

**Mecânica da fratura em modo misto:  
Modelação numérica e validação experimental**

Sérgio A. G. Pereira

Dissertação submetida à Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto para  
obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica

Orientador: Prof. Sérgio M. O. Tavares

Coorientador: Prof. Paulo M. S. Tavares de Castro

Departamento de Engenharia Mecânica

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Porto, 2018

---

O trabalho apresentado nesta dissertação foi realizado no  
Departamento de Engenharia Mecânica  
Faculdade de Engenharia  
Universidade do Porto  
Porto, Portugal

Sérgio Alexandre Gonçalves Pereira  
E-mail: [up201607695@fe.up.pt](mailto:up201607695@fe.up.pt)

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto  
Departamento de Engenharia Mecânica  
Rua Dr. Roberto Frias s/n  
4200-465 Porto  
Portugal

## **Agradecimentos**

Agradeço em primeiro lugar ao meu orientador de dissertação, Professor Sérgio M. O. Tavares e coorientador Professor Paulo M. S. Tavares de Castro pelo apoio, paciência, compreensão, ensinamentos e empenho demonstrado durante a elaboração deste trabalho. Gostaria ainda de agradecer ao Engenheiro Miguel Figueiredo e ao Engenheiro Rui Silva pela paciência, disponibilidade e ajuda no decorrer do trabalho experimental.

Agradeço também a todos os docentes da FEUP, pela formação adquirida e ajuda, sempre que necessária.

Por fim um agradecimento muito especial à minha família e amigos por toda a ajuda prestada, carinho e compreensão durante esta e todas as etapas da minha vida.

## Resumo

O presente trabalho consiste num estudo numérico e experimental de mecânica da fratura linear-elástica, tendo em conta solicitações em modo misto.

O objetivo é analisar a propagação de pré-fendas em condições de carregamento em modo I puro, modo II puro e modo misto I-II. Foram então realizadas simulações numéricas de modelos bidimensionais criados no software Abaqus, tendo sido os resultados daí obtidos comparados com os resultados analíticos e obtidos experimentalmente. Para determinar a tensão  $T$  e os fatores de intensidade de tensão na extremidade da fenda recorreu-se ao método convencional dos elementos finitos, pós-processados com as técnicas de fecho virtual da fenda modificado (mVCCT) e / ou o integral-J. O método dos elementos finitos estendidos (XFEM) também é usado para prever a trajetória das fendas.

Os procedimentos experimentais foram efetuados em provetes de flexão em três pontos e em quatro pontos, nos quais foi realizada uma pré-fenda através de sucessivos impactos com um martelo sobre uma lâmina localizada sobre o entalhe pré-maquinado. O ensaio de flexão em 4 pontos foi efetuado com uma configuração assimétrica, que permite, através da variação dos apoios e das cargas, relativamente ao plano que contém a fenda, introduzir solicitações de modo II puro e modo-misto I-II. O ensaio de flexão em 3 pontos foi realizado da forma convencional, tendo sido apenas variada a distância da linha de aplicação da carga em relação ao plano que contém a fenda.

Em geral foram obtidos bons resultados entre os modelos e os ensaios experimentais, sendo as causas de divergência discutidas neste trabalho.

**Palavras-Chave:** Mecânica da fratura linear-elástica, Modo misto I-II, Fator de intensidade de tensão, Método dos elementos finitos estendido, Propagação da fenda.

## Abstract

The present work consists of a numerical and experimental study concerning the mechanics of linear elastic fracture. Once there are results in the literature and at FEUP for the case of the inclined central crack plate in mixed mode I-II, we decided to obtain results in a similar manner, but for 3 and 4-point bending specimens, since they are much easier to test, in the experimental point of view.

The aim of this work is to analyse the propagation of pre-existing cracks under pure mode I, pure mode II and mixed mode I-II loading conditions. Numerical simulations with two-dimensional models created in Abaqus® software were performed, and the results obtained were compared with the analytical and experimental results. To determine  $T$ -stress and the stress intensity factors at the crack tip, the conventional finite element method was used, post-processed with the modified virtual crack closure techniques (mVCCT) and / or the J-integral. The extended finite element method (XFEM) is also used to predict the crack trajectory.

The experimental procedures were performed in three-point and four-point bending on single edge notch specimens of PMMA, in which a natural pre-crack was created by small impacts with a hammer on a blade located over the pre-existing machined notch. The 4-point bending test was performed with an asymmetrical configuration. Varying the locations of supports and loading points with respect to the crack plane, this configuration allows to create pure mode II and mixed-mode I-II situations. The 3-point bending test was performed in the conventional manner, with only the distance from the load line to the crack plane being varied.

In general, good agreement between models and experiments was achieved, and the causes for the divergences found are discussed in this dissertation.

**Keywords:** Mechanics of linear-elastic fractures, Mixed mode I-II, Stress intensity factor, Extended finite element method, Crack path.

# Índice

1.	Introdução .....	1
1.1.	Estrutura da dissertação .....	3
2.	Estado da arte .....	5
2.1.	PMMA .....	6
2.1.1.	Pré-fenda .....	8
2.2.	Estados planos de tensão e de deformação .....	9
2.2.1.	Estado plano de tensão .....	9
2.2.2.	Estado plano de deformação .....	9
2.3.	Tenacidade .....	9
2.3.1.	Tenacidade à fratura, $K_c$ .....	10
2.3.2.	Tenacidade à fratura em estado plano de deformação, $K_{Ic}$ .....	10
2.4.	Fator de intensidade de tensão equivalente .....	12
2.4.1.	Modelo de Irwin .....	12
2.4.2.	Modelo da taxa máxima de libertação de energia .....	12
2.4.3.	Modelo de Richard .....	12
2.4.4.	Modelo de Tanaka .....	13
2.5.	Propagação de fendas em modo misto I-II .....	13
2.5.1.	Critério de Erdogan/Sih .....	16
2.5.2.	Critério Sih .....	22
2.5.3.	Critério Richard .....	25
2.6.	Fratura em modo misto – flexão em 4 pontos .....	26
2.7.	Fratura em modo misto – flexão em 3 pontos .....	32
2.8.	Determinação do fator de intensidade de tensão ( $K$ ) .....	34
2.8.1.	Técnica do fecho virtual da fenda (VCCT) .....	34
2.8.2.	Integral J .....	36

2.8.3.	<i>T-stress</i> .....	37
2.8.4.	Extrapolação dos deslocamentos.....	40
2.9.	Método dos elementos finitos estendido (XFEM).....	41
3.	Análise numérica preliminar .....	43
3.1.	Integração reduzida e completa .....	43
3.2.	Elementos lineares .....	44
3.3.	Placa com fenda central tracionada uniaxialmente.....	45
3.4.	Placa com fenda central inclinada tracionada uniaxialmente.....	48
3.5.	<i>T-stress</i> .....	53
3.5.1.	Modo I.....	53
3.5.2.	Modo misto I-II .....	59
4.	Flexão em 4 pontos – ensaio experimental.....	61
4.1.	Introdução.....	61
4.2.	Provetes .....	63
4.3.	Discussão e conclusões.....	65
5.	Flexão em 3 pontos – ensaio experimental.....	76
5.1.	Modo I puro .....	77
5.1.1.	Provetes .....	77
5.1.1.1.	Norma ASTM E399 .....	77
5.1.1.2.	Calibração independente .....	77
5.1.2.	Ensaio experimental .....	78
5.2.	Modo misto I-II .....	80
5.2.1.	Provetes .....	80
5.2.2.	Ensaio experimental – modo misto I-II.....	81
5.2.3.	Ensaio experimental – modo I.....	82
5.3.	Discussão e conclusões.....	83
6.	Análise numérica .....	86

6.1.	Fatores de intensidade de tensão – flexão em 4 pontos.....	86
6.2.	<i>T-stress</i> – flexão em 4 pontos.....	88
6.3.	Propagação da fenda – flexão em 4 pontos.....	90
6.3.1.	Provete 4.....	91
6.3.2.	Provete 5.....	92
6.3.3.	Provete 6.....	93
6.3.4.	Provete 7.....	94
6.3.5.	Provete 8.....	95
6.3.6.	Provete 9.....	96
6.4.	Propagação da fenda – flexão em 4 pontos – 3D.....	96
6.4.1.	Provete 4.....	97
6.4.2.	Provete 5.....	97
6.4.3.	Provete 7.....	98
6.4.4.	Provete 8.....	99
6.4.5.	Provete 9.....	100
6.5.	<i>T-stress</i> – flexão em 3 pontos.....	100
6.6.	Propagação da fenda – flexão em 3 pontos.....	102
6.7.	Discussão e conclusões.....	103
7.	Conclusões e trabalhos futuros.....	105
	Bibliografia.....	107
	Anexos.....	111
	A.1 – Obtenção dos valores de <i>T-stress</i> através do Abaqus®.....	112
	A.2 – Ficha técnica das propriedades do PMMA.....	116
	A.3 – Gráficos <i>T-stress</i> provetes de flexão em 4 pontos.....	118
	A.4 – Gráficos <i>T-stress</i> provetes de flexão em 3 pontos.....	122
	A.5 – Gráficos flexão em 4 pontos.....	124
	A.5.1 Provete 1 – modo II puro.....	125

A.5.2 Provete 2 .....	130
A.5.3 Provete 2b .....	130
A.5.4 Provete 3 .....	131
A.5.5 Provete 4 .....	131
A.5.6 Provete 5 .....	132
A.5.7 Provete 6 .....	133
A.5.8 Provete 7 .....	133
A.5.9 Provete 7b .....	134
A.5.10 Provete 8 .....	134
A.5.11 Provete 9 .....	135
A.6 – Ensaio experimentais de flexão em 3 pontos .....	136

## Lista de Abreviações

ASTM – American Society for Testing and Materials

BEM – Método dos elementos de contorno (*Boundary Element Method*)

CPS4 – Elemento de 4 nós sem integração reduzida

CPS4R - Elemento de 4 nós com integração reduzida

ept - Estado plano de tensão

epd – Estado plano de deformação

FIT- Fator de intensidade de tensão

LET – Laboratório de Ensaios Tecnológicos

MEF – Métodos dos elementos finitos

MERR – Critério da taxa de libertação de energia máxima (*Maximum Energy Release Rate*)

MFLE – Mecânica da Fratura Linear Elástica

MFEP – Mecânica da Fratura Elasto-Plástica

MMA - Metil metacrilato

MTS – Critério da tensão tangencial máxima (*Maximum Tangential Stress*)

PMMA – Acrílico

SED – Critério da densidade de energia de deformação (*Strain Energy Density*)

SEN – *Single edge notch*

UV – Raios ultravioleta

VCCT – Técnica do fecho virtual da fenda (*Virtual Crack Closure Technique*)

XFEM – *Extended Finite Element Method*

## Lista de Símbolos

$a$  – comprimento da fenda

$B$  – largura do provete

$\Delta\sigma$  – gama de tensão

$E$  – módulo de Young

$\varepsilon$  – deformação

$G$  – taxa de libertação de energia

$H$  – comprimento do provete

$K$  – fator de intensidade de tensão

$K_c$  – tenacidade à fratura

$K_I$  – fator de intensidade de tensão em modo I

$K_{Ic}$  – fator de intensidade de tensão crítico em modo I

$K_{II}$  – fator de intensidade de tensão em modo II

$K_{IIc}$  – fator de intensidade de tensão crítico em modo II

$K_{III}$  – fator de intensidade de tensão em modo III

$P$  – carga aplicada

$S$  – distância entre apoios

$S_0$  – distância da linha de aplicação da carga em relação ao plano da fenda

SED – strain energy density

$T$  – *T-stress*

$\sigma$  – tensão ou carregamento remoto

$u$  – deslocamento

$\mu$  – módulo de corte

$\nu$  – coeficiente de Poisson

$W$  – altura do provete

## Lista de Figuras

Figura 1 - Carga cíclica. ....	6
Figura 2 - Provetes de teste a) <i>compact tension</i> (CT) b) <i>3-point bending</i> (3PB), (Gross & Seelig, 2011). ....	10
Figura 3 - a) Influência da espessura, b) Influência da temperatura na tenacidade à fratura, (Gross & Seelig, 2011). ....	11
Figura 4 -Placa sujeita a uma sollicitação remota $\sigma$ e contendo uma fenda de comprimento $2a$ , (C. Moura Branco, Fernandes, & de Castro, 1999).....	14
Figura 5 - Representação do raio e ângulo na extremidade de uma fenda para determinação do estado de tensão em coordenadas polares. ....	14
Figura 6 - Fratura em modo misto. ....	16
Figura 7 – $K_I$ e $K_{II}$ para fratura em modo misto de acordo com o critério MTS. ....	17
Figura 8 - Interação crítica dos FIT em modo I e II, normalizados com o valor crítico do FIT em modo I puro, <i>e.g.</i> (Carlos A.C.C. Rebelo, 1987). ....	18
Figura 9 – $K_I$ e $K_{II}$ para fratura em modo misto com base no critério MTS.....	19
Figura 10 - Propagação da fenda no caso da fenda inclinada, <i>e.g.</i> (J. G. Williams, 1980). ....	20
Figura 11 – Relação entre $K_I/K_{II}$ e $\varphi_0$ , (de Castro, 2017) e (Broek, 1982), p.362. ....	20
Figura 12 – Ângulo de fratura em função do ângulo de inclinação da fenda, <i>e.g.</i> (Carlos A.C.C. Rebelo, 1987; Smith et al., 2000). ....	21
Figura 13 – Variação do ângulo de propagação da fenda vs o ângulo de inclinação da fenda central de uma placa tracionada remotamente, sob estado plano de tensão. ....	23
Figura 14 - Critério SED para fratura em modo misto I-II.....	24
Figura 15 - Critério SED para fratura em modo misto I-II.....	25
Figura 16 - Ângulo de propagação da fenda sujeita a um carregamento em modo misto I-II, (Richard & Sander, 2016). ....	26
Figura 17 – Flexão em 4 pontos, provete sujeito a um carregamento assimétrico.....	27
Figura 18 – Fatores geométricos $Y_I$ e $Y_{II}$ em modo misto, (Wang <i>et al.</i> , 2016). ....	27
Figura 19 – Correção para o FIT em modo II.....	28
Figura 20 – FIT adimensional vs distância da carga ao plano da fenda. ....	29
Figura 21 – $\beta$ vs distância da carga ao plano da fenda. ....	29
Figura 22 - Proвете sujeito a flexão em 4 pontos, carga simétrica, (Wang <i>et al.</i> , 2016).30	

Figura 23 - Provete para flexão em 4 pontos sujeito a carga assimétrica ( $B=t$ ), (Razavi, Aliha, & Berto, 2017).	31
Figura 24 - Representação de um provete para 4PB sujeito a uma carga assimétrica (modo misto), (Wang <i>et al.</i> , 2016).	31
Figura 25 - Representação do ensaio de flexão em 3 pontos com carga excêntrica, SEN, (Belli, Wendler, Petschelt, & Lohbauer, 2017).	32
Figura 26 - Ângulo de propagação vs modo misto I-II, <i>e.g.</i> (Suresh <i>et al.</i> , 1990).	33
Figura 27 – Representação das etapas necessárias à implementação do VCCT (4 nós),(Tavares & de Castro, 2015).	34
Figura 28 - Representação das etapas necessárias à implementação do VCCT (8 nós),(Tavares & de Castro, 2015).	35
Figura 29 - Representação esquemática do contorno na extremidade da fenda.	36
Figura 30 – Parâmetros na extremidade da fenda, (Efunda, 2018).	37
Figura 31 – Representação gráfica da extrapolação dos deslocamentos, <i>e.g.</i> (Tavares & de Castro, 2015).	41
Figura 32 – a) Integração reduzida; b) Integração completa	44
Figura 33 - Elemento linear de 4 nós.	45
Figura 34 - Elemento linear de 8 nós.	45
Figura 35 - Representação do caso em estudo, (Erdogan & Sih, 1963).	45
Figura 36 - Malha paramétrica, refinada na zona de interesse.	46
Figura 37 - Placa tracionada remotamente contendo uma fenda inclinada, (Arteiro & de Castro, 2014).	48
Figura 38 - Círculo de Mohr para determinação das componentes normal e paralela à fenda da tensão remota aplicada a uma placa contendo uma fenda inclinada, (Arteiro & de Castro, 2014).	49
Figura 39 - Ampliação da malha utilizada para $\beta = 15^\circ$ .	50
Figura 40 - Ampliação da malha utilizada para $\beta = 45^\circ$ .	50
Figura 41 - Variação de $K_I$ , $K_{II}$ e $T-stress$ normalizados com o ângulo de uma fenda central de uma placa carregada uni axialmente, de acordo com as equações teóricas.	51
Figura 42 - Variação de $K_I$ , $K_{II}$ e $T-stress$ normalizados com o ângulo de uma fenda central de uma placa carregada uni axialmente, pontos obtidos em software Abaqus.	52
Figura 43 - Propagação da fenda a $15^\circ$ .	53
Figura 44 - Propagação da fenda a $30^\circ$ .	53
Figura 45 - Propagação da fenda a $45^\circ$ .	53

Figura 46 - Propagação da fenda a 60°.....	53
Figura 47 - Propagação da fenda a 75°.....	53
Figura 48 - Propagação da fenda a 90°.....	53
Figura 49 - $T$ para um provete com fenda lateral de razão $a/W=0.4$ , (Ayatollahi <i>et al.</i> , 1998).....	54
Figura 50 - Provete com fenda lateral, (Ayatollahi <i>et al.</i> , 1998).....	54
Figura 51 - Curvas obtidas a partir de uma malha mais refinada.....	55
Figura 52 - Curvas obtidas a partir de uma malha menos refinada.....	55
Figura 53 - Curva do “Displacement Method” através das deformações.....	56
Figura 54 - Curva do “Displacement Method” através das deformações, malha menos refinada.....	56
Figura 55 - Deformações segundo $x$ , malha mais refinada.....	57
Figura 56 - Deformações segundo $x$ , malha menos refinada.....	57
Figura 57 - $T$ -stress para $\theta = 0$ , malha mais refinada.....	58
Figura 58 - $T$ -stress para $\theta = 0$ , malha menos refinada.....	58
Figura 59 - Gráfico de $T$ normalizado para $\beta = 60^\circ$ .....	59
Figura 60 - Variação do valor de $T$ normalizado para $\beta = 60^\circ$ , Stress Method.....	60
Figura 61 - Foto da montagem utilizada no decorrer do ensaio.....	62
Figura 62 - Representação do provete de teste.....	63
Figura 63 - Zona de propagação da fenda antes da rotura, provete 7.....	65
Figura 64 - Propagação das fendas.....	66
Figura 65 - Representação gráfica de $K_I/K_{II}$ vs $K_{eq}$ , notar que o eixo vertical não se inicia em 0.....	69
Figura 66 - Relação entre $K_I/K_{II}$ e $\varphi_0$ para o critério da tensão principal máxima e comparação com os resultados experimentais.....	71
Figura 67 - Representação do ângulo de propagação em função da relação $K_I/K_{II}$ .....	72
Figura 68 - Direção inicial de propagação da fenda em função do ângulo da pré-fenda e do parâmetro de modo misto.....	73
Figura 69 - $K_I$ e $K_{II}$ para fratura em modo misto de acordo com o critério MTS e inclusão dos pontos experimentais.....	73
Figura 70 - Local de fratura em modo misto de acordo com o critério MTS, resultados obtidos por (Erdogan & Sih, 1963).....	74
Figura 71 - Local de fratura em modo misto de acordo com o critério MTS, resultados obtidos por (Carlos A.C.C. Rebelo, 1987).....	74

Figura 72 - Fratura em modo misto I-II, pontos experimentais. ....	75
Figura 73 - Fratura em modo misto I-II, critérios MTS e SED, círculo e elipse.....	75
Figura 74 - Dimensões e tolerâncias do SEN, (ASTM, 2011). ....	76
Figura 75 - Representação do provete para flexão em 3 pontos, de acordo com a norma ASTM E399.....	77
Figura 76 - Representação do provete para flexão em 3 pontos, calibração independente. ....	78
Figura 77 - Montagem utilizada para o ensaio de flexão em 3 pontos.....	78
Figura 78 – Malha utilizada na simulação em Abaqus.....	80
Figura 79 - Provetes de flexão em 3 pontos, modo-misto.....	80
Figura 80 - Montagem para o ensaio de flexão em 3 pontos, modo misto.....	81
Figura 81 – Malha utilizada na obtenção dos FIT, provete 1.....	86
Figura 82 - <i>T-stress</i> adimensionalizado em função do parâmetro de modo misto (o eixo vertical não principia em zero). ....	90
Figura 83 - Comparação entre o caminho percorrido pela fenda, vista dos dois lados do provete 1. ....	91
Figura 84 - Malha utilizada para o XFEM (provetes 7).....	91
Figura 85 - Representação da propagação da fenda em laboratório e em software, para o provete 4. ....	92
Figura 86 - Caminho percorrido pela fenda simulada em Abaqus®, provete 5.....	92
Figura 87 - Representação da propagação da fenda em laboratório e em software, para o provete 5. ....	93
Figura 88 - Representação da propagação da fenda em laboratório e em software, para o provete 6. ....	93
Figura 89 - Representação da propagação da fenda em laboratório e em software, para o provete 7. ....	94
Figura 90 - Ruptura do provete 7, simulação. ....	95
Figura 91 - Representação da propagação da fenda em laboratório e em software, para o provete 8. ....	95
Figura 92 - Representação da propagação da fenda em laboratório e em software, para o provete 9. ....	96
Figura 93 - Caminho percorrido pela fenda simulada em 3D, Abaqus®, provete 4. ....	97
Figura 94 - Caminho percorrido pela fenda simulada em 3D, Abaqus®, provete 5. ....	98
Figura 95 - Caminho percorrido pela fenda simulada em 3D, Abaqus®, provete 7. ....	98

Figura 96 - Caminho percorrido pela fenda simulada em 3D, Abaqus®, provete 8. ....	99
Figura 97 - Caminho percorrido pela fenda simulada em 3D, Abaqus®, provete 9. ...	100
Figura 98 - Valor de <i>T-stress</i> adimensionalizado, esperado para a flexão em 3 pontos. .....	101
Figura 99 - Representação da propagação da fenda em laboratório e em software, provete 3PB-9. ....	102
Figura 100 - Representação da propagação da fenda em laboratório e em software, provete 3PB-10. ....	103
Figura 101 - Caminhos percorridos pela pré-fenda do provete 4, experimentalmente, 2D e 3D. ....	104
Figura 102 – Zoom in das deformações obtidas na zona de interesse. ....	113
Figura 103 – Path criado para a obtenção das deformações na face da fenda. ....	113
Figura 104 – Geração da tabela de deformações. ....	114
Figura 105 – Tabela de deformações obtida no Abaqus. ....	114
Figura 106 - Curva de <i>T</i> obtida através dos deslocamentos e obtenção do valor de <i>T</i> . ....	115
Figura 107 - Curva de <i>T</i> obtida através das tensões e deformações, provete 1. ....	119
Figura 108 - Curva de <i>T</i> obtida através das tensões e deformações, provete 2b. ....	119
Figura 109 - Curva de <i>T</i> obtida através das tensões e deformações, provete 2. ....	119
Figura 110 - Curva de <i>T</i> obtida através das tensões e deformações, provete 3. ....	119
Figura 111 - Curva de <i>T</i> obtida através das tensões e deformações, provete 4. ....	120
Figura 112 - Curva de <i>T</i> obtida através das tensões e deformações, provete 6. ....	120
Figura 113 - Curva de <i>T</i> obtida através das tensões e deformações, provete 7b. ....	120
Figura 114 - Curva de <i>T</i> obtida através das tensões e deformações, provete 5. ....	120
Figura 115 - Curva de <i>T</i> obtida através das tensões e deformações, provete 7. ....	120
Figura 116 - Curva de <i>T</i> obtida através das tensões e deformações, provete 8. ....	120
Figura 117 - Curva de <i>T</i> obtida através das tensões e deformações, provete 9. ....	121
Figura 118 - Curva de <i>T</i> obtida através das tensões e deformações, provete ASTM. ....	123
Figura 119 - Curva de <i>T</i> obtida através das tensões e deformações, provete Independente. .....	123
Figura 120 - Curva de <i>T</i> obtida através das tensões e deformações, provete 3PB-9. ....	123
Figura 121 - Curva de <i>T</i> obtida através das tensões e deformações, provete 3PB-10. ....	123
Figura 122 - SEN provete 1. ....	125
Figura 123 – Montagem experimental do provete 1 com carga assimétrica (modo II puro). .....	125

Figura 124 - Propagação da fenda, provete 1. ....	125
Figura 125 - Gráfico da aplicação da carga ao longo do tempo, provete 1. ....	126
Figura 126 – Gráfico de carga vs deslocamento axial, provete 1. ....	126
Figura 127 - Representação simplificada das forças que atuam na barra superior.....	127
Figura 128 - Representação simplificada das forças que atuam no provete.....	127
Figura 129 - Diagrama do esforço transversal para um carregamento em modo II puro. .....	129
Figura 130 - Diagrama do momento fletor para um carregamento em modo II puro. .	129
Figura 131 - Gráfico da aplicação da carga ao longo do tempo, provete 2. ....	130
Figura 132 – Gráfico de carga vs deslocamento axial, provete 2. ....	130
Figura 133 - Diagrama do esforço transversal para um carregamento em modo misto.	130
Figura 134 - Diagrama do momento fletor para um carregamento em modo misto. ...	130
Figura 135 - Gráfico da aplicação da carga ao longo do tempo, provete 2. ....	130
Figura 136 – Gráfico de carga vs deslocamento axial, provete 2b. ....	130
Figura 137 - Gráfico da aplicação da carga ao longo do tempo, provete 3. ....	131
Figura 138 – Gráfico de carga vs deslocamento axial, provete 3. ....	131
Figura 139 - Diagrama do esforço transversal para um carregamento em modo misto.	131
Figura 140 - Diagrama do momento fletor para um carregamento em modo misto. ...	131
Figura 141 - Gráfico da aplicação da carga ao longo do tempo, provete 4. ....	131
Figura 142 – Gráfico de carga vs deslocamento axial, provete 4. ....	131
Figura 143 - Diagrama do esforço transversal para um carregamento em modo misto.	132
Figura 144 - Diagrama do momento fletor para um carregamento em modo misto. ...	132
Figura 145 - Gráfico da aplicação da carga ao longo do tempo, provete 5. ....	132
Figura 146 – Gráfico de carga vs deslocamento axial, provete 5. ....	132
Figura 147 - Diagrama do esforço transversal para um carregamento em modo misto.	132
Figura 148 - Diagrama do momento fletor para um carregamento em modo misto. ...	132
Figura 149 - Gráfico da aplicação da carga ao longo do tempo, provete 6. ....	133
Figura 150 – Gráfico de carga vs deslocamento axial, provete 6. ....	133
Figura 151 - Diagrama do esforço transversal para um carregamento em modo misto.	133
Figura 152 - Diagrama do momento fletor para um carregamento em modo misto. ...	133
Figura 153 - Gráfico da aplicação da carga ao longo do tempo, provete 7. ....	133
Figura 154 – Gráfico de carga vs deslocamento axial, provete 7. ....	133
Figura 155 - Diagrama do esforço transversal para um carregamento em modo misto.	134
Figura 156 - Diagrama do momento fletor para um carregamento em modo misto. ...	134

Figura 157 - Gráfico da aplicação da carga ao longo do tempo, provete 7b.....	134
Figura 158 – Gráfico de carga vs deslocamento axial, provete 7b.....	134
Figura 159 - Gráfico da aplicação da carga ao longo do tempo, provete 8.....	134
Figura 160 – Gráfico de carga vs deslocamento axial, provete 8.....	134
Figura 161 - Diagrama do esforço transversal para um carregamento em modo misto.135	
Figura 162 - Diagrama do momento fletor para um carregamento em modo misto. ...	135
Figura 163 - Gráfico da aplicação da carga ao longo do tempo, provete 9.....	135
Figura 164 – Gráfico de carga vs deslocamento axial, provete 9.....	135
Figura 165 - Diagrama do esforço transversal para um carregamento em modo misto.135	
Figura 166 - Diagrama do momento fletor para um carregamento em modo misto. ...	135
Figura 167 – Carga aplicada ao longo do tempo, provete 3PB-1.....	137
Figura 168 - Carga aplicada ao longo do tempo, provete 3PB-2. ....	137
Figura 169 - Carga aplicada ao longo do tempo, provete 3PB-3. ....	137
Figura 170 - Carga vs deslocamento axial, provete 3PB-1.....	137
Figura 171 - Carga vs deslocamento axial, provete 3PB-2.....	137
Figura 172 - Carga vs deslocamento axial, provete 3PB-3.....	137
Figura 173 - Carga aplicada da carga ao longo do tempo, provete 3PB-4.....	138
Figura 174 - Carga vs deslocamento axial, provete 3PB-4.....	138
Figura 175 - Carga aplicada ao longo do tempo, provete 3PB-9. ....	138
Figura 176 - Carga aplicada ao longo do tempo, provete 3PB-10. ....	138
Figura 177 - Carga vs deslocamento axial, provete 3PB-9. ....	138
Figura 178 - Carga vs deslocamento axial, provete 3PB-10. ....	138
Figura 179 - Carga aplicada ao longo do tempo, provete 3PB-5. ....	139
Figura 180 - Carga aplicada ao longo do tempo, provete 3PB-6. ....	139
Figura 181 - Carga aplicada ao longo do tempo, provete 3PB-7. ....	139
Figura 182 - Carga vs deslocamento axial, provete 3PB-5.....	139
Figura 183 - Carga vs deslocamento axial, provete 3PB-6. ....	139
Figura 184 - Carga vs deslocamento axial, provete 3PB-7. ....	139

## Lista de Tabelas

Tabela 1 – Resultados obtidos para o caso da placa com fenda central. ....	46
Tabela 2 - Comparação dos valores obtidos em software com a equação (95), em percentagem.....	47
Tabela 3 - Comparação dos valores obtidos em software com a equação (96), em percentagem.....	47
Tabela 4 – Valores de tensão obtidos do FIT para o caso da fenda inclinada.....	50
Tabela 5 - Diferenças relativas entre os valores do software e as expressões analíticas, em percentagem.....	51
Tabela 6 - Valores obtidos do Integral $J$ e $T$ -stress para o caso da fenda inclinada.....	51
Tabela 7 - Distâncias dos rolos e de aplicação da carga de cada provete, valor da respetiva carga esperada e comprimento da pré-fenda. ....	64
Tabela 8 - Valores teóricos da carga suportada pelos provetes SEN de flexão em 4 pontos para ambos os $K_{Ic}$ e valores aos quais se verificou propagação da fenda.....	67
Tabela 9 - Resumo das forças suportadas, dos ângulos de propagação da fenda, os valores de $K_I$ , $K_{II}$ , $K_{eq}$ e a relação $K_I/K_{II}$ . ....	68
Tabela 10 - Valores esperados do ângulo de propagação e valores obtidos nos ensaios. ....	70
Tabela 11 - Valores de $K_{Ic}$ obtidos no Abaqus®.....	79
Tabela 12 – Valores de carga, tempo, ângulo de fratura e FIT. ....	81
Tabela 13 - Valores de $K_I$ e $K_{II}$ obtidos no Abaqus®.....	82
Tabela 14 – Valores da carga, tempo e comprimento da pré-fenda. ....	82
Tabela 15 – Dados obtidos através do ensaio de flexão em 3 pontos. ....	83
Tabela 16 - Valores teóricos da carga suportada pelos provetes SEN de flexão em 4 pontos para ambos os $K_{Ic}$ e valores aos quais se verificou propagação da fenda.....	84
Tabela 17 - Resultados obtidos para os FIT. ....	87
Tabela 18 – Diferença relativa (em percentagem) entre os valores de FIT com as expressões de (Wang <i>et al.</i> , 2016).....	87
Tabela 19 - Valores de $T$ -stress. ....	89
Tabela 20 - Valores de $T$ -stress, 3PB SEN.....	101
Tabela 21 - Valores de $T$ -stress para os casos estudados de flexão em 3 pontos.....	102

# 1. Introdução

Com o avanço da tecnologia, a redução de massa em componentes de engenharia tem se tornado cada vez mais importante, pelo que projetos que antes se baseavam em ligas metálicas e outros materiais tradicionais, se tenham voltado para polímeros sintéticos ou plásticos e soluções multi-material. Assim, a utilização de polímeros em aplicações estruturais, na qual a integridade dos componentes é fundamental, veio estimular a experimentação e o desenvolvimento de trabalhos académicos voltados para a quantificação das propriedades mecânicas dos mesmos. Uma das principais razões da utilização dos polímeros, para além da sua resistência específica, é o facto de estes possuírem uma ampla gama de aplicação em diversas áreas. Como alguns dos materiais poliméricos apresentam propriedades translúcidas, estes materiais também permitem estudar com maior detalhe o comportamento de fendas, devido ao facto de ser visível a propagação de fendas ao longo de toda a espessura.

Uma característica importante dos ensaios de tenacidade à fratura é a necessidade de incluir uma pré-fenda, numa tentativa de reproduzir, no provete, um defeito natural da estrutura. A mecânica da fratura linear elástica (MFLE) fornece uma descrição apropriada do comportamento de uma fenda, usando o campo de tensão na região próxima à sua extremidade para caracterizar as condições críticas relacionadas com a iniciação da fratura em materiais frágeis.

Historicamente a mecânica da fratura linear elástica foi desenvolvida com o intuito de analisar o comportamento de sólidos na presença de fendas, fundamentalmente sob condições de elasticidade. No entanto, essas condições só se verificam estritamente para o caso de materiais muito frágeis. O aumento do comprimento destas fendas faz com que a resistência do material vá diminuindo, podendo inclusive provocar a rotura do mesmo, quando o fator de intensidade de tensão ( $K$ ) atinge o valor de  $K_c$  (tenacidade do material), ver equação (1):

$$K = \sigma\sqrt{\pi a} \quad (1)$$

Hoje em dia, a mecânica da fratura é uma ferramenta fundamental na melhoria do desempenho mecânico de vários materiais e componentes.

A mecânica da fratura elasto-plástica teve origem para que os conhecimentos adquiridos nos anos setenta do século passado pudessem ser estendidos ao domínio da plasticidade. Para tal foi necessário recorrer a conceitos como o modelo de Dugdale, o integral J, o COD (*Crack Opening Displacement*) e a parâmetros como a tensão de colapso plástico.

Uma vez que existem na literatura e na FEUP resultados experimentais em modo misto para o caso da placa de PMMA possuindo uma fenda inclinada central tracionada por uma tensão remota, resolveu-se obter resultados para os casos de flexão em 3 e 4 pontos, visto se tratarem de ensaios de mais fácil execução, de um ponto de vista experimental.

## 1.1. Estrutura da dissertação

Para além do presente capítulo, este trabalho contém ainda mais 6 capítulos, que são sumariamente descritos nos parágrafos seguintes.

No capítulo 2 é abordado o estado da arte, fazendo referência ao *Poly(methyl methacrylate)* - PMMA, aos estados de tensão, tenacidade, determinação do fator de intensidade de tensões (FIT, representado por  $K$ ), propagação de fendas em modo misto e a fratura em modo misto para provetes de flexão em 3 e 4 pontos.

No capítulo 3 são analisados os casos da placa com fenda central tracionada uni axialmente, o caso da fenda inclinada e a tensão  $T$ -stress para um provete com fenda lateral. Para estes casos foi realizada uma análise numérica usando o software de elementos finitos Abaqus® e comparados os valores obtidos com as soluções analíticas disponíveis na literatura.

No capítulo 4 é abordada a flexão em 4 pontos, sendo descritos os processos experimentais realizados, apresentados os resultados obtidos e comparados com os critérios teóricos.

No capítulo 5 são apresentados os ensaios de flexão em 3 pontos em modo I puro, através dos quais se obteve o valor de  $K_{Ic}$  (fator de intensidade crítico em modo I), de acordo com a norma ASTM E399 e através de uma calibração independente. É ainda tratado o modo misto I-II.

No capítulo 6 é realizada a análise numérica dos provetes de flexão em 4 pontos, onde são comparados os valores de  $K_I$  e  $K_{II}$  obtidos através das equações analíticas com os valores obtidos pelo software Abaqus® e através do método do VCCT (*Virtual Crack Closure Technique*). São ainda apresentados os valores de  $T$ -stress e comparadas as propagações da fenda registada nos dois ensaios (flexão em 3 e 4 pontos) em laboratório com a propagação obtida no Abaqus®. Por fim é ainda apresentado o estudo da propagação da fenda de flexão em 4 pontos, simulada em três dimensões.

O capítulo 7 apresenta todas as conclusões gerais.

No final do relatório são apresentadas todas as referências bibliográficas a diferentes trabalhos científicos, artigos e relatórios, de apoio à elaboração do presente trabalho.

Finalmente apresentam-se um conjunto de anexos com a apresentação de como obter o valor de *T-stress* via Abaqus® para o caso da fenda lateral, a ficha técnica do material estudado, os gráficos de obtenção do valor de *T-stress* para ambos os casos de flexão, bem como os gráficos de carga aplicada em função do tempo e deslocamento registados durante os ensaios.

## 2. Estado da arte

Macroscopicamente a fratura de um material isotrópico pode ser classificada como frágil ou dúctil. A fratura frágil é associada a baixa taxa de liberação de energia e altas velocidades de propagação. A fratura dúctil é associada a grandes deformações, altas taxas de dissipação de energia e baixas velocidades de propagação. Estes modos são encontrados nos materiais e dependem nomeadamente dos processos de fabrico e das solicitações a que as estruturas estão submetidas. Um aço ao carbono, por exemplo, é frágil a temperaturas criogénicas e dúctil à temperatura ambiente.

Os principais modos de falhas ocorrem por fadiga, fluência, corrosão, instabilidade plástica, deformação plástica, corrosão sob tensão, fratura frágil e dúctil. O fenómeno da fratura em sólidos é complexo e dependente de múltiplos parâmetros, incluindo efeitos macroscópicos, mesoscópicos e microscópicos.

A fadiga é o processo de danificação progressiva de materiais sujeitos a ciclos repetitivos de tensão ou deformação. O seu estudo é de extrema importância no projeto de máquinas e estruturas, tendo em conta que uma grande maioria das falhas em serviço ocorrem devido a este fenómeno. Este é constituído por três fases sucessivas, a nucleação ou iniciação da fenda de fadiga, a propagação da fenda e a fase final na qual ocorre a rotura instável. A fenda vai crescendo de acordo com o número de ciclos de carga a que o material se encontra sujeito. Até atingir o valor crítico da razão fenda/carga a propagação denomina-se estável; desse valor em diante, a propagação da fenda é instável, o que leva à rotura catastrófica do componente.

Esse valor de pode ser determinado através do fator de intensidade de tensão generalizado, que é dado por:

$$K = Y\sigma\sqrt{\pi a} \quad (2)$$

sendo  $Y$  um parâmetro que depende do carregamento e da geometria do caso em estudo.  $\sigma$  é o carregamento remoto perpendicular à extremidade da fenda ao qual o componente se encontra sujeito e  $a$  o comprimento da fenda.

Quando um determinado componente se encontra sujeito a uma carga que varia no tempo, consoante o carregamento, este pode não possuir vida infinita.

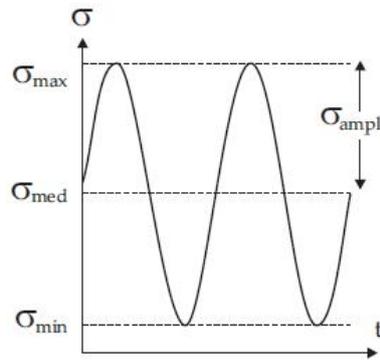


Figura 1 - Carga cíclica.

Este tipo de carregamento é normalmente caracterizado pelo valor de  $\Delta\sigma$ , designado gama de tensão (Figura 1), que representa a diferença entre a tensão máxima e mínima aplicadas no ponto em análise. Assim, caso o material possua uma fenda, este estará sujeito a uma variação do fator de intensidade de tensão,  $\Delta K$ , uma vez que este depende da tensão aplicada. Esta variação encontra-se representada na expressão seguinte:

$$\Delta K = Y\Delta\sigma\sqrt{\pi a} \quad (3)$$

Para além de  $\Delta K$ , também a razão de tensão (ou de carga)  $R$  é necessária para caracterizar o carregamento de fadiga:

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{máx}} \quad (4)$$

A mecânica da fratura é a área da mecânica que estuda os processos que originam a propagação de fendas e outros defeitos que diminuem a resistência dos componentes e estruturas, provocando a rotura do mesmo.

## 2.1. PMMA

Em materiais frágeis a fratura ocorre por rompimento das ligações imediatamente juntas à extremidade da fenda sem que ocorra um arredondamento da mesma; este arredondamento da extremidade da fenda é característico dos materiais dúcteis. O acrílico ou polimetil-metacrilato (PMMA) possui uma pequena capacidade de deformação plástica, considerada insignificante, sendo assim o PMMA caracterizado como um material frágil, (Ayatollahi, Aliha, & Hassani, 2006).

O PMMA é um material termoplástico rígido, transparente e incolor, que pode ser injetado, laminado ou maquinado, tratando-se de um material leve e de resistência específica elevada. É também denominado de vidro acrílico ou simplesmente acrílico. O processo de obtenção deste material é por polimerização do monómero metilmetacrilato. Devido à sua transparência e resistência aos riscos, o PMMA é considerado como uma alternativa ao vidro em múltiplas aplicações. Este é utilizado em condições de serviço exigentes devido à sua capacidade de suportar a abrasão e pela sua resistência aos raios ultravioleta (UV), (de Souza, Yoshimura, Peres, & Schön, 2012; Haddadi, Choupani, & Abbasi, 2016).

A resina de PMMA em forma líquida, embora possua algum PMMA, é formada principalmente pelo monómero Metil Metacrilato (MMA) misturado com uma série de aditivos, de forma a atingir as propriedades requeridas, (Goodrum, 2016).

O PMMA é reconhecido como sendo um material modelar para ensaios de fratura frágil, por se tratar de um material relativamente homogêneo e isotrópico, que fratura de forma frágil à temperatura ambiente. Outra propriedade interessante do PMMA é a transparência apresentada (trata-se de um material amorfo), o que permite a observação direta da região na extremidade da fenda. O PMMA torna-se assim num material ideal para o estudo de ensaios de fratura e para a análise de fratura de materiais frágeis. Uma fenda pode ser facilmente gerada no material através de uma lâmina de barbear ou uma serra, (Ayatollahi *et al.*, 2006).

Numerosas experiências de fratura e modo misto I e II foram realizadas em PMMA utilizando diversos provetes de teste. Erdogan e Sih, (Erdogan & Sih, 1963), usaram um conjunto de placas de PMMA contendo uma fenda central inclinada em relação ao campo de tensão remoto uniforme. Este modelo foi também utilizado por outros investigadores para estudos experimentais subsequentes relacionados com o modo misto. (Ewing, Swedlow, & Williams, 1976) usaram placas retangulares possuindo uma fenda lateral inclinada obtendo os resultados através de uma carga de tensão ou através de um momento fletor. (Maccagno & Knott, 1989) e (He, Cao, & Evans, 1990) utilizaram uma amostra assimétrica de flexão em quatro pontos para medir a resistência à fratura em modo misto para alguns materiais frágeis, incluindo o PMMA. (Maiti & Smith, 1983) usaram placas de PMMA possuindo uma fenda central, carregadas uni axialmente através de pinos ocos próximos das faces da fenda. Neste tipo de amostra pode-se introduzir o modo misto através da mudança da fenda para a direção da carga de tensão, (Ayatollahi

*et al.*, 2006). (Carlos A.C.C. Rebelo, 1987) estudou também o problema da placa contendo uma fenda inclinada tracionada por uma tensão remota na sua dissertação de mestrado, tendo dado origem ao seu paper “Fracture characterization of composites in mixed mode loading”, (C. A. C. C. Rebelo, Marques, & de Castro, 1986).

Para além dos estudos experimentais, existem ainda conceitos teóricos para fratura de modo misto em materiais frágeis, como o critério da Máxima Tensão Tangencial, da Energia Mínima de Deformação ou da Máxima Taxa de Libertação de Energia. Estes conceitos serão abordados mais à frente nesta tese. No entanto, o mais utilizado é o da máxima tensão tangencial devido à sua simplicidade e consistência com os micromodelos propostos para a fratura de materiais frágeis.

### **2.1.1. Pré-fenda**

Existem diversas formas de criar uma pré-fenda num provete de PMMA, operação necessária para análise da propagação da fenda através da mecânica da fratura. De acordo com a literatura, os resultados obtidos para a tenacidade são influenciados pelas diferentes formas como as pré-fendas são obtidas, incluindo a geometria da pré-fenda devido às ferramentas utilizadas, tensões residuais geradas durante o processo, dano da extremidade da fenda e aquecimento da zona da fenda. Para que tal seja controlado existem normas, nomeadamente da ASTM, como a norma ASTM E399 (ASTM, 2011) relativa à tenacidade ou a E647 (ASTM, 2006) relativa à propagação de fendas de fadiga, que devem ser seguidas.

O tipo de processo para criar a pré-fenda difere de acordo com o material a ensaiar. Embora existam vários processos para gerar uma fenda, no que ao PMMA diz respeito, é muitas vezes utilizado o método da lâmina, o qual consiste em através de pequenos impactos sobre uma lâmina (geralmente de barbear) colocada em cima de um entalhe maquinado, criar uma pequena fenda inicial no material, (Haddadi *et al.*, 2016).

Para a criação desta pré-fenda pode-se recorrer a processos como o bater ou pressionar uma lâmina, gerar a pré-fenda por fadiga, entre outros.

## **2.2. Estados planos de tensão e de deformação**

A ocorrência de estado plano de tensão (ept) ou de estado plano de deformação (epd) depende da espessura ( $B$ ). Caso as dimensões da fenda sejam muito inferiores à da placa, então  $\sigma_z=0$ , sendo assim considerado ept. A tenacidade de um dado material diminui com o aumento da espessura até que estabiliza num valor que é independente da espessura, denominado tenacidade em estado plano de deformação  $K_{IC}$  (*plane strain fracture toughness*).

### **2.2.1. Estado plano de tensão**

Considera-se que um material se encontra sob estado plano de tensão quando uma das tensões principais for desprezável, sendo este estado característico das superfícies, uma vez que estas se podem deformar livremente. Aplica-se a geometrias como chapas finas.

### **2.2.2. Estado plano de deformação**

No estado plano de deformação, uma das deformações principais é desprezável. Este estado é característico de componentes com larga secção transversal, espessuras elevadas. Perante o caso de epd a resistência à propagação da fenda passa a ser independente da geometria da amostra.

