



**DEPARTAMENTO DE**  
**ENGENHARIA ELECTROTÉCNICA E DE COMPUTADORES**

**FACULDADE DE ENGENHARIA**  
**UNIVERSIDADE DO PORTO**

**Rua dos Bragas, 4099 Porto Codex - PORTUGAL**

GABRIELA MARIA ARAÚJO DA CRUZ GONÇALVES

**ESTABILIDADE ROBUSTA  
ESTRUTURADA**

**FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO**

1994

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto  
Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores

## ESTABILIDADE ROBUSTA ESTRUTURADA

Gabriela Maria Araújo da Cruz Gonçalves

UNIVERSIDADE DO PORTO
Faculdade de Engenharia
BIBLIOTECA 14
N.º 20553 - of.
CDU
Data 23 5 90

U.W. 34711

Dissertação submetida para provas  
de Mestrado em Engenharia  
Electrotécnica e de Computadores  
Porto, 1994

043M  
G626e  
EX 2

ao Joaquim José

## Agradecimentos

Ao meu orientador científico, Prof. Doutor J. L. Martins de Carvalho, desejo expressar o meu agradecimento sincero, pelo apoio e disponibilidade manifestados no desenvolvimento do trabalho apresentado.

# Índice

<b>1. Introdução</b>	2
----------------------	---

## **2. Bases Matemáticas**

2.1. Introdução	4
2.2. Parâmetros Incertos	4
2.3. Estruturas Incertas	5
2.4. Caixas Limitadas	7
2.5. Pontos Extremos	7
2.6. Polítopos	8
2.7. Famílias de polinómios Intervalares e Polítopos de Polinómios	9
2.8. Estabilidade - $\mathcal{D}$ Robusta	10
2.9. Monicidade, Fracções Próprias e Grau Invariante	10
2.10. Hiperplano	11
2.11. Conjuntos Convexos	12
2.12. Envolverte Convexa	13
2.13. "Affine Hull"	14
2.14. Arestas Expostas e Faces Expostas	15
2.15. Conjuntos Expostos	15
2.16. Espaço Raíz	16

### **3. Estabilidade Robusta de Famílias de Polinómios**

3.1. Estabilidade Robusta	18
3.2. Teorema de Kharitonov	
3.2.1. Introdução	18
3.2.2. Notação	19
3.2.3. Propriedades dos polinómios de Hurwitz	21
3.2.4. Teorema de Kharitonov	22
3.3. Teorema da Aresta	
3.3.1. Introdução	23
3.3.2. Teorema da Aresta (Bartlett e colaboradores (1988))	26
3.3.3. Exemplo ilustrativo da utilidade dos resultados	28

### **4. Aplicação dos Resultados aos Sistemas de Controlo**

4.1. Apresentação do sistema de controlo	
4.1.1. Introdução	31
4.1.2. Sistema de controlo realimentado	31
4.2. Lema	32
4.3. "Teorema das 16 plantas"	
4.3.1. Introdução	33
4.3.2. Plantas Intervalares com Compensadores de 1ª ordem	
4.3.2.1. Introdução	34
4.3.2.2. Notação e Definições	35
4.3.2.3. Exemplo Numérico	38

## **5. Análise de um caso especial**

5.1. Introdução	43
5.2. Apresentação do problema	43
5.3. Formulação de Problemas Racionais e Polinomiais	47

## **6. Generalizações e desenvolvimentos futuros**

6.1. Direcções Convexas	
6.1.1. Introdução	51
6.1.2. Direcção Convexa	51
6.1.3. Definição de AHMC (Condição dos Complementos Algébricos de Hurwitz)	55
6.2. Domínio dos Tempos	60

## **Anexo**

Lista de símbolos especiais usados neste trabalho	62
---	----

<b>Bibliografia</b>	<b>63</b>
---------------------	-----------

# **1. INTRODUÇÃO**

## 1. Introdução

O objectivo deste trabalho centra-se fundamentalmente na análise da estabilidade de sistemas de controlo realimentados na presença de parâmetros incertos tendo como base o trabalho pioneiro de Kharitonov sobre pontos extremos para desempenho e estabilidade robusta. A partir desses resultados foi possível mostrar que um conjunto de sistemas satisfaz essas propriedades desde que estes se verifiquem num certo número (finito) de elementos extremos dessa classe. A maioria dos resultados respeita a sistemas realimentados com incerteza estruturada nomeadamente estruturas de incerteza independentes. Quando a estrutura de incerteza é apenas linear afim uma outra linha de abordagem deste problema, e também motivada pelo trabalho de Kharitonov foi desenvolvida pelo trabalho de Bartlett e colaboradores a partir do célebre teorema da aresta. Neste caso a verificação das propriedades tem de ser feita também ao longo de arestas e não apenas nos vértices. Apesar destes constituírem um conjunto de pontos não numeráveis de dimensão 1, o teorema de Bartlett representa uma economia significativa em relação a uma busca exaustiva para todos os valores possíveis dos parâmetros.

Este trabalho está estruturado da seguinte forma :

No Capítulo 2, introduzem-se conceitos e definições necessárias à compreensão deste trabalho. No Capítulo 3, estuda-se a estabilidade robusta de famílias de polinómios através dos teoremas de Kharitonov e da aresta, mostrando numericamente a utilidade destes resultados. No Capítulo 4, aplicam-se os resultados anteriores ao caso dos sistemas de controlo realimentados. No Capítulo 5, analisa-se uma formulação especial para o caso de um número elevado de parâmetros incertos e finalmente no Capítulo 6, apresentam-se alguns desenvolvimentos recentes e tendências actuais de investigação neste campo.

## **2. BASES MATEMÁTICAS**

## 2. Bases Matemáticas

### 2.1. Introdução

Começamos por introduzir alguns conceitos e apresentar algumas definições necessárias à compreensão deste trabalho :

- **Parâmetros Incertos**
- **Estruturas Incertas**
- **Caixas Limitadas**
- **Pontos Extremos**
- **Polítopos**
- **Famílias de Polinómios Intervalares e Polítopos de Polinómios**
- **Monicidade, Fracções próprias e Grau Invariante**
- **Estabilidade -  $\mathcal{D}$  Robusta**
- **Hiperplano**
- **Conjuntos Convexos**
- **Envolvente Convexa**
- **"Affine Hull"**
- **Arestas Expostas e Faces Expostas**
- **Conjunto Exposto**
- **Espaço Raiz**

### 2.2. Pârametros Incertos

Um vector de parâmetros incertos é um vector do tipo  $q = [q_1, q_2, \dots, q_l]^T \in Q$ , em que  $Q$  representa uma caixa de dimensão  $l$ .

### 2.3. Estruturas Incertas

Usamos a notação  $P(s)$  para descrever a planta e a notação  $P(s,q)$  para salientar a dependência dos coeficientes da planta do vector de parâmetros incertos  $q$ ; escrevemos

$$P(s,q) = \frac{N(s,q)}{D(s,q)} \quad (2.1)$$

onde  $N(s,q)$  e  $D(s,q)$  são *polinómios incertos*. Isto é, cada polinómio tem coeficientes que são funções de  $q$ .

Para descrever um *polinómio incerto*, é conveniente escrever

$$p(s,q) = \sum_{i=0}^n a_i(q) s^i \quad (2.2)$$

Diz-se que um polinómio tem *estrutura incerta linear afim* se  $a_i(q)$  é uma *função linear afim* para  $i=0, 1, 2, \dots, n$ , isto é, uma função linear mais uma constante.

Exemplo de uma Função Linear Afim para  $l=3$  :

$$a_i(q) = 4q_1 + 6q_2 - 7q_3 + 5 \quad (2.3)$$

Uma *planta incerta*  $P(s,q)$  tem estrutura incerta linear afim se o numerador  $N(s,q)$  e o denominador  $D(s,q)$  têm estruturas lineares afins.

Um **caso particular** de uma estrutura incerta linear afim é estrutura incerta independente.

Neste caso, cada componente,  $q_i$ , de  $q$  só aparece num coeficiente. Por exemplo, o *polinómio incerto*

$$p(s, q) = s^3 + (4 + q_1 + 6q_2)s^2 + (7 + q_3 + 2q_4)s + (5 + q_5) \quad (2.4)$$

tem estruturas incertas independentes.

Quando lidamos com *estruturas incertas independentes*, agrupamos a incerteza, simplificando-a da seguinte forma

$$p(s, q) = \sum_{i=0}^n q_i s^i \quad (2.5)$$

Nota: Neste caso permitimos uma componente  $q_0$  de  $q$ .

No caso de *funções racionais*, diz-se que a planta  $P(s, q)$  tem estrutura incerta independente se o numerador  $N(s, q)$  e o denominador  $D(s, q)$  têm estruturas incertas independentes e, além disso, nenhum parâmetro incerto que entre no numerador entra no denominador e vice versa.

Para salientar o desacoplamento de incerteza entre o numerador e o denominador, introduzimos um segundo vector de parâmetros incertos  $r \in \mathbb{R}^{n+1}$  e escrevemos

$$P(s, q, r) = \frac{N(s, q)}{D(s, r)} = \frac{\sum_{i=0}^n q_i s^i}{\sum_{i=0}^n r_i s^i} \quad (2.6)$$

O polinómio incerto

$$P(s, q) = \sum_{i=0}^n a_i(q) s^i \quad (2.7)$$

tem *estrutura incerta multilinear* se  $a_i(q)$  é uma *função multilinear afim* para  $i= 0, 1, 2, \dots, n$ , isto é, se fixarmos todos excepto um dos componentes  $q_k$  de  $q$ , então  $a_i(q)$  é afim linear em  $q_k$ .

Exemplo de uma Função de Coeficientes Afim Multilinear :

$$a_i(q) = 5q_1q_2q_3 + 2q_2 - 6q_3 + 4q_2q_3 + 5 \quad (2.8)$$

## 2.4. Caixas Limitadas

Os vectores de parâmetros incertos  $q$  e  $r$  pertencem a caixas multidimensionais  $Q$  e  $R$  respectivamente.

A descrição da caixa é motivada por aplicações nas quais cada componente do vector de parâmetros incertos é conhecido dentro de dados limites. Para descrever as caixas, assumimos os limites dos componentes

$$q_i^- \leq q_i \leq q_i^+ \quad (2.9a)$$

$$r_i^- \leq r_i \leq r_i^+ \quad (2.9b)$$

## 2.5. Pontos Extremos

Usamos a notação  $q^i$  e  $r^i$  para designar os  $i$ -ésimos pontos extremos de  $Q$  e  $R$ , respectivamente. Associado com qualquer ponto extremo dos conjuntos limitados incertos temos um polinómio ou planta.

Por exemplo, se  $q^i$  é um ponto extremo de  $Q$ , então

$$p(s, q^i) = \sum_{j=0}^n a_j(q^i) s^j \quad (2.10)$$

é o *polinómio extremo associado*. Analogamente, se  $(q^{i_1}, r^{i_2})$  é um par de pontos extremos para  $Q \times R$  então  $P(s, q^{i_1}, r^{i_2})$  é a *planta extrema associada*.

## 2.6. Polítopos

Um polítopo é uma envolvente convexa de um número finito de pontos.

Exemplos :

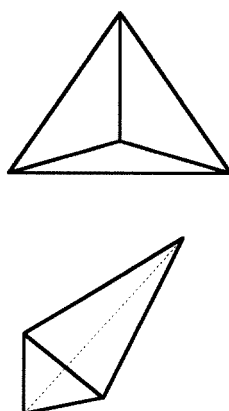


Fig 2.1. Polítopos

## 2.7. Famílias de Polinómios Intervalares e Polítopos de Polinómios

Se  $p(s,q)$  é um polinómio incerto tendo uma estrutura incerta, então referimo-nos ao conjunto

$$\mathcal{P} = \{P(\cdot, q) : q \in Q\} \quad (2.11)$$

como uma *familia polinomial intervalar*. Por conveniência usamos a notação

$$p(s, q) = \sum_{i=0}^n [q_i^-, q_i^+] s^i \quad (2.12)$$

Designaremos por  $P(s,q,r)$  a planta com estruturas incertas independentes, e denominamos

$$\mathcal{P} = \{P(\cdot, q, r) : q \in Q; r \in R\} \quad (2.13)$$

*familia de plantas intervalares* .

