JOAQUIM DA CONCEIÇÃO SAMPAIO
ENGENHEIRO CIVIL (U. P.)

CÁLCULO À ROTURA DE PEÇAS DE BETÃO ARMADO SUJEITAS A FLEXÃO

620.1(043)
SAMj/CAL

PORTO—1955

A Miguel Olaya Jordão Coelho,
com amizade sincera
Fev. 56

Cálculo à Rotura de Peças de Betão Armado Sujeitas a Flexão

Composto e Impresso na
Tipografia Sequeira, L.da
R. José Falcão, 122 — Porto

JOAQUIM DA CONCEIÇÃO SAMPAIO

ENGENHEIRO CIVIL (U. P.)

Cálculo à Rotura de Peças de Betão Armado Sujeitas a Flexão

Dissertação para doutoramento em Engenharia Civil, na Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

PORTO

1955

Quando, no início deste século, se aplicaram os princípios básicos da Resistência dos Materiais às peças de betão armado, elaborando-se as regras de cálculo que vieram a tornar-se universais, não passaram sem reparo as muitas discordâncias encontradas nos resultados fornecidos por esse cálculo e nos resultados obtidos nas experiências; eram igualmente muitas as dúvidas existentes sobre determinados aspectos, nomeadamente no que dizia respeito à possibilidade do betão tendido intervir ou não na resistência da peça. Estas dúvidas, a ausência de provas experimentais numerosas, obtidas em estruturas que apresentassem um período de funcionamento suficientemente longo, impediram que se ultrapassasse o regime de comportamento elástico do complexo aço-betão, considerando-se intencionalmente, por segurança, este constituinte como um material frágil e não plástico, como é na realidade.

Foi, porém, enorme o progresso verificado através de cinquenta anos de constantes e arrojadas realizações; uma melhoria acentuada nos métodos de investigação científica, com utilização de instrumentos de notável precisão e sensibilidade e processos de medida cada vez mais aperfeiçoados, permitindo um melhor conhecimento tanto das propriedades dos dois elementos como do seu comportamento recíproco, a introdução no mercado de aços de limites elásticos cada vez mais elevados, o aperfeiçoamento das qualidades do betão e do seu

controle, o desenvolvimento da técnica do betão pré-esforçado, fizeram pensar sèriamente nas anomalias do processo de cálculo clássico, tornando imperiosa a necessidade de o rever.

Esta necessidade tem sido assinalada por um número sempre crescente de estudos e investigações a que cientistas eminentes vêm procedendo, sobretudo na última vintena de anos, e visando a adopção de um método de cálculo que tenha por base o comportamento da peça por ocasião da rotura, permitindo-se assim a definição de um coeficiente de segurança com significado real, contràriamente ao que acontece com o actual processo de cálculo. Nalguns países, mesmo, os novos métodos de cálculo foram já introduzidos oficialmente nos respectivos regulamentos, trabalhando-se, noutros, com esse objectivo.

Se se pode falar numa aceitação pràticamente unânime da conveniência de se adoptarem os métodos de cálculo à rotura, o mesmo não se poderá afirmar quanto aos pormenores desses métodos; sobretudo, no que diz respeito às peças trabalhando à flexão, é grande o número de métodos propostos, todos diferindo num ou noutro aspecto.

Apresentamos neste trabalho uma série destes métodos; sem pretendermos abranger a sua totalidade, procuramos no entanto reunir uma série suficientemente numerosa, de modo a obter-se uma ideia o mais completa possível do conjunto de

estudos já existentes sobre o assunto. Expostos nas suas bases fundamentais, seguindo-se à exposição uma ligeira crítica comparativa, são finalmente objecto duma análise mais profunda, a partir da qual procuramos tirar conclusões sobre o verdadeiro comportamento das peças flectidas quando da sua rotura.

Não nos limitamos, porém, a tratar a questão sòmente num sentido especulativo; antes procuramos contribuir tanto quanto possível para o seu esclarecimento, mercê das observações e medidas que colhemos mediante a realização de ensaios de investigação a que procedemos no Laboratório de Ensaio de Materiais da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto e cuja descrição detalhada apresentamos no fim deste trabalho.

Para a realização destes ensaios, foi-nos preciosa a dedicada ajuda de alguns alunos do curso de engenharia civil desta Faculdade. A eles apresentamos o nosso agradecimento, bem como aos Senhores Professores e Assistentes com quem discutimos alguns dos resultados obtidos e de quem recebemos o melhor dos estímulos para o prosseguimento da tarefa que nos impusemos. À memória do Professor Theotónio Rodrigues, ao tempo Director do Laboratório de Ensaio de Materiais, apresentamos a nossa comovida homenagem de Saudade.

Resta-nos deixar aqui expresso o nosso profundo reconhecimento ao Instituto de Alta Cultura pela concessão da bolsa de estudo que nos facultou a realização do estágio em Paris, em 1953, junto de A. Guerrin, e de que este trabalho é, afinal, a continuação lógica.

Porto, Novembro de 1955.

Joaquim da Conceição Sampaio

I

INTRODUÇÃO

1 — O método de cálculo clássico.

Antes de entrarmos no assunto que constitue pròpriamente o objectivo do nosso trabalho faremos uma rápida apreciação das bases de que se partiu para a elaboração das regras do cálculo clássico, procurando vincar algumas das suas principais anomalias.

Considerando-se o betão como um material essencialmente frágil, é desprezada a sua resistência à tracção; mantem-se válidas quer as hipóteses de Bernouilli-Navier, quer a lei de Hooke; finalmente, dado o fenómeno de aderência, faz-se a hipótese dos dois materiais aço e betão se manterem solidários.

Surgiu daqui a noção de coeficiente de homogeneização, definido pelo cociente entre os módulos de elasticidade do aço e do betão; convencionou-se ser constante e valendo, segundo os Regulamentos, normalmente 10 ou 15.

Ora, nada há de mais incerto do que o valor que este coeficiente pode tomar. Se relativamente a um dos constituintes, o aço, se pode dizer que as suas propriedades apresentam características pràticamente constantes dentro de cada tipo de fabricação, já o mesmo não é lícito afirmar do betão: a composição, a resistência, as condições de fabrico e colocação em obra, a idade, a natureza e a

intensidade das cargas, as frequentes variações do meio ambiente, influem extraordinàriamente nas suas propriedades, portanto no valor do seu módulo de elasticidade; o coeficiente de homogeneização pode correntemente ter valores variando de 5 a 40.

E a verdade é que somos por vezes obrigados à resolução de equações do 2.° ou do 3.° grau para se encontrar a posição da linha neutra, o que faz conceder ao cálculo a aparência dum rigor que o problema não admite. Ignoramos completamente a valor de m; os Regulamentos dos diferentes países, na sua generalidade, deixam ao engenheiro uma margem relativamente larga na escolha do seu valor, normalmente de 5 a 15, a maioria das vezes sem justificação bem fundamentada.

Se relativamente às tensões nas armaduras de tracção o valor de m não é de grande importância, já o mesmo não acontece quanto às tensões no betão comprimido. E baseando-se afinal o aproveitamento duma peça no critério das tensões máximas admissíveis, pode ser ou não aceitável essa peça segundo o seu cálculo tenha sido feito com um ou outro valor adoptado para m.

Assim, por exemplo, numa peça de secção rectangular com 20 cm de largura e 18 cm de altura, armada com uma secção de aço perfazendo 3,01 cm^2, um momento flector igual a 6.600 kgm dá origem a tensões no aço e no betão valendo, respectivamente, 1360 kg/cm^2 e 60 kg/cm^2, na hipótese de o coeficiente de homogeneização valer 15; porém, estas tensões calculadas para um valor diferente de m, suponhamos 6, seriam de 1305 kg/cm^2 e 84 kg/cm^2. O betão teria a sua tensão aumentada em 40 %. Como saber então as tensões verdadeiras, se não conhecemos o valor verdadeiro de m?

Normalmente, as tensões calculadas são devidas sómente às cargas permanentes e às sobrecargas de utilização. Ora há que ter em conta as chamadas tensões intrínsecas do material, resultantes de várias causas, como: a hetero-

geneidade da constituição das secções; a elevação de temperatura durante o processo de presa; as deformações permanentes do betão sob a acção das cargas; a retracção; as variações de temperatura e humidade ambientes; a acção das cargas repetidas. Não é possível ter destas tensões um conhecimento absoluto, se bem que possa fazer-se uma avaliação da sua ordem de grandeza; as conclusões a que se chega são de que estas tensões, sobretudo as devidas à retracção, podem assumir valores importantes, agravando por vezes acentuadamente os efeitos das cargas exteriores; as tensões totais reais ultrapassarão as próprias tensões elásticas. Por conseguinte, para que os números de cálculo tenham qualquer sentido, é forçoso possuir-se os valores exactos destas tensões, o que não nos é permitido.

Não será também lícito pôr de parte completamente a intervenção do betão tendido na resistência da peça sob acção das cargas de serviço; se bem que, por vezes, uma retracção excessiva possa provocar uma fissuração mesmo antes de actuarem as cargas exteriores, esta fissuração nunca é integral, haverá sempre um núcleo interior intacto que, colaborando na resistência da peça, diminuirá por consequência o esforço nas armaduras de tracção.

Em suma, será lógico concluir firmemente pela incapacidade do cálculo clássico fornecer os valores das tensões verdadeiras nos dois constituintes da peça em serviço.

Com frequência, também, o cálculo regulamentar nos conduz a uma composição de secções irracional. É o caso corrente de se tornar necessário reforçar a zona do betão comprimido, mediante a utilização de armaduras. Ora, com excepção de alguns casos — de resto não correntes na prática — e em que o betão é excessivamente fraco ou as armaduras de tracção são empregadas em altas percentagens, e portanto a causa imediata da rotura da peça é o esmagamento do betão antes mesmo que o aço entre nas suas deformações plásticas, é ilusório o acréscimo que se

poderá pensar conseguir na resistência da peça com tal maneira de proceder. Pode afirmar-se que esse acréscimo é desprezável, sendo o aço dispendido quase em pura perda. Tem-se a satisfação de se encontrar uma tensão no betão inferior ao máximo admissível, mas na realidade a peça pouco vê melhorada a sua capacidade de resistência; será bem preferível utilizar a armadura suplementar colocando-a como reforço da armadura de tracção; então, sim, a melhoria será nítida.

Comprovamos este facto com os ensaios realizados com as vigas da série 6, mencionados no quadro I apresentado no final deste trabalho. As duas vigas 6C1 e 6C2 deveriam ser armadas para resistirem a um momento flector de 80 kgm; conduzindo o cálculo segundo as normas clássicas, fixando a tensões limites no aço e no betão respectivamente em 1.400 kg/cm² e 60 kg/cm², concluimos ser necessário dispor de uma armadura dupla $A_a = A'_a = 2\,\phi\,{}^5/_{16}''$. Ensaiadas até à rotura, esta verificou-se quando das cargas aplicadas resultavam momentos iguais a 199 kgm e a 210 kgm.

Suprimimos depois as armaduras de compressão, mas reforçamos a peça com $1\,\phi\,{}^5/_{16}''$ colocado junto das armaduras de tracção (vigas 6C3 e 6C4); a rotura verificou-se sendo os momentos iguais a 284 kgm e a 289 kgm. Isto é, com uma economia de 50 % na armadura suplementar, o acréscimo da resistência foi da ordem dos 40 %!

Finalmente, dispusemos a armadura de compressão em reforço da de tracção, que ficou deste modo a ser constituída por $4\,\phi\,{}^5/_{16}''$ (vigas 6C5 e 6C6); não se tendo previsto qualquer armadura especial para resistir ao esforço cortante, aconteceu ter sido este a causa da rotura das vigas (fotografia 2); no entanto, o momento atingido para uma das vigas foi de 348 kgm, correspondendo a um acréscimo de resistência de 70 %.

Frisamos já a impossibilidade do cálculo pelo método clássico nos indicar as tensões reais nas peças de betão

armado nas condições de funcionamento normal. Suponhamos, não obstante, que as conhecíamos. As bases em que este processo de cálculo se fundamenta conduzem à adopção de dois coeficientes de segurança distintos, um para o aço, outro para o betão, definidos pelo cociente entre a tensão capaz de provocar a rotura do elemento e a tensão correspondente à utilização da peça em serviço — entendendo-se por rotura não apenas a rotura física, com a desagregação da matéria, mas também o estado da peça em que as deformações são de tal ordem que não lhe é possível mais continuar a desempenhar as funções para que foi destinada. Ora um coeficiente de segurança assim definido não pode dar uma boa medida da verdadeira capacidade de resistência do elemento, a não ser que as tensões crescessem sempre proporcionalmente às cargas até à rotura; e sabe-se perfeitamente que tal não sucede. Embora conhecidas, para um dado valor da solicitação, as posições em que se encontram nos respectivos diagramas de deformação quer o aço quer o betão, não é possível conhecer para a solicitação que produz a rotura, as posições nesses diagramas por uma simples regra de proporcionalidade. E, de resto, do conhecimento dos coeficientes de segurança dos dois constituintes, quando considerados isoladamente, não podemos obter a lei que permita conhecer a segurança efectiva do complexo betão-aço.

Por conseguinte, ignorando qual é segurança duma peça, como resolver o problema dominante da economia?

2 — As tendências actuais do cálculo.

Acabamos de nos referir a algumas das incorrecções que afectam os cálculos realizados pelo processo clássico e que, estabelecido logo no início deste século, se tem mantido sem alterações na maioria dos países, o que não deixa

de ser surpreendente, sabendo-se como se encontram longe da realidade os princípios em que se fundamenta.

Sendo a função principal da maioria das estruturas de betão armado suportar as cargas com segurança, parece indicado, consequentemente, que se deve basear o cálculo de tais estruturas na sua capacidade máxima de resistência, completando-se o cálculo por considerações relativas às deformações sob as cargas de utilização.

Era, aliás, esta a filosofia dos pioneiros do cálculo do betão armado, preocupando-se, primeiro que tudo, com a resistência das estruturas e prestando relativamente pouca atenção às condições de funcionamento sob as cargas de utilização. Na época seguinte, porém, as aplicações directas da Teoria da Elasticidade alteraram completamente esse pensamento; não sendo, com efeito, satisfatória esta Teoria se se pretende avaliar a resistência das peças à rotura, resultou abandonar-se o cálculo com base neste estado.

Sem dúvida que, dada a enorme quantidade de obras existentes, desafiando o tempo, que foram calculadas segundo hipóteses mais ou menos falsas, poderá concluir-se que as imperfeições de cálculo não tiveram grande importância sobre o desenvolvimento de técnica da construção em betão armado; os raros acidentes havidos resultaram normalmente de outras causas. Mas na realidade se essas obras, mal ou insuficientemente calculadas, se mantiveram, deve procurar-se a explicação do facto no seu carácter hiperstático e nos fenómenos de adaptação. Impõe-se, de resto, a necessidade científica de acompanhar mais de perto a realidade; é lógico que se reformem os actuais processos de cálculo.

Há ainda a necessidade imperiosa da economia; o cálculo à rotura conduz em geral a uma economia de aço, é mais simples e mais rápido.

Parece ter sido de Steuermann a primeira tentativa para aplicação de regras diferentes das clássicas e que serviram de base ao regulamento russo anterior a 1939; o segundo

passo importante parece dever-se a Saliger, com as suas publicações «Bruchzustand und Sicherheit im Eisenbetonbalken» e «Der bildsame Bereich im Eisenbetonbalken», em 1936 e em 1937.

Sucederam-se nos últimos 20 anos os esforços para a adopção do cálculo à rotura, num movimento sempre crescente, sobretudo por parte de cientistas da Europa Central. Outros países, além da Rússia, introduziram a nova maneira de calcular nos seus regulamentos: assim, no Brasil, o método proposto pelo prof. Langendonck foi adoptado em 1937 pela Associação Brasileira de Cimento Portland e incluido nas normas brasileiras de 1940; mais recentemente, a Checoslováquia e a Áustria, tornaram oficial o cálculo à rotura.

Trabalha-se presentemente em outros países na revisão dos respectivos regulamentos, nomeadamente na França, sendo de esperar que, num futuro muito próximo, as novas directrizes sejam universalmente seguidas.

3 — Orientação dada ao presente trabalho.

Na II parte deste trabalho fazemos uma breve descrição dos pontos essenciais de 21 métodos de cálculo à rotura propostos por autores pertencentes aos 11 países seguintes: Alemanha (métodos de Gaede, Häbel, Mörsch e Rüsch), Áustria (métodos de Bittner, Gebauer, Jäger, Puwein e Saliger), Bélgica (método de Coppée), Brasil (método de Langendonck), Espanha (método de Torroja), Estados Unidos (métodos de Jensen e Whitney), França (métodos de Chambaud e Guerrin), Noruega (método de Brandtzaeg), Rússia (método de Steuermann), Suécia (método de Granholm) e Suíça (métodos de Maillart e Stüssi). Idêntica descrição é feita relativamente aos textos dos regulamentos brasileiro, russo, checoslovaco e austríaco.

Sòmente nos referimos ao cálculo de peças de betão armado normal, de secção transversal rectangular, armadas apenas à tracção, quando sujeitas a flexão plana simples. Seria, aliás, fácil generalizar para outras formas de secção, bem como para peças duplamente armadas; simplesmente o trabalho tornar-se-ia demasiado extenso.

Para maior clareza da exposição, reunem-se os vários métodos em quatro grupos, de acordo com as suas características. Dentro de cada grupo, a exposição é feita por ordem cronológica, afim de que se possa apreciar o modo como o conhecimento do fenómeno da rotura tem sido sucessivamente ampliado. Essa ordem é a seguinte:

Métodos do 1.º grupo: Torroja (1941), Bittner (1948), Puwein (1948) e Rüsch (1950).

Métodos do 2.º grupo: Stüssi (1932), Brandtzaeg (1935), Langendonck (1937), Jensen (1943), Granholm (1944), Häbel, (1945), Saliger (1947), Jäger (1948), Mörsch (1949) e Chambaud (1949).

Métodos do 3.º grupo: Coppée (1935) Whitney (1937), Gaede (1945) e Gebauer (1949).

Métodos do 4.º grupo: Steuermann (1933), Maillart (1938) e Guerrin (1949).

Procedemos a um estudo muito mais profundo das particularidades dos métodos de cálculo na III parte do trabalho e, aproveitando as observações e os resultados das medidas que colhemos nos ensaios por nós realizados, procuramos tirar conclusões sobre o verdadeiro comportamento das peças flectidas por ocasião da rotura.

Na IV e última parte fazemos a descrição detalhada desses ensaios, com apresentação das diferentes medidas e cálculos efectuados.

A finalizar, julgamos conveniente esclarecer que pusemos deliberadamente de parte outros métodos, como os de Emperger, Gehler, Paduart, Paris, Kazincki e Lyse, visto que, muito embora considerem como base para o cálculo o estado de tensões na secção por ocasião da rotura, mantêm

nas suas deduções o coeficiente de homogeneização m, o que prática e antecipadamente os anula quanto à valia que poderiam constituir para o esclarecimento da questão.

