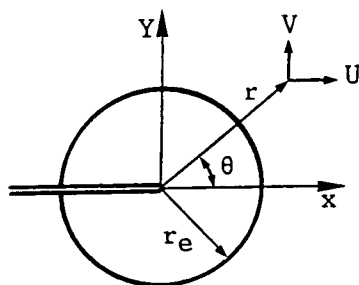


Fig. 3.3 - Elemento circular contendo a extremidade da fenda

- No segundo grupo consideram-se elementos em que um dos pontos nodais coincide com a extremidade da fenda, como mostra a figura 3.4

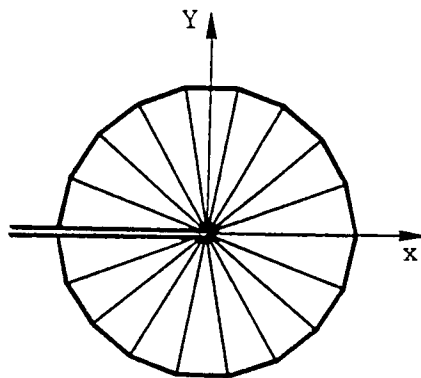


Fig. 3.4 - Elementos triangulares com um nó na extremidade da fenda.

Estes métodos, utilizando elementos especiais, requerem menos elementos que os métodos anteriores, obtendo-se soluções mais precisas, embora se exija algumas modificações no programa standard de elementos finitos.

Normalmente, estes elementos especiais são colocados junto à extremidade da fenda, utilizando-se elementos convencionais no resto da estrutura.

3.2.7 - MÉTODOS DE FRONTEIRA

Os métodos de fronteira são dos que mais se têm desenvolvido ultimamente, sendo normalmente descritos por:

- Método dos elementos de fronteira
- Método das equações integrais de fronteira
- Método das forças de volume

sendo as soluções numéricas, normalmente, de dois tipos:

- Métodos diferenciais, incluindo elementos finitos
- Métodos integrais.

Esta técnica envolve a sobreposição de soluções particulares das equações diferenciais, considerando dois tipos de formulação, a directa e a indirecta [43].

Na formulação directa, as funções desconhecidas na equação integral são as tensões e/ou deslocamentos na fronteira. A solução numérica da equação integral dá directamente as tensões na fronteira.

No método indirecto as informações fictícias são distribuídas através de determinadas fronteiras e o problema é resolvido em termos da densidade de informações, de modo a que as condições de fronteira são satisfeitas em torno da região física considerada (embebida).

Outras soluções têm sido apresentadas, quer através da conjugação dos métodos directos e indirectos, quer através de métodos chamados semi-directos, cujas referências podem ser encontradas em [15], ou ainda, casos como a combinação do método indirecto com a transformação conforme, e que dá aproximações muito precisas [44].

Ultimamente têm sido apresentados muitos trabalhos utilizando este método [45], que é especialmente preferido relativamente ao método dos elementos finitos, devido à obtenção de soluções muito rápidas, pois o número de elementos que se consideram é muito menor.

3.2.8. - MÉTODO ITERATIVO

Este método, também designado como técnica de Schwarz-Neumann [5], foi utilizado para estudar a interferência numa fenda com a superfície livre. Em princípio o método é simples, mas a sua aplicação a soluções numéricas de problemas com fendas pode tornar-se fastidiosa.

Básicamente o método conduz-nos à solução numa zona formada pela intersecção de duas regiões, através de problemas de valor de fronteira, por sobreposição iterativa de sequência de soluções. No limite, as soluções na região comum, convergem para a solução desejada.

Na sua aplicação a problemas da mecânica da fractura linear elástica, uma solução auxiliar (primeira solução) será aquela em que se considera a fenda solicitada numa placa infinita e a outra (segunda solução) será a de uma placa contendo uma fronteira (B) sujeita a uma distribuição de tensões arbitrária. A partir do conhecimento das condições de fronteira na fenda, a primeira solução é utilizada para calcular as tensões através da linha (L) onde as tensões de fronteira vão ser introduzidas. A segunda solução é

então sobreposta com as tensões em B ajustada de modo a anular as existentes na linha L. Obtemos então L livre de tensões, mas introduzindo tensões residuais na fronteira da fenda. A segunda solução é novamente utilizada e o processo é repetido até que as conhecidas condições de fronteira sejam satisfeitas e as tensões em L sejam desprezáveis. O factor de intensidade de tensão é obtido pela adição dos efeitos de remoção das tensões da fenda em cada etapa do processo, utilizando funções de Green.

A determinação do factor de intensidade de tensão por este método foi utilizado em algumas aplicações [46] quer para problemas bidimensionais quer tridimensionais. Outras referências podem ser encontradas em [20].

3.2.9. - MÉTODO DE SOBREPOSIÇÃO

A determinação do factor de intensidade de tensão para configurações complexas, quer através de métodos teóricos quer experimentais, podem envolver custos muito elevados.

Procurando resolver este problema, Rooke e Cartwright estabeleceram o método em epígrafe, aplicando-o a configurações com fendas podendo ter várias fronteiras, como por exemplo furos ou outras fendas, que vão influenciar o factor de intensidade de tensão.

A determinação do factor de intensidade de tensão por este processo, consiste na decomposição da configuração complexa em configurações mais simples, solicitadas do mesmo modo, e para as quais se conhecem as respectivas soluções, tendo Rooke e Cartwright [47] demonstrado que as soluções das configurações auxiliares podem ser "compostas", para obter a solução pretendida K_r , de acordo com a equação:

$$K_r = K_0 + \left[\sum_{n=1}^N (K_n - K_0) \right] + K_e \quad (3.34)$$

onde K_0 é o factor de intensidade de tensão, considerando a ausência de todas as fronteiras e para uma determinada solicitação. $K_0 = \sigma (\pi a)^{1/2}$ para tensões remotas ou fendas submetidas a pressão, e $K_0 = P (\pi a)^{-1/2}$ para cargas

pontuais. K_n é o factor de intensidade de tensão para cada uma das configurações divididas e K_e tem em conta a interacção entre fronteiras.

Dividindo (3.34) por K_0 obtemos a expressão adimensional:

$$\frac{K_r}{K_0} = 1 + \left[\sum_{n=1}^N \left(\frac{K_n}{K_0} - 1 \right) \right] + \frac{K_e}{K_0} \quad (3.35)$$

Portanto se conseguirmos determinar K_e ou considerarmos esse valor muito pequeno e, consequentemente ser desprezado, a equação (3.35) permite-nos determinar o factor de intensidade de tensão pretendido.

A eliminação de K_e conduz-nos a imprecisões que são menores que 10%, podendo em alguns casos [48] ser menor que 5%.

Existindo publicações [11, 12, 13] que nos dão o factor de intensidade de tensão para várias configurações e solicitações, facilmente se conseguem soluções, aplicando este método, para outros casos mais complexos.

Como exemplo [15] considere-se a placa da figura 3.5a), sujeita à tensão remota σ e para a qual se pretende determinar o factor de intensidade de tensão nas extremidades da fenda A e B.

Considerando o problema como sobreposição das figuras 3.5 b) a d), a solução de cada caso b) a d) podem ser encontradas em [11], secções 1.3.7, 1.3.5 e 1.1.11 respectivamente.

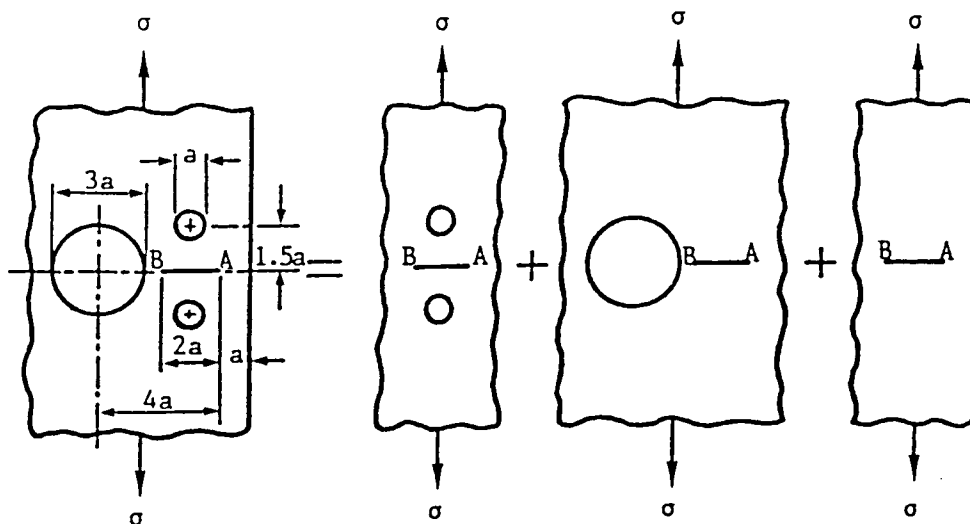


Fig. 3.5a) Configuração do problema; b) - d) Decomposição.

Assim, para a extremidade A, tiramos:

$$\frac{K_b}{K_o} = 0,880 ; \frac{K_c}{K_o} = 1,201 ; \frac{K_d}{K_o} = 1,091$$

e aplicando a equação (3.35), desprezando K_e , obtemos

$$\frac{K_r}{K_o} = 1,172$$

Para a extremidade B, vem

$$\frac{K_b}{K_o} = 0,880 ; \frac{K_c}{K_o} = 1,561 ; \frac{K_d}{K_o} = 1,056$$

obtendo

$$\frac{K_r}{K_o} = 1,497$$

3.3 - MÉTODOS EXPERIMENTAIS

3.3.1 - INTRODUÇÃO

A análise experimental das tensões e deformações, que é a base da mecânica experimental, utiliza vários métodos tais como a extensometria, fotoelasticidade, franjas de Moiré, cáusticas e outros métodos ópticos, raios x, ultrasons, emissão acústica, métodos energéticos, etc.

Em princípio, qualquer método que permita calcular tensões ou deslocamentos pode ser aplicado à determinação experimental do factor de intensidade de tensões.

Nos métodos experimentais o factor de intensidade de tensões não pode ser medido directamente, mas pode ser obtido através das relações entre K e a quantidade medida, tais como a tensão, a deformação, a

compliance ou os deslocamentos. Alguns destes métodos só são utilizados em laboratório embora existam outros que podem ser aplicados directamente a estruturas em serviço.

Com o intuito de não ser muito fastidioso, vamos abordar alguns tópicos dos métodos que poderão ser mais facilmente utilizados

3.3.2 - EXTENSOMETRIA

O uso da extensometria é um processo largamente utilizado para a determinação do factor de intensidade de tensões. Colocando os extensómetros junto à extremidade da fenda, tendo o cuidado de ficarem exteriores à zona de deformação plástica, podem medir-se as deformações ϵ_x e ϵ_y . Sabidas estas, podemos determinar as tensões

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) ; \sigma_y = \frac{E}{1 - \nu} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x)$$

e consequentemente determinar K.

A primeira dúvida que surge, relativamente à precisão do método, tem a ver com o tamanho do extensómetro. Se nos situarmos alguns anos atrás, podemos dizer que este método não daria valores muito precisos [19]. Entretanto, com o desenvolvimento de novas tecnologias, novos extensómetros foram concebidos [49, 50]. Assim, existem hoje extensómetros muito pequenos, atingindo as dimensões 0.2 x 0.1 mm. Outros com formas especiais, como por exemplo o extensómetro "Pecker", que tem uma ponta que lembra o bico dum pica-pau e que pode ser utilizado a altas temperaturas, podendo ser utilizado para medir tensões térmicas em estruturas como, por exemplo, turbinas a vapor, caldeiras, etc.. Para aplicações debaixo de água, outros extensómetros foram idealizados, podendo ser utilizados para temperaturas que variam de - 150°C a + 120°C, podendo dizer-se hoje que o método da extensometria dá boas precisões relativas.

3.3.3 - COMPLIANCE

Vimos em 3.2.6.2. que a taxa de libertação de energia de deformação é dada por

$$G = \frac{P^2}{2} \frac{\partial C}{\partial A} \quad (3.36)$$

sendo A a área da fenda.

O factor de intensidade de tensões, em estado plano de tensão, será

$$K_I = P \left[\frac{E}{2} \cdot \frac{\partial C}{\partial A} \right]^{1/2} \quad (3.37)$$

e no estado plano de deformação

$$K_I = P \left[\frac{E}{2(1-\nu)} \cdot \frac{\partial C}{\partial A} \right]^{1/2} \quad (3.38)$$

Determinando experimentalmente a "compliance" para uma gama de comprimentos da fenda, o factor de intensidade de tensões pode ser determinado a partir das equações (3.37) e (3.38). Este método necessita de muito cuidado no cálculo da "compliance" para se obterem resultados satisfatórios.

3.3.4 - TAXA DE PROPAGAÇÃO DA FENDA

Embora anteriormente a 1961 tenham sido propostas várias leis empíricas de propagação de fendas, só nessa data Paris [51] admitiu que o factor de intensidade de tensões devia estar relacionado com a taxa de propagação da fenda através da expressão

$$\frac{da}{dN} = f(\Delta K) \quad (3.39)$$

onde N é o número de ciclos por segundo e ΔK a amplitude do factor de intensidade de tensões, que é:

$$\Delta K = K_{\text{máx}} - K_{\text{min}}$$

A grande quantidade de experiências que se efectuaram desde que Paris propôs a sua lei, mostram que ela não é inteiramente válida para toda a gama dos valores ΔK . Isto significa que se representamos $\frac{da}{dN}$ em função de ΔK em escalas logarítmicas essa relação não é linear mas sigmoidal, figura 3.6, sendo a equação (3.39) válida só na região II. Na região I os resultados indicam uma dependência muito acentuada de $\frac{da}{dN}$ com ΔK , havendo um limite mínimo de propagação ΔK_{th} , e na região III a velocidade de propagação aumenta dum modo significativo na vizinhança do valor crítico do factor de intensidade de tensões. Procurando resolver este problema, outras equações apareceram [52, 53, 54] para correlacionar os resultados experimentais obtidos nas zonas limites da curva de propagação.

Para determinar o factor de intensidade de tensões, faz-se o teste de fadiga para um modelo do qual se conhece K . A partir da taxa de propagação

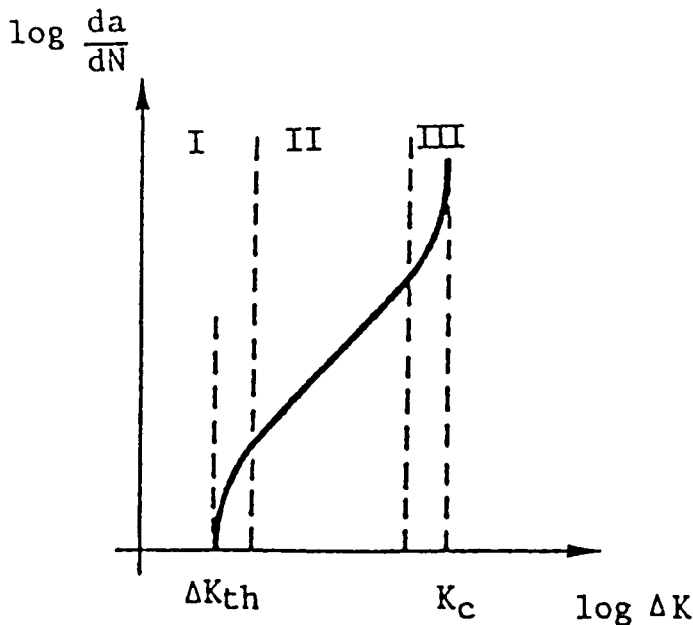


Fig. 3.6 - Representação esquemática da curva de propagação $\frac{da}{dN}$, ΔK

da fenda observada no modelo considerado, o factor de intensidade de tensões pode ser determinado para a estrutura com o mesmo material através da equação (3.39).

3.3.5 - MÉTODOS ÓPTICOS

Os métodos ópticos, utilizados para a determinação do factor de intensidade de tensões, podem considerar-se subdivididos em dois grupos:

- um, que permite a determinação de K a partir do estado de tensão como, por exemplo, a fotoelasticidade, o método cáustico e a interferometria
- outro, a partir do campo de deslocamentos como, por exemplo, a técnica da granularidade e o método de Moiré.

A determinação do factor de intensidade de tensões utilizando a fotoelasticidade é um dos processos experimentais bastante utilizado, não só devido ao fácil manuseamento do seu equipamento, mas também pela facilidade de obtenção dos modelos em materiais birrefringentes.

O método consiste na análise das franjas isocromáticas, que nos dão linhas de igual tensão de corte máxima, que pode ser relacionada com os factores de intensidade de tensão e consequentemente a determinação destes, quer em problemas bidimensionais, quer tridimensionais.

Uma vez que o trabalho proposto é a utilização dum método fotoelástico, será conveniente passarmos em revista, um pouco mais detalhadamente, os vários métodos conhecidos. Por isso estes processos serão analisados, separadamente, no capítulo seguinte.

Os primeiros estudos experimentais, na mecânica da fractura, utilizando o método cáustico, foram feitos por Manogg [55] sobre materiais transparentes, sendo mais tarde aplicados a materiais opacos [56, 57] por reflexão.

O princípio do método baseia-se no facto de que, quando um feixe de raios luminosos incide normalmente à superfície duma placa transparente com fenda, não carregada, esses raios atravessam-na e manter-se-ão paralelos. Se agora considerarmos a placa solicitada, existirá na extremidade da fenda uma grande concentração de tensões, que originará uma alteração no índice de refração do material, bem como na espessura do modelo e, à saída do modelo a luz incidente desviar-se-á, como mostra a figura 3.7.

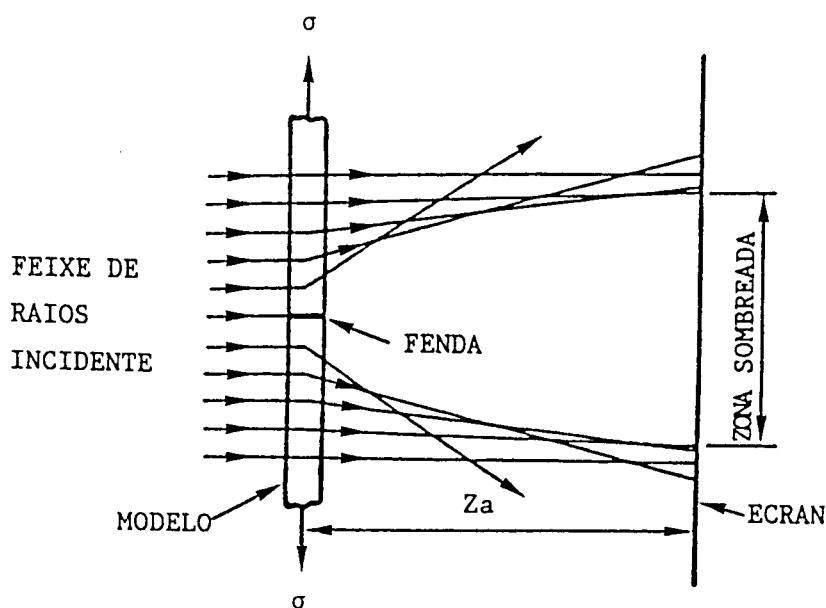


Fig. 3.7 - Princípio de formação dum caústico

Colocando um ecran a uma determinada distância do modelo observa-se uma zona sombreada que constitui o cáustico. Através da proporcionalidade do diâmetro transversal do caústico e das tensões determinam-se os factores de intensidade de tensão, quer em modo I [58,59] quer em modo misto [60].

Este método requer cuidados experimentais especiais, pois é necessário que as faces do modelo sejam rigorosamente planas e paralelas e as superfícies sejam perfeitamente polidas. A precisão do método situa-se entre 5% e 10% [56].

Outro dos métodos que utiliza a distribuição de tensões para a determinação de K é a interferometria, que pode ser considerada como clássica e interferometria holográfica.

Na interferometria clássica as franjas obtidas resultam da combinação das isocromáticas (onde $\sigma_1 - \sigma_2$ é constante) com as isopáticas (onde $\sigma_1 + \sigma_2$ é constante). Com o intuito de obter sómente as franjas isopáticas, consideram-se materiais pouco birrefringentes, e, utilizou-se interferometria holográfica para eliminar as isocromáticas. Um primeiro método [61] consiste em fazer atravessar duas vezes o modelo pelo feixe luminoso em incidência quase normal. Antes de se efectuar a segunda

passagem, o feixe é submetido à acção dum "poder rotativo". O conjunto modelo - "poder rotativo" comporta-se então como um modelo sem birrefringência de espessura dupla. Um outro método consiste em considerar a face de entrada do modelo semi-reflectora [62]. A parte reflectida é registada por holografia em dupla exposição e as franjas traduzem os deslocamentos perpendiculares à placa, ou seja as variações de espessura do modelo, com a condição de que o plano médio do modelo se mantenha constante durante a solicitação. Assim a partir do conhecimento das franjas isopáticas e da sua relação com o factor de intensidade de tensões, este pode ser determinado [63, 64]. Por comparação com a fotoelasticidade, a interferometria holográfica é uma técnica óptica mais demorada e delicada, o que pode explicar a limitação deste método ao estudo só em modo I.

Como se sabe a determinação do factor de intensidade de tensões, pode ser obtido a partir do conhecimento dos deslocamentos junto à extremidade da fenda. Dois métodos experimentais utilizados para a determinação desses deslocamentos são: a técnica de Moiré (melhorada pela holografia) e que foi utilizada para a determinação do COD numa placa de alumínio solicitada em modo misto [65] e a técnica de granularidade que foi aplicada para a determinação do factor de intensidade de tensões num modelo solicitado em modo I [66], podendo, no entanto, ser aplicado também em modo misto.

4.3 - CONCLUSÃO

Agora põe-se o problema da escolha do método para a determinação dos factores da intensidade de tensões.

Para geometrias simples ou algumas complexas cujos modelos são fáceis de obter, deve-se verificar, em primeiro lugar, se o factor de intensidade de tensões pode ser determinado através das referências [11, 12, 13]. A seguir, ter-se-à de ponderar, atendendo às vantagens e desvantagens duns sobre os outros, algumas das quais já foram enumeradas na descrição dos métodos. Atendendo à existência de computadores cada vez mais potentes, os métodos numéricos são, neste momento, capazes de resolverem a grande maioria dos problemas bidimensionais, embora exista uma certa limitação na solução dos tridimensionais. Além disso, para estas técnicas serem preferíveis relativamente a outras, terá de atender-se à disponibilidade ou não de programas, ao tempo e custos de computação para

obter as soluções e que podem, por isso, não serem "rentáveis". Existem ainda outros problemas da mecânica da fractura que envolvem plasticidade, viscoplasticidade e elasticidade dinâmica, onde as técnicas analíticas e numéricas são menos capazes que os métodos experimentais, especialmente os processos ópticos. Estes, e dum modo particular a fotoelasticidade e a técnica da granularidade, podem ser utilizados com facilidade na análise em modo misto e tridimensional, ou ainda em configurações complexas para verificar resultados obtidos pelos métodos teóricos. Outros, como por exemplo, o que utiliza a taxa de propagação da fenda, embora sejam mais sensíveis à introdução de erros, são no entanto preferíveis para o cálculo do factor de intensidade de tensões para estruturas em serviço.

Portanto, poder-se-à concluir que a escolha dum método para a determinação dos factores de intensidade de tensões deve ser ponderado, atendendo: ao tempo disponível, à precisão que se requer, aos custos que o processo envolve, à sua utilização (uma ou mais vezes) ou ainda à facilidade de obtenção dos modelos.

4- DETERMINAÇÃO DOS FACTORES DE INTENSIDADE DE TENSÃO K_I E K_{II} ATRAVÉS DA FOTOELASTICIDADE

4.1 - INTRODUÇÃO

Poucos são os problemas que, na mecânica da fractura, admitem uma solução exacta. Por isso, utilizam-se muitas vezes os métodos numéricos (elementos finitos, equações integrais, etc) e os métodos experimentais para a determinação dos factores de intensidade de tensão.

Os métodos experimentais, nomeadamente a fotoelasticidade, além de permitirem uma verificação dos resultados obtidos numericamente, oferecem-nos ainda a possibilidade de tratar certos problemas que são difíceis de esquematizar por uma técnica numérica (corpos e condições de fronteira de geometrias complexas, por exemplo).

Sempre que um fenómeno é reproduzido em laboratório, coloca-se, o problema da semelhança, por isso mostrar-se-á que na mecânica da fractura linear elástica a semelhança entre o modelo e o seu protótipo é rigorosa.

A seguir, apresentar-se-ão as diversas técnicas de determinação dos factores de intensidade de tensão, quer em modo I quer em modo misto, utilizando a fotoelasticidade. Para cada um destes métodos, faz-se uma breve descrição do seu princípio, que permite a determinação de K_I e K_{II} através de informações recolhidas na vizinhança da fenda.

4.2 - SEMELHANÇA EM MECÂNICA DA FRACTURA

Sempre que um problema é tratado experimentalmente, é necessário assegurar que as condições de semelhança permitem passar para o protótipo os resultados obtidos pelo estudo do modelo.

Os critérios de semelhança são obtidos a partir da homogeneidade dimensional [67].

Assim, considere-se a figura 4.1, onde b , h e t são dimensões e F a carga aplicada, designando os índices m e p grandezas correspondentes ao modelo e protótipo respectivamente.

