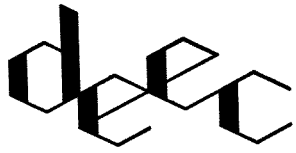


DEPARTAMENTO DE

ENGENHARIA ELECTROTÉCNICA E DE COMPUTADORES

681.5(043)
AZEa/CON

FACULDADE DE ENGENHARIA

UNIVERSIDADE DO PORTO

Rua dos Bragas, 4099 Porto Codex – PORTUGAL

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Controlo de Força de Manipuladores Robóticos

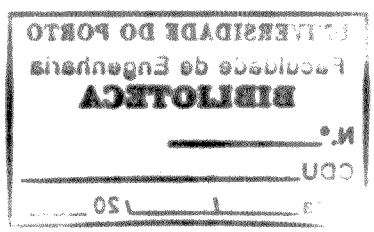
1994

Abílio Joaquim Gomes de Oliveira Azenha

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Controlo de Força de Manipuladores Robóticos



Dissertação submetida à Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, com vista à obtenção do grau de Mestre.

1994

Abílio Joaquim Gomes de Oliveira Azenha

Agradecimentos:

O aluno está particularmente grato ao seu responsável pela formação, Prof. Raul M. Vidal, e ao seu orientador, Prof. J. A. Tenreiro Machado, pelas ideias que deram, e em geral pela atenção dispensada.

Desejo também agradecer à minha família todo o apoio prestado durante este curso de Mestrado.

Este trabalho teve o apoio do **Programa Ciência**.

ÍNDICE:

Agradecimentos i
Índice ii

1 Introdução 1

2 Cinemática, Estática e Dinâmica 3

2.1 Geometria 4
2.1.1 Orientação e Posição 4
2.1.2 Notação de Denavit-Hartenberg 5
2.1.3 Cinemática Inversa 7
2.2 Movimento Diferencial 7
2.3 Estática 9
2.4 Dinâmica 10
2.4.1 Formulação das Equações de Movimento de Newton-Euler 11
2.4.2 Formulação de Lagrange da Dinâmica do Manipulador 12
2.4.3 Dinâmica Inversa 15
2.4.4 Dinâmica Directa 16

3 Noções fundamentais sobre controlo de força 18

3.1 Introdução 18
3.2 Controlo de impedância 20
3.2.1 Método da impedância passiva 20
3.2.2 Método da impedância activa - caso de um grau de liberdade 21
3.2.3 Método da impedância activa - caso geral 23
3.3 Controlo Híbrido 26
3.3.1 Controlo híbrido através de compensação por realimentação 27
3.3.2 Controlo híbrido dinâmico 29
3.3.2.1 Descrição da restrição do orgão terminal 30
3.3.2.2 Movimento do manipulador sob restrição e força de restrição 32
3.3.2.3 Cálculo das forças de comando das juntas 34
3.3.2.4 Estrutura básica do sistema de controlo híbrido dinâmico ... 36

4 Relação entre a força de contacto e a posição do ponto terminal do manipulador 38
4.1 Introdução 38
4.2 Controlo da força de contacto entre a ferramenta e a peça de trabalho 42
4.2.1 Controlo de força de um único eixo 42
4.2.2 Controlo de força de graus de liberdade múltiplos 45
4.2.3 Experiências de rebarbagem 47
4.3 Manipuladores redundantes 48
4.3.1 Modelização não estruturada do manipulador secundário 48
4.3.2 Comportamento dinâmico do ambiente exterior 49
4.3.3 Arquitectura do sistema em malha fechada 50
4.3.4 Estabilidade 52
4.3.5 Um orgão terminal activo como protótipo experimental 53
4.4 Controlo de impedância com comutação de modo autónoma 54
4.4.1 Modelo do controlador de impedância 54
4.4.2 Análise de estabilidade 57
4.4.3 Controlador de impedância com comutação autónoma de modo 58
4.4.4 Modos de operação 59
4.4.5 Análise da estabilidade de contacto para o modo T 60
4.5 Método de projecto de acomodação usando programação linear 61
4.5.1 Estrutura de trabalho da estratégia da tarefa de montagem 61
4.5.2 Método de projecto de acomodação para um movimento primitivo 62
4.5.3 Restrições de programação linear 64
4.5.4 Função objectivo 66
4.6 Conclusão 67

5 Controlo de força e posição de um modo não conflituoso 68
5.1 Introdução 68
5.2 Dinâmica do movimento acomodativo 70
5.3 Um manipulador com movimento da ferramenta restringido 73
5.4 Redução de dimensionalidade 76
5.5 Equações reduzidas para um manipulador restringido 80
5.6 Contacto com ambientes dinâmicos 83
5.6.1 Estratégia do controlo híbrido 84
5.6.2 O modelo robot-ambiente 85
5.6.3 Planeamento de trajectórias 88
5.6.4 Filtragem das medidas 89

5.6.5 Controlo desacopulador e linearizante 92
5.7 Conclusão 94

6 Estabilidade de manipuladores controlados em força 95
6.1 Introdução 95
6.2 Estabilidade cinemática de um controlador híbrido 97
6.2.1 Conceitos gerais 97
6.2.2 Teste da estabilidade cinemática 99
6.3 Papel do amortecimento e da filtragem passa-baixo 101
6.3.1 Caso de um amortecimento linear 102
6.3.2 Caso de um amortecimento não-linear 103
6.3.3 A filtragem passa-baixo e a instabilidade digital 106
6.4 Simulação do esquema de controlo híbrido 107
6.4.1 Formulação proposta originalmente 107
6.4.2 Correcção através da pseudo-inversa 114
6.4.3 Controlador híbrido com estrutura variável 121
6.5 Conclusão 126

7 Conclusão 128

Bibiografia 130

Capítulo 1

Introdução

A perspectiva clássica de controlo de manipuladores robóticos considera a configuração (i.e. posição) e as derivadas temporais (velocidade e aceleração) da estrutura mecânica. Todavia, muitas das tarefas solicitadas a este tipo de sistemas não são compatíveis com essa filosofia. De facto, as actividades que requerem um controlo de força/binário não são possíveis de controlar em posição e vice versa. Esta situação levou ao desenvolvimento de algoritmos com vista ao controlo das variáveis posição e força/binário de acordo com as solicitações das tarefas a executar. Assim, emergiram os conceitos de controlo de impedância, controlo híbrido e, de uma forma mais geral, o controlo de força.

As estratégias de controlo de posição são adequadas para tarefas tais como transferência de materiais, pintura ou soldadura por pontos onde o manipulador não interactua significativamente com objectos no espaço de trabalho. No entanto, tarefas tais como montagem (assembly), polimento (grinding) e rebarbagem (deburring) que envolvem um contacto são melhor conduzidas através do controlo das forças de interacção entre o manipulador e o ambiente.

Existem três tipos principais de transductores para realimentação de força: sensores das forças no punho, sensores do momento nas juntas, e sensores tácteis na mão ou nos "dedos" do robot. No caso dos actuadores nas juntas serem motores eléctricos, pode-se utilizar a corrente como indicação do binário fornecido pelo motor.

As restrições impostas pelo meio ambiente ao manipulador, nomeadamente ao seu movimento, fazem com que aquele desenvolva uma acomodação (compliance). Este fenómeno de acomodação pode ser passivo (quando é inerente à estrutura mecânica do manipulador) ou activo (quando pode ser criada através de um controlo apropriado). O contacto entre o orgão terminal e o meio ambiente pode ser:

- suave (quando pode ser modelizado através de uma mola, um amortecedor, uma massa e/ou um momento de inércia);
- duro (quando é modelizado através de uma relação matemática, isto é, quando a restrição é descrita como uma inequação ou uma igualdade sempre que ocorre algum contacto entre o orgão terminal e o seu meio ambiente).

Este trabalho pretende fazer um levantamento dos vários algoritmos propostos e realizar a sua análise. Nesta área foram até agora desenvolvidos dois métodos principais: controlo de impedância e controlo híbrido.

O controlo de impedância tem por objectivo o controlo da posição e da força através do ajuste da impedância mecânica do orgão terminal de acordo com as forças externas geradas por contacto com o ambiente do manipulador. O controlo de impedância pode ser subdividido nos métodos de impedância activa e de impedância passiva. No primeiro caso, a impedância desejada do orgão terminal é conseguida através do controlo dos actuadores das juntas usando uma realimentação baseada em medidas da posição, da velocidade e da força de contacto. No último caso, a impedância mecânica do orgão terminal é conseguida apenas através do uso de dispositivos mecânicos passivos tais como molas e amortecedores.

O controlo de impedância pode, em princípio, ser estendido de modo a obter-se uma *massa aparente* (que actua no orgão terminal) desejada ou um tensor de inércia aparente. No entanto, isto envolve questões de estabilidade uma vez que facilmente se pode verificar ser necessário um certo grau de realimentação "positiva" de modo a obter-se uma massa aparente menor que a massa real.

Por outro lado, o controlo híbrido usa dois anéis distintos de realimentação: um anel para o controlo de posição e outro anel para o controlo de força. Neste método, as direcções segundo as quais é controlada a posição e as restantes direcções segundo as quais é controlada a força são determinadas para uma dada tarefa. Assim, as solicitações aos actuadores das juntas correspondem à sobreposição das componentes de posição e de força.

Nesta ordem de ideias, a estrutura deste trabalho é apresentada de seguida. No capítulo 2 faz-se uma breve introdução à cinemática, estática e dinâmica de manipuladores robóticos. Uma vez estabelecidos os aspectos matemáticos básicos, no capítulo 3 estudam-se as noções fundamentais relativas ao controlo de força. No capítulo 4 apresentam-se vários de trabalhos sobre o controlo de força onde se estabelece uma relação entre a força e a posição do ponto terminal do robot. Por seu lado, no capítulo 5 estuda-se o controlo híbrido, onde se tende a controlar a força e a posição do ponto terminal do manipulador de um modo "não conflituoso". No capítulo 6 estuda-se a estabilidade de manipuladores controlados em força. Por último, no capítulo 7, apresentam-se as principais conclusões que decorrem do trabalho e destacam-se as vias para possíveis desenvolvimentos futuros.

Capítulo 2

Cinemática, Estática e Dinâmica

A cinemática de manipuladores é o estudo das relações geométricas dos movimentos do braço do manipulador. Uma vez que o desempenho de tarefas é conseguido através do movimento da estrutura do braço, a cinemática é uma ferramenta fundamental para o projecto e controlo de manipuladores.

A estática estuda o contacto entre o manipulador e o seu ambiente. Deste contacto resultam forças e momentos que se transmitem aos actuadores. Por seu lado, cada junta de um braço é comandada por um actuador individual. Assim, os momentos das juntas são transmitidos através da estrutura do braço ao orgão terminal, originando uma força e um momento que actuam sobre a peça manipulada.

A dinâmica descreve a variação no tempo da configuração do braço em relação aos momentos nas juntas exercidos pelos actuadores. Esta relação pode ser expressa por um conjunto de equações diferenciais *(equações dinâmicas)*, que caracterizam a resposta dinâmica do manipulador aos momentos nas juntas.

Neste capítulo começa-se por analisar sucintamente as relações geométricas, em que se trata a posição e orientação de corpos rígidos. A notação de Denavit-Hartenberg descreve a relação cinemática entre um par de ligações adjacentes envolvidas numa cadeia cinemática aberta. Por outro lado, a cinemática inversa resolve o problema de mover a mão de um manipulador para uma posição e orientação especificados. Depois vão estar em jogo os pequenos movimentos do orgão terminal em torno da sua posição actual, ou seja, os seus movimentos diferenciais. De seguida, na secção 2.3, explora-se a estática e, na secção seguinte, aborda-se a dinâmica.

2.1 Geometria

A estrutura do braço pode ser modelizada como um sistema de corpos rígidos interligados por eixos rotacionais ou lineares. Cada corpo rígido pode ser descrito completamente através da sua orientação e posição.

2.1.1 Orientação e posição

A posição pode ser representada através das coordenadas de um ponto arbitrário do corpo rígido. Seja *Oxyz* uma base de coordenadas fixa e seja um ponto *O'* arbitrário do corpo rígido, como se mostra na figura 2.1.

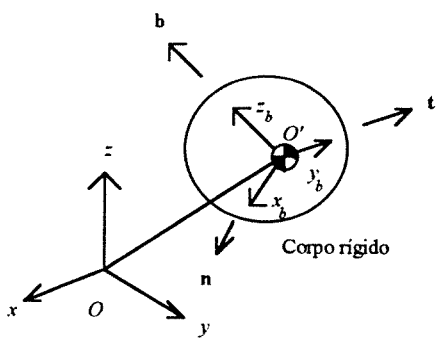


Figura 2.1
Posição e orientação de um corpo rígido.

Então, a posição do corpo rígido com respeito à base especificada é:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

onde $\mathbf{x}_0$ é um vector coluna de dimensão 3 × 1. Para representar a orientação do corpo rígido, é necessária uma nova base de coordenadas que se move com ele. Sejam **n**, **t** e **b** os vectores unitários que descrevem esta base $O'x_by_bz_b$, então uma possível matriz **R** descreve completamente a orientação do corpo rígido em relação à base de coordenadas *Oxyz* :

$$\mathbf{R} = [\mathbf{n} \mid \mathbf{t} \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{c|c|c} n_x & t_x & b_x \\ n_y & t_y & b_y \\ n_z & t_z & b_z \end{array}\right] \tag{2.2}$$

onde esta é uma matriz 3 × 3 ortonormal, pois todos os vectores coluna são ortogonais entre si e têm norma Euclidiana unitária. Isto é,

$$\mathbf{n}^T\mathbf{t} = 0 \quad \mathbf{t}^T\mathbf{b} = 0 \quad \mathbf{b}^T\mathbf{n} = 0 \tag{2.3}$$

e

$$\|\mathbf{n}\| = 1 \quad \|\mathbf{t}\| = 1 \quad \|\mathbf{b}\| = 1 \tag{2.4}$$

onde $\|\mathbf{a}\|$ designa a norma Euclidiana de um vector **a**.

2.1.2 Notação de Denavit-Hartenberg

Para começar é necessário introduzir algumas definições. Um manipulador é constituído por uma série de corpos rígidos inseridos numa estrutura cinemática. Em muitos manipuladores industriais essa estrutura constitui uma *cadeia cinemática aberta*. Existem n juntas num braço consistindo em $(n+1)$ ligações. A junta entre a ligação $(i-1)$ e a ligação i será chamada de junta i .

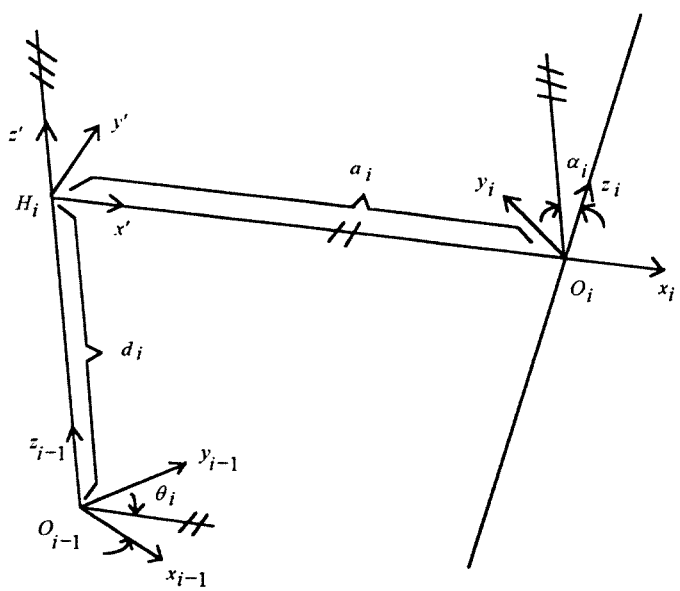


Figura 2.2
A relação entre as bases de coordenadas adjacentes na notação de D-H.

A notação de Denavit-Hartenberg (D-H) descreve a relação cinemática entre um par de ligações adjacentes envolvidas numa cadeia cinemática aberta. A posição relativa de duas

bases de coordenadas pode ser determinada completamente através dos seguintes quatro parâmetros (ver figura 2.2):

- a_i o comprimento da normal comum aos eixos das juntas i e $(i+1)$;
- d_i a distância entre a origem O_{i-1} e o ponto H_i (a linha H_iO_i é a normal comum aos eixos das juntas i e $(i+1)$);
- α_i o ângulo entre o eixo da junta i e o eixo z_i segundo a regra da mão direita;
- θ_i o ângulo entre o eixo x_{i-1} e a normal comum H_iO_i medido através do eixo z_{i-1} segundo a regra da mão direita.

Sejam $\mathbf{X}^{i-1}$ e $\mathbf{X}^i$ vectores posição de dimensão 4×1, respectivamente, referidos às bases de coordenadas $O_{i-1}x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$ e $O_ix_iy_iz_i$. O resultado final é o seguinte, em que a matriz $\mathbf{A}_i^{i-1}$ representa a posição e orientação da base de coordenadas i relativamente à base $(i-1)$:

$$\mathbf{X}^{i-1} = \mathbf{A}_i^{i-1}\,\mathbf{X}^i \tag{2.5}$$

$$\mathbf{A}_i^{i-1} = \left[\begin{array}{ccc|c} \cos\theta_i & -\sin\theta_i\cos\alpha_i & \sin\theta_i\sin\alpha_i & a_i\cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\cos\alpha_i & -\cos\theta_i\sin\alpha_i & a_i\sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{2.6}$$

Para uma junta rotacional, d_i, a_i e α_i são os parâmetros da junta que permanecem constantes, e θ_i é a variável da junta que se modifica quando a ligação i se move com respeito à ligação $i-1$. Para uma junta prismática, θ_i, a_i, e α_i são os parâmetros da junta que permanecem constantes, enquanto d_i é a variável da junta. Assim, o deslocamento de cada junta é ou o ângulo θ_i ou a distância d_i, de acordo com o tipo de junta. Em geral, o deslocamento é referido por q_i, o qual é θ_i para uma junta rotacional ou d_i para uma junta prismática. Tanto as orientações como as posições são escritas em função de transformações homogéneas.

A matriz $\mathbf{A}_i^{i-1}$ é o resultado de duas rotações e duas translações, de acordo com a figura 2.2 (Fu *et al.*, 1987). Assim, o lado direito da matriz (sub-matriz de dimensão 3×1) particionada (2.6) corresponde, fisicamente, às translações e o lado esquerdo (sub-matriz de dimensão 3×3) às rotações. De facto, um ponto expresso na base de coordenadas número i, pode ser expresso na base de coordenadas número $(i-1)$, através da efectuação das seguintes transformações sucessivas:

1. Rodar em torno do eixo z_{i-1} de um ângulo θ_i para alinhar o eixo x_{i-1} com o eixo x_i (o eixo x_{i-1} é paralelo ao x_i e aponta na mesma direcção).

2. Transladar ao longo do eixo z_{i-1} de uma distância d_i para que os eixos x_{i-1} e x_i coincidam.
3. Transladar em torno do eixo x_i de uma distância a_i para que as duas origens, bem como o eixo x coincidam.
4. Rodar acerca do eixo x_i de um ângulo α_i para que os dois sistemas de coordenadas coincidam.

Cada uma das quatro operações anteriores pode ser expressa por uma matriz rotação--translacção homogénea básica. O produto destas quatro matrizes transformação homogéneas básicas resulta na matriz transformação homogénea composta $\mathbf{A}_i^{i-1}$.

2.1.3 Cinemática Inversa

Nesta subsecção, analisa-se o problema de mover o orgão terminal de um manipulador para uma posição e orientação especificados. Quando a equação cinemática não pode ser resolvida analiticamente, podem ser usados métodos numéricos para determinar os correspondentes deslocamentos das juntas. No entanto, devido à complexibilidade computacional dos algoritmos, estes são muitas vezes impraticáveis.

Por outro lado, a cinemática inversa é afectada pelos problemas de soluções múltiplas, soluções impossíveis, e singularidades Este último caso dá-se quando existe pelo menos uma direcção na qual o orgão terminal não pode ser movido, independentemente das velocidades das juntas escolhidas.

2.2 Movimento Diferencial

Nesta secção, estudam-se os pequenos movimentos do orgão terminal em redor de uma dada posição. A relação infinitesimal de movimento é determinada através da diferenciação das equações cinemáticas. Deste modo, se $\mathbf{X} = \mathbf{f}(\mathbf{q})$ então na notação vectorial vem:

$$d\mathbf{X} = \mathbf{J}d\mathbf{q} \tag{2.7a}$$

$$\mathbf{J} = \left[\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{q}}\right] \tag{2.7b}$$

onde $\mathbf{X}$ é o vector deslocamento do orgão terminal, $\mathbf{q}$ é o vector deslocamento das juntas

do braço do manipulador e **J** é a matriz *Jacobiano* do manipulador. Dividindo ambos os termos de (2.7a) pelo incremento infinitesimal de tempo *dt*, obtém-se

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{J}\frac{d\mathbf{q}}{dt} \tag{2.8}$$

ou seja

$$\mathbf{v} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} \tag{2.9}$$

onde $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{X}}$.

Logo, a relação entre a velocidade das juntas e da mão é determinada pelo Jacobiano do manipulador. Um resultado que se pode concluir é que cada vector coluna da matriz Jacobiano representa a velocidade do orgão terminal gerada pelo movimento da junta correspondente à velocidade unitária, quando todas as outras estão imobilizadas.

De seguida trata-se da computação do Jacobiano do manipulador. Com efeito, é necessário descrever e calcular o Jacobiano do manipulador com *n* gdl e com rotações e translações infinitesimais da mão. Por conveniência define-se o seguinte vector com dimensão 6 × 1:

$$d\mathbf{p} = \begin{bmatrix} d\mathbf{x}_e \\ \hline d\boldsymbol{\phi}_e \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

em que $d\mathbf{x}_e$ é o vector 3 × 1 da translação infinitesimal da mão e $d\boldsymbol{\phi}_e$ é o vector 3 × 1 da rotação infinitesimal da mão. Dividindo ambos os lados pelo incremento infinitesimal de tempo *dt*, obtêm-se as velocidades linear e angular do orgão terminal dadas pela expressão:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} \tag{2.11}$$

Um manipulador necessita, no mínimo, de seis gdl para poder posicionar o seu orgão terminal numa posição e com uma orientação arbitrárias. De igual modo, são também precisos seis gdl para mover a mão numa direcção e com uma velocidade angular anbitrárias. Quando o braço do manipulador tem seis gdl, a matriz Jacobiano é uma matriz quadrada com dimensão 6 × 6. Se a matriz é não-singular para a configuração corrente de braço, então $\mathbf{J}^{-1}$ existe e é possivel obter a cinemática inversa instantânea através de (2.11).

Quando o braço do manipulador tem mais de seis gdl, pode-se encontrar um número infinito de soluções para a cinemática instantânea inversa. Neste caso, podem-se achar soluções óptimas (Asada e Slotine, 1986), através de multiplicadores de Lagrange e da matriz $\mathbf{J}^+$ pseudo-inversa do Jacobiano:

$$\mathbf{J}^+=\mathbf{J}^T(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1} \tag{2.12}$$

Este tema encontra-se, ainda, em fase de investigação e não será abordado neste trabalho.

2.3 Estática

O contacto entre um manipulador e uma superfície produz forças interactivas e momentos na inter-relação manipulador/ambiente. Nesta secção, estudam-se as forças e os momentos que actuam num manipulador na ausência de qualquer movimento.

Se um manipulador é usado parra transportar um objecto pesado no seu *ponto terminal* (endpoint), ou se uma força muito grande é aplicada ao orgão terminal, o ponto terminal do braço do manipulador desvia-se (está neste caso em jogo a *rigidez* do manipulador).

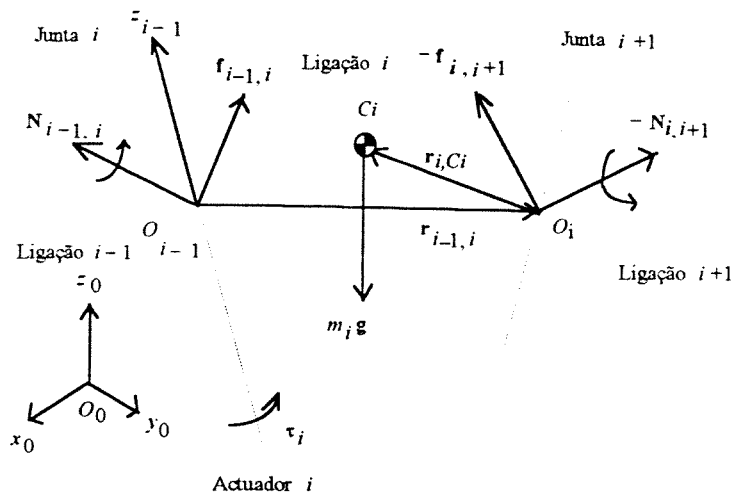


Figura 2.3
Forças e momentos que actuam na ligação i.

O balanço de forças lineares numa ligação individual, incorporada numa cadeia cinemática aberta existente num campo gravítico é dado por

$$\mathbf{f}_{i-1,i}-\mathbf{f}_{i,i+1}+m_i\mathbf{g}=0, \quad i=1,\ldots,n \tag{2.13}$$

em que $\mathbf{f}_{i,i-1}$ representa a força aplicada ao elo $(i+1)$ pela ligação i, e $m_i\mathbf{g}$ é a força da gravidade que actua no centro de massa do elo i (ver figura 2.3). É de notar que todos os vectores são definidos com referência à base de coordenadas O_0-$x_0y_0z_0$.

O balanço dos momentos com respeito ao centro de massa da ligação i é o seguinte

$$\mathbf{N}_{i-1,i} - \mathbf{N}_{i,i+1} - (\mathbf{r}_{i-1,i} + \mathbf{r}_{i,ci}) \times \mathbf{f}_{i-1,i} + (-\mathbf{r}_{i,ci}) \times (-\mathbf{f}_{i,i+1}) = 0, \quad i = 1,\ldots,n \tag{2.14}$$

onde $\mathbf{N}_{i,i-1}$ é o momento aplicado pela ligação $(i+1)$ à ligação i, $\mathbf{r}_{i-1,i}$ é o vector posição 3 × 1 desde o ponto O_{i-1} até o ponto O_i, com referência à base de coordenadas da base fixa, e $\mathbf{r}_{i,ci}$ representa o vector posição desde o ponto O_i até o centro de massa C_i.

Por conveniência define-se o seguinte vector de dimensão 6 × 1:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{n,n+1} \\ \hline \mathbf{N}_{n,n+1} \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

que se chama frequentemente de *força no ponto terminal.*

Para finalizar esta secção apresenta-se um resultado importante, que se demonstra através do princípio do trabalho virtual (Asada e Slotine, 1986). Assim, **F** e τ estão relacionados pela expressão:

$$\tau = \mathbf{J}^T\mathbf{F} \tag{2.16}$$

onde τ é o vector n × 1 das forças/momentos nas juntas. A fórmula (2.16) resulta de $\delta\text{Trabalho} = \tau^T\delta\mathbf{q} - \mathbf{F}^T\mathbf{J}\delta\mathbf{q} = 0$ onde o símbolo δ se usa para distinguir de *d.* Os deslocamentos virtuais são diferentes dos deslocamentos actuais, uma vez que aqueles devem apenas satisfazer restrições *geométricas* e não precisam de ser coerentes com outras leis de movimento. Note-se que τ_i será uma força ao longo do eixo da junta se esta for prismática ou um momento se esta for rotacional. Considera-se, também, que os mecanismos das juntas não têm atrito.

2.4 Dinâmica

Nesta secção, analisa-se a dinâmica de manipuladores, através das equações de movimento. Existem dois métodos principais para as obter: a formulação de **Newton-Euler** e a formulação de **Lagrange**. Recentemente têm sido desenvolvidos algoritmos eficientes

para calcular a dinâmica dos sistemas e que permitam o controlo, em tempo real, dos manipuladores.

2.4.1 Formulação das Equações de Movimento de Newton-Euler

As equações da dinâmica de um corpo rígido podem ser representadas por duas equações: uma que descreve o movimento de translacção do centro de massa e outra que descreve o movimento de rotação acerca do mesmo. A primeira é a equação de movimento de Newton para uma partícula com massa e a segunda é a chamada equação de movimento de Euler.

Começando por considerar um corpo livre de um manipulador, a equação de Newton é:

$$\mathbf{f}_{i-1,i} - \mathbf{f}_{i,i+1} + m_i\mathbf{g} - m_i\dot{\mathbf{v}}_{ci} = 0, \quad i = 1,\ldots,n \tag{2.17}$$

onde $\mathbf{v}_{ci}$ é a velocidade linear do centro de massa da ligação i (figura 2.4) com respeito à base de coordenadas da base fixa, e os outros termos foram definidos na secção anterior.

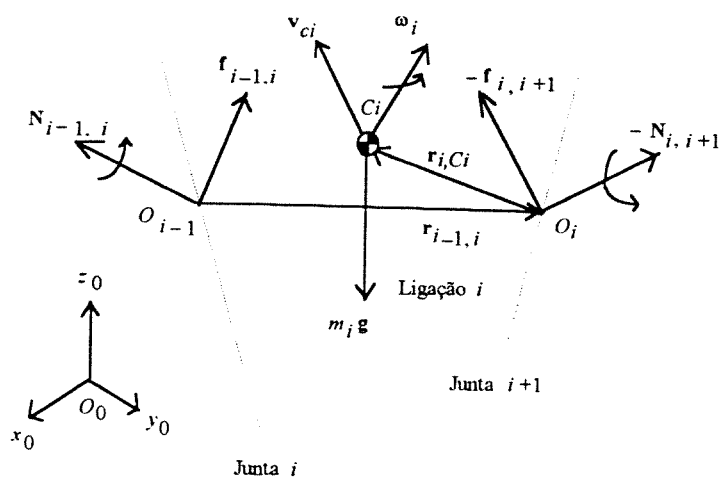


Figura 2.4
Diagrama do corpo livre da ligação i.

Para descrever as equações de rotação do corpo rígido em torno do centro de massa, começa-se por definir a matriz simétrica (de dimensão 3 × 3) que é o *tensor de inércia*. É de notar que este último varia com a orientação do corpo rígido. A notação para o tensor de inércia da ligação i será $\mathbf{I}_i$.

Seja ω_i o vector velocidade angular (de dimensão 3 × 1) da ligação i. Então, o momento angular será dado por $\mathbf{I}_i\omega_i$. Como o tensor de inércia varia com a orientação do

corpo rígido, a derivada temporal do momento angular inclui também o chamado *momento giroscópico*: $\omega_i \times (\mathbf{I}_i\omega_i)$. Deste modo, o balanço dos momentos é:

$$\mathbf{N}_{i-1,i} - \mathbf{N}_{i,i+1} + \mathbf{r}_{i,ci} \times \mathbf{f}_{i,i+1} - \mathbf{r}_{i-1,ci} \times \mathbf{f}_{i-1,i} - \mathbf{I}_i\dot{\omega}_i - \omega_i \times (\mathbf{I}_i\omega_i) = 0, \quad i = 1,\ldots,n \tag{2.18}$$

As duas últimas parcelas de (2.18) constituem a equação de Euler. Deste modo, o conjunto completo das equações o braço do manipulador completo é obtido resolvendo ambas as equações para todas as ligações do braço, $i = 1, \ldots, n$.

Estas equações de Newton-Euler não estão numa forma apropriada para serem utilizadas no cálculo da dinâmica porque não descrevem, explicitamente, a relação de entrada/saída. Assim, é necessário obter as *equações dinâmicas na forma fechada* (closed--form). Para isso, utilizam-se as equações dinâmicas em termos dos deslocamentos $\mathbf{q}$ e momentos τ nas juntas.

As equações dinâmicas em forma fechada para um manipulador com n graus de liberdade são da forma:

$$\tau_i = \sum_{j=1}^{n} H_{ij}\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} h_{ijk}\dot{q}_j\dot{q}_k + G_i, \quad i = 1,\ldots,n \tag{2.19}$$

onde os coeficientes H_{ij}, h_{ijk} e G_i são funções dos deslocamentos das juntas $q_1, \ldots, q_n$. Quando forças externas actuam no braço do manipulador, o lado esquerdo da equação tem de ser alterado de acordo com os efeitos (devido à configuração do robot se alterar).

Em resumo, as equações dinâmicas de um braço de manipulador são caracterizadas por fenómenos inerciais dependentes da configuração (primeira parcela do lado direito de (2.19)). Os fenómenos de interacção causados pelas acelerações das outras juntas e a existência de efeitos centrífugos e de Coriolis são dados pela parcela do meio do lado direito de (2.19). Os fenómenos gravitacionais correspondem à última parcela de (2.19).

2.4.2 Formulação de Lagrange da Dinâmica do Manipulador

Uma alternativa à formulação de Newton-Euler é o método de Langrage, o qual descreve o comportamento de um sistema dinâmico em termos de trabalho e energia, em vez de forças e momentos dos membros individuais envolvidos.

Sejam q_1, ... , q_n as coordenadas generalizadas que traduzem completamente um sistema dinâmico. Sejam T e U as energias totais cinética e potencial, respectivamente, armazenadas no sistema dinâmico. Então, define-se o Lagrangeano $\mathcal{L}$ como sendo

$$\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i) = T - U \tag{2.20}$$

Como as energias potencial e cinética são funções das coordenadas generalizadas e suas derivadas temporais, o Lagrangeano é, também, função das mesmas variáveis. Usando o Lagrangeano, as equações de movimento do sistema dinâmico são dadas pela equação:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1,\ldots,n \tag{2.21}$$

onde Q_i é a força generalizada correspondente à coordenada generalizada q_i.

Calculando a energia cinética T_i da ligação i e somando todas as energias cinéticas do manipulador, obtém-se a energia total das ligações do braço, uma vez que a energia tem a propriedade aditiva. A energia cinética de cada ligação engloba as energias de translacção e de rotação. Utilizam-se matrizes Jacobiano de dimensão $3 \times n$ para exprimir as velocidades angular e linear do centro de massa de cada ligação. Estas matrizes dependem da configuração do braço e das velocidades das coordenadas generalizadas das juntas. Existe uma coordenada generalizada para cada velocidade (angular ou linear) de cada elo. A expressão resultante é:

$$T = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H} \dot{\mathbf{q}} \tag{2.22}$$

onde $\mathbf{H}$ é o tensor de inércia do manipulador. $\mathbf{H}$ é função da massa e do tensor de inércia de cada elo, bem como das matrizes Jacobiano referidas anteriormente. É de notar a diferença entre o tensor de inércia do manipulador e os tensores de inércia $\mathbf{I}_i$ de dimensão 3×3 das individuais ligações dos braços. O primeiro é um tensor de inércia composto que inclui os segundos como componentes. Mostra-se que o tensor de inércia do manipulador $\mathbf{H}$ é uma matriz simétrica de dimensão $n \times n$ e que os seus elementos são funções de $\mathbf{q}$.

Depois de calculada a energia cinética, é preciso encontrar a energia potencial U e as forças generalizadas. Seja $\mathbf{g}$ o vector 3×1 que representa a aceleração da gravidade com respeito ao sistema de coordenadas da base, isto é, relativamente ao sistema de coordenadas

inercial. Então, a energia potencial total armazenada nas ligações do braço do manipulador é:

$$U = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{O,ci} \tag{2.23}$$

onde o vector posição do centro de massa C_i é dependente da configuração do braço e m_i é a massa individual do elo i. Logo, a energia potencial é uma função de $q_1, \ldots, q_n$.

Considere-se a situação onde os actuadores exercem momentos nas juntas $\tau = [\tau_1, \ldots, \tau_n]^T$ e uma força/momento $\mathbf{F}_{ext}$ é aplicada no orgão terminal quando em contacto com o ambiente. As forças generalizadas Q_i, correspondentes às coordenadas generalizadas q_i, podem ser obtidas através do cálculo do trabalho virtual executado por estas forças. Sendo $\mathbf{Q} = [Q_1, \ldots, Q_n]^T$, o trabalho virtual é dado por

$$\delta\text{Trabalho} = \mathbf{Q}^T \delta\mathbf{q} \tag{2.24}$$

chegando-se à conclusão (Asada e Slotine, 1986) que

$$\mathbf{Q} = \tau + \mathbf{J}^T \mathbf{F}_{ext} \tag{2.25}$$

Usando a energia cinética total (2.22) e a energia potencial total (2.23), podem-se derivar agora as equações de movimento de Lagrange. De início calcula-se o primeiro termo da equação da formulação de Lagrange. Depois, é a vez de calcular a derivada parcial da energia cinética. Em seguida, calcula-se o termo da gravidade G_i, tomando a derivada parcial da energia potencial. O resultado de todas estas operações é:

$$\sum_{j=1}^{n} H_{ij}\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} h_{ijk}\dot{q}_j\dot{q}_k + G_i = Q_i, \quad i = 1,\ldots,n \tag{2.26}$$

onde

$$G_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} \tag{2.27}$$

e

$$h_{ijk} = \frac{\partial H_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial H_{jk}}{\partial q_i} \tag{2.28}$$

A primeira parcela de (2.26) representa os momentos de inércia (incluindo inter-acções), a segunda parcela corresponde aos efeitos de Coriolis/centrífugos e a última parcela é o momento da gravidade. Desta forma, a formulação de Lagrange proporciona, directamente, as equações dinâmicas na forma fechada.

Na forma simbólica, as expressões da dinâmica, qualquer que seja o método de derivação, podem exprimir-se de acordo com a equação:

$$\tau = \mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \tag{2.29}$$

onde τ é o vector de dimensão $n \times 1$ das forças de entrada generalizadas nas juntas. $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ é a matriz $n \times n$ simétrica de inércia do manipulador, $\mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ é um vector de dimensão $n \times 1$ que representa as forças centrífugas e de Coriolis, e $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ é o vector de dimensão $n \times 1$ que representa a carga da gravidade.

2.4.3 Dinâmica Inversa

As equações dinâmicas em forma fechada deduzidas nas sub-secções anteriores caracterizam as respostas dinâmicas de um braço de manipulador aos momentos de entrada nas juntas gerados pelos actuadores. A dinâmica inversa permite calcular os momentos nas juntas (ou *forças generalizadas*) $\tau(t)$ dadas as coordenadas generalizadas, tipicamente os deslocamentos das juntas $\mathbf{q}(t)$ e suas derivadas de primeira e segunda ordem.

A dinâmica inversa é particularmente importante para o controlo, pois permite calcular a dinâmica do braço que é altamente acopulada e não-linear. No entanto, é preciso ter em conta a sua complexidade computacional no cálculo em tempo real. De facto, é conhecido (Luh *et al.*, 1980) que, como é mostrado na tabela 2.1, a carga computacional da formulação de Lagrange para um manipulador geral de n graus de liberdade é da ordem de n^4, enquanto que para a de Newton-Euler é da ordem de n (Hollerbach, 1980). O número n representa o número de juntas do manipulador e o número entre parentesis corresponde ao caso de $n = 6$.

Método	Multiplicação	Adição
Lagrange	$32\frac{1}{2}n^4+86\frac{5}{12}n^3+171\frac{1}{4}n^2+53\frac{1}{3}n-128$	$25n^4+66\frac{1}{3}n^3+129\frac{1}{2}n^2+42\frac{1}{3}n-96$
	(66271)	(51548)
Newton-Euler	$150n-48$	$131n-48$
	(852)	(738)

Tabela 2.1
Comparação do peso computacional.

Os métodos mais eficientes desenvolvidos, para calcular a dinâmica inversa, formulam as equações dinâmicas numa forma *recursiva*. Deste modo, todo o cálculo pode ser realizado desde uma ligação do manipulador para outra. Um exemplo destes métodos é o algoritmo de Luh-Walker-Paul (Luh *et al.*, 1980). Este algoritmo utiliza o cálculo recursivo das equações dinâmicas de Newton-Euler.

A primeira fase deste cálculo consiste em determinar todas as variáveis cinemáticas que são necessárias para resolver as equações de Newton-Euler. Este procedimento começa desde a base do robot e continua até chegar ao orgão terminal, e destina-se a calcular todas as velocidades e acelerações dos centros de massa das ligações, bem como das velocidades e acelerações das juntas. Depois, numa segunda fase, são resolvidas as equações de Newton-Euler, através das variáveis cinemáticas calculadas na fase anterior, para determinar os momentos das juntas.

Sumariamente, o procedimento recursivo, para a segunda fase, pode ser formulado como se segue:

$$\mathbf{f}_{i-1,i} = \mathbf{f}_{i,i+1} - m_i\mathbf{g} + m_i\mathbf{a}_{ci} \tag{2.30}$$

$$\mathbf{N}_{i-1,i} = \mathbf{N}_{i,i+1} - \mathbf{r}_{i,ci} \times \mathbf{f}_{i,i+1} + \mathbf{r}_{i-1,ci} \times \mathbf{f}_{i-1,i} + \mathbf{I}_i\dot{\omega}_i + \omega_i \times (\mathbf{I}_i\omega_i) \tag{2.31}$$

O procedimento é repetido, para determinar os momentos das juntas, desde $i = n$ até $i = 1$.

2.4.4 Dinâmica Directa

Para se fazerem simulações dinâmicas por computador, de um manipulador, é preciso determinar o seu movimento para uma dada força de comando das juntas. Isto significa que é necessário resolver as equações diferenciais que são as equações de movimento. Para este problema de dinâmica directa, a formulação de Newton-Euler é, novamente, vantajosa devido à sua relativa velocidade de cálculo (Walker e Orin, 1982).