4 — Notação.

Resumimos a seguir as principais notações que empregamos no decurso da exposição.

b largura da secção rectangular; largura do banzo comprimido da secção em T

b_0 largura da nervura da secção em T

h distância do bordo do betão comprimido ao centro da gravidade das armaduras de tracção (altura útil)

h' distância da fase inferior da viga ao centro de gravidade das armaduras de compressão

k coeficiente empregado para a definição da área do diagrama de tensões no betão comprimido

k' coeficiente definindo a distância do centro de gravidade da área do diagrama de tensões no betão comprimido à face superior da viga

l vão teórico

$m = \frac{E_a}{E_b}$ coeficiente de homogeneização

$\overline{m}_a = \frac{M_R}{bh^2\sigma_a}$ e $\overline{m}_b = \frac{M_R}{bh^2\sigma_b}$ momentos específicos

s coeficiente de segurança

y distância da linha neutra ao bordo do betão comprimido

z braço do binário das forças interiores

A_a área das armaduras de tracção

A'_a área das armaduras de compressão

C resultante das tensões de compressão

E_a módulo de elasticidade do aço

E_b módulo de elasticidade do betão à compressão

E_t módulo de elasticidade do betão à tracção

H altura total da secção

M momento produzido pelas cargas exteriores

M_{CR} momento crítico

M_R momento de rotura

T força total de tracção

$\alpha = \frac{\sigma_a}{\sigma_b}$ relação entre as tensões no aço e no betão comprimido

$\beta = \frac{\sigma_t}{\sigma_b}$ relação entre as tensões de tracção e de compressão no betão

ε_a alongamento do aço

ε_{af} alongamento do aço correspondente ao início das grandes deformações

ε_{ai} alongamento do aço correspondente ao início das deformações plásticas

ε_b encurtamento do betão comprimido

ε_t alongamento do betão tendido

$\zeta = \frac{z}{h}$ coeficiente definindo a distância entre as resultantes das tensões de compressão e de tracção

$\xi = \frac{y}{h}$ coeficiente definindo a posição da linha neutra

σ_a tensão no aço

σ_{ae} tensão correspondente ao limite de elasticidade do aço

σ_{ar} tensão de rotura do aço

σ_b tensão no betão

σ_{bc}, σ_{bp}, σ_{bcil} resistência do betão medida em ensaios de compressão simples com provetas cúbicas, prismáticas ou cilíndricas (resistência cúbica, prismática ou cilíndrica)

σ_t resistência do betão à tracção

$\varphi = \frac{A_a}{bh}$ percentagem de armaduras de tracção

$\varphi' = \frac{A'_a}{bh}$ percentagem de armaduras de compressão

φ_{ci} percentagem crítica inferior

φ_{cm} percentagem crítica intermédia

φ_{cr} percentagem correspondente ao estado crítico

φ_{cs} percentagem crítica superior

II

MÉTODOS DE CÁLCULO

1.º GRUPO

5 — Método de Torroja.

Torroja estabelece o seu método de cálculo baseando-se nas seguintes hipóteses:

a) a curva de distribuição das tensões no betão comprimido é uma curva semelhante ao diagrama obtido em ensaios de compressão com provetas prismáticas de betão

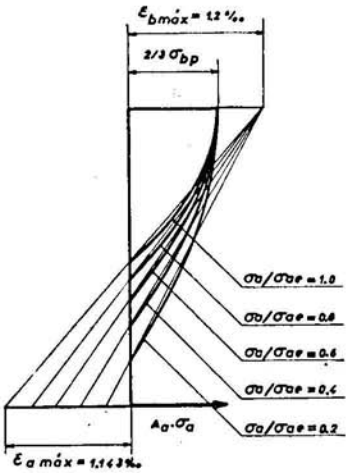

Fig. 1 — Curvas de tensões em vigas fortemente armadas, para vários valores de $\frac{\sigma_a}{\sigma_{ae}}$

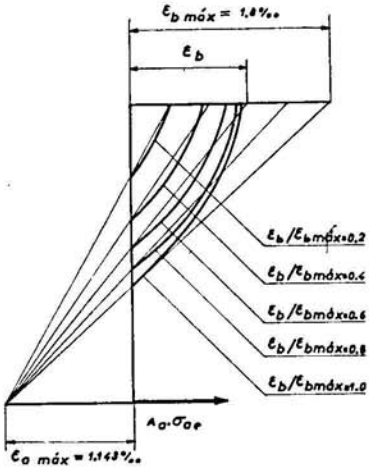

Fig. 2 — Curvas de tensões em vigas fracamente armadas, para vários valores de $\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_{b máx}}$

simples; as tensões σ_b estão relacionadas com os encurtamentos ε_b segundo a lei

$$1 - \frac{\sigma_b}{\sigma_{bp}} = \left(1 - \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_{bmáx}}\right)^{2,33}$$

b) as tensões σ_t e os alongamentos ε_t no betão tendido estão relacionados pela expressão

$$\frac{\sigma_t}{\sigma_{bp}} = 0,116 \left(1 - \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_{bmáx}}\right)^{1,33} - 0,116 \left(1 - \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_{bmáx}}\right)^{21,33}$$

c) admite para as armaduras um diagrama de deformação em que o módulo de elasticidade E_a é constante até ao início das deformações plásticas e depois nulo.

d) finalmente, admite a hipótese da conservação das secções planas.

Com as leis estabelecidas, escreve as equações gerais de equilíbrio que, na hipótese da flexão simples, para peças apenas armadas à tracção, são

$$\int_0^y b_z \, \sigma_{bz} \, dz - \int_0^{H-y} b_z \, \sigma_{tz} \, dz - A_a \, \sigma_a = o$$

$$\int_0^y b_z \, \sigma_{bz} \, z \, dz + \int_0^{H-y} b_z \, \sigma_{tz} \, z \, dz + A_a \, \sigma_a \, (h\text{-}y) = M$$

em que b_z, σ_{bz} e σ_{tz} são a largura da secção e as tensões de compressão e tracção do betão num ponto situado à distância z da linha neutra.

O desenvolvimento destes integrais conduz a expressões muitíssimo complicadas que, contudo, tendo em vista as aplicações práticas, são susceptíveis de simplificações, des-

prezando-se alguns termos, de pouca influência, como por exemplo a resistência do betão tendido.

Segundo a quantidade das armaduras utilizadas, define duas categorias de peças: as fortemente armadas, em que as deformações no aço são sòmente elásticas, e as fracamente armadas, quando se atingem as deformações plásticas.

Como medida de segurança, o valor da tensão máxima $\sigma_{bmáx}$ no betão é avaliado em $\frac{2}{3}\sigma_{bp}$; e, quanto às deformações, é definido um estado crítico anterior ao estado de rotura da peça, caracterizado pelos encurtamentos do betão e alongamentos do aço seguintes:

Peças fortemente armadas, $\varepsilon_{bmáx} = 1{,}2\,^{o}/_{oo}$; peças fracamente armadas, $\varepsilon_{bmáx} = 1{,}8\,^{o}/_{oo}$ (para este tipo de peças, a tensão no aço seria igual ao seu limite de elasticidade σ_{ae}). O alongamento nos aços é suposto igual a

$$\varepsilon_{amáx} = \frac{\sigma_{ae}}{E_a},$$

ou, para aços de $\sigma_{ae} = 2400$ kg/cm² e $E_a = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm², $\varepsilon_{amax} = 1{,}143\,^{o}/_{oo}$.

A altura útil h da secção mais económica é obtida por aplicação da fórmula.

$$h = 1{,}02 \sqrt{\frac{M}{b\,\sigma_{bmáx}}}$$

em que o momento das forças aplicadas M é expresso em tm, a largura b e a altura h em m e a resistência máxima σ_{bmax} em kg/cm².

A área das armaduras a empregar será dada por

$$A_a = 1{,}02\ bh\ \sigma_{bmáx}.$$

6 — Método de Bittner.

Na sua doutrina de cálculo, estabelecida pela primeira vez em 1935 e corrigida em 1948, Bittner, admitindo como válida a hipótese de conservação das secções planas, introduz a noção de estado crítico da peça, definido pelas deformações no betão ou nas armaduras que, por excessiva, a tornem inaproveitável. É este estado crítico, por conseguinte, anterior ao estado de rotura físico da peça.

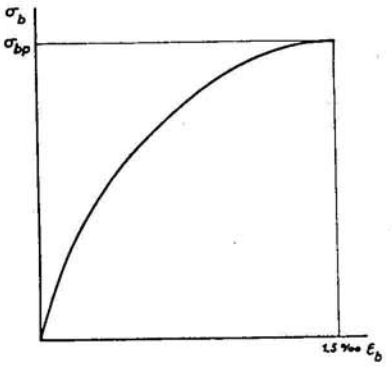

Fig. 3 — Diagrama de deformação do betão

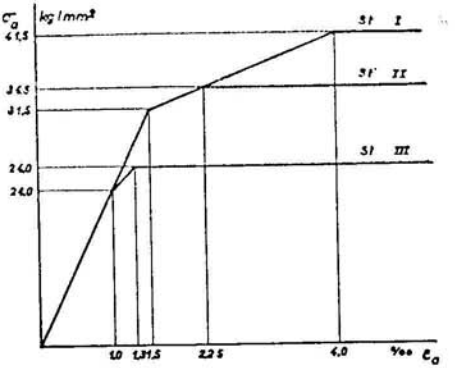

Fig. 4 — Diagramas de deformação dos aços

Admite que a distribuição das tensões na zona do betão comprimido se faz segundo uma curva afim do diagrama tensões-deformações obtido em ensaios de compressão feitos com prismas, diagrama este suposto parabólico. A deformação correspondente ao vértice desta parábola é considerada constante para quaisquer qualidades de betão e valendo 1,5 ‰. É portanto este valor um dos parâmetros definidores do estado crítico.

O outro parâmetro é o alongamento máximo admitido nas armaduras, igual a 4 ‰, para os três tipos de aço St I, St II e St III cujos diagramas de deformação se representam na figura 4. Para alongamentos das armaduras

superiores a este valor já a fissuração no betão se torna muito pronunciada.

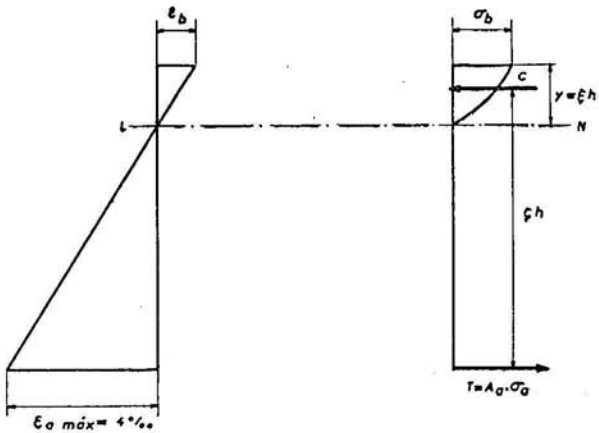

Fig. 5 — Estado crítico em vigas fracamente armadas

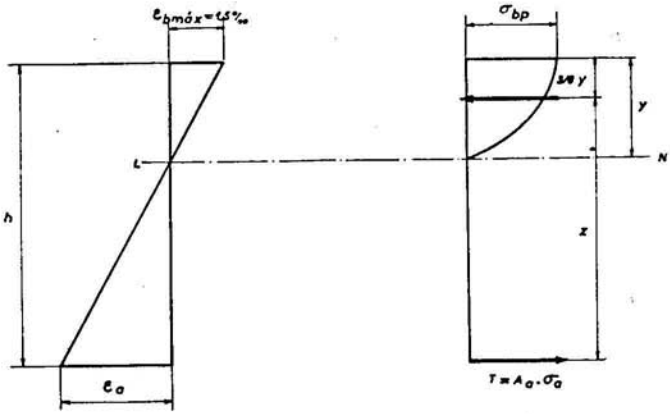

Fig. 6 — Estado crítico em vigas fortemente armadas

Segundo se trata duma peça fraca ou fortemente armada, serão respectivamente o alongamento do aço ou o encurtamento do betão que definirão o estado crítico.

A hipótese das secções se manterem planas permite determinar a posição da linha neutra, definida pela sua distância y à fibra mais comprimida do betão; dos diagramas b) ou d) pode obter-se

$$\frac{y}{\varepsilon_b} = \frac{h \cdot y}{\varepsilon_a}$$

isto é,

$$y = \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_a + \varepsilon_b} h = \xi h,$$

sendo

$$\xi = \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_a + \varepsilon_b}.$$

Para um dado valor da percentagem de armadura o estado crítico é atingido simultâneamente no betão e no aço; é a chamada percentagem crítica φ_{cr}.

O valor desta percentagem φ_{cr}. pode obter-se fàcilmente: a igualdade entre a força de compressão

$$C = \frac{2}{3} b \xi h \sigma_{bp}$$

e a força de tracção

$$T = \varphi bh \sigma_{ae}$$

permite encontrar

$$\varphi = \frac{2}{3} \frac{\sigma_{bp}}{\sigma_{ae}} \xi$$

em que ξ é obtido substituindo ε_b e ε_a pelos seus valores limites; então $\xi = \frac{3}{11}$ e

$$\varphi_{cr} = \frac{2}{11} \frac{\sigma_{bp}}{\sigma_{ae}}$$

Para uma relação $\frac{\sigma_{bp}}{\sigma_{ae}} = \frac{1}{10}$ a percentagem crítica será de cerca de 1,8 %.

Numa viga fortemente armada (de percentagem superior à percentagem crítica), o estado crítico será condicionado pelo encurtamento do betão; será o caso dos diagramas da fig. 6. O braço do binário das forças interiores vale $z = h\left(1 - \frac{3}{8}\xi\right)$; portanto esse binário tem por momento o valor

$$M_{CR} = \frac{2}{3}\,\xi\left(1 - \frac{3}{8}\,\xi\right) bh^2\,\sigma_{bp}$$

ou

$$M_{CR} = \left(1 - \frac{3}{8}\,\xi\right) bh^2\,\varphi\,\sigma_a$$

Para as peças fracamente armadas (abaixo da percentagem crítica) obter-se-ia uma expressão análoga.

O valor σ_{bp} — resistência à compressão em ensaios com prismas — é relacionado com a resistência dos cubos σ_{bc} pela expressão

$$\sigma_{bp} = 0{,}75\,\sigma_{bc}.$$

O coeficiente de segurança $s = \frac{M_{CR}}{M}$, em que M é o momento das cargas exteriores, é aqui definido em relação ao estado crítico. Bittner indica para as aplicações correntes $s = 1{,}7$.

7 — Método de Puwein.

Partindo da hipótese da conservação das secções planas, os esforços serão determinados a partir de dois diagramas teóricos do aço e do betão, ambos de aspecto tra-

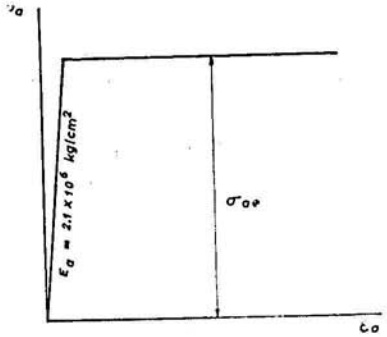

Fig. 7 Diagrama de deformação do aço

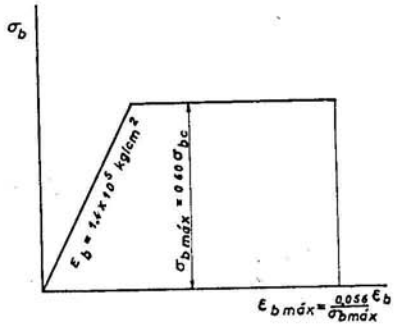

Fig. 8 — Diagrama de deformação do betão

pezoidal e em que os ramos inclinados são tais que $\frac{E_a}{E_b} = 15$, como no método clássico. A tensão máxima no betão é uma fracção da sua resistência cúbica:

$$\sigma_{b\,máx} = 0{,}60\ \sigma_{bc}$$

e o seu encurtamento máximo $\varepsilon_{b\,máx}$ é considerado valendo

$$\varepsilon_{b\,máx} = \frac{0{,}056}{\sigma_{b\,máx}}$$

Não baseia Puwein o dimensionamento da peça para o próprio estado de rotura, mas sim para uma fase anterior, o estado crítico. Este é definido do modo seguinte: considerando a peça submetida à acção dum momento sucessivamente crescente, a sua curvatura $\frac{1}{R}$ crescerá com este momento, podendo distinguir-se duas fases: uma primeira em que as curvaturas são proporcionais aos momentos — a peça comportando-se, pois, elàsticamente — limitada por um valor M_E do momento aplicado; seguidamente deixa de haver proporcionalidade, a curvatura da peça aumenta cada vez mais para pequenos acréscimos do mo-

mento, até se dar a rotura, valendo o momento M_R. Define então Puwein o estado crítico como aquele que é caracterizado pela deformação que o momento de rotura provocaria na peça se as deformações fossem sempre proporcionais aos momentos; a esse estado crítico corresponde o momento M_{CR}, de determinação exacta muito trabalhosa; no intuito de simplificar e sendo de conhecimento fácil os valores de M_E e M_R, considera que M_{CR} poderá ser aproximadamente igual a

$$M_{CR} = M_{CR} + \frac{1}{3} (M_R - M_E)$$

Sendo portanto M_E e M_R determinados a partir dos diagramas considerados nas figuras 9 e 10, é evidente que o estado crítico ficará mais ou menos próximo do limite de

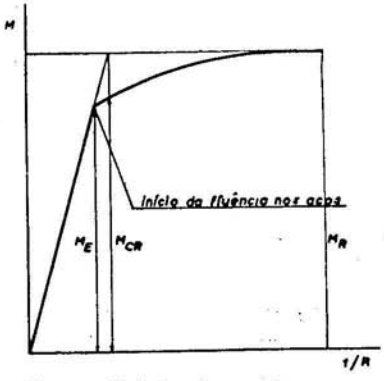

Fig. 9 — Variação da curvatura em função dos momentos aplicados, em peças fracamente armadas

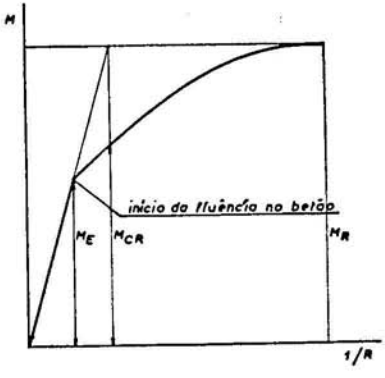

Fig. 10 — Variação da curvatura em função dos momentos aplicados, em peças fortemente armadas

funcionamento elástico, a que corresponde M_E, consoante se tratar de peças fraca ou fortemente armadas Nas primeiras, atingir-se-á em primeiro lugar o limite elástico dos aços; para as segundas, será a partir do limite de

elasticidade admitido no betão que se determinará M_E. A segurança em relação à rotura é pois maior para as percentagens altas de armaduras do que para as pequenas percentagens.