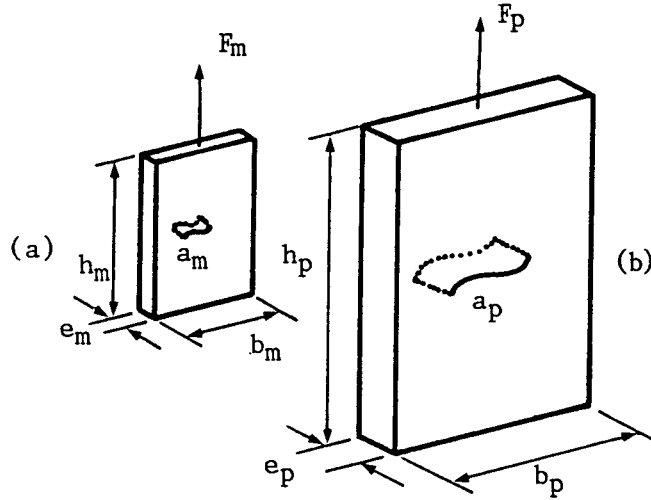


Fig. 4.1 - Nomenclatura geométrica para o modelo (a) e o protótipo (b)

O factor de intensidade de tensão K_m , determinado pela medida da carga e pelas dimensões do provete, será:

$$K_m = Y_m \frac{F_m}{e_m b_m} (\pi a_m)^{1/2}$$

sendo Y_m o factor geométrico, já definido em (2.13).

O factor de intensidade de tensão para o protótipo obtem-se [67] pela expressão

$$K_p = S_y^{-1} \cdot S_F^{-1} \cdot S_L^{3/2} \cdot K_m$$

onde

S_y é o factor de forma e, supondo o modelo e protótipo semelhantes,
 $S_y = 1$

$S_F = \frac{F_m}{F_p}$ é o factor de carga

$S_L = \frac{h_m}{h_p} = \frac{b_m}{b_p} = \frac{e_m}{e_p}$ é o factor correspondente à escala das dimensões

obtendo

$$K_p = \frac{F_p}{F_m} \cdot S_L^{3/2} \cdot K_m \quad (4.1)$$

que nos mostra que, na mecânica da fractura, a semelhança é rigorosa e que os resultados obtidos em laboratório são facilmente transportáveis para a estrutura real.

A equação (4.1) mostra-nos que, para a mesma carga aplicada ao modelo e protótipo e $S_L < 1$, o valor do factor de intensidade de tensão no protótipo é inferior ao do modelo.

4.3 - PRINCIPIOS GERAIS

Desde 1951 que Post [68] utilizou a fotoelasticidade para estudar a concentração de tensões junto à extremidade de uma fenda em modo I.

Well e Post estudaram, em seguida, a aplicação da fotoelasticidade ao estudo da fissuração dinâmica [69, 70].

Desde então, muitos foram os trabalhos apresentados para a determinação do factor de intensidade de tensão através da análise fotoelástica.

As franjas isocromáticas obtidas em modelo birrefringente fornecem linhas de igual tensão máxima τ_m , tal que, em problemas bidimensionais, se obtem:

$$(2 \tau_m)^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (2 \tau_{xy})^2 \quad (4.2)$$

e a partir da lei optico-mecânica de Haxwell, temos

$$2\tau_m = \frac{Nf\sigma}{e} \quad (4.3)$$

sendo

N - a ordem da franja isocromática

f_{σ} - a constante fotoelástica do material

e - a espessura do modelo birrefringente

A configuração das isocromáticas na extremidade da fenda é diferente para cada um dos modos de fractura [71], tendo sido idealizados vários métodos de determinação de factores de intensidade de tensões através da análise das franjas.

4.4. - DETERMINAÇÃO DO FACTOR DE INTENSIDADE DE TENSÃO EM MODO I

Considerando as equações do tensor das tensões definidas em (2.11), não esquecendo a componente σ_{ox} na direcção da fenda, e, atendendo à equação (4.2), obtemos a expressão da tensão de corte máxima τ_m em função de K_I e σ_{ox} na extremidade da fenda:

$$(2 \tau_m)^2 = \left(\frac{K_I^2}{2\pi r} \right) \cdot \sin^2 \theta + \frac{2K_I \sigma_{ox}}{(2\pi r)^{1/2}} \cdot \sin \theta \cdot \sin \frac{3\theta}{2} + \sigma_{ox}^2 \quad (4.4)$$

4.4.1 - MÉTODO DE IRWIN

Irwin [4,70] foi o primeiro a apresentar um método original para a determinação do factor de intensidade da tensão K_I através da análise das franjas isocromáticas.

Para uma fenda solicitada em modo I, as isocromáticas são curvas que se fecham sobre a extremidade da fenda, figura 4.2.

O raciocínio de Irwin é baseado nesta geometria particular dos isocromáticas. Sobre o círculo de raio r_m tangente à curva, existe um ângulo θ_m onde τ_m é máximo.

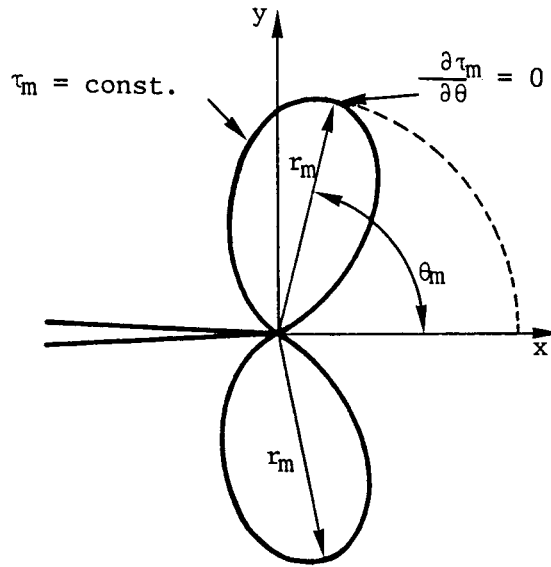


Fig. 4.2 - Características geométricas das franjas isocromáticas

Neste ponto , de coordenadas (r_m, θ_m) , temos então

$$\frac{\partial \tau_m}{\partial \theta_m} = 0 \quad (4.5)$$

Temos então duas equações (4.4) e (4.5), que nos permitem determinar K_I e σ_{ox} :

$$K_I = \frac{2\tau_m (2\pi r_m)^{1/2}}{\sin \theta_m} \left[1 + \left(\frac{2}{3 \operatorname{tg} \theta_m} \right)^2 \right]^{-1/2} \left(1 + \frac{2 \operatorname{tg} \frac{3\theta_m}{2}}{3 \operatorname{tg} \theta_m} \right) \quad (4.6)$$

$$\sigma_{ox} = \frac{-2 \tau_m \cos \theta_m}{\cos \frac{3\theta_m}{2} \left(\cos^2 \theta_m + \frac{9}{4} \sin^2 \theta_m \right)^{1/2}} \quad (4.7)$$

Note-se que a inclinação das franjas isocromáticas ($\theta_m \neq 0$) traduz a existência da tensão σ_{ox} na direcção da fenda (caso dum corpo solicitado em tracção uniaxial). Para a tracção biaxial (modelo de Westergaard) σ_{ox} é nula e então o ponto de coordenadas (r_m, θ_m) encontra-se sobre o eixo dos yy.

Vimos já que o factor de intensidade de tensão em modo I é sempre positivo, o que conduz a limitar o método ao intervalo $69,4^\circ < \theta_m < 148,8^\circ$, figura 4.3.

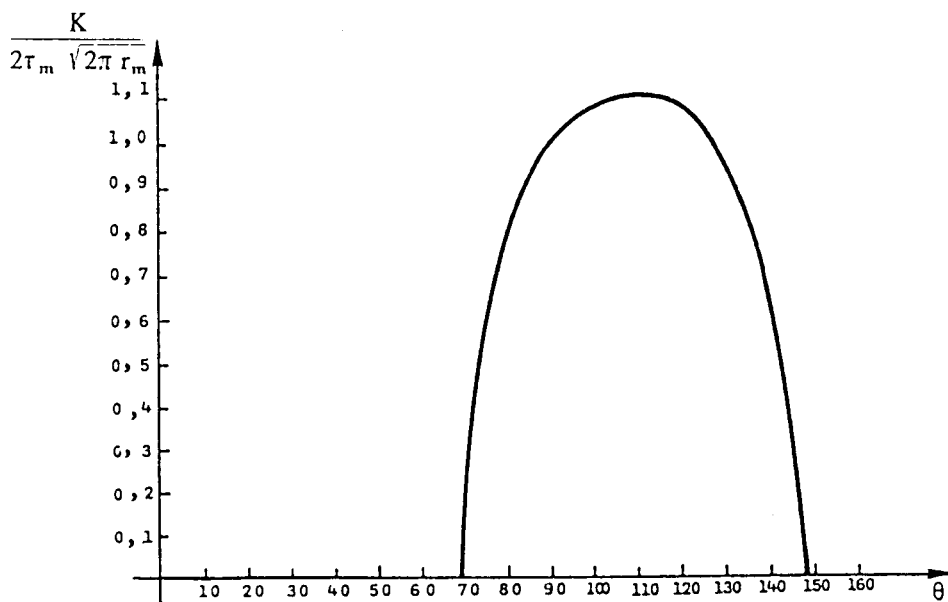


Fig. 4.3 - Variação do factor de intensidade de tensões em função de θ_m .

De referir, ainda, que o intervalo anteriormente indicado, para uma maior precisão e segundo vários autores [74, 75, 76], deve ser mais reduzido.

4. 4. 2. - MÉTODO DAS DIFERENÇAS DE SCHROEDL E SMITH

Com o intuito de reduzir a complexidade da expressão que exprime

τ_m em função de K_I e σ_{ox} , Schroedl e Smith [72] consideraram $\theta = \frac{\pi}{2}$ (sobre o eixo dos yy). Então a tensão de corte máximo (4.4) transforma-se na expressão:

$$(2 \tau_m)^2 = \frac{K_I^2}{2\pi r} + \frac{K_I \sigma_{ox}}{(\pi r)^{1/2}} + \sigma_{ox}^2 \quad (4.8)$$

Considerando a solução positiva de K_I , temos

$$K_I = (\pi r)^{1/2} \left[\left(8 \tau_m^2 - \sigma_{ox}^2 \right)^{1/2} - \sigma_{ox} \right] \quad (4.9)$$

e considerando que $\sigma_{ox}^2 \ll 8 \tau_m^2$, obtemos

$$K_I = (\pi r)^{1/2} \left[\sqrt{2} (2 \tau_m) - \sigma_{ox} \right] \quad (4.10)$$

O método consiste em tomar a medida sobre duas franjas sucessivas i e j e que conduz à determinação de K_I e σ_{ox} :

$$K_I = (2\pi r_i)^{1/2} \frac{(2\tau_m)_i - (2\tau_m)_j}{1 - \left(\frac{r_i}{r_j}\right)^{1/2}} \quad (4.11)$$

e

$$\sigma_{ox} = \sqrt{2} \frac{(2\tau_m)_i \left(\frac{r_i}{r_j}\right)^{1/2} - (2\tau_m)_j}{\left(\frac{r_i}{r_j}\right)^{1/2} - 1} \quad (4.12)$$

4.4.3 - TÉCNICA DE EXTRAPOLAÇÃO DE SCHROEDL E SMITH

Os autores do método anterior, propuseram um outro método [73] utilizando também pontos, na direcção do eixo perpendicular à fenda, sobre as franjas isocromáticas, mas tendo em conta medidas mais afastadas da extremidade da fenda.

A tensão de corte máxima τ_m é então expressa com a ajuda do desenvolvimento em série:

$$\tau_m = \frac{K_I}{(8\pi r)^{1/2}} + \sum_{n=0}^N B_n r^n \quad (4.13)$$

sendo B_0 proporcional à tensão σ_{0x} .

Definindo um factor de intensidade de tensão aparente K_{ap}

$$K_{ap} = (8\pi r)^{1/2} \cdot \tau_m \quad (4.15)$$

a expressão (4.13), vem

$$K_{ap} = K_I + (8\pi)^{1/2} \sum_{n=0}^N B_n r^{n+1/2} \quad (4.16)$$

A partir de valores medidos sobre o eixo dos yy , Schroedl e Smith representaram, num sistema de eixos coordenados, as variações de K_{ap} em função de $(\frac{r}{a})^{1/2}$, figura 4.4.

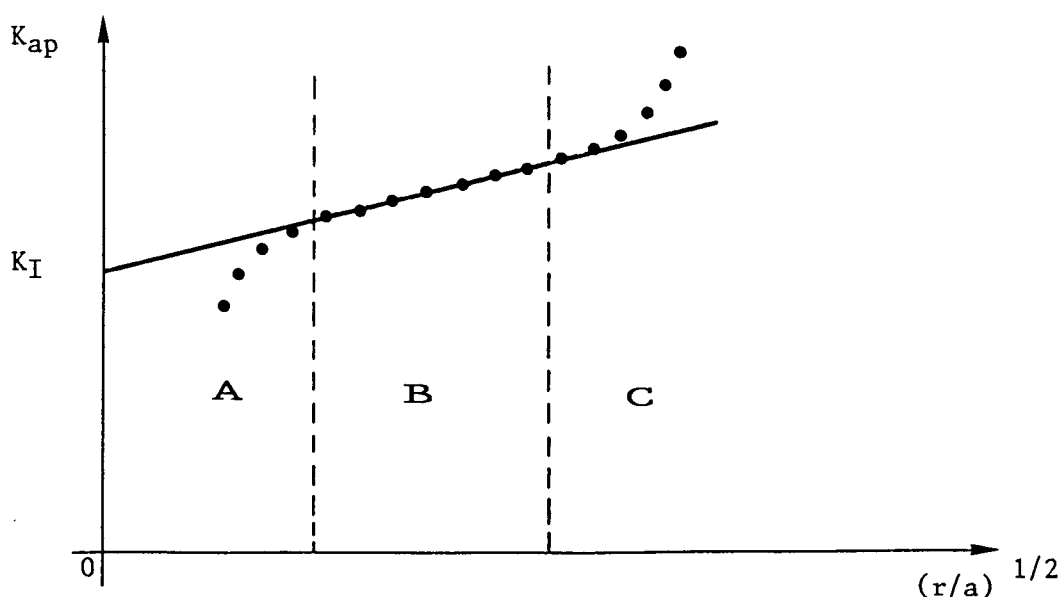


Fig. 4.4 - Determinação de K_I a partir da variação de K_{ap} .

Sobre esta curva aparecem três regiões distintas A, B e C.

- A zona A é a mais próxima da extremidade da fenda. A não linearidade é explicada pela presença duma pequena zona plástica ou ainda pelas perturbações devidas à forma ou raio de curvatura na extremidade da fenda.

- A região C, a mais afastada da extremidade da fenda, é também uma zona onde a curva é não linear. A série que exprime K_{ap} não pode ser truncada ao seu primeiro termo B_0 . É necessário ter em conta os termos de ordem superior em $r^{n+1/2}$.
- A única região linear é a B. Nesta zona de medidas K_{ap} experime-se

$$K_{ap} = K_I + (8\pi)^{1/2} B_0 r^{1/2}$$

e temos então

$$K_I = \lim_{r^{1/2} \rightarrow 0} K_{ap} \quad (4.16)$$

As medidas fotoelásticas feitas na região B permitem traçar uma recta e deduzir o valor do factor de intensidade de tensão K_I por extrapolação sobre o eixo $\left(\frac{r}{a}\right)^{1/2} = 0$.

Este método permite explicar a não linearidade na região C e apresenta a vantagem de definir o intervalo $\frac{r}{a}$ (correspondente à região B) onde os resultados experimentais são utilizáveis.

A partir dos resultados obtidos pelos mesmos autores [72] para uma fenda de comprimento a num modelo de largura b , a figura 4.5 mostra a representação da região $\frac{a}{b}$ (geometria do modelo) em função do valor $\frac{r}{a}$ correspondente ao valor do limite superior da zona B.

A razão $\frac{r}{a}$ é então utilizada entre 0,2 e 0,02.

Verifica-se ainda que este método se torna muito delicado para extremidades da fenda próximas do bordo ($\frac{a}{b}$ próximo de 1), pois o intervalo de medida é muito delicado.

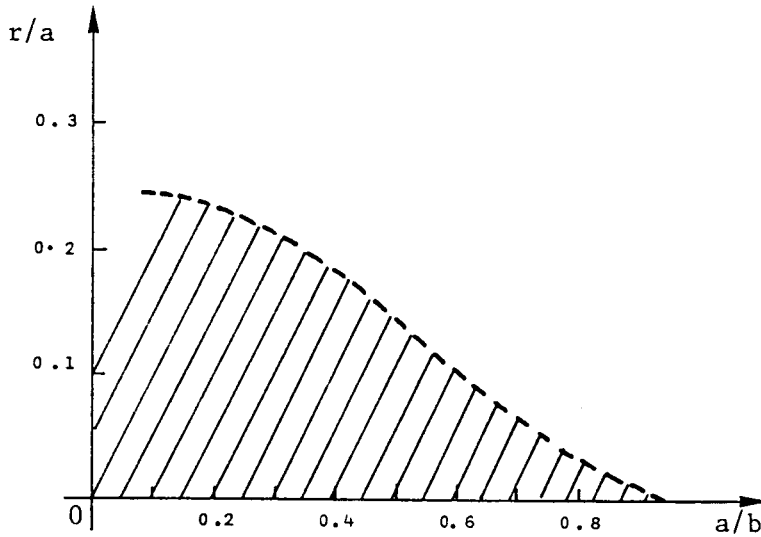


Fig. 4.5 - Limite superior da região B

4.4.4. - MÉTODO DOS TRÊS PARÂMETROS

Com o intuito de descrever dum modo mais geral o estado de tensão na vizinhança da extremidade da fenda, Etheridge e Dally [74], introduziram um novo parâmetro Ω' , tendo a função de tensão a forma

$$Z = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi z}} \left[1 + \Omega' \left(\frac{z}{a} \right) \right] \quad (4.17)$$

O termo $\frac{K_I}{\sqrt{2\pi z}}$ representa a singularidade na extremidade da fenda de comprimento $2a$ numa placa infinita e sujeita à tensão biaxial. Para uma determinação de K_I mais precisa através de modelos fotoelásticos com outras geometrias e submetidas a outros tipos de carga foi então considerado o termo $\Omega' \left(\frac{z}{a} \right)$, que pretende ter em conta o efeito de fronteira junto à extremidade da fenda. É ainda considerada a tensão

$$\sigma_{ox} = \alpha' K_I / (2\pi a)^{1/2} \quad (4.18)$$

que se acrescenta à componente da tensão σ_x (direcção paralela à fenda). Pode actuar-se sobre α' de modo a ajustá-lo ao campo de tensões afastado da extremidade da fenda para melhorar as condições de fronteira.

Substituindo as equações (4.17) e (4.18) nas equações de estado de tensão (2.9.a) e estas na equação (4.2), obtém-se, atendendo a que $z = re^{i\theta}$:

$$\tau_m^2 = \frac{K_I^2}{8\pi r} \left\{ \sin^2 \theta \left[1 - 2\Omega' \left(\frac{r}{a} \right) \cos \theta + \Omega'^2 \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] - 2\alpha' \left(\frac{r}{a} \right)^{1/2} \sin \theta \left[\sin \frac{3\theta}{2} - \Omega' \left(\frac{r}{a} \right) \sin \frac{\theta}{2} \right] + \alpha'^2 \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right\} \quad (4.19)$$

Da análise desta equação, pode concluir-se que τ_m pode considerar-se independente do comprimento da fenda ($r \ll a$) se considerarmos os parâmetros de α e Ω , tais que:

$$\Omega = \frac{\Omega'}{a}$$

$$\alpha = \frac{\alpha'}{\sqrt{a}}$$

e a equação (4.19) virá:

$$\tau_m^2 = \frac{K_I^2}{8\pi r} \left[\sin^2 \theta \left(1 - 2\Omega r \cos \theta + \Omega^2 r^2 \right) - 2\alpha r^{1/2} \sin \theta \left(\sin \frac{3\theta}{2} - \Omega r \sin \frac{\theta}{2} \right) + \alpha^2 r \right] \quad (4.20)$$

Seguindo um raciocínio idêntico a Irwin (4.4.1.) para análise das franjas isocromáticas, temos

$$\begin{aligned}
 r &= r_m \\
 \theta &= \theta_m \\
 \frac{\partial \tau_m}{\partial \theta} &= 0
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Diferenciando a equação (4.20) e utilizando as equações (4.21), obtemos

$$\alpha (r_m)^{1/2} = \frac{\sin \theta_m \cdot \cos \theta_m \left(1 - 2\Omega r_m \cos \theta_m + \Omega^2 r_m^2 \right) + \Omega r_m \sin^3 \theta_m}{\left(\cos \theta_m \cdot \sin \frac{3\theta_m}{2} + \frac{3}{2} \sin \theta_m \cdot \cos \frac{3\theta_m}{2} \right) - \Omega r_m \left(\cos \theta_m \cdot \sin \frac{\theta_m}{2} + \frac{1}{2} \sin \theta_m \cdot \cos \frac{\theta_m}{2} \right)} \tag{4.22}$$

Considerando duas franjas isocromáticas, para as quais temos θ_{m1} , θ_{m2} , r_{m1} e r_{m2} , que substituídos na equação (4.22) nos conduzem a duas equações, com a consequente eliminação de α , obtendo uma equação cúbica em Ω :

$$\begin{aligned}
 & \left[a_{41} a_{12} r_{m1} r_{m2}^2 (r_{m1})^{1/2} - a_{42} a_{11} r_{m2} r_{m1}^2 (r_{m2})^{1/2} \right] \Omega^3 \\
 & + \left[(r_{m1})^{1/2} \left(a_{41} a_{22} r_{m1} r_{m2} - a_{31} a_{12} r_{m2}^2 \right) \right. \\
 & \quad \left. - (r_{m2})^{1/2} \left(a_{42} a_{11} r_{m1} r_{m2} - a_{32} a_{21} r_{m1}^2 \right) \right] \Omega^2 \\
 & + \left[(r_{m1})^{1/2} \left(a_{41} a_{12} r_{m1} - a_{31} a_{22} r_{m2} \right) \right. \\
 & \quad \left. - (r_{m2})^{1/2} \left(a_{42} a_{11} r_{m2} - a_{32} a_{21} r_{m1} \right) \right] \Omega \\
 & + \left[(r_{m2})^{1/2} (a_{32} a_{11}) - (r_{m1})^{1/2} (a_{31} a_{22}) \right] = 0
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

onde

$$a_{1i} = \sin \theta_{mi} \cdot \cos \theta_{mi}$$

$$a_{2i} = \sin \theta_{mi} \cdot (\sin^2 \theta_{mi} - 2 \cos^2 \theta_{mi})$$

$$a_{3i} = \cos \theta_{mi} \cdot \sin \frac{3\theta_{mi}}{2} + \frac{3}{2} \sin \theta_{mi} \cdot \cos \frac{3\theta_{mi}}{2}$$

$$a_{4i} = \cos \theta_{mi} \cdot \sin \frac{\theta_{mi}}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\theta_{mi}}{2} \sin \theta_{mi}$$

com $i = 1$ para a isocromática mais larga e $i = 2$ para a isocromática mais pequena, figura 4.6.

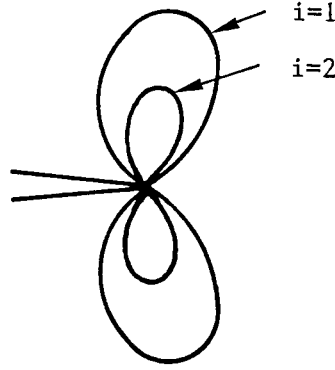


Fig. 4.6 - Geometria característica dum par de franjas isocromáticas na extremidade de uma fenda.

As três soluções da equação (4.23), são então substituídas em (4.22), obtendo três pares de valores para α e Ω que substituídos na equação (4.20) nos dá três soluções para K_I .

Para eleger a solução correcta para o factor de intensidade de tensão ter-se-à que considerar:

- K_I deve ser positivo, logo as raízes negativas de (4.20) são eliminadas.
- $\alpha < 0$ se $\theta_m < 90^\circ$ e $\alpha > 0$ se $\theta_m > 90^\circ$
- $\Omega > 0$ se $\theta_m \leq 145^\circ$ e $\Omega < 0$ se $\theta_m > 145^\circ$
- $\alpha = \Omega = 0$ quando $\theta_{m1} = \theta_{m2} = 90^\circ$

4.4.5 - MÉTODO DAS DIFERENÇAS DE BRADLEY E KOBAYASHI

Bradley e Kobayashi [75,76], modificaram a análise de Irwin, considerando que σ_{ox} era proporcional a K_I :

$$\sigma_{ox} = \frac{\delta K_I}{(\pi a)^{1/2}} \quad \text{com } \delta = \frac{\sigma_{ox}}{\sigma} \quad (4.24)$$

sendo σ a tensão remota na direção perpendicular à fenda. Substituindo (4.24) em (4.4) temos:

$$(2\tau_m)^2 = \frac{K_I^2}{2\pi r} \left[\sin^2 \theta + 2\delta \left(\frac{2r}{a} \right)^{1/2} \cdot \sin \theta \cdot \sin \frac{3\theta}{2} + \frac{2r\delta^2}{a} \right] \quad (4.25)$$

Diferenciando a equação (4.25) em ordem a θ e considerando a equação (4.5), obtém-se:

$$\delta \left(\frac{2r_m}{a} \right)^{1/2} = \frac{-\sin \theta_m \cdot \cos \theta_m}{\cos \theta_m \cdot \sin \frac{3\theta_m}{2} + \frac{3}{2} \sin \theta_m \cos \frac{3\theta_m}{2}} \quad (4.26)$$

que substituída em (4.25), conduz a:

$$K = \frac{\pm (2\pi r_m)^{1/2} \cdot (2\tau_m)}{\sin \theta_m} \left(1 + \frac{2 \operatorname{tg} \frac{3\theta_m}{2}}{3 \operatorname{tg} \theta_m} \right) \left[1 + \left(\frac{2}{3 \operatorname{tg} \theta_m} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (4.27)$$

que é uma equação idêntica a (4.6) e para a qual o sinal positivo corresponde a $69,4^\circ < \theta_m < 148,8^\circ$.

