METHODES NUMERIQUES DE L'ANALYSE MODALE DES ARBRES DE MACHINES

THESE No 778 (1989)

PRESENTEE AU DEPARTEMENT DE MECANIQUE

ECOLE POLYTECHNIQUE FEDERALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES TECHNIQUES

PAR

JOSE FERNANDO DIAS RODRIGUES

Ingénieur mécanicien diplômé de l'Université de Porto
de nationalité portugaise

acceptée sur proposition du jury:

Prof. M. Del Pedro, rapporteur
Prof. J. Descloux, corapporteur
Dr Th. Gmür, corapporteur
Dr J.-C. Mévillot, corapporteur

Lausanne, EPFL
1989

621(043)
RODj/MET

METHODES NUMERIQUES DE L'ANALYSE MODALE DES ARBRES DE MACHINES

THESE No 778 (1989)

PRESENTEE AU DEPARTEMENT DE MECANIQUE

ECOLE POLYTECHNIQUE FEDERALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES TECHNIQUES

PAR

JOSE FERNANDO DIAS RODRIGUES

Ingénieur mécanicien diplômé de l'Université de Porto
de nationalité portugaise

DEMEGI-FEUP *00773*

621(043)/RODj/MET

acceptée sur proposition du jury:

Prof. M. Del Pedro, rapporteur
Prof. J. Descloux, corapporteur
Dr Th. Gmür, corapporteur
Dr J.-C. Méviliot, corapporteur

Lausanne, EPFL
1989

FEUP
DEP ENG MEC
446 25/10/89
1904
BIBLIOTECA

UNIVERSIDADE DO PORTO
Faculdade de Engenharia
BIBLIOTECA M
N.º 43301
CDU 621(043)
Data 30/09/1999

A ma femme Maria de la Salette et à ma fille Ana Maria pour leur amour et leur compréhension.

REMERCIEMENTS

En m'accueillant dans son Laboratoire pour entreprendre le présent travail sous sa direction, Monsieur le Professeur Michel Del Pedro m'a permis d'approfondir mes connaissances en mécanique appliquée. Qu'il trouve ici mon témoignage de grande reconnaissance pour son soutien et ses judicieux conseils.

Je tiens à exprimer à Monsieur le Dr Thomas Gmür ma très vive gratitude pour l'aide constante qu'il m'a apportée, tant dans la réalisation que la rédaction de ce travail.

Mes remerciements s'adressent également à :

- Monsieur le Professeur Jean Descloux pour les conseils qu'il m'a prodigués sur le plan mathématique;
- Monsieur le Dr Jean-Claude Mévillot qui a bien voulu examiner ce mémoire en tant que membre du jury de thèse;
- Monsieur le Professeur Nicolas Xenophontidis pour son aide bienveillante:
- Messieurs les Dr Alain Curnier et Pierre Alart pour leurs nombreuses suggestions;
- Madame Jacqueline Vuong pour le soin apporté à la dactylographie de ce mémoire;
- Tous les autres membres du Laboratoire qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

Enfin, j'exprime ma reconnaissance à Monsieur le Professeur Vasco de Sá du Département de mécanique de l'Université de Porto qui, par son enthousiasme, a su éveiller mon intérêt pour l'analyse du comportement dynamique des arbres de machines.

RESUME

L'analyse modale des arbres de machines nécessite la construction d'un modèle spatial, caractérisé par des matrices non-symétriques, à partir duquel on construit le modèle modal par résolution d'un problème aux valeurs et vecteurs propres quadratique à solution complexe. Le présent travail a pour finalité essentielle le développement de méthodes efficaces et stables pour l'établissement de tels modèles.

Après un rappel des équations différentielles régissant la dynamique des structures tournantes, nous avons développé un nouvel élément fini d'arbre de classe C^0 dont la formulation est nettement plus aisée que celle des éléments finis classiques actuellement disponibles.

Au niveau de la construction du modèle modal, des techniques d'extraction des paramètres propres sont proposées pour les systèmes gyroscopiques, tant dissipatifs que conservatifs. Basés respectivement sur les méthodes de bi-itération et d'itération inverse ou directe, les algorithmes proposés exploitent efficacement la structure en forme de bande des matrices spatiales globales associées aux structures tournantes. De plus, ces algorithmes limitent, voire évitent complètement, les opérations effectuées en algèbre complexe et peuvent être implantés de façon relativement aisée dans les codes d'éléments finis adaptés à l'étude des systèmes gyroscopiques. Quelques exemples pratiques tirés de l'industrie hydro-électrique complètent le travail et mettent en valeur l'efficacité et la précision des méthodes développées.

METHODES NUMERIQUES DE L'ANALYSE MODALE DES ARBRES DE MACHINES

TABLE DES MATIERES

TABLE DES NOTATIONS v

1. INTRODUCTION 1

1.1 Généralités 1
1.2 Etat de l'art 4
1.3 Objectifs du travail 9

2. VIBRATIONS TRANSVERSALES DES ARBRES DE MACHINES 15

2.1 Equations différentielles 15
2.2 Formulation intégrale 25
2.3 Disques minces indéformables 28
2.4 Paliers 30

3. MODELE SPATIAL-DISCRETISATION PAR ELEMENTS FINIS 33

3.1 Discrétisation de la forme intégrale globale 34
3.2 Approximation locale ou élémentaire 37
3.3 Matrices élémentaires 44
3.4 Assemblage de la forme globale discrétisée 49
3.5 Caractérisation des matrices spatiales 53

4. MODELE MODAL DES SYSTEMES GYROSCOPIQUES DISSIPATIFS 57

4.1 Définition du problème aux valeurs propres quadratique 57
4.2 Linéarisation du problème aux valeurs propres 58
4.3 Relations de bi-orthogonalité 62
4.4 Quotient de Rayleigh généralisé 68

5. MODELE MODAL DES SYSTEMES GYROSCOPIQUES CONSERVATIFS 71

5.1 Définition du problème aux valeurs propres quadratique 71
5.2 Linéarisation du problème aux valeurs propres 72
5.3 Caractérisation de la solution 75
5.4 Relations d'orthogonalité 77
5.5 Quotient de Rayleigh 86

6. BI-ITERATION DES SOUS-ESPACES ADJOINTS POUR LES SYSTEMES GYROSCOPIQUES DISSIPATIFS 95

6.1 Bi-itération inverse simultanée des sous-espaces adjoints 96
6.2 Analyse de Rayleigh-Ritz généralisée 98
6.3 Variante avec itération d'un seul des sous-espaces adjoints ... 107
6.4 Transformation de similitude 115
6.5 Problèmes adjoints d'interaction 120

7. MISE EN OEUVRE DE LA BI-ITERATION DES SOUS-ESPACES ADJOINTS 127

7.1 Initialisation des sous-espaces adjoints 128
7.2 Bi-itération inverse simultanée 131
7.3 Problèmes adjoints réduits 136
7.4 Bi-orthogonalisation 137
7.5 Critère de convergence 140
7.6 Mesure d'erreur 141
7.7 Etapes caractéristiques de l'algorithme 144

8. ITERATION D'UN SOUS-ESPACE POUR LES SYSTEMES GYROSCOPIQUES CONSERVATIFS 147

8.1 Itération inverse simultanée 148
8.2 Analyse de Rayleigh-Ritz 152
8.3 Variante avec itération directe simultanée 158
8.4 Décalage spectral 163

9. MISE EN OEUVRE DE L'ITERATION D'UN SOUS-ESPACE 167

9.1 Initialisation du sous-espace 167
9.2 Itération inverse simultanée 169
9.3 Problème réduit d'interaction 171
9.4 Orthogonalisation 174
9.5 Critère de convergence et mesure d'erreur 175
9.6 Vérification par décalage spectral 179
9.7 Etapes caractéristiques de l'algorithme 182

10. EXEMPLES D'APPLICATION 185

10.1 Problèmes tests 185
10.2 Groupe hydro-électrique Kaplan 186
10.3 Autres exemples pratiques 198

11. CONCLUSIONS 205

ANNEXE A - SOUS-PROGRAMME "BISUBS" 209

ANNEXE B - SOUS-PROGRAMME "SUBGYR" 217

REFERENCES 225

CURRICULUM VITAE 233

TABLE DES NOTATIONS

La liste ci-dessous présente les principaux symboles avec leur signification.

Symbole	Description
A	matrice composite (2n x 2n)
A_{k+1}	matrice d'interaction (2q x 2q)
${}^{e}A$	matrice de localisation
$a(t)$	vecteur global des déplacements généralisés
${}^{e}a(t)$	vecteur élémentaire des déplacements généralisés
a	vecteur propre du problème quadratique
B	matrice composite (2n x 2n)
C	matrice globale de dissipation (n x n)
${}^{e}C$	matrice élémentaire de dissipation (8 x 8)
C_g	matrice globale d'amortissement généralisé (n x n)
E^D, E^G	sous-espaces droit et gauche
f	vecteur global des sollicitations
${}^{e}f$	vecteur élémentaire des sollicitations
G	matrice globale de couplage gyroscopique (n x n)
${}^{e}G$	matrice élémentaire de couplage gyroscopique (8 x 8)
H	matrice des fonctions de forme (4 x 8)
J	matrice d'inertie (4 x 4)
K	matrice globale de rigidité (n x n)
K_g	matrice globale de rigidité généralisée (n x n)
${}^{e}K$	matrice élémentaire de rigidité (8 x 8)

$^{e}K_{c}$	matrice élémentaire de couplage de frottement (8 x 8)
$^{e}\ell$	longueur d'un élément
M	matrice globale de masse (n x n)
^{e}M	matrice élémentaire de masse (8 x 8)
N	nombre de points nodaux
n	nombre de degrés de liberté
P	matrice des vecteurs propres droits du problème d'interaction (2q x 2q)
p	nombre de fréquences propres requises
Q	matrice des vecteurs propres gauches du problème d'interaction (2q x 2q)
2q	dimension du sous-espace
R	quotient de Rayleigh
S	matrice de permutation (2q x 2q)
T	matrice unitaire (2q x 2q)
U	matrice des vecteurs propres droits (2n x 2n)
$\hat{U}_{k+1}$	matrice des vecteurs droits itérés (2n x 2q)
U_{k+1}	matrice des vecteurs droits de Ritz (2n x 2q)
u(x,t)	champ des déplacements
u	vecteur propre droit
$\hat{u}_{k+1}$	vecteur droit itéré
u_{k+1}	vecteur droit de Ritz
u_y, u_z	déplacements
V	matrice des vecteurs propres gauches (2n x 2n)
$\hat{V}_{k+1}$	matrice des vecteurs gauches itérés (2n x 2q)
V_{k+1}	matrice des vecteurs gauches de Ritz (2n x 2q)
v	vecteur propre gauche

$\hat{v}_{k+1}$	vecteur gauche itéré
v_{k+1}	vecteur gauche de Ritz
w	vecteur arbitraire
α, β	coordonnées de Ritz
β_y, β_z	déformations de cisaillement
ε	tolérance sur les valeurs propres
$\varepsilon^D, \varepsilon^G$	mesures d'erreur sur les éléments propres droits et gauches
η_v, η_H	facteurs d'amortissement visqueux et hystérésique
θ_y, θ_z	rotations
Λ	matrice diagonale des valeurs propres (2n x 2n)
Λ^R_{k+1}	matrice diagonale des valeurs de Ritz (2q x 2q)
λ	valeur propre
μ	masse linéique
σ_0	décalage spectral
ϕ, ϕ	coordonnées de Ritz
χ_y, χ_z	courbures
Ω	vitesse de rotation
ω	pulsation propre

1. INTRODUCTION

1.1 Généralités

Les arbres de machines sont des structures de révolution, composées de plusieurs parties supposées cylindriques de diamètres différents et appuyées sur des paliers. Ils supportent diverses pièces et rotors, dont la morphologie et la fonction diffèrent suivant le type de machine considérée.

Les impératifs techniques et économiques liés à la construction mécanique exigent, afin de diminuer les prix de revient, la conception de structures de plus en plus légères, sans pour autant que la qualité finale ne s'en trouve affectée. Cet objectif est souvent directement associé à une optimisation de leur forme, dont l'un des buts essentiels est de diminuer le volume des matériaux utilisés tout en conservant une résistance acceptable. Ce compromis peut naturellement conduire, pour des machines tournantes qui sont soumises à des excitations dépendant de la vitesse de rotation, à la naissance de phénomènes vibratoires dangereux provoquant bruit, fatigue, voire même rupture. En conséquence, l'ingénieur doit pouvoir s'appuyer sur des modèles et des techniques de résolution qui lui permettent de simuler de manière fiable le comportement dynamique de ces structures complexes dès le stade de l'avant-projet, afin de prévoir le comportement des variantes structurelles envisagés.

L'étude du comportement dynamique des arbres de machines a attiré l'attention de l'ingénieur depuis de nombreuses années. Bien que généralement peu réalistes, mais aisément traitables par des méthodes analytiques classi-

ques, les modèles élémentaires, constitués d'un arbre déformable à masse négligeable et comportant un disque, ont permis de mettre en évidence les aspects fondamentaux de la dynamique des systèmes d'arbres tournants. Ainsi, grâce à ces modèles simples, il a été possible de montrer que les fréquences propres d'un arbre de machine sont dépendantes de la vitesse de rotation, en raison des effets gyroscopiques et des propriétés mécaniques des paliers. Le couplage gyroscopique engendre en effet un mouvement de précession de l'arbre qui peut être, soit direct, soit inverse ou rétrograde, selon que le sens de ce mouvement est identique ou opposé à celui de la rotation propre. Pour certaines vitesses de rotation, appelées vitesses critiques, l'excitation de l 'arbre par des forces telles que celles dues au phénomène de balourd, entraîne des vibrations de fortes amplitudes, pouvant devenir dangereuses. De plus l'arbre peut présenter des zones d'instabilité de fonctionnement qui correspondent à des plages de vitesse de rotation pour lesquelles les déplacements de l'arbre sont amplifiés au cours du temps. Ces phénomènes d'instabilité ont pour origine, entre autres, la présence du frottement interne de l'arbre ou l'action de forces non-conservatives dues à l'interaction de l'arbre avec son environnement. Pour des questions de sécurité, la vitesse de fonctionnement d'un arbre ne doit ainsi ni correspondre à une vitesse critique, ni se situer à l'intérieur d'une zone d'instabilité.

Au cours des dernières années, le développement considérable des moyens de calcul a facilité l'élaboration de modèles et de méthodes d'analyse de plus en plus sophistiqués. Ces derniers permettent de nos jours une étude approfondie et réaliste de ces structures mécaniques, malgré la complexité due aux changements brusques de section qui entraînent discontinuité et non-ré-

gularité des caractéristiques géométriques et massiques de la structure. Ainsi, tout naturellement, la méthode des éléments finis a trouvé dans le domaine du comportement vibratoire des arbres de machines un champ d'application particulièrement approprié. La méthode de discrétisation spatiale par éléments finis considère la structure comme un assemblage d'éléments discrets, chacun d'entre eux étant défini par sa géométrie et ses caractéristiques réparties. L'intérêt de cette technique de discrétisation pour les systèmes d'arbres tournants est dû essentiellement aux raisons suivantes :

- la présence d'un modèle théorique simple à une dimension (théorie des arbres);
- facilité de caractériser l'élément fini:
- la simplicité des interfaces élémentaires qui se ramènent aux noeuds de l'assemblage;
- la formulation aisée des conditions de compatibilité et d'équilibre aux noeuds.

La discrétisation par la méthode des éléments finis aboutit à la construction d'un modèle spatial du système mécanique présentant un degré de raffinement qui n'est pas envisageable, en tout cas pour les phénomènes de flexion, avec les méthodes traditionnelles.

Pour les systèmes gyroscopiques d'arbres tournants, le modèle spatial est défini par des matrices symétriques d'inertie, de rigidité et éventuellement de dissipation, ainsi que par des matrices non-symétriques dues au couplage gyroscopique et à l'action des forces non-conservatives. A partir du modèle spatial, la construction du modèle modal, formé des caractéristiques vibratoires intrinsèques du système, conduit à la résolution d'un problème aux valeurs propres quadratique, défini par des matrices non-symétriques dont les termes dépendent de la vitesse de rotation. De plus, la solution de l'équation matricielle aux valeurs et vecteurs propres relève de l'algèbre complexe. Ainsi, en présence de systèmes mécaniques discrétisés comportant un grand nombre de degrés de liberté, la recherche des éléments propres constitue une étape très laborieuse qui peut même s'avérer prohibitive au niveau de la place mémoire et du temps de calcul, si une technique d'extraction efficace n'est pas adoptée.

1.2 Etat de l'art

Depuis 1970, le degré de précision des modèles d'éléments finis pour l'étude du comportement dynamique des systèmes d'arbres de machines n'a cessé de s'accroître.

Le premier travail concernant la modélisation des systèmes rotor-liaisons par la méthode des éléments finis est attribué à Ruhl et Booker [R1]. Ces auteurs ont élaboré un élément fini d'arbre de classe C^1 caractérisé par deux points nodaux et quatre degrés de liberté par noeud, soit deux translations et deux rotations. Le champ des déplacements, approché par des fonctions polynomiales hermitiennes, est défini à l'intérieur d'un élément

en fonction de deux translations nodales latérales ainsi que de deux rotations nodales qui sont les dérivées spatiales des translations.

L'énergie de déformation de l'élément tient compte exclusivement de la flexion, tandis que l'énergie cinétique n'est due qu'à la translation, selon la théorie d'Euler des poutres élastiques.

Nelson et McVaugh [N1] améliorèrent cet élément fini d'arbre, en introduisant dans sa formulation l'effet gyroscopique et l'inertie de rotation d'après la théorie de Rayleigh des poutres.

Gash [G1] poursuivit le raffinement de ce type d'élément, en englobant dans le modèle un mécanisme déstabilisant dû au frottement interne, de type visqueux. Zorzi et Nelson [Z1] introduisirent, à la suite des travaux de Gunter [G2] et Dimaragonas [D1] sur le frottement interne, un second mécanisme déstabilisant, cette fois de type hystérésique.

Nelson [N2] redéfinit le champ des déplacements transversaux de façon à tenir compte de l'effet de cisaillement d'après la théorie de Timoshenko des poutres.

Une synthèse des travaux disponibles fut réalisée par Nevzat Ozgüven et Levent Ozkan [N3] qui présentèrent la formulation d'un élément fini d'arbre de classe C^1 tenant compte de tous les effets déjà formulés, soit l'effet gyroscopique, l'inertie de rotation, l'effet de cisaillement et le frottement interne de types visqueux et hystérésique.

D'après une étude de Thomas, Wilson et Wilson [T1] présentant une meilleure approximation de la déformation de cisaillement de l'élément fini de poutre par l'adjonction d'un degré de liberté de rotation supplémentaire à chaque noeud, Rouch et Kao [R2] développèrent un nouveau type d'élément fini d'arbre, caractérisé par deux points nodaux à six degrés de liberté, soit deux translations latérales, deux rotations qui en sont les dérivées spatiales et deux rotations associées aux déformations de cisaillement. Approché par des fonctions hermitiennes, le champ des déplacements transversaux à l'intérieur de l'élément est cubique et, par conséquent, l'interpolation des rotations de flexion est quadratique. Les rotations associées aux déformations de cisaillement sont approchées par des fonctions linéaires. Comme cette formulation ne tenait pas compte du frottement interne, Greenhill, Bickford et Nelson [G3] affinèrent l'élément par l'introduction de modèles linéaires de frottement interne, visqueux et hystérésique.

Ainsi, à l'heure actuelle, deux types d'éléments finis d'arbre de haute précision [R2] ont été développés. Bien que tous les deux soient de classe C^1, ils se distinguent fondamentalement par le fait que le premier présente l'avantage d'un faible nombre de degrés de liberté par noeud tandis que le second conduit à une meilleure représentation du comportement de l'arbre. Cette constatation suggère la création d'un élément fini d'arbre qui allie les avantages respectifs des deux types d'éléments disponibles. Remarquons qu'une telle tentative a été proposée dans les références [G3, R2], où une condensation statique des variables nodales correspondant aux déformations de cisaillement a été suggérée, sans que la précision de l'élément ne s'en trouve affectée, la nouvelle formulation demeurant toutefois fort complexe.

D'après les travaux précités, nous remarquons qu'un grand effort a été consacré au raffinement de la modélisation spatiale des systèmes d'arbres de machines. En revanche, le processus d'extraction des valeurs et vecteurs propres des modèles discrets simulant le régime libre des structures tournantes n'a pas reçu autant d'attention. Bien que l'importance des problèmes aux valeurs et vecteurs propres relatifs aux systèmes gyroscopiques ait été clairement mise en évidence ces dernières années, peu de publications dépassent le simple stade de la formulation du problème et traitent de manière approfondie et efficace sa résolution numérique.

Pour les systèmes gyroscopiques dissipatifs, dont le problème aux valeurs propres quadratique associé est défini par des matrices non-symétriques, Borri et Mantegazza [B1] et Dong [D2] proposèrent des algorithmes opérant sur le problème généralisé de dimension $2n$ obtenu par linéarisation du problème quadratique de dimension n. De conception similaire, les deux algorithmes présentés dans ces travaux se basent sur la technique de l'itération simultanée et sur les projections des opérateurs associés au problème généralisé, pour aboutir à un problème aux valeurs propres de dimension réduite dont la solution peut être recherchée par une méthode classique. Ils diffèrent néanmoins par leur mise en oeuvre, l'itération simultanée étant effectuée sur deux ensembles différents de vecteurs itérés dans la première référence et sur un seul ensemble dans la seconde. En raison de la nature complexe, au sens algébrique du terme, de la solution du problème, l'algorithme proposé à la référence [B1] fait appel dès le début à des grandeurs complexes, ce qui constitue un inconvénient majeur à sa mise en oeuvre pratique. En revanche, la référence [D2] présente une technique de combinaison linéaire des vecteurs complexes itérés, de sorte que le calcul complexe est

limité à la solution du problème réduit, ce qui rend l'algorithme plus simple et plus efficace.

Pour les systèmes gyroscopiques conservatifs, Meirovitch [M1, M2] proposa une technique d'extraction des valeurs propres, tenant compte de la nature spécifique du problème gyroscopique. Transformant ce dernier en un problème aux valeurs et vecteurs propres caractérisé par deux matrices réelles et symétriques, la méthode proposée ne peut toutefois être appliquée de façon efficace qu'à des systèmes ayant un faible nombre de degrés de liberté, étant donné que la transformation détruit la configuration en forme de bande des matrices spatiales incluses dans la formulation.

Gupta [G4-G6] présenta des algorithmes basés sur la propriété des suites de Sturm appliquées aux matrices hermitiennes et combinant les méthodes d'itération inverse et de bissection. Ces techniques conservent la structure en forme de bande des matrices associées et sont bien adaptées au cas où les fréquences propres ne sont recherchées que dans une zone particulière. Cependant, elles nécessitent le recours à l'algèbre complexe et exigent, en raison de la technique du décalage spectral inhérent à ce type de procédés, de nombreuses factorisations de la matrice de rigidité. Malgré de récentes améliorations [G7], les coûts de calcul, ainsi que les besoins en places mémoire, sont élevés en présence de matrices à forte largeur de bande, ce qui constitue l'inconvénient majeur de ces techniques.

Une alternative, dérivée de l'algorithme de Lanczos avec orthogonalisation sélective, fut proposée par Bauchau [B2] et Gupta et Lawson [G8]. Cette variante tient compte des propriétés particulières des systèmes gyroscopi-

ques conservatifs et évite le recours aux nombres complexes. Malheureusement, dans la version proposée à la référence [B2], l'algorithme transforme le problème quadratique de base d'ordre n en un problème aux valeurs et vecteurs propres généralisé d'ordre 2n, de sorte qu'il ne tire pas pleinement avantage de la structure en forme de bande des matrices spatiales. De même, la version présentée sous [G8] nécessite la factorisation des matrices spatiales de masse et de rigidité.

1.3 Objectifs du travail

Le but de ce travail est de mettre en oeuvre des méthodes numériques efficaces pour l'analyse dynamique des systèmes d'arbres de machines, tant au niveau de la modélisation spatiale que de la construction du modèle modal (fig. 1.1).

En ce qui concerne la modélisation par la méthode des éléments finis, nous présenterons la formulation d'un élément fini d'arbre de classe C^0 avec interpolation linéaire du champ des déplacements. L'élément fini d'arbre formulé tient compte de tous les effets caractéristiques du comportement dynamique. Le phénomène de blocage en cisaillement, caractéristique de ce type d'élément, est surmonté par la combinaison de la technique sélective et d'un paramètre de correction de la rigidité de cisaillement.

Un des attraits majeurs de cet élément fini d'arbre réside dans la simplicité de sa formulation analytique qui facilite son implantation dans un programme de calcul.

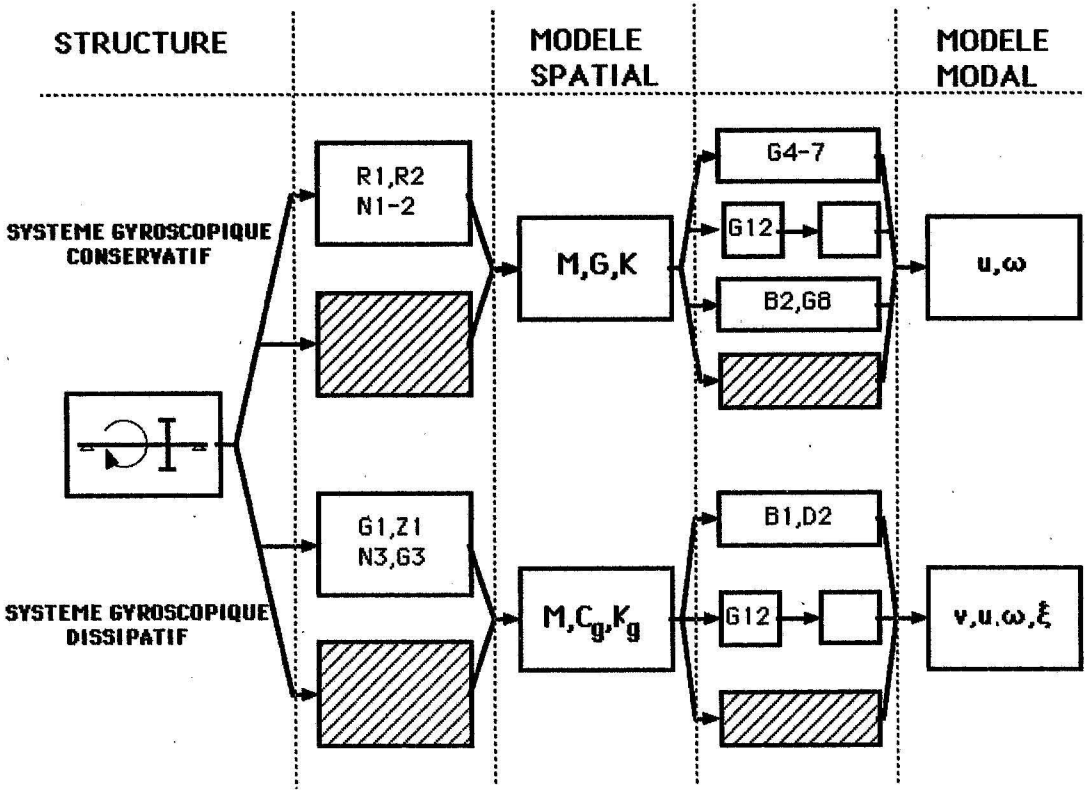


Fig. 1.1 Méthodes numériques de l'analyse modale des arbres de machines

Au niveau des techniques numériques d'extraction des valeurs et vecteurs propres pour l'obtention du modèle modal (fréquences naturelles, amortissements modaux et formes propres) des systèmes d'arbres de machines, nous proposerons deux techniques d'extraction partielle particulièrement bien adaptées aux systèmes dissipatifs ou conservatifs, discrétisés au moyen de la méthode des éléments finis et possédant un grand nombre de degrés de liberté.

Pour les systèmes gyroscopiques dissipatifs, nous développerons un algorithme unifiant sous la même présentation les deux techniques proposées dans les références [B1,D2] et généralisant celles-ci à l'extraction partielle des éléments propres du problème quadratique non-symétrique. L'algorithme consiste fondamentalement en une combinaison d'une technique d'itération inverse simultanée de deux sous-espaces adjoints et de l'analyse de Rayleigh-Ritz généralisée. De plus, une transformation semblable unitaire est appliquée, afin de limiter le calcul avec des grandeurs complexes à l'extraction des valeurs de Ritz. La mise en oeuvre adoptée exploite efficacement, tout en la préservant, la configuration en forme de bande des matrices spatiales. Dès lors, les temps de calcul et les places-mémoires nécessaires pour estimer les valeurs propres de plus petit module, de même que les vecteurs propres adjoints associés, s'en trouvent diminués. Un critère de convergence du processus itératif pour les valeurs propres, ainsi qu'une mesure de la norme d'erreur des éléments propres estimés, seront également proposés.

Pour le calcul du modèle modal des systèmes gyroscopiques conservatifs, nous développerons une technique plus spécifique qui, exploitant efficace-

ment les propriétés particulières de ce type de structure, se révèle bien adaptée à la résolution du problème aux valeurs propres quadratique associé. L'algorithme d'extraction partielle des valeurs et vecteurs propres est basé sur la méthode bien connue de l'itération d'un sous-espace combinée à l'analyse de Rayleigh-Ritz. Malgré la nature complexe de la solution cherchée, la technique proposée fait appel à l'algèbre réelle dès le début du processus itératif. De plus, la configuration en forme de bande des matrices spatiales de rigidité et de masse, ainsi que de la matrice gyroscopique, est entièrement préservée. Il en résulte à nouveau une diminution du temps de calcul et du nombre des places-mémoires nécessaires à la résolution du problème. La sélection du processus numérique, inverse ou direct, associé à l'itération simultanée, les conséquences de ce choix sur la nature de la convergence de la technique, ainsi qu'un critère de vérification par décalage spectral permettant de contrôler la solution estimée seront également examinés.

Dans le chapitre 2, nous rappellerons la formulation des équations différentielles des vibrations transversales des arbres de machines. Au chapitre 3, nous présenterons la formulation de l'élément fini d'arbre de classe C^0, ainsi que les propriétés des matrices définissant le modèle spatial. Les chapitres 4 et 5 seront consacrés à la présentation des modèles modaux des systèmes gyroscopiques respectivement dissipatifs et conservatifs. Dans le chapitre 6, nous développerons l'algorithme d'extraction partielle permettant de calculer le modèle modal des systèmes gyroscopiques dissipatifs, la mise en oeuvre numérique de cet algorithme étant détaillé au chapitre 7. La présentation de l'algorithme d'extraction des paramètres modaux des systèmes gyroscopiques conservatifs sera donnée au chapitre 8, tandis que la

mise en oeuvre numérique de cet algorithme sera décrite au chapitre 9. Nous présenterons au chapitre 10 quelques applications numériques pratiques, mettant en valeur les performances de l'élément fini d'arbre proposé, ainsi que l'efficacité des techniques d'extraction partielle des valeurs et vecteurs propres. Dans le chapitre 11, nous formulerons les conclusions générales du travail entrepris. Enfin, ce mémoire sera complété par une description succincte du développement concret des programmes de calcul associés aux algorithmes proposés.

2. VIBRATIONS TRANSVERSALES DES ARBRES DE MACHINES

Dans ce chapitre, nous rappellerons les équations aux dérivées partielles décrivant les vibrations transversales de flexion des arbres de machines. En outre, nous établirons leur forme intégrale globale équivalente, de façon à introduire le procédé de discrétisation présenté au chapitre suivant.

2.1 Equations différentielles

Un arbre de machine est une structure dont le champ des déplacements pour l'étude des vibrations latérales est caractérisé par les déplacements dans deux plans orthogonaux. Dans la mesure où la distance entre les points nodaux des régimes vibratoires significatifs est sensiblement plus grande que les dimensions transversales de la structure, celle-ci peut être considérée comme une poutre en rotation. Les défauts dus à l'hétérogénéité de la matière, à l'usinage et au montage créent un écart entre l'axe géométrique et la ligne des centres de masse. On admet que le milieu est quasi homogène, c'est-à-dire que l'inhomogénéité est suffisamment importante pour qu'une distinction entre la ligne des centres de masse et l'axe géométrique de la structure soit nécessaire, mais suffisamment faible pour que la théorie des poutres reste applicable. La ligne des centres de masse (courbe gauche) définit un excentrement caractérisé par les projections orthogonales $e_y(x)$ et $e_z(x)$ de son amplitude dans deux plans.

La cinématique d'une section générale de l'arbre par rapport à un repère d'inertie (fig. 2.1) est caractérisée par deux translations $u_y(x,t)$ et $u_z(x,t)$, orientées respectivement selon les directions y et z , ainsi que par deux rotations $\theta_y(x,t)$ et $\theta_z(x,t)$ autour des axes y et z .

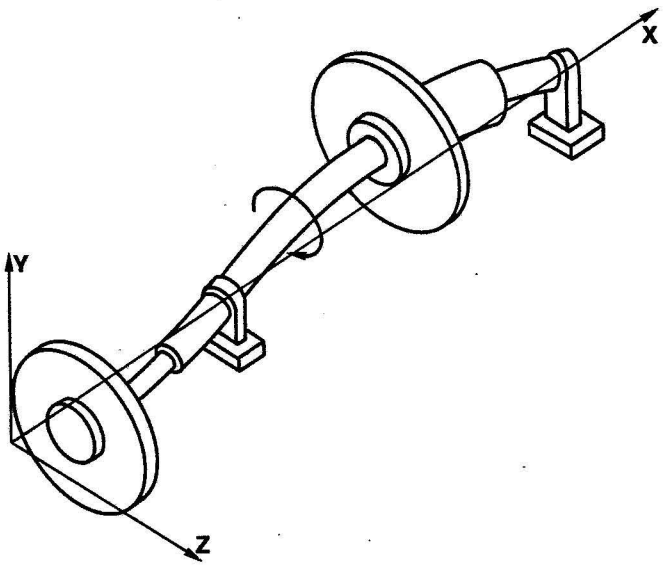


Fig. 2.1 Arbre de machine

Les translations permettent de localiser le centre géométrique de la section droite et les rotations d'orienter le plan de la section. Les déplacements généralisés d'une section droite de l'arbre sont ainsi définis par des fonctions de champ inconnues que l'on peut regrouper dans un vecteur comme suit

$$u(x,t) = [u_y(x,t) \ , \ u_z(x,t) \ , \ \theta_y(x,t) \ , \ \theta_z(x,t)]^T \qquad (2.1)$$

Le comportement élastique lors des vibrations de flexion est régi par les lois de la flexion plane des poutres. Nous utiliserons la théorie de Timoshenko qui permet de tenir compte de l'effet de cisaillement, ainsi que de l'inertie de rotation des sections. Rappelons que, d'après cette théorie, on admet qu'une section plane originalement normale à l'axe neutre demeure plane (gauchissement négligé), mais sous l'effet de l'effort tranchant elle ne reste plus normale à l'axe neutre après déformation. Ainsi, la rotation totale est composée d'une rotation de la tangente à l'axe neutre due à la flexion seule et d'une rotation due à l'effort tranchant.

Les déformations généralisées $\underline{\varepsilon}$ dues à la flexion plane dans les plans xy et xz s'écrivent [G3,T2]

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \beta_y \\ \beta_z \\ \chi_y \\ \chi_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_y' - \theta_z \\ u_z' - \theta_y \\ \theta_y' \\ \theta_z' \end{bmatrix} \qquad (2.2)$$

Dans ce vecteur, β_y et β_z représentent les déformations dues à l'effort tranchant, tandis que χ_y et χ_z sont les déformations dues à la flexion. Dans ce contexte, le terme déformation est pris dans son sens le plus général de distorsion interne, comme par exemple la courbure. Les contraintes généralisées doivent être maintenant définies de sorte que leur produit scalaire avec les déformations soit égal au travail intérieur. Elles cons-

tituent en fait les efforts intérieurs (moment fléchissant et effort tranchant) regroupés dans le vecteur $\underline{\sigma}$ et qui sont donnés par la relation constitutive

$$\underline{\sigma} = [T_y, T_z, M_y, M_z]^T = D\,\underline{\varepsilon} \tag{2.3}$$

Pour un arbre isotrope dont le matériau présente un comportement linéaire élastique, la matrice D, dite d'élasticité, prend la forme généralisée suivante

$$D = \begin{bmatrix} kGA & & & \\ & kGA & & \\ & & EI & \\ & & & EI \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

Dans cette matrice, k, A et I représentent respectivement le facteur de forme, l'aire et le moment d'inertie de la section alors que E et G sont les modules d'élasticité et de glissement du matériau.

Si l'on exprime les déformations généralisées $\underline{\varepsilon}$ en fonction du champ des déplacements $u(x,t)$, il vient

$$\underline{\varepsilon} = B\,u(x,t) \tag{2.5}$$

L'opérateur différentiel B, compte tenu de l'arrangement des variables cinématiques dans le vecteur $u(x,t)$, prend la forme

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \qquad (2.6)$$

En introduisant la relation (2.5) dans l'expression (2.3) des efforts intérieurs, on trouve

$$\underline{\sigma}(x,t) = D(x)\ B\ u(x,t) = S(x)\ u(x,t) \qquad (2.7)$$

où $S(x)$ désigne un opérateur dépendant uniquement de la variable spatiale x .

Les équations aux dérivées partielles de l'équilibre dynamique latéral du mouvement d'un arbre peuvent se déduire, soit par une formulation variationnelle (principe de Hamilton), soit par l'application des équations de Newton et du moment cinétique [B3]. Considérons un élément d'arbre de longueur infinitésimale dx (fig. 2.2).

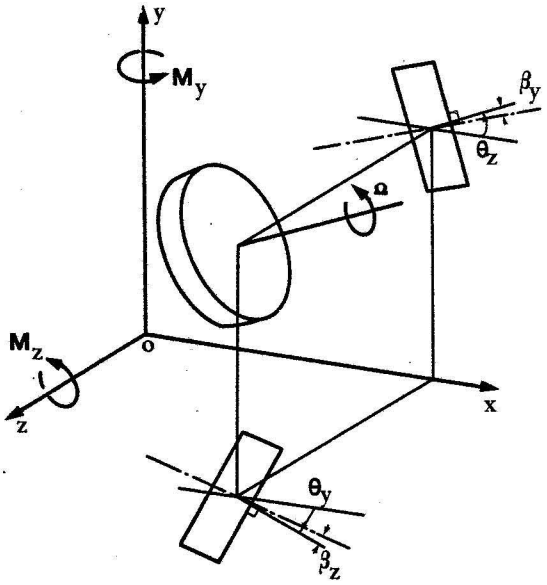


Fig. 2.2 Elément infinitésimal d'arbre

Les équations du mouvement latéral dans un repère fixe s'écrivent, lorsque l'arbre tourne à une vitesse de rotation Ω constante, [B3,H1,L1]

$$\mu \ddot{u}_y - \frac{\partial}{\partial x}[kGA(u_y' - \theta_z)] = \mu\Omega^2(e_y\cos\Omega t - e_z\sin\Omega t)$$

$$\mu \ddot{u}_z - \frac{\partial}{\partial x}[kGA(u_z' - \theta_y)] = \mu\Omega^2(e_y\sin\Omega t + e_z\cos\Omega t)$$

$$J_d\ddot{\theta}_y - \Omega J_p \dot{\theta}_z - \frac{\partial}{\partial x}[EI\ \theta_y'] - kGA(u_z' - \theta_y) = 0$$

$$J_d\ddot{\theta}_z + \Omega J_p \dot{\theta}_y - \frac{\partial}{\partial x}[EI\ \theta_z'] - kGA(u_y' - \theta_z) = 0$$

(2.8)

A ces équations, il faut ajouter huit conditions aux limites, naturelles (mixtes) ou essentielles (cinématiques), de la forme

Naturelles	Cinématiques
$(u_y' - \theta_z) = 0$	u_y défini
$(u_z' - \theta_y) = 0$	u_z "
$\theta_y' = 0$	θ_y "
$\theta_z' = 0$	θ_z "

(2.9)

Les deux premières équations (2.8) traduisent l'équilibre des forces, alors que les deux autres traduisent l'équilibre des moments. En effet, les termes de la première colonne dans (2.8) représentent les forces d'inertie dues à la fois à la masse μdx en translation et au moment d'inertie $J_d dx$ en rotation autour d'un axe transversal. Ces termes proviennent respectivement de l'équation de Newton et de l'équation du moment cinétique, $J_d \ddot{\theta}_y$ et $J_d \ddot{\theta}_z$ étant les composantes principales du moment cinétique selon les axes transversaux. L'effet gyroscopique, dont la particularité principale est de coupler les mouvements selon y et z , se manifeste par l'intermédiaire des termes de couplage $- \Omega J_p \dot{\theta}_z$ et $\Omega J_p \dot{\theta}_y$ présents dans la deuxième colonne des équations (2.8). Ces termes figurent avec des signes opposés dans les deux équations. Il s'agit d'une condition nécessaire et suffisante pour que les moments induits ne soient pas sources d'amortissement. Cette caractéristique constitue un des aspects essentiels de la dynamique des vibrations transversales des arbres de machines. Dans les troisième et quatrième colonnes des relations (2.8), on reconnaît, conformément aux définitions des déformations (2.2) et des contraintes (2.3), les termes qui caractérisent

les efforts de rappel élastique de l'arbre. Enfin, les seconds membres sont égaux aux projections sur les axes y et z de la force centrifuge due à la présence de l'excentrement réparti (fig. 2.3).

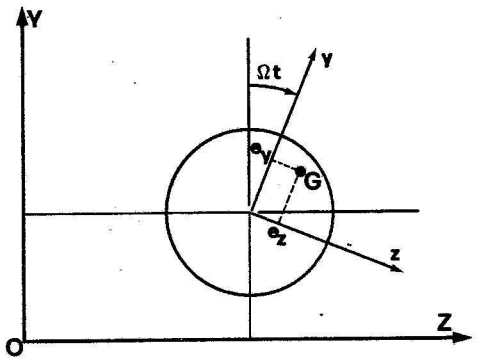


Fig. 2.3 Position relative des centres de masse G et géométrique O_1.

Les équations aux dérivées partielles (2.8) caractérisent les vibrations transversales des arbres isotropes possédant un excentrement et traduisent, à l'échelle locale, l'équilibre des forces généralisées d'un élément infinitésimal.

Par commodité de présentation, nous écrivons, en introduisant la définition (2.1) du champ des déplacements et la relation (2.7), le système d'équations différentielles (2.8) sous la forme condensée suivante

$$J\ddot{u} + N\dot{u} - \frac{\partial}{\partial x}(Su) - ZSu = f \qquad (2.10)$$

Dans cette relation, les opérateurs $J(x)$ et $N(x)$ s'écrivent

$$J = \begin{bmatrix} \mu(x) & & & \\ & \mu(x) & & \\ & & J(x) & \\ & & & J(x) \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & -\varrho J_p(x) \\ & & \varrho J_p(x) & 0 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

L'opérateur différentiel S , défini à la relation (2.7), est fonction de la variable spatiale x et a pour expression

$$S(x) = \begin{bmatrix} kGA\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & -kGA \\ 0 & kGA\frac{\partial}{\partial x} & -kGA & 0 \\ 0 & 0 & EI\frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & EI\frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

La matrice Z prend la forme suivante

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

Pour le vecteur $f(x)$, il vient

$$f(x) = f_c(x) \cos \Omega t + f_s(x) \sin \Omega t$$

$$= \Omega^2 \mu \begin{bmatrix} e_y \\ e_z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cos \Omega t + \Omega^2 \mu \begin{bmatrix} -e_z \\ e_y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \sin \Omega t \qquad (2.15)$$

$$= \Omega^2 \mu \, e_c \cos \Omega t + \Omega^2 \mu \, e_s \sin \Omega t$$

La solution analytique $u = u(x,t)$ de la formulation (2.10) ne peut être trouvée que dans la mesure où les fonctions massiques $\mu(x)$, $J_d(x)$ et $J_p(x)$ et les fonctions géométriques $A(x)$ et $I(x)$, de même que les fonctions d'excentrement $e_y(x)$ et $e_z(x)$, sont suffisamment régulières [L2].

D'éventuelles discontinuités de ces fonctions impliquent que les équations différentielles n'existent pas, au sens usuel, aux points correspondants. Une solution analytique au problème ne peut donc être trouvée qu'en appliquant ces équations à chacun des sous-domaines réguliers dont les limites correspondent aux points de singularité et en imposant des conditions de discontinuité en ces points [G9,L2]. La formulation forte du problème se ramène donc à rechercher une fonction continue $u = u(x,t)$ satisfaisant les équations différentielles en tout point intérieur aux sous-domaines et vérifiant les conditions aux limites ainsi que les conditions de discontinuité.

2.2 Formulation intégrale

Les difficultés apparues au paragraphe précédent peuvent être surmontées en abordant le problème par une forme intégrale. Contrairement à l'approche classique, cette formulation alternative s'accommode des propriétés non régulières précitées. Elle résume en une seule expression intégrale globale, tant les équations différentielles traduisant l'équilibre à l'intérieur de chacun des sous-domaines réguliers que les conditions de continuité de la solution et les conditions de discontinuité aux interfaces [C1,G9].