8 — Método de Rüsch.

Embora Rüsch tenha estabelecido a sua teoria para peças flectidas pré-esforçadas, é possível, mediante a anulação do pré-esforço, aplicá-la ao caso das peças que temos vindo considerando.

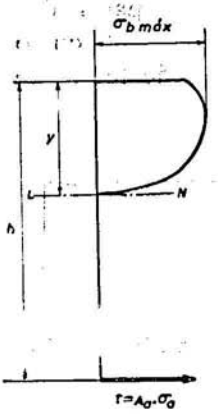

Fig. 11 — Diagrama das tensões no estado de rotura

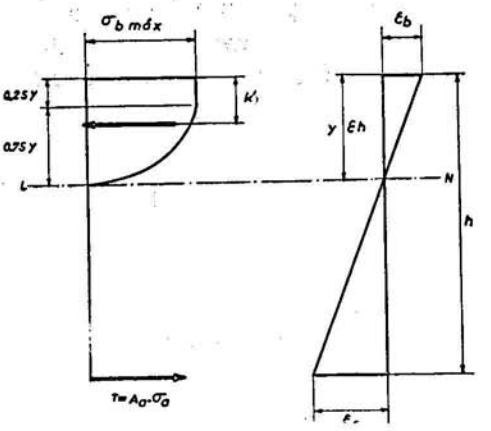

Fig. 12 — Diagramas adoptados para o dimensionamento

Admitindo que as tensões no betão tendido na ocasião da rotura se distribuem provàvelmente como se mostra na fig. 11 — convindo frisar que supõe não existir qualquer afinidade entre esta distribuição e o diagrama de deformação do betão simples obtido em ensaios de compressão — considera, para o dimensionamento da peça, um esquema de tensões de harmonia com o indicado na fig. 12, dentro

do domínio plástico estável de funcionamento da peça. Não se preocupa com a determinação exacta das tensões; na realidade bastará conhecer a sua resultante $C = kby\sigma_{bc}$ bem como a sua posição, definida por $k'y$.

O braço do binário das forças interiores z será dado por

$$z = h - k'y = h\,(1 - k'\xi)$$

em que

$$y = \xi h .$$

A distância y da linha neutra à face superior da peça pode determinar-se muito simplesmente, desde que se admita a validade da hipótese da conservação das secções planas; assim

$$y = \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_b + \varepsilon_a} h = \xi h .$$

e o momento crítico será

$$M_{CR} = Cz = kbh^2\,\sigma_{bc}\,\xi\,(1 - k'\xi).$$

Enquanto as armaduras estiverem aquém do seu limite elástico, será $\sigma_a = E_a\,\varepsilon_a$, e, como $\varepsilon_a = \varepsilon_b \frac{1-\xi}{\xi}$, $\sigma_a = E_a\,\varepsilon_b \frac{1-\xi}{\xi}$.

A igualdade $C = T$ permite encontrar $\sigma_a = \frac{k\,\sigma_{bc}\,\xi}{\varphi}$,

portanto

$$E_a\,\varepsilon_b \frac{1-\xi}{\xi} = \frac{k\,\sigma_{bc}\,\xi}{\varphi}$$

ou

$$k\,\sigma_{bc}\,\xi^2 + \varphi\,E_a\,\varepsilon_b\,\xi - \varphi\,E_a\,\varepsilon_b = 0 .$$

Resolvendo, obtém-se

$$\xi = \frac{\varphi\,E_a\,\varepsilon_b}{2\,k\,\sigma_{bc}} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4k\,\sigma_{bc}}{\varphi\,E_a\,\varepsilon_b}} \right)$$

Atingido o limite elástico, será $\sigma_{ae} = \frac{k\,\sigma_{bc}\,\xi}{\varphi}$ e $\xi = \frac{\varphi\,\sigma_{ae}}{k\,\sigma_{bc}}$.

Dos resultados das experiências, encontrou Rüsch para k o valor 0,80, para a distribuição correspondente ao estado da rotura (fig. 11); propõe então que, para o dimensionamento, se faça $k = 0{,}75$. O outro factor k' será igual a 0,40.

Permitindo uma fissuração até 1mm de abertura, determinou para ε_a um máximo igual a 0,5 °/₀.

Mas, com o intuito de que nas secções muito armadas a rotura não surgisse inesperadamente, impõe que aquém da carga crítica haja sempre uma fissuração perfeitamente visível; tal facto acontece para alongamentos da armadura iguais a 0,2 °/₀. Em consequência, há um máximo de percentagem de armadura que não deve ser ultrapassado.

Para encurtamento do betão, ainda estável, considera um máximo $\varepsilon_b = 0{,}2$ °/₀.

Dada a dispersão obtida nos resultados da resistência dos cubos σ_{bc}, Rüsch entende conveniente entrar apenas com 2/3 deste valor para o dimensionamento da peça, fixando o coeficiente de segurança em $s = 1{,}75$.

9 — Breve crítica comparativa

Os quatro métodos que acabamos de expor apresentam de comum o facto de não se tomar como base para o dimensionamento da peça aquele estado em que se encontram esgotadas as suas possibilidades de resistência, com a subsequente desagregação do material, mas um estado anterior, dentro do domínio de funcionamento estável, caracterizado por uma deformação que não deve ser excedida.

A segurança resulta, então, ser definida relativamente a este estado de deformação crítica, podendo a peça con-

tinuar a resistir a acréscimos da solicitação sem que a rotura se verifique. Estes acréscimos serão tanto maiores quanto mais elevada for a quantidade das armaduras utilizadas; prova-o a experiência, mas a análise do comportamento das peças permite chegar à mesma conclusão : sendo, com efeito, a rotura em peças muito armadas condicionada directamente pelo betão, uma vez ultrapassado o estado crítico de deformação as fibras comprimidas vão-se plastificando sucessivamente, experimentando os aços, que se encontram ainda no regime de deformações elásticas, uma subida de tensão; já nas peças fracamente armadas, o aço entrando em fluência, deformar-se-á a tensão pràticamente, constante, estando neste caso o momento correspondente ao estado crítico mais próximo do momento de rotura do que no primeiro tipo de peças.

Embora se conheçam as características dos materiais constituintes duma peça, é bastante incerto o conhecimento da intensidade da fissuração ou deformação produzido por uma carga determinada, visto essa intensidade depender de factores muito variáveis, tornando-se difícil obter leis de relação com suficiente rigor. De modo que será ilusório pretender obter uma segurança com um sentido preciso relativamente ao estado crítico de deformação. Já o estado de rotura é de determinação muito mais exacta.

De modo que, se é um facto que a utilização duma peça é condicionada pelo seu grau de deformação e por conseguinte se torna indispensável tê-lo em atenção, pode, porém, mediante a escolha dum coeficiente adequado, tomado a partir do estado de rotura, ter-se uma segurança a um tempo exacta, no que diz respeito às possibilidades de resistência da peça, mas também suficiente, relativamente às deformações perigosas.

Quanto às particularidades dos métodos, há a referir que o diagrama admitido por Rüsch (fig. 11) para as tensões na zona comprimida é absolutamente lógico, independente de qualquer relação com o diagrama obtido em

ensaios de compressão sobre provetas de betão simples, contràriamente ao que estabelecem Bittner ou Torroja. Também um diagrama trapezoidal, como o de Puwein, de modo algum pode ser exacto. A forma do diagrama, porém, como discutiremos com mais detalhe na III parte, não tem uma importância primordial.

Quanto ao valor da tensão máxima de compressão, se, segundo Bittner, se deprecia um tanto essa tensão, provàvelmente mais de acordo com o indicado por Rüsch, já nos métodos de Puwein ou Torroja é-se extremamente cauteloso, ao admitir-se ser apenas $\sigma_{bmáx} = 0{,}60\ \sigma_{bc}$ ou $\sigma_{bmáx} = 0{,}75\ \sigma_{bcil}$.

A diversidade que se verifica nos diferentes métodos sobre os valores dos parâmetros definidores do estado crítico confirma o que dissemos anteriormente sobre a dificuldade de se obter deles um conhecimento suficientemente preciso.

2.º GRUPO

10 — Método de Stüssi.

Data de 1932 a publicação em que Stüssi expõe o seu método de cálculo, que é o mais antigo de quantos apresentamos neste trabalho.

Considerando como curva de distribuição das tensões na zona comprimida uma figura afim do diagrama de deformação do betão obtido em ensaios de compressão efectuado com prismas, a resultante dessas tensões exprimir-se-á por

$$C = k\ b\ y\ \sigma_{bp} \qquad (10\text{-}1)$$

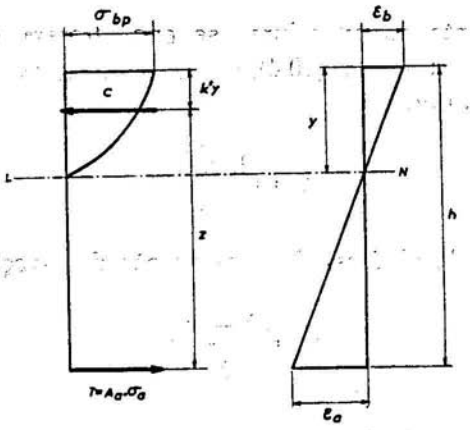

Fig. 13 — Diagramas propostos por Stüssi

e a sua distância ao centro de gravidade das armaduras será

$$z = h - k'y.$$

Se as armaduras chegam a atingir a sua fase de deformações plásticas, então a força de tracção será

$$T = A_a \, \sigma_{ae} \qquad (10\cdot2)$$

e o momento de rotura será igual a

$$M_R = A_a \, \sigma_{ac} \, (h - k'y). \qquad (10\cdot3)$$

Visto ser $C = T$, de (10·1) e (10 2) obtém-se

$$y = \frac{A_a \, \sigma_{ae}}{kb \, \sigma_{bp}}. \qquad (10\ 4)$$

Fazendo-se $\frac{k'}{k} = \beta$ e introduzindo o valor de y na expressão (10·3), obtém-se

$$M_R = A_a \, \sigma_{ae} \left(h - \beta \frac{A_a \, \sigma_{ae}}{b \, \sigma_{bp}}\right).$$

Enquanto as armaduras se encontrarem em regime elástico, da expressão (10.4), designando agora a tensão do aço por σ_a, obtém-se

$$\sigma_a = \frac{kby\,\sigma_{bp}}{A_a}.$$

Mas, pela hipótese da conservação das secções planas,

$$\varepsilon_a = \frac{h-y}{y}\,\varepsilon_b$$

e

$$\sigma_a = E_a\,\varepsilon_a = E_a\,\frac{h-y}{y}\,\varepsilon_b.$$

Portanto

$$\frac{kby\sigma_{bp}}{A_a} = E_a\,\frac{h-y}{y}\,\varepsilon_b$$

equação do 2.º grau em y que, resolvida, dá

$$y = \frac{A_a\,E_a\,\varepsilon_b}{2\,k\,b\,\sigma_{bp}}\left(-1+\sqrt{1+\frac{4\,k\,b\,h\,\sigma_{bp}}{A_a\,E_a\,\varepsilon_b}}\right)$$

ou, fazendo $\frac{E_a\,\varepsilon_b}{\sigma_{bp}} = \mu$,

$$y = \frac{A_a\,\mu}{2\,k\,b}\left(-1+\sqrt{1+\frac{4\,k\,b\,h}{A_a\,\mu}}\right)$$

e será

$$M_R = k\,b\,\sigma_{bp}\;y\,(h-k'y).$$

Os valores dos coeficientes k e k′ e do encurtamento máximo ε_b dependem da qualidade do betão; assim,

para um betão de resistência igual a 228 kg/cm², indica Stüssi os valores $\varepsilon_b = 2{,}2\ ^o/_{oo}$, $k = 0{,}70$ e $k' = 0{,}39$. Admite ainda ser, em média, $\beta = \frac{k'}{k} = 0{,}55$.

11 — Método de Brandtzaeg.

Dos seus ensaios sobre vigas fortemente armadas estabeleceu Brandtzaeg a sua teoria de cálculo em que admite uma ampla capacidade do betão para a plastificação. Assim, considera a distribuição das tensões de compressão do seguinte modo: um ramo parabólico, afim do diagrama tensões-deformações obtido em ensaios de compressão com prismas, seguido dum ramo rectilíneo, em que admite a

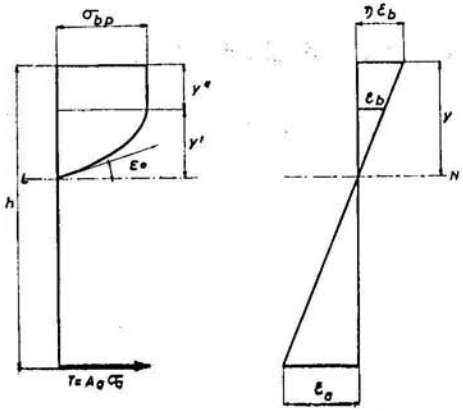

Fig. 14 — Diagramas propostos por Brandtzaeg

plastificação completa da secção. A tensão neste trecho é suposta igual à resistência σ_{bp} dos prismas; a parábola, com origem na linha neutra tem o vértice no ponto cuja deformação ε_b é igual à correspondente à tensão σ_{bp} obtida em ensaios de compressão com prismas.

O encurtamento na face superior da peça flectida será $\eta\varepsilon_b$ em que η é evidentemente maior que a unidade.

Do diagrama de deformações pode então tirar-se o valor da distância y da linha neutra à fase superior:

Com efeito,

$$\frac{y}{\eta\ \varepsilon_b} = \frac{h-y}{\varepsilon_a},$$

donde

$$y = \frac{\eta\ \varepsilon_b}{\varepsilon_a + \eta\ \varepsilon_b}\, h = \xi\, h\,.$$

A tensão na armadura σ_a, enquanto não se atingir as deformações plásticas, será dada por

$$\sigma_a = E_a\, \varepsilon_a$$

em que E_a é o seu módulo de elasticidade.

De $\xi = \dfrac{\eta\ \varepsilon_b}{\varepsilon_a + \eta\ \varepsilon_b}$ pode tirar-se $\varepsilon_a = \dfrac{1-\xi}{\xi}\,\eta\ \varepsilon_b$;

portanto

$$\sigma_a = E_a\ \eta\ \varepsilon_b\ \frac{1-\xi}{\xi}\,.$$

Escrevamos a igualdade que exprime o equilíbrio entre as forças de compressão e de tracção na secção:

$$\sigma_a\ \varphi\ bh = b\ \sigma_{bp}\left(y'' + \frac{2}{3}\,y'\right). \qquad (11.1)$$

y' e y'' podem obter-se fàcilmente; na verdade

$$\begin{cases} y' + y'' = y \\ \dfrac{y'}{\varepsilon_b} = \dfrac{y}{\eta\ \varepsilon_b} \end{cases}$$

portanto,

$$y' = \frac{y}{\eta} \qquad \text{e} \qquad y'' = y\left(1 - \frac{1}{\eta}\right)$$

e a equação (11.1) tomará a forma

$$\sigma_a \varphi\, bh = b\, \sigma_{bp}\left[y\left(1 - \frac{1}{\eta}\right) + \frac{2}{3}\frac{y}{\eta}\right] = b\, \sigma_{bp}\, \xi\, h\left(1 - \frac{1}{3\eta}\right)$$

como $$\sigma_a = \frac{\sigma_{bp}}{\varphi}\, \xi\left(1 - \frac{1}{3\eta}\right)$$

será

$$E_a\, \eta\, \varepsilon_b\, \frac{1-\xi}{\xi} = \frac{\sigma_{bp}}{\varphi}\, \xi\left(1 - \frac{1}{3\eta}\right)$$

e a posição da linha neutra ficará determinada mediante a resolução desta equação:

$$\frac{1}{\eta\varphi}\left(1 - \frac{1}{3\eta}\right)\xi^2 + \frac{E_a\, \varepsilon_b}{\sigma_{bp}}\, \xi - \frac{E_a\, \varepsilon_b}{\sigma_{bp}} = 0.$$

Fazendo $\lambda = \dfrac{3\eta^2\varphi}{3\eta - 1}$ e $\mu = \dfrac{E_a\, \varepsilon_b}{2\sigma_{bp}}$, será

$$\frac{1}{\lambda}\xi^2 + 2\mu\xi - 2\mu = 0$$

e $$\xi = \mu\lambda\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2}{\mu\lambda}}\right).$$

Calculemos o momento das forças de compressão em relação à posição das armaduras; será

$$M_R = b\, \sigma_{bp}\, y''\left(h - \frac{y''}{2}\right) + \frac{2}{3}\, b\, \sigma_{bp}\, y'\left(h - y'' - \frac{3}{8}y'\right) =$$

$$= b\,h^2\,\sigma_{bp}\left[\xi\frac{\eta-1}{\eta}\left(1-\xi\frac{\eta-1}{2\eta}\right)+\frac{2\xi}{3\eta}\left(1-\xi\frac{\eta-1}{\eta}-\frac{3\xi}{8\eta}\right)\right]$$

$$= b h^2\,\sigma_{bp}\left(\xi\frac{\eta-1}{\eta}-\xi^2\frac{\eta^2-2\eta+1}{2\eta^2}+\frac{2\xi}{3\eta}-\frac{2\xi^2}{3}\cdot\frac{\eta-1}{\eta^2}-\frac{\xi^2}{4\eta^2}\right)=$$

$$= b h^2\,\sigma_{bp}\left(\xi-\frac{\xi^2}{2}-\frac{\xi}{3\eta}+\frac{\xi^2}{3\eta}-\frac{\xi^2}{12\eta^2}\right)=$$

$$= b h^2\ \sigma_{bp}\ \xi\left[1-\frac{\xi}{2}+\frac{1}{3\eta}\left(-1+\xi-\frac{\xi}{4\eta}\right)\right].$$

Baseado nos resultados das suas experiências admitiu ser $\varepsilon_b = \frac{2\ \sigma_{bp}}{E_o}$, em que E_o é o coeficiente angular da tangente à parábola na origem. Por conseguinte, o coeficiente μ introduzido para a determinação de ξ terá o valor

$$\mu = \frac{E_a\,\varepsilon_b}{2\ \sigma_{bp}} = \frac{E_a}{E_o}.$$

Considerou também ser $\eta = 1{,}25 + \frac{400}{\sigma_{bc}} - \frac{\sigma_{bc}}{400}$, em que a resistência dos cubos σ_{bc} está relacionada com a resistência dos prismas σ_{bp} do seguinte modo: $\sigma_{bp} = 0{,}77\ \sigma_{bc}$.

