Universidade do Porto
Faculdade de Engenharia
FEUP



Marco Paulo Lages Parente

Análise Elasto-Plástica de Estruturas tipo Casca com Comportamento Anisotrópico

MEM
Porto, 2003

Marco Paulo Lages Parente

Análise Elasto-Plástica de Estruturas tipo Casca com Comportamento Anisotrópico

Dissertação apresentada à
Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
Novembro de 2003

À Cecília, aos meus pais e irmão

Agradecimentos

Em primeiro lugar desejo exprimir ao Prof. Doutor Renato Manuel Natal Jorge, meu orientador, o meu agradecimento e amizade pela oportunidade de realizar este trabalho. A sua disponibilidade incondicional e esforço para proporcionar as melhores condições para a sua realização, bem como o alento e motivação nos momentos mais difíceis, que foram decisivos para a qualidade do trabalho final.

A todos os docentes da parte escolar do Mestrado em Engenharia Mecânica, agradeço pela formação concedida, bem como a disponibilidade demonstrada nos momentos em que foi solicitado auxílio.

Ao colega e amigo Robertt Angelo Fontes Valente, os mais sinceros agradecimentos, pela contínua camaradagem e auxílio prestado durante todo o processo de investigação, que em muito contribuíram para a melhoria da sua qualidade. Agradeço aos demais colegas do Laboratório de Computação pelo óptimo ambiente de trabalho e troca de impressões, em especial ao Eng.º Paulo Matos, Eng.º Pedro Moreira, Eng.º Ricardo Sousa, Eng.º Helder Martins, Eng.º Pedro Areias, e Eng.ª Cassilda Tavares.

Ao Instituto de Engenharia Mecânica (IDMEC, Unidade de Concepção e Validação Experimental), na pessoa do Prof. Doutor António Augusto Fernandes, bem como à Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto e ao Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial, na pessoa do Prof. Doutor Paulo Tavares de Castro, agradeço as condições e os meios informáticos dispensados. Estendo ainda estes agradecimentos ao seu secretariado, em especial à Sr.ª Júlia Meira e à Sr.ª Fernanda Fonseca.

Cumpre-me também referir a importância do apoio financeiro proporcionado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia, no primeiro ano, por intermédio de bolsa atribuída no âmbito do projecto de investigação POCTI/33640/EME/2000 e no segundo ano através da atribuição de uma bolsa de Mestrado SFRH/BM/9330/2002.

À Cecília, aos meus pais e irmão, e à minha família, pela forma incondicional e constante com que sempre acreditaram e me apoiaram nesta longa caminhada, vão os meus maiores agradecimentos. Sem o seu incentivo este trabalho certamente não teria sequer começado.

Análise Elasto-Plástica de Estruturas tipo Casca com Comportamento Anisotrópico

por:

Marco Paulo Lages Parente

Tese submetida para satisfação dos requisitos do grau de Mestre em Engenharia Mecânica da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto e realizada sob a supervisão do

Prof. Doutor Renato Manuel Natal Jorge

Resumo

O estudo dos processos relacionados com a conformação plástica de chapa tem assumido nas últimas décadas um crescente interesse, nomeadamente pela sua relevante importância no contexto da indústria automóvel. Os resultados obtidos nas simulações numéricas apenas são fiáveis se as formulações dos elementos finitos e os modelos materiais utilizados forem representativos do processo que se pretende simular. A matéria-prima principal nos processos de conformação plástica de chapa são as chapas metálicas obtidas por laminagem. Este tipo de processo confere ao material propriedades diferenciadas, em relação à direcção de laminagem. Deste modo, a utilização de um critério anisotrópico, associado a um elemento de casca, é o procedimento mais correcto para a simulação de uma gama de processos de conformação de chapas metálicas.

Na simulação de processos de embutidura, em que as espessuras das chapas a simular são bastantes reduzidas, os elementos finitos de casca apresentam fenómenos numéricos de excesso de rigidez, conduzindo a uma subestimação dos deslocamentos obtidos. A este fenómeno dá-se o nome de "shear locking" ou retenção ao corte transverso, sendo necessário recorrer a formulações alternativas para atenuar ou eliminar este problema. Uma formulação introduzida por Simo e Rifai que permite resolver o fenómeno da retenção, é o denominado Método das Deformações Acrescentadas.

Este trabalho tem como objectivo a verificação do comportamento de um elemento finito de casca, que utiliza uma formulação de Deformações Acrescentadas quando utilizado com modelos materiais anisotrópicos. Neste trabalho também é estudada a influência do comportamento anisotrópico do material nos resultados obtidos. O elemento finito em questão foi desenvolvido na Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, encontrando-se já publicado com a designação S4E6P7. Os modelos materiais anisotrópicos implementados neste trabalho são o critério de Hill e seus derivados, bem como o critério de Barlat. A verificação dos modelos implementados é feita recorrendo-se a vários exemplos numéricos.

Elsto-Plastic Analysis of Shell like Structures with Anisotropic Behaviour

by

Marco Paulo Lages Parente

Thesis submitted in fulfillment of degree of Master in Mechanical Engineering of the Faculty of Engineering of University of Porto under the supervision of

Prof. Doctor Renato Manuel Natal Jorge

Abstract

The study of processes related with sheet metal forming is assuming an increasing interest, due to the relevant importance in the auto industry. The results obtained with numerical simulations are only reliable if the formulation of the finite elements used and the material model are good representatives of the process that one is trying to simulate. The principal material used in sheet metal forming is the metal sheets obtained by rolling. This kind of process gives the material different properties that depend on the rolling direction. The correct procedure to simulate a sheet metal forming process is to use an anisotropic criterion associated with a shell element.

In the simulation of sheet metal forming processes, as the thickness of the sheet is getting reduced, numerical problems may appear. The finite elements tend to show an increasing stiffness, leading to underestimated displacements. This phenomenon is denominated "shear locking" and to solve it is necessary to use alternative formulations. A formulation introduced by Simo and Rifai witch allows to solve the locking problem is the Enhanced Assumed Strain Method (EAS).

The goal of this work is to study the behavior of a shell finite element that uses the EAS method when used in conjunction with anisotropic material models. In this work is also studied the influence of the anisotropic behavior in the obtained results. The shell element used in this work was developed in the Faculty of Engineering, University of Porto. This element as already been subjected to publication, with the designation S4E6P7.

Etude Élasto-Plastique de Structures Coques avec Comportement Anisotrope

par

Marco Paulo Lages Parente

Thèses soutenue pour l'obtention du titre de Maître en Ingénierie Mécanique de la Faculté de Ingénierie de l' Universités de Porto et réalisée sous la tutelle de Monsieur

Prof. Docteur Renato Manuel Natal Jorge

Résumé

Ces dix dernières années, un intérêt croissant a été porté à l'etude des procédés de mise en forme de plaques. Les résultats obtenus par simulation numérique sont fiables si la formulation des éléments finis ainsi que les modèles matériaux sont représentatifs du procédé à simuler. La déformation plastique de plaques par laminage donne aux matériaux des propriétés différents selon la direction de laminage. L'utilisation d'un critère anisotrope avec un élément coque, est la manière la plus correcte pour la simulation de procédés de mise en forme de plaques métalliques.

L'application de la méthode des éléments finis au comportement des plaques à faible épaisseur, est traditionnellement cause de problèmes numériques, spécialement l'apparition du phénomène "shear locking". Pour résoudre ce problème, plusieurs auteurs ont proposé des formulations différentes. Une formulations a été présentée par Simo et Rifai: la méthode des déformations ajoutées.

L'objectif de ce travail est la vérification du comportement d'un élément fini de coque (S4E6P7), qui utilise la formulation des déformations ajoutées avec des modèles matériaux anisotropes. Dans ce travail, l'influence du comportement anisotrope du matériau est étudie. Les modèles de matériaux anisotropes implémentés dans ce travail sont le critère de Hill et le critère de Barlat. La vérification des modèles implémentés ont été testes sur des problèmes non-linéaires.

Índice

Capítulo 1: Introdução

1.1 Nota introdutória 1

1.2 Objectivos e apresentação da tese 2

1.3 Referências 4

Capítulo 2: Elementos Finitos de Casca

2.1 Introdução 7

2.2 Sistemas de Coordenadas 8

2.2.1 Sistema de Coordenadas Global 8

2.2.2 Sistema de Coordenadas Natural ou Curvilíneo 9

2.2.3 Sistema de Coordenadas Local 9

2.2.4 Sistema de Coordenadas Local Nodal 10

2.3 Elementos de Casca Degenerados 12

2.3.1 Geometria e Campo de Deslocamentos 13

2.3.2 Campo de Extensões 14

2.4 Leis Constitutivas e Matriz de Rigidez 18

2.5 O problema da Retenção em Elementos de Casca 20

2.6 Método das Deformações Acrescentadas 24

2.6.1 Deformações de Corte Transverso Acrescentadas 28

2.6.2 Formulação Não-Linear Geométrica 30

2.6.2.1 Cinemática dos elementos de casca com inclusão de grandes rotações 33

2.6.3 Referencial corotacional e actualização das variáveis constitutivas 35

2.7 Referências 39

Capítulo 3: Teoria da Plasticidade

3.1 Introdução 45

3.2 Plasticidade unidimensional 46

3.2.1 Modelo Elástico-perfeitamente Plástico 46

3.2.2 Modelo Rígido-Plástico com encruamento isotrópico 52

3.2.3 Modelo Unidimensional com encruamento cinemático 55

3.2.4 Propriedades geométricas do domínio elástico 56

3.2.4.1 Convexidade 57

3.2.4.2 Homogeneidade de grau um 57

3.3 Plasticidade Clássica 58

3.3.1 Equações da plasticidade 59

3.3.1.1 Formulação 59

3.3.1.2 Equações 60

3.4 Critérios de Cedência 66

3.4.1 Critério de von Mises 67

3.4.2 Critério de Hill 48 70

3.4.2.1 Critério de Hill – Anisotropia Planar 72

3.4.2.2 Critério de Hill – Anisotropia Normal 74

3.4.3 Critério de Barlat 75

3.5 Referências 79

Capítulo 4: Implementação Numérica

4.1 Introdução 83

4.2 Aproximação pelo Método dos Elementos Finitos 83

4.3 Algoritmos para a resolução das equações de equilíbrio 85

4.3.1 Algumas definições 85

4.3.1.1 O estado da estrutura 85

4.3.1.2 Forças residuais e convergência 86

4.3.2 Métodos Incrementais 86

4.3.2.1 Métodos puramente incrementais 87

4.3.2.2 Métodos Incrementais e Iterativos 88

4.3.2.3 Métodos de Newton-Raphson Modificados 91

4.3.2.4 Outros Métodos 92

4.4 Algoritmos de Integração das Leis Constitutivas 94

4.4.1 Equilíbrio Global e Iterações 96

4.4.1.1 Algoritmos "Path-Dependent" e "Path-Independent" 96

4.4.2 Lei Material Tangente 99

4.4.3 Algoritmo "backward-Euler" 102

4.4.4 Algoritmo "backward-Euler Completo" 106

4.5 Linearização consistente do algoritmo de integração elasto-plástico 109

4.6 Implementação do algoritmo elasto-plástico para materiais com anisotropia plástica 111

4.7 Referências 114

Capítulo 5: Exemplos

5.1. Introdução 117

5.2. Ensaio de uma placa sujeita ao corte 117

5.3. Placa quadrada sujeita a uma pressão distribuída 123

5.4 Placa circular sujeita a uma pressão distribuída 134

5.5 Simulação do processo de fabrico de um fundo elíptico. 138

5.6 Cilindro sujeito a uma carga concentrada, "Pinched Cylinder" 150

5.7 Referências 163

Capítulo 6: Conclusões e Desenvolvimentos Futuros

6.1 Síntese e conclusões do trabalho realizado 165

6.2 Desenvolvimentos futuros 166

6.3 Referências 168

Capítulo 1

Introdução

1.1 Nota Introdutória

O estudo dos processos relacionados com a conformação plástica de chapa tem assumido nas últimas décadas um crescente interesse, nomeadamente pela sua relevante importância no contexto da indústria automóvel. Devido à constante redução do tempo inerente ao processo de industrialização, as fases de desenvolvimento do tipo "tentativa-erro" têm que ter um horizonte temporal bastante reduzido, assumindo deste modo, a simulação um importante papel. Os resultados obtidos nas simulações numéricas apenas são fiáveis se as formulações dos elementos finitos e os modelos materiais utilizados forem representativos do processo que se pretende simular. A matéria-prima principal nos processos de conformação plástica de chapa são as chapas metálicas obtidas por laminagem. Este tipo de processo confere ao material propriedades diferenciadas, em relação à direcção de laminagem. Deste modo, a utilização de um critério anisotrópico, associado a um elemento de casca, é o procedimento mais correcto para a simulação de uma gama de processos de conformação de chapas metálicas [1-3].

Na simulação de processos de embutidura, em que as espessuras das chapas a simular são bastantes reduzidas, os elementos finitos de casca apresentam fenómenos numéricos de excesso de rigidez, conduzindo a uma subestimação dos deslocamentos obtidos. A este fenómeno dá-se o nome de "shear locking" ou retenção ao corte transverso, sendo necessário recorrer a formulações alternativas para atenuar ou eliminar este problema [4]. Com o objectivo de eliminar o fenómeno da retenção ao corte transverso, foi desenvolvido na Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto um elemento finito que utiliza uma formulação baseada numa nova classe de elementos de casca degenerados. Este elemento finito utiliza o método das

Deformações Acrescentadas [5] para eliminar o fenómeno da retenção ao corte. Esta formulação baseia-se numa formulação baseada em deslocamentos, com a adição de termos extra de deformação, responsáveis pela atenuação do efeito de retenção, para uma vasta gama de espessuras [4]. Este elemento encontra-se já publicado, com a designação S4E6P7 [4, 6].

1.2 Objectivos e apresentação da tese

O principal objectivo deste trabalho é a verificação do comportamento do elemento finito de casca S4E6P7, que utiliza uma formulação de Deformações Acrescentadas quando utilizado em conjunto com modelos materiais anisotrópicos.

Um importante objectivo é também mostrar a influência da utilização de um modelo material anisotrópico nos resultados obtidos. A utilização de um critério anisotrópico vai causar uma dependência dos resultados em função da direcção de laminagem, o que será mostrado com o auxílio de simulações numéricas.

A implementação dos modelos materiais anisotrópicos foi feita utilizando um programa de elemento finitos desenvolvido na Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. O programa utilizado encontrava-se já em funcionamento no início deste trabalho, com o elemento utilizado já implementado, não tendo sido por isso necessário implementar um novo código desde o início.

Os modelos materiais anisotrópicos implementados neste trabalho são o critério de Hill 48 [1] (anisotropia normal e anisotropia planar), bem como o critério introduzido por Barlat em 1991 [2, 7]. A verificação dos modelos implementados é feita recorrendo-se a vários exemplos numéricos.

A estrutura em que se apresenta este trabalho encontra-se resumida nos seguintes parágrafos.

No Capítulo 2 é feita uma introdução aos elementos de casca de uma forma geral. O problema da retenção ao corte em elementos de casca é introduzido, sendo este fenómeno explicado à luz da análise dos subespaços das deformações de corte. São referidos alguns dos métodos utilizados para lidar com este problema, tais como os métodos de integração reduzida, o método das deformações naturais assumidas e o método das deformações acrescentadas.

Como o elemento S4E6P7 utiliza uma formulação de deformações acrescentadas, este método é revisto neste trabalho. A formulação do elemento S4E6P7 é apresentada em detalhe, sendo também apresentada a formulação não linear geométrica utilizada.

O Capítulo 3 apresenta os conceitos fundamentais da análise não linear material. Neste capítulo é feita uma introdução à teoria da plasticidade, recorrendo-se a modelos unidimensionais, sendo depois feita uma extensão da teoria ao caso tridimensional. Os critérios de cedência são tratados em detalhe neste capítulo, iniciando-se pelo critério isotrópico de von Mises [8], passando-se depois para os critérios anisotrópicos. O critério anisotrópico de Hill [1] é tratado em detalhe, assim como os critérios derivados deste, o critério de Hill – Anisotropia Normal e o critério de Hill – Anisotropia Planar. Por fim é apresentado o critério de Barlat [2] utilizado, sendo simplificado para o caso de estado plano de tensão.

No Capítulo 4 apresentam-se os diferentes algoritmos utilizados para a resolução do problema pelo Método dos Elementos Finitos. O capítulo inicia-se com uma breve introdução ao Método dos Elementos Finitos, passando-se depois para os algoritmos de resolução das equações de equilíbrio. Seguidamente apresenta-se os algoritmos de integração das leis constitutivas, dando-se especial importância ao algoritmo "Backward-Euler" Completo [9, 10], tendo sido este o algoritmo implementado. A linearização consistente do algoritmo de integração elasto-plástico [11] é tratada com detalhe, dada a sua importância para garantir uma taxa de convergência quadrática [12]. Este capítulo termina com a extensão dos algoritmos de integração das leis constitutivas aos materiais anisotrópicos.

De forma a testar o comportamento do elemento S4E6P7 quando utilizado em conjunto com materiais anisotrópicos, que utilizam os modelos materiais apresentados no Capítulo 3, e implementados de acordo com o Capítulo 4, o Capítulo 5 apresenta um conjunto de exemplos numéricos já referenciados na literatura, com os quais se procura testar o comportamento do elemento quando utilizado em materiais com anisotropia plástica.

Finalmente, no Capítulo 6 é feita uma análise aos resultados obtidos no Capítulo 5, relativamente ao comportamento do elemento utilizado. Referem-se também as perspectivas para a continuação e aprofundamento deste trabalho.

1.3 Referências

1. Hill, R., *A Theory of the Yielding and Plastic Flow of Anisotropic Metals.* Proceedings of the Royal Society of London Series a-Mathematical and Physical Sciences, 1948. **193**(1033): p. 281-297.
2. Barlat, F., D.J. Lege, and J.C. Brem, *A six-component yield function for anisotropic metals.* International Journal of Plasticity, 1991. **7**: p. 693.
3. Yoon, J.W., et al., *A general elasto-plastic finite element formulation based on incremental deformation theory for planar anisotropy and its application to sheet metal forming.* International Journal of Plasticity, 1999. **15**: p. 35-67.
4. de Sá, J.M.A.C., et al., *Development of shear locking-free shell elements using an enhanced assumed strain formulation.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2002. **53**(7): p. 1721-1750.
5. Simo, J.C. and M.S. Rifai, *A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1990. **29**: p. 1595-1638.
6. Valente, R.A.F., et al., *On the use of an enhanced transverse shear strain shell element for problems involving large rotations.* Computational Mechanics, 2003. **30**(4): p. 286-296.
7. Cardoso, R.P.R., *Desenvolvimento de elementos de casca de integração reduzida com modelos materiais anisotrópicos para processos de conformação plástica de chapa.*, in *Departamento de Engenharia Mecânica.* 2002, Universidade de Aveiro.
8. Simo, J.C. and T.J.R. Hughes, *Computational Inelasticity.* Interdisciplinary Applied Mathematics. Vol. 7. 1998: Springer.
9. Crisfield, M.A., *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures.* Vol. 1. 1991: John Wiley & Sons.
10. Simo, J.C. and R.L. Taylor, *A Return Mapping Algorithm for Plane Stress Elastoplasticity.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1986. **22**: p. 649-670.

11. Simo, J.C. and R.L. Taylor, *Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1985. **48**: p. 101-118.

12. Hinton, E., *NAFEMS Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis.* 1992, Glasgow: NAFEMS.

Capítulo 2

Elementos Finitos de Casca

2.1 Introdução

As estruturas tipo casca são um campo de estudo importante em engenharia. O campo de aplicação dos elementos de casca estende-se desde as aplicações estruturais aos processos tecnológicos. Dentro dos processos tecnológicos podem-se destacar os processos de conformação de chapa, que têm uma importância fundamental, por exemplo, na indústria automóvel. Neste tipo de indústria, as estruturas tipo casca são optimizadas para se obter uma boa resistência mecânica com a menor espessura possível de chapa. A conjugação destes dois objectivos, aparentemente contraditórios só é possível através da compreensão do comportamento das estruturas tipo casca, principalmente com comportamento não linear.

Neste capítulo é apresentada a formulação comum aos elementos de casca. Apresenta-se depois o elemento S4E6P7 com algum detalhe, visto ter sido este o elemento de casca utilizado neste trabalho. Este elemento encontra-se descrito com mais detalhe nas referências [1, 2].

Um elemento de casca ideal deveria ser capaz de simular a curvatura da estrutura a analisar, por mais complexa que esta fosse. O mesmo elemento seria capaz de reproduzir os efeitos de membrana e flexão descritos pela teoria das cascas, com uma formulação baseada em deslocamentos, sem a necessidade de outros artifícios [3]. Este elemento ideal seria também capaz de reproduzir estados de deformação constante e movimentos de corpo rígido, produzindo resultados com a mesma qualidade, independentemente de se usarem malhas grosseiras ou mais refinadas, distorcidas ou não [4]. Actualmente ainda não existe nenhum elemento de casca que satisfaça todos estes requisitos

simultaneamente. No entanto, existem formulações que satisfazem, em maior ou menor número, alguns dos aspectos requeridos.

Tradicionalmente existem três vias distintas para o desenvolvimento de elementos de casca. A primeira diz respeito à construção de elementos obtidos directamente a partir de elementos da teoria clássica das cascas. A segunda hipótese refere-se à utilização de elementos tridimensionais de pequena espessura. A última opção faz uso de elementos produzidos a partir da degeneração de elementos sólidos [5].

A utilização de elementos tridimensionais foi um dos primeiros procedimentos adoptados na análise de estruturas tipo casca. No entanto, o seu uso é dispendioso em termos computacionais devido à presença de nós ao longo da espessura [3], passíveis de originar um mau condicionamento da matriz de rigidez à medida que a espessura se reduz [6], ainda que nos últimos anos tenham surgido novas formulações com elevado interesse prático [7-9].

Fazendo uso de simplificações aos elementos sólidos é possível chegar à abordagem mais simples dos denominados elementos degenerados. Trata-se de uma formulação geral que serve de base para o desenvolvimento de elementos com um variado número de nós. No entanto, a sua aplicação na análise de cascas com pequena espessura, em conjunto com uma integração numérica completa, conduz a fenómenos de excesso de rigidez, tal como se verá mais à frente neste capítulo.

2.2 Sistemas de Coordenadas

Para um elemento de casca é possível definir diferentes sistemas de coordenadas, que se apresentam em seguida.

2.2.1 Sistema de Coordenadas Global

O sistema de coordenadas global é caracterizado pelos vectores unitários de base $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ e $\mathbf{e}_z$. Este sistema define a geometria da casca no espaço, através de um vector posição $\mathbf{X} = \left\{ X, Y, Z \right\}^T$, assim como um vector de deslocamentos globais $\mathbf{u}$ de uma partícula sobre a superfície de referência, $\mathbf{u} = \left\{ u, v, w \right\}^T$. As matrizes e vectores utilizados normalmente no método dos

elementos finitos podem ser definidos em relação a este sistema, constituindo assim os operadores globais da formulação.

2.2.2 Sistema de Coordenadas Natural ou Curvilíneo

O sistema de coordenadas natural ou curvilíneo é definido num determinado ponto através da adopção de dois eixos curvilíneos ξ e η tangentes à superfície da casca. É definido também um terceiro eixo ζ, linear segundo a espessura da casca e com origem na superfície de referência. De notar que o eixo ζ é apenas aproximadamente normal à superfície média [6]. Com este sistema de eixos assim definido, as coordenadas naturais variam dentro de um elemento no intervalo $\left[-1\,,1\right]$ a partir do centro.

2.2.3 Sistema de Coordenadas Local

Em cada ponto da superfície de referência de um elemento de casca pode ser definido um sistema de coordenadas local caracterizado pelos eixos X' , Y' e Z', utilizado para o cálculo do estado de deformação e tensão locais. Este sistema de coordenadas é caracterizado pelos vectores unitários de base $\mathbf{r}$, $\mathbf{s}$ e $\mathbf{t}$. Desta forma, a geometria da casca no referencial local pode ser definida através de um vector de posição local $\mathbf{X}' = \left\{ \mathrm{X}'\,,\mathrm{Y}'\,,\mathrm{Z}' \right\}^{\mathrm{T}}$. Pode-se também agora definir um vector de deslocamentos locais $\mathbf{u}'$ de uma partícula sobre a superfície de referência, $\mathbf{u}' = \left\{ u'\,,v'\,,w' \right\}^{\mathrm{T}}$.

Utilizando-se o vector de posição global $\mathbf{X} = \left\{ \mathrm{X}\,,\mathrm{Y}\,,\mathrm{Z} \right\}^{\mathrm{T}}$ define-se uma expressão para se obter um vector normal local $\mathbf{z}'$ em função das tangentes às curvas $\xi = \textit{constante}$ e $\eta = \textit{constante}$. Desta forma obtém-se

$$\mathrm{z}'_{\mathrm{k}} = \mathrm{e}_{\mathrm{kjl}} \frac{\partial \mathrm{X}_{\mathrm{j}}}{\partial \xi} \frac{\partial \mathrm{X}_{\mathrm{l}}}{\partial \eta} \tag{2.1}$$

Normalizando-se o vector obtido obtêm-se o versor $\mathbf{t}$ para o eixo Z' do sistema de coordenadas local

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\left\|\mathbf{z}'\right\|}\mathbf{z}' = \left\{ \mathrm{t}_1\,,\mathrm{t}_2\,,\mathrm{t}_3 \right\}^{\mathrm{T}} \tag{2.2}$$

A direcção de X′ toma-se tangente a uma curva com a coordenada natural $\xi = constante$ em cada ponto em análise. Pode-se obter um vector $\mathbf{x}'$ com a direcção do eixo X′ da seguinte forma

$$\mathbf{x}' = \left\{ \frac{\partial X}{\partial \xi}, \frac{\partial Y}{\partial \xi}, \frac{\partial Z}{\partial \xi} \right\}^T \tag{2.3}$$

com o correspondente vector unitário

$$\mathbf{r} = \frac{1}{\|\mathbf{x}'\|}\mathbf{x}' = \left\{ r_1 , r_2 , r_3 \right\}^T \tag{2.4}$$

O vector unitário s é definido pelo produto vectorial entre os dois vectores unitários atrás definidos.

$$\mathbf{s} = \mathbf{t} \times \mathbf{r} = \left\{ s_1 , s_2 , s_3 \right\}^T \tag{2.5}$$

Com os vectores unitários assim definidos, obtém-se uma matriz de transformação de coordenadas, que relaciona as coordenadas locais com as coordenadas globais, definida da seguinte forma

$$\mathbf{T}' = \left[\mathbf{r} \;\; \mathbf{s} \;\; \mathbf{t} \right] \tag{2.6}$$

2.2.4 Sistema de Coordenadas Local Nodal

Para um determinado nó (n) do elemento de casca pode-se definir um sistema coordenado associado a esse nó, constituído pelos vectores $\mathbf{V}_1^n$, $\mathbf{V}_2^n$ e $\mathbf{V}_3^n$.

Originalmente, e para o caso particular de uma formulação degenerada, o vector $\mathbf{V}_3^n$ é definido em função das coordenadas do nó superior e inferior, que depois de degenerados dão origem ao nó n sobre a superfície de referência. O vector $\mathbf{V}_3^n$ fica então definido da seguinte forma

$$\mathbf{V}_3^n = \begin{Bmatrix} X^n \\ Y^n \\ Z^n \end{Bmatrix}_{sup} - \begin{Bmatrix} X^n \\ Y^n \\ Z^n \end{Bmatrix}_{inf} \tag{2.7}$$

O vector $\mathbf{V}_3^n$ depois de normalizado dá origem ao vector $\mathbf{v}_3^n$. Obtém-se desta forma uma definição para a espessura a_n associada ao nó n.

$$\mathbf{V}_3^n = a_n \mathbf{v}_3^n \tag{2.8}$$

O vector $\mathbf{V}_3^n$ definido em (2.7) não é necessariamente normal à superfície de referência em n, nesse caso a_n não é exactamente igual à espessura. A definição do vector $\mathbf{V}_3^n$ segundo esta forma tem a vantagem de garantir a continuidade geométrica, mesmo para modelos contendo arestas vivas, pois é utilizado o mesmo par de coordenadas inferior e superior para o nó posicionado ao longo da aresta [3, 4].

Os restantes vectores podem ser definidos em função dos vectores unitários de base através dos produtos vectoriais.

$$\mathbf{V}_1^n = \mathbf{e}_y \times \mathbf{V}_3^n \tag{2.9}$$

No caso do vector $\mathbf{V}_3^n$ ser paralelo ao vector $\mathbf{e}_y$, o vector $\mathbf{V}_1^n$ é definido da seguinte forma

$$\mathbf{V}_1^n = \mathbf{e}_x \tag{2.10}$$

Depois de definidos $\mathbf{V}_1^n$ e $\mathbf{V}_3^n$, $\mathbf{V}_2^n$ é obtido da seguinte forma

$$\mathbf{V}_2^n = \mathbf{V}_3^n \times \mathbf{V}_1^n \tag{2.11}$$

Os vectores assim obtidos são depois normalizados, ficando definido o sistema de coordenadas local nodal.

O sistema nodal local permite a definição de dois graus de liberdade de rotação α_n e β_n em torno das direcções normalizadas $\mathbf{v}_2^n$ e $\mathbf{v}_1^n$, respectivamente. Os graus de liberdade para um dado nó n são representados pelo vector (deslocamentos nodais)

$$\mathbf{d}_n = \left\{ u_n \, , v_n \, , w_n \, , \alpha_n \, , \beta_n \, , \right\}^{\mathrm{T}} \tag{2.12}$$

Os graus de liberdade para cada nó encontram-se representados na Figura 2.1.

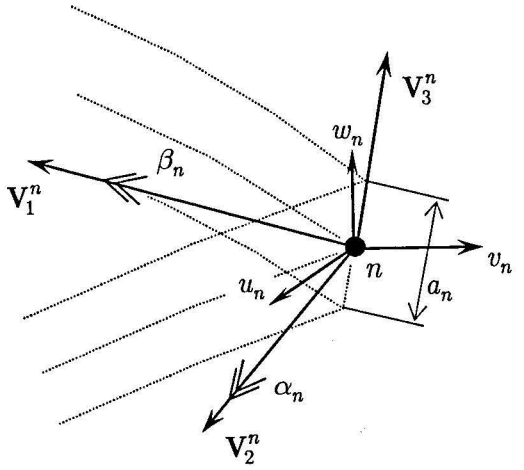


Figura 2.1 Sistema de coordenadas local nodal e graus de liberdade para um nó n.

2.3 Elementos de Casca Degenerados

O conceito de elemento degenerado provém do trabalho de Ahmad [10, 11] e baseia-se na transformação de um elemento sólido tridimensional num elemento de casca. Na Figura 2.2 observa-se um elemento degenerado de um sólido com 8 nós, dando origem a um elemento de casca com 4 nós [4].

Tal como se pode observar na Figura 2.2, o processo de obtenção de um elemento de casca por degeneração de um elemento sólido implica a definição de uma superfície de referência, geralmente associada à superfície média do elemento.

Na determinação das equações que descrevem o comportamento do elemento são utilizados quatro sistemas de coordenadas distintos. Um sistema global, um sistema natural, um sistema local sobre qualquer ponto do elemento e um sistema local nodal, seguindo as linhas gerais descritas no parágrafo anterior. Em cada nó são definidos cinco graus de liberdade, constituídos por três deslocamentos (referenciados ao sistema global) e duas rotações da normal à casca (referenciadas ao sistema local nodal) [3, 12].

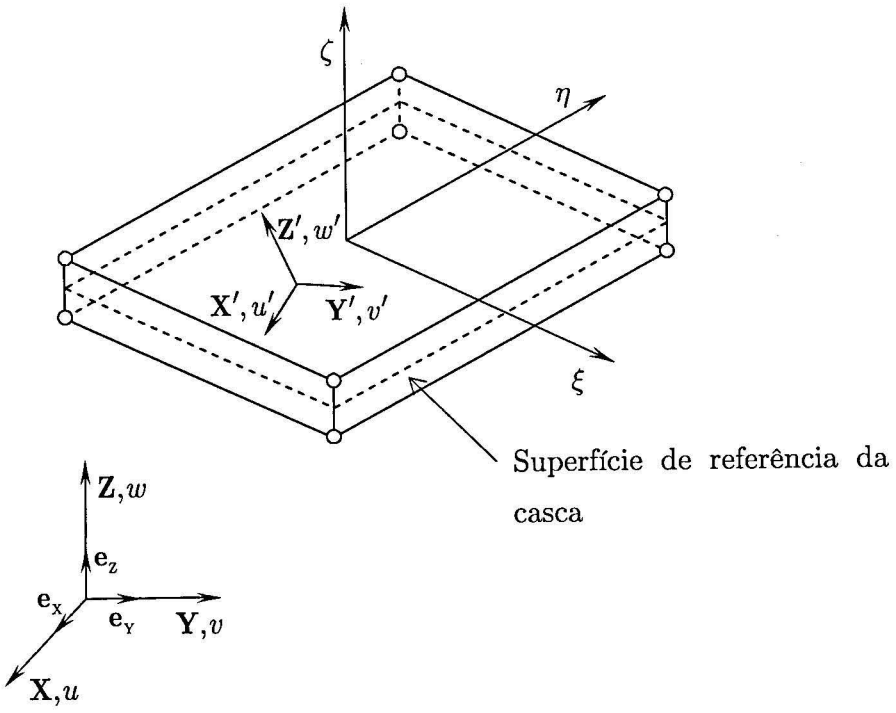


Figura 2.2 Elemento degenerado e sistemas de referência.

2.3.1 Geometria e Campo de Deslocamentos

Considerando uma formulação isoparamétrica, as coordenadas de um determinado ponto no interior de um elemento podem ser obtidas interpolando as coordenadas nodais através das funções de forma usuais [4],

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \\ \mathrm{Z} \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{nnode} \mathrm{H}_n(\xi,\eta)\frac{(1+\zeta)}{2}\begin{Bmatrix} \mathrm{X}^n \\ \mathrm{Y}^n \\ \mathrm{Z}^n \end{Bmatrix}_{sup} + \sum_{n=1}^{nnode} \mathrm{H}_n(\xi,\eta)\frac{(1-\zeta)}{2}\begin{Bmatrix} \mathrm{X}^n \\ \mathrm{Y}^n \\ \mathrm{Z}^n \end{Bmatrix}_{inf} \tag{2.13}$$

em que H_n representa as funções de forma bidimensionais e *nnode* o número de nós do elemento.

Tomando como referência a superfície média do elemento, obtém-se uma expressão alternativa para a posição global de um qualquer ponto pertencente ao elemento.

$$\begin{Bmatrix} \mathrm{X}(\xi,\eta,\zeta) \\ \mathrm{Y}(\xi,\eta,\zeta) \\ \mathrm{Z}(\xi,\eta,\zeta) \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{nnode} \mathrm{H}_n(\xi,\eta)\begin{Bmatrix} \mathrm{X}^n \\ \mathrm{Y}^n \\ \mathrm{Z}^n \end{Bmatrix}_{med} + \sum_{n=1}^{nnode} \frac{a_n}{2}\zeta\,\mathrm{H}_n(\xi,\eta)\begin{Bmatrix} \mathrm{v}_{3\mathrm{x}}^n \\ \mathrm{v}_{3\mathrm{y}}^n \\ \mathrm{v}_{3\mathrm{z}}^n \end{Bmatrix} \tag{2.14}$$

O campo de deslocamentos pode ser definido da mesma forma, obtendo-se assim a seguinte expressão em relação à superfície média.

$$\begin{Bmatrix} u(\xi,\eta,\zeta) \\ v(\xi,\eta,\zeta) \\ w(\xi,\eta,\zeta) \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{nnode} \mathrm{H}_n(\xi,\eta) \begin{Bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{Bmatrix} + \sum_{n=1}^{nnode} \frac{a_n}{2} \zeta \mathrm{H}_n(\xi,\eta) \begin{bmatrix} \mathrm{v}_{1x}^n & -\mathrm{v}_{2x}^n \\ \mathrm{v}_{1y}^n & -\mathrm{v}_{2y}^n \\ \mathrm{v}_{1z}^n & -\mathrm{v}_{2z}^n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{Bmatrix} \tag{2.15}$$

Simplificando, obtém-se

$$\begin{Bmatrix} u(\xi,\eta,\zeta) \\ v(\xi,\eta,\zeta) \\ w(\xi,\eta,\zeta) \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{nnode} \begin{bmatrix} \mathrm{H}_n & 0 & 0 & \frac{a_n}{2}\mathrm{H}_n\zeta\mathrm{v}_{1x}^n & -\frac{a_n}{2}\mathrm{H}_n\zeta\mathrm{v}_{2x}^n \\ 0 & \mathrm{H}_n & 0 & \frac{a_n}{2}\mathrm{H}_n\zeta\mathrm{v}_{1y}^n & -\frac{a_n}{2}\mathrm{H}_n\zeta\mathrm{v}_{2y}^n \\ 0 & 0 & \mathrm{H}_n & \frac{a_n}{2}\mathrm{H}_n\zeta\mathrm{v}_{1z}^n & -\frac{a_n}{2}\mathrm{H}_n\zeta\mathrm{v}_{2z}^n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \\ \alpha_n \\ \beta_n \end{Bmatrix} \tag{2.16}$$

2.3.2 Campo de Extensões

O campo de deformações pode ser definido em qualquer um dos referenciais atrás descritos. A sua representação no referencial local permite uma melhor percepção do estado de deformação. Para uma análise em pequenas deformações fica implícita a utilização do tensor das extensões de Green-Lagrange (**E**). Para as tensões, e seguindo uma formulação material, é utilizado o seu conjugado, o segundo tensor das tensões de Piola-Kirchhoff (**S**) [3, 12].

Para se obter o campo de deformações referenciado ao sistema local é necessária a manipulação prévia do tensor das deformações nos referenciais natural e global.

A consideração da hipótese de estado plano de tensões permite eliminar a componente de deformação local $\varepsilon_{Z'}$ da equação constitutiva expressa no referencial local. Desta forma, o vector das deformações lineares possui cinco componentes e pode ser apresentado da seguinte forma

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u'}{\partial \mathrm{X}'} \\ \dfrac{\partial v'}{\partial \mathrm{Y}'} \\ \dfrac{\partial u'}{\partial \mathrm{Y}'} + \dfrac{\partial v'}{\partial \mathrm{X}'} \\ \dfrac{\partial u'}{\partial \mathrm{Z}'} + \dfrac{\partial w'}{\partial \mathrm{X}'} \\ \dfrac{\partial v'}{\partial \mathrm{Z}'} + \dfrac{\partial w'}{\partial \mathrm{Y}'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon'_{\mathrm{X}'} \\ \varepsilon'_{\mathrm{Y}'} \\ \varepsilon'_{\mathrm{X}'\mathrm{Y}'} \\ \varepsilon'_{\mathrm{X}'\mathrm{Z}'} \\ \varepsilon'_{\mathrm{Y}'\mathrm{Z}'} \end{Bmatrix} \tag{2.17}$$

A relação entre as deformações locais e globais é dada pela seguinte equação

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \mathbf{T}'' \, \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.18}$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}$ é dado por

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \mathrm{X}} \\ \dfrac{\partial v}{\partial \mathrm{Y}} \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \mathrm{Y}} + \dfrac{\partial v}{\partial \mathrm{X}}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \mathrm{Z}} + \dfrac{\partial w}{\partial \mathrm{X}}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial \mathrm{Z}} + \dfrac{\partial w}{\partial \mathrm{Y}}\right) \end{Bmatrix} \tag{2.19}$$

e representa o vector das deformações globais. A matriz $\mathbf{T}''$ é uma matriz de transformação global-local, definida em função das componentes dos vectores unitários de transformação $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$ e $\mathbf{n}$, definida da seguinte forma

$$\mathbf{T}'' = \begin{bmatrix} (l_1)^2 & (l_2)^2 & (l_3)^2 & l_1 l_2 & l_1 l_3 & l_2 l_3 \\ (m_1)^2 & (m_2)^2 & (m_3)^2 & m_1 m_2 & m_1 m_3 & m_2 m_3 \\ 2 l_1 m_1 & 2 l_2 m_2 & 2 l_3 m_3 & \left(l_1 m_2 + l_2 m_1\right) & \left(l_1 m_3 + l_3 m_1\right) & \left(l_2 m_3 + l_3 m_2\right) \\ 2 l_1 n_1 & 2 l_2 n_2 & 2 l_3 n_3 & \left(l_1 n_2 + l_2 n_1\right) & \left(l_1 n_3 + l_3 n_1\right) & \left(l_2 n_3 + l_3 n_2\right) \\ 2 m_1 n_1 & 2 m_2 n_2 & 2 m_3 n_3 & \left(m_1 n_2 + m_2 n_1\right) & \left(m_1 n_3 + m_3 n_1\right) & \left(m_2 n_3 + m_3 n_2\right) \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

Tal como apresentado nas equações (2.15) e (2.16), o campo de deslocamentos global $\left(u , v , w \right)$ é definido em termos das coordenadas naturais $\left(\xi , \eta , \zeta \right)$. Desta forma é necessário relacionar as derivadas formuladas em relação a estes dois sistemas coordenados, o que é conseguido com a seguinte expressão

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \mathrm{X}} & \frac{\partial v}{\partial \mathrm{X}} & \frac{\partial w}{\partial \mathrm{X}} \\ \frac{\partial u}{\partial \mathrm{Y}} & \frac{\partial v}{\partial \mathrm{Y}} & \frac{\partial w}{\partial \mathrm{Y}} \\ \frac{\partial u}{\partial \mathrm{Z}} & \frac{\partial u}{\partial \mathrm{Z}} & \frac{\partial u}{\partial \mathrm{Z}} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial u}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{D}_{GN} \tag{2.21}$$

onde $\mathbf{J}$ é a matriz jacobiana

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial \xi} & \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial \xi} & \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial \eta} & \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial \eta} & \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial \zeta} & \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial \zeta} & \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

Os termos da matriz jacobiana podem ser facilmente obtidos a partir de (2.13) ou (2.14). A matriz $\mathbf{D}_{GN}$ contém as derivadas do campo de deslocamentos global em função das coordenadas naturais, podendo ser definida explicitamente de uma forma condensada [3, 13] para cada nó n num dado elemento.

$$\mathbf{D}_{GN}\big|_n = \left(\overline{\mathbf{u}} + \overline{\alpha} + \overline{\beta} \right)\Big|_n \tag{2.23}$$

Depois de definido o operador $\mathbf{D}_{GN}$ e a matriz jacobiana $\mathbf{J}$, as componentes das deformações globais podem ser calculadas através de (2.21), determinando-se de seguida as respectivas componentes das deformações locais conforme a equação (2.18).

A relação entre o vector das deformações globais e os graus de liberdade nodais pode ser expressa da forma usual

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{n=1}^{nnode} \mathbf{B}_n \mathbf{d}_n^{(e)} = \mathbf{B}\, \mathbf{d}_n^{(e)} \tag{2.24}$$

A matriz **B**, para um nó n é dada por

$$\mathbf{B}_n = \left[\cdots \left[\begin{array}{ccccc} \dfrac{\partial \mathrm{H}_n}{\partial \mathrm{X}} & 0 & 0 & \mathrm{g}^n_{1\mathrm{x}}\,\mathrm{G}^n_{\mathrm{x}} & \mathrm{g}^n_{2\mathrm{x}}\,\mathrm{G}^n_{\mathrm{x}} \\ 0 & \dfrac{\partial \mathrm{H}_n}{\partial \mathrm{Y}} & 0 & \mathrm{g}^n_{1\mathrm{y}}\,\mathrm{G}^n_{\mathrm{y}} & \mathrm{g}^n_{2\mathrm{y}}\,\mathrm{G}^n_{\mathrm{y}} \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial \mathrm{H}_n}{\partial \mathrm{Z}} & \mathrm{g}^n_{1\mathrm{z}}\,\mathrm{G}^n_{\mathrm{z}} & \mathrm{g}^n_{2\mathrm{z}}\,\mathrm{G}^n_{\mathrm{z}} \\ \dfrac{\partial \mathrm{H}_n}{\partial \mathrm{Y}} & \dfrac{\partial \mathrm{H}_n}{\partial \mathrm{X}} & 0 & \mathrm{g}^n_{1\mathrm{x}}\,\mathrm{G}^n_{\mathrm{y}} + \mathrm{g}^n_{1\mathrm{y}}\,\mathrm{G}^n_{\mathrm{x}} & \mathrm{g}^n_{2\mathrm{x}}\,\mathrm{G}^n_{\mathrm{y}} + \mathrm{g}^n_{2\mathrm{y}}\,\mathrm{G}^n_{\mathrm{x}} \\ \dfrac{\partial \mathrm{H}_n}{\partial \mathrm{Y}} & 0 & \dfrac{\partial \mathrm{H}_n}{\partial \mathrm{X}} & \mathrm{g}^n_{1\mathrm{x}}\,\mathrm{G}^n_{\mathrm{z}} + \mathrm{g}^n_{1\mathrm{z}}\,\mathrm{G}^n_{\mathrm{x}} & \mathrm{g}^n_{2\mathrm{x}}\,\mathrm{G}^n_{\mathrm{z}} + \mathrm{g}^n_{2\mathrm{z}}\,\mathrm{G}^n_{\mathrm{x}} \\ 0 & \dfrac{\partial \mathrm{H}_n}{\partial \mathrm{Z}} & \dfrac{\partial \mathrm{H}_n}{\partial \mathrm{Y}} & \mathrm{g}^n_{1\mathrm{y}}\,\mathrm{G}^n_{\mathrm{z}} + \mathrm{g}^n_{1\mathrm{z}}\,\mathrm{G}^n_{\mathrm{y}} & \mathrm{g}^n_{2\mathrm{y}}\,\mathrm{G}^n_{\mathrm{z}} + \mathrm{g}^n_{2\mathrm{z}}\,\mathrm{G}^n_{\mathrm{y}} \end{array} \right] \cdots \right] \tag{2.25}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathrm{g}^n_{1\mathrm{x}} &= \frac{1}{2} a_n\, \mathrm{v}^n_{1\mathrm{x}} & \mathrm{g}^n_{2\mathrm{x}} &= -\frac{1}{2} a_n\, \mathrm{v}^n_{2\mathrm{x}} \\ \mathrm{g}^n_{1\mathrm{y}} &= \frac{1}{2} a_n\, \mathrm{v}^n_{1\mathrm{y}} & \mathrm{g}^n_{2\mathrm{y}} &= -\frac{1}{2} a_n\, \mathrm{v}^n_{2\mathrm{y}} \\ \mathrm{g}^n_{1\mathrm{z}} &= \frac{1}{2} a_n\, \mathrm{v}^n_{1\mathrm{z}} & \mathrm{g}^n_{2\mathrm{z}} &= -\frac{1}{2} a_n\, \mathrm{v}^n_{2\mathrm{z}} \end{aligned} \tag{2.26}$$

e

$$\begin{aligned} \mathrm{G}^n_{\mathrm{x}} &= \zeta \left(\mathrm{J}^{-1}_{11} \frac{\partial \mathrm{H}_n}{\partial \xi} + \mathrm{J}^{-1}_{12} \frac{\partial \mathrm{H}_n}{\partial \eta} \right) + \mathrm{J}^{-1}_{13}\, \mathrm{H}_n \\ \mathrm{G}^n_{\mathrm{y}} &= \zeta \left(\mathrm{J}^{-1}_{21} \frac{\partial \mathrm{H}_n}{\partial \xi} + \mathrm{J}^{-1}_{22} \frac{\partial \mathrm{H}_n}{\partial \eta} \right) + \mathrm{J}^{-1}_{23}\, \mathrm{H}_n \\ \mathrm{G}^n_{\mathrm{z}} &= \zeta \left(\mathrm{J}^{-1}_{31} \frac{\partial \mathrm{H}_n}{\partial \xi} + \mathrm{J}^{-1}_{32} \frac{\partial \mathrm{H}_n}{\partial \eta} \right) + \mathrm{J}^{-1}_{33}\, \mathrm{H}_n \end{aligned} \tag{2.27}$$

Depois de definida a matriz **B**, pode-se reescrever a equação (2.18) da seguinte forma

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \sum_{n=1}^{nnode} \mathbf{T}'' \mathbf{B}_n \mathbf{d}^{(\mathrm{e})}_n = \sum_{n=1}^{nnode} \mathbf{B}'_n \mathbf{d}^{(\mathrm{e})}_n = \mathbf{B}'\, \mathbf{d}^{(\mathrm{e})} \tag{2.28}$$

A equação (2.28) permite relacionar as deformações locais com os graus de liberdade através da matriz de transformação $\mathbf{T}''$.

$$\mathbf{B}' = \mathbf{T}''\, \mathbf{B} \tag{2.29}$$

O campo de deformações local $\boldsymbol{\varepsilon}'$ pode também ser obtido a partir do campo de deformações escrito num referencial natural $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \mathbf{T}_{conv \to local}\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{2.30}$$

onde a matriz de transformação $\mathbf{T}_{conv \to local}$ é dada pela expressão

$$\mathbf{T}_{conv \to local} = \begin{bmatrix} T_{11}^2 & T_{12}^2 & T_{13}^2 & T_{11}\,T_{12} & T_{11}\,T_{13} & T_{12}\,T_{13} \\ T_{21}^2 & T_{22}^2 & T_{23}^2 & T_{21}\,T_{22} & T_{21}\,T_{23} & T_{22}\,T_{23} \\ T_{31}^2 & T_{32}^2 & T_{33}^2 & T_{31}\,T_{32} & T_{31}\,T_{33} & T_{32}\,T_{33} \\ 2\,T_{11}\,T_{21} & 2\,T_{12}\,T_{22} & 2\,T_{13}\,T_{23} & (T_{11}\,T_{22}+T_{12}\,T_{21}) & (T_{11}\,T_{23}+T_{13}\,T_{21}) & (T_{12}\,T_{23}+T_{13}\,T_{22}) \\ 2\,T_{11}\,T_{31} & 2\,T_{12}\,T_{32} & 2\,T_{13}\,T_{33} & (T_{11}\,T_{32}+T_{12}\,T_{31}) & (T_{11}\,T_{33}+T_{13}\,T_{31}) & (T_{12}\,T_{33}+T_{13}\,T_{32}) \\ 2\,T_{21}\,T_{31} & 2\,T_{22}\,T_{32} & 2\,T_{23}\,T_{33} & (T_{21}\,T_{32}+T_{22}\,T_{31}) & (T_{21}\,T_{33}+T_{23}\,T_{31}) & (T_{22}\,T_{33}+T_{23}\,T_{32}) \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

Nesta matriz cada termo é definido como a derivada dos componentes naturais em relação aos termos locais, ou seja

$$\mathrm{T}_{conv \to local}\big|_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial \mathrm{X}'_j} \tag{2.32}$$

com

$$\xi_1 = \xi\ ,\ \xi_2 = \eta\ ,\ \xi_3 = \zeta \quad \text{e} \quad \mathrm{X}'_1 = \mathrm{X}'\ ,\ \mathrm{X}'_2 = \mathrm{Y}'\ ,\ \mathrm{X}'_3 = \mathrm{Z}' \tag{2.33}$$

Desenvolvendo a equação (2.32), chega-se à conclusão que os termos da matriz $\mathbf{T}_{conv \to local}$ podem ser obtidos directamente a partir de

$$\mathbf{T}_{conv \to local} = \left(\mathbf{J}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{T}' \tag{2.34}$$

onde $\mathbf{T}'$ é a matriz que engloba os vectores unitários locais e $\mathbf{J}$ é a matriz jacobiana.

2.4 Leis Constitutivas e Matriz de Rigidez

Pode-se definir uma matriz que relaciona o estado de tensões com o estado de deformações num referencial local, da seguinte forma [4, 14]

$$\boldsymbol{\sigma}' = {}^{*}\mathbf{C}'_2 \boldsymbol{\varepsilon}' \tag{2.35}$$

onde a matriz ${}^{*}\mathbf{C}_2'$ é obtida a partir do tensor de quarta ordem ${}^{*}\mathbf{C}_4'$ e depende do tipo de regime em que o problema se encontra.

$$ {}^{*}\mathbf{C}_2' = \begin{cases} \mathbf{C}_2' & \text{, regime elástico} \\ \mathbf{C}_2'^{ep} & \text{, regime elasto-plástico} \end{cases} \tag{2.36} $$

O tensor das tensões é arrumado na seguinte forma vectorial

$$ \boldsymbol{\sigma}' = \begin{Bmatrix} \sigma_{X'} \\ \sigma_{Y'} \\ \tau_{X'Y'} \\ \tau_{X'Z'} \\ \tau_{Y'Z'} \end{Bmatrix} \tag{2.37} $$

A matriz de elasticidade $\mathbf{C}_2'$, para o regime elástico é obtida através da simplificação da expressão adoptada para o caso tridimensional, assumindo-se $\sigma_{Z'} = 0$

$$ \mathbf{C}_2' = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2}k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2}k \end{bmatrix} \tag{2.38} $$

onde E e ν representam o módulo de Young e o coeficiente de Poisson, respectivamente. O parâmetro k é utilizado como uma correcção dos componentes transversos, tomando normalmente o valor $5/6$ [15, 16]. O comportamento elasto-plástico será estudado com mais detalhe nos capítulos seguintes.