Se um polinómio incerto  $p(s,q)$  tem *estrutura incerta linear afim*, então o conjunto de coeficientes associado

$$a(Q) = \{a_0(q), a_1(q), \dots, a_n(q) : q \in Q\} \quad (2.14)$$

é um *polítopo* em  $R^{n+1}$ .

Através destes argumentos padronizados da análise convexa, podemos expressar  $a(Q)$  como a envolvente convexa dos geradores  $a(q^j)$  ; isto é,

$$a(Q) = \text{conv}\{a(q^j)\} \quad (2.15)$$

Consequentemente criamos uma correspondência biunívoca entre polítopos em  $R^{n+1}$  e famílias de polinómios com estruturas incertas lineares afins.

Nota : Todos os polinómios da família

$$\mathcal{P} = \{P(\cdot, q) : q \in Q\} \quad (2.16)$$

podem ser expressos como uma combinação convexa de  $p(s, q^i)$ , isto é,

$$\mathcal{P} = \text{conv}\{P(s, q^i)\} \quad (2.17)$$

Através destas justificações podemos concluir que a família  $\mathcal{P}$  é um polítopo de polinómios.

## 2.8. Estabilidade - $\mathcal{D}$ Robusta

Seja  $\mathcal{P} = \{p(\cdot, q) : q \in Q\}$  uma família de polinómios e  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$  a região aberta da localização desejável para as raízes dos polinómios; diz-se que  $\mathcal{P}$  é  $\mathcal{D}$  - estável robustamente se, para cada  $q \in Q$ ,  $p(s, q)$  tem todas as suas raízes em  $\mathcal{D}$ .

## 2.9. Monicidade, Fracções Próprias e Grau Invariante

No problema da análise robusta, há que recorrer a algumas subtilidades quando um polinómio incerto

$$p(s, q) = \sum_{i=0}^n a_i(q) s^i \quad (2.18)$$

diminui de grau, isto quando  $a_n(q) = 0$  para um valor admissível de  $q$ . No nosso trabalho vamos admitir que o polinómio denominador não baixa de grau; para tal apenas iremos considerar plantas cujo polinómio denominador é mónico.

## 2.10. Hiperplano

Um **hiperplano H** é um conjunto que pode ser definido como :

$$H = \{x \in R^d \mid \langle x, y \rangle = \alpha\} \quad (2.19)$$

para um dado  $y$ , onde

$$y \in R^d, y \neq 0,$$

$R^d$  é o espaço Euclidiano Real

$x, y$  são pontos simples de  $R^d$

$\alpha$  é um número real.

Qualquer **semi-espaço aberto** é definido do seguinte modo :

$$\{x \in R^d \mid \langle x, y \rangle > \alpha\} \quad (2.20)$$

para um dado  $y$ , onde  $y \in R^d, y \neq 0$  para valores convenientes de  $\alpha$ .

Logo,  $\{x \in R^d \mid \langle x, y \rangle < \alpha\}$  é também um semi-espaço para qualquer  $y \neq 0$ , acontecendo o mesmo para semi-espaços fechados. Qualquer hiperplano que contenha a origem é um subespaço de dimensão  $(d-1)$ .

Para cada **hiperplano H que não contenha a origem**, existe uma representação única:

$$H = \{x \in R^d \mid \langle x, u \rangle = \alpha\} \quad (2.21)$$

em que  $u$  é um vector único e  $\alpha > 0$ .

### 2.11. Conjuntos Convexos

Um conjunto convexo  $K \subset R^d$  é convexo se e só se para cada par de pontos distintos  $a, b \in K$  o segmento que os une estiver contido em  $K$ .

Usando a notação vectorial, a definição de convexidade pode ser reformulada da seguinte forma :

$K$  é convexo se e só se

$$a, b \in K \text{ e } 0 \leq \lambda \leq 1 \Rightarrow \lambda a + (1 - \lambda)b \in K \quad (2.22)$$

onde

$\lambda$  é um número real

Exemplo :

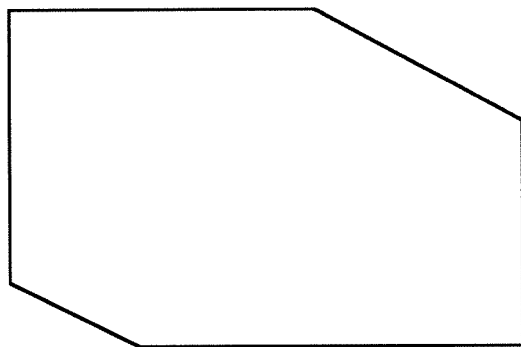


Fig 2.2. Conjunto convexo

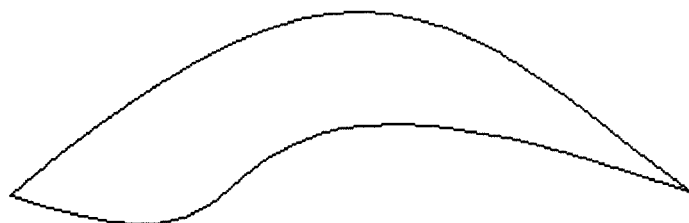


Fig 2.3. Conjunto não convexo

## 2.12. Envoltente Convexa

O espaço  $\mathbb{R}^d$  é convexo e a intersecção de uma qualquer família numerável ou não de conjuntos convexos é também convexa.

### 2.13. "Affine Hull"

O conjunto de todas as combinações afins de dois pontos diferentes  $x, y \in \mathbb{R}^d$  é a linha

$$L(x, y) = \{(1 - \lambda)x + \lambda y \mid \lambda \text{ real}\}. \quad (2.23)$$

Se

$$x', y' \in L(x, y) \quad (2.24a)$$

e

$$x' \neq y' \quad (2.24b)$$

então

$$L(x', y') = L(x, y) \quad (2.24c)$$

Chama-se  $H$  "*flat*" (ou variedade afim), ao conjunto  $H$  que tem a propriedade  $L(x, y) \subset H$ , sempre que  $x, y \in H$  e  $x \neq y$ .

O conjunto de todas as combinações afins formado a partir de subconjuntos finitos de um dado conjunto  $A$ , é um "*flat*" (subespaço); é designado por  $\text{aff } A$  e chamado de "*affine hull*" (linear hull) de  $A$ .

O "*affine hull*"  $\text{aff } A$  do conjunto  $A$  pode ser definido equivalentemente como a intersecção de todos os "*flats*" que contêm  $A$ . A formação de "*affine hulls*" é uma invariante à translação, isto é,

$$\text{aff}(x + A) = x + \text{aff } A \quad (2.25)$$

## 2.14. Arestas Expostas e Faces Expostas

**Arestas expostas** são conjuntos expostos de dimensão um.

**Faces expostas** são conjuntos expostos de dimensão  $(d-1)$ , e pode ser definida do seguinte modo:

Seja  $K$  um subconjunto convexo de  $R^d$  ;

O conjunto  $F \subset K$  é **face** de  $K$ , se  $F = \emptyset$ ,  $F=K$  ou se existe um hiperplano de suporte  $H$  de  $K$  tal que  $F = K \cap H$ .

O conjunto vazio  $\emptyset$  e  $K$  são chamados de **faces impróprias** de  $K$ . O conjunto de todas as faces de  $K$  é designado por  $F(K)$ .

## 2.15. Conjuntos Expostos

Seja,  $\mathcal{P}$  a representação de uma família de polinómios no espaço dos coeficientes.

**Conjuntos expostos** são conjuntos da forma  $\mathcal{P} \cap H$  onde  $H$  não é um hiperplano de suporte trivial.

A figura 2.4 mostra conjuntos expostos e não expostos, onde

CD é uma aresta exposta

AC é uma aresta não exposta

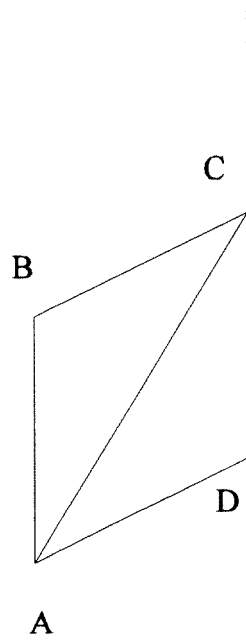


Fig 2.4. Conjuntos expostos e não expostos

## 2.16. Espaço Raiz

Considerar um  $W \subset \mathcal{P}$ . Então  $R(W) \subset \mathbf{C}$  é o espaço raiz (de  $W$ )

$$R(W) = \{s: f(s) = 0, f \in W\},$$

onde,

$$f(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n .$$

### **3. ESTABILIDADE ROBUSTA DE FAMÍLIAS DE POLINÓMIOS**

### 3. Estabilidade Robusta de Famílias de Polinómios

#### 3.1. Estabilidade Robusta

Um polinómio  $p(s)$  é estável se todas as suas raízes estão contidas no semi-plano esquerdo. Dada uma família de polinómios

$$\mathcal{P} = \{p(\cdot, q) : q \in Q\}, \quad (3.1)$$

diz-se que  $\mathcal{P}$  é **estável robustamente** se todos os polinómios de  $\mathcal{P}$  são estáveis. Se todos os polinómios de  $\mathcal{P}$  têm o mesmo grau, então diz-se que  $\mathcal{P}$  tem grau invariante, isto é, se

$$p(s, q) = \sum_{i=0}^n a_i(q) s^i, \quad (3.2)$$

então,  $\mathcal{P}$  tem grau invariante se e só se  $a_n(q) \neq 0$  para todos  $q \in Q$ .

#### 3.2 Teorema de Kharitonov

##### 3.2.1. Introdução

O Teorema de Kharitonov é um resultado sobre estabilidade de classes de polinómios definidos por coeficientes variando de forma independente em intervalos dados. O resultado afirma que essa classe é Hurwitz se e só se 4 polinómios especiais, a definir, são Hurwitz.

### 3.2.2. Notação

Um polinómio com coeficientes reais diz-se ser Hurwitz se e só se todos os seus zeros estão contidos no semi-plano esquerdo do plano complexo  $\mathbf{C}$  isto é,  $\forall z \in \mathbf{C}, p(z) = 0 \Rightarrow \text{Re}\{z\} < 0$ . O conjunto dos polinómios diz-se ser de Hurwitz se e só se todos os membros são Hurwitz.

Seja  $n \geq 1$  e  $q^-, q^+ \in \mathbf{R}^n, q_i^- \leq q_i^+, i = 0, \dots, n-1$ . Define-se o conjunto  $N$  como sendo o conjunto mónico de polinómios de grau  $n$  da forma

$$p(s) = s^n + q_{n-1} s^{n-1} + \dots + q_0 \quad (3.3)$$

para todos  $q_0, \dots, q_{n-1}$  tal que  $q_i^- \leq q_i \leq q_i^+, i = 0, \dots, n-1$ . Então para todo o  $\omega \in \mathbf{R}$  define-se  $H(\omega) = \{p(j\omega) : p \in N\} \subset \mathbf{C}$ , isto é,  $H(\omega)$  é a imagem por  $N$  do ponto  $j\omega$ .