Suponha-se que é dado o estado inicial do manipulador no instante de tempo $t = 0$, isto é, o deslocamento $\mathbf{q}(0)$ e a velocidade $\dot{\mathbf{q}}(0)$ das juntas, e a força de comando das juntas $\tau(t)$ para o período desde o tempo inicial até um tempo terminal. Primeiro especifica-se um passo de tempo pequeno, Δt. Depois calcula-se o estado do manipulador, $\mathbf{q}(t)$ e $\dot{\mathbf{q}}(t)$, nos instantes de tempo $t = 0$, Δt, $2\Delta t$, $3\Delta t$, ..., passo a passo até ao tempo final. Neste procedimento, as equações de movimento são usadas para calcular $\mathbf{q}(t + \Delta t)$ e $\dot{\mathbf{q}}(t + \Delta t)$, no instante de tempo $t + \Delta t$, quando são disponíveis $\mathbf{q}(t)$ e $\dot{\mathbf{q}}(t)$ no instante de tempo t através do passo precedente.

Uma das maneiras mais simples de fazer isto é como se segue: resolvendo a equação (2.29) para $\ddot{\mathbf{q}}$, obtém-se

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\left[\tau - \mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{g}(\mathbf{q})\right] \tag{2.32}$$

Pode-se calcular $\ddot{\mathbf{q}}(t)$ através da substituição dos valores conhecidos de $\mathbf{q}(t)$ e $\dot{\mathbf{q}}(t)$ na equação (2.32). Pressupondo-se que o valor de $\ddot{\mathbf{q}}(t)$ se mantém constante durante o intervalo de tempo $[t, t + \Delta t]$, obtém-se

$$\dot{\mathbf{q}}(t + \Delta t) = \dot{\mathbf{q}}(t) + \ddot{\mathbf{q}}(t)\Delta t \tag{2.33a}$$

$$\mathbf{q}(t + \Delta t) = \mathbf{q}(t) + \dot{\mathbf{q}}(t)\Delta t + \ddot{\mathbf{q}}(t)(\Delta t)^2 / 2 \tag{2.33b}$$

Desprezando o termo com $(\Delta t)^2$ na equação (2.33b), obtém-se

$$\mathbf{q}(t + \Delta t) \cong \mathbf{q}(t) + \dot{\mathbf{q}}(t)\Delta t \tag{2.33c}$$

Logo, pode-se calcular $\mathbf{q}(t + \Delta t)$ e $\dot{\mathbf{q}}(t + \Delta t)$ usando as equações (2.33a) e (2.33c).

O método anterior corresponde ao chamado método de Euler para a obtenção de uma solução numérica de equações diferenciais ordinárias, e pode ser considerado como um método baseado na expansão em série de Taylor em $t + \Delta t$ até ao termo de primeira ordem. Quando se pretende uma maior precisão podem usar-se outros métodos numéricos, nomeadamente os métodos de Runge-Kutta que conduzem a uma melhor relação precisão *versus* peso computacional (Machado e Galhano, 1993).

Capítulo 3

Noções fundamentais sobre controlo de força

Neste capítulo apresenta-se a teoria que aborda o controlo de força de manipuladores robóticos de uma forma generalizada, isto é, para qualquer tipo de tarefa e de robot. Neste sentido, faz-se uma introdução e análise dos tipos de controlo de força propostos, sem recorrer a um enquadramento relativo à sua utilização.

O presente capítulo começa com uma introdução onde se abordam as várias classes de controlo de força e se faz uma breve referência aos sistemas de aquisição de sinais de força. De seguida, faz-se uma análise detalhada dos métodos de controlo de impedância e de controlo híbrido.

3.1 Introdução

Muitas tarefas com manipuladores robóticos requerem controlo não só da posição do manipulador, mas também da força exercida pelo seu orgão terminal num objecto. Neste sentido, Mason (1981) apresentou uma teoria do controlo de força baseada em modelos formais (cinemáticos) do manipulador e da geometria da tarefa. Exemplos típicos destas tarefas são a montagem, o polimento, a rebarbagem, a abertura e o fecho de uma porta e a rotação de uma manivela. Nesta perspectiva, foram desenvolvidos dois métodos para controlo de força (Yoshikawa, 1990): controlo de impedância e controlo híbrido.

O controlo de impedância tem por objectivo controlar a posição e a força através do ajuste da impedância mecânica do orgão terminal às forças externas geradas pelo contacto com o ambiente do manipulador. A impedância mecânica é uma generalização do conceito de rigidez de um mecanismo relativamente a uma força aplicada. O controlo de impedância

pode ser classificado nos métodos de *impedância passiva* e *impedância activa*. No método de impedância passiva, a impedância mecânica desejada do orgão terminal é conseguida através de elementos mecânicos passivos tais como molas e amortecedores. Por outro lado, o método de impedância activa realiza a impedância mecânica desejada através dos actuadores das juntas, usando um controlo por realimentação baseado nas medidas da posição, velocidade, força de contacto e outras variáveis associadas ao orgão terminal.

O controlo híbrido usa dois anéis distintos de realimentação, um para o controlo da posição e o outro para controlo da força. Neste método, as direcções segundo as quais a posição é controlada e as direcções segundo as quais é controlada a força, são determinadas para uma dada tarefa durante a execução do trabalho. Deste modo, as direcções segundo as quais são controladas a força e a posição dependem da tarefa e são definidas pelo utilizador. Assim, baseados nas medidas de posição e de força, os actuadores das juntas aplicam correcções de modo a que as variáveis sigam as trajectórias desejadas de posição e força.

Os sensores do punho são montados entre a extremidade do braço e o orgão terminal e consistem em extensómetros que medem o desvio da estrutura mecânica devido a forças externas. Estes elementos sensores são pequenos, com elevada sensibilidade, leves e relativamente compactos. O hardware é geralmente construído com uma peça de metal sólida, tipicamente alumínio, de modo a reduzir a histerese e aumentar a exactidão na medida. Por exemplo, o transdutor mostrado na figura 3.1 usa oito pares de extensómetros de material semiconductor montados em quatro barras de desvio - um extensómetro de cada lado das barras.

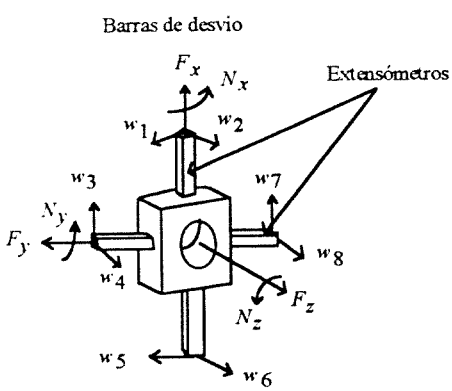


Figura 3.1
Transdutor de força no punho.

Os extensómetros nas extremidades abertas opostas das barras de desvio são ligados diferencialmente a um circuito cuja tensão de saída é proporcional à componente da força normal ao plano do extensómetro. Os oito pares de extensómetros estão orientados normalmente aos eixos x, y, e z da base de coordenadas da força. Se o acopulamento entre

eles for desprezável, as três componentes da força **F** e as do momento **N** podem ser determinadas, respectivamente, através da adição e subtracção das tensões de saída. Isto pode ser feito pré-multiplicando as leituras dos oito transdutores por uma matriz de calibração dos sensores com dimensão 6×8 (Fu *et al.*, 1987).

3.2 Controlo de impedância

Nesta secção aborda-se um tipo de controlo de robots que usa a configuração e a dinâmica de um manipulador para estabelecer acomodação ao ambiente exterior.

3.2.1 Método da impedância passiva

Considere-se a tarefa de inserir uma cavilha num orifício com uma abertura de dimensão reduzida (peg-in-hole). Se se desejar realizar esta tarefa com um manipulador controlado apenas em posição, então é necessário que o controlo de posição seja extremamente preciso, pois a inserção da cavilha requer que o seu eixo seja alinhado quase exactamente com o eixo da cavidade. Para contornar esta dificuldade foi desenvolvido um dispositivo mecânico: o *"Remote Center Compliance"* (RCC). Trata-se de um dispositivo que se insere entre o punho e a mão e que apresenta uma grande elasticidade em certas direcções, o que o torna apropriado para tarefas desse tipo. Como um exemplo, na figura 3.2 apresenta-se um RCC tri-dimensional.

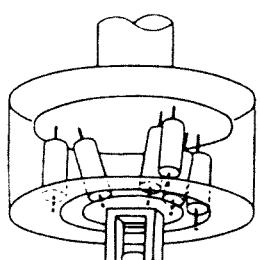


Figura 3.2
Um RCC tridimensional.

O método de impedância passiva não requer nenhum anel de controlo de força e, deste modo, o sistema de controlo resulta muito simples. No entanto, o método é pouco

versátil porque, para cada tarefa diferente é necessário desenvolver um sistema mecânico específico.

3.2.2 Método da impedância activa - caso de um grau de liberdade

Para ilustrar o método da impedância activa, de seguida vai ser adoptado um sistema simples com um grau de liberdade.

A equação dinâmica do sistema mostrado na figura 3.3 é dada por

$$m_a\ddot{x} + d_a\dot{x} + k_a x = f_u + F \tag{3.1}$$

onde m_a é a massa do corpo M, F é a força externa, f_u é a força de comando exercida, x é o deslocamento a partir do ponto de equilíbrio para $F=f_u=0$, k_a é a constante de elasticidade da mola e d_a é o coeficiente de amortecimento.

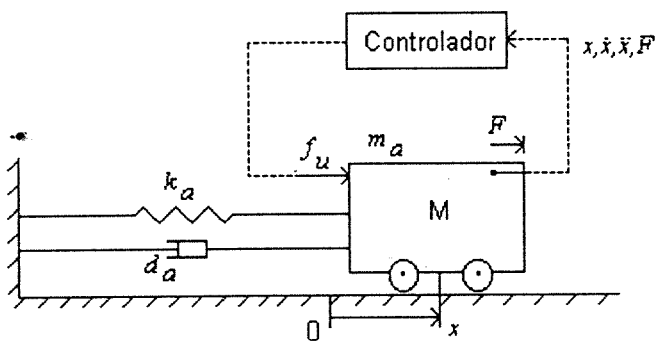


Figura 3.3
Controlo de impedância activa de um sistema com um grau de liberdade.

Considere-se que a impedância desejada do corpo para a força externa F obedece à expressão:

$$m_d\ddot{x} + d_d(\dot{x} - \dot{x}_d) + k_d(x - x_d) = F \tag{3.2}$$

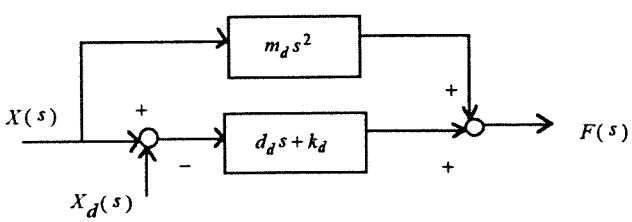


Figura 3.4
Diagrama de blocos correspondente à expressão (3.2).

onde m_d, d_d, e k_d são respectivamente a massa, o coeficiente de amortecimento e o coeficiente de elasticidade desejados e x_d é a trajectória de posição desejada. A figura 3.4 mostra o diagrama de blocos correspondente.

Quando x, $\dot{x}$, e $\ddot{x}$ são mensuráveis, pode-se utilizar a lei de controlo

$$f_u = (m_a - m_d)\ddot{x} + (d_a - d_d)\dot{x} + (k_a - k_d)x + d_d\dot{x}_d + k_d x_d \tag{3.3a}$$

Substituindo a equação (3.3a) em (3.1) resulta a expressão (3.2), mostrando, assim, que o sistema em malha fechada tem a impedância desejada.

Quando a força externa F é mensurável, a lei de controlo representada pela equação (3.3a) pode ser substituida por

$$f_u = (d_a - m_a m_d^{-1} d_d)\dot{x} + (k_a - m_a m_d^{-1} k_d)x - (1 - m_a m_d^{-1})F + m_a m_d^{-1}(d_d\dot{x}_d + k_d x_d) \tag{3.3b}$$

Se for permitido ter a massa original m_a como a massa desejada m_d, então as equações (3.3a) e (3.3b) reduzem-se a uma simples lei de realimentação de posição e velocidade:

$$f_u = (d_a - d_d)\dot{x} + (k_a - k_d)x + d_d\dot{x}_d + k_d x_d \tag{3.4}$$

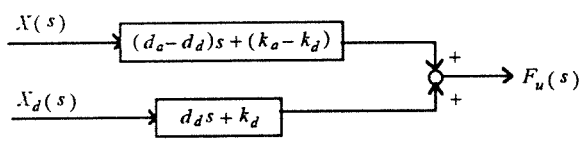


Figura 3.5
Diagrama de blocos correspondente à equação (3.4).

Foram desenvolvidas leis de controlo para se conseguir a impedância desejada (equação 3.2). No entanto, subsiste o problema da determinação dos coeficientes m_d, d_d, e k_d dessa equação. Quando o sistema não entra em contacto com outros objectos, ou quando se pode considerar a força externa F como sendo igual a zero, um procedimento consiste em fazer $m_d = m_a$ de modo à frequência natural

$$\omega_c = \sqrt{\frac{k_d}{m_d}} \tag{3.5}$$

ser o maior possível (para melhorar a resposta transitória) e estabelecer o coeficiente de amortecimento

$$\zeta = \frac{d_d}{2\sqrt{m_d k_d}} \tag{3.6}$$

entre 0.7 e 1.0. Assim, desde que m_d, d_d, e k_d sejam positivos, o sistema é estável e os erros de posição e velocidade em regime permanente convergem para zero, qualquer que seja a trajectória desejada x_d.

Uma vantagem da impedância activa em relação à impedância passiva resulta do facto de um sistema deste tipo poder, sempre, ajustar-se a uma impedância desejada. Esta é conseguida através da mudança dos valores de m_d, k_d, e d_d, mesmo durante a execução de uma tarefa considerando contactos e não-contactos com objectos.

3.2.3 Método da impedância activa - caso geral

Nesta subsecção generaliza-se a abordagem introduzida anteriormente para manipuladores com vários graus de liberdade.

Considere-se um manipulador com seis eixos e que a impedância mecânica desejada para o seu orgão terminal é descrita pela equação:

$$\mathbf{M}_d \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{D}_d \dot{\mathbf{y}}_e + \mathbf{K}_d \mathbf{y}_e = \mathbf{F} \tag{3.7}$$

onde $\mathbf{y}_e$ é a diferença entre o valor corrente de um vector de manipulação $\mathbf{y}$ e o seu valor desejado $\mathbf{y}_d$ (vectores de dimensão 6×1):

$$\mathbf{y}_e = \mathbf{y} - \mathbf{y}_d \tag{3.8}$$

Um exemplo típico de $\mathbf{y}$ é o vector $\mathbf{p}$ que expressa a posição e orientação do orgão terminal. Na equação (3.7), $\mathbf{F}$ representa a força generalizada (dimensão 6×1) correspondente a $\mathbf{y}$. Em termos físicos, $\mathbf{F}$ é a força externa exercida no orgão terminal pelo seu ambiente. As matrizes (6×6) $\mathbf{M}_d$, $\mathbf{D}_d$, e $\mathbf{K}_d$ são, respectivamente, a matriz de inércia, a matriz de coeficientes de amortecimento e a matriz de rigidez (matrizes simétricas e definidas não-negativas). Uma possibilidade de escolha de $\mathbf{M}_d$, $\mathbf{D}_d$, e $\mathbf{K}_d$ consiste em fazê-las diagonais e determinar os elementos da diagonal por considerações similares às do caso de um grau de liberdade. Na atribuição dos valores numéricos deve, também, ter-se em

atenção as direcções nas quais é desejável uma impedância baixa ou uma impedância elevada.

O passo seguinte consiste em desenvolver uma lei de controlo que consiga obter a impedância desejada (equação 3.7). Suponha-se que a dinâmica do manipulador é descrita pela equação (2.29), ou seja:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}_N(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \tau \tag{3.9}$$

onde

$$\mathbf{c}_N(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{c}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \tag{3.10}$$

A relação entre **y** e **q** é dada pela equação cinemática:

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}_y(\mathbf{q}) \tag{3.11}$$

Diferenciando (3.11) resulta:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{J}_y(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \tag{3.12}$$

onde $\mathbf{J}_y = \partial \mathbf{y} / \partial \mathbf{q}$. Como já foi referido, o momento nas juntas τ_F, equivalente à força externa **F** é dado por

$$\tau_F = \mathbf{J}_y^T(\mathbf{q})\mathbf{F} \tag{3.13}$$

Logo, de (3.9) e (3.13) a equação dinâmica do manipulador com a força externa **F** aplicada é:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}_N(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \tau + \mathbf{J}_y^T(\mathbf{q})\mathbf{F} \tag{3.14}$$

Supondo que $\mathbf{J}_y(\mathbf{q})$ é não-singular para qualquer **q** na região considerada, das equações (3.12) e (3.14) obtém-se:

$$\mathbf{M}_y(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{c}_{Ny}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{J}_y^{-T}(\mathbf{q})\tau + \mathbf{F} \tag{3.15}$$

onde $\mathbf{J}_y^{-T} = (\mathbf{J}_y^T)^{-1}$ e

$$\mathbf{M}_y(\mathbf{q}) = \mathbf{J}_y^{-T}(\mathbf{q})\mathbf{H}(\mathbf{q})\mathbf{J}_y^{-1}(\mathbf{q}) \tag{3.16}$$

$$\mathbf{c}_{Ny}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{J}_y^{-T}(\mathbf{q})\mathbf{c}_N(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{M}_y(\mathbf{q})\dot{\mathbf{J}}_y(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \tag{3.17}$$

Considere-se agora, uma lei de realimentação não-linear da forma:

$$\begin{aligned}\tau &= \mathbf{J}_y^T(\mathbf{q})\left\{\mathbf{c}_{Ny}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{M}_y(\mathbf{q})\mathbf{M}_d^{-1}(\mathbf{D}_d\dot{\mathbf{y}}_e + \mathbf{K}_d\mathbf{y}_e) + \left[\mathbf{M}_y(\mathbf{q})\mathbf{M}_d^{-1} - \mathbf{I}\right]\mathbf{F}\right\} \\ &= \mathbf{c}_N(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{H}(\mathbf{q})\mathbf{J}_y^{-1}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{J}}_y(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{H}(\mathbf{q})\mathbf{J}_y^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{M}_d^{-1}(\mathbf{D}_d\dot{\mathbf{y}}_e + \mathbf{K}_d\mathbf{y}_e) \\ &+ \left[\mathbf{H}(\mathbf{q})\mathbf{J}_y^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{M}_d^{-1} - \mathbf{J}_y^T(\mathbf{q})\right]\mathbf{F}\end{aligned} \tag{3.18}$$

Neste caso, o sistema em malha fechada passa a ser descrito pela equação (3.7).

Se não for necessário que $\mathbf{M}_d$, a matriz de inércia da impedância desejada (equação 3.7), seja constante e independente de $\mathbf{q}$, e se for possível que seja igual à matriz de inércia corrente $\mathbf{M}_y(\mathbf{q})$, isto é, se a impedância desejada for descrita por

$$\mathbf{M}_y(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{D}_d\dot{\mathbf{y}}_e + \mathbf{K}_d\mathbf{y}_e = \mathbf{K}_{Fd}\mathbf{F} \tag{3.19}$$

então, a lei de controlo (equação 3.18) reduz-se a:

$$\tau = \mathbf{c}_N(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{H}(\mathbf{q})\mathbf{J}_y^{-1}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{J}}_y(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{J}_y^T(\mathbf{q})\left\{\mathbf{D}_d\dot{\mathbf{y}}_e + \mathbf{K}_d\mathbf{y}_e - (\mathbf{K}_{Fd} - \mathbf{I})\mathbf{F}\right\} \tag{3.20}$$

A matriz de coeficientes $\mathbf{K}_{Fd}$ foi introduzida no lado direito da equação (3.19) para compensar o facto de não se poder modificar $\mathbf{M}_y(\mathbf{q})$. Por exemplo, pode-se produzir uma impedância grande (ou pequena) numa dada direcção, fazendo $\mathbf{K}_{Fd}$ uma matriz diagonal e atribuindo um valor pequeno (ou grande) positivo ao elemento diagonal correspondente a essa direcção.

A primeira parcela do lado direito da equação (3.20) compensa as forças centrífuga e de Coriolis da dinâmica do manipulador. A segunda parcela compensa a não-linearidade da transformação entre $\ddot{\mathbf{y}}$ e $\ddot{\mathbf{q}}$. Todos estes termos (excepto a força da gravidade) são funções

de $\dot{\mathbf{q}}$ e são pequenos quando o manipulador se move a baixa velocidade. Quando estes termos são desprezáveis, a lei de controlo (equação 3.20) reduz-se a (ver figura 3.6):

$$\tau = -\mathbf{J}_y^T(\mathbf{q})\left[\mathbf{D}_d\dot{\mathbf{y}}_e + \mathbf{K}_d\mathbf{y}_e - (\mathbf{K}_{Fd} - \mathbf{I})\mathbf{F}\right] \tag{3.21}$$

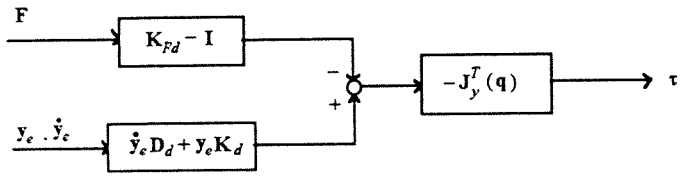


Figura 3.6
Diagrama de blocos correspondente à equação (3.21).

Isto indica que o controlo de impedância é possível de atingir até um certo grau, por uma simples realimentação linear dos erros de posição e de velocidade, bem como da força externa. Se a força da gravidade não for desprezável, então é necessário adicionar a parcela $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ ao lado direito da equação (3.21) para conseguir a sua compensação, resultando:

$$\tau = \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{J}_y^T(\mathbf{q})\left[\mathbf{D}_d\dot{\mathbf{y}}_e + \mathbf{K}_d\mathbf{y}_e - (\mathbf{K}_{Fd} - \mathbf{I})\mathbf{F}\right] \tag{3.22}$$

Se , além disso, se considerar o caso em que $\mathbf{D}_d = 0$ e $\mathbf{K}_{Fd} = \mathbf{I}$, então, fazendo-se $\mathbf{y}_e = \mathbf{J}_y(\mathbf{q})\mathbf{q}_e$ ($\mathbf{q}_e$ é o vector erro nas juntas correspondente a $\mathbf{y}_e$) e assumindo que $\mathbf{y}_e$ é pequeno, obtém-se:

$$\tau = -\mathbf{J}_y^T(\mathbf{q})\mathbf{K}_d\mathbf{J}_y(\mathbf{q})\mathbf{q}_e \tag{3.23}$$

O controlo de impedância baseado na equação (3.23) é chamado *controlo de rigidez*, porque faz a matriz rigidez, expressa nas variáveis de manipulação, igual à matriz desejada $\mathbf{K}_d$. É também chamado *controlo acomodativo* (compliance control), porque o inverso da matriz rigidez é uma matriz de *acomodação*.

3.3 Controlo Híbrido

Nesta secção estuda-se o tipo de controlo complementar ao anterior, no qual as direcções nas quais é controlada a força do orgão terminal e as direcções segundo as quais é controlada a sua posição são desacopuladas. Esta abordagem será desenvolvida com maior detalhe no capítulo 5.

3.3.1 Controlo híbrido através de compensação por realimentação

O método do controlo híbrido foi desenvolvido sabendo que, em muitas tarefas que requerem um controlo de força, existem algumas direcções segundo as quais é necessário controlar a posição e outras direcções segundo as quais é necessário controlar a força. Estas direcções podem ser modificadas durante a tarefa mas, nenhuma delas, requer simultaneamente o controlo de posição e de força.

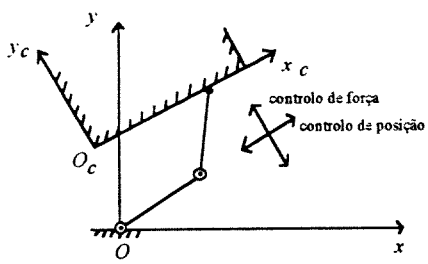


Figura 3.7
Exemplo de controlo híbrido através de compensação por realimentação.

Considere-se uma base de coordenadas de duas dimensões $O_c x_c y_c$, de tal modo que o eixo x_c seja paralelo a uma superfície plana e o eixo y_c seja normal à superfície (ver figura 3.7). Neste caso, x_c é a direcção controlada em posição e y_c a direcção controlada em força. Suponha-se que existe um sensor de força no ponto terminal para medir a força de contacto, ${}^{C}\mathbf{f}(t)$, expressa na base O_c e que a posição do ponto terminal ${}^{C}\mathbf{y}(t)$, expressa na base O_c, é medida por um sensor de posição. Designando os valores desejados para a força e a posição respectivamente por ${}^{C}\mathbf{f}_d(t)$ e ${}^{C}\mathbf{y}_d(t)$, obtêm-se expressões para os erros na base O_c como:

$$ {}^{C}\mathbf{y}_e(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left[{}^{C}\mathbf{y}_d(t) - {}^{C}\mathbf{y}(t) \right] \tag{3.24} $$

$$ {}^{C}\mathbf{f}_e(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left[{}^{C}\mathbf{f}_d(t) - {}^{C}\mathbf{f}(t) \right] \tag{3.25} $$

Sendo $\mathbf{J}_y$ a matriz Jacobiano de ${}^{C}\mathbf{y}$ com respeito a $\mathbf{q}$, pode-se transformar os erros (3.24) e (3.25) para o espaço de coordenadas das juntas, usando as seguintes equações:

$$ \mathbf{q}_e(t) \cong \mathbf{J}_y^{-1} {}^{C}\mathbf{y}_e(t) \tag{3.26a} $$

$$\dot{\mathbf{q}}_e(t) = \mathbf{J}_y^{-1\,C}\dot{\mathbf{y}}_e(t) \tag{3.26b}$$

$$\tau_e(t) = \mathbf{J}_y^{T\,C}\mathbf{f}_e(t) \tag{3.26c}$$

Note-se que a equação (3.26a) é uma aproximação válida para o caso de pequenas variações de ${}^{C}\mathbf{y}_e$. A partir destas expressões de erro, pode-se agora calcular as forças τ_p e τ_f de comando das juntas. A força τ_p destina-se a compensar o erro de posição e é dada por uma lei de controlo de posição. A força τ_f destina-se a compensar o erro de força e é dada por uma lei de controlo de força. Aplicando a soma de τ_p e τ_f às juntas, a componente direccional x_c, da posição desejada ${}^{C}\mathbf{y}_d(t)$, e a componente direccional y_c, da força desejada ${}^{C}\mathbf{f}_d(t)$ serão objecto de um controlo apertado. Embora sejam aplicáveis uma variedade de leis de controlo de posição e de força, um par típico consiste numa lei de controlo de posição PD (proporcional e diferencial)

$$\tau_P(t) = \mathbf{K}_{Pp}\mathbf{q}_e(t) + \mathbf{K}_{Pd}\dot{\mathbf{q}}_e(t) \tag{3.27}$$

e numa lei de controlo de força I (integral)

$$\tau_F(t) = \mathbf{K}_{Fi}\int_0^t \tau_e(t')dt' \tag{3.28}$$

onde $\mathbf{K}_{Pp}$, $\mathbf{K}_{Pd}$, e $\mathbf{K}_{Fi}$ são matrizes de ganho de realimentação. O momento de comando das juntas é dado por:

$$\tau(t) = \tau_P(t) + \tau_F(t). \tag{3.29}$$

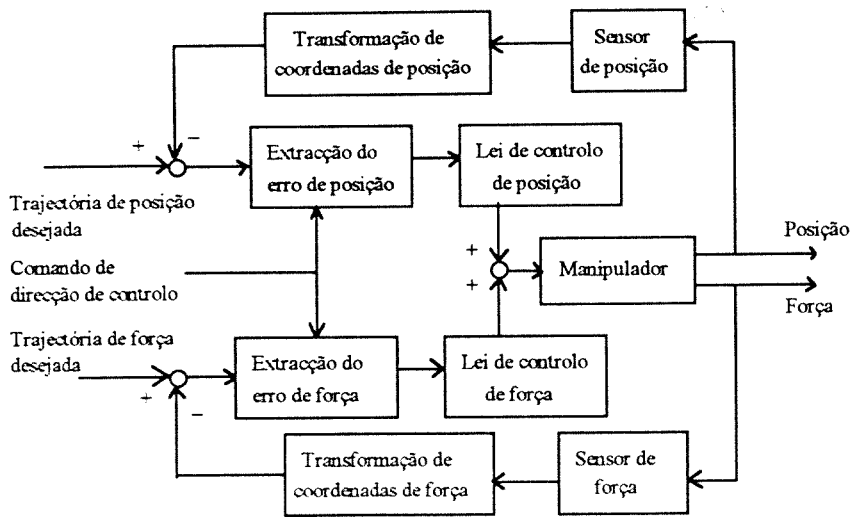


Figura 3.8
Diagrama de blocos de um sistema de controlo híbrido.

O conjunto de equações (3.24)-(3.29) constitui um algoritmo de controlo híbrido para o manipulador. O eixo y_c é a direcção na qual se restringe a posição do orgão terminal. O eixo x_c é a direcção na qual se restringe a força exercida no objecto pelo orgão terminal.

A figura 3.8 representa o diagrama de blocos de um sistema de controlo híbrido baseado nas considerações anteriores. A função do bloco "extracção do erro de posição" consiste em detectar os erros de posição nas direcções de controlo de posição e desprezar aqueles que ocorrem nas direcções de controlo de força. O bloco "extracção do erro de força" tem a função complementar de detectar os erros de força nas direcções de controlo de força. Os blocos "lei de controlo de posição" e "lei de controlo de força" calculam as forças de comando das juntas usando os erros extraídos. No caso anterior, o sistema de controlo calcula as equações (3.26a), (3.26b), e (3.27) para a posição e calcula as equações (3.26c) e (3.28) para a força.

3.3.2 Controlo híbrido dinâmico

Nesta subsecção desenvolve-se uma abordagem para o controlo híbrido tendo em consideração a dinâmica do manipulador. Em primeiro lugar, é descrita a restrição no orgão terminal por um conjunto de hipersuperfícies nas coordenadas do orgão terminal. Em segundo lugar, derivam-se as equações básicas do *controlo híbrido dinâmico* a partir desta descrição de restrições e da dinâmica do manipulador. Estas equações permitem calcular as forças das juntas necessárias para se obterem as trajectórias de força e posição desejadas.

Em último lugar, é apresentada uma estrutura básica do sistema de controlo híbrido dinâmico.

3.3.2.1 Descrição da restrição do orgão terminal

A restrição no orgão terminal causada pelo contacto com o seu ambiente exprime-se através de um conjunto de hipersuperfícies no espaço do vector posição do orgão terminal. Supõe-se que o ambiente é rígido e que, por essa razão, as hipersuperfícies são independentes da força aplicada pelo orgão terminal.

Considere-se um manipulador com seis graus de liberdade tal que a posição do orgão terminal com respeito a uma base de coordenadas fixa é representada pelo vector $\mathbf{r}$ (de dimensão 6×1). Uma restrição do orgão terminal pode ser expressa por um conjunto de m hipersuperfícies ($m \leq 6$), da forma:

$$p_i(\mathbf{r}) = 0, \quad i = 1,2,\ldots,m \tag{3.30}$$

as quais são duplamente diferenciáveis e mutuamente independentes num subconjunto S do espaço Euclidiano $\Re^6$. Quando a equação (3.30) é unilateral (no sentido da aproximação ser apenas efectuada por um lado), como no caso de se empurrar uma ferramenta contra a superfície de um objecto, assume-se que $p_i(\mathbf{r}) > 0$ dentro do objecto e $p_i(\mathbf{r}) < 0$ fora. A diferenciação da equação (3.30) com respeito ao tempo resulta:

$$\mathbf{E}_F \dot{\mathbf{r}} = 0 \tag{3.31}$$

onde

$$\mathbf{E}_F = \left[\mathbf{e}_{7-m}, \mathbf{e}_{8-m}, \ldots, \mathbf{e}_6\right]^T \tag{3.32}$$

$$\mathbf{e}_{6-m+i} = \frac{\partial p_i(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}, \quad i = 1,2,\ldots m \tag{3.33}$$

A matriz $\mathbf{E}_F$ é de ordem m, devido à independência considerada na equação (3.30). Diferenciando, de novo, a equação (3.31), obtém-se

$$\mathbf{E}_F \ddot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{E}}_F \dot{\mathbf{r}} = 0 \tag{3.34}$$

Para exprimir a trajectória do orgão terminal nas superfícies de restrição dadas pela equação (3.30), supõe-se que existe uma função de dimensão (6–m):

$$\mathbf{y}_P = \mathbf{s}(\mathbf{r}) = [s_1(\mathbf{r}), s_2(\mathbf{r}), \ldots, s_{6-m}(\mathbf{r})]^T \tag{3.35}$$

onde $s_j(\mathbf{r})$ (j = 1, 2, ..., 6–m) são funções escalares duplamente diferenciáveis e $\{p_i(\mathbf{r}), i = 1, 2, \ldots, m; s_j(\mathbf{r}), j = 1, 2, \ldots, 6-m\}$ são mutuamente independentes na região S. Se se definir

$$\mathbf{E}_P = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{6-m}]^T \tag{3.36}$$

onde

$$\mathbf{e}_j = \frac{\partial s_j(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}, \quad j = 1, 2, \ldots, 6-m \tag{3.37}$$

então obtém-se:

$$\dot{\mathbf{y}}_P = \mathbf{E}_P \dot{\mathbf{r}} \tag{3.38}$$

$$\ddot{\mathbf{y}}_P = \mathbf{E}_P \ddot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{E}}_P \dot{\mathbf{r}} \tag{3.39}$$

Para cada $\mathbf{r}$ na superfície restrição, os vectores $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_6$ são linearmente independentes. O conjunto $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{6-m}\}$ representa as direcções nas quais o orgão terminal se pode mover e o conjunto $\{\mathbf{e}_{7-m}, \mathbf{e}_{8-m}, \ldots, \mathbf{e}_6\}$ representa as direcções nas quais o orgão terminal tem movimento restringido. Deste modo, o sistema de coordenadas que tem a sua origem na posição corrente $\mathbf{r}$ e $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_6\}$ como sua base, pode ser chamado de *base das restrições*. Este resultado é uma generalização do sistema de coordenadas de restrição introduzida na subsecção 3.3.1. Faz-se $\mathbf{y}_F = \mathbf{p}(\mathbf{r})$ e denomina-se como $\mathbf{f}_y = [\mathbf{f}_P^T, \mathbf{f}_F^T]^T$ o vector força generalizada (de dimensão 6 × 1) correspondente a um vector de coordenadas generalizadas $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_P^T, \mathbf{y}_F^T]^T$. As restrições naturais, em termos da base de coordenadas anterior, são dadas por $\dot{\mathbf{y}}_F = 0$ e $\mathbf{f}_P = 0$ e as restrições artificiais são dadas por $\dot{\mathbf{y}}_p = \dot{\mathbf{y}}_{Pd}$ e $\mathbf{f}_F = \mathbf{f}_{Fd}$. As restrições naturais são as restrições determinadas directamente da tarefa a efectuar. As restrições artificiais são aquelas que ocorrem devido às imposições do sistema de controlo. Assim, os valores de $\dot{\mathbf{y}}_{Pd}$ e $\mathbf{f}_{Fd}$ são determinados pelo utilizador.

Seja $\mathbf{E}$ uma matriz 6 × 6 tal que:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_P \\ \mathbf{E}_F \end{bmatrix} \tag{3.40}$$

Então, tem-se:

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}}_P \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{3.41}$$

e

$$\mathbf{E}\ddot{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{y}}_P \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{r}} \tag{3.42}$$

A interpretação física destas equações é:

- a componente normal da velocidade do orgão terminal relativamente à superfície restrição é nula;
- a componente normal da aceleração do orgão terminal relativamente à superfície restrição é determinada pela velocidade $\dot{\mathbf{r}}$.

A velocidade $\dot{\mathbf{r}}$ do orgão terminal pode ser expressa também por um vector **v** (de dimensão 6×1), consistindo nas velocidades de translacção e de rotação ao longo de cada eixo da base de coordenadas de referência. A relação entre $\dot{\mathbf{r}}$ e **v** é:

$$\mathbf{v} = \mathbf{T}_r\dot{\mathbf{r}} \tag{3.43}$$

onde $\mathbf{T}_r$ é uma matriz de transformação (6×6) que é uma função de **r** e que se supõe não-singular num subconjunto S.

3.3.2.2 Movimento do manipulador sob restrição e força de restrição

Considere-se um manipulador com n graus de liberdade e denomine-se o seu vector de juntas como **q**. Como já se referiu anteriormente, a relação entre a posição **r** do orgão terminal e o seu vector de juntas **q** é

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}_r(\mathbf{q}) \tag{3.44}$$

e diferenciando a equação (3.44) obtém-se

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{J}_r \dot{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{J}_r = \partial \mathbf{r} / \partial \mathbf{q} \tag{3.45}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{J}_r \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}_r \dot{\mathbf{q}} \tag{3.46}$$

Como já se mencionou também, suponha-se que a dinâmica do braço é dada pela equação:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}_N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \tau \tag{3.47}$$

A aceleração das juntas $\ddot{\mathbf{q}}$ e a força restrição $\mathbf{f}_F$ vão ser encontradas para o caso em que uma força de comando arbitrária τ_c é aplicada ao manipulador no estado $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ e sob a restrição (3.30). Através das equações (3.31) e (3.43) obtém-se:

$$\mathbf{E}_F \mathbf{T}_r^{-1} \mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{3.48}$$

A força generalizada (de dimensão 6 × 1) correspondente a uma velocidade generalizada **v** é dada pelas forças/momentos em cada eixo da base de coordenadas de referência. Por simplicidade, suponha-se que o contacto entre o orgão terminal e o objecto não tem atrito. Assim, pelo princípio do trabalho virtual, a força **f** exercida na superfície pelo orgão terminal, expressa em termos da força generalizada, satisfaz a equação $\mathbf{v}^T\mathbf{f} = 0$ para qualquer velocidade **v** realizável sob a equação (3.48). Deste modo, tem-se:

$$\mathbf{f} = \hat{\mathbf{E}}_F \mathbf{f}_F \tag{3.49a}$$

e

$$\hat{\mathbf{E}}_F = \mathbf{E}_F \mathbf{T}_r^{-1} \tag{3.49b}$$

onde $\mathbf{f}_F$ é um vector não conhecido de dimensão $m \times 1$. Na equação (3.49a) cada vector coluna de $\hat{\mathbf{E}}_F^T$ pode ser interpretado como um vector força referência, normal a cada hipersuperfície restrição. Por isso, o vector $\mathbf{f}_F$ representa a força **f** expressa nesses vectores força de referência. A força **−f** pode ser interpretada como sendo a força que restringe o orgão terminal à superfície. A força nas juntas τ_f equivalente à força restrição **−f**, é dada por:

$$\tau_f = -(\mathbf{T}_r \mathbf{J}_r)^T \mathbf{f} = -\mathbf{J}_r^T \mathbf{E}_F^T \mathbf{f}_F \tag{3.50}$$

Uma vez que τ_c e τ_f são aplicados às juntas através da substituição $\tau = \tau_c + \tau_f$ na equação (3.47) obtém-se:

$$\mathbf{H}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}_r^T \mathbf{E}_F^T \mathbf{f}_f = \mathbf{b}_1 \tag{3.51a}$$

$$\mathbf{b}_1 = \tau_c - \mathbf{c}_N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \tag{3.51b}$$

Pelas equações (3.34) e (3.46) resulta:

$$\mathbf{E}_F \mathbf{J}_r \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{b}_2 \tag{3.52a}$$

$$\mathbf{b}_2 = -\mathbf{E}_F \dot{\mathbf{J}}_r \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{E}}_F \dot{\mathbf{r}} \tag{3.52b}$$

Note-se que os vectores $\mathbf{b}_1$ e $\mathbf{b}_2$ podem ser calculados a partir dos valores dados $\mathbf{q}$ e $\dot{\mathbf{q}}$, isto é, a partir do estado do manipulador. Através das equações (3.51a) e (3.52a), obtém-se, finalmente:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{H}^{-1}\left\{\mathbf{b}_1 + (\mathbf{E}_F \mathbf{J}_r)^T \mathbf{K}(\mathbf{b}_2 - \mathbf{E}_F \mathbf{J}_r \mathbf{H}^{-1} \mathbf{b}_1)\right\} \tag{3.53}$$

$$\mathbf{f}_F = -\mathbf{K}(\mathbf{b}_2 - \mathbf{E}_F \mathbf{J}_r \mathbf{H}^{-1} \mathbf{b}_1) \tag{3.54}$$

onde

$$\mathbf{K} = (\mathbf{E}_F \mathbf{J}_r \mathbf{H}^{-1} \mathbf{J}_r^T \mathbf{E}_F^T)^{-1} \tag{3.55}$$

3.3.2.3 Cálculo das forças de comando das juntas

Anteriormente foi derivado o movimento do manipulador e a força restrição para uma força arbitrária de comando das juntas τ_c. Agora considere-se o problema inverso. Assim, sejam $\ddot{\mathbf{y}}_{Pd}$, e $\mathbf{f}_{Fd}$ os valores desejados respectivamente para $\ddot{\mathbf{y}}_P$ e $\mathbf{f}_F$.

