

EFEITOS DO VENTO EM ESTRUTURAS DE CABOS E MEMBRANAS TENSAS

PEDRO GIL MARQUES DE QUEIRÓS FERREIRA

Orientadora

Professora Doutora Elsa de Sá Caetano

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto para
obtenção do grau de Doutor em Engenharia Civil

JUNHO DE 2015

PROGRAMA DOUTORAL EM ENGENHARIA CIVIL

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

Tel. +351-22-508 1901

Fax +351-22-508 1446

✉ prodec@fe.up.pt

Editado por

FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO

Rua Dr. Roberto Frias

4200-465 PORTO

Portugal

Tel. +351-22-508 1400

Fax +351-22-508 1440

✉ feup@fe.up.pt

🌐 <http://www.fe.up.pt>

Reproduções parciais deste documento serão autorizadas na condição que seja mencionado o Autor e feita referência a *Programa Doutoral em Engenharia Civil - Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2015*.

As opiniões e informações incluídas neste documento representam unicamente o ponto de vista do respectivo Autor, não podendo o Editor aceitar qualquer responsabilidade legal ou outra em relação a erros ou omissões que possam existir.

Este documento foi produzido a partir de versão electrónica fornecida pelo respectivo Autor.

A meus Pais, Filomena e Agostinho
À Fernanda

The vision of my desire World is not static, but is in constantly changing shape
Frei Otto

AGRADECIMENTOS

Pretendo nesta nota agradecer a todas as pessoas, familiares, amigos e colegas de trabalho, que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho, através da sua amizade, compreensão e disponibilidade. No entanto, gostaria de manifestar a minha especial gratidão:

- À Professora Elsa Caetano, orientadora científica deste trabalho, pelos conhecimentos transmitidos sempre de uma forma clara, pelos meios que colocou ao meu dispor, e pela motivação e amizade com que tem acompanhado o meu percurso académico;
- Ao Professor Álvaro Cunha, pelos meios que colocou ao meu dispor para realizar ensaios no âmbito do projeto da determinação da forma da vela, pelo convite para participar em diversas atividades desenvolvidas pelo grupo de investigação, e pela sua amizade;
- Aos colegas de trabalho do grupo de investigação Vibest, pelo agradável convívio que proporcionaram, Professores Carlos Moutinho e Filipe Magalhães, Fernando Bastos, que me cedeu um algoritmo de geração de séries temporais da velocidade do vento, Leonel Ramos e Bruno Costa, que me apoiaram no âmbito do projeto da vela, Sandro Amador, Gustavo Oliveira, Sérgio Pereira e Fernando Marques;
- Ao engenheiro Rui Garcia e Dr. José Amador (*Martifer Solar*), pela proposta em realizar um estudo de viabilização de uma estrutura de estacionamento, formada por cabos e uma membrana tensa, dotada de painéis fotovoltaicos, que deu origem a uma tese de mestrado integrado realizada pela engenheira Cátia Correia, sob minha coorientação;
- Ao Pedro Pinto e Hugo Rocha (*Fibersail, Lda*), pela proposta e colaboração no desenvolvimento de um sistema de monitorização de determinação da forma com base sem sensores óticos;
- Ao doutor Francisco Araújo e engenheiros Paulo Martins, Nuno Costa, José Monteiro e Gil Pinto (*HBM Fibersensing, Lda*), pela intervenção e colaboração na instrumentação dos modelos utilizados no âmbito do projeto da vela e de apoio na programação relacionado com a unidade de leitura;
- Aos Professores Félix Escrig e José Sanchez da Universidade de Sevilha (Espanha) pela cedência de desenhos do projeto e de fotografias da cobertura de membrana tensa da ilha da Cartuxa em Sevilha, que foi alvo de estudo no presente trabalho;
- Ao doutor Robert Roithmayr, fundador da empresa *Formfinder software GmbH* (Áustria) e coordenador do mestrado de estruturas de membrana da Universidade de Vienna, por ter colocado à minha disposição o *software* de membranas, pela cedência de bibliografia e pela amizade demonstrada;
- Aos Professores Mike Barnes da Universidade de Bath (UK) e Ruy Pauletti da Universidade de São Paulo (Brasil), pela disponibilidade, sugestões e apoio bibliográfico facultado;
- Ao Professor Carlos Lázaro da Universidade de Valencia (Espanha) por me ter recebido numa fase inicial do doutoramento e ter partilhado a sua experiência e conhecimentos no âmbito das estruturas leves;
- Aos Professores Marijke Mollaert da Universidade de Bruxelas (Bélgica), Falko Dieringer e Roland Wüchner da Universidade de Munique (Alemanha), Günther Filz da Universidade de Innsbruck (Áustria) e Arjan Habraken da Universidade de Eindhoven (Holanda), pela disponibilidade e partilha de informação relevante para o desenvolvimento da tese;
- A outros investigadores / engenheiros pela disponibilidade e auxílio em assuntos diversos relacionados com a tese, Sr. Rui Almeida (*Tecnogial*), Alexander Rüther (*Ceno Membrane*

Technology GmbH), Gerry Danza (*FORTEN software*), Christian Bartl (*Unizono Design und Planungs GmbH*), Ivan Tontchev (*Teuffel Engineering Consultants*) e Martin Augustyniak (*Birdair, Inc*);

- Aos fabricantes de membranas tensas pela disponibilidade em ceder catálogos e a disponibilidade para o envio de material para realizar ensaios, Murat Devecioglu (*Verseidag Indutex GmbH*), Ingo Thalhammer (*Sefar AG*), Helmut Frisch (*Dyneon GmbH*), Paolo Giugliano (*Mehler Technologies GmbH*), Roland Keil (*Saint Gobain*) e Silvia Fitor (*Serge Ferrari*);

- A todos os colaboradores do Laboratório de Ensaio de Materiais de Construção da FEUP (LEMC) pelo valioso contributo prestado através do empréstimo de instalações e de equipamentos e pela disponibilidade, amizade e apoio permanentes; do Laboratório de Geossintéticos da FEUP (LGS), especialmente das Professoras Maria de Lurdes e Castorina; e da Paula e do Cláudio do Laboratório de Estruturas da FEUP pelo seu apoio;

- À Ana Matos e à Marta pelo profissionalismo, disponibilidade constante e amizade;

- À Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto pelas excelentes condições que proporcionam à comunidade académica;

- Aos colegas e amigos pelo companheirismo e convívio, Carlos Rodrigues, Filipe Cavadas, Helena, José Conceição, Nuno Pereira, Emanuel Tomé, Mafalda, Despoina, Migas, Gil, Leonor, Lara, Inês, João, Carlos, Miranda, Coimbra, Bri, Luís Diogo, Sílvia, Augusto, Ivan, Ana Patrícia, Flávio, Ana Barros, Félix e Luís Monteiro;

- Aos meus pais pelo apoio incondicional; madrinha, irmãos, sobrinhos, padrinho, avós, família, Paula, Artur, afilhado, Linda e Abílio, por todo apoio, incentivo e motivação;

- À Fernanda, companheira, pelo constante apoio, dedicação, motivação e incentivo.

Por último, gostaria de expressar o meu apreço pelo apoio concedido pela Fundação para a Ciência e Tecnologia (FCT) através da atribuição de uma bolsa individual de doutoramento (SFRH/BD/70979/2010).



RESUMO

A presente dissertação é o resultado de estudos realizados no âmbito dos trabalhos conducentes ao grau de doutor, centrados no estudo do efeito do vento em estruturas de cabos e membranas tensas.

O principal objetivo do trabalho de investigação apresentado na presente dissertação consistiu no estudo e desenvolvimento de metodologias de determinação da forma e na realização da análise do efeito do vento em estruturas de cabos e membranas tensas, tendo como exemplo duas estruturas: uma cobertura em membrana de um recinto polidesportivo e a vela de um barco.

Neste contexto, começam por ser descritos os diferentes tipos estruturais associados às coberturas de cabos e membranas tensas, caracterizando-se os materiais e elementos de ligação, e sistematizando-se os principais conceitos relacionados com o dimensionamento destas estruturas especiais.

Posteriormente, são apresentados diversos métodos de determinação e otimização da forma estrutural, descrevendo-se a formulação que fundamenta os vários programas de cálculo automático desenvolvidos com base nesses métodos e referindo-se alguns exemplos simples que, mediante o recurso a simulações numéricas, permitiram avaliar a aplicabilidade e eficiência desses programas.

Complementarmente, é apresentada a caracterização da ação do vento com base na geração de amostras de processos estocásticos, que permite realizar uma análise da resposta dinâmica da membrana no domínio do tempo com base num modelo aeeroelástico simplificado, incluindo massa e amortecimento aerodinâmico, e aceder ao efeito do vento. Esta metodologia é aplicada a uma estrutura de cobertura em membrana tensa localizada na ilha da *Cartuja*, em Sevilha, sobre a qual são realizados estudos de influência da ortotropia e do pré-esforço no seu comportamento estático e dinâmico.

Finalmente, é apresentada uma metodologia para a determinação da forma de uma membrana induzida pela ação do vento com base em medições à escala real. A aplicação desenvolvida inclui um sistema de medida que permite caracterizar a forma da vela num veleiro, possibilitando a otimização do desempenho da embarcação, em tempo real. Este sistema baseia-se na instrumentação da vela com extensómetros óticos e na reconstituição automática da deformada, a partir da medição da curvatura num conjunto de secções.

PALAVRAS-CHAVE: Estruturas de membrana tensa, velas, métodos de determinação da forma, efeito do vento, análise dinâmica não-linear.

ABSTRACT

This dissertation is the result of studies carried out in the work leading to the degree of doctor of philosophy, focused on wind effect in cable and membrane structures.

The main objective of the research presented in this thesis consisted in the study and development of methodologies of form-finding and perform the analysis of wind effect in cable and membrane structures, taking as an example two structures: a tension membrane roof structure and a sailboat.

In this context, different structural types associated with cables and membrane roof structures are firstly described, characterizing the materials and connecting elements, and systematizing the main concepts related to the design of these special structures.

Subsequently, various form-finding and structural optimization methods are presented, describing the formulation that underlies the various automatic calculation programs developed based on these methods and referring to some simple examples that through the use of numerical simulations, allowed evaluating the applicability and efficiency of these programs.

In addition, the characterization of wind action based on the generation of stochastic processes samples is presented, which allows performing a dynamic membrane response analysis in the time domain considering a simplified aeroelastic model, with mass and aerodynamic damping, and assessing the wind effect. This methodology is applied to a tensile membrane roof structure located on the island of *Cartuja* in Seville, along with a set of studies on the influence of the orthotropy and prestress in its static and dynamic behavior.

Finally, a methodology of form-finding a membrane induced by the wind based on full-scale measurements is presented. The developed application includes a measurement system to characterize the sail shape in a sailboat, enabling the optimization of the performance of the boat in real time. This system relies on instrumentation of the sail with optical strain gauges and the automatic reconstitution of the deformed shape from the measurement of the curvature of a set of sections.

PALAVRAS-CHAVE: Membrane structures, sails, form-finding methods, wind effect, nonlinear dynamic analysis.

ÍNDICE GERAL

AGRADECIMENTOS	I
RESUMO	III
ABSTRACT	V
ÍNDICE GERAL	VII
ÍNDICE DE FIGURAS	XV
ÍNDICE DE TABELAS	XXXIII
SÍMBOLOS E ABREVIATURAS	XXXIX

1. INTRODUÇÃO

1.1. GERAL	1.1
1.1.1. ESTRUTURAS DE MEMBRANA TENSA.....	1.2
1.1.2. MÉTODOS DE DETERMINAÇÃO E OTIMIZAÇÃO DA FORMA ESTRUTURAL.....	1.3
1.1.3. AÇÃO E EFEITOS DO VENTO EM MEMBRANAS	1.6
1.2. OBJETIVOS E ORGANIZAÇÃO DA TESE	1.9

2. ESTRUTURAS DE MEMBRANA TENSA

2.1. GERAL	2.1
2.2. FORMA.....	2.2
2.2.1. GERAL	2.2
2.2.2. ESTRUTURAS DE SUPORTE DE MEMBRANA.....	2.3
2.2.3. CLASSIFICAÇÃO DE ESTRUTURAS DE MEMBRANA	2.4
2.3. PROPRIEDADES DOS MATERIAIS E ENSAIOS	2.4
2.3.1. CARACTERÍSTICAS DOS TÊXTEIS TÉCNICOS	2.5
2.3.1.1. Fibras e fios.....	2.5
2.3.1.2. Tecidos de base.....	2.7
2.3.1.3. Revestimento	2.9
2.3.1.4. Comportamento mecânico e ensaios	2.11
2.3.2. CARACTERÍSTICAS DOS PLÁSTICOS TÉCNICOS	2.20
2.3.3. CABOS	2.20
2.4. LIGAÇÕES E DETALHES CONSTRUTIVOS	2.21
2.5. FASES DE PROJETO	2.22

2.6. REGRAS DE DIMENSIONAMENTO ESTRUTURAL E CRITÉRIOS DE SEGURANÇA	2.23
2.7. AÇÕES	2.26
2.7.1. PRÉ-ESFORÇO	2.26
2.7.2. PESO PRÓPRIO	2.27
2.7.3. AÇÃO DO VENTO	2.27
2.7.4. AÇÃO DA NEVE	2.27
2.7.5. AÇÃO DA TEMPERATURA	2.28
2.7.6. AÇÃO SÍSMICA	2.28
2.8. CARACTERIZAÇÃO ESTRUTURAL DO COMPORTAMENTO DA MEMBRANA	2.28
2.8.1. FORMULAÇÃO GERAL DE ANÁLISE	2.29
2.9. FABRICAÇÃO, INSTALAÇÃO E MANUTENÇÃO	2.32
2.10. ESTRUTURAS DE MEMBRANA EM PORTUGAL	2.37

3. DETERMINAÇÃO E OTIMIZAÇÃO DA FORMA ESTRUTURAL

3.1. GERAL	3.1
3.2. MODELOS FÍSICOS	3.3
3.3. MÉTODOS ANALÍTICOS	3.3
3.3.1. MÉTODO DA SUPERFÍCIE MINIMAL	3.4
3.4. MÉTODOS NUMÉRICOS	3.9
3.4.1. CLASSIFICAÇÃO	3.9
3.4.2. MATRIZ DE RIGIDEZ	3.9
3.4.3. RIGIDEZ GEOMÉTRICA	3.11
3.4.3.1. Geral	3.11
3.4.3.2. Método da Densidade de Força (MDF)	3.17
3.4.3.3. Método da Densidade de Tensão Superficial (MDTS)	3.39
3.4.4. EQUILÍBRIO DINÂMICO	3.43
3.4.4.1. Geral	3.43
3.4.4.2. Método da Relaxação Dinâmica (MRD)	3.43
3.4.5. OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL EVOLUCIONÁRIA (MOEE)	3.67

4. AÇÃO E EFEITOS DO VENTO EM MEMBRANAS

4.1. INTRODUÇÃO	4.1
4.2. CARACTERIZAÇÃO DO VENTO ATMOSFÉRICO	4.2
4.2.1. NATUREZA DO VENTO.....	4.2
4.2.2. COMPONENTE MÉDIA DA VELOCIDADE DO VENTO	4.4
4.2.2.1. Variação com a altura	4.4
4.2.2.2. Influência da rugosidade	4.5
4.2.2.3. Influência da orografia.....	4.5
4.2.2.4. Ventos extremos	4.5
4.2.3. COMPONENTE TURBULENTE DA VELOCIDADE DO VENTO	4.6
4.2.3.1. Intensidade de turbulência.....	4.6
4.2.3.2. Escalas de turbulência.....	4.8
4.2.3.3. Conteúdo espectral.....	4.8
4.2.3.4. Coerência.....	4.9
4.3. AÇÃO E EFEITOS DO VENTO ATMOSFÉRICO SOBRE COBERTURAS.....	4.11
4.3.1. CAMADA LIMITE.....	4.11
4.3.2. CARACTERIZAÇÃO DO ESCOAMENTO	4.11
4.3.3. ESTABILIDADE AERODINÂMICA	4.12
4.3.4. FORÇAS AERODINÂMICAS	4.16
4.3.5. COEFICIENTES DE PRESSÃO C_p	4.17
4.3.5.1. Coberturas de pequena / média dimensão.....	4.17
4.3.5.2. Coberturas de estádios.....	4.27
4.3.5.3. Coberturas de forma irregular	4.43
4.4. CARACTERIZAÇÃO EXPERIMENTAL DA AÇÃO E EFEITOS DO VENTO	4.44
4.4.1. ESCALA REDUZIDA - TÚNEL DE VENTO	4.44
4.4.1.1. Metodologia de ensaio vs Modelo físico	4.44
4.4.1.2. Meios experimentais	4.44
4.4.2. ESCALA REAL - PROTÓTIPO	4.45
4.4.2.1. Caracterização da ação do vento	4.45
4.4.2.2. Monitorização estrutural aerodinâmica.....	4.45
4.5. MODELAÇÃO AEROELÁSTICA DA COMPONENTE TURBULENTE DO VENTO	4.47
4.5.1. GERAL	4.47
4.5.2. MODELO AEROELÁSTICO SIMPLIFICADO	4.47

4.5.2.1. Massa aerodinâmica	4.48
4.5.2.2. Amortecimento aerodinâmico.....	4.53
4.5.3. ANÁLISE DINÂMICA NO DOMÍNIO DO TEMPO	4.54
4.5.3.1. Geração de séries temporais artificiais da velocidade do vento.....	4.56
4.5.4. ANÁLISE DINÂMICA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA	4.60

5. COBERTURA DE UM RECINTO POLIDESPORTIVO

5.1. INTRODUÇÃO	5.1
5.2. DESCRIÇÃO DA COBERTURA	5.1
5.2.1. ESTRUTURA METÁLICA.....	5.2
5.2.2. MEMBRANA.....	5.6
5.2.2.1. Forma	5.7
5.2.2.2. Padrões de corte	5.8
5.2.2.3. Identificação de enrugamento na membrana.....	5.11
5.2.3. DETALHES E LIGAÇÕES	5.13
5.3. MATERIAIS	5.20
5.4. DETERMINAÇÃO DA FORMA DA MEMBRANA TENSA	5.22
5.4.1. PRÉ-ESFORÇO	5.22
5.4.2. MÉTODOS DE DETERMINAÇÃO DA FORMA.....	5.22
5.4.2.1. Topologia estrutural.....	5.23
5.4.2.2. Pressupostos de cálculo e resultados.....	5.27
5.4.2.3. Influência da orientação das direções de fabrico a 45°	5.55
5.4.2.4. Influência das metodologias de análise	5.58
5.5. ANÁLISE DA MEMBRANA TENSA COM BORDOS RÍGIDOS SOB AS AÇÕES PERMANENTES – INFLUÊNCIA DO PRÉ-ESFORÇO E DA ORTOTROPIA	5.61
5.5.1. INTRODUÇÃO	5.61
5.5.2. MODELOS ORTOTRÓPICOS – DIREÇÃO DO URDUME VS DIREÇÃO DA TRAMA	5.62
5.5.3. INFLUÊNCIA DO PRÉ-ESFORÇO E DA ORIENTAÇÃO DAS DIREÇÕES DE FABRICO	5.65
5.5.3.1. Análise estática	5.65
5.5.3.2. Análise modal	5.71
5.5.4. INFLUÊNCIA DO PRÉ-ESFORÇO E DO COEFICIENTE DE POISSON.....	5.76
5.5.4.1. Análise estática	5.76
5.5.4.2. Análise modal	5.85

5.5.5. CARACTERIZAÇÃO DO ERRO DO MODELO CONSTITUTIVO ORTOTRÓPICO LINEAR.....	5.89
5.5.5.1. Ensaio de tração biaxial	5.89
5.5.5.2. Simulação numérica do ensaio de tração biaxial	5.95
5.5.5.3. Análise de resultados.....	5.97
5.6. AÇÃO DO VENTO	5.109
5.6.1. DIREÇÃO DO VENTO E DISTRIBUIÇÃO ESPACIAL	5.109
5.6.2. COEFICIENTES AERODINÂMICOS	5.109
5.6.2.1. Considerações iniciais	5.109
5.6.2.2. Membrana	5.110
5.6.2.3. Estrutura Metálica	5.118
5.6.3. VELOCIDADE DO VENTO.....	5.121
5.6.4. PRESSÃO E FORÇA ESTATICA DO VENTO.....	5.122
5.6.5. PRESSÃO E FORÇA DINÂMICA DO VENTO.....	5.125
5.6.6. VARIAÇÃO DA VELOCIDADE DO VENTO COM O TEMPO	5.126
5.7. EFEITOS DO VENTO NA ESTRUTURA DE COBERTURA	5.130
5.7.1. INTRODUÇÃO	5.130
5.7.2. MODELO NUMÉRICO	5.131
5.7.2.1. Estado inicial sob as ações permanentes	5.135
5.7.2.2. Análise modal.....	5.138
5.7.2.3. Interação dinâmica membrana - estrutura metálica	5.140
5.7.2.4. Influência dos cabos, membranas e detalhes construtivos no comportamento da estrutura	5.141
5.7.3. RESPOSTA DO MODELO ÀS AÇÕES PERMANENTES E À AÇÃO DO VENTO EM PRESSÃO	5.143
5.7.3.1. Análise não-linear geométrica da ação quase-estática da ação do vento segundo EC1-Parte 1-4.....	5.143
5.7.3.2. Análise não-linear dinâmica da ação do vento	5.146
5.7.4. RESPOSTA DO MODELO ÀS AÇÕES PERMANENTES E À AÇÃO DO VENTO EM SUCÇÃO.....	5.162
5.7.4.1. Análise não-linear geométrica da ação quase-estática da ação do vento segundo EC1-Parte 1-4.....	5.162
5.7.4.2. Análise não-linear dinâmica da ação do vento	5.165
5.7.5. CONCLUSÕES	5.179

6. DETERMINAÇÃO DA FORMA DA VELA DE UM BARCO EM TEMPO REAL

6.1. INTRODUÇÃO	6.1
6.2. CARACTERIZAÇÃO DO PROBLEMA	6.4
6.2.1. CARACTERIZAÇÃO DO ESTADO DE DEFORMAÇÃO	6.5
6.2.2. PARÂMETROS DO PERFIL DE SECÇÃO DE VELA	6.5
6.2.3. CARACTERIZAÇÃO DA FORMA DA VELA COM BASE EM MEDIÇÕES EM TEMPO REAL	6.6
6.3. CARACTERIZAÇÃO DA DEFORMADA DE UMA BARRA COM BASE NA MEDIÇÃO DE EXTENSÕES	6.7
6.3.1. METODOLOGIA	6.8
6.3.1.1. Lei de variação das extensões – interpolação <i>SPLINE</i> -cúbica	6.8
6.3.1.2. Curvatura das secções	6.9
6.3.1.3. Rotação das secções	6.9
6.3.1.4. Reconstituição da deformada da barra	6.9
6.3.2. IMPLEMENTAÇÃO	6.10
6.3.3. VALIDAÇÃO NUMÉRICA DA METODOLOGIA	6.11
6.3.3.2. Resultados das simulações	6.16
6.3.3.3. Conclusões	6.22
6.4. VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL DA METODOLOGIA DESENVOLVIDA	6.22
6.4.1. GERAL	6.22
6.4.2. MODELO FÍSICO	6.23
6.4.3. SISTEMA DE MONITORIZAÇÃO BASEADO EM FIBRAS ÓTICAS	6.27
6.4.4. SISTEMA DE MONITORIZAÇÃO BASEADO EM ANÁLISE DE IMAGEM	6.28
6.4.5. PROCEDIMENTO DE ENSAIO	6.34
6.4.6. RESULTADOS DOS ENSAIOS	6.37
6.4.6.1. Validação da metodologia	6.37
6.4.6.2. Estudos paramétricos para otimização da monitorização	6.39
6.5. INCERTEZAS NAS MEDIÇÕES	6.49
6.5.1. CARACTERIZAÇÃO DA ESPESSURA	6.49
6.5.2. CARACTERIZAÇÃO DA LOCALIZAÇÃO DAS SECÇÕES DE BARRA INSTRUMENTADAS	6.50
6.5.3. IMPACTO DOS EFEITOS DA TEMPERATURA NA MEDIÇÃO DOS EXTENSÓMETROS DE FIBRA ÓTICA... ..	6.50
6.5.3.1. Sensibilidade à temperatura	6.50
6.5.3.2. Impacto do coeficiente termo-ótico nas medições dos sensores	6.53
6.6. CONSIDERAÇÕES FINAIS	6.55

7. CONCLUSÕES

7.1. SUMÁRIO	7.1
7.2. CONCLUSÕES.....	7.1
7.3. PERSPETIVAS DE INVESTIGAÇÃO FUTURA	7.7

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1 – Estruturas tensas: (a) Ponte 25 de Abril, Portugal (Wikipédia 1966); (b) Pavilhão de Portugal, Portugal (Idealista 2015); (c) Estádio Olímpico de Munique, Alemanha (Wikipédia 1972); (d) Estádio de Faro-Loulé, Portugal (<i>World Stadiums</i> 1998); (e) Barco à vela (Fotos de Barcos 2012) e (f) Paraquedas (NASA 2015).....	1.1
Figura 1.2 – Tendas em membrana: (a) Tenda dos Beduínos (Kittner 2012) e (b) Tenda <i>Tipi</i> (Tonybynum 2014)	1.2
Figura 1.3 – Evolução dos materiais utilizados em engenharia, adaptado de Ashby (2010)	1.2
Figura 1.4 – Igreja inacabada de Colónia Güell: (a) Maquete e modelo polifuncional de correntes suspensas com sacos de areia realizado por Antoni Gaudí (<i>Pinterest</i> 1898) e (b) Pormenor dos sacos de areia (Foltinek 2011)	1.4
Figura 1.5 – Modelo de membrana suspensa de Heinz Isler (Chilton e Isler 2000): (a) Reforço da superfície de membrana invertida e (b) Medição da geometria resultante.....	1.5
Figura 1.6 – Cobertura de casca fina do oceanário da <i>Cidade das Ciências e das Artes</i> de Valência (CMD Ingenieros 1999; <i>Sopheakchan</i> 2012).....	1.5
Figura 1.7 – Cobertura do Estádio Olímpico de <i>Montreal</i> , Canadá: (a) Estrutura não danificada (<i>Bostonmsbl</i> 1987); (b) Rotura da membrana entre cones suspensos (<i>Taylornoakes</i> 1987); (c) Em linha com os elementos metálicos e (d) No bordo da membrana.....	1.6
Figura 1.8 – Cobertura pneumática da estrutura <i>Metrodome</i> , USA: (a) Estrutura não danificada (Cook & Sons' <i>Baseball Adventures</i> 2010) e (b) Rotura da membrana (<i>Meteorology News</i> 2010).....	1.7
Figura 1.9 – Cobertura pneumática do Estádio de <i>Vancouver</i> , Canadá: (a) Estrutura não danificada (<i>In Retrospect</i> 2007) e (b) Rotura da membrana (CTV News 2008)	1.7
Figura 1.10 – Cobertura do Estádio <i>Gabba</i> , Austrália: (a) Estrutura não danificada identificando dois possíveis setores danificados (<i>Schedule</i> 2015) e (b) Rotura da membrana (<i>Brisbane Times</i> 2008; <i>The Courier</i> 2009).....	1.8
Figura 1.11 – Cobertura do Estádio <i>Arena Fonte Nova</i> , Brasil: (a) Estrutura não danificada identificando o possível setor danificado (Martifer 2014); (b) Empoçamento (<i>The Globe And Email</i> 2013) ; (c) Vista exterior da rotura da membrana (<i>Bahia Recôncavo</i> 2013) e (d) Vista interior da rotura (<i>Quatro Maiores</i> 2013)	1.8
Figura 1.12 – Organização da tese de doutoramento	1.12
Figura 2.1 – <i>Forma anticlástica</i> (Forster e Mollaert 2004): (a) Cone; (b) Sela; (c) Paraboloide hiperbólico e (d) Cume-vale. <i>Forma sinclástica</i> : (e) Projeto Éden, Reino Unido (Bagarai 2010) e (f) Centro Aquático Nacional, China (GE Reports Brasil 2011).....	2.2
Figura 2.2 – Secções de membranas, adaptado de Seidel (2009): (a) Têxteis técnicos e (b) Plásticos técnicos	2.5
Figura 2.3 – Curva força-deformação de fios de poliéster, adaptado de Forster e Mollaert (2004)....	2.6
Figura 2.4 – Curva força-deformação de fios de vidro, adaptado de Forster e Mollaert (2004).....	2.7
Figura 2.5 – Padrões de fiação dos tecidos de base, adaptado de Forster e Mollaert (2004): (a) Fiação simples e (b) Fiação dupla	2.8

Figura 2.6 – Comportamento do tecido dependendo da orientação das faixas de fição (teia <i>U</i> e trama <i>T</i>), adaptado de Seidel (2009)	2.8
Figura 2.7 – História de carga característica de um ensaio de tração biaxial, adaptado de Forster e Mollaert (2004).....	2.13
Figura 2.8 – Avaliação de parâmetros do comportamento do material a partir da interação entre as direções de fabrico durante um ensaio de tração biaxial com vista à determinação dos módulos de elasticidade	2.14
Figura 2.9 – Curvas de tensão-deformação de 4 ensaios de tração uniaxial de tecido de poliéster revestido a PVC (Dinh <i>et al.</i> 2014): (a) e (b) Ensaio monotónico até 24,1MPa seguido de ciclos de descarga e carga entre 2,41 e 24,1MPa; (c) e (d) Ensaio com aumento gradual de tensão até 33,73MPa com ciclos intermédios de descarga e carga a cada incremento de tensão de 4,82MPa	2.15
Figura 2.10 – Ensaio de tração biaxial de tecido de poliéster revestido a PVC do tipo <i>Ferrari Preconstraint 1002</i> com rácios de tensão ($\sigma_{teia} : \sigma_{trama}$) = (1:1); (2:1); (1:2); (1:0) e (0:1), executado pelo laboratório <i>Blum GmbH</i> : (a) Evolução temporal das tensões; (b) Evolução temporal das deformações e (c) Curva de tensão-deformação	2.16
Figura 2.11 – Ensaio ao corte (Kato <i>et al.</i> 1999): (a) Esquema do ensaio e (b) Resposta da tensão de corte	2.17
Figura 2.12 – Curva de tensão-deformação ao corte de um têxtil técnico (Pargana <i>et al.</i> 2007; Skelton 1980).....	2.18
Figura 2.13 – Deformação por corte do têxtil técnico, adaptado de Bridgens (2005) e Skelton (1980): (a) Geometria indeformada; (b) Deformação por corte num estágio inicial e (c) Deformação por corte num estágio avançado – efeito de corte trancado (<i>shear lock-up</i>)	2.19
Figura 2.14 – Gráficos representativos da: (a) Fluência e (b) Relaxação.....	2.19
Figura 2.15 – Corda: (a) Constituição; (b) Secção de corda do tipo <i>Spiral Strand</i> e (c) Secção de corda do tipo <i>Locked Coil Strand</i> (Seidel 2009)	2.21
Figura 2.16 – Pormenores construtivos, adaptado de Seidel (2009): (a) Bordo flexível com fitas e (b) Bordo rígido com <i>kedder</i>	2.22
Figura 2.17 – Fases de projeto de uma estrutura em membrana tensa, adaptado de Pauletti (1999)	2.23
Figura 2.18 – Efeitos de empoçamento em coberturas de membrana: (a) Cobertura na <i>Pensylvania</i> , EUA (Campbell 2003) e (b) Cobertura da estrutura <i>Metrodome</i> , USA (Meteorology News 2010)....	2.28
Figura 2.19 – Arranjos possíveis em superfície cónica, adaptado de Seidel (2009): (a) Radial e (b) Paralelo.....	2.33
Figura 2.20 – Referencial <i>u,v</i> dos padrões de corte, adaptado de Forster e Mollaert (2004)	2.34
Figura 2.21 – Fase de definição dos padrões de corte (Ferreira 2010): (a) Intenção geométrica da superfície com evidência das linhas geodésicas; (b) Padrão de corte; (c) Vista em planta; (d) Vista 3D e (e) Layout dos padrões de corte numerados e respetivos desenhos individuais	2.35
Figura 2.22 – Esquema para realização de um padrão de corte: (a) Referências a desenhos de pormenor; (b) Projeção do painel no tecido e (c) Ampliação da projeção do painel no tecido	2.36
Figura 2.23 – Estruturas em membrana tensa construídas para a EXPO 1998, Lisboa, Portugal....	2.37

Figura 2.24 – Estádio de Faro-Loulé, Faro, Portugal (<i>TensiNet</i> 2004): (a) Vista global durante a construção; (b) e (c) Cobertura e (d) Projeto	2.38
Figura 2.25 – Estruturas de cobertura em membrana tensa em Portugal de pequena dimensão: (a) Cobertura em parabolóide hiperbólico do parque de estacionamento do supermercado <i>CONTINENTE</i> , Aveiro; (b) Cobertura cónica invertida do parque de estacionamento do supermercado <i>MAKRO</i> , Aveiro (<i>CANOBBIO</i>); (c) Cobertura cónica com bordos rígidos, Estoril (<i>TENSOTEC</i> 2007); (d) Cobertura cónica com bordos flexíveis, ilha da Madeira (<i>TENSOTEC</i> 2006); (e) Cobertura cónica com bordos flexíveis no Palácio do Freixo, Porto (<i>TENSOTEC</i> 2010)	2.39
Figura 2.26 – Estruturas de cobertura em membrana tensa em Portugal de pequena dimensão: (a) Coberturas em parabolóide hiperbólico no Centro Cultural de Belém – <i>CCB</i> , Lisboa (<i>TENSOTEC</i> 2007); (b) Cobertura em parabolóide hiperbólico e associada a uma cobertura pneumática no Mercado Municipal de Torres Vedras (<i>TENSOTEC</i> 2010); (c) Cobertura de sombreamento, Lousada (<i>IRMARFER</i>) e (d) Cobertura do museu do Benfica, Lisboa (<i>TOLNIBER</i> 2013)	2.40
Figura 2.27 – Estruturas de cobertura em membrana tensa em Portugal de pequena dimensão: (a) e (b) Cobertura conversível para eventos na Quinta da Ribeira, Marco de Canaveses (<i>TensiNet</i> 1996); (c), (d), (e) e (f) Coberturas em duplo cone no <i>Zmar Ecocamping</i> , Zambujeira do Mar (<i>TENSOTEC</i> 2009)	2.41
Figura 2.28 – Estruturas de cobertura pneumáticas em Portugal de pequena dimensão: (a) Cobertura pneumática no Palácio do Freixo, Porto (<i>TENSOTEC</i> 2010) e (b) Cobertura pneumática do Centro comercial <i>Dolce Vita Tejo</i> , Lisboa (<i>MARTIFER</i> 2005)	2.42
Figura 2.29 – Estruturas de fachada em membrana tensa em Portugal de pequena dimensão: (a) <i>Freeport Alcochete</i> , Lisboa (<i>TENSOTEC</i> 2004) e (b) Universidade de Aveiro, Aveiro (<i>TENSOTEC</i> 2011)	2.42
Figura 3.1 – Superfícies duplamente regradas: (a) Hiperbolóide (Wikipedia 2013) e (b) Parabolóide hiperbólico (The University of Arizona 2013)	3.4
Figura 3.2 – Película de sabão (Wikipedia 2014a)	3.5
Figura 3.3 – 3 soluções distintas para as mesmas condições de fronteira (Souza 2008)	3.5
Figura 3.4 – Desenvolvimento e classificação dos métodos de determinação da forma, adaptado de Veenendaal e Block (2012)	3.10
Figura 3.5 – Etapas do método de determinação da forma preliminar com superfície ajustada (<i>MDFPSA</i>) (Sánchez <i>et al.</i> 2007): (a) Topologia; (b) Determinação da forma; (c) Ajustamento superficial; (d) Corte da superfície e (e) Representação	3.12
Figura 3.6 – Definição da superfície paramétrica (<i>NURBS</i>) (Sánchez <i>et al.</i> 2007): (a) Parâmetros da superfície; (b) Malha de controlo; (c) Superfície e malha de controlo	3.12
Figura 3.7 – Deformação da superfície (Bletzinger <i>et al.</i> 2005)	3.13
Figura 3.8 – Projeção do pré-esforço na superfície de referência da membrana (Wüchner e Bletzinger 2005)	3.14
Figura 3.9 – Estruturas do tipo <i>tensegrity</i> , com os elementos em compressão representados por linhas espessas (Estrada <i>et al.</i> 2006): (a), (b), (c) e (d) Bidimensionais; (e), (f) e (g) Tridimensionais	3.15

Figura 3.10 – Relação entre a casca em compressão G , a sua projeção no plano (malha primária Γ) e o diagrama recíproco (malha secundária Γ^*), para determinação do equilíbrio (Block e Ochsendorf 2007).....	3.16
Figura 3.11 – Rede de cabos pré-esforçada (Gründig 2000): (a) Geometria e (b) Esquema do equilíbrio de um nó pelo <i>MDFI</i>	3.18
Figura 3.12 – Topologia da estrutura de rede de cabos	3.20
Figura 3.13 – Diferentes configurações de equilíbrio para a rede de cabos.....	3.21
Figura 3.14 – Torre de arrefecimento: (a) Localizada em Schmehausen (Picasa 2013); (b) Caracterização do exemplo (Tensinet 2013) e (c) Parâmetros geométricos (Malerba <i>et al.</i> 2012) ..	3.23
Figura 3.15 – Diferentes configurações de equilíbrio para a torre de arrefecimento: (a) $q_{comp} = -2800N/m$; $q_{c,v} = 100N/m$; (b) $q_{comp} = -3000N/m$; $q_{c,v} = 100N/m$ e (a) $q_{comp} = -3000N/m$; $q_{c,v} = 1000N/m$	3.25
Figura 3.16 – Pré-esforço dos cabos da torre de arrefecimento: (a) Cabos verticais do pano lateral e cabos suspensos e (b) Cabos horizontais, ou circunferenciais, do pano lateral	3.26
Figura 3.17 – Rede de cabos pré-esforçada (Gründig 2000): (a) Geometria e (b) Esquema do equilíbrio de um nó pelo <i>MDFnI</i>	3.27
Figura 3.18 – Topologia da estrutura da rede de cabos	3.28
Figura 3.19 – Configurações de equilíbrio da rede de cabos pelo <i>MDFnI</i> desde a primeira fase, sem peso próprio, até à segunda fase, com peso próprio	3.29
Figura 3.20 – Fase 1 do algoritmo de determinação da forma de um cabo suspenso	3.32
Figura 3.21 – Perfil de potência: flecha <i>CP</i> vs densidade de força q	3.32
Figura 3.22 – Topologia estrutural do cabo suspenso	3.33
Figura 3.23 – Evolução das densidades de força q ao longo do processo iterativo do algoritmo de determinação da forma de um cabo: (a) Fase 1 e (b) Fase 2	3.35
Figura 3.24 – Evolução da flecha ao longo do processo iterativo do algoritmo de determinação da forma de um cabo suspenso: (a) Fase 1 e (b) Fase 2	3.35
Figura 3.25 – Configurações dos 5 cabos em análise nas fases 1 e 2.....	3.35
Figura 3.26 – Configuração do cabo 5 obtida pela equação da catenária elástica, analiticamente, pelo algoritmo de determinação da forma de um cabo, e pelo <i>software</i> de cálculo estrutural – <i>SOLVIA</i> . ..	3.36
Figura 3.27 – Elemento finito triangular de membrana: (a) Forças ortogonais; (b) Forças internas no nó c	3.40
Figura 3.28 – Topologia estrutural da estrutura de membrana.....	3.41
Figura 3.29 – Configuração da geometria da membrana pelo <i>MDTS</i> : (a) Inicial e (b) Final	3.42
Figura 3.30 – Sistema de um grau de liberdade	3.44
Figura 3.31 – Cálculo das forças internas de um nó genérico i	3.47
Figura 3.32 – Resposta estrutural com o método da relaxação dinâmica (<i>MRD</i>)	3.48
Figura 3.33 – Modelo de barras, em vibração livre não amortecida, no modo de frequência máxima	3.50

Figura 3.34 – Variação dos deslocamentos de um nó genérico com coeficientes de amortecimento distintos	3.52
Figura 3.35 – Vibração livre não amortecida da estrutura	3.55
Figura 3.36 – Traçado da energia cinética típica de uma estrutura com múltiplos graus de liberdade	3.55
Figura 3.37 – Localização do ponto de energia cinética máxima	3.56
Figura 3.38 – Fluxograma do método da relaxação dinâmica (MRD) baseado no modelo de amortecimento cinético	3.58
Figura 3.39 – Topologia da estrutura da rede de cabos	3.60
Figura 3.40 – Geometria inicial	3.60
Figura 3.41 – Resposta estrutural dos nós centrais 5 e 8 em vibração livre não amortecida	3.62
Figura 3.42 – Configuração deformada da estrutura pelo modelo de amortecimento viscoso	3.62
Figura 3.43 – Evolução da resposta estrutural dos nós centrais 5 e 8 em vibração criticamente amortecida	3.63
Figura 3.44 – Configuração deformada da estrutura pelo modelo de amortecimento cinético	3.63
Figura 3.45 – (a) Evolução da resposta estrutural dos nós centrais 5 e 8 e (b) Evolução da energia cinética	3.64
Figura 3.46 – Configuração indeformada e deformada de dois cabos da estrutura: (a) Cabo entre os apoios 18 e 19 e (b) Cabo entre os apoios 15 e 26	3.65
Figura 3.47 – Otimização de uma estrutura simplesmente apoiada através do método de otimização estrutural evolucionária (MOEE) (Cui <i>et al.</i> 2003)	3.67
Figura 3.48 – Vista em perspectiva do projeto da nova estação de Florença (Cui <i>et al.</i> 2003)	3.67
Figura 3.49 – Configurações intermédias do processo de otimização estrutural evolucionária do projeto da estação de Florença (Cui <i>et al.</i> 2003)	3.68
Figura 4.1 – Coberturas reforçadas: (a) Arena de Raleigh, adaptado de Structure (2014), USA e (b) Auditório da Utica, USA, adaptado de UticaOD (2010)	4.2
Figura 4.2 – Perfil da velocidade do vento na direção do vento	4.3
Figura 4.3 – Espetro de Van der Hooven, adaptado de Wikimedia (2006)	4.3
Figura 4.4 – Variação da velocidade média do vento em altura de acordo com a norma EN1991-1-4	4.5
Figura 4.5 – Variação da intensidade de turbulência longitudinal em altura	4.7
Figura 4.6 – Variação da intensidade de turbulência com a velocidade média, adaptado de Martins <i>et al.</i> (2014): (a) longitudinal I_u ; (b) lateral I_v e (c) vertical I_w	4.7
Figura 4.7 – Ajustamento da função densidade espectral de potência, da componente longitudinal turbulenta da velocidade do vento, da expressão de von Kármán à de Kaimal: (a) Função densidade espectral de potência reduzida e (b) Função densidade espectral de potência da componente longitudinal turbulenta da velocidade do vento	4.9

Figura 4.8 – Correlação da turbulência entre dois pontos: (a) Função de coerência e (b) Função densidade espectral cruzada para os pontos 1, 2 e 5	4.10
Figura 4.9 – Efeitos do escoamento do vento sobre coberturas, adaptado de Blessmann (1991): (a) Distribuição de pressões médias numa cobertura plana e (b) Separação da camada limite em coberturas arqueadas	4.12
Figura 4.10 – Modelo de membrana de Sygulski (2007)	4.13
Figura 4.11 – Instabilidade aerodinâmica, adaptado de Sygulski (2007): (a) Velocidade do vento vs flecha da membrana; (b) Divergência e (c) <i>Flutter</i>	4.14
Figura 4.12 – Regiões de instabilidade de membranas, adaptado de Newman e Païdoussis (1991): (a) flexíveis bidimensionais e (b) pneumáticas	4.15
Figura 4.13 – Fenômeno de <i>flutter</i> num bordo livre de membrana, adaptado de Forster e Mollaert (2004).....	4.16
Figura 4.14 – Coeficientes de pressão para coberturas em parabolóide hiperbólico, adaptado de Forster e Mollaert (2004): (a) Direção 0° e (b) Direção 90°	4.18
Figura 4.15 – Coeficientes de pressão para coberturas em cume-vale: (a) Direção 0° e (b) Direção 90° (Forster e Mollaert 2004)	4.19
Figura 4.16 – Coeficientes de pressão para coberturas cónicas (Forster e Mollaert 2004)	4.21
Figura 4.17 – Protótipo da estrutura de membrana desmontável <i>ARIES</i> , Munique, Alemanha (Tensinet).....	4.21
Figura 4.18 – Coeficiente de pressão exterior C_{pe} num setor único do modelo <i>ARIES</i> : (a) vento de frente e (b) vento de trás	4.22
Figura 4.19 – Coeficientes de pressão em setores múltiplos do modelo <i>ARIES</i> - vento de trás: (a) C_{pe} e C_{pi} e (b) $C_{p,net}$	4.24
Figura 4.20 – Coeficientes de pressão em setores múltiplos do modelo <i>ARIES</i> - vento de frente: (a) C_{pe} e C_{pi} e (b) $C_{p,net}$	4.25
Figura 4.21 – Coeficiente de pressão médio de uma cobertura circular em parabolóide hiperbólico, adaptado de Buchholdt (1999)	4.26
Figura 4.22 – Coeficiente de pressão médio de uma cobertura circular plana, adaptado de Uematsu <i>et al.</i> (2008).....	4.27
Figura 4.23 – Esquema de numeração das zonas nas coberturas.....	4.28
Figura 4.24 – Estádio do tipo I: planta, alçados e subdivisão	4.29
Figura 4.25 – Estádio do tipo II: planta, alçados e subdivisão	4.30
Figura 4.26 – Estádio do tipo III: planta, alçados e subdivisão	4.31
Figura 4.27 – Estádio do tipo IV: planta, alçados e subdivisão	4.32
Figura 4.28 – Estádio do tipo V: planta, alçados e subdivisão.....	4.33
Figura 4.29 – Coeficientes de pressão C_p para o estádio do tipo I: (a) Direção 0°; (b) Direção 45° e (c) Direção 90°	4.34

Figura 4.30 – Coeficientes de pressão C_p na direção 90° para estudo do efeito da consola vs elevação da cobertura no estádio: (a) do tipo I e (b) do tipo II	4.37
Figura 4.31 – Coeficientes de pressão C_p para o estádio do tipo IV: (a) Direção 0° ; (b) Direção 45° e (c) Direção 90°	4.37
Figura 4.32 – Esquema de distribuição de valores extremos de C_p nas secções dos estádios.....	4.38
Figura 4.33 – Curvas envolventes para valores máximos e mínimos de C_p , vento de 0° , anel a	4.39
Figura 4.34 – Curvas envolventes para valores máximos e mínimos de C_p , vento de 0° , anel b	4.39
Figura 4.35 – Curvas envolventes para valores máximos e mínimos de C_p , vento de 0° , anel c	4.39
Figura 4.36 – Curvas envolventes para valores máximos e mínimos de C_p , vento de 0° , anel d	4.40
Figura 4.37 – Curvas envolventes para valores máximos e mínimos de C_p , vento de 45° , anel a ...	4.40
Figura 4.38 – Curvas envolventes para valores máximos e mínimos de C_p , vento de 45° , anel b ...	4.40
Figura 4.39 – Curvas envolventes para valores máximos e mínimos de C_p , vento de 45° , anel c ...	4.41
Figura 4.40 – Curvas envolventes para valores máximos e mínimos de C_p , vento de 45° , anel d ...	4.41
Figura 4.41 – Curvas envolventes para valores máximos e mínimos de C_p , vento de 90° , anel a ...	4.41
Figura 4.42 – Curvas envolventes para valores máximos e mínimos de C_p , vento de 90° , anel b ...	4.42
Figura 4.43 – Curvas envolventes para valores máximos e mínimos de C_p , vento de 90° , anel c ...	4.42
Figura 4.44 – Curvas envolventes para valores máximos e mínimos de C_p , vento de 90° , anel d ...	4.42
Figura 4.45 – Monitorização de estruturas de cobertura em membrana tensa: (a) Estádio de Seogwipo (Ojakgyoo 2001), Coreia do Sul e (b) Múltiplas coberturas de sombreamento na praça de Medina (Architect 2010), Arábia Saudita	4.46
Figura 4.46 – Termos aerodinâmicos adicionais do modelo aeroelástico simplificado, adaptado de Sun <i>et al.</i> (2008)	4.49
Figura 4.47 – Modelação analítica da membrana como uma folha de vorticidade, adaptado de Minami (1998): (a) Definição do sistema de coordenadas e da intensidade da vorticidade $\gamma_m(x,t)$ para o modo de vibração fundamental da membrana plana e (b) e (c) Padrão do escoamento em torno das terminações da membrana em vibração	4.50
Figura 4.48 – Modelo de membrana triangular de Sewall <i>et al.</i> (1983): (a) Modelo físico e (b) Massa de ar envolvente em membranas triangulares	4.51
Figura 4.49 – Função de modulação temporal da ação	4.55
Figura 4.50 – Aceleração a meio vão da laje esbelta	4.55
Figura 4.51 – Estimativa espectral da resposta temporal da aceleração a meio vão da laje esbelta com o contributo de todos os modos de vibração	4.55
Figura 4.52 – Séries temporais da velocidade do vento: (a) Para um período de 800 segundos e (b) Para um período de 30 segundos	4.57
Figura 4.53 – Séries temporais da velocidade do vento em pontos colineares com a direção longitudinal do vento, à mesma cota.....	4.57

Figura 4.54 – Análise da qualidade do método de geração de séries de velocidade do vento, referente a 10 lotes de séries: (a) Comparação entre a função densidade espectral de partida e a estimativa espectral média do ponto 1 e (b) Comparação entre a função densidade espectral cruzada de partida e a estimativa espectral média cruzada dos pontos 1 e 5	4.58
Figura 5.1 – Cobertura desmontável de um recinto polidesportivo no <i>CEAR</i> da ilha da <i>Cartuja</i> , Sevilha (Performance S.L. 2010): (a) Vista aérea e (b) Vista interior	5.1
Figura 5.2 – Estrutura metálica tubular da cobertura: (a) Vista exterior (Performance S.L. 2010) e (b) Vista Interior (Escrig <i>et al.</i> 2012)	5.2
Figura 5.3 – Vistas do pilar do pórtico maior da estrutura metálica (Sanrocon 2009)	5.2
Figura 5.4 – Cobertura desmontável de um recinto polidesportivo: (a) Vista exterior do lado maior (Sanrocon 2009) e (b) Anéis retangulares superior e inferior	5.3
Figura 5.5 – Desenhos da estrutura (Escrig e Sánchez 2009): (a) Planta e alçados e (b) Perspetiva	5.4
Figura 5.6 – Pormenores (Sanrocon 2009): (a) Canto do anel retangular superior e (b) Zona central	5.4
Figura 5.7 – Representação das secções metálicas da estrutura de cobertura	5.5
Figura 5.8 – Pares de barras calibradas de 25mm localizados nos panos laterais, Cortesia de José Sanchéz	5.5
Figura 5.9 – Membrana tensa (Escrig <i>et al.</i> 2012): (a) Colocação em obra; (b) Vista do interior do recinto no período diurno, Cortesia de José Sánchez e (c) Vista do interior do recinto no período noturno	5.6
Figura 5.10 – Representação esquemática da membrana tensa para desenvolvimento dos padrões de corte (Escrig e Sánchez 2009)	5.7
Figura 5.11 – Isolinhas da membrana tensa	5.8
Figura 5.12 – Juntas da membrana tensa e orientação das direções de fabrico do tecido nos padrões de corte	5.8
Figura 5.13 – Padrões de corte no canto da cobertura	5.9
Figura 5.14 – Linhas de curvatura principal no módulo 1 da membrana tensa no primeiro quadrante: (a) Perspetiva e (b) Planta	5.9
Figura 5.15 – Hipóteses de orientação dos padrões de corte no módulo de membrana da parte superior da cobertura com recurso ao software <i>Formfinder</i> ® V4.0: (a) Hipótese A – Direção do urdume alinhada com a linha de curvatura positiva; (b) Hipótese B – Direção do urdume alinhada com a linha de curvatura negativa e (c) Hipótese C – Direção do urdume orientada a 45° com a direção longitudinal da cobertura (solução)	5.10
Figura 5.16 – Enrugamento na transição entre o módulo 2 e 3 (<i>M1</i> , <i>M2</i> e <i>M3</i> , respetivamente módulos 1, 2 e 3): (a) Vista interior e (b) Vista exterior	5.11
Figura 5.17 – Colocação da membrana dos módulos 2 e 3	5.12
Figura 5.18 – Ligação da membrana dos módulos 2 e 3 à barra de canto	5.12
Figura 5.19 – Localização dos detalhes de ligação da membrana à estrutura metálica	5.13

Figura 5.20 – Detalhes de ligação da membrana à estrutura metálica (Escrig e Sánchez 2009; Escrig <i>et al.</i> 2012; Forster e Mollaert 2004): (a) Detalhe A – Canto do anel retangular superior; (b) Detalhe B – Corte do pano lateral e (c) Detalhe C – Ligação às vigas treliçadas	5.14
Figura 5.21 – Detalhe D – Nó central, Cortesia de José Sánchez	5.15
Figura 5.22 – Detalhe D – Nó central, adaptado de Escrig e Sánchez (2009)	5.16
Figura 5.23 – Sistema de barras calibradas: (a) Vista geral, Cortesia de José Sánchez; (b) Ligação inferior; (c) Ligação superior e (d) Desenhos de pormenor da ligação superior, adaptado de Escrig e Sánchez (2009)	5.17
Figura 5.24 – Barras calibradas da <i>Pfeifer</i> do tipo 860: (a) Encaixe forçado aberto; (b) Especificação de desalinhamento; (c) Geometria e (d) Especificações da placa metálica de ligação.....	5.18
Figura 5.25 – Extremidades dos cabos de 36mm: (a) Vista da ligação na parte inferior, Cortesia de José Sánchez e (b) Vista da ligação na parte superior (Sanrocon 2009)	5.19
Figura 5.26 – Encaixe zincado aberto da <i>Pfeifer</i> do tipo 802: (a) Vista geral; (b) Geometria	5.20
Figura 5.27 – Topologias estruturais para o módulo superior de membrana	5.25
Figura 5.28 – Topologia estrutural para o módulo lateral	5.26
Figura 5.29 – Topologia estrutural dos modelos M_A^{MDF} e M_A^{MRD}	5.28
Figura 5.30 – Configuração de equilíbrio do modelo M_A^{MDF}	5.29
Figura 5.31 – (a) Configuração de equilíbrio do modelo M_A^{MRD} ; (b) Evolução da resposta estrutural dos nós 5 e 8 e (c) Evolução da energia cinética	5.33
Figura 5.32 – Topologia estrutural dos modelos M_B^{MDTS} e M_B^{MDTSm}	5.35
Figura 5.33 – Configuração de equilíbrio do modelo M_B^{MDTS} : (a) Geometria final e (b) Tensões	5.36
Figura 5.34 – Elemento de membrana triangular de deformação constante utilizado no <i>MDTS</i> , adaptado de Topping e Ivanyi (2007): (a) Geometria e (b) Forças nodais resultantes	5.39
Figura 5.35 – Configuração de equilíbrio do modelo M_B^{MDTSm}	5.40
Figura 5.36 – Topologia estrutural dos modelos M_C^{MDF} e M_C^{MRD} : (a) Numeração dos nós e (b) Numeração dos elementos	5.43
Figura 5.37 – Configuração de equilíbrio do modelo M_C^{MDF}	5.44
Figura 5.38 – (a) Configuração de equilíbrio do modelo M_C^{MRD} ; (b) Evolução da resposta estrutural dos nós 13 e 20 e (c) Evolução da energia cinética	5.49
Figura 5.39 – Topologia estrutural dos modelos M_F^{MDF} e M_F^{MRD} : (a) Numeração dos nós e (b) Numeração dos elementos	5.50
Figura 5.40 – Configuração de equilíbrio do modelo M_F^{MDF}	5.50
Figura 5.41 – (a) Configuração de equilíbrio do modelo M_F^{MRD} ; (b) Evolução da resposta estrutural dos nós 4 e 8 e (c) Evolução da energia cinética	5.54
Figura 5.42 – Alinhamentos estudados: (a) Representação no plano e (b) Representação em perspetiva	5.56

Figura 5.43 – Geometria dos modelos do módulo superior baseada na <i>topologia</i> (A, B e C) e na respetiva metodologia de determinação da forma (fase 1): (a) Alinhamentos segundo o eixo dos xx e (b) Alinhamentos segundo o eixo dos yy.....	5.57
Figura 5.44 – Geometria dos modelos do módulo superior baseada na <i>topologia</i> (A, B, C, D e E) e na respetiva metodologia de determinação da forma (fase 2): (a) Alinhamento médio segundo o eixo dos yy (A4y) e (b) Alinhamento médio segundo o eixo dos xx (A2x)	5.59
Figura 5.45 – Geometria dos modelos do módulo superior baseada na <i>topologia</i> (A, B, C, D e E) e na respetiva metodologia de determinação da forma (fase 2), salientando os alinhamentos de curvatura principal positiva e negativa do módulo superior, respetivamente (A1xy) e (A2xy).....	5.60
Figura 5.46 – Geometria dos modelos do módulo lateral baseada em diferentes metodologias de determinação da forma: (a) Vista em perspetiva e (b) Vista em planta	5.60
Figura 5.47 – Orientação das direções de fabrico urdume e trama no módulo superior de membrana tensa, no 1º quadrante da estrutura: (a) Direções principais de fabrico orientadas a 0° com as direções de desenvolvimento longitudinal e transversal da estrutura e (b) Direções principais de fabrico orientadas a 45° com as direções de desenvolvimento longitudinal e transversal da estrutura – solução utilizada na estrutura.....	5.62
Figura 5.48 – Modelo de base da membrana tensa isolada	5.63
Figura 5.49 – Elemento de casca triangular (Computers and Structures Inc. 2011)	5.63
Figura 5.50 – Modelos de membrana tensa isolada: (a) Modelo 0° e (b) Modelo 45°– solução utilizada na estrutura; (c) Pormenor do topo da cobertura do modelo 0° e (d) Pormenor do topo da cobertura do modelo 45°.....	5.64
Figura 5.51 – Comparação entre a deformação introduzida na direção do urdume (U) e da trama (T) do módulo 1 para cada nível de pré-esforço: (a) Modelo 45° e (b) Modelo 0°.....	5.67
Figura 5.52 – Comparação entre a deformação introduzida na direção do urdume (U) e da trama (T) do módulo 1 em função do nível de pré-esforço: (a) Modelo 45° e (b) Modelo 0°.....	5.68
Figura 5.53 – Comparação entre a deformação introduzida na direção do urdume (U) e da trama (T) do módulo lateral (a) para cada nível de pré-esforço e (b) em função do nível de pré-esforço	5.69
Figura 5.54 – Comparação entre a deformação introduzida na direção do urdume (U) e da trama (T) com as deformações obtidas no cálculo faseado de análise não-linear geométrica do módulo 1 para cada nível de pré-esforço: (a) Modelo 45° e (b) Modelo 0°.....	5.69
Figura 5.55 – Comparação entre a deformação introduzida na direção do urdume (U) e da trama (T) com as deformações obtidas no cálculo faseado de análise não-linear geométrica do módulo lateral para cada nível de pré-esforço.....	5.70
Figura 5.56 – Variação das tensões de corte do módulo 1 com o nível de pré-esforço: (a) Modelo 45° e (b) Modelo 0°	5.70
Figura 5.57 – Variação das tensões de corte do módulo lateral com o nível de pré-esforço	5.71
Figura 5.58 – Variação das frequências com o nível de pré-esforço: (a) Modelo 45° e (b) Modelo 0°	5.71
Figura 5.59 – Configurações modais do Modelo 0° para um pré-esforço de 0,5kN/m com destaque da componente vertical dos modos de vibração: (a) Modo 1; (b) Modo 2; (c) Modo 3 e (d) Modo 4	5.73

Figura 5.60 – Configuração modal 1 com a variação do pré-esforço, com destaque da componente vertical dos modos de vibração: (a) Modelo 45° e (b) Modelo 0°	5.74
Figura 5.61 – Configuração modal 5 com a variação do pré-esforço, com destaque da componente vertical dos modos de vibração: (a) Modelo 45° e (b) Modelo 0°	5.75
Figura 5.62 – Comparação entre a deformação introduzida na direção do urdume (U) e da trama (T) para cada coeficiente de Poisson: (a) Módulo 1 e (b) Módulo lateral.....	5.77
Figura 5.63 – Comparação entre a deformação introduzida na direção do urdume (U) e da trama (T) para cada nível de pré-esforço: (a) Módulo 1 e (b) Módulo lateral	5.77
Figura 5.64 – Variação da deformação introduzida na direção do urdume (U) e da trama (T) em função do coeficiente de Poisson, para cada nível de pré-esforço: (a) Módulo 1 e (b) Módulo lateral	5.78
Figura 5.65 – Variação da deformação introduzida na direção da trama (T) em função do nível de pré-esforço para cada coeficiente de Poisson: (a) Módulo 1 e (b) Módulo lateral	5.79
Figura 5.66 – Variação da deformação introduzida na direção do urdume (U) em função do nível de pré-esforço para cada coeficiente de Poisson: (a) Módulo 1 e (b) Módulo lateral	5.79
Figura 5.67 – Variação das tensões de corte com o nível de pré-esforço: (a) Módulo 1 e (b) Módulo lateral	5.80
Figura 5.68 – Fatores de participação modal e frequências naturais da membrana variando o pré-esforço entre 1 e 3kN/m: (a) $\nu_{TU} = 0,235$; (b) $\nu_{TU} = 0,45$ e (c) $\nu_{TU} = 0,7$	5.86
Figura 5.69 – Equipamento de ensaio de tração biaxial da Universidade de Newcastle: (a) Setup de ensaio (Bridgens 2005) e (b) e (c) Simulação numérica do equipamento em operação com a amostra cruciforme (Bridgens <i>et al.</i> 2004a)	5.90
Figura 5.70 – Amostra cruciforme sem representação do comprimento de amarração.....	5.91
Figura 5.71 – Regime de carga radial de amostra <i>Ferrari Precontraint 1002</i>	5.92
Figura 5.72 – Curvas tensão-deformação de ensaio de tração biaxial da membrana, Cortesia de Ben Bridgens	5.94
Figura 5.73 – Superfícies de resposta de tensão-tensão-deformação de ensaio de tração biaxial da membrana respetivamente na direção do (a) urdume e (b) trama.	5.95
Figura 5.74 – Modelo numérico da amostra cruciforme.....	5.97
Figura 5.75 – Deformação da amostra sob ação do regime de carga radial do ensaio de tração biaxial utilizando um coeficiente de Poisson $\nu_{TU} = 0,235, 0,45$ e $0,7$, amplificada 10x e salientando os deslocamentos nodais resultantes numa escala de 0 a 0,027m	5.98
Figura 5.76 – Tensão na direção do urdume da amostra sob ação do regime de carga radial do ensaio de tração biaxial utilizando um coeficiente de Poisson $\nu_{TU} = 0,235, 0,45$ e $0,7$, associada à representação da deformação amplificada 10x, salientando as tensões numa escala de -0,3 a 23kN/m	5.99
Figura 5.77 – Tensão na direção do trama da amostra sob ação do regime de carga radial do ensaio de tração biaxial utilizando um coeficiente de Poisson $\nu_{TU} = 0,235, 0,45$ e $0,7$, associada à representação da deformação amplificada 10x, salientando as tensões numa escala de -0,3 a 23kN/m	5.100

Figura 5.78 – Curvas tensão-deformação numéricas e experimentais do ensaio de tração biaxial	5.102
Figura 5.79 – Ajustamento de modelos constitutivos no estado plano de tensão ortotrópico linear às superfícies de resposta de tensão-tensão-deformação do ensaio de tração biaxial da membrana	5.105
Figura 5.80 – Direção do vento e distribuição espacial.....	5.109
Figura 5.81 – Definição das zonas dos coeficientes de pressão num parabolóide hiperbólico: (a) Direção 0° e (b) Direção 90° (Forster e Mollaert 2004)	5.110
Figura 5.82 – Zonas dos coeficientes de pressão exterior da estrutura de cobertura - direção 0° .	5.111
Figura 5.83 – Zonas dos coeficientes de pressão exterior da estrutura de cobertura - direção 90°	5.111
Figura 5.84 – Altura de referência z_e em função de h e b , e correspondente perfil de pressão dinâmica (EN1991-1-4 1991)	5.112
Figura 5.85 – Zonas dos coeficientes de pressão para paredes verticais (EN1991-1-4 1991)	5.112
Figura 5.86 – Coeficientes de pressão resultante, $C_{p, net}$, da estrutura de cobertura, com destaque do módulo 1 (caso 1: sucção exterior e pressão interior) – direção 0°	5.114
Figura 5.87 – Coeficientes de pressão resultante, $C_{p, net}$, da estrutura de cobertura, módulo 1 e módulo lateral (caso 1 sucção exterior e pressão interior) – direção 0°	5.114
Figura 5.88 – Coeficientes de pressão resultante, $C_{p, net}$, da estrutura de cobertura, com destaque do módulo 1 (caso 2: pressão exterior e sucção interior) – direção 0°	5.115
Figura 5.89 – Coeficientes de pressão resultante, $C_{p, net}$, da estrutura de cobertura, módulo 1 e módulo lateral (caso 2: pressão exterior e sucção interior) – direção 0°	5.115
Figura 5.90 – Coeficientes de pressão resultante, $C_{p, net}$, da estrutura de cobertura, com destaque do módulo 1 (caso 1: sucção exterior e pressão interior) – direção 90°	5.116
Figura 5.91 – Coeficientes de pressão resultante, $C_{p, net}$, da estrutura de cobertura, módulo 1 e módulo lateral (caso 1: sucção exterior e pressão interior) – direção 90°	5.116
Figura 5.92 – Coeficientes de pressão resultante, $C_{p, net}$, da estrutura de cobertura, com destaque do módulo 1 (caso 2: pressão exterior e sucção interior) – direção 90°	5.117
Figura 5.93 – Coeficientes de pressão resultante, $C_{p, net}$, da estrutura de cobertura, módulo 1 e módulo lateral (caso 2: pressão exterior e sucção interior) – direção 90°	5.117
Figura 5.94 – Área de referência para as forças de atrito para a direção 0°	5.118
Figura 5.95 – Alçado de barlavento – Direção 0° , adaptado de Escrig e Sánchez (2009)	5.120
Figura 5.96 – Alçado de barlavento – Direção 90° , adaptado de Escrig e Sánchez (2009)	5.120
Figura 5.97 – Variação da velocidade média e da intensidade de turbulência em altura.....	5.122
Figura 5.98 – Função de modulação temporal das forças aerodinâmicas	5.126
Figura 5.99 – Pontos de geração de séries temporais.....	5.127
Figura 5.100 – Séries temporais da velocidade do vento nos pontos às cotas 6,3m (1) e 9,9m (534): (a) Para um período de 800 segundos e (b) Para um período de 30 segundos.....	5.129
Figura 5.101 – Séries temporais da velocidade do vento em pontos aproximadamente colineares com a direção longitudinal do vento nos pontos às cotas 6,2m (1), 6,5m (5) e 7m (17)	5.129

Figura 5.102 – Análise da qualidade do método de geração de séries de velocidade do vento por comparação entre a função densidade espectral de partida e a estimativa espectral média do ponto 1	5.130
Figura 5.103 – Modelo numérico: (a) Modelo global; (b) Secção tubular $\phi 323 \times 8$ (mmxmm); (c) Secção tubular $\phi 200 \times 6$ (mmxmm); (d) Secção tubular $\phi 150 \times 5$ (mmxmm); (e) Cabos $\phi 36$ mm; (f) Barras calibradas $\phi 25$ mm	5.131
Figura 5.104 – Modelação das placas de reforço: (a) Topo da cobertura e (b) Panos laterais	5.132
Figura 5.105 – Modelo da membrana tensa realizada com elementos de casca: (a) Compatibilizada com a estrutura metálica; (b) Vista isoladamente e (c) Elemento de casca de 4 nós (Computers and Structures Inc. 2011)	5.133
Figura 5.106 – Orientação das direcções de fabrico do material de membrana - urdume (vermelho) e trama (verde): (a) Vista em planta e (b) Vista em 3D	5.134
Figura 5.107 – Ajustamento dos cabos: (a) Deformada do anel inferior (b) Força nos cabos	5.135
Figura 5.108 – Deformada da estrutura sob as ações permanentes, com destaque dos deslocamentos verticais, ampliada 70x [m]	5.136
Figura 5.109 – Tensões da membrana sob as ações permanentes: (a) Direcção do urdume e (b) Direcção da trama [N/m]	5.137
Figura 5.110 – Frequências naturais e fatores de participação modal da estrutura sob as ações permanentes	5.139
Figura 5.111 – Frequências naturais e configurações modais dos modos 1, 2, 3 e 4 sob as ações permanentes	5.139
Figura 5.112 – Frequências naturais e configurações modais dos modos 5 a 9 sob as ações permanentes	5.140
Figura 5.113 – Fatores de hibridização sob as ações permanentes	5.141
Figura 5.114 – Influência dos cabos, membranas e detalhes construtivos nas frequências naturais da estrutura em termos globais	5.142
Figura 5.115 – Deformada da estrutura sob as ações permanentes e da ação quase-estática do vento em pressão, com destaque dos deslocamentos verticais, ampliada 4x [m]	5.143
Figura 5.116 – Tensões da membrana sob as ações permanentes e da ação quase-estática do vento em pressão: (a) Direcção do urdume e (b) Direcção da trama [N/m]	5.144
Figura 5.117 – Esforço axial na estrutura de cobertura sob as ações permanentes e da ação quase-estática do vento em pressão: (a) Cabos e (b) Secções tubulares	5.145
Figura 5.118 – Deformada da estrutura sob as ações permanentes e a ação da componente média da velocidade do vento em pressão, com destaque dos deslocamentos verticais, ampliada 7x [m]	5.146
Figura 5.119 – Tensões da membrana sob as ações permanentes e a ação da componente média da velocidade do vento em pressão: (a) Direcção do urdume e (b) Direcção da trama [N/m]	5.147
Figura 5.120 – Esforço axial na estrutura de cobertura sob as ações permanentes e a ação da componente média da velocidade do vento em pressão: (a) Cabos e (b) Secções tubulares	5.148

Figura 5.121 – Frequências naturais e fatores de participação modal da estrutura sob as ações permanentes e a ação da componente média da velocidade do vento em pressão	5.149
Figura 5.122 – Configurações modais dos modos 1 a 6 sob as ações permanentes e a ação da componente média da velocidade do vento em pressão	5.150
Figura 5.123 – Influência da massa aerodinâmica nas frequências naturais da estrutura sob efeito da velocidade do vento em pressão em termos globais	5.152
Figura 5.124 – Frequências naturais e fatores de participação modal da estrutura sob as ações permanentes, a ação da componente média da velocidade do vento em pressão e da massa adicional	5.153
Figura 5.125 – Fatores de hibridização da estrutura na configuração estática e sob ação da componente média do vento em pressão considerando a massa adicional.....	5.153
Figura 5.126 – Configurações modais dos modos 1 a 4 sob as ações permanentes, a ação da componente média da velocidade do vento em pressão e da massa adicional	5.154
Figura 5.127 – Ajustamento dos coeficientes de amortecimento de Rayleigh ao amortecimento total calculado da estrutura sob efeito da velocidade do vento em pressão	5.157
Figura 5.128 – Deslocamento vertical do nó 13 localizado na membrana por integração direta e por sobreposição modal: (a) Evolução temporal e (b) Evolução em função da velocidade do vento. (c) Evolução temporal da amplitude de vibração e (d) Espectro de potência.....	5.158
Figura 5.129 – Deslocamento do nó 12 localizado na estrutura metálica no topo da cobertura por integração direta e por sobreposição modal: (a) Evolução temporal na direção z; (b) Espectro de potência na direção z; (c) Evolução temporal na direção y; (d) Espectro de potência na direção y; (e) Evolução temporal na direção x e (f) Espectro de potência na direção x.....	5.160
Figura 5.130 – Evolução das amplitudes de vibração no nó 12 no topo da estrutura metálica.....	5.161
Figura 5.131 – Amplitude de vibração vertical do nó 615 localizado na consola da estrutura metálica por integração direta e por sobreposição modal: (a) Evolução temporal e (b) Espectro de potência.....	5.161
Figura 5.132 – Deformada da estrutura sob as ações permanentes e da ação quase-estática do vento em sucção, com destaque dos deslocamentos verticais, ampliada 3x [m].....	5.162
Figura 5.133 – Tensões da membrana sob as ações permanentes e da ação quase-estática do vento em sucção: (a) Direção do urdume e (b) Direção da trama [N/m]	5.163
Figura 5.134 – Esforço axial na estrutura de cobertura sob as ações permanentes e da ação quase-estática do vento em sucção: (a) Cabos e (b) Secções tubulares	5.164
Figura 5.135 – Deformada da estrutura sob as ações permanentes e a ação da componente média da velocidade do vento em sucção, com destaque dos deslocamentos verticais, ampliada 4x [m]	5.165
Figura 5.136 – Tensões da membrana sob as ações permanentes e a ação da componente média da velocidade do vento em sucção: (a) Direção do urdume e (b) Direção da trama [N/m]	5.166
Figura 5.137 – Esforço axial na estrutura de cobertura sob as ações permanentes e a ação da componente média da velocidade do vento em sucção: (a) Cabos e (b) Secções tubulares	5.167
Figura 5.138 – Frequências naturais e fatores de participação modal da estrutura sob as ações permanentes e a ação da componente média da velocidade do vento em sucção	5.168

Figura 5.139 – Configurações modais dos modos 1 a 6 sob as ações permanentes e a ação da componente média da velocidade do vento em sucção	5.169
Figura 5.140 – Influência da massa aerodinâmica nas frequências naturais da estrutura sob efeito da velocidade do vento em sucção em termos globais	5.171
Figura 5.141 – Frequências naturais e fatores de participação modal da estrutura sob as ações permanentes, a ação da componente média da velocidade do vento em sucção e da massa adicional	5.172
Figura 5.142 – Fatores de hibridização da estrutura na configuração estática e sob ação da componente média do vento em sucção considerando a massa adicional.....	5.172
Figura 5.143 – Configurações modais dos modos 1 a 4 sob as ações permanentes, a ação da componente média da velocidade do vento em sucção e da massa adicional	5.173
Figura 5.144 – Ajustamento dos coeficientes de amortecimento de Rayleigh ao amortecimento total calculado da estrutura sob efeito da velocidade do vento em sucção	5.175
Figura 5.145 – Amplitudes de vibração vertical do nó 85 localizado na membrana por integração direta e por sobreposição modal: (a) Evolução temporal e (b) Espetro de potência.....	5.176
Figura 5.146 – Amplitudes de vibração do nó 12 localizado na estrutura metálica no topo da cobertura: (a) Evolução temporal; (b) Espetro de potência na direção z; (c) Espetro de potência na direção y e (d) Espetro de potência na direção x.....	5.178
Figura 5.147 – Amplitude de vibração vertical do nó 615 localizado na consola da estrutura metálica por integração direta e por sobreposição modal: (a) Evolução temporal e (b) Espetro de potência.....	5.178
Figura 6.1 – Veleiro da equipa suíça da <i>America's Cup 2007</i> (Decision SA 2007).....	6.4
Figura 6.2 – Balão (Wikipedia 2014b).....	6.5
Figura 6.3 – Perfil de secção da vela.....	6.6
Figura 6.4 – Perfil de secção de vela na ocorrência de <i>Backwind</i>	6.6
Figura 6.5 – Caracterização do sistema de monitorização baseado em fibras óticas: (a) Localização das secções instrumentadas da vela: vela grande (VG) e genoa (GEN); e equipamentos utilizados; (b) Inserção de barras instrumentadas em bainhas	6.7
Figura 6.6 – Otimização do desempenho do barco em tempo real	6.7
Figura 6.7 – (a) Disposição das fibras e dos sensores de <i>Bragg</i> na barra; (b) Lei de variação de $\Delta \varepsilon$ (s)	6.8
Figura 6.8 – Cálculo da curvatura da secção da barra baseado em medições de sensores de deformação.....	6.9
Figura 6.9 – Reconstituição da deformada da barra.....	6.10
Figura 6.10 – Referencial local da barra	6.10
Figura 6.11 – Fluxograma da metodologia	6.11
Figura 6.12 – Modelo de barra encastrada sujeita a flexão simples.....	6.12
Figura 6.13 – Variação das deformações ao longo do modelo de barra encastrada	6.12
Figura 6.14 – Esquema das solicitações genéricas no modelo de barra simplesmente apoiada	6.13

Figura 6.15 – Deformada associada à solicitação C1	6.14
Figura 6.16 – Deformada associada à solicitação C2	6.14
Figura 6.17 – Deformada associada à solicitação C3	6.15
Figura 6.18 – Variação das extensões ao longo da barra nas fibras inferior ϵ_1 e superior ϵ_2	6.15
Figura 6.19 – Definição do erro de caracterização da profundidade da deformada	6.16
Figura 6.20 – Comparação entre deformada calculada numericamente e reconstituída para o modelo de barra encastrada	6.17
Figura 6.21 – Variação do erro de caracterização da profundidade da deformada ao longo da barra	6.18
Figura 6.22 – Comparação entre deformada calculada e reconstituída para a solicitação C1	6.19
Figura 6.23 – Comparação entre deformada calculada e reconstituída para a solicitação C2	6.19
Figura 6.24 – Comparação entre deformada calculada e reconstituída para a solicitação C3	6.20
Figura 6.25 – Variação do erro de caracterização da profundidade da deformada ao longo da barra para a solicitação C1	6.21
Figura 6.26 – Variação do erro de caracterização da profundidade da deformada ao longo da barra para a solicitação C2	6.21
Figura 6.27 – Variação do erro de caracterização da profundidade da deformada ao longo da barra para a solicitação C3	6.22
Figura 6.28 – Representação esquemática do modelo físico indicando a disposição dos dois <i>arrays</i>	6.23
Figura 6.29 – Sensores de <i>Bragg</i> : (a) <i>Array</i> instalado na barra com 10 sensores de <i>Bragg</i> ; (b) Pormenor de um sensor de <i>Bragg</i> e (c) Foto de um sensor de <i>Bragg</i>	6.24
Figura 6.30 – Emenda por fusão: (a) Modelo físico e (b) Ampliação de emenda por fusão entre dois sensores de <i>Bragg</i>	6.25
Figura 6.31 – Conteúdo espectral do <i>array 1</i> aplicado na face superior do modelo	6.25
Figura 6.32 – Conteúdo espectral do <i>array 2</i> aplicado na face inferior do modelo	6.26
Figura 6.33 – Aplicação informática para controlo do sistema de interrogação ótico	6.28
Figura 6.34 – Montagem dos sistemas de medição com base em fibras óticas e em análise de imagem durante ensaio experimental	6.29
Figura 6.35 – (a) Mesa de apoio / calibração 600x1200mm e (b) Fundo homogéneo	6.30
Figura 6.36 – Matriz de pontos para a correção de distorção	6.30
Figura 6.37 – Matriz de pontos antes da correção de distorção da imagem	6.31
Figura 6.38 – Matriz de pontos após correção de distorção da imagem	6.31
Figura 6.39 – Barra curvilínea sobre referencial normalizado	6.32
Figura 6.40 – (a) Identificação de 4 alvos e (b) Definição de um sistema de coordenadas	6.33
Figura 6.41 – Contorno identificado da barra com base no algoritmo de deteção de fronteiras	6.33

Figura 6.42 – Perfil da configuração deformada da barra identificado através do sistema de monitorização baseado em análise de imagem.....	6.34
Figura 6.43 – Instrumentação das barras: (a) Modelo e (b) Barra auxiliar	6.34
Figura 6.44 – Conteúdo espectral dos sensores da barra auxiliar	6.35
Figura 6.45 – Ensaio de deflexão do modelo na mesa graduada: (a) aumento gradual da profundidade; (b) criação de assimetria em cada nível de profundidade	6.36
Figura 6.46 – Resultados dos parâmetros da configuração deformada do modelo com base na medição de extensões: (a) Corda (<i>cm</i>); (b) Profundidade máxima (<i>cm</i> e percentualmente em relação à corda); (c) Localização da profundidade máxima (<i>cm</i> e percentualmente em relação à corda) e (d) Ângulos de entrada e de saída (graus).....	6.38
Figura 6.47 – Extensões das faces do modelo em termos dos seus valores médios e máximos absolutos	6.39
Figura 6.48 – Sobreposição das configurações deformadas – Sistema de Imagem vs Sistema Ótico	6.39
Figura 6.49 – Configuração deformada 10 obtida pelo sistema de imagem ou referência e pelo sistema ótico utilizando 10 a 3 secções instrumentadas	6.41
Figura 6.50 – Erro de caracterização da profundidade da deformada 10	6.41
Figura 6.51 – Erro de caracterização máximo da profundidade da deformada variando a profundidade dos perfis	6.41
Figura 6.52 – Erro de caracterização máximo da profundidade da deformada variando a assimetria dos perfis	6.42
Figura 6.53 – Erro de caracterização da corda E_c das configurações deformadas analisadas, variando o número de secções instrumentadas de 10 a 3	6.43
Figura 6.54 – Erro de caracterização da profundidade máxima das configurações deformadas analisadas, variando o número de secções instrumentadas de 10 a 3: (a) Em termos absolutos e (b) Percentualmente em relação à corda	6.44
Figura 6.55 – Erro de caracterização da localização da profundidade máxima das configurações deformadas analisadas, variando o número de secções instrumentadas de 10 a 3: (a) Em termos absolutos e (b) Percentualmente em relação à corda	6.45
Figura 6.56 – Erro de caracterização, variando o número de secções instrumentadas de 10 a 3: (a) Do ângulo de entrada e (b) Do ângulo de saída	6.46
Figura 6.57 – Configurações deformadas do modelo com base em diferentes arquiteturas de distribuição de sensores de Bragg: (a) 10 secções instrumentadas com 10 sensores localizados numa só face e (b) 5 secções instrumentadas com 5 sensores localizados alternadamente nas duas faces	6.48
Figura 6.58 – Configurações deformadas do modelo com base em diferentes espessuras efetivas: 2, 2,25 e 2,5mm.....	6.49
Figura 6.59 – Configurações deformadas do modelo com base em diferentes localizações das secções instrumentadas: $s = s_i$ e $s = s_i \pm 2mm$	6.50
Figura 6.60 – Evolução da temperatura durante o ensaio	6.51

Figura 6.61 – Correlação entre a variação do comprimento de onda normalizado e a temperatura: (a) Array 1 e (b) Array 2	6.51
Figura 6.62 – (a) Deformação aparente obtida a partir da variação do comprimento de onda de cada sensor; (b) Deformação aparente estimada a partir da medição da temperatura; (c) Erro associado à deformação.....	6.54
Figura 6.63 – Configurações deformadas do modelo com base em variações diferenciais de deformação originados pelos efeitos termo-óticos.....	6.55

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 2.1 – Tipologia das estruturas de acordo com a forma e suporte, adaptado de Seidel (2009)	2.3
Tabela 2.2 – Classificação das estruturas em membrana tensa, adaptado de Forster e Mollaert (2004)	2.4
Tabela 2.3 – Propriedades gerais dos fios dos têxteis técnicos, adaptado de Bridgens (2005)	2.5
Tabela 2.4 – Propriedades gerais dos revestimentos dos têxteis técnicos, adaptado de Bridgens (2005)	2.9
Tabela 2.5 – Classificação de têxteis técnicos em poliéster / PVC, adaptado de Forster e Mollaert (2004)	2.10
Tabela 2.6 – Classificação de têxteis técnicos em fibra de vidro / PTFE, adaptado de Forster e Mollaert (2004)	2.11
Tabela 2.7 – Comparação de propriedades genéricas de diferentes tipos de têxteis técnicos, adaptado de Forster e Mollaert (2004)	2.11
Tabela 2.8 – Propriedades de diferentes tipos de plásticos técnicos ETFE (Forster e Mollaert 2004)	2.20
Tabela 2.9 – Valores típicos do módulo de elasticidade e do coeficiente de Poisson de têxteis técnicos (ARUP) – Material isotrópico	2.29
Tabela 2.10 – Valores típicos dos módulos de elasticidade e dos coeficientes de Poisson de têxteis técnicos (Bridgens 2005) – Material ortotrópico	2.31
Tabela 3.1 – Hiperbolóide, parabolóide hiperbólico e elipsóide	3.4
Tabela 3.2 – Superfícies minimais: Catenóide e Parabolóide hiperbólico	3.7
Tabela 3.3 – Superfícies minimais: <i>Sela de cavalo</i> e <i>Cume-vale</i>	3.8
Tabela 3.4 – Coordenadas cartesianas dos nós fixos da estrutura de rede de cabos	3.20
Tabela 3.5 – Geometria dos nós livres das quatro configurações de equilíbrio da rede de cabos	3.22
Tabela 3.6 – Densidades de força, comprimento e esforço axial nas quatro configurações de equilíbrio da rede de cabos	3.22
Tabela 3.7 – Densidades de força dos elementos da torre de arrefecimento para cada configuração	3.24
Tabela 3.8 – Coordenadas cartesianas dos nós fixos	3.28
Tabela 3.9 – Coordenadas dos nós livres da estrutura nas duas fases do <i>MDFnl</i> , obtidas com base na rotina implementada e no exemplo de referência	3.29
Tabela 3.10 – Densidades de força, comprimento e esforço axial dos cabos nas duas fases do <i>MDFnl</i> , obtidos com base na rotina implementada e no exemplo de referência	3.30
Tabela 3.11 – Propriedades do material do cabo	3.33
Tabela 3.12 – Características geométricas, mecânicas e elásticas das 5 configurações de cabos consideradas: flecha igual a 5, 50, 100, 200 e 500m, resultantes da metodologia implementada no	

algoritmo de determinação da forma, $MDFnl_{cabo}$, da formulação analítica da catenária elástica e da modelação numérica no <i>software</i> de cálculo <i>SOLVIA</i> ® com elementos de barra e de viga.....	3.37
Tabela 3.13 – Coordenadas cartesianas dos nós da estrutura de membrana	3.41
Tabela 3.14 – Coordenadas cartesianas finais dos nós livres da estrutura de membrana	3.42
Tabela 3.15 – Características do material dos cabos	3.59
Tabela 3.16 – Coordenadas cartesianas dos nós e forças nodais externas	3.61
Tabela 3.17 – Cálculo do amortecimento crítico	3.62
Tabela 3.18 – Comparação entre os resultados numéricos da deformada da rede de cabos com os de referência.....	3.66
Tabela 3.19 – Comparação entre os resultados numéricos do esforço axial médio dos cabos com os de referência.....	3.66
Tabela 4.1 – Coeficiente de pressão exterior para coberturas em parabolóide hiperbólico (Forster e Mollaert 2004).....	4.18
Tabela 4.2 – Coeficiente de pressão exterior para coberturas em cume-vale (Forster e Mollaert 2004)	4.20
Tabela 4.3 – Coeficiente de pressão exterior para coberturas cónicas (Forster e Mollaert 2004)	4.21
Tabela 4.4 – Coeficientes de pressão em setores múltiplos do modelo <i>ARIES</i>	4.23
Tabela 4.5 – Divisão concêntrica das coberturas	4.28
Tabela 4.6 – Valores máximos e mínimos de C_p nas direções do vento de 0° , 45° e 90°	4.35
Tabela 4.7 – Coeficiente de amortecimento aerodinâmico de estruturas tensas, adaptado de Wu (2003).....	4.54
Tabela 4.8 – Valor dos desvios-padrão relativos a cada um dos 10 lotes de séries da velocidade do vento geradas para os pontos 1 e 5, e respetivos valores médios e coeficientes de variação	4.59
Tabela 5.1 – Características das barras calibradas da <i>Pfeifer</i> do tipo 860.....	5.18
Tabela 5.2 – Características do encaixe zincado aberto da <i>Pfeifer</i> do tipo 802	5.19
Tabela 5.3 – Propriedades das barras calibradas e dos cabos	5.20
Tabela 5.4 – Propriedades do tecido de poliéster revestido a <i>PVC</i> do tipo <i>Ferrari Precontraint 1002</i>	5.21
Tabela 5.5 – Determinação da tensão admissível e do pré-esforço	5.22
Tabela 5.6 – Modelos de membrana: topologia vs metodologia de determinação da forma	5.26
Tabela 5.7 – Pressupostos de cálculo das metodologias de determinação da forma	5.27
Tabela 5.8 – Coordenadas cartesianas dos nós fixos dos modelos M_A^{MDF} , M_A^{MRD} , M_A^{RD} , M_B^{MDTS} e M_B^{MDTsm}	5.28
Tabela 5.9 – Coordenadas cartesianas dos nós livres do modelo M_A^{MDF}	5.29
Tabela 5.10 – Densidades de força, comprimento e esforço axial dos elementos do modelo M_A^{MDF}	5.30
Tabela 5.11 – Coordenadas cartesianas iniciais e finais dos nós livres do modelo M_A^{MRD}	5.32

Tabela 5.12 – Coordenadas cartesianas dos nós livres do modelo M_A^{RD}	5.34
Tabela 5.13 – Coordenadas cartesianas iniciais e finais dos nós livres do modelo M_B^{MDTS}	5.35
Tabela 5.14 – Características geométricas e tensão dos elementos triangulares do modelo M_B^{MDTS}	5.37
Tabela 5.15 – Características geométricas e forças dos elementos triangulares do modelo M_B^{MDTS}	5.38
Tabela 5.16 – Coordenadas cartesianas iniciais e finais dos nós livres do modelo M_B^{MDTSm}	5.40
Tabela 5.17 – Características geométricas e tensão dos elementos triangulares do modelo M_B^{MDTSm}	5.41
Tabela 5.18 – Características geométricas e forças dos elementos triangulares do modelo M_B^{MDTSm}	5.42
Tabela 5.19 – Coordenadas cartesianas dos nós fixos dos modelos M_C^{MDF} e M_C^{MRD}	5.44
Tabela 5.20 – Coordenadas cartesianas dos nós livres do modelo M_C^{MDF}	5.45
Tabela 5.21 – Densidades de força, comprimento e esforço axial dos elementos do modelo M_C^{MDF}	5.46
Tabela 5.22 – Coordenadas cartesianas iniciais e finais dos nós livres do modelo M_C^{MRD}	5.48
Tabela 5.23 – Coordenadas cartesianas dos nós fixos dos modelos M_F^{MDF} e M_F^{MRD}	5.51
Tabela 5.24 – Coordenadas cartesianas dos nós livres do modelo M_F^{MDF}	5.51
Tabela 5.25 – Densidades de força, comprimento e esforço axial dos elementos do modelo M_F^{MDF}	5.52
Tabela 5.26 – Coordenadas cartesianas iniciais e finais dos nós livres do modelo M_F^{MRD}	5.53
Tabela 5.27 – Área e peso dos elementos de membrana dos modelos numéricos	5.63
Tabela 5.28 – Deformação introduzida nos elementos de membrana na direção do urdume (U) e da trama (T)	5.65
Tabela 5.29 – Processo iterativo de determinação das deformações do módulo 1 do modelo 45° para a configuração de $500N/m$	5.67
Tabela 5.30 – Frequências naturais do Modelo 45° com o aumento do pré-esforço da membrana [Hz]	5.72
Tabela 5.31 – Frequências naturais do Modelo 0° com o aumento do pré-esforço da membrana [Hz]	5.72
Tabela 5.32 – Deformação introduzida nos elementos de membrana na direção do urdume (U) e da trama (T)	5.76
Tabela 5.33 – Deformada da estrutura em planta com destaque para os deslocamentos verticais [m]	5.81
Tabela 5.34 – Tensão na direção do urdume [N/m]	5.82
Tabela 5.35 – Tensão na direção da trama [N/m]	5.83
Tabela 5.36 – Tensão de corte [N/m]	5.84
Tabela 5.37 – Frequências naturais variando o pré-esforço entre 1 e $3kN/m$ e o coeficiente de Poisson entre $0,235$ e $0,7$	5.86

Tabela 5.38 – Configuração modal 1	5.87
Tabela 5.39 – Configuração modal 5	5.88
Tabela 5.40 – Caracterização do erro dos modelos constitutivos no estado plano de tensão ortotrópico linear	5.106
Tabela 5.41 – Coeficiente de pressão exterior para paraboloides hiperbólicos (Forster e Mollaert 2004).....	5.111
Tabela 5.42 – Coeficientes de pressão exterior do módulo lateral para as direções 0° e 90°	5.113
Tabela 5.43 – Parâmetros para o cálculo dos coeficientes de força c_f da estrutura tubular.....	5.119
Tabela 5.44 – Parâmetros para o cálculo da velocidade média	5.121
Tabela 5.45 – Parâmetros para o cálculo do coeficiente estrutural $c_s c_d$	5.125
Tabela 5.46 – Comprimento indeformado dos cabos $[m]$	5.132
Tabela 5.47 – Área e peso dos elementos do modelo numérico	5.134
Tabela 5.48 – Esforço axial nos cabos sob as ações permanentes $[kN]$	5.135
Tabela 5.49 – Deformação introduzida nos elementos de membrana na direção do urdume (U) e da trama (T).....	5.136
Tabela 5.50 – Reações globais sob as ações permanentes do pré-esforço e peso próprio	5.138
Tabela 5.51 – Frequências naturais e respectivas configurações modais referentes aos 9 primeiros modos de vibração sob as ações permanentes	5.138
Tabela 5.52 – Influência dos cabos, membranas e detalhes construtivos nas frequências naturais da estrutura em modos de vibração equivalentes.....	5.142
Tabela 5.53 – Reações globais sob as ações permanentes e da ação quase-estática do vento em pressão	5.145
Tabela 5.54 – Esforço axial nos cabos sob as ações permanentes e da ação quase-estática do vento em pressão $[kN]$	5.145
Tabela 5.55 – Reações globais sob as ações permanentes e a ação da componente média da velocidade do vento em pressão.....	5.147
Tabela 5.56 – Esforço axial nos cabos do primeiro quadrante sob as ações permanentes e a ação da componente média da velocidade do vento em pressão $[kN]$	5.147
Tabela 5.57 – Frequências naturais e respectivas configurações modais referentes aos 6 primeiros modos de vibração sob as ações permanentes e a ação da componente média da velocidade do vento em pressão	5.149
Tabela 5.58 – Influência da massa aerodinâmica nas frequências naturais da estrutura sob efeito da velocidade do vento em pressão em modos de vibração equivalentes	5.152
Tabela 5.59 – Frequências naturais e respectivas configurações modais referentes aos 4 primeiros modos de vibração sob as ações permanentes, a ação da componente média da velocidade do vento em pressão e da massa adicional	5.154
Tabela 5.60 – Massa equivalente e amortecimento da estrutura sob efeito da velocidade do vento em pressão	5.156

Tabela 5.61 – Reações globais sob as ações permanentes e da ação quase-estática do vento em sucção	5.164
Tabela 5.62 – Esforço axial nos cabos sob as ações permanentes e da ação quase-estática do vento em sucção [kN].....	5.164
Tabela 5.63 – Reações globais sob as ações permanentes e a ação da componente média da velocidade do vento em sucção	5.166
Tabela 5.64 – Esforço axial nos cabos do primeiro quadrante sob as ações permanentes e a ação da componente média da velocidade do vento em sucção [kN].....	5.166
Tabela 5.65 – Frequências naturais e respectivas configurações modais referentes aos 6 primeiros modos de vibração sob as ações permanentes e a ação da componente média da velocidade do vento em sucção	5.168
Tabela 5.66 – Influência da massa aerodinâmica nas frequências naturais da estrutura sob efeito da velocidade do vento em sucção em modos de vibração equivalentes	5.171
Tabela 5.67 – Frequências naturais e respectivas configurações modais referentes aos 4 primeiros modos de vibração sob as ações permanentes, a ação da componente média da velocidade do vento em sucção e da massa adicional	5.173
Tabela 5.68 – Massa equivalente e amortecimento da estrutura sob efeito da velocidade do vento em sucção	5.174
Tabela 6.1 – Valor das solicitações no modelo de barra simplesmente apoiada para cada configuração	6.13
Tabela 6.2 – Seleção das secções instrumentadas da barra	6.16
Tabela 6.3 – Parâmetros da deformada do modelo de barra encastrada calculada numericamente e reconstituída com 3, 5, 10, 20 e 100 secções instrumentadas.....	6.17
Tabela 6.4 – Seleção das secções instrumentadas da barra	6.19
Tabela 6.5 – Parâmetros da deformada do modelo de barra simplesmente apoiada calculada numericamente e reconstituída com 3 e 5 secções instrumentadas	6.20
Tabela 6.6 – Características dos sensores de <i>Bragg</i> agrupados pelos dois <i>arrays</i>	6.24
Tabela 6.7 – Localização das secções de barra instrumentadas [cm]	6.27
Tabela 6.8 – Características dos sensores da barra auxiliar	6.35
Tabela 6.9 – Seleção das secções instrumentadas da barra à medida que se diminui o número de secções utilizadas na identificação da configuração deformada - 10 a 3.....	6.40
Tabela 6.10 – Erros de caracterização dos parâmetros do perfil da secção da vela	6.42
Tabela 6.11 – Erros de caracterização dos parâmetros do perfil da configuração deformada 10	6.43
Tabela 6.12 – Desvio da estimativa dos parâmetros do modelo variando o número de secções instrumentadas de 10 a 3.....	6.47
Tabela 6.13 – Estimativa dos parâmetros do modelo utilizando 5 secções instrumentadas com 10 sensores de <i>Bragg</i>	6.47
Tabela 6.14 – Quantificação experimental das sensibilidades dos sensores à temperatura	6.52

Tabela 6.15 – Valores característicos relativamente à sensibilidade dos sensores de <i>Bragg</i> (FIBERSENSING 2013).....	6.53
---	------

SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

2D – duas dimensões

3D – três dimensões

Letras maiúsculas latinas

A – área [m^2]

A_m – área da secção metálica [m^2]

A_p , A_D , A_L – área da superfície da estrutura onde atua F_p , área projetada no plano perpendicular ao escoamento e área projetada no plano longitudinal ao escoamento [m^2]

C – matriz diagonal de amortecimento de um sistema [kg/s]

C_{ex} , C_{ey} , C_{ez} – coeficientes de atenuação, ou de decaimento exponencial, nas direções longitudinal x , lateral y e vertical z

C_P , C_D , C_L – coeficientes de pressão, de arrastamento e de sustentação da ação do vento

E – módulo de elasticidade [GPa]

E_c – erro de caracterização da corda da deformada [%]

E_d – erro de caracterização da profundidade máxima da deformada [%]

$E_{d/c}$ – erro de caracterização da profundidade máxima da deformada, em relação à corda [%]

E_e – erro de caracterização do ângulo de entrada [°]

E_{eq} – módulo de elasticidade equivalente [GPa]

E_f – erro de caracterização do ângulo de saída [°]

E_l – erro de caracterização da localização da profundidade máxima da deformada [%]

$E_{l/c}$ – erro de caracterização da localização da profundidade da deformada, em relação à corda [%]

E_{pm} – erro de caracterização da profundidade da deformada, dado pelo quociente entre a distância de nós homólogos das deformadas obtidas e a profundidade máxima da deformada real [%]

F – vetor de forças externas [N]

F_{Ed} – valor do esforço axial de cálculo [N]

F_k – valor característico de 0,2% da força resistente, $F_{0,2k}$, ou de 0,1% da mesma força, $F_{0,1k}$ [N]

F_P , F_D , F_L – força de pressão, de arrastamento e de sustentação [N]

F_{Rd} – valor do esforço axial resistente [N]

F_s – frequência de amostragem de um sinal [Hz]

F_{Uk} – valor característico da força de rotura [N]

F_U – tensão na direção de fiação do urdume (ou teia) [N/m]

F_T – tensão na direção de fiação da trama [N/m]

H – distância entre fibras opostas [m]

H_A – reação horizontal de um cabo no apoio A [N]

I_u, I_v, I_w – intensidade de turbulência da velocidade do vento na direção longitudinal u , lateral v e vertical w

$K(s)$ – curvatura [m^{-1}]

L – comprimento da corda [m]

$L_{\in}(z)$ – escala integral de turbulência na direção longitudinal u , lateral v e vertical w ($\in = u, v$ e w) [m]

L_0 – comprimento de cabo indeformado [m]

L_e – comprimento virtual do cabo [m]

L_f – comprimento de cabo deformado [m]

M – matriz diagonal da massa de um sistema [kg]

$P(u)$ – vetor de forças internas [N]

$R(u)$ – vetor de força residual, definida através da diferença entre as forças externas, F , e as internas, $P(u)$

S – área de um elemento triangular de membrana;

S_L – função densidade espectral de potência reduzida

$S_{\in}(z)$ – função densidade espectral de potência da componente turbulenta longitudinal u , lateral v e vertical w da velocidade do vento ($\in = u, v$ e w) [$(m/s)^2/Hz$]

S_{uu} – função densidade espectral de potência cruzada da componente turbulenta longitudinal u da velocidade do vento [$(m/s)^2/Hz$]

T – período [s]

T_0 – período máximo de tempo da amostra [s]

T_A – esforço axial máximo de um cabo [N]

T^0 – esforço axial dos elementos do sistema no instante $t = 0s$ [N]

$T(s)$ – esforço axial medido em função do comprimento indeformado s do cabo [N]

T_i – forças nodais de um elemento triangular de membrana, com $i=1,2$ e 3 [N]

T_S – esforço axial no ponto de flecha máxima [N]

$\bar{U}$ – velocidade média do vento [m/s]

U_k – energia cinética [J]

V_A – reação vertical de um cabo no apoio A [N]

W – peso do cabo [N]

X, Y, Z – coordenadas nodais de um sistema no referencial cartesiano

Letras minúsculas latinas

a – parâmetro associado à solução u da equação elítica

- c – parâmetro não-linear de uma equação diferencial; amortecimento [kg/s]
- c_c – amortecimento crítico [kg/s]
- coh – função de coerência
- c_0 – coeficiente de orografia
- d – flecha máxima de um cabo [m]
- f – parâmetro independente da equação elítica; frequência natural [Hz]
- f_{nl} – fator de não-linearidade no cálculo do intervalo de tempo ou passo de cálculo temporal
- f_x, f_y, f_z – força nodal externa, nas direções cartesianas [N]
- f_i, f_a, f_e – força de inércia, de amortecimento ou elástica [N]
- g – aceleração da gravidade [m/s^2]
- h – fator de amplificação da solução u da equação elítica; desnível vertical entre os apoios de um cabo [m]
- k – rigidez [N/m]
- k_r – coeficiente de terreno
- l – comprimento de um elemento de barra [m]; distância horizontal entre os apoios de um cabo [m]
- m – massa [kg, ou kg/m na formulação da geometria dos cabos]
- q – densidade de força [N/m]
- q_s – densidade de força superficial [N/m^3]
- q_z – peso próprio dos elementos (se atuar na direção do eixo dos z) [N/m]
- r – valor na fronteira da solução u
- s_i – rigidez do nó i [N/m]
- s_s – coordenada lagrangiana de localização da flecha máxima d [m]
- t – instante de tempo [s]; espessura [m]
- t_i – esforço axial no elemento i [N]
- $u(x,y,z,t)$ – componente longitudinal turbulenta da velocidade do vento [m/s]
- u – solução de uma equação diferencial parcial; deslocamento [m]
- $\dot{u}$ – velocidade [m/s]
- $\ddot{u}$ – aceleração [m/s^2]
- u_x – derivada da solução u em ordem a x
- u_{xx} – derivada da solução u em ordem a x , de segunda ordem
- u_y – derivada da solução u em ordem a y
- u_{yy} – derivada da solução u em ordem a y , de segunda ordem
- u_{xy} – derivada da solução u em ordem a x e y
- $v(x,y,z,t)$ – componente lateral turbulenta da velocidade do vento [m/s]

v_b – valor de referência da velocidade do vento [m/s]
 $w(x,y,z,t)$ – componente vertical turbulenta da velocidade do vento [m/s]
 w – peso próprio de um cabo [N/m]
 w_A e w_B – ângulos de desvio máximo nas ancoragens de um cabo [°]
 x , y e z – direções do referencial cartesiano
 x_f , y_f , z_f – coordenadas cartesianas dos nós fixos
 z_0 – comprimento de rugosidade [m]

Letras maiúsculas gregas

$\Delta\varepsilon$ – variação das extensões em fibras opostas
 $\Delta\varepsilon_M$ – variação de extensão mecânica
 Δt – intervalo de tempo ou passo de cálculo temporal [s]
 ΔT – variação de temperatura [°C]
 $\Delta\lambda$ – variação do comprimento de onda [nm]
 $\Delta\tau$ – desfasamento temporal [s]
 $\Delta\omega$ – resolução em frequência [rad/s]
 ∇ – gradiente

Letras minúsculas gregas

α_f – coeficiente de dilatação térmica da fibra ótica [(°C)⁻¹]
 α_m – coeficiente de dilatação térmica do material [(°C)⁻¹]
 β_ε – sensibilidade do FBG à deformação [($\mu\varepsilon$)⁻¹]
 β_T – sensibilidade do FBG à temperatura [(°C)⁻¹]
 γ – peso específico [N/m³]
 γ_r – coeficiente parcial
 δ – tolerância de cálculo numérico
 ε – extensão [%]
 ζ – coeficiente termo-ótico [(°C)⁻¹]
 θ – rotação [°]
 λ – comprimento de onda [nm]
 λ_b – comprimento de onda central do FBG [nm]
 λ^2 – parâmetro de Irvine [%]
 ρ – densidade ou massa volúmica [kg/m³]

ρ_e – constante foto-elástica

σ – tensão [Pa]

$\sigma_u, \sigma_v, \sigma_w$ – desvios-padrão da velocidade do vento na direção longitudinal u , lateral v e vertical w

σ_{uk} – valor característico da resistência à tração [Pa]

ξ – coeficiente de amortecimento

Φ – vetor que caracteriza a deformada da estrutura

ω – frequência circular [rad/s]

ω_{cut} – frequência de corte ou de Nyquist [rad/s]

Siglas

CEAR – Centro de Alto Rendimento

CFD – Dinâmica computacional de fluidos (*Computational Fluid Dynamic*)

CFRP – Polímero reforçado com fibra de carbono (*Carbon Fiber Reinforced Polymer*)

CP – Parâmetro de controlo (*Control Parameter*)

CST – Elemento finito triangular de tensão constante (*Constant Strain Triangle*)

CWL – Comprimento de onda central (*Central Wavelength*) [nm]

EC – Eurocódigo

EDP – Equação Diferencial Parcial

ETFE – Etileno tetrafluoretileno

FBG – Sensores de Bragg (*Fiber Bragg Grating*)

FFT – Transformada rápida de Fourier (*Fast Fourier Transform*)

FSI – Interação fluido-estrutura (*Flui-Structure Interaction*)

GEN – Genoa

GFRP – Polímero reforçado com fibra de vidro (*Glass Fiber Reinforced Polymer*)

IASS – International Association for Shell and Spatial Structures

MART – Método da Análise de Redes Thrust (*thrust network analysis*)

MERA – Método da Estratégia de Referência Atualizada (*updated reference strategy*)

MDF – Método da Densidade de Força (*force density method*)

MDFa – Método da Densidade de Força adaptada (*adaptative force density method*)

MDFI – Método da Densidade de Força linear

MDFmp – Método da Densidade de Força multi-passo (*multi-step force density method*)

MDFn – Método da Densidade de Força natural (*natural force density method*)

MDFN – Método de Determinação da Forma Natural

MDFnl – Método da Densidade de Força não-linear

MDFPSA – Método de Determinação da Forma Preliminar com Superfície Ajustada (*preliminary form-finding surface-fitting method*)

MDFr – Método da Densidade de Força restringida (*constrained force density method*)

MDFv – Método da Densidade de Força virtual (*virtual force density method*)

MDN – Método de Dimensionamento Normativo (*principia design method*)

MDTS – Método da Densidade de Tensão Superficial (*surface stress density method*)

MOEE – Método de Otimização Estrutural Evolucionária (*evolutionary structural optimization method*)

MRD – Método da Relaxação Dinâmica (*dynamic relaxation*)

MRGA – Método da Rigidez Geométrica Assumida (*assumed geometric stiffness method*)

MRGr – Método da Rigidez Geométrica revista (*revised geometric stiffness method*)

MSMP – Método do Sistema Mola-Partícula (*particle-spring system method*)

NS – Número de Secções de barra instrumentada

NURBS – Superfície paramétrica (*Non Uniform Rational Basis Spline Surfaces*)

PC – Policarbonato

PE – Polietileno

PES – Poliéster

PMMA – Polimetilmetacrilato

PP – Polipropileno

PS – Poliestireno

PSZ – Zircônia parcialmente estabilizada

PTFE – Politetrafluoretileno ou Teflon

PU – Poliuretano

PVC – Policloreto de Vinil

RMSE – Erro quadrático médio (*Root Mean Square Error*)

VG – Vela grande (*Main Sail*)

1

INTRODUÇÃO

1.1. GERAL

Pelo mundo fora, encontram-se estruturas muito distintas no aspeto e tipo de utilização, mas com grandes semelhanças no seu funcionamento. São exemplo uma ponte suspensa, uma cobertura suspensa ou em membrana, ou a vela de um barco. Uma distribuição de esforços internos de tração caracteriza o seu funcionamento. Geralmente, as estruturas tensas são compostas por cabos, membranas ou ambos. Incluem-se estruturas formadas por cabos suspensos em pontes e coberturas, redes de cabos em coberturas, membranas pré-esforçadas, velas de barcos e paraquedas de naves espaciais (ver a Figura 1.1 (a) à Figura 1.1 (f), respetivamente). Neste trabalho, serão alvo de estudo as estruturas formadas por cabos e membranas.

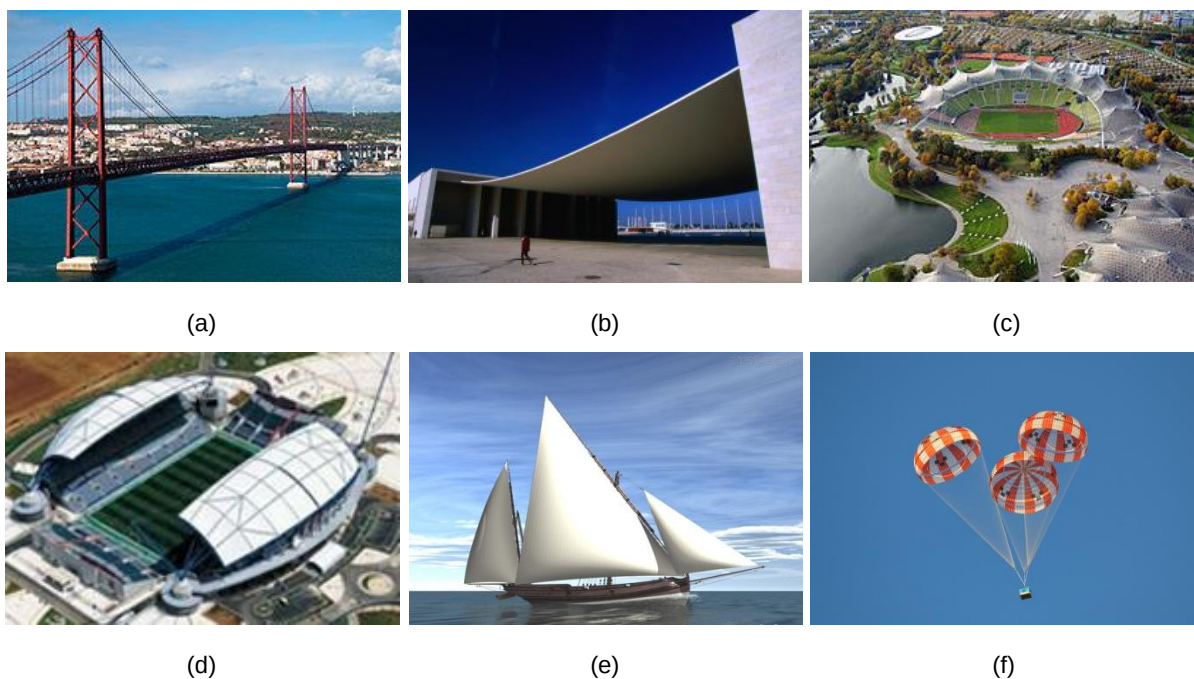


Figura 1.1 – Estruturas tensas: (a) Ponte 25 de Abril, Portugal (Wikipédia 1966); (b) Pavilhão de Portugal, Portugal (Idealista 2015); (c) Estádio Olímpico de Munique, Alemanha (Wikipédia 1972); (d) Estádio de Faro-Loulé, Portugal (*World Stadiums* 1998); (e) Barco à vela (Fotos de Barcos 2012) e (f) Paraquedas (NASA 2015)

1.1.1. ESTRUTURAS DE MEMBRANA TENSA

O Estádio Olímpico de Munique (ver a Figura 1.1 (c)), de Frei Otto, é uma das estruturas leves mais emblemáticas da história. Dada a escala e dimensão desta estrutura, o seu projeto marca a transição entre a utilização da modelação física e os métodos computacionais no cálculo da geometria inicial e do comportamento estrutural (Lewis 2003).

As primeiras coberturas em membrana tensa terão surgido pela necessidade de criar estruturas de abrigo. Como o próprio nome sugere, estas estruturas utilizam tecidos num estado de tração pura, como elementos de construção primários. Historicamente, os materiais e os métodos construtivos utilizados nas tendas foram-se diferenciando consoante o clima onde estas estruturas eram construídas, variando desde as tendas negras dos Beduínos (ver a Figura 1.2 (a)), no deserto do Norte de África, até às mais sofisticadas tendas *Tipi* (ver a Figura 1.2 (b)), nos Estados Unidos. Todavia, os materiais poliméricos e compósitos, embora de natureza distinta ao longo do tempo, estiveram sempre na base destas estruturas, até aos dias de hoje, sendo de realçar a sua importância, há centenas de anos, quando não havia o aço (ver a Figura 1.3).



(a)



(b)

Figura 1.2 – Tendas em membrana: (a) Tenda dos Beduínos (Kittner 2012) e (b) Tenda *Tipi* (Tonybynum 2014)

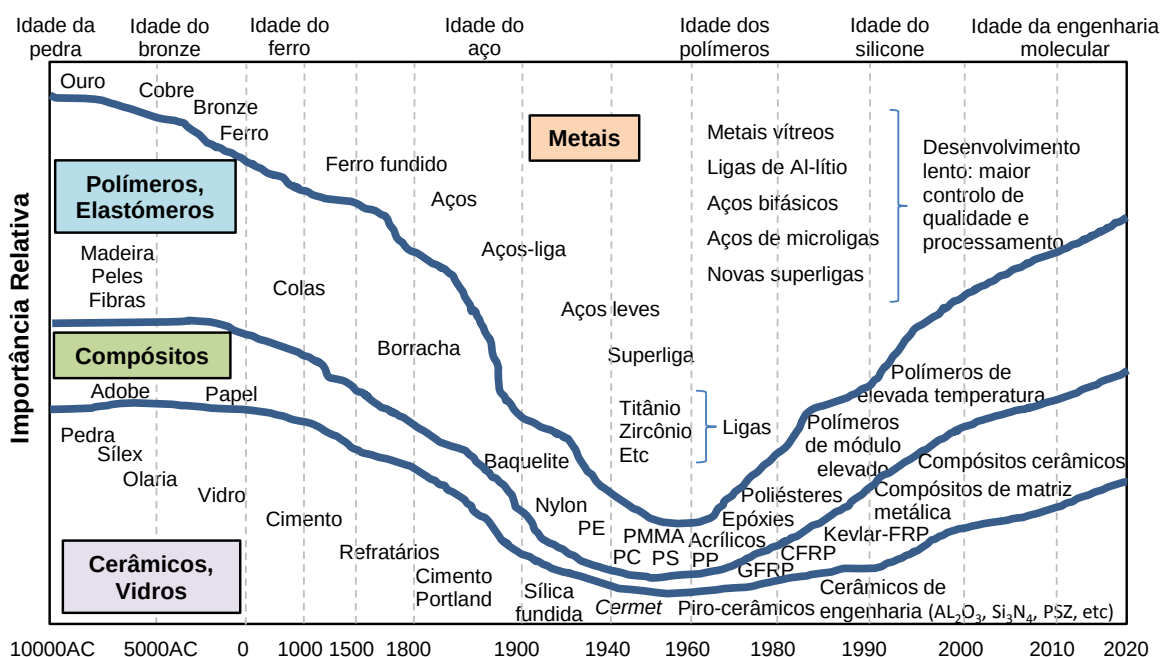


Figura 1.3 – Evolução dos materiais utilizados em engenharia, adaptado de Ashby (2010)

Contudo, foi o aço que permitiu criar estruturas mais resistentes e maiores, culminando em estruturas de cobertura de estádios, altamente complexas, a partir da década de 60. Foi também nessa fase que os materiais compósitos e poliméricos tiveram a sua maior queda. No entanto, a crescente preocupação ambiental motivou a sustentabilidade na construção, levando à (re) utilização dos materiais compósitos e poliméricos, invertendo essa tendência, até aos dias que correm. Aliás, o desenvolvimento dos materiais compósitos e poliméricos originou a diversificação do tipo de estruturas leves, desde estruturas com cabos e membranas a estruturas pneumáticas. Por conseguinte, as estruturas leves criaram uma dependência marcada no desenvolvimento de novos materiais e respetivos métodos de produção.

1.1.2. MÉTODOS DE DETERMINAÇÃO E OTIMIZAÇÃO DA FORMA ESTRUTURAL

As estruturas de cabos e membranas tensas criam formas estruturais únicas em tensão. Tais formas não são conhecidas, *a priori*, e não podem ser definidas por simples funções matemáticas, ao contrário da forma de outros sistemas estruturais convencionais, construídos em alvenaria, betão ou aço.

O processo de dimensionamento através do qual o projetista define a forma ótima de sistemas estruturais de forma ativa, é frequentemente denominado por determinação da forma. Este processo é, classicamente, considerado como um problema inverso da mecânica, uma vez que é procurada uma configuração de equilíbrio estático, tendo em conta o esforço pretendido para os elementos que compõem a estrutura. A análise estática acaba por estar incluída nesse conceito da determinação da forma estrutural, embora os esforços dos elementos sejam um resultado da análise, e não um dado do problema.

Alternativamente, o processo de determinação da forma pode ser visto como um caso particular de otimização estrutural, na medida em que a otimização é traduzida por uma ferramenta genérica matemática que permite resolver problemas inversos (Basso e Grosso 2011b; Bletzinger *et al.* 2010). Uma estrutura leve é definida pela utilização otimizada de material, de forma a transmitir em tensão as forças externas e o próprio pré-esforço. Consequentemente, um dos objetivos principais do procedimento de otimização estrutural aplicado às estruturas leves, será o de minimizar os esforços de flexão, ou o de minimizar a energia de deformação interna (Bletzinger e Ramm 2001).

Neste contexto, Bletzinger *et al.* (2005) consideram existir duas linhas de investigação na geração de formas estruturais - a “determinação da forma” e a “otimização estrutural”, sendo a primeira mais direcionada para estruturas tensas com cabos e membranas, enquanto a outra é mais genérica, englobando todo o tipo de sistemas estruturais.

Os métodos de determinação da forma subdividem-se em dois grupos. Um grupo tem a ver com a geração de formas em tração pura, segundo a analogia das películas de sabão, de certa forma relacionado com as superfícies minimais; o outro grupo tem a ver com os modelos suspensos, usados, amplamente, na geração de estruturas em compressão, por inversão de estruturas tensas. Neste segundo grupo incluem-se os modelos de correntes suspensas de Antoni Gaudí (ver a Figura 1.4) utilizados no projeto de estruturas em arco como, por exemplo, a Sagrada Família ou a igreja inacabada de Colónia Güell, ou os modelos de membranas suspensas de Heinz Isler (ver a Figura 1.5) utilizados no projeto de estruturas de cobertura de betão de casca fina como, por exemplo, a cobertura do oceanário da *Cidade das Ciências e das Artes* de Valência (ver a Figura 1.6), projetada por Félix Candela, Carlos Lázaro e Alberto Domingo. Nesta área notabilizaram-se ainda Eduardo Torroja, Anton Tedesko e Pier Luigi Nervi.



(a)



(b)

Figura 1.4 – Igreja inacabada de Colónia Güell: (a) Maquete e modelo polifuncional de correntes suspensas com sacos de areia realizado por Antoni Gaudí (*Pinterest* 1898) e (b) Pormenor dos sacos de areia (Foltinek 2011)

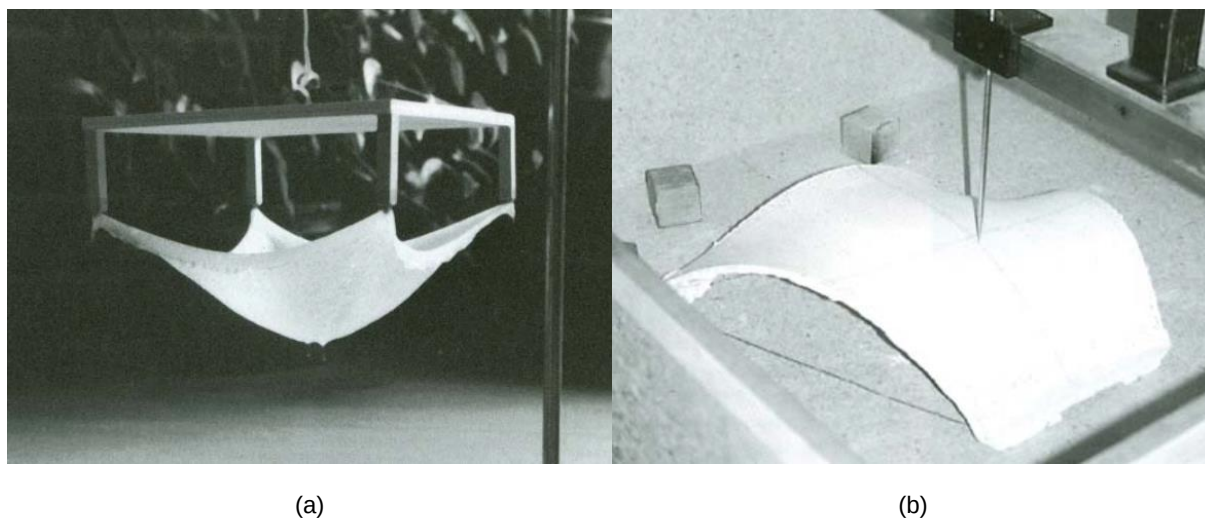


Figura 1.5 – Modelo de membrana suspensa de Heinz Isler (Chilton e Isler 2000): (a) Reforço da superfície de membrana invertida e (b) Medição da geometria resultante

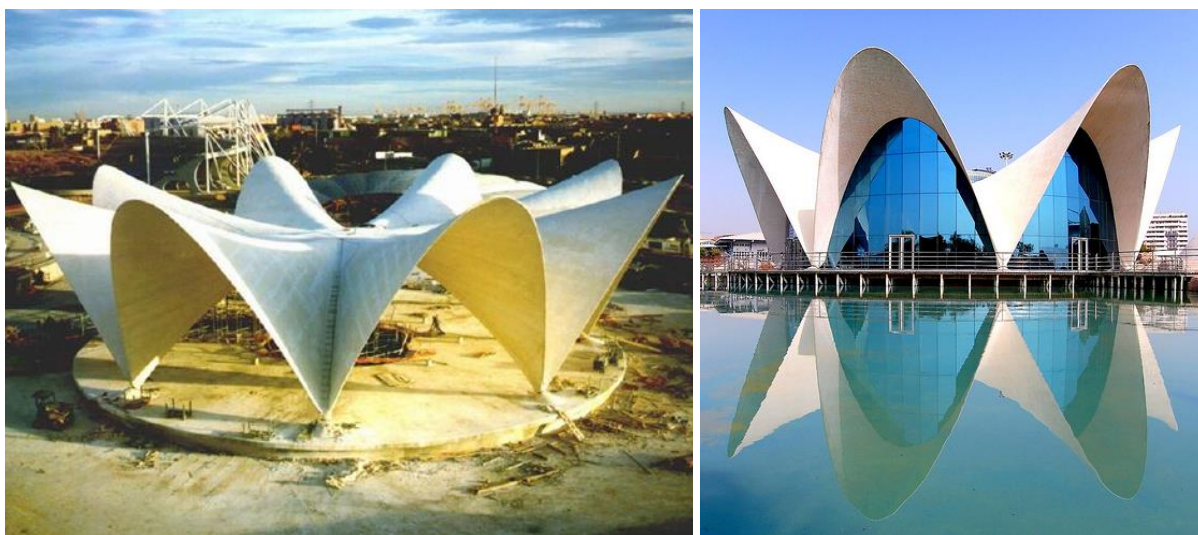


Figura 1.6 – Cobertura de casca fina do oceanário da Cidade das Ciências e das Artes de Valência (CMD Ingenieros 1999; Sopheakchan 2012)

Com o advento dos computadores a partir da década de 60, os modelos físicos foram sendo complementados por métodos numéricos. Distinguem-se essencialmente 4 grupos nos métodos numéricos: métodos de *matriz de rigidez*, de *rigidez geométrica*, de *equilíbrio dinâmico* e, finalmente, de *otimização estrutural evolucionária*. Os métodos dominantes são o *Método da Densidade de Força*; o *Método da Densidade de Tensão Superficial* e o *Método da Relaxação Dinâmica*.

1.1.3. AÇÃO E EFEITOS DO VENTO EM MEMBRANAS

As estruturas de cobertura formadas por cabos e membranas tensas são, geralmente, leves e mais flexíveis do que outras estruturas de cobertura convencionais (Buchholdt 1999), de betão ou de aço, apresentando, conseqüentemente, menor rigidez. Para além disso, estas estruturas possuem um elevado número de modos com frequências localizadas no intervalo de frequências associadas à ação do vento turbulento. Conseqüentemente, a análise da resposta dinâmica devida a forças decorrentes do vento turbulento constitui a principal condicionante no projeto destas estruturas.

A origem das vibrações resultantes de efeitos de rajada ou de fenómenos de *flutter* nas estruturas de cabos ou membranas, geralmente, está associada ao pré-esforço e / ou curvatura insuficientes. Até à data, não há conhecimento do colapso de coberturas devido, unicamente, a vibrações. Este facto não é consensual, pois houve, na realidade, alguns colapsos, embora tenham sido apontadas como principais causas a corrosão por fadiga (Buchholdt 1999).

A cobertura do estádio olímpico de *Montreal* no Canadá, construída em 1973, realizada inicialmente com uma membrana de fibra de aramido revestida a PVC suportada por um sistema de 26 cabos suspensos a partir de uma torre (Figura 1.7 (a)), ficou danificada por ação do vento e por ação da neve, em diferentes ocasiões. O dano foi caracterizado pelo rasgo da membrana na zona dos cones de ligação entre os cabos suspensos e a membrana (Figura 1.7 (b)), e na ligação dos bordos da membrana aos elementos metálicos da estrutura de suporte (Figuras 1.7 (c) e (d)) (Lazzari *et al.* 2002).



(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 1.7 – Cobertura do Estádio Olímpico de *Montreal*, Canadá: (a) Estrutura não danificada (Bostonmsbl 1987); (b) Rotura da membrana entre cones suspensos (Taylornoakes 1987); (c) Em linha com os elementos metálicos e (d) No bordo da membrana

A cobertura da estrutura pneumática do *Minnesota Metrodome, USA*, construída em 1982, cuja membrana é realizada em fibra de vidro revestida a *PTFE*, acabou por ceder por ação do vento em 2010 (ver a Figura 1.8). O mesmo tipo de dano ocorreu, em 2007, na estrutura pneumática do estádio de *Vancouver, Canadá* (ver a Figura 1.9), construída em 1983, embora tenha sido o efeito combinado da ação do vento com a ação da neve que desencadeou a rotura da membrana realizada em fibra de vidro revestida a *PTFE*.

A cobertura oval do estádio do *Gabba* construída em 2005, na Austrália, realizada a partir de uma estrutura metálica em consola dividida por 62 setores sobre os quais assenta uma membrana tensa, é outro exemplo de cobertura em membrana danificada, por ação do vento. Esse incidente ocorreu durante uma tempestade em 2008 que levou à rotura da membrana em dois setores da cobertura, como mostra a Figura 1.10, tendo sido identificados outros danos, quer ao nível das vigas de suporte da membrana (*The Courier* 2009), quer dos pilares que suportam a cobertura na zona afetada (*Brisbane Times* 2008), que poderiam comprometer seriamente a integridade estrutural da cobertura. Posteriormente, foi colocada uma membrana nova realizada em fibra de vidro revestida a *PTFE* pela empresa *Makmax* nos dois setores da cobertura danificados.

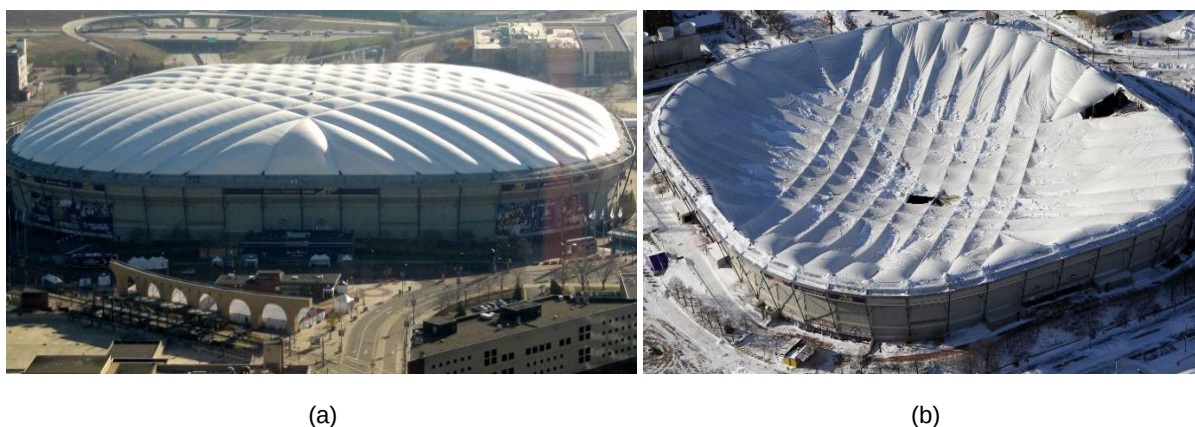


Figura 1.8 – Cobertura pneumática da estrutura *Metrodome, USA*: (a) Estrutura não danificada (*Cook & Sons' Baseball Adventures* 2010) e (b) Rotura da membrana (*Meteorology News* 2010)

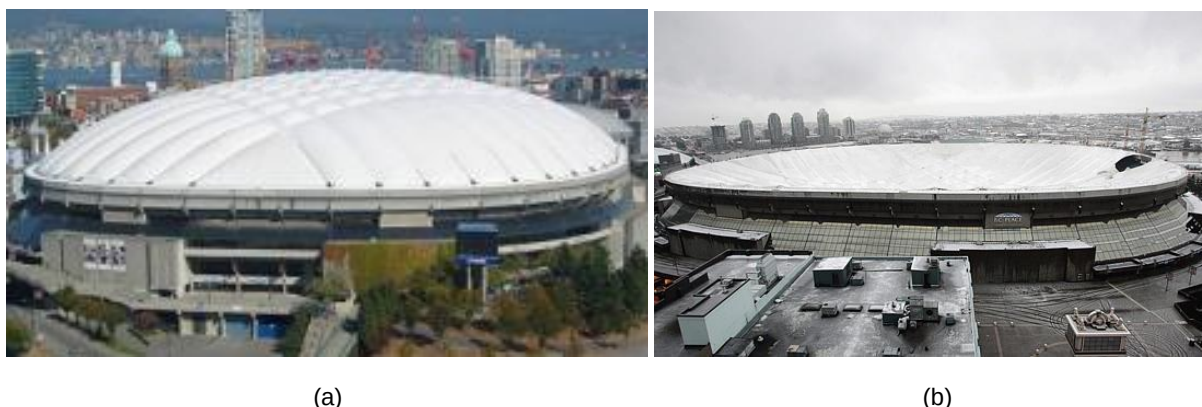


Figura 1.9 – Cobertura pneumática do Estádio de *Vancouver, Canadá*: (a) Estrutura não danificada (*In Retrospect* 2007) e (b) Rotura da membrana (*CTV News* 2008)



(a)



(b)

Figura 1.10 – Cobertura do Estádio Gabba, Austrália: (a) Estrutura não danificada identificando dois possíveis setores danificados (*Schedule* 2015) e (b) Rotura da membrana (*Brisbane Times* 2008; *The Courier* 2009)

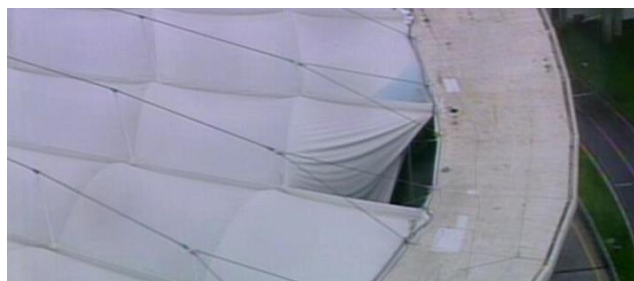
No entanto, as coberturas em membrana são, também, sensíveis a outros tipos de ações, nomeadamente, o fenómeno de empoçamento, que consiste na alteração das pendentes iniciais da membrana, devido a carregamento elevado tipicamente pela água, provocando deformações excessivas. Este fenómeno impede a drenagem da água da chuva e da neve derretida. Para além disso, a ação da neve quando combinada com a ação do vento origina uma ação global importante sobre a estrutura. A título de exemplo, este fenómeno terá estado na base da rotura da membrana de um setor da cobertura do Estádio Arena Fonte Nova (Figura 1.11 (a)), na sequência da acumulação de água na membrana na ligação com o anel periférico da cobertura (ver as Figuras 1.11 (b), (c) e (d)). Esta cobertura foi construída para o campeonato mundial de futebol 2014 no Brasil.



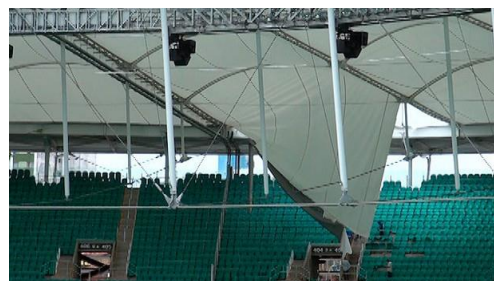
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 1.11 – Cobertura do Estádio Arena Fonte Nova, Brasil: (a) Estrutura não danificada identificando o possível setor danificado (Martifer 2014); (b) Empoçamento (*The Globe And Email* 2013) ; (c) Vista exterior da rotura da membrana (*Bahia Recôncavo* 2013) e (d) Vista interior da rotura (*Quatro Maiores* 2013)

Neste sentido, atendendo ao número cada vez maior de danos que têm ocorrido em estruturas de membrana tensa, e nalguns casos recentes, mesmo antes de inaugurar, é imperativo caracterizar adequadamente a forma e o comportamento estático destas estruturas, caracterizar a ação do vento sobre estas coberturas, identificar as principais instabilidades, e estudar formas de mitigação com vista à estabilidade de membranas. A análise dos efeitos do vento é importante, atendendo a que geralmente são necessárias análises dinâmicas no domínio do tempo, exigindo a geração de séries temporais de forças aerodinâmicas, geralmente com base na geração de amostras de processos estocásticos. Estas análises são por norma mais morosas neste tipo de estruturas dado que desenvolvem um comportamento não-linear geométrico. Para além disso, no caso particular das membranas, existe a agravante do comportamento dinâmico não estar ainda completamente caracterizado, surgindo na literatura vários estudos acerca da determinação da massa aerodinâmica e do amortecimento aerodinâmico que têm um papel preponderante na caracterização aerodinâmica durante a modelação aeroelástica da ação da componente turbulenta do vento.

1.2. OBJETIVOS E ORGANIZAÇÃO DA TESE

A perceção da utilização crescente das estruturas formadas por cabos e membranas tensas em coberturas de grandes vãos e a constatação da existência de uma assinalável distância entre o conhecimento científico e a prática de projeto em diversas questões ligadas à sua conceção e dimensionamento têm contribuído para que, também ao nível da Engenharia Civil Portuguesa, se tenha vindo a sentir um interesse cada vez maior no estudo destas estruturas.

O conhecimento alcançado nos domínios do comportamento estático e dinâmico de estruturas com cabos, da engenharia do Vento e da monitorização dinâmica de estruturas pelo grupo de investigação no seio do qual a presente investigação foi realizada, foi importante para o desenvolvimento deste trabalho que contribui para uma sólida fundamentação das hipóteses utilizadas no projeto, através da investigação do comportamento estrutural de estruturas de cabos e membranas tensas, com particular enfoque para a caracterização dos efeitos dinâmicos do vento nestas estruturas.

O presente trabalho reflete a investigação realizada neste domínio, sendo seu objetivo apresentar o estudo e desenvolvimento de metodologias de determinação da forma e analisar os efeitos do vento em estruturas de cabos e membranas tensas, tendo como exemplo duas estruturas: uma cobertura em membrana de um recinto polidesportivo e a vela de um barco.

Tendo em conta os aspetos referidos anteriormente, os principais objetivos desta tese são:

- Estudo, desenvolvimento, implementação e validação de metodologias de determinação da forma de estruturas de cabos e de membranas tensas, visando a sua aplicação prática no âmbito do projeto destas estruturas, respondendo a uma necessidade atual relacionada com o facto de estas estruturas apresentarem formas e sistemas cada vez mais complexos, contribuindo assim para a obtenção de modelos numéricos mais precisos e próximos da realidade;
- Estudo da influência das propriedades ortotrópicas do material de membrana e do pré-esforço no comportamento estático e dinâmico de estruturas de membrana através de modelação numérica;
- Caracterização do vento atmosférico e do escoamento em torno de coberturas, identificando as principais instabilidades aerodinâmicas e formas de mitigação com vista à estabilidade aerodinâmica de estruturas de membrana;

- Modelação numérica e análise dinâmica da ação turbulenta do vento nas estruturas de membrana tensa com base na geração de amostras de processos estocásticos e posterior análise no domínio do tempo.

O estudo e desenvolvimento de metodologias de determinação da forma e de análise dos efeitos do vento em estruturas de cabos e de membranas tensas contribuirão certamente para a sua disseminação e utilização mais frequente e, conseqüentemente, para um maior domínio destes assuntos, já que geralmente estão afetos a um número limitado de projetistas e gabinetes em todo o mundo e dispersos na literatura, assegurando desta forma um maior controlo sobre estas estruturas civis.

Mais especificamente, as principais contribuições do presente trabalho são as seguintes:

- Estado de arte de estruturas de membrana em vários aspetos, desde a conceção, o projeto e a construção, com enfoque no projeto em termos de caracterização estrutural (secções 2.8 e 2.9);
- Síntese dos principais métodos de determinação e otimização da forma dos sistemas estruturais de que são constituídas as estruturas leves, desde estruturas compostas unicamente por cabos, membranas com cabos, membranas, treliças com cabos e também estruturas do tipo *tensegrity* (secção 3.4);
- Implementação e validação dos métodos dominantes de determinação e otimização da forma estrutural de estruturas de cabos e de membranas identificados na literatura na atualidade, normalmente implementados em *softwares* de cálculo estrutural associados a gabinetes de projeto de renome internacional e conseqüentemente inacessíveis ao público geral, ou, quando disponíveis, em “caixa fechada”, nomeadamente o *Método da Densidade de Força (MDF)*, o *Método da Densidade de Tensão Superficial (MDTS)* e o *Método da Relaxação Dinâmica (MRD)* (secção 3.4);
- Desenvolvimento e validação de um algoritmo novo para a determinação da forma de cabos suspensos, com base no *Método da Densidade de Força*, em alternativa às expressões analíticas da catenária elástica (secção 3.4.3.2);
- Síntese da teoria que envolve a interação dinâmica aeroelástica vento-membrana, em termos de estabilidade e de caracterização da massa e amortecimento aerodinâmico (secções 4.3.3 e 4.5);
- Análise da influência das três metodologias de análise referidas anteriormente na determinação da forma de uma membrana tensa de uma cobertura localizada na ilha da Cartuxa, em Sevilha, averiguando as principais diferenças, vantagens e desvantagens, em termos da topologia estrutural que pode ser utilizada em cada um dos métodos e respetivas implicações / limitações nas análises numéricas subsequentes (secção 5.4);
- Estudo da influência das propriedades ortotrópicas do material de membrana e do pré-esforço no comportamento estático e dinâmico de uma estrutura de cobertura em membrana tensa na ilha da Cartuxa, em Sevilha, através da sua modelação numérica (secção 5.5);
- Análise dinâmica da ação turbulenta do vento com base na geração de amostras de processos estocásticos e posterior análise no domínio do tempo através de um modelo aeroelástico simplificado numa estrutura de cobertura em membrana tensa localizada na ilha da Cartuxa, Sevilha (secção 5.7);
- Desenvolvimento, implementação e validação numérica de uma metodologia, respetiva rotina, e sua integração num *software*, para a determinação da forma de velas em tempo real, tendo por base os dados obtidos continuamente através de um sistema de monitorização baseado em fibras óticas constituído por um número limitado de sensores de deformação (secções 6.2 e 6.3);
- Conceção de um modelo experimental constituído por sensores de Bragg, bem como do sistema de monitorização baseado em fibras óticas associado, tendo em vista a validação experimental da metodologia desenvolvida mencionada anteriormente (secções 6.4.2 e 6.4.3);

- Validação experimental da metodologia desenvolvida com base num sistema de monitorização baseado em análise de imagem (secção 6.4.4).

O trabalho que neste contexto se apresenta está organizado em 7 capítulos, relacionados de acordo com a Figura 1.12. A descrição do conteúdo de cada capítulo é apresentada nos parágrafos seguintes.

O **capítulo 1** introduz a tese e contextualiza a investigação desenvolvida, apresentando os objetivos e as principais contribuições do trabalho, bem como a descrição da organização da tese.

O **capítulo 2** é dedicado ao estado de arte de estruturas de membrana tensa, sendo iniciado com uma descrição dos diferentes tipos estruturais associados às coberturas de cabos e membranas tensas, caracterizando os materiais e elementos de ligação, e sistematizando os principais conceitos relacionados com o dimensionamento destas estruturas especiais, nomeadamente em relação à abordagem de dimensionamento com base em tensões admissíveis, e não através de “estados limites”.

De seguida, no **capítulo 3** passa-se à sistematização dos métodos de determinação e otimização da forma estrutural, dada a necessidade de definir a geometria inicial adequadamente, não só devido aos aspetos arquitetónicos, mas também estruturais. Por um lado, a definição adequada da geometria permite quantificar os coeficientes de pressão originados pela ação do vento de uma forma mais precisa, e garantir declives apropriados, evitando fenómenos de empoçamento. Para além dos aspetos arquitetónicos mencionados, o processo de determinação da forma conjuga os aspetos estruturais, dado que, nesta fase, é definido o pré-esforço dos cabos e das membranas. Aliás, a forma e os esforços internos estão intrinsecamente ligados, e assumem um papel preponderante no funcionamento da estrutura, dado que a sua rigidez dependerá significativamente da curvatura da membrana e do pré-esforço. É de salientar que a minoração destes fatores levou, no passado, à ocorrência de problemas relacionados com efeitos da ação do vento, implicando, por conseguinte, o reforço estrutural (Buchholdt 1999). Assim sendo, descreve-se a formulação que fundamenta os vários programas de cálculo automático desenvolvidos com base nesses métodos e referem-se alguns exemplos simples que, mediante o recurso a simulações numéricas, permitiram avaliar a aplicabilidade e eficiência desses programas.

O **capítulo 4** é dedicado ao estudo da ação e dos efeitos do vento sobre estruturas de membrana. Primeiramente, é caracterizado o vento atmosférico e o escoamento em torno de coberturas, sintetizando-se as principais instabilidades aerodinâmicas e formas de mitigação com vista à sua estabilidade aerodinâmica, sendo adicionalmente sistematizados os coeficientes de pressão de estruturas de membrana correntes, desde simples estruturas cónicas a coberturas de estádios. São também abordadas formas experimentais de caracterização dos efeitos do vento, à escala reduzida e à escala real, apesar do seu recurso ter propósitos distintos. Finalmente, são abordadas as simulações numéricas dos efeitos do vento mais comuns em estruturas de cabos e membranas. Essencialmente, existem duas vias distintas de análise dos efeitos turbulentos do vento, uma a partir de uma análise dinâmica no domínio da frequência e outra no domínio do tempo. A maior simplicidade da primeira técnica leva à sua utilização preferencial pelos projetistas, embora os princípios em que se baseia a sua utilização possam ser colocados em causa, dado que utilizam métodos lineares, que contrastam com o comportamento destas estruturas, geralmente, não-linear. No entanto, essa lacuna é preenchida através do estudo no domínio do tempo, apesar do processo ser mais moroso, dada a necessidade de gerar séries temporais da velocidade do vento, geralmente com base na geração de amostras de processos estocásticos, e de determinar a resposta estrutural. No entanto, o comportamento dinâmico das estruturas de membrana ainda não está devidamente caracterizado, pelo que são sistematizados vários estudos acerca da determinação da massa aerodinâmica e do amortecimento aerodinâmico que têm um

papel preponderante na devida caracterização aerodinâmica durante a modelação aeroelástica da ação da componente turbulenta do vento.