A seguir definem-se os polinómios (onde  $q_i^- = q_i^+ = 1$ )

$$g_1(s) = q_0^- + q_2^+ s^2 + q_4^- s^4 \dots = \sum_{i=0, \text{par}}^n j^i \cdot \min\{j^i q_i^-, j^i q_i^+\} \cdot s^i \quad (3.4a)$$

$$g_2(s) = q_0^+ + q_2^- s^2 + q_4^+ s^4 \dots = \sum_{i=0, \text{par}}^n j^i \cdot \max\{j^i q_i^-, j^i q_i^+\} \cdot s^i \quad (3.4b)$$

$$h_1(s) = q_1^- s + q_3^+ s^3 + q_5^- s^5 \dots = \sum_{i=1, \text{impar}}^n j^{i-1} \cdot \min\{j^{i-1} q_i^-, j^{i-1} q_i^+\} \cdot s^i \quad (3.4c)$$

$$h_2(s) = q_1^+ s + q_3^- s^3 + q_5^+ s^5 \dots = \sum_{i=1, \text{impar}}^n j^{i-1} \cdot \max\{j^{i-1} q_i^-, j^{i-1} q_i^+\} \cdot s^i \quad (3.4d)$$

Finalmente, definimos os polinómios de Kharitonov

$$K_{i,l}(s) = g_i(s) + h_l(s) \quad i, l = 1, 2. \quad (3.5)$$

Exemplo :

Se

$$p(s, q) = s^6 + [0,54; 2,26]s^5 + [0,55; 2,25]s^4 + [1; 3]s^3 + [3,75; 4,25]s^2 + [9,75; 11,25]s + [0,57; 13,25] \quad (3.6a)$$

então os polinômios de Kharitonov são :

$$K_1(s) = s^6 + 2,26s^5 + 2,25s^4 + s^3 + 3,75s^2 + 11,25s + 13,25; \quad (3.6b)$$

$$K_2(s) = s^6 + 0,54s^5 + 0,55s^4 + 3s^3 + 4,25s^2 + 8,75s + 0,57; \quad (3.6c)$$

$$K_3(s) = s^6 + 2,26s^5 + 0,55s^4 + s^3 + 4,25s^2 + 11,25s + 0,57; \quad (3.6d)$$

$$K_4(s) = s^6 + 0,54s^5 + 2,25s^4 + 3s^3 + 3,75s^2 + 9,75s + 13,25; \quad (3.6e)$$

É conveniente usar-se  $K_1(j\omega), K_2(j\omega), K_3(j\omega), K_4(j\omega)$  em vez de

$$K_{11}(j\omega), K_{12}(j\omega), K_{21}(j\omega), K_{22}(j\omega).$$

Nota:  $\{K_1(\cdot), K_2(\cdot), K_3(\cdot), K_4(\cdot)\} \subset N$ ,  $\forall \omega \in R$ ,  $g_1(j\omega)$  e  $g_2(j\omega)$  são números reais puros enquanto que  $h_1(j\omega)$  e  $h_2(j\omega)$  são imaginários puros. Por outro lado, para  $\forall \omega \geq 0$ , têm-se

$$Re\{g_1(j\omega)\} \leq Re\{p(j\omega)\} \leq Re\{g_2(j\omega)\} \quad \forall p(\cdot) \in N \quad (3.7a)$$

$$Im\{h_1(j\omega)\} \leq Im\{p(j\omega)\} \leq Im\{h_2(j\omega)\} \quad \forall p(\cdot) \in N \quad (3.7b)$$

e para  $\omega \leq 0$  trocamos  $h_1$  e  $h_2$  em (3.7b). Assim, vê-se que  $\forall \omega \in R$ ,  $H(\omega)$  é um rectângulo de nível (isto é, os lados são paralelos ao eixo real e ao eixo imaginário) com vértices  $K_1(j\omega), K_2(j\omega), K_3(j\omega), K_4(j\omega)$ , como se pode ver na fig.3.1.

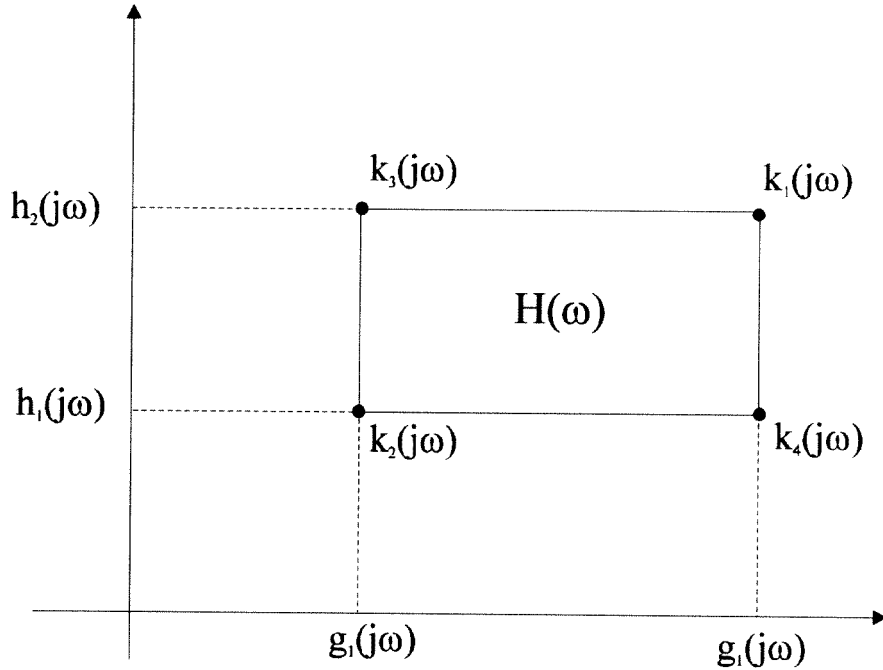


Fig. 3.1. Imagem do rectângulo de  $N$  em  $s = j\omega$  ( $\omega > 0$ ).

### 3.2.3. Propriedades dos polinómios de Hurwitz

*Propriedade I* - Se um polinómio mónico  $p(\cdot)$  é Hurwitz, então todos os seus coeficientes são positivos.

*Propriedade II* - Se  $p(\cdot)$  é Hurwitz com grau  $n \geq 1$ , então  $\arg(p(j\omega))$  é uma função crescente e contínua de  $\omega$ .

*Propriedade III* - Qualquer polinômio  $p(\cdot)$  de grau  $n$  é Hurwitz se e só se  $\arg(p)$  é bem definido, isto é,  $p(j\omega) \neq 0 \forall \omega$  e igual a  $n\pi/2$ .

### 3.2.4. Teorema de Kharitonov

*Lema:* Se os polinômios de Kharitonov  $\{K_1(\cdot), K_2(\cdot), K_3(\cdot), K_4(\cdot)\}$  são Hurwitz, então  $0 \notin H(\omega) \forall \omega \in R$ .

*Demonstração:*

Para os polinômios  $\{K_1(\cdot), K_2(\cdot), K_3(\cdot), K_4(\cdot)\}$  serem de Hurwitz têm que ter o coeficiente  $q_i^- > 0 \forall i$  (*Propriedade I*),  $0 \notin H(\omega) = [q_i^-, q_i^+]$ . Se  $H(\cdot)$  é "contínuo", isto é, os 4 vértices variam continuamente com  $\omega$ , e  $0 \in H(\omega)$  para algum  $\omega > 0$ , então 0 deve estar sobre o limite de  $H(\hat{\omega})$  para algum  $\hat{\omega} \in [0, \omega]$ . Como nenhum vértice passa por zero (os vértices são Hurwitz), tem que se ter uma aresta que contenha o zero no seu interior, a esta aresta chamamos de aresta "inferior".

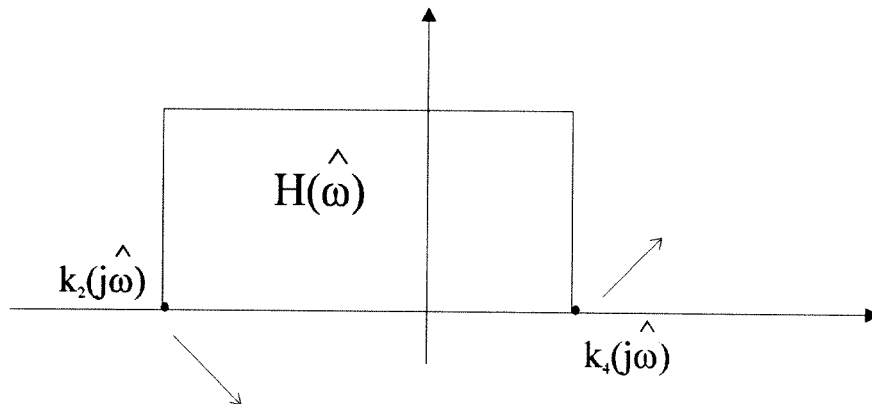


Fig. 3.2. Razão pela qual a origem não pode pertencer  $H(\omega)$ .

Através da figura 3.2. vê-se que  $K_2(j\hat{\omega})$  está sobre o eixo real negativo e  $K_4(j\hat{\omega})$  está sobre o eixo real positivo.

A *Propriedade II* implica que para  $\delta\omega > 0$  suficientemente pequeno, o vértice  $K_2(j(\omega+\hat{\delta}\omega))$  se encontra no 3º quadrante e o vértice  $K_4(j(\omega+\hat{\delta}\omega))$  no 4º quadrante.

Teorema de Kharitonov : A classe de polinómios  $N$  é Hurwitz se e só se os polinómios de Kharitonov  $\{K_1(\cdot), K_2(\cdot), K_3(\cdot), K_4(\cdot)\}$  são Hurwitz.

*Demonstração* :

A condição necessária é imediata uma vez que

$$\{K_1(\cdot), K_2(\cdot), K_3(\cdot), K_4(\cdot)\} \subset N. \quad (3.8)$$

Supondo que os polinómios de Kharitonov  $\{K_1(\cdot), K_2(\cdot), K_3(\cdot), K_4(\cdot)\}$  são Hurwitz e  $p(\cdot) \in N$ , o lema implica que  $p(j\omega) \neq 0 \forall \omega$ , então o  $arg_{descrito}(p)$  é bem definido. Por outro lado,  $p(j\omega) \in H(\omega) \forall \omega$ , então  $arg_{descrito}(p) = n\pi/2$ . A *Propriedade III* implica que  $p(\cdot)$  tem  $n$  zeros em  $\mathbb{C}$  e é Hurwitz.

### 3.3. Teorema da Aresta

#### 3.3.1. Introdução

A presença de parâmetros incertos quer nos modelos de estado quer na representação no domínio das frequências, sistemas lineares de parâmetros constantes (que passemos a designar por sistemas invariantes) traduzem-se na incerteza dos coeficientes do

polinómio característico. Se a família de todos os polinómios é um polítopo no espaço dos coeficientes, mostra-se que a localização das raízes de uma família completa, pode ser determinada examinando apenas as raízes dos polinómios contidos nas arestas expostas do polítopo. Para mostrar como a existência de alguns resultados podem ser conservativos, evoca-se o resultado do teorema de Kharitonov :

Se uma família polinomial (gerada por sistemas de tempo contínuo) é constituída por polinómios intervalares, isto é, se uma família é um hiper-rectângulo no espaço dos coeficientes com arestas paralelas aos eixos coordenados, então a estabilidade para os 4 polinómios de Kharitonov  $\{K_1(s), K_2(s), K_3(s), K_4(s)\}$  (secção 3.2) é necessária e suficiente para a estabilidade da totalidade do rectângulo. Kharitonov teve sucesso na redução da carga computacional requerida para determinar a estabilidade de algumas famílias polinomiais, contudo, se a família polinomial não é do tipo intervalar, então o resultado de Kharitonov pode não dar condições necessárias.