Bradley e Kobayashi verificaram que para θ_m próximo de $69,4^\circ$ ou de $148,8^\circ$ o valor de K_I se afastava do seu valor. Nesta região pequenos erros na medição de θ_m produziram grandes erros na determinação de K_I .

Para minimizar estes erros consideraram medidas sobre duas franjas (i, j) e aplicando a equação (4.25) obtiveram

$$K_I = (2\pi r_i r_j)^{1/2} \frac{(2\tau_m)_j - (2\tau_m)_i}{(f_j r_i)^{1/2} - (f_i r_j)^{1/2}} \quad (4.28)$$

com

$$f(r, \theta) = \left[\sin^2 \theta + 2\delta \left(\frac{2r}{a} \right)^{1/2} \cdot \sin \theta \sin \frac{3\theta}{2} + \frac{2r\delta^2}{a} \right]$$

4.4.6 - COMPARAÇÃO DOS MÉTODOS

Todos os métodos analisados utilizam pontos de medida sobre as franjas isocromáticas na vizinhança da extremidade da fenda, o que torna a leitura das medidas delicada.

Num estudo comparativo Etheridge e Dally [75] mostraram que estes métodos são particularmente sensíveis à precisão dos valores das coordenadas de cada ponto (r_m, θ_m) figuras 4.7 e 4.8. Neste estudo utilizaram uma placa com fenda central. Chegaram à conclusão que o seu método e o da extrapolação de Schroedl e Smith eram os que davam os resultados mais precisos, comparados com os valores exactos para uma placa com fenda central.

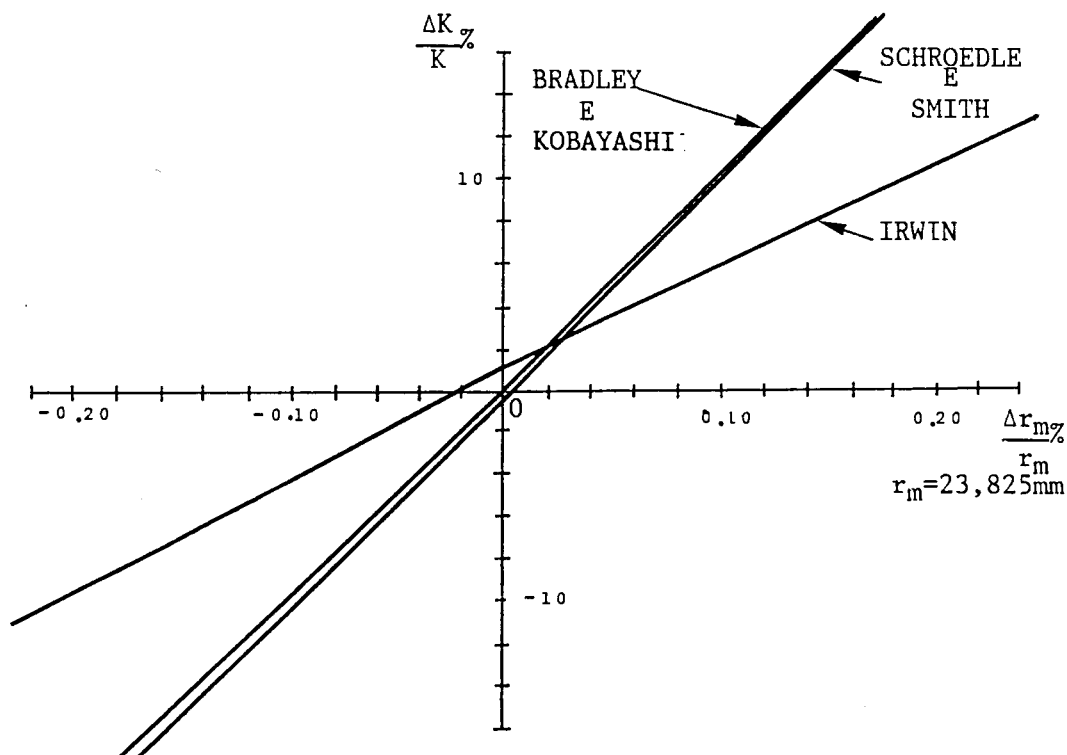


Fig. 4.7 - Comparação dos erros relativos em K_I em função do erro medido Δr_m

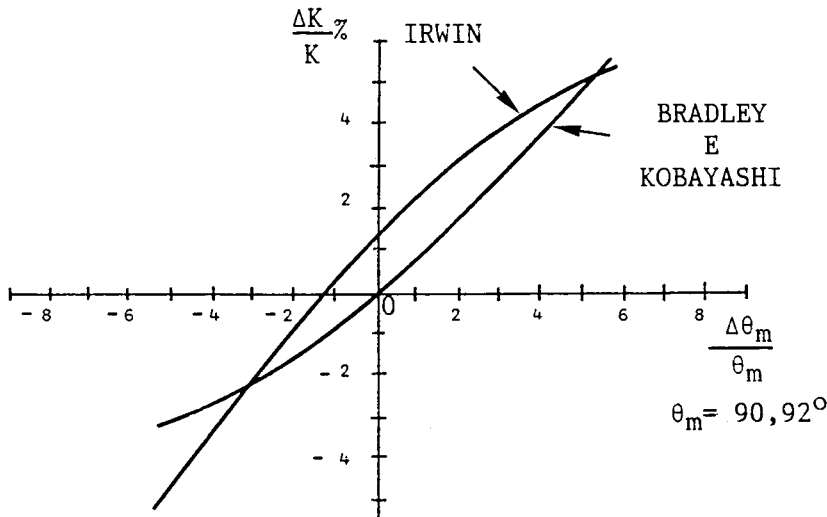


Fig. 4.8 - Comparação dos erros relativos em K_I em função do erro medido $\Delta\theta_m$

A determinação do factor de intensidade de tensão pelo método de Irwin está limitado ao intervalo $69,4^\circ < \theta_m < 148,8^\circ$ e necessitando de medidas muito precisas.

No método dos três parâmetros a principal desvantagem é a necessidade dum cálculo mais moroso, especialmente se $\theta_m < 74^\circ$ e $\theta_m > 134^\circ$.

4.5 - MODO MISTO

Quando a fenda é solicitada segundo as modos I e II simultâneamente, o tensor das tensões é igual, por aplicação do princípio da sobreposição, à soma dos tensores correspondentes a esses modos [77, 78].

A tensão de corte máxima τ_m será então:

$$(2\tau_m)^2 = \frac{1}{2\pi r} \left[(K_I \sin\theta + 2 K_{II} \cos\theta)^2 + (K_{II} \sin\theta)^2 \right] + \frac{2\sigma_{ox}}{(2\pi r)^{1/2}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \left[K_I \sin\theta (1 + 2 \cos\theta) + K_{II} (1 + 2 \cos^2\theta + \cos\theta) \right] + \sigma_{ox}^2 \quad (4.29)$$

Devido à complexidade desta equação não linear em K_I , K_{II} e σ_{ox} , os problemas da fractura em modo misto são os que têm sido menos abordados, tendo sido utilizado os métodos fotoelásticos só a partir da década de 70.

4.5.1 - MÉTODO DE SMITH D.G. E SMITH C.W.

Com este método determinam-se os factores de intensidade de tensão K_I e K_{II} , considerando $\sigma_{0x} = 0$ [79]. As franjas isocromáticas têm o aspecto da figura 4.9, fechando-se sobre a extremidade da fenda e inclinadas dum ângulo θ_m relativamente à direcção da fenda.

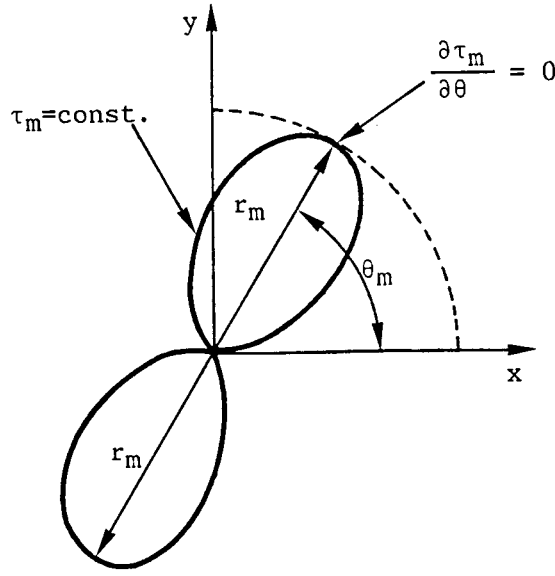


Fig. 4.9 - Características geométricas das isocromáticas em modo misto
($K_I \neq 0$, $K_{II} \neq 0$, $\sigma_{0x} = 0$)

Este método baseia-se no utilizado por Irwin para a determinação de K_I . A tensão de corte é máxima no ponto de coordenadas (r_m, θ_m) onde a sua derivada relativamente a θ_m é nula. Então, a partir da equação (4.29)

obtemos a equação quadrática em $\frac{K_{II}}{K_I}$:

$$\left(\frac{K_{II}}{K_I}\right)^2 - \frac{4}{3}\left(\frac{K_{II}}{K_I}\right)\cotg 2\theta_m - \frac{1}{3} = 0 \quad (4.30)$$

Resolvendo esta equação em ordem a $\frac{K_{II}}{K_I}$ para um determinado valor de θ_m e substituindo esses valores em (4.29), não considerando σ_{0x} , obtemos os valores de K_I e K_{II} . Devido à não inclusão de σ_{0x} , para se obter uma melhor precisão, repete-se o procedimento anterior, considerando outras

franjas cada vez mais próximas da extremidade da fenda. Traçando a variação de K_I e K_{II} em função de $\left(\frac{r}{a}\right)^{1/2}$, os valores dos factores de intensidade de tensão são obtidos por extrapolação sobre o eixo $\left(\frac{r}{a}\right)^{1/2} = 0$. Esta técnica baseia-se no método já analisado para a determinação de K , em 4.4.3.

A determinação do valor θ_m com precisão é em algumas zonas difícil devido à inclinação das franjas isocromáticas.

A figura 4.10 mostra, como varia θ_m em função de $\frac{K_{II}}{K_I}$ verificando-se que este método é particularmente sensível à precisão da consideração dos valores de θ_m para altos valores da razão $\frac{K_{II}}{K_I}$.

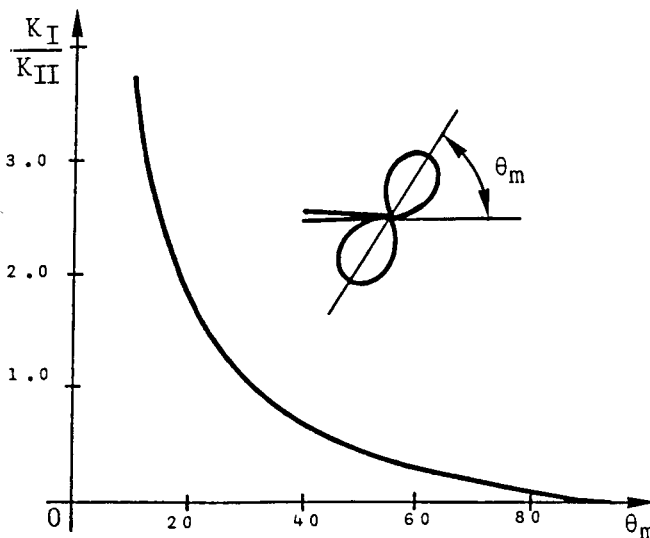


Fig. 4.10 - Variação da $\frac{K_{II}}{K_I}$ em função θ_m .

4.5.2. - MÉTODO DE THEOCARIS E GDOUTOS

A formulação de Irwin para a determinação dos factores de intensidade de tensão só é válida na vizinhança da extremidade da fenda. Devido aos problemas aqui existentes, Theocaris e Gdoutos [80, 81]

analisaram o campo de tensões em pontos mais afastados da extremidade da fenda e através de leis de extrapolação obtêm os parâmetros característicos do campo de tensões junto à extremidade da fenda.

Os autores construíram diagramas, para diferentes valores de inclinação da fenda β , onde estabeleceram a relação $(\tau_{\text{máx}}/\tau_{\text{máx}})$, onde $\tau_{\text{máx}}$ representa a tensão singular de corte máxima e $\tau_{\text{máx}}$ a tensão exacta, em função de r/a , para diferentes valores de θ . As figuras 4.11 (a) e (b) exemplificam esses diagramas para uma fenda inclinada a 45° .

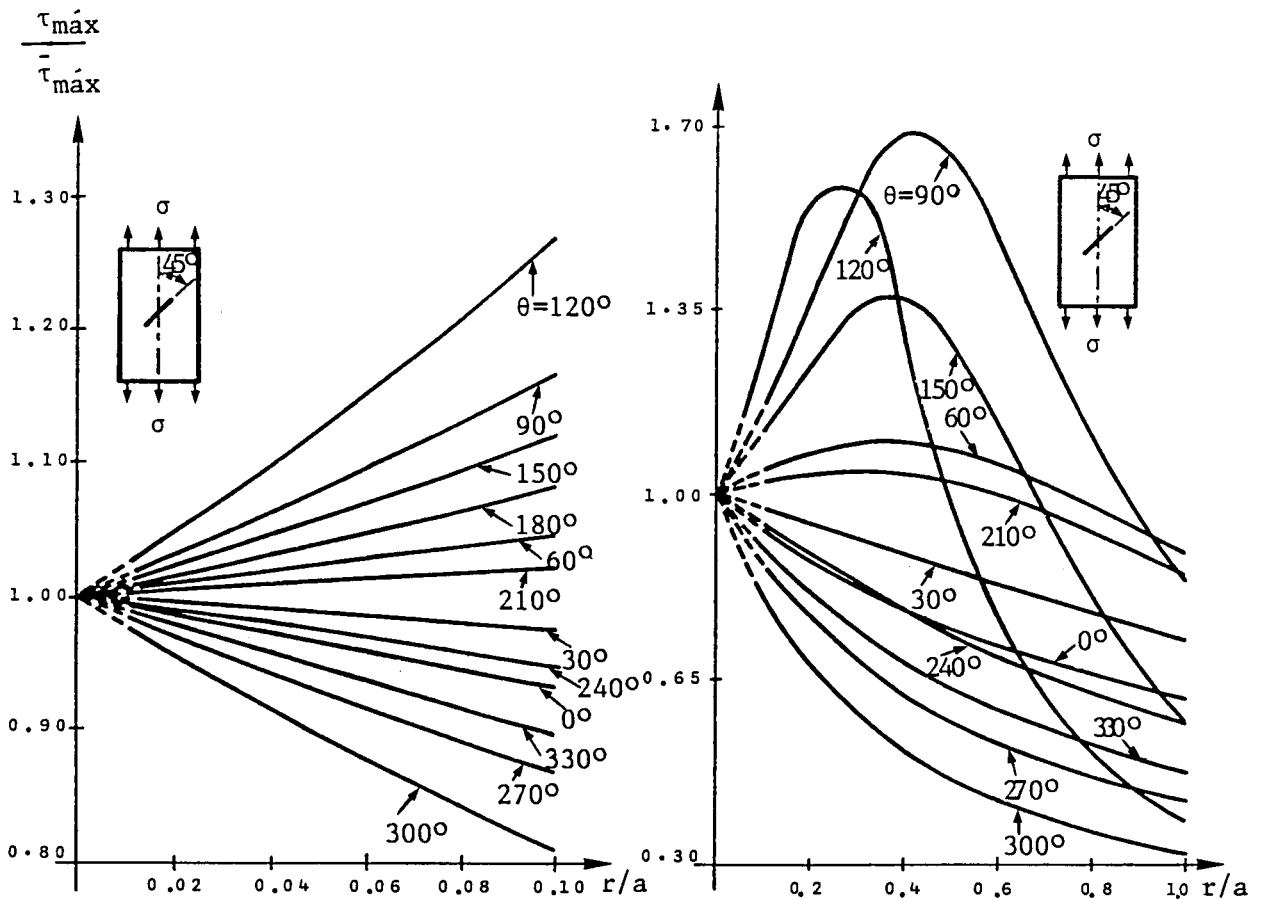


Fig. 4.11 - Variação da razão $(\tau_{\text{máx}}/\tau_{\text{máx}})$ em função de r/a .

(a) Junto à extremidade da fenda

(b) Afastado da extremidade da fenda

Então, para determinar os factores de intensidade de tensão K_I e K_{II} , seguir-se-ão os seguintes passos:

- 1.- Determinação de N_1 e N_2 da ordem da franja em dois pontos A (r_1, θ_1) e B (r_2, θ_2) fora da zona não linear da extremidade da fenda.
- 2.- A partir do conhecimento de N_1 e N_2 calculam-se as tensões de corte máximo exactas (não singulares) $(\tau_{\text{máx}})_1$ e $(\tau_{\text{máx}})_2$, sendo estes valores extrapolados, através de ábacos idênticos aos da figura 4.11, para encontrar os valores singulares da tensões de corte máximo $(\tau'_{\text{máx}})_1$ e $(\tau'_{\text{máx}})_2$ correspondentes a outros dois pontos A' (r'_1, θ'_1) e B' (r'_2, θ'_2) muito próximos da extremidade da fenda.
- 3.- Considerando agora estes dois pontos A' e B' e aplicando a equação (4.29) com $\sigma_{\text{Ox}} = 0$, determinam-se K_I e K_{II} .

4.5.3. - MÉTODO DOS TRÊS PONTOS

Os dois métodos anteriores não consideram a presença da tensão não singular σ_{Ox} . Tendo em atenção esta tensão verifica-se que a simetria das franjas isocromáticas deixa de existir, não se fechando na extremidade da fenda, mas indo intersectar a direcção da fenda, figura 4.12.

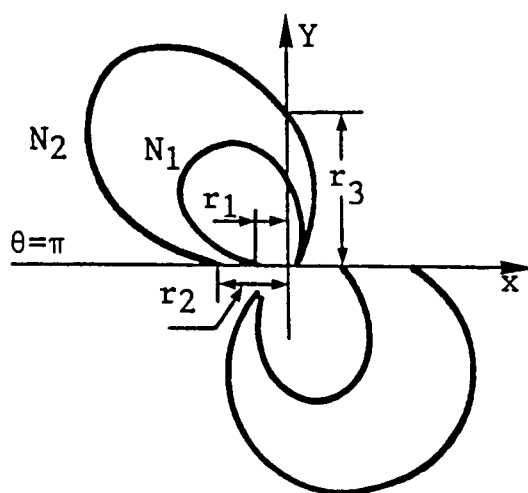


Fig. 4.12 - Geometria das franjas isocromáticas em modo misto.

O método de cálculo consiste em utilizar eixos particulares [82] que vão simplificar a equação (4.29), que exprime τ_m em função de K_I , K_{II} e σ_{Ox} .

Assim, para $\theta = \pi$, obtem-se a equação linear:

$$\left(\frac{Nf\sigma}{e}\right) = (2\tau_m) = \pm \left[\frac{2K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} + \sigma_{ox} \right] \quad (4.31)$$

Considerando duas franjas de ordens N_1 e N_2 que intersectam a direcção da fenda $\theta = \pi$ à distância r_1 e r_2 respectivamente, obtemos:

$$K_{II} = \left(\frac{f\sigma}{e}\right) \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{(r_1 r_2)^{1/2}}{(r_1)^{1/2} - (r_2)^{1/2}} (N_1 - N_2) \quad (4.32)$$

que substituída na equação (4.31) permite determinar σ_{ox}

Considerando, agora, um ponto numa isocromática sobre o eixo $\theta = \frac{\pi}{2}$

e aplicando a equação (4.29), temos a relação:

$$\left(\frac{Nf\sigma}{e}\right)^2 = \frac{1}{2\pi r} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{\sigma_{ox}}{(\pi r)^{1/2}} (K_I + K_{II}) + \sigma_{ox}^2 \quad (4.33)$$

que nos permite determinar K_I .

4.5.4. - MÉTODO ITERATIVO DE SANFORD E DALLY

Dally e Sanford [82] consideraram cerca de 20 pontos distribuídos arbitrariamente sobre as franjas isocromáticas, localizadas junto à extremidade da fenda, obtendo assim um sistema de Q equações não lineares (Q pontos de medida) a três incógnitas (K_I , K_{II} e σ_{ox}), aplicando a equação (4.29):

$$\begin{aligned} f_q(K_I, K_{II}, \sigma_{ox}, r_q, \theta_q, N_q) = & \frac{1}{2\pi r_q} \left[(K_I \sin \theta_q + 2 K_{II} \cos \theta_q)^2 + (K_{II} \sin \theta_q)^2 \right] \\ & + \frac{2\sigma_{ox}}{(2\pi r_q)^{1/2}} \sin \frac{\theta_q}{2} \left[K_I \sin \theta_q (1 + 2 \cos \theta_q) + K_{II} (1 + 2 \cos^2 \theta_q + \cos \theta_q) \right] \\ & + \sigma_{ox}^2 - \left(\frac{N_q f\sigma}{e}\right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.34)$$

com $q = 1, 2, 3, \dots, Q$.

Considerando o desenvolvimento em série de Taylor das equações (4.34), obtemos a igualdade:

$$[f] = [a] [\Delta K] \quad (4.35)$$

onde as matrizes são definidas por:

$$[f] = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_Q \end{bmatrix} \quad [a] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial K_I} & \frac{\partial f_1}{\partial K_{II}} & \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ox}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial K_I} & \frac{\partial f_2}{\partial K_{II}} & \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ox}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_Q}{\partial K_I} & \frac{\partial f_Q}{\partial K_{II}} & \frac{\partial f_Q}{\partial \sigma_{ox}} \end{bmatrix} \quad [\Delta K] = \begin{bmatrix} \Delta K_I \\ \Delta K_{II} \\ \Delta \sigma_{ox} \end{bmatrix}$$

A equação (4.35) é resolvida através do método iterativo de Newton - Raphson, associado com o processo de minimização dos mínimos quadrados [83].

4.5.5. - COMPARAÇÃO DOS MÉTODOS

Todos os métodos para a determinação dos factores de intensidade de tensão em modo misto aqui apresentados, ou não consideram o efeito da tensão não singular σ_{ox} , ou são aplicados considerando a análise de pontos sobre as franjas isocromáticas muito próximo da extremidade da fenda, normalmente $r/a < 0,2$, considerando-se mesmo que para $0,05 < \frac{r}{a} < 0,1$ o efeito σ_{ox} é muito reduzido [80].

Assim, os dois primeiros métodos determinam K_I e K_{II} considerando a tensão remota $\sigma_{ox} = 0$. O primeiro e terceiro métodos privilegiam as medidas fotoelásticas sobre os eixos particulares, necessitando, portanto, de grande precisão nas medidas de θ e r e consequentemente, da posição do sistema de eixos relativamente à direcção da fenda.

A originalidade do método de Sanford e Dally é, contrariamente aos outros métodos, de não privilegiar certos pontos de medida sobre as franjas isocromáticas e considerar o efeito da tensão não singular σ_{ox} . A consideração de vários pontos junto à extremidade da fenda, permite

minimizar os erros das medidas das coordenadas (r, θ) por efeito de média, através do método dos mínimos quadrados [83]. Este método iterativo, parece ser, pelo seu carácter geral, o que melhor se adapta à determinação, fotoelástica dos factores de intensidade de tensão, em modo misto, na vizinhança da extremidade da fenda.

5- DETERMINAÇÃO DOS FACTORES DE INTENSIDADE DE TENSÃO EM MODO I E MODO MISTO ATRAVÉS DE MEDIDAS FOTOELÁSTICAS AFASTADAS DA EXTREMIDADE DA FENDA

5.1 - INTRODUÇÃO

Como se viu anteriormente, os métodos fotoelásticos para a determinação dos factores de intensidade de tensão, requerem medidas muito próximas da extremidade da fenda ($r/a < 0.2$ para o modo I). No entanto estas medidas são muito delicadas nessa zona, não só devido à existência duma pequena zona plástica que conduz à não linearidade óptica, mas também à triaxialidade do campo de tensões na extremidade da fenda, levando-nos a uma determinação imprecisa dos factores de intensidade de tensões.

Com o intuito de resolver estas dificuldades, vamos desenvolver um método geral que permite, a partir de informações fotoelásticas mais afastadas da extremidade da fenda, obter os valores dos factores K_I e K_{II} . Este processo baseia-se na expansão das componentes do tensor das tensões em séries finitas, cujos primeiros termos são proporcionais aos factores de intensidade de tensão introduzidos por Irwin. A partir dos valores arbitrariamente recolhidos do espectro isocromático, obtemos um sistema rectangular de equações não lineares que é resolvido numericamente, associando o método iterativo de Newton - Raphson e o princípio de minimização dos mínimos quadrados.

Este método vai ser aplicado à determinação do factor de intensidade de tensão em modo I e em modo misto, sendo estes resultados comparados com os valores determinados por alguns dos processos do capítulo anterior e com a solução semi-analítica.

5.2 - PERTURBAÇÕES NA EXTREMIDADE DA FENDA

As técnicas fotoelásticas utilizadas na determinação dos factores de intensidade de tensão, analisadas anteriormente, necessitam das medidas de r e θ muito próximas da extremidade da fenda. No entanto, nesta zona, várias situações podem prejudicar a precisão dessas medidas e, conseqüentemente, conduzir a imprecisões na determinação de K_I e K_{II} .