A matriz ${}^{*}\mathbf{C}_2$ no referencial global é obtida da seguinte forma

$$ {}^{*}\mathbf{C}_2 = \left(\mathbf{T}_{conv \rightarrow local}\right)^{\mathrm{T}} {}^{*}\mathbf{C}_2' \, \mathbf{T}_{conv \rightarrow local} \tag{2.39} $$

onde

$$ {}^{*}\mathbf{C}_2 = \begin{cases} \mathbf{C}_2 & \text{, regime elástico} \\ \mathbf{C}_2^{ep} & \text{, regime elasto-plástico} \end{cases} \tag{2.40} $$

o que permite obter o campo de tensões no referencial global a partir do campo de deformações (global) da seguinte forma.

$$\boldsymbol{\sigma} = {}^{*}\mathbf{C}_2\,\boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.41}$$

A matriz de rigidez para um elemento pode ser agora definida da forma usual [14], obtendo-se

$$\mathbf{K} = \int_{V} \left(\mathbf{B}'\right)^{\mathrm{T}} {}^{*}\mathbf{C}_2'\,\mathbf{B}'\,\mathrm{dV} = \int_{V} (\mathbf{B})^{\mathrm{T}} {}^{*}\mathbf{C}_2\,\mathbf{B}\,\mathrm{dV} \tag{2.42}$$

onde todos os termos são relacionados com cada elemento analisado, omitindo-se os índices respectivos para simplificar a notação.

2.5 O problema da Retenção em Elementos de Casca

Os elementos degenerados foram inicialmente formulados para a análise de estruturas do tipo casca, teoricamente sem nenhuma restrição formal quanto aos valores de espessura envolvidos. Na prática, no entanto, à medida que os valores de espessuras envolvidos tendem a diminuir, tais elementos tornam-se sujeitos a fenómenos numéricos de excesso de rigidez, conduzindo a uma subestimação dos valores finais dos deslocamentos obtidos.

Na análise do problema da retenção ao corte transverso, presta-se especial atenção às componentes transversas do campo das deformações, definidas no referencial natural $\left(\xi, \eta, \zeta\right)$. O campo de deformações para um determinado ponto do elemento pode ser representado no referencial natural por

$$\mathbf{E} \equiv \mathbf{E}^{u} = \left\{\mathrm{E}^{u}_{\xi\xi}\ \mathrm{E}^{u}_{\eta\eta}\ \mathrm{E}^{u}_{\zeta\zeta}\ \mathrm{E}^{u}_{\xi\eta}\ \mathrm{E}^{u}_{\xi\zeta}\ \mathrm{E}^{u}_{\eta\zeta}\right\}^{\mathrm{T}} \equiv \mathbf{Q}\,\mathbf{d}_n \tag{2.43}$$

onde $\mathbf{Q}$ é uma matriz que contém termos diferenciais, e que relaciona os deslocamentos nodais $\mathbf{d}_n$ com as deformações. O vector dos deslocamentos nodais contém três deslocamentos e duas rotações, tal como apresentado em (2.12).

As componentes da deformação de (2.43) podem ser determinadas para o caso linear [3], utilizando-se a seguinte equação

$$\mathrm{E}^{u}_{\xi_i\xi_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_i}\cdot\mathbf{G}_j + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_j}\cdot\mathbf{G}_i\right), \text{ para } \left(i,j = 1,2,3;\ \xi_1 = \xi,\ \xi_2 = \eta,\ \xi_3 = \zeta\right) \quad (2.44)$$

com base no vector dos deslocamentos $\mathbf{u}$ e os vectores da base covariante. Nesta equação, o termo $\mathbf{G}_i$ é dado por

$$\mathbf{G}_i = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi_i} \quad (2.45)$$

onde $\mathbf{X}$ posiciona um dado ponto relativamente a um referencial na configuração inicial.

A importância do campo de deformações natural está relacionada com a imposição das hipóteses de Kirchhoff-Koiter para cascas e placas finas, que requerem que a energia de deformação de corte transverso tenda a desaparecer à medida que os valores de espessura tendam para zero. Aplicando as hipóteses da teoria de Reissner-Mindlin, não se consegue obter um campo de deformações nulo em todos os pontos num determinado domínio. No entanto, considerando a média dos valores [17], isso pode ser obtido da seguinte forma global

$$\int_{\Delta A} \mathrm{E}^{u}_{\xi\zeta}\, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta = 0 \quad (2.46)$$

$$\int_{\Delta A} \mathrm{E}^{u}_{\eta\zeta}\, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta = 0 \quad (2.47)$$

onde ΔA representa uma determinada área em análise.

Assumindo-se que o campo de deformações de corte $\mathrm{E}^{u}_{\xi\zeta}$ é uma função linear de ξ e o campo de deformações de corte $\mathrm{E}^{u}_{\eta\zeta}$ é uma função linear de η, obtém-se

$$\int_{-1}^{0} \mathrm{E}^{u}_{\xi\zeta}\, \mathrm{d}\xi = 0, \quad \int_{0}^{+1} \mathrm{E}^{u}_{\xi\zeta}\, \mathrm{d}\xi = 0 \quad (2.48)$$

$$\int_{-1}^{0} \mathrm{E}^{u}_{\eta\zeta}\, \mathrm{d}\eta = 0, \quad \int_{0}^{+1} \mathrm{E}^{u}_{\eta\zeta}\, \mathrm{d}\eta = 0 \quad (2.49)$$

A imposição destas restrições directamente nos pontos de Gauss permite obter

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{E}_{\xi\zeta} \\ \mathbf{E}_{\eta\zeta} \end{Bmatrix} = \mathbf{Q}_{shear}\ \mathbf{d}_e = \mathbf{0} \tag{2.50}$$

com $\mathbf{d}_e$ contendo os graus de liberdade de um determinado elemento. É então possível definir [1, 18-20]

$$\mathrm{I}_h^s = \left\{ \mathbf{u}_h \in \mathrm{U}_h : \mathbf{Q}_{shear}\ \mathbf{u}_h = \mathbf{0} \right\} \tag{2.51}$$

onde I_h^s é o subespaço das deformações possíveis associadas a um campo de deformações transversais nulo, e U_h representa uma aproximação do espaço linear de todas as soluções admissíveis U.

Para evitar o aparecimento de retenção ao corte transverso, a solução discreta $\mathbf{u}_h \equiv \mathbf{d}_e$ obtida pelo método dos elementos finitos deverá estar contida no subespaço das deformações de corte transversais nulas $\mathbf{Q}_{shear}$. Ou seja, qualquer solução para os deslocamentos obtidos deverá ser uma combinação linear dos componentes de uma determinada base de I_h^s. Se isso não acontecer, poderá surgir o fenómeno da retenção.

Existem vários procedimentos propostos para a atenuação do problema da retenção, o mais simples consiste na utilização de processos de integração selectiva ou reduzida [21, 22]. De uma forma geral [23], a integração reduzida uniforme origina modos de energia espúrios apesar de em alguns casos se obter uma solução correcta. No caso da integração reduzida selectiva podem surgir os mesmos problemas, mas normalmente em menor grau.

Outras técnicas de igual forma eficazes consistem na utilização de interpolações mistas no cálculo do campo de extensões referentes a um dado elemento. Para esses casos, campos independentes de deformações e/ou tensões, por exemplo, são avaliados de forma independente das interpolações utilizadas para os deslocamentos. Estes campos adicionais podem ser descontínuos entre elementos, podendo as correspondentes incógnitas ser incluídas na formulação por deslocamentos ou ainda eliminadas ao nível do elemento (através de um procedimento de condensação estática). Os métodos das deformações naturais assumidas [24, 25] e ainda o método das deformações acrescentadas [26-28] constituem exemplos de abordagens mistas.

A ideia chave do método das deformações naturais assumidas (ANS) é a substituição, no princípio da energia potencial mínima, do campo de

deformações obtido a partir dos deslocamentos, por um campo de deformações assumido independentemente, e em coordenadas naturais [29]. O comportamento dos elementos obtidos utilizando esta formulação depende em grande medida da escolha correcta dos pontos utilizados para a interpolação do campo de deformações assumidas. No caso de malhas distorcidas, podem também surgir alguns problemas [30]. No entanto, o elemento MITC4 de Dvorkin e Bathe [24], utilizando este tipo de formulação, é um dos elementos mais utilizados na análise de cascas.

O método das deformações acrescentadas (EAS), inicialmente proposto por Simo e Rifai [31] utiliza um funcional de três campos, em termos dos deslocamentos, tensões e campo de deformações aumentado, baseado no princípio variacional de Hu-Washizu. O campo de deformações aumentado é obtido como a soma do gradiente simétrico do campo de deslocamentos com o campo de deformações acrescentadas. Este último campo não está sujeito a requerimentos de continuidade entre elementos e pode ser relacionado com um campo de "modos incompatíveis".

Baseando-se na fraca eficiência do elemento MITC4 na presença de malhas distorcidas, Andelfinger e Ramm desenvolveram um campo de deformações de membrana e flexão aumentado (através do método das deformações acrescentadas), composto por sete parâmetros internos. Apesar dos melhoramentos obtidos, este procedimento não foi estendido aos termos da deformação de corte, mantendo a abordagem do método das deformações naturais assumidas para atenuar o efeito da retenção ao corte transverso.

Seguindo uma filosofia diferente, o elemento S4E6P7 [1, 2] usado neste trabalho utiliza a formulação do método das deformações acrescentadas aplicada a um elemento degenerado de quatro nós e actuando especificamente sobre os termos de corte transverso do tensor das extensões.

O elemento S4E6P7 foi desenvolvido utilizando a metodologia do trabalho de César de Sá e Owen [19] e mais tarde de César de Sá e Natal Jorge [20] para problemas de incompressibilidade a duas dimensões. O aparecimento de retenção ao corte transverso é relacionado com a incapacidade da base do subespaço das deformações de corte transversais nulas, definido implicitamente pela formulação do elemento, de reproduzir correctamente os padrões de deformação necessários.

2.6 Método das Deformações Acrescentadas

Em 1990, Simo e Rifai, num importante trabalho científico, introduziram o conceito de elemento com deformação acrescentada "*enhanced strain element*", em que o campo de deformações compatíveis é ampliado com a inclusão de um campo de variáveis adicionais. Estas variáveis adicionais, embora sejam utilizadas no cálculo do estado de deformação, não têm significado físico, tratando-se de facto de um método misto. No método das deformações acrescentadas adiciona-se ao campo das deformações compatíveis, um outro campo de deformações, designado por deformações acrescentadas. A solução assenta basicamente em considerar o campo de deformações da seguinte forma

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^{S}\mathbf{u} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{2.52}$$

em que $\nabla^{S}\mathbf{u}$ é a parte simétrica do gradiente do campo de deslocamentos e $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ é a componente acrescentada do campo das deformações.

A formulação geral, a partir da qual é construído o modelo numérico, pode obter-se a partir da minimização do funcional que representa a energia total do sistema. Este funcional é constituído inicialmente por três campos de variáveis independentes, o campo de deslocamentos $\mathbf{u}$, o campo de tensões $\boldsymbol{\sigma}$ e o campo de deformações $\boldsymbol{\varepsilon}$, que posteriormente se reduzem a dois, por eliminação do campo de tensões, com base numa condição de ortogonalidade.

Considere-se o campo de deslocamentos $\mathbf{u}$, o campo de tensões $\boldsymbol{\sigma}$ e o campo de deformações $\boldsymbol{\varepsilon}$, e um corpo deformável elasticamente, de partículas cujo vector de posição é $\mathbf{x}$. Considere-se que $\mathrm{W}(\mathbf{x},\boldsymbol{\varepsilon})$ é a função densidade de energia do corpo. O funcional que representa a energia total do sistema resulta do Teorema Variacional de Hu-Washizu e pode ser escrito da seguinte forma

$$\Pi(\mathbf{u},\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\sigma}) = \int_{\Omega}\left(\mathrm{W}(\mathbf{x},\boldsymbol{\varepsilon}) - \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla^{S}\mathbf{u}\right)\mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega}\rho_0\overline{\mathbf{f}}\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma}\overline{\mathbf{t}}\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}\Gamma \tag{2.53}$$

Com base neste funcional e no conceito expresso em (2.52) pode obter-se o seguinte funcional

$$\Pi(\mathbf{u},\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}},\boldsymbol{\sigma}) = \int_{\Omega}\left(\mathrm{W}\left(\mathbf{x},\nabla^{S}\mathbf{u}+\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\right) - \boldsymbol{\sigma}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\right)\mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega}\rho_0\overline{\mathbf{f}}\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma}\overline{\mathbf{t}}\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}\Gamma \tag{2.54}$$

onde Ω é um domínio de densidade ρ_0 e sujeito a uma força de massa $\overline{\mathbf{f}}$. A fronteira do domínio é caracterizada por Γ e está sujeita a um conjunto de forças exteriores de superfície $\overline{\mathbf{t}}$.

Considere-se a variação do campo de deslocamentos $\delta\mathbf{u}$, contida no espaço de todas as variações de deslocamento possíveis U_δ; a variação do campo de deformações acrescentadas $\delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$, contida no espaço de todas as deformações acrescentadas possíveis $\tilde{\mathrm{E}}_\delta$; a variação do campo de tensões $\delta\boldsymbol{\sigma}$, pertencente ao espaço de todas as variações admissíveis de tensão S_δ. Para o campo de deslocamentos actual $\mathbf{u}$, o princípio variacional conduz às seguintes equações

$$\int_\Omega \nabla^{\mathrm{S}}\delta\mathbf{u}\cdot\partial_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\mathrm{W}\left(\mathbf{x},\nabla^{\mathrm{S}}\mathbf{u}+\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\right)\mathrm{d}\Omega-\mathrm{f}_{ext}=0 \tag{2.55}$$

$$\int_\Omega \delta\boldsymbol{\sigma}\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\;\mathrm{d}\Omega=0 \tag{2.56}$$

$$\int_\Omega \left(\delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\partial_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\mathrm{W}\left(\mathbf{x},\nabla^{\mathrm{S}}\mathbf{u}+\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\right)-\delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)\mathrm{d}\Omega=0 \tag{2.57}$$

em que f_{ext} representa o trabalho virtual realizado pelas forças exteriores.

O conjunto de equações (2.55), (2.56) e (2.57) formam o problema variacional modificado dos três campos, proposto por Simo e Rifai [31], para todas as variações $\left(\ \delta\mathbf{u}\ ,\ \delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\ ,\ \delta\boldsymbol{\sigma}\ \right)\in \mathrm{U}_\delta\times\tilde{\mathrm{E}}_\delta\times\mathrm{S}_\delta$.

Note-se que as equações de Euler-lagrange associadas com o sistema de equações dado por (2.55), (2.56) e (2.57), são as equações de equilíbrio do domínio Ω, de densidade ρ_0 e sujeito a uma força de massa $\overline{\mathbf{f}}$:

$$\partial_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\mathrm{W}\left(\mathbf{x},\nabla^{\mathrm{S}}\mathbf{u}+\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\right)+\rho_0\overline{\mathbf{f}}=0 \tag{2.58}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}=0 \tag{2.59}$$

$$\boldsymbol{\sigma}=\partial_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\mathrm{W}\left(\mathbf{x},\nabla^{\mathrm{S}}\mathbf{u}+\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\right) \tag{2.60}$$

em que a equação (2.59) é válida para o problema contínuo, não se verificando, de um modo geral, no problema discreto, $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^h\approx 0$.

Quando se discretiza o domínio Ω num conjunto (n_{elem}) de elementos finitos de domínio Ω_e, a equação (2.55), válida para todo o domínio é transformada na seguinte equação de equilíbrio

$$\mathop{\mathbf{A}}_{e=1}^{n_{elem}} \left(\mathbf{f}_{int}^{e}(\mathbf{d}_e, \boldsymbol{\alpha}_e) - \mathbf{f}_{ext}^{e} \right) = \mathbf{0} \tag{2.61}$$

O campo de deslocamentos $\mathbf{u}^h$, e a parte simétrica do gradiente do campo de deslocamentos $\boldsymbol{\varepsilon}^h = \nabla^{\mathrm{S}} \mathbf{u}_e^h$, num qualquer ponto do elemento de domínio Ω_e, são aproximados pelas conhecidas interpolações

$$\mathbf{u}_e^h = \mathbf{N}_e(\boldsymbol{\xi})\,\mathbf{d}_e \tag{2.62}$$

$$\nabla^{\mathrm{S}} \mathbf{u}_e^h = \mathbf{B}_e(\boldsymbol{\xi})\,\mathbf{d}_e \tag{2.63}$$

em que $\mathbf{d}_e$ é o vector dos deslocamentos nodais do elemento e $\mathbf{B}_e(\boldsymbol{\xi})$ é a matriz de deformações. A substituição de $\boldsymbol{\varepsilon}^h = \mathbf{B}_e(\boldsymbol{\xi})\,\mathbf{d}_e$ em (2.55) permite calcular o vector de forças internas para um elemento

$$\mathbf{f}_{int}^{e} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^{\mathrm{T}} \partial \mathrm{W}(\mathbf{x}, \mathbf{B}_e \mathbf{d}_e + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})\, \mathrm{d}\Omega_e \tag{2.64}$$

As deformações acrescentadas, num dado ponto do elemento, $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\xi})$, são interpoladas a partir dos modos de deformação adicionais, que constituem um vector $\boldsymbol{\alpha}_e$, e com base em funções de forma, arrumadas numa matriz $\tilde{\mathbf{B}}_e$. Esta matriz é uma matriz de funções prescritas com as colunas linearmente independentes, que permitem definir a interpolação das deformações acrescentadas da seguinte forma:

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e(\boldsymbol{\xi}) = \tilde{\mathbf{B}}_e(\boldsymbol{\xi})\,\boldsymbol{\alpha}_e \tag{2.65}$$

Deste modo, as incógnitas do problema passam a ser não só os deslocamentos nodais, como também os modos de deformação adicionais $\boldsymbol{\alpha}_e$.

A uma qualquer variação das forças internas $\delta \mathbf{f}_{int}^{e}$, relativa a uma variação dos deslocamentos nodais $\delta \mathbf{d}_e$ e atendendo às relações constitutivas e de interpolação habituais

$$\boldsymbol{\sigma} = \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathrm{W}(\mathbf{x}, \mathbf{B}_e \mathbf{d}_e + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \partial^2_{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}} \mathrm{W}(\mathbf{x}, \mathbf{B}_e \mathbf{d}_e + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})\,\boldsymbol{\varepsilon} = \partial^2_{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}} \mathrm{W}(\mathbf{x}, \mathbf{B}_e \mathbf{d}_e + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) \left(\mathbf{B}_e \mathbf{d}_e + \tilde{\mathbf{B}}_e \boldsymbol{\alpha}_e \right) \tag{2.66}$$

corresponde:

$$\delta \mathbf{f}_{int}^{e} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^{\mathrm{T}} \partial^2_{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}} \mathrm{W}(\mathbf{x}, \mathbf{B}_e \delta \mathbf{d}_e + \delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})\, \delta \boldsymbol{\varepsilon}\, \mathrm{d}\Omega_e \tag{2.67}$$

Considerando a definição (2.52), a variação para o campo de deformações é dada por

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^{\mathrm{S}}\delta\mathbf{u} + \delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{2.68}$$

Substituindo (2.68) em (2.67), e combinando com (2.65), obtém-se

$$\delta\mathbf{f}^{e}_{int} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^{\mathrm{T}}\partial^2_{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}}\,\mathrm{W}\big(\mathbf{x}, \mathbf{B}_e\delta\mathbf{d}_e + \delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\big)\big(\mathbf{B}_e\delta\mathbf{d}_e + \tilde{\mathbf{B}}_e\delta\boldsymbol{\alpha}_e\big)\,\mathrm{d}\Omega_e \tag{2.69}$$

A selecção de um espaço para todos os campos de tensão aproximados S^h, que seja ortogonal ao espaço das deformações acrescentadas $\tilde{\mathrm{E}}^h$, permite eliminar o campo de tensões do sistema de equações dado pelas equações (2.58), (2.59) e (2.60). Para o efeito torna-se necessário que a norma L_2, entre o campo de tensões no elemento e o campo das deformações acrescentadas seja zero [31]

$$\left\langle \boldsymbol{\sigma}^h_e, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^h_e \right\rangle_{L_2} = \int_{\Omega_e} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^h_e(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\sigma}^h_e(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\Omega_e = 0 \tag{2.70}$$

Sendo o vector $\boldsymbol{\alpha}_e$ interno ao elemento e portanto constante em todo o seu domínio, substituindo (2.65) em (2.70), obtém-se a seguinte equação

$$\boldsymbol{\alpha}_e \cdot \int_{\Omega_e} \tilde{\mathbf{B}}_e^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\sigma}^h_e(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\Omega_e = 0 \tag{2.71}$$

Aplicando em (2.71) uma relação constitutiva e combinando (2.52) com (2.65) obtém-se

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^{\mathrm{T}}\partial^2_{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}}\,\mathrm{W}\big(\mathbf{x}, \mathbf{B}_e\mathbf{d}_e + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\big)\big(\mathbf{B}_e\mathbf{d}_e + \tilde{\mathbf{B}}_e\boldsymbol{\alpha}_e\big)\,\mathrm{d}\Omega_e = 0 \tag{2.72}$$

As equações (2.69) e (2.72) constituem o sistema de equações, em que as variáveis independentes são, o campo de deslocamentos nodais $\mathbf{d}_e$ e os modos adicionais de deformação $\boldsymbol{\alpha}_e$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}^e_{dd} & \mathbf{k}^e_{d\alpha} \\ \mathbf{k}^e_{\alpha d} & \mathbf{k}^e_{\alpha\alpha} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_e \\ \boldsymbol{\alpha}_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^e_{ext} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \tag{2.73}$$

em que as submatrizes são definidas da seguinte forma

$$\mathbf{k}^e_{dd} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^{\mathrm{T}}\partial^2_{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}}\,\mathrm{W}\big(\mathbf{x}, \mathbf{B}_e\mathbf{d}_e + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\big)\mathbf{B}_e^{\mathrm{T}}\,\mathrm{d}\Omega_e \tag{2.74}$$

$$\mathbf{k}^e_{d\alpha} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^{\mathrm{T}} \partial^2_{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}} \mathrm{W}(\mathbf{x}, \mathbf{B}_e\mathbf{d}_e + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) \tilde{\mathbf{B}}_e \, \mathrm{d}\Omega_e \tag{2.75}$$

$$\mathbf{k}^e_{\alpha d} = \int_{\Omega_e} \tilde{\mathbf{B}}_e^{\mathrm{T}} \partial^2_{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}} \mathrm{W}(\mathbf{x}, \mathbf{B}_e\mathbf{d}_e + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) \mathbf{B}_e \, \mathrm{d}\Omega_e \tag{2.76}$$

$$\mathbf{k}^e_{\alpha\alpha} = \int_{\Omega_e} \tilde{\mathbf{B}}_e^{\mathrm{T}} \partial^2_{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}} \mathrm{W}(\mathbf{x}, \mathbf{B}_e\mathbf{d}_e + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) \tilde{\mathbf{B}}_e \, \mathrm{d}\Omega_e \tag{2.77}$$

Na aplicação desta formulação a um problema não linear, o sistema (2.73) é transformado, de modo a garantir o equilíbrio de forças (2.55) e a respeitar a equação (2.72), ou seja

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}^e_{dd} & \mathbf{k}^e_{d\alpha} \\ \mathbf{k}^e_{\alpha d} & \mathbf{k}^e_{\alpha\alpha} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{d}_e \\ \Delta\boldsymbol{\alpha}_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{r}^e \\ -\mathbf{h}^e \end{Bmatrix} \tag{2.78}$$

em que $\mathbf{r}^e$ é o vector de resíduo de forças nodais e $\mathbf{h}^e$ é um vector de resíduos ao nível do elemento e resultante de (2.71)

$$\mathbf{h}^e = \int_{\Omega_e} \tilde{\mathbf{B}}_e^{\mathrm{T}}(\xi) \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{h}}_e(\xi) \, \mathrm{d}\Omega_e \tag{2.79}$$

Pode-se optar por realizar uma condensação estática do sistema (2.78), eliminando os modos de deformação adicionais, obtendo-se um sistema de equações em ordem ao vector dos deslocamentos nodais.

2.6.1 Deformações de Corte Transverso Acrescentadas

Nesta secção são descritos os campos de deformação de corte transverso acrescentados utilizados na formulação do elemento S4E6P7 [1]. Baseado no proposto em [31] e conforme descrito em [1], em alternativa às componentes de deformação definidas em (2.44), surge um campo de deformações de corte transverso *acrescentado* da seguinte forma

$$\mathbf{E}^{u,\alpha} = \mathbf{E}^u + \mathbf{E}^\alpha \tag{2.80}$$

ou

$$\begin{aligned} \mathrm{E}^{u,\alpha}_{\xi\zeta} &= \mathrm{E}^u_{\xi\zeta} + \mathrm{E}^\alpha_{\xi\zeta} \\ \mathrm{E}^{u,\alpha}_{\eta\zeta} &= \mathrm{E}^u_{\eta\zeta} + \mathrm{E}^\alpha_{\eta\zeta} \end{aligned} \tag{2.81}$$

onde $\mathbf{E}^{\alpha}$ corresponde às deformações de corte transverso adicionais, responsáveis pelo alargamento do subespaço das deformações admissíveis que respeitam a anulação da energia de deformação de corte transverso. Através deste alargamento, o elemento degenerado clássico passa a reproduzir modos de deformação anteriormente não permitidos, com a consequente anulação de padrões de retenção associados.

As deformações acrescentadas na equação (2.80), formalmente são semelhantes às deformações clássicas podendo ser expressas pela equação

$$\mathbf{E}_{\square}^{\alpha} = \mathbf{M}(\xi)\boldsymbol{\alpha}_e \tag{2.82}$$

através da matriz de interpolação $\mathbf{M}(\xi)$, para uma posição $\left(\xi \equiv \xi , \eta , \zeta \right)$ de um dado elemento com as variáveis internas associadas ao mesmo. Estas funções de interpolação, definidas em relação ao *referencial natural*, devem ser então transformadas tensorialmente para o sistema coordenado de referência, convertendo o campo de deformações definido no referencial elementar $\mathbf{E}_{\square}^{\alpha}$ no seu congénere $\mathbf{E}^{\alpha}$ aplicado em (2.80).

A matriz de interpolação $\mathbf{M}(\xi)$ utilizada no elemento S4E6P7 envolve, para o corte, a utilização de 6 variáveis internas para cada elemento. De uma maneira explícita, esta matriz assume a forma

$$\mathbf{M}(\xi)\big|_6 = \mathbf{M}(\xi,\eta,\zeta=0)\big|_6 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{N}_{\alpha}}{\partial \eta} & 0 & \dfrac{\partial \mathrm{N}_{\alpha}}{\partial \xi} & 0 & \dfrac{\partial \mathrm{N}_{\alpha}}{\partial \xi}\dfrac{\partial \mathrm{N}_{\alpha}}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial \mathrm{N}_{\alpha}}{\partial \xi} & 0 & \dfrac{\partial \mathrm{N}_{\alpha}}{\partial \eta} & 0 & \dfrac{\partial \mathrm{N}_{\alpha}}{\partial \xi}\dfrac{\partial \mathrm{N}_{\alpha}}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{2.83}$$

em que N_{α} são funções de forma compatíveis do tipo $\mathrm{N}_{\alpha}\left(\xi , \eta \right) = \left(1-\xi^2\right)\left(1-\eta^2\right)$.

Na equação (2.82), $\boldsymbol{\alpha}_e$ é um vector com seis componentes. O campo de deformações acrescentadas (de corte transverso) para um dado elemento, no seu referencial natural, vem dado através da substituição da equação (2.83) em (2.82). Após a referida mudança de referencial, o campo de deformações de corte transverso final resulta da substituição em (2.80). Estas considerações formam a base do elemento de casca de quatro nós S4E6, apresentado em [1].

Conforme descrito na referência anterior, é possível uma melhoria do desempenho do elemento em exemplos onde modos de *deformação de membrana* são preponderantes [32]. Para o efeito, efectua-se a inclusão das deformações acrescentadas associadas a estes termos, num procedimento análogo ao descrito para o corte transverso. Adoptando a abordagem de Andelfinger e Ramm [28], as componentes de deformação no plano são afectadas da forma

$$\mathbf{E}^{u,\beta} = \mathbf{E}^{u} + \mathbf{E}^{\beta} \tag{2.84}$$

ou

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_{\xi\xi}^{u,\beta} &= \mathrm{E}_{\xi\xi}^{u} + \mathrm{E}_{\xi\xi}^{\beta} \\ \mathrm{E}_{\eta\eta}^{u,\beta} &= \mathrm{E}_{\eta\eta}^{u} + \mathrm{E}_{\eta\eta}^{\beta} \\ \mathrm{E}_{\xi\eta}^{u,\beta} &= \mathrm{E}_{\xi\eta}^{u} + \mathrm{E}_{\xi\eta}^{\beta} \end{aligned} \tag{2.85}$$

A escolha e utilização de uma matriz de interpolação introduz 7 variáveis internas aos elementos. No referencial natural do elemento, estas matrizes são definidas através de termos descontínuos nas fronteiras dos elementos (ao contrário do procedimento anterior para o corte transverso [1]).

$$\mathbf{E}_{\square}^{\beta} = \mathbf{M}(\xi)\big|_{7}\,\boldsymbol{\beta}_{e} \tag{2.86}$$

com

$$\mathbf{M}(\xi)\big|_{7} = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 & \xi\eta & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & \xi\eta & 0 \\ 0 & 0 & \xi & \eta & 0 & 0 & \xi\eta \end{bmatrix} \tag{2.87}$$

A utilização conjunta da interpolação de corte transverso (2.83) e de membrana (2.86) constituem a base do elemento S4E6P7, formando uma alternativa válida ao procedimento de interpolação tensorial mista (deformações naturais assumidas) [24, 25], com a vantagem de serem uma extensão natural da formulação do elemento degenerado clássico [1].

2.6.2 Formulação Não-Linear Geométrica

A aplicação do método das deformações acrescentadas a problemas não-lineares geométricos foi originalmente conduzida em [27] através de uma

decomposição aditiva do gradiente do deslocamento e, em consequência, uma decomposição multiplicativa do gradiente de deformação com uma parte obtida a partir do campo de deslocamentos, sendo a outra a parcela acrescentada.

No entanto, uma formulação mais simples pode ser obtida utilizando-se uma decomposição aditiva do próprio campo de deformações, a exemplo do que é feito no método das deformações acrescentadas em regime linear [33-35], tendo sido este o procedimento utilizado.

Em linhas gerais, a partir de um funcional de três campos de Hu-Washizu relacionando o tensor das segundas tensões de Piola-Kirchhoff $\mathbf{S}$, o tensor das extensões (acrescentadas) de Green-Lagrange $\mathbf{E}^{\alpha}$ e o campo de deslocamentos $\mathbf{u}$, e fazendo uso da expressão (2.80), é possível estabelecer a igualdade

$$\Pi^{\alpha}\left(\mathbf{u}, \mathbf{E}^{\alpha}, \mathbf{S}\right) = \underbrace{\int_{\mathrm{V}} \mathrm{W}_{def}\left(\mathbf{E}^{u} + \mathbf{E}^{\alpha}\right) \mathrm{d}\,\mathrm{V} - \int_{\mathrm{V}} \left(\mathbf{S} : \mathbf{E}^{\alpha}\right) \mathrm{d}\,\mathrm{V}}_{\Pi^{int}} - \Pi^{ext} \tag{2.88}$$

De notar que, para esta equação, o sufixo α refere-se a um campo acrescentado, não importando, para o contexto, tratar-se de um acréscimo em termos das componentes de membrana ou corte transverso. A parcela de energia Π^{ext} engloba contribuições de forças volúmicas ou superficiais prescritas/externas. A equação anterior pode ser simplificada considerando-se a hipótese do campo de tensões ser ortogonal ao campo de deformações acrescentadas, conduzindo a [27, 31, 36]

$$\int_{\mathrm{V}} \mathbf{S} : \mathbf{E}^{\alpha} \, \mathrm{d}\,\mathrm{V} = 0 \tag{2.89}$$

Uma vez que a discretização por elementos finitos da variação da equação (2.88) em conjunto com a condição de ortogonalidade (2.89) é formalmente idêntica, quer se esteja perante um caso linear, ou não-linear geométrico (ao contrário dos procedimentos apresentados em [27, 31, 36] e [27, 31, 36]) é possível obter um sistema (após a linearização da forma fraca (variação) da equação (2.88)) com a forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{dd}^{lg} + \mathbf{K}_{dd}^{nlg} & \mathbf{K}_{d\alpha} \\ \mathbf{K}_{\alpha d} & \mathbf{K}_{\alpha\alpha} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\Delta\mathbf{d} \\ \Delta\Delta\boldsymbol{\alpha} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{dd}^{ext} - \mathbf{F}_{dd}^{int} \\ -\mathbf{F}_{\alpha\alpha}^{int} \end{Bmatrix} \tag{2.90}$$

onde intervêm as matrizes de rigidez linear e geométrica normais ($\mathbf{K}_{dd}^{lg}$ e $\mathbf{K}_{dd}^{nlg}$, respectivamente) e as matrizes de rigidez decorrentes das variáveis acrescentadas ($\mathbf{K}_{\alpha\alpha}, \mathbf{K}_{\alpha d}$ e $\mathbf{K}_{d\alpha} = \mathbf{K}_{\alpha d}^{\mathrm{T}}$) [1, 35]. As expressões para os vectores de forças externas e internas associados aos deslocamentos e variáveis internas podem ser obtidas, por exemplo, em [35]. O cálculo da variação do campo de deslocamentos dentro do algoritmo incremental-iterativo deste trabalho é obtido a partir da condensação estática aplicada à equação (2.90), obtendo-se uma expressão em função dos deslocamentos

$$\left[\mathbf{K}_{dd}^{lg} + \mathbf{K}_{dd}^{nlg} - \mathbf{K}_{d\alpha}\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{-1}\mathbf{K}_{\alpha d}\right]\Delta\Delta\mathbf{d} = \mathbf{F}_{dd}^{ext} - \mathbf{F}_{dd}^{int} + \left(\mathbf{K}_{d\alpha}\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{-1}\mathbf{F}_{aa}^{int}\right) \tag{2.91}$$

com o posterior cálculo e actualização do vector de variáveis internas. Ainda em termos do algoritmo, é aplicada directamente a condição de anulação das forças internas relacionadas às variáveis acrescentadas a nível dos elementos (uma vez que estas não possuem a sua parcela exterior correspondente). Dessa forma é utilizado um ciclo adicional dentro de cada elemento finito de modo a, iterativamente, levar à anulação de $\mathbf{F}_{\alpha\alpha}^{int}$ antes da resolução do sistema de equações resultante de (2.90), conforme proposto em [36], o que conduz à anulação do último termo presente na equação (2.91).

Quando comparado com decomposições aditivas do gradiente dos deslocamentos numa parcela interpolada (como usualmente) e outra acrescentada, conforme Simo e Armero [27], o presente procedimento revela-se computacionalmente mais simples uma vez que não introduz matrizes de rigidez geométricas (mais 3 matrizes) associadas às variáveis internas acrescentadas. Assim, esta parcela geométrica da matriz de rigidez é mantida inalterada em relação a uma formulação usual por deslocamentos [34].

Adicionalmente, é possível manter-se na formulação não-linear uma ordem de quadratura exactamente igual à utilizada na análise linear [1], não sendo assim necessária a utilização de quadraturas superiores diferenciadas, como ocorre por exemplo em [36].

Um outro factor de destaque para a presente formulação em cascas reside no facto desta ser baseada em tensores de extensão definidos no referencial convectivo (e posteriormente, no referencial local) dos elementos, evitando assim questões quanto à *objectividade* das actualizações envolvidas no algoritmo. Esse tipo de problema, verificado em [36] e [37] é tratado nestas últimas referências

através de transformações *à posteriori* dos termos dos gradientes de deformação envolvidos.

2.6.2.1 Cinemática dos elementos de casca com inclusão de grandes rotações

Numa região do espaço $\mathbb{R}_n$ (designada como de *referência* e com contornos $\partial\mathbb{R}_n$) ocupada por uma casca, o vector posição $\mathbf{X}$ de um dado ponto $P \in \mathbb{R}_n$ pode ser definido como sendo [34]

$$\mathbf{X}\left(\xi,\eta,\zeta\right)=\mathbf{\Phi}\left(\xi,\eta\right)+\zeta\,\mathbf{D}\left(\xi,\eta\right),\ \text{onde}\ \left\|\mathbf{D}\left(\xi,\eta\right)\right\|=1\ \text{e ainda}\ -\frac{a}{2}\le\zeta\le+\frac{a}{2} \tag{2.92}$$

para uma dada configuração na sua superfície média $\mathbf{\Phi}\left(\xi,\eta\right)$ e respectivo vector unitário normal no ponto considerado $\mathbf{D}\left(\xi,\eta\right)$. A espessura da casca a é parametrizada através da coordenada natural ζ. De notar que a expressão (2.92) utiliza dois sistemas coordenados distintos, o sistema curvilíneo natural $\left(\xi,\eta,\zeta\right)$ e o sistema ortonormado global $\left(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\right)$, de forma que

$$\mathbf{X}\left(\xi,\eta,\zeta\right)=\mathbf{X}^i\mathbf{e}_i \tag{2.93}$$

com i variando entre 1 e 3 num somatório implícito. Após a deformação, a posição final do ponto, no espaço $\mathbb{R}_{n+1}$ com limites $\partial\mathbb{R}_{n+1}$, é dada por

$$\mathbf{x}\left(\xi,\eta,\zeta\right)=\mathbf{x}^i\mathbf{e}_i=\boldsymbol{\varphi}\left(\xi,\eta\right)+\zeta\,\mathbf{d}\left(\xi,\eta\right) \tag{2.94}$$

No caso de não serem consideradas variações de espessura nos elementos, tem-se

$$\left\|\mathbf{d}\left(\xi,\eta\right)\right\|=1 \tag{2.95}$$

Neste caso, o vector unitário $\mathbf{d}$ poderá ser considerado simplesmente como a versão rodada do vector unitário entre duas configurações quaisquer, ou seja,

$$\mathbf{D}\rightarrow\mathbf{d}\ \therefore\ \mathbf{d}=\Delta\mathbf{\Lambda}\,\mathbf{D} \tag{2.96}$$

onde $\Delta\mathbf{\Lambda}$ representa um tensor de segunda ordem ortogonal, designado como tensor cinemático de rotações. Para uma descrição da deformação entre dois

pontos, um mapeamento livre de singularidades pode ser descrito através da escolha de um tensor cinemático de rotações baseado na fórmula de Rodrigues [38]

$$\Delta\mathbf{\Lambda} = \mathbf{I}_2 + \frac{\operatorname{sen}(\omega)}{\omega}\hat{\mathbf{\Omega}} + \frac{(1-\cos(\omega))}{\omega^2}\hat{\mathbf{\Omega}}\hat{\mathbf{\Omega}} \tag{2.97}$$

em que $\mathbf{I}_2$ diz respeito ao tensor de identidade de segunda ordem, $\hat{\mathbf{\Omega}}$ representa uma composição do vector de rotação de Rodrigues $\left(\mathbf{\Omega} = \omega\, \mathbf{e} \right)$, que por sua vez é função dos graus de liberdade de rotação incrementais nodais [1]. Para um dado nó n, o incremento dos deslocamentos e rotações é dado por

$$\Delta\mathbf{d} = \left\{\Delta u_n \;\; \Delta v_n \;\; \Delta w_n \;\; \Delta\alpha_n \;\; \Delta\beta_n\right\}^{\mathrm{T}} \tag{2.98}$$

de forma que, segundo a convenção adoptada na última referência, obtém-se

$$\hat{\mathbf{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Delta\alpha \\ 0 & 0 & -\Delta\beta \\ -\Delta\alpha & \Delta\beta & 0 \end{bmatrix} \tag{2.99}$$

com ω definido da seguinte forma

$$\omega = \sqrt{(\Delta\alpha)^2 + (\Delta\beta)^2} \tag{2.100}$$

Com as considerações anteriores torna-se possível definir uma expressão para o deslocamento de um ponto entre duas configurações na forma

$$\mathbf{u}\left(\xi, \eta, \zeta\right) = \boldsymbol{\varphi}\left(\xi, \eta\right) - \boldsymbol{\Phi}\left(\xi, \eta\right) + \zeta[\Delta\mathbf{\Lambda} - \mathbf{I}_2]\mathbf{D}\left(\xi, \eta\right) \tag{2.101}$$

podendo, finalmente, ser aplicada à expressão das componentes covariantes das extensões de Green-Lagrange para um modelo de grandes deslocamentos e rotações (em oposição à equação (2.44))

$$\mathrm{E}^{u}_{\xi_i\xi_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\xi_i}\cdot\mathbf{G}_j + \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\xi_j}\cdot\mathbf{G}_i + \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\xi_i}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\xi_j}\right) \tag{2.102}$$

2.6.3 Referencial corotacional e actualização das variáveis constitutivas

Neste trabalho foi adoptada uma formulação incremental do tipo lagrangeana actualizada para um campo de extensões definido em primeiro lugar num referencial convectivo, não ortogonal e curvilíneo $\left(\xi , \eta , \zeta \right)$ que, em seguida, é transformado para um referencial local $\left(\mathbf{r} , \mathbf{s} , \mathbf{t} \right)$ associado a cada ponto de Gauss do elemento. A escolha deste referencial e respectivas matrizes de transformação seguem procedimentos bem estabelecidos na análise por elementos finitos de cascas [39, 40].

Efectua-se um processo de *integração completa* nas três variáveis naturais anteriores (admitindo o aumento de pontos de amostragem ao longo da espessura dos elementos em problemas não-lineares materiais), e as matrizes $\mathbf{B}^{lg}_{(r,s,t)}$ e $\mathbf{B}^{nlg}_{(r,s,t)}$ que relacionam campos de deslocamentos com campos de deformação após a discretização por elementos finitos são definidas em termos do sistema local citado.

De igual forma as matrizes de interpolação relacionadas com as variáveis acrescentadas (equações (2.83) e (2.87)) são transformadas para o referencial local. A relação entre os referenciais convectivo e local pode ser expressa através dos termos da matriz de transformação

$$\mathbf{T}_{conv \rightarrow local} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial r} & \frac{\partial \eta}{\partial r} & \frac{\partial \zeta}{\partial r} \\ \frac{\partial \xi}{\partial s} & \frac{\partial \eta}{\partial s} & \frac{\partial \zeta}{\partial s} \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} & \frac{\partial \eta}{\partial t} & \frac{\partial \zeta}{\partial t} \end{bmatrix} \tag{2.103}$$

obtidos através de derivações em cadeia onde intervêm um referencial global $\left(\mathrm{X} , \mathrm{Y} , \mathrm{Z} \right)$ exterior ao elemento analisado. Depois dessa etapa, calculam-se as variações nos campos de extensão derivados dos deslocamentos e das variáveis internas.

Admitindo uma deformação entre duas configurações $\left(n \right)$ e $\left(n+1 \right)$ (e omitindo o sinal incremental Δ anteriormente usado), é possível actualizar a orientação espacial dos eixos locais associados a cada ponto de Gauss através do

cálculo do gradiente de deformação incremental (relativo) entre $\left(n \right)$ e $\left(n+1 \right)$

$$ {}^{n+1}_{n}\mathbf{F} = \frac{\partial\left({}^{n+1}_{0}\mathbf{x} - {}^{n}_{0}\mathbf{x}\right)}{\partial\left({}^{n}_{0}\mathbf{x}\right)} = {}^{n+1}_{0}\mathbf{F}\left({}^{n}_{0}\mathbf{F}\right)^{-1} - \mathbf{I}_2 \tag{2.104} $$

onde ${}^{n+1}_{0}\mathbf{F}$ e ${}^{n}_{0}\mathbf{F}$ são os gradientes de deformação *absolutos* (relativos à configuração inicial em $t=0$) associados às configurações $\left(n+1 \right)$ e $\left(n \right)$, respectivamente. De posse do gradiente de deformação relativo, é possível então avaliar o tensor de rotações relativo ${}^{n+1}_{n}\mathbf{R}$ através de um algoritmo de decomposição polar, dos quais o mais eficiente foi apresentado por Franca em [41]. O novo sistema de eixos local passa então a ser definido através de

$$ {}^{n+1}\left(r\,,s\,,t \right) \equiv {}^{n+1}_{n}\mathbf{R}\cdot {}^{n}\left(r\,,s\,,t \right) \tag{2.105} $$

Como o referencial local acompanha o movimento do elemento finito do qual faz parte (para cada ponto de Gauss), o sistema aparenta ser do tipo corotacional, ainda que definido de forma distinta da apresentada por Crisfield em [42].

O tensor incremental das rotações definido em (2.105) revela-se útil na actualização objectiva do campo de tensões, conforme demonstrado por Hughes em [43]. Segundo esta referência, uma dada taxa (objectiva) de tensão pode ser representada através de uma derivada temporal do respectivo tensor *rodado* das tensões. Várias taxas de tensão são reproduzidas através da escolha apropriada do tensor das rotações. Para o caso particular de se utilizar o tensor ${}^{n+1}_{n}\mathbf{R}$ anterior, obtido através da decomposição polar incremental, obtém-se automaticamente a taxa (objectiva) de Green-Naghdi-McInnis $\left(\boldsymbol{\sigma}^{GNM}\right)$. Assim, uma actualização entre duas configurações do *tensor das tensões rodado* pode ser tratada da forma [9, 44]

$$ \begin{aligned} &{}^{n+1}\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = {}^{n}\tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \Delta \mathrm{t}\frac{\mathrm{d}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})}{\mathrm{d}\,\mathrm{t}}, \text{ onde } {}^{n+1}\mathrm{t} = {}^{n}\mathrm{t} + \Delta\mathrm{t} \text{ e} \\ &\frac{\mathrm{d}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})}{\mathrm{dt}} = \left({}^{n+1}_{n}\mathbf{R}\right)^{\mathrm{T}} \cdot \left(\boldsymbol{\sigma}^{GNM}\right) \cdot \left({}^{n+1}_{n}\mathbf{R}\right) \end{aligned} \tag{2.106} $$

mas, do que foi apresentado anteriormente,

$$\boldsymbol{\sigma}^{GNM} = \left({}^{n+1}_{n}\mathbf{R}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\mathrm{t}}\left({}^{n+1}_{n}\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot{}^{n+1}_{n}\mathbf{R}\right)\cdot\left({}^{n+1}_{n}\mathbf{R}\right)^{\mathrm{T}} \tag{2.107}$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ corresponde ao tensor das tensões de Cauchy. Devido à ortogonalidade de ${}^{n+1}_{n}\mathbf{R}$, a derivada temporal do tensor das tensões rodado em (2.106) pode ser substituída directamente pela rotação tensorial da derivada temporal do tensor das tensões de Cauchy. Nesta altura uma maior simplicidade em termos de algoritmos computacionais pode ser obtida.

De facto, o tensor das tensões de Cauchy rodado (a sua derivada temporal, mais precisamente) é directamente obtido com base no tensor das tensões calculado no *referencial local rodado* (já afectado de ${}^{n+1}_{n}\mathbf{R}$), conforme (2.105). Dessa forma, toda a análise se torna mais simples, uma vez que as extensões covariantes haviam sido previamente transformadas para o referencial local, e o procedimento de actualização de tensões adquire o aspecto que possuía para o caso de deslocamentos e rotações infinitesimais. Retomando a equação (2.106) anterior, agora particularizada para uma descrição no referencial local $\left(\, r\,,\, s\,,\, t\,\right)$, tem-se

$$\begin{aligned}
{}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}_{(r,s,t)} &= {}^{n}\boldsymbol{\sigma}_{(r,s,t)} + \Delta\,\mathrm{t}\frac{\mathrm{d}\left(\boldsymbol{\sigma}_{(r,s,t)}\right)}{\mathrm{dt}} \\
&= {}^{n}\boldsymbol{\sigma}_{(r,s,t)} + {}^{n+1}_{n}\boldsymbol{\sigma}_{(r,s,t)} \\
&= {}^{n}\boldsymbol{\sigma}_{(r,s,t)} + \frac{1}{\det\left({}^{n+1}_{\mathrm{n}}\mathbf{F}\right)}\left({}^{n+1}_{\mathrm{n}}\mathbf{F}\right){}^{n+1}_{n}\mathbf{S}\left({}^{n+1}_{\mathrm{n}}\mathbf{F}\right)^{\mathrm{T}}
\end{aligned} \tag{2.108}$$

para uma dada *variação* do tensor das segundas tensões de Piola-Kirchhoff $\left({}^{n+1}_{n}\mathbf{S}\right)$. Para o cálculo desta variação, é útil explicitar as seguintes relações constitutivas [45]

$$\begin{aligned}
{}^{n+1}_{n}\mathbf{S} &\cong \mathbf{C}_{(r,s,t)} : {}^{n+1}_{n}\mathbf{E}_{(r,s,t)} \\
&\cong \mathbf{C}_{(r,s,t)} : \left[{}^{n}_{0}\mathbf{E} - {}^{n}_{0}\mathbf{E}^{(p)} + \left({}^{n+\gamma}_{n}\mathbf{B}_{(r,s,t)}\,{}^{n+1}_{n}\mathbf{d}\right) + \left({}^{n+\gamma}_{n}\mathbf{M}_{(r,s,t)}\,{}^{n+1}_{n}\boldsymbol{\alpha}\right)\right]
\end{aligned} \tag{2.109}$$

Na equação anterior intervém a deformação total acumulada até a configuração de base ${}^{n}_{0}\mathbf{E}$ bem como a sua respectiva parcela plástica ${}^{n}_{0}\mathbf{E}^{(p)}$. Para garantir a estabilidade computacional do algoritmo em regime não-linear material, considera-se que a configuração $\left(\, n\,\right)$ corresponde à última configuração onde,

simultaneamente, foram respeitadas a condição de equilíbrio e a função de cedência escolhida para o material.

Adicionalmente, em (2.109) apresentam-se as actualizações das deformações incrementais que advêm do campo de deslocamentos bem como do campo das variáveis internas associadas aos elementos. Na matriz de interpolação $\left({}^{n+\gamma}_{n}\mathbf{M}_{(r,s,t)} \right)$ estão esquematicamente agrupados efeitos devidos a deformações acrescentadas de corte e membrana, definidas em [1]. De acordo com a referência [43], uma melhor aproximação da variação das deformações será obtida com a utilização de matrizes de interpolação avaliadas na configuração intermédia entre (n) e (n+1), ou seja, para uma variável de posição $\left(\gamma = 1/2 \right)$.

2.7 Referências

1. de Sá, J.M.A.C., et al., *Development of shear locking-free shell elements using an enhanced assumed strain formulation.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2002. **53**(7): p. 1721-1750.
2. Valente, R.A.F., et al., *On the use of an enhanced transverse shear strain shell element for problems involving large rotations.* Computational Mechanics, 2003. **30**(4): p. 286-296.
3. Bathe, K.J., *Finite Element Procedures.* 2 ed. 1996: Prentice Hall International Editions.
4. Oñate, E., *Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos - Análisis Estático Lineal.* 1992, Barcelona: CIMNE (Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería).
5. Valente, R.A.F., *Modelização do Comportamento Elasto-Plástico e Dinâmico de Estruturas Tipo Casca.* 1999, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto: Porto.
6. Zienkiewicz, O.C. and R.L. Taylor, *The Finite Element Method.* 4 ed. Vol. 2. 1991: McGraw-Hill Book Company.
7. Alves de Sousa, R.J., et al., *A new volumetric and shear locking-free 3D enhanced strain element.* Engineering Computations, 2003. **20**(7): p. 896-925.
8. Yang, H.T.Y., et al., *A survey of recent shell finite elements.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000. **47**: p. 101-127.
9. Masud, A., C.L. Tham, and W.K. Liu, *A stabilized 3-D co-rotational formulation for geometrically nonlinear analysis of multi-layered composite shells.* Computational Mechanics, 2000. **1**(26): p. 1-12.
10. Ahmad, S., *Curved Finite Elements in the Analysis of Solid, Shell and Plate Structures.* 1969, University College of Swansea: Wales.
11. Ahmad, S., B.M. Irons, and O.C. Zienkiewics, *Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Elements.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1970. **2**: p. 419-451.

12. Bonet, J. and R.D. Wood, *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis.* 1997: Cambridge University Press.
13. Rodrigues Dias, G.A.O., *Análise Dinâmica de Estruturas tipo Casca*, in *Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.* 1996.
14. Oñate, E. and J. Oliver, *A Finite Element Formulation for the Geometrically Non Linear Analysis of Shells*, in *Finite Element Methods for Plate and Shell Structures*, T.J.R. Hughes and E. Hinton, Editors. 1986, Pineridge Press.
15. Tessler, A. and T.J.R. Hughes, *An Improved Treatment of Transverse Shear in the Mindlin Type Four Node Quadrilateral Element.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1983. **39**: p. 311-335.
16. Crisfield, M.A., *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures.* Vol. 1. 1991: John Wiley & Sons.
17. Huang, H.C., *Static and Dynamic Analyses of Plates and Shells - Theory, Software and Application.* 1989, Berlin: Springer-Verlag.
18. de Sá, J.M.A.C., *Numerical Modelling of Incompressible Problems in Glass Forming and Rubber Technology.* 1986, University College of Swansea, University of Wales: U.K.
19. de Sá, J.M.A.C. and D.R.J. Owen. *The imposition of the incompressibility constraint in finite elements - A review of methods with a new insight to the locking phenomenon.* in *Proceedings of the 3rd International Conference on Numerical Methods for Non-Linear Problems.* 1986. Dubrovnik: Pineridge Press Ltd., Swansea, U.K.
20. de Sá, J.M.A.C. and R.M. Natal Jorge, *New enhanced strain elements for incompressible problems.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999. **44**: p. 229-248.
21. Zienkiewicz, O.C., R.L. Taylor, and J.M. Too, *Reduced integration techniques in general analysis of plates and shells.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1979. **3**: p. 275-290.
22. Hughes, T.J.R., M. Cohen, and M. Haroun, *Reduced and selective integration techniques in finite element analysis of plates.* Nuclear Engineering Design, 1978. **46**: p. 203-222.