Por exemplo:

Considerar o caso em que a família polinomial é um segmento de recta oblíquo no espaço dos coeficientes. Para usar o resultado de Kharitonov, envolve-se o segmento num rectângulo (fig. 3.3) e aplica-se depois o teste de estabilidade aos vértices.

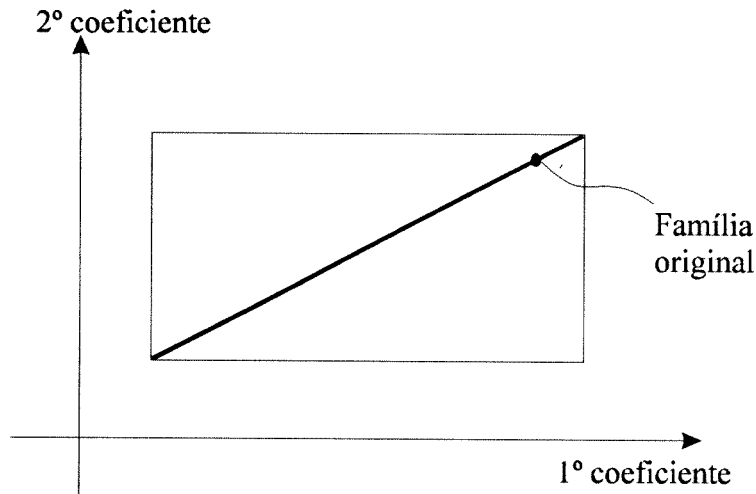


Fig.3.3. Envolvimento do conjunto de incerteza (segmento de recta) por um rectângulo de Kharitonov.

Se o teste falhar nada se pode concluir acerca da família original, a sobrelimitação não nos permite agora tirar partido da estrutura de incerteza inicial. Para remover o conservadorismo imposto por se usar polinómios intervalares, esta secção vai focar famílias de polinómios que são polítopos no espaço dos coeficientes. Por exemplo, essas famílias (politópicas) descrevem o caso em que os coeficientes polinomiais dependem linearmente de parâmetros incertos, e quando esses parâmetros são fronteira do conjunto de polítopos. De facto, este é muitas vezes o caso de polinómios característicos em malha fechada de sistemas realimentados nos quais a função de transferência da planta tem coeficientes incertos (fig. 3.4).

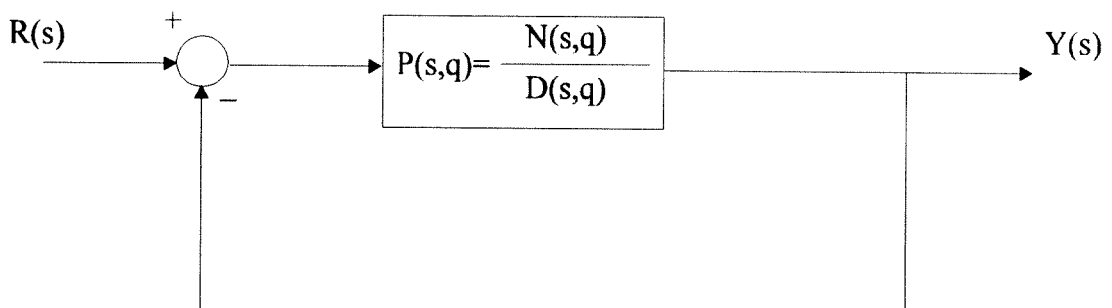


Fig. 3.4. Sistema em malha fechada.

O objectivo é mostrar que se uma família é um polítopo, então a localização de raízes dos polinómios contidos nas arestas expostas do polítopo determinam completamente as raízes de cada membro da família polinomial. Isto fornece, o seguinte resultado :

*Um polítopo é estável se e só se as arestas expostas são estáveis.*

### 3.3.2. Teorema da Aresta (Bartlett e colaboradores (1988))

Para problemas de estabilidade- $\mathcal{D}$  robusta com estruturas incertas lineares afins, precisa-se apenas de procurar a estabilidade- $\mathcal{D}$  para todos os polinómios associados com as arestas da caixa  $Q$ . Se todos os polinómios correspondentes a pontos aresta de  $Q$  são  $\mathcal{D}$  - estáveis, então a família completa de polinómios é  $\mathcal{D}$  - estável robustamente. Como as arestas são de dimensão um obtém-se uma redução acentuada na complexidade computacional, contudo, notar que se  $Q \subseteq R^l$ , então a caixa tem  $l2^{l-1}$  arestas.

Pormenorizando, dado um polítopo de polinómios  $\mathcal{P} = \{p(\cdot, q) : q \in Q\}$ , definem-se as arestas deste conjunto de funções por o isomorfismo natural entre  $\mathcal{P}$  e a sua representação no espaço dos coeficientes, isto é, se  $a(q)$  é o vector de coeficientes para  $p(s, q)$ , então o conjunto de coeficientes é um polítopo obtido tomando a envolvente convexa de  $a(q^i)$ . Usam-se as arestas expostas do polítopo  $a(Q)$  para definir as arestas expostas de  $\mathcal{P}$ , isto é, para cada  $a^*$  que se encontra numa aresta exposta de  $a(Q)$  obtém-se um  $q^* \in Q$  e um polinómio aresta  $p(s, q^*)$  de  $\mathcal{P}$  com vector coeficiente  $a(q^*) = a^*$ . Quando é referido "arestas expostas" de  $a(Q)$ , quer dizer faces expostas de dimensão um .

Usando as estruturas incertas lineares afins e alguns conhecimentos da análise convexa, prova-se que todos os polinómios contidos em qualquer aresta exposta de  $\mathcal{P}$  são obtidos a partir de qualquer aresta exposta de  $Q$ , contudo, uma determinada aresta exposta de  $Q$  não induz necessariamente outra aresta exposta de  $\mathcal{P}$ .

*Teorema da Aresta* (Bartlett e colaboradores (1988))

Seja  $\mathcal{P}$  um polítopo de polinómios com grau invariante e  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$  um conjunto aberto e simplesmente conexo. Então  $\mathcal{P}$  é  $\mathcal{D}$ -estável robustamente se e só se cada uma das arestas expostas de  $\mathcal{P}$  é  $\mathcal{D}$ -estável.

Quando se aplica o Teorema da Aresta, é muitas vezes mais fácil trabalhar com as arestas expostas de  $Q$  do que com as arestas expostas de  $\mathcal{P}$ . Trabalhando com as arestas expostas de  $Q$ , aceita-se a possibilidade de redundância no teste de robustez, isto é, pode-se acabar por testar um conjunto "maior" de arestas expostas de  $\mathcal{P}$ . Resumindo, reduzimos o problema de estabilidade- $\mathcal{D}$  robusta para um polítopo de polinómios a um número finito de problemas aresta unidimensionais. Cada um destes problemas aresta unidimensionais pode ser resolvido por uma grande variedade de métodos clássicos. Por exemplo, se  $q^{i_1}$  e  $q^{i_2}$  são dois pontos extremos de  $Q$  cujas combinações convexas descrevem uma aresta de  $Q$ , então o teste de estabilidade- $\mathcal{D}$  robusta procura as raízes do polinómio

$$p_{i_1 i_2}(s, \lambda) = (1 - \lambda)p(s, q^{i_1}) + \lambda p(s, q^{i_2}) \quad (3.9)$$

para  $\lambda \in [0, 1]$ . Dividindo a expressão (4.1) por  $\lambda p(s, q^{i_2})$ , torna-se claro que o "problema aresta" se reduziu a um problema de lugar de raízes para a planta

$$P_{i_1 i_2}(s) = \frac{p(s, q^{i_1})}{p(s, q^{i_2})} \quad (3.10)$$

a qual é compensada por uma simples malha de realimentação como se pode ver na fig.3.5.

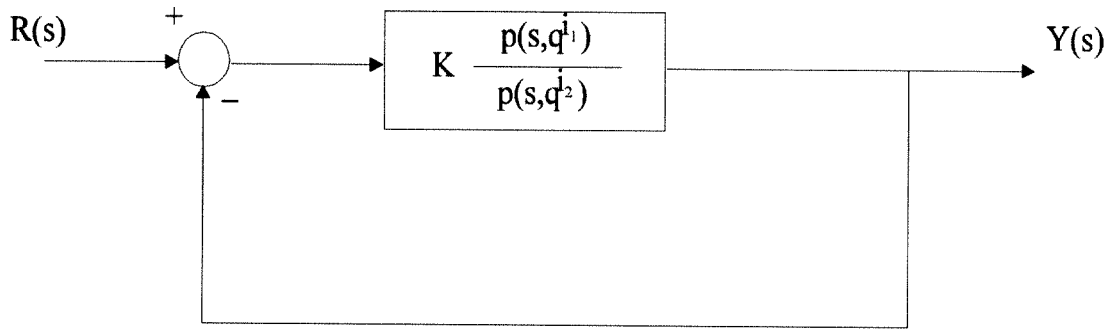


Fig.3.5. Planta para a resolução dum problema aresta.

### 3.3.3. Exemplo ilustrativo da utilidade dos resultados

Seja  $\mathcal{P} \subset R^3$  um polítopo de polinómios determinado pela envolvente convexa de quatro "vértices polinomiais" :

$$P_1(s) = s^3 + 9,77s^2 + 30,6s + 18,27;$$

$$P_2(s) = s^3 + 15s^2 + 75s + 125;$$

$$P_3(s) = s^3 + 8,96s^2 + 21,91s + 15,61;$$

$$P_4(s) = s^3 + 11,43s^2 + 20,2s + 82,5;$$

Seja  $\mathcal{D}$  o semi-plano esquerdo do plano complexo. Para determinar se  $R(\mathcal{P}) \subset \mathcal{D}$  usamos as definições apresentadas nos pontos anteriores e calculamos o espaço raiz das arestas expostas de  $\mathcal{P}$ . As arestas expostas são seis segmentos de recta que ligam os vértices polinomiais. Para calcular o espaço raiz entre os vértices  $p_i$  e  $p_j$  encontramos as raízes dos polinómio :

$$(1-\lambda)p_i(s) + \lambda p_j(s) \text{ com } 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Fazemos este cálculo para as seis arestas expostas. O espaço raiz resultante encontra-se na fig. 3.6. Através desta figura vê-se que o espaço raiz de todas as arestas expostas de  $\mathcal{P}$  estão contidas em  $\mathcal{D}$ .