5.2.1 - GEOMETRIA DA EXTREMIDADE DA FENDA

Na maior parte dos trabalhos fotoelásticos as fendas são feitas artificialmente, simulando a fenda real. Conforme estudo realizado por vários autores [73, 84] a geometria da extremidade da fenda tem uma grande influência sobre o campo de tensões nessa zona. Entre as várias formas analisadas destacamos a fenda de extremidade elíptica de comprimento $2a$, representada na figura 5.1, e onde se representa a variação de K_{ap} em função de $(r/a)^{1/2}$ para diferentes razões ρ/a para um corpo suposto perfeitamente elástico, sendo ρ o raio de curvatura da extremidade da fenda.

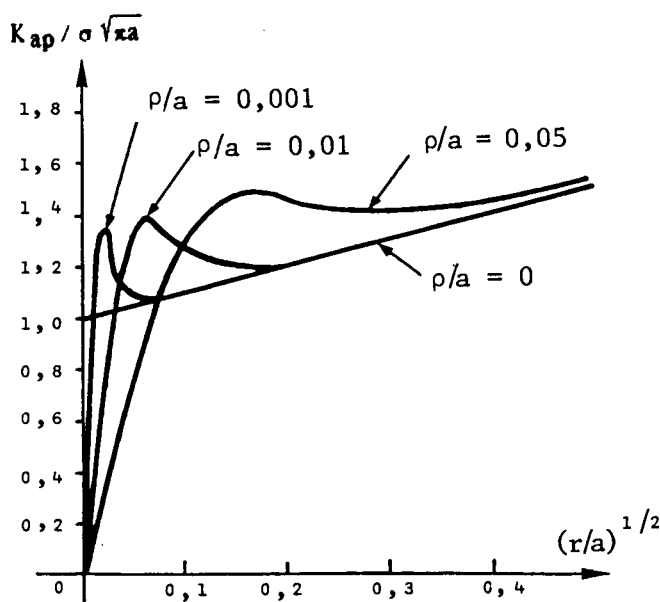


Fig. 5.1 - Influência do raio de curvatura ρ na variação de K_{ap} .

Como se pode verificar, para uma fenda infinitamente aguda ($\rho = 0$), K_{ap} é uma função linear em $r^{1/2}$. Quanto maior é o raio de curvatura, mais necessário é afastar-mo-nos da extremidade da fenda para obtermos a sobreposição das curvas com a recta $\rho = 0$. Isto significa que para uma fenda artificial ($\rho \neq 0$) as medidas efectuadas muito próximas da extremidade da fenda nos conduzem a uma determinação errada do factor de intensidade de tensão.

5.2.2 - SINGULARIDADE DAS TENSÕES

A alta concentração de tensões junto à extremidade da fenda faz com que exista uma grande densidade de franjas isocromáticas nessa zona, o que torna a sua distinção às vezes difícil. Por outro lado a pequena zona plástica existente na vizinhança da extremidade da fenda conduz à não linearidade óptico-mecânica.

5.2.3 - LOCALIZAÇÃO DA EXTREMIDADE DA FENDA

Para posicionarmos o sistema de eixos relativamente aos quais se vão efectuar as medidas é necessário localizar a ponta da fenda com precisão, o que é muitas vezes difícil, ocasionando uma certa imprecisão nos valores de r e θ .

5.2.4 - CONCLUSÃO

A partir das considerações feitas anteriormente, conclui-se que a análise de tensões pela fotoelasticidade para a solução de problemas com fendas, terá que ser feito com muito cuidado, para que os erros das medidas na extremidade da fenda sejam minimizados. Atendendo aos conhecimentos que temos até este momento, duas possibilidades se nos oferecem:

- fazer medidas muito próximas da extremidade da fenda e, portanto, obtermos valores errados ou imprecisos

- ou então, recolher informações afastadas, da ponta da fenda e aplicar a formulação de Irwin e que é também incompleto.

Para ultrapassar estas dificuldades, vamos desenvolver um método que permite a determinação dos factores de intensidade de tensão K_I e K_{II} a partir de medidas mais afastadas da extremidade da fenda, para que possamos evitar as perturbações que descrevemos anteriormente.

5.3 - TEORIA DO MÉTODO

As relações de Irwin, que põem em evidência a existência duma singularidade de tensões na ponta da fenda, não são aplicáveis a partir do momento que nos afastamos da sua extremidade. É então necessário, para aplicarmos o novo método, que reformulemos as equações que exprimem o estado mecânico dos corpos com fendas.

5.3.1 - MODO I

Vimos no Cap. 2 que para uma placa infinita contendo uma fenda central de comprimento $2a$ e solicitada em modo I a condição de simetria

$$\tau_{xy} = 0 \quad \text{em } y = 0$$

é satisfeita se as funções holomórficas $\Phi(z)$ e $\psi(z)$ são tais que:

$$x \operatorname{Im} [\Phi''(z)] + \operatorname{Im} [\psi''(z)] = 0 \quad \text{em } y = 0 \quad (5.1)$$

Reexaminando as funções de Westergaard, Sanford [85] mostrou que a igualdade (5.1) é verificada pela função complexa $\eta(z)$ definida por:

$$\eta(z) = z \Phi''(z) + \psi'(z) \quad (5.2)$$

e atendendo à simetria, temos:

$$\operatorname{Im} [\eta(z)] = 0 \quad \text{em } y = 0 \quad (5.3)$$

Substituindo a equação (5.2) na segunda das equações (2.13), obtemos:

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2\left[(\bar{z} - z)\Phi''(z) + \eta(z)\right] \quad (5.4)$$

e

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2\operatorname{Re}\left[\Phi'(z)\right] - 2y\operatorname{Im}\left[\Phi''(z)\right] - \operatorname{Re}\left[\eta(z)\right] \\ \sigma_y &= 2\operatorname{Re}\left[\Phi'(z)\right] + 2y\operatorname{Im}\left[\Phi''(z)\right] + \operatorname{Re}\left[\eta(z)\right] \\ \tau_{xy} &= -2y\operatorname{Re}\left[\Phi''(z)\right] + \operatorname{Im}\left[\eta(z)\right] \end{aligned} \quad (5.5)$$

Considerando

$$2\Phi'(z) = Z(z) - \eta(z) \quad (5.6)$$

as equações (5.5) das componentes do tensor das tensões vem:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \operatorname{Re}\left[Z(z)\right] - y\operatorname{Im}\left[Z'(z)\right] + y\operatorname{Im}\left[\eta'(z)\right] - 2\operatorname{Re}\left[\eta(z)\right] \\ \sigma_y &= \operatorname{Re}\left[Z(z)\right] + y\operatorname{Im}\left[Z'(z)\right] - y\operatorname{Im}\left[\eta'(z)\right] \\ \tau_{xy} &= -y\operatorname{Re}\left[Z'(z)\right] + y\operatorname{Re}\left[\eta'(z)\right] + \operatorname{Im}\left[\eta(z)\right] \end{aligned} \quad (5.7)$$

De salientar que esta formulação é mais geral do que as encontradas no parágrafo 2.5.2.1, transformando-se nas equações de Westergaard e de Irwin se $\eta(z) = 0$ e $\eta(z) = A = \sigma_{0x}$ respectivamente.

5.3.1.1 - Expressão da Função Complexa $Z(z)$

Na zona onde vamos considerar as medidas de $\underline{r}$ e $\underline{\theta}$, sendo mais afastada da extremidade da fenda, a singularidade das tensões já não é suficientemente preponderante, e portanto, o estado de tensão já não pode ser descrito por um só parâmetro K_I . Por esta razão, para uma placa com fenda e com a origem das coordenadas na extremidade da fenda, a função $Z(z)$ é representada através do desenvolvimento em série da forma:

$$Z(z) = \sum_{n=0}^{N=1} \frac{A_n}{n - \frac{1}{2}} z^{n - \frac{1}{2}} \quad \text{com } n \in \mathbb{N} \quad (5.8)$$

sendo A_0 proporcional ao factor de intensidade de tensão K_I :

$$A_0 = -\frac{K_I}{2\sqrt{2}\pi} \quad (5.9)$$

5.3.1.2 - Expressão da Função $\eta(z)$

A tensão de corte máxima τ_m em função das componentes das tensões é, como se sabe, dado por:

$$\tau_m^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$$

e atendendo às expressões das tensões (5.7):

$$\begin{aligned} \tau_m^2 = & \left(-y I_m [Z'(z)] + y I_m [\eta'(z)] - R_e [\eta(z)] \right)^2 \\ & + \left(-y R_e [Z'(z)] + y R_e [\eta'(z)] + I_m [\eta(z)] \right)^2 \end{aligned} \quad (5.10)$$

Sabendo que $\eta(z)$ deve verificar:

$$I_m [\eta(z)] = 0 \quad \text{para } y = 0$$

então sobre o eixo na direcção da fenda ($y = 0$) a expressão (5.10) virá:

$$\tau_m = |R_e [\eta(z)]| \quad (5.11)$$

Considerando a formulação de Irwin ($2\eta(z) = \sigma_{0x}$), ter-se-á:

$$\tau_m = \frac{\sigma_{0x}}{2} = \text{const.} \quad \text{em } y = 0 \quad (5.12)$$

o que só é verdade para fendas cuja extremidade esteja suficientemente afastada do bordo livre do modelo.

Assim, se a fenda se aproxima do bordo livre da placa fotoelástica, as franjas isocromáticas tomam o aspecto da figura 5.2 (consideramos neste exemplo $a/b = 0.49$, onde a e b são respectivamente o comprimento da fenda e a largura do modelo fotoelástico).

Nota-se que existe simetria das franjas isocromáticas relativamente ao eixo da fenda, mas algumas franjas não se fecham sobre a extremidade da mesma, intersectando o seu eixo perto do bordo livre, o que faz com que a

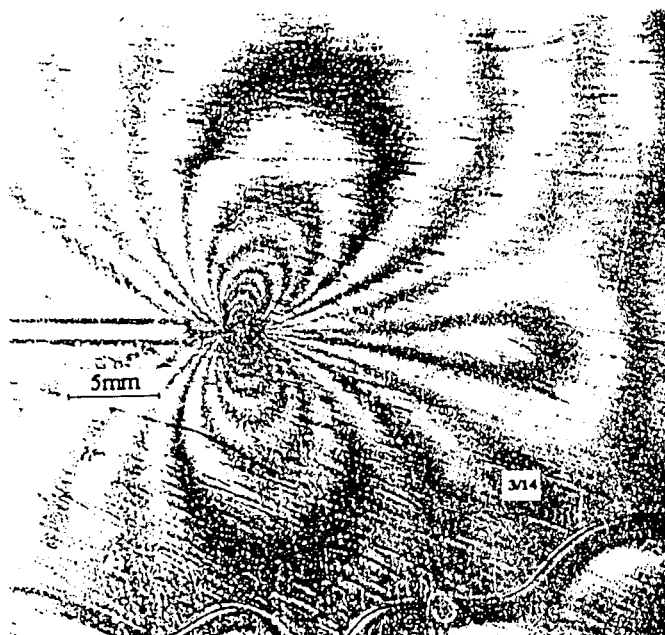


Fig. 5.2 - Influência do bordo livre próximo da extremidade da fenda

ordem das franjas não seja constante no prolongamento da fenda e, consequentemente, a igualdade (5.12) não é verificada.

Portanto a expressão $2 \eta(z) = \sigma_{0x}$, que permite a formulação de Irwin, não pode ser considerada quando a extremidade da fenda está próxima dum bordo livre.

Então a função $\eta(z)$ deverá representar o estado de tensão mais geral. Assim, Sanford [85] deduziu a sua expressão, considerando-a representada por um desenvolvimento em série, da forma:

$$\eta(z) = \sum_{p=0}^{P-1} C_p z^p \quad \text{com } p \in \mathbb{N} \quad (5.13)$$

que satisfaz a condição de simetria $\text{Im} [\eta(z)] = 0$ no eixo $y = 0$, qualquer que seja o expoente p e, o primeiro termo C_0 é proporcional a σ_{0x} :

$$C_0 = \frac{\sigma_{0x}}{2} \quad (5.14)$$

Logo sobre o eixo $y = 0$:

$$\tau_m = \left| \sum_{p=0}^{p=1} C_p x^p \right| \quad (5.15)$$

Portanto, a formulação de $\eta(z)$ sob a forma dum desenvolvimento limitado permite uma melhor representação da configuração das franjas isocromáticas traduzida pela variação da ordem das franjas no prolongamento da fenda.

5.3.1.3. - Expressão do Estado de Tensão

As expressões das componentes do tensor das tensões num ponto de coordenadas (r, θ) , considerando um sistema de eixos na extremidade da fenda, obtidas a partir das expressões $Z(z)$ e $\eta(z)$ definidas em (5.8) e (5.13) respectivamente e considerando a fórmula de Moivre $z_n = z_n (\cos n \theta + i \sin n \theta)$ serão:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sum_{n=0}^{N-1} A_n r^{n-1/2} \left[\frac{1}{n-1/2} \cos \left(n-1/2 \right) \theta - \sin \theta \sin \left(n-3/2 \right) \theta \right] \\ &+ \sum_{p=0}^{P-1} C_p r^p \left[p \cdot \sin \theta \cdot \sin (p-1) \theta - 2 \cos p \theta \right] \\ \sigma_y &= \sum_{n=0}^{N-1} A_n r^{n-1/2} \left[\frac{1}{n-1/2} \cdot \cos \left(n-1/2 \right) \theta + \sin \theta \cdot \sin \left(n-3/2 \right) \theta \right] \\ &+ \sum_{p=0}^{P-1} C_p r^p \left[-p \cdot \sin \theta \cdot \sin (p-1) \theta \right] \\ \tau_{xy} &= \sum_{n=0}^{N-1} A_n r^{n-1/2} \left[-\sin \theta \cdot \cos \left(n-3/2 \right) \theta \right] \\ &+ \sum_{p=0}^{P-1} C_p r^p \left[p \cdot \sin \theta \cdot \cos (p-1) \theta + \sin p \theta \right] \end{aligned} \quad (5.16)$$

De notar que, se considerarmos o primeiro termo ($n = 0$ e $p = 0$) destes desenvolvimentos encontramos a formulação de Irwin.

5.3.2 - MODO II

Vimos já em (2.24) que para o modo II:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2 I_m [Z(z)] + y R_e [Z'(z)] \\ \sigma_y &= - y R_e [Z'(z)] \\ \tau_{xy} &= R_e [Z(z)] - y I_m [Z'(z)]\end{aligned}\tag{5.17}$$

sendo $Z(z)$ a função de variável complexa.

5.3.2.1 - Expressão de $Z(z)$

As considerações feitas para o modo I são aqui válidas também. Assim, para que o método possa utilizar medidas mais afastadas da extremidade da fenda é necessário que a função de tensão $Z(z)$ seja escrita sob a forma dum desenvolvimento em série:

$$Z(z) = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{B_m}{m - \frac{1}{2}} z^{m - \frac{1}{2}}\tag{5.18}$$

e onde o primeiro termo B_0 é proporcional ao factor de intensidade de tensão em modo II:

$$B_0 = - \frac{K_{II}}{2\sqrt{2}\pi}\tag{5.19}$$

5.3.2.2 - Expressão do Estado de Tensão

Dum modo análogo ao estabelecido para o modo I, considerando a fórmula de Moivre num ponto de coordenadas (r, θ) dum sistema de eixos com origem na extremidade da fenda, as tensões serão:

$$\sigma_x = \sum_{m=0}^{M-1} B_m r^{m - \frac{1}{2}} \left[\frac{2}{m - \frac{1}{2}} \cdot \sin \left(m - \frac{1}{2} \right) \theta + \sin \theta \cdot \cos \left(m - \frac{3}{2} \right) \theta \right]$$

$$\sigma_y = \sum_{m=0}^{M-1} B_m r^{m-1/2} \left[-\sin \theta \cdot \cos \left(m - \frac{3}{2} \right) \theta \right] \quad (5.20)$$

$$\tau_{xy} = \sum_{m=0}^{M-1} B_m r^{m-1/2} \left[\frac{1}{m - \frac{1}{2}} \cdot \cos \left(m - \frac{1}{2} \right) \theta - \sin \theta \cdot \sin \left(m - \frac{3}{2} \right) \theta \right]$$

Considerando só o primeiro termo destes desenvolvimentos encontramos as relações de Irwin.

5.3.3 - MODO MISTO

Dum modo geral, podemos referir que a maioria dos casos práticos bidimensionais não são solicitados individualmente em modo I ou em modo II, mas sim dum modo misto, onde é necessário determinar K_I e K_{II} .

Assim, consideremos uma placa com fenda central de comprimento $2a$, com uma inclinação β relativamente à direcção da solicitação uniaxial σ , como mostra a figura 5.3.

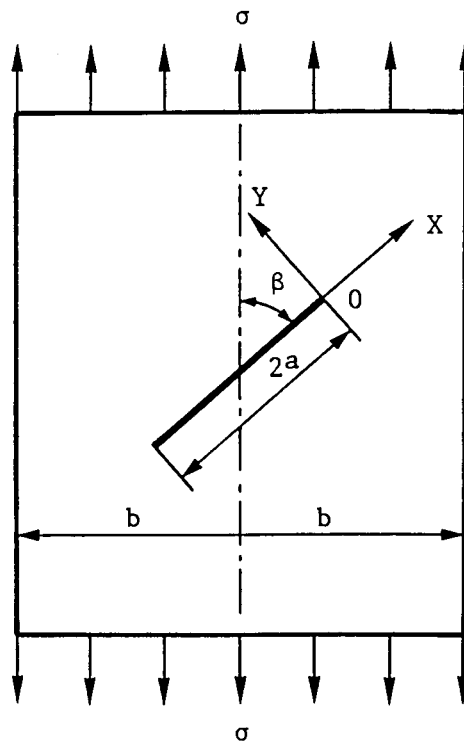


Fig. 5.3 - Fenda solicitada em modo misto



O estado de tensão pode ser expresso como sendo a sobreposição dos modos fundamentais, os modos I e II, obtendo as seguintes expressões das tensões para um modo misto de solicitação:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_x^{(1)} \cdot \sin^2 \beta + \sigma_x^{(2)} \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta + \sigma \cdot \cos 2 \beta \\ \sigma_y &= \sigma_y^{(1)} \cdot \sin^2 \beta + \sigma_y^{(2)} \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}^{(1)} \cdot \sin^2 \beta + \tau_{xy}^{(2)} \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta\end{aligned}\tag{5.21}$$

onde os índices (1) e (2) se referem aos modos I e II respectivamente.

A complexidade das equações (5.21) é normalmente simplificada por muitos autores através da consideração de pontos muito próximos da extremidade da fenda, e então, as funções de tensão serão:

$$\begin{aligned}Z^{(1)}(z) &= K_I (2 \pi z)^{-1/2} \\ Z^{(2)}(z) &= K_{II} (2 \pi z)^{-1/2} \\ \eta^{(1)}(z) &= \frac{\sigma_{ox}}{2}\end{aligned}\tag{5.22}$$

encontrando-se a formulação de Irwin, só válida na vizinhança da extremidade da fenda:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= K_I (2 \pi r)^{-1/2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3 \theta}{2} \right) \\ &\quad - K_{II} (2 \pi r)^{-1/2} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3 \theta}{2} \right) + \sigma_{ox} \cdot \cos \beta \\ \sigma_y &= K_I (2 \pi r)^{-1/2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3 \theta}{2} \right) \\ &\quad + K_{II} (2 \pi r)^{-1/2} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3 \theta}{2}\end{aligned}\tag{5.23}$$

$$\begin{aligned}\tau_{x y} = & K_I (2 \pi r)^{-1/2} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3 \theta}{2} \\ & + K_{II} (2 \pi r)^{-1/2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3 \theta}{2} \right)\end{aligned}$$

e os factores de intensidade de tensão terão a forma

$$K_I = Y_I \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi a} \cdot \sin^2 \beta \quad (5.24)$$

$$K_{II} = Y_{II} \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi a} \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta$$

onde Y_I e Y_{II} são os factores de forma para os modos I e II respectivamente.

5.3.4 - RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

A determinação dos factores de intensidade de tensão, considerando medidas mais afastadas da extremidade da fenda, será feita através da utilização do desenvolvimento em série das funções complexas $Z(z)$ e $\eta(z)$ já analisadas.

A equação que define a tensão de corte máxima τ_m pode escrever-se sob a forma:

$$f = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + (\tau_{x y})^2 - (\tau_m)^2 = 0$$

onde τ_m é definida pela lei óptico - mecânica de Maxwell.

O método de análise do espectro isocromático que vamos utilizar baseia-se na utilização de Q pontos de medida arbitrariamente repartidos sobre as franjas isocromáticas, idêntico ao considerado por Sanford e Dally [80] na vizinhança da extremidade da fenda.

Para o nosso estudo (determinação do factor de intensidade de tensão em modo I e modo misto) temos, então, de resolver um sistema rectangular de Q equações não lineares (que correspondem a Q pontos de medida) a $(N + M + P)$ incógnitas:

$$f_q = D_q^2 + T_q^2 - \tau_m^2 = 0 \quad \text{com } q = 1, 2, \dots, Q \quad (5.25)$$

$$Q > N + M + P$$

e onde:

$$D_q = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \quad \text{e} \quad T_q = \tau_{xy}$$

e pelo princípio da sobreposição, a partir das equações (5.16) e (5.20) obtemos:

$$D_q = - \sum_{n=0}^{N-1} A_n r_q^{n-1/2} \left[\sin \theta_q \cdot \sin \left(n - \frac{3}{2} \right) \theta_q \right]$$

$$+ \sum_{m=0}^{M-1} B_m r_q^{m-1/2} \left[\frac{1}{m - \frac{1}{2}} \cdot \sin \left(m - \frac{1}{2} \right) \theta_q + \sin \theta_q \cdot \cos \left(m - \frac{3}{2} \right) \theta_q \right]$$

$$+ \sum_{p=0}^{P-1} C_p r_q^p \cdot \sin^2 \beta \cdot \left[p \cdot \sin \theta_q \cdot \sin (p - 1) \theta_q - \cos p \theta_q \right]$$

e

$$T_q = - \sum_{n=0}^{N-1} A_n r_q^{n-1/2} \left[\sin \theta_q \cdot \cos \left(n - \frac{3}{2} \right) \theta_q \right]$$

$$+ \sum_{m=0}^{M-1} B_m r_q^{m-1/2} \left[\frac{1}{m - \frac{1}{2}} \cdot \cos \left(m - \frac{1}{2} \right) \theta_q - \sin \theta_q \cdot \sin \left(m - \frac{3}{2} \right) \theta_q \right]$$

$$+ \sum_{p=0}^{P-1} C_p r_q^p \cdot \sin^2 \beta \left[p \cdot \sin \theta_q \cdot \cos (p - 1) \theta_q + \sin p \theta_q \right]$$

O sistema (5.25) só pode ser resolvido através dum processo numérico. O algoritmo de cálculo que vamos empregar associa o método iterativo de Newton-Raphson ao processo de minimização do tipo dos mínimos quadrados [83].

5.3.4.1 - Método de Newton-Raphson

O sistema (5.25) pode escrever-se sob a forma

$$f_q(X_l) = 0 \quad \text{com } q = 1, 2, \dots, Q \quad (5.26)$$

$$l = 1, 2, \dots, (N + M + P) = L$$

$$Q > L$$

onde X_l são as incógnitas A_n , B_m e C_p .

O princípio do método consiste em atribuir valores arbitrários às incógnitas, obtendo-se então $f_q(X_l) \neq 0$.

Para corrigir os valores das incógnitas as funções $f_q(X_l)$ são desenvolvidas em série de Taylor:

$$(f_q)_{i+1} = (f_q)_i + \sum_{l=1}^L \left(\frac{\partial f_q}{\partial X_l} \right)_i (\Delta X_l) \quad (5.27)$$

onde ΔX_l são as correcções sobre os valores anteriormente arbitrados e o índice i corresponde à iteração de ordem i .

Obtemos então o seguinte sistema matricial, que satisfaz $(f_q)_{i+1} = 0$:

$$[f] = [a][\Delta X] \quad (5.28)$$

Os coeficientes da matriz rectangular $[a]$ são as derivadas parciais das funções $f_q(X_l)$ relativamente a cada uma das incógnitas.

5.3.4.2 - Minimização pelo Método dos Minimos Quadrados

Para obtermos um sistema quadrado multiplicamos à esquerda ambos os membros do sistema (5.28) pela transposta da matriz $[a]$:

$$[a]^T \cdot [f] = [a]^T \cdot [a][\Delta X]$$

e considerando:

$$\begin{aligned} [b] &= [a]^T \cdot [f] \\ [c] &= [a]^T \cdot [a] \end{aligned}$$

onde $[c]$ é uma matriz quadrada $(N + M + P, N + M + P)$.

Obtemos então:

$$[\Delta X] = [c]^{-1} [b] \quad (5.29)$$

e as incógnitas são então dadas por:

$$(X_1)_{i+1} = (X_1)_i + (\Delta X_1)_i \quad (5.30)$$

A convergência da solução é relativamente rápida, requerendo poucas iterações para obter um erro relativo sobre os factores de intensidade de tensão, que dum modo geral, são inferiores a 1% entre duas iterações sucessivas.

5.3.4.3 - Conclusão

Para obtermos a melhor solução para as nossas incógnitas, seguir-se-ão então os seguintes passos:

- a) Arbitrar inicialmente valores para as incógnitas X_1
- b) Definir os elementos das matrizes $[f]$ e $[a]$ para cada conjunto de pontos considerados sobre as franjas isocromáticas.
- c) Determinação das correcções $[\Delta X]$ a partir de (5.29)
- d) Recalcular os valores das incógnitas através das equações (5.30)
- e) Repetir os passos b), c) e d) até que $[\Delta X]$ se torne aceitável.