L'approche intégrale consiste à trouver une solution $u(x,t)$ qui satisfasse les équations différentielles au sens des moyennes pondérées, tout en vérifiant les conditions initiales ainsi que les conditions aux limites du problème. Selon cette démarche, l'intégrale de la fonction résiduelle $r_i(u)$ associée à chacune des équations différentielles (2.10) s'écrit sur chaque sous-domaine $]\, x_i\ ,\ x_{i+1}\, [$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} < w,\ r_i(u) > dx$$

$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}} < w,\ J\ddot{u} > dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} < w,\ N\mathring{u} > dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} < w,\ \frac{\partial}{\partial x}(Su) > dx$$

$$- \int_{x_i}^{x_{i+1}} < w,\ ZSu > dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} < w,f > dx \qquad (2.16)$$

Dans cette expression, le symbole $<...,...>$ représente un produit scalaire et w désigne une fonction test admissible, c'est-à-dire appartenant à la classe des fonctions qui donnent un sens aux intégrales.

En intégrant par parties le terme associé aux contraintes généralisées, il vient

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \langle w, \frac{\partial}{\partial x} (Su) \rangle \, dx = - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \langle \frac{\partial w}{\partial x}, Su \rangle \, dx + \langle w, Su \rangle \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} \qquad (2.17)$$

Comme la fonction test w est supposée suffisamment régulière, l'expression de l'intégrale globale s'écrit, après sommation des intégrales sur les sous-domaines et prise en compte des conditions de discontinuités,

$$\begin{aligned} \int_0^\ell \langle w, r(u) \rangle \, dx &= \sum_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \langle w, r_i(u) \rangle \, dx \\ &= \int_0^\ell \langle w, J\ddot{u} \rangle \, dx + \int_0^\ell \langle w, N\dot{u} \rangle \, dx + \int_0^\ell \langle (\frac{\partial w}{\partial x} - Z^T w), Su \rangle \, dx \\ &\quad - \int_0^\ell \langle w, f \rangle \, dx - \langle w, Su \rangle \Big|_\ell + \langle w, Su \rangle \Big|_0 \end{aligned} \qquad (2.18)$$

En admettant que les conditions aux limites soient de type essentiel (ce qui signifie que la fonction test s'annule en ces points) et en remplaçant l'opérateur S par la relation (2.7), l'expression ci-dessus devient

$$\begin{aligned} \int_0^\ell \langle w, r(u) \rangle \, dx &= \int_0^\ell \langle w, J\ddot{u} \rangle \, dx + \int_0^\ell \langle w, N\dot{u} \rangle \, dx + \int_0^\ell \langle (\frac{\partial w}{\partial x} - Z^T w), DBu \rangle \, dx \\ &\quad - \int_0^\ell \langle w, f \rangle \, dx \end{aligned} \qquad (2.19)$$

En assimilant la fonction w aux déplacements virtuels généralisés ($w=\delta u$) et en tenant compte des relations (2.2) et (2.5), la formulation faible consiste en fait à rechercher la solution $u(x,t)$ qui vérifie les condi-

tions initiales et aux limites du problème et qui satisfait l'équation

$$\int_0^\ell \langle \delta u, J\ddot{u} \rangle \, dx + \int_0^\ell \langle \delta u, N\dot{u} \rangle \, dx + \int_0^\ell \langle B\delta u, DBu \rangle \, dx - \int_0^\ell \langle \delta u, f \rangle \, dx = 0$$

$$(\forall \delta u) \qquad (2.20)$$

Remarquons que cette expression, en imposant que le travail virtuel total soit nul, traduit l'équilibre global du système.

Pour introduire le frottement interne dans la formulation, nous adoptons les modèles linéaires visqueux et hystérésique développés dans les références [D1,L3,N3,Z1]. Selon ces modèles, les forces de frottement hystérésique sont proportionnelles aux forces élastiques [L3,Z1], alors que les forces visqueuses sont proportionnelles aux vitesses de déformation [E1,G2]. Sur la base de ces hypothèses, l'expression du travail virtuel devient

$$\int_0^\ell \langle \delta u, J\ddot{u} \rangle \, dx + \int_0^\ell \langle \delta u, N\dot{u} \rangle \, dx + \int_0^\ell \eta_v \langle \delta u, B^T DB\dot{u} \rangle \, dx$$

$$+ \int_0^\ell \eta_a \langle \delta u, B^T DBu \rangle \, dx + \int_0^\ell \eta_b \langle \delta u, B^T N_f DBu \rangle \, dx - \int_0^\ell \langle \delta u, f \rangle \, dx = 0$$

(2.21)

Dans cette relation, la matrice antisymétrique N_f prend la forme

$$N_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (2.22)$$

alors que les paramètres η_a et η_b s'écrivent

$$\eta_a = \frac{1 + \eta_H}{\sqrt{1+\eta_H^2}} \tag{2.23}$$

$$\eta_b = \Omega\eta_v + \frac{\eta_H}{\sqrt{1+\eta_H^2}} \tag{2.24}$$

Les quantités η_H et η_v caractérisent l'amortissement hystérésique et visqueux du matériau de l'arbre. Remarquons que, si le frottement interne est négligé ($\eta_H = \eta_v = 0$), on retrouve la forme faible (2.20) des systèmes conservatifs.

2.3 Disques minces indéformables

Les organes portés par l'arbre peuvent être considérés comme des disques minces indéformables [A1,B3] qui contribuent uniquement aux termes d'inertie. Leur excentrement constitue une source de forces de balourd mais n'a pas d'influence appréciable sur les moments d'inertie.

D'après l'expression (2.20) du travail virtuel d'un élément infinitésimal de l'arbre, les forces d'inertie d'un disque mince indéformable, placé au point $x = x_i$ et tournant à une vitesse constante Ω, fournissent le travail virtuel

$$\delta W_d = [\delta u^T M^d \ddot{u} + \delta u^T G^d \dot{u} - \delta u^T f^d]_{x=x_i} \tag{2.25}$$

Dans cette relation, le vecteur $u(x_i,t)$ représente les déplacements du centre géométrique du disque alors que M^d et G^d sont respectivement la matrice d'inertie et de couplage gyroscopique. Ces matrices ont pour expressions

$$M^d = \begin{bmatrix} m^d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m^d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_d^d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_d^d \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

$$G^d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega J_p^d \\ 0 & 0 & -\Omega J_p^d & 0 \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

dans lesquelles m^d représente la masse du disque, J_d^d le moment d'inertie diamétral et J_p^d le moment d'inertie polaire ($J_p^d = 2\, J_d^d$) . Le vecteur f^d , représentant le balourd, prend la forme

$$f^d = \Omega^2 m^d \begin{bmatrix} e_y^d \\ e_z^d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cos \Omega t + \Omega^2 m^d \begin{bmatrix} -e_z^d \\ e_y^d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \sin \Omega t \tag{2.28}$$

Dans cette expression, e_y^d et e_z^d désignent, à l'instant de référence, les projections selon les axes y et z de l'excentrement du disque.

Remarquons que les disques apportent une contribution purement locale le long de l'axe de l'arbre. Ils introduisent donc une discontinuité dans les efforts de cisaillement et de flexion.

2.4 Paliers

Le comportement dynamique d'un arbre de machine appuyé sur des paliers hydrodynamiques est fortement influencé par les propriétés mécaniques du film d'huile. Un mouvement instable de l'arbre peut même se produire [A2, A3, R3].

Les forces de réaction du film d'huile sont fonctions des coordonnées du centre de l'arbre, des vitesses correspondantes et du nombre de Sommerfeld [L4]. Le comportement d'un palier hydrodynamique est essentiellement non-linéaire et non-conservatif [L4]. Néanmoins, pour une charge radiale donnée et pour des petits mouvements du centre de l'arbre autour de la position d'équilibre, on peut linéariser les relations qui lient les forces de réaction du film d'huile aux déplacements et aux vitesses [A2, A3]. Dans ces conditions, un modèle linéaire satisfaisant d'un palier hydrodynamique peut être caractérisé par quatre rigidités et quatre coefficients de dissipation [G1], (fig. 2.4).

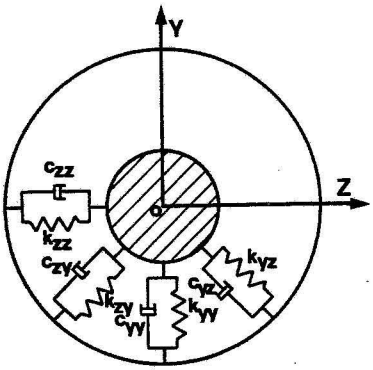


Fig. 2.4 Modèle de palier

Ainsi, chacun des paliers du système peut être représenté par une matrice de rigidité et une matrice de dissipation. On suppose ici que chacun des paliers établit une liaison entre les degrés de liberté de translation d'un point x_j de l'arbre et un support fixe. Les forces de liaison correspondantes sont données par la relation suivante

$$f^p(\Omega) = [K^p(\Omega)\ u + C^p(\Omega)\ \dot{u}]_{x = x_j} \qquad (2.29)$$

dans laquelle $K^p(\Omega)$ et $C^p(\Omega)$ sont respectivement la matrice de rigidité et celle de dissipation. Ces matrices de dimension (4x4) s'écrivent

$$K^p(\Omega) = \begin{bmatrix} K_{yy}(\Omega) & 0 & K_{yz}(\Omega) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{zy}(\Omega) & 0 & K_{zz}(\Omega) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (2.30)$$

$$C^P(\Omega) = \begin{bmatrix} C_{yy}(\Omega) & 0 & C_{y\dot{z}}(\Omega) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{z\dot{y}}(\Omega) & 0 & C_{z\dot{z}}(\Omega) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

La détermination des rigidités et coefficients de dissipation peut être effectuée de façon analytique ou expérimentale [C2, L4]. L'anisotropie du palier, qui se traduit par la non-symétrie des matrices $K^P(\Omega)$ et $C^P(\Omega)$ est la cause principale d'une éventuelle instabilité du mouvement de l'arbre [G1].

Quant au travail virtuel des forces non-conservatives de liaison, il est donné par l'expression matricielle

$$\delta W_p = \left[\delta u^T K^P(\Omega)\, u + \delta u^T C^P(\Omega)\, \dot{u}\right]_{x=x_j} \tag{2.32}$$

dans laquelle le vecteur δu désigne le champ des déplacement virtuels.

3. MODELE SPATIAL-DISCRETISATION PAR ELEMENTS FINIS

La méthode des éléments finis peut être considérée comme une extension de la méthode de Galerkin qui consiste à construire une fonction approchée sous la forme d'une combinaison linéaire d'un nombre fini de fonctions d'interpolation. L'inconvénient principal de la méthode de Galerkin réside dans le fait que les fonctions d'interpolation sont définies globalement sur le domaine étudié, de sorte qu'il devient difficile d'analyser des géométries complexes. Dans la méthode des éléments finis, par contre, le domaine considéré est dicrétisé en un nombre fini de sous-domaines, appelés éléments, reliés entre eux en un nombre également fini de points nodaux ou noeuds. La solution approchée du problème peut alors être trouvée par une combinaison linéaire de fonctions d'interpolation à support compact, c'est-à-dire non nulles uniquement sur les sous-domaines adjacents à un noeud et non sur l'ensemble du domaine considéré. Cette décomposition en éléments finis simplifie alors la construction des fonctions d'interpolation.

L'approximation de la solution cherchée et de la fonction test par des polynômes par morceaux dans la forme intégrale (2.19) conduit alors à un système d'équations différentielles ordinaires caractérisé par des matrices et des vecteurs globaux. Comme les fonctions choisies sont à support compact, il est possible de restreindre la forme intégrale à chacun des éléments finis et de construire des matrices spatiales élémentaires qui, par assemblage, forment les matrices globales cherchées. La méthode des éléments finis constitue dès lors un procédé systématique pour la construction de l'approximation de la solution cherchée. Elle est ainsi particulièrement bien adaptée au calcul automatique. Nous allons utiliser cette approche pour formuler l'élément fini d'arbre de classe C^0 avec une interpolation linéaire.

3.1 Discrétisation de la forme intégrale globale

Afin de construire, par éléments finis, la solution approchée d'un arbre de machine, admettons que le domaine considéré soit discrétisé en un réseau composé de E éléments. Comme la solution approchée doit satisfaire notamment le critère de différentiabilité à l'intérieur d'un élément, ce réseau sera construit de manière qu'en tous les points de discontinuité des données géométriques soit situé un point nodal. Dès lors, chaque élément peut être considéré comme un sous-domaine régulier (fig. 3.1).

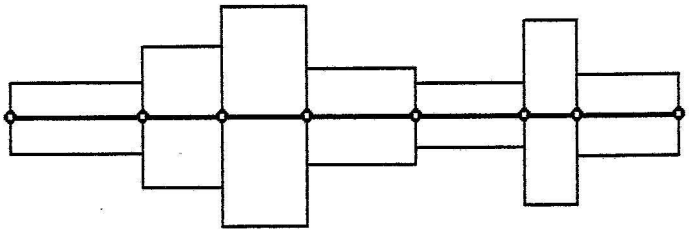


Fig. 3.1 Discrétisation d'un arbre en éléments finis

Le réseau d'éléments finis comporte N points nodaux (N = E+1). Le vecteur des variables nodales globales possède ainsi 4N composantes et s'écrit

$$a = [\ldots, u_y^i, u_z^i, \theta_y^i, \theta_z^i, \ldots]^T \qquad i = 1,\ldots,N \tag{3.1}$$

Comme les fonctions d'interpolation sont à support compact, la méthode des éléments finis permet de remplacer la forme intégrale globale (2.21) par une somme de formes intégrales élémentaires qui conduisent à la définition des matrices spatiales dites locales ou élémentaires.

En restreignant la solution cherchée et la fonction test à un élément fini noté e , la forme faible globale (2.21) peut s'écrire

$$\int_0^{\ell} \langle w, r(u) \rangle dx = \sum_{e=1}^{E} \Big[\int_{\ell^e} \delta^e u^T J^e \ddot{u} \, dx + \int_{\ell^e} \delta^e u^T N^e \dot{u} \, dx + \int_{\ell^e} \eta_v \delta^e u^T B^T D B^e \dot{u} \, dx$$

$$+ \int_{\ell^e} \eta_a \delta^e u^T B^T D B^e u \, dx + \int_{\ell^e} \eta_b \delta^e u^T B^T N_f D B^e u \, dx$$

$$- \int_{\ell^e} \delta^e u^T {}^e f \, dx \Big] = 0 \qquad (3.2)$$

En raison du fait que dans l'expression ci-dessus, la variable spatiale ainsi que les variables cinématiques sont restreintes au domaine de l'élément e , l'approximation est locale sur chaque sous-domaine. Par conséquent, elle ne fait intervenir que les variables nodales attachées aux noeuds situés sur sa frontière (fig. 3.2).

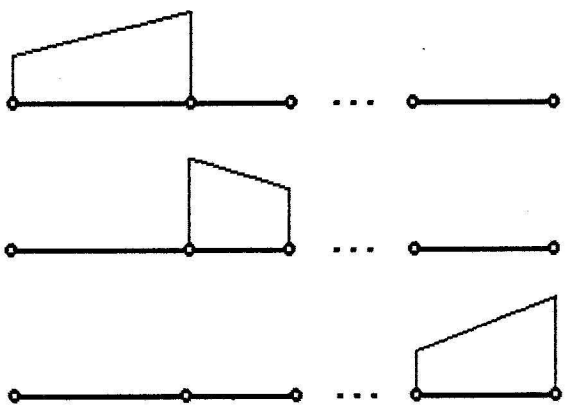


Fig. 3.2 Approximation locale de la solution cherchée

Pour définir l'approximation locale du champ des déplacements à l'intérieur de chaque sous-domaine, isolons dans le maillage un élément générique e dont les deux points nodaux sont numérotés localement 1 et 2. La correspondance entre chaque noeud de l'élément e et la numérotation globale est établie par une table de connectivités. De plus, il faut définir la correspondance entre les variables nodales globales et les variables nodales élémentaires. Cette correspondance peut être établie au moyen de la relation matricielle suivante [F1, M3]

$$ {}^{e}a = {}^{e}A\, a \qquad (3.3) $$

dans laquelle ${}^{e}a$ représente le vecteur des variables nodales élémentaires

$$ {}^{e}a = [u_y^1,\ u_z^1,\ \theta_y^1,\ \theta_z^1,\ u_y^2,\ u_z^2,\ \theta_y^2,\ \theta_z^2]^T \qquad (3.4) $$

La matrice ${}^{e}A$, dite de localisation de l'élément, est rectangulaire de dimension (8x4N). D'autre part, elle est booléenne car chaque ligne ne comporte qu'un seul terme non nul, égal à l'unité. La position de ce terme doit être telle que la relation (3.3) soit une identité. Remarquons qu'une variable du vecteur global a apparaît généralement dans deux vecteur élémentaire ${}^{e}a$, puisqu'à l'exception des noeuds de frontière du domaine, chaque point nodal appartient à deux éléments.

Semblablement, les vecteurs élémentaires des vitesses et des accélérations, notés respectivement ${}^{e}\dot{a}$ et ${}^{e}\ddot{a}$, sont liés aux vecteurs globaux par les relations

$$ {}^{e}\dot{a} = {}^{e}A\ \dot{a} \tag{3.5} $$

$$ {}^{e}\ddot{a} = {}^{e}A\ \ddot{a} \tag{3.6} $$

Les relations (3.3-6) définissant la localisation de l'élément e dans le réseau sont utilisées lors du processus d'assemblage.

3.2 Approximation locale ou élémentaire

Regroupons les quatre variables de champ de l'élément fini dans le vecteur ${}^{e}u(x,t)$ sous la forme

$$ {}^{e}u(x,t) = \left[{}^{e}u_y(x,t), {}^{e}u_z(x,t), {}^{e}\theta_y(x,t), {}^{e}\theta_z(x,t)\right]^T \tag{3.7} $$

L'approximation locale du champ des déplacements consiste à exprimer les fonctions inconnues à l'intérieur de l'élément au moyen des variables nodales élémentaires et des fonctions d'interpolation élémentaires. Ainsi, l'approximation linéaire du champ des déplacements peut s'écrire

$$ {}^{e}u(x,t) = \begin{bmatrix} N_1(x)\ u_y^1(t) + N_2(x)\ u_y^2(t) \\ N_1(x)\ u_z^1(t) + N_2(x)\ u_z^2(t) \\ N_1(x)\ \theta_y^1(t) + N_2(x)\ \theta_y^2(t) \\ N_1(x)\ \theta_z^1(t) + N_2(x)\ \theta_z^2(t) \end{bmatrix} \tag{3.8} $$

Les fonctions d'interpolation $N_1(x)$ et $N_2(x)$ sont linéaires en la variable spatiale x et doivent satisfaire les conditions de continuité suivantes

$$N_j(x_i) = \delta_{ji} \qquad x_1 \leq x \leq x_2 \qquad i,j = 1,2 \tag{3.9}$$

où δ_{ji} représente le symbole de Kronecker.

Ces fonctions sont en fait les restrictions au sous-domaine considéré des fonctions d'interpolation globale à support compact.

Les fonctions élémentaires d'interpolation, connues sous le nom de fonctions de forme [Z1], s'écrivent pour un élément de classe C^0 à deux noeuds (fig. 3.3)

$$N_1(x) = \frac{-x + x_2}{x_2 - x_1} \tag{3.10}$$

$$x_1 \leq x \leq x_2$$

$$N_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \tag{3.11}$$

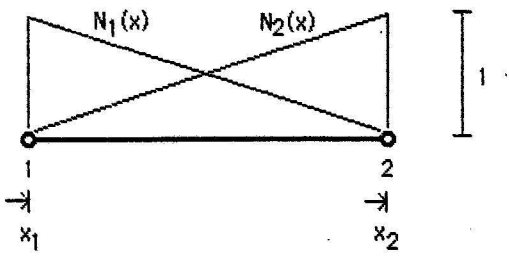


Fig. 3.3 Fonctions de forme.

La relation d'approximation (3.8) peut être généralisée aux champps des vitesses et des accélérations à l'intérieur de l'élément, exprimés en fonction respectivement des vitesses et des accélérations nodales.

Remarquons que les fonctions de forme $N_i(x)$, $(i = 1,2)$, doivent satisfaire les critère de convergence suivants :

- Chacun des termes figurant dans les intégrales caractérisant la formulation faible doit conduire à une valeur constante unique sur le domaine de l'élément (critère de complétude);

- La fonction cherchée u doit être continue aux interfaces (critère de continuité);

- Ces fonctions doivent être suffisamment régulières, c'est-à-dire différentiables à l'intérieur de l'élément, pour garantir que la fonction cherchée u et sa dérivée première soient de carré sommable (critère de différentiabilité).

Les fonctions de forme définies par les expressions (3.10-11) dépendent des coordonnées des noeuds de l'élément et sont donc différentes pour chaque élément. Afin de surmonter cet inconvénient, il est intéressant d'utiliser, à la place du système de coordonnées physiques, un système de coordonnées intrinsèques ou naturelles. Par une transformation du domaine physique de l'élément en un domaine géométrique simple et adimensionnel, ces coordonnées naturelles, prenant les valeurs -1 et $+1$ aux noeuds respectivement 1 et 2 de l'élément (fig. 3.4), sont liées aux coordonnées physiques par la relation triviale

$$\xi = \frac{2}{x_2 - x_1}\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right) \tag{3.12}$$

ou inversement

$$x = \frac{1}{2}(1-\xi)x_1 + \frac{1}{2}(1+\xi)x_2$$

$$= N_1(\xi)x_1 + N_2(\xi)x_2 \tag{3.13}$$

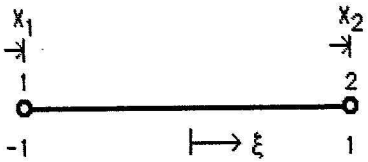


Fig. 3.4 Coordonnées naturelles ou intrinsèques.

Les fonctions d'interpolation géométrique $N_1(\xi)$ et $N_2(\xi)$, associées respectivement aux noeuds 1 et 2, s'écrivent alors

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi) \tag{3.14}$$

$$N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi) \tag{3.15}$$

D'après les relations (3.10-11) et (3.14-15), nous constatons que les fonctions d'interpolation du champ des déplacements sont identiques aux fonctions de transformation géométrique. Dès lors, l'élément est dit isoparamétrique [D3,Z1]. Contrairement aux expressions (3.10-11), les fonctions $N_1(\xi)$ et $N_2(\xi)$ sont cette fois indépendantes de la géométrie de l'élément et peuvent donc être utilisées pour tous les éléments.

D'après la transformation (3.12), l'opérateur différentiel $\frac{\partial}{\partial \xi}$ s'écrit sous la forme suivante

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} = J^e \frac{\partial}{\partial x} \tag{3.16}$$

où J^e représente le jacobien de la transformation qui a pour expression, d'après (3.13),

$$J^e = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} x_2 \tag{3.17}$$

Pour l'élément unidimensionnel considéré, il vient

$$J^e = \frac{\ell^e}{2} \tag{3.18}$$

Afin de préparer l'introduction des approximations élémentaires dans la forme intégrale (3.2), écrivons l'expression (3.17) sous la forme matricielle suivante

$$^e u(x,t) = H^e a \tag{3.19}$$

Les vecteurs ${}^{e}u(x,t)$ et ${}^{e}a$ représentent respectivement le champ des déplacements à l'intérieur de l'élément et le vecteur des variables nodales élémentaires. D'autre part, H est une matrice rectangulaire de dimension (4x8), dite matrice d'interpolation, de la forme

$$H = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

De façon identique, les champs des vitesses et des accélérations sont donnés par les expressions

$${}^{e}\dot{u}(x,t) = H^{e}\,\dot{a} \tag{3.21}$$

$${}^{e}\ddot{u}(x,t) = H^{e}\,\ddot{a} \tag{3.22}$$

Les vecteurs ${}^{e}\dot{a}$ et ${}^{e}\ddot{a}$ représentent respectivement les vitesses et les accélérations nodales.

D'après les définitions (2.5-6), la matrice de passage des déplacements aux déformations généralisées s'écrit sous la forme suivante, compte tenu des relations (3.16-18),

$$BH = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi}\frac{2}{\ell^e} & 0 & 0 & -N_1 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi}\frac{2}{\ell^e} & 0 & 0 & -N_2 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \xi}\frac{2}{\ell^e} & -N_1 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi}\frac{2}{\ell^e} & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \xi}\frac{2}{\ell^e} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi}\frac{2}{\ell^e} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \xi}\frac{2}{\ell^e} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi}\frac{2}{\ell^e} \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

En reportant les approximations élémentaires (3.19) et (3.21-22) dans la forme intégrale (3.2), nous obtenons

$$\sum_{e=1}^{E} \delta\, {}^e a^T \Big[\int_{\ell^e} H^T J H\, {}^e\ddot{a}\, dx + \int_{\ell^e} H^T N H\, {}^e\dot{a}\, dx + \int_{\ell^e} \eta_v (BH)^T D(BH)\, {}^e\dot{a}\, dx + \int_{\ell^e} \eta_a (BH)^T D(BH)\, {}^e a\, dx + \int_{\ell^e} \eta_b\, (BH)^T N_f D(BH)\, {}^e a\, dx - \int_{\ell^e} H^T f\, dx \Big] = 0 \qquad (\forall\, \delta a) \tag{3.24}$$

Remplaçons les produits matriciels par les expressions

$${}^eM = \int_{\ell^e} H^T J\, H\, dx \tag{3.25}$$

$${}^eG = \int_{\ell^e} H^T N\, H\, dx \tag{3.26}$$

$${}^eK = \int_{\ell^e} (BH)^T D(BH)\, dx \tag{3.27}$$

$${}^eK_c = \int_{\ell^e} (BH)^T N_f D(BH)\, dx \tag{3.28}$$

$$ {}^{e}C = \int_{\ell^e} \eta_v \, (BH)^T \, D(BH) \, dx = \eta_v \, {}^{e}K \qquad (3.29) $$

$$ {}^{e}f = \int_{\ell^e} H^T \, f \, dx \qquad (3.30) $$

Ces relations définissent les matrices élémentaires de masse ${}^{e}M$, de couplage gyroscopique ${}^{e}G$, de rigidité ${}^{e}K$, de couplage de frottement ${}^{e}K_c$ et de dissipation ${}^{e}C$. Par ailleurs, ${}^{e}f$ est le vecteur élémentaire des sollicitations. La relation (3.24) peut alors s'écrire sous la forme matricielle

$$ \sum_{e=1}^{E} \delta \, {}^{e}a^T [{}^{e}M \, {}^{e}\ddot{a} + ({}^{e}C + {}^{e}G) {}^{e}\dot{a} + (\eta_a \, {}^{e}K + \eta_b \, {}^{e}K_c) {}^{e}a - {}^{e}f] = 0 \qquad (\forall \delta a) \qquad (3.31) $$

D'après les définitions des opérateurs J et D , les matrices élémentaires de masse, de rigidité et de dissipation sont symétriques. Par contre, les matrices de couplage gyroscopique et de couplage de frottement sont antisymétriques car les opérateurs N et N_f dans les expressions (3.26) et (3.28) sont antisymétriques. De plus, les matrices élémentaires sont dites consistantes ou cohérentes parce qu'elles sont obtenues en utilisant les mêmes fonctions d'interpolation pour les champs des déplacements, des vitesses et des accélérations.

3.4 Matrices élémentaires

Le calcul des matrices élémentaires par intégration explicite ou numérique est aisé. Par contre, il est bien connu que l'intégration exacte de la matrice de rigidité de ce type d'élément de classe C^0 , avec cisaillement

transversal peut conduire à de graves imprécisions, en particulier lorsqu'il s'agit d'une structure élancée (rapport ℓ/d élevé), [I1,B5].

Quand on utilise l'intégration numérique de Gauss pour calculer ces matrices, une étude du degré de la variable naturelle ξ dans la fonction intégrale est nécessaire, afin de déterminer le nombre de points à utiliser dans la quadrature. D'après l'expression (3.21), le degré maximum de ξ dans les fonctions intégrales (3.25) et (3.26) est égal à deux. Il faut donc utiliser une quadrature de Gauss à deux points pour calculer de façon exacte les matrices de masse et de couplage gyroscopique.

Pour la matrice de masse ${}^eM$, il vient

$$
\begin{aligned}
{}^eM &= \int_{-1}^{1} H^T \, JH \, J^e \, d\xi \\
&= \frac{\ell^e}{2} \left[H^T\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) J \, H\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + H^T\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) J \, H\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right]
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

En effectuant le calcul matriciel dans l'expression ci-dessus, la matrice ${}^eM$ devient

$$
[{}^eM] = \frac{\mu\ell^e}{6}
\begin{bmatrix}
2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & & 2r^2 & 0 & 0 & 0 & r^2 & 0 \\
 & & & 2r^2 & 0 & 0 & 0 & r^2 \\
 & & & & 2 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & 2 & 0 & 0 \\
 & \text{symétrique} & & & & & 2r^2 & 0 \\
 & & & & & & & 2r^2
\end{bmatrix}
\tag{3.33}
$$

Dans ce résultat, μ et r représentent respectivement la masse linéique et le rayon de giration de la section de l'élément de longueur ℓ^e.

De façon identique, pour la matrice de couplage gyroscopique on obtient

$$ {}^eG = \int_{-1}^{1} H^T \, N \, H \, J^e \, d\xi $$

$$ = \frac{\ell^e}{2} \left[H^T\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) N \, H\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + H^T\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) N \, H\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right] \qquad (3.34) $$

Après calcul, la matrice ${}^eG$ s'écrit, J_p étant le moment d'inertie polaire,

$$ \left[{}^eG\right] = \frac{J_p \ell^e}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 \\ \text{antisymétrique} & & & & & & 0 & 2 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \qquad (3.35) $$

D'après la définition (3.21) de la matrice des déformations, l'intégration exacte de la matrice de rigidité élémentaire (3.27) nécessite une quadrature à deux points. Néanmoins, lorsque l'arbre est élancé, la précision se dégrade très rapidement, le comportement des éléments étant fortement conditionné par le cisaillement [B5, C3, P1]. On parle alors d'un phénomène de blocage en cisaillement (shear-locking). Par conséquent, cet élément de

classe C^0 avec intégration exacte des rigidités est incapable de simuler correctement le comportement en poutre de type Euler-Bernoulli. Son usage doit être limité à la modélisation d'arbres de faible élancement. Des techniques permettant de surmonter cet inconvénient sont proposées dans la littérature [K1, P1, C4]. La plus répandue consiste à calculer la matrice de rigidité avec une intégration sélective, en intégrant de façon exacte les termes associés à l'énergie de flexion et en sous-intégrant les termes associés à l'énergie de cisaillement [O1, P1]. Une autre méthode consiste à corriger la matrice intégrée de façon exacte par un paramètre fictif de cisaillement, dépendant du type de problème abordé (conditions aux limites et géométrie) [I1, K1].

Pour l'élément fini d'arbre formulé ici, nous adoptons la technique de l'intégration sélective. Cette technique décompose la matrice de rigidité selon les effets de flexion et de cisaillement, la rigidité de flexion étant intégrée de façon exacte ($\frac{2}{1}$ point) et la rigidité de cisaillement de manière réduite (1 point). De plus, comme dans la référence [C4], nous affectons la matrice de cisaillement d'un facteur déterminé selon une formulation basée sur le principe de l'énergie potentielle complémentaire. Dans le cas d'un élément d'arbre de section circulaire, ce facteur a pour valeur

$$\phi = \frac{12\ EI}{KGA(\ell^e)^2} \tag{3.36}$$

Cette technique conduit à une très bonne convergence pour tout rapport d'élancement [C4]. Elle conduit à une matrice de rigidité égale à celle présentée dans la référence [P2] et à celle que l'on obtiendrait en conden-

sant les degrés de liberté de cisaillement de l'élément fini de type C^1 développé aux références [G3, T1]. Ainsi, pour l'élément d'arbre de classe C^0 la matrice de rigidité ${}^eK$ s'écrit

$$[{}^eK] = \frac{EI}{\ell^e}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 \\ \text{symétrique} & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{\phi}{1+\phi}\,KGA\begin{bmatrix} 1/\ell^e & 0 & 0 & 1/2 & -1/\ell^e & 0 & 0 & 1/2 \\ & 1/\ell^e & 1/2 & 0 & 0 & -1/\ell^e & 1/2 & 0 \\ & & \ell^e/4 & 0 & 0 & -1/2 & \ell^e/4 & 0 \\ & & & \ell^e/4 & -1/2 & 0 & 0 & \ell^e/4 \\ & & & & 1/\ell^e & 0 & 0 & 1/2 \\ & & & & & 1/\ell^e & 1/2 & 0 \\ \text{symétrique} & & & & & & \ell^e/4 & 0 \\ & & & & & & & \ell^e/4 \end{bmatrix} \qquad (3.37)$$

D'après la définition (2.15) du vecteur des sollicitations, le vecteur élémentaire ${}^ef$ donné par la relation (3.30) peut se mettre sous la forme

$${}^ef = {}^ef_c \cos \Omega t + {}^ef_s \sin \Omega t \qquad (3.38)$$

dans laquelle les vecteurs ${}^{e}f_c$ et ${}^{e}f_s$ sont donnés par les relations

$$ {}^{e}f_c = \Omega^2 \int_{\ell^e} \mu H^T e_c \, dx \qquad (3.39) $$

$$ {}^{e}f_s = \Omega^2 \int_{\ell^e} \mu H^T e_s \, dx \qquad (3.40) $$

Quand l'excentrement est constant dans chaque élément, le degré le plus élevé de ξ dans les expressions (3.39-40) est égal à un. Par conséquent, un point de Gauss suffit pour calculer ces deux intégrales. Ainsi, le vecteur élémentaire des sollicitations devient

$$ {}^{e}f = \Omega^2 \frac{\mu\ell}{2} e_c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cos \Omega t + \Omega^2 \frac{\mu\ell}{2} e_s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \sin \Omega t \qquad (3.41) $$

Il est clair que l'ordre d'intégration va s'accroître quand l'excentrement varie dans les éléments.

3.5 Assemblage de la forme globale discrétisée

L'assemblage est l'opération qui consiste à construire les matrices globales et le vecteur global des sollicitations à partir des contributions élémentaires. C'est en fait l'opération inverse de la localisation des variables nodales élémentaires décrite au paragraphe 3.1.

Pour exprimer la forme intégrale discrétisée (3.24) dans la base des variables nodales globales, reportons les relations de transformation (3.3, 3.5-6) dans cette expression. La forme intégrale matricielle discrétisée (3.24) s'écrit alors

$$\delta a^T \sum_{e=1}^{E} \left[{}^{e}A^T\, {}^{e}M\, {}^{e}A\, \ddot{a} + {}^{e}A^T\, {}^{e}G\, {}^{e}A\, \dot{a} + {}^{e}A^T\, {}^{e}C\, {}^{e}A\, \dot{a} + \eta_a\, {}^{e}A^T\, {}^{e}K\, {}^{e}A\, a \right.$$

$$\left. + \eta_b\, {}^{e}A^T\, {}^{e}K_c\, {}^{e}A\, a - {}^{e}A^T\, {}^{e}f \right] = 0 \qquad (3.42)$$

Dans cette relation, les vecteurs $\ddot{a}$, $\dot{a}$ et a représentent les variables cinématiques nodales globales.

Les matrices assemblées sont données par les expressions suivantes

$$M^E = \sum_{e=1}^{E} {}^{e}A^T\, {}^{e}M\, {}^{e}A \qquad (3.43)$$

$$G^E = \sum_{e=1}^{E} {}^{e}A^T\, {}^{e}G\, {}^{e}A \qquad (3.44)$$

$$C^E = \sum_{e=1}^{E} {}^{e}A^T\, {}^{e}C\, {}^{e}A \qquad (3.45)$$

$$K^E = \sum_{e=1}^{E} \eta_a\, {}^{e}A^T\, {}^{e}K\, {}^{e}A \qquad (3.46)$$

$$K_c^E = \sum_{e=1}^{E} \eta_b\, {}^{e}A^T\, {}^{e}K_c\, {}^{e}A \qquad (3.47)$$

$$f^E = \sum_{e=1}^{E} {}^eA^T \, {}^ef \tag{3.48}$$

La relation (3.42) devient ainsi

$$\delta a^T \left[M^E \ddot{a} + (G^E + C^E)\dot{a} + (K^E + K_C^E)a - f^E\right] = 0 \qquad (\forall \delta a) \tag{3.49}$$

Remarquons qu'en pratique les produits matriciels dans les relations (3.43-48) ne sont pas effectués. Les opérations étant équivalentes à la superposition partielle des différentes matrices élémentaires, les matrices ${}^eA$ ne sont en fait jamais construites.

Pour obtenir l'équation du mouvement du modèle complet de la ligne d'arbre, il faut encore inclure l'effet des organes portés et des liaisons existantes. Un organe porté est représenté par un disque mince indéformable dont le centre géométrique est confondu avec un des noeuds du modèle. Quant aux liaisons, il s'agit ici uniquement de paliers dont une modélisation a été choisie au chapitre précédent.

Les expressions (2.24) et (2.31) du travail virtuel associé à un disque et à un palier, situés respectivement aux noeuds i et j , deviennent

$$W_d = \delta a_i^T \left[M_i^d \ddot{a}_i + G_i^d \dot{a}_i - f_i^d\right] \tag{3.50}$$

$$W_p = \delta a_j^T \left[C_j^p \dot{a}_j + K_j^p a_j\right] \tag{3.51}$$

Dans ces relations, les vecteurs a_i et a_j regroupent les variables nodales associées aux noeuds i et j comportant le disque et le palier.

De façon analogue à l'expression (3.3), on peut aussi établir la correspondance entre les variables nodales globales et les composantes des vecteurs a_i et a_j par les transformations

$$a_i = {}^iA\, a \qquad i = 1,\ldots,d \qquad (3.52)$$

$$a_j = {}^jA\, a \qquad j = 1,\ldots,p \qquad (3.53)$$

dans lesquelles les matrices ${}^iA$ et ${}^jA$ sont de dimension 4x(4N).

Pour le modèle complet, comportant d disques et p paliers, l'expression (3.49) devient

$$\delta a^T[(M^E + \sum_{i=1}^{d} {}^iA^T M_i^d\, {}^iA)\ddot{a} + (G^E + C^E + \sum_{i=1}^{d} {}^iA^T G_i^d\, {}^iA + \sum_{j=1}^{p} {}^jA^T C_j^p\, {}^jA)\dot{a}$$
$$+ (K^E + K_C^E + \sum_{j=1}^{p} {}^jA^T K_j^p\, {}^jA)a - f^E - \sum_{i=1}^{d} {}^iA^T f_i^d] = 0 \qquad (3.54)$$

Définissons les matrices globales de masse M , d'amortissement généralisé $C_g(\Omega)$ et de rigidité généralisée $K_g(\Omega)$ ainsi que le vecteur global des sollicitations $f(\Omega,t)$ par les relations

$$M = M^E + \sum_{i=1}^{d} {}^{i}A^T M_i^d \, {}^{i}A \tag{3.55}$$

$$C_g(\Omega) = G^E + C^E + \sum_{i=1}^{d} {}^{i}A^T G_i^d \, {}^{i}A + \sum_{j=1}^{p} {}^{j}A^T C_j^p \, {}^{j}A \tag{3.56}$$

$$K_g(\Omega) = K^E + K_C^E + \sum_{j=1}^{p} {}^{j}A^T K_j^p \, {}^{j}A \tag{3.57}$$

$$f(\Omega,t) = f^E + \sum_{i=1}^{d} {}^{i}A^T f_i^d \tag{3.58}$$

Comme l'équation (3.54) doit être vérifiée quel que soit le déplacement virtuel δa , il vient

$$M\,\ddot{a}(t) + C_g(\Omega)\,\dot{a}(t) + K_g(\Omega)\,a(t) = f(\Omega,t) \tag{3.59}$$

Cette expression est la transcription des équations différentielles ordinaires décrivant les vibrations de flexion de la ligne d'arbre.

3.6 Caractérisation des matrices spatiales

L'analyse de la structure des matrices M , $C_g(\Omega)$ et $K_g(\Omega)$ du modèle spatial des arbres de machines met en évidence quelques caractéristiques fondamentales.

Tout d'abord, les matrices spatiales possèdent une propriété essentielle, liée à la nature intrinsèque de l'approximation par éléments finis. Elles présentent, pour autant que la numérotation globale soit séquentielle, une configuration en forme de bande. En revanche, la non-symétrie des matrices

$C_g(\Omega)$ et $K_g(\Omega)$ n'est pas liée à la formulation adoptée, mais découle de la physique du problème. Par ailleurs, la matrice non-symétrique d'amortissement généralisé $C_g(\Omega)$ est la somme de trois composantes :

- la matrice symétrique de dissipation interne ;
- la matrice antisymétrique due à l'effet gyroscopique de l'arbre et des disques, ses termes étant fonctions de la vitesse de rotation Ω ;
- la matrice d'amortissement des paliers, en général non-symétrique, dont les termes dépendent aussi de la vitesse de rotation.

La matrice non-symétrique de rigidité généralisée $K_g(\Omega)$ comporte également trois composantes :

- la matrice symétrique de rigidité due à l'élasticité de l'arbre ;
- la matrice antisymétrique de couplage de frottement dont les termes dépendent de la vitesse de rotation ;
- la matrice de rigidité des paliers, en général non-symétrique ; ses termes sont aussi fonctions de la vitesse de rotation.

Enfin, la matrice de masse M est symétrique et définie positive. Le vecteur des forces généralisées représente le balourd du système dû à l'excentrement réparti de l'arbre ainsi qu'à l'excentrement des disques. Il provoque une excitation harmonique synchrone du système.

La non-symétrie des matrices $C_g(\Omega)$ et $K_g(\Omega)$ est donc introduite par l'effet gyroscopique, le frottement interne de l'arbre et l'anisotropie des propriétés des paliers. Néanmoins, d'un point de vue algébrique, il est

possible de décomposer les matrices non-symétriques en une composante symétrique et une composante antisymétrique. Physiquement, cette décomposition se traduit par une séparation des forces conservatives et non conservatives [A1, A2]. La partie symétrique de la matrice de rigidité de même que la partie antisymétrique de l'amortissement sont associées aux forces conservatives. A l'opposé, la partie symétrique de la matrice d'amortissement et la partie antisymétrique de la rigidité sont non conservatives. Ainsi, le modèle spatial des systèmes conservatifs d'arbres de machines est caractérisé par les équations différentielles ordinaires suivantes

$$M\,\ddot{a}(t) + G(\Omega)\,\dot{a}(t) + K(\Omega)\,a(t) = f(\Omega,t) \qquad (3.56)$$

La matrice gyroscopique $G(\Omega)$ est antisymétrique alors que la matrice de rigidité $K(\Omega)$ est symétrique.

La structure particulière des matrices spatiales des systèmes gyroscopiques (conservatifs et dissipatifs) nécessite l'élaboration de méthodes adéquates de calcul, notamment pour la détermination des paramètres modaux (fréquences propres, amortissements modaux et formes propres de vibrations).

4. MODELE MODAL DES SYSTEMES GYROSCOPIQUES DISSIPATIFS

4.1 Définition du problème aux valeurs propres quadratique

Le régime libre d'un système gyroscopique dissipatif, linéarisé et discrétisé en éléments finis peut être décrit dans le domaine temporel par le système différentiel homogène de dimension n suivant

$$M\,\ddot{a}(t) + C_g(\Omega)\dot{a}(t) + K_g(\Omega)a(t) = 0 \qquad (4.1)$$

où les vecteurs $\ddot{a}(t)$, $\dot{a}(t)$ et $a(t)$ représentent respectivement l'accélération, la vitesse et le déplacement généralisés. La matrice de masse M est définie positive et symétrique, tandis que les matrices d'amortissement et de rigidité, respectivement $C_g(\Omega)$ et $K_g(\Omega)$ sont non-symétriques. De plus, leurs termes sont fonctions de la vitesse de rotation Ω .

Le système (4.1) admet des solutions de la forme $a(t)= a\, e^{\lambda t}$. Dès lors, le régime libre de la structure est décrit dans le domaine fréquentiel par le problème aux valeurs et vecteurs propres, quadratique en λ ,

$$(\lambda^2 M + \lambda\, C_g(\Omega) + K_g(\Omega))\, a = 0 \qquad (4.2)$$

où λ et a sont respectivement valeur et vecteur propres.

Pour un système à n degrés de liberté dont tous les amortissements modaux sont sous-critiques (système sous-amorti), le problème (4.2) possède $2n$ solutions complexes conjuguées qui forment le modèle modal. En plus de l'information sur les fréquences et formes naturelles de vibration, ce modèle fournit également les conditions de stabilité du système.

Remarquons que, les matrices $C_g(\Omega)$ et $K_g(\Omega)$ dépendant de la vitesse de rotation Ω, les valeurs propres λ et les vecteurs propres a sont donc des fonctions de Ω. Néanmoins, pour ne pas alourdir les expressions, nous noterons dorénavant les matrices $C_g(\Omega)$ et $K_g(\Omega)$ respectivement C_g et K_g.