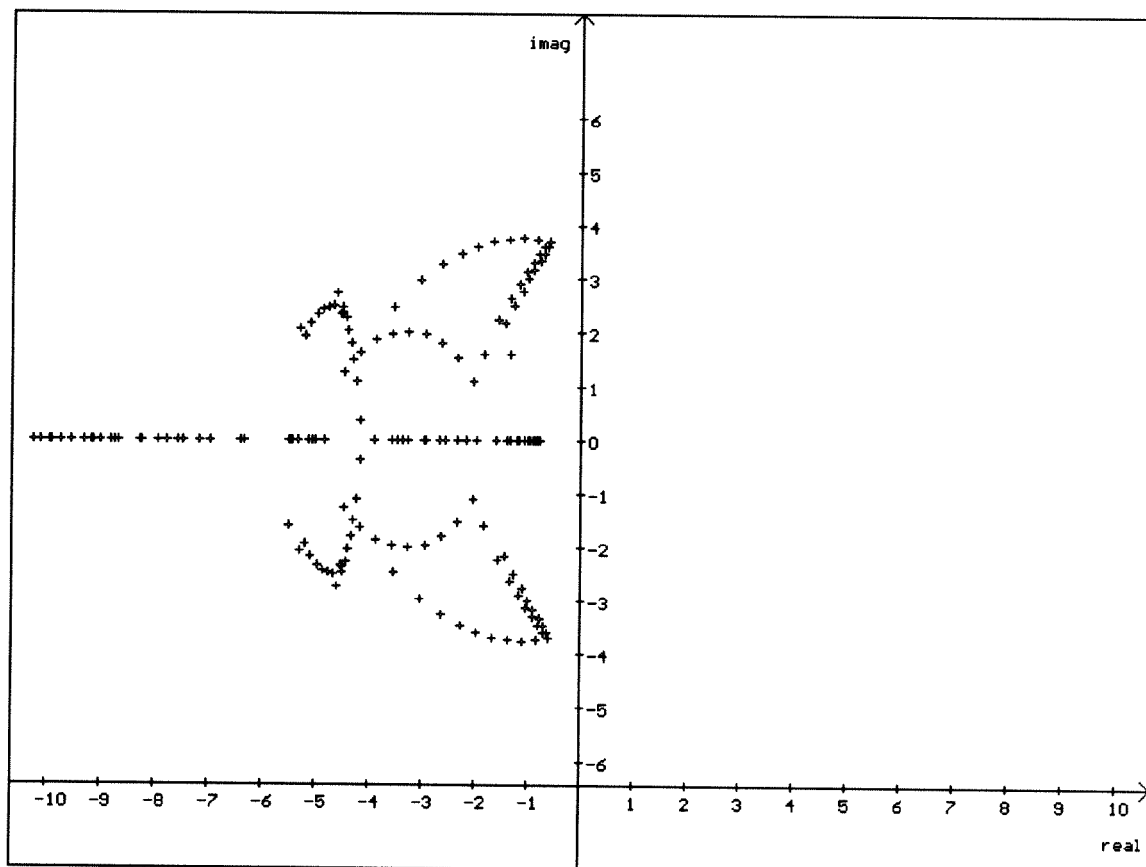


Fig. 3.6. Espaço raiz das arestas expostas do polítopo.

## **4. APLICAÇÃO DOS RESULTADOS AOS SISTEMAS DE CONTROLO**

## 4. Aplicação dos resultados aos sistemas de controlo

### 4.1. Apresentação do sistema de controlo

#### 4.1.1. Introdução

Neste capítulo vamos aplicar os resultados anteriores, que foram apresentados numa perspectiva puramente matemática, ao caso dos sistemas de controlo realimentados.

#### 4.1.2. Sistema de controlo realimentado

A fig. 4.1 representa a configuração clássica de sistema de controlo realimentado, onde

- $R(s)$  → referência
- $P(s,q)$  → função de transferência da planta
- $C(s)$  → compensador
- $Y(s)$  → saída (variável controlada)

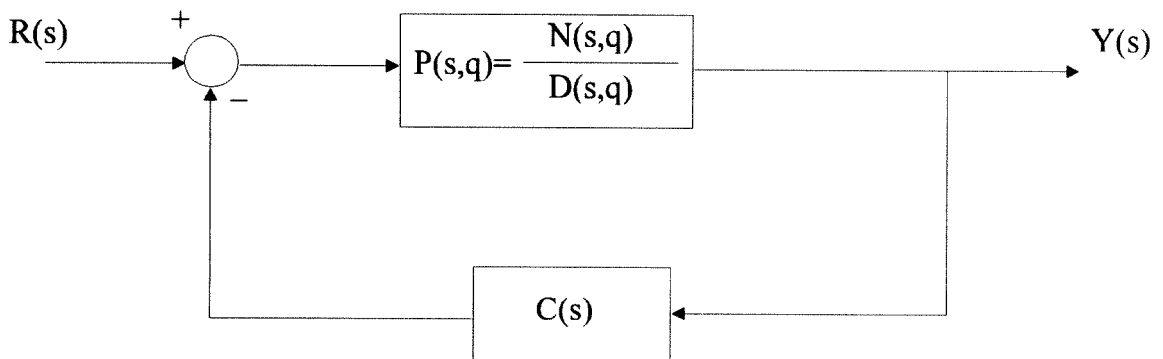


Fig. 4.1. Configuração clássica de sistema de controlo realimentado.

## 4.2. Lema

Seja  $P(s,q)$  uma planta incerta com estrutura de incerteza linear afim, a qual é introduzida na configuração da fig.4.1 Sendo o compensador expresso como o quociente de polinômios

$$C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)} \quad (4.1)$$

a função de transferência em malha fechada é

$$\begin{aligned} P_{CL}(s,q) &= \frac{N(s,q)D_c(s)}{N(s,q)N_c(s) + D(s,q)D_c(s)} \\ &= \frac{N_{CL}(s,q)}{D_{CL}(s,q)} \end{aligned} \quad (4.2)$$

*Lema* : (Preservação da incerteza linear afim na malha fechada)

Consideramos uma planta incerta como na fig. 4.1. onde  $P(s,q)$  tem estrutura incerta linear afim. Então conclui-se que a função de transferência em malha fechada incerta  $P_{CL}(s,q)$  também tem estrutura incerta linear afim. Daí todos os resultados anteriores serem também aplicáveis à malha fechada.

### 4.3. "Teorema das 16 plantas"

#### 4.3.1. Introdução

Para aplicar os resultados observados nesta secção e nas seguintes, vai-se começar com uma família de plantas intervalares  $\mathcal{P}$  descrita por

$$P(s, q, r) = \frac{\sum_{i=0}^m [q_i^-, q_i^+] s^i}{\sum_{i=0}^n [r_i^-, r_i^+] s^i}, \quad (4.3)$$

e a região de localização de raízes  $\mathcal{D}$  é o semi-plano esquerdo. Usa-se a notação  $P(s, q, r)$  para descrever a planta associada com o par de pontos extremos  $(q^i, r^i) \in Q \times R$ . A questão fundamental que agora se põe é :

"Se compensador  $C(s)$ , estiver ligado como na fig. 4.1., estabilizando cada uma das plantas extremas  $P(s, q^i, r^i)$ , pode-se concluir que  $C(s)$  estabiliza robustamente a totalidade da família  $\mathcal{P}$  ?"

#### "32 Arestas"

Se o polinómio em malha fechada tem grau invariante, não é preciso procurar todas as arestas para assegurar a estabilidade robusta. É necessário e suficiente procurar apenas um conjunto de 32 arestas distintas. Estas 32 arestas são chamadas de segmentos de Kharitonov, notar que o número 32 é independente de  $m$  e  $n$ . As arestas distintas são obtidas da seguinte forma :

Fixa-se o numerador da planta num dado um polinómio de Kharitonov  $N_i(s)$  e considera-se 4 arestas para o denominador da forma

$$(1 - \lambda)D_{i1}(s) + \lambda D_{i2}(s) \quad (4.4)$$

onde  $D_{i1}(s)$  e  $D_{i2}(s)$  são polinómios de Kharitonov, ou tendo para o denominador o mesmo número de coeficientes par ou o mesmo número de coeficientes ímpar. Analogamente, se o denominador é fixo como sendo um polinómio de Kharitonov  $D_i(s)$ , obtém-se 4 arestas para o numerador da forma

$$(1 - \lambda)N_{i1}(s) + \lambda N_{i2}(s) \quad (4.5)$$

onde  $N_{i1}(s)$  e  $N_{i2}(s)$  são polinómios de Kharitonov, ou tendo para o numerador o mesmo número de coeficientes par ou o mesmo número de coeficientes ímpar. Veremos na secção 4.3.2. que a verificação ao longo das arestas necessária ao problema de estabilidade pode ser substituída pela análise em apenas 16 pontos extremos (plantas) em vez de 32 arestas, quando o compensador é de 1ª ordem.

### 4.3.2. Plantas Intervalares com Compensadores de 1ª ordem

#### 4.3.2.1 Introdução

Os compensadores de 1ª ordem estabilizam robustamente qualquer família de plantas intervalares se e só se estabilizam todas as plantas extremas. Isto é, se a planta é descrita por um polinómio numerador de ordem  $m$  e por um polinómio denominador de ordem  $n$  mónico, com coeficientes contidos num determinado intervalo, é necessário e suficiente estabilizar o conjunto  $2^{m+n+1}$  de plantas extremas. Estas plantas extremas são obtidas considerando todas as combinações possíveis para os valores

extremos dos coeficientes do numerador e denominador. Vai-se provar nesta exposição um resultado forte, nomeadamente, que é necessário e suficiente estabilizar apenas 16 das plantas extremas. Estas 16 plantas são geradas pelos polinómios de Kharitonov associados com numerador e denominador da planta.

#### 4.3.2.2 Notação e Definições

Considerar uma dada família de plantas intervalares  $\mathcal{P}$ , da forma

$$P(s, q, r) = \frac{N(s, q)}{D(s, r)} \quad (4.6)$$

onde o numerador e denominador são polinómios da forma

$$N(s, q) = q_m s^m + q_{m-1} s^{m-1} + \dots + q_1 s + q_0 \quad (4.7)$$

$$D(s, r) = r_n s^n + r_{n-1} s^{n-1} + \dots + r_1 s + r_0 \quad (4.8)$$

e onde os vectores  $q$  e  $r$  são dados pelos rectângulos  $Q$  e  $R$ , respectivamente, isto é

$$q \in Q = \{q : q_i^- \leq q \leq q_i^+ \text{ para } i = 0, 1, \dots, m\} \quad (4.9)$$

$$r \in R = \{r : r_i^- \leq r \leq r_i^+ \text{ para } i = 0, 1, \dots, n-1\} \quad (4.10)$$

onde os limites  $q_i^-, q_i^+, r_i^-$  e  $r_i^+$  são especificados à priori. As famílias polinomiais intervalares para o numerador e denominador são dadas por :

$$\mathcal{N} = \{N(\cdot, q) : q \in Q\} \quad (4.11)$$

e

$$\mathcal{D} = \{D(\cdot, r) : r \in R\}. \quad (4.12)$$

Para estabilizar a família de plantas intervalares  $\mathcal{P}$ , considera-se o compensador de 1ª ordem da forma

$$C(s) = K \frac{s-z}{s-p} \quad (4.13)$$

Diz-se que um compensador  $C(s)$  estabiliza robustamente a família de plantas intervalares  $\mathcal{P}$  se, para todos os  $q \in Q$  e todos  $r \in R$ , o polinómio em malha fechada resultante

$$P_{cl}(s, q, r) = K(s-z)N(s, q) + (s-p)D(s, r) \quad (4.14)$$

tem todas as suas raízes no semi-plano esquerdo; isto é,  $P_{cl}(s, q, r)$  é Hurwitz. A seguir, introduzem-se os polinómios de Kharitonov para o numerador e denominador da planta.

Numerador:

$$N_1(s) = q_0^+ + q_1^+ s + q_2^- s^2 + q_3^- s^3 + q_4^+ s^4 + q_5^+ s^5 + \dots; \quad (4.15a)$$

$$N_2(s) = q_0^- + q_1^- s + q_2^+ s^2 + q_3^+ s^3 + q_4^- s^4 + q_5^- s^5 + \dots; \quad (4.15b)$$

$$N_3(s) = q_0^- + q_1^+ s + q_2^+ s^2 + q_3^- s^3 + q_4^- s^4 + q_5^+ s^5 + \dots; \quad (4.15c)$$

$$N_4(s) = q_0^+ + q_1^- s + q_2^- s^2 + q_3^+ s^3 + q_4^+ s^4 + q_5^- s^5 + \dots; \quad (4.15d)$$

Denominador:

$$D_1(s) = r_0^+ + r_1^+ s + r_2^- s^2 + r_3^- s^3 + r_4^+ s^4 + r_5^+ s^5 + \dots; \quad (4.16a)$$

$$D_2(s) = r_0^- + r_1^- s + r_2^+ s^2 + r_3^+ s^3 + r_4^- s^4 + r_5^- s^5 + \dots; \quad (4.16b)$$

$$D_3(s) = r_0^- + r_1^+ s + r_2^+ s^2 + r_3^- s^3 + r_4^- s^4 + r_5^+ s^5 + \dots; \quad (4.16c)$$

$$D_4(s) = r_0^+ + r_1^- s + r_2^- s^2 + r_3^+ s^3 + r_4^+ s^4 + r_5^- s^5 + \dots; \quad (4.16d)$$

Fazendo todas as combinações possíveis entre  $N_i(s)$  e  $D_i(s)$ , obtém-se as 16 plantas de Kharitonov

$$P_{i_1 i_2}(s) = \frac{N_{i_1}(s)}{D_{i_2}(s)} \quad (4.17)$$

para  $i_1, i_2 = 1, 2, 3, 4$ . Para estas plantas extremas, quando se diz "C(s) estabiliza  $P_{i_1 i_2}(s)$ ", entende-se que o polinómio da malha fechada

$$P_{i_1 i_2}(s, q, r) = K(s - z) N_{i_1}(s, q) + (s - p) D_{i_2}(s, r) \quad (4.18)$$

é Hurwitz.