No Apêndice 1 encontra-se o programa, desenvolvido em linguagem BASIC, para a resolução deste sistema de equações, que corre muito rapidamente no computador Hewlett Packard Vectra QS 20 e que se designou por "Programa FIT I + II".

5.4 - ANÁLISE EXPERIMENTAL

O método atrás descrito foi aplicado ao estudo de fendas solicitadas em modo I e modo misto.

Para a determinação dos factores de intensidade de tensão foi utilizado, como material fotoelástico, uma resina de poliéster insaturada, a resina Crystic 272, desenvolvida no Departamento de Engenharia Mecânica da FEUP [86] e para a qual foi determinada a constante fotoelástica, submetendo um provete à tracção, tendo-se encontrado:

$$f_{\sigma} = 15,2 * 10^{-3} * \text{MN} * (\text{franja} * \text{m})^{-1}$$

5.4.1 - EQUIPAMENTO

A análise fotoelástica foi feita com um polariscópio de transmissão, da série 060 da Photoelastic Inc., figura 5.4.

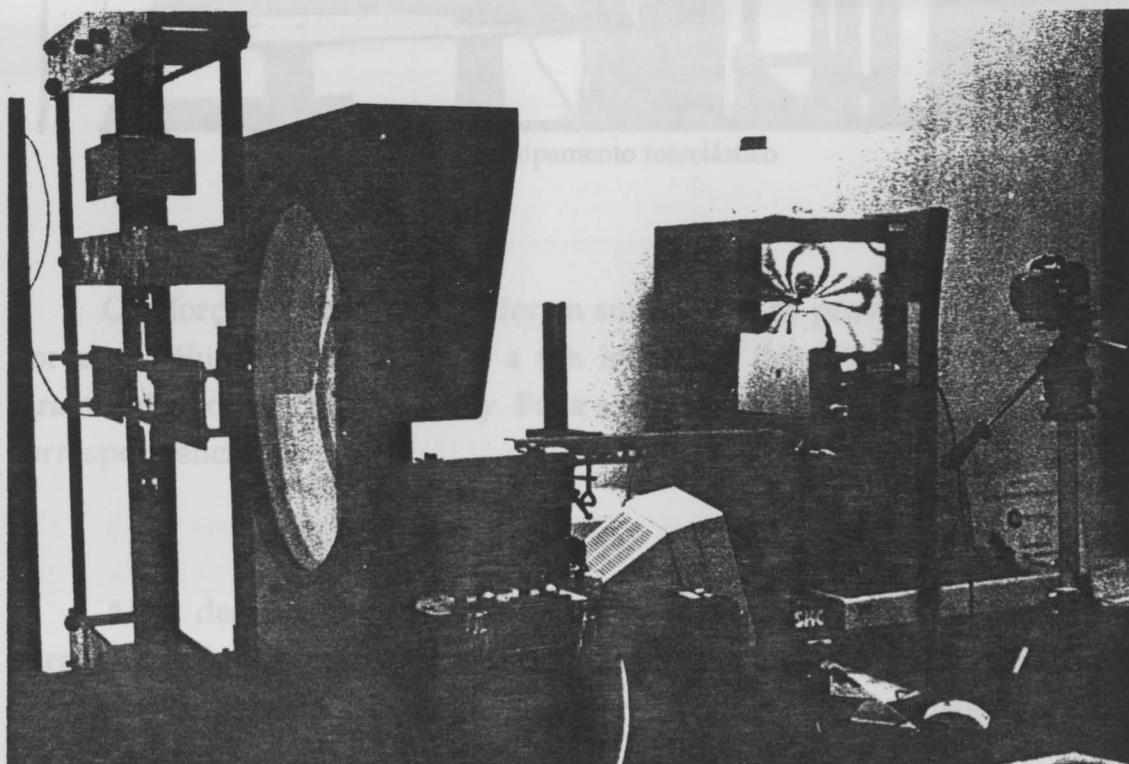


Fig. 5.4 - Equipamento fotoelástico

Devido à necessidade de obtermos um grande número de medidas numa determinada zona foi utilizado um método de multiplicação de franjas que se encontra sinteticamente descrito no Apêndice 2 e que utiliza um sistema de luz de raios paralelos, figura 5.5.

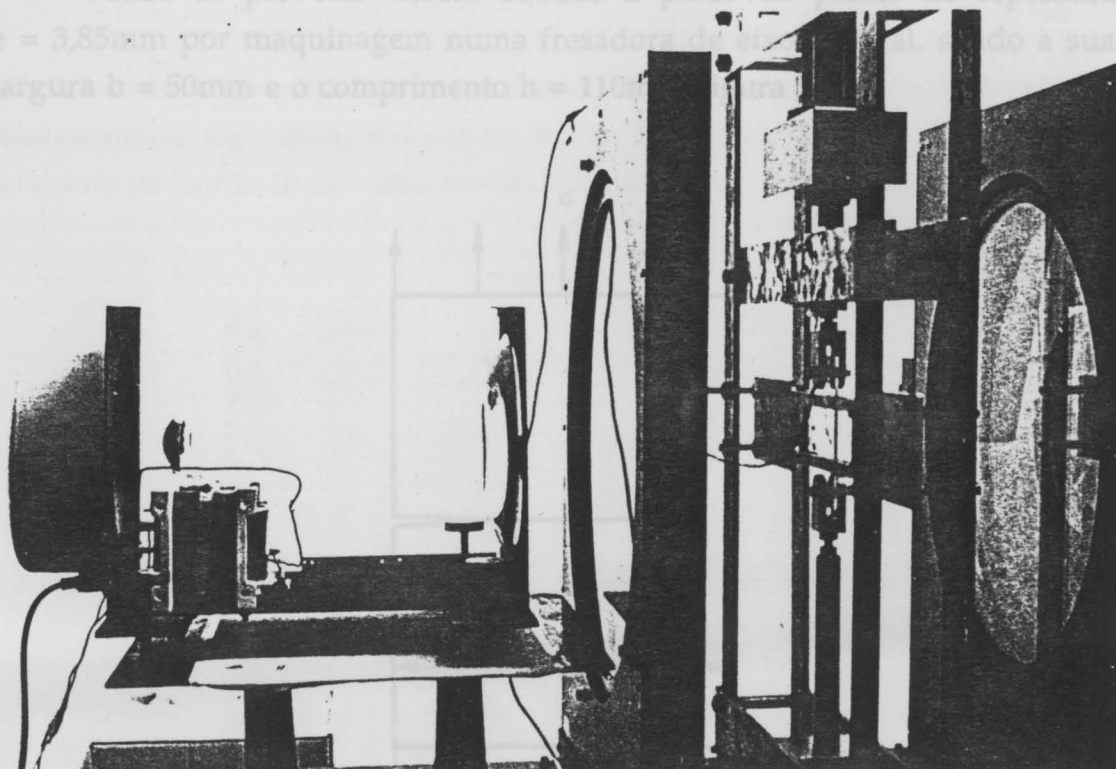


Fig. 5.5 - Equipamento fotoelástico

O esforço de tracção a que foram submetidos os provetes foi analisado por uma célula de carga ligada a um indicador de deformação, o Digital Strain Indicator P-3500 da Vishay. Feita a calibração desta célula obtivemos a correspondência:

$$1 \text{ Kg} = 6,6 \mu \epsilon$$

Além desta aparelhagem foi ainda utilizada uma câmara fotográfica para registo das imagens fotoelásticas, bem como uma câmara de video e um computador que permitiu uma melhor visualização das isocromáticas utilizando o programa Zoom [87].

5.4.2 - DETERMINAÇÃO DO FACTOR DE INTENSIDADE DE TENSÃO EM MODO I

5.4.2.1 - Tipo de Provete Utilizados

Todos os provetes foram obtidos a partir de placas de espessura $e = 3,85\text{mm}$ por maquinagem numa fresadora de eixo vertical, sendo a sua largura $b = 50\text{mm}$ e o comprimento $h = 110\text{mm}$, figura 5.6.

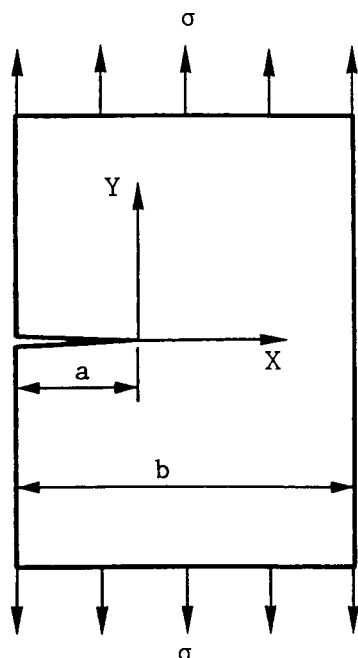


Fig. 5.6 - Geometria dos provetes A₁ e A₂

Para o estudo deste modo de carregamento considerámos dois tipos de modelos A₁ e A₂ com razões a/b diferentes (0,25 e 0,49 respectivamente).

Para se obterem as fendas, começou por se executar um entalhe perpendicular ao bordo livre do provete (de 10mm para o provete A₁ e 22,5mm para A₂) utilizando uma serra de disco de 1mm de espessura e com a superfície de corte afiada, formando um ângulo de 60°, montada numa fresadora universal. Seguidamente foi colocada uma lâmina de barbear na extremidade do entalhe e sujeita a um pequeno impacto capaz de originar uma fenda natural. Para garantir uma direcção da fenda perpendicular ao bordo do provete foram utilizadas duas placas metálicas apertadas por grampos ao provete para guiar a lâmina. Para os casos analisados obtivemos

uma extensão da fenda de 2,5mm e 2,0mm e consequentemente os comprimentos das fendas para os provetes A₁ e A₂ foram $a = 12,5\text{mm}$ e $a = 24,5\text{mm}$ respectivamente.

5.4.2.2 - Resultados

Numa primeira análise das franjas isocromáticas verifica-se que para o modelo A₁ ($a/b = 0,25$), elas correspondem a curvas que se fecham todas na extremidade da fenda, pelo facto dessa extremidade estar relativamente afastada do bordo livre, como mostra a figura 5.7.

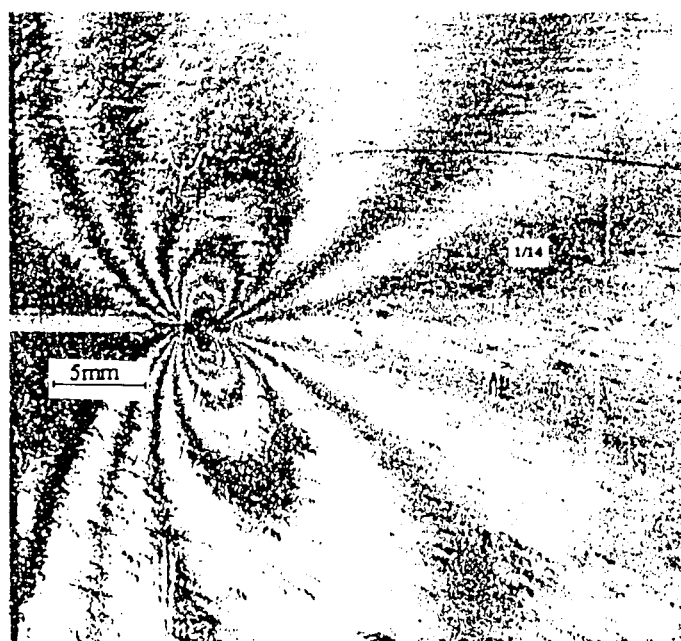


Fig. 5.7. - Franjas isocromáticas para o provete A₁

No provete A₂ ($a/b = 0,49$), figura 5.8, verifica-se que algumas franjas isocromáticas não se fecham sobre a extremidade da fenda, mas intersectam a direcção da fenda perto do bordo livre, devido à maior proximidade da extremidade da fissura da superfície livre.

O factor de intensidade de tensão K_I foi determinado para estes provetes aplicando alguns métodos que utilizam medidas muito próximas da extremidade da fenda, o processo analítico, e a seguir aplicando o nosso método, considerando medidas mais afastadas.

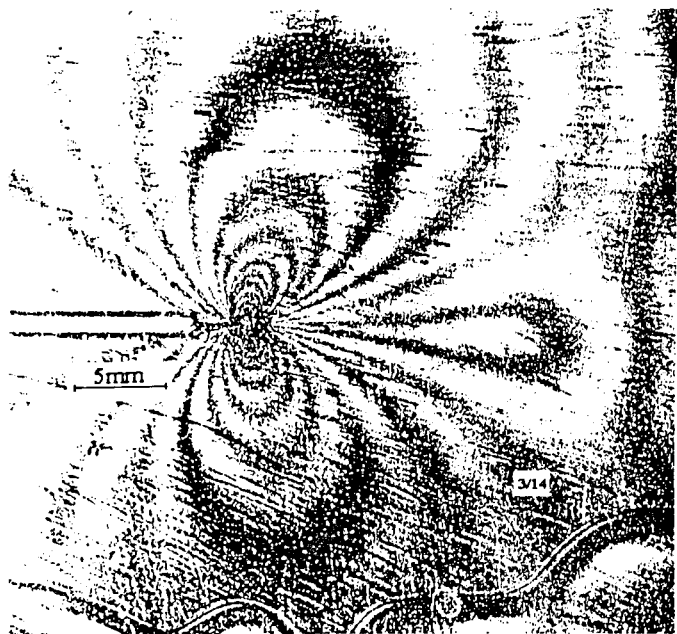


Fig. 5.8 - Franjas isocromáticas para o provete A2

5.4.2.2.1 - Método das Diferenças de Schroedl e Smith

Como se referiu já no capítulo 4 as medidas utilizadas para este método são bastante delicadas, sendo a sua precisão um tanto duvidosa. Os valores que se conseguiram mais próximos da extremidade da fenda, para o ângulo $\theta = 90^\circ$, encontram-se no Quadro I, bem como os valores de K_I calculados a partir da expressão (4.11), para os dois tipos de provetes analisados.

QUADRO I

PROVETES	ORDEM	RAIO (m)	$2 \cdot \tau_m$ ($MN \cdot m^{-1/2}$)	K_I ($MN \cdot m^{-3/2}$)
A1	8/7	$1,00 \cdot 10^{-3}$	4,51	0,25
	1	$1,48 \cdot 10^{-3}$	3,95	
A2	9/7	$0,99 \cdot 10^{-3}$	5,08	0,34
	8/7	$1,31 \cdot 10^{-3}$	4,51	

5.4.2.2.2 - Técnica de Extrapolação de Schroedl e Smith

Este método necessita também de medidas sobre um eixo privilegiado, $\theta = 90^\circ$, perpendicular à direcção da fenda. As medidas para o provete A₁ foram efectuadas considerando $r/a < 0,12$ e para o provete A₂, como o

QUADRO II

PROVETES	ORDEM	RAIO (m)	$(r/a)^{1/2}$	τ_m (MN·m ⁻²)	K_{ap} (MN·m ^{-3/2})	K_I (MN·m ^{-3/2})
A1	8/7	1,00·10 ⁻³	0,28	2,26	0,36	0,26
	15/14	1,22·10 ⁻³	0,31	2,11	0,37	
	1	1,48·10 ⁻³	0,34	1,97	0,38	
A2	9/7	0,99·10 ⁻³	0,20	2,54	0,40	0,35
	8/7	1,31·10 ⁻³	0,23	2,26	0,41	
	1	1,79·10 ⁻³	0,27	1,97	0,42	

domínio útil de medidas é mais limitado, considerámos $r/a < 0,1$. No Quadro II encontram-se representados esses valores, os quais nos permitem

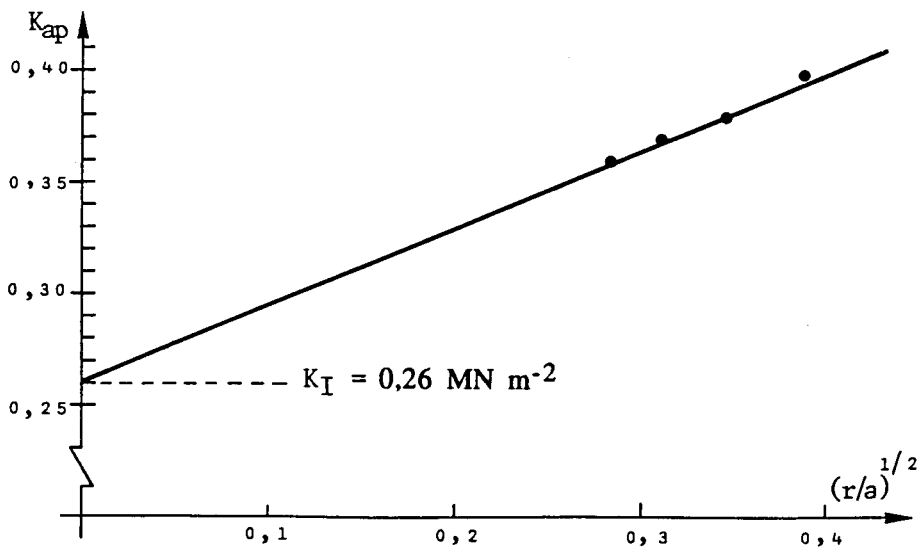


Fig. 5.9 - Determinação de K_I a partir das variações de K_{ap} para o provete A₁

representar as variações do factor de intensidade de tensão aparente K_{ap} determinado pela expressão (4.14) em função de $(r/a)^{1/2}$ e consequentemente determinar K_I pela extrapolação linear, como se pode analisar nas figuras 5.9 e 5.10.

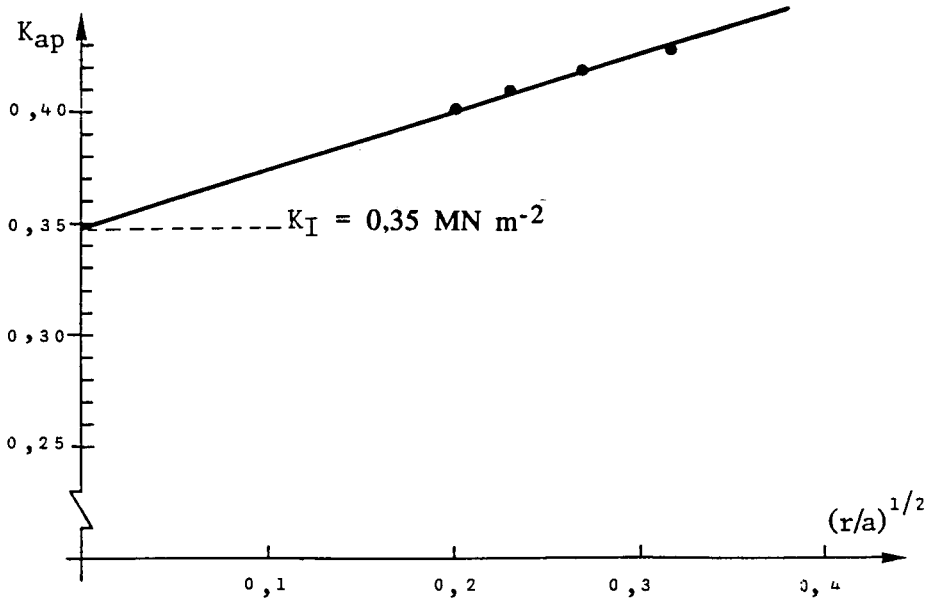


Fig. 5.10 - Determinação de K_I a partir das variações de K_{ap} para o provete A2

Como facilmente se depreende, para obtermos uma boa precisão relativa com este método, é necessário termos um número de franjas bastante denso, para obtermos um grande número de medidas, de modo a que a parte linear da curva representativa de K_{ap} possa ser bem definida.

5.4.2.2.3 - Método Analítico

Atendendo a que o factor de intensidade de tensões é dada pela expressão:

$$K_I = Y \sigma (\pi a)^{1/2} \quad (5.31)$$

basta-nos determinar o factor de forma Y , para o qual existem várias fórmulas analíticas em função da razão a/b . Assim considerando:

$$Y = \left(\frac{2b}{\pi a} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi a}{2b} \right)^{1/2} \frac{\left[0,752 + 2,02 (a/b) + 0,37 \left(1 - \sin \frac{\pi a}{2b} \right)^3 \right]}{\cos \frac{\pi a}{2b}} \quad (5.32)$$

obtemos os valores indicados no Quadro III

QUADRO III

PROVETES	a/b	Y	σ (MN*m ⁻²)	$(\pi a)^{1/2}$ (m ^{1/2})	K _I (MN*m ^{-3/2})
A1	0,25	1,49	0,93	0,20	0,28
A2	0,49	2,74	0,43	0,28	0,33

Os valores obtidos para K_I por esta expressão, correspondem a uma precisão de 0,5% [9] para qualquer valor de a/b.

5.4.2.2.4 - Aplicação do Método Proposto

Para cada um dos modelos analisados A₁ e A₂ considerámos 40 pontos arbitrários sobre as franjas isocromáticas, cujas coordenadas foram colocadas em "ficheiro de pontos" no programa FIT I + II. Para o provete A₁, as medidas foram efectuadas no interior de um disco de raio r/a = 0,4, logo, com um afastamento da extremidade da fenda de cerca de três vezes superior às medidas consideradas pelos outros métodos de determinação de K_I. Para o provete A₂ consideraram-se medidas que atingiram o dobro das consideradas pelos métodos que utilizam medidas muito próximas da extremidade da fenda.

Correndo o programa e considerando os valores arbitrados inicialmente para as incógnitas A_n e C_p, existentes também em ficheiro no

programa, obtivemos para cada um dos sete termos considerados na expressão do estado de tensão os seguintes valores das incógnitas A_0 :

		NÚMERO DE TERMOS							
		PROVETES	1	2	3	4	5	6	7
VALORES de A0 (MN*m-3/2)	A1	-0,068	-0,064	-0,058	-0,059	-0,055	-0,054	-0,055	
	A2	-0,067	-0,063	-0,064	-0,066	-0,067	-0,066	-0,066	

Considerando (5.9) e atendendo à expressão (5.31) podemos traçar os gráficos das figuras 5.11 e 5.12, que nos mostram a influência, sobre o factor de forma Y , do número de termos que se tomam no desenvolvimento em série do tensor das tensões.

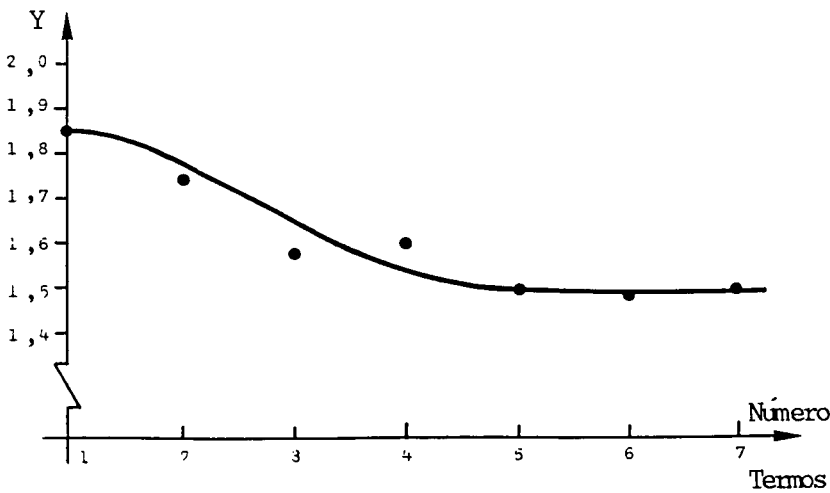


Fig. 5.11 - Convergência de Y para o provete A1

Como se pode verificar bastam cinco termos do desenvolvimento para se obter a convergência de Y , podendo por isso desprezarem-se os termos de ordem superior, não afectando o valor do factor de forma.

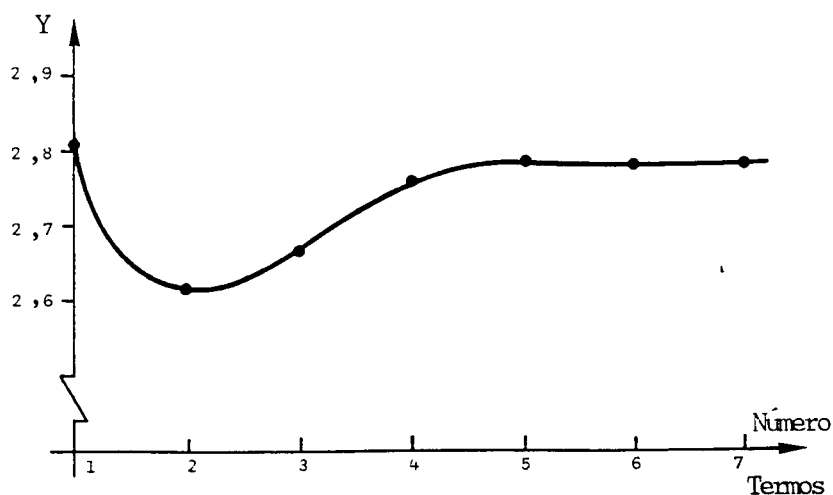


Fig. 5.12 - Convergência de Y para o provete A2

Aplicando (5.9) obtemos para os factores de intensidade de tensão, para os provetes A₁ e A₂, K_I = 0,28 e K_I = 0,33 respectivamente.

5.4.2.2.5 - Comparação dos Resultados

Com o intuito de apresentar os resultados independentes da carga aplicada, vamos compará-los através do factor de forma, uma vez que este é proporcional ao factor de intensidade de tensão K_I (5.31).