De seguida, no **capítulo 5**, é apresentada uma estrutura de cobertura em membrana de um recinto polidesportivo, no centro de alto rendimento da ilha da *Cartuja*, em Sevilha, projetada por Félix Escrig e José Sánchez, que constitui o caso de estudo do trabalho de doutoramento, e onde se aplicam as metodologias disponíveis, desde a fase de determinação da forma da membrana tensa, até à caracterização dos efeitos do vento. Adicionalmente são realizados estudos da influência das propriedades ortotrópicas e do pré-esforço no comportamento estático e dinâmico desta estrutura, e um segundo estudo no sentido de averiguar o grau do erro associado à consideração de um modelo constitutivo ortotrópico linear em detrimento do seu comportamento real, através da simulação numérica do ensaio de tração biaxial, tendo sido determinadas as propriedades do material a utilizar nas análises seguintes dos efeitos do vento. A caracterização dos efeitos do vento é realizada através de análises não-lineares dinâmicas no domínio do tempo, utilizando um modelo aeroelástico simplificado considerando amortecimento e massa aerodinâmica, e com base em forças aerodinâmicas determinadas com base na geração de amostras de processos estocásticos. São quantificados os coeficientes de amplificação dinâmica da ação comparando a resposta obtida com a resultante da aplicação da ação quase-estática do vento preconizada no *Eurocódigo 1*.

No seguimento dos estudos sobre a determinação da forma de membranas, foi solicitado pela empresa *FIBERSAIL* o desenvolvimento de uma metodologia para a determinação da forma da vela de um barco em tempo real. O **capítulo 6** apresenta a metodologia desenvolvida para a determinação da forma de uma membrana induzida pela ação do vento com base em medições à escala real, no âmbito dessa solicitação. A aplicação desenvolvida inclui um sistema de medida que permite caracterizar, em tempo real, a forma da vela num veleiro, possibilitando a otimização do desempenho da embarcação, em tempo real. Este sistema baseia-se na instrumentação da vela com extensómetros óticos e na reconstituição automática da deformada.

O **capítulo 7** sistematiza as conclusões da tese.

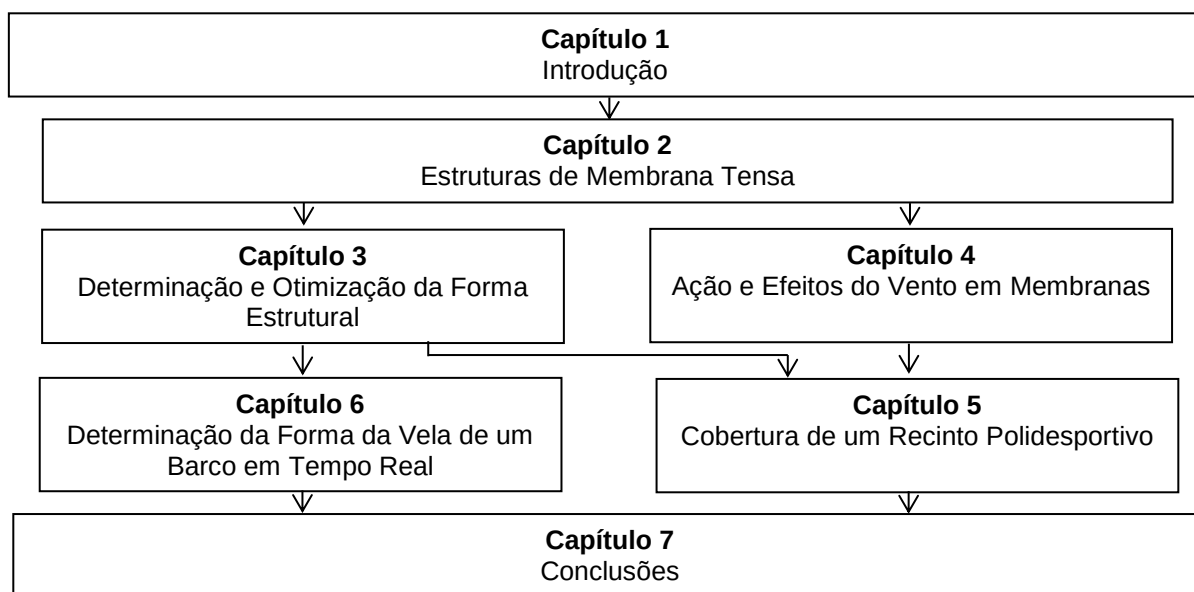


Figura 1.12 – Organização da tese de doutoramento

2

**ESTRUTURAS DE MEMBRANA
TENSA****2.1. GERAL**

As estruturas formadas por cabos e membranas tensas surgem na década de 50 e marcam forte presença e evolução no panorama atual da engenharia. A transposição dos conceitos associados à suspensão de tabuleiros de pontes para estruturas de cobertura originou a aplicação de sistemas formados inicialmente por cabos simples, evoluindo para grelhas de cabos e, posteriormente, para membranas tensas. Características únicas, como o reduzido peso, a rapidez de construção e a possibilidade de vencer grandes vãos com um número reduzido de apoios, estão na origem de uma autonomização dos sistemas estruturais usados em coberturas e da evolução para sistemas inovadores de formas orgânicas, particularmente marcada por Frei Otto (1962). Mas, claramente, foi o incremento do poder computacional que permitiu e estimulou o desenvolvimento de métodos numéricos de análise estrutural, tornando possível a diversificação das aplicações a partir da década de 90 (Topping e Ivanyi 2007).

O conceito simples associado à criação de estruturas suspensas por um conjunto de cabos tensos esconde, na realidade, uma grande complexidade de comportamento. Com efeito, o exclusivo funcionamento dos cabos em tração, e das membranas em tração e corte, resulta numa grande flexibilidade transversal e, conseqüentemente, num comportamento não-linear geométrico acentuado. Deste modo, a configuração deformada cria uma clara dependência das ações incidentes (Broughton e Ndumbaro 1994). Este aspeto condiciona, portanto, o dimensionamento destas estruturas e condiciona, igualmente, o processo construtivo.

O conhecimento dos materiais e ligações que tornam possível a realização de estruturas tão complexas é importante, devido à flexibilidade e comportamento altamente não-linear das mesmas, sendo suscetíveis a pequenas variações nas propriedades materiais. A sustentabilidade na construção é uma preocupação nos dias que correm, e a utilização de materiais mais ecológicos e a rapidez de construção tornam as soluções de membrana bastante apelativas e competitivas, o que realça a sua importância. A sua utilização crescente tem inclusivamente suscitado o interesse por parte de diversas empresas em associar sistemas de aproveitamento solar utilizando células fotovoltaicas (Correia 2013).

Dado o reduzido peso próprio das estruturas de cobertura formadas por cabos e membranas tensas, as ações de serviço representam uma fração importante das ações totais aplicadas. Assim, será da sua adequada quantificação que resultará uma estrutura devidamente otimizada em termos de consumo de materiais e eficiência de funcionamento. Este aspeto torna-se particularmente importante no que respeita à quantificação das ações devidas ao vento. Com efeito, não só se torna complexa a tarefa de

quantificar coeficientes de pressão, em estruturas de formas muito diversas, como os efeitos aeroelásticos (Simiu e Scanlan 1996), resultantes da interação da estrutura de cobertura com o vento, se tornam potencialmente mais importantes, em consequência da grande deformabilidade estrutural. Os baixos níveis de amortecimento associados às estruturas de cabos tornam-nas suscetíveis a vibrações (Caetano 2007). Buchholdt (1999) refere que as vibrações devido aos efeitos de rajada ou de fenômenos de *flutter*, são geralmente originadas por baixos níveis de pré-esforço e / ou formas estruturais pouco otimizadas. Por fim, a acentuada não-linearidade geométrica e material associada ao comportamento dos cabos e das membranas tornam questionável a utilização de uma filosofia de dimensionamento baseada em estados limites.

As técnicas sofisticadas de projeto e tecnologias de construção não tradicionais, por serem utilizados vãos elevados e com poucos apoios, levam as estruturas leves a serem consideradas especiais, sendo o conhecimento de projeto e construtivo afeto a um número limitado de especialistas e fabricantes, em todo o mundo.

2.2. FORMA

2.2.1. GERAL

As estruturas em membrana podem variar entre as simples tendas até estruturas de maior responsabilidade, como estádios. A versatilidade na forma e características únicas são evidentes. Deste modo, conhecem um número ilimitado de formas, embora se distingam dois tipos: *forma anticlástica*, com dupla curvatura, entrando em equilíbrio com a atuação de pré-esforço no plano da membrana (ver as Figuras 2.1 (a) a (d)) e *forma sinclástica*, ou esférica, com curvatura primária, entrando em equilíbrio através de pressão pneumática ou hidráulica, atuando perpendicularmente à estrutura (ver as Figuras 2.1 (e) e (f)).

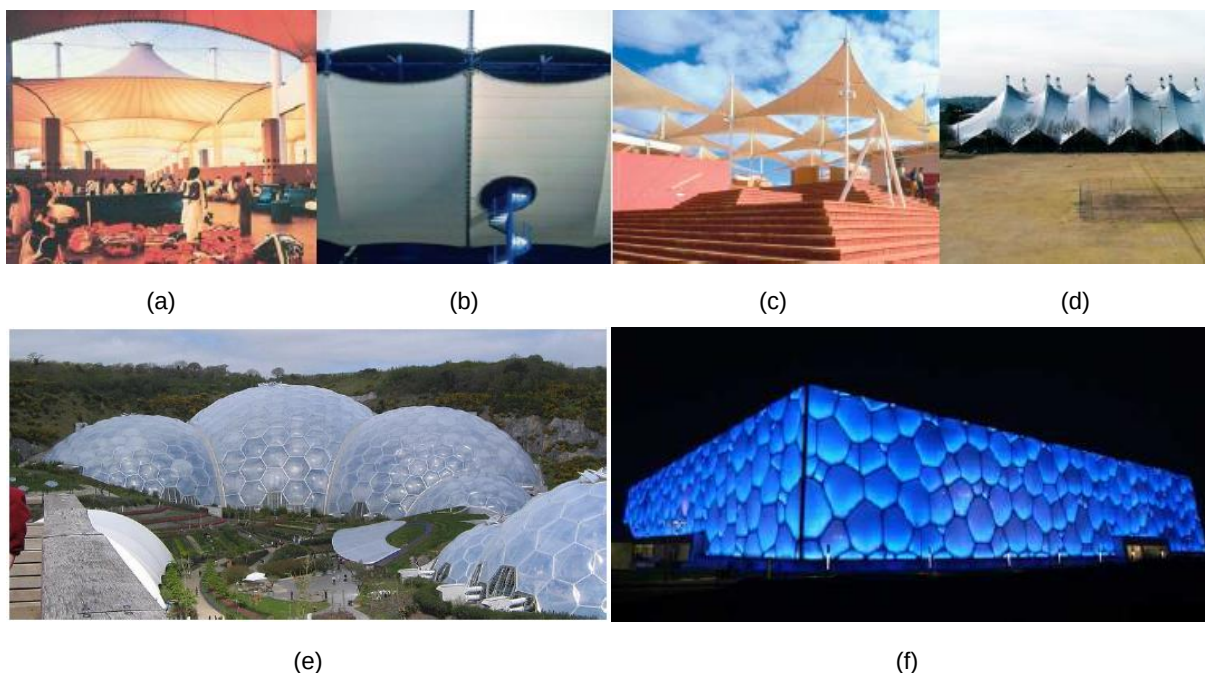


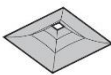
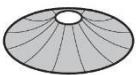
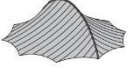
Figura 2.1 – *Forma anticlástica* (Forster e Mollaert 2004): (a) Cone; (b) Sela; (c) Paraboloide hiperbólico e (d) Cume-vale. *Forma sinclástica*: (e) Projeto Éden, Reino Unido (Bagarai 2010) e (f) Centro Aquático Nacional, China (GE Reports Brasil 2011)

2.2.2. ESTRUTURAS DE SUPORTE DE MEMBRANA

A combinação das principais formas identificadas em estruturas de membrana descritas anteriormente com os elementos de suporte permite criar tipologias estruturais muito diversas (ver a Tabela 2.1). A superfície de membrana precisa de ser apoiada e pré-esforçada ao longo dos seus bordos. O sistema de suporte tem de ser suficientemente resistente para suportar as forças de reação da membrana tensa, resultantes do pré-esforço e das ações externas. A estrutura de suporte da membrana pode ser curva ou retilínea, flexível ou rígida, dependendo do projeto. No entanto, a forma e a disposição dos suportes dos bordos da membrana influenciarão significativamente o tipo e o nível de forças atuando sobre estes.

As componentes estruturais do sistema de suporte de estruturas de membrana tensa, desde bordos reforçados a pormenores de esquina, bem como arcos, vigas, mastros e cabos, devem ser escolhidos e dimensionados seguindo os princípios das configurações minimais, simples e de elevada eficiência. Para além disso, tal como a membrana encontra e mostra a sua forma natural sob tensão, os restantes elementos estruturais deverão mostrar claramente a sua função estrutural.

Tabela 2.1 – Tipologia das estruturas de acordo com a forma e suporte, adaptado de Seidel (2009)

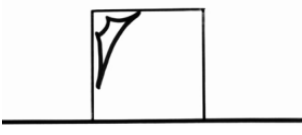
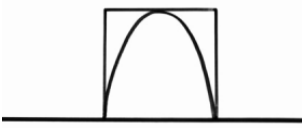
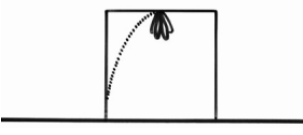
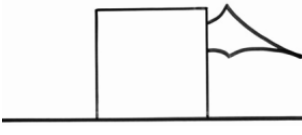
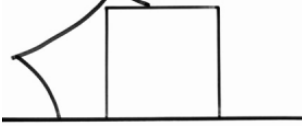
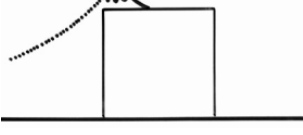
Suportada em pontos	Estruturas de ponto elevado			
	Estruturas em vale			
	Pontos alternados			
Suportada ao longo de linhas				
				
	Estruturas em arco			
				
				
Suportada por ar	Estruturas pneumáticas elementares			
	Estruturas pneumáticas amplas			
	Meias estruturas			

2.2.3. CLASSIFICAÇÃO DE ESTRUTURAS DE MEMBRANA

As estruturas em membrana tensa marcam presença num vasto conjunto de edifícios, com variados fins (Mendonça 1997; Moreira 2008), adquirindo uma classificação de acordo com diferentes aspetos, tais como, a função da construção, a função específica da tela (transmissão de luz, proteção solar, ou chuva, entre outros), o vão, a conversibilidade e a vida útil.

Na Tabela 2.2 é apresentada a classificação de estruturas em membrana tensa, com base na tipologia estrutural, adaptada de Forster e Mollaert (2004). Na grande generalidade, as estruturas em membrana pertencem à categoria aberta, oferecendo proteção às condições atmosféricas. Em simultâneo, estas estruturas preservam a sensação de um espaço aberto. Por seu turno, nas estruturas fechadas, a envolvente exterior oferece proteção contra as condições atmosféricas adversas (vento, chuva ou sol intenso), isolando um determinado espaço, em simultâneo. Por fim, as estruturas conversíveis são construídas de maneira a que a sua forma possa ser alterada com a frequência necessária, num curto espaço de tempo.

Tabela 2.2 – Classificação das estruturas em membrana tensa, adaptado de Forster e Mollaert (2004)

	Aberta	Fechada	Conversível
Envolvente			
Interior			
Acoplada			

2.3. PROPRIEDADES DOS MATERIAIS E ENSAIOS

As estruturas em membrana são constituídas por cabos e por uma membrana, de uma forma geral. Dada a simplicidade destes materiais, que permite criar formas únicas em tensão, é imprescindível conhecer as propriedades e o comportamento, por forma a manter resistência, rigidez e estabilidade estrutural.

A escolha do material depende da forma da estrutura, da vida útil expectável, do comportamento estático e dinâmico e de questões relacionadas com a segurança e manutenção. Os vários elementos de membrana, ligados entre si apropriadamente, permitem a transferência de carga exclusivamente através de tração. Para tal, estes elementos necessitam de curvatura e de serem ancorados de uma forma adequada.

Os materiais mais utilizados nas membranas das estruturas leves consistem geralmente em tecidos revestidos com uma resina polimérica. Estes tecidos são também denominados têxteis técnicos (ver a

Figura 2.2 (a)). Mais recentemente têm vindo também a ser utilizados os plásticos técnicos, ou películas extrudidas (ver a Figura 2.2 (b)).

Estes materiais requerem resistência estrutural e resistência ao meio ambiente. Essa resistência é garantida maioritariamente pelos fios da sua constituição. Como elemento estrutural, os tecidos têm de ser resistentes, para criar um vão entre elementos de suporte, encaminhar forças devidas ao vento e à neve, serem seguros para caminhar sobre eles e têm de ser pré-esforçados pois não resistem à flexão. Por outro lado, o material tem de satisfazer os requisitos que afetam o ambiente interior, como escassez do ar, proteção da água, resistência ao fogo, isolamento do calor, transmissão da luz, propriedades acústicas, manutenção e durabilidade.

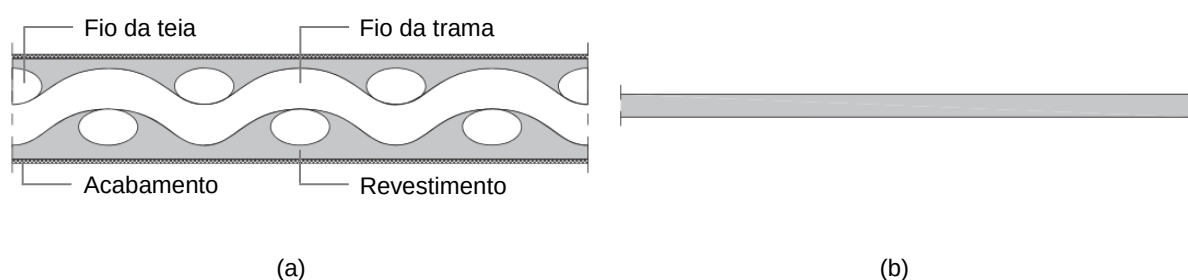


Figura 2.2 – Secções de membranas, adaptado de Seidel (2009): (a) Têxteis técnicos e (b) Plásticos técnicos

2.3.1. CARACTERÍSTICAS DOS TÊXTEIS TÉCNICOS

2.3.1.1. Fibras e fios

Os elementos básicos dos têxteis técnicos são as fibras ou fios, e a maioria apresenta um comportamento não-linear, fadiga sob as ações e propriedades mecânicas viscoelásticas.

Os fios baseiam-se num determinado número de filamentos de comprimento infinito de pequeno diâmetro, entre 3 e 25 micrómetros. Dois fios, ou mais, podem ser associados por torção de modo a obter um fio de maior resistência. Estes fios são obtidos por extrusão de fiação através da fusão de materiais como o vidro e o poliéster ou de uma solução como a aramida.

A definição básica dos fios consiste no número de filamentos elementares; na densidade linear em unidades *tex* (g/km) ou *dtex*; diâmetro dos filamentos; número de torções por metro e acabamento. As propriedades gerais dos fios mais utilizados nos têxteis técnicos estão sistematizadas na Tabela 2.3.

Tabela 2.3 – Propriedades gerais dos fios dos têxteis técnicos, adaptado de Bridgens (2005)

Propriedade	Fibra de poliéster	Fibra de vidro	Fibra de aramida Kevlar	Fibra de PTFE
Módulo de Young (GPa)	3,5-15	72-77	130-150	0,7-4
Resistência à tração (GPa)	0,4-0,8	3,4-3,7	Até 2,7	0,16-0,38
Deformação de rotura (%)	25-50	3,3-4,8	2-4	13-32

Um fio de poliéster de elevada tenacidade é composto por cerca de 200 filamentos elementares, sendo caracterizado por uma resistência à tração de pelo menos $0,7N/tex$. A Figura 2.3 apresenta a curva de força-deformação de fibras de poliéster, sendo caracterizada por 3 regiões, correlacionadas com o comportamento da estrutura da cadeia do polímero à medida que é solicitada. A curva é não-linear, apresentando inicialmente, na região I, um módulo de elasticidade superior. Na região II o módulo de elasticidade decresce devido a uma maior ductilidade dos fios. Na região III os fios tornam-se mais resistentes.

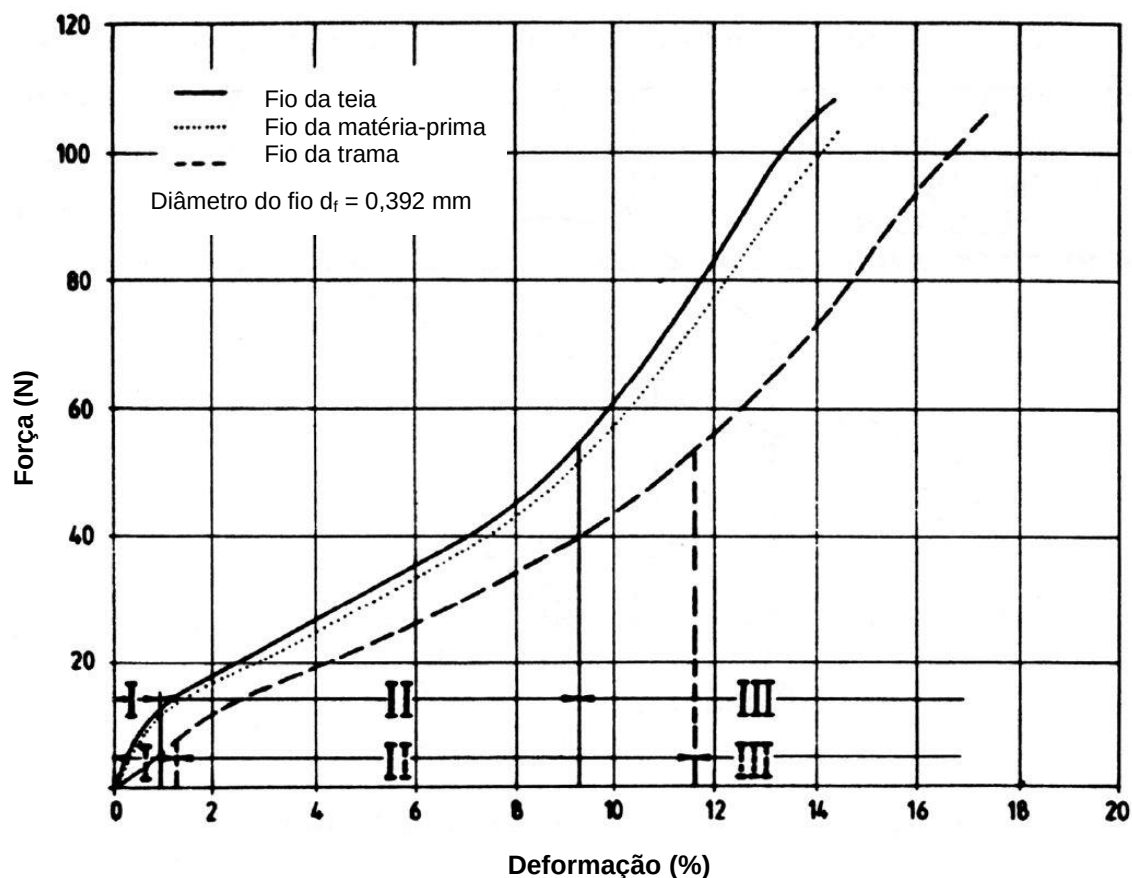


Figura 2.3 – Curva força-deformação de fios de poliéster, adaptado de Forster e Mollaert (2004)

Os fios de vidro estão disponíveis em diâmetros entre 3 e 11 micrómetros. A resistência do fio é dependente do respetivo diâmetro. As fibras de vidro também têm um comportamento não linear. A sua resistência e módulo de elasticidade variam num determinado intervalo. No entanto, as fibras de vidro são fundamentalmente diferentes das fibras de poliéster em termos da microestrutura e consequentemente em termos da resposta tensão-deformação: as fibras de vidro apresentam uma resposta de força-deformação aproximadamente linear (ver a Figura 2.4), ao contrário das fibras de poliéster que têm um comportamento marcadamente não-linear (ver a Figura 2.3).

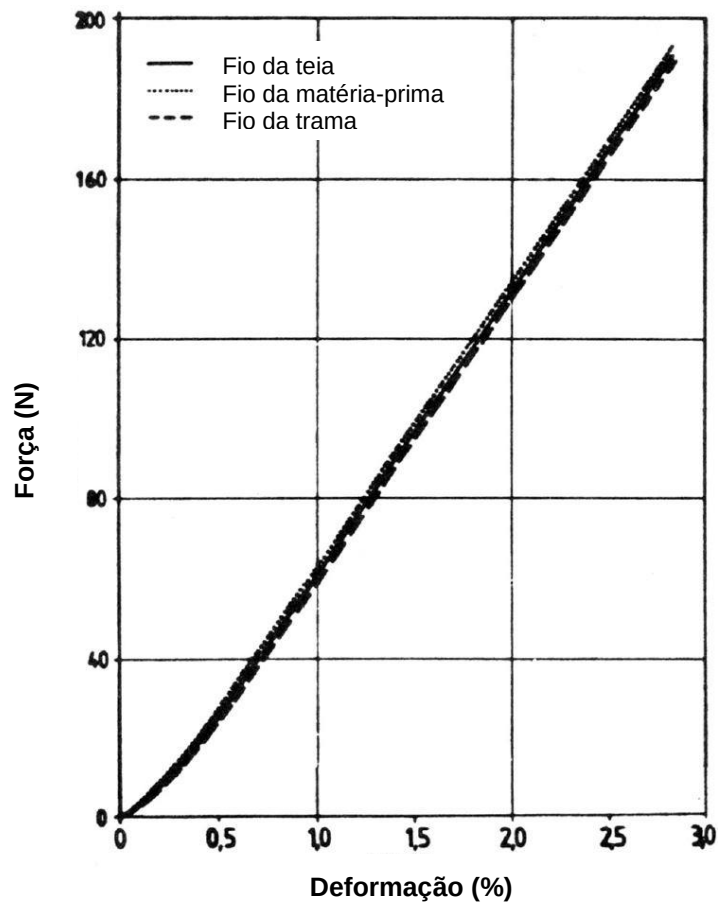


Figura 2.4 – Curva força-deformação de fios de vidro, adaptado de Forster e Mollaert (2004)

2.3.1.2. Tecidos de base

A fiação dos tecidos técnicos é efetuada em duas direções: a teia e a trama. Nesse processo, os fios da teia são mantidos retos e os fios da trama passam, alternadamente, por cima e por baixo dos primeiros (ver a Figura 2.2 (a)). No final deste processo, os fios da teia são soltos e ondulam, juntamente, com os fios da trama. Os principais padrões de fiação em estruturas de membrana são a simples e a dupla, respetivamente de acordo com as Figuras 2.5 (a) e (b). A ondulação mencionada é menor na fiação dupla.

Porém, a geometria final dos fios é diferente, ficando mais ondulados na direção da trama e mais retos na direção da teia. Deste modo, quando o tecido é solicitado nas direções de fabrico, o comportamento é distinto, em resultado da interação de contacto entre os fios das duas direções. Uma força aplicada na direção da teia (ver Figura 2.6) origina uma deformação reduzida, em consequência dos fios estarem mais retos. Por seu turno, a mesma força aplicada na direção da trama, originará uma deformação superior (ver Figura 2.6), dado que os fios estão mais ondulados, isto é, com maior tolerância para alongarem.

Em primeira análise, os tecidos técnicos são marcados por propriedades anisotrópicas, em consequência de uma resposta diferente à mesma solicitação em direções distintas. Mais, estas propriedades são anisotrópicas ortogonais, ou ortotrópicas, dada a resposta “preferencial” do tecido

nas direções de fabrico. Em segunda análise, os tecidos são caracterizados por menor rigidez e menor módulo de elasticidade na direção da trama, ao contrário da direção da teia. Por fim, e em última análise, o comportamento elástico do material é não-linear, não existindo qualquer relação linear entre a carga aplicada e as deformações experimentadas ao longo do tempo (ver a Figura 2.6). Por consequência, a lei de Hooke não pode ser utilizada na definição do comportamento elástico do material, sendo substituída por modelos matemáticos (Pargana *et al.* 2007; Bridgens e Gosling 2004a; Coelho *et al.* 2013).

Ainda neste contexto, é possível recorrer a ensaios uniaxiais e biaxiais para definir estas propriedades (Galliot e Luchsinger 2011b; Bridgens e Gosling 2002; Bridgens *et al.* 2004a, 2004b; Bridgens e Gosling 2004b) e ajustar modelos de elementos finitos (Galliot e Luchsinger 2009), como será referido na secção 2.3.1.4.

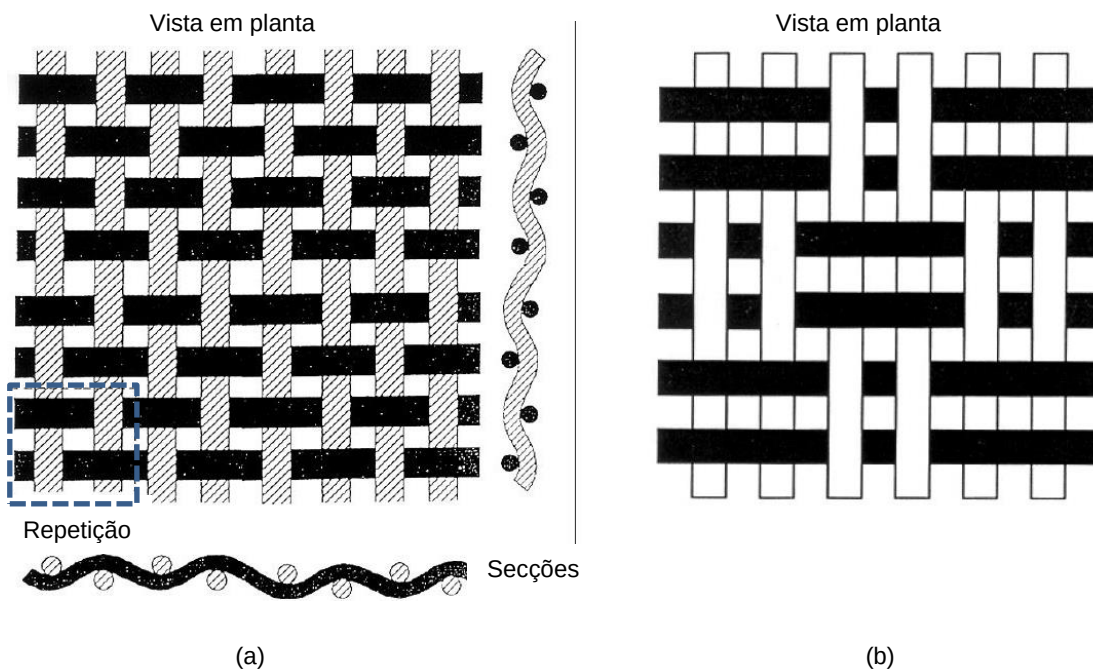


Figura 2.5 – Padrões de fiação dos tecidos de base, adaptado de Forster e Mollaert (2004): (a) Fiação simples e (b) Fiação dupla

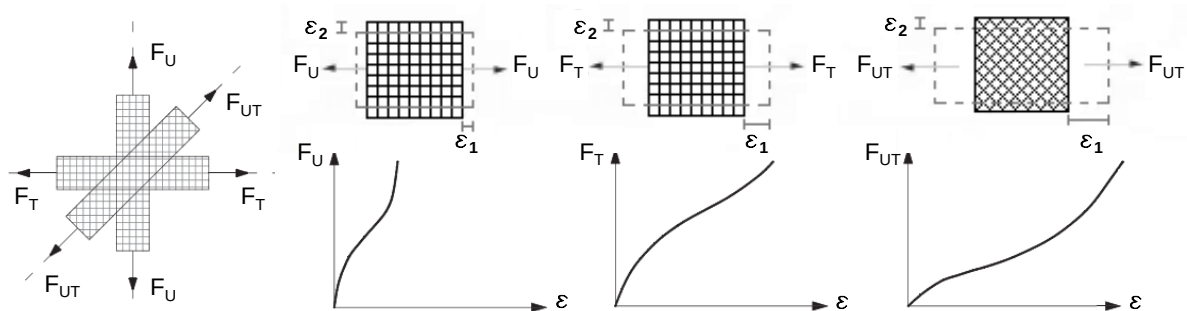


Figura 2.6 – Comportamento do tecido dependendo da orientação das faixas de fiação (teia U e trama T), adaptado de Seidel (2009)

2.3.1.3. Revestimento

A proteção do tecido de base é levada a cabo por aplicação de uma resina de revestimento em forma de pasta. Os revestimentos apresentam formulações específicas consoante a sua função. O revestimento pode ter uma função de melhoramento de determinadas características do têxtil técnico, tais como a retardamento ao fogo e resistência fúngica. O revestimento é caracterizado pelo seu peso (g/m^2) e espessura. Os principais revestimentos são o policloreto de vinil (PVC), o politetrafluoretileno (PTFE) e o silicone. As propriedades gerais dos revestimentos mais utilizados nos têxteis técnicos estão sistematizadas na Tabela 2.4.

Tabela 2.4 – Propriedades gerais dos revestimentos dos têxteis técnicos, adaptado de Bridgens (2005)

Propriedade	PVC	PTFE
Módulo de Young (GPa)	1-3,5	0,41
Resistência à tração (GPa)	0,010-0,025	0,025-0,036
Deformação de rotura (%)	170-400	350-550

Nos têxteis técnicos destacam-se o poliéster revestido a PVC e as fibras de vidro, ou aramida, revestidas a PTFE, ou silicone.

O revestimento tem de ser realizado com especial cuidado. A membrana danifica com o tempo, devido à agressividade do meio exterior, e o efeito da água passando permanentemente numa zona danificada intensifica o dano. Para além dos agentes exteriores, como a temperatura ou a luz, a membrana está sujeita a ataques de microrganismos e de químicos.

O PTFE é um material inerte quimicamente. Logo, toda a sujidade é extraída com água sem danificar o revestimento. Este revestimento tem boa capacidade antiadesiva, prevenindo depósitos na sua superfície; é resistente à abrasão e altamente refletivo, absorvendo pouca luz e calor; tem menor rigidez, mas é um plástico muito forte; pode estar sujeito a temperaturas entre $-270^{\circ}C$ e $300^{\circ}C$.

As fibras de vidro são resistentes aos raios UV, mas se o revestimento de PTFE estiver danificado, constitui um problema devido à perda de rigidez implícita das fibras. Devido ao processo de revestimento das fibras de vidro com PTFE, cria-se uma cor clara acastanhada devido ao amarelecimento de algumas partes do revestimento, resultante da baixa capacidade de fluidez depois de fundir o PTFE. No entanto, quando este material é aplicado *in situ*, e exposto às radiações UV, torna-se branco passados alguns meses. De uma forma geral, as fibras de vidro revestidas a PTFE são dispendiosas, frágeis e pouco elásticas. Todavia, são estáveis e resistentes à tração, ao corte, à temperatura e à perfuração.

Uma desvantagem da fibra de vidro revestida a PTFE reside no facto de ser suscetível ao dobramento, o que implica requisitos especiais na pormenorização dos bordos. Desta forma, a preparação para a elevação (empacotamento e transporte) requer medidas especiais para não ocorrerem fissuras no mesmo, que levam mais tarde ao rasgamento. Compreende-se assim que esta não é a melhor solução para estruturas temporárias e conversíveis. Para além disso, dado que este têxtil técnico é rígido em comparação com os outros, torna-se difícil de o manejar e de o colocar em obra. Aliás, para não ser danificado durante essa operação, só pode ser colocado com temperaturas acima de $5^{\circ}C$.

No entanto, se o revestimento for o silicone, raramente utilizado, é conferida maior flexibilidade e translucidez, apesar de exigir manutenção de limpeza anual, dado que atrai a sujidade, ao contrário do

PTFE. Este revestimento preenche os requisitos de resistência e apresenta um bom comportamento ao rasgamento; é resistente a ataques químicos; pode ser usado com temperaturas entre -60°C e 180°C ; é resistente aos raios *UV*; não se tornam frágeis e podem ser coloridos.

Por sua vez, o tecido constituído por *Kevlar* tem uma resistência à tração mais elevada, maior rigidez e menor peso, possibilitando vãos superiores. No entanto, este tecido é suscetível à radiação ultravioleta e não pode ser revestido com resinas translúcidas, mas sim com um revestimento escuro composto por carbono.

Atualmente existe um elevado número de têxteis técnicos produzidos pelos fabricantes de membranas apresentando diferentes escalas de resistência. Com efeito, no caso de fibras de poliéster revestidas a *PVC*, o grupo de trabalho de arquitetura têxtil de *Messe Frankfurt* (Architecture 2002) e o manual de dimensionamento francês (SEBTP 2009) propuseram uma classificação em 5 categorias distintas consoante as principais características de acordo com a Tabela 2.5. Os principais parâmetros para classificar os materiais são a resistência e a composição dos têxteis técnicos. Porém, no caso das fibras de vidro revestidas a *PTFE*, a classificação é realizada de forma diferente em 7 categorias distintas, de acordo com a Tabela 2.6.

A Tabela 2.7 apresenta as propriedades genéricas de diferentes têxteis técnicos utilizados em estruturas de membrana para efeitos de comparação. Embora o poliéster revestido a *PVC* seja o material mais utilizado, cada tipo de material tem as suas vantagens e desvantagens, que deverão ser consideradas consoante os requisitos e o orçamento de cada projeto.

Tabela 2.5 – Classificação de têxteis técnicos em poliéster / *PVC*, adaptado de Forster e Mollaert (2004)

Parâmetro	Manual	1	2	3	4	5
Peso (g/m^2)	(SEBTP 2009)	720	1000	1200	1400	2000
	(Architecture 2002)	800	900	1050	1300	1450
Densidade linear dos fios (dtex)	(Architecture 2002)	1100	1100	1670	1670	2200
Resistência à tração teia/trama (kN/m)	(SEBTP 2009)	60/60	84/80	110/104	120/130	160/170
	(Architecture 2002)	60/60	88/79	115/102	149/128	195/166
Ensaio trapezoidal teia/trama (kN/m)	(Architecture 2002)	310/350	520/580	800/950	1100/1400	1600/1800
Fios por centímetro teia/trama	(Architecture 2002)	9/9	12/12	10,5/10,5	14/14	14/14

Tabela 2.6 – Classificação de têxteis técnicos em fibra de vidro / PTFE, adaptado de Forster e Mollaert (2004)

Parâmetro	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7
Resistência à tração teia/trama (kN/m)	26/22	43/28	70/70	90/72	124/100	140/120	170/158
Diâmetro do fio (μm)	9	6	3	6	3	3 ou 6	3
Peso (g/m^2)	500	420	800	1000	1200	1500	1600
Ensaio trapezoidal teia/trama (kN/m)	S/ inf.	S/ inf.	300/300	300/300	400/400	500/500	450/450

Tabela 2.7 – Comparação de propriedades genéricas de diferentes tipos de têxteis técnicos, adaptado de Forster e Mollaert (2004)

Tecido de base / revestimento	PES / PVC	Vidro / PTFE	Vidro / Silicone	PTFE / PTFE
Resistência à tração teia/trama (kN/m)	115/102	124/100	107/105	84/80
Peso (g/m^2)	1200	1200	1100	830
Ensaio trapezoidal teia/trama (kN/m)	800/950	400/400	960/700	925/925
Transmissão de luz (%)	10-15	10-20	< 80	19-38
Flexibilidade / Recuperação de vincos	Elevada	Baixa	Elevada	Elevada
Reação ao fogo	M2 (NFP 92 503); B1 (DIN 4102)	M1 (NFP 92503); B1/A2 (DIN 4102)	A (ASTM E-108)	S/ inf.
Limpeza	Mais fácil com acabamento superficial	Autolimpeza	Autolimpeza	Autolimpeza
Forma de realizar juntas	Alta frequência	Termicamente	Vulcanização	Costura
Tempo de vida útil (anos)	>15-20	> 25	> 25	S/ inf.
Custo	Baixo	Elevado	Elevado	S/ inf.

2.3.1.4. Comportamento mecânico e ensaios

Dürr (2000) categoriza o tipo de influências nos tecidos revestidos, a curto e longo prazo, concluindo que as mais importantes são as do comportamento mecânico dos materiais, sob os efeitos de carga, tempo e temperatura. Deste modo, o comportamento elástico, a resistência e a rigidez, a tendência ao rasgamento, a resistência ao dobramento e a relaxação constituem as propriedades mais importantes para uma descrição física e geométrica destes elementos. Os fabricantes dos tecidos podem não

apresentar todas estas propriedades nos seus catálogos, sendo de referir por exemplo as empresas *Serge Ferrari*, *Verseidag*, *Mehler*, *Sheerfill (Saint Gobain)*, *Sattler* e *Sefar*.

O comportamento dos tecidos revestidos aplicados em estruturas de membrana é um tema de grande atualidade, dada a sua complexidade e insuficiente caracterização. Uma vertente de investigação realizada nesta área consiste em caracterizar esse comportamento através de modelos constitutivos numéricos que, por um lado, caracterizem esse comportamento adequadamente e, por outro, sejam compatíveis com os *softwares* de cálculo estrutural.

Com efeito, é corrente o recurso a ensaios experimentais para determinar um conjunto de parâmetros, tendo em vista a calibração desses modelos constitutivos. Os ensaios que permitem quantificar as propriedades mecânicas do material são essencialmente ensaios de tração uniaxial e biaxial.

O ensaio de tração uniaxial é o método correntemente mais utilizado para a quantificação da tensão de rotura e da resistência ao rasgamento. Este ensaio permite medir a tensão de rotura uniaxial do tecido nas direções da teia e da trama respetivamente. Por sua vez, o ensaio de tração biaxial é utilizado para a quantificação das relações tensão-deformação num intervalo de valores controlado, consoante o tipo de material e mediante as solicitações a que esse material estará sujeito em condições de serviço. A partir deste ensaio é possível determinar os módulos de elasticidade nas direções da teia e da trama, os coeficientes de Poisson e o módulo de corte.

No entanto, no caso da utilização dos ensaios biaxiais com a finalidade de determinar os módulos de elasticidade, existem atualmente vários procedimentos de ensaio. A norma Japonesa (MSAJ/M-02 1995) e o manual europeu da *TensiNet* (Forster e Mollaert 2004) têm procedimentos de ensaio comuns, distinguindo-se de outros entretanto publicados (Galliot e Luchsinger 2011a; Beccarelli *et al.* 2011). Dado que os módulos de elasticidade são quantificados a partir de constantes elásticas obtidas nesses ensaios, multiplicam-se as constantes elásticas devido à variedade de procedimentos (Uhlemann e Stranghöner 2013), originando consequentemente diferentes módulos de elasticidade a considerar nas análises numéricas. Os valores adotados por gabinetes de projeto de renome internacional, bem como os procedimentos de cálculo estrutural utilizados por estes, não são geralmente divulgados.

De acordo com o manual europeu da *TensiNet* (Forster e Mollaert 2004), os ensaios são realizados para um intervalo de carga relevante definido anteriormente. Apresenta-se de seguida um caso geral a título de exemplo, mas tendo presente que cada caso deverá ter especificações em particular recomendadas por um especialista. Em geral é empregue um fator de segurança do material de 5, valor suscetível de variar com base na análise estrutural realizada pelo projetista. No exemplo apresentado de seguida apresenta-se o procedimento a realizar num ensaio de tração biaxial em que a tensão admissível do material é de cerca de $1/5$ da tensão de rotura obtida no ensaio de tração uniaxial. O nível de pré-esforço a aplicar à amostra pode variar entre $1/5$ a $1/10$ da tensão admissível do material, dado que depende da curvatura da superfície e da orientação das direções principais de fabrico. No caso presente, o pré-esforço é considerado igual a $1/5$ da tensão admissível, correspondendo a $1/25$ da tensão de rotura. Naturalmente, nem sempre o pré-esforço é igual nas direções da teia e da trama, devendo partir-se consequentemente de uma base de ensaio definida por

- Pré-esforço Teia : Pré-esforço Trama = $1 : 2 = 1/50$ Tensão de rotura : $1/25$ Tensão de rotura;
- Pré-esforço Teia : Pré-esforço Trama = $1 : 1 = 1/25$ Tensão de rotura : $1/25$ Tensão de rotura;
- Pré-esforço Teia : Pré-esforço Trama = $1 : 2 = 1/25$ Tensão de rotura : $1/50$ Tensão de rotura.

Além disso, durante os ensaios biaxiais é necessário reproduzir o comportamento da estrutura sob as ações de carregamento reais, por exemplo devidas ao vento e à neve. Ora, se as direções ortotrópicas

estiverem alinhadas com as direções das tensões principais desenvolvidas na estrutura devido à atuação dessas ações, então, se uma dada direção está carregada, a direção perpendicular deverá estar aliviada de carga. Assim, o procedimento de ensaio consiste na inversão do carregamento entre essas direções de tensões principais, isto é, a direção anteriormente solicitada é descarregada e a direção anteriormente descarregada é solicitada.

Por outro lado, note-se que raramente ocorrem as solicitações de carregamento para as quais são calculadas numericamente as tensões. Por questões de segurança, é sempre utilizada a maior carga. Pelo motivo apresentado anteriormente, não é realista aplicar-se a tensão admissível nos ensaios de tração biaxial, dado que se pretende avaliar o comportamento da membrana em serviço, considerando-se portanto uma tensão equivalente a 80% da tensão admissível.

A Figura 2.7 apresenta uma história de carga característica de um ensaio de tração biaxial. Primeiramente, é solicitada a direção da teia nos primeiros 5 ciclos de carga entre a tensão de pré-carga e 0,8 vezes a tensão admissível, enquanto a direção da trama permanece com a tensão de pré-carga. Nos seguintes 5 ciclos de carga é solicitada a direção da trama entre a tensão de pré-carga e 0,8 vezes a tensão admissível, enquanto a direção da teia permanece com a tensão de pré-carga.

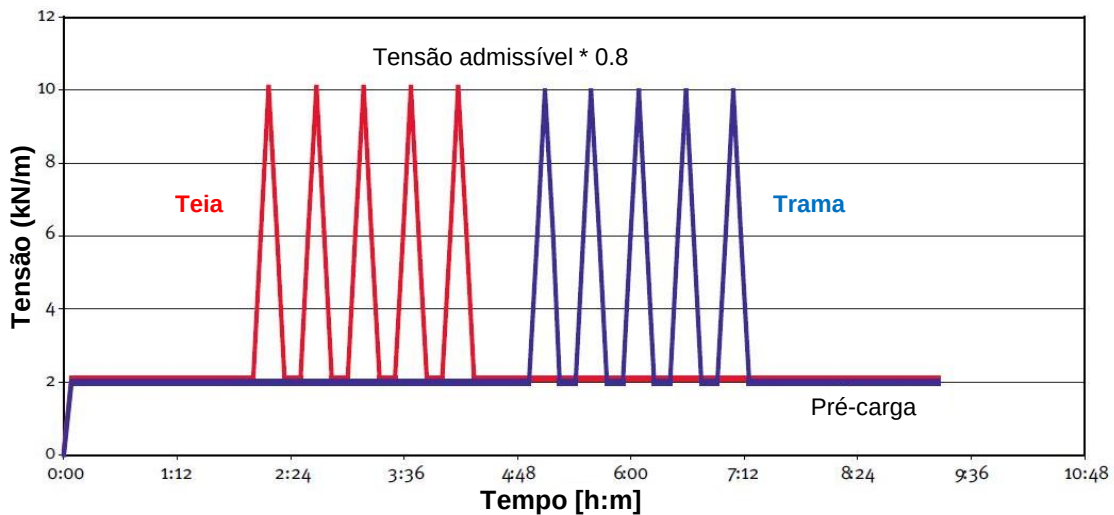


Figura 2.7 – História de carga característica de um ensaio de tração biaxial, adaptado de Forster e Mollaert (2004)

Para a determinação dos módulos de elasticidade do material pode-se recorrer simplificadaamente à teoria linear de elasticidade, em que a relação entre as tensões e as deformações é dada simplificadaamente por

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1111} & E_{1122} \\ E_{1122} & E_{2222} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

ou explicitamente por

$$\begin{cases} \sigma_{11} = E_{1111}\varepsilon_{11} + E_{1122}\varepsilon_{22} = E_{1111}(\varepsilon_{11} + \nu_{12}\varepsilon_{22}) \\ \sigma_{22} = E_{1122}\varepsilon_{11} + E_{2222}\varepsilon_{22} = E_{2222}(\nu_{21}\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \end{cases} \quad (2.2)$$

em que o índice 1 indica a direção da teia, o índice 2 indica a direção da trama, σ_{11} é a tensão na direção da teia, σ_{22} é a tensão na direção da trama, ε_{11} é a deformação na direção da teia, ε_{22} é a deformação na direção da trama, E_{1111} é o módulo de elasticidade na direção da teia, E_{2222} é o módulo de elasticidade na direção da trama, $\nu_{12} = E_{1122} / E_{1111}$ é o coeficiente de Poisson para a interação entre a teia e a trama e $\nu_{21} = E_{1122} / E_{2222}$ é o coeficiente de Poisson para a interação entre a trama e a teia.

Assim, para avaliar os módulos de elasticidade a partir de um ensaio de tração biaxial, deve-se substituir as tensões σ e as deformações ε respetivamente por $\Delta\sigma$ e $\Delta\varepsilon$ por forma a linearizar o comportamento não-linear do material num intervalo de carga pretendido definido anteriormente (Figura 2.7). Esse intervalo é geralmente balizado entre o pré-esforço e a tensão de serviço do material pré-esforçado. A Figura 2.8 apresenta as deformações e as tensões de um ensaio de tração biaxial em correspondência com a história de carga representada na Figura 2.7, pretendendo simular-se um carregamento típico resultante da ação do vento seguido de um carregamento da ação da neve. Na primeira parte do ensaio definida pelos 3 ciclos de carga iniciais, as variações de tensões $\Delta\sigma_{11} \neq 0$ e $\Delta\sigma_{22} = 0$, e as variações das deformações correspondentes, medidas nos resultados do ensaio, são $\Delta\varepsilon_{11}$ e $\Delta\varepsilon_{22}$, podendo escrever-se

$$\begin{cases} \Delta\sigma_{11} = E_{1111}\Delta\varepsilon_{11} + E_{1122}\Delta\varepsilon_{22} \\ 0 = E_{1122}\Delta\varepsilon_{11} + E_{2222}\Delta\varepsilon_{22} \end{cases} \quad (2.3)$$

Analogamente, na segunda parte do ensaio, as variações de tensões $\Delta\sigma_{11} = 0$ e $\Delta\sigma_{22} \neq 0$, e as variações das deformações correspondentes, medidas nos resultados do ensaio, são $\Delta\varepsilon_{11}$ e $\Delta\varepsilon_{22}$, podendo escrever-se

$$\begin{cases} 0 = E_{1111}\Delta\varepsilon_{11} + E_{1122}\Delta\varepsilon_{22} \\ \Delta\sigma_{22} = E_{1122}\Delta\varepsilon_{11} + E_{2222}\Delta\varepsilon_{22} \end{cases} \quad (2.4)$$

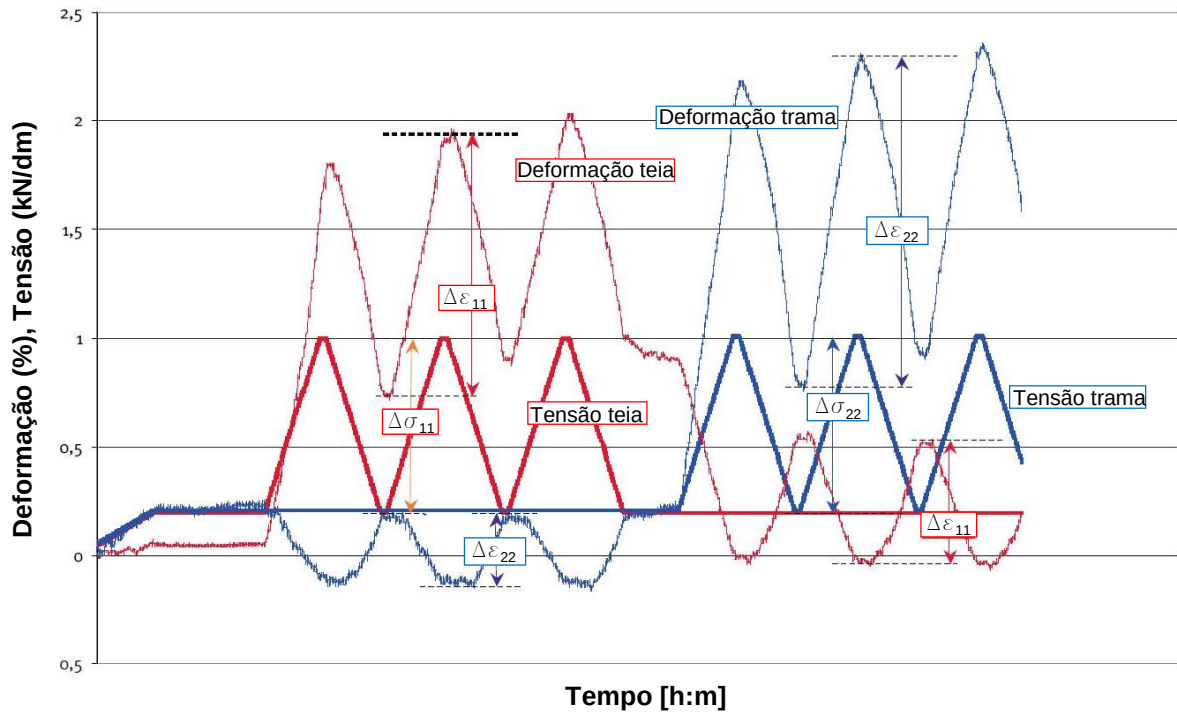


Figura 2.8 – Avaliação de parâmetros do comportamento do material a partir da interação entre as direções de fabrico durante um ensaio de tração biaxial com vista à determinação dos módulos de elasticidade

Os módulos de elasticidade E_{1111} , E_{1122} e E_{2222} são então determinados a partir das equações definidas nos sistemas (2.3) e (2.4). Este procedimento é repetido para todas as partes da história de carregamento, podendo avaliar-se a resposta do material para diferentes rácios de pré-esforço. Um método alternativo ao descrito anteriormente baseia-se na obtenção de superfícies de resposta do material, em que são representadas graficamente em 3D a resposta do material para diferentes rácios de pré-esforço entre a teia e a trama (Bridgens 2005).

As curvas de tensão-deformação obtidas com base em ensaios de tração uniaxial e biaxial permitem destacar algumas particularidades do comportamento dos tecidos revestidos, tais como (Bradshaw 1996): comportamento distinto na resposta das direções da teia e da trama (ver as Figuras 2.9 (a) e (b)); deformações permanentes após o primeiro carregamento e para níveis de tensões em serviço (ver as Figuras 2.9 (c) e (d)); resposta influenciada pelo rácio de tensões aplicadas nas direções da teia e da trama (ver a Figura 2.10) e não-linearidades marcadas nas respostas das direções principais de fabrico.

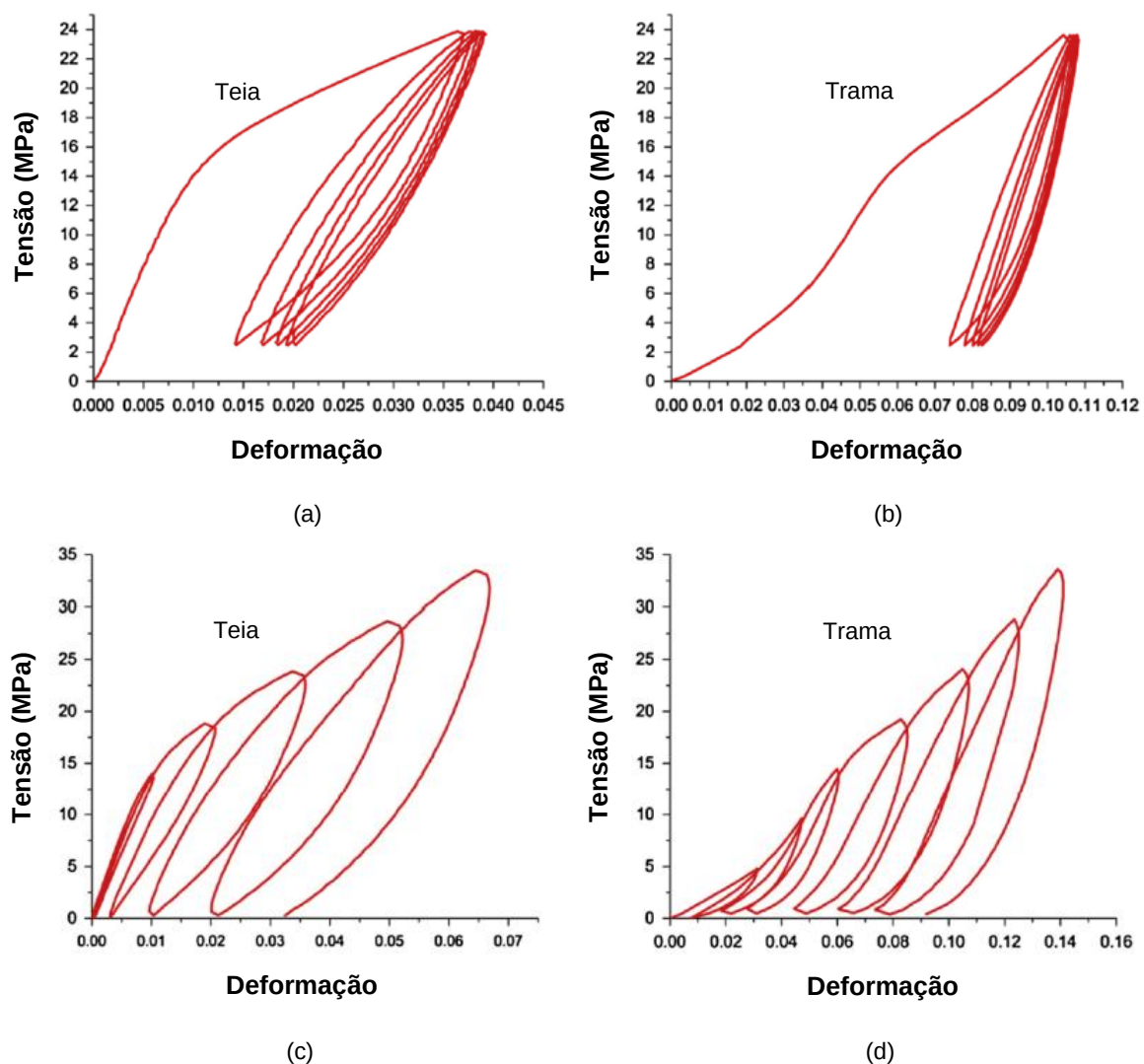


Figura 2.9 – Curvas de tensão-deformação de 4 ensaios de tração uniaxial de tecido de poliéster revestido a PVC (Dinh *et al.* 2014): (a) e (b) Ensaio monotónico até 24,1MPa seguido de ciclos de descarga e carga entre 2,41 e 24,1MPa; (c) e (d) Ensaio com aumento gradual de tensão até 33,73MPa com ciclos intermédios de descarga e carga a cada incremento de tensão de 4,82MPa

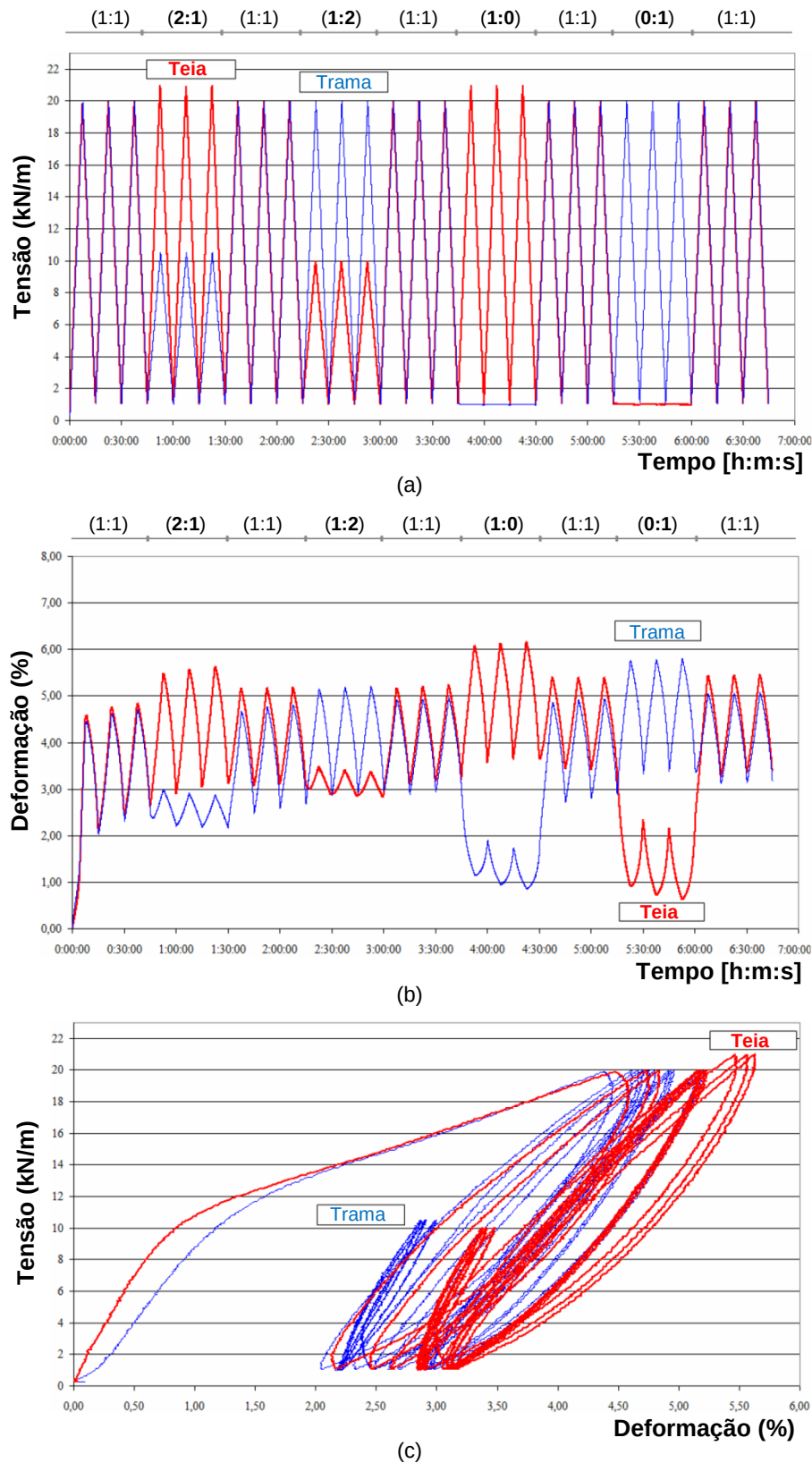


Figura 2.10 – Ensaio de tração biaxial de tecido de poliéster revestido a PVC do tipo *Ferrari Precontraint 1002* com rácios de tensão ($\sigma_{Teia}:\sigma_{Trama}$) = (1:1); (2:1); (1:2); (1:0) e (0:1), executado pelo laboratório *Blum GmbH*: (a) Evolução temporal das tensões; (b) Evolução temporal das deformações e (c) Curva de tensão-deformação

As características elencadas anteriormente devem-se ao efeito combinado de vários mecanismos de deformação que são desencadeados quando o material é solicitado, como se passa a descrever. Primeiramente, o material de membrana é constituído por um tecido realizado com fibras de poliéster e por um revestimento com *PVC*. O tecido é constituído por duas famílias de fibras de poliéster ortogonais denominadas teia e trama. Atendendo ao método de fiação, os fios da teia e da trama não são retos, apresentando uma ondulação característica, como referido anteriormente, denominada na literatura por *crimp* (Testa e Yu 1987). Para além disso, a ondulação é diferente nas direções da teia e da trama, resultando num comportamento marcadamente distinto nessas direções ortogonais quando solicitadas. Por consequência, a aplicação de uma carga na direção da teia reduz a ondulação nessa direção e aumenta a ondulação na direção da trama, e vice-versa. Por esse motivo, as ondulações nas direções da teia e da trama complementam-se, e esse efeito é denominado de interação de ondulação (*crimp interchange*).

Para além da interação de ondulação, são de referir outros mecanismos de deformação, tais como: a deformação dos fios, o esmagamento dos fios devido ao efeito de interação de ondulação, a deformação do revestimento, o atrito entre os fios e, finalmente, o atrito entre os fios e o revestimento. Estes mecanismos não ocorrem unicamente em tecidos de poliéster revestidos com *PVC*, mas também em tecidos de fibra de vidro revestidos com *PTFE* (Pargana e Leitão 2015), podendo haver ligeiras diferenças nas tendências das curvas de tensão-deformação, face à natureza distinta dos materiais envolvidos. No caso do atrito entre os fios distingue-se o atrito devido ao contacto entre os fios da teia e da trama, nos pontos de intersecção, e o atrito devido ao contacto entre os fios da mesma direção, na ocorrência de deformações de corte acentuadas, denominando-se na literatura por efeito de corte trancado (*shear lock-up*).

O comportamento ao corte do material é importante, pelo que também são realizados ensaios ao corte (ver a Figura 2.11 (a)), apesar de não merecer muita atenção nos modelos utilizados (Schock 1991), dado o seu valor reduzido. No entanto, alguns modelos recentes incluem esse comportamento (Galliot e Luchsinger 2010). Esta importância decorre da necessidade dos padrões de corte desenvolverem deformações ao corte, desde o seu estado inicial indeformado, até à posição deformada, criando a forma pretendida na superfície da membrana.

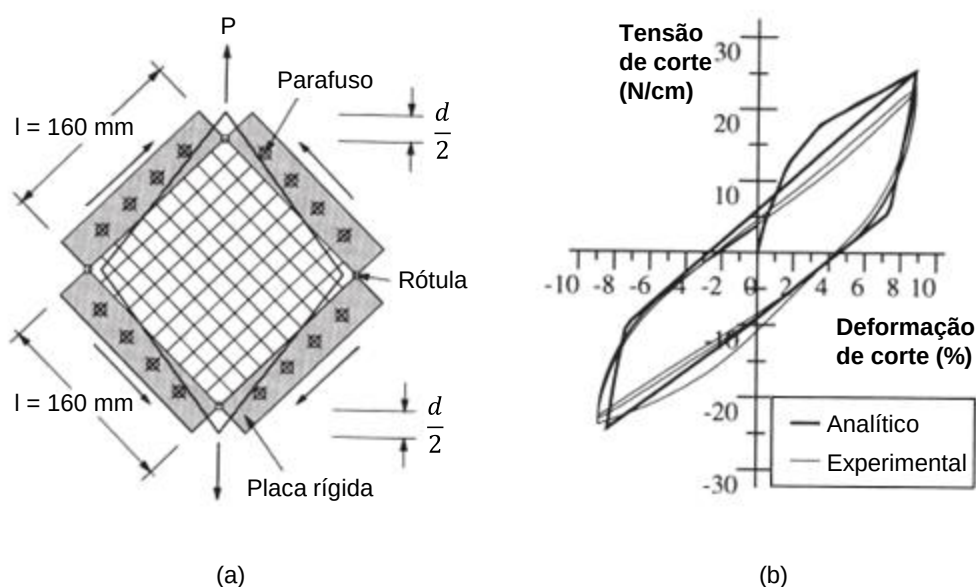


Figura 2.11 – Ensaio ao corte (Kato *et al.* 1999): (a) Esquema do ensaio e (b) Resposta da tensão de corte

Pargana *et al.* (2007) relacionam o comportamento dos fios do tecido nas várias fases da resposta histerética tensão-deformação ao corte. Kato *et al.* (1999) estudam esse comportamento em fibras de vidro revestidas a *PTFE*, por intermédio de modelos numéricos, com validação experimental (ver a Figura 2.11), observando menores incrementos de rigidez com o aumento das deformações ao corte. A resistência ao corte do poliéster revestido a *PVC* é, geralmente, inferior à da fibra de vidro revestida a *PTFE*.

O efeito de corte trancado é observado quando é realizado um ensaio biaxial com o intuito de aferir o módulo de corte G . Inicialmente, de acordo com a Figura 2.12, para baixas deformações de corte, existe um ligeiro decréscimo da resistência ao corte, dado que a tensão de corte aplicada não é suficiente para mobilizar a rotação das intersecções dos fios que se comportam, consequentemente, como rigidamente fixas (ver a Figura 2.13 (b)). Dado que nesta fase a deformação ocorre devido essencialmente à flexão dos fios entre os nós de intersecção, esta deformação, realizada em regime elástico, é linear, dependendo apenas da inércia à flexão dos fios (Grosberg e Park 1966). Skelton (1980) refere que essa ligeira perda de resistência ao corte tem a ver com a mobilização gradual ligeira da rotação das intersecções dos fios. A rigidez ao corte do revestimento domina a resposta do material solicitado ao corte para deformações reduzidas, dado que a rigidez à flexão dos fios é baixa. Depois da deformação inicial, a rotação dos pontos de intersecção dos fios é acompanhada pelo escorregamento relativo entre os fios das duas direções principais nos pontos de intersecção dos fios, originando a histerese ao corte. Este “escorregamento rotacional” envolve a fricção dos fios e consequentemente a perda de energia. A resposta é essencialmente linear. No entanto, o aumento posterior na força de corte origina uma região não-linear da resposta do tecido ao corte, provavelmente relacionada com o efeito do corte trancado (ver a Figura 2.13 (c)) ou condição de bloqueio (condição de *jamming*). Consequentemente, a partir desse instante é verificado um aumento brusco da resistência ao corte devido ao contacto dos fios da teia e da trama (ver a Figura 2.12).

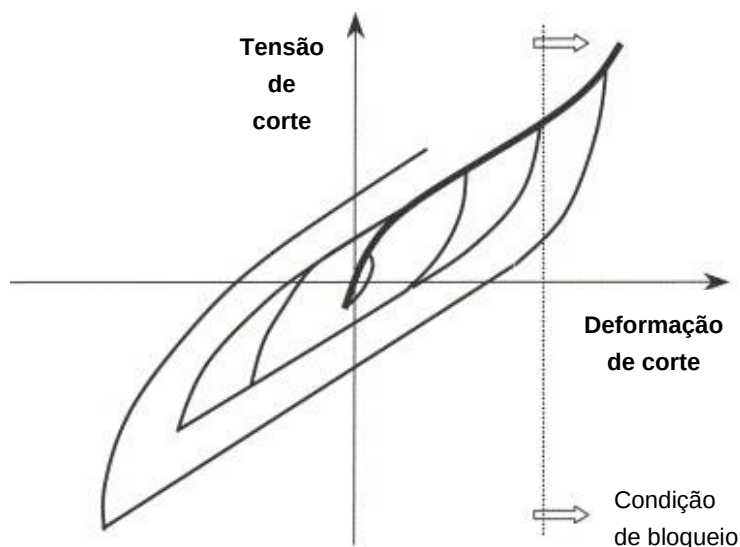


Figura 2.12 – Curva de tensão-deformação ao corte de um têxtil técnico (Pargana *et al.* 2007; Skelton 1980)

O ângulo da distorção crítico a partir do qual ocorre a condição de bloqueio limita o espaçamento dos fios para uma determinada curvatura (Forster e Mollaert 2004). Skelton (1980) verificou analiticamente que este ângulo crítico está relacionado com o coeficiente entre a espessura e o espaçamento dos fios: quanto maior for esse coeficiente, menor será a resistência ao corte na condição de bloqueio.

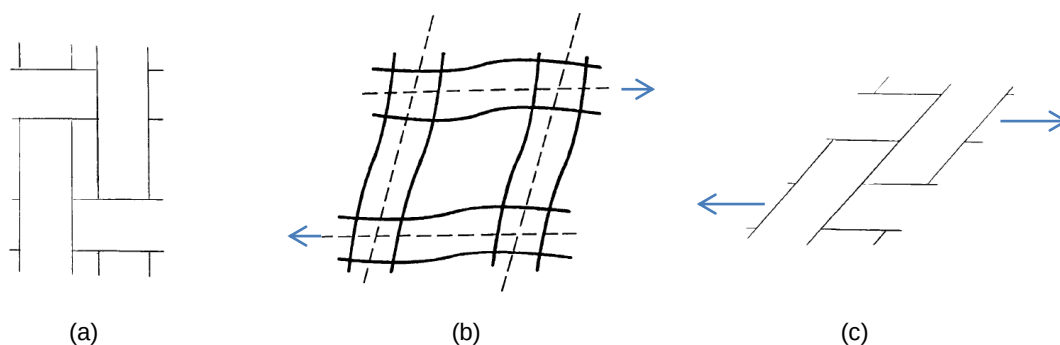


Figura 2.13 – Deformação por corte do têxtil técnico, adaptado de Bridgens (2005) e Skelton (1980): (a) Geometria indeformada; (b) Deformação por corte num estágio inicial e (c) Deformação por corte num estágio avançado – efeito de corte trancado (*shear lock-up*)

Os mecanismos de deformação descritos anteriormente desencadeiam o comportamento não-linear severo dos têxteis técnicos utilizados nas estruturas de membrana, quer ao nível das relações tensão-deformação, quer ao nível das deformações por corte. Estes mecanismos são assuntos de complexidade elevada, nomeadamente quando se pretende realizar um modelo constitutivo adequado e a sua respetiva implementação em *softwares* de cálculo estrutural, justificando-se investigações futuras.

O carregamento no tempo e a temperatura são fatores de redução da resistência dos materiais, havendo tendência para a redução da resistência do material com o tempo. O incremento de deformação no tempo, com a tensão constante, é denominado por fluência (ver a Figura 2.14 (a)). Por outro lado, a perda de tensão no tempo, com deformação constante, denomina-se por relaxação (ver a Figura 2.14 (b)). Hegyi e Hincz (2005) realizaram estudos experimentais em tecidos de poliéster revestidos a PVC, concluindo que a fluência é significativa e a relaxação não pode ser desprezada. Deste modo, criaram um modelo viscoelástico, para a caracterização deste material, com vista à análise estática de longa duração.

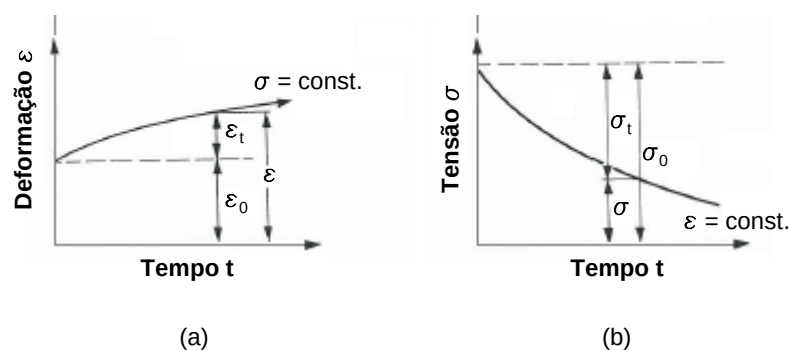


Figura 2.14 – Gráficos representativos da: (a) Fluência e (b) Relaxação

2.3.2. CARACTERÍSTICAS DOS PLÁSTICOS TÉCNICOS

Os plásticos técnicos começam a ganhar importância económica no meio das estruturas de membrana, face aos têxteis técnicos. As soluções ecológicas que daí advêm permitem também soluções transparentes, sendo os fluoro-plásticos os mais usados nas estruturas em questão, podendo ser planos ou porosos. A espessura que este material fino apresenta varia entre 50 e 250 μm e 50 e 150 μm , respetivamente para películas planas e porosas. Estas películas estão disponíveis em rolos com larguras compreendidas entre 1,5 e 2,2m para as planas e máximo de 1,7m para as películas porosas. A flexibilidade depende da espessura apresentada e são resistentes aos raios UV.

As películas utilizadas nas estruturas de membrana são resistentes ao calor e distinguem-se a *ETFE* (etileno tetrafluoretileno), com um ponto de fusão entre 265-275°C, ou a *THV* (terpolímero-vinilidefluorido-propileno-hexafluor-tetrafluoretileno), desenvolvida por Hoechst (1983), com um ponto de fusão entre 160-185°C. A nova geração de películas reside na *EFEP*, tendo sido desenvolvida por Daikin, tratando-se de uma *ETFE* fortemente modificada, com um ponto de fusão entre 180-220°C. As películas de *EFEP* extrudido são transparentes como o vidro.

As películas *ETFE* apresentam um comportamento isotrópico elástico bilinear e as suas propriedades genéricas estão sistematizadas na Tabela 2.8. Estas películas são utilizadas principalmente em estruturas pneumáticas e em fachadas de edifícios.

Tabela 2.8 – Propriedades de diferentes tipos de plásticos técnicos *ETFE* (Forster e Mollaert 2004)

Espessura	Peso	Resistência à tração L/T (DIN 53455)	Deformação última L/T	Resistência ao rasgamento L/T
	(g/m ²)	(N/mm ²)	(%)	(N)
50	87,5	64/56	450/500	450/450
80	140	58/54	500/600	450/550
100	175	58/57	550/600	430/440
150	262,5	58/57	600/650	450/430
200	350	52/52	600/600	430/430
250	437,5	>40/>40	>300/>300	>300/>300

* L – Direção longitudinal; T – Direção transversal

2.3.3. CABOS

Os cabos distinguem-se com base nas secções, formas de fabrico e composição. A composição dos elementos, desde o aço, o poliéster e as fibras de vidro ou de carbono-*kevlar*, formam numerosas combinações possíveis.

O arame de aço é a componente elementar de um cabo. A sua secção varia entre 0,5 e 7mm, consoante a forma e o diâmetro. A sua constituição rica em carbono torna-o extremamente resistente, comparando com o aço estrutural convencional. Além disso, a sua grande ductilidade permite deformações apreciáveis, visíveis antes da rotura (Botelho 2008).

A junção de arames forma um cordão. Esta junção, em vez de utilizar uma secção cheia, permite, por um lado, reduzir o defeito por secção e, por outro, assegurar a integridade estrutural na ocorrência de

rotura de um dos arames (Martins 2009). O cordão tem várias designações, consoante a sua organização interna e tipo de arames, sendo o mais elementar constituído por 7 arames, dos quais 6 em hélice, figuram em torno de um núcleo. As propriedades elásticas são 5% – 6% inferiores às de 7 arames retos ($E \approx 195GPa$), existindo algumas exceções, embora a resistência seja semelhante.

A associação de cordões, por sua vez, resulta numa corda (ver a Figura 2.15 (a)). As suas categorias prendem-se com a sua forma circular, não regular e compacta, e são classificadas de acordo com a direção de rotação dada, quer aos cordões, quer às próprias cordas, distinguindo as do tipo regular e *Lang*. As últimas são mais flexíveis, apesar do desgaste mais acentuado, comparativamente com as do tipo regular, decorrente da suscetibilidade a torções. Por sua vez, um cabo é formado por uma corda ou por uma associação paralela de cordas ou cordões.

Nas estruturas de cobertura, são mais utilizadas cordas do tipo *Spiral Strand* (ver a Figura 2.15 (b)) ou do tipo *Locked Coil Strand* (ver a Figura 2.15 (c)), apresentando um módulo de elasticidade de $E \approx 160GPa$, dependendo do diâmetro. Para consulta das propriedades destas secções remete-se, por exemplo, para os fabricantes *Macalloy* e *Bridon*. Estas cordas podem ser utilizadas em aplicações diversas, desde os bordos da membrana, às estruturas de suporte e ainda em elementos de asna. A escolha do tipo de corda depende da força a suportar. A forma em z dos arames do anel exterior das cordas do tipo *Locked Coil Strand*, resulta numa superfície densamente travada, útil na proteção à corrosão. Para além disso, permite que não haja escoamento da pasta de proteção da corda, protegendo-a mecanicamente.

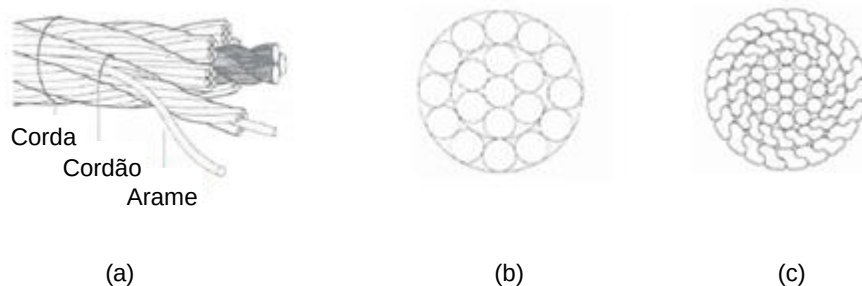


Figura 2.15 – Corda: (a) Constituição; (b) Secção de corda do tipo *Spiral Strand* e (c) Secção de corda do tipo *Locked Coil Strand* (Seidel 2009)

2.4. LIGAÇÕES E DETALHES CONSTRUTIVOS

As membranas não são fabricadas em peças únicas, sendo divididas em vários elementos, e posteriormente, ligadas através de juntas. Estas ligações podem ser permanentes, realizadas pelo fabricante, tais como juntas soldadas, combinadas, costuradas e coladas, ou podem ser reutilizáveis, realizadas no local, tais como chapas metálicas, elementos de *keder*, ligações acordoadas e entrelaçadas.

Os elementos de superfície transmitem esforços para os seus bordos, sendo estes reencaminhados para as fundações. Deste modo, os pontos de transferência de carga nos bordos devem ser reforçados, garantindo resistência e rigidez necessárias à transferência desses esforços. Este reforço é realizado com recurso a fitas e elementos de *keder*, respetivamente, utilizados em bordos flexíveis e bordos rígidos (ver as Figuras 2.16 (a) e (b)).

As forças que se desenvolvem ao longo dos elementos de cabo são transferidas para elementos de construção do tipo mastros, pilares, vigas ou fundações, através de elementos de ligação como ancoragens. As forças são transferidas, através da fricção ou formas ajustáveis. O detalhe da ancoragem depende do tipo e diâmetro do cordão, do nível de força a ligar, do tipo de ligação, processo de elevação e requisitos para manutenção futura. Neste contexto, são de destacar as ligações do tipo *splice*, pela facilidade em realizar emendas, e com grampos aparafusados. No entanto, quando estão envolvidas forças muito elevadas, são utilizados outros tipos de conectores (Seidel 2009), tais como, encaixes zincados e ligações do tipo *swage*.

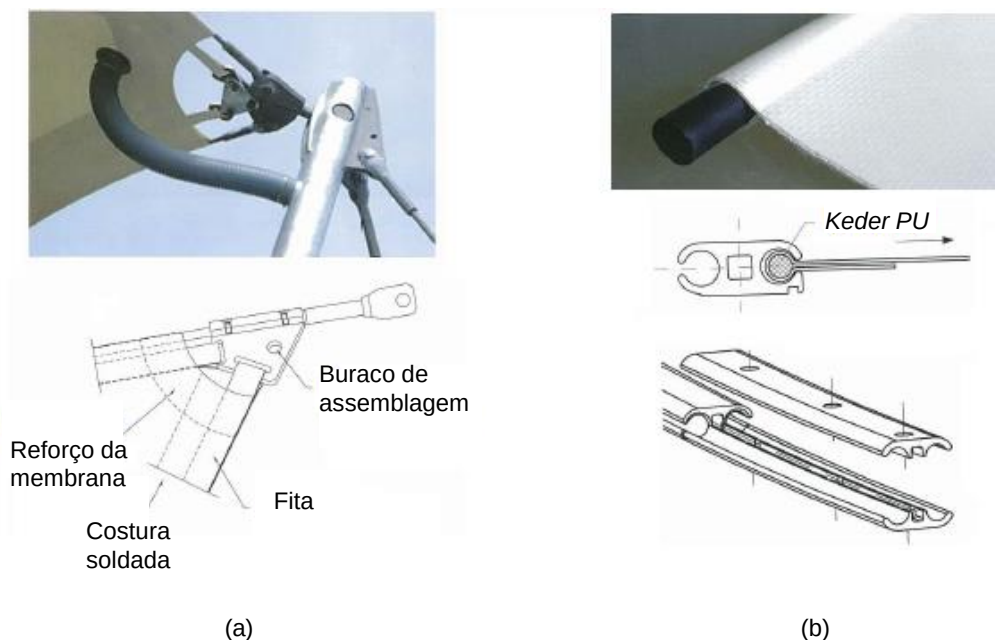


Figura 2.16 – Pormenores construtivos, adaptado de Seidel (2009): (a) Bordo flexível com fitas e (b) Bordo rígido com *keder*

2.5. FASES DE PROJETO

De acordo com a Figura 2.17, o projeto de uma estrutura de membrana tensa compreende, geralmente, três etapas fundamentais com vista à sua completa caracterização estrutural:

- *Determinação da forma*: compreende a determinação de uma forma geométrica inicial, cumprindo requisitos estruturais e arquitetónicos;
- *Resposta aos carregamentos*: compreende a análise do comportamento da estrutura, definida no processo de determinação da forma, devido aos vários carregamentos possíveis, tais como, a ação do vento e da neve, de forma a garantir a segurança do sistema;
- *Padrões de corte*: compreende a determinação aproximada de um conjunto de peças planas feitas de tecido e que, espacialmente, serão unidas para formar a superfície de membrana resultante do processo de determinação da forma.

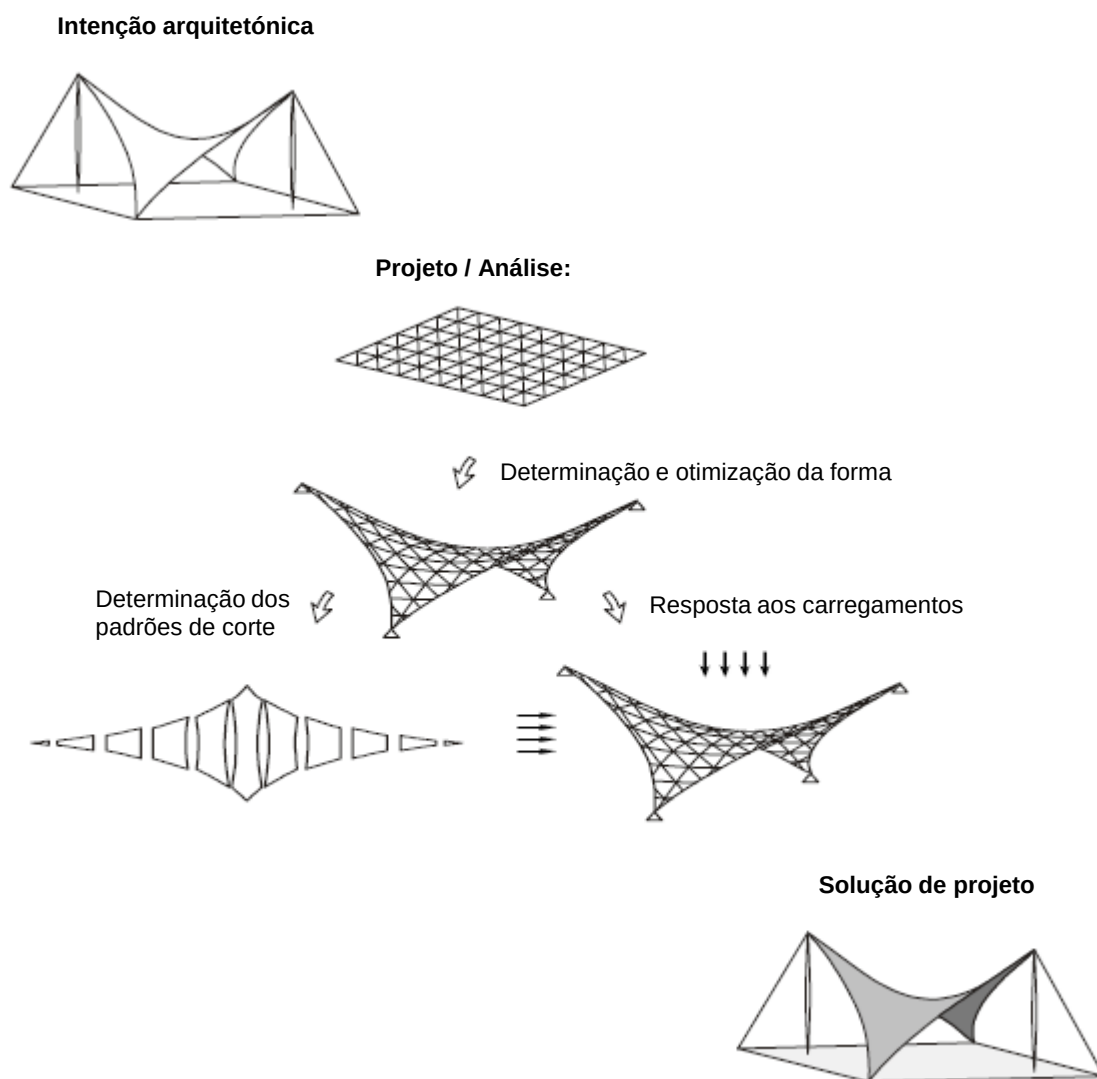


Figura 2.17 – Fases de projeto de uma estrutura em membrana tensa, adaptado de Pauletti (1999)

2.6. REGRAS DE DIMENSIONAMENTO ESTRUTURAL E CRITÉRIOS DE SEGURANÇA

Os regulamentos Nacionais e Eurocódigos baseiam-se, em geral, no conceito de estado limite, ou seja, para várias combinações de ações majoradas, a estrutura e as suas componentes devem respeitar determinados critérios de resistência e, ainda, garantir limites de deformação e degradação. Outra abordagem baseia-se no princípio das “tensões admissíveis”, segundo o qual a tensão máxima que se desenvolve na estrutura quando carregada com as ações de serviço não pode exceder uma determinada percentagem da tensão de cedência do material constituinte.

Nas estruturas de membrana, a segunda abordagem é a mais utilizada (Forster e Mollaert 2004), dado que exibem um comportamento não-linear geométrico, sendo a sua geometria afetada pela intensidade e distribuição das ações (havendo variações significativas para distribuições não uniformes de ações). A variação das propriedades dos materiais e os elevados fatores de segurança que têm de ser aplicados à tensão de rotura do tecido, são, também, fatores que justificam a abordagem em tensões admissíveis.

Deste modo, a resistência das estruturas em membrana, em particular, das suas componentes, tais como, o tecido, os cabos, as cordas e as cintas, é avaliada adotando valores característicos das ações de cálculo. Desta forma, as várias componentes são verificadas com base na sua tensão admissível. A tensão admissível é determinada a partir da tensão de rotura do material, aplicando coeficientes de redução (ou de segurança) que permitem atender a vários aspetos, tais como, a variabilidade do material, a resistência ao rasgamento, a degradação e os danos locais provocados pela construção da estrutura de membrana, bem como o tipo de carregamento.

Apesar dos regulamentos existentes na Europa, América do Norte e Japão aplicarem fatores distintos aos aspetos que influenciam a resistência do material, verifica-se que, tipicamente, os coeficientes de redução variam entre 5 e 7 para a resistência do tecido, 2,5 para os cabos e 3 para as cintas. Estes coeficientes são aplicados às tensões de rotura e dependem, portanto, do material a aplicar, bem como do tipo e duração da ação. Para elementos de suporte em aço (pilares e vigas), o dimensionamento deve estar em conformidade com a legislação em vigor, sendo aplicados coeficientes específicos às forças e momentos obtidos com a análise não-linear geométrica.

Para além da análise não-linear geométrica baseada em fatores de segurança, recomenda-se que, quando existirem elementos de suporte sujeitos a encurvadura (tais como arcos esbeltos), se proceda a uma verificação de estabilidade da estrutura, aplicando um coeficiente de segurança de 2 para as ações de média ou longa duração e 1,8 para as rajadas de vento.

Em particular, o coeficiente de redução da resistência do tecido depende de vários fatores, tais como, idade, degradação por manuseamento, existência de vincos, fadiga, fluência, ação da temperatura, fatores ambientais e, ainda, defeitos associados ao seu fabrico. Na sua grande maioria, estes fatores são intrínsecos ao material, método de emenda, escala da estrutura, e vida útil pretendida.

Assim, existe, atualmente, um conjunto de manuais de dimensionamento que conjugam todos os fatores referidos, de uma forma variada, originando um coeficiente global de segurança a aplicar à resistência do material da tela. Embora os regulamentos abordem esta questão pelas duas vias de dimensionamento, isto é, com base em tensões admissíveis ou com base em estados limites, existe, porém, razoável semelhança entre os coeficientes de redução recomendados (entre 5 e 7), sendo resumidos de seguida os principais aspetos de cada norma na determinação desses coeficientes, com base em Forster e Mollaert (2004).

As recomendações do Grupo de Trabalho 7 da IASS (1986), orientadas para estruturas insufláveis, defendem um coeficiente global de segurança a aplicar à resistência do tecido, baseado no método das tensões admissíveis, sustentado em coeficientes de aplicação e de importância e, ainda, em fatores de incerteza, tais como, a estimativa das ações aplicadas, o rigor e verificação do cálculo estrutural e a qualidade de execução da obra.

No manual Francês (SEBTP 2009), a tensão admissível da membrana baseia-se na interação de vários fatores, tais como, tensão de rotura declarada do material, qualidade da tela e das emendas, dimensão da estrutura e poluição a que está sujeita.

A prática alemã combina a norma DIN4134 (1983) e a tese de Minte (1981). Esta última permitiu obter os coeficientes de segurança, com base em ensaios experimentais. A abordagem inicial desta norma era baseada nos Estados Limites Últimos, considerando as ações majoradas e respetivos coeficientes de segurança. Essa filosofia deixou de ser apropriada na prática de projeto, em detrimento da abordagem em tensões admissíveis. No entanto, a nova abordagem passou a incluir um fator dependente do tipo de carregamento, que atua na diminuição da tensão admissível do material.

O regulamento italiano (Norm 1995) é semelhante à norma alemã no que respeita aos fatores de redução, mas são definidas três classes de ligações, relativas à qualidade e tipo de execução (em oficina ou em obra). Na classe 1, as ligações são executadas por pessoal certificado, aplicando metodologias (que caracterizam todos os parâmetros e condições de execução) definidas pelo fabricante do tecido ou pelo construtor da membrana e testadas pelo construtor da membrana. A classe 2 difere da primeira apenas no facto da membrana não ser testada pelo construtor. Por último, a classe 3 inclui ligações executadas de qualquer maneira, admitidas exclusivamente na realização de elementos secundários. A escolha da classe das ligações depende do tipo de estrutura da qual fazem parte. Por exemplo, para tendas que tenham um conjunto de apoios primários, as ligações da tela poderão ser de classe 1 ou 2. Por seu turno, em membranas tensas, as ligações têm de ser de Classe 1.

O manual da Associação de Estruturas em Membrana do Japão (Membrane Structures Association of Japan 1990) prevê a adoção de um coeficiente de redução de 8 e 4, respetivamente, para ações de longa e curta duração. Porém, estes valores são reduzidos, respetivamente, para 6 e 3, para membranas utilizadas como revestimento em estruturas porticadas.

A norma da ASCE (2009) prevê coeficientes de segurança dependendo, essencialmente, das combinações de ações, tempo de vida útil e grau de manuseamento das estruturas.

Por fim, embora nos regulamentos Europeus a propagação de rasgos na tela não seja explicitamente considerada, a sua abordagem é pertinente, dado que é uma das razões principais pelas quais se consideram coeficientes de segurança tão elevados para o material da membrana (Forster e Mollaert 2004). A resistência ao rasgo é determinada a partir de ensaios (Hedgepeth 1961; Freeston e Claus 1973; Abbott e Skelton 1972; Topping 1973), devendo-se garantir que pequenas roturas na membrana não se propagam pela restante superfície, em resultado dos esforços previstos em serviço.

No caso particular do dimensionamento dos cabos de aço, é utilizado o EC3, parte 1.11 (EN1993-1-11 2003). Este fornece regras de dimensionamento para estruturas com componentes em tração, em aço, bem como as respetivas ligações que são ajustáveis e / ou substituíveis.

A abordagem baseia-se na divisão inicial dos elementos disponíveis em grupos, tendo em conta as cordas, cordões e arames, e, de seguida, na análise do tipo de estruturas em que são aplicados, distinguindo-se três grupos: A, B e C (EC3 parte 1.11 – tabela 1.1). Os elementos são ainda classificados quanto à sua exposição e condições de fadiga e corrosão (EC3 parte 1.11 – tabela 2.1).

No dimensionamento são considerados o Estado Limite Último (rotura das componentes quando excedida a resistência à tração, tendo em conta a durabilidade) e o Estado Limite de Serviço (limitando os níveis de tensão e deformação), bem como a Fadiga (limitação das variações de esforços provocados, quer pela variação de carga axial, quer pelas oscilações provocadas pelo vento, ou vento e chuva).

Para o Estado Limite Último deve ser verificada a relação $F_{Ed} / F_{Rd} < 1$, tal que F_{Ed} é o valor do esforço axial de cálculo e F_{Rd} é o valor do esforço axial resistente. Este último é dado pelo mínimo de duas quantidades, dadas por $F_{uk} / (1,5 \gamma_r)$ e $F_k / (\gamma_r)$, tal que, F_{uk} é o valor característico da força de rotura (que difere consoante o grupo a que determinado elemento faz parte - A, B ou C), F_k é o valor da força associada a 0,2% da deformação, $F_{0,2k}$, ou a 0,1% da deformação, $F_{0,1k}$, comprovado através de ensaios para cabos, ou por cálculo para barras e, finalmente, γ_r é o fator parcial (0,9 ou 1,0, respetivamente, se existem ou não medidas para suprimir os momentos na ancoragem).

Por fim, as tensões e pressões transversais em zonas de selas e grampos devem ser limitadas, remetendo-se para EN1993-1-11 (2003) para mais detalhes, inclusivamente detalhes geométricos.

Para o Estado Limite de serviço são considerados dois aspetos, deformações ou vibrações que possam influenciar o dimensionamento da estrutura e o comportamento das componentes de alta resistência (comportamento elástico e durabilidade).

Assim, para limitar as deformações e vibrações, é aumentada a rigidez estrutural, através do sistema estrutural, das dimensões e do pré-esforço das componentes de tensão de alta resistência. Por outro lado, para manter o comportamento elástico e a durabilidade das componentes de alta resistência, são impostos máximos e mínimos ao nível das tensões em serviço.

O limite de tensão relaciona-se com a tensão de rotura através de $\sigma_{uk} = F_{uk} / A_m$, em que, A_m é a secção metálica. Este limite é estipulado para a fase de construção e de serviço. Em primeiro lugar, na fase de construção, a tensão de esticamento é limitada a 0,6 e 0,55 de σ_{uk} , respetivamente, para o primeiro cabo e depois de instalar todos os cabos. Em segundo lugar, na fase de serviço, a tensão de esticamento é limitada a 0,5 e 0,45 de σ_{uk} .

A resistência dos elementos à fadiga deve ser determinada de acordo com as ações de fadiga, preconizadas na EN1991-1-1 (1991). Por outro lado, dado que a quebra por fadiga ocorre geralmente nos sistemas de cabos devido a defeitos das ancoragens, selas ou grampos, estas condições deveriam ser reproduzidas laboratorialmente através de ensaios avaliando o comportamento destes detalhes construtivos.

2.7. AÇÕES

Nas estruturas de membrana, a relação entre as ações atuantes e o seu peso próprio é muito superior à que se verifica em estruturas convencionais. Consequentemente, alterações na intensidade das ações do vento ou neve terão maior impacto, quer no dimensionamento dos elementos estruturais, quer na escala de deformações resultantes.

Deste modo, a definição das ações a considerar na análise e dimensionamento de membranas tensas, terá de ser cuidada e ponderada consoante a tipologia (ver a Tabela 2.1). Todavia, uma das dificuldades neste processo advém da legislação atual, demasiado específica quanto ao sistema estrutural, e constituída por uma ampla gama de regulamentos, dificultando a aplicação de um único código.

2.7.1. PRÉ-ESFORÇO

O nível de pré-esforço é intrínseco à forma e ao comportamento estrutural, dado que afeta todos os elementos da estrutura de suporte. O seu valor resulta do processo de determinação da forma (como se verá no capítulo três). A sua implementação ocorre durante a construção, sendo mantido, ao longo do período de vida útil da estrutura. Deste modo, tem de ser incluído em todos os casos de carga considerados no cálculo estrutural.

O pré-esforço aplicado à membrana permite adicionar-lhe rigidez significativa. O trabalho realizado pelas cargas aplicadas é balanceado pela energia de deformação da membrana. Esta energia decorre do aumento da deformação na direção dos esforços máximos, e da diminuição da deformação na direção ortogonal à anterior. Por outro lado, o fator mais importante para a contribuição do aumento da rigidez na superfície é a curvatura. Para facilitar a colocação da membrana, estes dois fatores devem ser ponderados, dado que um valor elevado de pré-esforço dificulta a colocação da membrana, principalmente quando as compensações dos padrões de corte são elevadas (Forster e Mollaert 2004).

De uma forma geral, o nível mínimo de pré-esforço depende da rigidez e da resistência do material. Em membranas de fibra de vidro revestidas a *PTFE*, a tensão instalada não deverá ser inferior a 2kN/m . Na classe mais resistente, não deverá ser inferior a 5kN/m . Em superfícies planas, poderá atingir 10kN/m . Por sua vez, em membranas de fibra de poliéster revestidas a *PVC*, a tensão de pré-esforço instalada não deverá ser inferior a 1,3% da resistência média à tração do material nas duas direções principais, conduzindo a valores mínimos de pré-esforço situados entre 0,7 a 2kN/m . Mais especificamente, considerando a classificação de têxteis técnicos de poliéster revestido a *PVC* apresentada anteriormente, o valor mínimo de pré-esforço é dado por:

- Tipo I – $0,70\text{kN/m}$;
- Tipo II – $0,90\text{kN/m}$;
- Tipo III – $1,30\text{kN/m}$;
- Tipo IV – $1,60\text{kN/m}$;
- Tipo V – $2,00\text{kN/m}$.

Os níveis de pré-esforço podem ser superiores aos acima referidos, por forma a minimizar as deformações em membranas com curvatura pouco eficiente. No entanto, tal resulta numa diminuição da gama de tensão disponível para responder às ações de serviço.

Em suma, independentemente do material utilizado, a prática de projeto destas estruturas sugere que o pré-esforço não seja inferior a 2,5% nem superior a 6% da resistência média à tração do material, nas duas direções principais. Além disso, a razão entre as tensões nas direções principais não deverá exceder 1:4 ou 4:1 (Forster e Mollaert 2004).

2.7.2. PESO PRÓPRIO

O peso próprio de uma membrana poderá variar entre 0,7 e $2,0\text{kg/m}^2$. Na determinação da forma estrutural não é comum a consideração do peso próprio, embora este deva ser considerado em todos os casos de carga (Forster e Mollaert 2004).

2.7.3. AÇÃO DO VENTO

A ação do vento é uma das ações mais relevantes no projeto de estruturas em membrana tensa, devido ao baixo peso próprio e às formas irregulares e complexas. Para além disso, a sua caracterização teórica, bem como os efeitos resultantes da interação da estrutura com o vento, constituem uma dificuldade acrescida. Deste modo, esta ação será tratada com maior detalhe no capítulo quatro.

2.7.4. AÇÃO DA NEVE

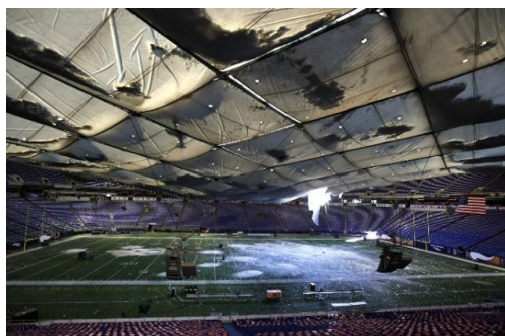
A par do vento, a neve representa uma ação importante a considerar no dimensionamento de estruturas formadas por cabos e membranas (Majowiecki 1998). Esta ação deve ser definida de acordo com o exposto no *EC1*, parte 1.3 (EN1991-1-3 1991). Mesmo em regiões não sujeitas a queda de neve deverá, ser considerada uma carga uniforme de $0,3\text{kN/m}^2$.

A deposição da neve pode ocorrer sob ação de ventos fracos ou fortes. A primeira origina carregamentos uniformes. No entanto, sob ventos fortes, a acumulação de neve gera carregamentos não uniformes em determinadas zonas da cobertura.

No caso de coberturas com uma sequência de cumes e vales, o *EC1* fornece coeficientes relativos à quantidade máxima e mínima a acumular, respetivamente, nos vales e nos cumes. Pode, ainda, ocorrer o efeito de empoçamento associado à flexibilidade das estruturas de membrana (ver a Figura 2.18 (a)). Este consiste na alteração das pendentes iniciais da membrana devido a carregamento elevado, provocando deformações excessivas. Este fenómeno impede a drenagem da água da chuva e da neve derretida. Deste modo, será necessário realizar ensaios de túnel de vento ou em calhas (Forster e Mollaert 2004) deste efeito, que pode levar ao colapso da estrutura (Gossen *et al.* 2008), tal como aconteceu com a cobertura pneumática da estrutura *Metrodome, USA* (ver a Figura 2.18 (b)).



(a)



(b)

Figura 2.18 – Efeitos de empoçamento em coberturas de membrana: (a) Cobertura na *Pensylvania*, EUA (Campbell 2003) e (b) Cobertura da estrutura *Metrodome, USA* (Meteorology News 2010)

2.7.5. AÇÃO DA TEMPERATURA

Os efeitos da temperatura não são significativos no comportamento da membrana estrutural, contribuindo na variação ligeira do pré-esforço, embora não seja tão significativo, como nas estruturas convencionais. No entanto, estes efeitos são significativos em grelhas formadas por cabos.

2.7.6. AÇÃO SÍSMICA

A ação sísmica não é significativa, nas estruturas de membrana, dado o seu peso reduzido. Na ocorrência de um sismo não surgem acelerações importantes, a não ser que a estrutura seja constituída por objetos de massas consideráveis, tais como treliças ou ligações.

2.8. CARACTERIZAÇÃO ESTRUTURAL DO COMPORTAMENTO DA MEMBRANA

Nas estruturas de membrana tensa, o exclusivo funcionamento dos cabos em tração e das membranas em tração e corte resulta numa grande flexibilidade transversal. Dado que não suportam esforços de compressão, estas estruturas transmitem as cargas aplicadas até às fundações desenvolvendo esforços de tração nos seus elementos e modificando a sua forma. O estado deformado destas estruturas é caracterizado por grandes deslocamentos. Deste modo, a configuração deformada cria uma clara dependência das ações incidentes, variando significativamente desde a configuração inicial da estrutura não carregada, evidenciando uma variação acentuada da rigidez à medida que a estrutura se deforma sob a atuação dessas ações. A interação entre a rigidez do sistema e o seu estado deformado é

denominada por não-linearidade geométrica, sendo a principal característica destas estruturas em comparação com as estruturas convencionais.

Atendendo à não-linearidade geométrica mencionada anteriormente, a rigidez dos sistemas não-lineares está relacionada com a deformação. Por esse motivo, as estruturas de membrana não podem ser analisadas com base na sua geometria inicial, mas tendo em conta o estado deformado em cada passo de aplicação de carga, realizando uma análise estrutural não-linear considerando grandes deslocamentos. Isto significa que as forças internas do sistema não variam linearmente com a aplicação de carga, tornando inválida a aplicação do princípio da sobreposição dos efeitos.

2.8.1. FORMULAÇÃO GERAL DE ANÁLISE

A análise estática de sistemas não-lineares é realizada através de simulações numéricas considerando a não-linearidade geométrica. O método de Newton-Raphson pode ser utilizado para este efeito, em que a carga é aplicada em vários passos de cálculo, e a matriz de rigidez é calculada em cada iteração de cada passo de cálculo, até ser obtida a convergência da análise. Atualmente, existem vários procedimentos para a análise destes sistemas com base no método de Newton-Raphson (Papadrakakis e Gantes 1989, 1988; Papadrakakis e Balopoulos 1991; Waziri *et al.* 2010).

Adicionalmente, em relação ao comportamento do material de membrana, é de referir que a precisão obtida nos dados dos ensaios de tração biaxial descritos anteriormente na secção 2.3.1.4 é utilizada correntemente para efeitos de instalação da membrana, mas para a análise estrutural são realizadas hipóteses e simplificações. Mesmo nos *softwares* específicos para a análise de estruturas de membrana com elementos finitos de membrana e com ferramentas específicas para a determinação da forma e aplicação de pré-esforço, o comportamento do material é definido utilizando as propriedades do material no estado plano de tensão, em que são definidos módulos de elasticidade e coeficientes de Poisson. Por esse motivo, os dados dos ensaios deste material são geralmente manipulados de forma a se enquadrarem ao estado plano de tensão, podendo aplicar-se as seguintes abordagens no que respeita ao comportamento do material (Bridgens 2005):

- *Material isotrópico*: 1 módulo de elasticidade e 1 coeficiente de Poisson são determinados a partir do módulo secante das curvas de tensão-deformação do ensaio de tração biaxial, para um rácio de tensões entre a teia e a trama considerado típico para a estrutura em estudo. Estes valores permanecem constantes durante a análise estrutural. Esta abordagem em que se considera o material isotrópico é de facto a mais simplificada. Geralmente não são realizados ensaios para aferir os valores supracitados, pelo que são utilizados valores típicos para o tipo de material da estrutura. Os valores utilizados pela ARUP, com base na sua vasta experiência, são apresentados na Tabela 2.9.

Tabela 2.9 – Valores típicos do módulo de elasticidade e do coeficiente de Poisson de têxteis técnicos (ARUP) – Material isotrópico

Tecido de base / revestimento	Módulo de elasticidade	Coeficiente de Poisson
	E (kN/m)	
Poliéster / PVC	600	0,3 – 0,84
Fibra de vidro / PTFE	1200	0,3 – 0,84

O comportamento de um material isotrópico é independente da direção do carregamento ou da orientação do material. Para além disso, o comportamento ao corte é desacoplado das deformações principais. De acordo com esta abordagem, considerando a teoria do estado plano de tensão e o material isotrópico, a relação entre as tensões e as deformações é dada por

$$\begin{bmatrix} \sigma_U \\ \sigma_T \\ \tau_{UT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_U \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{UT} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

ou de um modo mais compacto por

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon} \quad (2.6)$$

e a relação entre as deformações e as tensões é dada por

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_U \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{UT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_U \\ \sigma_T \\ \tau_{UT} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

ou de um modo mais compacto por

$$\underline{\varepsilon} = \underline{C} \underline{\sigma} \quad (2.8)$$

em que σ_U é a tensão na direção da teia, σ_T é a tensão na direção da trama, τ_{UT} é a tensão de corte, ε_U é a deformação na direção da teia, ε_T é a deformação na direção da trama, γ_{UT} é a distorção, E é o módulo de elasticidade, ν é o coeficiente de Poisson, G é o módulo de corte, D é a matriz de elasticidade e C é a matriz de flexibilidade. De acordo com esta formulação, o módulo de corte é definido por

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.9)$$

No entanto, na prática de projeto de estruturas de membrana envolvendo os têxteis técnicos mais comuns, nomeadamente o poliéster revestido a PVC, o módulo de corte é geralmente definido por (Jackson *et al.* 2009)

$$G = \frac{E}{20} \quad (2.10)$$

A matriz de elasticidade, D , depende do módulo de elasticidade e do coeficiente de Poisson e é uma matriz simétrica. A estabilidade da formulação descrita é garantida durante a análise estrutural se a matriz de elasticidade for definida e positiva, devendo garantir-se que o determinante da submatriz 2x2 superior esquerda é maior que zero. Para além disso, por consequência da lei constitutiva descrita, o coeficiente de Poisson é balizado no intervalo $\nu \in [-1; 1/2]$, limitando a simulação de deformações negativas elevadas ($\nu = 0,84$) verificadas nos resultados de ensaios de tração biaxial realizados com têxteis técnicos.

- *Material ortotrópico*: 2 módulos de elasticidade e 2 coeficientes de Poisson são determinados a partir da interação das curvas de tensão-deformação das direções de fabrico durante um ensaio de tração biaxial, para um rácio de tensões entre a teia e a trama considerado típico para a estrutura em estudo, como descrito anteriormente na secção 2.3.1.4. Estes valores permanecem constantes durante a análise estrutural. Esta abordagem em que se considera o material ortotrópico permite reproduzir numericamente o comportamento distinto do material nas suas direções principais de fabrico. Geralmente são realizados ensaios de tração biaxial para aferir os valores supracitados para o tipo de material da estrutura. A Tabela 2.10 apresenta os valores típicos dos módulos de elasticidade e dos coeficientes de Poisson dos têxteis técnicos mais utilizados em estruturas de membrana, obtidos com base nos ensaios realizados por Bridgens (2005).

Tabela 2.10 – Valores típicos dos módulos de elasticidade e dos coeficientes de Poisson de têxteis técnicos (Bridgens 2005) – Material ortotrópico

Tecido de base / revestimento	Módulo de elasticidade da Teia	Módulo de elasticidade da Trama	Coeficiente de Poisson	
	E_U	E_T	ν_{UT}	ν_{TU}
	kN/m	kN/m		
Fibra de poliéster / PVC	592-1192	342-536	0,79-1,59	0,35-0,42
Fibra de vidro / PTFE	756-2247	342-1162	1,36 – 2,02	0,50-0,60

O comportamento de um material ortotrópico é dependente da direção do carregamento ou da orientação do material. Para além disso, o comportamento ao corte é desacoplado das deformações principais. De acordo com esta abordagem, considerando a teoria do estado plano de tensão e o material ortotrópico, a relação entre as tensões e as deformações escrita no referencial de simetria material é dada por

$$\begin{bmatrix} \sigma_U \\ \sigma_T \\ \tau_{UT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_U}{1 - \nu_{UT}\nu_{TU}} & \frac{E_T\nu_{UT}}{1 - \nu_{UT}\nu_{TU}} & 0 \\ \frac{E_U\nu_{TU}}{1 - \nu_{UT}\nu_{TU}} & \frac{E_T}{1 - \nu_{UT}\nu_{TU}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{UT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_U \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{UT} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

e a relação entre as deformações e as tensões escrita no referencial de simetria material é dada por

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_U \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{UT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_U} & -\frac{\nu_{TU}}{E_T} & 0 \\ -\frac{\nu_{UT}}{E_U} & \frac{1}{E_T} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{UT}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_U \\ \sigma_T \\ \tau_{UT} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

em que E_U é o módulo de elasticidade na direção da teia, E_T é o módulo de elasticidade na direção da trama, ν_{UT} é a deformação na direção da trama devido a uma deformação unitária na direção da teia e ν_{TU} é a deformação na direção da teia devido a uma deformação unitária na direção da trama. Em relação ao módulo de corte, G , mantêm-se as considerações apresentadas anteriormente na abordagem do estado plano de tensão e de material isotrópico.

A matriz de elasticidade, D , depende neste caso de 2 módulos de elasticidade e de 2 coeficientes de Poisson e é uma matriz simétrica, devendo por isso respeitar a seguinte relação

$$-\frac{\nu_{TU}}{E_T} = -\frac{\nu_{UT}}{E_U} \quad (2.13)$$

A estabilidade da formulação descrita é garantida durante a análise estrutural se a matriz de elasticidade for definida e positiva, devendo garantir-se que o determinante da submatriz 2x2 superior esquerda é maior que zero.

Apesar do comportamento do material de membrana ficar mais bem caracterizado com base na segunda abordagem descrita anteriormente, considerando o estado plano de tensão e o material ortotrópico, é de notar que, ainda assim, atendendo à não-linearidade material dos têxteis técnicos, a relação apresentada na equação (2.13) normalmente não é verificada utilizando os coeficientes de Poisson e os módulos de elasticidade obtidos em ensaios de tração biaxial (Bridgens 2005).

Consequentemente, é necessário e relevante o estudo e desenvolvimento de abordagens de cálculo mais precisas no que se refere ao comportamento do material das membranas, possibilitando a redução das incertezas associadas à prática de projeto e a redução dos elevados fatores de segurança aplicados ao material destas estruturas.

2.9. FABRICAÇÃO, INSTALAÇÃO E MANUTENÇÃO

No processo subjacente ao desenvolvimento dos padrões de corte, o arranjo e as dimensões das peças sobre a superfície são determinadas com base num conjunto de critérios (Seidel 2009), nomeadamente óticos, construtivos, topológicos e estruturais. O critério ótico prende-se essencialmente com questões de aparência, enquanto o critério construtivo aborda questões relacionadas com equipamentos de corte/ligação e desperdícios de corte. No entanto, são os critérios topológico e estrutural que assumem maior importância no contexto do presente trabalho.

O critério topológico engloba questões relacionadas com a curvatura da superfície, a curvatura/comprimento/largura das peças e a forma dos bordos. Por sua vez, o critério estrutural abrange questões relacionadas com o comportamento estrutural, a distribuição de rigidez/esforços e a resistência do tecido/juntas. Face às questões mencionadas nestes dois últimos critérios, é de notar que a disposição dos padrões de corte tem uma estreita relação com os modelos numéricos usados na determinação da forma e na análise da membrana. Para definir a orientação das peças na superfície da membrana que otimiza a capacidade resistente do material, deve-se aliar o conhecimento destes critérios ao conhecimento do comportamento previsto da estrutura (ver a Figura 2.19).

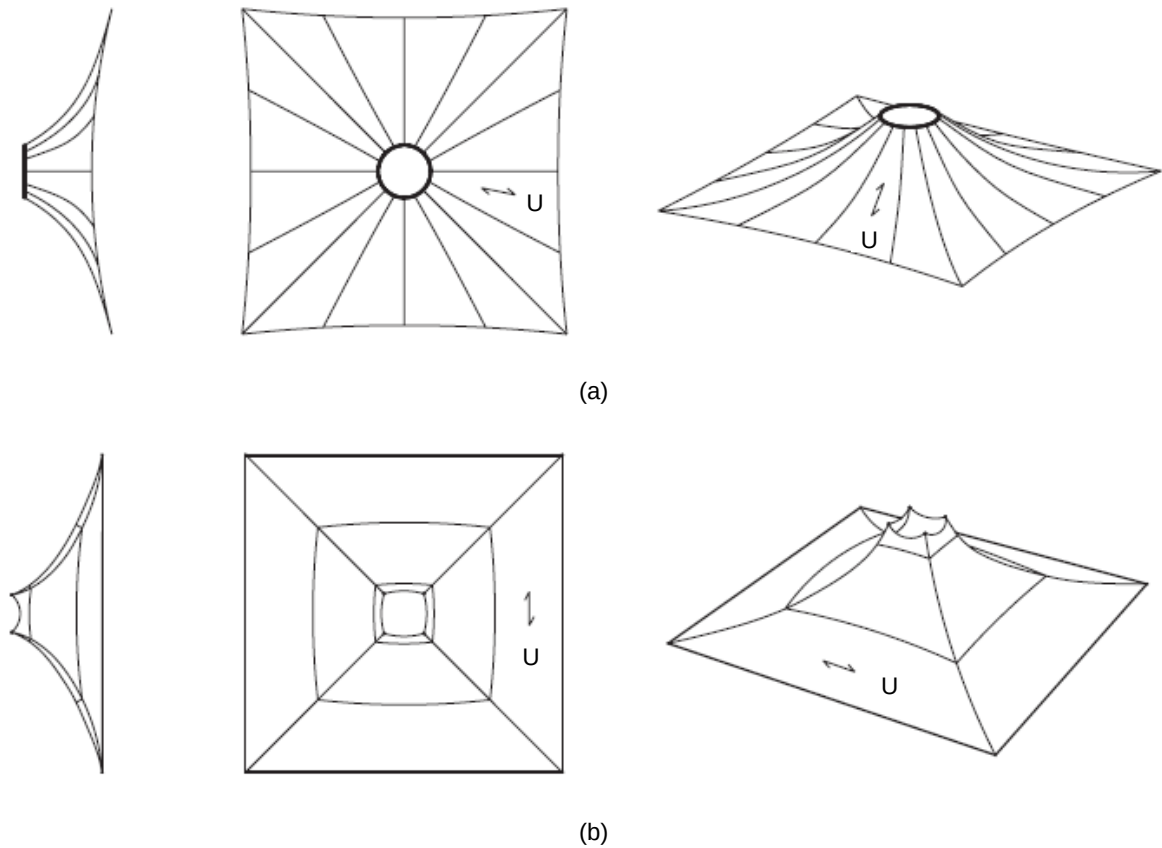


Figura 2.19 – Arranjos possíveis em superfície cônica, adaptado de Seidel (2009): (a) Radial e (b) Paralelo

A superfície de membrana com forma anticlástica é fabricada a partir de painéis achatados e indeformados e de juntas soldadas. Os painéis de tecido revestido são também denominados padrões de corte. No estado indeformado dos painéis de tecido revestido, as direções principais de fabrico teia e trama são ortogonais. No entanto, para que a superfície de membrana tome a forma duplamente curva, é necessário o desenvolvimento de esforços de corte nos painéis de tecido, originados pelo ângulo de desvio entre as direções da teia e da trama, caso contrário a curvatura gaussiana é zero.

A amplitude do ângulo de desvio é limitada na prática pela flexibilidade do material de revestimento do tecido, pelo nível de pré-esforço aplicado e pela dimensão máxima da largura e do comprimento dos painéis utilizados para formar a superfície de membrana. Em teoria, a amplitude do ângulo de desvio, $\delta\alpha$, entre as direções da teia e da trama originada numa malha ortogonal uniforme disposta numa superfície duplamente curva, é determinada por solução da equação (Forster e Mollaert 2004)

$$K = \frac{-1}{\sin \alpha} \frac{\delta^2 \alpha}{\delta u \delta v} \quad (2.14)$$

em que K é a curvatura gaussiana, traduzida por

$$K = \frac{1}{R_1} \frac{1}{R_2} \quad , \quad (2.15)$$

u e v são os eixos de um referencial com origem no interior do painel (ver a Figura 2.20) e R_1 e R_2 são os raios de curvatura da superfície anticlástica segundo duas direções ortogonais. A curvatura gaussiana K é também traduzida pelo produto das duas curvaturas da superfície anticlástica ($K_1 = 1 / R_1$ e $K_2 = 1 / R_2$). De acordo com a Figura 2.20, u e v são medidos, respetivamente, na direção da largura e do comprimento dos padrões de corte. A título de exemplo, assumindo que a curvatura K é constante, o ângulo α é 90° ($\sin \alpha = 1$) e u e v são medidos a partir de uma origem no centro de um painel genérico, então $\alpha = \pi/2 - Kuv$, satisfazendo assim a relação da equação (2.14). Assim sendo, o ângulo de desvio $\delta\alpha$ medido no referencial u,v do painel viria traduzido por (Forster e Mollaert 2004)

$$\delta\alpha = \frac{u v}{R_1 R_2} \quad (2.16)$$

Portanto, considerando um painel com largura de $2m$, comprimento de $10m$ e $R_1 = -R_2 = 10m$, o ângulo de desvio entre as direções principais de fabrico num dos vértices ($u = 1m$ e $v = 5m$) seria quantificado por $\delta\alpha = 5/100 \text{ rad} = 2,8^\circ$.

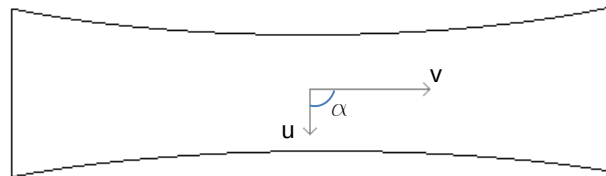


Figura 2.20 – Referencial u,v dos padrões de corte, adaptado de Forster e Mollaert (2004)

A partir do exemplo anterior percebe-se claramente a importância da restrição das dimensões dos padrões de corte utilizados em superfícies que exibem curvaturas gaussianas elevadas. Nessas circunstâncias, o reduzido valor dos raios de curvatura no denominador da equação (2.16) iria originar um valor elevado nos ângulos de desvio $\delta\alpha$. Deste modo, a restrição das dimensões dos padrões de corte permite compensar o efeito das elevadas curvaturas. Caso contrário, o elevado valor dos ângulos de desvio entre as direções principais de fabrico poderia originar o enrugamento da tela. Naturalmente, esse efeito dependeria também da resistência ao corte do revestimento e do nível do pré-esforço, como referido anteriormente.

Depois de definido o arranjo e a orientação das peças, são identificadas as linhas de corte da superfície (ver a Figura 2.21 (a)), preferencialmente, linhas geodésicas, isto é, linhas que representam os caminhos de menor distância entre dois pontos numa dada superfície. O estudo das linhas geodésicas exige alguma sofisticação matemática, citando-se os estudos de Lovelock e Rund (1989) e Weinstock (1974).

Assim, as peças são destacadas (ver a Figura 2.21 (b)), e a sua forma é determinada de modo a realizar-se o processo de compensação. Esse processo é realizado para todas as peças da tela (ver as Figuras 2.21 (c) e (d)), definindo-se o layout que permite identificar as peças individuais na estrutura (ver a Figura 2.21 (e)). O processo de compensação consiste na correção geométrica de cada peça, a nível individual, por forma a garantir que a tela é capaz de atingir os níveis de pré-esforço pré-definidos para a sua geometria, após fluência do material. Dado que as direções principais de fabrico têm propriedades distintas, nomeadamente em termos de fluência e relaxação, os valores de compensação serão diferentes nas duas direções.

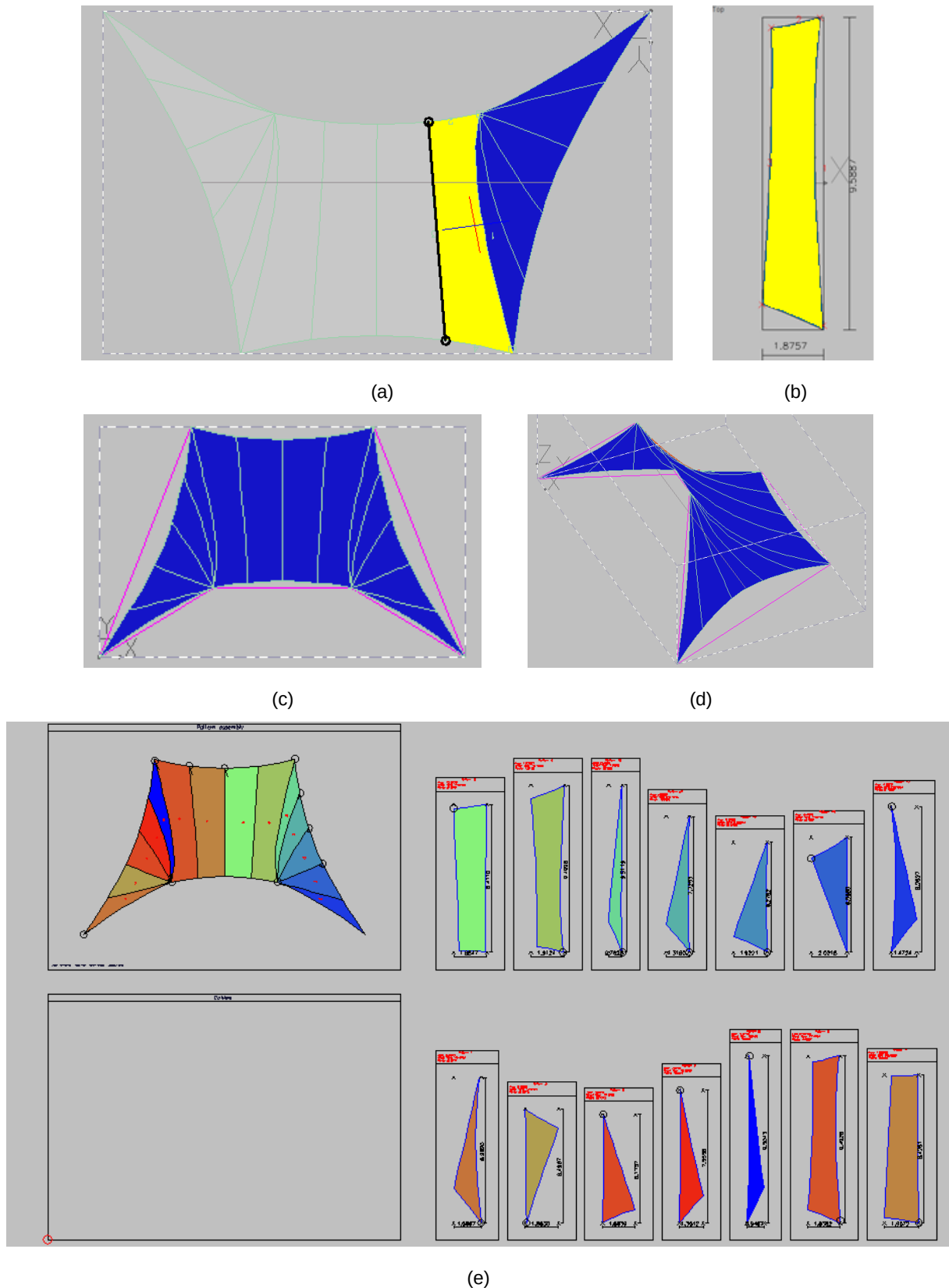


Figura 2.21 – Fase de definição dos padrões de corte (Ferreira 2010): (a) Intenção geométrica da superfície com evidência das linhas geodésicas; (b) Padrão de corte; (c) Vista em planta; (d) Vista 3D e (e) Layout dos padrões de corte numerados e respectivos desenhos individuais

2.10. ESTRUTURAS DE MEMBRANA EM PORTUGAL

As estruturas de membrana em Portugal são relativamente escassas. Durante a Expo de 1998 foram construídas algumas estruturas de membrana pela empresa *CANOBBIO* que ainda existem atualmente. A estrutura mais complexa encontra-se à entrada da Feira Internacional de Lisboa (*FIL*), sendo realizada por um sistema de cabos, mastros e um arco, apoiando uma membrana tensa, como mostra a Figura 2.23 (a). Na proximidade desta estrutura (ver a Figura 2.23 (b)) existe um conjunto de coberturas de sombreamento cónicas invertidas, realizadas com uma membrana tensa colorida, como mostra a Figura 2.23 (c). Adicionalmente, no espaço circundante à *FIL*, encontra-se uma estrutura tubular suspensa por um conjunto de cabos e mastros, em que é utilizada uma membrana tensa na ligação entre estruturas tubulares contíguas, como mostra a Figura 2.23 (d).

Uma das estruturas mais emblemáticas em Portugal realizada com membranas tensas é o estádio de Faro-Loulé (ver a Figura 2.24). As duas bancadas do estádio, dispostas em lados opostos do relvado, dispõem de uma cobertura independente. A estrutura de cobertura é realizada por um sistema de cabos e mastros a apoiar a cobertura metálica com 8 setores de membrana tensa, apresentando uma forma global côncava. A membrana é realizada em poliéster revestida a PVC do tipo *Fluotop T2* da *Ferrari*, tendo sido produzida por especialistas de membranas da *CENO TEC GmbH*, em parceria com o gabinete de engenharia *IPL-Ingenieurplanung Leichtbau GmbH*.



(a)



(b)



(c)

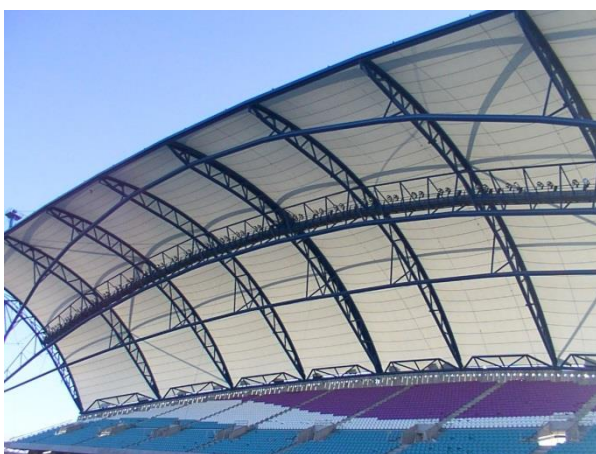


(d)

Figura 2.23 – Estruturas em membrana tensa construídas para a EXPO 1998, Lisboa, Portugal



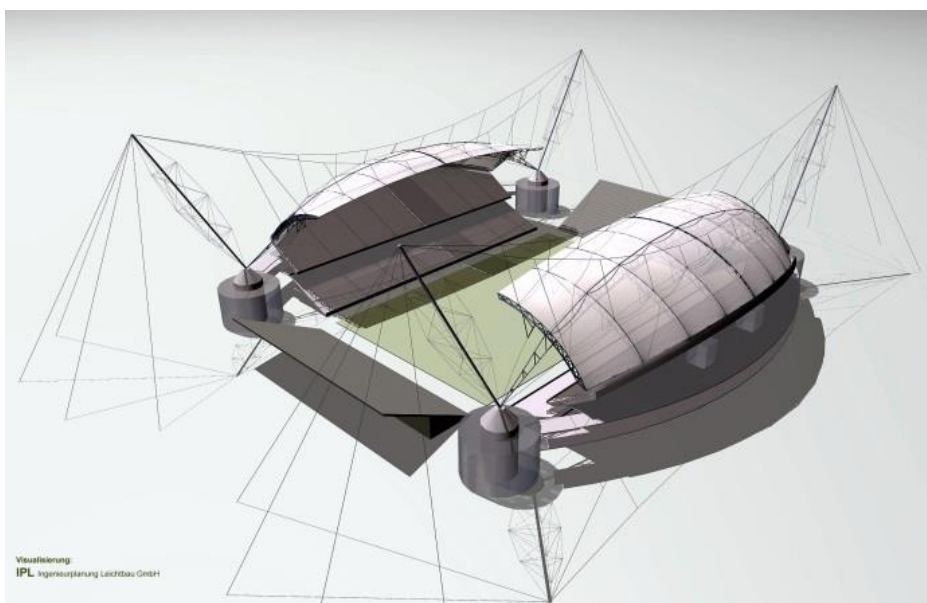
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 2.24 – Estádio de Faro-Loulé, Faro, Portugal (*TensiNet* 2004): (a) Vista global durante a construção; (b) e (c) Cobertura e (d) Projeto

Entretanto, foram construídas algumas estruturas em membrana tensa de pequena dimensão, essencialmente abertas e realizadas em *PVC*, no sentido de proporcionar proteção solar e à chuva. Estes exemplos encontram-se dispersos pelo país, quer em parques de estacionamento, com o formato de parabolóide hiperbólico (ver a Figura 2.25 (a)) e também com a forma cónica invertida (ver a Figura 2.25 (b)); em forma cónica em eventos e esplanadas, como mostram as Figuras 2.25 (c) e (d), ou à beira rio (ver a Figura 2.25 (e)).



(a)



(b)



(c)



(d)



(e)

Figura 2.25 – Estruturas de cobertura em membrana tensa em Portugal de pequena dimensão: (a) Cobertura em parabolóide hiperbólico do parque de estacionamento do supermercado *CONTINENTE*, Aveiro; (b) Cobertura cónica invertida do parque de estacionamento do supermercado *MAKRO*, Aveiro (*CANOBBIO*); (c) Cobertura cónica com bordos rígidos, Estoril (*TENSOTEC* 2007); (d) Cobertura cónica com bordos flexíveis, ilha da Madeira (*TENSOTEC* 2006); (e) Cobertura cónica com bordos flexíveis no Palácio do Freixo, Porto (*TENSOTEC* 2010)

No Centro Cultural de Belém (CCB) foram construídas 3 coberturas de sombreamento coloridas em parabolóide hiperbólico, cuja membrana é apoiada em cabos simplesmente apoiados na estrutura do edifício (ver a Figura 2.26 (a)).

No Mercado Municipal de Torres Vedras utilizou-se uma cobertura de membrana tensa realizada em PVC com a forma de parabolóide hiperbólico, apoiada em mastros, cabos e no edifício, como mostra a Figura 2.26 (b). Neste exemplo, é de notar ainda que parte da cobertura do edifício é realizada com uma estrutura pneumática realizada em ETFE de lâmina tripla.

Por vezes, estas estruturas estão associadas a obras de arte pelo que a sua forma nem sempre é claramente identificada. Na cobertura de sombreamento ao lado da Igreja da Aparecida, em Lousada, como mostra a Figura 2.26 (c), os módulos de membrana tensa triangulares estão dispersos numa estrutura metálica. A cobertura do museu do Benfica, em Lisboa, como mostra a Figura 2.26 (d), é uma estrutura metálica semiesférica com painéis de membrana tensa triangulares realizados em PVC.



(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 2.26 – Estruturas de cobertura em membrana tensa em Portugal de pequena dimensão: (a) Coberturas em parabolóide hiperbólico no Centro Cultural de Belém – CCB, Lisboa (TENSOTEC 2007); (b) Cobertura em parabolóide hiperbólico e associada a uma cobertura pneumática no Mercado Municipal de Torres Vedras (TENSOTEC 2010); (c) Cobertura de sombreamento, Lousada (IRMARFER) e (d) Cobertura do museu do Benfica, Lisboa (TOLNIBER 2013)

As estruturas de membrana de pequena dimensão utilizadas em Portugal são essencialmente abertas, mas também existem alguns exemplos fechados, ou conversíveis, como a cobertura do salão de eventos na Quinta da Ribeira, no Marco de Canaveses, como mostram as Figuras 2.27 (a) e (b). No Resort Zmar *Ecocamping*, em Zambujeira do Mar, são utilizadas várias coberturas em membrana tensa em PVC do tipo *Ferrari 1302 T2*, ora fechadas ora abertas, apresentando uma superfície duplamente cónica. Estas coberturas são utilizadas para cobrir uma zona de eventos, bem como 2 campos de padle e 1 de ténis (ver as Figuras 2.27 (c), (d), (e) e (f)).



(a)



(b)



(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 2.27 – Estruturas de cobertura em membrana tensa em Portugal de pequena dimensão: (a) e (b) Cobertura conversível para eventos na Quinta da Ribeira, Marco de Canaveses (*TensiNet* 1996); (c), (d), (e) e (f) Coberturas em duplo cone no Zmar *Ecocamping*, Zambujeira do Mar (*TENSOTEC* 2009)

Complementarmente, também existem exemplos de estruturas pneumáticas normalmente aplicando as películas *ETFE*, como é o caso de uma cobertura no palácio do Freixo no Porto (ver a Figura 2.28 (a)), ou da cobertura do centro comercial Dolce Vita Tejo, com múltiplas células de grandes dimensões (ver a Figura 2.28 (b)).



(a)

(b)

Figura 2.28 – Estruturas de cobertura pneumáticas em Portugal de pequena dimensão: (a) Cobertura pneumática no Palácio do Freixo, Porto (*TENSOTEC* 2010) e (b) Cobertura pneumática do Centro comercial Dolce Vita Tejo, Lisboa (*MARTIFER* 2005)

No caso de estruturas de membrana utilizadas em fachadas existem exemplos de fachadas exteriores no Freeport Alcochete, em Lisboa (ver a Figura 2.29 (a)), bem como fachadas para fechar edifícios e passadiços na Escola Superior de Saúde da Universidade de Aveiro, realizadas em *ETFE* (ver a Figura 2.29 (b)).



(a)

(b)

Figura 2.29 – Estruturas de fachada em membrana tensa em Portugal de pequena dimensão: (a) Freeport Alcochete, Lisboa (*TENSOTEC* 2004) e (b) Universidade de Aveiro, Aveiro (*TENSOTEC* 2011)

3

DETERMINAÇÃO E OTIMIZAÇÃO DA FORMA ESTRUTURAL

3.1. GERAL

As estruturas de cabos e membranas em tensão criam formas estruturais únicas. Tais formas não são conhecidas, *a priori*, e não podem ser definidas por simples funções matemáticas, ao contrário da forma de outros sistemas estruturais convencionais, construídos em alvenaria, betão ou aço.

O processo de dimensionamento através do qual o projetista define a forma ótima de sistemas estruturais de forma-ativa, é, frequentemente, denominado por determinação da forma. Este processo é, classicamente, considerado como um problema inverso da mecânica, uma vez que é procurada uma configuração de equilíbrio estático, tendo em conta o esforço pretendido para os elementos que compõem a estrutura. A análise estática acaba por estar ligada ao conceito da determinação da forma estrutural, embora constitua o problema direto, em que os esforços dos elementos são um resultado da análise e não um dado do problema.

A definição de determinação da forma apresentada é geralmente aceite e usada. No entanto, tem sido criticada por Haber e Abel (1982b), na medida em que, em muitas situações, não só a configuração inicial é desconhecida, como também os esforços. Desta forma, os mesmos autores sugerem a denominação *problema de equilíbrio inicial*. Dieringer *et al.* (2012) apresentam também uma designação alternativa para determinação da forma: determinar a forma de equilíbrio de forças, de acordo com uma dada fronteira, em articulação com um estado de tensão específico. Na última década tem havido uma clara distinção entre determinação da forma clássica e moderna, de modo a contemplar condições adicionais, sendo, de certa forma, mais abrangente a designação: determinação de uma forma estrutural e arquitetónica apropriada (Coenders e Bosia 2006).

Alternativamente, o processo de determinação da forma pode ser visto como um caso particular de otimização estrutural, na medida em que a otimização é traduzida por uma ferramenta genérica matemática que permite resolver problemas inversos (Basso e Grosso 2011b; Bletzinger *et al.* 2010). Uma estrutura leve é definida pela utilização otimizada de material, de forma a transmitir em tensão as forças externas e o próprio pré-esforço. Consequentemente, um dos objetivos principais do procedimento de otimização estrutural aplicado às estruturas leves será o de minimizar os esforços de flexão. Isto corresponde a minimizar a energia de deformação interna, mais do que a minimizar o peso de material, como poderia facilmente sugerir o termo “estruturas leves” (Bletzinger e Ramm 2001).

Neste contexto, Bletzinger *et al.* (2005) consideram existirem duas linhas de investigação na geração de formas estruturais - a “determinação da forma”, e a “otimização estrutural”, sendo a primeira mais

direcionada para estruturas tensas (cabos e membranas), enquanto a outra é mais genérica, englobando todo o tipo de sistemas estruturais.

Os métodos de determinação da forma subdividem-se em dois grupos. O primeiro grupo tem a ver com a geração de formas em tração pura, segundo a analogia das películas de sabão. Este está relacionado com a definição de superfícies minimais. O segundo grupo tem a ver com os modelos suspensos, usados amplamente na geração de estruturas em compressão, por inversão de estruturas tensas, tais como os modelos de correntes suspensas de Antoni Gaudí, ou os modelos de membranas suspensas de Heinz Isler (Ramm *et al.* 1993; Bellés *et al.* 2009; Isler 1994; Chilton e Isler 2000; Abel *et al.* 2011).

Com o advento dos computadores a partir da década de 60, os modelos físicos foram sendo complementados por métodos numéricos.

Na determinação da forma de membranas tensas, devem-se cumprir requisitos estruturais e arquitetónicos, dado que a superfície tem de resistir às ações atuantes e tem de cumprir condições espaciais, respetivamente. Dada a interligação entre a forma e a distribuição de esforços, terá de haver um compromisso entre o que se pretende e o que é possível do ponto de vista estrutural.

Na determinação da forma é procurada uma solução com tensões uniformes, ou com variação ligeira de tensão ao longo da superfície de membrana, não sendo estas necessariamente iguais nas direções da teia e da trama. Deste modo, a solução deste processo é ditada pelas condições de fronteira e pelas tensões impostas aos elementos contínuos utilizados na modelação da superfície (ou pelas “densidades de força” impostas aos elementos lineares utilizados nos análogos modelos de rede). Se os elementos do modelo estiverem alinhados com as direções principais de fabrico, teia e trama, então as tensões estarão em correspondência com estas direções. Dado que nesta fase se consideram nulas as tensões de corte, as tensões dos elementos serão as tensões principais. Daí as direções principais de fabrico serem preferencialmente alinhadas com as direções das linhas de curvatura principais, como discutido anteriormente no âmbito dos critérios de desenvolvimento dos padrões de corte, proporcionando maior rigidez e evitando tensões de corte elevadas sob as condições de carregamento mais relevantes.

Do ponto de vista teórico, a consideração de superfícies com tensões uniformes, à semelhança das superfícies minimais, e com suficiente pré-esforço, proporcionaria um melhor desempenho da membrana sob a ação turbulenta do vento (Forster e Mollaert 2004). Isto, porque dessa forma evitar-se-ia o enrugamento do tecido face a condições de descarga e carga, evitando consequentemente a fadiga dos fios do tecido e das suas fibras. Por outro lado, o comportamento do tecido a longo prazo é caracterizado por fluência significativa e relaxação do pré-esforço. Ora, se inicialmente as tensões forem uniformes, as deformações devidas a tensões não-uniformes provocadas pelos carregamentos serão inferiores e, consequentemente, haverá menor propensão à ocorrência de fenómenos de enrugamento a nível pontual. Este último efeito é mais suscetível de ocorrer quando são considerados inicialmente rácios elevados entre as tensões principais, originando consequentemente a relaxação do tecido nessas zonas como forma de compensação, tornando as tensões mais uniformes.