23. Bucalem, M.L. and K.J. Bathe, *Finite element analysis of shell structures.* Archives of Computational Methods in Engineering, 1997. 4(1): p. 3-61.

24. Dvorkin, E.N. and K.J. Bathe, *A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis.* Engineering Computations, 1984. **1**: p. 77-88.

25. Park, K.C. and G. Stanley, *A curved C^0 shell element based on assumed natural-coordinate strains.* 1986. **53**: p. 278-290.

26. Simo, J.C. and R.L. Taylor, *A Return Mapping Algorithm for Plane Stress Elastoplasticity.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1986. **22**: p. 649-670.

27. Simo, J.C. and F. Armero, *Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1992. **33**: p. 1413-1449.

28. Andelfinger, U. and E. Ramm, *EAS-Elements for two-dimensional, three-dimensional, plate and shells and their equivalence to HR-elements.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1993. **36**: p. 1311-1337.

29. Yunhua, L. and A. Eriksson, *An alternative assumed strain method.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1999. **178**: p. 23-37.

30. Andelfinger, U. and E. Ramm, *EAS-Elements for two-dimensional, three-dimensional, plate and shell structures and their equivalence to HR-elements.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1993. **36**: p. 1311-1337.

31. Simo, J.C. and M.S. Rifai, *A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1990. **29**: p. 1595-1638.

32. Chapelle, D. and K.J. Bathe, *The mathematical shell model undelying general shell elements.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000. **48**: p. 289-313.

33. Büchter, N., E. Ramm, and D. Roehl, *Three-dimensional extension of nonlinear shell formulation based on the enhanced assumed strain*

concept. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1994. **37**: p. 2551-2568.

34. Betsch, P., F. Gruttmann, and E. Stein, *A 4-node finite shell element for the implementation of general hyperelastic 3D-elasticity at finite strains.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996. **130**: p. 57-59.
35. Bischoff, M. and E. Ramm, *Shear deformable shell elements for large strains and rotations.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1997. **40**: p. 4427-4449.
36. Simo, J.C., F. Armero, and R.L. Taylor, *Improved versions of assumed enhanced strain tri-linear elements for 3D finite deformation problems.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1993. **110**: p. 259-386.
37. Glaser, S. and F. Armero, *On the formulations of enhanced strain finite elements in finite deformations.* Engineering Computations, 1997. **14**(7): p. 759-791.
38. Basar, Y. and D. Weichert, *Nonlinear Continuum Mechanics of Solids.* 2000, Berlin, Germany: Springer Verlag.
39. Belytschko, T., W.K. Liu, and B. Moran, *Nonlinear Finite Elements for Continuum and Structures.* 2001, West Sussex, U.K.: John Wiley & Sons, Ltd.
40. Cardoso, R.P.R., et al. *Developments of one point quadrature shell element for large deformation considering elasto-plastic material modeling.* in *Numiform 2001.* 2001. Japan.
41. Franca, L.P., *An algorithm to compute the square root of a 3x3 positive definite matrix.* Computers and Mathematics with Applications, 1989. **18**(5): p. 459-466.
42. Moita, G.F. and M.A. Crisfield, *A finite element formulation for 3-D continua using the co-rotational technique.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1996. **39**: p. 3775-3792.
43. Hughes, T.J.R., *Numerical implementation of constitutive models:rate independent deviatoric plasticity. in Theoretical foundation for large-scale computations for non-linear material behaviour.* 1984, Dordrecht, NE: Martinus Nijhoff Publishers.

44. Masud, A. and C.L. Tham, *Three-dimensional corotational framework for elasto-plastic analysis of multilayered composite shells.* AIAA Journal, 2000. **38**(12): p. 2320-2327.

45. Brank, B., D. Peric, and F.B. Damjanic, *On large deformations of thin elasto-plastic shells: implementation of a finite rotation model for quadrilateral shell element.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1997. **40**: p. 689-726.

Capítulo 3

Teoria da Plasticidade

3.1 Introdução

Teoria da plasticidade é a denominação dada ao estudo matemático de corpos deformados plasticamente, especialmente metais. Em contraste com outros materiais que se podem deformar plasticamente, a propriedade mais marcante de um metal é a sua capacidade de se deixar deformar a frio. À temperatura ambiente e sujeito a uma tensão aplicada favorável, podem-se obter grandes deformações, por exemplo comprimindo ou tracionando um cilindro de cobre. A teoria da plasticidade está, desta forma, especialmente vocacionada em analisar processos tecnológicos, tais como a laminagem de chapas, a extrusão de perfis e tubos, a embutidura de chapas. O objectivo desta análise é o de determinar as cargas limites, o consumo de energia e as deformações e encruamento não-uniformes devido ao trabalho a frio, permitindo, por exemplo, efectuar alterações aos desenhos dos moldes.

Num outro extremo, onde os temas da plasticidade e da elasticidade se encontram, uma aplicação típica é a determinação da carga crítica que leva um componente de uma estrutura a plastificar, no seu ponto mais fraco. Entre estes dois extremos surgem problemas onde as deformações plásticas e elásticas são da mesma ordem de grandeza.

No caso da embutidura de chapas, a teoria da plasticidade terá de ser mais complexa, de forma a incluir o comportamento anisotrópico normalmente associado a materiais obtidos por laminagem. Praticamente todas as chapas metálicas obtidas por laminagem apresentam comportamentos dependentes das direcções de laminagem. Este conhecido fenómeno, e que reflecte o carácter anisotrópico do material, é ainda mais importante para ligas de alumínio, onde

em alguns casos um critério isotrópico conduz a resultados diferentes dos experimentais [1].

O comportamento anisotrópico de materiais em plasticidade é estudado porque tem um papel fundamental na distribuição das deformações e na formabilidade dos materiais. Durante o trabalho a frio, as propriedades anisotrópicas mudam devido à evolução da microestrutura do material. A assumpção de que a modificação das propriedades anisotrópicas durante a deformação plástica é pequena e desprezável quando, comparada com a anisotropia introduzida pela laminagem, tem sido largamente adoptada na análise de embutidura de chapas [2].

3.2 Plasticidade unidimensional

Nesta secção apresenta-se a teoria da plasticidade clássica, independente da variável tempo, recorrendo a modelos unidimensionais. Apresenta-se a formulação detalhada das equações que governam um mecanismo unidimensional, constituído apenas por uma mola com comportamento linear e um elemento de atrito de Coulomb. Este modelo simplista apresenta as características básicas que estão subjacentes à teoria da plasticidade clássica, em particular a noção de resposta irreversível e a sua modelação matemática através das condições de Kuhn-Tucker. Este modelo será ainda generalizado para o caso de materiais que apresentam encruamento, considerando-se dois tipos, isotrópico e cinemático.

3.2.1 Modelo Elástico-perfeitamente Plástico

Considera-se um modelo constituído por uma mola, com uma constante elástica E e por um elemento de atrito de Coulomb, caracterizado pela constante $\sigma_Y > 0$, dispostos como se mostra na Figura 3.1. Assume-se que o modelo possui inicialmente um comprimento unitário e uma área unitária. A tensão (força) aplicada é σ e a deformação total (mudança no comprimento) é ε.

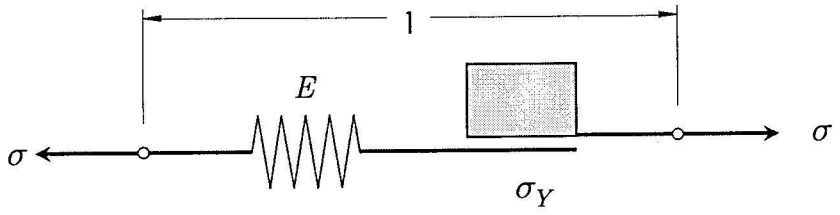


Figura 3.1: Modelo unidimensional.

Aplica-se uma determinada tensão σ ao conjunto, podendo a deformação total do modelo ε separa-se numa componente elástica ε^e na mola com constante E, e numa componente plástica ε^p no elemento de fricção, isto é [3]:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \tag{3.1}$$

Por considerações óbvias de equilíbrio, a tensão na mola é σ , o que dá origem à relação elástica:

$$\sigma = E\varepsilon^e \equiv E\left(\varepsilon - \varepsilon^p\right) \tag{3.2}$$

Para se caracterizar a resposta mecânica do elemento de fricção assume-se que ε , ε^p e σ são funções do tempo num intervalo $\left[0\,,\ell\right] \subset \mathbb{R}$

$$\varepsilon^p : [0,\ell] \to \mathbb{R} \tag{3.3}$$

admitindo derivada nesse domínio

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon^p \tag{3.4}$$

Uma qualquer mudança na configuração do elemento de atrito apenas é possível se $\dot{\varepsilon}^p \neq 0$. Para melhor caracterizar esta mudança, isola-se o elemento de atrito, o que permite obter rapidamente as conclusões que se explicitam seguidamente.

A tensão σ no elemento de fricção nunca poderá ser maior em valor absoluto do que σ_Y . Isto significa que as tensões que o elemento de atrito poderá apresentar terão de ficar confinadas ao intervalo $[-\sigma_Y, \sigma_Y] \subset \mathbb{R}$. Para representar o intervalo válido para as tensões introduz-se a seguinte notação:

$$\mathbb{E}_\sigma = \left\{\sigma \in \mathbb{R} | f(\sigma) := |\sigma| - \sigma_Y \leq 0\right\} \tag{3.5}$$

Nesta expressão σ_Y representa a tensão para a qual o elemento de atrito cede e inicia o escorregamento. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(\sigma) := |\sigma| - \sigma_Y \leq 0 \tag{3.6}$$

denomina-se por função de cedência [4]. De notar que $\mathbb{E}_\sigma$ é um intervalo fechado, sendo por isso um domínio convexo.

Se o valor absoluto da tensão σ aplicada for menor do que a tensão de escorregamento, não ocorrerá nenhuma mudança em ε^p, isto é, $\dot{\varepsilon}^p = 0$. Esta condição implica

$$\dot{\varepsilon}^p = 0 \;\; se \;\; f(\sigma) := |\sigma| - \sigma_Y < 0 \tag{3.7}$$

A partir da equação (3.2) e (3.7) obtém-se:

$$f(\sigma) < 0 \;\Rightarrow\; \dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon} \tag{3.8}$$

Pelo que a resposta instantânea do conjunto é elástica com uma constante E. O intervalo aberto definido por (3.9) denomina-se de domínio elástico [5].

$$\mathrm{int}(\mathbb{E}_\sigma) = \{\sigma \in \mathbb{R} | f(\sigma) := |\sigma| - \sigma_Y < 0\} \tag{3.9}$$

As equações (3.7) e (3.8) apenas são válidas para $\sigma \in \mathrm{int}(\mathbb{E}_\sigma)$.

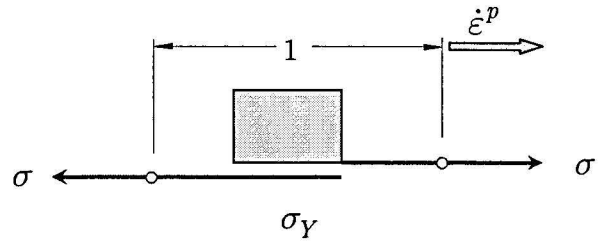


Figura 3.2: Elemento de Atrito.

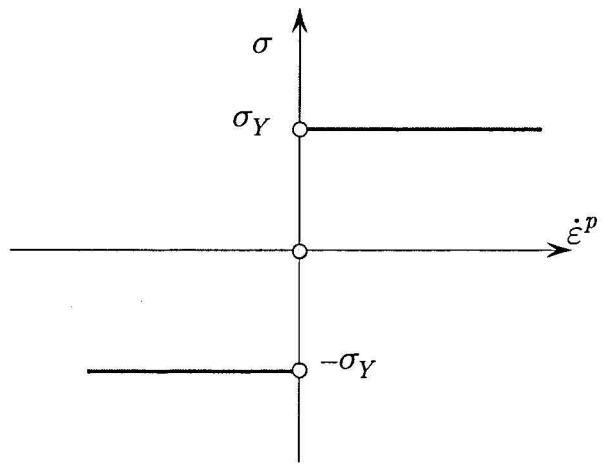


Figura 3.3: Resposta do elemento de atrito com constante $\sigma_Y > 0$.

Devido a (3.5), estados de tensão σ tais que $f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_Y > 0$ são inadmissíveis. Devido também a (3.7), $\dot{\varepsilon}^p$ será igual a zero sempre que $f(\sigma)$. Uma mudança em ε^p apenas pode ocorrer se $f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_Y = 0$. Se esta última condição for satisfeita, o elemento de atrito vai sofrer um deslizamento na direcção da tensão aplicada σ (Figura 3.3), com uma taxa de deslizamento constante.

Sendo $\gamma \geq 0$ o valor absoluto da taxa de deslizamento, as considerações físicas atrás assumidas tomam a seguinte forma

$$\left.\begin{aligned} \dot{\varepsilon}^p &= \gamma \geq 0 \;\; se \;\; \sigma = \sigma_Y > 0 \\ \dot{\varepsilon}^p &= -\gamma \leq 0 \;\; se \;\; \sigma = -\sigma_Y < 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

As equações (3.10) podem também ser rescritas da seguinte forma

$$\dot{\varepsilon}^p = \gamma \,\mathrm{sign}(\sigma) \quad sse \quad f(\sigma) := |\sigma| - \sigma_Y = 0 \tag{3.11}$$

designando-se a relação $\dot{\varepsilon}^p = \gamma \,\mathrm{sign}(\sigma)$ como regra de fluxo e onde $\mathrm{sign} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função sinal definida da seguinte forma

$$\mathrm{sign}(\sigma) = \begin{cases} +1 \; se \; \sigma > 0 \\ -1 \; se \; \sigma < 0 \end{cases} \tag{3.12}$$

A fronteira $\partial \mathbb{E}_\sigma$ do conjunto convexo $\mathbb{E}_\sigma$, definida por

$$\partial \mathbb{E}_\sigma = \left\{ \sigma \in \mathbb{R} \mid f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_Y = 0 \right\} \tag{3.13}$$

é denominada por superfície de cedência [5]. No modelo unidimensional em estudo, esta superfície reduz-se a dois pontos, $\partial \mathbb{E}_\sigma = \{-\sigma_Y, \sigma_Y\}$. Note-se que o conjunto de tensões admissíveis $\mathbb{E}_\sigma$ pode ser então definido por

$$\mathbb{E}_\sigma = \mathrm{int}(\mathbb{E}_\sigma) \cup \partial_\sigma \tag{3.14}$$

Para completar a descrição do modelo em estudo, resta determinar a taxa de deslizamento $\gamma \geq 0$. Para tal, será necessário introduzir as condições que pretendem representar a noção de irreversibilidade, inerente à resposta do modelo da Figura 3.1.

Pelo que foi dito atrás, a tensão σ tem de pertencer ao domínio das tensões admissíveis e γ tem de ser maior ou igual a zero, ou seja

$$\gamma \geq 0 \;\; \text{e} \;\; f(\sigma) \leq 0 \tag{3.15}$$

A taxa de deslizamento γ será igual a zero sempre que $f(\sigma) < 0$. Se a variação da deformação plástica $\dot{\varepsilon}^p$ for diferente de zero, então $\gamma > 0$ o que implica também $f(\sigma) = 0$. Estas observações implicam as seguintes condições

$$\left.\begin{aligned} f(\sigma) < 0 &\Rightarrow \gamma = 0 \\ \gamma > 0 &\Rightarrow f(\sigma) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

o que pode ser resumido na seguinte equação

$$\gamma f(\sigma) = 0 \tag{3.17}$$

As condições expressas por (3.15) e por (3.17) são clássicas no estudo da plasticidade e denominam-se por condições de Kuhn-Tucker [6]. Estas condições expressam o requisito de que a tensão tem de ser admissível e de que a deformação plástica apenas pode ocorrer na superfície de cedência $\partial\mathbb{E}_\sigma$.

Para uma dada tensão em que se verifique $f[\sigma(t)] = 0$, obtém-se as seguintes condições

$$\left.\begin{aligned} \gamma > 0 \;&\Rightarrow \dot{f} = 0 \\ \dot{f} < 0 \;&\Rightarrow \gamma > 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

que podem ser resumidas na seguinte condição

$$\gamma \dot{f}(\sigma) = 0 \tag{3.19}$$

A condição (3.19) é denominada por condição de consistência (ou persistência) e expressa o requisito relativo a $\dot{\varepsilon}^p$ ser diferente de zero (ou seja $\gamma > 0$) em que o estado de tensão $\sigma \in \partial\mathbb{E}_\sigma$ tem de se manter (persistir) em $\partial\mathbb{E}_\sigma$ de tal forma que $\dot{f}[\sigma(t)] = 0$. A condição de consistência permite determinar o valor de γ para um dado tempo $t \in \left[0, t\right]$, bem como a determinação do tipo de carregamento que actua no modelo. Para um estado de tensão $\sigma \in \partial\mathbb{E}_\sigma$, a partir da condição de consistência é possível concluir:

-Se $\dot{f}(\sigma) < 0$, então $\gamma = 0$, verifica-se um descarregamento a partir de um estado plástico.

-Se $\dot{f}(\sigma) = 0$, a condição de consistência é automaticamente satisfeita. Se $\gamma > 0$, está-se perante um caso de carregamento plástico.

-Se $\dot{f}(\sigma) = 0$ e $\gamma = 0$, carregamento nulo.

Para o modelo da Figura 3.1, a expressão para $\gamma > 0$, quando a condição de consistência é satisfeita, toma uma forma bastante simples (3.11). Utilizando a regra da cadeia, obtém-se para a derivada da função de cedência a seguinte expressão

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} E\left(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p\right) \tag{3.20}$$

substituindo (3.11), vem

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} E\dot{\varepsilon} - \gamma \frac{\partial f}{\partial \sigma} E \operatorname{sign}(\sigma) \tag{3.21}$$

Considerando que

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}|\sigma| = \operatorname{sign}(\sigma) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \operatorname{sign}(\sigma) \tag{3.22}$$

e notando que $[\operatorname{sign}(\sigma)]^2 = 1$, obtém-se a partir de (3.21) e (3.22),

$$\dot{f} = 0 \Rightarrow \gamma = \dot{\varepsilon} \operatorname{sign}(\sigma) \tag{3.23}$$

Fazendo a substituição de (3.23) em (3.11), obtém-se

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\varepsilon} \text{ para } f(\sigma) = 0 \text{ e } \dot{f}(\sigma) = 0 \tag{3.24}$$

Com o resultado expresso em (3.24) pode-se concluir que a taxa de escorregamento do elemento de atrito do modelo é igual à taxa de deformação aplicada ao modelo.

O comportamento deste modelo, mostrado na Figura 3.1 encontra-se ilustrado na Figura 3.4. O modelo apresentado tem um comportamento do tipo elástico, perfeitamente plástico. A teoria apresentada até este ponto denomina-se de plasticidade perfeita [5].

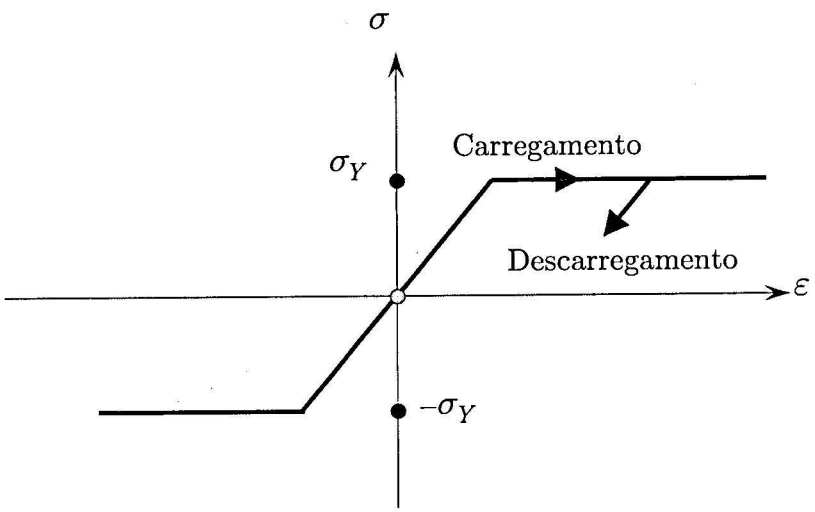


Figura 3.4: Representação esquemática da resposta do modelo unidimensional.

Toda a teoria aqui apresentada, está formulada em termos de tensões. A tensão foi considerada como uma variável dependente, função de $\{\varepsilon, \varepsilon^p\}$, pela relação elástica (3.2). Alternativamente pode-se apresentar toda a formulação apenas dependente de $\{\varepsilon, \varepsilon^p\}$, eliminando σ através da relação elástica (3.2).

A regra de fluxo dada por (3.11) relaciona-se com a função de cedência (3.6) através da seguinte relação potencial

$$\dot{\varepsilon}^p = \gamma \frac{\partial f}{\partial \sigma} \tag{3.25}$$

uma vez que $\partial f / \partial \sigma = \text{sign}(\sigma)$. No estado tridimensional de deformação/tensão, para o caso em que (3.25) se mantém, a regra de fluxo denomina-se de associativa [7].

3.2.2 Modelo Rígido-Plástico com encruamento isotrópico

O modelo anterior, apresentado na Figura 3.1, é um modelo simplista, mas que serve perfeitamente para introduzir a teoria matemática da plasticidade. Para este modelo se aproximar melhor da realidade, introduz-se um melhoramento que pretende ilustrar um efeito que se verifica experimentalmente em muitos metais, denominado de endurecimento por deformação (encruamento).

Para o modelo da secção anterior, o deslizamento ($\dot{\varepsilon}^p \neq 0$) ocorre mantendo-se constante a tensão aplicada σ , de tal forma que $|\sigma| = \sigma_Y$, produzindo uma resposta tensão/deformação do tipo da ilustrada na Figura 3.4. A diferença essencial entre um modelo com encruamento e outro sem encruamento encontra-se no facto de que, para o caso de plasticidade perfeita, a dimensão do domínio elástico $\mathbb{E}_\sigma$ não se altera, enquanto que para o modelo com endurecimento por deformação, $\mathbb{E}_\sigma$ expande-se em função da quantidade de deslizamento do sistema (isto é, a quantidade de escoamento plástico).

As considerações feitas atrás sobre a resposta elástica do modelo anterior continuam a ser válidas para o modelo com encruamento. Assim, a decomposição aditiva da deformação, dada pela equação (3.1) e a relação elástica dada pela equação (3.2) continuam a ser válidas.

Neste modelo, a expansão que $\mathbb{E}_\sigma$ sofre, admite-se isotrópica, o que quer dizer que para um qualquer tipo de carregamento, o centro de $\mathbb{E}_\sigma$ mantém-se na origem. Considera-se ainda que o encruamento é linear, em função do escoamento plástico, isto é linear em $|\dot{\varepsilon}^p|$ e independente de $\text{sign}(\dot{\varepsilon}^p)$.

A função de cedência para este modelo toma então a forma

$$f(\sigma, \alpha) = |\sigma| - [\sigma_Y + K\alpha] \leq 0 \ , \ \alpha \geq 0 \tag{3.26}$$

onde $\sigma_Y > 0$ e $K \geq 0$ são constantes características do problema. A constante K denomina-se módulo plástico [8]. A variável $\alpha : [0, \ell] \to \mathbb{R}$ é uma função positiva

da quantidade de escoamento plástico (escorregamento), e denomina-se variável interna de encruamento. Se $K < 0$, o modelo não sofreria um encruamento, mas um amaciamento.

A equação mais simples que se pode tomar para a evolução de α é a seguinte

$$\dot{\alpha} = \left|\dot{\varepsilon}^p\right| \tag{3.27}$$

O mecanismo irreversível que governa a evolução do escorregamento no sistema (escoamento plástico), que é definido pela regra de fluxo, continua idêntico ao modelo anterior, desta forma, assumindo-se que

$$\dot{\varepsilon}^p = \gamma \operatorname{sign}(\sigma) \tag{3.28}$$

onde $\gamma \geq 0$ é a taxa à qual o escorregamento se dá. A natureza irreversível do escoamento plástico é mais uma vez verificada pelas condições de Kuhn-Tucker

$$\gamma \geq 0\,,\ f(\sigma,\alpha) \leq 0\,,\ \gamma f(\sigma,\alpha) = 0 \tag{3.29}$$

onde $\gamma \geq 0$ é determinado pela condição de consistência

$$\gamma \dot{f}(\sigma,\alpha) = 0 \tag{3.30}$$

A partir da equação (3.27) e (3.28) conclui-se que $\dot{\alpha} = \gamma \geq 0$, expressão que pode ser utilizada para a definição da evolução de α.

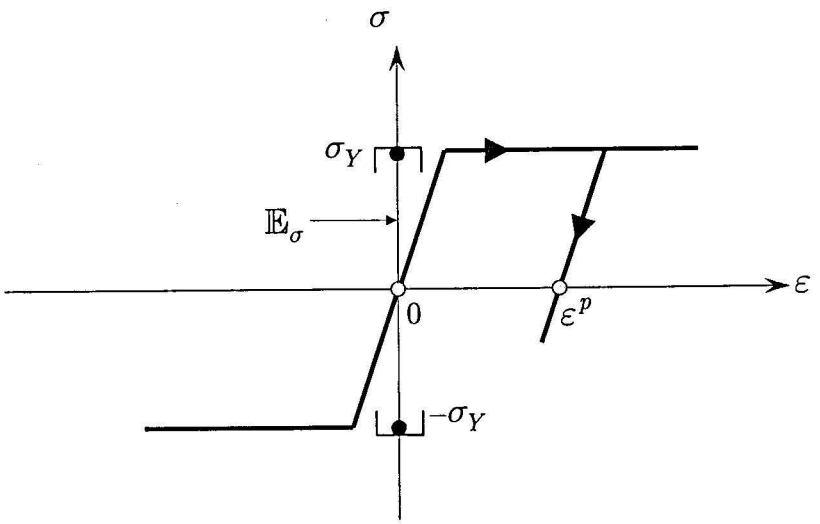


Figura 3.5: Comportamento de um modelo sem encruamento.

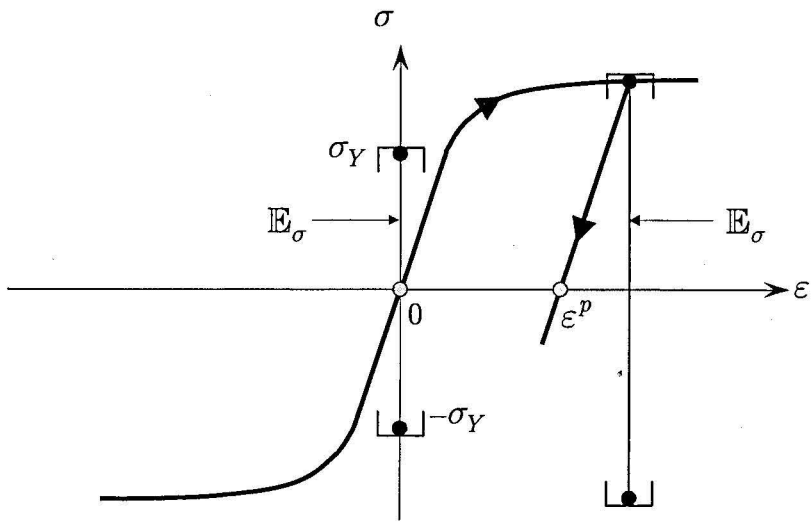


Figura 3.6: Comportamento do modelo com endurecimento por deformação.

A condição de consistência dada por (3.30) permite determinar explicitamente γ e relacionar as taxas de tensão com as taxas de deformação. A partir das expressões (3.26-3.28) e usando a relação tensão/deformação, tem-se

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \frac{\partial f}{\partial \sigma}\dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\dot{\alpha} \\ &= \operatorname{sign}(\sigma) E\left(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p\right) - K\dot{\alpha} \\ &= \operatorname{sign}(\sigma) E\dot{\varepsilon} - \gamma(E+K) \leq 0 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Considerando que a relação $\dot{f} > 0$ não é admissível, de (3.29) e (3.30) concluí-se que γ apenas poderá ser diferente de zero se

$$f = \dot{f} = 0 \Rightarrow \gamma = \frac{\operatorname{sign}(\sigma) E\dot{\varepsilon}}{E+K} \tag{3.32}$$

A relação entre a taxa de tensão e a taxa de deformação é então a seguinte

$$\dot{\sigma} = \begin{cases} E\dot{\varepsilon} & se\ \gamma = 0 \\ \dfrac{EK}{E+K}\dot{\varepsilon} & se\ \gamma > 0 \end{cases} \tag{3.33}$$

A quantidade $\frac{EK}{E+K}$ denomina-se módulo elastoplástico tangente [5]. As figuras seguintes ilustram a interpretação do módulo plástico e do módulo elastoplástico tangente.

O módulo elastoplástico tangente relaciona a variação de tensão σ com a variação da deformação total ε, para $\gamma > 0$, (Figura 3.7). O módulo plástico por sua vez relaciona a variação de tensão σ com a variação da deformação plástica ε^p.

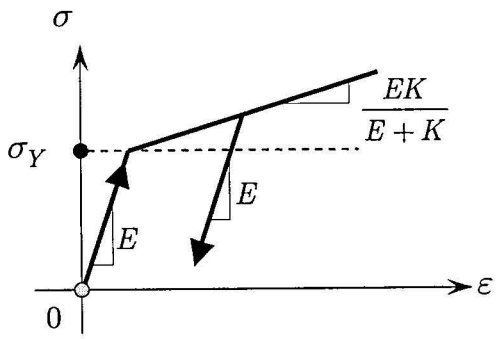


Figura 3.7: Módulo Elastoplástico Tangente.

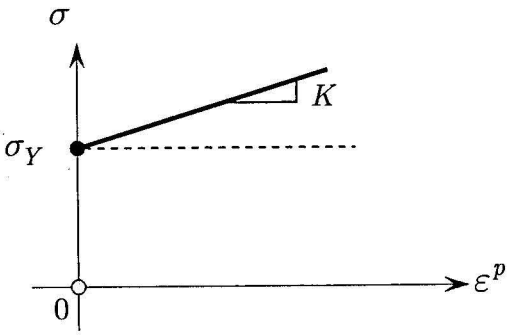


Figura 3.8: Módulo Plástico.

3.2.3 Modelo Unidimensional com encruamento cinemático

Em muitos metais sujeitos a carregamentos cíclicos, observa-se experimentalmente que o centro da superfície de cedência desloca-se na direcção do escoamento plástico. A figura seguinte dá uma noção deste comportamento de endurecimento, relacionado com um fenómeno conhecido como o Efeito de Bauschinger [5].

Um modelo simplista que captura o efeito acima mencionado é construído pela introdução de uma variável interna adicional, representada por q , que permite localizar o centro da superfície de cedência. A função de cedência toma então a seguinte forma

$$f(\sigma,q,\alpha) := |\sigma - q| - [\sigma_Y - K\alpha] \leq 0 \tag{3.34}$$

A evolução da constante q é definida pela regra de Ziegler da seguinte forma

$$\dot{q} = H\dot{\varepsilon}^p \equiv \gamma H \operatorname{sign}(\sigma - q) \tag{3.35}$$

onde H é o denominado módulo de endurecimento cinemático. Note-se que a evolução de α continua idêntica a (3.27).

O módulo tangente elástoplástico de um modelo com encruamento isotrópico e cinemático é obtido de forma semelhante ao que foi feito atrás, obtendo-se a seguinte expressão.

$$\dot{\sigma} = \begin{cases} E\dot{\varepsilon} & se\ \gamma = 0 \\ \dfrac{E[H+K]}{E+[H+K]}\dot{\varepsilon} & se\ \gamma > 0 \end{cases} \tag{3.36}$$

Na figura seguinte pode-se observar o comportamento de um modelo com encruamento isotrópico e cinemático.

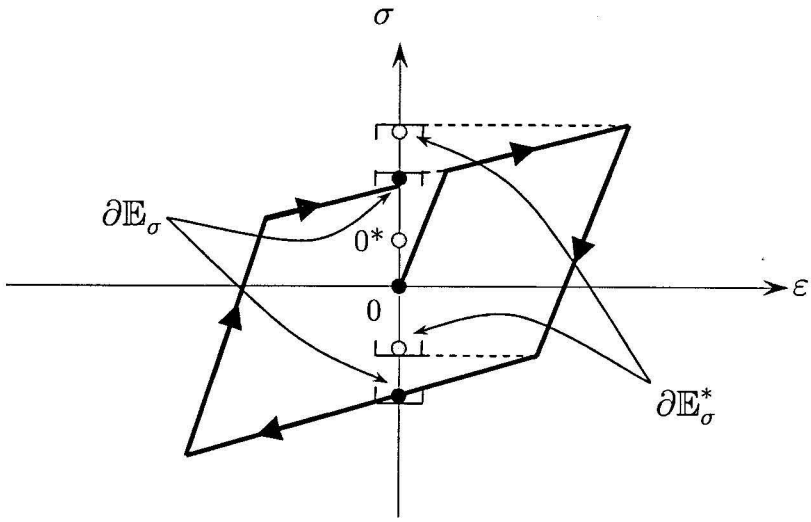


Figura 3.9: Representação idealizada do comportamento do encruamento cinemático.

Como se pode observar na Figura 3.9, o centro do domínio elástico $\partial\mathbb{E}_\sigma$ desloca-se, obtendo-se um novo domínio elástico $\partial\mathbb{E}_\sigma^*$, que vai depois sofrer novas modificações.

3.2.4 Propriedades geométricas do domínio elástico

Todos os exemplos dos critérios de cedência apresentados nas secções anteriores incorporam duas propriedades, de extrema importância na análise matemática da plasticidade e na análise numérica dos algoritmos descritos neste trabalho. Estas duas propriedades são a *convexidade* da superfície de cedência, implicando a convexidade do domínio elástico e a *homogeneidade de grau um* do critério de cedência.

3.2.4.1 Convexidade

Um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ diz-se convexo se um segmento fechado, que une dois pontos arbitrários pertencentes ao domínio Ω é contido completamente pelo domínio Ω . Esta definição é expressa matematicamente pela seguinte condição

$$\vartheta x_1 + (1-\vartheta)x_2 \in \Omega \quad \forall\, \vartheta \in [0,1] \text{ se } x_1, x_2 \in \Omega \tag{3.37}$$

Nas figuras seguintes pode-se ver a representação de dois domínios, um convexo e um outro não convexo.

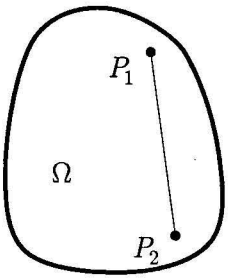


Figura 3.10: Exemplo de um domínio convexo.

Como se pode observar na Figura 3.10, qualquer segmento de recta entre dois pontos pertencentes ao domínio, fica totalmente contido dentro deste.

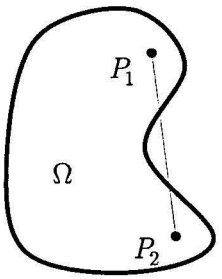


Figura 3.11: Exemplo de um domínio não convexo.

Como se pode observar na Figura 3.11, o segmento de recta que une os pontos P_1 e P_2 não fica totalmente contido dentro do domínio Ω, sendo por isso um domínio não convexo.

3.2.4.2 Homogeneidade de grau um

Uma função ϕ definida em $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ será *homogénea de grau m* se a seguinte condição for satisfeita

$$\phi(\vartheta \boldsymbol{x}) = \vartheta^m \phi(\boldsymbol{x}) \quad \forall \quad \vartheta > 0 \text{ e } \boldsymbol{x} \in \Omega \tag{3.38}$$

O interesse nesta propriedade deve-se ao seguinte resultado que será explorado mais tarde

$$\nabla\phi(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{x} := \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial\phi(x_i)}{\partial x_i}x_i \;= \phi(\boldsymbol{x}) \tag{3.39}$$

Este resultado pode ser verificado diferenciando ambos os lados da equação (3.38) em relação a ϑ e particularizando o resultado para $\vartheta = 1$. No modelo unidimensional atrás apresentado, com endurecimento cinemático, a função de cedência pode ser escrita da seguinte forma

$$f(\sigma, q, \alpha) = \phi(\sigma, q, \alpha) - \sigma_Y \tag{3.40}$$

onde

$$\phi(\sigma, q, \alpha) := |\sigma - q| - K\alpha \tag{3.41}$$

Analisando a equação (3.40) pode-se concluir que

$$\phi(\vartheta\sigma, \vartheta q, \vartheta\alpha) = \vartheta\phi(\sigma, q, \alpha) \;\; \forall \;\; \vartheta > 0 \tag{3.42}$$

Desta forma, a componente $\phi(\sigma, q, \alpha)$ da função de cedência é uma função (convexa) homogénea de grau um.

3.3 Plasticidade Clássica

O próximo passo na apresentação da teoria da plasticidade é o estabelecimento das equações da plasticidade clássica no contexto da teoria infinitesimal para três dimensões. O que se apresenta nesta secção é uma extensão do que foi atrás descrito para o caso unidimensional, agora aplicado ao caso tridimensional.

Ao longo do capítulo, se nada for dito em contrário, os campos $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ e $\boldsymbol{\sigma}$ são calculados num ponto $\boldsymbol{x} \in \mathcal{B}$ e no instante corrente $t \in [0, \ell]$, onde $[0, \ell]$ é o intervalo de tempo de interesse, normalmente tomado como todo o $\mathbb{R}_+$ por razões de conveniência. O historial das deformações num ponto $\boldsymbol{x} \in \mathcal{B}$ até ao instante $t \in \mathbb{R}_+$ é representado por $\boldsymbol{\varepsilon}_\tau(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}, \tau)$, onde $\tau \in [-\infty, t]$.

Ao longo deste capítulo o tensor das deformações vai ser adoptado como a variável principal, que faz avançar a solução. Apesar das funções de resposta, função de cedência e regra de escoamento, estarem formuladas no espaço das tensões, a teoria apresentada é essencialmente formulada no espaço das

deformações. Esta é a forma clássica adoptada na literatura de análise numérica, a partir do trabalho pioneiro de Wilkins [9]. Formulações alternativas, baseadas no espaço das tensões têm sido exploradas por diversos autores, como Johnson [10] e Simo, Kennedy e Taylor [11].

3.3.1 Equações da plasticidade

3.3.1.1 Formulação

Tal como verificado experimentalmente, o escoamento plástico é considerado um processo irreversível do material de um corpo, tipicamente um metal. O escoamento plástico é caracterizado em termos da história do tensor das deformações $\boldsymbol{\varepsilon}$ e duas variáveis adicionais, o tensor de deformação plástica e um conjunto de variáveis internas denominado de $\boldsymbol{\alpha}$ e muitas vezes referidos como os parâmetros de endurecimento. Desta forma, num problema baseado em deformações, o escoamento plástico em cada ponto $\boldsymbol{x}$ do corpo, até ao instante actual $t \in \mathbb{R}_+$, é descrito em termos do historial

$$\tau \in [-\infty, t] \mapsto \left\{\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x},\tau), \boldsymbol{\varepsilon}^p(\boldsymbol{x},\tau), \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x},\tau)\right\} \tag{3.43}$$

Neste contexto, o tensor das tensões é uma função dependente das variáveis $\left\{\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p\right\}$ através da relação elástica tensão/deformação, o que leva a uma formulação da teoria da plasticidade no espaço das deformações. Apesar de as variáveis principais do problema, aquelas que fazem avançar a solução serem as apresentadas em (3.43), na plasticidade clássica as funções de resposta, isto é, a função de cedência e a regra de escoamento estão formuladas no espaço das tensões, em termos das variáveis

$$\tau \in [-\infty, t] \mapsto \left\{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},\tau), \mathbf{q}(\boldsymbol{x},\tau)\right\} \tag{3.44}$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor das tensões (uma função de $\left\{\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p\right\}$) e $\mathbf{q}$ são variáveis internas função de $\left\{\boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\alpha}\right\}$. Este será o ponto de vista adoptado na apresentação que se faz de seguida, formulando-se as funções de resposta no espaço das tensões.

3.3.1.2 Equações

Assuma-se a seguinte decomposição aditiva do tensor das deformações, em que o tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ das deformações pode ser decomposto numa componente elástica $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ e numa componente plástica $\boldsymbol{\varepsilon}^p$.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \tag{3.45}$$

Uma vez que $\boldsymbol{\varepsilon}$ é considerada uma variável independente e a evolução de $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ é definida pela regra de escoamento, a equação (3.45) deverá ser vista como a definição do tensor elástico da deformação, $\boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p$.
O tensor das tensões $\boldsymbol{\sigma}$ é relacionado com a deformação elástica $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ através de uma função da energia interna de deformação W, de acordo com a relação

$$\boldsymbol{\sigma}(x,t) = \frac{\partial W\left[x, \boldsymbol{\varepsilon}^e(x,t)\right]}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \tag{3.46}$$

No caso de elasticidade linear, W é uma função quadrática de $\boldsymbol{\varepsilon}^e$, do tipo $W = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^e$, onde $\mathbf{C}$ é o tensor das constantes elásticas, assumido como sendo constante. As equações (3.45) e (3.46) implicam a seguinte relação

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \left[\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p\right] \tag{3.47}$$

Uma propriedade essencial que caracteriza o escoamento plástico é a noção de irreversibilidade. Para introduzir esta noção na teoria da plasticidade, procede-se de forma idêntica ao que foi feito na secção 3.1.

Define-se a função de cedência $f : \mathbb{S} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ e restringe-se os estados admissíveis $\{\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}\} \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}^m$ a pertencerem ao conjunto $\mathbb{E}_\sigma$.

$$\mathbb{E}_\sigma := \left\{(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}^m \middle| f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \leq 0\right\} \tag{3.48}$$

O interior de $\mathbb{E}_\sigma$, representado por $\mathrm{int}(\mathbb{E}_\sigma)$, dado por

$$\mathrm{int}(\mathbb{E}_\sigma) := \left\{(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}^m \middle| f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) < 0\right\} \tag{3.49}$$

é designado domínio elástico. A fronteira de $\mathbb{E}_\sigma$, representada por $\partial\mathbb{E}_\sigma$ e definida como

$$\partial\mathbb{E}_\sigma := \left\{(\boldsymbol{\sigma}, q) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}^m \middle| f(\boldsymbol{\sigma}, q) = 0\right\} \tag{3.50}$$

é designada superfície de cedência, tal como na plasticidade unidimensional, $\mathbb{E}_\sigma = \mathrm{int}(\mathbb{E}_\sigma) \cup \partial\mathbb{E}_\sigma$. De notar que estados $\{\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}\}$ fora do conjunto $\mathbb{E}_\sigma$ não são admissíveis e são rejeitados na teoria da plasticidade.

A noção de irreversibilidade do escoamento plástico é introduzida pelas seguintes equações de evolução para $\{\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{q}\}$, designadas por lei de escoamento e regra de endurecimento, respectivamente.

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p &= \gamma \boldsymbol{r}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \\ \dot{\mathbf{q}} &= -\gamma \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \end{aligned} \tag{3.51}$$

Nestas equações, $\boldsymbol{r} : \mathbb{S} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{S}$ e $\boldsymbol{h} : \mathbb{S} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ são funções pré definidas que determinam a direcção do escoamento plástico e o tipo de encruamento. O parâmetro $\gamma \geq 0$ é uma função não negativa, sendo denominado de multiplicador plástico. Assume-se que este parâmetro obedece às seguintes condições de Kuhn-Tucker

$$\gamma \geq 0\,, \;\; f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \leq 0$$

E (3.52)

$$\gamma f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0$$

Por outro lado, $\gamma \geq 0$ obedece ainda à condição de consistência

$$\gamma \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0 \tag{3.53}$$

Na literatura clássica, as condições (3.52) e (3.53) são referidas como as condições de carregamento (e descarregamento) e condição de consistência, respectivamente. Tal como apresentado na secção 3.1, e com os desenvolvimentos aqui introduzidos, estas condições pretendem reproduzir a noção intuitiva de carregamento plástico e descarregamento elástico.

A interpretação das condições de Kuhn-Tucker tem de ser feita para as diferentes situações possíveis, tal como se mostra na Figura 3.12.

Considerando o caso em que $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \in \mathrm{int}(\mathbb{E}_\sigma)$ de tal forma que de acordo com (3.49), $f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) < 0$. Utilizando as condições (3.52) pode-se concluir que

$$\gamma f = 0 \;\text{ e }\; f < 0 \;\Rightarrow\; \gamma = 0 \tag{3.54}$$

A partir de (3.52) obtém-se que $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \mathbf{0}$ e $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$. Desta forma, verifica-se a partir de (3.45), que $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e$, e a forma evolucionaria da equação (3.47) dá origem a

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \equiv \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \tag{3.55}$$

O tipo de resposta dado por (3.55) designa-se por resposta instantânea elástica.

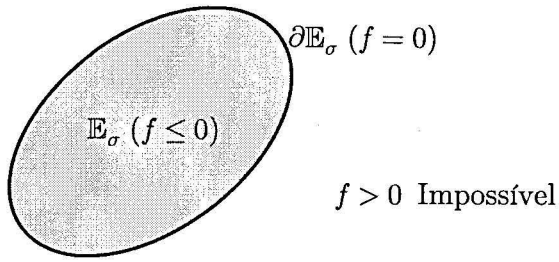


Figura 3.12: Ilustração do domínio elástico e estados admissíveis no espaço das tensões.

Considere-se agora o caso em que $(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{q})\in\partial\mathbb{E}_\sigma$, e que por (3.50) se obtém $f(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{q})=0$. Desta forma, a condição $\gamma f(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{q})=0$ encontra-se automaticamente satisfeita para qualquer valor de $\gamma\geq 0$.

Para determinar se γ é actualmente positivo ou zero, é necessário recorrer à condição (3.53). Analisando esta condição, pode-se obter duas situações distintas:

Se $\dot{f}(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{q})<0$, então a partir da condição (3.53) é possível concluir o seguinte

$$\gamma\dot{f}(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{q})=0 \text{ e } \dot{f}<0 \Rightarrow \gamma=0 \tag{3.56}$$

Sendo $\gamma=0$, a partir de (3.51) obtém-se que $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p=\mathbf{0}$ e $\dot{\mathbf{q}}=\mathbf{0}$. Tendo em atenção (3.55) e uma vez que o estado definido por $(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{q})$ se encontra em $\partial\mathbb{E}_\sigma$, este tipo de resposta denomina-se de descarregamento a partir de um estado plástico.

Se $\dot{f}(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{q})=0$, a condição (3.53) encontra-se automaticamente satisfeita. No caso de ser $\gamma>0$, então $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\neq\mathbf{0}$ e $\dot{\mathbf{q}}\neq\mathbf{0}$, esta situação denomina-se de carregamento plástico. O caso $\gamma=0$ (e $\dot{f}=0$) é uma situação de carregamento neutro.

Pode-se resumir as diferentes situações possíveis e correspondentes definições para um qualquer $(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{q})\in\mathbb{E}_\sigma$

$$\begin{cases} f<0 \Leftrightarrow (\boldsymbol{\sigma},\mathbf{q})\in \text{int}(\mathbb{E}_\sigma) \Rightarrow \gamma=0 & \text{(elástico)} \\ f=0\Leftrightarrow(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{q})\in\partial\mathbb{E}_\sigma \begin{cases} \dot{f}<0 \Rightarrow \gamma=0 & \text{(descarregamento elástico)} \\ \dot{f}=0 \ \ e \ \ \gamma=0 & \text{(carregamento neutro)} \\ \dot{f}=0 \ \ e \ \ \gamma>0 & \text{(carregamento plástico)} \end{cases} \end{cases} \tag{3.57}$$

De notar que a possibilidade de $\dot{f}>0$ foi excluída da análise efectuada. Intuitivamente é claro que se $\dot{f}(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{q})>0$, para um qualquer $(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{q})\in\partial\mathbb{E}_\sigma$, num dado instante $t\in\mathbb{R}_+$, então a condição $f\leq 0$ seria violada num instante subsequente.

A condição de consistência (3.53) permite relacionar γ com a taxa actual de deformação o que resulta numa formulação alternativa às condições de carregamento/descarregamento.

Para explorar a condição (3.53), começa-se por avaliar a derivada de f em $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \in \mathbb{E}_\sigma$. Utilizando a regra da cadeia, a forma evolucionaria da equação (3.47), a regra de escoamento e a lei de encruamento dada por (3.51) obtém-se

$$\dot{f} = \partial_\sigma f : \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \gamma \left[\partial_\sigma f : \mathbf{C} : \boldsymbol{r} + \partial_q f \cdot \boldsymbol{h} \right] \leq 0 \tag{3.58}$$

Assumindo que a regra de fluxo, a lei de encruamento e a função de cedência são tais que a seguinte condição é satisfeita

$$\left[\partial_\sigma f : \mathbf{C} : \boldsymbol{r} + \partial_q f \cdot \boldsymbol{h} \right] > 0 \tag{3.59}$$

para todos os estados admissíveis $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \in \partial\mathbb{E}_\sigma$, pode-se demonstrar que a condição (3.59) será sempre verdadeira para o caso de plasticidade perfeita e associativa [5]. Utilizando a condição (3.59), obtém-se a partir da condição de consistência (3.53) que

$$\dot{f} = 0 \Leftrightarrow \gamma = \frac{\langle \partial_\sigma f : \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle}{\partial_\sigma f : \mathbf{C} : \boldsymbol{r} + \partial_q f \cdot \boldsymbol{h}} \tag{3.60}$$

onde $\langle x \rangle := \frac{x + |x|}{2}$, é a função rampa. Tendo em atenção (3.59) e (3.60) pode-se concluir que para

$$\left.\begin{array}{l} f = 0 \\ \dot{f} = 0 \\ \gamma \geq 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \partial_\sigma f : \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \geq 0 \tag{3.61}$$

Esta relação permite uma interpretação geométrica das condições de carregamento plástico e carregamento neutro, dadas em (3.57). O carregamento plástico ou carregamento neutro ocorre num ponto $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \in \partial\mathbb{E}_\sigma$ se o ângulo do produto interno definido pelo tensor elástico, entre a normal $\partial_\sigma f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})$ a $\partial\mathbb{E}_\sigma$ em $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})$ e a taxa de deformação $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ for menor ou igual a 90° (ver Figura 3.13).

De acordo com (3.47) e (3.51), obtém-se

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \left[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \right] = \mathbf{C} : \left[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \gamma \boldsymbol{r} \right] \tag{3.62}$$

Fazendo a substituição de (3.60) em (3.62), obtém-se a taxa de tensão em termos da taxa de deformação total $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ da seguinte forma

$$\dot{\sigma} = \mathbf{C}^{ep} : \dot{\varepsilon} \tag{3.63}$$

onde $\mathbf{C}^{ep}$ é o denominado tensor elastoplástico, dado pela expressão

$$\mathbf{C}^{ep} = \begin{cases} \mathbf{C} & se\ \gamma = 0 \\ \mathbf{C} - \dfrac{\mathbf{C} : r \otimes \mathbf{C} : \partial_\sigma f}{\partial_\sigma f : \mathbf{C} : r + \partial_\sigma f \cdot h} & se\ \gamma > 0 \end{cases} \tag{3.64}$$

A expressão (3.64) mostra claramente que a formulação aqui apresentada é de facto independente da variável tempo. A relação entre a taxa de tensão e a taxa de deformação não inclui a variável tempo. A versão da teoria dependente da variável tempo, conhecida como viscoplasticidade não é, contudo, tratada neste trabalho.

De notar que $\mathbf{C}^{ep}$ geralmente não é simétrico, para um dado $r(\sigma, q)$, excepto no caso em que

$$r(\sigma, q) = \partial_\sigma f(\sigma, q) \tag{3.65}$$

Nos casos em que (3.65) se verifica, diz-se que se trata de uma lei de escoamento associativa.

Para o caso dos metais, a utilização de uma lei associativa origina resultados concordantes com observações experimentais. No entanto, pode-se mostrar que a lei associativa do escoamento plástico e a lei associativa do encruamento cinemático, são equivalentes ao princípio da dissipação plástica máxima, o que torna a utilização da lei associativa, aceitável do ponto de vista termodinâmico.

Na formulação acima apresentada e resumida no Quadro 3.1, as condições de carregamento e descarregamento são formuladas em função das condições de Kuhn-Tucker. Alternativamente as condições de carregamento/descarregamento podem ser formuladas em termos da taxa de tensão "trial", definida como

$$\dot{\sigma}^{\text{trial}} := \mathbf{C} : \dot{\varepsilon} \tag{3.66}$$

assumindo-se um processo plástico sempre que

$$f(\sigma, q) = 0 \ \text{ e } \ \partial_\sigma f(\sigma, q) : \dot{\sigma}^{\text{trial}} \geq 0 \tag{3.67}$$

Para $f(\sigma, q) = 0$ obtém-se

$$\dot{f} = 0 \Leftrightarrow \gamma = \frac{\partial_\sigma f : \sigma^{\text{trial}}}{\partial_\sigma f : \mathbf{C} : r + \partial_q f \cdot h} \tag{3.68}$$

Consequentemente, e mantendo-se válida a condição (3.59), para

$$\left.\begin{array}{l} f = 0 \\ \dot{f} = 0 \\ \gamma \geq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \partial_\sigma f : \boldsymbol{\sigma}^{\text{trial}} > 0 \tag{3.69}$$

Esta relação permite uma interpretação geométrica das condições de carregamento plástico. O carregamento plástico ocorre num ponto $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \in \partial \mathbb{E}_\sigma$ se o ângulo entre a normal $\partial_\sigma f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})$ a $\partial \mathbb{E}_\sigma$ em $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})$ e a taxa de tensão "trial" $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{trial}} := \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ for menor do que 90°.