Para valores do módulo de elasticidade inicial E_o e do encurtamento na fibra mais afastada da linha neutra $\eta\ \varepsilon_b$ encontrou

$$E_o = 95500 + \sigma_{bc} \qquad (\text{kg/cm.}^2)$$

e

$$\eta\ \varepsilon_b = \left(6{,}88 - 0{,}93\ \frac{\sigma_{bc}}{100}\right). \qquad (^o/_{oo})$$

No caso de peças normalmente armadas, Brandtzaeg admitiu a possibilidade de se realizar a plastificação com-

pleta do betão comprimido; a expressão que dá o valor de M_R simplifica-se muito, sendo

$$M_R = b\,\sigma_{bp}\,y\left(h - \frac{1}{2}\,y\right) = b\,h^2\,\sigma_{bp}\,\alpha\,\varphi\left(1 - \frac{\alpha\,\varphi}{2}\right)$$

por ser $y = \varphi\,\alpha\,h$, em que se representa por α o cociente $\frac{\sigma_R}{\sigma_{bp}}$.

12 — Método de Langendonck.

O prof. brasileiro Telémaco van Langendonck supõe que, na ocasião da rotura, a curva de distribuição de tensões no betão comprimido tem o aspecto da fig. 15 e corresponde ao diagrama de deformação obtido nos ensaios de compressão efectuado com provetas cilíndricas de 15 cm de diâmetro e 30 cm de altura. No entanto, para efeitos de cálculo, admite que se verifica a plastificação total do betão, considerando, deste modo, um rectângulo como figura representativa das tensões (fig. 16).

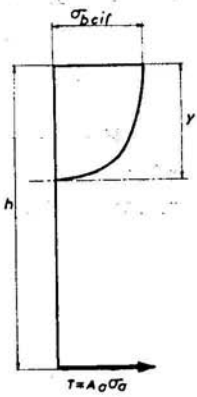

Fig. 15 — Diagrama das tensões no estado de rotura

Quanto às armaduras, supõe satisfazerem à lei de Hooke para tensões inferiores ao limite elástico, e que, uma vez atingido este ponto, se deformam a tensão constante.

Admitindo que a rotura da peça é causada por esmagamento do betão, considera a existência de dois tipos de peças, as fracamente armadas e as fortemente armadas, conforme os aços, no instante da rotura, entram ou não em fluência.

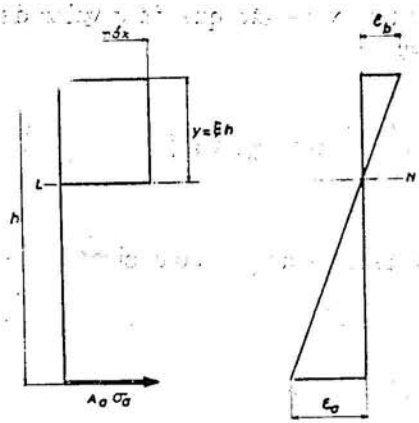

Fig. 16 — Diagramas adoptados para o cálculo

Por segurança, para compensar possíveis flutuações do valor σ_{bcil} observado nos ensaios, adopta uma tensão $\sigma_{bmáx}$ nos cálculos inferior em 25 °/₀, isto é, $\sigma_{bmáx} = 0{,}75\ \sigma_{b\,cil}$.

Igualmente por segurança adopta para os cálculos um valor de encurtamento ε_b das fibras mais afastadas da linha neutra inferior ao real, compensando, de resto, o erro proveniente da subida da linha neutra causada pela adopção dum diagrama rectangular para distribuição das tensões no betão; assim,

$$\varepsilon_b = 1{,}5\ ^{o}/_{oo}\,.$$

Finalmente, é mantida válida a hipótese da conservação das secções planas; deste modo, a posição da linha neutra será determinada pela relação simples:

$$\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_a} = \frac{y}{h-y} \quad \text{ou} \quad \varepsilon_a = \varepsilon_b\,\frac{h-y}{y}\,. \qquad (12.1)$$

Estudemos em primeiro lugar o caso das peças fracamente armadas; o equilíbrio entre as forças de tracção e de compressão traduz-se pela igualdade

$$\sigma_{máx}\ by = \sigma_{ae}\ A_a \qquad (12.2)$$

donde se pode obter para y uma relação independente do valor do encurtamento ε_b do betão; sendo $A_a = \varphi\, b\, h$, e

designando a relação entre as tensões no aço e no betão $\frac{\sigma_{ae}}{\sigma_{bmáx}}$ por α, obtem-se $y = \alpha \varphi h$.

O momento de rotura será então

$$M_R = \sigma_{bmáx}\, b\, y \left(h - \frac{y}{2}\right) = \sigma_{ae}\, \varphi\, b\, h \left(h - \frac{y}{2}\right)$$

ou

$$M_R = \sigma_{ae}\, \varphi\, b\, h^2 \left(1 - \frac{\alpha \varphi}{2}\right).$$

Vejamos agora o caso das peças fortemente armadas; a igualdade (12.2) escrever-se-á

$$\sigma_{bmáx}\ b\ y = \sigma_a\ A_a$$

ou

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{b\ máx}\ y}{\varphi\ h} \qquad (12.3)$$

sendo necessária uma outra equação para determinar σ_a. Já se viu que

$$\varepsilon_a = \varepsilon_b \frac{h - y}{y};$$

por conseguinte

$$\sigma_a = E_a\, \varepsilon_a = E_a\, \varepsilon_b \frac{h - y}{y} \qquad (12.4)$$

Os últimos membros das igualdades atrás escritas (12.3) e (12.4) serão iguais :

$$\frac{\sigma_{b\,máx}\ y}{\varphi\ h} = E_a\ \varepsilon_a\ \frac{h - y}{y}\ .$$

Designando por λ o cociente $\frac{E_a\ \varepsilon_a}{\sigma_{b\,máx}}$, a equação que permite encontrar y é então

$$y^2 + \varphi\ h\ \lambda\ y - \varphi\ h^2\ \lambda = o$$

isto é

$$y = \frac{\varphi\, h\, \lambda}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\varphi\ \lambda}}\right) = \xi\ h\ ;$$

logo, de (12.3),

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{b\,máx}\ \lambda}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\varphi\lambda}}\right).$$

Estes dois valores de y e de σ_a permitem calcular o momento de rotura

$$M_R = \sigma_a\, bh^2\ \varphi\ \left(1 - \frac{\xi}{2}\right).$$

O momento flector M que a peça poderá suportar será

$$M = \frac{M_R}{s}$$

em que o coeficiente da segurança s em geral é tomado entre 1,6 e 2.

13 — Método de Jensen.

Considera este autor que na ocasião da rotura e qualquer que seja a qualidade do betão existe sempre uma certa zona de betão comprimido em que a plastificação é completa. Assim, tomando um diagrama trapezoidal para diagrama representativo das deformações do betão quando submetido a ensaio de compressão simples (fig. 17), as tensões na secção transversal da peça flectida distribuem-se segundo se indica na fig. 18.

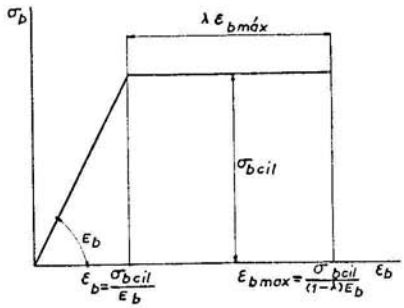

Fig. 17 — Diagrama de deformação do betão

As tensões nas fibras mais afastadas são consideradas iguais à resistência do betão σ_{bcil} obtida em ensaios efec-

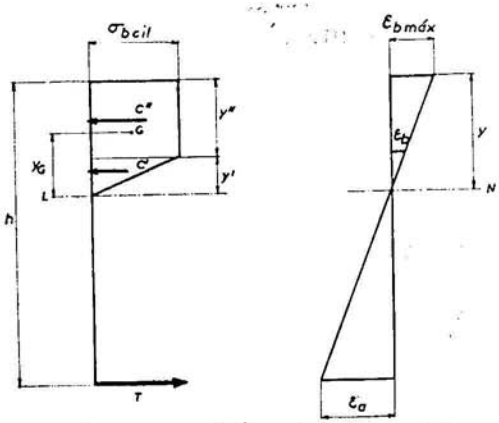

Fig. 18 — Diagramas propostos por Jensen

tuados com cilindros de 6 polegadas de diâmetro e 12 polegadas de comprimento.

O trecho inclinado do diagrama, na fase de comportamento elástico do betão, é função desta resistência:

$$E_b = \frac{2{,}1 \times 10^6}{5 + \frac{700}{\sigma_{b\,cil}}}$$

bem como a extensão da zona plastificada $\lambda \varepsilon_{b\,máx}$, pois supõe ser

$$\lambda = \frac{1}{1 + \left(\frac{\sigma_{b\,cil}}{280}\right)^2}.$$

Do diagrama assim definido, admitindo válida a hipótese da conservação das secções planas, será $y'' = \lambda\, y$ e $y' = (1 - \lambda) y$ e a resultante das tensões de compressão será

$$C = C' + C'' = \frac{1}{2}\, b\, \sigma_{b\,cil} (1 - \lambda) y + b\, \sigma_{b\,cil}\, \lambda\, y = b\, \sigma_{b\,cil}\, y\, \frac{1 + \lambda}{2}$$

distando da linha neutra de

$$y_G = \frac{\frac{1}{2}\, b\, \sigma_{b\,cil}\, (1 - \lambda)\, y\, \frac{2}{3}\, (1 - \lambda)\, y + b\, \sigma_{b\,cil}\, \lambda\, y \left(y - \frac{\lambda y}{2}\right)}{b\, \sigma_{b\,cil}\, y\, \frac{1 + \lambda}{2}} =$$

$$= y \cdot \frac{2 + 2\lambda - \lambda^2}{3(1 + \lambda)}.$$

Portanto,

$$z = h - y + y_G = h - y\left(1 - \frac{2 + 2\lambda - \lambda^2}{3(1 + \lambda)}\right) = h - y\, \frac{1 + \lambda + \lambda^2}{3(1 + \lambda)}$$

e

$$M_R = b\,\sigma_{b\,cil}\,y\,\frac{1+\lambda}{2}\left(h - y\,\frac{1+\lambda+\lambda^2}{3(1+\lambda)}\right).$$

Como $C = T$,

$$b\,\sigma_{b\,cil}\,y\,\frac{1+\lambda}{2} = \varphi\,b\,h\,\sigma_a \quad e \quad y = \frac{2\,\varphi\,\sigma_a}{\sigma_{b\,cil}\,(1+\lambda)}\,h;$$

será

$$M_R = \varphi\,b\,h^2\,\sigma_a\left(1 - \frac{2\,\varphi\,\sigma_a}{3\,\sigma_{b\,cil}}\,\frac{1+\lambda+\lambda^2}{(1+\lambda)^2}\right).$$

Fazendo $N = \dfrac{3\,(1+\lambda)^2}{2\,(1+\lambda+\lambda^2)}$, vem

$$M_R = \varphi\,\sigma_a\,b\,h^2\left(1 - \frac{1}{N}\,\frac{\varphi\,\sigma_a}{\sigma_{b\,cil}}\right),$$

sendo σ_a igual a σ_{ae} se as armaduras atingirem o seu limite elástico.

14 — Método de Granholm.

Admitindo a hipótese da conservação das secções planas no estado de rotura, este autor considera como curva de distribuição de tensões no betão, representada na figura 20, uma curva afim do diagrama tensões-deformações obtido no ensaio de compressão do betão (fig. 19).

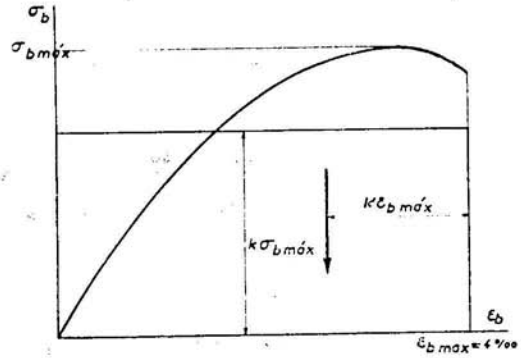

Fig. 19 — Diagrama de deformação do betão

Não se preocupa o autor em

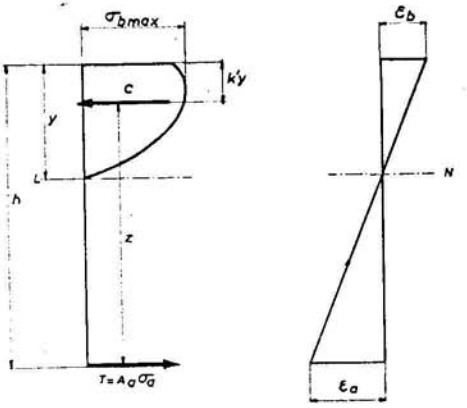

Fig. 20 — Diagramas propostos por Granholm

estabelecer uma forma matemática para essa curva; utiliza dois coeficientes k e k' para a determinação do valor da resultante das tensões de compressão no betão e da sua posição. Assim, a força de compressão C fá-la igual a

$$C = k\,b\,y\,\sigma_b$$

e o braço do binário das forças interiores será

$$z = h - k'y = h\,(1 - k'\,\xi)\,,\ \text{sendo}\ y = \xi\,h.$$

A igualdade entre estas forças traduz-se na expressão

$$k\,b\,\xi\,h\,\sigma_b = \varphi\,b\,h\,\sigma_a$$

ou

$$k\,\xi\,\sigma_b = \varphi\,\sigma_a\,. \qquad (14.1)$$

Considera Granholm duas novas quantidades: uma, designada *tensão média de compressão*, $\sigma'_b = \frac{k}{2\,k'}\,\sigma_b$; outra, designada *teor de armadura*, $p = \varphi\,\frac{\sigma_a}{\sigma'_b}$.

A igualdade anterior (14.1) tomará então a forma

$$2\,k'\,\xi = p\,.$$

O momento de rotura será calculado por

$$M_R = T z = \varphi b h^2 \sigma_a (1 - k' \xi);$$

mas $k' = \frac{p}{2\xi}$ e $p = \varphi \frac{\sigma_a}{\sigma'_b}$; por conseguinte

$$M_R = p \left(1 - \frac{p}{2}\right) bh^2 \sigma'_b .$$

Vejamos como determinar a posição da linha neutra.

Sabemos ser $\frac{y}{h} = \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_b + \varepsilon_a}$ ou $\varepsilon_a = \frac{h-y}{y} \varepsilon_b = \frac{1-\xi}{\xi} \varepsilon_b$.

Admitindo as deformações elásticas, poderá escrever-se $\varepsilon_b = \frac{\sigma'_b}{E'_b}$ (E'_b será uma quantidade fictícia) e $m' = \frac{E_a}{E'_b}$.

Portanto

$$\sigma_a = E_a \varepsilon_a = m' E_b \frac{1-\xi}{\xi} \varepsilon_b = m' \sigma'_b \frac{1-\xi}{\xi}. \qquad (14.2)$$

Já vimos ser $p = \varphi \frac{\sigma_a}{\sigma'_b}$, pelo que $\sigma_a = p \frac{\sigma'_b}{\varphi} = \frac{2 k' \xi \sigma'_b}{\varphi}$.

Igualando os últimos membros destas igualdades (14.1) e (14.2), será

$$\frac{2 k' \xi \sigma'_b}{\varphi} = m' \sigma'_b \frac{1-\xi}{\xi}$$

ou

$$\xi^2 + \frac{m' \varphi}{2k'} \xi - \frac{m' \varphi}{2k'} = o;$$

portanto

$$\xi = \frac{m' \varphi}{4 k'} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{8 k'}{m' \varphi}}\right).$$

Para obter-se M_R é necessário conhecer p; como $p = 2k'\xi$, será ...

$$p = \frac{m'\varphi}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{8k'}{m'\varphi}}\right).$$

Das experiências feitas concluiu Granholm que a tensão média de compressão σ'_b terá um valor compreendido entre 0,70 e 0,80 da resistência dos cubos σ_{bc}; o factor k' valerá entre 0,40 e 0,45.

Para o encurtamento nas fibras mais afastadas da linha neutra indicou o valor 4 ‰.

15 — Método de Häbel.

O diagrama figurativo da distribuição das tensões na zona do betão comprimido proposto por Häbel é seme-

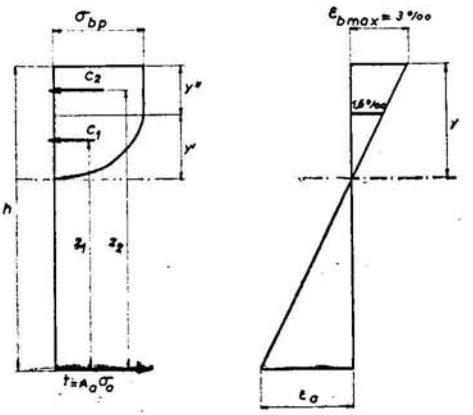

Fig. 21 — Diagramas propostos por Häsel

lhante ao que encontramos na teoria de Brandtzaeg. Assim, nas fibras em que os encurtamentos sejam inferiores a

1,6 $^{o}/_{oo}$, admite que as tensões se distribuem segundo uma lei parabólica, sendo constantes e iguais à resistência do betão medida em prismas para as fibras cujos encurtamentos sejam superiores a 1,6 $^{o}/_{oo}$.

Da hipótese da conservação das secções planas pode determinar-se

$$y = \xi h = \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_b + \varepsilon_a} h .$$

Häbel considera para ε_b um valor médio igual a 3 $^{o}/_{oo}$, qualquer que seja a qualidade do betão.

As forças parciais de compressão C_1 e C_2 têm os seguintes valores:

$$C_1 = \frac{2}{3} b \sigma_{bp} \; y'$$

$$C_2 = b \sigma_{bp} \; y'' .$$

Supondo, por exemplo, que $y' = \lambda y$, será $y'' = (1 - \lambda) y$ e então escrever-se-á

$$C_1 = \frac{2}{3} b \sigma_{bp} \lambda y$$

$$C_2 = b \sigma_{bp} (1 - \lambda) y .$$

A força total de compressão C valerá

$$C = C_1 + C_2 = b \sigma_{bp} y \left(1 - \frac{\lambda}{3}\right) .$$

Como $\frac{y'}{y} = \frac{1,6}{3}$, em que $y' = \lambda y$, será evidentemente $\lambda = \frac{1,6}{3}$; e por conseguinte

$$C = 0,821 \quad b y \sigma_{bp} .$$

Calculemos agora a distância z das armaduras à força total de compressão; será

$$z = \frac{C_1 z_1 + C_2 z_2}{C} =$$

$$= \frac{\frac{2}{3} b \sigma_{bp} \lambda y \left(h - y'' - \frac{3}{8} y'\right) + b \sigma_{bp} (1-\lambda) y \left(h - \frac{y''}{2}\right)}{b \sigma_{bp} y \left(1 - \frac{\lambda}{3}\right)} =$$

$$= h \cdot \frac{1 - \frac{\lambda}{3} + \frac{\lambda \xi}{3} - \frac{\xi}{2} - \frac{\lambda^2 \xi}{12}}{1 - \frac{\lambda}{3}};$$

para $\lambda = \frac{1,6}{3}$,

$$z = \frac{0,821 - 0,346\,\xi}{0,821} \cdot h = (1 - 0,421\,\xi)\, h\,.$$

Será então

$$M_R = Cz = 0,821\, b\, h^2 \sigma_{bp}\, \xi\, (1 - 0,421\,\xi) =$$

$$= bh^2\, \sigma_{pp}\, \xi\, (0,821 - 0,346\,\xi).$$

16 — Método de Saliger.