## **2.3. Tenacidade**

A tenacidade, em engenharia mecânica, é frequentemente estimada como a quantidade de energia que um material é capaz de reter antes da rutura. Esta pode ser calculada através da área de um gráfico tensão-deformação de um dado material, integrando a curva desde a sua origem até ao ponto de rutura.

A tenacidade à fratura linear elástica de um material pode ser determinada através do valor do fator de intensidade de tensão, a partir do qual se dá o início da propagação da fenda. Este fator, distingue, de certa forma, a gravidade das fendas.

Considera-se fratura dúctil quando o ponto de rutura do material é precedido de deformação plástica e fratura frágil quando o material não se deforma plasticamente antes da rutura.

### 2.3.1. Tenacidade à fratura, $K_c$

A tenacidade à fratura,  $K_c$ , representa o valor crítico de  $K$ , sendo uma propriedade do material. Quando  $K < K_c$  estamos perante um valor tolerável de  $K$  do ponto de vista do material. Para  $K > K_c$  estamos perante o fenómeno de rutura por propagação da fenda.

### 2.3.2. Tenacidade à fratura em estado plano de deformação, $K_{Ic}$

A determinação da tenacidade  $K_{Ic}$  de um material é realizada recorrendo a testes normalizados, através de diversos tipos de provetes. Dois deles são apresentados na Figura 2. Os provetes devem possuir uma fenda inicial que, no caso em estudo, pode ser produzida recorrendo a uma lâmina pressionada num entalhe em V, e sujeita a um impacto. Medindo a carga a partir da qual a fenda começa a propagar-se, a tenacidade à fratura pode ser determinada através da relação entre o fator de intensidade de tensão, a carga e o comprimento da fenda, (Gross & Seelig, 2011).

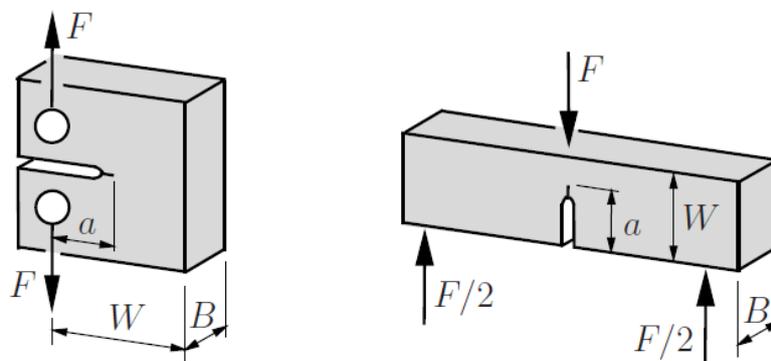


Figura 2 - Provetes de teste a) *compact tension* (CT) b) *3-point bending* (3PB), (Gross & Seelig, 2011).

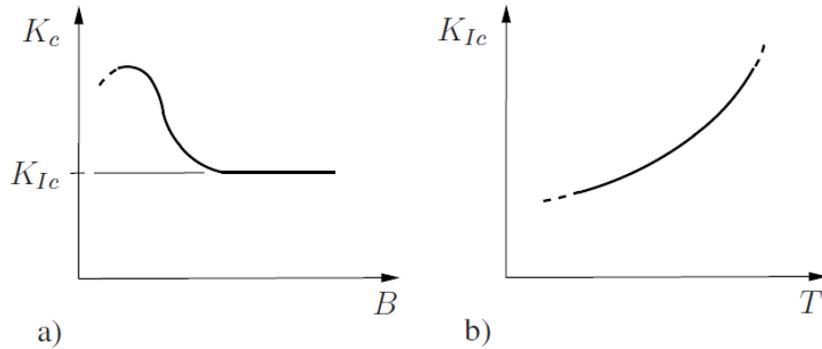


Figura 3 - a) Influência da espessura, b) Influência da temperatura na tenacidade à fratura, (Gross & Seelig, 2011).

De forma a obter valores de resistência à fratura que possam ser considerados parâmetros do material independentes da geometria, os provetes devem satisfazer os requisitos da mecânica da fratura linear elástica. Consequentemente, a zona plástica deve ser pequena quando comparada com todos os parâmetros de comprimento que sejam relevantes. Assim, a espessura mínima do provete é dada pela expressão, segundo a norma ASTM E399:

$$B \geq 2.5 \left( \frac{K_{Ic}}{\sigma_{ced}} \right)^2 \quad (5)$$

De notar que a expressão acima é usada na norma ASTM E399, (ASTM, 2011), que diz respeito a materiais metálicos, mas não obstante esta sua origem é convenientemente utilizada noutros materiais também.

O aumento da temperatura torna o material mais dúctil, o que por sua vez faz aumentar a tenacidade à fratura do mesmo.

Dentro destas circunstâncias, é assegurada a predominância do estado plano de deformação que prevalece na região próxima da frente da fenda. Na Figura 3 encontra-se representada a variação do fator de intensidade de tensão (FIT) com a espessura. A diminuição de  $K_{Ic}$  deve-se essencialmente à variação de estado de tensão, de ept para epd.

A tenacidade à fratura de um material depende fortemente de um número de parâmetros relevantes, como as características da sua microestrutura (ex. tamanho dos grãos), o seu historial de solicitações, tratamento térmico ou ambiente no qual se encontra.

## 2.4. Fator de intensidade de tensão equivalente

O FIT equivalente ( $K_{eq}$ ) é uma variável muito utilizada para relacionar o comportamento de uma fenda sujeita a um carregamento em modo misto.

### 2.4.1. Modelo de Irwin

Segundo (Irwin, 1957) o fator de tensão equivalente na extremidade de uma fenda pode ser dado por:

$$K_{eq} = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2} \quad (6)$$

### 2.4.2. Modelo da taxa máxima de libertação de energia

De acordo com (Fajdiga, 2015) o fator de intensidade equivalente na extremidade de uma fenda pode ser obtido por:

$$\begin{aligned} K_{eq} &= \sqrt{EG} \quad (\text{ept}) \\ K_{eq} &= \sqrt{\frac{EG}{(1 - \nu^2)}} \quad (\text{epd}) \end{aligned} \quad (7)$$

Utilizando as expressões que relacionam  $G$  com os FIT, vem:

$$\begin{aligned} K_{eq} &= \sqrt{(K_I^2 + K_{II}^2) + (1 + \nu)K_{III}^2} \quad (\text{ept}) \\ K_{eq} &= \sqrt{(K_I^2 + K_{II}^2)(1 + \nu^2) + (1 + \nu)K_{III}^2} \quad (\text{epd}) \end{aligned} \quad (8)$$

### 2.4.3. Modelo de Richard

(Richard *et al.*, 2005) apresenta a seguinte expressão para definir o fator de intensidade de tensão equivalente:

$$K_{eq} = \frac{K_I}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{K_I^2 + 4(\alpha_1 K_{II})^2} \quad (9)$$

O crescimento instável da fenda ocorre quando  $K_{eq} > K_{Ic}$ , para modo I. (Richard *et al.*, 2005) também afirma que se o parâmetro do material ( $\alpha_1$ ) for igual a 1.155, a aproximação do limite da curva de fratura do “*Maximum Tangential Stress*” (MTS) é excelente.

Num trabalho mais recente, (Richard & Sander, 2016), o FIT equivalente para condições de carregamento em modo misto é definido como:

$$K_{eq} = \frac{K_I}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{K_I^2 + 5.336K_{II}^2} \quad (10)$$

#### 2.4.4. Modelo de Tanaka

O modelo proposto por (Tanaka, 1974) é o seguinte:

$$K_{eq} = (K_I^4 + 8K_{II}^4)^{\frac{1}{4}} \quad (11)$$

### 2.5. Propagação de fendas em modo misto I-II

As regiões fissuradas de estruturas encontram-se na prática sujeitas a mais do que um modo de carregamento, sendo neste ponto tratado o carregamento em modo misto I-II. Na Figura 4 está representado o caso da fenda inclinada.

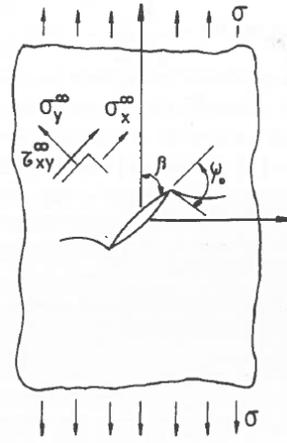


Figura 4 -Placa sujeita a uma sollicitação remota  $\sigma$  e contendo uma fenda de comprimento  $2a$ , (C. Moura Branco, Fernandes, & de Castro, 1999)

De acordo com a análise de Irwin-Westergaard, os fatores de intensidade de tensão em modo I e II para uma placa infinita com fenda central sujeita a uma tensão remota (normal ou tangencial) são dados, respectivamente, por, *e.g.* (Arteiro & de Castro, 2014):

$$K_I = \sigma^\infty \sqrt{\pi a} \quad (12)$$

$$K_{II} = \tau^\infty \sqrt{\pi a} \quad (13)$$

em que  $\sigma^\infty$  e  $\tau^\infty$  são as componentes normal e paralela à fenda, do estado de tensão remoto.

Em modo misto I e II, o estado de tensão na região próxima da extremidade de uma fenda é, em coordenadas polares ( $\varphi = 0$  é o plano da fenda):

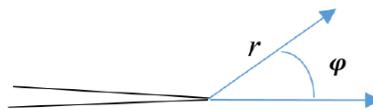


Figura 5 - Representação do raio e ângulo na extremidade de uma fenda para determinação do estado de tensão em coordenadas polares.

$$\begin{cases} \sigma_\varphi = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\varphi}{2} (3 - \cos \varphi) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{2} \sin \frac{\varphi}{2} (1 - 3\cos \varphi) \\ \sigma_r = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} (1 + \cos \varphi) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{3}{2} \sin \frac{\varphi}{2} (1 + \cos \varphi) \\ \tau_{r\varphi} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{2} \sin \frac{\varphi}{2} (1 + \cos \varphi) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} (1 - 3\cos \varphi) \end{cases} \quad (14)$$

De acordo com (Erdogan & Sih, 1963) a fenda propaga-se na direção perpendicular à tensão principal máxima, ou seja, percorre o caminho que oferece menor resistência,

não estando assim confinada ao seu plano inicial. Caso se trate de um material isotrópico e homogêneo, a fenda irá se propagar de forma a maximizar a taxa de libertação de energia, (Anderson, 2005). Esta pode ser determinada impondo:

$$\tau_{r\varphi} = f(K_I, K_{II}, r, \varphi) = 0 \quad (15)$$

dado que no plano perpendicular à tensão principal máxima a tensão de corte será nula.

Um dos critérios mais utilizados para a direção de propagação inicial da fenda é o MTS que afirma que a fenda cresce na direção perpendicular à máxima tensão principal, *e.g.* (Pook, 2017). Um outro critério também muito utilizado é o “*Maximum Energy Release Rate*” (MERR) que indica que a fenda se propaga na direção da taxa máxima de libertação de energia e que esta ocorre quando a densidade de energia de deformação é menor.

Quando se usa um critério de energia, o rácio total de energia libertada é dada por, (Broek, 1982):

$$G_t = G_I + G_{II} + G_{III} \quad (16)$$

A fratura ocorre quando  $G_t$  é superior à capacidade de absorção de energia do material. Para modo misto I-II,  $G_{III} = 0$ ,  $G_I = (1 - \nu^2)K_I^2/E$  e  $G_{II} = (1 - \nu^2)K_{II}^2/E$ . Assim, a condição de fratura será:

$$K_I^2 + K_{II}^2 = K_{Ic}^2 \quad (17)$$

Para modo I  $K_{II} = 0$ , ou  $K_I^2 = K_{Ic}^2$  e para modo II  $K_I = 0$ , ou  $K_{II}^2 = K_{IIc}^2$ . A equação (17) prevê desta forma que  $K_{II} = K_{Ic}$ , sendo a curva de fratura em modo misto um círculo de raio  $K_{Ic}$ . Na prática,  $K_{Ic} \neq K_{IIc}$ , pelo mais provável é que a condição de fratura se pareça com uma elipse, dada por:

$$\left(\frac{K_I}{K_{Ic}}\right)^2 + \left(\frac{K_{II}}{K_{IIc}}\right)^2 = 1 \quad (18)$$

Este critério assenta na premissa de que a fenda se propaga no plano da fenda original. Tal é necessário uma vez que as expressões de  $G$  e a sua relação com  $K$  assentam nesse principio, (Broek, 1982). Nos ensaios experimentais em modo misto, é usualmente observado que a fenda se propaga de acordo com um ângulo que é função do ângulo original da fenda, invalidando assim a expressão padrão de  $G$ . Estas duas abordagens são apresentadas na Figura 6 sobe a forma gráfica.

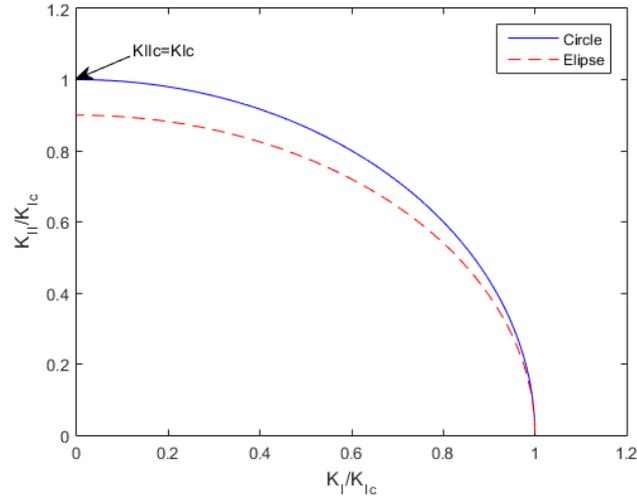


Figura 6 - Fratura em modo misto<sup>1</sup>.

### 2.5.1. Critério de Erdogan/Sih

As previsões de Erdogan e Sih originaram o MTS, no qual a propagação da fenda tem início com um ângulo  $\varphi = \varphi_0$ , Figura 4, perpendicular à máxima tensão tangencial, (Richard, Fulland, & Sander, 2005). O ângulo de deflexão é dado por:

$$K_I \sin \varphi_0 + K_{II} (3 \cos \varphi_0 - 1) = 0 \quad (19)$$

que dá origem a:

$$\varphi_0 = -\arcsin \left( \frac{3K_{II}^2 + K_I \sqrt{K_I^2 + 8K_{II}^2}}{K_I^2 + 9K_{II}^2} \right) \quad (20)$$

A fratura dá-se quando:

$$\sigma_\varphi = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad (21)$$

Assim, combinando as equações (14) e (21), o critério de fratura toma a seguinte forma:

$$K_I \left( 3 \cos \frac{\varphi_0}{2} + \cos \frac{3\varphi_0}{2} \right) - 3K_{II} \left( \sin \frac{\varphi_0}{2} + \sin \frac{3\varphi_0}{2} \right) = 4K_{Ic} \quad (22)$$

<sup>1</sup> Os valores apresentados neste gráfico são meramente indicativos, pelo que não devem ser interpretados como verdade absoluta. Na verdade, o valor de  $K_{II}/K_{Ic}$  pode variar, sendo inclusive  $K_{IIc} > K_{Ic}$ , em alguns casos.

A Figura 7 representa o local de fratura em modo misto de acordo com o critério da máxima tensão tangencial. Para modo I e tendo em conta as equações (20) e (22), temos que  $K_I = K_{IC}$  e  $\varphi_0 = 0$ . Para modo II temos que:

$$\varphi_0 = -\arccos \frac{1}{3} = -70.6^\circ \quad (23)$$

$$K_{IIc} = \sqrt{\frac{3}{4}} K_{IC} \quad (24)$$

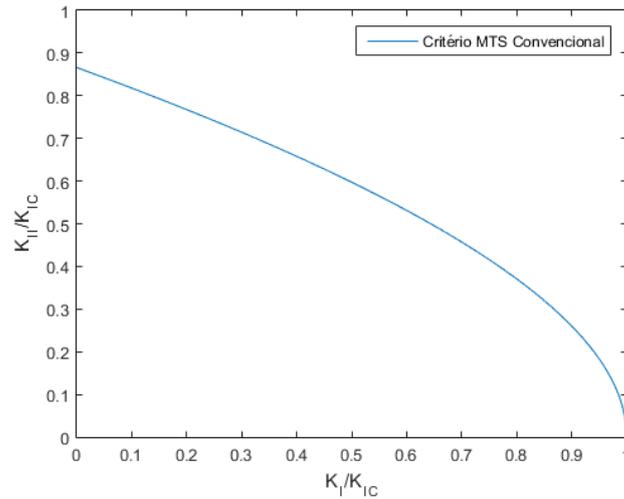


Figura 7 –  $K_I$  e  $K_{II}$  para fratura em modo misto de acordo com o critério MTS.

$T$ -stress é a designação da tensão paralela à extremidade da fenda, segundo a direção  $x$ . De acordo com (M. L. Williams, 1957), a tensão linear-elástica tangencial à extremidade da fenda pode ser expressa em coordenadas polares  $r$  e  $\theta$  como:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} [K_I(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2})] + T \cos^2 \theta + O(\sqrt{r}) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} [K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta] + T \sin^2 \theta + O(\sqrt{r}) \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} [K_I \sin \theta + K_{II}(3 \cos \theta - 1)] - T \sin \theta \cos \theta + O(\sqrt{r}) \end{aligned} \quad (25)$$

onde os termos de alta ordem  $O(\sqrt{r})$  são ignorados perto da extremidade da fenda, uma vez que estes contribuem muito menos que os restantes termos. Os parâmetros  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $T$  dependem da geometria e carregamento, podendo variar de forma considerável para diferentes tipos de provetes, (Smith, Ayatollahi, & Pavier, 2000; Wang, Zhu, & Liu, 2016).

O conceito de *T-stress* será discutido com mais pormenor na secção 2.8.3. Para valores abaixo da curva representada estamos perante valores de *T-stress* positivos, enquanto para valores acima da curva a tensão *T-stress* assume valores negativos, (Smith et al., 2000).

O critério generalizado MTS leva em consideração o efeito do *T-stress*, pelo que pode ser usado para qualquer geometria e tipo de carregamento em modo misto. É interessante notar que parece ter sido o último caso (valores acima da curva) o verificado por (Erdogan & Sih, 1963), já que os seus pontos estão quase todos acima desta curva (ver figura 6 do paper citado).

Segundo (Carlos A.C.C. Rebelo, 1987), os valores de  $K_I/K_{Ic}$  e  $K_{II}/K_{Ic}$  podem ser obtidos através das seguintes expressões, Figura 8:

$$\frac{K_I}{K_{Ic}} = \frac{\sigma_c}{\sigma_{Ic}} \sin^2 \beta \quad (26)$$

$$\frac{K_{II}}{K_{Ic}} = \frac{\sigma_c}{\sigma_{Ic}} \sin \beta \cos \beta \quad (27)$$

onde  $K_{Ic}$  representa o valor crítico de  $K_I$  para a situação em que a fenda é carregada em modo I, ou seja,  $\beta=90^\circ$ . O quociente  $\sigma_{Ic}/\sigma_c$  é dado pela expressão seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{Ic}}{\sigma_c} = \sin \beta \cos \left( \frac{\varphi_0}{2} \right) \left[ \sin \beta \cos^2 \left( \frac{\varphi_0}{2} \right) - \frac{3}{2} \cos \beta \sin \varphi_0 \right] \\ + 2\alpha^2 (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) \sin^2 \varphi_0 \end{aligned} \quad (28)$$

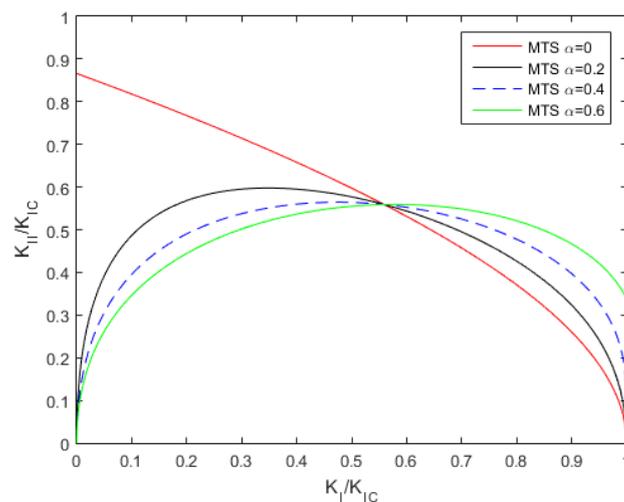


Figura 8 - Interação crítica dos FIT em modo I e II, normalizados com o valor crítico do FIT em modo I puro, e.g. (Carlos A.C.C. Rebelo, 1987).

Sendo  $\alpha = r_o/a$ , onde  $r_o$  representa uma pequena distância à extremidade da fenda, (Carlos A.C.C. Rebelo, 1987).

No seu artigo, (Smith *et al.*, 2000) apresenta um gráfico semelhante ao representado na Figura 9, no qual demonstra as condições de fratura em modo misto para diferentes valores de  $\beta\alpha$ . Os valores de  $\beta\alpha=0$  dizem respeito à solução convencional proposta por (Erdogan & Sih, 1963). Verifica-se que a tenacidade à fratura em modo misto, aumenta para valores negativos de  $\beta\alpha$  e diminui para valores positivos de  $\beta\alpha$ . Além disso, verifica-se que para modo II o valor de  $T$ -stress tem bastante influência na tenacidade à fratura de modo II, (Smith *et al.*, 2000).

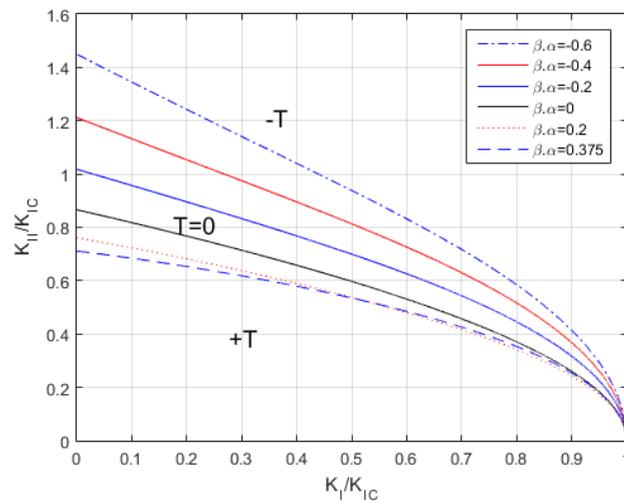


Figura 9 –  $K_I$  e  $K_{II}$  para fratura em modo misto com base no critério MTS.

Williams em (J. G. Williams, 1980), apresenta este problema como se segue:

Para o caso da fenda inclinada,  $K$  é dado por:

$$K_I = \sigma \sin^2 \beta \sqrt{\pi a} \quad (29)$$

$$K_{II} = \sigma \sin \beta \cos \beta \sqrt{\pi a} \quad (30)$$

Quando combinadas as equações (29) e (30) com a equação (19), vem:

$$\cot \beta = \frac{-\sin \varphi_0}{3 \cos \varphi_0 - 1} \quad (31)$$

Esta encontra-se representada na Figura 10. A reta apresentada nessa mesma Figura, é traçada na perpendicular à tensão remota.

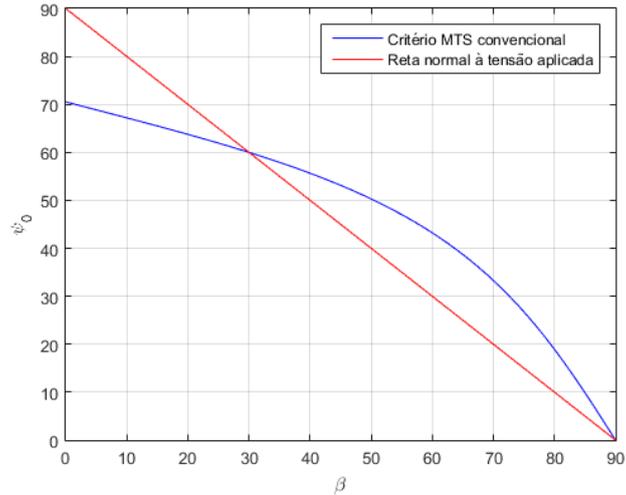


Figura 10 - Propagação da fenda no caso da fenda inclinada, *e.g.* (J. G. Williams, 1980).

Quando  $0 < \beta < \frac{\pi}{2} \varphi_0$  é negativo e a fenda propaga-se como as curvas da Figura 11 demonstram, *e.g.* (de Castro, 2017). Através da equação (19) a relação entre  $K_I$  e  $K_{II}$  com o ângulo  $\varphi_0$  pode ser conseguida plotando  $\frac{K_I}{K_{II}}$  *vs*  $\varphi_0$  quando  $\frac{K_I}{K_{II}} < 1$  e  $\frac{K_{II}}{K_I}$  *vs*  $\varphi_0$  quando  $\frac{K_I}{K_{II}} > 1$ . O valor de  $\varphi_0$  para o qual ocorre esta transição é obtido resolvendo a equação (32).

$$\frac{K_I}{K_{II}} = 1 \rightarrow \varphi = -0.92729 \text{ [rad]} = -53.13^\circ \quad (32)$$

O resultado para o critério de tensão tangencial máxima é representado graficamente pelas curvas contínuas na Figura 11.

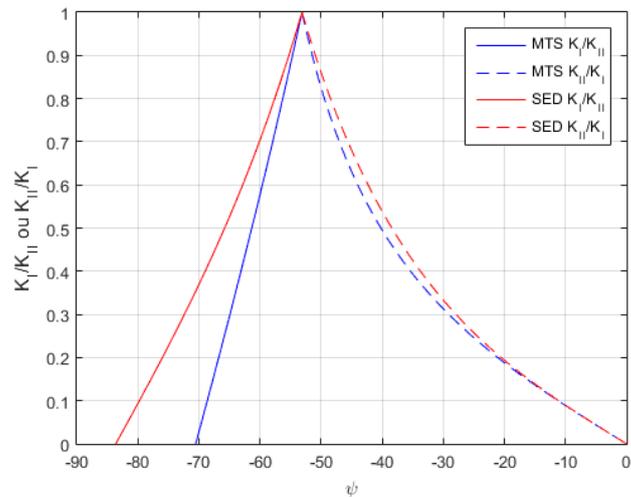


Figura 11 – Relação entre  $K_I/K_{II}$  e  $\varphi_0$ , (de Castro, 2017) e (Broek, 1982), p.362.

Quando se usam soluções singulares para as tensões, a direção de máxima tensão circunferencial é uma direção perpendicular, ou seja, a equação (31) pode ser obtida igualando a terceira expressão de (14) a zero, (Carlos A.C.C. Rebelo, 1987).

(J. G. Williams & Ewing, 1984) introduziram uma modificação no critério MTS que, conjuntamente com a correção de (Finnie & Saith, 1973), exigem que a tensão  $\sigma_\varphi$  seja avaliada tendo por base os dois primeiros termos da primeira expressão (14).

O gráfico apresentado na Figura 12 é discutido por (Carlos A.C.C. Rebelo, 1987) na sua tese de mestrado e por (J. G. Williams & Ewing, 1984). Neste é possível observar as curvas que relacionam o ângulo de fratura,  $\varphi_0$ , com o ângulo de inclinação da fenda,  $\beta$ . As curvas representadas dizem respeito à situação em que a carga aplicada a uma placa com fenda central inclinada é de tração. Este pode ser obtido através da variação do parâmetro  $\alpha$  na seguinte expressão:

$$\left[ 1 + (2\alpha)^{1/2} \frac{16\sin\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)}{3\tan\varphi_0} \right] \tan^2\beta - \left[ \frac{1 - 3\cos\varphi_0}{\sin\varphi_0} \right] \tan\beta - (2\alpha)^{1/2} \frac{16\sin\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)}{3\tan\varphi_0} = 0 \quad (33)$$

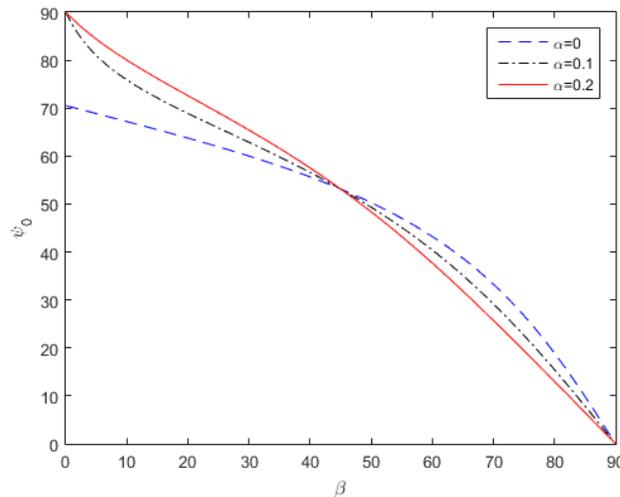


Figura 12 – Ângulo de fratura em função do ângulo de inclinação da fenda, *e.g.* (Carlos A.C.C. Rebelo, 1987; Smith et al., 2000).

Verifica-se ainda que em função da distância à extremidade da fenda, a curva representada, aproxima-se da reta perpendicular à tensão remota, demonstrada na Figura 10.

## 2.5.2. Critério Sih

Sih propôs uma teoria alternativa, baseada na densidade de energia de deformação (SED), na qual a fenda se propaga na direção de menor densidade de energia  $S_{min}$ , tornando-se instável quando  $S_{min}$  toma o valor  $S_{min,c}$ , valor este que representa o limite do material, *e.g.* (Gdoutos, 2005), (Sih, 1974). A determinação da direção de propagação da fenda envolve a resolução de  $\partial S / \partial \varphi = 0$ , onde, (Perez, 2017):

$$S = a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_I K_{II} + a_{22}K_{II}^2 \quad (34)$$

$$k_i = \frac{K_i}{\sqrt{\pi}} \quad (35)$$

As constantes  $a_{ij}$  são:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{16\mu} [(1 + \cos\varphi)(\kappa - \cos\varphi)] \\ a_{12} &= \frac{1}{16\mu} \sin\varphi(2\cos\varphi - \kappa + 1) \end{aligned} \quad (36)$$

$$a_{22} = \frac{1}{16\mu} [(\kappa + 1)(1 - \cos\varphi) + (1 + \cos\varphi)(3\cos\varphi - 1)]$$

sendo  $\mu$  o módulo<sup>2</sup> de corte e  $\kappa$ :

$$\begin{cases} \kappa = 3 - 4\nu, & \text{para epd} \\ \kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}, & \text{para ept} \end{cases} \quad (37)$$

Derivando em ordem a  $\varphi$ :

$$\frac{da_{11}}{d\varphi} = \frac{1}{16\mu} [2\sin\varphi\cos\varphi + (1 - \kappa)\sin\varphi] \quad (38)$$

$$\frac{da_{12}}{d\varphi} = \frac{1}{16\mu} [2\cos 2\varphi + (1 - \kappa)\cos\varphi] \quad (39)$$

$$\frac{da_{22}}{d\varphi} = \frac{1}{16\mu} [(1 - \kappa)\sin\varphi - 6\sin\varphi\cos\varphi] \quad (40)$$

Impondo  $\partial S / \partial \varphi = 0$ ,  $k_i$  pode ser substituído por  $K_i$ , sendo que a constante  $1/16\mu$  desaparece, resultando a seguinte equação, *e.g.* (Gdoutos, 2005), (Perez, 2017):

---

<sup>2</sup> Frequentemente designado pela letra  $G$ ; esta notificação pode ser inconveniente em Mecânica da Fratura, dado o uso da letra  $G$  para o parâmetro taxa de libertação de energia.

$$[2\cos\varphi - (\kappa - 1)]\sin\varphi K_I^2 + 2[2\cos 2\varphi - (\kappa - 1)\cos\varphi]K_I K_{II} + [8\kappa - 1 - 6\cos\varphi)\sin\varphi]K_{II}^2 = 0 \quad (41)$$

Por fim, dividindo por  $K_{II}^2$ ,

$$[2\cos\varphi - (\kappa - 1)]\sin\varphi \frac{K_I^2}{K_{II}^2} + 2[2\cos 2\varphi - (\kappa - 1)\cos\varphi] \frac{K_I}{K_{II}} + [(\kappa - 1 - 6\cos\varphi)\sin\varphi] = 0 \quad (42)$$

A equação (42) tratada em Matlab origina o gráfico da Figura seguinte.

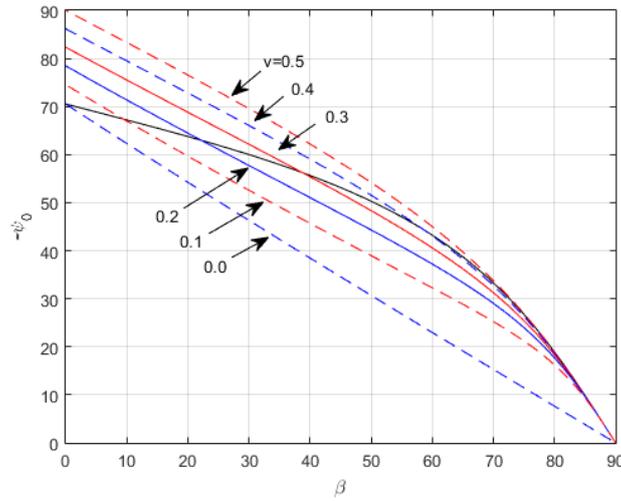


Figura 13 – Variação do ângulo de propagação da fenda  $\psi_0$  vs o ângulo de inclinação da fenda central de uma placa tracionada remotamente, sob estado plano de tensão.

A linha a preto representa o critério MTS acima descrito. As restantes demonstram a influência que o coeficiente de Poisson possui no ângulo de propagação da fenda em função da orientação inicial da mesma, para o critério SED.

Este critério pode ainda ser apresentados sob a forma  $K_I/K_{IC}$  vs  $K_{II}/K_{IC}$ . Para tal, foram aplicadas as expressões apresentadas por (Ranji, 2015), expostas de seguida.

Considerando a equação (34) na forma:

$$16\pi\mu S = a_{11}K_I^2 + a_{12}K_I K_{II} + a_{22}K_{II}^2 \quad (43)$$

as constantes  $a_{ij}$  vêm:

$$\begin{aligned} a_{11} &= [(1 + \cos\varphi)(\kappa - \cos\varphi)] \\ a_{12} &= 2\sin\varphi(2\cos\varphi - \kappa + 1) \end{aligned} \quad (44)$$

$$a_{22} = [(\kappa + 1)(1 - \cos\varphi) + (1 + \cos\varphi)(3\cos\varphi - 1)]$$

Derivando a equação (43) em ordem a  $\varphi$ :

$$16\pi\mu \frac{\partial S}{\partial \varphi} = \sin \varphi (1 - \kappa + 2 \cos \varphi)K_I^2 + [(\kappa - 1) \sin \varphi - 3 \sin 2\varphi]K_{II}^2 \quad (45)$$

$$+ (4 \cos 2\varphi - 2(\kappa - 1) \cos \varphi)K_I K_{II}$$

Igualando a expressão anterior a 0, o ângulo  $\varphi_0$  é determinado. Substituindo o valor de  $\varphi_0$  na equação (43) é obtido o valor de  $S$ . Equacionando  $S_{min}$  com  $S_{cr}$  obtém-se a seguinte expressão para  $K_{eq}$ :

$$K_{eq}^2 = \frac{1}{2(\kappa - 1)} [a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_I K_{II} + a_{22}K_{II}^2] \quad (46)$$

Considerando  $m = K_I/K_{II}$ , aquando da instabilidade as seguintes relações são efetivadas:

$$\left(\frac{K_I}{K_{Ic}}\right)^2 = \frac{2(\kappa - 1)m^2}{a_{11}m^2 + a_{12}m + a_{22}} \quad (47)$$

$$\left(\frac{K_{II}}{K_{Ic}}\right)^2 = \frac{2(\kappa - 1)}{a_{11}m^2 + a_{12}m + a_{22}} \quad (48)$$

Implementando as equações (44), (47) e (48) em Matlab, considerando  $\nu = 0.3$  e o ângulo ( $\varphi_0$ ) obtido da equação (45) igualada a zero, é possível obter o seguinte gráfico:

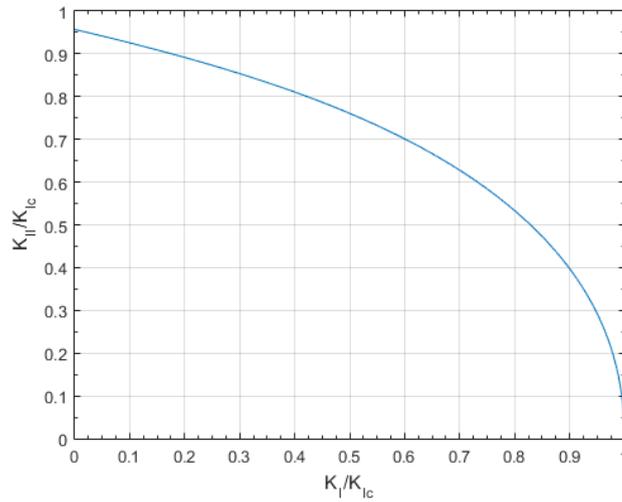


Figura 14 - Critério SED para fratura em modo misto I-II.

Na Figura 13 foi demonstrado como o ângulo de propagação da fenda varia de acordo com o valor do coeficiente de Poisson, assim, a Figura 15 demonstra como o valor de  $K_{II}/K_{Ic}$  varia de acordo com essa mesma variação de  $\nu$ .

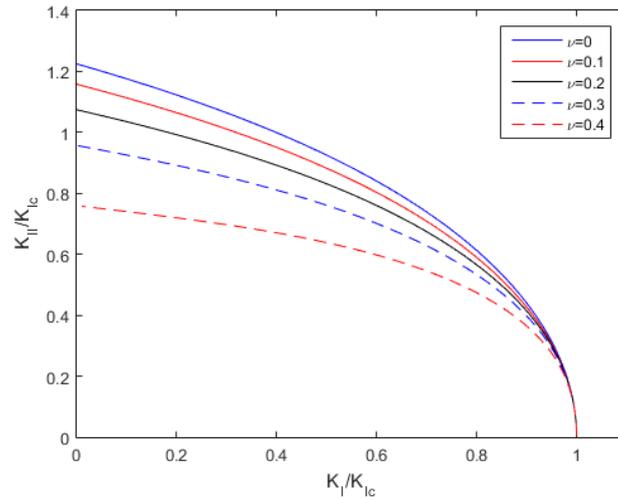


Figura 15 - Critério SED para fratura em modo misto I-II.

Verificando-se que o valor de  $K_{II}/K_{Ic}$  diminui com o aumento do valor do coeficiente de Poisson.

### 2.5.3. Critério Richard

De acordo com (Richard et al., 2005) o fator de intensidade de tensão equivalente é dado pela equação (9), sendo que a propagação da fenda em modo I ocorre para valores de  $K_{eq} > K_{Ic}$ . Este afirma que o ângulo de propagação da fenda pode ser determinado através da seguinte expressão:

$$\varphi_0 = \pm \left[ 155.5^\circ \frac{|K_{II}|}{|K_I| + |K_{II}|} \right] - 83.4^\circ \left[ \frac{|K_{II}|}{|K_I| + |K_{II}|} \right]^2 \quad (49)$$

Assim, um esforço de corte positivo produz um fator de intensidade positivo em modo II e um ângulo de propagação da fenda negativo e vice-versa, (Figura 16).

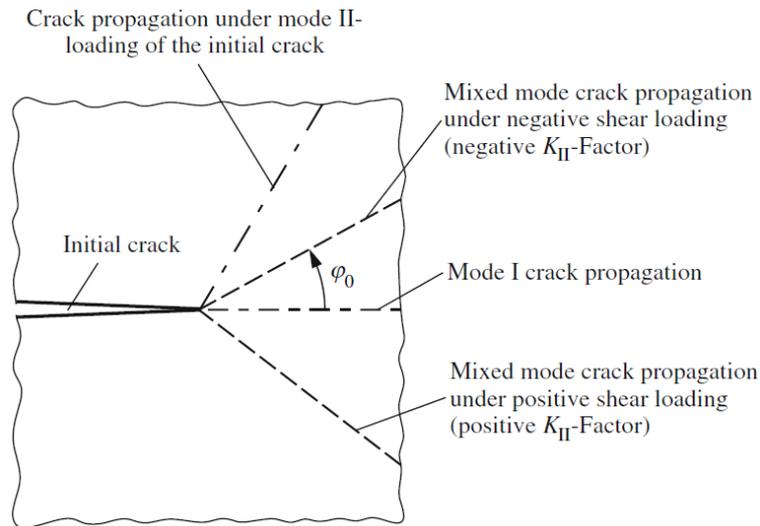


Figura 16 - Ângulo de propagação da fenda sujeita a um carregamento em modo misto I-II, (Richard & Sander, 2016).

Num trabalho mais recente, (Richard & Sander, 2016) afirmou que o ângulo de propagação da fenda em modo misto I-II, pode ser obtido por:

$$\varphi_0 = \pm \left[ 140 \frac{|K_{II}|}{|K_I| + |K_{II}|} - 70^\circ \left( \frac{|K_{II}|}{|K_I| + |K_{II}|} \right)^2 \right] \quad (50)$$

## 2.6. Fratura em modo misto – flexão em 4 pontos

O ensaio assimétrico de flexão em 4 pontos permite o estudo do comportamento de um provete sujeito unicamente a modo II ou modo misto I-II.

Considerando uma carga assimétrica, Figura 17, é possível medir a tenacidade à fratura em modo II ( $K_{IIc}$ ) e os fatores  $K_I$  e  $K_{II}$  através da variação da distância de aplicação da carga ao plano da pré-fenda ( $S_0$ ).

Para  $S_0 = 0$  (força aplicada no plano da fenda) o momento fletor é nulo existindo apenas esforço de corte; nesta situação estamos perante modo II puro.

Para a análise de modo misto, a variação de  $S_0$  fará aumentar a componente de modo I, resultando em várias combinações de esforço de corte e momento fletor na extremidade da fenda. De acordo com (Wang et al., 2016), os FIT para modo misto são dados por:

$$K_I = \frac{\eta Q \sqrt{\pi a}}{Wt} Y_I \quad (51)$$

$$K_{II} = \frac{Q \sqrt{\pi a}}{Wt} Y_{II} \quad (52)$$

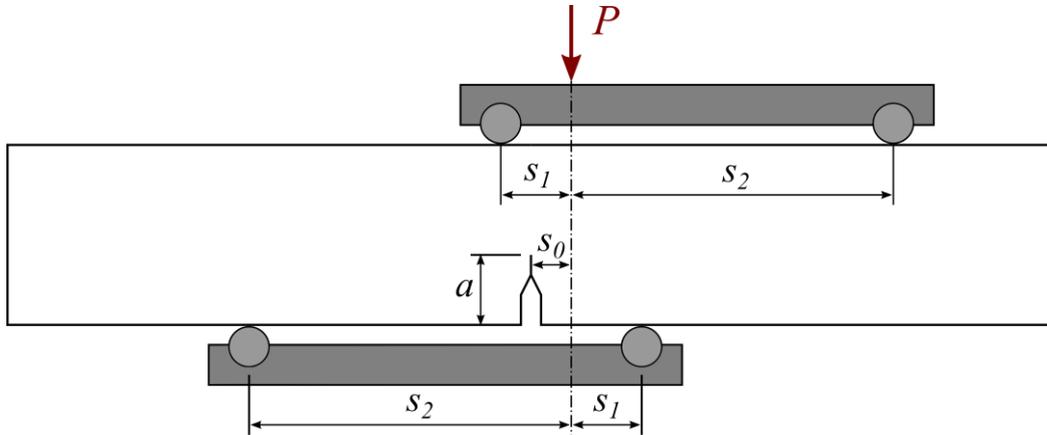


Figura 17 – Flexão em 4 pontos, provete sujeito a um carregamento assimétrico.

onde  $Q$  representa o esforço de corte na extremidade da fenda e  $Q = \frac{s_2 - s_1}{s_2 + s_1} P$ , sendo  $P$  a carga aplicada.  $W$ ,  $t$  e  $a$  representam a altura, largura e o comprimento da fenda, respetivamente. A distância relativa entre o ponto de aplicação da carga e o plano da pré-fenda é dado por  $\eta = \frac{s_0}{W}$ .  $Y_I$  e  $Y_{II}$  são os fatores geométricos, funções do comprimento relativo da fenda  $\frac{a}{W}$ , podendo ser obtidos, analisando a Figura 18, (Wang *et al.*, 2016).

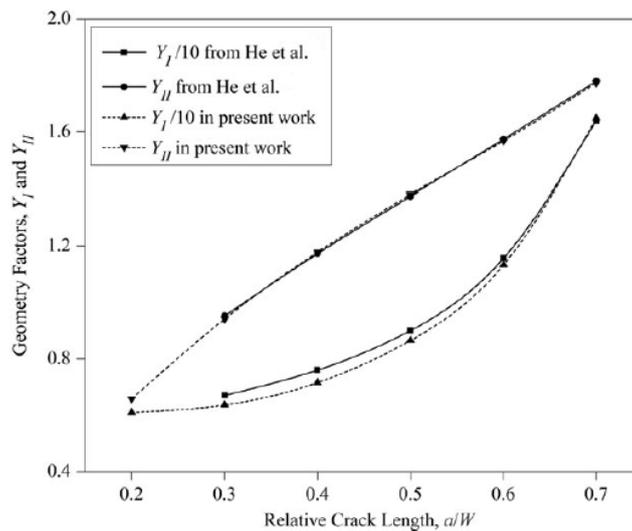


Figura 18 – Fatores geométricos  $Y_I$  e  $Y_{II}$  em modo misto, (Wang *et al.*, 2016).