O peso próprio é em geral desprezado na determinação da forma da membrana, sendo incluído apenas nas análises aos carregamentos realizadas posteriormente. A primeira vantagem desta opção prende-se com o facto da solução inicial depender apenas dos rácios de pré-esforço, em vez das magnitudes do pré-esforço. A magnitude do pré-esforço pode ser ajustada durante as análises subsequentes sem ter de repetir o processo de determinação da forma. A segunda vantagem está relacionada com superfícies aproximadamente planas, dado que, desprezando o peso próprio na determinação da forma, implica uma maior restrição nas deformações devidas à ação do vento, nas análises subsequentes (Forster e Mollaert 2004).

Deste modo, pretende-se neste capítulo estudar os métodos existentes de determinação da forma de estruturas formadas por cabos e membranas. Inicia-se este capítulo com a apresentação dos modelos físicos e analíticos, que, embora pouco precisos, foram ferramentas úteis antes do advento dos computadores. De seguida, descrevem-se os modelos minimais, fazendo a transição entre a modelação física das películas de sabão e o seu cálculo numérico. Finalmente, abordam-se os métodos numéricos.

Na secção dos métodos numéricos é realizada a classificação dos métodos existentes, distinguindo-se 4 grupos: métodos de *matriz de rigidez*, de *rigidez geométrica*, de *equilíbrio dinâmico* e, finalmente, de *otimização estrutural evolucionária*. De seguida, são estudados os métodos dominantes para o cálculo de estruturas de cabos e membranas tensas: o *Método da Densidade de Força (MDF)*; o *Método da Densidade de Tensão Superficial (MDTS)* e o *Método da Relaxação Dinâmica (MRD)*. Estes são implementados em ambiente *MATLAB*[®] e validados com recurso a exemplos numéricos encontrados na bibliografia.

3.2. MODELOS FÍSICOS

Antes do advento dos computadores, o dimensionamento das estruturas em membrana tensa era realizado a partir de modelos físicos. No entanto, apesar da precisão obtida ser limitada, este método dava ao projetista uma maior intuição e compreensão, acerca do comportamento estrutural.

Essencialmente, distinguem-se dois tipos de modelos físicos para a determinação da forma de uma membrana. No primeiro modelo, uma película de sabão é gerada entre fronteiras rígidas, formadas por arames ou fios. Consequentemente, os modelos são relativamente reduzidos, embora permitam criar uma base de dados geométricos, fotografando adequadamente. Porém, dado que a película cria uma superfície de tensão constante, nem sempre fornece a solução ótima.

Alternativamente, se os modelos forem construídos com base em membranas elásticas ou tecidos, a curvatura da superfície é controlada. Deste modo, podem ser utilizadas várias técnicas, consoante o tipo de projeto e os materiais utilizados, por forma a atingir fins específicos.

Por exemplo, para conseguir maior curvatura em membranas plásticas, pode ser aplicado calor localmente. Outra técnica é o aumento da rigidez da membrana formada com tecidos de *nylon*, através da aplicação de resinas epóxicas.

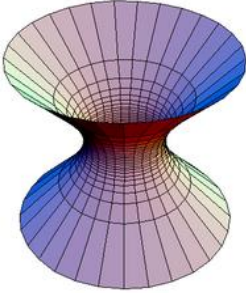
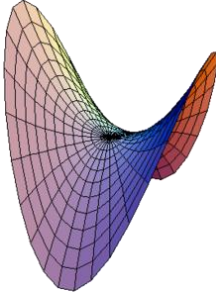
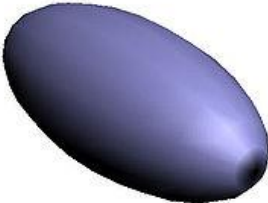
No passado, os modelos físicos construídos permitiam, também, criar os padrões de corte, de uma forma detalhada.

3.3. MÉTODOS ANALÍTICOS

As expressões analíticas para a determinação da geometria das formas mais comuns em estruturas de membrana apresentam-se na Tabela 3.1. De uma forma geral, estas permitem definir as formas em relação a um sistema de eixos x , y e z , sendo a curvatura da superfície controlada pelas constantes a , b e c . Em primeiro lugar está o hiperbolóide de uma folha, que é uma superfície de regras duplas, ou seja, por cada ponto da superfície passam duas retas totalmente contidas na superfície (ver a Figura 3.1 (a)). No caso de ser um hiperbolóide de revolução ($a = b$), a sua forma pode ser obtida a partir da rotação de uma reta em torno de uma reta de suporte ou então, a partir da giração de uma hipérbole em torno do eixo transversal. Se a expressão analítica do hiperbolóide for igual a 0 (em vez de 1), é originado um cone ($a = b$), ou um cone elítico, dando origem a um hiperbolóide degenerado. Em segundo lugar, apresenta-se outra superfície duplamente regrada, o parabolóide hiperbólico, em forma de sela (ver a Figura 3.1 (b)), que possui um ponto crítico denominado ponto de sela. Finalmente, em

terceiro lugar apresenta-se a forma de um elipsóide que resulta da rotação de uma elipse em torno de um dos seus eixos. No entanto, esta forma será mais indicada para membranas pneumáticas.

Tabela 3.1 – Hiperbolóide, parabolóide hiperbólico e elipsóide

Hiperbolóide	Parabolóide hiperbólico	Elipsóide
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	$\frac{z}{c} = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
		



(a)



(b)

Figura 3.1 – Superfícies duplamente regradas: (a) Hiperbolóide (Wikipedia 2013) e (b) Parabolóide hiperbólico (The University of Arizona 2013)

3.3.1. MÉTODO DA SUPERFÍCIE MINIMAL

O Arquiteto / Engenheiro Frei Otto deu o primeiro contributo, na década de 50, para a arquitetura das membranas leves, ao realizar experiências, em película de sabão (ver a Figura 3.2), no processo de determinação da forma.

A película de sabão cria um estado de tensão superficial, homogéneo e isotrópico, com energia potencial mínima, originando uma superfície minimal, com a mínima área possível. Para além disso, a superfície é caracterizada por uma curvatura média nula. Embora as superfícies minimais nem sempre sejam as formas mais eficientes no âmbito das membranas tensas (Bridgens e Birchall 2012; Gosling *et al.* 2013), o recurso a estas na fase da determinação da forma destas estruturas constitui uma opção rápida, característica importante nesta fase de dimensionamento.

A Figura 3.2 representa uma superfície de revolução gerada pela rotação de uma catenária em torno de um eixo vertical. A forma gerada preenche as características mencionadas, anteriormente. Souza

(2008) estuda a determinação de superfícies mínimas e a sua aplicação nas estruturas de membrana, e apresenta uma metodologia puramente geométrica, através de uma formulação matemática em ambiente *MATLAB*®.

No entanto, estas superfícies têm sido amplamente estudadas, desde Lagrange, em 1760. Destacam-se os trabalhos realizados por Brezis e Lions (1983) e Berestycki e Brezis (1981), ao nível do comportamento da fronteira das superfícies minimais, com bordos móveis, retratando melhor este tipo de aplicações.

A formulação matemática para determinar uma superfície minimal baseia-se no problema de Plateau (1873). Este tem como objetivo encontrar a solução $u(x,y,z)$ da superfície S , nas coordenadas cartesianas, tal que a área da superfície gerada é mínima. Atente-se, por exemplo, nas condições de fronteira definidas pelas duas circunferências, representadas na Figura 3.3. Para estas condições de fronteira existe uma infinidade de soluções. No entanto, não é trivial a superfície gerada que minimiza a área da mesma. Por isso as películas de sabão são superfícies minimais, isto é, superfícies geradas que minimizam a área, tendo em conta determinadas condições de fronteira.

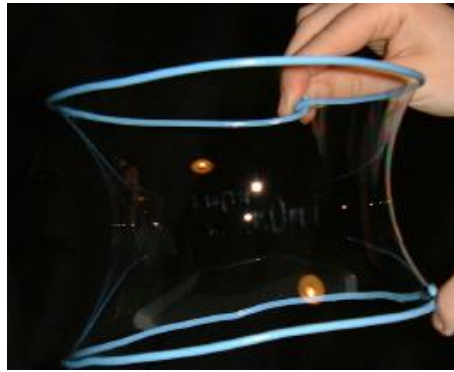


Figura 3.2 – Película de sabão (Wikipedia 2014a)



Figura 3.3 – 3 soluções distintas para as mesmas condições de fronteira (Souza 2008)

O problema da superfície minimal é um problema de minimização da área, $A(u)$, dada por

$$A(u) = \int_D (1 + |\nabla u|^2)^{\frac{1}{2}} dx_1 \dots dx_n \quad (3.1)$$

ou por

$$A(u) = \int_D (1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{1}{2}} dxdy \quad (3.2)$$

tal que u é a solução da superfície que minimiza a área $A(u)$ definida no espaço cartesiano, ∇u é o gradiente da solução u , u_x é a derivada da solução u em ordem a x e u_y é a derivada da solução u em

ordem a y . Assim, se a solução u minimizar a área $A(u)$, então satisfaz a condição da equação de Euler Lagrange (Debnath 1997), traduzida por

$$-\nabla \left(\frac{1}{(1 + |\nabla u|^2)^{\frac{1}{2}}} \nabla u \right) = 0 \quad (3.3)$$

ou por

$$-\nabla \left(\frac{1}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{1}{2}}} (u_x + u_y) \right) = 0 \quad (3.4)$$

também conhecida por equação da superfície minimal, e consiste numa equação diferencial parcial (*EDP*) não-linear.

A propagação de ondas não-lineares é a grande motivação para o estudo das *EDPs* não-lineares, surgindo mais aplicações, posteriormente, em várias áreas da matemática aplicada, como na dinâmica dos fluidos (Talay e Tubaro 1995), na ótica não-linear, na mecânica dos sólidos, na física dos plasmas, na dinâmica de cascas finas (Ames 1967), bem como nos sistemas dinâmicos em geral (Light 1991). Para o estudo dos métodos analíticos, aproximados e numéricos, assim como para as respetivas aplicações, remete-se também para Polianin e Zatsev (2004) e Abbott (1966).

A equação (3.4) é transformada numa *EDP* não-linear elítica, dada por (Bidégaray e Moisan 2000)

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0 \quad (3.5)$$

sendo u de classe C^2 , u_{xx} a derivada da solução u em ordem a x de segunda ordem, u_{yy} a derivada da solução u em ordem a y de segunda ordem, u_{xy} a derivada da solução u em ordem a x e y , e tem como significado físico que a curvatura média é nula em todos os pontos da superfície. Assim, a função pretendida $u(x,y)$ é determinada a partir da resolução de um problema de Dirichlet não-linear de uma equação elítica (Bidégaray e Moisan 2000).

A equação elítica é uma *EDP* linear de segunda ordem (Sodré 2003). Deste modo, dado que esta equação se traduz por um problema de valor na fronteira (*PVF*), a sua resolução é possível através de um método matricial iterativo (Ferreira 2012).

Alternativamente, a equação da superfície minimal pode ser resolvida com recurso ao *software MATLAB*[®], por intermédio da equação elítica, traduzida por

$$-\nabla \cdot (c \nabla u) + au = f \quad (3.6)$$

tal que, os coeficientes a e f são nulos, e o coeficiente c constitui o parâmetro não-linear e é dado por

$$c = \frac{1}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.7)$$

Definida a *EDP* não-linear elítica, poder-se-á obter qualquer superfície minimal, estabelecendo as condições de fronteira desejadas para cada contorno, de acordo com a condição de Dirichlet da equação

$$h \cdot u = r \quad (3.8)$$

em que, h , u e r representam, respetivamente, um fator de amplificação, a solução e o valor na fronteira. Assim, na fase de determinação da forma de uma membrana, pode-se obter uma superfície

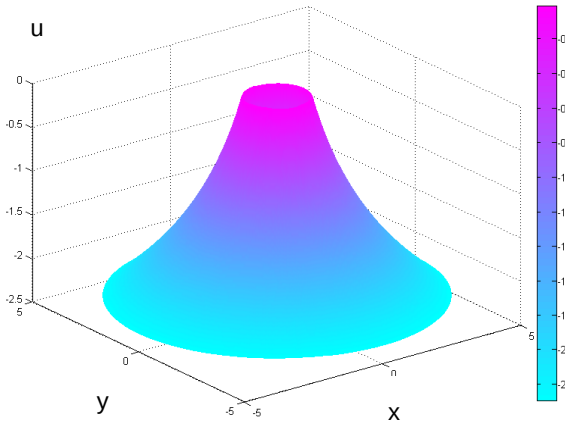
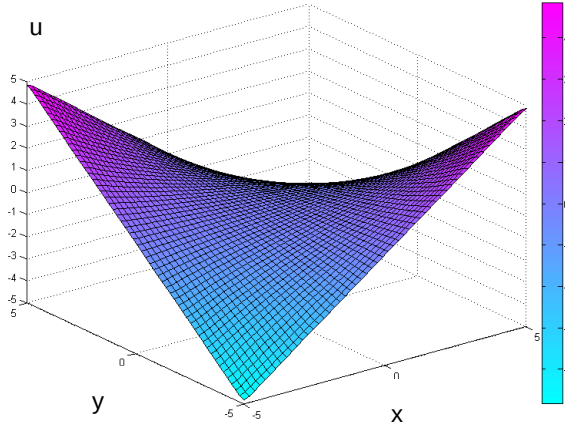
de uma forma fácil e rápida. Estas características são muito importantes, dado que nessa fase existe um conjunto de critérios a cumprir, nomeadamente espaciais.

De seguida, apresentam-se algumas formas utilizadas em membranas, tais como o catenóide, o parabolóide hiperbólico, a *sela de cavalo* e o *cume-vale*. Estas formas exibem dupla curvatura, de forma a resistirem a ações ascendentes e descendentes. Nestes exemplos, a forma inicial é obtida a partir da resolução de uma *EDP* não-linear, com aproximação a uma *EDP* elítica quase-linear.

No catenóide, apresentado na Tabela 3.2, as condições de fronteira são especificadas com base na caracterização espacial dos dois anéis delimitadores da superfície minimal. O raio do anel superior é de 1 metro e do inferior é de 5 metros. A altura do catenóide é de 5 metros.

No parabolóide hiperbólico, apresentado na Tabela 3.2, as condições de fronteira são definidas com base na caracterização espacial dos 4 bordos rígidos, delimitadores da superfície minimal. A superfície tem 10 metros de altura e cobre uma área de $10 \times 10 \text{m}^2$.

Tabela 3.2 – Superfícies minimais: Catenóide e Parabolóide hiperbólico

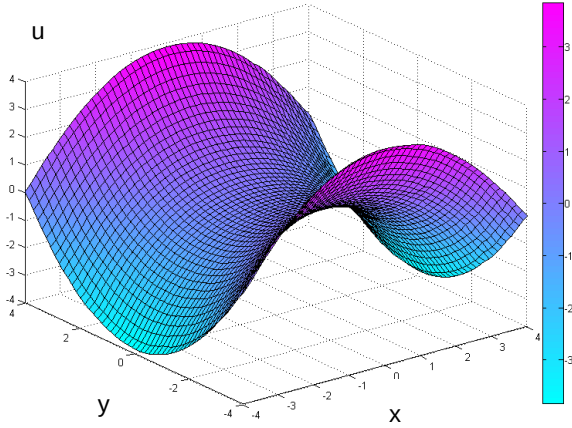
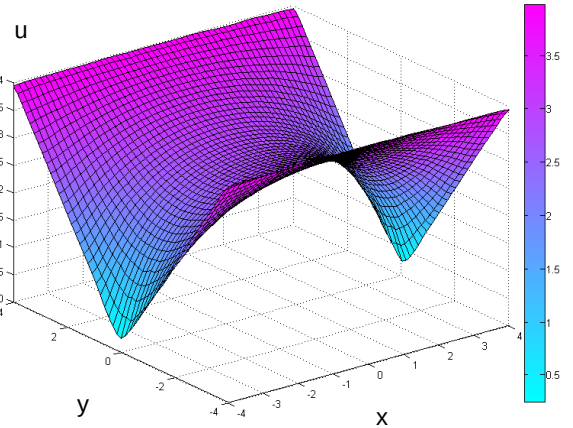
Catenóide	Parabolóide hiperbólico
$\begin{cases} u_{circ\ menor}(x,y) = f_0, \text{ para } 0 < r_0 < r_1 \\ u_{circ\ maior}(x,y) = f_1, \text{ para } r_0 < r_1 < \infty \\ f_0 = 0, r_0 = 1 \\ f_1 = -2.3, r_1 = 5 \end{cases}$	$\begin{cases} u(x_0,y) = u_A, \text{ para } y_0 \leq y \leq y_1 \\ u(x,y_0) = u_B, \text{ para } x_0 \leq x \leq x_1 \\ u(x_1,y) = u_C, \text{ para } y_0 \leq y \leq y_1 \\ u(x,y_1) = u_D, \text{ para } x_0 \leq x \leq x_1 \end{cases}$
(Condição de fronteira)	(Condição de fronteira)
	

Na forma do tipo *sela de cavalo*, apresentada na Tabela 3.3, as condições de fronteira são também definidas com base em 4 bordos. A superfície tem uma altura de 8 metros e cobre uma área de $8 \times 8 \text{m}^2$.

Por fim, na forma do tipo *cume-vale*, apresentada na Tabela 3.3, as condições de fronteira são definidas com base em 6 bordos. A superfície tem uma altura de 4 metros e cobre uma área de $8 \times 8 \text{m}^2$.

O processo de geração de superfícies, por esta via, é puramente geométrico. Deste modo, as tensões desenvolvidas na superfície resultante não são estimadas. No entanto, dada a importância do conhecimento destas tensões na fase de determinação da forma, torna-se indispensável a utilização de métodos alternativos que permitam obter as tensões geradas em simultâneo com a geometria. Posto isto, apresentam-se na secção 3.4 os métodos numéricos mais utilizados para esse fim.

Tabela 3.3 – Superfícies minimais: *Sela de cavalo* e *Cume-vale*

<i>Sela de cavalo</i>	<i>Cume-vale</i>
$\begin{cases} u(x_0, y) = u_A, \text{ para } y_0 \leq y \leq y_1 \\ u(x, y_0) = u_B, \text{ para } x_0 \leq x \leq x_1 \\ u(x_1, y) = u_C, \text{ para } y_0 \leq y \leq y_1 \\ u(x, y_1) = u_D, \text{ para } x_0 \leq x \leq x_1 \end{cases}$ $\begin{cases} u(-4, y) = (y/2)^2 - 4, \text{ para } -4 \leq y \leq 4 \\ u(x, -4) = -(x/2)^2 + 4, \text{ para } -4 \leq x \leq 4 \\ u(4, y) = (y/2)^2 - 4, \text{ para } -4 \leq y \leq 4 \\ u(x, 4) = -(x/2)^2 + 4, \text{ para } -4 \leq x \leq 4 \end{cases}$	$\begin{cases} u(x_0, y) = u_A, \text{ para } y_0 \leq y \leq y_1 \\ u(x, y_0) = u_B, \text{ para } x_0 \leq x \leq x_1 \\ u(x_1, y) = u_C, \text{ para } y_0 \leq y \leq y_1 \\ u(x, y_1) = u_D, \text{ para } x_0 \leq x \leq x_1 \end{cases}$ $\begin{cases} u_A = u_B = u_C = u_D = y \\ u_A \text{ e } u_C, \text{ para } -4 \leq y \leq 4 \\ u_B \text{ e } u_D, \text{ para } -4 \leq x \leq 4 \end{cases}$
(Condição de fronteira)	(Condição de fronteira)
	

3.4. MÉTODOS NUMÉRICOS

No problema de encontrar a forma apropriada de uma membrana tensa deve-se atender à perspectiva estrutural e arquitetônica. Por um lado, a superfície de membrana tem de resistir às ações atuantes, cumprindo requisitos estruturais, e tem ainda de cumprir condições espaciais, resultantes de especificações arquitetônicas. Dada a interligação entre a forma e a distribuição de esforços, em estruturas de membrana, terá de haver um compromisso entre o que se pretende e o que é possível, do ponto de vista estrutural. No entanto, os métodos numéricos vieram facilitar o estudo da interação da forma com a distribuição de esforços, agregando estas temáticas num único problema.

Deste modo, pretende-se sintetizar o atual estado de conhecimento acerca dos métodos numéricos utilizados na determinação e otimização da forma estrutural e na análise de estruturas leves, identificando-se vantagens e desvantagens na utilização de métodos específicos. Para além disso, dado que as estruturas leves são constituídas, essencialmente, por elementos do tipo de cabo, de barra e de membrana, pretende-se também distinguir os métodos com base no tipo de elementos que podem ser utilizados.

3.4.1. CLASSIFICAÇÃO

Nas últimas 5 décadas foram desenvolvidos vários métodos de determinação da forma estrutural de estruturas leves, de acordo com o esquematizado na Figura 3.4, onde se apresenta a evolução temporal desses métodos, enquadrados em 4 grupos distintos (Munghan e Abel 2011; Veenendaal e Block 2012):

- *Métodos de matriz de rigidez* - baseiam-se na utilização das matrizes de rigidez elástica e geométrica, sendo os mais antigos dentre os métodos da determinação da forma e facilmente incorporados na análise estrutural;
- *Métodos de rigidez geométrica* - são independentes das propriedades dos materiais utilizados, sendo unicamente dependentes de uma rigidez geométrica. Na grande maioria, estes métodos baseiam-se na definição de uma densidade de força por unidade de comprimento dos elementos;
- *Métodos de equilíbrio dinâmico* - resolvem o equilíbrio dinâmico estrutural de forma a obter a solução em fase estacionária, correspondente à solução de equilíbrio estático.
- *Método de Otimização Estrutural Evolucionária (MOEE)* - respondem às necessidades arquitetónicas atuais, geralmente traduzidas por formas complexas, caso em que têm vindo a desempenhar um papel relevante.

Inicialmente, a formulação dos métodos acima referidos permitia apenas a determinação da forma de estruturas discretizadas em elementos de barra, dada a grande utilização de coberturas formadas por grelhas de cabos. Posteriormente, com a utilização crescente das membranas como elementos estruturais em estruturas de cobertura, os métodos começaram a incluir elementos de superfície, esquematicamente representados com triângulos na Figura 3.4.

3.4.2. MATRIZ DE RIGIDEZ

O grupo dos métodos denominados de matriz de rigidez é o menos bem definido, não havendo uma classificação consensual pelos vários autores que os têm estudado. Consequentemente, poderão encontrar-se outras denominações, tais como: computação de ligações não-lineares (Schek 1974), ereção computacional (Linkwitz 1976), iterações de Newton-Raphson (Barnes 1977), análise de deslocamentos não-linear (Haber e Abel 1982a) e rigidez transiente (Lewis 2003). Note-se que dentre

estas classificações, enumeradas cronologicamente, ora são referenciadas publicações de Haug e Powell (1972), ora de Argyris, Angelopoulos, *et al.* (1974).

Os métodos de matriz de rigidez citados na Figura 3.4 são equivalentes. O método de Haug e Powell (1972) é uma extensão 3D do método de grelha, apresentado por Siev e Eidelman (1964) para determinar a forma de uma malha de cabos pré-esforçada, e o *Método da Densidade de Força natural MDFn* (Argyris, Angelopoulos, *et al.* 1974) foi usado originalmente para determinar a forma a partir de um estado plano com base na aplicação de deslocamentos nos suportes. Tabarrok e Qin (1992) desenvolveram um método que permitia a consideração de elementos de superfície, aplicado à determinação da forma de estruturas de membrana reforçadas com cabos em vez de malhas de cabos.

Ainda nesta categoria, são de salientar os métodos vetoriais de gradiente não-linear, desenvolvido por Buchholdt (1999), baseado na minimização de energia potencial total do sistema, sendo geralmente aplicado a malhas de cabos pré-esforçadas. Referem-se nesta categoria os métodos de descida acentuada, bem como o método dos gradientes conjugados. No entanto, verifica-se que estes últimos são menos robustos do que o método de Newton-Raphson (Lewis 2003). Atualmente, o método dos gradientes conjugados é utilizado em conjunto com o *Método da Densidade de Força (MDF)*, enquadrado nos métodos de rigidez geométrica.

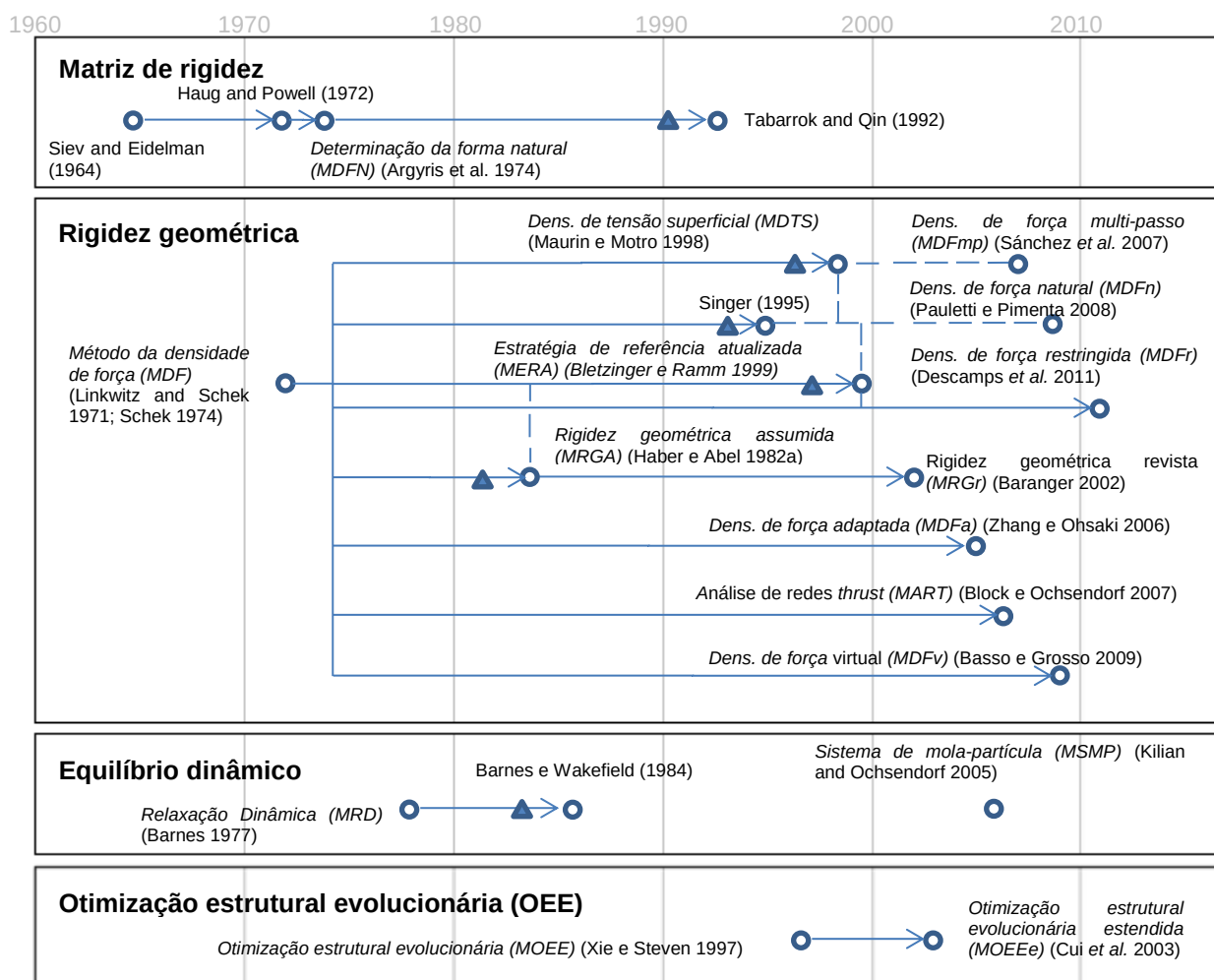


Figura 3.4 – Desenvolvimento e classificação dos métodos de determinação da forma, adaptado de Veenendaal e Block (2012)

Os métodos de matriz de rigidez incluem as propriedades dos materiais, o que, no caso da determinação da forma, pode ser desnecessário, tornando o cálculo computacional robusto, refletindo-se na dificuldade de controlar a convergência. Por este motivo, os métodos de rigidez geométrica, que são independentes das propriedades dos materiais, apresentam um grande desenvolvimento até à atualidade, desde que foi implementado o *MDF*, sendo abordados de seguida.

3.4.3. RIGIDEZ GEOMÉTRICA

3.4.3.1. Geral

O *MDF* foi desenvolvido pela necessidade da modelação computacional da cobertura de malha de cabos do estádio olímpico de Munique em 1972 (Linkwitz e Schek 1971). Até à data, a modelação era baseada em modelos físicos e analíticos, quando as formas não fossem muito complexas. Desde então, o *MDF* é um dos métodos mais utilizados na determinação da forma inicial de estruturas constituídas por malhas de cabos ou de estruturas em membrana tensa cuja discretização pode ser realizada através de uma malha de cabos. Em termos gerais este método consiste numa estratégia matemática de resolução direta das equações de equilíbrio através da utilização de um coeficiente de densidade de força q para cada elemento de cabo. Este coeficiente permite converter o conjunto de equações não-lineares, que traduzem o equilíbrio estrutural, num sistema de equações lineares de resolução direta.

O *MDF* deu origem a um conjunto de métodos com particularidades específicas. No entanto, esses métodos acabam por ser generalizações ou extensões do primeiro. Por norma, esses métodos são independentes do tipo de elementos utilizados, como é o caso do *Método da Densidade de Tensão Superficial (MDTS)* (Maurin e Motro 1998), do *Método da Estratégia de Referência Atualizada (MERA)* (Bletzinger e Ramm 1999), do *Método da Rigidez Geométrica Assumida (MRGA)* (Haber e Abel 1982a) e do *Método da Densidade de Força natural (MDFn)* (Pauletti e Pimenta 2008)), e as densidades de força são substituídas por forças ou tensões prescritas (Ye *et al.* 2012).

Neste contexto, é de referir o *Método da Densidade de Força Multi-passo (MDFmp)* (Sánchez *et al.* 2007), que permite determinar uma forma estrutural com base em forças ou tensões prescritas, respetivamente *MDFmpf* e *MDFmpt*. No processo iterativo deste método, as densidades de força são ajustadas até se obter uma distribuição uniforme de forças ou tensões, de tal forma que, no final desse processo, estas densidades são geralmente diferentes em todos os elementos devido ao reajustamento da geometria.

O *MDFmp* faz parte da segunda etapa do *Método de Determinação da Forma Preliminar com Superfície Ajustada (MDFPSA)* (ver a Figura 3.5). Esta etapa é seguida por uma fase denominada técnica de ajustamento superficial (Figura 3.5 (c)), que permite ajustar uma superfície paramétrica (*Non Uniform Rational Basis Spline Surfaces - NURBS*¹) à superfície obtida na segunda etapa. A principal razão para se parametrizar a superfície da membrana obtida prende-se com o facto de se poder obter qualquer ponto da superfície, para além dos pontos utilizados no processo de parametrização, através de um modelo matemático. Para uma *NURBS*, o modelo é definido por

$$Q(u, w) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} B_{i,j}^h N_{i,k}(u) M_{j,l}(w) \quad (3.9)$$

¹ as *NURBS* são utilizadas desde a década de 50 para criar e representar curvas e superfícies, sendo a engenharia automóvel um dos campos de aplicação.

tal que, B representa os vértices da malha de controlo homogénea quadri-dimensional, N e M são as funções *B-spline* não-rotacionais de base, k e l são a ordem da superfície paramétrica, nas direções u e w , respetivamente, e h são as coordenadas homogéneas da malha de controlo. Esta superfície paramétrica é definida por dois parâmetros (u, w) que pertencem a um domínio paramétrico bidimensional (ver a Figura 3.6 (a)), que, por sua vez, origina um objeto espacial tridimensional (x, y, z), definindo a superfície. Deste modo, a forma da superfície é controlada pela malha de controlo B (Figura 3.6 (b)). A Figura 3.6 (c) mostra a superfície e a malha de controlo. A superfície não passa necessariamente pela malha de controlo, mas segue a sua forma. Apenas os pontos dos cantos da malha de controlo são coincidentes com a superfície paramétrica. Assim, a variação da posição de um nó arbitrário da malha de controlo poderá modificar a forma global da superfície paramétrica. Para evitar isso, é utilizada uma malha de controlo mais discretizada.

Embora o método de ajustamento superficial da membrana não esteja diretamente relacionado com os métodos numéricos de determinação da forma estrutural, é pertinente a sua abordagem, na medida em que, torna o *MDFPSA* mais robusto e de particular interesse. Assim, o *MDFPSA* permite criar uma superfície de membrana, combinando uma componente estrutural e uma componente geométrica, respetivamente o *MDFmp* e as *NURBS*.

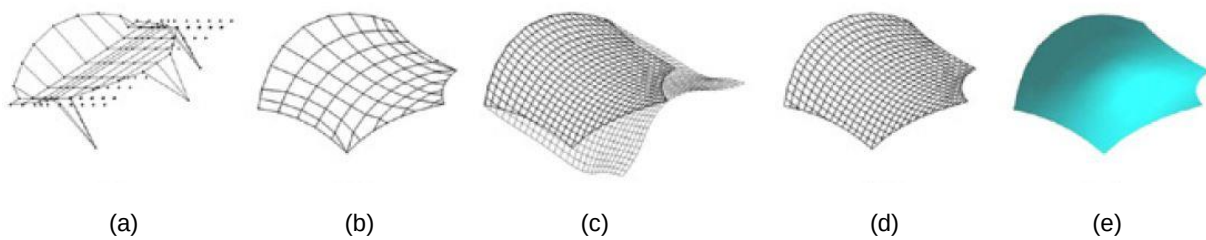


Figura 3.5 – Etapas do método de determinação da forma preliminar com superfície ajustada (*MDFPSA*) (Sánchez *et al.* 2007): (a) Topologia; (b) Determinação da forma; (c) Ajustamento superficial; (d) Corte da superfície e (e) Representação

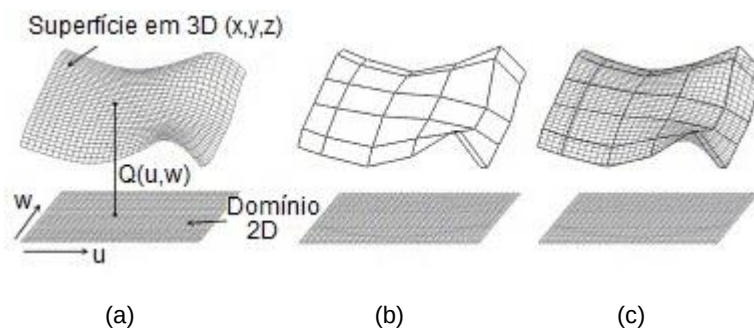


Figura 3.6 – Definição da superfície paramétrica (*NURBS*) (Sánchez *et al.* 2007): (a) Parâmetros da superfície; (b) Malha de controlo; (c) Superfície e malha de controlo

Um dos métodos numéricos dominantes na atualidade é o *Método da Estratégia de Referência Atualizada (MERA)* (Bletzinger e Ramm 1999) e baseia-se no princípio dos trabalhos virtuais (PTV). A sua formulação permite determinar a forma de uma membrana em equilíbrio, relativa a um tensor tensão superficial σ e condições de fronteira rígida ou móvel, respetivamente geométricas ou naturais (Dieringer *et al.* 2012). Por esta via, o problema pode ser resolvido através de métodos numéricos comuns, como o método dos elementos finitos, resultando num sistema matricial singular, decorrente da infinidade de discretizações possíveis para a mesma superfície. Deste modo, com vista a estabilizar o problema singular, o *MERA* utiliza uma formulação alternativa para a parcela do trabalho virtual interno, fundamentada no mapeamento homotópico (Allgower e Georg 1990). Para o efeito, para além da configuração deformada atual, onde atua o tensor tensão de Cauchy σ , é considerada uma configuração de referência (ver a Figura 3.7), onde atua o segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff S . Consequentemente, a estratégia consiste em aproximar as duas configurações. No entanto, a resolução do problema depende de um fator de continuidade, λ , embora a convergência seja garantida, arbitrando um valor constante, e pequeno o suficiente, entre 0 e 1.

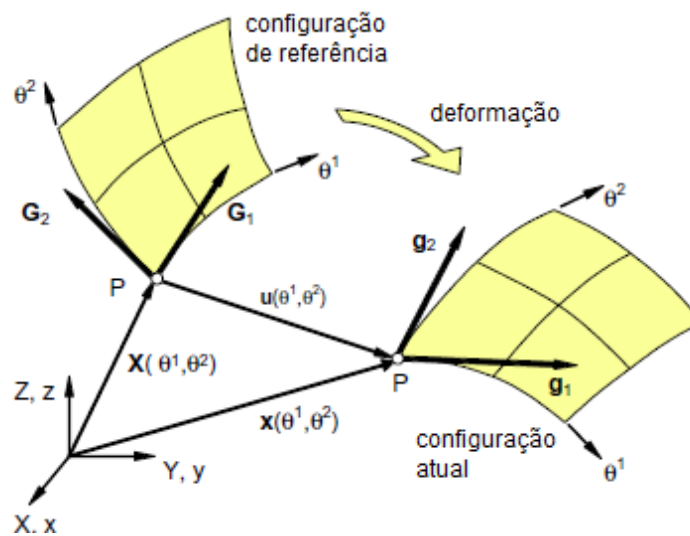


Figura 3.7 – Deformação da superfície (Bletzinger *et al.* 2005)

No entanto, a formulação do *MERA* apresentada refere-se à determinação da forma de uma superfície com um campo de tensões uniforme, seguindo a analogia dos filmes de sabão. Porém, em algumas situações, deve ser considerada uma superfície com um pré-esforço anisotrópico, atendendo à natureza do material da membrana, bem como às ações atuantes sobre a estrutura, como do vento ou da neve, resultando numa superfície que difere da superfície ideal minimal. Neste sentido, de forma a contemplar as condições de anisotropia, a formulação do *MERA* é atualizada (Wüchner e Bletzinger 2005), introduzindo uma superfície de referência, denominada faixa de referência, cuja função é definir o campo de tensões. A Figura 3.8 ilustra parte da superfície de referência da membrana e em baixo o plano de referência adicional. Este último inclui os vetores que definem a direção do pré-esforço prescrito inicialmente na faixa f_1 e f_2 . A direção do pré-esforço T_1 , na superfície de referência, é definida pela linha de interseção entre os planos tangente e de projeção, e a direção T_2 é ortogonal à primeira e ao vetor G_3 , normal à superfície. Como nota final, refere-se ainda que um fator de continuidade λ igual a zero, associado a uma discretização estrutural traduzida por uma malha de elementos de barra, é equivalente ao método da densidade de força, sendo o coeficiente de densidade de força q traduzido pelo segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff S (Wüchner e Bletzinger 2005).

À semelhança do método anterior, também o *Método da Rigidez Geométrica revista (MRGr)* (Baranger 2002) permite controlar a forma geométrica e a distribuição de pré-esforço pretendidos. Esse controlo é realizado a partir da definição de um coeficiente de tensão ortotrópico r , dado pela razão entre a tensão na direção da teia e da trama. Geralmente, estas são definidas de acordo com as propriedades do tecido empregue na membrana estrutural. Deste modo, os efeitos de enrugamento da membrana são controlados no decorrer da análise. No final da análise, a solução corresponderá a uma superfície minimal se for utilizado um coeficiente r igual a 1.

É de salientar que o método anterior surge na sequência do *Método de Rigidez Geométrica Assumida (MRGA)* (Haber e Abel 1982a) que tem como particularidade uma formulação de escorregamento especial, para ter em conta movimentos relativos entre a membrana e os restantes componentes estruturais. Para além disso, os autores deste método desenvolveram uma ferramenta computacional interativa com o intuito de realizar o projeto de estruturas de membrana, em particular a determinação da forma, podendo ser levada a cabo por variados métodos, em simultâneo, ou, individualmente.

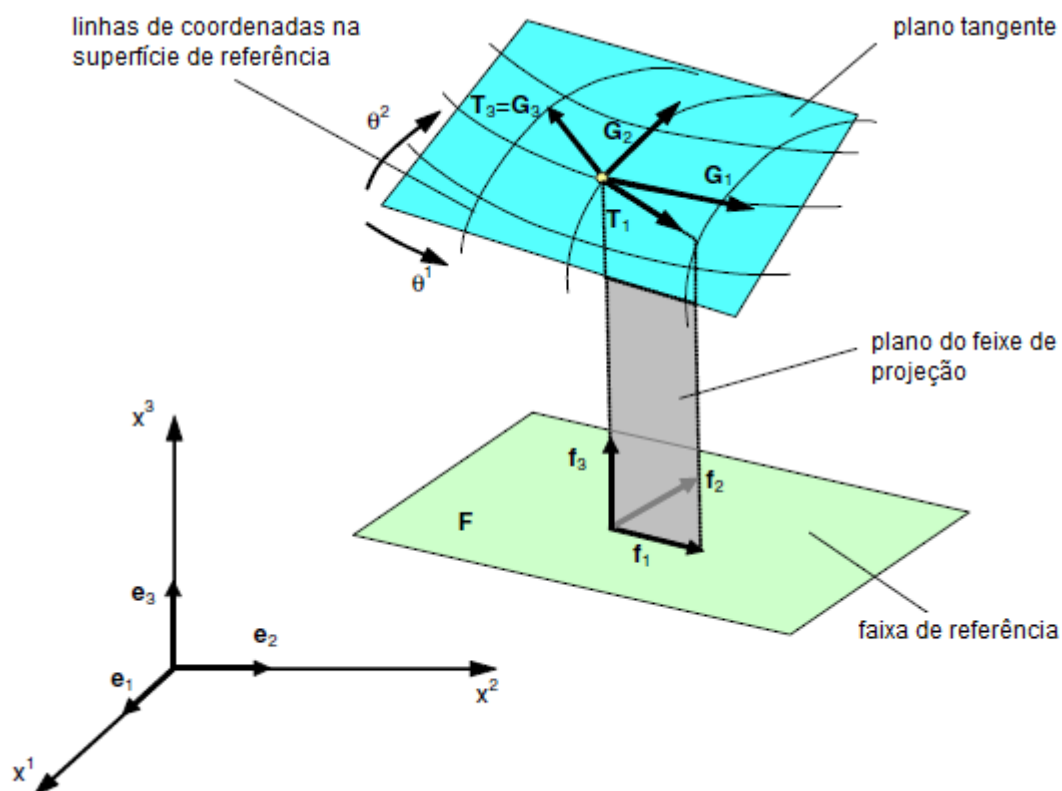


Figura 3.8 – Projeção do pré-esforço na superfície de referência da membrana (Wüchner e Bletzinger 2005)

As estruturas do tipo *tensegrity* começam a ganhar expressão no contexto das estruturas leves e, por consequência, no âmbito da utilização das estruturas de membrana. Estas estruturas são definidas por um conjunto de membros descontínuados, em compressão, no meio de uma malha contínua de membros tracionados (Motro 2003; Tibert e Pellegrino 2003)(ver a Figura 3.9). O sistema estrutural é composto por várias ligações entre membros, com três graus de liberdade, sendo mecanicamente estabilizado pela atuação de uma força de pré-esforço, permitindo o autoequilíbrio do sistema, sem qualquer atuação de forças externas. Este último facto é o que distingue os métodos utilizados em

estruturas do tipo *tensegrity*, em relação ao *MDF*. Geralmente, na modelação deste tipo de estruturas, o peso próprio dos membros é desprezado e os nós têm pouco atrito. Neste contexto, é de destacar o *Método da Densidade de Força adaptada (MDFa)* (Zhang e Ohsaki 2005), havendo outros métodos semelhantes na formulação utilizada (Estrada *et al.* 2006; Tran e Lee 2010b; Tran e Lee 2010a).

A título de exemplo, a Figura 3.9 (a) apresenta um hexágono com densidade de força $q = 1$ e $q = -0,5$, respetivamente, nos cabos e barras, em que as barras são representadas com linhas mais espessas. As Figuras 3.9 (b), (c) e (d) são exemplos estudados por Mohr (1885), Graver *et al.* (1993) e Connelly e Back (1995), respetivamente. Em termos de estruturas tridimensionais, são apresentadas na Figura 3.9 (e) um octaedro expandido (Tibert e Pellegrino 2003), na Figura 3.9 (f) um tetraedro truncado (Pellegrino 1986; Motro 2003) e na Figura 3.9 (g) um icosaedro truncado (Murakami e Nishimura 2001; Ramar e Guest 2011).

A formulação do *MDF* deu, também, origem a métodos de determinação da forma de estruturas em compressão, tais como o *Método de Análise de Redes Thrust (MART)* (Block e Ochsendorf 2007; Block 2009) e o *Método da Densidade de Força Virtual (MDFv)* (Basso e Grosso 2009).

O *MART* aplica-se à determinação da forma e análise de estruturas em abóbada não reforçadas (ver a Figura 3.10) e tem como objetivo encontrar soluções funiculares possíveis, inseridas num conjunto de soluções definido inicialmente, segundo um carregamento em gravidade. Para além disso, este método permite aceder, de uma forma melhorada, à estabilidade de abóbadas históricas em alvenaria, como, por exemplo, em estruturas góticas (Block e Lachauer 2012). Este método é inspirado não só nos estudos de modelação das tensões principais em abóbadas de alvenaria, traduzidas por uma rede discreta de forças (O'Dwyer 1999), como também nos conceitos de dualidade, entre a geometria e as forças internas no plano de uma grelha (Williams 1984).

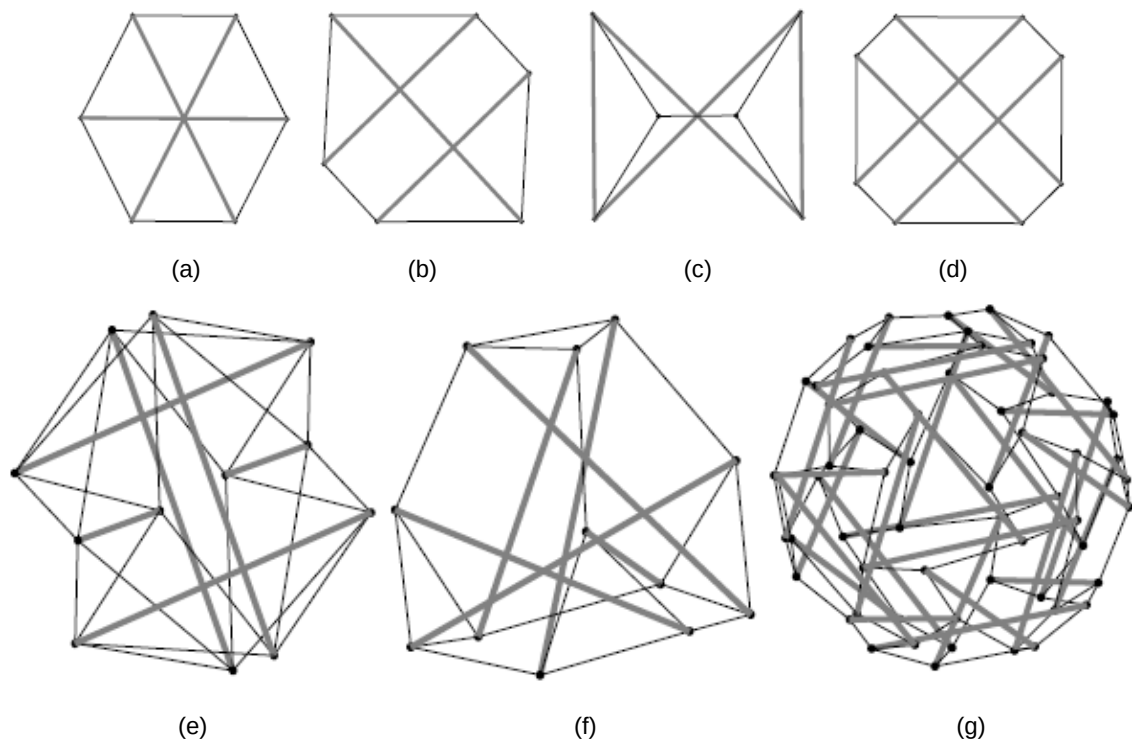


Figura 3.9 – Estruturas do tipo *tensegrity*, com os elementos em compressão representados por linhas espessas (Estrada *et al.* 2006): (a), (b), (c) e (d) Bidimensionais; (e), (f) e (g) Tridimensionais

Por sua vez, o *MDFv* resolve problemas de otimização geométrica de grelhas com cascas, em que a forma e o propósito da estrutura assumem maior importância do que propriamente o campo de tensões associado (Basso *et al.* 2009). A geometria da estrutura é dada pela grelha de base que dá suporte aos vários elementos de casca, geralmente diferentes uns dos outros. Deste modo, a otimização geométrica deste tipo de estruturas permite reduzir a heterogeneidade dos elementos de casca, de forma a facilitar todo o processo construtivo adjacente, nomeadamente o dimensionamento, produção, marcação e colocação das peças. Geralmente, este processo de otimização é realizado por técnicas evolucionárias e de gradientes, tais como algoritmos genéticos (GA) (Goldberg 1989; Koza 1996; Mitchell 1996; Pugnale e Sassone 2007), baseados na evolução humana. Complementarmente, é de referir que a principal diferença do *MDFv* em relação ao *MDF* prende-se com a alteração da matriz de conectividade e introdução do conceito de forças virtuais. A flexibilidade do *MDFv* permite a sua utilização em vários tipos de problemas de otimização estrutural, como por exemplo em estruturas com geometria variável (Grosso e Basso 2010; Basso e Grosso 2011a).

Por último, Descamps *et al.* (2011) estendem os conceitos do *MDF* à determinação de configurações geométricas preliminares de pontes suspensas e em arco (*Método da Densidade de Força Restringida - MDFr*). A forma ótima destas estruturas é obtida impondo restrições geométricas e combinando a formulação do *MDF* com algoritmos genéticos multiobjectivos. Descamps *et al.* (2011) estendem ainda a sua formulação a grelhas em compressão, utilizando quatro princípios fundamentais estruturais - equilíbrio, geometria, movimento e lei do material, intitulado *Método de Dimensionamento Normativo (MDN)*, onde englobam o processo de determinação da forma e de otimização estrutural. Nessa otimização estrutural estão envolvidas várias variáveis, tais como as coordenadas e os deslocamentos dos nós, bem como as densidades de força e as extensões dos elementos. A independência destas variáveis confere alguma liberdade no processo de otimização, resultando eventualmente em instabilidades numéricas e configurações não regulares. De forma a evitar estes resultados, são utilizadas funções, ou parâmetros de controlo, relacionando essas variáveis. Essas funções são incorporadas num método de filtragem que, a cada iteração, permite encaminhar a solução para uma configuração regular (Le *et al.* 2011). O método de filtragem utilizado baseia-se no método de filtragem de otimização topológica de estruturas contínuas (Bendsoe e Sigmund 2003), modificado por Bletzinger *et al.* (2009) no âmbito da otimização da forma de estruturas de casca.

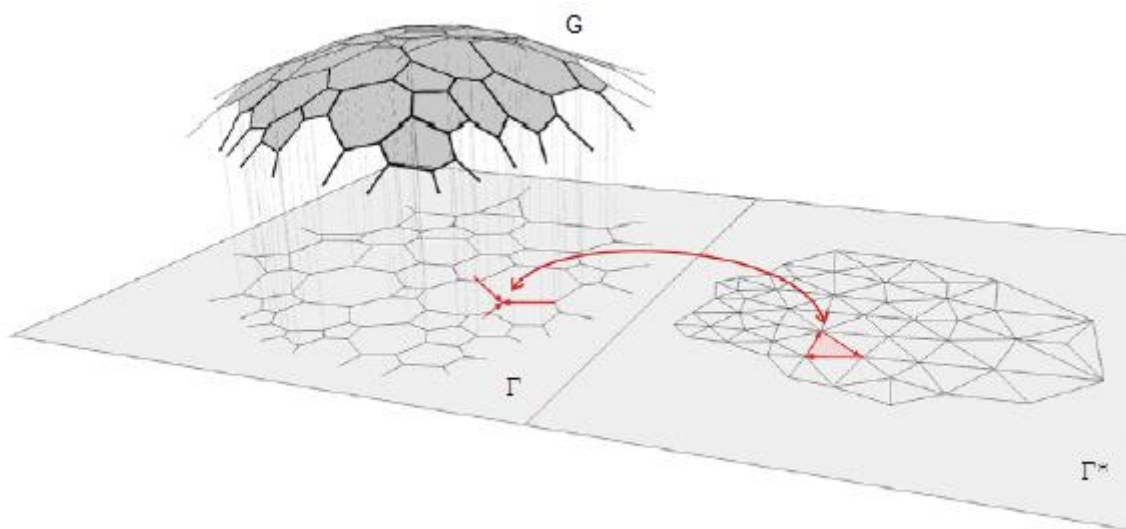


Figura 3.10 – Relação entre a casca em compressão G , a sua projeção no plano (malha primária Γ) e o diagrama recíproco (malha secundária Γ^*), para determinação do equilíbrio (Block e Ochsendorf 2007)

3.4.3.2. Método da Densidade de Força (MDF)

Introdução

Dada a importância que o *MDF* tem no grupo dos métodos de rigidez geométrica, e, por consequência, na determinação da forma de estruturas de membrana, foi desenvolvido um programa de cálculo automático em *MATLAB* (Ferreira 2013) com base na sua formulação. A validação do programa de cálculo automático é realizada por intermédio de exemplos práticos encontrados na bibliografia.

Uma das mais-valias do *MDF* prende-se com o facto de ser independente das propriedades dos materiais e das coordenadas iniciais. Para além destas vantagens, é de referir que é um método de fácil aplicação na geração de uma forma.

No contexto do *MDF* implementado no presente trabalho, são distinguidos dois métodos - linear e não-linear, respetivamente, *MDFl* e *MDFnl*, sendo o primeiro baseado na formulação original introduzida por Schek (1974) e o segundo semelhante ao *MDFl*, acrescentando-se uma parcela referente ao peso próprio dos elementos nas equações de equilíbrio. Em ambos os métodos, os cabos são discretizados em barras articuladas, unicamente com rigidez axial.

Método da densidade de força linear – *MDFl*

Na formulação do *MDFl*, as equações de equilíbrio de uma rede de cabos são estabelecidas para cada nó livre nas direções de um referencial cartesiano. Por exemplo, o equilíbrio do nó *i*, representado na Figura 3.11, é expresso por

$$\begin{aligned} t_a \cos(a, x) + t_b \cos(b, x) + t_c \cos(c, x) + t_d \cos(d, x) &= f_x \\ t_a \cos(a, y) + t_b \cos(b, y) + t_c \cos(c, y) + t_d \cos(d, y) &= f_y \\ t_a \cos(a, z) + t_b \cos(b, z) + t_c \cos(c, z) + t_d \cos(d, z) &= f_z \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde *t* representa o esforço axial em cada elemento com extremidade no nó *i*, as funções cosseno são as projeções do comprimento de cada elemento de cabo nas direções cartesianas e, finalmente, *f* representa a projeção da força nodal externa nas direções cartesianas. No entanto, as funções cosseno ao serem substituídas pelos comprimentos de projeção normalizados, em que, por exemplo, para a primeira ligação, *a*, na direção *x*, $\cos(a, x) = (x_i - x_m)/l_a$, as equações de equilíbrio (3.10) assumem a forma

$$\begin{aligned} t_a \frac{(x_i - x_m)}{l_a} + t_b \frac{(x_i - x_j)}{l_b} + t_c \frac{(x_i - x_k)}{l_c} + t_d \frac{(x_i - x_l)}{l_d} &= f_x \\ t_a \frac{(y_i - y_m)}{l_a} + t_b \frac{(y_i - y_j)}{l_b} + t_c \frac{(y_i - y_k)}{l_c} + t_d \frac{(y_i - y_l)}{l_d} &= f_y \\ t_a \frac{(z_i - z_m)}{l_a} + t_b \frac{(z_i - z_j)}{l_b} + t_c \frac{(z_i - z_k)}{l_c} + t_d \frac{(z_i - z_l)}{l_d} &= f_z \end{aligned} \quad (3.11)$$

Deste modo, o equilíbrio é traduzido por um conjunto de equações não-lineares, uma vez que o comprimento dos elementos, *l*, é função das coordenadas. Para além disso, existem $3n$ equações, referentes ao equilíbrio de *n* nós livres nas direções cartesianas, a $3n+2m$ incógnitas, referentes a $3n$ coordenadas dos nós livres, *m* esforços axiais e *m* comprimentos. Porém, se em cada ligação entre nós da equação (3.11) se substituir a quantidade *t/l* pela respetiva densidade de força, *q*, resulta

$$\begin{aligned} q_a(x_i - x_m) + q_b(x_i - x_j) + q_c(x_i - x_k) + q_d(x_i - x_l) &= f_x \\ q_a(y_i - y_m) + q_b(y_i - y_j) + q_c(y_i - y_k) + q_d(y_i - y_l) &= f_y \\ q_a(z_i - z_m) + q_b(z_i - z_j) + q_c(z_i - z_k) + q_d(z_i - z_l) &= f_z \end{aligned} \quad (3.12)$$

Assim, o conjunto de equações não-lineares converte-se num sistema de equações lineares de resolução direta, desde que as densidades de força q sejam conhecidas. Deste modo, para a geração da forma inicial de uma estrutura de malha de cabos são necessárias apenas a topologia estrutural, as coordenadas dos apoios e as densidades de força q , bem como as forças nodais, quando existentes. Em suma, no final do processo, obtém-se a geometria estrutural, traduzida pelas coordenadas dos nós livres e pelo comprimento dos elementos, bem como a distribuição de esforços.

A topologia estrutural define-se pela caracterização dos nós e dos elementos de barra, e da definição das extremidades esquerda e direita de cada elemento de barra. Assim, todos os nós e elementos são numerados, respetivamente, de 1 a n_s e de 1 a m . Os nós da estrutura são diferenciados em nós livres e fixos, n e n_f , respetivamente ($n_s = n + n_f$). Por norma, opta-se por colocar os nós fixos no final da numeração dos nós da estrutura.

A topologia estrutural da rede de cabos fica armazenada na matriz de conectividade, C_s , cujos coeficientes $c_{s,j,i}$ são definidos por

$$c_{s,k,p} = \begin{cases} +1 & , \text{para } p = i; \\ -1 & , \text{para } p = j; \\ 0 & , \text{outros;} \end{cases} \quad (3.13)$$

isto é, se cada membro k liga os nós i e j , em que $i < j$, então os elementos das colunas i e j da linha k da matriz C_s , são respetivamente 1 e -1. Para além disso, a matriz C_s é dividida em duas submatrizes,

$$C_{s[m \times n_s]} = [C \quad C_f] \quad (3.14)$$

onde C e C_f representam, respetivamente, os nós livres e fixos em relação aos respetivos elementos. Esta distinção entre nós livres e fixos é realizada uma vez que as coordenadas dos nós livres são incógnitas, ao contrário das coordenadas dos nós fixos que são definidas pelo utilizador.

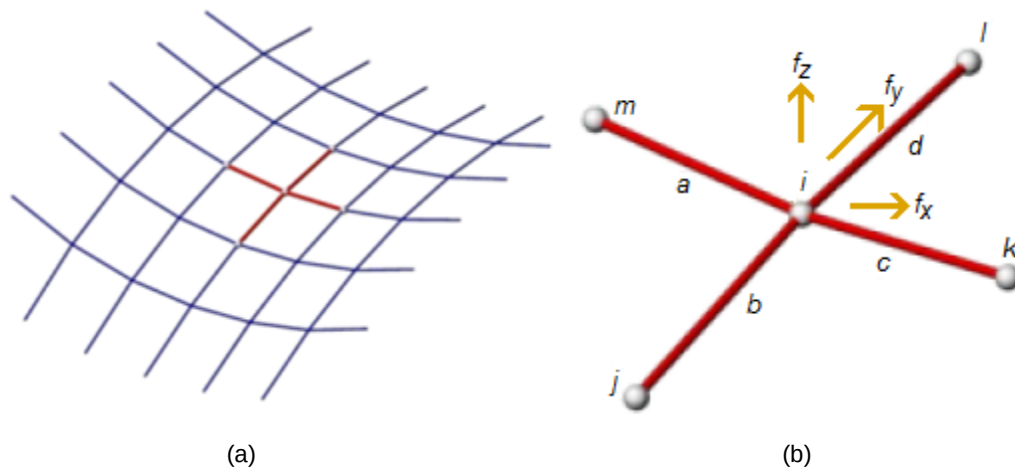


Figura 3.11 – Rede de cabos pré-esforçada (Gründig 2000): (a) Geometria e (b) Esquema do equilíbrio de um nó pelo MDFI

As diferenças de coordenadas dos nós dos elementos são definidas por u , v e w , respetivamente, para as direções x , y e z . A título de exemplo, a diferença de coordenadas entre os nós dos elementos na direção x toma a forma

$$u = C_s x_s = Cx + C_f x_f \quad (3.15)$$

tal que, x e x_f representam os vetores que contêm as coordenadas cartesianas dos nós livres e fixos, respetivamente, e x_s é o vetor que engloba os anteriores ($x_s = [x; x_f]$).

O equilíbrio de um nó, traduzido pela equação (3.11), estende-se, matricialmente, a todos os nós livres, sendo que na direção x , a título de exemplo, toma a forma

$$C^T U L^{-1} t = f_x \quad (3.16)$$

tal que U representa a matriz diagonal do vetor u , L representa a matriz diagonal do comprimento dos elementos, t representa o vetor do esforço axial dos elementos e f_x o vetor de forças externas aplicadas nos nós livres. Dado que o vetor de densidades de força $q = L^{-1} t$, a expressão (3.16) assume a forma

$$C^T U q = f_x \quad (3.17)$$

Com vista a desenvolver as equações de equilíbrio em ordem às incógnitas, a equação (3.17), em conjunto com a equação (3.15) e a seguinte igualdade

$$U q = Q u \quad (3.18)$$

toma a forma,

$$C^T Q C x + C^T Q C_f x_f = f_x \quad (3.19)$$

tal que Q é a matriz diagonal das densidade de força, q . A equação de equilíbrio (3.19) é resolvida em ordem à incógnita, x , tomando a seguinte forma

$$D x = f_x - D_f x_f \quad (3.20)$$

tal que $D = C^T Q C$ e $D_f = C^T Q C_f$. Assim sendo, a geometria da estrutura é determinada, resolvendo (3.20) em ordem às coordenadas dos nós livres x , por intermédio de

$$x_{[n \times 1]} = D^{-1} (f_x - D_f x_f) \quad (3.21)$$

As coordenadas dos nós livres y e z são determinadas de uma forma análoga à expressão (3.21).

(i) Exemplo – Rede de 12 cabos em 2D

De forma a ilustrar as propriedades do *MDFI*, e a validar a formulação implementada em *MATLAB*[®], apresenta-se um exemplo simples de uma estrutura de rede composta por 12 cabos, no plano xy , estudada por Tibert (1999). Os dados do problema são a topologia, de acordo com a Figura 3.12, as coordenadas cartesianas dos nós fixos, definidas no mesmo plano horizontal, apresentadas na Tabela 3.4, as forças externas aplicadas à estrutura, que neste caso se consideram nulas, e, por fim, as densidades de força definidas para os cabos, de valores a definir.

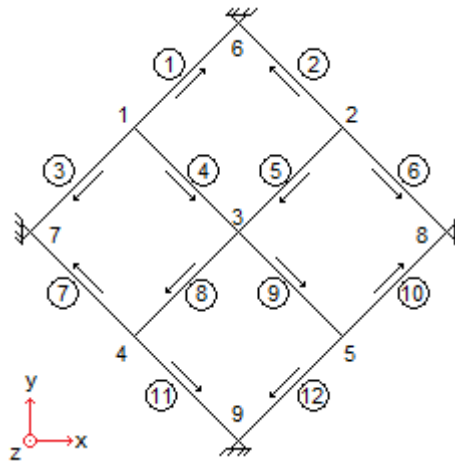


Figura 3.12 – Topologia da estrutura de rede de cabos

Tabela 3.4 – Coordenadas cartesianas dos nós fixos da estrutura de rede de cabos

Nó	x_f (m)	y_f (m)	z_f (m)
6	5	10	0
7	0	5	0
8	10	5	0
9	5	0	0

A matriz de conectividade C_s para a estrutura com a topologia apresentada na Figura 3.12, composta por $n = 5$ nós livres, $n_f = 4$ nós fixos, perfazendo um total de $n_s = 9$ nós, e $m = 12$ elementos de barra, é traduzida por

$$C_s = \begin{bmatrix} 1 & & & & -1 \\ & 1 & & & -1 \\ 1 & & & & -1 \\ & 1 & -1 & & \\ & 1 & -1 & & \\ & 1 & & & -1 \\ & & 1 & & -1 & -1 \\ & & 1 & -1 & & -1 \\ & & & 1 & & -1 \\ & & & 1 & & -1 \\ & & & & 1 & -1 \\ & & & & & 1 & -1 \\ \underbrace{\hspace{10em}}_C & \underbrace{\hspace{10em}}_{C_f} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

em que C e C_f são as submatrizes de conectividade da matriz C_s , representando, respetivamente, os nós livres e fixos, e os elementos da matriz sem valor são nulos.

A Figura 3.13 apresenta quatro configurações de equilíbrio distintas, para a estrutura apresentada, considerando diferentes valores de densidades de força: na Figura 3.13 (a), a densidade de força dos elementos numerados de 1 a 12 é de $q = 1N/m$; na Figura 3.13 (b), a densidade de força dos elementos numerados de 1 a 3 e de 5 a 12 é de $q = 1N/m$, e do elemento 4 é de $q = 10N/m$; na Figura 3.13 (c), a

densidade de força dos elementos numerados de 1 a 3 e de 5 a 12 é de $q = 1\text{ N/m}$, e do elemento 4 é de $q = -0,1\text{ N/m}$, em compressão e na Figura 3.13 (d), a densidade de força dos elementos interiores é de $q = 1\text{ N/m}$, e dos elementos de bordo é de $q = 5\text{ N/m}$.

Na Figura 3.13 (b), é de notar que um aumento da densidade de força num elemento, em relação aos restantes, leva a uma redução do seu comprimento. Pelo contrário, uma redução da densidade de força leva a um aumento do comprimento desse elemento, em relação aos restantes, tornando-se mais significativo para valores negativos (ver a Figura 3.13 (c)).

Embora Tibert (1999) apresente apenas as configurações resultantes, equivalentes às apresentadas na Figura 3.13, sem referência, quer às coordenadas dos nós fixos que lhes deram origem, quer à geometria resultante dos nós livres, verifica-se que os resultados são semelhantes, visualmente.

De forma a complementar os resultados obtidos para cada uma das configurações de equilíbrio ilustradas na Figura 3.13, apresentam-se na Tabela 3.5 as coordenadas dos nós livres e, na Tabela 3.6, para além das densidades de força q , os resultados em termos de comprimento, l , e do esforço axial, t , dos cabos.

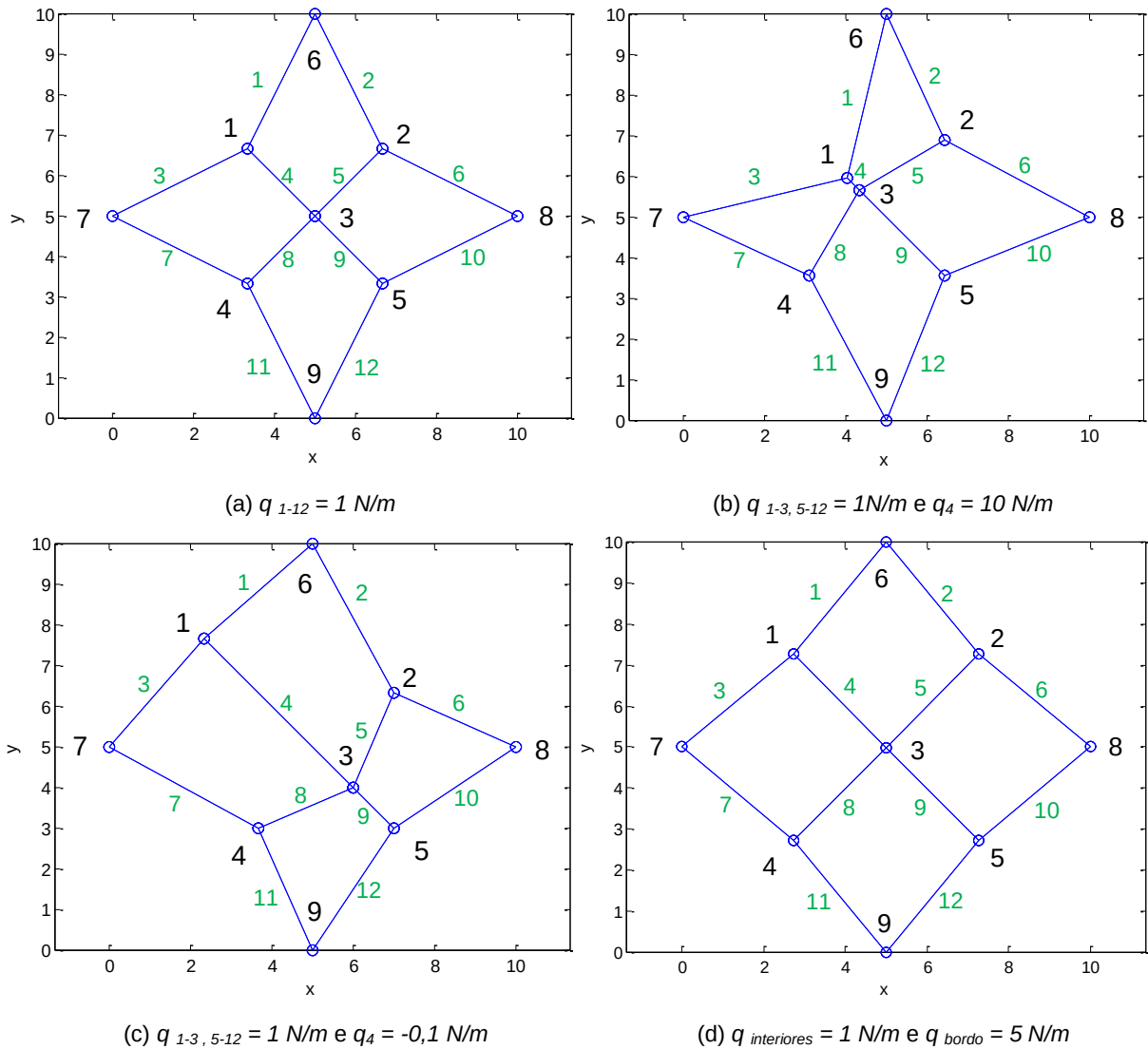


Figura 3.13 – Diferentes configurações de equilíbrio para a rede de cabos

Tabela 3.5 – Geometria dos nós livres das quatro configurações de equilíbrio da rede de cabos

	a)		b)		c)		d)	
n	x (m)	y (m)	x (m)	y (m)	x (m)	y (m)	x (m)	y (m)
1	3,33	6,67	4,02	5,98	2,31	7,69	2,73	7,27
2	6,67	6,67	6,44	6,89	7,01	6,33	7,27	7,27
3	5,00	5,00	4,32	5,68	6,02	3,98	5,00	5,00
4	3,33	3,33	3,11	3,56	3,67	2,99	2,73	2,73
5	6,67	3,33	6,44	3,56	7,01	2,99	7,27	2,73

Tabela 3.6 – Densidades de força, comprimento e esforço axial nas quatro configurações de equilíbrio da rede de cabos

	a)			b)			c)			d)		
m	Dados	Resultados		Dados	Resultados		Dados	Resultados		Dados	Resultados	
	q (N/m)	l (m)	t (N)	q (N/m)	l (m)	t (N)	q (N/m)	l (m)	t (N)	q (N/m)	l (m)	t (N)
1	1,00	3,73	3,73	1,00	4,13	4,13	1,00	3,55	3,55	5,00	3,55	17,75
2	1,00	3,73	3,73	1,00	3,42	3,42	1,00	4,19	4,19	5,00	3,55	17,75
3	1,00	3,73	3,73	1,00	4,13	4,13	1,00	3,55	3,55	5,00	3,55	17,75
4	1,00	2,36	2,36	10,00	0,43	4,29	-0,10	5,24	-0,52	1,00	3,21	3,21
5	1,00	2,36	2,36	1,00	2,44	2,44	1,00	2,55	2,55	1,00	3,21	3,21
6	1,00	3,73	3,73	1,00	4,03	4,03	1,00	3,27	3,27	5,00	3,55	17,75
7	1,00	3,73	3,73	1,00	3,42	3,42	1,00	4,19	4,19	5,00	3,55	17,75
8	1,00	2,36	2,36	1,00	2,44	2,44	1,00	2,55	2,55	1,00	3,21	3,21
9	1,00	2,36	2,36	1,00	3,00	3,00	1,00	1,40	1,40	1,00	3,21	3,21
10	1,00	3,73	3,73	1,00	3,84	3,84	1,00	3,60	3,60	5,00	3,55	17,75
11	1,00	3,73	3,73	1,00	4,03	4,03	1,00	3,27	3,27	5,00	3,55	17,75
12	1,00	3,73	3,73	1,00	3,84	3,84	1,00	3,60	3,60	5,00	3,55	17,75

(ii) Exemplo – Torre de arrefecimento

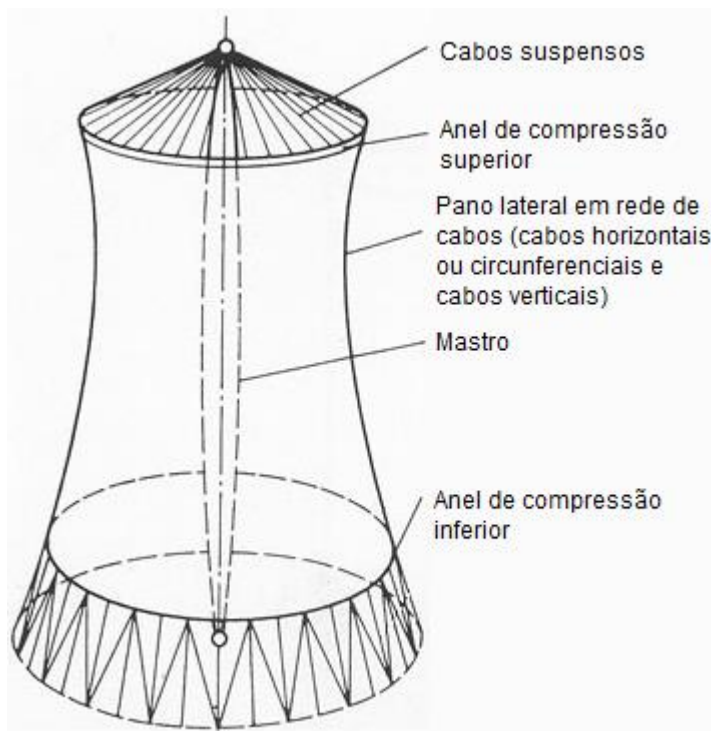
Tendo sido ilustradas as potencialidades da rotina implementada com base no *MDFI* aplicado a uma rede de cabos bidimensional, pretende-se agora aplicar a mesma rotina a uma torre de arrefecimento (ver exemplo na Figura 3.14 (a)). Depois da construção do estádio Olímpico de Munique em 1972, os projetistas identificaram algumas vantagens na utilização de uma rede de cabos pré-esforçada na construção das torres de arrefecimento, em vez das cascas de betão (Tibert 1999). A maior vantagem de uma torre formada por uma rede de cabos prende-se com a maior segurança estrutural. O reduzido peso e maior flexibilidade destas estruturas são características que melhoram o seu comportamento às ações sísmicas ou assentamentos na base, ações que poderiam danificar a torre em betão.

O exemplo da determinação da forma da torre de arrefecimento em rede de cabos é baseado no exemplo apresentado em Tibert (1999) e Malerba *et al.* (2012). De acordo com a Figura 3.14 (b), a estrutura é constituída por um mastro que suspende um anel de compressão superior, através de um conjunto de cabos suspensos. Estes cabos ligam o anel de compressão superior ao topo do mastro.

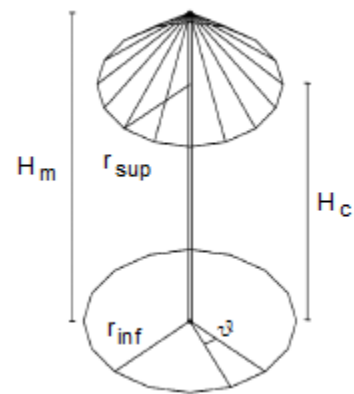
O anel de compressão superior é ligado a um anel de compressão inferior através de um pano lateral, formado por uma rede de cabos. Esta rede é constituída por cabos horizontais, ou circunferenciais, e cabos “verticais”. Os cabos denominados verticais estão suspensos entre os dois anéis de compressão. Os cabos horizontais e verticais são ligados por intermédio de grampos metálicos, formando uma rede de cabos. Consequentemente, a topologia estrutural da rede de cabos consiste numa malha retangular.



(a)



(b)



(c)

Figura 3.14 – Torre de arrefecimento: (a) Localizada em Schmehausen (Picasa 2013); (b) Caracterização do exemplo (Tensinet 2013) e (c) Parâmetros geométricos (Malerba *et al.* 2012)

Os parâmetros geométricos envolvidos na determinação da forma da estrutura são o raio do anel inferior r_{inf} , o raio do anel de compressão superior r_{sup} , a cota do anel de compressão superior H_c , a cota do topo do mastro H_m e o ângulo entre nós consecutivos ϑ , de acordo com a Figura 3.14 (c). As dimensões que se pretendem na configuração resultante do processo de determinação da forma são $r_{inf} \approx 9m$, $r_{sup} \approx 7m$, $H_c \approx 21m$ e $H_m \approx 25m$.

Para o efeito, são adotadas algumas simplificações na topologia estrutural. Em primeiro lugar, assume-se que o raio do anel de compressão inferior é igual a $9m$, e que está discretizado em 16 elementos e 16 nós. Estes nós estão igualmente distanciados e são fixos. O nó do topo do mastro também é fixo e tem uma cota de $25m$. Em segundo lugar, o anel superior é dividido em 16 elementos de compressão e 16 nós. Estes nós são livres e são ligados aos 16 nós fixos do anel de compressão inferior através de 16 cabos verticais. Os 16 cabos verticais formam a rede de cabos do pano lateral em conjunto com 11 cabos horizontais, ou circunferenciais. Deste modo, o pano lateral é composto por 368 elementos de cabo: $12 \times 16 = 192$ elementos de cabo verticais e $16 \times 11 = 176$ elementos de cabo horizontais.

Assim, a escala do problema ficou reduzida aos parâmetros geométricos relacionados com o raio r_{sup} e a cota H_c do anel de compressão superior. Estes parâmetros serão estimados a partir das configurações da estrutura obtidas pelo *MDFI*, à medida que se arbitram densidades de força para os elementos de cabo do pano lateral, para os cabos suspensos e para os elementos de compressão do anel superior. Este processo de determinação da forma da estrutura é iterativo até se obterem as dimensões pretendidas ($r_{sup} \approx 7m$ e $H_c \approx 21m$).

Os dados do problema são a topologia, as coordenadas cartesianas dos nós fixos, as forças externas aplicadas à estrutura, que, neste caso, se consideram nulas, e, por fim, as densidades de força definidas para os elementos: q_s , para os cabos suspensos; q_{comp} , para os elementos de compressão do anel superior; $q_{c,v}$, para os elementos de cabo verticais e $q_{c,h}$, para os elementos de cabo horizontais. Os valores arbitrados para as densidades de força apresentam-se na Tabela 3.7 para três configurações, designadas por a), b) e c).

Tabela 3.7 – Densidades de força dos elementos da torre de arrefecimento para cada configuração

Configuração	a)	b)	c)
q_s (N/m)	400	400	400
q_{comp} (N/m)	-2800	-3000	-3000
$q_{c,v}$ (N/m)	100	100	1000
$q_{c,h}$ (N/m)	100	100	100

Dado que as configurações são simétricas em relação ao eixo do mastro (ver a Figura 3.15), em cada configuração: todos os cabos suspensos apresentam o mesmo esforço axial; todos os elementos do anel superior apresentam o mesmo esforço axial; todos os cabos verticais do pano lateral apresentam o mesmo perfil de esforço axial em altura e todos os elementos de cada cabo horizontal do pano lateral apresentam o mesmo esforço axial. Analogamente, em termos de comprimentos, em cada configuração: todos os cabos suspensos apresentam o mesmo comprimento; todos os elementos do anel superior apresentam o mesmo comprimento; todos os cabos verticais do pano lateral apresentam o mesmo comprimento e todos os elementos de cada cabo horizontal do pano lateral apresentam o mesmo comprimento.

A única diferença entre as configurações a) e b) prende-se com os valores das densidades de força arbitradas para o anel superior, -2800 para -3000N/m . Essa diferença, comparando a configuração b) relativamente à configuração a) (ver as Figuras 3.15 (a) e (b)), origina: a diminuição do diâmetro do anel superior de $2,3$ para $0,5\text{m}$, com a consequente diminuição do comprimento dos elementos deste anel de $45,6$ para $10,9\text{cm}$; a redução do esforço axial de compressão do anel superior de -1269 para -325N ; a redução do pré-esforço dos cabos suspensos de $507,4$ para $232,3\text{N}$ e a diminuição do comprimento dos cabos suspensos de $1,27$ para $0,58\text{m}$.

A Figura 3.16 (a) apresenta o perfil do pré-esforço em altura dos cabos verticais do pano lateral, onde também são incluídos os cabos suspensos em termos de representação. A Figura 3.16 (b) apresenta o pré-esforço dos cabos horizontais do pano lateral, em cada nível. As configurações a) e b) são muito semelhantes em relação ao pré-esforço dos cabos verticais, apresentando um valor de 353N na extremidade inferior, junto ao anel inferior, e 205N na extremidade superior, junto ao anel superior. Em relação aos cabos horizontais, é de notar uma diferença crescente do pré-esforço em altura, sendo cerca de 238N no primeiro nível, junto ao anel inferior, e cerca de 5 e 33N no último nível, junto ao anel superior, respetivamente na configuração b) e a).

Note-se que a configuração c) corresponde a uma solução em que se procurou aproximar os objetivos iniciais, ou seja, o raio r_{sup} e a altura do anel superior H_c , aproximadamente, iguais a 7 e 21m (ver a Figura 3.15 (c)). Para o efeito, é de realçar a influência das densidades de força aplicadas aos diferentes elementos da estrutura na geometria final obtida. De acordo com os resultados obtidos nas três configurações de equilíbrio, pode concluir-se que um aumento das densidades de força nos cabos verticais do pano lateral tende a aumentar o diâmetro do anel de compressão.

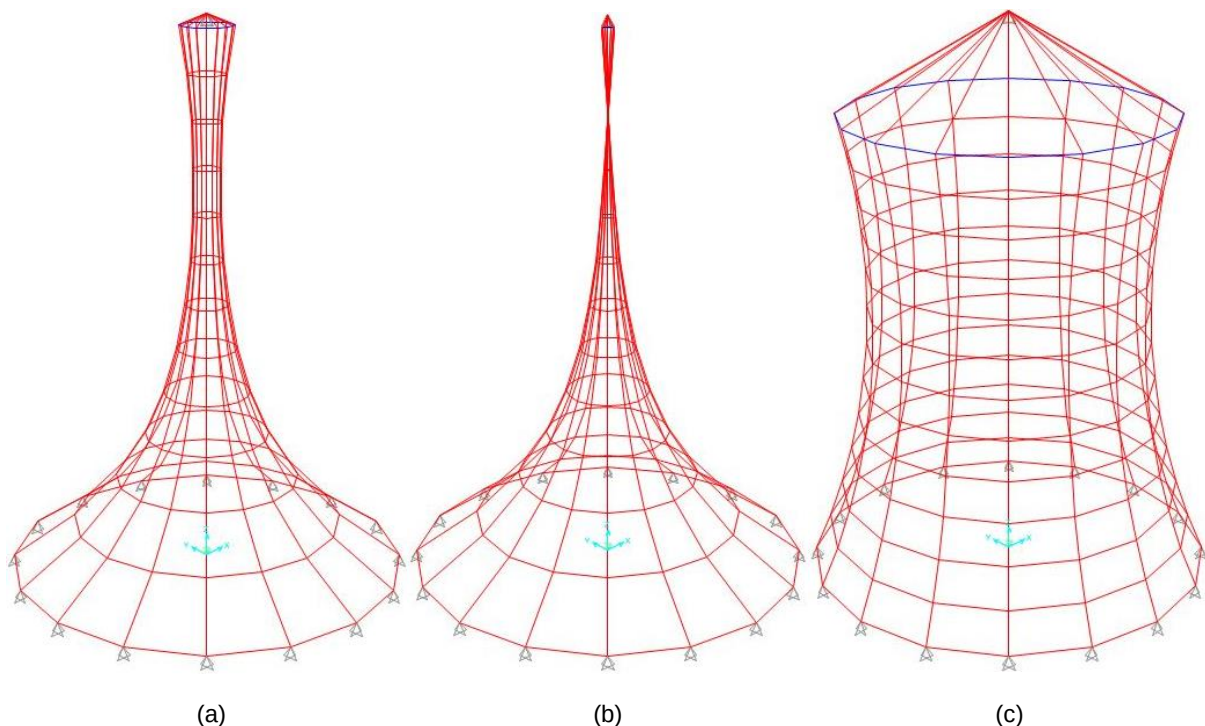


Figura 3.15 – Diferentes configurações de equilíbrio para a torre de arrefecimento: (a) $q_{comp} = -2800\text{N/m}$; $q_{c,v} = 100\text{N/m}$; (b) $q_{comp} = -3000\text{N/m}$; $q_{c,v} = 100\text{N/m}$ e (c) $q_{comp} = -3000\text{N/m}$; $q_{c,v} = 1000\text{N/m}$

Assim, para as densidades de força consideradas na configuração c), o raio e a altura do anel superior são iguais a 7,3 e 20,7m; o esforço axial de compressão do anel superior é de - 8592N; o comprimento e o pré-esforço dos cabos suspensos são, respetivamente, 8,5m e 3405N; o pré-esforço dos cabos verticais varia entre 1774 e 1872N, respetivamente, entre as extremidades superior e inferior (ver a Figura 3.16 (a)); o pré-esforço dos cabos horizontais varia entre cerca de 323N, no primeiro nível, junto ao anel inferior, e 270N, no último nível, junto ao anel superior (ver a Figura 3.16 (b)).

O *MDFI* é amplamente utilizado em programas de cálculo estrutural que, para além da análise estática e dinâmica, realizam a determinação da forma, obtendo formas em equilíbrio iniciais bastante próximas das reais. A título de exemplo, os *softwares ixCube* (sucessor do *FORTEN*), *Oasys* e *Formfinder* incluem algoritmos baseados no *MDFI*, na determinação da forma de estruturas formadas por cabos e membranas. No entanto, a boa aproximação referida anteriormente ocorre quando se dimensionam redes de cabos e membranas em que o pré-esforço da superfície é superior ao peso próprio da estrutura. Essa é a razão que leva a desprezar o peso próprio frequentemente na fase da determinação da forma. Deste modo, o peso próprio só seria incluído, posteriormente, numa análise não-linear geométrica.

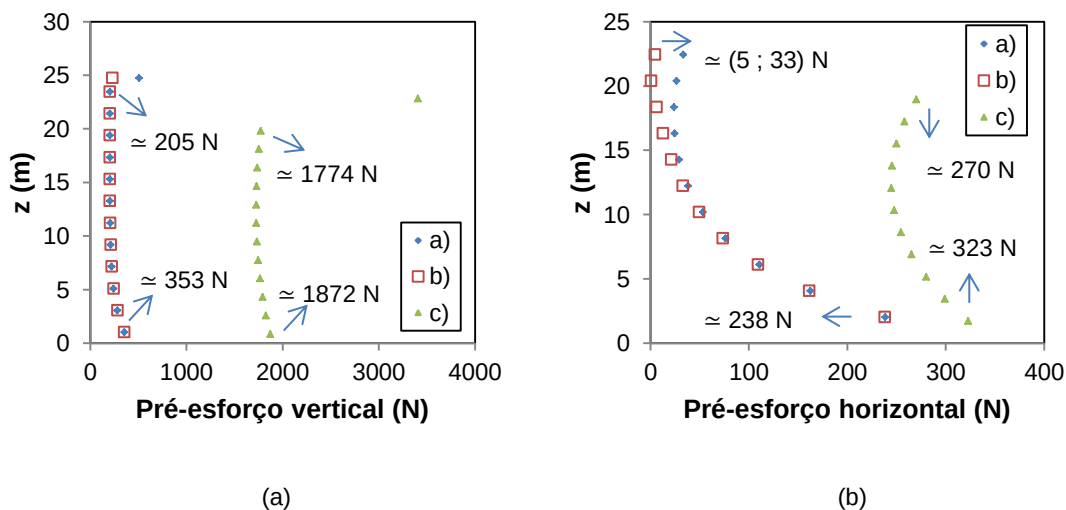


Figura 3.16 – Pré-esforço dos cabos da torre de arrefecimento: (a) Cabos verticais do pano lateral e cabos suspensos e (b) Cabos horizontais, ou circunferenciais, do pano lateral

Método da densidade de força não-linear - *MDFnl*

A determinação da forma de um cabo suspenso entre dois apoios, ou até mesmo de uma rede de cabos pouco tensos, através do *MDFI* teria alguns inconvenientes, mesmo considerando o peso próprio aplicado através de cargas nodais externas. Seria necessário utilizar um processo iterativo manual para determinar a geometria da estrutura, tendo em conta um determinado carregamento. Assim, a solução através do *MDFnl*, onde é considerado o peso próprio dos elementos num processo iterativo automático, torna o exemplo mais próximo da realidade.

A formulação do *MDFnl* utilizada no presente trabalho baseia-se no trabalho de Greco e Cuomo (2012). A designação “*MDFnl*” não corresponde à usada em Tibert (1999), cujo objetivo é o de obter uma malha regular e uma distribuição de esforços regular.

A aplicação do *MDFnl* passa, em primeiro lugar, pela obtenção de uma geometria inicial, através do *MDFl*. A partir dessa geometria obtém-se o comprimento dos elementos e, conseqüentemente, as forças nodais referentes ao peso próprio dos elementos. Deste modo, as equações de equilíbrio no nó i são reescritas, de uma forma semelhante às do *MDFl*, passando a incluir uma parcela referente ao peso próprio dos elementos (ver a Figura 3.17), assumindo a forma

$$\begin{aligned} q_a(x_i - x_m) + q_b(x_i - x_j) + q_c(x_i - x_k) + q_d(x_i - x_l) &= f_x \\ q_a(y_i - y_m) + q_b(y_i - y_j) + q_c(y_i - y_k) + q_d(y_i - y_l) &= f_y \\ -\frac{q_{za}l_{0a}}{2} + q_a(z_i - z_m) - \frac{q_{zb}l_{0b}}{2} + q_b(z_i - z_j) - \frac{q_{zc}l_{0c}}{2} + q_c(z_i - z_k) - \frac{q_{zd}l_{0d}}{2} + q_d(z_i - z_l) &= f_z \end{aligned} \quad (3.23)$$

tal que q_z representa o peso próprio por metro linear dos elementos e l_0 o comprimento dos elementos na geometria.

O equilíbrio de um nó dado por (3.23) estende-se matricialmente a todos os nós livres, resultando em

$$\begin{aligned} C^T Q C x + C^T Q C_f x_f &= f_x \\ C^T Q C y + C^T Q C_f y_f &= f_y \\ C^T Q C z + C^T Q C_f z_f &= f_z + \frac{1}{2} |C^T Q_z| l_0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

tal que Q_z representa a matriz diagonal do vetor q_z . Com vista a obter a geometria, as expressões do equilíbrio de um nó em (3.24) são simplificadas, à semelhança do procedimento realizado no *MDFl*, assumindo a forma

$$\begin{aligned} D x &= f_x - D_f x_f \\ D y &= f_y - D_f y_f \\ D z &= f_z - D_f z_f + \frac{1}{2} |C^T Q_z| l_0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

tal que $D = C^T Q C$ e $D_f = C^T Q C_f$. Finalmente, a geometria da estrutura é determinada a partir de

$$\begin{aligned} x_{[n \times 1]} &= D^{-1} (f_x - D_f x_f) \\ y_{[n \times 1]} &= D^{-1} (f_y - D_f y_f) \\ z_{[n \times 1]} &= D^{-1} \left(f_z - D_f z_f + \frac{1}{2} |C^T Q_z| l_0 \right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

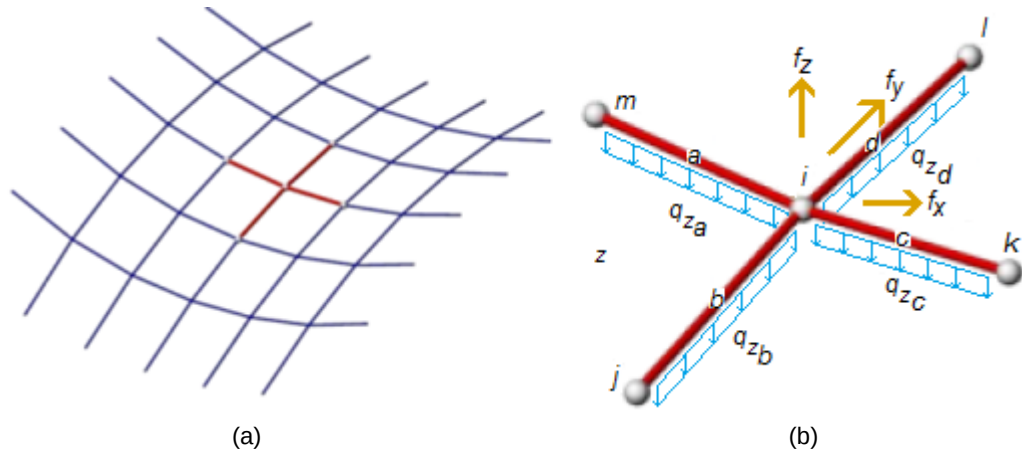


Figura 3.17 – Rede de cabos pré-esforçada (Gründig 2000): (a) Geometria e (b) Esquema do equilíbrio de um nó pelo *MDFnl*

Em cada iteração o comprimento l_0 é atualizado, através da geometria da estrutura. No final, obtém-se uma nova geometria, a partir da qual se definem as novas forças nodais para a iteração seguinte. Este processo é repetido, sucessivamente, até a estrutura permanecer em equilíbrio.

O parâmetro de convergência δ é determinado em cada iteração e é igual ao máximo de quatro quantidades. A primeira quantidade é igual à diferença absoluta entre o comprimento total dos cabos em iterações sucessivas, tal que, o comprimento total dos cabos é um parâmetro dado pela soma de todos os comprimentos dos cabos existentes. A segunda quantidade é igual à diferença entre os somatórios das diferenças de coordenadas dos nós dos elementos na direção x , u (ver o cálculo de u na equação (3.15)). A terceira e quartas quantidades são determinadas de uma forma análoga à segunda quantidade, com base nas diferenças v e w , respetivamente.

(i) Exemplo – Rede de 5 cabos em 2D

De forma a ilustrar as propriedades do *MDFnl*, apresenta-se um exemplo simples de uma estrutura de rede, estudado por Greco e Cuomo (2012). A estrutura é composta por 6 cabos, 2 nós livres e 4 nós fixos, perfazendo um total de 6 nós. Os dados do problema são a topologia, de acordo com a Figura 3.18, as coordenadas cartesianas dos nós fixos, apresentadas na Tabela 3.8, as forças externas aplicadas à estrutura, que neste caso se consideram nulas, e, por fim, as densidades de força $q = 1\text{N/m}$, definidas para os cabos. Os parâmetros anteriores permitem determinar a geometria da estrutura na primeira fase do *MDFnl*, através do *MDFl*. Para a segunda fase é necessário também o peso próprio dos cabos, dado por $q_z = 1\text{N/m}$, com vista a determinar a geometria final da estrutura, iterativamente.

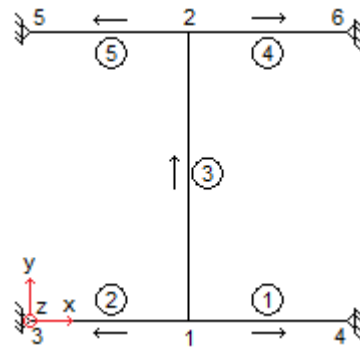


Figura 3.18 – Topologia da estrutura da rede de cabos

Tabela 3.8 – Coordenadas cartesianas dos nós fixos

Nó	x_f (m)	y_f (m)	z_f (m)
3	0	0	0
4	1	0	0
5	0	1	0
6	1	1	1

O processo de determinação da forma pelo *MDFnl* realiza-se em duas fases. Primeiramente, é utilizado o *MDFl* para obter a geometria estrutural inicial, com base nos dados indicados anteriormente, sem o peso próprio (ver a Figura 3.19). A geometria obtida na primeira fase é utilizada para iniciar a segunda fase, em que as equações de equilíbrio são reescritas, tendo em conta a parcela do peso próprio. Deste modo, é obtida uma nova geometria, a partir da qual se recalculam as forças nodais para a iteração seguinte. Este processo é repetido, sucessivamente, até que a estrutura permaneça em equilíbrio, levando 31 iterações a convergir ($\delta=1 \times 10^{-29}$). Na Figura 3.19, apresenta-se a geometria resultante da segunda fase, evidenciando um desnivelamento dos nós livres, 1 e 2.

A Tabela 3.9 apresenta as coordenadas dos nós livres obtidas, quer pela rotina implementada, quer pelo exemplo de referência (Greco e Cuomo 2012), complementando os resultados obtidos nas duas fases do *MDFnl*, ilustrados na Figura 3.19. Da primeira fase para a segunda ocorreu um desnivelamento dos nós livres 1 e 2 de cerca de 51 e 58cm, respetivamente.

Tabela 3.9 – Coordenadas dos nós livres da estrutura nas duas fases do *MDFnl*, obtidas com base na rotina implementada e no exemplo de referência

n	Primeira fase (<i>MDFl</i>)						Segunda fase					
	Resultados			(Greco e Cuomo 2012)			Resultados			(Greco e Cuomo 2012)		
	x (m)	y (m)	z (m)	x (m)	y (m)	z (m)	x (m)	y (m)	z (m)	x (m)	y (m)	z (m)
1	0,500	0,250	0,125	0,500	0,250	0,125	0,500	0,250	-0,382	2,727	7,273	-0,382
2	0,500	0,750	0,375	0,500	0,750	0,375	0,500	0,750	-0,203	7,273	7,273	-0,203

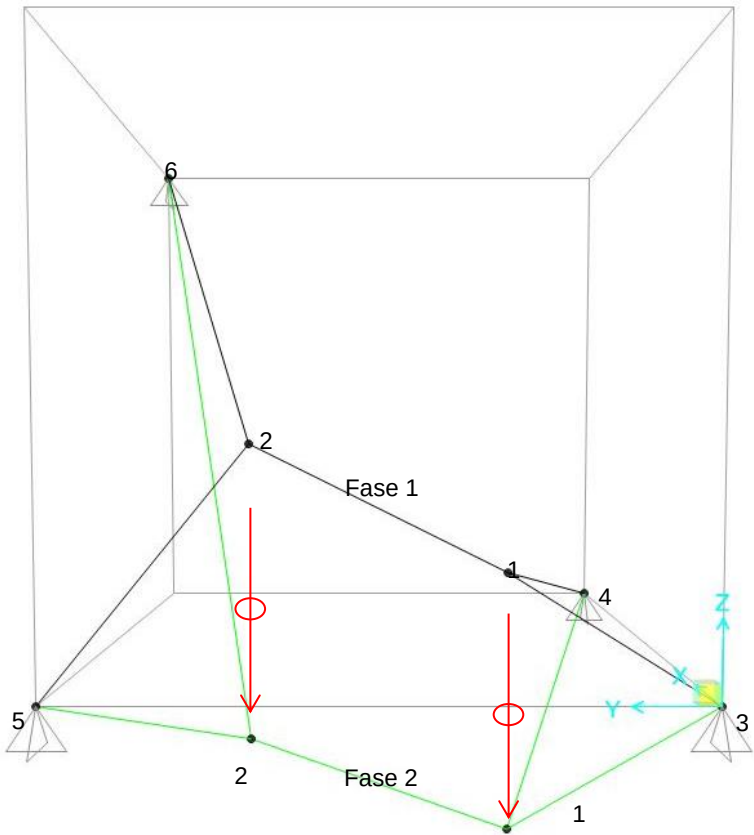


Figura 3.19 – Configurações de equilíbrio da rede de cabos pelo *MDFnl* desde a primeira fase, sem peso próprio, até à segunda fase, com peso próprio

A Tabela 3.10, para além de apresentar os dados do problema, tais como as densidades de força q , que são utilizadas em ambas as fases do *MDFnl*, e o peso próprio dos elementos q_z , que é utilizado na segunda fase do *MDFnl*, apresenta os resultados de ambas as fases do *MDFnl*, em termos de comprimento, l , e esforço axial, t , dos cabos. Os resultados são apresentados com base na rotina implementada e no exemplo de referência (Greco e Cuomo 2012). Em termos de comparação com a solução de referência, verifica-se uma excelente concordância de resultados.

Tabela 3.10 – Densidades de força, comprimento e esforço axial dos cabos nas duas fases do *MDFnl*, obtidos com base na rotina implementada e no exemplo de referência

m	Primeira fase (<i>MDFl</i>)					Segunda fase				
	Dados	Resultados		(Greco e Cuomo 2012)		Dados	Resultados		(Greco e Cuomo 2012)	
	q (N/m)	l (m)	t (N)	l (m)	t (N)	q_z (N/m)	l (m)	t (N)	l (m)	t (N)
1	1,000	0,573	0,573	0,573	0,573	1,000	0,677	0,677	0,677	0,677
2	1,000	0,573	0,573	0,573	0,573	1,000	0,677	0,677	0,677	0,677
3	1,000	0,559	0,559	0,559	0,559	1,000	0,531	0,531	0,531	0,531
4	1,000	0,839	0,839	0,839	0,839	1,000	1,326	1,326	1,326	1,326
5	1,000	0,673	0,673	0,673	0,673	1,000	0,595	0,595	0,595	0,595

Algoritmo de determinação da forma de um cabo baseado no método da densidade de força

A caracterização da geometria do cabo é habitualmente feita pela equação da catenária elástica ou, simplificada, pela equação da parábola elástica. A modelação numérica com elementos finitos é também uma alternativa às anteriores. Estas formulações têm pressupostos que devem ser conhecidos, pois podem invalidar a sua aplicabilidade em determinadas situações, quer na análise estática, quer na análise dinâmica.

Os cabos utilizados em estruturas de membrana tanto podem ter rácios flecha / vão muito pequenos como muito elevados (Caetano, Bartek, *et al.* 2013). Para estes últimos, a equação da parábola elástica apresenta limitações, dada a sua aplicabilidade a cabos com flechas reduzidas que exibem um rácio flecha / vão inferior a $1/8$. Desta forma, o âmbito da sua aplicação está mais direccionado para cabos integrados em pontes atirantadas (Caetano 2007) e para a maioria dos cabos utilizados em pontes suspensas.

Nesta secção é apresentada uma metodologia para a análise estática de um cabo com base no método da densidade de força (*MDF*) (Linkwitz e Schek 1971), utilizado geralmente no âmbito da determinação e optimização da geometria estrutural de redes de cabos e membranas tensas.

O algoritmo implementado permite determinar a geometria estrutural deformada e indeformada de um cabo de uma forma iterativa, de acordo com a flecha pretendida, bem como as características elásticas decorrentes da deformada do cabo resultante.

Para a determinação da forma de um cabo a partir do *MDF*, definem-se a topologia estrutural baseada numa discretização do cabo em múltiplos elementos do tipo barra, as coordenadas dos 2 apoios, as densidades de força e as forças nodais, relativas ao peso próprio dos elementos.

Uma vez que na fase inicial não se dispõe de uma geometria estrutural, mas sim de uma topologia, o comprimento dos elementos é desconhecido. Consequentemente, as forças nodais referentes ao peso próprio são também arbitrárias, considerando-se equivalentes às que resultariam numa geometria estrutural correspondente a um cabo reto, entre os dois apoios, com elementos de igual comprimento e uma dada secção. Se não fossem definidas forças nodais, a solução pelo *MDF* corresponderia a uma reta entre os dois apoios do cabo.

Para além disso, as densidades de força atribuídas aos elementos são também arbitrárias. Definidas as condições, é possível determinar a solução pelo *MDF* através das equações de equilíbrio estático (3.12).

Ao analisar a solução obtida, através das coordenadas dos nós livres, é possível identificar a flecha e os esforços internos, bem como o comprimento deformado dos elementos de barra. Para obter uma nova solução com flecha e esforços distintos, teremos de atribuir um novo conjunto de densidades de força para os elementos. Este processo é realizado através da resolução das equações de equilíbrio estático de uma forma iterativa, até se obter a solução pretendida.

Dada a morosidade deste processo iterativo, foi criada uma rotina em ambiente *MATLAB*[®], constituindo a fase 1 do algoritmo de determinação da forma de um cabo. Para o efeito, para além dos parâmetros anteriores, é definido um parâmetro de controlo, CP_n , de acordo com a Figura 3.20, dado pela flecha pretendida num determinado nó da topologia estrutural. A geometria estrutural correspondente à solução da fase 1 do algoritmo tem associado um conjunto de densidades de força q_n , que se estimam de uma forma iterativa.

Em termos de convergência do processo, verificou-se que, as soluções sucessivamente obtidas pelo *MDF*, dadas as condições anteriores - cabo suspenso horizontal, parâmetro de controlo da flecha CP_n localizado a meio vão, densidades de força iguais em todos os elementos e forças nodais iguais em todos os nós livres da estrutura, conduzem a um perfil de potência, com a flecha CP representada no eixo das abcissas, e as densidades de força q representadas no eixo das ordenadas (ver a Figura 3.21). Deste modo, na rotina desenvolvida, a fase 1 é iniciada com a determinação dos parâmetros c e n do perfil potencial $q = c \cdot CP^n$, com base em duas soluções arbitrárias ($q_1; CP_1$) e ($q_2; CP_2$) (ver a Figura 3.20), que servirão para o cálculo das densidades de força, em cada iteração, com vista à convergência do processo.

O cálculo da densidade de força da nova iteração q_{i+1} resulta da análise da geometria estrutural obtida no final de cada iteração, onde se avalia se a flecha é superior ou inferior à pretendida. Com efeito, caso a flecha seja superior à pretendida, é necessário aumentar a densidade de força, na medida em que as geometrias com flechas menores exibem densidades de força superiores (ver a Figura 3.21). Assim, a densidade de força é calculada por $q_{i+1} = q_i + dq_i$, tal que $dq_i = c(CP_n^n - CP_i^n)$. Por sua vez, se a flecha for inferior à pretendida, é necessário reduzir a densidade de força por intermédio de $q_{i+1} = q_i - dq_i$, tal que $dq_i = c(CP_i^n - CP_n^n)$. O processo iterativo converge quando a diferença entre as flechas em iterações sucessivas é suficientemente pequena ($\delta < 10^{-8}$).

No entanto, a solução da fase 1 não tem em conta o peso próprio total dos elementos, dado que as forças localizadas nos nós, que simulam o peso próprio dos elementos concentrados nos dois nós, são consideradas iguais e determinadas de uma forma simplificada, como referido anteriormente. Dado que a geometria estrutural da solução da fase 1 apresenta comprimentos dos elementos de barra diferentes ao longo do modelo, com comprimentos de projeção iguais no eixo da corda, as forças nodais não podem ser iguais. Por isso, as forças concentradas nos nós, que deram origem à solução da fase 1, não refletem o verdadeiro peso próprio dos elementos de barra associados, constituindo uma lacuna desta fase.

De modo a resolver a lacuna identificada anteriormente, na fase 2 do algoritmo, é colocada uma parcela referente ao peso próprio dos elementos nas equações de equilíbrio estático. Para além disso, são eliminadas as forças concentradas nos nós associadas ao peso próprio dos elementos, consideradas na primeira fase, de modo a não duplicar esta ação, sendo mantidas as forças nodais de outra natureza, tais como pesos pontuais.

No decorrer do processo iterativo, a parcela referida anteriormente vai sendo atualizada, obtendo-se soluções intermédias com diferentes comprimentos dos elementos, gerando desta forma forças nodais distintas. Estas forças nodais sucessivamente atualizadas constituem a parcela mencionada na fase 2.

Assim, as novas densidades de força são determinadas iterativamente, pelo mesmo processo de convergência adotado na fase 1. A solução final corresponde a uma distribuição uniforme do peso próprio, aproximando consequentemente a um perfil de uma catenária, no caso de não atuarem forças distribuídas pontualmente para além do peso próprio.

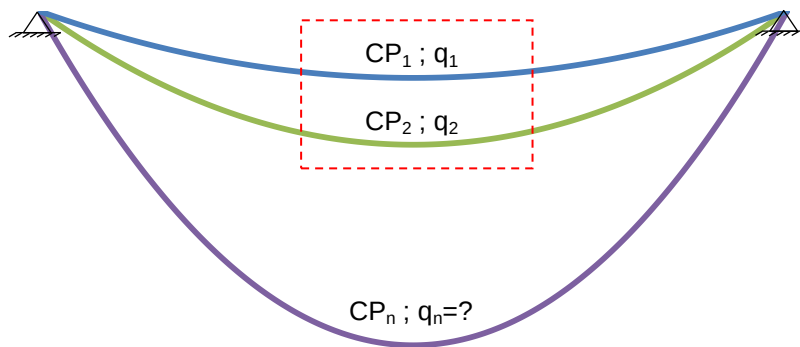


Figura 3.20 – Fase 1 do algoritmo de determinação da forma de um cabo suspenso

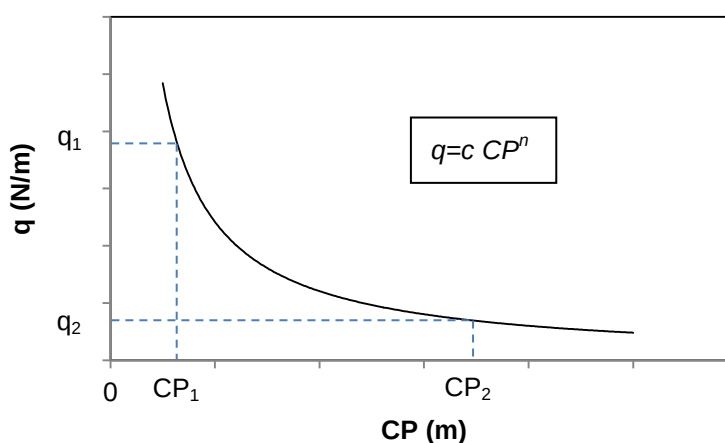


Figura 3.21 – Perfil de potência: flecha CP vs densidade de força q

O algoritmo da determinação da forma termina com o fim da fase 2, sendo possível determinar as características elásticas do perfil de cabo resultante, entre as quais o comprimento de cabo indeformado L_0 por intermédio de

$$L_0 = \sum_{i=1}^m L_0^i = \frac{EAL_f^i}{qL_f^i + EA} \quad \text{com } i = 1, 2 \dots m \text{ (elementos de barra)} \quad (3.27)$$

tal que L_0^i e L_f^i são, respectivamente, o comprimento indeformado e deformado do elemento de barra i , m é o número total de elementos de barra, EA é a rigidez axial do cabo e q é a densidade de força resultante no final da fase 2. Note-se que esta simplificação para a determinação do comprimento indeformado do cabo tem um erro associado, sendo este erro decrescente com o maior número de elementos de barra considerados na discretização do modelo de cabo estrutural.

(i) Exemplo de aplicação: 5 cabos com 500 metros de vão e flechas crescentes entre 5 e 500 metros

O presente exemplo compreende a análise de 5 cabos com vão de *500m*, conforme a topologia estrutural apresentada na Figura 3.22. Cada modelo é constituído por *100* elementos de barra, segundo as propriedades sistematizadas na Tabela 3.11. As configurações dos cabos apresentam flechas com 5, 50, 100, 200 e 500 metros, mantendo o vão de *500m* em todas as configurações.

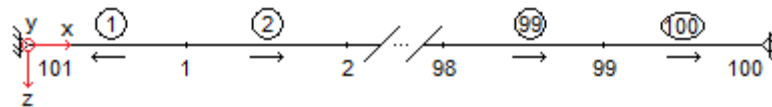


Figura 3.22 – Topologia estrutural do cabo suspenso

Tabela 3.11 – Propriedades do material do cabo

Massa volúmica do aço (kg/m ³)	7850
E (kN/mm ²)	155
A fi 200 (m ²)	3,141x10 ⁻²

As características elásticas dos 5 cabos são determinadas com base na formulação da catenária elástica e na modelação numérica. A modelação numérica é realizada com base na formulação do algoritmo de determinação da forma de um cabo baseado no *MDF* e no cálculo estrutural baseado no método dos elementos finitos através do *software SOLVIA*[®]. Neste último, são criados modelos com elementos de barra, mas também com elementos de viga.

Complementarmente, foi também utilizada a equação da parábola elástica na caracterização dos cabos, embora não sejam apresentados esses resultados. Recorde-se que a formulação da parábola elástica é limitada a cabos com flechas reduzidas, ou seja, para rácios de flecha / vão (d / L) reduzidos, não superiores a $1/8$. Estes rácios são excedidos nos três últimos cabos, produzindo erros significativos e crescentes com o aumento da flecha.

Primeiramente, recorreu-se ao algoritmo de determinação da forma de um cabo baseado no *MDF* para a determinação das configurações dos 5 cabos deformados com 500m de vão. As características elásticas são então determinadas, com base nessas configurações deformadas (ver a Tabela 3.12). A análise pela equação da catenária elástica em primeiro lugar demoraria mais tempo, já que exigia um processo iterativo de determinação da forma do cabo, impondo sucessivos valores de comprimento indeformado L_0 do cabo, até que se cumprissem as condições definidas no problema: flechas de 5, 50, 100, 200 e 500 metros.

Note-se que a utilização deste algoritmo baseado no *MDF* requer a passagem pelas fases 1 e 2, descritas anteriormente. A solução da fase 1 não tem em conta o peso próprio total dos elementos, dado que as forças localizadas nos nós, que simulam o peso próprio dos elementos, concentrados nos dois nós, são determinadas de uma forma simplificada. Como referido anteriormente, devido à inexistência de uma geometria estrutural, em detrimento de uma topologia estrutural, onde não são definidas as coordenadas dos nós livres da estrutura, as forças nodais são consideradas iguais, e resultantes de uma geometria hipotética: cabo reto entre os dois apoios, com elementos de igual comprimento.

Assim, após um processo de resolução das equações de equilíbrio, onde o valor das densidades de força é determinado de uma forma iterativa (ver a Figura 3.23 (a)) com o objetivo de se obter um perfil de cabo com uma flecha prescrita, obtém-se a solução da fase 1. A Figura 3.24 (a) apresenta a evolução da flecha de cada cabo ao longo deste processo iterativo.

A solução da fase 1 tem associada uma geometria estrutural com comprimentos diferentes dos elementos de barra ao longo do modelo, apresentando porém comprimentos de projeção iguais no eixo da corda. As forças concentradas nos nós, que deram origem a essa geometria, não refletem, desta forma, o verdadeiro peso próprio dos elementos de barra associados, dado que esse comprimento não é conhecido no início da fase 1.

Assim, somente na fase 2 é considerado o peso próprio dos elementos, colocando uma nova parcela nas equações de equilíbrio, e eliminando a parte referente ao peso dos elementos das forças concentradas nos nós atribuídas na fase 1, eliminando, neste caso, as forças nodais, dado que não existem forças a atuar, para além do peso próprio dos elementos. Procedendo novamente a um processo de resolução das equações de equilíbrio estático, as novas densidades de força são determinadas iterativamente (ver a Figura 3.23 (b)), obtendo-se a solução da fase 2. Esta corresponde a uma distribuição uniforme do peso próprio. A Figura 3.24 (b) apresenta a evolução da flecha de cada cabo, ao longo da fase 2.

A Figura 3.25 apresenta as configurações deformadas dos 5 cabos em análise, no final das fases 1 e 2, respetivamente, $F1$ e $F2$. Evidencia-se um erro crescente com o aumento da flecha do cabo, comparando as configurações dos cabos, no final das fases 1 e 2.

De seguida, dado que no final do algoritmo de determinação da forma é fornecido o comprimento indeformado L_0 do cabo (ver a equação (3.27)), procedeu-se à determinação do perfil de cada cabo pela equação da catenária elástica. As respetivas características elásticas são apresentadas na Tabela 3.12.

Complementarmente às duas vias anteriores, a análise dos 5 cabos em estudo foi levada a cabo com base na modelação numérica no *software* de cálculo estrutural de elementos finitos *SOLVIA*®, partindo do mesmo comprimento de cabo indeformado, estimado pelo primeiro método de cálculo.

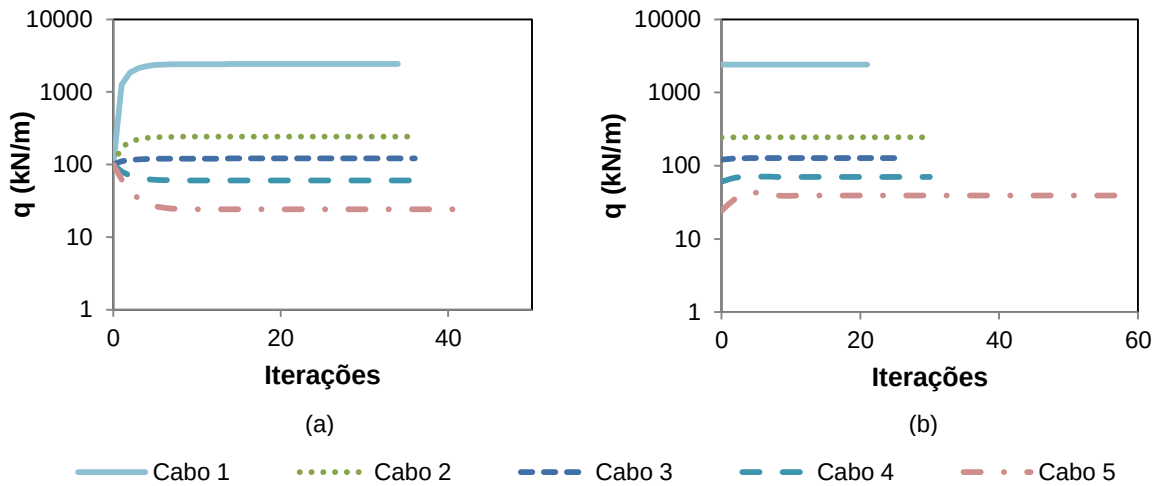


Figura 3.23 – Evolução das densidades de força q ao longo do processo iterativo do algoritmo de determinação da forma de um cabo: (a) Fase 1 e (b) Fase 2

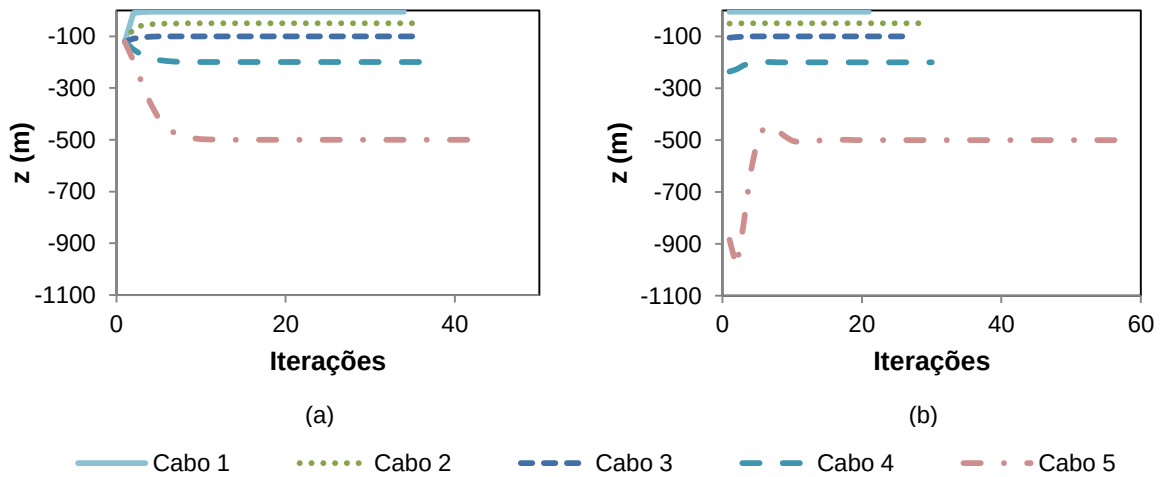


Figura 3.24 – Evolução da flecha ao longo do processo iterativo do algoritmo de determinação da forma de um cabo suspenso: (a) Fase 1 e (b) Fase 2

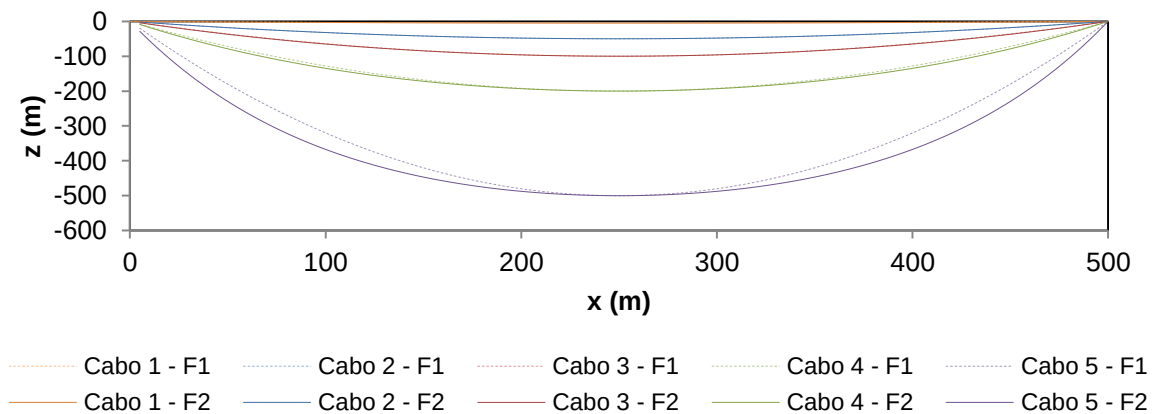


Figura 3.25 – Configurações dos 5 cabos em análise nas fases 1 e 2

Os modelos gerados basearam-se na aproximação *multi-link*. Foram gerados dois tipos de modelos para cada cabo: o primeiro modelo, com elementos finitos de barra; e o segundo modelo, com elementos finitos de viga. Nestes últimos modelos foi considerada uma secção com rigidez à flexão igual a 70% da inércia da secção cheia considerada no primeiro modelo.

O primeiro modelo é realizado com 100 elementos de barra de igual comprimento. O segundo modelo é realizado com 1000 elementos de viga de igual comprimento. No caso do primeiro modelo também foram analisados modelos com 500 e 1000 elementos, com vista a avaliar as diferenças na resposta estática e dinâmica com o aumento da discretização. O aumento da discretização para essa ordem de grandeza apresentou diferenças irrisórias.

A análise não-linear geométrica foi realizada pelo método de *Newton-Raphson*. Os cabos são colocados indeformados na horizontal e são esticados, por intermédio de um deslocamento aplicado no apoio direito do cabo. No primeiro modelo, este deslocamento é igual a 2/5 da quantidade $|L_0 - L| = |L_0 - 500|$. No segundo modelo, é igual a 1% da quantidade L_0 . Depois de aplicado o deslocamento no apoio direito, é aplicado gradualmente o peso próprio. Depois de aplicado o peso próprio, o apoio direito sofre um novo deslocamento gradual, até à posição onde a corda do cabo horizontal, ou seja, a distância entre os dois apoios do cabo, perfaça 500 metros de vão.

Na Tabela 3.12 estão sistematizadas as características geométricas, mecânicas e elásticas dos 5 cabos considerados: flecha igual a 5, 50, 100, 200 e 500m, resultantes da metodologia implementada do algoritmo de determinação da forma, $MDFnl_{cabo}$, da formulação analítica da catenária elástica e da modelação numérica no *software* de cálculo *SOLVIA*®, respetivamente, com elementos de barra e de viga.

Antes de mais, é de salientar uma excelente concordância entre os resultados, pelas três vias consideradas (ver a configuração do cabo 5, na Figura 3.26, a título de exemplo). A análise destes resultados, que cobre uma vasta gama de configurações de cabos, com rácios flecha / vão, d / l , desde 5 / 500 até 500 / 500, permite concluir que os cabos estão sujeitos a tensões relativamente baixas, abaixo de 40MPa. Excetua-se o primeiro cabo onde foi considerado um rácio de 5 / 500, originando um crescimento substancial da tensão para cerca de 385MPa.

À medida que a flecha aumenta é de notar que a tensão máxima decresce, embora na transição do 4º para o 5º cabo haja um aumento, decorrente do aumento substancial do peso do 5º cabo, originando um aumento do esforço axial máximo e consequentemente da tensão máxima.

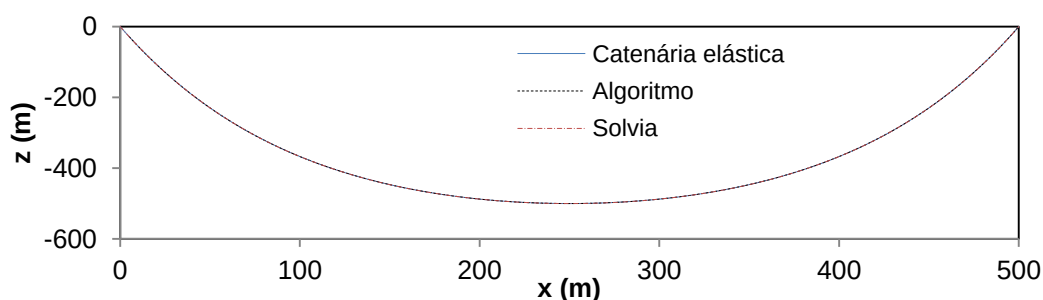


Figura 3.26 – Configuração do cabo 5 obtida pela equação da catenária elástica, analiticamente, pelo algoritmo de determinação da forma de um cabo, e pelo *software* de cálculo estrutural – *SOLVIA*

Tabela 3.12 – Características geométricas, mecânicas e elásticas das 5 configurações de cabos consideradas: flecha igual a 5, 50, 100, 200 e 500m, resultantes da metodologia implementada no algoritmo de determinação da forma, $MDFnl_{cabo}$, da formulação analítica da catenária elástica e da modelação numérica no software de cálculo SOLVIA® com elementos de barra e de viga

Cabo	Método	Elementos	Área (cm ²)	EA (kN)	Massa (kg/m)	l (m)	h (m)	α (°)	L (m)	L ₀ (m)	L _f (m)	d (m)	λ^2
1	$MDFnl_{cabo}$	-									500,133	5,000	2,573
	Análítico	-	314,2	4869469	197,3	500	0	0	500	498,893	500,133	4,990	2,577
	Numérico	Barra Viga (70%EI)									500,133	4,990	2,577
2	$MDFnl_{cabo}$	-									513,092	50,000	2294,409
	Análítico	-	314,2	4869469	197,3	500	0	0	500	512,960	513,092	49,998	2295,866
	Numérico	Barra Viga (70%EI)									513,092	50,000	2296,188
3	$MDFnl_{cabo}$	-									549,855	100,000	13511,601
	Análítico	-	314,2	4869469	197,3	500	0	0	500	549,775	549,855	99,995	13516,182
	Numérico	Barra Viga (70%EI)									549,855	100,000	13517,337
4	$MDFnl_{cabo}$	-									672,082	200,000	45515,498
	Análítico	-	314,2	4869469	197,3	500	0	0	500	672,013	672,082	199,992	45530,393
	Numérico	Barra Viga (70%EI)									672,082	200,003	45530,797
5	$MDFnl_{cabo}$	-									672,082	199,982	45618,163
	Análítico	-									1185,483	500,000	67085,218
	Numérico	Barra Viga (70%EI)	314,2	4869469	197,3	500	0	0	500	1185,332	1185,483	499,987	67130,424
											1185,483	500,045	67118,884
											1185,483	499,871	67384,519

Tabela 3.12 – Continuação

Cabo	w_a (°)	w_b (°)	S_s (m)	T_s (kN)	T_{min} (kN)	T_{max} (kN)	ΔT (%)	σ_{max} (Mpa)	$mgLo/T_{max}$ (%)
1	2,268	2,268	249,4467	12098,1	12098,1	12107,6	0,08	385,4	7,97
	2,2862	2,2862	249,4467	12092,9	12092,9	12102,5	0,08	385,2	7,98
	2,2634	2,2634	249,4467	12092,8	12092,8	12102,2	0,08	385,2	7,98
	2,2781	2,2781	249,4467	12092,8	12092,8	12102,4	0,08	385,2	7,98
2	21,8472	21,8472	256,4798	1225,4	1225,5	1320,3	7,18	42,0	75,20
	22,0559	22,0559	256,4798	1225,2	1225,2	1321,9	7,32	42,1	75,10
	21,8571	21,8571	256,4798	1225,1	1225,2	1320,0	7,19	42,0	75,21
	21,8621	21,8621	256,4798	1224,8	1224,8	1321,4	7,31	42,1	75,13
3	39,6404	39,6404	274,8877	634,7	634,7	824,2	22,99	26,2	129,10
	39,974	39,974	274,8877	634,6	634,6	828,1	23,37	26,4	128,49
	39,6918	39,6918	274,8877	634,6	634,6	824,7	23,05	26,3	129,02
	39,6523	39,6523	274,8877	634,3	634,3	827,6	23,35	26,3	128,58
4	61,1423	61,1423	336,0067	352,9	352,9	731,2	51,73	23,3	177,89
	61,5168	61,5168	336,0066	352,8	352,8	739,9	52,31	23,6	175,79
	61,2753	61,2753	336,0067	352,8	352,9	734,2	51,93	23,4	177,16
	61,283	61,283	336,0067	352,6	352,6	739,2	52,30	23,5	175,95
5	80,0567	80,0567	592,6658	196,2	196,3	1136,3	82,73	36,2	201,90
	80,2957	80,2957	592,6658	196,2	196,2	1163,7	83,14	37,0	197,14
	80,1996	80,1996	592,6658	196,2	196,5	1152,4	82,95	36,7	199,07
	80,2609	80,2609	592,6658	195,9	195,9	1162,5	83,15	37,0	197,34

3.4.3.3. Método da Densidade de Tensão Superficial (MDTS)

O *Método da Densidade de Tensão Superficial (MDTS)* foi desenvolvido por Maurin e Motro (1998) com o propósito de determinar a forma de estruturas de membrana reforçadas com cabos, bem como de estruturas pneumáticas, criando uma alternativa aos métodos convencionais à data, baseados em formulações não-lineares com grandes deslocamentos e com análise de extensões (Haber e Abel 1982a).

O *MDTS* é utilizado para determinar configurações que asseguram o equilíbrio estático recorrendo a elementos de membrana triangulares com um tensor de tensões isotrópico. Para o efeito, uma série de formulações matemáticas (Ferreira 2013) garante iterativamente a convergência do método, sendo possível controlar não só a forma, como também o nível de tensão desenvolvido internamente.

Mais tarde, Maurin e Motro (2001) utilizam o método dos gradientes conjugados, associado ao método das densidades para determinar formas minimais relativas a estruturas de membrana.

Na maioria dos casos, a determinação da forma de uma estrutura de membrana é baseada numa aproximação de rede de cabos. As tensões da membrana são então estimadas com base nas tensões obtidas nessa rede de cabos, exigindo algumas simplificações. A formulação simplificada do *MDTS* permite determinar a forma de uma superfície (Maurin e Motro 1998) com base no tensor de tensões de Cauchy, relativa a um sistema de coordenadas locais $(\bar{x}\bar{y})$ de um elemento finito de superfície, descrevendo as tensões normais de membrana σ_x , σ_y e a tensão de corte σ_{xy} .

Na determinação da forma de uma estrutura de membrana é utilizado um tensor de tensões isotrópico $\{\sigma_0\}$, sem tensões de corte $\sigma_{xy} = 0$ ou de compressão $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_0 > 0$, definido no referencial local, no sistema de coordenadas cartesianas no plano (x, y) , tal que, para cada elemento de membrana escreve-se

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_0 \\ \sigma_0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \{\sigma_0\} \quad (3.28)$$

A configuração de equilíbrio de um elemento finito de membrana triangular de tensão constante (*CST*) é obtida pelo equilíbrio das três forças nodais resultantes, referidas ao tensor de tensões de Cauchy, de acordo com

$$T_i = -\frac{1}{2}L_i t \sigma_0 \quad (3.29)$$

tal que, L_i representa o comprimento do lado oposto ao nó i e t a espessura da membrana. É de salientar que as forças nodais resultantes são ortogonais ao lado oposto, de acordo com a Figura 3.27 (a). O equilíbrio global da membrana é garantido por equilíbrio das forças nodais e pode ser escrito no sistema global de coordenadas da estrutura (X, Y, Z) . Por exemplo, de acordo com a Figura 3.27 (b), a força exercida pelo elemento de membrana no nó c é dada por

$$\vec{T}_c = T_c \vec{n} = \frac{1}{2} L t \sigma_0 \vec{n} \quad (3.30)$$

ou, simplifcadamente, por

$$\vec{T}_c = \left(\frac{\sigma^*}{S}\right) L^2 \vec{ch} \quad (3.31)$$

tal que, $\vec{n}$ representa um vetor normado ortogonal ao lado oposto do nó c , o termo $\sigma^*/S (= \sigma_0 t / (4S) = \sigma / (4S))$ é o coeficiente entre a intensidade de tensão isotrópica e a área do elemento e $\vec{ch}$ é o vetor entre os nós c e h . Deste modo, é estabelecida uma base de semelhança com o *MDF*, onde se prescreve uma densidade de força para cada elemento triangular de membrana $q_s = \sigma^*/S$, denominando-se densidade de tensão superficial. Assim, um conjunto de equações não-lineares, traduzindo o equilíbrio estrutural, converte-se num sistema de equações lineares de resolução direta.

O presente método compreende uma formulação matricial simples, que permite obter a geometria estrutural de uma membrana iterativamente. Se o utilizador apenas pretende uma geometria preliminar, sem uma elevada precisão, o procedimento iterativo deve ser utilizado até que o vetor de força residual atinja um nível aceitável. Esta posição depende de um conjunto de densidades de tensão superficiais, q_{s_i} , especificadas inicialmente para cada elemento de membrana. No final da análise, a área S_i deve ser calculada para cada elemento triangular e, conseqüentemente, a intensidade da tensão isotrópica por meio de $\sigma_i^* = q_{s_i} S_i$. Assim sendo, à semelhança do *MDF*, o *MDTS* permite obter uma série de configurações de equilíbrio iniciais, fazendo variar apenas os coeficientes q_{s_i} .

Apesar da formulação implementada no âmbito do presente trabalho se aplicar a estruturas de membrana com fronteiras rígidas, Maurin e Motro (1998) estenderam a formulação a membranas contemplando cabos pré-esforçados nos bordos. À semelhança do *MDF*, os elementos de cabo têm associada uma densidade de força q , distinguindo-se, desta forma, das densidades dos elementos de superfície q_s . Para além disso, a formulação do *MDTS* foi também melhorada por forma a determinar a geometria de uma estrutura pneumática tensionada, incluindo, na sua formulação de equilíbrio nodal, um termo relativo à pressão normal aplicada aos elementos de superfície.

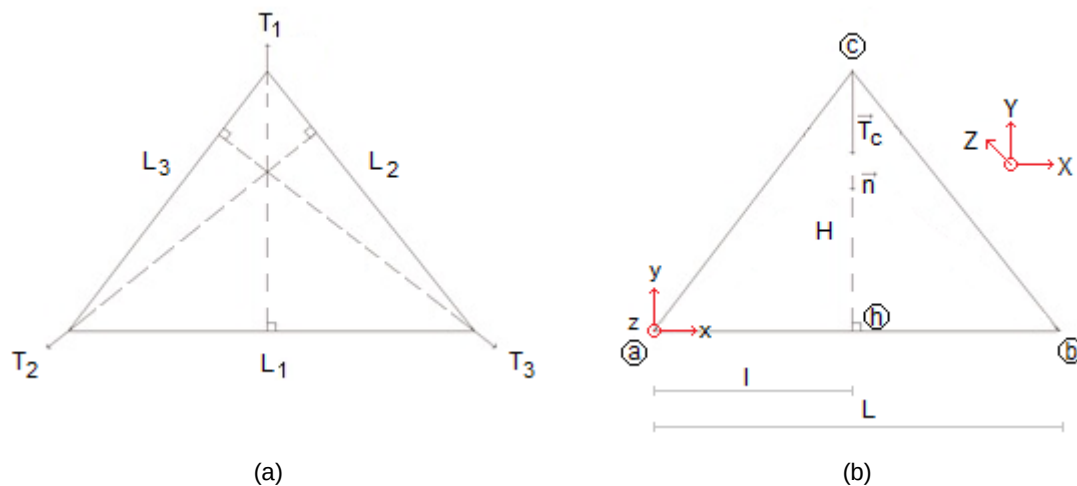


Figura 3.27 – Elemento finito triangular de membrana: (a) Forças ortogonais; (b) Forças internas no nó c

Exemplo – Membrana com bordos rígidos

De forma a ilustrar as propriedades do *MDTS*, apresenta-se um exemplo simples de uma estrutura de membrana constituída por 4 fronteiras rígidas. Os dados do problema são a topologia, de acordo com a Figura 3.28, as coordenadas cartesianas dos nós fixos e dos nós livres, apresentadas na Tabela 3.13, as forças externas aplicadas à estrutura, que neste caso se consideram nulas, e, por fim, as densidades de força definidas para os elementos de membrana $q_s = 1N/m^3$. A topologia estrutural é definida por 16 elementos triangulares de membrana, 5 nós livres e 8 nós fixos, perfazendo um total de 13 nós.

Ao contrário do método da densidade de força, o *MDTS* exige uma geometria inicial com as coordenadas de todos os nós, livres e fixos. As coordenadas dos nós livres podem ser completamente arbitrárias, ao contrário das coordenadas dos nós fixos.

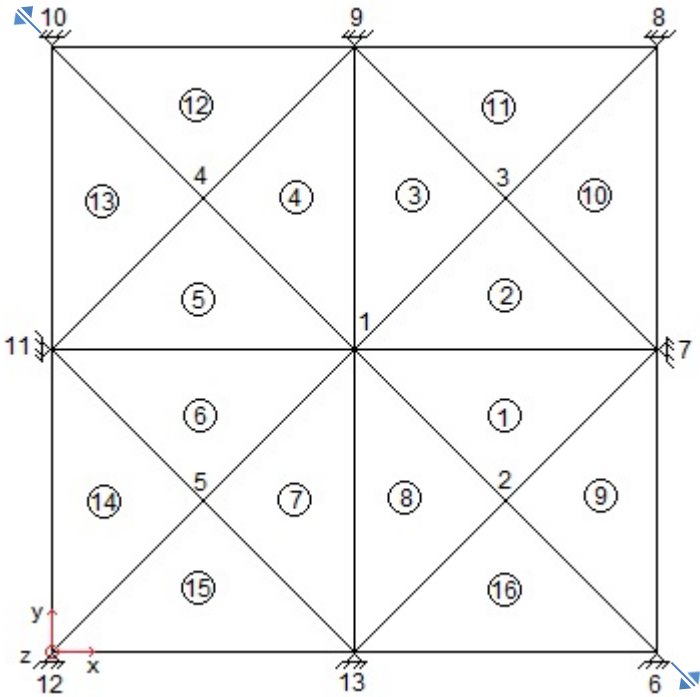


Figura 3.28 – Topologia estrutural da estrutura de membrana

Tabela 3.13 – Coordenadas cartesianas dos nós da estrutura de membrana

Nós		X (m)	Y (m)	Z (m)
Livres	1	5	5	0
	2	7,5	2,5	0
	3	7,5	7,5	0
	4	2,5	7,5	5
	5	2,5	2,5	0
Fixos	6	10	0	0
	7	10	5	0
	8	10	10	0
	9	5	10	5
	10	0	10	10
	11	0	5	5
	12	0	0	0
	13	5	0	0

De acordo com a Figura 3.28, os nós fixos 6, 8 e 12 estão contidos no plano xy e formam um triângulo, contendo vários elementos de membrana, 1, 2, 7, 8, 9, 10, 15 e 16. Os restantes elementos de membrana, 3, 4, 5, 6, 11, 12, 13 e 14 estão contidos no plano do triângulo formado pelos nós 8, 10 e 12, sendo este plano inclinado, em relação ao plano anterior. A geometria inicial é essencialmente traduzida por estes dois triângulos, que se intersectam na linha horizontal formada pelos nós 1, 8 e 12. Estes triângulos estão ilustrados em perspetiva na Figura 3.29 (a). A geometria inicial é simétrica em relação ao plano vertical que passa pelos nós 10, 1 e 6 (ver a Figura 3.28).

Ao fim de 59 iterações, para um critério de convergência de $9,5 \times 10^{-5}$, definido pela máxima diferença entre as coordenadas nodais em iterações sucessivas, foi obtida a solução apresentada na Figura 3.29 (b). A estrutura mantém a simetria referida no início, dado que as densidades de tensão superficiais atribuídas aos elementos de membrana são iguais. É de salientar a forma anticlástica da geometria final, com dupla curvatura, em que a linha definida pelos nós 10, 4, 1, 2 e 6 apresenta uma curvatura de sinal contrário à linha definida pelos nós 12, 5, 1, 3 e 8. Esta segunda linha traduzia inicialmente o eixo de interseção dos dois triângulos que formavam a geometria inicial. As coordenadas finais dos nós livres são apresentadas na Tabela 3.14.

Posto isto, tendo sido apresentados os principais métodos de determinação da forma que fazem parte do grupo dos métodos de rigidez geométrica, onde se destacaram o *MDF* e o *MDTS*, pretende-se passar agora à abordagem dos métodos do grupo de equilíbrio dinâmico.

Tabela 3.14 – Coordenadas cartesianas finais dos nós livres da estrutura de membrana

Nó	Xc (m)	Yc (m)	Zc (m)
1	4,21	5,79	3,01
2	6,97	3,03	0,81
3	7,37	7,79	1,91
4	1,94	8,06	6,28
5	2,21	2,63	1,91

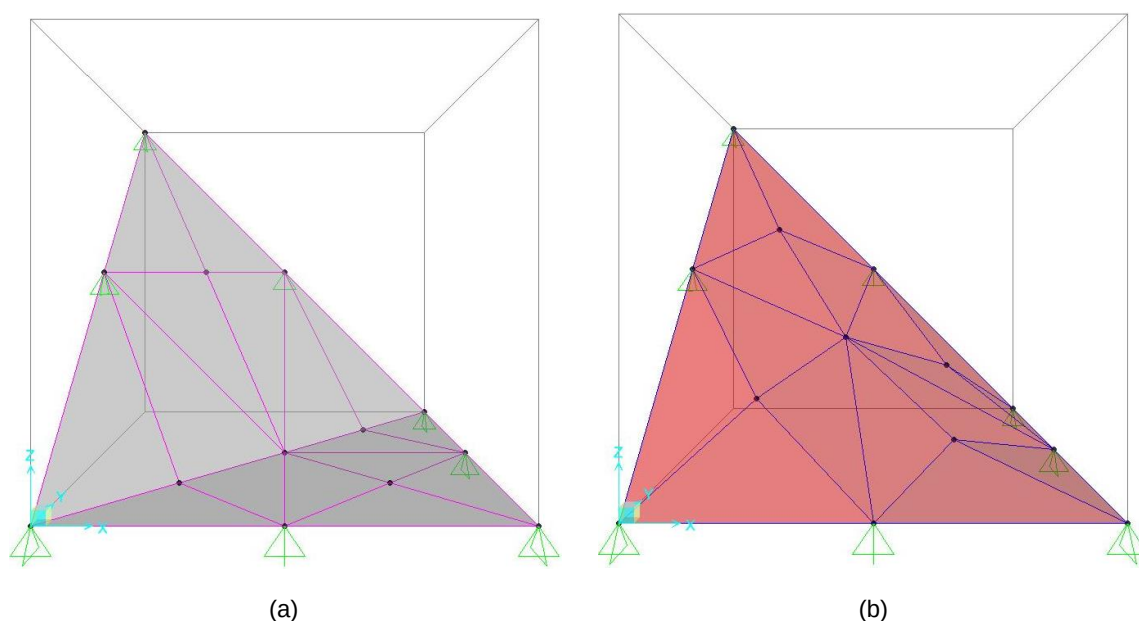


Figura 3.29 – Configuração da geometria da membrana pelo *MDTS*: (a) Inicial e (b) Final

3.4.4. EQUILÍBRIO DINÂMICO

3.4.4.1. Geral

No grupo dos métodos de equilíbrio dinâmico é de destacar o método da relaxação dinâmica (Barnes 1977), inicialmente desenvolvido para a determinação da forma de estruturas discretizadas em elementos de barra, e posteriormente melhorado considerando elementos de superfície (Barnes e Wakefield 1984), tendo surgido, mais recentemente, o *Método dos Sistemas de Mola-Partícula (MSMP)*.