Saliger indica para curva de distribuição das tensões no betão comprimido no estado de rotura uma figura semelhante ao diagrama de deformação do betão obtido em ensaios de compressão com prismas, sendo a tensão máxima de compressão na peça flectida igual à resistência σ_{bp}.

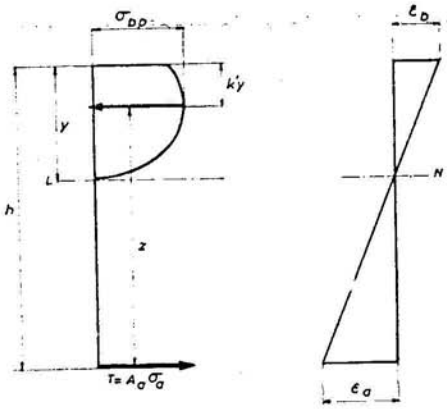

Fig. 22 — Diagramas propostos por Saliger

Os encurtamentos máximos, no bordo da zona comprimida, dependem da resistência do betão, segundo a relação

$$\varepsilon_{b\,máx.} = 25 \times 10^{-6}\ \sigma_{bp}\,.$$

A resultante C das tensões de compressão vale

$$C = k\,b\,y\,\sigma_{bp}\,.$$

Este coeficiente k é função da forma da curva das tensões, podendo aceitar-se como valor médio $k = 0{,}85$. A posição da resultante C será determinada pelo conhecimento da distância $k'y$; k' supor-se-á valer em média 0,425, isto é, $k' = \frac{1}{2}\,k$.

Nas peças fortemente armadas, a rotura sobrevirá com o aço ainda na sua fase elástica; será portanto

$$\sigma_a = E_a\,\varepsilon_a$$

ou, visto que de lei de deformação da secção se obtém

$$y = \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_b + \varepsilon_a} h$$

e daqui

$$\varepsilon_a = \varepsilon_b \frac{1 - \xi}{\xi};$$

como $y = \xi h$,

será

$$\sigma_a = E_a \varepsilon_b \frac{1 - \xi}{\xi}. \qquad (16.1)$$

Da igualdade $C = T$ entre as forças totais de compressão e de tracção deduz-se

$$k\ b\ \xi h\ \sigma_{bp} = \varphi\ bh\ \sigma_a. \qquad (16\ 2)$$

Substituindo nesta expressão o valor de σ_a dado por (16.1) obtém-se

$$k\ \sigma_{bp}\ \xi = \varphi\ E_a\ \varepsilon_b \frac{1 - \xi}{\xi} \qquad (16.3)$$

equação do 2.º grau que permite determinar ξ.

O braço do binário das forças interiores z será

$$z = h - k' y = h \left(1 - \frac{k\ \xi}{2}\right)$$

e por conseguinte

$$M_R = k\ b\ h^2\ \sigma_{bp}\ \xi \left(1 - \frac{k\ \xi}{2}\right).$$

Ao cociente

$$\overline{m}_b = \frac{M_R}{bh^2\,\sigma_{bp}}$$

chamaremos *momento específico*. Será então

$$\overline{m}_b = k\,\xi\left(1 - \frac{k\,\xi}{2}\right)$$

ou, visto ser $k\,\xi = \varphi\alpha$,

$$\overline{m}_b = \varphi\alpha\left(1 - \frac{\varphi\alpha}{2}\right).$$

Se na equação (16.3) fizermos $\varepsilon_b = 25 \times 10^{-6}\,\sigma_{bp}$, $k = 0,85$ e $E_a = 2,1 \times 10^6$, obter-se-á

$$\xi^2 + 61,7\,\varphi\,\xi - 61,7\,\varphi = o$$

ou

$$\xi = 30,85\,\varphi\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{0,0648}{\varphi}}\right).$$

ξ dependerá sòmente da percentagem φ.

Para uma dada percentagem φ_{cs} o aço das armaduras entrará em fluência; será $\sigma_a = \sigma_{ae}$, e, como

$$\alpha\,\varphi_{cs} = k\,\xi,$$

visto ser

$$\xi = \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_b + \varepsilon_{ai}}$$

será

$$\varphi_{cs} = \frac{k}{\alpha}\,\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_b + \varepsilon_{ai}}.$$

Atendendo à curvatura do diagrama de deformação dos aços ao atingir-se a fluência, admite Saliger ser $\varepsilon_{af} = 1{,}5 \frac{\sigma_{ae}}{E_a}$, e por conseguinte, para os valores de k, ε_b e E_a já mencionados, será

$$\varphi_{cs} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{0{,}85}{1 + 0{,}0285\,\alpha}.$$

Para $\alpha = 12$, a *percentagem crítica superior* valerá

$$\varphi_{cs} = 5{,}29\ \%.$$

Para percentagens inferiores, $\sigma_a = \sigma_{ae}$ e a posição da linha neutra ficará perfeitamente determinada a partir da igualdade (16.2):

$$\xi = \frac{\alpha\,\varphi}{k}.$$

O momento de rotura ficará conhecido imediatamente, sendo, como há pouco,

$$M_R = bh^2\,\sigma_{bp}\,k\,\xi\left(1 - \frac{k\,\xi}{2}\right) = bh^2\,\sigma_{bp}\,\alpha\,\varphi\left(1 - \frac{\alpha\,\varphi}{2}\right),$$

ou

$$M_R = Tz = bh^2\,\sigma_{ae}\,\varphi\left(1 - \frac{k\,\xi}{2}\right).$$

Para uma certa quantidade de armaduras poderá a deformação do aço atingir o valor ε_{af}, correspondente ao

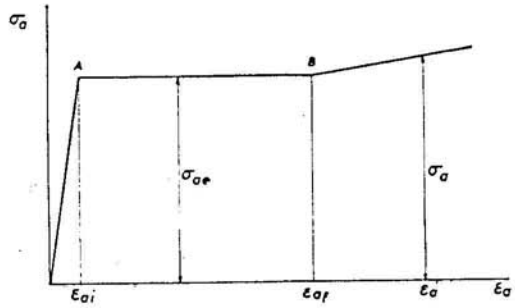

Fig. 23 — Diagrama de deformação do aço

ponto B do diagrama; fica definida a *percentagem crítica intermédia*, φ_{cm}, tal que

$$\alpha \varphi_{cm} = \frac{k\,\varepsilon_b}{\varepsilon_b + \varepsilon_{af}}.$$

Para valores da percentagem inferiores a φ_{cm} o aço entrará na fase das grandes deformações; se admitirmos um diagrama de deformação de aços como o indicado na figura 23, em que

$$\gamma = \frac{\sigma_a}{\sigma_{ae}} = 0{,}9 + 0{,}1\,\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_{af}}$$

obter-se-á a seguinte equação em γ:

$$\gamma = 0{,}9 + 0{,}1.\,\frac{\varepsilon_b\,\dfrac{1-\xi}{\xi}}{\varepsilon_{af}} = 0{,}9 + 0{,}1\,\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_{af}}\left(\frac{k}{\gamma\,\alpha\,\varphi} - 1\right)$$

sendo $\alpha = \dfrac{\sigma_{ae}}{\sigma_{bp}}$.

Conhecendo então a relação $\dfrac{\varepsilon_b}{\varepsilon_{af}}$, k e $\alpha\varphi$, pode cal-

cular-se γ; de modo que o momento de rotura se determinará por

$$M_R = bh^2 \gamma \sigma_{ae} \varphi \left(1 - \frac{\varphi \alpha \gamma}{2}\right).$$

Há um valor de φ para o qual as armaduras são insuficientes para resistirem ao momento correspondente ao betão não armado; este valor será designado por *percentagem crítica inferior* e marca um limite aquém do qual não deve baixar a percentagem, visto a rotura em peças assim concebidas sobrevir dum modo brutal, ocorrendo a rotura dos próprios aços.

Vimos já ser

$$\overline{m}_b = \frac{M_R}{b\,h^2 \sigma_{bp}} = \gamma \alpha \varphi \left(1 - \frac{\gamma \alpha \varphi}{2}\right).$$

Pode supor-se igual à unidade a quantidade indicada entre parêntesis; verifica-se também que γ no máximo valerá aproximadamente 1,3; de modo que

$$\overline{m}_b = 1,3\, \alpha \varphi.$$

Por outro lado, o momento resistente duma viga não armada será, segundo Saliger,

$$M_R = \frac{b\,H^2 \sigma_t}{6};$$

fazendo $h = 0,9\,H$ e $\sigma_t = \frac{\sigma_{bp}}{6}$, virá

$$M_R = \frac{bh^2 \sigma_{bp}}{36 \times 0,81} \quad \text{e} \quad \overline{m}_b = \frac{M_R}{\sigma_{bp}\, bh^2} = \frac{1}{36 \times 0,81};$$

logo,

$$1,3\, \alpha\, \varphi = \frac{1}{0,81 \times 36}$$

ou

$$\varphi_{cl} = 0{,}0264 \cdot \frac{1}{\alpha},$$

e, para $\alpha = 12$,

$$\varphi_{cl} = 0{,}22\ \%.$$

Saliger aconselha a tomar para σ_{bp} sòmente 3/4 da média encontrada nos ensaios das provetas; o coeficiente de segurança deverá situar-se entre 1,5 e 2.

17 — Método de Jäger.

As bases deste método são semelhantes às do método de Brandtzaeg; sòmente os valores dos encurtamentos

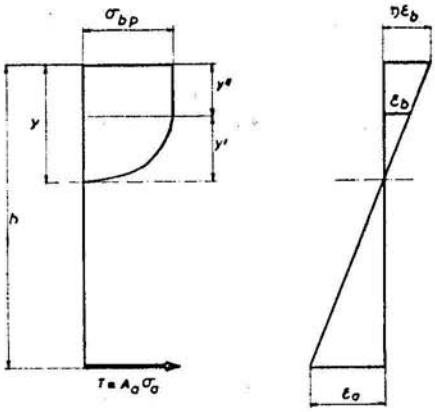

Fig. 24 — Diagramas propostos por Jäger

máximos e da altura y'' da zona completamente plastificada diferem. Assim, neste método, o encurtamento máximo vale

$$\eta\ \varepsilon_b = \frac{0{,}056}{\sqrt{\sigma_{bp}}}$$

tendo η o valor $\eta = \dfrac{400}{\sigma_{bp}}$.

Comparemos os valores do encurtamento $\eta\ \varepsilon_b$ com os do método de Brandtzaeg, em função das resistências do betão σ_{bp}:

Valores de σ_{bc} (kg/cm²)		200	250	300	350	400	450	500
Valores de $\eta\ \varepsilon_b$ (‰)	mét. de Jäger	4.43	3,96	3,61	3,34	3,14	2,96	2,80
	« « Brandtzaeg	5,02	4,56	4,09	3,62	3,16	2,69	2,23

Pode verificar-se que estes encurtamentos, pràticamente iguais para $\sigma_{bc} = 400$ kg/cm², são maiores no método de Brandtzaeg para betões de menor resistência, acontecendo o inverso para maiores resistências.

Quanto às possibilidades de plastificação do betão, elas são mais acentuadas no método de Jäger do que no de Brandtzaeg; com efeito, para valores de σ_{bc} iguais ou superiores a 500 kg/cm², no método de Jäger o diagrama de tensões no betão é sòmente constituido por um ramo parabólico, ao passo que no de Brandtzaeg isso se verifica para $\sigma_{bc} > 453$ kg/cm². No entanto, a diferença é muito pequena.

18 — Método de Mörsch.

Embora deduzido para o cálculo de peças pré-esforçadas, é possível, mediante a anulação do pré-esforço, aplicar o método de Mörsch ao caso de flexão simples.

Mörsch considera a curva de distribuição das tensões na zona comprimida da peça flectida semelhante ao diagrama de deformação do betão obtido em ensaios de compressão sobre provetas prismáticas. Conhecido este diagrama, pode obter-se, a partir duma construção gráfica, quer a grandeza da resultante C dessas tensões, quer a sua posição; será

$$C = kby\ \sigma_{bp}$$

podendo designar-se a sua distância ao bordo das compressões por k'y.

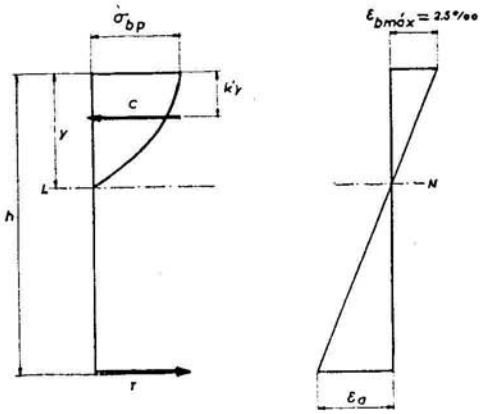

Fig. 25 — Diagramas propostos por Mörsch

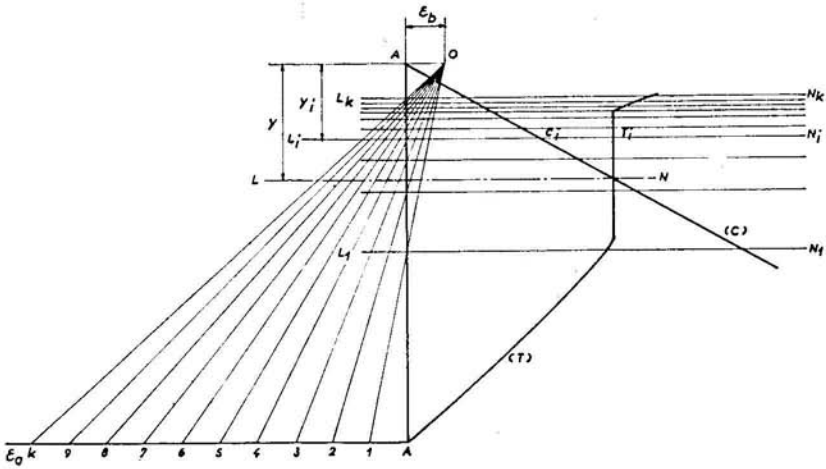

Fig. 26 — Determinação da posição da linha neutra $\overline{LN}$

Segundo os vários tipos de betão, Mörsch encontrou para k valores compreendidos entre 0,57 e 0,685 e para k' valores entre 0,65 e 0,61.

A determinação da posição da linha neutra é feita também por um processo gráfico: Consideremos o encurtamento ε_b das fibras mais afastadas da linha neutra; tracemos um feixe de linhas concorrentes $\overline{01}$, $\overline{02}$, ... $\overline{0k}$, que representarão os diagramas de deformação da secção flectida, quando as linhas neutras forem $\overline{L_1 N_1}$, $\overline{L_2 N_2}$, ... $\overline{L_k N_k}$.

Sobre cada uma destas linhas, a partir de $\overline{AA}$ marquem-se os valores das resultantes $C_1 = k\,b\,\sigma_{bp}\,y_1$, $C_2 = k\,b\,\sigma_{bp}\,y_2$, ..., $C_k = k\,b\,\sigma_{bp}\,y_k$, obtidos a partir do diagrama de deformação do betão, como já se disse; teremos uma linha (C), que será uma recta.

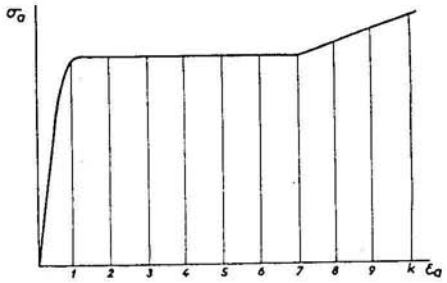

Fig. 27 — Diagrama de deformação do aço

A partir dos segmentos $\overline{A1} = \varepsilon_{a1}$, $\overline{A2} = \varepsilon_{a2}$, ... $\overline{Ak} = \varepsilon_{ak}$, deformações do aço para as diferentes posições da linha neutra, poderão determinar-se as tensões neste elemento, visto o seu diagrama de deformação (fig. 27) ser um dos dados; conhecendo-se a área de aço utilizada ficamos portanto a saber as grandezas das forças de tracção $T_1 = \sigma_{a1}\,A_a$, $T_2 = \sigma_{a2}\,A_a$, . . . , $T_k = \sigma_{ak}\,A_a$, que marcaremos também sobre $\overline{L_1 N_1}$, $\overline{L_2 N_2}$, . . . , $\overline{L_k N_k}$, como anteriormente se fez com as forças C_1, C_2, ..., C_k; define-se assim uma linha (T).

Como a verdadeira posição da linha neutra será aquela para a qual se verifica ser $C = T$, a intersecção das linhas

(C) e (T) dar-nos-á essa posição. E o momento de rotura calcular-se-á por

$$M_R = A_a \sigma_a (h - k' y) = k b y \sigma_{bp} (h - k'y).$$

Vê-se, pois, que os diagramas de deformação podem ter uma forma qualquer, que o método não se complica. As dúvidas residem sòmente no desconhecimento do verdadeiro aspecto da curva das tensões na zona comprimida, bem como no valor do encurtamento máximo do betão, que Mörsch considera ser, em média, igual a 2,5 ‰.

19 — Método de Chambaud

É relativamente recente (1949) o método estabelecido por Chambaud após a realização de numerosos ensaios com vigas constituidas por betões de resistências várias e por aços de características mecânicas distintas empregados em percentagens normalmente altas, variando de 1 % a 6 %, aproximadamente.