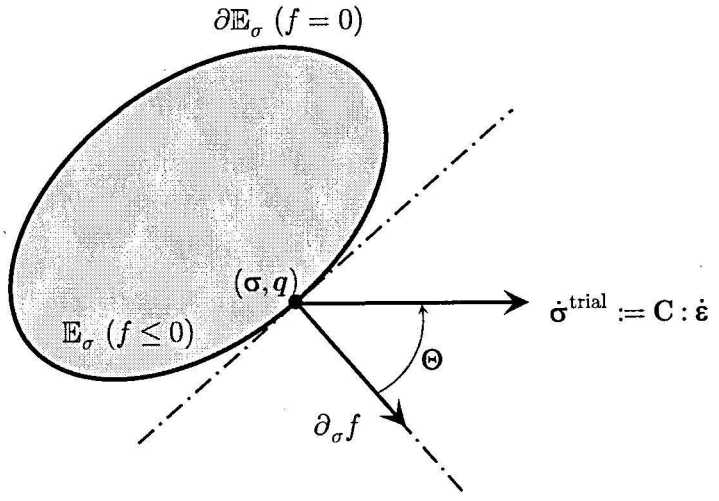


Figura 3.13: Carregamento plástico em $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \in \partial \mathbb{E}_\sigma$ ocorre se o ângulo Θ for inferior a 90°.

A interpretação geométrica de $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{trial}} := \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ encontra-se ilustrada na Figura 3.13. Pode-se observar que $\mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ é a taxa da tensão obtida quando se fixa a evolução do escoamento plástico e variáveis internas, isto é, fazendo $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = 0$ e $\dot{\mathbf{q}} = 0$, daí o nome de taxa de tensão (elástica) trial.

A noção de estado elástico "trial" surge naturalmente no contexto do tratamento algorítmico do problema elastoplástico (ver Quadro 3.1).

Quadro 3.1 Plasticidade clássica

Relação elástica tensão/deformação

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W\left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p\right)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{C} : \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p\right)$$

$$\mathbf{C} = \frac{\partial^2 W\left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p\right)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} = \text{ constante (módulo elástico)}$$

Domínio elástico no espaço das tensões

$$\mathbb{E}_\sigma := \left\{(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}^m \mid f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \leq 0\right\}$$

Lei de escoamento e lei de endurecimento

Caso geral, modelo não associativo

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \gamma \boldsymbol{r}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})$$

$$\dot{\mathbf{q}} = -\gamma \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})$$

Modelo Associativo

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \gamma \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

$$\dot{\mathbf{q}} = -\gamma \mathbf{D} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}}$$

$\mathbf{D}$ = matriz elástica

Condições de carregamento/descarregamento de Kuhn-Tucker

$$\gamma \geq 0 \ , \ f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \leq 0 \ , \ \gamma f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0$$

Condição de consistência

$$\gamma \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0$$

3.4 Critérios de Cedência

A superfície de cedência, definida por um determinado critério, é um conceito importante em plasticidade porque define os níveis de tensão críticos que quando atingidos levam ao aparecimento de deformação plástica, podendo servir também como potencial para as deformações plásticas. Um determinado critério de cedência é utilizado em conjunto com os dados de uma curva tensão-deformação relativa a um determinado material. O agrupamento da superfície

de cedência e lei de encruamento do material, num estudo numérico, que pode ser utilizada para testar a formabilidade de um determinado material. Muitos componentes de automóveis feitos com ligas comerciais são baseados neste sistema binário [12], ainda que recorrendo a outro tipo de técnicas, regra geral, numéricas, nomeadamente o Método dos Elementos Finitos.

Neste trabalho foram utilizados diferentes critérios de cedência. De uma forma geral, os diferentes critérios são do tipo

$$f := \sigma_e - \overline{\sigma} \leq 0 \tag{3.70}$$

onde $\sigma_e = \phi(\boldsymbol{\sigma})$ é uma função das tensões de Cauchy e $\overline{\sigma}$ é uma tensão de comparação. O fenómeno de endurecimento por deformação que se verifica na maioria dos metais é introduzido no critério através da tensão de comparação $\overline{\sigma}$, sendo esta dada, por exemplo, pela seguinte lei linear:

$$\overline{\sigma} := K\alpha + \sigma_Y \tag{3.71}$$

A constante K é o módulo plástico, e σ_Y é a tensão de cedência inicial do material. A variável α é uma função positiva da quantidade de escoamento plástico que o material sofreu, denominando-se variável interna de encruamento. Uma função que pretende reflectir a quantidade de escoamento plástico acumulado é a deformação plástica equivalente, pelo que normalmente para α toma-se

$$\alpha = \varepsilon^{ps} \tag{3.72}$$

Neste trabalho foi também utilizada uma alternativa à equação (3.71) que consistia em obter $\overline{\sigma}$ por interpolação. Eram fornecidos vários pontos da curva tensão/deformação plástica equivalente, do material utilizado, sendo depois $\overline{\sigma}$ obtida para um determinado valor de deformação plástica equivalente fornecido. Este método, ainda que aproximado, permite utilizar qualquer material, bastando a introdução de um número de pontos suficiente.

3.4.1 Critério de von Mises

Em 1913 von Mises formulou um dos mais conhecidos critério de cedência [13, 14], o critério de cedência de von Mises. Para o caso geral tridimensional, o critério de von Mises sugere que a cedência ocorre quando o segundo invariante das tensões de desvio J_2 atinge um valor crítico, tal que:

$$f := \sigma_e - \bar{\sigma} = \sqrt{3}\, J_2^{1/2} - \bar{\sigma} = 0 \tag{3.73}$$

Com base em ensaios experimentais [13, 15] concluiu-se que para os metais a deformação plástica não depende da pressão hidrostática. Dessa forma, uma função de cedência formulada em termos de tensões passa apenas a depender do segundo e terceiro invariantes das tensões de desvio **S** . O tensor das tensões de desvio **S** é definido da seguinte forma:

$$\mathbf{S} = \mathrm{dev}(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \tag{3.74}$$

As componentes do tensor das tensões de desvio podem ser representadas por:

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} \tag{3.75}$$

O segundo e terceiro invariantes de uma matriz genérica **b** são definidos da seguinte forma.

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{2}b_{ij}b_{ji} = \frac{1}{2}\left(b_{11}^2 + b_{22}^2 + s_{33}^2\right) + b_{12}^2 + b_{13}^2 + b_{23}^2 \\ J_3 &= \frac{1}{3}b_{ij}b_{jk}b_{ki} \end{aligned} \tag{3.76}$$

Em termos das tensões de Cauchy o critério de von Mises toma a seguinte forma

$$\begin{aligned} f := \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[&\left(\sigma_{11} - \sigma_{22}\right)^2 + \left(\sigma_{22} - \sigma_{33}\right)^2 + \left(\sigma_{33} - \sigma_{11}\right)^2 + \\ &6\left(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2\right)\Big]^{1/2} - \bar{\sigma} = 0 \end{aligned} \tag{3.77}$$

ou em função das tensões de desvio

$$f := \sqrt{3}\left[\frac{1}{2}\left(S_{11}^2 + S_{22}^2 + S_{33}^2\right) + S_{12}^2 + S_{23}^2 + S_{31}^2\right]^{1/2} - \bar{\sigma} = 0 \tag{3.78}$$

Simplificando, obtemos a seguinte expressão final.

$$f := \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\mathbf{S} : \mathbf{S}\right)^{1/2} - \bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\mathrm{S_{ij}}\ \mathrm{S_{ji}}\right)^{1/2} - \bar{\sigma} \tag{3.79}$$

O critério de von Mises para problemas tridimensionais pode ser representado no espaço das tensões principais, tal como se pode observar na

Figura 3.14, cuja representação geométrica corresponde a um cilindro, com o seu eixo contendo estados de tensão em que $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$.

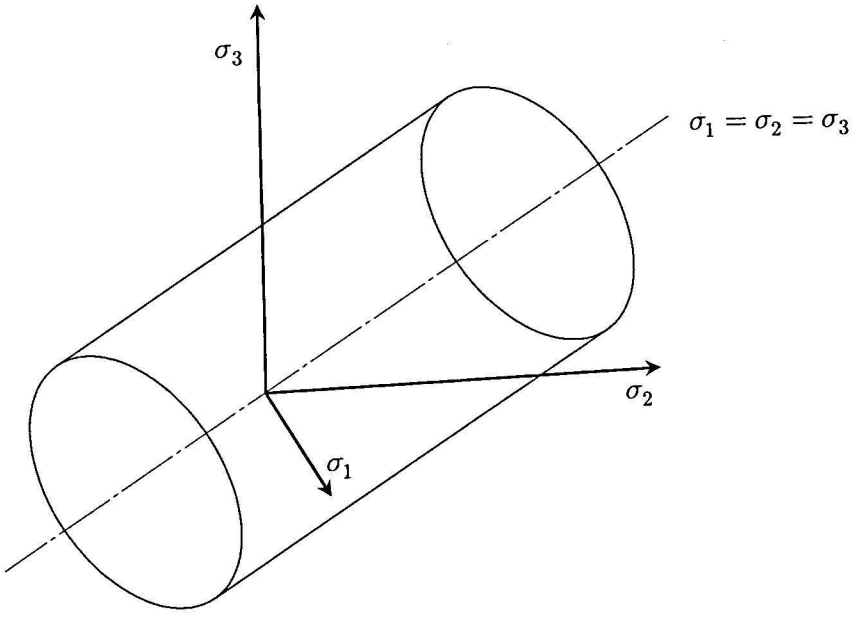


Figura 3.14: Critério de cedência de von Mises no espaço das tensões principais.

Para o caso tridimensional, a taxa de deformação plástica equivalente é dada por

$$\dot{\varepsilon}^{ps} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left[\left(\dot{\varepsilon}_{11}^{p}\right)^2 + \left(\dot{\varepsilon}_{22}^{p}\right)^2 + \left(\dot{\varepsilon}_{33}^{p}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\left(\dot{\varepsilon}_{12}^{p}\right)^2 + \left(\dot{\varepsilon}_{23}^{p}\right)^2 + \left(\dot{\varepsilon}_{31}^{p}\right)^2\right)\right]^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}\right)^{1/2} \quad (3.80)$$

Diferenciando a equação (3.79) obtém-se

$$\mathbf{a} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2\sigma_e}\begin{bmatrix} 2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33} \\ 2\sigma_{22} - \sigma_{11} - \sigma_{33} \\ 2\sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{22} \\ 6\sigma_{12} \\ 6\sigma_{23} \\ 6\sigma_{31} \end{bmatrix} = \frac{3}{2\sigma_e}\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ 2\sigma_{12} \\ 2\sigma_{23} \\ 2\sigma_{31} \end{bmatrix} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} \quad (3.81)$$

Para uma lei de escoamento associativa tem-se que $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p} = \gamma \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$, de tal forma que para a equação (3.80) se obtém

$$\dot{\varepsilon}^{ps} = \sqrt{\frac{2}{3}}\gamma\,[\mathbf{a} : \mathbf{a}]^{1/2} = \gamma \quad (3.82)$$

Existem duas interpretações físicas possíveis para o critério de von Mises [16]. Uma dada por Nadai (1937), que introduziu o conceito de tensão de corte

octaédrica, $\tau_{oct} = \sqrt{2/3\, J_2}$, que é a tensão de corte nos planos do octaedro regular, cujos vértices coincidem com os eixos principais de inércia [17]. Outra interpretação é dada por Hencky (1924), que mostra que a cedência ocorre quando a energia elástica de distorção atinge um valor crítico [2].

3.4.2 Critério de Hill 48

A função de cedência apresentada por Hill em 1948 é certamente uma das mais populares para a descrição do comportamento de materiais ortotrópicos tais como chapas laminadas. Esta função de cedência foi um marco importante no estabelecimento da teoria da plasticidade anisotrópica.

Em 1948 Hill [18] introduziu uma função relativamente simples, como sendo uma extensão do critério de von Mises, que consegue reproduzir o comportamento de materiais ortotrópicos. Quando os eixos do sistema de coordenadas coincide com os eixos de ortotropia, o critério de cedência é dado por

$$\begin{aligned} f = F(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + \\ 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{31}^2 + 2N\sigma_{12}^2 - 1 = 0 \end{aligned} \tag{3.83}$$

onde os seis parâmetros F,G,H,L,M e N são constantes do material que podem ser determinadas experimentalmente. Se $\overline{\sigma}_{11}$, $\overline{\sigma}_{22}$ e $\overline{\sigma}_{33}$ representarem as tensões de cedência respectivamente nas direcções 1, 2 e 3, pode-se obter os valores de F, G e H a partir das expressões

$$2F = \frac{1}{\overline{\sigma}_{22}^2} + \frac{1}{\overline{\sigma}_{33}^2} - \frac{1}{\overline{\sigma}_{11}^2} \tag{3.84}$$

$$2G = \frac{1}{\overline{\sigma}_{33}^2} + \frac{1}{\overline{\sigma}_{11}^2} - \frac{1}{\overline{\sigma}_{22}^2} \tag{3.85}$$

$$2H = \frac{1}{\overline{\sigma}_{11}^2} + \frac{1}{\overline{\sigma}_{22}^2} - \frac{1}{\overline{\sigma}_{33}^2} \tag{3.86}$$

De uma forma semelhante, L, M e N podem ser relacionados com $\overline{\sigma}_{12}$, $\overline{\sigma}_{23}$ e $\overline{\sigma}_{31}$

$$2L = \frac{1}{\overline{\sigma}_{23}^2} \tag{3.87}$$

$$2M = \frac{1}{\overline{\sigma}_{33}^2} \tag{3.88}$$

$$2N = \frac{1}{\overline{\sigma}_{12}^2} \tag{3.89}$$

Introduzindo uma tensão de cedência de referência, a função de Hill pode ser representada pela seguinte expressão

$$\begin{aligned} f = \alpha_{12}\left(\sigma_{22}-\sigma_{33}\right)^2 + \alpha_{23}\left(\sigma_{33}-\sigma_{11}\right)^2 + \alpha_{31}\left(\sigma_{11}-\sigma_{22}\right)^2 + \\ 6\alpha_{44}\sigma_{12}^2 + 6\alpha_{55}\sigma_{23}^2 + 6\alpha_{66}\sigma_{31}^2 - 2\overline{\sigma}^2 = 0 \end{aligned} \tag{3.90}$$

onde os parâmetros F,G,H,L,M e N do material foram substituídos pelas constantes adimensionais $\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{31}, \alpha_{44}, \alpha_{55}$ e α_{66}. De notar que a função de cedência de von Mises é recuperada quando todos os coeficientes α_{ij} forem iguais a 1.

Uma simplificação de notação ocorre pela introdução da seguinte matriz.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} (\alpha_{12}+\alpha_{31}) & -\alpha_{12} & -\alpha_{31} & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_{12} & (\alpha_{12}+\alpha_{31}) & -\alpha_{23} & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_{31} & -\alpha_{23} & (\alpha_{12}+\alpha_{31}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6\alpha_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6\alpha_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6\alpha_{66} \end{bmatrix} \tag{3.91}$$

A expressão para a função de cedência pode agora ser escrita como

$$f = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{P} : \boldsymbol{\sigma} - \overline{\sigma}^2 = 0 \tag{3.92}$$

Com $\boldsymbol{\sigma}$ sendo um vector contendo as componentes do tensor das tensões do seguinte modo

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{44}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}] \tag{3.93}$$

Uma equação equivalente, mais útil para a utilização em algoritmos que integram equações elástoplásticas definidas em termos de taxas é a seguinte [19]

$$f = \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{P} : \boldsymbol{\sigma}\right)^{1/2} - \overline{\sigma} = 0 \tag{3.94}$$

Esta expressão equivalente (3.94) prova-se ser mais eficiente. Uma vez mais, de notar que a expressão (3.94) também pode ser utilizada para representar o critério isotrópico de von Mises, uma vez que basta substituir na matriz $\mathbf{P}$ todos os coeficientes α_{ij} pela unidade.

A regra de escoamento para a superfície definida de acordo com (3.94) pode ser expressa por

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \gamma \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{3.95}$$

obtem-se desta forma a seguinte expressão para o vector fluxo

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{\gamma}{\sqrt{2\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{P} : \boldsymbol{\sigma}}} \begin{bmatrix} \alpha_{12}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) + \alpha_{31}(\sigma_{11} - \sigma_{33}) \\ \alpha_{23}(\sigma_{22} - \sigma_{33}) + \alpha_{12}(\sigma_{22} - \sigma_{11}) \\ \alpha_{31}(\sigma_{33} - \sigma_{11}) + \alpha_{23}(\sigma_{33} - \sigma_{22}) \\ 6\alpha_{44}\sigma_{12} \\ 6\alpha_{55}\sigma_{23} \\ 6\alpha_{66}\sigma_{31} \end{bmatrix} \tag{3.96}$$

Considerando que a superfície de cedência não translada no espaço das tensões, o que é equivalente a dizer que o encruamento é isotrópico, uma expressão para a taxa de deformação plástica equivalente, idêntica à obtida para materiais isotrópicos com superfície de cedência de von Mises pode ser deduzida

$$\dot{\alpha} = \gamma \tag{3.97}$$

Esta hipótese pode ser justificada empregando o conceito de taxa de trabalho plástico equivalente [20].

$$\dot{W}^p = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \sigma_Y \dot{\alpha} \tag{3.98}$$

3.4.2.1 Critério de Hill – Anisotropia Planar

Para a análise de estruturas laminares tipo chapa, as expressões anteriores são particularizadas para estados de tensão plana, pelo que são feitas as seguintes substituições: $\sigma_{33} = 0$, $\sigma_{23} = 0$ e $\sigma_{31} = 0$. Esta hipótese é utilizada normalmente em problemas que envolvam a deformação plástica de chapas finas. A equação (3.90) para um estado tridimensional reduz-se à seguinte expressão:

$$f = \frac{\alpha_{31} + \alpha_{12}}{2}\sigma_{11}^2 + \frac{\alpha_{23} + \alpha_{12}}{2}\sigma_{22}^2 - \alpha_{12}\sigma_{11}\sigma_{22} + 3\alpha_{44}\sigma_{12}^2 - \bar{\sigma}^2 = 0 \tag{3.99}$$

Nesta equação é usual fazer coincidir a direcção 1-1 com a direcção de laminagem. A direcção 2-2 é tomada transversalmente à direcção de laminagem e a direcção 3-3 na direcção da espessura da chapa (ver Figura 3.15).

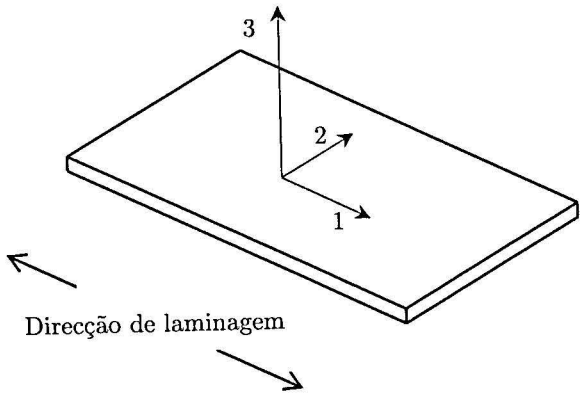


Figura 3.15: Sistema de coordenadas numa chapa laminada.

A determinação dos parâmetros α_{ij} que intervêm no critério de cedência é feita através de ensaios experimentais. Realizando uma ensaio de tracção uniaxial na direcção 1-1 obtém-se

$$f = \frac{\alpha_{12} + \alpha_{31}}{2}\sigma_{11}^2 - \sigma_Y^2 = 0 \tag{3.100}$$

Considerando que $\sigma_{11} = \sigma_Y$, da equação (3.100) obtém-se

$$\alpha_{12} + \alpha_{31} = 2 \tag{3.101}$$

Para se obter as expressões isoladas, por exemplo para α_{12} ou α_{31}, define-se um novo parâmetro, R, como sendo a razão entre a taxa de deformação plástica contida no plano da chapa e a taxa de deformação plástica contida na direcção transversal, obtida a partir de um ensaio de tracção uniaxial.

Considerando um ensaio de tracção uniaxial na direcção 1-1 e o vector das taxas de deformação plásticas definido pela equação (3.96) e particularizando para o estado de tensão plana, o valor do parâmetro R_0 define-se de acordo com

$$R_0 = \frac{\dot{\varepsilon}_{22}^p}{\dot{\varepsilon}_{33}^p} = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{31}} \tag{3.102}$$

onde o índice associado ao parâmetro representa o ângulo entra a direcção do ensaio uniaxial e a direcção de laminagem. De forma semelhante realizando um ensaio de tracção uniaxial na direcção 2-2 obtém-se

$$R_{90} = \frac{\dot{\varepsilon}_{11}^p}{\dot{\varepsilon}_{33}^p} = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{23}} \tag{3.103}$$

Combinando as equações (3.101), (3.102) e (3.103) vem

$$\alpha_{31} = \frac{2}{1+R_0} \tag{3.104}$$

$$\alpha_{12} = \frac{2R_0}{1+R_0} \tag{3.105}$$

$$\alpha_{23} = \frac{2R_0}{R_{90}(1+R_0)} \tag{3.106}$$

Para a determinação do parâmetro α_{44}, é necessário realizar um ensaio de tracção uniaxial a 45° em relação à direcção de laminagem (direcção 1-1). As tensões respeitantes às direcções 2-2 e 1-2 podem-se obter a partir do círculo de Mohr [21].

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = \frac{1}{2}\sigma \ \text{(a 45°)} \tag{3.107}$$

De acordo com a equação (3.96) e utilizando novamente o círculo de Mohr, desta vez para determinar a deformação plástica a 135°, obtém-se

$$R_{45} = \frac{\dot{\varepsilon}^p(\theta = 135°)}{\dot{\varepsilon}^p_{33}} = -\frac{1}{2} + \frac{3\alpha_{44}}{\alpha_{31}+\alpha_{23}} \tag{3.108}$$

logo

$$3\alpha_{44} = (1+2R_{45})\frac{R_0+R_{90}}{R_{90}(1+R_0)} \tag{3.109}$$

Substituindo os diferentes α_{ij} na equação (3.99) obtém-se

$$f = \sigma_{11}^2 + \frac{R_0(1+R_{90})}{R_{90}(1+R_0)}\sigma_{22}^2 - \frac{2R_0}{1+R_0}\sigma_{11}\sigma_{22} + \frac{(1+2R_{45})(R_0+R_{90})}{R_{90}(1+R_0)}\sigma_{12}^2 - \bar{\sigma}^2 = 0 \tag{3.110}$$

A equação (3.110) é a expressão final do critério de cedência definida pelo critério de Hill 48 para estados de tensão plana. Nesta equação os parâmetros R_0, R_{45} e R_{90} têm de ser determinados experimentalmente e são denominados de coeficientes de anisotropia de Lankford [22, 23].

3.4.2.2 Critério de Hill – Anisotropia Normal

Uma aproximação utilizada usualmente em problemas de embutidura de chapa, onde a anisotropia plástica da peça se modela de acordo com o critério de Hill 48, é considerar que a chapa tem um comportamento isotrópico no seu plano e um comportamento anisotrópico na direcção normal ao plano. Este comportamento denomina-se anisotropia normal ou isotropia planar [18, 24]. De

acordo com a hipótese assumida, a função de cedência terá de ser invariante para uma qualquer rotação em torno do eixo normal ao plano da chapa, o que implicaria considerar na equação (3.110) que

$$R_0 = R_{45} = R_{90} \tag{3.111}$$

Assim, os parâmetros R_0, R_{45} e R_{90} serão substituídos por um novo parâmetro R determinado da seguinte forma [25]:

$$R = \frac{R_0 + 2R_{45} + R_{90}}{4} \tag{3.112}$$

A expressão (3.110) para a função de cedência simplifica-se, obtende-se

$$f = \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \frac{2R}{1+R}\sigma_{11}\sigma_{22} + \frac{2(1+2R)}{(1+R)}\sigma_{12}^2 - \bar{\sigma}^2 = 0 \tag{3.113}$$

Se se considerar $R = 1$, a expressão anterior reduz-se ao critério de von Mises para o estado plano de tensão. A forma da superfície de cedência em função do coeficiente de Lankford é apresentada na Figura 3.16.

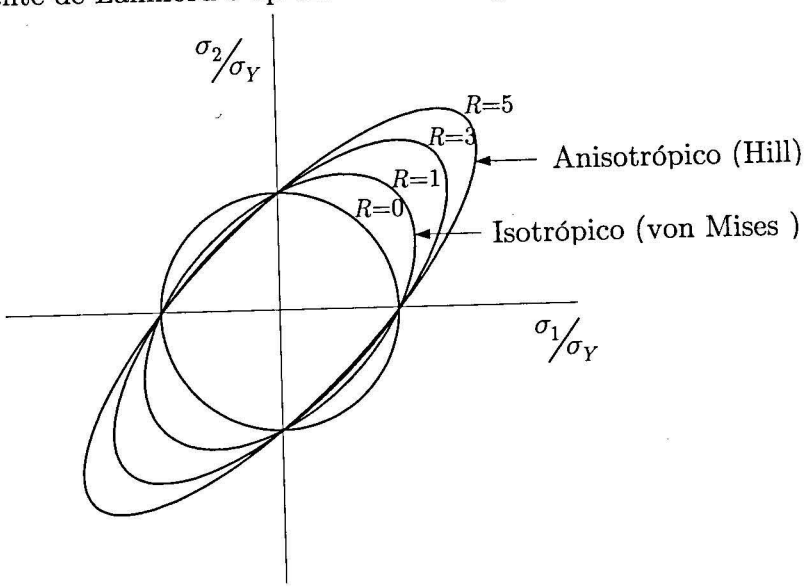


Figura 3.16: Superfícies de cedência em função do coeficiente de Lankford R.

3.4.3 Critério de Barlat

De forma a simular correctamente processos de embutidura de chapas, a utilização de descrições correctas do comportamento (lei constitutiva) do material é essencial. Uma vez que a maioria dos metais laminados, tipo chapas, apresentam comportamentos anisotrópicos, a utilização de um critério de cedência anisotrópico é importante para prever correctamente o comportamento

do material. A anisotropia tem também um importante efeito na distribuição das deformações em chapas de metal embutido e está directamente relacionado com a redução de espessura e formabilidade de chapas de metal. Desta forma a anisotropia do material deverá ser correctamente considerada para que seja possível uma análise realista de processos que envolvam deformações de chapas.

A função de cedência quadrática de Hill (1948) tem sido desde a sua introdução uma escolha popular para representar a anisotropia planar. O critério tem sido largamente utilizado em simulações por elementos finitos de processos de embutidura, pois além de ser uma teoria bem aceite, pode ser aplicado a um qualquer estado de tensão. Este critério tem sido útil para explicar fenómenos associados à plasticidade anisotrópica, particularmente para os aços. Quando aplicado a ligas de alumínio, o critério de Hill (1948) deixa de produzir bons resultados.

Vários critérios não-quadráticos têm sido desenvolvidos: Hill (1979, 1990) [24, 26], Hershey (1954) [27], Hosford (1972) [28], Bassani (1977) [29], Gotoh (1977) [30], Logan e Hosford (1980) [31], Budianski (1984) [32], Barlat e Lian (1989) [33] e Barlat *et al.* (1991, 1993) [34, 35]. Estes critérios têm sido utilizados para melhorar a descrição do comportamento de ligas de alumínio.

No critério anisotrópico de Barlat *et al*, para um estado tridimensional de tensão, a função de cedência Ψ é definida como [34]

$$\Psi = |S_1 - S_2|^m + |S_2 - S_3|^m + |S_3 - S_1|^m = 2\bar{\sigma}^m \tag{3.114}$$

onde $S_i = 1,2,3$ são os valores próprios de uma matriz simétrica S_{ij} definida em relação às componentes da tensão de Cauchy da seguinte forma.

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{C_3(\sigma_{11} - \sigma_{22}) - C_2(\sigma_{33} - \sigma_{11})}{3} \\ S_{22} &= \frac{C_1(\sigma_{22} - \sigma_{33}) - C_3(\sigma_{11} - \sigma_{22})}{3} \\ S_{33} &= \frac{C_2(\sigma_{33} - \sigma_{11}) - C_1(\sigma_{22} - \sigma_{33})}{3} \end{aligned} \tag{3.115}$$

$$S_{12} = C_6\sigma_{12}\,,\; S_{23} = C_4\sigma_{23}\,,\; S_{31} = C_5\sigma_{13}$$

Os coeficientes $C_{i=1\sim6}$ representam propriedades anisotrópicas. A matriz S_{ij} reduz-se à matriz das tensões de desvio quando $C_{i=1\sim6} = 1$, isto é, quando o material é isotrópico. O expoente m está essencialmente associado à estrutura

cristalina do material. Um valor mais elevado de m tem o efeito de reduzir o raio de curvatura dos vértices arredondados da superfície de cedência de tal forma que este critério permite representar os pequenos raios de curvatura da superfície de cedência para gamas de tensão próximas das uniaxiais ou biaxiais. A superfície de cedência torna-se convexa para $m \geq 1$. Valores recomendados para este critério são $m = 8$ para materiais de estrutura cúbica de face centrada e $m = 6$ para materiais de estrutura cúbica de corpo centrado.

Para a condição de estado plano de tensão, a matriz **S** fica:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{11} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{C_3(\sigma_{11}-\sigma_{22})+C_2\sigma_{11}}{3} & C_6\sigma_{12} & 0 \\ C_6\sigma_{12} & \frac{C_1\sigma_{22}-C_3(\sigma_{11}-\sigma_{22})}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-C_2\sigma_{11}-C_1\sigma_{22}}{3} \end{bmatrix} \tag{3.116}$$

Para a matriz **S** assim definida, os valores próprios desta matriz são determinados da seguinte forma.

$$S_1 = \frac{S_{11}+S_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{S_{11}+S_{22}}{2}\right)^2 + S_{12}^2}$$

$$S_2 = \frac{S_{11}+S_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{S_{11}+S_{22}}{2}\right)^2 + S_{12}^2} \tag{3.117}$$

$$S_3 = -S_1 - S_2$$

Pode-se agora representar para o estado plano de tensão as diferentes superfícies de cedência que são possíveis de obter variando o expoente m e utilizando $C_{i=1\sim6} = 1$ (material isotrópico). Obtém-se o critério de cedência de Tresca quando se usa $m = 1$ ou um valor bastante elevado, no limite seria $m = \infty$, (Figura 3.17). Pode-se obter o critério de cedência de von Mises quando se utiliza para o exponte $m = 2$ ou $m = 4$ (Figura 3.18). Quando se utiliza um valor típico para o expoente, tal como $m = 8$, pode-se observar na Figura 3.19 que o efeito desse expoente é o de arredondar os cantos da superfície de cedência

de Tresca. Aumentando o valor do expoente, o raio de curvatura reduz-se, de tal forma que no limite ($m = \infty$) obtém-se o critério de Tresca.

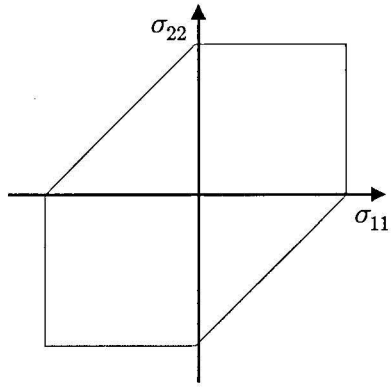


Figura 3.17: Superfície de cedência utilizando $m = 1$ ou $m = \infty$.

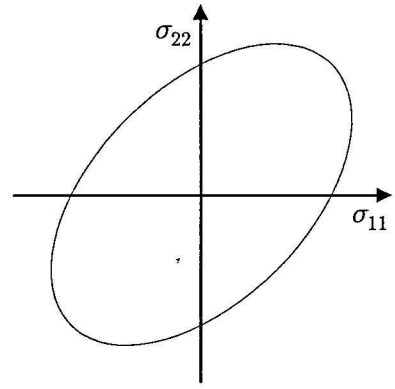


Figura 3.18: Superfície de cedência utilizando $m = 2$ ou $m = 4$.

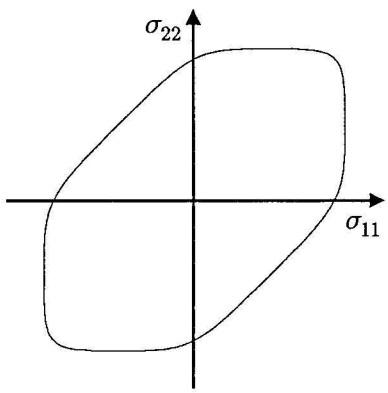


Figura 3.19: Superfície de cedência utilizando $m = 8$.

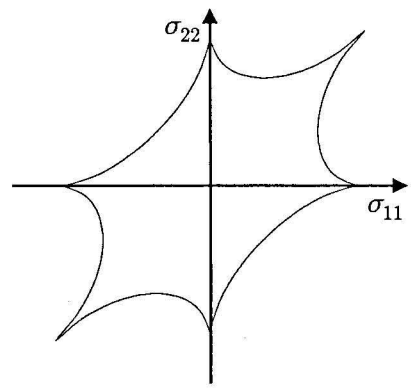


Figura 3.20: Superfície de cedência utilizando $m = 0.5$.

Para valores inferiores à unidade, a superfície de cedência deixa de ser convexa, o que não é possível à luz da teoria da plasticidade, tal como se pode observar na Figura 3.20, quando se utiliza um expoente $m = 0.5$.

Tal como foi feito para o critério de Hill, pode-se deduzir uma expressão para a taxa de deformação plástica equivalente recorrendo para isso ao conceito de taxa de trabalho plástico equivalente [20]. Desta forma obtém-se uma expressão idêntica a (3.97).

3.5 Referências

1. Numiform. *Proceedings of the Fifth International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes.* in *NUMIFORM'95.* 1995. New York, USA.
2. Hill, R., *The Mathematical Theory of Plasticity.* 1950: Oxford University Press.
3. Doghri, I., *Mechanics of Deformable Solids.* 2000: Spinger.
4. Hinton, E., *NAFEMS Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis.* 1992, Glasgow: NAFEMS.
5. Simo, J.C. and T.J.R. Hughes, *Computational Inelasticity.* Interdisciplinary Applied Mathematics. Vol. 7. 1998: Springer.
6. Simo, J.C. and R.L. Taylor, *A Return Mapping Algorithm for Plane Stress Elastoplasticity.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1986. **22**: p. 649-670.
7. Crisfield, M.A., *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures.* Vol. 1. 1991: John Wiley & Sons.
8. Natal Jorge, R.M., *Modelação de Problemas Incompressíveis pelo Método das Deformações Acrescentadas baseado em Modos Compatíveis.* 1998, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
9. Wilkins, M.L., *Calculation of Elasto-Plastic Flow.* Methods of computational Physics 3, ed. B. Alder. 1964, New York: Academic Press.
10. Johnson, C., *A Mixed Finite Element for Plasticity.* SIAM Journal of Numerical Analysis, 1977. **14**: p. 575-583.
11. Simo, J.C., J.G. Kennedy, and R.L. Taylor, *Complementary Mixed Finite Element Formulations of Elastoplasticity.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1988. **74**: p. 177-206.
12. Barlat, F., et al., *Yielding description for Solution Strengthened Aluminum Alloys.* International Journal of Plasticity, 1997. **13**(4): p. 385-401.
13. Kachanov, L.M., *Fundamentals of the Theory of Plasticity.* 1974, Moscow: MIR Publishers.
14. Chakrabarty, J., *Theory of Plasticity.* 1987, Singapore: McGraw-Hill.

15. Bridgeman, P.W., *Studies in Large Plastic Flow and Fracture.* 1952, New York: McGraw-Hill.
16. Schönauer, M., *Unified numerical analysis of cold and hot metal forming processes.* 1993, University College of Swansea: Wales, U.K.
17. Owen, D.R.J. and E. Hinton, *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice.* 1980, Swansea, U.K.: Pineridge Press.
18. Hill, R., *A Theory of the Yielding and Plastic Flow of Anisotropic Metals.* Proceedings of the Royal Society of London Series a-Mathematical and Physical Sciences, 1948. **193**(1033): p. 281-297.
19. De Borst, R. and P.H. Feenstra, *Studies in Anisotropic Plasticity with Reference to the Hill Criterion.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1990. **29**(2): p. 315-336.
20. Crisfield, M.A., *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures.* Vol. 1. 1994: John Wiley & Sons.
21. Correia de Araújo, F., *Elasticidade e Plasticidade.* 1962: Imprensa Portuguesa.
22. Kobayashi, S., R.M. Caddell, and W.F. Hosford, *Examination of Hill Latest Yield Criterion Using Experimental-Data for Various Anisotropic Sheet Metals.* International Journal of Mechanical Sciences, 1985. **27**(7-8): p. 509-517.
23. Lian, J., D.J. Zhou, and B. Baudelet, *Application of Hill New Yield Theory to Sheet-Metal Forming-Part I: Hill 1979 Criterion and Its Application to Predicting Sheet Forming Limit.* International Journal of Mechanical Sciences, 1989. **31**(4): p. 237-247.
24. Hill, R., *Theoretical Plasticity of Textured Aggregates.* Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1979. **85**(JAN): p. 179-191.
25. Dodd, B. and R.M. Caddell, *On the Anomalous Behavior of Anisotropic Sheet Metals.* International Journal of Mechanical Sciences, 1984. **26**(2): p. 113-118.
26. Hill, R., *Constitutive modeling of anisotropic plasticity in sheet metals.* Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1990. **38**: p. 405.
27. Hershey, A.V., *The plasticity of an isotropic aggregate of anisotropic face centered cubic crystals.* Journal of Applied Mechanics, 1954. **30**: p. 241.

28. Hosford, W.F., *A generalized isotropic yield criterion.* Journal of Applied Mechanics, 1972. **39**: p. 607.

29. Bassani, J.L., *Yield characterization of metals with transversely isotropic plastic properties.* International Journal of Mechanical Sciences, 1977. **19**: p. 151.

30. Gotoh, M., *A theory of plastic anisotropy based on a yield function of fourth order (plane stress state).* International Journal of Mechanical Sciences, 1977. **19**: p. 505.

31. Logan, R.W. and W.F. Hosford, *Upper-bound anisotropic yield locus calculations assuming <111>-pencil glide.* International Journal of Mechanical Sciences, 1980. **22**: p. 419.

32. Budianski, B., *Anisotropic plasticity of plane-isotropic sheets.* Mechanics of Material Behavior, ed. G.J. Dvork, Shield, R.T. 1984, Amsterdam: Elsevier.

33. Barlat, F. and J. Lian, *Plastic behavior and stretchability of sheet metals Part I: yield function for orthotropic sheets under plane stress conditions.* International Journal of Plasticity, 1989. **5**: p. 51.

34. Barlat, F., D.J. Lege, and J.C. Brem, *A six-component yield function for anisotropic metals.* International Journal of Plasticity, 1991. **7**: p. 693.

35. Barlat, F., K. Chung, and O. Richmond, *Strain rate potential for metals and its application to minimum plastic work path calculations.* International Journal of Plasticity, 1993. **9**: p. 1.

Capítulo 4

Implementação Numérica

4.1 Introdução

O principal objectivo do presente capítulo é concentrar-se nos aspectos relacionados com uma solução numérica do problema. Este capítulo está essencialmente focado para o método dos elementos finitos, apesar de muitos dos conceitos tratados também se aplicarem a outros procedimentos de discretização, tais como as diferenças finitas.

4.2 Aproximação pelo Método dos Elementos Finitos

Os conceitos da análise elasto-plástica infinitesimal são agora reformulados de modo a permitir a sua implementação pelo método dos elementos finitos. Assim, tensores de 2.ª ordem, como o das tensões ou o das deformações (bem como as suas taxas ou incrementos), são expressos na forma vectorial. Para o estado de tensão $\boldsymbol{\sigma}$ tem-se

$$\boldsymbol{\sigma} = \left\{\sigma_{11} \;\; \sigma_{22} \;\; \sigma_{33} \;\; \tau_{12} \;\; \tau_{13} \;\; \tau_{23}\right\}^{\mathrm{T}} \tag{4.1}$$

O tensor das deformações fica

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left\{\varepsilon_{11} \;\; \varepsilon_{22} \;\; \varepsilon_{33} \;\; \gamma_{12} \;\; \gamma_{13} \;\; \gamma_{23}\right\}^{\mathrm{T}} \tag{4.2}$$

O tensor fluxo fica também expresso na forma vectorial.

$$\mathbf{a} = \left\{a_1 \;\; a_2 \;\; a_3 \;\; a_4 \;\; a_5 \;\; a_6\right\}^{\mathrm{T}} \tag{4.3}$$

As componentes do tensor de elasticidade $\mathbf{C}_4$ podem ser agrupadas sob a forma matricial, bem como as componentes do tensor elasto-plástico $\mathbf{C}_4^{ep}$.

Os procedimentos numéricos em análises não lineares por elementos finitos utilizam uma lei material tangente caracterizada pelo tensor elasto-plástico, definida nas secções seguintes. Nestas análises assume-se (ou faz-se uma aproximação) que a matriz $\mathbf{C}_2^{ep}$ que relaciona taxas de tensão com taxas de deformação, é também válida para as relações entre *incrementos finitos* de tensão e deformação. Em regime elasto-plástico obtém-se então

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_2^{ep}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \rightarrow \quad \Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_2^{ep}\Delta\boldsymbol{\varepsilon} \tag{4.4}$$

Os conceitos do MEF já abordados no Capítulo 2 são aqui válidos pelo que a matriz de rigidez elementar é dada por:

$$\mathbf{k}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^{\mathrm{T}} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{B}_e \quad d\Omega_e \tag{4.5}$$

onde $\mathbf{B}_e$ é a matriz das deformações e

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{cases} \mathbf{C}_2 & \text{, regime elástico} \\ \mathbf{C}_2^{ep} & \text{, regime elasto-plástico} \end{cases} \tag{4.6}$$

Por outro lado, a obtenção do campo de deslocamentos já não pode ser conseguida de forma directa. O uso da equação

$$\mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{f}_{ext} \tag{4.7}$$

só leva a resultados fiáveis aquando de um problema linear. No caso da não linearidade, uma estratégia incremental-iterativa deve ser utilizada. Neste tipo de métodos, para cada incremento de carga $\Delta\mathbf{f}_{ext}$, um processo iterativo é aplicado até que seja satisfeito um, ou mais critérios de convergência escolhidos para esse efeito, por exemplo a minimização de um resíduo de forças $\mathbf{r}$, obtendo-se o incremento de deslocamento correspondente $\Delta\mathbf{d}$. De seguida, aplica-se um novo incremento de carga. A equação anterior é então modificada:

$$\Delta\mathbf{d} = \mathbf{K}^{-1}\left(\Delta\mathbf{f}_{ext} - \mathbf{r}\right) \tag{4.8}$$

Nas secções seguintes são aprofundados os diferentes tópicos relacionados com o processo incremental-iterativo aqui introduzido.

4.3 Algoritmos para a resolução das equações de equilíbrio

A análise de problemas estruturais, que se caracterizam pela ocorrência de fenómenos não lineares, geométricos ou do material, e em que se aplica o método dos elementos finitos, cuja formulação conduz a sistemas de equações de equilíbrio não lineares, não admite uma solução por recorrência a métodos de solução directa. No entanto, adoptando métodos incrementais das equações de equilíbrio, onde as cargas exteriores são aplicadas de uma forma faseada, isto é, por incrementos sucessivos, até que atinjam o seu valor total, pode-se ultrapassar a situação.

Existem dois tipos de métodos de solução incremental que podem ser utilizados. O método incremental, ou puramente incremental e, um outro, do tipo incremental e iterativo [1, 2].

De um modo geral, pretende-se resolver equações do tipo

$$\mathbf{f} - \mathbf{p} = \mathbf{0} \tag{4.9}$$

o que implica um balanço entre as forças aplicadas $\mathbf{f}$ e as forças internas $\mathbf{p}$ que equilibram as forças aplicadas.

4.3.1 Algumas definições

Antes de se avançar em mais detalhes sobre os algoritmos de resolução das equações de equilíbrio, por facilidade de leitura é conveniente a introdução de algumas definições.

4.3.1.1 O estado da estrutura

Numa qualquer fase da solução de (4.9), o estado da estrutura é totalmente caracterizado pelos deslocamentos $\mathbf{d}$, deformações $\boldsymbol{\varepsilon}$, tensões $\boldsymbol{\sigma}$ e forças internas resistentes $\mathbf{p}$. O processo de determinar o estado da estrutura para os deslocamentos correntes denomina-se *determinação do estado* [3]. O cálculo inicia-se para um determinado estado de referência e prossegue do seguinte modo:

— O incremento dos deslocamentos a partir do estado de referência para o estado corrente tem de ser fornecido.

— Os incrementos de deformação são calculados utilizando as relações incrementais de deformação/deslocamento.

— As tensões $\boldsymbol{\sigma}$ presentes na estrutura são determinadas no estado corrente tomando em consideração o estado de referência, o incremento de deformação e as relações constitutivas.

— As forças resistentes internas são calculadas a partir da expressão

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\sigma} d\Omega \tag{4.10}$$

4.3.1.2 Forças residuais e convergência

O estado corrente é o *estado de equilíbrio* se as forças internas resistentes $\mathbf{p}$ forem iguais à carga aplicada $\mathbf{f}$. Em soluções numéricas, um estado de equilíbrio exacto nunca é atingido e consequentemente, um *estado convergido* é procurado, no qual o erro de equilíbrio seja aceitavelmente pequeno. Uma medida do erro de equilíbrio é dado pelo vector das forças *residuais* ou *fora de equilíbrio* $\mathbf{r}$

$$\mathbf{r} = \mathbf{f} - \mathbf{p} \tag{4.11}$$

O critério para se aceitar a *convergência* é normalmente expresso em termos das normas de $\mathbf{r}$ e $\mathbf{f}$, de tal modo que

$$\|\mathbf{r}\| < \varphi \|\mathbf{f}\| \tag{4.12}$$

em que φ é a tolerância pretendida.

4.3.2 Métodos Incrementais

A notação utilizada neste capítulo 4 associa os índices inferiores ao número do incremento (n) em questão e os superiores ao número da iteração (i). Adicionalmente, o prefixo Δ refere-se a variações relativas ao incremento anterior enquanto o prefixo $\Delta\Delta$ diz respeito variações relativas à iteração anterior.

4.3.2.1 Métodos puramente incrementais

Devido à natureza não linear de (4.9), uma solução baseada num procedimento incremental é usualmente adoptada para se determinar a resposta de toda a estrutura. Nos métodos puramente incrementais a carga total a aplicar à estrutura é aplicada numa sequência de *incrementos de carga* ($\Delta \mathbf{f}$) que são suficientemente pequenos para se poder assumir que a estrutura reponde linearmente em cada incremento. Para um incremento n, a equação (4.9) pode ser rescrita como

$$\Delta \mathbf{f}_n - \Delta \mathbf{p}_n(\mathbf{d}_n) = \mathbf{0} \tag{4.13}$$

A assumpção de um comportamento linear dentro de cada incremento permite escrever

$$\Delta \mathbf{p}_n(\mathbf{d}_n) = \left[\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{d}}\right]_{\mathbf{d}_{n-1}} \Delta \mathbf{d}_n \tag{4.14}$$

ou

$$\Delta \mathbf{p}_n(\mathbf{d}_n) = (\mathbf{K}_T)_{n-1} \Delta \mathbf{d}_n \tag{4.15}$$

onde $\mathbf{K}_T$ é a matriz de rigidez tangente.

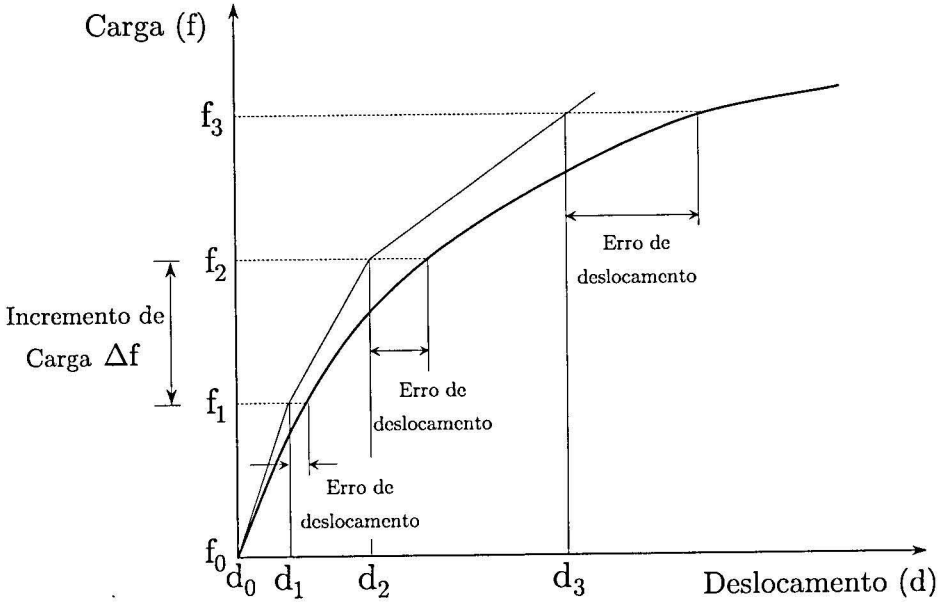


Figura 4.1 Afastamento da solução correcta num processo puramente incremental.

Substituindo (4.15) em (4.13) obtém-se o seguinte sistema de equações lineares a ser resolvido em cada incremento

$$\left(\mathbf{K}_T\right)_n \Delta\mathbf{d}_n = \Delta\mathbf{f}_n \tag{4.16}$$

e uma solução actualizada é obtida com base na solução do incremento anterior

$$\mathbf{d}_n = \mathbf{d}_{n-1} + \Delta\mathbf{d}_n \tag{4.17}$$

Este tipo de procedimento é simultaneamente ineficiente e inseguro. É ineficiente pois requer a determinação e factorização da matriz de rigidez tangente para cada incremento de carga [3]. É inseguro pois não é efectuada nenhuma verificação do equilíbrio global da estrutura, o que pode permitir um afastamento progressivo do percurso correcto de equilíbrio, tal como se mostra na Figura 4.1.

Este método pode ser facilmente melhorado fazendo uma avaliação das forças não equilibradas no fim do incremento, adicionando-as depois às forças externas a serem aplicadas no próximo incremento. Esta *correcção do equilíbrio* melhora a eficiência do método e adicionalmente, a verificação do equilíbrio fornece uma indicação do grau de exactidão da solução. A qualidade da solução obtida utilizando métodos puramente incrementais, ou métodos incrementais corrigidos depende do tamanho dos incrementos de carga utilizados. Para se obter uma boa aproximação à resposta verdadeira, os incrementos têm de ser pequenos uma vez que os erros acumulam-se de um incremento para o seguinte [3].

4.3.2.2 Métodos Incrementais e Iterativos

Um método puramente incremental pode ganhar, quer em eficiência, quer em qualidade da solução obtida quando combinado com um processo iterativo para dissipar as forças residuais. Se uma solução aproximada $\mathbf{d}_n^i$ para a solução exacta $\mathbf{d}_n$ de (4.9) for alcançada, uma solução melhorada pode ser obtida utilizando uma expansão em série de Taylor truncada

$$\mathbf{r}\left(\mathbf{d}_n^{i+1}\right) = \mathbf{r}\left(\mathbf{d}_n^i\right) + \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{d}}\right]_{\mathbf{d}_n^i} \Delta\Delta\mathbf{d}_n^i \tag{4.18}$$

onde os termos de ordem superior são desprezados.

Se a nova aproximação de $\mathbf{d}_n^{i+1}$ for utilizada em vez de $\mathbf{d}$ em (4.9), então (4.18) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\mathbf{r}\left(\mathbf{d}_n^i\right) - \left(\mathbf{K}_T\right)_n^i \Delta\Delta\mathbf{d}_n^i = 0 \tag{4.19}$$

A equação (4.19) pode ser resolvida para se determinar os deslocamentos iterativos $\Delta\Delta\mathbf{d}_n^i$ e a solução melhorada pode ser obtida como

$$\mathbf{d}_n^{i+1} = \mathbf{d}_n^i + \Delta\Delta\mathbf{d}_n^i \tag{4.20}$$

O procedimento iterativo continua e para cada iteração um novo sistema de equações linearizadas na forma dada por (4.19) tem se ser resolvido. Os passos realizados num incremento de carga típico são mostrados na Quadro 4.1, sendo o processo ilustrado na Figura 4.2

O método iterativo descrito acima é o método de Newton-Raphson para a resolução de sistemas de equações não lineares.