4.2 Linéarisation du problème aux valeurs propres

Le problème aux valeurs propres quadratique (4.2) de dimension n peut se transformer en un problème linéaire généralisé de dimension $2n$, en associant à l'équation du régime libre (4.1) une équation triviale d'ordre n. Cependant, la matrice définissant l'identité auxiliaire doit être non-singulière comme nous allons le démontrer. Pour cela, prenons l'identité auxiliaire,

$$K_g\, \dot{a}(t) = K_g\, \dot{a}(t) \tag{4.3}$$

Si l'on définit le vecteur de dimension $2n$,

$$u(t) = \begin{bmatrix} a(t) \\ \dot{a}(t) \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

le système différentiel (4.1) se récrit

$$A\, u(t) = B\, \dot{u}(t) \tag{4.5}$$

où les matrices A et B d'ordre $2n$ possèdent la configuration suivante

$$A = \left[\begin{array}{c|c} 0 & K_g \\ \hline -K_g & -C_g \end{array}\right] \qquad B = \left[\begin{array}{c|c} K_g & 0 \\ \hline 0 & M \end{array}\right] \tag{4.6}$$

Comme $a(t) = a\, e^{\lambda t}$ est une solution du système différentiel (4.1), le vecteur $u(t) = u\, e^{\lambda t}$ où $u = \left[\begin{array}{c} a \\ \hline \lambda a \end{array}\right]$ est une solution du système différentiel (4.5).

Réciproquement, comme le vecteur $u(t) = w\, e^{\lambda t}$ est solution du système différentiel (4.5), on peut écrire, avec $w = \left[\begin{array}{c} w^a \\ \hline w^b \end{array}\right]$,

$$\left[\begin{array}{c|c} 0 & K_g \\ \hline -K_g & -C_g \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} w^a \\ \hline w^b \end{array}\right] e^{\lambda t} = \lambda \left[\begin{array}{c|c} K_g & 0 \\ \hline 0 & M \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} w^a \\ \hline w^b \end{array}\right] e^{\lambda t} \tag{4.7}$$

ou encore,

$$K_g\, w^b\, e^{\lambda t} = \lambda\, K_g\, w^a\, e^{\lambda t} \tag{4.8}$$

$$-K_g\, w^a\, e^{\lambda t} - C_g\, w^b\, e^{\lambda t} = \lambda\, M\, w^b\, e^{\lambda t} \tag{4.9}$$

Si la matrice de rigidité K_g est définie positive, on tire aisément de la relation (4.8) que $w^b = \lambda w^a$. La relation (4.9) signifie alors que le vecteur $u(t) = w\, e^{\lambda t}$ est solution du système différentiel (4.1). Ainsi, chercher des solutions $a(t)$ de la forme $a\, e^{\lambda t}$ du système différentiel (4.1) est équivalent à chercher les solutions $u(t)$ de la forme $u\, e^{\lambda t}$ du système différentiel (4.5) pour autant que l'équation triviale auxiliaire (4.3) soit définie par une matrice non-singulière. Si $a\, e^{\lambda t}$ est solution de (4.1), a et λ sont respectivement vecteur propre et valeur propre du

système matriciel (4.2). De même, si $u\, e^{\lambda t}$ est solution de (4.5), u et λ sont respectivement vecteur propre et valeur propre du problème linéaire généralisé

$$A\, u = \lambda\, B\, u \tag{4.10}$$

D'après la relation (4.4) et la définition du vecteur u, les vecteurs propres u_i $(i = 1,\ldots,2n)$ du problème généralisé (4.10) peuvent se décomposer de la façon suivante,

$$u_i = \begin{bmatrix} a_i \\ \lambda_i a_i \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

où les sous-vecteurs a_i $(i = 1,\ldots,2n)$ de dimension n sont les vecteurs propres du problème quadratique (4.2). Dans la formulation généralisée (4.10), les matrices non-symétriques A et B de dimension 2n sont formées de sous-matrices de dimension n. Elles apparaissent alors comme des matrices composites.

La technique de linéarisation la plus répandue dans la littérature consiste à choisir l'équation triviale

$$M\, \dot{a}(t) = M\, \dot{a}(t) \tag{4.12}$$

où M est la matrice spatiale de masse. Ce choix particulier peut se justifier par le fait que la matrice de masse est toujours non-singulière, puisqu'elle est définie positive par nature. De plus, ce choix paraît intéressant, en particulier lorsque la matrice de masse est diagonale.

Toutefois, on peut prendre d'autres matrices, pour autant que celles-ci soient non-singulières. On peut même choisir la matrice identité I, ce qui conduit à des simplifications de calcul dans certains cas [A4,B4].

Dans ce travail, nous supposons que la matrice spatiale de rigidité K_g non-symétrique est non-singulière et nous adoptons la relation (4.3) comme équation triviale auxiliaire. Le choix de la matrice K_g, bien que non-symétrique, se justifie par le fait que cette démarche conduit, comme nous le verrons plus loin, à une symétrisation des développements algorithmiques et à une réduction du nombre d'opérations numériques.

Remarquons toutefois que, comme les matrices spatiales K_g et C_g sont non-symétriques, une des deux matrices A et B du problème généralisé (4.10) sera toujours non-symétrique, quel que soit le choix de l'identité auxiliaire.

Notons que le système (4.2) est une équation quadratique aux valeurs propres, tandis que le système (4.10) présente l'avantage d'être une équation linéaire aux valeurs propres. Ceci nous permettra de développer par la suite un algorithme d'extraction partielle des éléments propres opérant sur la forme généralisée (4.10). Par contre, les matrices composites de cette formulation possèdent une dimension double de celle des matrices spatiales de la forme quadratique (4.2). Toutefois, lors de la mise en oeuvre de l'algorithme proposé, nous verrons que ce désavantage peut être contourné et que les opérations numériques s'effectuent en réalité sur des matrices

d'ordre n , la structure en forme de bande des matrices spatiales étant dès lors mise à profit.

4.3 Relations de bi-orthogonalité

Dans ce paragraphe, nous allons établir les propriétés de bi-orthogonalité des deux espaces propres adjoints associés au problème généralisé non-symétrique (4.10).

La solution de cette forme linéarisée consiste en un ensemble de valeurs propres λ_i et de vecteurs propres correspondants u_i $(i=1,\ldots,2n)$. Pour les systèmes sous-amortis, qui sont les seuls que nous considérons ici, les valeurs propres sont complexes [N4]. Ainsi, la solution de (4.10) consiste en n paires d'éléments propres complexes conjugués

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \lambda_k^R \pm j\, \lambda_k^I \\ u_k &= u_k^R \pm j\, u_k^I \end{aligned} \qquad k = 1,\ldots,n \tag{4.13}$$

Considérons aussi le problème adjoint associé au problème (4.10) et défini par les matrices transposées A^T et B^T

$$A^T v = \lambda\, B^T v \tag{4.14}$$

où v représente le vecteur propre associé à λ. L'équation caractéristique des problèmes (4.10) et (4.14) est la même, puisque l'on a

$$\det\,[A-\lambda B] = \det\,[A-\lambda B]^T = \det\,[A^T-\lambda B^T] = 0 \qquad (4.15)$$

Ainsi, les valeurs propres du problème (4.14) sont les mêmes que celles du problème (4.10), λ_i (i=1,...,2n). Par contre, les vecteurs propres u_i de (4.10) sont différents de ceux de (4.14) que l'on notera par v_i (i=1,...,2n). Dans cette présentation, nous supposons que les valeurs propres λ_i sont toutes distinctes. Par conséquent, les vecteurs propres u_i associés au problème (4.10), de même que les vecteurs propres v_i associés au problème adjoint (4.14), sont linéairement indépendants [H2, M2,G10]. Ces vecteurs propres possèdent des propriétés d'orthogonalité que nous allons démontrer ci-après. Pour cela, considérons une solution (λ_i; u_i) pour le problème (4.10) et une solution (λ_j;v_j) pour le problème adjoint (4.14). On peut donc écrire

$$Au_i = \lambda_i\ Bu_i \qquad (4.16)$$

$$A^T v_j = \lambda_j B^T v_j \qquad (4.17)$$

Par transposition, l'équation (4.17) peut aussi s'écrire sous la forme suivante

$$v_j^T A = \lambda_j v_j^T B \qquad (4.18)$$

Les vecteurs v_j sont, dans l'expression ci-dessus, positionnés formellement à gauche des matrices A et B . En conséquence, ils sont couramment appelés vecteurs propres gauches, par opposition aux vecteurs propres classiques u_i qui, conformément à la relation (4.16), sont dits vecteurs propres droits.

En prémultipliant l'équation (4.16) par v_j^T et en postmultipliant l'équation (4.18) par u_i, on trouve

$$v_j^T A u_i = \lambda_i v_j^T B u_i \tag{4.19}$$

$$v_j^T A u_i = \lambda_j v_j^T B u_i \tag{4.20}$$

Si l'on soustrait l'équation (4.20) de (4.19), on obtient

$$(\lambda_i - \lambda_j) v_j^T B u_i = 0 \tag{4.21}$$

Ainsi, pour des valeurs propres distinctes ($\lambda_i \neq \lambda_j$), on a les relations d'orthogonalité suivantes

$$v_j^T B u_i = 0 \quad \text{pour} \quad \lambda_j \neq \lambda_i \quad i,j=1,\ldots,2n \tag{4.22}$$

Comme la matrice B est régulière, pour $\lambda_i = \lambda_j$ on a

$$v_j^T B u_j = b_j \tag{4.23}$$

Les vecteurs propres gauches et les vecteurs propres droits associés à des valeurs propres distinctes sont donc orthogonaux pour les produits scalaires $< v, Bu >$ et $< v, Au >$. Contrairement aux vecteurs associés à des matrices hermitiennes, les vecteurs propres u_i ne sont pas orthogonaux entre eux. Il en est de même pour les vecteurs propres v_i. Ces deux ensembles de vecteurs constituent deux espaces propres adjoints bi-orthogo-

naux par rapport aux matrices A et B. Ils peuvent être normalisés de façon à vérifier la relation de bi-orthonormalité suivante

$$v_j^T B u_i = \delta_{ji} \qquad i,j = 1,\ldots,2n \tag{4.24}$$

où δ_{ji} représente le symbole de Kronecker. Avec ce schéma de normalisation et d'après l'équation (4.20), on peut écrire

$$v_j^T A u_i = \delta_{ji}\, \lambda_i \qquad i,j = 1,\ldots,2n \tag{4.25}$$

Rappelons que si les vecteurs propres sont normalisés de façon à satisfaire (4.24), leur norme propre n'est pas fixée individuellement [M4], mais seulement leur produit scalaire $< v_j, Bu_i >$.

En introduisant les matrices V et U d'ordre 2n, définies par les relations

$$V = [v_1,\ldots,v_{2n}] \tag{4.26}$$

$$U = [u_1,\ldots,u_{2n}] \tag{4.27}$$

où les colonnes v_i et u_i (i=1,...,2n) sont respectivement les vecteurs propres gauches et droits, les relations (4.24) et (4.25) s'écrivent sous la forme matricielle suivante

$$V^T B U = I \tag{4.28}$$

$$V^T A U = \Lambda \tag{4.29}$$

où I et Λ représentent respectivement la matrice identité et la matrice complexe diagonale des valeurs propres.

De l'expression (4.28), on déduit la relation de dualité entre les deux espaces propres adjoints

$$V^T = (B\ U)^{-1} \tag{4.30}$$

La relation (4.30) confirme que, comme les valeurs propres sont toutes supposées distinctes, les vecteurs propres droits sont linéairement indépendants et qu'en conséquence les vecteurs propres gauches constituent aussi un ensemble de vecteurs linéairement indépendants. De façon analogue aux relations (4.28) et (4.30), on peut aussi écrire

$$U^T B^T V = I \tag{4.31}$$

$$U^T = (B^T V)^{-1} \tag{4.32}$$

Le fait que les vecteurs propres V et U soient linéairement indépendants implique que ces deux ensembles de vecteurs constituent deux bases dites duales de l'espace complexe $C^{2n}[M2]$. Ainsi, un vecteur quelconque appartenant à C^{2n} peut s'exprimer soit selon la base propre gauche V, soit selon la base propre droite U. Le développement d'un tel vecteur w de C^{2n} en fonction des vecteurs propres droits u_i prend la forme suivante

$$w = \phi_1 u_1 + \ldots + \phi_{2n}\, u_{2n} = U\ \phi \tag{4.33}$$

où le vecteur à coefficients complexes $\phi = [\phi_1,\ldots,\phi_{2n}]^T$ représente les coordonnées du vecteur w dans la base propre U. En prémultipliant l'expression (4.33) par V^TB et en tenant compte de la relation (4.28), on obtient

$$\phi = V^T B\, w \tag{4.34}$$

De façon identique, le développement du vecteur w selon la base des vecteurs propres gauche v_j prend la forme

$$w = \phi_1 v_1 + \ldots + \phi_{2n} v_{2n} = V\,\phi \tag{4.35}$$

où $\phi = [\phi_1,\ldots,\phi_{2n}]^T$ est le vecteur des coefficients complexes donné par

$$\phi = U^T B^T w \tag{4.36}$$

De même que le problème aux valeurs propres (4.14) est dit adjoint au problème (4.10), l'espace propre gauche dual associé à V est qualifié d'adjoint de l'espace propre droit associé à U.

Dans le cas où les matrices A et B du problème généralisé (4.10) sont respectivement anti-symétrique et symétrique, l'espace propre gauche est le complexe conjugué de l'espace propre droit comme nous le verrons au chapitre suivant. Si les deux matrices A et B sont symétriques, l'espace propre gauche coïncide avec l'espace propre droit et le problème est dit auto-adjoint.

4.4 Quotient de Rayleigh généralisé

Dans ce paragraphe, nous allons définir le quotient de Rayleigh généralisé [H2,L5] et montrer la propriété de stationnarité qui lui est associée. Cette propriété est fondamentale pour le développement de l'algorithme d'extraction partielle présenté par la suite.

Reprenons le problème aux valeurs propres (4.10) et considérons la solution $(\lambda_i ; u_i)$

$$A u_i = \lambda_i B u_i \tag{4.37}$$

En prémultipliant l'expression ci-dessus par v_i, on peut expliciter la valeur propre λ_i sous la forme du quotient suivant

$$\lambda_i = \frac{< v_i, Au_i >}{< v_i, Bu_i >} \tag{4.38}$$

En remplaçant les deux vecteurs propres v_i et u_i par des vecteurs arbitraires complexes y et x respectivement, on obtient le quotient de Rayleigh généralisé

$$R(y,x) = \frac{< y, Ax >}{< y, Bx >} \tag{4.39}$$

avec $< y, Bx > \neq 0$.

Le quotient de Rayleigh généralisé $R(y,x)$ défini ci-dessus est stationnaire pour chaque paire de vecteurs (v_i, u_i), constituée du vecteur

propre gauche v_i et du vecteur propre droit u_i associés à la valeur propre λ_i , la valeur stationnaire étant égale à $R(v_i, u_i) = \lambda_i$ $(i=1,\ldots,2n)$.

Afin de démontrer la stationnarité du quotient de Rayleigh généralisé, considérons sa variation première $\delta R(y,x)$

$$\delta R(y,x) = \frac{(<\delta y,Ax> + <y,A\delta x>)\ <y,Bx> - (<\delta y,Bx> + <y,B\delta x>)\ <y,Ax>}{<y,Bx>^2} \qquad (4.40)$$

En posant qu'au point stationnaire les vecteurs y et x sont respectivement les vecteurs propres gauches v_i et droits u_i , on peut établir, d'après les expressions (4.10) et (4.14), les relations suivantes

$$\begin{aligned}
<y,Bx> &= <v_i,Bu_i> \\
<\delta y,Bx> &= <\delta v_i,Bu_i> \\
<y,Ax> &= \lambda_i<v_i\ Bu_i> \\
<\delta y,Ax> &= \lambda_i\ <\delta v_i,Bu_i> \\
<y,A\delta x> &= <\delta x,A^Ty> = \lambda_i<\delta u_i,B^Tv_i> \\
<y,B\delta x> &= <\delta x,B^Ty> = <\delta u_i,B^Tv_i>
\end{aligned} \qquad (4.41)$$

Pour évaluer la variation $\delta R(y = v_i,\ x = u_i)$, remplaçons les relations ci-dessus dans l'expression (4.40). On trouve

$$\delta R(y,x) = \left| \begin{matrix} y=v_i \\ x=u_i \end{matrix} \right. = \frac{(\lambda_i<\delta v_i,Bu_i>+\lambda_i<\delta u_i,B^Tv_i>)<v_i,Bu_i>-(<\delta v_i,Bu_i>+<\delta u_i,B^Tv_i>)\lambda_i<v_i,Bu_i>}{<v_i,\ Bu_i>^2} \qquad (4.42)$$

$$= 0$$

Ainsi, le quotient de Rayleigh généralisé possède la propriété de stationnarité pour toute paire de vecteurs (v_i, u_i) formée d'un vecteur propre gauche v_i et d'un vecteur propre droit u_i associés à la même valeur propre λ_i qui est la valeur stationnaire.

5. MODELE MODAL DES SYSTEMES GYROSCOPIQUES CONSERVATIFS

5.1 Définition du problème aux valeurs propres quadratique

Le régime libre d'un système gyroscopique conservatif, discrétisé par la méthode des éléments finis et après linéarisation, peut être décrit dans le domaine temporel par le système différentiel homogène de dimension n suivant

$$M\,\ddot{a}(t) + G(\Omega)\,\dot{a}(t) + K(\Omega)\,a(t) = 0 \qquad (5.1)$$

où les vecteurs $\ddot{a}(t)$, $\dot{a}(t)$ et $a(t)$ représentent respectivement l'accélération, la vitesse et le déplacement généralisés. D'autre part, M et $K(\Omega)$ sont respectivement les matrices de masse et de rigidité du système mécanique et $G(\Omega)$ la matrice de couplage gyroscopique.

Pour ce type de systèmes, les matrices de masse et de rigidité sont symétriques, tandis que la matrice gyroscopique est antisymétrique :

$$M = M^T \qquad G(\Omega) = -G^T(\Omega) \qquad K(\Omega) = K^T(\Omega) \qquad (5.2)$$

Les trois matrices sont d'ordre n et les termes des deux dernières ci-dessus dépendent de la vitesse de rotation Ω.

Le système différentiel (5.1) admet une suite finie de solutions de la forme $a(t) = a_i\ e^{\lambda_i t}$, $(i = 1,\ldots,2n)$. En conséquence, le régime libre de la structure est décrit dans le domaine fréquentiel par le problème aux

valeurs et vecteurs propres, quadratique en λ ,

$$(\lambda^2 M + \lambda G(\Omega) + K(\Omega))\, a = 0 \qquad (5.3)$$

où λ et a sont respectivement les valeur et vecteur propres. Pour un système gyroscopique conservatif à n degrés de liberté, le problème (5.3) possède $2n$ solutions qui constituent le modèle modal caractérisé par les fréquences et formes naturelles de vibrations du système.

Les matrices $G(\Omega)$ et $K(\Omega)$ ainsi que les valeurs propres λ et les vecteurs propres a dépendent de la vitesse de rotation Ω . Par la suite toutefois, pour alléger la notation, les matrices gyroscopique et de rigidité seront désignées simplement G et K .

5.2 Linéarisation du problème aux valeurs propres

Dans le paragraphe 4.2, nous avons démontré que l'on peut transformer un problème aux valeurs propres quadratique de dimension n en un problème généralisé linéaire de dimension $2n$, en associant à l'équation différentielle du régime libre une identité d'ordre n définie par une matrice non-singulière. Cette condition nécessaire et suffisante permet donc de linéariser le problème quadratique (5.3) en le transformant en un problème généralisé de dimension $2n$ défini par deux matrices composites A et B dont la configuration dépend du choix particulier de l'identité auxiliaire.

Pour les systèmes gyroscopiques conservatifs, nous supposons que la matrice spatiale de rigidité K , cette fois symétrique, est définie positive et nous adoptons comme équation triviale auxiliaire

$$K\,\dot{a}(t) = K\,\dot{a}(t) \tag{5.4}$$

Ainsi, en associant l'identité ci-dessus à l'équation (5.1) du régime libre, nous obtenons, après introduction de la solution $a(t) = a\,e^{\lambda t}$, le problème généralisé linéaire

$$Au = \lambda\, B\, u \tag{5.5}$$

où les matrices composites A et B d'ordre $2n$ possèdent la configuration suivante

$$A = \left[\begin{array}{c|c} 0 & K \\ \hline -K & -G \end{array}\right] \qquad B = \left[\begin{array}{c|c} K & 0 \\ \hline 0 & M \end{array}\right] \tag{5.6}$$

D'après les propriétés (5.2) des matrices spatiales, les matrices composites A et B sont cette fois respectivement antisymétrique et symétrique

$$A = -A^T \qquad B = B^T \tag{5.7}$$

De façon identique au chapitre précédent, les vecteurs propres u_i $(i=1,\ldots,2n)$ du problème généralisé (5.5) peuvent se décomposer de la façon suivante

$$u_i = \left[\begin{array}{c} a_i \\ \hline \lambda_i a_i \end{array}\right] \tag{5.8}$$

où les sous-vecteurs $a_i (i=1,\ldots,2n)$ de dimension n sont les vecteurs propres du problème quadratique (5.3). Les termes de la suite finie $a_i e^{\lambda_i t}$ $(i=1,\ldots,2n)$ constituent les solutions, à un facteur près, du système différentiel (5.1) régissant le régime libre.

La matrice gyroscopique G étant antisymétrique, une des deux matrices A ou B du problème généralisé (5.5) est toujours non-symétrique, indépendamment des choix particuliers de l'identité auxiliaire et de la configuration des matrices composites.

La transformation de la forme quadratique (5.3) pour les valeurs propres λ en la forme généralisée linéaire (5.5) est à la base du développement au chapitre 8 d'un algorithme d'extraction partielle des éléments propres spécifique pour les problèmes gyroscopiques et opérant sur la forme généralisée (5.5). A nouveau, il sera montré que le fait que les matrices composites de la formulation (5.5) possèdent une dimension double de celle des matrices spatiales de la forme quadratique ne constitue pas un inconvénient.

Notons enfin que l'adoption de la relation triviale (5.4), ainsi que des configurations particulières (5.6) pour les matrices A et B, s'avère être la plus judicieuse pour la mise en oeuvre de l'algorithme que nous nous proposons de développer. Néanmoins, nous montrerons qu'une formulation alternative du problème généralisé est plus adéquate lors de la mise en oeuvre d'une variante de l'algorithme à présenter.

5.3 Caractérisation de la solution

Dans ce paragraphe, nous montrerons que les valeurs propres des systèmes (5.3) ou (5.5) sont imaginaires pures, conjugués deux à deux et que les vecteurs propres associés à deux valeurs propres conjugués sont eux-mêmes complexes conjugués.

Considérons l'équation caractéristique du problème généralisé (5.5)

$$\det [A - \lambda B] = 0 \tag{5.9}$$

Comme le déterminant d'une matrice est égal à celui de sa transposée, on doit avoir

$$\det [A-\lambda B]^T = \det[A^T-\lambda B]^T = \det [-A-\lambda B] = (-1)^{2n} \det[A+\lambda B] = 0 \tag{5.10}$$

de sorte que si λ est une valeur propre, $-\lambda$ l'est également.

Par la suite, nous montrons que les valeurs propres sont des imaginaires pures et donc conjuguées deux à deux et que les vecteurs propres associés à deux valeurs propres sont eux-mêmes conjugués.

Considérons une solution (λ_r, u_r) du problème aux valeurs et vecteurs propres (5.5). Cette solution vérifie l'équation

$$A\, u_r = \lambda_r\, B\, u_r \tag{5.11}$$

En prémultipliant l'équation ci-dessus par le transposé $\bar{u}_r^T$ du vecteur complexe conjugué au vecteur propre u_r , on a

$$\bar{u}_r^T A u_r = \lambda_r \bar{u}_r^T B u_r \tag{5.12}$$

Si l'on adopte la notation suivante

$$u_r = y_r + j z_r \tag{5.13}$$

$$\bar{u}_r = y_r - j z_r \tag{5.14}$$

où les vecteurs réels y_r et z_r représentent respectivement les parties réelle et imaginaire du vecteur u_r , et si l'on introduit ces expressions dans l'équation (5.12), on obtient

$$(y_r - j z_r)^T A(y_r + j z_r) = \lambda (y_r - j z_r)^T B(y_r + j z_r) \tag{5.15}$$

En tenant compte de l'antisymétrie de la matrice A et de la symétrie de la matrice B , on peut écrire les relations suivantes

$$\begin{aligned} y_r^T A y_r &= z_r^T A z_r = 0 \\ z_r^T A y_r &= y_r^T A^T z_r = - y_r^T A z_r \\ y_r^T B z_r &= z_r^T B y_r \end{aligned} \tag{5.16}$$

Avec ces relations, on peut simplifier l'expression (5.15) pour obtenir

$$2j\, y_r^T A\, z_r = \lambda_r\, (y_r^T B\, y_r + z_r^T B\, z_r) \qquad (5.17)$$

Les trois produits matriciels $y_r^T A\, z_r$, $y_r^T B\, y_r$ et $z_r^T B\, z_r$ étant des quantités réelles, λ_r est imaginaire pur. Comme $-\lambda_r$ est aussi une valeur propre, les valeurs propres du système consistent donc en n paires d'imaginaires purs conjugués. Nous noterons les valeurs propres par $\pm j\omega_r$ $(r=1,\ldots,n)$ où les ω_r représentent les fréquences naturelles de vibration du système et l'on conviendra que la suite ω_r $(r=1,\ldots,n)$ est positive croissante. Par conséquent, si $j\omega_r$ et u_r constituent une solution du problème aux valeurs et vecteurs propres, il en est de même pour $-j\omega_r$ et $\bar{u}_r$.

Les vecteurs propres du système consistent donc en n paires de vecteurs complexes conjugués u_r et $\bar{u}_r$, correspondant respectivement aux valeurs propres imaginaires pures $\lambda_r = j\omega_r$ et $\bar{\lambda}_r = -j\omega_r$, $r = 1,\ldots,n$.

5.4 Relations d'orthogonalité

Dans ce paragraphe, nous étudierons les propriétés d'orthogonalité des vecteurs propres complexes du système (5.5), ainsi que celles de leurs parties réelles et imaginaires.

D'après la relation (4.14), le problème adjoint associé au problème (5.5)

s'écrit

$$A^T v = \lambda B^T v \qquad (5.18)$$

Dans le cas présent, d'une part $A^T = -A$ et $B = B^T$, d'autre part les vecteurs propres du problème (5.5) consistent en n pairs de vecteurs complexes conjugués u_r et $\bar{u}_r$ correspondant respectivement aux valeurs propres imaginaires pures λ_r et $\bar{\lambda}_r = -\lambda_r$ $(r=1,\ldots,n)$. Il en résulte que les vecteurs propres du problème adjoint (5.18) sont les complexes conjugués des vecteurs du problème (5.5). Ainsi, l'espace propre gauche dual est le complexe conjugué de l'espace propre droit. Par conséquent, les relations de bi-orthogonalité (4.22-23) s'écrivent cette fois

$$\bar{u}_r^T B u_s = \delta_{rs} \beta_s \qquad r,s = 1,\ldots,2n \qquad (5.19)$$

Les scalaires β_s sont des nombres réels strictement positifs. En effet, la matrice B est définie positive, car la sous-matrice K est supposée définie positive alors que la sous-matrice M l'est par nature. Si l'on normalise les vecteurs propres u_s de manière que les coefficients β_s soient unitaires, on obtient les relations d'orthonormalité suivantes, d'après (5.19) et (4.25),

$$\bar{u}_r^T B u_s = \delta_{rs} \qquad (5.20)$$

$$r,s = 1,\ldots,2n$$

$$\bar{u}_r^T A u_s = \delta_{rs} \lambda_s \qquad (5.21)$$

Grâce aux propriétés d'orthogonalité (5.20-21), nous pouvons affirmer que les vecteurs propres u_s diagonalisent simultanément les matrices A et B et forment une base orthogonale pour le produit scalaire $< \bar{u}_r, B\, u_s >$.

La solution du problème (5.5) étant constituée de n paires de vecteurs complexes conjugués u_r et $\bar{u}_r$ (r=1,...,n) associés à n paires conjuguées de valeurs propres imaginaires pures $\lambda_r = \pm j\omega_r$ (r=1,...,n), on peut lier aux vecteurs propres u_r les valeurs propres $\lambda_r = j\omega_r$ et aux vecteurs $\bar{u}_r$ les valeurs propres $\bar{\lambda}_r = - j\omega_r$. Dès lors, la relation (5.21) peut être scindée dans les deux expressions suivantes

$$\bar{u}_r^T A\, u_r = j\omega_r \qquad r = 1,\ldots,n \tag{5.22}$$

$$u_r^T A\, \bar{u}_r = - j\omega_r \tag{5.23}$$

Puisque les vecteurs propres u_r et $\bar{u}_r$ forment une base de l'espace C^{2n}, un vecteur quelconque appartenant à C^{2n} peut être exprimé dans cette base propre. Le développement d'un tel vecteur w prend la forme suivante

$$w = \sum_{r=1}^{n} \eta_r\, u_r + \sum_{r=1}^{n} \zeta_r\, \bar{u}_r \tag{5.24}$$

où les coefficents complexes η_r et ζ_r (r=1,...,n) représentent les coordonnés du vecteur w dans la base propre.

Comme nous le montrons ci-après, d'importantes propriétés d'orthogonalité existent également pour les parties réelles et imaginaires des vecteurs propres.

Les valeurs propres étant imaginaires pures, la relation (5.11), après introduction de la notation (5.13) et séparation des parties réelle et imaginaire, prend la forme

$$A\, y_r = -\omega_r B\, z_r \qquad (5.25)$$

$$r = 1,\ldots,n$$

$$A\, z_r = \omega_r B\, y_r \qquad (5.26)$$

où y_r et z_r sont les parties réelle et imaginaire du vecteur propre u_r.

Avec l'hypothèse de non-singularité de la matrice B, les relations (5.25-26) peuvent se mettre sous la forme

$$z_r = -\frac{1}{\omega_r} B^{-1} A\, y_r \qquad (5.27)$$

$$r = 1,\ldots,n$$

$$y_r = \frac{1}{\omega_r} B^{-1} A\, z_r \qquad (5.28)$$

En introduisant ces expressions dans les équations (5.25) et (5.26), on obtient les problèmes aux valeurs et vecteurs propres généralisés suivants

$$A^T B^{-1} A\, y_r = \omega_r^2 B\, y_r \qquad (5.29)$$

$$r = 1,\ldots,n$$

$$A^T B^{-1} A\, z_r = \omega_r^2 B\, z_r \qquad (5.30)$$

La matrice $A^S = A^T B^{-1} A = - A B^{-1} A$ est réelle et symétrique puisque les matrices A et B sont réelles, la seconde étant symétrique. Les relations (5.27-28) transforment donc un problème aux valeurs propres dont la solution est complexe en un problème à solutions réelles, où la matrice A^S prend la forme suivante

$$A^S = A^T B^{-1} A = \left[\begin{array}{c|c} K^T M^{-1} K & K^T M^{-1} G \\ \hline G^T M^{-1} K & K^T + G^T M^{-1} G \end{array}\right] \tag{5.31}$$

avec $M^{-1} = M^{-T}$.

Etant donné que les problèmes (5.29-30) sont d'ordre $2n$, ils possèdent $2n$ solutions réelles. Celles-ci consistent en n paires de valeurs propres identiques ω_r^2 et n paires de vecteurs propres associés y_r et z_r $(r=1,\ldots,n)$.

En prémultipliant les expressions (5.29-30), respectivement par y_s^T et z_s^T , il vient

$$y_s^T A^T B^{-1} A\, y_r = \omega_r^2\, y_s^T B\, y_r \tag{5.32}$$

$$z_s^T A^T B^{-1} A\, z_r = \omega_r^2\, z_s^T B\, z_r \tag{5.33}$$

En introduisant la solution propre de rang s dans les relations (5.29-30)

et en prémultipliant les expressions ainsi obtenues respectivement par y_r^T et z_r^T, on trouve

$$y_r^T A^T B^{-1} A y_s = \omega_s^2 y_r^T B y_s \tag{5.34}$$

$$z_r^T A^T B^{-1} A z_s = \omega_s^2 z_r^T B z_s \tag{5.35}$$

La transposition de ces expressions, compte tenu de la symétrie de la matrice B, conduit aux relations suivantes

$$y_s^T A^T B^{-1} A y_r = \omega_s^2 y_s^T B y_r \tag{5.36}$$

$$z_s^T A^T B^{-1} A z_r = \omega_s^2 z_s^T B z_r \tag{5.37}$$

Si l'on soustrait les expressions (5.36-37) de (5.32-33), il vient

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2)\, y_s^T B y_r = 0 \tag{5.38}$$

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2)\, z_s^T B z_r = 0 \tag{5.39}$$

Ainsi, pour tout couple de vecteurs (y_r, y_s) et (z_r, z_s), tels que $\omega_r \neq \omega_s$, on obtient les relations d'orthogonalité

$$y_s^T B y_r = z_s^T B z_r = 0 \qquad \text{pour } r,s = 1,\ldots,n;\ r \neq s \tag{5.40}$$

Comme la matrice B est définie positive, pour $\omega_s = \omega_r$, on a

$$y_r^T B\, y_r = b_r^R > 0 \tag{5.41}$$

$$z_r^T B\, z_r = b_r^I > 0 \tag{5.42}$$

Si l'on normalise les parties réelle et imaginaire des vecteurs propres de manière que les coefficients α_r et β_r soient unitaires, les relations d'orthogonalité (5.40-42) peuvent s'écrire

$$y_r^T B\, y_s = z_r^T B\, z_s = \delta_{rs} \qquad r,s = 1,\ldots,n \tag{5.43}$$

δ_{rs} étant le symbole de Kronecker.

Selon une démarche analogue, on peut également établir la relation d'orthogonalité suivante

$$y_r^T B\, z_s = z_r^T B\, y_s = 0 \qquad r,s = 1,\ldots,n \tag{5.44}$$

En reprenant les expressions (5.25-26) et en les prémultipliant successivement par la transposée des parties réelle y_s et imaginaire z_s du vecteur propre u_s, on obtient, compte tenu des relations d'orthogonalité (5.43) et (5.44),

$$y_r^T A\, y_s = 0 \tag{5.45}$$

$$z_r^T A\, z_s = 0 \qquad r,s = 1,\ldots,n \tag{5.46}$$

$$y_r^T A\, z_s = \omega_r\, \delta_{rs} \tag{5.47}$$

$$z_r^T A\, y_s = -\,\omega_r\, \delta_{rs} \tag{5.48}$$

Si l'on rassemble alternativement les vecteurs y_r et z_r , r=1,...,n , dans la matrice ^{R}U définie par

$$^{R}U = [\, y_1,\, z_1,\ldots,y_n,\, z_n] \tag{5.49}$$

le produit matriciel $^{R}U^{T}A^{R}U$ prend la forme suivante

$$^{R}U^{T}A^{R}U = \begin{bmatrix} y_1^T A\, y_1 & y_1^T A\, z_1 & \cdots & y_1^T A\, y_n & y_1^T A\, z_n \\ z_1^T A\, y_1 & z_1^T A\, z_1 & \cdots & z_1^T A\, y_n & z_1^T A\, z_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ y_n^T A\, y_1 & y_n^T A\, z_1 & \cdots & y_n^T A\, y_n & y_n^T A\, z_n \\ z_n^T A\, y_1 & z_n^T A\, z_1 & \cdots & z_n^T A\, y_n & z_n^T A\, z_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \omega_1 & \cdots & 0 & 0 \\ -\omega_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \omega_n \\ 0 & 0 & \cdots & -\omega_n & 0 \end{bmatrix} \tag{5.50}$$

Ainsi, le produit matriciel ${}^{R}U^{T}A^{R}U$ conduit à une matrice diagonale par blocs

$$ {}^{R}U^{T}A^{R}U = \text{diag}\left[\begin{pmatrix} 0 & \omega_1 \\ -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & \omega_n \\ -\omega_n & 0 \end{pmatrix}\right] \qquad (5.51) $$

dans laquelle les blocs sont antisymétriques et d'ordre deux.

Il faut observer que les relations (5.43) ne sont vraiment des relations d'orthogonalité que si la matrice symétrique B est non-singulière. Dans ce cas, le système admet $2n$ valeurs propres complexes non nulles (imaginaires pures) conjuguées deux à deux, $\pm j\omega_k$ $(k=1,\ldots,n)$, associées à $2n$ vecteurs propres u_k et $\bar{u}_k$ $(k=1,\ldots,n)$ dont les parties réelles et imaginaires vérifient les propriétés (5.43-48).

Les relations d'orthogonalité (5.43) et (5.44) permettent d'affirmer que les vecteurs y_r et z_r forment un ensemble de $2n$ vecteurs orthogonaux par rapport à la matrice B. Ils constituent donc une base orthogonale de l'espace R^{2n} pour le produit scalaire $\langle y_r, B\, z_s\rangle, (r,s=1,\ldots,n)$. Dès lors, dans la base $(y_1,\ldots,y_n,z_1,\ldots,z_n)$ de R^{2n} , constituée des parties réelles y_r et imaginaires z_r des vecteurs propres du système (5.5), un vecteur quelconque w peut s'écrire

$$ w = \sum_{r=1}^{n} \gamma_r\, y_r + \sum_{r=1}^{n} \nu_r\, z_r \qquad (5.52) $$

Dans cette expression, γ_r et ν_r sont des coefficients réels. Pour obtenir les coefficents γ_r , prémultiplions l'équation (5.52) par $y_s^T B$,

$$y_s^T B w = \sum_{r=1}^{n} \gamma_r \; y_s^T B y_r + \sum_{r=1}^{n} \nu_r \; y_s^T B z_r \qquad (5.53)$$

En supposant que les vecteurs propres sont normalisés selon la relation (5.43) et en tenant compte de la propriété d'orthogonalité (5.44), l'expression (5.53) devient

$$\gamma_r = y_r^T B w \qquad r=1,\ldots,n \qquad (5.54)$$

De façon identique, pour les coefficients ν_r, on obtient

$$\nu_r = z_r^T B w \qquad r=1,\ldots,n \qquad (5.55)$$

grâce aux mêmes propriétés d'orthonormalité.

5.5 Quotient de Rayleigh

Les propriétés du quotient de Rayleigh sont utilisées en dynamique pour estimer les modes propres de vibrations des systèmes conservatifs sans effet gyroscopique à partir de formes propres approchées établies a priori.

On peut aussi montrer qu'en présence de systèmes gyroscopiques conservatifs il est possible de définir un quotient de Rayleigh, formellement identique à celui des systèmes non-gyroscopiques et satisfaisant également la propriété de stationnarité pour les modes propres. Néanmoins, son utilisation

pratique est moins aisée en raison de la difficulté d'établir a priori l'allure des formes propres. Par contre, ses propriétés sont fondamentales dans le développement de la technique d'extraction des valeurs et vecteurs propres proposée au chapitre 8.

Rappelons que dans la formulation généralisée aux valeurs propres (5.5), associée aux systèmes gyroscopiques conservatifs, les matrices A et B sont réelles d'ordre $2n$, respectivement antisymétrique et symétrique définie positive. De plus, les valeurs propres $\lambda = \pm j\,\omega$ sont des imaginaires purs et les vecteurs propres $u = y \pm j\,z$ sont des vecteurs complexes dans l'espace C^{2n}.

En remplaçant, dans le problème (5.5), le vecteur propre par le vecteur énergétiquement admissible w et la valeur propre par le scalaire $R(w)$, il vient

$$A\,w = R(w)\,B\,w \tag{5.56}$$

En prémultipliant l'équation ci-dessus par le conjugué transposé $\bar{w}^T$ du vecteur w, on définit le quotient de Rayleigh pour les systèmes gyroscopiques conservatifs sous la forme suivante

$$R(w) = \frac{\bar{w}^T A w}{\bar{w}^T B w} = \frac{\langle \bar{w}, Aw \rangle}{\langle \bar{w}, Bw \rangle} \qquad (w \neq 0) \tag{5.57}$$

Remarquons qu'en vertu des propriétés précitées des matrices A et B, le quotient de Rayleigh $R(w)$ est un imaginaire pur. Montrons qu'il vérifie la propriété de stationnarité au voisinage des modes propres. En introduisant dans la définition (5.57) les notations $w = \alpha + j\,\beta$ et $\bar{w} = \alpha - j\,\beta$, où α et β désignent les parties réelle et imaginaire des vecteurs w et $\bar{w}$ de dimension $2n$, et en tenant compte des propriétés respectives des matrices A et B, il vient

$$R(w=\alpha+j\beta) = \frac{\langle(\alpha-j\beta),\ A(\alpha+j\beta)\rangle}{\langle(\alpha-j\beta),\ B(\alpha+j\beta)\rangle} = 2j\,\frac{\langle\alpha,A\beta\rangle}{\langle\alpha,B\alpha\rangle + \langle\beta,B\beta\rangle} \qquad (5.58)$$

La variation du premier ordre $\delta R(\alpha,\beta)$ du quotient de Rayleigh s'écrit dès lors

$$\delta R(\alpha,\beta) = 2j\,\frac{(\langle\delta\alpha,A\beta\rangle+\langle\alpha,A\delta\beta\rangle)(\langle\alpha,B\alpha\rangle+\langle\beta,B\beta\rangle)-2\langle\alpha,A\beta\rangle(\langle\delta\alpha,B\alpha\rangle+\langle\delta\beta,B\beta\rangle)}{(\langle\alpha,B\alpha\rangle+\langle\beta,B\beta\rangle)^2} \qquad (5.59)$$

Lorsque les vecteurs α et β sont respectivement les parties réelle y et imaginaire z d'un vecteur propre u, les produits scalaires apparaissant dans l'expression (5.59) peuvent se mettre, grâce aux relations (5.25-26), sous la forme

$$\begin{aligned}
&\langle\alpha,B\alpha\rangle = \langle y,By\rangle \\
&\langle\beta,B\beta\rangle = \langle z,Bz\rangle \\
&\langle\delta\alpha,B\alpha\rangle = \langle\delta y,By\rangle \\
&\langle\delta\beta,B\beta\rangle = \langle\delta z,Bz\rangle \\
&\langle\alpha,A\beta\rangle = \langle y,Az\rangle = \omega\,\langle y,By\rangle \\
&\langle\delta\alpha,A\beta\rangle = \langle\delta y,Az\rangle = \omega\,\langle\delta y,By\rangle \\
&\langle\alpha,A\delta\beta\rangle = -\langle\delta\beta,A\alpha\rangle = -\langle\delta z,Ay\rangle = \omega\,\langle\delta z,Bz\rangle
\end{aligned} \qquad (5.60)$$

En introduisant les relations ci-dessus dans l'expression (5.59), il vient

$$\delta R(\alpha,\beta)\Big|_{\substack{\alpha=y\\ \beta=z}} = 2j\,\frac{2\omega\,\langle y,By\rangle(\langle \delta y,By\rangle+\langle \delta z,Bz\rangle)-2\omega\,\langle y,By\rangle(\langle \delta y,By\rangle+\langle \delta z,Bz\rangle)}{(\langle y,By\rangle+\langle z,Bz\rangle)^2} = 0 \tag{5.61}$$

Ainsi, le quotient de Rayleigh défini par (5.57) pour les systèmes gyroscopiques conservatifs satisfait également la propriété de stationnarité au voisinage des modes propres. De plus, si l'on normalise les vecteurs propres $u = y + j\,z$ de façon que $\langle y_r,By_s\rangle = \langle z_r,Bz_s\rangle = \delta_{rs}$, pour le k-ième vecteur propre et son complexe conjugué on a

$$R(y_k,z_k) = j\omega_k \tag{5.62}$$

$$R(y_k,-z_k) = -\,j\omega_k \tag{5.63}$$

D'après le développement (5.24), le vecteur arbitraire w de C^{2n} peut s'exprimer dans la base des vecteurs propres $(u_1,\ldots,u_n,\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_n)$ sous la forme matricielle suivante

$$w = U\eta + \bar{U}\,\zeta \tag{5.64}$$

où η et ζ représentent deux vecteurs complexes à n composantes non toutes nulles et les matrices U et $\bar{U}$, dont les colonnes représentent respectivement les vecteurs propres u_r et $\bar{u}_r$ $(r=1,\ldots,n)$, sont de dimension $2n\times n$. Par conjugaison de l'expression (5.64), il vient

$$\bar{w}^T = \bar{\eta}^T \bar{U}^T + \bar{\zeta}^T U^T \tag{5.65}$$

En introduisant les développements (5.64-65) dans la définition du quotient de Rayleigh, on peut écrire

$$R(w) = \frac{(\bar{\eta}^T \bar{U}^T + \bar{\zeta}^T U^T)\, A(U\eta + \bar{U}\zeta)}{(\bar{\eta}^T \bar{U}^T + \bar{\zeta}^T U^T)\, B(U\eta + \bar{U}\zeta)} \tag{5.66}$$

En explicitant les calculs matriciels, cette expression devient

$$R(w) = \frac{\bar{\eta}^T \bar{U}^T A U \eta + \bar{\eta}^T \bar{U}^T A \bar{U} \zeta + \bar{\zeta}^T U^T A U \eta + \bar{\zeta}^T U^T A \bar{U} \zeta}{\bar{\eta}^T \bar{U}^T B U \eta + \bar{\eta}^T \bar{U}^T B \bar{U} \zeta + \bar{\zeta}^T U^T B U \eta + \bar{\zeta}^T U^T B \bar{U} \zeta} \tag{5.67}$$

En raison des propriétés d'orthogonalité (5.20-23), les produits matriciels $\bar{U}^T A \bar{U}$, $U^T A U$, $\bar{U}^T B \bar{U}$ et $U^T B U$ sont tous nuls et la relation (5.67) devient

$$R(w) = \frac{\bar{\eta}^T \bar{U}^T A U \eta + \bar{\zeta}^T U^T A \bar{U} \zeta}{\bar{\eta}^T \bar{U}^T B U \eta + \bar{\zeta}^T U^T B \bar{U} \zeta} \tag{5.68}$$

Grâce encore aux relations d'orthonormalité (5.20-21), cette expression peut s'écrire sous la forme

$$R(w) = j\, \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{\eta}_i \eta_i \omega_i - \sum_{i=1}^{n} \bar{\zeta}_i \zeta_i \omega_i}{\sum_{i=1}^{n} \bar{\eta}_i \eta_i + \sum_{i=1}^{n} \bar{\zeta}_i \zeta_i} \tag{5.69}$$

Remarquons que, le produit d'un complexe par son conjugué étant réel, le quotient de Rayleigh $R(w)$ est, comme nous l'avons vu, un nombre imaginaire pur. Nous noterons $R^I(w)$ la partie imaginaire de $R(w)$.