Vejamos as bases em que assenta o seu método:

a) as secções rectas das vigas deformam-se, durante a flexão, mantendo-se planas;

b) o módulo de elasticidade dos aços é constante até o início da fluência e igual a $2{,}1 \times 10^6$ kg/cm²; o aço deforma-se seguidamente a tensão constante;

c) o módulo de elasticidade inicial instantâneo do betão e a sua resistência cúbica estão relacionados por $E_b = \lambda \sqrt{\sigma_{bc}}$, sendo em média $\lambda = 19000\,kg^{-1}.\,cm^{-1}$;

d) na secção de rotura o encurtamento máximo do betão é igual a $\varepsilon_{bmáx} = 3{,}6$ ‰;

e) o diagrama de distribuição das tensões no betão tem o aspecto que se indica na figura 28: o ramo até A pode ser considerado como sinusoidal, em relação a eixos oblíquos, com curvatura nula na origem e em A; o ramo $\overline{AB'}$ é uma parábola cúbica de origem em A, onde apresenta também uma curvatura nula; o ponto A comum aos dois ramos, onde a tensão é máxima, corresponde a um encurtamento igual a $2\,\varepsilon_o$;

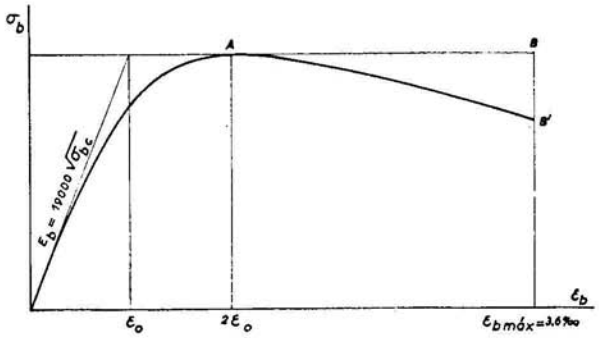

Fig. 28 — Diagrama de deformação do betão

f) o valor da tensão máxima na rotura é proporcional à resistência cúbica do betão, $\sigma_{bmáx} = (1+\lambda)\,\sigma_{bc}$; como resultado das suas experiências concluiu ser λ aproximadamente igual a zero.

A resultante das tensões no betão é então $C = k\,b\,y\,\sigma_{bc}$ e dista do bordo das compressões de $k'y$; sendo $T = \varphi\,b\,h\,\sigma_a$ a força total de tracção, pode escrever-se

$$k\,b\,\xi\,h\,\sigma_{bc} = \varphi\,b\,h\,\sigma_a$$

e daqui

$$\xi = \frac{\varphi}{k} \cdot \frac{\sigma_a}{\sigma_{bc}} = \frac{\xi_o}{k} \qquad (19.1)$$

representando por ξ_o a quantidade $\varphi\,\dfrac{\sigma_a}{\sigma_{bc}}$.

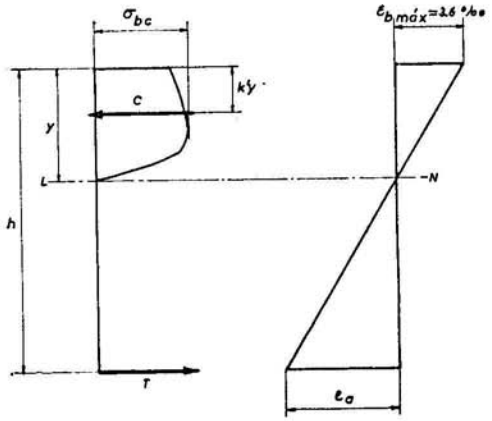

Fig. 29 — Diagramas propostos por Chambaud

O braço do binário das forças interiores é igual a

$$z = h\,(1 - k'\xi)\,;$$

o momento de rotura será

$$M_R = Cz = k\,b\,h^2\,\sigma_{bc}\,\xi\,(1 - k'\xi)$$

e o momento específico

$$\overline{m}_b = \frac{M_R}{bh^2\sigma_{bc}} = \xi_o\,(1 - k'\xi);$$

designando $\varphi\,\frac{\sigma_{ae}}{\sigma_{bc}}$ por ς, poderemos transformar esta última expressão na seguinte:

$$\overline{m}_b = \varphi\,\frac{\sigma_a}{\sigma_{bc}}\,\frac{\sigma_{ae}}{\sigma_{ae}}\left(1 - k'\,\frac{\varphi}{k}\,\frac{\sigma_a}{\sigma_{bc}}\,\frac{\sigma_{ae}}{\sigma_{ae}}\right) =$$

$$= \varsigma\,.\,\frac{\sigma_a}{\sigma_{ae}}\left(1 - \frac{k'}{k}\,\varsigma\,\frac{\sigma_a}{\sigma_{ae}}\right) = \eta\left(1 - \frac{k'}{k}\,\eta\right)$$

sendo $\eta = \varsigma\,\frac{\sigma_a}{\sigma_{ae}}$.

As armaduras estarão na sua fase elástica enquanto for

$$\varepsilon_a = \varepsilon_b \frac{1 - \xi}{\xi} < \frac{\sigma_{ae}}{E_a}. \qquad (19.2)$$

No limite, $\varepsilon_a = \frac{\sigma_{ae}}{E_a}$; donde

$$\varepsilon_b E_a - \varepsilon_b \xi_{cr} E_a = \xi_{cr} \sigma_{ae}$$

e

$$\xi_{cr} = \frac{\varepsilon_b E_a}{\sigma_{ae} + \varepsilon_b E_a} = \frac{1}{\gamma};$$

então

$$\varphi_{cs} = \frac{k \ \xi_{cr} \ \sigma_{bc}}{\sigma_{ae}} = \frac{k}{\gamma} \cdot \frac{\sigma_{bc}}{\sigma_{ae}}.$$

A tensão σ_a nas armaduras, enquanto não entram em fluência, será

$$\sigma_a = E_a \varepsilon_a = E_a \varepsilon_b \frac{1 - \xi}{\xi}$$

Mas $\xi = \frac{\xi_o}{k}$

e

$$\xi_o = \varphi \frac{\sigma_a}{\sigma_{bc}} \cdot \frac{\sigma_{ae}}{\sigma_{ae}} = \varsigma \frac{\sigma_a}{\sigma_{ae}}.$$

Donde

$$\sigma_a = E_a \varepsilon_b \frac{1 - \frac{1}{k} \varsigma \frac{\sigma_a}{\sigma_{ae}}}{\frac{1}{k} \varsigma \frac{\sigma_a}{\sigma_{ae}}}$$

ou

$$\frac{\varsigma}{k\,\sigma_{ae}}\,\sigma_a^{\,2} + \frac{E_a\,\varepsilon_b\,\varsigma}{k\,\sigma_{ae}}\,\sigma_a - E_a\,\varepsilon_b = 0$$

que, uma vez resolvida, dá

$$\sigma_a = \frac{E_a\,\varepsilon_b}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4\,k\,\sigma_{ae}}{E_a\,\varepsilon_b\,\varsigma}}\right).$$

Vejamos alguns valores de k e k', indicados por Chambaud, segundo as diferentes resistências do betão:

σ_{bc} =	100	200	300	400	500	(kg/cm²)
k =	0,890	0,860	0,844	0,820	0,802	
k' =	0,465	0,445	0,431	0,423	0,415	
$\frac{k'}{k}$ =	0,521	0,516	0,515	0,515	0,516	

Para o caso de peças muito pouco armadas, este método de cálculo dá valores dos momentos de rotura nìtidamente inferiores aos que se verificam nas experiências; isto levou Chambaud a estudar com cuidado o comportamento deste tipo de peças, publicando em 1954 o resultado desse estudo, cuja conclusão principal consiste em atribuir uma tensão nas armaduras superior ao seu limite elástico, $\sigma_a > \sigma_{ae}$. O momento específico m_b seria então calculado a partir das seguintes considerações:

Eliminando ξ nas equações (19.1) e (19.2), obtém-se $\sigma_a = \dfrac{k\,\sigma_{bc}\,\varepsilon_b}{\varphi\,(\varepsilon_b + \varepsilon_a)}$ equação cujas incógnitas são σ_a e ε_a e que representa uma hipérbole. Esta hipérbole (H) corta o diagrama de deformação dos aços num ponto P, de coordenados σ'_a e ε'_a. Ora, considerando as quebras de aderência e os deslizamentos que daí advêm, na secção de rotura, o

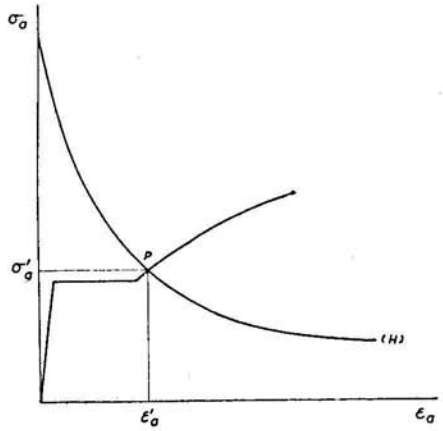

Fig. 30

alongamento real no aço será não o valor encontrado ε'_a mas um valor diferente $\frac{\varepsilon'_a}{\alpha}$; e a este valor real $\frac{\varepsilon'_a}{\alpha}$ é que corresponde um valor η que nos permite calcular o valor real do momento específico

$$\overline{m}_b = \eta \left(1 - \frac{k'}{k} \eta\right).$$

À tensão σ'_a corresponde um valor $\eta' = \varphi \frac{\sigma'_a}{\sigma_{bc}}$; à tensão de fluência outro valor $\eta^0 = \varphi \frac{\sigma_{ae}}{\sigma_{bc}}$. E a quantidade η que nos interessa conhecer está relacionada com estes dois valores do seguinte modo:

$$\eta = \rho \eta' + (1 - \rho) \eta^0,$$

em que ρ é um coeficiente dependendo das condições de aderência e cujos valores Chambaud determinou a partir

dos resultados de 151 experiências. Esses valores são indicados no quadro seguinte:

TIPOS DE VIGA E DE ARMADURA	ρ
Armaduras de grandes diâmetros, vigas estreitas, condições de aderência medíocres	0 a 0,125
Armaduras de grandes diâmetros, com melhores condições de aderência	0,125 a 0,375
Armaduras de diâmetros médios, condições de aderência médias	0,375 a 0,625
Vigas largas, armaduras de pequenos diâmetros, muito boas condições de aderência, betões de alta qualidade . . .	0,625 a 0,875
Lajes, armaduras de pequenos diâmetros, barras de aderência melhorada, betões de alta qualidade, excelentes condições de aderência.	0,875 a 1

Finalmente, apresenta a noção de *percentagem crítica inferior*, já referida também no método de Saliger:

O momento de rotura de peça armada com essa percentagem φ_{ci} é

$$M_R = bh^2 \sigma_{bc} \varphi_{ci} \frac{\sigma_a}{\sigma_{bc}} \left(1 - \frac{k'}{k} \frac{\sigma_a}{\sigma_{bc}} \varphi_{ci}\right).$$

Na peça não armada, é

$$M_R = \frac{b H^2 \sigma_t}{3,6};$$

de modo que, para $h = 0,9$ H, fazendo $\frac{k'}{k} \cdot \frac{\sigma_a}{\sigma_{bc}} \varphi_{ci} = 0$,

$$bh^2 \sigma_{bc} \varphi_{ci} \frac{\sigma_a}{\sigma_{bc}} = \frac{bh^2 \sigma_t}{0,81 \times 3,6}$$

ou

$$\varphi_{ci} = 0{,}343 \frac{\sigma_t}{\sigma_a}.$$

Representa σ_a a tensão de rotura do aço; portanto, para um aço e um betão em que $\sigma_{ar} = 4200$ kg/cm² e $\sigma_t = 30$ kg|cm², será

$$\varphi_{ci} = 0{,}24\ \%.$$

20 — Breve crítica comparativa

Neste 2.º grupo de métodos a base de dimensionamento é o estado de rotura física da peça e não um estado crítico de deformação, como nos métodos do 1.º grupo. Apresentam ainda todos os métodos a circunstância da posição da linha neutra ser determinada a partir duma relação entre as deformações do betão e do aço por ocasião da rotura.

Pretende-se igualmente apresentar para diagrama representativo da distribuição das tensões uma curva em concordância com a realidade; uma ou outra simplificação só é introduzida quando não tenha influência sensível sobre os resultados dos cálculos. De resto a forma desse diagrama não tem uma importância fundamental, devendo os resultados dos cálculos ser bastante concordantes se não fora a hipótese do valor da tensão máxima de compressão no betão não ser a mesma em todos os métodos; uma outra causa de dispersão é a fixação do valor da percentagem crítica superior, que, dependendo do valor do encurtamento máximo atribuído ao betão, pode variar entre largos limites, pois que este encurtamento $\varepsilon_{bmáx}$ é um dos parâmetros sobre que residem grandes dúvidas; enquanto uns autores o supõem cons-

tante qualquer que seja a resistência do betão, outros fazem-no variar com esta; e a lei de dependência, no método de Saliger, por exemplo, é absolutamente contrária à admitida em todos os outros.

Os métodos de Brandtzaeg, Häbel e Jäger são de grande semelhança, diferindo sobretudo nas possibilidades de plastificação concedidas ao betão; Brandtzaeg chega a considerar uma plastificação integral em peças pouco armadas; de igual modo procede Langendonck, mas este autor generaliza para todas as peças. O diagrama trapezoidal de Jensen não é também muito distinto do daqueles três autores.

Já Granholm considera, com toda a lógica, que este diagrama não pode ser uma figura afim do obtido em ensaios de compressão sobre provetas de betão simples; o mesmo supõe Stüssi, simplesmente entra para valor da tensão máxima de compressão com a resistência prismática em vez da cúbica, como Granholm.

O método gráfico de Mörsch oferece a grande vantagem de, qualquer que seja o diagrama de tracção de aços, não se complicar por tal facto o processo de cálculo. Para peças cujas armaduras sejam constituídas por aços macios normais, o método aproxima-se muito do de Stüssi, o que não deixa de ser de assinalar, dada a diferença de 16 anos que existe entre as datas da sua publicação.

Devem ser destacados, como os mais completos de entre todos, os métodos de Saliger e de Chambaud. Tendo ideias análogas, no que se refere ao aspecto da distribuição das tensões no betão comprimido, diferindo apenas no que diz respeito ao valor máximo dessas tensões, são os únicos a terem em linha de conta o facto de os aços das armaduras poderem entrar na sua fase de grandes deformações, fenómeno verificado sobretudo nas peças muito fracamente armadas, e até, por vezes, segundo Saliger, em peças com percentagens normais.

A precisão obtida com a aplicação destes métodos é

bastante aceitável para aquelas peças em que a tensão do aço seja igual ao seu limite de elasticidade; já para peças em que as percentagens sejam mais altas as discordâncias são maiores, o que não é de surpreender, dada a imprecisão existente na fixação do valor do encurtamento $\varepsilon_{bmáx}$. Estas discordâncias provêm sobretudo das diferentes condições em que se realizaram os ensaios, bem como dos diferentes processos de observação e medida. De qualquer modo, possuem todos estes métodos um valor fora de qualquer dúvida.

3.° GRUPO

21 — Método de Coppée.

São as seguintes as hipóteses estabelecidas por Coppée para a definição do estado de rotura:

a) admite a hipótese da conservação das secções planas;

b) supõe uma distribuição de tensões no betão comprimido de traçado hiperbólico;

c) considera a tensão máxima no betão igual à resistência dos cubos σ_{bc};

d) faz intervir na resistência da peça o betão tendido, junto da linha neutra, até uma distância $k''y$;

e) supõe que o diagrama de tensões no betão tendido é triangular, sendo a tensão máxima σ_t uma fracção da resistência σ_{bc}, $\sigma_t = 0{,}15\ \sigma_{bc}$;

f) o módulo de elasticidade do betão tendido é suposto igual a metade do módulo do betão comprimido $E_t = \frac{E_b}{2}$.

g) finalmente, supõe a tensão nas armaduras igual ao limite elástico.

Resulta da distribuição hiperbólica de tensões que a força de compressão tem por valor $C = 0{,}837\ by\ \sigma_{bc}$ e dista

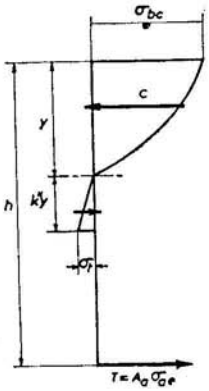

Fig. 31 — Diagrama proposto por Coppée

da fase superior de 0,442 y. Escrevamos então a equação de equilíbrio entre as forças de tracção e a de compressão:

$$\varphi\, b\, h\, \sigma_{ae} + \frac{1}{2}\, b\, \sigma_t\, k''\, y = 0{,}837\, b\, \sigma_{bc}\, y\,;$$

portanto $\quad y = \dfrac{\varphi\, \alpha\, h}{\lambda}, \quad$ sendo $\alpha = \dfrac{\sigma_{ae}}{\sigma_{bc}}$ e

$\lambda = 0{,}837 - \dfrac{0{,}15}{2}\, k''$.

O momento de rotura M_R pode calcular-se tomando os momentos das forças interiores em relação ao bordo do betão comprimido:

$$M_R = -0{,}837\, b\, y\, \sigma_{bc} .\ 0{,}422\, y + \varphi\, bh\, \sigma_{ae}\, h +$$

$$+ \frac{0{,}15}{2}\, \sigma_{bc}\, b\, k''\, y \left(y + \frac{2}{3}\, k''\, y \right) =$$

$$= \varphi\, bh^2\, \sigma_{ae} - b\, y^2\, \sigma_{bc} \left[0{,}370 - \frac{0{,}15}{2}\, k'' \left(1 + \frac{2\, k''}{3} \right) \right]$$

ou, fazendo

$$\mu = 0{,}370 - \frac{0{,}15}{2} k'' \left(1 + \frac{2k''}{3}\right)$$

e

$$\gamma = \frac{\mu}{\lambda^2},$$

$$M_R = \varphi\, bh^2\, \sigma_{ae}\, (1 - \varphi\, \alpha\, \gamma).$$

Admitindo que o betão tendido intervém, por exemplo, numa extensão abaixo da linha neutra igual a 1/3 da altura da peça, isto é, $k'' = 1/3$, será $\lambda = 0{,}812$, $\mu = 0{,}339$, $\gamma = 0{,}514$ e

$$M_R = \varphi\, bh^2\, \sigma_{ae}\, (1 - 0{,}514\, \varphi\, \alpha).$$

Na hipótese de ser $k'' = o$, será $\lambda = 0{,}837$, $\mu = 0{,}370$, $\gamma = 0{,}528$ e

$$M_R = \varphi\, bh^2\, \sigma_{ae}\, (1 - 0{,}528\, \varphi\, \alpha).$$

A influência do valor de γ e portanto do betão tendido

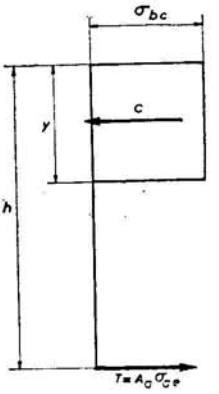

Fig. 32

sobre o momento de rotura é muito pequena. De modo que Coppée, para maior simplicidade, propõe um diagrama em

que despreza essa resistência e, além disso, supõe a plastificação integral do betão comprimido (fig. 32).