Com base na expressão (4.18), provou-se o seguinte resultado:

Um compensador de 1ª ordem C(s) estabiliza robustamente  $\mathcal{P}$  se e só se estabiliza cada uma das plantas associadas  $P(s, q^{i_1}, r^{i_2})$  com os pares de pontos extremos  $(q^{i_1}, r^{i_2}) \in Q \times R$ , isto é, para cada par  $(q^{i_1}, r^{i_2})$ , o polinómio associado em malha fechada  $P_{cl}(s, q^{i_1}, r^{i_2})$  é estável.

Teorema das 16 plantas (Barmish e colaboradores (1992))

Um compensador de 1ª ordem  $C(s)$  estabiliza robustamente uma família de plantas intervalares estritamente próprias  $\mathcal{P}$  se e só se estabiliza todas as 16 plantas de Kharitonov  $P_{i_1 i_2}(s); i_1, i_2 = 1, 2, 3, 4$ .

#### 4.3.2.3 Exemplo Numérico

Nesta secção, vai-se ilustrar a aplicação do Teorema graficamente. Para isso, consideremos uma planta composta por uma série de 3 tanques com a função de transferência "aproximada"

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)^3} \quad (4.19)$$

onde a entrada é o caudal de entrada no 1º tanque e a saída é o nível de líquido no 3º tanque.

Para se analisar a estabilização robusta, vamos substituir  $P(s)$  por uma família de plantas intervalares  $\mathcal{P}$  descrita por

$$P(s, q, r) = \frac{1}{s^3 + r_2 s^2 + r_1 s + r_0} \quad (4.20)$$

Na resolução ilustrativa, consideram-se os parâmetros incertos

$$r_0 \in [0,72; 1,44]$$

$$r_1 \in [2,42; 3,84]$$

$$r_2 \in [2,7; 3,4]$$

Para a família  $\mathcal{P}$  em causa, o objectivo é determinar a existência dum compensador PI

$$C(s) = K_1 + \frac{K_2}{s} \quad (4.21)$$

robustamente estável.

Uma vez que o numerador é constante a busca por 16 plantas fica reduzida a quatro.

Por exemplo, usando os polinómios para  $N_1(s)$  e  $D_1(s)$ , obtém-se o vector

$$\begin{array}{l|lll} s^4 & 1 & 3,84 & K_2 \\ s^3 & 2,7 & 1,44 + K_1 & 0 \\ s^2 & 3,307 - 0,370 K_1 & K_2 & 0 \\ s^1 & \frac{\alpha_1}{\alpha_2} & 0 & 0 \\ s^0 & K_2 & 0 & 0 \end{array} \quad (4.22)$$

onde

$$\alpha_1 = -2,7 K_2 - 0,370 K_1^2 + 2,774 K_1 + 4,762 \quad (4.23a)$$

$$\alpha_2 = 3,307 - 0,370 K_1 \quad (4.23b)$$

Usando as 4 tabelas Routh, impõe-se agora a positividade para cada uma das primeiras colunas. Isto conduz a inequações que envolvem  $K_1$  e  $K_2$ ;

Por exemplo, para a tabela Routh da planta de Kharitonov  $P_{11}(s)$ , obtém-se :

$$K_1 < 8,928; \quad (4.24a)$$

$$K_2 > 0; \quad (4.25b)$$

$$\alpha_1/\alpha_2 > 0. \quad (4.25c)$$

Na fig. 4.2 mostra-se o conjunto de pares estabilizadores  $(K_1, K_2)$ . Concluindo-se desta que o sistema com a incerteza indicada se mantém estável desde que  $(K_1, K_2)$  se situe no interior da região indicada.

Para a implementação, pode-se usar qualquer combinação  $(K_1, K_2)$  deste conjunto para gerar um controlador robustamente estabilizador.

Por exemplo, um controlador PI robustamente estabilizador será

$$C(s) = 3,0 + \frac{1,0}{s}. \quad (4.26)$$

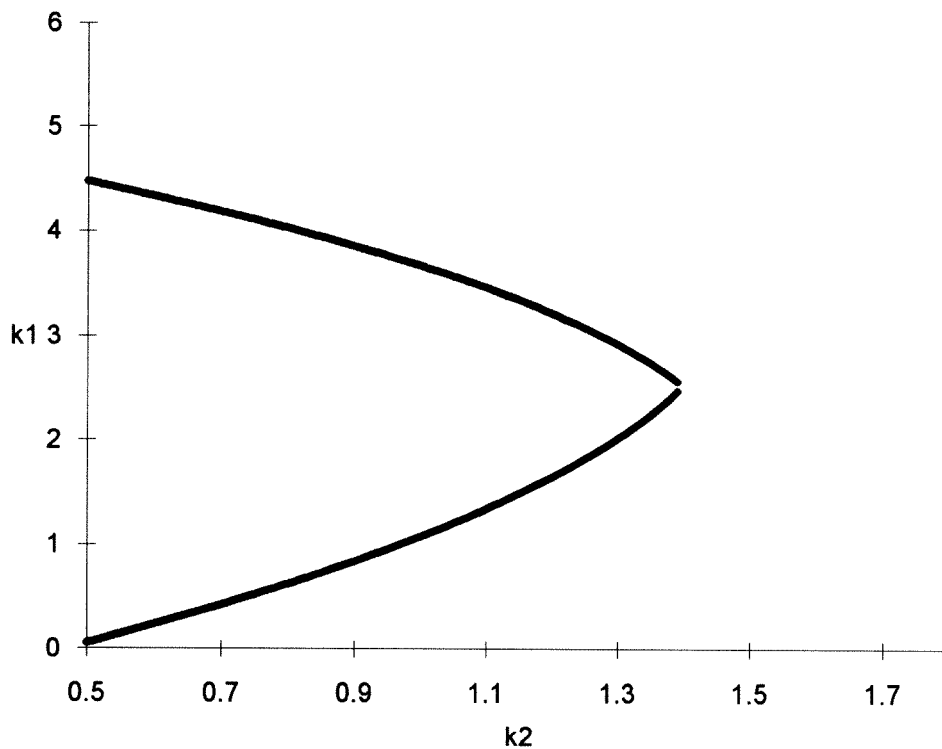


Fig. 4.2. Conjunto dos controladores estabilizados PI robustos.

Infelizmente este resultado nem sempre é válido com compensadores de ordem mais elevada.

A título de exemplo, consideremos a seguinte planta (Barmish e Kang (1993))

$$P(s, q) = \frac{q}{s^2 + 25s}$$

onde  $q \in [1, 5000]$ , com compensador

$$C(s) = \frac{(s+3)(s+4)}{(s+0.1)(s+0.2)(s+75)}$$

implementado tal como na fig. 4.1.  $C(s)$  estabiliza as duas plantas extremas  $P(s, 1)$  e  $P(s, 5000)$ , mas o sistema de controlo realimentado é instável para  $q = 2$ .

## **5. ANÁLISE DE UM CASO ESPECIAL**

## 5. Análise de um caso especial

### 5.1. Introdução

Os problemas de *Estabilidade Robusta* surgem, quando um sistema depende de parâmetros incertos

$$q = [q_1, q_2, \dots, q_l]^T \in Q. \quad (5.1)$$

Quando o seu número é elevado os métodos convencionais e atrás expostos, falham. No entanto, se o sistema permite "a decomposição em árvore" do seu polinómio característico  $P(s, q)$  então, as imagens do eixo imaginário pelas funções  $\mathcal{P}(j\omega, Q)$  ou  $\mathcal{R}(j\omega, Q)$  podem ser calculadas e representadas rapidamente, e o teste de Estabilidade Robusta para o conjunto  $\mathcal{P}(j\omega, Q)$  com exclusão zero pode ser executado por inspeção .

Vamos demonstrar nesta secção como executar computacionalmente operações com conjuntos  $\mathcal{P}(j\omega, Q)$  e demonstrar que sistemas do tipo massa-mola-amortecedor (mass-spring-damper) preservam a estrutura em árvore.

### 5.2. Apresentação do problema

Como é sabido a realimentação permite insensibilizar em certa medida o sistema de controlo às incertezas (e perturbações) da planta.

Se o modelo da planta for construído a partir dos modelos físicos dos seus componentes, então o modelo vem parametrizado por parâmetros físicos incertos

$$q = [q_1, q_2, \dots, q_l]^T \quad (5.2)$$

Onde apenas se conhecem os limites inferior e superior, isto é , o domínio de operação é qualquer caixa de dimensão  $l$ .

$$Q = \{q: q_i \in [q_i^-, q_i^+], i = 1, 2, \dots, l\} \quad (5.3)$$

Se a família de plantas é linear, então a estabilidade pode ser analisada através dos valores próprios da matriz sistema  $A(q)$  ou equivalentemente através das raízes do polinómio característico

$$p(s, q) = \sum_{i=0}^n a_i(q) s^i \quad (5.4)$$

O problema que se coloca na Análise da Estabilidade Robusta é :

*"É  $\mathcal{A}(q)$  ou  $\mathcal{P}(s, q)$  estável para todos os  $q \in Q$  ?"*

O teste de Robustez utiliza uma família de matrizes

$$\mathcal{A}(Q) = \{A(q): q \in Q\} \quad (5.5)$$

ou uma família de polinómios

$$\mathcal{P}(s, Q) = \{p(s, q): q \in Q\} \quad (5.6)$$

Contudo do ponto de vista prático, a formulação matricial ou a formulação polinomial têm a desvantagem de tornar complexas as estruturas incertas. Como exemplo, consideramos o sistema massa-mola-amortecedor com a seguinte equação diferencial :

$$m\ddot{y} + d\dot{y} + cy = u \quad (5.7)$$

Na formulação espaço de estados com vector estado  $x = [y \dot{y}]^T$  o modelo é

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c/m & -d/m \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} u \quad (5.8)$$

O parâmetro incerto  $m$  "dilui-se" por diversos elementos da matriz. A vantagem da formulação polinomial é óbvia, lê-se

$$(ms^2 + ds + c)y(s) = u(s) \quad (5.9)$$

Mas a simplicidade da parametrização polinomial é perdida, se nós fecharmos a malha por um compensador

$$u(s) = r(s) - \frac{b_0 + b_1 s}{a_0 + s} y(s) \quad (5.10)$$

A característica polinomial em malha fechada é então :

$$P(s, m, d, c, b_0, b_1, a_0) = (ms^2 + ds + c)(a_0 + s) + (b_0 + b_1 s) \quad (5.11)$$

e escrito como polinómio em  $s$  assume a da seguinte forma:

$$\begin{aligned} P(s, m, d, c, b_0, b_1, a_0) &= \\ &= ms^3 + (ma_0 + d)s^2 + (da_0 + c + b_1)s + (ca_0 + b_0) \end{aligned} \quad (5.12)$$

A simplicidade da estrutura paramétrica de (5.11) foi "destruída" na formulação polinomial (5.12). Para um número pequeno de parâmetros pode ser viável fazer o "*quadriculado*" do parâmetro na caixa  $Q$  e aplicar métodos numéricos a cada ponto "*quadriculado*". Contudo, para um grande número de parâmetros incertos esta técnica de subdivisão em "quadrículos" não é eficiente porque o esforço computacional aumenta exponencialmente. Por outro lado não podemos evitar o "*quadriculado*" completamente, excepto para casos simples de polinómios intervalares ou coeficientes afins  $a_i(q)$ . Isto pode ser completado, explorando a estrutura em árvore como em (5.11) e a execução sequencial do conjunto de operações envolve apenas um subconjunto pequeno de incertezas em cada passo.