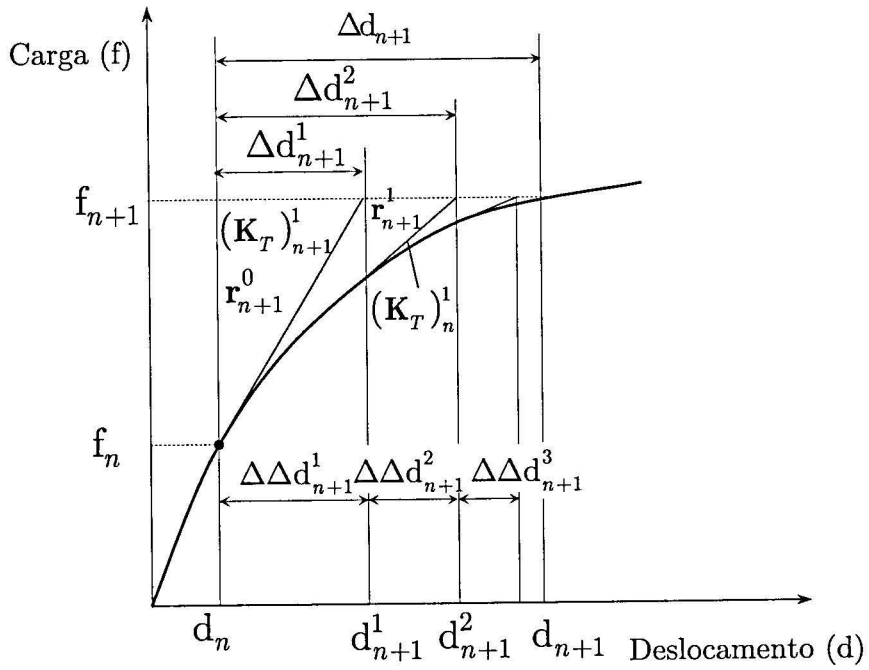


Figura 4.2 Método de Newton-Raphson.

O método clássico de Newton-Rapshon, apesar de ser eficaz em muitos casos, não é necessariamente a solução mais económica e nem sempre produz uma convergência rápida e correcta. Alguns dos problemas que este método apresenta são resumidamente descritos em seguida.

Em problemas de dimensão crescente, o passo mais dispendioso do algoritmo é a factorização da matriz tangente $\left(\mathbf{K}_T\right)_n^i$, por este motivo surgiram métodos tais como o *Método quasi-Newton* [4], ou o *Método de Newton-Secante* [5], onde a inversa de $\left(\mathbf{K}_T\right)_n^i$ é apenas actualizada, ao invés de ser recalculada.

No método de Newton-Rapshon, o nível de carga para cada incremento é mantido constante durante o processo iterativo. Se a curva de equilíbrio atinge um valor máximo e depois diminui, pode ser possível que a carga aplicada seja maior do que aquela que a estrutura consegue suportar, sendo neste caso impossível de obter convergência.

O estado da estrutura é actualizado em cada iteração sendo utilizados estados de referência que não correspondem a estados de equilíbrio. Devido à dependência do percurso que os materiais apresentam quando plastificam, a utilização de estados de referência não convergidos pode originar a obtenção de soluções que não correspondem às correctas.

Quadro 4.1 Procedimento iterativo para um incremento típico

1. Tendo estabelecido aproximadamente o equilíbrio entre as forças exteriores aplicadas $\mathbf{f}_n$ e as forças internas resistentes $\mathbf{p}_n$ para o último nível de carga n, obter os deslocamentos $\mathbf{d}_{n+1}$ para o nível de carga corrente $n+1$. Inicializar o contador de iterações $i=1$.
$$\Delta\Delta\mathbf{d}^i_{n+1} = \left(\mathbf{K}^{-1}_T\right)^i_{n+1} \Delta\mathbf{f}_{n+1}$$
$$\mathbf{d}^i_{n+1} = \mathbf{d}_n + \Delta\Delta\mathbf{d}^i_{n+1}$$
2. Utilizar os deslocamentos obtidos $\mathbf{d}^i_{n+1}$ para determinar as forças internas resistentes $\mathbf{p}^i_{n+1}$.
3. Determinar as forças residuais ou não equilibradas $\mathbf{r}^i_{n+1}$
$$\mathbf{r}^i_{n+1} = \mathbf{f}^i_{n+1} - \mathbf{p}^i_{n+1}$$
4. Verificar a convergência. Por exemplo, verificar que alguma medida de $\mathbf{r}^i_{n+1}$, por exemplo $\left\|\mathbf{r}^i_{n+1}\right\|$ é menor do que $\varphi\left\|\mathbf{f}^i_{n+1}\right\|$ onde φ é o valor de tolerância introduzido. Se a solução tiver convergido, terminar o processo iterativo (ou de correcção), fazer $n = n+1$ e avançar para um novo incremento de carga. Caso contrário, continuar para o ponto 5.
5. Aumentar o contador das iterações, $i = i+1$. Reavaliar e factorizar a matriz de rigidez tangente $\left(\mathbf{K}_T\right)^i_{n+1}$.
6. Determinar o deslocamento iterativo (ou de correcção).
$$\Delta\Delta\mathbf{d}^i_{n+1} = \left(\mathbf{K}^{-1}_T\right)^i_{n+1} \mathbf{r}^i_{n+1}$$
7. Actualizar os deslocamentos estimados
$$\mathbf{d}^i_{n+1} = \mathbf{d}^{i-1}_{n+1} + \Delta\Delta\mathbf{d}^i_{n+1}$$
8. Regressar ao ponto 2.

4.3.2.3 Métodos de Newton-Raphson Modificados

Os métodos de Newton-Raphson modificados diferem do algoritmo clássico de Newton-Raphson na medida em que a matriz de rigidez tangente só é actualizada ocasionalmente (observar por exemplo a Figura 4.3).

Se a matriz de rigidez tangente $\mathbf{K}_T$ não for mais actualizada após ter sido determinada para a primeira iteração de uma dado incremento de carga, então o método é denominado de *método da rigidez inicial.* Este método resulta numa taxa de convergência mais lenta se não for utilizado nenhum método para acelerar a convergência. Melhores propriedades de convergência podem ser obtidas se a matriz de rigidez for actualizada uma vez em cada incremento, ou em resposta a uma mudança num parâmetro que monitorize por exemplo a rigidez da estrutura [6, 7].

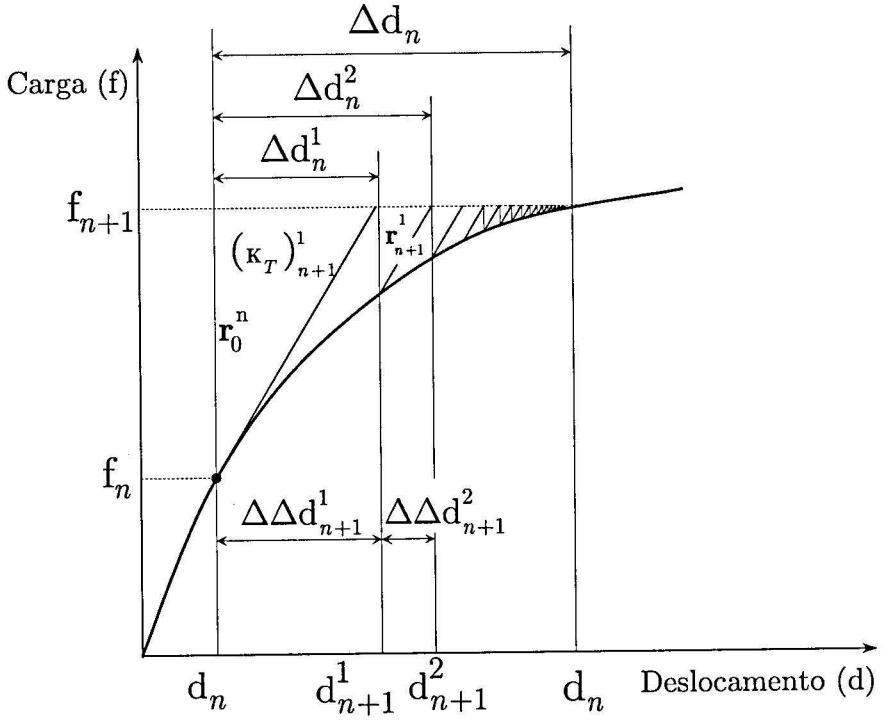


Figura 4.3 Método de Newton-Raphson Modificado.

Como se pode observar na Figura 4.3, mantendo a mesma matriz de rigidez ao longo de todo o incremento, são necessárias várias iterações para se atingir a convergência da solução. Utilizando o método de Newton-Raphson clássico, tal como se mostra na Figura 4.2, a convergência para uma solução de equilíbrio ocorre ao fim de quatro iterações, ao cabo que utilizando o Newton-

Raphson Modificado são necessárias 15 iterações para se obter o mesmo resultado.

Apesar do maior esforço numérico do primeiro método, verifica-se que a taxa de convergência é muito superior do que a obtida utilizando o segundo método. Desta forma torna-se extremamente vantajoso o uso de uma lei constitutiva com operadores tangentes em cada iteração [8, 9].

4.3.2.4 Outros Métodos

Os métodos apresentados atrás foram dos mais importantes, pois lançaram as bases para o aparecimento de muitos outros, sendo mesmo assim ainda actualmente largamente utilizados.

Os métodos *quasi-Newton* foram introduzidos na análise pelo método dos elementos finitos por Matties and Strang [4]. A ideia básica do método é de obter, em cada iteração, uma boa aproximação da matriz de rigidez realizando apenas uma simples modificação numa matriz de rigidez previamente calculada, evitando o cálculo de uma nova matriz de rigidez. Na modificação, na matriz de rigidez é utilizada informação das iterações anteriores. Esta modificação poderá também ser feita na forma factorizada da matriz, para evitar uma refactorização da matriz de rigidez. O mais popular método *quasi-Newton* é o *Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno inverse update*, conhecido normalmente por método *BFGS* [10, 11].

Os métodos Secante-Newton foram originalmente desenvolvidos por Crisfield [12] como sendo uma versão dos métodos de *quasi-Newton*, menos exigente em termos da memória requerida para a execução do cálculo. Estes métodos evitam o armazenamento do par de vectores necessários para a actualização da matriz de rigidez, presentes nos algoritmos originais.

O procedimento comum adoptado nos métodos apresentados até este momento é a aplicação da carga de uma forma faseada, combinado com um procedimento iterativo. Esta forma de resolução falha no entanto sempre que a estrutura em estudo apresenta um comportamento do tipo apresentado na Figura 4.4, em que a curva de equilíbrio Carga/Deslocamento apresenta pontos limite do tipo A e B (Figura 4.4).

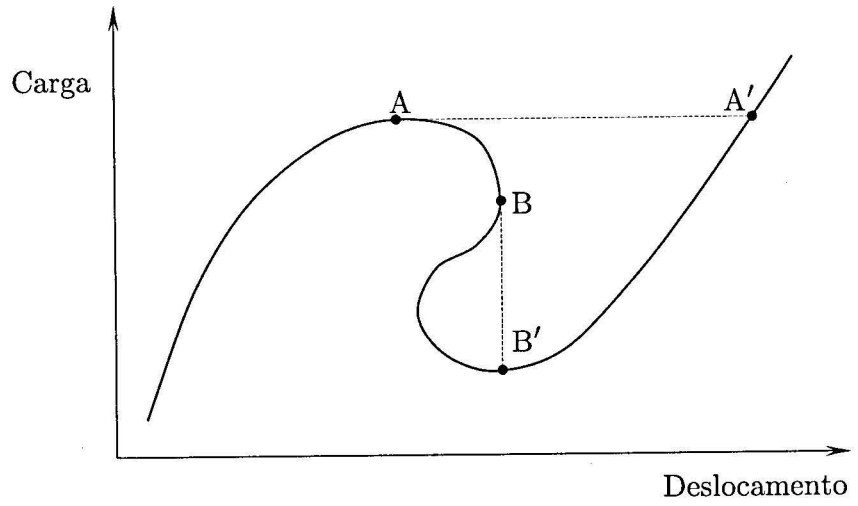


Figura 4.4 Dificuldade com os pontos limite.

Para a parte ascendente da curva de equilíbrio da Figura 4.4, o controlo do nível de carga é normalmente o melhor método. À medida que a solução se aproxima do ponto A, surgem problemas de convergência quando se utilizam os métodos de controlo do nível de carga (na melhor das hipóteses a solução deslocar-se-ia para o ponto A'). Se for adoptado um método de controlo dos deslocamentos a solução do problema avança até ao ponto B, surgindo problemas de convergência nesse ponto (na melhor das hipóteses a solução deslocar-se-ia para o ponto B'). Desta forma é necessário utilizar métodos restringidos tais como o controlo de arco, que permitem acompanhar o percurso da curva de equilíbrio.

Algoritmos de solução que permitem a presença de pontos limite na curva de equilíbrio têm sido desenvolvidos, baseados em esquemas modificados de incrementação de carga, deslocamentos e combinação dos dois. Tais métodos incluem: incrementação da carga com rigidez auxiliar [13], métodos de incrementação dos deslocamentos [14-17], supressão das iterações de equilíbrio próximo de pontos limite [6] e métodos de solução restringida (ou controlo de arco) [18-26].

Nos métodos de incrementação dos deslocamentos, uma única componente dos deslocamentos é seleccionada, sendo tomada como um parâmetro de controlo. Este parâmetro é prescrito e o correspondente nível de carga é tomado como incógnita, ligando desta forma variáveis dependentes e independentes. Apesar deste método conseguir ultrapassar com sucesso alguns pontos limite (atingir o ponto B' da Figura 4.4 e prosseguir a solução), este

método encontra ainda algumas dificuldades (afastamento do percurso correcto no exemplo da Figura 4.4).

Uma forma simplista de ultrapassar os pontos limite, introduzida por Bergan [6], é a supressão das iterações na zona crítica. Como indicador da proximidade a um ponto crítico pode ser monitorizado o valor da rigidez corrente do problema. Claramente, uma vez que as iterações na vizinhança de um ponto crítico são deliberadamente evitadas, ocorre um afastamento da solução correcta. Para este método, é mais importante ultrapassar um ponto crítico do que a correcta representação do comportamento da estrutura na vizinhança do mesmo ponto crítico.

A introdução das técnicas que utilizam a variação do nível de carga por Ricks [18] e Wempner [19] e a sua subsequente adaptação por Crisfield [20, 22-26] e Ramm [21] permitiu ultrapassar muitos dos problemas dos métodos descritos acima. A ideia base de todos os métodos restringidos ou de controlo de arco é a de modificar o nível de carga em cada iteração, ao invés de manter o nível de carga constante durante o incremento de carga. Essencialmente, todos os métodos de controlo de arco envolvem a introdução de uma equação auxiliar que restringe os deslocamentos iterativos a seguirem um determinado percurso em direcção a uma solução convergida.

4.4 Algoritmos de Integração das Leis Constitutivas

Após a matriz de rigidez ter sido definida, o novo incremento dos deslocamentos é determinado para um conhecido nível de carga. Neste momento o problema não linear é linearizado e um qualquer método de resolução de um sistema de equações pode ser utilizado para se determinar o novo incremento de deslocamento $\Delta\mathbf{d}$.

$$\Delta\mathbf{d} = \mathbf{K}_T^{-1}\Delta\mathbf{p} \tag{4.21}$$

A partir do novo incremento dos deslocamentos, obtém-se o incremento total de deformação (para o caso de formulações geometricamente lineares) directamente a partir da matriz das deformações $\mathbf{B}$.

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tot}} = \mathbf{B}\Delta\mathbf{d} \tag{4.22}$$

O problema que surge agora é o problema fundamental em elasto-plasticidade computacional. O incremento total de deformação pode ser conhecido, mas o que não é conhecido é a parte desse incremento que corresponde a uma deformação plástica e a quantidade que corresponde a uma deformação elástica.

Intuitivamente, a forma mais lógica de tentar resolver este problema é assumir inicialmente que não se desenvolveram deformações plásticas, isto é, que todo o incremento de deformação foi elástico. Com esta consideração em mente pode-se agora determinar a mudança nas tensões utilizando para isso a lei de Hook, obtendo o novo estado de tensão. Se a verificação a uma possível cedência do material for negativa, significando que o ponto em questão continua dentro da superfície de cedência, então a assumpção inicial estava correcta, e o novo estado de tensão é o estado a partir do qual a solução incremental continuará a avançar.

A verdadeira dificuldade surge quando a verificação do critério de cedência revela que o estado de tensão viola o critério utilizado. O estado de tensão deslocou-se para uma região onde não pode estar (excepto computacionalmente), tendo-se dado escoamento plástico durante este incremento no ponto em questão. Neste caso é necessário realizar um processo de correcção ou retorno à superfície de cedência. O tipo de algoritmos desenvolvidos segundo a filosofia apresentada denomina-se de *algoritmos de retorno por predição elástica – correcção plástica.*

4.4.1 Equilíbrio Global e Iterações

Quando o estado de tensão em todos os pontos de integração satisfizer simultaneamente o equilíbrio e o critério de cedência (um estado totalmente convergido), a solução é feita avançar com a aplicação do próximo incremento de carga $\Delta\mathbf{f}$. Depois de se obter a matriz de rigidez tangente, o incremento dos deslocamentos é obtido.

$$\Delta\mathbf{d} = \mathbf{K}_T^{-1}\Delta\mathbf{p} \tag{4.23}$$

Este vector com os incrementos de deslocamento $\Delta\mathbf{d}$ nodais resulta em incrementos de deformação em todos os pontos de integração de Gauss. No caso do procedimento predição elástica/correcção plástica, depois de obtido o incremento de deformação, obtém-se $\boldsymbol{\sigma}^{\text{trial}}$ em todos os pontos. Em que $\boldsymbol{\sigma}^{\text{trial}}$ é

o novo estado de tensão, obtido com a assumpção de que todo o incremento de deformação foi elástico. Uma verificação subsequente a todos os pontos vai permitir determinar quais os pontos que violaram ou não o critério de cedência. Para os pontos que se encontram fora da superfície de cedência será necessário aplicar o algoritmo de retorno.

A aplicação do algoritmo de retorno, onde os estados de tensão são corrigidos de forma a satisfazerem o critério de cedência vai perturbar o equilíbrio global. Para todos os pontos de Gauss onde é necessária uma correcção ao estado de tensão para que este satisfaça o critério, vão surgir contribuições para as forças nodais, provocando o seu desequilíbrio, o que vai causar uma nova iteração e novos deslocamentos iterativos. A contribuição para as forças nodais equivalentes a partir de vários pontos de Gauss podem-se contrariar, mas em geral existirá globalmente um vector não nulo de forças residuais, ou não equilibradas $\Delta \mathbf{r}_i$, que é em seguida utilizado para se obter uma nova solução.

O processo numérico continua e os deslocamentos iterativos são obtidos da seguinte forma

$$\Delta\Delta\mathbf{d}^i = \mathbf{K}_T^{-1}\Delta\mathbf{r}^i \tag{4.24}$$

O incremento de deslocamento antigo $\Delta\mathbf{d} = \Delta\mathbf{d}_{old}$ é substituído pelo novo incremento de deslocamentos $\Delta\mathbf{d}_{new} = \Delta\mathbf{d}_{old} + \Delta\Delta\mathbf{d}^i$ que é tratado em seguida como sendo o incremento de deslocamento original $\Delta\mathbf{d}$. O incremento total de deformação $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tot}}$ é calculado utilizando $\Delta\mathbf{d} = \Delta\mathbf{d}_{new}$, o estado de tensão é obtido por predição elástica e o critério de cedência é verificado. A correcção elástica é aplicada onde é necessária. Os novos resíduos são calculados e a iteração global do problema continua até que um qualquer critério de convergência, baseado numa norma das forças residuais, seja atingido.

4.4.1.1 Algoritmos "Path-Dependent" e "Path-Independent"

Durante as iterações em cada incremento, o único estado em que as equações de equilíbrio e critérios são satisfeitos em simultâneo é no início do incremento, o que corresponde à solução convergida do último incremento. Desta forma, o incremento de tensões "trial" nas iterações sucessivas deverá ser sempre adicionado ao último estado de tensão convergido, caso contrário pode dar-se uma acumulação errada de deformação plástica e trabalho plástico, que

por sua vez vai conduzir a uma solução errada. Marques [1] propõem dois grupos de algoritmos caracterizados pela forma como fazem a actualização das tensões. Os algoritmos que fazem a actualização das tensões utilizando o último estado de tensão iterado denominam-se de "Path Dependent", os algoritmos que fazem a actualização das tensões utilizando o último estado de tensão convergido denominam-de de "Path Independent". Crisfield recomenda vivamente a utilização de algoritmos "Path Independent" [2].

De notar que durante o processo iterativo, parte-se sempre de uma solução de equilíbrio de forças aplicadas e forças internas, ainda que não satisfaça o critério de cedência, para uma solução que satisfaz o critério de cedência mas que não satisfaz o equilíbrio entre forças aplicadas e forças internas. O processo iterativo só termina quando os dois requerimentos forem satisfeitos simultaneamente. Nenhuma informação sobre o estado de tensão, parâmetros de endurecimento, deformação plástica acumulada, etc. é definitiva até que o critério e o equilíbrio sejam simultaneamente satisfeitos.

Se o estado de referência para a informação sobre as tensões, deformação plástica e parâmetro de encruamento for sempre tomado como o último estado completamente convergido, os problemas associados com a acumulação errada de deformação plástica são evitados, desde que se use uma tolerância de convergência suficientemente apertada.

Se se comparar duas análises efectuadas para o mesmo carregamento, uma baseada em pequenos incrementos, e outra em grandes incrementos, o resultado final não só dependerá da grandeza dos incrementos (geralmente existe um maior erro de discretização para incrementos de carga grandes, pois as equações incrementais tornam-se menos correctas) mas também do estado de referência que foi utilizado durante o processo iterativo. Utilizando incrementos de carga muito pequenos, pode-se hipoteticamente obter apenas um ponto de Gauss a plastificar, que poderá continuar a plastificar nos incrementos seguintes. Utilizando grandes incrementos de carga, pode-se obter vários pontos de Gauss aparentemente plastificados, pois o estado de tensão obtido por predição elástica vai violar o critério de cedência. Se o algoritmo não utilizar como referência o último estado convergido, todos os pontos de Gauss que plastificaram vão acumular deformação plástica, que na realidade nunca ocorreu. Quando o estado de referência é correctamente aplicado, o algoritmo iterativo irá ele próprio resolver o problema. As forças residuais irão gradualmente empurrar a solução

numa direcção em que no exemplo acima apenas um ponto de Gauss plastifica, enquanto que o estado de tensão obtido por predição elástica nos restantes pontos regressa gradualmente para a superfície de cedência.

O algoritmo "path-Dependent" não foi utilizado neste trabalho, apresenta-se no entanto o seu algoritmo resumido no Quadro 4.2.

Quadro 4.2 Algoritmo "Path-Dependent"

1. Cálculo do vector dos deslocamentos iterativos, em que para $i=1$, temos na equação seguinte $\mathbf{r}_{n+1}^{i-1} = \Delta \mathbf{f}_{n+1}$
$$\Delta\Delta \mathbf{d}_{n+1}^{i} = \left(\mathbf{K}_T^{-1}\right)_{n+1}^{i} \left(\mathbf{r}_{n+1}^{i-1}\right).$$
2. Cálculo do vector das deformações iterativas
$$\Delta\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{i} = \mathbf{B}_e \Delta\Delta \mathbf{d}_{n+1}^{i}$$
3. Calculo do incremento iterativo de tensão, supondo um incremento elástico
$$\left(\Delta\Delta \boldsymbol{\sigma}^{trial}\right)_{n+1}^{i} = \mathbf{C}_2 \Delta\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{i}$$
4. Calculo do estado de tensão tentativa ou "trial"
$$\left(\boldsymbol{\sigma}^{trial}\right)_{n+1}^{i} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i-1} + \left(\Delta\Delta \boldsymbol{\sigma}^{trial}\right)_{n+1}^{i}$$
onde $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i-1}$ representa o estado de tensão obtido na da iteração anterior (i-1)

O algoritmo utilizado na presente dissertação foi o algoritmo "Path-Independent", que se apresenta resumido no Quadro 4.3 seguinte.

Quadro 4.3 Algoritmo "Path-Independent" utilizado

1. Cálculo do vector dos deslocamentos iterativos, em que para $i=1$, temos na equação seguinte $\mathbf{r}_{n+1}^{i-1} = \Delta\mathbf{f}_{n+1}$.
$$\Delta\Delta\mathbf{d}_{n+1}^{i} = \left(\mathbf{K}_T^{-1}\right)_{n+1}^{i}\left(\mathbf{r}_{n+1}^{i-1}\right).$$
2. Actualizar os deslocamentos incrementais a partir do último estado convergido.
$$\Delta\mathbf{d}_{n+1}^{i} = \Delta\mathbf{d}_{n+1}^{i-1} + \Delta\Delta\mathbf{d}_{n+1}^{i}$$
Nesta equação $\Delta\mathbf{d}_{n+1}^{i}$ corresponde aos deslocamentos acumulados desde o início do incremento $(n+1)$ até à iteração actual (i).
3. Calcular o vector das extensões incrementais
$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{i} = \mathbf{B}\Delta\mathbf{d}_{n+1}^{i}$$
4. Calcular o vector das tensões incrementais $\left(\Delta\boldsymbol{\sigma}^{trial}\right)_{n+1}^{i}$, considerando que todo o incremento de deformação é elástico
$$\left(\Delta\boldsymbol{\sigma}^{trial}\right)_{n+1}^{i} = \mathbf{C}_2\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{i}$$
5. Actualizar o estado de tensão
$$\left(\boldsymbol{\sigma}^{trial}\right)_{n+1}^{i} = \boldsymbol{\sigma}_n + \left(\Delta\boldsymbol{\sigma}^{trial}\right)_{n+1}^{i}$$
onde $\boldsymbol{\sigma}_n$ representa o estado de tensão convergido, obtido no final do incremento anterior (n)

4.4.2 Lei Material Tangente

Uma lei material tangente relaciona duas taxas, a taxa do tensor das tensões com a taxa do tensor das deformações e é definida por um tensor de quarta ordem $\mathbf{C}_4^{ep}$ da seguinte forma

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_2 = \mathbf{C}_4^{ep}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 \tag{4.25}$$

Escrevendo as componentes do tensor das tensões e do tensor das deformações numa forma vectorial $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\mathbf{C}_4^{ep}$ torna-se na matriz tangente, isto é

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_2^{ep}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{4.26}$$

O incremento de tensões diferencial tem de levar a uma estado de tensão que irá residir novamente na superfície de cedência, apesar de a própria superfície poder modificar-se simultaneamente (por encruamento ou

amaciamento). Esta denominada *lei material tangente contínua* é obtida atendendo à mudança diferencial do estado de tensão num ponto durante o escoamento plástico. A aproximação por elementos finitos não tem nenhum papel na forma como esta lei tangencial é definida [2]. Esta afirmação será também válida mais tarde com a introdução da *matriz tangente consistente* for definida.

A taxa de deformação plástica é, tal como foi apresentado, definida por:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{p}} = \gamma \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \gamma \mathbf{a} \tag{4.27}$$

e a taxa das tensões é dada por:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_2 \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{t}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{p}} \right) = \mathbf{C}_2 \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \gamma \mathbf{a} \right) \tag{4.28}$$

Para que possa ocorrer escoamento plástico, as tensões têm de permanecer (persistir) na superfície de cedência e tal como visto no capítulo anterior

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{a}^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{a} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} = 0 \tag{4.29}$$

A situação descrita pela equação (4.29) está ilustrada na Figura 4.5 (para o caso particular de von Mises) e mostra que, para ocorrer escoamento plástico, a variação nas tensões $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ está a mover-se tangencialmente à superfície de cedência, sendo $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ ortogonal ao vector fluxo $\mathbf{a}$. Desta forma $\mathbf{a}$ é normal à superfície de cedência e a regra de fluxo dada por (4.27) apresenta também esta propriedade de "normalidade" (à superfície).

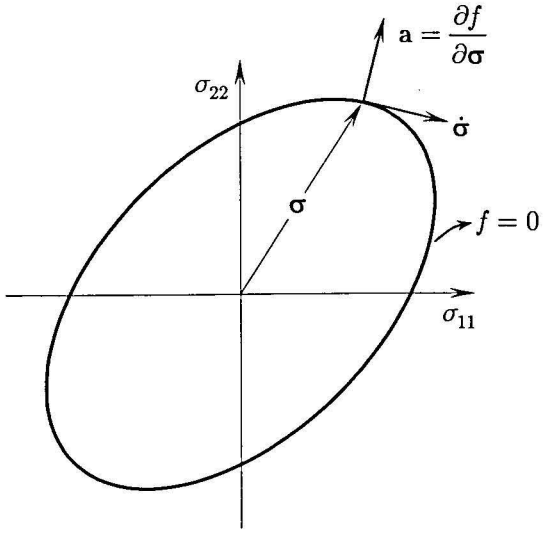


Figura 4.5 Critério de von Mises em tensões principais e para um estado plano de tensão.

De forma a determinar a variação do multiplicador plástico, γ, a equação (4.28) é pré-multiplicada pelo vector fluxo $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}$ e, utilizando a equação (4.29) obtém-se

$$\gamma = \frac{\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}_2\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}_2\,\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{C}\cdot\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{a}} \tag{4.30}$$

Consequentemente, por substituição na equação (4.28) vem

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_2^{ep}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{C}_2\left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}_2}{\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}_2\mathbf{a}}\right)\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left(\mathbf{C}_2 - \frac{1}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{a}}(\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{a})\otimes(\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{a})\right)\cdot\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{4.31}$$

onde $\mathbf{C}_2^{ep}$ é uma matriz que representa o módulo elasto-plástico tangente, que não é apenas uma função de E e υ mas também, através de $\mathbf{a}$, uma função do estado de tensão corrente. Por facilidade de leitura omite-se o índice 2 em $\mathbf{C}^{ep}$ e $\mathbf{C}$. Esta matriz pode agora ser utilizada nas expressões relacionadas com o método dos elementos finitos, tais como (4.5), para formar a matriz de rigidez tangente da estrutura.

Com a introdução do encruamento isotrópico a tensão de cedência passa a ser uma função da deformação plástica equivalente $(\varepsilon_{\mathrm{ps}})$, ou seja,

$$f = \sigma_{\mathrm{e}} - \overline{\sigma}(\varepsilon_{\mathrm{ps}}) \tag{4.32}$$

A derivada da tensão de cedência em relação à deformação plástica equivalente define a constante de encruamento H (módulo plástico).

$$H = \frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial\varepsilon_{\mathrm{ps}}} \tag{4.33}$$

Após o encruamento ser introduzido, a condição de tangencia da equação (4.29) é modificada para a seguinte forma.

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial\overline{\sigma}}\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial\varepsilon_{\mathrm{ps}}}\dot{\varepsilon}_{\mathrm{ps}} = \mathbf{a} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} - H\dot{\varepsilon}_{\mathrm{ps}} = 0 \tag{4.34}$$

Tal como apresentado atrás, a taxa de variação da deformação plástica equivalente é coincidente com o multiplicador plástico.

$$\dot{\varepsilon}_{\mathrm{ps}} = \gamma \tag{4.35}$$

A substituição de (4.35) em (4.34) permite obter

$$\dot{f} = \mathbf{a}\cdot\dot{\boldsymbol{\sigma}} - H\gamma = 0 \tag{4.36}$$

Multiplicando a equação (4.28) por $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}$ e substituindo em (4.36) obtém-se

BIBLIOTECA F.E. PORTO

$$\gamma = \frac{\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{a} + H} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{C}\cdot\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{a} + H} \tag{4.37}$$

A equação (4.31) é substituída por

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^{ep}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{C}\left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}}{\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{a} + H}\right)\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left(\mathbf{C} - \frac{1}{\mathbf{a}:\mathbf{C}:\mathbf{a} + H}(\mathbf{C}:\mathbf{a})\otimes(\mathbf{C}:\mathbf{a})\right):\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{4.38}$$

Para um encruamento linear, H não varia, sendo uma constante do material, enquanto para um endurecimento não linear H varia com ε_{ps}.

A deformação plástica equivalente pode ser considerada como uma "variável interna" pois é "interna" à resposta do problema [27]. Utilizando esta terminologia, apenas as tensões totais e as deformações totais são externas. No entanto a deformação plástica é necessária para definir a resposta da estrutura. Após a introdução da regra de escoamento e lei de encruamento, fica-se apenas com uma variável interna ε_{ps} para definir o comportamento do material.

4.4.3 Algoritmo "backward-Euler"

A necessidade da implementação de um procedimento que permita fazer o retorno das tensões à superfície de cedência, a partir de uma tentativa inicial, já foi referida atrás. A obtenção de um estado de tensão corrigido é feita utilizando a normal à superfície de cedência calculada no ponto B, tal como se mostra na Figura 4.6. Este método difere dos métodos do tipo sub-incrementação [28] onde era necessário determinar o ponto de intercepção com a superfície de cedência (ponto A na Figura 4.6).

A equação (4.28) pode ser reescrita substituindo-se as taxas por incrementos finitos (Δ), obtendo-se assim

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\gamma\mathbf{C}\mathbf{a} = \Delta\boldsymbol{\sigma}_e - \Delta\gamma\mathbf{C}\mathbf{a} \tag{4.39}$$

onde o vector fluxo é calculado no ponto B (Figura 4.6). A definição de $\Delta\gamma$ é obtida a partir da equação (4.37) com a substituição de $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ por $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$, obtendo-se assim

$$\Delta\gamma = \frac{\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}}{\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{a} + H} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{C}\cdot\Delta\boldsymbol{\varepsilon}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{a} + H} \tag{4.40}$$

O estado de tensão no ponto B é obtido considerando-se que todo o incremento de deformação foi elástico, obtém-se assim

$$\boldsymbol{\sigma}_B = \boldsymbol{\sigma}_X + \mathbf{C}\Delta\boldsymbol{\varepsilon} \tag{4.41}$$

em que $\boldsymbol{\sigma}_X$ é o estado de tensão inicial, que resulta da iteração anterior.

Aplicando uma expansão em série de Taylor da função de cedência, em torno do ponto B (f_B), obtém-se

$$f = f_B + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\Delta\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ps}}\Delta\varepsilon_{ps} \tag{4.42}$$

Como $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ já foi utilizado para mover o estado de tensão do ponto X para o ponto B, substitui-se na equação (4.42) a equação (4.39) com $\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$, o que permite obter

$$f = f_B - \Delta\gamma\ \mathbf{a}_B^T\mathbf{C}\mathbf{a}_B - \Delta\gamma\ H \tag{4.43}$$

em que $\mathbf{a}_B$ é o vector fluxo calculado em B.

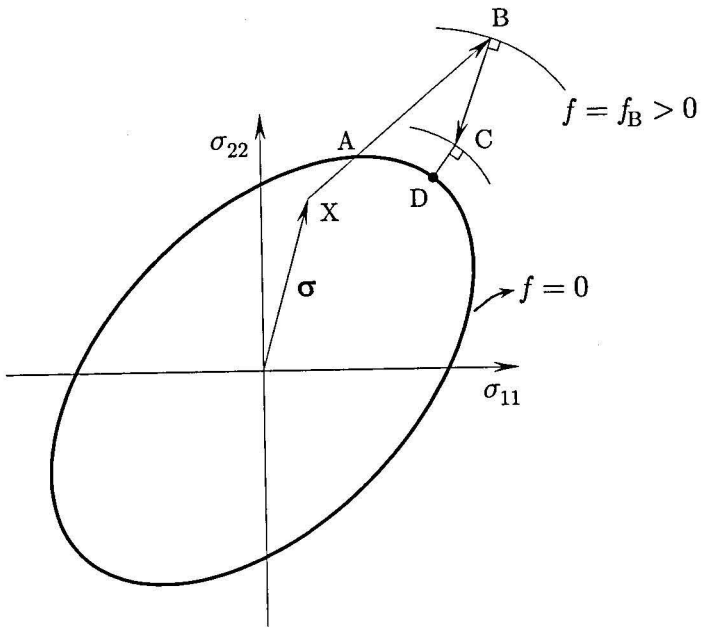


Figura 4.6 Retorno à superfície de cedência.

Se a equação (4.43) for aplicada a um estado de tensão sobre a superfície de cedência, então o valor da função f deverá ser zero, desta forma da equação (4.43) obtém-se uma nova expressão para o incremento do multiplicador plástico.

$$\Delta\gamma = \frac{f_B}{\mathbf{a}_B^T\mathbf{C}\mathbf{a}_B + H_B} = \frac{f_B}{\mathbf{a}_B \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{a}_B + H_B} \tag{4.44}$$

onde $\mathbf{a}$ e H são calculados no ponto B. A tensão "final" $\boldsymbol{\sigma}_C$ é dada por

$$\boldsymbol{\sigma}_C = \boldsymbol{\sigma}_B - \Delta\gamma\ \mathbf{C}\mathbf{a}_B \tag{4.45}$$

Este método pode ser considerado como um esquema do tipo backward-Euler apesar de, ao contrário do esquema de backward-Euler completo, o estado de tensão final no ponto C não ficar sobre a superfície de cedência. No entanto, utilizando o critério de von Mises, para um estado de tensão tridimensional (com encruamento linear), este método coincide com o bem conhecido "retorno radial" [29], que é um caso especial do procedimento backward-Euler.

Em geral, o método apresentado produz um estado de tensão que se encontra fora da superfície de cedência ($\boldsymbol{\sigma}_C$). É agora possível aplicar um factor de escala r ao estado de tensão no ponto C até que o valor da função de cedência tome o valor zero [29]. No entanto, este método reduz de uma forma indistinta, simultaneamente a componente elástica e plástica da deformação, quando apenas a componente plástica da deformação deveria ser corrigida, não sendo por isso recomendado [2]. Uma técnica alternativa que pode ser considerada como uma extensão do método de obtenção do estado de tensão tentativa ("predictor") utilizando o procedimento backward-Euler foi sugerida por Ortiz e Simo [30].

Neste procedimento, a deformação total é mantida fixa enquanto que é adicionada deformação plástica à deformação total, de forma a relaxar as tensões, aproximando-as da superfície de cedência. Para este efeito a equação (4.45) pode ser repetida no ponto C, de tal forma que

$$\boldsymbol{\sigma}_D = \boldsymbol{\sigma}_C - \Delta\gamma_C \, \mathbf{C} : \mathbf{a}_C \tag{4.46}$$

onde

$$\Delta\gamma_C = \left. \frac{f_C}{\mathbf{a} : \mathbf{C} : \mathbf{a} + H} \right|_C \tag{4.47}$$

Se o valor resultante para a função de cedência no ponto D não for suficientemente pequeno, apenas se tem que repetir o processo, introduzindo mais deformação plástica. O processo final, neste exemplo, dá origem ao incremento

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\gamma_B \, \mathbf{C}\mathbf{a}_B - \Delta\gamma_C \, \mathbf{C}\mathbf{a}_C \tag{4.48}$$

Este algoritmo de retorno à superfície de cedência apresentado pode ser resumido no Quadro 4.4.

Quadro 4.4 Procedimento backward-euler

1. Actualização do estado do tensão, utilizando o algoritmo "Path-Independent" descrito no Quadro 4.3.
2. Verificação do critério de cedência.

   Se $f\left(\boldsymbol{\sigma}^{\text{trial}}\right) \leq \mathbf{0}$, então:

   - estado elástico
   - actualização de variáveis: $\bullet_{n+1}^{i} \leftarrow \left(\bullet^{trial}\right)_{n+1}^{i}$
   - $\Delta\gamma = 0$
   - passo 4

   caso contrário:

   - estado plástico
   - passo 3

3. O retorno à superfície de cedência é feito nos passos seguintes, utilizando-se um processo iterativo. De notar que para $i = 1$ tem-se nas seguintes equações que $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{P}^i} = \boldsymbol{\sigma}^{\text{trial}}$, sendo o vector fluxo $\mathbf{a}$ calculado com $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{\text{trial}}$.

   Repetir enquanto $|f| > \varphi$, em que φ é a tolerância pretendida:

   - $\Delta\gamma^i = \dfrac{f_{\mathrm{P}^i}}{\mathbf{a}_{\mathrm{P}^i}^{\mathrm{T}} \mathbf{C}\mathbf{a}_{\mathrm{P}^i} + H_{\mathrm{P}^i}}$
   - $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{P}^{i+1}} = \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{P}^i} - \Delta\gamma^i \, \mathbf{C}\mathbf{a}_{\mathrm{P}^i}$
   - Actualização da deformação plástica
     $$(\boldsymbol{\varepsilon}^p)^i = (\boldsymbol{\varepsilon}^p)^{i-1} + \Delta\gamma^i \mathbf{a}^i$$
   - Actualização da deformação plástica equivalente
     $$(\varepsilon^{ps})_{n+1}^{i} = (\varepsilon^{ps})_n + \sum_{k=1}^{i} (\Delta\gamma)_{n+1}^{k}$$
   - Actualizar a tensão de cedência
     $$\overline{\sigma} = \sigma_{Y0} + H\left(\varepsilon^{ps}\right)_{n+1}^{i}$$
   - Verificar o critério de convergência

4. Actualizar deformações e tensões

Este método não garante no entanto, que o retorno à superfície de cedência a partir do estado de tensão tentativa para o estado de tensão final seja feito de tal forma que o vector que une estes dois estados de tensão (paralelo ao vector fluxo) seja normal à superfície de cedência no estado de tensão final, tal como exigido pela equação (4.29). O algoritmo, que se apresenta de seguida, garante a

normalidade do vector fluxo à superfície de cedência para o estado final de tensão [2].

4.4.4 Algoritmo "backward-Euler" Completo

O algoritmo de retorno à superfície de cedência backward-Euler completo é baseado na seguinte equação (ainda de acordo com a Figura 4.6):

$$\boldsymbol{\sigma}_C = \boldsymbol{\sigma}_B - \Delta\gamma\, \mathbf{C}\, \mathbf{a}_C \tag{4.49}$$

Em que $\boldsymbol{\sigma}_C$ é o estado de tensão final, que satisfaz o critério de cedência e o vector fluxo $\mathbf{a}_C$ é normal à superfície de cedência no estado de tensão final, sendo por isso desconhecido inicialmente.

Uma estimativa inicial para $\boldsymbol{\sigma}_C$ pode ser obtida com o método simplificado de backward-Euler apresentado atrás e representado na Figura 4.6. De uma forma geral, esta estimativa inicial não irá satisfazer a função de cedência, pelo que é necessário recorrer a um processo iterativo para se obter o valor final. Isto acontece porque a normal ao ponto B geralmente não coincide com a normal final. Para se deduzir o cálculo iterativo, define-se um vector $\mathbf{r}$ que representa a diferença entre o estado de tensão actual $\boldsymbol{\sigma}_C$ e a tensão de backward-Euler.

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\sigma}_C - \left(\boldsymbol{\sigma}_B - \Delta\gamma\, \mathbf{C}\, \mathbf{a}_C\right) \tag{4.50}$$

As iterações são introduzidas para reduzir $\mathbf{r}$ a um valor muito próximo de zero, enquanto que as tensões finais devem satisfazer o critério de cedência, $f = 0$.

Mantendo fixa a tensão tentativa elástica $\boldsymbol{\sigma}_B$, pode-se aplicar uma expansão em série de Taylor à equação (4.50), truncando a série, obtém-se um novo resíduo $\mathbf{r}_n$, em que

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_0 + \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \Delta\Delta\gamma\, \mathbf{C}\, \mathbf{a} + \Delta\gamma\, \mathbf{C}\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\dot{\boldsymbol{\sigma}} \tag{4.51}$$

Na equação anterior $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ corresponde à alteração a $\boldsymbol{\sigma}$ e $\Delta\Delta\gamma$ à alteração a $\Delta\gamma$. Igualando $\mathbf{r}_n$ a zero obtém-se

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = -\left(\mathbf{I} + \Delta\gamma\, \mathbf{C}\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)^{-1}\left(\mathbf{r}_0 + \Delta\Delta\gamma\, \mathbf{C}\, \mathbf{a}\right) = -\mathbf{Q}^{-1}\left(\mathbf{r}_0 + \Delta\Delta\gamma \mathbf{C}\, \mathbf{a}\right) \tag{4.52}$$

ou, considerando que $\Delta\Delta\boldsymbol{\sigma}$ é a alteração a $\boldsymbol{\sigma}$

$$\Delta\Delta\boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{Q}^{-1}\left(\mathbf{r}_0 + \Delta\Delta\gamma\mathbf{C}\,\mathbf{a}\right) \tag{4.53}$$

Aplicando uma expansão em série de Taylor obtém-se, de forma semelhante a (4.42)

$$f_{Cn} = f_{C0} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ps}}\dot{\varepsilon}_{ps} = f_{C0} + \mathbf{a}_C\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \Delta\Delta\gamma H_C = 0 \tag{4.54}$$

Substituindo a equação (4.52) na equação (4.54), e retirando o índice C na equação (4.54), obtém-se uma expressão para γ.

$$\Delta\Delta\gamma = \frac{f_0 - \mathbf{a}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{r}_0}{\mathbf{a}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{a} + H} \tag{4.55}$$

Consequentemente, a equação (4.52) pode ser resolvida para se determinar a modificação iterativa $\Delta\Delta\boldsymbol{\sigma}$ a aplicar às tensões $\boldsymbol{\sigma}$.

Tal como já foi visto no capítulo anterior, a modificação iterativa à deformação plástica equivalente é dada por

$$\dot{\varepsilon}_{ps} = \gamma \tag{4.56}$$

Com este procedimento, a estimativa inicial vai sendo corrigida iterativamente, até que o vector **r** seja próximo de zero e a função de cedência satisfeita.

O retorno à superfície de cedência backward-Euler pode ser resumido com o seguinte quadro.

Quadro 4.5 Procedimento backward-Euler completo

1. Actualização do estado do tensão, utilizando o algoritmo "path-independent" descrito no Quadro 4.2.
2. Verificação do critério de cedência.

   Se $f\left(\boldsymbol{\sigma}^{trial}\right) \leq \mathbf{0}$, então:

   - estado elástico;
   - actualização de variáveis: $\bullet^{i}_{n+1} \leftarrow \left(\bullet^{trial}\right)^{i}_{n+1}$;
   - $\Delta\gamma^{i} = 0$;
   - passo 5.

   caso contrário:

   - estado plástico;
   - passo 3.

3. Obtenção de uma estimativa inicial para $\boldsymbol{\sigma}_C$, de notar que $\boldsymbol{\sigma}_B = \boldsymbol{\sigma}^{trial}$, sendo $\boldsymbol{\sigma}^{trial}$ obtido a partir do algoritmo "path-independent" descrito no Quadro 4.2.

$$\boldsymbol{\sigma}_C = \boldsymbol{\sigma}_B - \Delta\gamma\, \mathbf{C}\, \mathbf{a}_B$$

$$\Delta\gamma = \frac{f_B}{\mathbf{a}_B^T \mathbf{C} \mathbf{a}_B + H_B}$$

- Actualização da deformação plástica

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \Delta\gamma \mathbf{a}_B$$

- Actualização da deformação plástica equivalente

$$\varepsilon^{ps} = \Delta\gamma$$

- Actualizar a tensão de cedência

$$\bar{\sigma} = \sigma_{Y0} + H\left(\varepsilon^{ps}\right)_{n+1}^{i}$$

- Verificar o critério de convergência, se o critério não for satisfeito, corrigir a estimativa inicial de $\boldsymbol{\sigma}_C$

4. Correcção da estimativa inicial $\boldsymbol{\sigma}_C$. Repetir enquanto $|f| > \varphi$, em que φ é a tolerância pretendida:

- Obter a variação $\Delta\Delta\gamma$ do multiplicador plástico

$$\Delta\Delta\gamma = \frac{f_C - \mathbf{a}_C \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{r}_0}{\mathbf{a}_C \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{a}_C + H}$$

- Obter o resíduo $\mathbf{r}_0$

$$\mathbf{r}_0 = \boldsymbol{\sigma}_C - \left(\boldsymbol{\sigma}_B - \Delta\gamma\, \mathbf{C}\, \mathbf{a}_C\right)$$

- Obter a variação do estado de tensão $\Delta\Delta\boldsymbol{\sigma}$

$$\Delta\Delta\boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{Q}^{-1}\left(\mathbf{r}_0 + \Delta\Delta\gamma \mathbf{C}\, \mathbf{a}_C\right)$$

- Actualizar o estado de tensão $\boldsymbol{\sigma}_C$ e o multiplicador plástico

$$\boldsymbol{\sigma}_C = \boldsymbol{\sigma}_C + \Delta\Delta\boldsymbol{\sigma}$$

$$\Delta\gamma = \Delta\gamma + \Delta\Delta\gamma$$

- Actualizar a deformação plástica

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \Delta\gamma \mathbf{a}_C$$

- Actualização da deformação plástica equivalente

$$\varepsilon^{ps} = \Delta\gamma$$

- Actualizar a tensão de cedência

$$\bar{\sigma} = \sigma_{Y0} + H\left(\varepsilon^{ps}\right)_{n+1}^{i}$$

- Verificar a convergência

5. Actualizar deformações e tensões

4.5 Linearização consistente do algoritmo de integração elasto-plástico

No capítulo anterior foi introduzido o tensor elásto-plastico $\mathbf{C}^{ep}$, denominado de módulo tangente contínuo. Foi também indicado que para efeitos computacionais assume-se que $\mathbf{C}^{ep}$, que de uma forma simplificada relaciona taxas de tensão com taxas de deformação total, definindo também a relação entre os incremento finitos de tensão e de deformação.

Referiu-se também que $\mathbf{C}^{ep}$ é utilizado na obtenção da matriz de rigidez tangente $\mathbf{K}_T$. A matriz $\mathbf{K}_T$ é utilizada na obtenção dos novos deslocamentos incrementais, assim como na obtenção de uma solução melhorada, sendo utilizada nas iterações dentro de cada incremento de carga.

O ponto crucial para se efectuar uma linearização consistente do algoritmo de integração é concluir que já não se está perante um problema "contínuo". O problema que agora se tem em mão é um problema não linear "incremental", descrito pelas equações atrás apresentadas.

Simo e Taylor [31] e Runesson *et al* [32] apresentaram um módulo tangente contínuo que é inteiramente consistente com o algoritmo de integração backward-Euler. Como consequência da "consistência", e se for utilizado o método de Newton-Rapshon a utilização de um módulo tangente consistente melhora significativamente as características de convergência das iterações globais de equilíbrio. Os métodos clássicos utilizavam o módulo tangente contínuo apresentado no capítulo anterior que é inconsistente com o esquema de integração backward-Euler (ou um outro qualquer esquema de integração, a não ser que os incrementos sejam infinitesimais), destruindo a convergência quadrática inerente ao método de Newton-Rapshon.

É importante notar que a melhoria da convergência obtida com a utilização de um "módulo tangente consistente" em oposição ao módulo tangente contínuo, não deverá ser interpretado de nenhuma forma como implicando que a matriz tangente contínua esteja de alguma forma "fisicamente" errada. O módulo tangente consistente resulta da necessidade de garantir uma solução adequada (consistente) das equações incrementais não lineares em $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ e $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$ utilizando o método de Newton-Rapshon.

O módulo tangente consistente pode ser deduzido de uma forma geral utilizando o algoritmo backward-Euler clássico. O algoritmo backward-Euler clássico pode ser expresso (ver (4.45)) como

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{B}} - \Delta\gamma\, \mathbf{C}\, \mathbf{a} \tag{4.57}$$

onde o sufixo C que se refere à configuração corrente após o retorno, foi retirado, pelo que, se uma variável não possuir sufixo assume-se que se refere a esta configuração. O sufixo B em (4.57) indica que $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{B}}$ são as tensões "trial" obtidas por predição elástica. Diferenciando (4.57) obtém-se

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}\, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \gamma\, \mathbf{C}\, \mathbf{a} - \Delta\gamma\, \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \tag{4.58}$$

Na equação anterior o último termo é omitido na obtenção do módulo tangente clássico. Da equação (4.58), obtém-se

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left(\mathbf{I} + \Delta\gamma\, \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)^{-1} \mathbf{C} \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \gamma\, \mathbf{a}\right) = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{C} \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \gamma\, \mathbf{a}\right) = \mathbf{R} \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \gamma\, \mathbf{a}\right) \tag{4.59}$$

onde a matriz $\mathbf{Q}$ já surgiu anteriormente no algoritmo de retorno backward-Euler completo, equação (4.52).

Para permanecer na superfície de cedência, $\dot{f}$ deverá ser zero, deste modo obtem-se a partir de (4.36), e fazendo a substituição $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{R} \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \gamma\, \mathbf{a}\right)$

$$\mathbf{a}^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} - H\gamma = \mathbf{a}^{\mathrm{T}} \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \gamma\, \mathbf{a}^{\mathrm{T}} \mathbf{R} \mathbf{a} - H\gamma = 0 \tag{4.60}$$

Da equação (4.60) retira-se uma expressão para γ, que substituindo em (4.59) permite obter

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\mathbf{C}}_2^{ep} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{R}\mathbf{a}\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}}{H + \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{a}}\right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{4.61}$$

em que a matriz $\mathbf{R}$ na equação anterior é dada por:

$$\mathbf{R} = \mathbf{C}\left(\mathbf{I} + \Delta\gamma\, \mathbf{C} \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2}\right)^{-1} = \mathbf{C}\left(\mathbf{I} + \Delta\gamma\, \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)^{-1} \tag{4.62}$$

Para a obtenção da equação (4.61), foi tomado em conta a propriedade de simetria da matriz $\mathbf{R}$. Esta simetria pode ser provada com a ajuda da simetria de $\mathbf{C}$ e $\dfrac{\partial \mathbf{a}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ e a relação

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\right)^{-1} \tag{4.63}$$

Em contraste com a matriz tangente consistente, a matriz tangente clássica é obtida a partir de (4.58) igualando $\Delta\gamma$ a zero, não sendo a matriz $\dfrac{\partial \mathbf{a}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ utilizada.