Os fatores de intensidade de tensão, de acordo com (He & Hutchinson, 2000) podem também ser obtidos da seguinte forma:

$$K_I = \frac{6(c - c_0)Q}{W^2 t} \sqrt{\pi a} F_I \left( \frac{a}{W} \right) \quad (53)$$

$$K_{II} = \frac{\eta Q \left( \frac{a}{W} \right)^{1.5}}{W^{0.5} t \left( 1 - \frac{a}{W} \right)^{0.5}} F_{II} \left( \frac{a}{W} \right) \quad (54)$$

onde,

$$F_I \left( \frac{a}{W} \right) = \sqrt{\frac{2W}{\pi a} \tan \frac{\pi a}{W} \frac{0.923 + 0.199 \left( 1 - \sin \frac{\pi a}{2W} \right)^4}{\cos \frac{\pi a}{W}}} \quad (55)$$

ou

$$F_I \left( \frac{a}{W} \right) = 1.122 - 1.121 \left( \frac{a}{W} \right) + 3.740 \left( \frac{a}{W} \right)^2 + 3.873 \left( \frac{a}{W} \right)^3 - 19.05 \left( \frac{a}{W} \right)^4 + 22.55 \left( \frac{a}{W} \right)^5 \quad (56)$$

$$F_{II} \left( \frac{a}{W} \right) = 7.264 - 9.37 \left( \frac{a}{W} \right) + 2.74 \left( \frac{a}{W} \right)^2 + 1.87 \left( \frac{a}{W} \right)^3 - 1.04 \left( \frac{a}{W} \right)^4 \quad (57)$$

Segundo (He & Hutchinson, 2000)  $c_0$  e  $\eta$  são fatores de correção de  $\left( \frac{a}{W} \right)$ ,  $\left( \frac{c}{W} \right)$ ,  $\left( \frac{S_1}{W} \right)$  e  $\left( \frac{S_2}{W} \right)$ . Note-se que as equações (56) e (57) são apenas válidas para  $0 \leq \left( \frac{a}{W} \right) \leq 0.7$  e  $0 \leq \left( \frac{a}{W} \right) \leq 1$ , respetivamente.

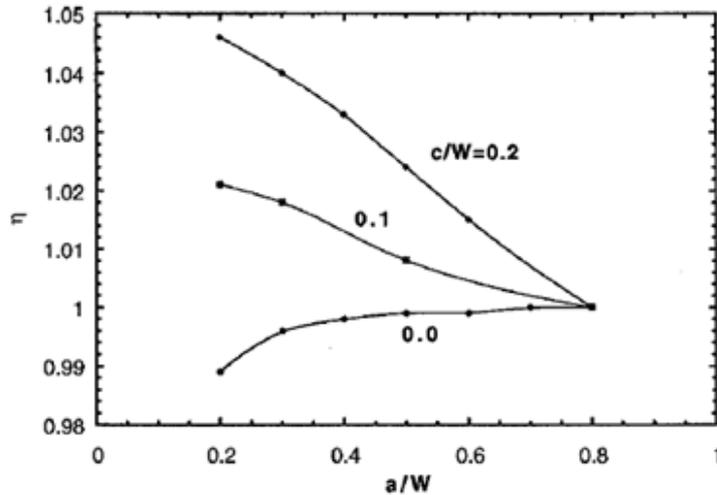


Figura 19 – Correção para o FIT em modo II.

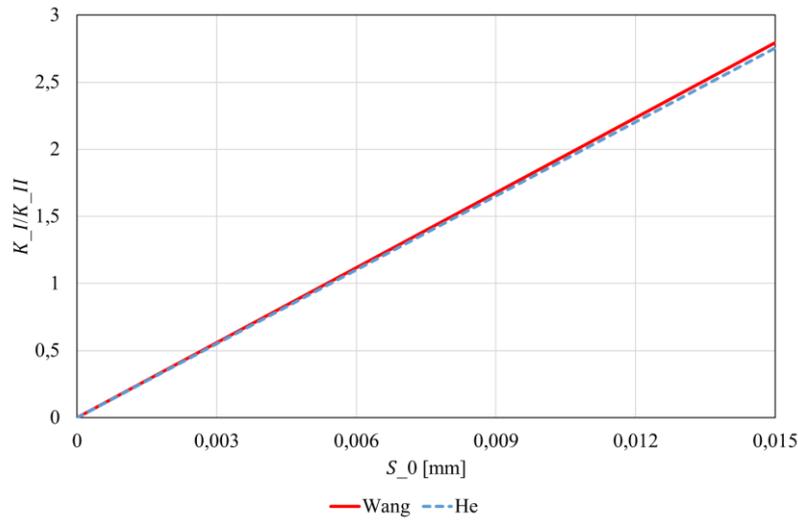


Figura 20 – FIT adimensional vs distância da carga ao plano da fenda.

Na Figura 20 e na Figura 21 é visível a relação do FIT adimensional ( $K_I/K_{II}$ ) e  $\beta = (\text{atan}(K_I/K_{II}))$ , tendo em conta os seguintes valores:  $S_1 = 85$  mm;  $S_2 = 15$  mm;  $P = 40000$  N;  $a = 10$  mm;  $W = 35$  mm;  $t = 20$  mm. De notar que em ambas as figuras se encontram representadas duas curvas que se sobrepõem.

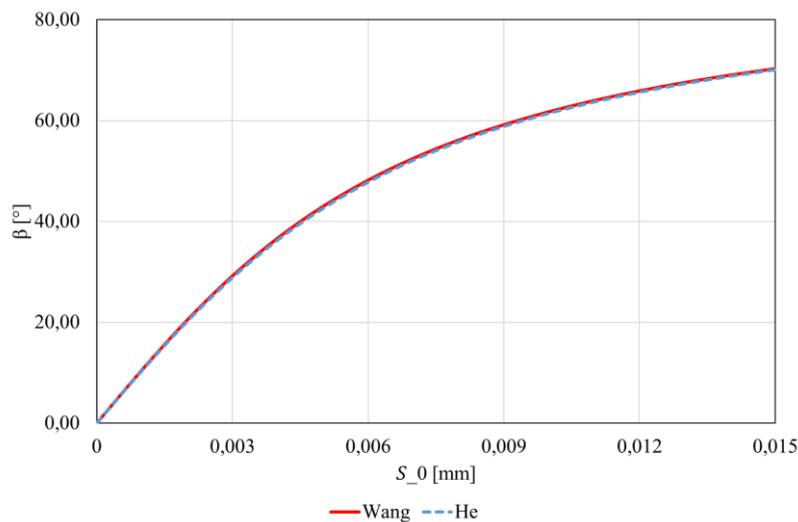


Figura 21 –  $\beta$  vs distância da carga ao plano da fenda.

Para medir  $K_I$  puro é utilizada a situação simétrica representada na Figura 22. Esta configuração causa apenas o aparecimento de um momento fletor na extremidade da fenda, podendo ser descrito como, (Wang *et al.*, 2016):

$$K_I = \frac{M\sqrt{\pi a}}{W^2 t} \tag{58}$$

onde  $M = \frac{(S_2 - S_1)}{2} P$  é o momento fletor.

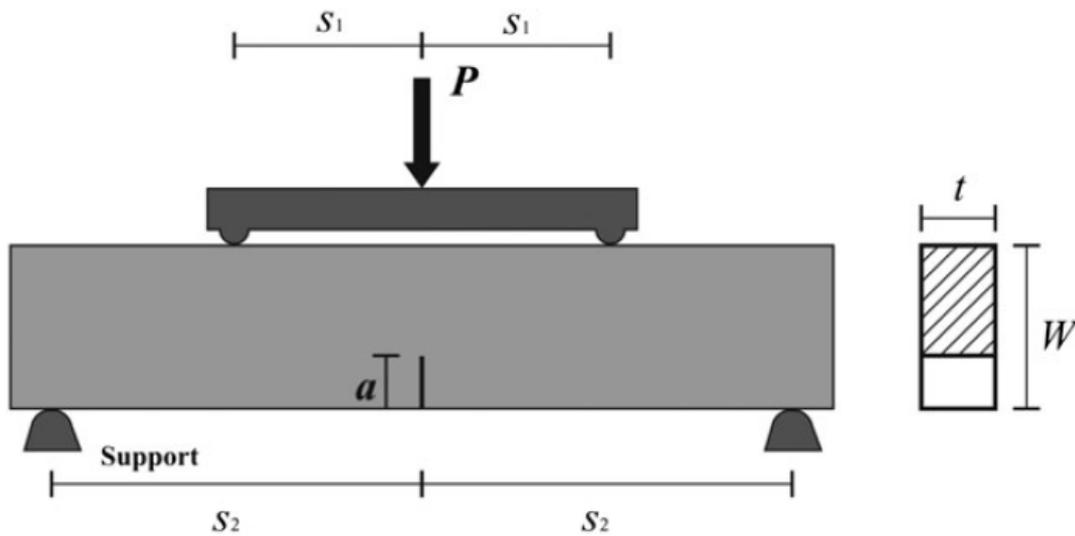


Figura 22 - Provete sujeito a flexão em 4 pontos, carga simétrica, (Wang *et al.*, 2016).

(Ayatollahi & Aliha, 2011) salienta ainda no caso de  $K_{II}$  em modo puro, que ( $d = S_1$ ):

- $K_I$  apresenta valores negativos para  $d/W < 0.2$ , o que sugere que quando a carga é aplicada numa zona muito próxima do plano da fenda, esta fica em compressão, causando o fecho da mesma.
- $K_I$  é positivo para  $d/W \geq 0.2$ .
- $K_I$  desaparece para  $d/W > 1.5$ .
- Para  $d/W < 0.3$ ,  $K_{II}$  aumenta para grandes fendas e diminui para fendas mais pequenas.
- Para  $d/W > 0.5$ ,  $K_{II}$  diminui para todos os comprimentos de fenda, permanecendo constante apenas para comprimentos de fenda na ordem de  $a/W < 0.2$ . Verifica-se assim que o ponto de aplicação da carga deve ser escolhido com algum cuidado, uma vez que com o aumento da distância de aplicação da carga ao plano da fenda  $K_{II}$  diminui.
- Para que não se anule  $K_I$ ,  $d/W$  deve ser menor que 1.
- Para modo II puro,  $d/W$  deve ser maior de que 1, mas por razões de segurança, deve ainda ser menor do que 1.5.

A situação simétrica do ensaio de flexão em 4 pontos pode ainda ocorrer como ilustrado na Figura 23, na qual a carga é sempre aplicada no plano da fenda. O modo II

puro pode ser obtido através de um carregamento antissimétrico ( $L_1 = L_4$  e  $L_2 = L_3$ ), enquanto o modo I puro pode ser conseguido através de um carregamento simétrico dos apoios ao plano da fenda ( $L_1 = L_2$  e  $L_3 = L_4$  com  $L_3 > L_1$ ). O modo misto pode ser alcançado através de uma outra qualquer configuração de apoios.

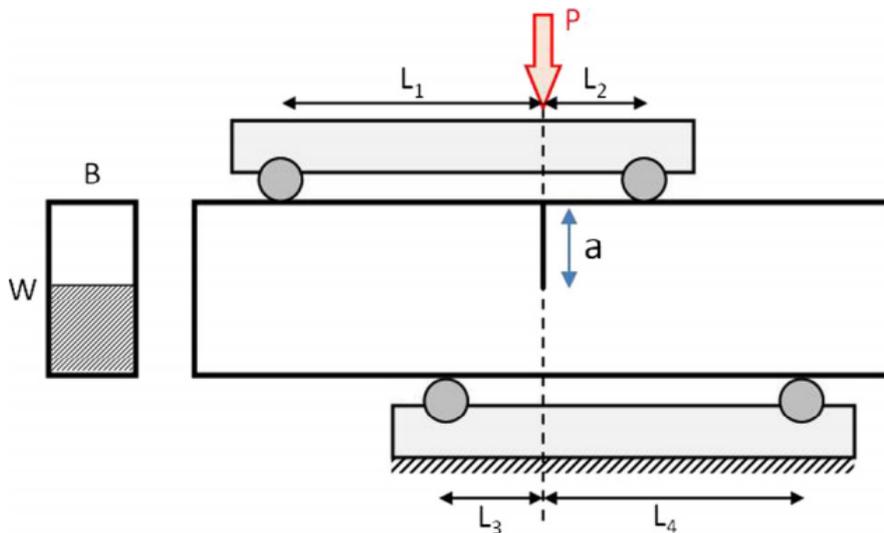


Figura 23 - Proвете para flexão em 4 pontos sujeito a carga assimétrica ( $B=t$ ), (Razavi, Aliha, & Berto, 2017).

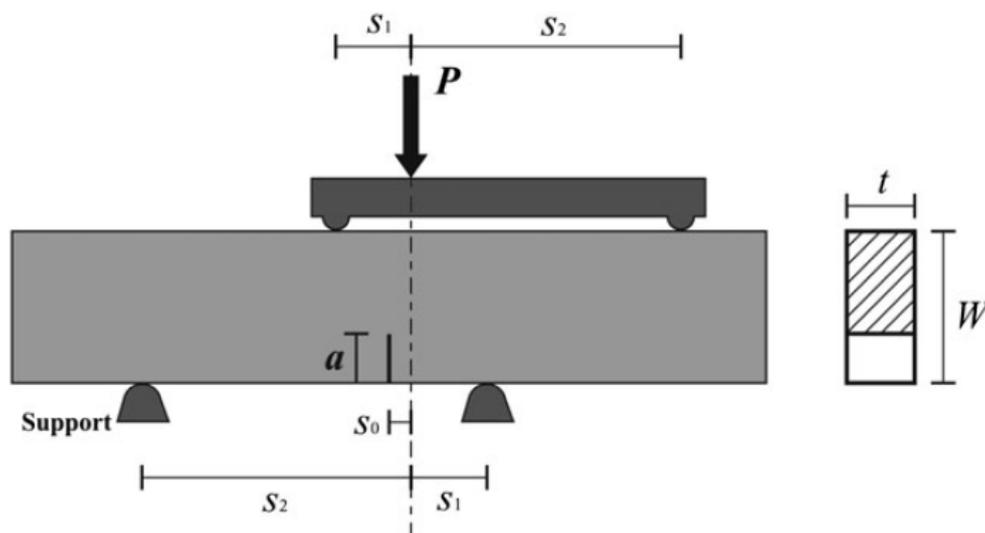


Figura 24 - Representação de um provete para 4PB sujeito a uma carga assimétrica (modo misto), (Wang *et al.*, 2016).

## 2.7. Fratura em modo misto – flexão em 3 pontos

O ensaio com carga excêntrica de flexão em 3 pontos possibilita o estudo do comportamento de um provete sujeito apenas a modo I puro ou modo misto I-II.

Fazendo variar a posição da fenda em relação ao plano de aplicação da carga (a meio do provete), Figura 25, é possível medir a tenacidade em modo I ( $K_{Ic}$ ) ( $d = 0$ ) e os fatores  $K_I$  e  $K_{II}$  ( $d \neq 0$ ).

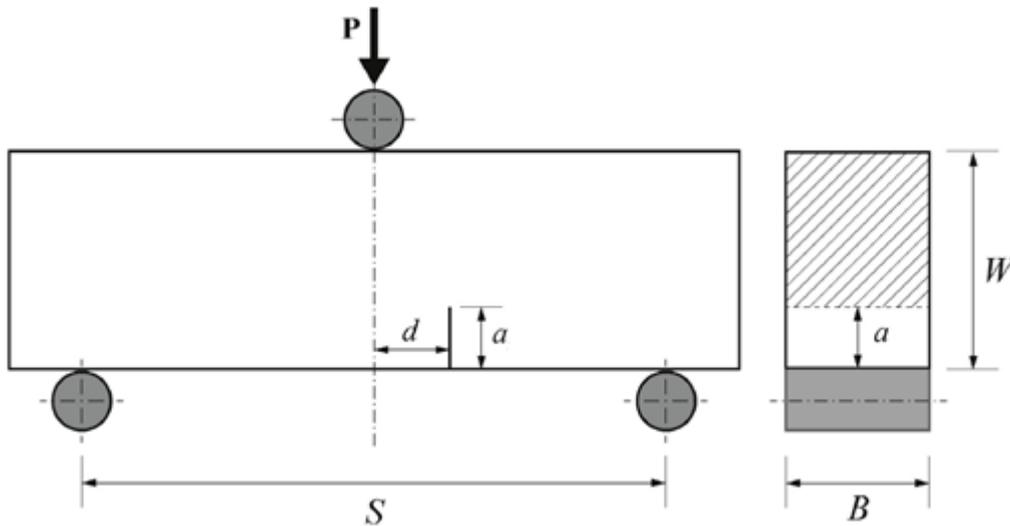


Figura 25 - Representação do ensaio de flexão em 3 pontos com carga excêntrica, SEN, (Belli, Wendler, Petschelt, & Lohbauer, 2017).

(Belli *et al.*, 2017) apresentam que o modo I e II podem ser obtidos através das seguintes expressões, (Fett, 1991):

$$K_I = \sigma_0 Y_I \sqrt{\pi a} \quad (59)$$

$$K_{II} = \sigma_0 Y_{II} \sqrt{\pi a} \quad (60)$$

onde  $Y_I$  e  $Y_{II}$  são funções geométricas para entalhes excêntricos:

$$Y_I = Y'_I \left(1 - \frac{a}{W}\right)^{-3/2} \quad (61)$$

$$Y_{II} = Y'_{II} \left(1 - \frac{a}{W}\right)^{-1/2} \quad (62)$$

sendo que os valores de  $Y'_I$  e  $Y'_{II}$  estão disponíveis para diferentes razões de  $a/W$  e  $L/W$  em (Fett, 1991).

(Belli *et al.*, 2017) apresenta ainda que para  $d/L=0$  o fator geométrico  $Y_I$  pode ser usado para calcular  $K_{Ic}$ <sup>3</sup>:

$$Y_I = 1.122 - 1.121 \left(\frac{a}{W}\right) + 3.740 \left(\frac{a}{W}\right)^2 + 3.873 \left(\frac{a}{W}\right)^3 - 19.05 \left(\frac{a}{W}\right)^4 + 22.55 \left(\frac{a}{W}\right)^5 \quad (63)$$

A tensão  $\sigma_0$  é obtida substituindo o valor da carga máxima regista nos ensaios na expressão:

$$\sigma_0 = \frac{3P_{\max}S}{2BW^2} \quad (64)$$

A razão de  $K_I/K_{II}$  para cada distância  $d$  caracteriza a fratura em modo misto de acordo com o ângulo de propagação proposto por (Suresh, Shih, Morrone, & O'Dowd, 1990):

$$\beta = \arctan\left(\frac{K_{II}}{K_I}\right) \quad (65)$$

onde o ângulo  $\beta$  varia de  $0^\circ$  para modo I puro ( $d=0$  [mm]) até  $45^\circ$  para  $K_I = K_{II}$ .

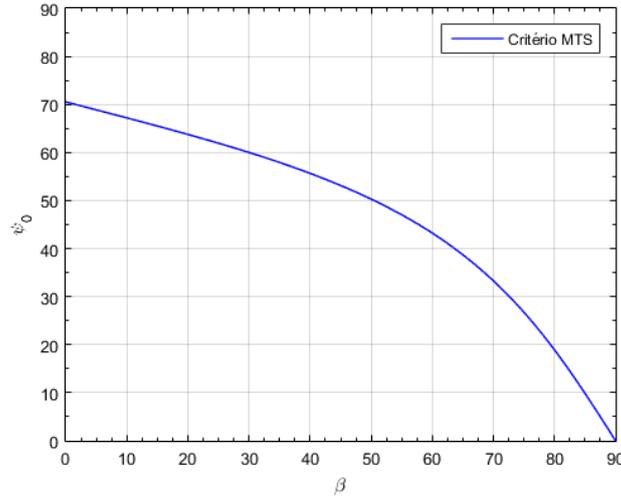


Figura 26 - Ângulo de propagação vs modo misto I-II, *e.g.* (Suresh *et al.*, 1990).

<sup>3</sup>(Belli *et al.*, 2017) refere neste ponto um paper da Kyushu University, que não foi possível consultar para esta tese.

## 2.8. Determinação do fator de intensidade de tensão ( $K$ )

### 2.8.1. Técnica do fecho virtual da fenda (VCCT)

A técnica do fecho virtual da fenda (*Virtual Crack Closure Technique* - VCCT) baseia-se em princípios energéticos, assente na ideia de que a energia que é perdida pela propagação da fenda é análoga à energia necessária para fechar a mesma. É uma técnica de fácil implementação em elementos finitos, sendo apenas necessários os deslocamentos e as forças nodais de alguns dos nós da região de propagação da fenda. A técnica foi apresentada por (Krueger, 2004) e é descrita por (Tavares & de Castro, 2015).

A resolução deste tipo de problema requer duas etapas, sendo apresentados na Figura 27 dois elementos finitos bidimensionais.

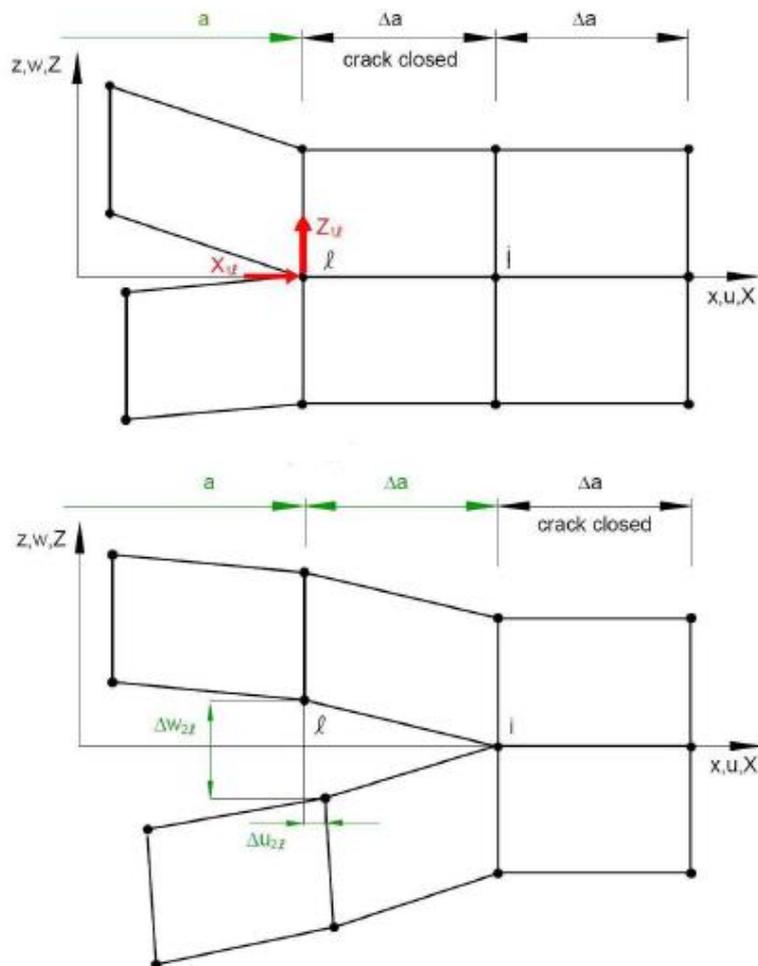


Figura 27 – Representação das etapas necessárias à implementação do VCCT (4 nós),(Tavares & de Castro, 2015).

No caso do VCCT, na sua versão modificada, é apenas necessária uma das etapas, isto porque se o tamanho do elemento é reduzido, a diferença na abertura da fenda entre as duas etapas é insignificante.

Para um elemento de 4 nós, a taxa de libertação de energia ( $G$ ) é obtida através das seguintes equações:

$$G_I = -\frac{1}{2\Delta A} Z_i \Delta w_l = -\frac{1}{2\Delta A} Z_i (w_l - w_l^*) \quad (66)$$

$$G_{II} = -\frac{1}{2\Delta A} X_i \Delta u_l = -\frac{1}{2\Delta A} X_i (u_l - u_l^*) \quad (67)$$

sendo:

$$G = -\frac{K^2}{E^*} \rightarrow \begin{cases} E^* = E/(1 - \nu^2) \\ E^* = E \end{cases} \quad (68)$$

Para o caso de 8 nós (Figura 28), a taxa de libertação de energia é dada por:

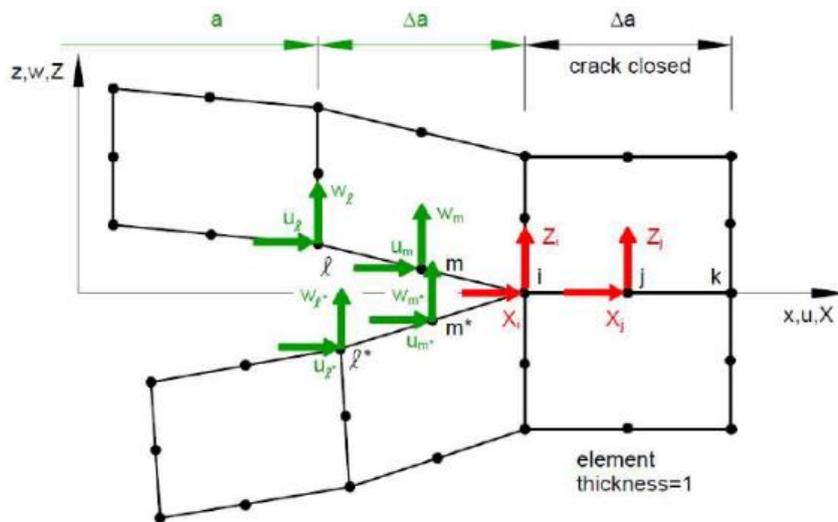


Figura 28 - Representação das etapas necessárias à implementação do VCCT (8 nós), (Tavares & de Castro, 2015).

$$G_I = -\frac{1}{2\Delta A} [Z_i (w_l - w_l^*) + Z_j (w_m - w_m^*)] \quad (69)$$

$$G_{II} = -\frac{1}{2\Delta A} [X_i (u_l - u_l^*) + X_j (u_m - u_m^*)] \quad (70)$$

A energia que é necessária para que a fenda se feche é dada pela seguinte equação:

$$E = \frac{1}{2} (X_{1l} \Delta u_{2l} + Z_{1l} \Delta w_{2l}) \quad (71)$$

onde  $X_{1l}$  e  $Z_{1l}$  correspondem às forças nodais no nó 1 ao longo das direções  $x$  e  $y$ , e  $\Delta u_{2l}$  e  $\Delta w_{2l}$  dizem respeito aos deslocamentos nodais após a propagação da fenda.

## 2.8.2. Integral J

Na Mecânica da Fratura 2D o integral J, apresentado por (Rice, 1968) é definido pela equação (16) sendo um integral de contorno  $\Gamma$  no sólido contendo uma fenda plana com as faces livres de trações, e.g. (de Castro, 2016).

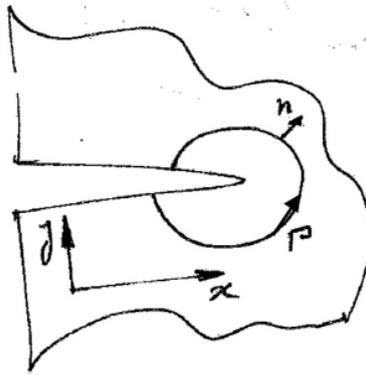


Figura 29 - Representação esquemática do contorno na extremidade da fenda.

$\Gamma$  é uma curva que se inicia num ponto da face inferior da fenda, contorna a sua extremidade no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio e termina na face superior. Este conceito foi derivado para comportamento elástico linear e não linear:

$$J = \int_{\Gamma} \left( W dy - \vec{T} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} ds \right) \quad (72)$$

sendo  $W$  a densidade de energia de deformação,

$$W = \int_0^{\varepsilon_{mn}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (73)$$

$\vec{n}$  e  $\vec{T}$  representam a normal e o vetor tração que correspondem a um elemento  $ds$  do contorno  $\Gamma$

$$T_i = \sigma_{ij} n_{ij} \quad (74)$$

$\vec{u}$  é o vetor de deslocamento e  $ds$  um incremento de comprimento de arco sobre o contorno.

$$\vec{u} = u\hat{i} + v\hat{j} \quad (75)$$

Rice provou ainda que J é igual à taxa de libertação de energia ( $G$ ) e é independente do contorno para qualquer contorno fechado que vai desde uma face da fenda, percorre todo o caminho até terminar sobre a face oposta da fenda.

### 2.8.3. *T-stress*

As equações de Westergaard, também designadas de Irwin-Westergaard, definem o campo de tensões na extremidade da fenda. Estas possuem um papel fundamental na MFLE. No ano de 1939, Westegaard desenvolveu a descrição biaxial do campo de tensões para uma fenda interna de um sólido. Demonstrou que para um grupo restrito de casos, mas importante, a tensão normal e a tensão de corte nas direções  $x$  e  $y$  na extremidade da fenda podem ser obtidas através das expressões seguintes, *e.g.* (Anderson, 2005), (Broek, 1982):

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \\ \tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{cases} \quad (76)$$

As equações de Westergaard que originalmente foram desenvolvidas para tensões biaxiais eram aplicadas a casos de cargas uniaxiais, uma vez que para modo I a condição  $\tau_{xy} = 0$  ao longo de  $x$  é automaticamente satisfeita. No entanto, estas produzem uma tensão  $\sigma_x$  ao longo do limite da superfície para uma carga uniaxial. De forma a eliminar esta componente transversal, Irwin sugeriu a utilização de uma componente de tensão transversal, tendo-a apelidado de “*T-stress*”, (Gupta, Alderliesten, & Benedictus, 2015; Meliani & Pluvinage, 2016).

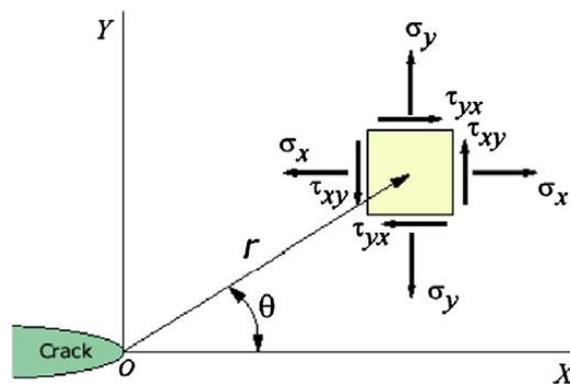


Figura 30 – Parâmetros na extremidade da fenda, (Efunda, 2018).

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) - \sigma_{0x} \quad (77)$$

(M. L. Williams, 1957) demonstrou que o campo de tensões na extremidade de uma fenda de um material elástico e isotrópico pode ser expressa através de uma série, na qual o primeiro termo  $1/\sqrt{r}$  é singular, o segundo termo é constante, sendo os restantes termos proporcionais a potências crescentes de  $\sqrt{r}$ . A mecânica da fratura clássica negligencia este conceito, enfatizando o termo singular, uma vez que este permite uma boa descrição do campo de tensões junto da extremidade da fenda. Embora os termos de ordem elevada se anulem na extremidade da fenda, o segundo termo mantém-se constante. Verifica-se que este termo constante possui um grande impacto na zona plástica e nas tensões dentro desta mesma região, (Anderson, 2005).

Assim, o conceito de *T-stress* ficou largamente conhecido como a tensão paralela à extremidade da fenda, segundo a direção  $x$ .

Este parâmetro pode calculado diretamente recorrendo ao Abaqus®, através de uma rotina que se já se encontra implementada no mesmo.

Recorrendo ao MEF é possível obter valores de *T-stress* utilizando o método da tensão ou dos deslocamentos. Para modo I, junto à extremidade da fenda os termos de alta ordem são desprezados, sendo que  $T$  pode ser calculado para qualquer direção na qual o termo singular  $\sigma_{xx}$  desaparece, vindo assim: (Ayatollahi, Pavier, & Smith, 1998).

$$\text{Para } \theta = 0 : T = \sigma_{xx} - \sigma_{yy} \quad (78)$$

$$\text{Para } \theta = \pm\pi : T = \sigma_{xx} \quad (79)$$

De acordo com a literatura, (Ayatollahi *et al.*, 1998), o uso desta técnica envolve um grande refinamento da malha de elementos finitos, caso contrário os valores obtidos não são de todo aceitáveis para distâncias razoáveis à extremidade da fenda. Assim um método melhorado para a obtenção do valor de  $T$  consiste no uso dos deslocamentos ao longo das faces da fenda, permitindo o uso de uma malha menos refinada, o que em certos modelos pode poupar tempo de computação. Devido à fronteira livre de carregamento, a lei de Hooke pode ser escrita como sendo:

$$\sigma_{xx} = E' \varepsilon_{xx} = E' \frac{du_x}{dx} \quad (80)$$

onde  $\varepsilon_{xx}$  e  $u_x$  representam a deformação e o deslocamento, respetivamente, paralelo à fenda, sendo  $E'$ :

$$E' = \begin{cases} E, & \text{ept} \\ \frac{E}{1-\nu^2}, & \text{epd} \end{cases} \quad (81)$$

sendo  $E$  o módulo de Young e  $\nu$  o coeficiente de Poisson.

Para um ângulo  $\theta = \pm\pi$  o termo singular  $\sigma_{xx}$  desaparece e conseqüentemente  $T$  pode ser escrito:

$$T = E' \cdot \frac{du_x}{dx} \quad (82)$$

Por fim,  $du_x/dx$  é constante e pode ser substituído por  $[u_x(x) - u_x(0)]/x$ , onde  $u_x(0)$  é o deslocamento medido na extremidade da fenda. Assim<sup>4</sup>:

$$T = E'[u_x(x) - u_x(0)]/x \quad (83)$$

A iteração utilizada pelo Abaqus® é<sup>5</sup>:

$$I_{int} = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} n \cdot M \cdot q dT \quad (84)$$

sendo  $M$ :

$$M = \sigma: \epsilon_{aux}^L I - \sigma \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{aux}^L - \sigma_{aux}^L \frac{\partial u}{\partial x} \quad (85)$$

No caso de ept,  $\epsilon_{33} = 0$ .

Para o modo misto I-II existe um termo singular quer para cada um dos modos I e II quer para ambos em qualquer direção radial desde a extremidade da fenda. Desta feita, as expressões mencionadas para modo I não são adequadas para modo misto. A tensão  $T$  pode ser calculada recorrendo aos FIT, embora, para além dos cálculos adicionais a que obriga, a sua precisão fique dependente da exatidão dos valores de  $K$ . No entanto,  $T$  pode ser calculada recorrendo às propriedades simétricas do modo I e antissimétricas do modo II. As tensões de metade do provete são adicionadas à outra metade, sendo que o modo II desaparece e o modo I é duplicado. As equações apresentadas de seguida podem ser utilizadas para calcular o valor de  $T$  através de valores obtidos pelo MEF, (Ayatollahi *et al.*, 1998).

$$T = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})_{\theta=0} \quad (86)$$

<sup>4</sup> no entanto a utilização desta expressão no trabalho seguidamente apresentado tornou-se insatisfatória.

<sup>5</sup> as expressões (84) e (85) foram retiradas diretamente do manual do Abaqus®.

$$T = \frac{1}{2} [(\sigma_{xx})_{\theta=-\pi} + (\sigma_{xx})_{\theta=\pi}] \quad (87)$$

Utilizando a expressão (24) para ambos os lados da fenda e somando os resultados, temos que:

$$T = \frac{1}{2} E' \left[ \left( \frac{dx_x}{dx} \right)_{\theta=-\pi} + \left( \frac{dx_x}{dx} \right)_{\theta=\pi} \right] \quad (88)$$

Utilizando apenas os deslocamentos<sup>6</sup>:

$$T = \frac{1}{2} E' [u_x(x, -\pi) + u_x(x, \pi)] \quad (89)$$

Uma vez que o caminho independente do integral  $J$  para modo misto se encontra normalmente disponível para análises recorrendo ao MEF e utilizando a expressão  $K_{eff} = \sqrt{JE'}$ , é possível obter o rácio  $B$  para condições de modo misto, (Ayatollahi *et al.*, 1998):

$$B = T \sqrt{\frac{\pi a}{JE'}} \quad (90)$$

#### 2.8.4. Extrapolação dos deslocamentos

A extrapolação dos deslocamentos é uma técnica empregue na determinação do fator de intensidade de tensão através do método de elementos finitos. Esta assenta na análise do campo de deslocamentos na vizinhança da extremidade da fenda e é normalmente utilizada em diversos softwares de elementos finitos.

Considerando agora um estado plano de tensão ( $\sigma_z = 0$ ), os deslocamentos horizontais e verticais são determinados através das seguintes equações:

$$u(r, \theta) = K_I \frac{2(1 + \nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (91)$$

$$v(r, \theta) = K_I \frac{2(1 + \nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[ 2(1 - \nu) + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (92)$$

---

<sup>6</sup> no entanto a utilização desta expressão tornou-se insatisfatória.

Para o caso em que temos  $\theta = 180^\circ$ , o fator de intensidade de tensão é determinado através de extrapolação, tal como representado na Figura 31, utilizando para esse efeito a equação (93).

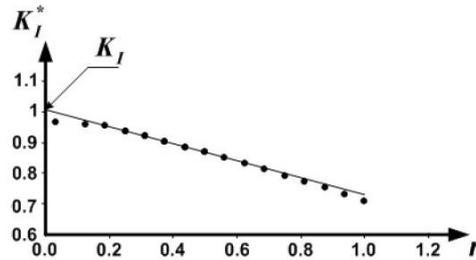


Figura 31 – Representação gráfica da extrapolação dos deslocamentos, *e.g.* (Tavares & de Castro, 2015).

$$v(r, \theta) = K_I \frac{4(1 + \nu^2)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \quad (93)$$

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} K_I^* \quad (94)$$

A partir deste tipo de análise é possível obter bons resultados em modelações a duas dimensões, já o mesmo não acontece para casos tridimensionais.

## 2.9. Método dos elementos finitos estendido (XFEM)

O método dos elementos finitos estendidos (XFEM), é uma técnica numérica baseada no método dos elementos finitos e no método da partição da unidade. Este estende a abordagem clássica do método de elementos finitos, enriquecendo o espaço da solução do modelo de elementos finitos para soluções de equações diferenciais com funções descontínuas, capazes de representar numericamente descontinuidades.

Esta técnica encontra-se implementada no software Abaqus, é independente da malha e está implementada para modelos bidimensionais e tridimensionais.

O método de elementos finitos estendidos foi desenvolvido para fazer frente às dificuldades na obtenção da solução de problemas localizados que não são eficientemente resolvidos pelo refinamento da malha. Foi inicialmente implementado na modelação de situações de fratura em materiais. Nesta implementação original, funções de base descontínuas são adicionadas às funções de base polinomial padrão para nós que

pertencem a elementos que são intercetados por uma fenda, de forma a fornecer uma base de dados que incluísse deslocamentos de abertura da fenda.

Uma das principais vantagens do XFEM é que, em tais problemas, a malha de elementos finitos não precisa ser atualizada para rastrear o caminho percorrido pela fenda. Trabalhos posteriores, ilustraram o uso mais geral do método para problemas que envolvem singularidades, interfaces de materiais e outros problemas em que uma característica localizada pode ser descrita por um conjunto apropriado de funções básicas.

### **3. Análise numérica preliminar**

Existem diversas formas de determinar  $K$ , todas elas envolvendo a determinação de tensões e deformações, sendo sempre necessário selecionar a técnica adequada às características da fenda em estudo.

Os métodos analíticos são principalmente utilizados quando são necessárias soluções rigorosas, mas em geral apenas podem ser aplicados a problemas de geometrias muito simples. A análise de problemas mais complexos recorre normalmente a métodos numéricos, nomeadamente o método dos elementos finitos (MEF), embora o método das diferenças finitas possa também ser utilizado. O método dos elementos de contorno (em inglês: BEM – *Boundary Element Method*) é um método computacional que permite obter a solução de sistemas de equações diferenciais, possuindo um melhor desempenho que o MEF em certas aplicações, como por exemplo, quando o domínio em estudo é finito ou semi-infinito. No entanto, métodos experimentais podem eventualmente ser utilizados como forma de validação dos resultados numéricos obtidos.

O MEF é um procedimento numérico que permite determinar soluções aproximadas de problemas de valores sobre o contorno de equações diferenciais parciais. Este subdivide o domínio de um problema em partes menores, denominadas de elementos finitos. Este processo computacional é muito utilizado no mundo industrial, permitindo a análise e conseqüente melhoramento da qualidade e segurança dos produtos e projetos.

Os elementos ligam-se entre si por pontos (nós), sendo o seu conjunto (elementos e nós) denominados por malha. A precisão deste método está diretamente ligada à malha, ou seja, uma malha com um maior número de elementos irá ser mais precisa que uma malha com menor número de elementos, o que irá também afetar o tempo de cálculo.

#### **3.1. Integração reduzida e completa**

Por predefinição o software utiliza a integração reduzida. Esta poupa tempo de simulação, mas gera um efeito de “escada” na zona da fenda, como se pode verificar na Figura 32 a), uma vez que despreza os termos de ordem elevada. A integração completa,

Figura 32 b), fornece dados mais precisos, embora possa necessitar de um maior tempo de processamento em casos de estudo mais complicados. Para o caso em mão foram obtidos resultados utilizando os dois tipos de integração, meramente a título de verificar as diferenças obtidas, visto este ser um problema de análise simples, pelo que o tempo de computação em pouco é alterado. No decorrer da exemplificação dos resultados obtidos através das várias técnicas acima descritas irá ser utilizada a integração completa.

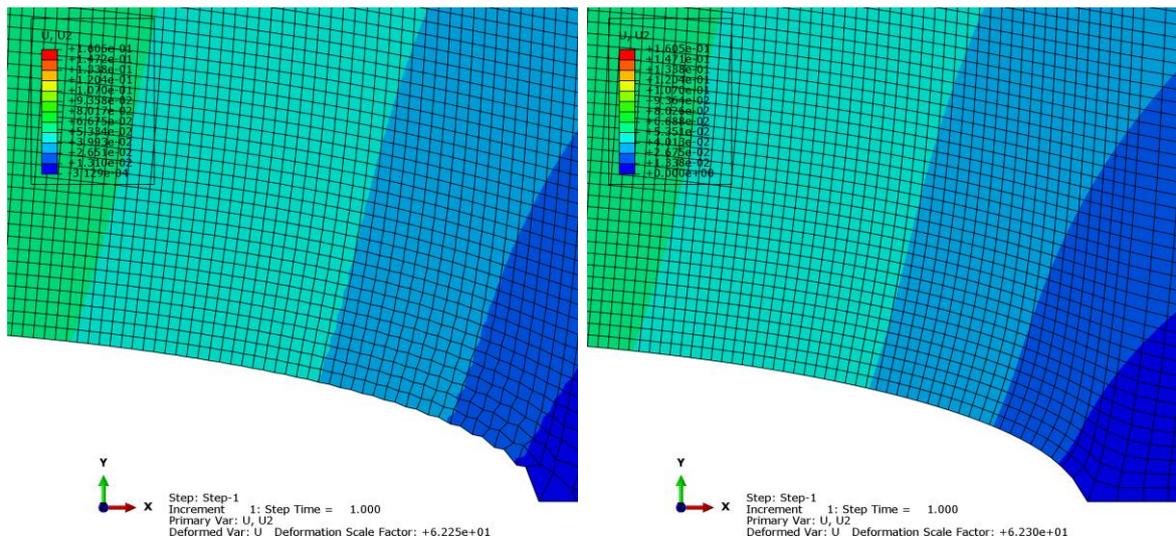


Figura 32 – a) Integração reduzida; b) Integração completa

### 3.2. Elementos lineares

Para as simulações bidimensionais apresentadas neste trabalho recorreu-se a uma malha estruturada e a elementos lineares, tendo sido utilizada a integração completa como referido acima. Foi utilizado o elemento CPS4 disponível no Abaqus® sendo este um elemento de 4 nós, bilinear. Este elemento é escolhido de forma automática pelo software, tendo em conta o tipo de análise que faremos, sendo um elemento que permite a obtenção de bons resultados para o estudo em mãos.

Para o caso em estudo e devido à espessura dos provetes poderia ser utilizado o elemento CPE4, devido ao estado plano de deformação. No entanto, tendo em conta a conversão final do valor de  $K$ , os resultados obtidos devem ser semelhantes, pelo que foi utilizado o elemento CPS4.

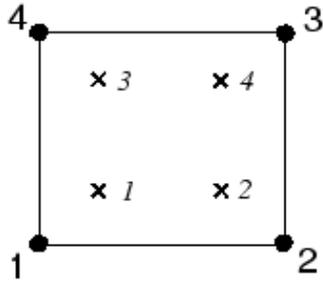


Figura 33 - Elemento linear de 4 nós.

Para as simulações a três dimensões recorreu-se ao elemento linear C3D8, composto por 8 nós.

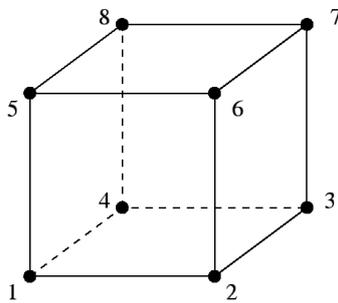


Figura 34 - Elemento linear de 8 nós.

### 3.3. Placa com fenda central tracionada uniaxialmente

A título de experiência e exemplificação dos métodos utilizados no software Abaqus®, é aqui apresentado um problema de uma placa em alumínio que possui uma fenda na zona central, tracionada uni axialmente (modo I) por uma tensão de 100 MPa. O comprimento da fenda  $2a$  varia entre os 20, 30 e 40 mm. Os resultados obtidos através dos métodos acima referidos serão aqui comparados.

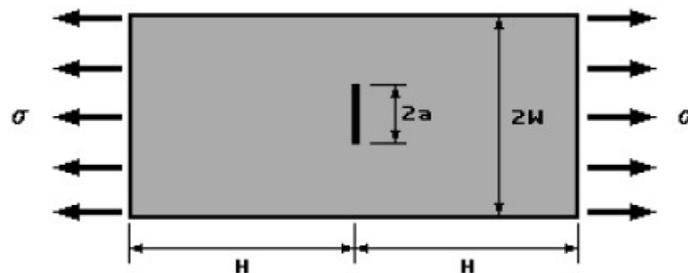


Figura 35 - Representação do caso em estudo, (Erdogan & Sih, 1963).

- $E = 70 \text{ GPa}$
- $\nu = 0.3$
- $H = W = 100 \text{ mm}$
- $a/W = 0.1$

Para esta análise foi considerado apenas 1/4 da placa devido às condições de simetria. Foi aplicada uma tensão no topo da mesma de 100 MPa. Foram colocadas restrições no deslocamento horizontal na parte esquerda da nossa placa e restrições a nível do deslocamento vertical na base da mesma. A zona de fenda foi deixada livre de restrições de forma a podermos obter o seu comportamento. Foi ainda criada uma malha paramétrica mais refinada na zona da fenda e foi pedido ao software que calculasse até um total de 10 contornos.

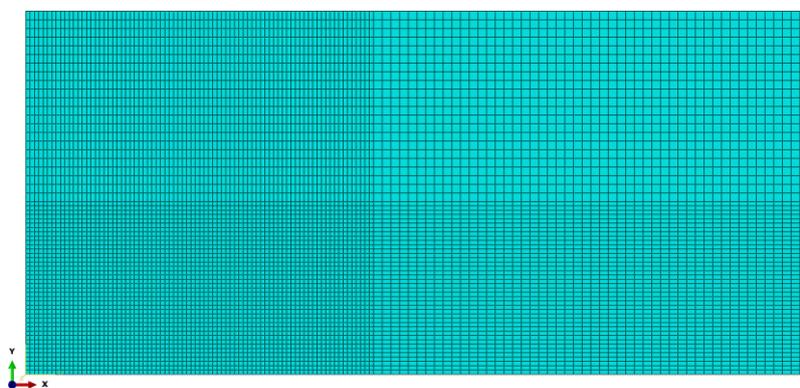


Figura 36 - Malha paramétrica, refinada na zona de interesse.