Si, dans l'expression (5.69), on soustrait ω_n à $R^I(w)$, on obtient

$$R^I(w) - \omega_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{\eta}_i \eta_i (\omega_i - \omega_n) - \sum_{i=1}^{n} \bar{\zeta}_i \zeta_i (\omega_i + \omega_n)}{\sum_{i=1}^{n} (\bar{\eta}_i \eta_i + \bar{\zeta}_i \zeta_i)} \tag{5.70}$$

En tenant compte de l'arrangement par ordre croissant des valeurs ω_i , $(\omega_1 \leq \omega_2 \leq \ldots \leq \omega_n)$, nous remarquons que le numérateur et le dénominateur de l'expression ci-dessus sont des scalaires respectivement négatif et positif. Dès lors, nous pouvons écrire l'inégalité suivante

$$R^I(w) - \omega_n \leq 0 \tag{5.71}$$

De façon analogue, nous pouvons établir la relation

$$R^I(w) + \omega_n \geq 0 \tag{5.72}$$

En associant les deux inégalités (5.71-72), on trouve, pour les systèmes gyroscopiques conservatifs, la propriété de l'extremum du quotient de Rayleigh (5.57) sous la forme

$$-\omega_n \leq R^I(w) \leq \omega_n \tag{5.73}$$

La propriété (5.73) est aussi connue sous le nom de principe de Rayleigh. Les deux relations (5.71-72) peuvent également s'écrire sous les formes suivantes

$$- \omega_n = \min \{ \mathrm{Im} [\frac{\langle \bar{w}, Aw \rangle}{\langle \bar{w}, Bw \rangle}] \} \tag{5.74}$$

$$\omega_n = \max \{ \mathrm{Im} [\frac{\langle \bar{w}, Aw \rangle}{\langle \bar{w}, Bw \rangle}] \} \tag{5.75}$$

Ainsi, la valeur estimée de $R^I(w) = \mathrm{Im}[R(w)]$ est une borne supérieure pour $-\omega_n$ et une borne inférieure pour ω_n . En effet, le minimum de $R^I(w)$ est atteint pour le vecteur $w = \bar{u}_n$, alors que le maximum l'est pour $w = u_n$, u_n et $\bar{u}_n$ désignant respectivement le n-ième vecteur propre et son complexe conjugué.

Selon une démarche similaire, le principe de Rayleigh peut être étendu successivement aux autres fréquences naturelles ω_r $(r=1,2,\ldots,n-1)$ du système. On peut en effet établir une caractérisation variationnelle de la valeur ω_r sous la forme

$$\omega_r = \max \{ R^I(w) \; | \langle \bar{w}, B u_s \rangle = 0 \; , \; s=r+1,\ldots,n \} \; (r=1,2,\ldots,n-1) \tag{5.76}$$

Cette relation montre donc que la valeur ω_r constitue le maximum de $R^I(w)$, w devant satisfaire (n-r) contraintes d'orthogonalité exprimées sous la forme de produits scalaires $\langle \bar{w}, B u_i \rangle$, $(i=n,n-1,\ldots,r+1)$. Ces conditions d'orthogonalité forment ainsi (n-r) équations de contrainte, ce qui signifie que la caractérisation variationnelle de la r-ième fréquence naturelle suppose la connaissance préalable des (n-r) vecteurs propres u_n, $u_{n-1},\ldots,u_{r+1}$ associés aux valeurs propres de plus grand module.

La propriété de stationnarité et la caractérisation variationnelle précitées sont bien connues pour les systèmes linéaires non gyroscopiques conservatifs. L'existence de propriétés analogues pour les systèmes gyroscopiques conservatifs constitue un outil puissant dans l'analyse modale des systèmes tournants. En particulier, ces propriétés sont déterminantes lors du développement et de l'analyse de convergence de la technique proposée au chapitre 8 pour l'extraction des valeurs et vecteurs propres.

Pour terminer, rappelons que l'on a montré au paragraphe 5.4 que le problème aux valeurs et vecteurs propres (5.5) peut être transformé en un problème équivalent, défini par deux matrices réelles A^S et B, d'ordre $2n$ et symétriques. Ce problème, dont la solution est réelle, s'écrit

$$A^S \, {}^R U = B \, {}^R U \, \Lambda^2 \tag{5.77}$$

où les colonnes de la matrice ${}^R U$ représentent respectivement les parties réelle et imaginaire des vecteurs propres du problème (5.5) et la matrice diagonale Λ^2 contient les carrés des fréquences naturelles.

Dans la référence [M5] est défini, sur la base de la formulation (5.77), un quotient de Rayleigh pour les systèmes gyroscopiques conservatifs possédant les mêmes propriétés de stationnarité et d'extremum que celles énoncées précédemment. Malheureusement, en vertu de l'expression (5.31), la matrice A^S de dimension $2n$ est pleine, ce qui accroît considérablement les temps de calcul. Dès lors, cette transformation du problème (5.5) ne présente que peu d'intérêt dans le contexte de ce travail, orienté vers l'analyse des systèmes de grande dimension.

6. BI-ITERATION DES SOUS-ESPACES ADJOINTS POUR LES SYSTEMES GYROSCOPIQUES DISSIPATIFS

Après l'établissement des propriétés de bi-orthogonalité des espaces propres adjoints et de la propriété de stationarité du quotient de Rayleigh généralisé, nous sommes en mesure d'établir, pour le problème généralisé non-symétrique (4.10) associé aux systèmes gyroscopiques dissipatifs, une technique d'extraction des fréquences propres de plus petit module, des amortissements modaux et des modes propres duals associés.

Dans ce chapitre, nous présenterons uniquement le formalisme algébrique de la méthode, la mise en oeuvre numérique proprement dite étant décrite dans le chapitre suivant.

La méthode d'itération des sous-espaces adjoints proposée associe la technique de l'itération inverse simultanée à un processus de bi-orthogonalisation basé sur la propriété de stationnarité du quotient de Rayleigh généralisé. La technique d'extraction partielle, permettant d'estimer les solution adjointes $(\lambda_i, v_i; \bar{\lambda}_i, \bar{v}_i)$ et $(\lambda_i, u_i; \bar{\lambda}_i, \bar{u}_i)$, $i=1,\ldots,p$, associées aux p paires de valeurs propres de plus petit module, se scinde essentiellement en trois phases :

i) génération de deux ensembles de $2q$ vecteurs initiaux de C^{2n}, avec $q > p$;

ii) amélioration des vecteurs de départ par bi-itération inverse simultanée pour générer les sous-espaces adjoints des $2q$ premiers modes propres;

iii) bi-orthogonalisation des deux ensembles de $2q$ vecteurs itérés par analyse de Rayleigh-Ritz généralisée et extraction des p valeurs propres de plus petit module.

Le processus itératif combinant les deux dernières phases conduit à la génération des sous-espaces adjoints gauche E^G et droit E^D, contenant les $2p$ modes propres duals cherchés.

Par analogie avec la technique d'itération d'un sous-espace développée pour les problèmes généralisés symétriques [B5], nous avons appelé la technique proposée "méthode de bi-itération des sous-espaces adjoints", étant donné que les itérations sont effectuées sur deux sous-espaces adjoints. Cette technique ne doit donc pas être assimilée à une itération simultanée de vecteurs tendant individuellement vers les vecteurs propres. En d'autres termes, le nombre total d'itérations requises dépend de la qualité des sous-espaces initiaux et non de la proximité des vecteurs initiaux relativement aux vecteurs propres recherchés. Par conséquent, seule la convergence des sous-espaces propres adjoints est nécessaire et non celle des vecteurs propres duals individuels. Dès lors, si les vecteurs initiaux appartiennent aux sous-espaces propres, des combinaisons linéaires de ces vecteurs engendrent les vecteurs propres cherchés et la technique proposée converge en une seule itération, comme nous le verrons au paragraphe 6.2.

6.1 Bi-itération inverse simultanée des sous-espaces adjoints

La technique d'itération inverse simultanée consiste à itérer simultanément sur un ensemble de vecteurs initiaux, constituant une base du sous-espace de départ.

Pour la méthode proposée, nous utilisons cette technique pour itérer sur deux groupes de $2q$ vecteurs ($2q << 2n$), formant respectivement les deux ensembles duals u_o^i et v_o^i ($i=1,\ldots,2q$) de départ. Ces vecteurs, qui constituent des bases pour les sous-espaces duals E_o^D et E_o^G respectifs, forment les matrices rectangulaires U_o et V_o de dimension $(2n,2q)$ (phase i)

$$U_o = [u_o^1, u_o^2,\ldots,u_o^{2p}, \ldots,u_o^{2q}] \tag{6.1}$$

$$V_o = [v_o^1, v_o^2,\ldots,v_o^{2p},\ldots,v_o^{2q}] \tag{6.2}$$

A la k-ième itération inverse simultanée, on résout en parallèle les deux systèmes d'équations linéaires suivants (phase ii)

$$A\,\hat{U}_{k+1} = B\,U_k \qquad k = 0,1,\ldots \tag{6.3}$$

$$A^T\,\hat{V}_{k+1} = B^T\,V_k \qquad k = 0,1,\ldots \tag{6.4}$$

avec

$$U_k = [u_k^1, u_k^2,\ldots,u_k^{2p},\ldots,u_k^{2q}] \tag{6.5}$$

$$V_k = [v_k^1, v_k^2,\ldots,v_k^{2p},\ldots,v_k^{2q}] \tag{6.6}$$

et

$$\hat{U}_{k+1} = [\hat{u}_{k+1}^1, \hat{u}_{k+1}^2,\ldots,\hat{u}_{k+1}^{2p},\ldots,\hat{u}_{k+1}^{2q}) \tag{6.7}$$

$$\hat{V}_{k+1} = [\hat{v}_{k+1}^1, \hat{v}_{k+1}^2,\ldots,\hat{v}_{k+1}^{2p},\ldots,\hat{v}_{k+1}^{2q}) \tag{6.8}$$

Les matrices $\hat{U}_{k+1}$ et $\hat{V}_{k+1}$ de dimension (2nx2q) contiennent les solutions des systèmes d'équations (8.3-4), les vecteurs linéairement indépendents $\hat{u}^i_{k+1}$ et $\hat{v}^i_{k+1}$ formant, lors de la k-ième itération, les bases des sous-espaces adjoints itérés E^D_{k+1} et E^G_{k+1} .

Il est utile de noter maintenant déjà que la résolution des systèmes d'équations linéaires (6.3-4) ne demandera pas la décomposition des matrices A et A^T d'ordre 2n , mais uniquement la factorisation préliminaire de la matrice spatiale bande K_g d'ordre n sous la forme $K_g = LDU$ où D est une matrice diagonale, alors que L et U sont des matrices triangulaires, respectivement inférieure et supérieure, à diagonale unité.

6.2 Analyse de Rayleigh-Ritz généralisée

Rappelons tout d'abord que la méthode d'itération inverse simultanée est une variante de la méthode d'itération inverse et présente les mêmes propriétés de convergence pour chaque colonne des matrices U_k et V_k . Ainsi, il est bien connu [B6,L6] que, si la méthode se limitait aux itérations de la forme (6.3-4), tous les vecteurs itérés de $\hat{U}_{k+1}$ tendraient vers la même direction propre associée à la valeur propre de plus petit module, de sorte que les vecteurs itérés de $\hat{U}_{k+1}$ deviennent presque colinéaires. Il en serait de même pour les vecteurs itérés adjoints dans la matrice $\hat{V}_{k+1}$. Afin d'éviter cette tendance vers la colinéarité et séparer les solutions propres duales définies par les sous-espaces adjoints des vecteurs itérés $\hat{U}_{k+1}$ et $\hat{V}_{k+1}$, on a recours à un procédé de bi-orthogonalisation (phase iii).

Cette technique consiste en une analyse dite de Rayleigh-Ritz qui permet d'optimaliser les vecteurs itérés $\hat{u}^i_{k+1}$ et $\hat{v}^i_{k+1}$ et construire les bases adjointes bi-orthogonales U_{k+1} et V_{k+1} cherchées. Son principe de base consiste dans le fait que l'on a engendré préalablement des sous-espaces E^G_{k+1} et E^D_{k+1} tendant vers les sous-espaces propres E^G et E^D dont les bases sont constituées par les vecteurs propres adjoints recherchés.

Considérons deux vecteurs dans les sous-espaces E^G_{k+1} et E^D_{k+1}, notés respectivement y et x, comme une combinaison linéaire des vecteurs itérés $\hat{u}^i_{k+1}$ et $\hat{v}^i_{k+1}$ (i=1,...,2q) :

$$y = \phi_1 \hat{v}^1_{k+1} + \ldots + \phi_{2q} \hat{v}^{2q}_{k+1} \tag{6.9}$$

$$x = \phi_1 \hat{u}^1_{k+1} + \ldots + \phi_{2q} \hat{u}^{2q}_{k+1} \tag{6.10}$$

Ces relations peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante

$$y = \hat{V}_{k+1} \, \phi \tag{6.11}$$

$$x = \hat{U}_{k+1} \, \phi \tag{6.12}$$

où les vecteurs ψ et ϕ ont pour définition

$$\psi = [\phi_1, \ldots, \phi_{2q}]^T \tag{6.13}$$

$$\phi = [\phi_1, \ldots, \phi_{2q}]^T \tag{6.14}$$

Les coefficients inconnus ϕ_i et ϕ_i ($i=1,\ldots,2q$), appelés coordonnées de Ritz, représentent en fait les composantes des vecteurs y et x dans les bases respectives $\hat{V}_{k+1}$ et $\hat{U}_{k+1}$ dites bases de Ritz. Les coordonnées de Ritz sont déterminés de façon que les vecteurs y et x appartenant respectivement aux sous-espaces itérés E^G_{k+1} et E^D_{k+1} soient proches de deux vecteurs propres adjoints.

Lorsque les vecteurs y et x sont voisins, respectivement d'un vecteur propre gauche v_i et d'un vecteur propre droit u_i, le quotient de Rayleigh généralisé

$$R(y,x) = \frac{\langle y,Ax\rangle}{\langle y,Bx\rangle} = \frac{y^TAx}{y^TBx} \qquad (6.15)$$

est stationnaire pour des petites variations de y et x. En conséquence, le quotient de Rayleigh reste également stationnaire pour de petites variations des coefficients ϕ_i et ϕ_i ($i=1,\ldots,2q$), cette valeur stationnaire étant précisément la valeur propre associée aux vecteurs v_i et u_i. Pour que la condition de stationnarité soit satisfaite, ces coefficients doivent vérifier les relations suivantes

$$\frac{\partial}{\partial\phi_i}(R(\phi,\phi)) = 0 \qquad i=1,\ldots,2q \qquad (6.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial\phi_i}(R(\phi,\phi)) = 0 \qquad i=1,\ldots,2q \qquad (6.17)$$

En utilisant les développements (6.11-12), le quotient de Rayleigh s'écrit

$$R(\psi,\phi) = \frac{\psi^T \hat{V}_{k+1}^T A \hat{U}_{k+1} \phi}{\psi^T \hat{V}_{k+1}^T B \hat{U}_{k+1} \phi} = \frac{\tilde{a}(\psi,\phi)}{\tilde{b}(\psi,\phi)} \qquad (6.18)$$

d'où l'on tire

$$\tilde{a}(\psi,\phi) = R(\psi,\phi)\ \tilde{b}(\psi,\phi) \qquad (6.19)$$

Si l'on dérive l'équation ci-dessus par rapport aux coordonnées de Ritz ϕ_i et $\phi_i (i=1,\ldots,2q)$, on obtient respectivement

$$\frac{\partial}{\partial\phi_i}(\tilde{a}(\psi,\phi)) = \frac{\partial}{\partial\phi_i}(R(\psi,\phi))\ \tilde{b}(\psi,\phi) + R(\psi,\phi)\ \frac{\partial}{\partial\phi_i}(\tilde{b}(\psi,\phi)) \qquad (6.20)$$

$$i=1,\ldots,2q$$

$$\frac{\partial}{\partial\phi_i}(\tilde{a}(\psi,\phi)) = \frac{\partial}{\partial\phi_i}(R(\psi,\phi))\ \tilde{b}(\psi,\phi) + R(\psi,\phi)\ \frac{\partial}{\partial\phi_i}(\tilde{b}(\psi,\phi)) \qquad (6.21)$$

En tenant compte de la condition de stationnarité (6.16-17), ces relations deviennent

$$\frac{\partial}{\partial\phi_i}(\tilde{a}(\psi,\phi)) = R(\psi,\phi)\ \frac{\partial}{\partial\phi_i}(\tilde{b}(\psi,\phi)) \qquad (6.22)$$

$$i=1,\ldots,2q$$

$$\frac{\partial}{\partial\phi_i}(\tilde{a}(\psi,\phi)) = R(\psi,\phi)\ \frac{\partial}{\partial\phi_i}(\tilde{b}(\psi,\phi)) \qquad (6.23)$$

En introduisant la définition de $\tilde{a}(\psi,\phi)$ et $\tilde{b}(\psi,\phi)$ tirée de l'expression (6.18), il vient

$$(\frac{\partial}{\partial\phi_i}(\psi))^T \hat{V}_{k+1}^T A \hat{U}_{k+1} \phi = R(\psi,\phi)\ (\frac{\partial}{\partial\phi_i}(\psi))^T \hat{V}_{k+1} B \hat{U}_{k+1} \phi \qquad (6.24)$$

$$i=1,\ldots,2q$$

$$\psi^T \hat{V}_{k+1}^T A \hat{U}_{k+1} \frac{\partial}{\partial\phi_i}(\phi) = R(\psi,\phi)\ \psi^T \hat{V}_{k+1} B \hat{U}_{k+1} \frac{\partial}{\partial\phi_i}(\phi) \qquad (6.25)$$

Après dérivation, ces expressions peuvent s'écrire

$$(\hat{v}^i_{k+1})^T A \hat{U}_{k+1} \phi = R(\phi,\phi)(\hat{v}^i_{k+1})^T B \hat{U}_{k+1} \phi \qquad (6.26)$$

$$i = 1,\ldots,2q$$

$$\phi^T \hat{V}^T_{k+1} A \hat{u}^i_{k+1} = R(\phi,\phi)\ \phi^T \hat{V}_{k+1} B \hat{u}^i_{k+1} \qquad (6.27)$$

Le regroupement des vecteurs $\hat{v}^i_{k+1}$ et $\hat{u}^i_{k+1}$ $(i=1,\ldots,2q)$, respectivement dans les matrices $\hat{V}_{k+1}$ et $\hat{U}_{k+1}$, conduit, après transposition de (6.27), aux deux problèmes aux valeurs propres de dimension réduite $(2q << 2n)$ suivants

$$A_{k+1} \phi = \lambda^R_{k+1} B_{k+1} \phi \qquad (6.28)$$

$$A^T_{k+1} \phi = \lambda^R_{k+1} B^T_{k+1} \phi \qquad (6.29)$$

où les opérateurs complexes A_{k+1} et B_{k+1} sont donnés par les matrices

$$A_{k+1} = \hat{V}^T_{k+1} A \hat{U}_{k+1} \qquad (6.30)$$

$$B_{k+1} = \hat{V}^T_{k+1} B \hat{U}_{k+1} \qquad (6.31)$$

et où les valeurs propres λ^R_{k+1} sont les quotients de Rayleigh généralisés $R(\phi,\phi)$.

Les deux problèmes adjoints aux valeurs et vecteurs propres (8.28-29) sont appelés "problèmes d'interaction", alors que les matrices A_{k+1} et B_{k+1} sont dites "matrices d'interaction".

Les vecteurs ϕ et ψ des coordonnées de Ritz sont donc les vecteurs propres des équations (6.28-29), tandis que les valeurs stationnaires du quotient de Rayleigh sont les valeurs propres λ^R_{k+1} des équations (6.28-29) et constituent des approximations des valeurs propres λ des équations (4.10) et (4.14). Ces approximations sont d'autant meilleures que les vecteurs de Ritz engendrent des sous-espaces proches des sous-espaces propres adjoints cherchés. Cela ne signifie pas que chacun des vecteurs de Ritz doit être proche d'un vecteur propre cherché, mais que des combinaisons linéaires des vecteurs de Ritz peuvent engendrer de bonnes approximations des vecteurs propres cherchés.

En notant P et Q les matrices d'ordre 2q formées des 2q vecteurs propres ϕ et ψ associés aux problèmes réduits, et Λ^R_{k+1} une matrice diagonale dont les termes sont les valeurs propres λ^R_{k+1}, les solutions des équations (6.28-29) s'écrivent

$$A_{k+1}\, P = B_{k+1}\, P\, \Lambda^R_{k+1} \tag{6.32}$$

$$A^T_{k+1}\, Q = B^T_{k+1}\, Q\, \Lambda^R_{k+1} \tag{6.33}$$

Avec les solutions duales P et Q des deux problèmes d'interaction adjoints et par les expressions (6.11-12) qui représentent des transformations de coordonnées, on peut optimaliser les vecteurs itérés $\hat{u}^i_{k+1}$ et $\hat{v}^i_{k+1}$, appelés vecteurs de Ritz, pour obtenir deux bases bi-orthogonales

$$U_{k+1} = \hat{U}_{k+1} P \tag{6.34}$$

$$V_{k+1} = \hat{V}_{k+1} Q \tag{6.35}$$

En effet, d'après le paragraphe 4.3., les vecteurs propres adjoints normalisés P et Q sont bi-orthogonaux pour les produits scalaires $< Q, B_{k+1} P >$ et $< Q, A_{k+1} P >$ et l'on peut écrire

$$Q^T B_{k+1} P = I \tag{6.36}$$

$$Q^T A_{k+1} P = \Lambda^R_{k+1} \tag{6.37}$$

En introduisant dans les relations ci-dessus les expressions (6.30-31) et en tenant compte des relations (6.34-35), on obtient

$$Q^T \hat{V}^T_{k+1} B \hat{U}_{k+1} P = V^T_{k+1} B U_{k+1} = I \tag{6.38}$$

$$Q^T \hat{V}^T_{k+1} A \hat{U}_{k+1} P = V^T_{k+1} A U_{k+1} = \Lambda^R_{k+1} \tag{6.39}$$

Ainsi, si Q et P sont bi-orthogonaux par rapport à B_{k+1} et A_{k+1}, les vecteurs V_{k+1} et U_{k+1} sont bi-orthogonaux par rapport aux matrices A et B.

L'analyse de Rayleigh-Ritz faisant suite à l'itération inverse simultanée de deux sous-espaces adjoints permet de bi-orthogonaliser les vecteurs itérés en séparant les solutions associées aux valeurs propres de plus petit module. De plus, si les vecteurs itérés $\hat{u}^i_{k+1}$ et $\hat{v}^i_{k+1}$ engendrent les

sous-espaces propres adjoints dont les vecteurs propres recherchés constituent les bases respectives, les valeurs propres et vecteurs propres adjoints sont calculés en une seule itération. En effet, si des combinaisons linéaires des vecteurs $\hat{u}^i_{k+1}$ et $\hat{v}^i_{k+1}$ engendrent les vecteurs propres recherchés u_i et v_i, ces derniers sont les vecteurs u^i_{k+1} et v^i_{k+1} donnés par les expressions (6.34-35).

A moins que V_{k+1} et U_{k+1} n'engendrent les sous-espaces propres adjoints recherchés, les étapes décrites par les expressions (6.3-4, 6.30-35) doivent être répétées jusqu'à ce que la précision requise soit atteinte. Pour autant que les vecteurs dans les matrices V_{k+1} et U_{k+1} ne soient pas orthogonaux à l'un des vecteurs propres cherchés, on a au fur et à mesure que les itérations progressent,

$$\Lambda^R_{k+1} \rightarrow \Lambda^{2q} \tag{6.40}$$

$$V_{k+1} \rightarrow V^{2q} \qquad U_{k+1} \rightarrow U^{2q} \tag{6.41}$$

La matrice diagonale Λ^{2q} contient les $2q$ valeurs propres de plus petit module et les matrices modales V^{2q} et U^{2q} contiennent les vecteurs propres adjoints associés.

A chaque itération inverse simultanée les deux sous-espaces adjoints E^G_{k+1} et E^D_{k+1} deviennent de meilleures approximations des sous-espaces propres recherchés. En conséquence, les matrices d'interaction A_{k+1} et B_{k+1} tendent vers des matrices diagonales au fur et à mesure que les itérations se poursuivent.

En résumé, les étapes principales de la recherche des valeurs et vecteurs propres par bi-itération inverse simultanée des deux sous-espaces propres adjoints, combinée à une analyse de Rayleigh-Ritz sont

1) Génération de deux ensembles V_0 et U_0, formés chacun de $2q$ vecteurs initiaux

2) Itération inverse simultanée des deux sous-espaces adjoints E^G_k et E^D_k aux sous-espaces E^G_{k+1} et E^D_{k+1}

$$A^T \hat{V}_{k+1} = B^T V_k$$

$$A \hat{U}_{k+1} = B U_k$$

3) Bi-orthogonalisation des vecteurs itérés par une analyse de Rayleigh-Ritz.

3.1) Détermination des matrices d'interaction A_{k+1} et B_{k+1}

$$A_{k+1} = \hat{V}^T_{k+1} A \hat{U}_{k+1}$$

$$B_{k+1} = \hat{V}^T_{k+1} B \hat{U}_{k+1}$$

3.2) Résolution des problèmes adjoints d'interaction pour le calcul de la matrice des valeurs de Ritz Λ^R_{k+1}

$$A^T_{k+1} Q = B^T_{k+1} Q \Lambda^R_{k+1}$$

$$A_{k+1} P = B_{k+1} P \Lambda^R_{k+1}$$

3.3) Construction de deux bases adjointes bi-orthogonales

$$V_{k+1} = \hat{V}_{k+1}\, Q$$

$$U_{k+1} = \hat{U}_{k+1}\, P$$

4) Test de convergence sur les valeurs propres λ_i^{k+1} (i=1,...,p) contenues dans Λ_{k+1}^R

- Si le critère de convergence est satisfait, arrêt du processus itératif
- Si la convergence n'est pas atteinte, retour à l'étape 2.

A la dernière itération, notée ℓ , la solution estimée est composée

- des valeurs propres λ_i^ℓ (i=1,...,p)
- des vecteurs propres adjoints, respectivement gauches v_ℓ^i et droits u_ℓ^i (i=1,...,p) .

6.3 Variante avec itération d'un seul des sous-espaces adjoints

Lors de l'itération inverse simultanée, si l'on itère pour un seul des deux sous-espaces adjoints, on établit une variante de l'algorithme présenté au paragraphe précédent. Cette variante est en fait identique à la technique proposée dans la référence [D2].

Nous allons démontrer que la projection des matrices A et B dans un seul sous-espace itéré et la résolution des problèmes d'interaction asso-

ciés constituent également une analyse de Rayleigh-Ritz pour améliorer les vecteurs itérés.

Ainsi, dans la variante présentée ici, lors de l'itération inverse simultanée (phase ii), on itère uniquement pour le sous-espace droit E^D_{k+1} de dimension 2q engendré par les 2q vecteurs $(\hat{u}^1_{k+1},\ldots,\hat{u}^{2q}_{k+1})$, conformément à l'expression (6.3). L'étape suivante (phase iii) consiste à projeter les matrices A et B dans le sous-espace itéré E^D_{k+1} et à résoudre les problèmes d'interaction adjoints de dimension réduite.

Les projections $\underset{\sim}{A}_{k+1}$ et $\underset{\sim}{B}_{k+1}$ dans le sous-espace itéré E^D_{k+1} sont données par les expressions suivantes

$$\underset{\sim}{A}_{k+1} = \hat{U}^T_{k+1}\, A\, \hat{U}_{k+1} \tag{6.42}$$

$$\underset{\sim}{B}_{k+1} = \hat{U}^T_{k+1}\, B\, \hat{U}_{k+1} \tag{6.43}$$

Les problèmes d'interaction adjoints associés aux matrices complexes non-symétriques $\underset{\sim}{A}_{k+1}$ et $\underset{\sim}{B}_{k+1}$ s'écrivent

$$\underset{\sim}{A}_{k+1}\, \underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{B}_{k+1}\, \underset{\sim}{P}\, \underset{\sim}{\Lambda}_{k+1} \tag{6.44}$$

$$\underset{\sim}{A}^T_{k+1}\, \underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{B}^T_{k+1}\, \underset{\sim}{Q}\, \underset{\sim}{\Lambda}_{k+1} \tag{6.45}$$

En exprimant les vecteurs propres du problème réduit (6.44) dans les coordonnées généralisées, on trouve une estimation améliorée des vecteurs de Ritz formant une base du sous-espace itéré E_{k+1}

$$U_{k+1} = \hat{U}_{k+1} \underset{\sim}{P} \tag{6.46}$$

De même, avec la solution du problème d'interaction (6.45), on calcule une approximation améliorée du sous-espace adjoint

$$V_{k+1} = \hat{U}_{k+1} \underset{\sim}{Q} \tag{6.47}$$

L'itération ne concernant qu'un seul des deux sous-espaces adjoints, la résolution du problème d'interaction (6.45) et le calcul (6.47) de la base du sous-espace adjoint ne sont effectués que lorsque la convergence pour le sous-espace itéré est atteinte, c'est-à-dire qu'une seule fois à la fin du processus itératif.

Selon une démarche analogue à celle du paragraphe précédent, nous allons montrer que cette variante de l'algorithme proposé englobe une analyse de Rayleigh-Ritz. Considérons deux vecteurs y et x dans le sous-espace E^D_{k+1} comme combinaisons linéaires des vecteurs itérés $\hat{u}^i_{k+1}$ $(i=1,\ldots,2q)$:

$$y = \phi_1 \hat{u}^1_{k+1} + \ldots + \phi_{2q} \hat{u}^{2q}_{k+1} = \hat{U}_{k+1} \phi \tag{6.48}$$

$$x = \phi_1 \hat{u}^1_{k+1} + \ldots + \phi_{2q} \hat{u}^{2q}_{k+1} = \hat{U}_{k+1} \phi \tag{6.49}$$

les vecteurs ϕ et ϕ étant ainsi définis

$$\phi = [\phi_1,\ldots,\phi_{2q}]^T \tag{6.50}$$

$$\phi = [\phi_1,\ldots,\phi_{2q}]^T \tag{6.51}$$

Remarquons que les vecteurs y et x sont exprimés maintenant dans la même base $\hat{U}_{k+1}$. Lorsqu'ils sont proches, respectivement d'un vecteur pro-

pre gauche et d'un vecteur propre droit, tous deux associés à la même valeur propre, le quotient de Rayleigh généralisé

$$R(\phi,\phi) = \frac{y^T A x}{y^T B x} \tag{6.52}$$

est stationnaire. Ainsi, les coefficients inconnus ϕ_i et ϕ_i doivent vérifier les relations suivantes

$$\frac{\partial}{\partial \phi_i} (R(\phi,\phi)) = 0 \qquad i=1,\ldots,2q \tag{6.53}$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi_i} (R(\phi,\phi)) = 0 \qquad i=1,\ldots,2q \tag{6.54}$$

En utilisant les développements (6.48-49), l'expression (6.52) du quotient de Rayleigh devient

$$R(\phi,\phi) = \frac{\phi^T \hat{U}_{k+1}^T A \hat{U}_{k+1} \phi}{\phi^T \hat{U}_{k+1}^T B \hat{U}_{k+1} \phi} = \frac{\tilde{a}(\phi,\phi)}{\tilde{b}(\phi,\phi)} \tag{6.55}$$

ou encore

$$\tilde{a}(\phi,\phi) = R(\phi,\phi)\ \tilde{b}(\phi,\phi) \tag{6.56}$$

En dérivant cette expression par rapport aux coefficients ϕ_i et ϕ_i $(i=1,\ldots,2q)$, on trouve

$$\frac{\partial}{\partial \phi_i} (\tilde{a}(\phi,\phi)) = \frac{\partial}{\partial \phi_i} (R(\phi,\phi))\ \tilde{b}(\phi,\phi) + R(\phi,\phi) \frac{\partial}{\partial \phi_i} (\tilde{b}(\phi,\phi)) \tag{6.57}$$

$$i=1,\ldots,2q$$

$$\frac{\partial}{\partial\phi_i}\,(\tilde{a}(\phi,\phi)) = \frac{\partial}{\partial\phi_i}\,(R(\phi,\phi))\;\tilde{b}(\phi,\phi) + R(\phi,\phi)\;\frac{\partial}{\partial\phi_i}\,(\tilde{b}(\phi,\phi)) \qquad (6.58)$$

En tenant compte des relations de stationnarité (6.53-54), on obtient

$$\frac{\partial}{\partial\phi_i}\,(\tilde{a}(\phi,\phi)) = R(\phi,\phi)\;\frac{\partial}{\partial\phi_i}\,(\tilde{b}(\phi,\phi)) \qquad (6.59)$$

$$i=1,\ldots,2q$$

$$\frac{\partial}{\partial\phi_i}\,(\tilde{a}(\phi,\phi)) = R(\phi,\phi)\;\frac{\partial}{\partial\phi_i}\,(\tilde{b}(\phi,\phi)) \qquad (6.60)$$

En introduisant dans (6.59-60) la définition de $\tilde{a}(\phi,\phi)$ et $\tilde{b}(\phi,\phi)$, il vient

$$(\frac{\partial}{\partial\phi_i}\,(\phi))^T\;\hat{U}_{k+1}^T\;A\;\hat{U}_{k+1}\;\phi = R(\phi,\phi)\;(\frac{\partial}{\partial\phi_i}\,(\phi))^T\;\hat{U}_{k+1}^T\;B\;\hat{U}_{k+1}\;\phi \qquad (6.61)$$

$$i=1,\ldots,2q$$

$$\phi^T\;\hat{U}_{k+1}^T\;A\;\hat{U}_{k+1}\;\frac{\partial}{\partial\phi_i}\,(\phi) = R(\phi,\phi)\;\phi^T\;\hat{U}_{k+1}^T\;B\;\hat{U}_{k+1}\;\frac{\partial}{\partial\phi_i}\,(\phi) \qquad (6.62)$$

Toutes les dérivations effectuées, ces expressions peuvent s'écrire

$$(\hat{u}_{k+1}^i)^T\;A\;\hat{U}_{k+1}\;\phi = R(\phi,\phi)(\hat{u}_{k+1}^i)^T\;B\;\hat{U}_{k+1}\;\phi \qquad (6.63)$$

$$i=1,\ldots,2q$$

$$\phi^T\;\hat{U}_{k+1}^T\;A\;\hat{u}_{k+1}^i = R(\phi,\phi)\;\phi^T\;\hat{U}_{k+1}^T\;B\;\hat{u}_{k+1}^i \qquad (6.64)$$

Le regroupement des vecteurs $\hat{u}_{k+1}^i$ $(i=1,\ldots,2q)$ dans la matrice $\hat{U}_{k+1}$ conduit, après transposition de l'équation (6.64), aux deux problèmes aux

valeurs propres suivants

$$\underset{\sim}{A}_{k+1}\ \phi = \lambda_R\ \underset{\sim}{B}_{k+1}\ \phi \tag{6.65}$$

$$\underset{\sim}{A}^T_{k+1}\ \psi = \lambda_R\ \underset{\sim}{B}^T_{k+1}\psi \tag{6.66}$$

où les matrices d'interaction s'écrivent cette fois

$$\underset{\sim}{A}_{k+1} = \hat{U}^T_{k+1}\ A\ \hat{U}_{k+1} \tag{6.67}$$

$$\underset{\sim}{B}_{k+1} = \hat{U}^T_{k+1}\ B\ \hat{U}_{k+1} \tag{6.68}$$

Désignons par $\underset{\sim}{P}$ et $\underset{\sim}{Q}$ les deux matrices d'ordre $2q$ dont les colonnes sont respectivement les vecteurs propres ϕ et ψ. Les vecteurs de Ritz optimalisés ont dès lors pour expressions

$$U_{k+1} = \hat{U}_{k+1}\ \underset{\sim}{P} \tag{6.69}$$

$$V_{k+1} = \hat{U}_{k+1}\ \underset{\sim}{Q} \tag{6.70}$$

La comparaison des relations (6.42-47) et les expressions (6.65-70) permet de conclure que la phase iii) de la variante l'algorithme avec l'itération inverse simultanée d'un seul des deux sous-espaces adjoints correspond encore à une analyse de Rayleigh-Ritz. Les vecteurs U_{k+1} et V_{k+1} donnés par les relations (6.69-70) sont donc les vecteurs de Ritz améliorés et les valeurs propres issues de l'expression (6.44) sont des approximations des valeurs propres des problèmes (4.10) et (4.14). Dans cette variante, les matrices d'interaction $\underset{\sim}{A}_{k+1}$ et $\underset{\sim}{B}_{k+1}$ d'ordre $2q$ ne tendent plus vers des

matrices diagonales, puisque la base $\hat{U}_{k+1}$ du sous-espace dans lequel on projette A et B n'est pas orthogonale pour les produits scalaires $< u_r, A\, u_s >$ et $< u_r, B\, u_s >$, comme nous l'avons relevé au paragraphe 4.3. Par contre, ces projections tendent vers des matrices pleines (ce qui est un inconvénient par rapport à l'itération simultanée des deux sous-espaces adjoints) dont les termes se stabilisent lorsque les itérations progressent.

En résumé, les étapes principales de la recherche des valeurs propres et vecteurs propres adjoints par itération inverse simultanée d'un seul sous-espace, combinée à une analyse de Rayleigh-Ritz, sont

1) Génération d'un seul ensemble U_o de $2q$ vecteurs initiaux de C^{2n}

2) Itération inverse simultanée du sous-espace E^D_k au sous-espace E^D_{k+1}

$$A\, \hat{U}_{k+1} = B\, U_k$$

3) Analyse de Rayleigh-Ritz pour les vecteurs itérés $\hat{u}_{k+1}$

3.1) Calcul des matrices d'interaction $\underset{\sim}{A}_{k+1}$ et $\underset{\sim}{B}_{k+1}$

$$\underset{\sim}{A}_{k+1} = \hat{U}^T_{k+1}\, A\, \hat{U}_{k+1}$$

$$\underset{\sim}{B}_{k+1} = \hat{U}^T_{k+1}\, B\, \hat{U}_{k+1}$$

3.2) Résolution du problème d'interaction

$$\underset{\sim}{A}_{k+1}\, \underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{B}_{k+1}\, \underset{\sim}{P}\, \underset{\sim}{\Lambda}_{k+1}$$

3.3) Amélioration des vecteurs de Ritz

$$U_{k+1} = \hat{U}_{k+1} \underset{\sim}{P}$$

4) Test de convergence pour les valeurs propres λ_i^{k+1} $(i = 1,\ldots,p)$

. Si le critère d'arrêt est vérifié, passage à l'étape 5

. Si la convergence n'est pas atteinte, retour à l'étape 2

5) Calcul du sous-espace adjoint V_ℓ (la dernière itération est notée ℓ)

5.1. Résolution du problème d'interaction adjoint :

$$\underset{\sim}{A}_\ell^T \underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{B}_\ell^T \underset{\sim}{Q} \underset{\sim}{\Lambda}_\ell$$

5.2) Détermination des vecteurs propres adjoints v_ℓ^i

$$V_\ell = \hat{U}_\ell \underset{\sim}{Q}$$

La solution estimée à la dernière itération est composée

- des valeurs propres λ_i^ℓ $(i=1,\ldots,p)$
- des vecteurs propres adjoints, respectivement gauches v_ℓ^i et droits u_ℓ^i $(i=1,\ldots,p)$.

Notons que les vecteurs propres gauches v_ℓ^i $(i=1,\ldots,p)$ ne portent pas d'indice associé à l'itération car, ainsi que nous l'avons dit ces vecteurs ne sont pas itérés, mais obtenus directement à partir des vecteurs droits u_ℓ^i estimés à la dernière itération ℓ .

6.4 Transformation de similitude

Les problèmes généralisés adjoints d'interaction (6.32-33), permettant de déterminer les éléments de Ritz, sont définis par des matrices complexes A_{k+1} (6.30) et B_{k+1} (6.31) de dimension 2q, ce qui constitue un inconvénient à la mise en oeuvre effective de cette étape de l'algorithme.

Dans ce paragraphe, nous allons définir une transformation de similitude sur les matrices A_{k+1} et B_{k+1} de façon à les transformer en deux matrices réelles qui leur sont respectivement semblables, notées $\underline{A}_{k+1}$ et $\underline{B}_{k+1}$. Par conséquent, les nouveaux problèmes équivalents d'interaction seront définis par des matrices réelles et la difficulté précitée sera contournée.

Dans le but de définir cette transformation de similitude particulière, reprenons les relations de transformation (6.30-31)

$$A_{k+1} = \hat{V}_{k+1}^T \, A \, \hat{U}_{k+1} \tag{6.71}$$

$$B_{k+1} = \hat{V}_{k+1}^T \, B \, \hat{U}_{k+1} \tag{6.72}$$

dans lesquelles les matrices $\hat{V}_{k+1}$ et $\hat{U}_{k+1}$ de format (2nx2q) sont formées de q paires de vecteurs complexes conjugués.

Choisissons un arrangement des colonnes de $\hat{V}_{k+1}$ et $\hat{U}_{k+1}$ tel que ces matrices soient de la forme

$$\begin{aligned} \hat{V}_{k+1} &= [v_1, \bar{v}_1, \ldots, v_q, \bar{v}_q]_{k+1} \\ &= [v_1^R + j\, v_1^I \,,\; v_1^R - j\, v_1^I, \ldots, v_q^R + j\, v_q^I,\; v_q^R - j\, v_q^I]_{k+1} \end{aligned} \tag{6.73}$$

$$\hat{U}_{k+1} = [u_1, \bar{u}_1, \ldots, u_q, \bar{u}_q]_{k+1}$$

$$= [u_1^R + j\, u_1^I\ ,\ u_1^R - j\, u_1^I, \ldots, u_q^R + j\, u_q^I, u_q^R - j\, u_q^I]_{k+1} \qquad (6.74)$$

où $\bar{v}_i$ et $\bar{u}_i$ $(i=1,2,\ldots,q)$ représentent les complexes conjugués, respectivement de v_i et de u_i $(i=1,2,\ldots,q)$.

Par ailleurs, considérons la matrice de permutation S d'ordre $2q$ et diagonale par blocs suivante

$$S = S^T = \text{diag}\left[\ldots, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots\right] \qquad (6.75)$$

où chacun des q blocs est de format (2x2). La prémultiplication (postmultiplication) d'une matrice quelconque d'ordre $2q$ par cette matrice S entraîne une permutation des lignes (colonnes) de la matrice, les lignes (colonnes) de rang $i(i=1,3,\ldots,2q-1)$ devenant les lignes (colonnes) de rang $\ell(\ell=2,4,\ldots,2q)$ et inversement.

En tenant compte de l'arrangement (6.73-74) des vecteurs complexes dans les matrices $\hat{V}_{k+1}$ et $\hat{U}_{k+1}$, on voit que la postmultiplication par la matrice de permutation S revient à remplacer ces deux matrices par leurs conjuguées

$$\bar{\hat{V}}_{k+1} = \hat{V}_{k+1}\, S \qquad (6.76)$$

$$\bar{\hat{U}}_{k+1} = \hat{U}_{k+1}\, S \qquad (6.77)$$

Reprenons maintenant les expressions (6.71-72) et écrivons leurs formes complexes conjuguées. On obtient

$$\bar{A}_{k+1} = (\bar{\hat{V}}_{k+1})^T A \bar{\hat{U}}_{k+1} \tag{6.78}$$

$$\bar{B}_{k+1} = (\bar{\hat{V}}_{k+1})^T B \bar{\hat{U}}_{k+1} \tag{6.79}$$

En introduisant les relations (6.76-77) dans les expressions ci-dessus et en tenant compte des définitions (6.71-72), les matrices $\bar{A}_{k+1}$ et $\bar{B}_{k+1}$ s'écrivent

$$\bar{A}_{k+1} = S^T \hat{V}_{k+1}^T A \hat{U}_{k+1} S$$

$$= S A_{k+1} S \tag{6.80}$$

$$\bar{B}_{k+1} = S^T \hat{V}_{k+1}^T B \hat{U}_{k+1} S \tag{6.81}$$

$$= S B_{k+1} S$$

Remarquons que d'après la définition (6.75), $S = S^T$.