Os *Sistemas de Mola-Partícula* são frequentemente usados em ciências computacionais para criar simulações físicas. Kilian e Ochsendorf (2005) e Harding e Shepherd (2011) transpõem estes conceitos para a determinação da forma de sistemas estruturais compostos unicamente por elementos com esforço axial (tração ou compressão), desde estruturas funiculares bidimensionais, até grelhas tridimensionais, permitindo, por exemplo, criar aproximações excelentes dos modelos físicos suspensos de Isler.

O *MSMP* (Kilian e Ochsendorf 2005) consiste em determinar a posição de equilíbrio das partículas, em tempo real, através de uma resolução iterativa implícita de Runge Kutta (Baraff e Witkin 1998; Baraff 2001), assumindo um conjunto de molas axiais ligadas por massas (partículas), que representam os pesos suspensos das respetivas molas. Deste modo, cada partícula é caracterizada por uma posição, velocidade, massa variável, bem como um vetor total de forças atuando sobre a mesma. As molas elásticas lineares ligam, geralmente, duas partículas, exercendo uma força sobre as mesmas, e caracterizam-se pela sua rigidez elástica constante, comprimento inicial e coeficiente de amortecimento. No entanto, o sistema composto pelas molas e partículas não está geralmente em equilíbrio quando a simulação é iniciada, resultando num movimento das mesmas até o conjunto encontrar a sua posição de equilíbrio.

3.4.4.2. Método da Relaxação Dinâmica (MRD)

Introdução

A análise das estruturas de cabos e membranas tensas, que exibem um comportamento não-linear geométrico acentuado, é geralmente realizada pelo método dos elementos finitos, combinado com o método de Newton-Raphson, a partir do qual se resolve um conjunto de equações não-lineares correspondentes ao equilíbrio da estrutura. Porém, a análise pode eventualmente divergir por esta via, devido à ausência de um campo de tensões positivas que pode originar termos negativos na diagonal da matriz de rigidez.

O método da relaxação dinâmica (*MRD*) apresenta uma alternativa à análise deste tipo de estruturas, na medida em que a solução é obtida iterativamente usando uma técnica numérica de integração direta explícita no tempo da equação de equilíbrio dinâmico, através das diferenças finitas centrais, que evita a construção da matriz de rigidez da estrutura. O valor para que tende a resposta obtida através do *MRD* corresponde à posição de equilíbrio estático.

O *MRD* foi introduzido inicialmente no estudo não-linear de estruturas de reservatórios de betão, sobre pressão, discretizados em elementos de casca, para aplicação num reator nuclear (Day 1965; Otter 1965). De seguida, o conceito do *MRD* foi amplamente utilizado no projeto de estruturas leves, não só na fase da determinação da forma, como também na análise estática não-linear, bem como na criação dos padrões de corte. Este método foi também utilizado na análise de placas (Rushton 1969).

No caso das estruturas leves, assume-se inicialmente a estrutura discretizada em elementos finitos, com a massa concentrada ao nível dos nós. O sistema de massas vibra em torno da posição de equilíbrio, sob a influência do vetor de forças residuais, R , definido através da diferença entre o vetor de forças externas, F , e o vetor de forças internas, P ,

$$R_g = F_g - P_g \quad , \quad \text{para } g = x, y \text{ e } z \quad (3.32)$$

Dada a importância do *MRD* na determinação da forma e na análise não-linear geométrica de estruturas de membrana, foi desenvolvido um programa de cálculo automático em *MATLAB* (Ferreira 2013) com base na sua formulação. O *MRD* implementado engloba dois procedimentos de resolução, um baseado no modelo de amortecimento viscoso, e outro baseado no modelo de amortecimento cinético. A validação do programa de cálculo automático é realizada por intermédio de um exemplo prático encontrado na bibliografia.

Fundamentos

A abordagem do *MRD* requer a introdução de alguns conceitos fundamentais da Dinâmica de Estruturas. Deste modo, considere-se inicialmente o sistema de um grau de liberdade esquematicamente representado na Figura 3.30 de massa m , constante de rigidez k , e constante de amortecimento viscoso c , sujeito à atuação de uma força $f(t)$.



Figura 3.30 – Sistema de um grau de liberdade

A equação do movimento do sistema estrutural pode ser obtida pelo princípio d'Alembert, expressando-se por

$$f_i + f_a + f_e = f(t) \quad (3.33)$$

tal que f_i , f_a , e f_e representam, respetivamente, as forças de inércia, de amortecimento e elástica. Estas forças podem exprimir-se em função do deslocamento do sistema, $u(t)$, e das suas 1ª e 2ª derivadas em ordem ao tempo, $\dot{u}(t)$ e $\ddot{u}(t)$, respetivamente. Daqui resulta a equação fundamental da Dinâmica de Estruturas

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = f(t) \quad (3.34)$$

A formulação do problema dinâmico, apresentado anteriormente para 1 grau de liberdade, pode ser estendida a múltiplos graus de liberdade. Para o efeito, e atendendo a que no *MRD* implementado no presente trabalho se consideram 3 graus de liberdade por nó, a equação fundamental da Dinâmica de Estruturas (3.34), associada ao vetor de forças residuais definido pela expressão (3.32), resulta em

$$M\ddot{U}_g^t + C\dot{U}_g^t = R_g^t \quad , \quad \text{para } g = x, y \text{ e } z \quad (3.35)$$

tal que M e C representam, respetivamente, as matrizes diagonais de massa e de amortecimento do sistema, R representa o vetor de forças residuais nodais, $\dot{U}$ e $\ddot{U}$ são, respetivamente, os vetores das velocidades e das acelerações nodais e t é o instante de tempo.

A resolução da equação diferencial (3.35) permite obter a resposta do sistema. Pelo *MRD* essa resolução é efetuada por integração direta no tempo, de uma forma explícita, evitando a formação da matriz de rigidez e a sua inversão. A resposta estrutural é determinada para diferentes pontos espaçados de Δt . Para o efeito, utiliza-se o método das diferenças finitas centrais.

O método das diferenças finitas centrais baseia-se na aproximação das derivadas por meio de diferenças correspondentes a intervalos de tempo discretos, Δt . Porém, no *MRD* é útil aplicar as diferenças finitas centrais apenas na aproximação da aceleração em termos das velocidades em instantes adjacentes, na medida em que se pretende obter o traçado da velocidade do sistema, como se verá posteriormente no modelo de amortecimento cinético. Assim sendo, o vetor das acelerações é definido por

$$\ddot{U}_g^t = \frac{\dot{U}_g^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \dot{U}_g^{t-\frac{\Delta t}{2}}}{\Delta t} \quad , \quad \text{para } g = x, y \text{ e } z \quad (3.36)$$

tal que $\dot{U}^{t+\Delta t/2}$ e $\dot{U}^{t-\Delta t/2}$ representam os vetores das velocidades em instantes adjacentes ao instante t . O vetor das velocidades é definido pelo valor médio das velocidades em instantes adjacentes,

$$\dot{U}_g^t = \frac{\dot{U}_g^{t+\frac{\Delta t}{2}} + \dot{U}_g^{t-\frac{\Delta t}{2}}}{2} \quad , \quad \text{para } g = x, y \text{ e } z \quad (3.37)$$

A substituição de (3.36) e (3.37) em (3.35) leva a

$$M \left(\frac{\dot{U}_g^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \dot{U}_g^{t-\frac{\Delta t}{2}}}{\Delta t} \right) + C \left(\frac{\dot{U}_g^{t+\frac{\Delta t}{2}} + \dot{U}_g^{t-\frac{\Delta t}{2}}}{2} \right) = R_g^t \quad , \quad \text{para } g = x, y \text{ e } z \quad (3.38)$$

Nestas condições, não é necessário agrupar as matrizes de rigidez dos vários elementos, porque a sua contribuição no segundo membro será obtida elemento a elemento, como se verá de seguida no cálculo das forças internas. Assim, com vista a obter o traçado da velocidade, a equação do movimento (3.38) é apresentada na forma

$$\dot{U}_g^{t+\frac{\Delta t}{2}} = \left(\frac{M}{\Delta t} + \frac{C}{2} \right)^{-1} \cdot \left[R_g^t + \dot{U}_g^{t-\frac{\Delta t}{2}} \left(\frac{M}{\Delta t} - \frac{C}{2} \right) \right] \quad , \quad \text{para } g = x, y \text{ e } z \quad (3.39)$$

Finalmente, o vetor dos deslocamentos no instante $t+\Delta t$ é definido por

$$U_g^{t+\Delta t} = U_g^t + \Delta t \dot{U}_g^{t+\frac{\Delta t}{2}} \quad , \quad \text{para } g = x, y \text{ e } z \quad (3.40)$$

tal que U^t e $\dot{U}^{t+\Delta t/2}$ representam, respetivamente, o vetor dos deslocamentos anteriores e o vetor das velocidades num instante intermédio $t+\Delta t/2$. Os vetores dos deslocamentos e das velocidades nodais são referidos às direções do referencial cartesiano x y z , respetivamente (U_x, U_y, U_z) e $(\dot{U}_x, \dot{U}_y, \dot{U}_z)$. Analogamente, os vetores de forças residuais, de forças externas e de forças internas são traduzidos, respetivamente, por (R_x, R_y, R_z) , (F_x, F_y, F_z) e (P_x, P_y, P_z) .

O cálculo da velocidade do sistema no instante $\Delta t/2$ ($\dot{U}^{+\Delta t/2}$), a partir da equação (3.39), exige o conhecimento da velocidade do sistema no instante $-\Delta t/2$ ($\dot{U}^{-\Delta t/2}$) e das forças residuais iniciais (R^0). Com efeito, considera-se que a velocidade do sistema no instante $-\Delta t/2$ é imaginária e simétrica à velocidade do sistema no instante $\Delta t/2$ ($\dot{U}^{-\Delta t/2} = \dot{U}^{+\Delta t/2}$), assumindo que a velocidade do sistema varia linearmente no tempo, e assegurando que esta velocidade no instante $t = 0s$ é igual a zero ($\dot{U}^0 = 0$). Para além disso, considera-se que as forças residuais iniciais são iguais às forças externas ($R^0 = F^0$). Atendendo às considerações anteriores, e admitindo ainda que não existe amortecimento estrutural, a equação (3.39) é desenvolvida tomando a seguinte forma (Topping e Ivanyi 2007):

$$\dot{U}_g^{\frac{\Delta t}{2}} = M^{-1} F_g^0 \frac{\Delta t}{2} \quad , \quad \text{para } g = x, y \text{ e } z \quad (3.41)$$

Os vetores das coordenadas nodais X , Y e Z são atualizados em cada iteração somando os deslocamentos obtidos às coordenadas da iteração anterior, resultando respetivamente em

$$X^{t+\Delta t} = X^t + U_x^{t+\Delta t} \quad , \quad Y^{t+\Delta t} = Y^t + U_y^{t+\Delta t} \quad e \quad Z^{t+\Delta t} = Z^t + U_z^{t+\Delta t} \quad (3.42)$$

Cálculo das Forças Internas

(i) Modelos com elementos de barra

Na análise de estruturas de cabos em que ocorre uma atualização da geometria estrutural, o cálculo do esforço axial dos elementos de barra unidirecionais é determinado por

$$T^{t+\Delta t} = T^0 + \frac{EA}{l^0} (l^{t+\Delta t} - l^0) \quad (3.43)$$

onde T^0 é o esforço axial inicial, EA/l^0 é a rigidez elástica do elemento e $(l^{t+\Delta t} - l^0) = \Delta l^{t+\Delta t}$ representa o alongamento do elemento desde a sua configuração inicial. A relação entre o esforço axial e o comprimento de cada elemento de barra é definida pelo parâmetro q ,

$$q = \frac{T}{l} \quad (3.44)$$

O vetor de forças internas P é determinado para cada direção do referencial cartesiano x y z , (P_x , P_y , P_z), como referido anteriormente. De acordo com a Figura 3.31, os elementos do vetor de forças internas P_x são determinados da seguinte forma:

$$p_{x[i,1]} = \sum_{n_j=1}^{N_j} q^{i \rightarrow n_j} \{x_i - x_{n_j}\} \quad , \quad \text{para } i = 1, 2 \dots N \quad (3.45)$$

tal que N_j é o número de elementos ligados ao nó i , N é o número total de nós da estrutura, q é a relação entre o esforço axial e o comprimento de cada elemento com extremidades i e n_j , e x_i e x_{n_j} são as coordenadas das extremidades do elemento i e n_j . Os vetores de forças internas P_y e P_z são obtidos analogamente ao vetor P_x , com base na expressão (3.45), substituindo x por y e z , respetivamente.

O vetor de forças residuais R_x é igual ao vetor de forças externas F_x menos o vetor de forças internas P_x . Os vetores de forças residuais R_y e R_z são determinados analogamente ao vetor R_x . Deste modo, a contribuição da rigidez dos elementos no segundo membro da equação do movimento (3.38) fica definida a partir dos vetores de forças residuais, com base nos vetores de forças externas e de forças internas atualizadas ao fim de cada iteração.

Nos modelos numéricos de redes de cabos realizados com elementos de barra, a maior rigidez nodal s_i depende da rigidez dos elementos adjacentes ao nó i e é traduzida por (Barnes 1988)

$$s_i = \sum_{n_j=1}^{N_j} \left(\frac{EA}{l^0} + \frac{T}{l} \right)_{i \rightarrow n_j}, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N \quad (3.46)$$

tal que EA/l^0 é a rigidez elástica, T/l é a rigidez geométrica do elemento de barra com extremidades i e n_j , N_j é o número de elementos ligados ao nó i e N é o número total de nós da estrutura. Lewis (2003) multiplica o segundo membro da equação (3.46) pelo fator 0,5, considerando que apenas metade da rigidez de cada elemento deve ser transmitida aos seus nós de extremidade.

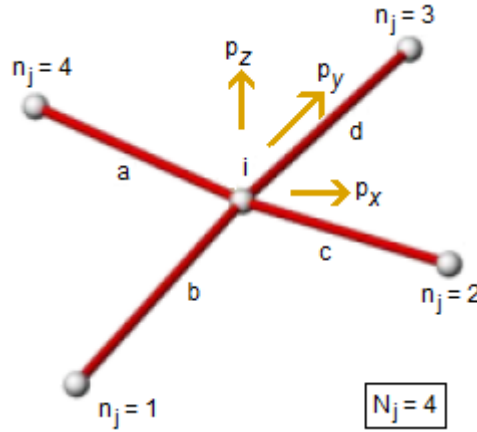


Figura 3.31 – Cálculo das forças internas de um nó genérico i

(ii) Modelos com elementos triangulares de tensão constante (CST)

Nos modelos numéricos de membranas tensas realizados com elementos triangulares de tensão constante (CST), também denominados como elementos de rigidez natural (Topping e Ivanyi 2007), o cálculo das forças internas baseia-se na formulação inicial de Argyris (1964); (Argyris, Dunne, *et al.* 1974; Argyris, Angelopoulos, *et al.* 1974; Meek 1991), tendo havido vários métodos de determinação da forma seguidores dessa formulação, tais como o método da densidade de tensão superficial (MDTS) e o método da densidade de força natural (MDFn) (Pauletti e Pimenta 2008; Guirardi 2011; Pauletti e Neto 2011). Todavia, a formulação geralmente utilizada é a proposta por Barnes (1977), que reduz a matriz de rigidez do elemento triangular de tensão constante (9x9) com três graus de liberdade por nó, a uma matriz (3x3) com dois graus de liberdade por nó. No MDTS, apresenta-se a formulação do elemento triangular de tensão constante (CST), embora a nomenclatura não seja exatamente aquela utilizada por quem tem trabalhado com o MRD (Barnes 1977; Topping e Ivanyi 2007; Lewis 2003).

Nos modelos numéricos de membranas tensas realizados com elementos triangulares, transpondo os conceitos da equação (3.46), a rigidez de um nó genérico i conectado a um elemento triangular na direção y vem dada por (Topping e Ivanyi 2007)

$$s_{iy} = \frac{3}{2} \left(\frac{Etb}{l_1} + \frac{Etb}{l_2} \right) \quad (3.47)$$

tal que l_1 e l_2 representam o espaçamento nodal na direção y , Etb é a rigidez da membrana, E é o módulo de elasticidade, t é a espessura do elemento e b é a distância média entre nós na direção x . A quantidade $3/2$ está relacionada com a rigidez cruzada entre os restantes nós.

Estabilidade

O principal inconveniente da aplicação das diferenças finitas no *MRD* tem a ver com o facto do intervalo de tempo, ou passo temporal, ter de ser inferior a um determinado valor crítico, sendo, por isso, um método de estabilidade condicionada (Clough e Penzien 1993).

A estabilidade do *MRD* depende de três parâmetros: o intervalo de tempo, ou passo, a massa e o amortecimento. No caso da aplicação do *MRD* à determinação da forma de membranas, a massa e o amortecimento são fictícios, na medida em que o objetivo é a determinação da configuração de equilíbrio estático e não a caracterização do comportamento dinâmico estrutural.

Neste sentido, os parâmetros de controlo são determinados de forma a acelerar o processo de convergência do método, e o valor da solução em fase transitória é fictício e sem significado (ver a Figura 3.32). Assim, estes parâmetros são determinados de uma forma flexível, sendo o intervalo de tempo geralmente um valor fixo, e os restantes parâmetros variam até à convergência do processo iterativo (Topping e Ivanyi 2007).

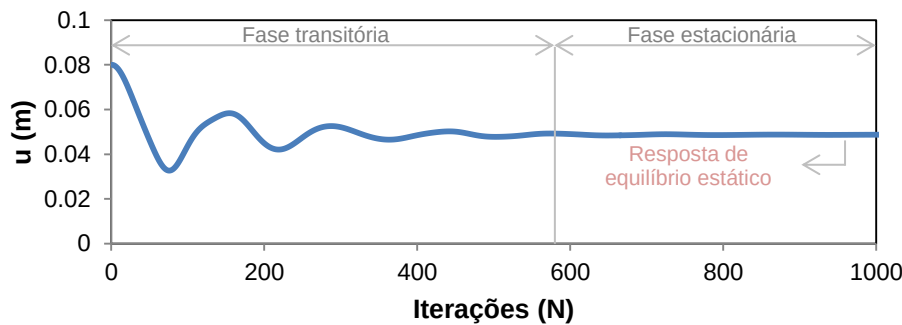


Figura 3.32 – Resposta estrutural com o método da relaxação dinâmica (*MRD*)

(i) Intervalo de tempo

A aplicação das equações de diferenças finitas centrais na integração direta no tempo da equação de equilíbrio dinâmico implica a verificação do valor do intervalo de tempo arbitrado inicialmente. Num sistema linear sem amortecimento, o método das diferenças finitas centrais é condicionalmente estável se o intervalo de tempo verificar a condição (Guirardi 2011)

$$\Delta t_{crit} < \frac{2}{\omega} = \frac{2}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \quad (3.48)$$

tal que ω , k e m representam, respetivamente, a frequência circular, a constante de rigidez e a massa do sistema. A demonstração da equação (3.48) decorre da necessidade de se manter limitado o operador temporal de integração para a equação de movimento sem amortecimento (Guirardi 2011; Hughes 1987), resultando no cálculo dos valores e vetores próprios do respetivo operador temporal. A condição de Courant-Friedrichs-Lewy (3.48), como também é conhecida, é frequentemente referida na literatura (Courant *et al.* 1967; Oakley e Knight 1995; Bathe 1996; Dang e Meguid 2010).

Os conceitos referidos anteriormente sobre estabilidade condicional de sistemas lineares com 1 grau de liberdade, dependente do conhecimento da frequência circular, são transpostos para sistemas

lineares com N graus de liberdade, sendo necessário determinar a frequência máxima do sistema (Guirardi 2011). Assim, seja a equação do movimento em vibração livre sem amortecimento dada por

$$M \ddot{U} + K U = 0 \quad (3.49)$$

Seja U uma resposta da estrutura que varie sinusoidalmente com o tempo, definida por

$$U = \Phi \sin(\omega t + \theta) \quad (3.50)$$

tal que Φ é um vetor que caracteriza a forma da deformada, invariante com o tempo, e θ o ângulo de fase, a aceleração é consequentemente definida por

$$\ddot{U} = -\Phi \omega^2 \sin(\omega t + \theta) \quad (3.51)$$

Assim, substituindo as equações (3.50) e (3.51) em (3.49), resulta em

$$-M\omega^2 \Phi \sin(\omega t + \theta) + K\Phi \sin(\omega t + \theta) = 0 \quad (3.52)$$

Considerando que a estrutura tem N graus de liberdade, as equações anteriores são válidas para qualquer instante de tempo, se a seguinte condição for satisfeita:

$$(K - \omega_n^2 M)\Phi_n = 0 \quad , \quad \text{para } n = 1, 2 \dots N \quad (3.53)$$

O sistema (3.53) apresenta soluções não nulas, para além da solução trivial, se o respetivo determinante for nulo:

$$|K - \omega_n^2 M| = 0 \quad (3.54)$$

resultando num problema de valores e vetores próprios, respetivamente, ω_n^2 e Φ_n . Deste modo, são obtidas N soluções $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_N^2$ que são as frequências dos N modos de vibração do sistema. A cada frequência ω_n corresponde um modo de vibração Φ_n .

No entanto, para sistemas não-lineares onde a matriz de rigidez K é atualizada ao fim de cada intervalo de tempo, modificando consequentemente as frequências naturais do sistema, não se pode garantir a estabilidade da integração explícita somente pela condição (3.48). Neste sentido, introduz-se na equação (3.48) um fator de não linearidade, tomando a forma (Guirardi 2011)

$$\Delta t_{crit} = \frac{2}{f_{nl} \omega_{max}} \quad (3.55)$$

tal que ω_{max} representa a frequência circular máxima do sistema. O fator de não linearidade f_{nl} varia conforme a aplicação em questão, sendo que Barnes (1988) considera $f_{nl} > 1$. Não existe, portanto, até ao momento um método específico de quantificar este fator adequadamente.

No procedimento anterior, para o cálculo do intervalo de tempo crítico, existe o inconveniente de utilizar a matriz de rigidez global do sistema, K , na determinação das frequências naturais, contrariando uma das vantagens do *MRD*, quando comparado com outros métodos de análise não-linear, que consiste em não ter de determinar a matriz de rigidez global, bem como realizar a respetiva inversão na integração numérica da equação de equilíbrio dinâmico. Neste sentido, vários autores apresentam aproximações para a matriz de rigidez, bem como para as frequências naturais, baseadas nos vetores de força, massa e deslocamento.

(ii) *Massa fictícia*

A convergência da análise para um estado de equilíbrio depende da articulação entre o intervalo de tempo e a massa fictícia dos nós, podendo ocorrer instabilidade se o intervalo de tempo for elevado e a massa reduzida. Em geral, o método converge para valores reduzidos do intervalo de tempo e valores elevados da massa fictícia (Barnes 1977), se a massa for definida por

$$m_{ix} = \frac{\Delta t^2}{2} s_{ix} \quad (3.56)$$

em que, s_{ix} representa a maior rigidez no nó i na direção x . A demonstração da equação (3.56) é apresentada através da análise de um sistema simples (ver a Figura 3.33), composto por um conjunto de nós alinhados, ligados por elementos de barra unidirecionais, vibrando livremente entre si sem amortecimento, e em sentidos opostos. Os nós possuem massa m e a rigidez s , assumindo-se que se movem apenas em linha, segundo a direção de maior rigidez. Esta configuração mobiliza maior rigidez e consequentemente apresenta maior frequência de oscilações. Dado que a frequência mais elevada é a que governa a estabilidade numérica (Lewis 2003), a configuração escolhida constitui o estado mais crítico, a partir da qual se poderá extrair a condição de estabilidade, relacionando o intervalo de tempo, Δt , a massa, m , e a rigidez nodal, s .

Topping e Ivanyi (2007) utilizam uma estratégia matemática para demonstrar a equação (3.56) que se passa a descrever. Inicialmente, calculam-se as velocidades do nó i (equação (3.39)), em dois instantes sucessivos, definidos respetivamente por

$$\dot{u}_i^{t+\frac{\Delta t}{2}} = \dot{u}_i^{t-\frac{\Delta t}{2}} + \frac{\Delta t}{m} r_i^t \quad (3.57)$$

$$\dot{u}_i^{t+\frac{3\Delta t}{2}} = \dot{u}_i^{t+\frac{\Delta t}{2}} + \frac{\Delta t}{m} \left(r_i^t - s\Delta t (\dot{u}_i - \dot{u}_j)^{t+\frac{\Delta t}{2}} \right) \quad (3.58)$$

De forma a eliminar a força residual, r_i^t , subtraem-se as equações (3.58) e (3.57), resultando em

$$-\dot{u}_i^{t+\frac{3\Delta t}{2}} + 2\dot{u}_i^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \dot{u}_i^{t-\frac{\Delta t}{2}} = \frac{\Delta t^2}{m} s\Delta t (\dot{u}_i - \dot{u}_j)^{t+\frac{\Delta t}{2}} \quad (3.59)$$

A equação (3.59) é escrita de igual forma para o nó j , resultando em

$$-\dot{u}_j^{t+\frac{3\Delta t}{2}} + 2\dot{u}_j^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \dot{u}_j^{t-\frac{\Delta t}{2}} = \frac{\Delta t^2}{m} s\Delta t (\dot{u}_j - \dot{u}_i)^{t+\frac{\Delta t}{2}} \quad (3.60)$$

A subtração das equações (3.60) e (3.59) permite obter uma equação definida por

$$-\ddot{U}_{ij}^{t+\frac{3\Delta t}{2}} + 2\ddot{U}_{ij}^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \ddot{U}_{ij}^{t-\frac{\Delta t}{2}} = \frac{2\Delta t^2}{m} s\Delta t \ddot{U}_{ij}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \quad (3.61)$$

relacionando a velocidade relativa entre os nós i e j , $\dot{U}_{ij} = (\dot{u}_i - \dot{u}_j)$. Tal como referido anteriormente, esta configuração constitui a situação mais crítica, representada por velocidades relativas, $\dot{U}_{ij}$, opostas entre nós adjacentes, em intervalos de tempo sucessivos, tal que

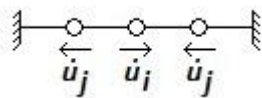


Figura 3.33 – Modelo de barras, em vibração livre não amortecida, no modo de frequência máxima

$$\dot{U}_{ij}^{t+\frac{3}{2}\Delta t} = -\dot{U}_{ij}^{t+\frac{\Delta t}{2}} = \dot{U}_{ij}^{t-\frac{\Delta t}{2}} \quad (3.62)$$

Assim sendo, substituindo as relações expostas em (3.62) em (3.61), de forma a haver apenas uma variável em toda a equação que se possa eliminar, obtém-se a relação da equação (3.56), relacionando a massa fictícia, o intervalo de tempo, bem como a rigidez nodal.

Lewis (2003) apresenta uma alternativa à abordagem anterior, no sentido de demonstrar a equação (3.56), que consiste na resolução da equação de equilíbrio dinâmico (3.49) para o mesmo sistema representado na Figura 3.33, resultando no seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} m\ddot{x}_{n-1} = -k(x_{n-1} - x_{n-2}) + k(x_n - x_{n-1}) \\ m\ddot{x}_n = -k(x_n - x_{n-1}) + k(x_{n+1} - x_n) \\ m\ddot{x}_{n+1} = -k(x_{n+1} - x_n) + k(x_{n+2} - x_{n+1}) \end{cases} \quad (3.63)$$

ou em forma matricial dada por

$$m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_{n-1} \\ \ddot{x}_n \\ \ddot{x}_{n+1} \end{Bmatrix} + k \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{n-1} \\ x_n \\ x_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.64)$$

onde k representa a rigidez de cada barra no sistema da Figura 3.33. A solução do sistema de equações (3.64) é obtida através de $x=e^{i\omega t}c$ que, diferenciando e substituindo em (3.64), origina

$$[K - m\omega^2 I]c = 0 \quad (3.65)$$

tal que I é a matriz identidade. O sistema (3.65) apresenta soluções não nulas, para além da solução trivial, se o respetivo determinante for nulo:

$$|K - m\omega^2 I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -1 & 0 \\ -1 & 2k - m\omega^2 & -1 \\ 0 & -1 & 2k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.66)$$

conduzindo a várias soluções não nulas, em que a frequência circular máxima é definida por

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}} \quad (3.67)$$

e consequente período de oscilação definido por

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{2m}{k}} \quad (3.68)$$

Ora, o intervalo de tempo utilizado na integração da equação do movimento deve ser significativamente inferior ao período de oscilação, pelo menos inferior a $T/2$, de forma a captar a amplitude da oscilação. Assim sendo, pode-se considerar que um intervalo de tempo definido no máximo por $\sqrt{2m/k}$ é suficiente para obter a estabilidade do método, resultando na massa fictícia modal exposta anteriormente (3.56). Note-se que na configuração da Figura 3.33, aliás como em todas as configurações estruturais analisadas pelo *MRD*, a rigidez das barras, à semelhança das massas, é concentrada nos nós. Portanto, neste caso, a rigidez nodal s é igual a k ($0,5k+0,5k$). Nestas condições, o fator de não linearidade f_{nl} , definido em (3.55), é igual a $\sqrt{2}$.

(iii) Amortecimento viscoso

No *MRD* podem ser utilizados dois modelos de amortecimento: cinético e viscoso. Ambos os modelos conduzem à diminuição da vibração do sistema até que este permaneça na posição de equilíbrio estático, sendo esta a solução da análise.

O efeito do amortecimento viscoso aplicado ao *MRD* apresenta quatro situações distintas na vibração de um sistema

$$\xi = \frac{c}{c_c} \Rightarrow \xi \begin{cases} = 0 & \text{vibração livre não amortecida} \\ < 1 & \text{vibração subamortecida} \\ = 1 & \text{vibração criticamente amortecida} \\ > 1 & \text{vibração sobreamortecida} \end{cases} \quad (3.69)$$

Apresenta-se, a título de exemplo, na Figura 3.34, o deslocamento vertical de um nó central de uma rede de cabos genérica, sujeita a um dado carregamento, com diferentes coeficientes de amortecimento, sendo o amortecimento crítico do sistema baseado no modo de frequência mais baixa, como se vai ver adiante. A vibração da estrutura pode, eventualmente, tender para a posição de equilíbrio estático, quando o amortecimento viscoso é aplicado, caso contrário, a estrutura permanece em vibração livre, não amortecida ($\xi = 0$). É de notar que o método converge mais rapidamente utilizando o amortecimento crítico do sistema ($\xi = 1$). O sistema sobreamortecido ($\xi > 1$) implica uma convergência lenta do método, para além da estrutura não “cruzar” a posição de equilíbrio, ao contrário do sistema subamortecido ($\xi < 1$), sendo este último preferível ao primeiro (Lewis 2003).

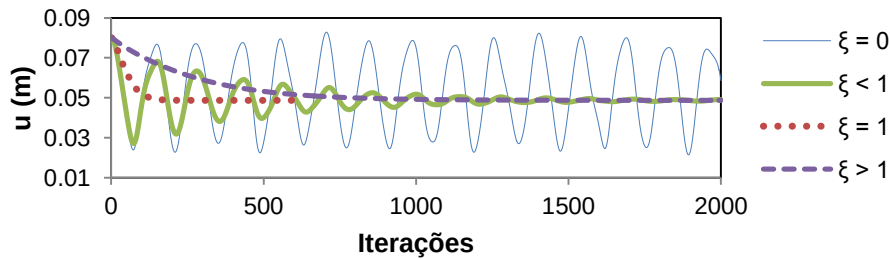


Figura 3.34 – Variação dos deslocamentos de um nó genérico com coeficientes de amortecimento distintos

O presente modelo compreende duas fases distintas, uma primeira para avaliação do amortecimento crítico e outra para determinar a geometria estrutural. Primeiramente, estima-se o coeficiente de amortecimento crítico do sistema, sendo necessário realizar uma análise da estrutura em vibração livre ($\xi = 0$), a partir da qual, através da resposta estrutural, se estima a frequência no modo fundamental, f , definida por

$$f = \frac{1}{N\Delta t} \quad (3.70)$$

tal que N representa o número de iterações que a estrutura leva a completar um ciclo de oscilações no modo fundamental e Δt o intervalo de tempo entre cada iteração. Assim sendo, o coeficiente de amortecimento crítico para um sistema de um grau de liberdade é definido por

$$c_{crit} = 4\pi m f \quad (3.71)$$

No caso de sistemas de múltiplos graus de liberdade é utilizada a frequência mais baixa (Lewis 2003) para estimar o amortecimento crítico, embora seja a frequência mais elevada que condiciona a estabilidade da convergência (Topping e Ivanyi 2007).

Na segunda fase, o processo iterativo da relaxação dinâmica é reiniciado com o amortecimento crítico determinado, com o objetivo de estimar iterativamente a geometria da estrutura na posição de equilíbrio (solução da fase estacionária).

O modelo de amortecimento viscoso acima descrito é atualmente obsoleto (Lewis 2003), pois apresenta algumas desvantagens, pelo facto de serem necessárias duas análises para obter a solução da fase estacionária. Neste sentido, pode-se contornar este problema, estimando um amortecimento artificial próximo do amortecimento crítico do sistema, de forma a acelerar a convergência para a solução. Este amortecimento tem por base o amortecimento de Rayleigh, definido por

$$C = \alpha M + \beta K \quad (3.72)$$

sendo α e β valores escalares, e M e K matrizes de massa e de rigidez global.

Papadrakakis (1981) propõe estimar o amortecimento, baseado, unicamente, na percentagem da massa do sistema, α , definida por

$$\alpha = \frac{4 \sqrt{\omega_{min}^2 + \omega_{max}^2}}{\Delta t_{otm} (\omega_{min}^2 + \omega_{max}^2)} \quad (3.73)$$

onde

$$\Delta t_{otm} = \sqrt{\frac{4}{\omega_{min}^2 + \omega_{max}^2}} \quad (3.74)$$

sendo ω_{min} e ω_{max} , respetivamente, a menor e maior frequência circular do sistema.

Em geral, nas estruturas de cabos e membranas, as maiores frequências são, de facto, muito superiores às frequências mais baixas, $\omega_{min} \ll \omega_{max}$, de tal forma que o intervalo de tempo otimizado Δt_{otm} , definido pela equação (3.74), se reescreve aproximadamente

$$\Delta t_{otm} \cong \frac{2}{\omega_{max}} \quad (3.75)$$

e a percentagem de massa α (equação (3.73)) resulta consequentemente em

$$\alpha \cong 2\omega_{min} \quad (3.76)$$

Zhang e Yu (1989) propõem também um amortecimento estrutural baseado somente na percentagem da massa α , que varia em cada passo de integração, Δt , definida por

$$\alpha^t = 2 \left(\frac{u^{tT} P(u)^t u^t}{u^{tT} M u^t} \right)^{0,5} \quad (3.77)$$

Alternativamente, Oakley e Knight (1995) propõem uma aproximação para a frequência circular mínima, traduzida por

$$\omega_{min}^2 = 2 \left(\frac{\dot{u}^{t-\frac{\Delta t}{2}} S^t \dot{u}^{t-\frac{\Delta t}{2}}}{\dot{u}^{t-\frac{\Delta t}{2}} M \dot{u}^{t-\frac{\Delta t}{2}}} \right)^{0,5} \quad (3.78)$$

em que S é uma matriz diagonal, em que os seus elementos são definidos por

$$S_{ii}^t = \frac{P_i^t - P_i^{t-\Delta t}}{\Delta t \dot{u}^{t-\Delta t}} \quad (3.79)$$

Assim, a percentagem de massa α é definida pela equação (3.78) em conjunto com a equação (3.76).

Na literatura é possível encontrar abordagens semelhantes à anterior, para a determinação do amortecimento do sistema, atualizado em cada iteração, tais como as devidas a Kadkhodayan *et al.* (1997), Wu (1995) e Kadkhodayan *et al.* (2008). No entanto, o processo de análise de estruturas de cabos e membranas tensas está associado geralmente a uma série de perturbações, podendo não ser aconselhada a atualização do amortecimento do sistema, na medida em que pode ocorrer perda de eficiência do método. A perda de eficiência varia consideravelmente com o exemplo em questão (Pajand *et al.* 2011).

(iv) Amortecimento cinético

Todavia, em sistemas que exibem um comportamento não-linear geométrico acentuado, a determinação de um coeficiente de amortecimento, que acelere a convergência e garanta ao mesmo tempo a estabilidade da solução, não é trivial, na medida em que a determinação aproximada das frequências naturais depende da configuração inicial da estrutura, que é geralmente muito distinta da configuração final, variando consideravelmente a rigidez tangente e, conseqüentemente, as frequências e o coeficiente de amortecimento.

Neste sentido, de forma a evitar a determinação de um coeficiente de amortecimento aproximado, utiliza-se um modelo denominado de modelo de amortecimento cinético, inicialmente utilizado no âmbito da Mecânica das Rochas (Cundall 1976) e, posteriormente, nas estruturas de cabos e membranas (Papadrakakis 1981; Barnes 1988; Lee *et al.* 2011; Meek 1991), em múltiplas aplicações, desde a determinação da forma, à análise estática, bem como na criação dos padrões de corte. Em termos gerais, utiliza-se um procedimento energético para monitorizar o cálculo da posição de equilíbrio dinâmico, com o intuito de reduzir a magnitude das oscilações, para que a estrutura convirja para a posição de equilíbrio estático.

Este modelo requer menos parâmetros do que o anterior, uma vez que se considera nulo o amortecimento da estrutura, restando a determinação do intervalo de tempo e da massa fictícia dos nós que depende do anterior (equação (3.56)). No caso de ocorrer instabilidade, dever-se-á aumentar a massa ou reduzir o intervalo de tempo. No entanto, o *MRD* via amortecimento cinético tem demonstrado bastante estabilidade e rápida convergência na análise de estruturas com comportamento não-linear geométrico acentuado (Barnes 1999).

O presente modelo baseia-se no comportamento de estruturas com um único grau de liberdade, ou com múltiplos graus de liberdade mas vibrando num único modo. Nestes dois casos, partindo do princípio que a estrutura se encontra em vibração livre, a energia cinética da estrutura atinge um máximo em torno da posição de equilíbrio estático, onde a velocidade é máxima (Figura 3.35). A energia cinética do sistema U_k é determinada em cada iteração, através de

$$U_k = \frac{1}{2} \left[(M\dot{U}_x)^T \dot{U}_x + (M\dot{U}_y)^T \dot{U}_y + (M\dot{U}_z)^T \dot{U}_z \right] \quad (3.80)$$

tal que M é a matriz diagonal de massa e $\dot{U}$ é o vetor das velocidades nodais. U_k aumenta quando os nós se aproximam da posição de equilíbrio, onde atinge um pico, e diminui quando os nós se afastam dessa posição. Neste sentido, o princípio do modelo consiste em parar a vibração do sistema, igualando as velocidades nodais a zero, quando a energia cinética começa a diminuir.

A Figura 3.36 representa o traçado típico da energia cinética de uma estrutura com múltiplos graus de liberdade, resultante de uma análise não-linear de uma rede de cabos. No caso da determinação da posição de equilíbrio estático de uma rede de cabos ou membrana, com uma geometria inicial pouco precisa, os primeiros picos estão geralmente relacionados com modos de frequências mais elevadas, causados por uma grande diferença entre as forças externas e internas, nos bordos ou nos apoios. Depois destes modos serem substancialmente amortecidos, seguem-se os modos de frequências mais baixas associados ao comportamento global da forma estrutural, sendo o movimento da estrutura normalmente perpendicular ao plano da superfície. Por último, ocorrem picos de energia mais baixa, mais frequentes, até que o modelo converge na posição de equilíbrio estático.

Depois de detetado um pico na energia cinética do sistema, o reposicionamento dos nós da estrutura pode ser efetuado para o ponto de energia cinética máxima (Lewis 2003; Barnes 1988), assumindo que a curva da energia cinética do sistema, em ordem ao tempo, se traduz por uma função parabólica, ou, alternativamente, para um ponto anterior ao pico (Topping e Ivanyi 2007; Wakefield 1999). O programa de cálculo automático desenvolvido segue esta última abordagem.

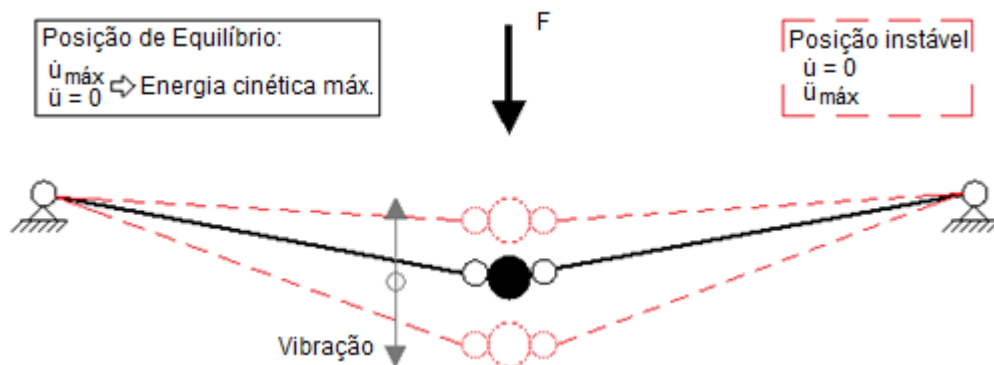


Figura 3.35 – Vibração livre não amortecida da estrutura

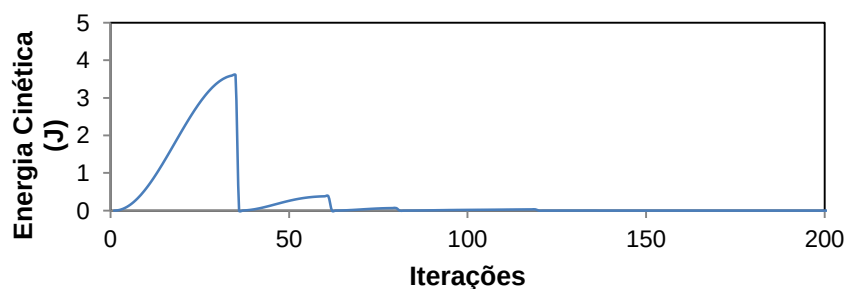


Figura 3.36 – Traçado da energia cinética típica de uma estrutura com múltiplos graus de liberdade

Assim, considere-se um pico de energia cinética típico, representado na Figura 3.37. O pico é detetado, através da descida de energia cinética do sistema no instante $t+\Delta t/2$. Tendo em conta que as velocidades são determinadas no mesmo ciclo iterativo que as coordenadas nodais, a posição da estrutura nesse instante é $(X,Y,Z)^{t+\Delta t}$. No entanto, se essas coordenadas fossem utilizadas como posição inicial das iterações seguintes, poder-se-ia invalidar a convergência completa. Assim, o reposicionamento das coordenadas dos nós é efetuado para o instante $t-\Delta t/2$, onde se assume que tenha ocorrido o pico de energia cinética.

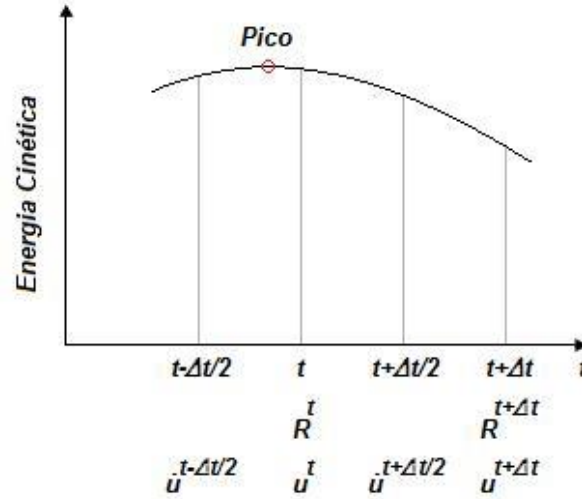


Figura 3.37 – Localização do ponto de energia cinética máxima

As coordenadas da estrutura são recuperadas para o instante t por intermédio de

$$X^t = X^{t+\Delta t} - \Delta t \dot{U}_x^{t+\frac{\Delta t}{2}} \quad (3.81)$$

$$Y^t = Y^{t+\Delta t} - \Delta t \dot{U}_y^{t+\frac{\Delta t}{2}} \quad (3.82)$$

$$Z^t = Z^{t+\Delta t} - \Delta t \dot{U}_z^{t+\frac{\Delta t}{2}} \quad (3.83)$$

De forma semelhante, as coordenadas no instante $t-\Delta t/2$ são obtidas por

$$X^{t-\frac{\Delta t}{2}} = X^t - \frac{\Delta t}{2} \dot{U}_x^{t-\frac{\Delta t}{2}} \quad (3.84)$$

$$Y^{t-\frac{\Delta t}{2}} = Y^t - \frac{\Delta t}{2} \dot{U}_y^{t-\frac{\Delta t}{2}} \quad (3.85)$$

$$Z^{t-\frac{\Delta t}{2}} = Z^t - \frac{\Delta t}{2} \dot{U}_z^{t-\frac{\Delta t}{2}} \quad (3.86)$$

Utilizando as equações (3.39) e (3.81) em (3.84), (3.39) e (3.82) em (3.85) e (3.39) e (3.83) em (3.86), resulta respetivamente em

$$X^{t-\frac{\Delta t}{2}} = \left(X^{t+\Delta t} - \Delta t \dot{U}_x^{t+\frac{\Delta t}{2}} \right) - \left(\dot{U}_x^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \Delta t M^{-1} R_x^t \right) \frac{\Delta t}{2} \quad (3.87)$$

$$Y^{t-\frac{\Delta t}{2}} = \left(Y^{t+\Delta t} - \Delta t \dot{U}_y^{t+\frac{\Delta t}{2}} \right) - \left(\dot{U}_y^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \Delta t M^{-1} R_y^t \right) \frac{\Delta t}{2} \quad (3.88)$$

$$Z^{t-\frac{\Delta t}{2}} = \left(Z^{t+\Delta t} - \Delta t \dot{U}_z^{t+\frac{\Delta t}{2}} \right) - \left(\dot{U}_z^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \Delta t M^{-1} R_z^t \right) \frac{\Delta t}{2} \quad (3.89)$$

Finalmente, as coordenadas após cada pico de energia cinética são obtidas, rearranjando as equações (3.87), (3.88) e (3.89), respetivamente, para a forma

$$X^{t-\frac{\Delta t}{2}} = X^{t+\Delta t} - \frac{3}{2} \Delta t \dot{U}_x^{t+\frac{\Delta t}{2}} + \frac{\Delta t^2}{2} M^{-1} R_x^t \quad (3.90)$$

$$Y^{t-\frac{\Delta t}{2}} = Y^{t+\Delta t} - \frac{3}{2} \Delta t \dot{U}_y^{t+\frac{\Delta t}{2}} + \frac{\Delta t^2}{2} M^{-1} R_y^t \quad (3.91)$$

$$Z^{t-\frac{\Delta t}{2}} = Z^{t+\Delta t} - \frac{3}{2} \Delta t \dot{U}_z^{t+\frac{\Delta t}{2}} + \frac{\Delta t^2}{2} M^{-1} R_z^t \quad (3.92)$$

Depois de atualizada a geometria da estrutura para a sua posição de equilíbrio ótima, a análise recomeça, anulando as variáveis da velocidade e energia cinética.

O ciclo de operações do *MRD* baseado no modelo de amortecimento cinético resume-se na Figura 3.38, de acordo com o programa de cálculo automático desenvolvido. Primeiramente, são definidas as condições iniciais, como a matriz de massa M , o intervalo de tempo Δt , a geometria $(X, Y, Z)^0$, as forças de pré-esforço T^0 , quando existentes, e as forças externas (F_x, F_y, F_z) , bem como as velocidades iniciais iguais a zero ($\dot{U}^0 = 0$), obrigando à utilização da equação (3.41).

O processo iterativo inicia-se com o cálculo das forças residuais (equação (3.32)), sendo iguais às forças externas aplicadas, a não ser que existam forças de pré-esforço. De seguida, são determinadas as velocidades (equação (3.39) sem amortecimento), os deslocamentos (equação (3.40)) e as coordenadas nodais (equação (3.42)).

Posteriormente, a energia cinética do sistema é calculada (equação (3.80)), permitindo detetar a existência de um pico de energia cinética, por comparação com a energia cinética da iteração anterior. Se o pico for detetado, as coordenadas dos nós da estrutura são reposicionadas para o instante $t-\Delta t/2$ (equações (3.90), (3.91) e (3.92)).

De seguida, os esforços nos elementos de barra são calculados (equação (3.43)). Depois é calculado o parâmetro de convergência δ dado pelo máximo de três quantidades relacionadas com as forças residuais. Cada quantidade é igual ao somatório do valor absoluto das forças residuais em cada direção x , y e z ($\delta = \max(\sum |R_x|; \sum |R_y|; \sum |R_z|)$). O processo iterativo termina se o parâmetro de convergência for inferior a um valor de referência especificado pelo utilizador (δ_{ref}).

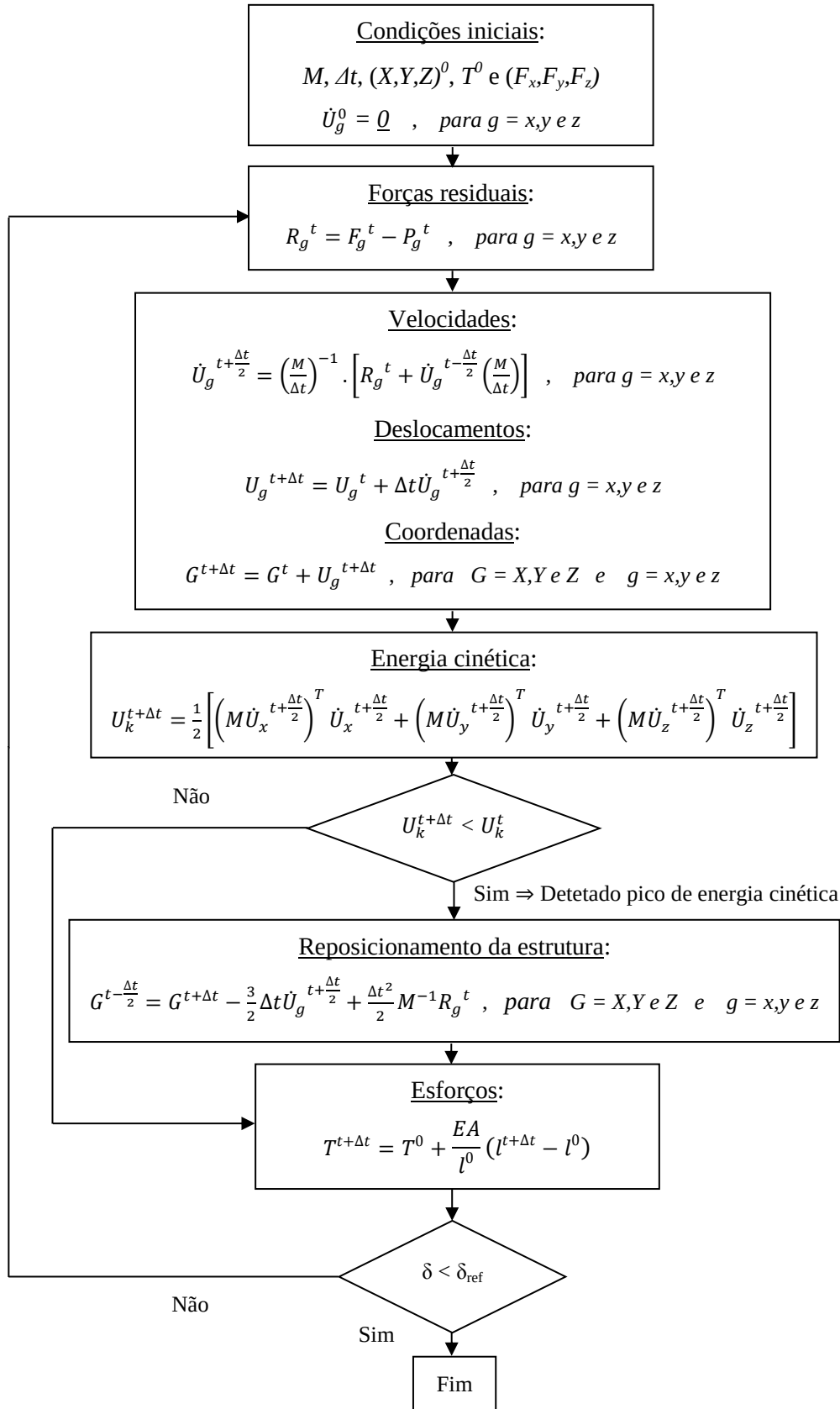


Figura 3.38 – Fluxograma do método da relaxação dinâmica (MRD) baseado no modelo de amortecimento cinético

No caso do procedimento baseado no modelo de amortecimento viscoso, o ciclo de operações apresentado anteriormente é semelhante, excetuando dois aspetos. O primeiro aspeto tem a ver com a definição de um amortecimento estrutural, estimado com base na resposta estrutural em vibração livre. Portanto, o cálculo da velocidade do sistema incluirá esse amortecimento estimado (equação (3.39)). O segundo aspeto tem a ver com a inexistência da monitorização da energia cinética, dado que, neste procedimento, é o próprio amortecimento estrutural que irá conduzir à diminuição da vibração do sistema até que este permaneça na posição de equilíbrio estático, sendo esta a solução da análise.

Exemplo – Rede de cabos em parabolóide hiperbólico

De forma a ilustrar as propriedades do *MRD*, apresenta-se um exemplo simples de uma estrutura formada por uma rede de cabos estudada por Lewis *et al.* (1984). A maioria das redes de cabos pré-esforçadas utilizadas em coberturas são sistemas bidirecionais, de curvatura Gaussiana negativa, e um exemplo típico é o parabolóide hiperbólico, ou rede “hypar”.

A estrutura é composta por 7 cabos dispostos segundo uma malha retangular em planta, de que resultam 12 nós livres, 14 nós fixos, perfazendo um total de 26 nós. Os dados do problema são as propriedades do material dos cabos, definidas na Tabela 3.15, a topologia, de acordo com a Figura 3.39, a geometria inicial apresentada na Figura 3.40, tendo por base as coordenadas cartesianas dos nós apresentadas na Tabela 3.16, e a força de pré-esforço nos cabos de 200N. Para a análise não-linear geométrica realizada pelo *MRD* com base nos dois modelos de amortecimento - viscoso e cinético, foi considerada uma carga antissimétrica, definida na Tabela 3.16.

Tabela 3.15 – Características do material dos cabos

E (kN/mm ²)	128,300
A (mm ²)	0,785
EA (N)	100715,500
$\rho_{\text{aço}}$ (kg/m ³)	7850,000
q_z (N/m)	0,048

(i) Modelo de amortecimento viscoso

O processo iterativo inerente ao *MRD* depende de alguns parâmetros de controlo, como já foi visto anteriormente, de forma a obter a estabilidade da solução. Os parâmetros são o intervalo de tempo, a massa fictícia dos nós e o amortecimento. Centrando o cálculo nos dois primeiros parâmetros, visto que o último estará relacionado com o modelo de amortecimento adotado na análise da estrutura - viscoso ou cinético, estima-se inicialmente a massa fictícia dos nós, para cada direção, com maior rigidez nodal, s (ver a equação (3.46)), por $m = \rho \cdot L_{inf} \cdot A \cdot 0,8 = 1,971 \times 10^{-3} \text{ kg}$, em que L_{inf} representa o comprimento de influência de cada nó livre, tendo-se considerado igual a 0,4m. O intervalo de tempo é determinado de acordo com a referência $\Delta t < \sqrt{m L_{inf} / EA} = 8,850 \times 10^{-5} \text{ s}$, que por sua vez é baseado em Day e Bunce (1970). Sendo assim, e acompanhando o exemplo de referência, arbitra-se para a massa fictícia nodal e para o intervalo de tempo, respetivamente, $1,8 \times 10^{-3} \text{ kg}$ e $8 \times 10^{-5} \text{ s}$.

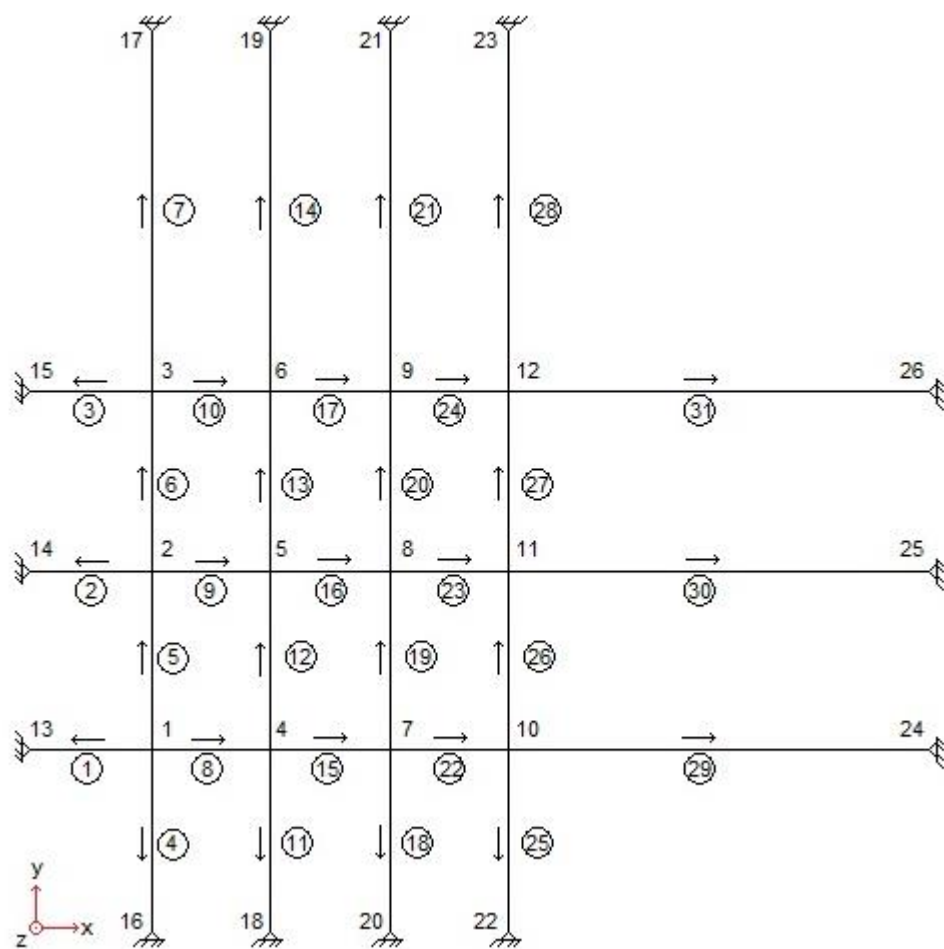


Figura 3.39 – Topologia da estrutura da rede de cabos

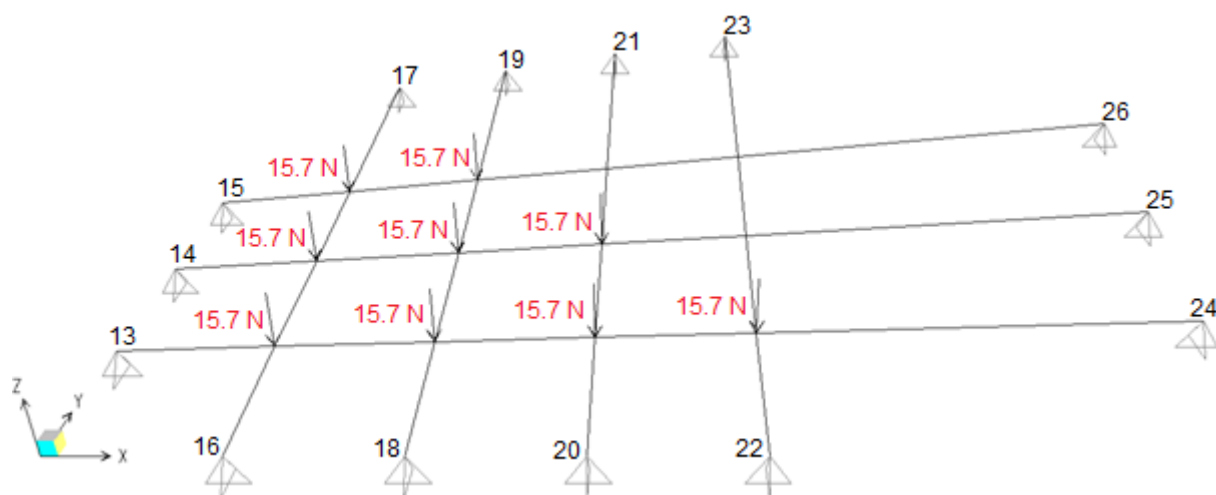


Figura 3.40 – Geometria inicial

Tabela 3.16 – Coordenadas cartesianas dos nós e forças nodais externas

Nó	X (m)	Y (m)	Z (m)	Fx (N)	Fy (N)	Fz (N)
Livre	1	0,400	0,400	0,013	0,000	-15,700
	2	0,400	0,800	0,027	0,000	-15,700
	3	0,400	1,200	0,040	0,000	-15,700
	4	0,800	0,400	0,027	0,000	-15,700
	5	0,800	0,800	0,053	0,000	-15,700
	6	0,800	1,200	0,080	0,000	-15,700
	7	1,200	0,400	0,040	0,000	-15,700
	8	1,200	0,800	0,080	0,000	-15,700
	9	1,200	1,200	0,120	0,000	0,000
	10	1,600	0,400	0,053	0,000	-15,700
	11	1,600	0,800	0,107	0,000	0,000
	12	1,600	1,200	0,160	0,000	0,000
Fixo	13	0,000	0,400	0,000	0,000	0,000
	14	0,000	0,800	0,000	0,000	0,000
	15	0,000	1,200	0,000	0,000	0,000
	16	0,400	0,000	0,000	0,000	0,000
	17	0,400	2,000	0,067	0,000	0,000
	18	0,800	0,000	0,000	0,000	0,000
	19	0,800	2,000	0,133	0,000	0,000
	20	1,200	0,000	0,000	0,000	0,000
	21	1,200	2,000	0,200	0,000	0,000
	22	1,600	0,000	0,000	0,000	0,000
	23	1,600	2,000	0,267	0,000	0,000
	24	2,700	0,400	0,090	0,000	0,000
	25	2,700	0,800	0,180	0,000	0,000
	26	2,700	1,200	0,270	0,000	0,000

De seguida, procede-se à análise da estrutura, tendo por base o modelo de amortecimento viscoso. Este modelo compreende duas fases distintas, uma primeira para avaliação do amortecimento crítico e outra para determinar a geometria estrutural. Primeiramente estima-se o coeficiente de amortecimento crítico do sistema, sendo necessário realizar uma análise da estrutura em vibração livre ($\zeta = 0$), a partir da qual, através da resposta estrutural (ver Figura 3.41), se estima a frequência no modo fundamental, e respetivo amortecimento crítico (ver a Tabela 3.17).

De acordo com a Figura 3.41, evidencia-se que demora cerca de 147 iterações a completar um período de oscilações, quer para o nó 5, quer para o nó 8. Logo, sendo o intervalo de tempo, Δt , igual a 8×10^{-5} s, o período, T , correspondente será igual a $1,176 \times 10^{-2}$ s ($N \cdot \Delta t$) e a frequência, f , igual a $85,034 \text{ Hz}$ ($1/T$)

e, finalmente, o amortecimento crítico c_{crit} igual a $1,923\text{kg/s}$ ($4\pi mf$). No exemplo de referência o amortecimento crítico é igual a 2kg/s . Contudo, considerou-se o amortecimento calculado anteriormente no presente trabalho, igual a $1,923\text{kg/s}$, uma vez que ambos conduzem à mesma solução.

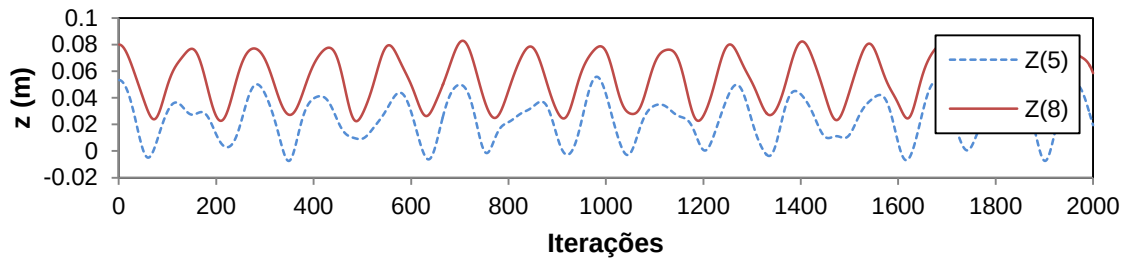


Figura 3.41 – Resposta estrutural dos nós centrais 5 e 8 em vibração livre não amortecida

Tabela 3.17 – Cálculo do amortecimento crítico

Iterações (N)	147
Δt (s)	$8,000 \times 10^{-5}$
$T = N\Delta t$ (s)	$1,176 \times 10^{-2}$
$f = 1/T$ (Hz)	85,034
$C_{crit} = 4\pi mf$ (kg/s)	1,923

A segunda fase do modelo de amortecimento viscoso consiste em realizar a análise com os parâmetros estimados anteriormente: massa fictícia nodal $m = 1,8 \times 10^{-5}\text{kg}$, intervalo de tempo $\Delta t = 8 \times 10^{-5}\text{s}$ e amortecimento crítico $c_{crit} = 1,923\text{kg/s}$. A Figura 3.42 apresenta a geometria final da análise pelo modelo de amortecimento viscoso. A Figura 3.43 apresenta a evolução da resposta estrutural em vibração criticamente amortecida dos nós centrais 5 e 8, tendo sido necessárias 609 iterações para a convergência do método, para um parâmetro de convergência de $\delta = 1 \times 10^{-9}$.

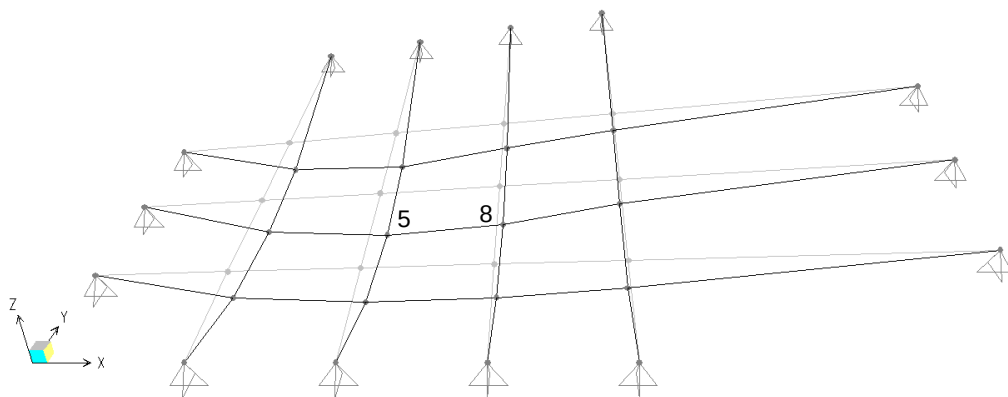


Figura 3.42 – Configuração deformada da estrutura pelo modelo de amortecimento viscoso

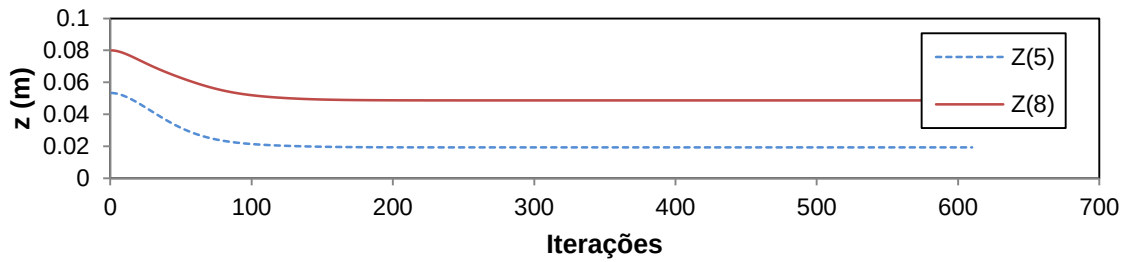


Figura 3.43 – Evolução da resposta estrutural dos nós centrais 5 e 8 em vibração criticamente amortecida

(ii) Modelo de amortecimento cinético

Por sua vez, o modelo de amortecimento cinético requer menos parâmetros do que o modelo de amortecimento viscoso, uma vez que se considera nulo o amortecimento da estrutura. Desta forma, resta a determinação da massa fictícia nodal e do intervalo de tempo, de acordo com o procedimento efetuado anteriormente, resultando, respetivamente, em $m = 1,8 \times 10^{-5} \text{ kg}$ e $\Delta t = 8 \times 10^{-5} \text{ s}$.

A Figura 3.44 apresenta a geometria final da análise, pelo modelo de amortecimento cinético. A Figura 3.45 (a) apresenta a evolução da resposta estrutural dos nós centrais 5 e 8. A Figura 3.45 (b) apresenta a evolução da energia cinética, tendo sido necessárias 766 iterações para a convergência do método, para um parâmetro de convergência de $\delta = 1 \times 10^{-9}$. O número de picos de energia cinética detetados foi de 39. O primeiro pico está relacionado com o modo de frequência mais baixa, associado ao comportamento global da forma estrutural, sendo o movimento perpendicular ao plano da superfície. Por isso se evidencia nos nós 5 e 8 uma alteração significativa da sua coordenada no eixo dos z , que coincide com a direção do carregamento aplicado à estrutura. De seguida, ocorrem picos de energia mais baixa, mais frequentes, embora não seja perceptível na Figura 3.45 (b), até que o modelo converge na posição de equilíbrio estático.

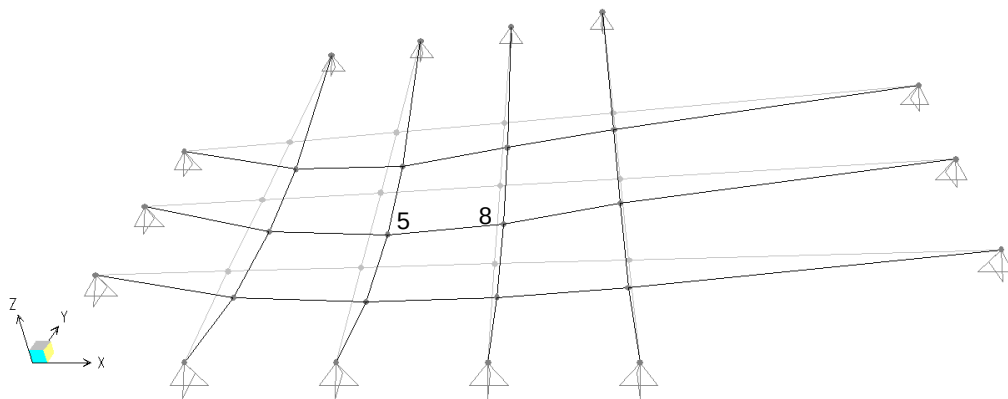
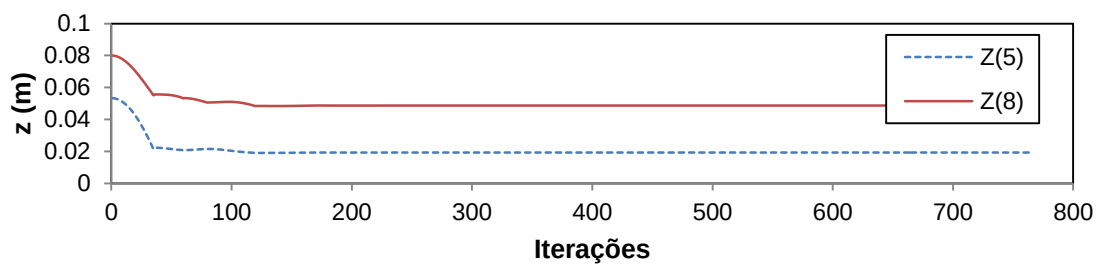


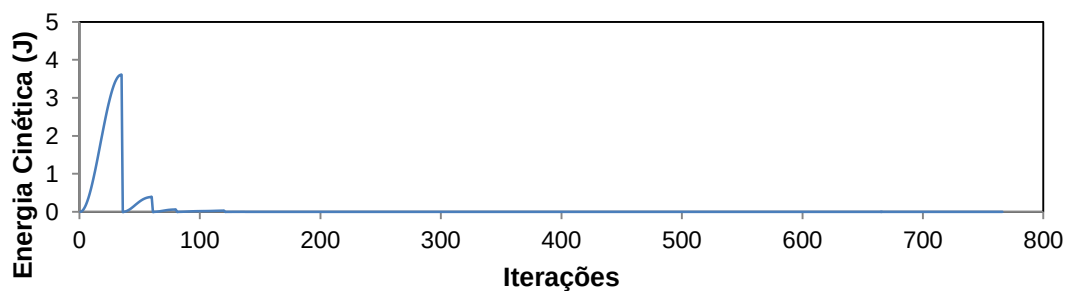
Figura 3.44 – Configuração deformada da estrutura pelo modelo de amortecimento cinético

A configuração indeformada e deformada de dois cabos da estrutura é apresentada nas Figuras 3.46 (a) e (b), respetivamente. Estes cabos estão localizados entre os apoios 18 / 19 e 15 / 26. A configuração deformada de ambos os cabos é obtida com base no programa de cálculo automático desenvolvido do *MRD*, respetivamente pelo modelo de amortecimento viscoso e cinético. Complementarmente, é apresentada a configuração deformada de ambos os cabos com base nos resultados de referência obtidos por Lewis *et al.* (1984), baseados no *MRD* pelo modelo de amortecimento viscoso e nos ensaios experimentais. É de notar que a configuração deformada dos 2 cabos obtida pelas várias vias de análise é aparentemente coincidente.

A Tabela 3.18 apresenta os resultados numéricos da deformada da estrutura com base no deslocamento vertical dos nós livres, pelas várias vias de análise referidas anteriormente. Opta-se por não se apresentar os resultados nas direções x e y por serem valores reduzidos. Os resultados obtidos pelo *MRD* implementado no presente trabalho, com base nos dois modelos de amortecimento, são iguais. Em geral, evidencia-se uma aproximação bastante razoável entre os resultados obtidos pelo *MRD* implementado no presente trabalho e os resultados de referência. Note-se que existe um erro máximo de 2,74% no deslocamento do nó 12, correspondendo a uma diferença em valor absoluto de 0,39mm, comparando os resultados obtidos pelo *MRD* via modelo de amortecimento viscoso.



(a)

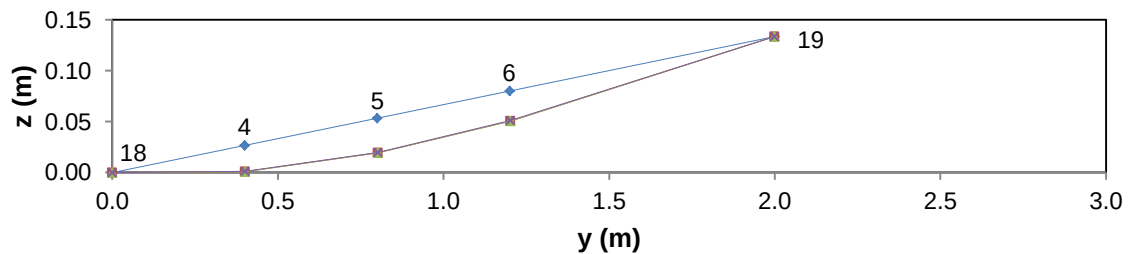


(b)

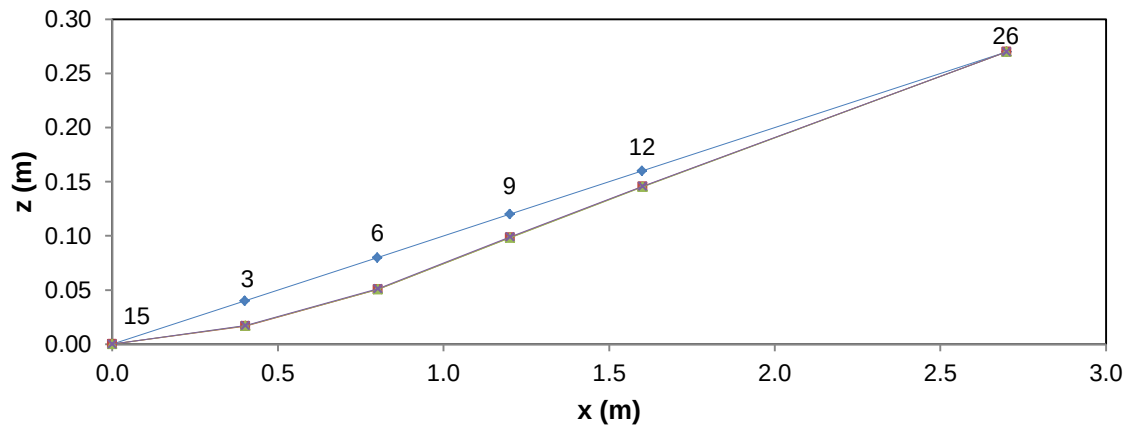
Figura 3.45 – (a) Evolução da resposta estrutural dos nós centrais 5 e 8 e (b) Evolução da energia cinética

Na Tabela 3.19 apresentam-se os resultados do esforço axial médio dos cabos para a carga antissimétrica considerada, e respetiva comparação com os de referência, evidenciando-se em geral uma aproximação bastante razoável, com um erro máximo de 3,6% no cabo entre os apoios 15 e 26. Verifica-se também que os cabos centrais que recebem maior carga, nomeadamente os cabos entre os apoios 14 / 25, 18 / 19 e 20 / 21, apresentam um esforço axial médio superior aos restantes cabos, sabendo que o pré-esforço era de 200N.

Até agora foram apresentados métodos amplamente utilizados no âmbito da determinação da forma e análise de estruturas leves. No entanto, recordando a classificação apresentada dos métodos numéricos na secção 3.4, é de referir ainda métodos mais recentes, que surgiram no sentido de dar resposta a formas estruturais cada vez mais exigentes, denominados de métodos de otimização estrutural evolucionária (MOEE).



(a)



(b)

—◆— Cabo indeformado
 —■— MRD (viscoso e cinético)
 —▲— MRD (Lewis et al. 1984)
 —×— Experimental (Lewis et al. 1984)

Figura 3.46 – Configuração indeformada e deformada de dois cabos da estrutura: (a) Cabo entre os apoios 18 e 19 e (b) Cabo entre os apoios 15 e 26

Tabela 3.18 – Comparação entre os resultados numéricos da deformada da rede de cabos com os de referência

Nó	Deslocamento vertical dos nós livres				Comparação			
	<i>MRD</i> visc.	<i>MRD</i> cin.	<i>MRD</i> visc. (Lewis <i>et al.</i> 1984)	Experim.	Dif. <i>MRD</i> visc.	Dif. <i>MRD</i> visc. e exp.		
	(1)	(2)	(3)	(4)	(3)-(1)	$\frac{((3)-(1))}{(1)*100}$	(4)-(1)	$\frac{((4)-(1))}{(1)*100}$
	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(%)	(mm)	(%)
1	19,52	19,52	19,30	19,50	-0,22	-1,10	-0,02	-0,08
2	25,63	25,63	25,30	25,30	-0,33	-1,29	-0,33	-1,29
3	23,30	23,30	23,00	22,80	-0,30	-1,28	-0,50	-2,14
4	25,85	25,85	25,90	25,40	0,05	0,20	-0,45	-1,73
5	34,06	34,06	33,80	33,60	-0,26	-0,76	-0,46	-1,35
6	29,50	29,50	29,40	28,80	-0,10	-0,33	-0,70	-2,36
7	25,78	25,78	26,40	25,20	0,62	2,40	-0,58	-2,25
8	31,31	31,31	31,70	30,60	0,39	1,24	-0,71	-2,27
9	21,42	21,42	21,90	21,00	0,48	2,23	-0,42	-1,97
10	21,48	21,48	21,90	21,00	0,42	1,94	-0,48	-2,24
11	20,00	20,00	20,50	19,80	0,50	2,52	-0,20	-0,98
12	14,41	14,41	14,80	14,20	0,39	2,74	-0,21	-1,43

Tabela 3.19 – Comparação entre os resultados numéricos do esforço axial médio dos cabos com os de referência

Cabo	Força média			Comparação	
	<i>MRD</i> visc.	<i>MRD</i> cin.	<i>MRD</i> visc. (Lewis <i>et al.</i> 1984)	Dif. <i>MRD</i> visc.	
	(1)	(2)	(3)	(2)-(1)	$\frac{((2)-(1))}{(1)*100}$
	(N)	(N)	(N)	(N)	(%)
13 24	228,49	228,49	232,00	3,51	1,54
14 25	246,92	246,92	255,00	8,08	3,27
15 26	235,50	235,50	244,00	8,50	3,61
16 17	243,92	243,92	240,00	-3,92	-1,61
18 19	274,88	274,88	273,00	-1,88	-0,69
20 21	264,06	264,06	263,00	-1,06	-0,40
22 23	237,33	237,33	235,00	-2,33	-0,98

3.4.5. OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL EVOLUCIONÁRIA (MOEE)

O *Método de Otimização Estrutural Evolucionária (MOEE)*, originalmente desenvolvido por Xie e Steven (1997), é um método de dimensionamento estrutural que consiste em remover gradualmente as partes de material estrutural ineficiente. Desta forma, a estrutura resultante representa a forma ótima, respeitando vários critérios, como por exemplo: múltiplos casos de carga; otimização de frequências; rigidez e deslocamentos nos apoios; encurvadura e redução de tensões. Os autores desenvolveram inclusivamente um *software* – *Evolve97*, apropriado para resolver estes problemas de otimização.

Na Figura 3.47 são apresentados os resultados da aplicação do processo faseado do MOEE, para uma estrutura simplesmente apoiada sujeita somente ao peso próprio, com base no critério de distribuição otimizada de tensões.

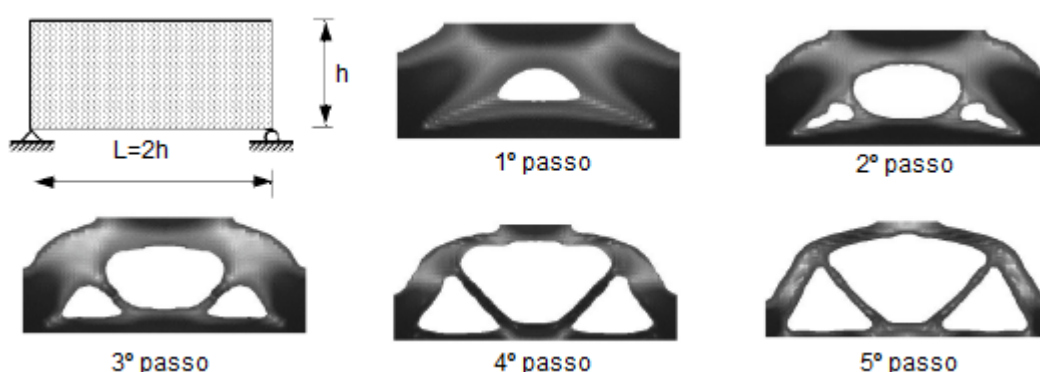


Figura 3.47 – Otimização de uma estrutura simplesmente apoiada através do método de otimização estrutural evolucionária (MOEE) (Cui *et al.* 2003)

A título de exemplo, apresenta-se na Figura 3.48 a vista em perspectiva do projeto da estação de Florença, adaptada de (Cui *et al.* 2003), tendo por base o processo de otimização estrutural otimizada. As configurações intermédias desse processo são apresentadas na Figura 3.49, onde se evidenciam ligeiras diferenças na configuração final obtida com a solução final do projeto.



Figura 3.48 – Vista em perspectiva do projeto da nova estação de Florença (Cui *et al.* 2003)

Recentemente, um dos autores do *MOEE* original desenvolveu novas técnicas de otimização evolucionária (Huang e Xie 2010), aperfeiçoando o *MOEE*, com particular ênfase nos *MOEE* bidirecional (*MOEEb*) mais recentes (Querin *et al.* 1998). Assim, esse autor provou que o *MOEE* consegue aproximar de uma forma eficaz um número considerável de problemas de otimização topológica, incluindo estruturas que exibem um comportamento não-linear geométrico e material, aparelhos de absorção energética, estruturas periódicas, pontes e edifícios (Nguyen 2001).

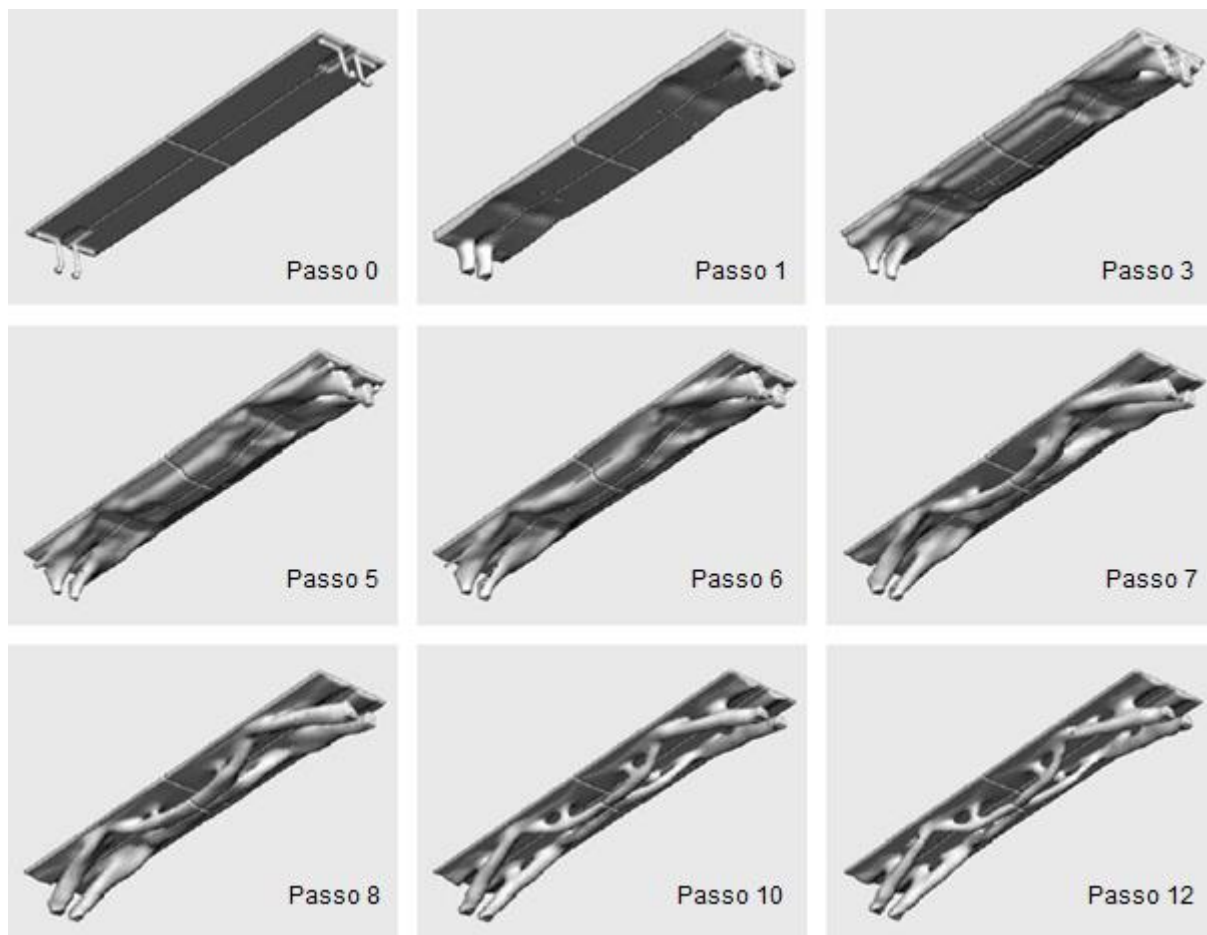


Figura 3.49 – Configurações intermédias do processo de otimização estrutural evolucionária do projeto da estação de Florença (Cui *et al.* 2003)

4

AÇÃO E EFEITOS DO VENTO EM MEMBRANAS

4.1. INTRODUÇÃO

A análise da resposta dinâmica de estruturas devido a forças decorrentes do vento turbulento é mais importante em estruturas de cobertura, formadas por cabos e membranas, do que em outras convencionais, de betão ou aço (Buchholdt 1999). Este facto deve-se à menor rigidez das primeiras e ao facto de possuírem um elevado número de modos com frequências localizadas no intervalo de frequências associadas à ação do vento turbulento. Todavia, dado que a maioria das coberturas tem dimensões apreciáveis e que a correlação do vento é baixa em pontos distanciados a mais de 5m (Buchholdt 1999), a probabilidade de toda a estrutura responder em ressonância num único modo é pequena. Porém, não se exclui a possibilidade de parte da estrutura ou cabos isolados vibrarem, violentamente.

As vibrações de coberturas suportadas por cabos são causadas principalmente por efeitos de rajada associadas ao efeito turbulento do vento, e a oscilações autoexcitadas de *flutter* (Buchholdt 1999). Estas últimas são menos frequentes, dado que a maioria das coberturas não permite deslocamentos suficientes, de forma a induzir alterações significativas, nas forças aerodinâmicas (Simiu e Scanlan 1996). A magnitude das forças de rajada pode ser investigada em ensaios de túnel de vento com modelos aeroelásticos ou rígidos. Estes últimos permitem ainda extrair funções de carga a ser utilizadas em estudos dinâmicos a partir de séries temporais de pressões recolhidas.

A origem das vibrações nas estruturas de cabos ou membranas está geralmente associada ao pré-esforço e / ou curvatura insuficientes. Até à data, não há conhecimento do colapso de coberturas devido unicamente a vibrações. Este facto não é consensual, pois houve na realidade alguns colapsos, embora tenha sido apontada como principal causa a corrosão por fadiga (Buchholdt 1999).

Com efeito, em coberturas que evidenciam estes problemas, a intervenção passa pelo reforço, por forma a aumentar a rigidez, como foi o caso da arena de Raleigh, *USA*. Esta cobertura, caracterizada por uma grelha de cabos com dupla curvatura (ver a Figura 4.1 (a)), tendia aos fenómenos de *flutter*, até ser reforçada internamente. Neste tipo de coberturas, as interseções dos cabos são geralmente lubrificadas, dado que a fricção entre os cabos produz ruído. Por sua vez, em coberturas de curvatura única (ver a Figura 4.1 (b)), como é o caso da cobertura do auditório da *Utica, USA*, o reforço passa por adicionar cabos debaixo dos existentes, a alguma distância, separados por elementos de compressão. As duas camadas de cabos e os elementos de compressão formam uma estrutura mais rígida, evitando consequentemente oscilações autoinduzidas.

Neste sentido, neste capítulo é primeiramente caracterizado o vento atmosférico e o escoamento, em torno de coberturas, sendo identificadas as principais instabilidades aerodinâmicas e formas de mitigação com vista à estabilidade aerodinâmica de membranas. São também abordadas formas experimentais de caracterização dos efeitos do vento, à escala reduzida e à escala real. Finalmente, é abordada a modelação aeroelástica da componente turbulenta do vento em estruturas de membrana com base num modelo simplificado, sendo caracterizada a massa adicional aerodinâmica e o amortecimento aerodinâmico. Essencialmente, existem duas vias distintas de análise dos efeitos turbulentos do vento, uma a partir de uma análise dinâmica no domínio da frequência e outra no domínio do tempo. A maior simplicidade da primeira técnica leva à sua utilização preferencial pelos projetistas, embora os princípios em que se baseia a sua utilização possam ser colocados em causa, dado que utilizam métodos lineares, que contrastam com o comportamento destas estruturas, geralmente, não-linear. No entanto, no domínio do tempo, essa lacuna é preenchida, apesar do processo ser mais moroso, dada a necessidade de gerar séries temporais da velocidade do vento e de determinar a resposta estrutural.

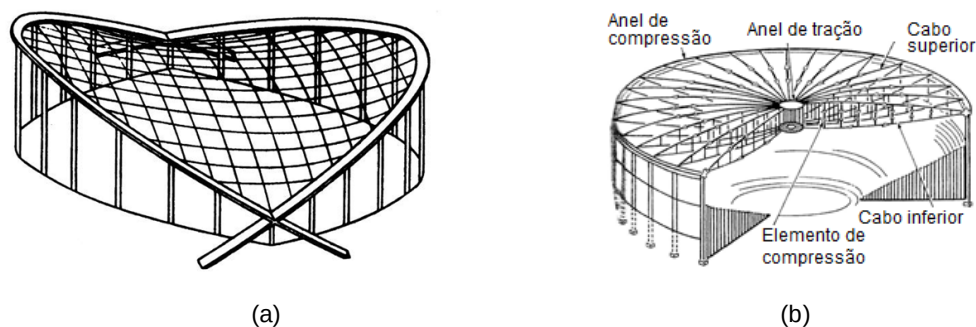


Figura 4.1 – Coberturas reforçadas: (a) Arena de Raleigh, adaptado de Structure (2014), USA e (b) Auditório da Utica, USA, adaptado de UticaOD (2010)

4.2. CARACTERIZAÇÃO DO VENTO ATMOSFÉRICO

4.2.1. NATUREZA DO VENTO

O vento é um fenómeno causado pelo movimento de partículas na atmosfera terrestre. A origem deste movimento está relacionada com variações de temperatura, devido à interação da radiação solar e a radiação exterior à terra. Estas variações originam, por sua vez, gradientes de pressão que causam a aceleração do ar. Remete-se para Simiu e Scanlan (1996), Dyrbye e Hansen (1997) ou Holmes (2001), para uma compreensão detalhada dos fenómenos inerentes, não só à formação do vento, mas também à formação de ciclones e de tornados.

O equilíbrio do sistema de pressões próximo da superfície terrestre é afetado por forças de atrito causadas pela rugosidade da superfície. A rugosidade deve-se a desníveis montanhosos, florestas e construções humanas. Com efeito, a velocidade do vento reduz, em média, e é criada a turbulência. A turbulência é caracterizada por flutuações da velocidade do vento, espacial e temporalmente. A espessura da atmosfera sensível a estes efeitos do atrito do solo é denominada por camada limite atmosférica.

A análise de séries temporais da velocidade do vento, recolhidas *in loco*, mostra que as flutuações da velocidade do vento variam com a rugosidade do terreno e com a própria velocidade do vento. Neste contexto, é usual caracterizar a velocidade instantânea do vento pela soma de uma componente média

e uma componente flutuante, que representa o carácter turbulento do vento. A Figura 4.2 apresenta o perfil da velocidade do vento associado a um referencial cartesiano x, y e z . O eixo do xx representa a direção longitudinal da velocidade do vento, sobre o qual atuam a componente média $\bar{U}(z)$ e a componente turbulenta longitudinal $u(x,y,z,t)$. No eixo dos yy atua a componente turbulenta lateral $v(x,y,z,t)$ e, no eixo dos zz atua a componente turbulenta vertical $w(x,y,z,t)$.

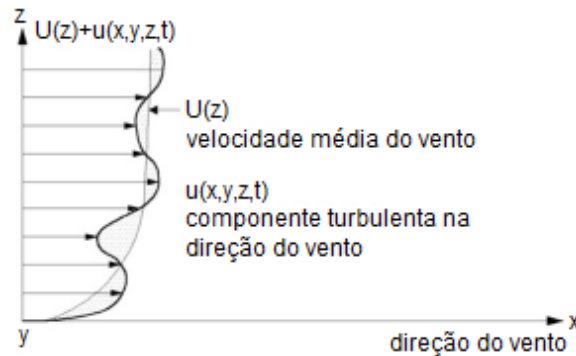


Figura 4.2 – Perfil da velocidade do vento na direção do vento

As propriedades estatísticas de longa duração do vento são comuns e independentes do tipo de terreno, da força do vento e da localização (Buchholdt 1999). Esta conclusão decorre de estudos realizados, baseados na análise da densidade espectral de potência de séries temporais da velocidade do vento recolhidas ao longo de anos e em locais distintos. A densidade espectral de potência resultante, conhecida por espectro de Van der Hooven, apresentado na Figura 4.3, fornece uma medida de distribuição da energia no domínio da frequência resultante das flutuações aleatórias da velocidade do vento.

No essencial, é de salientar duas partes distintas no espectro de Van de Hooven, respetivamente, a região macro e micrometeorológica. A transição, de uma região para a outra, é marcada por uma zona de frequências com baixa flutuação da velocidade, entre 10 minutos e 1 hora. Isto significa que as flutuações da velocidade do vento podem ser medidas, a partir de sinais recolhidos das velocidades médias do vento, para um período entre 10 minutos e 1 hora. Deste modo, as flutuações de curta duração, resultantes das componentes de frequência superior, são eliminadas, contabilizando apenas as de longa duração.

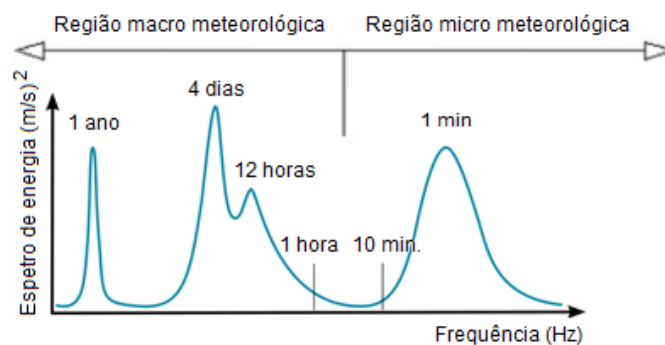


Figura 4.3 – Espectro de Van der Hooven, adaptado de Wikimedia (2006)

Posto isto, a velocidade do vento divide-se em duas partes: uma velocidade média em estado estacionário, que varia de acordo com as flutuações de longa duração, devido às causas macrometeorológicas (associadas a variações anuais, passando por variações de 4 dias, referentes a tempestades, até variações térmicas diárias), e uma velocidade flutuante, com componentes de frequência superior, devido às causas micrometeorológicas, associadas à turbulência (Buchholdt 1999).

Consequentemente, o cálculo da resposta de estruturas à ação do vento é dividido em duas partes. A primeira, consiste no cálculo da resposta quase estática, devida à componente média da velocidade do vento e da componente flutuante de muito baixas frequências, associada à região macrometeorológica. A segunda parte consiste no cálculo da resposta devida às componentes de frequências elevadas, que estão na base da excitação dinâmica.

4.2.2. COMPONENTE MÉDIA DA VELOCIDADE DO VENTO

A velocidade média $\bar{U}(z)$ permite descrever a variação lenta do vento, existindo atualmente várias leis de variação da velocidade média em altura, acima do nível solo z , das quais se destacam a logarítmica e a potencial. Para além disso, a velocidade também varia com a rugosidade do terreno.

4.2.2.1. Variação com a altura

Atualmente, o perfil da velocidade do vento do tipo logarítmico é o mais utilizado (Buchholdt 1999), sendo dado por

$$\bar{U}(z) = v_b c_0 k_r \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad (4.1)$$

em que v_b é o valor de referência da velocidade do vento, que depende de coeficientes relacionados com a direção do vento, a época do ano, e o valor básico da velocidade do vento, c_0 é um coeficiente orográfico, z é a cota acima do nível do solo, z_0 é o comprimento de rugosidade e k_r é um coeficiente que depende da categoria de terreno. Para além disso, existe uma altura mínima z_{min} , abaixo da qual a velocidade é constante, e uma altura máxima de $200m$.

A título representativo, apresenta-se na Figura 4.4 a variação da velocidade média do vento em altura, considerando arbitrariamente uma estrutura localizada no território nacional, num terreno do tipo II e da zona A. De acordo com a norma EN1991-1-4 (1991), estas considerações conduzem a um valor de referência da velocidade do vento de $27m/s$, um comprimento de rugosidade de $0,05m$, um coeficiente de terreno de $0,19$ e uma altura mínima de $3m$.

Buchholdt (1999) apresenta expressões diferentes para o perfil logarítmico da velocidade do vento, e compara essas expressões, reproduzindo as mesmas condições (Buchholdt 1997). Dessa análise resultam diferenças na ordem de $5,83\%$ na velocidade do vento, sendo mais significativas em altura. Com efeito, o autor conclui que a expressão que produz maior velocidade do vento em altura deve ser utilizada no dimensionamento de mastros altos, enquanto a outra é suficiente para o dimensionamento de coberturas com cabos.

Por fim, a lei logarítmica apresenta características matemáticas que poderão causar problemas, tais como, a impossibilidade de calcular logaritmos de valor negativo e a integração menos fácil (Holmes 2001). Este facto desencadeou a utilização de outras expressões tendo por base uma lei de variação potencial, por forma a evitar esses problemas. Contudo, embora Holmes (2001) conclua que a lei de

variação potencial seja mais adequada a problemas de engenharia, pelos motivos referidos anteriormente, a lei preconizada na norma europeia baseia-se numa lei de variação logarítmica. Por sua vez, o regulamento português de segurança e ações para estruturas de edifícios e pontes (RSA 1983) tem por base uma lei de variação potencial.

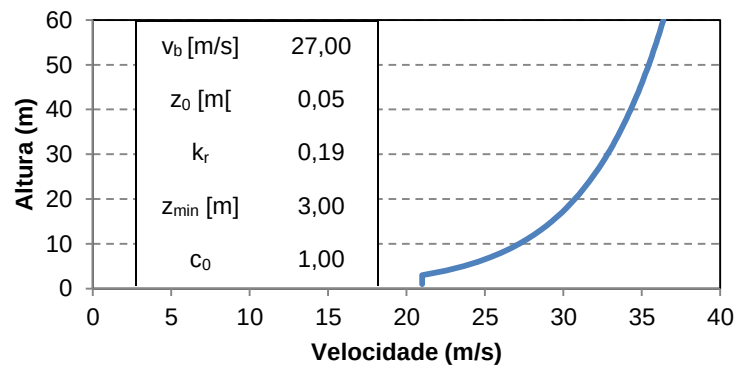


Figura 4.4 – Variação da velocidade média do vento em altura de acordo com a norma EN1991-1-4

4.2.2.2. Influência da rugosidade

Os perfis de velocidade média descritos anteriormente consideram condições quase ideais de escoamento, ou seja, supondo que a rugosidade é quase homogênea numa distância considerável na superfície. No entanto, em condições não ideais do escoamento, a rugosidade deixa de ser homogênea. Por exemplo, em zonas de cruzamento de ventos, com características distintas, dá-se um processo de ajustamento das propriedades da camada limite atmosférica. Este ajustamento inicia-se ao nível do solo, onde se evidenciam alterações abruptas da rugosidade, prolongando-se em altura. Deste modo, é formada uma zona de transição, denominada camada limite interna, onde a velocidade do vento é influenciada pelas rugosidades dos ventos que desencadearam esse processo. No sentido de corrigir esses efeitos, existem metodologias disponíveis na bibliografia de especialidade (Dyrbye e Hansen 1997).

4.2.2.3. Influência da orografia

Quando o vento passa por uma escarpa, ou colina, a área do fluxo de ar é reduzida, originando um aumento da velocidade e das pressões do vento. Deste modo, interessa quantificar esse aumento, por forma a caracterizar adequadamente a ação do vento sobre as estruturas nessas condições. Neste contexto, é de destacar a metodologia de Lemelin *et al.* (1988), baseada em estudos numéricos e em ensaios em túnel de vento, para vários tipos de encostas e colinas. O eurocódigo (EN1991-1-4) prevê a utilização de coeficientes tendo por base a inclinação e o comprimento da escarpa ou colina, no cálculo do coeficiente orográfico c_0 .

4.2.2.4. Ventos extremos

A definição de uma velocidade de referência do vento apropriada é o passo que traduz maior incerteza no dimensionamento de uma estrutura. A velocidade de referência depende do valor básico da

velocidade do vento que é obtida geralmente com base no valor característico da velocidade média do vento. Esta é referida a períodos de 10 minutos, independentemente da direção do vento e da época do ano, a uma altura de 10 metros acima do nível do solo, em terreno do tipo campo aberto, com vegetação rasteira, tal como erva e obstáculos isolados, com separações entre si de pelo menos 20 vezes a sua altura (EN1991-1-4).

Deste modo, é corrente o recurso a modelos estatísticos representativos dos valores extremos da velocidade do vento. A teoria dos valores extremos decorre da modelação e da medição de eventos que ocorrem com baixa probabilidade. Essencialmente, esta teoria envolve 3 distribuições, do tipo I, II e III, respetivamente, Gumbel, Fréchet e Weibull (Fisher e Tippett 1928). O contributo de Gumbel (1954) tornou célebre a utilização da função de distribuição de extremos do tipo I, Gumbel, na análise da distribuição de extremos da velocidade média do vento, sendo utilizada em estudos posteriores, na década de 60.

No entanto, os registos das velocidades na ocorrência de tempestades excediam consideravelmente os valores preconizados na distribuição de Gumbel. Este facto levou ao tratamento estatístico dos dados de diferentes tipos de tempestade separadamente durante a década de 70 e 80 (Gomes e Vickery 1978).

4.2.3. COMPONENTE TURBULENTA DA VELOCIDADE DO VENTO

Como referido anteriormente, a velocidade do vento pode ser decomposta na soma de uma componente média, $\bar{U}$, relativa ao movimento de transporte, com uma componente flutuante de carácter aleatório associada à turbulência. A componente flutuante da velocidade do vento é decomposta nas suas componentes (u v w), respetivamente, na direção longitudinal, lateral e vertical.

Os registos mostram que a velocidade do vento pode ser tratada como um processo estocástico, dada a aleatoriedade da componente flutuante. Consequentemente, o nível de turbulência pode ser quantificado através de parâmetros estatísticos.

4.2.3.1. Intensidade de turbulência

A intensidade de turbulência é uma característica da componente flutuante da velocidade do vento. Esta é determinada para a direção longitudinal u , lateral v e vertical w , por intermédio de

$$I_u(z) = \frac{\sigma_u(z)}{\bar{U}(z)} \quad , \quad I_v(z) = \frac{\sigma_v(z)}{\bar{U}(z)} \quad , \quad I_w(z) = \frac{\sigma_w(z)}{\bar{U}(z)} \quad (4.2)$$

em que, σ_u , σ_v e σ_w são os desvios-padrão, ou os valores de raiz quadrática média (*RMS*), associados a cada componente flutuante da velocidade, e $\bar{U}$ é a velocidade média do vento, para o mesmo período de tempo.

A título representativo, apresenta-se na Figura 4.5 a variação da intensidade de turbulência longitudinal do vento I_u em altura, considerando as mesmas condições preconizadas anteriormente para a determinação do perfil da velocidade média, apresentado na Figura 4.4, e tendo por base a formulação da norma europeia (EN1991-1-4).

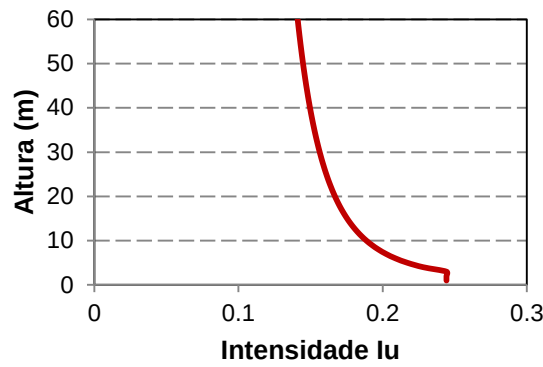


Figura 4.5 – Variação da intensidade de turbulência longitudinal em altura

A Figura 4.6 mostra a variação das intensidades de turbulência com a velocidade média do vento, nas direções longitudinal, lateral e vertical, com base em registos de um anemómetro sónico instalado numa cobertura suspensa com cabos, no âmbito da sua monitorização dinâmica (Martins *et al.* 2012). É de salientar um padrão semelhante da variação das intensidades de turbulência com a velocidade média do vento, onde a intensidade de turbulência tem tendência a reduzir. O padrão da variação destas intensidades torna-se menos disperso com o aumento da velocidade. Para além disso, de uma forma geral verifica-se que $I_u > I_v > I_w$ (Martins *et al.* 2014).

Estudos experimentais levados a cabo por Harris (1970), Davenport (1967) e Armit (1976) permitiram concluir que os desvios-padrão das componentes flutuantes da velocidade do vento decrescem lentamente em altura. Cremona e Foucriat (2002) sugerem ainda as seguintes relações, entre os desvios-padrão:

$$\sigma_v \cong 0,75 \text{ a } 0,85 \sigma_u \quad e \quad \sigma_w \cong 0,5 \text{ a } 0,6 \sigma_u \quad (4.3)$$

perfeitamente enquadradas com as de outros autores (Martins *et al.* 2014; Solari e Piccardo 2001; Dyrbye e Hansen 1997).

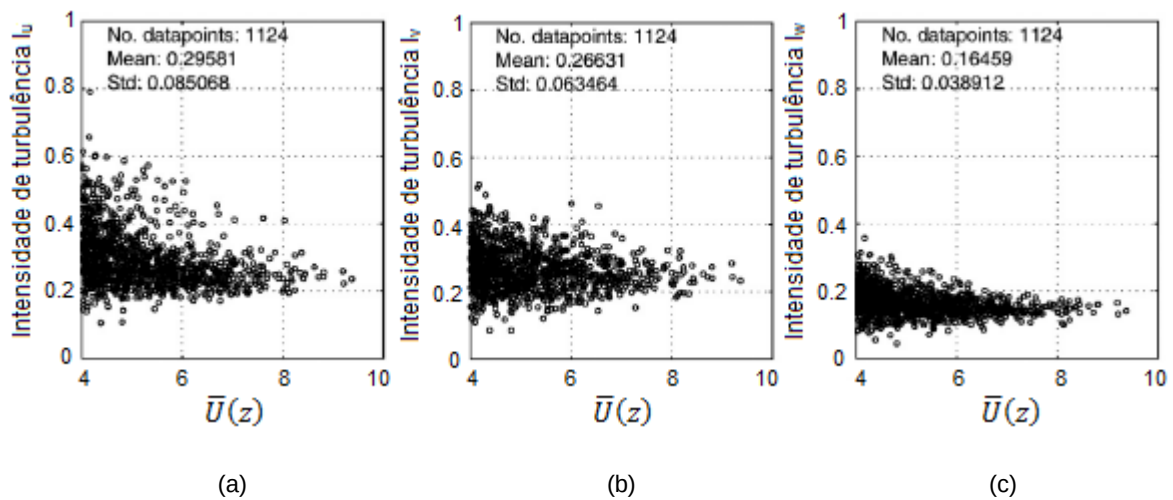


Figura 4.6 – Variação da intensidade de turbulência com a velocidade média, adaptado de Martins *et al.* (2014):
(a) longitudinal I_u ; (b) lateral I_v e (c) vertical I_w

4.2.3.2. Escalas de turbulência

As escalas integrais de turbulência $L(z)$ representam a dimensão média dos turbilhões do vento natural. Solari e Piccardo (2001), com base em estudos experimentais, propõem que as escalas integrais de turbulência sejam estimadas por

$$L_\epsilon(z) = 300\lambda_\epsilon \left(\frac{z}{200}\right)^{\alpha_L}, \quad \alpha_L = 0,67 + 0,05\ln(z_0), \quad (\epsilon = u, v, w) \quad (4.4)$$

em que $L_\epsilon(z)$ é a escala integral de turbulência para cada direção, u , v e w , z é a altura acima do nível do solo ($z < 200m$), z_0 é o comprimento de rugosidade e λ_ϵ é uma variável aleatória que assume o valor 1, 0,25 e 0,1, respetivamente, para as direções u , v e w .

4.2.3.3. Conteúdo espectral

A distribuição da energia do vento em frequência é expressa pela função densidade espectral de potência reduzida $S_L(z, n)$. Atualmente existem várias representações destas funções na literatura, embora a proposta de von Karman (1948) seja a mais aceite (Tamura *et al.* 2005). Este modelo é particularmente apropriado a condições em que as baixas frequências assumam maior importância, tal como acontece nas estruturas de cobertura formadas por cabos e membranas. A função densidade espectral de potência reduzida de von Kármán para a componente longitudinal turbulenta do vento é traduzida por (Martins *et al.* 2014)

$$S_{L_u}(z, n) = \frac{nS_u(z, n)}{\sigma_u^2} = \frac{4 \frac{nL_u(z)}{\bar{U}(z)}}{\left(1 + 70,8 \left(\frac{nL_u(z)}{\bar{U}(z)}\right)^2\right)^{\frac{5}{6}}} \quad (4.5)$$

em que n é a frequência (Hz), $S_u(z, n)$ é o espectro de potência da componente longitudinal turbulenta da velocidade do vento de um só ramo (ou seja, definida apenas para frequências positivas), σ_u é o desvio-padrão da componente turbulenta u , $\bar{U}$ é a velocidade média do vento e $L_u(z)$ é a escala integral da componente longitudinal turbulenta. A quantidade $nL(z) / \bar{U}(z)$ é também designada por frequência reduzida, ou coordenada de Monin, e expressa por $f_L(z, n)$. Para a componente lateral e vertical, o modelo de von Kármán é traduzido por (Martins *et al.* 2014)

$$S_{L_\epsilon}(z, n) = \frac{nS_\epsilon(z, n)}{\sigma_\epsilon^2} = \frac{4 \frac{nL_\epsilon(z)}{\bar{U}(z)} \left[1 + 755,2 \left(\frac{nL_\epsilon(z)}{\bar{U}(z)}\right)^2\right]}{\left(1 + 283,2 \left(\frac{nL_\epsilon(z)}{\bar{U}(z)}\right)^2\right)^{\frac{11}{6}}}, \quad (\epsilon = v, w) \quad (4.6)$$

em que, $S_v(z, n)$ e $S_w(z, n)$ são os espectros de potência da componente turbulenta lateral e vertical, respetivamente, σ_v e σ_w são os desvios-padrão da componente turbulenta lateral e vertical, respetivamente, e $L_v(z)$ e $L_w(z)$ são as escalas integrais da componente turbulenta lateral e vertical.

A função densidade espectral de potência reduzida da componente longitudinal turbulenta da velocidade do vento, preconizada na norma europeia (EN1991-1-4), baseia-se na expressão proposta por Kaimal *et al.* (1972). No entanto, dado que a expressão de von Kármán é mais apropriada a condições em que as baixas frequências assumam maior importância, um procedimento usual consiste em realizar um ajustamento da expressão de von Karman à expressão de Kaimal. Para o efeito, são

adotados sucessivos valores de escalas integrais de turbulência, na expressão de von Kármán, até que o seu espectro se aproxime do outro espectro nas frequências de maior importância estrutural.

A título de exemplo, apresenta-se na Figura 4.7 o resultado do processo de ajustamento descrito anteriormente, para uma zona de frequências de 1Hz. Neste processo, foi arbitrada uma cota z igual a 5m e os parâmetros definidos anteriormente na determinação do perfil da velocidade média, apresentado na Figura 4.4. O desvio-padrão σ_u é igual a 5,13m/s e a intensidade de turbulência I_u é igual a 0,217. A escala integral L_u é igual a 44,05 e 36,46m, respetivamente para as expressões de Kaimal e de von Kármán. Este processo de ajustamento foi realizado no âmbito de um estudo da ação do vento sobre uma laje esbelta com 5 metros de altura, onde se realizou uma análise quase-estacionária dos efeitos de rajada (Ferreira 2011).

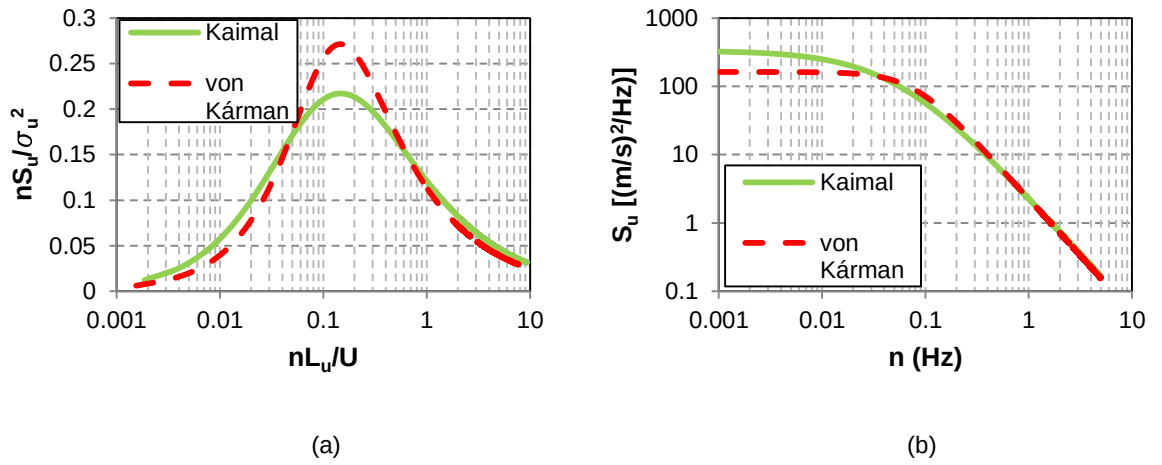


Figura 4.7 – Ajustamento da função densidade espectral de potência, da componente longitudinal turbulenta da velocidade do vento, da expressão de von Kármán à de Kaimal: (a) Função densidade espectral de potência reduzida e (b) Função densidade espectral de potência da componente longitudinal turbulenta da velocidade do vento

4.2.3.4. Coerência

Na idealização da ação turbulenta do vento é necessário correlacionar espacialmente o grau de dependência das flutuações da velocidade do vento em pontos distintos. Esta dependência resulta da dimensão espacial dos turbilhões existentes no escoamento. Assim, o registo contínuo em dois pontos genéricos P_1 e P_2 , distanciados de Δr (Δx , Δy , Δz), permite medir o grau de correlação entre esses pontos através da função densidade espectral cruzada $S_{u_1u_2}(\Delta r, n)$ traduzida por

$$S_{u_1u_2}(\Delta r, n) = S_{u_1u_2}^c(\Delta r, n) + iS_{u_1u_2}^q(\Delta r, n) \quad (4.7)$$

em que, a parte real $S_{u_1u_2}^c(\Delta r, n)$ e a parte imaginária $S_{u_1u_2}^q(\Delta r, n)$ denominam-se, respetivamente, por co-espectro e espectro de quadratura. Porém, em condições de ventos fortes, os valores do espectro de quadratura tornam-se irrelevantes, podendo ser considerados nulos em situações de turbulência homogênea (Mendes 1994). Desta forma, a função densidade espectral cruzada pode ser expressa simplificada por

$$S_{u_1u_2}(\Delta r, n) = \sqrt{S_{u_1}(P_1, n)S_{u_2}(P_2, n)coh(\Delta r, n)} \quad (4.8)$$

$$coh(\Delta r, n) = \exp \left\{ - \frac{n \sqrt{C_{ex}^2 \Delta x^2 + C_{ey}^2 \Delta y^2 + C_{ez}^2 \Delta z^2}}{\frac{1}{2} [\bar{U}(P_1) + \bar{U}(P_2)]} \right\} \quad (4.9)$$

em que S_{u_1} e S_{u_2} são os autoespectros das flutuações de velocidade do vento, respetivamente, nos pontos P_1 e P_2 , $coh(\Delta r, n)$ é a função de coerência, C_{ex} , C_{ey} e C_{ez} são os coeficientes de atenuação, ou de decaimento exponencial, nas direções longitudinal, lateral e vertical, e n é a frequência.

Os coeficientes de atenuação evidenciam a dependência estatística das flutuações da velocidade entre dois pontos, e dependem significativamente da rugosidade do terreno, da altura acima do solo e da velocidade do vento (Simiu e Scanlan 1996). Estes coeficientes diminuem à medida que a altura acima do nível do solo aumenta, e aumentam com a velocidade do vento e com a rugosidade (Buchholdt 1999), de acordo com estudos realizados em túnel de vento. O coeficiente de decaimento exponencial na direção longitudinal C_{ex} é igual a 3 para regiões sobre a água, e 6 para regiões sobre a terra (Simiu e Scanlan 1996). Por sua vez, o coeficiente de decaimento lateral C_{ey} poderá variar entre 7 e 20 (Simiu e Scanlan 1996; Dyrbye e Hansen 1997). Por fim, o coeficiente de decaimento vertical C_{ez} situa-se entre 6 e 10 (Sackel 1994; Simiu e Scanlan 1996; Dyrbye e Hansen 1997).

A título de exemplo, apresenta-se na Figura 4.8 a correlação da turbulência entre 3 pontos, 1, 2 e 5, por intermédio da função de coerência e do espectro de potência cruzado. Estes pontos estão localizados na laje esbelta mencionada anteriormente. Os pontos estão localizados à cota de 5m e distanciados lateralmente. O ponto 1 está distanciado de 2m do ponto 2 e de 8m do ponto 5 (ver a Figura 4.8 (b)). Para o efeito, foram considerados um coeficiente de atenuação lateral C_{ey} igual a 11,5, e um perfil da velocidade média de acordo com a Figura 4.4. É de salientar que quanto maior a proximidade dos pontos em análise, maior é a coerência entre as flutuações da velocidade do vento (ver a Figura 4.8 (a)). Para além disso, é de salientar ainda uma baixa correlação entre as flutuações da velocidade do vento para uma distância superior a 6m, e para frequências acima de 1,5Hz. Esta conclusão corrobora com estudos levados a cabo por (Buchholdt 1997), onde se conclui que a correlação das flutuações da velocidade entre dois pontos distanciados acima de 5m é desprezável, em condições de velocidade média aproximadamente igual a 25m/s, e frequências superiores a 1,5Hz. Por consequência, o efeito da correlação cruzada pode ser ignorado nas análises dinâmicas no domínio da frequência (Buchholdt 1999).

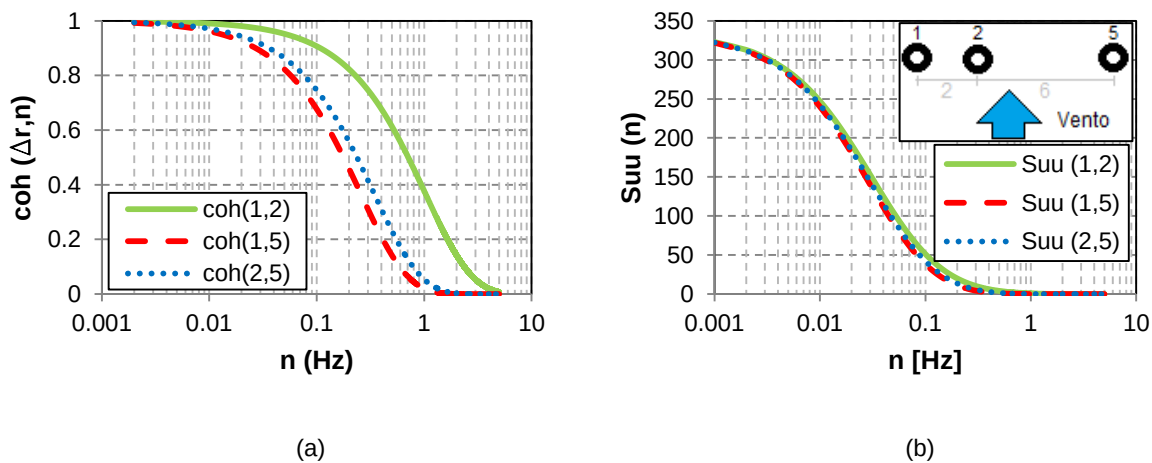


Figura 4.8 – Correlação da turbulência entre dois pontos: (a) Função de coerência e (b) Função densidade espectral cruzada para os pontos 1, 2 e 5

4.3. AÇÃO E EFEITOS DO VENTO ATMOSFÉRICO SOBRE COBERTURAS

Uma estrutura imersa no escoamento atmosférico fica sujeita a pressões aerodinâmicas. A aerodinâmica é portanto a área de estudo do movimento dos fluidos e das forças aerodinâmicas que estes fluidos provocam em corpos sólidos.

Se o escoamento for turbulento, surgem flutuações temporais das pressões superficiais registradas na estrutura. A resposta da estrutura a essas pressões pode ser de tal forma significativa, que a própria resposta estrutural provoca flutuações no vento. Esta interação vento-estrutura modifica as condições de fronteira, originando consequentemente uma alteração das forças aerodinâmicas. A aeroelasticidade é a disciplina que estuda estes fenómenos de interação significativa entre as forças aerodinâmicas e o movimento estrutural.

Deste modo, uma instabilidade aeroelástica pode ocorrer quando uma estrutura imersa no escoamento se deforma sob o efeito de alguma força. Se estas deformações alterarem o fluxo do vento em torno da estrutura, e o fluxo do vento der origem a um crescimento das deformações da estrutura com caráter oscilatório e / ou divergente, então pode ocorrer uma instabilidade aeroelástica. As instabilidades aeroelásticas ocorrem devido a forças aerodinâmicas que são dependentes do movimento da estrutura. Por consequência, estas forças são também denominadas forças autoinduzidas.

4.3.1. CAMADA LIMITE

O fluxo de ar sobre uma superfície pouco rugosa é caracterizado por um retardamento na camada mais próxima da superfície, devido à tendência do ar em aderir à superfície. Nesta camada, designada de camada limite, a velocidade do ar junto à superfície é zero e cresce até ao seu valor total na fronteira superior.

O escoamento é caracterizado pelo número de Reynolds Re , dado pela razão entre as forças de inércia devidas à massa do ar e as forças viscosas. Deste modo, quando o número de Re é elevado, predominam os efeitos de inércia, e quando é reduzido são mais fortes os efeitos da viscosidade.

O desaceleramento das partículas do escoamento provocado pelas forças de inércia pode originar a separação da camada limite da superfície, com inversão do escoamento junto à superfície. Nesta zona de descolamento podem gerar-se vórtices discretos, originando fortes sucções no ponto de separação. Os vórtices são libertados para a esteira do corpo imerso. A separação da camada limite produz esforços mais importantes sobre a estrutura do que os que resultariam de um escoamento em aderência.

4.3.2. CARACTERIZAÇÃO DO ESCOAMENTO

As estruturas imersas num escoamento são categorizadas, de acordo com a sua forma, em perfis alares e corpos não perfilados (Cremona e Foucriat 2002). Os perfis alares são caracterizados pela sua forma aerodinâmica, sem arestas vivas, e pela sua dimensão longitudinal, bastante superior à transversal. No entanto, nas estruturas da engenharia civil, são mais comuns as formas não perfiladas com arestas vivas, afastando-se do perfil de asa ideal. O escoamento em corpos não perfilados dá origem à ocorrência de vários fenómenos de separação do escoamento, principalmente devido à existência de arestas vivas.

Nas coberturas grandes como as de estádios, o escoamento adere à superfície em áreas elevadas e origina baixas correlações entre as flutuações de pressão em diferentes partes da cobertura. As

pressões ou sucções podem ser significativas. A forma destas coberturas é geralmente arqueada ou em cúpula, sendo sensíveis à distribuição da carga do vento (Holmes 2001).

De uma forma geral, em coberturas quase planas, o escoamento separa-se logo no início da cobertura, aderindo novamente à superfície a escassos metros, formando uma bolha de separação. A dimensão desta bolha depende das características turbulentas do vento, sendo mais pequena para turbulência elevada, e maior para turbulência reduzida. Nesta zona de separação do escoamento geram-se sucções elevadas (ver a Figura 4.9 (a), adaptada de Holmes (2001)). As pressões são mais reduzidas na zona onde o escoamento readere a superfície. Em coberturas menos planas, a zona de separação ocorre geralmente a jusante da parte mais elevada da cobertura, onde a pendente da cobertura tende a divergir da direção do escoamento do vento (ver a Figura 4.9 (b), adaptada de Blessmann (1991)).

O estudo da interação do escoamento com uma placa plana colocada perpendicularmente ao escoamento deu início ao estudo sobre a libertação de vórtices em torno de obstáculos imersos num escoamento. Contudo, os turbilhões foram extensivamente estudados no rasto de um cilindro bastante esbelto (Cremona e Foucriat 2002). Os turbilhões libertam-se alternadamente de cada um dos lados do obstáculo. Este fenómeno depende do número de Re do escoamento, dado que os turbilhões são gerados na camada limite. A frequência que caracteriza a libertação dos turbilhões é que condiciona o comportamento estrutural, dado que as forças geradas têm um carácter quase-sinusoidal. O número de Strouhal caracteriza este fenómeno e é dado por $St = nD / U_{ref}$ em que n é a frequência dos vórtices, D é um parâmetro relacionado com a forma do obstáculo e U_{ref} é a velocidade do fluido.

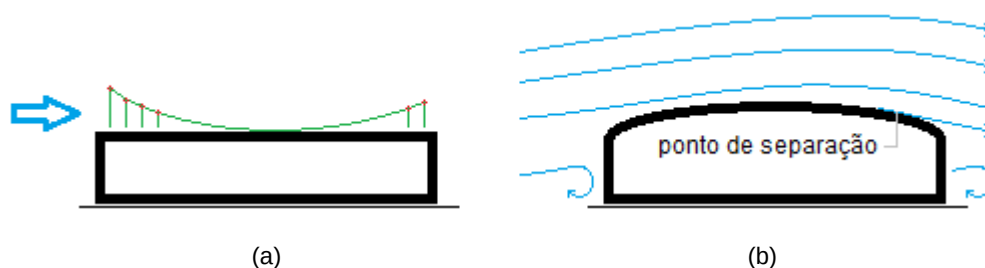


Figura 4.9 – Efeitos do escoamento do vento sobre coberturas, adaptado de Blessmann (1991): (a) Distribuição de pressões médias numa cobertura plana e (b) Separação da camada limite em coberturas arqueadas

4.3.3. ESTABILIDADE AERODINÂMICA

Geralmente, o cálculo de estruturas de membrana sob a ação do vento é realizado tendo por base uma análise quase-estática em que as cargas são aplicadas de uma forma estática. Todavia, por vezes são realizados estudos no sentido de avaliar a estabilidade dinâmica destas estruturas.

Em relação ao comportamento ressonante global, as estruturas de membrana apresentam frequências naturais relativamente baixas, com valores típicos na ordem de $0,5-1,5\text{Hz}$. Contudo, devido ao seu reduzido peso e comportamento bem amortecido, as amplificações dinâmicas são reduzidas e podem ser ignoradas na maioria dos casos.

Complementarmente, é de referir que as estruturas de membrana apresentam coeficientes de amortecimento estrutural relativamente baixos. No entanto, a realização de ensaios de túnel de vento através de modelos aeroelásticos, em particular de modelos de membrana fechados, evidenciam um comportamento altamente bem amortecido que não causa instabilidades aerodinâmicas. Similarmente,

as estruturas de membrana abertas mostram um comportamento bem amortecido devido à movimentação dos volumes de ar em torno da membrana.

Para a determinação de amplificações dinâmicas, os peritos consideram geralmente coeficientes de amortecimento estrutural entre 1,5% e 3%, ignorando o amortecimento aerodinâmico. No entanto, no contexto da indústria de estruturas de membrana (Haug *et al.* 2009), são considerados mais apropriados níveis de amortecimento superiores, atendendo à natureza compósita do material e do efeito de interação de ondulação (*crimp interchange*) entre os fios, causando naturalmente elevados valores de amortecimento devido ao atrito. As propriedades ortotrópicas e a não-linearidade geométrica contribuem para o bom comportamento aerodinâmico das estruturas de membrana, reduzindo consequentemente a possibilidade de ocorrência de instabilidades aerodinâmicas destas estruturas (Xu *et al.* 2011).

Os bordos livres de membrana são suscetíveis a fenômenos dinâmicos locais. No dimensionamento da estrutura de membrana deve-se ter um especial cuidado com os bordos e as fronteiras da membrana, dado que os coeficientes de pressão nestes locais podem alterar-se significativamente devido apenas a uma pequena mudança da orientação do ângulo de ataque do fluxo de ar, conduzindo, consequentemente, a uma perda de estabilidade por divergência ou *flutter* (Sygulski 2007).

Estas instabilidades foram estudadas por diversos autores (Ellen 1977; Sygulski 1997; Paidoussis 2003; Haruo 1975), destacando-se alguns estudos realizados com membranas onde é realizada uma analogia com o comportamento de velas onde tais instabilidades são predominantes, dada à flexibilidade inerente a esse tipo de estruturas (Newman e Paidoussis 1991; Newman 1987).

Sygulski (2007) apresentou um estudo acerca da estabilidade de uma membrana plana (ver a Figura 4.10) sob a atuação de um fluxo de ar subsônico, levado a cabo numérica e experimentalmente. A Figura 4.11 (a) apresenta a variação da velocidade do vento em função da flecha da membrana, observando-se que um aumento gradual da velocidade do vento conduz a um acréscimo gradual da flecha da membrana. No entanto, a partir de uma velocidade do vento de $U_{cd} = U = 45\text{m/s}$, a flecha da membrana aumenta significativamente e a membrana perde a estabilidade por divergência através de uma configuração modal não simétrica, como mostra a Figura 4.11 (b). Com o aumento subsequente da velocidade do vento, a membrana deforma-se continuamente com grandes deslocamentos até que, para uma velocidade do vento de cerca de $U_{cf} = U = 58\text{m/s}$, a membrana apresenta oscilações do tipo *flutter* em torno da posição deformada da membrana nesse instante. Estas vibrações formam um tipo de onda estacionária caracterizada por um modo de vibração em três meias ondas, como mostra a Figura 4.11 (c).

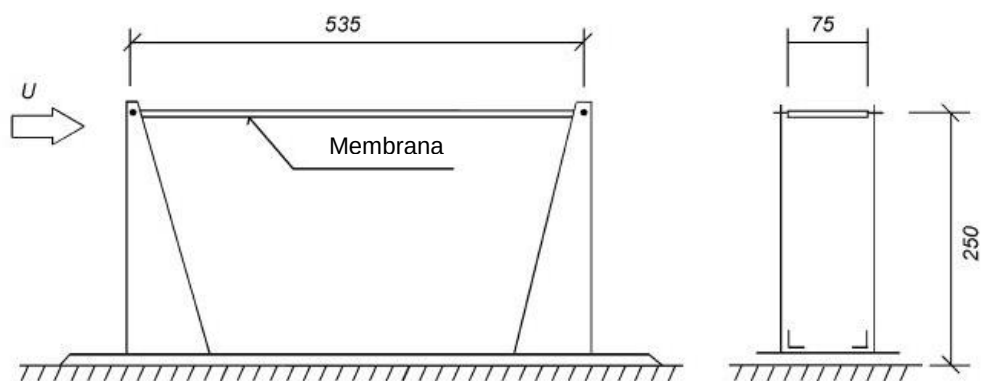


Figura 4.10 – Modelo de membrana de Sygulski (2007)

As regiões de instabilidade ao nível de estruturas de membrana podem ser representadas num diagrama, como mostra a Figura 4.12, relacionando a massa adimensional da membrana, $\sigma/(\rho c_l)$, com o coeficiente de tensão da membrana $C_T = T/(\rho^{1/2} U^2 c_l)$, em que σ é a massa da membrana por unidade de área, ρ é a massa volúmica do ar, c_l é a corda do aerofólio, T é a tensão por unidade de comprimento da membrana e U é a velocidade de fluxo de ar livre. A Figura 4.12 (a) apresenta as regiões de instabilidade de membranas flexíveis bidimensionais e a Figura 4.12 (b) de estruturas de membrana pneumáticas. No geral, destacam-se duas zonas onde ocorrem fenómenos de instabilidade por divergência e de *flutter*, e duas zonas de estabilidade aerodinâmica.

No caso da estrutura de membrana flexível bidimensional (ver a Figura 4.12 (a)), à medida que a tensão diminui, ou seja, com o decréscimo de C_T , a primeira instabilidade da membrana ocorre por divergência para $C_T = 1,27$. Para valores mais baixos de C_T a divergência é seguida pela instabilidade de *flutter*. No entanto, no caso de estruturas de membrana pneumáticas, as instabilidades aerodinâmicas ocorrem para valores mais baixos do coeficiente de tensão C_T (ver a Figura 4.12 (b)).

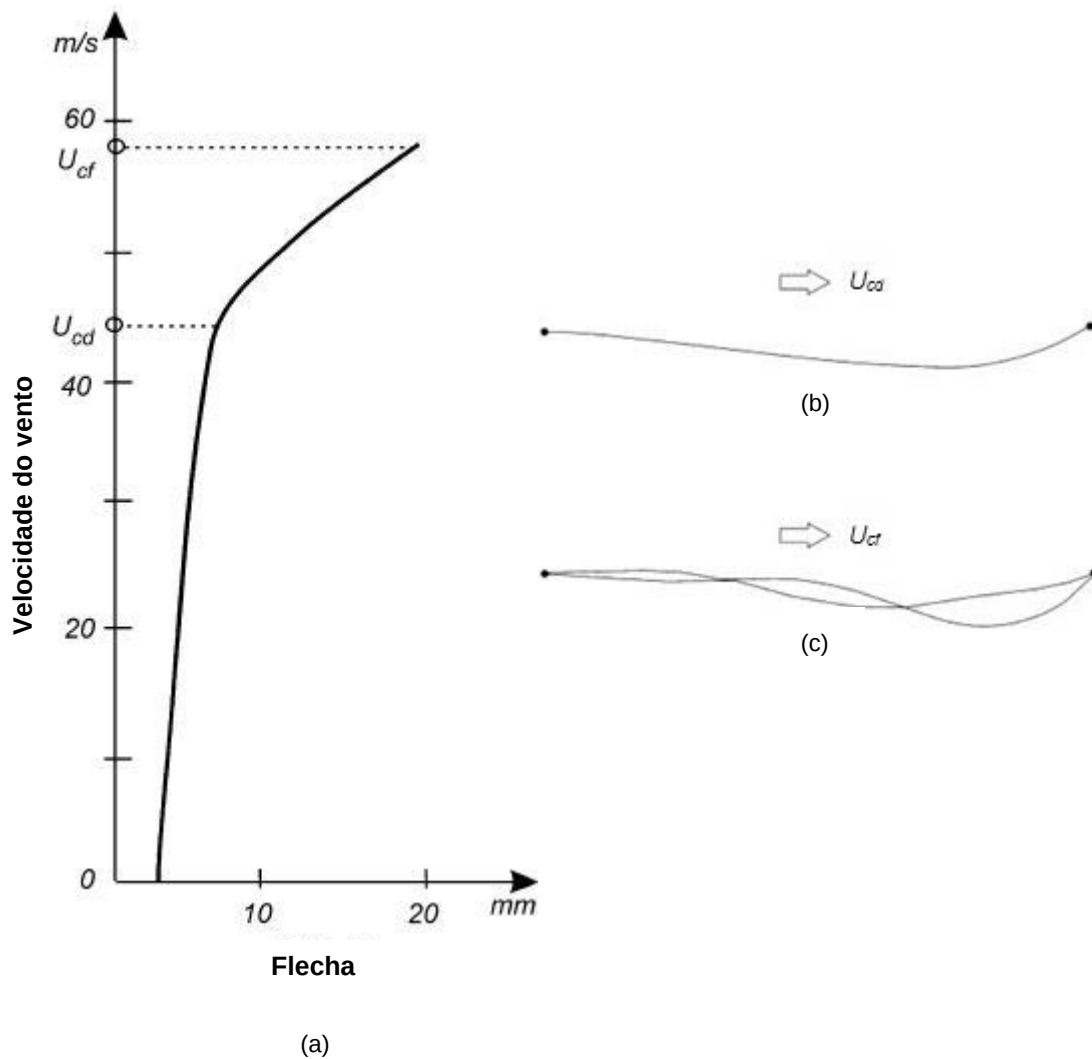


Figura 4.11 – Instabilidade aerodinâmica, adaptado de Sygulski (2007): (a) Velocidade do vento vs flecha da membrana; (b) Divergência e (c) *Flutter*

Complementarmente, é de notar que entre a instabilidade por divergência e de *flutter* ocorre uma zona de reestabilização aerodinâmica da membrana para níveis baixos da massa adimensional da membrana. Essa zona de reestabilização é superior no caso da estrutura de membrana bidimensional comparativamente à estrutura pneumática.

A instabilidade de *flutter* (ver a Figura 4.13) ocorre particularmente em áreas planas na fronteira da membrana ou em áreas de fronteira apresentando tensões baixas na membrana. Deste modo, de forma a minimizar estes efeitos, o vão livre dos cabos de bordo deve ser limitado a cerca de 20 metros.

A excitação do vento por *flutter* pode ser minimizada através da utilização de curvaturas adequadas na superfície de membrana, embora os elevados valores de pré-esforço utilizados para estabilizar superfícies de membrana aproximadamente planas seja uma alternativa correntemente utilizada. No entanto, a curvatura é um dos fatores mais importantes na determinação da velocidade crítica do vento que conduz à instabilidade de estruturas de membrana (Wei *et al.* 2011). De modo a avaliar a rigidez da membrana disponível para reagir à ação do vento é comumente utilizada a seguinte expressão (Forster e Mollaert 2004)

$$D \approx \frac{N_{teia}}{R_{teia}} + \frac{N_{trama}}{R_{trama}} \quad (4.10)$$

em que N_{teia} e N_{trama} são, respetivamente, o pré-esforço na direção da teia e da trama (kN/m), R_{teia} e R_{trama} são, respetivamente, o raio de curvatura na direção da teia e da trama (m) e D é a rigidez da superfície (kN/m^2).

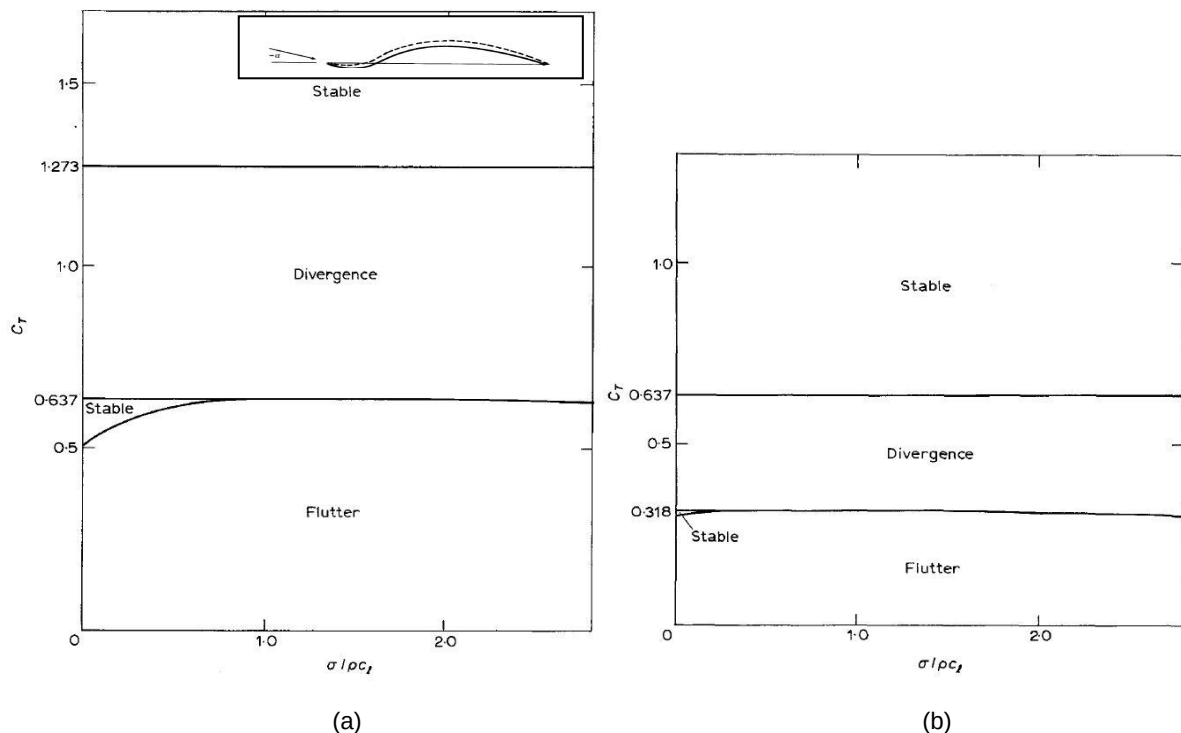


Figura 4.12 – Regiões de instabilidade de membranas, adaptado de Newman e Païdoussis (1991): (a) flexíveis bidimensionais e (b) pneumáticas

As estruturas de membrana que evidenciam aparentemente um bom comportamento estrutural apresentam valores da rigidez, D , superiores a $D > 0,3kN/m^2$. Em superfícies de membrana cujos valores da rigidez $D \leq 0,15kN/m^2$ pode ser observada a excitação de pequenas ondas ao longo da membrana devido à ação do vento. Em estruturas de membrana com valores de $D \leq 0,20kN/m^2$ ao longo de grandes áreas da superfície de membrana pode resultar num comportamento sensível sob a ação do vento.