No Quadro IV temos, para os dois provetes analisados, os valores dos factores de forma Y para os casos considerados.

QUADRO IV

MÉTODOS PROVETES	ANALÍTICO	DIFERENÇAS DE SCHROEDL E SMITH	EXTRAPOLAÇÃO DE SCHROEDL E SMITH	MÉTODO PROPOSTO
A ₁ (a/b = 0,25)	1,49	1,36	1,41	1,50
A ₂ (a/b = 0,49)	2,74	2,85	2,93	2,78

Como se pode verificar, quer o método das diferenças, quer o da extrapolação de Schroedl e Smith conduzem-nos a diferenças de 6% a 9% relativamente ao nosso método.

Comparando os valores obtidos através do desenvolvimento em série com os valores semi-analíticos, verificamos que as diferenças são inferiores a 0,7%. Considerando que a solução analítica tem uma precisão de 0,5%, podemos induzir que o método proposto permite uma solução bastante precisa.

5.4.3 - DETERMINAÇÃO DOS FACTORES DE INTENSIDADE DE TENSÃO EM MODO MISTO

5.4.3.1 - Tipo de Provetes Utilizados

Os provetes utilizados na análise dos factores de intensidade de tensão em modo misto, são do mesmo material e têm as mesmas dimensões externas dos que foram utilizados na análise do modo I de carregamento.

Para se conseguirem as fendas inclinadas de um ângulo β relativamente à direcção de solicitação, figura 5.3, começou-se por fazer um furo no centro das placas com uma broca de 1mm de diâmetro, a partir do qual se abriu, com uma serra de ourives de 0,3mm de espessura, os respectivos entalhes de cerca de 15mm de comprimento nominal, sendo o guiamento da serra garantindo por uma régua metálica apertada por dois grampos contra uma das faces da placa. Estes entalhes foram feitos com as inclinações de 67,5°, 45° e 22,5°, relativamente à direcção da aplicação da carga. Em cada uma das extremidades do entalhe criou-se uma fenda natural, mediante o impacto de uma lâmina de barbear. A direcção das fissuras criadas pela lâmina em alguns casos afastaram-se um pouco das direcções do entalhe inicialmente feito com a serra, tendo-se obtido as inclinações de 68,5°, 48,0° e 20,0°. Para cada uma destas direcções obtivemos um comprimento total para as fendas de $2a = 19,9\text{mm}$, $2a = 19,5\text{mm}$ e $2a = 19,5\text{mm}$ respectivamente.

Consideramos, assim, três tipos de provetes para a nossa análise

- provete B₁ com inclinação $\beta = 68,5^\circ$ e $2a = 19,9\text{mm}$
- provete B₂ com inclinação $\beta = 48,0^\circ$ e $2a = 19,5\text{mm}$
- provete B₃ com inclinação $\beta = 20,0^\circ$ e $2a = 19,5\text{mm}$

5.4.3.2 - Resultados

As figuras 5.13, 5.14 e 5.15 mostram a configuração das franjas isocromáticas para cada um dos três tipos de modelos analisados.

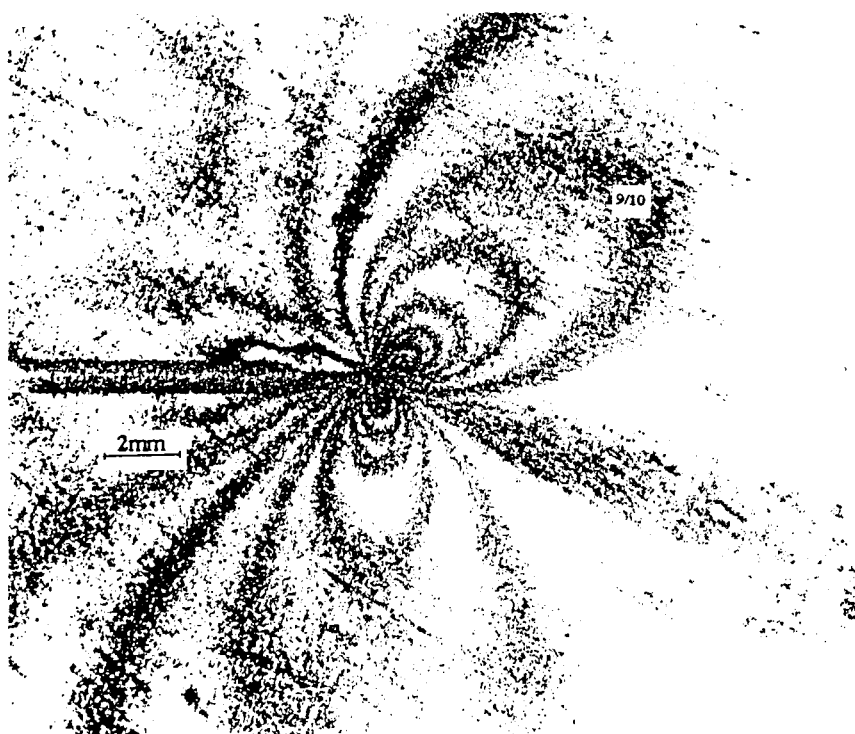


Fig. 5.13 - Configuração das franjas isocromáticas para o provete B₁

Como se pode verificar, a simetria das franjas isocromáticas deixa de existir, indo intersectar a direcção da fenda, o que caracteriza o modo misto de solicitação.

Os factores de intensidade de tensão K_I e K_{II} foram determinados para estes modelos, considerando o método analítico e o nosso método.

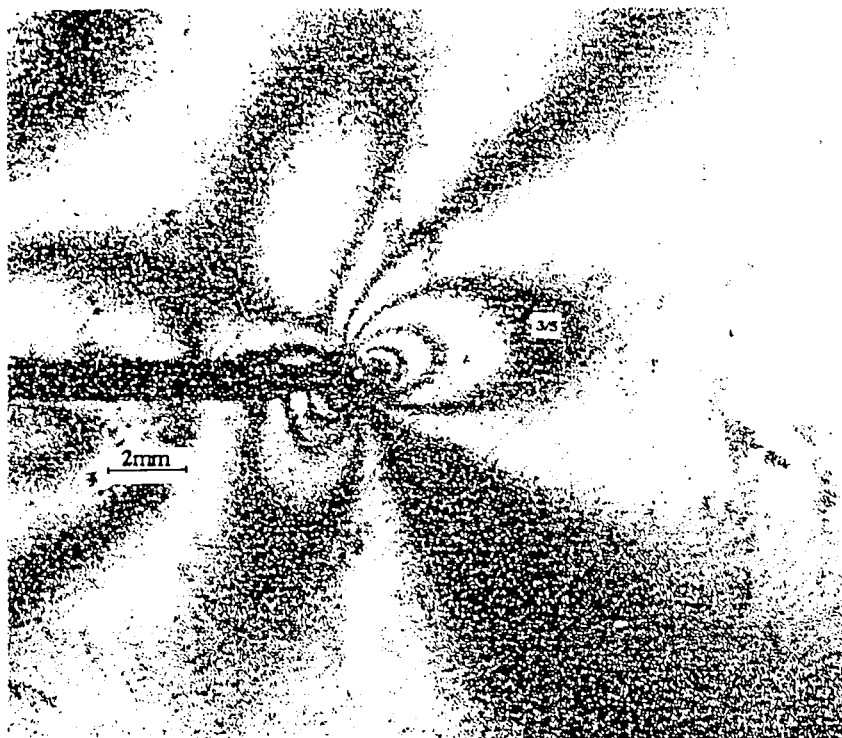


Fig. 5.14 - Configuração das franjas isocromáticas para o provete B2

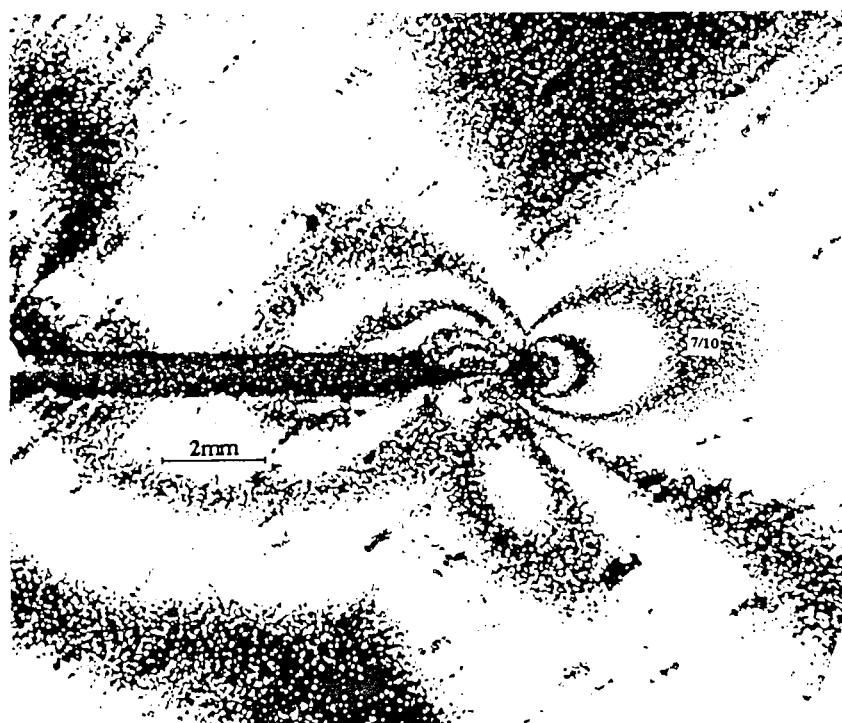


Fig. 5.15 - Configuração das franjas isocromáticas para o provete B3

5.4.3.2.1 - Método Analítico

A partir dos factores de forma Y_I e Y_{II} e aplicando as expressões (5.24), podemos determinar os factores de intensidade de tensão K_I e K_{II} em modo misto.

Para obtermos os valores analíticos dos factores de forma utilizamos a expressão:

$$Y = \left[1 - 0,025 \left(\frac{a}{b} \right)^2 + 0,06 \left(\frac{a}{b} \right)^4 \right] \cdot \left(\sec \frac{\pi a}{2b} \right)^{1/2} \quad (5.33)$$

considerada para uma fenda central, logo com a inclinação $\beta = 90^\circ$, e que dá uma precisão de 0,1% [9] para qualquer valor de a/b .

Portanto, se na expressão (5.33) substituirmos a/b por a^*/b , sendo $a^* = a \sin \beta$, obtemos, para o modo misto, os valores indicados no Quadro V:

QUADRO V

PROVETES	$\frac{a^*}{b}$	$Y_I = Y_{II}$	σ (MN*m ⁻²)	$(\pi a)^{1/2}$ (m ^{1/2})	K_I (MN*m ^{-3/2})	K_{II} (MN*m ^{-3/2})
B ₁	0,37	1,09	1,85	0,18	0,31	0,12
B ₂	0,29	1,05	1,66	0,17	0,16	0,15
B ₃	0,13	1,01	3,32	0,17	0,07	0,18

onde os valores de K_I e K_{II} foram determinados a partir das expressões (5.24).

5.4.3.2.2 - Aplicação do Método Proposto

Para a aplicação do método proposto consideram-se 50 pontos colocados arbitrariamente sobre as franjas isocromáticas dos provetes B₁, B₂ e B₃, cujos ficheiros são considerados no programa FIT I + II.

As medidas foram efectuadas no intervalo $0 < r/a < 0,4$.

Correndo o programa e considerando os valores inicialmente arbitrados para as incógnitas A_n , B_m e C_p , existentes também em ficheiro, obtivemos para cada um dos cinco termos, considerados na expressão do estado de tensão, os seguintes valores para as incógnitas A_0 e B_0 .

		TERMOS					
		PROVETES	1	2	3	4	5
VALORES DE A _o (MN*m-3/2)	B ₁	-0,069	-0,062	-0,061	-0,061	-0,061	
	B ₂	-0,038	-0,034	-0,033	-0,033	-0,033	
	B ₃	-0,003	-0,011	-0,013	-0,013	-0,014	
VALORES DE B _o (MN*m-3/2)	B ₁	-0,026	-0,023	-0,009	-0,022	-0,025	
	B ₂	-0,034	-0,031	-0,032	-0,032	-0,031	
	B ₃	-0,027	-0,027	-0,030	-0,032	-0,037	

Através de (5.9), (5.19) e (5.24) e considerando os valores das solicitações de cada um dos provetes indicados no Quadro V, determinamos

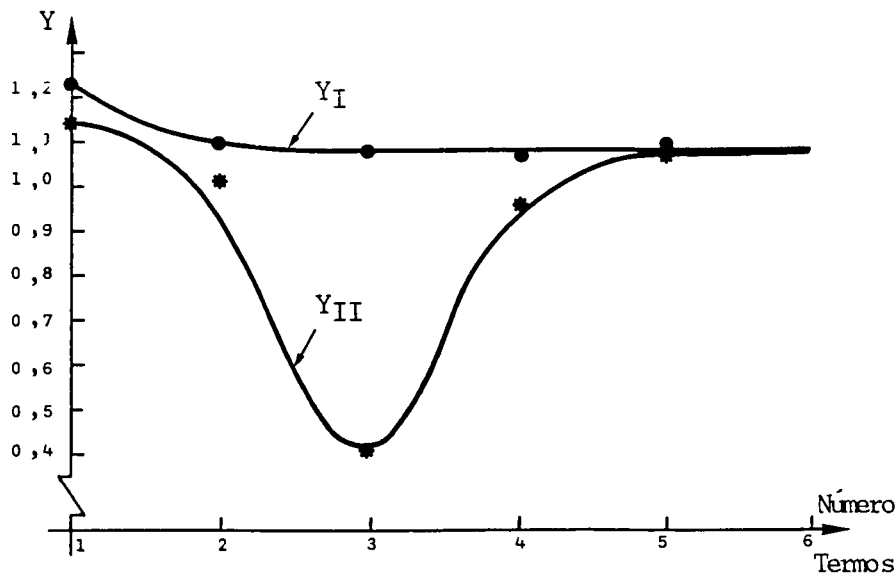


Fig. 5.16 - Convergência dos factores de forma Y_I e Y_{II} para o provete B_1

os factores de forma Y_I e Y_{II} . Nas figuras 5.16, 5.17 e 5.18 está representada a convergência dos factores de forma Y_I e Y_{II} em função do número de termos considerados.

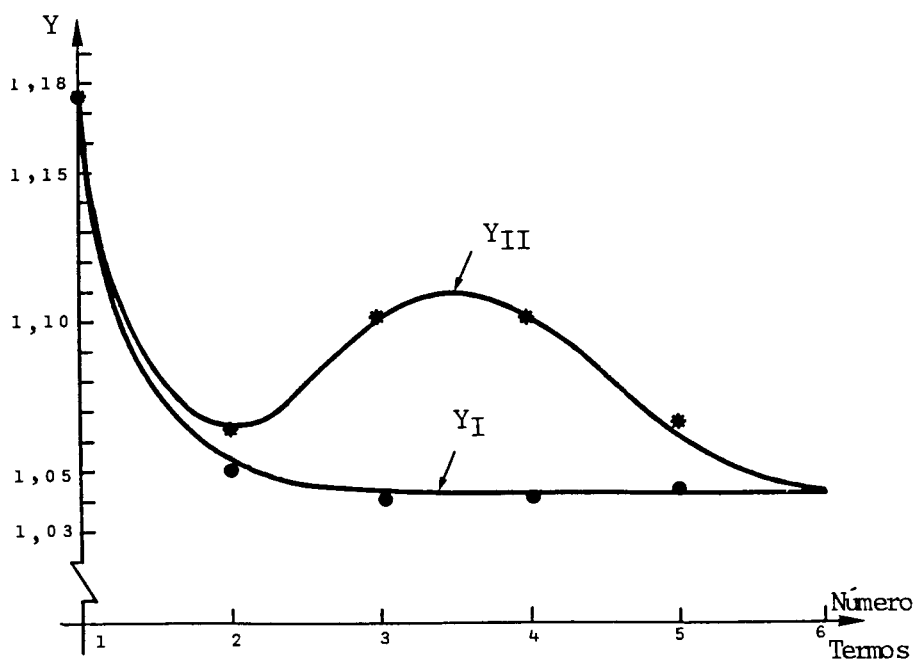


Fig. 5.17 - Convergência dos factores de forma Y_I e Y_{II} para o provete B_2

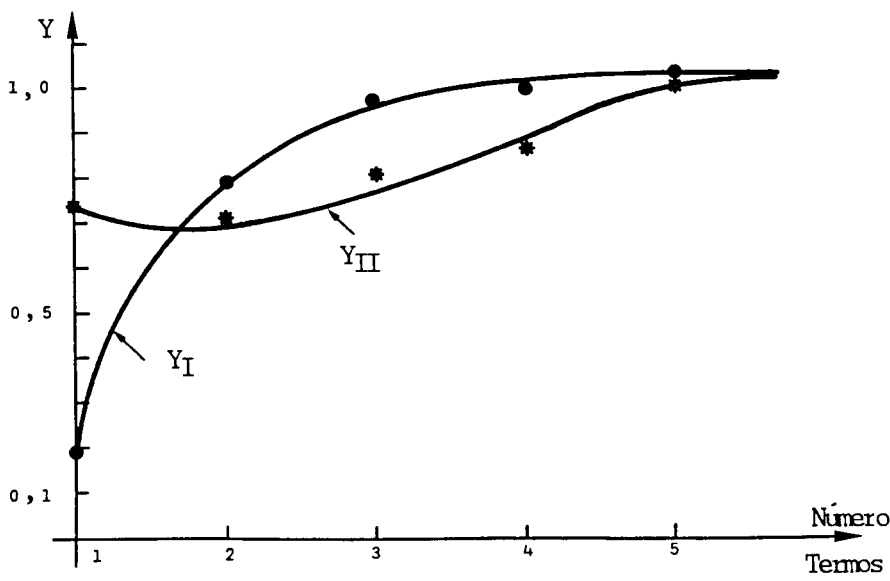


Fig. 5.18 - Convergência dos factores de forma Y_I e Y_{II} para o provete B_3

Os valores dos factores de intensidade K_I e K_{II} obtidos para cada um dos provetes foram os seguintes:

PROVETES	K_I (MN·m ^{-3/2})	K_{II} (MN·m ^{-3/2})
B ₁	0,31	0,13
B ₂	0,17	0,16
B ₃	0,07	0,19

5.4.3.2.3 - Comparação dos Resultados

Dum modo análogo ao considerado em modo I, podemos analisar os resultados para o modo misto de solicitação através dos factores de forma, pois estes são proporcionais aos factores de intensidade de tensão (5.24).

Para os três tipos de provetes analisados em modo misto, obtivemos para os factores de forma Y_I e Y_{II} os seguintes valores indicados no Quadro VI:

QUADRO VI

MÉTODOS			MÉTODO	PROPOSTO
PROVETES	Y_I	Y_{II}	Y_I	Y_{II}
B ₁	1,09	1,09	1,09	1,17
B ₂	1,05	1,05	1,06	1,11
B ₃	1,01	1,01	1,03	1,02

Verifica-se, portanto, que a determinação dos factores de intensidade de tensão em modo misto, considerando a análise fotoelástica com pontos mais afastados da extremidade da fenda aqui analisada, têm uma boa concordância com os valores determinados analiticamente, verificando-se as maiores diferenças nos cálculos dos valores de Y_I para o prevete B₃ (cerca de 1%) e nos cálculos de Y_{II} para o provete B₁ (cerca de 7%), talvez devido à própria configuração das franjas isocromáticas, tornando-se menos precisa a definição dos pontos sobre as franjas que se encontram do lado da fenda.

Esta situação pode ser melhorada, considerando os provetes mergulhados numa solução de densidade idêntica à dos modelos, conduzindo-nos a uma melhor definição das franjas isocromáticas, como se refere no Apêndice 2.

6. - CONCLUSÃO E SUGESTÕES

A análise aqui efectuada, relativamente a problemas bidimensionais da mecânica da fractura linear elástica, permite-nos extrair as seguintes conclusões:

- Na extremidade de fendas existe uma singularidade de tensões em $r^{-1/2}$, sendo os factores de intensidade de tensão responsáveis por essa singularidade, fundamentando a mecânica da fractura linear elástica.
- A escolha do método utilizado para a determinação dos factores de intensidade de tensão terá sempre de ser ponderado. Assim, a existência de estruturas simples ou complexas, a maior ou menor precisão, o tempo disponível, a facilidade de obtenção de modelos, os custos envolventes, etc, são alguns dos factores que têm de ser considerados.
- Praticamente todos os métodos utilizam considerações muito próximas da extremidade da fenda, o que pode acarretar alguns problemas e, consequentemente, economicamente menos viável.
- O método experimental aqui analisado faz uso dos conhecimentos da fotoelasticidade e considera vários pontos distribuídos arbitrariamente sobre as franjas isocromáticas. Considerando a expressão do tensor das tensões sob a forma de um desenvolvimento em série podemos, por isso, tomar medidas numa região mais afastada da extremidade da fenda. Com este procedimento evitamos as dificuldades encontradas na zona muito próxima da extremidade da fenda, como por exemplo:

- a grande concentração de tensões, que faz com que a densidade das franjas isocromáticas seja muito elevada.
- a existência de uma pequena zona plástica.
- e a imperfeição da geometria da extremidade da fenda e a sua localização.

Por outro lado, tomando medidas mais afastada o erro relativo sobre os valores de r e θ é menor.

Para a resolução do sistema de equações não lineares foi utilizada a via numérica com a minimização dos erros por um efeito de média, sendo necessárias poucas iterações para a sua convergência.

O método aqui considerado foi aplicado ao estudo de fendas em modo I e em modo misto e os resultados foram comparados com os obtidos por outros métodos, tendo-se chegado à conclusão que os valores obtidos atingiam uma boa precisão na determinação dos factores de intensidade de tensão, quer em modo I, quer em modo misto.

- Considerando os resultados do trabalho aqui efectuado, através da fotoelasticidade aplicada a problemas bidimensionais, poder-se-á pensar na aplicabilidade desta técnica, para aquisição de conhecimentos mais amplos, sobre:
 - problemas tridimensionais
 - estruturas com configurações complexas
 - problemas que envolvam elasticidade dinâmica.

APÊNDICE 1

PROGRAMA PARA A RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES

O programa FIT I + II utilizado para a resolução do sistema de equações não lineares (5.25) foi elaborado em linguagem BASIC, com um tempo de resolução muito curto, demorando apenas poucos segundos cada iteração no computador Hewlett Packard Vectra QS 20.

A sequência de cálculo é iniciada com o estabelecimento dos valores dos coeficientes das incógnitas A_n , B_m e C_p , para os Q pontos considerados sobre as franjas isocromáticas, seguindo-se, como facilmente se pode observar no programa, o cálculo das matrizes definidas em 5.3.4.1 e 5.3.4.2 correspondentes ao método de Newton-Raphson e minimização pelo método dos mínimos quadrados para a resolução do sistema de equações não lineares (5.25).

Os valores atribuídos inicialmente às incógnitas A_n , B_m e C_p são colocados nos ficheiros "nome, AAA", "nome, BBB" e "nome, CCC" respectivamente (só atribuímos valores aos primeiros termos A_0 , B_0 e C_0 , uma vez que temos a ideia da sua ordem de grandeza, e aos restantes foi atribuído o valor zero).

Os valores dos raios, ângulos e ordens da franja, correspondentes às coordenadas dos Q pontos situados sobre as isocromáticas, são também colocados nos ficheiros "nome, DAT".