Na Figura 36 encontra-se representado um *zoom* da malha paramétrica utilizada na simulação deste caso na zona da fenda, zona de interesse, utilizando o já referido elemento linear CPS4. Esta é constituída por 8512 elementos, tendo sido utilizados elementos de 0.25 de tamanho na zona de interesse e de 2.5 na restante placa.

Tabela 1 – Resultados obtidos para o caso da placa com fenda central.

$a$ [mm]	Integral $J$	$K = \sqrt{JE}$ [MPa $\sqrt{\text{m}}$ ]	$T$ -stress	FIT [MPa $\sqrt{\text{m}}$ ]	
				MTS	MER
$a=10$	4.563	565.16	-101.0	567.6	567.6
$a=15$	7.105	705.23	-103.6	707.2	707.2
$a=20$	9.937	834.02	-106.8	835.8	835.8

Comparando os valores de  $K$  obtidos no software Abaqus® (Tabela 1) para o caso particular de  $a=10$  através do procedimento “*Stress Intensity Factor*”, que conta com dois critérios de iniciação da fenda, o “*Maximum Tangential Stress*” e o “*Maximum Energy Release Rate*”, com a solução geral  $K = \sigma\sqrt{\pi a}$ , foi obtido  $K = 570.02 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$  culminando num erro relativo de 0.42%. Esta expressão traduz bons resultados apenas para comprimentos de fenda da ordem de  $a/W = 0.1$ , pelo que de seguida todos os valores são comparados com as seguintes soluções:

$$K = \sigma\sqrt{\pi a} \sqrt{\frac{W}{\pi a} \tan \frac{\pi a}{W}} \quad (95)$$

$$K = \sigma\sqrt{\pi a} \sqrt{\sec \frac{\pi a}{W}} \quad (96)$$

Tabela 2 - Comparação dos valores obtidos em software com a equação (95), em percentagem.

$a$ [mm]	Eq. (95) [MPa√m]	Integral $J$	FIT [MPa√m]	
			MTS	MER
$a=10$	570.02	0.85	0.42	0.42
$a=15$	713.81	1.20	0.93	0.93
$a=20$	852.37	2.15	1.94	1.94

Tabela 3 - Comparação dos valores obtidos em software com a equação (96), em percentagem.

$a$ [mm]	Eq. (96) [MPa√m]	Integral $J$	FIT [MPa√m]	
			MTS	MER
$a=10$	574.74	1.67	1.24	1.24
$a=15$	727.24	3.03	2.76	2.76
$a=20$	881.27	5.36	5.16	5.16

Analisando as Tabela 2 e Tabela 3 verifica-se que a diferença relativa entre as soluções analíticas e os valores numéricos são reduzidas, existindo alguma diferença, como seria de esperar, entre as equações (95) e (96).

No tocante aos valores de  $T$ -stress obtidos, importa salientar que apenas é conhecida solução analítica para o caso da placa infinita, para o qual, segundo a literatura se deve registar  $T \cong \sigma_{remota}$ , pelo que o valor obtido para esse caso ( $T=-101$ ) é um resultado

próximo do ideal. Não existe solução comparável para os restantes casos; mas existe confiança no método, devido ao resultado obtido para placa infinita. Assim, foi realizado o mesmo processo para os restantes comprimentos de fenda, como se pode ver na Tabela 1. De recordar que para um ângulo  $\theta = \pm\pi$  encontramos-nos perante a face superior ou inferior da fenda, sendo os termos de ordem mais elevada desprezados junto à extremidade da fenda, e considerando assim que  $T = \sigma_{xx}$ .

Recorrendo a uma das propriedades do Integral  $J$ ,  $J = G = K^2/E$ , é possível obter o valor de  $K$  e proceder à sua comparação com a solução geral para  $a/W = 0.1$ , tendo sido obtido um erro relativo de 0.85%.

### 3.4. Placa com fenda central inclinada tracionada uniaxialmente

Aplicaram-se os mesmos métodos ao problema da placa infinita tracionada por uma tensão remota  $\sigma$ , contendo uma fenda central de comprimento  $2a$  inclinada de um ângulo  $\beta$  relativamente à tensão remota  $\sigma$ , conforme esquematizado na Figura 37. Este problema foi inicialmente estudado por (Erdogan & Sih, 1963) (que não estudaram a  $T$ -stress) e representa um caso geral de modo misto I-II, e.g. (Arteiro & de Castro, 2014).

Neste caso o ângulo  $\beta$  foi variado entre 15, 30, 45, 60 e 75 graus, considerada uma fenda  $2a = 20$  mm e uma placa de 200x200 mm.

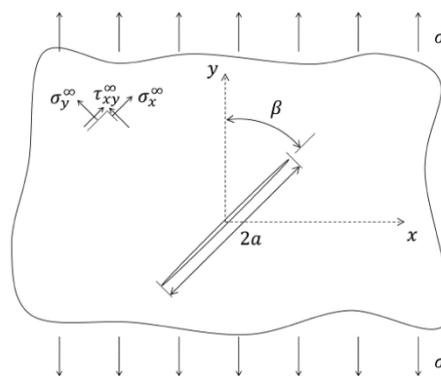


Figura 37 - Placa tracionada remotamente contendo uma fenda inclinada, (Arteiro & de Castro, 2014).

As componentes normal e paralela à fenda da tensão remota podem ser obtidas de forma expedita recorrendo ao círculo de Mohr, Figura 38, sendo, como já visto a propósito da apresentação de J.G. Williams, (ver equações (12), (13) e (29),(30)),

$$\sigma_y^\infty = \frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma}{2} \cos 2\beta = \sigma \sin^2 \beta \quad (97)$$

$$\tau_{xy}^\infty = \frac{\sigma}{2} \sin 2\beta = \sigma \sin \beta \cos \beta \quad (98)$$

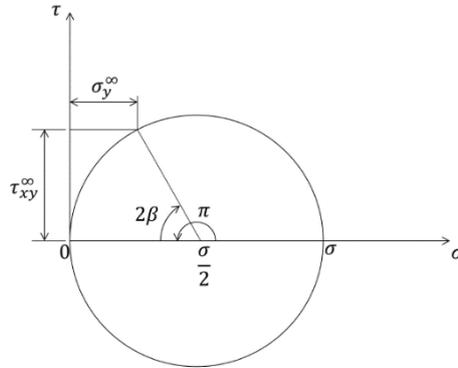


Figura 38 - Círculo de Mohr para determinação das componentes normal e paralela à fenda da tensão remota aplicada a uma placa contendo uma fenda inclinada, (Arteiro & de Castro, 2014).

Relembrando as equações (5) e (6) de Irwin-Westgaard para os fatores de intensidade de tensão em modo I e II para o caso de uma placa infinita com fenda central sujeita a uma tensão remota (remota ou tangencial), para o caso da fenda inclinada vem:

$$K_I = \sigma_y^\infty \sqrt{\pi a} = \sigma \sin^2 \beta \sqrt{\pi a} \quad (99)$$

$$K_{II} = \tau_{xy}^\infty \sqrt{\pi a} = \sigma \sin \beta \cos \beta \sqrt{\pi a} \quad (100)$$

$$T = \sigma \cos(2\beta) \sqrt{\pi a} \quad (101)$$

Para a obtenção dos resultados apresentados de seguida foi utilizada uma malha refinada na zona de interesse (fenda), composta por elementos CPS4 referidos em 3.2. Uma vez que o ângulo de inclinação da fenda foi variando, também o número de elementos da malha variava de caso para caso, tendo sido mantido o critério do tamanho de elementos utilizados de 0.5 na zona de interesse e de 2 na restante placa. Nas Figura 39 e Figura 40 é possível observar uma ampliação na zona de interesse das malhas utilizadas para os casos de  $\beta = 15^\circ$  e  $\beta = 45^\circ$ . Embora algumas malhas possam apresentar uma pequena distorção de elementos em algumas zonas devido à inclinação da fenda, esta em nada compromete os resultados obtidos na zona circundante da fenda.

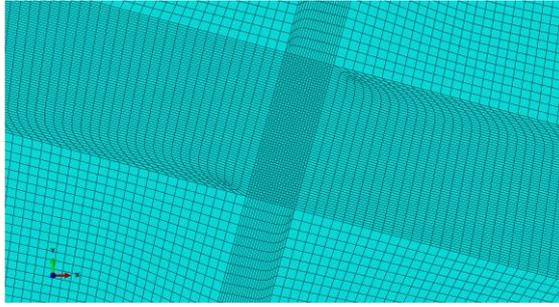


Figura 39 - Ampliação da malha utilizada para  $\beta = 15^\circ$ .

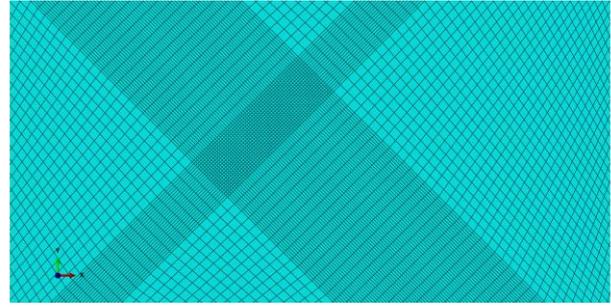


Figura 40 - Ampliação da malha utilizada para  $\beta = 45^\circ$ .

Nas Tabela 4 e Tabela 5 encontram-se representados os valores obtidos pelo MEF e a sua comparação com as soluções analíticas.

Tabela 4 – Valores de tensão obtidos do FIT para o caso da fenda inclinada.

$\beta$ [°]	FIT				VCCT		Expressões analíticas	
	MTS		MER					
	$K_I$	$K_{II}$	$K_I$	$K_{II}$	$K_I$	$K_{II}$	$K_I$	$K_{II}$
$\beta = 15$	37.95	140.6	37.95	140.6	37.8	139.6	37.5	140.1
$\beta = 30$	141.4	243.3	141.4	243.3	140.9	241.6	140.1	242.7
$\beta = 45$	282.7	280.8	282.7	280.8	281.6	278.8	280.2	280.2
$\beta = 60$	423.3	242.8	423.3	242.8	421.5	241.0	420.4	242.7
$\beta = 75$	526.5	139.9	526.5	139.9	526.2	138.8	523.0	140.1

Analisando os valores apresentados na Tabela 4 verifica-se que tal como aconteceu no caso da placa com fenda central (fenda perpendicular à tensão remota  $\sigma$ ), mais uma vez os valores obtidos no Abaqus® através dos métodos “Maximum Tangencial Stress” e “Maximum Energy Realese Rate” são coincidentes, e muito próximos dos valores obtidos por meios analíticos. Recorrendo ao VCCT foram também obtidos valores para  $K_I$  e  $K_{II}$  muito próximos dos obtidos diretamente do Abaqus®. Na Tabela 5 apresentam-se as diferenças relativas entre os valores obtidos por estes dois métodos e os valores obtidos através das expressões analíticas, em percentagem.

Tabela 5 - Diferenças relativas entre os valores do software e as expressões analíticas, em percentagem.

$\beta$ [°]	FIT		VCCT	
	MTS/MER		$K_I$	$K_{II}$
	$K_I$	$K_{II}$		
$\beta = 15$	1.2	0.36	0.8	0.36
$\beta = 30$	0.93	0.25	0.57	0.45
$\beta = 45$	0.89	0.21	0.5	0.5
$\beta = 60$	0.69	0.04	0.26	0.7
$\beta = 75$	0.67	0.14	0.61	0.93

Tabela 6 - Valores obtidos do Integral  $J$  e  $T$ -stress para o caso da fenda inclinada

$\beta$ [°]	Integral $J$	$T$ -stress	Expressão analítica $T$ -stress
$\beta = 15$	0.2988	86.47	86.6
$\beta = 30$	1.117	49.52	50
$\beta = 45$	2.243	-0.79	0
$\beta = 60$	3.367	-50.81	-50
$\beta = 75$	4.200	87.61	-86.6

Da Tabela 6 é possível examinar que os resultados obtidos através do software são verificados através das expressões analíticas.

Através das equações (99), (100) e (101) é possível traçar o seguinte gráfico para os fatores de intensidade de tensão e  $T$ -stress de acordo com  $\beta$ .

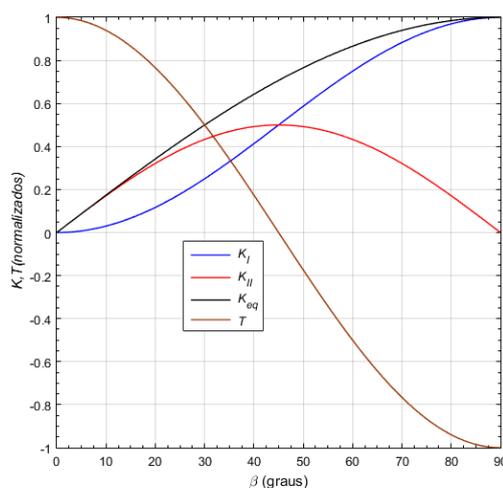


Figura 41 - Variação de  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $T$ -stress normalizados com o ângulo de uma fenda central de uma placa carregada uni axialmente, de acordo com as equações teóricas.

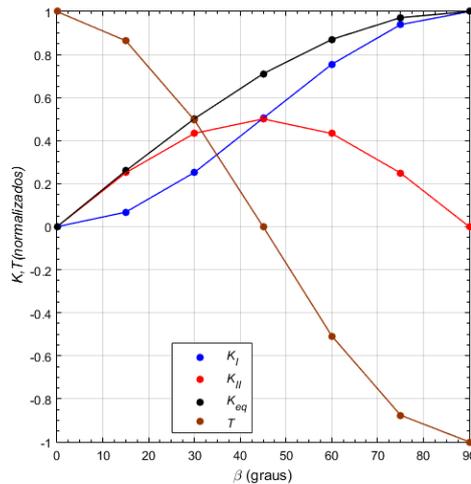


Figura 42 - Variação de  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $T$ -stress normalizados com o ângulo de uma fenda central de uma placa carregada uni axialmente, pontos obtidos em software Abaqus.

A Figura 42 demonstra a variação dos fatores de intensidade de tensão de acordo com o ângulo ( $\beta$ ), gráfico idêntico ao obtido por (Smith *et al.*, 2000). Para  $\beta = 90^\circ$  o modo I é obtido, mas para  $\beta = 0^\circ$  ambos os modos I e II desaparecem, sendo  $T$  o único termo da série que não desaparece. Isto implica que para valores de  $\beta$  baixos, a fratura é dominada por  $T$ . Verifica-se ainda que, tal como esperado,  $T$  varia entre -1 e 1, ou seja, entre  $T = -\sigma_{remota}$  para  $\beta = 90^\circ$  e  $T = \sigma_{remota}$  para  $\beta = 0^\circ$ .

Comparando as figuras acima, é possível aferir que o *fitting* dos resultados obtidos pelo MEF se assemelha muito ao resultado obtido pelas equações teóricas.

De seguida são apresentadas imagens nas quais se pode observar como a fenda se propaga em cada um dos casos acima estudados, utilizando a ferramenta XFEM. O XFEM é uma ferramenta disponibilizada pelo Abaqus® que possibilita o estudo da iniciação e propagação de uma fenda em problemas quase-estáticos. Para agravar o efeito da propagação da fenda de forma a que se possa observar melhor, as imagens que se apresentam de seguida foram obtidas para um carregamento remoto de 200 MPa e com ampliação das deformações.

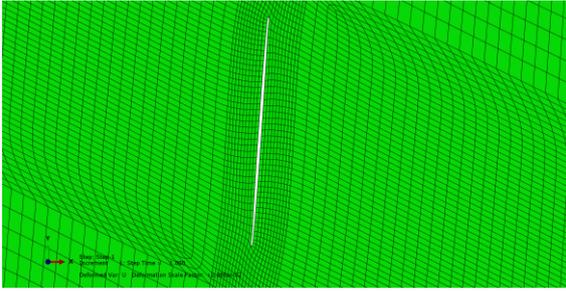


Figura 43 - Propagação da fenda a 15°.

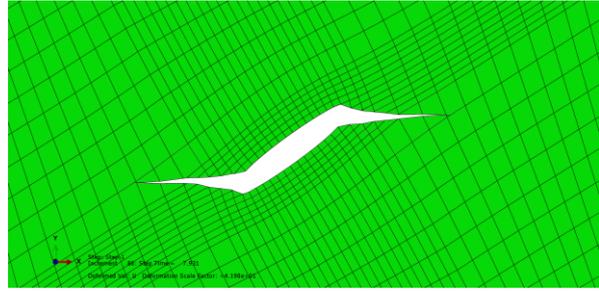


Figura 46 - Propagação da fenda a 60°.

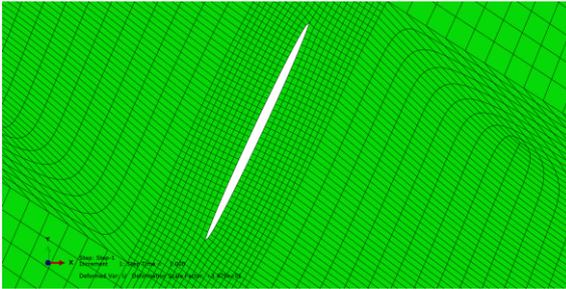


Figura 44 - Propagação da fenda a 30°.

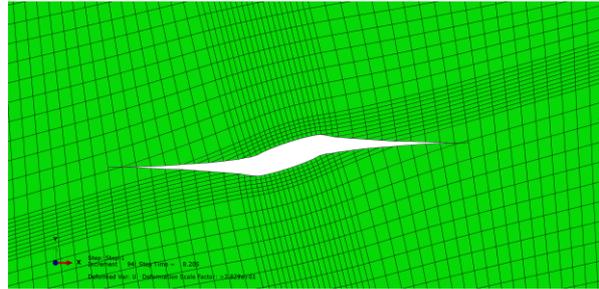


Figura 47 - Propagação da fenda a 75°.

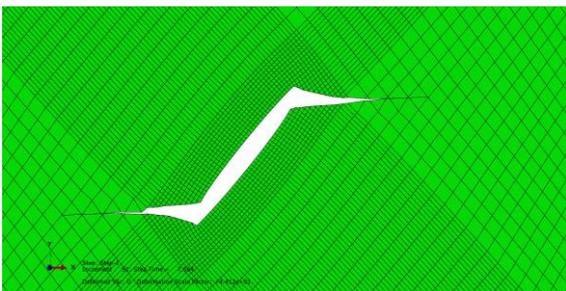


Figura 45 - Propagação da fenda a 45°.

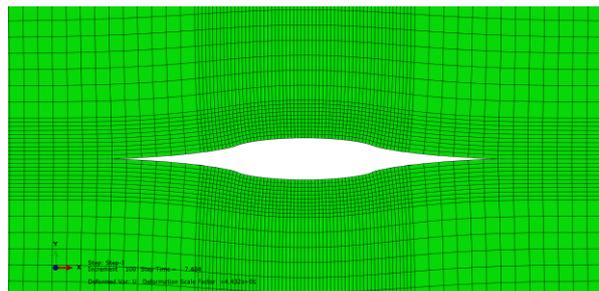


Figura 48 - Propagação da fenda a 90°.

### 3.5. *T-stress*

#### 3.5.1. Modo I

Tendo por base o artigo escrito por M.R. Ayatollahi *et al.*, “*Determination of  $T$ -stress from finite element analysis for mode I and mixed mode I/II loading*” (Ayatollahi *et al.*, 1998), foi realizada uma tentativa, de recriar o gráfico de  $T$  normalizado, obtido para uma situação de  $a/W=0.4$  (Figura 49), para uma fenda lateral. Uma vez que o artigo não fornece todos os dados utilizados no decorrer da análise, foi considerada uma placa retangular de 100x200 mm, contendo uma fenda lateral de 40 mm, tal como se pode observar na Figura 50 que respeita a relação geométrica do caso em estudo. Os resultados

apresentados de seguida foram obtidos considerando EPT e sendo  $x/a=0$  a extremidade da fenda. No Anexo A.1 são apresentados os passos realizados para a obtenção do valor de  $T$  em modo I.

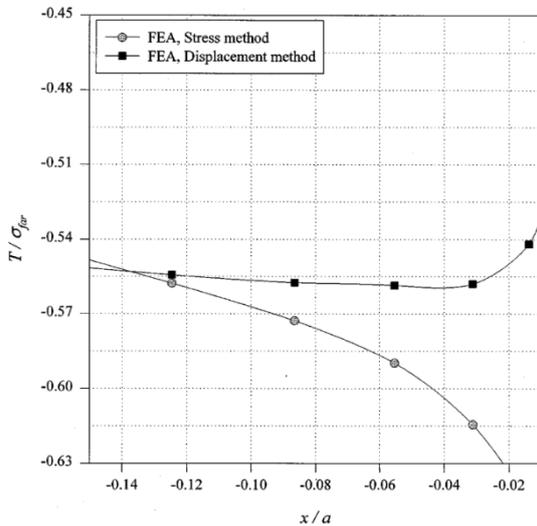


Figura 49 -  $T$  para um provete com fenda lateral de razão  $a/W=0.4$ , (Ayatollahi *et al.*, 1998).

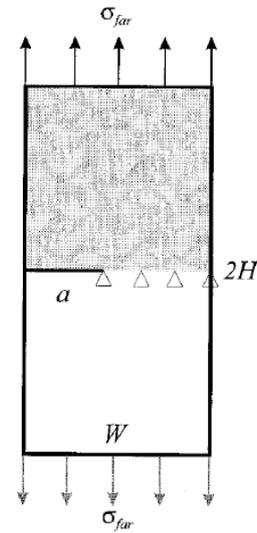


Figura 50 - Provete com fenda lateral, (Ayatollahi *et al.*, 1998).

Para tal recorreu-se a duas malhas, uma mais refinada que a outra, de forma a obter resultados que fossem comparáveis com os que são apresentados no artigo. Foram registados valores graficamente para o caso de  $\theta = \pi$  (sobre a face da fenda), no que ao “Stress Method” diz respeito; quanto ao “Displacement Method” foram obtidos valores através dos deslocamentos e das deformações. Ambas as malhas eram constituídas por elementos lineares CPS4, apresentados em 3.2, sendo a primeira constituída por 16720 elementos (tamanhos de 0.25 na zona de interesse e 2.5 na restante placa) e a segunda malha por 1680 (tamanho de 1 na zona de interesse e de 5 na restante placa). A interceção entre os dois tamanhos de elementos dá origem a um maior refinamento da zona da fenda.

No artigo (Figura 49) e para o caso do provete SEN foi obtido o valor de  $T/\sigma_{far} = -0.55$ .

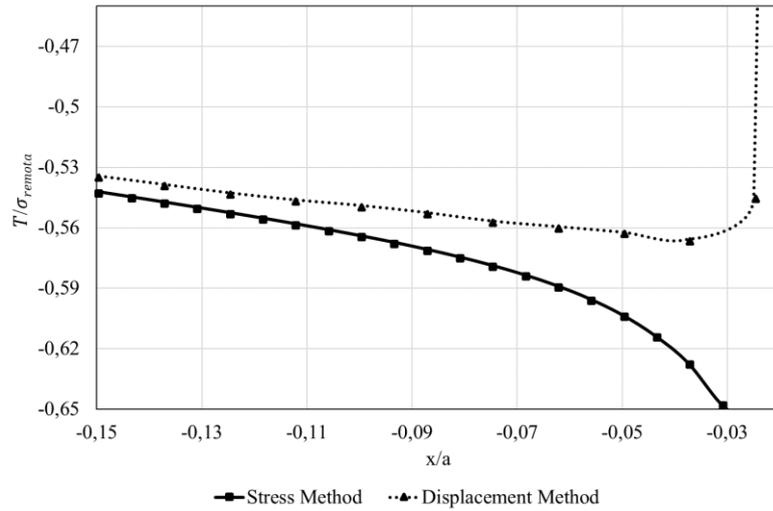


Figura 51 - Curvas obtidas a partir de uma malha mais refinada.

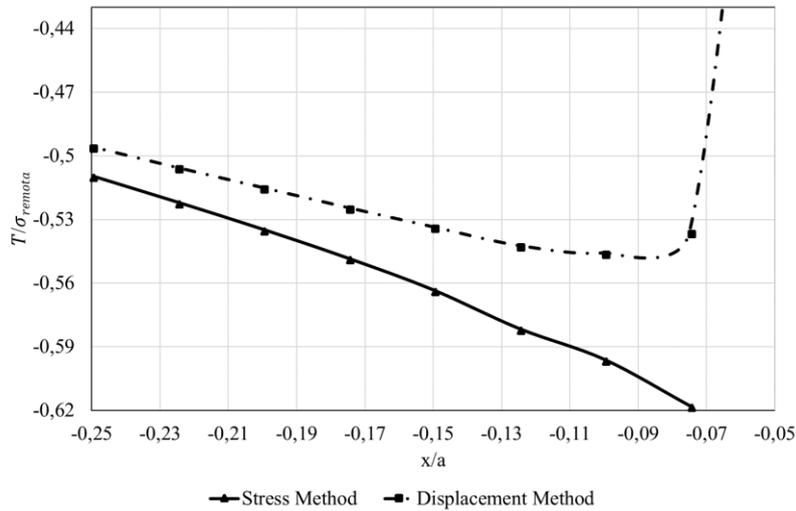


Figura 52 - Curvas obtidas a partir de uma malha menos refinada.

Na Figura 51 e Figura 52 encontram-se representadas as curvas obtidas através de dois tipos de malhas diferentes para o caso acima descrito, concluindo-se que a tentativa de obter as curvas apresentadas por (Ayatollahi *et al.*, 1998), foi bem-sucedida, tendo sido obtidas curvas semelhantes. Para a obtenção destas foi utilizado  $\theta = \pi$  para o “Stress Method” e utilizados os deslocamentos para o “Displacement Method”. Neste último foram ainda utilizadas as deformações obtidas diretamente pelo software, sendo os resultados apresentados nas Figura 53 e Figura 54.

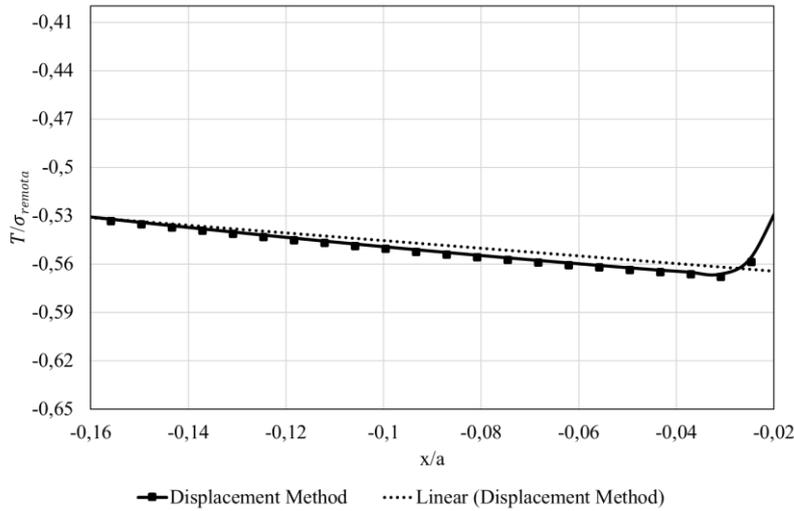


Figura 53 - Curva do “Displacement Method” através das deformações.

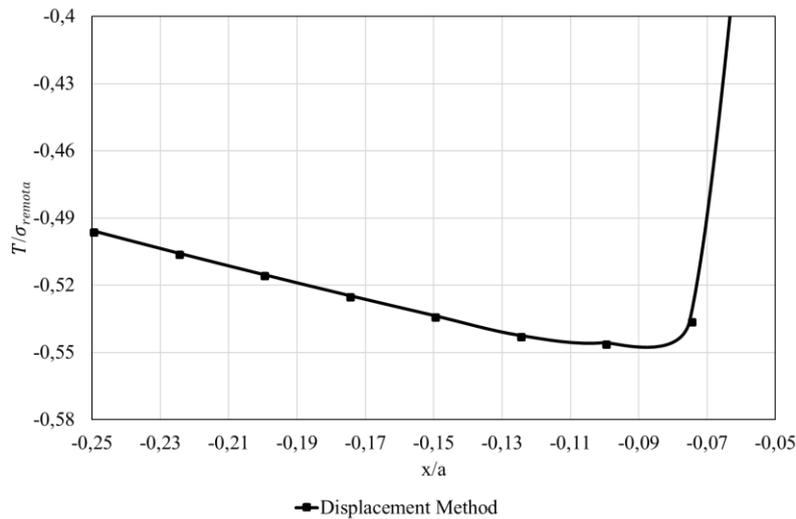


Figura 54 - Curva do “Displacement Method” através das deformações, malha menos refinada.

Verifica-se assim que o uso das deformações para obtenção dos valores de *T-stress* em modo I através do “Displacement Method”, tendo por base de comparação o uso dos deslocamentos, culmina numa boa aproximação de resultados, para além de ser um processo mais simples e direto.

Não é aqui apresentada uma comparação gráfica entre os valores obtidos para o “Displacement Method” através das deformações ou da derivada dos deslocamentos, uma vez que os valores obtidos são muito idênticos. Resultaria um gráfico no qual seria impercetível a distinção entre as duas curvas, exceto numa zona muito próxima da extremidade da fenda, no que à malha mais refinada diz respeito. Esta ligeira diferença

pode-se dever ao maior refinamento da fenda, ou aos pontos considerados na região próxima da extremidade da fenda.

As Figura 55 e Figura 56 demonstram uma ampliação na zona de interesse, das deformações segundo o eixo  $x$  obtidas pelo software para os dois tipos de malha.

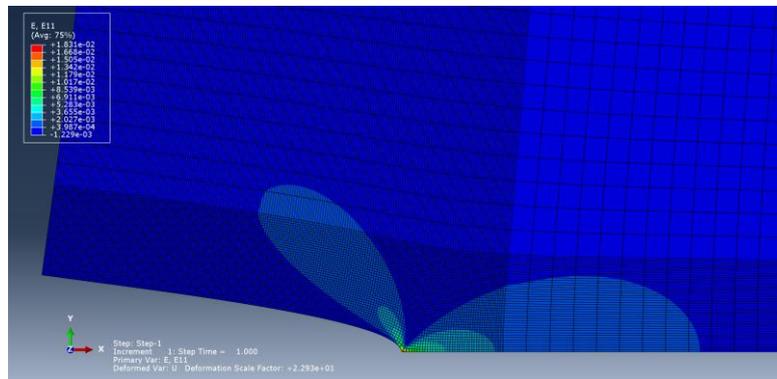


Figura 55 - Deformações segundo  $x$ , malha mais refinada.

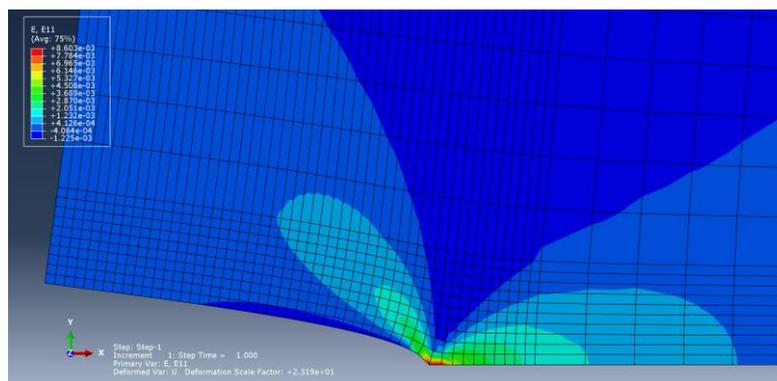


Figura 56 - Deformações segundo  $x$ , malha menos refinada.

A título de curiosidade são ainda apresentados dois gráficos referentes à obtenção de  $T$ -stress usando pontos no plano da fenda, ou seja,  $\theta = 0$ .

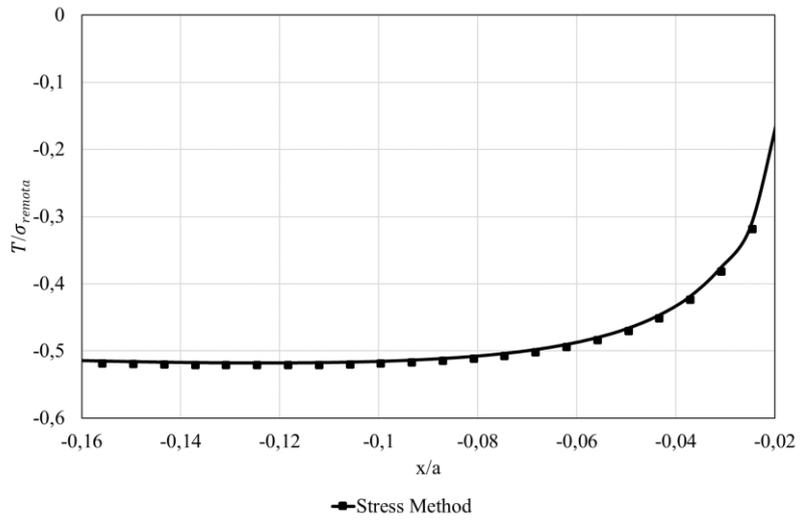


Figura 57 – *T-stress* para  $\theta = 0$ , malha mais refinada.

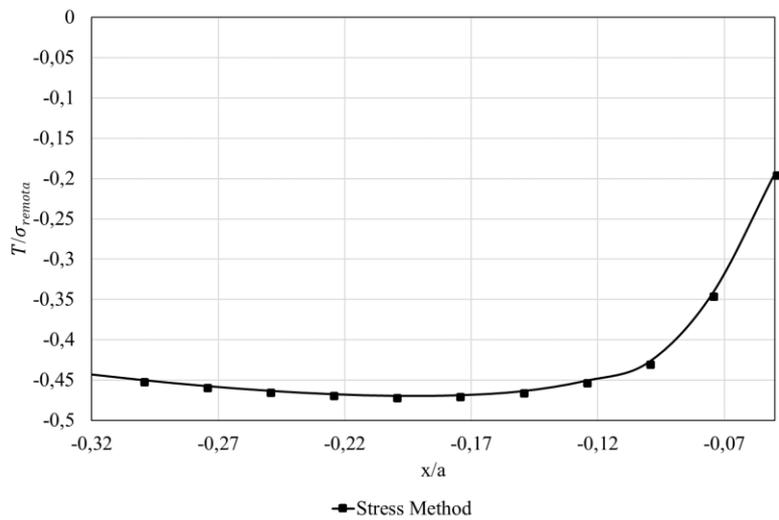


Figura 58 - *T-stress* para  $\theta = 0$ , malha menos refinada.

Analisando os gráficos acima verifica-se que para  $\theta = 0$  as tensões dão origem a curvas que seguem a tendência da abertura da fenda, tendo sido obtidos valores próximos através das duas malhas.

### 3.5.2. Modo misto I-II

Recorrendo às equações (87) e (88), para o caso da fenda inclinada tratado no ponto 3.4 e para um ângulo de  $\beta = 60^\circ$  realizou-se um estudo idêntico ao do ponto anterior, utilizando os dois métodos, e comparando os valores obtidos com a solução analítica apresentada na Tabela 6.

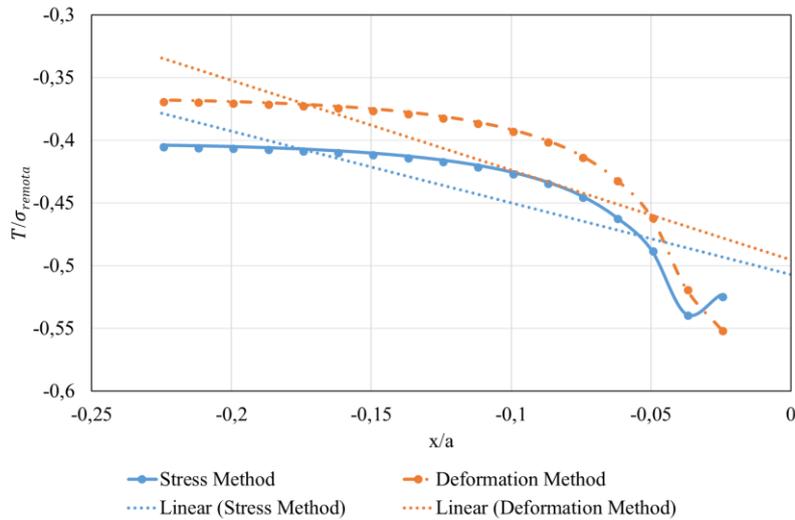
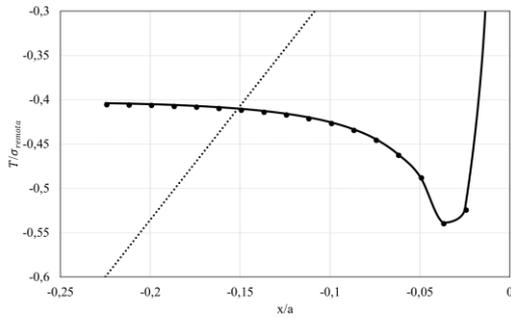
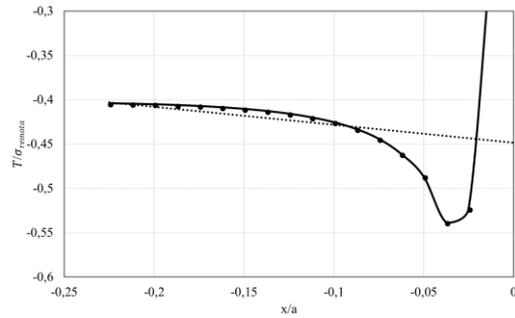


Figura 59 - Gráfico de  $T$  normalizado para  $\beta = 60^\circ$ .

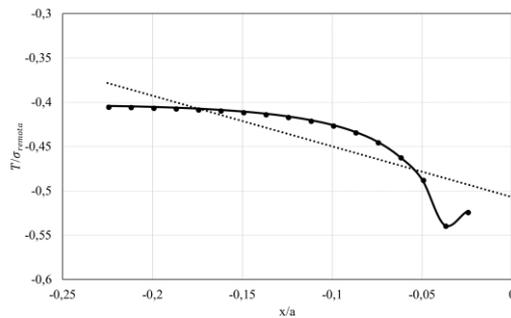
Tendo mais uma vez a equação que utiliza os deslocamentos culminado em valores não satisfatórios, foi utilizada a equação que usa as deformações. Verificou-se assim uma excelente aproximação entre o valor obtido de -50 (Tabela 6) e os valores de -51 e -49 para cada um dos respectivos métodos. Estes valores variam de acordo com o número de pontos considerados perto da extremidade da fenda, tal como se demonstra na Figura seguinte.



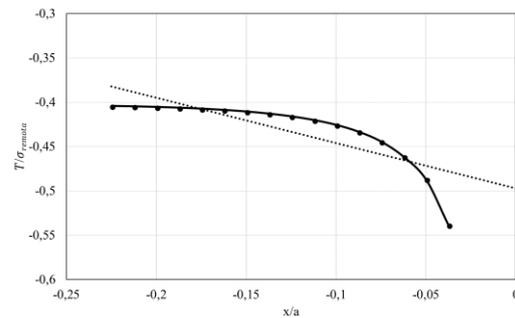
a)  $x/a = 0$



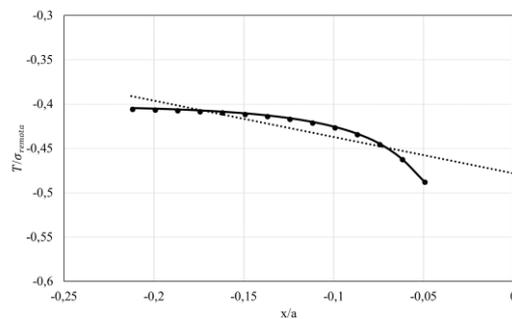
b)  $x/a = -0.0125$



c)  $x/a = -0.025$



d)  $x/a = -0.0375$



e)  $x/a = -0.05$

Figura 60 – Variação do valor de  $T$  normalizado para  $\beta = 60^\circ$ , Stress Method.

Analisando a Figura 60, é possível aferir, tal como apresentado por (Ayatollahi *et al.*, 1998), que os valores devolvidos para a tensão  $T$ , quando considerados elementos a distâncias pouco razoáveis da extremidade da fenda, incluindo a própria extremidade ( $x/a=0$ ), culminam em valores que não são aceitáveis. Verifica-se, que considerando pontos com alguma distância à extremidade da fenda, são obtidos valores aceitáveis de  $T$ . O Stress Method é um método que depende da malha, pelo que um maior ou menor refinamento desta, origina um melhor ou pior valor de  $T$ .

## 4. Flexão em 4 pontos – ensaio experimental

### 4.1. Introdução

Em alguns casos pode não ser prático determinar  $K$  através de métodos analíticos ou computacionais. Por exemplo, a carga pode ser desconhecida ou dinâmica e a informação disponível acerca da estrutura pode ser insuficiente para conduzir uma análise em MEF. Como tal, pode ser desejável calcular  $K$  com base na medição experimental local das tensões, deformações e deslocamentos.

Segundo (Zehnder, 2012), vários métodos experimentais como a fotoelasticidade, interferometria, correlação de imagem, termoelasticidade e medidores de tensão têm vindo a ser desenvolvidos, e podem, em princípio ser aplicados na determinação do FIT num dado componente. Estes servem ainda como suporte e forma de confirmar os valores obtidos especialmente através do MEF. Ainda que este produza resultados, um pequeno erro pode traduzir-se em valores que em nada têm a ver com a realidade.

A escolha entre os vários métodos disponíveis depende da finalidade do trabalho, ou seja, quando se testa um material para uma situação crítica deve-se optar por métodos normalizados e testados; quando se procura desenvolver e testar um novo material, outros tipos de testes podem ser desenvolvidos e adotados.

Os ensaios mecânicos realizados em materiais podem ser classificados de acordo com a velocidade de aplicação da carga e de acordo com o dano criado no provete, ou seja, no primeiro caso podem se subdividir em estáticos, dinâmicos ou de carga constante e no segundo, em destrutivos ou não destrutivos.

Existem dois tipos principais de ensaios de flexão: flexão em 3 pontos ou flexão em 4 pontos. Estes consistem na aplicação de uma carga crescente em determinados pontos de um provete prismático e permitem a obtenção de um gráfico carga versus deformação.

O ensaio à flexão em quatro pontos permite a obtenção de modo misto I e II, sendo que o modo II se deve ao aparecimento do esforço de corte e o modo I ao momento fletor. Quando o esforço de corte é máximo o momento fletor é nulo, pelo que deveremos afastar-nos um pouco desse ponto, para que os dois modos possam ser conjugados. No entanto, é necessário ter em atenção o local para o qual nos afastamos, visto que

poderemos estar a causar o fecho da fenda e não a sua abertura, algo não desejável para este estudo.

Tal como todos os procedimentos e métodos experimentais, também este pode possuir erros associados a tensões criadas através dos pontos de contacto, aparecimento de efeitos de torção, possível desalinhamento do provete, entre outros.

O ensaio experimental consistiu em variar a distância entre apoios, variando assim a intensidade de cada um dos fatores  $K_I$  e  $K_{II}$ , variar também a distância de aplicação da carga em relação ao plano da fenda, observar e registar as direções de propagação obtidas para modo II puro e modo misto, medir os ângulos de propagação inicial da fenda e caracterizar os valores de  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $K_{eq}$  para cada um dos provetes a serem testados.



Figura 61 – Foto da montagem utilizada no decorrer do ensaio.

Na Figura 61 é possível observar a montagem usada para a realização dos ensaios de flexão em 4 pontos. No decorrer deste ensaio foi utilizada uma velocidade de 0.2 mm/min, os rolos superiores possuíam um diâmetro de 12.5 mm e os inferiores de 30 mm. Uma vez que a peça inferior da montagem possuía uma distância pré-definida de 100 mm, a distância entre apoios foi mantida sempre nesses mesmos 100 mm, variando apenas a sua posição ao longo do provete e a sua distância relativamente ao ponto de aplicação da carga.

No Anexo A.5 podem ser observados os gráficos de aplicação da carga em função do tempo e do deslocamento registados em laboratório.

## 4.2. Provetes

No decorrer deste estudo serão analisados provetes padrão em acrílico, tal como representado na Figura 2 b), possuindo um entalhe maquinado e uma fenda inicial obtida colocando uma lâmina de aço no entalhe e com a ajuda de um martelo aplicar uma ligeira pressão que fará a lâmina penetrar o material, dando assim origem a um defeito inicial de pequenas dimensões.

Foram testados dois métodos distintos de obtenção da pré-fenda: realizar pressão na lâmina, de forma mais ou menos uniforme, recorrendo a um torno de bancada; e com ajuda de um martelo dar ligeiras pancadas na lâmina até que esta crie um defeito inicial no material. Verificou-se que o primeiro, apesar de dar origem a um defeito mais uniforme, era de difícil controlo, originando fendas muito grandes no material. O segundo método, apesar de dar origem a fendas menos uniformes (que são minimizados batendo mais de um lado ou de outro), mas culminando em pré-fendas de menores dimensões, o que o torna no melhor método para este estudo.

De acordo com o set-up existente no Laboratório de Ensaios de Tração (LET), os apoios estão distanciados 100 mm.

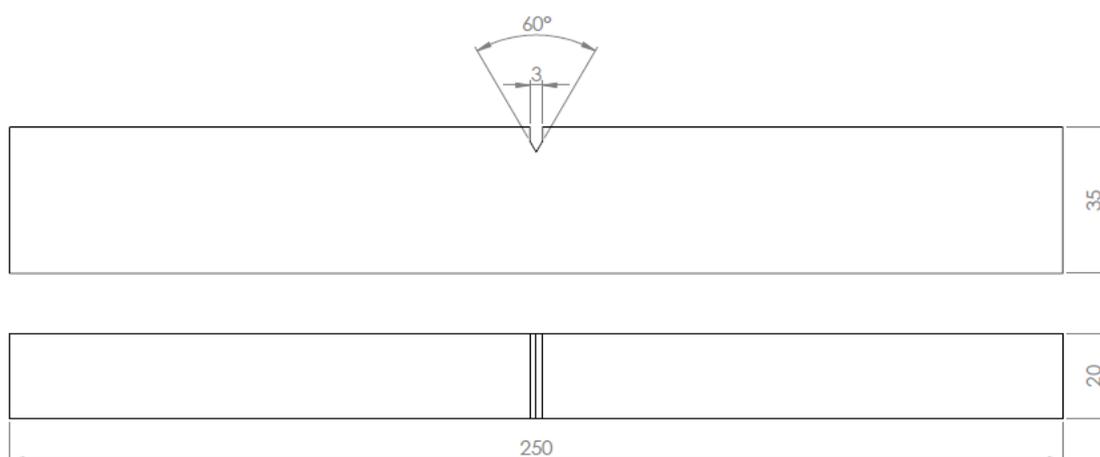


Figura 62 - Representação do provete de teste.