Considere-se a seguinte lei de realimentação de estado não linear:

$$\tau_c = \tau_P + \tau_F \tag{3.56}$$

$$\tau_P = \mathbf{H}\ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{c}_N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \tag{3.57}$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_d = \mathbf{J}_r^+ \left\{ \mathbf{E}^{-1} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \dot{\mathbf{E}}\mathbf{J}_r\dot{\mathbf{q}} \right) - \dot{\mathbf{J}}_r\dot{\mathbf{q}} \right\} + (\mathbf{I} - \mathbf{J}_r^+\mathbf{J}_r)\mathbf{k} \tag{3.58}$$

$$\tau_F = \mathbf{J}_r^T \mathbf{E}_F^T \mathbf{u}_2 \tag{3.59}$$

onde $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ são novos vectores de entrada, respectivamente, com dimensão $(6-m) \times 1$ e $m \times 1$. Pode-se mostrar facilmente, usando as equações (3.53) a (3.55), que o sistema em malha fechada é um sistema linear descrito pelas fórmulas:

$$\ddot{\mathbf{y}}_P = \mathbf{u}_1 \tag{3.60a}$$

$$\mathbf{f}_F = \mathbf{u}_2 \tag{3.60b}$$

Deste modo, se os modelos dados pelas equações (3.30) e (3.47) forem correctos e se $\mathbf{y}_P(0) = \mathbf{y}_{Pd}(0)$ e $\dot{\mathbf{y}}_P(0) = \dot{\mathbf{y}}_{Pd}(0)$, no instante de tempo inicial $t = 0$, então as trajectórias de posição e força desejadas serão perfeitamente reproduzidas de acordo com as expressões:

$$\mathbf{u}_1 = \ddot{\mathbf{y}}_{Pd} \tag{3.61a}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{f}_{Fd} \tag{3.61b}$$

O vector $\mathbf{k}$ na equação (3.58) é uma função arbitrária do tempo. Este vector $\mathbf{k}$ representa a arbitrariedade da aceleração das juntas que ocorre quando $n > 6$, isto é, quando se consideram manipuladores redundantes. Se $n = 6$ e a ordem de $\mathbf{J}_r$ é 6, então o segundo termo do lado direito da equação (3.58) é nulo.

Com base nas considerações anteriores concluiu-se que a posição e a força podem ser controlados simultaneamente através da aplicação da soma da força τ_P (3.57) para se conseguir a aceleração desejada $\ddot{\mathbf{y}}_{Pd}$. Isto consegue-se aplicando também, e simultaneamente, a força τ_F para se conseguir a força desejada $\mathbf{f}_{Fd}$ como a força de comando das juntas. Para que este resultado seja atingido, tem que ser satisfeita a condição ordem(**J**) = 6, ou seja, o manipulador não pode estar numa posição singular.

Quando existe algum atrito entre a superfície restrição e o orgão terminal, e o seu valor exacto é conhecido, então pode-se compensar a força de atrito incluindo-a na parcela $\mathbf{c}_N(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$ da equação (3.57).

3.3.2.4 Estrutura básica do sistema de controlo híbrido dinâmico

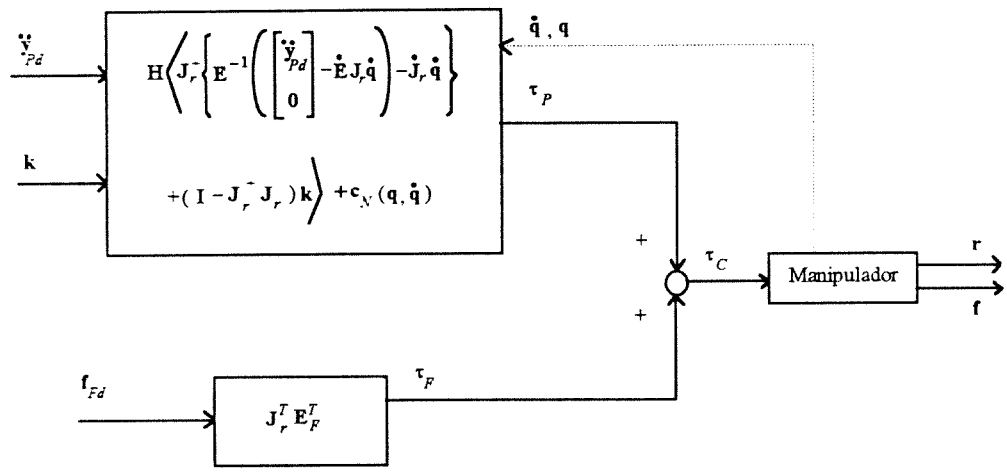


Figura 3.9
Sistema de controlo híbrido dinâmico em malha aberta.

Se as equações (3.30) e (3.47) estiverem totalmente correctas, então o sistema em malha aberta da figura 3.9 pode produzir ao mesmo tempo a posição e a força desejadas. No entanto, devido a erros de modelização e a perturbações imprevisíveis, a resposta real deste sistema pode diferir da desejada. Assim, é necessário adicionar um compensador servo ao sistema (Yoshikawa, 1990).

Em muitas tarefas que requerem um controlo de força, é suficiente operar manipuladores a velocidades baixas. Em tais casos, podem-se desprezar os termos $\mathbf{c}_N(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$, $\dot{\mathbf{E}}\mathbf{J}_r\dot{\mathbf{q}}$ e $\dot{\mathbf{J}}_r\dot{\mathbf{q}}$, nas equações (3.57) e (3.58), e desenvolver a lei de controlo linear aproximada:

$$\tau_c = \mathbf{H}(\mathbf{q})\mathbf{J}_r^+\mathbf{E}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1\\ \mathbf{0}\end{bmatrix} - \mathbf{J}_r^T\mathbf{E}_F^T\mathbf{u}_2 \qquad (3.62)$$

Esta lei de controlo e um compensador servo (para se aplicar na determinação de $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$) constituem um controlador híbrido simplificado (ver figura 3.10).

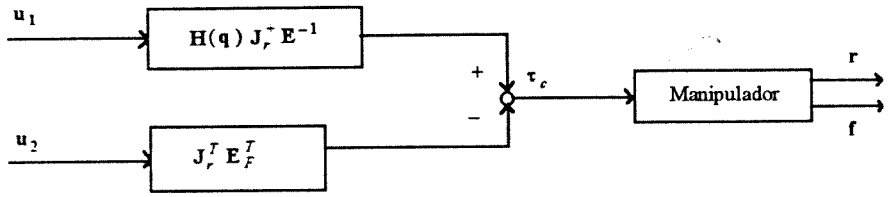


Figura 3.10

Diagrama de blocos para o controlador híbrido simplificado.

Capítulo 4

Relação entre a posição e a força no ponto terminal do manipulador

Como se sabe, não é possível controlar um manipulador, independente e simultaneamente, em posição e em força numa mesma direcção. Deste modo, há que encontrar formas de controlo que sejam compatíveis com as trajectórias de força e de posição desejadas. De seguida apresenta-se uma síntese dos trabalhos efectuados nesta área que refletem a necessidade de encontrar um compromisso entre posição/força a controlar para uma dada tarefa. Assim, na secção 4.2 é descrito um método de rebarbagem através de robots, na qual é usado o controlo de força ou controlo acomodativo. Na secção 4.3 é apresentado um trabalho acerca da utilização de robots redundantes (i.e., com um número de graus de liberdade superior a seis) no controlo acomodativo. Na secção seguinte estuda-se o controlo de impedância com comutação de modo (movimento livre, transições e contacto sustentado) automática. Na secção 4.5, é abordado um método para construção de matrizes de acomodação, em tarefas de montagem, usando programação linear. Por último, na secção 4.6, apresentam-se as principais conclusões que decorrem deste capítulo.

4.1 Introdução

O trabalho de Her e Kazerooni (1991) apresenta um método para rebarbagem robótica de objectos planares (i.e. de duas dimensões) com geometria desconhecida. A rebarbagem com robots requer uma "acomodação" e uma "rigidez" da estrutura mecânica, respectivamente, nas direcções tangente e perpendicular ao objecto (ver figura 4.1).

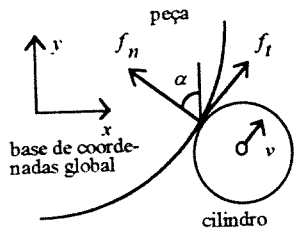


Figura 4.1
Um rolamento montado num sensor de força pode ser usado como um orgão terminal no seguimento de uma peça. As componentes ortogonais f_t e f_n são, respectivamente, as forças tangente e normal exercidas na peça.

A "acomodação" na direcção tangente permite uma adaptação a variações nas forças cortantes tangenciais, enquanto que uma "rigidez" na direcção normal impede uma resposta do robot a perturbações, isto é, a variações das forças cortantes normais. Todavia, para seguir o contorno do objecto, o robot precisa de ter acomodação na direcção normal. Estas necessidades são conflituosas, mas podem ser examinadas como dois problemas:

- controlo do processo de remoção do metal;
- seguimento (tracking) do contorno do objecto.

Em geral, estes dois problemas estão interligados, no entanto, aqui serão separados num problema de "hardware" e num problema de controlo. Assim, foi projectado e construído um mecanismo de seguimento, o qual incorpora um rolamento montado num transdutor de força no ponto terminal do robot. Este sensor de força está localizado directamente abaixo do cortador e mede as forças de contacto que constituem a entrada do controlador de seguimento. Essas forças de contacto são usadas não apenas para calcular o vector normal à superfície do objecto, mas também para criarem uma acomodação do robot. No entanto, o algoritmo de rebarbagem "usa" um segundo conjunto de forças (as forças cortantes geradas pelo cortador) para produzir um processo estável de remoção de metal. Este método de controlo de rebarbagem garante, respectivamente, uma acomodação e uma rigidez no robot em resposta às forças cortantes tangente e normal.

No desenvolvimento de um método para rebarbagem robótica de objectos com geometria desconhecida existem dois problemas:

- o projecto de um procedimento estável para remoção de metal;
- o desenvolvimento de um método de controlo estável para seguimento do contorno de um objecto com geometria desconhecida.

As estratégias de controlo de força/posição proporcionam uma estrutura de trabalho efectiva para lidar com tarefas que involvem interacção com o ambiente exterior. No trabalho de Chiaverini e Sciavicco (1993) é apresentada uma abordagem de controlo paralelo de força/posição de manipuladores robóticos. Esta abordagem permite um "tratamento" completo das medições efectuadas pelo sensor e o desenvolvimento de uma

acção de controlo num espaço dimensional completo sem adoptar quaisquer matrizes de selecção. As situações de conflito entre as tarefas de posição e de força são geridas através de uma estratégia de prioridades: o anel de controlo de força é projectado para prevalecer sobre o anel de controlo de posição. Esta escolha assegura desvios limitados da trajectória de força desejada em cada situação, garantindo uma recuperação automática de colisões não planeadas.

Bone *et al.* (1991, secção 4.2 deste capítulo) implementaram um controlo de força baseado num orgão terminal activo para rebarbagem através de robots. Com esse sistema obtém-se uma profundidade de estria com uma rogusidade mínima da superfície, através da minimização (em tempo real) da variância da força cortante normal.

A maioria dos robots disponíveis comercialmente funcionam apenas como dispositivos de controlo de posição, sem meios para controlar directamente as forças generalizadas (forças e momentos) de contacto entre o orgão terminal do robot e a peça de trabalho. Num número importante de aplicações de manufactura, em particular na rebarbagem e montagem, o controlo das forças de interacção é muito importante. O sistema de controlo de força apresentado neste trabalho tem aplicações num vasto espectro de problemas de manufactura, devido à facilidade com que o sistema regula a força de contacto, numa orientação arbitrária, relativamente a uma ferramenta montada no ponto terminal do robot.

Em geral, as operações de acabamento pedem uma grande intensividade de trabalho. Por isso, estas apresentam excelentes oportunidades para automação robótica. Neste trabalho, demonstra-se a exequibilidade do controlo de força num robot com múltiplos eixos usando transformações de coordenadas com anéis de controlo de força localizados *num eixo de cada vez*. Esta abordagem permite algoritmos de controlo com realimentação os quais são muito mais fáceis de implementar do que no caso geral multivariável. Além disso, permite uma sintonização cuidadosa dos anéis dos eixos individuais a fim de evitar quaisquer instabilidades induzidas pelas ressonâncias.

O trabalho de Kazerooni *et al.* (1990b, secção 4.3 deste capítulo) apresenta uma metodologia de controlo para o movimento acomodativo de manipuladores robóticos redundantes. Esta abordagem de controlo tira proveito da redundância nos graus de liberdade do robot: enquanto, no máximo, seis graus de liberdade do robot controlam a posição do ponto terminal, o graus de liberdade restantes impõem a força desejada no ambiente de trabalho.

Para verificar a aplicabilidade deste método de controlo, foi montado um orgão terminal activo num robot industrial de forma a produzir uma redundância dos graus de liberdade. De seguida, é também analisada a estabilidade do sistema resultante.

Assume-se que o manipulador tem duas estruturas mecânicas: o manipulador primário e o manipulador secundário. O manipulador primário é usado apenas como sistema de

posicionamento. O manipulador secundário,[1] montado na extremidade do manipulador primário, impõe a força desejada no ambiente externo.

Se se colocar um controlador em cada junta do manipulador secundário, a acomodação do manipulador secundário pode ser controlada através do ajuste dos ganhos em anel dos actuadores. Se os ganhos em anel são pequenos, o sistema exibe uma acomodação em resposta a forças impostas no seu ponto terminal. Pelo contrário, se os ganhos em anel são elevados, o manipulador secundário é (electronicamente) muito rígido. Este trabalho descreve um método de controlo estável para a obtenção de movimento um acomodativo no manipulador secundário.

O controlo de impedância é uma abordagem robusta geral para controlar robots uma vez que, em princípio, pode ser garantida a estabilidade para o movimento livre, para trajectórias com restrições, ou mesmo para transições entre os dois regimes. Não existem soluções analíticas ou estratégias simples para seleccionar os parâmetros de controlo de impedância apropriados. Consequentemente, é difícil estabelecer os valores adequados para um sistema com um robot controlado em impedância, o que está a impedir a aceitação generalizada da abordagem de controlo de impedância.

Existe uma relação directa entre um algoritmo de controlo híbrido e as primitivas de programação tais como movimentos com precauções (guarded moves) e movimentos acomodativos (compliant moves). Estas primitivas simplificam a tarefa do programador, mas a estabilidade do contacto não é garantida e o movimento acomodativo poderá ser excessivamente lento e muito amortecido. O conceito de comutação autónoma apresentado em Gershon e Baruch (1991, secção 4.4 deste capítulo) é introduzido para ultrapassar as limitações que ocorrem, sob o ponto de vista do programador, na abordagem do controlo de impedância.

No trabalho de Matsuo e Iwaki (1992, secção 4.5 deste capítulo), é apresentada uma nova abordagem para a definição das matrizes de acomodação através da programação linear. Neste trabalho, a acomodação é tratada como um mapeamento linear da força num movimento correcto e é construída tendo como base informação geométrica. Primeiro, são discutidas as quatro condições que requer uma matriz de acomodação apropriada: estabilidade, exequibilidade, dependência da velocidade e correcção de erros. Depois, estas condições são formuladas como um conjunto de inequações lineares e o problema do projecto da matriz de acomodação é reduzido a um problema de programação linear apresentando esse conjunto de inequações como restrições.

Dependendo da tarefa requerida e da geometria do objecto, deve ser estabelecida uma acomodação adequada na extremidade do robot. Asada e Morimura (1987) proposeram um

---

[1] O manipulador secundário deve ser pequeno em comparação com o manipulador primário. Isto tem importância prática para minimizar a carga imposta ao manipulador primário.

método para a criação de uma matriz de acomodação baseado na informação geométrica das peças. Este método trata, principalmente, com as incertezas na posição relativa entre o robot e uma peça para todos os estados de contacto numa tarefa.

4.2 Controlo da força de contacto entre a ferramenta e a peça de trabalho

O trabalho de Stepien *et al.* (1987) descreve um sistema com microprocessador para controlo das forças de interacção entre um robot articulado com cinco eixos e uma peça de trabalho. O sistema de controlo de força trabalha em paralelo com o controlador de robot industrial através do cálculo de correções de posição que permitam controlar as forças da forma desejada. Foram projectados algoritmos estáveis de controlo de força apesar das limitações impostas pela flexibilidade no sistema de controlo do robot. O controlo de força foi implementado tanto em seguimento de contornos como em experiências de rebarbagem. A suavidade do corte mostrou ser consistente com operações de rebarbagem manual em termos de alimentação óptima e taxas de remoção de metal.

Nas sub-secções seguintes descrevem-se os algoritmos de controlo de força de um e de vários eixos do robot apresentado na figura 4.2.

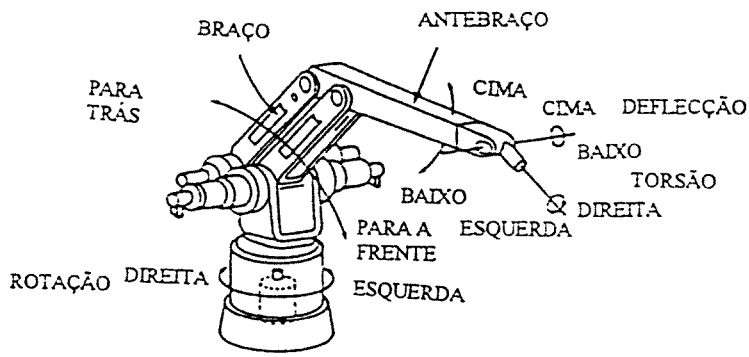


Figura 4.2
Os cinco eixos do robot controlado em força.

4.2.1 Controlo de força de um único eixo

Os cinco eixos do robot podem ser classificados em dois tipos: ressonantes e não ressonantes. Os eixos ressonantes (rotação (rotation), braço (upper arm), e antebraço (forearm)) exibem um acopulamento dinâmico notável entre o motor e a carga através de sistemas de comando acomodativos. Por outro lado, os eixos não ressonantes (torsão (twist) e deflecção (bend)) não exibem um acopulamento significativo. Nos parágrafos seguintes irão ser desenvolvidas leis de controlo de força para cada tipo de eixos.

O controlador de força deve calcular variações discretas de posição para manter uma força de referência prescrita entre o orgão terminal do robot e a posição de referência (peça de trabalho). Um sensor de força proporciona os sinais de realimentação de força para o controlador.

É de notar que um processador de movimento pôs no meio perturbações no anel de controlo de força, mas não afectou a sua dinâmica. A dinâmica do servo de velocidade, a dinâmica da carga e os módulos de realimentação dos taquímetros foi desenvolvida através da medida de ganhos dos amplificadores e das funções de transferência dentro do controlador de posição do robot. Estas medidas foram obtidas através de técnicas de identificação bem estabelecidas.

Para o eixo não ressonante de torsão, a posição da carga θ_l é directamente proporcional à posição do motor θ_m. Logo, a função de transferência entre as duas variáveis é uma constante representando a razão de transformação da engrenagem (n) do sistema de comando:

$$\frac{\theta_l(s)}{\theta_m(s)} = \frac{1}{n} \tag{4.1}$$

É de notar que esta dinâmica da carga não é a mesma para os eixos ressonantes discutidos mais adiante.

As características de frequência medidas do eixo torsão podem ser representadas por uma função de transferência de primeira ordem entre a velocidade do motor Ω_m e a corrente eléctrica I_c.

É de notar que todas as funções de transferência são representadas como combinações de funções de transferência de primeira e de segunda ordem, usando a seguinte notação:

$$K(a)[\zeta, \omega_0] = K\left(\frac{s}{a}+1\right)\left[\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 2\zeta\left(\frac{s}{\omega_0}\right)+1\right] \tag{4.2}$$

onde K é o ganho, (a) é a frequência de corte de uma função de transferência de primeira ordem, e $[\zeta, \omega_0]$ são respectivamente o coeficiente de amortecimento e frequência natural de uma função de transferência de segunda ordem.

Considerou-se que o ambiente era infinitamente rígido comparado com a acomodação do sistema de controlo do robot e o sensor de força.

O projecto de um compensador discreto de força $D_2(z)$ baseia-se em técnicas de projecto de lugar geométrico das raízes. Escolhendo entre o tempo de resposta e a máxima

sobreelevação, verifica-se que o tempo de resposta domina porque o último está sujeito ao amortecimento originado pelo atrito, não incluído no modelo linear usado para o projecto do compensador. Este pressuposto foi testado numa simulação da experiência na qual foram incluídos efeitos de amortecimento.

Foram também investigadas diferentes controladores e foi decidido escolher um PID convencional uma vez que é de fácil implementação e este resultou bem em simulações. Uma forma discreta de um controlador PID para o anel de controlo de força é:

$$D_2(z) = \left[K_P + \frac{K_i T}{z-1} + \frac{K_d (z-1)}{T(z-\gamma)} \right] \tag{4.3}$$

onde

K_P	ganho proporcional
$K_i T$	ganho integral
K_d/T	ganho derivativo
T	período de amostragem
γ	pólo (de filtragem) da acção derivativa.

Esta forma de controlo PID permite ao projectista colocar dois pólos e dois zeros no plano z. Os zeros do controlador podem ser colocados perto dos pólos complexos conjugados do robot de modo a "puxar" o lugar de raízes para dentro da zona de estabilidade. O cancelamento pólo-zero tornou-se impraticável, porque a localização dos pólos variam com a configuração do manipulador.

Os resultados mais relevantes apresentados nesta secção são os seguintes:

- Foi desenvolvido um sistema de controlo de força baseado em microprocessador para operar em paralelo com o sistema de controlo de posição dos eixos do robot. Foi conseguida uma relação entre o anel de controlo de posição e os comandos de posição externos de modo que certas características do sistema, tais como a largura de banda e o modo de programação, permaneceram inalteradas.
- Foi projectado um compensador de força, estável sob certas restrições, incluindo limitações dinâmicas impostas pela flexibilidade do sistema de controlo e uma arquitectura fixa existente do controlador do robot. O "hardware" adicional, necessário para se atingir controlo de força em malha fechada foi pouco significativo.
- Foi projectado um controlo de força de vários graus de liberdade usando um só anel por cada eixo depois de se ter verificado que era mínimo o acopulamento dinâmico entre os eixos do robot. A abordagem de um anel por eixo para o controlo de força de vários graus de liberdade permitiu a obtenção de um algoritmo de controlo simples.

- O sistema de controlo de força foi testado em experiências de seguimento de contornos. Os erros de força mantiveram-se constantes dentro dum intervalo de força normal de 1 N a 15 N. Verificou-se que estes erros de força aumentam com o aumento da velocidade tangencial.
- Experiências de rebarbagem indicaram um intervalo de velocidades de rebarbagem dentro do qual os erros de força são reduzidos. Este intervalo está dentro da gama de velocidades recomendadas para outros tipos de operações de rebarbagem. Assim, o tipo de processo de rebarbagem, e não o sistema de controlo, constitui o factor que limita as velocidades de rebarbagem e a grandeza das forças normais atingidas.

O sistema de controlo do eixo rotação é semelhante ao do eixo torsão no qual o mecanismo de transmissão é um reductor harmónico. Uma diferença entre os dois eixos foi a relação entre as inércias da carga e do motor.

4.2.2 Controlo de força de graus de liberdade múltiplos

O caso explorado em primeiro lugar no projecto de um controlador de força de graus de liberdade múltiplos é a estrutura dentro da qual se deve implementar o controlo. Anteriormente foram desenvolvidos controladores de força para dois tipos de eixos (ressonantes e não ressonantes). Controladores com um eixo único são vantajosos devido à sua simplicidade. No entanto, ocorre o problema de combinar controladores de eixo único quando existem interacções entre os eixos. Por outras palavras, efeitos de acopulamento dinâmico cruzado, caso existam, podem originar perturbações no sistema e degradar o desempenho do controlo. Nas experiências de controlo de força com um eixo, os efeitos de acopulamento dinâmico não se manifestam. Por exemplo, o controlo de força do eixo de torsão não introduz perturbações no eixo deflecção. Para estudar este problema com mais profundidade, foram analizados os efeitos de acopulamento cruzado. Assim, foi investigado o desempenho do sistema com e sem controlo de força através de uma simulação de um robot com os cinco graus de liberdade.

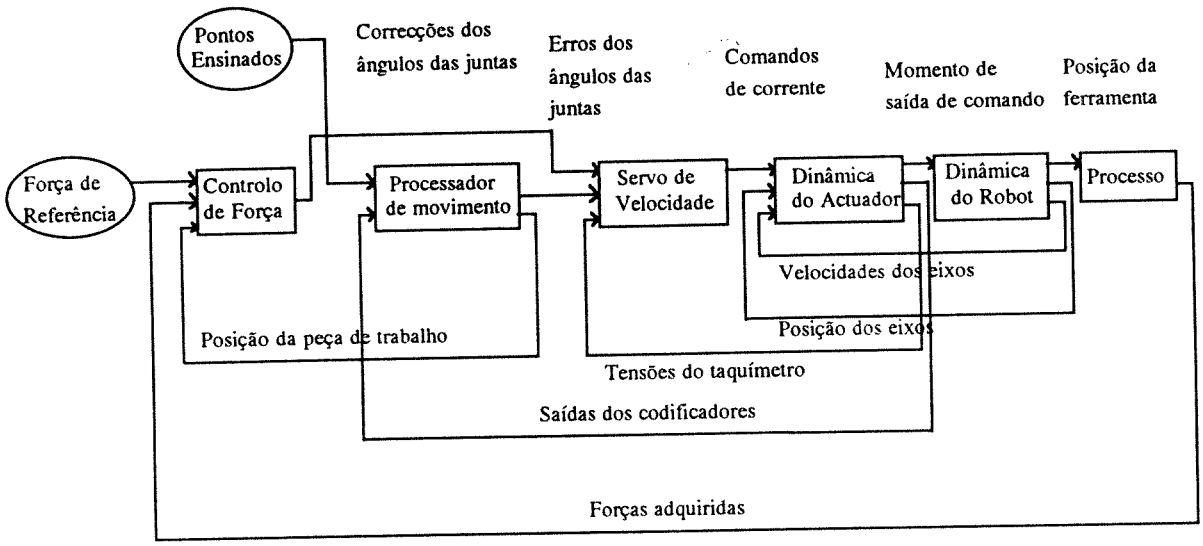


Figura 4.3
Simulação dinâmica do sistema de controlo de força.

O algoritmo de simulação é mostrado, esquematicamente, na figura 4.3. Os seus módulos principais são:

- *Processador de Movimento:* conjunto de algoritmos para calcular a geração de trajectórias, a interpolação e a transformação inversa de coordenadas.
- *Servo de Velocidade:* Modelos da electrónica de alimentação dos eixos individuais e dos respectivos controladores servo.
- *Dinâmica do Actuador:* Modelos não-lineares dos componentes do sistema electromecânico incluindo os motores e os elementos de transmissão.
- *Dinâmica do Braço:* Modelo de Newton-Euler do braço com cinco graus de liberdade e algoritmo de transformação directo de coordenadas.
- *Controlo de Força:* Algoritmo de controlo de força incluindo a representação de aritmética, a truncatura e a mudança de escala do processador.
- *Processo:* Modelos da interacção ferramenta/peça de trabalho e do sensor de força.

A análise dos efeitos de acopulamento cruzado foi desenvolvida através da simulação de uma tarefa na qual o controlo de força foi implementado num eixo único independente. Os ângulos das juntas do robot foram observados e comparados com as simulações para uma tarefa idêntica na qual o controlo de força não estava activado. Apenas os eixos controlados em força exibiram um desvio para os dois casos distintos.

Foram simuladas tarefas semelhantes, com eixos e combinações de eixos diferentes sob controlo de força, em várias zonas do espaço de trabalho do robot. Os resultados das simulações não indicaram um acopulamento dinâmico significativo entre os eixos do robot. Existe sim um acopulamento ligeiro entre o eixo do braço e o eixo do antebraço.

Foram usados três sistemas de coordenadas para transformar a orientação das forças na relação ferramenta de rebarbagem/peça de trabalho, em forças no sistema de coordenadas das juntas do robot. A base de coordenadas O_gxyz é a base de coordenadas global do robot. A sua origem está localizada na base do robot. A base de coordenadas O_sxyz é a base de coordenadas do sensor de força, cuja origem está localizada na base do sensor montado no fim do pulso do robot. A base O_fxyz é a base de coordenadas da ferramenta, cuja origem está localizada na ponta da broca de rebarbagem. Assim, as forças são adquiridas nas coordenadas das juntas do robot (sistema O_gxyz) as quais são transformadas em entradas dos anéis individuais de controlo de força.

4.2.3 Experiências de rebarbagem

Foram desenvolvidas algumas experiências de rebarbagem semelhantes às desempenhadas na indústria. Neste sentido, foi utilizado o esquema apresentado na figura 4.4.

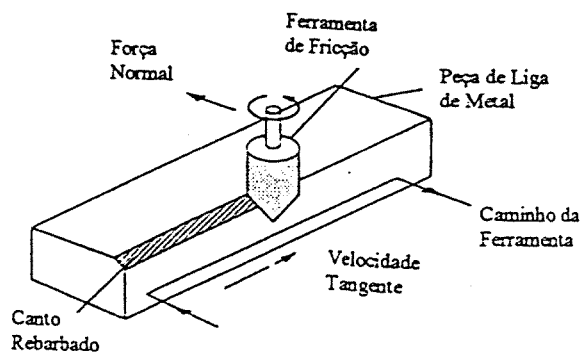


Figura 4.4
Esquema da experiência de rebarbagem de um material de liga de metal.

Os erros e a evolução temporal da força durante um passo de rebarbagem típico são mostrados na figura 4.5.

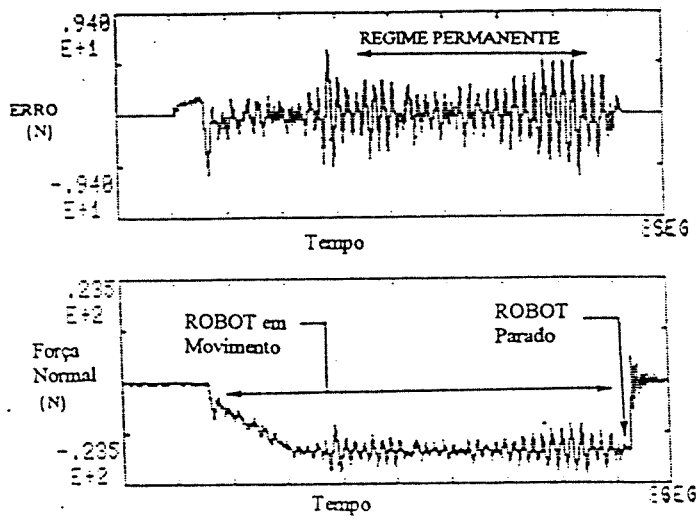


Figura 4.5

Medidas experimentais dos erros de força e da força de contacto durante uma experiência de rebarbagem.

4.3 Manipuladores redundantes

Nesta secção apresenta-se um estudo acerca da utilização de manipuladores redundantes no movimento acomodativo de robots. Na figura 4.6 mostra-se um exemplo de um robot redundante.

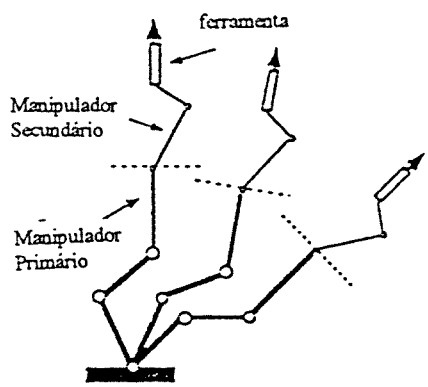


Figura 4.6

Várias configurações do manipulador primário onde o manipulador secundário tem uma orientação fixa relativamente à sua base.

4.3.1 Modelização não estruturada do manipulador secundário

Considere-se que o manipulador primário tem um controlador para posicionamento do seu ponto terminal (i.e., da base do manipulador secundário). Podem ser usados vários métodos de controlo linear e não linear para desenvolver este controlador. No entanto,

nesta sub-secção pretende estudar-se a modelização e o controlo do manipulador secundário. Suponha-se, também, que os actuadores do manipulador secundário têm controladores de velocidade. Em geral, um sistema robótico com um controlador de velocidade apresenta uma velocidade que é uma função dinâmica do seu vector de entrada e e da força **d** imposta no seu ponto terminal. Considera-se que o controlador de velocidade para o manipulador secundário tem uma entrada de velocidade igual a zero na vizinhança de uma configuração particular do manipulador secundário. Sejam **G** e $\mathbf{S}_0$ duas matrizes de funções de transferência que definem o desvio da velocidade de zero do ponto terminal do manipulador secundário. Então, vem:

$$\dot{\mathbf{x}}(j\omega) = \mathbf{G}(j\omega)\mathbf{e}(j\omega) + \mathbf{S}_0(j\omega)\mathbf{d}(j\omega) \tag{4.4}$$

onde:

- $\dot{\mathbf{x}}$: vector velocidade (de dimensão $n \times 1$) do ponto terminal do manipulador secundário numa base de coordenadas ligada ao último eixo do manipulador primário;
- **e**: vector velocidade de entrada (de dimensão $n \times 1$);
- **d**: vector força que actua no ponto terminal (de dimensão $n \times 1$);
- **G**: matriz função de transferência de velocidade em malha fechada desde o vector velocidade de entrada **e** até à velocidade do ponto terminal $\dot{\mathbf{x}}$;
- $\mathbf{S}_0$: matriz função de transferência de sensibilidade em malha fechada desde as forças **d** até a velocidade do ponto terminal $\dot{\mathbf{x}}$;
- n: número de graus de liberdade do manipulador secundário.

O tipo de controlador de velocidade usado não é fundamental neste ponto. Geralmente, sistemas com controladores de velocidade não são infinitamente rígidos em resposta a forças impostas **d**. Logo, o movimento do ponto terminal do manipulador secundário, em resposta a forças impostas, é causado tanto por acomodação estrutural no manipulador secundário como pela acomodação no controlador de velocidade. Para um controlador de velocidade "bom", a matriz $\mathbf{S}_0$ é "pequena"[2]. Logo, sistemas com elevadas razões de transformação de engrenagem desenvolvem uma sensibilidade "pequena" a forças impostas.

4.3.2 Comportamento dinâmico do ambiente exterior

[2]Matriz "pequena" significa que o valor singular máximo da matriz é um número pequeno. Este conceito pode ser generalizado para exprimir o valor "elevado" de uma matriz usando o seu valor singular mínimo. Ver nota 3 para uma definição de valor singular.

Se um ponto da superfície do ambiente é deslocado de uma quantidade **y**, então a força requerida para essa tarefa **f** é definida de acordo com a expressão:

$$\mathbf{f}(j\omega) = \mathbf{E}(j\omega)\mathbf{y}(j\omega) \tag{4.5}$$

A matriz função de transferência (de dimensão $n \times n$) $\mathbf{E}(j\omega)$ mapeia a amplitude do vector deslocamento y na amplitude da força de contacto f. A equação (4.5) pode ser interpretada como a relação entre a força e o deslocamento de uma mola (correspondentes a um modelo simples do ambiente exterior) onde **E** é a rigidez da mola. As direcções relevantes da dinâmica do ambiente são aquelas que restringem o espaço de trabalho do manipulador secundário. Deste modo, **E** é uma matriz singular quando o robot interactua com o ambiente apenas em algumas direcções. Por exemplo, no escorregamento numa superfície sem atrito, o manipulador secundário é restringido pelo ambiente apenas na direcção perpendicular à superfície.

4.3.3 Arquitectura do sistema em malha fechada

Suponha-se que o manipulador secundário, descrito pela equação dinâmica (4.4), está em contacto com um ambiente descrito pela equação (4.5). O diagrama de blocos da figura 4.7 mostra como os dois sistemas interagem quando estão em contacto. É de notar que $\mathbf{f} = -\mathbf{d}$. O movimento do manipulador secundário relativamente à sua base (i.e., à extremidade do manipulador primário) é representado por **x**. Se o movimento da base do manipulador secundário numa base de coordenadas Cartesianas global é caracterizado por um vector $\mathbf{x}_0$, então, o movimento absoluto do ponto terminal do manipulador secundário **y** é dado por $\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}$. Quando o manipulador secundário está em contacto com o ambiente, o manipulador primário não pode ser manobrado ao longo daquelas direcções que o manipulador secundário não tem graus de liberdade. Deste modo, o vector $\mathbf{x}_0$ deve estar no espaço de trabalho do manipulador secundário e é um vector com dimensão $n \times 1$.

A arquitectura de controlo proposta para produzir uma acomodação no manipulador secundário, obtém-se através da realimentação do desvio de posição do manipulador secundário com um compensador $\mathbf{K}_P$. Isto é, através de uma matriz função de transferência que opera na posição do ponto terminal.

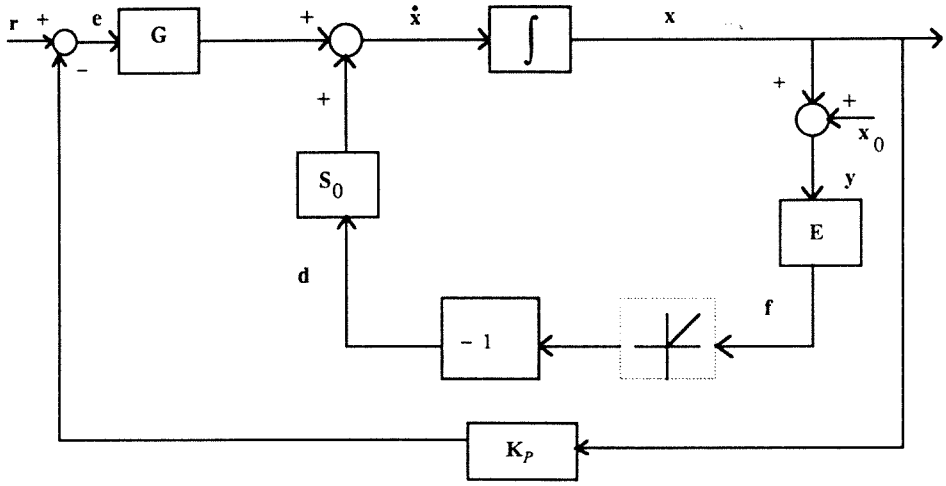


Figura 4.7

A arquitectura em malha fechada do comportamento dinâmico do manipulador secundário em contacto com o ambiente. Os operadores de Laplace das funções de transferência foram omitidos.

Esta estratégia estabelece um controlador para o manipulador secundário *à volta* da sua configuração nominal. Consequentemente, este sistema tem um anel "interior" e um anel "exterior". Quando o manipulador secundário não está em contacto com o ambiente, o sistema em malha fechada resume-se ao anel exterior, isto é, consiste num simples sistema de posicionamento em malha fechada com um comando entrada de posição nulo. Se a base do manipulador secundário é movida de $\mathbf{x}_0$, e o manipulador secundário está em contacto com o ambiente exterior, então a força de contacto pode ser calculada através da equação:

$$\mathbf{f} = \left[\mathbf{I} + \mathbf{E}(s\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{K}_P)^{-1}\mathbf{S}_0\right]^{-1}\mathbf{E}\mathbf{x}_0 \tag{4.6}$$

Na maioria das tarefas de manipulação, tais como a rebarbagem e a moagem, o manipulador robótico entra em contacto com ambientes muito rígidos onde **E** é "elevada". Quando **E** se aproxima de infinito (no sentido do valor singular) a força de interacção entre o ponto terminal do manipulador secundário e o ambiente é dada pela equação:

$$\mathbf{f} = \mathbf{S}_0^{-1}(s\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{K}_P)\mathbf{x}_0 \tag{4.7}$$

Esta equação calcula a força de contacto no ambiente quando a base do manipulador secundário se move de $\mathbf{x}_0$ unidades para dentro do ambiente. Dadas **G** e $\mathbf{S}_0$ num dado intervalo de frequências, pode ser encontrado um compensador $\mathbf{K}_P$ para modelizar (arbitrariamente) a impedância do sistema dada pela expressão $\mathbf{S}_0^{-1}(s\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{K}_P)$. Sob

condições de regime permanente onde $s = 0$ e $\mathbf{G} = \mathbf{I}$, a rigidez do sistema é dada pela expressão:

$$\mathbf{f} = \mathbf{S}_0^{-1}\mathbf{K}_P(0)\mathbf{x}_0 \tag{4.8}$$

Quando $\mathbf{K}_P$ é uma função de transferência com uma amplitude elevada numa direcção particular, a força de contacto é elevada nessa direcção. Por seu lado, um valor pequeno para $\mathbf{K}_P$ conduz a uma força pequena.

4.3.4 Estabilidade

Nesta subsecção é estabelecida a condição suficiente de estabilidade para o sistema em malha fechada. Através desta condição pode-se seleccionar um compensador $\mathbf{K}_P$ apropriado que garanta a estabilidade do sistema e desenvolva uma acomodação de acordo com (4.6) e (4.7). A condição suficiente para a condição de estabilidade é dada pela inequação (Kazerooni *et al.*, 1990), obtida através do Critério de Nyquist Multivariável:

$$\sigma_{máx}(\mathbf{GK}_P) \leq \sigma_{min}(s\mathbf{I}+\mathbf{S}_0\mathbf{E}) \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad \omega \in [0,\infty[\tag{4.9}$$

ou através de uma condição mais exigente:

$$\sigma_{máx}(\mathbf{K}_P) \leq \frac{1}{\sigma_{máx}(\mathbf{G})\sigma_{máx}(s\mathbf{I}+\mathbf{S}_0\mathbf{E})^{-1}} \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad \omega \in [0,\infty[\tag{4.10}$$

onde $\sigma_{máx}(\ )$ indica o valor singular máximo[3] de uma matriz. Se o compensador $\mathbf{K}_P$ não satisfaz esta condição, então não se obtém uma conclusão sobre a estabilidade do sistema. Quando $n = 1$, a condição suficiente para a estabilidade é dada pela inequação:

$$\|\mathbf{GK}_P\| < \|s+\mathbf{S}_0\mathbf{E}\| \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad \omega \in [0,\infty[\tag{4.11}$$

Uma vez que $\mathbf{G} \approx 1$ dentro do intervalo $\omega \in [0, \omega_0]$, em que ω_0 é a largura de banda do controlador de velocidade, a condição suficiente vem:

---

[3]O valor singular máximo de uma matriz $\mathbf{K}_P$, $\sigma_{máx}(\mathbf{K}_P)$ é definido como:

$$\sigma_{máx}(\mathbf{K}_P) = máx\left\{\frac{\|\mathbf{K}_P\mathbf{Z}\|}{\|\mathbf{Z}\|}\right\}$$

onde $\mathbf{Z}$ é um vector não nulo e $\|\ .\ \|$ denota a norma Euclidiana.

$$\|\mathbf{K}_P\| < \|s + \mathbf{S}_0\mathbf{E}\| \quad \text{para todo} \quad \omega \in [0,\infty[\tag{4.12}$$

Uma classe importante de operações de manipulação, coloca o robot em contacto com um ambiente muito rígido. As expressões (4.10), (4.11) e (4.12) mostram que o sistema é sempre estável se **E** é muito "elevado" no sentido do valor singular e se $S_0 \neq 0$. Neste caso, o ganho do compensador de realimentação $\mathbf{K}_P$ pode ser escolhido para ser suficientemente elevado de forma a garantir a estabilidade. Note-se que, na prática, $\mathbf{K}_P$ não pode ser escolhido como um integrador. Isto deve-se ao facto de o integrador ter uma amplitude infinita em regime permanente, a qual leva à saturação e a uma força de contacto não limitada quando é imposta ao sistema uma restrição infinitamente rígida.