A matriz tangente consistente $\hat{\mathbf{C}}_2^{ep}$ (e logo $\hat{\mathbf{K}}$) é utilizada para determinar os deslocamentos iterativos $\Delta\Delta\mathbf{d}_n^i$ a adicionar a $\Delta\mathbf{d}_n^i$ dentro do incremento n. Como esperado, esta matriz tangente consistente difere da matriz tangente contínua, mas no limite, para incrementos infinitesimais $\hat{\mathbf{C}}_2^{ep} = \mathbf{C}_2^{ep}$. A grande diferença relaciona-se com o termo contendo a segunda derivada da função de cedência em relação às componentes do tensor das deformações

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{4.64}$$

indicando que a variação do gradiente da função de cedência $\mathbf{a}$ durante um incremento é tomada em conta durante as iterações. É tomando em consideração tais modificações do módulo tangente durante um incremento que o uso de uma matriz tangente consistente do material assegura uma taxa de convergência quadrática, ao passo que o uso da matriz tangente contínua do material apenas possui uma taxa de convergência linear. Consequentemente, o número de iterações em soluções baseadas numa formulação consistente é significativamente menor [3].

4 6 Implementação do algoritmo elasto-plástico para materiais com anisotropia plástica

Os algoritmos aqui apresentados foram implementados num programa de elementos finitos já existente, escrito na linguagem Fortran90 e desenvolvido na Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

Os dois algoritmos de retorno à superfície de cedência foram implementados de uma forma genérica, independente do critério de cedência utilizado. A diferenciação entre os algoritmos dá-se apenas quando são chamadas as diferentes rotinas que fazem o cálculo da função de cedência, e derivadas da função de cedência.

A obtenção das derivadas da função de cedência dos diferentes critérios implementados e a sua programação em Fortran foram feitas com o auxílio de

um programa de manipulação simbólica, o Maple. A sua obtenção para ocritério de Hill é uma operação trivial, dado que as funções utilizadas são relativamente simples. No caso do critério de Barlat, a obtenção das derivadas sem o auxilio de um programa de manipulação simbólica seria uma tarefa extremamente morosa, visto que a função de Barlat é mais complexa.

Tal como apresentado no capítulo 3, a função de cedência para o critério de Hill – Anisotropia Planar é dada pela seguinte equação.

$$f = \sigma_{11}^2 + \frac{R_0(1+R_{90})}{R_{90}(1+R_0)}\sigma_{22}^2 - \frac{2R_0}{1+R_0}\sigma_{11}\sigma_{22} + \frac{(1+2R_{45})(R_0+\dot{R}_{90})}{R_{90}(1+R_0)}\sigma_{12}^2 - \bar{\sigma}^2 = 0 \quad (4.65)$$

A função de cedência para o critério de Hill – Anisotropia Normal é obtida considerando:

$$R = R_0 = R_{45} = R_{90} \quad (4.66)$$

onde o novo parâmetro R denomina-se coeficiente de anisotropia de Lankford [33]. Este parâmetro é obtido da seguinte forma:

$$R = \frac{R_0 + 2R_{45} + R_{90}}{4} \quad (4.67)$$

A substituição de (4.66) em (4.65) permite obter a expressão final para o critério de Hill – Anisotropia normal.

$$f = \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \frac{2R}{1+R}\sigma_{11}\sigma_{22} + \frac{2(1+2R)}{(1+R)}\sigma_{12}^2 - \bar{\sigma}^2 = 0 \quad (4.68)$$

O critério de Barlat, tal como foi apresentado no capítulo anterior é descrito pela seguinte equação.

$$\Psi = |S_1 - S_2|^m + |S_2 - S_3|^m + |S_3 - S_1|^m = 2\bar{\sigma}^m \quad (4.69)$$

Os valores que esta função toma estão directamente relacionados com o expoente m. Para valores elevados do expoente m, por exemplo $m = 8$, ou $m = 10$ a função de cedência toma valores muito elevados, mesmo quando o estado de tensão já se encontra próximo da superfície de cedência. Para se obter uma maior sensibilidade da proximidade à superfície de cedência, a equação (4.69) foi reescrita da seguinte forma.

$$\Psi = \left[\frac{1}{2}\left(|S_1 - S_2|^m + |S_2 - S_3|^m + |S_3 - S_1|^m\right)\right]^{\frac{1}{m}} - \bar{\sigma} = 0 \quad (4.70)$$

A obtenção das derivadas da função de cedência do critério de Barlat foi sujeita a verificações adicionais, devido às descontinuidades das derivadas da função. Este assunto encontra-se tratado com mais detalhe por exemplo em Barlat *et al* [34].

4.7 Referências

1. Marques, J.M.M.C., *Nonlinear finite elemet solutions with quasi- and secant-Newton methods.* Numerical Methods for Non-Linear Problems. Vol. 3. 1986, Swansea: Pineridge Press Ltd.
2. Crisfield, M.A., *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures.* Vol. 1. 1991: John Wiley & Sons.
3. Hinton, E., *NAFEMS Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis.* 1992, Glasgow: NAFEMS.
4. Matthies, H. and G. Strang, *The solution of nonlinear finite element equations.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1979. **14**: p. 1613-1626.
5. Crisfield, M.A., *Solution procedures for non-linear computational mechanics.* Recent Advances in non-linear computational mechanics, ed. E. Hinton, D.R.J. Owen, and R.L. Taylor. 1982, Swansea: Pineridge Press.
6. Bergan, P.G., *Solution algorithms for nonlinear structural problems.* Computer and Structures, 1980. **12**: p. 497-510.
7. Bergan, P.G. and E. Mollestad, *Static and dynamic solution strategies in nonlinear analysis.* Numerical Methods for Non-linear Problems, ed. C. Taylor. Vol. 2. 1984, Swansea: Pineridge Press.
8. Natal Jorge, R.M., *Modelação de Problemas Incompressíveis pelo Método das Deformações Acrescentadas baseado em Modos Compatíveis.* 1998, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
9. Reis Gomes, C.M.B., *Matrix Update Methods in Nonlinear Analysis of Two Dimensional and Thin Shell Problems.* 1982, University College of Swansea: Wales.
10. Broyden, C.G., *Quasi-Newton or modification methods.* Numerical solution of systems of nonlinear equations, ed. C.B.e.C. Hall. 1973, New York: Academic Press.
11. Dennis, J.E. and J.J. More, *Quasi-Newton methods, motivation and theory.* SIAM, 1977. **19**: p. 46-89.

12. Crisfield, M.A., *Solution procedures for non-linear structural problems.* Recent advances in non-linear computational mechanics, ed. D.R.J.O.e.C.T. E. Hinton. 1982, Swansea: Pineridge Press.
13. Sharifi, P. and E.P. Popov, *Nonlinear buckling analysis of sandwich arches.* J. Engng. Mech. Div., 1971. **97**: p. 1392-1397.
14. Zienkiewicz, O.C., *Incremental displacement in nonlinear analysis.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1971. **3**: p. 587-588.
15. Stricklin, J.A., W.E. Haisler, and W.A. Von-Reissman, *Evaluation of solution procedures for material and/or geometrically nolinear structural analysis.* AIAA Journal, 1973. **11**: p. 292-299.
16. Stricklin, J.A., W.E. Haisler, and J.E. Key, *Displacement incrementation in nonlinear structural analysis by the self correcting method.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1977. **11**: p. 3-10.
17. Batoz, J.L. and G. Dhatt, *Incremental displacement algorithms for non-linear problems.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1979. **14**: p. 1292-1267.
18. Ricks, E., *An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems.* International Journal of Solids and structures, 1979. **15**: p. 524-551.
19. Wempner, G.A., *Discrete approximations related to nonlinear theories of solids.* International Journal of Solids and structures, 1971. **7**: p. 1581-1599.
20. Crisfield, M.A., *A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap through.* Computer and Structures, 1971. **13**: p. 55-62.
21. Ramm, E., *Strategies for tracing non-linear responses near limit points.* Non-linear Finite Element Analysis in Structural Mechanics, ed. W. Wunderlich, E. Stein, and K.J. Bathe. 1981, New York: Springer-Verlag.
22. Crisfield, M.A., *Accelerated solution techniques and concrete cracking.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1982. **33**: p. 585.

23. Crisfield, M.A., *An arch-length method including line serches and accelerations.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1983. **19**: p. 1269.

24. Crisfield, M.A., *Difficulties with current numerical models for reinforced concrete and some tentative solutions*, in *Num. Meth. for nonlinear problems*, C. Taylor, Editor. 1984, Pineridge Press: Swansea. p. 244-277.

25. Crisfield, M.A., *New solution procedures for linear and nonlinear finite element analysis.* The mathematics of finite elements and aplications V. 1985, London: Academic Press.

26. Crisfield, M.A., *Overcoming limit points with material softening and strain lacalisation.* Num. Meth. for nonlinear problems, ed. C. Taylor. 1984, Swansea: Pineridge Press.

27. Martin, J.B., *An internal approach to the formulation of finite element problems in plasticity.* Physical Nonlinearities in Structural Analysis. 1981: Springer-Verlag.

28. Owen, D.R.J. and E. Hinton, *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice.* 1980, Swansea, U.K.: Pineridge Press.

29. Ortiz, M. and E.P. Popov, *Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1985. **21**(9): p. 1561-1576.

30. Ortiz, M. and J.C. Simo, *An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1986. **23**(353-366).

31. Simo, J.C. and R.L. Taylor, *Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1985. **48**: p. 101-118.

32. Runesson, K., A. Samuelsson, and L. Bernspang, *Numerical techniques in Plasticity including Solution Advancement Control.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1986. **22**: p. 769-788.

33. Dodd, B. and R.M. Caddell, *On the Anomalous Behavior of Anisotropic Sheet Metals.* International Journal of Mechanical Sciences, 1984. **26**(2): p. 113-118.

34. Barlat, F., et al., *Plane stress yield function for aluminum alloy sheets - part 1: theory.* International Journal of Plasticity, 2003. **19**: p. 1297-1319.

Capítulo 5

Exemplos Numéricos

5.1 Introdução

Neste capítulo apresentam-se alguns exemplos que se destinam a testar os modelos materiais implementados. Os exemplos apresentados destinam-se a verificar o comportamento do elemento S4E6P7 quando utilizado em conjunto com modelos materiais anisotrópicos.

Os vários exemplos destinam-se ainda a mostrar a influência do comportamento anisotrópico do material nos resultados obtidos, quer em termos de deslocamentos, quer em termos de deformação plástica efectiva. Para tal, os resultados obtidos considerando o comportamento anisotrópico do material são comparados com os resultados que se obtém quando se considera um comportamento isotrópico do material.

O retorno à superfície de cedência é efectuado com base no algoritmo "Backward-Euler" Completo. Na resolução do sistema com as equações de equilíbrio utiliza-se o método de Newton-Raphson em que a matriz de rigidez é actualizada em todas as iterações para garantir uma melhor convergência.

5.2 Ensaio de uma placa sujeita ao corte

Este exemplo consiste em submeter um provete a uma solicitação de corte puro. A utilização deste ensaio é importante para a simulação da formabilidade de chapas de metal em operações de enformação, pois permite obter experimentalmente uma relação matemática entre a evolução das tensões e as deformações, desde as pequenas às grandes deformações. O teste ao corte é crucial neste aspecto, pois uma solicitação de corte puro não vai introduzir variações de secção, sendo a tensão de corte proporcional à carga aplicada. A

deformação de corte pode ser facilmente obtida, pois é igual ao ângulo de rotação ($\overline{\theta}$), como se pode ver na Figura 5.1. Para o efeito basta dividir o deslocamento relativo das amarras pela largura do provete que se encontra efectivamente ao corte, obtendo-se o seno do respectivo ângulo. Os dados utilizados nesta simulação foram retirados da referência [1].

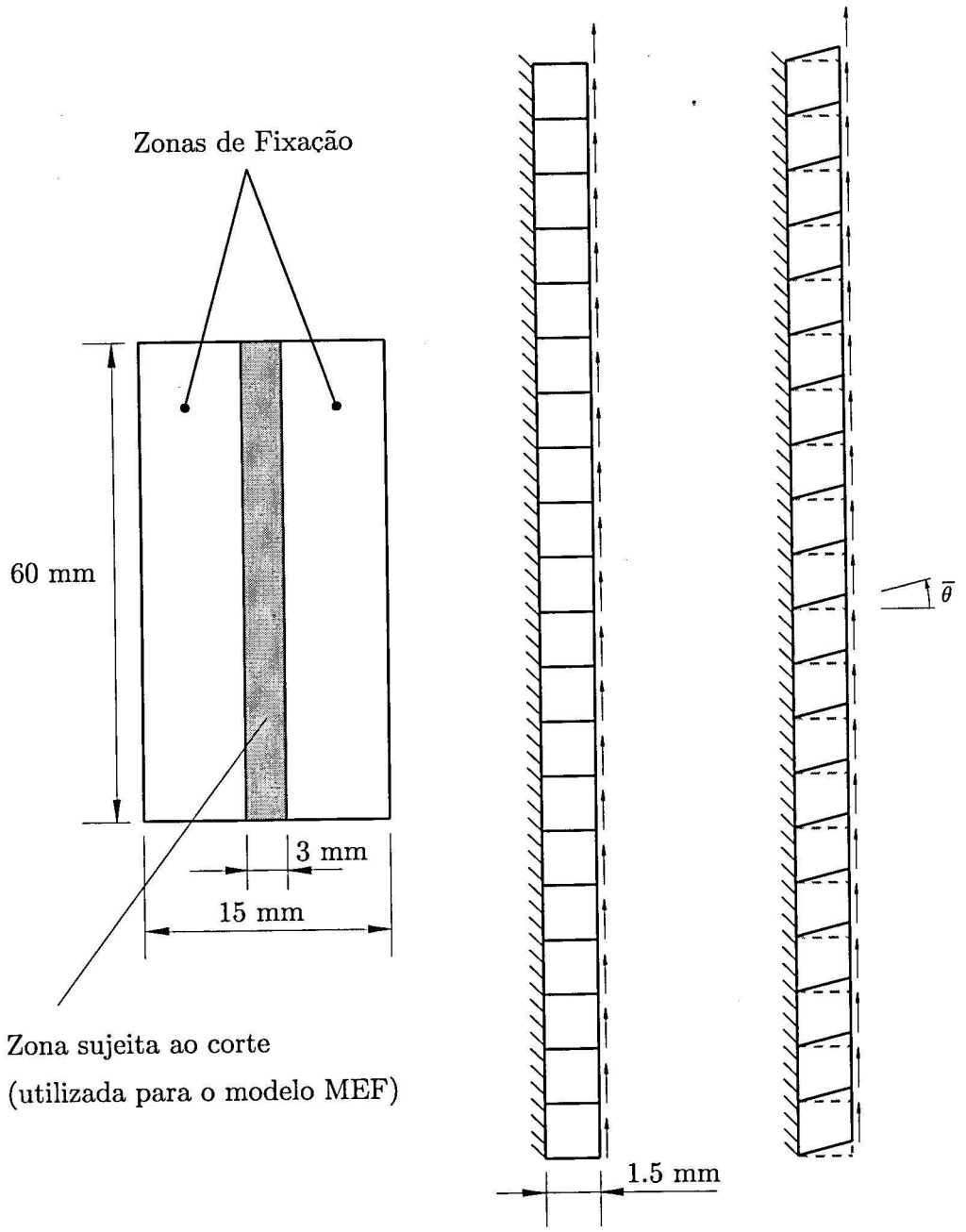


Figura 5.1 Provete e malha de elementos finitos utilizada.

Nesta simulação apenas se modelou metade do provete que se mostra na Figura 5.1. Pode-se também observar o modelo de elementos finitos e as

condições fronteira utilizados. Os nós de uma das extremidades foram fixos, sendo os restantes impedidos de se deslocarem na direcção perpendicular ao provete. A cada um destes nós aplicou-se uma força concentrada, tal como se pode observar na Figura 5.1. Para o provete da figura considera-se que para a orientação de 0° a direcção de laminagem encontra-se alinhada com o corpo do provete, ou seja, na vertical.

Experimentalmente, dispunha-se de resultados em que os provetes tinham sido retirados a 45° e 90° em relação à direcção de laminagem, pelo que as simulações efectuadas tiveram também em conta esses dados.

As propriedades do material utilizado, uma liga Al-Mg-Si 6062, são as seguintes: módulo de Young, $E = 70.0\,\text{GPa}$, Coeficiente de Poisson, $\nu = 0.3$, tensão inicial de cedência, $\sigma_0 = 165.0\,\text{MPa}$, coeficientes para a função de cedência de Barlat [2], $C_1 = 0.9409$, $C_2 = 0.8627$, $C_3 = 0.9836$, $C_4 = C_5 = 1.0$, $C_6 = 1.0036$, $m = 8.0$. Para descrever os dados de tensão/deformação obtidos experimentalmente, foi utilizada a seguinte lei de encruamento de Voce.

$$\bar{\sigma} = 391.0 - 226.0 \times \exp\left(-11.9 \times \varepsilon^p\right) \quad \text{[MPa]} \tag{5.1}$$

Foi também feita uma simulação com base num software comercial, o LS-DYNA, um programa explícito de qualidade reconhecida.

A comparação entre os resultados obtidos e os resultados experimentais [1] podem ser observados na Figura 5.2. De notar-se que na referência [1] o modelo material utiliza endurecimento cinemático, tendo sido aplicada uma velocidade prescrita aos nós.

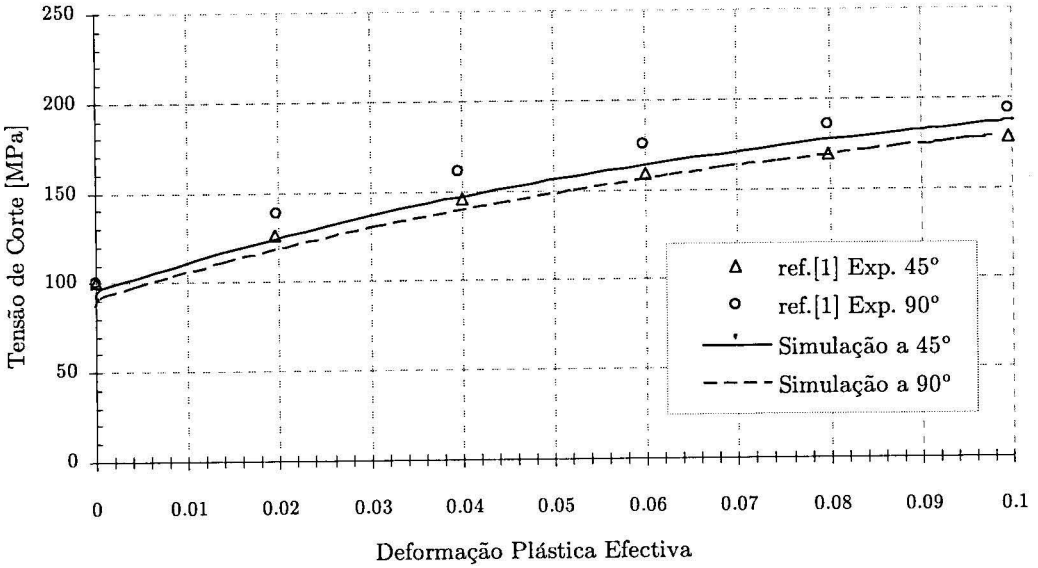


Figura 5.2 Resultados obtidos e resultados experimentais para 45 e 90°.

Na Figura 5.3 mostram-se os resultados obtidos para 45°, comparados com os obtidos a partir do software comercial LS-DYNA e os retirados da referência [1].

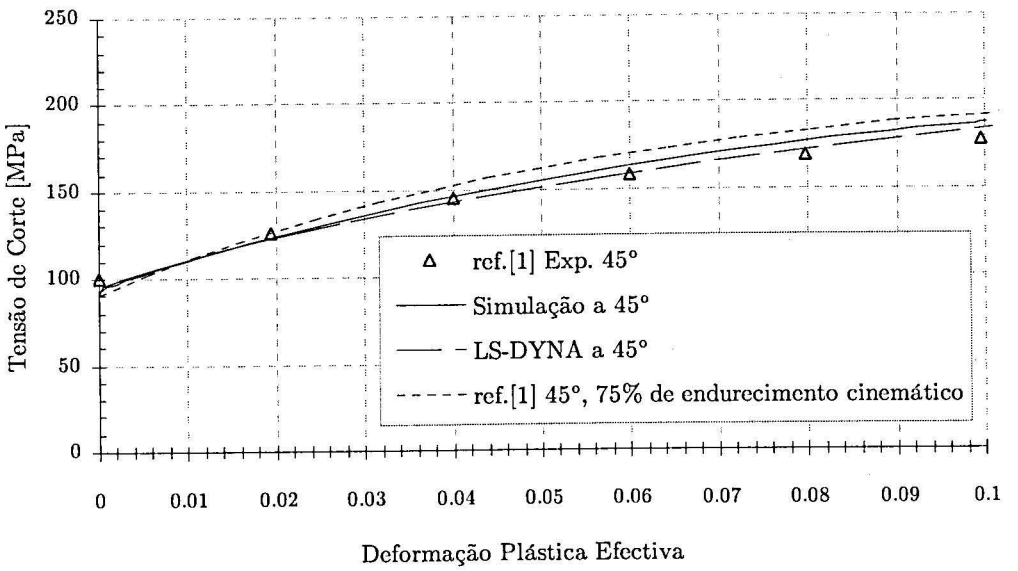


Figura 5.3 Resultados obtidos para 45°.

Na Figura 5.4 mostram-se para 90°, os resultados experimentais, numéricos provenientes da referência [1] e os obtidos pelo software LS-DYNA, bem como os resultados do presente trabalho.

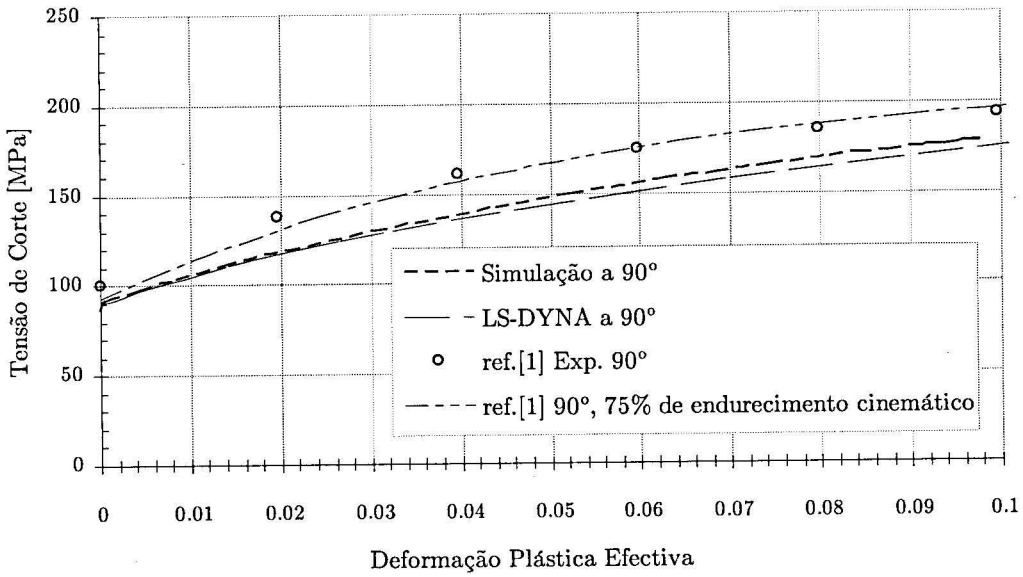


Figura 5.4 Resultados obtidos para 90°.

Estas figuras mostram a variação da tensão de corte para as várias experiências em função da deformação plástica efectiva. Tal como se pode observar, os resultados experimentais revelam diferenças acentuadas, quando se passa de uma direcção de 45° para 90° em relação à direcção de laminagem. Observa-se também que existe uma boa concordância de resultados entre os valores obtidos com as rotinas implementadas e o programa LS-DYNA. Esta concordância é melhor na parte inicial da simulação, verificando-se um ligeiro afastamento na parte final. Não pode ser alheio o facto de apesar de o modelo material ser o mesmo, a formulação dos elementos finitos e o algoritmo de integração utilizados serem diferentes (explícito no LS-DYNA e implícito no programa utilizado para a implementação).

Verifica-se contudo que existe uma certa discrepância entre os resultados obtidos com base na implementação efectuada e os resultados obtidos por Cardoso [1]. Todavia, para o teste a 45°, verifica-se concordância dos resultados obtidos com os experimentais.

Nas Figuras 5.5 e 5.6 pode-se observar a variação da Tensão de Corte com a deformação de corte (ângulo $\overline{\theta}$ da Figura 5.1).

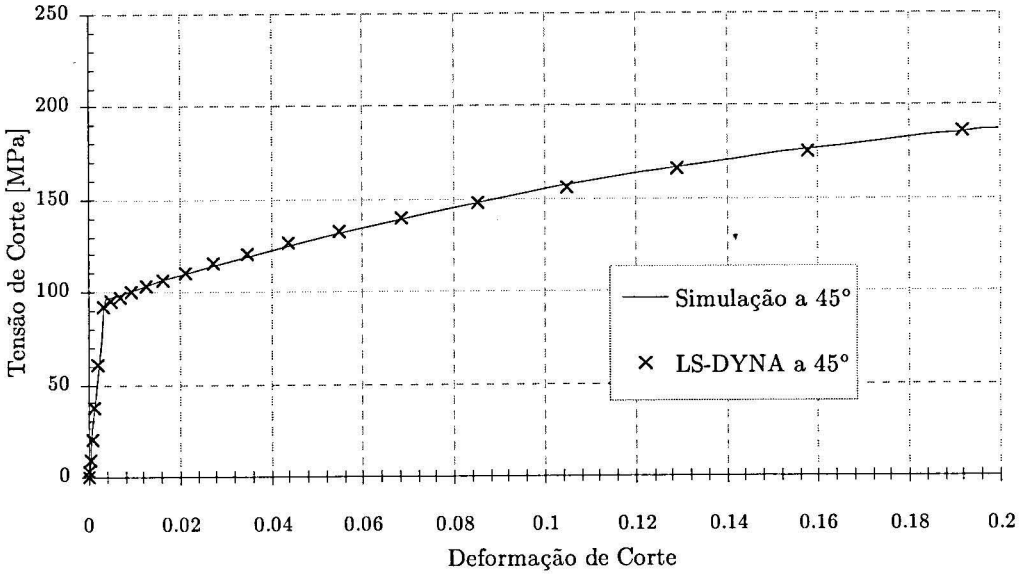


Figura 5.5 Resultados obtidos para 45°.

Na Figura 5.6 compara-se os resultados para 90°, relativamente à variação da tensão de corte com a deformação de corte, incluindo os resultados obtidos a partir das rotinas implementadas, software comercial e referência [1].

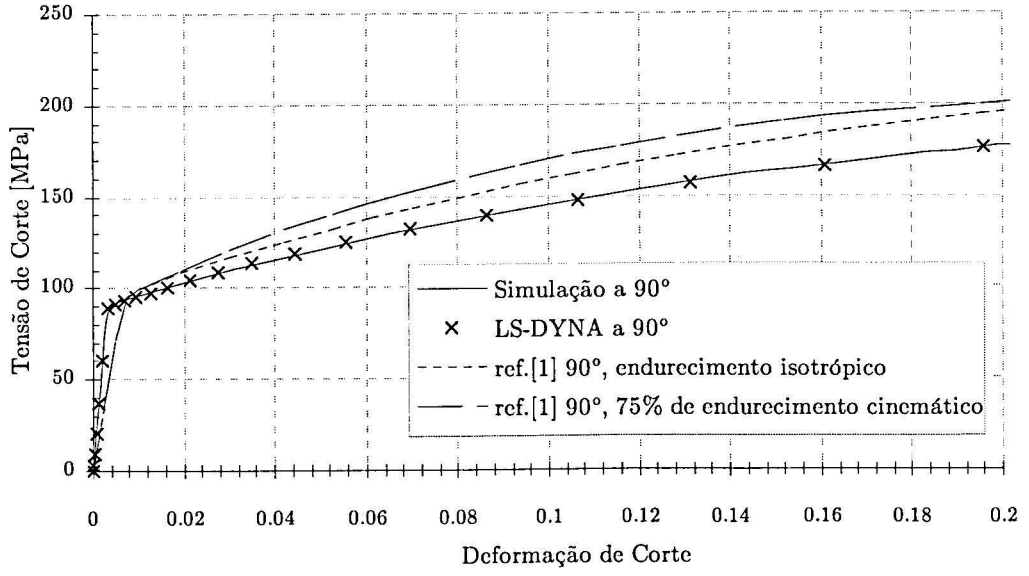


Figura 5.6 Resultados obtidos para 90°.

Observando-se a Figura 5.5 e Figura 5.6 pode-se concluir que a evolução da tensão de corte com a deformação de corte para os 45° e 90° está em boa concordância para os resultados obtidos a partir das rotinas implementadas e do programa comercial utilizado. Continuando a notar-se contudo, uma falta de concordância com os resultados experimentais, pelo que se pode concluir pela necessidade de se incluir o endurecimento cinemático.

5.3 Placa quadrada sujeita a uma pressão distribuída

Este exemplo consiste na análise de uma placa simplesmente apoiada, com comportamento elasto-plástico. A placa é sujeita a uma pressão uniforme em toda a sua extensão, provocando um aumento da força total à medida que a chapa se vai deformando, aumentando a área exposta à pressão. Este exemplo tem a finalidade de testar o elemento finito S4E6P7 e as rotinas referentes às leis materiais implementadas, na presença de uma não-linearidade material e geométrica elevada. Na primeira fase do problema, os elementos estão sujeitos principalmente a esforços de flexão, predominando na segunda fase do problema os esforços de membrana.

Este problema isotrópico encontra-se tratado em várias referências, Miehe [3], Betsch e Stein [4], Eberlein e Wriggers [5], Doll *et al.* [6], Hauptmann *et al.* [7] e em Harnau e Schweizerhof [8].

A placa tem uma geometria quadrangular, com um lado de 508 mm e uma espessura de 2.54 mm. Nesta simulação foi utilizado o mesmo material da simulação anterior, uma liga de alumínio Al-Mg-Si 6062, sendo utilizada a mesma lei de encruamento, dada pela equação (5.1). A introdução deste material, em detrimento do material proposto pelas referências descritas vai permitir estudar a influência da utilização de um material anisotrópico no comportamento da placa em estudo, o que não é feito nas referências indicadas.

Modelou-se apenas um quarto da geometria da placa, utilizando-se uma malha de 24×24 elementos, tal como proposto em [4]. As condições fronteira utilizadas são condições de simetria e impedimento de deslocamento na direcção perpendicular ao plano da chapa, tal como se mostra na Figura 5.7.

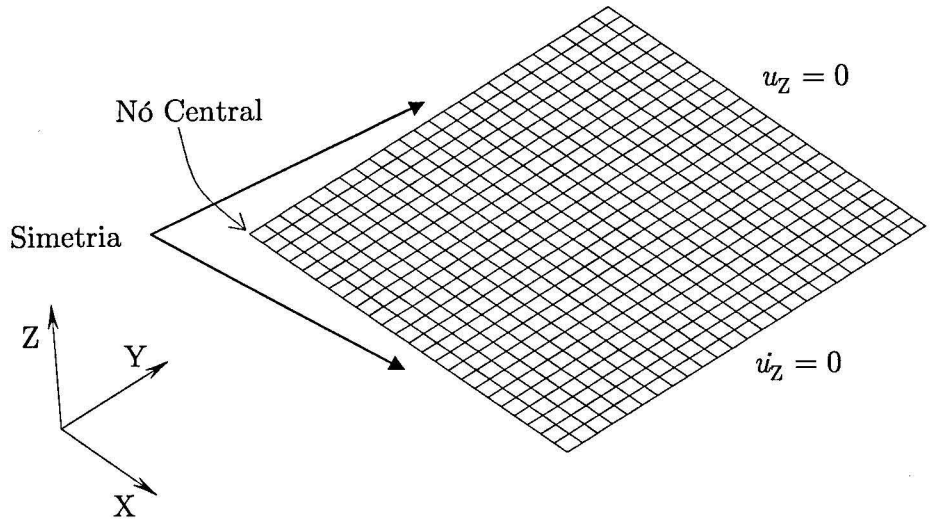


Figura 5.7 Malha de elementos finitos e condições fronteira.

A placa é sujeita a uma pressão uniformemente distribuída de $p = 60 \cdot p_0$ onde $p_0 = 10^{-2}$ MPa . À medida que a pressão aumenta, a placa apresenta um modo de deformação "tipo almofada", passando de um modo de deformação em que inicialmente predomina a deformação por flexão para um modo de deformação em que predominam as deformações de membrana.

A evolução do deslocamento do nó central em função do factor de carga pode ser observada na Figura 5.8. Da referida figura pode-se concluir que para um mesmo valor de pressão, se obtém um deslocamento maior quando se utiliza o critério de von Mises. O deslocamento é menor quando se utiliza o critério de Barlat para uma direcção de laminagem orientada a 45° (relativamente ao eixo X centrado no nó central).

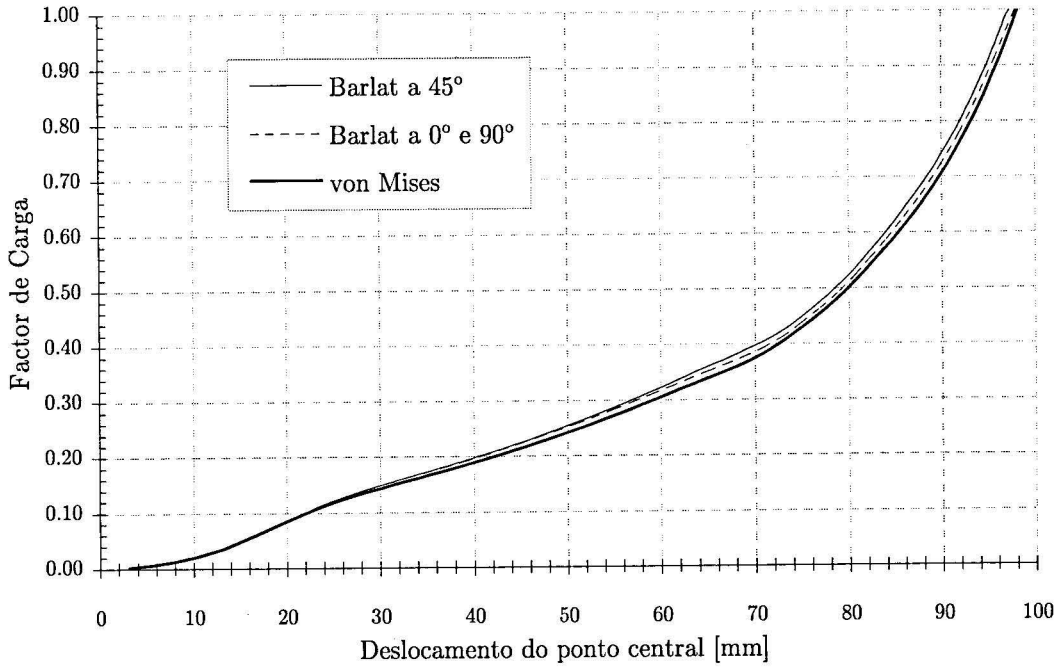
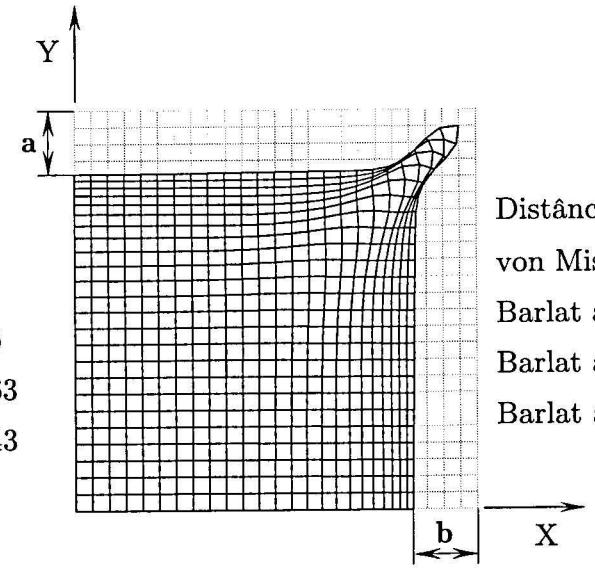


Figura 5.8 Evolução do factor de carga em função do deslocamento do ponto central.

As figuras seguintes (Figura 5.9 e Figura 5.10) mostram a malha deformada para uma pressão de 0.6 MPa e 1.2 MPa e os deslocamentos nos lados da "almofada".



Distância **a**:
von Mises – 40.71
Barlat a 0° – 40.45
Barlat a 45° – 40.63
Barlat a 90° – 40.43

Distância **b**:
von Mises – 40.71
Barlat a 0° – 40.43
Barlat a 45° – 40.63
Barlat a 90° – 40.45

Figura 5.9 Deslocamentos obtidos com o critério de Barlat e von Mises para diferentes direcções de laminagem (Barlat) e uma pressão de 0.6 MPa.

Tal como se pode observar na Figura 5.9, os deslocamentos das faces laterais do modelo são maiores quando se utiliza o critério de von Mises. Quando se utiliza o critério de Barlat, com a direcção de laminagem alinhada com o eixo X (a 0°), os deslocamentos nessa direcção (distância b) são menores do que na direcção perpendicular (distância a). Uma vez que a direcção de laminagem é a direcção que possui uma resistência maior, os resultados obtidos estão de acordo com o esperado. Estes valores invertem-se para uma direcção de laminagem a 90° em relação ao eixo X. Para uma direcção de 45° em relação ao eixo X obtém-se um valor idêntico para a distâncias "a" e "b".

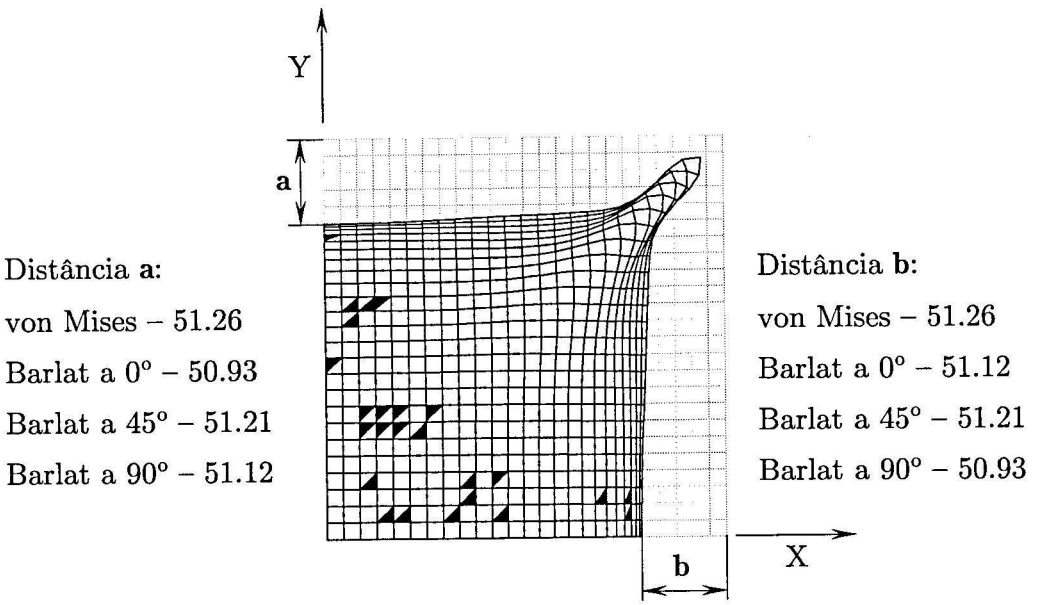


Figura 5.10 Deslocamentos obtidos com o critério de Barlat e von Mises para diferentes direcções de laminagem (Barlat) e uma pressão de 1.2 MPa.

Para uma pressão de 1.2 MPa, os resultados obtidos são contrários aos obtidos para uma pressão de 0.6 MPa. O deslocamento "b", obtido quando se utiliza o critério de Barlat para uma direcção de laminagem paralela ao eixo X é inferior ao deslocamento medido na direcção do eixo Y (distância "a"). Este facto pode ser justificado com uma observação mais atenta da Figura 5.15, onde se pode observar o aparecimento de rugas nas zonas onde se apresentam as distâncias "a" e "b". Desta forma, com o aumentar da pressão, esta zona torna-se instável, com uma tendência a formar rugas, ainda que muito ténues a 1.2 MPa.

Na Figura 5.11 pode-se observar a distribuição da deformação plástica efectiva para uma pressão de 0.6 MPa. O sistema de coordenadas é idêntico ao que se mostra na Figura 5.9 e Figura 5.10. Na Figura 5.11 foi utilizado o critério

de Barlat para uma direcção de laminagem a 90° em relação ao eixo X. Tal como se pode observar, a distribuição da deformação plástica efectiva não é simétrica, o que só aconteceria para uma direcção de laminagem a 45°. Na Figura 5.11 pode-se ainda observar que a deformação plástica se encontra localizada nos cantos da chapa (0.1). Esta zona da chapa está sujeita a deformações plásticas muito elevadas, onde se apresenta totalmente dobrada.

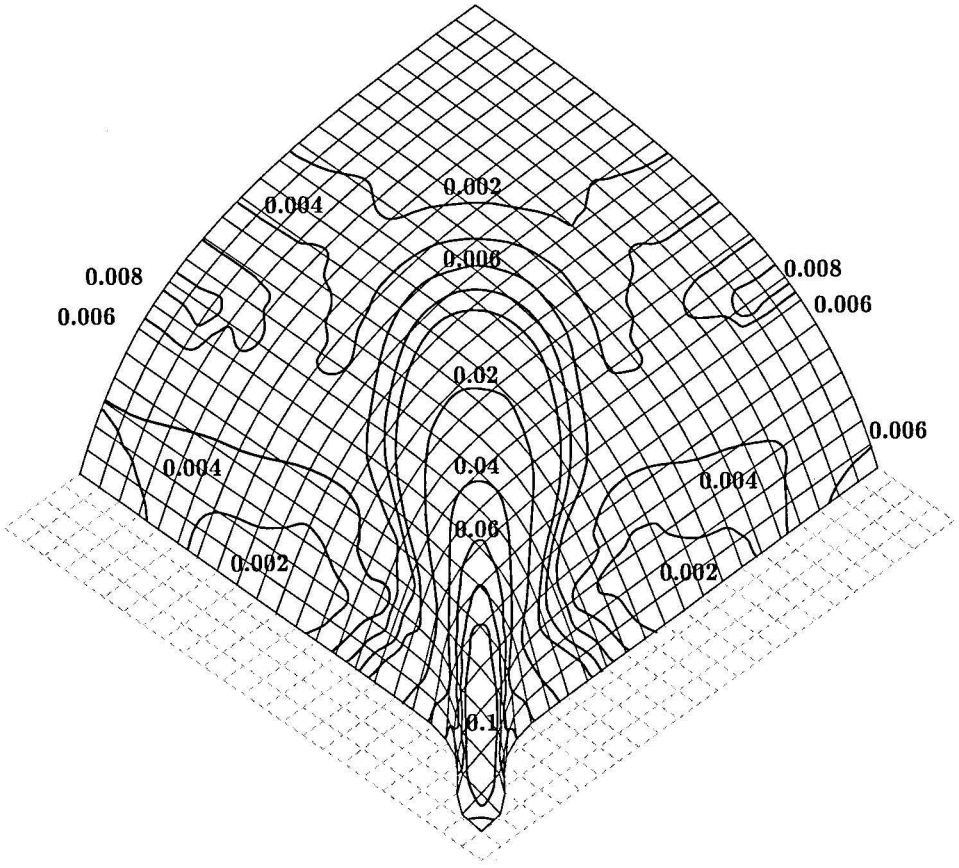


Figura 5.11 Distribuição da deformação plástica efectiva para o critério de Barlat a 90°, para uma pressão de 0.6 MPa.

Na Figura 5.12 pode-se observar a distribuição da deformação plástica efectiva para uma pressão de 1.2 MPa. Nesta figura também se pode observar que a distribuição mostrada não é simétrica.

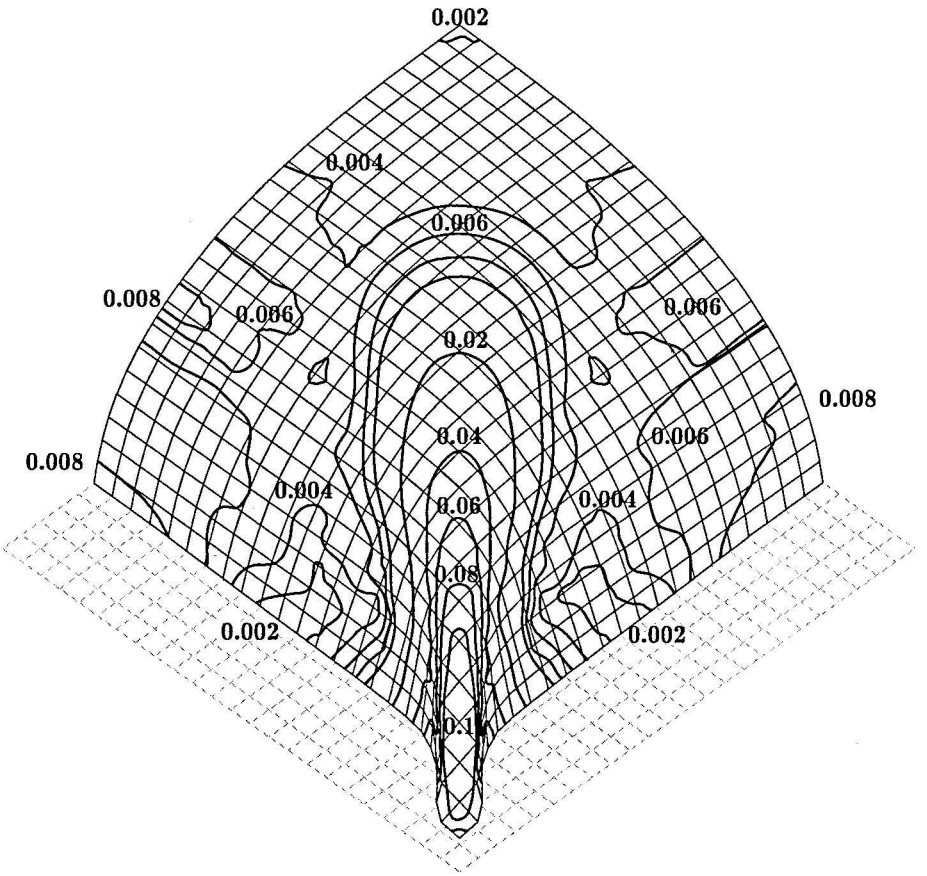
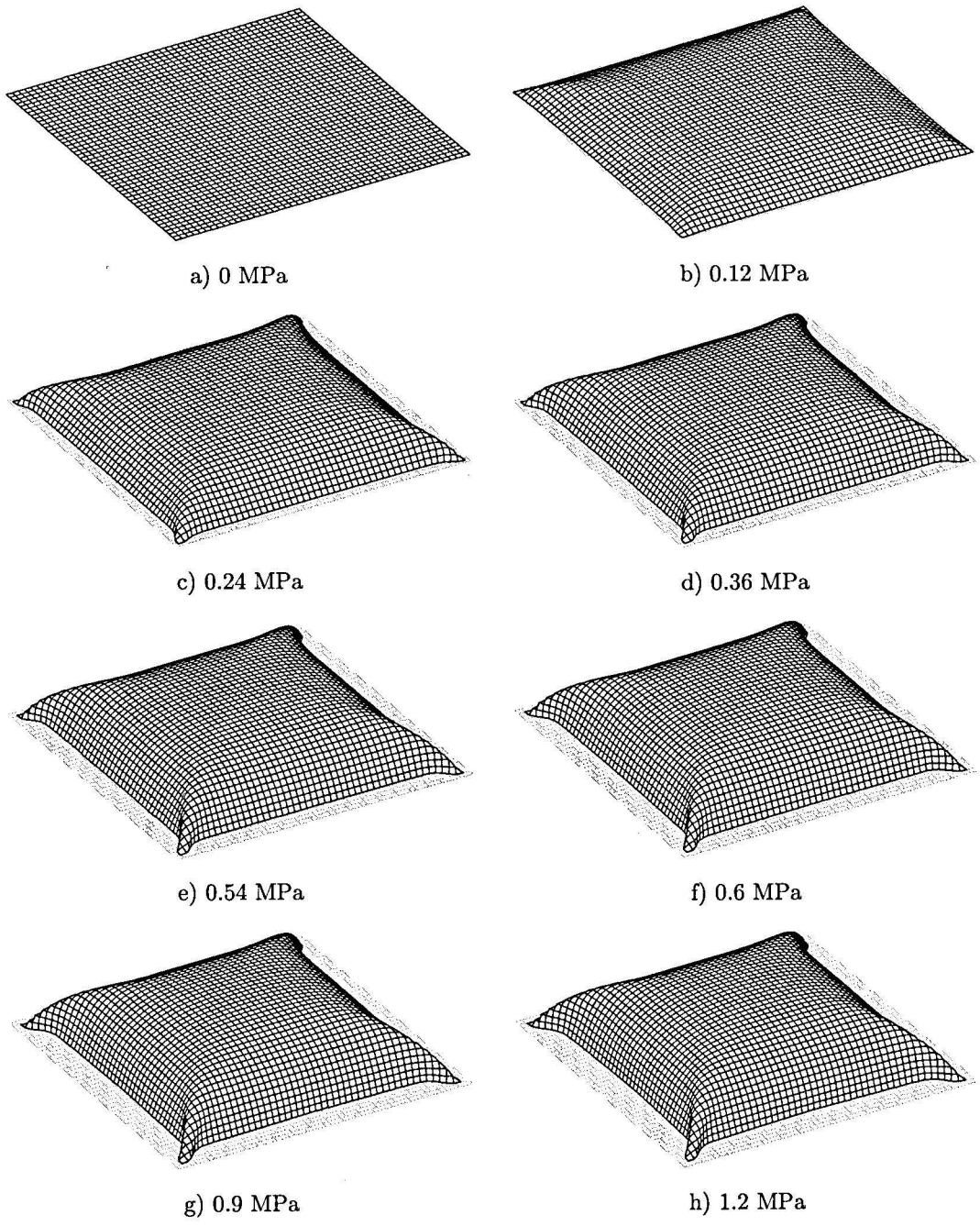


Figura 5.12 Distribuição da deformação plástica efectiva para o critério de Barlat a 90°, para uma pressão de 1.2 MPa.

Na Figura 5.13 mostra-se uma sequência de imagens que representam a evolução da malha deformada ao longo da simulação. Nesta sequência de imagens pode-se observar a formação das dobras nos cantos da chapa. Para pressões mais elevadas, tal como se mostra na Figura 5.15 e Figura 5.17, as dobras deixam de ser tão vincadas.



a) 0 MPa b) 0.12 MPa

c) 0.24 MPa d) 0.36 MPa

e) 0.54 MPa f) 0.6 MPa

g) 0.9 MPa h) 1.2 MPa

Figura 5.13 Malha inicial e deformada para diferentes pressões para o critério de Barlat a 0°.

Este problema foi também simulado com uma malha mais refinada de acordo com a referência [1]. O refinamento dá-se sobretudo na zona da chapa que se encontra mais sujeita a deformações plásticas, os cantos da chapa. Na Figura 5.14 mostra-se a nova malha de elementos finitos, com as condições fronteira utilizadas.

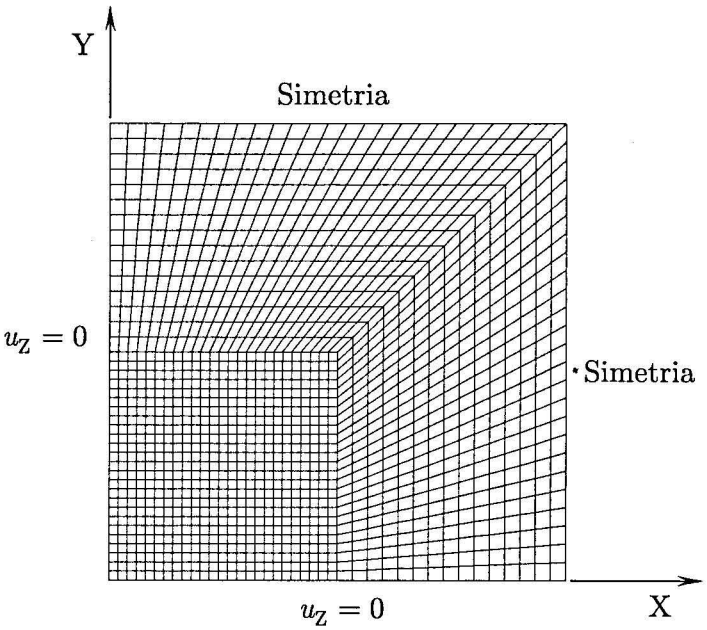


Figura 5.14 Malha mais refinada e condições fronteira.

A utilização da malha da Figura 5.14 vai permitir obter uma solução mais correcta para a zona dos cantos da chapa, pois esta zona encontra-se sujeita a esforços elevados. Para este modelo foi aplicada uma pressão total de 6.6 MPa, mostrando-se nas figuras seguintes a distribuição da deformação plástica efectiva para uma pressão de 4.0 MPa (Figura 5.15), 6.0 MPa (Figura 5.16) e 6.6 MPa (Figura 5.17).