Através da pesquisa realizada durante este trabalho, o valor mínimo encontrado em artigos para  $K_{Ic}$  do PMMA foi de  $0.95 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ , (He *et al.*, 1990). Através das equações (51) e (52) é possível obter o valor de  $K_I$  e  $K_{II}$  em função da carga aplicada  $P$ . Utilizando a equação (6) é possível obter o valor da carga a ser aplicada em cada um dos provetes.

De seguida é apresentada uma tabela resumo dos valores obtidos para todos os provetes em estudo e o procedimento de cálculo da carga esperada para o provete 2, sendo igual para os restantes.

Tabela 7 - Distâncias dos rolos e de aplicação da carga de cada provete, valor da respetiva carga esperada e comprimento da pré-fenda.

Provete	$S_1$ [mm]	$S_2$ [mm]	$S_0$ [mm]	$a$ [mm]	Carga [N]
1	95	5	0	18	2302
2	95	5	1	23	1628
2b	95	5	1	18	1841
3	95	5	3	17	431
4	85	15	5	13	436
5	85	15	10	15	196
6	75	25	5	17	471
7	75	25	10	17	237
7b	75	25	10	22	208
8	75	25	15	16	163
9	75	25	20	16	94

O provete 2 conta com as seguintes características:  $W = 35$  mm;  $t = 20$  mm;  $a = 23$  mm;  $S_0 = 5$  mm;  $S_1 = 95$  mm;  $S_2 = 5$  mm.

Temos que:

$$Q = \frac{S_2 - S_1}{S_2 + S_1} P \quad (102)$$

resultando em  $Q = -0.9P$ .  $\eta$  é dado por  $\eta = S_0/W = 0.029$ . Através da Figura 18 retiram-se os valores de  $Y_I = 12.5$  e  $Y_{II} = 1.65$ . Posto isto, através das equações (51) e (52):

$$K_I = -123.431P \quad (103)$$

$$K_{II} = -570.253P \quad (104)$$

Através da equação (6) e igualando-a a  $K_{Ic}$  é possível obter o valor de  $P = 1841$  N.

$S_1$  e  $S_2$  representam as distâncias dos apoios ao plano de aplicação da carga e  $S_0$  a distância da linha de aplicação da carga em relação ao plano da fenda (Figura 22 e Figura 24).

### 4.3. Discussão e conclusões

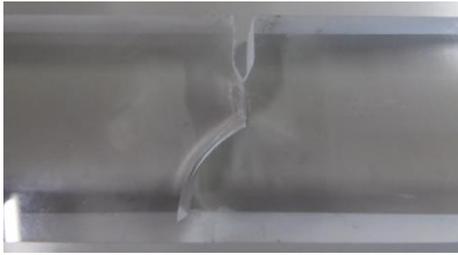
Todos os provetes ensaiados contaram com uma pequena pré-carga na ordem dos -10 a -15N, esta permitia assim a estabilização de todo o sistema para que o ensaio decorresse da melhor forma e de acordo com as distâncias pré-definidas.

Durante o estudo experimental de propagação da fenda verificou-se que esta iniciava a sua propagação de uma forma muito lenta numa fase inicial e de repente dava-se a sua completa propagação. Para os 3 primeiros provetes, que possuíam uma distância entre os dois apoios mais próximos da fenda ( $2S_2 = 10$  [mm]) e no qual um se encontrava sujeito apenas a modo II puro, foi possível observar a propagação de toda a fenda, visto esta ter ocorrido de forma mais lenta, embora rápida. Para os restantes provetes, os quais fraturaram, a fase inicial de propagação da fenda foi quase impercetível a olho nu no decorrer do ensaio, ocorrendo rotura de forma imediata após uma pequena propagação da fenda. Na Figura 63 é possível observar essa pequena zona interna de propagação da fenda, a qual apresenta estrias devidas a essa propagação.

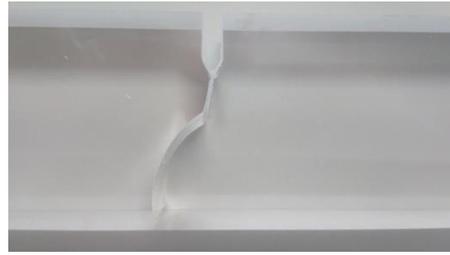


Figura 63 – Zona de propagação da fenda antes da rotura, provete 7.

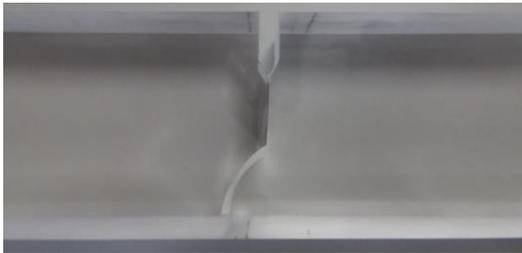
Na Figura 64 são apresentados os registos da propagação da fenda de cada provete.



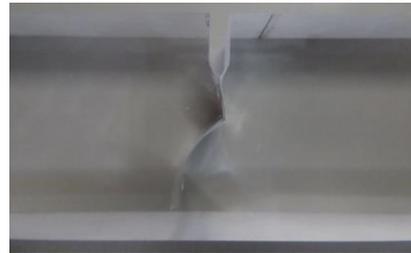
a)  $K_I/K_{II}=0$  - Provete 1



b)  $K_I/K_{II}=0.18$  - Provete 2b



c)  $K_I/K_{II}=0.234$  - Provete 2b



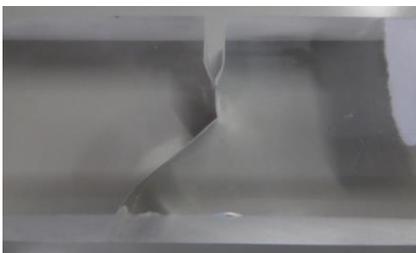
d)  $K_I/K_{II}=0.540$  - Provete 3



e)  $K_I/K_{II}=0.899$  - Provete 6



f)  $K_I/K_{II}=0.932$  - Provete 4



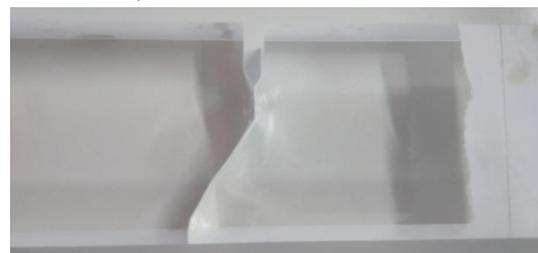
g)  $K_I/K_{II}=1.799$  - Provete 7



h)  $K_I/K_{II}=1.857$  - Provete 5



i)  $K_I/K_{II}=2.232$  - Provete 7b



j)  $K_I/K_{II}=2.811$  - Provete 8



k)  $K_I/K_{II}=3.749$  - Provete 9

Figura 64 - Propagação das fendas.

No anexo (A.5) é possível observar os gráficos de aplicação da carga em função do tempo e do deslocamento axial para o provete 1, assim como os diagramas de momentos fletores que permitiram verificar a correta posição da fenda no set-up e o processo de obtenção dos mesmos.

Tabela 8 - Valores teóricos da carga suportada pelos provetes SEN de flexão em 4 pontos para ambos os  $K_{Ic}$  e valores aos quais se verificou propagação da fenda.

Provete	Carga [N]	
	$K_{Ic} = 0.95 \text{ [MPa}\sqrt{\text{m}}]$	Propagação
1	2302	3477
2	1628	2466
2b	1841	3635
3	431	4035
4	436	5178
5	196	3144
6	471	4329
7	237	3052
7b	208	1990
8	163	2596
9	94	1947

Analisando a Tabela 8 verifica-se que existe uma grande discrepância entre as cargas calculadas analiticamente e aquelas que o material foi capaz de suportar em laboratório. Esta pode dever-se ao método de cálculo utilizado, bem como ao facto de neste ponto do trabalho, as características concretas do material serem desconhecidas, tendo sido utilizados os valores mais baixos encontrados em artigos científicos. Acresce que a ocorrência observada de alguma fissura progressiva, antes da ocorrência da propagação rápida, indica que o material não é totalmente frágil (já que nessa situação a propagação seria instantânea).

Os diagramas de momentos fletores e de esforço transversal apresentados em anexo (A.5) para cada um dos casos, dizem respeito às cargas calculadas analiticamente, embora sirvam de igual forma de indicação sobre a posição da fenda, se esta se encontra à tração ou à compressão.

Na Tabela 9 é apresentado um resumo dos valores da carga suportada por cada provete, os ângulos de propagação da fenda, assim como os valores de  $K_I$  e  $K_{II}$  a que cada

provete esteve sujeito, obtidos através das equações (51) e (52), de acordo com (Wang *et al.*, 2016), e o valor de  $K_{eq}$  calculado através da equação (6). É ainda apresentada a relação  $K_I/K_{II}$ .

Por tratamento das equações (51) e (52), a relação  $K_I/K_{II}$  pode ainda ser dada por:

$$\frac{K_I}{K_{II}} = \frac{\eta Y_I}{Y_{II}} \quad (105)$$

Tabela 9 - Resumo das forças suportadas, dos ângulos de propagação da fenda, os valores de  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{eq}$  e a relação  $K_I/K_{II}$ .

Provete	$\psi_0$ [°]	Carga [N]	$K_I$	$K_{II}$	$K_{eq}$	$K_I/K_{II}$
1	65	3477	0	-1.435	1,435	0
2	55	2446	-0.326	-1.395	1.432	0.234
2b	42	3635	-0.27	-1.5	1.524	0.18
3	60	4036	-0.837	-1.619	1.839	0.540
4	53	5178	-1.121	-1.203	1.645	0.932
5	43	3144	-1.521	-0.819	1.727	1.857
6	55	4329	-0.868	-0.965	1.298	0.899
7	52	3052	-1.224	-0.680	1.400	1.799
7b	53	1990	-1.334	-0.598	1.462	2.232
8	40	2596	-1.461	-0.52	1.551	2.811
9	13	1947	-1.461	-0.39	1.512	3.749

Tal como seria de esperar, quando aplicada a linha de ação da carga do atuador (e célula de carga) contendo o plano da fenda (Provete 1) o modo I é nulo, estando o provete unicamente sujeito a modo II puro. É ainda de salientar que o modo I cresce com o aumento da distância entre a linha de aplicação da carga e o plano da fenda. O contrário acontece para o modo II que diminui com o aumento da distância da linha de aplicação da carga em relação ao plano da fenda. Com o aumento de  $K_I$  o ângulo de propagação da fenda aumenta, tal como demonstrado previamente pela Figura 20, tendendo a sua propagação para o plano da fenda, também demonstrado na Figura 21.

No que ao provete 3 diz respeito, não se verificou uma descida do valor de  $K_{II}$  em relação ao provete 2, como seria de esperar. Tal deve-se ao facto de este ter suportado uma carga mais elevada que o provete anterior e de possuir uma pré-fenda mais pequena.

Quanto à tenacidade equivalente em modo misto, verificou-se alguma oscilação em torno do seu valor de ensaio para ensaio, tendo sido obtido um valor médio de  $K_{eq} = 1.5$ . Esta oscilação pode ser, em parte, devida ao facto de manualmente não se conseguir obter pré-fendas todas iguais, ou sem possuir qualquer tipo de inclinação. No entanto esta pode ser tomada como aproximadamente constantes, visto as suas oscilações não serem muito grandes.

Da Tabela 9 retira-se ainda que o a relação  $K_I/K_{II}$  aumenta com o aumento da distância entre a linha de aplicação da carga e o plano da fenda.

A Figura 65 demonstra a dependência de  $K_{eq}$  com a relação  $K_I/K_{II}$ , onde é possível observar uma certa tendência crescente do valor de  $K_{eq}$  com o aumento de  $K_I/K_{II}$ . Os pontos assinalados a vermelho correspondem à repetição dos ensaios dos provetes 2 e 7 assinalados a azul.

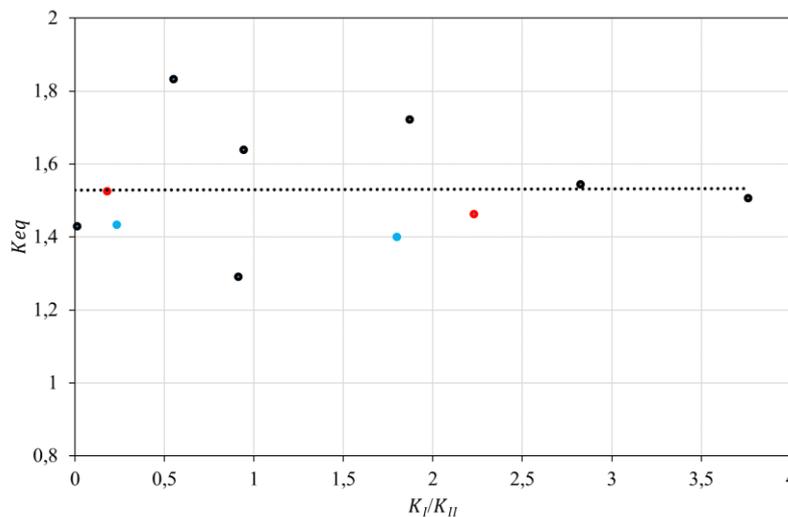


Figura 65 – Representação gráfica de  $K_I/K_{II}$  vs  $K_{eq}$ , notar que o eixo vertical não se inicia em 0.

De seguida são apresentados os ângulos de propagação obtidos e os que seriam inicialmente esperados de acordo com a representação na forma usada por J. G. Williams (subcapítulo 2.5).

Tabela 10 - Valores esperados do ângulo de propagação e valores obtidos nos ensaios.

Provete	$\psi_0$ [°] obtido	$\psi_0$ [°] J. G. Williams <sup>7</sup>	$K_I/K_{II}$	$K_{II}/K_I$
1	65	71	0	$\infty$
2	55	66	0.234	4,278
2b	42	67	0.18	5,559
3	60	61	0.540	1,853
4	53	54	0.932	1,073
5	43	42	1.857	0,538
6	55	55	0.899	1,112
7	52	42	1.799	0,556
7b	53	38	2.232	0,448
8	40	33	2.811	0,356
9	13	27	3.749	0,267

Comparando os valores obtidos experimentalmente com aqueles que foram previstos para  $\psi_0$ , verificamos que se encontram muito próximos destes, exceto para os provetes 2 e 7, os quais apresentam uma a maior diferença, embora seja uma diferença aceitável e que pode ser devida a algum desalinhamento na montagem ou na preparação da pré-fenda. Posto isto, e uma vez existindo ainda 4 provetes imaculados, resolveu-se realizar de novo um ensaio nas mesmas condições destes dois provetes (provetes 2b e 7b), sendo que o resultado obtido continuou um pouco à quem do inicialmente esperado. Sobrando ainda dois provetes, decidiu-se tentar completar um pouco mais a curva na zona de valores baixos de  $K_{II}$ , surgindo assim os provetes 8 e 9. A Figura 66 demonstra essa mesma comparação, sobe a forma gráfica.

<sup>7</sup> Valores obtidos pelas equações que dão origem à Figura 11, arredondados às unidades.

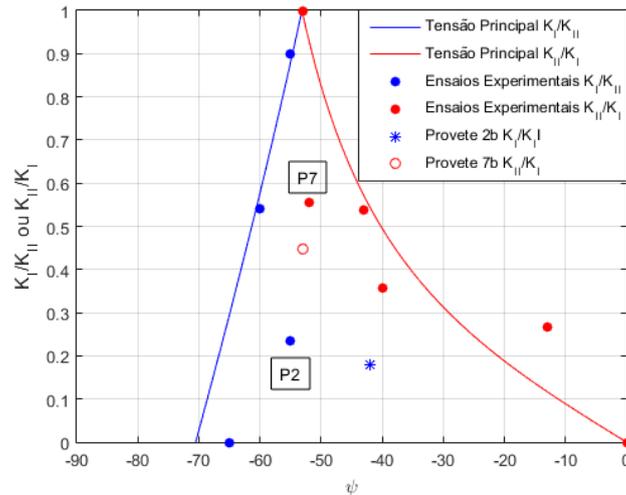


Figura 66 - Relação entre  $K_I/K_{II}$  e  $\varphi_0$  para o critério da tensão principal máxima e comparação com os resultados experimentais.

O ponto de coordenadas (0;0) corresponde ao ensaio de flexão em 3 pontos que será abordado mais a diante neste trabalho. É de salientar que os valores de  $K_I$  e  $K_{II}$  podem não corresponder exatamente aos que os provetes estiveram sujeitos durante o ensaio, pois como visto na Figura 20, a relação entre eles é muito sensível à variação de  $S_0$  (distância de aplicação da carga em relação ao plano da fenda), pelo que um pequeno desalinhamento pode fazer variar estes valores, obtendo assim diferentes valores de  $K_I$  e  $K_{II}$ , o que pode originar diferenças entre os ângulos de propagação obtidos e os que eram inicialmente esperados.

Verifica-se que a tentativa de repetição dos provetes 2 e 7 se mostrou infrutífera, apurando-se que ambos os pontos assinalados a verde e a preto se afastaram ainda mais das respectivas linhas, a partir das quais devem ser lidas. Sendo os dois pontos centrais vermelho e azul os provetes 7 e 2, respetivamente. Este efeito pode ser devido, especialmente no caso do provete 7, à grande pré-fenda criada, e no caso do provete 2 devido a uma ligeira inclinação da mesma. O processo de gerar a pré-fenda, tal como anteriormente enunciado, é um processo manual, encontrando-se sujeito ao erro e imperfeição humana.

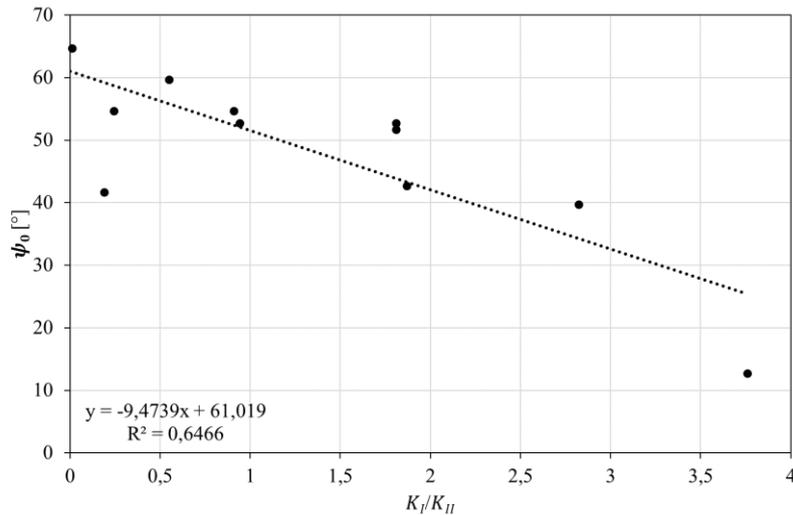


Figura 67 - Representação do ângulo de propagação em função da relação  $K_I/K_{II}$ .

Na Figura 67 encontra-se representada a dependência do ângulo de propagação com a relação de  $K_I/K_{II}$ , verificando-se que o ângulo de propagação diminui com o aumento desta relação.

A Figura 68 demonstra graficamente a direção de propagação inicial da fenda ( $\psi_0$ ) de acordo com o parâmetro de modo misto  $M_e$ , apresentado por (Smith *et al.*, 2000), sendo que este último pode ser relacionado com  $\beta$  da seguinte forma:

$$M_e = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left( \frac{K_I}{K_{II}} \right) \quad (106)$$

substituindo pelas expressões de  $K_I$  e  $K_{II}$ , vem:

$$M_e = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left( \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \right) = \frac{2}{\pi} \tan^{-1}(\tan \beta) = \frac{2}{\pi} \beta \quad (107)$$

sendo que  $M_e$  toma valor unitário para modo I e é nulo para modo II, tal como se pode verificar na figura seguinte.

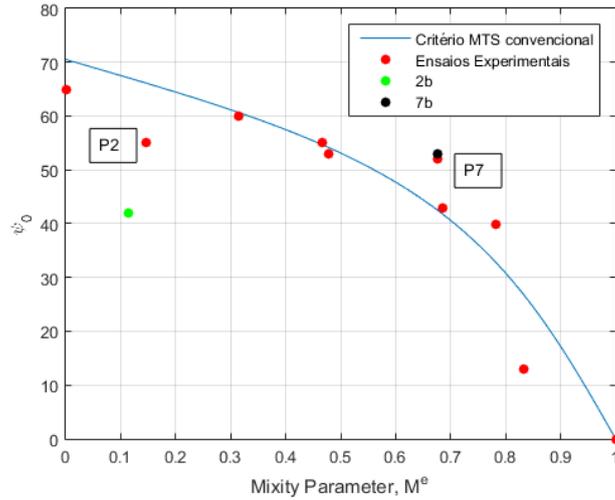


Figura 68 - Direção inicial de propagação da fenda em função do ângulo da pré-fenda e do parâmetro de modo misto.

Revisitando a Figura 7 e incluindo agora os pontos obtido através dos ensaios experimentais:

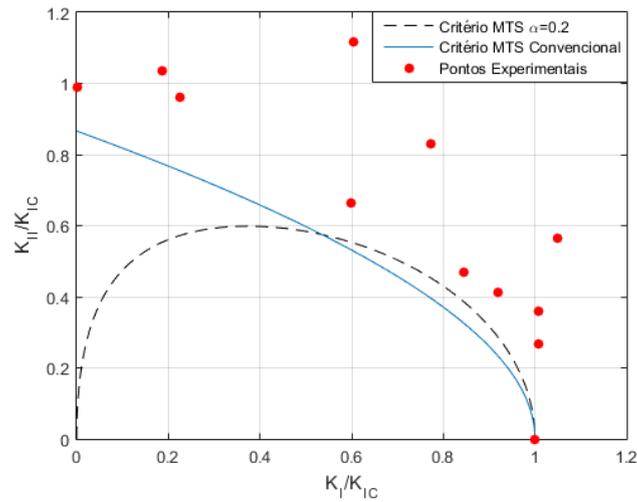


Figura 69 -  $K_I$  e  $K_{II}$  para fratura em modo misto de acordo com o critério MTS e inclusão dos pontos experimentais.

Verifica-se que os pontos experimentais ficam a cima da curva representativa do MTS, pelo que estamos perante uma situação idêntica à de (Erdogan & Sih, 1963), conforme se constata na Figura 70, mostrando esses resultados.

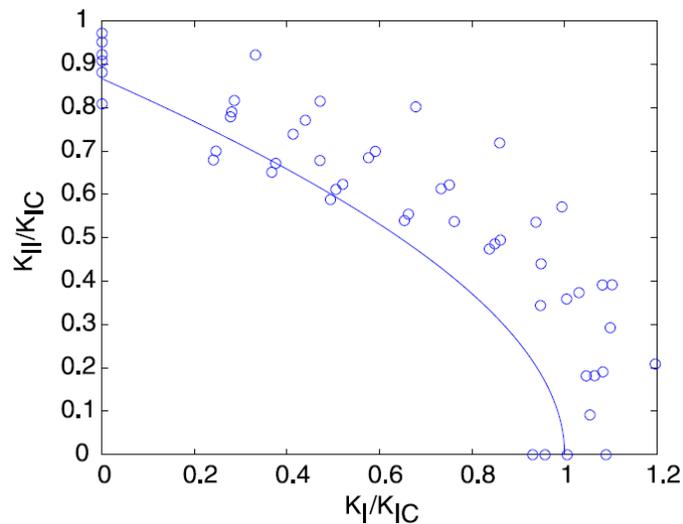


Figura 70 - Local de fratura em modo misto de acordo com o critério MTS, resultados obtidos por (Erdogan & Sih, 1963) <sup>8</sup>.

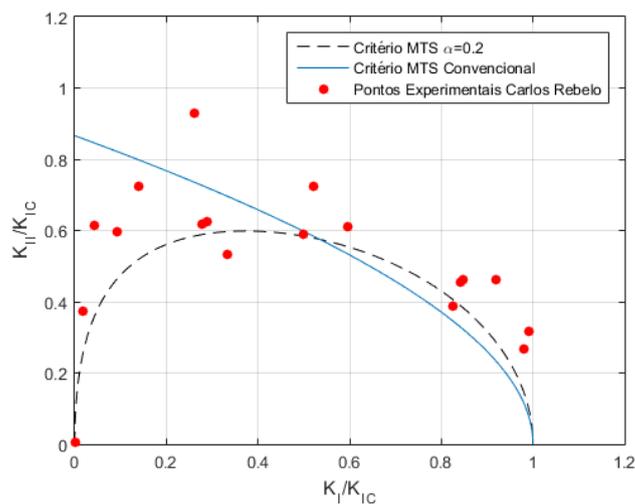


Figura 71 - Local de fratura em modo misto de acordo com o critério MTS, resultados obtidos por (Carlos A.C.C. Rebelo, 1987) <sup>9</sup>.

Comparando os resultados experimentais obtidos neste trabalho com os resultados de (Erdogan & Sih, 1963), verifica-se que tal como aconteceu anteriormente, também os presentes resultados estão acima da curva teórica e com dispersão semelhante. Os resultados obtidos por (Carlos A.C.C. Rebelo, 1987) aparentam ser mais coerentes com os de Erdogan & Sih, uma vez que também estes foram obtidos através do ensaio de uma

<sup>8</sup>Resultados obtidos por (Erdogan & Sih, 1963), apresentados por (Zehnder, 2012).

<sup>9</sup>Representação gráfica obtida através dos valores da Tabela 9 da tese de (Carlos A.C.C. Rebelo, 1987).

placa com fenda central tracionada por uma tensão remota, enquanto os valores obtidos neste trabalho dizem respeito a provetes de flexão em quatro pontos (SEN).

(Sih, 1991) verificou quando apresentou o critério SED, que este se aproximava melhor dos pontos experimentais que obtivera anteriormente, (Erdogan & Sih, 1963). Neste trabalho verificou-se exatamente a mesma situação, pelo que as figuras seguintes demonstram essa situação.

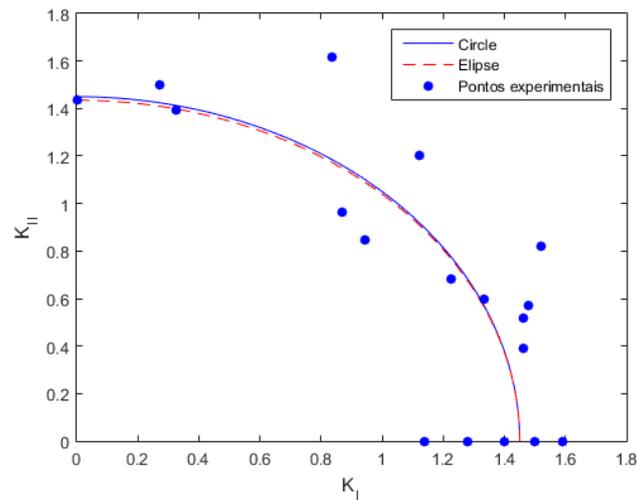


Figura 72 - Fratura em modo misto I-II, pontos experimentais.

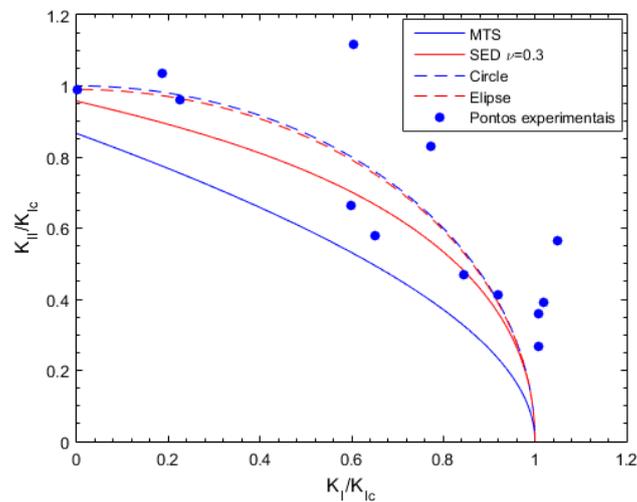


Figura 73 - Fratura em modo misto I-II, critérios MTS e SED, círculo e elipse.

Na Figura 72 e Figura 73 são apresentados não só os pontos experimentais obtidos através de flexão em quatro pontos, mas também os pontos obtidos por flexão em 3 pontos que serão abordados no próximo capítulo.

## 5. Flexão em 3 pontos – ensaio experimental

O ensaio de flexão em 3 pontos permitiu obter o valor de  $K_{Ic}$ . Para tal foram utilizadas algumas das metades dos provetes usados no ensaio de flexão em quatro pontos, de forma a reaproveitar o material, tendo estes sido de novo maquinados e a sua altura diminuída, de forma a respeitar a condição  $4W \geq H$ , onde  $H$  é o comprimento do provete.

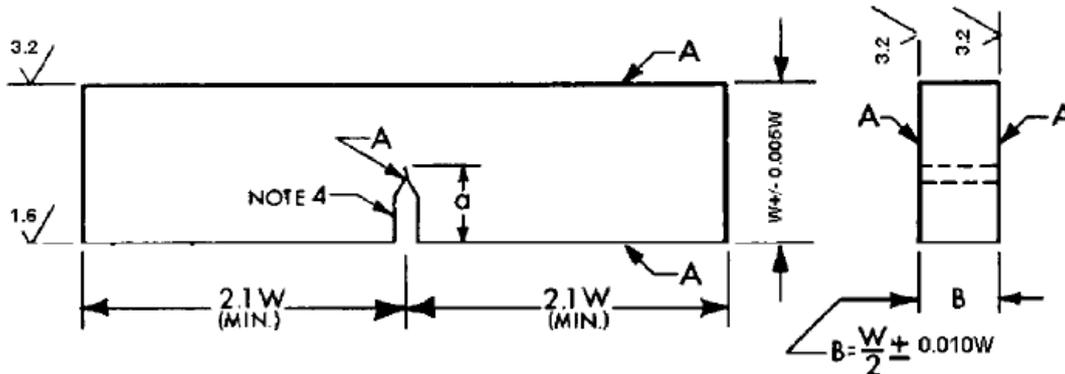


Figura 74 - Dimensões e tolerâncias do SEN, (ASTM, 2011).

Embora a norma ASTM E399 (ASTM, 2011) seja referente à determinação de  $K_{Ic}$  em metais, esta é correntemente utilizada para outros materiais como o PMMA.

Segundo esta norma, o valor da tenacidade pode ser obtido através da seguinte expressão:

$$K_{Ic} = \frac{P_c S}{\sqrt{B B_N} W^{3/2}} f\left(\frac{a}{W}\right) \quad (108)$$

onde,

$$f\left(\frac{a}{W}\right) = 3 \sqrt{\frac{a}{W}} \frac{1.99 - \left(\frac{a}{W}\right) \left(1 - \frac{a}{W}\right) \left[2.15 - 3.93 \frac{a}{W} + 2.7 \left(\frac{a}{W}\right)^2\right]}{2 \left(1 + 2 \frac{a}{W}\right) \left(1 - \frac{a}{W}\right)^{3/2}} \quad (109)$$

$P$  simboliza a carga em N e  $S$  a distância entre rolos que deve ser  $S=4W$ . Uma vez que  $B_N$  representa a espessura entre as raízes das eventuais ranhuras laterais que neste caso não existiam, será considerado igual a  $B$ .

No Anexo A.6 podem ser observados os gráficos de aplicação da carga em função do tempo e do deslocamento registados em laboratório.

## 5.1. Modo I puro

### 5.1.1. Provetes

#### 5.1.1.1. Norma ASTM E399

Duas das metades obtidas devido ao ensaio de flexão em quatro pontos foram maquinadas, ficando com as seguintes dimensões:  $W = 25 \text{ mm}$ ;  $H = 122 \text{ mm}$  e  $B = 20 \text{ mm}$ , de forma a respeitar a condição acima enunciada de  $S=4W$ .

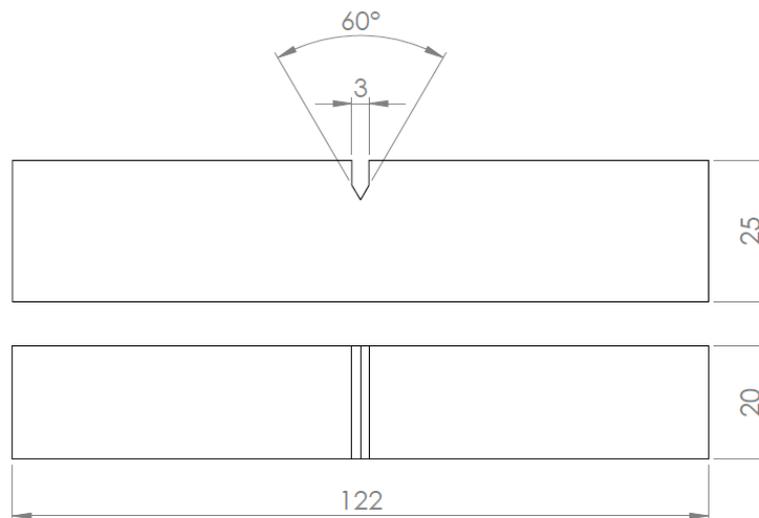


Figura 75 - Representação do provete para flexão em 3 pontos, de acordo com a norma ASTM E399.

Nestes provetes foi ainda criada uma pré-fenda, tal como aconteceu para o ensaio de flexão em 4 pontos e através do mesmo método. Foi criada uma pré-fenda de comprimento  $a=13 \text{ mm}$ , respeitando a condição  $0.45 \leq a/W \leq 0.55$ .

#### 5.1.1.2. Calibração independente

Repetindo o processo anterior, agora com as seguintes dimensões:  $W = 28 \text{ mm}$ ;  $H = 122 \text{ mm}$  e  $B = 20 \text{ mm}$ , obteve-se com auxílio do Abaqus®, a calibração para esta geometria, já que as soluções geométricas entre as cotas não são as previstas na norma ASTM E399.

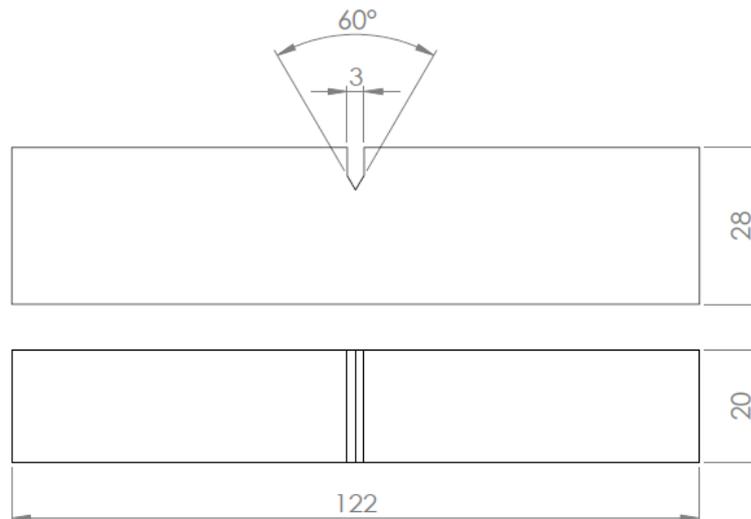


Figura 76 - Representação do provete para flexão em 3 pontos, calibração independente.

Foi criada uma pré fenda, que obedece à mesma condição de  $0.45 \leq a/W \leq 0.55$ , tendo sido obtida uma fenda de comprimento  $a=13$  mm.

### 5.1.2. Ensaio experimental

No decorrer deste ensaio foram utilizadas as distâncias pré-definidas pelo set up disponível no LET, ou seja, a carga foi aplicada no centro do provete e os rolos inferiores possuíam uma distância de 100 mm entre si. Na Figura 77 é possível observar a montagem utilizada neste ensaio.

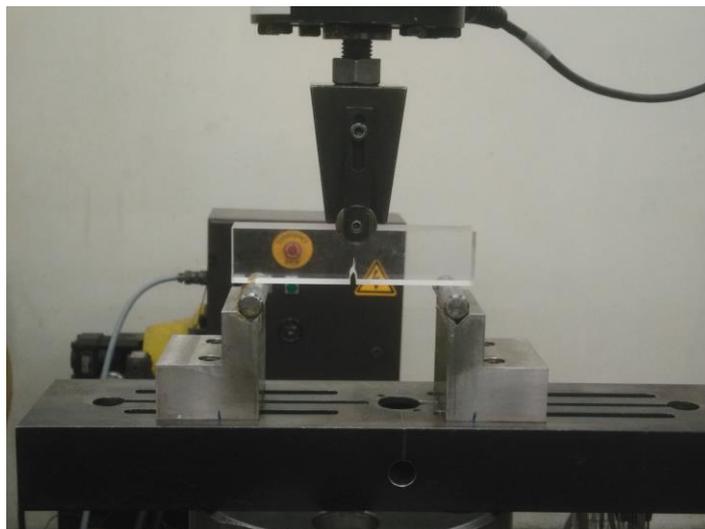


Figura 77 - Montagem utilizada para o ensaio de flexão em 3 pontos.

Tal como no ponto anterior, também aqui foi utilizada uma velocidade de 0.2 mm/min e verificado o valor da carga à qual se dá a propagação da fenda.

Com auxílio do software Abaqus® e aplicando a técnica do VCCT foi possível obter os seguintes valores de  $K_I$ , para o valor crítico de  $P$ :

Tabela 11 - Valores de  $K_{Ic}$  obtidos no Abaqus®.

Calibração	FIT		VCCT	Integral $J$	$T$ -stress
	MTS	MER			
	$K_I$	$K_I$			
ASTM	46.79	46.79	49.1	0.7499	2.004
Independente	41.89	41.88	43.93	0.5845	1.14

Convertendo os valores da Tabela 11 nas unidades de  $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ , obtemos através da técnica do VCCT um valor de  $K_{Ic} = 1.55$  e através do critério MTS  $K_{Ic} = 1.48$ . Aplicando uma das propriedades do Integral  $J$ ,  $J = G = K^2/E$ , obtém-se também o valor de  $K_{Ic} = 1.57$ . Efetuando o cálculo de acordo com a norma ASTM, utilizando as equações (108) e (109), considerando a carga crítica o valor registado em laboratório ao qual se deu a propagação da fenda, obtém-se um valor para  $K_{Ic}$  de  $1.5 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ .

Uma vez que para o caso da calibração independente não existe formulação analítica que permita a obtenção do valor  $K_{Ic}$ , esta foi obtida através de uma simulação recorrendo ao software Abaqus®, com um carregamento igual ao valor de carga crítica registado em laboratório e aplicando a técnica do VCCT.

Assim, convertendo os valores da Tabela 11 nas unidades de  $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ , obtemos através da técnica do VCCT um valor de  $K_{Ic} = 1.4$  e pelo MTS  $K_{Ic} = 1.32$ . Aplicando uma das propriedades do Integral  $J$ ,  $J = G = K^2/E$ , obtém-se também o valor de  $K_{Ic} = 1.4 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ .

Para esta simulação foram utilizados elementos quadráticos CPS4, num total de 3289 elementos no caso da calibração segundo a norma ASTM E399 e com um total de 3635 elementos para o caso da calibração independente, tendo sido a malha refinada na extremidade da fenda com elementos de 0.20 mm.

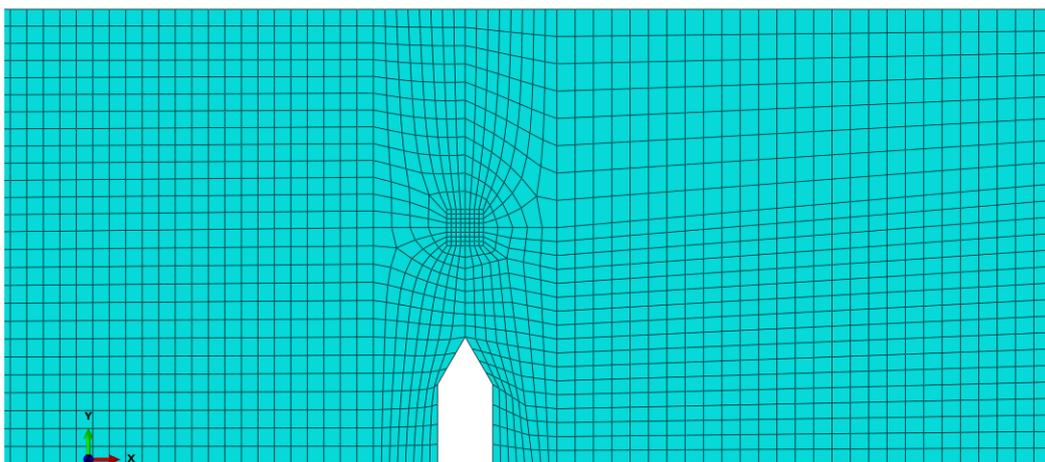


Figura 78 – Malha utilizada na simulação em Abaqus.

## 5.2. Modo misto I-II

### 5.2.1. Provetes

Para o ensaio de modo misto I-II foram maquinados 6 provetes como a Figura abaixo ilustra, com as seguintes dimensões:  $W = 25$  mm;  $H = 110$  mm e  $B = 20$  mm.

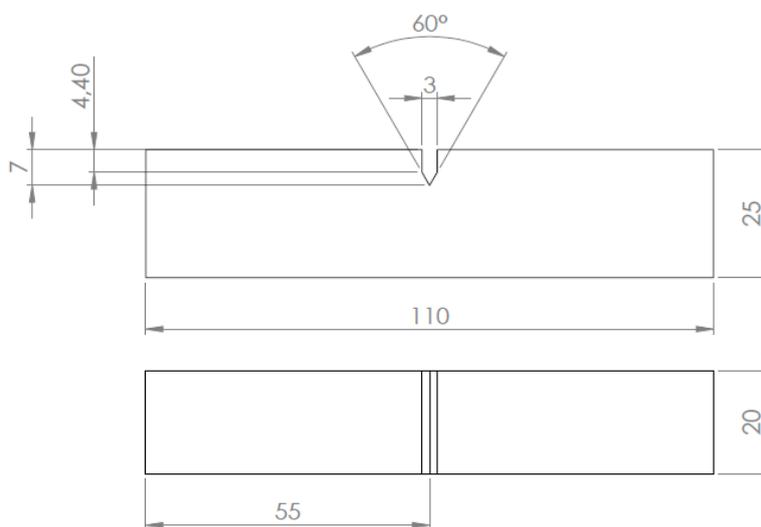


Figura 79 - Provetes de flexão em 3 pontos, modo-misto.

Tal como sucedera para os restantes ensaios apresentados neste trabalho, também aqui foi criada uma pré-fenda através de uma lâmina colocada no centro do entalhe e recorrendo a sucessivos impactos sobre a mesma.

### 5.2.2. Ensaio experimental – modo misto I-II

Utilizando um set-up com uma distância entre rolos de  $S = 50$  mm, e variando a posição da linha de ação da carga, relativamente ao plano que contém a fenda, foi possível dar origem o modo misto I-II. Foram consideradas as seguintes distâncias ( $d$ ): 15 e 20 mm. Foi utilizada uma velocidade de aplicação da carga de 0.2 mm/min.



Figura 80 - Montagem para o ensaio de flexão em 3 pontos, modo misto.

Através das equações (59) e (60) e substituindo o valor de  $P_{máx}$  na equação (64) pelo valor da carga máxima registada em laboratório foi possível obter os valores de  $K_I$  e  $K_{II}$  aos quais cada provete esteve sujeito.

Tabela 12 – Valores de carga, tempo, ângulo de fratura e FIT.

Provete	Carga [N]	Tempo [min]	$a$ [mm]	$K_I$	$K_{II}$	$\varphi_0$ [°]	$\varphi_0$ [°] esperado
9	1928	3.42	13	1.451	0.565	58	69
10	3070	4.05	11	0.889	0.960	52	43

Simulando o caso destes dois provetes em Abaqus® e aplicando a técnica do VCCT, foi possível obter os seguintes valores de  $K_I$  e  $K_{II}$ :

Tabela 13 - Valores de  $K_I$  e  $K_{II}$  obtidos no Abaqus®.

Provete	Nº de elementos da malha	MTS		VCCT		<i>T-stress</i>
		$K_I$	$K_{II}$	$K_I$	$K_{II}$	
9	2094	1.478	0.571	1.495	0.540	3.26
10	2979	0.943	0.848	0.960	0.824	-0.009

Os valores dos FIT das tabelas anteriores são apresentados em  $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ .

Para esta simulação foram utilizados elementos quadráticos CPS4, tendo sido a malha refinada na extremidade da fenda com elementos de 0.20 mm. Na restante malha foram utilizados elementos de 1 mm.

### 5.2.3. Ensaio experimental – modo I

Com os provetes apresentados para o modo misto I-II foram ainda realizados 3 ensaios em modo I puro, tendo sido a carga aplicada no plano da fenda e mantida a distância entre rolos de 50 mm, no entanto a distância dos rolos ao plano da fenda variou. Os provetes 5 e 6 continham a fenda a 15 mm de um dos rolos, e o provete 7 a 17.5 mm.

Posteriormente, foram realizadas as devidas simulações em software, a fim de estimar o valor de  $K_{Ic}$ . Para tal foi utilizada uma malha de elementos quadráticos lineares CPS4, com o mesmo refinamento do caso anterior.

Tabela 14 – Valores da carga, tempo e comprimento da pré-fenda.

Provete	Carga [N]	Tempo [min]	<i>a</i> [mm]
5	2281	3.36	10
6	1768	3.16	12
7	1993	3.09	12

Após simular os provetes 5, 6 e 7 em software Abaqus® foi possível obter um valor de  $K_{Ic} = 1.59; 1.14$  e  $1.28 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ , respetivamente.

### 5.3. Discussão e conclusões

Após a realização do ensaio em modo puro foi possível obter o valor de  $K_{Ic}$  do material utilizado no decorrer deste estudo. A Tabela 15 apresenta os valores de carga registados em laboratório para cada um dos provetes, bem como o tempo ao fim do qual se deu a propagação da fenda e o valor de  $K_{Ic}$  calculado através das equações (108) e (109) para os provetes que obedecem à norma ASTM E399. Recorde-se que todos os ensaios foram realizados com uma velocidade de aplicação da carga de 0.2 mm/min.