Quando o ambiente é infinitamente rígido, um intervalo grande de estabilidade possibilita a modelização da função de força sem se estar confinado pela condição de estabilidade. Isto constitui uma vantagem deste método de controlo de acomodação em comparação com os métodos que usam sensores de força.

4.3.5 Um orgão terminal activo como protótipo experimental

Para verificar a aplicabilidade deste método de controlo, foi montado um orgão terminal activo de dois gdl num robot industrial de modo a gerar uma redundância dos graus de liberdade do manipulador. Ambos os motores do orgão terminal activo são fixados à última ligação do manipulador primário (figura 4.8).

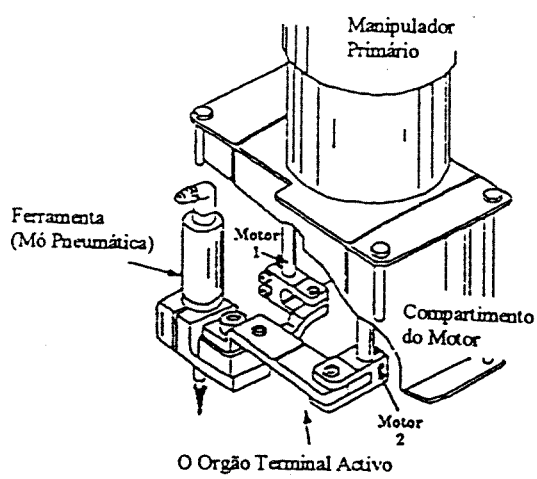


Figura 4.8
O orgão terminal activo montado num manipulador primário.

A figura 4.9 mostra o mecanismo do orgão terminal activo onde o ponto terminal pode ser movido num espaço planar através de dois motores. O orgão terminal opera na

vizinhança da configuração mostrada na figura 4.9, onde todas as ligações são ortogonais entre si.

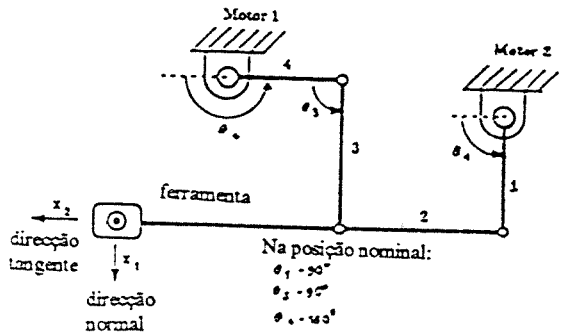


Figura 4.9
O orgão terminal activo na sua posição nominal.

Nesta configuração, tanto a matriz de inércia como a matriz Jacobiano são constantes e diagonais. Isto leva a uma equação dinâmica desacopulada para o orgão terminal activo na sua configuração nominal, possibilitando o motor 1 mover o ponto terminal na direcção x_1 e o motor 2 mover o ponto terminal na direcção x_2.

4.4 Controlo de impedância com comutação de modo autónoma

Nesta secção, são discutidas duas categorias de sistemas de controlo de impedância e é definido o modelo base para o respectivo estudo. De seguida, é apresentada uma análise da estabilidade acopulada para este modelo e é introduzido o conceito de controlador de impedância. Nesta perspectiva são definidos três modos de operação para robots controlados em impedância, conjuntamente com as características de impedância desejadas para cada modo. Por último, é apresentada a análise de estabilidade para o modo transição.

4.4.1 Modelo do controlador de impedância

As implementações de controlo de impedância podem ser baseadas tanto no controlo de binário como no controlo de posição (figura 4.10).

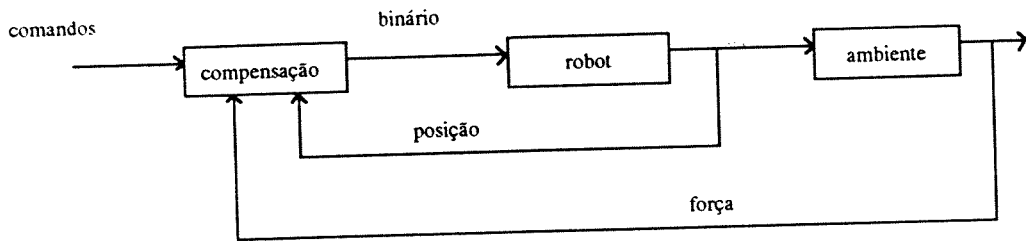


Figura 4.10a
Esquema de controlo de impedância baseado no binário.

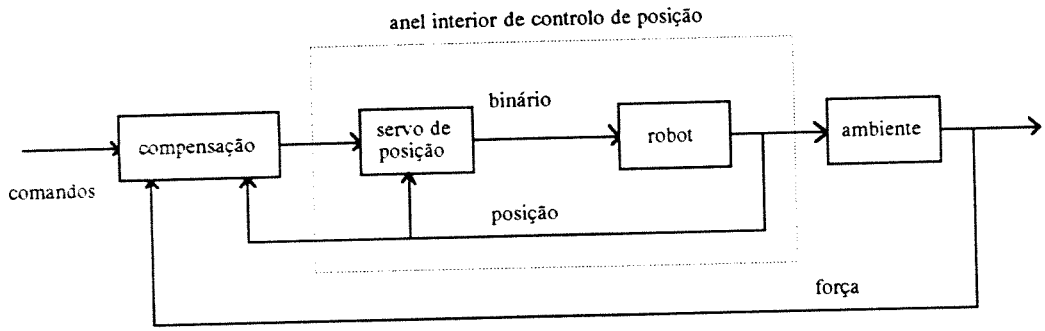


Figura 4.10b
Esquema de controlo de impedância baseado na posição.

Os controladores baseados em momento têm a vantagem teórica de que o binário no actuador é mantido constante durante o atraso no anel de controlo de impedância. Por outro lado, uma implementação baseada em controlo de posição pode gerar binários no actuador durante o contacto muito elevados uma vez que esta reage ao ambiente exterior como a uma perturbação. No entanto, os robots comerciais (excepto os robots com actuação directa) têm atritos e folgas e os controladores baseados no binário são muito sensíveis a estas não linearidades que originam instabilidades. Mais ainda, um controlador baseado no binário requer que a solução da dinâmica inversa do robot seja calculada em tempo real para proporcionar uma linearização (no sentido directo) da dinâmica não linear do robot. Todavia, este requisito origina um aumento significativo do tempo de cálculo e conduz a uma redução da margem de estabilidade.

No controlador baseado em posição, a dinâmica do robot é linearizada e desacopulada pelo anel (rápido) de controlo interior e as perturbações tais como o atrito, as folgas e a dinâmica não modelizada são rejeitadas automaticamente. No entanto, o controlador requer um sensor de força para proporcionar a realimentação de força o que introduz um tempo de atraso significativo no anel de realimentação exterior. Durante este tempo de atraso, o anel interior pode gerar forças de contacto excessivas enquanto tenta mover a peça.

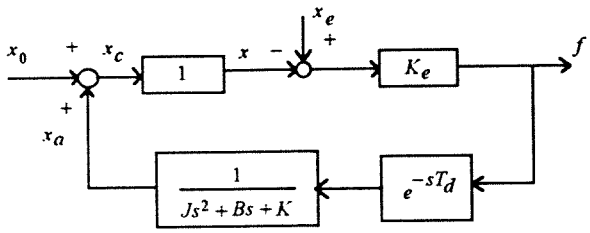


Figura 4.11
Modelo contínuo do controlador de impedância.

O modelo seleccionado para este estudo (figura 4.11) consiste num controlador de impedância baseado em posição no qual foi considerado um controlador de posição com uma função de transferência unitária (por simplicidade). Um tempo de atraso é incluído no anel de realimentação. Na prática, a amostragem do sinal força e as tarefas computacionais são desempenhadas em paralelo pelo que somar os vários tempos de atraso num único tempo de atraso é uma simplificação aceitável.

Neste trabalho todas as variáveis são consideradas como escalares uma vez que se considera que o anel de controlo de posição introduz uma linearização e um desacopulamento da dinâmica do robot. A variável x_0 é a trajectória dada pelo planeador de trajectórias e pode diferir consideravelmente da trajectória comandada x_c. A posição livre nominal do ambiente é representada por x_e, a rigidez ambiental é K_e e os parâmetros de controlo de impedância são J, B e K (inércia, amortecimento e rigidez). Quando é perdido o contacto com o ambiente, o anel de realimentação é quebrado e o sistema retoma, automaticamente, o controlo de posição.

O ambiente passivo que origina uma maior instabilidade para um robot controlado em impedância é ou uma massa pura ou uma mola pura, porque estas não absorvem a energia do actuador. Através da modelização do ambiente como uma mola pura, obtém-se, uma vez mais, uma simplificação aceitável. Os ambientes são tipicamente muito rígidos ($>10^6$ N/m) mas tem de ser proporcionada alguma acomodação passiva entre o sensor de força e o ambiente para reduzir a rigidez ambiental efectiva. Um controlador baseado em posição não pode ser estável para um ambiente infinitamente rígido, mas a sua margem de estabilidade está directamente relaccionada com a acomodação ambiental. Deste modo, K_e é determinado pelo orgão terminal e representa um compromisso entre a margem de estabilidade e a frequência natural do orgão terminal.

Para se obter a função de realimentação, $H(z)$, da versão discreta do modelo, a partir da impedância desejada $H(s) = (Js^2+Bs+K)^{-1}$, tem que se aplicar uma técnica de aproximação $s \rightarrow z$. Neste sentido foi seleccionada a aproximação de Tustin uma vez que $H(z)$ terá pólos semelhantes a $H(s)$ e a resposta prevista é aceitável para baixas frequências. As aproximações de Tustin são:

$$\frac{1}{s} \rightarrow \frac{T}{2}\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \qquad \frac{1}{s^2} \rightarrow \frac{T^2}{12}\frac{(1+10z^{-1}+z^{-2})}{(1-z^{-1})^2} \tag{4.13}$$

e obtém-se

$$H(z) = \frac{T^2(z^2+10z+1)}{(12J+6BT+KT^2)z^2+(10KT^2-24J)z+(12J-6BT+KT^2)} \tag{4.14}$$

4.4.2 Análise de estabilidade

Os parâmetros da impedância representam o comportamento dinâmico a atingir para o ponto terminal do robot tal como visto pelo ambiente exterior. Para o modelo contínuo, e fazendo x_e igual a zero, obtém-se a seguinte função de transferência em malha aberta:

$$\frac{x_a}{x} = \frac{K_e e^{-sT_d}}{Js^2+Bs+K} \tag{4.15}$$

Para um sistema no limite de estabilidade deverá ser:

$$K_e = \sqrt{(K-J\omega^2)^2+B^2\omega^2} \tag{4.16a}$$

$$\pi = \tan^{-1}\left(\frac{B\omega}{K-J\omega^2}\right)+\omega T_d \tag{4.16b}$$

Para o modelo discreto, foi aplicado à equação (4.14) o critério de estabilidade de Jury (Jury, 1964) e foram obtidos os seguintes limites de estabilidade:

$$J > \frac{T^2(K-K_e)}{6} \tag{4.17a}$$

$$J < \frac{T^2(K-K_e)}{12}+\frac{BT}{2} \tag{4.17b}$$

$$\begin{cases} J > \dfrac{TB(5K_eT-6B-KT)}{12(B-K_eT)} & \text{para} \quad B > K_eT \\ J < \dfrac{TB(5K_eT-6B-KT)}{12(b-K_eT)} & \text{para} \quad B < K_eT \end{cases} \tag{4.17c}$$

Comparando (4.16) com (4.17) nota-se que quando a impedância desejada é implementada como uma equação às diferenças, são introduzidos limites de estabilidade adicionais, isto é, que não estavam presentes no sistema contínuo. Por exemplo, a primeira condição em (4.17) dá um limite superior adicional para J.

As equações (4.16) e (4.17) indicam que, para uma gama típica do parâmetro J, se se desejar reduzir K é necessário aumentar B para manter a estabilidade, e que atrasos elevados T_d requerem altos valores de B para uma dada rigidez. Vários estudos experimentais confirmaram que são necessários um amortecimento e uma inércia elevados para manter um robot controlado em impedância contra uma superfície. No entanto, existe uma séria perda no desempenho quando são aumentados o amortecimento e a inércia. De facto, se o robot perde o contacto com uma superfície que este está a tentar seguir, valores elevados de B e J conferem ao robot um comportamento muito lento no movimento pelo que levará um tempo considerável até o ponto terminal encontrar novamente a superfície. Deste modo, B e J devem ser baixos durante as transições de contacto, mas devem ser muito maiores depois da transição estar estabelecida, a fim de assegurar um contacto estável. Mais ainda, K depende da força de interacção desejada, a qual depende do objectivo da tarefa. Assim, precisam de ser definidos diferentes conjuntos de valores para K, B e J de acordo com as diferentes fases de uma tarefa.

4.4.3 Controlador de impedância com comutação autónoma de modo

Do ponto de vista do programador, um controlador de robot deve incluir os seguintes módulos: um executor de tarefas, um planeador de trajectórias e um algoritmo de controlo. A decomposição funcional do controlador de impedância é mostrada na figura 4.12. O algoritmo de controlo foi dividido em dois níveis: um controlador de posição e um controlador de impedância. Foi adicionado um pré-processador de força que dá informação de força ao algoritmo de controlo de impedância e gera interrupções de limiar de força ao executor de tarefas. No mesmo nível que o do controlador de impedância, foi também adicionado um processo supervisor que é responsável pela atribuição (ou comutação) dos parâmetros de controlo de impedância e pelos limitadores de saída, de acordo com acontecimentos observados ou com os sinais internos do executor de tarefas. O supervisor pode também bloquear temporariamente a saída do planeador de trajectórias.

Esta decomposição realça o paralelismo funcional e indica como um sistema pode ser implementado num sistema com múltiplas unidades de processamento. Este modelo hierárquico requer que o processo de controlo de impedância, juntamente com o seu processo supervisor, proporcione um controlo estável e previsível do robot, independentemente da implementação do vários níveis.

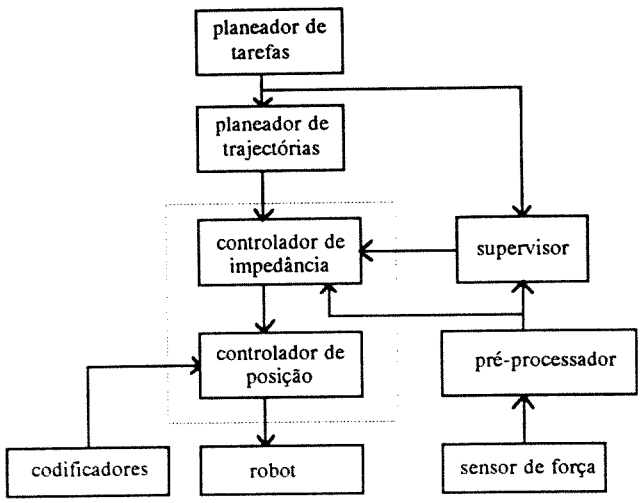


Figura 4.12
Modelo hierárquico do controlador inteligente de manipulação.

4.4.4 Modos de operação

Foram definidos três modos de operação para este sistema de controlo de impedância: o modo **F** para movimento livre, o modo **T** para transições e o modo **C** para contacto permanente. Para cada modo é requerido um conjunto de parâmetros de impedância e de limitadores de saída. O modo pode ser estabelecido pelo executor de tarefas ou, autonomamente, pelo supervisor.

Quando o robot se move no espaço livre, é desejável que os controladores de impedância rejeitem leituras de força que sejam devidas à inércia da pinça. Se a carga dinâmica máxima no sensor de força e a máxima tolerância nos erros de posição são especificados, então pode ser calculado directamente um valor apropriado para K. Podem ser determinados valores aceitáveis para B e J através da consideração da resposta desejada a uma colisão não esperada (valores elevados darão um ressalto muito amortecido e lento). Para evitar uma colisão que danifique o robot, o supervisor deve bloquear a saída do planeador de trajectórias até que o executor de tarefas reinicialize todo o sistema. Espera-se que o projectista do sistema especifique valores por defeito para estes parâmetros do modo **F**, os quais serão suficientes para a maioria das aplicações.

Para os modos **T** e **C**, K e x_0 são determinados por uma análise estática da posição da superfície x_e, do desvio máximo na posição da superfície δx_e, da força desejada F e do desvio máximo permitido na força δF, de acordo com as expressões:

$$F + \delta F = K(x + \delta x - x_0) = K_e(x + \delta x - x_e - \delta x_e) \tag{4.18a}$$

$$F - \delta F = K(x - \delta x - x_0) = K_e(x - \delta x - x_e + \delta x_e) \tag{4.18b}$$

Logo:

$$x_0 = x_e - \frac{F\delta x_e}{\delta F} \tag{4.19a}$$

$$K = \frac{\delta F}{\delta x_e} \tag{4.19b}$$

Quando um robot se aproxima intencionalmente de uma superfície, o executor de tarefas indica ao supervisor para comutar para o modo **T**. Os parâmetros B e J são escolhidos para serem suficientemente elevados a fim de assegurar que não se perca o contacto para os primeiros três intervalos de tempo (i.e., para as três primeiras amostras de força). Uma vez que este conjunto de parâmetros será instável para um longo período de tempo, o supervisor deve comutar para o modo **C** antes do terceiro ciclo seguinte ao contacto.

Se a qualquer momento é perdido o contacto com a superfície (devido a irregularidades desta), o supervisor comutará automaticamente de novo para o modo **T**. Uma vez que isto irá reduzir os termos de inércia e amortecimento, o robot retomará o contacto com a superfície com uma resposta rápida.

Adicionalmente aos conjuntos de parâmetros de impedância a atingir, cada modo pode também ter limites diferentes na velocidade e aceleração do ponto terminal. Estes serão apropriados para cada situação de modo a melhorar a estabilidade do sistema.

4.4.5 Análise da estabilidade de contacto para o modo T

Os limites de estabilidade dados pelas inequações (4.17) são condições necessárias, mas são insuficientes devido ao problema do contacto. Nesta análise são desenvolvidas duas condições adicionais que asseguram o contacto entre o robot e a superfície durante os três primeiros ciclos de controlo de impedância. Faz-se a velocidade de referência V_0*, constante durante este período e pressupõe-se que é igual à velocidade inicial ao contacto V_x. Resolve-se para a posição x* do robot em cada amostra e derivam-se condições (4.22) para x*, por convenção, positivos para cada amostra.

$$x^* = \frac{F^*}{K_e} = \frac{V_x T z^2 (Mz^2 + Nz + L)}{(z^2 - 2z + 1)\left[(Mz^3 + Nz^2 + Lz) + K_e(T^2 z^2 + 10T^2 z + T^2)\right]} \tag{4.20}$$

onde

$$M = 12J + 6BT + KT^2 \tag{4.21a}$$

$$N = 10KT^2 - 24J \tag{4.21b}$$

$$L = 12J - 6BT + KT^2 \tag{4.21c}$$

As amplitudes de $x^*(nT)$ para n = 1, 2, 3 ..., são dadas pelos coeficientes de z^{-1}, z^{-2}, z^{-3}, quando a equação (4.20) é espandida em série. A amplitude para n = 1 é $V_X T$, uma vez que o controlador ainda não reagiu. Para n = 2, 3 obtêm-se as seguintes condições:

$$12J + 6BT + KT^2 - \frac{K_e}{2}T^2 > 0 \tag{4.22a}$$

$$3T^5 + (72JT^3 + 36BT^4 - 2K_eT^5)K + (432J^2T + 108B^2T^3 + 432JBT^2 - 168JK_eT^3 - 72BT^4K_e + K_e^2T^5) > 0 \tag{4.22b}$$

Uma vez que K já foi seleccionado usando a equação (4.17), é preciso apenas mais uma condição, em adição às (4.22), para determinar J e B. Considera-se esta equação extra através do requisito de que K, B e J proporcionem um sistema ligeiramente sobreamortecido quando este não está em contacto com o ambiente exterior.

4.5 Método de projecto de acomodação usando programação linear

Na prática, existem ainda alguns problemas importantes com os métodos convencionais de desenvolvimento de acomodação pelo que não existem métodos facilmente aplicáveis a tarefas de montagem. Nesta secção, é apresentada uma abordagem, que adopta a programação linear para resolver esses problemas.

4.5.1 Estrutura de trabalho da estratégia da tarefa de montagem

Em geral, as tarefas de montagem são vistas como sequências de movimentos com várias transições de estado de contacto das peças de montagem. Por outras palavras, as tarefas de montagem são vistas como procedimentos que restringem os graus de liberdade das peças através da combinação de movimentos tais como o alinhamento ou o emparelhamento numa ordem apropriada. Nesta perspectiva, através da mudança do estado do contacto, de acordo com um procedimento pré-planeado, um robot que *reconhece* os estados de contacto pode restringir cada um dos graus de liberdade da peça e, assim, concluir a tarefa. Por outro lado, existe uma estratégia de movimento mais simples da forma: Estado Inicial → Estado a Atingir. Tal como na tarefa *cavilha-no-buraco* (peg-in-

-hole) usando o dispositivo RCC (Remote Compliance Control), numa tarefa de acomodação de caixas, se a caixa pode ser provida com uma acomodação apropriada para a tarefa, então o robot pode completar a sequência de transições de estado de contacto sem existir um reconhecimento de estado.

Para uma tarefa de montagem com movimentos simples, a identificação dos movimentos e a construção dos seus módulos, oferece uma estrutura de trabalho geral para a definição das estratégias relativas às tarefas de montagem.

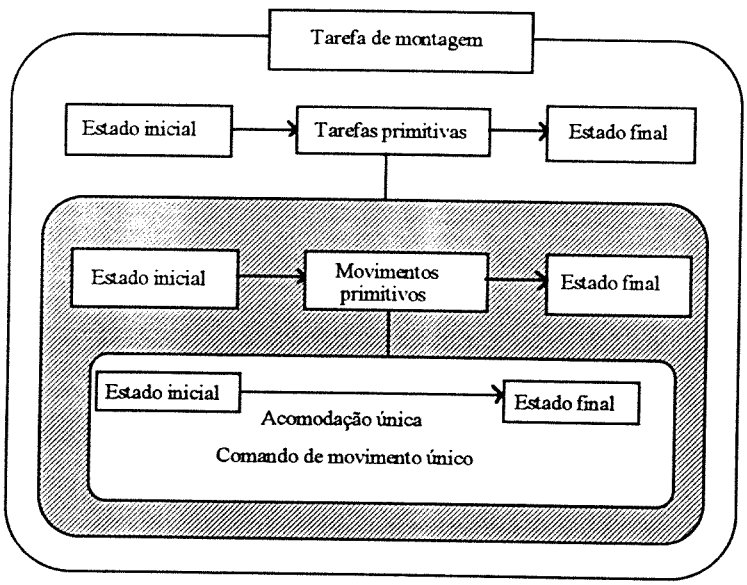


Figura 4.13
Estrutura de trabalho da estratégia para uma tarefa.

Deste modo, Matsuo e Iwaki (1992) sugerem uma nova estrutura hierárquica de trabalho de estratégias de tarefas de montagem baseada em *movimentos primitivos* (figura 4.13). Os *movimentos primitivos* são definidos como movimentos que conseguem alcançar uma transição entre um estado inicial e um estado a atingir (i.e. final), dada uma matriz de acomodação e um comando (único) de movimento inicial. Do mesmo modo, as *tarefas primitivas* são definidas como tarefas levadas a cabo através da combinação de *movimentos primitivos*, e as *tarefas gerais* são definidas como tarefas completadas através da associação de várias *tarefas primitivas*.

4.5.2 Método de projecto de acomodação para um movimento primitivo

Agora vai ser descrito o método de projecto de acomodação de modularização dos movimentos primitivos que são fundamentais para a estrutura de trabalho apresentada anteriormente. Têm-se em conta os seguintes pressupostos:

- Todos os estados possíveis de contacto entre peças, que ocorrem numa tarefa, podem ser dados como informação geométrica por um sistema de CAD ou por outras fontes.
- Os erros de posicionamento iniciais são pequenos.
- Nem o comando de movimento inicial nem a matriz de acomodação se modificam durante a execução de uma tarefa.
- A matriz de inércia do sistema é positiva definida e simétrica.

Existem diversas leis de controlo que podem ser usadas para se alcançar o movimento acomodativo. Neste sistema adopta-se uma lei de controlo com amortecimento:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{A}\mathbf{f} \tag{4.23}$$

onde $\mathbf{v}$ é a velocidade actual da peça e $\mathbf{v}_0$ é a velocidade inicial, $\mathbf{A}$ é uma matriz de acomodação de dimensão $n \times n$ (o inverso de uma matriz de amortecimento), n é o número de graus de liberdade e $\mathbf{f}$ é o vector da força de contacto. O problema do projecto de acomodação é, assim, reduzido a um problema de definição da velocidade inicial e da matriz de acomodação. Neste sistema o problema do projecto da matriz acomodação é considerado sob o pressuposto de que é dada a velocidade inicial.

Devem ser consideradas as seguintes condições no projecto da matriz acomodação: estabilidade, exequibilidade, dependência da velocidade e correcção de erros.

• **Estabilidade:** Tanto no espaço livre como no espaço restringido, a condição mais importante é a estabilidade do sistema. Nos métodos convencionais, o caso de estabilidade do sistema não é considerado durante o projecto da matriz e, deste modo, a estabilidade do sistema tem de ser verificada. Neste método, a estabilidade é considerada explicitamente durante a fase do projecto.

• **Exequibilidade:** Teoricamente não existem nenhumas restrições nos elementos de **A**. No entanto, num sistema real existem algumas restrições que advêm, por exemplo, da largura de banda dos actuadores e sensores ou do tempo de atraso dos controladores. Deste modo, a escolha de cada elemento da matriz **A** tem restrições em sistemas de montagem reais.

• **Dependência da Velocidade:** A força de contacto, que depende das peças que estejam a ser montadas, deve ser menor do que o valor máximo para evitar danos nas peças. Este máximo depende, pricipalmente, da velocidade inicial. Deste modo, a velocidade inicial deve ser considerada no procedimento de projecto de acomodação.

• **Correcção de erros:** Até agora, o maior efeito da acomodação tem sido o de evitar danos nas peças no ambiente de trabalho isto é, o de evitar o desenvolvimento de forças elevadas. Assim, na maioria dos casos, apenas os elementos da diagonal da matriz acomodação são investigados. No entanto, é necessário não apenas evitar o desenvolvi-

mento de forças elevadas, mas também proceder à correcção dos erros. Deste modo, com este método também se consideram os elementos não-diagonais da matriz de acomodação.

4.5.3 Restrições de programação linear

• **Estabilidade:** Tanto para **A** simétricas como assimétricas, se

$$\mathbf{A} > 0 \tag{4.24}$$

então o sistema é estável (Matsuo e Iwaki, 1992).

Esta condição é, essencialmente, não linear com respeito a cada elemento de **A**. Por exemplo, num caso a duas dimensões quando:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

a condição positiva definida torna-se:

$$\alpha_{11} > 0 \tag{4.26a}$$

$$4\alpha_{11}\alpha_{22} - (\alpha_{12} + \alpha_{21})^2 > 0 \tag{4.26b}$$

Esta condição não linear é inadequada para formar uma restrição de um algoritmo de programação linear. Deste modo, considera-se a seguinte forma quadrática como uma expressão equivalente para a inequação (4.24):

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} > 0, \quad \forall_{\mathbf{x}\neq 0} \tag{4.27}$$

Esta condição é uma inequação linear com respeito aos elementos de **A**. Isto significa que o hiperespaço definido por uma inequação não linear pode ser descrito por um número infinito de inequações lineares. No entanto, na prática, o hiperespaço pode ser aproximado por um número finito de inequações:

$$\mathbf{x}_i^T \mathbf{A}\mathbf{x}_i > 0, \quad i = 1,\ldots,s \tag{4.28}$$

onde s é o número (finito) de inequações utilizadas.

Se **x** for um vector arbitrário definido no hiperespaço, então **x** pode ser expresso como

$$\mathbf{x} = k\mathbf{e} \tag{4.29}$$

onde **e** é um vector unitário do hiperespaço e k é uma constante arbitrária. Substituindo a equação (4.29) no lado esquerdo da inequação (4.28), então resulta:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} = k\mathbf{e}^T \mathbf{A}k\mathbf{e} = k^2 \mathbf{e}^T \mathbf{A}\mathbf{e} \tag{4.30}$$

Deste modo, a inequação (4.28) é equivalente a

$$\mathbf{e}_i^T \mathbf{A}\mathbf{e}_i > 0, \quad i = 1,\ldots,s \tag{4.31}$$

A inequação (4.31) é uma condição que mostra que **A** é positiva definida. Por outras palavras, a certeza de **A** ser positiva definida torna-se tanto maior quanto maior a arbitrariedade de e.

- **Exequibilidade:** A exequibilidade pode ser formulada como:

$$tl_{ij} < \alpha_{ij} < tu_{ij}, \quad i,j = 1,\ldots,n \tag{4.32}$$

onde α_{ij} é um elemento de **A**, e tu_{ij} e tl_{ij} são, respectivamente, os limites superior e inferior para esse elemento.

- **Dependência de velocidade:** Quando a velocidade da peça é nula, a força de contacto é máxima. De acordo com isto, se $\mathbf{f}_{máx}$ é a força máxima aceitável, a dependência de velocidade é dada por:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} f_{máxj} \geq -v_{0i}, \quad i = 1,\ldots,n \tag{4.33}$$

onde $f_{máxj}$ é a j-ésima componente de $\mathbf{f}_{máx}$ e v_{0i} é i-ésima componente de $\mathbf{v}_0$.

- **Correcção de erros:** Para cada caso particular é construído um conjunto de inequações. A tarefa será dada por terminada quando, pelo menos, uma das inequações são satisfeitas para todos os estados de contacto. Deste modo, as quatro condições anteriores podem ser formuladas como restrições do algoritmo de programação linear. Estas inequações reduzem-se a:

$$\mathbf{B}\alpha \geq \mathbf{c} \tag{4.34a}$$

$$\alpha = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{nn})^T \tag{4.34b}$$

Nesta expressão **B** é uma matriz de dimensão $p \times n^2$, onde p é o número total de inequações.

4.5.4 Função objectivo

A inequação (4.34a) dá um espaço de soluções. Deste modo, é preciso um modelo que sirva para determinar a solução óptima e única. Como uma função objectivo, os autores adoptaram a distância ao hiperplano que limita o espaço das soluções. Assim, cada linha de **B** é um vector normal do hiperplano e a distância d_i entre cada um e um ponto α_0 vem:

$$d_i = \frac{\sum_{j=1}^{n^2} b_{ij}\alpha_{0j} - c_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n^2} b_{ij}^2}}, \quad i = 1, \ldots, p \tag{4.35}$$

onde b_{ij} é um elemento da linha i, coluna j de **B**, α_{0j} é o j-ésimo elemento de α_0 e c_i é o i-ésimo elemento de **c**. Quando esta função é um máximo, pode-se seleccionar a solução para a qual a distância ao limite mais próximo é um máximo. As restrições que envolvem a função objectivo são dadas pela expressão

$$\left[\tilde{\mathbf{B}} \vdots -1\right]\tilde{\alpha} \geq \tilde{\mathbf{c}} \tag{4.36a}$$

$$\tilde{b}_{ij} = \frac{b_{ij}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n^2} b_{ij}^2}}, \quad i = 1, \ldots, p, \; j = 1, \ldots, n \tag{4.36b}$$

$$\tilde{c}_i = \frac{c_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n^2} b_{ij}^2}}, \quad i = 1,\ldots,p \tag{4.36c}$$

$$\tilde{\alpha} = \left[\alpha^T \;\vdots\; d\right]^T \tag{4.36d}$$

onde -1 em (4.36a) significa um vector coluna de dimensão $n \times 1$ de valores -1 em cada linha. Consequentemente, o problema de projecto de acomodação pode ser reduzido a um problema de programação linear.

4.6 Conclusão

Na secção 4.2 foi apresentado um estudo sobre o desenvolvimento de um sistema de controlo de força baseado em microprocessador para operar em paralelo com o sistema de controlo de posição dos eixos do robot.

Na secção 4.3 descreveu-se um método de controlo para desenvolvimento de movimento acomodativo sem usar sensores de força. Este método de controlo beneficia da redundância nos graus de liberdade do manipulador: os graus de liberdade fundamentais garantem o posicionamento enquanto os graus de liberdade redundantes possibilitam a imposição de forças no ambiente exterior. Nesta ordem de ideias, foi estudada a estabilidade do sistema e do ambiente.

Na secção 4.4 foram definidos três modos de operação para um robot controlado em impedância. O conceito de controlo de impedância discutido nesta secção é o elemento central em sistemas inteligentes de controlo de manipulação que operam em ambientes incertos. Através da comutação entre os vários modos, o robot pode operar eficientemente e com segurança.

O último método, apresentado na secção 4.5, corresponde a uma estratégia de execução das tarefas através de uma associação de vários *movimentos primitivos*. Neste método, a estabilidade (que, convencionalmente, é necessário verificar depois do processo de projecto) é formulada directamente durante o processo de desenvolvimento. As quatro condições formuladas estabelecem os requisitos fundamentais para as tarefas de montagem em geral. No entanto, para uma tarefa específica, podem ser precisas condições adicionais. Neste caso, essas condições podem ser facilmente adicionadas às quatro condições fundamentais e integrar um algoritmo de programação linear.

Capítulo 5

Controlo de força e posição de um modo não conflituoso

Neste capítulo é abordado com algum detalhe o controlo híbrido. Com este tipo de algoritmo o orgão terminal do manipulador é controlado em posição, segundo algumas direcções, e em força nas restantes direcções. Deste modo, existe um desacopulamento entre o controlo de força e o controlo de posição do manipulador robótico. Este desacopulamento é conseguido através do uso de uma matriz de selecção de direcções.

Nas primeiras cinco secções deste capítulo (5.2 a 5.5), apresenta-se a derivação de um modelo de corpo rígido para um movimento acomodativo do manipulador. Na secção seguinte (5.6), é relatada uma generalização da abordagem híbrida força-posição para o controlo de robots em contacto com ambientes dinâmicos. Na última secção, apresenta-se uma breve conclusão do capítulo.

5.1 Introdução

Nos últimos anos têm vindo a ser investigadas várias estratégias de controlo a fim de tornar exequíveis, industrialmente, todas as tarefas nas quais o robot necessita de manter um contacto estável e exercer forças no ambiente. Duas abordagens receberam grande atenção: o *controlo de impedância* e o *controlo híbrido*.

Em geral, o controlo de impedância é adequado apenas para aquelas tarefas onde as forças de contacto devem ser mantidas pequenas, tipicamente para evitar um desalinhamento entre peças nas operações de montagem ou de inserção. O contacto entre o orgão terminal do robot e o ambiente é descrito como uma impedância *dinâmica* generalizada, isto é, por um conjunto completo por seis equações diferenciais de segunda ordem (lineares

ou não lineares). A insensibilidade a interacções, não esperadas, com o ambiente é obtida através de um compromisso entre a amplitude das forças de contacto e a exactidão da posição, usando matrizes "programáveis" de rigidez e de amortecimento. Deste modo, é necessária uma estimativa das direcções ao longo das quais ocorrem erros sistemáticos de posição de forma a definir, correctamente, a matriz de rigidez.

Por outro lado, o controlo híbrido é adequado para casos onde o robot tem que exercer forças de intensidade arbitrária contra a peça de trabalho. O controlo híbrido usa informação acerca da geometria do ambiente, pelo que tem a propriedade de seguir exactamente uma superfície, o que é típico em tarefas tais como corte, rebarbagem, polimento ou moagem. Com este método, é conseguida alguma robustez a erros de modelização "trabalhando" apropriadamente os sinais de força e de deslocamento ao nível do orgão terminal. Tal como foi formulado no início, o controlo híbrido aplica-se apenas quando se pressupõe que o orgão terminal está em contacto com um ambiente rígido, logo, sendo este tratado como uma restrição *cinemática* do movimento do robot. Consequentemente, são desprezadas as forças de atrito, pelo que existe uma ortogonalidade útil entre os movimentos admissíveis e as forças de contacto generalizadas.

Mais recentemente Matsuno *et al.* (1994) elaboraram um estudo através do qual propõem um método onde são controladas tanto a força de contacto exercida por um manipulador flexível como a posição do orgão terminal. Isto, enquanto o manipulador está em contacto com uma superfície. Foram também conduzidas algumas experiências, com o controlo híbrido de um manipulador flexível de dois gdl, usando um sensor de força.

No trabalho de Kankaanranta e Koivo (1988a, secções 5.2 a 5.5 deste capítulo) é derivado um modelo de corpo rígido para o movimento acomodativo dum manipulador. O modelo proposto é útil na simulação de manipuladores controlados em força. Mais ainda, é sugerida uma arquitectura de controlo, a qual, de acordo com o modelo, leva ao desacopulamento exacto das direcções controladas em força e em posição.

Neste capítulo, em primeiro lugar (secção 5.2), é apresentado um modelo geral para sistemas mecânicos sujeitos a restrições. Na secção 5.4, é abordado um método para a redução de dimensionalidade desse modelo. Nas secções 5.3 e 5.5, é aplicada a estrutura de trabalho geral a manipuladores restringidos.

No trabalho de De Luca e Manes (1991) (secção 5.6), é apresentada uma generalização da abordagem híbrida posição-força para controlar robots em contacto com ambientes dinâmicos. Deste estudo emergem dois esquemas híbridos alternativos, uma vez que tanto as forças como as posições podem ser controladas ao longo de direcções dinâmicas.

Assim, nas primeiras subsecções da secção 5.6 são revistos os conceitos fundamentais do controlo híbrido, de modo a introduzir um conjunto de generalizações. Após isso, é descrita a abordagem de modelização para robots em contacto com ambientes e é

apresentado o método de planeamento da força normal e das trajectórias de posição, usando as variáveis do modelo proposto. Nesta perspectiva, é também discutido o problema de filtragem que está subjacente a qualquer algoritmo de controlo híbrido, no contexto de ambientes dinâmicos. Por último, são analisadas duas leis alternativas de controlo híbrido, desacopuladoras e linearizantes, em termos das variáveis de contacto desejadas.

5.2 Dinâmica do movimento acomodativo

Seja a configuração de um sistema de corpos rígidos descrita através de n coordenadas generalizadas $q_1, \ldots, q_n$. As coordenadas generalizadas são definidas de tal modo que, sem olhar aos seus valores, são satisfeitas certas equações restringindo as coordenadas de translacção e rotação dos corpos rígidos. Embora a formulação das equações de restrição (representando juntas típicas que ligam corpos rígidos) seja executada facilmente, muitas vezes pode ser seleccionado intuitivamente um conjunto de coordenadas generalizadas satisfazendo estas restrições. Por exemplo, uma escolha natural para as coordenadas generalizadas de um manipulador com ligações série é o conjunto das suas coordenadas das juntas. A vantagem do uso de coordenadas generalizadas sobre um conjunto máximo de coordenadas de translacção e rotação, é que as forças de reacção que mantêm as restrições são eliminadas das equações dinâmicas do sistema. Para além da vantagem anterior, tem-se uma redução de dimensionalidade. A eliminação das forças de reacção requer que estas não executem trabalho virtual, o que significa que as restrições não envolvem atrito.

Define-se o Lagrangeano $\mathcal{L}$ do sistema como a diferença entre as suas energias cinética e potencial (como já foi relatado no capítulo 2). A segunda lei de Newton e o pressuposto de restrições que não envolvem atrito levam ao princípio de D'Alembert, o qual na base de coordenadas generalizadas, toma a forma:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}-\tau_i\right]\delta q_i = 0 \qquad (5.1)$$

onde $\tau_1, \ldots, \tau_n$ são as forças generalizadas não conservativas e $\delta q_1, \ldots, \delta q_n$ são os deslocamentos virtuais das coordenadas generalizadas. Os deslocamentos virtuais devem ser consistentes com as restrições instantâneas do sistema. Se todas as restrições são satisfeitas através da definição das coordenadas generalizadas, no sentido explicado anteriormente, então as coordenadas generalizadas bem como os seus deslocamentos virtuais são independentes. Neste caso, as equações de movimento Langrangeanas dadas por:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \tau_i, \quad i = 1,\ldots,n \tag{5.2}$$

são deduzidas imediatamente do princípio de D'Alembert, uma vez que a soma em (5.1) pode ser nula apenas se os coeficientes de todos os deslocamentos virtuais forem nulos. No entanto, em certos casos, pode ser vantajoso, ou mesmo necessário, usar mais coordenadas generalizadas do que o número de graus de liberdade do sistema, de modo a que as coordenadas generalizadas não sejam independentes. Este é o caso típico de sistemas cuja estrutura cinemática contém cadeias fechadas onde as equações Lagrangeanas na forma (5.2) não podem ser aplicadas.