Em estruturas pneumáticas apresentando baixas curvaturas gaussianas e relativamente grandes áreas de superfícies planas, podem ocorrer as ondas ao longo da membrana, mesmo sob a atuação de vento constante, dado que a rigidez da estrutura é relativamente baixa devido à utilização de pressão interior geralmente reduzida de forma a reduzir os custos de manutenção.

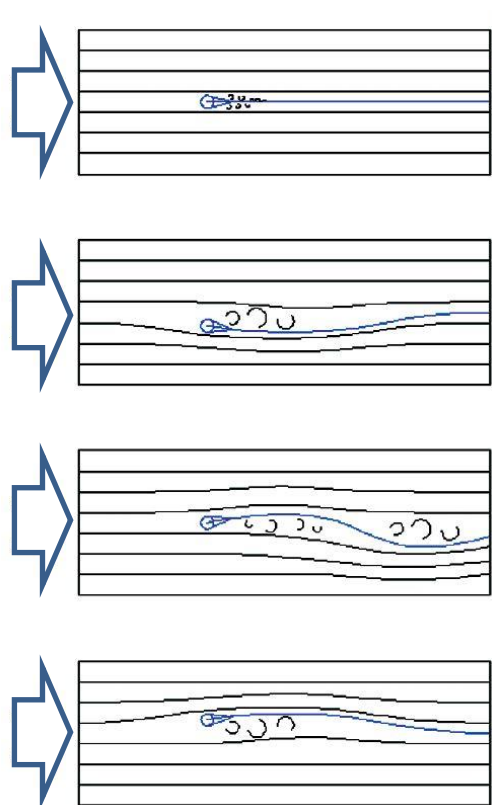


Figura 4.13 – Fenómeno de *flutter* num bordo livre de membrana, adaptado de Forster e Mollaert (2004)

4.3.4. FORÇAS AERODINÂMICAS

A integração das pressões $p(t)$ que ocorrem na superfície de uma estrutura origina a força resultante exercida pelo vento sobre a estrutura. As componentes flutuantes de força de pressão, de arrastamento e de sustentação que atuam sobre parte da estrutura, em cada instante t , são dadas, respetivamente, por (Buchholdt 1999)

$$F_p(t) = \frac{1}{2} \rho C_p A_p [U(t) - \dot{x}]^2 \quad (4.11)$$

$$F_D(t) = \frac{1}{2} \rho C_D A_D [U(t) - \dot{x}]^2 \quad (4.12)$$

$$F_L(t) = \frac{1}{2} \rho C_L A_L [U(t) - \dot{x}]^2 \sin(wt) \quad (4.13)$$

em que F_p , F_D e F_L são, respetivamente, as forças de pressão, de arrastamento e de sustentação, ρ é a densidade do ar, C_p , C_D e C_L são, respetivamente, os coeficientes de pressão, de arrastamento e de sustentação (Simiu e Scanlan 1996), A_p é a área da superfície da estrutura onde atua F_p , A_D é a área projetada no plano perpendicular ao escoamento, e A_L é a área projetada no plano longitudinal ao escoamento, U é a velocidade do vento no instante t , $\dot{x}$ é a velocidade da estrutura no instante t , causada pela vibração e $w = 2\pi SU/D$ é a frequência do desprendimento de vórtices.

Nas coberturas formadas por cabos e membranas, as forças de pressão atuam sobre a superfície, enquanto as forças de arrastamento e de sustentação atuam sobre elementos da estrutura isolados, como cabos estaiados. Devido à grande variedade de formas geométricas nestas estruturas, os coeficientes de pressão são obtidos com recurso a ensaios em túnel de vento sobre modelos à escala reduzida, principalmente quando se trata de estruturas especiais.

4.3.5. COEFICIENTES DE PRESSÃO C_p

O vento atua geralmente nas duas faces da membrana em simultâneo, havendo consequentemente valores de coeficientes de pressão interiores e exteriores que podem ser obtidos de acordo com legislação e artigos científicos. A ação conjunta destes dois efeitos deve ser incluída no modelo analítico da estrutura, sendo as pressões aplicadas perpendicularmente à superfície deformada.

No entanto, quando a estrutura de membrana não é aberta o seu comportamento é diferente, dado que somente a superfície exterior fica exposta às pressões dinâmicas do vento. Porém, as pressões interiores também devem ser consideradas.

Em estruturas pneumáticas as pressões dinâmicas do vento atuam somente numa das faces, enquanto o equipamento de insuflamento controla as pressões internas (Matsumoto 1992).

4.3.5.1. Coberturas de pequena / média dimensão

Para estruturas de pequena dimensão dificilmente se encontram formas semelhantes na legislação em vigor, sendo necessário tecer algumas considerações conservativas na definição dos valores de C_p .

Contudo, Forster e Mollaert (2004) sistematizam os valores típicos dos coeficientes de pressão para as formas comuns em membrana. Estas incluem formas cónicas, em cume-vale e em parabolóide hiperbólico. Para as formas cónicas remete-se também para Burton e Gosling (2004) e Nagai *et al.* (2010); (Nagai *et al.* 2012). Para as formas em parabolóide hiperbólico remete-se para estudos de Beutler em Esquillan e Saillard (1963) e para Rizzo *et al.* (2011); (Rizzo *et al.* 2012; Rizzo 2012). Estes coeficientes podem ser utilizados em conjunto com o eurocódigo, com vista a fornecer um carregamento do vento mais adequado.

Os coeficientes de pressão exterior apresentados no manual europeu de estruturas de membrana (Forster e Mollaert 2004) baseiam-se em ensaios de túnel de vento realizados em estruturas tensas, com os lados fechados e abertos, bem como na literatura com base em estruturas flexíveis e rígidas. Os valores dos coeficientes de pressão apresentados no referido manual podem ser aplicados em painéis de membrana que variam entre 10 e 100 metros de dimensão. Assim sendo, as superfícies são divididas em zonas sobre as quais atuam diferentes coeficientes de pressão. O comportamento do

vento, e consequentemente dos coeficientes de pressão, C_p , não varia significativamente em estruturas que exibem pequenas alterações em relação à sua forma global (Forster e Mollaert 2004).

A Figura 4.14 apresenta as zonas dos coeficientes de pressão exterior para coberturas em parabolóide hiperbólico, respetivamente para a direção do vento 0° e 90° , de acordo com o referido manual, e os respetivos valores dos coeficientes de pressão estão sistematizados na Tabela 4.1. Os coeficientes de pressão exterior apresentados baseiam-se numa estrutura fechada e num coeficiente geométrico de 4,7 dado pelo quociente entre a dimensão diagonal e a distância vertical entre o ponto mais alto e mais baixo.

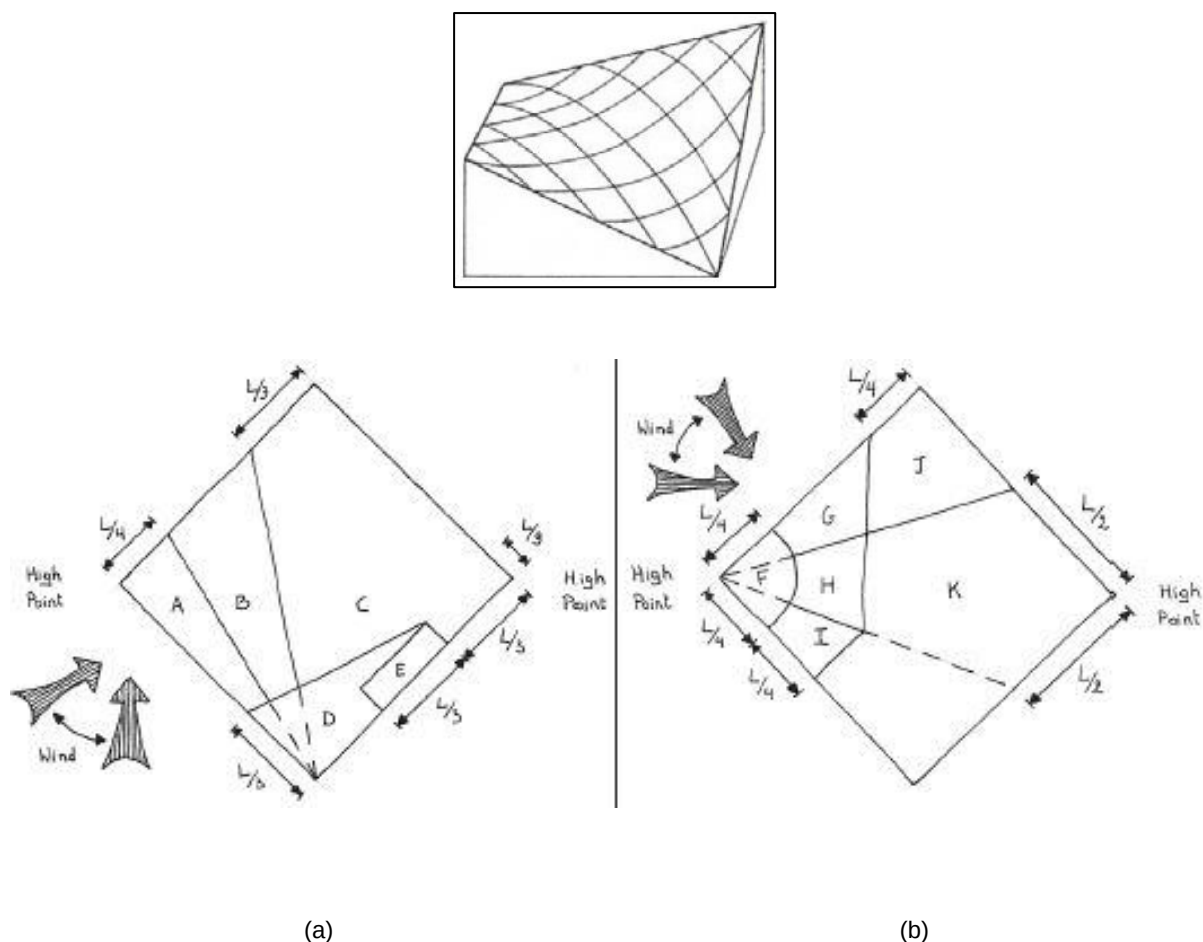


Figura 4.14 – Coeficientes de pressão para coberturas em parabolóide hiperbólico, adaptado de Forster e Mollaert (2004): (a) Direção 0° e (b) Direção 90°

Tabela 4.1 – Coeficiente de pressão exterior para coberturas em parabolóide hiperbólico (Forster e Mollaert 2004)

C_{pe}	Zonas										
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Positivo	0	0	0,30	0,30	0,30	0	0	0,20	0	0	0
Negativo	-1,45	-0,90	-0,65	-0,70	-1,20	-1,80	-1,20	-0,90	-1,20	-0,65	-0,65

A Figura 4.15 apresenta as zonas dos coeficientes de pressão exterior numa cobertura em cumeeiro, respetivamente para a direção do vento 0° e 90° , e os respetivos valores dos coeficientes de pressão estão sistematizados na Tabela 4.2. Os coeficientes de pressão exterior apresentados baseiam-se quer numa estrutura aberta, quer numa estrutura fechada. O quociente entre a largura e a profundidade é respetivamente igual a 2,5 e 4, respetivamente para uma estrutura aberta e fechada.

A Figura 4.16 apresenta as zonas dos coeficientes de pressão exterior numa cobertura cônica e os respetivos valores dos coeficientes de pressão estão sistematizados na Tabela 4.3. Os coeficientes de pressão exterior apresentados baseiam-se quer numa estrutura aberta, quer numa estrutura fechada. O ângulo de inclinação formado pela superfície do cone e a horizontal é de 40° . Este ângulo baseia-se no ângulo de elevação formado entre a horizontal e a linha reta entre a periferia da estrutura cônica e o topo da mesma. Atendendo à forma côncava da superfície de membrana, o ângulo real da membrana na proximidade da periferia é inferior ao estimado, e junto ao topo é superior.

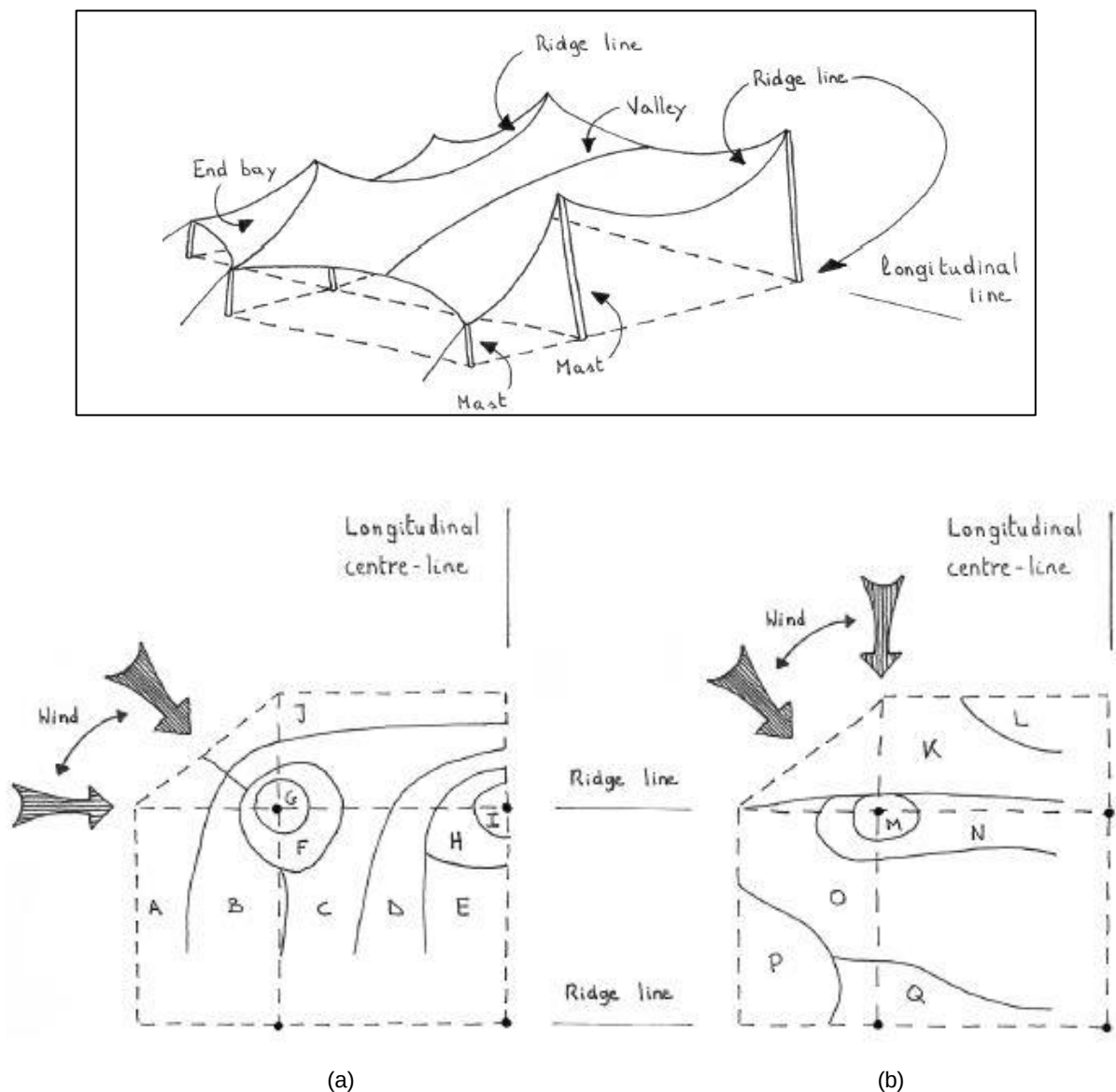


Figura 4.15 – Coeficientes de pressão para coberturas em cumeeiro: (a) Direção 0° e (b) Direção 90° (Forster e Mollaert 2004)

Tabela 4.2 – Coeficiente de pressão exterior para coberturas em cumeeiro (Forster e Mollaert 2004)

C _{pe}	Estrutura aberta		Estrutura fechada	
	Rácio largura / profundidade	2,5	4	
	Inclinação aproximada da membrana	39°	26°	
Zonas	A	+0,60 -0,39	+0,30	
	B	+0,23 -0,33	+0,25	
	C	-0,41	-0,20	
	D	-0,20	-0,30	
	E	-0,11	-0,45	
	F	-0,38	-0,35	
	G	-0,38	-0,80	
	H	-0,33	-0,50	
	I	-0,33	-0,90	
	J	+0,14 -0,30	+0,35 -0,30	
	K	+0,58 -0,29	+0,30	
	L	+0,38 -0,42	+0,30 -0,20	
	M	-0,38	-1,20	
	N	-0,38	-0,6	
	O	+0,38 -0,37	-0,40	
	P	+0,45 -0,46	+0,20 -0,20	
	Q	+0,12 -0,27	+0,30 -0,30	

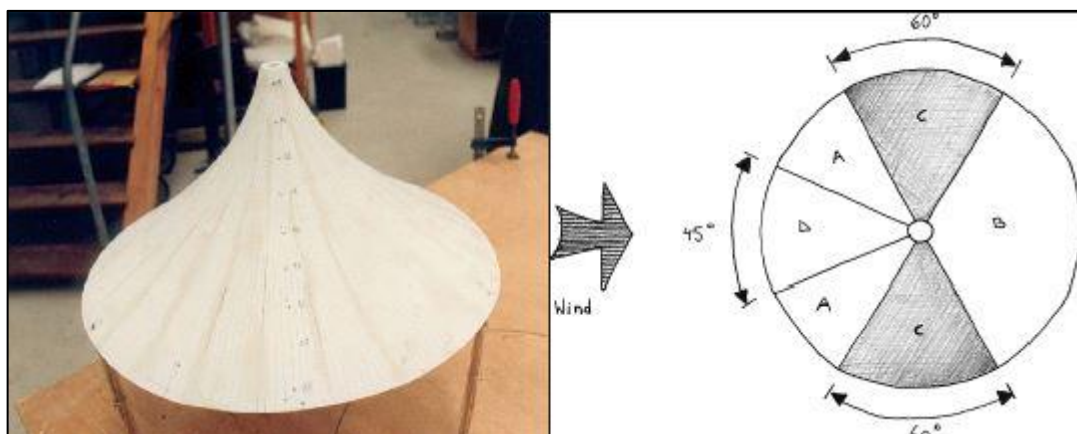


Figura 4.16 – Coeficientes de pressão para coberturas cônicas (Forster e Mollaert 2004)

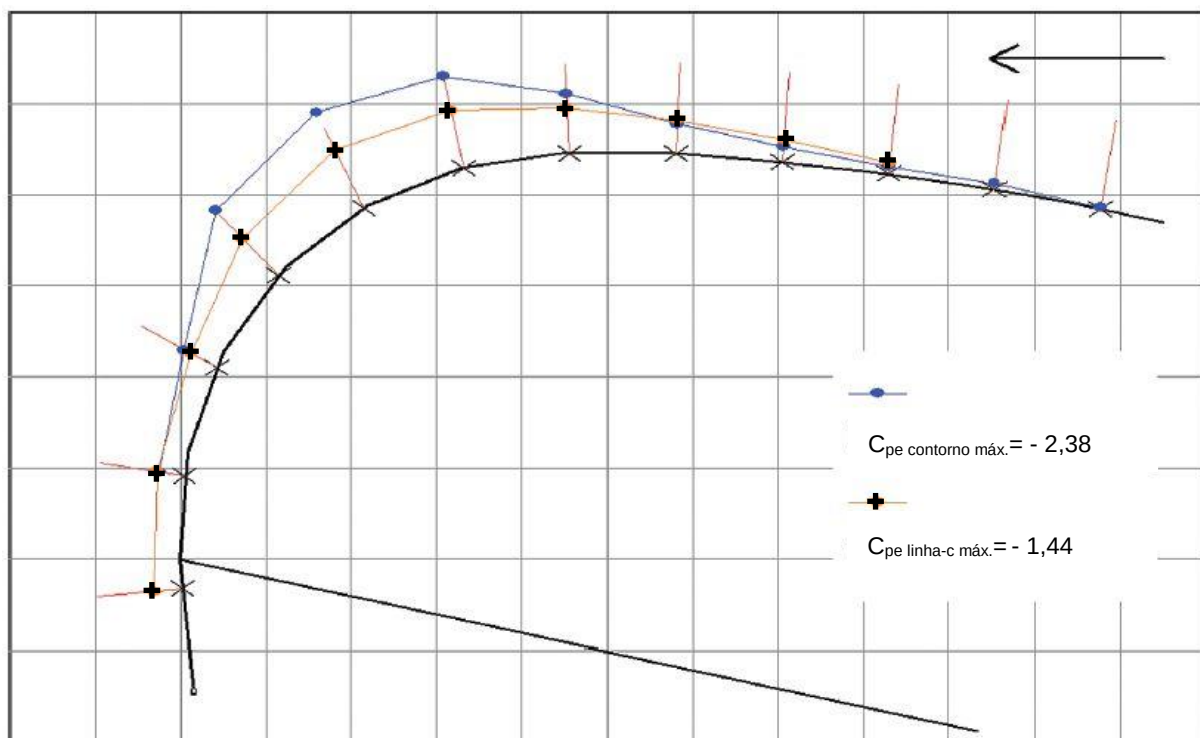
Tabela 4.3 – Coeficiente de pressão exterior para coberturas cônicas (Forster e Mollaert 2004)

C_{pe}	Ângulo de inclinação da membrana com a horizontal	Zonas			
		A	B	C	D
Estrutura aberta	4	-0,15	-0,60	-1,00	+0,40/-0,20
Estrutura fechada	40	-0,41	-0,70	-1,00	+0,75/-0,60

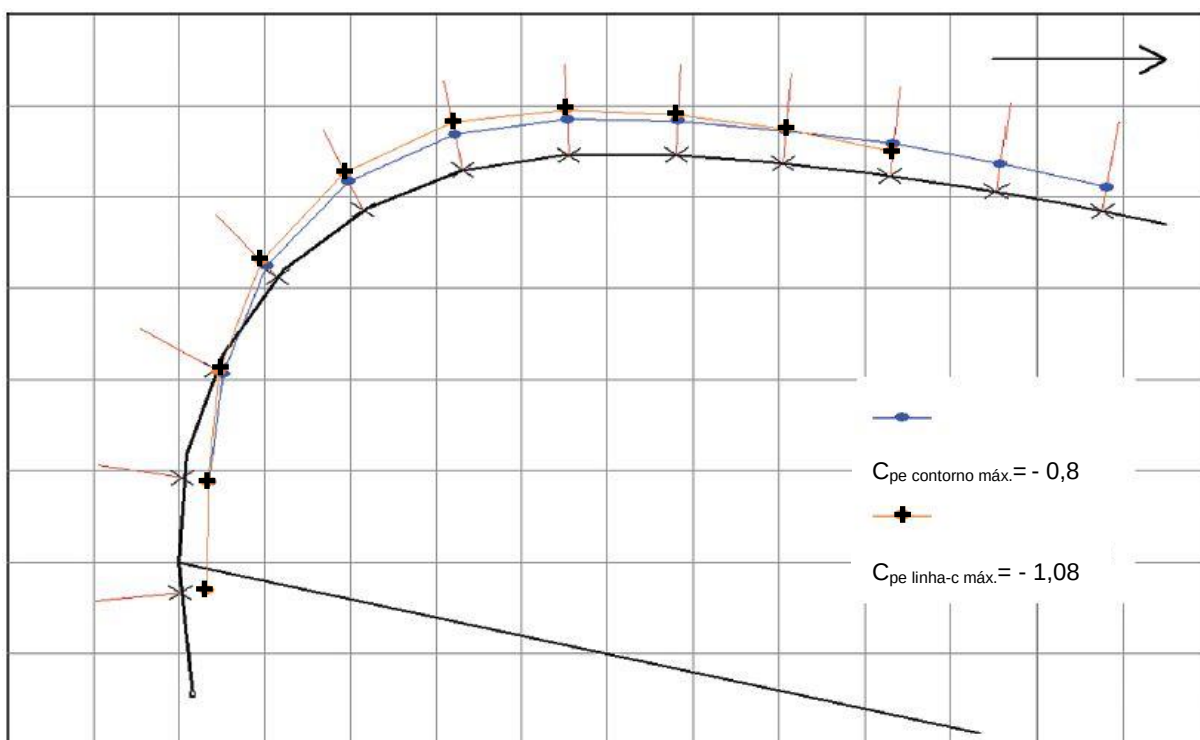
Complementarmente, Forster e Mollaert (2004) apresentam os coeficientes de pressão de uma estrutura de membrana desmontável associada a uma estrutura de bancada (ver a Figura 4.17), realizada no âmbito do projeto *ARIES (Rapidly Deployed Temporary Seating Canopy Prototype)*. A estrutura consiste numa cobertura de proteção para bancadas modulares de eventos temporários. O sistema estrutural é constituído por uma membrana, cabos e uma estrutura de treliça. O pré-esforço dos cabos permite o levantamento da cobertura.

No modelo de um único setor, os coeficientes de pressão exterior, C_{pe} , para a atuação do vento de frente e de trás são apresentados, respetivamente na Figura 4.18 (a) e Figura 4.18 (b), apresentando valores máximos de sucção de $C_{pe} = -2,38$ quando o vento atua de frente sobre a cobertura, e de $C_{pe} = -1,08$ quando atua de trás.

Figura 4.17 – Protótipo da estrutura de membrana desmontável *ARIES*, Munique, Alemanha (Tensinet)



(a)



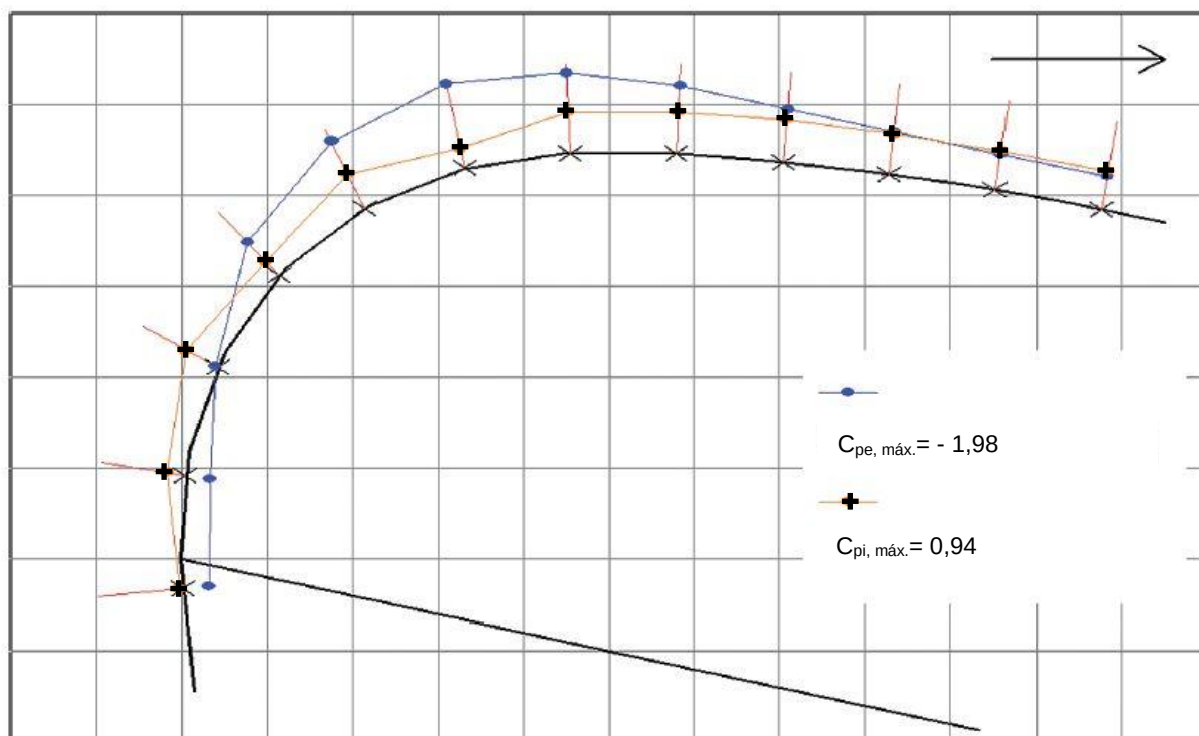
(b)

Figura 4.18 – Coeficiente de pressão exterior C_{pe} num setor único do modelo *ARIES*: (a) vento de frente e (b) vento de trás

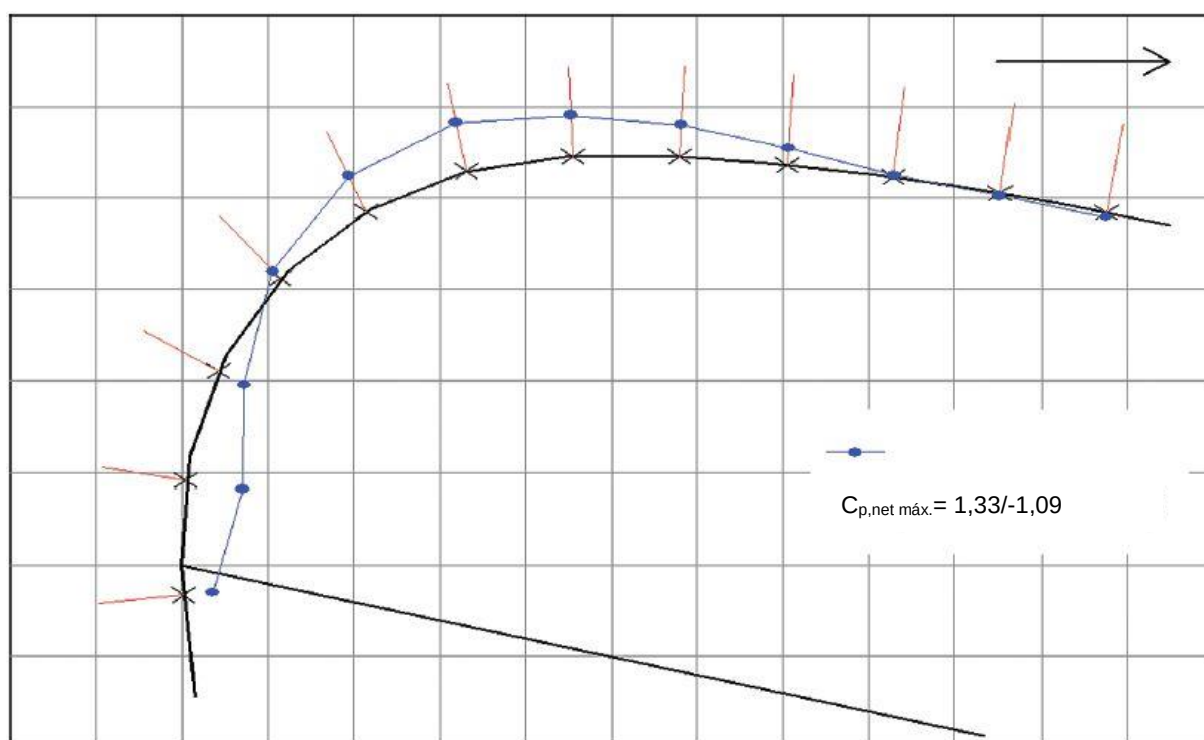
Por sua vez, no modelo com múltiplos setores onde são utilizados três setores, os valores máximos dos coeficientes de pressão exterior, C_{pe} , dos coeficientes de pressão interior, C_{pi} , e dos coeficientes de pressão resultante, $C_{p,net}$, estão sistematizados na Tabela 4.4 de acordo com o sentido de atuação do vento em relação à estrutura de cobertura - de trás e de frente. A representação gráfica desses coeficientes é apresentada na Figura 4.19 e na Figura 4.20, respectivamente para a atuação do vento de trás e de frente, em que os valores de sucção são representados acima do perfil da cobertura e os de pressão abaixo desse perfil. De uma forma geral, quando o vento atua de frente, ocorre uma ação de levantamento generalizada da cobertura, sendo atingidos os valores máximos de sucção de $C_{p,net} = -2,82$. No entanto, quando o vento atua de trás, a ação de vento resultante tem um efeito de pressão importante sobre a face de barlavento $C_{p,net} = 1,33$, e os valores de sucção decrescem para valores máximos de $C_{p,net} = -1,09$.

Tabela 4.4 – Coeficientes de pressão em setores múltiplos do modelo ARIES

Direção do vento	Posição	C_{pe}	C_{pi}	$C_{p,net}$
Trás	1	-0,76	-0,86	0,10
	2	-0,79	-0,86	0,07
	3	-0,93	-0,89	-0,04
	4	-1,32	-0,94	-0,38
	5	-1,60	-0,92	-0,68
	6	-1,82	-0,92	-0,90
	7	-1,98	-0,89	-1,09
	8	-1,75	-0,87	-0,88
	9	-1,09	-0,85	-0,24
	10	-0,19	-0,85	0,66
	11	0,49	-0,84	1,33
	12	0,61	-0,08	0,69
Frente	1	-2,33	0,49	-2,82
	2	-1,61	0,42	-2,03
	3	-1,73	0,44	-2,17
	4	-1,34	0,47	-1,81
	5	-1,46	0,54	-2,00
	6	-1,82	0,61	-2,43
	7	-1,71	0,64	-2,35
	8	-1,36	0,73	-2,09
	9	-1,01	0,73	-1,74
	10	-1,00	0,73	-1,73
	11	-1,00	0,73	-1,73
	12	-0,94	0,24	-1,18

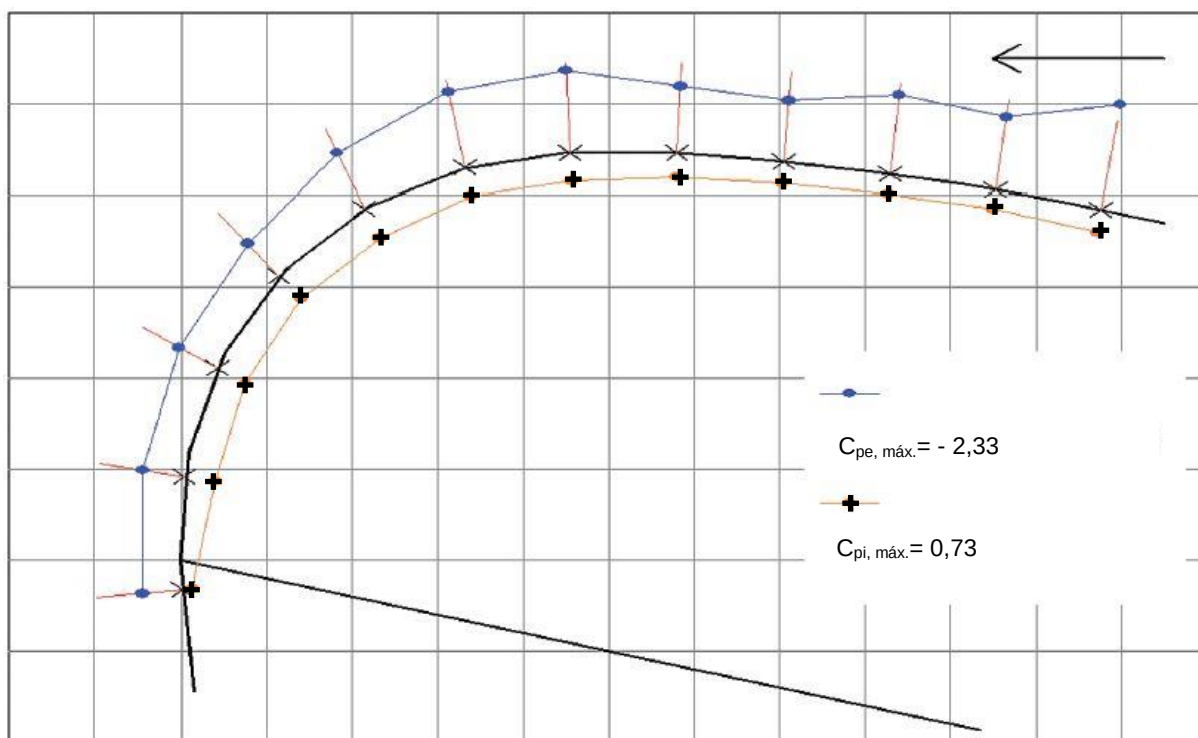


(a)

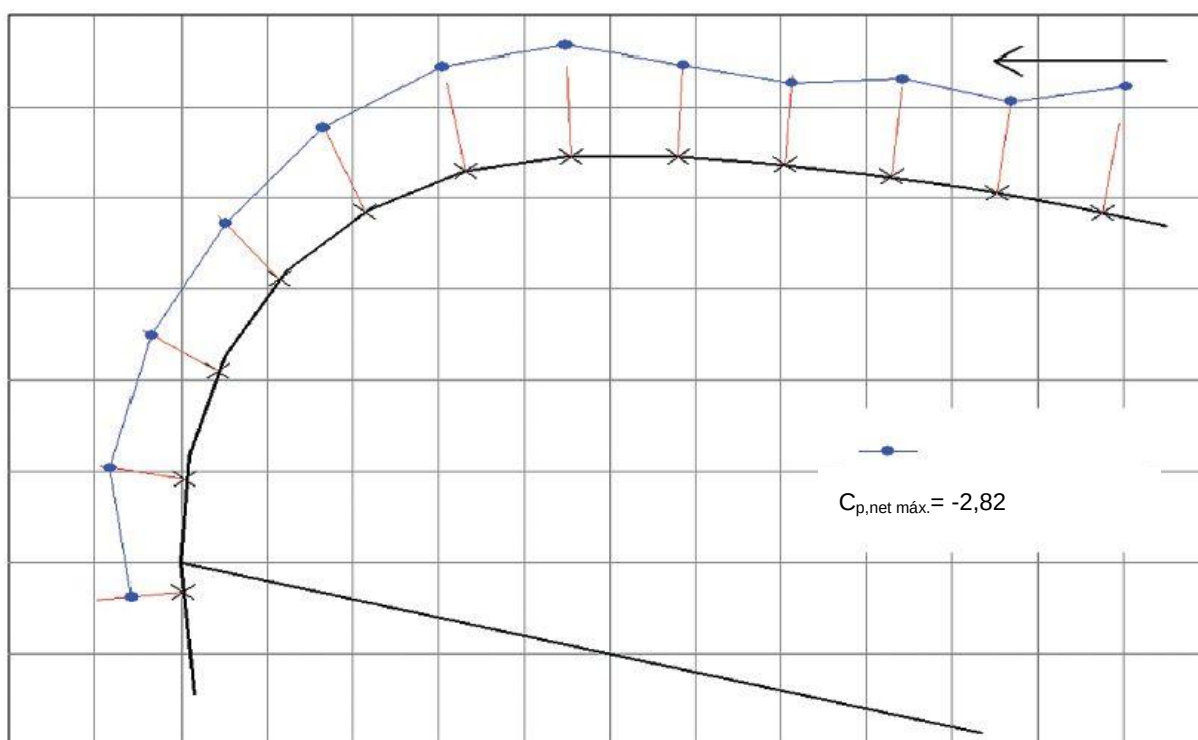


(b)

Figura 4.19 – Coeficientes de pressão em setores múltiplos do modelo *ARIES* - vento de trás: (a) C_{pe} e C_{pi} e (b) $C_{p,net}$



(a)



(b)

Figura 4.20 – Coeficientes de pressão em setores múltiplos do modelo *ARIES* - vento de frente: (a) C_{pe} e C_{pi} e (b) $C_{p, \text{net}}$

Buchholdt (1999) apresenta resultados de ensaios em túnel de vento de um modelo de cobertura em malha de cabos com a forma circular em paraboloide hiperbólico aberto, de onde resultaram os coeficientes de pressão representados na Figura 4.21. A estrutura apresenta um diâmetro de $D = 120m$, altura $H = 20m$ e um rácio flecha / vão = $f/l = 6\%$, quer para os cabos principais quer para os secundários.

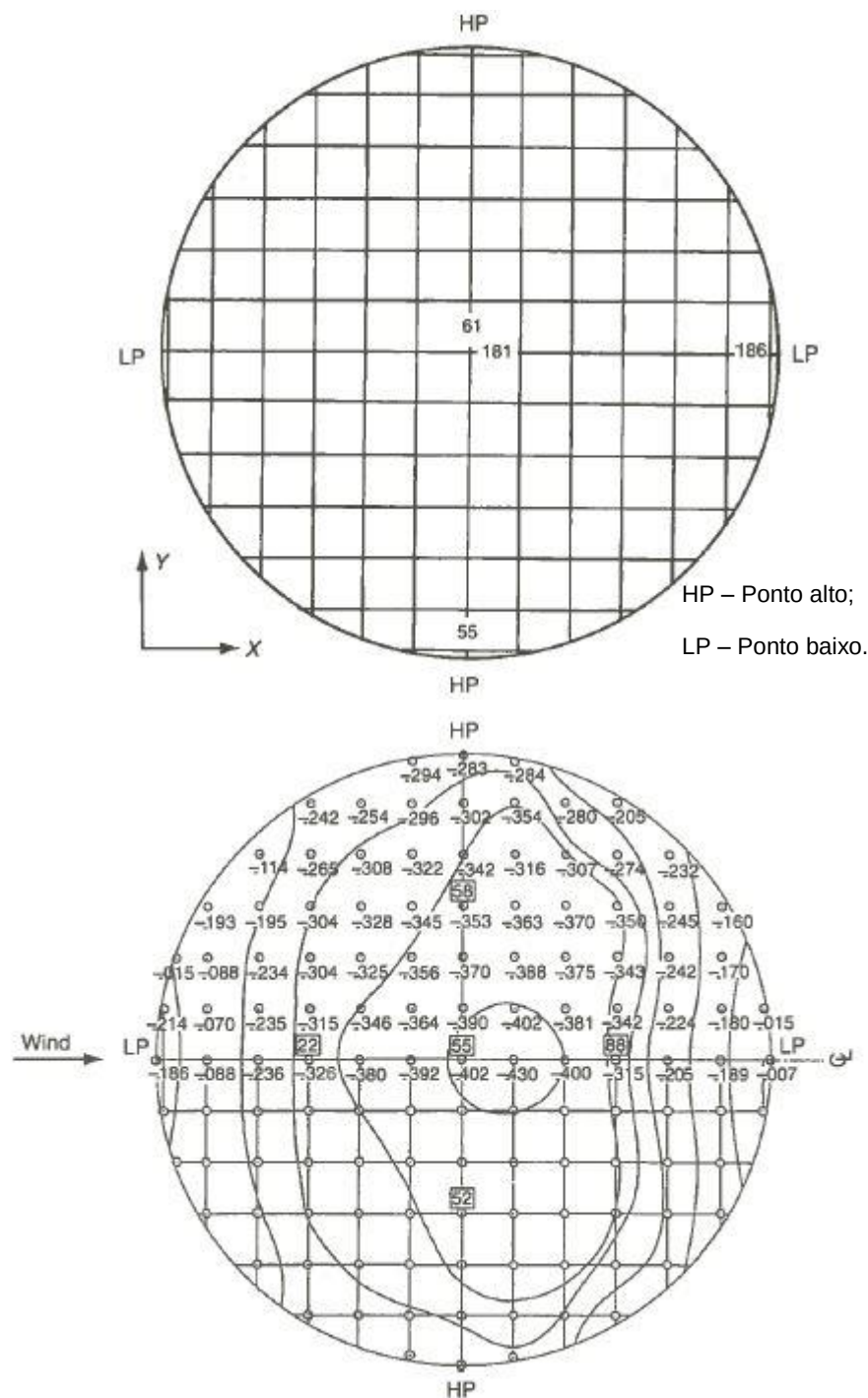


Figura 4.21 – Coeficiente de pressão médio de uma cobertura circular em paraboloide hiperbólico, adaptado de Buchholdt (1999)

Uematsu *et al.* (2008) realizaram ensaios em túnel de vento num modelo de cobertura circular plana fechado de onde resultaram os coeficientes de pressão médios representados na Figura 4.22. Foram ensaiadas diferentes geometrias relacionando a altura, H , e o diâmetro, D , da cobertura, H/D , entre 1/16 e 16/16.

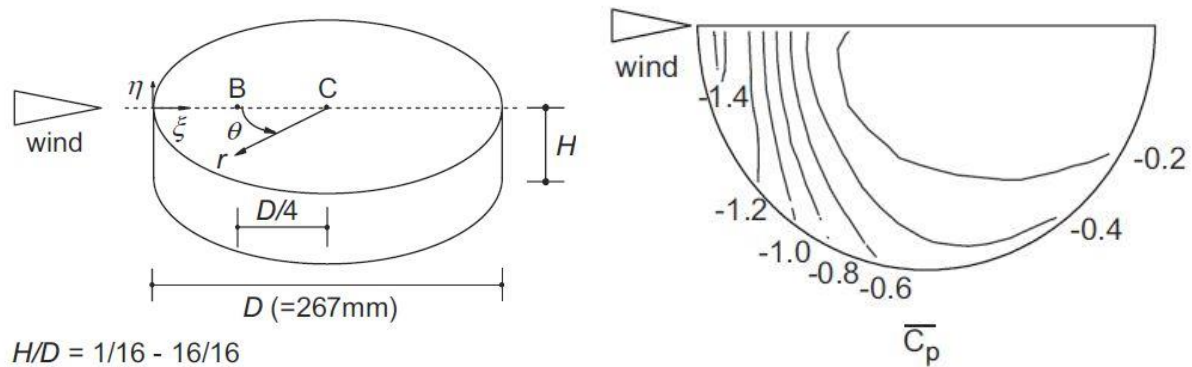


Figura 4.22 – Coeficiente de pressão médio de uma cobertura circular plana, adaptado de Uematsu *et al.* (2008)

4.3.5.2. Coberturas de estádios

A presente secção baseia-se em estudos apresentados em Forster e Mollaert (2004), onde se apresentam os valores de C_p para 5 formas típicas de coberturas de estádios, com base em estudos já realizados em túnel de vento e disponibilizados pelo gabinete *Schlaich Bergermann & Partners*, Stuttgart, com vista à sua utilização em estados preliminares do dimensionamento.

Estes coeficientes de pressão baseiam-se num conjunto de considerações, enumerando-se as seguintes: a informação fornecida é baseada em diferentes ensaios de túnel de vento e técnicas de análise variadas; a rugosidade do solo influencia os efeitos de rajada do vento, variando em cada investigação; alguns coeficientes de pressão têm incluído pequenas amplificações dinâmicas; os efeitos locais são ignorados e, portanto, as figuras fornecidas com os coeficientes de pressão são destinadas ao dimensionamento exclusivo da estrutura global; são utilizados somente os valores de C_p máximos (pressão) e mínimos (sucção); são analisadas somente as três direções principais de atuação do vento (0° , 45° e 90°), assim como as forças de sucção e de pressão; são apresentados e discutidos apenas os coeficientes de pressão resultante $C_{p,net}$ ($C_{p,net} = C_{p,exterior} - C_{p,interior}$).

Para além das simplificações mencionadas anteriormente, são adotadas algumas simplificações quanto à forma da estrutura, enumerando-se as seguintes: a superfície de membrana é considerada achatada, mesmo quando é suportada por arcos ou apresente a forma cónica; são consideradas apenas superfícies sólidas e são ignoradas estruturas de suporte com uma secção diagonal inferior a 5 metros, bem como mastros e cabos; são ignorados edifícios nas redondezas acima de 12 metros.

Atendendo às simplificações adotadas neste estudo, os valores dos coeficientes de pressão que serão apresentados não podem ser utilizados no dimensionamento final de estruturas de estádios, devendo, para esse feito, ser realizados ensaios de túnel de vento. Além disso, o projetista deverá avaliar a aplicabilidade desta informação ao estádio em estudo.

As coberturas são divididas em zonas de exposição ao vento. A divisão é feita com base em linhas radiais e concêntricas. As linhas radiais subdividem a cobertura em 24 setores espaçados de 15° . Em termos concêntricos, são criadas 4 zonas definidas por 4 anéis, classificadas de anel a , b , c e d , de

acordo com a Tabela 4.5 O esquema de numeração das zonas das coberturas está apresentado na Figura 4.23.

A geometria e o vão das coberturas dos estádios utilizados no presente estudo são variáveis, desde o tipo I ao tipo V, respetivamente da Figura 4.24 à Figura 4.28. A geometria em planta pode ser circular, oval ou elíptica, como os estádios do tipo I, III e IV, ou retangular, do tipo II e V.

Tabela 4.5 – Divisão concêntrica das coberturas

Anel concêntrico	Classificação	Profundidade da cobertura (%)
Anel exterior	Anel <i>a</i>	12
Zona interior (fronteira externa)	Anel <i>b</i>	26
Zona interior (fronteira interior)	Anel <i>c</i>	50
Anel interior	Anel <i>d</i>	12

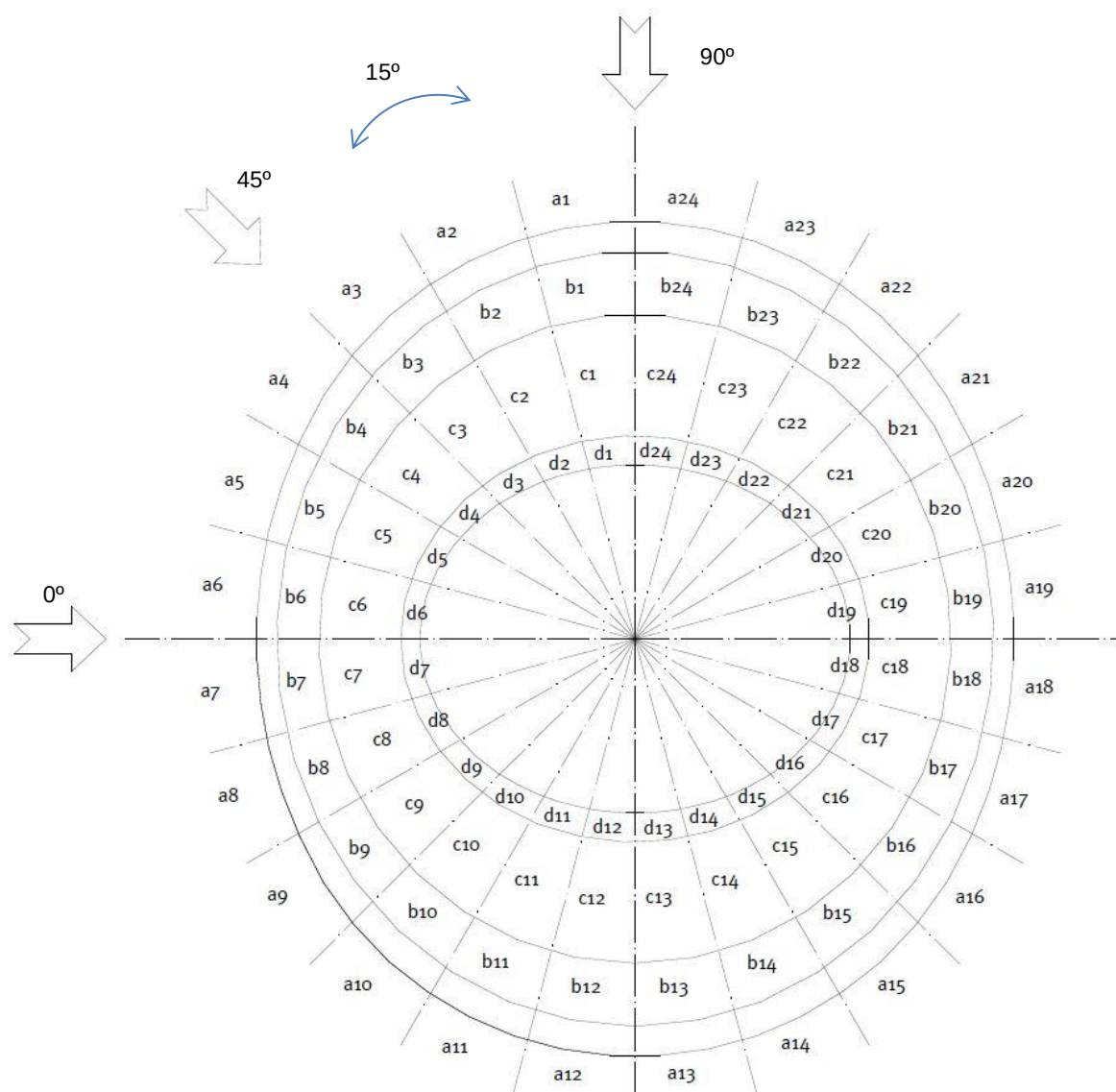


Figura 4.23 – Esquema de numeração das zonas nas coberturas

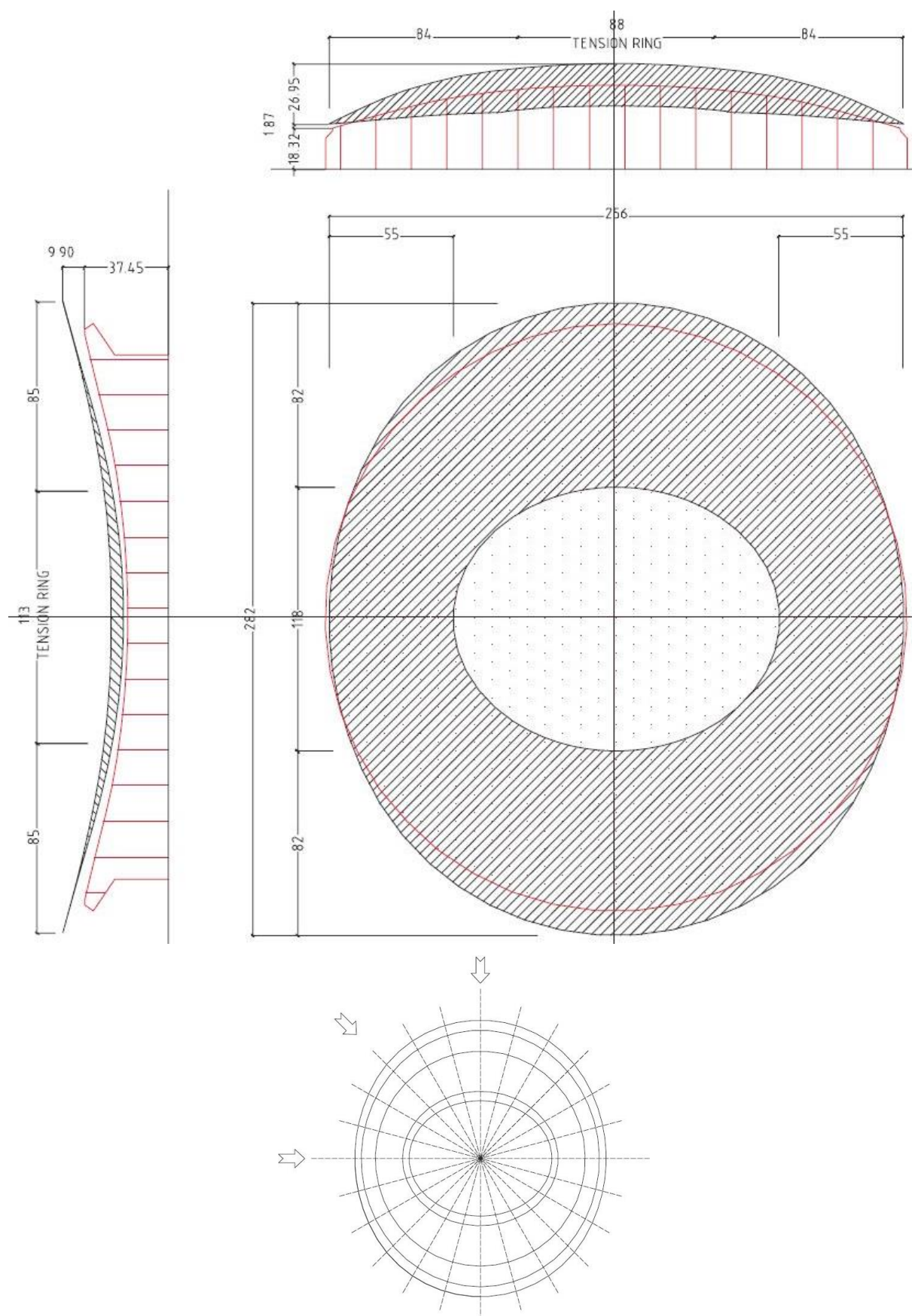


Figura 4.24 – Estádio do tipo I: planta, alçados e subdivisão

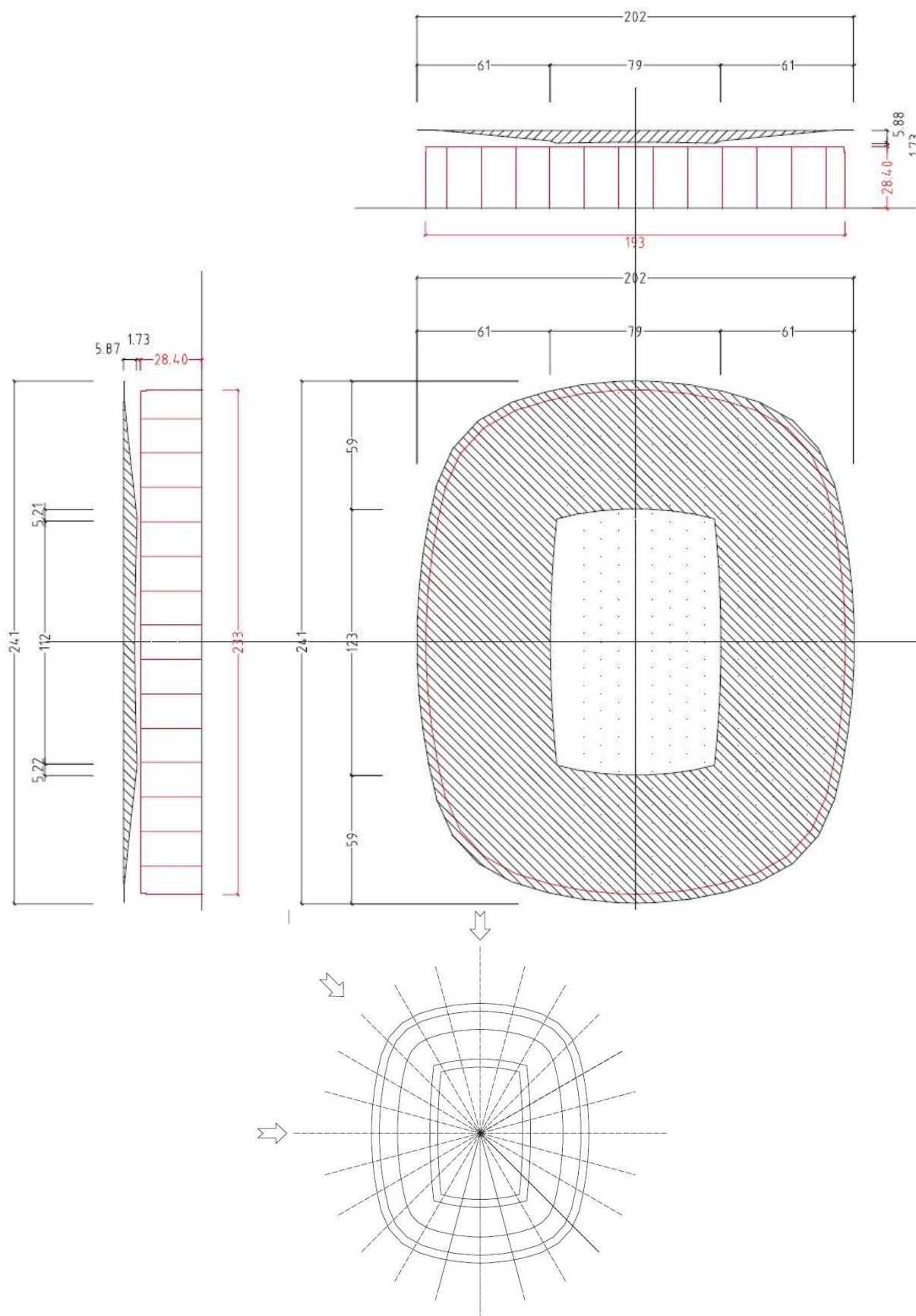


Figura 4.25 – Estádio do tipo II: planta, alçados e subdivisão

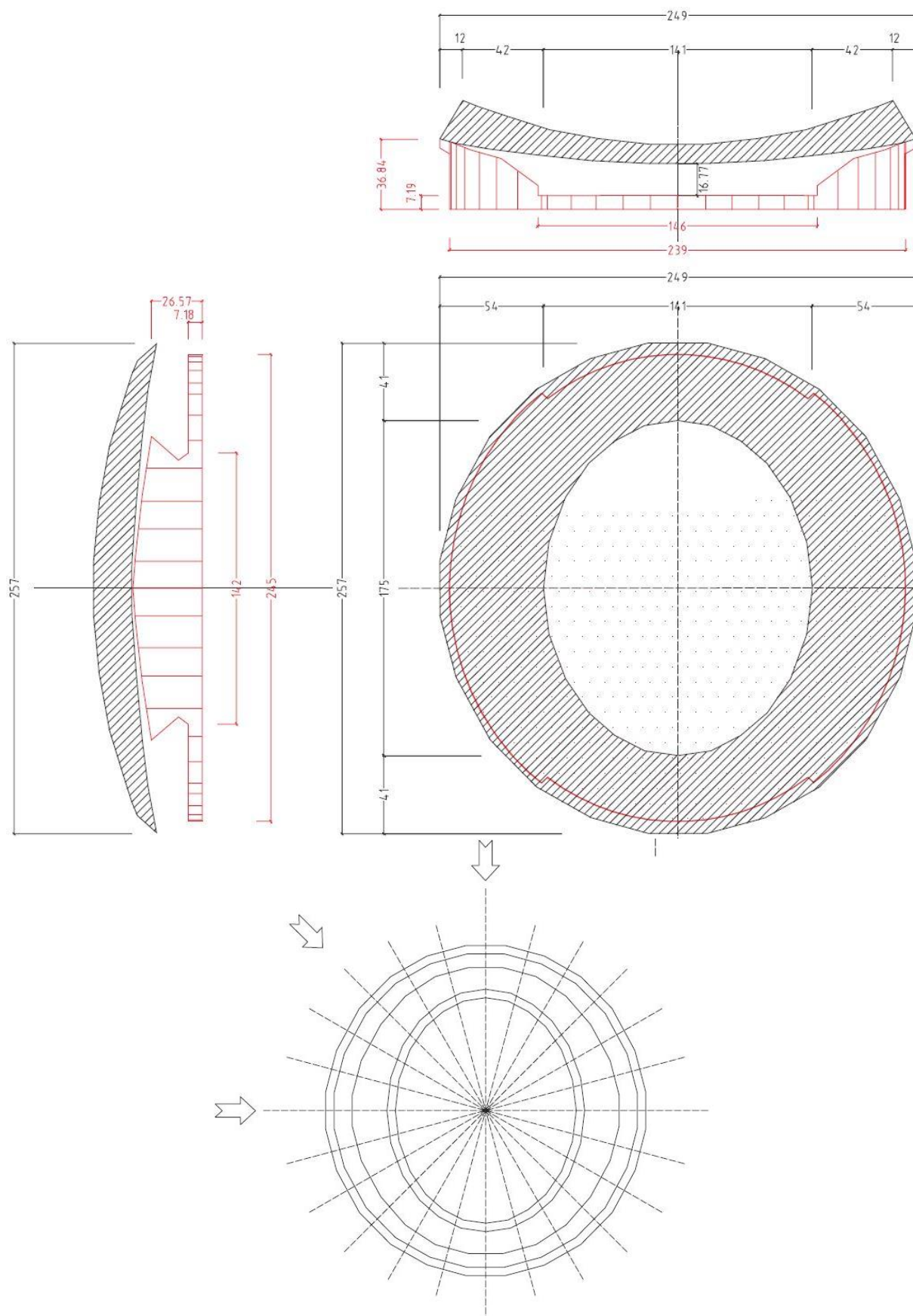


Figura 4.26 – Estádio do tipo III: planta, alçados e subdivisão

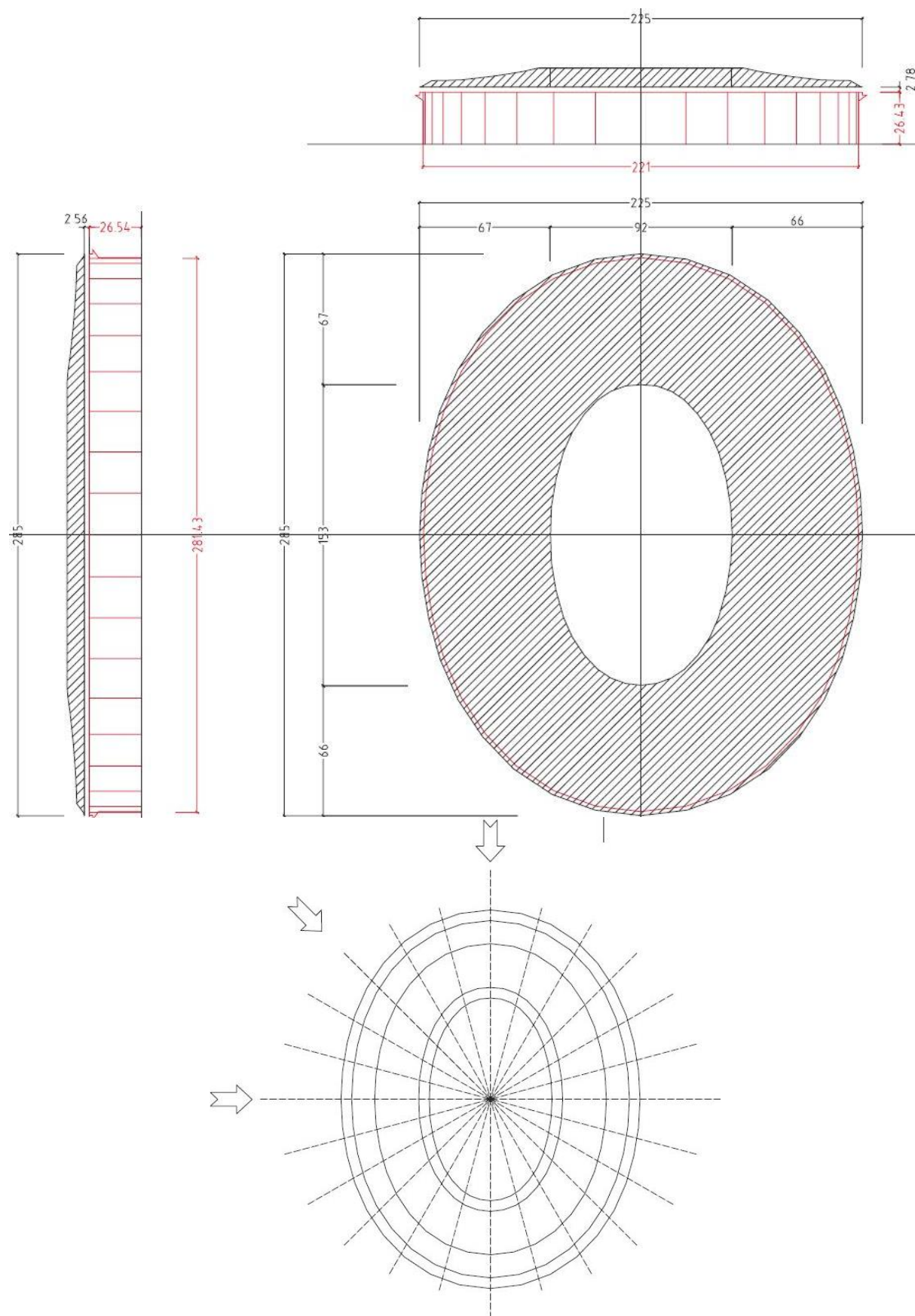


Figura 4.27 – Estádio do tipo IV: planta, alçados e subdivisão

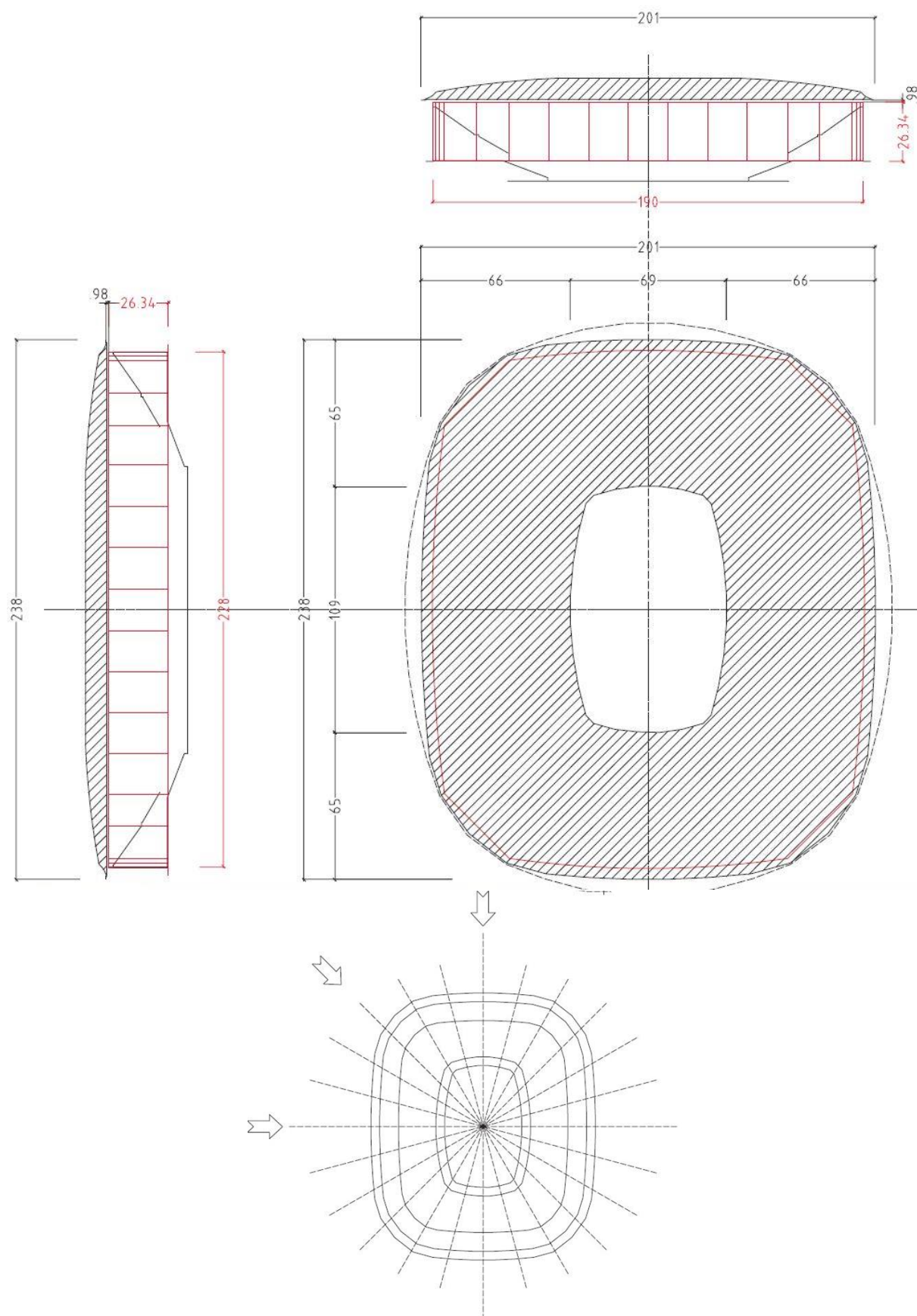


Figura 4.28 – Estádio do tipo V: planta, alçados e subdivisão

O estádio do tipo III é excluído da análise dado que as grandes aberturas, nos dois lados do estádio, criam pressões e sucções extremas na cobertura, levando a informações analíticas muito variadas.

Relativamente ao efeito da geometria em planta, de uma forma geral, os estádios retangulares originam coeficientes de pressão superiores em relação aos circulares. Embora essa tendência seja verificada, é de notar que este efeito é sobreposto com efeitos mais gravosos resultantes da geometria da cobertura na vertical. Deste modo, o efeito da geometria em planta é menos crítico neste estudo. O facto dos estádios de forma retangular serem arredondados nos cantos pode estar na base dos coeficientes de pressão não se destacarem significativamente neste tipo de estádios, em comparação com os do tipo circular.

Em relação ao efeito da geometria da cobertura na vertical, estudos aerodinâmicos e da dinâmica de fluidos mostram que as coberturas com curvaturas ou desníveis acentuados entre o ponto mais baixo e mais alto da cobertura originam um comportamento da ação do vento mais significativo e inconstante. A exposição da forma côncava da cobertura ao fluxo do vento facilita o respetivo fluxo. Consequentemente, os coeficientes de pressão de levantamento são inferiores no anel periférico (anel *a*), podendo ocorrer forças de rebaixamento. Pelo contrário, no anel *d* junto à abertura central da cobertura, nos setores expostos ao fluxo livre do vento, os coeficientes de pressão podem ser significativos. O estádio do tipo I (ver a Figura 4.24) é um exemplo disso, como mostra a distribuição dos coeficientes de pressão da Figura 4.29 (a) para a direção do vento a 0° : ocorrem forças de pressão nos setores 2 ao 11 dos anéis *a*, *b*, *c* e *d*, com coeficientes de pressão máximos de $C_p = +0,23$ (ver a Tabela 4.6), enquanto nos setores opostos - *d*17 ao *d*20 e *c*17 ao *c*20, ocorrem forças de levantamento com coeficientes de pressão mínimos de $C_p = -1,36$.

À medida que a direção do vento varia desde a face de exposição côncava até à face convexa, respetivamente desde a direção do vento a 0° e a 90° , como mostra a Figura 4.29, a ação do vento apresenta um comportamento diferente. Na direção do vento a 45° (ver Figura 4.29 (b)), nos setores da cobertura expostos ao vento, aproximadamente entre os setores 6 e 13, a referida ação é descendente apresentando valores crescentes de C_p desde o anel *a* ao anel *d* ($C_p = +0,23 \rightarrow +1,14$). No entanto, no lado oposto da cobertura, a ação do vento é ascendente, apresentando valores mínimos de $C_p = -2,5$ no anel *a*.

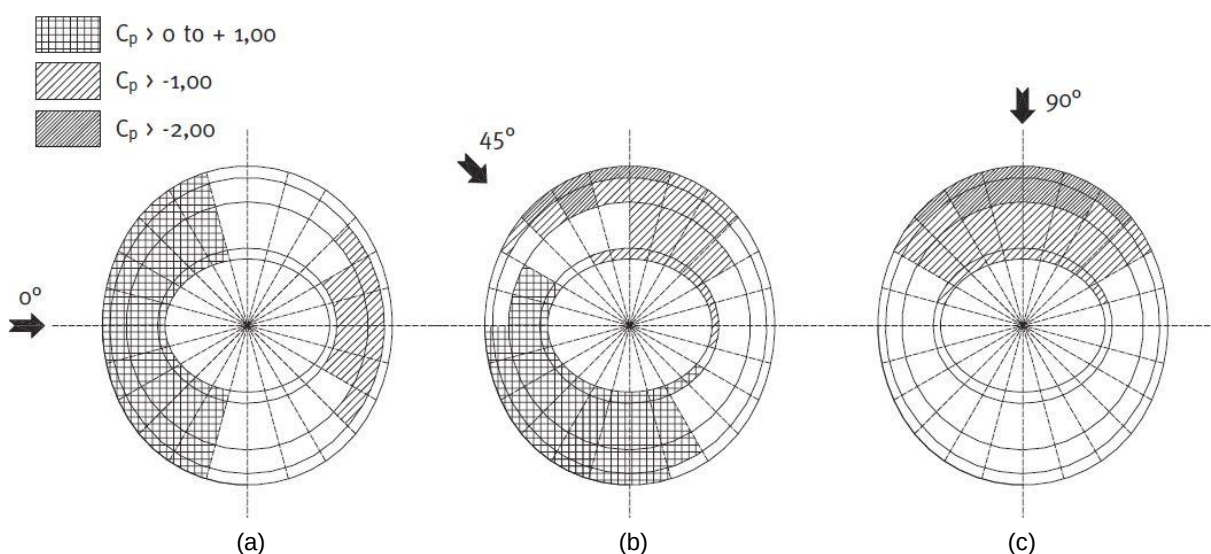


Figura 4.29 – Coeficientes de pressão C_p para o estádio do tipo I: (a) Direção 0° ; (b) Direção 45° e (c) Direção 90°

Por sua vez, na direção do vento a 90° (ver Figura 4.29 (c)), de uma forma global a ação do vento é de levantamento em toda a cobertura. Particularmente entre os setores 21 e 4, é de notar um aumento significativo da ação do vento de sucção, apresentando valores de $C_p = -2,95$ no anel a, de $C_p = -2,50$ no anel b, $C_p = -1,32$ no anel c e de $C_p = -1,59$ no anel d.

Tabela 4.6 – Valores máximos e mínimos de C_p nas direções do vento de 0° , 45° e 90°

Direção do vento	Anel	Tipologia do estádio				Máx./mín.
		I	II	IV	V	
Direção de 0°	a máx.	0,23	-0,54	-0,39	-0,42	0,23
	a mín.	-0,45	-3,51	-0,87	-3,78	-3,78
	b máx.	0,23	-0,68	-0,45	-0,23	0,23
	b mín.	-0,68	-1,89	-0,81	-0,84	-1,89
	c máx.	0,23	-0,68	-0,51	-0,42	0,23
	c mín.	-1,08	-1,22	-1,11	-1,26	-1,26
	d máx.	0,23	-0,68	-0,48	-0,42	0,23
	d mín.	-1,36	-1,62	-1,32	-2,10	-2,10
Direção de 45°	a máx.	0,23	-0,54	-0,21	-0,42	0,23
	a mín.	-2,50	-3,51	-0,66	-1,89	-3,51
	b máx.	0,23	-0,68	-0,24	-0,42	0,23
	b mín.	-1,98	-2,57	-1,02	-0,53	-2,57
	c máx.	0,64	-0,70	-0,21	-0,42	0,64
	c mín.	-1,32	-1,05	-1,65	-0,95	-1,65
	d máx.	1,14	-0,68	-0,33	-0,42	1,14
	d mín.	-1,59	-1,49	-1,83	-1,47	-1,83
Direção de 90°	a máx.	-0,23	-0,68	0,33	-0,42	0,33
	a mín.	-2,95	-3,65	-0,51	-2,10	-3,65
	b máx.	-0,23	-0,68	0,51	-0,42	0,51
	b mín.	-2,50	-2,43	-0,81	-0,74	-2,50
	c máx.	-0,34	-0,68	0,63	-0,42	0,63
	c mín.	-1,59	-1,16	-1,35	-0,95	-1,59
	d máx.	-0,68	-0,68	0,54	-0,42	0,54
	d mín.	-1,82	-1,62	-1,53	-1,68	-1,82
					Máx.	1,14
					Mín.	-3,78

O estádio III apresenta um comportamento semelhante da ação do vento de sucção da cobertura, comparativamente ao estádio do tipo I, analisando a direção do vento de 0° sobre a face da cobertura convexa, apresentando valores mínimos de $C_p = -2,9$.

Em geral, as coberturas de estádios que apresentam mudança de curvatura acentuada em toda a estrutura permitem, em algumas zonas, a fácil passagem do vento, e, noutras, oferecem maior resistência. No primeiro caso, os coeficientes mudam bruscamente entre pressão e sucção: os picos são atingidos em zonas da cobertura planas, abertas e concavas ($C_p = +0,23$) e no anel d do lado oposto ($C_p = -1,36$). As formas convexas elevadas oferecem maior resistência à passagem do vento, originando uma ação de levantamento da cobertura em geral, apresentando valores mínimos de $C_p = -2,95$ no anel a . Na direção do vento diagonal são também originadas zonas de sucção e de pressão.

O efeito da elevação da cobertura em relação à bancada, ou seja, o espaçamento criado entre estas duas estruturas, pode requerer condições especiais de ligação devido à respetiva elevação. Por exemplo, um espaçamento de cerca de 2 metros, e no caso em que a cobertura não excede a dimensão das bancadas, tal como sucede nos estádios IV e V, os efeitos do vento não são significativos nestas coberturas “fechadas”, pois o vento circula por cima da cobertura.

Já no estádio II verifica-se uma elevação de cerca de 6 metros, o que permite a passagem do vento através do espaçamento criado entre a cobertura e as bancadas, acelerando-o, de tal forma que a estrutura de cobertura funciona como uma asa. Consequentemente, ocorre de uma forma geral uma ação de levantamento mais gravosa da cobertura em comparação com a dos estádios IV e V, apresentando, por exemplo, valores de $C_p = -3,51$ no anel a e de $C_p = -1,89$ no anel b , no caso da direção de 0° . Complementarmente, é de notar que de uma forma geral estes coeficientes de pressão reduzem desde o anel periférico até à abertura central, sendo esse comportamento também verificado para a direção de 90° . Na direção diagonal do vento verificam-se valores máximos de sucção ao nível do anel a ($C_p = -3,51$).

Numa cobertura, como a do tipo III, com elevação na ordem de 16 metros, são de esperar coeficientes aerodinâmicos semelhantes aos do estádio II nas direções de vento a 0° e 45° , apresentando no entanto forças de sucção superiores.

O efeito de prolongamento da cobertura em consola é um aspeto importante nas estruturas de cobertura de estádios. No estádio I, a consola apresenta um comprimento máximo de 24 metros na direção longitudinal (90°). À semelhança do efeito de cobertura elevada descrito anteriormente, no estádio II, a ação do vento conduz a forças de sucção consideráveis, apresentando valores de $C_p = -3,00$ nos setores de barlavento entre $a2$ e $a23$ (ver a Figura 4.30). Como é de conhecimento geral, o vento sobre as coberturas em consola relacionam-se com forças importantes de levantamento nos sectores respetivos da superfície. Contudo, considerando o dimensionamento de toda a estrutura, os valores de C_p são menos importantes na restante superfície.

Adicionalmente, é de notar alguma coerência entre os coeficientes de pressão no anel periférico, a , e no anel interior, d , em zonas bem definidas. Por exemplo, a Figura 4.31 apresenta a distribuição dos valores de C_p de acordo com a direção do vento para o estádio IV. A entrada do vento pelo bordo da cobertura é realizada através do anel a e continua o seu percurso pela vertente de barlavento da cobertura. Depois, atravessa a abertura central da cobertura e alcança o anel d . A Figura 4.32 apresenta o esquema de distribuição de valores extremos de C_p para cada direção de atuação do vento numa secção de estádio genérica. Este esquema é realizado com base nas curvas envolventes dos coeficientes de pressão para cada anel dos estádios, apresentadas da Figura 4.33 à Figura 4.44. O pico dos valores de C_p é encontrado sempre no anel a , apresentando no presente estudo o valor máximo de sucção de $C_p = -3,78$, como mostra o esquema da Figura 4.32, no caso da direção do vento a 0° .

Verifica-se por norma um decréscimo abrupto de C_p para os anéis seguintes – b , c e d , da mesma pendente da cobertura de barlavento. No lado oposto, na pendente da cobertura de sotavento, o coeficiente volta a crescer para um novo máximo de $C_p = -2,10$, decrescendo gradualmente nos anéis seguintes – c , b , a . Complementarmente, é de referir que o valor máximo de pressão $C_p = +1,14$ é verificado no anel d , de acordo com as curvas envolventes apresentadas.

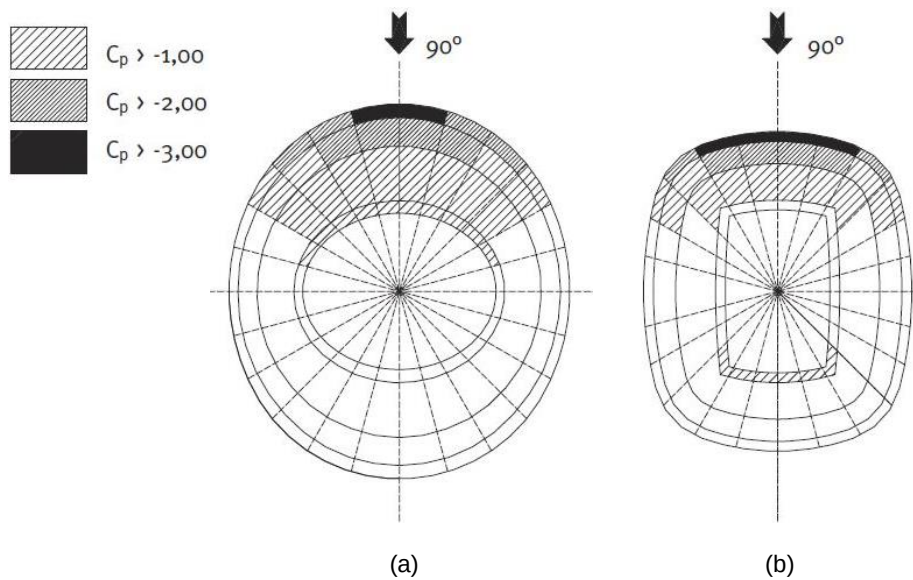


Figura 4.30 – Coeficientes de pressão C_p na direção 90° para estudo do efeito da consola vs elevação da cobertura no estádio: (a) do tipo I e (b) do tipo II

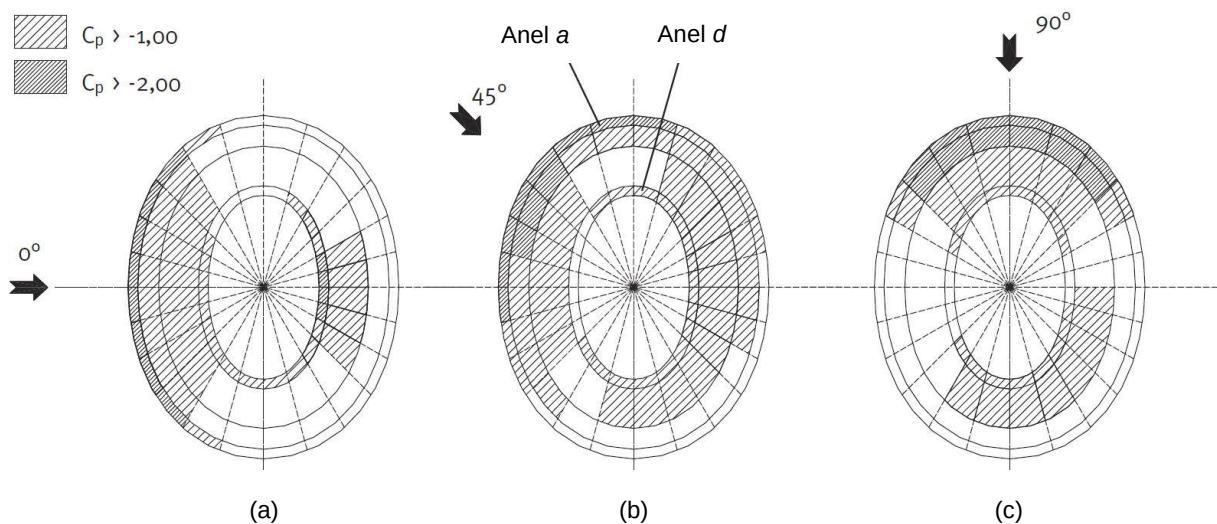


Figura 4.31 – Coeficientes de pressão C_p para o estádio do tipo IV: (a) Direção 0° ; (b) Direção 45° e (c) Direção 90°

Embora o efeito da abertura central da cobertura na distribuição dos coeficientes de pressão não tenha sido alvo de discussão em Forster e Mollaert (2004), os mesmos autores referem que as dimensões da referida abertura afetam a distribuição do vento, em particular no anel interior, d .

Relativamente à influência da direção do vento na distribuição dos coeficientes de pressão, é de referir, no geral, que nas direções de 0° e 90° a distribuição das cargas é simétrica (ver a Figura 4.31) dada a dupla simetria em planta dos estádios em análise. O pico dos valores de C_p , no anel a , encontra-se na parte mais próxima do barlavento. Os efeitos do vento são semelhantes analisando as direções a 0° e 90° . No entanto, os valores de C_p a barlavento na direção de 90° não são tão elevados, embora os efeitos de sucção, no anel b , sejam superiores (ver a Figura 4.32).

Na direção do vento a 45° , a distribuição dos coeficientes de pressão em planta não é simétrica. À semelhança das outras direções, verifica-se um pico de C_p no anel a ($C_p = -3,51$). É de notar um maior número de setores afetados pela ação do vento (ver a Figura 4.31 (b)), conduzindo a forças de levantamento importantes da cobertura.

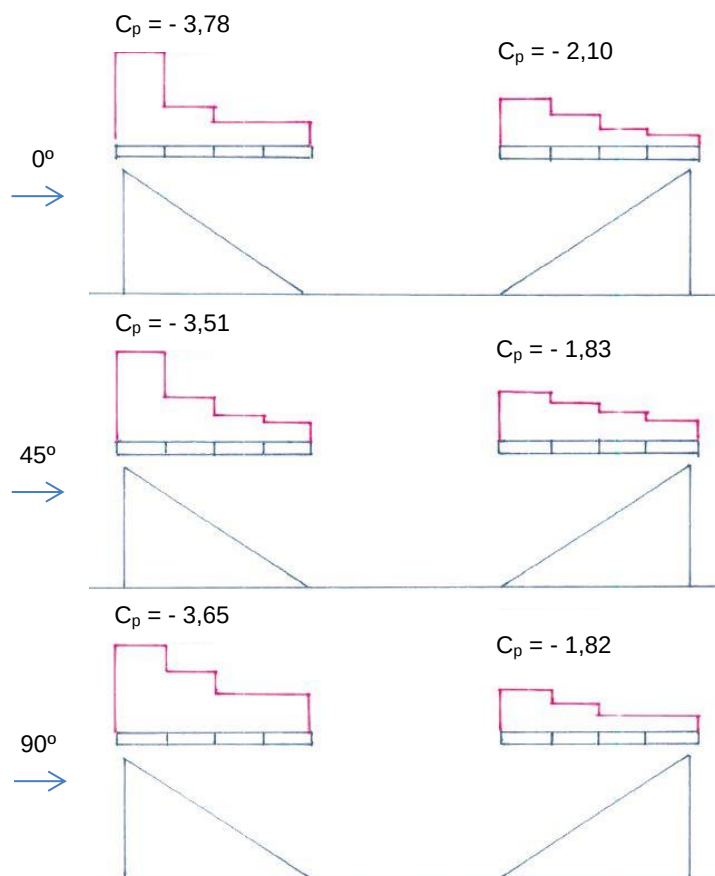
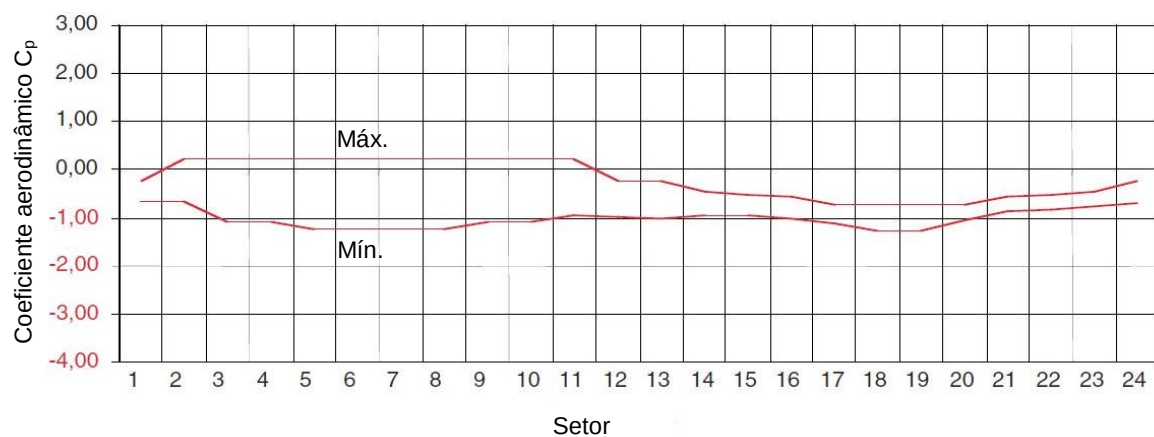
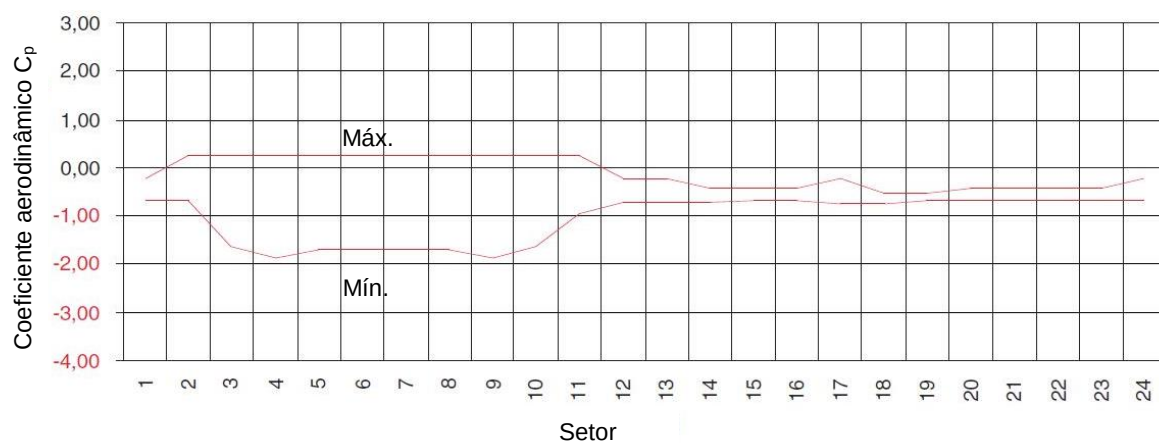
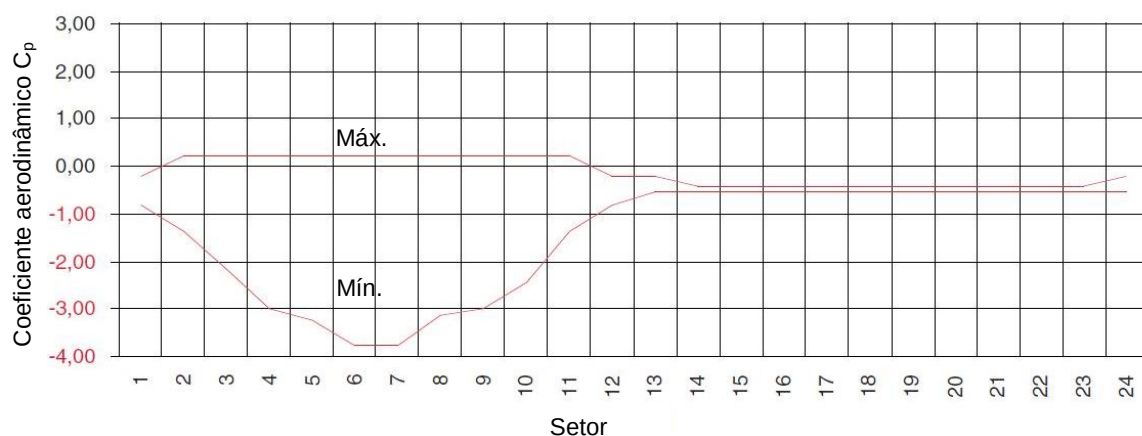


Figura 4.32 – Esquema de distribuição de valores extremos de C_p nas secções dos estádios



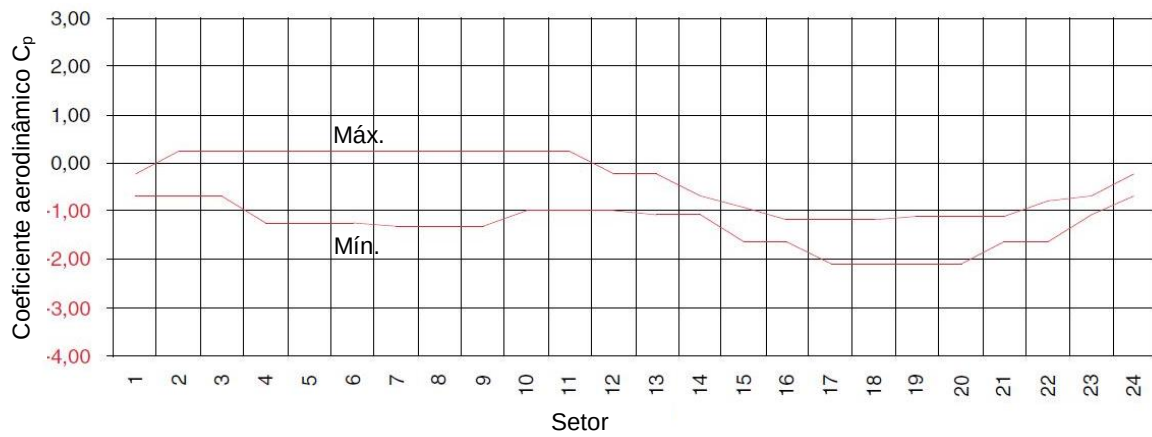


Figura 4.36 – Curvas envolventes para valores máximos e mínimos de C_p , vento de 0° , anel *d*

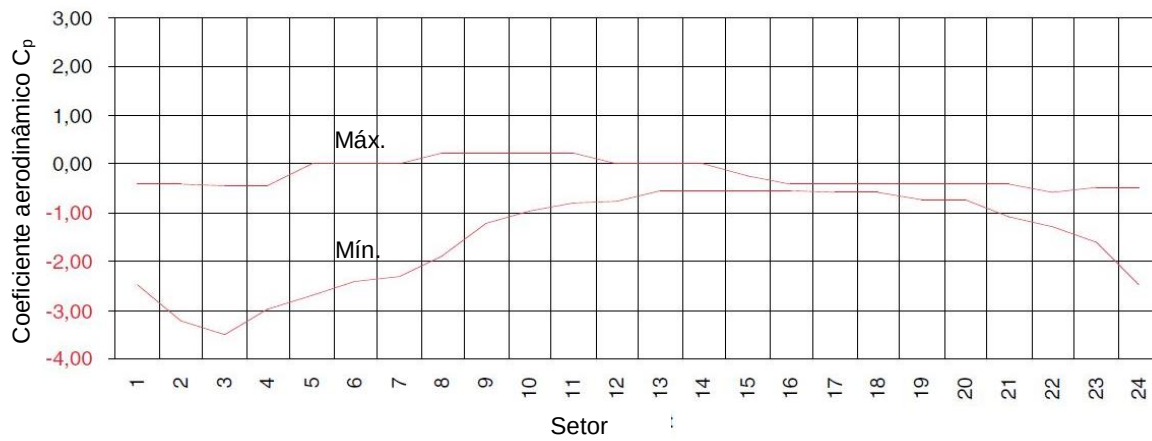


Figura 4.37 – Curvas envolventes para valores máximos e mínimos de C_p , vento de 45° , anel *a*

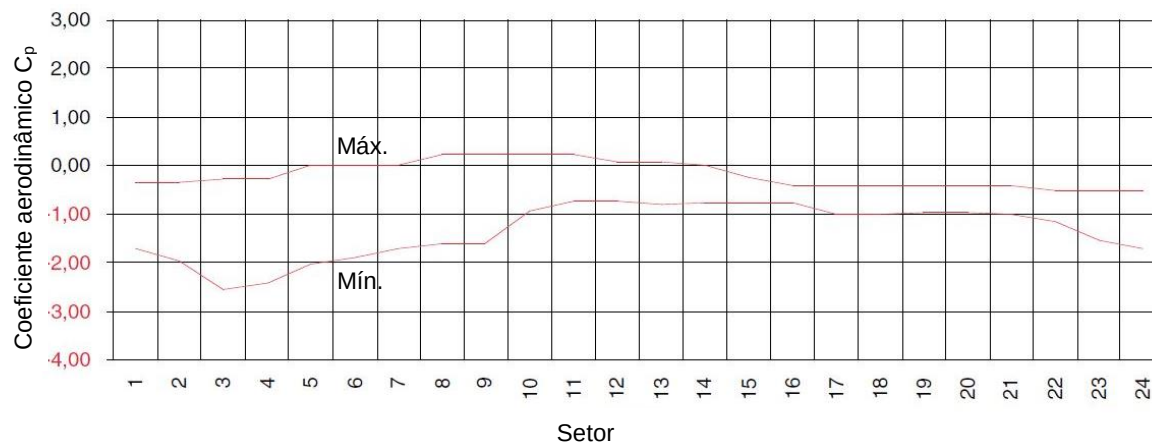
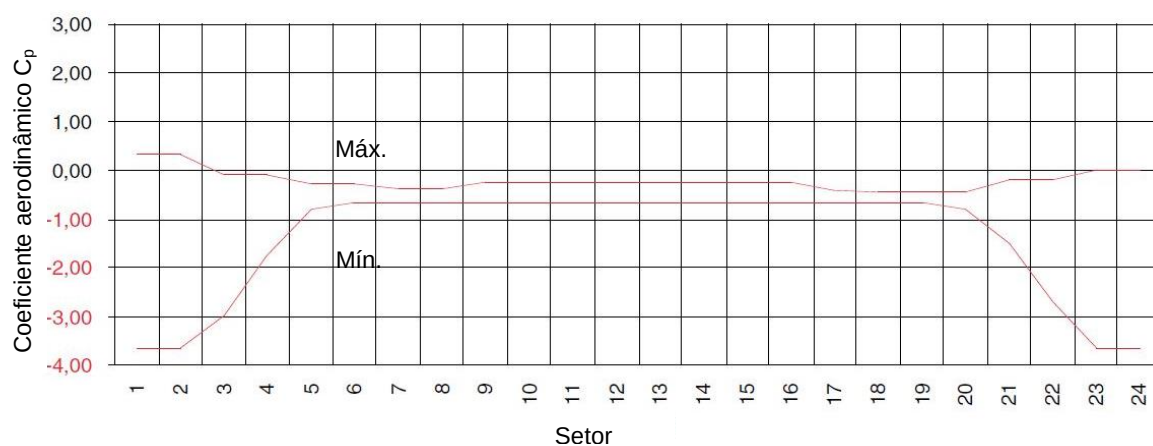
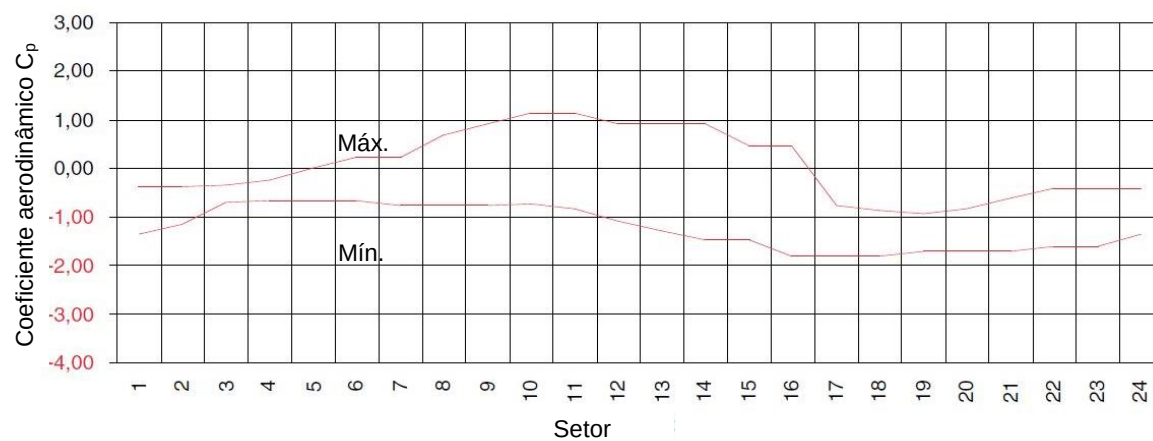
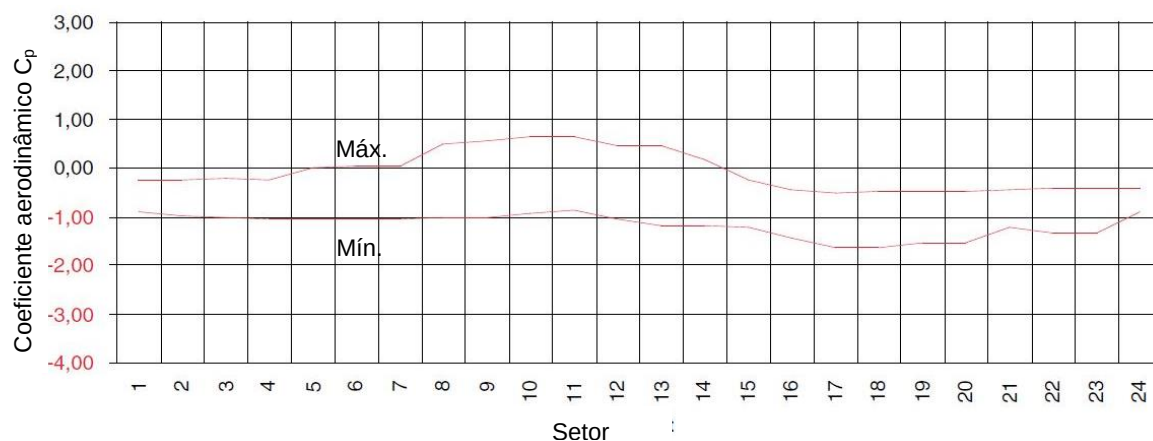


Figura 4.38 – Curvas envolventes para valores máximos e mínimos de C_p , vento de 45° , anel *b*



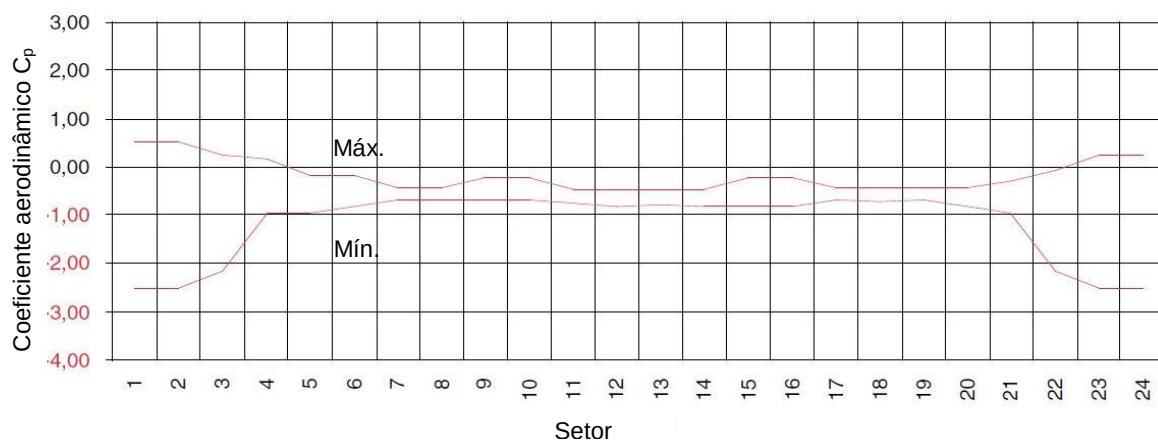


Figura 4.42 – Curvas envolventes para valores máximos e mínimos de C_p , vento de 90° , anel *b*

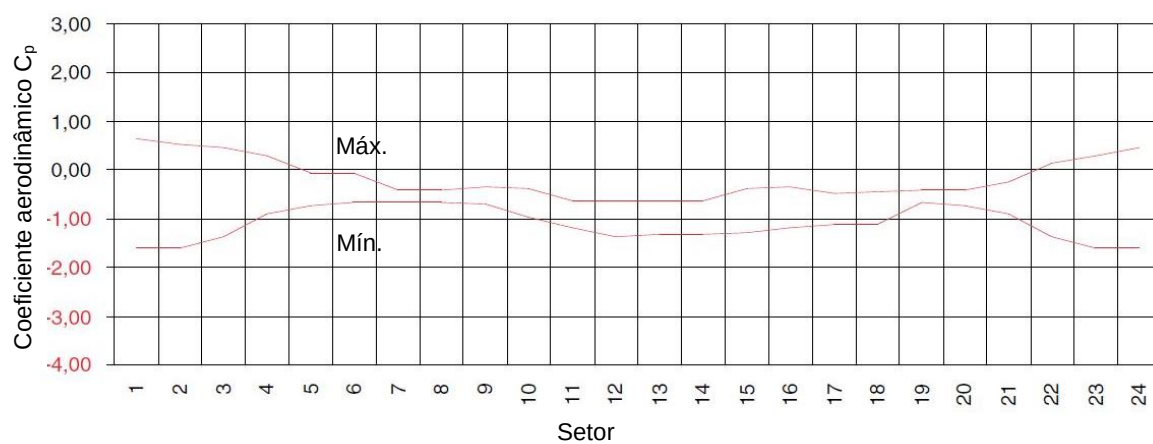


Figura 4.43 – Curvas envolventes para valores máximos e mínimos de C_p , vento de 90° , anel *c*

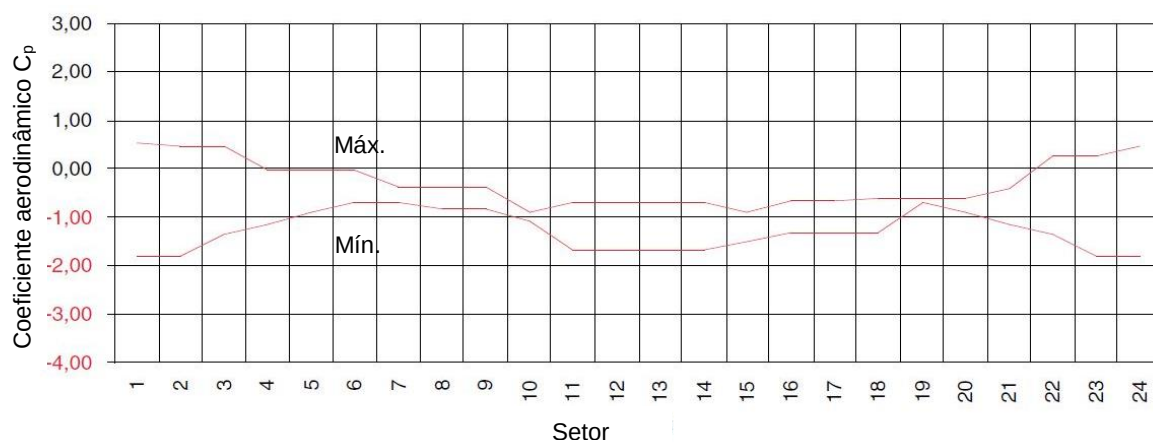


Figura 4.44 – Curvas envolventes para valores máximos e mínimos de C_p , vento de 90° , anel *d*

4.3.5.3. Coberturas de forma irregular

Os valores de C_p em estruturas que exibem uma forma irregular são obtidos com recurso a ensaios de túnel de vento ou, mais recentemente, com recurso a técnicas computacionais, destacando-se a dinâmica computacional de fluidos (*CFD*). Remete-se para os estudos de Zhou *et al.* (2013) sobre o efeito do vento numa estrutura em membrana com forma irregular na Expo de Boulevard, em Shanghai.

As técnicas da dinâmica computacional de fluidos (*CFD - Computational Fluid Dynamics*)(Anderson 1995), aplicadas à engenharia do vento, têm tido um franco desenvolvimento, por forma a simular adequadamente o escoamento do vento em torno de edifícios. Este escoamento complexo envolve uma larga gama de escalas de turbulência, desde grandes turbilhões da turbulência atmosférica, até escalas mais pequenas originadas pelo escoamento em torno de obstáculos (Holmes 2001).

Com efeito, as técnicas de *CFD* permitem estimar as pressões médias nas estruturas imersas no escoamento com razoável precisão, apesar de não serem tão eficazes na determinação das pressões flutuantes e de pico (Holmes 2001). A determinação mais eficaz das pressões flutuantes exige a inclusão de modelos de turbulência sofisticados nas equações do escoamento do fluido. Ainda assim, as atuais técnicas de *CFD* são capazes de fornecer informações úteis acerca do escoamento do vento em torno de estruturas de formas variadas, com base em considerações atmosféricas.

Consequentemente, o fluido contínuo é tratado de forma discreta num determinado domínio espacial, realizado com base numa malha de elementos finitos de volume, ou uma grelha, sendo posteriormente aplicado um algoritmo adequado com vista à sua caracterização, baseado nas equações de movimento de *Navier-Stokes*. Estas equações permitem a simulação de escoamentos laminares e turbulentos, recorrendo, estes últimos, a modelos de turbulência, dos quais se destacam as formulações de *LES (Large Eddy Simulation)* e de *RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes)*. A formulação de *RANS* baseia-se no modelo *k-ε* ou *RSM (Reynold Stress model)*.

A aplicação destas técnicas a estruturas de membrana é relativamente escassa, apesar de existirem alguns estudos (Zhou *et al.* 2013), sendo normalmente integrada num estudo conjunto da ação do vento e da resposta da estrutura (Glück *et al.* 2003; Haug *et al.* 2009; Xu *et al.* 2009). Dado que estas estruturas são suscetíveis a fenómenos aeroelásticos, devido ao seu comportamento não-linear, são realizados outros estudos envolvendo a interação significativa fluido-estrutura (*FSI - Fluid Structure Interaction*), em que o fluido é modelado com recurso às técnicas de *CFD* e a estrutura com recurso a técnicas de cálculo estrutural não-linear.

A interação fluido-estrutura (*FSI*) compreende o estudo simultâneo do comportamento do escoamento do vento e do comportamento da estrutura imersa nesse escoamento (Bungartz e Schäfer 2006; Bazilevs *et al.* 2012). Para o efeito, a maioria dos algoritmos de *FSI* inclui um “motor” de cálculo estrutural de elementos finitos e um “motor” de cálculo de *CFD*. Atualmente, esses algoritmos baseiam-se numa abordagem monolítica ou particionada (Wüchner *et al.* 2007; Kalro e Tezduyar 2000; Bletzinger *et al.* 2006; Glück *et al.* 2001; Wüchner *et al.* 2006; Wu *et al.* 2008). Na abordagem monolítica, as equações que regem o escoamento e o deslocamento da estrutura são resolvidas simultaneamente com um “motor” de cálculo único, ao contrário da abordagem particionada, em que as equações são resolvidas em “motores” de cálculo separados.

O estudo da interação fluido-estrutura, aplicado a problemas de engenharia civil, motivou a crescente oferta de ferramentas disponíveis no mercado, tais como, *Ansys FSI Fluent*, *Ansys FSI CFX*, *ADINA FSI*, *FSI coLyX*, *CONSOL FSI*, *MpCCI* e *NOGRID FSI*.

Os estudos de *FSI* em estruturas de membrana permitem, por um lado, verificar a estabilidade, averiguando a possibilidade de ocorrerem instabilidades aeroelásticas (Michalski *et al.* 2011; Michalski *et al.* 2009; Zhou *et al.* 2013), e, por outro, otimizar a forma destas estruturas, em particular quando são mais suscetíveis à ação do vento, tais como, velas de barcos (Lombardi *et al.* 2012) ou paraquedas (Takizawa *et al.* 2013; Takizawa, Fritze, *et al.* 2012; Takizawa, Spielman, *et al.* 2012).

4.4. CARACTERIZAÇÃO EXPERIMENTAL DA AÇÃO E EFEITOS DO VENTO

4.4.1. ESCALA REDUZIDA - TÚNEL DE VENTO

O ensaio em túnel de vento permite aceder a coeficientes de pressão localmente e melhorar a caracterização da ação do vento de dimensionamento (Borri *et al.* 1992; Biagini *et al.* 2007; Biagini *et al.* 2006). Ao mesmo tempo, este ensaio permite avaliar a ocorrência de instabilidades aerodinâmicas e tem sido utilizado no sentido de aceder aos efeitos do vento em estruturas de cobertura de grandes vãos (Yasui *et al.* 1999; Suzuki *et al.* 1997). Existem túneis de vento que permitem recriar escoamentos uniformes e turbulentos, sendo os uniformes mais utilizados na aeronáutica, embora tenham sido utilizados para avaliar o comportamento de coberturas arqueadas no passado. Uma característica essencial dos túneis de vento é gerar um escoamento turbulento que reproduza as características do vento natural à escala reduzida.

No entanto, a caracterização experimental dinâmica da interação fluido-membrana é complexa (Matthews *et al.* 2008), dada a dificuldade em aplicar as condições de contorno da estrutura, nomeadamente um bordo de ataque, sem se perturbar o fluxo de ar na vizinhança, bem como a aplicação da própria instrumentação do modelo sem interferir com a flexibilidade da superfície.

A simulação do escoamento do vento ocorre à escala reduzida, por razões económicas e de conveniência. A escala do problema levanta questões associadas à teoria de semelhança, resultando na determinação de um conjunto de números dimensionais, quer para o escoamento, quer para o modelo físico. Para o aprofundamento destas questões remete-se para Simiu e Scanlan (1996) e Holmes (2001).

4.4.1.1. Metodologia de ensaio vs Modelo físico

A maioria dos ensaios é realizada com modelos rígidos, dado que as deformações à escala real não atingem níveis excessivos ao ponto de influenciar o fluxo de ar em torno da superfície. Caso contrário, seria necessário um modelo aeroelástico, de forma a atender à deformabilidade da estrutura, captando as mudanças na distribuição das pressões que resultariam da interação fluxo-estrutura. Contudo, os modelos rígidos são geralmente a única opção.

Os modelos aeroelásticos são mais complexos (Vickery e Majowiecki 1992; Li *et al.* 2009) em termos de construção, dado que permitem incorporar a deformação do modelo. Porém, estes modelos permitem captar efeitos dinâmicos, também complexos (Scanlan 1997), tais como fenómenos de *galloping* e de *flutter*.

4.4.1.2. Meios experimentais

O túnel de vento é composto por uma câmara de ensaio que pode ter dimensões muito variadas, desde escassos metros a dezenas de metros. A classificação dos túneis de vento com base na velocidade permite distinguir os de baixa velocidade ($<100\text{m/s}$), em que a compressibilidade do ar pode ser

desprezada, e os de alta velocidade, em que o escoamento se dá em regime compressível e com velocidades que podem ascender a velocidade do som. Estes últimos são mais utilizados na engenharia aeronáutica.

A instrumentação utilizada para medição da velocidade do vento dentro de um túnel de vento baseia-se em anemómetros de fio quente ou, mais recentemente, de laser. As pressões induzidas pelo vento são medidas por presas (tomadas) de pressão distribuídas pela envolvente do modelo, ou por captadores piezo-resistivos multi-vias compactos. As forças aerodinâmicas são medidas por intermédio da metodologia de “pesagem” aerodinâmica, que consiste em determinar as forças e os momentos, através de balanças dinamométricas, constituídas por barras dinamométricas (Diana *et al.* 2009). A instrumentação do modelo permite captar a resposta dinâmica do modelo, sendo realizada com um conjunto de extensómetros e acelerómetros de massa muito baixa. O recurso a sensores de deslocamento sem contacto também é frequente, por exemplo, a triangulação laser.

4.4.2. ESCALA REAL - PROTÓTIPO

O estudo dos efeitos do vento à escala real é geralmente realizado depois da conclusão da estrutura, permitindo aceder à ação do vento e à resposta estrutural de uma forma mais realista (Martins *et al.* 2014). No entanto, em estruturas de pequena / média dimensão de elevada complexidade pode eventualmente justificar-se o seu estudo num modelo à escala real (Michalski *et al.* 2011).

As medições anemométricas permitem conhecer o vento médio de referência e as características espaço-temporais da turbulência no local de implantação da estrutura. O objetivo final é estabelecer um modelo de vento que será utilizado nos modelos numéricos de cálculo estrutural e nas simulações em túnel de vento. Por sua vez, as medições da resposta estrutural permitem comparar o comportamento dinâmico real com as previsões realizadas na fase de conceção, por intermédio de parâmetros modais, tais como frequências naturais, configurações modais e amortecimentos.

4.4.2.1. Caracterização da ação do vento

A caracterização do vento é levada a cabo por intermédio de anemómetros de copos, associados a um cata-vento por forma a medir a direção do vento, de anemómetros de hélice e de anemómetros sónicos. Atualmente, são os anemómetros sónicos que apresentam melhores resultados. Outro tipo de sistema é o dispositivo acústico *SODAR* (Caetano e Cunha 2011) que tem a vantagem de medir as características do vento em altitudes inacessíveis aos aparelhos referidos anteriormente.

4.4.2.2. Monitorização estrutural aerodinâmica

Atualmente, há um crescente interesse em acompanhar o comportamento de estruturas importantes, não só pelo facto de estarem a atingir a idade crítica, mas também para validar o desempenho de novas estruturas, com altos níveis de complexidade, devido à forma e aos materiais utilizados.

A complexidade dos fenómenos aerodinâmicos exige o uso de metodologias de processamento arrojadas, separando e identificando claramente os efeitos presentes no comportamento da estrutura.

A monitorização estrutural aerodinâmica é relativamente recente. Ao nível de coberturas de estádios com membranas estruturais é de referir o estudo de Kim *et al.* (2011) sobre o estádio de Seogwipo na Coreia do Sul (ver a Figura 4.45 (a)). Ao nível de coberturas constituídas por cabos, ou por outros elementos é de referir estudos de Caetano, Martins, *et al.* (2013) e Letchford *et al.* (2002). Em

estruturas de membrana de pequena / média dimensão destacam-se os estudos de Michalski *et al.* (2011) sobre uma estrutura cônica invertida de 29 metros, conversível, com vista à sua replicação em múltiplas coberturas de sombreamento numa praça em Medina, na Arábia Saudita (ver a Figura 4.45 (b)).

Complementarmente, a realização de ensaios dinâmicos permite, por um lado, aceder a fenómenos aerodinâmicos, por intermédio das amplitudes da resposta, e, por outro, estimar parâmetros modais por forma a caracterizar o comportamento estrutural. Deste modo, a finalidade destes ensaios passa por verificar os níveis da resposta estrutural, nomeadamente em termos dos deslocamentos e das acelerações, e a conformidade destes com os previstos na fase de projeto. Esta comparação conduz à melhor compreensão do funcionamento estrutural e permite definir as margens de segurança. Por outro lado, as campanhas sistemáticas permitem aceder à modificação dos parâmetros modais com o tempo, devido à degradação da estrutura, permitindo aceder ao estado da estrutura nomeadamente em termos de acumulação de dano (Magalhães 2010).

A medição de vibrações está na base dos ensaios dinâmicos, sendo usualmente utilizados dispositivos acelerométricos. Porém, nestes ensaios também podem ser utilizados geofones, extensómetros, *LVDT's*, dispositivos de medição laser e dispositivos *GPS*, ou de gravação de imagem digital (Bastos 2015).



(a)



(b)



Figura 4.45 – Monitorização de estruturas de cobertura em membrana tensa: (a) Estádio de Seogwipo (Ojakgyoo 2001), Coreia do Sul e (b) Múltiplas coberturas de sombreamento na praça de Medina (Architect 2010), Arábia Saudita

4.5. MODELAÇÃO AEROELÁSTICA DA COMPONENTE TURBULENTA DO VENTO

4.5.1. GERAL

As estruturas de cobertura formadas por cabos e membranas são caracterizadas pelo seu comportamento não-linear geométrico. Este comportamento depende da rigidez da estrutura e geralmente contribui para que a resposta dinâmica da estrutura à ação turbulenta do vento seja mais importante nestas estruturas do que em outras convencionais, de betão ou aço (Wei *et al.* 2011; Lazzari *et al.* 2009; Sygulski 1997). A rigidez é função da curvatura da superfície, da secção dos cabos, do nível de pré-esforço e da rigidez dos bordos e da estrutura de suporte. Dado que a rigidez tende a aumentar com o aumento dos deslocamentos, desde que os cabos e a membrana se mantenham tracionados, a utilização de métodos de análise linear tende a sobrestimar os deslocamentos e as forças. Por esta razão são utilizados métodos de análise não-linear.

A resposta à ação do vento de estruturas de cobertura é dividida em duas partes. Na primeira parte, é determinada a resposta não-linear estática, considerando apenas a velocidade média do vento. Na segunda parte, é determinada a resposta dinâmica máxima à ação da componente turbulenta da velocidade do vento. Em estruturas de cobertura que exibem um comportamento aproximadamente linear, a resposta dinâmica é realizada no domínio da frequência. No entanto, em estruturas de cobertura que exibem um comportamento não-linear geométrico acentuado, a resposta dinâmica terá de ser realizada no domínio do tempo.

Em estruturas lineares podem ser obtidas estimativas razoáveis da resposta à ação turbulenta do vento através de uma abordagem estocástica, em que as características estatísticas da resposta são determinadas em termos das propriedades estatísticas do vento. Esta análise é realizada no domínio da frequência e é a mais comum na prática de projeto (Buchholdt 1999).

No entanto, em estruturas não-lineares cujas características estruturais variam com a amplitude da resposta e consequentemente com o tempo, a estimativa da resposta à ação turbulenta do vento é mais confiável através de uma abordagem determinística, em que as propriedades estruturais são atualizadas ao fim de cada passo temporal. Para esta abordagem é necessário gerar séries temporais da velocidade do vento, com base em funções de densidade espectral de potência das flutuações da velocidade do vento. Existem essencialmente dois métodos para gerar séries do vento, por sobreposição de ondas harmónicas e por filtragem de sequências de ruído branco.

4.5.2. MODELO AEROELÁSTICO SIMPLIFICADO

As estruturas de cabos e membranas tensas são amplamente utilizadas em estruturas tensas com grandes vãos. Dado o seu reduzido peso e flexibilidade, estas estruturas são suscetíveis à ação do vento. A forma para determinar a resposta aeroestática e aerodinâmica destas estruturas sob a ação do vento é uma questão relevante, e geralmente um problema, no âmbito do dimensionamento destas estruturas. Até agora foram realizados vários estudos (Kimoto e Kawamura 1983; Kawamura e Kimoto 1979; Daw e Davenport 1989; Kassem e Novak 1991), apesar do mecanismo de vibração induzida pelo vento nas estruturas de membrana não estar ainda completamente caracterizado.

As principais razões para este mecanismo não estar completamente caracterizado prendem-se, em primeiro lugar, com o facto de a membrana exibir um comportamento altamente não-linear geométrico, implicando um comportamento dinâmico diferente de outras estruturas tais como pontes e edifícios altos, pelo que os métodos tradicionais de análise das vibrações no domínio da frequência não podem ser aplicados diretamente. Em segundo lugar, pelo facto de a membrana ser caracterizada por reduzida rigidez, conduzindo consequentemente a vibrações elevadas na membrana sob a

excitação do vento. As grandes vibrações da membrana podem alterar o fluxo em torno da membrana consideravelmente, pelo que a interação vento-estrutura ou os efeitos aeroelásticos não podem ser ignorados.

Para resolver o problema descrito anteriormente pode ser utilizado um modelo aeroelástico simplificado baseado na análise teórica e em ensaios de túnel de vento. A resposta dinâmica das estruturas sob a ação do vento pode ser obtida através da equação do movimento traduzida por

$$M_s \ddot{u}(t) + C_s \dot{u}(t) + K_s u(t) = F(t, \ddot{u}(t), \dot{u}(t), u(t)) \quad (4.14)$$

em que M_s , C_s e K_s são, respetivamente, as matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez da estrutura, F caracteriza a ação do vento em função do tempo e do movimento da estrutura, e u , $\dot{u}$ e $\ddot{u}$ são, respetivamente, os vetores dos deslocamentos, das velocidades e das acelerações nodais. Isto significa que a força do vento num fluxo de vento turbulento genérico no instante de tempo t depende do efeito conjunto das forças induzidas pelo vento na superfície da estrutura e dos efeitos do movimento da estrutura.

Suponha-se, em primeiro lugar, que o movimento da estrutura não altera significativamente o fluxo do vento, ou seja, que as forças aerodinâmicas numa estrutura em movimento são as mesmas daquelas que resultariam numa estrutura no estado estacionário de idêntica geometria. Na maioria dos casos, a consideração destas forças aerodinâmicas pseudoestáticas conduzem a boas aproximações (Sun *et al.* 2008).

Para além da simplificação pseudoestática, a hipótese de forte correlação também assume grande importância neste contexto, em que, a resposta estrutural é maioritariamente causada pela componente turbulenta da força aerodinâmica cujas frequências naturais são próximas da resposta estrutural no domínio da frequência.

Com efeito, tendo por base as duas simplificações descritas anteriormente, a equação do movimento (4.14) pode ser desacoplada em 4 partes, captando os efeitos de t , u , $\dot{u}$ e $\ddot{u}$, deduzindo-se a equação do modelo aeroelástico simplificado que vem traduzida por

$$(M_s + M_a) \ddot{u}(t) + (C_s + C_a) \dot{u}(t) + (K_s + K_a) u(t) = F(t) \quad (4.15)$$

em que M_a é a matriz de massa adicional, representando a massa de ar deslocada pelo movimento da estrutura, C_a é a matriz de amortecimento aerodinâmico, representando a troca de energia entre a pressão externa e o movimento estrutural, cujo valor negativo pode conduzir a instabilidades aerodinâmicas, e, por fim, K_a é a matriz de rigidez aerodinâmica, representando a compressibilidade do ar no espaço interior da estrutura em consequência da deformabilidade da estrutura de membrana, assumindo maior importância em estruturas pneumáticas e sendo ignorada nas restantes estruturas de membrana, que geralmente são abertas e permitem a livre circulação do fluxo de ar (ver a Figura 4.46).

4.5.2.1. Massa aerodinâmica

Na mecânica dos fluidos, a massa adicional ou massa virtual é a inércia adicionada ao sistema, uma vez que o aumento ou a diminuição da aceleração do corpo faz com que o fluido se mova em torno do corpo de tal modo que o objeto se pode mover através dele, e o corpo e o fluido não podem ocupar simultaneamente este espaço físico. As estruturas leves, tais como estruturas de membrana, quando vibram num certo tipo de fluidos, parte do fluido circundante é invocado e vibra em conjunto com as

estruturas. Assim, a massa adicionada tem uma influência significativa sobre a vibração das estruturas de membrana (Zhou *et al.* 2014; Zhou *et al.* 2012).

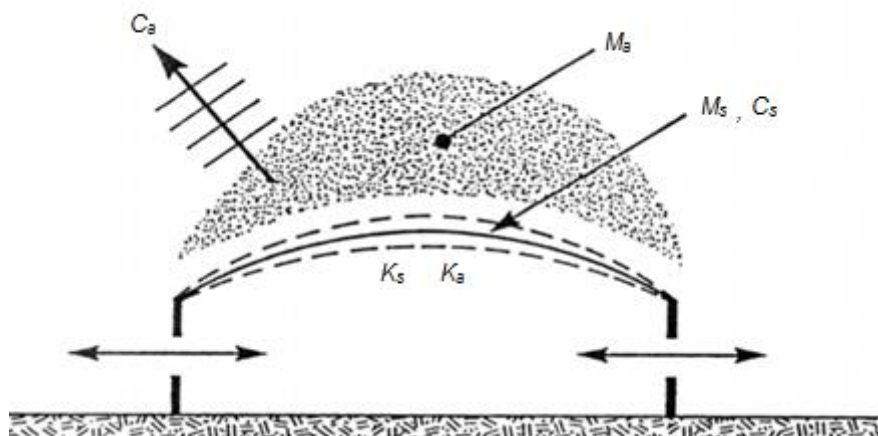


Figura 4.46 – Termos aerodinâmicos adicionais do modelo aeroelástico simplificado, adaptado de Sun *et al.* (2008)

Até à atualidade, o estudo da ação do fluido e da massa adicional em placas apoiadas foi realizado com base na teoria de asas esbeltas (Jones 1946), de propagação de ondas instáveis (Miles 1956; Dugundji *et al.* 1963, 1962) e da aerodinâmica linear bidimensional (Kornecki *et al.* 1976) ou tridimensional (Lucey e Carpenter 1993). Yadykin *et al.* (2003) sistematizaram as diversas formulações da ação do fluido e aplicaram a teoria do escoamento sobre aerofólios finos num estudo numérico das propriedades fundamentais da massa adicional de uma placa flexível em oscilação num fluido, concluindo que a massa decresce com o aumento dos modos de vibração.

Contudo, o estudo da massa adicional ao nível de membranas tensas é ainda limitado, existindo atualmente alguns métodos de simulação numérica. Irwin e Wardlaw (1979) apresentaram uma fórmula empírica para estimar a massa adicional para a cobertura em membrana tensa do Estádio Olímpico de Montreal com base numa massa de ar esférica acima da membrana traduzida por $m_a = 0,282 \rho_{ar} A^{-0,5}$ (Chen *et al.* 2015), em que A é a área da membrana.

Sygulski (1993) apresentou um método para a resolução dos problemas de vibração livre e de vibração harmónica forçada associados às estruturas pneumáticas. Foi utilizado o método dos elementos finitos para a modelação da estrutura, considerando elementos finitos triangulares de 6 nós, tendo realizado posteriormente estudos com mais pontos de integração (Sygulski 1995), e o método dos elementos de contorno (BEM – Boundary Element Method) para a modelação do ar, considerando o ar compressível e invíscido. A vantagem da utilização das técnicas de integração de contorno reside no facto de se evitar a aplicação explícita da condição de radiação através da utilização da função de Green, sem o aumento da dimensão do problema. Esta formulação conduz a matrizes aerodinâmicas dependentes da frequência não-simétricas e completamente preenchidas. Dos exemplos numéricos apresentados, com diversas geometrias e considerando a influência do ar, foi possível destacar no geral que: o efeito do ar em torno da estrutura reflete-se na diminuição significativa das frequências naturais da estrutura, sendo essa diminuição menor para frequências mais elevadas; em relação ao efeito da compressibilidade do ar, isto é, à medida que o ar varia de compressível para incompressível, verifica-se que conduz a um ligeiro aumento das frequências naturais da estrutura, sendo que os modos

simétricos são mais suscetíveis a essa diferença do que os modos antissimétricos. Mais tarde, Sygulski (1994) apresenta outro estudo numérico, muito semelhante ao descrito anteriormente, mas para estruturas de membrana tensa abertas, apresentando conclusões idênticas: o efeito do ar em torno da estrutura reflete-se na diminuição significativa das frequências naturais da estrutura em cerca de três vezes, sendo essa diminuição menor para frequências mais elevadas. Adicionalmente às conclusões do autor, é de referir que essa redução significativa das frequências da membrana é claramente importante no contexto da interação fluido-membrana, tendo em conta que a membrana passou a ser caracterizada com frequências naturais mais baixas e próximas da gama de frequências em que a energia de excitação do vento é elevada, entre 0,5 e 1,5Hz, potenciando a referida interação.

Minami (1998) estudou a massa adicional de uma membrana plana apoiada nas suas extremidades num fluido incompressível, com base na teoria dos aerofólios finos em que a membrana é analisada como uma folha de vorticidade *vortex sheet*, sendo por isso substituída por uma distribuição de vorticidade (ver a Figura 4.47 (a)). A membrana vibra continuamente no modo fundamental no espaço bidimensional, e o deslocamento é traduzido por (Minami 1998)

$$h(x, t) = a \sin(kx) \cos(\omega t), \quad 0 \leq x \leq l \quad (4.16)$$

em que x é a coordenada na corda da secção, ω é a frequência circular, t é o instante de tempo, a é a amplitude e $k = \pi/l$ é o número de onda.

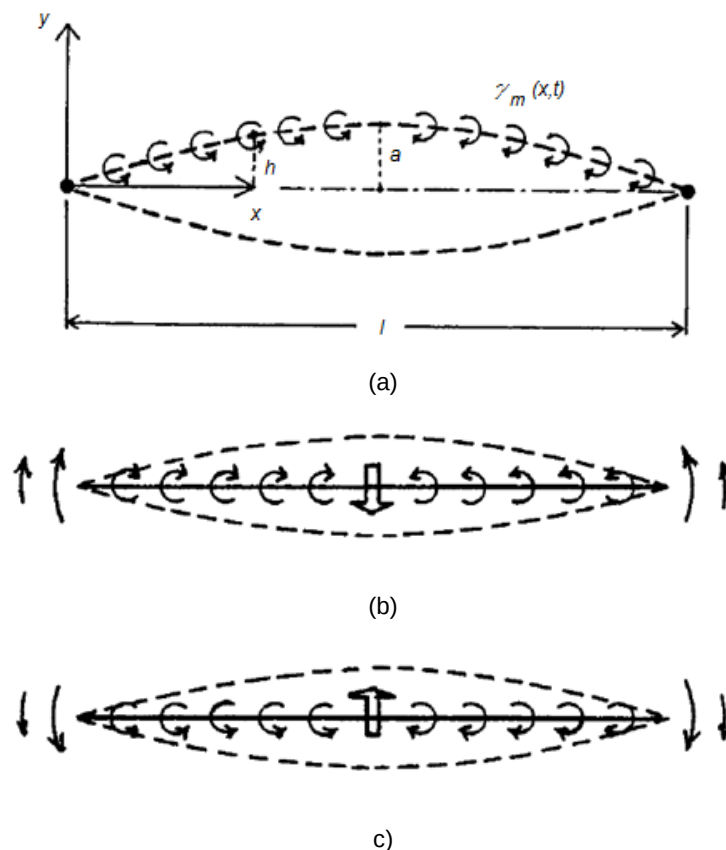


Figura 4.47 – Modelação analítica da membrana como uma folha de vorticidade, adaptado de Minami (1998): (a) Definição do sistema de coordenadas e da intensidade da vorticidade $\gamma_m(x,t)$ para o modo de vibração fundamental da membrana plana e (b) e (c) Padrão do escoamento em torno das terminações da membrana em vibração

A Figura 4.47 (b) apresenta o padrão do fluxo do ar em torno da membrana quando esta se move de uma posição superior extrema até uma posição inferior, correspondendo à primeira metade do período de vibração de deslocamento finito. É de notar que o fluxo de ar de uma face da membrana para a face oposta é realizado por intermédio das extremidades da membrana, tal que o ar proveniente de uma das extremidades é compensado pelo ar da extremidade oposta, resultando num padrão e fluxo de ar simétrico em relação ao meio vão da corda, o que só é possível devido à consideração de ar incompressível. A segunda metade do movimento é caracterizada por um comportamento oposto (ver a Figura 4.47 (c)). De acordo com este estudo, o coeficiente de massa adicional é traduzido por (Minami 1998)

$$\alpha_m = \frac{H/l}{m/\rho l} = \frac{0,68}{m/\rho l}, \quad 0 \leq x \leq l \quad (4.17)$$

em que H é a altura da massa de ar uniformemente distribuída ao longo da membrana, m é a massa da membrana e ρ é a massa volúmica do ar. Deste modo, conclui-se que a massa adicional é equivalente à massa de ar uniformemente distribuída ao longo da membrana com uma altura estimada de 68% do comprimento da membrana, não dependendo, portanto, da frequência de vibração e da respetiva amplitude.

Apesar de terem sido desenvolvidas várias teorias no contexto da massa adicional de estruturas flexíveis, foram realizadas poucas experiências no sentido de confirmar o valor da massa adicional e da sua distribuição ao longo da membrana. Neste contexto, Sewall *et al.* (1983) investigou experimentalmente a vibração de uma membrana com três bordos, de acordo com a Figura 4.48 (a), para efeitos de aplicação em superfícies refletoras de antenas espaciais.

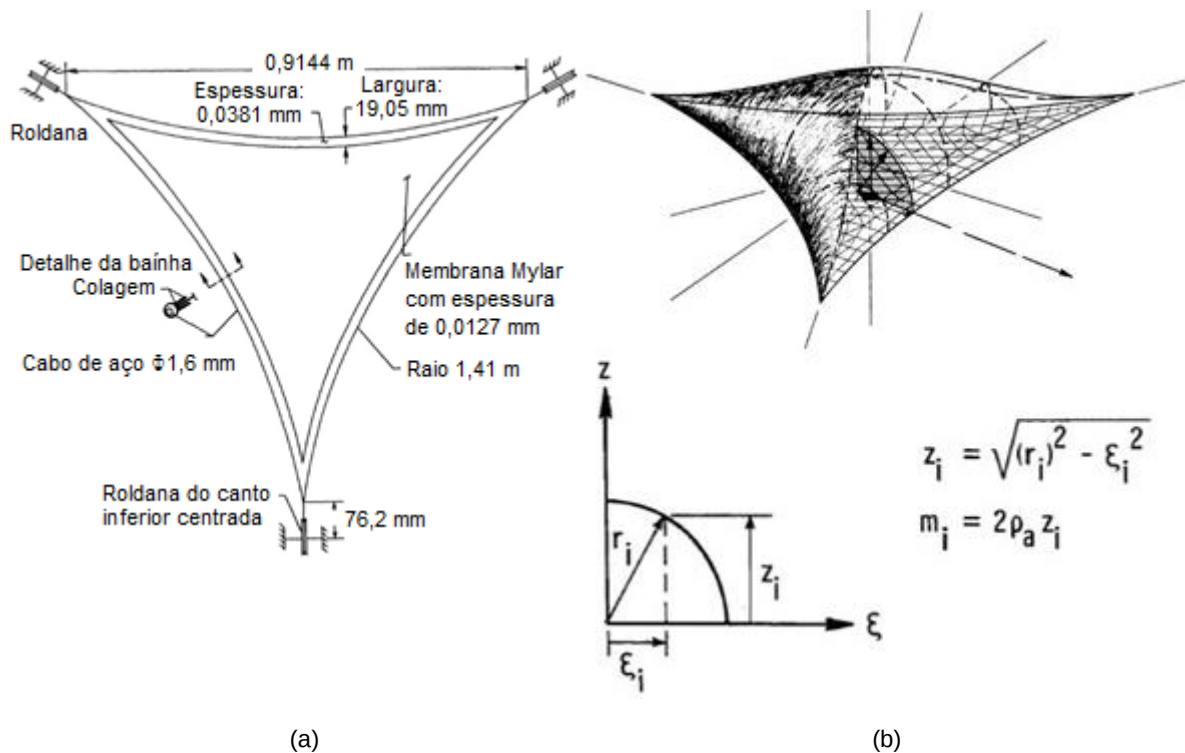


Figura 4.48 – Modelo de membrana triangular de Sewall *et al.* (1983): (a) Modelo físico e (b) Massa de ar envolvente em membranas triangulares

A distribuição da massa de ar em torno da membrana triangular é representada na Figura 4.48 (b). Os ensaios levados a cabo incidiram sobre a vibração da membrana sujeita a várias pressões de ar até aproximadamente ao vácuo, e para vários níveis de pré-esforço dos cabos de bordo, verificando-se um aumento das frequências naturais e das amplitudes correspondentes, apesar das quatro primeiras configurações modais não se alterarem significativamente.

Li *et al.* (2011) ensaiaram a vibração de uma membrana circular plana sob vento constante fazendo variar as pressões do ar, e propuseram consequentemente um modelo de massa adicional simplificado com base nos modos de vibração. Neste modelo, atendendo que os modos de vibração determinam a massa adicional e a massa adicional também influencia os modos de vibração, é necessário recorrer a um processo iterativo visando a determinação da massa adicional. A massa adicional acima de cada região de vibração para qualquer modo de vibração, onde as regiões de vibração são caracterizadas pelas partes da membrana separadas por pontos nodais ou linhas nodais, é traduzida por (Li *et al.* 2011)

$$m_a = \alpha_m \rho l \quad (4.18)$$

em que α_m é o coeficiente de massa adicional, ρ é a massa volúmica do ar e l é o diâmetro do círculo inscrito da região de vibração correspondente. Deste modo, a massa adicional é conhecida quando o coeficiente de massa adicional é adequadamente apurado. Atendendo que a massa adicional tem uma influência significativa nas frequências naturais da membrana, a massa total adicional pode ser estimada a partir da relação entre a pressão do ar e as frequências naturais, f_b , da membrana. De acordo com a dinâmica de estruturas, a relação entre a frequência fundamental da membrana em vibração com o ar, f_s , e a frequência fundamental da membrana no vácuo, f_t , é dada por (Li *et al.* 2011)

$$\frac{m_a}{m_s} = \left(\frac{f_s}{f_t} \right)^2 - 1 \quad (4.19)$$

em que m_s é a massa da membrana por unidade de área. Manobrando as equações (4.18) e (4.19) o coeficiente de massa adicional é traduzido por

$$\alpha_m = \frac{\left[\left(\frac{f_s}{f_t} \right)^2 - 1 \right] m_s}{\rho l} \quad (4.20)$$

Deste modo, realizando algumas transformações na equação (4.20), a relação entre a massa volúmica de ar e a frequência fundamental, f_b , é traduzida por

$$\frac{1}{f_t^2} = \frac{\alpha_m l}{f_s^2 m_s} \rho + \frac{1}{f_s^2} \quad (4.21)$$

Tendo em conta a equação de estado de um gás ideal, relacionando a massa volúmica e a pressão do ar, é possível obter a frequência fundamental da membrana no vácuo e o coeficiente de massa adicional através de um ajustamento linear da curva traduzida por $1/f_t^2$ e ρ , utilizando o método dos mínimos quadrados.