La matrice de permutation S et les relations préliminaires établies ci-dessus vont maintenant nous permettre de définir une matrice unitaire T ainsi que de trouver la transformation de similitude recherchée, évoquée au début de ce paragraphe.

Tout d'abord rappelons que, par définition [G10,L6], une matrice unitaire

T vérifie les relations suivantes

$$\bar{T}^T T = I \tag{6.82}$$

$$T^{-1} = \bar{T} \tag{6.83}$$

$$\det(T) = \pm 1 \tag{6.84}$$

C'est le cas pour la matrice unitaire T , d'ordre 2q et diagonale par blocs de dimension (2x2), ainsi définie

$$T = \text{diag}\left[\ldots, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-j & 1+j \\ 1+j & 1-j \end{pmatrix}, \ldots\right] \tag{6.85}$$

En raison de leurs définitions particulières (6.75) et (6.85), les deux matrices S et T sont liées par les relations

$$T\, S = \bar{T} \tag{6.86}$$

$$S\, \bar{T} = T \tag{6.87}$$

A l'aide de cette matrice unitaire T , nous pouvons écrire les transformations de similitude suivantes

$$\begin{aligned} \underline{A}_{k+1} &= T^{-1} A_{k+1} T \\ &= \bar{T} A_{k+1} T \end{aligned} \tag{6.88}$$

$$\begin{aligned} \underline{B}_{k+1} &= T^{-1} B_{k+1} T \\ &= \bar{T} B_{k+1} T \end{aligned} \tag{6.89}$$

Les matrices $\underline{A}_{k+1}$ et A_{k+1}, de même que $\underline{B}_{k+1}$ et B_{k+1}, liées respectivement par les relations (6.88) et (6.89) avec la matrice T, sont dites semblables et expriment la même application dans des bases différentes.

Nous allons montrer que les matrices $\underline{A}_{k+1}$ et $\underline{B}_{k+1}$ sont réelles. En explicitant les formes conjuguées des expressions (6.88) et (6.89)

$$\bar{\underline{A}}_{k+1} = T\, \bar{A}_{k+1}\, \bar{T} \tag{6.90}$$

$$\bar{\underline{B}}_{k+1} = T\, \bar{B}_{k+1}\, \bar{T} \tag{6.91}$$

et en introduisant les relations (6.80-81) dans les expressions ci-dessus, on obtient

$$\bar{\underline{A}}_{k+1} = T\, S\, A_{k+1}\, S\, \bar{T} \tag{6.92}$$

$$\bar{\underline{B}}_{k+1} = T\, S\, B_{k+1}\, S\, \bar{T} \tag{6.93}$$

Grâce aux relations de liaison (6.86) et (6.87), ainsi qu'aux transformations (6.88-89), on peut écrire

$$\bar{\underline{A}}_{k+1} = \bar{T}\, A_{k+1}\, T = \underline{A}_{k+1} \tag{6.94}$$

$$\bar{\underline{B}}_{k+1} = \bar{T}\, B_{k+1}\, T = \underline{B}_{k+1} \tag{6.95}$$

Ce résultat montre bien que les matrices d'interaction $\underline{A}_{k+1}$ et $\underline{B}_{k+1}$ sont réelles.

Afin d'établir directement les matrices $\underline{A}_{k+1}$ et $\underline{B}_{k+1}$ à partir des vec-

teurs itérés $\hat{V}_{k+1}$ et $\hat{U}_{k+1}$, introduisons les relations (6.71-72) dans les définitions (6.88-89). Il vient ainsi

$$\underline{A}_{k+1} = \bar{T}\, \hat{V}_{k+1}^T\, A\, \hat{U}_{k+1}\, T$$

$$= \underline{\hat{V}}_{k+1}^T\, A\, \underline{\hat{U}}_{k+1} \qquad (6.96)$$

$$\underline{B}_{k+1} = \bar{T}\, \hat{V}_{k+1}^T\, B\, \hat{U}_{k+1}\, T$$

$$= \underline{\hat{V}}_{k+1}^T\, B\, \underline{\hat{U}}_{k+1} \qquad (6.97)$$

Dans ces relations, les matrices réelles $\underline{\hat{V}}_{k+1}^T$ et $\underline{\hat{U}}_{k+1}$, de dimension 2nx2q, ont pour expressions

$$\underline{\hat{V}}_{k+1}^T = \bar{T}\, \hat{V}_{k+1}^T \qquad (6.98)$$

$$\underline{\hat{U}}_{k+1} = \hat{U}_{k+1}\, T \qquad (6.99)$$

Remarquons déjà que, lors de la mise en oeuvre numérique, nous n'aurons besoin de calculer de façon explicite ni la matrice unitaire T ni les matrices $\underline{\hat{V}}_{k+1}$ et $\underline{\hat{U}}_{k+1}$ données par les relations ci-dessus.

6.5 Problèmes adjoints d'interaction

Nous venons de montrer qu'une transformation de similitude particulière, permet de transformer les matrices complexes A_{k+1} et B_{k+1} , définissant les problèmes d'interaction (6.32-33), en des matrices réelles semblables $\underline{A}_{k+1}$ et $\underline{B}_{k+1}$. Comme les transformations semblables préservent les formes

quadratiques, ainsi que les formes bilinéaires [H2], les valeurs propres associées aux problèmes d'interaction (6.32-33) restent invariantes dans ce type de transformation. Les vecteurs propres sont par contre modifiés; nous les notons $\underline{P}$ et $\underline{Q}$ pour la suite.

Les deux problèmes généralisés aux valeurs propres (6.32-33) sont donc remplacés par les deux problèmes équivalents suivants, définis par les deux matrices réelles $\underline{A}_{k+1}$ et $\underline{B}_{k+1}$ données par les relations de transformation (6.88-89)

$$\underline{A}_{k+1}\ \underline{P} = \underline{B}_{k+1}\ \underline{P}\ \Lambda^{R}_{k+1} \tag{6.100}$$

$$\underline{A}^{T}_{k+1}\ \underline{Q} = \underline{B}^{T}_{k+1}\ \underline{Q}\ \Lambda^{R}_{k+1} \tag{6.101}$$

L'invariance des valeurs propres Λ^{R}_{k+1} peut être montrée à partir du polynôme caractéristique des problèmes définis ci-dessus. En effet, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\det[\underline{A}_{k+1} - \lambda\ \underline{B}_{k+1}] &= \det[T^{-1}\ A_{k+1}\ T - \lambda\ T^{-1}\ B_{k+1}\ T] \\
&= \det[T^{-1}(A_{k+1} - \lambda\ B_{k+1})\ T] \\
&= \det[T^{-1}]\ \det[A_{k+1} - \lambda\ B_{k+1}]\ \det[T] \\
&= \det[A_{k+1} - \lambda\ B_{k+1}]\ \det[T^{-1}T] \\
&= \det[A_{k+1} - \lambda\ B_{k+1}]
\end{aligned} \tag{6.102}$$

Les problèmes (6.32) et (6.33) possèdent ainsi le même polynôme caractéristique et donc les mêmes valeurs propres, les vecteurs propres étant toutefois différents. Pour déterminer la matrice modale P du problème

(6.32) à partir des solutions $\underline{P}$ du problème (6.100), remplaçons dans l'expression (6.100) les matrices $\underline{A}_{k+1}$ et $\underline{B}_{k+1}$ par leurs définitions (6.88-89). Il vient dès lors

$$T^{-1} A_{k+1} T \underline{P} = T^{-1} B_{k+1} T \underline{P} \Lambda^R_{k+1} \tag{6.103}$$

La prémultiplication par la matrice unitaire T donne à cette expression la forme simplifiée

$$A_{k+1} T \underline{P} = B_{k+1} T \underline{P} \Lambda^R_{k+1} \tag{6.104}$$

Reprenons le problème aux valeurs propres réduit (6.32), défini au paragraphe 6.2, qui s'écrit

$$A_{k+1} P = B_{k+1} P \Lambda^R_{k+1} \tag{6.105}$$

Par identification des relations (6.104) et (6.105), la matrice P des vecteurs propres de (6.105) est liée à celle des vecteurs propres de (6.100) par la relation

$$P = T \underline{P} \tag{6.106}$$

En utilisant une démarche analogue pour le problème (6.101), on trouve

$$A^T_{k+1} \bar{T} \underline{Q} = B^T_{k+1} \bar{T} \underline{Q} \tag{6.107}$$

d'où l'on tire aisément la liaison entre Q et $\underline{Q}$

$$Q = \bar{T}\,\underline{Q} \tag{6.108}$$

Sur le plan pratique, on peut observer que les problèmes d'interaction (6.32-33) sont remplacés, grâce aux relations de transformation, par les expressions (6.100-101) dont la résolution est plus aisée. En effet, plusieurs algorithmes efficaces sont à l'heure actuelle disponibles pour l'extraction des éléments propres de ce type de problème de petite taille.

Comme nous l'avons déjà dit, au fur et à mesure que les itérations se poursuivent et que les vecteurs itérés deviennent de meilleures approximations des vecteurs propres adjoints, les matrices complexes d'interaction A_{k+1} et B_{k+1} tendent vers des matrices diagonales, en raison des propriétés de bi-orthogonalité des vecteurs propres. Le remplacement de ces matrices par les opérateurs réels $\underline{A}_{k+1}$ et $\underline{B}_{k+1}$, définis par les transformations de similitude (6.88-89), entraîne le fait que ces opérateurs tendent vers des matrices diagonales par blocs de dimension (2x2).

Ecrivons que les matrices $\underline{A}_{k+1}$ et $\underline{B}_{k+1}$ tendent formellement vers les matrices $\underline{A}_\infty$ et $\underline{B}_\infty$ suivantes

$$\underline{A}_\infty = \text{diag}\left[\begin{pmatrix} \alpha_{11}^1 & \alpha_{12}^1 \\ \alpha_{21}^1 & \alpha_{22}^1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \alpha_{11}^q & \alpha_{12}^q \\ \alpha_{21}^q & \alpha_{22}^q \end{pmatrix}\right] \tag{6.109}$$

$$\underline{B}_\infty = \text{diag}\left[\begin{pmatrix} \beta_{11}^1 & \beta_{12}^1 \\ \beta_{21}^1 & \beta_{22}^1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \beta_{11}^q & \beta_{12}^q \\ \beta_{21}^q & \beta_{22}^q \end{pmatrix}\right] \tag{6.110}$$

On peut constater que chaque ensemble respectif de blocs (2x2) α^i et β^i (i=1,...,q) est associé à une paire conjuguée de valeurs propres $\lambda_i = \sigma_i \pm j\omega_i$ (i=1,...,q) , racines de l'équation caractéristique,

$$\begin{vmatrix} \alpha^i_{11} - \lambda_i \beta^i_{11} & \alpha^i_{12} - \lambda_i \beta^i_{12} \\ \alpha^i_{21} - \lambda_i \beta^i_{21} & \alpha^i_{22} - \lambda_i \beta_{22} \end{vmatrix} = 0 \qquad (6.111)$$

Après développement, cette équation quadratique en λ_i peut s'écrire

$$a_i (\lambda_i)^2 + b_i \lambda_i + c_i = 0 \qquad (6.112)$$

où les coefficients réels valent

$$a_i = \beta^i_{11} \beta^i_{22} - \beta^i_{12} \beta^i_{21} \qquad (6.113)$$

$$b_i = \alpha^i_{12} \beta^i_{21} + \alpha^i_{21} \beta^i_{12} - \alpha^i_{11} \beta^i_{22} - \alpha^i_{22} \beta^i_{11} \qquad (6.114)$$

$$c_i = \alpha^i_{11} \alpha^i_{22} - \alpha^i_{12} \alpha^i_{21} \qquad (6.115)$$

Les parties réelle σ_i et imaginaire ω_i sont dès lors données respectivement par les expressions suivantes

$$\sigma_i = -\frac{b_i}{2a_i} \qquad (6.116)$$

$$i=1,\ldots,q$$

$$\omega_i = \left[(\sigma_i)^2 - \frac{c_i}{a_i}\right]^{1/2} \qquad (6.117)$$

En outre, si l'on utilise à chaque itération le schéma de bi-normalisation indiqué aux relations (6.28-29), chaque ensemble respectif de blocs (2x2) α^i et β^i (i=1,...,p) devient, lorsque les vecteurs itérés coïncident avec les vecteurs propres adjoints,

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} \sigma_i & -\omega_i \\ \omega_i & \sigma_i \end{pmatrix} \qquad i=1,\ldots,p \tag{6.118}$$

$$\beta^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.119}$$

Pour la variante où l'on n'itère que sur un seul des deux sous-espaces adjoints, et en choisissant à titre d'exemple le sous-espace droit, notons enfin que les expressions (6.96-97) s'écrivent

$$\underline{A}_{k+1} = \hat{\underline{U}}_{k+1}^T A \hat{\underline{U}}_{k+1} \tag{6.120}$$

$$\underline{B}_{k+1} = \hat{\underline{U}}_{k+1}^T B \hat{\underline{U}}_{k+1} \tag{6.121}$$

Les vecteurs itérés $\hat{U}_{k+1}$ n'étant pas orthogonaux par rapport aux matrices A et B , les matrices réelles $\underline{A}_{k+1}$ et $\underline{B}_{k+1}$ restent cette fois des matrices pleines.

7. MISE EN OEUVRE DE LA BI-ITERATION DES SOUS-ESPACES ADJOINTS

Pour bien mettre en évidence l'efficacité de la technique de bi-itération des sous-espaces propres adjoints, nous présentons dans ce chapitre la mise en oeuvre numérique de la méthode développée, en explicitant le calcul de quelques étapes.

A ce stade, il est utile de signaler que certaines difficultés numériques se présentent relativement aux expressions (6.3-4, 6.30-33, 6.88-89, 6.98-99) :

- les matrices composites A et B d'ordre $2n$ ne sont pas caractérisées par une structure en forme de bande, bien que leurs sous-matrices le soient ;

- la résolution des systèmes d'équations linéaires (6.3-4) de dimension $2n$ nécessite la factorisation des matrices A et A^T;

- les vecteurs estimés V_k et U_k , ainsi que les vecteurs itérés $\hat{V}_{k+1}$ et $\hat{U}_{k+1}$, sont des vecteurs complexes;

- les problèmes adjoints d'interaction (6.32-33) sont caractérisés par des matrices complexes A_{k+1} et B_{k+1} de dimension $2q$.

Au chapitre précédent, nous avons déjà proposé une technique pour contourner le dernier inconvénient : utiliser la matrice de transformation T qui est toutefois complexe. Par la suite, nous allons montrer que les autres

difficultés ne sont en fait qu'apparentes. En effet, la mise en oeuvre que nous adopterons exploitera directement les sous-matrices d'ordre n dont la configuration en forme de bande est dès lors mise à profit. De plus, elle permettra d'effectuer toutes les opérations numériques avec des grandeurs réelles.

L'algorithmique de la méthode proprement dite, décrite en détail aux paragraphes suivants, s'accompagnera d'une technique de vérification des solutions permettant d'apprécier la qualité des éléments propres estimés.

7.1 Initialisation des sous-espaces adjoints

Nous avons montré au chapitre précédent qu'il faut choisir des vecteurs adjoints de départ pour initialiser le processus itératif. Comme la vitesse de convergence de l'algorithme dépend fortement de la qualité de ce choix, la génération aléatoire des vecteurs précités doit être écartée. D'autre part, pour que les vecteurs initiaux puissent engendrer les sous-espaces propres adjoints associés aux valeurs propres de plus petit module, ils ne doivent pas être orthogonaux aux vecteurs propres recherchés.

En général, le choix des vecteurs initiaux dépend du type de problème traité et toute technique particulière d'auto-initialisation n'est adéquate que pour ce type de problème.

Après une étude approfondie, nous proposons deux techniques d'initialisation dans l'analyse dynamique des arbres de machines :

i) Si, lors d'un calcul préliminaire, on a estimé les q premiers modes propres réels du système conservatif à l'arrêt, ($Ka = \omega^2 Ma$) , il est judicieux d'utiliser ces résultats pour initialiser le calcul des modes propres complexes du système en rotation.

Pour chaque paire d'éléments propres duals (λ_r; v_r) et (λ_r; u_r) , il est nécessaire de définir deux vecteurs de départ. En raison du fait que les parties imaginaires des valeurs propres représentent les fréquences amorties de vibration, on peut prendre, conformément à la décomposition (4.11) des vecteurs propres, des expressions de la forme suivante comme vecteurs initiaux de C^{2n}

$$v_o^r = \left[\begin{matrix} a_r \\ 0 \end{matrix} + j \begin{matrix} 0 \\ \omega_r a_r \end{matrix}\right] \tag{7.1}$$

$$u_o^r = \left[\begin{matrix} a_r \\ 0 \end{matrix} + j \begin{matrix} 0 \\ \omega_r a_r \end{matrix}\right] \tag{7.2}$$

Le sous-vecteur a_r de dimension n représente le r-ième mode propre du système conservatif à l'arrêt et ω_r désigne la fréquence propre associée.

Ainsi, pour calculer les 2q premiers modes propres adjoints du système dissipatif en rotation, les matrices V_o et U_o des vecteurs initiaux s'écrivent

$$V_o = \left[\begin{matrix} a_1 \\ 0 \end{matrix} + j \begin{matrix} 0 \\ \omega_1 a_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} a_1 \\ 0 \end{matrix} - j \begin{matrix} 0 \\ \omega_1 a_1 \end{matrix} \middle| \cdots \middle| \begin{matrix} a_q \\ 0 \end{matrix} + j \begin{matrix} 0 \\ \omega_q a_q \end{matrix} \middle| \begin{matrix} a_q \\ 0 \end{matrix} - j \begin{matrix} 0 \\ \omega_q a_q \end{matrix}\right] \tag{7.3}$$

$$U_o = \left[\frac{a_1}{0} + j\,\frac{0}{\omega_1 a_1} \;\middle|\; \frac{a_1}{0} - j\,\frac{0}{\omega_1 a_1} \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; \frac{a_q}{0} + j\,\frac{0}{\omega_q a_q} \;\middle|\; \frac{a_q}{0} - j\,\frac{0}{\omega_q a_q}\right] \quad (7.4)$$

Dans ces expressions, les matrices rectangulaires V_o et U_o de format $2n \times 2q$ contiennent chacune un ensemble de $2q$ vecteurs linéairement indépendants.

ii) Lorsqu'aucun renseignement sur les modes propres de la structure n'est disponible et que seules les diverses matrices provenant de la discrétisation spatiale du système sont connues, on peut conserver la topologie des matrices V_o et U_o définies ci-dessus et établir les vecteurs $a_1,\ldots,a_q$ selon les critères proposés dans les références [B5,Y1]. La diagonale de la matrice de masse est alors prise comme vecteur a_1 . Les autres vecteurs $a_i (i=2,\ldots,q-1)$ sont choisis comme vecteurs unitaires et leurs composantes $+1$ sont associées aux déplacements généralisés caractérisés par les rapports des termes diagonaux des matrices de masse et de rigidité les plus élevés. Les composantes du dernier vecteur a_q sont des nombres aléatoires dans l'intervalle $[-1,1]$ pour les degrés de liberté qui n'ont pas été pris en compte pour les vecteurs $a_i (i=2,\ldots,q-1)$ précédents.

Lors d'un calcul pour plusieurs vitesses de rotation, on pourra prendre au départ les sous-espaces propres adjoints calculés à la vitesse précédente. Avec ce schéma d'initialisation, le processus itératif converge rapidement et l'algorithme est très efficace.

Il est à relever que la vitesse de convergence dépend non seulement de la qualité des vecteurs initiaux, mais également de la dimension $2q$ des sous-espaces. En pratique il s'avère, quand on désire calculer les p premiers modes, qu'une valeur q égale au minimum de $(p+8, 2p)$ constitue un bon compromis.

Quoique partiellement heuristiques, ces techniques d'initialisation semblent être, à l'heure actuelle, celles qui permettent d'obtenir la meilleure vitesse de convergence et, par conséquent, de minimiser les coûts de calcul.

7.2 Bi-itération inverse simultanée

Au chapitre précédent, nous avons montré que l'introduction d'une matrice unitaire de transformation T permettait de définir des problèmes d'interaction caractérisés par des matrices réelles, plutôt que complexes, ce qui facilite et améliore la mise en oeuvre numérique. Comme nous allons le montrer ci-après, cette matrice unitaire peut également être d'un grand intérêt dans la résolution des systèmes d'équations linéaires construits lors de l'itération inverse simultanée des sous-espaces adjoints.

Avant d'établir la formulation des systèmes d'équations, considérons l'effet de la postmultiplication des matrices formées des vecteurs complexes adjoints v_k et u_k par les matrices unitaires respectives T et $\bar{T}$. Rappelons que nous avons construit la matrice T sur la base de l'arrangement particulier des vecteurs $\hat{v}_{k+1}$ et $\hat{u}_{k+1}$, tel que le montre les expressions (6.73-74). En respectant cet arrangement, la matrice complexe U_k de

dimensions (2nx2q) se présente sous la forme

$$U_k = [u_1, \bar{u}_1, \ldots, u_q, \bar{u}_q]_k$$

$$= [u_1^R + j\, u_1^I,\ u_1^R - j\, u_1^I, \ldots,\ u_q^R + j\, u_q^I,\ u_q^R - j\, u_q^I]_k \qquad (7.5)$$

En explicitant le calcul du produit matriciel $\underline{U}_k = U_k T$, nous avons

$$\underline{U}_k = [u_1^R + j\, u_1^I,\ u_1^R - j\, u_1^I, \ldots,\ u_q^R + j\, u_q^I,\ u_q^R - j\, u_q^I]_k \ \text{diag}\ \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1-j & 1+j \\ 1+j & 1-j \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 1-j & 1+j \\ 1+j & 1-j \end{pmatrix}\right] \qquad (7.6)$$

On peut noter que les colonnes de rang $2\ell-1$ et 2ℓ ($\ell=1,\ldots,q$) de la matrice $\underline{U}_k$ s'écrivent

$$(u_{2\ell-1})_k = \frac{1}{2}(1-j)(u_\ell^R + j\, u_\ell^I)_k + \frac{1}{2}(1+j)(u_\ell^R - j\, u_\ell^I)_k = (u_\ell^R + u_\ell^I)_k$$

$$(u_{2\ell})_k = \frac{1}{2}(1+j)(u_\ell^R + j\, u_\ell^I)_k + \frac{1}{2}(1-j)(u_\ell^R - j\, u_\ell^I)_k = (u_\ell^R - u_\ell^I)_k \qquad (7.7)$$

Les colonnes de la matrice réelle $\underline{U}_k$ de format (2nx2q) sont simplement la somme algébrique des parties réelle et imaginaire des colonnes de la matrice complexe U_k , formée des paires de vecteurs complexes conjugués. De façon identique, on peut montrer que pour le produit matriciel $V_k \bar{T} = \underline{V}_k$, les colonnes de la matrice réelle $\underline{V}_k$ sont formées de la différence des parties réelle et imaginaire des vecteurs complexes, représentés par les colonnes de la matrice V_k . Par conséquent, on n'a besoin de calculer explicitement, ni la matrice unitaire T , ni les transformations (6.88-89) et (6.98-99) définies par l'intermédiaire de cette matrice.

La matrice unitaire T et sa complexe conjuguée $\bar{T}$ permettent, lors de l'itération inverse simultanée, d'éviter le calcul des deux ensembles de vecteurs complexes u^i_{k+1} et v^i_{k+1} qui se trouvent remplacés par deux ensembles de vecteurs réels rangés dans les matrices suivantes

$$\hat{\underline{U}}_{k+1} = \hat{U}_{k+1}\, T \tag{7.8}$$

$$\hat{\underline{V}}_{k+1} = \hat{V}_{k+1}\, \bar{T} \tag{7.9}$$

Lors de la mise en oeuvre algorithmique, nous remplaçons donc les itérations inverses simultanées (6.3-4) par les deux systèmes d'équations linéaires

$$A\, \hat{\underline{U}}_{k+1} = B\, \underline{U}_k \tag{7.10}$$

$$A^T\, \hat{\underline{V}}_{k+1} = B^T \underline{V}_k \tag{7.11}$$

En tenant compte de la configuration des matrices composites A et B et en effectuant les opérations par bloc, on obtient pour le produit matriciel $B\,\underline{U}_k$ de dimension (2nx2q)

$$B\,\underline{U}_k = \left[\begin{array}{c|c} K_g & 0 \\ \hline 0 & M \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \underline{U}^a_k \\ \hline \underline{U}^b_k \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} K_g \underline{U}^a_k \\ \hline M\, \underline{U}^b_k \end{array}\right] \tag{7.12}$$

où $\underline{U}^a_k$ et $\underline{U}^b_k$ représentent les sous-matrices d'ordre (nx2q) associées à $\underline{U}_k$.

En introduisant (7.12) dans (7.10), il vient

$$\left[\begin{array}{c|c} 0 & K_g \\ \hline -K_g & -C_g \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \hat{\underline{U}}^a_{k+1} \\ \hline \hat{\underline{U}}^b_{k+1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} K_g \, \underline{U}^a_k \\ \hline M \, \underline{U}^b_k \end{array}\right] \tag{7.13}$$

Dans cette relation, la matrice $\hat{\underline{U}}_{k+1}$ est séparée en sous-matrices d'ordre (nx2q) notées $\hat{\underline{U}}^a_{k+1}$ et $\hat{\underline{U}}^b_{k+1}$. Après développement des produits matriciels dans l'expression ci-dessus et en se souvenant que la matrice spatiale K_g est supposée non-singulière, la sous-matrice $\hat{\underline{U}}^b_{k+1}$ est donnée par

$$\hat{\underline{U}}^b_{k+1} = \underline{U}^a_k \tag{7.14}$$

Pour la sous-matrice $\hat{\underline{U}}^a_{k+1}$, on a

$$-K_g \, \hat{\underline{U}}^a_{k+1} - C_g \, \hat{\underline{U}}^b_{k+1} = M \, \underline{U}^b_k \tag{7.15}$$

En remplaçant $\hat{\underline{U}}^b_{k+1}$ par l'expression (7.14), on trouve

$$K_g \, \hat{\underline{U}}_{k+1} = - C_g \, \underline{U}^a_k - M \, \underline{U}^b_k \tag{7.16}$$

De manière analogue, les équations associées à la base duale $\hat{\underline{V}}_{k+1}$ s'écrivent

$$\hat{\underline{V}}^b_{k+1} = \underline{V}^a_k \tag{7.17}$$

$$K_g^T \, \hat{\underline{V}}^a_{k+1} = - C_g^T \, \underline{V}^a_k - M^T \underline{V}^b_k \tag{7.18}$$

L'analogie entre les expressions (7.14-15) et (7.17-18) pour les deux sous-espaces provient de la configuration particulière choisie pour la matrice composite A dans la relation (4.6).

Les expressions ci-dessus montrent ainsi clairement que l'on ne construit pas explicitement les matrices A et B d'ordre $2n$ lors de l'itération inverse simultanée des sous-espaces adjoints, mais que toutes les opérations, de surcroît réelles, sont effectuées sur des matrices d'ordre n seulement. En outre, la seule matrice à factoriser est la matrice spatiale K_g qui possède une structure bande. En décomposant la matrice K_g sous la forme

$$K_g = L\ D\ U \tag{7.19}$$

où L et U sont des matrices triangulaires respectivement inférieure et supérieure à diagonale unité alors que D est une matrice diagonale, les systèmes d'équations linéaires (7.16) et (7.18) s'écrivent

$$L\ D\ U\ \underline{\hat{U}}^a_{k+1} = -\ C_g\ \underline{U}^a_k\ -\ M\ \underline{U}^b_k \tag{7.20}$$

$$U^T\ D\ L^T\ \underline{\hat{V}}^a_{k+1} = -\ C_g^T\ \underline{V}^a_k - M^T \underline{V}^b_k \tag{7.21}$$

Remarquons que la factorisation de la matrice K_g ne sera effectuée qu'une seule fois avant la première itération inverse. De plus, à chaque itération simultanée, ne sont à calculer que les n premières composantes des vecteurs duals itérés. En effet, les sous-matrices inférieures $\underline{\hat{V}}^b_{k+1}$ et $\underline{\hat{U}}^b_{k+1}$ sont obtenues directement par les expressions (7.14) et (7.17).

7.3 Problèmes adjoints réduits

Grâce aux transformations de similitude, les problèmes adjoints d'interaction définis par les matrices réelles $\underline{A}_{k+1}$ et $\underline{B}_{k+1}$, sont donnés par les relations

$$\underline{A}_{k+1}\ \underline{P} = \underline{B}_{k+1}\ \underline{P}\ \underline{\Lambda}^{R}_{k+1} \tag{7.22}$$

$$\underline{A}^{T}_{k+1}\ \underline{Q} = \underline{B}^{T}_{k+1}\ \underline{Q}\ \underline{\Lambda}^{R}_{k+1} \tag{7.23}$$

En tenant compte des expressions (7.10) et (7.12), les matrices d'interaction s'écrivent

$$\begin{aligned}\underline{A}_{k+1} &= \underline{\hat{V}}^{T}_{k+1}\ B\ \underline{U}_{k} \\ &= \left[\frac{\underline{\hat{V}}^{a}_{k+1}}{\underline{\hat{V}}^{b}_{k+1}}\right]^{T} \left[\frac{K_g\ \underline{U}^{a}_{k}}{M\ \underline{U}^{b}_{k}}\right] \\ &= (\underline{\hat{V}}^{a}_{k+1})^{T}\ K_g\ \underline{U}^{a}_{k} + (\underline{\hat{V}}^{b}_{k+1})^{T}\ M\ \underline{U}^{b}_{k}\end{aligned} \tag{7.24}$$

La matrice d'interaction $\underline{A}_{k+1}$ devient par (7.17)

$$\underline{A}_{k+1} = (\underline{\hat{V}}^{a}_{k+1})^{T}\ K_g\ \underline{U}^{a}_{k} + (\underline{V}^{a}_{k})^{T}\ M\ \underline{U}^{b}_{k} \tag{7.25}$$

De manière analogue, on trouve pour la matrice $\underline{B}_{k+1}$

$$\underline{B}_{k+1} = \left[\frac{\underline{\hat{V}}^{a}_{k+1}}{\underline{\hat{V}}^{b}_{k+1}}\right]^{T} \left[\begin{array}{c|c} K_g & 0 \\ \hline 0 & M \end{array}\right] \left[\frac{\underline{\hat{U}}^{a}_{k+1}}{\underline{\hat{U}}^{b}_{k+1}}\right]$$

$$= (\hat{\underline{V}}^a_{k+1})^T K_g \hat{\underline{U}}^a_{k+1} + (\hat{\underline{V}}^b_{k+1})^T M \hat{\underline{U}}^b_{k+1}$$

$$= (\hat{\underline{V}}^a_{k+1})^T K_g \hat{\underline{U}}^a_{k+1} + (\underline{V}^a_k)^T M \underline{U}^a_k \qquad (7.26)$$

On peut constater que les opérations s'effectuent à nouveau sur des matrices d'ordre n. Ainsi, la structure en forme de bande des matrices spatiales K_g, C_g et M est pleinement exploitée.

Les problèmes aux valeurs propres généralisés (7.22-23) sont d'une dimension $2q$, en général nettement plus faible que l'ordre $2n$ du problème original (7.10). Les solutions de ces deux problèmes peuvent donc être déterminées par une technique classique d'extraction globale.

Comme les matrices d'interaction $\underline{A}_{k+1}$ et $\underline{B}_{k+1}$ tendent vers des matrices diagonales par blocs au fur et à mesure que les itérations progressent, une méthode de type Jacobi [V1,V2] semble constituer une technique très efficace pour leur résolution. D'autres techniques connues, telles que la méthode QZ[M6] peuvent également être utilisées. En outre, on peut se limiter à résoudre un seul des deux problèmes d'interaction, soit (7.22), et calculer directement les vecteurs propres adjoints d'après une expression analogue à (4.30).

7.4 Bi-orthogonalisation

A chaque itération, les solutions des problèmes d'interaction (6.32-33) permettent de construire deux bases duales bi-orthogonales V_{k+1} et U_{k+1} à partir des vecteurs adjoints $\hat{V}_{k+1}$ et $\hat{U}_{k+1}$ améliorés par itération in-

verse simultanée. Ces bases vectorielles, dites de Ritz, sont données par les transformations définies dans les expressions (6.34-35)

$$V_{k+1} = \hat{V}_{k+1}\, Q \tag{7.27}$$

$$U_{k+1} = \hat{U}_{k+1}\, P \tag{7.28}$$

où Q et P représentent les matrices modales respectives des problèmes d'interaction (6.32-33). En introduisant dans les relations ci-dessus les expressions (6.108) et (6.110), respectivement pour P et Q, il vient

$$V_{k+1} = \hat{V}_{k+1}\, \bar{T}\, \underline{Q} \tag{7.29}$$

$$U_{k+1} = \hat{U}_{k+1}\, T\, \underline{P} \tag{7.30}$$

Les matrices $\underline{Q}$ et $\underline{P}$ sont les solutions des problèmes d'interaction (6.100-101). En tenant compte des définitions (7.8-9), les relations (7.29-30) prennent la forme

$$V_{k+1} = \hat{\underline{V}}_{k+1}\, \underline{Q} \tag{7.31}$$

$$U_{k+1} = \hat{\underline{U}}_{k+1}\, \underline{P} \tag{7.32}$$

dans laquelle les colonnes des matrices $\hat{\underline{V}}_{k+1}$ et $\hat{\underline{U}}_{k+1}$ représentent les vecteurs itérés. En explicitant le calcul des matrices V_{k+1} et U_{k+1} de dimension (2nx2q) dans les expressions (7.31-32), nous avons d'après les relations (7.14) et (7.17)

$$\left[\frac{V^a_{k+1}}{V^b_{k+1}}\right] = \left[\frac{\hat{V}^a_{k+1}\, \underline{Q}}{\hat{V}^b_{k+1}\, \underline{Q}}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \hat{V}^a_{k+1} & \underline{Q} \\ \hline V^a_k & \underline{Q} \end{array}\right] \qquad (7.33)$$

$$\left[\begin{array}{c} U^a_{k+1} \\ \hline U^b_{k+1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \hat{U}^a_{k+1} & \underline{P} \\ \hline \hat{U}^b_{k+1} & \underline{P} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \hat{U}^a_{k+1} & \underline{P} \\ \hline U^a_k & \underline{P} \end{array}\right] \qquad (7.34)$$

Ces résultats montrent qu'à la fin de la k-ième itération, les vecteurs améliorés stockés dans les matrices V^a_{k+1} et U^a_{k+1} sont obtenus à l'aide des vecteurs rangés dans les matrices $\hat{V}^a_{k+1}$ et $\hat{U}^a_{k+1}$ et calculés par itération inverse simultanée à l'itération courante. D'autre part, les vecteurs dans les matrices V^b_{k+1} et U^b_{k+1} sont calculés à l'aide des vecteurs $\underline{V}^a_k$ et $\underline{U}^b_k$ estimés à l'itération précédente. Autrement dit, à l'itération courante, les vecteurs dans V^b_{k+1} et U^b_{k+1} ont une itération de retard par rapport aux vecteurs qui forment V^a_{k+1} et U^a_{k+1} et qui ont donc subi une phase d'amélioration supplémentaire.

Compte tenu de cette observation, nous proposons de calculer les vecteurs dans les matrices V^b_{k+1} et U^b_{k+1} par la relation de contrainte (4.11). Ainsi, à la k-ième itération, les matrices V^b_{k+1} et U^b_{k+1} sont données par les expressions suivantes

$$V^b_{k+1} = V^a_{k+1} \Delta^R_{k+1} \qquad (7.35)$$

$$U^b_{k+1} = U^a_{k+1} \Lambda^R_{k+1} \qquad (7.36)$$

où les vecteurs dans les matrices V^a_{k+1} et U^a_{k+1}, ainsi que la matrice spectrale Λ^R_{k+1}, sont estimés à l'itération actuelle.

A l'inverse des relations (7.33-34), les expressions (7.35-36) ont l'avantage de faire appel aux matrices V^a_{k+1} et U^a_{k+1} formées de vecteurs améliorés, plutôt qu'aux matrices $\underline{V}^a_k$ et $\underline{U}^a_k$. De plus, l'utilisation des expressions (7.35-36) fait intervenir la relation de contrainte (4.11) qui doit être vérifiée par les vecteurs adjoints estimés. Le calcul des matrices V^b_{k+1} et U^b_{k+1} par les expressions (7.35-36) conduit donc à une amélioration globale du processus itératif. De plus, en raison de la configuration diagonale de la matrice spectrale Λ^R_{k+1}, les relations (7.35-36) nécessitent un nombre d'opérations nettement plus faible que celui associé aux expressions (7.33-34) dans lesquelles les matrices $\underline{Q}$ et $\underline{P}$ sont pleines.

7.5 Critère de convergence

La convergence est admise comme atteinte lorsque le critère suivant est vérifié pour les p valeurs propres recherchées

$$\varepsilon_i = \frac{\| \lambda_i^{k+1} - \lambda_i^k \|_2}{\| \lambda_i^{k+1} \|_2} \leq \varepsilon \qquad i=1,2,\ldots,p \qquad (7.37)$$

Dans cette expression, le symbole $\|\cdot\|_2$ représente la norme d'un vecteur,

et ε est la tolérance requise, alors que λ_i^{k+1} et λ_i^{k} représentent respectivement les valeurs propres estimées aux itérations (k) et (k-1). En désignant par $Re(\lambda_i^{k+1})$ et $Im(\lambda_i^{k+1})$ les parties réelle et imaginaire des valeurs propres complexes λ_i^{k+1}, l'expression (7.37) devient

$$\varepsilon_i = \left[\frac{[Re(\lambda_i^{k+1})-Re(\lambda_i^{k})]^2 + [Im(\lambda_i^{k+1}) - Im(\lambda_i^{k})]^2}{[Re(\lambda_i^{k+1})]^2 + [Im(\lambda_i^{k+1})]^2}\right]^{1/2} \leq \varepsilon \qquad (7.38)$$

$$i=1,\ldots,p$$

Quand la convergence des valeurs propres est obtenue selon le critère ci-dessus, le processus itératif se termine.

7.6 Mesure d'erreur

Le critère de convergence (7.37) du processus itératif ne fournit aucune information quantitative sur la précision effective des vecteurs propres estimés. En conséquence, une estimation de la précision de la solution obtenue doit être établie. L'évaluation de la qualité des approximations estimées sur la base d'une mesure de l'erreur associée à chaque paire propre duale $(\lambda_i^{\ell}, u_i^{\ell})$ et $(\lambda_i^{\ell}, v_i^{\ell})$ (i=1,...,p) estimée à la dernière itération ℓ constituera donc une étape importante de la technique d'extraction partielle des éléments propres duals.

En rappelant les formulations (4.10) et (4.14) des problèmes aux valeurs et vecteurs propres adjoints, nous définissons, pour chaque paire duale formée d'une valeur propre et du vecteur propre correspondant, l'erreur sur la norme associée de la façon suivante

$$\tilde{\varepsilon}_i^D = \frac{\| A\, u_i^\ell - \lambda_i^\ell B\, u_i^\ell \|_2}{\| A\, u_i^\ell \|_2} \qquad (7.39)$$

$$i=1,\ldots,p$$

$$\tilde{\varepsilon}_i^G = \frac{\| A^T v_i^\ell - \lambda_i^\ell B^T v_i^\ell \|_2}{\| A^T v_i^\ell \|_2} \qquad (7.40)$$

Les numérateurs des expressions ci-dessus représentent les normes des vecteurs résiduels pour les deux problèmes adjoints. Ces grandeurs, en général non nulles, mesurent les erreurs absolues commises sur les équations (4.10) et (4.14) pour les solutions approchées estimées. En explicitant le calcul par blocs dans (7.39-40), on obtient les relations

$$\tilde{\varepsilon}_i^D = \frac{\left\| \begin{bmatrix} K_g\, u_i^b \\ -K_g u_i^a - C_g\, u_i^b \end{bmatrix} - \lambda_i^\ell \begin{bmatrix} K_g\, u_i^a \\ M\, u_i^b \end{bmatrix} \right\|_2}{\left\| \begin{bmatrix} K_g\, u_i^b \\ -K_g u_i^a - C_g\, u_i^b \end{bmatrix} \right\|_2} \qquad (7.41)$$

$$i=1,\ldots,p$$

$$\tilde{\varepsilon}_i^G = \frac{\left\| \begin{bmatrix} K_g^T v_i^b \\ -K_g^T v_i^a - C_g^T v_i^b \end{bmatrix} - \lambda_i^\ell \begin{bmatrix} K_g^T v_i^a \\ M^T v_i^b \end{bmatrix} \right\|_2}{\left\| \begin{bmatrix} K_g^T v_i^b \\ -K_g^T v_i^a - C_g^T v_i^b \end{bmatrix} \right\|_2} \qquad (7.42)$$

où u_i^a et u_i^b, de même que v_i^a et v_i^b, désignent respectivement les sous-vecteurs supérieur et inférieur associés à u_i^ℓ et v_i^ℓ.

Nous pouvons également établir une mesure alternative, en utilisant la formulation quadratique (4.2) définie par les matrices spatiales K_g, C_g

et M. Cette nouvelle mesure présente l'avantage d'avoir une signification physique, ainsi que nous allons le montrer ci-après. Selon leur décomposition (4.11), ces vecteurs propres de dimension $2n$ peuvent s'écrire sous la forme suivante

$$[v_i^\ell] = [b_i^\ell \mid \lambda_i^\ell b_i^\ell]^T \qquad i=1,\ldots,p \tag{7.43}$$

$$[u_i^\ell] = [a_i^\ell \mid \lambda_i^\ell a_i^\ell]^T \tag{7.44}$$

Les vecteurs b_i^ℓ et a_i^ℓ de dimension n représentent respectivement les approximations des vecteurs propres complexes gauches et droits du problème quadratique (4.2). Ces approximations estimées vérifient les relations

$$(\lambda_i^\ell)^2 M a_i^\ell + \lambda_i^\ell C_g a_i^\ell + K_g a_i^\ell = \Delta_i^D \qquad i=1,\ldots,p \tag{7.45}$$

$$(\lambda_i^\ell)^2 M^T b_i^\ell + \lambda_i^\ell C_g^T b_i^\ell + K_g^T b_i^\ell = \Delta_i^G \tag{7.46}$$

dans lesquelles les vecteurs résiduels Δ_i^D et Δ_i^G représentent des bilans de forces. En effet, les termes dans le membre de gauche représentent respectivement les forces inertielles, dissipatives et élastiques lorsque le système vibre selon les modes a_i^ℓ et b_i^ℓ.

La qualité des solutions obtenues peut alors être évaluée par l'erreur sur la norme définie par les expressions suivantes

$$\varepsilon_i^D = \frac{\|\Delta_i^D\|_2}{\|K_g\ a_i^\ell\|_2} \qquad (7.47)$$

$$i=1,\ldots,p$$

$$\varepsilon_i^G = \frac{\|\Delta_i^G\|_2}{\|K_g\ b_i^\ell\|_2} \qquad (7.48)$$

Ainsi, l'estimation d'erreur quantifie le rapport entre la norme du vecteur des forces résiduelles et celle du vecteur des forces élastiques.

Remarquons enfin que les expressions (7.47-48) sont formellement semblables à l'erreur de la norme définie pour les systèmes non-gyroscopiques conservatifs dans la référence [B5].

7.7 Etapes caractéristiques de l'algorithme

Il est utile de résumer les étapes de la mise en oeuvre numérique de l'algorithme proposé en indiquant entre crochets le nombre d'opérations effectuées à chaque étape. Les matrices spatiales K_g, C_g et M sont d'ordre n et leur demi-largeur de bande est m .