Definam-se os vectores (de dimensão $n \times 1$) $\mathbf{q} = [q_1 \ \ldots \ q_n]^T$ das coordenadas generalizadas e $\tau = [\tau_1 \ \ldots \ \tau_n]^T$ das forças generalizadas não conservativas. Seja a energia cinética do sistema da forma $1/2\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{H}\dot{\mathbf{q}}$ onde $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ é uma matriz $n \times n$ simétrica positiva definida em qualquer configuração do sistema. Então o princípio de D'Alembert pode ser manipulado para a forma (Hemami e Wyman, 1981)

$$\delta\mathbf{q}^T(\mathbf{H}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}_N - \tau) = 0 \tag{5.3}$$

onde o vector $\mathbf{c}_N$ (de dimensão $n \times 1$) pode ser uma função seja das coordenadas generalizadas seja das velocidades. Na dinâmica do manipulador, $\mathbf{H}$ chama-se a matriz de inércia, τ denota as forças ou momentos desenvolvidos pelos actuadores das juntas e $\mathbf{c}_N$ inclui os efeitos gravitacionais, centrífugos e de Coriolis.

Seja a independência entre as coordenadas generalizadas caracterizada pela equação matricial de restrição:

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}} = 0 \tag{5.4}$$

onde a matriz $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ (de dimensão $k \times n$) é pressuposta ter plena ordem de linhas k[1] ($k \leq n$). Então, o número de graus de liberdade é $m = n - k$. Se as equações diferenciais (5.4) puderem ser integradas e daí resultarem relações entre as coordenadas generalizadas, então o sistema é holonómico. Se não for possível achar uma expressão através das coordenadas generalizadas, então o sistema é não holonómico. Para um sistema holonómico é sempre possível encontrar um conjunto de m coordenadas generalizadas independentes e, depois, aplicar as equações Lagrangeanas ordinárias (5.2). No entanto, se são requeridas as forças

[1] Ordem de colunas (linhas) n de uma matriz significa, neste capítulo, que o determinante não nulo que se pode obter com as colunas (linhas) da matriz é de ordem n.

de restrição ou se existe um conjunto alternativo de restrições, é mais prático usar a abordagem descrita a seguir.

Os deslocamentos virtuais consistentes com a restrição (5.4) satisfazem a equação semelhante (Goldstein, 1962):

$$\mathbf{A}\delta\mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{5.5}$$

Defina-se o vector coluna $\lambda = [\lambda_1 \ \ldots \ \lambda_n]^T$ de multiplicadores de Lagrange e subtraia-se a equação $\delta\mathbf{q}^T\mathbf{A}^T\lambda = 0$ do princípio de D'Alembert (5.3) para se obter

$$\delta\mathbf{q}^T(\mathbf{H}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}_N - \tau - \mathbf{A}^T\lambda) = 0 \tag{5.6}$$

Sejam as primeiras m coordenadas generalizadas $q_1, \ldots, q_m$ independentes entre si e sejam as restantes coordenadas $q_{m+1}, \ldots, q_{m+k}$ não independentes. Escolham-se os multiplicadores de Lagrange de maneira tal que os coeficientes dos deslocamentos virtuais $\delta q_{m+1}, \ldots, \delta q_{m+k}$ em (5.6) sejam zero. Então, a equação envolve apenas os deslocamentos independentes $\delta q_1, \ldots, \delta q_m$ e, por isso, também os seus coeficientes devem ser nulos. Logo, as equações de movimento para o sistema restringido são obtidas como:

$$\mathbf{H}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}_N = \tau + \mathbf{A}^T\lambda \tag{5.7}$$

Os elementos do vector (de dimensão $n \times 1$) $\gamma = \mathbf{A}^T\lambda$ em (5.7) podem ser identificados como as forças generalizadas de restrição que actuam no sistema (Goldstein, 1962). O trabalho virtual efectuado pelas forças de restrição generalizadas desaparece, uma vez que $\gamma^T\delta\mathbf{q} = \lambda^T\mathbf{A}\delta\mathbf{q} = 0$ devido a (5.5).

Diferenciando a restrição (5.4) com respeito ao tempo obtém-se

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \tag{5.8}$$

onde a matriz $\dot{\mathbf{A}}$ (de dimensão $k \times n$) pode ser uma função das coordenadas generalizadas e das velocidades. As equações de movimento (5.7) e de restrição (5.8) podem ser combinadas na única equação matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} & -\mathbf{A}^T \\ -\mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau - \mathbf{c}_N \\ \dot{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

onde $|\mathbf{H}| \cdot \left|-\mathbf{A}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{A}^T\right|$ é o determinante da matriz coeficiente em (5.9) (Gantmacher, 1960). Uma vez que $\mathbf{A}$ tem ordem igual a k e $\mathbf{H}^{-1}$ é positiva definida, então também a matriz (de dimensão $k \times k$) $\mathbf{A}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{A}^T$ é positiva definida e portanto não singular. A equação (5.9) pode portanto ser resolvida para as acelerações generalizadas $\ddot{\mathbf{q}}$, necessárias para integração numérica, e os multiplicadores de Lagrange λ, necessários para o cálculo das forças de restrição. A solução para λ é dada simbolicamente por

$$\lambda = \left[\mathbf{A}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{A}^T\right]^{-1}\left[\mathbf{A}\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{c}_N - \tau) - \dot{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{q}}\right] \tag{5.10}$$

Logo, as forças de restrição generalizadas $\gamma = \mathbf{A}^T\lambda$ são funções das coordenadas generalizadas $\mathbf{q}$, das velocidades generalizadas $\dot{\mathbf{q}}$ e das forças generalizadas não conservativas τ.

5.3 Um manipulador com movimento da ferramenta restringido

Nesta secção a equação geral (5.9) que governa o movimento de um sistema restringido é aplicada a um manipulador de ligações série com n graus de liberdade cuja ferramenta está em contacto com o ambiente.

Seja $\mathbf{p}_e$ a posição, relativa à base de coordenadas fixa e seja ω_n a velocidade angular da última ligação e da ferramenta, na base fixa de coordenadas. Seja a restrição imposta pelo ambiente ao movimento da ferramenta modelizada pela equação restrição Cartesiana

$$\mathbf{C}\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{p}}_e \\ \omega_n\end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{5.11}$$

onde a matriz $\mathbf{C}$ (de dimensão $k \times 6$) pode depender da posição da ferramenta e é pressuposto ter ordem plena de linhas k ($k \leq 6$ e $k \leq n$). Seja $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ a matriz Jacobiano (de dimensão $6 \times n$), que transforma as velocidades das juntas $\dot{\mathbf{q}}$ na velocidade de translacção $\dot{\mathbf{p}}_e$ e de rotação ω_n da ferramenta:

$$\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{p}}_e \\ \omega_n\end{bmatrix} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} \tag{5.12}$$

As equações (5.11) e (5.12) levam a uma equação restrição da forma (5.4) com a matriz coeficiente

$$\mathbf{A} = \mathbf{CJ} \tag{5.13}$$

a qual deve ter ordem completa k de modo a fazer (5.9) resolúvel.

A ordem do produto **PQ** de duas matrizes arbitrárias **P** e **Q** é igual à ordem de **Q** menos o número de vectores linearmente independentes, os quais pertencem tanto ao espaço das colunas de **Q** como ao espaço nulo (núcleo) de **P**.

Aplicando esta propriedade à transposta de (5.13), isto é, $\mathbf{A}^T = \mathbf{J}^T\mathbf{C}^T$, segue-se que a ordem de **A** é igual à ordem de **C** (pressuposta ser k) menos o número d de vectores linearmente independentes no espaço das linhas de **C**, o qual é ortogonal ao espaço das colunas de **J**. Por outras palavras, mesmo que as equações restrição Cartesianas (representadas por **C**) sejam linearmente independentes, algumas das suas combinações lineares podem já ter sido satisfeitas na estrutura do manipulador (representado por **J**). Se este for o caso, pode ser definida uma nova matriz restrição Cartesiana **C'** (de dimensão $k' \times 6$, $k' = k-d$) de tal modo que o espaço das linhas de **C'** é a projecção do espaço das colunas de **J** no espaço das linhas de **C**. A equação restrição modificada $\mathbf{C'J\dot{q}} = 0$ será equivalente à original e **C'J** terá ordem de linhas completa. Mais ainda, (5.15) irá resultar em força e momento de restrição correctos, quando a matriz modificada **C'** é usada em (5.15). Portanto, pode ser pressuposto que a matriz **A**, dada por (5.13) tem ordem de linhas completa. É de notar que, no caso especial $n = 6$, a ordem da matriz original **A** pode ser inferior a k só quando a matriz Jacobiano **J** é singular.

O movimento restringido do manipulador pode agora ser resolvido usando o sistema de equações (5.9). A matriz inércia **H** e o vector $\mathbf{c}_N$ podem ser calculados usando os métodos recursivos desenvolvidos para a simulação do movimento não restringido ordinário de manipuladores com ligações série. De modo a completar o sistema de (5.9), deve também ser calculado o termo

$$\dot{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{C}}\mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}} \tag{5.14}$$

Consequentemente, as únicas tarefas requeridas em adição aos métodos de cálculo para manipuladores em malha aberta, são os algoritmos que calculam a matriz coeficiente **A** e o termo $\dot{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{q}}$, dados respectivamente por (5.13) e (5.14). Mais ainda, estes cálculos podem ser divididos em duas partes: uma parte depende apenas da estrutura cinemática do manipulador e a outra depende das restrições específicas do movimento da ferramenta. A primeira parte, o cálculo da matriz Jacobiano **J** e do termo $\dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}}$, pode ser implementada como uma subrotina permanente no programa de simulação. A segunda parte, o cálculo da matriz **C**, de restrição Cartesiana e da sua derivada temporal $\dot{\mathbf{C}}$, é feita flexível, pois é permitido lidar com o caso uma subrotina fornecida pelo utilizador.

Sejam os vectores **f** e **n** que, nas coordenadas da base, representam o momento e força de reacção que actuam na ferramenta no ponto de contacto. Considere-se que o vector força-momento $[\mathbf{f}^T\ \mathbf{n}^T]^T$ (de dimensão 6×1) pertence ao espaço das linhas de **C**, isto é, que o vector seja da forma $\mathbf{C}^T\mathbf{x}$, onde **x** é um vector de dimensão $k \times 1$ de alguns coeficientes. Multiplicando o vector força-momento pela matriz Jacobiano transposta resulta nas forças de restrição generalizadas pois $\gamma = \mathbf{J}^T\mathbf{C}^T\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{x}$. Por outro lado, as forças de restrição generalizadas são dadas por $\gamma = \mathbf{A}^T\lambda$. Deste modo, o vector coeficiente **x** deve satisfazer a equação matricial $\mathbf{A}^T(\mathbf{x}-\lambda) = 0$, a qual tem apenas a solução trivial $\mathbf{x} = \lambda$, desde que **A** tenha ordem completa de linhas k. Logo, a força e o momento de restrição podem ser calculados através da expressão:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{f}\\ \mathbf{n}\end{bmatrix} = \mathbf{C}^T\lambda \tag{5.15}$$

depois dos multiplicadores de Lagrange terem sido resolvidos através de (5.9).

De seguida, será considerado com maior detalhe o caso das restrições separadas de translacção e de rotação:

$$\mathbf{g}(\mathbf{p}_e) = 0 \tag{5.16a}$$

$$\mathbf{G}\omega_n = 0 \tag{5.16b}$$

A dimensão k_t da função vectorial **g** pode variar entre 1 e 3, correspondendo às situações quando a ponta da ferramenta é restringida a estar numa superfície, numa curva, ou num ponto. Suponha-se que a ferramenta tem apenas um grau de liberdade rotacional em torno do eixo dos z de uma base de coordenadas de restrição. Então, as linhas da matriz **G** (de dimensão 2×3) são os vectores unitários alinhados com os eixos x e y da base de coordenadas restrição rotacional. Diferenciando (5.16a) com respeito ao tempo resulta uma restrição da forma (5.11) com a matriz restrição Cartesiana

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix}\dfrac{d\mathbf{g}}{d\mathbf{r}} & 0\\ 0 & \mathbf{G}\end{bmatrix} \tag{5.17}$$

e $k = k_t + 2$. As linhas da matriz $d\mathbf{g}/d\mathbf{r}$ (de dimensão $k_t \times 3$) são os gradientes, com respeito à base de coordenadas $\mathbf{r} = [x\ y\ z]^T$, das funções $g_1, \ldots, g_{kt}$ que compõem o vector **g**. O primeiro termo em (5.14) é agora dado por:

$$\dot{\mathbf{C}}\mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} = \left[\dot{\mathbf{p}}_e^T \frac{d^2 g_1}{d\mathbf{r}^2} \dot{\mathbf{p}}_e \quad \cdots \quad \dot{\mathbf{p}}_e^T \frac{d^2 g_{k_t}}{d\mathbf{r}^2} \dot{\mathbf{p}}_e \quad \boldsymbol{\omega}_n^T \dot{\mathbf{G}}^T \right]^T \tag{5.18}$$

onde $d^2g_j/d\mathbf{r}^2$ denota a matriz Hessiana da função g_j, isto é, a matriz composta pelas derivadas parciais de segunda ordem de g_j.

Divida-se o vector dos multiplicadores de Lagrange da forma $\lambda^T = [\lambda_t^T \ \lambda_r^T]$, onde λ_t é um vector de dimensão k_t e λ_r é um vector de duas dimensões. A força e momento restrição são, de acordo com a equação geral (5.15), dados por:

$$\mathbf{f} = \left(\frac{d\mathbf{g}}{d\mathbf{r}} \right)^T \lambda_t \tag{5.19a}$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{G}^T \lambda_r \tag{5.19b}$$

No caso de uma restrição superfície ($k_t = 1$), a força de restrição dada por (5.19) é dirigida ao longo da normal à superfície. Por outras palavras, o pressuposto que leva a (5.15) significa, neste caso, que a superfície restrição não tem atrito. De um modo semelhante, no caso de uma restrição curvilínea ($k_t = 2$), a força dada por (5.19) não tem componente ao longo da curva. Finalmente, no caso de uma restrição pontual ($k_t = 3$), a força restrição pode ter componentes em todas as três direcções. O momento restrição dado por (5.19) é ortogonal ao eixo dos z da base de coordenadas de restrição rotacional. As coordenadas x e y, com respeito à base de coordenadas de restrição rotacional do momento de restrição, são dadas directamente pelos elementos de λ_r.

Um exemplo simples de uma geometria de tarefa que não pode ser modelizada pelas restrições de translacção e de rotação separadas (5.16) é a rotação de um parafuso, uma vez que as velocidades de translacção e de rotação na direcção do eixo do parafuso estão acopuladas. No entanto, a equação restrição mais geral (5.11) engloba também este caso.

5.4 Redução de dimensionalidade

O sistema restringido descrito pelas n equações de movimento (5.7) e k equações restrição (5.4) tem $m = n - k$ graus de liberdade. Isto melhora o desempenho computacional do programa de simulação, porque o número de equações diferenciais a integrar é menor.

De seguida, o número de equações de movimento é reduzido de n para m o que, naturalmente, leva a um programa de simulação mais eficiente. As forças restrição são eliminadas das equações de movimento reduzidas, mas podem ser calculadas separadamente.

Definam-se m pseudovelocidades v_1, ..., v_m como combinações lineares das velocidades generalizadas

$$\mathbf{v} = \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} \tag{5.20}$$

onde $\mathbf{v} = [v_1 \ldots v_m]^T$ e a matriz $\mathbf{B(q)}$ (de dimensão $m \times n$) é seleccionada de modo a que a matriz composta $[\mathbf{A}^T \mathbf{B}^T]^T$ seja não singular. O termo pseudovelocidade é utilizado para realçar o facto de que as combinações lineares (5.20) não são necessariamente derivadas temporais de quaisquer coordenadas físicas. Outra razão para usar o termo pseudovelocidade resulta, simplesmente, da necessidade de distinguir $\mathbf{v}$ das velocidades generalizadas originais $\dot{\mathbf{q}}$. De modo a ser possível a determinação das coordenadas generalizadas através das pseudocoordenadas, isto é, a determinação dos integrais temporais das pseudovelocidades, a expressão (5.20) deve ser integrável analiticamente. A maneira mais simples de conseguir essa integração consiste em seleccionar $\mathbf{B}$ como uma matriz constante. Então, as pseudocoordenadas são simplesmente combinações lineares $\mathbf{Bq}$ das coordenadas generalizadas. No caso de manipuladores restringidos existe ainda uma outra, e melhor, forma de ataque do problema, como será indicado mais à frente. Para as velocidades, a redução de dimensão será obtida sem ter em conta a integrabilidade da definição (5.20).

As pseudoacelerações $\dot{v}_1$, ..., $\dot{v}_n$ são dadas formalmente por

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{B}}\dot{\mathbf{q}} \tag{5.21}$$

onde a matriz $\dot{\mathbf{B}}$ (de dimensão $m \times n$) pode ser uma função tanto das coordenadas generalizadas como das velocidades. A obtenção de uma expressão analítica para $\dot{\mathbf{B}}$ é uma das principais tarefas na aplicação do esquema proposto para redução dimensional. Esta dificuldade é mais uma vez evitada se a matriz coeficiente $\mathbf{B}$, na definição (5.20), for constante. A selecção de m velocidades generalizadas independentes como pseudovelocidades é baseada na aferição da independência linear entre as colunas da matriz $\mathbf{A}$.

Quando as pseudovelocidades e as pseudoacelerações são conhecidas, as velocidades generalizadas podem ser resolvidas unicamente através de (5.4) e (5.20), e as acelerações generalizadas através de (5.8) e (5.21). As soluções para estes sistemas de equações lineares podem ser expressas como

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Fv} \tag{5.22a}$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}\dot{\mathbf{v}} - (\mathbf{E}\dot{\mathbf{A}} + \mathbf{F}\dot{\mathbf{B}})\mathbf{F}\mathbf{v} \tag{5.22b}$$

onde a matriz $\mathbf{E}(\mathbf{q})$ (de dimensão $n \times k$) e a matriz $\mathbf{F}(\mathbf{q})$ (de dimensão $n \times m$) são definidas como blocos da matriz inversa

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \tag{5.23}$$

Substituindo a expressão $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}\mathbf{v}$ na restrição (5.4) resulta na equação $\mathbf{AFv} = 0$, a qual é identicamente verdadeira, uma vez que $\mathbf{AF} = 0$ devido à definição (5.23). Portanto, a restrição (5.4) é satisfeita independentemente dos valores das pseudovelocidades.

Multiplicando as equações de movimento (5.7) à esquerda pela matriz não singular $[\mathbf{E}\ \mathbf{F}]^T$ resultam, de acordo com a definição (5.23), as equações seguintes:

$$\lambda = \mathbf{E}^T(\mathbf{H}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}_N - \tau) \tag{5.24}$$

$$\mathbf{F}^T\mathbf{H}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}^T(\tau - \mathbf{c}_N) \tag{5.25}$$

Os multiplicadores de Lagrange dados por (5.24) são necessários para o cálculo das forças de restrição as quais, por outro lado, são eliminadas das equações dinâmicas (5.25). Alternativamente, os multiplicadores de Lagrange podem ser calculados por (5.10), o que é equivalente à equação

$$\mathbf{A}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{A}^T\lambda = \mathbf{A}\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{c}_N - \tau) - \dot{\mathbf{A}}\mathbf{F}\mathbf{v} \tag{5.26}$$

Substituindo (5.22) para as acelerações generalizadas em (5.25) resultam finalmente as equações de movimento reduzidas:

$$\mathbf{F}^T\mathbf{H}\mathbf{F}\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}^T\left[\tau - \mathbf{c}_N + \mathbf{H}(\mathbf{E}\dot{\mathbf{A}} + \mathbf{F}\dot{\mathbf{B}})\mathbf{F}\mathbf{v}\right] \tag{5.27}$$

Uma vez que $\mathbf{F}^T$ tem ordem completa de linhas m e $\mathbf{H}$ é positiva definida então, também $\mathbf{F}^T\mathbf{H}\mathbf{F}$ é positiva definida e, portanto, não singular. Assim, a equação (5.27) pode ser resolvida para as pseudoacelerações, as quais são depois integradas numericamente a fim de se obterem as pseudovelocidades. As pseudovelocidades e as acelerações determinam univocamente as velocidades generalizadas e as acelerações através das transformações (5.22), pelo que o problema de obtenção das coordenadas generalizadas de uma forma

reduzida ainda se mantém. As soluções gerais para este problema utilizam técnicas iterativas mas, numa aplicação específica, pode ser possível definir as pseudovelocidades como derivadas temporais de algumas coordenadas físicas, cuja relação com as coordenadas generalizadas seja conhecida.

Em princípio, é fácil construir as equações de movimento (5.27), para o sistema restringido, se são conhecidos os termos $\mathbf{H}$ e $\mathbf{c}_N$ para o sistema não restringido. No entanto, a formulação explícita das equações reduzidas requer que seja conhecida a matriz inversa (5.23). O cálculo da inversa é evitado se as velocidades generalizadas $\dot{\mathbf{q}}$ forem resolvidas, numericamente, pelo sistema de equações lineares (5.4) e (5.20). Também, as acelerações generalizadas $\ddot{\mathbf{q}}$ em conjunto com os multiplicadores de Lagrange λ devem ser obtidos através das equações originais (5.9). Depois, as pseudoacelerações são calculadas usando (5.21) e, por isso, pode ser utilizada a redução de dimensionalidade na integração numérica.

Mesmo no caso de ser impraticável o uso directo de (5.26) e (5.27) na simulação, estas equações são úteis para o projecto de controladores. De facto, usando as expressões (5.26) e (5.27), é fácil verificar que a arquitectura de controlo (fig. 5.1):

$$\tau = \mathbf{A}^T \mathbf{u}_1 + \mathbf{HF}\mathbf{u}_2 + \mathbf{c}_N - \mathbf{H}(\mathbf{E}\dot{\mathbf{A}} + \mathbf{F}\dot{\mathbf{B}})\mathbf{F}\mathbf{v} \tag{5.28}$$

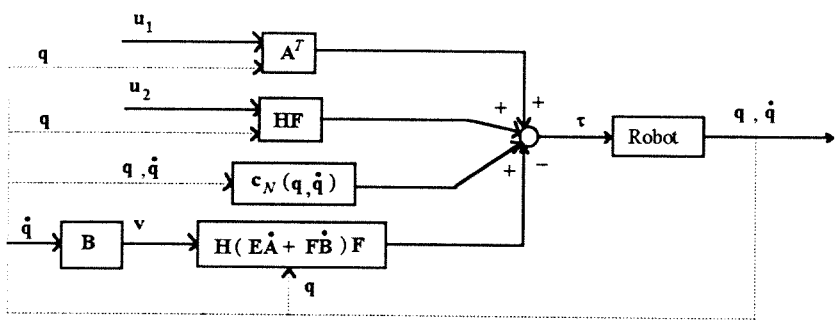


Figura 5.1
Diagrama de blocos correspondente à equação (5.28).

conduz a um sistema de malha fechada da forma:

$$-\lambda = \mathbf{u}_1 \tag{5.29a}$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{u}_2 \tag{5.29b}$$

Os graus de liberdade controlados em posição e em força são desacopulados, quando é utilizada a arquitectura de controlo (5.28). O vector $\mathbf{u}_1$ (de dimensão $k \times 1$) e o vector $\mathbf{u}_2$ (de dimensão $m \times 1$) são as leis de controlo por realimentação e/ou por antecipação (feedforward) para a força e a posição, respectivamente. O sinal negativo para λ é devido,

meramente, à convenção de sinais: as forças de restrição foram definidas para actuarem *no* sistema.

5.5 Equações reduzidas para um manipulador restringido

Nesta secção, é ilustrado o método geral para redução de dimensão, através da aplicação a um manipulador de seis graus de liberdade com movimento de ferramenta restringido. Será considerado apenas um caso especial da equação restrição (5.11), seleccionado de tal modo, que as pseudovelocidades podem ser definidas como certas coordenadas da velocidade Cartesiana do manipulador. No entanto, este caso cobre muitas aplicações típicas de controlo de força. As situações mais gerais são englobadas na formulação apresentada anteriormente. O problema chave na aplicação do problema geral é encontrar uma matriz **B** apropriada para a definição (5.20) das pseudovelocidades.

Seja o movimento da ferramenta restringido definido pela equação

$$\mathbf{S}_1 \begin{bmatrix} {}^t\dot{\mathbf{p}}_e \\ {}^r\boldsymbol{\omega}_6 \end{bmatrix} = 0 \tag{5.30}$$

onde a matriz selecção $\mathbf{S}_1$ (de dimensão $k \times 6$) é composta por certas linhas da matriz identidade. Por outro lado, sejam ${}^t\dot{\mathbf{p}}_e$ e ${}^r\boldsymbol{\omega}_6$ os vectores coordenadas, com respeito às bases de coordenadas de restrição (eventualmente em movimento) t e r, da velocidade de translacção e de rotação da ferramenta na base de coordenadas fixa. A restrição (5.30) mostra, simplesmente, que certos elementos dos vectores coordenadas ${}^t\dot{\mathbf{p}}_e$ e ${}^r\boldsymbol{\omega}_6$ são nulos.

Sejam $\mathbf{R}_t$ e $\mathbf{R}_r$ as matrizes rotação (de dimensão 3×3), que transformam as coordenadas com respeito às bases de coordenadas de restrição t e r, respectivamente, nas coordenadas com respeito ao sistema de coordenadas da base. As transformações inversas são dadas pelas matrizes rotação transpostas. De modo a simplificar a notação, definem-se as matrizes

$$\mathbf{J}_* = \mathbf{R}_*^T \mathbf{J} \tag{5.31a}$$

$$\mathbf{R}_* = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_r \end{bmatrix} \tag{5.31b}$$

onde **J** é a matriz Jacobiano, com respeito ao sistema de coordenadas da base, definida por

(5.12). Logo $\mathbf{J}_*$ é a matriz Jacobiano com respeito às bases de coordenadas de restrição. As matrizes coeficiente nas equações restrição gerais (5.11) e (5.4), correspondentes ao caso especial (5.30), são:

$$\mathbf{C} = \mathbf{S}_1 \mathbf{R}_*^T \tag{5.32a}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}_1 \mathbf{J}_* \tag{5.32b}$$

É de notar que a matriz **A** é composta pelas linhas da matriz Jacobiano $\mathbf{J}_*$ que correspondem às direcções restringidas. Seja a matriz coeficiente **B**, na definição (5.30) das pseudovelocidades, composta pelo resto das linhas de $\mathbf{J}_*$

$$\mathbf{B} = \mathbf{S}_2 \mathbf{J}_* \tag{5.33}$$

onde $\mathbf{S}_2$ denota a matriz selecção (de dimensão $(6 - k) \times 6$) composta pelas linhas da matriz identidade não incluídas em $\mathbf{S}_1$. Por outras palavras, as pseudovelocidades $v_1, \ldots, v_{6-k}$ são definidas como sendo aqueles elementos dos vectores coordenadas ${}^t\dot{\mathbf{p}}_e$ e ${}^r\boldsymbol{\omega}_6$, que não são colocados em zero pela restrição (5.30).

De modo a tornar a situação mais clara, note-se que a definição cinemática (5.21) das pseudoacelerações é agora da forma:

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{S}_2 \mathbf{R}_*^T \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{p}}_e \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_6 \end{bmatrix} + \mathbf{S}_2 \dot{\mathbf{R}}_*^T \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_e \\ \boldsymbol{\omega}_6 \end{bmatrix} \tag{5.34}$$

O primeiro termo representa a aceleração actual da ferramenta na base de coordenadas fixa, enquanto o segundo termo é devido à possível rotação das bases de coordenadas de restrição. De facto, as pseudoacelerações são segundas derivadas "misturadas": as velocidades de translacção e de rotação da ferramenta na base de coordenadas fixa são diferenciadas com respeito ao tempo nas bases de coordenadas de restrição *t* e *r*.

Uma vez que a inversa da matriz composta $[\mathbf{S}_1{}^T \ \mathbf{S}_2{}^T]^T$ é simplesmente a sua transposta, a matriz inversa (5.23) é agora:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{F} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_*^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1^T & \mathbf{S}_2^T \end{bmatrix} \tag{5.35}$$

desde que a matriz Jacobiano **J** não seja singular. Por outras palavras, os blocos **E** e **F** são compostos por certas colunas da inversa $\mathbf{J}_*^{-1}$ da matriz Jacobiano. Uma vez que as expressões para os blocos **E** e **F** e as derivadas temporais $\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{S}_1 \dot{\mathbf{J}}_*$ e $\dot{\mathbf{B}} = \mathbf{S}_2 \dot{\mathbf{J}}_*$ estão

agora disponíveis, as equações reduzidas gerais (5.27) são directamente aplicáveis. A estrutura do modelo torna-se muito clara, quando comparada com as equações de movimento Cartesianas para o manipulador *não* restringido. Assim, vem:

$$\mathbf{M}\begin{bmatrix} {}^{t}\ddot{\mathbf{p}}_e \\ {}^{r}\dot{\boldsymbol{\omega}}_6 \end{bmatrix} = \mathbf{N}\begin{bmatrix} {}^{t}\dot{\mathbf{p}}_e \\ {}^{r}\boldsymbol{\omega}_6 \end{bmatrix} + \mathbf{J}_*^{-T}(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{c}_N) \tag{5.36}$$

onde

$$\mathbf{M} = \mathbf{J}_*^{-T}\mathbf{H}\mathbf{J}_*^{-1} \tag{5.37a}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{M}\dot{\mathbf{J}}_*\mathbf{J}_*^{-1} \tag{5.37b}$$

As equações (5.36) e (5.37) são facilmente obtidas usando a forma (5.7) das equações Lagrangeanas (com $\lambda = 0$) e a transformação de aceleração (Kankaanranta e Koivo, 1988a). Por outro lado, substituindo as expressões para os blocos **E** e **F**, e as derivadas temporais $\dot{\mathbf{A}}$ e $\dot{\mathbf{B}}$ nas equações reduzidas gerais (5.27) resulta:

$$\mathbf{S}_2\mathbf{M}\mathbf{S}_2^T\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{S}_2\mathbf{N}\mathbf{S}_2^T\mathbf{v} + \mathbf{S}_2\mathbf{J}_*^{-T}(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{c}_N) \tag{5.38}$$

A estrutura das equações reduzidas (5.38) pode ser entendida do seguinte modo: a matriz $\mathbf{S}_2$ selecciona a parte das equações Cartesianas (5.36) que correspondem às direcções não restringidas.

De modo a formular explicitamente as equações de movimento reduzidas (5.38), têm de estar disponíveis expressões para a inversa da matriz Jacobiano **J** e das derivadas temporais das matrizes rotação $\mathbf{R}_t$ e $\mathbf{R}_r$. Conforme foi explicado anteriormente, no caso geral o custo computacional da inversão da matriz Jacobiano (de dimensão 6×6) e a resolução do sistema (5.38) de $6 - k$ equações lineares, pode ser trocado pelo da resolução do sistema (5.9) de $6 + k$ equações lineares.

Uma vez que $\mathbf{R}_*^{-1} = \mathbf{R}_*^T$, a expressão (5.15) pode agora ser apresentada na forma

$$\begin{bmatrix} {}^{t}\mathbf{f} \\ {}^{r}\mathbf{n} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_*^T\begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = \mathbf{S}_1^T\boldsymbol{\lambda} \tag{5.39}$$

que mostra que as coordenadas da força e momento nas direcções restringidas são dadas directamente pelos multiplicadores de Lagrange, enquanto que as coordenadas nas

direcções livres são nulas. As equações gerais (5.24) e (5.22) conduzem, agora, à seguinte expressão para os multiplicadores de Lagrange:

$$\lambda = \mathbf{S}_1\mathbf{M}\mathbf{S}_2^T\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{S}_1\mathbf{N}\mathbf{S}_2^T\mathbf{v} + \mathbf{S}_1\mathbf{J}_*^{-T}(\mathbf{c}_N - \tau) \tag{5.40}$$

o que revela as interacções das direcções não restringidas. Alternativamente, (5.26) pode ser usada com $\mathbf{A} = \mathbf{S}_1\mathbf{J}_*$.

No caso da restrição (5.30), a arquitectura de controlo de desacopulamento (5.28) toma a forma:

$$\tau = \mathbf{J}_*^T\mathbf{S}_1^T\mathbf{u}_1 + \mathbf{H}\mathbf{J}_*^{-1}\mathbf{S}_2^T\mathbf{u}_2 + \mathbf{c}_N - \mathbf{H}\mathbf{J}_*^{-1}\dot{\mathbf{J}}_*\dot{\mathbf{q}} \tag{5.41}$$

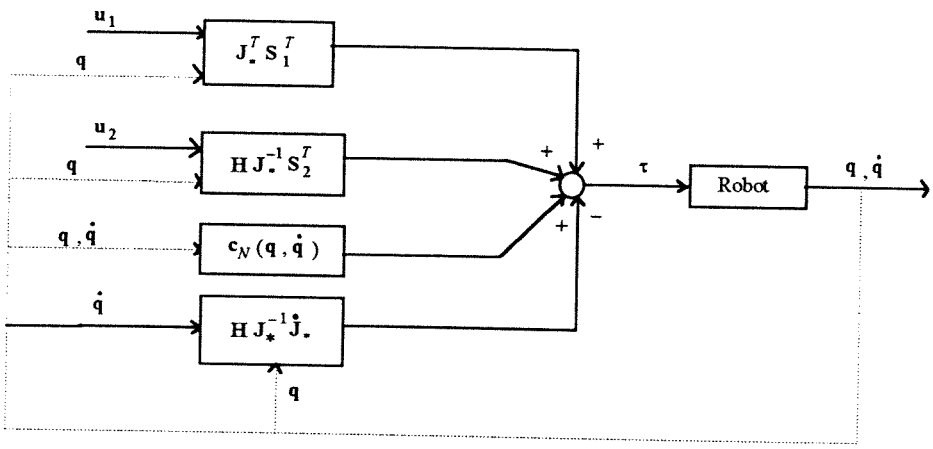


Figura 5.2
Diagrama de blocos correspondente à equação (5.41).

A forma básica da lei de controlo $\mathbf{u}_1$, é um controlador de força do tipo integral nas direcções não restringidas, com uma acção de antecipação da força de reacção desejada. A forma básica da lei de controlo $\mathbf{u}_2$, é um controlador de posição do tipo PD nas direcções não restringidas, com uma acção de antecipação da aceleração desejada. Na prática, o último termo em (5.41) pode ser omitido e o termo de antecipação $\mathbf{c}_N$ pode apenas incluir as forças generalizadas devidas à gravidade.

5.6 Contacto com ambientes dinâmicos

Nesta secção estuda-se o comportamento da arquitectura de controlo híbrido, no enquadramento da interacção do robot com ambientes dinâmicos.

5.6.1 Estratégia do controlo híbrido

Em qualquer esquema de controlo híbrido podem ser reconhecidos dois passos fundamentais. O primeiro passo consiste no processamento das medidas de força e de posição cartesianas, de modo a que elas se adequem ao modelo disponível da tarefa. Nesta ordem de ideias, um modelo pouco adequado é interpretado como "ruído" a ser eliminado. Baseados nas versões "filtradas" das medidas, os sinais de erro são depois calculados com respeito às evoluções desejadas. O segundo passo é o projecto de um controlador que contrabalance, através de realimentação, estes erros e que, eventualmente, os mantenha próximos de zero através de uma acção de antecipação (feedforward).

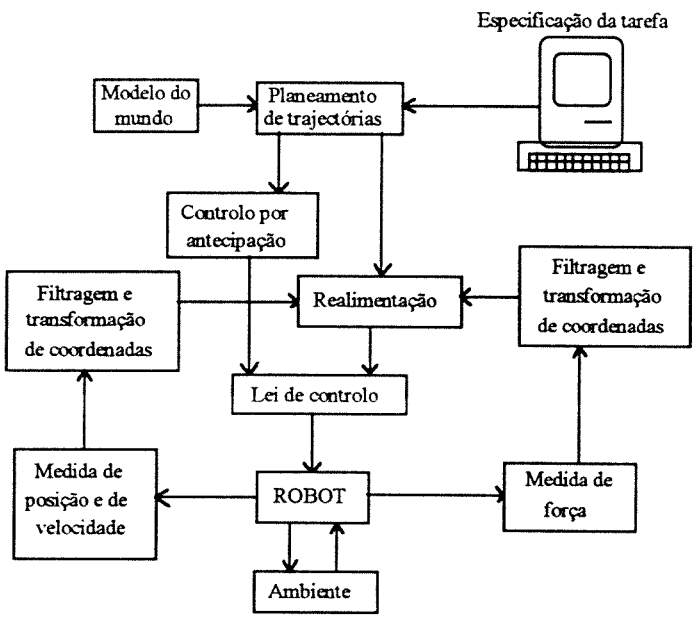


Figura 5.3
Arquitectura de controlo híbrido.

A figura 5.3 mostra uma arquitectura geral de controlo híbrido. Depois da filtragem e do cálculo dos erros, pode ser implementada uma lei de controlo que garanta um bom desempenho em regime permanente. No entanto, são preferidos esquemas que evitem um acopulamento dinâmico cruzado entre os anéis de velocidade e os anéis de força. A este nível, têm sido propostas diversas técnicas: controlo ao nível das juntas locais, controlo de desacopulamento e linearizante, controlo de modo deslizamento (VSS) e controlo adaptativo.

5.6.2 O modelo robot-ambiente

A configuração de um robot é identificada pelo vector $\mathbf{q} \in \Re^n$ das variáveis das juntas. Por outro lado, é fixada uma base de coordenadas de referência do mundo ${}^0S$ na base do robot e é ligada uma base de coordenadas ${}^nS$ na ponta do braço. Seja $\mathbf{r}$ o vector posição da origem de ${}^nS$ com respeito a ${}^0S$. Considere-se que é usada uma representação mínima para a orientação de ${}^nS$ com respeito a ${}^0S$, por exemplo os ângulos de Euler $\mathbf{o} = [\phi, \theta, \psi]$. A posição e orientação pode ser organizada num vector único de seis dimensões $\mathbf{p} = [\mathbf{r}, \mathbf{o}]$. Como consequência, a cinemática directa e a cinemática diferencial do orgão terminal são definidas *do lado do robot* como:

$$ {}^0\mathbf{p} = \mathbf{k}(\mathbf{q}) \tag{5.42a} $$

$$ {}^0\dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial \mathbf{k}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_k(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \tag{5.42b} $$

O índice superior 0 indica um vector expresso nas coordenadas ${}^0S$. A velocidade generalizada do orgão terminal ${}^0\mathbf{v} = \left[{}^0\dot{\mathbf{r}}, {}^0\boldsymbol{\omega}\right]$, composta pelos termos linear e angular, é relacionada com ${}^0\dot{\mathbf{p}}$ através das transformação

$$ {}^0\mathbf{v} = \mathbf{G}({}^0\mathbf{p}){}^0\dot{\mathbf{p}} \tag{5.43a} $$

$$ \mathbf{G}({}^0\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3\times 3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{G}}(\phi,\theta,\psi) \end{bmatrix} \tag{5.43b} $$

Como um resultado,

$$ {}^0\mathbf{v} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \tag{5.44a} $$

$$ \mathbf{J}(\mathbf{q}) = \mathbf{G}[\mathbf{k}(\mathbf{q})]\mathbf{J}_k(\mathbf{q}) \tag{5.44b} $$

onde $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ é o Jacobiano normal do robot. As orientações do orgão terminal são supostas serem não singulares para o conjunto de ângulos escolhido (det $\{\mathbf{G}[\mathbf{k}(\mathbf{q})]\} \neq 0$).