A massa adicional de cada região de vibração é equivalente à massa de ar distribuída uniformemente com uma altura de $\alpha_m l = 0,65l$, em que α_m é o coeficiente de massa adicional e l é o diâmetro do círculo inscrito da região de vibração correspondente. Apesar da massa adicional ser considerada uniforme ao longo da membrana, Li *et al.* (2011) concluíram que esta massa é superior nas zonas de suporte da membrana. O coeficiente de massa adicional de valor igual a 0,65 foi obtido a partir do

ajustamento, mencionado anteriormente, realizado nos resultados experimentais de uma membrana circular, tendo sido verificado igualmente para os dados experimentais da membrana de três bordos estudado por Sewall *et al.* (1983) descrito anteriormente.

Mais recentemente, Zhou *et al.* (2014) apresentaram dois modelos de massa adicional para membranas planas abertas, um considerando apenas o efeito da forma geométrica da membrana, e outro considerando o efeito conjunto da forma geométrica da membrana e das configurações modais da membrana. A comparação entre os resultados numéricos e experimentais permitiu concluir que o primeiro modelo conduz a resultados razoáveis nos modos de ordem inferior, apresentando um erro crescente com a ordem dos modos de vibração. No entanto, o segundo modelo apresenta maior conformidade com os resultados experimentais para os modos de ordem inferior e superior.

Adicionalmente, Zhou *et al.* (2014) utilizaram o critério de fiabilidade modal (*Modal Assurance Criterion* - MAC) (Allemang 2003; Pastor *et al.* 2012) no sentido de comparar a vibração da membrana no vácuo e no ar. Os valores do MAC indicam que, para membranas apresentando uma massa uniformemente distribuída, existem pequenas diferenças entre as configurações modais da membrana em vibração no vácuo e no ar, enquanto para membranas apresentando uma massa não-uniformemente distribuída, essas diferenças são reduzidas para os primeiros modos de vibração e são significativas para modos de ordem superior.

4.5.2.2. Amortecimento aerodinâmico

O coeficiente de amortecimento total da estrutura sob a ação do vento é igual a $\xi_s + \xi_a$, em que ξ_s é o amortecimento estrutural e ξ_a é o amortecimento aerodinâmico. O coeficiente de amortecimento estrutural nas estruturas de membrana pode variar entre 1% e 10% (Wu 2003), embora no projeto, para a determinação de amplificações dinâmicas, os peritos considerem geralmente coeficientes de amortecimento estrutural entre 1,5% e 3% (Forster e Mollaert 2004), ignorando o amortecimento aerodinâmico. A forma geral do coeficiente de amortecimento aerodinâmico é traduzida por (Wu 2003)

$$\xi_a = (\rho_{ar}/\rho_{estrutura})\chi_a(U^*) \quad (4.22)$$

em que $\rho_{estrutura}$ é a massa volúmica efetiva da estrutura, $U^* = U_0/f_1B$ é a velocidade do vento reduzida, f_1 é a frequência fundamental da estrutura, B representa a dimensão característica da estrutura, χ_a é um coeficiente aerodinâmico que depende da velocidade reduzida, apresentando geralmente um valor constante para valores elevados da velocidade reduzida $U^* (>10m/s)$, sendo determinado com base no coeficiente de pressão média, coeficiente de sustentação ou coeficiente de arrastamento.

No caso de pontes e estruturas altas, o estudo do coeficiente de amortecimento aerodinâmico é mais elaborado. Por exemplo, o coeficiente de amortecimento aerodinâmico numa estrutura de secção uniforme na direção do vento e na direção transversal é traduzido respetivamente por (Wu 2003)

$$\xi_a = \frac{1}{4\pi} \frac{\rho_{ar}}{\rho_{estrutura}} U^* C_D \quad (4.23)$$

e

$$\xi_a = \frac{1}{8\pi} \frac{\rho_{ar}}{\rho_{estrutura}} U^* C_L' \quad (4.24)$$

em que C_D é o coeficiente de arrastamento e C_L' é a derivada do coeficiente de sustentação.

Davenport (1988) apresenta coeficientes de amortecimento aerodinâmicos típicos de estruturas tensas, sistematizados na Tabela 4.7. Primeiramente é de notar que o amortecimento aerodinâmico é muito superior ao amortecimento estrutural, o que se deve principalmente à relação entre a massa de ar e a massa da estrutura, $\rho_{ar} / \rho_{estrutura}$, e à velocidade do vento reduzida respectiva. De seguida, é de notar também que o amortecimento aerodinâmico atua positivamente na redução de amplificações dinâmicas da resposta estrutural, embora, sob certas condições, possa ter um efeito negativo, nomeadamente quando o amortecimento total da estrutura $\xi_s + \xi_a < 0$, conduzindo a um aumento das vibrações e à consequente perda de estabilidade. Sygulski (1996) apresentou um estudo numérico com verificação experimental de uma estrutura pneumática hemisférica sob a ação do vento onde certos modos de vibração induzem um amortecimento aerodinâmico negativo, agravando-se com a velocidade do vento. O mecanismo de instabilidade identificado é caracterizado por um único modo de *flutter*.

A determinação experimental do amortecimento aerodinâmico de sistemas não-lineares é mais complexa do que de sistemas lineares (Wu 2003), devido às não-linearidades do sistema estrutural e das próprias solicitações da estrutura. Consequentemente, a precisão das estimativas do amortecimento da estrutura é afetada. Estas estimativas são obtidas com recurso a procedimentos habituais de determinação do amortecimento de estruturas sujeitas às ações ambientais à escala real. Em sistemas não-lineares pode ocorrer o acoplamento de dois modos de vibração ortogonais com frequências naturais iguais (Kareem e Gurley 1996). A transferência de energia de uma direção do movimento para outra direção, tal como sucede num modo de *beat*, conduz consequentemente a um aumento indireto do amortecimento da estrutura. Esta característica, própria de sistemas não-lineares, pode contribuir positivamente, em fase de projeto, através do aumento do amortecimento em edifícios, desde que os dois modos ortogonais tenham a mesma frequência.

Tabela 4.7 – Coeficiente de amortecimento aerodinâmico de estruturas tensas, adaptado de Wu (2003)

Estrutura	U_0	f_1	B	U^*	$\rho_{ar} / \rho_{est.}$	ξ_a
	[m/s]	[Hz]	[m]			
Ponte	45	0,1	30	15	0,1	0,15
Cobertura suspensa	45	0,3	45	3	0,1	0,15
Cobertura em membrana	45	1	45	1	3	0,3
Edifício alto	45	0,3	45	3	0,01	0,015

4.5.3. ANÁLISE DINÂMICA NO DOMÍNIO DO TEMPO

A resposta dinâmica de uma cobertura à ação turbulenta do vento pode ser obtida por métodos de integração da equação do movimento (Hilber *et al.* 1977; Birnstiel 1972; Papadrakakis 1983; Swaddiwudhipong *et al.* 1989; Stefanou 1992), em que o equilíbrio das forças dinâmicas é estabelecido em cada instante de tempo.

Deste modo, são geradas primeiramente as séries temporais da componente flutuante da velocidade do vento e, de seguida, são determinadas as séries de forças aerodinâmicas que atuam sobre a estrutura. Estas séries são afetadas por uma função de modulação temporal de natureza trapezoidal (ver a Figura 4.49), por forma a suavizar as fases de arranque e cessação da excitação dinâmica do vento, garantindo desta forma a ocorrência de uma fase de atuação da ação de *10min* com carácter estacionário.

Posteriormente, procede-se à obtenção da resposta dinâmica da estrutura ao longo de um intervalo de tempo definido pela ação. A evolução temporal da resposta da estrutura é analisada com base num tratamento estatístico, nomeadamente em termos dos extremos absolutos e desvios-padrão no intervalo de tempo de $T = 600s$, correspondente ao tramo horizontal da função de modulação temporal. Para o efeito, são escolhidos os parâmetros da resposta que se pretendem analisar, tais como deslocamentos, acelerações e momentos, também denominados por variáveis de controlo.

A título de exemplo, apresenta-se na Figura 4.50 a resposta temporal da aceleração vertical a meio vão da laje esbelta para um período de $10min$, resultante da análise quase-estacionária dos efeitos de rajada, adaptada de Ferreira (2011). Na Figura 4.51 apresenta-se o espectro dessa resposta em termos globais, ou seja, com o contributo de todos os modos. Os picos apresentados correspondem ao 1º e 6º modo de vibração da estrutura, evidenciando a sua maior participação modal no parâmetro de controlo considerado.

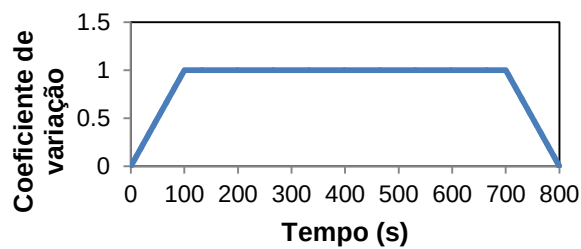


Figura 4.49 – Função de modulação temporal da ação

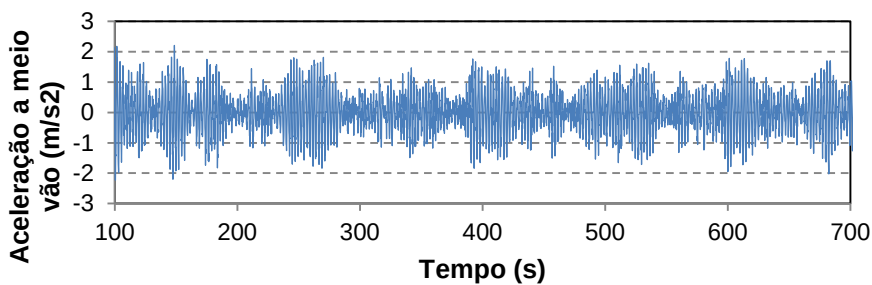


Figura 4.50 – Aceleração a meio vão da laje esbelta

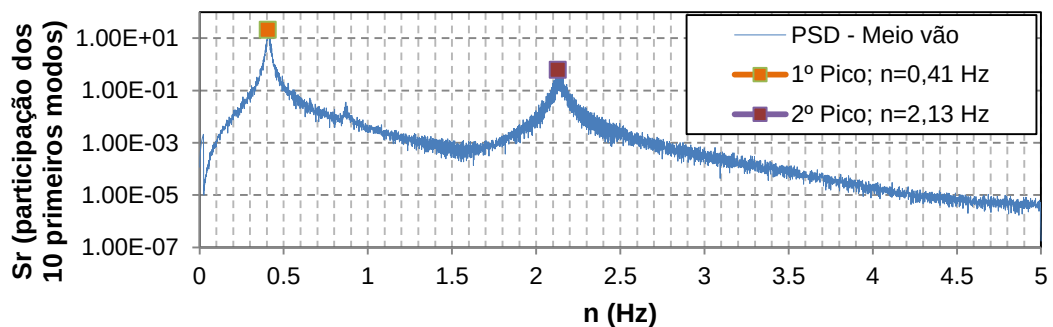


Figura 4.51 – Estimativa espectral da resposta temporal da aceleração a meio vão da laje esbelta com o contributo de todos os modos de vibração

4.5.3.1. Geração de séries temporais artificiais da velocidade do vento

A geração de amostras de processos estocásticos gaussianos, através da sobreposição de harmônicos, é um procedimento no domínio do tempo, e apresenta uma vasta aplicação no domínio da análise dinâmica de estruturas sujeitas a excitações aleatórias (por exemplo na determinação dos efeitos da ação sísmica numa estrutura). Este método é também designado por *WAWS (Weighted Amplitude Wave Superposition)* e consiste na sobreposição de harmônicos com amplitudes do espectro de potência do processo, tendo sido utilizado por diversos autores (Shinozuka 1972; Shinozuka e Jan 1972; Han e Luo 2007; Ubertini e Giuliano 2010; Spanos e Deodatis 2002; Deodatis 1996).

Alternativamente, o método *ARMA (Auto Regressive Moving Average)* também permite gerar amostras de processos estocásticos e baseia-se na filtragem do ruído branco, transformando-o num sinal caracterizado por funções de variância e autocovariância específicas (Kareem 2008; Samaras *et al.* 1985).

Nos últimos anos, os algoritmos de geração de amostras pelo método da representação espectral foram sofrendo algumas alterações de forma a otimizar o tempo de geração. A eficiência computacional é melhorada através da aplicação de transformadas rápidas de Fourier (*FFT*).

O algoritmo utilizado no presente trabalho de geração de séries temporais artificiais da velocidade do vento foi implementado por Bastos (2009) e baseia-se na formulação de Deodatis (1996). Este algoritmo gera amostras de processos estocásticos estacionários unidimensionais e multivariados de acordo com uma matriz de funções de densidade espectral de potência previamente definida. Para o efeito, recorre-se à formulação de geração de processos estocásticos gaussianos unidimensionais (Shinozuka 1972; Shinozuka e Jan 1972) e à utilização de transformadas rápidas de Fourier (*FFT*) com vista ao melhoramento computacional.

Os parâmetros necessários à geração de amostras de séries temporais da velocidade turbulenta do vento pela metodologia implementada por Bastos (2009) são: a geometria espacial dos pontos distribuídos pela estrutura em análise onde são pretendidas as séries; a primeira frequência natural da estrutura; e as propriedades do vento, tais como a velocidade média, a escala de turbulência, o desvio-padrão e os coeficientes de atenuação nas direções das componentes turbulentas u , v e w . Em relação aos parâmetros da amostra, referem-se o período máximo de tempo da amostra T_0 , a frequência de amostragem do sinal F_s , que é igual a duas vezes a frequência de corte w_{cut} (ou de *Nyquist*), e o número de pontos N do conteúdo da frequência (potência inteira de base 2, devido à presença das transformadas de Fourier). A resolução em frequência Δw e o intervalo de tempo Δt são traduzidos por

$$\Delta w = \frac{w_{cut}}{N} \quad (4.25)$$

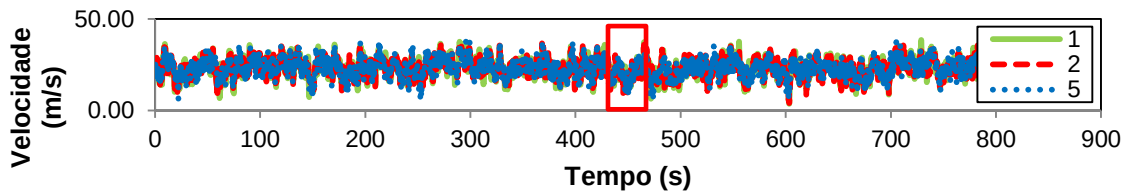
$$\Delta t = \frac{2\pi}{M \cdot \Delta w} < \frac{2\pi}{2 w_{cut}} \quad (4.26)$$

em que $M \geq 2N$. A título de exemplo, na Figura 4.52 (a) apresenta-se um conjunto de séries temporais da velocidade do vento. Nesta geração foram considerados 3 pontos, 1, 2 e 5, num plano horizontal, à cota de 5m. Estes pontos foram correlacionados anteriormente na Figura 4.8, sendo portanto utilizados os mesmos parâmetros na caracterização do vento. As séries geradas correspondem a um intervalo de tempo de 799,5s discretizado em 2048 intervalos de tempo elementares ($\Delta t = 0,3904s$). Desta forma, cada série resulta da sobreposição de $N/2 = 1024$ harmônicos, varrendo uma gama de frequências de 0 a 2,5Hz, com uma resolução em frequência de 0,00244Hz. É de salientar que as séries referentes aos pontos mais próximos, 1 e 2, são mais bem correlacionadas dada a sua proximidade espacial (ver a Figura 4.52 (b)).

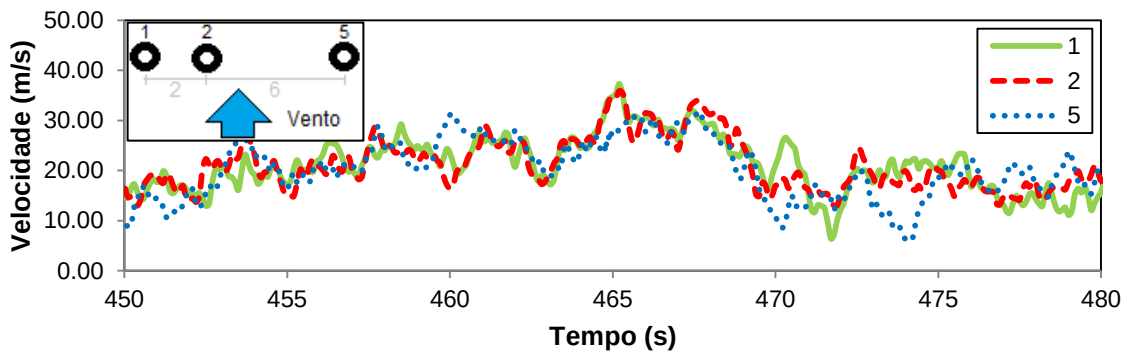
No entanto, se a direção longitudinal da velocidade do vento for colinear com os pontos 1, 2 e 5, e dado que estes estão à mesma cota, pode utilizar-se uma estratégia de geração das séries da velocidade do vento que consiste em gerar apenas uma das séries, para um dos pontos, e obter as restantes a partir dessa, aplicando um desfasamento temporal $\Delta\tau$, traduzido por

$$\Delta\tau = \frac{\Delta x}{\bar{U}} \quad (4.27)$$

em que Δx é a distância entre os pontos e $\bar{U}$ é a velocidade média (ver a Figura 4.53).



(a)



(b)

Figura 4.52 – Séries temporais da velocidade do vento: (a) Para um período de 800 segundos e (b) Para um período de 30 segundos

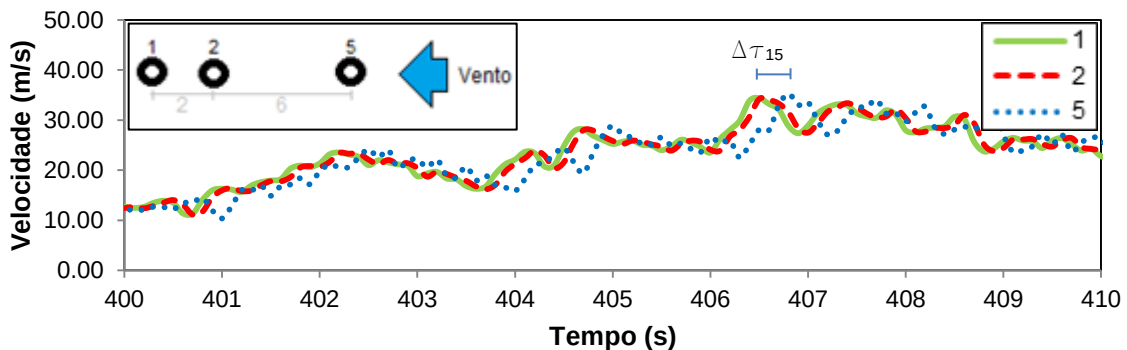


Figura 4.53 – Séries temporais da velocidade do vento em pontos colineares com a direção longitudinal do vento, à mesma cota

De forma a aferir a qualidade deste método de geração de séries temporais de velocidade do vento, são comparados os espectros de potência de partida e as estimativas espectrais médias obtidas, de acordo com a Figura 4.54. Neste exemplo, as estimativas baseiam-se em 10 lotes de séries temporais gerados. É de salientar a excelente concordância atingida ao nível do autoespectro da componente longitudinal da velocidade do vento S_u do ponto 1, utilizando 10 lotes de séries temporais. Ao nível dos espectros cruzados S_{uu} , entre os pontos 1 e 5, é de notar, também, a boa qualidade das séries geradas.

Na Tabela 4.8, mostram-se os valores calculados dos desvios-padrão relativos às séries temporais da componente longitudinal da velocidade do vento no ponto 1 e 5, para os 10 lotes considerados. É de notar que as estimativas obtidas são próximas do valor do desvio-padrão calculado através da área subentendida pelos espectros de potência originais (ver a Figura 4.7), devendo-se alguma disparidade devido ao facto das séries geradas estarem limitadas a uma frequência de 2,5Hz.

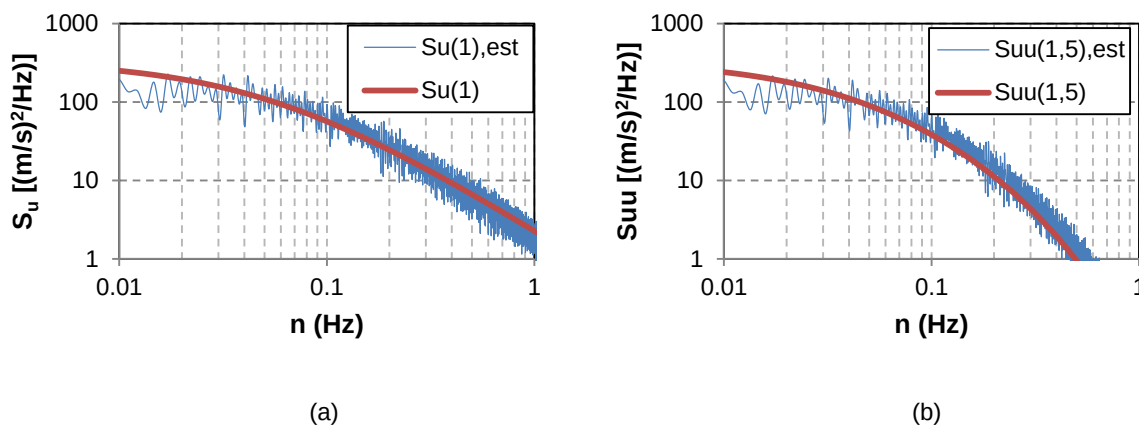


Figura 4.54 – Análise da qualidade do método de geração de séries de velocidade do vento, referente a 10 lotes de séries: (a) Comparação entre a função densidade espectral de partida e a estimativa espectral média do ponto 1 e (b) Comparação entre a função densidade espectral cruzada de partida e a estimativa espectral média cruzada dos pontos 1 e 5

No entanto, é possível realizar um estudo de modo a aferir sobre o número de simulações necessárias até obter um erro quadrático médio aceitável dos espectros médios. Esse estudo passa por gerar n repetições de séries temporais. Por exemplo, em Bastos (2009) realiza-se um estudo nesse sentido com base num exemplo de uma chaminé, concluindo serem necessárias cerca de 20 simulações para se obter um erro quadrático médio inferior a 20% sobre a densidade espectral de potência, enquanto para se obter um erro inferior a 10% são necessárias cerca de 100 simulações. Ainda nesse estudo se conclui que, quando se pretende avaliar a evolução característica de uma determinada variável (deslocamento, por exemplo), uma dezena de simulações é suficiente.

Tabela 4.8 – Valor dos desvios-padrão relativos a cada um dos 10 lotes de séries da velocidade do vento geradas para os pontos 1 e 5, e respetivos valores médios e coeficientes de variação

Lote	Desvios-Padrão	
	u(1) (m/s)	u(5) (m/s)
1	4,829	4,931
2	4,821	4,921
3	4,834	4,933
4	4,880	4,981
5	4,862	4,961
6	4,852	4,952
7	4,883	4,982
8	4,885	4,984
9	4,885	4,984
10	4,841	4,943
Média	4,857	4,957
Coef. Var.	0,005	0,005

No âmbito do estudo dos efeitos do vento sobre a laje esbelta referida anteriormente, foi determinado um conjunto de forças aerodinâmicas em 25 pontos da estrutura, com base nas séries temporais da velocidade do vento. Para o efeito, considerou-se que as forças aerodinâmicas atuam perpendicularmente à superfície da estrutura, sendo traduzidas por

$$F_p(t) = \frac{1}{2} \rho_{ar} \cdot C_p \cdot A_p \cdot U^2(t) \quad (4.28)$$

A velocidade $U(t)$ é definida simplificadamente por

$$U^2(t) = [\bar{U} + u(t) + v(t) + w(t)]^2 \approx \bar{U}^2 + 2 \cdot u(t) \cdot \bar{U} \quad (4.29)$$

tal que $\bar{U}$ é a componente média da velocidade do vento e $u(t)$, $v(t)$ e $w(t)$ são as componentes flutuantes da velocidade do vento. De acordo com Simiu e Scanlan (1996), o valor da componente média $\bar{U}$ é significativamente superior ao valor absoluto de qualquer uma das componentes turbulentas, e ao valor da velocidade de resposta da estrutura, $\dot{q}(t)$. Deste modo, a substituição da equação (4.29) em (4.28) resulta em

$$F_p(t) = \frac{1}{2} \rho_{ar} \cdot C_p \cdot A_p \cdot \bar{U}^2(t) + \rho_{ar} \cdot C_p \cdot A_p \cdot \bar{U}(t) \cdot u(t) \quad (4.30)$$

Os coeficientes de pressão C_p utilizados no cálculo destas forças foram determinados com base na secção 7.3 da norma europeia (EN1991-1-4), referente a coberturas isoladas, tendo em conta a obstrução $\varphi=0$ e a inclinação da cobertura $\alpha=0$. Estas forças permitiram analisar a resposta dinâmica da estrutura sob a ação do vento no domínio do tempo.

4.5.4. ANÁLISE DINÂMICA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Em coberturas que exibem um comportamento aproximadamente linear, a resposta dinâmica à ação turbulenta do vento é realizada pelo método de sobreposição modal, combinado com o método no domínio da frequência, utilizando funções de densidade espectral (Buchholdt 1999). Apesar do método de sobreposição modal se aplicar a problemas lineares, também foi aplicado a problemas não-lineares no passado (Morris 1977).

Com efeito, para efetuar uma análise dinâmica no domínio da frequência, é necessário realizar primeiramente uma análise de valores próprios. Nessa análise é utilizada a rigidez da estrutura que resulta do estado deformado da análise estática, onde são incluídas as ações da componente média da velocidade do vento e do peso próprio. De seguida, é estimada a função densidade espectral da resposta da estrutura com base no espectro de potência da componente flutuante da velocidade do vento. O desvio-padrão da função densidade espectral da resposta multiplicado pelo fator de resposta de pico (Oskoei e McClure 2008) fornece a resposta máxima da ação da componente flutuante da ação do vento. Finalmente, é obtida a resposta máxima da estrutura, somando a resposta máxima da componente média e da componente flutuante da velocidade do vento.

A abordagem no domínio da frequência é mais rápida computacionalmente em relação à abordagem no domínio do tempo, razão pela qual é mais utilizada na estimativa dos efeitos de rajada. Todavia, a abordagem no domínio da frequência assenta num conjunto de simplificações necessárias à sua aplicação (Buchholdt 1999), originando consequentemente uma perda significativa de precisão (Bastos 2015). A primeira simplificação reside no facto de considerar a resposta dinâmica da estrutura como sendo linear. Depois, as forças aerodinâmicas devidas à ação turbulenta do vento são as mesmas que resultariam num escoamento constante com a mesma velocidade média. As relações entre as velocidades do vento e as forças flutuantes são lineares. Por fim, as distribuições de probabilidade das flutuações da velocidade do vento são gaussianas.

Em suma, a análise no domínio da frequência com vista à determinação da resposta de uma cobertura à ação do vento é uma possibilidade para estruturas com comportamento aproximadamente linear. Contudo, a abordagem determinística constitui o método analítico mais preciso, embora exija maior tempo de cálculo e esforço computacional (Ghafari Oskoei *et al.* 2010; Morris 1975).

5

COBERTURA DE UM RECINTO POLIDESPORTIVO

5.1. INTRODUÇÃO

No capítulo anterior foram desenvolvidos vários tópicos relacionados com as estruturas de cabos e membranas, desde a caracterização dos diferentes tipos estruturais, passando pela caracterização do seu comportamento estático e, finalizando, com a caracterização da ação do vento.

Neste capítulo os conhecimentos adquiridos serão aplicados ao estudo do efeito do vento numa estrutura de cobertura em membrana de um recinto polidesportivo localizado no centro de alto rendimento da ilha da *Cartuja*, em Sevilha (ver a Figura 5.1).

5.2. DESCRIÇÃO DA COBERTURA

A cobertura em estudo refere-se a um recinto desportivo de planta retangular, com as dimensões de $24 \times 46 \text{ m}^2$, sendo realizada a partir de uma estrutura metálica tubular dotada de uma membrana tensa.



(a)



(b)

Figura 5.1 – Cobertura desmontável de um recinto polidesportivo no CEAR da ilha da *Cartuja*, Sevilha (Performance S.L. 2010): (a) Vista aérea e (b) Vista interior

5.2.1. ESTRUTURA METÁLICA

A estrutura metálica tubular é duplamente simétrica em planta, sendo constituída por dois pórticos perpendiculares, de 24 e 46m de comprimento e 11m de altura máxima, formados por uma estrutura reticulada tubular (ver a Figura 5.2).

Os pórticos são formados por duas vigas treliçadas inclinadas desde a parte central até aos pilares. As vigas treliçadas do pórtico maior têm uma inclinação diferente das do pórtico menor. Para além de apoiarem as vigas treliçadas dos pórticos, os pilares apoiam a estrutura metálica lateral. Atendendo a estes factos, os pilares do pórtico maior são diferentes dos pilares do pórtico menor. A Figura 5.3 apresenta o pilar do pórtico maior, localizado no lado menor, e a Figura 5.4 (a) apresenta o pilar do pórtico menor, localizado no lado maior.



Figura 5.2 – Estrutura metálica tubular da cobertura: (a) Vista exterior (Performance S.L. 2010) e (b) Vista Interior (Escrig *et al.* 2012)



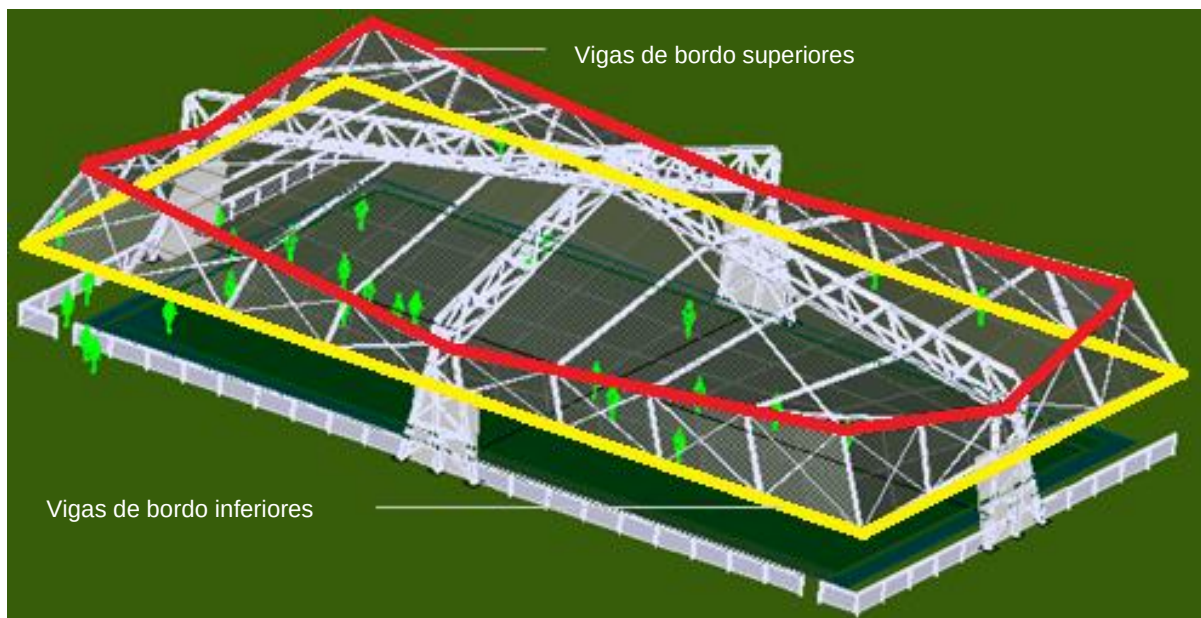
Figura 5.3 – Vistas do pilar do pórtico maior da estrutura metálica (Sanrocon 2009)

A estrutura metálica lateral é formada por vigas de bordo superiores e vigas de bordo inferiores, constituindo, respetivamente, um anel retangular superior e um anel retangular inferior (ver a Figura 5.4 (b)). O anel inferior está contido num plano horizontal. O anel inferior é ligado ao superior por intermédio de barras de contraventamento e de vários pares de barras calibradas de 25mm, formando panos laterais mais resistentes (ver os alçados da estrutura na Figura 5.5 (a)).

O anel retangular superior é apoiado nos 4 pilares existentes e em 4 cabos suspensos de 36mm. Estes cabos ligam os cantos desse anel até ao centro da cobertura, onde os pórticos se cruzam (ver os desenhos da estrutura em planta na Figura 5.5 (a) e em perspetiva na Figura 5.5 (b)). A Figura 5.6 (a) apresenta o pormenor de um dos cantos do anel superior. A Figura 5.6 (b) apresenta o pormenor da parte central da cobertura, evidenciando-se a ligação dos cabos de 36mm no ponto mais alto da interseção dos pórticos.

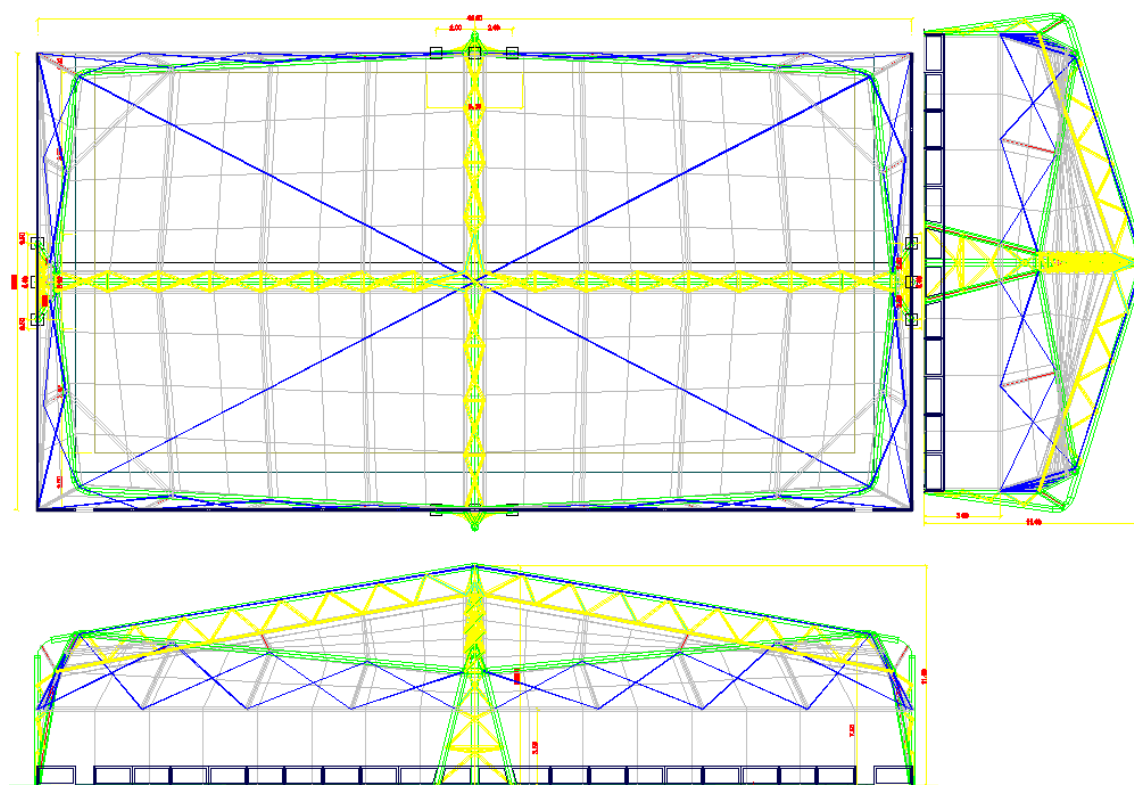


(a)

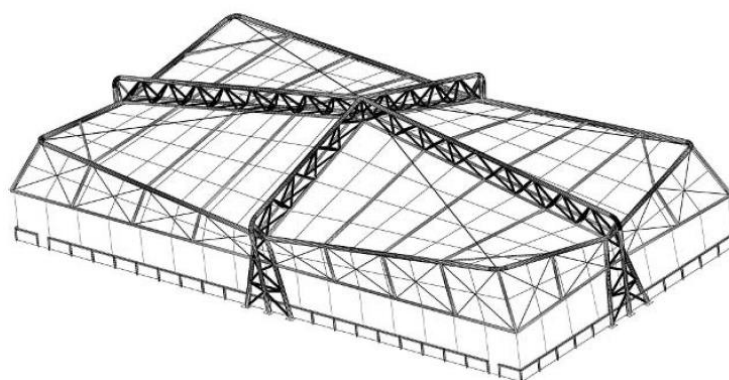


(b)

Figura 5.4 – Cobertura desmontável de um recinto polidesportivo: (a) Vista exterior do lado maior (Sanrocon 2009) e (b) Anéis retangulares superior e inferior



(a)



(b)

Figura 5.5 – Desenhos da estrutura (Escrig e Sánchez 2009): (a) Planta e alçados e (b) Perspetiva



(a)

(b)

Figura 5.6 – Pormenores (Sanrocon 2009): (a) Canto do anel retangular superior e (b) Zona central

A estrutura metálica é realizada com três secções tubulares – $\phi 323 \times 8$, $\phi 200 \times 6$ e $\phi 150 \times 5 \text{ mm} \times \text{mm}$, (ver a Figura 5.7). A secção tubular $\phi 323 \times 8 \text{ mm} \times \text{mm}$ é utilizada no banzo superior das vigas treliçadas, nos pilares e no anel retangular superior. Por sua vez, a secção tubular $\phi 200 \times 6 \text{ mm} \times \text{mm}$ é utilizada no banzo inferior das vigas treliçadas e nas vigas do anel retangular inferior. Esta secção tubular é utilizada também nas barras de contraventamento que ligam o anel inferior ao anel superior e nas vigas que ligam o anel superior às vigas treliçadas do pórtico maior. Esta última ligação é realizada ao nível do banzo inferior das vigas treliçadas. Por fim, a secção tubular $\phi 150 \times 5 \text{ mm} \times \text{mm}$ é utilizada nas vigas treliçadas, quer nas diagonais, quer na ligação entre as vigas do banzo inferior. Esta secção tubular é utilizada também nos pilares.

Para além das secções metálicas tubulares, a estrutura metálica é realizada com barras calibradas de secção cheia – $\phi 25 \text{ mm}$, e com cabos – $\phi 36 \text{ mm}$. As barras calibradas são utilizadas nas diagonais dos panos laterais (ver a Figura 5.8), e os cabos são utilizados na ligação entre os cantos do anel superior e o nó central (ver a Figura 5.7).

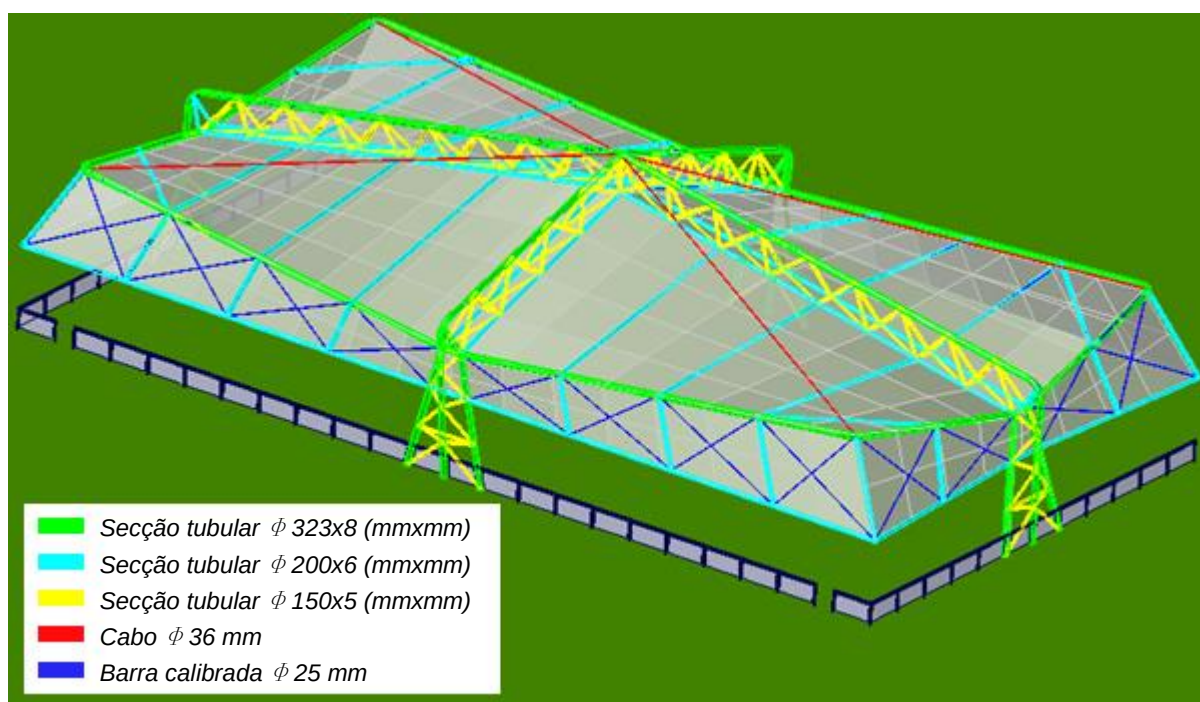


Figura 5.7 – Representação das secções metálicas da estrutura de cobertura



Figura 5.8 – Pares de barras calibradas de 25mm localizados nos panos laterais, Cortesia de José Sánchez

5.2.2. MEMBRANA

A estrutura de cobertura metálica é dotada de uma membrana tensa em poliéster revestida a *PVC* do tipo *Ferrari Preconstraint 1002*. Esta membrana é colocada na parte interior dessa estrutura (ver a Figura 5.9 (a)). Deste modo, a estrutura metálica é visível unicamente no exterior do recinto. Atendendo à transparência do tecido da membrana, as sombras da estrutura metálica são visíveis a partir do interior do recinto durante o dia (ver a Figura 5.9 (b)). No período noturno, são visíveis apenas a membrana e as ligações desta aos pórticos, a partir do interior do recinto (ver a Figura 5.9 (c)).

Complementarmente, a estrutura de cobertura é dotada de cortinas em toda a sua periferia (ver a Figura 5.9 (c)) realizadas em poliéster revestido a *PVC* do tipo *Soltis FT 371*. As cortinas são apoiadas no anel retangular inferior, e podem ser recolhidas totalmente em cada lado da estrutura na zona dos pilares. Estas cortinas facilitam a ventilação do recinto desportivo, permitindo fechá-lo completamente. As características do material utilizado permitem dotar as cortinas de resistência a longo prazo sob condições climáticas adversas, bem como possíveis impactos. Para além disso, a porosidade deste material permite alguma visibilidade para o exterior do recinto.



(a)



(b)

(c)

Figura 5.9 – Membrana tensa (Escrig *et al.* 2012): (a) Colocação em obra; (b) Vista do interior do recinto no período diurno, Cortesia de José Sánchez e (c) Vista do interior do recinto no período noturno

5.2.2.1. Forma

A Figura 5.10 apresenta um desenho elaborado pelo projetista a fim de desenvolver os padrões de corte da membrana tensa do primeiro quadrante da estrutura, sendo também representadas as cortinas. Apesar de estarem representadas em conjunto, a membrana e as cortinas não estão ligadas. A membrana tensa forma quatro módulos iguais na parte superior da cobertura (módulo 1 – $M1$), um módulo em cada quadrante. Estes módulos estão delimitados pelo anel superior. Por sua vez, nos panos laterais existem oito módulos de membrana tensa. Estes módulos não são iguais, apresentando dois formatos distintos, respetivamente no lado menor (módulo 2 – $M2$) e no lado maior (módulo 3 – $M3$).

Os três módulos de membrana tensa descritos apresentam a forma de paraboloide hiperbólico, embora os módulos 2 e 3 apresentem um desvio ligeiro deste formato, na medida em que estão ligados, como será referido com mais detalhe posteriormente. O paraboloide hiperbólico possui uma forma anticlástica com dupla curvatura Gaussiana.

Por norma, é realizado um estudo acerca do declive da superfície de membrana, analisando a possibilidade de fenómenos de empoçamento. Este estudo pode ser aprofundado analisando o declive da superfície sob condições de carregamento. Um primeiro estudo é efetuado através da análise de isolinhas da superfície. O caminho da água da chuva na superfície é realizado pelas linhas de maior declive até aos bordos da membrana. Estas linhas são perpendiculares às isolinhas apresentadas na Figura 5.11. Da análise das isolinhas da superfície não são geradas depressões na superfície de membrana com possibilidade de empoçamento.

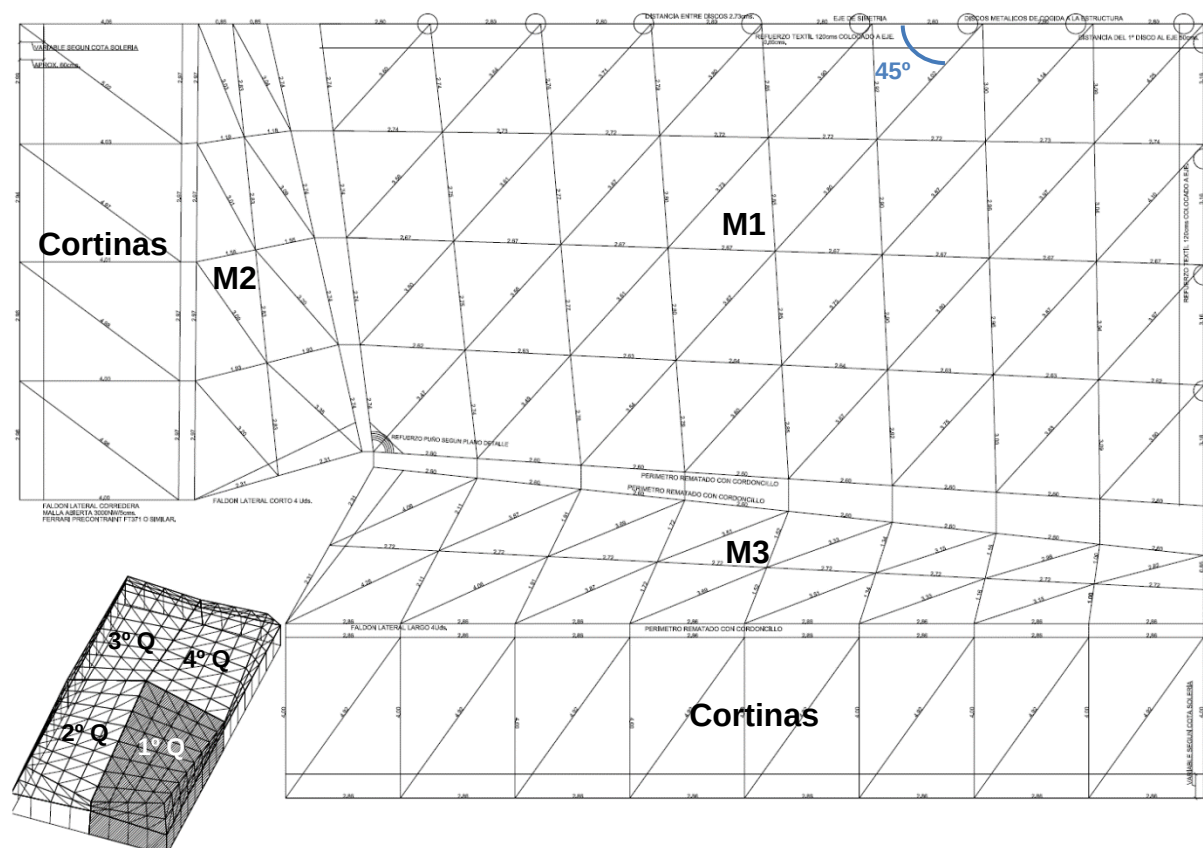


Figura 5.10 – Representação esquemática da membrana tensa para desenvolvimento dos padrões de corte (Escrig e Sánchez 2009)

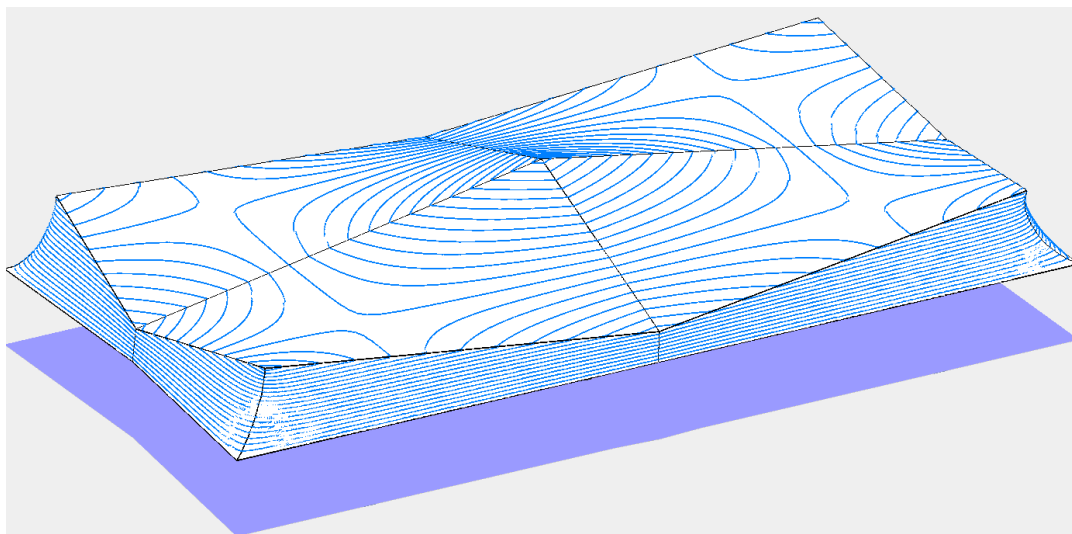


Figura 5.11 – Isolinhas da membrana tensa

5.2.2.2. Padrões de corte

A Figura 5.12 apresenta a disposição dos padrões de corte na superfície de membrana tensa, realizada com base na inspeção visual da informação disponível, uma vez que não se dispõe da informação real, e com recurso ao *software* de estruturas de membrana *Formfinder*® V4.0 (www.formfinder.at).

No caso do módulo 1, contabilizam-se 9 padrões de corte com formatos distintos, desde paralelogramas, situados nos padrões de corte intermédios, a dois triângulos, localizados em vértices opostos do mesmo módulo. As larguras destes padrões de corte são aproximadamente 2,80m, à exceção dos padrões de formato triangular que são mais reduzidos. Por sua vez, os módulos 2 e 3 apresentam, respetivamente, 5 e 9 padrões de corte com formatos distintos, na maioria paralelogramas. A largura destes padrões é de aproximadamente 2,30 e 2,50m, respetivamente nos módulos 2 e 3. O conjunto dos módulos perfaz 92 padrões de corte ($9 \times 4 + 5 \times 4 + 9 \times 4$).

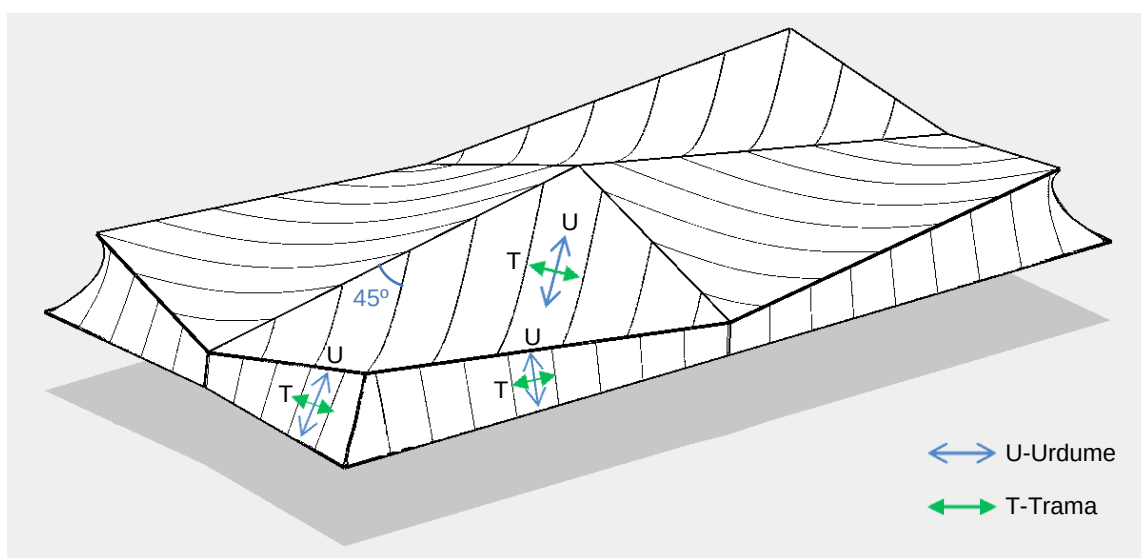


Figura 5.12 – Juntas da membrana tensa e orientação das direções de fabrico do tecido nos padrões de corte

No entanto, os pormenores de canto da cobertura foram simplificados ao realizar a Figura 5.12 (à semelhança do que se fará no modelo numérico na secção 5.4). Em boa verdade, nos módulos 2 e 3 deveriam ser contabilizados mais 2 padrões de corte por cada canto da cobertura com formato triangular (ver a Figura 5.13), perfazendo 100 padrões de corte ($92+2 \times 4$).

Por razões de economia de material e de precisão, e por forma a evitar o enrugamento da membrana, as linhas longitudinais dos painéis, isto é, a direção longitudinal das juntas, devem ser linhas geodésicas na superfície final (Forster e Mollaert 2004). As linhas geodésicas representam o “percurso” mais curto entre dois pontos da superfície. Estas linhas são as linhas de corte da superfície para gerar os padrões de corte, e, aparentemente, estas linhas são geodésicas.

A orientação das direções principais de fabrico do material da membrana, o urdume e a trama, é representada para o primeiro quadrante da estrutura na Figura 5.12. Nos três restantes quadrantes, a orientação das direções principais de fabrico é semelhante, atendendo à dupla simetria da estrutura. A orientação do urdume é aproximadamente paralela ao desenvolvimento longitudinal dos painéis. No módulo 1 a direção do urdume faz aproximadamente 45° com a direção do eixo longitudinal da estrutura. Nos módulos 2 e 3 a direção do urdume é aproximadamente vertical, acompanhando o declive dos panos laterais. A direção da trama é ortogonal à direção do urdume em todos os módulos de membrana.

Os critérios que levaram a optar pela disposição dos padrões de corte de acordo com a Figura 5.12 são desconhecidos. No entanto, as recomendações do manual europeu referem que as principais linhas de transferência de esforços devem seguir preferencialmente as linhas de curvatura principal dos paraboloides hiperbólicos, esquematizadas para o módulo 1 na Figura 5.14. As duas linhas de curvatura principal ligam dois vértices opostos, uma “suspensa” entre os vértices mais altos, e outra “arqueada” entre os vértices mais baixos. Esta recomendação remete assim para que as direções principais de fabrico estejam alinhadas com estas linhas de curvatura principal.

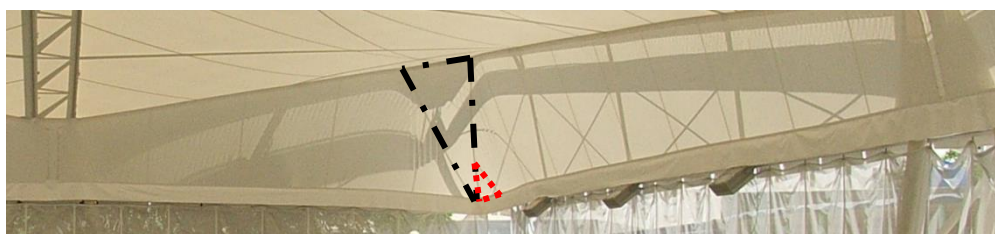


Figura 5.13 – Padrões de corte no canto da cobertura

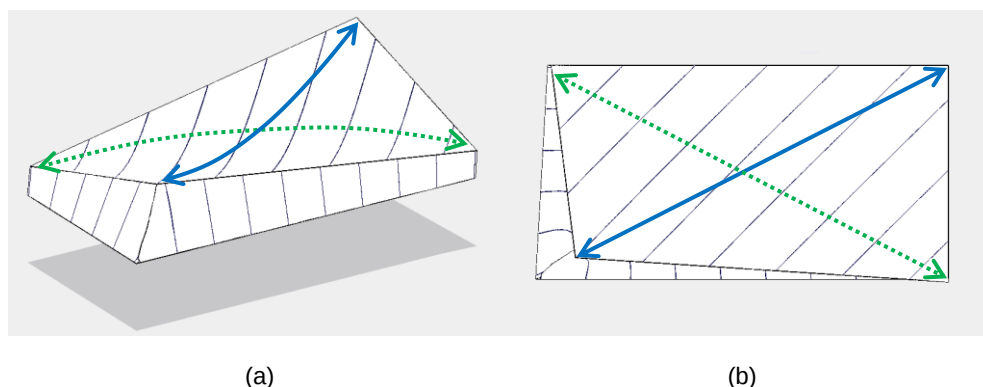


Figura 5.14 – Linhas de curvatura principal no módulo 1 da membrana tensa no primeiro quadrante: (a) Perspetiva e (b) Planta

Deste modo, por um lado, o arranjo dos padrões de corte de acordo com a recomendação anterior permitiria que os esforços resultantes da ocorrência de cargas de longa duração, tais como da ação da neve, seriam predominantemente transferidos para os bordos através da direção alinhada com a linha de curvatura “suspensa”, ou de curvatura positiva. Esta direção deve ser alinhada com a direção do urdume. Isto porque o urdume é, de forma geral, a direção de fabrico mais resistente, podendo suportar melhor as cargas de longa duração. Por outro lado, os esforços resultantes de cargas de curta duração, tais como da ação dinâmica do vento, que provoca predominantemente sucções na membrana, seriam transferidos para os bordos através da direção alinhada com a linha de curvatura “arqueada”, ou de curvatura negativa, direção esta que deve ser alinhada com a direção da trama.

No presente caso, no entanto, a recomendação anterior não é concretizável, na medida em que a forma do módulo superior de membrana é aproximadamente retangular, originando linhas de curvatura principal não ortogonais. Estas linhas seriam ortogonais se o módulo de membrana apresentasse a forma aproximadamente quadrangular em planta. Deste modo, não é possível sobrepor as direções de fabrico do material com as direções das linhas de curvatura principal, dado que as primeiras são ortogonais.

Posto isto, a única possibilidade consiste em alinhar uma das direções principais de fabrico com uma das linhas de curvatura principal, como evidenciam as hipóteses A e B representadas, respetivamente nas Figuras 5.15 (a) e (b). Nestas hipóteses, a direção do urdume faz um ângulo com o eixo longitudinal da estrutura, respetivamente igual a $27,3^\circ$ e $28,5^\circ$. De facto, nestas duas hipóteses é minimizado o ângulo de desalinhamento α_1 entre a direção do urdume e da linha de curvatura principal respetiva ($\alpha_1 = 0^\circ$). No entanto, são também as hipóteses que maximizam o ângulo de desalinhamento α_2 entre a direção da trama e da linha de curvatura principal respetiva ($\alpha_2 = 34,2^\circ$). Assim sendo, a disposição da direção do urdume a 45° com o eixo longitudinal da estrutura, hipótese C (ver a Figura 5.15 (c)), apresenta uma solução intermédia entre as hipóteses A e B, minimizando ambos os ângulos de desalinhamento mencionados ($\alpha_1 = 17,7^\circ$ e $\alpha_2 = 16,5^\circ$). Aparentemente, esta é a solução mais otimizada para a disposição das direções de fabrico do material da membrana, sendo aliás a solução adotada para o módulo 1.

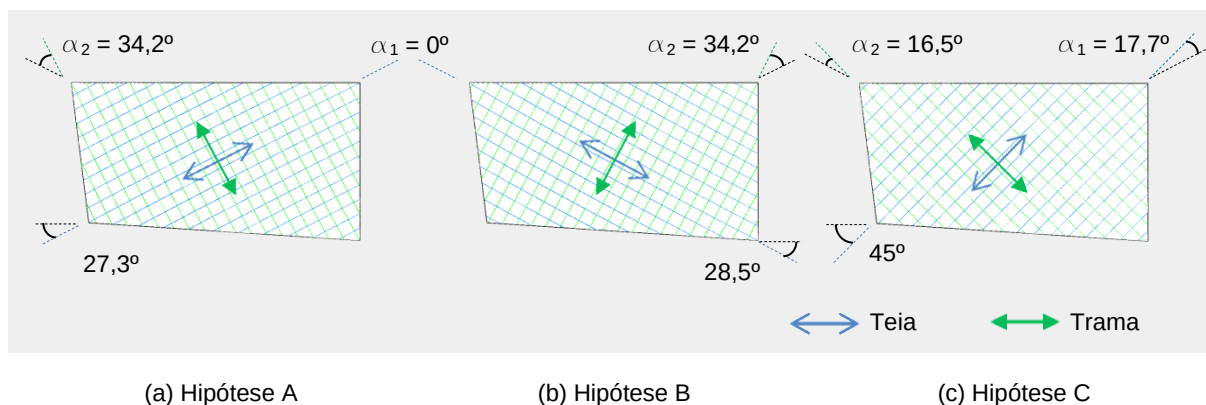


Figura 5.15 – Hipóteses de orientação dos padrões de corte no módulo de membrana da parte superior da cobertura com recurso ao *software Formfinder® V4.0*: (a) Hipótese A – Direção do urdume alinhada com a linha de curvatura positiva; (b) Hipótese B – Direção do urdume alinhada com a linha de curvatura negativa e (c) Hipótese C – Direção do urdume orientada a 45° com a direção longitudinal da cobertura (solução)

Em suma, a orientação das direções principais de fabrico do tecido adotada na solução final é ditada pelo processo de desenvolvimento dos padrões de corte. Para além disso, o pré-esforço definido para estas direções principais de fabrico governa a forma da superfície. Deste modo, as direções principais de fabrico do material, definidas no contexto do desenvolvimento dos padrões de corte, têm de ser consideradas nos modelos de membrana, no âmbito do processo de determinação da forma, como será referido na secção 5.4.

5.2.2.3. Identificação de enrugamento na membrana

Nos módulos do tipo 1 na parte superior da membrana tensa não existem aparentemente efeitos de enrugamento na tela. No entanto, nos módulos 2 e 3, localizados nos panos laterais, é visível o enrugamento da tela na proximidade dos quatro cantos da cobertura, precisamente na ligação entre os módulos 2 e 3 (ver a Figura 5.16).

Em primeira análise, os módulos 2 e 3 apresentam curvaturas menores do que as verificadas no módulo 1, isto é, são módulos de membrana mais planos. Este facto indicia à partida que estes módulos estariam menos sujeitos ao aparecimento de fenómenos de enrugamento, na medida em que os raios de curvatura que caracterizam a sua superfície são muito superiores aos raios de curvatura verificados no módulo 1, resultando consequentemente em valores reduzidos do ângulo de desvio entre as direções principais de fabrico. Por outro lado, o facto dos ângulos de desvio serem reduzidos dificulta a realização da forma anticlástica dos módulos 2 e 3.

No entanto, a causa mais plausível para o enrugamento na zona de transição entre os módulos 2 e 3 deve-se ao facto destes dois módulos não serem independentes. Ambos os módulos têm na verdade 3 fronteiras rígidas, em vez de 4, como podem induzir em erro os desenhos da Figura 5.10. O bordo de membrana que é comum aos dois módulos não está fixo em vigas, ao contrário dos restantes bordos. O painel de membrana tensa que agrega os módulos 2 e 3 possui na verdade 6 bordos rígidos. A ligação dos bordos de membrana à estrutura metálica será caracterizada na secção 5.2.3. Por este motivo, a transição do módulo 2 para o 3, nesta zona de canto/esquina, é realizada de uma forma brusca entre dois módulos de membrana sensivelmente planos e quase perpendiculares entre si. Nesta transição, a junção entre estes dois módulos de membrana torna-se por isso mais arredondada (ver a Figura 5.6 (a)), sendo acompanhada por estes fenómenos de enrugamento.

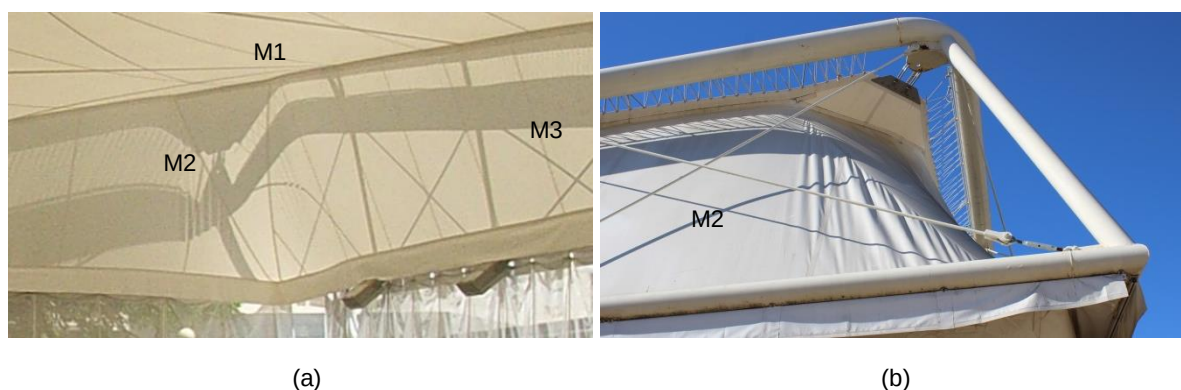


Figura 5.16 – Enrugamento na transição entre o módulo 2 e 3 (M1, M2 e M3, respetivamente módulos 1, 2 e 3):
(a) Vista interior e (b) Vista exterior

A colocação do painel de membrana tensa constituído pelos módulos 2 e 3 foi realizada em conjunto (ver a Figura 5.9 (a)). A Figura 5.17 mostra que o painel é pré-esforçado na vertical através da ligação da membrana aos anéis retangulares, e na horizontal através da ligação da membrana aos pilares. O pré-esforço aplicado na horizontal é transmitido até à zona de esquina pela própria tela. As compensações realizadas nos padrões de corte, nas juntas que ligam dois padrões de corte contínuos, facilitam a transmissão do pré-esforço até à zona de transição. Mas naturalmente na zona de transição o rácio de tensões será distinto dada a geometria que se pretende para a membrana tensa nestes dois módulos: aproximadamente vertical e muito alongada, sendo pouco económica em termos estruturais. Estes factos remetem para rácios de tensões elevados na zona de transição, potenciando o enrugamento. O enrugamento nesta zona de transição seria evitado se a membrana fosse ligada através de uma ligação contínua à barra de canto que liga o anel retangular superior e o inferior, como ilustra a Figura 5.18.

É de salientar que o facto dos módulos 2 e 3 não serem independentes é determinante, em particular na modelação da membrana, como será abordado na secção 5.4, onde a determinação da forma destes módulos é levada a cabo em simultâneo, considerando um único módulo de membrana. O facto de estes módulos constituírem um único módulo de membrana, invalida a premissa de que estes módulos possuem a forma de parabolóide hiperbólico, tendo em consideração as suas condições de fronteira.

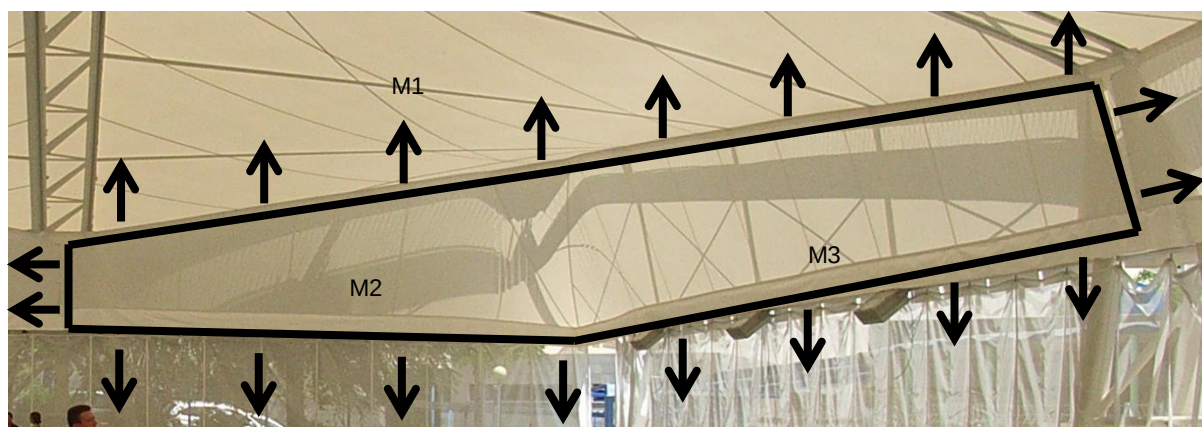


Figura 5.17 – Colocação da membrana dos módulos 2 e 3



Figura 5.18 – Ligação da membrana dos módulos 2 e 3 à barra de canto

5.2.3. DETALHES E LIGAÇÕES

A membrana tensa desempenha uma função estrutural, como já foi sendo referido, uma vez que resiste às ações atuantes, nomeadamente o seu peso, e transmite os esforços resultantes da aplicação dessas ações à estrutura metálica. Essa transmissão de esforços é realizada a partir de um conjunto de ligações localizadas na própria membrana, nos anéis retangulares e nos pórticos.

As ligações entre painéis de membrana adjacentes são realizadas por juntas soldadas a alta frequência, através da aplicação de pressão e calor, criando uma junta homogênea em que as espessuras do tecido dos dois materiais ficam integradas. As radiações de alta frequência fazem oscilar as moléculas do material, provocando o seu aquecimento. Em tecidos de poliéster revestidos a PVC, a resistência de soldadura destas juntas é aproximadamente 90% da resistência do tecido.

A ligação da membrana à estrutura metálica é caracterizada através dos detalhes A, B, C e D, de acordo com a Figura 5.19. A ligação da membrana ao anel retangular superior é pormenorizada a partir do *detalhe A*, que se refere a um canto desse anel (ver a Figura 5.20 (a)). A membrana é reforçada, quer em toda a extensão do bordo numa largura de 30cm, quer no canto num diâmetro de 50cm. No bordo da membrana é realizada uma bainha onde são efetuados furos de 10mm de diâmetro, espaçados de 20cm. Existe possivelmente um elemento de *keder* na bainha da membrana, em toda a extensão da ligação acordada. Um cordão passa alternadamente entre os furos da bainha e um tubo de 2cm de diâmetro. O tubo de 2cm é soldado às vigas do anel superior de metro em metro.

A ligação da membrana ao anel superior e ao anel inferior é apresentada em corte no *detalhe B* (ver a Figura 5.20 (b)). É de notar que a membrana tensa é denominada de membrana superior e membrana lateral, referindo-se, respetivamente, aos módulos de membrana da parte superior da cobertura e aos módulos de membrana dos panos laterais, mencionados anteriormente. A ligação do bordo da membrana lateral às vigas do anel inferior é realizada de forma análoga à ligação descrita anteriormente da membrana com as vigas do anel superior (*detalhe A*). A membrana superior e a membrana lateral unem-se na ligação da membrana com o anel superior. Ainda na Figura 5.20 (b), é de notar que, dada a inclinação das vigas do anel superior com a horizontal, o espaçamento entre estas vigas e as vigas do anel inferior é variável ao longo dos panos laterais. Por esta razão, as barras calibradas de $\phi 25mm$ que constituem as diagonais dos panos laterais têm comprimentos diferentes.

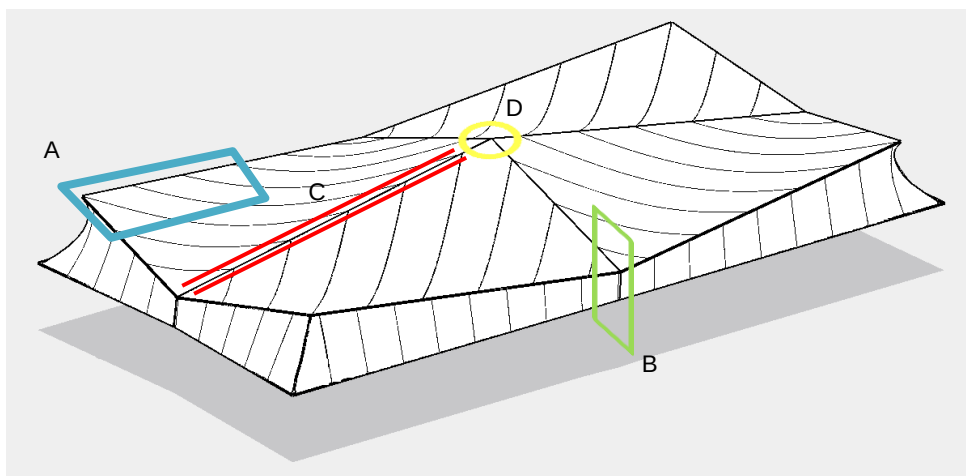
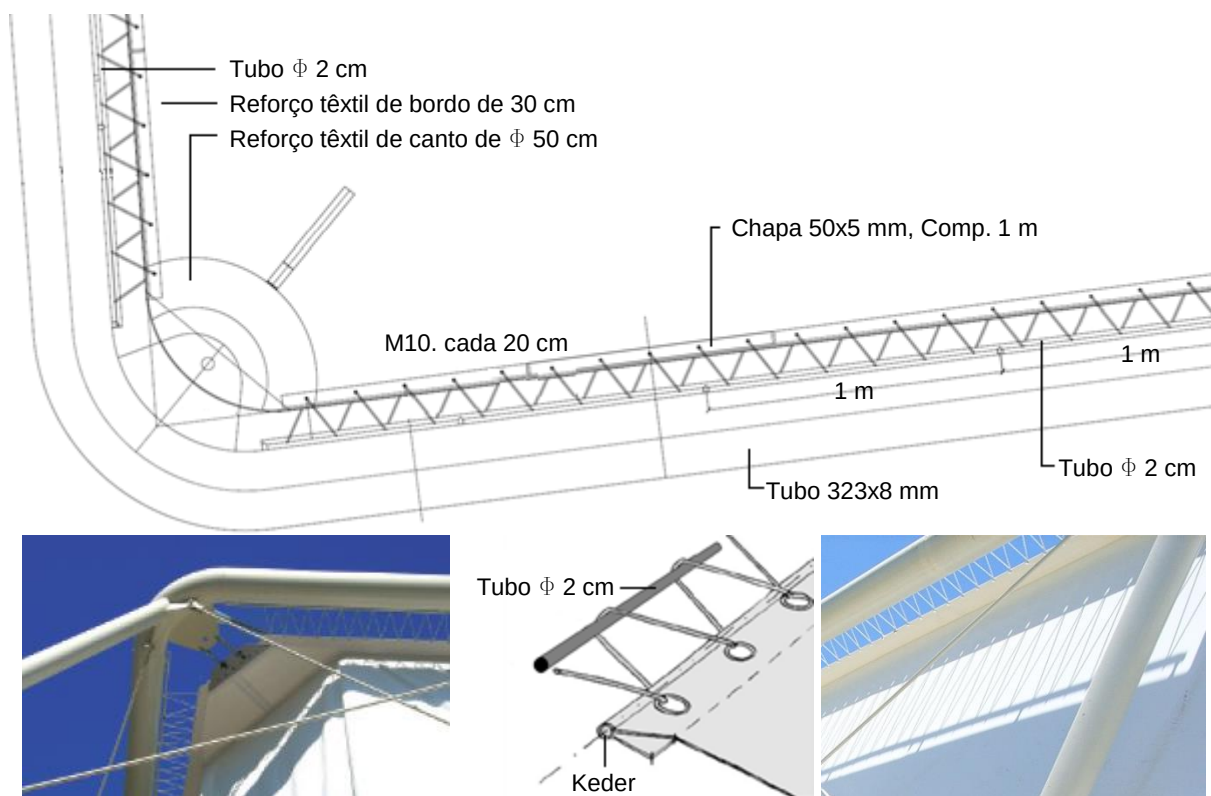
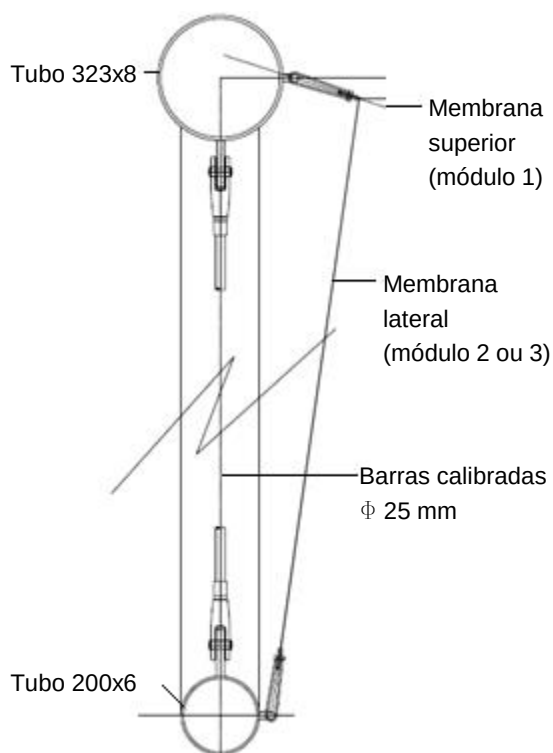


Figura 5.19 – Localização dos detalhes de ligação da membrana à estrutura metálica



(a) DETALHE A



(b) DETALHE B



(c) DETALHE C

Figura 5.20 – Detalhes de ligação da membrana à estrutura metálica (Escrig e Sánchez 2009; Escrig *et al.* 2012; Forster e Mollaert 2004): (a) Detalhe A – Canto do anel retangular superior; (b) Detalhe B – Corte do pano lateral e (c) Detalhe C – Ligação às vigas treliçadas

A ligação da membrana aos pórticos é realizada num conjunto de pontos localizados ao nível do banzo inferior das vigas treliçadas (ver a Figura 5.19). No banzo inferior das vigas treliçadas existem duas vigas dispostas em paralelo, ao longo dos pórticos, com secção $\phi 150 \times 5 \text{ mm} \times \text{mm}$ (ver a Figura 5.2 (b)). A membrana é ligada a estas duas vigas em contínuo através de dois conjuntos de chapas metálicas (ver a Figura 5.20 (c)). Cada conjunto de chapas metálicas é alinhado com a direção longitudinal da viga respetiva. As dimensões das chapas não são conhecidas.

A Figura 5.21 apresenta a ligação da membrana no nó central da cobertura. Esta ligação tem a particularidade de estar associada ao sistema de ventilação da cobertura. Por esta razão, são utilizadas placas retangulares abertas de forma a permitir o fluxo do ar (ver a Figura 5.22). As placas são colocadas em cima e em baixo da membrana, em paralelo, e aparafusadas. Posteriormente, são apoiadas nas vigas longitudinais de secção tubular $\phi 200 \times 6 \text{ mm} \times \text{mm}$ localizadas no banzo inferior das vigas treliçadas.



Figura 5.21 – Detalhe D – Nó central, Cortesia de José Sánchez

Os detalhes construtivos associados à estrutura metálica têm a ver essencialmente com os sistemas de barras calibradas de 25mm e com os cabos de 36mm. Os sistemas de barras calibradas são utilizados nos panos laterais da estrutura metálica (ver a Figura 5.23 (a)). Estes sistemas são constituídos pelas barras calibradas e por um macaco ligado à extremidade inferior da mesma barra (ver a Figura 5.23 (b)). Em primeiro lugar, a extremidade superior das barras calibradas é ligada diretamente às chapas metálicas (ver as Figuras 5.23 (c) e (d)). Todas as chapas metálicas são soldadas à estrutura metálica tubular. A extremidade inferior das barras calibradas é ligada diretamente ao macaco do tipo *turnbuckle*. A outra extremidade do macaco é ligada à placa metálica. Em segundo lugar, as terminações das barras calibradas são realizadas com encaixes forçados do tipo aberto (ver exemplo na Figura 5.24 (a)). As terminações do macaco são realizadas com encaixes engarrafados. O macaco permite realizar ajustamentos no seu comprimento rodando a barra metálica localizada entre as suas extremidades.

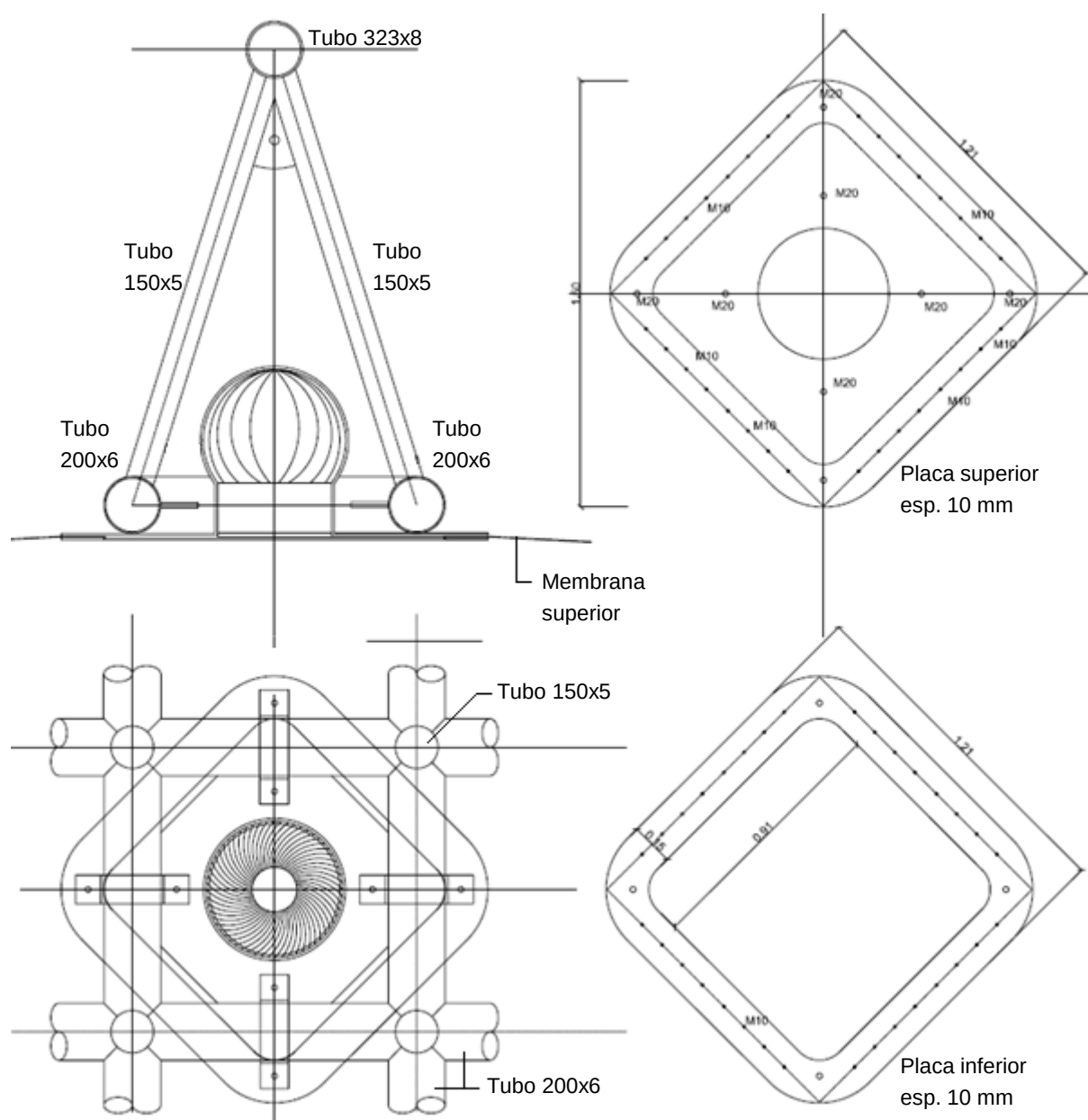


Figura 5.22 – Detalhe D – Nó central, adaptado de Escrig e Sánchez (2009)

De acordo com a Figura 5.23 (d), é de destacar em primeira análise que a terminação da barra calibrada utilizada neste desenho não está de acordo com a real, dada a representação de uma porca de fixação entre a barra calibrada e o encaixe que realiza a ligação com a chapa metálica. Em segunda análise, é de notar a ligação entre a barra de contraventamento e a viga do anel superior, formando um ponto de interseção dos eixos longitudinais destes elementos. As barras calibradas são colocadas nos panos laterais entre pontos de interseção deste tipo. O alinhamento longitudinal das barras calibradas está contido no plano dos panos laterais. Estes “planos” são duplamente curvos com a forma de paraboloide hiperbólico (ver a Figura 5.14 (b)). Consequentemente, se as placas metálicas forem colocadas na vertical, alinhadas com o ponto de interseção respetivo e colocadas em paralelo com uma das direções principais dos eixos de simetria da estrutura, originará um ângulo de desvio na barra calibrada em relação ao plano do sistema (ver a Figura 5.24 (b)). Este desalinhamento não deverá exceder $0,5^\circ$. Caso contrário, poderão ocorrer momentos fletores nos encaixes e nas placas metálicas, face ao contacto destes elementos, para os quais estes elementos não são adequados. Para além disso, o próprio comportamento estrutural da cobertura é modificado. Estes pormenores construtivos originam fontes de incerteza na modelação numérica, como se abordará na secção 5.4.

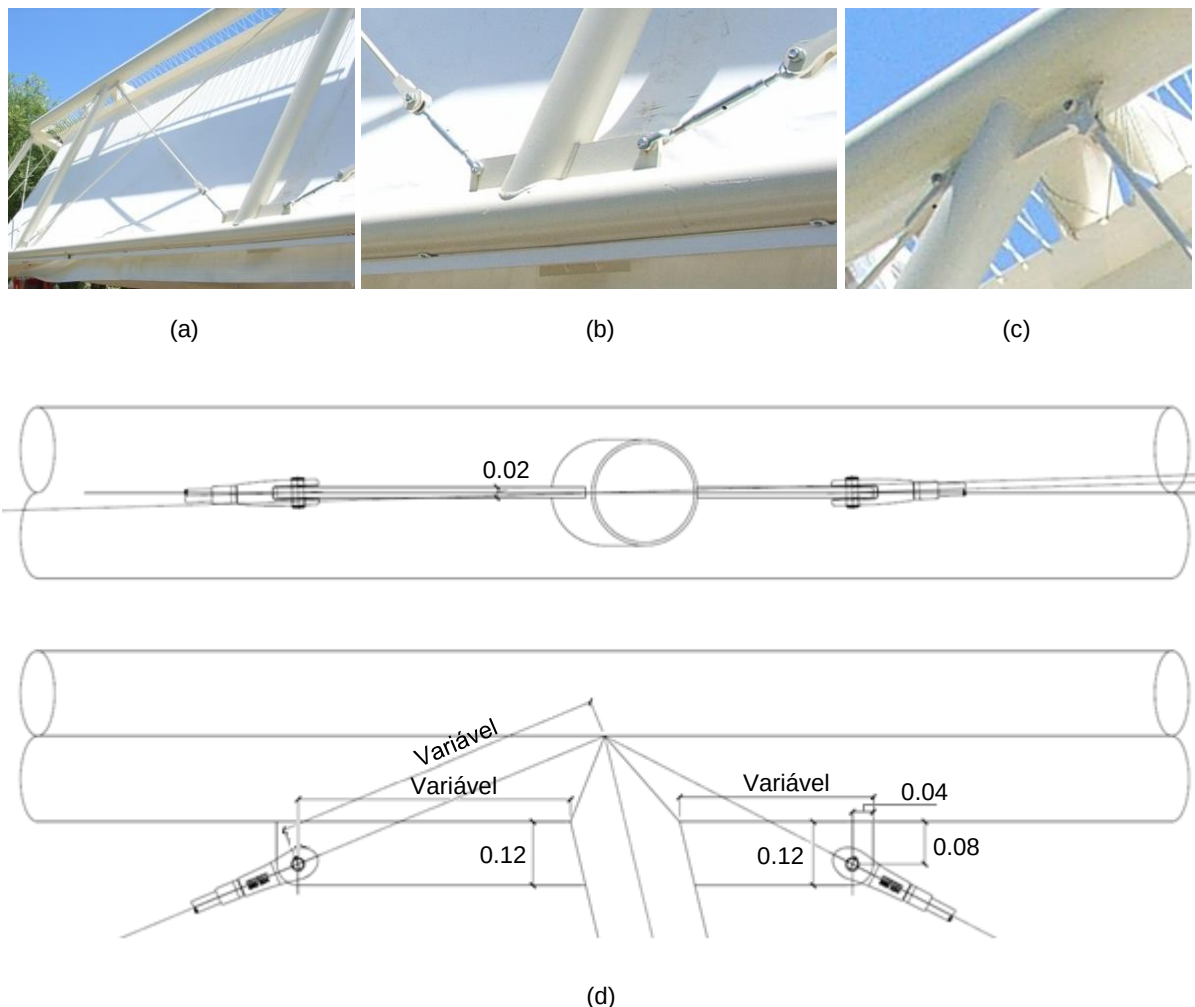


Figura 5.23 – Sistema de barras calibradas: (a) Vista geral, Cortesia de José Sánchez; (b) Ligação inferior; (c) Ligação superior e (d) Desenhos de pormenor da ligação superior, adaptado de Escrig e Sánchez (2009)

Atendendo às inclinações diferentes das vigas do anel superior, das barras de contraventamento e das vigas do anel inferior, à semelhança do que já foi referido anteriormente na descrição do *detalhe B*, a propósito das barras calibradas terem comprimentos distintos (ver o corte do pano lateral na Figura 5.20 (b), a distância entre o encaixe da barra calibrada e o ponto de interseção é diferente em todas as ligações deste tipo (ver a Figura 5.23 (d)). Por consequência, as chapas metálicas utilizadas nesta ligação têm geometrias variáveis, excetuando a largura e a espessura respetivamente iguais a 12 e 2cm. A distância entre o centro do furo da chapa metálica e a face da viga do anel superior é de 8cm, e o raio na zona de ligação é de 4cm.

Apesar de não serem conhecidas as características do sistema de barras calibradas utilizado nesta estrutura, para além do diâmetro das barras calibradas de 25mm, apresenta-se, a título de exemplo, um sistema equivalente da marca *Pfeifer* na Figura 5.24 (c), em correspondência com as características sistematizadas na Tabela 5.1. É de salientar que o encaixe utilizado nas terminações das barras calibradas da *Pfeifer* é dotado de uma porca de fixação junto ao encaixe forçado. As barras calibradas constituem a ligação mais fraca neste tipo de sistemas. É de salientar que aparentemente as placas utilizadas na estrutura cumprem as especificações apresentadas na Figura 5.24 (d), nomeadamente a espessura de 2cm (t_{GL}) e a distância mínima f_{min} entre o centro do furo e a periferia da placa ($4 > f_{min} > 3,2 r = 3,2 BOHR / 2$, variando entre 3,6 e 3,9cm, respetivamente para uma secção $\phi 24$ e $\phi 27$). A distância do centro do furo à face da viga é de 8cm e as recomendações são de $4r$, variando entre 4,6 e 5,0cm, respetivamente para uma secção $\phi 24$ e $\phi 27$.

Tabela 5.1 – Características das barras calibradas da *Pfeifer* do tipo 860

Tipo	Encaixe forçado aberto							Parafuso		Porca de fixação	Placa de ligação				Massa
M	A	B	C	D	E	F	H	d_B	G	l_M	t_{GL}	f_{min}	c_{min}	BOHR	
mm				mm				mm		mm			mm		kg
24	58	23	48	23	46	39	115	22	59,8	48	20	36	58	23	1,57

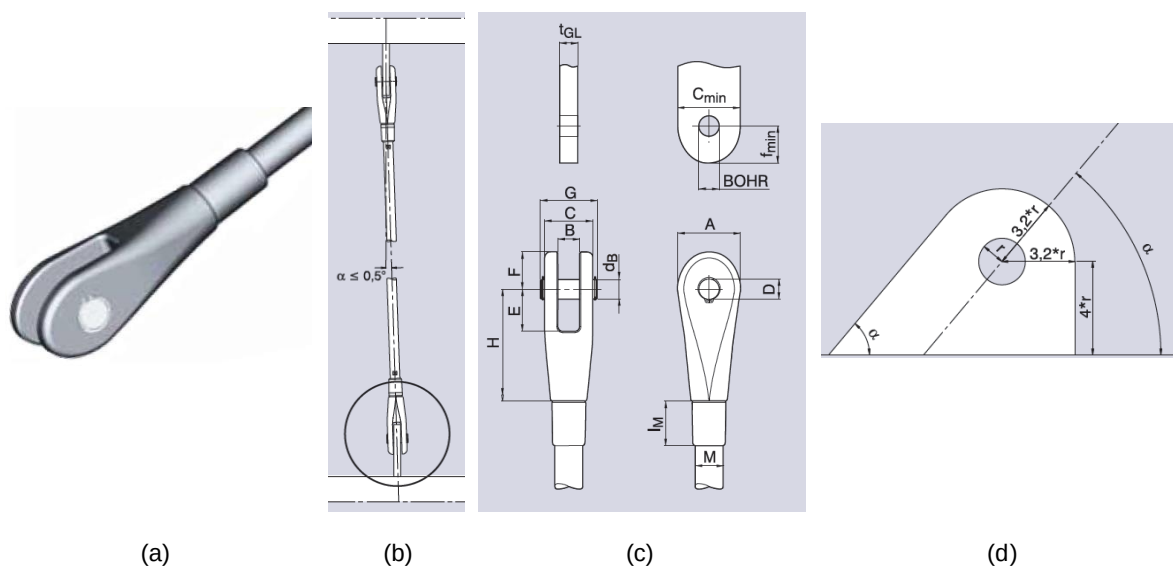


Figura 5.24 – Barras calibradas da *Pfeifer* do tipo 860: (a) Encaixe forçado aberto; (b) Especificação de desalinhamento; (c) Geometria e (d) Especificações da placa metálica de ligação

Os cabos de 36mm são utilizados na suspensão do anel retangular superior. Em primeiro lugar, a extremidade inferior dos cabos é ligada diretamente às chapas metálicas na zona dos cantos do anel (ver a Figura 5.25 (a)). A extremidade superior dos cabos é ligada diretamente ao macaco do tipo *turnbuckle*, que por sua vez é ligado à chapa metálica no topo da cobertura (ver a Figura 5.25 (b)). Em segundo lugar, as terminações dos cabos são realizadas com encaixes zincados do tipo aberto (ver exemplo na Figura 5.26 (a)). A Figura 5.26 (b) apresenta a geometria de um encaixe deste tipo em correspondência com as características sistematizadas na Tabela 5.2. As terminações do macaco são realizadas com encaixes engarfados.

Tabela 5.2 – Características do encaixe zincado aberto da *Pfeifer* do tipo 802

Tipo	A	B	mín		máx		máx		Massa	máx
			B1	B1	dB	E	L1	L		d _s
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	kg	mm
PV150	160	165	70	74	64	82	98	295	15	40



(a)



(b)

Figura 5.25 – Extremidades dos cabos de 36mm: (a) Vista da ligação na parte inferior, Cortesia de José Sánchez e (b) Vista da ligação na parte superior (Sanrocon 2009)

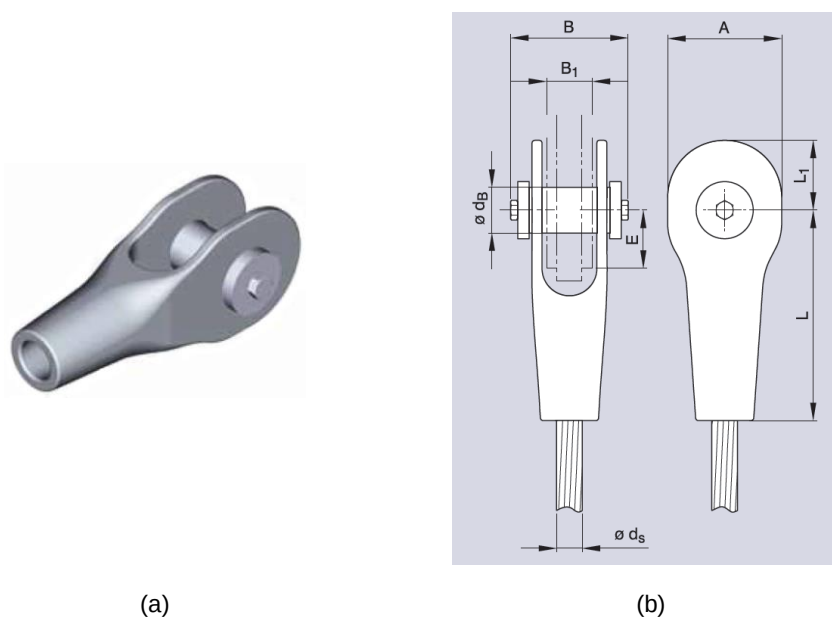


Figura 5.26 – Encaixe zincado aberto da Pfeifer do tipo 802: (a) Vista geral; (b) Geometria

5.3. MATERIAIS

A estrutura metálica tubular é realizada com perfis de aço laminados a frio do tipo *S355JR*. As características das barras calibradas de 25mm e dos cabos de 36mm, utilizados, respectivamente, nos panos laterais e na suspensão dos cantos do anel superior, estão sistematizadas na Tabela 5.3. Estas características são consideradas com base em barras calibradas da marca *Pfeifer* do tipo 860, realizadas com aço *S 460 N*, e com base em cabos do tipo espiral aberto – *GALFAN*, do tipo *PG 125*. As placas de interseção / ligação entre os sistemas de barras calibradas e a estrutura metálica são realizadas com aço do tipo *S 355*.

Tabela 5.3 – Propriedades das barras calibradas e dos cabos

	Módulo de Young E (kN/mm ²)	Diâmetro (mm)	Área (mm ²)	Peso unitário (kg/m)	Força de rotura (kN)	Força admissível (kN)
Barra calibrada	210 ± 10	25,0	490,9	3,85	180	164
Cabo	160 ± 10	36,3	769,0	6,10	1189	721

O material da membrana tensa é realizado em tecido de poliéster revestido a *PVC* do tipo *Ferrari Preconstraint 1002*, com as propriedades sistematizadas na Tabela 5.4, sendo um material muito utilizado em estruturas de membrana de pequena e média dimensão. Este material é dotado ainda de um tratamento superficial à base de *PVDF*.

Tabela 5.4 – Propriedades do tecido de poliéster revestido a PVC do tipo Ferrari Precontraint 1002

Fiação	Peso	Espessura	Tensão de rotura	Resistência ao rasgamento	Módulo de Young E_U e E_T	Coefficiente de Poisson ν_{TU} / ν_{UT}	Módulo de corte G
	(g/m ²)	(mm)	Urdume / Trama (kN/m)	Urdume / Trama (N)	Urdume / Trama (kN/m)		(kN/m)
PES HT 1100 dtex	1050	0,78	84 / 80	550 / 500	773 ¹ / 463 ¹	(0,37 / 0,98) ¹ 0,45 / 0,75	30

¹ Valores aferidos em estudos de Bridgens (2005)

Para efeitos de cálculo estrutural da membrana sob ação dos efeitos do vento pretende-se utilizar o estado plano de tensão e um modelo material ortotrópico linear, que se traduz por uma matriz de rigidez simétrica com base em 5 parâmetros: os módulos de elasticidade nas direções do urdume e da trama, E_U e E_T , os coeficientes de Poisson ν_{TU} e ν_{UT} e o módulo de corte G .

De acordo com a Tabela 5.4, o valor dos módulos de elasticidade $E_U = 773\text{kN/m}$ e $E_T = 463\text{kN/m}$ e dos coeficientes de Poisson $\nu_{TU} = 0,37$ e $\nu_{UT} = 0,98$ são baseados em estudos de Bridgens (2005). No entanto, estes módulos de elasticidade e coeficientes de Poisson aferidos experimentalmente não originam uma matriz simétrica, isto é, não cumprem a relação de reciprocidade, dado que foram estimados sem restrições dos referidos parâmetros. Portanto, o comportamento do material, como concluiu Bridgens (2005) e como será adiante mostrado na análise realizada na secção 5.5.5, não corresponde completamente a um comportamento segundo o estado plano de tensão e um material ortotrópico linear.

Note-se que no *software* de cálculo utilizado ao longo deste trabalho a condição de reciprocidade é imposta pelo próprio programa, atendendo que o utilizador define inicialmente o coeficiente ν_{TU} e, de seguida, o coeficiente ν_{UT} é obtido automaticamente por simetria da referida matriz. Este facto motivou a realização do estudo da influência do coeficiente de Poisson no comportamento da membrana realizado na secção 5.5, em que se procurou balizar o referido comportamento de acordo com os coeficientes de Poisson obtidos nos estudos em Bridgens (2005), tendo sido utilizado um coeficiente de Poisson ν_{TU} entre 0,235 e 0,7, e ν_{UT} respetivamente entre 0,39 e 1,17.

Os estudos realizados na secção 5.5, e em particular nas análises realizadas na secção 5.5.5 de caracterização do erro decorrente da utilização de modelos constitutivos ortotrópicos lineares em detrimento de modelos baseados no comportamento real, levou à reanálise dos dados experimentais cedidos por Bridgens, tendo-se verificado que os planos lineares de melhor ajuste aos dados experimentais conduzem a coeficientes de Poisson $\nu_{TU} = 0,29$ e $\nu_{UT} = 0,94$. Estes valores levaram o presente autor a crer que os coeficientes de Poisson apresentados em Bridgens (2005) de $\nu_{TU} = 0,98$ e $\nu_{UT} = 0,37$ estariam trocados, tendo sido neste trabalho sistematizados ao contrário na Tabela 5.4.

Na análise à ação do vento na secção 5.7, e de acordo com a análise realizada na secção 5.5.5, opta-se por utilizar os coeficientes de Poisson $\nu_{TU} = 0,45$ e $\nu_{UT} = 0,75$, cumprindo a relação de reciprocidade.

O valor do módulo de corte G considera-se igual a 30kN/m , à semelhança de estudos numéricos realizados anteriormente (Gosling *et al.* 2013; Bridgens e Birchall 2012) e bem enquadrado em estudos experimentais publicados (Colman *et al.* 2014; Jackson *et al.* 2009).

5.4. DETERMINAÇÃO DA FORMA DA MEMBRANA TENSA

A estrutura em estudo foi apresentada detalhadamente com o objetivo de realizar um modelo numérico. Para esse efeito é necessária a geometria da membrana e a geometria da estrutura metálica. Ao contrário da geometria da estrutura metálica, a geometria da membrana não é conhecida *a priori*, e não pode ser definida por simples funções matemáticas. Esta secção é portanto dedicada à determinação da forma da estrutura de membrana tensa, sendo arbitrado o nível de pré-esforço com base nas recomendações do manual europeu, e realizando um estudo acerca da topologia estrutural que melhor caracteriza a membrana tensa com base nas diferentes metodologias implementadas no âmbito do presente trabalho.

5.4.1. PRÉ-ESFORÇO

De acordo com a Tabela 5.5, a tensão admissível na membrana em estado limite de serviço é de aproximadamente 17kN/m , tendo por base a aplicação de um fator de segurança de 5. Para efeito do presente estudo será considerado um pré-esforço de 2kN/m nas direções principais de fabrico, verificando os valores recomendados para tecidos de poliéster revestidos com PVC enquadrados na classe do *Tipo II* (Forster e Mollaert 2004), embora este valor esteja no limite inferior do valor recomendado para as membranas em geral.

Tabela 5.5 – Determinação da tensão admissível e do pré-esforço

			Fórmula	Urdume	Trama
Fator de segurança	S			5	5
Tensão de rotura	T_r	(kN/m)		84	80
Tensão admissível	T_e	(kN/m)	T_r/S	17	16
Pré-esforço	T_p (estimativa)	(kN/m)	Máx (1; 1% T_r)	1	1
	T_p (valor)	(kN/m)		2	2
Verificação	PES/PVC Tipo II	$T_{p, \min}$	(kN/m) > 0,9	2 OK	2 OK
		T_p/T_r	(%) > 1,3	2,4 OK	2,5 OK
Geral	T_p/T_r	(%)	$2,5 < T_p/T_r < 6$	2,4	2,5
				KO	OK

5.4.2. MÉTODOS DE DETERMINAÇÃO DA FORMA

A membrana tensa é constituída por três módulos, 1, 2 e 3, de acordo com a descrição da estrutura realizada anteriormente. O módulo 1 está associado à membrana superior. Os outros módulos estão associados à membrana lateral, respetivamente no lado menor e no lado maior dos panos laterais da estrutura. Os três módulos de membrana apresentam dimensões distintas, mas formas semelhantes do tipo paraboloide hiperbólico. No entanto, como referido anteriormente, os módulos 2 e 3 estão ligados, constituindo um único módulo. Deste modo, doravante o módulo 1 será denominado módulo superior, e o módulo que engloba os módulos 2 e 3 será designado módulo lateral.

Pretende-se determinar a geometria destes módulos de membrana, recorrendo aos programas de cálculo de determinação da forma estrutural implementados no âmbito do presente trabalho. Estes

programas baseiam-se no Método da Densidade de Força (*MDF*), no Método da Densidade de Tensão Superficial (*MDTS*) e no Método da Relaxação Dinâmica (*MRD*). Estes métodos permitem determinar a geometria inicial dos módulos da membrana e a distribuição de esforços associada a essa geometria, especificando as tensões pretendidas, ou rácios de tensões, e a topologia estrutural. Ora, as tensões pretendidas foram determinadas anteriormente na secção 5.4.1, restando por isso definir uma topologia estrutural.

No sentido de confirmar os resultados obtidos, e complementar a análise, são utilizados outros métodos / *software* de determinação da forma descritos anteriormente no capítulo três, nomeadamente o Método das Regras Duplas (*RD*), o Método da Superfície Minimal (*SM*) e o *software Formfinder*®, sendo os resultados obtidos comparados com os do projetista.

5.4.2.1. Topologia estrutural

A topologia estrutural é constituída por uma rede de elementos lineares realizada por um conjunto de nós estruturais e de elementos finitos. Os nós estruturais são distinguidos em nós fixos e livres, respetivamente localizados nas fronteiras e no interior da rede do modelo.

A definição da topologia estrutural depende do tipo de malha utilizada pelo método e da orientação das direções de fabrico do material. Em relação ao tipo de malha, nos métodos *MDF* e *MRD* são utilizadas malhas aproximadamente quadrangulares constituídas por elementos de barra de dois nós articulados, e no *MDTS* são utilizadas malhas triangulares constituídas por elementos de membrana triangulares de deformação constante de três nós com 3 graus de liberdade. Adicionalmente, a definição da topologia estrutural baseia-se na orientação das direções de fabrico, e consequentemente na disposição dos padrões de corte nos referidos módulos, dado que estas direções devem estar alinhadas com os elementos de barra articulados utilizados nos modelos, como referido anteriormente no capítulo três.

Porém, numa fase inicial deste trabalho, as direções de fabrico da membrana tensa não eram conhecidas, quer para o módulo superior, quer para o módulo lateral. A informação conhecida baseava-se na representação da Figura 5.10, e das coordenadas dos nós relativas a essa topologia estrutural, cuja configuração se denominou doravante como os resultados do projetista. Para além disso, essa topologia estrutural serviu como base de referência para a realização das topologias estruturais a considerar em cada método.

Para estudar a *influência das metodologias* utilizadas no processo de determinação da forma, bem como a *influência da orientação das direções de fabrico*, face às duas questões colocadas anteriormente na definição da topologia estrutural, foi necessário definir topologias estruturais apresentando características comuns que permitissem a comparação posterior de resultados. Essas características, ou parâmetros de controlo, são definidas designadamente pelas coordenadas de nós específicos, comuns/homólogos nas várias topologias estruturais, apesar das malhas distintas. Esses nós estruturais são definidos pelos nós que resultariam da interseção das diferentes malhas realizadas quando sujeitas a sobreposição, nomeadamente os nós fixos e parte dos nós livres, como se verificará adiante.

De forma a simplificar as análises a realizar nesta secção, é de notar que o estudo da *influência da orientação das direções de fabrico* foi realizado unicamente para o caso do módulo superior de membrana, bem como a utilização dos métodos complementares referidos anteriormente. No caso do módulo lateral, foram utilizados os métodos *MDF* e o *MRD* e posterior comparação com a solução do projetista, assumindo a real orientação das direções de fabrico representada na Figura 5.12.

Deste modo, começando pela descrição das topologias estruturais utilizadas nos modelos do módulo superior, e concretamente para o estudo da influência da orientação das direções de fabrico, foi realizada uma topologia estrutural caracterizada da seguinte forma:

- A *topologia A* (ver a Figura 5.27) tem por objetivo o estudo da orientação das direções de fabrico a 45° da orientação real da estrutura, aplicando os métodos *MDF*, *MRD* e *RD*. É de salientar que não é possível a aplicação dos restantes métodos mencionados anteriormente, dada à incompatibilidade dos mesmos com a *topologia A*. Nesta topologia, a orientação das direções de fabrico estão alinhadas aproximadamente com as direções de desenvolvimento principal do módulo superior, em que a direção do urdume, *U*, permanece alinhada com o desenvolvimento menor do módulo, e a direção da trama, *T*, com o desenvolvimento maior. Esta topologia é realizada através de uma malha retangular baseada na do projetista, na medida em que são utilizadas as mesmas coordenadas dos nós fixos e os mesmos nós livres da referida malha, excetuando-se portanto os elementos diagonais da malha do projetista. De acordo com a informação sistematizada na Tabela 5.6, esta topologia é caracterizada por: 24 nós fixos nos bordos; 21 nós livres no interior da malha e 76 elementos de barra articulados.

Adicionalmente, para estudar a influência das metodologias utilizadas no processo de determinação da forma do módulo superior, foram utilizadas as topologias estruturais caracterizadas da seguinte forma:

- A *topologia B* (ver a Figura 5.27) tem por objetivo a aplicação do *MDTS*, e consequentemente a orientação das direções de fabrico é indiferente atendendo ao facto de serem utilizados elementos triangulares de deformação constante. Esta topologia é realizada através de uma malha triangular igual à do projetista. De acordo com a informação sistematizada na Tabela 5.6, esta topologia é caracterizada por: 24 nós fixos nos bordos; 21 nós livres no interior da malha e 64 elementos de membrana triangulares;
- A *topologia C* (ver a Figura 5.27) tem por objetivo a aplicação do *MDF* e do *MRD* e o estudo da orientação das direções de fabrico real da estrutura, isto é, a orientação das direções de fabrico alinhadas aproximadamente a 45° com as direções de desenvolvimento principal do módulo superior. Esta topologia é realizada através de uma malha retangular baseada na do projetista, na medida em que são utilizadas as mesmas coordenadas dos nós fixos e coexistem os nós livres da referida malha. De acordo com a informação sistematizada na Tabela 5.6, esta topologia é caracterizada por: 24 nós fixos nos bordos; 53 nós livres no interior da malha ($21+32$) e 128 elementos de barra articulados;
- A *topologia D* (ver a Figura 5.27) tem por objetivo a aplicação do método da *SM* utilizando o *software MATLAB*[®]. Este método permite obter uma superfície de área mínima, à semelhança de uma película de sabão, caracterizada por um estado de tensão homogéneo e isotrópico. Por esse motivo, esta metodologia permite complementar o presente estudo, atendendo à premissa inicial de se considerar um pré-esforço igual nas direções do urdume e da trama, originando um rácio de tensões de valor unitário. Esta topologia é realizada através de uma malha triangular com elevada discretização e obtida automaticamente através do referido *software*. De acordo com a informação sistematizada na Tabela 5.6, esta topologia é caracterizada por: 264 nós fixos nos bordos; 6189 nós livres no interior da malha e 12640 elementos triangulares;
- A *topologia E* (ver a Figura 5.27) tem por objetivo a aplicação do *software Formfinder*[®], no sentido de complementar / confirmar os resultados obtidos com base nos métodos referidos anteriormente. Esta topologia é realizada através de uma malha quadrangular regular espaçada de 20cm obtida automaticamente através do referido *software*, sendo especificada a orientação das direções de fabrico em correspondência com a orientação real da estrutura.

Em relação ao módulo lateral, para estudar a influência das metodologias utilizadas no processo de determinação da forma, e considerando a orientação real das direções de fabrico, isto é, a direção do urdume aproximadamente alinhada na vertical em relação ao módulo lateral, e a direção da trama na horizontal, foi realizada uma topologia estrutural caracterizada da seguinte forma:

- A topologia F (ver a Figura 5.28) tem por objetivo a aplicação do MDF e do MRD . Esta topologia é realizada através de uma malha retangular baseada na do projetista, na medida em que são utilizadas as mesmas coordenadas dos nós fixos e os mesmos nós livres da referida malha, excetuando-se portanto os elementos diagonais da malha do projetista. De acordo com a informação sistematizada na Tabela 5.6, esta topologia é caracterizada por: 28 nós fixos nos bordos; 11 nós livres no interior da malha e 62 elementos de barra articulados.

Portanto, de acordo com a Tabela 5.6, são realizados vários modelos numéricos, respetivamente para o módulo superior e para o módulo lateral de membrana. Cada modelo numérico, M_T^M , é caracterizado por uma topologia estrutural, T , descrita anteriormente com denominação entre A e F , e analisado através de uma metodologia / *software* de determinação da forma, M : MDF , $MDTS$, MRD , RD , SM , *Formfinder* ou projetista. A geometria das fronteiras dos modelos é igual para todos os modelos utilizados, respetivamente no módulo superior e lateral. As coordenadas dos nós fixos são fixas e as dos nós livres são obtidas através da metodologia de determinação da forma utilizada no respetivo modelo numérico. As coordenadas dos nós fixos das topologias A , B e C são iguais.

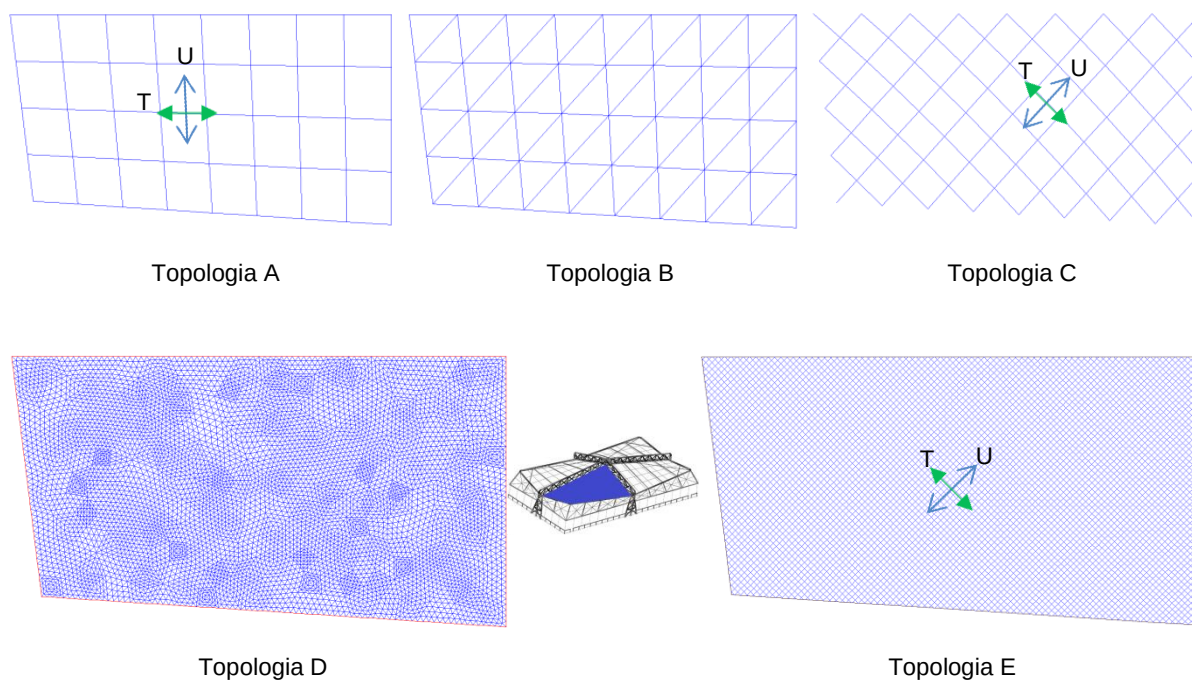


Figura 5.27 – Topologias estruturais para o módulo superior de membrana

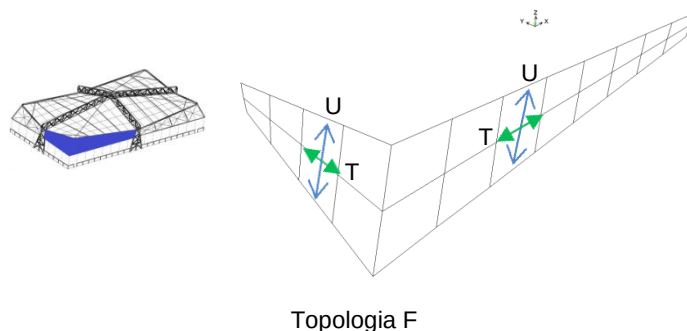


Figura 5.28 – Topologia estrutural para o módulo lateral

Tabela 5.6 – Modelos de membrana: topologia vs metodologia de determinação da forma

Módulo de membrana		Módulo superior (módulo 1)				Módulo lateral (módulos 2 e 3)		
Caracterização da topologia estrutural	Orientação ^a							
			0º	Indif.	45º	Indif.	45º	
	Topologia		A	B	C	D	E	F
	Nós	Fixos	24	24	24	264	s/inf	28
		Livres	21	21	53	6189	s/inf	11
	Elementos	Barra	76		128		s/inf	62
		Triangular		64		12640		
Metodologia / Software de determinação da forma	Método da Densidade de Força (MDF)		M_A^{MDF}		M_C^{MDF}		M_F^{MDF}	
	Método da Densidade de Tensão Superficial (MDTS)		M_B^{MDTS} M_B^{MDTsm}					
	Método da Relaxação Dinâmica (MRD)		M_A^{MRD}		M_C^{MRD}		M_F^{MRD}	
	Regras Duplas (RD)		M_A^{RD}					
	Superfície Minimal (SM)				M_D^{SM}			
	Formfinder®						$M_E^{Form.}$	
	Projetista (referência)		$M_B^{Proj.}$				$M_F^{Proj.}$	

^a Orientação das direções de fabrico em relação às direções de desenvolvimento principal do módulo superior; Nomenclatura: M_T^M – Modelo_{Topologia}^{Método}; Indif. – Indiferente; Proj. – Projetista; Form. - Formfinder®;

5.4.2.2. Pressupostos de cálculo e resultados

Os modelos numéricos baseados na *topologia A*, designadamente o M_A^{MDF} , M_A^{MRD} e M_A^{RD} , em que as direções principais dos elementos estão alinhadas a 0° com o desenvolvimento longitudinal e transversal do módulo superior, foram analisados respetivamente pelos métodos de determinação da forma *MDF*, *MRD* e *RD* (ver a Tabela 5.6). Os pressupostos de cálculo destas metodologias são distintos e encontram-se sistematizados na Tabela 5.7, sendo caracterizados da seguinte forma:

Tabela 5.7 – Pressupostos de cálculo das metodologias de determinação da forma

Metodologia (Topologia)	Dados de input						Método de resolução	Dados de Output					
	Nós		Elementos		Notas / Outros parâmetros	Nós		Elementos					
	X _f	X	F	Con		q ou q _s		X	t	σ			
MDF (Top. A, C e F)	✓		0	✓	q = 2		Matricial direto	✓	var	"2"			
MRD (Top. A, C e F)	✓	arb	0	✓	EA = 0; T = const; C; M; Δt;				Matricial iterativo, baseado no modelo de amortecimento cinético	✓	const		
					Topologia	S _i máx	C	M				Δt	
						A	2148	0				8,2	0,00276
						C	2317	0				4,4	0,00195
						F	4730	0				3,8	0,00127
RD (Top. A)	✓			✓					Interpolação linear	✓			
MDTS (Top. B)	✓	arb	0	✓	q _s = 0,13		Matricial iterativo	✓	var	2			
MDTSm (Top. B)	✓	arb	0	✓	q _s = var		Matricial iterativo com uniformização das tensões (σ _σ → 0)	✓	var	2			
SM (Top. D)	✓			✓	Malha automática				Resolução da EDP linear elítica, estabelecendo um parâmetro não-linear c e as condições de fronteira / Dirichlet	✓	const		
					Fronteira	Condição de Dirichlet							
						1	z = 0,182x+9,7						
						2	z = 0,333y+9,7						
						3	z = 0,137x-0,475y						
						4	z = 0,259x-0,238y						
c	1/(1+u _x ² +u _y ²)^(0,5)												
Formfinder® (Top. E)	✓			✓	q = 2			✓	✓	"2"			

Nomenclatura: ✓ - Visto / Check; X_f - Nós fixos; X - Nós livres; F - Forças nodais; Con. - Conetividade / topologia; q - densidade de força linear (kN/m); q_s - densidade de força superficial (kN/m³); t - esforço axial (kN); σ - Tensão nos elementos (kN/m²); arb - arbitrário; var - variável; const – constante / uniforme; σ_σ - Desvio padrão da tensão média dos elementos; EA - Rigidez axial (kN); $S_{i \text{ máx}}$ - Rigidez nodal máxima (kN/m); C - Matriz de amortecimento (kg/s); M - Matriz de massa; Δt - Intervalo de tempo ou passo de cálculo temporal (s); c - parâmetro não-linear; EDP - Equação Diferencial Parcial

- Para o modelo M_A^{MDF} , os dados de input são a topologia estrutural (ver a Figura 5.29), as coordenadas dos nós fixos, X_f (ver a Tabela 5.8), as forças nodais externas, F , iguais a zero e uma densidade de força, q , igual a $2kN/m$ em todos os elementos. Estes dados permitem determinar a configuração de equilíbrio do modelo M_A^{MDF} (ver a Figura 5.30). Os dados de output são as coordenadas dos nós livres, X (ver a Tabela 5.9), e o esforço axial, t (ver a Tabela 5.10). O esforço axial e o comprimento, l , dos elementos variam para que sejam cumpridas as densidades de força, $q=t/l$, definidas inicialmente. As densidades de força nestes modelos de rede são equivalentes às tensões pretendidas σ na membrana de valor igual a $2kN/m$, como referido anteriormente no capítulo três;

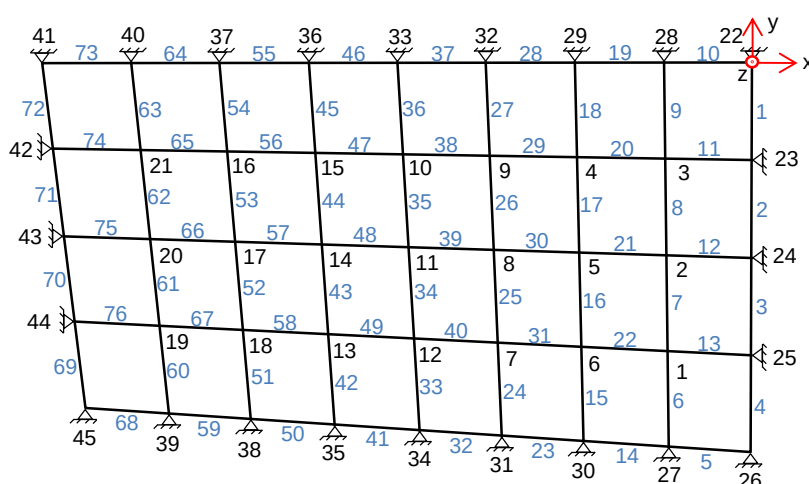


Figura 5.29 – Topologia estrutural dos modelos M_A^{MDF} e M_A^{MRD}

Tabela 5.8 – Coordenadas cartesianas dos nós fixos dos modelos M_A^{MDF} , M_A^{MRD} , M_A^{RD} , M_B^{MDTS} e M_B^{MDTSM}

Nó	x_f (m)	y_f (m)	z_f (m)	Nó	x_f (m)	y_f (m)	z_f (m)
22	0,00	0,00	9,70	34	-10,33	-11,33	6,80
23	0,00	-3,00	8,70	35	-12,91	-11,16	7,07
24	0,00	-6,00	7,70	36	-13,75	0,00	7,20
25	0,00	-9,00	6,70	37	-16,50	0,00	6,70
26	0,00	-12,00	5,70	38	-15,50	-10,99	7,35
27	-2,58	-11,83	5,97	39	-18,08	-10,82	7,62
28	-2,75	0,00	9,20	40	-19,25	0,00	6,20
29	-5,50	0,00	8,70	41	-22,00	0,00	5,70
30	-5,17	-11,66	6,25	42	-21,67	-2,66	6,25
31	-7,75	-11,49	6,52	43	-21,33	-5,33	6,80
32	-8,25	0,00	8,20	44	-21,00	-7,99	7,35
33	-11,00	0,00	7,70	45	-20,66	-10,65	7,89

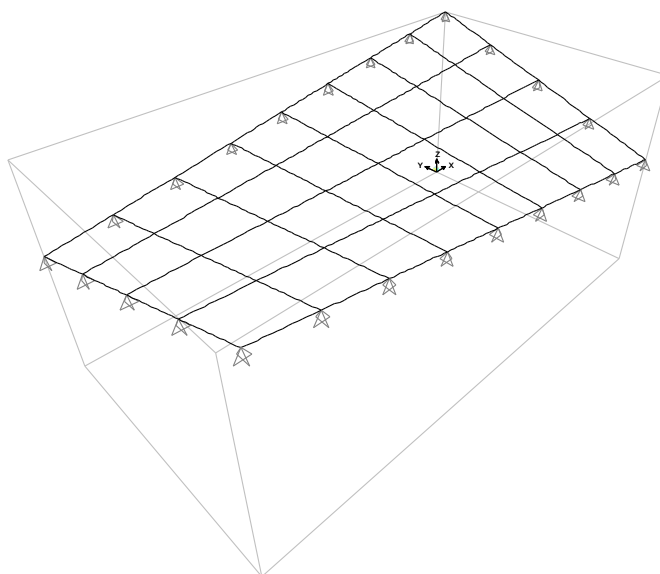


Figura 5.30 – Configuração de equilíbrio do modelo M_A^{MDF}

Tabela 5.9 – Coordenadas cartesianas dos nós livres do modelo M_A^{MDF}

Nó	x (m)	y (m)	z (m)	Nó	x (m)	y (m)	z (m)
1	-2,62	-8,87	6,78	12	-10,50	-8,49	7,02
2	-2,67	-5,92	7,59	13	-13,12	-8,37	7,10
3	-2,71	-2,96	8,39	14	-13,33	-5,58	7,14
4	-5,42	-2,92	8,09	15	-13,54	-2,79	7,17
5	-5,33	-5,83	7,47	16	-16,25	-2,75	6,86
6	-5,25	-8,75	6,86	17	-16,00	-5,49	7,02
7	-7,87	-8,62	6,94	18	-15,75	-8,24	7,18
8	-8,00	-5,75	7,36	19	-18,37	-8,12	7,26
9	-8,12	-2,87	7,78	20	-18,66	-5,41	6,91
10	-10,83	-2,83	7,47	21	-18,96	-2,71	6,55
11	-10,67	-5,66	7,25				

Tabela 5.10 – Densidades de força, comprimento e esforço axial dos elementos do modelo M_A^{MDF}

Elemento	Dados		Resultados		Elemento	Dados		Resultados	
	q (kN/m)	l (m)	t (kN)			q (kN/m)	l (m)	t (kN)	
1	2	3,16	6,32		39	2	2,67	5,34	
2	2	3,16	6,32		40	2	2,63	5,26	
3	2	3,16	6,32		41	2	2,60	5,21	
4	2	3,16	6,32		42	2	2,80	5,59	
5	2	2,60	5,21		43	2	2,80	5,59	
6	2	3,07	6,13		44	2	2,80	5,59	
7	2	3,07	6,13		45	2	2,80	5,59	
8	2	3,07	6,13		46	2	2,80	5,59	
9	2	3,07	6,13		47	2	2,73	5,45	
10	2	2,80	5,59		48	2	2,67	5,34	
11	2	2,73	5,45		49	2	2,63	5,26	
12	2	2,67	5,34		50	2	2,60	5,21	
13	2	2,63	5,26		51	2	2,76	5,53	
14	2	2,60	5,21		52	2	2,76	5,53	
15	2	2,98	5,96		53	2	2,76	5,53	
16	2	2,98	5,96		54	2	2,76	5,53	
17	2	2,98	5,96		55	2	2,80	5,59	
18	2	2,98	5,96		56	2	2,73	5,45	
19	2	2,80	5,59		57	2	2,67	5,34	
20	2	2,73	5,45		58	2	2,63	5,26	
21	2	2,67	5,34		59	2	2,60	5,21	
22	2	2,63	5,26		60	2	2,74	5,49	
23	2	2,60	5,21		61	2	2,74	5,49	
24	2	2,91	5,81		62	2	2,74	5,49	
25	2	2,91	5,81		63	2	2,74	5,49	
26	2	2,91	5,81		64	2	2,80	5,59	
27	2	2,91	5,81		65	2	2,73	5,45	
28	2	2,80	5,59		66	2	2,67	5,34	
29	2	2,73	5,45		67	2	2,63	5,26	
30	2	2,67	5,34		68	2	2,60	5,21	
31	2	2,63	5,26		69	2	2,74	5,48	
32	2	2,60	5,21		70	2	2,74	5,48	
33	2	2,85	5,69		71	2	2,74	5,48	
34	2	2,85	5,69		72	2	2,74	5,48	
35	2	2,85	5,69		73	2	2,80	5,59	
36	2	2,85	5,69		74	2	2,73	5,45	
37	2	2,80	5,59		75	2	2,67	5,34	
38	2	2,73	5,45		76	2	2,63	5,26	

- Para o modelo numérico M_A^{MRD} , os dados de input são a topologia estrutural (ver a Figura 5.29), as coordenadas dos nós fixos, X_f , (ver a Tabela 5.8), as coordenadas dos nós livres, X , arbitradas no plano $z = 5,7m$ (note-se que, ao contrário do MDF , aqui é necessário definir as coordenadas dos nós livres – ver a Tabela 5.11), as forças nodais externas, F , iguais a zero e os parâmetros de estabilidade descritos anteriormente no capítulo três, nomeadamente o amortecimento, a massa e o intervalo de tempo. Os parâmetros de estabilidade são estimados ao nível dos nós, tendo como base uma rigidez nodal máxima, $S_{i,máx}$ (ver a equação (3.47), dependendo da geometria da malha e do módulo de elasticidade da membrana. Para o cálculo de $S_{i,máx}$ considera-se o comprimento médio dos elementos em cada uma das direções, x e y , com base nos resultados obtidos da malha resultante do modelo M_A^{MDF} , vindo então $S_{i,máx} = \max \{S_{i,x}; S_{i,y}\} = \max \{3/2 \times 2 \times 463 \times 2,90/2,69; 3/2 \times 2 \times 773 \times 2,69/2,9\} = \max \{1500; 2148\} = 2148 \text{ kN/m}$. O amortecimento, C , é igual a 0 kg/s , dado que se pretende resolver este modelo numérico com base no MRD via modelo de amortecimento cinético; a massa, M , é igual a $8,2 \text{ kg}$ ($1,05 \times 2,9 \times 2,69$) e o intervalo de tempo, Δt , é igual a $0,00276 \text{ s}$ ($\sqrt{(2 \times 8,2 / (2148 \times 10^3))}$), dependendo da massa nodal fictícia estimada e da máxima rigidez nodal (ver a equação (3.56)). Como referido anteriormente no capítulo três, a massa e o intervalo de tempo devem ser articulados por forma a assegurar a convergência da análise para um estado de equilíbrio, evitando instabilidades numéricas que podem ocorrer se a massa for elevada e o intervalo de tempo reduzido. Atendendo que se pretende determinar a forma de uma membrana com a malha regular, correspondente a uma rede geodésica, a determinação da forma deste modelo numérico através deste método é realizada adotando-se uma rigidez axial das barras, EA , igual a 0 kN e um esforço axial, t , constante e igual a 2 kN nos elementos. Consequentemente, o problema é puramente geométrico e a solução final é independente do esforço axial considerado, devendo-se garantir anteriormente a utilização de uma malha quadrangular regular. Os dados de output são as coordenadas dos nós livres, X (ver a Tabela 5.11), e o esforço axial, t , nos elementos constante e igual a 2 kN . A Figura 5.31 (a) apresenta a geometria final da análise. A Figura 5.31 (b) apresenta a evolução da resposta estrutural dos nós 5 e 8. A Figura 5.31 (c) apresenta a evolução da energia cinética do sistema. A convergência do método foi obtida rapidamente, tendo sido necessárias 2864 iterações para um parâmetro de convergência de $\delta = 1 \times 10^{-9}$. O número de picos de energia cinética detetados foi de 37. O primeiro pico está relacionado com o modo de frequência mais baixa, associado ao comportamento global da forma estrutural, sendo o movimento ascendente e perpendicular ao plano da superfície inicial. Por isso se evidencia nos nós 5 e 8 uma alteração significativa da sua coordenada no eixo dos zz . De seguida, ocorrem picos de energia sucessivamente mais baixos, mais frequentes, embora não seja perceptível na Figura 5.31 (c), até que o modelo converge na posição de equilíbrio estático;

Tabela 5.11 – Coordenadas cartesianas iniciais e finais dos nós livres do modelo M_A^{MRD}

Nó	Geometria inicial			Geometria final		
	x (m)	y (m)	z (m)	x (m)	y (m)	z (m)
1	-3,00	-8,00	5,70	-2,62	-8,87	6,78
2	-3,00	-5,50	5,70	-2,67	-5,92	7,59
3	-3,00	-3,00	5,70	-2,71	-2,96	8,39
4	-5,50	-3,00	5,70	-5,42	-2,92	8,09
5	-5,50	-5,50	5,70	-5,33	-5,83	7,47
6	-5,50	-8,00	5,70	-5,25	-8,75	6,86
7	-8,00	-8,00	5,70	-7,87	-8,62	6,94
8	-8,00	-5,50	5,70	-8,00	-5,75	7,36
9	-8,00	-3,00	5,70	-8,12	-2,87	7,78
10	-10,50	-3,00	5,70	-10,83	-2,83	7,47
11	-10,50	-5,50	5,70	-10,67	-5,66	7,25
12	-10,50	-8,00	5,70	-10,50	-8,49	7,02
13	-13,00	-8,00	5,70	-13,12	-8,37	7,10
14	-13,00	-5,50	5,70	-13,33	-5,58	7,14
15	-13,00	-3,00	5,70	-13,54	-2,79	7,17
16	-15,50	-3,00	5,70	-16,25	-2,75	6,86
17	-15,50	-5,50	5,70	-16,00	-5,49	7,02
18	-15,50	-8,00	5,70	-15,75	-8,24	7,18
19	-18,00	-8,00	5,70	-18,37	-8,12	7,26
20	-18,00	-5,50	5,70	-18,66	-5,41	6,91
21	-18,00	-3,00	5,70	-18,96	-2,71	6,55

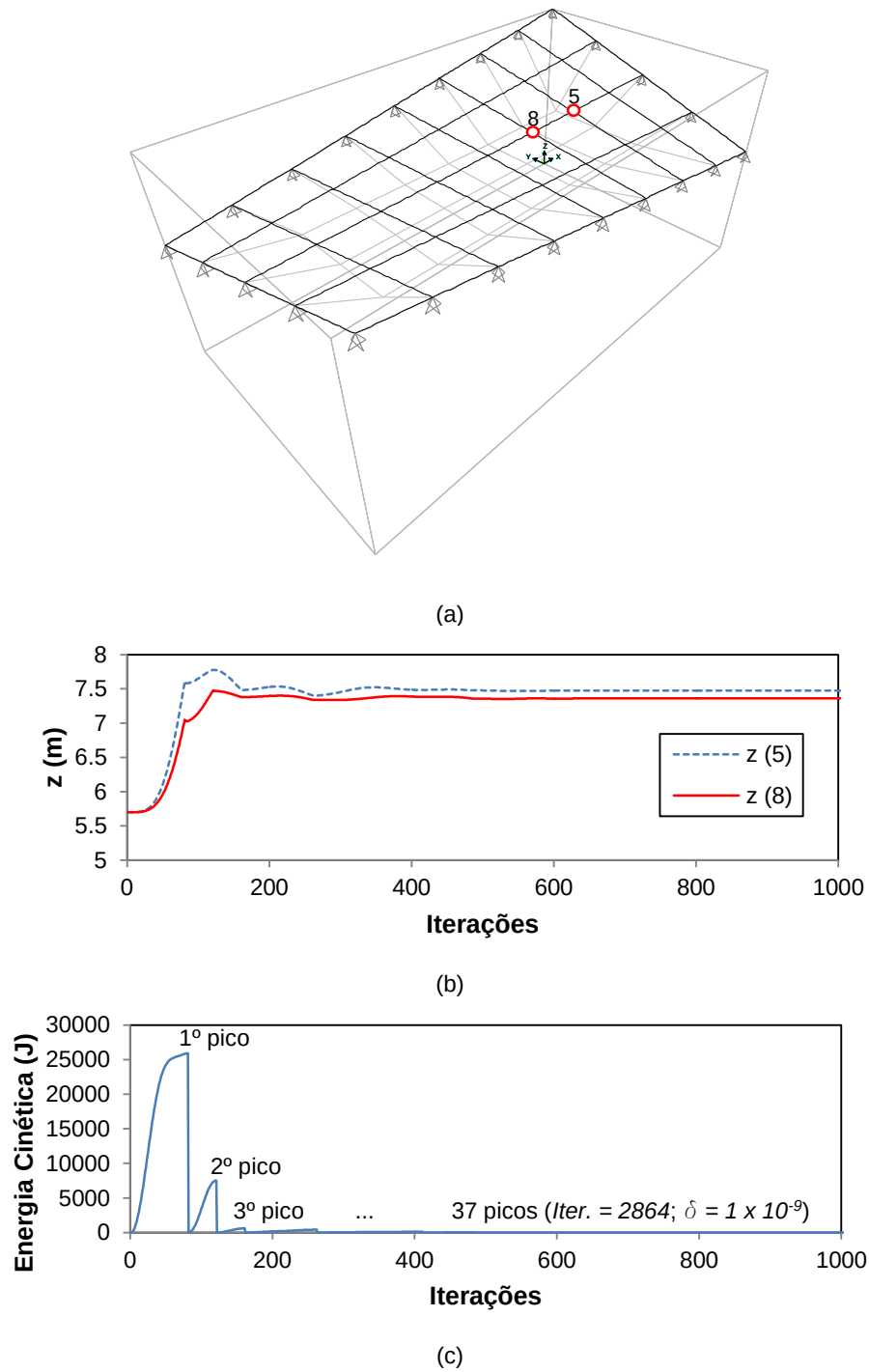


Figura 5.31 – (a) Configuração de equilíbrio do modelo M_A^{MRD} ; (b) Evolução da resposta estrutural dos nós 5 e 8 e (c) Evolução da energia cinética

- No sentido de complementar os resultados obtidos pelos dois métodos anteriores, e atendendo à compatibilidade da *topologia A* com a aplicação do método *RD*, foi realizado o modelo numérico M_A^{RD} . O método *RD* consiste em realizar semirretas entre os nós fixos de lados opostos de um paraboloide hiperbólico, visando a determinação das coordenadas dos nós livres através da aplicação de uma interpolação linear das coordenadas dos nós fixos. O cruzamento de

duas semirretas provenientes de lados opostos distintos de um paraboloide hiperbólico ocorre à mesma cota, dado que o paraboloide hiperbólico é uma superfície duplamente regrada, como descrito anteriormente no capítulo três. Por isso, de acordo com a Tabela 5.7, os dados de input são as coordenadas dos nós fixos, X_f (ver a Tabela 5.8), e os dados de output são as coordenadas dos nós livres, X (ver a Tabela 5.12). É de notar que as coordenadas dos nós livres são aproximadamente iguais às obtidas pelos métodos anteriores, tendo em conta o número de casas decimais apresentadas no presente trabalho. Por isso, a geometria final é aproximadamente igual à apresentada nas Figuras 5.30 e 5.31 (a).