PROGRAMA FIT I+II

```

10  CLEAR:CLS:KEY OFF
    GOSUB INICIACAO

        'CALCULO COEF AAA,BBB,CCC

    FOR i=1 TO Q
        FOR j=0 TO (N-1)
            C(0,i,j)=(-1)*R(i)^(j-.5)*SIN(TETA(i))*SIN((j-1.5)*TETA(i))
            C(1,i,j)=(-1)*R(i)^(j-.5)*SIN(TETA(i))*COS((j-1.5)*TETA(i))
        NEXT j

        FOR j=N TO (N+M-1)
            C(0,i,j)=R(i)^(j-n-.5)*(1/(j-n-.5))*SIN((j-n-.5)*TETA(i))
                +SIN(TETA(i))*COS((j-n-1.5)*TETA(i))
            C(1,i,j)=R(i)^(j-n-.5)*(1/(j-n-.5))*COS((j-n-.5)*TETA(i))
                -SIN(TETA(i))*SIN((j-n-1.5)*TETA(i))
        NEXT j

        FOR j=(N+M) TO S-1
            C(0,i,j)=R(i)^(j-n-m)*SIN(BE)*SIN(BE)*((j-n-m)
                *SIN(TETA(i))*SIN((j-n-m-1)*TETA(i))
                -COS((j-n-m)*TETA(i)))
            C(1,i,j)=R(i)^(j-n-m)*SIN(BE)*SIN(BE)*((j-n-m)
                *SIN(TETA(i))*COS((j-n-m-1)*TETA(i))
                +SIN((j-n-m)*TETA(i)))
        NEXT j
    NEXT i

        'CALCULO COEF AAA,BBB,CCC

    FOR k=1 TO Q
        FOR i=0 TO S-1
            FOR j=i TO S-1
                IF j=i THEN ALFA=1 ELSE ALFA=2
                D(i,j,k)=ALFA*(C(0,k,i)*C(0,k,j)+C(1,k,i)*C(1,k,j))
            NEXT j
        NEXT i
    NEXT k

        'CICLO PRINCIPAL

    FOR T=0 TO IM

        'MATRIZ [a]=E

        FOR L=1 TO Q
            FOR i=0 TO (S-1)
                E(L,i)=0
            NEXT i
            FOR i=0 TO (S-1)
                IF i=0 THEN 480
                FOR k=0 TO i-1
                    E(L,i)=D(k,i,L)*X(k,T)+E(L,i)
                NEXT k
                E(L,i)=E(L,i)+2*D(i,i,L)*X(i,T)
                IF i=S-1 THEN 520
                FOR j=(i+1) TO S-1
                    E(L,i)=E(L,i)+D(i,j,L)*X(j,T)
                NEXT j
            NEXT i
        NEXT L
    NEXT T

```

```

FOR i=Q TO 1 STEP -1
  FOR j=S TO 1 STEP -1
    E(i,j)=E(i,j-1)
  NEXT j:
NEXT i

```

MATRIZ TRANSPOSTA $[a]^T=F$

```

FOR i=1 TO S
  FOR j=1 TO Q
    F(i,j)=E(j,i)
  NEXT j
NEXT i

```

MATRIZ $[a]^T*[a]=G$

```

FOR i=1 TO S
  FOR j=1 TO S
    RR=0
    FOR k=1 TO Q
      RR=RR+F(i,k)*E(k,j)
    NEXT k
    g(i,j)=RR
  NEXT j
NEXT i

```

INVERSÃO $[[a]^T*[a]]^{-1}$

```

FOR i=1 TO s
  FOR j=1 TO s
    h(i,j)=0
  NEXT j
NEXT i

```

```

FOR j=1 TO S
  h(j,j)=1
NEXT j

```

```

FOR j=1 TO S
  FOR i=j TO S
    IF g(i,j) <> 0 THEN 770
  NEXT i
  PRINT "MATRIZ SINGULAR",
  GOTO 1410
  FOR k=1 TO S
    ss=g(j,k)
    g(j,k)=g(i,k)
    g(i,k)=ss
    ss=h(j,k)
    h(j,k)=h(i,k)
    h(i,k)=ss
  NEXT k
  TT=1/g(j,j)

  FOR k=1 TO S
    g(j,k)=TT*g(j,k)
    h(j,k)=TT*h(j,k)
  NEXT k

```

770

```

FOR L = 1 TO S
  IF L = j THEN 970
  TT = -g(L, j)
  FOR k = 1 TO S
    g(L, k) = g(L, k) + TT * g(j, k)
    h(L, k) = h(L, k) + TT * (h(j, k))
  NEXT k
NEXT L
970 NEXT j

MATRIZ [f] = U

FOR k = 1 TO Q
  U = 0
  FOR i = 0 TO S - 1
    FOR j = i TO S - 1
      U = U + D(i, j, k) * X(i, T) * X(j, T)
    NEXT j
  NEXT i
  U(k) = U - TAU(k) * TAU(k)
NEXT k

'[[a]^T * [a]]^-1 * [a]^T

FOR i = 1 TO S
  FOR j = 1 TO Q
    RR = 0
    FOR k = 1 TO S
      RR = RR + h(i, k) * F(k, j)
    NEXT k
    M(i, j) = RR
  NEXT j
NEXT i

'[\Delta x] = [[a]^T * [a]]^-1 * [a]^T * [f] = -V

FOR i = 1 TO S
  FOR j = 1 TO 1
    RR = 0
    FOR k = 1 TO Q
      RR = RR + M(i, k) * U(k)
    NEXT k
    V(i) = (-1) * RR
  NEXT j
NEXT i

NOVOS VALORES AAA, BBB, CCC

FOR i = 0 TO S - 1
  X(i, T + 1) = X(i, T) + V(i + 1)
NEXT i

```

IMPRESSÃO - ITERAÇÕES

```

CLS
PRINT TAB(20) "ITERACAO"; T + 1
PRINT
IF IS="S" THEN LPRINT TAB(20) "ITERACAO"; T+1
FOR i = 0 TO (N - 1)
    PRINT TAB(20) "A"; i; "="; X(i, T + 1)
    IF IS="S" THEN LPRINT TAB(20) "A"; i; "="; X(i, T + 1)
NEXT i

FOR i = N TO (N + M - 1)
    PRINT TAB(20) "B"; i - N; "="; X(i, T + 1)
    IF IS="S" THEN LPRINT TAB(20) "B"; i - N; "="; X(i, T + 1)
NEXT i
FOR i = (N + M) TO S - 1
    PRINT TAB(20) "C"; i - N - M; "="; X(i, T + 1)
    IF IS="S" THEN LPRINT TAB(20) "C"; i - N - M; "="; X(i, T + 1)
NEXT i
PRINT TAB(20) "Qualquer tecla para continuar":lixo$=input$(1)

NEXT T

FIM DO CICLO PRINCIPAL

PRINT TAB(20) "Quer recomencar (S/N)":input r$
IF r$="S" OR r$="s" THEN 10 ELSE 1410

1410  END

```

INICIACAO:

LEITURA PARA Q PONTOS DE RAI0,ANGULO,FRANJA

```

LOCATE 7,1
INPUT " Qual o numero maximo de iteracoes....."; IM
INPUT " Qual o valor de  $f_0/2e$ ....."; FF
INPUT " Qual o valor de Beta (em graus)....."; BE
INPUT " Deseja imprimir (S/N)....."; IS
INPUT " Nome do ficheiro de pontos....."; FIC$
IF IS="S" OR IS="s" THEN IS="S"
PI=4 * ATN(1!): BE = BE * PI / 180
FIC$=FIC$+" .DAT"
OPEN "I", #1, FIC$
INPUT #1, NUMELES
Q = VAL(NUMELES)
PRINT " Qual o numero de pontos (maximo="; Q; ")....."; : INPUT NP
IF NP > Q THEN NP = Q
Q=NP
DIM R(Q), TETA(Q), NQ(Q), TAU(Q)
FOR I = 1 TO NP
    INPUT #1, RAIOS$, ANGULOS$, FRANJAS$
    R(I) = VAL(RAIOS$)
    TETA(I) = VAL(ANGULOS$)
    TETA(I) = TETA(I) * 3.1417 / 180
    NQ(I) = VAL(FRANJAS$)
    TAU(I) = NQ(I) * FF
NEXT I
CLOSE #1

```

LEITURA DOS COEFICIENTES AAA,BBB,CCC

```

INPUT " Nome do ficheiro de coeficientes ....."; COEF$
FIC$=COEF$+" .AAA"
OPEN "I", #1, FIC$
INPUT #1, NUMELES
N = VAL(NUMELES)
PRINT " Qual o numero de coef. AAA (maximo="; N; ")....."; : INPUT NP
IF NP > N THEN NP = N
IF NP = 0 THEN N = 0 ELSE DIM AAA(NP)
N=NP
FOR I = 1 TO N
    INPUT #1, AAAS$
    AAA(I) = VAL(AAAS$)
NEXT I
CLOSE #1

FIC$=COEF$+" .BBB"
OPEN "I", #1, FIC$
INPUT #1, NUMELES$
M = VAL(NUMELES$)
PRINT " Qual o numero de coef BBB (maximo="; M; ")....."; : INPUT NP
IF NP > M THEN NP = M
IF NP = 0 THEN M = 0 ELSE DIM BBB(NP)
M=NP
FOR I = 1 TO M
    INPUT #1, BBB$
    BBB(I) = VAL(BBB$)
NEXT I
M = NP
CLOSE #1

```

```

FICS=COEF$+'.CCC'
OPEN 'I', #1, FICS
INPUT #1, NUMELES
P = VAL(NUMELES)
PRINT '    Qual o numero de coef CCC (maximo='; P; '); : INPUT NP
IF NP > P THEN NP = P
IF NP = 0 THEN P = 0 ELSE DIM CCC(NP)
P=NP
FOR I = 1 TO P
    INPUT #1, CCC$
    CCC(I) = VAL(CCC$)
NEXT I
CLOSE#1

S = N + M + P
DIM X(S, IM)
FOR I = 1 TO N
    X(I - 1, 0) = AAA(I)
NEXT I
FOR I = 1 TO M
    X(I + N - 1, 0) = BBB(I)
NEXT I
FOR I = 1 TO P
    X(I + N + M - 1, 0) = CCC(I)
NEXT I
DIM C(1,Q,S),D(S-1,S-1,Q),E(Q,S),F(S,Q),G(S,S),H(S,S),M(S,Q),V(Q)
RETURN

```


APÊNDICE 2

REFINAMENTO E MULTIPLICAÇÃO DE FRANJAS ISOCROMÁTICAS

A2.1 - INTRODUÇÃO

Devido à necessidade de termos de fazer várias leituras das coordenadas de pontos situados sobre as franjas isocromáticas numa zona relativamente restrita, havia que considerar um processo que nos mostrasse com maior clareza e no maior número possível essas franjas.

Para a resolução do problema foi utilizado um método, devido a Post [88] e que ainda não tinha sido testado no Laboratório de Óptica do Departamento de Engenharia Mecânica da FEUP.

O princípio do método baseia-se na utilização de espelhos parciais (beam splitters) que são colocados um de cada lado do modelo birrefringente num polariscópio de transmissão. Os espelhos recebem os raios incidentes, deixando passar parte da luz (transmissão) e a outra parte é reflectida (reflexão).

Para o refinamento das franjas isocromáticas os espelhos são colocados paralelamente ao modelo, e, através da relação entre a intensidade luminosa dos raios e a birrefringência do modelo, consegue-se uma diminuição da largura das franjas isocromáticas.

Com o intuito de conseguir a multiplicação das franjas, os espelhos são colocados ligeiramente inclinados relativamente ao modelo, sendo os raios de luz, que atravessam o modelo um certo número de vezes, isolados e observados.

A2.2 - REFINAMENTO DAS FRANJAS ISOCROMÁTICAS

A largura das franjas isocromáticas pode ser reduzida através da técnica devida a Post [88], pelo emprego de espelhos parciais num polariscópio de transmissão, sendo colocados um de cada lado do modelo e paralelamente a este, como se representa na figura A2.1.

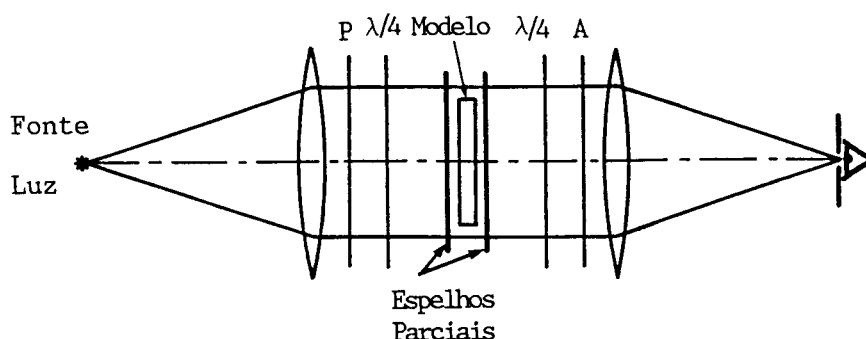


Fig. A2.1 - Polariscópio com espelhos parciais

O efeito dos espelhos sobre os raios que atravessam o modelo é esquematizado na figura A2.2, tendo-se optado pela incidência oblíqua dos raios para uma melhor clarificação desta apresentação. Na prática os raios têm uma incidência normal, entrando o emergido sobre o mesmo ponto do modelo. Os raios são, em parte, reflectidos entre os dois espelhos e a outra parte transmitidos. Assim, a intensidade de luz, em cada passagem sucessiva pelo modelo, vai decrescendo. Por exemplo, o raio A é mais intenso, o raio B menos intenso, etc..

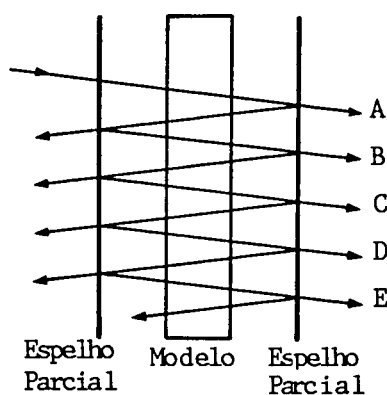


Fig. A2.2 - Reflexão e transmissão entre espelhos parciais paralelos

Não existindo espelhos parciais no campo do polariscópio, a intensidade luminosa, em campo claro, que passa através dum modelo sob tensão é dada por:

$$I = I_0 \cos^2 \frac{\Delta}{2} \quad (\text{A2.1})$$

Considerando agora a interposição de espelhos parciais, figura A2.2, verifica-se que a intensidade do raio A é diminuída devido à quantidade de luz perdida por reflexão entre os espelhos, obtendo-se:

$$I_1 = I_0 (1 - R)^2 \cos^2 \frac{\Delta}{2} = I_0 T^2 \cos^2 \frac{\Delta}{2} \quad (\text{A2.2})$$

onde R e T são os coeficientes de reflexão e de transmissão, respectivamente.

A intensidade de luz associada ao raio B será:

$$I_2 = I_0 T^2 R^2 \cos^2 \frac{3\Delta}{2} \quad (\text{A2.3})$$

Neste caso o raio B tem duas reflexões, logo R aparece elevado ao quadrado, e passa três vezes o modelo, pelo que o argumento do cosseno é multiplicado por 3.

Generalizando, obtemos para o raio de ordem (m + 1):

$$I_{m+1} = I_0 T^2 R^{2m} \cos^2 \frac{(2m+1)\Delta}{2} \quad \text{com } m = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A2.4})$$

Estas intensidades $I_1, I_2, \dots, I_{m+1}$ somam-se aritmeticamente, obtendo-se a intensidade de luz resultante, através da série:

$$I = I_0 T^2 \sum_{m=0}^{\infty} R^{2m} \cos^2 \frac{(2m+1)\Delta}{2} \quad (\text{A2.5})$$

A expressão (A2.5) pode ser escrita como:

$$I = \frac{I_o T^2}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \left[R^{2m} + R^{2m} \cos (2m+1)\Delta \right]$$

ou

$$I = \frac{I_o T^2}{2} \left[\frac{1}{1-R^2} + R_e \left(\sum_{m=0}^{\infty} R^{2m} e^{i(2m+1)2\Delta} \right) \right] \quad (A2.6)$$

e considerando $R^2 < 1$, obtemos:

$$I = \frac{I_o T^2}{2} \left[\frac{1}{1-R^2} + \frac{(1-R^2) \cos \Delta}{1 + R^4 - 2R^2 \cos 2\Delta} \right] \quad (A2.7)$$

Considerando $\Delta/2\pi = N$ na expressão (A2.7), a figura A2.3 mostra o aspecto da variação da intensidade com a birrefringência do modelo. A curva a cheio representa essa variação para espelhos parciais com $R = 0,85$ e a curva a tracejado refere-se à equação (A2.1) ou seja se não existissem espelhos parciais (as escalas das curvas são diferentes).

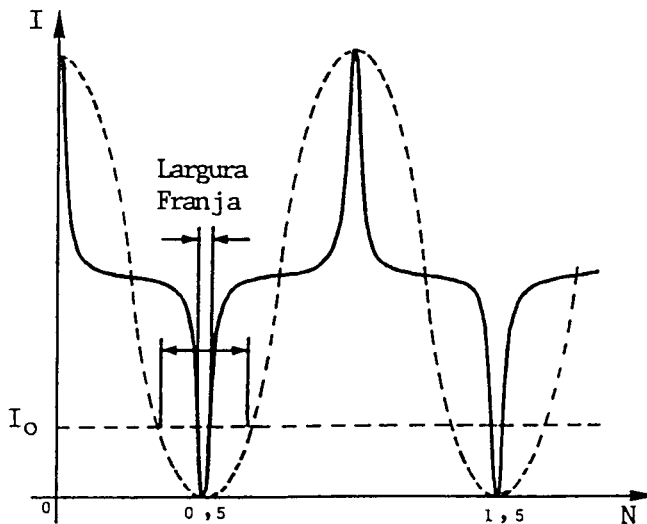


Fig. A2.3 - Variação da intensidade em função da ordem da franja $\Delta/2\pi = N$

Facilmente se percebe agora, analisando a figura A2.3, que para uma intensidade de luz a partir da qual as franjas começam a ser observadas, a sua espessura é reduzida quando consideramos espelhos parciais, colocados paralelamente ao modelo, no campo do polariscópio.

A2.3 - MULTIPLICAÇÃO DE FRANJAS ISOCROMÁTICAS

A técnica, utilizando espelhos parciais, para a obtenção da multiplicação de franjas isocromáticas, deriva directamente do que foi dito para o refinamento das franjas e é devido também a Post [88, 89, 90].

Neste caso os espelhos são também colocados um de cada lado do modelo, mas agora ligeiramente inclinados entre si, como mostra a figura A2.4.

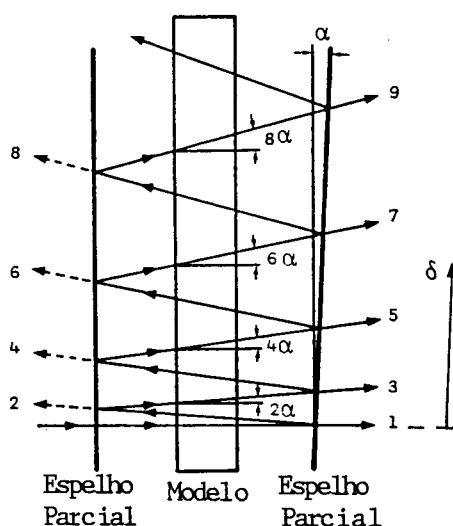


Fig. A2.4 - Reflexão e transmissão entre espelhos parciais ligeiramente inclinados

Como se vê, cada raio de luz emerge do sistema de espelhos segundo um ângulo que depende do número de vezes que o raio atravessa o modelo. Por exemplo, os raios 1, 3, 5 e 7 que atravessam o modelo o número de vezes que o seu respectivo número, emergem sob os ângulos 0 , 2α , 4α e 6α . A inclinação mostrada na figura A2.4 é bastante exagerada. Embora os raios não passem por um ponto único do modelo, eles passam por pontos muito próximos. O comprimento δ , sobre o qual o efeito da birrefringência é melhor definido, aumenta com a distância entre os espelhos e o seu ângulo de inclinação, para cada raio. Em [90] encontra-se permenorizado o estudo que relaciona estes valores. Na prática, o valor normalmente utilizado para o ângulo de inclinação não é, geralmente, maior que $\alpha = 1/200$ radianos.

Devido ao facto dos raios de luz serem inclinados, sob ângulos diferentes, relativamente ao eixo do polariscópio, permite que cada raio

emergente seja isolado, como mostra a figura A2.5. Assim, considerando o feixe de raios a incidir nos espelhos, eles emergem a seguir sob ângulos diferentes, indo convergir em diferentes pontos no plano focal do campo de lentes.

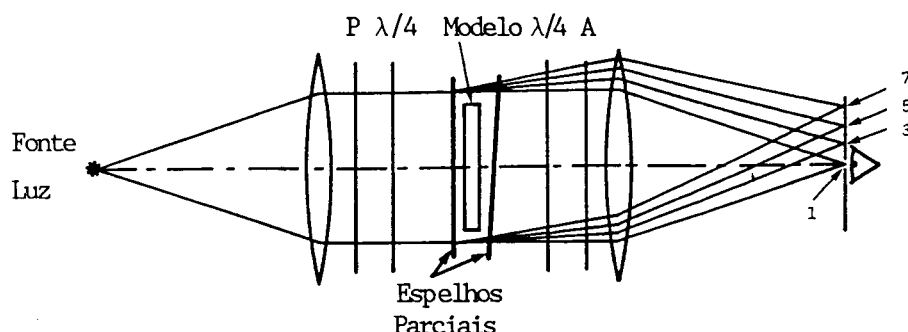


Fig. A2.5 - Polariscópio com espelhos parciais para multiplicação de franjas isocromáticas

Cada um destes raios pode ser observado colocando a vista ou o foco de uma câmara fotográfica em cada um dos pontos de convergência. Para uma melhor observação é normalmente utilizado uma folha de papel com um orifício, colocada no plano focal e normalmente ao eixo do polariscópio, para podermos observar só o feixe que nos interessa.

Na prática, as franjas isocromáticas associadas aos raios 1, 3, 5, 7, etc, podem ser observadas e fotografadas, quer em campo claro, quer em campo escuro. Considere-se, por exemplo, a observação dos raios 1, 3 e 5 em campo claro e campo escuro. Para o raio 1 obtém-se a sequência da ordem das franjas 0, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, Para o raio 3, cuja luz atravessa o modelo três vezes, tem-se 0, 1/6, 1/3, 1/2, 2/3, 5/6, 1, E, para o raio 5, onde a luz atravessa cinco vezes o modelo, a sequência da ordem das franjas é 0, 1/10, 1/5, 3/10, 2/5, 1/2,

Quando os raios de luz passam cinco vezes o modelo, o seu efeito é o mesmo que os raios ao passarem por 5 modelos idênticos e carregados do mesmo modo. Assim, a relação entre a intensidade luminosa e a birrefringência, considerando o campo escuro, é dada por:

$$I = I_0 T^2 R^{n-1} \sin^2 \frac{n \Delta}{2} \quad (\text{A2.8})$$

sendo n o número de vezes que os raios atravessam o modelo e os coeficientes da reflexão e transmissão são os mesmos para ambos os espelhos parciais.

A multiplicação de franjas isocromáticas, utilizando este método, é acompanhada por uma diminuição considerável da intensidade luminosa da ordem de $T^2 R^{n-1}$. Esta perda de intensidade pode ser minimizada, para um determinado raio, se se fizer uma escolha dos coeficientes R e T . Assim, considerando que não há absorção, ou seja, os espelhos são perfeitos, temos:

$$T + R = 1$$

(A2.9)

Substituindo (A2.9) em (A2.8) e resolvendo $dI_n/dr = 0$ em ordem a R , obtemos o coeficiente de reflexão para os dois espelhos, que minimizam a intensidade perdida:

$$R = \frac{n - 1}{n + 1}$$

(A2.10)

Uma vez que R é função do número de vezes que o raio atravessa o modelo, n , não é possível otimizar os espelhos para todos os raios simultâneamente.

TABELA 1 - Propriedade de espelhos óptimos para multiplicação de franjas isocromáticas

FACTOR DE MULTIPLICAÇÃO n	R	T	COEFICIENTES DE INTENSIDADE $T^2 R^{n-1}$
1	0	1	1
3	0,500	0,500	0,0625
5	0,667	0,333	0,0219
7	0,750	0,250	0,0111
9	0,800	0,200	0,0067
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

Na tabela 1, apresentam-se os valores óptimos dos coeficientes de reflexão e transmissão para cada valor de n , bem como os coeficientes da intensidade luminosa associados a cada raio.

A2.4. - APLICAÇÃO PRÁTICA

A multiplicação de franjas isocromáticas através da técnica devida a Post foi aplicada à análise de franjas em provetes com fendas, com um dispositivo semelhante ao esquematizado na figura A2.5.

A fonte de luz utilizada, uma lâmpada de halogéneo de 250 watts, foi colocada no foco da primeira lente. A partir daqui a luz entra no sistema em feixes paralelos, de modo que os raios penetram no modelo e emergem um determinado número de vezes na mesma direcção. Ao emergir da segunda lente e, devido à inclinação dos espelhos, cada feixe de raios vai convergir no seu plano focal nos pontos 1, 3, 5, 7, Em cada um destes pontos observam-se, pela mesma ordem, as franjas isocromáticas de ordem 1, $1/3$, $1/5$, $1/7$, ..., considerando o campo escuro.

No foco desta segunda lente foi colocada uma folha de papel branca, cujo plano é perpendicular ao eixo do polariscópio, com um orifício que só deixa passar um dos feixes luminosos, correspondentes a cada um dos pontos 1, 3, 5, 7, No suporte desta folha, foi montada uma máquina fotográfica de modo que o seu foco coincidisse com o foco da segunda lente e, conseqüentemente, com o furo existente na folha que materializa o plano focal da lente. Este suporte pode deslocar-se segundo a direcção do eixo do polariscópio, na horizontal e na vertical, de modo a podermos fazer coincidir o furo com as sucessivas posições dos diversos feixes de raios e fotografar para as respectivas multiplicações.

Os espelhos parciais existentes no Laboratório de Óptica do Departamento de Engenharia Mecânica da FEUP tinham todos um coeficiente de reflexão e transmissão de 0,5. Fazendo uso destes espelhos conseguiu-se em alguns casos chegar-se a uma multiplicação de 7 vezes, embora com os problemas inerentes à optimização da intensidade luminosa.

Os espelhos foram montados em duas placas ligadas entre si por três parafusos micrométricos com mola, figura A2.6, de modo a haver intervalo entre os dois espelhos para o modelo e para estabelecer a inclinação dos mesmos.