Tabela 15 – Dados obtidos através do ensaio de flexão em 3 pontos.

Calibração	Provete	Carga [N]	Tempo [min]
ASTM	1	416.79	2.97
	2	342.45	2.14
Independente	3	525.21	3.24
	4	535.47	1.92

Os dois provetes testados experimentalmente de acordo com norma ASTM E399 apresentam resultados diferentes, muito provavelmente devido ao facto de mais uma vez uma das pré-fendas realizadas, neste caso no provete 2, ter ficado com uma inclinação inicial indesejada, o que leva a mesma a propagar a uma carga menos elevada. Tal acontece pelo facto já referido de a criação da pré-fenda ser um processo manual, logo pouco controlável. Assim foi apenas considerado o valor do provete 1 como resultado para  $K_{Ic}$ , tendo sido obtido o valor de  $1.5 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ .

Para o caso dos dois provetes ensaiados de forma independente, foi realizado um modelo em Abaqus®, com um carregamento igual à carga máxima registada em laboratório, que culminou num valor de  $K_{Ic} = 1.4 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ .

Tais experimentos revelam que o valor utilizado inicialmente neste estudo e que fora retirado de (He et al., 1990) por se tratar do valor mais conservador encontrado, se encontra distante do registado pelo material em estudo. Assim, de seguida é apresentada uma tabela com os valores recalculados para as cargas que os provetes de SEN deveriam suportar, teoricamente, no ensaio de flexão em 4 pontos, quando considerada a média dos dois valores acima apresentados.

Tabela 16 - Valores teóricos da carga suportada pelos provetes SEN de flexão em 4 pontos para ambos os  $K_{Ic}$  e valores aos quais se verificou propagação da fenda.

Provete	Carga [N]			
	$K_{Ic} = 0.95$	$K_{Ic} = 1.071$	$K_{Ic} = 1.45$	Experimental
1	2302	2595	3513	3477
2	1628	1836	2485	2466
2b	1841	2075	2809	3635
3	431	486	659	4035
4	436	492	666	5178
5	196	221	299	3144
6	471	531	719	4329
7	237	267	361	3052
7b	208	234	317	1990
8	163	183	248	2596
9	94	106	144	1947

Embora se tenham realizado dois testes de flexão em 3 pontos para determinar o  $K_{Ic}$  efetivo do material em mãos, os cálculos da carga à qual o provete deveria iniciar a propagação da fenda ficam um pouco aquém dos valores registados em laboratório, exceto para os provetes 1 e 2, nos quais a propagação da fenda ocorreu pouco acima da carga calculada. Tal pode dever-se ao método de cálculo utilizado, bem como aos valores de  $Y_I$  e  $Y_{II}$  que ao serem retirados de um gráfico de forma visual podem acrescentar algum erro ao valor obtido.

Por fim, o valor de  $K_{Ic} = 1.5 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$  obtido através do seguimento da norma ASTM E399, culmina num valor em concordância com tudo aquilo que foi encontrado na literatura. Como a simulação do provete de acordo com a norma ASTM E399 utilizando o Abaqus® culmina num valor que vai de encontro ao obtido pela calibração referida na norma, o valor de  $K_{Ic} = 1.4 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$  obtido pela tentativa de criar uma calibração independente da norma é, por esse efeito reforçado.

Para o caso de modo misto, é de notar que não só a propagação da fenda se revelou extremamente curta, pelo que não foi observável durante o ensaio, como o caminho de propagação da pré-fenda tendia para o local de aplicação da carga (rolo central), local no qual o momento fletor é máximo. O caminho percorrido pela pré-fenda do provete 10

culminou exatamente no local de aplicação da carga, sendo que o provete 9 ficou a uma distância muito próxima desse mesmo local (cerca de 2 mm).

Comparando os valores obtidos através das equações analíticas com os valores obtidos através do critério MTS e pela técnica do VCCT, com auxílio do software Abaqus (Tabela 12 e Tabela 13), verifica-se que foi possível obter resultados bastante próximos. Quanto aos ângulos de propagação esperados e obtidos, pode-se afirmar que foram obtidos bons resultados.

Aplicando a equação (63) apresentada por (Belli et al., 2017) e cuja fonte não se teve acesso, foi utilizada para determinar  $K_{Ic}$  dos provetes 1, 3 e 4, de forma a se verificar a utilidade da mesma. Foi assim obtido um valor de  $K_{Ic} = 1.58$  para o provete 1, algo não muito distante do valor obtido pela norma ASTM E399; no entanto, para os provetes 3 e 4, que seguiam uma calibração independente, foram obtidos os valores de 1.79 e 1.81, valores algo distantes do valor de 1.4 obtido através do Abaqus®.

## 6. Análise numérica

Este capítulo aborda a análise numérica através do software Abaqus® para a obtenção do caminho de propagação da pré-fenda, valores de  $T$ -stress e fatores de intensidade de tensão para os provetes utilizados no decorrer dos ensaios de flexão em 4 pontos.

### 6.1. Fatores de intensidade de tensão – flexão em 4 pontos

Para simular os provetes em Abaqus® e obter os valores para  $K_I$  e  $K_{II}$  foi utilizada uma malha refinada na zona de interesse como se poder observar na figura seguinte, por elementos de 0.20 mm. As restantes zonas possuíam elementos de 1 mm, sendo que nas partes mais afastadas dos provetes foram aplicados elementos de 2 mm, zonas à esquerda e à direita dos dois rolos mais afastados do plano da fenda. Foram utilizados elementos lineares CPS4.

Na Tabela 17 são apresentados de forma resumida os valores obtidos para os fatores de intensidade de tensão através dos critérios disponíveis no software, bem como a aplicação do VCCT, das equações (51) e (52) expostas por (Wang *et al.*, 2016) e das equações (53) e (54) apresentadas por (He & Hutchinson, 2000) e o respetivo número de elementos de cada malha. Os valores resultantes do MTS, do VCCT e das expressões analíticas são apresentados em  $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ .

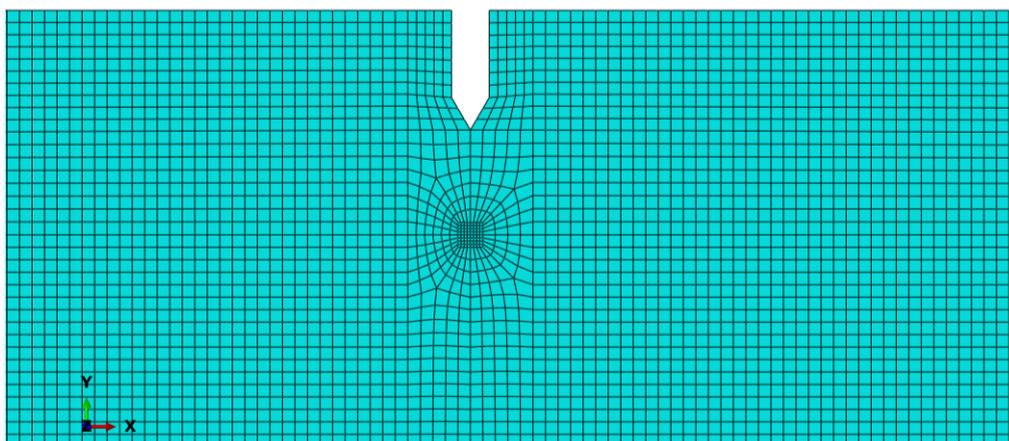


Figura 81 – Malha utilizada na obtenção dos FIT, provete 1.

Tabela 17 - Resultados obtidos para os FIT.

Provete	N° Elementos da Malha	VCCT		MTS		Eq. (51) e (52)		Eq. (53) e (54)	
		$K_I$	$K_{II}$	$K_I$	$K_{II}$	$K_I$	$K_{II}$	$K_I$	$K_{II}$
1	8036	0.056	1.292	0.085	1.353	0	1.435	0	1.483
2	8042	0.311	1.097	0.290	1.129	0.326	1.395	0.335	1.406
2b	8047	0.157	1.251	0.133	1.299	0.27	1.5	0.293	1.551
3	8614	0.525	1.093	0.502	1.137	0.837	1.619	0.896	1.611
4	7999	1.188	1.191	1.170	0.980	1.121	1.203	1.091	1.172
5	7658	0.966	0.526	0.574	1.443	1.521	0.819	1.541	0.843
6	7443	0.931	0.928	0.940	0.970	0.868	0.965	0.890	0.960
7	7342	1.308	0.637	1.292	0.678	1.224	0.680	1.255	0.677
7b	7272	1.363	0.578	1.344	0.622	1.334	0.598	1.343	0.600
8	7356	1.499	0.437	1.485	0.486	1.461	0.52	1.475	0.537
9	7266	1.418	0.231	1.408	0.275	1.461	0.39	1.475	0.402

Tabela 18 – Diferença relativa (em percentagem) entre os valores de FIT com as expressões de (Wang *et al.*, 2016).

Provete	VCCT		MTS		Eq. (53) e (54)	
	$K_I$	$K_{II}$	$K_I$	$K_{II}$	$K_I$	$K_{II}$
1	-	3.3	-	5.7	-	10.0
2	2.8	0.8	11.0	19.1	4.6	21.4
2b	8.5	3.4	50.7	13.4	41.9	16.6
3	7.0	0.5	40.0	29.8	37.3	32.5
4	2.7	2.6	4.4	18.5	6.0	1.0
5	1.3	2.9	62.3	76.2	36.5	35.8
6	2.5	0.5	8.3	0.5	7.3	3.8
7	2.5	0.4	5.6	0.3	6.9	6.3
7b	0.7	0.3	0.7	4.0	2.2	3.3
8	1.0	0.3	1.6	6.5	2.6	16.0
9	1.0	3.1	3.6	29.5	2.9	40.8

Na Tabela 18 são apresentadas, em percentagem, as diferenças calculadas entres os valores obtidos através do VCCT, MTS e equações de (He & Hutchinson, 2000), em função das equações expostas por (Wang *et al.*, 2016). Em suma, verifica-se uma boa

concordância entre métodos, pelo que tanto as calibrações teóricas como o software permitem obter uma boa ideia dos fatores de intensidade de tensão na extremidade de uma determinada fenda.

## **6.2. *T-stress* – flexão em 4 pontos**

Na Tabela 19 são apresentados os valores de *T-stress* obtidos diretamente do Abaqus® e comparados com os valores resultantes da aplicação do Stress Method e do Displacement Method, tendo sido a zona da malha refinada aumentada, de forma a se obterem mais pontos numa região próxima da extremidade da fenda.

Tomando em conta a distribuição dos pontos experimentais na Figura 69 e comparando com as curvas da Figura 9, uma vez que os pontos experimentais se encontram acima da curva base do critério MTS ( $T=0$ ), seria de esperar que os valores de *T-stress* obtidos fossem negativos, algo que apenas se verificou para 5 dos 11 provetes ensaiados. Conclui-se que com o aumento do valor de  $K_I$  os valores da tensão  $T$  tenderam a tornar-se positivos.

Tabela 19 - Valores de *T-stress*.

Provete	Nº Elementos da Malha	<i>T-stress</i>	Stress Method	Displacement Method	Valor adimensionalizado		
					<i>T-stress</i>	Stress Method	Displacement Method
1	10277	-9.430	-9.047	-10.005	-0.44	-0.425	-0.47
2	9762	-6.573	-6.341	-6.870	-0.44	-0.42	-0.455
2b	10187	-9.285	-8.902	-9.569	-0.42	-0.44	-0.43
3	8614 <sup>10</sup>	-8.719	-8.961	-9.752	-0.33	-0.34	-0.37
4	9762	0.207	-0.285	-0.159	0.007	-0.009	-0.005
5	10370	-0.350	-1.540	-1.059	-0.018	-0.08	-0.055
6	8319	1.946	1.988	2.385	0.07	0.075	0.09
7	8235	1.754	0.934	1.495	0.15	0.05	0.08
7b	8037	2.822	2.315	2.924	0.23	0.19	0.24
8	8372	0.999	0.079	0.318	0.06	0.005	0.03
9	9075	0.303	-0.596	-0.298	0.03	-0.05	-0.025

De acordo com (Shahani & Tabatabaei, 2009) o valor da tensão *T* pode ser obtido, para um provete de flexão em 4 pontos, de acordo com o que fora enunciado no subcapítulo 2.8.3 e que fora fundamentado de acordo com o que é apresentado por (Ayatollahi *et al.*, 1998).

Os resultados através do Displacement Method acima apresentados, foram obtidos através da equação (88). Os valores do Stress Method foram obtidos através da utilização da equação (87).

No anexo A.3. são apresentados os gráficos obtidos com *T* adimensionalizado em função da tensão (equação (64)).

<sup>10</sup> Para este provete, devido a um problema na alteração da malha, foi utilizada a mesma da qual se retiraram os valores de FIT.

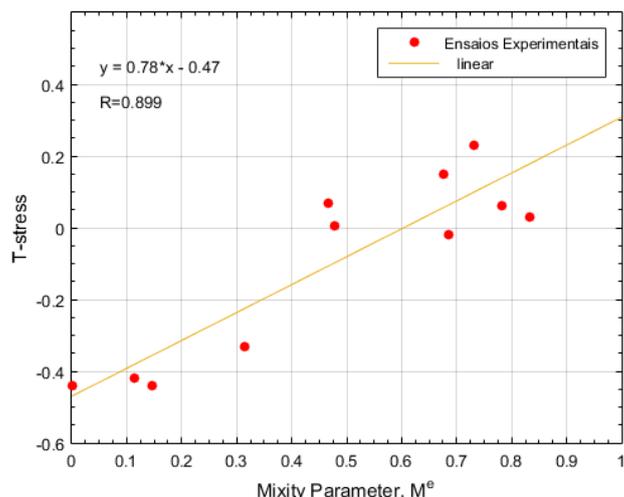


Figura 82 - *T-stress* adimensionalizado em função do parâmetro de modo misto (o eixo vertical não principia em zero).

Na Figura acima é apresentado o valor da tensão  $T$  adimensionalizada, através equação (64), em função do parâmetro de modo misto  $M_e$ , equação (106). É ainda apresentado o valor de correlação entre os pontos experimentais e uma regressão linear.

### 6.3. Propagação da fenda – flexão em 4 pontos

De forma a determinar o caminho percorrido pela fenda foi utilizado o “extended finite element method” (XFEM). Este permite a modelação de uma fenda e do seu crescimento.

Para proceder à comparação entre a propagação obtida entre o XFEM e os ensaios em laboratório, foi criado um path da fenda registada em laboratório e da fenda obtida através do software, utilizando para isso o plot digitizer, e registando as duas curvas sobre um mesmo gráfico. Alguma da diferença obtida entre as duas curvas pode também ser devida ao uso deste software, plot digitizer.

Inicialmente foi realizada uma verificação quanto à propagação da fenda de ambos os lados do provete. Na Figura 83 encontra-se representado o caminho que a fenda percorreu de cada um dos lados do provete 1, tendo sido verificado que estes praticamente coincidem um com o outro, pelo que nas simulações e comparações apresentadas de seguida, foi apenas considerado um dos lados do provete. Este facto seria expectável, uma

vez que estamos perante um material frágil e sobretudo porque os rolos de aplicação da carga eram rigorosamente paralelos, tal como as faces superior e inferior do provete.

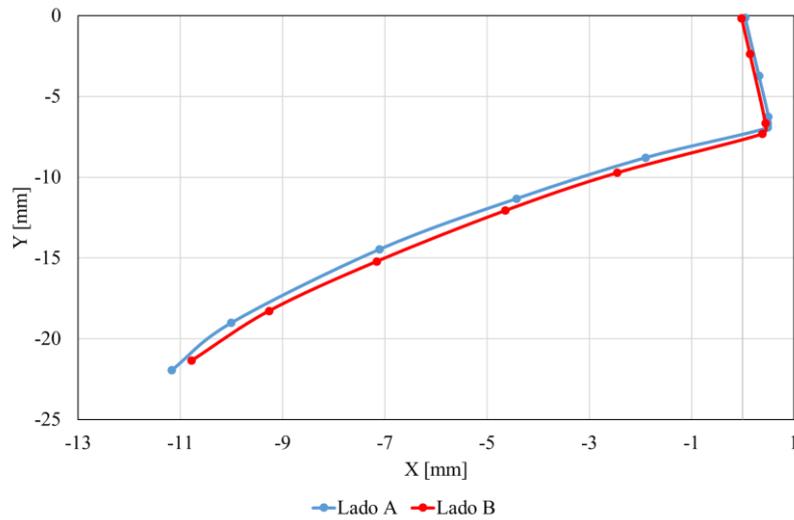


Figura 83 - Comparação entre o caminho percorrido pela fenda, vista dos dois lados do provete 1.

No decorrer do uso do XFEM foram utilizados elementos lineares quadráticos CPS4, com tamanho de 1 mm na zona mais refinada e de 2 mm nas zonas mais distantes do plano da fenda.



Figura 84 - Malha utilizada para o XFEM (provete 7).

### 6.3.1. Provete 4

De seguida é apresentado o caminho de propagação da fenda para o provete 4. A simulação em software contou com uma malha constituída por 7420 elementos.

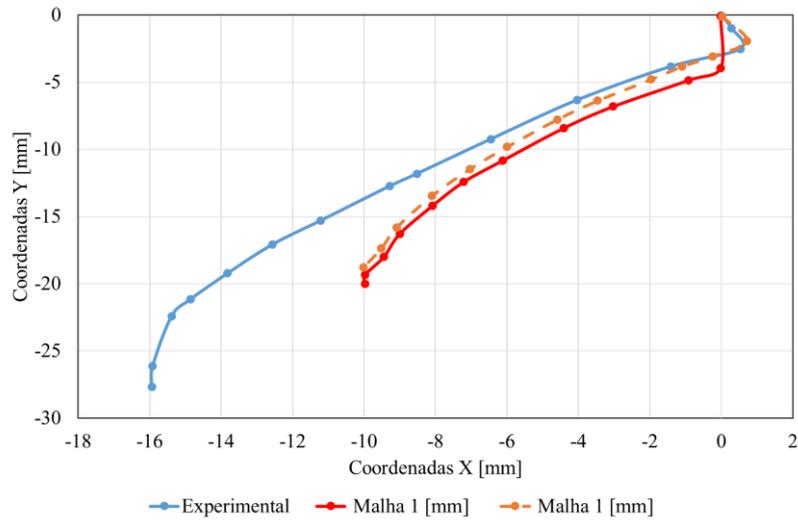


Figura 85 - Representação da propagação da fenda em laboratório e em software, para o provete 4.

Como se pode verificar pelo gráfico acima, embora as curvas pareçam possuir um comportamento semelhante, a curva a vermelho foi obtida partindo do princípio que se tinha conseguido em laboratório uma pré-fenda sem inclinação, algo que não aconteceu. Assim, foi obtida uma segunda curva, apresentada a tracejado, na qual se tentou que a pré-fenda simulada possui-se a mesma inclinação da fenda experimental. Posto isto, verifica-se que numa fase inicial de propagação a curva experimental e a curva a tracejado apresentam um comportamento semelhante.

### 6.3.2. Provete 5

Na Figura seguinte é possível observar o caminho percorrido pela fenda simulada.

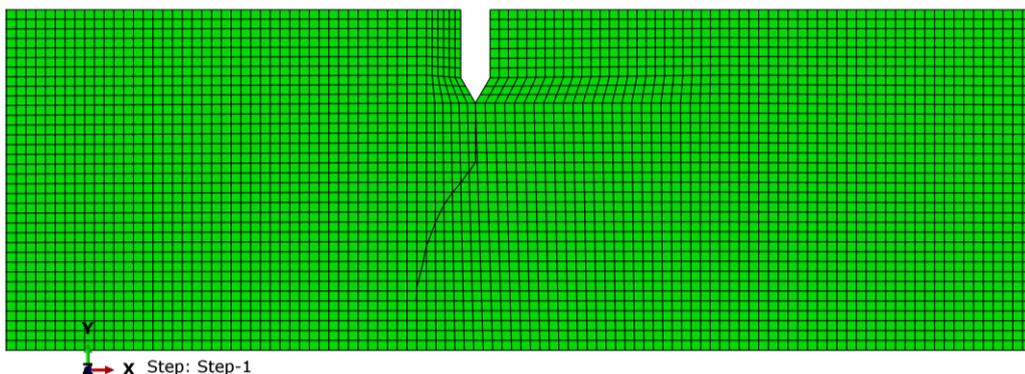


Figura 86 - Caminho percorrido pela fenda simulada em Abaqus®, provete 5.

O gráfico da Figura 87 demonstra a propagação da fenda do provete 5 obtida em laboratório e através do Abaqus®. Observa-se que numa fase inicial, ambas as curvas parecem apresentar uma mesma tendência de propagação e um ângulo idêntico, embora para o caso simulado em software não tenha sido possível obter uma maior propagação do material. O provete 5 contou com uma malha composta por 7350 elementos.

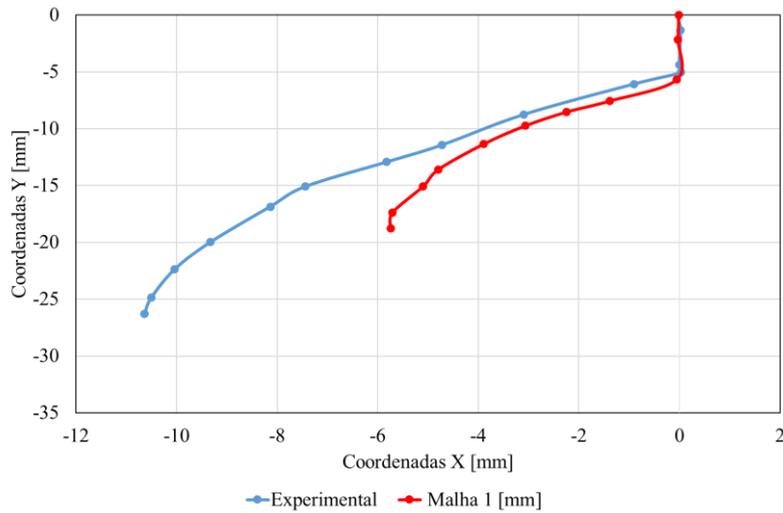


Figura 87 - Representação da propagação da fenda em laboratório e em software, para o provete 5.

### 6.3.3. Provete 6

De seguida é apresentado o caminho de propagação da fenda para o provete 6. A simulação em software contou com uma malha constituída por 7035 elementos.

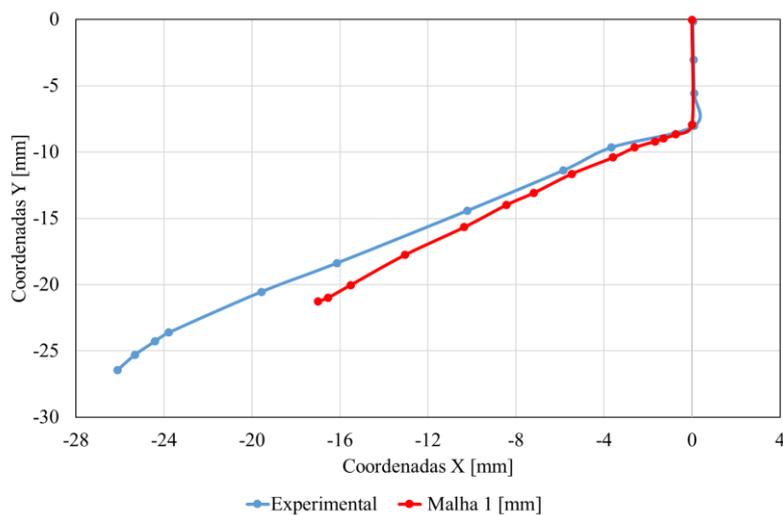


Figura 88 - Representação da propagação da fenda em laboratório e em software, para o provete 6.

Para o provete 6 verifica-se mais uma vez uma boa semelhança no caminho percorrido pela fenda em software relativamente à que fora registada em laboratório.

### 6.3.4. Provete 7

Na Figura seguinte é apresentado o caminho de propagação da fenda para o provete 7 registado em laboratório e via Abaqus®. Este contou com uma malha constituída por 7236 elementos.

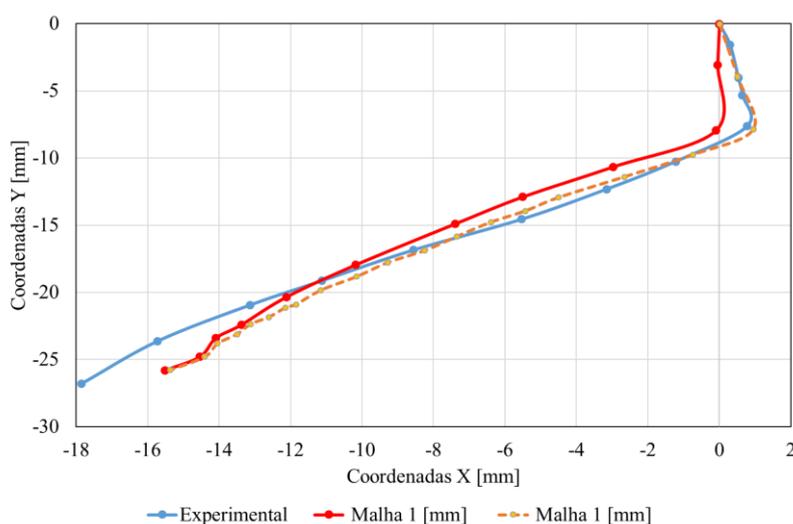


Figura 89 - Representação da propagação da fenda em laboratório e em software, para o provete 7.

Para o provete 7 verifica-se uma boa concordância entre os caminhos percorridos pela fenda, quer em laboratório quer no software, sendo que mais uma vez, qualquer pequena diferença se pode dever a razões já mencionadas. Uma vez que a pré-fenda deste provete contava com uma ligeira inclinação, tentou-se reproduzir esse efeito no software, pelo que é apresentada uma terceira curva que conta com essa mesma inclinação. Observando o comportamento da curva a tracejado, verificamos que esta simula bem o caminho percorrido pela fenda no provete experimental, sendo obtida alguma diferença apenas na parte final da propagação.

Neste caso foi possível atingir a rutura completa do provete.

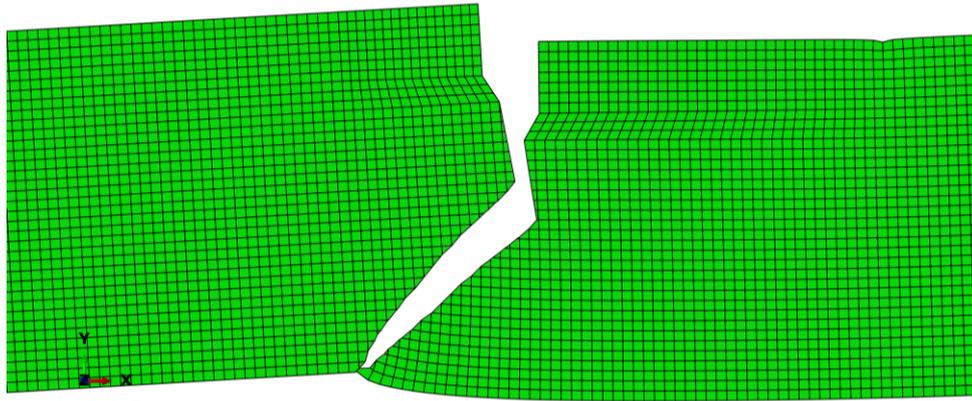


Figura 90 - Rutura do provete 7, simulação.

### 6.3.5. Provede 8

O gráfico da Figura seguinte expõe os caminhos percorridos pela fenda na simulação realizada em Abaqus® e o que fora registado em laboratório para o provede 8. Para esta simulação foi utilizada uma malha de 7070 elementos.

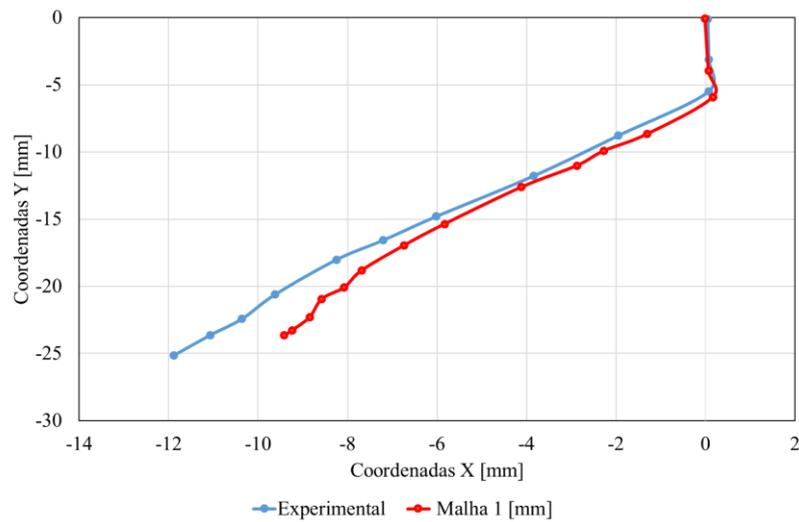


Figura 91 - Representação da propagação da fenda em laboratório e em software, para o provede 8.

### 6.3.6. Provetes 9

Tal como sucedera com o provete 7, também a pré-fenda do provete 9 contou com uma ligeira inclinação, pelo que de novo foram simuladas as duas situações, a situação real com a fenda inclinada e a situação ideal. Esta simulação contou com 7035 elementos.

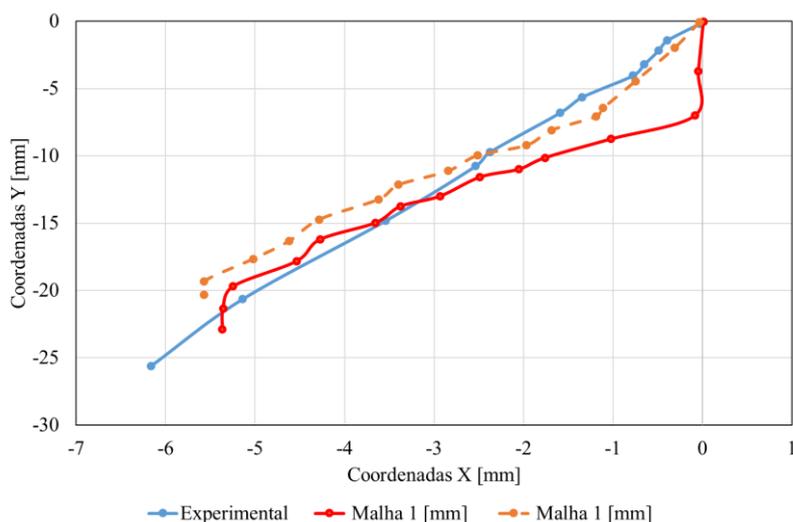


Figura 92 - Representação da propagação da fenda em laboratório e em software, para o provete 9.

Analisando o gráfico da Figura 92, é possível concluir que para a curva da fenda real (tracejado laranja) o comportamento é semelhante ao registado em laboratório.

## 6.4. Propagação da fenda – flexão em 4 pontos – 3D

Neste ponto são apresentados os gráficos referentes à propagação da pré-fenda simulada em software Abaqus® a três dimensões.

Tendo sido já verificado que a propagação da pré-fenda no material é semelhante em ambos os lados do provete, é aqui novamente considerado apenas um desses lados. Para estas simulações foi utilizado o elemento linear de 8 nós C3D8. Os dados experimentais são assim comparados com duas malhas refinadas na zona de interesse por elementos com tamanho de 1 e 2 mm. Ao longo da espessura foram utilizados elementos com tamanho de 5 mm.

### 6.4.1. Provete 4

Na Figura seguinte é possível observar o caminho percorrido pela fenda simulada. A simulação em software contou com uma malha constituída por 3540 elementos.

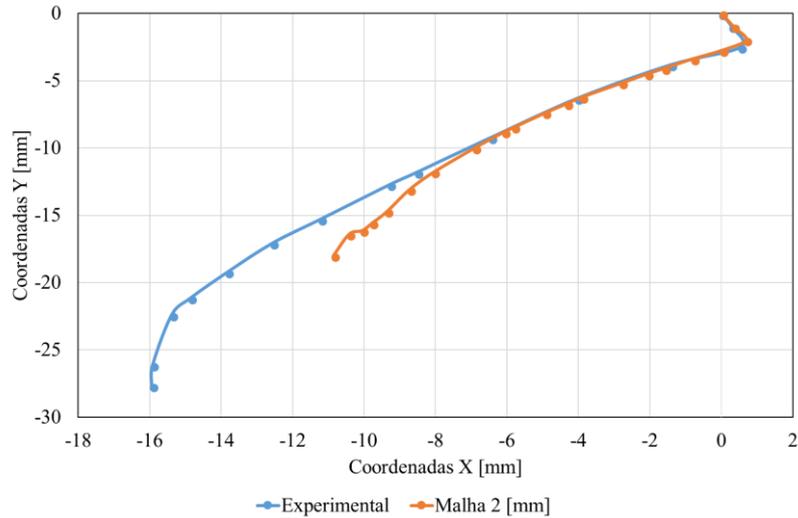


Figura 93 - Caminho percorrido pela fenda simulada em 3D, Abaqus®, provete 4.

Na Figura 93 é apresentado o caminho percorrido pela pré-fenda presente no provete 4 registada em laboratório e o caminho obtido através da simulação desta em Abaqus®. Embora não se tenha conseguido obter propagação para uma malha mais refinada (1mm), podemos concluir pelo gráfico acima que foi obtida uma boa concordância entre os caminhos percorridos desde uma fase inicial até uma zona intermédia do total de caminho percorrido experimentalmente.

### 6.4.2. Provete 5

De seguida é apresentado o caminho de propagação da fenda para o provete 5. O provete 5 contou com uma malha composta por 3600 elementos para a malha de 2 mm e num total de 8100 elementos no caso da malha de 1 mm.

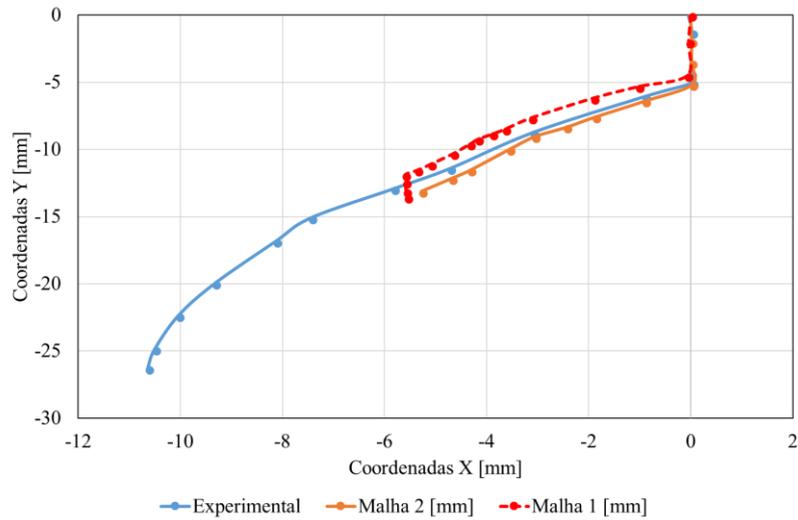


Figura 94 - Caminho percorrido pela fenda simulada em 3D, Abaqus®, provete 5.

Analisando o gráfico da Figura anterior, é possível constatar que foram obtidas boas previsões de propagação da pré-fenda em software, quando comparada com o registo laboratorial, no entanto não foi conseguida uma maior propagação no software.

### 6.4.3. Provete 7

Na Figura seguinte é apresentado o caminho de propagação da fenda para o provete 7 registado em laboratório e via Abaqus®.

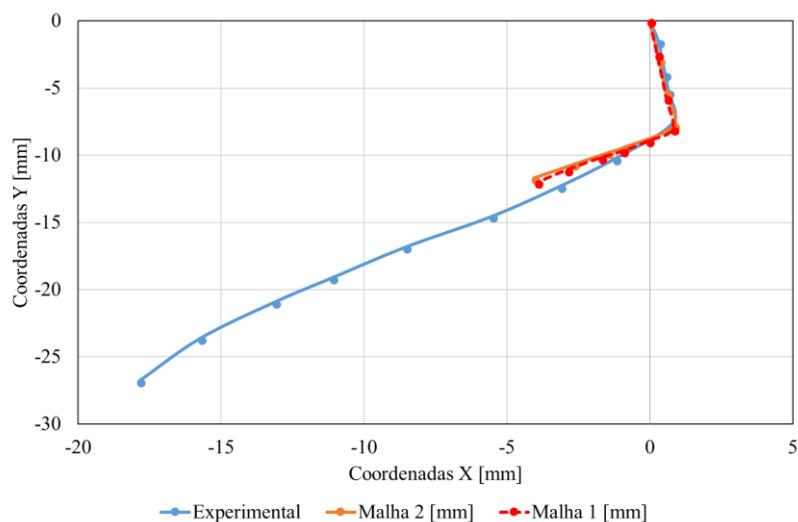


Figura 95 - Caminho percorrido pela fenda simulada em 3D, Abaqus®, provete 7.

Este contou com uma malha de 3900 elementos no caso da malha refinada de 2 mm e num total de 9360 elementos no caso da malha refinada de 1 mm.

Para o provete 7 verifica-se uma boa concordância entre os caminhos percorridos pela fenda, quer em laboratório quer no software, sendo que mais uma vez, qualquer pequena diferença se pode dever a razões previamente mencionadas. Tal como sucedera no caso bidimensional, também aqui se tentou replicar a inclinação inicial que a pré-fenda possuía.

#### 6.4.4. Provete 8

O gráfico da Figura seguinte expõe os caminhos percorridos pela fenda na simulação realizada em Abaqus® e o que fora registado em laboratório para o provete 8. Para esta simulação foi utilizada uma malha de 4720 elementos.

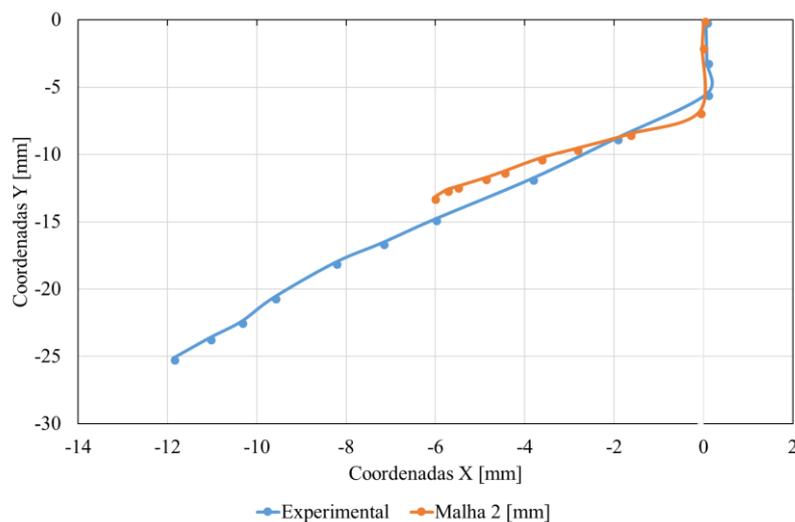


Figura 96 - Caminho percorrido pela fenda simulada em 3D, Abaqus®, provete 8.

Tal como sucedera com o provete 4, também aqui não se conseguiu obter a propagação da pré-fenda para uma malha de 1 mm, tendo sido obtida uma boa previsão do caminho percorrido experimentalmente.

### 6.4.5. Provete 9

Assim como aconteceu com o provete 9 também aqui se tentou replicar a inclinação inicial da pré-fenda. Esta simulação contou com 3960 elementos para a malha de 2 mm e com 9360 elementos no caso da malha de 1 mm.

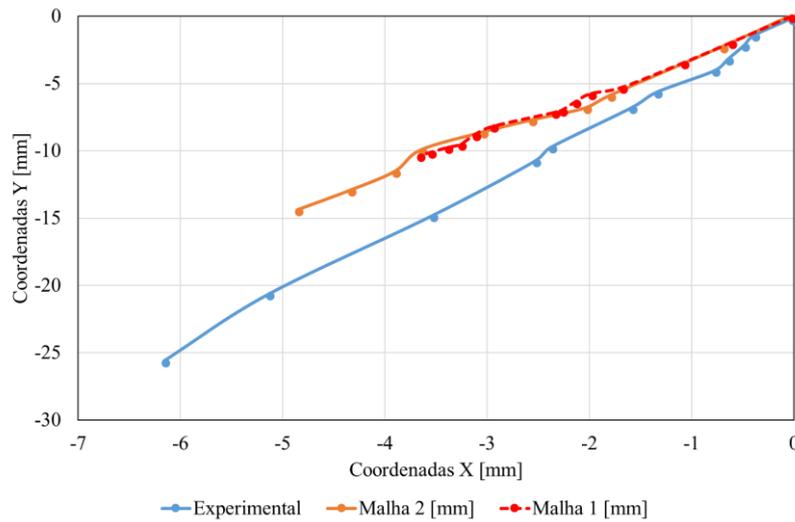


Figura 97 - Caminho percorrido pela fenda simulada em 3D, Abaqus®, provete 9.

Analisando o gráfico da Figura anterior, é possível concluir que as curvas registradas através do software apresentam um comportamento semelhante, no entanto logo após uma fase inicial estas distanciam-se da curva laboratorial. Esta diferença pode dever-se não só a problemas já referenciados como a uma não tão boa replicação da inclinação inicial da pré-fenda.

### 6.5. *T-stress* – flexão em 3 pontos

Na Tabela seguinte, apresentam-se os valores obtidos para o provete da Figura 75, após variação da relação  $0.2 < \frac{a}{W} < 0.5$  e aplicação de uma carga de 500 N, na configuração de modo I puro.

Tabela 20 - Valores de  $T$ -stress, 3PB SEN.

$a$	$a/W$	$T$	$T$ adimensionalizado
5	0.2	-3.445	-0.574
6	0.24	-1.471	-0.245
7	0.28	-1.192	-0.199
8	0.32	-0.149	-0.025
9	0.36	0.465	0.077
10	0.4	0.825	0.138
11	0.44	1.203	0.201
12	0.48	1.874	0.312

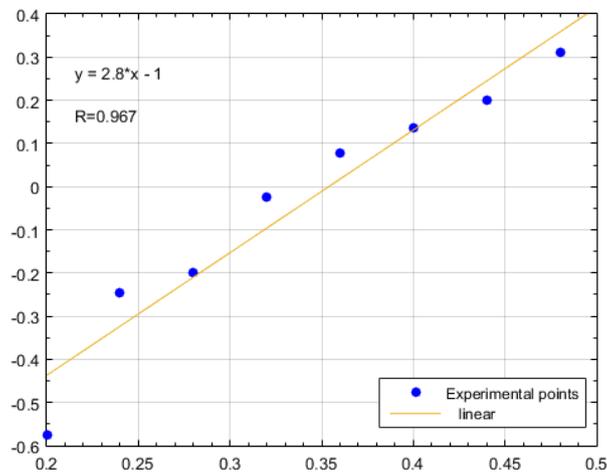


Figura 98 - Valor de  $T$ -stress adimensionalizado, esperado para a flexão em 3 pontos.

Verifica-se assim uma tendência crescente dos valores de  $T$  com o aumento do comprimento de fenda. Para adimensionalizar o valor de  $T$ -stress foi usada a expressão (64). As simulações foram realizadas recorrendo mais uma vez a elementos lineares quadráticos CPS4 de 1 [mm].

Foram ainda simulados os casos dos provetes de flexão em 3 pontos segundo a norma ASTM, a partir da calibração independente e os provetes 9 e 10 utilizados em modo misto.

Tabela 21 - Valores de *T-stress* para os casos estudados de flexão em 3 pontos.

Provete	Nº Elementos da Malha	<i>T-stress</i>	Stress Method	Displacement Method	Adimensionalizado		
					<i>T-stress</i>	Stress Method	Displacement Method
ASTM	4523	1.949	1.786	2.169	0.76	0.70	0.85
Independente	4952	1.087	1.006	1.330	0.33	0.31	0.41
9	2864	3.180	2.951	3.541	0.27	0.25	0.30
10	3831	-0.009	-0.846	-0.752	0.005	-0.045	-0.04

Em anexo (A.4) são apresentados os gráficos que permitem a obtenção do valor de *T* através do Stress Method e do Displacement Method.

## 6.6. Propagação da fenda – flexão em 3 pontos

Neste ponto é apresentada a comparação entre os caminhos percorridos pela pré-fenda no caso da flexão em 3 pontos e modo misto. Para o caso de modo I puro não é apresentada a propagação, uma vez que esta se propaga a 0 graus, tal como seria de esperar.

Foi utilizada uma malha composta por 2775 elementos lineares CPS4 em ambos os casos (provetes 3PB-9 e 3PB-10), com tamanho de 1 mm.

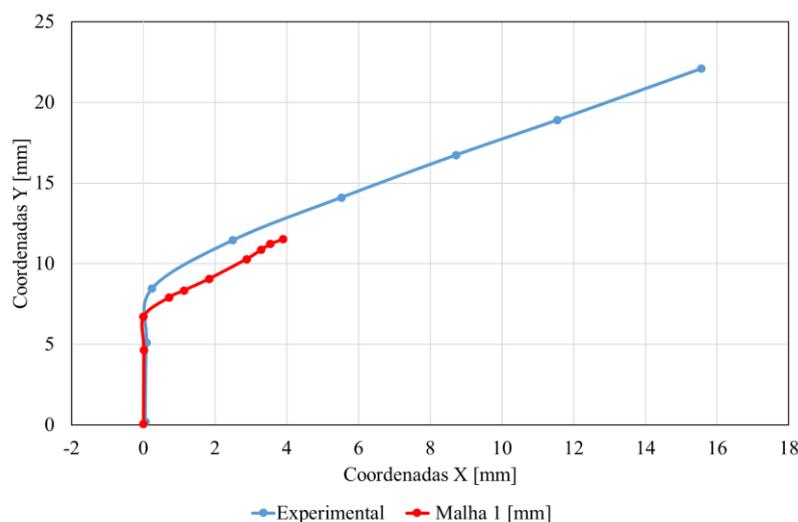


Figura 99 - Representação da propagação da fenda em laboratório e em software, provete 3PB-9.