São permitidos diferentes tipos de contactos entre o orgão terminal do robot e o ambiente. Em qualquer caso, a posição do orgão terminal pode ser expressa *do lado do ambiente* em termos de um vector parâmetro $\mathbf{s} \in \Re^e$. Aqui é considerado um ambiente não redundante, isto é, tal que $e \leq 6$. Uma vez que a escolha do vector s não é única, de modo a determinar uma parametrização conveniente proceder-se-á como como se indica de seguida. Assim, é necessário um primeiro conjunto de variáveis $\mathbf{s}_D \in \Re^d$ para descrever a dinâmica do ambiente (quando presente) que aparecerá nas equações de movimento associadas. Eventualmente, pode ser necessário um conjunto adicional de variáveis cinemáticas puras $\mathbf{s}_K \in \Re^k$, $k = e - d$, para especificar univocamente a posição do orgão terminal ${}^0\mathbf{p}$. Definindo $\mathbf{s} = [\mathbf{s}_K, \mathbf{s}_D]$, segue-se que:

$$ {}^0\mathbf{p} = \Gamma(\mathbf{s}) \tag{5.45a} $$

$$ {}^0\dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial \Gamma(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}} \dot{\mathbf{s}} \tag{5.45b} $$

pelo que, usando (5.43) e (5.45),

$$ {}^0\mathbf{v} = \mathbf{T}(\mathbf{s})\dot{\mathbf{s}} \tag{5.46a} $$

$$ \mathbf{T}(\mathbf{s}) = \mathbf{G}[\Gamma(\mathbf{s})] \frac{\partial \Gamma(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}} \tag{5.46b} $$

A parametrização da posição do orgão terminal permite obter, directamente, as velocidades admissíveis e permite separar as contribuições devidas aos graus de liberdade *cinemáticos* e *dinâmicos* do ambiente. De acordo com o que foi dito anteriormente, $\mathbf{T}(\mathbf{s})$ é dividido como $[\mathbf{T}_K(\mathbf{s})\ \mathbf{T}_D(\mathbf{s})]$. O ambiente é suposto ser tal que a matriz $\mathbf{T}$ tem sempre ordem completa, pelo menos na região de interesse. As forças trocadas entre o orgão terminal e a peça de trabalho são recolhidas num vector (de dimensão 6×1) $\mathbf{F}$ de forças e momentos, ao longo e acerca dos eixos de coordenadas de ${}^0S$. De um modo semelhante a (5.46), todas as forças de contacto podem ser parametrizadas como ${}^0\mathbf{F} = \mathbf{Y}(\mathbf{s})\boldsymbol{\lambda}$. Uma vez que não pode ser desempenhado trabalho nos graus de liberdade cinemáticos, a matriz $\mathbf{Y}$ deve ser tal que $\mathbf{Y}^T\mathbf{T}_K = \mathbf{0}$. Tendo $\mathbf{Y}$ ordem completa tal como $\mathbf{T}$, então $\boldsymbol{\lambda} \in \Re^{(6-k)}$. Em cada $\mathbf{s}$, o espaço de forças de contacto admissíveis, *Alcance*$[\mathbf{Y}(\mathbf{s})]$, pode ser decomposto em duas partes. O subespaço das forças de reacção estáticas, *Alcance*$[\mathbf{Y}_R(\mathbf{s})]$, é definido por $\mathbf{T}^T\mathbf{Y}_R = 0$ e tem dimensão $6 - e$. O complemento, *Alcance*$[\mathbf{Y}_A(\mathbf{s})]$, é um espaço de dimensão d das forças

activas, isto é, das forças responsáveis pela troca de energia entre o robot e o ambiente, e é tal que $\mathbf{T}_D{}^T\mathbf{Y}_A$ é sempre não singular. Definem-se como *direcções dinâmicas* no contacto, aquelas que estão no *Alcance* das colunas de $\mathbf{T}_D$ ou $\mathbf{Y}_A$. Em síntese,

$$ {}^0\mathbf{v} = \mathbf{T}(\mathbf{s})\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{T}_D(\mathbf{s})\dot{\mathbf{s}}_D + \mathbf{T}_K(\mathbf{s})\dot{\mathbf{s}}_K \tag{5.47a} $$

$$ {}^0\mathbf{F} = \mathbf{Y}(\mathbf{s})\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Y}_A(\mathbf{s})\boldsymbol{\lambda}_A + \mathbf{Y}_R(\mathbf{s})\boldsymbol{\lambda}_R \tag{5.47b} $$

com

$$ \mathbf{T}_{(6\times e)} = \left[\mathbf{T}_{D(6\times d)} \quad \mathbf{T}_{K(6\times k)}\right] \tag{5.48a} $$

$$ \mathbf{Y}_{[6\times(6-k)]} = \left[\mathbf{Y}_{A(6\times d)} \quad \mathbf{Y}_{R[6\times(6-e)]}\right] \tag{5.48b} $$

$$ \mathbf{T}^T\mathbf{Y}_R = \mathbf{0}_{e\times(6-e)} \tag{5.48c} $$

$$ \mathbf{Y}^T\mathbf{T}_K = \mathbf{0}_{(6-k)\times k} \tag{5.48d} $$

$$ \mathbf{T}_D^T\mathbf{Y}_A\text{: matriz não singular de dimensão } d \times d \tag{5.48e} $$

Seguindo a abordagem de Lagrange, o modelo dinâmico robot-ambiente pode ser escrito na forma usual como:

$$ \mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}_N(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \tau - \mathbf{J}^T(\mathbf{q}){}^0\mathbf{F} \tag{5.49a} $$

$$ \mathbf{H}_E(\mathbf{s}_D)\ddot{\mathbf{s}}_D + \mathbf{c}_E(\mathbf{s}_D,\dot{\mathbf{s}}_D) = \mathbf{T}_D^T(\mathbf{s}){}^0\mathbf{F} \tag{5.49b} $$

As matrizes de inércia simétricas e positivas definidas $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ e $\mathbf{H}_E(\mathbf{s}_D)$ são referidas ao robot e ao ambiente e têm dimensões, respectivamente, $n \times n$ e $d \times d$. O vector τ engloba as forças/momentos de entrada das juntas. O acopulamento entre a dinâmica do robot e do ambiente é dado pela restrição na posição do orgão terminal, escrita na forma algébrica e diferencial como:

$$ \mathbf{k}(\mathbf{q}) = \Gamma(\mathbf{s}) \tag{5.50a} $$

$$\mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{T}(\mathbf{s})\dot{\mathbf{s}} \tag{5.50b}$$

As equações (5.50) podem ser usadas de modo a eliminar o aparecimento explícito do vector força ${}^0\mathbf{F}$ em (5.49). Isto pode ser conseguido por duas maneiras distintas, dependendo da manipulação das direcções dinâmicas. No primeiro caso, λ_A é explicitado como dependendo directamente da entrada do robot τ, enquanto que as acelerações dinâmicas são vistas como uma consequência. No segundo, τ afecta directamente as acelerações $\ddot{s}_D$, as quais causam, por sua vez, forças activas parametrizadas pelo vector λ_A. As relações dinâmicas alternativas resultantes são (De Luca e Manes, 1991)

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q},\mathbf{s})\begin{bmatrix}\lambda_A\\ \lambda_R\\ \ddot{\mathbf{s}}_K\end{bmatrix} = \mathbf{m}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},\mathbf{s},\dot{\mathbf{s}}) + \mathbf{J}\mathbf{H}^{-1}\tau \tag{5.51a}$$

$$\ddot{\mathbf{s}}_D = -\mathbf{H}_E^{-1}\mathbf{c}_E + \mathbf{H}_E^{-1}\mathbf{T}_D^T\mathbf{Y}_A\lambda_A \tag{5.51b}$$

e

$$\hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{q},\mathbf{s})\begin{bmatrix}\ddot{\mathbf{s}}_D\\ \lambda_R\\ \ddot{\mathbf{s}}_R\end{bmatrix} = \hat{\mathbf{m}}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},\mathbf{s},\dot{\mathbf{s}}) + \mathbf{J}\mathbf{H}^{-1}\tau \tag{5.52a}$$

$$\lambda_A = (\mathbf{T}_D^T\mathbf{Y}_A)^{-1}\mathbf{c}_E + (\mathbf{T}_D^T\mathbf{Y}_A)^{-1}\mathbf{H}_E\ddot{\mathbf{s}}_D \tag{5.52b}$$

Normalmente, as componentes de s e λ têm um significado físico, respectivamente, em termos de comprimentos/ângulos e forças/momentos. Em particular, no caso de ambientes não dinâmicos, $\dot{s}_K$ e λ_R podem representar, directamente, a velocidade tangencial e a força normal com respeito à restrição. Portanto, o espaço de parâmetros de s e λ pode ser visto como uma generalização do conceito de *espaço das tarefas*, muitas vezes introduzido em esquemas de controlo híbrido. Isto sugere tomar estas variáveis como saída controlada para o sistema (5.49).

5.6.3 Planeamento de trajectórias

Para tarefas de controlo híbrido, o algoritmo de planeamento de trajectórias especifica a evolução temporal desejada tanto para a posição do orgão terminal como para a força de

contacto. Usando o modelo disponível da tarefa, as trajectórias são planeadas de modo a satisfazer as restrições algébricas e diferenciais associadas. Em particular, a especificação da tarefa é "convertida" para uma trajectória nos parâmetros s e λ, em vez de ser convertida para as variáveis do robot.

Para um ambiente puramente cinemático, evoluções temporais escolhidas arbitrariamente $\mathbf{s}_{K,des}(t)$ e $\lambda_{R,des}(t)$ dão trajectórias de posição e força cartesianas compatíveis

$$^0\mathbf{p}(t) = \Gamma\left[\mathbf{s}_{K,des}(t)\right] \tag{5.53a}$$

$$^0\mathbf{F}_{des}(t) = \mathbf{Y}_R\left[s_{K,des}(t)\right]\lambda_{R,des}(t) \tag{5.53b}$$

Na presença de um ambiente dinâmico, podem ser atribuidas evoluções temporais alternativamente para o conjunto ($\mathbf{s}_D$, $\mathbf{s}_K$, λ_R) ou para (λ_A, λ_R, $\mathbf{s}_K$). Escolhendo ($\mathbf{s}_{des}(t)$, $\lambda_{R,des}(t)$) – uma especificação da posição do orgão terminal e, apenas, de forças de reacção estáticas – causa uma $\lambda_{A,des}(t)$, definida de acordo com (5.52b) com valores desejados usados nos termos do lado direito. Reciprocamente, atribuindo ($\mathbf{s}_{K,des}(t)$, $\lambda_{des}(t)$) resulta, automaticamente, numa evolução temporal $\mathbf{s}_{D,des}(t)$ através da integração de (5.51b), usando os valores desejados no lado direito e começando pelas condições iniciais actuais $\mathbf{s}_D(0)$, $\dot{\mathbf{s}}_D(0)$.

Estas operações têm o objectivo de completar o conjunto de quantidades contacto/ambiente desejadas ($\mathbf{s}_{D,des}$, $\mathbf{s}_{K,des}$, $\lambda_{A,des}$, $\lambda_{R,des}$) mas não são necessárias na lei de controlo. A tarefa precisa, apenas, de ser parametrizada numa das duas maneiras (5.53) e o sistema de controlo estará relacionado apenas com o seguimento (tracking) dos parâmetros especificados.

5.6.4 Filtragem das medidas

Suponha-se que, num dado instante temporal, as configurações do orgão terminal e do ambiente são conhecidas através do vector s. Então, é necessário encontrar valores dos parâmetros actuais ($\dot{\mathbf{s}}_m$, λ_m) para certas medidas $^0\mathbf{v}_m$ e $^0\mathbf{F}_m$, sob a hipótese de ordem completa para as matrizes **T** e **Y** em (5.47). O índice *m* significa variáveis calculadas através de *medidas*. Isto é equivalente a resolver o problema da inversão das restrições de contacto lineares (5.47). No caso ideal de uma identidade entre o modelo e o ambiente real, as velocidades $^0\mathbf{v}_m$ e forças $^0\mathbf{F}_m$ medidas estarão, para cada s, respectivamente no *Alcance*[**T**] e no *Alcance*[**Y**], e a solução do problema de inversão será única. A presença de diferenças entre o ambiente e o modelo e, em geral, de erros de medida pede, em vez disso, uma solução de erro mínimo para:

$$ {}^0\mathbf{v}_m = \mathbf{T}\dot{\mathbf{s}}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_D & \mathbf{T}_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{s}}_{D,m} \\ \dot{\mathbf{s}}_{K,m} \end{bmatrix} \tag{5.54a} $$

$$ {}^0\mathbf{F}_m = \mathbf{Y}\lambda_m = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_A & \mathbf{Y}_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{A,m} \\ \lambda_{R,m} \end{bmatrix} \tag{5.54b} $$

Com essa finalidade, tem de ser definida uma norma de erro, o que requer alguma cautela tendo em vista a natureza não homogénea dos componentes dos vectores velocidade e força generalizadas. Assim, uma vez que uma norma tenha sido escolhida, é introduzida uma métrica bem definida para comparar os elementos de um dado conjunto. Considere-se um vector erro $\mathbf{e} = [\mathbf{e}_{lin}, \mathbf{e}_{ang}]$ e a seguinte definição de norma:

$$ \|\mathbf{e}\| = \left(\|\mathbf{e}_{lin}\|^2 + \alpha^2 \|\mathbf{e}_{ang}\|^2 \right)^{1/2} \tag{5.55} $$

Isto corresponde a escolher como um tensor métrico a matriz diagonal positiva definida (de dimensão 6×6):

$$ \mathbf{W}_\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & \alpha^2\mathbf{I}_{3\times3} \end{bmatrix} \tag{5.56} $$

Uma vez que não existe uma maneira canónica de comparar quantidades angulares com de translacção, o factor α em (5.56) representa a "confiança" do utilizador ligada à semelhança entre as componentes angular e linear. Mais em geral, escolhendo um $\mathbf{W} > 0$ como um tensor métrico para a velocidade, pode-se definir um produto escalar e uma norma como:

$$ <{}^0\mathbf{v}_1, {}^0\mathbf{v}_2> = {}^0\mathbf{v}_1^T \mathbf{W} {}^0\mathbf{v}_2 \tag{5.57a} $$

$$ \left\| {}^0\mathbf{v} \right\|^2 = {}^0\mathbf{v}^T \mathbf{W} {}^0\mathbf{v} \tag{5.57b} $$

Segue-se que dois vectores velocidade são ortogonais se ${}^0\mathbf{v}_1{}^T\mathbf{W}{}^0\mathbf{v}_2 = 0$. Note-se que uma ortogonalidade "natural" é definida intrinsecamente apenas entre os vectores velocidade e força, sendo o espaço da força *dual* com o espaço da velocidade, uma vez que exprime o conceito de fluxo de potência nulo fornecido por uma força ao longo de uma dada direcção.

Para existir consistência com a escolha (5.57), a matriz de ponderação introduzida para as forças é $\mathbf{W}^{-1}$.

Com estas considerações, as duas soluções para (5.54) que minimizam as normas de erro ponderadas associadas são obtidas usando uma pseudoinversão de acordo com as expressões

$$\dot{\mathbf{s}}_m = \mathbf{T}^{+\,0}\mathbf{v}_m = (\mathbf{T}^T\mathbf{W}\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}^T\mathbf{W}^{0}\mathbf{v}_m \tag{5.58a}$$

$$\lambda_m = \mathbf{Y}^{+\,0}\mathbf{F}_m = (\mathbf{Y}^T\mathbf{W}^{-1}\mathbf{Y})^{-1}\mathbf{Y}^T\mathbf{W}^{-1\,0}\mathbf{F}_m \tag{5.58b}$$

Deve ser notado que (5.58) parametriza apenas aqueles componentes de ${}^0\mathbf{v}_m$ e ${}^0\mathbf{F}_m$ que estão, respectivamente, no *Alcance*$[\mathbf{T}_D\ \mathbf{T}_K]$ e no *Alcance*$[\mathbf{Y}_A\ \mathbf{Y}_R]$, isto é, apenas aquelas componentes que estão modelizadas. As componentes medidas ao longo das direcções "ortogonais" são eliminadas (filtradas). A aderência do modelo ao mundo real pode ser estimada pelos resíduos da pseudoinversão $\left\|{}^0\mathbf{v}_m - \mathbf{T}\dot{\mathbf{s}}_m\right\| \cdot \left\|{}^0\mathbf{v}_m\right\|^{-1}$ e $\left\|{}^0\mathbf{F}_m - \mathbf{Y}\lambda_m\right\| \cdot \left\|{}^0\mathbf{F}_m\right\|^{-1}$.

O procedimento anterior é uma extensão da abordagem de matrizes selecção 0/1 usada em esquemas anteriores de controlo híbrido e foi já aplicada em casos não dinâmicos. Note-se que a matriz de ponderação $\mathbf{W}$ não tem nenhum papel se ${}^0\mathbf{v}_m \in$ *Alcance*$[\mathbf{T}]$ (e, dualmente, se ${}^0\mathbf{F}_m \in$ *Alcance*$[\mathbf{Y}]$).

O problema da inversão da restrição (5.45) em termos de s é mais difícil, sendo $\Gamma(\mathbf{s})$, em geral, uma função não linear. De modo a obter-se o parâmetro s da posição ${}^0\mathbf{p}_m$ medida, tem que se resolver em cada instante temporal a equação:

$$\Gamma(\mathbf{s}_m) = {}^0\mathbf{p}_m(t) \tag{5.59}$$

Esta solução deve ser usada em todas as fórmulas anteriores, em particular como argumento em (5.58). O problema de filtragem pode ser formulado como um problema de optimização de mínimos quadrados não linear como

$$\min_{\mathbf{s}} \left[{}^0\mathbf{p}_m - \Gamma(\mathbf{s})\right]^T \mathbf{A} \left[{}^0\mathbf{p}_m - \Gamma(\mathbf{s})\right] \tag{5.60}$$

com $\mathbf{A} > 0$, para o qual tem de ser derivado um procedimento numérico. Este problema é tipicamente resolvido de um modo iterativo, actualizando $\mathbf{s}_m$ pelo valor do parâmetro calculado no instante de tempo anterior e começando com um valor inicial exequível.

Podem também ser derivados algoritmos de solução simplificada *ad hoc* para estruturas cinemáticas de ambiente particulares.

5.6.5 Controlo desacopulador e linearizante

Nesta subsecção é apresentada uma lei de controlo híbrido baseada em modelos matemáticos, que realiza uma linearização e um desacopulamento entrada-saída. Esta lei de controlo de realimentação de estado pode ser derivada, para cada selecção de saídas controladas, como foi definido implicitamente em (5.51) e (5.52). Em geral, é razoável controlar a força ao longo de direcções dinâmicas (i.e., fazer λ_A como saída) sempre que existam termos de reacção elástica na dinâmica do ambiente. Doutro modo, pode ser mais conveniente escolher a posição $\mathbf{s}_D$ como saída. Trabalhando com o conjunto de saída (λ_A, λ_R, $\mathbf{s}_K$), segue-se de (5.51) que a entrada vem:

$$\tau = (\mathbf{J}\mathbf{H}^{-1})^* \left\{ \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \lambda_{A,ref} \\ \lambda_{R,ref} \\ \mathbf{a}_{K,ref} \end{bmatrix} - \mathbf{m} \right\} \tag{5.61}$$

onde $\mathbf{A}^*$ é uma qualquer matriz inversa à direita de $\mathbf{A}$ (Boullion e Odell, 1971), tal que transforma o sistema em malha fechada em:

$$\begin{bmatrix} \lambda_A \\ \lambda_R \\ \ddot{\mathbf{s}}_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{A,ref} \\ \lambda_{R,ref} \\ \mathbf{a}_{K,ref} \end{bmatrix} \tag{5.62a}$$

$$\ddot{\mathbf{s}}_D = -\mathbf{H}_E^{-1}\mathbf{c}_E + \mathbf{H}_E^{-1}\mathbf{T}_D^T\mathbf{Y}_A\lambda_{A,ref} \tag{5.62b}$$

que é desacopulado e linear com respeito à relação entrada-saída em termos do novo conjunto de entrada ($\lambda_{A,ref}$, $\lambda_{R,ref}$, $\mathbf{a}_{K,ref}$). Alternativamente, aplicando:

$$\tau = (\mathbf{J}\mathbf{H}^{-1})^* \left\{ \hat{\mathbf{Q}} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{D,ref} \\ \lambda_{R,ref} \\ \mathbf{a}_{K,ref} \end{bmatrix} - \hat{\mathbf{m}} \right\} \tag{5.63}$$

resulta, através de (5.52), o sistema

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{s}}_D \\ \lambda_R \\ \ddot{\mathbf{s}}_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{D,ref} \\ \lambda_{R,ref} \\ \mathbf{a}_{K,ref} \end{bmatrix} \tag{5.64a}$$

$$\dot{\lambda}_A = (\mathbf{T}_D^T \mathbf{Y}_A)^{-1} \mathbf{c}_E + (\mathbf{T}_D^T \mathbf{Y}_A)^{-1} \mathbf{H}_E \mathbf{a}_{D,ref} \tag{5.64b}$$

cujas saídas são agora desacopuladas e lineares com respeito ao conjunto de entradas ($\mathbf{a}_{D,ref}$, $\lambda_{R,ref}$, $\mathbf{a}_{K,ref}$). Nas leis de desacopulamento anteriores, $\mathbf{s} = \mathbf{s}_m$ e $\dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{s}}_m$, são obtidos através da filtragem das medidas da posição e velocidade do orgão terminal do robot. A dinâmica não observável que aparece em (5.62) coincide com a dinâmica do ambiente, a qual deve ser estável (e.g., passiva). Um requisito semelhante não está presente em (5.64), embora seja normalmente desejável manter λ_A dentro de níveis razoáveis.

Os valores de referência a serem colocados em (5.61) e (5.63) podem ser gerados *no lado linear* por uma variedade de técnicas padrão. Usando, por exemplo, os termos nominais de acção antecipativa, mais um controlo PD para os parâmetros de posição e uma lei P para os parâmetros de força, leva a:

$$\mathbf{a}_{K,ref} = \ddot{\mathbf{s}}_{K,des} + \mathbf{K}_{PK}(\mathbf{s}_{K,des} - \mathbf{s}_{K,m}) + \mathbf{K}_{VK}(\dot{\mathbf{s}}_{K,des} - \dot{\mathbf{s}}_{K,m}) \tag{5.65a}$$

$$\lambda_{R,ref} = \lambda_{R,des} + \mathbf{K}_{FR}(\lambda_{R,des} - \lambda_{R,m}) \tag{5.65b}$$

juntamente com

$$\lambda_{A,ref} = \lambda_{A,des} + \mathbf{K}_{FA}(\lambda_{A,des} - \lambda_{A,m}) \tag{5.66}$$

para (5.62), e juntamente com

$$\mathbf{a}_{D,ref} = \ddot{\mathbf{s}}_{D,des} + \mathbf{K}_{PD}(\mathbf{s}_{D,des} - \mathbf{s}_{D,m}) + \mathbf{K}_{VD}(\dot{\mathbf{s}}_{D,des} - \dot{\mathbf{s}}_{D,m}) \tag{5.67}$$

para (5.64). O esquema de controlo resultante permite moldar o comportamento dinâmico no contacto de qualquer maneira desejada, mas a sua implementação precisa de um conhecimento exacto da cinemática e dinâmica tanto do robot como do ambiente. Isto motiva a procura de leis de controlo mais simples que não permitam erros apreciáveis em regime permanente e mantenham limitados os erros transitórios na posição e na força.

5.7 Conclusão

Nas secções 5.2 a 5.5 foram derivadas as equações dinâmicas de um manipulador sujeito a restrições tanto na base de coordenadas das juntas como na base de coordenadas de restrição. A última forma do modelo é mais eficiente computacionalmente, uma vez que o número de variáveis para ser serem integradas numericamente é mínimo.

A secção 5.6 descreve como usar uma técnica de modelização para o projecto de leis de controlo híbrido na presença de um ambiente dinâmico. A ideia básica é que a ortogonalidade entre os movimentos do orgão terminal e as forças de contacto já não se verifica e a abordagem híbrida original não pode ser aplicada directamente.

Capítulo 6

Estabilidade de manipuladores controlados em força

A estabilidade dos algoritmos de controlo de manipuladores robóticos é um aspecto fundamental no seu desenvolvimento. Assim, é necessário analisar e demonstrar matematicamente as condições suficientes e as condições necessárias para a estabilidade do sistema. Nesta perspectiva, na secção 6.2 começa-se por definir uma condição suficiente para a estabilidade cinemática (i.e., onde só entram em jogo grandezas de natureza cinemática) de um esquema de controlo híbrido. De seguida, na secção 6.3, descrevem-se as características de estabilidade de manipuladores controlados em força, com implementações discretas no tempo. Na secção 6.4 descrevem-se algumas simulações do controlo híbrido, onde se utilizam resultados obtidos na secção 6.2. Por último, na secção 6.5, apresentam-se as principais conclusões que decorrem do estudo.

6.1 Introdução

No trabalho de Fisher e Mujtaba (1992) é definida uma condição suficiente para a estabilidade cinemática de um algoritmo de controlo posição/força híbrido. O teste da condição suficiente é aplicado a um exemplo encontrado na bibliografia usando:

- o controlo híbrido posição/força "original" proposto por Craig e Raibert (1979);
- um esquema de controlo híbrido posição/força "corrigido" proposto pelos autores.

Uma análise do lugar de raízes revela que a abordagem do controlo híbrido original era instável. Mostra-se ainda que a condição suficiente é também violada para esta situação.

Na abordagem corrigida de controlo híbrido, a condição suficiente nunca é violada e verifica-se que o sistema é sempre estável.

O trabalho de Qian e De Shutter (1992) está relacionado com as características de estabilidade de manipuladores controlados em força com implementações discretas no tempo. Neste trabalho, são derivadas três conclusões para um manipulador rígido:

- Se o sistema tem um amortecimento linear, então a "quantidade" de amortecimento desempenha um papel chave na estabilidade. De facto, um aumento da rigidez de contacto pode tornar o amortecimento insuficiente e assim, causar a instabilidade, mesmo no caso de se adoptar um ganho de realimentação baixo e uma frequência de amostragem bem acima da frequência de Nyquist;
- O papel dos atritos não-lineares de Coulomb e de fricção (stiction), na estabilidade em malha fechada é clarificado. No caso do atrito de Coulomb ser a fonte de amortecimento dominante é estabelecida uma condição suficiente para manter a estabilidade;
- A instabilidade causada por uma frequência de amostragem insuficiente pode ser eliminada através de uma filtragem passa-baixo, desde que haja um amortecimento, linear ou não linear, no sistema.

O trabalho de Karunakar e Goldenberg (1988) analisa a estabilidade de quatro sistemas de controlo de força bem conhecidos baseados em modelos matemáticos: controlo de força híbrido, controlo de força através da aceleração calculada, controlo de rigidez e controlo de impedância. A análise é baseada em modelos linearizados e utiliza o critério de Routh-Hurwitz. A instabilidade em tarefas de contacto é devida ao facto de a matriz rigidez do ambiente de trabalho aumentar o ganho equivalente de posição no sistema de controlo. Se o ganho de velocidade é escolhido a partir do ganho de posição, desprezando uma rigidez ambiental elevada, então o sistema resultante será muito subamortecido e, possivelmente, instável. As implementações de controlo de força relatadas na bibliografia revelaram, por vezes, problemas de estabilidade quando o manipulador interactua com ambientes relativamente rígidos. Este problema foi referido como *estabilidade do contacto*, *estabilidade dinâmica* e *estabilidade acopulada*. Este trabalho estuda a causa deste problema através de uma análise linear.

O trabalho de Kankaaranta e Koivo (1988b) proporciona os meios fundamentais para uma análise teórica do controlo em posição-força de manipuladores. O modelo de espaço de estados obtido é da forma normalizada e, por isso, permite a utilização de métodos teóricos básicos para analisar a estabilidade local de um manipulador controlado em posição-força. Este artigo estabelece o resultado quer por simulação quer por matematicamente. Assim, o objectivo é preencher a lacuna entre a teoria de controlo linear e a dinâmica não-linear do manipulador através da formulação de um modelo linear, de tempo discreto, para um manipulador sujeito a restrições. Um modelo deste tipo permite

analisar a estabilidade local pelo que os valores próprios do sistema em malha fechada determinam a estabilidade local do controlador de posição-força. Mais ainda, foi sugerida uma arquitectura de controlo a qual, de acordo com o modelo não linear para o manipulador restringido, leva a um desacopulamento perfeito entre as direcções controladas em posição e as direcções controladas em força. Desenvolvimentos futuros do modelo de um manipulador sujeito a restrições devem incluir flexibilidades, atritos e fenómenos de impacto, uma vez que estes podem ser factores importantes na "qualidade" do controlo de força.

Nesta ordem de ideias, na secção 6.2 estuda-se uma condição suficiente para a estabilidade cinemática do controlador híbrido.e, na secção 6.3, analisa-se o papel do amortecimento e da filtragem passa-baixo para o controlo de realimentação de força proporcional.

6.2 Estabilidade cinemática de um controlador híbrido

De seguida inicia-se este estudo pela apresentação de alguns conceitos gerais necessários para esta secção. Depois faz-se o teste da estabilidade cinemática.

6.2.1 Conceitos gerais

O algoritmo de controlo força/posição híbrido, também referido como controlo híbrido, foi proposto pela primeira vez por Craig e Raibert (1979). No entanto, no trabalho de An e Hollerbach (1987), provou-se que alguns métodos de controlo de força, incluindo o controlo híbrido, eram instáveis.

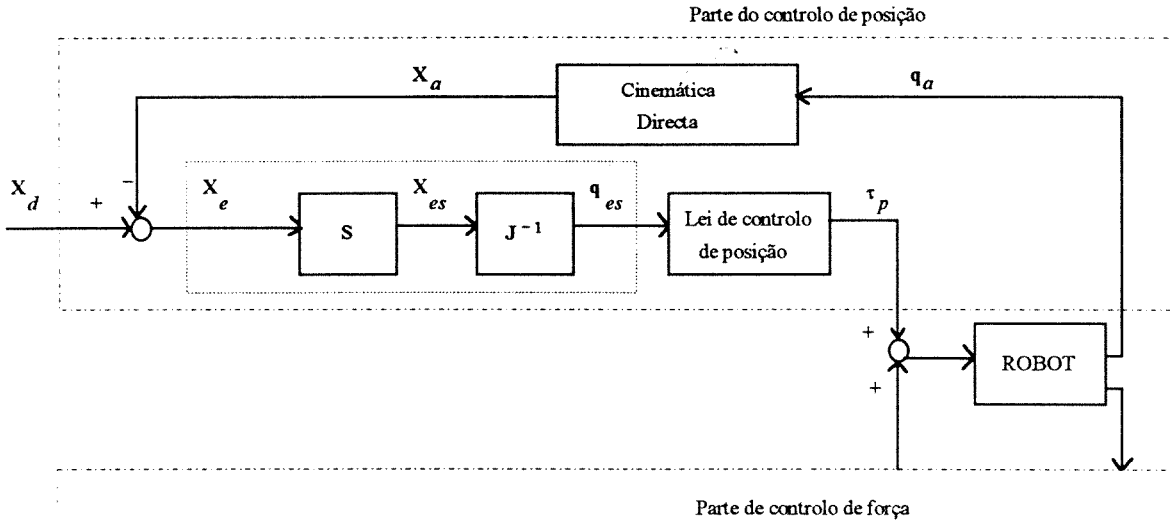


Figura 6.1
Formulação original do controlo de posição para o algoritmo de controlo híbrido.

Os autores adoptaram o pressuposto, simples, de matrizes de ganho $\mathbf{K}_p$ e $\mathbf{K}_d$ diagonais, constantes e positivas definidas numa lei de controlo de posição PD. Assim, através de um exemplo, mostraram como a parte de posição (figura 6.1) do esquema de controlo híbrido, para um manipulador com duas juntas rotacionais, produz um sistema instável.

Os dois blocos a tracejado indicados na figura 6.1 representam a transformação da posição do orgão terminal entre o espaço Cartesiano e o espaço das juntas do manipulador. Combinando os dois blocos resulta:

$$\mathbf{q}_{es} = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{x}_e \tag{6.1}$$

Esta formulação da posição constitui a expressão original com que se definiu o mapeamento dos erros Cartesianos $\mathbf{x}_e$ nos erros das juntas seleccionadas $\mathbf{q}_{es}$. Todavia, uma correcção do esquema de controlo híbrido original elimina o comportamento instável que, infelizmente constitui uma característica inerente a este sistema. Assim, An e Hollerbach mostraram que, em geral, as duas transformações correspondentes à equação (6.1) não podem ser tratadas independentemente e que a relação devia ser expressa como:

$$\mathbf{x}_{es} = \mathbf{S}\mathbf{x}_e = (\mathbf{S}\mathbf{J})\mathbf{q}_e \tag{6.2}$$

O mapeamento $\mathbf{x}_e = \mathbf{J}\mathbf{q}_e$ é substituido no primeiro mapeamento dos erros Cartesianos. A equação (6.2) tem infinitas soluções para os erros das juntas seleccionados quando a matriz (SJ) não tem ordem máxima.

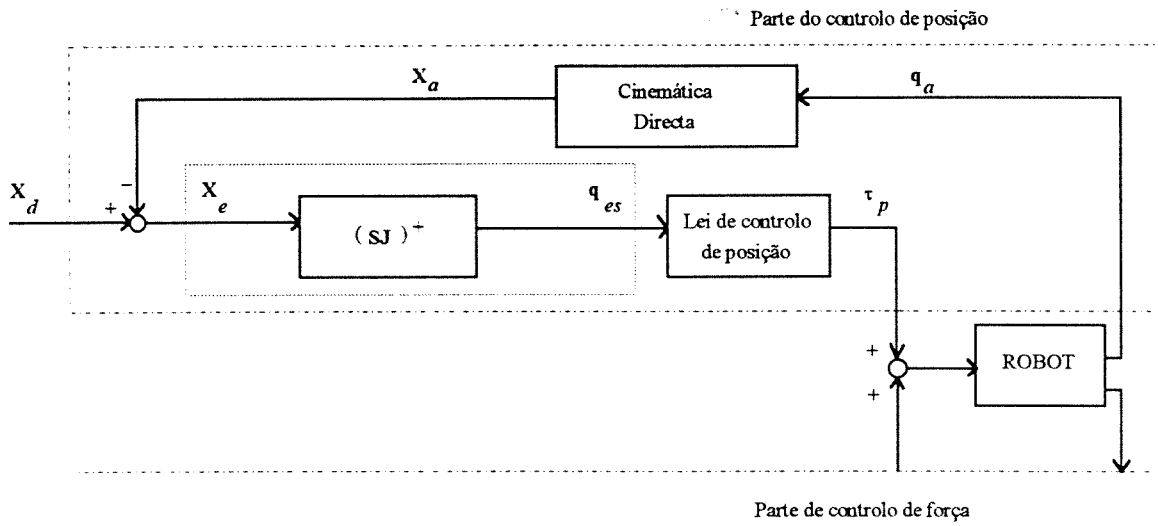


Figura 6.2
Formulação corrigida da parte de controlo de posição para o algoritmo híbrido.

A solução de norma mínima (Strang, 1980) para $\mathbf{q}_{es}$ usando a equação (6.2) é:

$$\mathbf{q}_{es} = (\mathbf{SJ})^{+}\mathbf{S}\mathbf{x}_e \tag{6.3}$$

A matriz $(\mathbf{SJ})^{+}$, na equação (6.3), é a pseudoinversa da matriz (**SJ**). Uma simplificação adicional para a expressão matricial (6.3) consiste em fazer $(\mathbf{SJ})^{+}\mathbf{S} = (\mathbf{SJ})^{+}$, o que foi provado num trabalho anterior de Fisher e Mujtaba (1992). Esta correcção da formulação do controlo de posição é mostrada na figura 6.2.

6.2.2 Teste da estabilidade cinemática

A estabilidade de um sistema é determinada pela interacção entre a cinemática, a dinâmica e a lei de controlo. A noção de um sistema cinematicamente instável em controlo híbrido não é muito clara. O nosso interesse consiste em mostrar como a matriz selecção S influencia a estabilidade do sistema. Naturalmente, assume-se que o sistema é estável quando em controlo de posição puro (i.e., quando $\mathbf{S} = \mathbf{I}$), de modo a que os valores de $\mathbf{q}_e$ correspondentes aos valores de $\mathbf{x}_e$ sob *condições normais* não produzem quaisquer instabilidades do sistema. Note-se que o propósito da matriz de selecção S não é o de estabilizar um sistema inerentemente instável. Consequentemente, a discussão centra-se na "comparação" entre os erros de posição das juntas seleccionadas $\mathbf{q}_{es}$, para uma matriz arbitrária S, com os erros das juntas estáveis $\mathbf{q}_e$, que seriam calculados sob condições normais com $\mathbf{S} = \mathbf{I}$. Esta comparação consegue-se através da definição da seguinte condição

suficiente para a estabilidade do sistema, usando os produtos internos dos vectores erros das juntas, como:

$$0 \leq \mathbf{q}_e^T \mathbf{q}_{es} \leq \mathbf{q}_e^T \mathbf{q}_e, \qquad \forall \mathbf{q}_e \tag{6.4}$$

Antes de discutir o raciocínio que está por detrás desta expressão, é importante entender o que significa afirmar que a condição (6.4) é suficiente para a estabilidade do sistema. Uma condição suficiente não especifica os limites bem determinados para uma dada situação o que, para este caso, consiste na estabilidade do sistema. Em geral, a expressão é um subconjunto do espaço total permitido, pelo que, quando a condição suficiente não é satisfeita, são precisos mais testes para determinar se o sistema está ainda dentro do espaço permitido. Um sistema que satisfaça a equação (6.4) é, garantidamente, estável. Por outro lado, se a equação (6.4) é violada para qualquer valor de $\mathbf{q}_e$, isso não significa que o sistema seja instável pelo que será necessário adoptar outros métodos para determinar a estabilidade do sistema.

É importante notar que, tanto $\mathbf{q}_e$ como $\mathbf{q}_{es}$, são calculados a partir do mesmo erro de posição cartesiano $\mathbf{x}_e$. Logo, qualquer solução para $\mathbf{q}_{es}$ pode, sempre, ser expressa em termos de $\mathbf{q}_e$. O limite inferior da equação (6.4) não permite que a projecção de $\mathbf{q}_{es}$ em $\mathbf{q}_e$ incida na direcção oposta a $\mathbf{q}_e$, e, deste modo, elimina quaiquer condições, potencialmente instáveis, de realimentação positiva do sistema. Por outro lado, o limite superior em (6.4) restringe a projecção de $\mathbf{q}_{es}$ em $\mathbf{q}_e$ a menos de $\mathbf{q}_e$, de forma a que o orgão terminal não excede o seu ponto de destino e cause oscilações no sistema. O sistema pode ainda ser estável quando o valor de $\mathbf{q}_e^T \mathbf{q}_{es}$ está fora dos limites dados por (6.4). No entanto, a determinação da região fora destes limites onde o sistema se torna instável não é simples de calcular.

Mostrar-se-á que a solução, de norma mínima, para $\mathbf{q}_{es}$ na equação (6.3) satisfaz, sempre, a equação suficiente da equação (6.4). Isto garante que quando $\mathbf{S} = \mathbf{I}$ a transformação linear do espaço Cartesiano para o espaço das juntas, nunca gera um vector com uma direcção oposta à do vector erro das juntas $\mathbf{q}_e$. De igual modo, nunca causa um aumento da norma do vector de erro das juntas resultando, assim, na manutenção de um sistema cinematicamente estável para qualquer tipo de manipulador.

Para determinar a relação entre $\mathbf{q}_e$ e $\mathbf{q}_{es}$, com vista à formulação do controlo corrigido de posição mostrado na figura 6.2, substitui-se $\mathbf{x}_e = \mathbf{J}\mathbf{q}_e$ na equação (6.3) para se obter:

$$\mathbf{q}_{es} = (\mathbf{SJ})^+ (\mathbf{SJ}) \mathbf{q}_e \tag{6.5}$$

Pre-multiplicando (6.5) por $\mathbf{q}_e^T$ resulta no produto interno:

$$\mathbf{q}_e^T \mathbf{q}_{es} = \mathbf{q}_e^T (\mathbf{SJ})^+ (\mathbf{SJ}) \mathbf{q}_e \tag{6.6}$$

Uma vez que $(\mathbf{SJ})^+(\mathbf{SJ})$ é uma matriz de projecção (Halmos, 1974), esta satisfaz a definição de uma matriz positiva semidefinida, significando que a expressão quadrática:

$$\mathbf{q}_e^T (\mathbf{SJ})^+ (\mathbf{SJ}) \mathbf{q}_e \geq 0 \tag{6.7}$$

é verdadeira para todos os vectores $\mathbf{q}_e$. A inequação (6.7) constitui o limite inferior da condição (6.4).

A norma de um vector projectado está limitada pela norma do vector original (Halmos, 1974), o que para a equação (6.5) significa:

$$\|\mathbf{q}_{es}\| = \left\|(\mathbf{SJ})^+ (\mathbf{SJ}) \mathbf{q}_e\right\| \leq \|\mathbf{q}_e\| \tag{6.8}$$

Como se sabe, para qualquer vector $\mathbf{v}$ tem-se $\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v}^T \mathbf{v}$. Assim, usando as propriedades simétrica e idempotente de uma matriz projecção, a partir de (6.5) obtém-se:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{q}_{es}\|^2 = \mathbf{q}_{es}^T \mathbf{q}_{es} &= \left[(\mathbf{SJ})^+ (\mathbf{SJ}) \mathbf{q}_e\right]^T (\mathbf{SJ})^+ (\mathbf{SJ}) \mathbf{q}_e = \\ &= \mathbf{q}_e^T \left[(\mathbf{SJ})^+ (\mathbf{SJ})\right]^T (\mathbf{SJ})^+ (\mathbf{SJ}) \mathbf{q}_e = \mathbf{q}_e^T (\mathbf{SJ})^+ (\mathbf{SJ}) \mathbf{q}_e = \mathbf{q}_e^T \mathbf{q}_{es} \end{aligned} \tag{6.9}$$

Elevando ao quadrado as normas na expressão (6.8) e substituindo em (6.9) resulta:

$$\mathbf{q}_e^T \mathbf{q}_{es} \leq \mathbf{q}_e^T \mathbf{q}_e \tag{6.10}$$

Da inequação (6.10) conclui-se que o limite superior de (6.4) é também satisfeito para todos os valores de $\mathbf{q}_e$ quando se usa a solução de norma mínima para $\mathbf{q}_{es}$. Isto prova que a solução de norma mínima para $\mathbf{q}_{es}$ na equação (6.3) satisfaz, sempre, a condição suficiente para a estabilidade do sistema como definida em (6.4), para qualquer tipo de manipulador.

BIBLIOTECA F.E. PORTO

6.3 Papel do amortecimento e da filtragem passa-baixo

Nesta secção aborda-se em primeiro lugar o caso de um amortecimento linear, depois o de um não linear e, depois ainda, o problema da filtragem passa-baixo e a instabilidade digital (para implementações de tempo discreto).

6.3.1 Caso de um amortecimento linear

Nesta sub-secção é tomado como base para a análise, o controlo proporcional com realimentação de força (CPF) numa junta de robot. Aqui K_F é o ganho do anel de realimentação de força, F_m é a força medida e F_d é a força desejada.

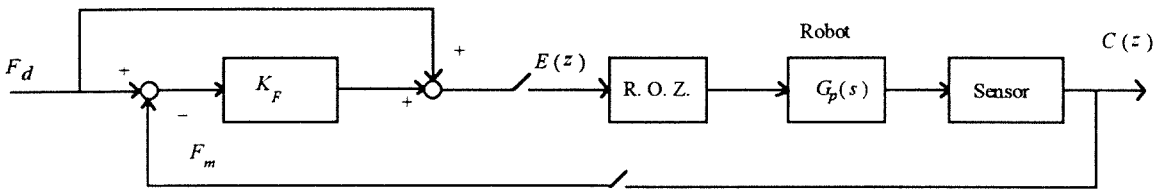


Figura 6.3
O CPF no caso da implementação discreta no tempo.