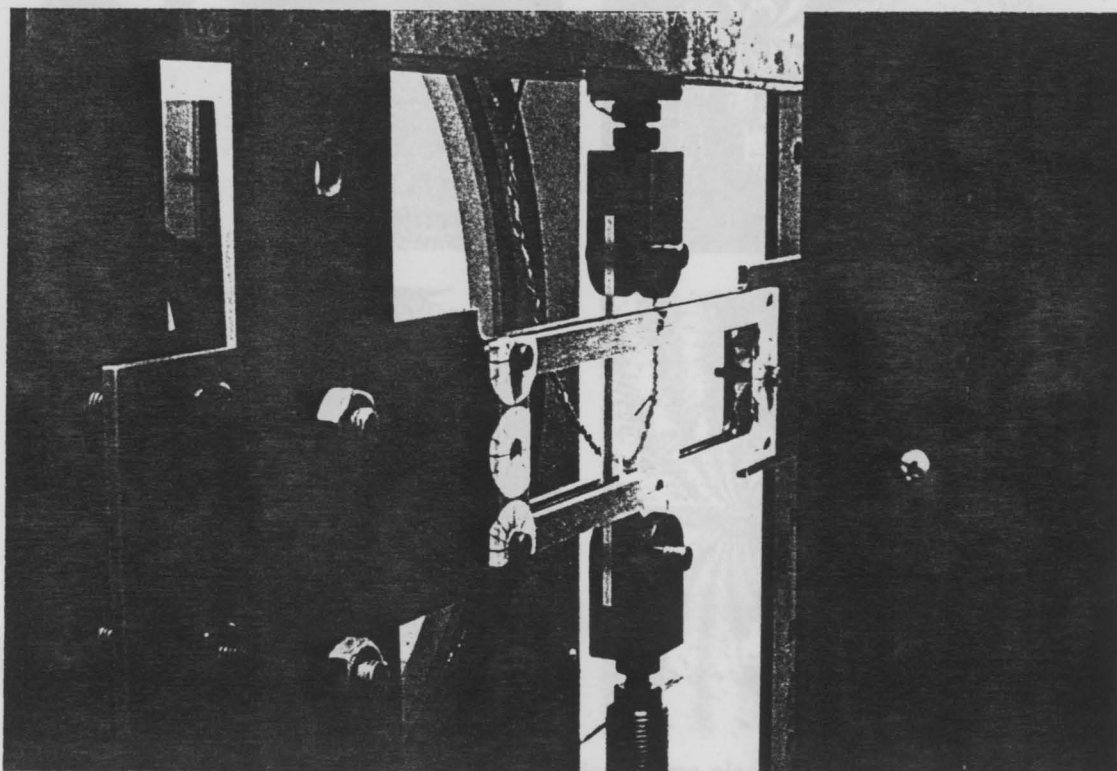


Fig. A2.6 - Espelhos parciais no campo do polariscópio

Esta técnica para a multiplicação de franjas isocromáticas foi testada numa placa circular de CR - 39 submetida à compressão. A inclinação considerada entre os espelhos foi de cerca de $0,46^\circ$.

Analizando a franja de ordem 1, para os raios correspondentes à multiplicação por 1, 3, 5 e 7, verificou-se que a sua configuração e posição era idêntica nos quatro casos.

A figura A2.7 representa a multiplicação de franjas isocromáticas de 1x, 3x, 5x e 7x, da placa com fenda lateral utilizada no nosso trabalho e submetida à mesma tensão uniaxial de $1,16 \text{ MN. m}^{-2}$.

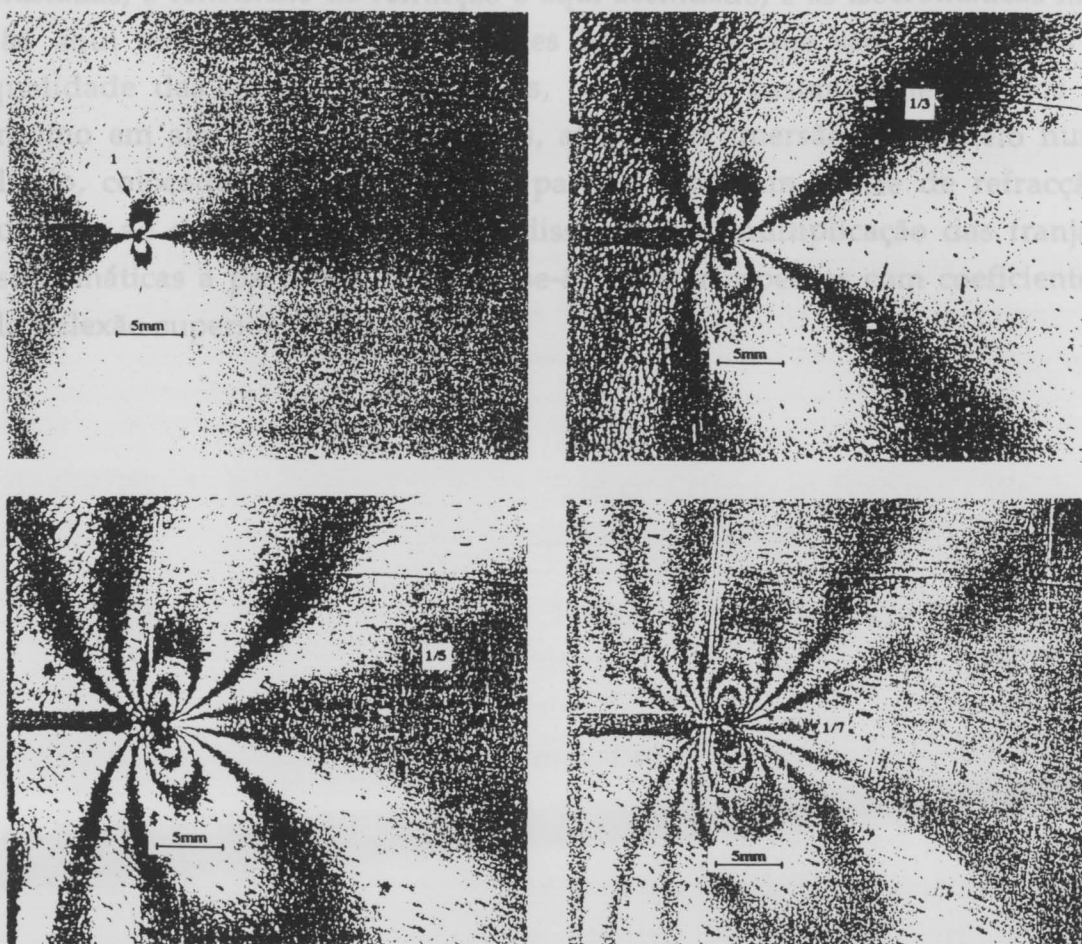


Fig. A2.7 - Multiplicação de franjas isocromáticas numa placa com fenda de 1x, 3x, 5x e 7x

A2.5 - CONCLUSÃO

Após utilização desta técnica de multiplicação de franjas isocromáticas chega-se à conclusão que os resultados encontrados foram satisfatórios.

No entanto, como se pode verificar, analisando as figuras A2.7, 5.7, 5.8, 5.13, 5.14 e 5.15, aparecem algumas manchas, que aumentam com a multiplicação, e, que são consequência da birrefringência residual devido essencialmente à superfície das placas não estar nas melhores condições, pois apresentava-se bastante riscada e em alguns casos aparentando uma certa rugosidade, bem como algumas porosidades, o que vai ocasionar certas descontinuidades localizadas sobre as franjas isocromáticas. Verificou-se ainda a existência de algumas zonas onde a espessura variava entre 3,8 e 3,9mm. Por outro lado, como na zona muito próxima da extremidade da

fenda a deformação é relativamente elevada, comparada com as zonas mais afastadas, o fenómeno da refração é aqui acentuado, e as isocromáticas não são aqui muito bem definidas. Estes fenómenos, que são prejudiciais à qualidade das franjas isocromáticas, podem ser bastante melhorados e, mesmo em alguns casos eliminados, através da imersão do modelo num fluido, colocado entre os espelhos parciais, com um índice de refração idêntico ao do modelo [90]. Além disso, para a multiplicação das franjas isocromáticas a partir de 5x, dever-se-ão utilizar espelhos com coeficientes de reflexão superior a 0,5.



REFERÊNCIAS

- [1] - GRIFFITH, A. A. - "The Phenomena of Rupture and Flow in Solids". Philosophical Transactions of the Royal Society of London. London, 1921, A22, pp. 163-197.
- [2] - OROWAN, E - "Energy Criteria of Fracture". Welding Journal, Vol. 34, 1955, pp. 1575-1605.
- [3] - CASTRO, P. T. - "Lições de Mecânica da Fractura do Curso de Mestrado em Engenharia Estrutural". Faculdade de Engenharia, Porto, 1981.
- [4] - IRWIN, G. R. - "Analysis of Stresses and Strains Near the end of a Crack Traversing a Plate". J. of Applied Mech. New York, ASME, September 1957, pp. 361-364.
- [5] - WESTERGAARD, H. M. - "Bearing Pressures and Cracks." J. of Applied Mech. New York, ASME, June 1939, pp. A49-A53.
- [6] - MUSKHELISHVILI, N. I. - "Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity". Noordhoff International Publishing. Leyden, 4th Ed., 1954.
- [7] - SOKOLNIKOFF, I. F. - "Mathematical Theory of Elasticity". McGraw Hill, 2th Ed., 1956.
- [8] - TIMOSHENKO, S. P.
- GODIER, J. N. - "Theory of Elasticity". McGraw Hill Kogakusha, 3th Ed, 1970.

- [9] - EFTIS, J.
- LIEBOWITZ, H.
- " On the Modified Westergaard Equations for Certain Plane Crack Problems". Int. J. of Fract. Mech., Vol. 8, 1972, pp. 383-392.
- [10] - EFTIS, J.
- SUBRAMONIAN, N.
- LIEBOWITZ, H.
- "Crack Border Stress and Displacement Equations Revisited". Engng. Fracture Mech., Vol. 9, n° 1, 1977, pp. 189-210.
- [11] - TADA, H.
- PARIS, P. C.
- IRWIN, G. R.
- "The Stress Analysis of Crack Handbook". Del Research Corporation. Missouri. 1973.
- [12] - SIH, G. C.
- "Handbook of Stress Intensity Factors". Institute of Fracture and Solids Mechanics. Lehigh University, 1973.
- [13] - ROOKE, D. P.
- CARTWRIGHT, D. J.
- "Compendium of Stress Intensity Factors". Her Majesty's Stationary Office. London 1976.
- [14] - WILLIAMS, M. L.
- "On the Stress Distribution at the Base of Stationary Crack". J. of Applied Mech. March 1957, pp. 109-114.
- [15] - PARKER, A. P.
- "The Mechanics of Fracture and Fatigue". E. F. N. Spon Lth. New York. 1981.
- [16] - A.S.T.M.
- "Standard Test Methods for Plane - Strain Fracture Toughness of Metallic Materials". ASTM E399-83. American Society for Testing and Materials. 1985.
- [17] - B. S.
- "Methods of Testing for Plane - Strain Fracture Toughness (K_{IC}) of Metallic Materials". BS 5447. British Standard Institution. 1977.

- [18] - SIH, G. C.
- LIEBOWITZ, H.
- "Mathematical Theories of Brittle Fracture". Fracture Vol.II, Ed. Liebowitz. 1968.
- [19] - BROEK, D.
- "Elementary Engineering Fracture Mechanics". Martinus Nijhoff Publishers, 4th Ed. The Netherlands. 1986.
- [20] - CARTWRIGHT, D. J.
- ROOKE, D.P.
- "Evaluation of Stress Intensity Factors". J. of Stress Analysis, vol. 10, n^o4, 1975, pp. 217-224.
- [21] - CHISHOLM, D. B.
- JONES, D.L.
- "An Analytical and Experimental Stress Analysis of a Practical Mode II Fracture Test Specimen". Exp. Mech., 1977, pp. 7-12.
- [22] - KOBAYASHI, A. S.
- CHEREPY, R. D.
- KINSEL, W.C.
- "A Numerical Procedure for Estimating the Stress Intensity Factor of a Crack in a Finite Plate". J. of Basic Engng., 1964, pp. 681-684.
- [23] - ISIDA, M.
- "Effect of Width and Length on Stress Intensity Factors of Internally Cracked Plates Under Various Boundary Conditions". Int. J. of Fract. Mech., vol. 7, 1971, pp. 301-316.
- [24] - ISIDA, M.
- "Stress Intensity Factors for the Tension of an Eccentrically Cracked Strip." J. of Applied Mech., 1966, pp. 674-675.
- [25] - ISIDA, M.
- "On the Determination of Stress Intensity Factors for Some Common Structural Problems." Engng. Fract. Mech., vol. 2, 1970, pp. 61-79.

- [26] - WAT, T. - "Stress Intensity Factors Determined by use of Westergaard's Stress Functions." Engng. Fract. Mech., vol. 20, 1984, pp. 65-73.
- [27] - BOWIE, O.L. - "Analisis of an Infinite Plate Containing Radial Cracks Originating at the Boundary of an Internal Circular Hole." J. of Mathematics and Physics, vol. 25, 1956, pp. 60-71.
- [28] - BOWIE, O. L. - "Solution of Plane Crack Problems by Mapping Techniques". Mechanics of Fracture I - Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems, Ed. by Sih, G. C.. Noordhoff International Publishing. Leyden, 1973, pp. 1 - 55.
- [29] - BOWIE, O. L.
- NEAL, D. M. - "A Modified Mapping - Collocation Technique for Accurate Calculation of Stress Intensity Factors." Int. J. of Fract. Mech., vol 6, 1970, pp. 199-206.
- [30] - BUECKNER, H. F. - "The Propagation of Cracks and Energy of Elastic Deformation." Trans. ASME 80E, 1958, pp. 1225-1230.
- [31] - CARTWRIGHT, D. J. - "Stress Intensity Factor Determination." In Developments in Fracture Mechanics, Cap. 2, Ed. by G. C. Chell. Applied Science Publishers Ltd London, 1979.
- [32] - CARTWRIGHT, D. J.
- ROOKE, D. P. - " Green's Functions in Fracture Mechanics". In Proc. Symp. on Fracture Mechanics - Current Status and Future Prospects, University of Cambridge, 1979.

- [33] - BUECKNER, H. F.
 - "A Novel Principe for the Computation of Stress Intensity Factors." Z. Angewandte Math. Mechan., vol. 50, 1970, pp. 529-546.

- [34] - RICE, J. R.
 - "Some Remarks on Elastic Crack Tip Stress Field." Int. J. of Solids Structures, vol. 8, 1972, pp. 751-758.

- [35] - PETROSKI, H. J.
 - ACHENBACH, J. D.
 - "Computation of the Weight Function from a Stress Intensity Factor." Engng. Fract. Mech., vol. 10, 1978, pp. 257-266.

- [36] - ERDOGAN, F.
 - GUPTA, G. D.
 - COOK, T. S.
 - "Numerical Solution of Singular Integral Equations". Mechanics of Fracture I - Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems. Ed. by Sih, G. C., Noordhoff International Publishing. Leyden, 1973, pp. 368-425.

- [37] - SNEDDON, I. N.
 - LOWENGRUB, M.
 - "Crack Problems in the Classical Theory of Elasticity". Wiley. New York, 1969.

- [38] - SNEDDON, I. N.
 - "Integral Transform Methods." Mechanics of Fracture I - Methods of Analysis and Solutions of Crack Problem. Ed. by Sih, G. C., Noordhoff International Publishing, Leyden, 1973, pp. 315-367.

- [39] - LIEBOWITZ, H.
 - "Fracture." vol.I, II. Academic. Press, 1968.

- [40] - ZIENKIEWICZ, O. C.
 - "The Finite Element Method in Engineering Science." McGraw-Hill, 1971.

- [41] - PARIS, P. C.
- SIH, G. C.
- "Stress Analysis of Cracks." In Fracture ASTM STP 381, Philadelphia, 1964, pp. 30-83.
- [42] - WILSON, W. K.
- "Finite Element Methods for Elastic Bodies Containing Cracks." Mechanics of Fracture I - Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems. Ed. by SIH, G. C., Noordhoff International Publishing. Leyden, 1973, pp. 484-515.
- [43] - BREBBIA, C. A.
- "The Boundary Element Method for Engineers." Pentech Press, Plymouth, 1978.
- [44] - MIR-MOHAMAD, S. A.
- ALTIERO, N. J.
- "Solution of the Problem of a Crack in a Finite Plane Region Using an Indirect Boundary Integral Method". Engng. Fract. Mech., vol. 11, 1979, pp. 831-837.
- [45] - LUXMOORE, A. R.
- OWEN, D. R. J.
- RAJAPAKSE, Y. P. S.
- KANNINEN, M. F.
- "Boundary Element Methods and Specialised Approaches". Proceedings of the 4th International Conference on Numerical Methods in Fracture Mechanics. Pineridge Press. Swansea, 1978, pp. 1-100.
- [46] - HARTRANFT, R. J.
- SIH, G. C.
- "Alternating Method Applied to Edge and Surface Crack Problems." Mechanics of Fracture I - Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems. Ed. by SIH, G. C., Noordhoff International Publishing. Leyden, 1973, pp. 179-238.
- [47] - CARTWRIGHT, D. J.
- ROOKE, D. P.
- "Aproximate Stress Intensity Factors Compounded From Known Solutions." Engng. Fract. Mech., vol. 6, 1974, pp. 563-571.

- [48] - ROOKE, D. P.
- CARTWRIGHT, D. J.
- "The Compounding Method Applied to Cracks in Stiffened Sheets". Engng. Fract. Mech., vol. 8, 1976, pp. 567-573.
- [49] - KUNIO, T.
- "Experimental Mechanics in Japan." 9th International Conference of the Permanent European Committees. 1990.
- [50] - YOUQUAN, J.
- ZHISHAN, L.
- "A Survey of Recent Experimental Mechanics in the People's Republic of China." 9th International Conference of the Permanent European Committees. 1990.
- [51] - PARIS, P.C.
- ERDOGAN, F.J.
- " A Critical Analysis of Crack Propagation Laws." Trans. ASME, J. of Basic Eng., 1963, pp. 528-534.
- [52] - FORMAN, R. G.
- KEARNEY, V. E.
- ENGLE, R. H.
- " Numerical Analysis of Crack Propagation in Cyclic Load Structures." Trans. ASME, J. of Basic Eng., vol. 89, 1967, p.p. 459.
- [53] - BRANCO, C. M.
- RADON, J. C.
- CULVER, L. E.
- "Influence of Mean Stress Intensity on Fatigue Crack Growth in an Aluminium Alloy." J. Mech. Eng. Sci. , vol. 17, 1975, pp. 199.
- [54] - BRANCO, C. M.
- RADON, J. C.
- CULVER, L. E.
- "Growth of Fatigue Cracks in Steels." Metal Science, vol. 10, 1976, pp. 149.
- [55] - MANOGG, P.
- "Investigation of the Rupture of a Plexiglass Plate by Means of an Optical Method Involving High-Speed Filming of the Shadows Originating Around Holes Drilling in a Plate." Int. J. of Fract. Mech., 1966, pp. 604-613.

- [56] - THEOCARIS, P. S.
 - "Caustics for the Determination of Singularities in Cracked Plates." Conférence du Symposium I.U.T.A.M. de Poitiers "Optical Methods in Mechanics of Solids", Sept. 1979, Sijthoff & Noordhoff, Ed, Lagard, 1981.
- [57] - KALTHOFF, J. F.
 - BEINERT, J.
 - WINKLER, S.
 - "Analysis of Fast Running and Arresting Cracks by the Shadow Optical Method of Caustics." Communication an Symposium I.U.T.A.M. de Poitiers "Optical Methods in Mechanics of Solids", Sept. 1979, Sijthoff & Noordhoff, Ed, Lagard, 1981.
- [58] - THEOCARIS, P. S.
 - "Local Yelding Around a Crack tip in Plexiglass." J. of Applied Mech., 1970, pp. 409-415.
- [59] - THEOCARIS, P. S.
 - IOAKIMIDS, N. I.
 - "An Improved Method for the Determination of Mode I Stress Intensity Factors by the Experimental Method of Caustics." J. of Strain Analysis, vol. 14, 1979, pp. 111-118.
- [60] - THEOCARIS, P. S.
 - GDOUTOS, E. E.
 - "An Optical Method for Determining - Opening - Mode and Edge Sliding-Mode Stress Intensity Factors." J. of Applied Mech. 1972, pp. 91-97.
- [61] - O'REGAR, R.
 - DUDDERAR, T. D.
 - "A New Holographic Interferometer for Stress Analysis." Exp. Mech., 1971, pp. 241-247.
- [62] - HOLLOWAY, D. C.
 - RANSON, W. F.
 - TAYLOR, C. E.
 - "A Neoteric Interferometer for Use in Holographic Photoelasticity." Exp. Mech., 1972, pp. 461-465.

- [63] - DUDERAR, T. D.
- GORMAN, H. J.
- "The Determination of Mode I Stress Intensity Factors by Holographic Interferometry." *Exp. Mech.*, 1973, pp. 145-149.
- [64] - ROSSMANITH, H. P.
- "Dynamic Stress Intensity Factor Determination from Isopachics." *Exp. Mech.*, 1979, pp. 281-285.
- [65] - KOBAYASHI, A.S.
- ENGSTROM, W.L.
- SIMON, B.R.
- "Crack - Opening Displacements and Normal Strains in Centrally Notched Plates." *Exp. Mech.*, 1969, pp. 163-170.
- [66] - LUXMOORE, A. R.
- "Optical Methods for Microscopic measurement of Displacements Around Crack Tips." *Communication au Symposium .I.U.T.A.M. de Poitiers. "Optical Methods in Mechanics of Solids."* Sijthoff & Noordhoff, Ed. Lagard, 1981.
- [67] - ATKINS, A. G.
- "The Laws of Similitude and Crack Propagation." *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 16, 1973, pp. 541-548.
- [68] - POST, D.
- "Photoelastic Stress Analysis for an Edge Crack in a Tensile Field." *Proc. of SESA*, vol. 12, 1954, pp. 99-116.
- [69] - WELLS, A. A.
- POST, D.
- "The Dynamic Stress Distribution Surrounding a Running Crack - A Photoelastic Analysis." *Proc. of SESA*, vol. 16, 1958, pp. 69-92
- [70] - IRWIN, G. R.
- "Discussion of Ref. [67]", *Proc. of SESA*, vol. 16, 1958, pp. 93-96.
- [71] - DALLY, J.W.
- SANFORD, R.J.
- "Classification of Stress Intensity Factors from Isochromatic - Fringe Patterns." *Exp. Mech.*, 1978, pp. 441-448.

- [72] - SCHROEDL, M.A.
- SMITH, C.W.
- "Local Stress Near Deep Surface Flaws Under Cylindrical Bonding Fields." ASTM STP 536, 1973, pp. 45-63.
- [73] - SCHROEDL, M. A.
- SMITH, C. W.
- "A Study of Near and Far Field Effects Photoelastic Stress Intensity Determination." Engng. Fract. Mech., 1975, pp. 341-355.
- [74] - ETHERIDGE, J.M.
- DALLY J.W.
- "A Three-Parameter Method for Determining Stress Intensity Factors from Isochromatic Fringe Loops." J. Strain Analysis, vol. 13, 1978, pp. 91-94.
- [75] - ETHERIDGE, J.M.
- DALLY J.W.
- "A Critical Review of Methods for Determining Stress Intensity Factors from Isochromatic Fringes." Exp. Mech., vol. 17, 1977, pp. 248-254.
- [76] - SMITH, C. W.
- OLAOSEBIKAN, O.
- "On the Extraction of Stress Intensity Factors from Near - Tip Photoelastic Data". Exp. Mech., 1986, pp. 313-318.
- [77] - PARIS, P. C.
- SIH, G. C.
- "Stress Analysis of Cracks." ASTM STP 381, 1964, pp. 30-81.
- [78] - SIH, G. C.
- "Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems." Mechanics of Fracture I. Noordhoff International Publishing. Leyden, the Netherlands. 1973.
- [79] - SMITH, D. G.
- SMITH, C. W.
- "Photoelastic Determination of Mixed Mode Stress Intensity Factors." Engng. Fract. Mech., vol. 4, 1972, pp. 357-366.
- [80] - THEOCARIS, P. S.
- GDOUTOS, E. E.
- "A Photoelastic Determination of K_I Stress Intensity Factors." Engng. Fract. Mech., vol. 7, 1975, pp. 331-339.

- [81] - GDOUTOS, E. E.
- THEOCARIS, P. S.
- " A Photoelastic Determination of Mixed-mode Stress Intensity Factors." Exp. Mech., vol. 18, 1978, pp. 87-96.
- [82] - SANFORD, R. J.
- DALLY, J. W.
- "A General Method for Determining Mixed Mode Stress Intensity Factors from Isochromatic Fringe Patterns." Engng. Fract. Mech., vol. 11, 1979, pp. 621-633.
- [83] - SANFORD, R. J.
- "Aplications of the Least-Squares Method of Photoelastic Analysis." Exp. Mech. , vol. 20, 1980, pp. 192-197.
- [84] - SCHROEDL, M.A.
- McGWAN, J. J.
- SMITH, C. W.
- "An Assessment of Factors Influencing Data Obtained by the Photoelastic Stress Freezing Technique for Stress Field Near Crack Tips." Engng. Fract. Mech., vol. 4, nº4, 1972, pp. 801-809.
- [85] - SANFORD, R. J.
- "A Critical Re-examination of the Westergaard Method for Solving Opening - Mode Crack Problems." Mech. Research Communications, vol. 6, 1979, pp. 289-294.
- [86] - REBELO, C. A.
- " Caracterização do Comportamento à fractura de Resinas Poliéster Insaturadas." Tese de Mestrado. Depart. de Eng. Mec. da FEUP. 1987.
- [87] - CHOUZAL, J. A.
- "Processamento de Imagem na Interpretação de franjas Interferométricas em Análise Experimental de Tensões." Tese de Mestrado. Depart. Eng. Mec. da FEUP. 1991.

[88] - POST, D.

- "Isochromatic Fringe Sharpening and Fringe Multiplication in Photoelasticity." Proc. of SESA, vol. XII, 1955, pp. 143 - 156.

[89] - POST, D.

- "Photoelastic Fringe Multiplication for Tenfold Increase in Sensitivity." Exp. Mech., 1970, pp. 305 - 312.

[90] - POST, D.

- "Fringe Multiplication in Three-Dimensional Photoelasticity." J. of Strain Analysis, vol. 1, 1966, pp. 380 - 388.



FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

BIBLIOTECA



0000008483