1) CALCULS INITIAUX

1.1) Initialisation des sous-espaces adjoints complexes V_o et U_o

1.2) Factorisation de la matrice $K_g = LDU$ $[n(m+1)(m+2)/2]$

2) TRANSFORMATION LINEAIRE DES VECTEURS ITERES $k=0,1,\ldots,\ell$

2.1) Sous-espace droit

$\hat{U}_{k+1} \rightarrow \hat{\underline{U}}_{k+1}$

2.2) Sous-espace gauche

$\hat{V}_{k+1} \rightarrow \hat{\underline{V}}_{k+1}$

3) ITERATION DES SOUS-ESPACES ADJOINTS

3.1) Itération inverse simultanée pour $\hat{U}_{k+1}$

- $K_g \ \hat{\underline{U}}^a_{k+1} = - C_g \ \underline{U}^a_k - M \ \underline{U}^b_k$ $\quad [6nq(2m+1)]$
- $\hat{\underline{U}}^b_{k+1} = \underline{U}^a_k$

3.2) Itération inverse simultanée pour $\hat{V}_{k+1}$

- $K_g^T \ \hat{\underline{V}}^a_{k+1} = - C_g^T \ \underline{V}^a_k - M^T \underline{V}^b_k$ $\quad [6nq(2m+1)]$
- $\hat{\underline{V}}^b_{k+1} = \underline{V}^a_k$

4) ANALYSE DE RAYLEIGH-RITZ GENERALISEE

4.1) Matrices d'interaction

- $\underline{A}_{k+1} = (\hat{\underline{V}}^a_{k+1})^T \ K_g \ \underline{U}^a_k + (\underline{V}^a_k)^T M \ \underline{U}^b_k$ $\quad [4nq(2q+m+\frac{1}{2})]$
- $\underline{B}_{k+1} = (\hat{\underline{V}}^a_{k+1})^T K_g \ \hat{\underline{U}}^a_{k+1} + (\underline{V}^a_k)^T M \ \underline{U}^a_k$ $\quad [4nq(2q+m+\frac{1}{2})]$

4.2) Problèmes adjoints d'interaction

- $\underline{A}_{k+1}\ \underline{P} = \underline{B}_{k+1}\ \underline{P}\ \Lambda^R_{k+1}$ [$O(q^3)$]
- $\underline{A}^T_{k+1}\ \underline{Q} = \underline{B}^T_{k+1}\ \underline{Q}\ \Lambda^R_{k+1}$ [$O(q^3)$]

4.3) Vecteurs de Ritz (bases duales U_{k+1} et V_{k+1})

- $U^a_{k+1} = \hat{U}^a_{k+1}\ \underline{P}$ [$4nq^2$]
- $U^b_{k+1} = U^a_{k+1}\ \Lambda^R_{k+1}$ [$2nq$]

- $V^a_{k+1} = \hat{V}^a_{k+1}\ \underline{Q}$ [$4nq^2$]
- $V^b_{k+1} = V^a_{k+1}\ \Lambda^R_{k+1}$ [$2nq$]

5) CRITERE DE CONVERGENCE

$$\cdot \varepsilon_i = \frac{\| \lambda_i^{k+1} - \lambda_i^k \|_2}{\| \lambda_i^{k+1} \|_2} \leq \varepsilon \qquad i=1,\ldots,p$$

Si le critère de convergence est satisfait, le processus itératif est arrêté. Dans le cas contraire, il se poursuit par retour à l'étape 2).

6) MESURE D'ERREUR DES SOLUTIONS ADJOINTES ESTIMEES

$$\varepsilon^D_i = \frac{\|(\lambda_i^\ell)^2\ M\ a_i^\ell + \lambda_i^\ell\ C_g\ a_i^\ell + K_g\ a_i^\ell\|_2}{\|K_g\ a_i^\ell\|_2} \qquad [p(6mn+7n)]$$

$i=1,\ldots,p$

$$\varepsilon^G_i = \frac{\|(\lambda_i^\ell)^2\ M^T b_i^\ell + \lambda_i^\ell\ C_g^T\ b_i^\ell + K_g^T\ b_i^\ell\|_2}{\|K_g^T\ b_i^\ell\|_2} \qquad [p(6mn+7n)]$$

8. ITERATION D'UN SOUS-ESPACE POUR LES SYSTEMES GYROSCOPIQUES CONSERVATIFS

Dans ce chapitre, nous présentons le développement d'un algorithme pour l'extraction partielle des éléments propres (λ_k, u_k) du problème généralisé (5.5) associé aux systèmes gyroscopiques conservatifs et défini par deux matrices composites réelles A et B , respectivement anti-symétrique et symétrique. Comme pour la technique développée pour les systèmes dissipatifs, la méthode proposée est basée sur l'itération d'un sous-espace et permet d'estimer les solutions associées aux p paires de valeurs propres de plus petit module. Elle se décompose en trois phases essentielles, analogues à celles présentées au chapitre 6 :

i) génération de $2q$ vecteurs initiaux cette fois réels de R^{2n} , avec $q > p$;

ii) amélioration des vecteurs de départ par itération inverse simultanée;

iii) orthogonalisation des $2q$ vecteurs itérés et extraction des p valeurs propres de plus petit module.

Le processus itératif combinant les deux dernières phases conduit à la génération du sous-espace des $2p$ modes propres cherchés, le sous-espace propre gauche étant simplement le complexe conjugué du sous-espace droit.

Après convergence des valeurs propres pour une tolérance imposée, une étape complémentaire de la méthode sera développée, afin de vérifier par une technique de décalage spectral si les solutions propres obtenues correspondent effectivement à celles cherchées dans la bande de fréquence choisie.

8.1 Itération inverse simultanée

La technique d'itération inverse simultanée consiste cette fois à itérer simultanément sur un seul ensemble de $2q$ ($2q \ll 2n$) vecteurs réels $u_o^i (i = 1, \ldots, 2q)$ de départ (phase i). Ces derniers, qui constituent une base du sous-espace réel E_o, forment la matrice rectangulaire U_o de dimension $(2n, 2q)$

$$U_o = [u_o^1, u_o^2, \ldots, u_o^{2p}, \ldots, u_o^{2q}] \tag{8.1}$$

A la k-ième itération, on résout le système linéaire (phase ii)

$$A\hat{U}_{k+1} = BU_k \qquad k = 0,1,2, \ldots \tag{8.2}$$

avec

$$U_k = [u_k^1, u_k^2, \ldots, u_k^{2p}, \ldots, u_k^{2q}] \tag{8.3}$$

et

$$\hat{U}_{k+1} = [\hat{u}_{k+1}^1, \hat{u}_{k+1}^2, \ldots, \hat{u}_{k+1}^{2p}, \ldots, \hat{u}_{k+1}^{2q}] \tag{8.4}$$

Dans ce système, U_k et $\hat{U}_{k+1}$ forment respectivement les bases des sous-espaces E_k et E_{k+1}.
En utilisant la méthode d'élimination de Gauss, on peut calculer la matrice $\hat{U}_{k+1}$ de dimension $(2n, 2q)$.

Afin d'éviter, de manière similaire à la technique développée pour les systèmes dissipatifs, que tous les vecteurs itérés de $\hat{U}_{k+1}$ ne tendent vers la même direction propre associée à la plus petite valeur propre, il faut de nouveau recourir à un processus d'orthogonalisation (phase iii).

Ainsi, à chaque itération, on construit une base orthonormale U_{k+1} en effectuant une projection des matrices A et B dans le sous-espace E_{k+1} et en résolvant le problème d'interaction de dimension 2q ($q \ll n$) suivant

$$A_{k+1} W = B_{k+1} W \Delta_{k+1} \tag{8.5}$$

avec

$$A_{k+1} = \hat{U}_{k+1}^T A \hat{U}_{k+1} \tag{8.6}$$

$$B_{k+1} = \hat{U}_{k+1}^T B \hat{U}_{k+1} \tag{8.7}$$

où les matrices réelles d'ordre 2q , A_{k+1} et B_{k+1} , appelées matrices d'interaction, sont respectivement les projections des matrices A et B dans le sous espace E_{k+1} , la matrice A_{k+1} étant antisymétrique et B_{k+1} symétrique.

La nature de la solution complexe du problème aux valeurs et vecteurs propres réduit (8.5) permet d'établir les expressions suivantes, conformément aux relations (5.33-34),

$$\alpha^r = \frac{1}{\omega_r} B_{k+1}^{-1} A_{k+1} \beta^r \tag{8.8}$$

$$\alpha^r = - \frac{1}{\omega} B_{k+1}^{-1} A_{k+1} \beta^r \tag{8.9}$$

Les vecteurs α^r et β^r ($r = 1, \ldots, q$) sont respectivement les parties réelles et imaginaires des vecteurs propres formant les colonnes de la matrice W .

Grâce aux relations ci-dessus, le problème aux valeurs et vecteurs propres (8.5) à solutions complexes peut être remplacé par les équations aux valeurs et vecteurs propres réels ci-dessous

$$A^{s}_{k+1}\ P = B_{k+1}\ P\ \Omega^{2}_{k+1} \tag{8.10}$$

$$A^{s}_{k+1}\ Q = B_{k+1}\ Q\ \Omega^{2}_{k+1} \tag{8.11}$$

où la matrice

$$A^{s}_{k+1} = A^{T}_{k+1}\ B^{-1}_{k+1}\ A_{k+1} \tag{8.12}$$

est réelle, symétrique et d'ordre 2q.

La solution des problèmes (8.10-11) est donc réelle et constituée de q paires ω^{2}_{r} de valeurs propres doubles, auxquelles sont associées les vecteurs réels α^{r} et β^{r} (r = 1, ..., q). Les relations de transformation (8.8-9) permettent ainsi de transformer un problème aux valeurs et vecteurs propres (8.5) dont la solution est complexe en un problème aux valeurs et vecteurs propres de solution réelle.

En regroupant alternativement les vecteurs α^{r} et β^{r} (r=1, ...,q) dans la matrice $\underline{W}$ d'ordre 2q , la base orthonormale cherchée U_{k+1} , formée des approximations améliorées des vecteurs propres, est définie par la transformation

$$U_{k+1} = \hat{U}_{k+1}\ \underline{W} \tag{8.13}$$

Vérifions que cette base est bien orthonormale par rapport à la matrice B. Comme les vecteurs α^r et β^r (r=1,...,q) formant $\underline{W}$ sont orthonormaux par rapport à B_{k+1}, on peut écrire

$$\underline{W}^T B_{k+1} \underline{W} = I \tag{8.14}$$

En introduisant dans cette expression les relations (8.6-7)) et (8.13), on obtient

$$\underline{W}^T \hat{U}_{k+1}^T B\hat{U}_{k+1} \underline{W} = U_{k+1}^T B U_{k+1} = I \tag{8.15}$$

La matrice $\underline{W}$ étant orthonormale par rapport à B_{k+1} , U_{k+1} est orthonormale par rapport à la matrice B. Comme pour les problèmes dissipatifs, nous verrons par la suite que le processus d'orthogonalisation qui vient d'être exposé constitue en fait une analyse de Rayleigh-Ritz.

A moins que U_{k+1} n'engendre directement la base propre recherchée, les pas décrits par les expressions (8.2-13) doivent être répétés jusqu'à la convergence. Pour autant que les vecteurs dans la matrice U_{k+1} ne soient pas orthogonaux à l'un des vecteurs propres cherchés, on a, au fur et à mesure que les itérations progressent,

$$\Omega_{k+1} \rightarrow \Omega^{2q} \qquad\qquad U_{k+1} \rightarrow U^{2q} \tag{8.16}$$

La matrice diagonale Ω^{2q} contient les parties imaginaires des 2q valeurs propres de plus petit module, alors que la matrice modale U^{2q} contient les parties réelles et imaginaires des vecteurs propres associés.

Ainsi, à partir de 2q vecteurs initiaux réels, le processus itératif construit 2q vecteurs convergeant vers 2q vecteurs orthogonaux de R^{2n}. Ces derniers forment une base du sous-espace engendré par les parties réelles et imaginaires des vecteurs propres $y_r \pm jz_r$ du système (5.5), associés aux valeurs propres $\pm j\omega_r$ de plus petit module.

8.2 Analyse de Rayleigh-Ritz

Dans ce paragraphe, nous allons montrer en détail qu'à chaque itération de l'algorithme proposé, on utilise effectivement les propriétés du quotient de Rayleigh établies au paragraphe 5.5 pour optimaliser les approximations des valeurs et vecteurs propres des systèmes gyroscopiques conservatifs. Reprenons le problème aux valeurs et vecteurs propres (5.5) sous la forme suivante

$$Au = j\omega Bu \tag{8.17}$$

A la k-ième itération inverse simultanée on calcule les vecteurs $\hat{u}^i_{k+1}$ (i=1,...,q) dont les parties réelles et imaginaires, notées respectivement $\hat{y}^i_{k+1}$ et $\hat{z}^i_{k+1}$ (i=1,...,q), sont formellement stockées dans la matrice $\hat{U}_{k+1}$ conformément à la relation (8.4). Considérons un vecteur complexe $w = w^R + jw^I$ et exprimons ses parties réelle et imaginaire comme des combinaisons linéaires des vecteurs itérés $\hat{y}^i_{k+1}$ et $\hat{z}^i_{k+1}$ engendrant le sous-espace réel E_{k+1}. Il vient ainsi

$$w^R = \sum_{i=1}^{q} \alpha_{2i-1}\, \hat{y}^i_{k+1} + \sum_{i=1}^{q} \alpha_{2i}\, \hat{z}^i_{k+1} \tag{8.18}$$

$$w^I = \sum_{i=1}^{q} \beta_{2i-1} \hat{y}^i_{k+1} + \sum_{i=1}^{q} \beta_{2i} \hat{z}^i_{k+1} \qquad (8.19)$$

Dans ces relations, les α_i et β_i $(i=1,\ldots,2q)$ sont des coefficients réels, dits de Ritz, et les vecteurs $\hat{y}^i_{k+1}$ et $\hat{z}^i_{k+1}$ $(i=1,\ldots,q)$, appelés vecteurs de Ritz, sont les approximations des parties réelles et imaginaires des vecteurs propres. Sous une forme matricielle, ces expressions s'écrivent

$$w^R = [\hat{y}^1_{k+1}, \hat{z}^1_{k+1}, \ldots, \ldots, \hat{y}^q_{k+1}, \hat{z}^q_{k+1}] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{2q} \end{bmatrix} = \hat{U}_{k+1}\, \alpha \qquad (8.20)$$

$$w^I = [\hat{y}^1_{k+1}, \hat{z}^1_{k+1}, \ldots, \ldots, \hat{y}^q_{k+1}, \hat{z}^q_{k+1}] \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{2q} \end{bmatrix} = \hat{U}_{k+1}\, \beta \qquad (8.21)$$

En introduisant ces relations dans la définition du quotient de Rayleigh (5.58), on obtient

$$R(\alpha,\beta) = 2j \frac{\alpha^T \hat{U}_{k+1}^T A \hat{U}_{k+1} \beta}{\alpha^T \hat{U}_{k+1}^T B \hat{U}_{k+1} \alpha + \beta^T \hat{U}_{k+1}^T B \hat{U}_{k+1} \beta} = 2j \frac{\tilde{a}(\alpha,\beta)}{\tilde{b}_1(\alpha,\beta) + \tilde{b}_2(\alpha,\beta)} \qquad (8.22)$$

Afin de calculer le vecteur w qui approche le mieux possible un vecteur propre, tout en restreignant ses parties réelle et imaginaire au sous-espa-

ce engendré par les vecteurs de Ritz, nous utilisons la propriété de stationnarité du quotient de Rayleigh. Ainsi, les coefficients inconnus α_i et β_i $(i=1,\ldots,2q)$ sont déterminés par les conditions

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_i}(R(\alpha,\beta)) = 0 \tag{8.23}$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta_i}(R(\alpha,\beta)) = 0 \tag{8.24}$$

En dérivant l'expression (8.22) par rapport aux coefficients α_i et β_i , on trouve

$$2j\frac{\partial}{\partial\alpha_i}(\tilde{a}(\alpha,\beta)) = \frac{\partial}{\partial\alpha_i}(R(\alpha,\beta))\ \tilde{b}_1(\alpha) + R(\alpha,\beta)\frac{\partial}{\partial\alpha_i}(\tilde{b}_1(\alpha)) + \frac{\partial}{\partial\alpha_i}(R(\alpha,\beta))\ \tilde{b}_2(\beta) \tag{8.25}$$

$$i=1,\ldots,2q$$

$$2j\frac{\partial}{\partial\beta_i}(\tilde{a}(\alpha,\beta)) = \frac{\partial}{\partial\beta_i}(R(\alpha,\beta))\ \tilde{b}_1(\alpha) + \frac{\partial}{\partial\beta_i}(R(\alpha,\beta))\ \tilde{b}_2(\beta) + R(\alpha,\beta)\frac{\partial}{\partial\beta_i}(\tilde{b}_2(\beta)) \tag{8.26}$$

Par les relations de stationnarité (8.23-24), les expressions ci-dessus deviennent

$$2j\frac{\partial}{\partial\alpha_i}(\tilde{a}(\alpha,\beta)) = R(\alpha,\beta)\frac{\partial}{\partial\alpha_i}(\tilde{b}_1(\alpha)) \tag{8.27}$$

$$2j\frac{\partial}{\partial\beta_i}(\tilde{a}(\alpha,\beta)) = R(\alpha,\beta)\frac{\partial}{\partial\beta_i}(\tilde{b}_2(\beta)) \tag{8.28}$$

En introduisant les matrices A_{k+1} et B_{k+1} de dimension $2q$, respectivement antisymétrique et symétrique, définies par les relations suivantes

$$A_{k+1} = \hat{U}_{k+1}^T \, A \, \hat{U}_{k+1} \tag{8.29}$$

$$B_{k+1} = \hat{U}_{k+1}^T \, B \, \hat{U}_{k+1} \tag{8.30}$$

dans la définition des scalaires $\tilde{a}(\alpha,\beta)$, $\tilde{b}_1(\alpha,\beta)$ et $\tilde{b}_2(\alpha,\beta)$, les expressions (8.27-28) s'écrivent

$$2j \frac{\partial}{\partial \alpha_i}(\alpha^T A_{k+1} \beta) = R(\alpha,\beta) \frac{\partial}{\partial \alpha_i} (\alpha^T B_{k+1} \alpha) \tag{8.31}$$

$$2j \frac{\partial}{\partial \beta_i}(\alpha^T A_{k+1} \beta) = R(\alpha,\beta) \frac{\partial}{\partial \beta_i} (\beta^T B_{k+1} \beta) \tag{8.32}$$

En tenant compte dans les dérivations ci-dessus de l'antisymétrie de A_{k+1} et de la symétrie de B_{k+1}, on obtient les deux équations vectorielles

$$A_{k+1} \beta = \omega B_{k+1} \alpha \tag{8.33}$$

$$-A_{k+1} \alpha = \omega B_{k+1} \beta \tag{8.34}$$

dans lesquelles ω représente la partie imaginaire du quotient de Rayleigh: $\omega = \mathrm{Im}[R(\alpha,\beta)]$. On peut alors expliciter les vecteurs α et β de la manière suivante

$$\alpha = \frac{1}{\omega} B_{k+1}^{-1} A_{k+1} \beta \tag{8.35}$$

$$\beta = -\frac{1}{\omega} B_{k+1}^{-1} A_{k+1} \alpha \tag{8.36}$$

En remplaçant β et α dans les équations (8.33-34) par les expressions (8.35-36), on obtient finalement le système aux valeurs et vecteurs propres suivant

$$A_{k+1}^T B_{k+1}^{-1} A_{k+1} \alpha = \omega^2 B_{k+1} \alpha \tag{8.37}$$

$$A_{k+1}^T B_{k+1}^{-1} A_{k+1} \beta = \omega^2 B_{k+1} \beta \tag{8.38}$$

où le produit matriciel $A_{k+1}^T B_{k+1}^{-1} A_{k+1}$ conduit à une matrice symétrique définie positive. Comme les deux vecteurs indépendants α et β sont solutions du même problème aux valeurs propres, la solution des problèmes (8.37-38) consiste en q paires de valeurs propres identiques ω_r^2 et q paires de vecteurs propres réels α^r et β^r $(r = 1,\ldots, q)$ associés à ω_r^2. Sous une forme plus compacte, les problèmes aux valeurs et vecteurs propres (8.36-37) peuvent s'écrire

$$A_{k+1}^T B_{k+1}^{-1} A_{k+1} \underline{W} = B_{k+1} \underline{W} \Omega_R^2 \tag{8.39}$$

Les colonnes de la matrice réelle $\underline{W}$ d'ordre $2q$ sont respectivement les vecteurs α^r et β^r $(r = 1,\ldots, q)$, alors que Ω_R^2 est une matrice diagonale dont les termes sont les q paires de valeurs propres ω_r^2 correspondantes.

Les valeurs ω_r^2 $(r = 1,\ldots, q)$ sont les approximations des valeurs propres recherchées du problème (8.17) calculées en utilisant la propriété de stationnarité du quotient de Rayleigh au voisinage des modes propres. De plus,

les vecteurs w^R et w^I au point de stationnarité sont les approximations optimalisées des parties réelle et imaginaire d'un des vecteurs propres cherchés et l'on peut écrire

$$y^r_{k+1} = [\hat{y}^1_{k+1}, \hat{z}^1_{k+1}, \ldots, \hat{y}^q_{k+1}, \hat{z}^q_{k+1}] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{2q} \end{bmatrix}_r = \hat{U}_{k+1} \alpha^r \quad (r=1,\ldots,q) \quad (8.40)$$

$$z^r_{k+1} = [\hat{y}^1_{k+1}, \hat{z}^1_{k+1}, \ldots, \hat{y}^q_{k+1}, \hat{z}^q_{k+1}] \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{2q} \end{bmatrix}_r = \hat{U}_{k+1} \beta^r \quad (r=1,\ldots,q) \quad (8.41)$$

La comparaison des expressions (8.29-30) et (8.37-41) avec les expressions (8.6-13) montre qu'à la k-ième itération d'un sous-espace on résout le même problème aux valeurs et vecteurs propres que celui que l'on formule par la propriété de stationnarité du quotient de Rayleigh (5.58) pour les systèmes gyroscopiques conservatifs. Ainsi, les équations (8.10-11) et (8.39) sont équivalentes et conduisent aux mêmes approximations des valeurs et vecteurs propres. On peut en tirer la conclusion que si le sous-espace itéré E_{k+1} contient le sous-espace engendré par les vecteurs $(y_1, z_1, \ldots, y_q, z_q)$, respectivement parties réelle et imaginaire des vecteurs propres, les éléments propres recherchés sont calculés en une seule itération. En effet, si des combinaisons linéaires des vecteurs $\hat{y}^r_{k+1}$ et $\hat{z}^r_{k+1}$, r=1,...,q dans la matrice $\hat{U}_{k+1}$ engendrent les vecteurs propres recherchés, ces derniers sont simplement obtenus par l'intermédiaire des coefficients α_r et β_r calculés par les expressions (8.23-24), (8.39) et (8.40-41).

La méthode d'itération d'un sous-espace développée combine donc à chaque itération un calcul d'itération inverse simultanée et une analyse de Ritz.

Alors que l'itération inverse simultanée ajuste la base vectorielle de Ritz, de manière à assurer la convergence vers les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres de plus petit module [L6, P3], la méthode de Ritz force les vecteurs itérés à rester orthogonaux par rapport à la matrice B .

Comme les valeurs propres trouvées $\lambda_r = \pm j\omega r$ (r=1,2,...p) sont celles de plus petit module, la caractérisation variationnelle classique des éléments propres n'est pas applicable. Dès lors, nous ne disposons pas d'information permettant de dire si les valeurs propres estimées (valeurs stationnaires du quotient de Rayleigh) sont des bornes inférieures ou supérieures des valeurs propres exactes et, par conséquent, si la convergence est atteinte par défaut ou par excès. Remarquons toutefois que, la caractérisation variationnelle individuelle est possible si l'on calcule le sous-espace associé aux plus grandes valeurs propres. Néanmoins, cette démarche appliquée à la formulation généralisée (5.5) ne présente pas d'intérêt du point de vue mécanique, puisque l'on ne s'intéresse qu'aux plus basses fréquences propres de vibration qui sont associées aux valeurs propres de plus petit module du problème (5.5).

8.3 Variante avec itération directe simultanée

Afin de caractériser les valeurs propres estimées relativement aux valeurs exactes, nous proposons une variante de l'algorithme développé qui assure une convergence monotone par excès pour les plus basses fréquences naturelles de vibration ω_r . Cette variante utilise la technique de l'itération directe simultanée au lieu de l'itération inverse. De plus, lors de la

linéarisation du problème quadratique (5.3), on doit utiliser l'identité auxiliaire

$$M \dot{a}(t) = M \dot{a}(t) \tag{8.42}$$

pour aboutir à la formulation généralisée

$$Au = \mu B u \tag{8.43}$$

Dans cette expression, les matrices composites A et B , respectivement antisymétrique et symétrique, présentent la configuration suivante

$$A = \left[\begin{array}{c|c} G & M \\ \hline -M & 0 \end{array}\right] \qquad B = \left[\begin{array}{c|c} K & 0 \\ \hline 0 & M \end{array}\right] \tag{8.44}$$

Le problème généralisé (8.43) est formellement identique au problème (5.5) et les valeurs propres $\mu = \pm j\theta$ sont les inverses des valeurs propres $\lambda = \pm j\omega$ de la formulation (5.5)

$$\mu = -\frac{1}{\lambda} \tag{8.45}$$

Dès lors, les fréquences naturelles, rangées par ordre croissant, sont également les inverses des parties imaginaires $(\theta_1 > \theta_2 > \ldots > \theta_n)$ des valeurs propres $\mu = \pm j\theta$ du problème (8.43)

$$\omega_1 = \frac{1}{\theta_1} \; ; \; \omega_2 = \frac{1}{\theta_2} \; ; \; \ldots \; ; \; \omega_n = \frac{1}{\theta_n} \tag{8.46}$$

La combinaison de la technique d'itération directe simultanée avec l'analyse de Ritz permet d'estimer les plus grandes valeurs θ_r associées au sous-espace propre dominant du problème (8.43). Comme la k-ième itération d'un sous-espace fournit des approximations $\hat{u}^r_{k+1}$ des vecteurs propres qui remplissent la condition d'orthogonalité pour le produit scalaire $\langle \hat{u}^s_{k+1}, B\ \hat{u}^r_{k+1} \rangle$, on peut caractériser, par la propriété de l'extremum du quotient de Rayleigh, les valeurs θ_r^{k+1} à la k-ième itération par la relation suivante

$$\theta_r^{k+1} = \max \{ \mathrm{Im}[R(\hat{w})] \,|\, \langle \hat{w}, B\ \hat{u}^s_{k+1} \rangle = 0 \ , \ s = 1,\ldots, r-1 \} \quad r=2,\ldots,q \qquad (8.47)$$

Les parties réelle et imaginaire du vecteur $\hat{w}$ sont des combinaisons linéaires des vecteurs estimés $\hat{y}^r_{k+1}$, $\hat{z}^r_{k+1}$ $(r=1,\ldots,q)$.

D'après le principe de Rayleigh (5.73) la valeur estimée θ_1^{k+1} est inférieure à la valeur exacte θ_1

$$\theta_1^{k+1} < \theta_1 \qquad (8.48)$$

puisque le sous-espace engendré par les vecteurs itérés est contenu dans l'espace C^{2n} .

La caractérisation variationnelle (5.76) permet d'écrire pour la valeur θ_2

$$\theta_2 = \max \{ R^I(w) \,|\, \langle w, B\ u_1 \rangle = 0 \} \qquad (8.49)$$

Le maximum est évalué pour tout vecteur w de C^{2n} satisfaisant l'équation de contrainte associée. D'après l'expression (8.47), la valeur estimée θ_2^{k+1} est donnée par la relation suivante

$$\theta_2^{k+1} = \max \{R^I(\hat{w}) \,|\, \langle \hat{w}, B\, \hat{u}_{k+1}^1 \rangle = 0\} \tag{8.50}$$

où le vecteur $\hat{w}$ du sous-espace complexe E_{k+1}^C est une combinaison linéaire des vecteurs complexes $\hat{u}_r$ $(r=1,\ldots,p)$ estimés.

Pour démontrer que la valeur estimée θ_2^{k+1} est une borne inférieure de la valeur exacte θ_2, considérons la relation auxiliaire

$$\tilde{\theta}_2 = \max \{R^I(\hat{w}) \,|\, \langle \hat{w}, B\, u_1 \rangle = 0\} \tag{8.51}$$

Puisque le sous-espace estimé E_{k+1}^C est inclus dans l'espace propre, d'après les relations (8.48) et (8.51), on a

$$\tilde{\theta}_2 \leq \theta_2 \tag{8.52}$$

De plus, la relation de contrainte dans (8.50) est plus sévère que celle exprimée dans (8.51) et par conséquent

$$\theta_2^{k+1} \leq \tilde{\theta}_2 \tag{8.53}$$

D'après (8.52-53), les valeurs exacte et estimée sont liées par l'inégalité

$$\theta_2 \geq \theta_2^{k+1} \tag{8.54}$$

En procédant de manière semblable, le résultat (8.54) peut être généralisé pour les valeurs de rang r . Il vient

$$\theta_1 \geq \theta_1^{k+1} \; ; \; \theta_2 \geq \theta_2^{k+1} \; ; \; \ldots \; ; \; \theta_r \geq \theta_r^{k+1} \; ; \; \ldots \; ; \; \theta_p \geq \theta_p^{k+1} \geq \theta_n \tag{8.55}$$

Les valeurs θ_r^{k+1} $(r=1,\ldots,p)$ représentent les approximations des valeurs exactes θ_r à la k-ième itération. Ainsi, les valeurs estimées tendent vers les valeurs exactes par défaut et les valeurs approchées $1/\theta_r^{k+1}$ constituent des bornes supérieures des fréquences naturelles ω_r .

D'après les relations (8.55), lors de chaque itération directe d'un sous-espace, l'analyse de Ritz maximalise le quotient de Rayleigh pour évaluer les meilleures approximations, dans le sous-espace courant, des solutions recherchées. D'après l'expression (8.47), lors du calcul de l'approximation de la valeur θ_r , les $(r-1)$ équations de contrainte doivent être vérifiées. Ceci implique que dans l'itération directe d'un sous-espace, les fréquences les plus élevées (plus petites valeurs θ_r) et les formes propres correspondantes sont en général estimées avec moins de précision que les premiers modes (plus grandes valeurs θ_r) pour lesquels le nombre de relations de contrainte imposées est plus faible.

8.4 Décalage spectral

Dans ce paragraphe, nous allons démontrer une importante propriété associée aux valeurs propres, relative à un décalage spectral donné. Sur le plan pratique, cette propriété peut être utilisée, en particulier, pour détecter le nombre de fréquences propres d'un système gyroscopique conservatif existant dans une bande de fréquences déterminée. Cette propriété nous intéresse en tant qu'étape complémentaire de la technique proposée afin de vérifier si l'algorithme estime effectivement toutes les fréquences propres existant dans la bande de fréquences considérée.

Avant de formuler cette propriété, il est nécessaire d'établir quelques relations préliminaires. Ainsi, reprenons le problème généralisé aux valeurs et vecteurs propres (5.5) où A est une matrice antisymétrique et B une matrice symétrique définie positive, toutes deux de dimension $2n$. Si l'on remplace λ par $j\sigma$, le problème aux valeurs et vecteurs propres (5.5) peut s'écrire

$$\underline{A}\, u = \sigma B u \tag{8.56}$$

où $\underline{A} = -jA$ est une matrice hermitienne $\underline{A} = \bar{\underline{A}}^T$.

Une solution (σ_r, u_r) du problème aux valeurs et vecteurs propres (8.56) vérifie la relation

$$A u_r = \sigma_r B u_r \tag{8.57}$$

En prémultipliant l'équation ci-dessus par le vecteur conjugué $\bar{u}_r^T$ du vecteur propre u_r, on a

$$\bar{u}_r^T \underline{A}\, u_r = \sigma_r \bar{u}_r^T B\, u_r \qquad (8.58)$$

Comme la matrice $\underline{A}$ est hermitienne alors que la matrice B est réelle et symétrique, les produits matriciels $\bar{u}_r^T \underline{A}\, u_r$ et $\bar{u}_r^T B\, u_r$ représentent des scalaires réels. Par conséquent, les valeurs propres σ_r sont réelles. Ce résultat n'a d'ailleurs rien de surprenant, puisque les valeurs propres $\lambda = j\sigma$ de la formulation (5.5) sont des imaginaires purs, ainsi que nous l'avons démontré. Dès lors, les relations d'orthogonalité (5.21) sont également applicables à la matrice $\underline{A}$ et nous pouvons écrire

$$\bar{u}_r^T \underline{A}\, u_r = \sigma_r \qquad (8.59)$$

Grâce aux relations d'orthogonalité (5.19) et (8.59), les vecteurs propres u_r et $\bar{u}_r$ $(r=1,\ldots,n)$ diagonalisent simultanément la matrice hermitienne $\underline{A}$ et la matrice réelle B. De plus, la matrice modale U, dont les colonnes sont les vecteurs propres, est inversible à condition que la matrice B soit définie positive. Ces deux dernières propriétés sont capitales pour la démonstration qui va suivre.

Considérons un décalage spectral σ_0. En raison des propriétés d'orthonormalité (5.20) et (8.59), nous pouvons écrire la relation

$$\bar{U}^T(\underline{A}-\sigma_0 B)\, U = \mathrm{diag}\,(\sigma_r - \sigma_0) \qquad (8.60)$$

dans laquelle $\underline{A}-\sigma_0 B$ est une matrice hermitienne de dimension $2n$. Sa décomposition s'écrit sous la forme

$$\underline{A} - \sigma_0 B = L D \bar{L}^T \qquad (8.61)$$

où L est une matrice triangulaire inférieure, à diagonale unité et inversible, et D une matrice réelle et diagonale.

Les expressions (8.60) et (8.61) montrent que les matrices réelles $\mathrm{diag}(\sigma_r-\sigma_0)$ et D sont congruentes à la matrice hermitienne $\underline{A}-\sigma_0 B$. D'après le théorème d'inertie de Sylvester [L6,W1], les inerties des deux matrices $\mathrm{diag}(\sigma_r-\sigma_0)$ et D sont les mêmes. En particulier, le nombre de termes négatifs dans la matrice diagonale D est égal au nombre de valeurs propres $\sigma_r (r=1,2,\ldots 2n)$ inférieures au décalage spectral σ_0.

Remarquons toutefois que pour un problème de grande taille, cette propriété n'est pas exploitable efficacement car elle nécessite la construction et la décomposition explicites d'une matrice hermitienne pleine d'ordre $2n$. Lors de la mise en oeuvre numérique de l'algorithme, nous montrerons comment contourner cette difficulté et utiliser la propriété d'inertie, en ne factorisant qu'une matrice de dimension n en forme de bande.

9. MISE EN OEUVRE DE L'ITERATION D'UN SOUS-ESPACE

Pour bien montrer l'efficacité de la technique exposée d'extraction partielle des valeurs et vecteurs propres des systèmes gyroscopiques conservatifs, nous allons détailler dans ce chapitre quelques étapes importantes de l'algorithme.

Remarquons tout d'abord que la méthode proposée fait surgir deux difficultés majeures, ainsi que le montrent les expressions (5.5) et (8.2) :

i) la matrice A n'est pas caractérisée par une structure en forme de bande, bien que ses sous-matrices K et G le sont

ii) les opérations numériques doivent s'effectuer sur des matrices d'ordre $2n$.

De manière analogue aux développements algorithmiques présentés pour les systèmes dissipatifs, on peut montrer que ces inconvénients ne sont en fait qu'apparents et que l'algorithme exploite directement les sous-matrices d'ordre n dont la structure de bande est dès lors mise à profit.

9.1 Initialisation du sous-espace

D'après le chapitre précédent, rappelons qu'il faut choisir les vecteurs initiaux du processus itératif dont la vitesse de convergence dépendra fortement de ce choix.

Nous avons vu que pour chaque couple d'éléments propres à calculer (ω_r^2, u_r) , il est nécessaire de définir deux vecteurs d'itération appartenant à R^{2n} , c'est-à-dire les parties réelle et imaginaire du vecteur u_o^r conduisant au vecteur propre u_r . Comme pour le cas des systèmes dissipatifs, ces vecteurs peuvent être construits, pour une vitesse de rotation donnée, à partir des solutions calculées pour d'autres vitesses de rotation. En l'absence de telles solutions ou de tout autre ensemble de vecteurs adéquats, il s'avère à nouveau que deux cas d'initialisation méritent d'être retenus.

i) Initialisation basée sur l'information modale de la structure à l'arrêt ($Ka = \omega^2 Ma$) . D'après la définition (5.8) du vecteur d'état $u(t)$ et en raison du fait que les valeurs propres sont des imaginaires purs, on peut prendre comme vecteurs initiaux de R^{2n}

$$y_o^r = \begin{bmatrix} a_r \\ \hline 0 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad z_o^r = \begin{bmatrix} 0 \\ \hline \omega_r \; a_r \end{bmatrix} \tag{9.1}$$

dans lesquels a_r représente la r-ième forme propre de la structure à l'arrêt. Ainsi, si l'on veut calculer les p premières fréquences propres de la structure en rotation, la matrice U_o des vecteurs initiaux s'écrit

$$U_o = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} a_1 & 0 & \cdots & \cdots & a_q & 0 \\ \hline 0 & \omega_1 \; a_1 & & & 0 & \omega_q \; a_q \end{array} \right] \tag{9.2}$$

U_o étant une matrice $2n \times 2q$.

ii) Initialisation selon la technique classique de l'itération d'un sous-espace [B5, Y1]. Cette méthode que nous avons décrite en détail au paragraphe 7.1 pour les systèmes dissipatifs peut être appliquée aussi aux systèmes conservatifs en gardant la topologie de la matrice U_o donnée à la relation (9.2).

Il faut observer d'autre part que la vitesse de convergence dépend de la dimension $2q$ du sous-espace. En pratique, une valeur q égale au minimum de $(p+8, 2p)$ constitue un bon compromis pour la recherche des p premiers modes.

9.2 Itération inverse simultanée

Reprenons l'expression (8.2) donnant les $2q$ vecteurs itérés de R^{2n} dans la matrice $\hat{U}_{k+1}$

$$A\,\hat{U}_{k+1} = B\,U_k \tag{9.3}$$

Contrairement à ce que l'on pourrait penser à première vue, cette relation n'implique pas la résolution de $2q$ systèmes linéaires de $2n$ équations à $2n$ inconnues, ainsi que nous allons le voir ci-après. En effectuant comme au chapitre 7 les opérations par blocs, on obtient pour le produit $B\,U_k$ de dimension $2n \times 2q$

$$B\,U_k = \left[\begin{array}{c|c} K & 0 \\ \hline 0 & M \end{array}\right] \begin{bmatrix} U_k^a \\ U_k^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K\,U_k^a \\ \hline M\,U_k^b \end{bmatrix} \tag{9.4}$$

En introduisant ce résultat dans la relation précédente, il vient

$$\left[\begin{array}{c|c} 0 & K \\ \hline -K & -G \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \hat{U}^a_{k+1} \\ \hline \hat{U}^b_{k+1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} K\, U^a_k \\ \hline M\, U^b_k \end{array}\right] \tag{9.5}$$

Après développement des produits, comme la matrice K est supposée définie positive, il vient

$$\hat{U}^b_{k+1} = U^a_k \tag{9.6}$$

De même, pour la sous-matrice $\hat{U}^a_{k+1}$, on a

$$-K\, \hat{U}^a_{k+1} - G\, \hat{U}^b_{k+1} = M\, U^b_k \tag{9.7}$$

En remplaçant $\hat{U}^b_{k+1}$ par l'expression (9.6), on trouve finalement

$$K\, \hat{U}^a_{k+1} = - G\, U^a_k - M\, U^b_k \tag{9.8}$$

Dès lors, d'après les expressions (9.6) et (9.8), nous n'avons à calculer à chaque itération que les vecteurs itérés dans la sous-matrice $\hat{U}^a_{k+1}$ de dimension $n \times 2q$. De plus, l'expression (9.8) montre clairement que la seule matrice à factoriser est la matrice spatiale en bande K et que toutes les opérations sont effectuées sur des matrices d'ordre n seulement.

9.3 Problème réduit d'interaction

Après projection des matrices A et B dans le sous-espace engendré par les vecteurs itérés, on doit résoudre, conformément à l'expression (8.5), le problème aux valeurs et vecteurs propres de dimension réduite $2q \ll 2n$

$$A_{k+1}\ W = B_{k+1}\ W\ \Lambda_{k+1} \tag{9.9}$$

La projection A_{k+1} s'écrit, d'après l'expression (8.6),

$$A_{k+1} = \hat{U}_{k+1}^T\ A\ \hat{U}_{k+1} \tag{9.10}$$

Avec une démarche analogue à celle du paragraphe précédent, il vient

$$A_{k+1} = \left[\begin{array}{c} \hat{U}_{k+1}^a \\ \hline \hat{U}_{k+1}^b \end{array}\right]^T \left[\begin{array}{c|c} 0 & K \\ \hline -K & -G \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \hat{U}_{k+1}^a \\ \hline \hat{U}_{k+1}^b \end{array}\right] \tag{9.11}$$

En tenant compte des expressions (9.5-6), on peut écrire

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= \left[\begin{array}{c} \hat{U}_{k+1}^a \\ \hline \hat{U}_{k+1}^b \end{array}\right]^T \left[\begin{array}{c} K\ U_k^a \\ \hline M\ U_k^b \end{array}\right] \\ &= (\hat{U}_{k+1}^a)^T\ K\ U_k^a + (\hat{U}_{k+1}^b)^T\ M\ U_k^b \\ &= (\hat{U}_{k+1}^a)^T\ K\ U_k^a + (U_k^a)^T\ M\ U_k^b \end{aligned} \tag{9.12}$$

De même, pour la projection de la matrice B , on obtient

$$B_{k+1} = \hat{U}_{k+1}^T \, B \, \hat{U}_{k+1}$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{U}_{k+1}^a \\ \hline \hat{U}_{k+1}^b \end{bmatrix}^T \left[\begin{array}{c|c} K & 0 \\ \hline 0 & M \end{array}\right] \begin{bmatrix} \hat{U}_{k+1}^a \\ \hline \hat{U}_{k+1}^b \end{bmatrix}$$

$$= (\hat{U}_{k+1}^a)^T \, K \, \hat{U}_{k+1}^a + (U_k^a)^T \, M \, U_k^a \qquad (9.13)$$

A nouveau, on peut constater que les opérations s'effectuent sur des sous-matrices d'ordre n dont la structure en bande est pleinement exploitée, ce qui diminue le temps de calcul et la place mémoire.

La taille du problème d'interaction (9.9) dépend de la dimension du sous-espace propre cherché. D'habitude, en analyse dynamique des arbres de machines, cette dimension est considérablement plus petite que celle du problème original, puisqu'on ne s'intéresse qu'aux fréquences naturelles les plus basses. Ainsi, après projection des opérateurs dans le sous-espace, on n'a qu'à résoudre un problème aux valeurs et vecteurs propres dont la dimension $2q$ est nettement plus faible que celle du problème original. Par contre, la matrice A_{k+1} dans la relation (9.9) est antisymétrique. Il en résulte l'inconvénient que la solution du problème réduit est complexe. Au chapitre précédent, nous avons toutefois montré que le problème réduit (9.9) peut être remplacé par l'équation généralisée

$$A_{k+1}^S \, \underline{W} = B_{k+1} \, \underline{W} \, \Omega_{k+1}^2 \qquad (9.14)$$

dans laquelle les matrices A^S_{k+1} et B_{k+1} sont réelles et symétriques. La solution présente ainsi le grand avantage d'être réelle. Plusieurs algorithmes classiques permettent de trouver cette solution. Cependant, en raison du fait que le problème (9.14) admet des racines doubles, un soin particulier doit être apporté au choix de l'algorithme de résolution qui devra être en mesure d'extraire des vecteurs propres indépendants même pour les valeurs propres multiples.

Ainsi, si l'algorithme utilisé conduit à deux vecteurs propres distincts pour chaque racine double ω_r^2 , ces deux vecteurs correspondent respectivement aux parties réelle p_r et imaginaire q_r du vecteur propre de rang r du problème (9.9). C'est le cas par exemple pour la méthode de Jacobi généralisée dont l'efficacité n'est plus à démontrer [B5, M2]. En effet, cette technique diagonalise, par des transformations orthogonales, simultanément les matrices A^S_{k+1} et B_{k+1} et conduit ainsi à des vecteurs propres indépendants, même lorsqu'ils correspondent à des racines doubles. De plus, au fur et à mesure que les itérations se poursuivent, la matrice A^S_{k+1} tend vers une matrice diagonale, puisque la matrice antisymétrique A_{k+1} tend vers une matrice diagonale par blocs. Comme il en est de même de la matrice B_{k+1} , la méthode de Jacobi généralisée est particulièrement bien adaptée.

En revanche, si la méthode utilisée ne fournit qu'un seul vecteur propre à chaque itération, comme dans le cas de la méthode de la puissance itérée ou itération directe avec orthogonalisation de Gram-Schmidt, on peut assimiler ce vecteur propre à p_r et utiliser l'expression (8.9) pour calculer q_r . Il est ainsi possible d'éviter une recherche itérative de ce dernier vecteur propre. Ce type de méthode limite ainsi les itérations au calcul de q vecteurs.