O teste de Estabilidade Robusta pode explorar a estrutura em árvore excluindo o zero do conjunto  $\mathcal{P}(j\omega, Q)$ , isto é,  $P(s, q)$  é estável para todos os  $q \in Q$  se e só se

$$\text{i) existe um } q_0 \in Q \text{ tal que } P(s, q_0) \text{ é estável} \quad (5.13a)$$

$$\text{ii) } 0 \notin \mathcal{P}(j\omega, Q) \text{ para todos } \omega \geq 0 \quad (5.13b)$$

### 5.3. Formulação de Problemas Racionais e Polinomiais

Seja um sistema do tipo massa-amortecedor-mola

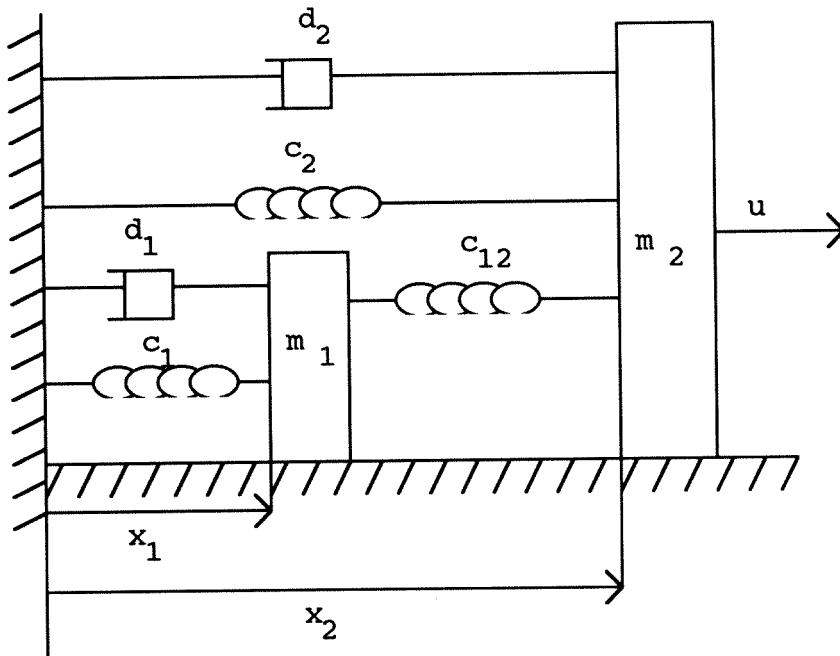


Fig.5. Sistema com massas, molas e amortecedor

A característica polinomial deste sistema pode ser escrita da seguinte forma

$$P_{OL}(s) = P_1(s, q) P_2(s, q) - c_{12}^2 \quad (5.14)$$

com

$$P_1(s, q) = m_1 s^2 + d_1 s + c_1 + c_{12} \quad (5.15a)$$

$$P_2(s, q) = m_2 s^2 + d_2 s + c_2 + c_{12} \quad (5.15b)$$

Esta forma (equações 5.14, 5.15a e 5.15b) não satisfaz a definição TSD (estrutura em árvore), porque existe uma "repetição" do parâmetro  $c_{12}$  que deverá ser "quadriculado". Para um ponto do "quadriculado",  $c_{12} = 1$ , a forma TSD é obtida da seguinte forma :

$$P_{OL}(s, q) = P_1(s, q^{(1)}) P_2(s, q^{(2)}) - 1 \quad (5.16a)$$

$$q^{(1)} = [m_1 d_1 c_1]^T ; q^{(2)} = [m_2 d_2 c_2]^T \quad (5.16b)$$

Designando por  $1/P_{OL}(s, q)$  a função de transferência de  $u$  para  $x_1$  do sistema e por  $\frac{B(s)}{A(s)}$  a função de transferência do compensador, temos a seguinte lei de controlo

$$u(s) = r(s) - \frac{B(s)}{A(s)} x_1(s) \quad (5.17)$$

e que o polinómio característico da malha fechada será :

$$P_{CL}(s, q) = P_{OL}(s, q) A(s) + B(s) \quad (5.18)$$

$P_{CL}(s, q)$  encontra-se na forma TSD e o seu conjunto  $\mathcal{P}(j\omega, Q)$  pode ser construído sequencialmente por multiplicação e adição.

Se modificarmos o exemplo da fig.5, tomando  $x_2$  como saída controlada a, função de transferência da planta será

$$x_2(s) = \frac{P_1(s, q^{(1)})}{P_1(s, q^{(1)}) P_2(s, q^{(2)}) - 1} u(s) \quad (5.19)$$

com o seguinte polinómio característico em malha fechada:

$$P_{cl}(s, q^{(1)}, q^{(2)}) = [P_1(s, q^{(1)})P_2(s, q^{(2)}) - 1]A(s) + P_1(s, q^{(1)})B(s) \quad (5.20)$$

A expressão (5.20) não é uma estrutura em árvore polinomial, a TSD de fracções racionais pode ser obtida da equação característica na forma

$$\frac{1}{\frac{P_2(s, q^{(2)}) - 1}{P_1(s, q^{(1)})}} \times \frac{B(s)}{A(s)} + 1 = 0 \quad (5.21)$$

Em vez de testar a exclusão zero a partir do numerador podemos também testá-la a partir da expressão racional

$$0 \notin \mathcal{R}(j\omega^*, Q) \quad (5.22a)$$

$$\mathcal{R}(j\omega^*, Q) = \left\{ \frac{1}{P_2(j\omega^*, q^{(2)}) - 1 / P_1(j\omega^*, q^{(1)})} \times \frac{B(j\omega^*)}{A(j\omega^*)} + 1 : q \in Q \right\} \quad (5.22b)$$

O conjunto  $\mathcal{R}(j\omega^*, Q)$  pode ser construído por operações sequenciais sobre os conjuntos complexos se nós considerarmos a inversão do conjunto

$$\mathcal{A}^{-1} = \left\{ \frac{1}{a} : a \in \mathcal{A} \right\}, 0 \notin \mathcal{A} \quad (5.24)$$

Notar que para o sistema univariável podemos considerar também o teste de exclusão para o ponto crítico -1 do conjunto de Nyquist, isto é,

$$-1 \notin \mathcal{X}(j\omega^*, Q) \quad (5.25a)$$

$$\mathcal{X}(j\omega^*, Q) = \left\{ \frac{1}{P_2(j\omega^*, q^{(2)}) - 1 / P_1(j\omega^*, q^{(1)})} \times \frac{B(j\omega^*)}{A(j\omega^*)} : q \in Q \right\} \quad (5.25b)$$

## **6. GENERALIZAÇÕES E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS**

## 6. Generalizações e desenvolvimentos futuros

### 6.1. Direcções Convexas

#### 6.1.1. Introdução

Motivada pela estabilização robusta de plantas intervalares, esta secção concentra-se fundamentalmente nos problemas que envolvem famílias de polinómios obtidas por combinação convexa de "membros extremos". O objectivo será fornecer condições para as quais a estabilidade de extremos implica a estabilidade da totalidade da família polinómios. Para esse fim, introduz-se a Condição dos Complementos Algébricos Alternados de Hurwitz (AHMC) mostrando como pode ser usada para alargar a classe de famílias de polinómios. Em contraste com a literatura existente para compensadores de 1ª ordem, a AHMC torna possível lidar com classes de compensadores de ordem elevada em qualquer contexto de ponto extremo.

#### 6.1.2. Direcção Convexa

##### Definição

Um polinómio mónico  $g(s)$  diz-se que é uma direcção convexa (no espaço de polinómios estáveis de grau  $n$ ) se a seguinte condição é satisfeita :

Dado qualquer polinómio  $f(s)$  estável de grau  $n$  tal que  $f(s) + g(s)$  é também estável e  $\text{grau}(f(s) + g(s)) = n$  para todos  $\lambda \in [0, 1]$ , então  $f(s) + \lambda g(s)$  é estável para todos  $\lambda \in [0, 1]$ .

O conceito de Direcção Convexa é mostrado graficamente na figura 6.4 :

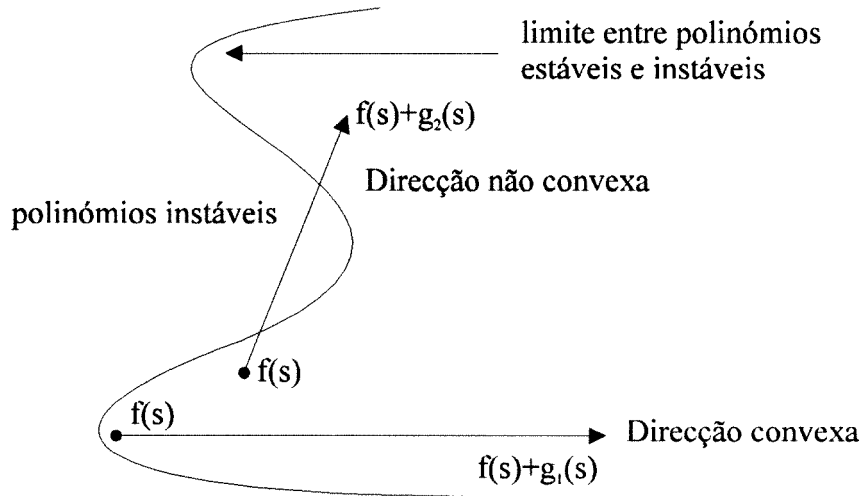


Fig 6.4. Direcções convexas no espaço de polinómios.

Através da figura, vê-se que  $g_1(s)$  é uma direcção convexa porque  $f(s) + \gamma g_1(s)$  faz parte do conjunto estável para todos  $\gamma \geq 0$ . Por outro lado,  $g_2(s)$  não é uma direcção convexa. É importante salientar que os resultados de direcção convexa podem ser reinterpretados em qualquer contexto de ponto extremo, isto é,  $g(s)$  é uma direcção convexa e  $0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2$ , então, a estabilidade de  $f(s) + \gamma_1 g(s)$  e  $f(s) + \gamma_2 g(s)$  implicam a estabilidade  $f(s) + \gamma g(s)$ , para todos os  $\gamma \in [\gamma_1, \gamma_2]$ .

Barmish e Kang (1993), mostram através de um exemplo que nem todas as direcções  $g(s)$  são estáveis, isto é:

se

$$f(s) = 10s^3 + s^2 + 6s + 0.57 \quad e \quad g(s) = s^2 + 2s + 1 \quad (6.1)$$

segue-se que  $f(s)$  e  $f(s) + g(s)$  são estáveis,  $f(s) + \lambda g(s)$  tem grau constante para todos os  $\lambda \in [0,1]$  mas  $f(s) + \frac{1}{2}g(s)$  é instável. Resumindo, os autores realçam o facto de que uma combinação convexa de polinómios estáveis não é necessariamente estável.