Tabela 5.12 – Coordenadas cartesianas dos nós livres do modelo M_A^{RD}

Nó	x (m)	y (m)	z (m)	Nó	x (m)	y (m)	z (m)
1	-2,62	-8,87	6,78	12	-10,50	-8,49	7,02
2	-2,67	-5,92	7,59	13	-13,12	-8,37	7,10
3	-2,71	-2,96	8,39	14	-13,33	-5,58	7,14
4	-5,42	-2,92	8,09	15	-13,54	-2,79	7,17
5	-5,33	-5,83	7,47	16	-16,25	-2,75	6,86
6	-5,25	-8,75	6,86	17	-16,00	-5,49	7,02
7	-7,87	-8,62	6,94	18	-15,75	-8,24	7,18
8	-8,00	-5,75	7,36	19	-18,37	-8,12	7,26
9	-8,12	-2,87	7,78	20	-18,66	-5,41	6,91
10	-10,83	-2,83	7,47	21	-18,96	-2,71	6,55
11	-10,67	-5,66	7,25				

Por sua vez, os modelos numéricos baseados na *topologia B*, designadamente o M_B^{MDTS} e M_B^{MDTsm} , foram analisados pelo *MDTS* que permite obter uma solução com tensões uniformes. De acordo com a informação sistematizada na Tabela 5.7, os pressupostos de cálculo dessa metodologia, aplicada aos respetivos modelos, são caracterizados da seguinte forma:

- Para o modelo M_B^{MDTS} , os dados de input são a topologia estrutural (ver a Figura 5.32), as coordenadas dos nós fixos, X_f (ver a Tabela 5.8), as coordenadas dos nós livres, X (ver a Tabela 5.13), arbitradas no plano $z = 5,7m$ (iguais às coordenadas arbitradas anteriormente para o modelo M_A^{MRD} - ver a Tabela 5.11), as forças nodais externas, F , iguais a zero, e a densidade de tensão superficial, q_s , igual a $0,13kN/m^3$ em todos os elementos de membrana. Estes dados permitem determinar a configuração de equilíbrio do modelo M_B^{MDTS} , aplicando o *MDTS* (ver a Figura 5.33). No entanto, é de salientar que o *MDTS* foi aplicado iterativamente, arbitrando valores da densidade de tensão superficial, q_s , iguais para todos os elementos, até que fosse obtida uma configuração de equilíbrio cuja tensão média dos elementos de membrana resultante fosse igual a $2kN/m$. Os dados de output são as coordenadas dos nós livres, X (ver a Tabela 5.13), a geometria dos elementos triangulares de membrana, nomeadamente o comprimento dos lados, área e ângulos internos (ver a Figura 5.34 e as Tabelas 5.14 e 5.15), e as tensões nos elementos, σ (ver a Tabela 5.14). Adicionalmente, é possível obter as forças nos elementos triangulares (ver a Tabela 5.15). No entanto, é importante notar-se que no *MDTS* é garantida a continuidade do campo de deslocamentos nas fronteiras dos elementos triangulares, mas as

deformações e as tensões não são contínuas nessas fronteiras. Por este motivo, é necessária uma discretização mais fina da malha para se obter maior precisão;

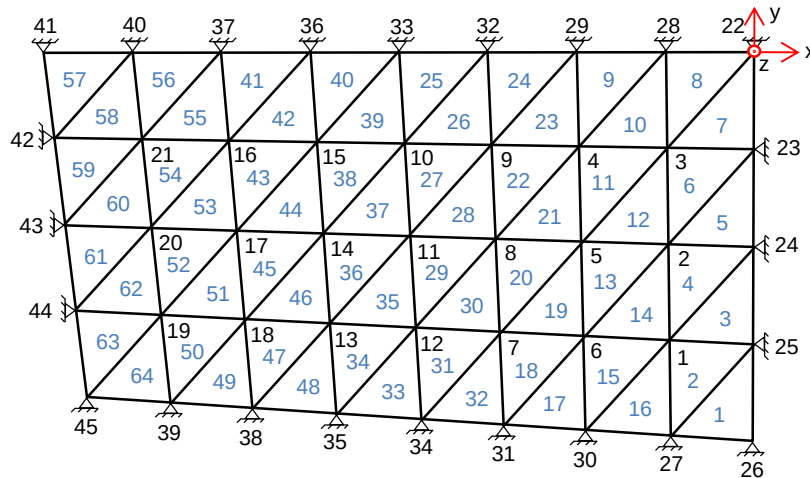
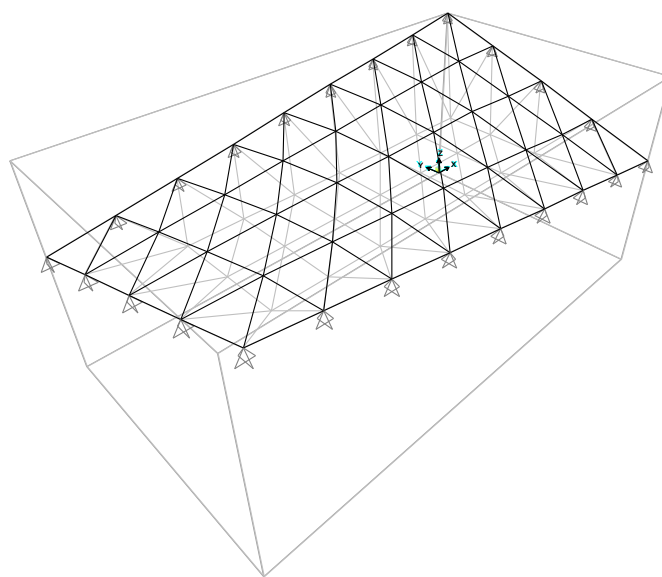


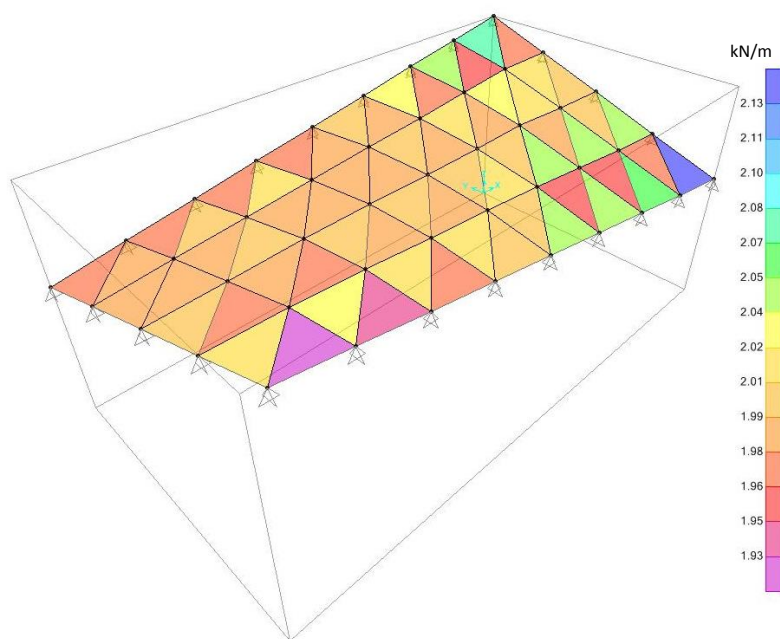
Figura 5.32 – Topologia estrutural dos modelos M_B^{MDTS} e M_B^{MDTsm}

Tabela 5.13 – Coordenadas cartesianas iniciais e finais dos nós livres do modelo M_B^{MDTS}

Geometria inicial				Geometria final		
Nó	x (m)	y (m)	z (m)	x (m)	y (m)	z (m)
1	-3,00	-8,00	5,70	-2,48	-8,89	6,79
2	-3,00	-5,50	5,70	-2,43	-5,85	7,63
3	-3,00	-3,00	5,70	-2,38	-2,74	8,50
4	-5,50	-3,00	5,70	-5,02	-2,75	8,19
5	-5,50	-5,50	5,70	-4,82	-5,62	7,58
6	-5,50	-8,00	5,70	-4,96	-8,71	6,89
7	-8,00	-8,00	5,70	-7,43	-8,52	6,99
8	-8,00	-5,50	5,70	-7,42	-5,60	7,46
9	-8,00	-3,00	5,70	-7,69	-2,75	7,88
10	-10,50	-3,00	5,70	-10,42	-2,74	7,57
11	-10,50	-5,50	5,70	-10,08	-5,53	7,35
12	-10,50	-8,00	5,70	-10,04	-8,41	7,07
13	-13,00	-8,00	5,70	-12,69	-8,26	7,15
14	-13,00	-5,50	5,70	-12,82	-5,45	7,23
15	-13,00	-3,00	5,70	-13,20	-2,71	7,26
16	-15,50	-3,00	5,70	-16,04	-2,71	6,93
17	-15,50	-5,50	5,70	-15,61	-5,36	7,11
18	-15,50	-8,00	5,70	-15,39	-8,12	7,23
19	-18,00	-8,00	5,70	-18,14	-7,99	7,29
20	-18,00	-5,50	5,70	-18,49	-5,36	6,97
21	-18,00	-3,00	5,70	-18,86	-2,69	6,60



(a)



(b)

Figura 5.33 – Configuração de equilíbrio do modelo M_B^{MDTS} : (a) Geometria final e (b) Tensões

Tabela 5.14 – Características geométricas e tensão dos elementos triangulares do modelo M_B^{MDTS}

Elemento	Comprimento dos lados			Semiperímetro	Área	Tensão	Elemento	Comprimento dos lados			Semiperímetro	Área	Tensão
	$l_1=l_{23}$	$l_2=l_{31}$	$l_3=l_{12}$	s	S	σ		$l_1=l_{23}$	$l_2=l_{31}$	$l_3=l_{12}$	s	S	σ
	(m)	(m)	(m)	(m)	(m ²)	(kN/m)		(m)	(m)	(m)	(m)	(m ²)	(kN/m)
1	2,60	3,16	3,90	4,83	4,10	2,13	33	2,60	2,95	3,98	4,77	3,84	2,00
2	3,90	2,48	3,05	4,72	3,78	1,97	34	2,91	3,98	2,66	4,77	3,86	2,01
3	3,16	3,91	2,48	4,78	3,91	2,04	35	2,66	2,89	3,78	4,66	3,83	1,99
4	2,43	3,15	3,91	4,75	3,83	2,00	36	2,82	3,78	2,74	4,67	3,85	2,00
5	3,16	3,90	2,43	4,75	3,84	2,00	37	2,74	2,82	3,63	4,60	3,82	1,99
6	2,41	3,23	3,90	4,77	3,88	2,02	38	2,77	3,63	2,80	4,60	3,83	1,99
7	3,16	3,83	2,41	4,70	3,79	1,97	39	3,52	2,80	2,80	4,56	3,83	1,99
8	2,80	2,85	3,83	4,74	3,97	2,07	40	2,80	2,76	3,52	4,54	3,78	1,97
9	2,80	2,84	3,71	4,67	3,93	2,05	41	2,80	2,75	3,55	4,55	3,79	1,97
10	3,71	2,65	2,85	4,60	3,76	1,96	42	3,55	2,86	2,76	4,59	3,86	2,01
11	2,94	3,89	2,65	4,74	3,90	2,03	43	2,69	3,59	2,86	4,57	3,80	1,98
12	3,89	2,41	3,23	4,76	3,88	2,02	44	3,59	2,80	2,77	4,58	3,82	1,99
13	3,16	3,88	2,41	4,73	3,80	1,98	45	2,77	3,71	2,80	4,64	3,85	2,00
14	3,88	2,49	3,15	4,76	3,92	2,04	46	3,71	2,71	2,82	4,62	3,80	1,98
15	3,03	3,90	2,49	4,71	3,77	1,96	47	2,87	3,92	2,71	4,75	3,89	2,02
16	2,60	3,05	3,90	4,78	3,96	2,06	48	2,60	2,91	3,92	4,71	3,78	1,97
17	2,60	3,03	3,96	4,80	3,95	2,05	49	2,60	2,87	3,83	4,65	3,74	1,94
18	3,03	3,96	2,49	4,74	3,76	1,96	50	2,85	3,83	2,75	4,71	3,90	2,03
19	2,49	3,16	3,94	4,79	3,93	2,04	51	2,75	2,77	3,65	4,59	3,78	1,97
20	2,96	3,94	2,60	4,75	3,85	2,00	52	2,68	3,65	2,89	4,61	3,83	1,99
21	2,60	2,94	3,80	4,67	3,82	1,99	53	2,89	2,69	3,62	4,60	3,84	2,00
22	2,89	3,80	2,69	4,69	3,88	2,02	54	2,72	3,62	2,84	4,59	3,81	1,98
23	3,61	2,69	2,84	4,57	3,78	1,97	55	3,58	2,84	2,75	4,59	3,85	2,00
24	2,80	2,83	3,61	4,62	3,89	2,03	56	2,80	2,75	3,58	4,56	3,79	1,97
25	2,80	2,80	3,55	4,58	3,84	2,00	57	2,74	3,60	2,80	4,57	3,78	1,97
26	3,55	2,75	2,83	4,56	3,81	1,98	58	3,60	2,83	2,75	4,59	3,83	1,99
27	2,82	3,71	2,75	4,64	3,85	2,00	59	2,74	3,62	2,83	4,59	3,83	1,99
28	3,71	2,67	2,89	4,63	3,82	1,99	60	3,62	2,84	2,72	4,59	3,81	1,98
29	2,89	3,86	2,67	4,70	3,84	2,00	61	2,74	3,65	2,84	4,62	3,85	2,00
30	3,86	2,61	2,96	4,71	3,85	2,01	62	3,65	2,86	2,68	4,59	3,79	1,97
31	2,95	4,04	2,61	4,80	3,84	2,00	63	2,74	3,72	2,86	4,66	3,89	2,02
32	2,60	3,03	4,04	4,84	3,94	2,05	64	2,60	2,85	3,72	4,59	3,70	1,93
Média													2,00
Desvio-Padrão													0,03

Tabela 5.15 – Características geométricas e forças dos elementos triangulares do modelo M_B^{MDTS}

Elemento	Ângulos			Forças			Elemento	Ângulos			Forças		
	α_1	α_2	α_3	T_1	T_2	T_3		α_1	α_2	α_3	T_1	T_2	T_3
	(m)	(m)	(m)	(m)	(m ²)	(kN/m)		(m)	(m)	(m)	(m)	(m ²)	(kN/m)
1	0,73	0,94	1,48	3,12	2,47	0,40	33	0,71	0,83	1,60	3,01	2,67	0,10
2	1,56	0,69	0,90	0,06	2,96	2,39	34	0,82	1,59	0,73	2,74	0,09	2,98
3	0,94	1,52	0,68	2,36	0,21	3,09	35	0,78	0,87	1,50	2,69	2,44	0,28
4	0,67	0,94	1,54	3,06	2,32	0,14	36	0,84	1,50	0,81	2,53	0,29	2,62
5	0,95	1,52	0,67	2,28	0,19	3,05	37	0,84	0,88	1,42	2,43	2,34	0,54
6	0,66	0,98	1,50	3,11	2,21	0,27	38	0,85	1,42	0,87	2,40	0,54	2,37
7	0,97	1,49	0,68	2,14	0,29	2,95	39	1,36	0,89	0,89	0,76	2,25	2,25
8	0,82	0,84	1,49	2,72	2,66	0,33	40	0,89	0,88	1,37	2,21	2,25	0,70
9	0,84	0,86	1,44	2,54	2,49	0,52	41	0,88	0,87	1,39	2,25	2,30	0,64
10	1,48	0,79	0,87	0,35	2,56	2,34	42	1,37	0,91	0,87	0,73	2,25	2,36
11	0,86	1,53	0,75	2,58	0,15	2,89	43	0,83	1,40	0,90	2,41	0,60	2,22
12	1,50	0,67	0,98	0,29	3,09	2,19	44	1,40	0,88	0,86	0,61	2,31	2,34
13	0,95	1,52	0,67	2,24	0,18	3,02	45	0,84	1,46	0,85	2,51	0,42	2,48
14	1,50	0,69	0,94	0,27	3,05	2,33	46	1,47	0,81	0,86	0,36	2,53	2,42
15	0,89	1,56	0,69	2,41	0,05	2,95	47	0,82	1,56	0,76	2,70	0,06	2,86
16	0,73	0,90	1,52	3,00	2,51	0,22	48	0,73	0,84	1,58	2,88	2,59	0,04
17	0,72	0,87	1,55	3,07	2,62	0,07	49	0,75	0,85	1,55	2,73	2,46	0,09
18	0,87	1,59	0,68	2,50	0,09	3,02	50	0,84	1,51	0,80	2,61	0,25	2,72
19	0,68	0,93	1,53	3,13	2,41	0,16	51	0,84	0,85	1,45	2,41	2,38	0,45
20	0,85	1,57	0,72	2,61	0,00	2,97	52	0,81	1,43	0,90	2,53	0,51	2,29
21	0,75	0,88	1,50	2,76	2,40	0,25	53	0,91	0,83	1,41	2,25	2,48	0,60
22	0,86	1,49	0,79	2,50	0,29	2,71	54	0,84	1,42	0,89	2,43	0,56	2,29
23	1,42	0,83	0,89	0,53	2,43	2,27	55	1,39	0,89	0,86	0,66	2,28	2,39
24	0,87	0,88	1,40	2,41	2,37	0,64	56	0,88	0,86	1,40	2,29	2,34	0,59
25	0,88	0,89	1,37	2,30	2,29	0,71	57	0,85	1,41	0,88	2,36	0,56	2,29
26	1,38	0,86	0,90	0,67	2,34	2,24	58	1,40	0,89	0,85	0,62	2,30	2,39
27	0,86	1,46	0,83	2,44	0,43	2,53	59	0,85	1,41	0,88	2,42	0,57	2,32
28	1,46	0,80	0,89	0,41	2,59	2,35	60	1,42	0,89	0,84	0,56	2,29	2,43
29	0,84	1,53	0,76	2,56	0,14	2,79	61	0,84	1,43	0,88	2,48	0,54	2,36
30	1,53	0,74	0,87	0,17	2,85	2,49	62	1,44	0,89	0,81	0,48	2,29	2,50
31	0,82	1,63	0,70	2,77	0,22	3,09	63	0,82	1,45	0,87	2,58	0,45	2,45
32	0,70	0,85	1,59	3,17	2,74	0,10	64	0,77	0,87	1,50	2,57	2,31	0,26

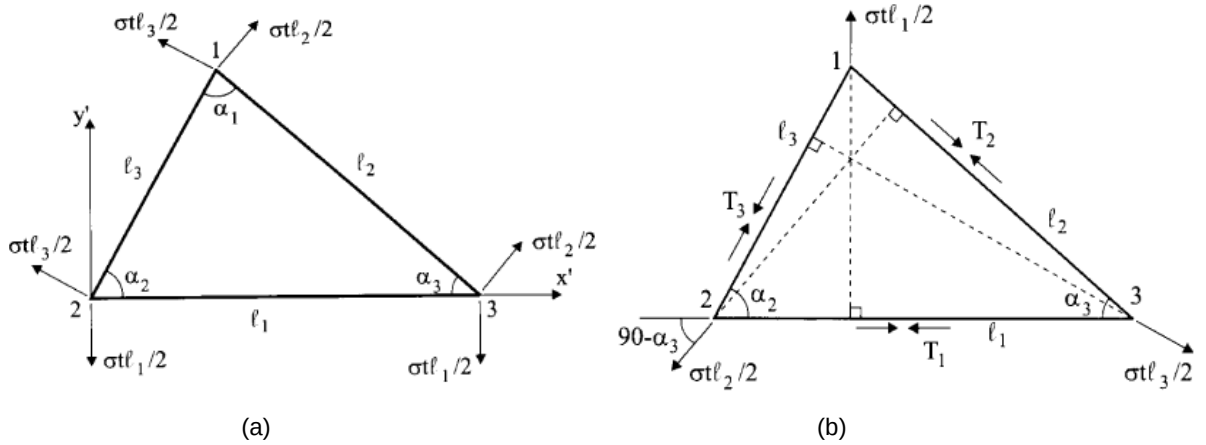


Figura 5.34 – Elemento de membrana triangular de deformação constante utilizado no *MDTS*, adaptado de Topping e Ivanyi (2007): (a) Geometria e (b) Forças nodais resultantes

- No entanto, apesar da tensão média da membrana obtida anteriormente no modelo M_B^{MDTS} ser igual a 2kN/m , apresentando um desvio padrão igual a $0,03\text{kN/m}$ (ver a Tabela 5.14), decidiu-se aplicar um algoritmo iterativo que permitisse uniformizar ainda mais as tensões da membrana, reduzindo o desvio padrão mencionado. Esse processo iterativo, que se denominou por *MDTS* melhorado (*MDTsm*), consistiu em aplicar iterativamente o *MDTS* a um conjunto de densidades de tensão superficial dos elementos sucessivamente diferentes. Assim sendo, as primeiras densidades de tensão superficial são iguais em todos os elementos, $0,13\text{kN/m}^2$. Nas iterações seguintes, as densidades de tensão superficial são determinadas em cada elemento de membrana através de

$$\Delta\sigma_i^j = \frac{\sigma_i^j - \sigma_{pretendido}}{\sigma_{pretendido}} \times 100 (\%) = \frac{\sigma_i^j - 2}{2} \times 100 (\%) \quad (5.1)$$

$$q_{s_i}^{j+1} = q_{s_i}^j (1 - \Delta\sigma_i^j \times 0,01), \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n \text{ iterações; } i = 1, 2, \dots, m \text{ elementos} \quad (5.2)$$

em que $\Delta\sigma$ é a variação da tensão no elemento de membrana em relação ao valor pretendido e q_s é a densidade de tensão superficial.

Com efeito, para o modelo M_B^{MDTsm} , os dados de input são a topologia estrutural (ver a Figura 5.32), as coordenadas dos nós fixos, X_f (ver a Tabela 5.8), as coordenadas dos nós livres, X (ver a Tabela 5.16), arbitradas no plano $z = 5,7\text{m}$, as forças nodais externas, F , iguais a zero, e a densidade de tensão superficial, q_s , igual a $0,13\text{kN/m}^2$ em todos os elementos de membrana. Estes dados permitem determinar a configuração de equilíbrio do modelo M_B^{MDTsm} , aplicando o *MDTsm* (ver a Figura 5.35). Os dados de output são as coordenadas dos nós livres, X (ver a Tabela 5.16), a geometria dos elementos triangulares de membrana, nomeadamente o comprimento dos lados, área e ângulos internos (ver as Tabelas 5.17 e 5.18), e as tensões nos elementos, σ (ver a Tabela 5.17). Adicionalmente, é possível obter as forças nos elementos triangulares (ver a Tabela 5.18). É de salientar que o desvio padrão das tensões na membrana é substancialmente mais reduzido ($5,79 \times 10^{-4}$), apesar da malha então obtida não se ter alterado significativamente. Os resultados obtidos pelo *MDTS* apresentam melhor qualidade com a maior discretização da malha subjacente.

Tabela 5.16 – Coordenadas cartesianas iniciais e finais dos nós livres do modelo M_B^{MDTsm}

Nó	Geometria inicial			Geometria final		
	x (m)	y (m)	z (m)	x (m)	y (m)	z (m)
1	-3,00	-8,00	5,70	-2,53	-8,87	6,80
2	-3,00	-5,50	5,70	-2,52	-5,88	7,62
3	-3,00	-3,00	5,70	-2,42	-2,72	8,51
4	-5,50	-3,00	5,70	-5,19	-2,81	8,16
5	-5,50	-5,50	5,70	-4,89	-5,54	7,59
6	-5,50	-8,00	5,70	-5,10	-8,72	6,90
7	-8,00	-8,00	5,70	-7,55	-8,46	7,00
8	-8,00	-5,50	5,70	-7,67	-5,66	7,44
9	-8,00	-3,00	5,70	-7,89	-2,79	7,85
10	-10,50	-3,00	5,70	-10,63	-2,75	7,55
11	-10,50	-5,50	5,70	-10,35	-5,56	7,34
12	-10,50	-8,00	5,70	-10,25	-8,44	7,07
13	-13,00	-8,00	5,70	-12,90	-8,28	7,16
14	-13,00	-5,50	5,70	-13,09	-5,48	7,22
15	-13,00	-3,00	5,70	-13,42	-2,78	7,23
16	-15,50	-3,00	5,70	-16,15	-2,73	6,92
17	-15,50	-5,50	5,70	-15,92	-5,52	7,10
18	-15,50	-8,00	5,70	-15,60	-8,19	7,24
19	-18,00	-8,00	5,70	-18,38	-8,17	7,32
20	-18,00	-5,50	5,70	-18,61	-5,40	6,97
21	-18,00	-3,00	5,70	-18,90	-2,68	6,60

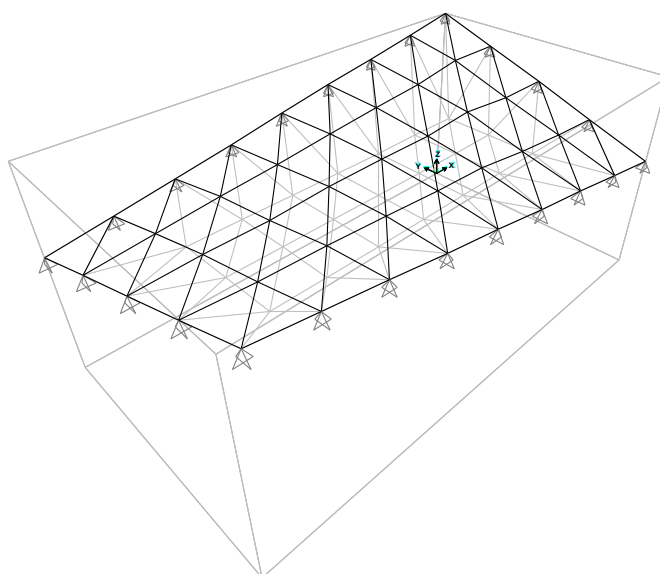
Figura 5.35 – Configuração de equilíbrio do modelo M_B^{MDTsm}

Tabela 5.17 – Características geométricas e tensão dos elementos triangulares do modelo M_B^{MDTsm}

Elemento	Dados	Comprimento dos lados			Semiperímetro	Área	Tensão	Elemento	Dados	Comprimento dos lados			Semiperímetro	Área	Tensão
	q_s	$l_1=l_{23}$	$l_2=l_{31}$	$l_3=l_{12}$	s	S	σ		q_s	$l_1=l_{23}$	$l_2=l_{31}$	$l_3=l_{12}$	s	S	σ
	(kN/m ³)	(m)	(m)	(m)	(m)	(m ²)	(kN/m)		(kN/m ³)	(m)	(m)	(m)	(m)	(m ²)	(kN/m)
1	0,12	2,60	3,16	3,90	4,83	4,10	2,00	33	0,13	2,60	2,90	3,81	4,65	3,77	2,00
2	0,13	3,90	2,53	3,08	4,76	3,90	2,00	34	0,13	2,87	3,81	2,66	4,67	3,82	2,00
3	0,13	3,16	3,93	2,53	4,81	4,00	2,00	35	0,13	2,66	2,90	3,74	4,65	3,83	2,00
4	0,13	2,52	3,09	3,93	4,77	3,90	2,00	36	0,13	2,81	3,74	2,75	4,65	3,84	2,00
5	0,13	3,16	3,98	2,52	4,83	3,98	2,00	37	0,13	2,75	2,83	3,69	4,63	3,85	2,00
6	0,12	2,44	3,29	3,98	4,85	4,00	2,00	38	0,13	2,73	3,69	2,81	4,62	3,81	2,00
7	0,13	3,16	3,83	2,44	4,71	3,84	2,00	39	0,13	3,71	2,81	2,78	4,65	3,89	2,00
8	0,13	2,80	2,83	3,83	4,72	3,94	2,00	40	0,13	2,80	2,79	3,71	4,65	3,88	2,00
9	0,12	2,80	2,87	3,86	4,77	4,01	2,00	41	0,13	2,80	2,76	3,65	4,60	3,82	2,00
10	0,13	3,86	2,80	2,83	4,75	3,95	2,00	42	0,13	3,65	2,74	2,79	4,59	3,80	2,00
11	0,13	2,81	3,87	2,80	4,74	3,93	2,00	43	0,13	2,81	3,72	2,74	4,63	3,83	2,00
12	0,13	3,87	2,40	3,29	4,78	3,92	2,00	44	0,13	3,72	2,83	2,73	4,64	3,84	2,00
13	0,13	3,26	3,91	2,40	4,78	3,90	2,00	45	0,13	2,69	3,69	2,83	4,60	3,78	2,00
14	0,13	3,91	2,58	3,09	4,79	3,99	2,00	46	0,13	3,69	2,70	2,81	4,60	3,77	2,00
15	0,13	3,01	3,88	2,58	4,74	3,89	2,00	47	0,13	2,80	3,75	2,70	4,63	3,78	2,00
16	0,13	2,60	3,08	3,88	4,78	4,00	2,00	48	0,13	2,60	2,87	3,75	4,62	3,73	2,00
17	0,13	2,60	3,01	3,85	4,73	3,91	2,00	49	0,14	2,60	2,80	3,64	4,52	3,63	2,00
18	0,13	3,07	3,85	2,46	4,69	3,78	2,00	50	0,13	2,68	3,64	2,78	4,55	3,71	2,00
19	0,12	2,46	3,26	3,99	4,86	4,00	2,00	51	0,13	2,78	2,69	3,62	4,55	3,72	2,00
20	0,13	2,84	3,99	2,78	4,81	3,95	2,00	52	0,13	2,81	3,62	2,70	4,57	3,76	2,00
21	0,13	2,78	2,81	3,84	4,72	3,91	2,00	53	0,13	2,70	2,81	3,63	4,57	3,75	2,00
22	0,13	2,91	3,84	2,71	4,73	3,93	2,00	54	0,13	2,75	3,63	2,77	4,58	3,79	2,00
23	0,13	3,77	2,71	2,87	4,68	3,88	2,00	55	0,13	3,60	2,77	2,76	4,57	3,79	2,00
24	0,13	2,80	2,84	3,77	4,70	3,94	2,00	56	0,13	2,80	2,73	3,60	4,57	3,78	2,00
25	0,13	2,80	2,78	3,70	4,64	3,86	2,00	57	0,13	2,74	3,60	2,80	4,57	3,78	2,00
26	0,13	3,70	2,76	2,84	4,65	3,88	2,00	58	0,13	3,60	2,78	2,73	4,56	3,76	2,00
27	0,13	2,83	3,74	2,76	4,66	3,88	2,00	59	0,13	2,74	3,60	2,78	4,56	3,77	2,00
28	0,13	3,74	2,69	2,91	4,67	3,88	2,00	60	0,13	3,60	2,73	2,75	4,54	3,72	2,00
29	0,13	2,90	3,81	2,69	4,70	3,88	2,00	61	0,14	2,74	3,54	2,73	4,50	3,69	2,00
30	0,13	3,81	2,70	2,84	4,68	3,83	2,00	62	0,14	3,54	2,62	2,81	4,49	3,64	2,00
31	0,13	2,90	4,00	2,70	4,80	3,91	2,00	63	0,14	2,74	3,42	2,62	4,39	3,53	2,00
32	0,13	2,60	3,07	4,00	4,84	4,00	2,00	64	0,15	2,60	2,68	3,42	4,35	3,44	2,00
Média															2,00
Desvio-Padrão															5,79 E-4

Tabela 5.18 – Características geométricas e forças dos elementos triangulares do modelo M_B^{MDTsm}

Elemento	Ângulos			Forças			Elemento	Ângulos			Forças		
	α_1	α_2	α_3	T_1	T_2	T_3		α_1	α_2	α_3	T_1	T_2	T_3
	(m)	(m)	(m)	(m)	(m ²)	(kN/m)		(m)	(m)	(m)	(m)	(m ²)	(kN/m)
1	0,73	0,94	1,48	2,93	2,31	0,37	33	0,75	0,86	1,53	2,78	2,47	0,17
2	1,53	0,71	0,91	0,17	2,97	2,40	34	0,85	1,52	0,77	2,50	0,21	2,73
3	0,93	1,51	0,70	2,34	0,25	3,01	35	0,79	0,88	1,47	2,65	2,39	0,37
4	0,70	0,91	1,54	3,01	2,42	0,13	36	0,85	1,48	0,82	2,49	0,36	2,56
5	0,92	1,54	0,69	2,42	0,13	3,08	37	0,83	0,86	1,45	2,51	2,42	0,46
6	0,66	0,97	1,51	3,15	2,25	0,24	38	0,82	1,46	0,86	2,52	0,42	2,43
7	0,97	1,49	0,69	2,18	0,32	2,97	39	1,45	0,85	0,84	0,45	2,47	2,50
8	0,82	0,83	1,50	2,63	2,60	0,28	40	0,84	0,84	1,45	2,48	2,49	0,44
9	0,81	0,84	1,50	2,68	2,60	0,28	41	0,86	0,85	1,43	2,40	2,43	0,51
10	1,51	0,81	0,82	0,22	2,67	2,65	42	1,44	0,84	0,86	0,49	2,45	2,39
11	0,81	1,52	0,81	2,66	0,20	2,67	43	0,85	1,47	0,82	2,47	0,39	2,54
12	1,47	0,66	1,01	0,40	3,06	2,07	44	1,46	0,86	0,82	0,40	2,44	2,55
13	0,98	1,50	0,66	2,17	0,28	3,10	45	0,81	1,46	0,87	2,55	0,40	2,40
14	1,51	0,72	0,91	0,24	2,94	2,40	46	1,47	0,82	0,86	0,39	2,54	2,42
15	0,89	1,53	0,73	2,46	0,17	2,91	47	0,84	1,50	0,80	2,51	0,26	2,62
16	0,73	0,91	1,50	2,90	2,39	0,28	48	0,76	0,87	1,51	2,72	2,43	0,24
17	0,74	0,90	1,50	2,85	2,41	0,25	49	0,79	0,87	1,47	2,56	2,34	0,35
18	0,92	1,53	0,69	2,32	0,17	2,97	50	0,82	1,46	0,86	2,49	0,42	2,38
19	0,66	0,95	1,53	3,15	2,31	0,18	51	0,87	0,83	1,45	2,36	2,47	0,45
20	0,79	1,58	0,77	2,81	0,03	2,86	52	0,88	1,44	0,83	2,34	0,49	2,47
21	0,81	0,82	1,52	2,66	2,63	0,21	53	0,83	0,87	1,44	2,47	2,35	0,48
22	0,85	1,51	0,78	2,53	0,25	2,74	54	0,85	1,43	0,86	2,42	0,51	2,39
23	1,48	0,80	0,86	0,34	2,64	2,46	55	1,42	0,87	0,86	0,56	2,36	2,38
24	0,83	0,85	1,47	2,56	2,51	0,39	56	0,87	0,85	1,42	2,34	2,41	0,55
25	0,85	0,84	1,45	2,46	2,47	0,45	57	0,85	1,41	0,88	2,40	0,57	2,33
26	1,44	0,83	0,87	0,48	2,51	2,42	58	1,42	0,87	0,85	0,55	2,34	2,40
27	0,85	1,47	0,82	2,48	0,39	2,56	59	0,85	1,42	0,87	2,39	0,56	2,34
28	1,46	0,80	0,88	0,41	2,63	2,39	60	1,43	0,85	0,86	0,51	2,40	2,36
29	0,86	1,50	0,78	2,49	0,27	2,72	61	0,87	1,41	0,86	2,32	0,57	2,33
30	1,52	0,79	0,84	0,21	2,70	2,55	62	1,42	0,82	0,90	0,54	2,44	2,22
31	0,81	1,59	0,74	2,76	0,08	2,95	63	0,91	1,38	0,85	2,14	0,66	2,28
32	0,71	0,88	1,56	3,04	2,56	0,06	64	0,85	0,88	1,41	2,28	2,19	0,57

Finalmente, os modelos numéricos baseados na *topologia C*, designadamente o M_C^{MDF} e M_C^{MRD} , cujas direções principais dos elementos estão alinhadas a 45° com o desenvolvimento longitudinal e transversal do módulo superior, foram analisados respetivamente pelos métodos de determinação da forma *MDF* e *MRD* (ver a Tabela 5.6). Os pressupostos de cálculo destas metodologias são distintos e encontram-se sistematizados na Tabela 5.7, sendo caracterizados da seguinte forma:

- Para o modelo M_C^{MDF} , os dados de input são a topologia estrutural (ver a Figura 5.36), as coordenadas dos nós fixos, X_f (ver a Tabela 5.19), as forças nodais externas, F , iguais a zero e uma densidade de força, q , igual a 2kN/m em todos os elementos. Estes dados permitem determinar a configuração de equilíbrio do modelo M_C^{MDF} (ver a Figura 5.37). Os dados de output são as coordenadas dos nós livres, X (ver a Tabela 5.20), e o esforço axial, t (ver a Tabela 5.21). O esforço axial e o comprimento, l , dos elementos variam para que sejam cumpridas as densidades de força, $q=t/l$, definidas inicialmente. As densidades de força nestes modelos de rede são equivalentes às tensões pretendidas σ na membrana de valor igual a 2kN/m , como referido anteriormente no capítulo três;

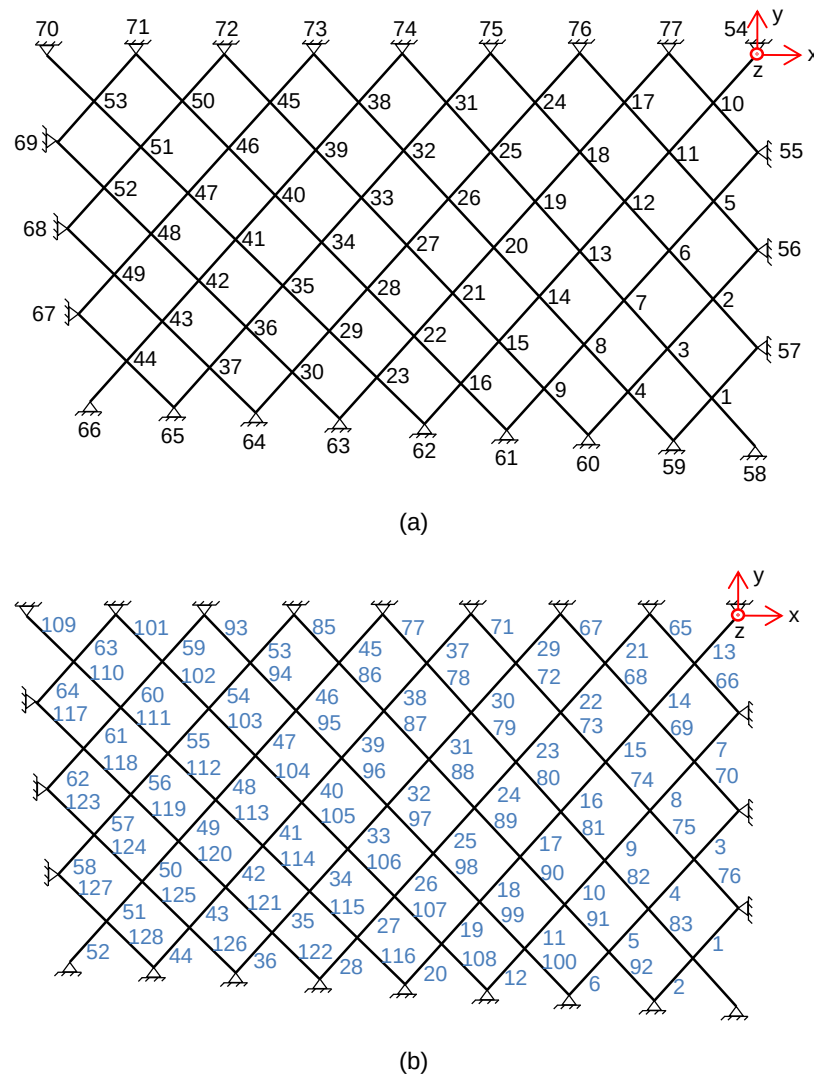


Figura 5.36 – Topologia estrutural dos modelos M_C^{MDF} e M_C^{MRD} : (a) Numeração dos nós e (b) Numeração dos elementos

Tabela 5.19 – Coordenadas cartesianas dos nós fixos dos modelos M_C^{MDF} e M_C^{MRD}

Nó	x_f (m)	y_f (m)	z_f (m)	Nó	x_f (m)	y_f (m)	z_f (m)
54	0,00	0,00	9,70	66	-20,66	-10,65	7,89
55	0,00	-3,00	8,70	67	-21,00	-7,99	7,35
56	0,00	-6,00	7,70	68	-21,33	-5,33	6,80
57	0,00	-9,00	6,70	69	-21,67	-2,66	6,25
58	0,00	-12,00	5,70	70	-22,00	0,00	5,70
59	-7,75	-11,49	6,52	71	-19,25	0,00	6,20
60	-5,17	-11,66	6,25	72	-16,50	0,00	6,70
61	-2,58	-11,83	5,97	73	-13,75	0,00	7,20
62	-10,33	-11,33	6,80	74	-11,00	0,00	7,70
63	-12,91	-11,16	7,07	75	-8,25	0,00	8,20
64	-15,50	-10,99	7,35	76	-5,50	0,00	8,70
65	-18,08	-10,82	7,62	77	-2,75	0,00	9,20

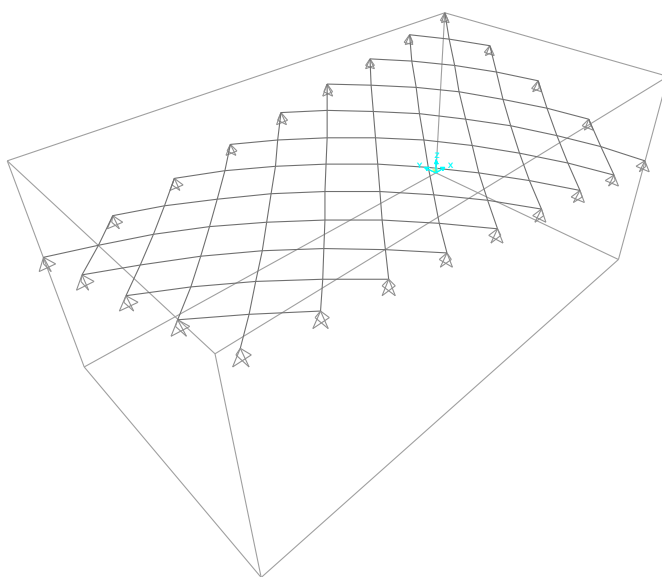
Figura 5.37 – Configuração de equilíbrio do modelo M_C^{MDF}

Tabela 5.20 – Coordenadas cartesianas dos nós livres do modelo M_C^{MDF}

Nó	x (m)	y (m)	z (m)	Nó	x (m)	y (m)	z (m)
1	-1,30	-10,43	6,29	28	-11,90	-7,03	7,13
2	-1,32	-7,45	7,19	29	-13,12	-8,37	7,10
3	-2,62	-8,87	6,78	30	-14,32	-9,69	7,18
4	-3,91	-10,28	6,47	31	-9,55	-1,43	7,79
5	-1,34	-4,47	8,10	32	-10,83	-2,83	7,47
6	-2,67	-5,92	7,59	33	-12,09	-4,22	7,26
7	-3,97	-7,34	7,18	34	-13,33	-5,58	7,14
8	-5,25	-8,75	6,86	35	-14,55	-6,92	7,11
9	-6,51	-10,13	6,64	36	-15,75	-8,24	7,18
10	-1,36	-1,49	9,00	37	-16,92	-9,54	7,35
11	-2,71	-2,96	8,39	38	-12,28	-1,41	7,39
12	-4,03	-4,41	7,89	39	-13,54	-2,79	7,17
13	-5,33	-5,83	7,47	40	-14,78	-4,15	7,05
14	-6,61	-7,24	7,16	41	-16,00	-5,49	7,02
15	-7,87	-8,62	6,94	42	-17,20	-6,82	7,10
16	-9,11	-9,98	6,82	43	-18,37	-8,12	7,26
17	-4,09	-1,47	8,60	44	-19,53	-9,39	7,53
18	-5,42	-2,92	8,09	45	-15,01	-1,38	6,98
19	-6,72	-4,34	7,68	46	-16,25	-2,75	6,86
20	-8,00	-5,75	7,36	47	-17,47	-4,09	6,84
21	-9,26	-7,13	7,14	48	-18,66	-5,41	6,91
22	-10,50	-8,49	7,02	49	-19,84	-6,71	7,08
23	-11,72	-9,84	7,00	50	-17,74	-1,36	6,58
24	-6,82	-1,45	8,19	51	-18,96	-2,71	6,55
25	-8,12	-2,87	7,78	52	-20,15	-4,03	6,63
26	-9,41	-4,28	7,47	53	-20,47	-1,34	6,18
27	-10,67	-5,66	7,25				

Tabela 5.21 – Densidades de força, comprimento e esforço axial dos elementos do modelo M_C^{MDF}

Elemento	Dados	Resultados		Elemento	Dados	Resultados		Elemento	Dados	Resultados		Elemento	Dados	Resultados	
	q	l	t		q	l	t		q	l	t		q	l	t
	(kN /m)	(m)	(kN /m)		(kN /m)	(m)	(kN /m)		(kN /m)	(m)	(kN /m)		(kN /m)	(m)	(kN /m)
1	2	1,97	3,95	65	2	2,04	4,09	33	2	1,85	3,69	97	2	2,04	4,07
2	2	1,93	3,85	66	2	2,06	4,11	34	2	1,81	3,63	98	2	2,04	4,09
3	2	2,03	4,05	67	2	2,04	4,07	35	2	1,78	3,57	99	2	2,06	4,11
4	2	1,97	3,95	68	2	2,04	4,09	36	2	1,76	3,52	100	2	2,08	4,15
5	2	1,93	3,85	69	2	2,06	4,11	37	2	1,97	3,95	101	2	2,07	4,14
6	2	1,88	3,77	70	2	2,08	4,15	38	2	1,93	3,85	102	2	2,05	4,11
7	2	2,08	4,16	71	2	2,03	4,07	39	2	1,88	3,77	103	2	2,04	4,08
8	2	2,03	4,05	72	2	2,04	4,07	40	2	1,85	3,69	104	2	2,03	4,07
9	2	1,97	3,95	73	2	2,04	4,09	41	2	1,81	3,63	105	2	2,03	4,07
10	2	1,93	3,85	74	2	2,06	4,11	42	2	1,78	3,57	106	2	2,04	4,07
11	2	1,88	3,77	75	2	2,08	4,15	43	2	1,76	3,52	107	2	2,04	4,09
12	2	1,85	3,69	76	2	2,10	4,20	44	2	1,74	3,49	108	2	2,06	4,11
13	2	2,14	4,28	77	2	2,03	4,07	45	2	1,93	3,85	109	2	2,09	4,18
14	2	2,08	4,16	78	2	2,03	4,07	46	2	1,88	3,77	110	2	2,07	4,14
15	2	2,03	4,05	79	2	2,04	4,07	47	2	1,85	3,69	111	2	2,05	4,11
16	2	1,97	3,95	80	2	2,04	4,09	48	2	1,81	3,63	112	2	2,04	4,08
17	2	1,93	3,85	81	2	2,06	4,11	49	2	1,78	3,57	113	2	2,03	4,07
18	2	1,88	3,77	82	2	2,08	4,15	50	2	1,76	3,52	114	2	2,03	4,07
19	2	1,85	3,69	83	2	2,10	4,20	51	2	1,74	3,49	115	2	2,04	4,07
20	2	1,81	3,63	84	2	2,13	4,25	52	2	1,73	3,46	116	2	2,04	4,09
21	2	2,08	4,16	85	2	2,04	4,08	53	2	1,88	3,77	117	2	2,07	4,14
22	2	2,03	4,05	86	2	2,03	4,07	54	2	1,85	3,69	118	2	2,05	4,11
23	2	1,97	3,95	87	2	2,03	4,07	55	2	1,81	3,63	119	2	2,04	4,08
24	2	1,93	3,85	88	2	2,04	4,07	56	2	1,78	3,57	120	2	2,03	4,07
25	2	1,88	3,77	89	2	2,04	4,09	57	2	1,76	3,52	121	2	2,03	4,07
26	2	1,85	3,69	90	2	2,06	4,11	58	2	1,74	3,49	122	2	2,04	4,07
27	2	1,81	3,63	91	2	2,08	4,15	59	2	1,85	3,69	123	2	2,05	4,11
28	2	1,78	3,57	92	2	2,10	4,20	60	2	1,81	3,63	124	2	2,04	4,08
29	2	2,03	4,05	93	2	2,05	4,11	61	2	1,78	3,57	125	2	2,03	4,07
30	2	1,97	3,95	94	2	2,04	4,08	62	2	1,76	3,52	126	2	2,03	4,07
31	2	1,93	3,85	95	2	2,03	4,07	63	2	1,81	3,63	127	2	2,04	4,08
32	2	1,88	3,77	96	2	2,03	4,07	64	2	1,78	3,57	128	2	2,03	4,07

- Para o modelo numérico M_C^{MRD} , os dados de input são a topologia estrutural (ver a Figura 5.36), as coordenadas dos nós fixos, X_f , (ver a Tabela 5.19), as coordenadas dos nós livres, X , arbitradas no plano $z = 5,7m$ (note-se que, ao contrário do MDF , aqui é necessário definir as coordenadas dos nós livres – ver a Tabela 5.22), as forças nodais externas, F , iguais a zero e os parâmetros de estabilidade descritos anteriormente no capítulo três, nomeadamente o amortecimento, a massa e o intervalo de tempo. Os parâmetros de estabilidade são estimados ao nível dos nós, tendo como base uma rigidez nodal máxima, $S_{i,máx}$ (ver a equação (3.47)), dependendo da geometria da malha e do módulo de elasticidade da membrana. Para o cálculo de $S_{i,máx}$ considera-se arbitrariamente a rigidez do nó 11, tendo por base os resultados obtidos da malha resultante do modelo M_C^{MDF} , vindo então $S_{11,máx} = \max \{S_{11,x}; S_{11,y}\} = \max \{3/2 \times (463 \times 2,05/2,06 + 463 \times 2,05/2,04); 3/2 \times (773 \times 2,05/2,08 + 773 \times 2,05/2,03)\} = \max \{1390; 2317\} = 2317 \text{ kN/m}$. O amortecimento, C , é igual a 0 kg/s , dado que se pretende resolver este modelo numérico com base no MRD via modelo de amortecimento cinético; a massa, M , é igual a $4,4 \text{ kg}$ ($1,05 \times 2,05 \times 2,05$) e o intervalo de tempo, Δt , é igual a $0,00195 \text{ s}$ ($\sqrt{(2 \times 4,4 / (2317 \times 10^3))}$), dependendo da massa nodal fictícia estimada e da máxima rigidez nodal (ver a equação (3.56)). Como referido anteriormente no capítulo três, a massa e o intervalo de tempo devem ser articulados por forma a assegurar a convergência da análise para um estado de equilíbrio, evitando instabilidades numéricas que podem ocorrer se a massa for elevada e o intervalo de tempo reduzido. Atendendo que se pretende determinar a forma de uma membrana com a malha regular, correspondente a uma rede geodésica, a determinação da forma deste modelo numérico através deste método é realizada adotando-se uma rigidez axial das barras, EA , igual a 0 kN e um esforço axial, t , constante e igual a 2 kN nos elementos. Consequentemente, o problema é puramente geométrico e a solução final é independente do esforço axial considerado, devendo-se garantir anteriormente a utilização de uma malha quadrangular regular. Os dados de output são as coordenadas dos nós livres, X (ver a Tabela 5.22), e o esforço axial, t , nos elementos constante e igual a 2 kN . A Figura 5.38 (a) apresenta a geometria final da análise. A Figura 5.38 (b) apresenta a evolução da resposta estrutural dos nós 13 e 20. A Figura 5.38 (c) apresenta a evolução da energia cinética do sistema, evidenciando que a convergência do método foi obtida rapidamente, tendo sido necessárias 3021 iterações para um parâmetro de convergência de $\delta = 1 \times 10^{-9}$. O número de picos de energia cinética detetados foi de 41. No 3º pico de energia evidencia-se o movimento ascendente da estrutura de uma forma global, como mostra a Figura 5.38 (b), em que se evidencia uma alteração significativa da coordenada no eixo dos zz dos nós 13 e 20. De seguida, ocorrem picos de energia sucessivamente mais baixos, mais frequentes, embora não seja perceptível na Figura 5.38 (c), até que o modelo converge na posição de equilíbrio estático;

Complementarmente, foram utilizados dois modelos numéricos baseados nas topologias D e E , M_D^{SM} e M_E^{Form} , onde foram aplicados o método da superfície minimal e o *software Formfinder®*, respetivamente. O método da superfície minimal permite obter uma superfície de área mínima, à semelhança de uma película de sabão, caracterizada por um estado de tensão homogêneo e isotrópico. Esta metodologia é adequada ao presente estudo, atendendo à premissa inicial de se considerar um pré-esforço igual nas direções do urdume e da trama, originando um rácio de tensões de valor unitário, e consequentemente uma superfície teoricamente com tensões isotrópicas. A superfície minimal traduz-se por uma equação diferencial parcial (EDP) não-linear elítica. É possível resolver essa equação numericamente, reduzindo-a a uma EDP linear elítica com recurso ao *software MATLAB®*, estabelecendo um parâmetro não – linear c e as condições de fronteira, ou de *Dirichlet*, dadas pelas 4 equações apresentadas na Tabela 5.7, uma por cada bordo da membrana.

Por sua vez, no modelo M_E^{Form} , foi considerada uma malha quadrangular regular espaçada de 20cm, em que a direção do urdume e da trama ficam orientadas a 45° com as direções de desenvolvimento principais do módulo superior. A densidade de força arbitrada para os elementos foi de 2kN/m.

Tabela 5.22 – Coordenadas cartesianas iniciais e finais dos nós livres do modelo M_C^{MRD}

Nó	Geometria inicial			Geometria final			Nó	Geometria inicial			Geometria final		
	$(\cdot)x$	$(\cdot)y$	z	$(\cdot)x$	$(\cdot)y$	z		$(\cdot)x$	$(\cdot)y$	z	$(\cdot)x$	$(\cdot)y$	z
	(m)	(m)	(m)	(m)	(m)	(m)		(m)	(m)	(m)	(m)	(m)	(m)
1	1,30	10,43	5,70	1,41	10,54	6,27	28	11,90	7,03	5,70	12,08	7,20	7,15
2	1,32	7,45	5,70	1,42	7,52	7,18	29	13,12	8,37	5,70	13,24	8,49	7,13
3	2,62	8,87	5,70	2,83	9,05	6,75	30	14,32	9,69	5,70	14,36	9,73	7,19
4	3,91	10,28	5,70	4,02	10,37	6,46	31	9,55	1,43	5,70	9,65	1,56	7,77
5	1,34	4,47	5,70	1,42	4,51	8,09	32	10,83	2,83	5,70	10,99	3,03	7,47
6	2,67	5,92	5,70	2,83	6,03	7,56	33	12,09	4,22	5,70	12,27	4,44	7,26
7	3,97	7,34	5,70	4,23	7,55	7,14	34	13,33	5,58	5,70	13,49	5,79	7,16
8	5,25	8,75	5,70	5,45	8,90	6,85	35	14,55	6,92	5,70	14,68	7,09	7,15
9	6,51	10,13	5,70	6,62	10,21	6,64	36	15,75	8,24	5,70	15,80	8,32	7,21
10	1,36	1,49	5,70	1,40	1,49	9,00	37	16,92	9,54	5,70	16,93	9,57	7,37
11	2,71	2,96	5,70	2,81	3,00	8,38	38	12,28	1,41	5,70	12,36	1,54	7,38
12	4,03	4,41	5,70	4,22	4,52	7,86	39	13,54	2,79	5,70	13,66	2,99	7,18
13	5,33	5,83	5,70	5,62	6,05	7,44	40	14,78	4,15	5,70	14,91	4,38	7,07
14	6,61	7,24	5,70	6,87	7,42	7,15	41	16,00	5,49	5,70	16,11	5,70	7,06
15	7,87	8,62	5,70	8,06	8,75	6,94	42	17,20	6,82	5,70	17,23	6,93	7,13
16	9,11	9,98	5,70	9,21	10,05	6,83	43	18,37	8,12	5,70	18,36	8,17	7,29
17	4,09	1,47	5,70	4,16	1,52	8,58	44	19,53	9,39	5,70	19,51	9,42	7,54
18	5,42	2,92	5,70	5,57	3,04	8,06	45	15,01	1,38	5,70	15,08	1,51	6,99
19	6,72	4,34	5,70	6,97	4,57	7,64	46	16,25	2,75	5,70	16,35	2,93	6,89
20	8,00	5,75	5,70	8,25	5,97	7,35	47	17,47	4,09	5,70	17,57	4,28	6,87
21	9,26	7,13	5,70	9,47	7,32	7,15	48	18,66	5,41	5,70	18,69	5,51	6,94
22	10,50	8,49	5,70	10,65	8,62	7,04	49	19,84	6,71	5,70	19,84	6,75	7,10
23	11,72	9,84	5,70	11,80	9,90	7,01	50	17,74	1,36	5,70	17,80	1,47	6,59
24	6,82	1,45	5,70	6,91	1,54	8,18	51	18,96	2,71	5,70	19,05	2,85	6,58
25	8,12	2,87	5,70	8,31	3,07	7,75	52	20,15	4,03	5,70	20,18	4,09	6,65
26	9,41	4,28	5,70	9,62	4,51	7,45	53	20,47	1,34	5,70	20,53	1,42	6,19
27	10,67	5,66	5,70	10,87	5,88	7,25							

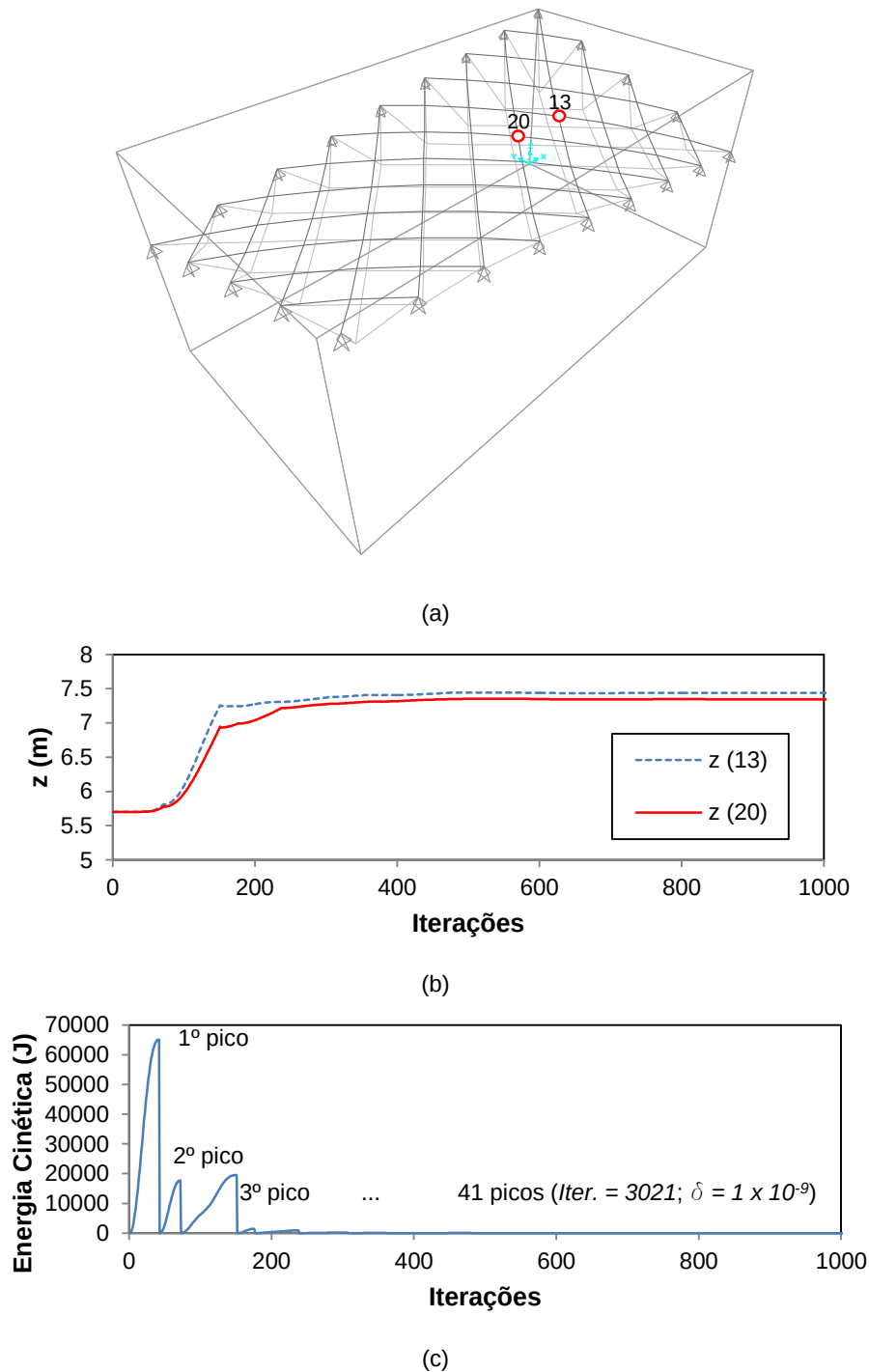


Figura 5.38 – (a) Configuração de equilíbrio do modelo M_C^{MRD} ; (b) Evolução da resposta estrutural dos nós 13 e 20 e (c) Evolução da energia cinética

No caso da determinação da forma dos modelos numéricos do módulo lateral, baseados na *topologia* F , designadamente o M_F^{MDF} e M_F^{MRD} , foram analisados respetivamente pelos métodos de determinação da forma *MDF* e o *MRD*. As direções principais dos elementos dos modelos numéricos estão alinhadas com a real orientação das direções de fabrico do material, aproximadamente na vertical e na horizontal, respetivamente na direção do urdume e da trama. É de salientar que no caso do módulo

lateral o estudo é simplificado, pelo que se procurou seguir a topologia arbitrada pelo projetista. No entanto, é de notar que este estudo deverá ser aprofundado em trabalhos futuros, dada a forma pouco económica da membrana, como referido anteriormente, devido à ligação dos módulos de membrana nos 4 cantos da cobertura. Os pressupostos de cálculo destas metodologias são distintos e encontram-se sistematizados na Tabela 5.7, sendo caracterizados da seguinte forma, analogamente à descrição realizada para os modelos das topologias A e C:

- Para o modelo M_F^{MDF} , os dados de input são a topologia estrutural (ver a Figura 5.39), as coordenadas dos nós fixos, X_f (ver a Tabela 5.23), as forças nodais externas, F , iguais a zero e uma densidade de força, q , igual a $2kN/m$ em todos os elementos. Estes dados permitem determinar a configuração de equilíbrio do modelo M_F^{MDF} (ver a Figura 5.40). Os dados de output são as coordenadas dos nós livres, X (ver a Tabela 5.24), e o esforço axial, t (ver a Tabela 5.25). O esforço axial e o comprimento, l , dos elementos variam para que sejam cumpridas as densidades de força, $q=t/l$, definidas inicialmente. As densidades de força nestes modelos de rede são equivalentes às tensões pretendidas σ na membrana de valor igual a $2kN/m$, como referido anteriormente no capítulo três;

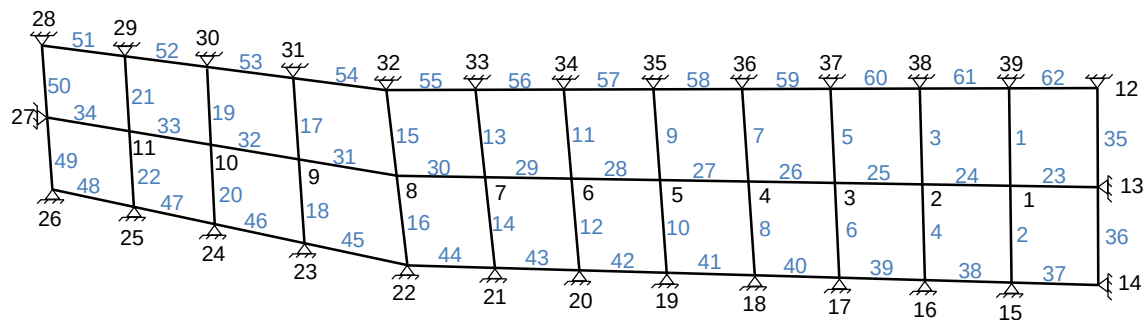


Figura 5.39 – Topologia estrutural dos modelos M_F^{MDF} e M_F^{MRD} : (a) Numeração dos nós e (b) Numeração dos elementos

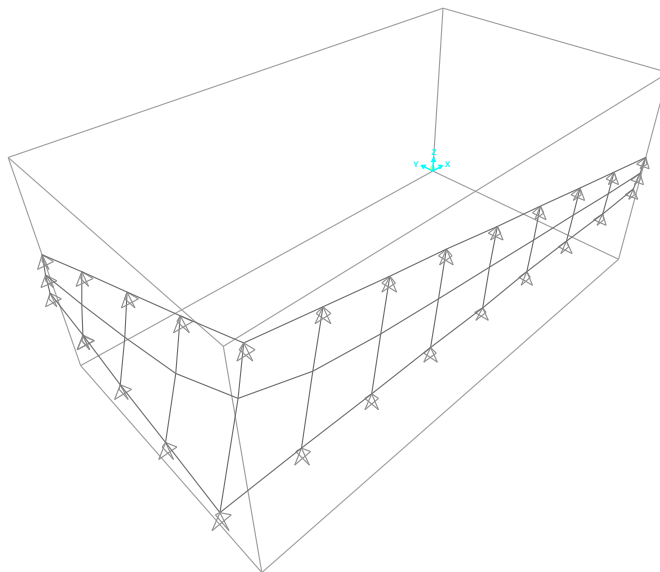


Figura 5.40 – Configuração de equilíbrio do modelo M_F^{MDF}

Tabela 5.23 – Coordenadas cartesianas dos nós fixos dos modelos M_F^{MDF} e M_F^{MRD}

Nó	x_f (m)	y_f (m)	z_f (m)	Nó	x_f (m)	y_f (m)	z_f (m)
12	0,00	-12,00	5,70	26	-22,18	0,00	4,00
13	0,00	-11,93	4,85	27	-22,09	0,00	4,85
14	0,00	-11,85	4,00	28	-22,00	0,00	5,70
15	-2,86	-11,85	4,00	29	-21,67	-2,66	6,25
16	-5,71	-11,85	4,00	30	-21,33	-5,33	6,80
17	-8,57	-11,85	4,00	31	-21,00	-7,99	7,35
18	-11,43	-11,85	4,00	32	-20,66	-10,65	7,89
19	-14,28	-11,85	4,00	33	-18,08	-10,82	7,62
20	-17,14	-11,85	4,00	34	-15,50	-10,99	7,35
21	-19,99	-11,85	4,00	35	-12,91	-11,16	7,07
22	-22,85	-11,85	4,00	36	-10,33	-11,33	6,80
23	-22,68	-8,89	4,00	37	-7,75	-11,49	6,52
24	-22,52	-5,93	4,00	38	-5,17	-11,66	6,25
25	-22,35	-2,99	4,00	39	-2,58	-11,83	5,97

Tabela 5.24 – Coordenadas cartesianas dos nós livres do modelo M_F^{MDF}

Nó	x (m)	y (m)	z (m)	Nó	x (m)	y (m)	z (m)
1	-2,72	-11,84	4,99	7	-18,83	-11,12	5,78
2	-5,44	-11,76	5,12	8	-21,00	-10,46	5,83
3	-8,16	-11,67	5,26	9	-21,64	-8,23	5,64
4	-10,87	-11,58	5,40	10	-21,87	-5,57	5,39
5	-13,58	-11,49	5,53	11	-21,99	-2,81	5,12
6	-16,26	-11,36	5,66				

Tabela 5.25 – Densidades de força, comprimento e esforço axial dos elementos do modelo M_F^{MDF}

Elemento	Dados		Resultados		Elemento	Dados		Resultados	
	q (kN/m)	l (m)	t (kN)			q (kN/m)	l (m)	t (kN)	
1	2	1,00	1,99		32	2	2,68	5,36	
2	2	1,00	1,99		33	2	2,78	5,56	
3	2	1,16	2,32		34	2	2,82	5,64	
4	2	1,16	2,32		35	2	0,85	1,71	
5	2	1,34	2,68		36	2	0,85	1,71	
6	2	1,34	2,68		37	2	2,86	5,71	
7	2	1,52	3,05		38	2	2,86	5,71	
8	2	1,53	3,05		39	2	2,86	5,71	
9	2	1,71	3,42		40	2	2,86	5,71	
10	2	1,72	3,45		41	2	2,86	5,71	
11	2	1,88	3,77		42	2	2,86	5,71	
12	2	1,94	3,88		43	2	2,86	5,71	
13	2	2,01	4,03		44	2	2,86	5,71	
14	2	2,24	4,49		45	2	2,97	5,93	
15	2	2,10	4,20		46	2	2,97	5,93	
16	2	2,95	5,90		47	2	2,94	5,88	
17	2	1,84	3,67		48	2	3,00	5,99	
18	2	2,06	4,11		49	2	0,85	1,71	
19	2	1,53	3,05		50	2	0,85	1,71	
20	2	1,57	3,15		51	2	2,74	5,48	
21	2	1,18	2,36		52	2	2,74	5,48	
22	2	1,19	2,38		53	2	2,74	5,48	
23	2	2,72	5,45		54	2	2,74	5,48	
24	2	2,72	5,45		55	2	2,60	5,21	
25	2	2,72	5,45		56	2	2,60	5,21	
26	2	2,72	5,44		57	2	2,60	5,21	
27	2	2,71	5,43		58	2	2,60	5,21	
28	2	2,69	5,37		59	2	2,60	5,21	
29	2	2,58	5,17		60	2	2,60	5,21	
30	2	2,26	4,52		61	2	2,60	5,21	
31	2	2,33	4,67		62	2	2,60	5,21	

- Para o modelo numérico M_F^{MRD} , os dados de input são a topologia estrutural (ver a Figura 5.39), as coordenadas dos nós fixos, X_f (ver a Tabela 5.23), as coordenadas dos nós livres, X , consideradas iguais às obtidas pelo M_F^{MDF} (note-se que, ao contrário do MDF , aqui é necessário definir as coordenadas dos nós livres – ver a Tabela 5.26), as forças nodais externas, F , iguais a zero e os parâmetros de estabilidade descritos anteriormente no capítulo três, nomeadamente o amortecimento, a massa e o intervalo de tempo. Os parâmetros de estabilidade são estimados ao nível dos nós, tendo como base uma rigidez nodal máxima, $S_{i,máx}$ (ver a equação (3.47)), dependendo da geometria da malha e do módulo de elasticidade da membrana. Para o cálculo de

$S_{i,m\acute{a}x}$ considera-se arbitrariamente a rigidez do nó 3, tendo por base os resultados obtidos da malha resultante do modelo M_F^{MDF} , vindo então $S_{3,m\acute{a}x} = \max \{S_{3,x}; S_{3,y}\} = \max \{3/2x(463x1,34/2,73+463x1,34/2,73); 3/2x(773x2,73/1,34+773x2,73/1,34)\} = \max \{681; 4730\} = 4730 \text{ kN/m}$. O amortecimento, C , é igual a 0 kg/s , dado que se pretende resolver este modelo numérico com base no *MRD* via modelo de amortecimento cinético; a massa, M , é igual a $3,84 \text{ kg}$ ($1,05x1,34x2,73$) e o intervalo de tempo, Δt , é igual a $0,00127 \text{ s}$ ($\sqrt{(2x3,84/(4730x10^3))}$), dependendo da massa nodal fictícia estimada e da máxima rigidez nodal (ver a equação (3.56)). Como referido anteriormente no capítulo três, a massa e o intervalo de tempo devem ser articulados por forma a assegurar a convergência da análise para um estado de equilíbrio, evitando instabilidades numéricas que podem ocorrer se a massa for elevada e o intervalo de tempo reduzido. Atendendo que se pretende determinar a forma de uma membrana com a malha regular, correspondente a uma rede geodésica, a determinação da forma deste modelo numérico através deste método é realizada adotando-se uma rigidez axial das barras, EA , igual a 0 kN e um esforço axial, t , constante e igual a 2 kN nos elementos. Consequentemente, o problema é puramente geométrico e a solução final é independente do esforço axial considerado, devendo-se garantir anteriormente a utilização de uma malha quadrangular regular. Os dados de output são as coordenadas dos nós livres, X (ver a Tabela 5.26), e o esforço axial, t , nos elementos constante e igual a 2 kN . A Figura 5.41 (a) apresenta a geometria final da análise. A Figura 5.41 (b) apresenta a evolução da resposta estrutural dos nós 4 e 8. A Figura 5.41 (c) apresenta a evolução da energia cinética do sistema, evidenciando que a convergência do método foi obtida rapidamente, tendo sido necessárias 5217 iterações para um parâmetro de convergência de $\delta = 1x10^{-9}$. O número de picos de energia cinética detetados foi de 39. No 1º pico de energia evidencia-se o movimento ascendente da estrutura, principalmente no local da esquina entre os 2 módulos de membrana lateral, como mostra a Figura 5.41 (b), em que se evidencia uma alteração significativa da coordenada no eixo dos z do nó 8. Os restantes nós livres também se movimentam de forma ascendente, como mostra o nó 4, estando este movimento associado aos picos seguintes, seguindo-se a ocorrência de inúmeros picos de energia sucessivamente mais baixos, mais frequentes, embora não seja perceptível na Figura 5.41 (c), até que o modelo converge na posição de equilíbrio estático;

Tabela 5.26 – Coordenadas cartesianas iniciais e finais dos nós livres do modelo M_F^{MRD}

Nó	Geometria inicial			Geometria final		
	x (m)	y (m)	z (m)	x (m)	y (m)	z (m)
1	-2,72	-11,84	4,99	-2,70	-11,84	5,16
2	-5,44	-11,76	5,12	-5,36	-11,72	5,47
3	-8,16	-11,67	5,26	-7,99	-11,60	5,77
4	-10,87	-11,58	5,40	-10,62	-11,46	6,07
5	-13,58	-11,49	5,53	-13,23	-11,31	6,36
6	-16,26	-11,36	5,66	-15,83	-11,15	6,65
7	-18,83	-11,12	5,78	-18,42	-10,91	6,92
8	-21,00	-10,46	5,83	-20,55	-10,35	7,04
9	-21,64	-8,23	5,64	-21,21	-8,14	6,71
10	-21,87	-5,57	5,39	-21,59	-5,47	6,13
11	-21,99	-2,81	5,12	-21,88	-2,77	5,51

Ora, tendo sido apresentados os principais resultados associados a cada modelo estudado, pretende-se de seguida fazer um estudo comparativo avaliando a influência da orientação das direções de fabrico e a influência das metodologias de análise.

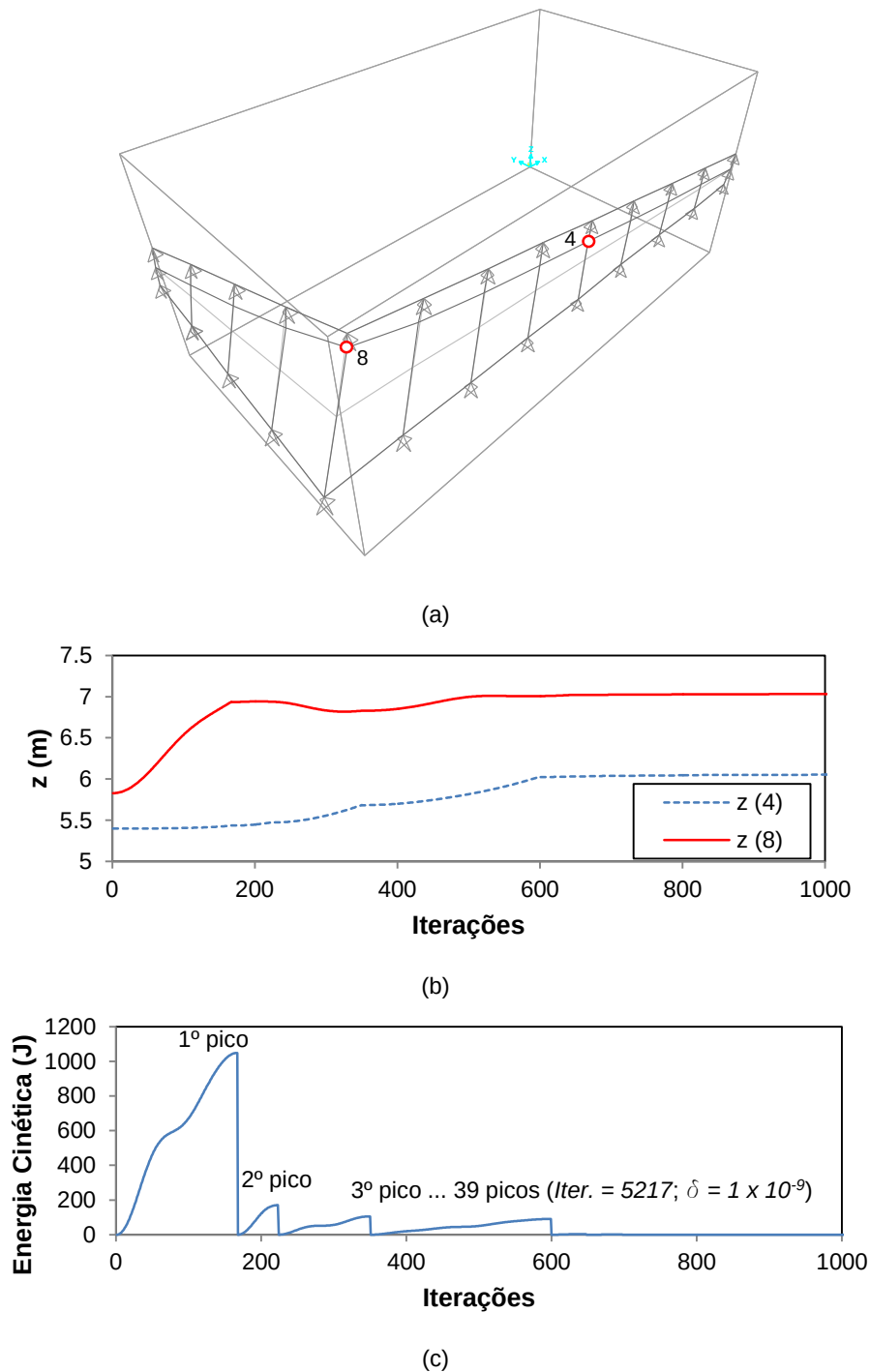


Figura 5.41 – (a) Configuração de equilíbrio do modelo M_F^{MRD} ; (b) Evolução da resposta estrutural dos nós 4 e 8 e (c) Evolução da energia cinética

5.4.2.3. Influência da orientação das direções de fabrico a 45°

Na primeira fase do estudo foram comparados essencialmente dois tipos de modelo, face à incerteza da orientação das direções do urdume e da trama no módulo superior de membrana. O primeiro tipo de modelo, onde as direções principais de fabrico estão orientadas a 0°, baseia-se nas *topologias estruturais A e B*. Inclui-se neste grupo a *topologia B* partindo do pressuposto que possui elementos lineares alinhados com as direções principais de fabrico a 0°. O segundo tipo de modelo, onde as direções principais de fabrico estão orientadas a 45°, de acordo com a orientação real da estrutura, baseia-se na *topologia estrutural C*.

De forma a poder comparar os resultados obtidos pelos vários modelos estudados apresentando topologias distintas, optou-se por analisar as coordenadas dos nós que resultam da interseção das diferentes malhas realizadas quando sujeitas a sobreposição, nomeadamente os nós fixos e parte dos nós livres, como mostra a Figura 5.42. Adicionalmente, dado que a representação tridimensional não reflete a verdadeira grandeza das diferenças entre as configurações estruturais obtidas, optou-se por representar os resultados em projeção num plano, através do conjunto de alinhamentos representados na Figura 5.42.

A Figura 5.43 apresenta a geometria obtida por cada tipo de modelo do módulo superior e de acordo com a metodologia de determinação da forma utilizada. Para efeito de comparação de resultados entre os diversos modelos realizados foram utilizados os 3 alinhamentos A1x, A2x e A3x, de acordo com a Figura 5.43 (a), e os 7 alinhamentos A1y a A7y, de acordo com a Figura 5.43 (b). Os resultados apresentados baseiam-se portanto nas coordenadas de 9 nós nos alinhamentos “x” e de 5 nós nos alinhamentos “y”. Em todos os alinhamentos analisados os nós extremos são fixos e os nós intermédios são livres.

A geometria final dos modelos com a *topologia A*, obtida com diferentes metodologias (*MDF*, *MRD* e *RD*), e com a *topologia C*, obtida com o *MDF*, foi igual. A geometria apresentada pelo projetista é aproximadamente igual às anteriores no meio vão, respetivamente nos alinhamentos A2x e A4y, e tende a diferenciar-se nos restantes alinhamentos. Note-se que as *topologias A e C* são utilizadas nos dois tipos de modelo analisados. Este facto leva a crer que a orientação dos elementos lineares a 0° ou a 45° nos modelos de rede de paraboloídes hiperbólicos é indiferente no caso de ser utilizado o *MDF*, e desde que sejam utilizadas topologias com os mesmos nós fixos e apresentando malhas quadrangulares regulares. Note-se aliás que, sobrepondo as *topologias A e C*, existem pontos de interseção comuns, e estes pontos são precisamente os nós livres da *topologia A*. A *topologia C* apresenta um conjunto extra de nós livres em consequência da orientação das direções principais a 45°, mesmo utilizando igual número de nós fixos (ver a Tabela 5.6), tornando a malha mais refinada.

No caso dos modelos com a *topologia B* levados a cabo pelo *MDTS*, a superfície obtida é diferente das anteriores, e geralmente está localizada acima das anteriores. Os seus alinhamentos entre os nós fixos são curvos, enquanto os alinhamentos obtidos pelos anteriormente analisados são retos, à exceção da geometria do projetista. Não se verificaram alterações significativas entre as configurações obtidas pelo *MDTS* e o *MDTSm*, evidenciando-se essencialmente um ajustamento das coordenadas no plano da membrana.

No caso do modelo com a *topologia C* resolvido pelo *MRD*, os resultados apresentam uma solução intermédia entre os dois grupos de resultados anteriormente analisados.

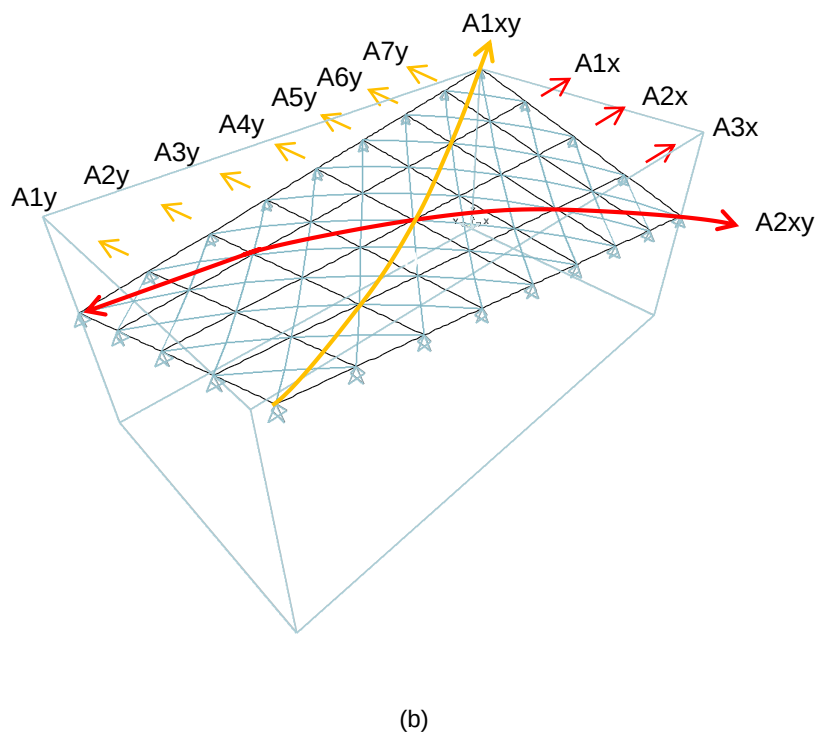
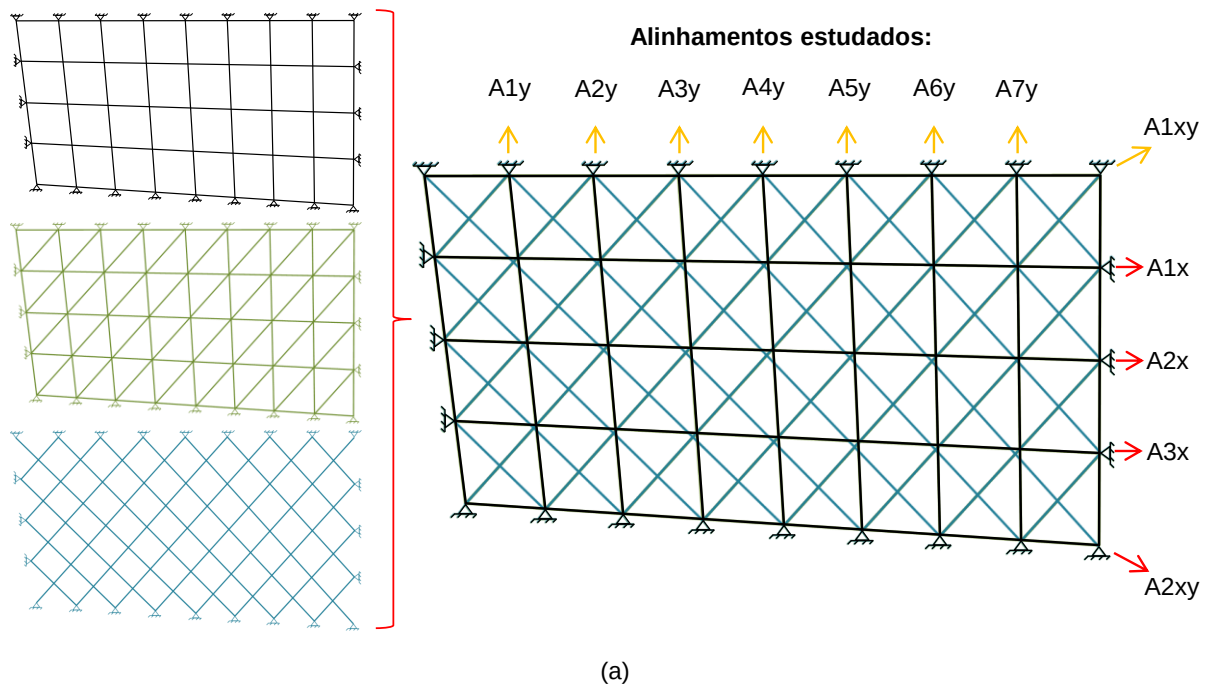
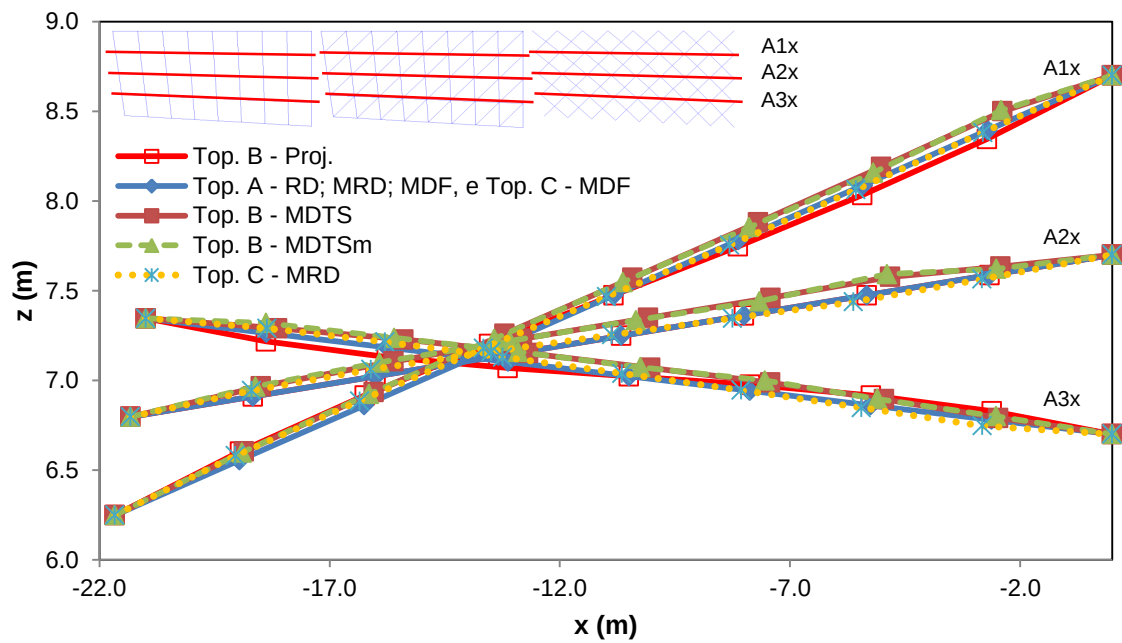
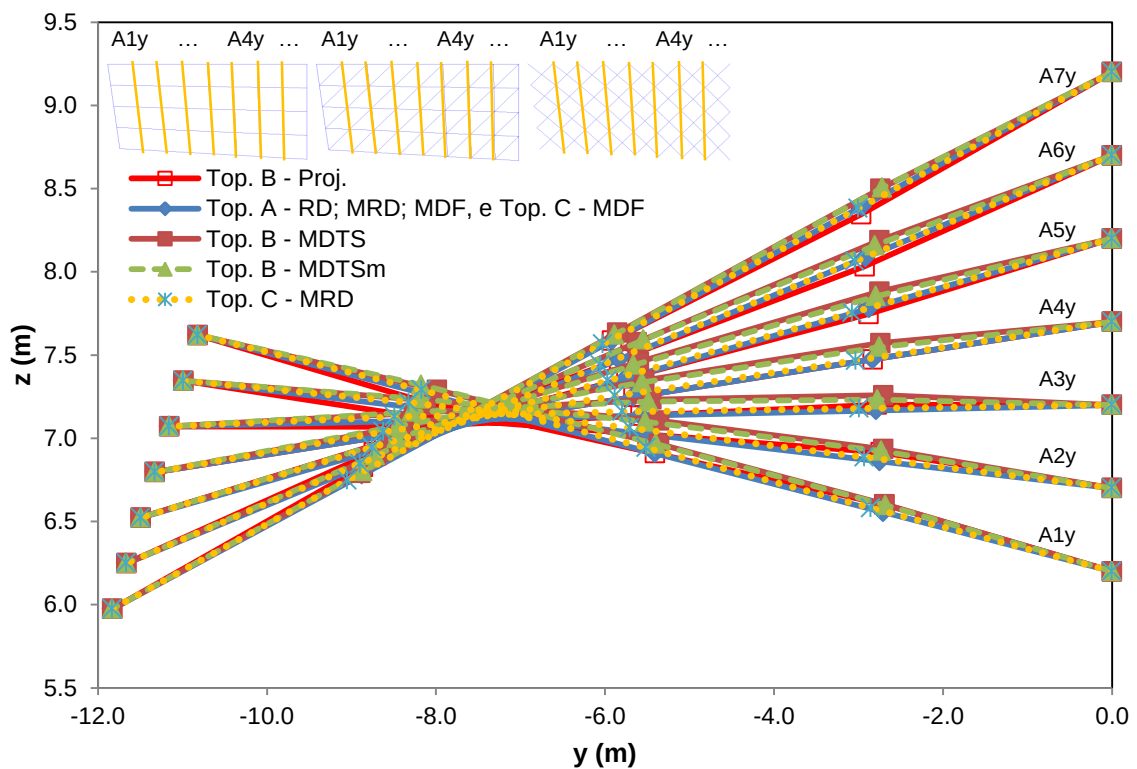


Figura 5.42 – Alinhamentos estudados: (a) Representação no plano e (b) Representação em perspectiva



(a)



(b)

Figura 5.43 – Geometria dos modelos do módulo superior baseada na *topologia* (A, B e C) e na respetiva metodologia de determinação da forma (fase 1): (a) Alinhamentos segundo o eixo dos xx e (b) Alinhamentos segundo o eixo dos yy

5.4.2.4. Influência das metodologias de análise

Na segunda fase do estudo, no sentido de complementar os resultados obtidos e em jeito de confirmação, foram utilizados dois modelos com topologias estruturais cujas malhas são mais discretizadas, as *topologias D* e *E*, respetivamente calculados com base no método da superfície minimal e através do *software* de determinação da forma de membranas tensas *Formfinder*[®]. Os resultados obtidos por estas duas últimas metodologias são aproximadamente iguais e praticamente coincidentes com os resultados obtidos pelo *MDTS*, de acordo com o alinhamento a meio vão segundo o eixo dos *yy* (*A4y*) representado na Figura 5.44 (a). No entanto, a análise do meio vão segundo o eixo dos *xx* (*A2x*), de acordo com a Figura 5.44 (b), evidencia uma discrepância de resultados obtidos com o *MDTS* localizados no ponto mais alto do paraboloide hiperbólico. Este facto deve-se à reduzida discretização da malha referente à *topologia B*. Complementarmente, apresenta-se na Figura 5.45 os resultados obtidos nos alinhamentos de curvatura principal do módulo superior.

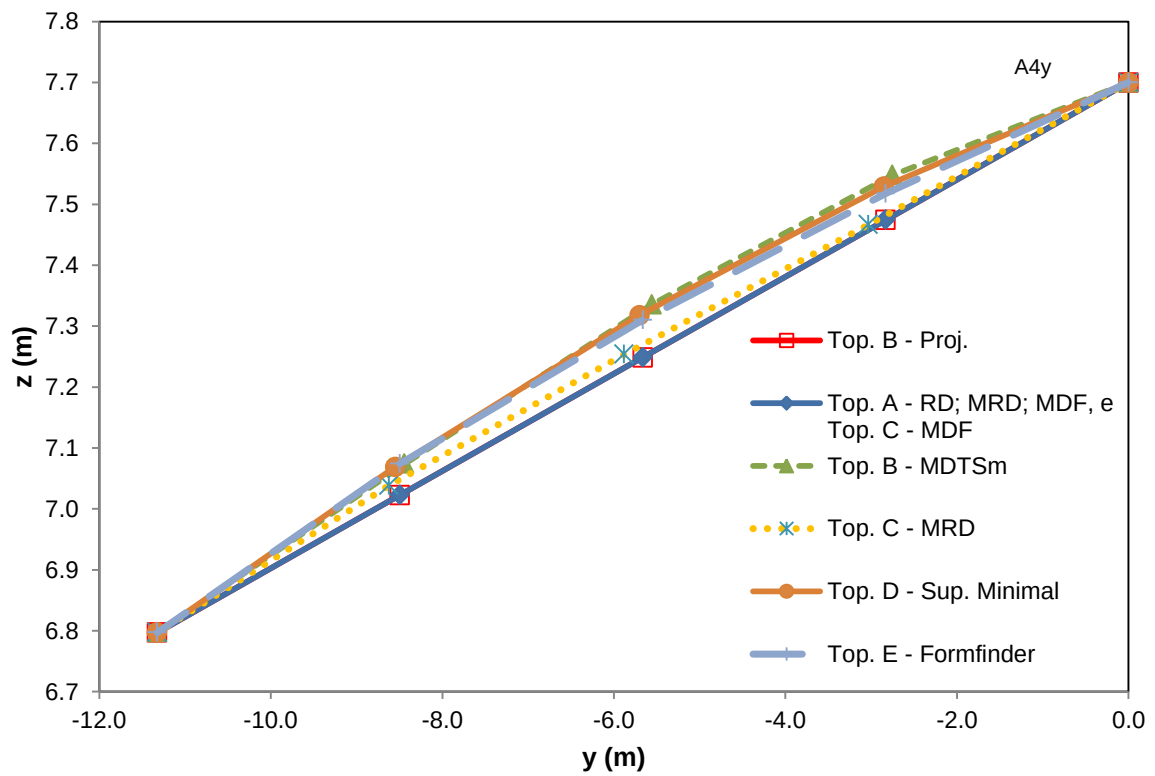
Em suma, atendendo aos resultados obtidos pelos diversos modelos estudados, o modelo do módulo superior de membrana a considerar no modelo numérico global da estrutura será o modelo baseado na *topologia C* e resolvido através do *MRD*, M_C^{MRD} . Em primeiro lugar, porque os elementos lineares deste modelo estão alinhados em correspondência com as direções principais de fabrico na estrutura. Em segundo lugar, porque este modelo se aproxima a uma superfície minimal, com tensões isotrópicas, validando a premissa inicial de rácio de pré-esforço unitário. Os modelos baseados na *topologia B* e resolvidos com o *MDTS* também apresentaram bons resultados comparando com os modelos complementares, mas necessitariam de uma maior discretização de forma a melhorar a qualidade da malha da configuração resultante.

No caso dos modelos do módulo lateral realizados tendo por base a *topologia F* (ver a Tabela 5.6) e as metodologias do *MDF* e do *MRD*, os resultados foram significativamente diferentes. A Figura 5.46 mostra a geometria dos modelos obtida tendo por base essas metodologias, evidenciando, em primeiro lugar, que a malha obtida pelo *MRD* não é uniforme/regular. Este facto deve-se à reduzida discretização realizada nesta topologia, bem como à forma irregular do módulo lateral. No entanto, a malha da geometria obtida com base no *MDF* é mais regular do que a anterior. A geometria designada inicial é a geometria apresentada pelo projetista.

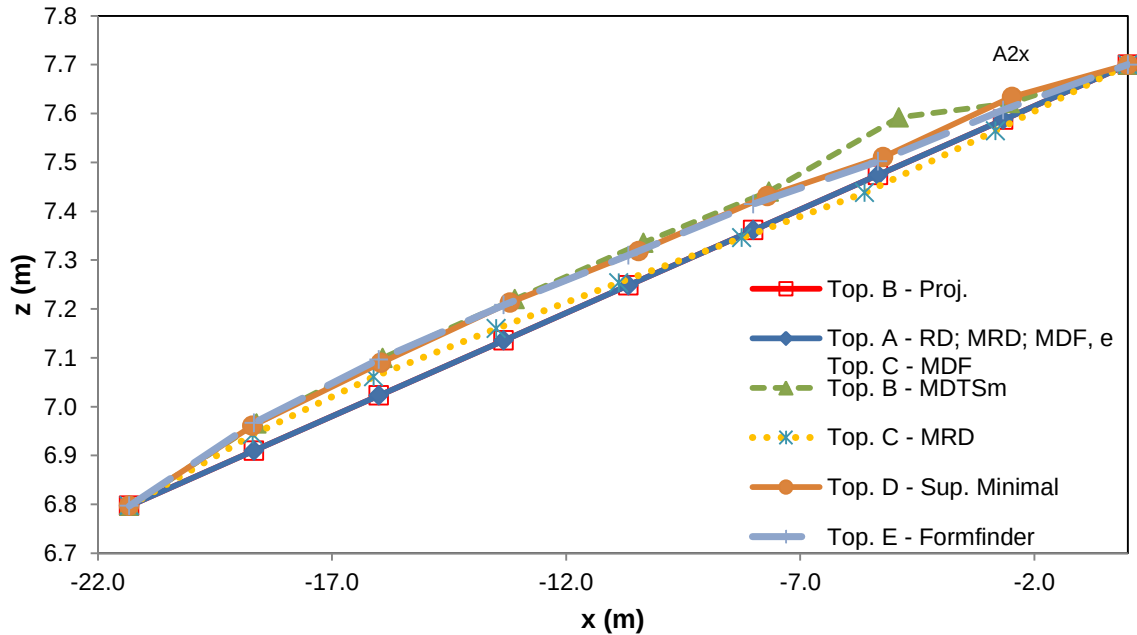
Note-se que, se os módulos 2 e 3 fossem considerados em separado, isto é, se em vez de se realizar um único modelo numérico para o módulo lateral, fossem considerados dois modelos em separado, respetivamente para os módulos 2 e 3, e portanto, se o nó estrutural livre que faz a ligação entre os módulos 2 e 3 fosse considerado fixo, a aplicação do *MDF*, do método das regras duplas ou do *MRD* permitiria obter a mesma geometria apresentada pelo projetista. Este facto foi verificado numericamente realizando os respetivos modelos.

A importância de realizar um modelo numérico do módulo lateral agregando os módulos 2 e 3 é por isso evidente, dado o deslocamento significativo do nó livre localizado na interseção entre os módulos 2 e 3, e por estes módulos estarem de facto ligados na realidade, e funcionando consequentemente em conjunto. Caso contrário, se o referido nó estrutural fosse considerado um nó fixo, não iria apresentar deslocamentos durante as análises subsequentes, não correspondendo consequentemente à realidade.

Assim sendo, o modelo do módulo lateral de membrana a considerar no modelo numérico global da estrutura será o modelo baseado no *MDF*, atendendo ao facto da malha da configuração obtida ser mais regular do que a sua homóloga obtida pelo *MRD*.



(a)



(b)

Figura 5.44 – Geometria dos modelos do módulo superior baseada na *topologia* (A, B, C, D e E) e na respetiva metodologia de determinação da forma (fase 2): (a) Alinhamento médio segundo o eixo dos yy (A4y) e (b) Alinhamento médio segundo o eixo dos xx (A2x)

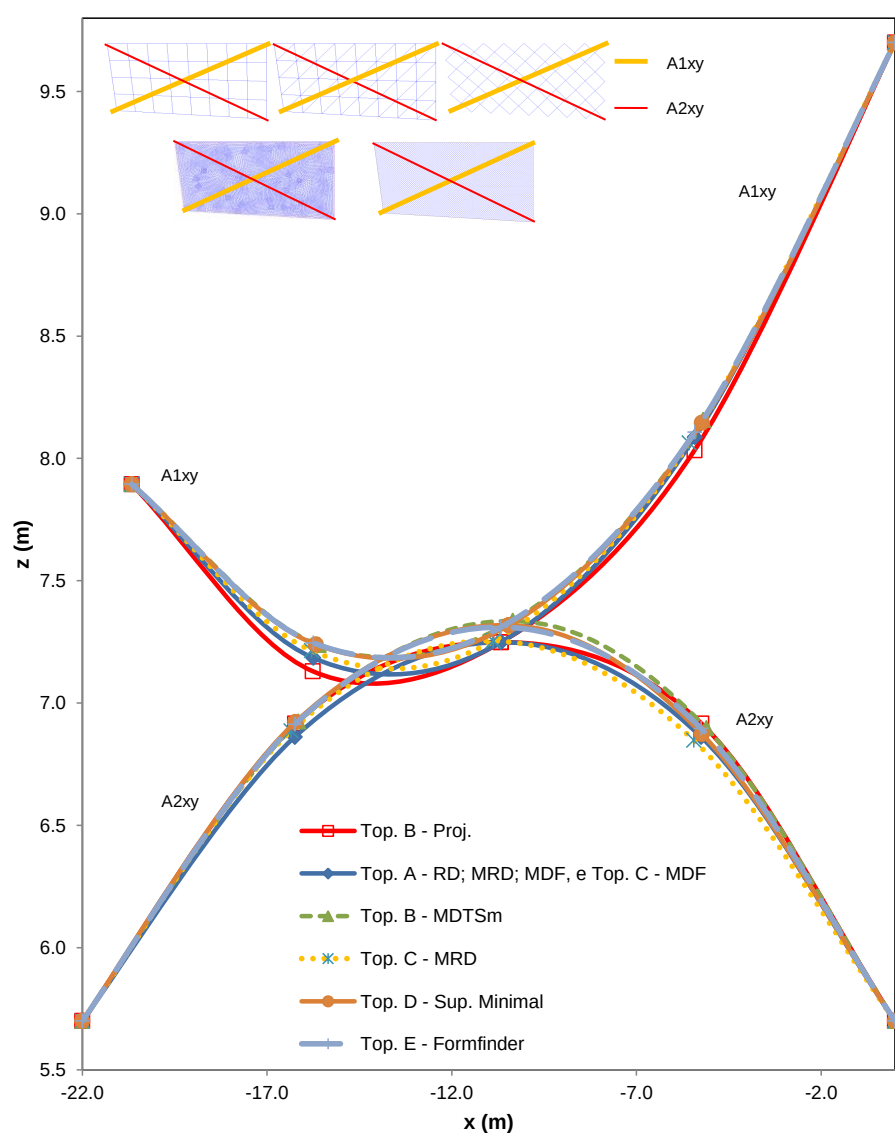


Figura 5.45 – Geometria dos modelos do módulo superior baseada na *topologia* (A, B, C, D e E) e na respetiva metodologia de determinação da forma (fase 2), salientando os alinhamentos de curvatura principal positiva e negativa do módulo superior, respetivamente (A1xy) e (A2xy)

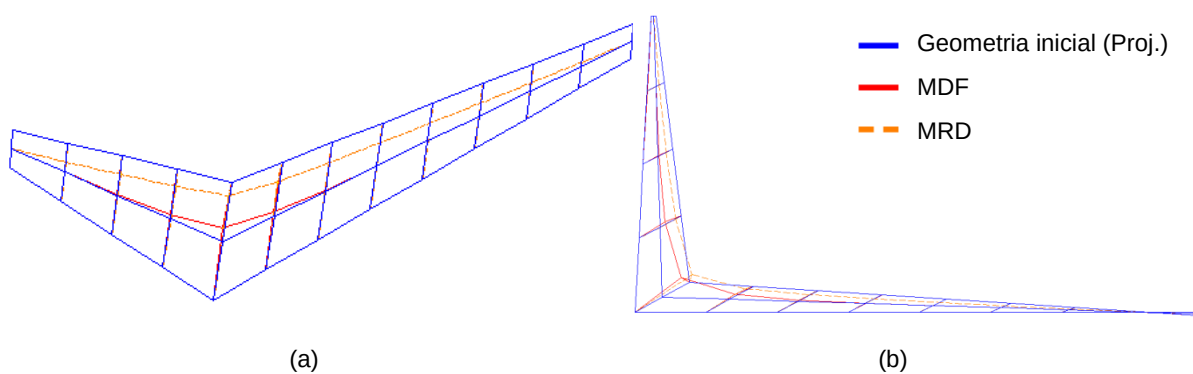


Figura 5.46 – Geometria dos modelos do módulo lateral baseada em diferentes metodologias de determinação da forma: (a) Vista em perspectiva e (b) Vista em planta

5.5. ANÁLISE DA MEMBRANA TENSA COM BORDOS RÍGIDOS SOB AS AÇÕES PERMANENTES – INFLUÊNCIA DO PRÉ-ESFORÇO E DA ORTOTROPIA

5.5.1. INTRODUÇÃO

A membrana tensa é realizada através da junção de um conjunto de peças de membrana ou padrões de corte. A disposição destes padrões de corte nos módulos de membrana define a orientação das direções principais de fabrico urdume e trama: a direção do urdume fica orientada segundo as juntas longitudinais dos padrões de corte, e a trama é ortogonal à direção anterior.

As direções do urdume e da trama têm propriedades mecânicas distintas face ao processo de fiação do material de membrana. Consequentemente, a diferente disposição destas direções principais de fabrico na superfície de membrana implica uma resposta distinta da membrana às solicitações previstas no seu dimensionamento.

Por esse motivo, pretende-se averiguar em que medida a disposição dos padrões de corte, no módulo superior de membrana, orientada a 0° em relação às direções de desenvolvimento principal da estrutura (ver a Figura 5.47 (a)) é de facto menos vantajosa do que orientada, por exemplo, a 45° (ver a Figura 5.47 (b)) - solução utilizada na estrutura.

Para o efeito, é realizado um primeiro estudo paramétrico, secção 5.5.3, de modo a avaliar a influência do pré-esforço e da orientação das direções principais de fabrico. São realizados dois modelos de membrana, consoante a orientação das direções principais de fabrico no módulo superior, a 0° e 45° , e de seguida são realizadas simulações numéricas de análise estática não-linear geométrica com grandes deslocamentos sob as ações previstas no dimensionamento destas estruturas - peso próprio e pré-esforço. Nestes modelos de membrana são utilizados elementos finitos de casca com comportamento puro de membrana, e é aplicado um modelo constitutivo ortotrópico linear. Nestas análises, o nível de pré-esforço é balizado entre $0,5$ e 3 kN/m ($0,5$, $0,9$, 1 , 2 e 3 kN/m), face ao desconhecimento do pré-esforço realmente aplicado à membrana tensa, e o coeficiente de Poisson é igual $\nu_{TU} = 0,235$ ($\nu_{UT} = 0,39$).

Complementarmente, face à incerteza na definição adequada dos parâmetros de ortotropia nas simulações numéricas, como discutido anteriormente na secção 5.3, é realizado um segundo estudo, secção 5.5.4, de modo a avaliar a influência do pré-esforço e do coeficiente de Poisson no comportamento da membrana. Neste estudo é considerado o modelo com as direções principais de fabrico orientadas a 45° com as direções de desenvolvimento longitudinal e transversal da estrutura - orientação real (ver a Figura 5.47 (b)), e são realizadas simulações numéricas de análise estática não-linear geométrica com grandes deslocamentos sob as ações previstas no dimensionamento destas estruturas - peso próprio e pré-esforço. Nestas análises, o nível de pré-esforço foi balizado entre 1 e 3 kN/m (1 , 2 e 3 kN/m), e o coeficiente de Poisson ν_{TU} é balizado entre $0,235$ e $0,7$ ($0,235$, $0,37$, $0,45$, $0,62$ e $0,7$), e ν_{UT} respetivamente entre $0,39$ e $1,17$ ($0,39$, $0,62$, $0,75$, $1,04$ e $1,17$).

Em ambos os estudos é realizada uma análise modal de modo a verificar em que medida a orientação das direções principais de fabrico e o coeficiente de Poisson, bem como o pré-esforço, influenciam o comportamento dinâmico da membrana.

Depois de realizadas as análises paramétricas, é realizado um estudo, secção 5.5.5, que visa averiguar o grau de erro associado à consideração do modelo constitutivo ortotrópico linear para simular o comportamento da membrana, em detrimento do seu comportamento real caracterizado por não-linearidades marcadas em serviço. Para o efeito são realizadas simulações numéricas de um ensaio de tração biaxial com base no modelo constitutivo linear utilizado e, de seguida, os resultados numéricos são sobrepostos com os resultados obtidos experimentalmente num ensaio real.

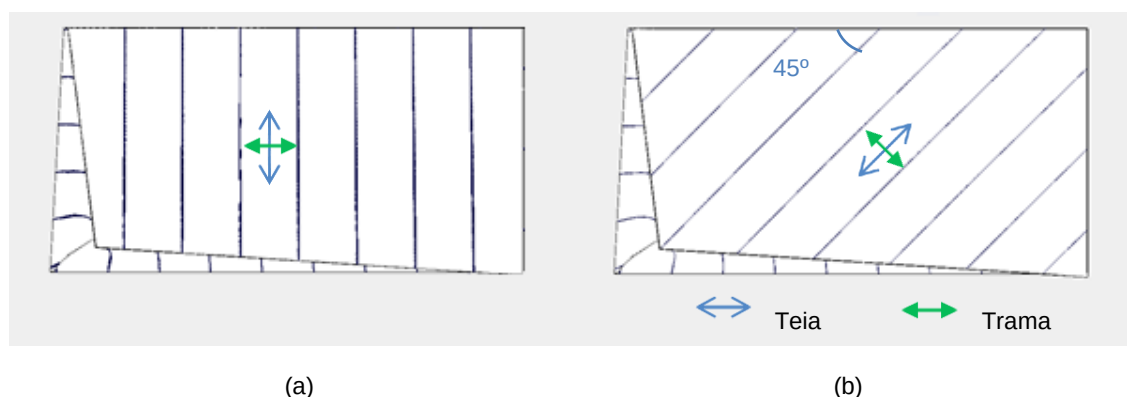


Figura 5.47 – Orientação das direções de fabrico urdume e trama no módulo superior de membrana tensa, no 1º quadrante da estrutura: (a) Direções principais de fabrico orientadas a 0° com as direções de desenvolvimento longitudinal e transversal da estrutura e (b) Direções principais de fabrico orientadas a 45° com as direções de desenvolvimento longitudinal e transversal da estrutura – solução utilizada na estrutura

5.5.2. MODELOS ORTOTRÓPICOS – DIREÇÃO DO URDUME VS DIREÇÃO DA TRAMA

Os modelos de membrana tensa utilizados no presente estudo são realizados a partir da solução obtida nos estudos da determinação da forma da secção 5.4. Nessa fase foi realizada a determinação da forma do módulo superior e do módulo lateral da membrana tensa para o 1º quadrante da estrutura. Atendendo à dupla simetria da estrutura, a malha da membrana tensa do 1º quadrante é replicada para o 2º, 3º e 4º quadrantes, permitindo realizar o modelo de base de membrana tensa, de acordo com a Figura 5.48.

Neste estudo, a membrana tensa é estudada isoladamente, não estando portanto ligada à estrutura metálica, pelo que são inseridos apoios nos nós da malha da membrana tensa que posteriormente farão a ligação com a estrutura metálica. Estes nós fixos localizam-se nos bordos dos módulos superiores e dos módulos laterais da membrana tensa.

De seguida, são aplicados elementos finitos de casca de três nós, homogêneos na espessura, apresentando um comportamento puro de membrana (Computers and Structures Inc. 2011). O modelo constitutivo utilizado é ortotrópico linear. Cada elemento de casca tem associado um sistema local de coordenadas que permite definir as propriedades ortotrópicas do material e as cargas aplicadas, bem como interpretar os resultados das análises.

O sistema local de coordenadas dos elementos de membrana é definido pelos eixos 1, 2 e 3, de acordo com a Figura 5.49. Os dois primeiros eixos estão contidos no plano do elemento e a sua orientação é definida pelo utilizador. O terceiro eixo é normal ao plano do elemento. No presente caso o eixo 1 representa a direção do urdume e o eixo 2 representa a direção da trama.

Os dois modelos de membrana tensa são realizados no programa de cálculo SAP, distinguindo-se unicamente na disposição das orientações de fabrico urdume e trama no módulo superior de membrana. Em ambos os modelos, no módulo de membrana lateral, a orientação do urdume é aproximadamente vertical e a orientação da trama é aproximadamente horizontal.

As propriedades dos materiais dos elementos finitos estão de acordo com as propriedades dos materiais utilizados na estrutura (Escrig e Sánchez 2009) e sistematizados na secção de materiais (ver a secção 5.3). A Tabela 5.27 apresenta a área e o peso dos elementos de membrana utilizados nos modelos numéricos, respetivamente para cada módulo de membrana, sendo de destacar que a massa total da membrana é aproximadamente igual a 1440kg .

Tabela 5.27 – Área e peso dos elementos de membrana dos modelos numéricos

		Área (m^2)	Massa (kg)	Peso (N)
Membrana	Módulo 1	983,41	1032,58	10129,61
	Módulo 2	136,88	143,72	1409,94
	Módulo 3	250,90	263,44	2584,38
Total		1371,19	1439,74	14123,93

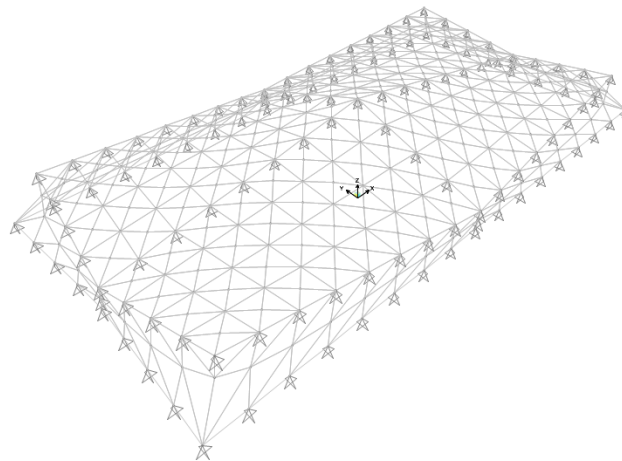


Figura 5.48 – Modelo de base da membrana tensa isolada

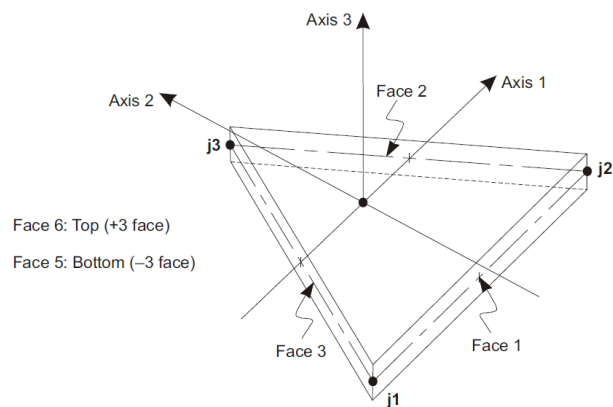


Figura 5.49 – Elemento de casca triangular (Computers and Structures Inc. 2011)

A Figura 5.50 (a) apresenta o “Modelo 0° ” em que as direções principais de fabrico nos módulos superiores de membrana estão orientadas a 0° com as direções de desenvolvimento longitudinal e transversal da estrutura, e a Figura 5.50 (b) apresenta “Modelo 45° ” em que as direções principais de fabrico estão orientadas a 45° com as direções de desenvolvimento longitudinal e transversal da estrutura – solução utilizada na estrutura.

No modelo 0° a direção do urdume está alinhada com a direção transversal da estrutura e a direção da trama está alinhada com a direção longitudinal da estrutura. Deste modo, em termos globais, a direção do urdume dos módulos superiores de membrana orienta-se entre as vigas do anel superior do lado maior e conflui na zona do pórtico maior (ver a Figura 5.50 (c)), enquanto a direção da trama orienta-se entre as vigas do anel superior do lado menor e conflui na zona do pórtico menor.

Por sua vez, no modelo 45° a direção do urdume está alinhada a 45° com a direção longitudinal da estrutura (ou transversal), e, portanto, em termos globais, a direção do urdume dos módulos superiores de membrana orienta-se radialmente em relação ao ponto mais elevado da cobertura (ver a Figura 5.50 (d)), e a direção da trama é ortogonal à anterior.

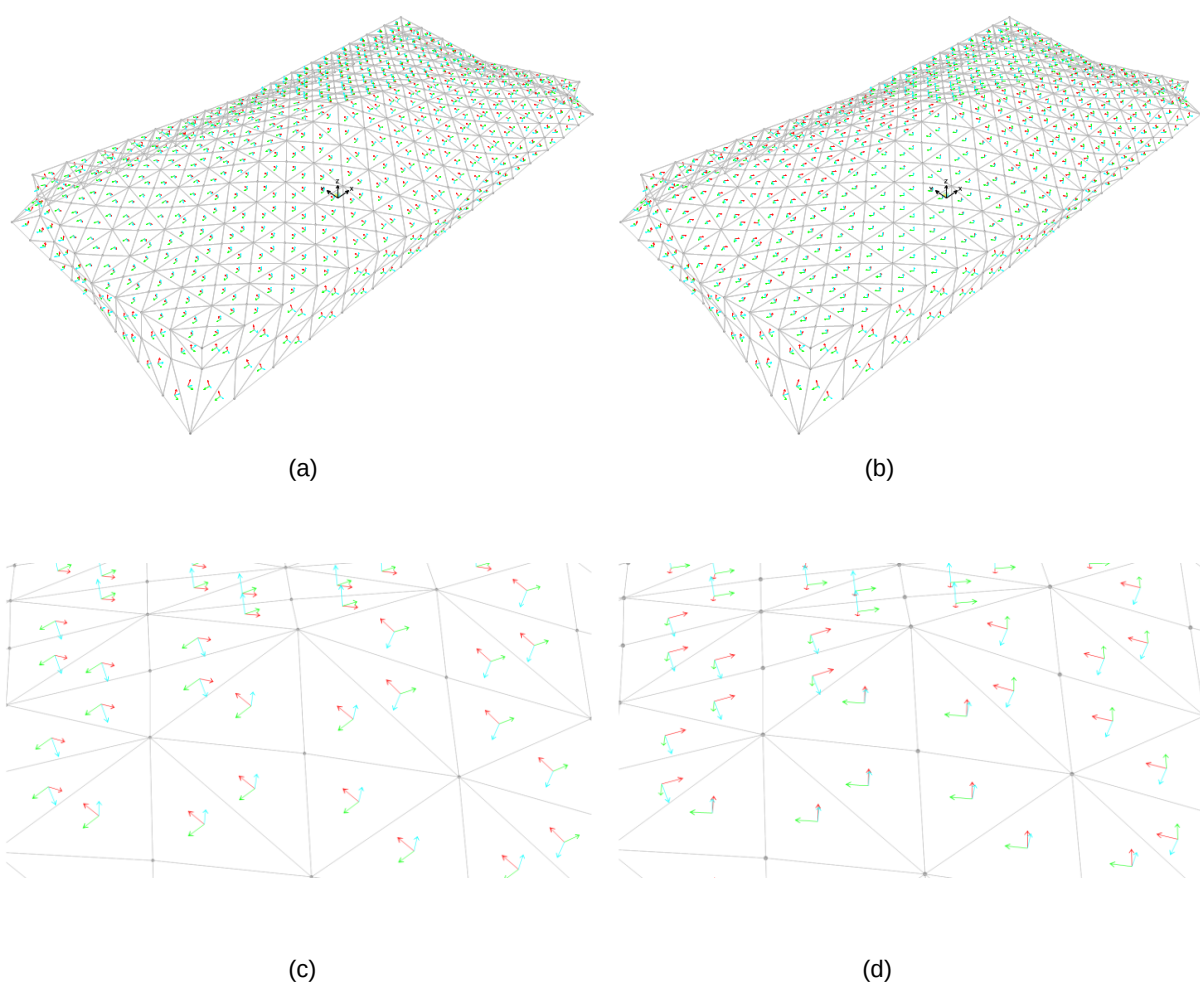


Figura 5.50 – Modelos de membrana tensa isolada: (a) Modelo 0° e (b) Modelo 45° – solução utilizada na estrutura; (c) Pormenor do topo da cobertura do modelo 0° e (d) Pormenor do topo da cobertura do modelo 45°

5.5.3. INFLUÊNCIA DO PRÉ-ESFORÇO E DA ORIENTAÇÃO DAS DIREÇÕES DE FABRICO

5.5.3.1. Análise estática

Neste primeiro estudo são realizadas análises estáticas não-lineares geométricas com grandes deslocamentos dos dois modelos de membrana tensa, sob as condições de carregamento previstas no seu dimensionamento – peso próprio e pré-esforço. O pré-esforço é aplicado aos elementos de casca por intermédio de uma deformação introduzida nas direções do urdume e da trama, respetivamente, $\varepsilon_{U, input}$ e $\varepsilon_{T, input}$.

A aplicação destas deformações à membrana é realizada num primeiro caso de carga imprimindo uma rigidez inicial à membrana. Esta rigidez permite-lhe suportar as restantes ações previstas no seu dimensionamento. O peso próprio é considerado num segundo caso de carga, sucessor do primeiro caso de carga.

O valor médio das deformações de *input* é arbitrado iterativamente até serem obtidas as tensões médias pretendidas na membrana em cada configuração, considerando a aplicação conjunta do pré-esforço e do peso próprio. A Tabela 5.28 apresenta o valor das deformações introduzidas aos elementos de membrana, quer para o módulo 1, quer para o módulo lateral, e obtido tendo por base um pré-esforço médio balizado entre 0,5 e 3kN/m e considerando o coeficiente de Poisson $\nu_{TU} = 0,235$ ($\nu_{UT} = 0,39$). É de notar que a deformação média introduzida em cada direção de fiação é igual em todos os elementos de membrana.

Tabela 5.28 – Deformação introduzida nos elementos de membrana na direção do urdume (U) e da trama (T)

		Módulo 1				Módulo Lateral	
		Modelo "45°"		Modelo "0°"			
		$\varepsilon_{U, input}$	$\varepsilon_{T, Input}$	$\varepsilon_{U, input}$	$\varepsilon_{T, Input}$	$\varepsilon_{U, input}$	$\varepsilon_{T, Input}$
Pré-esforço pretendido (kN/m)	0,5	0,00188	-0,00229	-0,00019	-0,00068	-0,00036	-0,00090
	0,9	0,00026	-0,00221	-0,00062	-0,00141	-0,00065	-0,00160
	1	0,00002	-0,00227	-0,00072	-0,00159	-0,00073	-0,00177
	2	-0,00149	-0,00338	-0,00158	-0,00329	-0,00146	-0,00351
	3	-0,00254	-0,00481	-0,00239	-0,00496	-0,00220	-0,00523

No sentido de agilizar o processo iterativo referido anteriormente de determinação das deformações médias introduzidas nos elementos de membrana que originam tensões médias na membrana de valores específicos entre 0,5 e 3kN/m, foi desenvolvida uma metodologia baseada na teoria do estado plano de tensão considerando o material ortotrópico, descrito anteriormente no capítulo dois. De acordo com esta teoria, a relação entre as deformações e as tensões normais escrita no referencial de simetria material é dada por

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_U \\ \varepsilon_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_U} & -\frac{\nu_{TU}}{E_T} \\ -\frac{\nu_{UT}}{E_U} & \frac{1}{E_T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_U \\ \sigma_T \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

em que E_U é o módulo de elasticidade na direção do urdume, E_T é o módulo de elasticidade na direção da trama, ν_{UT} é a deformação na direção da trama devido a uma deformação unitária na direção do

urdume e ν_{TU} é a deformação na direção do urdume devido a uma deformação unitária na direção da trama. Para a realização do processo iterativo, reescreve-se (5.3) da seguinte forma

$$\begin{cases} \varepsilon_U = \mathcal{C}_1 \frac{\sigma_U}{E_U} - \mathcal{C}_2 \frac{\nu_{TU}\sigma_T}{E_T} + \mathcal{C}_3 \\ \varepsilon_T = -\mathcal{C}_4 \frac{\nu_{UT}\sigma_U}{E_U} + \mathcal{C}_5 \frac{\sigma_T}{E_T} + \mathcal{C}_6 \end{cases} \quad (5.4)$$

em que $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5$ e $\mathcal{C}_6$, são constantes determinadas durante o processo iterativo tendo por base o histórico das últimas 3 soluções obtidas ($\varepsilon_{U, input}; \varepsilon_{T, input}; \sigma_{U, output}; \sigma_{T, output}$)_{médio}, vindo então

$$\begin{cases} \varepsilon_U^{n-2} = \mathcal{C}_1 \frac{\sigma_U^{n-2}}{E_U} - \mathcal{C}_2 \frac{\nu_{TU}\sigma_T^{n-2}}{E_T} + \mathcal{C}_3 \\ \varepsilon_T^{n-2} = -\mathcal{C}_4 \frac{\nu_{UT}\sigma_U^{n-2}}{E_U} + \mathcal{C}_5 \frac{\sigma_T^{n-2}}{E_T} + \mathcal{C}_6 \\ \varepsilon_U^{n-1} = \mathcal{C}_1 \frac{\sigma_U^{n-1}}{E_U} - \mathcal{C}_2 \frac{\nu_{TU}\sigma_T^{n-1}}{E_T} + \mathcal{C}_3 \\ \varepsilon_T^{n-1} = -\mathcal{C}_4 \frac{\nu_{UT}\sigma_U^{n-1}}{E_U} + \mathcal{C}_5 \frac{\sigma_T^{n-1}}{E_T} + \mathcal{C}_6 \\ \varepsilon_U^n = \mathcal{C}_1 \frac{\sigma_U^n}{E_U} - \mathcal{C}_2 \frac{\nu_{TU}\sigma_T^n}{E_T} + \mathcal{C}_3 \\ \varepsilon_T^n = -\mathcal{C}_4 \frac{\nu_{UT}\sigma_U^n}{E_U} + \mathcal{C}_5 \frac{\sigma_T^n}{E_T} + \mathcal{C}_6 \end{cases} \quad (5.5)$$

Desenvolvendo (5.5), as constantes referidas vêm dadas por

$$\begin{cases} \mathcal{C}_1 = E_U \left[\frac{\varepsilon_U^{n-2}(\sigma_T^{n-1} - \sigma_T^n) - \varepsilon_U^{n-1}(\sigma_T^{n-2} - \sigma_T^n) + \varepsilon_U^n(\sigma_T^{n-2} - \sigma_T^{n-1})}{\sigma_U^{n-2}(\sigma_T^{n-1} - \sigma_T^n) - \sigma_U^{n-1}(\sigma_T^{n-2} - \sigma_T^n) + \sigma_U^n(\sigma_T^{n-2} - \sigma_T^{n-1})} \right] \\ \mathcal{C}_2 = \frac{E_T}{\nu_{TU}} \left[\frac{\varepsilon_U^{n-2}(\sigma_U^{n-1} - \sigma_U^n) - \varepsilon_U^{n-1}(\sigma_U^{n-2} - \sigma_U^n) + \varepsilon_U^n(\sigma_U^{n-2} - \sigma_U^{n-1})}{\sigma_U^{n-2}(\sigma_T^{n-1} - \sigma_T^n) - \sigma_U^{n-1}(\sigma_T^{n-2} - \sigma_T^n) + \sigma_U^n(\sigma_T^{n-2} - \sigma_T^{n-1})} \right] \\ \mathcal{C}_3 = \frac{\varepsilon_U^{n-2}(\sigma_U^{n-1}\sigma_T^n - \sigma_U^n\sigma_T^{n-1}) - \varepsilon_U^{n-1}(\sigma_U^{n-2}\sigma_T^n - \sigma_U^n\sigma_T^{n-2}) + \varepsilon_U^n(\sigma_U^{n-2}\sigma_T^{n-1} - \sigma_U^{n-1}\sigma_T^{n-2})}{\sigma_U^{n-2}(\sigma_T^{n-1} - \sigma_T^n) - \sigma_U^{n-1}(\sigma_T^{n-2} - \sigma_T^n) + \sigma_U^n(\sigma_T^{n-2} - \sigma_T^{n-1})} \\ \mathcal{C}_4 = -\frac{E_T}{\nu_{TU}} \left[\frac{\varepsilon_T^{n-2}(\sigma_T^{n-1} - \sigma_T^n) - \varepsilon_T^{n-1}(\sigma_T^{n-2} - \sigma_T^n) + \varepsilon_T^n(\sigma_T^{n-2} - \sigma_T^{n-1})}{\sigma_U^{n-2}(\sigma_T^{n-1} - \sigma_T^n) - \sigma_U^{n-1}(\sigma_T^{n-2} - \sigma_T^n) + \sigma_U^n(\sigma_T^{n-2} - \sigma_T^{n-1})} \right] \\ \mathcal{C}_5 = -E_T \left[\frac{\varepsilon_T^{n-2}(\sigma_U^{n-1} - \sigma_U^n) - \varepsilon_T^{n-1}(\sigma_U^{n-2} - \sigma_U^n) + \varepsilon_T^n(\sigma_U^{n-2} - \sigma_U^{n-1})}{\sigma_U^{n-2}(\sigma_T^{n-1} - \sigma_T^n) - \sigma_U^{n-1}(\sigma_T^{n-2} - \sigma_T^n) + \sigma_U^n(\sigma_T^{n-2} - \sigma_T^{n-1})} \right] \\ \mathcal{C}_6 = \frac{\varepsilon_T^{n-2}(\sigma_U^{n-1}\sigma_T^n - \sigma_U^n\sigma_T^{n-1}) - \varepsilon_T^{n-1}(\sigma_U^{n-2}\sigma_T^n - \sigma_U^n\sigma_T^{n-2}) + \varepsilon_T^n(\sigma_U^{n-2}\sigma_T^{n-1} - \sigma_U^{n-1}\sigma_T^{n-2})}{\sigma_U^{n-2}(\sigma_T^{n-1} - \sigma_T^n) - \sigma_U^{n-1}(\sigma_T^{n-2} - \sigma_T^n) + \sigma_U^n(\sigma_T^{n-2} - \sigma_T^{n-1})} \end{cases} \quad (5.6)$$

As deformações na iteração seguinte vêm então dadas por

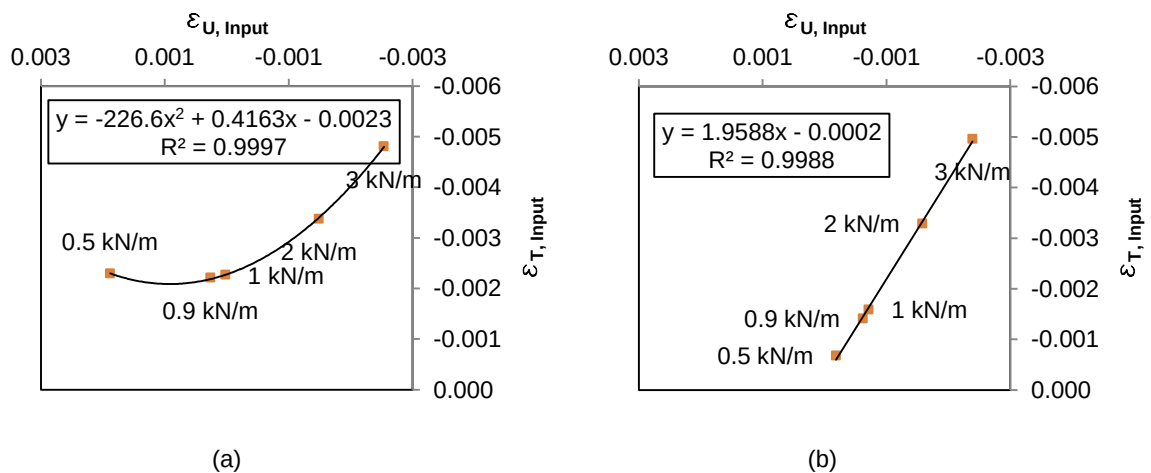
$$\begin{cases} \varepsilon_U^{n+1} = \mathcal{C}_1 \frac{\sigma_U^{pret}}{E_U} - \mathcal{C}_2 \frac{\nu_{TU}\sigma_T^{pret}}{E_T} + \mathcal{C}_3 \\ \varepsilon_T^{n+1} = -\mathcal{C}_4 \frac{\nu_{UT}\sigma_U^{pret}}{E_U} + \mathcal{C}_5 \frac{\sigma_T^{pret}}{E_T} + \mathcal{C}_6 \end{cases} \quad (5.7)$$

em que σ_U^{pret} e σ_T^{pret} são as tensões pretendidas na direção do urdume e da trama. A Tabela 5.29 apresenta a título de exemplo o processo iterativo de determinação das deformações de *input* do módulo 1 do modelo 45° para a configuração de pré-esforço de 500N/m.

Tabela 5.29 – Processo iterativo de determinação das deformações do módulo 1 do modelo 45° para a configuração de 500N/m

Iteração	ε_U	ε_T	$\sigma_U^{médio}$ / $\sigma_T^{médio}$ (N/m)	σ_U^{pret} / σ_T^{pret} (N/m)	C1	C2	C3	C4	C5	C6
							(x10 ⁻³)			(x10 ⁻³)
1	0,001100	-0,001800	542,96 458,36	500,00 500,00						
2	0,001830	-0,002260	502,48 496,74	500,00 500,00						
3	0,001840	-0,002270	502,91 499,23	500,00 500,00	-9,45	-12,07	4,93	-12,79	-2,38	-2,97
4	0,001880	-0,002293	500,56 500,89	500,00 500,00	-9,86	-12,26	5,15	-12,11	-2,35	-2,83
5	0,001882	-0,002292	499,93 499,91	500,00 500,00	-9,71	-12,80	4,92	-12,11	-2,35	-2,82
6	0,001882	-0,002292								

A Figura 5.51 apresenta a comparação entre a deformação introduzida na direção do urdume (U) e da trama (T) do módulo 1, respetivamente para o modelo 45° e para o modelo 0°. Em primeira análise é de notar que em geral as deformações introduzidas aumentam com o aumento das tensões médias pretendidas. No entanto, no caso do modelo 45° esse aumento não é linear, ao contrário do modelo 0°. Este facto deve-se ao comportamento distinto dos dois modelos sob a atuação de cargas aplicadas, neste caso o peso próprio.

Figura 5.51 – Comparação entre a deformação introduzida na direção do urdume (U) e da trama (T) do módulo 1 para cada nível de pré-esforço: (a) Modelo 45° e (b) Modelo 0°

Atendendo a que o peso próprio é uma carga descendente, no caso do modelo 45° , o caminho de esforços resultantes devido à atuação dessa ação está alinhado com a direção do urdume, pelo que é esta direção de fabrico que suporta maioritariamente esta ação. Portanto, para obter um nível de pré-esforço uniforme no plano da membrana, é necessário descomprimir mais a direção do urdume e menos a direção da trama, à medida que o nível de pré-esforço é menor. Aliás, note-se que abaixo de 1 kN/m as deformações introduzidas na direção do urdume são positivas, o que nunca chega a acontecer no modelo 0° .

No caso do modelo 0° , o caminho dos esforços resultantes coincide com o anterior modelo, no entanto esses esforços serão suportados pelas duas direções de fabrico, urdume e trama, dado que estas direções de fabrico estão alinhadas aproximadamente a 45° com a direção do caminho dos esforços resultantes. Por esse motivo, as deformações introduzidas nestas direções aumentam linearmente com o aumento de pré-esforço pretendido.

Em ambos os modelos, 45° e 0° , as deformações introduzidas na direção do urdume são sempre inferiores às da direção da trama, como mostra a Figura 5.52. Este facto tem a ver com as propriedades do modelo ortotrópico, em que o módulo de elasticidade nas direções de fabrico é distinto, sendo superior na direção do urdume (773 e 463 kN/m , respetivamente). Ora, para que nessas direções de fabrico o nível de pré-esforço seja igual, é necessário introduzir deformações superiores na direção da trama.

No caso do módulo lateral, as deformações introduzidas aumentam linearmente com o aumento das tensões médias pretendidas (ver a Figura 5.53 (a)). As deformações introduzidas na direção do urdume são sempre inferiores às da direção da trama, como mostra a Figura 5.53 (b). É de salientar um aumento da dispersão das tensões médias obtidas com o aumento do nível de pré-esforço, devendo-se à forma não otimizada do módulo lateral de membrana, como já foi referido anteriormente.

A Figura 5.54 mostra a comparação entre a deformação introduzida na direção do urdume (U) e da trama (T) com as deformações obtidas no cálculo faseado de análise não-linear geométrica do módulo 1, para cada nível de pré-esforço. No caso do modelo 45° (ver Figura 5.54 (a)), com a aplicação do peso próprio, ocorre um aumento da deformação em U acompanhada de uma diminuição em T , para cada nível de pré-esforço, o que se deve ao facto da direção U suportar maioritariamente esta ação, como foi referido anteriormente.

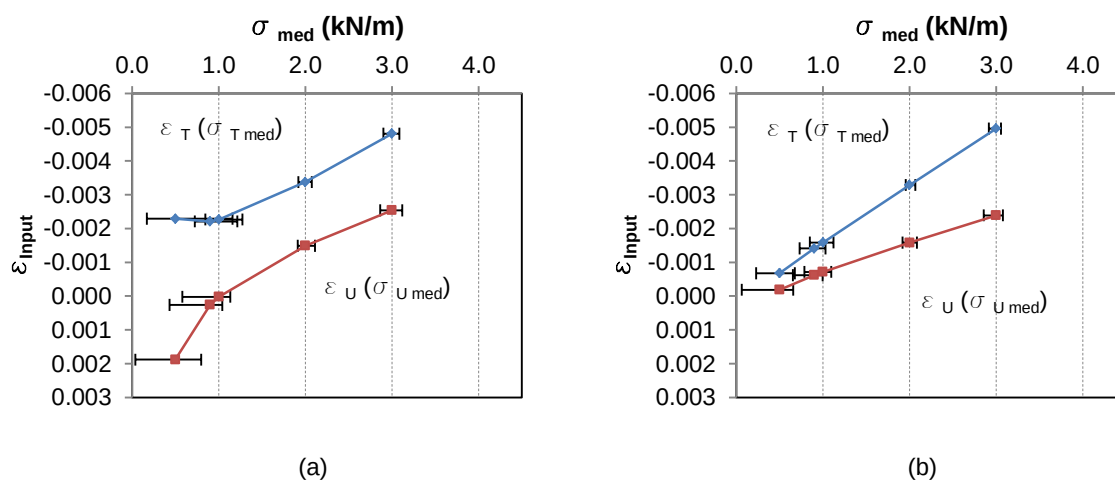


Figura 5.52 – Comparação entre a deformação introduzida na direção do urdume (U) e da trama (T) do módulo 1 em função do nível de pré-esforço: (a) Modelo 45° e (b) Modelo 0°

No caso do modelo 0° (ver Figura 5.54 (b)), com a aplicação do peso próprio, ocorre um aumento da deformação em U acompanhada de um aumento em T , para cada nível de pré-esforço, evidenciando que ambas as direções de fabrico suportam esta ação, como referido anteriormente.

No caso do módulo lateral, de acordo com a Figura 5.55, apesar de pouco notório, com a aplicação do peso próprio, ocorre um aumento da deformação em U acompanhada de uma diminuição em T , para cada nível de pré-esforço, o que se deve ao facto da direção U suportar maioritariamente esta ação.

A Figura 5.56 mostra a variação das tensões de corte máximas e médias do módulo 1 com o nível de pré-esforço. Em geral, as tensões de corte decrescem com o aumento do pré-esforço, embora o valor mínimo ocorra para um nível de pré-esforço de 2 kN/m , quer para o modelo 45° , quer para o modelo 0° . No entanto, é de salientar que as tensões de corte são inferiores no caso do modelo 45° (ver Figura 5.56 (a)) em comparação com as do modelo 0° (ver Figura 5.56 (b)), em que as tensões médias do modelo 0° são superiores às máximas do modelo 45° .

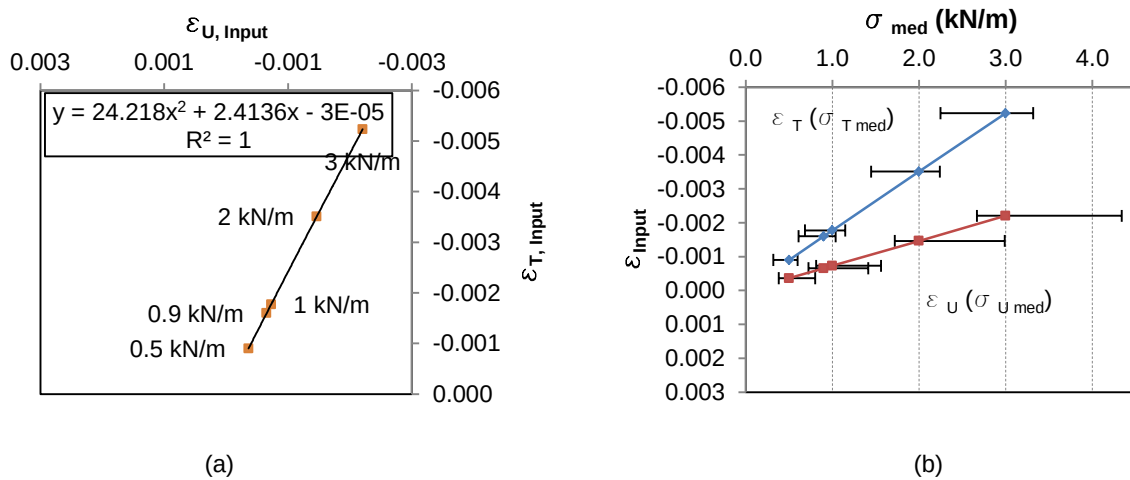


Figura 5.53 – Comparação entre a deformação introduzida na direção do urdume (U) e da trama (T) do módulo lateral (a) para cada nível de pré-esforço e (b) em função do nível de pré-esforço

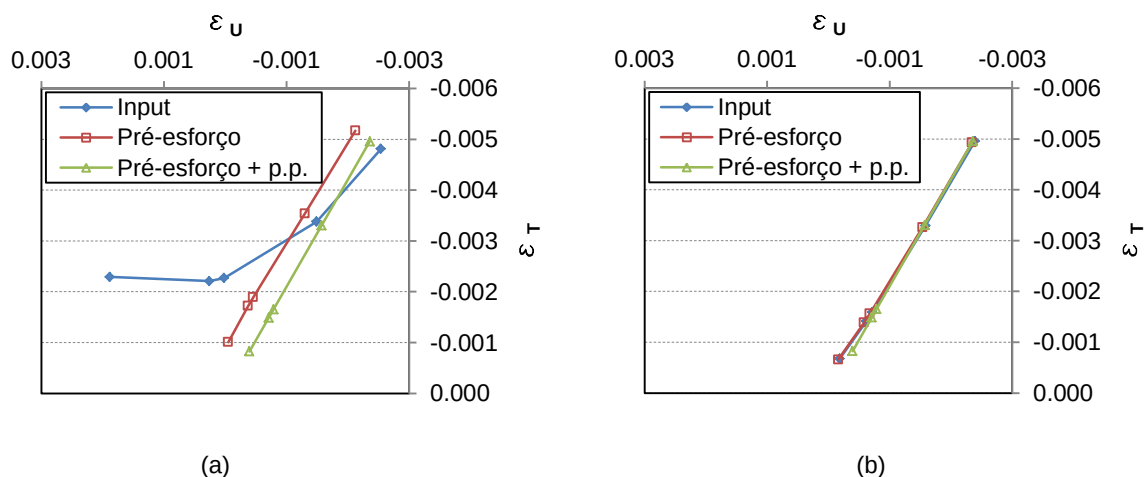


Figura 5.54 – Comparação entre a deformação introduzida na direção do urdume (U) e da trama (T) com as deformações obtidas no cálculo faseado de análise não-linear geométrica do módulo 1 para cada nível de pré-esforço: (a) Modelo 45° e (b) Modelo 0°

No caso do módulo lateral, de acordo com a Figura 5.57, as tensões de corte aumentam com o nível de pré-esforço da membrana tensa, sendo significativamente superiores às verificadas no caso do módulo 1. Este facto está na base da origem dos fenómenos de enrugamento do módulo lateral na zona de transição entre os módulos 2 e 3, mencionados anteriormente, evidenciando, mais uma vez, que o módulo lateral não otimiza as propriedades do material de membrana devido à sua forma aproximadamente plana.

Em suma, a opção de orientar as direções principais de fabrico do módulo 1 a 45° com as direções principais da estrutura, aparentemente, é uma escolha que otimiza as propriedades do material de membrana utilizado, isto é, por um lado consegue-se tirar mais proveito das propriedades ortotrópicas, alinhando as direções principais de fabrico com as direções principais dos esforços resultantes, ao mesmo tempo que origina tensões de corte inferiores. Este último facto é fundamental para que, durante as operações de montagem da membrana na estrutura metálica, haja menor probabilidade do enrugamento da tela, embora esse fenómeno dependa também de outros fatores, como referido anteriormente.

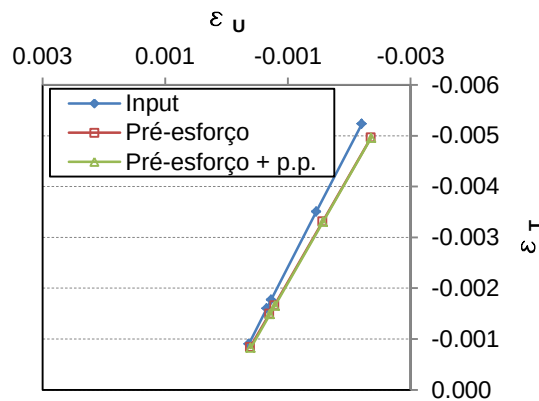


Figura 5.55 – Comparação entre a deformação introduzida na direção do urdume (U) e da trama (T) com as deformações obtidas no cálculo faseado de análise não-linear geométrica do módulo lateral para cada nível de pré-esforço

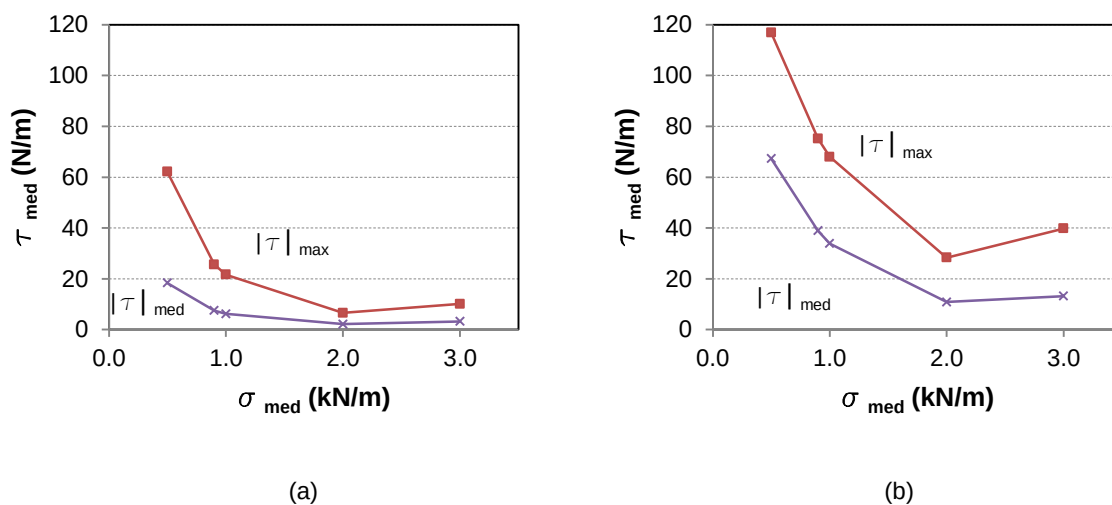


Figura 5.56 – Variação das tensões de corte do módulo 1 com o nível de pré-esforço: (a) Modelo 45° e (b) Modelo 0°

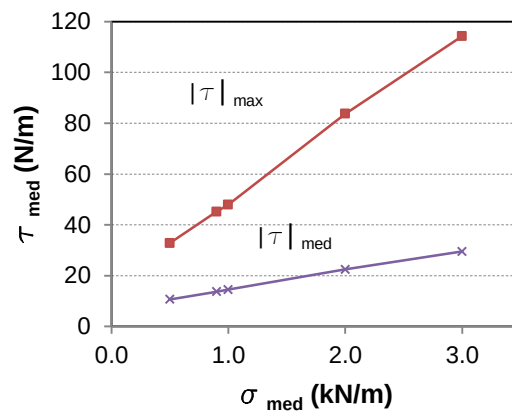


Figura 5.57 – Variação das tensões de corte do módulo lateral com o nível de pré-esforço

5.5.3.2. Análise modal

A orientação das direções principais de fabrico no módulo 1, segundo 45° e 0° em relação à orientação das direções de desenvolvimento principal da estrutura, dão origem a um comportamento diferenciado sob as ações permanentes do pré-esforço e do peso próprio, como se verificou nas análises não-lineares geométricas realizadas anteriormente. Por esse motivo, pretende-se verificar em que medida a orientação das direções principais de fabrico influencia o comportamento dinâmico da membrana.