9.4 Orthogonalisation

A chaque itération, la solution du problème réduit (9.14) permet de construire une base orthonormale U_{k+1} par la transformation définie dans l'expression (8.13)

$$U_{k+1} = \hat{U}_{k+1} \underline{W} \tag{9.15}$$

dans laquelle $\hat{U}_{k+1}$ est la matrice de dimension $2n \times 2q$ des vecteurs itérés et $\underline{W}$ est la matrice de dimension $2q \times 2q$ des vecteurs propres du problème d'interaction (9.14). En séparant la matrice U_{k+1} en sous-matrices supérieure et inférieure de dimension $n \times 2q$, nous pouvons écrire

$$\begin{bmatrix} U^a_{k+1} \\ U^b_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{U}^a_{k+1} \\ \hat{U}^b_{k+1} \end{bmatrix} \underline{W} = \begin{bmatrix} \hat{U}^a_{k+1} \underline{W} \\ \hat{U}^b_{k+1} \underline{W} \end{bmatrix} \tag{9.16}$$

Dès lors, en introduisant la relation (9.6), la base orthonormale est donnée par les expressions

$$U^a_{k+1} = \hat{U}^a_{k+1} \underline{W} \tag{9.17}$$

$$U^b_{k+1} = U^a_k \underline{W} \tag{9.18}$$

Comme dans le problème dissipatif, à la fin de la k-ième itération les vecteurs dans U^b_{k+1} ont une itération de retard sur les vecteurs qui forment U^a_{k+1} et qui ont donc été l'objet d'une phase d'amélioration supplémentaire.

Compte tenu de ce fait, nous proposons à nouveau de calculer les vecteurs dans la matrice U^b_{k+1} par une relation de contrainte. En effet, d'après l'expression (5.8), cette matrice peut s'écrire

$$U^b_{k+1} = U^a_{k+1} \, \Omega_{k+1} \tag{9.19}$$

Les vecteurs rangés dans la matrice U^a_{k+1}, donnée par l'expression (9.17), sont estimés à l'itération courante. Quant à la matrice Ω_{k+1}, diagonale par blocs, elle s'écrit cette fois

$$\Omega_{k+1} = \text{diag} \left[\begin{pmatrix} 0 & \omega^i_{k+1} \\ -\omega^i_{k+1} & 0 \end{pmatrix} , \; i=1,\ldots,q \right] \tag{9.20}$$

La configuration de la matrice Ω_{k+1} provient du fait que la matrice U^a_{k+1} contient alternativement les n premières composantes des approximations des parties réelle et imaginaire des vecteurs propres recherchés. Pour les raisons énoncées au paragraphe 7.4, le calcul de la matrice U^b_{k+1} par l'expression (9.19) conduit de nouveau à une amélioration globale du processus itératif. De plus, en raison de la configuration de la matrice Ω_{k+1}, la relation (9.19) nécessite un nombre d'opérations plus faible que l'expression (9.18) dans laquelle la matrice $\underline{W}$ est pleine.

9.5 Critère de convergence et mesure d'erreur

La convergence est admise comme atteinte lorsque le critère suivant est vérifié pour les p plus petites fréquences propres

$$\varepsilon_r = \frac{|\omega_r^{k+1} - \omega_r^k|}{\omega_r^{k+1}} \qquad r=1,\ldots,p \qquad (9.21)$$

Dans cette relation, ε est la précision requise alors que ω_r^{k+1} et ω_r^k représentent respectivement les valeurs propres trouvées aux itération k et $(k-1)$.

Quand la convergence des valeurs propres est atteinte au sens du critère (9.21), le processus itératif prend fin. Néanmoins, une estimation de la précision de la solution obtenue doit être établie, étant donné que la relation (9.21) ne fournit aucune information quantitative sur la précision des vecteurs propres estimés. L'évaluation de la qualité des approximations obtenues sur la base d'une mesure de l'erreur associée à chaque paire propre sera une étape importante du processus d'extraction partielle des éléments propres.

En rappelant la formulation (5.5) du problème aux valeurs et vecteurs propres, nous définissons, pour chaque paire formée d'une valeur propre et du vecteur propre correspondant, l'erreur sur la norme associée de la façon suivante

$$\varepsilon'_r = \frac{\|A\, u_r^{\ell} - \lambda_r^{\ell}\, B\, u_r^{\ell}\|_2}{\|A\, u_r^{\ell}\|_2} \qquad r=1,\ldots,p \qquad (9.22)$$

L'indice supérieur ℓ désigne la dernière itération. Le numérateur de l'expression ci-dessus représente en fait la norme du vecteur résidu, en

général non nulle. Cette grandeur mesure l'erreur absolue commise sur l'équation (5.5) pour la solution estimée. En introduisant dans (9.22) les parties réelles y_r^ℓ et imaginaires z_r^ℓ des vecteurs u_r^ℓ, l'erreur sur la norme prend la forme

$$\varepsilon_r' = \left[\frac{\| A\, y_r^\ell + \omega_r^\ell\, B\, z_r^\ell \|_2^2 + \| A\, z_r^\ell - \omega_r^\ell\, B\, y_r^\ell \|_2^2}{\| A\, y_r^\ell \|_2^2 + \| A\, z_r^\ell \|_2^2}\right]^{1/2} \qquad (9.23)$$

$$r=1,\ldots,p$$

Une mesure alternative peut également être établie en utilisant la formulation quadratique (5.2) définie par les matrices spatiales K, G et M. D'après la définition (5.8) du vecteur d'état $u(t)$, les vecteurs propres u_r^ℓ peuvent s'exprimer sous la forme

$$[u_r^\ell]^T = [a_r^\ell \mid j\, \omega_r^\ell\, a_r^\ell]^T \qquad r=1,\ldots,p \qquad (9.24)$$

Les vecteurs a_r^ℓ de dimension n représentent les approximations des vecteurs propres complexes du problème quadratique (5.2). En introduisant ces vecteurs dans l'équation (5.2), on obtient

$$(\lambda_r^\ell)^2\, M a_r^\ell + \lambda_r^\ell\, G\, a_r^\ell + K a_r^\ell = \Delta_r \qquad r=1,\ldots,p \qquad (9.25)$$

Dans cette expression, le vecteur résidu Δ_r représente un bilan de forces. En effet les termes du premier membre représentent respectivement les forces d'inertie, gyroscopiques et élastiques lorsque le système vibre selon le r-ième mode (ω_r, a_r).

La qualité de la solution obtenue peut être évaluée par l'erreur sur la norme définie par l'expression

$$\tilde{\varepsilon}_r = \frac{\|\Delta_r\|_2}{\|Ka_r^{\ell}\|_2} \qquad r=1,\ldots,p \qquad (9.26)$$

La mesure de l'erreur ainsi définie quantifie le rapport entre la norme du vecteur des forces résiduelles et celle du vecteur des forces élastiques. L'expression (9.26) est formellement semblable à l'erreur de la norme définie pour les systèmes conservatifs non-gyroscopiques dans la référence [B5]. Elle présente d'autre part l'avantage d'avoir une signification physique.

En introduisant les parties réelles c_r^{ℓ} et imaginaires d_r^{ℓ} des vecteurs a_r^{ℓ}, on obtient finalement

$$\tilde{\varepsilon}_r = \left[\frac{\|Kc_r^{\ell} - \omega_r^{\ell} G\, d_r^{\ell} - (\omega_r^{\ell})^2 Mc_r^{\ell}\|_2^2 + \|Kd_r^{\ell} + \omega_r^{\ell} G\, c_r^{\ell} - (\omega_r^{\ell})^2\, Md_r^{\ell}\|_2^2}{\|Kc_r^{\ell}\|_2^2 + \|Kd_r^{\ell}\|_2^2}\right]^{1/2}$$

$$r=1,\ldots,p \qquad (9.27)$$

Les vecteurs c_r^{ℓ} et d_r^{ℓ} sont formés par les n premières composantes des vecteurs estimés y_r^{ℓ} et z_r^{ℓ} $(r=1,\ldots,p)$.

9.6 Vérification par décalage spectral

Dans ce paragraphe, nous allons montrer comment mettre en oeuvre efficacement la décomposition (8.61), afin de vérifier si l'algorithme estime effectivement toutes les fréquences propres existant dans la bande de fréquence considérée.

Etant donné la configuration composite des matrices $\underline{A}$ et B, nous pouvons expliciter le calcul de la factorisation (8.61) en effectuant les opérations par blocs. D'après l'expression (5.2), la matrice hermitienne $\underline{A} - \sigma_o B$ présente la topologie suivante

$$\underline{A} - \sigma_o B = \left[\begin{array}{c|c} -\sigma_o K & -jK \\ \hline jK & jG-\sigma_o M \end{array}\right] \tag{9.28}$$

Sa décomposition s'écrit

$$\underline{A} - \sigma_o B = L_1 D \bar{L}_1^T$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline -j\,\sigma_o^{-1} I & I \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} -\sigma_o K & 0 \\ \hline 0 & jG - \sigma_o M + \sigma_o^{-1} K \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I & j\,\sigma_o^{-1} I \\ \hline 0 & I \end{array}\right] \tag{9.29}$$

Dans cette relation, D est une matrice diagonale par blocs alors que σ_o est supposé non nul. Remarquons que les deux blocs diagonaux de dimension $n \times n$ dans D sont respectivement une matrice réelle symétrique et une matrice hermitienne.

On peut factoriser chacun des deux blocs de la matrice D sous les formes

$$-\sigma_o K = L_a D_a L_a^T \tag{9.30}$$

$$jG - \sigma_o M + \sigma_o^{-1} K = L_b D_b \bar{L}_b^T \tag{9.31}$$

dans lesquelles L_a et L_b sont des matrices unitaires triangulaires inférieures, respectivement réelle et complexe, alors que D_a et D_b sont des matrices diagonales. La factorisation (9.29) devient ainsi

$$\underline{A} - \sigma_o B = L_1 L_2 \underset{\sim}{D} \bar{L}_2^T \bar{L}_1^T$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline -j\sigma_o^{-1} I & I \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} L_a & 0 \\ \hline 0 & L_b \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} D_a & 0 \\ \hline 0 & D_b \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} L_a^T & 0 \\ \hline 0 & \bar{L}_b^T \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & j\sigma_o^{-1} I \\ \hline 0 & I \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} L_a & 0 \\ \hline -j\sigma_o^{-1} L_a & L_b \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} D_a & 0 \\ \hline 0 & D_b \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} L_a^T & j\sigma_o^{-1} L_a^T \\ \hline 0 & \bar{L}_b^T \end{array}\right] \tag{9.32}$$

Ce résultat peut s'écrire sous la forme

$$\underline{A} - \sigma_o B = L \underset{\sim}{D} \bar{L}^T \tag{9.33}$$

où $L = L_1 L_2$ est une matrice unitaire triangulaire inférieure et $\underset{\sim}{D}$ une matrice diagonale composée des deux sous-diagonales D_a et D_b. Le calcul de la diagonale $\underset{\sim}{D}$ peut donc être effectué en formant séparément les diagonales D_a et D_b par les expressions (9.30) et (9.31).

La décomposition adoptée entraîne le fait que l'inertie de la matrice $\underset{\sim}{D}$ est la somme des inerties de D_a et D_b . Comme la matrice spatiale de rigidité K est supposée définie positive, tous les n termes de la diagonale D_a sont négatifs (positifs) pour un décalage spectral σ_o positif (négatif). En conséquence, conformément au théorème d'inertie de Sylvester [L6,P3], le nombre total de valeurs propres inférieures (supérieures) à σ_o est égal à $(n+m)$, où m désigne le nombre de termes négatifs (positifs) dans la diagonale D_b . Il suffit dès lors d'étudier seulement l'inertie de la diagonale D_b pour connaître le nombre de valeurs propres inférieures ou supérieures au décalage spectral σ_o . En raison de la symétrie du spectre des valeurs propres par rapport à zéro, on voit aisément que pour une valeur positive (négative) de σ_o , le nombre de termes négatifs (positifs) dans D_b indique le nombre de fréquences propres comprises entre zéro et σ_o .

Si l'on multiplie l'expression (9.31) par le décalage σ_o , il vient

$$K + j\sigma_o G - \sigma_o^2 M = L_b \underset{\sim}{D_b} \bar{L}_b^T \qquad (9.34)$$

la matrice diagonale $\underset{\sim}{D_b}$ étant égale à $\sigma_o D_b$. Grâce à cette transformation, le nombre de termes négatifs de $\underset{\sim}{D_b}$ est égal au nombre de valeurs propres comprises entre zéro et σ_o , quel que soit le signe de σ_o . Réciproquement, si le décalage spectral σ_o est compris entre les deux fréquences propres de rang r et $(r+1)$, la matrice $\underset{\sim}{D_b}$ de (9.34) possède exactement r termes négatifs.

L'application pratique de cette propriété ne nécessite donc, contrairement à l'expression (8.61), que la factorisation de la matrice hermitienne (9.34) de dimension n et en forme de bande. Ceci constitue un avantage en places mémoire et en nombre d'opérations numériques.

Cette propriété peut être alors utilisée comme moyen de contrôle des valeurs propres estimées par la technique proposée de l'itération d'un sous-espace. Pour vérifier si l'algorithme a effectivement trouvé toutes les valeurs propres existant dans une certaine bande de fréquence, il suffit de fixer le décalage spectral σ_0 à une valeur légèrement supérieure à la plus grande fréquence propre estimée, puis effectuer la décomposition (9.34). Si le nombre de termes négatifs dans la matrice diagonale $\underset{\sim}{D}_b$ est égal au nombre p de valeurs ω_r^{ℓ} (r=1,...,p) estimées, l'algorithme a déterminé toutes les fréquences propres existant dans la bande de fréquence considérée.

9.7 Etapes caractéristiques de l'algorithme

Nous résumons ci-après les étapes de l'algorithme proposé avec indication entre crochets du nombre d'opérations effectuées à chaque étape. Les matrices K, G et M sont d'ordre n et leur demi-largeur de bande est m.

1) CALCULS INITIAUX

1.1) Initialisation du sous-espace U_0

1.2) Factorisation de la matrice $K = L D L^T$ [n (m+1)(m+2)/2]

2) ITERATION D'UN SOUS-ESPACE $k = 0,1,\ldots,l$

2.1) Calcul du sous-espace $\hat{U}_{k+1}$ (itération inverse simultanée)

- $K\,\hat{U}^a_{k+1} = -\,G\,U^a_k - M\,U^b_k$ $\qquad [6nq(2m+1)]$

- $\hat{U}^b_{k+1} = U^a_k$

2.2) Calcul des projections des matrices A et B dans le sous-espace

- $A_{k+1} = (\hat{U}^a_{k+1})^T\,K\,U^a_k + (U^a_k)^T\,M\,U^b_k$ $\qquad [2nq(2q-1)]$

- $B_{k+1} = (\hat{U}^a_{k+1})^T\,K\,\hat{U}^a_{k+1} + (U^a_k)^T\,M\,U^a_k$ $\qquad [4nq(m+q+1)]$

3) Résolution du problème aux valeurs et vecteurs propres réduit

- $A^T_{k+1}\,B^{-1}_{k+1}\,A_{k+1}\,\underline{W} = B_{k+1}\,\underline{W}\,\Omega^2_{k+1}$ $\qquad [0(q^3)]$

4) Calcul d'une nouvelle base orthonormale U_{k+1}

- $U^a_{k+1} = \hat{U}^a_{k+1}\,\underline{W}$ $\qquad [4nq^2]$

- $U^b_{k+1} = U^a_{k+1}\,\Omega_{k+1}$ $\qquad [2nq]$

5) Vérification du critère de convergence

- $\varepsilon_r = \dfrac{\left|\omega_r^{k+1} - \omega_r^k\right|}{\omega_r^{k+1}} \leq \varepsilon \qquad r = 1,2,\ldots,p$

Si le critère de convergence est satisfait, le processus itératif est arrêté. Dans le cas contraire, il se poursuit par retour à l'étape 2).

6) MESURE D'ERREUR DES SOLUTIONS ESTIMEES

$$\tilde{\varepsilon}_r = \left[\frac{\|Kc_r^{\ell} - \omega_r^{\ell} G\, d_r^{\ell} - (\omega_r^{\ell})^2 Mc_r^{\ell}\|_2^2 + \|Kd_r^{\ell} + \omega_r^{\ell} G\, c_r^{\ell} - (\omega_r^{\ell})^2\, Md_r^{\ell}\|_2^2}{\|Kc_r^{\ell}\|_2^2 + \|Kd_r^{\ell}\|_2^2}\right]^{1/2}$$

$[p(12mn + 13n)]$

7) VERIFICATION DES SOLUTIONS PAR DECALAGE SPECTRAL

$$K + j\sigma_o\, G - \sigma_o^2\, M = L_b\, \underset{\sim}{D}_b\, \bar{L}_b^T \qquad [n(m^2+7m+4)/2]$$

10. EXEMPLES D'APPLICATION

Dans ce chapitre, nous allons présenter quelques exemples d'application permettant de mettre en valeur les techniques développées. Nous verrons que les algorithmes proposés sont particulièrement efficaces pour l'analyse modale des systèmes d'arbres de machines discrétisés en un grand nombre de degrés de liberté.

10.1 Problèmes tests

A titre de contrôle, nous avons d'abord traité quelques problèmes tests classiques de faible dimension. Pour tous ces cas, une très bonne concordance a été trouvée entre les résultats obtenus par les techniques proposées et les valeurs publiées ou calculées par des logiciels standards d'extraction globale de valeurs et vecteurs propres [I3,G11,S3]. Nous pouvons citer les exemples suivants

- Systèmes non-gyroscopiques conservatifs définis par des matrices de rigidité K et de masse M symétriques et une matrice d'amortissement C nulle (cas dégénérés d'extraction de modes complexes, la partie réelle des valeurs propres étant nulle et les angles de phase relative des composantes des vecteurs propres auto-adjoints associés étant égaux à 0° et 180°);

- Systèmes non-gyroscopiques dissipatifs définis par des matrices spatiales symétriques [M2,M8,S1] (vecteurs propres auto-adjoints et an-

gles de phases égaux à 0° et 180° si la matrice d'amortissement vérifie la condition de Caughey);

- Systèmes gyroscopiques conservatifs définis par des matrices de rigidité K et de masse M symétriques et une matrice gyrosopique G antisymétrique [M2,U1] (valeurs propres imaginaires pures associées à des vecteurs propres adjoints complexes conjugués);

- Systèmes gyroscopiques dissipatifs (modèle d'arbre de machine présenté dans les références [G3,Z1]), définis par une matrice de masse M symétrique et par des matrices de rigidité K_g et d'amortissement C_g non symétriques (valeurs propres complexes et vecteurs propres adjoints).

10.2 Groupe hydro-électrique Kaplan

Rappelons que les méthodes proposées ont été développées pour l'extraction partielle des paramètres modaux des arbres de machines et sont bien adaptées à la recherche des modes propres associés aux plus basses fréquences de vibrations de modèles non-symétriques caractérisés par un grand nombre de degrés de liberté. Nous allons donc présenter en détail une application numérique concernant un groupe hydro-électrique Kaplan, discrétisé en éléments finis.

Les caractéristiques géométriques et massiques de ce groupe qui comporte plusieurs parties cylindriques, un alternateur, une turbine et trois paliers sont données à la figure 10.1.

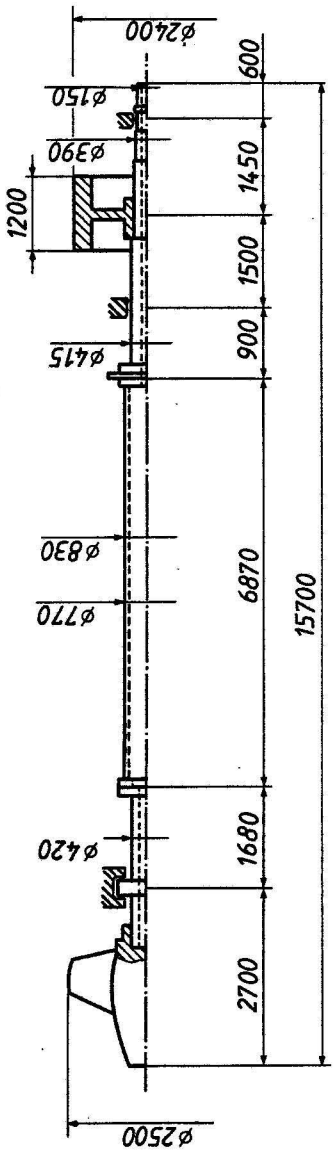


Fig. 10.1 Groupe hydro-électrique Kaplan : rigidité des paliers I et II = $0{,}5 \times 10^9$ N/m ; rigidité du palier III = $0{,}1 \times 10^{10}$ N/m ; masse de la turbine = 8000 kg ; moment d'inertie de la turbine = 1840 kg ; masse de l'alternateur = 10980 kg ; moment d'inertie de l'alternateur = 21330 kgm^2 .

Les parties cylindriques, dont l'une est creuse, ont été discrétisées par 103 éléments finis d'arbre de type C^0. L'alternateur et la turbine, qui constituent les éléments massifs du groupe, ont été modélisés par deux éléments disques minces indéformables. Trois éléments adéquats restituent les propriétés de rigidité et d'amortissement des paliers. Le modèle d'éléments finis, présenté à la figure 10.2, possède 416 degrés de liberté, les matrices spatiales ayant une demi-largeur de bande égale à 8.

A l'aide du programme de calcul appelé "ROTORS", nous avons déterminé pour des vitesses de rotation de 0 à 1000 t/min, incrémentées de 200 t/min, les plus basses fréquences de vibrations, ainsi que les modes propres associés. Les calculs pour le modèle gyroscopique dissipatif ont été réalisés avec l'algorithme de bi-itération des sous-espaces adjoints et l'algorithme d'itération d'un seul sous-espace. Nous avons considéré deux types différents de paliers :

1) propriétés d'amortissement des paliers nulles

$$C^1_{yy} = C^1_{zz} = C^2_{yy} = C^2_{zz} = C^3_{yy} = C^3_{zz} = 0$$

2) propriétés d'amortissement des paliers non-nulles (estimées d'après la littérature et les données du constructeur)

$$C^1_{yy} = C^1_{zz} = C^2_{yy} = C^2_{zz} = 5 \times 10^5 \text{ Ns/m}$$

$$C^3_{yy} = C^3_{zz} = 1 \times 10^6 \text{ Ns/m}$$

Les sous-espaces adjoints de départ sont établis selon le critère i) présenté au paragraphe 7.1. Ainsi, aux vitesses de rotation suivantes, les

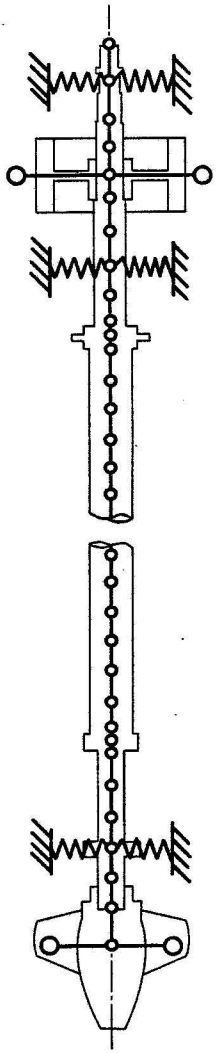


Fig. 10.2 Modèle d'éléments finis - représentation de principe

vecteurs de départ sont initialisés sur la base des vecteurs propres adjoints calculés à la vitesse précédente. Avec ce schéma d'initialisation, le processus itératif a convergé, pour chaque vitesse de rotation, en trois itérations pour les quatre plus basses fréquences propres recherchées avec une précision relative (7.38) de 1×10^{-6}.

Les figures 10.3 et 10.4 montrent, en fonction de la vitesse de rotation, ces fréquences propres ($\omega_i = \mathrm{Im}[\lambda_i]$, i=1,...,4) et les décréments logarithmiques ($\delta_i = \frac{-2\pi\, \mathrm{Re}[\lambda_i]}{\mathrm{Im}[\lambda_i]}$, i=1,...,4) associés pour le cas 1). On constate que le premier mode devient instable à la vitesse Ω = 670 t/min qui correspond également à la première vitesse critique. La qualité de la solution obtenue pour la vitesse Ω = 800 t/min peut être relevée au tableau I. En effet, on voit que les mesures d'erreur, définies par les expressions (7.47-48), sont toutes inférieures à 1×10^{-5} pour une précision requise de 1×10^{-6} sur les valeurs propres.

Tableau I Bi-itération des sous-espaces adjoints - Fréquences propres et décréments logarithmiques à Ω = 800 t/min (cas 1)

Mode k	fréquence [Hz] $\omega_k/2\pi$	décrément log. δ_k	erreur relative sur la fréquence ε_k	erreur sur la norme ε_k^G	ε_k^D
1	11.002	-9.1561×10^{-3}	4.7685×10^{-9}	7.1280×10^{-7}	7.0399×10^{-7}
2	12.164	8.9638×10^{-2}	8.2183×10^{-9}	1.0609×10^{-6}	1.0566×10^{-6}
3	19.441	1.5481×10^{-2}	1.5851×10^{-9}	1.5412×10^{-6}	1.5416×10^{-6}
4	19.485	8.1180×10^{-2}	8.6024×10^{-9}	1.7078×10^{-6}	1.7079×10^{-6}

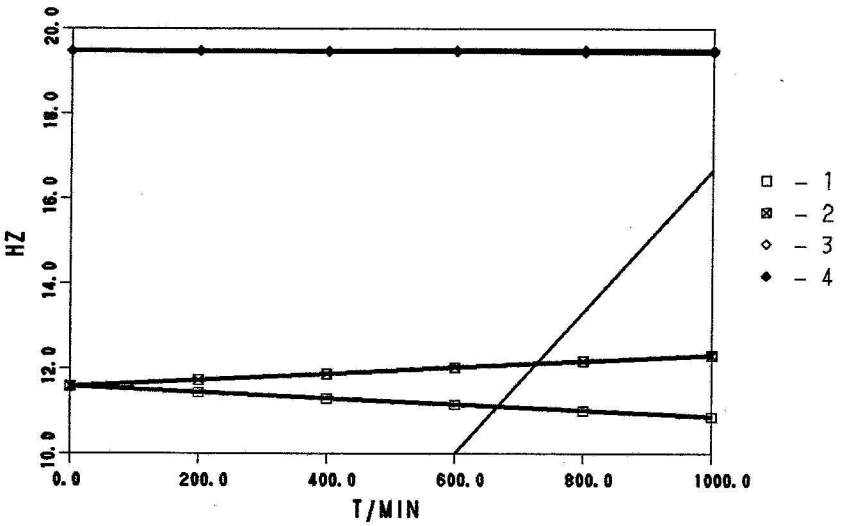


Fig. 10.3 Fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation (cas 1)

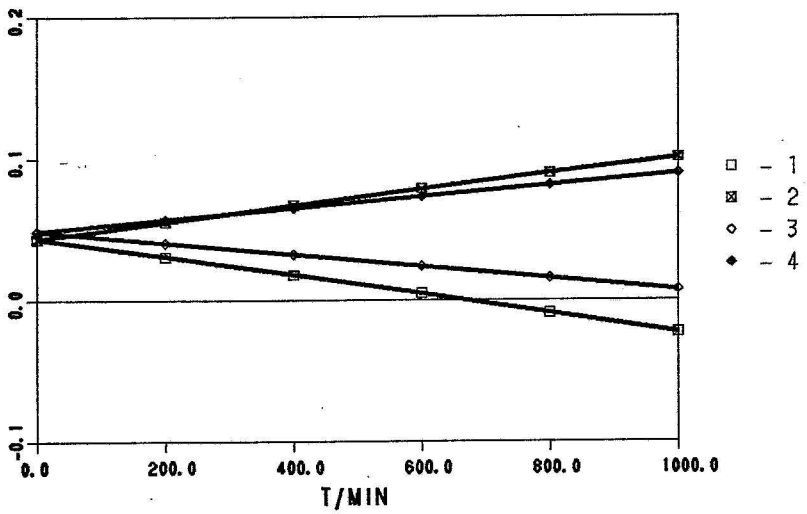


Fig. 10.4 Décréments logarithmiques en fonction de la vitesse de rotation (cas 1)

Pour le cas 2), les quatre premières fréquences propres et les décréments logarithmiques associés sont représentés respectivement aux figures 10.5 et 10.6. En comparaison avec le cas précédent, on voit que la première vitesse critique demeure à Ω = 670 t/min, alors que le seuil de stabilité se déplace à la vitesse Ω = 850 t/min. Ainsi, l'introduction d'un amortissement au niveau des paliers élargit le domaine de fonctionnement stable du système [L3]. Le tableau II présente les fréquences propres ainsi que les décréments logarithmiques, estimés à la vitesse Ω = 800 t/min. D'autre part, les mesures d'erreur permettent d'estimer la qualité des solutions trouvées.

Tableau II Bi-itération des sous-espaces adjoints - Fréquences propres et décréments logarithmiques à Ω = 800 t/min (cas 2)

Mode k	fréquence [Hz] $\omega_k/2\pi$	décrément log. δ_k	erreur relative sur la fréquence ε_k	erreur sur la norme ε_k^G	ε_k^D
1	11.003	3.1592×10^{-3}	5.6477×10^{-9}	4.9635×10^{-7}	5.0997×10^{-7}
2	12.164	1.0425×10^{-1}	4.4345×10^{-9}	5.4419×10^{-7}	5.4207×10^{-7}
3	19.468	1.5283×10^{-1}	7.7654×10^{-10}	5.1121×10^{-7}	5.1119×10^{-7}
4	19.489	2.2424×10^{-1}	9.0119×10^{-10}	2.1314×10^{-7}	2.1327×10^{-7}

Nous avons aussi résolu ce problème avec la variante d'itération inverse simultanée du sous-espace droit présentée au paragraphe 6.3, le sous-espace gauche étant déterminé lorsque la convergence est atteinte pour son adjoint. Dans ce cas, pour la même précision requise de 10^{-6} pour les quatre fréquences propres cherchées, le processus itératif a nécessité en moyenne, pour chaque vitesse de rotation, cinq itérations jusqu'à la convergence. En

conclusion, malgré le fait que la technique de bi-itération des sous- espaces adjoints effectue à chaque itération $6nq(2m+1) + O(q^3)$ opérations de plus que la variante présentée, la première technique se révèle globalement plus efficace en temps calcul. De plus, d'après les tableaux III et IV, on relève que la qualité de la solution estimée est nettement inférieure pour les vecteurs propres gauches qui n'ont pas été itérés au cours du processus.

Tableau III Itération du sous-espace droit - Fréquences propres et décréments logarithmiques à Ω = 800 t/min (cas 1)

Mode k	fréquence [Hz] $\omega_k/2\pi$	décrément log. δ_k	erreur relative ε_k	erreur sur la norme ε_k^G	ε_k^D
1	11.002	-9.1561×10^{-3}	8.8162×10^{-9}	3.4901×10^{-1}	5.7854×10^{-8}
2	12.164	8.9638×10^{-2}	1.4094×10^{-8}	4.8225×10^{-1}	3.6588×10^{-8}
3	19.441	1.5481×10^{-2}	1.5335×10^{-8}	3.4712×10^{-2}	6.5200×10^{-8}
4	19.485	8.1180×10^{-2}	2.2346×10^{-9}	3.6035×10^{-2}	4.0132×10^{-8}

Tableau IV Itération du sous-espace droit - Fréquences propres et décréments logarithmiques à Ω = 800 t/min (cas 2)

Mode k	fréquence [Hz] $\omega_k/2\pi$	décrément log. δ_k	erreur relative sur la fréquence ε_k	erreur sur la norme ε_k^G	ε_k^D
1	11.003	3.1592×10^{-3}	3.8248×10^{-8}	3.4849×10^{-1}	1.3587×10^{-7}
2	12.164	1.0425×10^{-1}	5.4815×10^{-8}	4.7990×10^{-1}	1.4321×10^{-7}
3	19.468	1.5283×10^{-1}	2.5211×10^{-8}	3.6160×10^{-2}	3.5109×10^{-7}
4	19.489	2.2424×10^{-1}	6.6314×10^{-9}	3.4879×10^{-2}	4.1511×10^{-8}

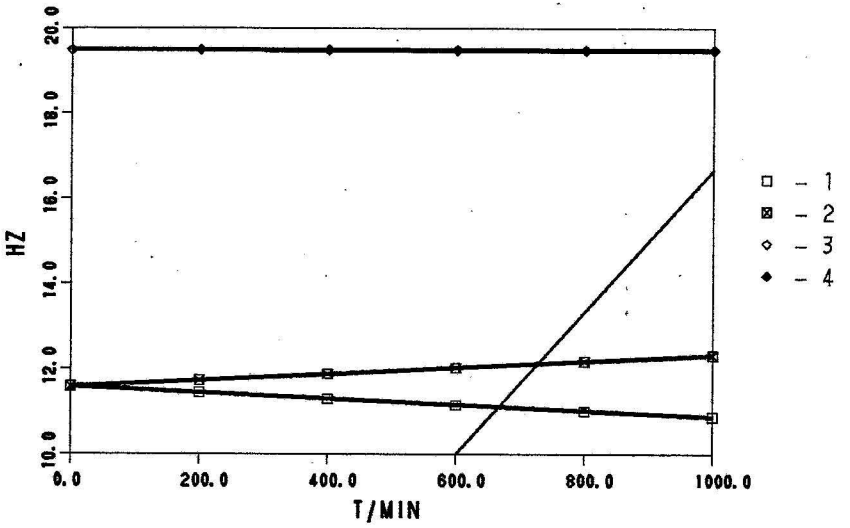


Fig. 10.5 Fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation (cas 2)

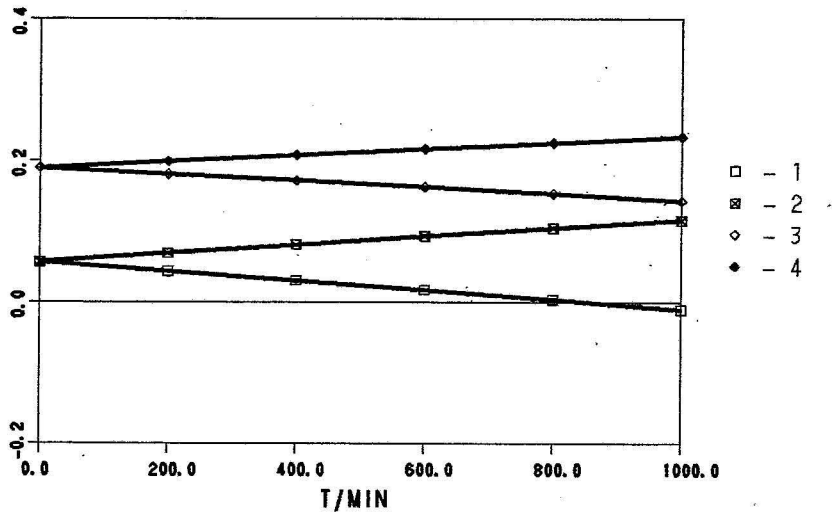


Fig. 10.6 Décréments logarithmiques en fonction de la vitesse de rotation (cas 2)

Nous avons également traité l'exemple du même groupe Kaplan, mais en admettant un modèle gyroscopique conservatif. Pour ce cas, nous avons calculé les modes propres associés aux huit plus basses fréquences propres pour des vitesses de rotation de 0 à 1000 t/min, incrémentées de 200 t/min. Le calcul a été effectué avec l'algorithme d'itération d'un sous-espace selon les deux variantes présentées (itérations inverse et directe), qui ont conduit toutes deux aux mêmes résultats.

Le sous-espace de départ a été établi d'après l'expression (9.2). Comme pour le cas dissipatif, à chaque vitesse de rotation, le programme a pris comme vecteurs initiaux les vecteurs propres calculés à la vitesse précédente. Avec ce schéma d'initialisation, le processus itératif a convergé, pour les deux variantes précitées, en deux itérations à chaque vitesse de rotation pour une précision requise de 1.0×10^{-6} . La figure 10.7 montre les huit premières fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation. La qualité de la solution peut à nouveau être jugée au moyen du tableau V. On remarque que les mesures d'erreur, définies par les expressions (9.23) et (9.27), sont inférieures à 1.0×10^{-5} .

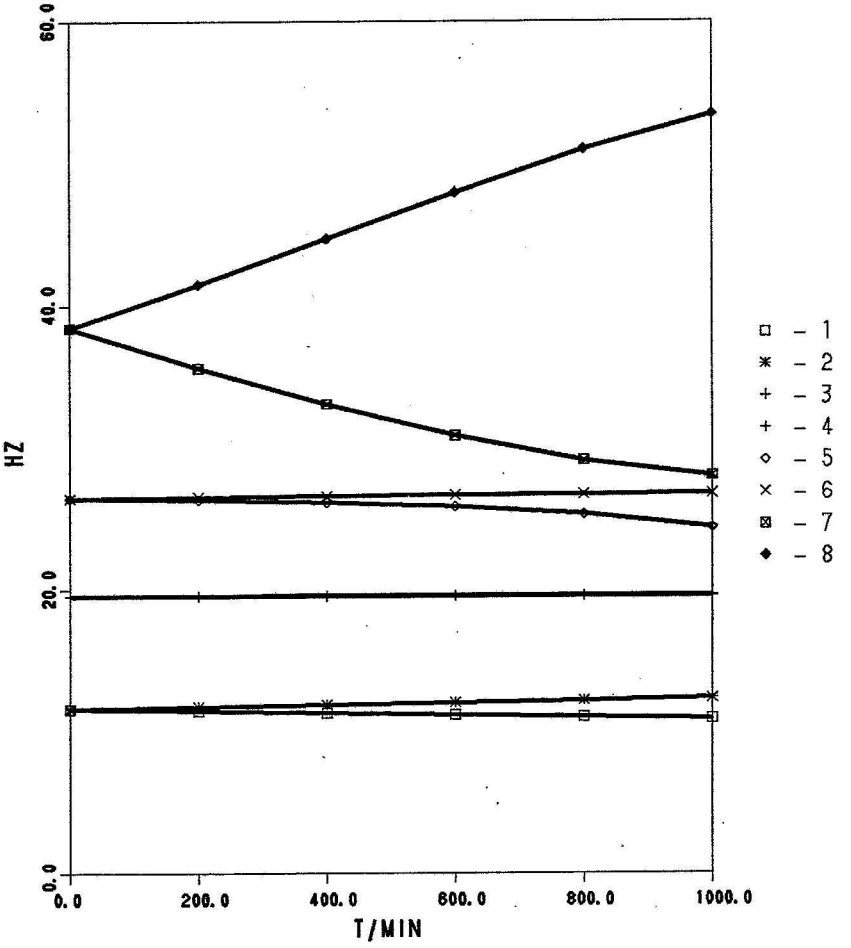


Fig. 10.7 Fréquences propres du modèle gyroscopique conservatif en fonction de la vitesse de rotation.

Tableau V Itération d'un sous-espace - Fréquences propres à Ω = 600 t/min

Mode k	fréquence [Hz] $\omega_k/2\pi$	erreur relative sur la fréquence ε_k	erreur sur la norme $\tilde{\varepsilon}_k$	ε'_k
1	11.144	4.9623×10^{-9}	5.1983×10^{-8}	1.1476×10^{-8}
2	12.016	1.4521×10^{-8}	0.2112×10^{-8}	7.9361×10^{-9}
3	19.449	1.4380×10^{-12}	2.0354×10^{-9}	2.6769×10^{-10}
4	19.477	1.0810×10^{-11}	8.9612×10^{-10}	2.5315×10^{-10}
5	25.734	2.3235×10^{-10}	2.1584×10^{-8}	1.0846×10^{-9}
6	26.516	2.2996×10^{-10}	1.3218×10^{-8}	6.4563×10^{-10}
7	30.683	1.5664×10^{-9}	7.2731×10^{-8}	3.9725×10^{-10}
8	47.769	2.8397×10^{-8}	1.1101×10^{-6}	3.6995×10^{-9}

Le contrôle par décalage spectral a confirmé que les huit fréquences propres trouvées par l'algorithme sont bien les plus basses.

Afin de confirmer dans ce cas la nature de la convergence, nous avons calculé, par les deux variantes de l'algorithme (itérations inverse et directe), les quatre premières fréquences propres du groupe pour une vitesse de rotation Ω = 800 t/min en choisissant deux schémas d'initialisation différents. Dans le tableau VI, on peut observer l'évolution de la quatrième fréquence propre avec le nombre d'itérations.

Tableau VI Evolution de la quatrième fréquence propre [Hz]
à Ω = 800 t/min

	itération inverse		itération directe	
initialisation / itération	aléatoire	ii)	aléatoire	ii)
1	3.5570×10^{-1}	2.3058×10^{1}	5.4302×10^{2}	2.3208×10^{1}
2	1.2104×10^{1}	1.9493×10^{1}	2.0730×10^{1}	1.9484×10^{1}
3	1.6371×10^{1}	1.9484×10^{1}	1.9543×10^{1}	1.9481×10^{1}
4	1.9477×10^{1}	1.9481×10^{1}	1.9482×10^{1}	1.9481×10^{1}
5	1.9481×10^{1}	1.9481×10^{1}	1.9481×10^{1}	1.9481×10^{1}
6	1.9481×10^{1}	1.9481×10^{1}	1.9481×10^{1}	1.9481×10^{1}

Alors que dans le cas de l'itération inverse cette évolution ne présente pas de tendance particulière, on constate qu'avec l'itération directe les valeurs estimées convergent par excès vers la valeur exacte, indépendamment du fait que les vecteurs initiaux soient aléatoires ou déterminés selon le procédé ii) du paragraphe 9.1. Ceci confirme le caractère particulier de la convergence de la seconde méthode, comme nous l'avons démontré au paragraphe 8.3.

10.3 Autres exemples pratiques

Nous allons donner encore les résultats obtenus pour les deux groupes hydro-électriques (Francis et Pelton) représentés aux figures 10.8 et 10.9.

Modélisés en tant que systèmes gyroscopiques conservatifs, ces groupes ont été discrétisés respectivement en 55 éléments finis (224 degrés de liberté) et 90 éléments finis (364 degrés de liberté).

Pour le premier système, nous avons calculé les huit fréquences propres les plus basses, en admettant des vitesses de rotation variant de 0 à 1500 t/min (incréments de 300 t/min). Pour le second, nous avons déterminé les six plus basses fréquences propres, de 0 jusqu'à 1200 t/min (incréments de 300 t/min). Les résultats obtenus pour les deux cas traités apparaissent respectivement aux figures 10.10 et 10.11, la précision requise pour les fréquences propres étant fixée à 1×10^{-6} . Avec le schéma d'initialisation exposé au paragraphe 9.1, l'algorithme a convergé pour chaque vitesse de rotation en trois itérations pour le premier cas et en deux itérations pour le second.

La qualité des solutions trouvées peut être appréciée aux tableaux VII et VIII, grâce aux mesures d'erreur qui sont inférieures à 1×10^{-4} et 1×10^{-5}. La vérification par décalage spectral des solutions estimées a permis de conclure que l'on a calculé en fait respectivement les 8 et 6 fréquences propres de vibrations les plus basses.

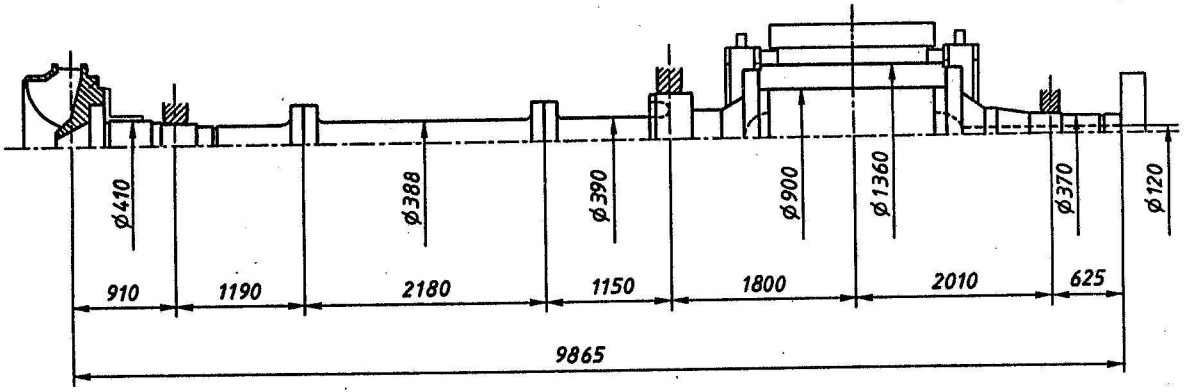


Fig. 10.8 Groupe Francis : rigidité des paliers = 1.5×10^9 N/m ; masse de la turbine = 2500 kg ; moment d'inertie de la turbine = 850 kgm^2 ; masse du rotor = 17500 kg ; moment d'inertie du rotor = 15000 kgm^2 ; masse du rotor d'excitation = 1500 kg ; moment d'inertie du rotor d'excitation = 350 kgm^2 ; masse du ventilateur = 1650 kg : moment d'inertie du ventilateur = 950 kgm^2 .