Neste caso,

$$y = \frac{\sigma_{ae} \cdot A_a}{b\,\sigma_{bc}} = \alpha\,\varphi\,h\,,$$

$$M_R = \sigma_{ae}\,A_a\left(h - \frac{1}{2}\,\frac{\sigma_{ae}\cdot A_a}{b\,\sigma_{bc}}\right)$$

ou

$$M_R = \sigma_{ae}\,b\,h^2\,\varphi\left(1 - \frac{\alpha\,\varphi}{2}\right).$$

Visto que, no caso limite, será $y = h$, a percentagem máxima de armaduras será, visto $y = \alpha\,\varphi\,h$,

$$\varphi = \frac{1}{\alpha} = \frac{\sigma_{bc}}{\sigma_{ae}}\,.$$

22 — Método de Whitney.

Whitney é de opinião que no estado de rotura as tensões no betão crescem ràpidamente nas proximidades

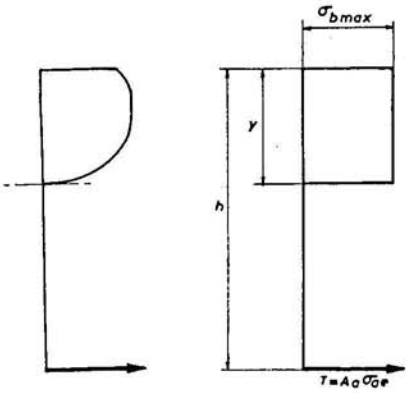

Fig. 33 — Diagrama das tensões no estado de rotura

Fig. 34 — Diagrama adoptado para o cálculo

da linha neutra, mantêm-se sensìvelmente iguais em quase toda a extensão da zona comprimida e diminuem ligeiramente nas fibras próximas do bordo superior da secção. Por simplificação, no entanto, considera o diagrama rectangular, pois que, afinal, o que nos interessa é determinar o valor da resultante das tensões e a sua posição para assim se determinar o valor do momento da rotura.

Como no método anterior, é

$$y = \frac{\sigma_{ae} A_a'}{b\, \sigma_{bmáx}}$$

e

$$M_R = C z = b\, y\, \sigma_{bmáx} \left(h - \frac{y}{2}\right).$$

Para valor da compressão máxima $\sigma_{bmáx}$ Whitney indica que se deve adoptar uma fracção da resistência sobre cilindros σ_{bcil}:

$$\sigma_{bmáx} = 0{,}85\, \sigma_{bcil}.$$

Dos resultados dos ensaios de Slater e Lyse determinou Whitney a armadura a partir da qual o momento de rotura não cresce mais; essa armadura máxima corresponde a uma zona comprimida de altura

$$y = 0{,}537\ h.$$

Portanto o momento máximo será

$$M_R = b\, y\, \sigma_{bmáx} \left(h - \frac{y}{2}\right) = 0{,}393\ bh^2\, \sigma_{bmáx}$$

ou

$$\frac{M_R}{b\, h^2} = 0{,}393\, \sigma_{bmáx} = \frac{\sigma_{b\,cil.}}{3}.$$

23 — Método de Gaede.

Gaede apresenta um método de cálculo inteiramente semelhante ao método simplificado de Coppée, sòmente a tensão máxima de compressão $\sigma_{bmáx}$ é aqui uma fracção da resistência do betão em cubos:

$$\sigma_{bmáx} = \lambda\ \sigma_{bc}\ .$$

O equilíbrio entre as forças de compressão e de tracção permite determinar a profundidade da linha neutra:

$$\lambda\ b\ y\ \sigma_{bc} = \varphi\ b\ h\ \sigma_{ae}$$

donde $y = \dfrac{\alpha\ \varphi\ h}{\lambda}$.

O momento de rotura será

$$M_R = T\ z = \varphi\ bh^2\ \sigma_{ae} \left(1 - \frac{\alpha\ \varphi}{2\ \lambda}\right) .$$

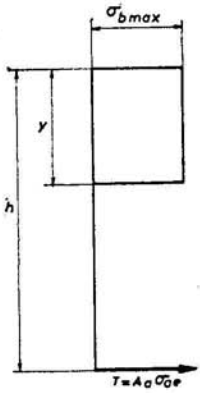

Fig. 35 — Diagrama proposto por Gaede

Será também, no limite, $y = h$, a que corresponde uma percentagem máxima

$$\varphi_{máx} = \lambda\ \frac{\sigma_{bc}}{\sigma_{ae}} .$$

Para esta percentagem de armadura o momento de rotura da peça será

$$M_R = \varphi_{máx}\ bh\ \sigma_{ae} \left(h - \frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2}\ \varphi_{máx}\ \sigma_{ae}\ bh^2 = \frac{1}{2} \lambda\ \sigma_{bc}\ bh^2.$$

Para fazer concordar os resultados do cálculo com os dos ensaios propõe Gaede para λ o valor 0,833.

24 — Método de Gebauer.

Na sua primitiva teoria de 1934, Gebauer propunha um diagrama rectangular para a distribuição das tensões na zona comprimida e admitia mais que à volta das armaduras uma pequena zona de betão tendido intervinha

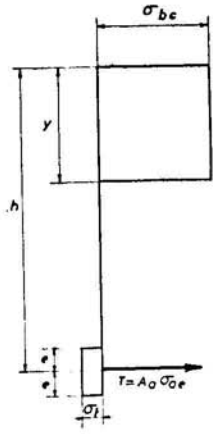

Fig. 36

na resistência da peça, tendo assim em consideração a compressão inicial das armaduras provocada pela retracção.

A profundidade y da linha neutra seria determinada exprimindo o equilíbrio entre as forças interiores:

$$\sigma_{bc}\, b\, y = \sigma_{ae}\, \varphi\, b\, h + 2\, b\, e\, \sigma_t$$

ou

$$y = \varphi h \frac{\sigma_{ae}}{\sigma_{bc}} + 2e \frac{\sigma_t}{\sigma_{bc}} = \alpha h \left(\varphi + \frac{2e}{h} \delta\right),$$

sendo $\alpha = \frac{\sigma_{ae}}{\sigma_{bc}}$ e $\delta = \frac{\sigma_t}{\sigma_{ae}}$.

O momento de rotura será

$$M_R = b y \sigma_{bc} \left(h - \frac{1}{2} y\right) =$$

$$= b \sigma_{bc} \alpha h \left(\varphi + \frac{2e\delta}{h}\right) \left[h - \frac{\alpha h}{2} \left(\varphi + \frac{2e\delta}{h}\right)\right] =$$

$$= bh^2 \sigma_{bc} \alpha \left(\varphi + \frac{2e\delta}{h}\right) \left[1 - \frac{\alpha}{2} \left(\varphi + \frac{2e\delta}{h}\right)\right].$$

Mais tarde, porém, Gebauer abandonou este diagrama: porque não tinha a certeza do betão tendido intervir sempre na resistência da peça, pô-lo de parte, por segurança; depois, considerou uma distribuição parabólica para as tensões na zona do betão comprimido, mais em conformidade com o comportamento real da peça (fig. 37).

Daqui, encontrou:

$$C = \frac{2}{3} b y \sigma_{bc} \quad \text{e} \quad T = \varphi b h \sigma_{ac}$$

Logo, de C = T,

$$y = \frac{3}{2} \varphi \alpha h,$$

sendo $\alpha = \frac{\sigma_{ae}}{\sigma_{bc}}$.

Sendo

$$z = h - \frac{3}{8} y = h \left(1 - \frac{9}{16} \varphi \alpha\right) = \varsigma h .$$

será

$$M_R = T z = \varphi b h^2 \sigma_{ae} \varsigma .$$

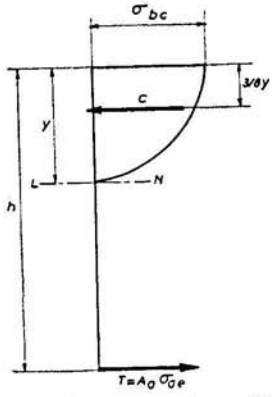

Fig. 37 — Diagrama proposto por Gebauer

A hipótese que faz das armaduras estarem sujeitas a uma tensão igual ao seu limite de elasticidade dá em consequência que o método tenha um limite de aplicação, definido pela percentagem crítica superior φ_{cs}.

Admite Gebauer que o encurtamento máximo no betão está compreendido entre 2 ‰ e 3,5 ‰; o alongamento nos aços é suposto igual a 2,5 ‰ e a 4 ‰, respectivamente, para aços duros e aços macios.

Considerando válida a hipótese da conservação das secções planas, obtém-se

$$y = \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_a + \varepsilon_b} \cdot h$$

e como por outro lado $y = \frac{3}{2} \varphi \alpha h$, a percentagem crítica superior será,

$$\varphi_{cs} = \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_a + \varepsilon_b} \cdot \frac{2}{3 \alpha}$$

25 — Breve crítica comparativa.

Nestes métodos de cálculo a posição da linha neutra é obtida a partir da equação que exprime o equilíbrio entre a resultante das tensões no betão e a força de tracção nas armaduras, visto que nestas se supõe uma tensão constante e igual ao seu limite de elasticidade. Resulta daqui uma grande simplicidade para os cálculos, mas estes conduzirão a resultados forçosamente errados para aqueles tipos de peças em que, na verdade, na rotura, não seja $\sigma_a = \sigma_{ae}$; mas o que é de maior importância é que, nas peças fortemente armadas, os erros cometidos são em prejuízo da segurança, visto avaliarem-se as suas resistências por excesso. De modo que se torna necessário limitar a aplicação destes métodos sòmente àqueles casos em que realmente a percentagem de armaduras utilizadas seja tal que se ultrapassem as deformações elásticas.

Nos métodos de Coppée e de Gaede a percentagem limite de armadura, correspondendo a $y = h$, é um valor excessivamente elevado, seguramente fora do domínio em que se verifica ser $\sigma_a = \sigma_{ae}$; apresentamos a seguir alguns valores dessa percentagem limite, segundo os métodos de Coppée e Gaede, para várias resistências do betão e para aços cujo limite elástico seja igual a 2400 kg/cm²:

MÉTODO	σ_{bc} (kg/cm²)					
	100	200	300	400	500	600
Coppée	4,17 %	8,35 %	12,53 %	16,68 %	20,9 %	25,1 %
Gaede	3,39 »	6,96 »	10,46 »	13,91 »	17,46 »	20,9 »

Já Whitney, baseado nos resultados das experiências, apresenta valores muito mais baixos, pois, para $y_{máx} = 0{,}537\ h$, obtém-se, pela mesma ordem:

Whitney	1,79 %	3,59 %	5,37 %	7,17 %	8,96 %	10,75 %

Porém, de todos os métodos deste grupo o que oferece maior interesse é o de Gebauer: não só pelo seu diagrama parabólico para as tensões na zona comprimida, muito mais verosímil que o rectangular, adoptado pelos outros autores, como ainda pela fixação de valores de deformação no betão e no aço limitando o domínio de aplicação do método.

Por este aspecto, até, poder-se-ia enquadrá-lo dentro do 1.º grupo dos métodos aqui tratados.

4.º GRUPO

26 — Método de Steuermann.

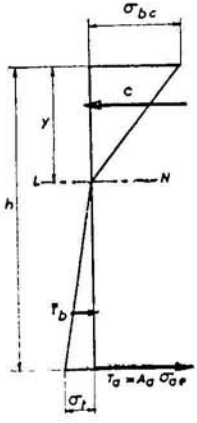

Fig. 38 — Diagrama proposto por Steuermann

Steuermann adopta um diagrama de tensões constituído por dois triângulos, um para a zona do betão comprimido e outro para a do betão à tracção. Os valores máximos das tensões são a resistência σ_{bc} do betão em cubos e a sua resistência à tracção σ_t.

A igualdade $C = T_a + T_b$ escrever-se-á

$$\frac{1}{2}\,\sigma_{bc}\,b\,y = \varphi\,bh\,\sigma_{ae} + \frac{1}{2}\,\sigma_t\,b\,(h-y).$$

Esta equação permite encontrar o

valor de y, que, se designarmos as relações $\frac{\sigma_t}{\sigma_{bc}}$ e $\frac{\sigma_{ae}}{\sigma_{bc}}$ por β e α, respectivamente, será

$$y = \xi\, h = \frac{2\,\varphi\,\alpha + \beta}{1 + \beta} \cdot h \qquad (26.1)$$

Tomando os momentos de todas as forças em relação à linha de acção de C, obtém-se

$$M_R = \varphi\, bh\, \sigma_{ae}\left(h - \frac{y}{3}\right) + \frac{1}{2}\, b\, \sigma_t\, (h-y)\left[\frac{2}{3}\,(y + h - y)\right] =$$

$$= \varphi\, bh^2\, \sigma_{ae}\left(1 - \frac{\xi}{3}\right) + \frac{1}{3}\, bh^2\, \sigma_t\, (1 - \xi) =$$

$$= \frac{bh^2}{3}\left[\sigma_{ae}\,\varphi\left(3 - \frac{2\,\varphi\,\alpha + \beta}{1 + \beta}\right) + \sigma_t\left(1 - \frac{2\,\varphi\,\alpha + \beta}{1 + \beta}\right)\right] =$$

$$= \frac{bh^2}{3\,(1 + \beta)} \cdot \sigma_{bc}\,(3\,\alpha\,\varphi - 2\,\alpha^2\,\varphi^2 + \beta).$$

O momento específico $\overline{m}_b$ será

$$\overline{m}_b = \frac{M_R}{bh^2\,\sigma_{bc}} = \frac{3\,\alpha\,\varphi - 2\,\alpha^2\,\varphi^2 + \beta}{3\,(1 + \beta)}.$$

Há um valor limite para φ; é o que corresponde a ser $y = h$; será então, de (26-1), $\xi = \frac{2\,\varphi\,\alpha + \beta}{1 + \beta} = 1$ e

$$\varphi_{máx} = \frac{1}{2\alpha}.$$

27 — Método de Maillart.

Tomando como referência um sistema de eixos ortogonais, em cujas abscissas e ordenadas se representam os valores de $\varphi \frac{\sigma_{ae}}{\sigma_{bp}}$ e dos momentos específicos $\overline{m}_b = \frac{M_R}{bh^2 \sigma_{bp}}$ (fig. 39) e marcando os pontos figurativos dos resultados obtidos em ensaios de flexão realizados com vigas de que se conheciam tanto as características geométricas da sua

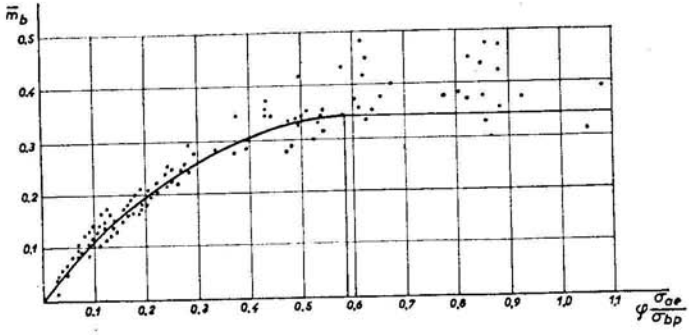

Fig. 39

secção transversal como as resistências do betão e do aço, observou o eng. suíço Maillart que esses pontos se distribuiam de modo a ser legítimo considerar a existência duma lei de dependência, cuja expressão gráfica é a curva traçada na figura, traduzida na equação

$$\overline{m}_b = \varphi \frac{\sigma_{ae}}{\sigma_{bp}} \left(\frac{7}{6} - \varphi \frac{\sigma_{ae}}{\sigma_{bp}} \right). \qquad (27.1)$$

Trata-se da equação duma parábola, com vértice num ponto de abscissa $\varphi \frac{\sigma_{ae}}{\sigma_{bp}} = \frac{7}{12}$, a partir do qual o mo-

mento $\overline{m}_b$ permanece constante; há, pois, uma percentagem máxima, dada por

$$\varphi_{máx} = \frac{7}{12} \frac{\sigma_{bp}}{\sigma_{ae}} \tag{27.2}$$

que não se deve ultrapassar.

Dada, então, uma peça, de que se conhecem as suas dimensões b e h, a quantidade de armaduras $A_a = \varphi\, bh$, a resistência prismática do betão σ_{bp} e o limite elástico dos aços σ_{ae}, a paralela ao eixo das ordenadas tirada pelo ponto de abscissa $\varphi \frac{\sigma_{ae}}{\sigma_{bp}}$ encontra a curva num ponto de ordenada $\overline{m}_b$, a partir da qual calculamos o momento de rotura na peça,

$$M_R = \overline{m}_b\, b\, h^2\, \sigma_{bp}\,.$$

Pode, também, resolver-se o problema por aplicação directa de expressão (27.1); será

$$M_R = bh^2\, \varphi\, \sigma_{ae} \left(\frac{7}{6} - \varphi \frac{\sigma_{ae}}{\sigma_{bp}}\right).$$

À percentagem máxima definida em (27.2) corresponde um momento máximo

$$M_R = \frac{49}{144}\, \sigma_{bp}\, bh^2.$$

28 — Método de Guerrin.

No método de cálculo proposto por Guerrin o diagrama de distribuição de tensões é definido do seguinte modo:

a) admite-se a plastificação completa da zona do betão comprimido, sendo a tensão no betão considerada

igual à resistência obtida em ensaios de compressão sobre cubos.

b) o betão tendido intervirá na resistência da peça, visto haver sempre um núcleo de betão não fissurado na região adjacente à linha neutra; por simplificação, consi-

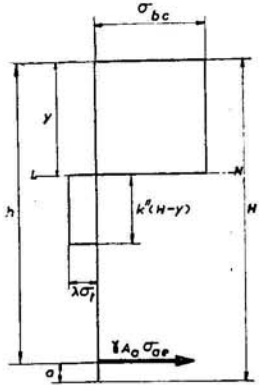

Fig. 40 — Diagrama proposto por Guerrin

dera-se uma distribuição rectangular para as tensões até uma distância k'' (H — y) da linha neutra; as tensões são proporcionais à resistência à tracção do betão, isto é, iguais a $\lambda\sigma_t$.

c) a tensão nas armaduras pode ser superior ao seu limite de elasticidade; será $\sigma_a = \gamma\ \sigma_{ae}$, em que $\gamma > 1$.

Dos resultados das experiências feitas colheu Guerrin as indicações necessárias para a fixação dos valores de k'', λ e γ, de modo a obter nos cálculos concordância com esses resultados.

O primeiro coeficiente k'' diminue com o aumento da esbelteza da secção, podendo tomar o valor 3/4 para o caso de tubos ou lajes de pouca espessura; na fig. 41 faz-se a representação gráfica da lei da variação de k'' com a altura da secção.

Quanto ao valor de γ, é função quer da percentagem das armaduras, quer das resistências do betão e do aço.

O traçado das curvas $\gamma = \gamma\ (\sigma_{bc}, \varphi)$ está feito na figura 42; os valores indicados para γ, que crescem com o aumento da tensão σ_{ae}, são valores mínimos, de modo que podem ser considerados para qualquer tipo de aços.