A figura 6.3 mostra o diagrama de blocos de um CPF em tempo discreto. Designa-se por T o período de amostragem[1] e por $G_p(s)$ a função de transferência, em malha aberta, do manipulador.

Sob o pressuposto de um robot rígido, a figura 6.4 mostra um modelo dinâmico largamente aceitado. Aqui F_c é a entrada de controlo, M é a massa, f é a força de amortecimento, K_s é a rigidez do contacto e x é a posição do orgão terminal.

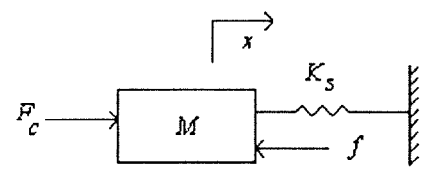


Figura 6.4
Modelo do robot, do sensor, e do ambiente para a análise de um manipulador rígido.

Para um amortecimento linear tem-se $f = b\dot{x}$ onde b é a constante de amortecimento. Neste caso $G_p(s)$ pode ser obtida facilmente vindo:

$$G_p(s) = \frac{K_s}{Ms^2 + bs + K_s} \tag{6.11}$$

Sendo G_{ho} a função de transferência do R. O. Z. (zero order hold), a função de transferência discreta em malha aberta resulta:

---

[1] R. O. Z. significa Retentor de Ordem Zero. $E(z)$ é o sinal discretizado antes do R. O. Z. $C(z)$ é a força medida do sistema discreto.

$$G(z)=\frac{C(z)}{E(z)}=\mathcal{Z}\left[G_{ho}G_p(s)\right]K_F \tag{6.12}$$

onde $\mathcal{Z}$ representa o operador correspondente à transformada dos z. Depois de algumas simplificações, o polinómio característico em malha fechada obtém-se como:

$$z^2-\left[(2+K_F)e^{-T\alpha}\cos(T\beta)+\frac{\alpha}{\beta}e^{-T\alpha}\sin(T\beta)K_F-K_F\right]z+$$

$$+\left[(1+K_F)e^{-2T\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}\sin(T\beta)e^{-T\alpha}K_F-e^{-T\alpha}\cos(T\beta)K_F\right] \tag{6.13}$$

com $\alpha=\frac{b}{2M}$ e $\beta=\frac{\sqrt{4MK_s-b^2}}{2M}$, onde $-\alpha\pm j\beta$ corresponde ao par de pólos do sistema contínuo em malha aberta.

Nestes cálculos considera-se o caso usual de um sistema em malha aberta subamortecido, isto é, tal que $4MK_s-b^2>0$.

Define-se a frequência de Nyquist f_N como sendo duas vezes a frequência de ressonância do sistema em malha fechada, isto é, como $f_N=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{(1+K_F)K_s}{M}}$.

Através deste trabalho podem ser retiradas as seguintes conclusões:

- Em geral, um sistema com implementação discreta no tempo pode ser instável, mesmo quando são adoptados os critérios correctos para a atribuição do valor da frequência de amostragem.
- A "quantidade" de amortecimento desempenha um papel fundamental na estabilidade do sistema. Em geral, a mínima frequência de amostragem para a qual o sistema é estável pode ser reduzida quando o amortecimento do sistema aumenta.
- Aumentando a rigidez do contacto o amortecimento pode tornar-se insuficiente para garantir a estabilidade.

6.3.2 Caso de um amortecimento não-linear

Suponha-se que o amortecimento linear é desprezável e o amortecimento de natureza não-linear é dominante. Uma vez que o sistema é, agora, não linear, a análise no plano dos z já não é aplicável.

A equação dinâmica, contínua no tempo, do sistema na presença de amortecimento não linear f é obtida através das figuras 6.3 e 6.4 resultando:

$$\ddot{F}_m + 2\zeta\omega_n\dot{F}_m + \omega_n^2 F_m = \omega_n^2\left(F_d - \frac{f}{1+K_F}\right) \tag{6.14}$$

com $\omega_n = \sqrt{\frac{K_s(1+K_F)}{M}}$ e $\zeta = \frac{b}{2M\omega_n}$.

Os tipos de amortecimento não-linear que são encontrados mais frequentemente no controlo de força são o atrito de Coulomb e a fricção (stiction).

Suponha-se que o atrito de Coulomb, modelizado pela expressão $f = f_0\,\mathrm{sgn}(\dot{x})$ (f_0 é uma constante positiva), forma o amortecimento não-linear no sistema.

No caso de uma implementação contínua no tempo, a resposta dinâmica de (6.14) relativamente a uma entrada em degrau com amplitude F_d pode ser obtida analiticamente (por simplicidade, faz-se $\zeta = 0$, figura 6.5). Para o n-ésimo período de oscilação vem:

$$\begin{cases} F_m(t) = (F_d - f_1) - \left[F_d - (4n-3)f_1\right]\cos(\omega_n t) \\ \text{onde} \quad \dfrac{2(n-1)\pi}{\omega_n} \le t \le \dfrac{(2n-1)\pi}{\omega_n} \\ F_m(t) = (F_d + f_1) - \left[F_d - (4n-1)f_1\right]\cos(\omega_n t) \\ \text{onde} \quad \dfrac{(2n-1)\pi}{\omega_n} \le t \le \dfrac{2n\pi}{\omega_n} \end{cases} \tag{6.15}$$

Aqui $f_1 = \frac{f_0}{1+K_F}$, $\quad n = 1,2,....$

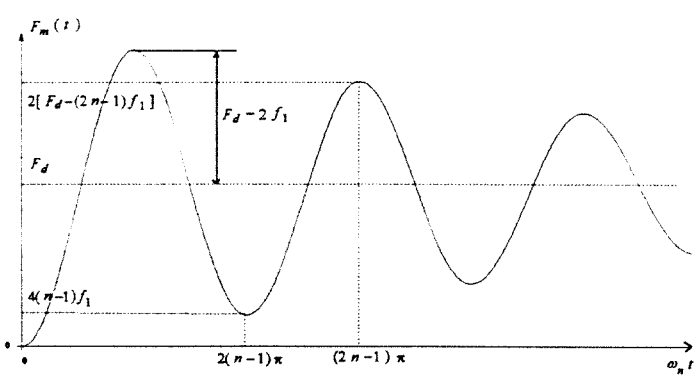


Figura 6.5

Resposta ao degrau sendo o atrito de Coulomb dominante. Caso da implementação contínua no tempo.

Os picos máximo $F_{T,n}$ e mínimo $F_{V,n}$ da força medida durante o período número n, vêm:

$$F_{V,n} = 4(n-1)f_1 \tag{6.16a}$$

$$F_{T,n} = 2[F_d-(2n-1)f_1] \tag{6.16b}$$

A oscilação termina quando:

$$\Delta F_{V,n} = F_d - F_{V,n} < f_1, \quad \text{ou} \quad \Delta F_{T,n} = F_{T,n} - F_d < f_1 \tag{6.17}$$

Logo, o sistema controlado em tempo contínuo é sempre estável com um erro de regime permanente menor que f_1. A partir de (6.15), com n = 1, obtém-se que a sobreelevação durante uma resposta ao degrau resulta $F_d - 2f_1$.

No caso da implementação discreta no tempo Qian e De Schutter (1989) dão a condição suficiente:

$$f_0 \geq K_F F_d \tag{6.18}$$

Assim, se a condição (6.18) é satisfeita, então o sistema será sempre estável, independentemente da frequência de amostragem escolhida.

A propriedade fundamental do outro tipo de atrito não linear (stiction) resulta de que o seu valor estático é maior que o seu valor dinâmico. Um modelo largamente adoptado para este atrito consiste na equação:

$$f = \left(f_c + f_s e^{-c|\dot{x}|}\right)\mathrm{sgn}(\dot{x}) \tag{6.19}$$

onde c, f_c, f_s são constantes reais positivas.

Supondo que o valor de $c|\dot{x}|$ é pequeno, como é muitas vezes o caso em controlo de força, então (6.19) pode ser aproximada (figura 6.6) pela expressão:

$$f = (f_c + f_s)\,\mathrm{sgn}(\dot{x}) - cf_s\dot{x} \tag{6.20}$$

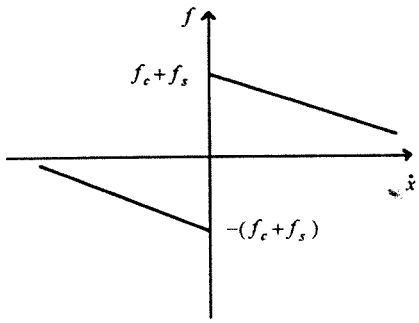


Figura 6.6
Gráfico da função correspondente à expressão (6.20).

Depois de substituir (6.20) em (6.14), a equação dinâmica torna-se:

$$\ddot{F}_m + \frac{b - cf_s}{M}\dot{F}_m + \omega_n^2 F_m = \omega_n^2\left[F_d - \text{sgn}(\dot{x})\frac{(f_s + f_c)}{1+K_F}\right] \tag{6.21}$$

Logo, este tipo de atrito, modelizado de acordo com (6.20), tem dois papéis no controlo de força:

- Actua como atrito de Coulomb com uma amplitude de $f_s + f_c$;
- Introduz no sistema um amortecimento negativo de quantidade cf_s.

A expressão (6.20) pode ainda ser escrita como:

$$\ddot{F}_m + 2\left[\zeta - \frac{cf_s}{2\sqrt{(1+K_F)K_s M}}\right]\omega_n \dot{F}_m + \omega_n^2 F_m = \omega_n^2\left[F_d - \text{sgn}(\dot{x})\frac{(f_s + f_c)}{1+K_F}\right] \tag{6.22}$$

Esta equação mostra que para K_S, K_F ou M elevados o efeito no coeficiente de amortecimento em malha fechada ζ, devida ao amortecimento negativo introduzido por este atrito, é pouco significativo. Logo, devido à introdução de um amortecimento negativo, este tipo de atrito pode introduzir alguma instabilidade no sistema. No entanto, para um ganho de realimentação de força elevado, para um contacto rígido, ou para uma inércia elevada, o "efeito desestabilizador" torna-se reduzido.

6.3.3 A filtragem passa-baixo e a instabilidade digital

Suponha-se que é introduzido no percurso directo do anel de controlo da figura 6.3 um filtro passa-baixo com função de transferência $\frac{a}{s+a}$. Para este caso Qian e De Shutter (1989) obtiveram as seguintes conclusões:

Se o amortecimento do sistema dominante é linear e desde que:

- A constante a seja suficientemente mais baixa que a frequência de ressonância do sistema em malha aberta;
- A frequência de amostragem seja maior que a frequência de Nyquist f_N

Então, a equação discreta característica em malha fechada permanece aproximadamente a mesma relativamente à equação discreta característica em malha aberta, excepto que é introduzido um novo pólo estável em $z = e^{-aT}$. Deste modo, o sistema em malha fechada é sempre estável.

Se o amortecimento do sistema dominante é o atrito de Coulomb e desde que:

- A constante a seja muito menor que ω_0, a frequência de ressonância do sistema em malha aberta, e

$$aT < \frac{1-\cos(\omega_0 T)}{K_F \cos(\omega_0 T)} \tag{6.23}$$

- A frequência de amostragem seja maior que a frequência de Nyquist f_N

Então, no caso de uma resposta ao degrau, a força de contacto aumenta monotonamente desde zero até ao seu valor em regime permanente $F_m = F_d - \frac{f_0}{1+K_F}$.

Em conclusão, no caso da implementação em tempo discreto, independentemente do amortecimento no sistema ser linear ou não-linear, a instabilidade devida a uma frequência de amostragem insuficiente pode ser evitada. Isto é conseguido através da introdução de um filtro passa-baixo com uma frequência de corte suficientemente abaixo da frequência de ressonância em malha aberta do sistema no percurso directo do controlador.

6.4 Simulação do esquema de controlo híbrido

Nesta secção, apresentam-se os resultados que decorrem da simulação do algoritmo de controlo híbrido proposto originalmente por Raibert e Craig (1981) e, também, do algoritmo proposto por Fisher e Mujtaba (1992).

6.4.1 Formulação proposta originalmente

Raibert e Craig (1981) fizeram a experiência representada na figura 6.7, de modo a testar o seu algoritmo de controlo híbrido.

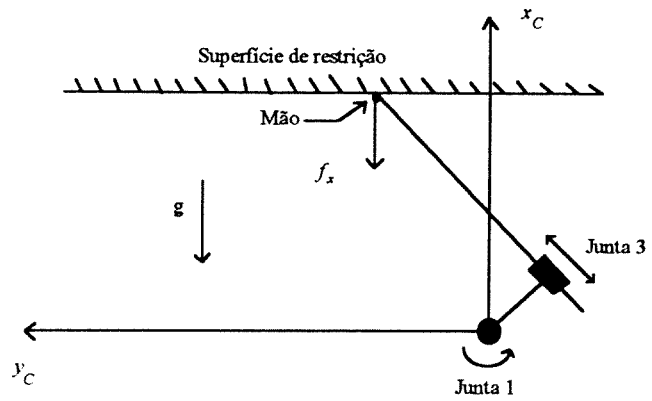


Figura 6.7

Disposição do manipulador e da superfície de restrição. As juntas 1 e 3 do robot utilizado proporcionam o movimento num plano normal ao vector aceleração da gravidade. A mão está em contacto com o plano horizontal.

O sistema mecânico do manipulador, do sensor de força (no punho), da mão do manipulador e da superfície de restrição foram modelizados como se mostra esquematicamente na figura 6.8.

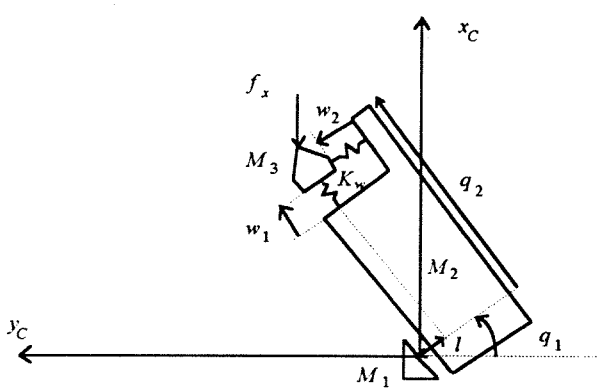


Figura 6.8

Modelo usado para simulação da tarefa de controlo híbrido.

As equações de estado para este sistema são as seguintes:

$$\ddot{q}_1 = \frac{1}{I_1(q_2)}\left[\tau_1 + B_1(\dot{q}_1) + q_2 K_w w_2 + l K_w w_1\right] \tag{6.24}$$

$$\ddot{q}_2 = \frac{1}{M_2 + M_3}\left[\tau_2 + B_2(\dot{q}_2) + K_w w_1\right] \tag{6.25}$$

$$\ddot{w}_1 = \frac{1}{M_3}\left[-K_w w_1 - f_x \cos(q_1)\right] \tag{6.26}$$

$$\ddot{w}_2 = \frac{1}{M_3}\left[-K_w w_2 + f_x \sin(q_1)\right] \tag{6.27}$$

O modelo da superfície restrição é o seguinte:

$$f_x = K_r(C_x - C_{x_r}) \tag{6.28}$$

$$C_x = q_2 \cos(q_1) + l \sin(q_1) \tag{6.29}$$

Onde

C_{xr}	localização da superfície restrição
K_w	rigidez do sensor de força
K_r	rigidez da superfície restrição
M_1, M_2, M_3	massas dos elos 1, 2 e da mão, respectivamente
l	desvio (offset) do elo 2
$B_1(\dot{q}_1), B_2(\dot{q}_2)$	atrito das juntas 1 e 2 do manipulador
$I_1(q_2)$	momento de inércia na junta 1.

De seguida, vai-se descrever a implementação do controlador de dois gdl proposto por Raibert e Craig (1981). A figura 6.9 mostra, em detalhe, o sistema de controlo híbrido.

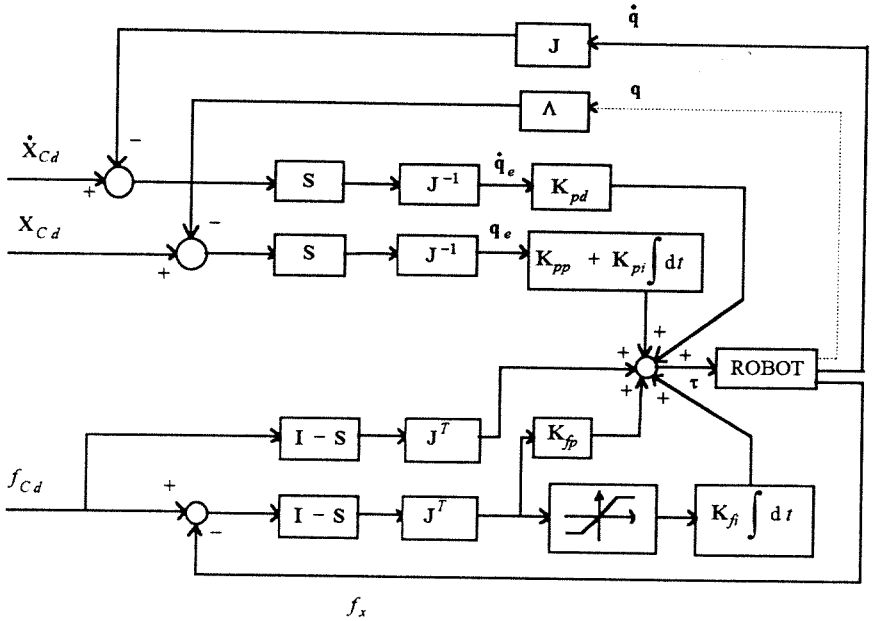


Figura 6.9
Implementação do controlador híbrido.

Na figura 6.9 **J** é o Jacobiano do manipulador e Λ é a transformação de coordenadas do espaço das juntas para o espaço operacional que, no nosso caso, são dadas pelas expressões:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} l\cos(q_1) - q_2\sin(q_1) & \cos(q_1) \\ q_2\cos(q_1) + l\sin(q_1) & \sin(q_1) \end{bmatrix} \tag{6.30}$$

$$\Lambda(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} q_2\cos(q_1) + l\sin(q_1) \\ q_2\sin(q_1) - l\cos(q_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \end{bmatrix} \tag{6.31}$$

A simulação do sistema robot-sensor-ambiente foi levada a cabo através do método RK4 (Runge-Kutta de ordem quatro) de integração numérica de equações diferenciais ordinárias. A frequência de amostragem do sistema do robot (i.e. da parte "analógica") é de 100 kHz de modo a ser muito superior à frequência do controlador (i.e. da parte discreta). A discretização das acções integrais do controlador foi efectuada através de uma integração numérica com base na fórmula dos rectângulos (de Carvalho, 1993):

$$i[(k+1)h] = i(kh) + K_i h e(kh) \tag{6.32}$$

onde $i(t)$ é a saída do controlador integral, k é número da amostra, h é o período de

amostragem, K_i é a constante da acção integral do controlador e $e(t)$ é a entrada do controlador.

Os parâmetros usados para o robot, o sensor de força, o ambiente e os controladores são idênticos aos adoptados por Raibert e Craig (1981), salvo algumas modificações devidamente indicadas. Por outro lado, a expressão para o produto $\mathbf{J}^{-1}\mathbf{S}$ é a seguinte:

$$\mathbf{J}^{-1}\mathbf{S} = \frac{1}{[l\cos(q_1) - q_2\sin(q_1)]\sin(q_1) - [q_2\cos(q_1) + l\sin(q_1)]\cos(q_1)} \begin{bmatrix} 0 & -\cos(q_1) \\ 0 & l\cos(q_1) - q_2\sin(q_1) \end{bmatrix} \tag{6.33}$$

Como um exemplo, apresentam-se na figura 6.10 os gráficos obtidos da simulação com $K_r = 9\times10^5$ N/m e $f_{\text{CONTROLADOR}} = 1$ kHz, com uma entrada de força de um degrau de 1 N e com uma entrada de posição constante (igual à posição do robot no instante $t = 0$ s). A frequência da oscilação na zona de divergência é de cerca de 200 Hz. Também se apresenta a resposta do sistema aos degraus de 1 N, 5 N e 10 N. Como valores iniciais para as coordenadas generalizadas do robot considerou-se $q_1 = \pi/6$ rad e $q_2 = 0.3$ m.

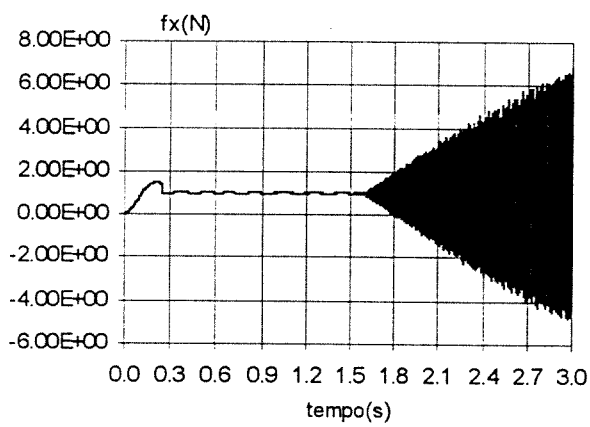


Figura 6.10a

A força f_x como resposta a uma referência de força em degrau de 1 N.

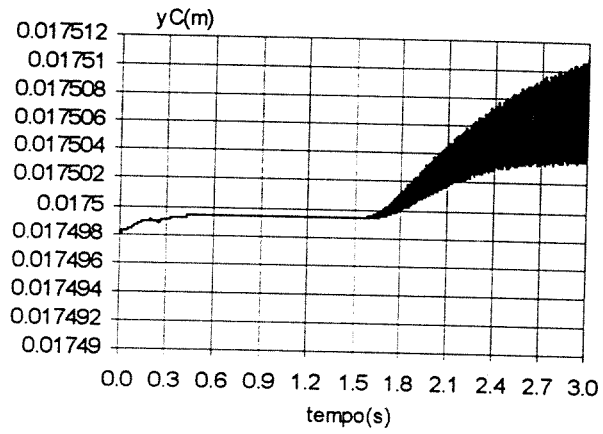


Figura 6.10b

A posição y_C com uma referência de posição constante de 0.01749811322 m.

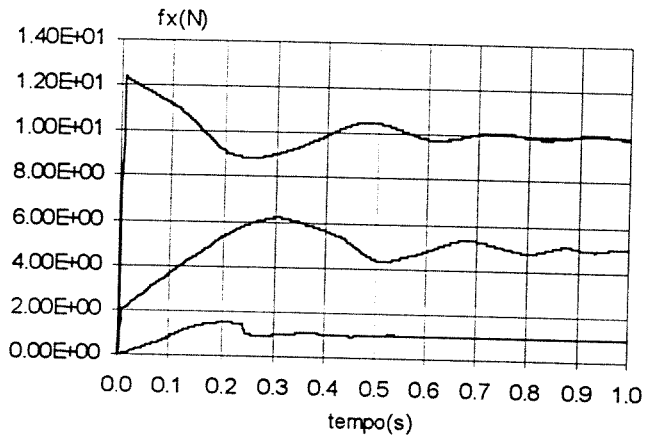


Figura 6.10c

A força f_x como resposta à referência em degrau de 1 N, 5 N e 10 N.

Para testar este sistema às perturbações da constante de elasticidade do ambiente fez-se a simulação mostrada na figura 6.11 onde se diminui a constante de elasticidade para $K_r = 9\times10^4$ N/m.

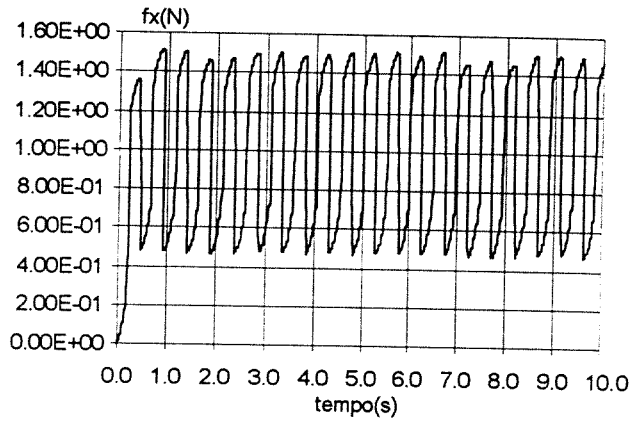


Figura 6.11a

Resposta do sistema à referência de degrau de 1 N com uma constante de elasticidade da superfície $K_r = 9\times10^4$ N/m e uma frequência de amostragem do controlador de 1 kHz.

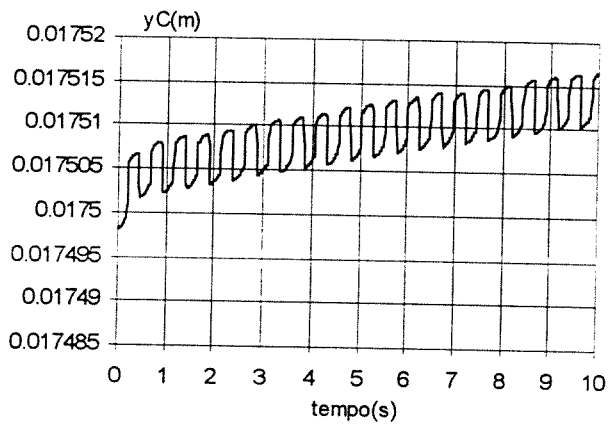


Figura 6.11b

Resposta do sistema à referência de degrau de 1 N com uma constante de elasticidade da superfície $K_r = 9\times10^4$ N/m e uma frequência de amostragem do controlador de 1 kHz.

O tipo de atrito dominante no robot utilizado é o atrito de Coulomb e a sua modelização é difícil. Também, são importantes as forças de atrito estático. Assim, o modelo adoptado nas experiências anteriores para o atrito foi o seguinte:

$$B_i(\dot{q}_i) = \begin{cases} -\operatorname{sgn}(\dot{q}_i)\left[\min\left(\tau_{s,i}, |\tau_i|\right)\right], & \text{para} \quad |\dot{q}_i| < \delta \\ -\operatorname{sgn}(\dot{q}_i)\left[\tau_{c,i}\right], & \text{para} \ |\dot{q}_i| \geq \delta \end{cases} \tag{6.34}$$

onde:

τ_s constante de atrito estático;

τ_c constante de atrito de Coulomb;

τ binário no actuador.

δ 0.5.

Em várias simulações que se efectuaram verificou-se que, quando se retira ao modelo dinâmico do sistema o atrito modelizado pela expressão (6.34), o sistema se torna instável, pelo que se conclui que o atrito tem propriedades estabilizantes. Também, o mesmo acontece (i.e. o sistema diverge) quando se modeliza o atrito como linear (atrito viscoso) através da seguinte expressão:

$$\tau_{AT_i} = -\operatorname{sgn}(\dot{q}_i)\dot{q}_i k_i, \quad i = 1,2 \tag{6.35}$$

com a constante k_i perto da unidade.

Na figura 6.12 apresenta-se o gráfico com os vários tipos de atrito considerados.

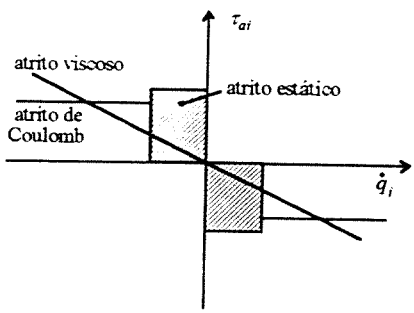


Figura 6.12

Gráfico com os vários atritos considerados nas experiências. As zonas sombreadas significam que o atrito toma um valor de acordo com a expressão (6.34).

6.4.2 Correcção através da pseudo-inversa

Tendo como motivação o algoritmo exposto na secção 6.2, foram realizadas as simulações anteriores com a modificação da pseudo-inversa na parte de controlo de posição da arquitectura original.

Segundo Fisher e Mujtaba (1992) esta modificação leva a um sistema teoricamente estável para todas as entradas. A matriz pseudo-inversa $(\mathbf{SJ})^+$ é única e tem que ser obtida através do método da decomposição em valores singulares (Yoshikawa, 1990) porque tem determinante nulo. Neste caso, a matriz $(\mathbf{SJ})^+$ é dada pela seguinte expressão:

$$(\mathbf{SJ})^+ = \frac{1}{\left[q_2\cos(q_1)+l\sin(q_1)\right]^2+\left[\sin(q_1)\right]^2}\begin{bmatrix}0 & q_2\cos(q_1)+l\sin(q_1)\\ 0 & \sin(q_1)\end{bmatrix} \tag{6.36}$$

Mostra-se que a matriz $(\mathbf{SJ})^{+}(\mathbf{SJ})$ é simétrica e idempotente[2], o que é obrigatório para corresponder a uma matriz projecção.

Os valores atribuídos aos parâmetros do programa de simulação foram os mesmos que os utilizados na subsecção anterior salvo situações devidamente explicitadas.

Na figura 6.13 mostram-se as evoluções temporais da força f_x e da posição y_C para uma constante de elasticidade da superfície restrição $K_r = 9\times10^5$ N/m e uma frequência de amostragem $f_{\text{CONTROLADOR}} = 1$ kHz. A frequência da oscilação na zona de divergência é de cerca de 175 Hz. A referência de força do sistema consiste num degrau de 1 N e a referência de posição é constante (ou seja, igual à posição para $t = 0$ s).

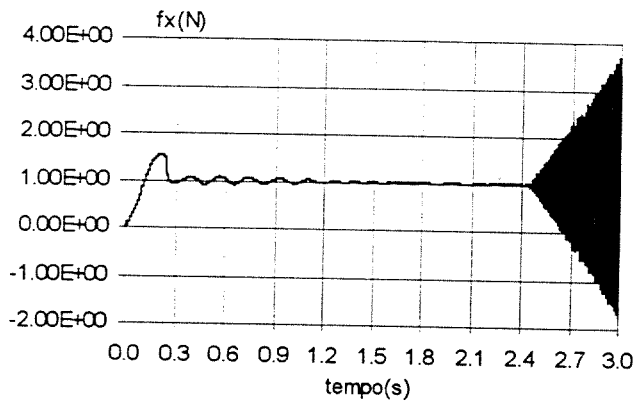


Figura 6.13a

Evolução temporal da força exercida pelo ponto terminal como resposta a um degrau de 1 N.

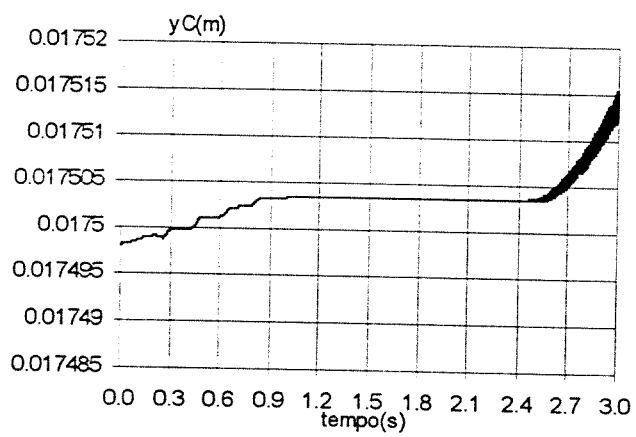


Figura 6.13b

Evolução temporal da posição do ponto terminal com uma entrada de posição constante.

[2]Uma matriz **A** diz-se idempotente se $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$.

Na figura 6.14 apresenta-se a resposta do sistema à referência em degrau de 1 N, 5 N e 10 N.

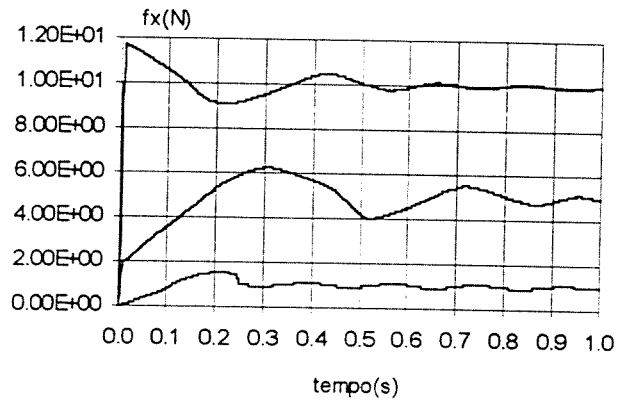


Figura 6.14
Resposta do sistema reformulado aos degraus de 1 N, 5 N e 10 N.

Efectuaram-se simulações com $K_r = 9\times10^6$ N/m e verificou-se que o sistema tinha um tempo de estabelecimento de cerca de 0.1 s e depois divergia rapidamente.

Na figura 6.15 apresentam-se os gráficos da força f_x e da posição y_C para uma frequência do controlador $f_{\text{CONTROLADOR}}$ = 1kHz e uma menor constante de elasticidade da superfície restrição, isto é de $K_r = 9\times10^4$ N/m. Neste caso, o sistema encontra-se num ciclo limite de oscilação.

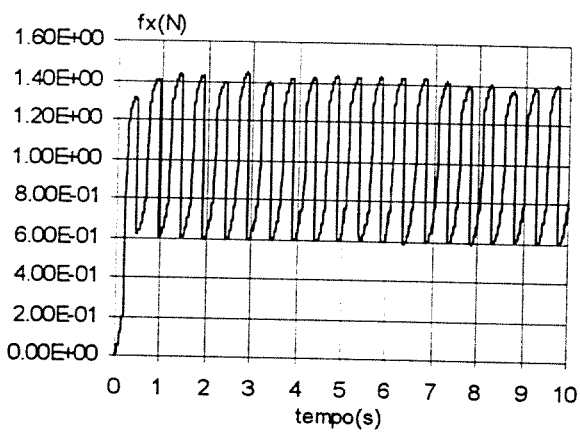


Figura 6.15a
A força como resposta a uma referência de posição constante e um degrau de força de 1 N para uma constante de elasticidade $K_r = 9\times10^4$ N/m.

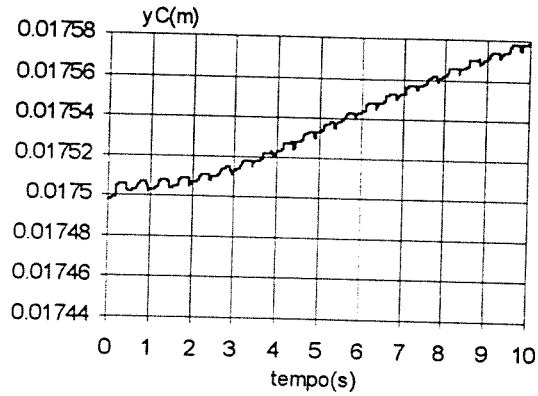


Figura 6.15b

A posição como resposta a uma entrada de posição constante e um degrau de força de 1 N para uma constante de elasticidade $K_r = 9\times10^4$ N/m.

Realizaram-se também simulações com um atrito viscoso na superfície restrição, ou seja, com um termo de amortecimento linear com coeficiente B_r, e com $K_r = 9\times10^5$ N/m. Os resultados obtidos levam à conclusão de que a inclusão do termo anterior ao modelo da superfície restrição torna o sistema mais rápido à medida que B_r aumenta, mas também diverge mais rapidamente.

Nas experiências de Raibert e Craig (1981), os resultados apresentados foram filtrados através de um filtro passa-baixo com uma frequência superior de corte de 12 Hz. No caso presente os resultados apresentados não foram filtrados a fim de possibilitar uma melhor visualização de todos os fenómenos existentes.

Com os mesmos parâmetros do sistema de Raibert e Craig (1981) mas reduzindo $\mathbf{K}_{pp}$ para $\mathbf{K'}_{pp} = 0.1\mathbf{K}_{pp}$, aumentando $\mathbf{K}_{pd}$ para $\mathbf{K'}_{pd} = 10\mathbf{K}_{pd}$ e retirando o atrito, fez-se a simulação do sistema corrigido através da pseudo-inversa. Esta simulação realizou-se com $K_r = 9\times10^4$ N/m e $f_{\text{CONTROLADOR}} = 1$ kHz. Na figura 6.16 mostra-se a resposta do sistema aos degraus de força de 1 N, 5 N e 10 N. Verifica-se que o erro em regime permanente é sempre menor que 0.5 N e que à medida que a referência de força aumenta, o tempo de estabelecimento também aumenta.

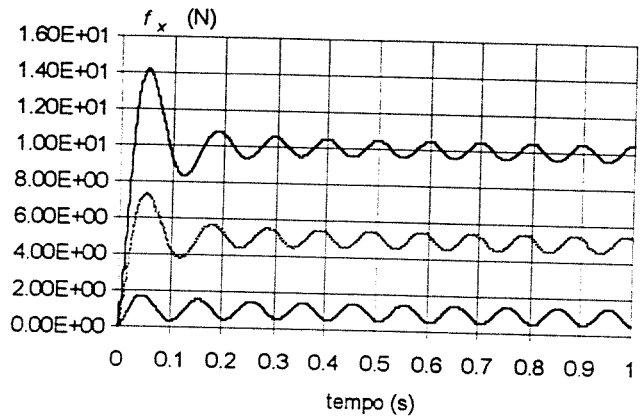


Figura 6.16

Resposta do sistema de controlo híbrido com pseudo-inversa aos degraus de força de 1 N, 5 N e 10 N.

Note-se, na figura 6.16, que o erro relativo em regime permanente diminui com o aumento da amplitude do degrau de força de entrada, pois o valor absoluto do erro mantém-se igual. Com a introdução do atrito viscoso descrito pela expressão (6.35) e variando os parâmetros k_i entre 0.35 e 3 não se verificam alterações na resposta do sistema relativamente à experiência mostrada na figura 6.16 (ou seja, face à ausência de atrito).

Com o sistema com os parâmetros descritos anteriormente, mas sem atrito, realizaram-se simulações com diferentes frequências de amostragem para os anéis de controlo de força e de controlo de posição (i.e. sistema multifrequência) do controlador. Assim, na figura 6.17 mostram-se as respostas do sistema com $f_{\text{CONTR.(POS.)}} = 1$ kHz, e $f_{\text{CONTR.(FOR.)}} = 2$ kHz (fig. 6.17a-b) e $f_{\text{CONTR.(FOR.)}} = 10$ kHz (fig. 6.17c-d), a um degrau de força unitário. O índice CONTR.(POS.) significa a parte do controlador de posição e o índice CONTR.(FOR.) significa a parte do controlador de força do sistema de controlo do robot-ambiente.

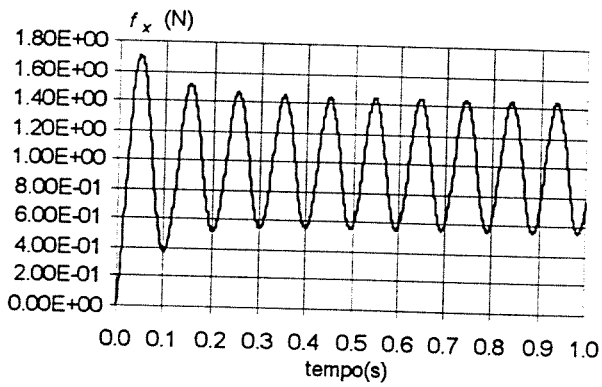


Figura 6.17a

Resposta do sistema com $f_{\text{CONTR.(POS.)}} = 1$ kHz e $f_{\text{CONTR.(FOR.)}} = 2$ kHz.

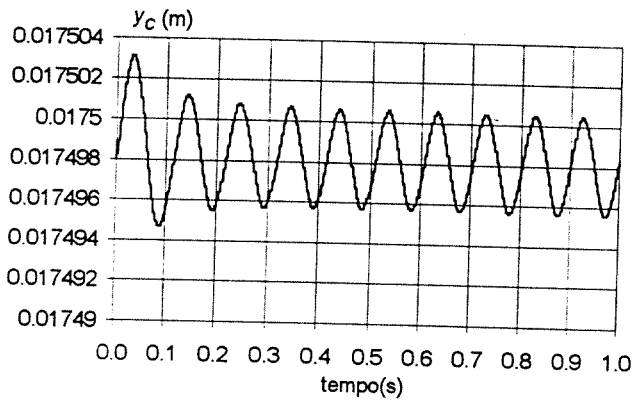


Figura 6.17b

Resposta do sistema com $f_{CONTR.(POS.)} = 1$ kHz e $f_{CONTR.(FOR.)} = 2$ kHz.

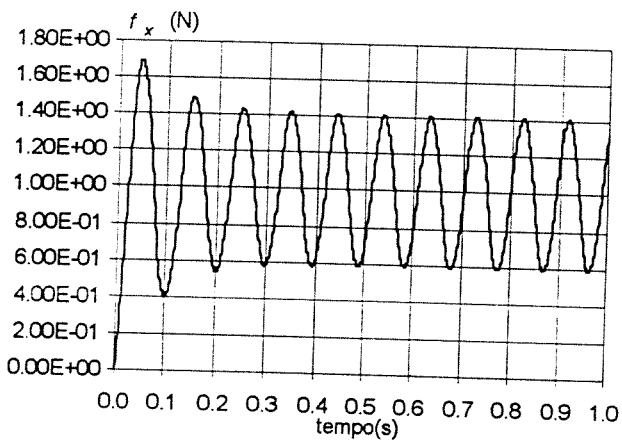


Figura 6.17c

Resposta do sistema com $f_{CONTR.(POS.)} = 1$ kHz e $f_{CONTR.(FOR.)} = 10$ kHz.

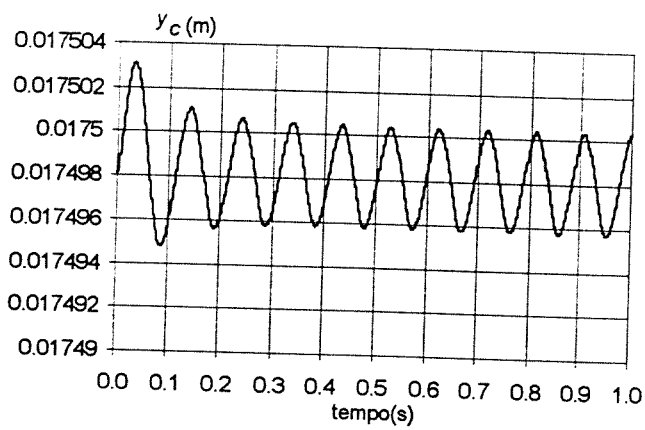


Figura 6.17d

Resposta do sistema com $f_{CONTR.(POS.)} = 1$ kHz e $f_{CONTR.(FOR.)} = 10$ kHz.