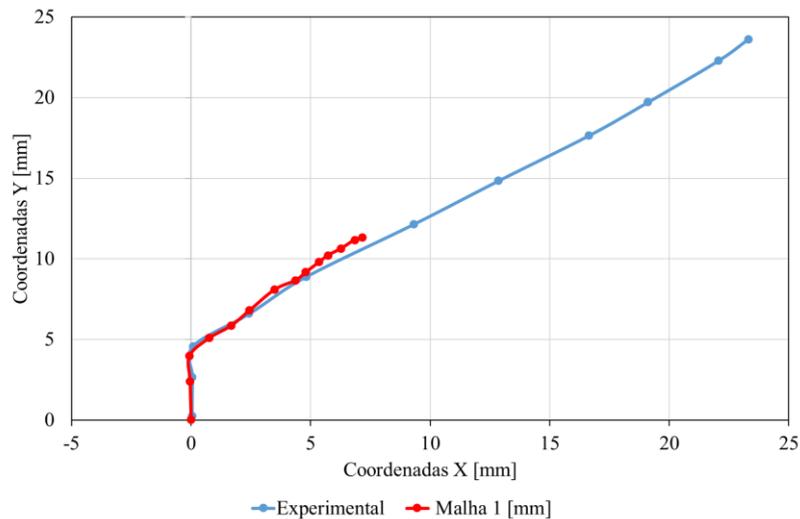


Figura 100 - Representação da propagação da fenda em laboratório e em software, provete 3PB-10.

Para ambos os provetes verifica-se uma boa concordância entre os dois caminhos, embora não tenha sido possível obter uma maior propagação da pré-fenda em software.

## 6.7. Discussão e conclusões

Da Tabela 17 retira-se que ambas as expressões apresentadas por (Wang et al., 2016) e (He & Hutchinson, 2000) culminam em resultados idênticos, tal com seria de esperar e que fora discutido anteriormente. Comparando os valores obtidos por estas, com os valores devolvidos pelo Abaqus® e pela técnica do VCCT, verificamos que em geral esses resultados demonstram alguma similaridade, embora possuam alguma diferença entre eles.

Analisando a Tabela 19 verifica-se que tanto o Stress Method como o Displacement Method culminam em resultados muito próximos daqueles que se podem obter diretamente do Abaqus®. No entanto, os valores de  $T$  mais próximos de 0 obtidos diretamente através do software e que apresentavam sinal positivo, resultaram em valores negativos próximos também de zero, através destes dois métodos.

No que à flexão em 4 pontos diz respeito, não foi possível obter a propagação da fenda para os 3 provetes iniciais no caso bidimensional, provavelmente devido à presença de modo II puro no provete 1 e de um modo II elevado nos provetes 2 e 3. Na Figura seguinte são apresentadas as curvas de propagação da pré-fenda do provete 4, obtidas

através dos modelos bidimensional e tridimensional, plotadas sob um mesmo gráfico e comparadas com a propagação registada experimentalmente. Ambas as curvas foram obtidas através de elementos com tamanho de 2 mm.

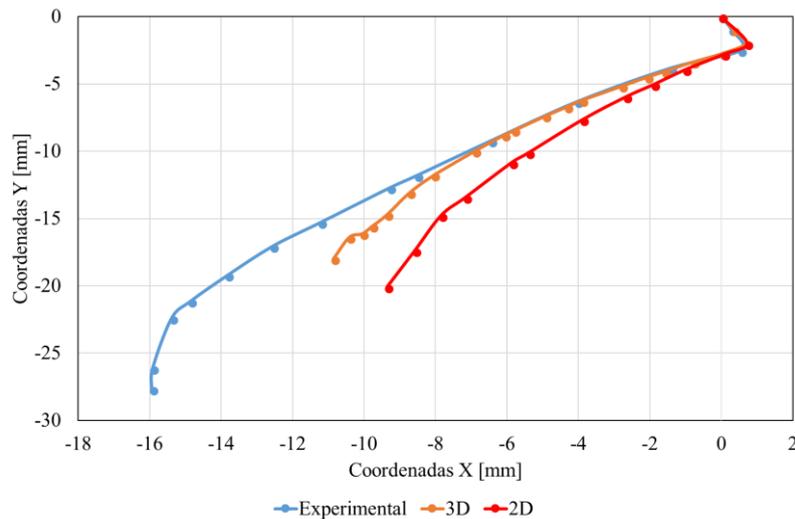


Figura 101 - Caminhos percorridos pela pré-fenda do provete 4, experimentalmente, 2D e 3D.

Verifica-se, através da Figura 101, que embora numa zona inicial ambos os modelos prevejam com alguma concordância a orientação da propagação da fenda, o modelo tridimensional apresenta, em geral, resultados muito mais próximos dos que foram registados experimentalmente.

Importa salientar que os gráficos acima apresentados podem contar com erros devido a vários fatores como não possuir uma foto de qualidade ideal ou um erro no *ploting* dos pontos através do plot digitizer, para além de algumas das pré-fendas criadas nos provetes ensaiados possuírem uma ligeira inclinação, o que as torna diferentes das simuladas em software, logo origina diferenças nos caminhos percorridos.

Conclui-se que o Abaqus® permite obter uma boa ideia do que será a propagação de uma fenda num determinado provete, sujeito a um determinado carregamento, pelo menos numa fase inicial, que é onde parece existir uma maior concordância entre resultados.

## 7. Conclusões e trabalhos futuros

A utilização do ensaio assimétrico de flexão em 4 pontos para estimar o valor do FIT na extremidade de uma fenda através das equações analíticas, requer que o plano da fenda se encontre na região onde o esforço transversal é máximo. Deve-se ter em atenção o posicionamento da fenda, uma vez que não é evidente se o plano da fenda se encontra sobre tração ou compressão

Os resultados obtidos através do software de elementos finitos no decorrer deste trabalho, apresentaram uma boa concordância com as previsões analíticas, demonstrando assim que este é uma excelente ferramenta para estimar o campo de tensões na extremidade de uma fenda, bem como prever o caminho de propagação de uma determinada pré-fenda na sua zona inicial. Esta concordância do caminho percorrido apenas numa zona mais inicial, pode-se dever a uma introdução menos precisa das condições iniciais, o que não indica que os modelos numéricos estejam errados. Foi apenas considerado para comparação o caminho percorrido de um dos lados do provete, uma vez que devido ao facto de se tratar de um material frágil, o caminho percorrido pela pré-fenda em ambos os lados do provete foi idêntico.

O ensaio de flexão em 4 pontos assimétrico permite, de uma forma simples, testar as propriedades de um material à fratura em modo misto e em modo II puro. Os valores de  $K_{II}/K_{Ic}$  e  $K_I/K_{Ic}$  obtidos estão acima da previsão teórica, algo que já tinha sucedido com os resultados de (Erdogan & Sih, 1963).

O ensaio de flexão em 3 pontos permite obter a tenacidade à fratura em modo I puro de um determinado material, com valores consistentes seguindo a geometria da norma ASTM E399 ou fora dessa. Os resultados por modelos analíticos  $\beta$  versus  $K_I/K_{II}$  seguem o critério MTS.

Ao contrário de outros trabalhos, nos testes realizados não foi encontrada uma relação direta entre os valores de *T-stress* e a tenacidade. Todos os pontos de fratura estão acima dos valores teóricos do MTS, resultado semelhante aos testes iniciais de Erdogan e Sih nos seus testes de placas planas de PMMA na presença de fendas inclinadas. Também se verificou que o critério da densidade de energia de deformação (SED) fornece um ajuste melhorado dos pontos experimentais.

Para o caso da placa com fenda central tracionada por uma tensão remota, verificou-se uma boa coerência entre resultados obtidos de *T-stress*, quer por métodos analíticos, quer de forma direta ou indireta através do software Abaqus®. No caso da utilização de métodos indiretos como o Stress Method e o Displacement Method, os valores por eles obtidos dependem da malha utilizada, sendo que o primeiro requer uma malha muito mais refinada.

No caso dos provetes de flexão em 3 e 4 pontos, os valores de *T-stress* foram obtidos de forma direta através do software Abaqus® e posteriormente comparados com os dois métodos indiretos já referidos, tendo sido obtidos resultados globalmente aceitáveis e próximos daqueles que foram obtidos diretamente. Para estes provetes não foi encontrada uma expressão analítica de aplicação direta, idêntica à que fora aplicada no caso da placa com fenda central tracionada remotamente.

Um trabalho futuro poderá passar pela realização de mais ensaios de flexão e complementação de pontos sobre as curvas  $\beta$  versus  $K_I/K_{II}$ , o ensaio de novas geometrias de provetes e calibração dos fatores de intensidade de tensão para essas mesmas geometrias, ou mesmo a tentativa de obter uma melhor e maior coerência entre as curvas de propagação numa zona mais afastada da pré-fenda inicial.

## Bibliografia

- Anderson, T. L. (2005). *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications* (third ed). Taylor & Francis.
- Arteiro, A. J. C., & de Castro, P. M. S. T. (2014). *Mecânica da Fratura e Fadiga: Exemplos de cálculo e aplicação*. (FEUP, Ed.).
- ASTM. (2006). E647 Standard Test Method for Measurement of Fatigue Crack Growth Rates.
- ASTM. (2011). E399 Standard Method of Test for Plane Strain Fracture Toughness of Metallic Materials.
- Ayatollahi, M. R., & Aliha, M. R. M. (2011). On the use of an anti-symmetric four-point bend specimen for mode II fracture experiments. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 34(11), 898–907. <https://doi.org/10.1111/j.1460-2695.2011.01583.x>
- Ayatollahi, M. R., Aliha, M. R. M., & Hassani, M. M. (2006). Mixed mode brittle fracture in PMMA - An experimental study using SCB specimens. *Materials Science and Engineering A*, 417(1–2), 348–356. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2005.11.002>
- Ayatollahi, M. R., Pavier, M. J., & Smith, D. J. (1998). Determination of T-stress from finite element analysis for mode I and mixed mode I / II loading. *International Journal of Fracture*, 91, 283–298. <https://doi.org/10.1023/A:1007581125618>
- Belli, R., Wendler, M., Petschelt, A., & Lohbauer, U. (2017). Mixed-mode fracture toughness of texturized LS2 glass-ceramics using the three-point bending with eccentric notch test. *Dental Materials*, 33(12), 1473–1477. <https://doi.org/10.1016/j.dental.2017.09.008>
- Broek, D. (1982). *Elementary Engineering Fracture Mechanics* (third ed).
- C. Moura Branco, Fernandes, A. A., & de Castro, P. M. S. T. (1999). *Fadiga de Estruturas Soldadas*. (Fundação Calouste Gulbenkian, Ed.) (second ed).
- de Castro, P. M. S. T. (2016). O integral J, draft notes 12-12-2016.
- de Castro, P. M. S. T. (2017). Notas sobre a Análise Linear Elástica do Estado de Tensão e Deformação de Sólidos Contendo Fendas.
- de Souza, J. M., Yoshimura, H. N., Peres, F. M., & Schön, C. G. (2012). Effect of sample pre-cracking method and notch geometry in plane strain fracture toughness tests as applied to a PMMA resin. *Polymer Testing*, 31(6), 834–840. <https://doi.org/10.1016/j.polymertesting.2012.06.003>
- Efunda. (2018). Stress intensity factor, K. Retrieved from [http://www.efunda.com/formulae/solid\\_mechanics/fracture\\_mechanics/fm\\_lefm\\_K.cfm](http://www.efunda.com/formulae/solid_mechanics/fracture_mechanics/fm_lefm_K.cfm)
- Erdogan, F., & Sih, G. C. (1963). On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. *Journal of Basic Engineering*, 85(4), 519.

<https://doi.org/10.1115/1.3656897>

- Ewing, P. D., Swedlow, J. L., & Williams, J. G. (1976). Further results on the angled crack problem. *International Journal of Fracture*, 12(1), 85–93.  
<https://doi.org/10.1007/BF00036011>
- Fajdiga, G. (2015). Determining a kink angle of a crack in mixed mode fracture using maximum energy release rate, SED and MTS criteria. *Journal of Multidisciplinary Engineering Science and Technology*, 2(1), 356–362.
- Fett, T. (1991). Mixed-mode stress intensity factors for the three-point bending bars. *International Journal of Fracture*, 48, 67–74.
- Finnie, I., & Saith, A. (1973). A note on the angled crack problem and the directional stability of cracks. *International Journal of Fracture*, 9(4), 484–486.  
<https://doi.org/10.1007/BF00036331>
- Gdoutos, E. E. (2005). *Fracture Mechanics: An Introduction* (second ed). Springer.
- Goodrum, K. (2016). The PMMA Revolution. *RCI Interface*, 12–15.
- Gross, D., & Seelig, T. (2011). *Fracture Mechanics*. Springer (second ed).
- Gupta, M., Alderliesten, R. C., & Benedictus, R. (2015). A review of T-stress and its effects in fracture mechanics. *Engineering Fracture Mechanics*, 134, 218–241.  
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2014.10.013>
- Haddadi, E., Choupani, N., & Abbasi, F. (2016). Investigation on the effect of different pre-cracking methods on fracture toughness of RT-PMMA. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 13(11), 2012–2026. <https://doi.org/10.1590/1679-78252804>
- He, M. Y., Cao, H. C., & Evans, A. G. (1990). Mixed-mode fracture: The four-point shear specimen. *Acta Metallurgica et Materialia*, 38(5), 839–846.  
[https://doi.org/10.1016/0956-7151\(90\)90037-H](https://doi.org/10.1016/0956-7151(90)90037-H)
- He, M. Y., & Hutchinson, J. W. (2000). Asymmetric four-point crack specimen. *Journal of Applied Mechanics*, 67(March 2000), 207–209.
- Irwin, G. R. (1957). Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*, 24, 361–364.
- Krueger, R. (2004). The virtual approach crack closure technique : history, approach and applications. *Applied Mechanics Reviews*, 57, 109–143.
- Maccagno, T. M., & Knott, J. F. (1989). The fracture behaviour of PMMA in mixed modes I and II. *Engineering Fracture Mechanics*, 34(1), 65–86.  
[https://doi.org/10.1016/0013-7944\(89\)90243-9](https://doi.org/10.1016/0013-7944(89)90243-9)
- Maiti, S. K., & Smith, R. A. (1983). Theoretical and experimental studies on the extension of cracks subjected to concentrated loading near their faces to compare the criteria for mixed mode brittle fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 31(5), 389–403. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(83\)90006-6](https://doi.org/10.1016/0022-5096(83)90006-6)
- Meliani, O. B. M. H., & Pluvillage, G. (2016). A review of T-stress calculation methods in fracture mechanics computation. *Nature & Technology*, (June), 20–30.

- Perez, N. (2017). *Fracture Mechanics* (Second ed). Springer.
- Pook, L. P. (2017). Mixed-mode fatigue crack growth thresholds: A personal historical review of work at the National Engineering Laboratory, 1975-1989. *Engineering Fracture Mechanics*, 187, 115–141.  
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2017.10.028>
- Ranji, A. R. (2015). Mixed-mode fracture criteria investigation in a rock. *Strength, Fracture and Complexity*, 9(4), 265–274. <https://doi.org/10.3233/SFC-160192>
- Razavi, S. M. J., Aliha, M. R. M., & Berto, F. (2017). Application of an average strain energy density criterion to obtain the mixed mode fracture load of granite rock tested with the cracked asymmetric four-point bend specimens. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. Retrieved from  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.tafmec.2017.07.004>
- Rebelo, C. A. C. C. (1987). *Caracterização do Comportamento à Fractura de Resinas Poliester Insaturadas, tese de Mestrado em Materiais e Processos de Fabrico*. FEUP.
- Rebelo, C. A. C. C., Marques, A. T., & de Castro, P. M. S. T. (1986). *Fracture characterization of composites in mixed mode loading*. ECF 6.
- Rice, J. R. (1968). A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 379–386.
- Richard, H. A., Fulland, M., & Sander, M. (2005). Theoretical crack path prediction. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 28(1–2), 3–12.  
<https://doi.org/10.1111/j.1460-2695.2004.00855.x>
- Richard, H. A., & Sander, M. (2016). *Fatigue Crack Growth: Detect - Assess - Avoid*. Springer.
- Shahani, A. R., & Tabatabaei, S. A. (2009). Effect of T-stress on the fracture of a four point bend specimen. *Materials and Design*, 30(7), 2630–2635.  
<https://doi.org/10.1016/j.matdes.2008.10.031>
- Sih, G. C. (1974). Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems. *International Journal of Fracture*, 10(3), 305–321.  
<https://doi.org/10.1007/BF00035493>
- Sih, G. C. (1991). *Mechanics of fracture initiation and propagation*. Springer.  
<https://doi.org/10.1007/978-94-011-3734-8>
- Smith, D. J., Ayatollahi, M. R., & Pavier, M. J. (2000). The role of T-stress in brittle fracture for linear elastic materials under mixed mode loading. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 24(2), 137–150.
- Suresh, S., Shih, C. F., Morrone, A., & O'Dowd, N. P. (1990). Mixed-mode fracture toughness of ceramic materials. *Journal of the American Ceramic Society*, 73, 1257–1267.
- Tanaka, K. (1974). Fatigue crack propagation from a crack inclined to the cyclic tensile axis. *Engineering Fracture Mechanics*, 6(3), 493–507.
- Tavares, S. M. O., & de Castro, P. M. S. T. (2015). *Stress Intensity Factor Determination by FE models; ppt presentation at FEUP*.

- Wang, C., Zhu, Z. M., & Liu, H. J. (2016). On the I–II mixed mode fracture of granite using four-point bend specimen. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 39(10), 1193–1203. <https://doi.org/10.1111/ffe.12422>
- Williams, J. G. (1980). *Stress Analysis of Polymers* (second ed). Ellis Horwood.
- Williams, J. G., & Ewing, P. D. (1984). Fracture under complex stress - The angled crack problem. *International Journal of Fracture*, 26(4), 346–351. <https://doi.org/10.1007/BF00962967>
- Williams, M. L. (1957). On the stress distribution at the base of a stationary crack. *Journal of Applied Mechanics*, 24, 109–114.
- Zehnder, A. T. (2012). *Fracture Mechanics*. Springer.

## **Anexos**

## **A.1 – Obtenção dos valores de *T-stress* através do Abaqus®**

Após toda a placa ser modelada e a simulação corrida são obtidos resultados diversos, de acordo com o especificado por nós nos passos iniciais da modelação. Aqui ficam os passos realizados após a simulação finalizada e os resultados obtidos, como podem as deformações ser extraídas para uma folha de Excel e aplicada a equação (82) ao cálculo de  $T$ .

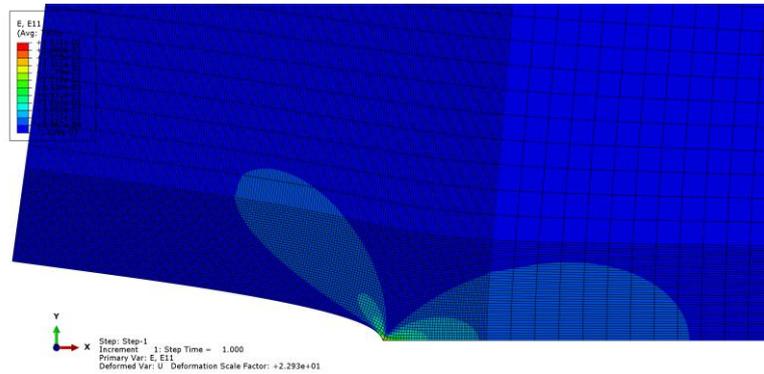


Figura 102 – Zoom in das deformações obtidas na zona de interesse.

Após serem obtidas as deformações um path é criado na face da fenda, o que nos vai permitir retirar os deslocamentos dos nós. O path pode ser criado em Tools → Path → Create. De seguida, em Tools → XYData → Create → Path é gerada a tabela com os valores das deformações em cada um dos nós. Deve, para isso, ser seleccionada a opção Path e Underformed, tal como se pode ver na Figura 104.

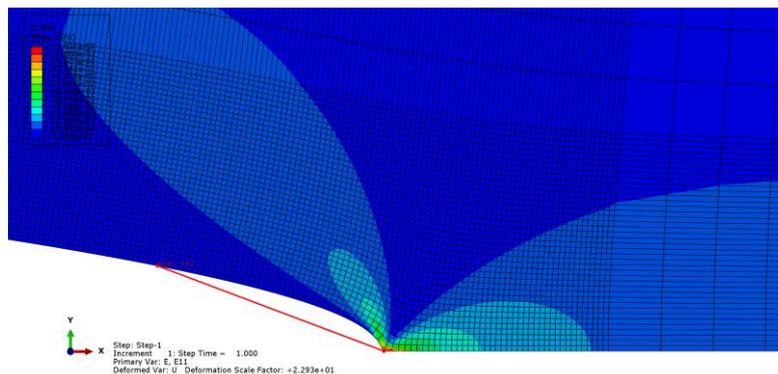


Figura 103 – Path criado para a obtenção das deformações na face da fenda.

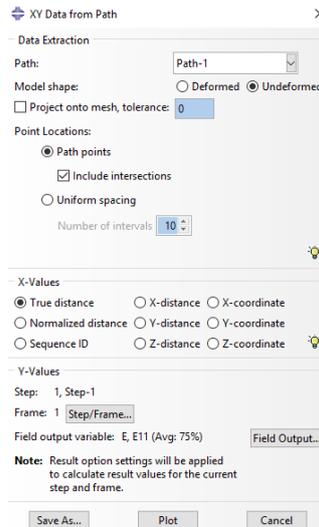


Figura 104 – Geração da tabela de deformações.

Na Figura 105 pode ver-se a tabela gerada pelo software dos valores dos deslocamentos em cada um dos nós da fenda, por nós englobados no path. Basta agora seleccionar esses valores em Tools → XYData → Manager → Edit e copiar para uma folha de Excel.

	X	Y
1	0	0.0181879
2	0.25	0.00786377
3	0.5	0.000238424
4	0.75	-0.000746134
5	1	-0.000796209
6	1.25	-0.000809307
7	1.5	-0.000807187
8	1.75	-0.000805443
9	2	-0.000803332
10	2.25	-0.000801176
11	2.5	-0.000799469
12	2.75	-0.000797711
13	3	-0.000794401
14	3.25	-0.000792041
15	3.5	-0.000789631
16	3.75	-0.000787173
17	4	-0.000784668
18	4.25	-0.000782115
19	4.5	-0.000779516
20	4.75	-0.000776871
21	5	-0.00077418
22	5.25	-0.000771445
23	5.5	-0.000768664
24	5.75	-0.000765839
25	6	-0.000762969
26	6.25	-0.000760054
27	6.5	-0.000757094
28	6.75	-0.000754188

Figura 105 – Tabela de deformações obtida no Abaqus.

Por fim, após todos os dados terem sido inseridos numa folha de Excel é gerado um gráfico de acordo com os valores obtidos através da implementação da equação (82). O valor final de  $T$  é conseguido através da interseção de uma linha que segue a tendência dos deslocamentos e o eixo vertical. Esse será então o nosso valor da tensão  $T$ , tal como representado na Figura 106, onde  $x/a = 0$  representa a extremidade da fenda.

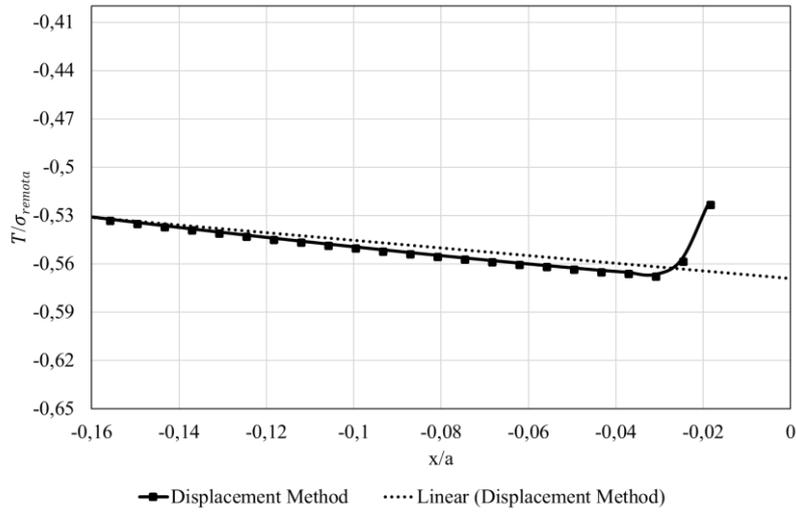


Figura 106 - Curva de  $T$  obtida através dos deslocamentos e obtenção do valor de  $T$ .

É assim obtido o valor de  $-0,57$ , sendo um valor próximo de que fora obtido por (Ayatollahi *et al.*, 1998). De notar que não foi representado o ponto correspondente à extremidade da fenda.

## **A.2 – Ficha técnica das propriedades do PMMA**

	Valor	Testes Standard
<b>Propriedades Gerais</b>		
Densidade	1,19 g/cm <sup>3</sup>	ISO 1185, T 51063, DIN 53479
Absorção de Água (24 horas)	0,30%	ISO 62, T 51002, DIN 53495
Absorção de Água (8 dias)	0,50%	ISO 62, T 51002, DIN 53495
Absorção de Água Máxima	1,75%	Interno
<b>Propriedades Mecânicas</b>		
Resistência à Curvatura	130 MPa	ISO 684, T 51101, DIN 53454
Módulo de Elasticidade	3.300 MPa	ISO 527, T 51034, DIN 53455
Resistência à Tracção	76 MPa	ISO -2/1A/5, T 51034, DIN 53455
Alongamento à Tracção	6%	ISO 527, T 51034, DIN 53455
Rigidez Rockwell	100	ISO 2039, ASTM D 785
Rigidez Shore	60 - 70	ISO 868, T 51109
Resistência ao Impacto (Izod)	1,4 KJ/m <sup>2</sup>	ISO 180/1A, ASTM D256A
Resistência ao Impacto (Charpy)	12 KJ/m <sup>2</sup>	ISO 179/2D, T 51035, DIN 53453
<b>Propriedades Eléctricas</b>		
Resistência Dielétrica	20 - 25 KV/mm	C 26225, DIN 53481
Resistência Transversa	>10 <sup>15</sup> Ohm.cm	C26215, DIN 53482
<b>Propriedades Ópticas</b>		
Transmissão Luminosa	92%	T 51068, DIN 5036
Índice de Refracção	1,492	T 51064, DIN 53491
<b>Propriedades Térmicas</b>		
Coefficiente de Dilatação Térmica linear	0,065 mm/m/C°	ISO EN 2155-1, T 51251, DIN 52328
Condutividade Térmica	0,17 W/m/C°	DIN 52612
Capacidade Térmica Especifica	1,32 J/g/C°	ASTM C 351
Temperatura Vicat	115 C°	ISO 306, T 51021, DIN 53460
Temperatura de Deformação Térmica	109 C°	ISO 75/A, T 51005, DIN 53461
Temperatura Máxima de Uso Continuo	85 C°	-
Temperatura de Moldagem	130 - 190 C°	-
Temperatura Máxima	200 C°	-
<b>Propriedades Inflamáveis</b>		
Temperatura de Auto-Ignicção	450 C°	-
Resistência à Chama	B2, Class 3, HB	DIN 4102, BS 476 Pt. 7, UL 94
Índice de Oxigénio	18%	T 5107, ASTM 2863 77

### **A.3 – Gráficos *T-stress* provetes de flexão em 4 pontos**

Os gráficos apresentados de seguida dizem respeito ao subcapítulo 6.2, no qual são apresentados os valores da tensão  $T$ . Esses valores foram obtidos através da interseção da curva linear do respetivo método com o eixo vertical, sendo que  $x/a=0$  representa a extremidade da fenda. Tal como aconteceu no caso das placas, os valores muito próximos da extremidade da fenda foram rejeitados, uma vez que afetam muito o resultado obtido, tema previamente abordado no subcapítulo 2.8.3.

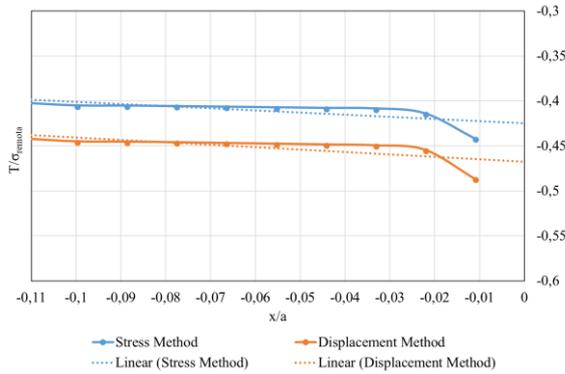


Figura 107 - Curva de  $T$  obtida através das tensões e deformações, provete 1.

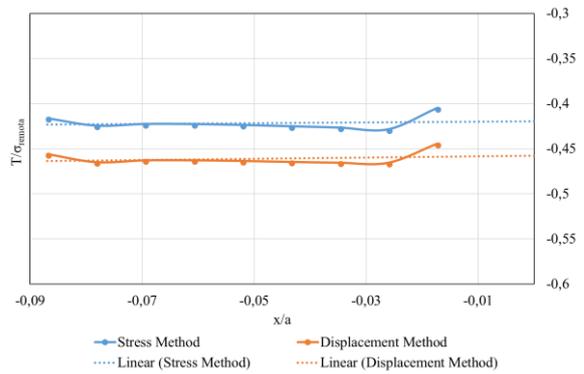


Figura 109 - Curva de  $T$  obtida através das tensões e deformações, provete 2.

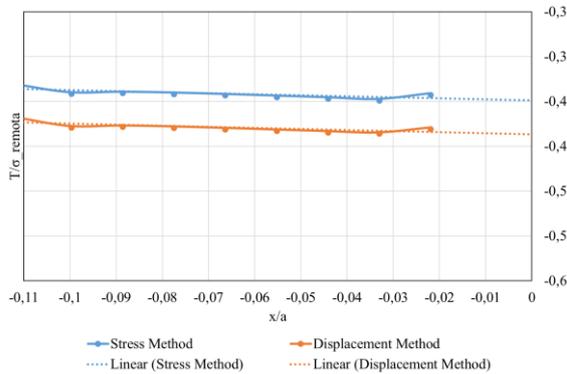


Figura 108 - Curva de  $T$  obtida através das tensões e deformações, provete 2b.

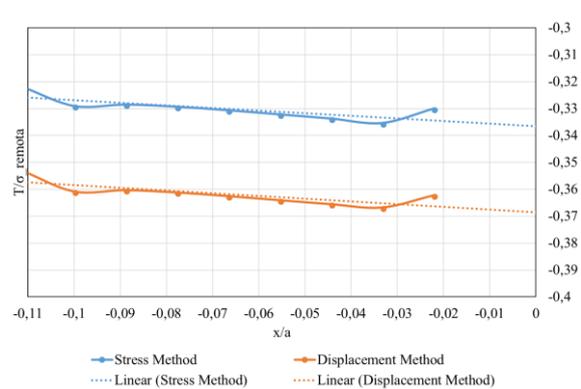


Figura 110 - Curva de  $T$  obtida através das tensões e deformações, provete 3.

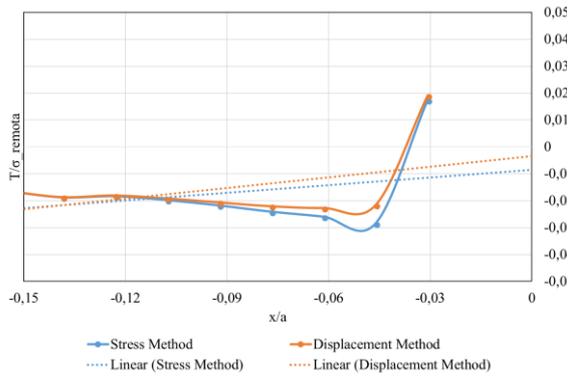


Figura 111 - Curva de  $T$  obtida através das tensões e deformações, provete 4.

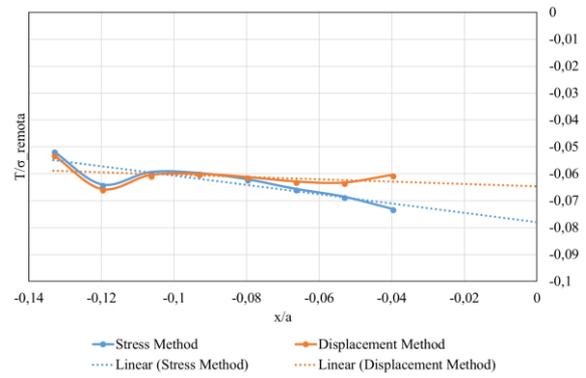


Figura 114 - Curva de  $T$  obtida através das tensões e deformações, provete 5.

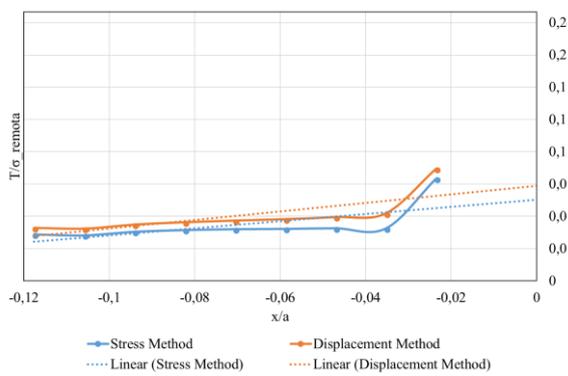


Figura 112 - Curva de  $T$  obtida através das tensões e deformações, provete 6.

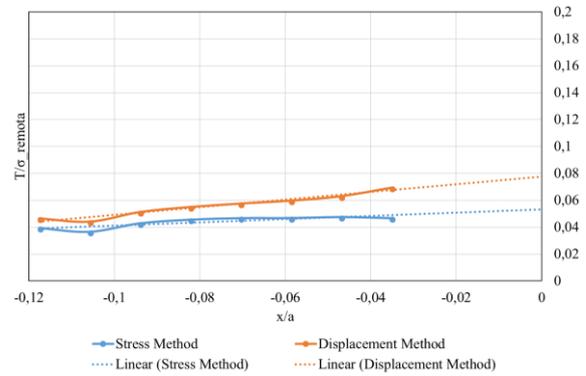


Figura 115 - Curva de  $T$  obtida através das tensões e deformações, provete 7.

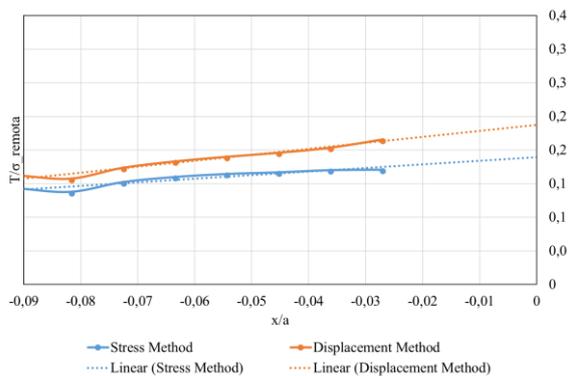


Figura 113 - Curva de  $T$  obtida através das tensões e deformações, provete 7b.

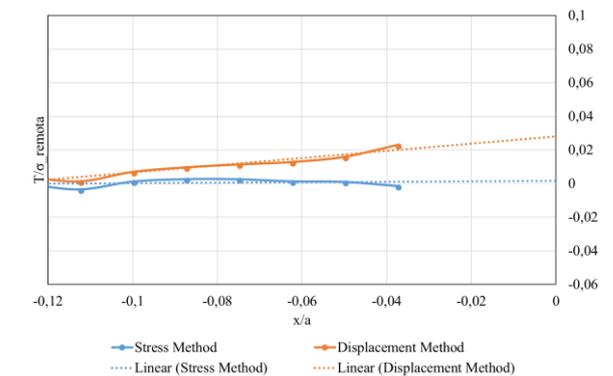


Figura 116 - Curva de  $T$  obtida através das tensões e deformações, provete 8.

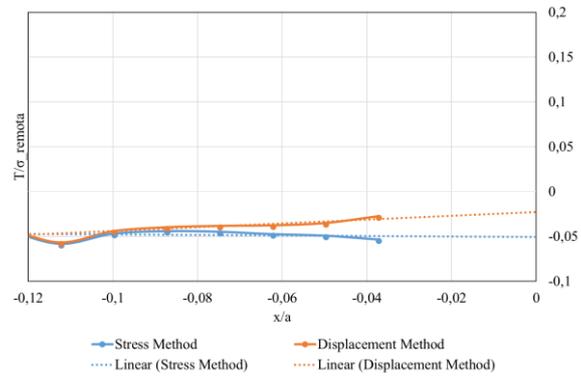


Figura 117 - Curva de  $T$  obtida através das tensões e deformações, provete 9.

#### **A.4 – Gráficos *T-stress* provetes de flexão em 3 pontos**

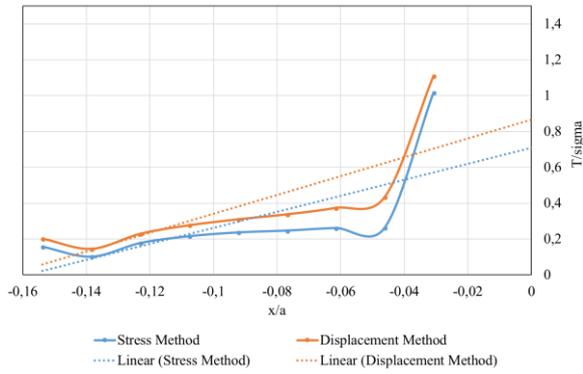


Figura 118 - Curva de  $T$  obtida através das tensões e deformações, provete ASTM.

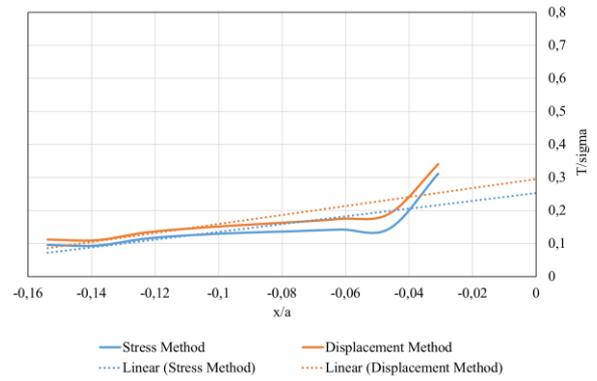


Figura 120 - Curva de  $T$  obtida através das tensões e deformações, provete 3PB-9.

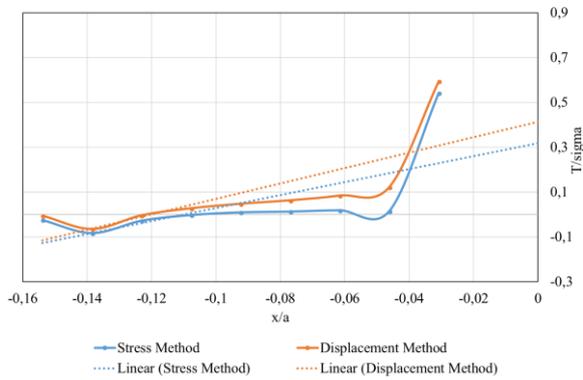


Figura 119 - Curva de  $T$  obtida através das tensões e deformações, provete Independente.

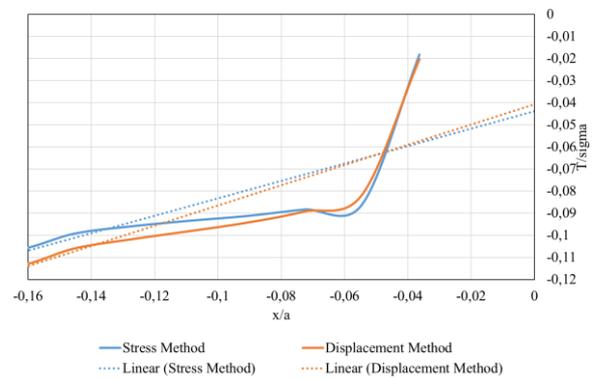


Figura 121 - Curva de  $T$  obtida através das tensões e deformações, provete 3PB-10.

## **A.5 – Gráficos flexão em 4 pontos**

### A.5.1 Provete 1 – modo II puro

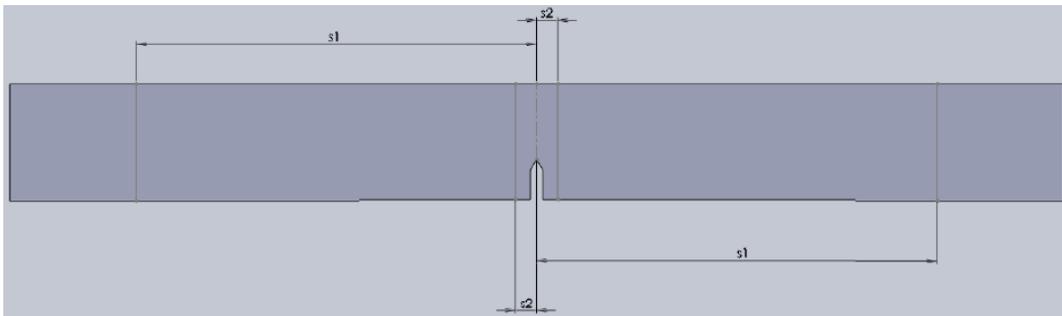


Figura 122 - SEN provete 1.



Figura 123 – Montagem experimental do provete 1 com carga assimétrica (modo II puro).



Figura 124 - Propagação da fenda, provete 1.

O provete 1 contou com a propagação da pré-fenda quando a carga aplicada era de 3477 N ao fim de 3.49 min. Este teve a capacidade de suportar uma carga tão alta, uma vez que a linha de atuação da célula de carga se encontrava diretamente sobre o plano da fenda, submetendo o provete apenas a esforço transverso. Foi obtido um ângulo de propagação  $\psi_0$  em relação ao plano da pré-fenda de  $65^\circ$ .

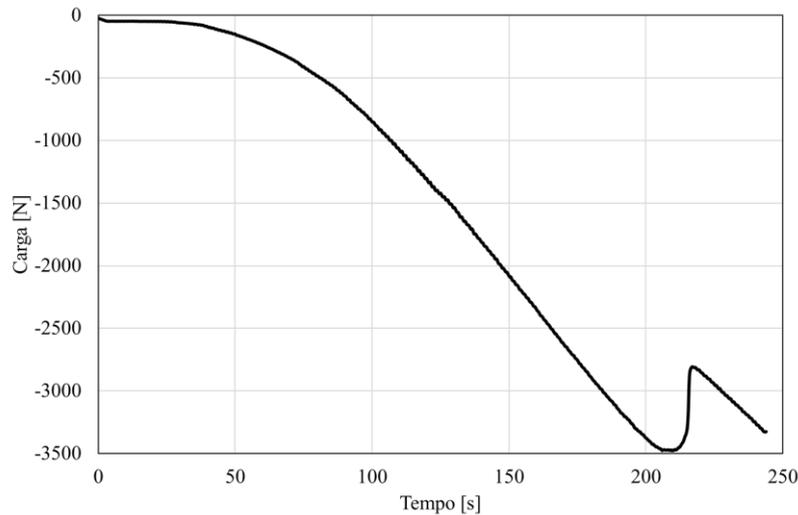


Figura 125 - Gráfico da aplicação da carga ao longo do tempo, provete 1.

Na Figura 125 é possível observar o gráfico de aplicação da carga ao longo do tempo. O local de relaxamento da carga indica o momento de iniciação da propagação da fenda. Na Figura 126 é possível observar o deslocamento axial verificado ao longo do ensaio ao longo da aplicação da carga.

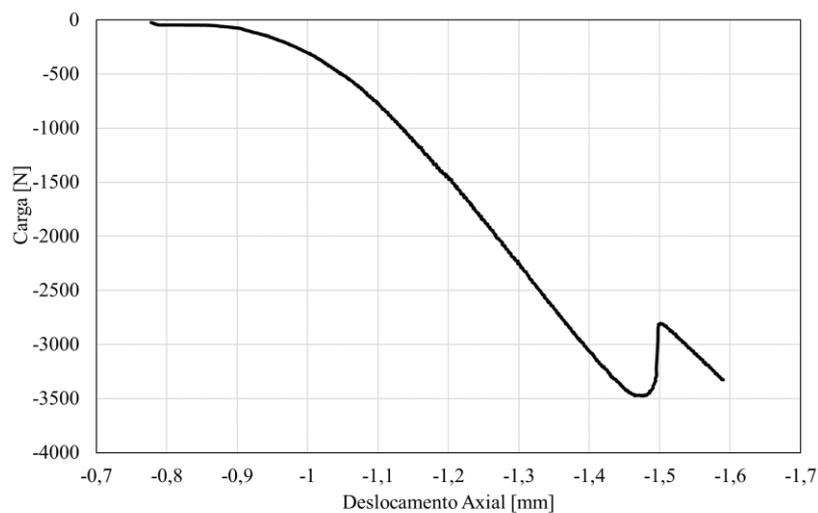


Figura 126 – Gráfico de carga vs deslocamento axial, provete 1.

## Diagramas de corte e de momento fletor modo II puro

A força de corte e o momento aplicados em qualquer secção de uma barra podem ser determinados através da mecânica dos sólidos. Considerando a peça que suporta os dois rolos superiores como sendo uma barra, a força transmitida por esses rolos é dada por:

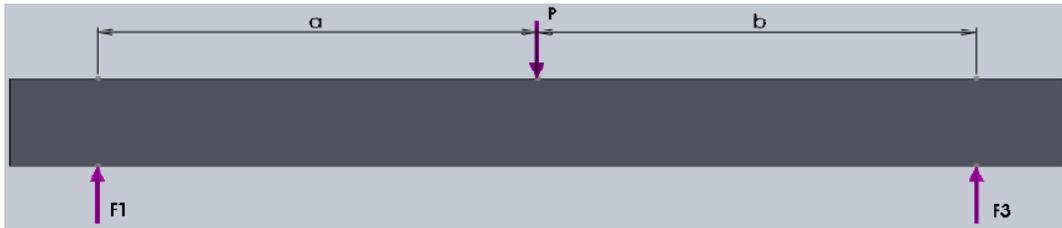


Figura 127 - Representação simplificada das forças que atuam na barra superior.

$$F_1 = \frac{a \times P}{a + b} \quad (110)$$

$$F_3 = \frac{a \times P}{a + b} \quad (111)$$

Assim, para a flexão em 4 pontos, vem:

$$F_4 = \frac{F_3 \times j - F_1 \times k}{i} \quad (112)$$

$$F_2 = F_1 + F_3 - F_4 \quad (113)$$

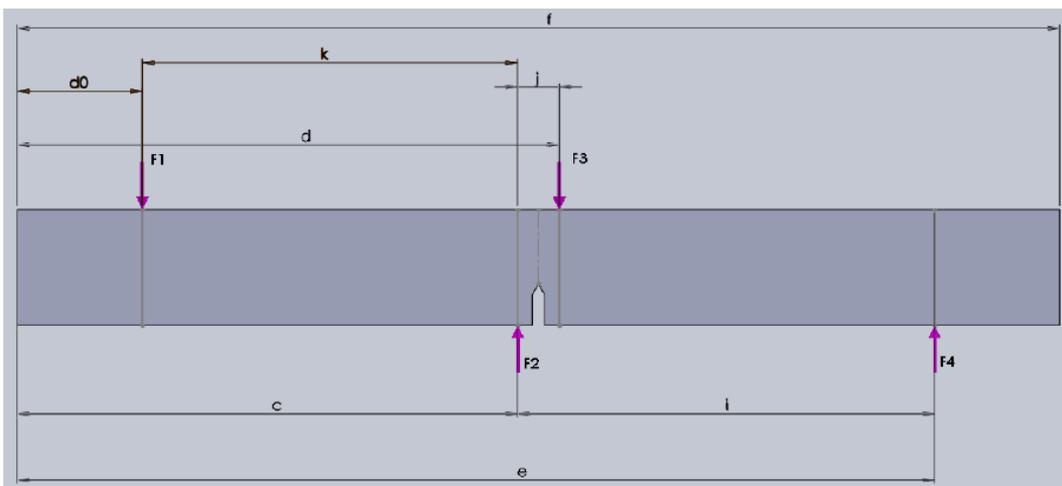


Figura 128 - Representação simplificada das forças que atuam no provete.

onde  $F_1$  e  $F_3$  são as forças transmitidas pelos rolos ao provete, e  $F_2$  e  $F_4$  as forças transmitidas pelos rolos inferiores.