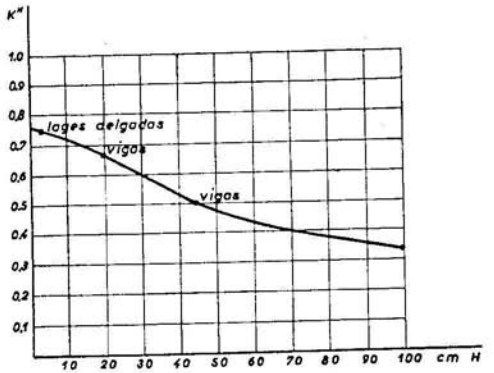

Fig. 41 — Valores de k'' em função da altura total da secção

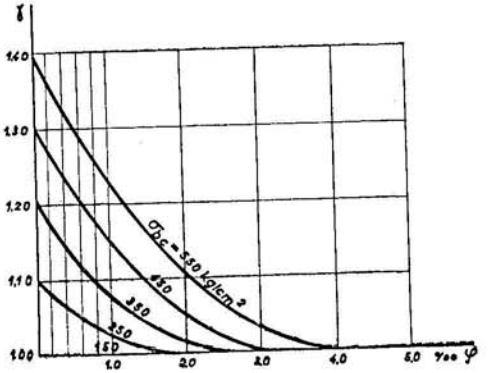

Fig. 42 — Valores de γ em função da percentagem φ, para várias resistências do betão

O coeficiente λ é sempre inferior à unidade, visto o betão tendido resistir sòmente numa zona restrita do interior da secção e não em toda a largura desta; Guerrin indica curvas dando os valores de λ em função dos de φ e de σ_{bc} (fig. 43).

Em função, pois, da altura da secção, da percentagem de armaduras e da resistência do betão, escolhem-se os valores de k'', λ e α; designando a distância da linha

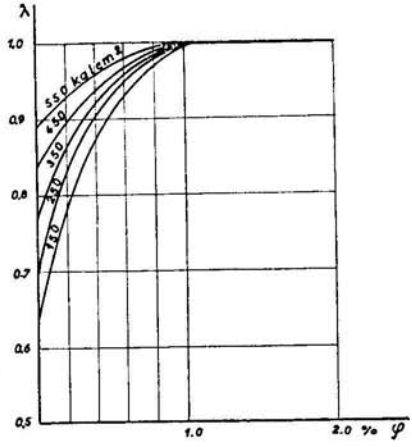

Fig. 43 — Valores de λ em função da percentagem φ, para várias resistências do betão

neutra à face superior da viga por ξ H, a igualdade entre as forças de tracção e de compressão é expressa por

$$b\,\xi\,H\,\sigma_{bc} = b\,\lambda\,\sigma_t\,k''\,(H - \xi\,H) + \gamma\,\sigma_{ae}\,\varphi\,b\,H$$

ou

$$\xi = \frac{k''\,\lambda\,\beta + \gamma\,\varphi\,\alpha}{1 + k''\,\lambda\,\beta}\,.$$

Tomando momentos em relação à linha neutra, fazendo $a = \varepsilon$ H, encontra-se

$$M_R = \frac{1}{2}\,b\,\xi^2\,H^2\,\sigma_{bc} + \frac{1}{2}\,b\,H^2\,(1 - \xi)^2\,\lambda\,k''^2\,\sigma_t +$$
$$+ b\,H^2\,\varphi\,\sigma_{ae}\,\gamma\,(1 - \xi - \varepsilon)\,.$$

ou

$$M_R = A\ bH^2\ \sigma_{ae},$$

em que $A = \dfrac{\xi^2 + \lambda\ k'^2 (1 - \xi)^2 \beta + 2\gamma\varphi\ (1 - \xi - \varepsilon)\ \alpha}{2\alpha}$.

Deve notar-se que Guerrin exprime os seus resultados em função da altura total da secção H.

29 — Breve crítica comparativa

O objectivo principal dos métodos que temos vindo a expor é, afinal, determinar, a partir do conhecimento prévio das características geométricas da secção transversal e das propriedades do betão e do aço que entram na composição da peça, qual o valor do momento capaz de lhe provocar a rotura. Ora os autores deste grupo pretendem primeiro que tudo obter este valor, o mais exactamente possível, importando-se menos com o verdadeiro aspecto dos diagramas de tensões ou de deformações.

De modo que não será de estranhar um diagrama como o que Steuermann apresenta, com uma distribuição de tensões tão afastada da realidade. Há sem dúvida uma depreciação nas possibilidades de resistência do betão comprimido, mas, por outro lado, é seguramente exagerada a intervenção que se atribue ao betão tendido; há, assim, uma certa compensação e na verdade não pode deixar de se verificar que a aproximação dos resultados obtidos com a adopção dum tal diagrama em relação aos experimentais é aceitável.

No método de Guerrin é nítida a preocupação de se apresentar um processo de cálculo que forneça valores o mais possível próximos dos reais. O diagrama proposto constitue sem dúvida uma melhoria em relação ao de Steuer-

mann: procura-se entrar em consideração com todos os elementos em jogo na resistência da peça, adoptando-se parâmetros cujos valores são fixados de harmonia com os resultados dos ensaios. A aproximação é superior à do método de Steuermann, devendo ser tanto maior quanto mais completa for a escala daqueles parâmetros.

É evidente neste método admitir-se uma excessiva intervenção do betão tendido; de facto, é absolutamente impossível que o núcleo de betão não fissurado tenha a amplitude que os valores do parâmetro k'' indicam.

É com Maillart, no entanto, que o propósito apresentado no início deste parágrafo é completamente cumprido; não há qualquer diagrama de tensões, mas sim uma expressão resultando da média de valores obtidos experimentalmente.

REGULAMENTOS

30 — Regulamento brasileiro

As normas estabelecidas neste Regulamento assentam fundamentalmente na teoria de cálculo apresentada por van Langendonck, a que já fizemos referência; em resumo, prescreve-se o seguinte:

a) as deformações do betão são proporcionais às suas distâncias à linha neutra;

b) as tensões no betão comprimido distribuem-se uniformemente;

c) para valor desta tensão toma-se $\frac{3}{4}\sigma_{beil}$, devendo o betão a utilizar apresentar uma resistência mínima de 125 kg/cm², medida em provetas cilíndricas de 30 cm de altura e 15 cm de diâmetro;

d) despreza-se qualquer resistência do betão à tracção;

e) o aço deforma-se com módulo de elasticidade constante até entrar em fluência, durante a qual as tensões permanecem constantes e iguais ao limite de elasticidade;

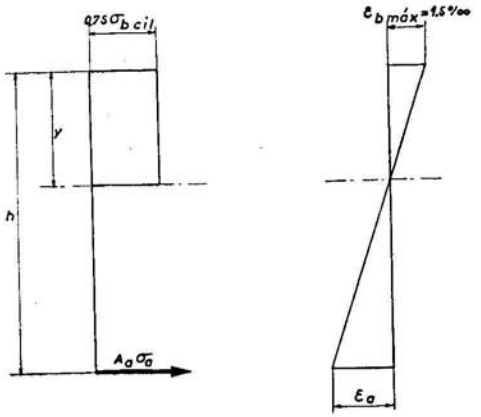

Fig. 44 — Diagramas adoptados no Regulamento brasileiro

f) na falta de determinação experimental, o encurtamento máximo do betão na rotura será suposto igual a 1,5 ‰.

Para coeficiente de segurança toma-se, em edifícios, o valor $s = 1{,}65$, tanto para as cargas permanentes como para as cargas acidentais; para cargas móveis, em pontes, toma-se $s = 2$.

Com o fim de se evitarem fissuras excessivas, quando se empreguem barras lisas de aços com limite de elasticidade superior a 3200 kg/cm² ou barras com secções especiais ou torcidas cujo limite exceda 4000 kg/cm², devem ser aumentados os coeficientes de segurança.

As tensões a que se refere a alínea *e*) são as seguintes:

Aço 37 CA, $\sigma_{ae} = 1500$ kg/cm²

» 50 CA, $\sigma_{ae} = 1800$ »

Em pontes, as tensões não excederão, respectivamente, os valores 1400 kg/cm² e 1600 kg/cm².

Os aços 37 CA e 50 CA são assim caracterizados:

	37 CA	50 CA
limite de elasticidade mínimo	24 kg/mm²	30 kg/mm²
tensão de rotura mínima	37 »	50 »
alongamento residual mínimo	comum aos dois aços e igual a $\frac{950}{\sigma_{ar}}$, sem ser inferior a 18 %	

As secções deverão ser armadas com uma área de aço mínima igual a 0,25 % de b × h.

31 — Regulamento russo.

Embora no regulamento de 1939 se tivesse já introduzido o cálculo à rotura, no novo regulamento de 1942 exploram-se ao máximo as propriedades e possibilidades dos materiais constituintes do betão armado, afim de que uma maior economia fosse possível nas construções.

As bases do processo de cálculo preconizado no novo regulamento, estabelecidas após uma importante série de ensaios de laboratório, podem assim resumir-se:

a) tanto a lei de Hooke como a hipótese de Bernouilli não são aplicáveis às peças de betão armado.

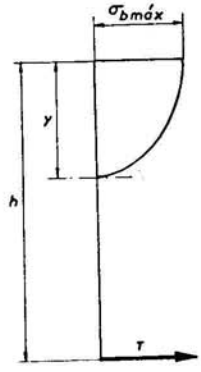

Fig. 45 — Diagrama adoptado no Regulamento russo

b) por ocasião da rotura a distribuição das tensões na zona comprimida segue uma lei definida por uma parábola cúbica.

c) o betão deve sòmente resistir à compressão; o aço será utilizado sòmente como armadura de tracção.

De modo que uma peça que há-de ser submetida a um momento M deverá ser dimensionada para um momento maior $M_R = s\ M$, tal que

$$M_R = bh^2 \sigma_b \bar{\xi} (1 - 0{,}53 \bar{\xi}) = bh^2 \sigma_b \bar{\xi}_o$$

sendo $\bar{\xi}$ ou $\bar{\xi}_o$ fornecidos segundo os resultados das experiências e não a partir de qualquer consideração teórica. Esses valores dependem tanto do tipo de betão como da percentagem de armaduras utilizadas:

φ %	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00
$\bar{\xi}$	0,05	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20	0,22	0,23	0,24	0,29	0,34	0,40	0,45	0,51	0,56
$\bar{\xi}_o$	0,079	0,095	0,112	0,130	0,146	0,163	0,179	0,194	0,202	0,209	0,245	0,279	0,315	0,343	0,372	0,395

Os valores da tensão σ_b dependem da qualidade do betão, de que são considerados 8 tipos; essa tensão fica compreendida entre as resistências cúbica e prismática, como se indica no quadro seguinte (em kg/cm²):

TIPO DE BETÃO

	350	300	250	200	170	140	110	90
σ_{bc}	350	300	250	200	170	140	110	90
σ_b	280	250	220	180	155	135	110	90
σ_{bp}	225	200	175	145	125	108	88	72

Deve procurar-se utilizar as armaduras sòmente trabalhando à tracção e jamais se descerá aquém duma percentagem mínima, dependente da resistência do betão, como a seguir se indica:

Tipos de betão	350 a 250	200 a 170	140 a 90
Percentagem mínima	0,4 %	0,3 %	0,2 %

As armaduras serão constituidas por barras de secção circular, quadrada, oval ou rectangular, ou ainda de secções especialmente adaptadas com o intuito de elevar o seu limite de elasticidade. Em conformidade com o tipo de armadura e o tipo de betão, há valores de percentagem que se não devem exceder; estes valores são os seguintes, para aços de limite de elasticidade igual a 2500 kg/cm² e a 3000 kg/cm²:

TIPO DE AÇO	TIPO DE BETÃO							
	90	110	140	170	200	250	300	350
$\sigma_{ae} = 2500$ kg/cm².	1,8	2,2	2,7	3,1	3,6	4,4	5,0	5,6
$\sigma_{ae} = 3000$ »	1,5	1,8	2,2	2,6	3,0	3,7	4,2	4,7

O coeficiente de segurança a adoptar é s = 1,8 quando se consideram as acções devidas às cargas permanentes, ao vento ou à neve, podendo descer até 1,3 desde que se entre em linha de conta com todas as cargas possíveis.

32 — Regulamento checoslovaco.

Num suplemento às normas do Regulamento checo de 1948 introduzem-se os princípios de cálculo das peças de betão armado baseado no regime de rotura. Esses princípios, na parte referente às peças de secção rectangular, armadas ùnicamente à tracção e trabalhando em flexão simples, são os que a seguir expomos.

a) o diagrama de tensões no betão é aproximadamente uma parábola cúbica, de ordenada máxima

$\sigma_{bmáx}$; o centro de gravidade da sua área S dista do bordo comprimido de $0{,}53 \frac{S}{\sigma_{bmáx}}$.

b) a tensão máxima $\sigma_{bmáx}$ é uma fracção da resistência do betão medida em ensaios com provetas cúbicas de

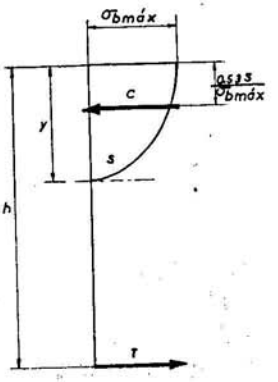

Fig. 46 — Diagrama adoptado no Regulamento checoslovaco

20 cm. de aresta; segundo essas resistências, consideram-se três tipos de betão, assim definidos:

		TIPO DE BETÃO		
		e	*f*	*g*
Resistência dos cubos σ_{be}	(kg/cm²)	170	250	330
Tensão do cálculo $\sigma_{bmáx}$	(»)	155	220	270

c) despreza-se a resistência do betão tendido.

d) a tensão nas armaduras é considerada igual a $c.\varkappa_a$, sendo $\varkappa_a = 2300$ kg/cm² e *c* um coeficiente ligado às carac-

terísticas dos aços empregados, que são classificados em 7 tipos, assim definidos:

Aços sem limite de elasticidade garantido:

10.C02 (0b)	limite de elasticidade mínimo	2000 kg/cm² ;	$c = 1{,}00$
10.370 (37)	»	2100 » ;	$c = 1{,}00$

Aços com limite de elasticidade garantido:

10.372 (37 P)	lim. elasticidade garantido	2300 » ;	$c = 1{,}15$
10.452 (45 P)	» » mínimo	2700 » ;	$c = 1{,}30$

Aços de secção especial:

10.472 (47 P Isteg)	lim. elast. garantido	3600 » ;	$c = 1{,}50$
10.492 (49 P Tor)	» » mínimo	4000 » ;	$c = 1{,}65$
10.512 (51 P Roxor)	» » »	3800 » ;	$c = 1{,}65$

As armaduras de tracção devem ser constituidas pelo menos por duas barras longitudinais, com uma área mínima igual a 0,3 % da área da secção transversal da peça e sem ultrapassar 2,5 %, 3 % ou 3,5 % desta área, respectivamente, quando o betão empregado for dos tipos *e*, *f* ou *g*.

O coeficiente de segurança deve ser de 1,9 ou 1,65, segundo o cálculo for feito tendo em consideração sòmente as cargas principais ou estas e as secundárias. Para cargas dinâmicas, o coeficiente será aumentado.

33 — Regulamento austríaco.

De aprovação muito recente (Agosto de 1953), impõe este Regulamento a existência duma suficiente segurança relativamente a um estado crítico de deformação, caracterizado por deformações do aço e do betão que não devem ser ultrapassadas. O coeficiente de segurança deve ser de 1,7 quando se trate de peças sob a acção de cargas sòmente estáticas, coeficiente que é devidamente aumentado para cargas de natureza diferente.

Segundo os tipos de aço ou de betão, os parâmetros definidores do estado crítico de deformação são os seguintes:

	TIPO DE AÇO				
	I	II	III	IV	V
Limite de elasticidade σ_{ae} (kg/cm²)	2400	3400	4200	5000	6000
$\varepsilon_{a\,max.}$ (‰)	1,7	2,2	4,0	4,4	5,4

	TIPO DE BETÃO			
	B 160	B 225	B 300	B 400
$\sigma_{b\,máx.}$ (kg/cm²)	120	170	225	300
$\varepsilon_{b\,máx.}$ (‰)	1,5	2,0	2,0	2,0

São assim considerados 5 tipos de aços cujos diagramas de deformação médios são indicados na fig. 47.

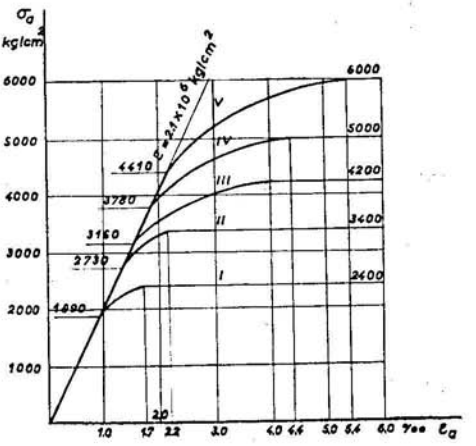

Fig. 47 — Diagramas de deformação dos aços

A parte dos diagramas a traço mais fino poderá interessar no caso de se pretender determinar a segurança em relação ao estado de rotura, em vez de ao estado crítico.

A distribuição das tensões no betão é parabólica, obedecendo à lei

$$\frac{\sigma_b}{\sigma_{b\,máx.}} = \left(2 - \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_{b\,máx.}}\right) \cdot \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_{b\,máx.}},$$

Para os 4 tipos de betão, esta lei tem a representação gráfica seguinte:

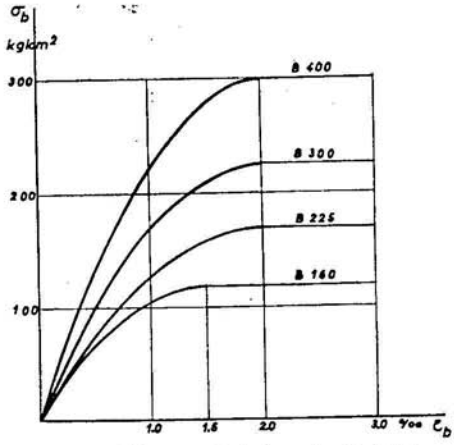

Fig. 48 — Diagramas de deformação dos betões

Igualmente aqui a parte dos diagramas a traço mais fino poderá interessar para a verificação da segurança em relação à rotura.

De acordo com os tipos de aço e de betão utilizados na peça, há um mínimo de percentagem de armadura aquém do qual não se deverá descer menciona-se este mínimo no quadro a seguir:

TIPO DE BETÃO	TIPOS DE AÇO: I	II, III	IV, V
	valores de φ (%)		
B 160	0,12	0,10	
B 225	0,17	0,14	0,10
B 300	0,23	0,19	0,14
B 400		0,25	0,18