As diferenças observadas entre as duas respostas são:

- A amplitude da oscilação em regime permanente, quer da posição quer da força, da segunda resposta (fig. 6.17c-d) é ligeiramente inferior ao erro da primeira resposta (fig. 6.17a-b).
- A frequência da oscilação da segunda resposta (fig. 6.17c-d) é um pouco superior à frequência de oscilação da primeira resposta (fig. 6.17a-b).

Diminuido a frequência de amostragem para $f_{CONTR.(FOR.)} = 1$ kHz e $f_{CONTR.(POS.)} = 100$ Hz o sistema diverge. Por outro lado, fazendo a simulação (figura 6.18) com $f_{CONTR.(FOR.)} = 100$ Hz e $f_{CONTR.(POS.)} = 1$ kHz, o sistema encontra-se no limite de estabilidade.

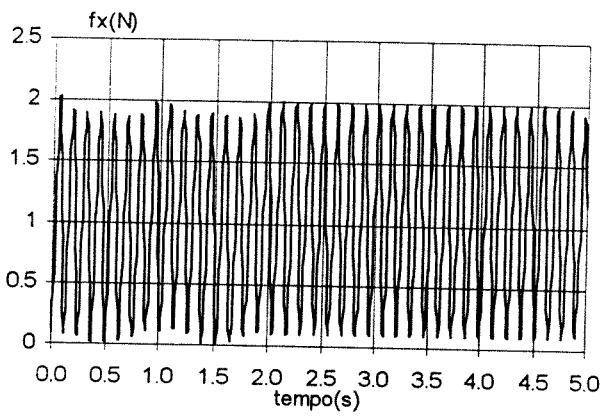


Figura 6.18a

Resposta do sistema com $f_{CONTR.(POS.)} = 1$ kHz e $f_{CONTR.(FOR.)} = 100$ Hz.

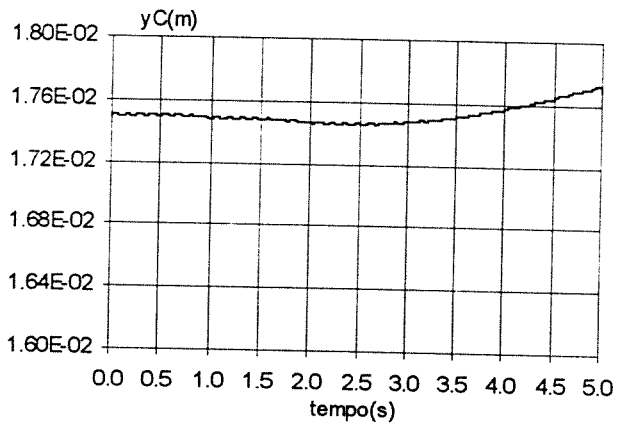


Figura 6.18b

Resposta do sistema com $f_{CONTR.(POS.)} = 1$ kHz e $f_{CONTR.(FOR.)} = 100$ Hz.

O sistema com a reformulação da pseudo-inversa tem um comportamento melhor que o algoritmo originalmente proposto por Raibert e Craig (1981). No entanto, ambos têm

sérios problemas de estabilidade, como se pode observar nos gráficos anteriores, pois apresentam uma baixa robustez.

Como se pode observar a modelização do atrito é muito importante, pois os resultados das simulações mostram diferenças notáveis quando se modifica a modelização do atrito. Outro factor importante é a constante de elasticidade da superfície restrição K_r, pois a resposta do sistema varia muito com este parâmetro. Os parâmetros do controlador influenciam significativamente o erro em regime permanente e o regime transitório.

6.4.3 Controlador híbrido com estrutura variável

Os sistemas de controlo com estrutura variante (Utkin, 1977; Young, 1978; Machado e de Carvalho, 1988) têm baixa carga computacional, elevada robustez, boa capacidade de seguimento de trajectória e não requerem um modelo matemático detalhado. Neste sentido, efectuaram-se experiências nas quais se substituiram os controladores PID do anel de controlo de posição e PI do anel de controlo de força, por controladores VSS ("Variable Structure System").

Os diagramas de blocos dos controladores de estrutura variante dos dois anéis estão representados na figura 6.19. Na primeira parte define-se a superfície de deslizamento ("sliding surface") σ_i dada pela expressão

$$\sigma_i = \dot{q}_{esi} + c_i q_{esi} \tag{6.37}$$

onde a variável q_{esi} é o erro da coordenada generalizada i e a variável $\dot{q}_{esi}$ designa a derivada temporal do erro da coordenada generalizada i. O parâmetro $c_i \in \Re$ é uma constante positiva que representa a constante de tempo associada a σ_i. Na segunda parte do diagrama de blocos define-se a acção de controlo que, como é frequente nos controladores VSS, se realizou do tipo "on-off" com uma zona proporcional para reduzir a amplitude da frequência de comutação ("chattering"). O parâmetro τ_{maxi} é o binário máximo e o parâmetro Δ_i define a largura da zona proporcional.

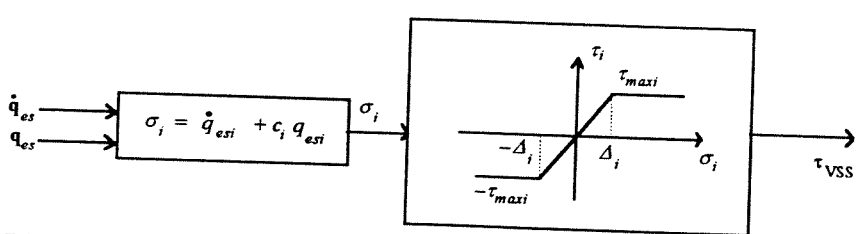


Figura 6.19a

Diagrama de blocos do controlador VSS para o anel de controlo de posição.

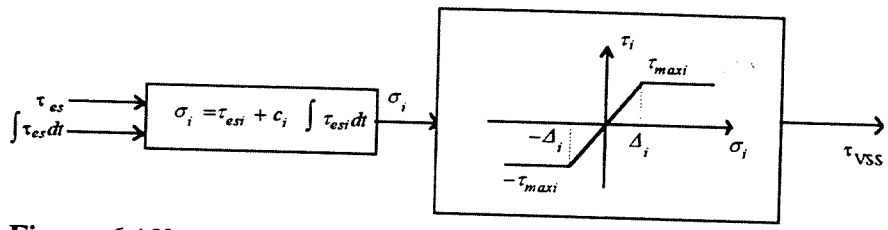


Figura 6.19b

Diagrama de blocos do controlador VSS para o anel de controlo de força.

Para o anel de controlo de força substituiu-se o controlador PI por um algoritmo VSS em que as entradas são os vectores, de dimensão 2×1, τ_{es} e $\int \tau_{es} dt$ respectivamente. O segundo vector é obtido através de uma integração numérica segundo a fórmula (6.32). A superfície de deslizamento passa a ser descrita pela equação

$$\sigma_i = \tau_{esi} + c_i \int \tau_{esi} dt \tag{6.38}$$

Assim, evita-se o cálculo de uma superfície de deslizamento com a derivada temporal de τ_{es} que introduziria níveis elevados de ruído.

Note-se que se manteve o termo de antecipação ("feedforward") deste anel dado pela expressão (figura 6.20)

$$\tau_{FF} = \mathbf{J}^T(\mathbf{I}-\mathbf{S})\mathbf{f}_{Cd} \tag{6.39}$$

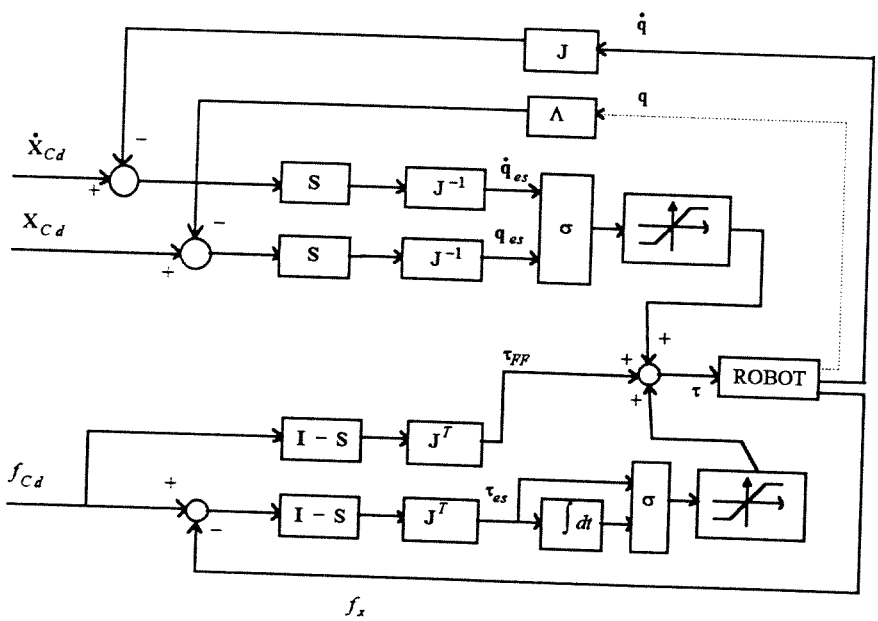


Figura 6.20

Diagrama de blocos do sistema de controlo híbrido com VSS.

Nas simulações seguintes foi utilizado o sistema com a modificação da pseudo-inversa descrito na sub-secção anterior e o atrito mencionado no trabalho de Raibert e Craig (1981). Assim, na figura 6.21, mostra-se a resposta do sistema ao degrau de força unitário e a uma referência de posição constante, com $K_r = 9\times10^5$ N/m. Os parâmetros utilizados para os controladores VSS são: $\tau_{max1} = 0.1$ Nm, $\tau_{max2} = 1$ N, $c = 0.1$ e $\Delta_i = 0.1$.

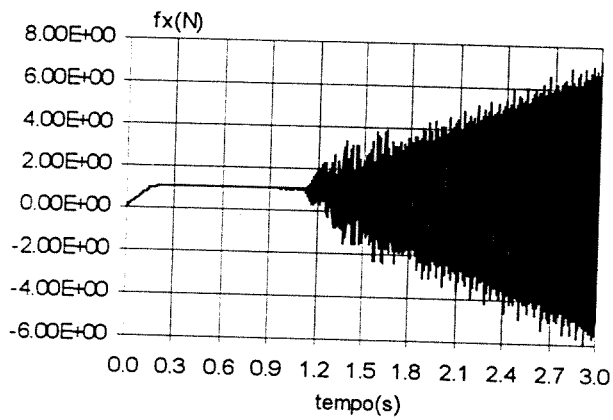


Figura 6.21a

Resposta da força do sistema com VSS e $K_r = 9\times10^5$ N/m.

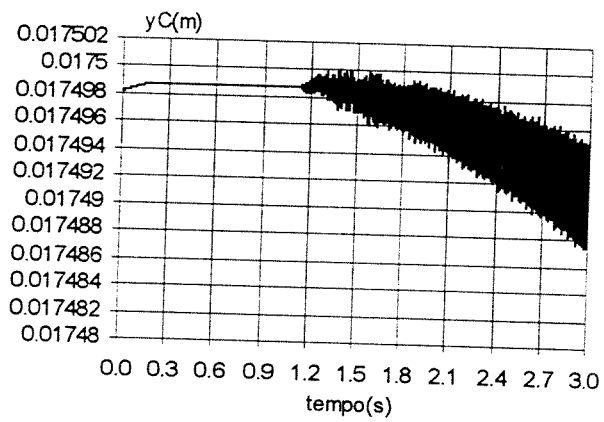


Figura 6.21b

Resposta da posição do sistema com VSS e $K_r = 9\times10^5$ N/m.

Como se pode verificar através da figura 6.21, as respostas do sistema em regime permanente com acção VSS apresentam uma oscilação semelhante dos controladores PID e PI. Como se sabe, este fenómeno deve-se ressonância entre a inércia da mão do manipulador e as "molas" que representam a superfície de restrição e o transdutor de força. Constata-se que a frequência de ressonância está de acordo com a expressão (Raibert e Craig, 1981):

$$f_r = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_r + K_w}{M_3}} \tag{6.40}$$

No entanto, o regime transitório melhorou consideravelmente quando comparado com os algoritmos clássicos.

Para $K_r = 9\times10^4$ N/m o sistema tem um melhor comportamento, como se mostra na figura 6.22. De facto, embora o sistema seja mais lento não existe sobreelevação nem oscilação em regime permanente. A estabilidade do sistema verificou-se pelo menos até $t = 10$ s.

Para $K_r = 9\times10^6$ N/m o sistema é mais rápido no regime transitório, mas também diverge.

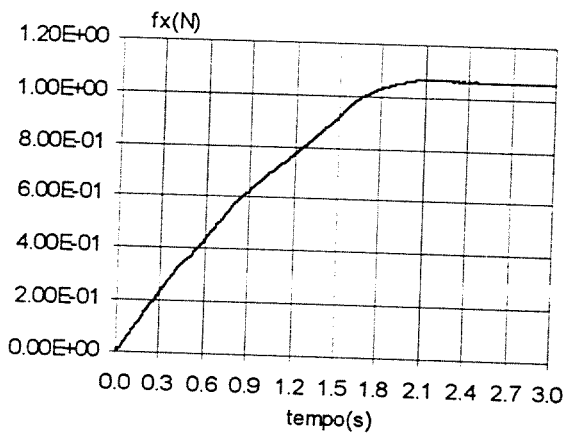


Figura 6.22a

Resposta da força do sistema com VSS e $K_r = 9\times10^4$ N/m.

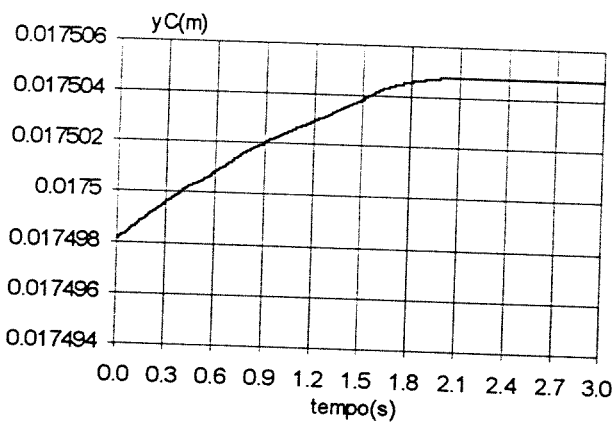


Figura 6.22b

Resposta da posição do sistema com VSS e $K_r = 9\times10^4$ N/m.

Na figura 6.23 apresentam-se os binários em jogo no sistema com a pseudo-inversa e com controladores PID e PI. O termo FF é o binário respeitante (constante para uma entrada em degrau) parte de antecipação do anel de controlo de força.

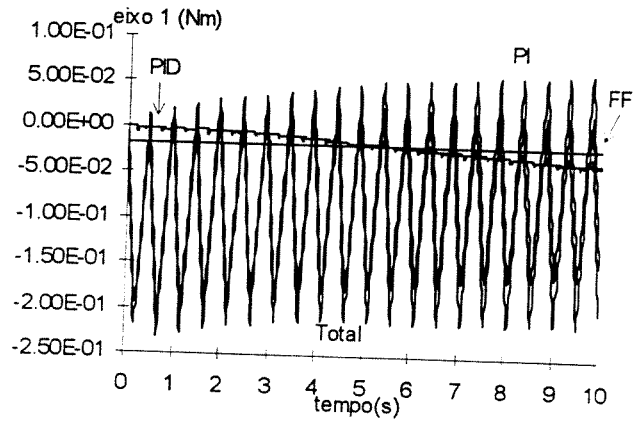


Figura 6.23a

Binários em jogo do eixo 1 para o sistema com controladores PID e PI ($K_r = 9\times10^4$ N/m).

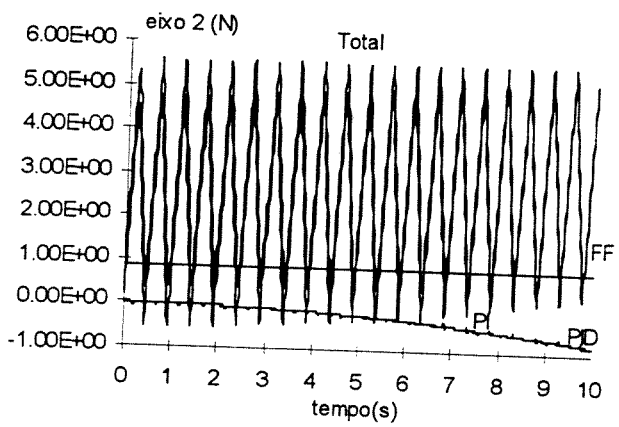


Figura 6.23b

Binários em jogo do eixo 2 para o sistema com controladores PID e PI ($K_r = 9\times10^4$ N/m).

Na figura 6.24 apresentam-se os gráficos dos binários para o sistema com controladores VSS nos anéis de controlo de força e de posição. O termo VSSP significa o binário de saída do controlador VSS do anel de controlo de posição, enquanto que o termo VSSF significa o binário de saída do controlador VSS do anel de controlo de força.

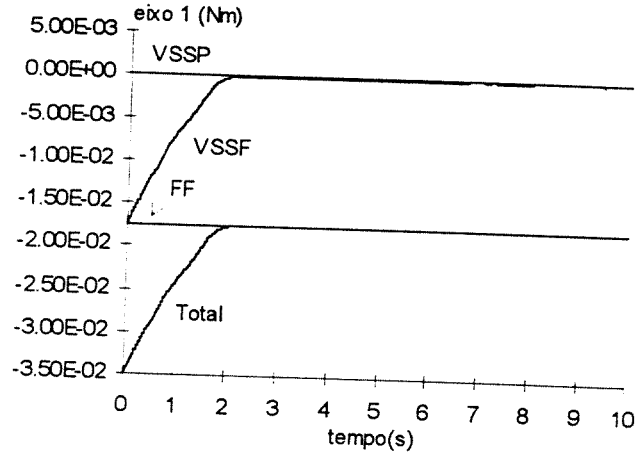


Figura 6.24a

Binários em jogo do eixo 1 para o sistema com controladores VSS ($K_r = 9\times10^4$ N/m, $c = 0.1$).

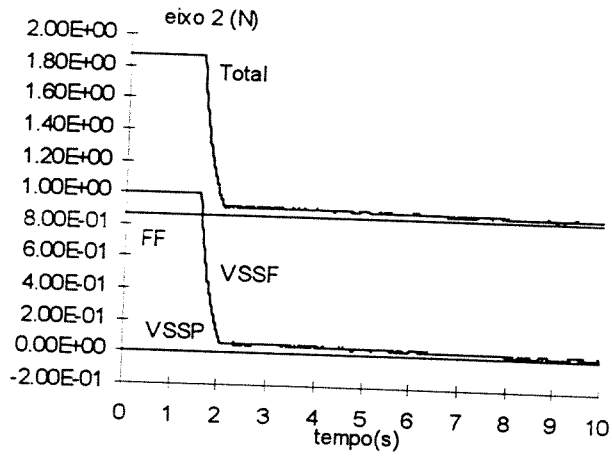


Figura 6.24b

Binários em jogo do eixo 2 para o sistema com controladores VSS ($K_r = 9\times10^4$ N/m, $c = 0.1$).

Nas simulações efectuadas com os controladores VSS verificou-se que os parâmetros τ_{maxi} têm uma importância significativa no regime transitório. Aumentando-se τ_{maxi} de uma década, e mantendo a inclinação da função saturação constante (através do ajuste dos parâmetros Δ_i), o sistema reage mais rapidamente, mas a estabilidade devido à excitação dos modos ressonantes piora.

6.5 Conclusão

Neste capítulo estudou-se a estabilidade de alguns algoritmos de controlo de força.

Na secção 6.2, foi definida uma condição suficiente para a estabilidade do sistema baseada exclusivamente na informação cinemática. Mostrou-se como a influência da matriz de selecção (e não necessariamente na interacção da cinemática com uma dada matriz de inércia) afecta a estabilidade do sistema através da cinemática. Este estudo centralizou-se nas equações cinemáticas do algoritmo de controlo híbrido e obteu-se uma justificação da razão porque existe uma instabilidade com a formulação de posição original apresentada por Craig e Raibert. A solução de norma mínima para a posição no controlo híbrido foi demonstrada como tendo, sempre, um comportamento cinemático estável para qualquer tipo de manipulador. Foi também mostrado que a condição suficiente pode ser usada para determinar quando a estabilidade de um manipulador, usando formulações diferentes de posição em controlo híbrido, está em causa.

Na secção 6.3, foram apresentados alguns resultados sobre a estabilidade do sistema de controlo de força proporcional com realimentação de força. Assim apresentaram-se as características de estabilidade de manipuladores controlados em força com implementação discreta no tempo para vários tipos de atrito não-linear e teceram-se considerações sobre os efeitos da frequência de amostragem. Por último, na secção 6.4, apresentaram-se os resultados de simulações efectuadas do esquema de controlo híbrido.

Capítulo 7

Conclusão

O controlo de força de manipuladores robóticos está a ser alvo de uma intensa investigação o que é patente pelo número de estudos efectuados sobre este tema durante os últimos anos.

Ao longo deste trabalho, o termo "acomodativo" teve dois significados distintos mas complementares:

- obedecer, seguir e;
- suavizar, inverso de rigidez, expansão do significado anterior.

O controlo de força divide-se em dois tipos distintos:

- um primeiro no qual se procura obter uma dada relação entre a posição e a força no ponto terminal do robot (como é o caso do controlo de impedância);
- um segundo no qual se procura obter um controlo da força e da posição do orgão terminal de um modo não conflituoso (como é o caso do controlo híbrido).

Nesta ordem de ideias, no capítulo 2 foi feita uma breve introdução cinemática, estática e dinâmica de manipuladores robóticos e, no capítulo 3, fez-se a introdução de noções fundamentais sobre controlo de força. De seguida, no capítulo 4 apresentaram-se várias possibilidades relativas ao controlo de força em que se tende a estabelecer uma dada relação entre a posição e a força exercida pelo ponto terminal do manipulador. Por seu lado, no capítulo 5 abordou-se com algum detalhe o controlo de força híbrido. Por último, no capítulo 6 estudou-se a estabilidade de manipuladores controlados em força.

Como perspectivas para futuros desenvolvimentos podem referir-se os seguintes factos:

- Não existe grande número de experiências quer a nível de simulações quer a nível de robots reais;
- Não existem estudos de comparação dos vários tipos de controladores;

- Não foram estudados os efeitos na estabilidade de erros de modelização ou de uma frequência de amostragem finita;
- Quando os actuadores são motores eléctricos, a corrente eléctrica (usualmente com ruído) é um sinal proporcional ao binário. Isto pode ser utilizado para fazer realimentação e controlo de força (Naghdy *et. al*, 1988);

De facto, basta comparar o número de arquitecturas existentes para controladores de posição com o número de arquitecturas para controladores de força para se constatar uma grande disparidade.

Os controladores de posição começaram a ser desenvolvidos há cerca de três décadas, enquanto os controladores de força só começaram a ser explorados muito mais recentemente. Assim, pode dizer-se que a extensão das arquitecturas de controlo para variáveis como as forças/binários é o próximo passo na evolução para sistemas integrando múltipla informação sensorial.

BIBLIOTECA F.E. PORTO

Bibliografia

An, C. H. e Hollerbach, J. M., 1987, Kinematic Stability Issues in Force Control of Manipulators, *International Conference on Robotics and Automation*, IEEE Robotics and Automation Society. Rayleigh, North Carolina, pp. 897-903.

Asada, H. e Morimura, K., 1987, The General Synthesis Theory of Compliance for Workpiece Manipulation Under Uncertainties in the Environment, *Preprints of the 30th Japan Joint Automatic Control Conference*, pp. 335-338.

Asada, H. e Slotine, J.-J. E., 1986, *Robot Analysis and Control*, John Wiley & Sons Inc., New York.

Bayo, E. e Stubbe, J. R., 1989, Six-Axis Force Sensor Evaluation and a New Type of Optimal Frame Truss Design for Robotic Applications, *Journal of Robotic Systems*, **6**, No. 2, pp. 191-208.

Begej, S., 1988, Planar and Finger-Shaped Optical Tactile Sensors for Robotic Applications, *IEEE Journal of Robotics and Automation*, **4**, No. 5, pp. 472-484.

Bone, G. M., Elbestawi, M. A., Lingarkar, R. e Liu, L., 1991, Force Control for Robotic Deburring, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **113**, No. 3, pp. 395-400.

Boullion, T. L. e Odell, P. L., 1971, *Generalized Inverse Matrices*, John Wiley.

Brady, M., Hollerbach, J. M., Johnson, T. L., Lozano-Perez, T., e Mason, M. T., 1982, *Robot Motion: Planning and Control*, The MIT Press, Cambridge-Massachusetts e London-England.

Chapra, S. C. e Canale, R. P., 1990, *Numerical Methods for Engineers*, McGraw-Hill Int. Editions, New York.

Cheng, F.-T. e Orin, D. E., 1991, Efficient Formulation of the Force Distribution Equations for Simple Closed-Chain Robotic Mechanims, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, **21**, No. 1, pp. 25-32.

Chiaverini, S. e Sciavicco, L., 1988, Force/Position Control of Manipulators in Task Space With Dominance in Force, *IFAC Symposium on Robot Control*, pp. 51.1-51.7.

Chiaverini, S. e Sciavicco, L., 1993, The Parallel Approach to Force/Position Control of Robotic Manipulators, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, **9**, No. 4, pp. 361-373.

Chiou, B. C. e Shahinpoor, M., 1988, Dynamic Stability Analysis of a One-Link Force--Controlled Flexible Manipulator, *Journal of Robotic Systems*, **5**, No. 5, pp. 443-451.

Conte, S. D. e de Boor, C., 1981, *Elementary Numerical Analysis - An Algorithmic Approach*, McGraw-Hill Int. Editions, pp. 398-401.

Craig, J. J. e Raibert, M. H., 1979, A Systematic Method of Hybrid Position/Force Control of a Manipulator, *Computer Software and Applications Conference*, IEEE Computer Society. Chicago, Illinois, pp. 446-451.

de Carvalho, J. L. M., 1993, *Dynamical Systems and Automatic Control*, Prentice-Hall International, London.

De Luca, A., Manes, C. e Nicolò, F., 1988, A Task Space Decoupling Approach to Hybrid Control of Manipulators, *IFAC Symposium on Robot Control*, pp. 54.1-54.6.

De Luca, A. e Manes, C., 1991, Hybrid Force-Position Control for Robots in Contact with Dynamic Environments, *IFAC Symposium on Robot Control*, pp. 377-382.

Faden, J. S. e da Costa, J. M. G. S., 1994, Simulação Eficiente de Robots em Movimento Constrangido, *Conferência Controlo 94*, Lisboa.

Fisher, W. D. e Mujtaba, M. S., 1992, Sufficient Stability Condition for Hybrid Position/Force Control, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1336-1341.

Forrest-Barlach, M. G. e Babcock, S. M., 1987, Inverse Dynamics Position Control of a Compliant Manipulator, *IEEE Journal of Robotics and Automation*, **RA-3**, No. 1, pp. 75-83.

Fu, K. S., Gonzalez, R. C. e Lee, C. S. G., 1987, *Robotics: Control, Sensing, Vision and Intelligence*, McGraw-Hill, New York.

Galhano, A. M. S. F., Machado, J. A. T. e de Carvalho, J. L. M., 1991, Novas Estruturas para Manipuladores Robóticos, *Revista Engenharia*, Setembro, pp. 35-47.

Galhano, A. M. S. F., Machado, J. A. T. e de Carvalho, J. L. M., 1992, Modelização de Manipuladores Robóticos, *Revista Engenharia*, Março, pp. 29-45.

Gantmacher, F. R., 1960, *The Theory of Matrices*, vol. 1, Chelsea, New York, NY.

Gao, W. B., Cheng, M. e Xiao, D., 1991, Force Control for Tracking a Set of Tasks in Presence of Constraints, *IFAC Symposium on Robot Control*, pp. 389-394.

Gershon, D. e Baruch, V., 1991, Impedance Control With Autonomous Mode Switching, *Fifth International Conference on Advanced Robotics, Robotics in Unstructured Environments*, pp. 482-486.

Goldenberg, A. A., 1992, Analysis of Force Control Based on Linear Models, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1348-1353.

Goldstein, H., 1962, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, MA.

Halmos, P. R., 1974, *Finite-Dimensional Vector Spaces*, Springer-Verlag New York, Inc.

Hanes, M. D., Ahalt, S. C., Mirza,K. e Orin, D. E., 1992, Power Grasp Force Distribution Control Using Artificial Neural Networks, *Journal of Robotic Systems*, **9**, No. 5, pp. 635-661.

Hashimoto, H., Kwee-bo, S. e Harashima, F., 1988, Force Control of Robotic Manipulator Using VSS, *IFAC Symposium on Robot Control*, pp. 17.1-17.6.

Hemami, H. e Wyman, B. F., 1981, Modeling of nonholonomic dynamic systems with applications, *ASME Journal of Applied Mechanics*, **48**, pp. 177-182.

Her, M. G. e Kazerooni, H., 1991, Automated Robotic Deburring of Parts Using Compliance Control, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **113**, No. 1, pp. 60-66.

Hogan, N., 1985, Impedance Control: An Approach to Manipulation, Parts I, II and III, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **107**, No. 1, pp. 1-24.

Hogan, N., 1988, On the Stability of Manipulators Performing Contact Tasks, *IEEE Journal of Robotics and Automation*, **4**, No. 6, pp. 677-686.

Hollerbach, J. M., 1980, A Recursive Lagrangian Formulation of Manipulator Dynamics and a Comparative Study of Dynamics Formulation Complexity, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, **10**, pp. 730-736.

Holowell, R., 1989, Hybrid Force/Position Control for Robotic Light Machining, *Proceedings of ANS Third Topical Meeting on Robotics and Remote Systems*, Charleston, S. C., pp. 1-6.

Holzmann, W. e McCarthy, J. M., 1985, Computing the Friction Forces Associated with a Three-Fingered Grasp, *IEEE Journal Of Robotics and Automation*, **RA-1**, No. 4, pp. 206-210.

Houpis, C. H. e Lamont, G. B., 1992, *Digital Control Systems – Theory, Hardware, Software*, McGraw-Hill International Editions, New York, 2a. edição.

Hu, Y.-R. e Goldenberg, A. A., 1993, An Adaptive Approach to Motion and Force Control of Multiple Coordinated Robots, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **115**, No. 1, pp. 60-69.

Jankowski, K. P., ElMaraghy, W. H. e ElMaraghy, H. A., 1993, Set Point Trajectory and Internal Force Control in Redundant Dual-Arm Manipulation, *Journal of Robotic Systems*, **10**, No. 8, pp. 1031-1073.

Jury, E. I., 1964, *Theory and Applications of z-Transform Method*, John Wiley & Sons, Inc., New York, N. Y.

Kaneko, M., Imamura, N., Yokoi, K. e Tanie, K., 1988, Direct Compliance Control of Manipulator Arms - Basic Concept and Application Examples, *IFAC Symposium on Robot Control*, pp. 8.1-8.6.

Kankaanranta, R. K. e Koivo, H. N., 1988a, Dynamics and Simulation of Compliant Motion of a Manipulator, *IEEE Journal of Robotics and Automation*, **4**, No. 2, pp. 163-173.

Kankaanranta, R. K. e Koivo, H. N., 1988b, Stability Analysis of Position-Force Control Using Linearized Cartesian Space Model, *IFAC Symposium on Robot Control*, pp. 95.1-95.6.

Karunakar, S. B. e Goldenberg, A. A., 1988, Contact Stability in Model-Based Force Control Systems of Robot Manipulators, *IEEE International Symposium on Intelligent Control*, pp. 412-417.

Kazerooni, H., Sheridan, T. B. e Houpt, P. K., 1986a, Robust Compliant Motion for Manipulators, Part I: The Fundamental Concepts of Compliant Motion, *IEEE Journal of Robotics and Automation*, **RA-2**, No. 2, pp. 83-92.

Kazerooni, H., Houpt, P. K. e Sheridan, T. B., 1986b, Robust Compliant Motion for Manipulators, Part II: Design Method, *IEEE Journal of Robotics and Automation*, **RA-2**, No. 2, pp. 93-105.

Kazerooni, H., 1989, On the Robot Compliant Motion Control, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **111**, No. 3, pp. 416-425.

Kazerooni, H., Waibel, B. J. e Kim, S., 1990a, On the Stability of Robot Compliant Motion Control: Theory and Experiments, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **112**, No. 3, pp. 417-426.

Kazerooni, H., Bouklas, K. G., Guo, J., 1990b, Theory and Experiments on the Compliance Control of Redundant Robot Manipulators, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **112**, No. 4, pp. 653-660.

Kircanski, N., Timcenko, A. e Vukobratovic, M., 1990, Position Control of Robot Manipulators with Elastic Joints using Force Feedback, *Journal of Robotic Systems*, **7**, No. 4, pp. 535-554.

Klein, C. A. e Chung, T.-S., 1987, Force Interaction and Allocation for the Legs of a Walking Vehicle, *IEEE Journal of Robotics and Automation*, **RA-3**, No.6, pp. 546-555.

Koivo, A. J., 1989, *Fundamentals for Control of Robotic Manipulators*, John Wiley & Sons Inc., New York.

Kozel, D., Koivo, A. J. e Mahil, S. S., 1991, A General Force/Torque Relationship and Kinematic Representation for Flexible Link Manipulators, *Journal of Robotic Systems*, **8**, No. 4, pp. 531-556.

Kumar, V. R. e Waldron, K. J., 1988, Force Distribution in Closed Kinematic Chains, *IEEE Journal of Robotics and Automation*, **4**, No.6, pp. 657-664.

Lange, F. e Hirzinger, G., 1992, Iterative Self-Improvement of Force Feedback Control in Contour Tracking, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1399-1404.

Loncaric, J., 1987, Normal Forms of Stiffness and Compliance Matrices, *IEEE Journal of Robotics and Automation*, **RA-3**, No. 6, pp. 567-572.

Luh, J. Y. S., Walker, M. W. e Paul, R. P. C., 1980, On-line Computational Scheme for Mechanical Manipulators, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **102**, pp. 69-76.

Luh, J. Y. S. e Zheng, Y.-F., 1985, Computation Of Input Generalized Forces for Robots with Closed Kinematics Chain Mechanims, *IEEE Journal of Robotics and Automation*, **RA-1**, No. 2, pp. 95-103.

Luo, Z. e Ito, M., 1993, Control Design of Robot for Compliant Manipulation on Dynamic Environments, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, **9**, No. 3, pp. 286-296.

Machado, J. A. T. e de Carvalho, J. L. M., 1988, A Smooth Variable Structure Control Algorithm for Robot Manipulators, *IEE International Conference on CONTROL*, Oxford, Uk.

Machado, J. A. T. e de Carvalho, J. L. M., 1989, Engineering Design of a Multirate Nonlinear Controller for Robot Manipulators, *Journal of Robotic Systems*, **6**, No.1, pp. 1-17.

Machado, J. A. T., de Carvalho, J. L. M., Matos, J. A. S. e Costa, A. M. C. 1990, A new computing system for the control of robot manipulators, *The INESC Journal of Research & Development*, **1**, No. 2, pp. 5-13.

Machado, J. A. T., de Carvalho, J. L. M. e Galhano, A. M. S. F., 1993, Analysis of Robot Dynamics and Compensation Using Classical and Computed Torque Techniques, *IEEE Transactions on Education*, **36**, No. 4, pp. 372-379.

Machado, J. A. T. e Galhano, A. M. S. F., 1993, Customised Direct Dynamics of Robot Manipulators, *IEEE International Conference on System, Man and Cybernetics*, Le Touquet, France.

Mason, M. T., 1981, Compliance and Force Control for Computer Controlled Manipulators, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, **SMC-11**, No. 6, pp. 418-432.

Matsuno, F., Asano, T. e Sakawa, Y., 1994, Modeling and Quasi-Static Hybrid Position/Force Control of Constrained Planar Two-Link Flexible Manipulators, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, **10**, No. 3, pp. 287-297.

Matsuo, S. e Iwaki, S., 1992, Compliance Design Method Using Linear Programming, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1238-1244.

McClamroch, H. e Wang, D., 1990, Linear Feedback Control of Position and Contact Force for a Nonlinear Constrained Mechanism, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **112**, No. 4, pp. 640-645.

Mills, J. K., 1988, Constrained Manipulator Dynamic Models and Hybrid Control, *IEEE International Symposium on Intelligent Control*, pp. 424-429.

Mills, J. K., 1991, Hybrid Control: A Constrained Motion Perspective, *Journal of Robotic Systems*, **8**, No. 2, pp. 135-158.

Mills, J. K. e Lokhorst, D. M., 1993, Stability and Control of Robotic Manipulators During Contact/Noncontact Task Transition, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, **9**, No. 3, pp. 335-345.

Mukherjee, S. e Waldron, K. J., 1992, An Exact Optimization of Interaction Forces in Three-Fingered Manipulation, *ASME Journal of Mechanical Design*, **114**, No. 1, pp. 48-54.

Naghdy, F., Luk, B. e Hoade, K., 1988, Stochastic Force Control in a Robot Arm, *IFAC Symposium on Robot Control*, pp. 52.1-52.6.

Ono, K., Izumi, E., Kashiwagi, K., Watanabe, H. e Kurenuma, T., 1988, Development of a Force Control System For Multi-Degree-Of-Freedom Machines, *IEEE International Workshop on Intelligent Robots and Systems*, pp. 403-408.

Pieper, D. L., 1968, *The Kinematics of Manipulators Under Computer Control*, Tese de Doutoramento, Stanford University.

Qian, H. P. e De Shutter, J., 1989, Stability Issues in Robot Force Control, *Internal Report No. 6, Afd. PMA*, Katholick Universiteit Leuven.

Qian, H. P. e De Schutter, J., 1992, The Role of Damping and Low Pass Filtering in the Stability of Discrete Time Implemented Robot Force Control, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1368-1373.

Raibert, M. H. e Craig, J. J., 1981, Hybrid Position/Force Control of Manipulators, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **102**, No. 2, pp. 126-133.

Shin, K. G. e Lee, C. P., 1985, Compliant Control of Robotic Manipulators with Resolved Acceleration, *IEEE 24th Conference on Decision and Control*, pp. 350-357.

Shoji, Y. e Inaba, M., 1990, Contact/Impact Position and Force Hybrid Control, *IEEE International Workshop on Advanced Motion Control*, pp. 164-172.

Simon, J. P., Ombede, G. A., Champoussin, O. e Betemps, M., 1994, Efficient Matching Robot Environment Impedance in a Constrained Task, *Proceedings of the 3rd International Workshop on Advanced Motion Control*, Berkeley, pp. 515-525.

Spong, M. W. e Vidyasagar, M., 1989, *Robot Dynamics and Control*, John Wiley & Sons Inc., New York.

Stepien, T. M., Sweet, L. M., Good, M. C. e Tomizuka, M., 1987, Control of Tool/Workpiece Contact Force with Application to Robotic Deburring, *IEEE Journal of Robotics and Automation*, **RA-3**, No. 1, pp. 7-18.

Strang, G., 1980, *Linear Algebra and Its Applications*, Academic Press, New York, 2a. edição, pp. 110-145.

Tumeh, Z. S., 1988a, A Discrete Decentralized Hybrid Computed Torque-Model Referenced Adaptive Controller for Robot Manipulators, *IEEE International Symposium on Intelligent Control*, pp. 447-452.

Tumeh, Z. S., 1988b, A Discrete Hybrid Nonlinear-Model Referenced Adaptive Controller for Robotic Manipulators, *IEEE International Symposium on Intelligent Control*, pp. 453-458.

Uchiyama, M., Bayo, E. e Palma-Villalon, E., 1991, A Systematic Design Procedure to Minimize a Performance Index for Robot Force Sensors, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **113**, No. 3, pp. 388-394.

Utkin, V. I., 1977, Variable Structure Systems With Sliding Modes, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-22**, pp. 212-222.

Walker, M. W. e Orin, D. E., 1982, Efficient Dynamic Computer Simulation of Robot Mechanisms, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **104**, pp. 205-211.

Wilfinger, L. S., Wen, J. T. e Murphy, S. H., 1994, Integral Force Control with Robustness Enhancement, *IEEE Control Systems*, **14**, No. 1, pp. 31-40.

Yabuta, T., Yamada, T., Tsujimura, T. e Sakata, H., 1988, Force Control of Servomechanism Using Adaptive Control, *IEEE Journal of Robotics and Automation*, **4**, No.2, pp. 223-228.

Yabuta, T., 1988, Stability Feature of the Hybrid Position/Force Control Scheme for Robot Manipulator, *IEEE International Workshop on Intelligent Robots and Systems*, pp. 367-372.

Yan, X. G., 1991, Using Expert Control in Robot Compliance, *IFAC Symposium on Robot Control*, pp. 395-398.

Yoshikawa, T., 1987, Dynamic Hybrid Position/Force Control of Robot Manipulators - Description of Hand Constraints and Calculation of Joint Driving Force, *IEEE Journal of Robotics and Automation*, **RA-3**, No. 5, pp. 386-392.

Yoshikawa, T., 1990, *Foundations of Robotics - Analysis and Control*, The MIT Press, Cambridge-Massachusetts, London-England.

Young, K.-K. D., 1978, Controller Design for a Manipulator Using Theory of Variable Structure Systems, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, **SMC-8**, No. 2, pp. 101-109.