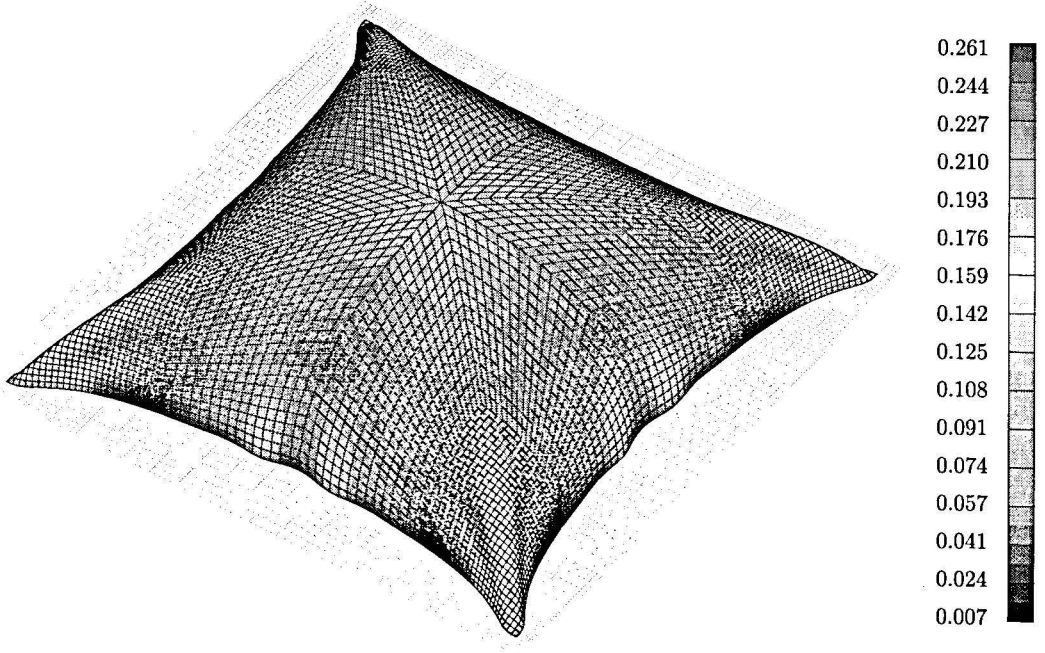


Figura 5.15 Malha inicial e deformada mostrando a distribuição de deformação plástica efectiva para uma pressão de 4.0 MPa, utilizando-se o critério de Barlat a 45°.

Na Figura 5.15 mostra-se os resultados obtidos utilizando o critério de Barlat, para uma direcção de laminagem a 45° relativamente ao eixo X. Para esta pressão verifica-se o aparecimento de rugas nos lados da chapa, 2 rugas em cada um dos lados. Para uma pressão mais elevada, as rugas que se formaram tendem a desaparecer, devido ao efeito da pressão. Na Figura 5.16, onde se mostra a distribuição de deformação plástica efectiva para uma pressão de 6.0 MPa, pode-se observar novamente as rugas, mas menos marcadas, com tendência a desaparecerem.

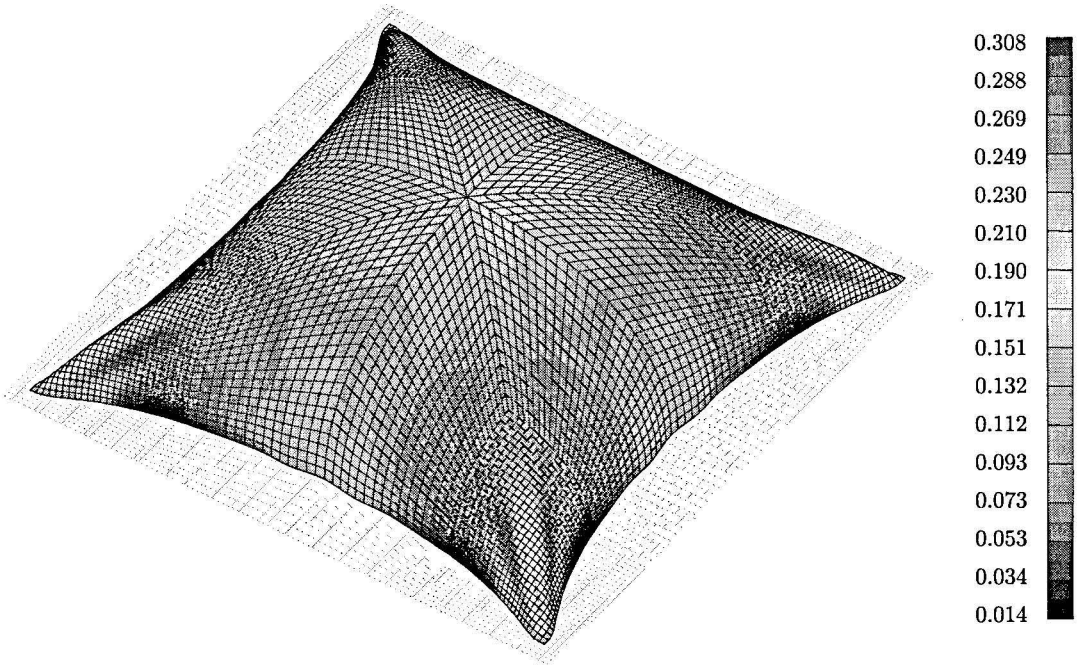


Figura 5.16 Malha inicial e deformada mostrando a distribuição de deformação plástica efectiva para uma pressão de 6.0 MPa, utilizando-se o critério de Barlat a 45°.

Na imagem seguinte (Figura 5.17) pode-se observar a malha deformada, obtida para uma pressão de 6.6 MPa. Tal como se pode observar nesta figura, as rugas já praticamente não se fazem notar na malha deformada. Pode-se também observar que as dobras que se formaram nos cantos da chapa, encontram-se menos vincadas do que nas Figura 5.15 e Figura 5.16.

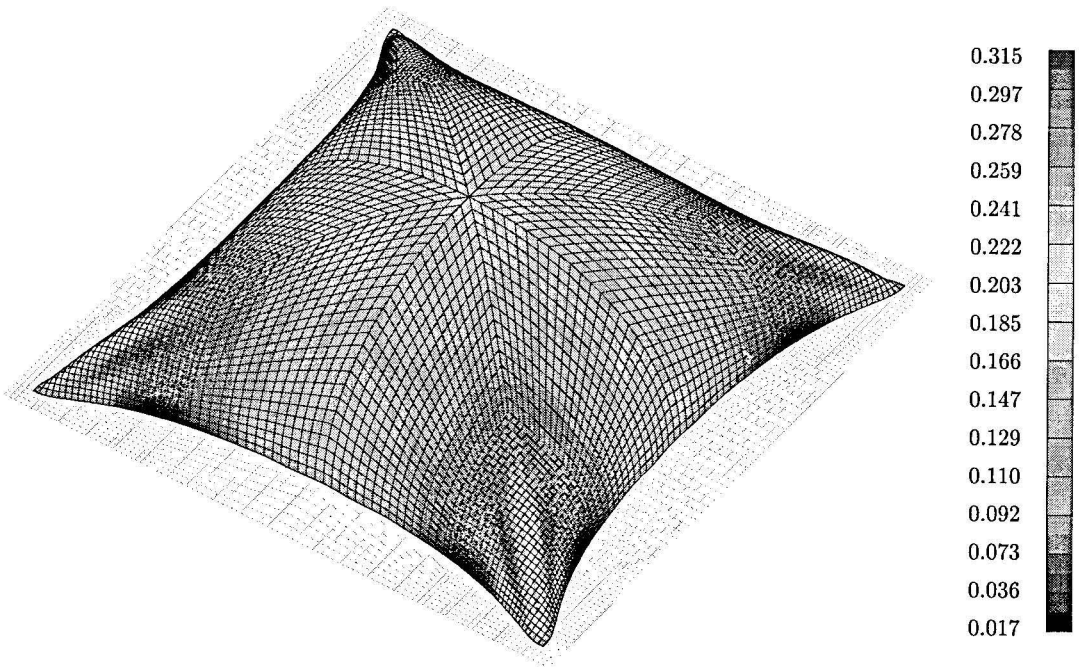
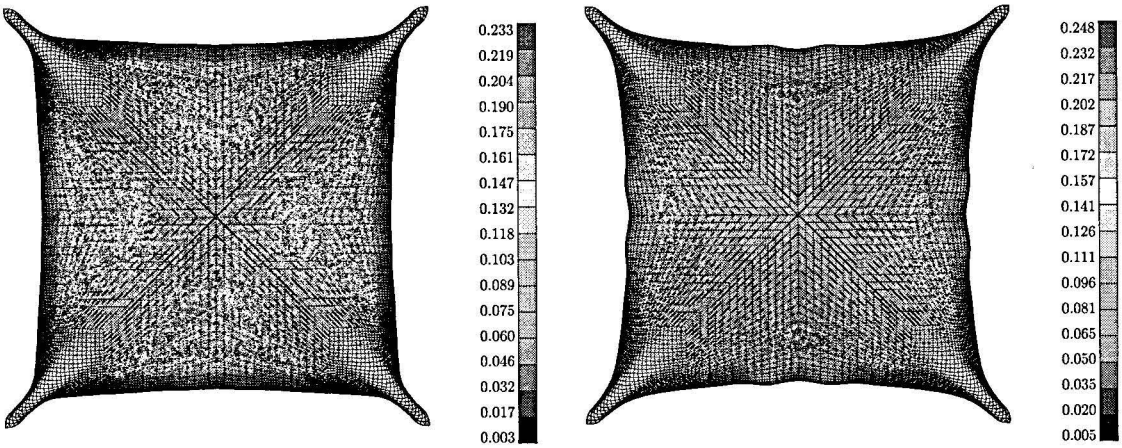


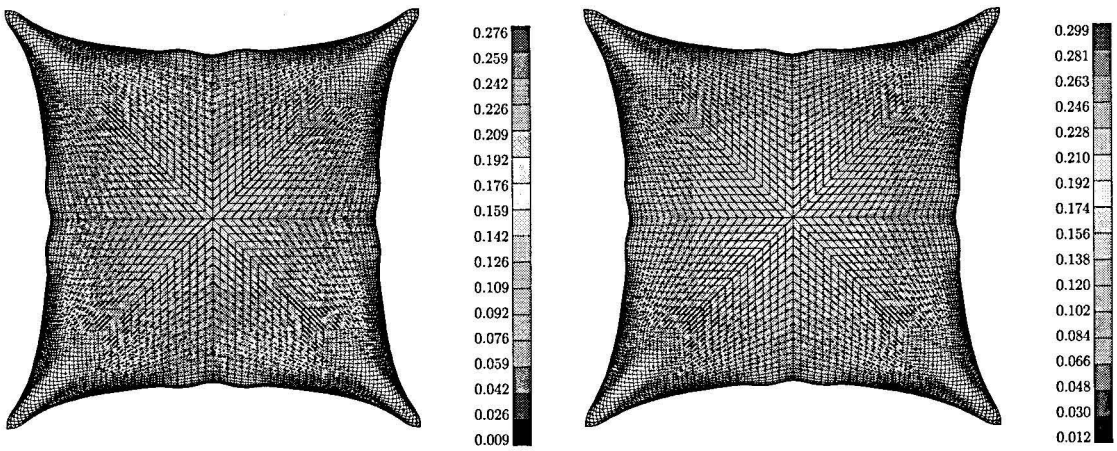
Figura 5.17 Malha inicial e deformada mostrando a distribuição de deformação plástica efectiva para uma pressão de 6.6 MPa, utilizando-se o critério de Barlat a 45°.

A evolução da deformação plástica efectiva e a evolução da deformada podem ser observadas com mais detalhe na Figura 5.18. Nesta figura pode-se observar claramente o aparecimento e posterior desaparecimento das rugas que surgem nos lados da chapa. Pode-se observar também a evolução do formato das dobras, que se vão tornando menos demarcadas à medida que a pressão vai aumentando.



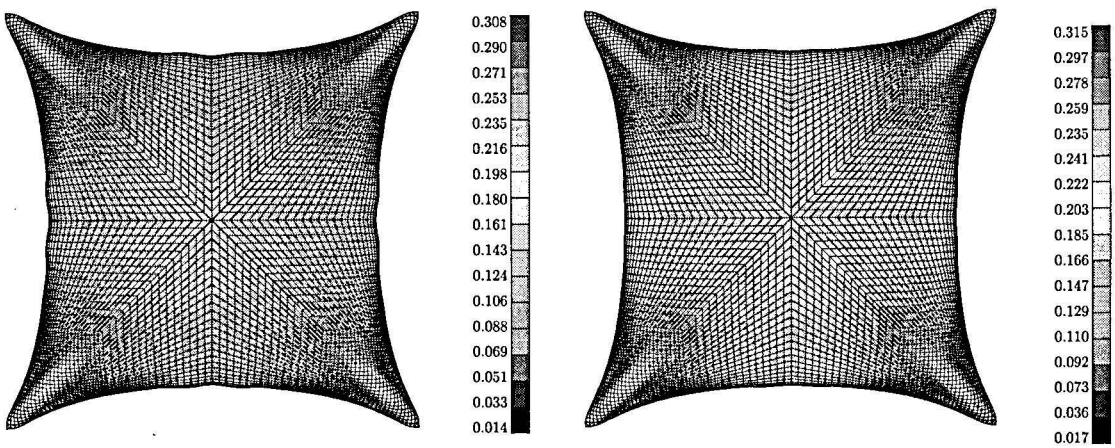
a) 2.5 MPa

b) 3.5 MPa



c) 4.5 MPa

d) 5.5 MPa



e) 6.0 MPa

f) 6.6 MPa

Figura 5.18 Deformada para diferentes pressões para o critério de Barlat a 0°.

5.4 Placa circular sujeita a uma pressão distribuída

O exemplo da placa circular sujeita a uma pressão uniforme é muito utilizado para a obtenção de curvas tensão/deformação para a conformação plástica de chapas de metal. Muitos investigadores também utilizam este teste para verificarem a validade de critérios de cedência para metais anisotrópicos.

Apesar de a geometria do modelo ser axissimétrica, as propriedades anisotrópicas do material utilizado, um Alumínio 2008-T4, vão introduzir no problema deformações não-axissimétricas.

As propriedades do material utilizado, um Alumínio 2008-T4, foram obtidas da referência [1]: módulo de Young, $E = 69.0$ GPa, Coeficiente de Poisson, $\nu = 0.33$, tensão inicial de cedência, $\sigma_0 = 185.0$ MPa, coeficientes para a função de cedência de Barlat [2], $C_1 = 1.223$, $C_2 = 1.014$, $C_3 = 0.986$, $C_4 = C_5 = C_6 = 1.0$, $m = 11.0$. Para descrever os dados de tensão/deformação obtidos experimentalmente, foi utilizada a seguinte lei de encruamento de Voce.

$$\overline{\sigma} = 408.0 - 223.0 \times \exp\left(-6.14 \times \varepsilon^p\right) \quad \text{[MPa]} \tag{5.2}$$

A malha de elementos finitos e as respectivas condições fronteira são mostradas na Figura 5.19. Junto ao encastramento pode-se verificar um ligeiro refinamento da malha, uma vez que esta zona vai estar sujeita a esforços de flexão elevados e elevadas deformações plásticas.

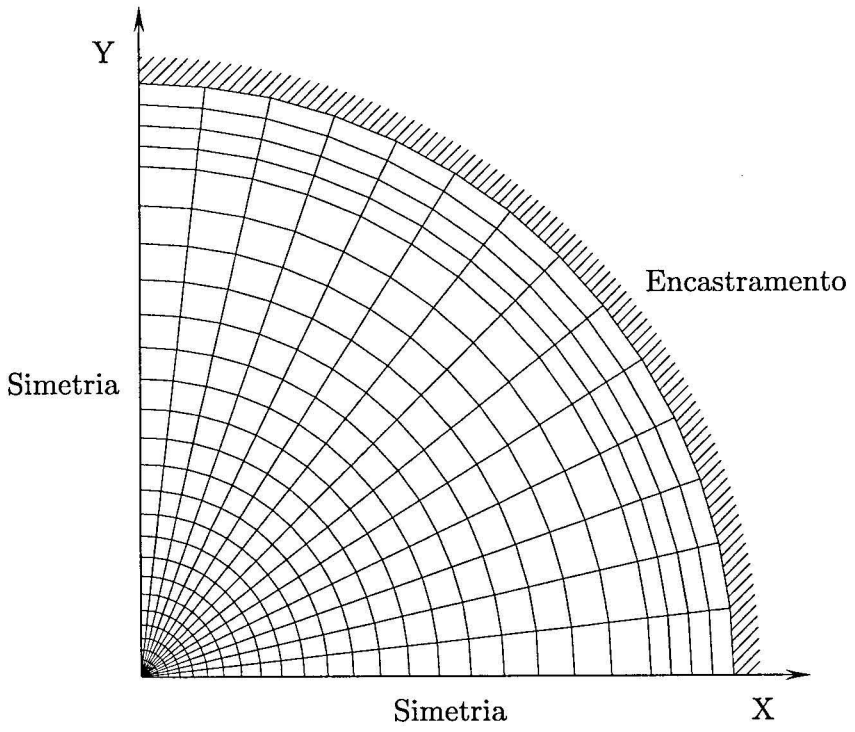


Figura 5.19 Malha de elementos finitos e condições fronteira.

Na Figura 5.20 pode-se observar a malha deformada obtida para uma pressão de 4 MPa. A presença do encastramento faz-se notar pela presença de uma ligeira "quebra" da malha perto do perímetro exterior.

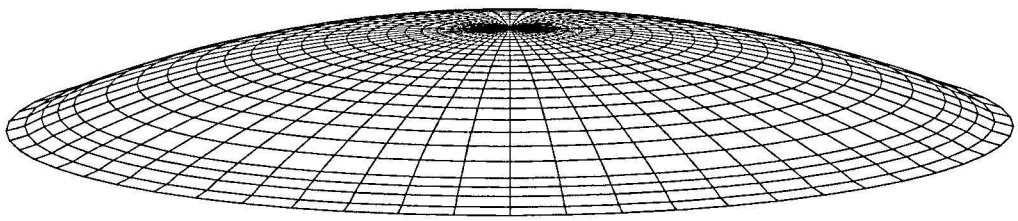


Figura 5.20 Malha deformada para uma pressão de 4MPa.

Na Figura 5.21 e Figura 5.22 pode-se observar a distribuição da deformação plástica efectiva para uma orientação de laminagem paralela ao eixo X (orientada a 0°).

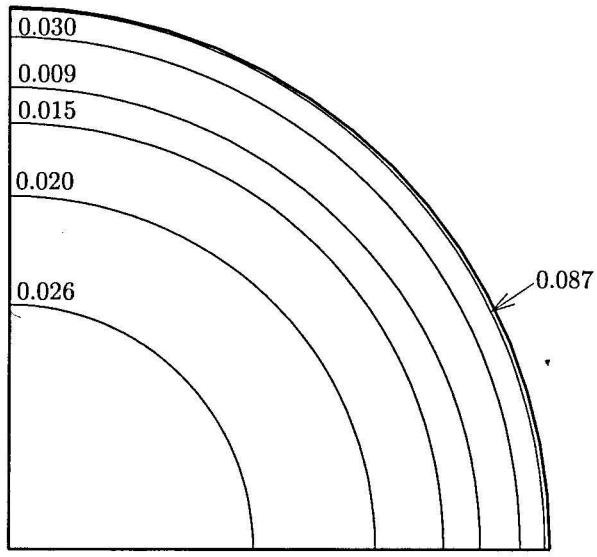


Figura 5.21 Distribuição da deformação plástica efectiva para uma pressão de 2 MPa para o critério de Barlat a 0°.

A Figura 5.21 mostra a distribuição da deformação plástica efectiva para uma pressão de 2 MPa, para uma direcção de laminagem paralela ao eixo X. Tal como se pode observar, as isocurvas mostradas não são círculos concêntricos, o que seria de esperar se se tivesse utilizado um critério isotrópico. Tal como se pode observar na Figura 5.21 e Figura 5.22, a zona com os valores mais elevados de deformação plástica encontra-se perto do eixo X, junto ao encastramento. Sendo esta a direcção que mais resistência oferece ao deslocamento, é também a zona que mais plastifica.

Os valores de deformação plástica tomam valores máximos para zonas próximas do encastramento, diminuindo com o afastamento do encastramento, voltando depois a aumentar.

Para uma pressão de 4 MPa, os resultados obtidos, que se mostram na Figura 5.22 são semelhantes aos obtidos para uma pressão de 2 MPa, apenas variando os valores máximos.

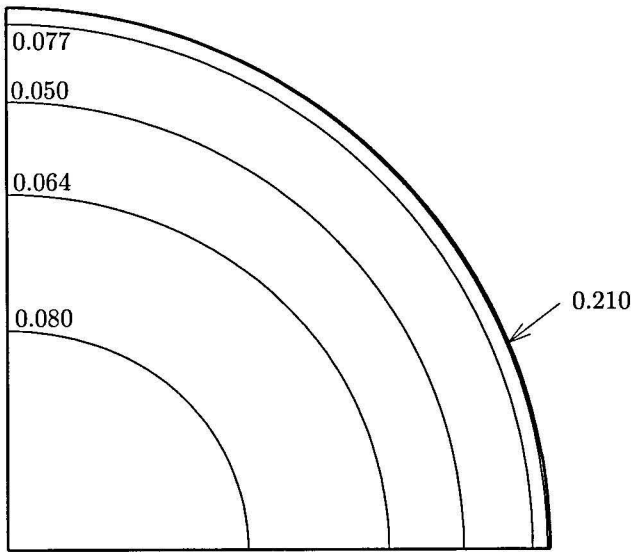


Figura 5.22 Distribuição da deformação plástica efectiva para uma pressão de 4 MPa para o critério de Barlat a 0°.

Na Figura 5.23 pode-se observar a distribuição da deformação plástica efectiva para uma pressão de 2 MPa, com uma direcção de laminagem que se encontra a 45° do eixo X. Tal como se pode observar na Figura 5.23 e Figura 5.24, a zona que apresenta uma maior deformação plástica é uma a zona próxima do encastramento, com valores de 0.086 e 0.208, respectivamente.

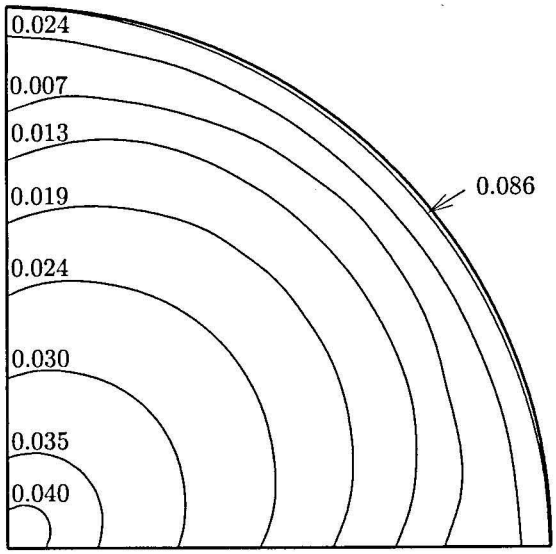


Figura 5.23 Distribuição da deformação plástica efectiva para uma pressão de 2 MPa para o critério de Barlat a 45°.

Como a direcção de maior resistência se encontra rodada em relação ao eixo X de 45°, é nessa mesma direcção que surgem os valores mais elevados de deformação plástica.

A variação da deformação plástica efectiva é semelhante ao caso anterior onde a direcção de laminagem se encontrava a 0°. A deformação plástica é máxima perto do encastramento, baixando para o seu valor mínimo num ponto intermédio entre o centro e o encastramento, para tornar a aumentar até ao centro do corpo.

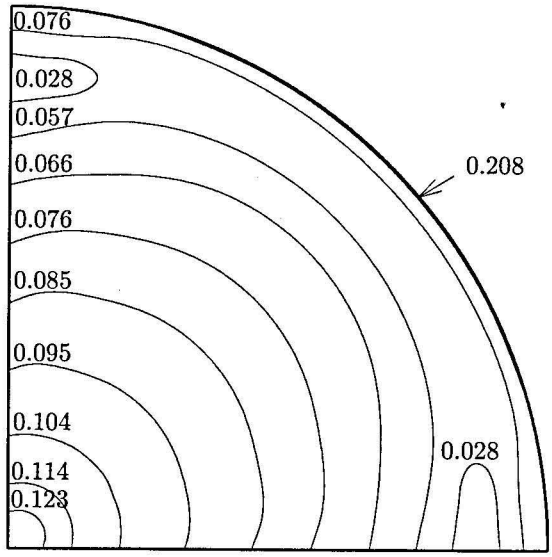


Figura 5.24 Distribuição da deformação plástica efectiva para uma pressão de 4 MPa para o critério de Barlat a 45°.

Quando se comparam os valores máximos obtidos para a simulação a 0° e 45°, eles são muitos próximos. Teoricamente eles deveriam ser iguais, pois uma solução deveria ser idêntica à outra, mas rodada de 45°. Quando se compara as simulações a 0° e 45°, para a mesma pressão, verifica-se que rodando uma das simulações de 45°, se obtêm uma boa aproximação da outra simulação.

5.5 Simulação do processo de fabrico de um fundo elíptico.

Nos últimos anos, novos processos têm sido propostos para a produção de fundos de reservatórios de pressão de corpo cilíndrico [9]. Estes novos processos utilizam a hidroformagem associada aos processos clássicos de produção. Este novo processo é especialmente indicado para a produção de fundos de reservatórios com grandes diâmetros, cuja produção pode não ser possível com

base apenas nos processos clássicos, bem como para a produção de componentes com diferentes dimensões, ou ainda para o fabrico de pequenas séries.

O fundo de um reservatório de pressão é constituído normalmente por duas partes, uma parte central de secção elíptica e uma aba circular. A aba pode ser produzida por processos clássicos, enquanto que a parte elíptica pode ser produzida por hidroformagem, sendo depois o fundo obtido por soldadura dos dois componentes.

Os processos tradicionais de produção de fundos de reservatórios incluem a embutidura a frio ou a quente dos diferentes componentes, a partir de chapas de metal que são posteriormente soldadas para se obter o fundo do reservatório. Os fundos de reservatórios de pequenas dimensões, com um diâmetro < 800 mm são normalmente obtidos a partir de uma única chapa, através de processos de embutidura. Para reservatórios de diâmetro compreendido entre 1 e 3 m, os fundos são normalmente produzidos por soldadura dos componentes constituintes, obtidos por processos de conformação plástica. Fundos de grandes dimensões, com um diâmetro > 3 m encontram normalmente alguns problemas de produção: as chapas para os componentes são de grandes dimensões; o número de unidades a produzir é reduzido; os custos são elevados quando se utilizam processos de conformação plástica, devido ao custo dos moldes de grandes dimensões; se a dimensão dos componentes for reduzida, então o número de componentes e o comprimento total de soldadura tornam-se demasiado elevados, provocando um efeito nefasto na segurança dos produtos. Está reportado que fundos de reservatórios até 6 m de diâmetro com espessuras que variam entre os 3 e 32 mm podem ser produzidos utilizando-se os métodos clássicos, no entanto para diâmetros superiores não existe nenhum método que possa ser considerado como o indicado. Como os métodos tradicionais não podem ser utilizados, devido aos moldes de custo elevado, à falta de equipamento, e reduzidas séries de produção, é necessária a utilização de uma tecnologia flexível.

A introdução da hidroformagem na produção de reservatórios de pressão foi inicialmente proposta por Wang *et al.* [10, 11] em 1985, sendo inicialmente aplicada na produção de reservatórios esféricos ou componentes esféricos. Este método foi também estendido à produção de fundos de reservatórios a partir de

uma única chapa, sendo os fundos obtidos aos pares. Esta tecnologia tem características flexíveis, não sendo necessários moldes e prensas.

Esquemas alternativos, baseados na utilização da hidroformagem têm sido propostos [9]. A parte central de secção elíptica é obtida por hidroformagem, enquanto que a aba, constituído por diversas chapas, é obtida por processos clássicos de deformação plástica. A aba é depois soldada à parte central, obtendo-se o fundo do reservatório.

A utilização do método dos elementos finitos tem um papel importante no aparecimento de novos procedimentos, pois permite prever se um determinado esquema de produção poderá ser ou não viável, antes da realização de experiências práticas, poupando-se dessa forma recursos financeiros e humanos.

Neste exemplo apresenta-se uma simulação que pretende representar o processo de hidroformagem da parte central de secção elíptica do fundo de um reservatório cilíndrico.

O material utilizado neste problema é idêntico ao do exemplo anterior. As propriedades do material utilizado, um Alumínio 2008-T4 (referência [1]), são as seguintes: módulo de Young, $E = 69.0\,\text{GPa}$, Coeficiente de Poisson, $\nu = 0.33$, tensão inicial de cedência, $\sigma_0 = 185.0\,\text{MPa}$, coeficientes para a função de cedência de Barlat [2], $C_1 = 1.223$, $C_2 = 1.014$, $C_3 = 0.986$, $C_4 = C_5 = C_6 = 1.0$, $m = 11.0$. Os coeficientes utilizados para o critério de Hill – Anisotropia Planar são os seguintes, $R_0 = 0.8$, $R_{45} = 0.6$ e $R_{45} = 0.7$, o coeficiente de anisotropia para o critério de Hill – Anisotropia Normal é $R = 0.675$. Para descrever os dados de tensão/deformação, foi utilizada a seguinte lei de encruamento de Voce.

$$\bar{\sigma} = 408.0 - 223.0 \times \exp\left(-6.14 \times \varepsilon^p\right) \quad [\text{MPa}] \tag{5.3}$$

A malha de elementos finitos e as respectivas condições fronteira são mostradas na Figura 5.25. Modelou-se apenas um oitavo da geometria utilizada no processo de hidroformagem do fundo elíptico. As dimensões utilizadas para a geometria foram retiradas da referência [9].

A geometria da Figura 5.25 é sujeita a uma pressão uniformemente distribuída. À medida que a pressão aumenta, a chapa apresenta um modo de deformação em que predominam as deformações de membrana.

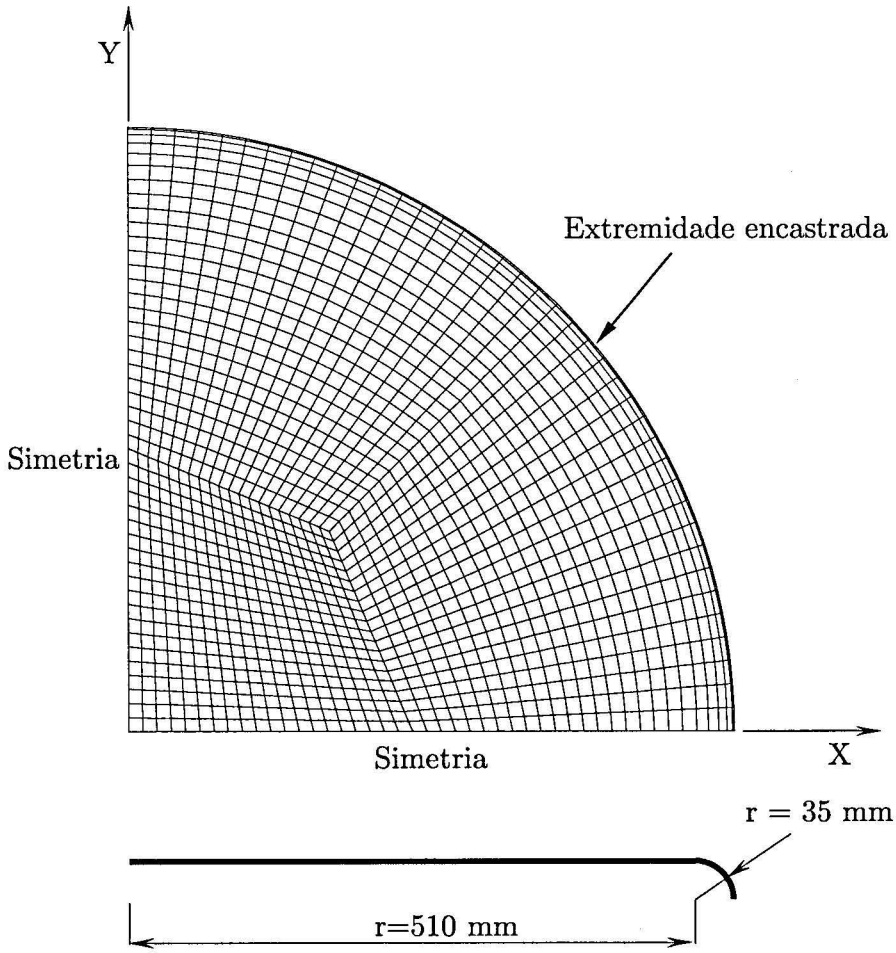


Figura 5.25 Malha de elementos finitos e condições fronteira.

Na Figura 5.26 pode-se observar a malha deformada para o modelo completo. Nesta imagem pode-se observar a formação de duas partes centrais de secção elíptica para a utilização em fundos de reservatórios de pressão. A zona de ligação da chapa superior à chapa inferior é normalmente realizada utilizando-se um tubo. O tubo é inicialmente dobrado para assumir a forma circular desejada, sendo depois cortado em duas metades, utilizando-se depois a metade exterior. A chapa superior e inferior são depois soldadas ao tubo, obtendo-se desta forma um conjunto pronto a ser hidroformado.

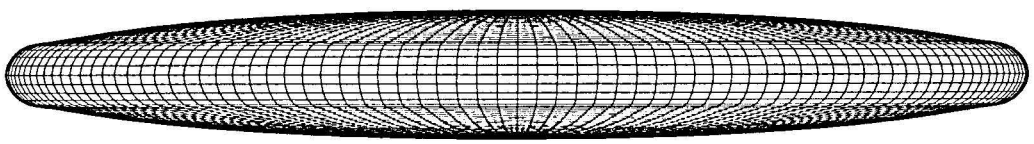


Figura 5.26 Malha deformada para uma pressão de 0.11 MPa.

Nas páginas seguintes, da Figura 5.27 à Figura 5.32 apresentam-se isocurvas de deformação plástica efectiva, obtidas para uma pressão aplicada de 0.11 MPa, para os diferentes critérios implementados e para diferentes direcções de laminagem.

Na Figura 5.27 podem-se observar as isocurvas de deformação plástica efectiva para o critério de von Mises, apresentando-se as isocurvas circulares e concêntricas.

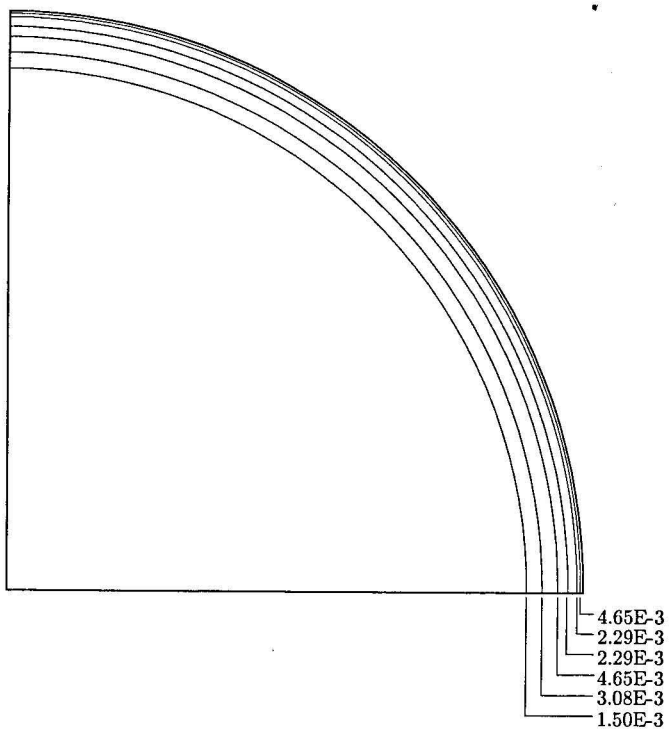


Figura 5.27 Distribuição da deformação plástica efectiva para o critério de von Mises.

Para o critério de von Mises, as zonas de deformação plástica mais elevadas, com um valor 4.66E-3, encontram-se junto ao encastramento e na zona de ligação tubo/chapa.

Na Figura 5.28 podem-se observar as isocurvas de deformação plástica efectiva obtidas com o critério de Hill – Anisotropia Normal. Para este critério as isocurvas apresentam, para a pressão de 0.11 MPa, um comportamento semelhante ao critério de von Mises. No entanto, para pressões mais elevadas verifica-se para este critério o aparecimento de rugas, o que não acontece com os demais critérios. Para este critério, a deformação plástica apresenta para esta pressão um valor máximo de 4.91E-3.

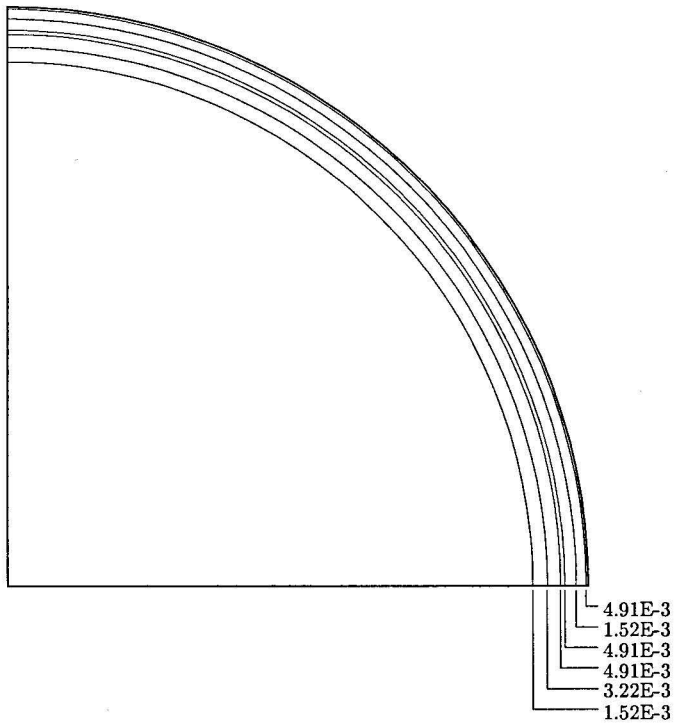


Figura 5.28 Distribuição da deformação plástica efectiva para o critério de Hill-Normal.

Na figura seguinte podem-se observar as isocurvas de deformação plástica efectiva para o critério de Hill – Anisotropia Planar, para uma direcção de laminagem alinhada com o eixo X (orientada a 0°). Tal como se pode observar, as isocurvas apresentam-se praticamente simétricas em relação a uma direcção orientada a 45° em relação à direcção de laminagem (eixo X). A zona de deformação plástica efectiva máxima (com um valor de 4.72E-3) encontra-se na zona de ligação tubo/chapa, sendo essa zona mais larga para uma direcção de 45° em relação à direcção de laminagem.

Para o critério de Hill – Anisotropia Planar a 45° (Figura 5.30), as isocurvas de deformação plástica efectiva apresentam-se novamente simétricas em relação a uma direcção orientada a 45° em relação ao eixo X. No entanto, para uma direcção de laminagem de 45°, os valores máximos de deformação plástica efectiva (com um valor de 4.81E-3) surgem em direcções a 0° e 90°. A zona de deformação plástica efectiva máxima tem dimensões mais reduzidas para uma direcção de 45° em relação ao eixo X. Os resultados obtidos para esta direcção são desta forma, aproximadamente idênticos aos que se obteriam por rotação dos resultados obtidos para 0°.

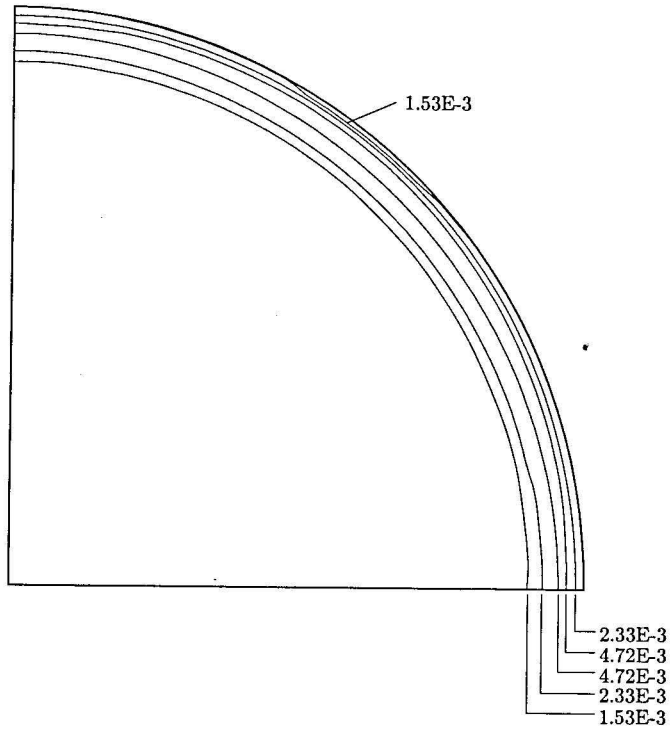


Figura 5.29 Distribuição da deformação plástica efectiva para o critério de Hill, Anisotropia Planar, a 0° em relação ao eixo X.

Na Figura 5.30 pode-se observar as isocurvas de deformação plástica efectiva obtidas com o critério de Hill – Anisotropia Planar a 45°.

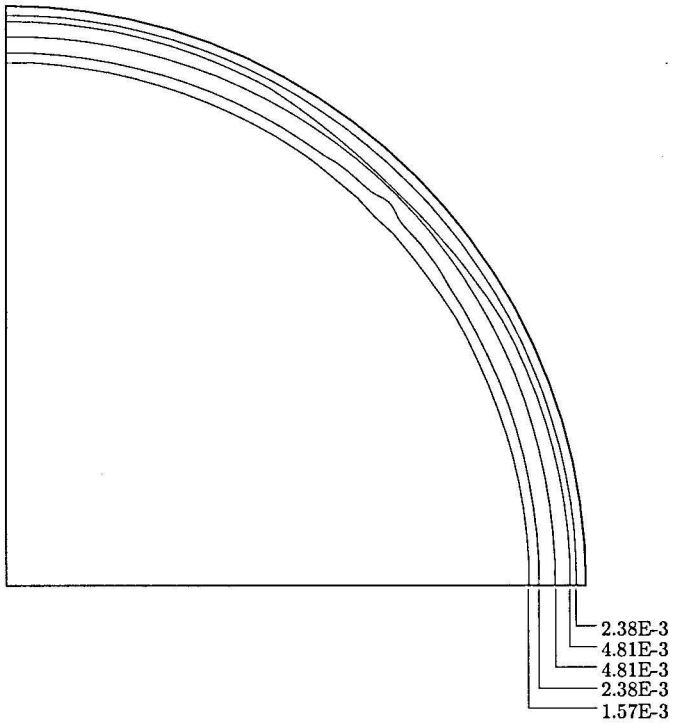


Figura 5.30 Distribuição da deformação plástica efectiva para o critério de Hill, Anisotropia Planar, a 45° em relação ao eixo X.

Figura 5.31 pode-se observar a distribuição da deformação plástica efectiva obtida com o critério de Barlat, para uma direcção de laminagem alinhada com o eixo X (orientada a 0°). A zona de deformação plástica efectiva mais elevada encontra-se na área de ligação tubo/chapa, com uma valor de 3.16E-3. A zona de deformação plástica máxima encontra-se mais alargada para uma direcção de 90°.

O critério de Barlat e de Hill – Anisotropia Planar fornecem para 0° distribuições de deformação plástica efectiva com algumas diferenças. Para o critério de Hill as isocurvas apresentam-se praticamente simétricas em relação a um eixo a 45°, enquanto que para o critério de Barlat essa simetria não existe. Para o critério de Hill verifica-se um alargamento da zona de deformação plástica máxima para uma direcção próxima dos 45°, para o critério de Barlat existe também um alargamento da zona de deformação plástica máxima, mas desta vez para uma direcção próxima do 90°. Os valores de deformação plástica mais elevados são obtidos para o critério de Hill, obtendo-se um valor de 4.71E-3 contra os 3.16E-3 obtidos para o critério de Barlat. Os valores de deformação plástica máxima surgem para ambos os critérios na zona de ligação tubo/chapa.

Para o critério de Barlat, a zona de deformação plástica máxima é mais larga para uma direcção de 90°. Para o critério de Hill também se verifica um alargamento da zona de deformação plástica máxima, mas desta vez para uma direcção de 45°.

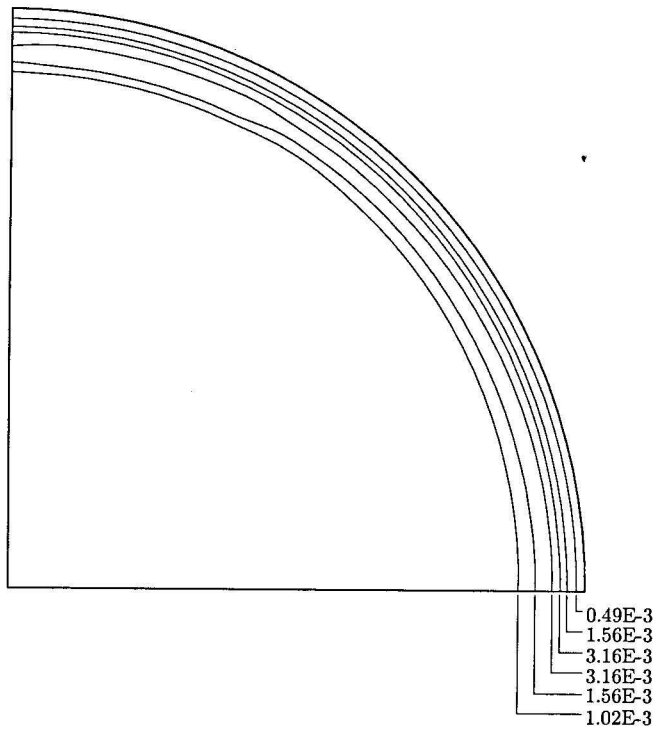


Figura 5.31 Distribuição da deformação plástica efectiva para o critério de Barlat, a 0° em relação ao eixo X.

Na Figura 5.32 pode-se observar as isocurvas de deformação plástica efectiva obtidas para o critério de Barlat, para uma direcção de laminagem orientada a 45° em relação ao eixo X. Mais uma vez verifica-se que a zona de deformação plástica mais elevada situa-se na ligação tubo/chapa, com um valor de 3.02E-3. Esta zona de deformação plástica é ligeiramente mais alargada para uma direcção de 45° em relação ao eixo X. A rotação de 45° dos resultados obtidos para 0° permite obter com boa aproximação aos resultados obtidos para a direcção de 45°, tal como seria de esperar.

As isocurvas de deformação plástica efectiva obtidas com o critério de Barlat e Hill – Anisotropia Planar para 0°, apresentam-se simétricas em relação a um eixo a 45°. No entanto, para o critério de Hill, a zona de deformação plástica máxima têm dimensões mais reduzidas para direcções próximas dos 45°, sendo maior a 0° e 90°, tal como se pode observar na Figura 5.30. Para o critério de Barlat, a zona de deformação plástica máxima é mais larga para 45°,

sendo menor para 0° e 90°, não se notando para este critério uma diferença tão acentuada. Os valores máximos continuam a ser obtidos com o critério de Hill, obtendo-se um valor de deformação plástica efectiva de 4.81E-3, contra os 3.02E-3 obtidos com o critério de Barlat.

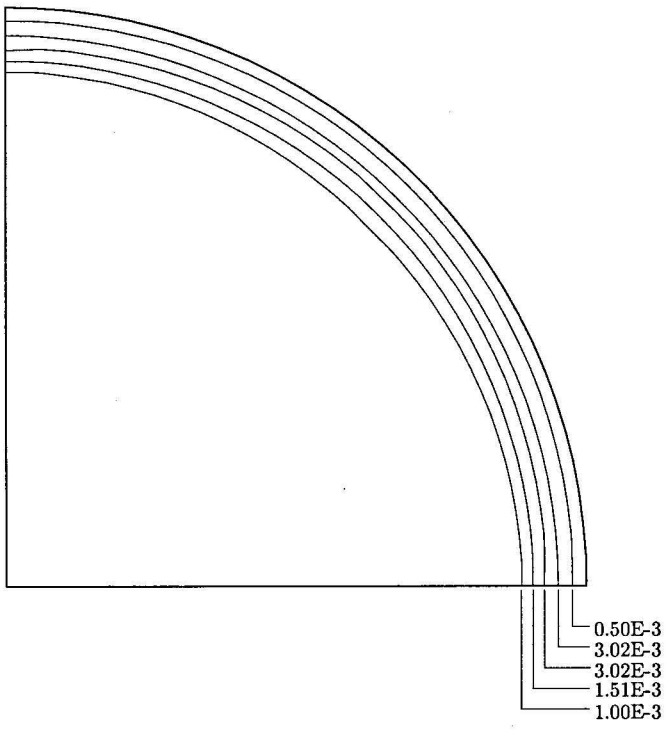
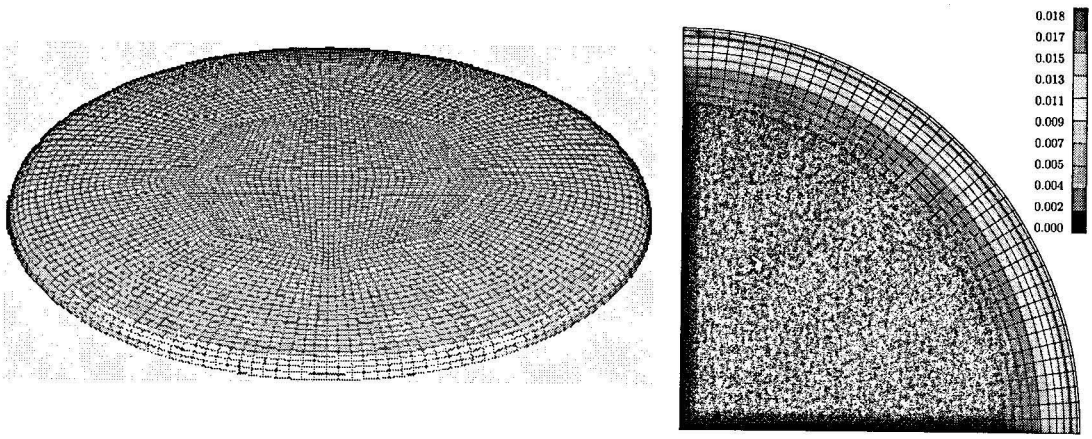


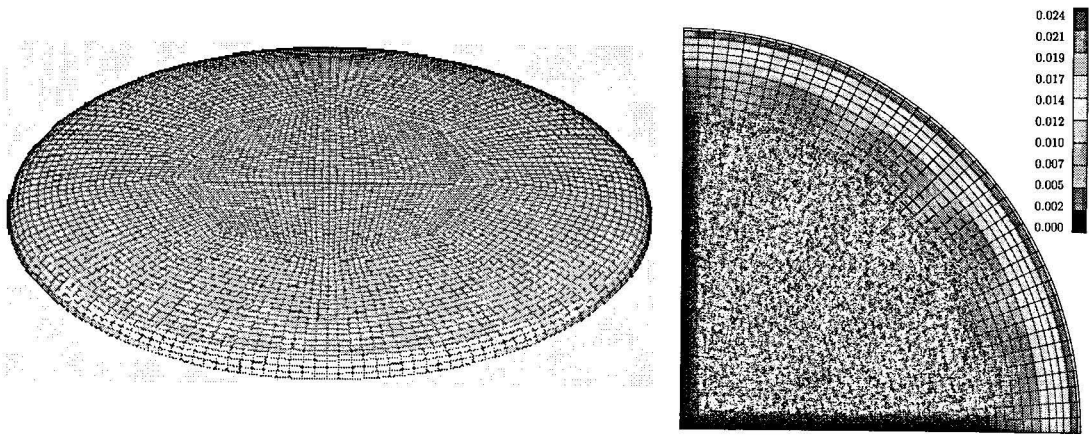
Figura 5.32 Distribuição da deformação plástica efectiva para o critério de Barlat, a 45° em relação ao eixo X.