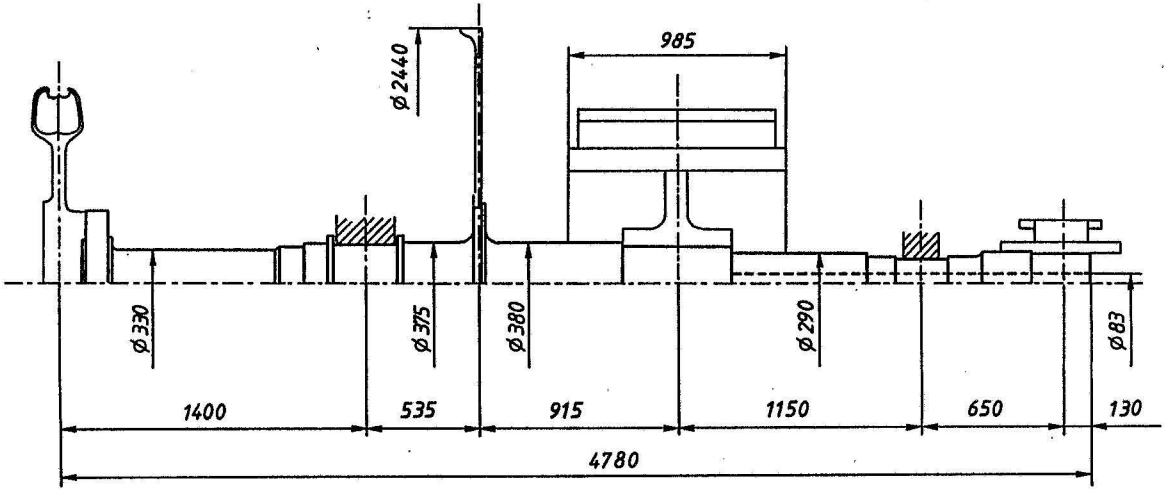


Fig. 10.9 Groupe Pelton : rigidité des paliers = 1×10^9 N/m ; masse de la turbine = 3500 kg ; moment d'inertie de la turbine = 1350 kgm^2 ; masse du rotor = 9450 kg ; moment d'inertie du rotor = 4281 kgm^2 ; masse du rotor d'excitation = 500 kg ; moment d'inertie du rotor d'excitation = 31 kgm^2 ; masse du ventilateur = 1235 kg ; moment d'inertie du ventilateur = 1104 kgm^2 .

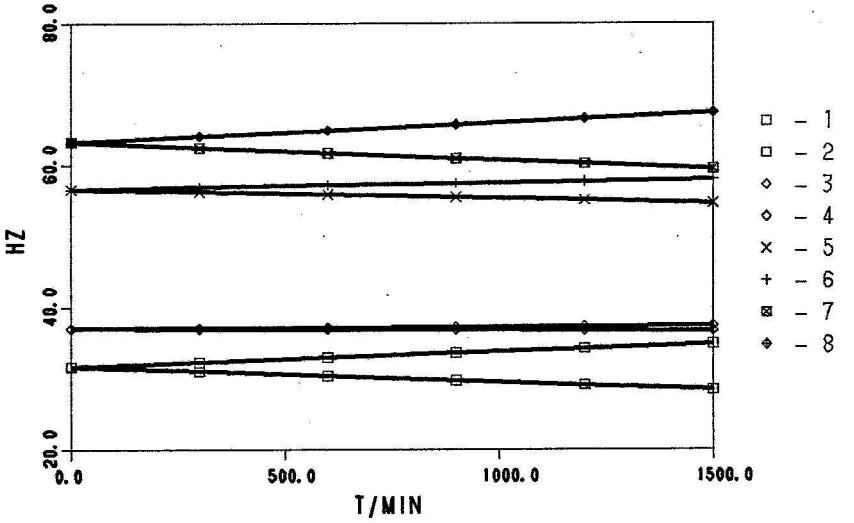


Fig. 10.10 Groupe Francis : fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation.

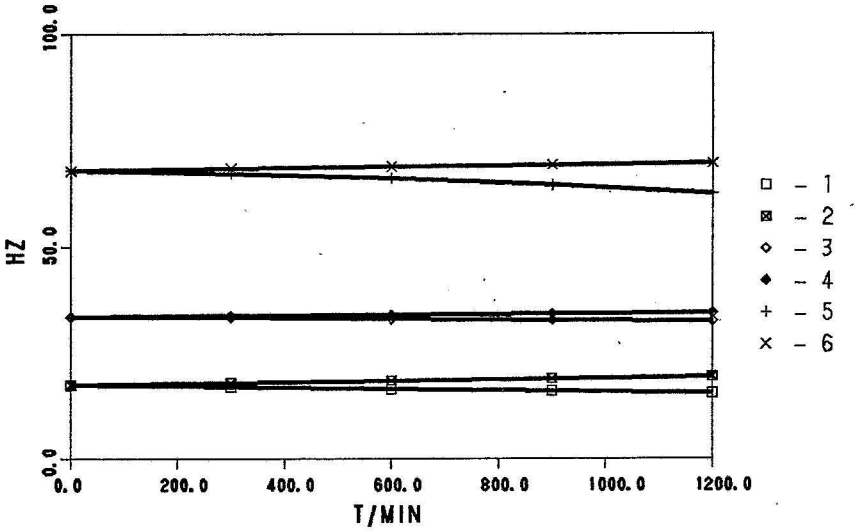


Fig. 10.11 Groupe Pelton : fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation.

Tableau VII Groupe Francis - Fréquences propres, erreur relative et mesure d'erreur de la solution à Ω = 900 t/min.

Mode k	fréquence [Hz] ω_k	erreur relative sur la fréquence ε_k	erreur sur la norme $\tilde{\varepsilon}_k$
1	29.669	2.1977×10^{-9}	7.6693×10^{-8}
2	33.475	9.2388×10^{-9}	1.2580×10^{-7}
3	36.740	1.6567×10^{-10}	1.5955×10^{-8}
4	37.153	1.3328×10^{-11}	1.4125×10^{-8}
5	55.468	4.3906×10^{-9}	6.4734×10^{-7}
6	57.329	3.2247×10^{-9}	2.3884×10^{-7}
7	60.946	7.9053×10^{-9}	9.8342×10^{-7}
8	65.595	2.0554×10^{-9}	3.6609×10^{-7}

Tableau VIII Groupe Pelton - Fréquences propres, erreur relative et mesure d'erreur de la solution à Ω = 1200 t/min.

Mode k	fréquence [Hz] ω_k	erreur relative sur la fréquence ε_k	erreur sur la norme $\tilde{\varepsilon}_k$
1	15.473	1.6001×10^{-7}	1.1494×10^{-7}
2	19.330	1.6796×10^{-7}	1.6091×10^{-8}
3	32.398	2.3517×10^{-7}	6.0933×10^{-7}
4	34.335	2.2570×10^{-8}	9.7851×10^{-8}
5	62.419	9.9461×10^{-7}	1.4375×10^{-5}
6	69.256	4.8476×10^{-7}	9.0941×10^{-6}

11. CONCLUSIONS

L'objectif essentiel de ce travail résidait dans le développement de techniques numériques efficaces pour l'analyse du comportement dynamique des arbres de machines. Tout en veillant à donner à cette étude un caractère avant tout pratique, nos efforts portèrent tant sur la construction du modèle spatial des structures tournantes que sur l'élaboration d'algorithmes permettant d'en extraire le modèle modal par résolution d'un problème aux valeurs et vecteurs propres quadratique, défini par des matrices non-symétriques.

Au niveau de la discrétisation spatiale, nous avons développé un nouvel élément fini d'arbre de classe C^0 qui se caractérise par une grande simplicité de formulation. Prenant en compte tous les effets inhérents à la dynamique des arbres de machines, l'élément proposé, qui évite tout phénomène de blocage grâce à la technique d'intégration sélective combinée à un facteur de correction de la rigidité de cisaillement, possède des propriétés de convergence voisines de celles des éléments finis classiques d'arbre dont la construction est nettement plus complexe. De plus, son implantation dans un code d'éléments finis adapté à la dynamique des systèmes tournants est particulièrement aisée.

En ce qui concerne les méthodes d'extraction, nous avons élaboré pour les systèmes gyroscopiques, tant dissipatifs que conservatifs, des techniques numériques permettant de déterminer avec une grande précision les fréquences naturelles, les modes propres et éventuellement les taux d'amortissement.

Pour les systèmes gyroscopiques dissipatifs, nous avons mis en oeuvre une méthode originale de bi-itération des sous-espaces adjoints. Grâce à une transformation de similitude particulière, cette technique permet de limiter les opérations effectuées avec des grandeurs complexes à la résolution des problèmes réduits d'interaction qui sont généralement de petite taille.

Pour les systèmse gyroscopiques conservatifs, une méthode d'itération analogue, opérant sur un sous-espace réel, a été développée. Exploitant la nature spécifique de la solution de ce type de problème, l'algorithme proposé fait appel exclusivement à l'algèbre réelle, contrairement aux méthodes courantes. De plus, par une technique de décalage spectral de programmation aisée, il incorpore une vérification élégante du nombre de fréquences propres calculées. Les techniques développées, dont la mise en oeuvre numérique adoptée ne présente pas de difficultés majeures, peuvent être implantées de manière relativement facile dans un code d'éléments finis d'arbres de machines. En outre, elles se caractérisent par une grande efficacité et une stabilité élevée pour l'extraction des premiers modes propres des systèmes gyroscopiques réels nécessitant un grand nombre de degrés de liberté et pour lesquels les techniques disponibles sont généralement déficientes. Ces algorithmes préservent et exploitent entièrement la configuration en forme de bande des matrices spatiales associées aux structures tournantes. Quelques exemples issus de la pratique industrielle ont prouvé leur bonne adaptation aux problèmes réels ainsi que leur grande précision.

Au niveau des développements futurs susceptibles d'être apportés à ce travail, citons tout d'abord l'élaboration de techniques d'accélération de la

convergence des algorithmes présentés. Bien qu'un effort ait déjà été réalisé en ce sens, il paraît possible d'améliorer encore cette convergence en faisant appel à des méthodes de surrelaxation et de décalage spectral, comme le fait la technique d'itération d'un sous-espace développée pour les structures non-tournantes. D'autre part, nous pensons qu'une exploitation des propriétés d'orthogonalité établies est envisageable pour le calcul des régimes forcés des systèmes gyroscopiques conservatifs, voire dissipatifs.

ANNEXE A - SOUS-PROGRAMME "BISUBS"

Dans cette annexe, nous présentons l'enchaînement des étapes de l'algorithme mettant en oeuvre sur ordinateur (fig. A.1) la méthode de bi-itération des sous-espaces adjoints. Les matrices de rigidité généralisée K_g, de masse M et d'amortissement généralisé C_g, supposées d'ores et déjà assemblées, sont stockées selon le schéma de mémorisation à bande variable.

Dans le programme, on utilise les tableaux réels de type FORTRAN suivants

VKS(NTSI), VKI(NTSI)	vecteurs stockant respectivement les termes des triangles supérieur et inférieur de la matrice de rigidité K_g
VKD(n)	vecteur contenant les termes diagonaux de K_g
VMS(NTSI)	vecteur contenant les termes du triangle supérieur de la matrice symétrique de masse M
VMD(n)	vecteur stockant les termes diagonaux de M
VCS(NTSI), VCI(NTSI)	vecteurs contenant respectivement les termes des triangles supérieur et inférieur de la matrice d'amortissement C_g
VCD(n)	vecteur contenant les termes diagonaux de C_g

IPO(n+1)	vecteur pointeur repérant le premier terme des colonnes des matrices K_g, C_g et M
RS1(n,NS), RS2(n,NS)	matrices dont les colonnes sont formées des vecteurs d'itération associés à U_k^a et U_k^b
RS3(n,NS), RS4(n,NS)	matrices dont les colonnes sont formées des vecteurs d'itération associés à V_k^a et V_k^b
RS5(n,NS)	tableau auxiliaire
SA(NS,NS), SB(NS,NS)	matrices d'interaction $\underline{A}_{k+1}$ et $\underline{B}_{k+1}$
VA(NS,NS), VB(NS,NS)	matrices contenant les vecteurs propres droits et gauches des problèmes d'interaction
RM(NS,2)	matrice dont les colonnes contiennent respectivement les modules des valeurs propres λ^k et λ^{k+1}
RI(NS,2)	matrice dont les colonnes contiennent respectivement les parties réelle et imaginaire des valeurs propres λ^{k+1}
ER1(n,2), ER2(n,2)	vecteurs auxiliaires

où n = nombre de coordonnées généralisées

NS = dimension des sous-espaces adjoints à itérer

NSR = nombre de valeurs et vecteurs propres désirés

NTSI = nombre de termes du profil supérieur ou inférieur des matrices spatiales K_g, C_g et M sans les termes diagonaux (identique à IPO(n+1)-1)

La mise en oeuvre numérique de l'algorithme enchaîne les étapes suivantes

1) Factorisation de la matrice K_g

La matrice K_g est décomposée sous la forme : $K_g = LDU$, où L et U sont des matrices triangulaires, respectivement inférieure et supérieure à diagonale unité, alors que D est une matrice diagonale. Les termes de ces matrices sont rangés dans VKS, VKD et VKI .

2) Initialisation des sous-espaces adjoints

Génération des vecteurs initiaux U_0^a, U_0^b, V_0^a et V_0^b , qui sont stockés respectivement dans les tableaux RS1, RS2, RS3 et RS4 .

3) Transformation linéaire des vecteurs itérés

3.1) Sous-espace droit $(U_{k+1} \rightarrow \underline{U}_{k+1})$

$$RS1(n,2\ell-1) + RS1(n,2\ell) \rightarrow RS1(n,2\ell-1)$$
$$RS1(n,2\ell-1) - RS1(n,2\ell) \rightarrow RS1(n,2\ell)$$
$$RS2(n,2\ell-1) + RS2(n,2\ell) \rightarrow RS2(n,2\ell-1)$$
$$RS2(n,2\ell-1) - RS2(n,2\ell) \rightarrow RS2(n,2\ell)$$

$\ell = 1,\ldots,q$

3.2) Sous-espace gauche $(V_{k+1} \rightarrow \underline{V}_{k+1})$

$$RS3(n,2\ell-1) + RS3(n,2\ell) \rightarrow RS3(n,2\ell-1)$$
$$RS3(n,2\ell-1) - RS3(n,2\ell) \rightarrow RS3(n,2\ell)$$
$$RS4(n,2\ell-1) + RS4(n,2\ell) \rightarrow RS4(n,2\ell-1) \qquad \ell = 1,\ldots,q$$
$$RS4(n,2\ell-1) - RS4(n,2\ell) \rightarrow RS4(n,2\ell)$$

4) Formation partielle de la matrice d'interaction $\underline{A}_{k+1}$

Le produit matriciel (7.24) est effectué en deux temps pour minimiser la place mémoire nécessaire. Dans une première phase, on calcule le second terme de l'expression (7.25), la formation finale de $\underline{A}_{k+1}$ étant réalisée à l'étape 7.

4.1) M * RS2 → RS5

4.2) $RS3^T$ * RS5 → VA

4.3) M * RS4 → RS2

5) Itération des sous-espaces adjoints $\hat{U}_{k+1}$ et $\hat{V}_{k+1}$

Cette étape, correspondant à l'expression (7.14,7.16-18), s'effectue en six phases :

5.1) C_g * RS1 → RS4

5.2) - RS4 - RS5 → RS5 (RS5 contient déjà $A_2 * U_k^b$ depuis le pas 4.1)

5.3) C_g^T * RS3 → RS4

5.4) - RS4 - RS2 → RS4 (RS2 contient déjà $A_2 * V_k^b$ depuis le pas 4.3)

5.5) Résolution du système d'équations (7.20) pour les vecteurs itérés

$\hat{\underline{U}}^a_{k+1}$ ($\hat{\underline{U}}^b_{k+1} = \underline{U}^a_k$ déjà stocké dans RS1)

LDU * RS5 → RS5

5.6) Résolution du système d'équations (7.21) pour les vecteurs itérés

$\hat{\underline{V}}^a_{k+1}$ ($\hat{\underline{V}}^b_{k+1} = \underline{V}^a_k$ déjà stocké dans RS3)

$U^T D L^T$ * RS4 → RS4

6. Formation de la matrice d'interaction $\underline{B}_{k+1}$

Les opérations pour obtenir $\underline{B}_{k+1}$ sont indiquées par l'expression (7.26).

6.1) K_g * RS5 → RS2

6.2) $RS4^T$ * RS2 → SB

6.3) M * RS1 → RS2

6.4) $RS3^T$ * RS2 → VB

6.5) SB - VB → SB

7) Formation de la matrice d'interaction $\underline{A}_{k+1}$

La création de la matrice $\underline{A}_{k+1}$, déjà commencée au pas 4 avec la construction du tableau VA , est complétée à ce stade.

7.1) K_g * RS1 → RS2

7.2) $RS4^T$ * RS2 → SA

7.3) SA - VA → SA

8) Résolution des problèmes adjoints d'interaction (7.22) et (7.23)

8.1) SA * VA = SB * VA * RI

8.2) SA^T * VB = SB^T * VB * RI

Les valeurs propres estimées λ_{k+1} dont les parties réelle et imaginaire sont stockées respectivement dans la première et deuxième colonnes de la matrice RI sont rangées par ordre croissant de leur module. Les vecteurs propres adjoints estimés sont bi-orthonormalisés par rapport à la matrice $\underline{B}_{k+1}$ et sont stockés dans les matrices VA et VB.

9) Transformation des bases duales $\underline{P}$ et $\underline{Q}$ dans le système de coordonnées généralisées.

9.1) Pour U^a_{k+1} : RS5 * VA → RS1

9.2) Pour U^b_{k+1} : RS1 * RI → RS2

9.3) Pour V^a_{k+1} : RS4 * VB → RS3

9.4) Pour V^b_{k+1} : RS3 * RI → RS4

10) Test de convergence

La précision des résultats obtenus est admise comme satisfaisante si le critère (7.38) est vérifié pour toutes les valeurs propres trouvées

$$\varepsilon_i = \left[\frac{[Re(\lambda_i^{k+1})-Re(\lambda_i^k)]^2 + [Im(\lambda_i^{k+1}) - Im(\lambda_i^k)]^2}{[Re(\lambda_i^{k+1})]^2 + [Im(\lambda_i^{k+1})]^2}\right]^{1/2} \leq TOL \qquad r = 1,2,\ldots,NSR$$

où TOL est une tolérance imposée.

Si le critère est satisfait, le schéma algorithmique se poursuit par l'étape 13. Dans le cas contraire, il continue avec l'étape 11.

11) Test sur le nombre maximal d'itérations

Un paramètre NITER contrôle le nombre maximal admissible d'itérations.

Si le nombre d'itérations k déjà effectuées est inférieur à la valeur limite, l'algorithme se poursuit normalement par l'étape 12. Dans le cas contraire, le processus itératif est arrêté et le programme est complété par les étapes 13 et 14.

12) Sauvegarde des résultats intermédiaires

Stockage des résultats de l'itération courante (erreurs relatives, valeurs propres et vecteurs propres).

Une nouvelle itération (k+1) est ensuite entreprise à partir de l'étape 3.

13) Détermination de l'erreur sur la norme associée aux valeurs et vecteurs propres

Calcul d'après les expressions (7.47) et (7.48) de l'erreur sur la norme pour chaque couple de valeurs et vecteurs propres estimés.

14) Sauvegarde de la solution

Le processus se termine par écriture dans un fichier des valeurs propres et vecteurs propres adjoints associés.

Remarquons que la boucle itérative ne commence qu'à l'étape 3, puisque les étapes 1 et 2, représentant respectivement la factorisation de la matrice K_g et l'initialisation des sous-espaces, ne sont parcourues qu'une seule fois pour chaque problème.

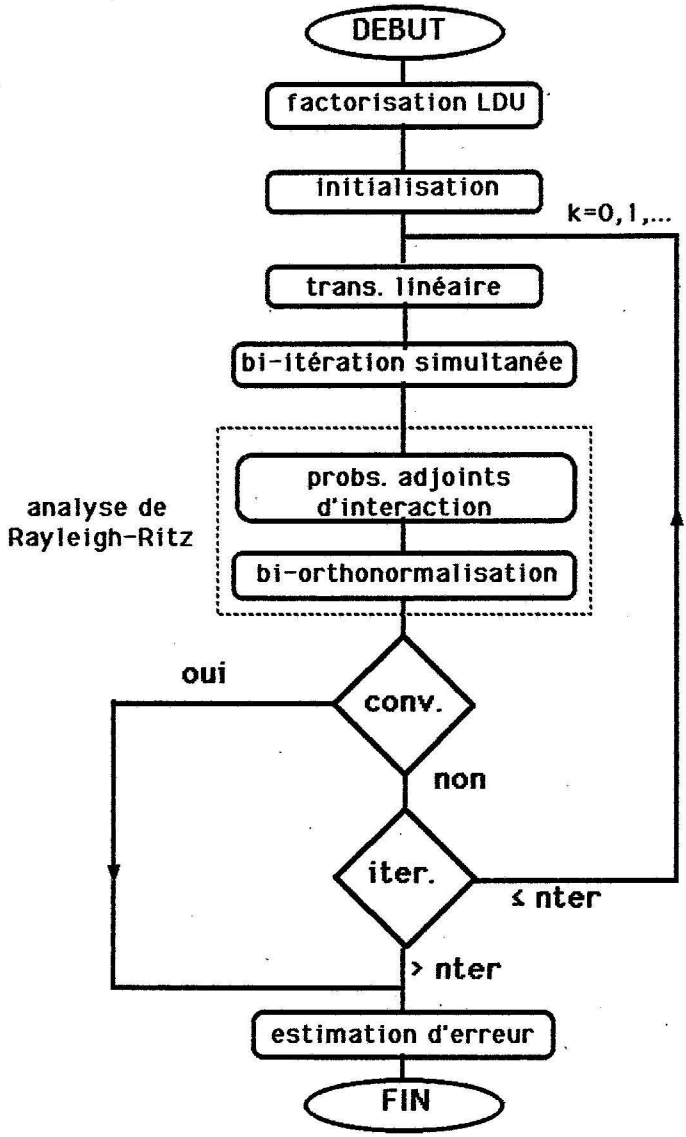


Fig. A.1 Organigramme de la bi-itération des sous-espaces adjoints pour les systèmes gyroscopiques dissipatifs.

ANNEXE B - SOUS-PROGRAMME "SUBGYR"

Dans cette seconde annexe, nous décrivons l'enchaînement des étapes de l'algorithme associé à la méthode d'itération d'un sous-espace pour les systèmes gyroscopiques conservatifs (fig. B.1). Comme pour les systèmes dissipatifs, les matrices spatiales sont stockées selon le schéma de mémorisation à bande variable.

Dans le programme, on fait appel aux tableaux réels de type FORTRAN suivants

VKS(NTS)	vecteur stockant les termes du triangle supérieur de la matrice de rigidité symétrique K
VKD(n)	vecteur contenant les termes diagonaux de K
VMS(NTS)	vecteur contenant les termes du triangle supérieur de la matrice de masse symétrique M
VMD(n)	vecteur contenant les termes diagonaux de M
VGS(NTS)	vecteur contenant les termes du triangle supérieur de la matrice gyroscopique antisymétrique G
VHS(NTS)	vecteur stockant les termes du triangle supérieur de la matrice hermitienne H_n

VHD(n)	vecteur contenant les termes diagonaux de H_n
IPO(n+1)	vecteur pointeur repérant le premier terme des colonnes des matrices K, G et M
RS1(n,NS), RS2(n,NS)	matrices dont les colonnes sont formées des vecteurs d'itération associés à U_k^a et U_k^b
RS3(n,NS)	tableau auxiliaire
SA(NS,NS), SB(NS,NS)	matrices d'interaction A_{k+1} et B_{k+1}
VA(NS,NS), VB(NS,NS)	matrices auxiliaires
SAS(NSS)	vecteur stockant par ligne le triangle supérieur de A^s_{k+1}
SBS(NSS)	vecteur stockant par ligne le triangle supérieur de B_{k+1}
RM(NS,2)	matrice dont les colonnes contiennent respectivement les modules des valeurs propres ω^k et ω^{k+1}
ER1(n,2), ER2(n,2)	tableaux auxiliaires

où n = nombre de coordonnées généralisées

NS = dimension du sous-espace à itérer

NSR = nombre de valeurs et vecteurs propres désirés

NSS = NS • (NS + 1)/2

NTS = nombre de termes de la demi-bande supérieure des matrices spatiales K, G et M sans les termes diagonaux (identique à IPO(n+1)-1)

La mise en oeuvre numérique de l'algorithme enchaîne les étapes suivantes

1) Factorisation de la matrice K

La matrice K est décomposée sous la forme

$$K = LDL^T$$

où D est une matrice diagonale et L une matrice triangulaire inférieure stockées respectivement dans VKD et VKS.

2) Initialisation du sous-espace

Génération des vecteurs initiaux U_0^a et U_0^b qui sont stockés respectivement dans les tableaux RS1 et RS2.

3) Formation partielle de la projection A_{k+1}

Le produit matriciel (9.10) est effectué en deux phases pour minimiser la place mémoire nécessaire. Le second terme de l'expression (9.12) est calculé dans un premier temps, la détermination du premier terme étant effectuée à l'étape 6.

3.1) M * RS2 → RS3

3.2) $RS1^T$ * RS3 → VA

4) Itération d'un sous-espace $\hat{U}_{k+1}$

Cette étape, correspondant à l'expression (9.6-8), s'effectue en trois phases

4.1) G * RS1 → RS2

4.2) - RS2 - RS3 → RS3 (RS3 contient déjà $M * U_k^b$ depuis le pas 3.1)

4.3) Résolution du système d'équations (9.8) pour les vecteurs itérés

LDL^T * RS3 → RS3

Remarquons que les vecteurs itérés $\hat{U}_{k+1}^b$ sont obtenus par les vecteurs U_k^a estimés à l'itération précédente et déjà stockés dans le tableau RS1.

5) Formation de la projection B_{k+1}

Les opérations nécessaires pour obtenir B_{k+1} , d'après l'expression (9.13), sont effectuées de la manière suivante

5.1) K * RS3 → RS2

5.2) $RS3^T$ * RS2 → SB

5.3) M * RS1 → RS2

5.4) $RS1^T$ * RS2 → VB

5.5) SB + VB → SB

6) Formation de la projection A_{k+1}

La création de la matrice A_{k+1} , déjà commencée au pas 3 avec la construction du tableau VA, est complétée à ce stade.

6.1) K * RS1 → RS2

6.2) $RS3^T$ * RS2 → SA

6.3) SA + VA → SA

7) Résolution du problème aux valeurs et vecteurs propres réduit

Le problème réduit (9.9) est d'abord transformé en la forme généralisée (9.14), qui est ensuite résolue par la technique de Jacobi généralisée. Les valeurs propres calculées ω_{k+1} sont rangées par ordre croissant dans la deuxième colonne du tableau RM. Les vecteurs propres estimés $\underline{W}$ sont normalisés par rapport à la matrice d'interaction B_{k+1} et sont stockés dans la matrice VA.

8) Transformation des vecteurs propres dans le système des coordonnées généralisées

8.1) pour U^a_{k+1} : RS3 * VA → RS1

8.2) pour U^b_{k+1} : RS1 * Ω_{k+1} → RS2

9) Test de convergence

La précision des résultats obtenus est admise comme satisfaisante si le critère suivant est vérifié pour toutes les valeurs propres trouvées,

$$\frac{|\omega_r^{k+1} - \omega_r^k|}{\omega_r^k} \leq TOL \qquad r = 1,2,\ldots,NSR$$

où TOL est une tolérance imposée.

Si le critère est satisfait, le schéma algorithmique se poursuit par l'étape 12. Dans le cas contraire, il continue avec l'étape 10.

10) Test sur le nombre maximal d'itérations

Un paramètre NITER contrôle le nombre maximal admissible d'itérations. Si le nombre d'itérations k déjà effectuées est inférieure à la valeur limite, l'algorithme se poursuit normalement avec l'étape 11.

Dans le cas contraire, le processus itératif est arrêté et le programme est complété par les étapes 12 et 14.

11) Sauvegarde des résultats intermédiaires

Stockage des résultats de l'itération courante (erreurs relatives, valeurs propres et vecteurs propres).

Une nouvelle itération (k+1) est ensuite entreprise à partir de l'étape 3.

12) Détermination de l'erreur sur la norme associée aux valeurs et vecteurs propres

Calcul d'après l'expression (9.27) de l'erreur sur la norme pour chaque couple de valeurs et vecteurs propres estimés.

13) Vérification par décalage spectral du nombre de valeurs propres positives (NSCH) existant dans la bande du spectre analysée.

13.1) Choix du décalage spectral positif σ_0

$\sigma_0 = (1+\delta) * RM(NSR,2)$ avec $\delta \ll 1$

13.2) Construction de la matrice hermitienne $H_n = K + j\,\sigma_o\,G - \sigma_o^2\,M$

- VKS + j * σ_o * VGS - σ_o^2 * VMS → VHS
- VKD - σ_o^2 * VMD → VHD

13.3) Factorisation de la matrice hermitienne H_n sous la forme (9.34)

$H_n = L_b D_b \bar{L}_b^T$

13.4) Vérification de l'inertie de la diagonale $\underset{\sim}{D}_b$ et, en particulier, de la relation

NSCH = NEI

où NEI désigne le nombre de valeurs propres positives estimées.

14) Sauvegarde de la solution

Le processus se termine par écriture dans un fichier des valeurs propres et vecteurs propres associés.

Remarquons que la boucle itérative ne commence qu'à l'étape 3, puisque les étapes 1 et 2, représentant respectivement la factorisation de la matrice K et l'initialisation du sous-espace, ne sont parcourues qu'une seule fois pour chaque problème.

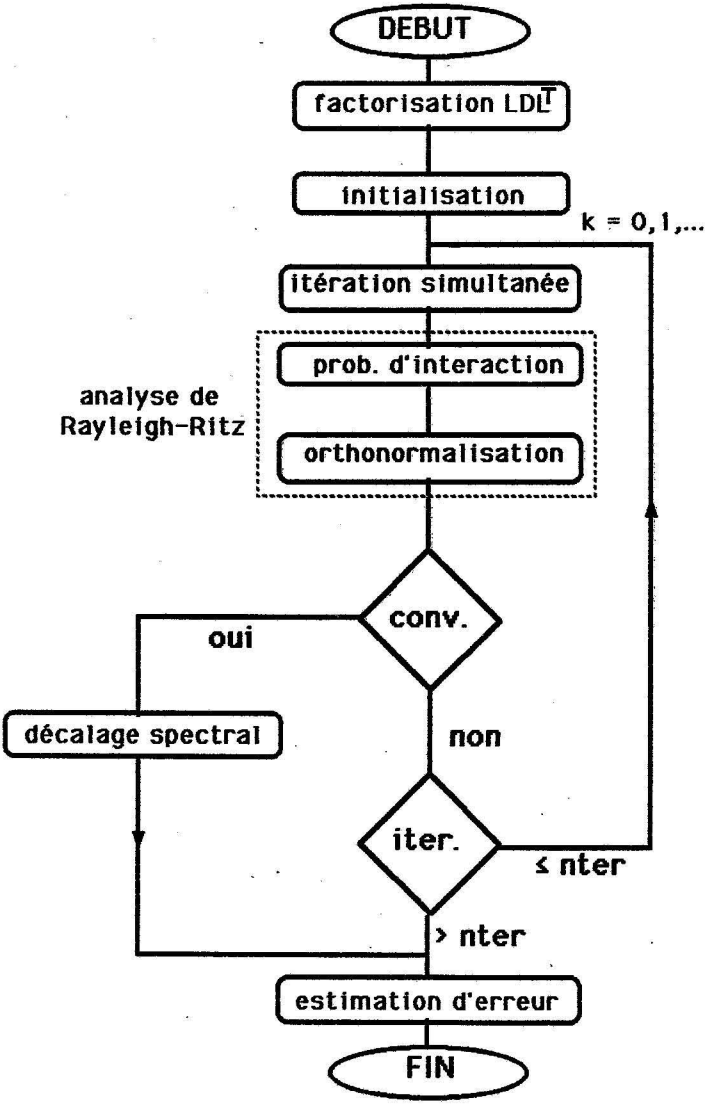


Fig. B.1 Organigramme de l'itération d'un sous-espace pour les systèmes gyroscopiques conservatifs

REFERENCES

A1. Akella S., Craggs A., Modifications to a Timoshenko Beam-shaft Finite Element to Include Internal Disks and Changes in Cross-section, Journal of Sound and Vibration, 106, 227-239, 1986.

A2. Adams M.L., Padovan J., Insights into Linearized Rotor Dynamics, Journal of Sound and Vibration, 76, 129-142, 1981.

A3. Adams M.L., Insights into Linearized Rotor Dynamics, part 2, Journal of Sound and Vibration, 112, 97-110, 1987.

A4. Afolabi D., Linearization of the Quadratic Eigenvalue Problem, Computers & Structures, 26, 1039-1040, 1987.

A5. Ahmadian M., Chou S.H., A New Method for Finding Symmetric Form of Asymmetric Finite Dimensional Dynamic Systems, Journal of Applied Mechanics, 54, 700-705, 1987.

B1. Borri M., Mantegazza P., Efficient Solution of Quadratic Eigenproblems Arising in Dynamic Analysis of Structures, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 12, 19-31, 1977.

B2. Bauchau O.A., A Solution of the Eigenproblem for Undamped Gyroscopic Systems with the Lanczos Algorithm, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 23, 1705-1713, 1986.

B3. Bigret R., 'Vibrations des machines tournantes et des structures', Technique et Documentation, Paris, 1980.

B4. Brandon J.A., A Discussion of Alternative Duncan Formulations of the Eigenproblem for the Solution of Nonclassicaly, Viscously Damped Linear Systems, Journal of Applied Mechanics, 51, 904-906, 1984.

B5. Bathe K.J., 'Finite Element Procedures in Engineering Analysis', Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1982.

B6. Bathe K.J., Convergence of Subspace Iteration, in 'Formulations and Computational Algorithms in Finite Element Analysis', Edited by Bathe K.J., Oden J.T. and Wunderlich W., MIT Press, Cambridge, 1977.

B7. Bathe K.J., Wilson E.L., Large Eigenvalue Problems in Dynamic Analysis, ASCE Journal of Engineering Mechanics Division, 98, 1471-1485, 1972.

B8. Bathe K.J., Wilson E.L., Solution Methods for Eigenvalue Problems in Structural Dynamics, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 6, 213-226, 1973.

C1. Curnier A., 'Lectures on Computational Methods in Solid Mechanics', EPF-Lausanne, 1988.

C2. Christensen E., Tonneson J., Lund J.W., Dynamic Film Pressure Measurements in Journal Bearings for Use in Rotor Balancing, Journal of Engineering for Industry, 92-100, November 1976.

C3. Cook R.D., 'Concepts and Applications of Finite Element Analysis', John Wiley & Sons, Inc., 1981.

C4. Carpenter N., Belytschko T., Stolarski H., Locking and Shear Scaling Factors in C^0 Bending Elements, Computers & Structures, 22, 39-52, 1986.

C5. Callahan J.O., Finch C., Complex Mode Extraction by a Conjugate Subspace Inverse Power Method, Proceedings of the 1st International Modal Analysis Conference, Orlando 1982.

C6. Clough R.W., Penzien J., 'Dynamics of Structures', McGraw-Hill Kogakusha Ltd, 1986.

D1. Dimaragonas A.D., A General Method for Stability Analysis of Rotating Shafts, Ingenieur-Archiv., 44, 9-20, 1975.

D2. Dong S.B., A Block Stodola Eigensolution Technique for Large Algebraic Systems with Non-symmetrical Matrices, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 11, 247-267, 1977.

D3. Dhatt G., Touzot G., 'Une présentation de la méthode des éléments finis', Maloine SA Editeur, Paris, 1984.

D4. Del Pedro M., Pahud P., 'Mécanique vibratoire', Presses Polytechniques Romandes, 1989.

E1. Ehrich F.F., Shaft Whirl Induced by Rotor Internal Damping, Journal of Applied Mechnics, 279-282, June 1964.

F1. Fried I., 'Numerical Solution of Differential Equations', Academic Press, 1979.

F2. Fricker A.J., A Method for Solving High-order Real Symmetric Eigenvalue Problems, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 19, 1131-1138, 1983.

G1. Gasch R., Vibration of Large Turbo-rotors in Fluid-film Bearings on an Elastic Foundation, Journal of Sound and Vibration, 47, 53-73, 1976.

G2. Gunter E.J., The Influence of Internal Friction on the Stability of High Speed Rotors, Journal of Engineering for Industry, 683-688, November 1967.

G3. Greenhill L.M., Bickford W.B., Nelson H.D., A Conical Beam Finite Element for Rotor Dynamics Analysis, Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, 107, 421-430, 1985.

G4. Gupta K.K., Free Vibration Analysis of Spinning Structural Systems, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 5, 395-418, 1973.

G5. Gupta K.K., On a Combined Sturm Sequence and Inverse Iteration Technique for Eigenproblem Solution of Spinning Structures, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 7, 509-518, 1973.

G6. Gupta K.K., Development of a Unified Numerical Procedure for Free Vibration Analysis of Structures, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 17, 187-198, 1981.

G7. Gupta K.K., Formulation of Numerical Procedures for Dynamic Analysis of Spinning Structures, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 23, 2347-2357, 1986.

G8. Gupta K.K., Lawson C.L., Development of a Block Lanczos Algorithm for Free Vibration Analysis of Spinning Structures, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 26, 1029-1037, 1988.

G9. Gmür T., 'Méthode des éléments finis', EPF-Lausanne, 1984.

G10. Gille J.C., Clique M., 'Calcul matriciel et introduction à l'analyse fonctionnelle', Tomes 1-2, Editions Eyrolles, Paris, 1981.

G11. Garbow B.S., et al., 'Matrix Eigensystem Routines-EISPACK Guide Extension', Lecture Notes in Computer Science, 51, Springer-Verlag, Berlin 1977.

G12. Glasgow D.A., Nelson H.D., Stability Analysis of Rotor-bearings Systems Using Component Mode Synthesis, Journal of Mechanical Design, 102, 352-259, 1980.

H1. Hashish E., Sankar T.S., Finite Element and Modal Analyses of Rotor-bearing Systems under Stockastic Loading Conditions, Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, 106, 80-89, 1984.

H2. Huseyin K., 'Vibrations and Stability of Multiple Parameter Systems', Noordhoff International Publishing Alphen aan den Rijn, The Netherlands, 1978.

I1. Imbert J.F., 'Analyse des structures par élements finis', Cepadues Editions, 1979.

I2. Inoue Y., Fujikawa T., A Complex Modal Analysis Method for Damped Vibration Systems, Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, 107, 13-18, 1985.

I3. IMSL, 'MATH/LIBRARY-FORTRAN Subroutines for Mathematical Applications', User's manual, Version 1.0, Houston, Texas, 1987.

K1. Kant T., Kulkarni P.B., A C^0 Continuous Linear Beam/Bilinear Plate Flexure Element, Computers & Structures, 22, 413-425, 1986.

L1. Lund J.W., Orcutt F.K., Calculations and Experiments on the Unbalance Response of a Flexible Rotor, Journal of Engineering for Industry, 89, 785-794, 1967.

L2. Lee C.W., Jei Y.G., Modal Analysis of Continuous Rotor-bearing Systems, Journal of Sound and Vibration, 126, 345-361, 1988.

L3. Lund J.W., Stability and Damped Critical Speeds of a Flexible Rotor in Fluid-film Bearings, Journal of Engineering for Industry, 509-517, May 1974.

L4. Lund J.W., Evaluation of Stiffness and Damping Coefficients for Fluid-film Bearings, The Shock and Vibration Digest, 11, 5-10, 1979.

L5. Lancaster P., 'Lambda Matrices and Vibrating Systems', Pergamon Press Inc., 1966.

L6. Lascaux P., Theodor R., 'Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur', Tomes 1-2, Masson, 1986.

M1. Meirovitch L., A New Method of Solution of the Eigenvalue Problem for Gyroscopic Systems, AIAA, 12, 1337-1342, 1974.

M2. Meirovitch L., 'Computational Methods in Structural Dynamics', Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands, 1980.

M3. Meirovitch L., 'Elements of Vibrations Analysis', McGraw-Hill Kogakusha Ltd, 1975.

M4. Murthy D.V., Haftka R.T., Derivatives of Eigenvalues and Eigenvectors of a General Complex Matrix, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 26, 293-311, 1988.

M5. Meirovitch L., A Stationarity Principle for the Eigenvalue Problem for Rotating Structures, AIAA, 14, 1387-1394, 1976.

M6. Moler C.B., Stewart G.W., 'An Algorithm for Generalized Matrix Eigenvalue Problems', SIAM J. Numer. Anal., 10, 241-256, 1973.

M7. Marcos B., Beliveau J.G., Partial Eingensolution of Damped Structures by Non-linear Optimization, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 26, 143-152, 1988.

M8. Meirovitch L., 'Analytical Methods in Vibrations', The Macmillan Company, London, 1967.

N1. Nelson H.D., McVaugh J.M., The Dynamics of Rotor-bearing Systems Using Finite Elements, Journal of Engineering for Industry, 593-600, May 1976.

N2. Nelson H.D., A Finite Rotating Shaft Element Using Timoshenko Beam Theory, Journal of Mechanical Design, 102, 793-803, 1980.

N3. Nevzat Ozgüven H., Levent Ozkan Z., Whirl Speeds and Unbalance Response of Multibearing Rotors Using Finite Elements, Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, 106, 72-79, 1984.

N4. Newland D.E., On the Modal Analysis of Non-conservative Linear Systems, Journal of Sound and Vibration, 112, 69-96, 1987.

N5. Noble B., Daniel J.W., 'Applied Linear Algebra', Second Edition, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1977.

O1. Olesen J.F., Field Redistribution in Finite Elements - A Mathematical Alternative to Reduced Integration, Computer & Structures, 17, 157-159, 1983.

P1. Prathap G., Bhashyam G.R., Reduced Integration and the Shear-flexible Beam Element, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 18, 195-210, 1982.

P2. Przemieniecki J., 'Theory of Matrix Structural Analysis', McGraw-Hill, 1967.

P3. Parlett B.N., 'The Symmetric Eigenvalue Problem', Prentice-Hall, Series in Computational Mathematics, 1980.

R1. Ruhl R.L., Booker J.F., A Finite Element Model for Distributed Parameter Turborotor Systems, Journal of Engineering for Industry, 126-131, February 1972.

R2. Rouch K.E., Kao J.S., A Tapered Beam Finite Element for Rotor Dynamics Analysis, Journal of Sound and Vibration, 66, 119-140, 1979.

R3. Rao J.S., Instability of Rotors in Fluid Film Bearings, Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, 105, 274-279, 1983.

S1. Suarez L.E., Singh M.P., Eigenproperties of Nonclassically Damped Primary Structure and Oscillator Systems, Journal of Applied Mechanics, 54, 668-673, 1987.

S2. Scott D.S., Ward R.C., Solving Symmetric-definite Quadratic Matrix Problems without Factorization, SIAM J. Sci. Stat. Comput., 3, 58-67, 1982.

S3. Smith B.T., et al., 'Matrix Eigensystem Routines-EISPACK Guide', Lecture notes in Computer Science, 6, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

T1. Thomas D.L., Wilson J.M., Wilson R.R., Timoshenko Beam Finite Elements, Journal of Sound and Vibration, 31, 315-330, 1973.

T2. Timoshenko S., Young D.H., Weaver W., 'Vibration Problems in Engineering', John Wiley & Sons Inc., New York, 1974.

U1. Utku S., Clemente J.L.M., Computation of Eigenpairs of $Ax=_{b}Bx$ for Vibrations of Spinning Deformable Bodies, Computers & Structures, 19, 843-847, 1984.

V1. Veselic K., On a Class of JACOBI-LIKE Procedures For Diagonalizing Real Matrices, Numer. Math. 33, 157-172, 1979.

V2. Veselic K., A Quadratically Convergent JACOBI-LIKE Method For Real Matrices with Complexe Eigenvalues, Numer. Math. 33, 425-435, 1979.

W1. Wilkinson J.H., 'The Algebraic Eigenvalue Problem', Oxford Universitary Press, 1988.

W2. Wittrick W.H., Williams F.W., On the Free Vibration Analysis of Spinning Structures by Using Discrete or Distributed Mass Models, Journal of Sound and Vibration, 82, 1-15, 1982.

Y1. Yu I.W., Solution of Large Unsymmetric Eigensystems for Fluid/Structure Interaction Problems, Nuclear Science and Engineering, 92, 157-161, 1986.

Z1. Zorzi E.S., Nelson H.D., Finite Element Stability Analysis for Rotor-bearing Systems with Internal Damping, Journal of Engineering for Power, 71-76, January 1977.

Z2. Zienkiewicz O.C., 'The Finite Element Method', McGraw-Hill, London, 1977.

CURRICULUM VITAE

Nom :	DIAS RODRIGUES
Prénom :	José Fernando
Date et lieu de naissance :	1er février 1957 à Vila Franca das Naves (Portugal)
Parents :	Rodrigues César et Etelvina, née Dias
Pays d'origine :	Portugal
Etat civil :	Marié à Maria de la Salette, née Hipolito Reis (un enfant, Ana Maria)
1964 - 1968	Etudes primaires à Vila Franca das Naves
1968 - 1975	Etudes secondaires au Lycée D. Manuel II, Porto
1976 - 1981	Etudes supérieures à l'Université de Porto (Faculté de Génie)
1981	Diplôme d'ingénieur mécanicien
1981 - 1984	Assistant auprès du Laboratoire de mécanique appliquée de l'Université de Porto
1984	Diplôme de maîtrise en Génie structurel à l'Université de Porto
1984 - 1985	Stagiaire auprès du Laboratoire de mécanique appliquée de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
1985 - 1989	Doctorant auprès du Laboratoire de mécanique appliquée de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO
BIBLIOTECA
0000043301