Para  $0 \leq x_1 \leq d_0$ , sendo  $d_0$  a distância desde o início da barra superior até ao primeiro rolo:

$$Q_1 = 0 \quad (114)$$

$$M_1 = x_1 \times Q_1 \quad (115)$$

Para  $d_0 \leq x_2 \leq c$ , sendo  $c$  a distância desde o início da barra inferior até ao primeiro rolo:

$$Q_2 = F_1 \quad (116)$$

$$M_2 = -F_1(x_2 - d_0) \quad (117)$$

Para  $c \leq x_3 \leq d$ , sendo  $d$  a distância desde o início da barra superior até ao segundo rolo:

$$Q_3 = F_1 - F_2 \quad (118)$$

$$M_3 = -F_1(x_3 - d_0) + F_2(x_3 - c) \quad (119)$$

Para  $d \leq x_4 \leq e$ , sendo  $e$  a distância desde o início da barra inferior até ao segundo rolo:

$$Q_4 = F_1 + F_3 - F_2 \quad (120)$$

$$M_4 = -F_1(x_4 - d_0) + F_2(x_4 - c) - F_3(x_4 - d) \quad (121)$$

Por fim, para a restante secção do provete,  $e \leq x_5 \leq f$ , sendo  $f$  a o comprimento do provete,

$$Q_5 = F_1 + F_3 - F_2 - F_4 \quad (122)$$

$$M_4 = -F_1(x_5 - d_0) + F_2(x_5 - c) - F_3(x_5 - d) + F_4(x_5 - e) \quad (123)$$

Utilizando as equações acima apresentadas, considerando uma carga de 1938 N, utilizando  $s_1 = 95$  mm e  $s_2 = 5$  mm, os diagramas do esforço de corte e do momento fletor são apresentados de seguida.

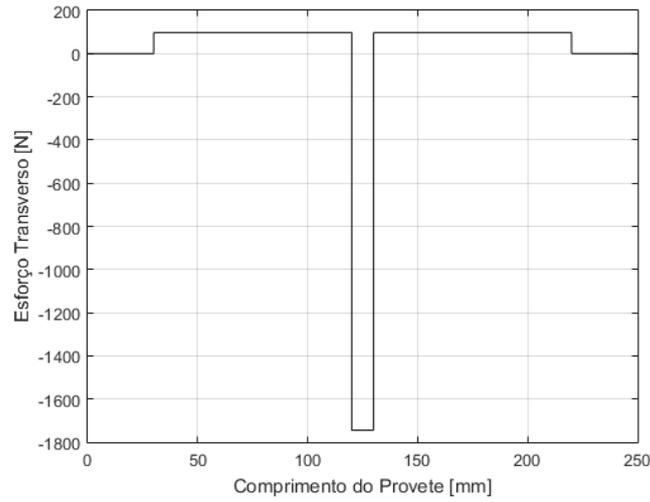


Figura 129 - Diagrama do esforço transverso para um carregamento em modo II puro.

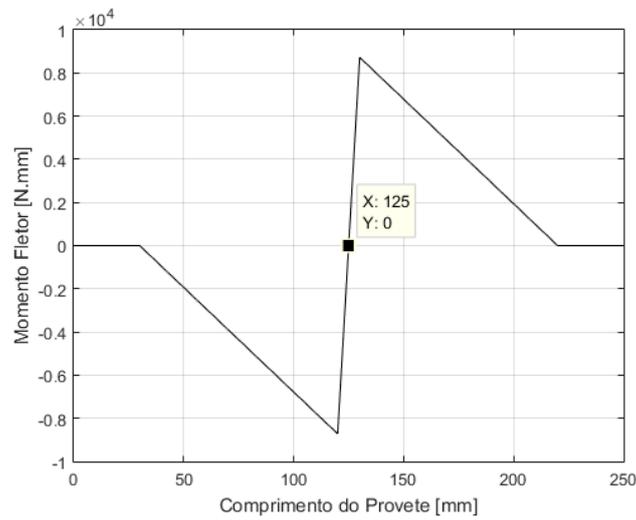


Figura 130 - Diagrama do momento fletor para um carregamento em modo II puro.

Como pode ser visto, no plano da fenda ( $x = 125 \text{ mm}$ ) o momento fletor é teoricamente nulo, pelo que a fenda se encontra unicamente sujeita a esforço transverso. É de salientar, embora óbvio, que deve ser sempre  $S_0 < S_1$ .

### A.5.2 Provete 2

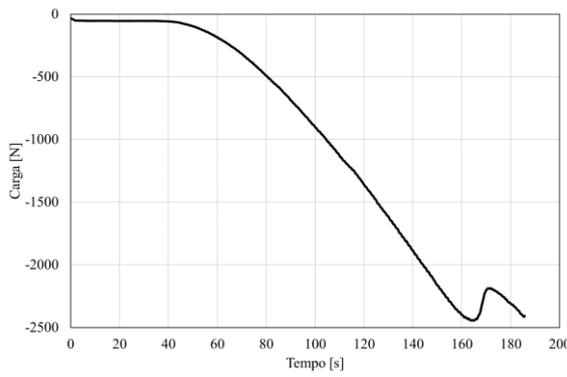


Figura 131 - Gráfico da aplicação da carga ao longo do tempo, provete 2.

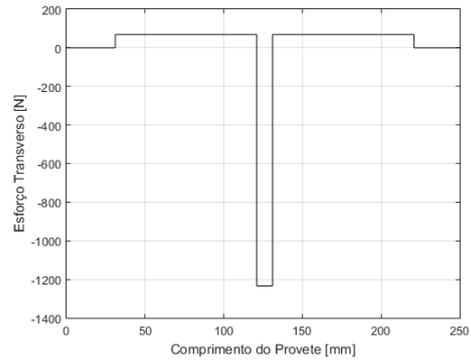


Figura 133 - Diagrama do esforço transverso para um carregamento em modo misto.

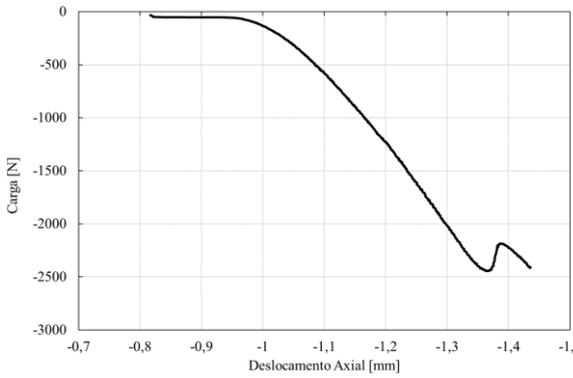


Figura 132 – Gráfico de carga vs deslocamento axial, provete 2.

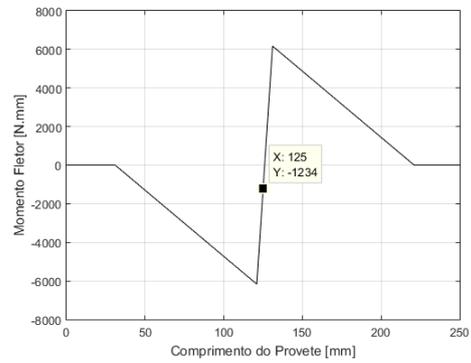


Figura 134 - Diagrama do momento fletor para um carregamento em modo misto.

### A.5.3 Provete 2b

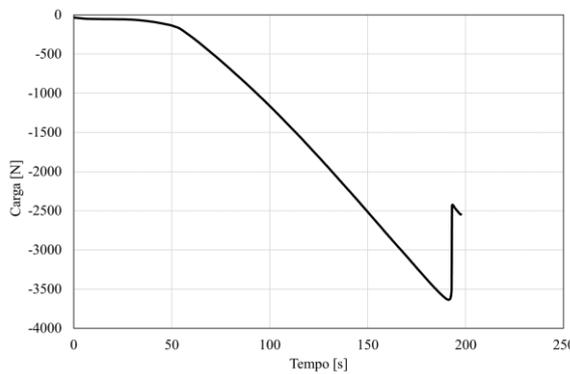


Figura 135 - Gráfico da aplicação da carga ao longo do tempo, provete 2.

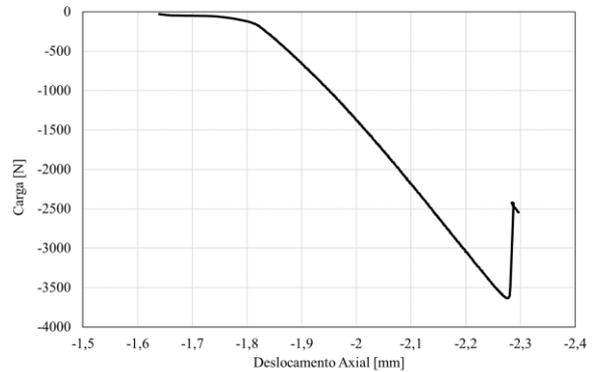


Figura 136 – Gráfico de carga vs deslocamento axial, provete 2b.

### A.5.4 Provete 3

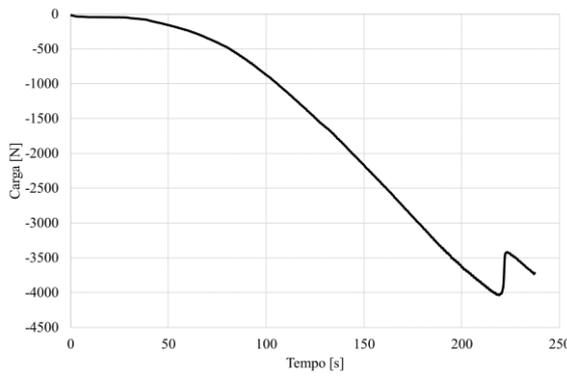


Figura 137 - Gráfico da aplicação da carga ao longo do tempo, provete 3.

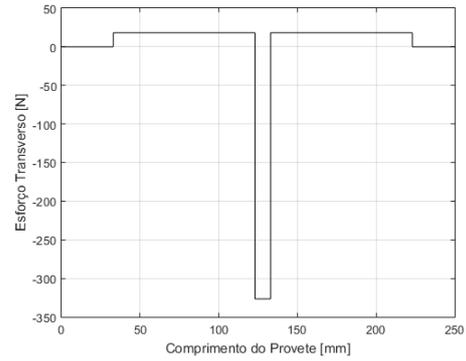


Figura 139 - Diagrama do esforço transverso para um carregamento em modo misto.

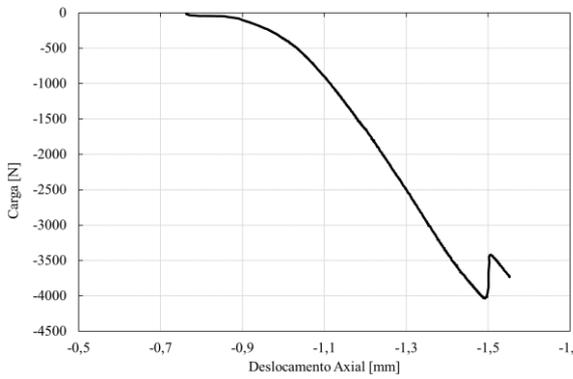


Figura 138 – Gráfico de carga vs deslocamento axial, provete 3.

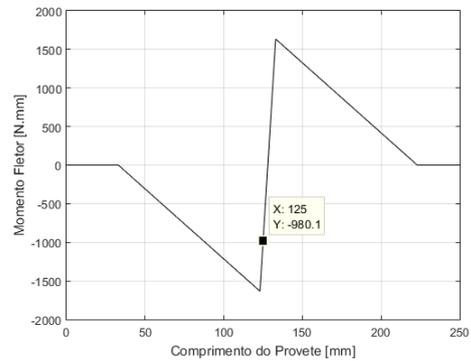


Figura 140 - Diagrama do momento fletor para um carregamento em modo misto.

### A.5.5 Provete 4

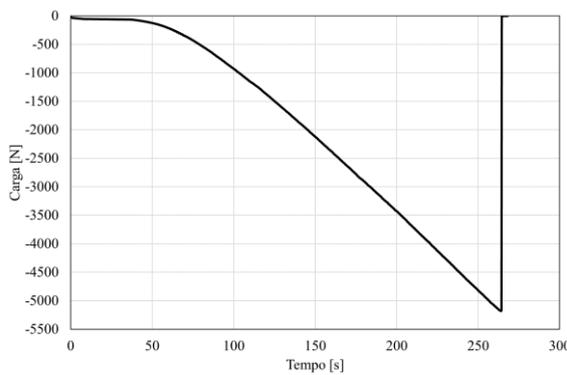


Figura 141 - Gráfico da aplicação da carga ao longo do tempo, provete 4.

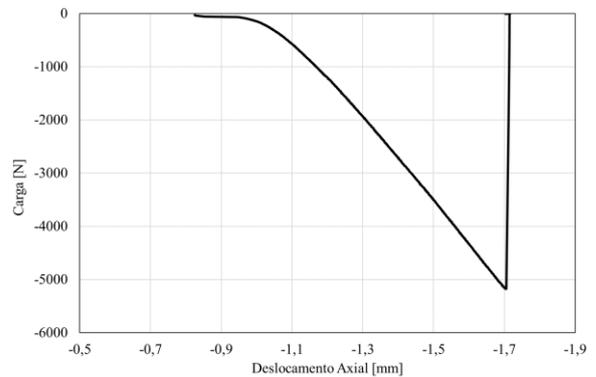


Figura 142 – Gráfico de carga vs deslocamento axial, provete 4.

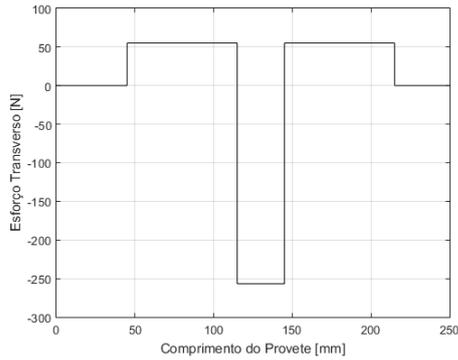


Figura 143 - Diagrama do esforço transverso para um carregamento em modo misto.

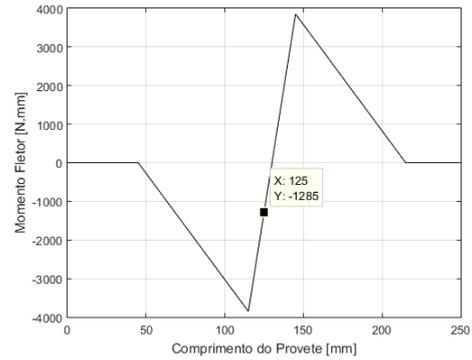


Figura 144 - Diagrama do momento fletor para um carregamento em modo misto.

### A.5.6 Provete 5

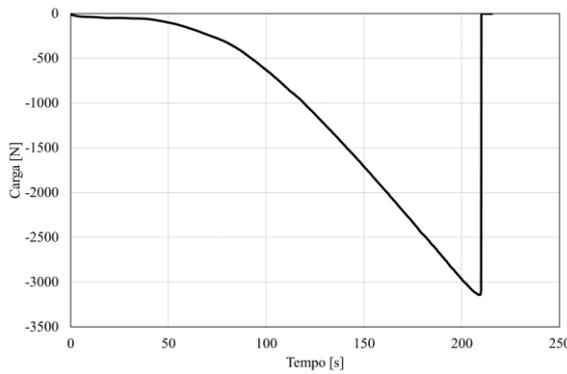


Figura 145 - Gráfico da aplicação da carga ao longo do tempo, provete 5.

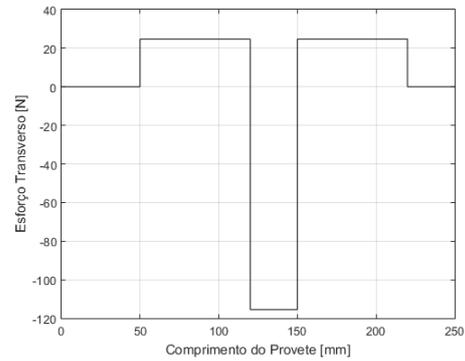


Figura 147 - Diagrama do esforço transverso para um carregamento em modo misto.

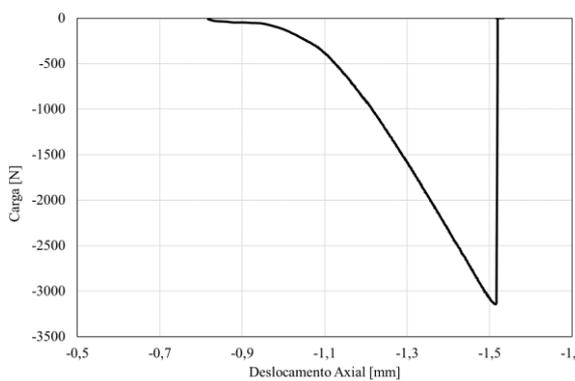


Figura 146 – Gráfico de carga vs deslocamento axial, provete 5.

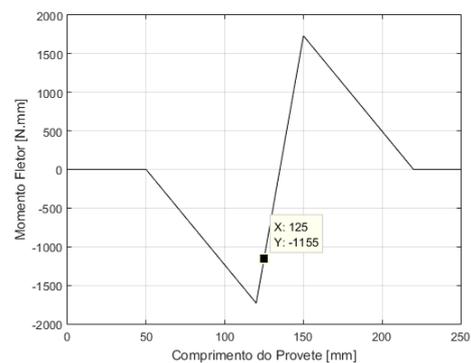


Figura 148 - Diagrama do momento fletor para um carregamento em modo misto.

### A.5.7 Provete 6

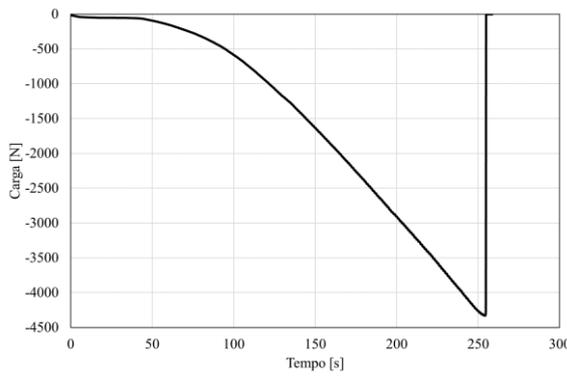


Figura 149 - Gráfico da aplicação da carga ao longo do tempo, provete 6.

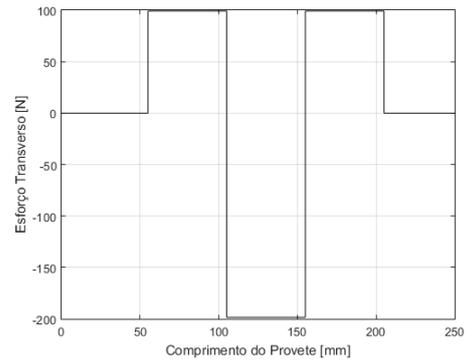


Figura 151 - Diagrama do esforço transverso para um carregamento em modo misto.

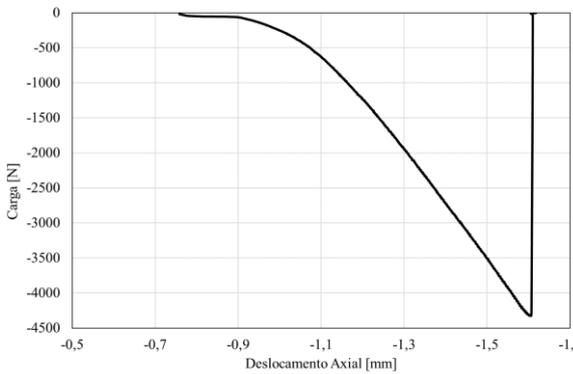


Figura 150 – Gráfico de carga vs deslocamento axial, provete 6.

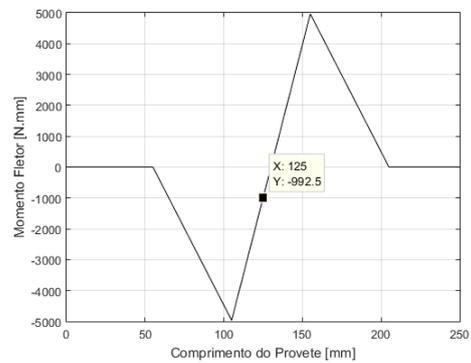


Figura 152 - Diagrama do momento fletor para um carregamento em modo misto.

### A.5.8 Provete 7

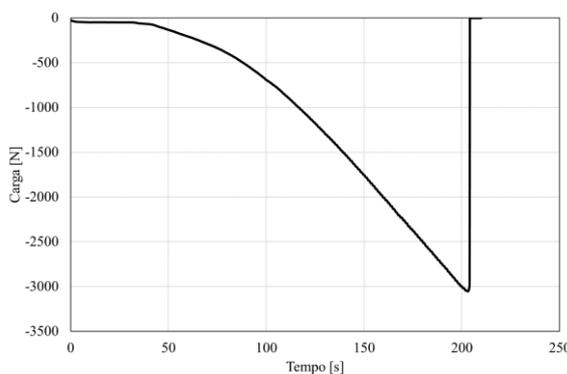


Figura 153 - Gráfico da aplicação da carga ao longo do tempo, provete 7.

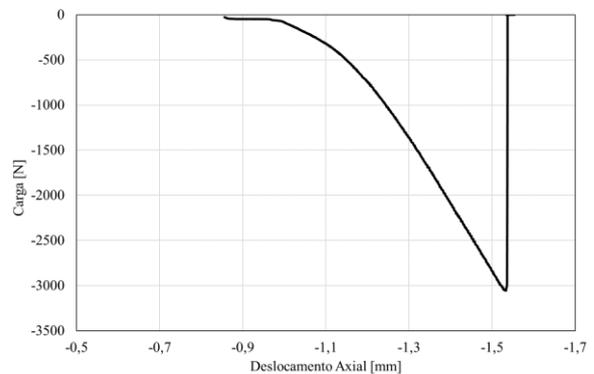


Figura 154 – Gráfico de carga vs deslocamento axial, provete 7.

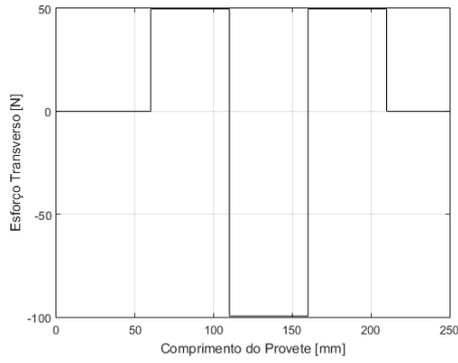


Figura 155 - Diagrama do esforço transverso para um carregamento em modo misto.

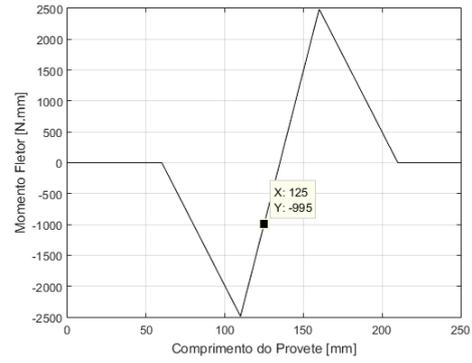


Figura 156 - Diagrama do momento fletor para um carregamento em modo misto.

### A.5.9 Provete 7b

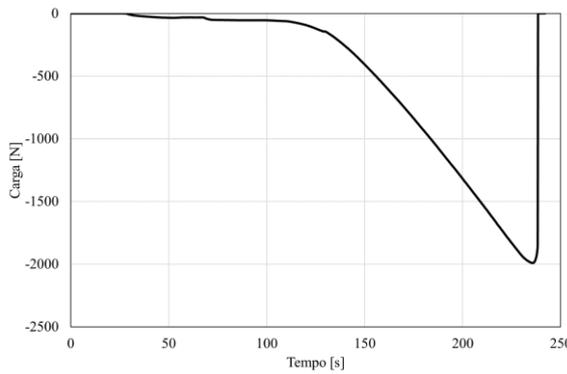


Figura 157 - Gráfico da aplicação da carga ao longo do tempo, provete 7b.

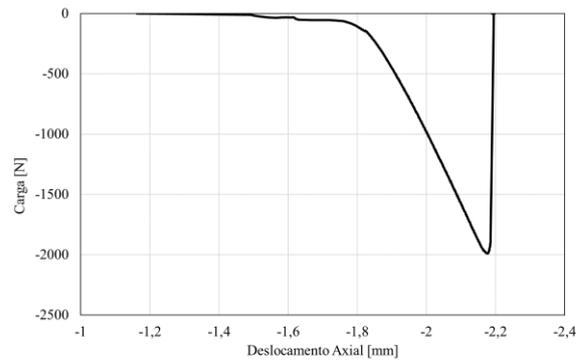


Figura 158 - Gráfico de carga vs deslocamento axial, provete 7b.

### A.5.10 Provete 8

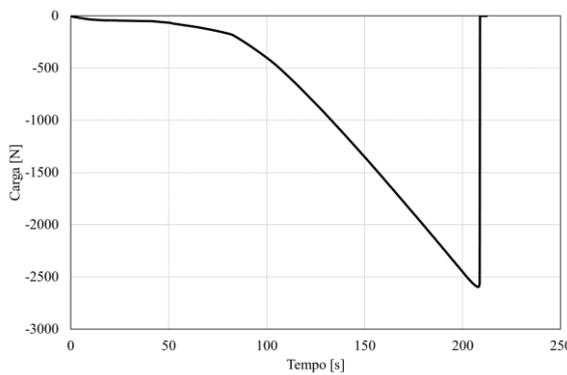


Figura 159 - Gráfico da aplicação da carga ao longo do tempo, provete 8.

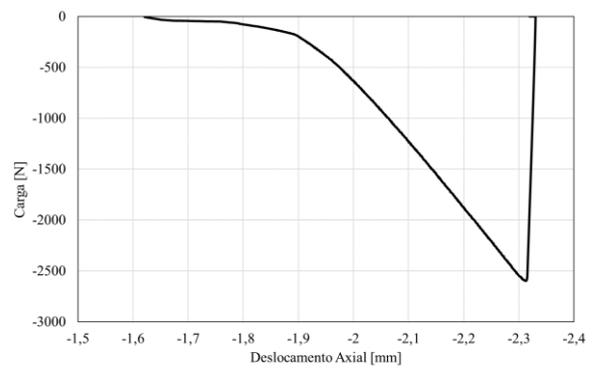


Figura 160 - Gráfico de carga vs deslocamento axial, provete 8.

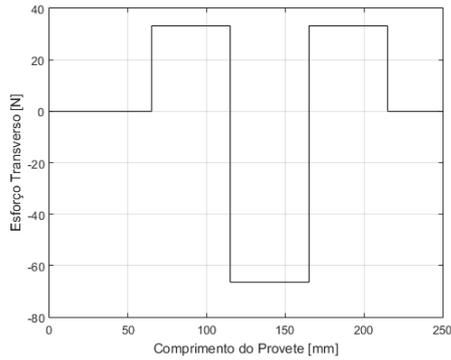


Figura 161 - Diagrama do esforço transverso para um carregamento em modo misto.

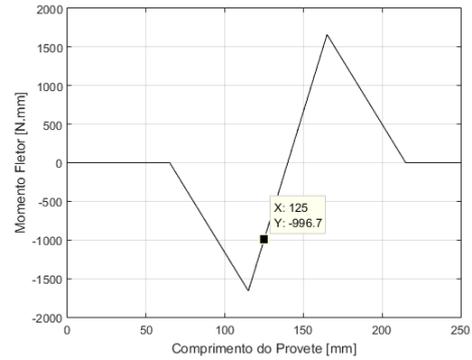


Figura 162 - Diagrama do momento fletor para um carregamento em modo misto.

### A.5.11 Provete 9

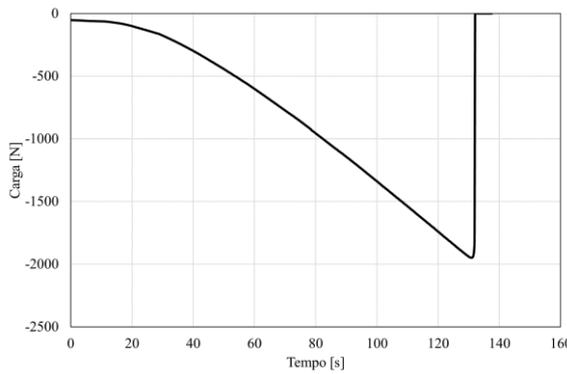


Figura 163 - Gráfico da aplicação da carga ao longo do tempo, provete 9.

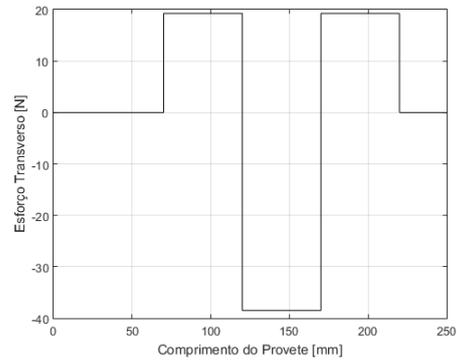


Figura 165 - Diagrama do esforço transverso para um carregamento em modo misto.

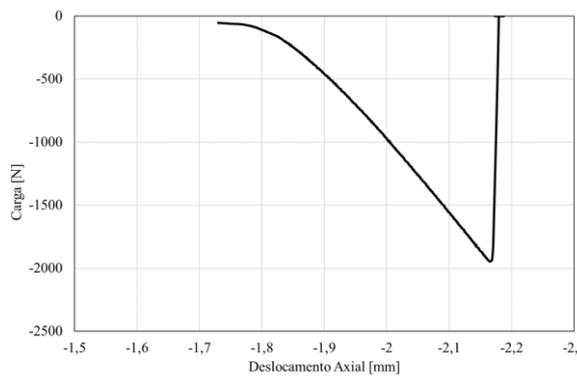


Figura 164 – Gráfico de carga vs deslocamento axial, provete 9.

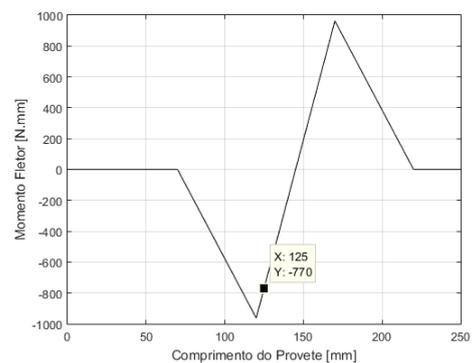


Figura 166 - Diagrama do momento fletor para um carregamento em modo misto.

## **A.6 – Ensaio experimentais de flexão em 3 pontos**

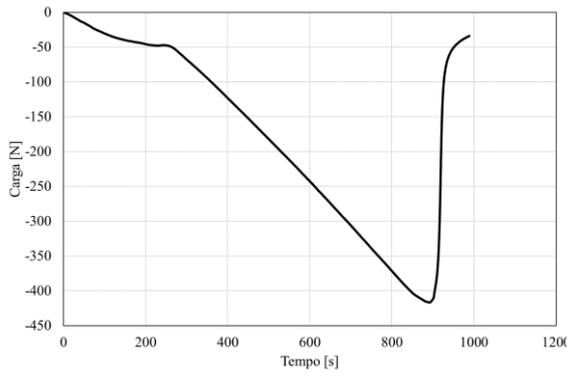


Figura 167 – Carga aplicada ao longo do tempo, provete 3PB-1.

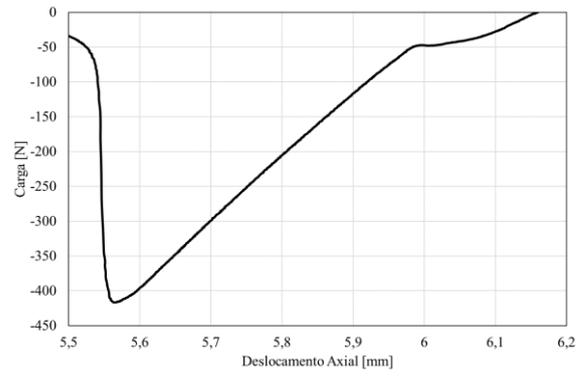


Figura 170 - Carga vs deslocamento axial, provete 3PB-1.

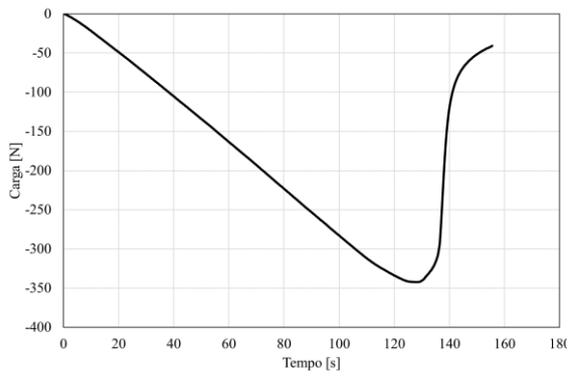


Figura 168 - Carga aplicada ao longo do tempo, provete 3PB-2.

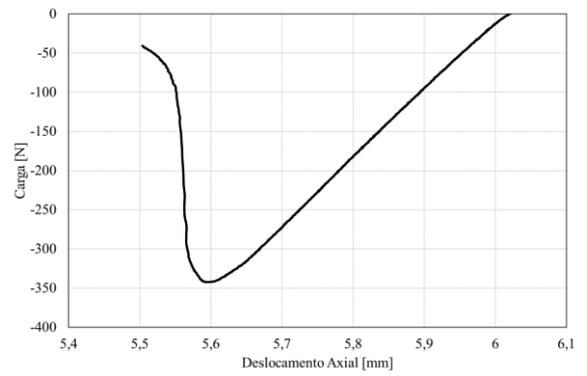


Figura 171 - Carga vs deslocamento axial, provete 3PB-2.

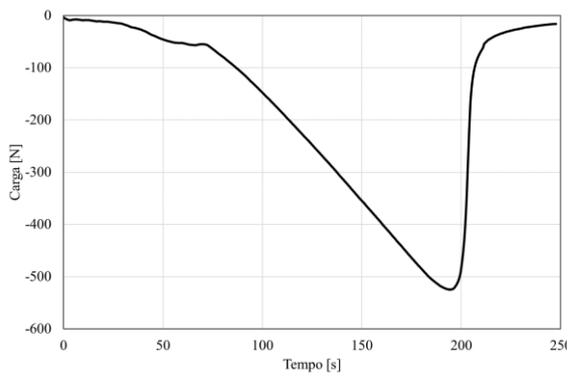


Figura 169 - Carga aplicada ao longo do tempo, provete 3PB-3.

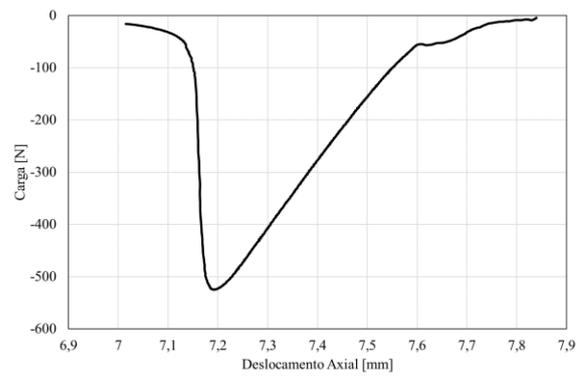


Figura 172 - Carga vs deslocamento axial, provete 3PB-3.

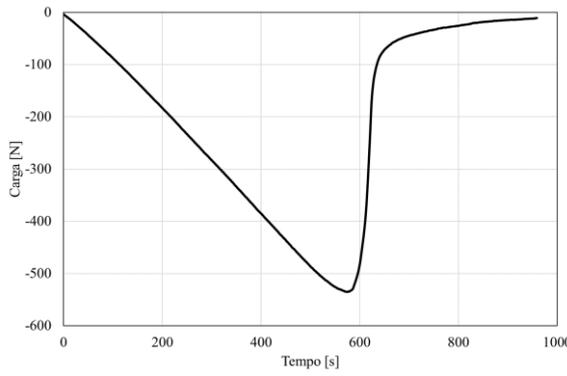


Figura 173 - Carga aplicada da carga ao longo do tempo, provete 3PB-4.

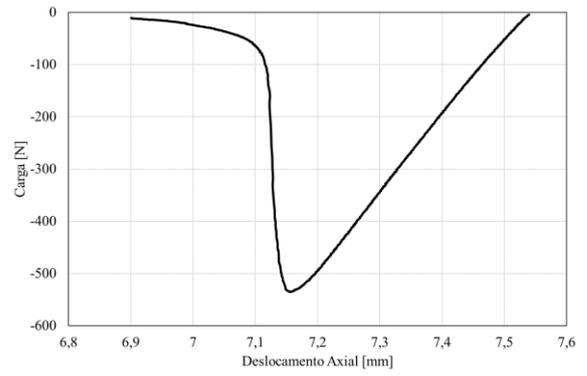


Figura 174 - Carga vs deslocamento axial, provete 3PB-4.

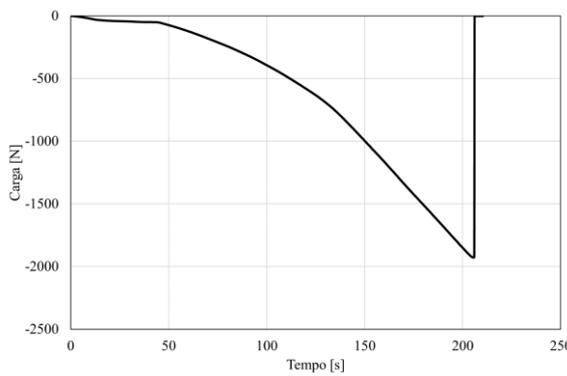


Figura 175 - Carga aplicada ao longo do tempo, provete 3PB-9.

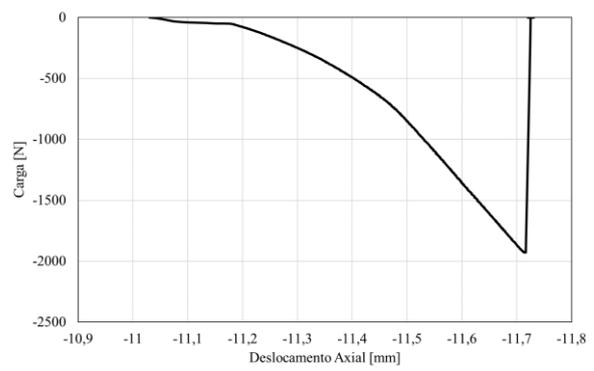


Figura 177 - Carga vs deslocamento axial, provete 3PB-9.

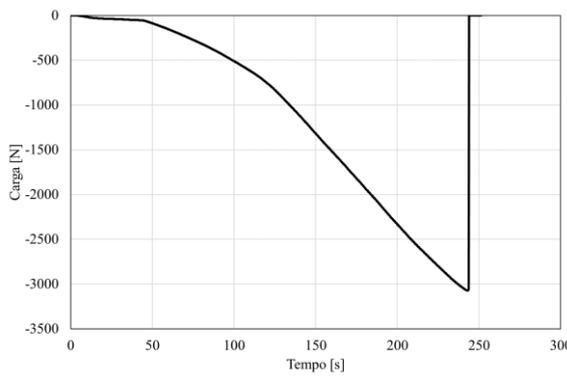


Figura 176 - Carga aplicada ao longo do tempo, provete 3PB-10.

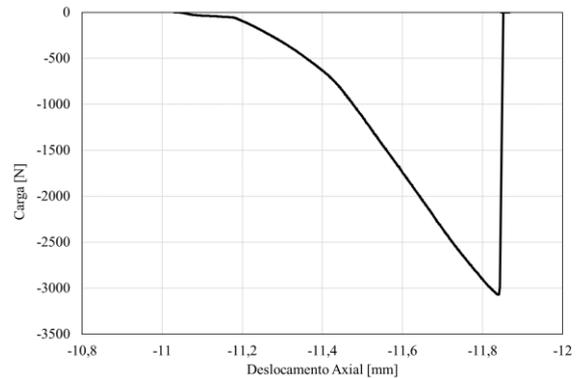


Figura 178 - Carga vs deslocamento axial, provete 3PB-10.

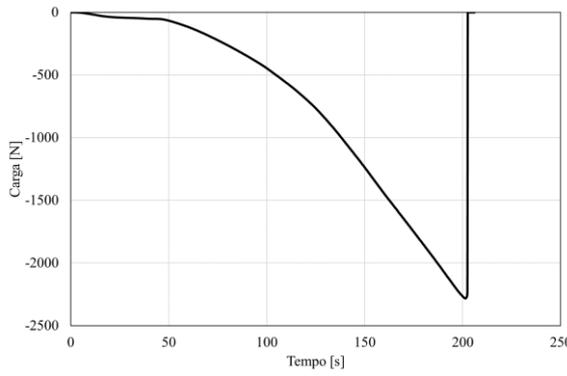


Figura 179 - Carga aplicada ao longo do tempo, provete 3PB-5.

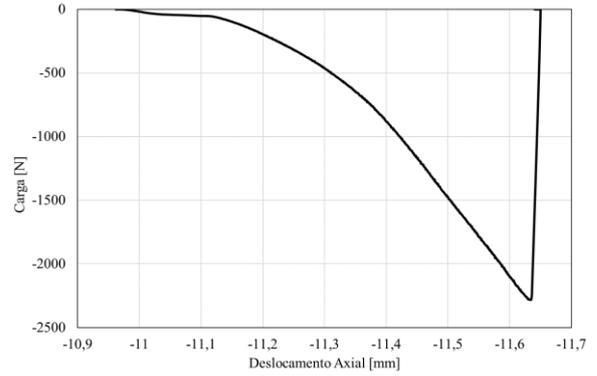


Figura 182 - Carga vs deslocamento axial, provete 3PB-5.

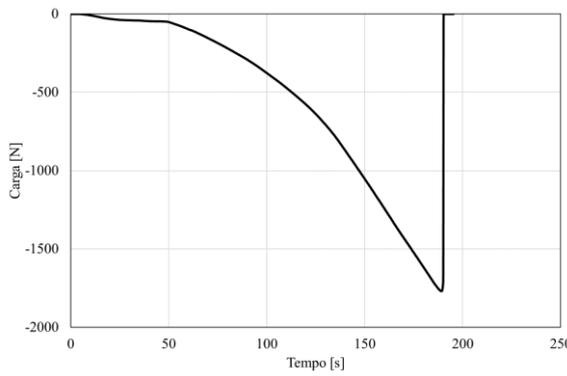


Figura 180 - Carga aplicada ao longo do tempo, provete 3PB-6.

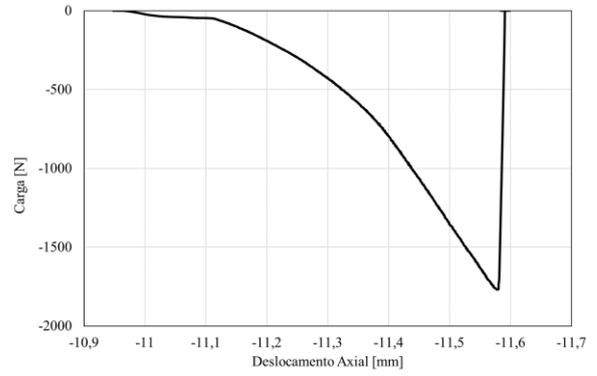


Figura 183 - Carga vs deslocamento axial, provete 3PB-6.

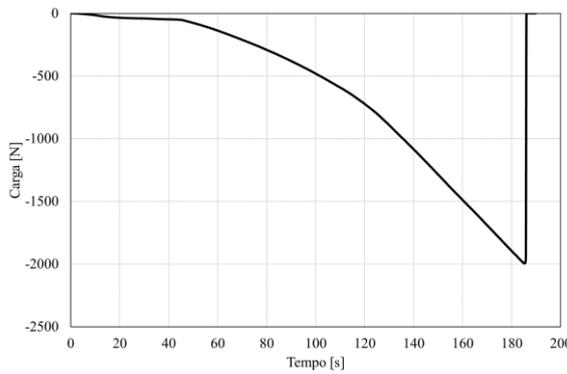


Figura 181 - Carga aplicada ao longo do tempo, provete 3PB-7.

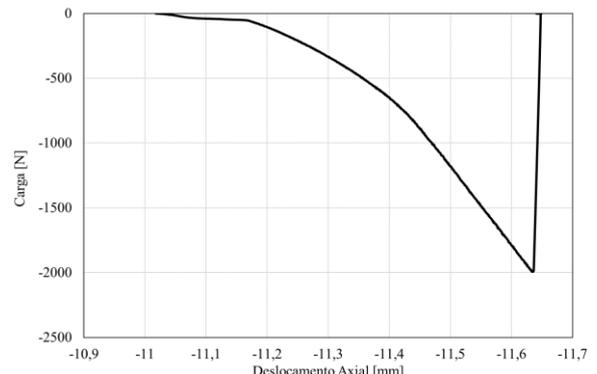


Figura 184 - Carga vs deslocamento axial, provete 3PB-7.