Na Figura 5.33 e Figura 5.34 pode-se observar a evolução da deformada e da deformação plástica efectiva, para o critério de Hill – Anisotropia Planar, até uma pressão de 1 MPa. Pode-se observar claramente na sequência de imagens o aparecimento de rugas, que se começam a formar para pressões de cerca 0.2 MPa, onde apesar de não serem visíveis na malha deformada, a sua presença faz-se sentir na distribuição da deformação plástica efectiva (Figura 5.33 b). Aumentando-se a pressão aplicada, as rugas tornam-se perfeitamente visíveis na malha deformada. Para pressões superiores a 0.6 MPa, as rugas tornam-se menos visíveis, mostrando uma tendência para desaparecerem. O aparecimento de rugas foi obtido apenas com a utilização de um diferente critério de cedência. Na referência [9], as simulações apresentadas foram realizadas com um material diferente, tendo os autores apenas conseguido capturar o aparecimento de rugas

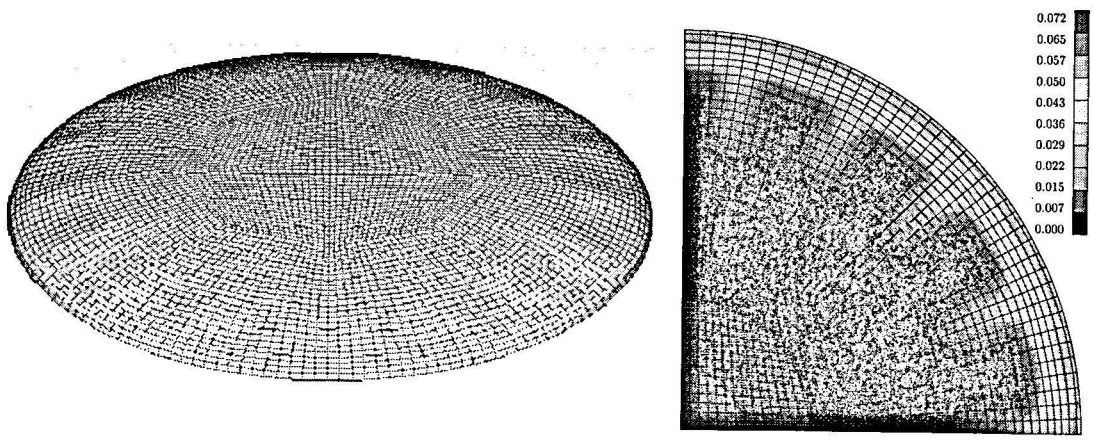
com uma alteração às condições fronteira do problema, o que não foi o caso da simulação apresentada neste trabalho.



a) Deformada e distribuição da deformação plástica efectiva para 0.18 MPa

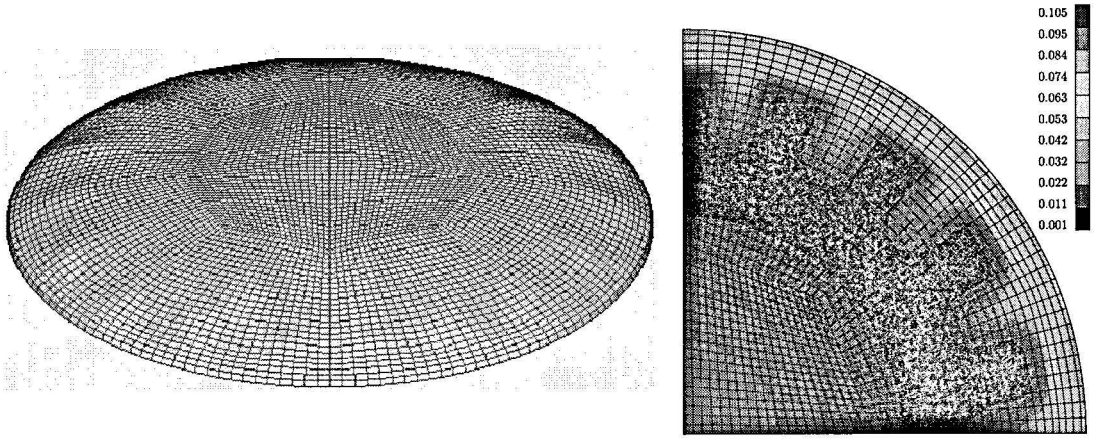


b) Deformada e distribuição da deformação plástica efectiva para 0.2 MPa

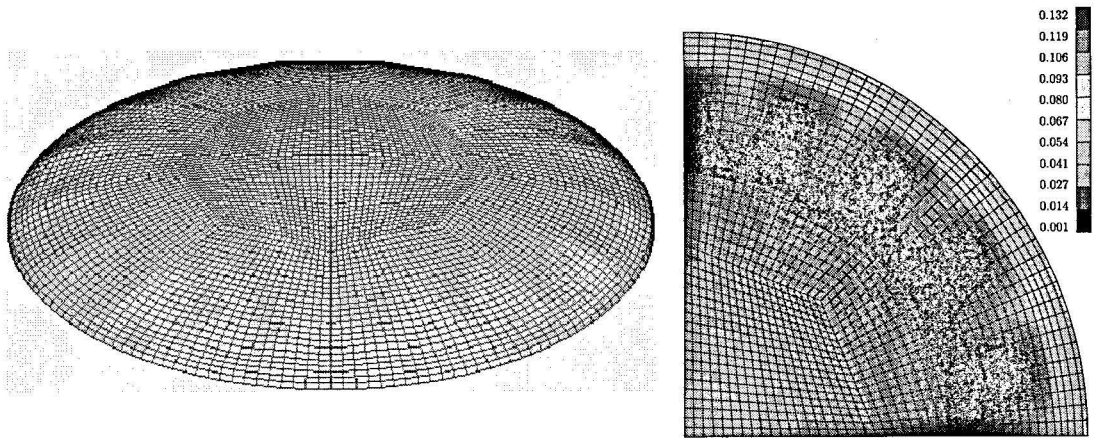


c) Deformada e distribuição da deformação plástica efectiva para 0.4 MPa

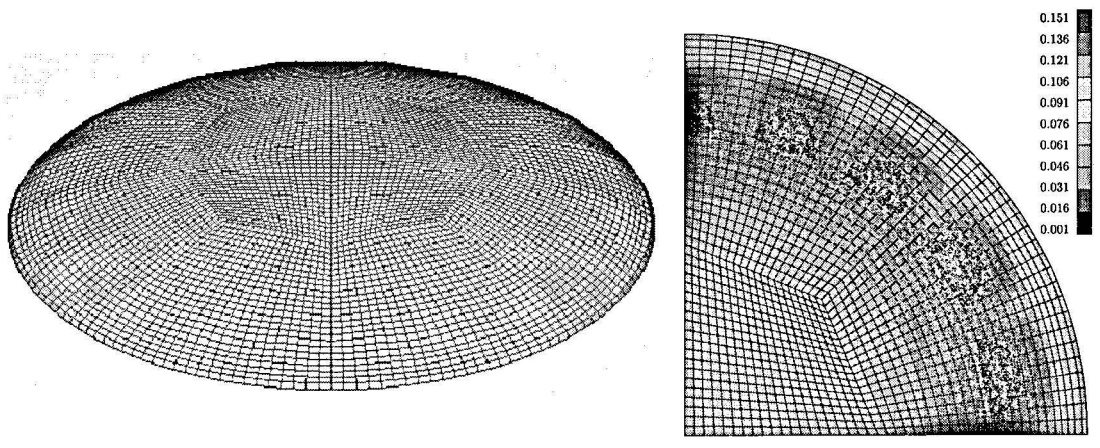
Figura 5.33 Evolução da deformada e da distribuição da deformação plástica efectiva para o critério de Hill – Anisotropia Planar.



d) Deformada e distribuição da deformação plástica efectiva para 0.6 MPa



e) Deformada e distribuição da deformação plástica efectiva para 0.8 MPa



f) Deformada e distribuição da deformação plástica efectiva para 1.0 MPa

Figura 5.34 Evolução da deformada e da distribuição da deformação plástica efectiva para o critério de Hill – Anisotropia Planar.

Apenas a escolha de um critério de cedência que seja bem representativo do material utilizado permitirá obter resultados fiáveis. Este exemplo mostra claramente a influência, num problema prático, dos diferentes critérios de cedência nos resultados obtidos.

5.6 Cilindro sujeito a uma carga concentrada, "Pinched Cylinder"

Este último exemplo trata-se de um cilindro sujeito a um par de forças concentradas, restringido nas suas extremidades por diafragmas rígidos. Este exemplo é normalmente utilizado na verificação do comportamento de elementos de casca, e elementos 3D aplicados a problemas típicos de casca. Este problema surge na literatura tratado por diversos autores, introduzido inicialmente por Simo e Kennedy [12] e depois, por exemplo em [3, 5, 13-16].

O cilindro a ser simulado tem um comprimento de 600 mm, diâmetro de 600 mm e uma espessura de 3 mm. Devido à simetria do problema apenas se modelou um oitavo do problema.

Neste problema é utilizado novamente o alumínio 2008-T4. As suas propriedades são as seguintes: módulo de Young, $E = 69.0$ GPa , Coeficiente de Poisson, $\nu = 0.33$, tensão inicial de cedência, $\sigma_0 = 185.0$ MPa , coeficientes para a função de cedência de Barlat [2], $C_1 = 1.223$, $C_2 = 1.014$, $C_3 = 0.986$, $C_4 = C_5 = C_6 = 1.0$, $m = 11.0$. Os coeficientes utilizados para o critério de Hill – Anisotropia Planar são os seguintes, $R_0 = 0.8$, $R_{45} = 0.6$ e $R_{45} = 0.7$, o coeficiente de anisotropia para o critério de Hill – Anisotropia Normal é $R = 0.675$ Para descrever os dados de tensão/deformação obtidos experimentalmente, foi utilizada a seguinte lei de encruamento de Voce.

$$\overline{\sigma} = 408.0 - 223.0 \times \exp\left(-6.14 \times \varepsilon^{p}\right) \quad \text{[MPa]} \tag{5.4}$$

Foram utilizadas duas malhas de elementos finitos, uma primeira com 16x18 elementos e uma segunda com 32x32 elementos. A malha de elementos finitos e as respectivas condições fronteira podem ser observadas na Figura 5.35 e Figura 5.40.

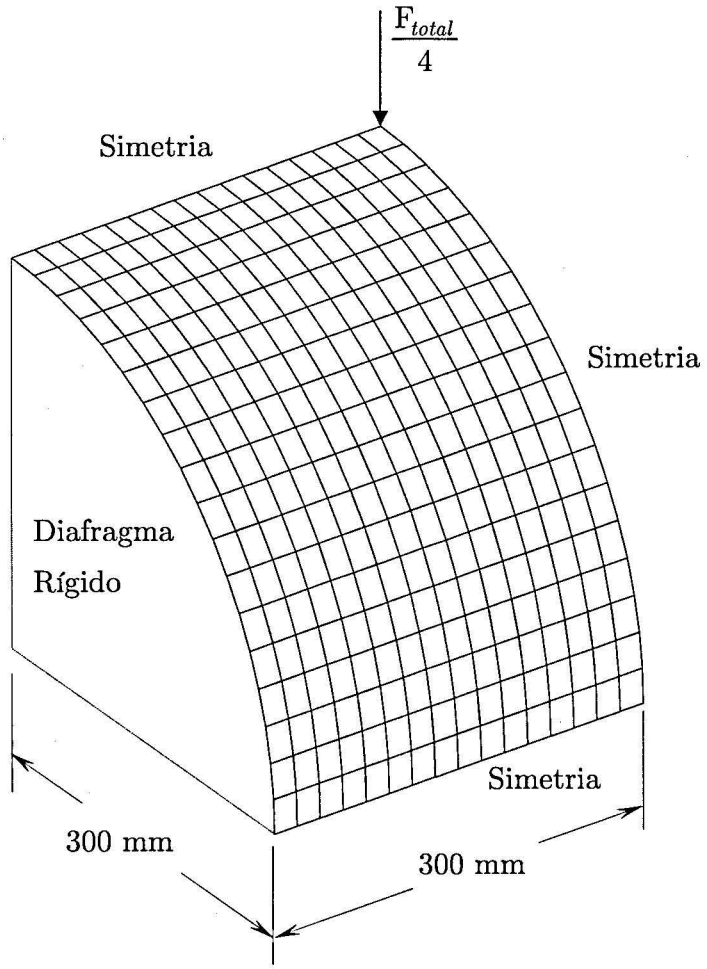


Figura 5.35 Malha 18x16 e condições fronteira.

Na Figura 5.36 pode-se observar o deslocamento radial do ponto de aplicação da carga concentrada, em função do factor de carga, para os diferentes critérios implementados. A carga aplicada, para a malha da Figura 5.35 tem um valor de $\frac{F_{total}}{4} = 3600$ N.

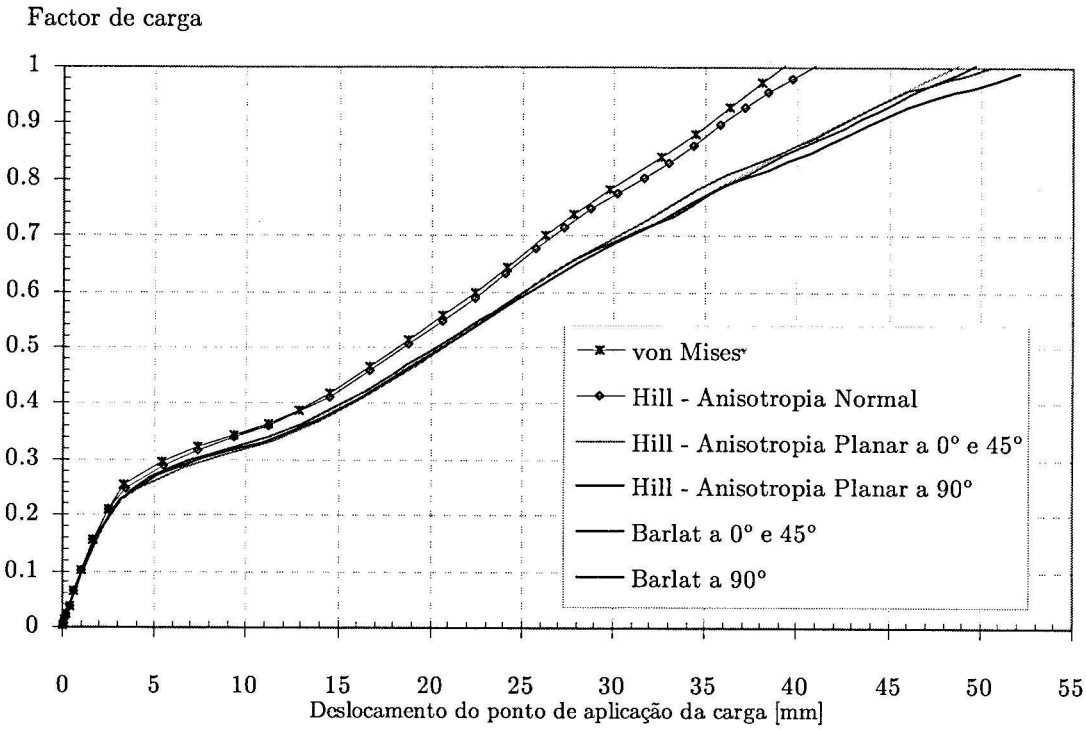
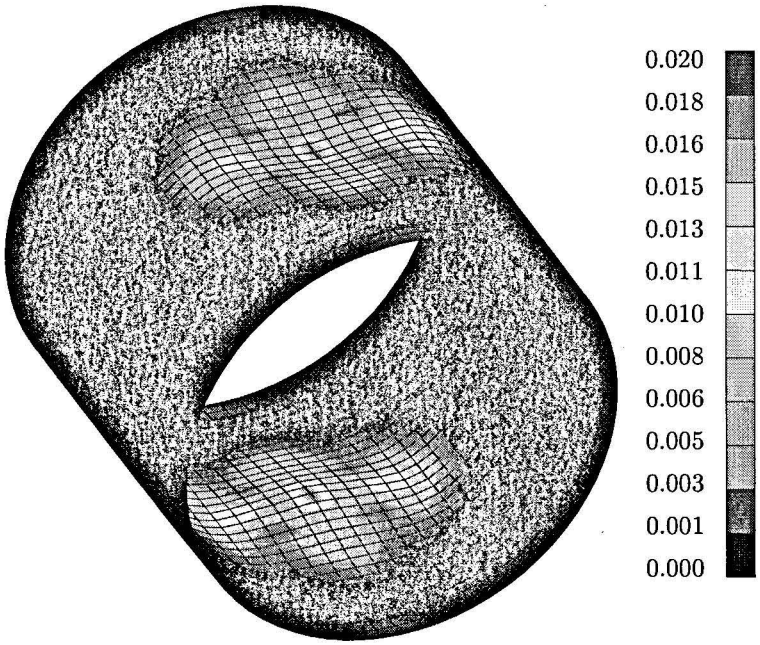


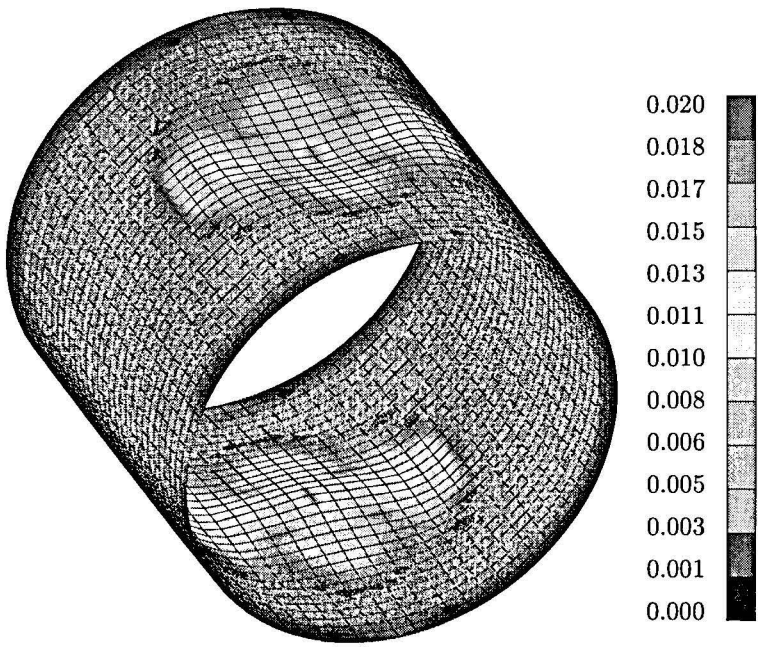
Figura 5.36 Deslocamento do ponto de aplicação da carga em função do factor de carga.

Tal como se pode observar na Figura 5.36, para um factor de carga igual a 1 (carga de 3600 N), o maior deslocamento é obtido utilizando-se o critério de Barlat, para uma direcção de laminagem perpendicular ao eixo longitudinal do cilindro (direcção 90°). Para direcções de laminagem a 0° e 45°, continua-se a obter deslocamentos mais elevado com o critério de Barlat, mesmo quando comparados com os deslocamentos obtidos com o critério de Hill – Anisotropia planar a 90°. Apesar de não existirem dados experimentais, o senso comum diz-nos que a rigidez do tubo será mais elevada se a direcção de laminagem do material a utilizar estiver alinhada com a direcção longitudinal do tubo. Os resultados numéricos confirmam essa noção, obtendo-se deslocamentos menos elevados para a direcção de 0°. Os resultados obtidos para as direcções de 0 e 45 graus representam-se apenas por uma linha no gráfico, pois os resultados obtidos diferiam pouco, ficando facilitada a leitura do gráfico. A utilização do critério de von Mises e do critério de Hill – Anisotropia Normal conduz à obtenção de resultados substancialmente diferentes, obtendo-se um deslocamento bastante inferior para o ponto de aplicação da carga concentrada. O deslocamento obtido com o critério Hill – Anisotropia Normal é no entanto ligeiramente superior ao obtido a partir do critério de von Mises.

Nas figuras seguintes, Figura 5.37 (critério de von Mises e Hill – Anisotropia Normal), Figura 5.38 (critério de Hill- Anisotropia Planar a 0° e 45°) e Figura 5.39 (critério de Barlat a 0° e 45°) pode-se observar a malha deformada e os contornos obtidos para a deformação plástica efectiva.

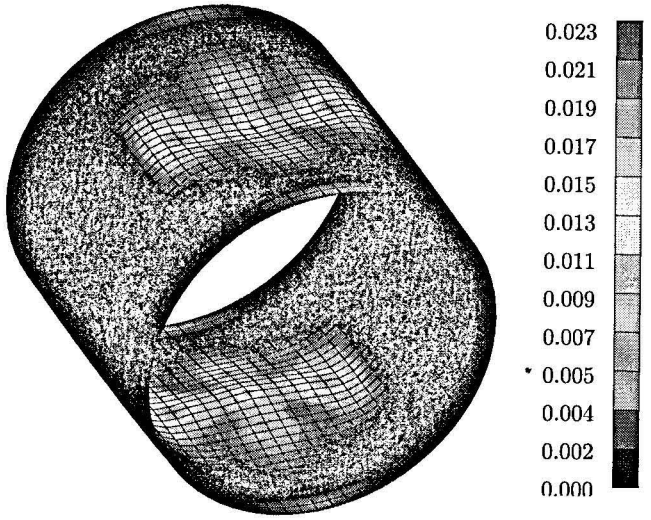


a) Critério de von Mises.

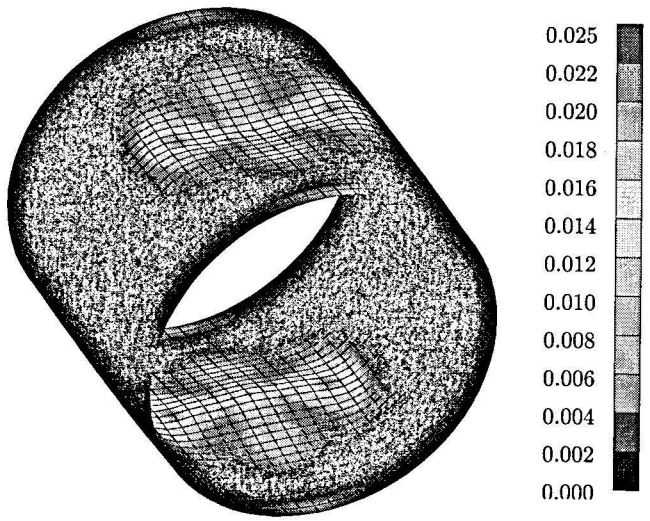


b) Critério de Hill – Anisotropia Normal

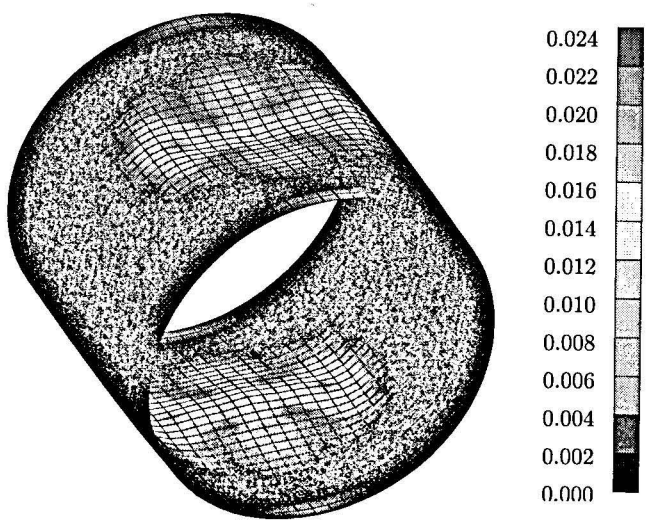
Figura 5.37 Distribuição da deformação plástica efectiva.



a) Critério de Hill – Anisotropia Planar a 0°.

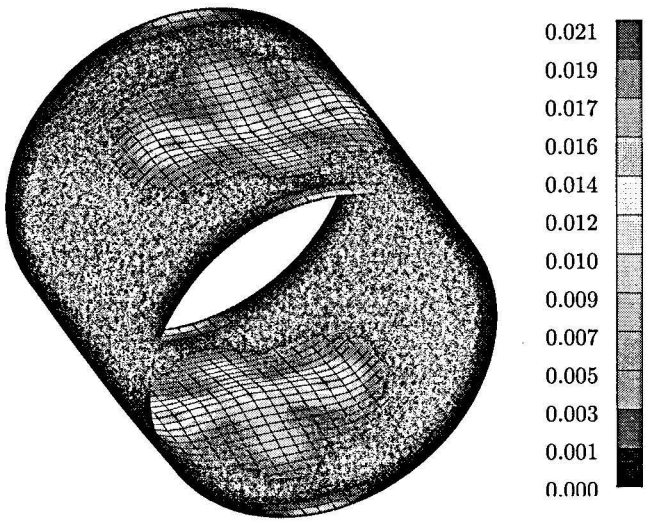


b) Critério de Hill – Anisotropia Planar a 45°.

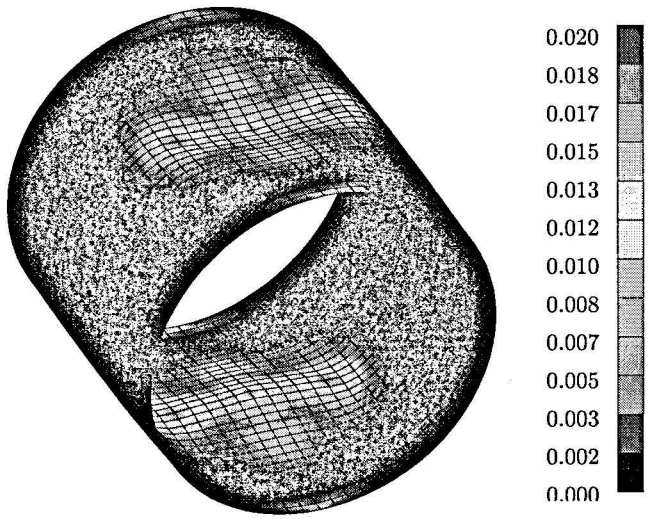


c) Critério de Hill – Anisotropia Planar a 90°.

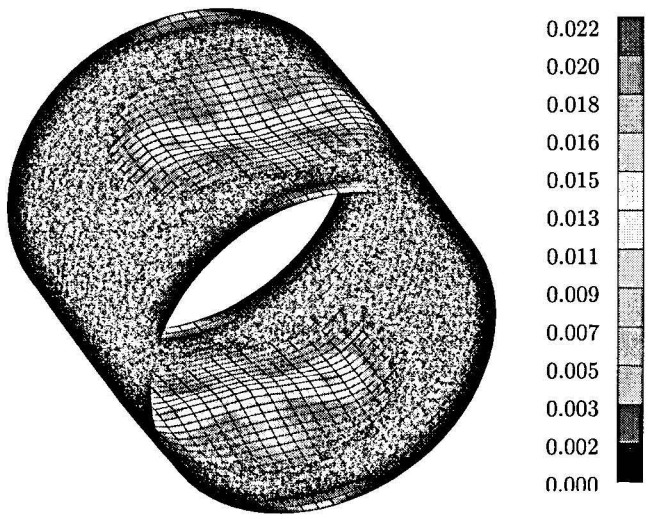
Figura 5.38 Distribuição da deformação plástica efectiva.



a) Critério de Barlat a 0°.



b) Critério de Barlat a 45°.



c) Critério de Barlat a 90°.

Figura 5.39 Deformação plástica efectiva.

Na Figura 5.37 pode-se observar a distribuição da deformação plástica efectiva obtida com o critério de von Mises e o critério de Hill – Anisotropia Normal. Os valores de deformação plástica efectiva máximos (0.020) são idênticos para os dois critérios, obtendo-se no entanto distribuições de deformação plástica efectiva ligeiramente diferentes.

Na Figura 5.38 mostram-se os resultados obtidos para o critério de Hill – Anisotropia Planar. O valor máximo de deformação plástica efectiva surge para a direcção de 45° em relação ao eixo do cilindro, com um valor de 0.025. A distribuição de deformação plástica efectiva mostra apenas ligeiras variações entre a direcção de 0, 45 e 90 graus.

Para o critério de Barlat (Figura 5.39), o valor máximo de deformação plástica efectiva é obtido para uma direcção de 90° em relação ao eixo do cilindro, obtendo-se valores inferiores aos obtidos com o critério de Hill – Anisotropia Planar. Mais uma vez verifica-se que as distribuições obtidas para 0, 45 e 90 graus são praticamente idênticas. Diferenças mais marcadas apenas poderão ser visíveis para níveis de carga mais elevados.

Na Figura 5.40 mostra-se a segunda malha utilizada neste problema, uma malha mais refinada, com 32x32 elementos. Para este modelo aplicou-se uma carga concentrada com um valor de $\frac{F_{total}}{4} = 24000$ N. O gráfico da Figura 5.41 mostra a evolução do deslocamento do ponto de aplicação da carga em função do factor de carga. Tal como se pode observar, a utilização do critério de Hill – Anisotropia normal conduz à obtenção de um deslocamento mais elevado para um mesmo nível de carga.

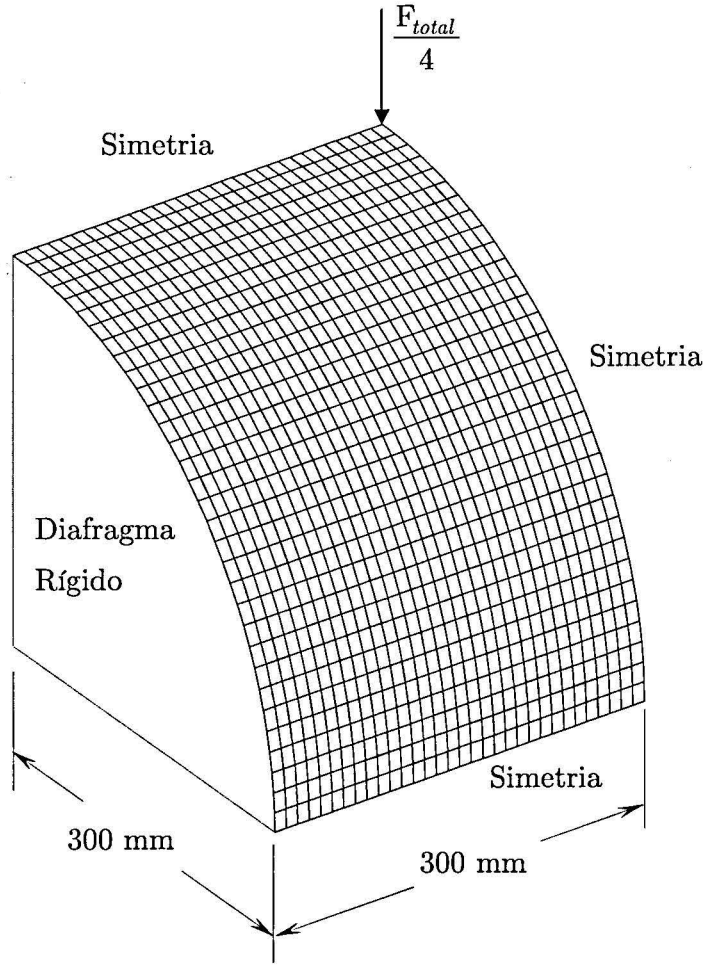


Figura 5.40 Malha 32x32 e condições fronteira.

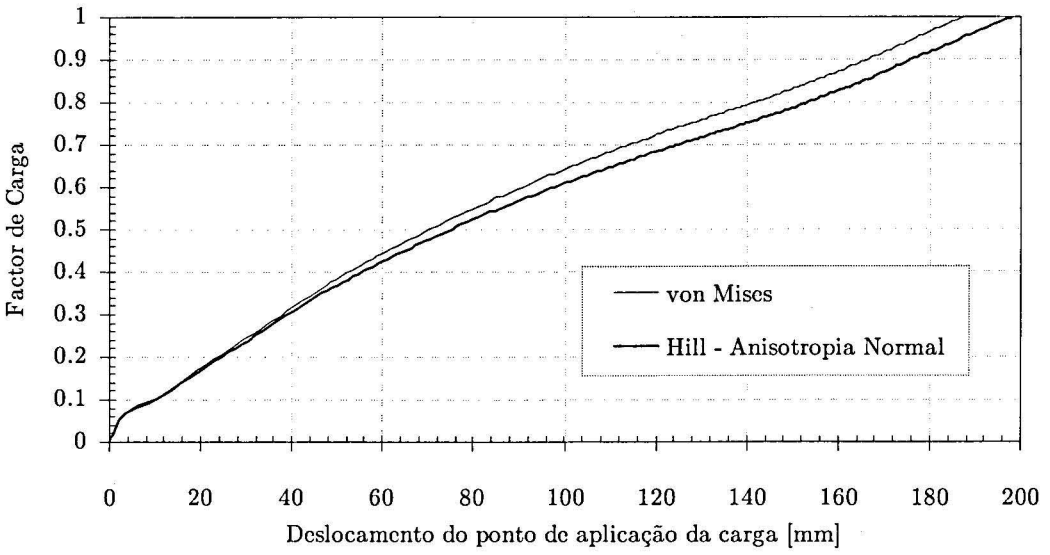
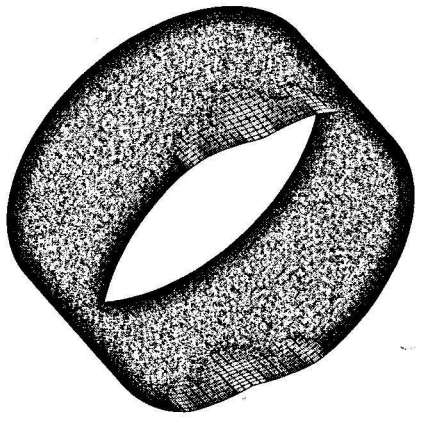
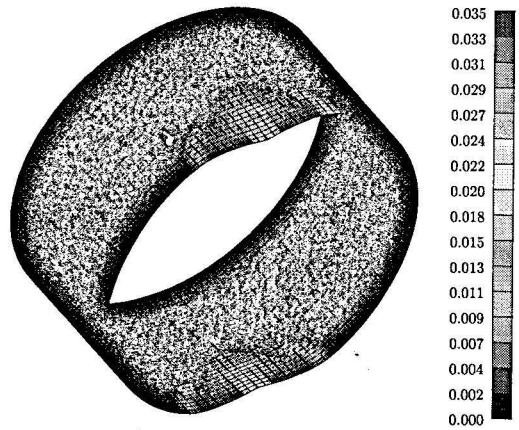


Figura 5.41 Deslocamento do ponto de aplicação da carga em função do factor de carga.

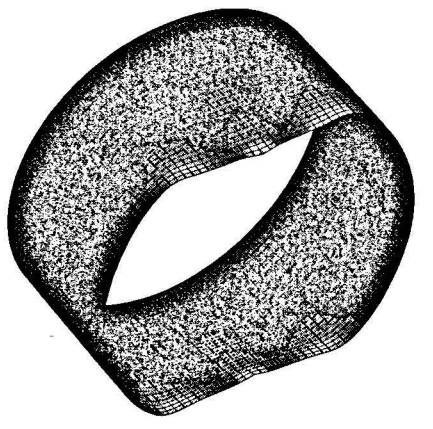
Na Figura 5.42 mostra-se uma sequência de imagens que ilustram a evolução da deformada do cilindro e da deformação plástica efectiva, para o critério de Hill – Anisotropia Normal e von Mises. As imagens mostradas são para os factores de carga, $f = 0.2$, $f = 0.4$ e $f = 0.6$.



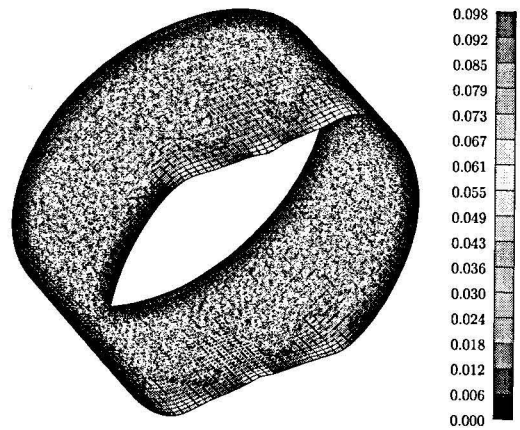
a) Hill – Normal, $f = 0.2$



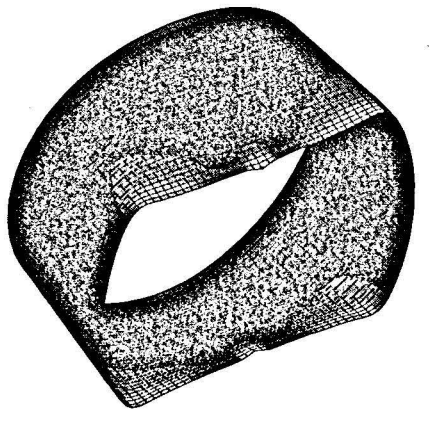
g) von Mises, $f = 0.2$



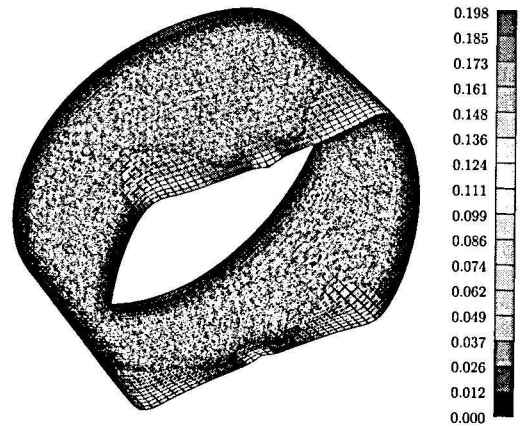
b) Hill – Normal, $f = 0.4$



h) von Mises, $f = 0.4$



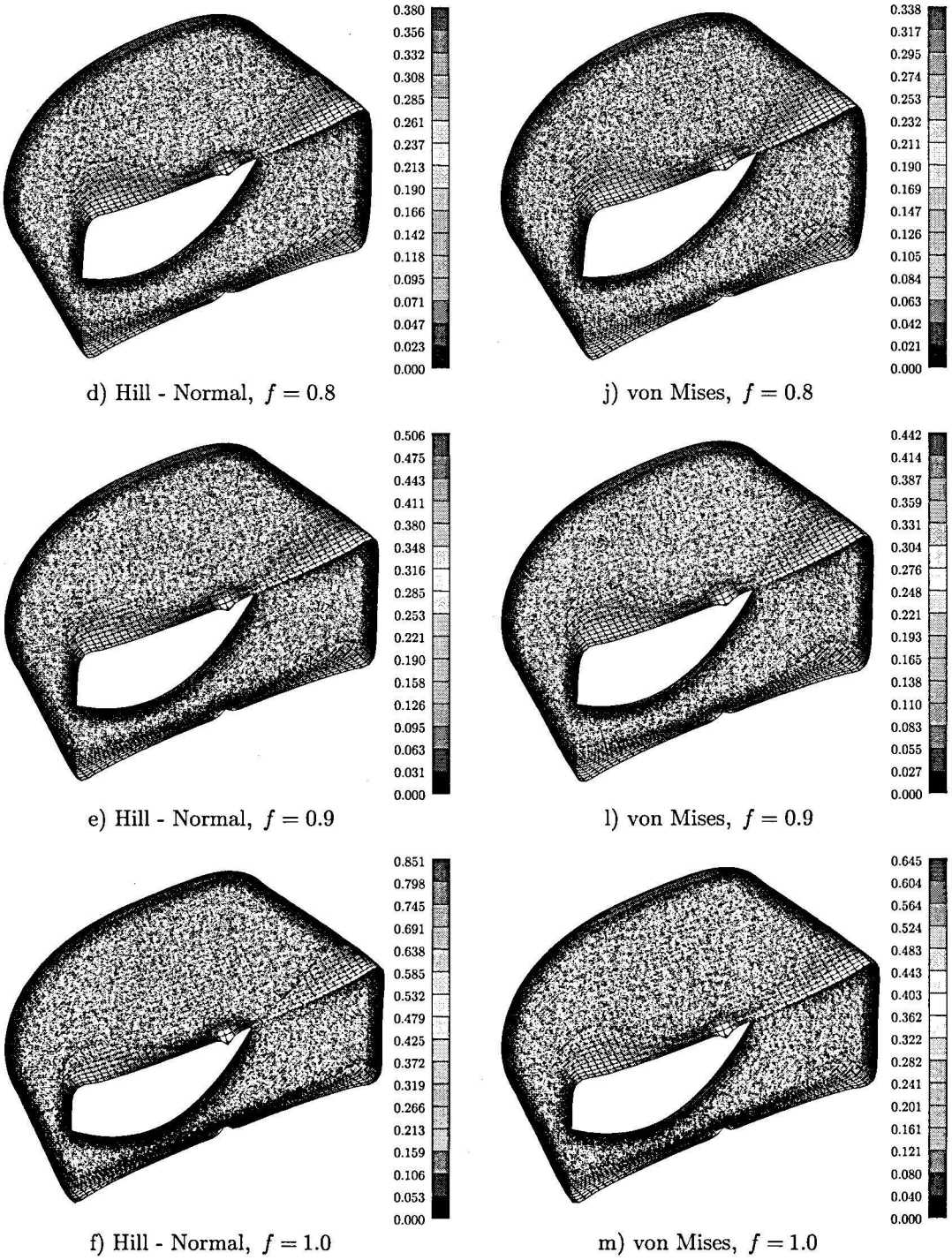
c) Hill - Normal, $f = 0.6$



i) von Mises, $f = 0.6$

Figura 5.42 Distribuição da deformação plástica efectiva.

A Figura 5.42 continua, pode-se agora observar a continuação da sequência apresentada para os factores de carga $f = 0.8$, $f = 0.9$ e $f = 1.0$.



d) Hill - Normal, $f = 0.8$ j) von Mises, $f = 0.8$

e) Hill - Normal, $f = 0.9$ l) von Mises, $f = 0.9$

f) Hill - Normal, $f = 1.0$ m) von Mises, $f = 1.0$

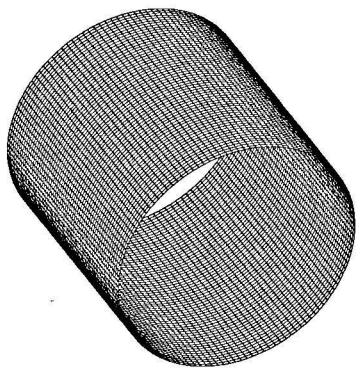
Figura 5.42 (continuação) Distribuição da deformação plástica efectiva.

Tal como se pode observar na sequência de imagens apresentadas, apenas para o factor de carga $f = 0.2$ se verifica que o valor de deformação plástica

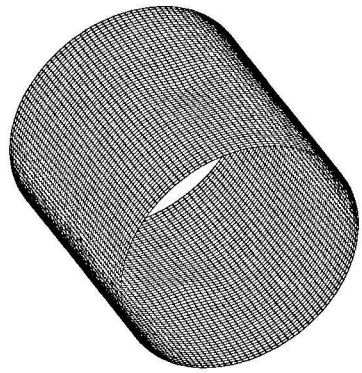
máxima é obtido com o critério de von Mises, para os restantes factores de carga, o critério de Hill – Anisotropia Planar fornece os valores mais elevados. Os contornos de deformação plástica apresentados apresentam distribuições bastante semelhantes para os diferentes factores de carga. As diferenças mais visíveis obtêm-se para um factor de carga $f = 0.4$. Tal como se pode observar na sequência de imagens, as escalas utilizadas são diferentes para os dois critérios. Utilizando-se uma mesma escala para os dois critérios, as distribuições apresentariam diferenças mais distintas.

A utilização de contornos de deformação plástica efectiva para este exemplo tem o inconveniente de apresentar uma zona de pequenas dimensões com elevada deformação plástica, perto do ponto de aplicação da carga concentrada. Desta forma, a evolução da deformação plástica no resto do tubo fica menos detalhada, pois são valores de deformação baixos.

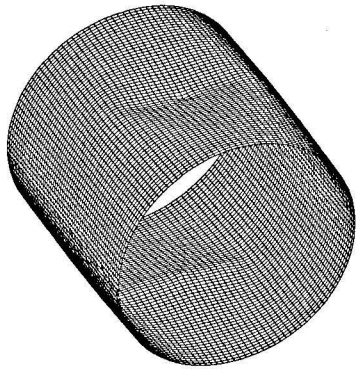
Na Figura 5.43 mostra-se para efeitos ilustrativos a evolução da deformada para o critério de Hill – Anisotropia Normal, para factores de carga que variam entre $f = 0.0$ e $f = 1.0$.



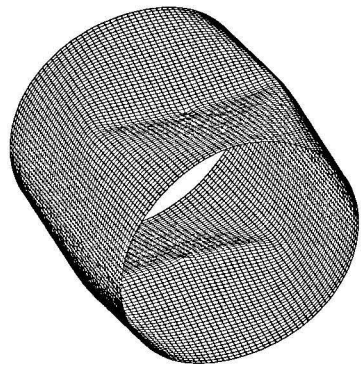
a) Hill - Normal, $f = 0.0$



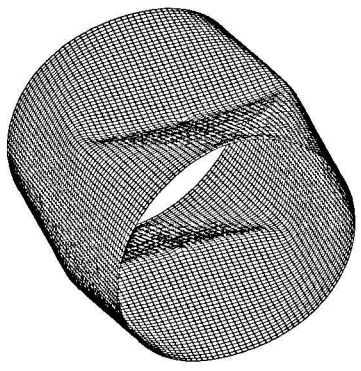
b) Hill - Normal, $f = 0.2$



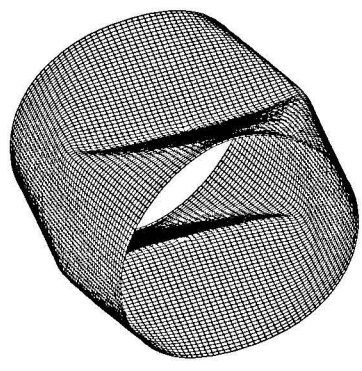
c) Hill - Normal, $f = 0.4$



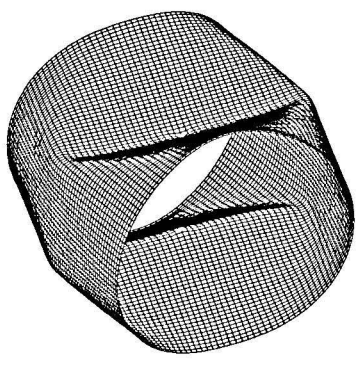
d) Hill - Normal, $f = 0.6$



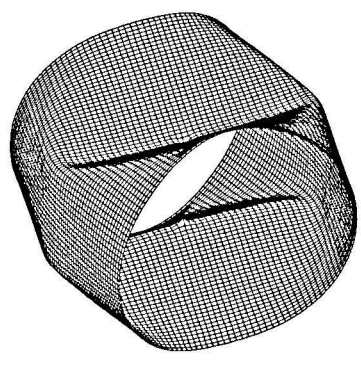
e) Hill - Normal, $f = 0.7$



f) Hill - Normal, $f = 0.8$



g) Hill - Normal, $f = 0.9$



h) Hill - Normal, $f = 1.0$

Figura 5.43 Deformada para diferentes factores de carga f.

Este exemplo mostra mais uma vez a importância da consideração no modelo material utilizado das propriedades anisotrópicas do material, assim como a correcta orientação da direcção de laminagem. No gráfico da Figura 5.36 pode-se observar claramente o efeito da direcção de laminagem nos resultados finais.

5.7 Referências

1. Cardoso, R.P.R., *Desenvolvimento de elementos de casca de integração reduzida com modelos materiais anisotrópicos para processos de conformação plástica de chapa.*, in *Departamento de Engenharia Mecânica.* 2002, Universidade de Aveiro.
2. Barlat, F., D.J. Lege, and J.C. Brem, *A six-component yield function for anisotropic metals.* International Journal of Plasticity, 1991. **7**: p. 693.
3. Miehe, C., *A theoretical and computational model for isotropic elastoplastic stress analysis in shells at large strains.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1998. **155**: p. 193-233.
4. Betsch, P. and E. Stein, *Numerical implementation of multiplicative elasto-plasticity into assumed strain elements with application to shells at large strains.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1999. **179**: p. 215-245.
5. Eberlein, R. and P. Wriggers, *Finite element concepts for finite elastoplastic strains and isotropic stress response in shells: theoretical and computational analysis.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1999. **171**: p. 243-279.
6. Doll, S., et al., *On volumetric locking of low-order solid and solid-shell elements for finite elastoviscoplastic deformations and selective reduced integration.* Engineering Computations, 2000. **17**: p. 874-902.
7. Hauptmann, R., K. Schweizerhof, and S. Doll, *Extension of the solid-shell concept for application to large elastic and large elastoplastic deformations.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000. **49**: p. 1121-1141.
8. Harnau, M. and K. Schweizerhof, *About linear and quadratic "solid-shell" elements at large deformations.* Computer and Structures, 2002. **80**: p. 805-817.
9. Zhang, S.H., D. J., and K.B. Nielsen, *Integral hydro-bulge forming of pressure vessel heads.* Journal of Materials Processing Technology, 1999. **86**: p. 184-189.

10. Wang, Z.R., et al., *The technology of the hydro-bulging of whole spherical vessels and experimental analysis.* Journal of Mechanical Working Technology, 1989. **18**: p. 85-94.

11. Zhang, S.H. and Z.R. Wang, *Research into the dieless hydroforming of double-layer spherical vessels.* International Journal of Pressure Vessels and Piping, 1994. **60**: p. 145-149.

12. Simo, J.C. and J.G. Kennedy, *On a stress resultant geometrically exact shell model. Part V: Nonlinear plasticity - formulation and integration algorithms.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1992. **96**: p. 133-171.

13. Sansour, C. and F.G. Kollmann, *Families of 4-node and 9-node finite elements for a finite deformation shell theory: An assessment of hybrid stress, hybrid strain and enhanced strain elements.* Computational Mechanics, 2000. **24**: p. 435-447.

14. Brank, B., D. Peric, and F.B. Damjanic, *On large deformations of thin elasto-plastic shells: implementation of a finite rotation model for quadrilateral shell element.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1997. **40**: p. 689-726.

15. Sorié, J., U. Montag, and W.B. krätzig, *An efficient formulation of integration algorithms for elastoplastic shell analysis based on layered finite element approach.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1997. **148**: p. 315-328.

16. Parente, M. *Anisotropic Elasto-Plastic Behaviour of Thin Shells using S4E6P7 Element.* in *VII International Conference on Computational Plasticity, COMPLAS 2003.* 2003. Barcelona: CIMNE.

Capítulo 6

Conclusões e

Desenvolvimentos Futuros

6.1 Síntese e conclusões do trabalho realizado

A presente dissertação teve como objectivo principal a implementação do comportamento anisotrópico em elementos de casca. A correcta modelação do comportamento anisotrópico dos materiais é de extrema importância para se obterem resultados fiáveis a partir de simulações numéricas. A simulação de processos de embutidura de chapas metálicas é um exemplo para o qual a consideração de um comportamento anisotrópico conduz a resultados bastantes diferentes dos obtidos considerando-se um comportamento isotrópico do material.

Para se modelar o comportamento anisotrópico dos materiais foram implementados vários critérios anisotrópicos. A implementação iniciou-se com o critério de Hill 4 – Anisotropia Normal, sendo depois implementado o critério de Hill 48 – Anisotropia Planar e finalmente o critério de Barlat. A complexidade das funções utilizadas foi sendo aumentada de critério para critério. A obtenção das derivadas das funções de cedência foi feita com o recurso a um software de manipulação simbólica.

A utilização de elementos finitos de casca reveste-se de grande importância, pois permite a geração dos modelos de elementos finitos é mais simplificada, não existindo a necessidade de se recorrer a modelos 3D, que têm uma execução mais demorada. A utilização de elementos finitos de casca permite efectuar simulações de componentes que apresentem uma vasta gama de

espessuras. No entanto, à medida que as espessuras se vão reduzindo, os elementos de casca clássicos, obtidos por degeneração de modelos 3D apresentam problemas numéricos de excesso de rigidez. Este excesso de rigidez conduz, em última análise, a uma subestimação dos deslocamentos. Este fenómeno surge na literatura denominado como a retenção ao corte ou "shear locking". A sua resolução requer a utilização de formulações alternativas. Recentemente foi desenvolvido um conjunto de elementos de casca, no Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, dos quais se destaca o S4E6P7. Estes elementos, desenvolvidos expressamente para atenuar o problema da retenção, baseiam-se no Método das Deformações Acrescentadas.

A verificação das rotinas implementadas e do comportamento do elemento utilizado em situações de elevada deformação plástica, associado à utilização de um critério anisotrópico foi feita recorrendo-se a vários exemplos. Nos vários exemplos mostrados fica bem patente a variação dos resultados obtidos em função da direcção de laminagem considerada para a simulação. São mostrados vários gráficos de isocurvas de deformação plástica equivalente, onde se mostra claramente que as distribuições obtidas (em modelos simétricos) deixam de ser simétricas, devido ao comportamento anisotrópico do material.

6.2 Desenvolvimentos futuros

Os assuntos tratados nesta dissertação encontram-se em constante mudança, surgindo constantemente novos modelos materiais e novas formulações de elementos finitos. Desta forma seria interessante fazer uma extensão dos critérios implementados a novos elementos finitos 3D, tais como o elemento HCiS12 [1] desenvolvido na Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. A utilização de critérios anisotrópicos mais recentes, tais como os novos critérios introduzidos por Barlat [2], seria também uma interessante extensão deste trabalho. A utilização de elementos 3D pode permitir algumas vantagens em relação aos elementos de casca, visto que a modelação de geometrias com espessura variável torna-se mais simples recorrendo-se a elementos sólidos. Aparentemente, a implementação de elementos 3D é à partida mais simples, pois os elementos de casca acarretam um processo difícil

de actualização das rotações. Este problema é inexistente nos elementos sólidos, uma vez que os seus graus de liberdade consistem apenas em translações.

Um aspecto, com bastante interesse prático, e que poderia ser objecto de estudo, seria a quantificação do erro introduzido nos modelos com elementos de casca, cujo tratamento é feito como estado plano de tensão. Essa quantificação poderia ser efectivada com a utilização de elementos 3D próprios para estruturas tipo casca, mas em que nenhuma componente do tensor das tensões é desprezada.

O retorno à superfície de cedência é uma das partes mais importantes do algoritmo elasto-plástico. Seria interessante um estudo mais aprofundado dos diversos tipos de retorno à superfície de cedência e da dependência dos resultados finais em função do algoritmo utilizado.

BIBLIOTECA F.E. PORTO

Referências

1. Alves de Sousa, R.J., et al., *A new volumetric and shear locking-free 3D enhanced strain element.* Engineering Computations, 2003. **20**(7): p. 896-925.
2. Barlat, F., et al., *Plane stress yield function for aluminum alloy sheets - part 1: theory.* International Journal of Plasticity, 2003. **19**: p. 1297-1319.







FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO
BIBLIOTECA
0000078340