Esta afirmação levanta o seguinte problema :

*"Como fornecer condições sob as quais  $g(s)$  é uma direcção convexa."*

Teorema (Rantzer (1992a))

Um polinómio  $g(s)$  é uma direcção convexa no espaço de polinómios de grau  $n$  estáveis se e só se

$$\frac{d}{d\omega} \angle g(j\omega) \leq \left| \frac{\sin 2 \angle g(j\omega)}{2\omega} \right| \quad (6.2)$$

para todos  $\omega > 0$  tal que  $g(j\omega) \neq 0$ .

O teorema acima é vantajoso para a explanação dos resultados existentes e para a delineação de novas classes de problemas de combinações convexas, as quais admitem solução de ponto extremo. Por exemplo, considerando as condições iniciais do teorema de modo a permitir que o compensador

$$C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)} \quad (6.3)$$

seja de ordem arbitrária, a satisfação de *Condição de Crescimento de Rantzer* conduz ao seguinte resultado :

A estabilidade robusta dos 16 pares interligados  $(P_{i_1 i_2}(s), C(s))$  correspondentes às plantas de Kharitonov implicam a estabilidade robusta para todos os pares interligados  $(P(s), C(s))$  com  $P(s) \in \mathcal{P}$ . Por exemplo, dado o compensador

$$C(s) = \frac{s^5 - s^4 - s^3 + s^2 + s - 1}{s^6 - 0.5s^5 + s^4 - 1.5s^3 - 4s^2 - s - 4} \quad (6.4)$$

é verificado imediatamente que o numerador e o denominador satisfazem a condição de crescimento. Consequentemente, se  $C(s)$  é ligado com qualquer planta intervalar como na figura 4.1., a estabilidade robusta da malha fechada é assegurada pela simples procura da estabilidade dos 16 sistemas em malha fechada. Por exemplo, se  $\angle g(j\omega)$  é não crescente, então a condição de crescimento é satisfeita trivialmente. Obviamente, desde que a condição de crescimento seja necessária e suficiente para  $g(s)$  ser uma direcção convexa.

Começando ao nível de polinómios intervalares, pode-se interpretar a análise de Kharitonov como uma estrutura de direcções convexas tomando  $g(s)$  como sendo um polinómio que ou contém o mesmo número de potências pares ou o mesmo número de potências ímpares de  $s$ . O resultado de ponto extremo associado a  $f(s) + \lambda g(s)$  pode ser explorado na demonstração do Teorema de Kharitonov. Existem várias definições de direcção convexa dadas por outros autores, nesta exposição vai-se usar a definição descrita anteriormente.

### 6.1.3. Definição de AHMC (Condição dos Complementos Algébricos Alternados de Hurwitz)

#### Notações

Para definir a AHMC é necessário definir alguma nova notação. Para um polinómio mónico

$$g(s) = s^m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i s^i, \quad (6.5)$$

a matriz associada é

$$H(g) = \begin{bmatrix} a_{m-1} & a_{m-3} & a_{m-5} & \dots & \dots \\ 1 & a_{m-2} & a_{m-4} & \dots & \dots \\ 0 & a_{m-1} & a_{m-3} & a_{m-5} & \dots \\ 0 & 1 & a_{m-2} & a_{m-4} & \dots \\ 0 & 0 & a_{m-1} & a_{m-3} & \dots \\ 0 & 0 & 1 & a_{m-2} & \dots \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ 0 & \cdot & a_4 & a_2 & a_0 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

chama-se

$$\Delta_1(g) = a_{m-1}, \quad (6.7a)$$

$$\Delta_2(g) = \det \begin{bmatrix} a_{m-1} & a_{m-3} \\ 1 & a_{m-2} \end{bmatrix}, \quad (6.7b)$$

$$\Delta_3(g) = \det \begin{bmatrix} a_{m-1} & a_{m-3} & a_{m-5} \\ 1 & a_{m-2} & a_{m-4} \\ 0 & a_{m-1} & a_{m-3} \end{bmatrix}, \quad (6.7c)$$

·  
·  
·

$$\Delta_m(g) = \det H(g) \quad (6.7d)$$

os complementares algébricos associados de Hurwitz de  $g$ .

### Definição de AHMC

Diz-se que um polinómio mónico  $g(s)$  satisfaz o AHMC se pelo menos uma das seguintes condições se verificam.

(i) os complementares algébricos de Hurwitz de ordem ímpar correspondentes de  $g(s)$  alternam-se segundo o "padrão" de sinais

$$\Delta_1 < 0, \quad \Delta_3 > 0, \quad \Delta_5 < 0, \quad \Delta_7 > 0, \dots \quad (6.8)$$

(ii) os complementares algébricos de Hurwitz de ordem par correspondentes de  $g(s)$  alternam-se segundo o "padrão" de sinais

$$\Delta_2 < 0, \quad \Delta_4 > 0, \quad \Delta_6 < 0, \quad \Delta_8 > 0, \dots \quad (6.9)$$

Quando  $m = 1$ , adopta-se a convenção que (ii) também se verifica no conjunto vazio. Finalmente, se para algum  $k \geq 0$ , ambas as condições (i) ou (ii) verificam-se excepto quando  $\Delta_i = 0$  para  $i \geq k$ , então diz-se que  $g(s)$  satisfaz o AHMC alargado.

### Exemplos

#### Exemplo 1

Para demonstrar a eficácia do AHMC, notar que o polinómio

$$g(s) = s^4 + s^3 + s^2 + 2s - 1 \quad (6.10)$$

tem a matriz Hurwitz

$$H(g) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

e os complementares algébricos de Hurwitz associados

$$\Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = -1, \quad \Delta_3 = -1 \quad e \quad \Delta_4 = 1.$$

Desde que  $\Delta_2 < 0$  e  $\Delta_4 > 0$  o AHMC é satisfeito.

#### Exemplo 2

Para demonstrar a eficácia do AHMC, notar que o polinómio

$$g(s) = s^6 - 0.5s^5 + s^4 - 1.5s^3 - 4s^2 - s - 4, \quad (6.12)$$

tem a matriz Hurwitz

$$H(g) = \begin{bmatrix} -0.5 & -1.5 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & -1.5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & -1.5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & -4 \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

e os complementares algébricos de Hurwitz associados

$$\Delta_1 = -0.5, \Delta_2 = 1, \Delta_3 = 0, \Delta_4 = 0, \Delta_5 = 0 \text{ e } \Delta_6 = 0.$$

Desde que  $\Delta_1 < 0, \Delta_3 = 0$  e  $\Delta_5 = 0$ , o AHMC alargado é satisfeito quando  $k = 3$ .

### Exemplo 3

Para demonstrar a falha do AHMC, notar que o polinómio

$$g(s) = s^4 + 2s^3 - s^2 - s - 1 \quad (6.14)$$

tem a matriz Hurwitz

$$H(g) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

e os complementares algébricos de Hurwitz associados

$$\Delta_1 = 2, \quad \Delta_2 = -1, \quad \Delta_3 = 5 \quad e \quad \Delta_4 = -5.$$

Conclui-se, que a AHMC é violado.

Teorema (Barmish e Kang (1992))

Sendo  $g(s)$  um polinómio mónico de grau  $m$  que satisfaz a AHMC alargada, então  $g(s)$  é uma direcção convexa no espaço de polinómios de grau  $n > m$ .

Para ilustrar o exposto, consideremos o compensador

$$C(s) = \frac{10(s+4)(s+1)(s-2)}{(s^2-3s+4)(s+2)(s-3)} \quad (6.16)$$

onde o numerador e o denominador satisfazem as condições (i) e (ii), respectivamente. Por outro lado, se a planta é estritamente própria com denominador mónico, é fácil verificar que  $C(s)$  estabiliza robustamente qualquer família de plantas intervalares  $\mathcal{P}$  se e só se estabiliza as 16 plantas de Kharitonov associadas.

## 6.2. Domínio dos Tempos

Recentemente procurou-se generalizar os resultados anteriores ao domínio dos tempos, embora os resultados actualmente disponíveis não sejam muito significativos, excepção feita ao regime permanente.

A determinação da resposta em regime estacionário de um sistema para qualquer entrada consistindo em degraus, rampas, e outros sinais é um problema fundamental em controlo. Se um sistema é robustamente estável e se a dependência de parâmetros incertos é do tipo multiafim, então pode mostrar-se que os valores extremos das respostas em regime estacionário calculados para todos os valores possíveis dos parâmetros coincidem com as respostas calculadas nos vértices do conjunto dos parâmetros. Estes resultados de vértices são duplamente vantajosos, porque tanto são válidos para sistemas em tempo-contínuo como em tempo-discreto.

Para a resposta transitória de sistemas estáveis, os vértices não fornecem informações suficientes para fazer uma análise completa do mesmo tipo como seria desejável. Pode mostrar-se que quer para tempo-discreto quer para tempo-contínuo (Bartlett (1990)) a máxima das sobreelongações de sistemas estáveis robustamente com incertezas afins não ocorre necessariamente num vértice.

## **ANEXOS**

## Lista de Símbolos Especiais Usados neste Trabalho

Símbolo	Pag.	Símbolo	Pag.
$q$	4	$aff A$	14
$P(s, q)$	5	$aff(x + A)$	14
$N(s, q)$	5	$F(K)$	15
$D(s, q)$	5	$R(W)$	16
$p(s, q)$	5	$N$	19
$a_i(q)$	5	$H(\omega)$	19
$P(s, q, r)$	6	$g_i(s)$	19
$Q$	6	$h_i(s)$	19
$r$	7	$K_{i,l}(s)$	19
$R$	7	$p(\cdot)$	21
$\mathcal{P}$	9	$p_i$	28
$a(Q)$	9	$R(\mathcal{P})$	28
$a(q^i)$	9	$\mathcal{N}$	35
$\mathcal{D}$	10	$\mathcal{P}(j\omega, Q)$	43
$H$	11	$\mathcal{R}(j\omega, Q)$	43
$R^d$	11	$A(q)$	44
$L(x, y)$	14	$\mathcal{A}(Q)$	44
		$\mathcal{P}(s, Q)$	44

## Bibliografia

- Barmish, B R. and H. I. Kang (1992). "*Extreme point results for robust stability of interval plants : Beyond first order compensators*". Automatica, Vol. 26, No. 6, pp. 1169-1180.
- Barmish, B. R., C. V. Hollot, F. J. Kraus and R. Tempo (1992). "*Extreme point results for robust stabilization of interval plants with first order compensators*". IEEE Trans. of Aut. Control, **AC-37**, 707-714.
- Barmish, B. R. and H. I. Kang (1993). "*A survey of extreme point results for robustness of control systems*". Automatica, Vol. 29, No 1, pp. 13-25.
- Bartlett, A. C., V. Hollot and L. Huang (1988). "*Root locations of an entire polytope of polynomials : it suffices to check the edges*". Mathematics of control, signals and systems, 1, 61-71.
- Bartlett, A. C. (1990). "*Vertex results for the steady state analysis of uncertain systems*". Proceedings of the 29th Conf. Decision and Control ,Honolulu, Hawaii.
- Jan van Tiel (1984). "*Convex Analysis An Introductory Text*". Royal Netherlands Meteorological Institute.
- J. L. Martins de Carvalho (1993). "*Dynamical Systems and Automatic Control*". Prentice Hall International Series in Systems and Control Engineering.
- J. Ackermann and Siemel (1990). "*What is a "large" number of parameters in robust systems?*" Proc. IEEE Conf. Decision and Control, Honolulu.
- J. Ackermann and Siemel (1991). "*On the computation of value sets for robust stability analysis*". ECC European Control Conference, Grenoble, France.
- Minnichelli, R. J., J. J. Anagnost, and C. A. Desoer (1989). "*An elementary proof of Kharitonov's stability theorem with extensions*". Trans. on Aut. Control, **AC-34**, 995-998.