Para o efeito é realizada uma análise modal para o modelo 45° e para o modelo 0° , balizando o nível de pré-esforço entre 0,5 e 3 kN/m. A análise modal tem por base a rigidez obtida no final da análise não-linear geométrica sob as ações permanentes do pré-esforço e do peso próprio do modelo respetivo. A Figura 5.58 apresenta a variação das frequências naturais obtidas das análises modais realizadas para cada nível de pré-esforço, quer para o modelo 45° , quer para o modelo 0° . Os valores das frequências para os modelos 45° e 0° estão sistematizados respetivamente na Tabela 5.30 e na Tabela 5.31.

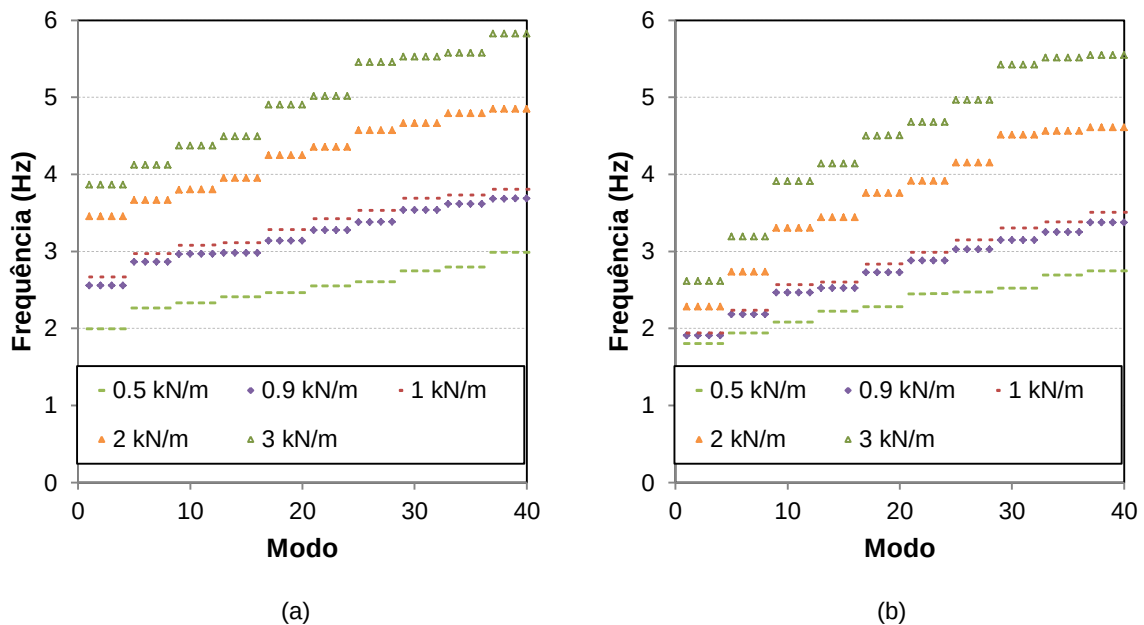


Figura 5.58 – Variação das frequências com o nível de pré-esforço: (a) Modelo 45° e (b) Modelo 0°

Em geral, as frequências naturais aumentam com o nível de pré-esforço aplicado na membrana tensa. As frequências naturais do modelo 45° são superiores às frequências homólogas do modelo 0° . A principal diferença entre as frequências apresentadas pelos modelos 45° e 0° ocorre para as frequências de modos mais baixos, mostrando tendencialmente uma redução das frequências naturais nos primeiros modos de vibração do modelo 0° , comparativamente com as do modelo 45° . Essa tendência é menos marcada à medida que aumentam as configurações modais (ver a Figura 5.58).

A dupla simetria em planta da estrutura conduz a frequências apresentadas em combinações de 4, com valores aproximadamente iguais. Por esse motivo, na Tabela 5.30 e na Tabela 5.31, as frequências são sistematizadas em grupos de 4, em que o primeiro grupo de frequências, referente aos modos 1, 2, 3 e 4, é apresentado na primeira linha; o segundo grupo de frequências, referente aos modos 5, 6, 7 e 8, é apresentado na segunda linha, e assim sucessivamente.

Tabela 5.30 – Frequências naturais do Modelo 45° com o aumento do pré-esforço da membrana [Hz]

Modo	$\sigma_{med} = 0,5 \text{ kN/m}$		$\sigma_{med} = 0,9 \text{ kN/m}$		$\sigma_{med} = 1 \text{ kN/m}$		$\sigma_{med} = 2 \text{ kN/m}$		$\sigma_{med} = 3 \text{ kN/m}$	
1 2 3 4	1,99	1,99	2,55	2,56	2,66	2,66	3,45	3,46	3,86	3,86
5 6 7 8	2,26	2,26	2,86	2,86	2,97	2,97	3,67	3,67	4,12	4,12
9 10 11 12	2,33	2,33	2,97	2,97	3,08	3,08	3,80	3,80	4,37	4,37
13 14 15 16	2,41	2,41	2,98	2,98	3,11	3,11	3,95	3,95	4,49	4,49
17 18 19 20	2,46	2,46	3,14	3,14	3,28	3,28	4,25	4,25	4,90	4,91
21 22 23 24	2,55	2,55	3,28	3,28	3,42	3,42	4,36	4,36	5,01	5,01
25 26 27 28	2,60	2,60	3,38	3,38	3,53	3,53	4,57	4,57	5,46	5,46
29 30 31 32	2,74	2,74	3,54	3,54	3,69	3,69	4,66	4,66	5,53	5,53
33 34 35 36	2,79	2,79	3,62	3,62	3,73	3,73	4,79	4,79	5,58	5,58
37 38 39 40	2,99	2,99	3,68	3,68	3,80	3,80	4,85	4,85	5,83	5,83

Tabela 5.31 – Frequências naturais do Modelo 0° com o aumento do pré-esforço da membrana [Hz]

Modo	$\sigma_{med} = 0,5 \text{ kN/m}$		$\sigma_{med} = 0,9 \text{ kN/m}$		$\sigma_{med} = 1 \text{ kN/m}$		$\sigma_{med} = 2 \text{ kN/m}$		$\sigma_{med} = 3 \text{ kN/m}$	
1 2 3 4	1,80	1,80	1,91	1,91	1,94	1,94	2,28	2,28	2,62	2,62
5 6 7 8	1,94	1,94	2,18	2,18	2,23	2,23	2,74	2,74	3,19	3,19
9 10 11 12	2,08	2,08	2,46	2,46	2,56	2,56	3,30	3,30	3,91	3,91
13 14 15 16	2,22	2,22	2,52	2,52	2,60	2,60	3,44	3,44	4,14	4,14
17 18 19 20	2,28	2,28	2,73	2,73	2,83	2,83	3,76	3,76	4,50	4,50
21 22 23 24	2,45	2,45	2,88	2,88	2,99	2,99	3,91	3,91	4,68	4,68
25 26 27 28	2,47	2,47	3,03	3,03	3,14	3,14	4,15	4,15	4,97	4,97
29 30 31 32	2,52	2,52	3,15	3,15	3,30	3,30	4,51	4,51	5,42	5,42
33 34 35 36	2,69	2,69	3,25	3,25	3,38	3,38	4,56	4,56	5,51	5,51
37 38 39 40	2,74	2,74	3,37	3,37	3,50	3,50	4,61	4,61	5,55	5,55

A título de exemplo, a Figura 5.59 apresenta o primeiro grupo de 4 frequências naturais do modelo 0° para um pré-esforço de $0,5kN/m$, salientando-se a componente vertical dos modos de vibração. O primeiro modo é antissimétrico em relação aos eixos x e y (ver a Figura 5.59 (a)), em que x está alinhado com o desenvolvimento longitudinal da estrutura e o eixo y com o desenvolvimento transversal. O segundo modo é antissimétrico em relação ao eixo x (ver a Figura 5.59 (b)). O terceiro modo é antissimétrico em relação ao eixo y (ver a Figura 5.59 (c)). Finalmente, o modo 4 é simétrico (ver a Figura 5.59 (d)). Esta combinação de modos de vibração com respeito ao eixo x e y repete-se em todos os grupos de 4 frequências da presente análise.

A Figura 5.60 apresenta a configuração modal 1 variando o pré-esforço entre $0,5$ e $3kN/m$, respetivamente para o modelo 45° e 0° . Em termos globais, a configuração modal apresentada corresponde a um modo antissimétrico em relação aos eixos x e y . No caso do modelo 45° (ver a Figura 5.60 (a)), no entanto, analisando a evolução da configuração modal dos módulos de membrana em cada quadrante, é de notar que, à medida que o pré-esforço aumenta, a configuração modal varia entre uma configuração modal antissimétrica, primeiro antissimétrico ($1A_{0,5kN/m}$), até uma configuração modal aproximadamente simétrica, primeiro simétrico ($1S_{3kN/m}$). No modelo 0° essa variação não é tão pronunciada, assemelhando-se sempre ao $1S$ (ver a Figura 5.60 (b)). As configurações modais 2, 3 e 4 são as restantes combinações em termos globais da configuração modal 1, como mencionado anteriormente.

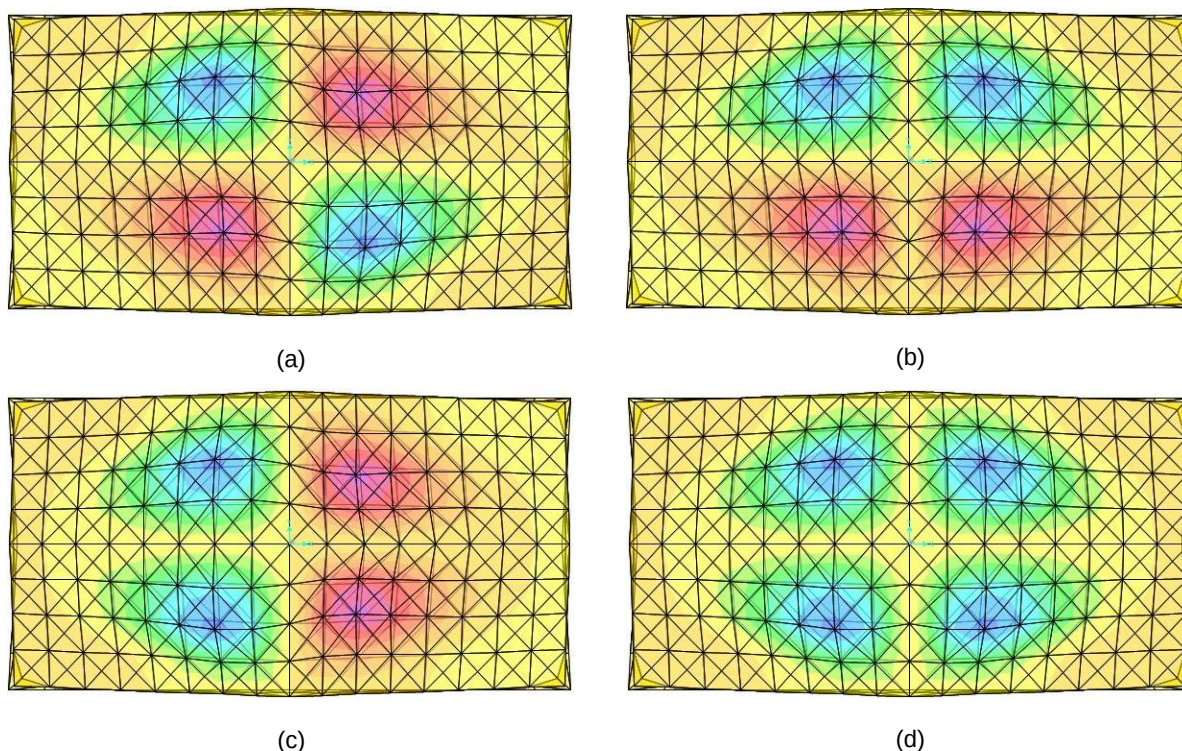


Figura 5.59 – Configurações modais do Modelo 0° para um pré-esforço de $0,5kN/m$ com destaque da componente vertical dos modos de vibração: (a) Modo 1; (b) Modo 2; (c) Modo 3 e (d) Modo 4

A Figura 5.61 mostra a configuração modal 5 variando o pré-esforço entre $0,5$ e 3kN/m , respectivamente para o modelo 45° e 0° , evidenciando que, em termos globais, é novamente um modo antissimétrico em relação aos eixos x e y . Por sua vez, analisando a evolução da configuração modal dos módulos de membrana em cada quadrante, é de notar que, no modelo 45° , à medida que o pré-esforço aumenta, a configuração modal varia entre o $1S_{0,5\text{kN/m}}$ e o $1A_{3\text{kN/m}}$ (ver a Figura 5.61 (a)). No modelo 0° a configuração modal corresponde ao $1A$ (ver a Figura 5.61 (b)).

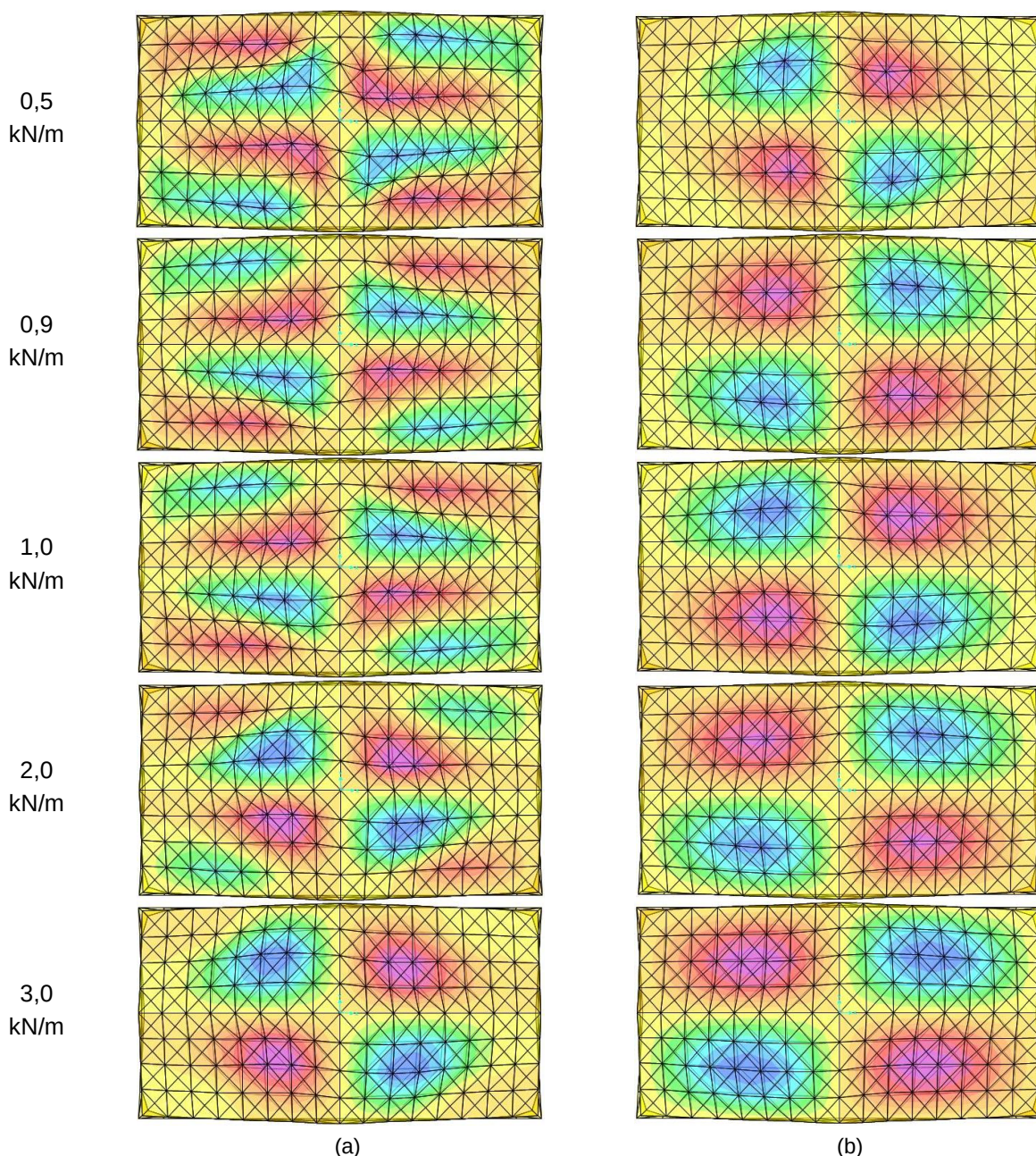


Figura 5.60 – Configuração modal 1 com a variação do pré-esforço, com destaque da componente vertical dos modos de vibração: (a) Modelo 45° e (b) Modelo 0°

Na verdade, pode-se criar uma analogia com o comportamento dinâmico de cabos (Caetano 2007) em que, dispondo as frequências naturais de cabos com diferentes características em função do parâmetro de Irvine λ^2 , ocorrem as denominadas *crossovers*. Em cabos muito tensos, apresentando valores baixos de λ^2 , o primeiro modo é o primeiro simétrico *1S* em que a componente vertical não apresenta nodos de vibração, o segundo modo é o 1 antissimétrico *1A*, o terceiro modo é o 2S, e assim sucessivamente; enquanto para cabos pouco tensos, apresentando valores elevados do parâmetro de Irvine, o primeiro modo de vibração é o primeiro antissimétrico *1A*, o segundo modo é o 1 simétrico *1S* em que a componente vertical apresenta dois nodos de vibração, o terceiro modo é o 2A, e assim sucessivamente.

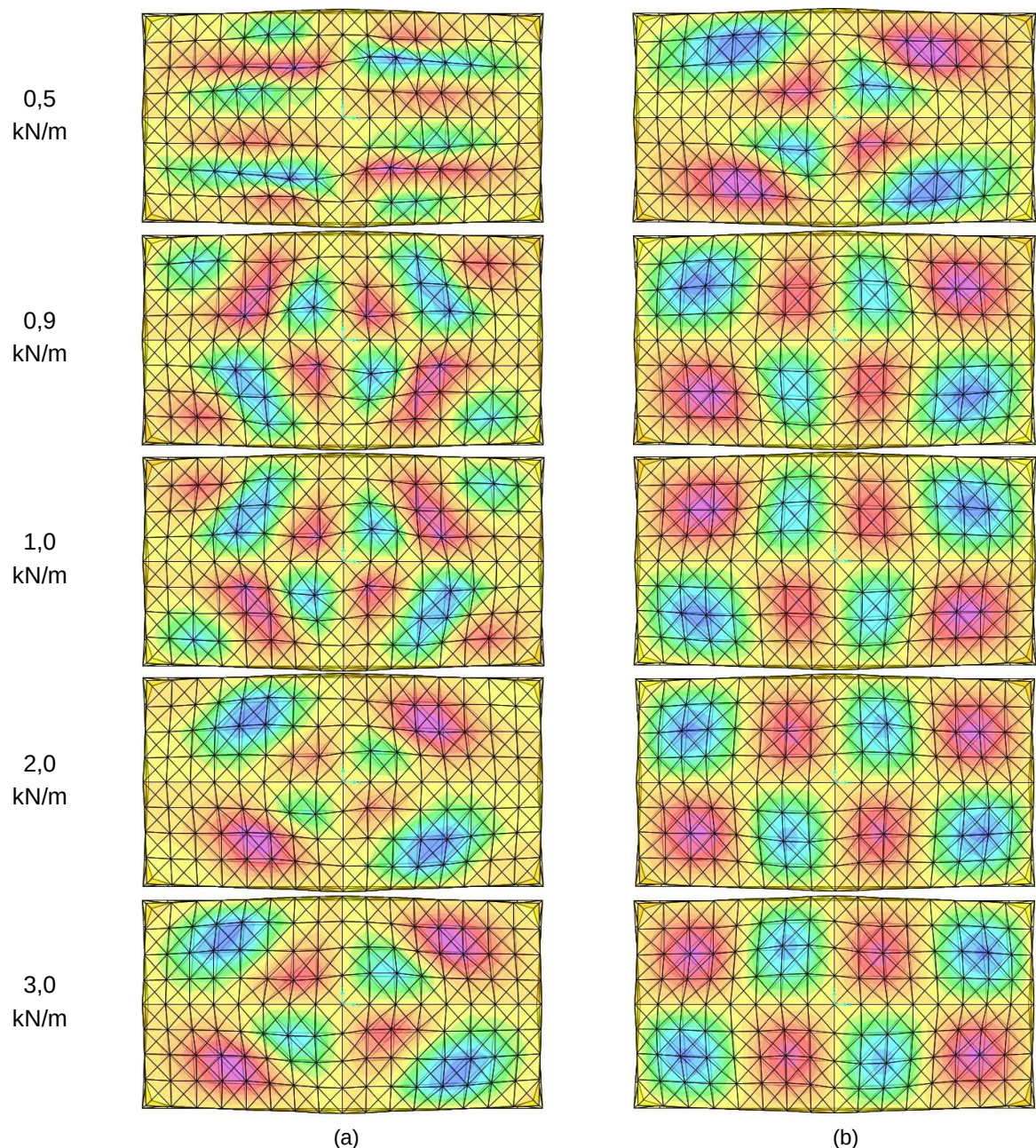


Figura 5.61 – Configuração modal 5 com a variação do pré-esforço, com destaque da componente vertical dos modos de vibração: (a) Modelo 45° e (b) Modelo 0°

5.5.4. INFLUÊNCIA DO PRÉ-ESFORÇO E DO COEFICIENTE DE POISSON

5.5.4.1. Análise estática

Nesta secção é avaliada a influência do pré-esforço e do coeficiente de Poisson no comportamento da membrana. Neste estudo é considerado o modelo com as direções principais de fabrico da membrana orientadas a 45° com as direções de desenvolvimento longitudinal e transversal da estrutura - modelo 45° . Para o efeito é realizada uma análise estática não-linear geométrica do modelo, sob as condições de carregamento previstas no seu dimensionamento – pré-esforço e peso próprio. O pré-esforço é aplicado aos elementos de casca nas direções do urdume e da trama por intermédio de uma deformação introduzida respetivamente em cada direção, de acordo com os valores apresentados na Tabela 5.32. Estes valores são estimados iterativamente com base no método descrito anteriormente nas secção 5.5.3.1 até serem obtidas as tensões médias pretendidas para a membrana em cada configuração entre 1 e 3 kN/m , quer para o módulo 1, quer para o módulo lateral, sob atuação das ações permanentes. O coeficiente de Poisson ν_{TU} varia entre 0,235 e 0,7 e ν_{UT} varia entre 0,39 e 1,17, de acordo com os valores sistematizados na Tabela 5.32.

Tabela 5.32 – Deformação introduzida nos elementos de membrana na direção do urdume (U) e da trama (T)

	ν_{TU}	ν_{UT}	Deformação de Input	Modelo 45°		
				Pré-esforço pretendido (kN/m)		
				1	2	3
Módulo 1	0,235	0,39	ε_U	0,00002	-0,00149	-0,00254
			ε_T	-0,00227	-0,00338	-0,00481
	0,37	0,62	ε_U	0,00030	-0,00091	-0,00166
			ε_T	-0,00197	-0,00279	-0,00393
	0,45	0,75	ε_U	0,00047	-0,00056	-0,00115
			ε_T	-0,00179	-0,00245	-0,00342
	0,62	1,04	ε_U	0,00082	0,00017	-0,00004
			ε_T	-0,00142	-0,00171	-0,00231
	0,7	1,17	ε_U	0,00098	0,00051	0,00048
			ε_T	-0,00123	-0,00136	-0,00180
Módulo lateral	0,235	0,39	ε_U	-0,00073	-0,00146	-0,00220
			ε_T	-0,00177	-0,00351	-0,00523
	0,37	0,62	ε_U	-0,00044	-0,00088	-0,00133
			ε_T	-0,00148	-0,00292	-0,00435
	0,45	0,75	ε_U	-0,00027	-0,00054	-0,00082
			ε_T	-0,00130	-0,00256	-0,00382
	0,62	1,04	ε_U	0,00008	0,00016	0,00024
			ε_T	-0,00091	-0,00179	-0,00267
	0,7	1,17	ε_U	0,00024	0,00048	0,00072
			ε_T	-0,00071	-0,00140	-0,00208

A Figura 5.62 apresenta a comparação entre a deformação introduzida na direção do urdume (U) e da trama (T) para cada coeficiente de Poisson, respetivamente para o módulo 1 e para o módulo lateral, evidenciando em geral uma tendência linear crescente com as tensões médias pretendidas. No entanto, essa tendência apresenta uma maior dispersão de valores da deformação no módulo lateral com o aumento do coeficiente de Poisson (ver a Figura 5.62 (b)).

A deformação introduzida na direção do urdume (U) e da trama (T) evidenciando o nível de pré-esforço, como mostra a Figura 5.63, complementa a Figura 5.62, sendo evidente, novamente, a maior dispersão de valores no caso do módulo lateral, sendo mais expressiva à medida que o pré-esforço aumenta. Em geral, em ambos os módulos de membrana, quanto maior é o nível de pré-esforço pretendido, maior é a dispersão das deformações na direção do urdume e da trama.

A Figura 5.64 apresenta a variação entre a deformação introduzida na direção do urdume (U) e da trama (T) em função do coeficiente de Poisson, para cada nível de pré-esforço, 1, 2 e 3 kN/m, respetivamente para o módulo 1 e para o módulo lateral. No geral, verifica-se uma relação linear entre a deformação introduzida e o coeficiente de Poisson.

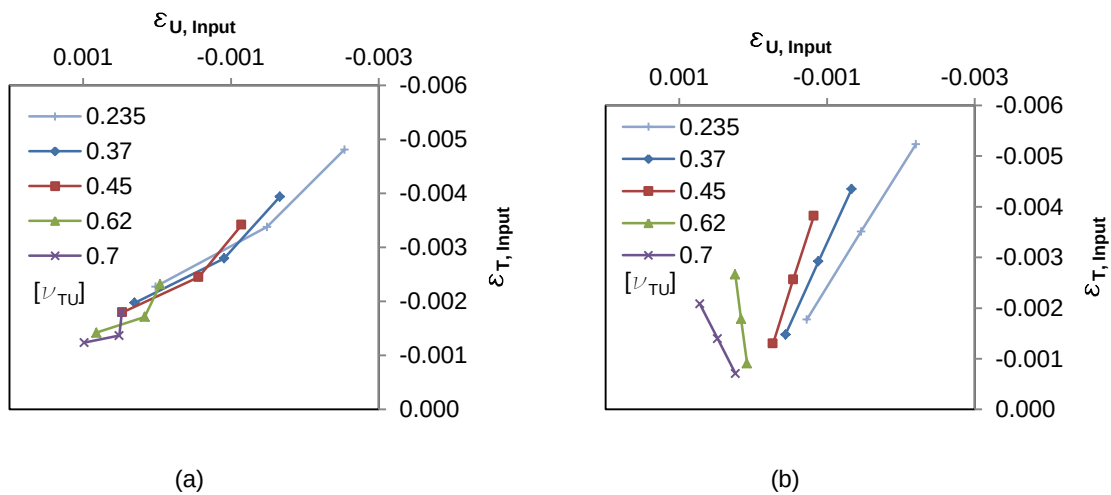


Figura 5.62 – Comparação entre a deformação introduzida na direção do urdume (U) e da trama (T) para cada coeficiente de Poisson: (a) Módulo 1 e (b) Módulo lateral

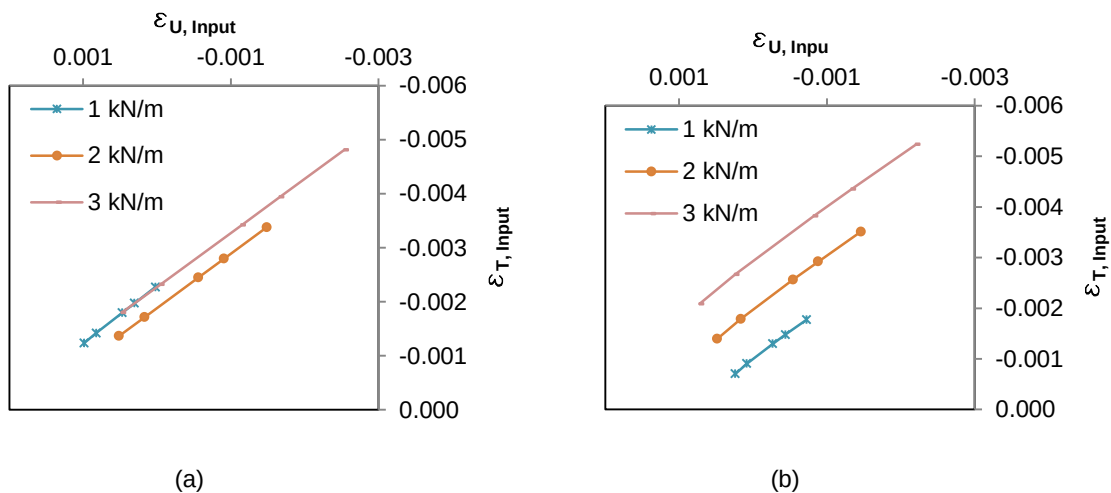


Figura 5.63 – Comparação entre a deformação introduzida na direção do urdume (U) e da trama (T) para cada nível de pré-esforço: (a) Módulo 1 e (b) Módulo lateral

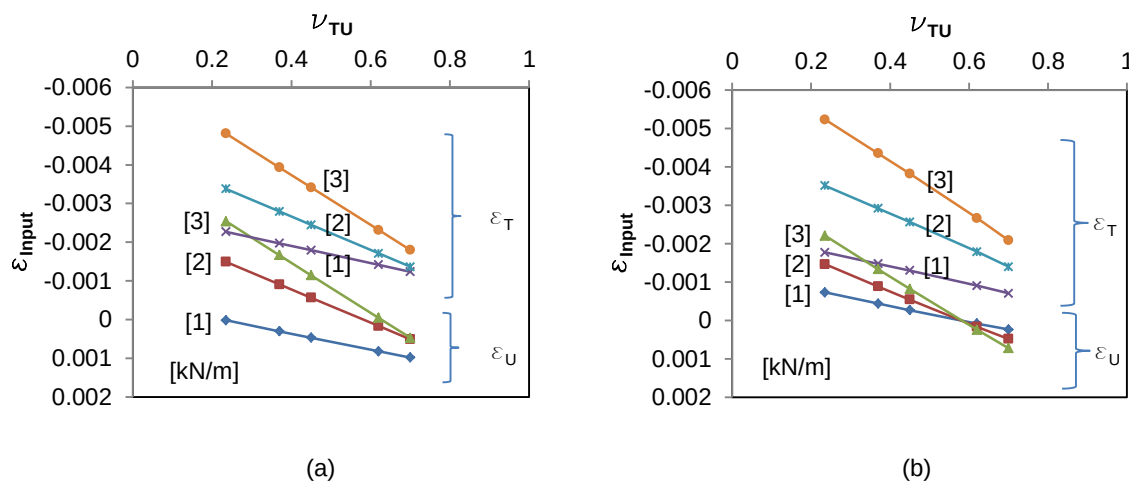


Figura 5.64 – Variação da deformação introduzida na direção do urdume (U) e da trama (T) em função do coeficiente de Poisson, para cada nível de pré-esforço: (a) Módulo 1 e (b) Módulo lateral

As deformações introduzidas na direção do urdume são sempre inferiores às da direção da trama, para cada nível de pré-esforço, como referido anteriormente. Este facto tem a ver com as propriedades do modelo ortotrópico, em que o módulo de elasticidade nas direções de fabrico é distinto, sendo superior na direção do urdume, respetivamente 773 e 463 kN/m . Ora, para que nessas direções de fabrico o nível de pré-esforço seja igual, é necessário introduzir deformações superiores na direção da trama. Para além disso, a deformação introduzida decresce com o aumento do coeficiente de Poisson, o que significa que quanto maior é a interação entre as direções de fabrico, menor é a deformação necessária para que a membrana cumpra o nível de pré-esforço pretendido, 1 , 2 e 3 kN/m . Este comportamento verifica-se quer para a direção da trama (ver a Figura 5.65), quer para a direção do urdume (ver a Figura 5.66).

No entanto, no caso do módulo 1 o aumento da deformação com a tensão pretendida não é linear (ver a Figura 5.65 (a)), ao contrário do módulo lateral (ver a Figura 5.65 (b)), o que já se tinha verificado anteriormente. Este facto deve-se ao comportamento distinto dos dois módulos sob a atuação de cargas aplicadas, neste caso o peso próprio. Atendendo a que o peso próprio é uma carga descendente, no caso do módulo 1, o caminho de esforços resultantes devido à atuação dessa ação está alinhado com a direção do urdume, pelo que é esta direção de fabrico que suporta maioritariamente esta ação. Assim, para obter um nível de pré-esforço uniforme e isotrópico no plano da membrana, é necessário descomprimir mais a direção do urdume (ver a Figura 5.66 (a)) e menos a direção da trama (ver a Figura 5.65 (a)), à medida que o nível de pré-esforço é menor. Aliás, note-se que as deformações introduzidas na direção do urdume são positivas para um pré-esforço de 1 kN/m , independentemente do coeficiente de Poisson, e para um pré-esforço de 2 e 3 kN/m para os coeficientes de Poisson iguais a $0,62$ e $0,70$.

No caso do módulo lateral, as deformações introduzidas na direção da trama e do urdume aumentam linearmente com o aumento das tensões médias pretendidas (ver respetivamente a Figura 5.65 (b) e Figura 5.66 (b)), embora essa tendência inverta na direção do urdume para um coeficiente de Poisson igual a $0,62$ e $0,70$ (ver a Figura 5.66 (b)).

A Figura 5.67 mostra a variação das tensões de corte máximas e médias com o nível de pré-esforço, quer para o módulo 1, quer para o módulo lateral. Em geral, a evolução e os valores das tensões de corte nos módulos em análise diferem substancialmente. Em primeiro lugar, são de salientar as escalas

de referência distintas, definidas propositadamente para cada módulo em análise, de forma a salientar-se a evolução das tensões de corte em função do coeficiente de Poisson. As tensões de corte atingem valores máximos de 29 e 115N/m, respetivamente no módulo 1 e no módulo lateral.

No módulo 1, de um modo geral, as tensões de corte decrescem com o aumento do pré-esforço, apresentando, no entanto, um valor mínimo / ótimo para um pré-esforço de 2kN/m, como já se tinha verificado no estudo anterior. Em geral, verifica-se que as tensões de corte máximas aumentam com o coeficiente de Poisson. Contudo, verifica-se que, para um pré-esforço de 1kN/m, o modelo com o coeficiente de Poisson igual a 0,235 apresenta valores superiores aos dos modelos com 0,37 e 0,45, embora pouco significativo.

No módulo lateral, as tensões de corte aumentam com o nível de pré-esforço da membrana tensa (ver a Figura 5.67 (b)). Ao contrário do módulo 1, as tensões de corte diminuem com o aumento do coeficiente de Poisson. Portanto, no caso do módulo lateral, que apresenta uma forma aproximadamente plana, elevados coeficientes de Poisson conduzem a um comportamento benéfico, dado que originam tensões de corte mais baixas. Este facto é importante, nomeadamente para evitar fenómenos de enrugamento, que aliás se verificaram no presente módulo de membrana.

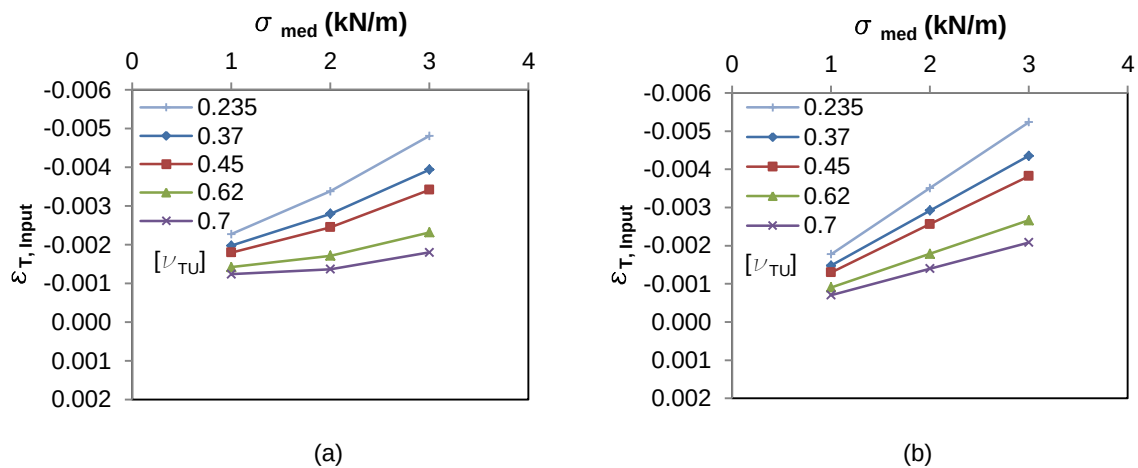


Figura 5.65 – Variação da deformação introduzida na direção da trama (T) em função do nível de pré-esforço para cada coeficiente de Poisson: (a) Módulo 1 e (b) Módulo lateral

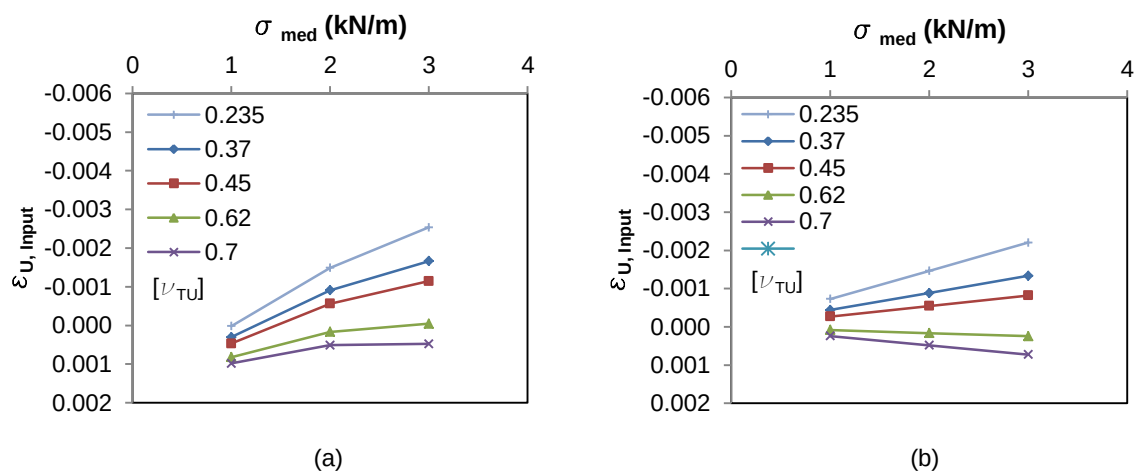


Figura 5.66 – Variação da deformação introduzida na direção do urdume (U) em função do nível de pré-esforço para cada coeficiente de Poisson: (a) Módulo 1 e (b) Módulo lateral

A fim de complementar a informação da análise estática, apresenta-se na Tabela 5.33 a deformada da estrutura em planta com destaque para os deslocamentos verticais, variando o pré-esforço entre 1 e 3kN/m e o coeficiente de Poisson entre 0,235 e 0,7. O impacto da variação do pré-esforço na deformada da estrutura é mais significativo do que a variação do coeficiente de Poisson. De uma forma geral, evidencia-se que, para um pré-esforço de 1kN/m, os deslocamentos da membrana são descendentes, com máximos de 6cm; para um pré-esforço de 2kN/m os deslocamentos da membrana são descendentes na parte central da cobertura, com máximos de 1,7cm, e ascendentes nos cantos da cobertura, com máximos de 0,6cm; para um pré-esforço de 3kN/m os deslocamentos da membrana são descendentes na parte central da cobertura, com máximos de 0,8cm, e ascendentes nos cantos da cobertura, com máximos de 2,1cm. Portanto, o aumento do pré-esforço conduz a uma deformada ascendente da membrana.

A Tabela 5.34 apresenta a distribuição das tensões na direção do urdume ao longo da membrana, variando o pré-esforço entre 1 e 3kN/m e o coeficiente de Poisson entre 0,235 e 0,7. O impacto da variação do pré-esforço nas tensões da membrana é mais significativo do que a variação do coeficiente de Poisson. Ainda assim, apesar do valor médio das tensões para cada configuração ser igual, evidencia-se uma maior dispersão das tensões com o aumento do coeficiente de Poisson. Por norma, as tensões são maiores num alinhamento a 45° que passa no centro da cobertura em direção aos quatro quadrantes. Em relação à distribuição de tensões na direção da trama, a análise é análoga à da direção do urdume (ver a Tabela 5.35). No entanto, as tensões são maiores num alinhamento a 45°, perpendicular ao mencionado anteriormente na análise da direção do urdume, junto aos cantos da cobertura.

A distribuição das tensões de corte ao longo da membrana é apresentada na Tabela 5.36, evidenciando que as tensões de corte são mínimas para um nível de pré-esforço de 2kN/m, complementando a informação referida anteriormente com base na Figura 5.67 (a).

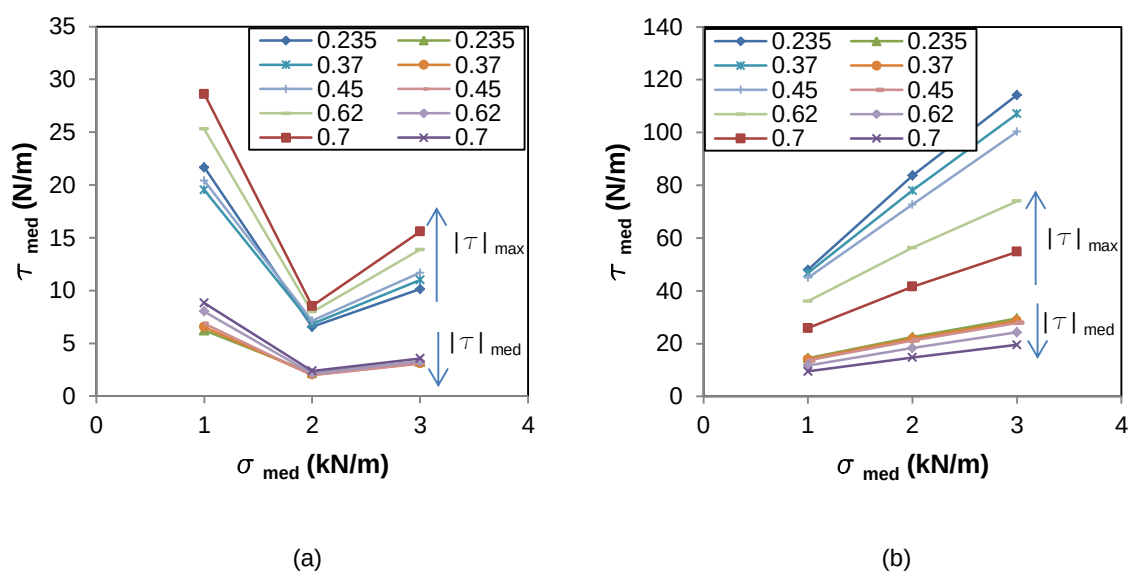


Figura 5.67 – Variação das tensões de corte com o nível de pré-esforço: (a) Módulo 1 e (b) Módulo lateral

Tabela 5.33 – Deformada da estrutura em planta com destaque para os deslocamentos verticais [m]

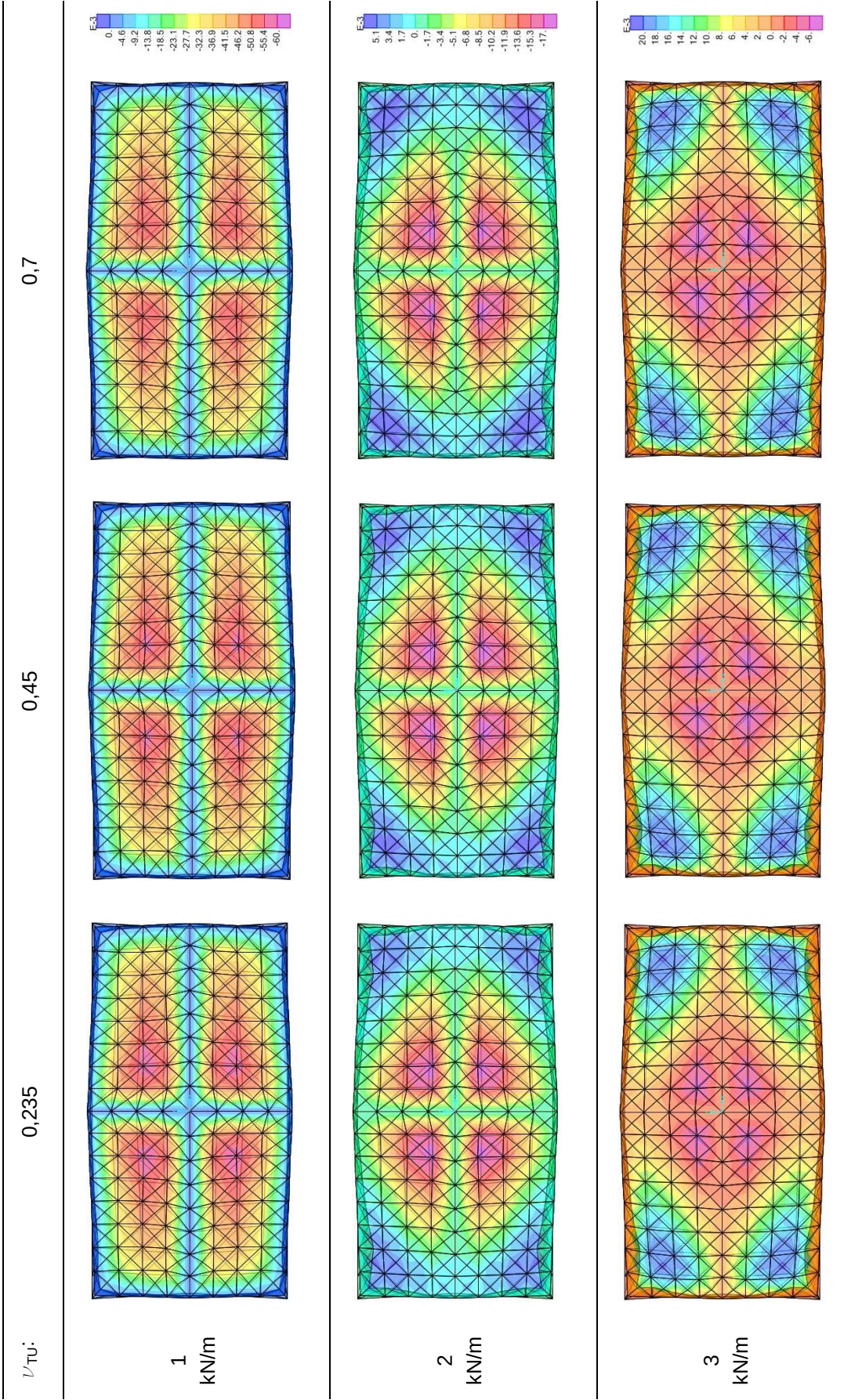


Tabela 5.34 – Tensão na direção do urdume [N/m]

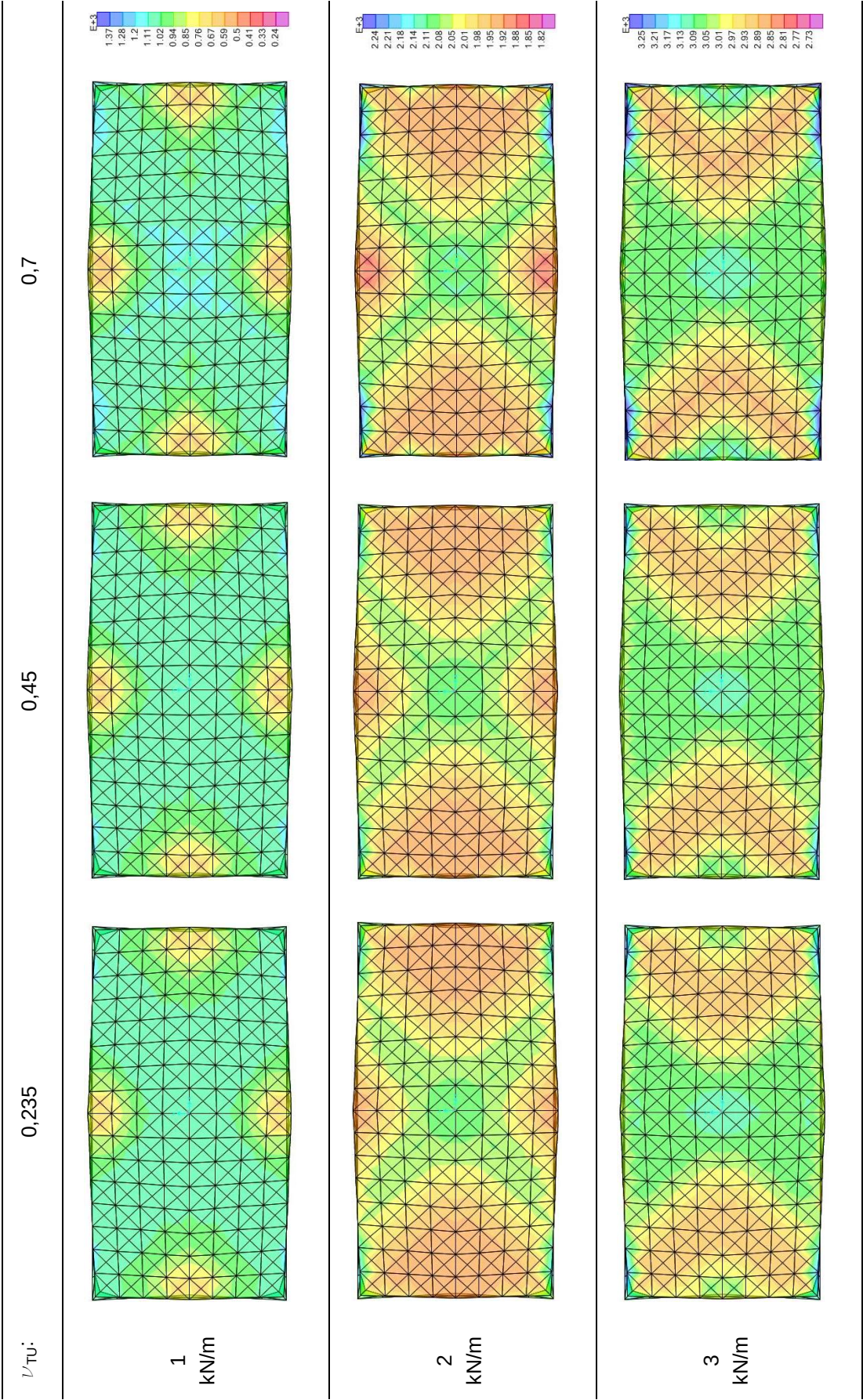


Tabela 5.35 – Tensão na direção da trama [N/m]

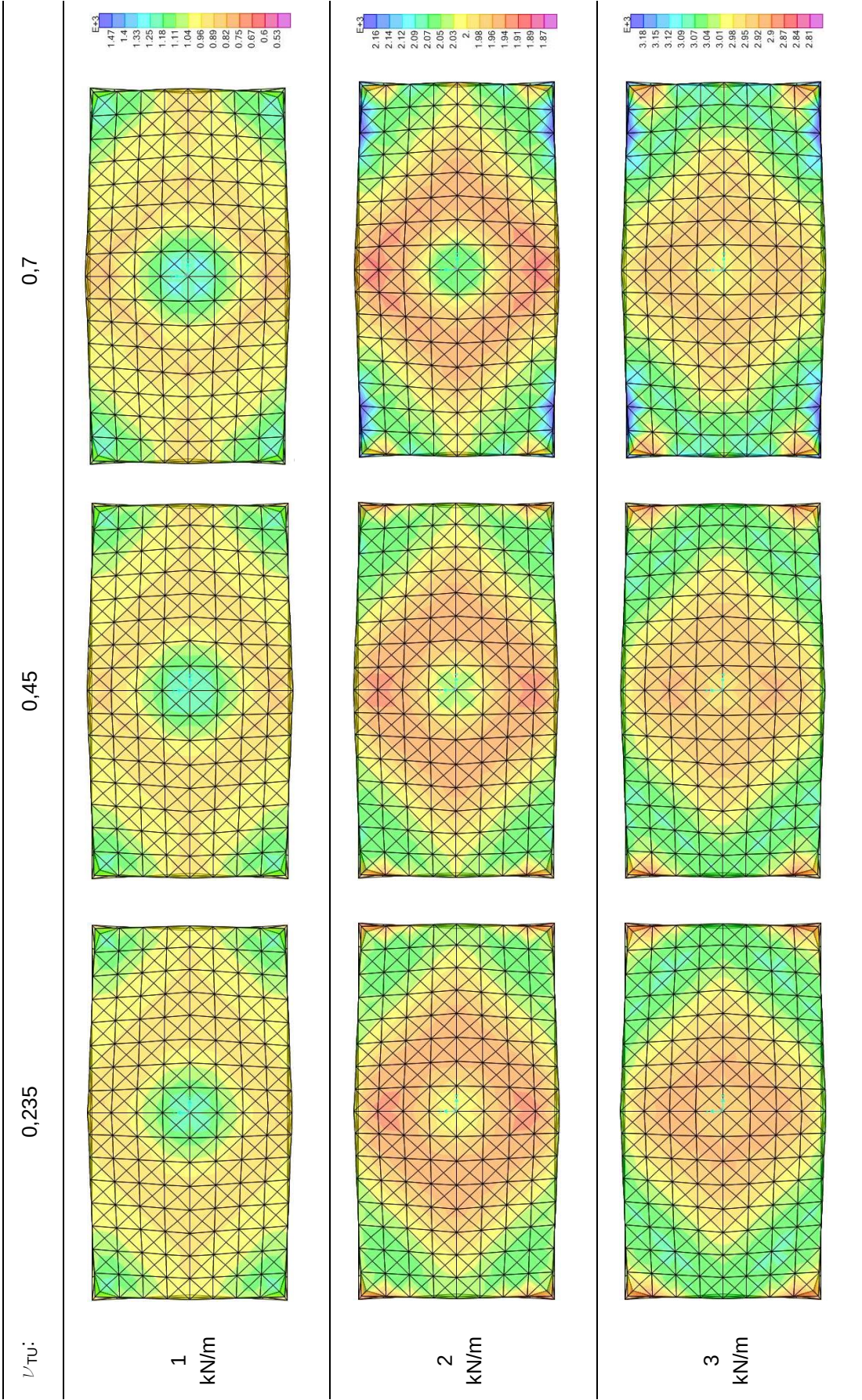
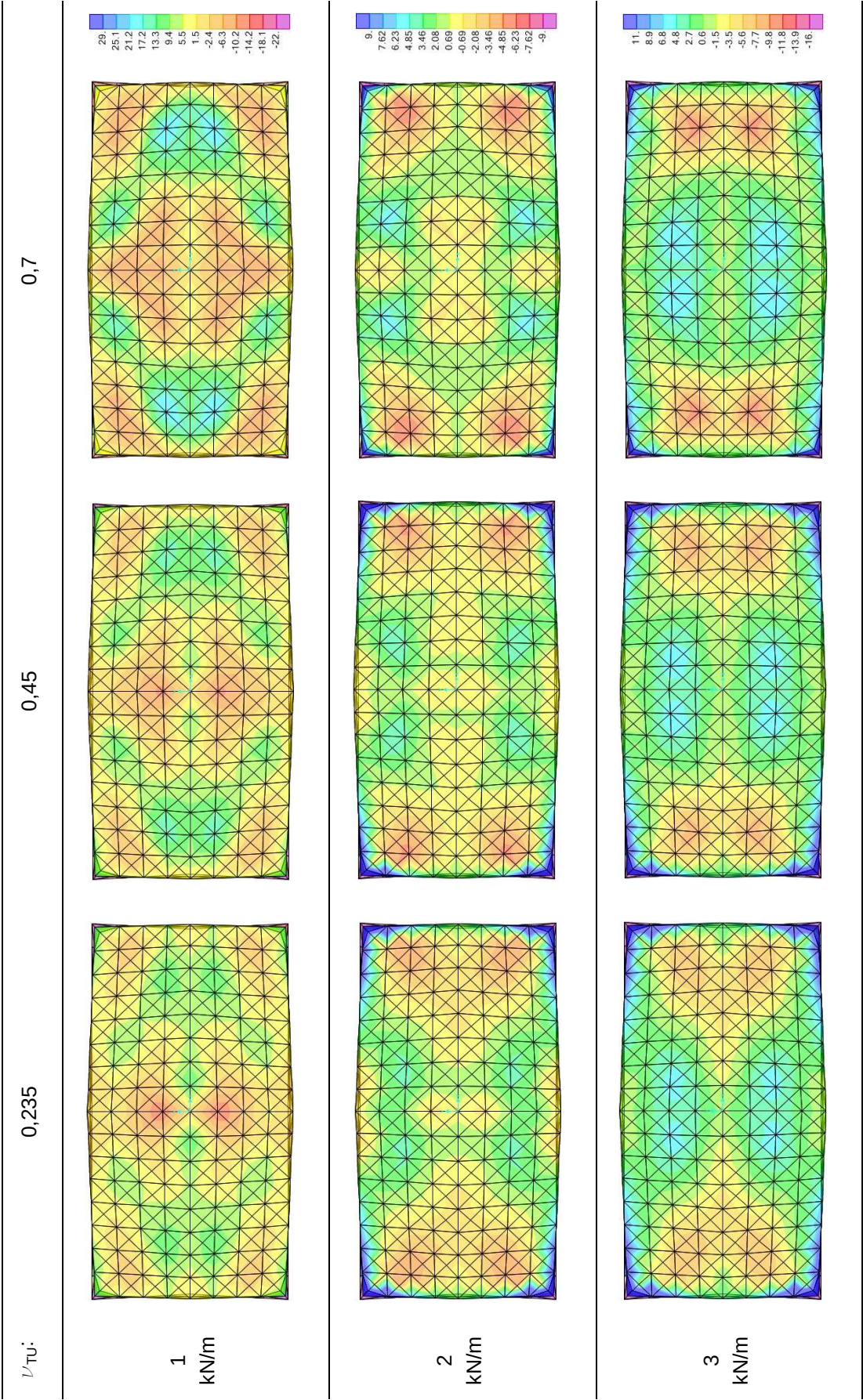


Tabela 5.36 – Tensão de corte [N/m]



5.5.4.2. Análise modal

O coeficiente de Poisson adotado para o material de membrana origina um comportamento diferenciado sob as ações permanentes do pré-esforço e do peso próprio, como se verificou nas análises não-lineares geométricas realizadas anteriormente. Por esse motivo, pretende-se verificar em que medida o coeficiente de Poisson influencia o comportamento dinâmico da membrana.

Para o efeito é realizada uma análise modal variando o coeficiente de Poisson entre 0,235 e 0,7, balizando o nível de pré-esforço entre 1 e 3kN/m. A análise modal tem por base a rigidez obtida no final da análise não-linear geométrica sob as ações permanentes do pré-esforço e do peso próprio.

A Figura 5.68 apresenta os fatores de participação modal e as frequências naturais obtidas nas análises modais realizadas, considerando os coeficientes de Poisson iguais a 0,235, 0,45 e 0,7 e variando o nível de pré-esforço entre 1 e 3kN/m. Os valores das frequências estão sistematizados na Tabela 5.37.

Em geral, para cada nível do coeficiente de Poisson, as frequências naturais aumentam com o nível de pré-esforço aplicado na membrana tensa. No entanto, para cada nível de pré-esforço e fazendo variar o coeficiente de Poisson, a tendência das frequências não é análoga à anterior. Por exemplo, para um pré-esforço de 1kN/m, as frequências naturais aumentam com o coeficiente de Poisson. No entanto, para um pré-esforço de 2 e 3kN/m, fazendo variar o coeficiente de Poisson de 0,235 a 0,45, as oito primeiras frequências diminuem e de seguida aumentam.

Como referido na análise modal do estudo anterior, devido à dupla simetria em planta da membrana tensa, as frequências naturais obtidas nas análises modais são apresentadas em combinações de 4, com frequências aproximadamente iguais. Por esse motivo, na Tabela 5.37, as frequências são sistematizadas em grupos de 4, em que o primeiro grupo de frequências referente aos modos 1, 2, 3 e 4 são apresentados na primeira linha, o segundo grupo de frequências referente aos modos 5, 6, 7 e 8 são apresentados na segunda linha, e assim sucessivamente. Em cada grupo de 4 frequências o primeiro modo é antissimétrico em relação aos eixos x e y (ver a Tabela 5.38), em que x está alinhado com o desenvolvimento longitudinal da estrutura e o eixo y com o desenvolvimento transversal. O segundo modo é antissimétrico em relação ao eixo x . O terceiro modo é antissimétrico em relação ao eixo y . Finalmente, o modo 4 é simétrico. Esta combinação de modos de vibração com respeito ao eixo x e y repete-se em todos os grupos de 4 frequências da presente análise.

A Tabela 5.38 apresenta a configuração modal 1 variando o pré-esforço entre 1 e 3kN/m e o coeficiente de Poisson entre 0,235 e 0,7. Em termos globais, a configuração modal apresentada corresponde a um modo antissimétrico em relação aos eixos x e y , como referido anteriormente. No entanto, analisando a evolução da configuração modal dos módulos de membrana em cada quadrante, e fazendo uma analogia à análise realizada no primeiro estudo, é de notar que, à medida que o pré-esforço aumenta, a configuração modal varia entre uma configuração modal antissimétrica, primeiro antissimétrico $1A_{1kN/m}$, até uma configuração modal aproximadamente simétrica, primeiro simétrico $1S_{3kN/m}$. Todavia, nos modelos com coeficiente de Poisson igual a 0,7 esse comportamento não é tão pronunciado, assemelhando-se sempre ao $1A$. As configurações modais 2, 3 e 4 são as restantes combinações em termos globais da configuração modal 1, como mencionado anteriormente.

A Tabela 5.39 mostra a configuração modal 5 variando o pré-esforço entre 1 e 3kN/m e o coeficiente de Poisson entre 0,235 e 0,7, evidenciando que, globalmente, é um modo antissimétrico em relação aos eixos x e y . Por sua vez, analisando a evolução da configuração modal dos módulos de membrana em cada quadrante, é de notar que, à medida que o pré-esforço aumenta, a configuração modal varia entre o $1S_{1kN/m}$ e o $1A_{3kN/m}$. Este facto merece um estudo aprofundado no futuro pois sugere a possibilidade de se aferir a tensão instalada numa membrana com base na sua caracterização dinâmica.

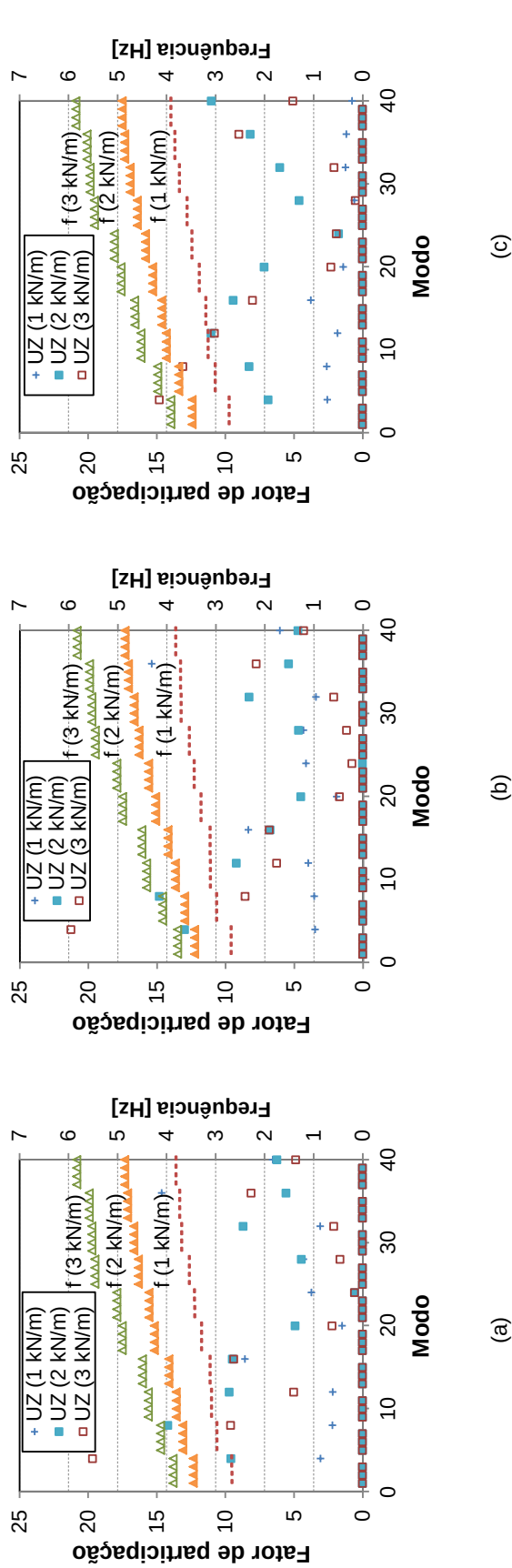


Figura 5.68 – Fatores de participação modal e frequências naturais da membrana variando o pré-esforço entre 1 e 3 kN/m: (a) $\nu_{TU} = 0,235$; (b) $\nu_{TU} = 0,45$ e (c) $\nu_{TU} = 0,7$

Tabela 5.37 – Frequências naturais variando o pré-esforço entre 1 e 3 kN/m e o coeficiente de Poisson entre 0,235 e 0,7

Modo	0.235						0.45						0.7					
	1 kN/m	2 kN/m	3 kN/m	1 kN/m	2 kN/m	3 kN/m	1 kN/m	2 kN/m	3 kN/m	1 kN/m	2 kN/m	3 kN/m	1 kN/m	2 kN/m	3 kN/m	1 kN/m	2 kN/m	3 kN/m
1 2 3 4	2.66	2.66	3.45	3.46	3.86	3.86	2.68	2.68	3.43	3.43	3.63	3.63	2.72	2.72	3.48	3.48	3.91	3.91
5 6 7 8	2.97	2.97	3.67	3.67	4.12	4.12	2.98	2.98	3.63	3.63	4.09	4.09	3.00	3.00	3.75	3.75	4.18	4.18
9 10 11 12	3.08	3.08	3.80	3.80	4.37	4.37	3.11	3.11	3.82	3.82	4.41	4.41	3.14	3.14	4.01	4.01	4.52	4.52
13 14 15 16	3.11	3.11	3.95	3.95	4.49	4.49	3.11	3.11	3.98	3.98	4.51	4.51	3.19	3.19	4.09	4.09	4.65	4.65
17 18 19 20	3.28	3.28	4.25	4.25	4.90	4.90	3.29	3.30	4.23	4.23	4.90	4.90	3.33	3.33	4.28	4.29	4.92	4.92
21 22 23 24	3.42	3.42	4.36	4.36	5.01	5.01	3.44	3.44	4.37	4.37	5.02	5.02	3.48	3.48	4.43	4.43	5.07	5.07
25 26 27 28	3.53	3.53	4.57	4.57	5.46	5.46	3.54	3.54	4.57	4.57	5.46	5.46	3.58	3.58	4.60	4.60	5.47	5.47
29 30 31 32	3.69	3.69	4.66	4.66	5.53	5.53	3.70	3.70	4.67	4.67	5.53	5.53	3.74	3.74	4.74	4.74	5.56	5.56
33 34 35 36	3.73	3.73	4.79	4.79	5.58	5.58	3.71	3.71	4.78	4.78	5.58	5.58	3.82	3.82	4.85	4.85	5.62	5.62
37 38 39 40	3.80	3.80	4.85	4.85	5.83	5.83	3.81	3.81	4.85	4.85	5.83	5.83	3.91	3.91	4.90	4.90	5.85	5.85

Tabela 5.38 – Configuração modal 1

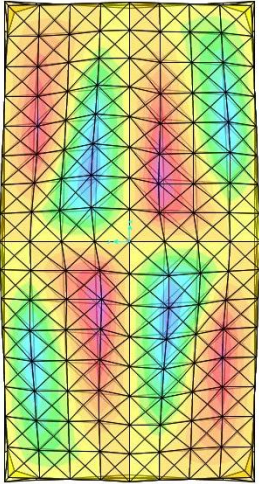
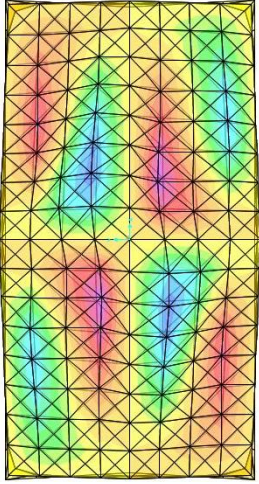
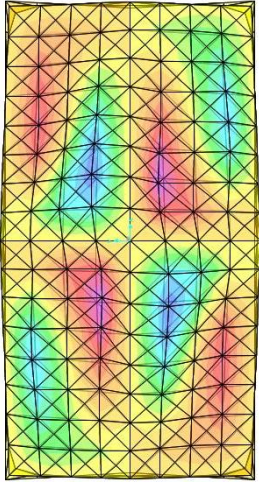
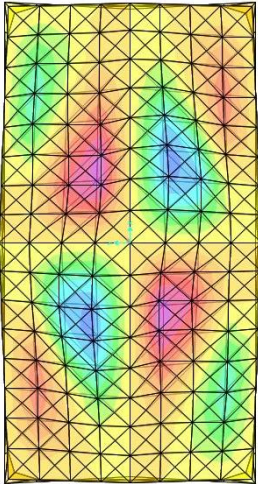
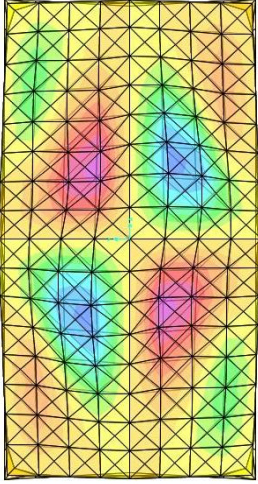
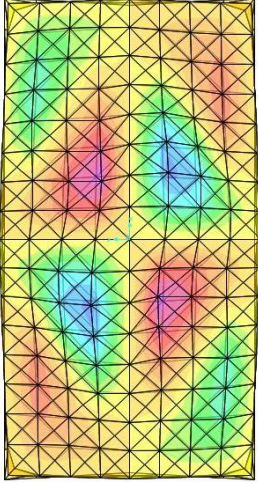
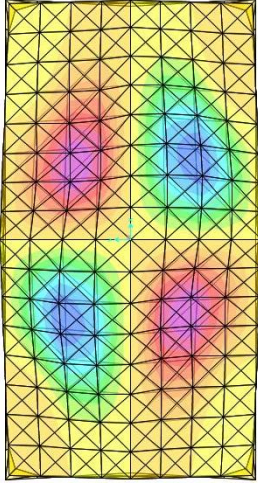
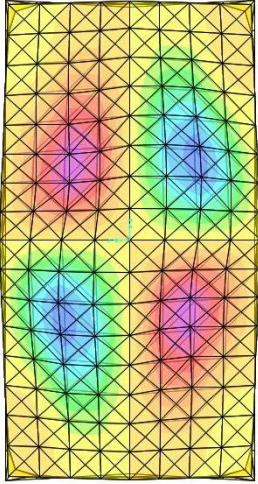
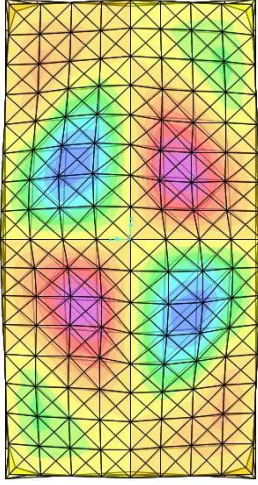
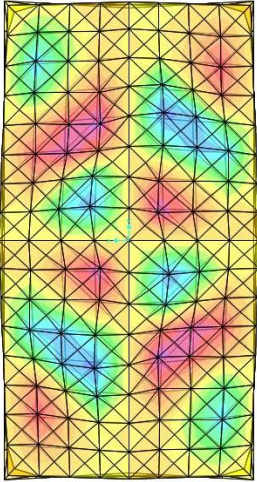
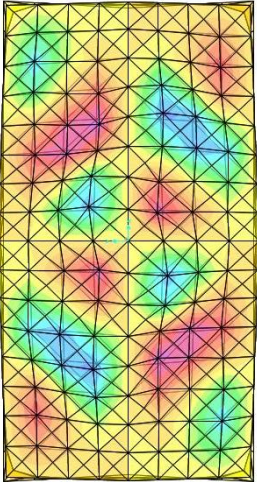
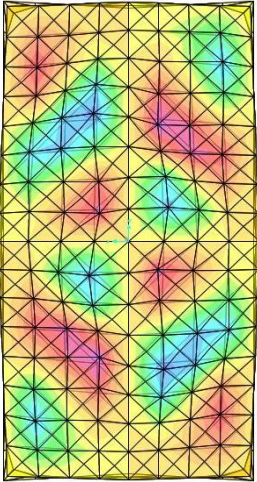
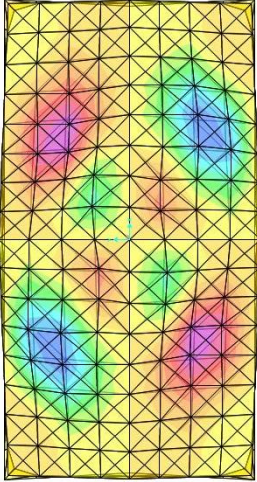
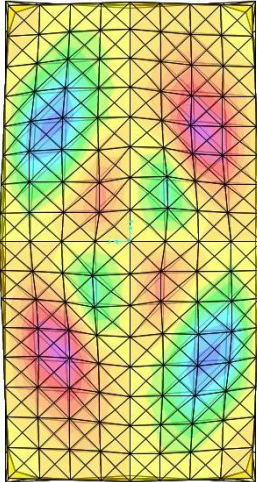
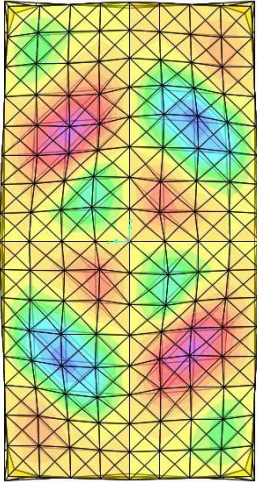
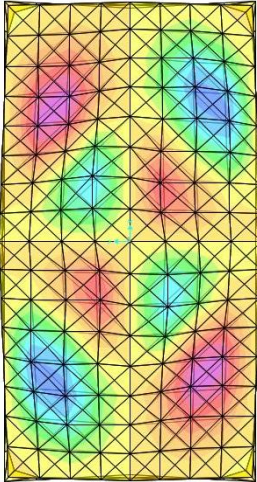
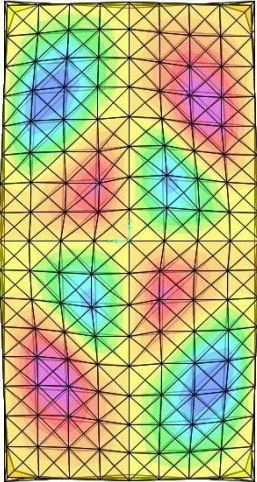
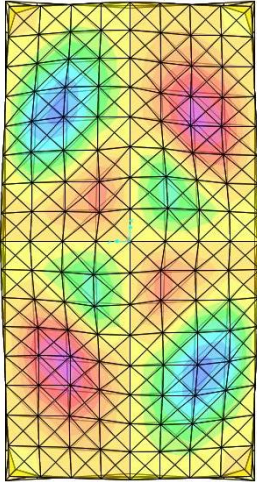
ν_{TU} :	0,235	0,45	0,7
1 kN/m			
2 kN/m			
3 kN/m			

Tabela 5.39 – Configuração modal 5

$\nu_{\text{m}}:$	0,235	0,45	0,7
1 kN/m			
2 kN/m			
3 kN/m			

5.5.5. CARACTERIZAÇÃO DO ERRO DO MODELO CONSTITUTIVO ORTOTRÓPICO LINEAR

Ao longo dos estudos paramétricos realizados anteriormente tem sido utilizado na simulação numérica do comportamento da membrana o modelo constitutivo segundo o estado plano de tensão e material ortotrópico linear. No entanto, como referido no estado da arte no capítulo dois, o comportamento da membrana é caracterizado por não-linearidades marcadas em serviço.

Deste modo, nesta secção pretende-se averiguar o grau do erro associado à consideração de um modelo constitutivo ortotrópico linear em detrimento do seu comportamento real, através da realização de simulações numéricas de um ensaio de tração biaxial segundo o protocolo de ensaio proposto em Bridgens (2005) e sobrepondo estes resultados aos obtidos experimentalmente num ensaio real.

5.5.5.1. Ensaio de tração biaxial

Para o presente estudo adotou-se o ensaio de tração biaxial no plano e respetivo protocolo de ensaio proposto em Bridgens (2005), não só pelo facto de apresentar resultados do tipo de material em estudo – *Ferrari Precontraint 1002*, mas também por apresentar um vasto trabalho experimental e bem documentado, o que permite a reprodução numérica mais fidedigna e a posterior comparação de resultados.

O ensaio biaxial no plano representa melhor o carregamento da membrana tensa e é utilizado regularmente na indústria. Tipicamente, são utilizados protocolos de ensaio específicos para extrair dados do comportamento do material, que por norma são ajustados a um modelo no estado plano de tensão, e, por consequência, não permitem explorar a resposta completa da membrana.

No entanto, o equipamento e protocolo desenvolvidos em Bridgens (2005) permitem obter os dados de tensão-deformação que caracterizam completamente a resposta da membrana, sendo possível a sua utilização prática no âmbito do projeto destas estruturas. Porém, é importante distinguir entre o comportamento inicial da membrana apropriado para a determinação dos valores de compensação e para o planeamento de instalação, e o comportamento mecanicamente condicionado que permite extrair propriedades de médio-longo prazo da membrana. A presente secção incide sobre a caracterização deste comportamento condicionado.

A Figura 5.69 (a) mostra o equipamento de ensaio biaxial utilizado no âmbito do trabalho referido. O equipamento baseia-se no conceito de estrutura “flutuante”(Beccarelli 2015) proposto por Architen Landrell Ltd. O carregamento é aplicado nas direções do urdume e da trama através de dois quadros de reação. O quadro superior é montado em quatro rolamentos de esferas permitindo o seu movimento no plano da amostra, como evidencia a simulação numérica do equipamento em operação nas Figuras 5.69 (b) e (c). As deformações nas direções do urdume e da trama são medidas através de dois extensómetros laser colocados em cima e em baixo da amostra. O carregamento é aplicado utilizando dois cilindros hidráulicos e é quantificado através de células de cargas colocadas nas extremidades dos cilindros. O quadro de reação permite aplicar cargas iguais e simétricas à amostra na direção respetiva, controlando apenas um cilindro hidráulico por eixo.

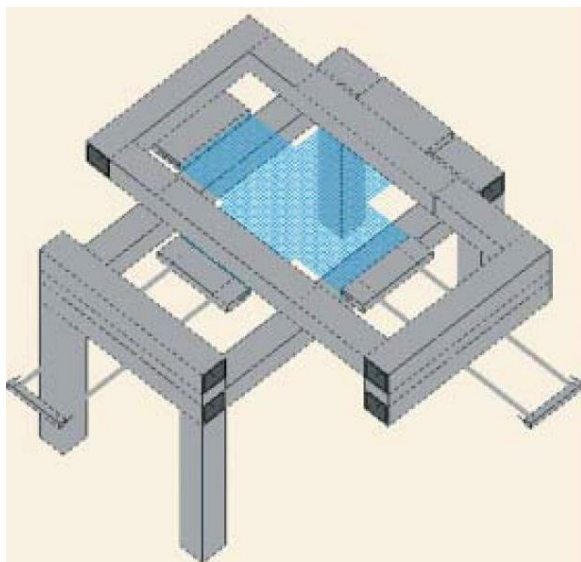
O objetivo de um ensaio biaxial é o de desenvolver um campo de tensões uniforme e conhecido numa área específica de material através do qual é possível medir a deformação. Para o efeito são fatores críticos a forma da amostra, o método de aplicação de carga e o local de medição da deformação. A forma cruciforme da amostra permite criar tensões uniformes nas direções do urdume e da trama com deformações até 25% sem criar restrições laterais devido às placas de fixação. Para esse efeito, são colocados rasgos nos braços da amostra cruciforme. O número de rasgos e o carregamento independente de cada uma das fitas resultantes (Reinhardt 1976) pode influenciar o resultado do

ensaio. É de referir que esse efeito pode ser reproduzido através da aplicação de cargas pontuais ao longo dos bordos da amostra (Macrory *et al.* 1977; Bassett *et al.* 1999).

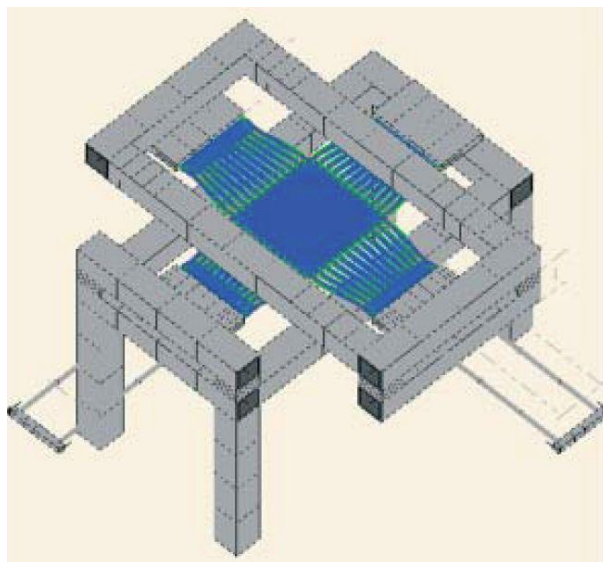
A Figura 5.70 apresenta um esquema da amostra cruciforme estudada na presente secção. A amostra contém 11 rasgos ou 12 fitas em cada braço da amostra amarradas por uma placa de fixação. É utilizado um comprimento adicional de material nos braços da amostra cruciforme para efeitos de amarração na placa de fixação. O comprimento livre dos braços da amostra é de 150mm, e o quadrado interior da amostra é de 300×300mm×mm.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.69 – Equipamento de ensaio de tração biaxial da Universidade de Newcastle: (a) Setup de ensaio (Bridgens 2005) e (b) e (c) Simulação numérica do equipamento em operação com a amostra cruciforme (Bridgens *et al.* 2004a)

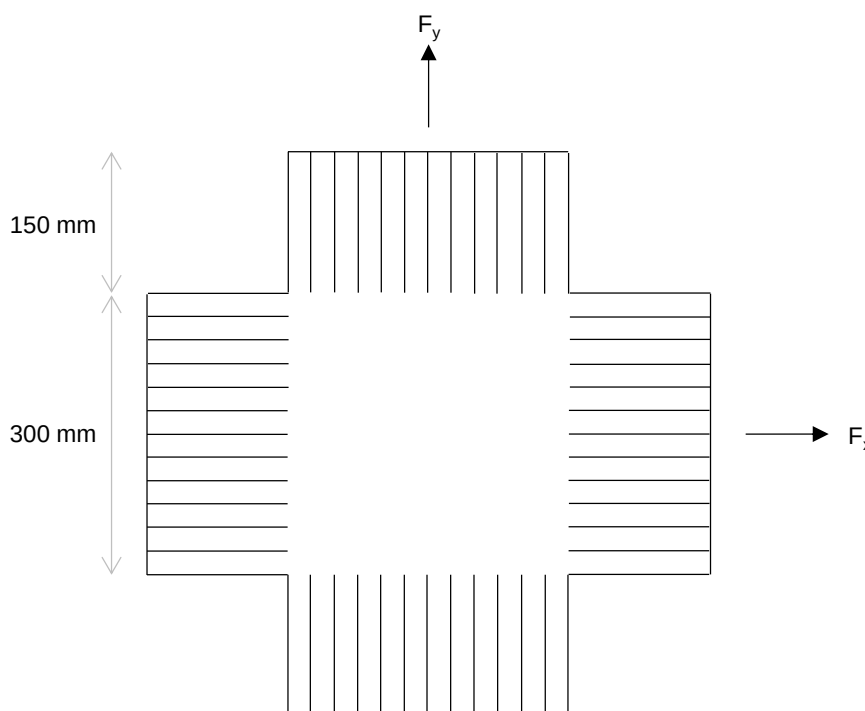


Figura 5.70 – Amostra cruciforme sem representação do comprimento de amarração

A deformação é medida no centro do quadrado interior da amostra respetivamente na direção do urdume e da trama, tendo por base um comprimento inicial de 200mm . A definição da dimensão deste comprimento inicial está relacionada com a distribuição das tensões no centro do quadrado interior da amostra: Bridgens (2005) verificou numericamente que na periferia do quadrado interior ocorre concentração de tensões, daí se considerar um comprimento inicial inferior à dimensão do quadrado interior para que a precisão destas medições não seja afetada por este fenómeno.

Para além disso, Bridgens (2005) também verificou numericamente que, independentemente do modelo de amostra utilizado, ocorre uma redução do nível de tensão no centro do quadrado interior em relação à tensão aplicada. Parte da carga aplicada é distribuída para os braços transversais da amostra cruciforme; na parte central da amostra a carga atua efetivamente num comprimento superior a 300mm . Por este motivo, tendo por base a análise de uma larga gama de propriedades materiais e cargas aplicadas, é válido considerar-se a aplicação de um fator de redução de $0,95$ para reduzir a tensão aplicada para o nível de tensão previsto pelo modelo no centro da amostra.

O protocolo do ensaio biaxial está dividido em 3 fases: pré-esforço, acondicionamento mecânico e ensaio. A amostra é mantida no nível de pré-esforço antes de ser ensaiada de forma a prevenir que os elevados níveis de fluência afetem os resultados do ensaio. O nível do pré-esforço é baseado nos valores tipicamente utilizados no dimensionamento estrutural, definido por uma percentagem da tensão de rotura (T_r): $1,3\%T_r$ nas membranas do tipo PES/PVC e $2,5\%$ nas de fibra de vidro/PTFE. A máxima carga de ensaio / dimensionamento é baseada na carga em que ocorre a propagação de rasgos aproximadamente $25\%T_r$.

A carga de acondicionamento é 10% superior à carga máxima de ensaio de forma a solicitar a amostra a cargas ligeiramente superiores às que esta experimentará na última fase durante o ensaio. A amostra é mecanicamente acondicionada para que o comportamento medido durante o ensaio não seja o correspondente ao do comportamento inicial, mas ao comportamento típico do material *in situ*. Depois

da aplicação de uma carga à amostra, esta apresenta elevados níveis de deformação residual devido a fluência dos fios, do revestimento e de efeitos de fricção internos. Para determinar se a amostra está acondicionada, as deformações durante um ciclo são comparadas depois da deformação residual ser subtraída das leituras. Assim, um padrão de carga cíclico é aplicado à amostra até que a diferença entre as deformações, no urdume ou na trama, sejam semelhantes em aplicações repetidas de um estado de tensão específico, aproximadamente inferiores a 5%, o que corresponde normalmente a aplicar 3 a 4 ciclos de carga.

Na última fase, o protocolo do ensaio consiste em aplicar caminhos de carga radiais desde o nível de pré-esforço até à carga de ensaio de aproximadamente $25\%T_r$, de acordo com a Figura 5.71. No caso presente, tratando-se do material *Ferrari Preconstraint 1002* e tendo em conta a tensão de rotura do material (ver a secção 5.3), isto corresponde a considerar-se $25\%T_{r,T} \times 0,3/0,95 = 6.3kN$ e a $25\%T_{r,U} \times 0,3/0,95 = 6.6kN$ nas direções da trama e do urdume respetivamente. Note-se que é utilizado neste cálculo o comprimento de $300mm$ e um coeficiente de redução de $0,95$, como mencionado anteriormente. A amostra é solicitada segundo caminhos de carga radiais uniformemente espaçados de A a G. Os dados são guardados em ambas as partes de carga e descarga de cada caminho radial, em que cada estado de tensão é mantido pelo menos 1 minuto. Os dados são as tensões e deformações das direções do urdume e da trama.

Este protocolo de ensaio abrange uma gama alargada de estados de tensão ou rácios de tensão. Cada caminho de carga pretende simular o caminho de carga que a membrana experimentaria num evento de carga isolado sob a ação de uma rajada de vento ou da neve. Pretende-se simular numericamente nesta secção o protocolo de ensaio descrito.

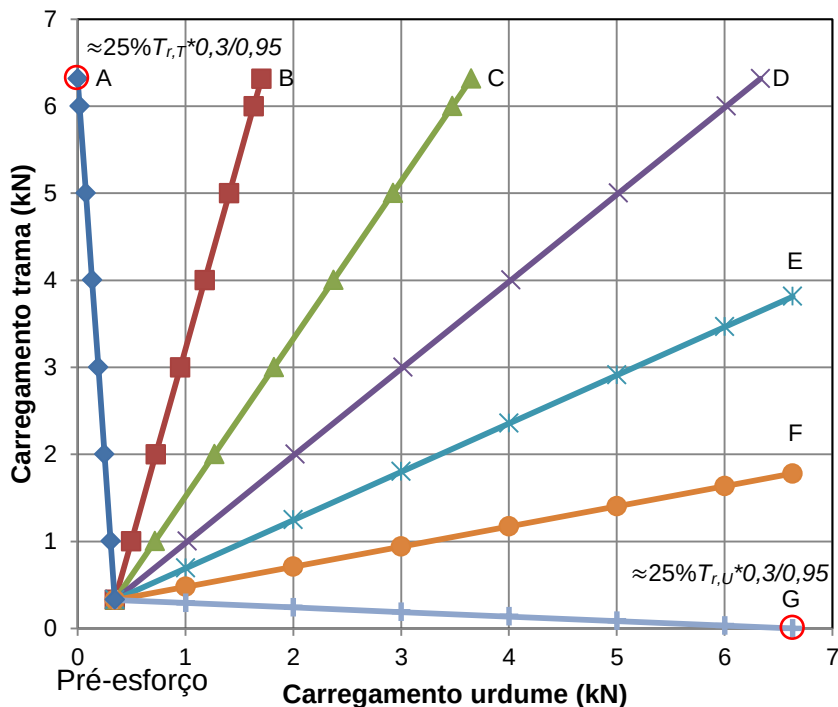


Figura 5.71 – Regime de carga radial de amostra *Ferrari Preconstraint 1002*

A Figura 5.72 apresenta as curvas de tensão-deformação de dois ensaios de tração biaxial segundo o protocolo descrito anteriormente para duas amostras de material do tipo *Ferrari Preconstraint 1002* – ensaio 1 e 2. Nas curvas de tensão-deformação representadas, a magnitude da “tensão no material” é representada pela raiz do valor quadrático médio (RMS) das tensões do urdume e da trama baseadas na carga aplicada nos respetivos eixos multiplicada pelo coeficiente de 0,95 para atender ao fenómeno de redução de tensões mencionado anteriormente da placa de fixação até ao centro do quadrado da amostra. É importante ressaltar que para elevados rácios de tensão a carga aplicada numa direção será substancialmente mais baixa do que aquela representada no eixo. Note-se que esta dificuldade de representar o comportamento de tensão-deformação biaxial em dois eixos conduziu aliás no passado à utilização de superfícies de resposta de tensão-tensão-deformação (Bridgens 2005), mostrando-se a título de exemplo na Figura 5.73 (a) e (b) as referidas superfícies respetivamente para a direção do urdume e da trama do material em estudo. Na representação dos resultados de cada caminho de carga, é mostrada a resposta do urdume e da trama em função da deformação medida. É de salientar que as leituras das deformações apresentadas são descontadas das deformações residuais e da deformação devida ao pré-esforço em ambas as direções de fabrico: lembre-se que todos os caminhos de carga se iniciam e finalizam nos níveis de pré-esforço em que a deformação não é nula, mas é distinta nas duas direções principais devido ao comportamento ortotrópico do material. Portanto, os dados são ajustados de modo a que a deformação nula represente o nível de deformação do pré-esforço.

Estas curvas de tensão-deformação permitem examinar o comportamento do material em detalhe, nomeadamente o comportamento não-linear marcado e o comportamento histerético da membrana através das curvas de carga e descarga distintas. No caso do comportamento não-linear, é de mencionar a ocorrência da reversão do gradiente, como evidencia por exemplo o *caminho de carga E* na direção da trama da Figura 5.72, ou da mudança repentina do gradiente, como mostra por exemplo o *caminho de carga F* na direção da trama. De acordo com estas curvas não é possível evidenciar as deformações residuais, uma vez que estas deformações foram descontadas das leituras como referido anteriormente. Esta simplificação, também adotada no presente estudo, deve-se ao facto de se pretender avaliar o comportamento do material acondicionado. No entanto, estas deformações são geralmente importantes e são, por norma, superiores na direção da trama.

Nos *caminhos de carga* de A a D evidenciam-se elevadas deformações na direção da trama devido a uma solicitação elevada nesta direção. O esticamento dos fios da trama introduz maior ondulação nos fios do urdume, traduzindo-se em gradientes negativos da curva de tensão-deformação do urdume. À medida que a tensão no urdume aumenta desde o *caminho de carga A* até D, o gradiente negativo mencionado decresce, tornando-se positivo no *caminho de carga D*.

No *caminho de carga E* é alcançado um ponto de transição quando é equilibrado o nível de interação da ondulação entre o urdume e a trama, resultando num nível de deformação baixo em ambas as direções. Este ponto de transição ocorre por norma na proximidade da zona do *caminho de carga D*, no qual o rácio de tensões é aproximadamente 1:1. Na verdade, Bridgens (2005) verificou que esta zona de transição é verificada no *caminho de carga E* para todas as amostras ensaiadas. No caso presente, o rácio de tensão urdume:trama no *caminho de carga E* varia entre 1,1:1 na força baixa até 1,7:1 na força máxima. Este ponto de transição ocorre para um dado rácio de tensão em que a interação de ondulação é mínima, sendo denominado rácio de tensão natural. O rácio de tensão natural não é necessariamente constante para um dado material dado que este pode variar com a magnitude da tensão aplicada. Durante um ensaio não é evidente se as deformações numa direção são devidas à interação de ondulação ou devido à extensão dos fios. Por isso, o rácio de tensão natural também pode ser definido como o rácio de tensão que minimiza as deformações absolutas em ambas as direções principais.

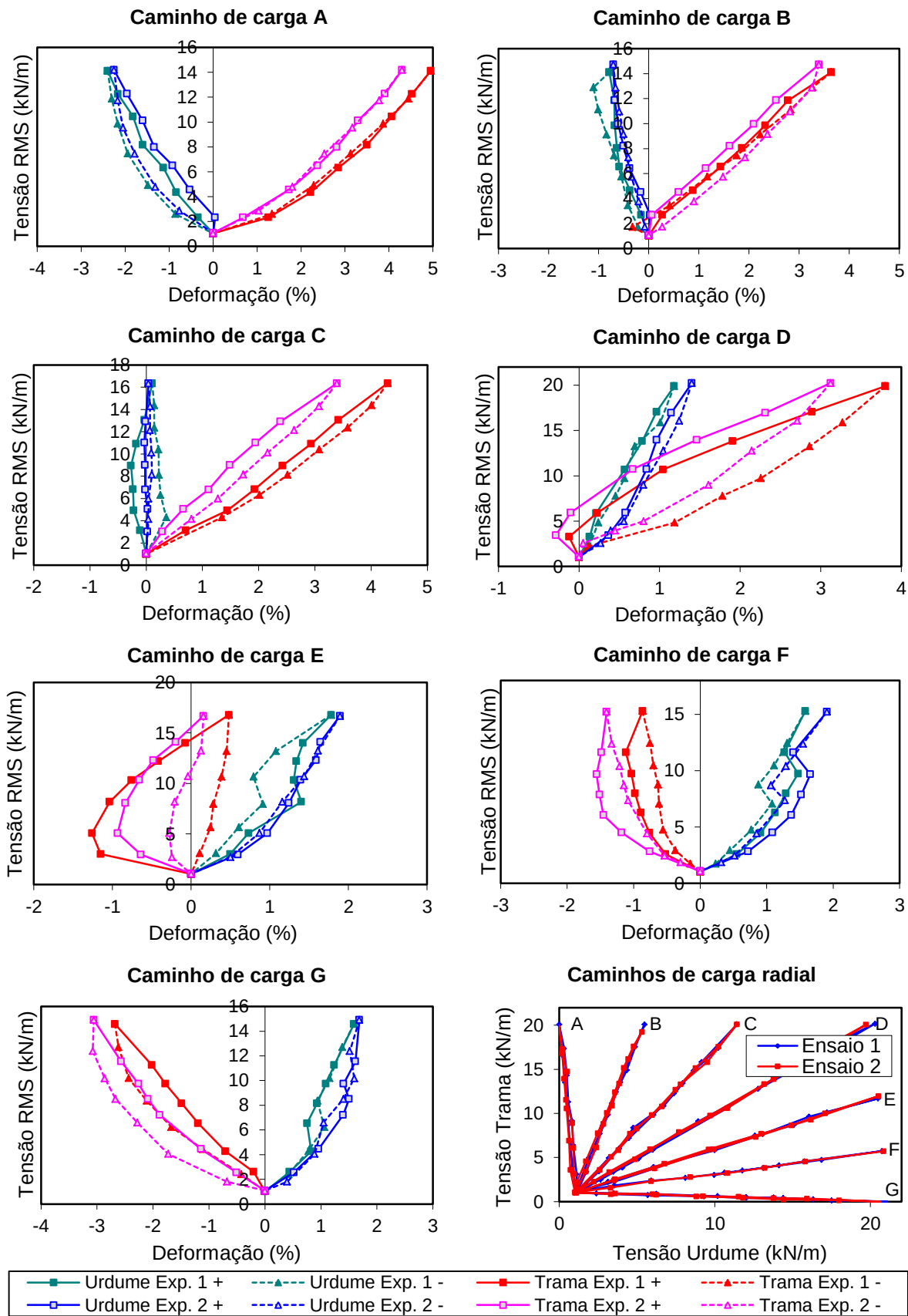


Figura 5.72 – Curvas tensão-deformação de ensaio de tração biaxial da membrana, Cortesia de Ben Bridgens

Nos *caminhos de carga F e G*, depois da zona de transição de ondulação, a resposta da amostra é dominada pelas tensões no urdume. O esticamento dos fios do urdume origina um gradiente de tensão-deformação positivo, e um gradiente negativo na direção da trama devido à interação de ondulação.

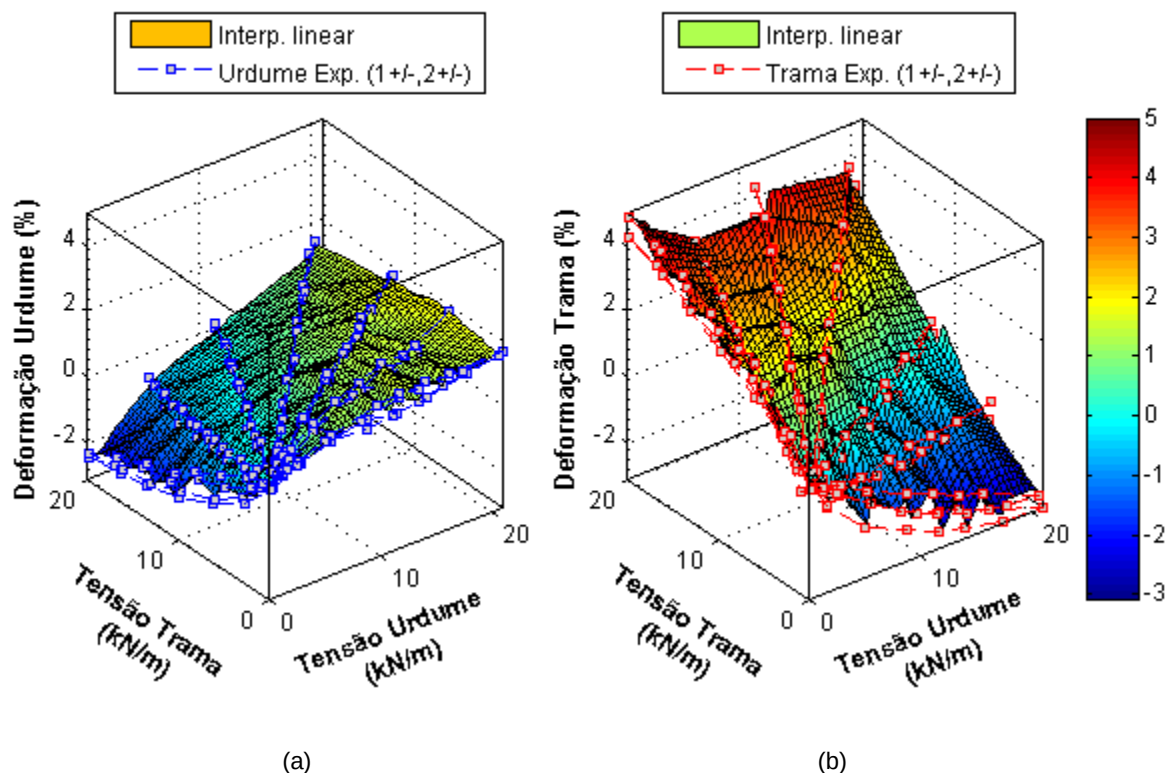


Figura 5.73 – Superfícies de resposta de tensão-tensão-deformação de ensaio de tração biaxial da membrana respetivamente na direção do (a) urdume e (b) trama.

5.5.5.2. Simulação numérica do ensaio de tração biaxial

Para averiguar o grau de erro associado à consideração de um modelo constitutivo ortotrópico linear em detrimento do seu comportamento real traduzido pelos resultados experimentais descritos anteriormente através da Figura 5.72, foi realizado um modelo numérico da amostra cruciforme e realizadas simulações numéricas que permitiram aceder à resposta do modelo e a sua posterior comparação com os resultados experimentais.

O modelo numérico utilizado nas simulações é apresentado na Figura 5.74 e foi realizado no software de elementos finitos *SAP* de acordo com as características geométricas da amostra cruciforme apresentadas anteriormente na Figura 5.70. O comprimento livre dos braços da amostra é de 150mm , e o quadrado interior da amostra é de $300 \times 300\text{mm} \times \text{mm}$. A discretização do modelo é realizada através de 1728 elementos finitos de casca de quatro nós com dimensões de $12,5 \times 12,5\text{mm} \times \text{mm}$, homogéneos na espessura de $0,78\text{mm}$, apresentando um comportamento puro de membrana (Computers and Structures Inc. 2011).

De acordo com o programa de cálculo estrutural utilizado, o elemento de casca homogéneo na espessura combina o comportamento independente de membrana e de placa. Estes comportamentos são acoplados se o elemento de casca é não-planar. O comportamento de membrana usa uma

formulação isoparamétrica que inclui componentes de rigidez de translação no plano e de rotação “drilling” na direção normal ao plano do elemento (ver Taylor e Simo (1985) e Ibrahimbegovic e Wilson (1991)). Os deslocamentos no plano são quadráticos. Por sua vez, o comportamento à flexão de placa inclui componentes de rigidez rotacional de placa em dois sentidos, fora do plano, e uma componente de rigidez de translação na direção normal ao plano do elemento. Adicionalmente, pode ser utilizada a formulação de placa fina com base nas hipóteses de Kirchhoff que considera desprezável a tensão de corte transversal em comparação com as tensões no plano, ou a formulação de placa espessa de Mindlin / Reissner que inclui esse efeito. Os deslocamentos fora do plano são cúbicos.

O cálculo da matriz de rigidez do elemento isoparamétrico é levado a cabo recorrendo à quadratura de Gauss com 2×2 pontos. De seguida é calculado o estado de deformação e de tensão nos pontos de integração de Gauss, sendo posteriormente extrapolado para os nós do elemento. Apesar de serem reportadas para os nós, as tensões e forças internas existem em todo o elemento (Cook *et al.* 1989). O erro aproximado das tensões e forças internas obtidas através da aplicação das técnicas de integração de Gauss poderá ser estimado pela diferença entre os valores calculados em elementos ligados a um nó comum. Este erro dará uma indicação da precisão da aproximação do elemento finito e poderá ser utilizado como base para a seleção de uma nova e mais precisa malha de elementos finitos.

Para reproduzir os 11 rasgos ou 12 fitas independentes em cada braço da amostra, alguns elementos finitos foram desligados através da duplicação de um conjunto de nós estruturais localizados no alinhamento dos rasgos mencionados. Não é considerado o comprimento adicional de material nos braços da amostra cruciforme para efeitos de amarração na placa de fixação.

As condições de apoio foram definidas de modo a reproduzir a ligação e o movimento das placas de fixação do ensaio real. A ligação da amostra à placa de fixação é simulada através da compatibilização dos deslocamentos dos 25 nós estruturais da extremidade de cada braço da amostra. Para o movimento, os nós estruturais da extremidade do braço esquerdo permitem unicamente deslizamentos no eixo dos yy, os do braço inferior deslizamentos no eixo dos xx e os dos braços direito e superior deslizamentos em ambos os eixos. No presente caso o eixo dos xx é horizontal e o eixo dos yy é vertical.

O sistema local de coordenadas dos elementos de membrana definido pelo sistema de eixos contido no plano dos elementos, 1 e 2, de acordo com a Figura 5.49, é orientado de forma a coincidir com as direções do material urdume e trama, que neste caso se consideram alinhadas respetivamente com as direções dos eixos dos xx e yy do sistema global de coordenadas. O sistema local de coordenadas permite definir as propriedades ortotrópicas do material e as cargas aplicadas, bem como interpretar os resultados das análises.

O modelo constitutivo do material utilizado é ortotrópico linear de acordo com as propriedades sistematizadas na secção de materiais (secção 5.3), em que os módulos de elasticidade do urdume e da trama são respetivamente $E_U = 773 \text{ kN/m}$ (991 MPa) e $E_T = 463 \text{ kN/m}$ ($593,6 \text{ MPa}$), e o módulo de corte $G = 30 \text{ kN/m}$ ($38,4 \text{ MPa}$). No entanto, na definição do coeficiente de Poisson, dadas as intenções de realizar uma análise de sensibilidade deste parâmetro, foram definidos 3 conjuntos de valores distintos ν_{TU}/ν_{UT} , $\nu_{TU} = 0,235$, $0,45$ e $0,7$ e, por simetria da matriz de flexibilidade, $\nu_{UT} = 0,39$, $0,75$ e $1,17$.

Os casos de carga são definidos de acordo com o regime de carga radial apresentados anteriormente na Figura 5.71, definindo as solicitações combinadas nas direções do urdume e da trama. O primeiro caso de carga estabelece as condições de pré-esforço na amostra. Depois seguem-se, a partir deste primeiro caso, os 7 casos de carga independentes correspondentes aos *caminhos de carga* de A a G. Cada caminho de carga compreende a execução faseada de 7 incrementos de carga a partir da posição

inicial, totalizando 8 rácios de tensão entre o urdume e a trama incluindo o do nível do pré-esforço. A análise estática do modelo numérico é realizada tendo por base uma análise não-linear geométrica considerando grandes deslocamentos, através do método de Newton-Raphson.

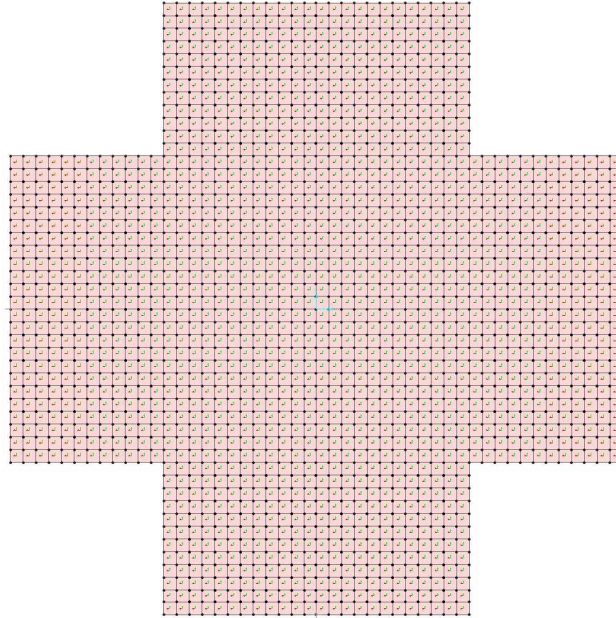


Figura 5.74 – Modelo numérico da amostra cruciforme

5.5.5.3. Análise de resultados

O campo de deslocamentos da amostra obtido numericamente no final de cada caminho de carga radial de A a G e para cada coeficiente de Poisson $\nu_{TU} = 0,235, 0,45$ e $0,7$ (e consequentemente $\nu_{UT} = 0,39, 0,75$ e $1,17$) é apresentado na Figura 5.75. A deformação da amostra é amplificada 10 vezes e apresentada salientando-se os deslocamentos nodais resultantes numa escala uniformizada de 0 a $0,027m$, sendo representada também a malha indeformada inicial. De uma forma geral, analisando a deformada da amostra sob ação do regime de carga radial completo, é de constatar que a deformação máxima obtida é verificada no *caminho de carga A* em que é mais solicitada a direção da trama, devendo-se à menor rigidez apresentada nesta direção.

A Figura 5.76 e a Figura 5.77 apresentam respetivamente o campo de tensões desenvolvido na amostra na direção do urdume e da trama sob ação do regime de carga radial do ensaio de tração biaxial utilizando um coeficiente de Poisson $\nu_{TU} = 0,235, 0,45$ e $0,7$, associada à representação da deformação amplificada 10 vezes, salientando-se as tensões numa escala de $-0,3$ a $23kN/m$, assim como os coeficientes de redução de tensão desde a placa de fixação até ao centro do quadrado da amostra. Em termos médios, verifica-se que os coeficientes de redução obtidos são superiores ao utilizado de 95%. O coeficiente de redução aumenta com os *caminhos de carga* de A a G na direção do urdume de aproximadamente 93,8% a 99,8% e reduz na direção da trama de 99,3% a 96,6%. Este facto permite concluir que a dissipação de tensão no material desde a placa de fixação até ao centro da amostra não é tão significativa como aquela considerada. Para além disso, verifica-se que o coeficiente de redução aumenta com o aumento do coeficiente de Poisson em ambas as direções.

A influência do coeficiente de Poisson na deformação da amostra é verificada a partir da Figura 5.75, onde se evidencia que a contração transversal originada pelo esticamento da amostra numa dada orientação aumenta naturalmente com o coeficiente de Poisson. Esse aumento da contração é mais significativo na direção da trama quando a direção do urdume é mais solicitada - *caminho de carga G*.

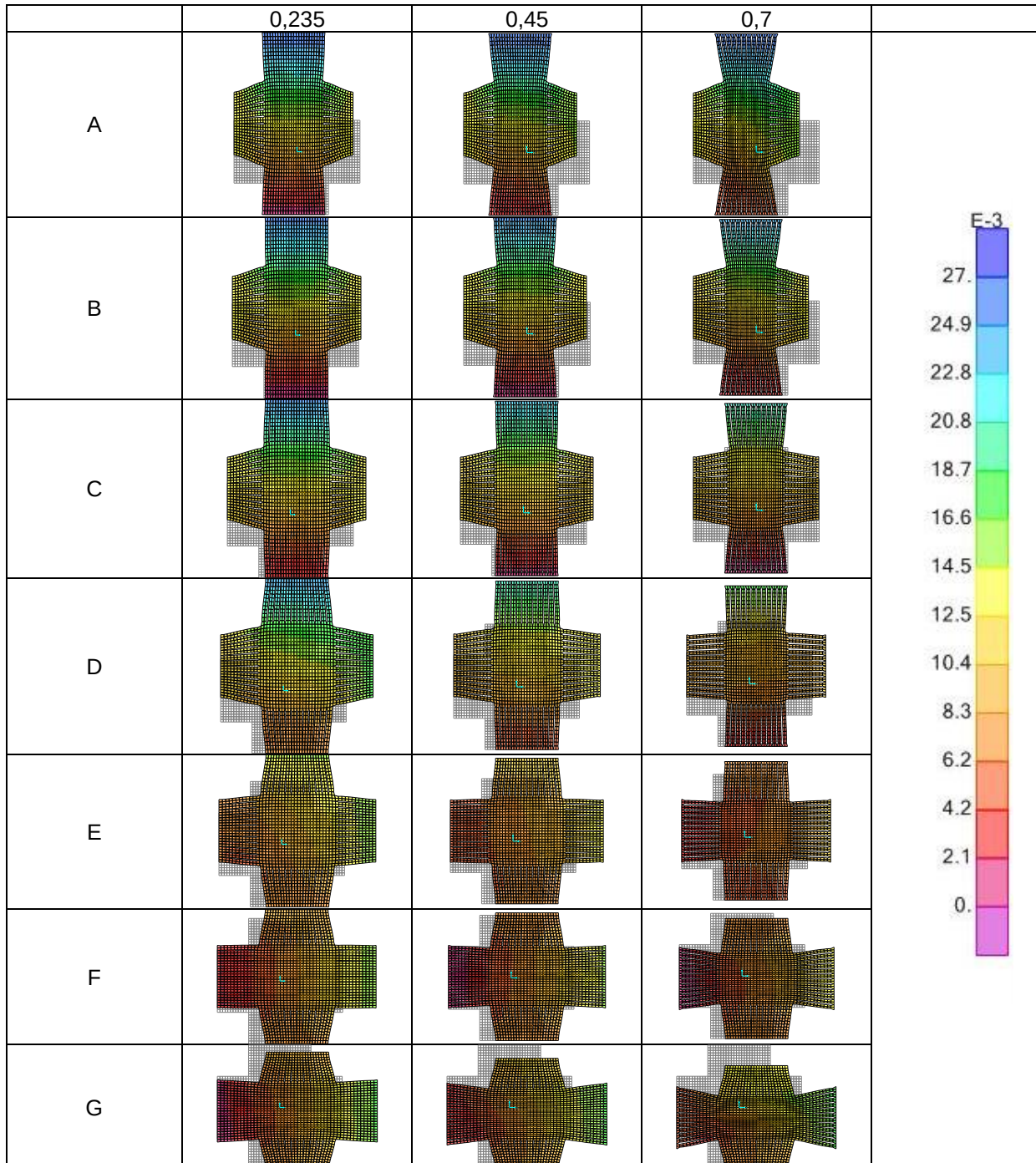


Figura 5.75 – Deformação da amostra sob ação do regime de carga radial do ensaio de tração biaxial utilizando um coeficiente de Poisson $\nu_{TU} = 0,235, 0,45$ e $0,7$, amplificada 10x e salientando os deslocamentos nodais resultantes numa escala de 0 a $0,027m$

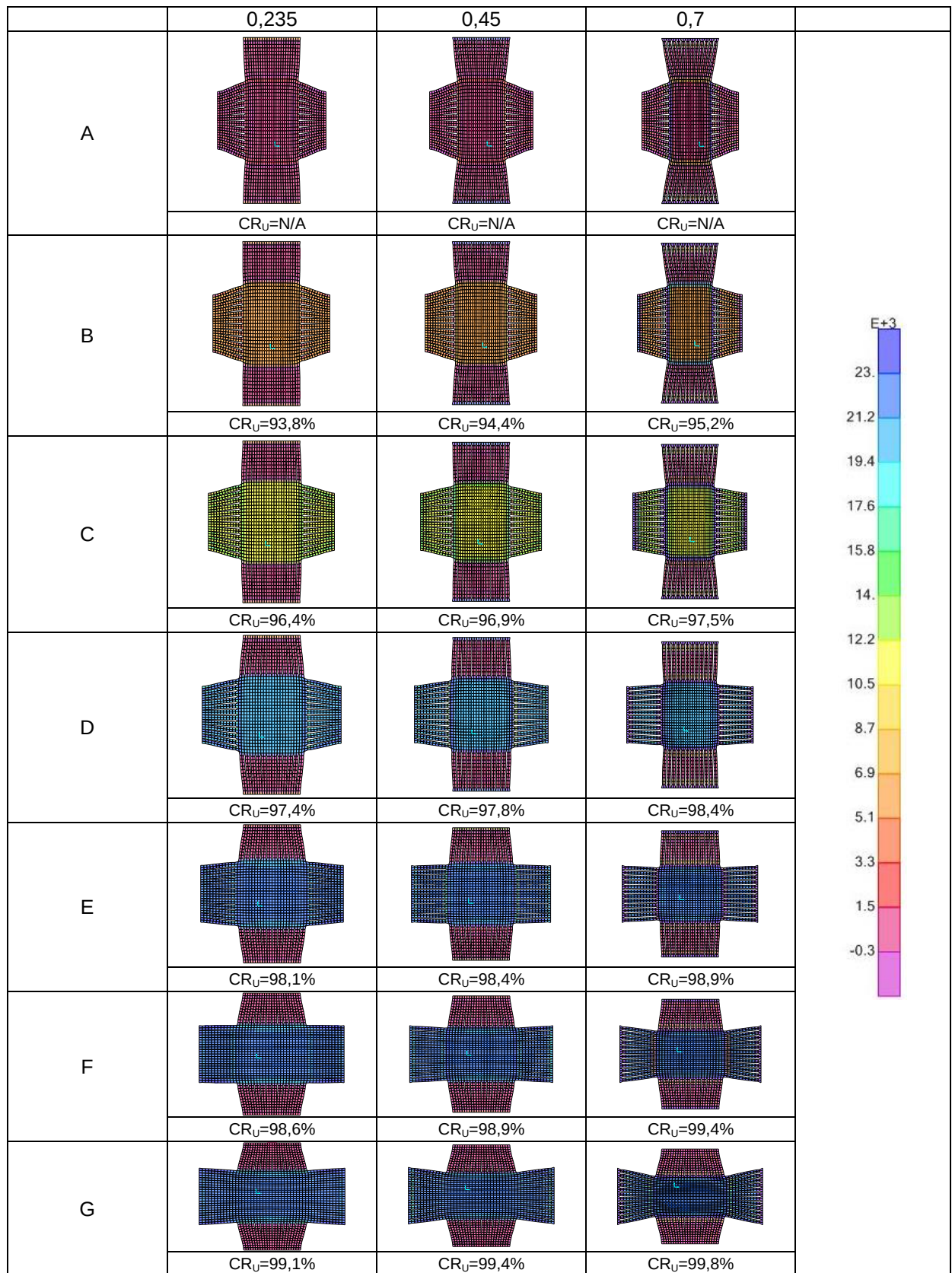


Figura 5.76 – Tensão na direção do urdume da amostra sob ação do regime de carga radial do ensaio de tração biaxial utilizando um coeficiente de Poisson $\nu_{TU} = 0,235, 0,45$ e $0,7$, associada à representação da deformação amplificada $10x$, salientando as tensões numa escala de $-0,3$ a $23kN/m$

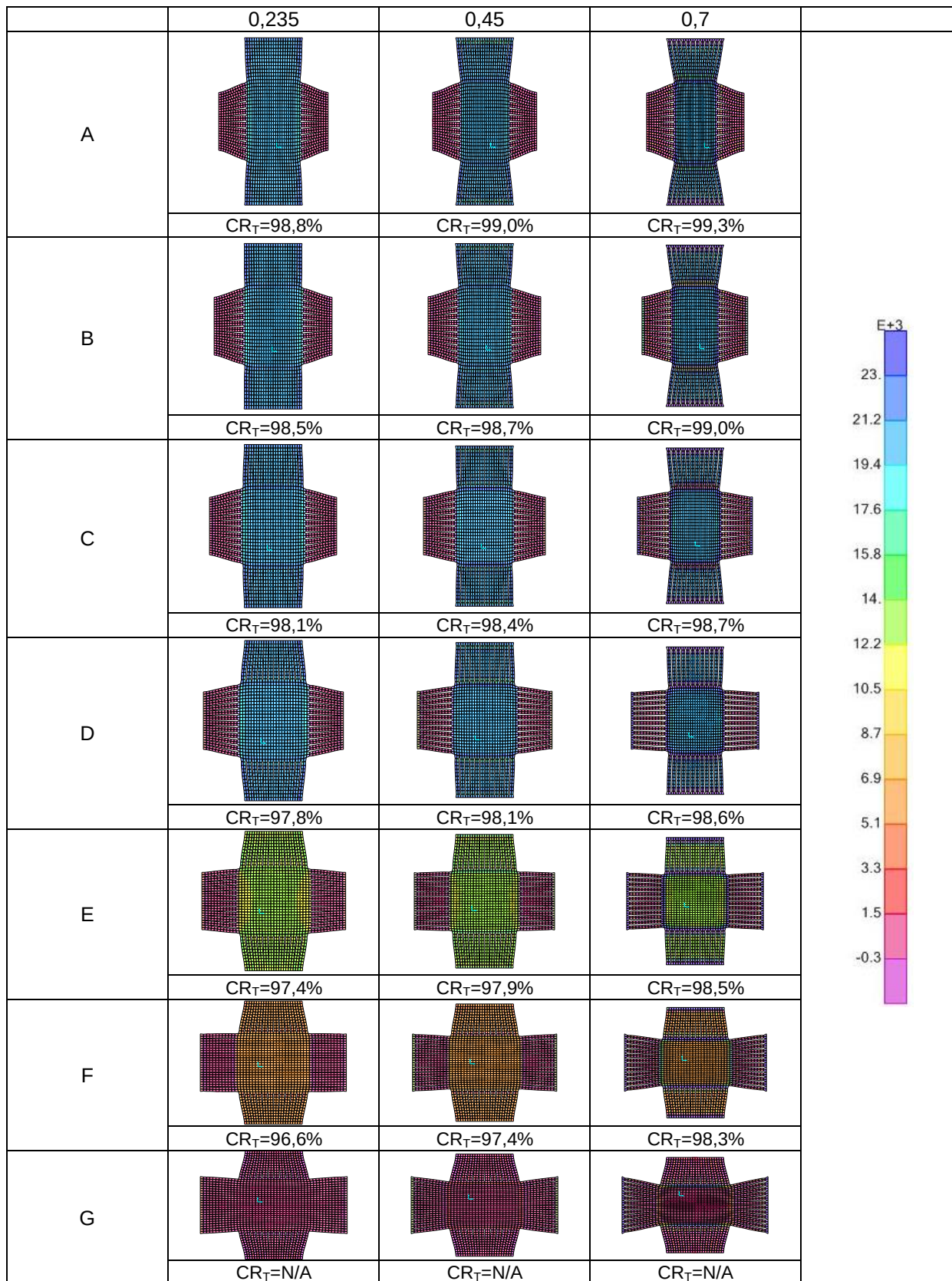


Figura 5.77 – Tensão na direção do tramo da amostra sob ação do regime de carga radial do ensaio de tração biaxial utilizando um coeficiente de Poisson $\nu_{TU} = 0,235, 0,45$ e $0,7$, associada à representação da deformação amplificada 10x, salientando as tensões numa escala de $-0,3$ a 23kN/m

O facto anterior é igualmente identificado na Figura 5.78, onde se mostra a sobreposição das curvas numéricas e experimentais da resposta de tensão-deformação da amostra de material ensaiado para os *caminhos de carga* de A a G, em que as curvas de tensão-deformação numéricas são obtidas utilizando um coeficiente de Poisson $\nu_{TU} = 0,235, 0,45$ e $0,7$ nas simulações numéricas. Analisando as curvas dos *caminhos de carga* A e G evidencia-se que para iguais níveis de deformação do material na direção de aplicação de carga maior, respetivamente trama e urdume, as deformações na outra direção são superiores no *caminho de carga* G. Este facto permite ainda verificar a adequada introdução dos coeficientes de Poisson no programa de cálculo, a correta definição dos eixos locais dos elementos de casca e a consequente verificação do significado físico que estes representam no comportamento da membrana, em que foram definidos 3 conjuntos de valores distintos ν_{UT}/ν_{TU} , $\nu_{TU} = 0,235, 0,45$ e $0,7$ e, por simetria da matriz de flexibilidade, $\nu_{UT} = 0,39, 0,75$ e $1,17$, e, portanto, a relação estabelecida pela referida matriz $\nu_{UT} > \nu_{TU}$ dado que $E_U > E_T$. É de notar que de uma forma global, não obstante da não-linearidade marcada do comportamento material, o balizamento do coeficiente de Poisson entre os valores mencionados conduz a resultados numéricos e experimentais concordantes.

Apesar dos resultados numéricos de uma forma geral parecerem concordantes com os resultados experimentais, e de existirem diferenças evidentes devidas essencialmente ao comportamento não-linear do material, interessa agora compreender a importância dos parâmetros utilizados na simulação numérica nomeadamente os módulos de elasticidade e os coeficientes de Poisson, comparando o comportamento do material numérico e experimental para cada *caminho de carga* de acordo com os resultados apresentados na Figura 5.78, tendo por base a equação (2.12) relacionando as deformações e as tensões através dos termos da matriz de flexibilidade.

Começando pelo *caminho de carga* A, onde a solicitação na trama aumenta até à carga de ensaio e no urdume tende para zero, é de salientar que as curvas numéricas estão bem enquadradas com as obtidas experimentalmente, sendo as curvas numéricas para os diferentes coeficientes de Poisson praticamente coincidentes na direção da trama e apresentando alguma dispersão na direção do urdume. Como a solicitação no urdume é muito inferior à da trama e tende para zero, o comportamento do material é fortemente influenciado pelos termos da segunda coluna da matriz de flexibilidade associados à variação de tensão na trama. Esta influência vai reduzindo do *caminho de carga* A até à D onde a solicitação em ambas as direções é aproximadamente igual e, portanto, a resposta do material é dominada de igual forma pelos termos da primeira e segundas colunas da referida matriz. Na resposta da trama este termo depende unicamente do módulo de elasticidade nesta direção E_T , levando à sobreposição das curvas numéricas independentemente do coeficiente de Poisson, constatando-se ainda que as curvas numéricas se aproximam a uma reta secante das curvas experimentais. Note-se no entanto que um valor inferior deste módulo de elasticidade E_T conduziria a resultados numéricos mais concordantes com os resultados experimentais dos testes 1 e 2. Na resposta do urdume, para além do módulo de elasticidade E_T , o termo da matriz também depende do coeficiente de Poisson ν_{TU} , conduzindo à dispersão das curvas numéricas, salientando-se que um coeficiente de Poisson ν_{TU} entre $0,45$ e $0,70$ e consequentemente ν_{UT} entre $0,75$ e $1,17$ explicariam melhor o comportamento real do material nesta direção.

Relativamente ao *caminho de carga* B, onde a solicitação na trama aumenta até à carga de ensaio e no urdume aumenta até aproximadamente $\frac{1}{4}$ da tensão aplicada na trama, é de salientar que as curvas numéricas estão bem enquadradas com as obtidas experimentalmente, sendo as curvas numéricas para os diferentes coeficientes de Poisson mais próximas na direção da trama e mais dispersas na direção do urdume. Como a solicitação no urdume é inferior à da trama, o comportamento do material continua a ser predominantemente influenciado pelos termos da segunda coluna da matriz de flexibilidade associados à variação de tensão na trama, à semelhança do *caminho de carga* A. Assim, a

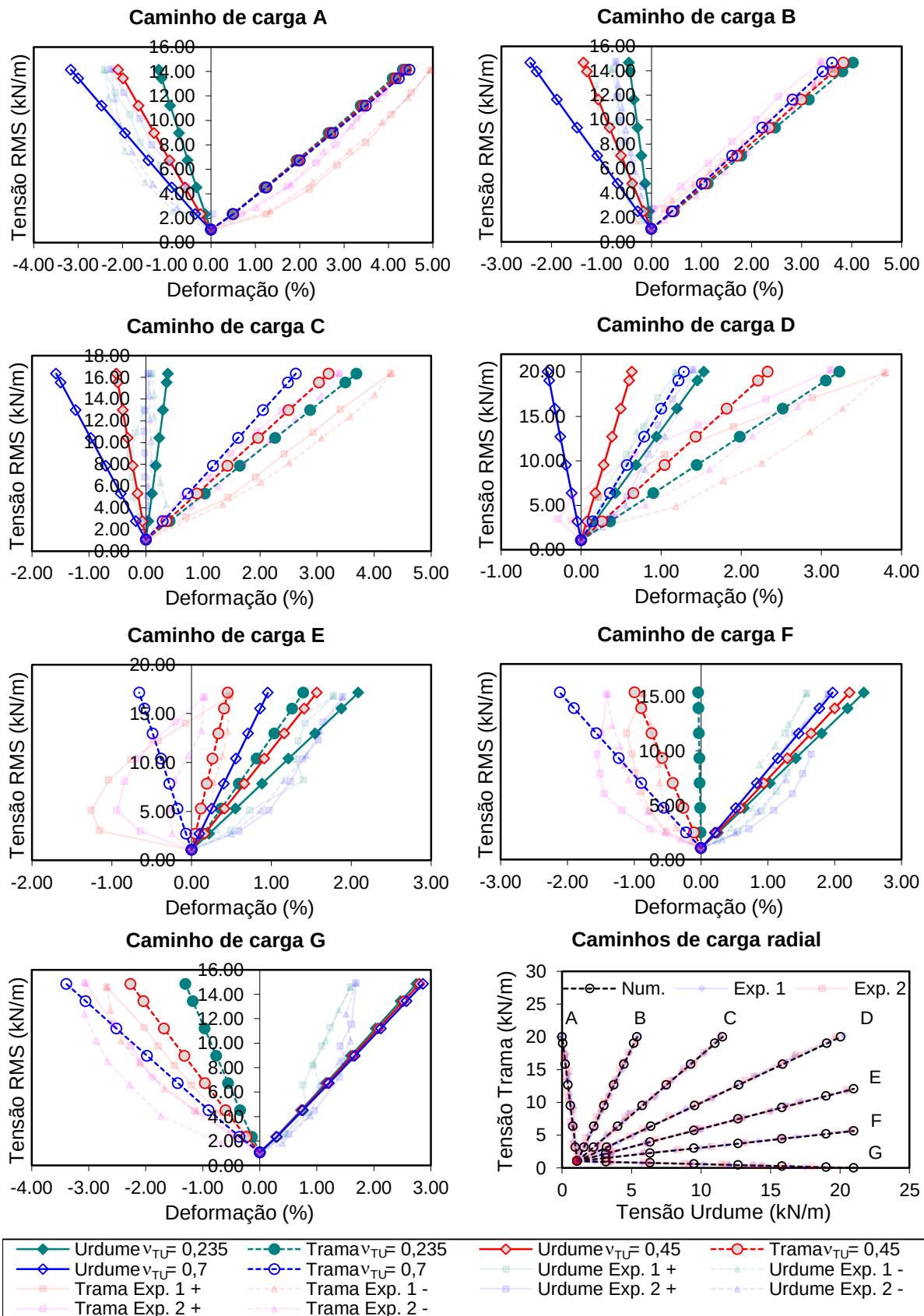


Figura 5.78 – Curvas tensão-deformação numéricas e experimentais do ensaio de tração biaxial

resposta na trama depende predominantemente do módulo de elasticidade nesta direção, levando à proximidade das curvas numéricas independentemente do coeficiente de Poisson, embora estas curvas comecem a divergir por força da influência do termo da primeira coluna da matriz de flexibilidade. Consta-se ainda que as curvas numéricas se aproximam a uma reta tangente das curvas experimentais, verificando-se que o comportamento real do material seria mais bem explicado utilizando um coeficiente de Poisson ν_{TU} entre 0,45 e 0,70 e consequentemente ν_{UT} entre 0,75 e 1,17. A título de nota, verifica-se que o aumento de tensão no urdume do *caminho de carga A* para o *B* conduz a uma diminuição da não linearidade marcada do material na resposta experimental do material. A resposta no urdume continua a depender mais do termo da segunda coluna, conduzindo à dispersão das curvas numéricas. No entanto, ao contrário da resposta do *caminho de carga A*, verifica-se que o comportamento real do material nesta direção é mais bem explicado utilizando um coeficiente de Poisson ν_{TU} entre 0,235 e 0,45 e consequentemente ν_{UT} entre 0,39 e 0,75.

No *caminho de carga C*, onde a solicitação na trama aumenta até à carga de ensaio e no urdume aumenta até aproximadamente $\frac{1}{2}$ da tensão aplicada na trama, é de salientar que as curvas numéricas estão bem enquadradas com as obtidas experimentalmente, sendo as curvas numéricas para os diferentes coeficientes de Poisson dispersas em ambas as direções dada a influência de todos os termos da matriz flexibilidade. Apesar da resposta na trama apresentar um bom enquadramento com as obtidas experimentalmente, verifica-se que o comportamento real médio do material nesta direção seria mais bem explicado utilizando um coeficiente de Poisson ν_{TU} de aproximadamente 0,235 e consequentemente ν_{UT} de 0,39. Na resposta do urdume, à semelhança do *caminho de carga B*, verifica-se que o comportamento real do material é mais bem explicado utilizando um coeficiente de Poisson ν_{TU} entre 0,235 e 0,45 e consequentemente ν_{UT} entre 0,39 e 0,75.

No *caminho de carga D*, onde a solicitação em ambas as direções é aproximadamente igual e portanto a resposta do material é dominada de igual forma pelos termos da primeira e segunda colunas da referida matriz, é de salientar que as curvas numéricas estão menos bem enquadradas com as obtidas experimentalmente na resposta da trama, sendo as curvas numéricas para os diferentes coeficientes de Poisson dispersas em ambas as direções dada a influência de todos os termos da matriz flexibilidade. Apesar da resposta na trama apresentar uma não-linearidade marcada neste caminho de carga, o que se verifica também nos caminhos de carga seguintes embora tendendo a diminuir com a redução do incremento de tensão na direção da trama, verifica-se que o comportamento real médio do material nesta direção seria mais bem explicado utilizando um coeficiente de Poisson ν_{TU} entre 0,235 e 0,45 e consequentemente ν_{UT} entre 0,39 e 0,75. Na resposta do urdume, à semelhança dos *caminhos de carga B* e *C*, verifica-se que o comportamento real do material é mais bem explicado utilizando um coeficiente de Poisson ν_{TU} entre 0,235 e 0,45 e consequentemente ν_{UT} entre 0,39 e 0,75.

No *caminho de carga E*, onde a solicitação na trama aumenta até aproximadamente $\frac{1}{2}$ da tensão aplicada no urdume e no urdume aumenta até à carga de ensaio, e a partir da qual a solicitação na direção da trama começa a reduzir e do urdume se mantém constante na carga máxima de ensaio, é de salientar que as curvas numéricas estão menos bem enquadradas com as obtidas experimentalmente na resposta da trama devido à não-linearidade significativa, sendo as curvas numéricas para os diferentes coeficientes de Poisson dispersas em ambas as direções dada a influência de todos os termos da matriz flexibilidade. Apesar da resposta na trama apresentar um enquadramento com menor qualidade, verifica-se que o comportamento real médio do material seria mais bem explicado utilizando um coeficiente de Poisson ν_{TU} entre 0,45 e 0,70 e consequentemente ν_{UT} entre 0,75 e 1,17. Na resposta do urdume, verifica-se que o comportamento real do material é mais bem explicado utilizando um coeficiente de Poisson ν_{TU} de 0,235 e consequentemente ν_{UT} de 0,39.

No *caminho de carga F*, ao contrário do *caminho de carga B*, a solicitação na trama aumenta até aproximadamente $\frac{1}{4}$ da tensão aplicada no urdume e no urdume aumenta até à carga de ensaio, salientando-se um bom enquadramento entre as curvas numéricas e experimentais, sendo as curvas numéricas mais dispersas na direção da trama e mais próximas na direção do urdume. Como a solicitação no urdume é superior à da trama, o comportamento do material é predominantemente influenciado pelos termos da primeira coluna da matriz de flexibilidade associados à variação de tensão no urdume. Consequentemente, a resposta na trama apresenta dispersão das curvas numéricas por força da influência do coeficiente de Poisson ν_{UT} , verificando-se que o comportamento real do material é mais bem explicado utilizando um coeficiente de Poisson ν_{TU} entre 0,45 e 0,70 e consequentemente ν_{UT} entre 0,75 e 1,17. A resposta no urdume depende predominantemente do módulo de elasticidade nesta direção E_U , levando à proximidade das curvas numéricas independentemente do coeficiente de Poisson devido à perda de influência do termo da segunda coluna da matriz de flexibilidade, verificando-se que o comportamento real do material seria mais bem explicado utilizando um coeficiente de Poisson ν_{TU} entre 0,45 e 0,70 e consequentemente ν_{UT} entre 0,75 e 1,17.

Por último, no *caminho de carga G*, onde a solicitação no urdume aumenta até à carga de ensaio e na trama tende para zero, é de salientar que as curvas numéricas estão bem enquadradas com as obtidas experimentalmente, sendo as curvas numéricas praticamente coincidentes na direção da urdume e mais dispersas na direção da trama. Como a solicitação na trama é muito inferior à do urdume e tende para zero, o comportamento do material é fortemente influenciado pelos termos da primeira coluna da matriz de flexibilidade associados à variação de tensão no urdume. Consequentemente, a resposta da trama apresenta dispersão das curvas numéricas por força da influência do coeficiente de Poisson ν_{UT} , salientando-se que um coeficiente de Poisson ν_{TU} entre 0,45 e 0,70 e consequentemente ν_{UT} entre 0,75 e 1,17 explicariam melhor o comportamento real do material nesta direção. Na resposta do urdume este termo depende unicamente do módulo de elasticidade nesta direção E_U , levando à sobreposição das curvas numéricas independentemente do coeficiente de Poisson, constatando-se ainda que as curvas numéricas se aproximam às curvas experimentais nos 4 primeiros patamares de carga, afastando-se significativamente nos seguintes para deformações mais elevadas, sugerindo que um valor ligeiramente superior deste módulo de elasticidade E_T conduziria a resultados numéricos mais concordantes com os resultados experimentais dos testes 1 e 2.

Da análise bidimensional realizada, é de verificar de uma forma geral que o comportamento real do material na direção do urdume tende a ser mais bem explicado utilizando um modelo numérico considerando um coeficiente de Poisson ν_{TU} entre 0,235 e 0,45 e consequentemente ν_{UT} entre 0,39 e 0,75 mantendo a tensão na trama “constante” (*caminhos de carga B, C, e D*), enquanto na direção da trama seria um coeficiente ν_{TU} entre 0,45 e 0,70 e consequentemente ν_{UT} entre 0,75 e 1,17 mantendo a tensão no urdume “constante” (*caminhos de carga E, F e G*). Este facto dificulta a escolha do modelo constitutivo ortotrópico linear que melhor se ajusta aos dados experimentais simultaneamente em ambas as direções.

De forma a complementar a análise realizada do comportamento do material a nível bidimensional, e no sentido de facilitar e fundamentar a escolha do modelo constitutivo ideal a utilizar nas análises subsequentes, assim como compreender os efeitos dessa escolha, pretende-se de seguida recorrer à análise da resposta tensão-tensão-deformação respetivamente para a direção do urdume e da trama.

A Figura 5.79 (a) e (b) apresenta a sobreposição dos resultados numéricos às superfícies de resposta de tensão-tensão-deformação do ensaio de tração biaxial da membrana, respetivamente para a direção do urdume e da trama. A superfície de resposta experimental é representada através de uma interpolação

linear realizada aos caminhos de carga radial obtidos com base nos ensaios de carga (+) e descarga (-) 1 e 2, também representados na Figura 5.79. Sobre estas superfícies é representado o plano de melhor ajuste para ambas as direções de fabrico. Os resultados numéricos são representados por planos e denominados por modelos no estado plano de tensão ortotrópico linear, *MEPTOL*, respetivamente para cada coeficiente de Poisson considerado, $\nu_{TU} = 0,235, 0,45$ e $0,70$ e consequentemente $\nu_{UT} = 0,39, 0,75$ e $1,17$. A caracterização destes planos encontra-se sistematizada na Tabela 5.40, assim como a caracterização do erro na determinação das deformações no urdume e na trama com base nesses modelos constitutivos em relação aos dados experimentais. Estes planos permitem estimar as propriedades do material designadamente os módulos de elasticidade e os coeficientes de Poisson.

Em primeira análise é de notar que a perspetiva tridimensional da resposta real do material em conjunto com o balizamento de respostas numéricas realizado permite destacar novamente a não-linearidade significativa do comportamento do material. Apesar disso, o balizamento realizado com base na variação alargada do coeficiente de Poisson mantendo os módulos de elasticidade constantes enquadra-se relativamente bem no comportamento real, embora na direção da trama apresente menor qualidade evidenciado pelo ligeiro desvio do plano de melhor ajuste em relação aos planos numéricos.

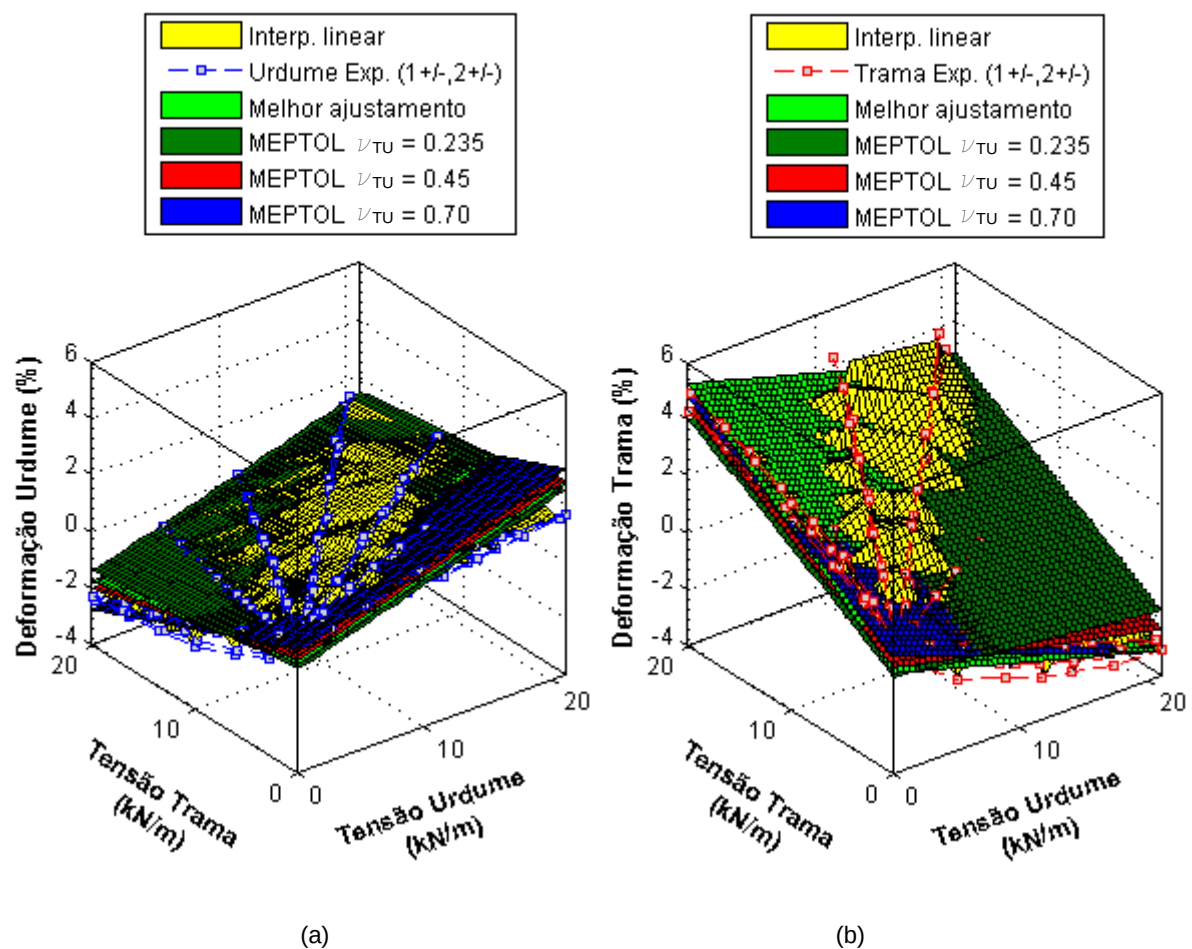


Figura 5.79 – Ajustamento de modelos constitutivos no estado plano de tensão ortotrópico linear às superfícies de resposta de tensão-tensão-deformação do ensaio de tração biaxial da membrana

Tabela 5.40 – Caracterização do erro dos modelos constitutivos no estado plano de tensão ortotrópico linear

		$\varepsilon_{dir}(x,y) = a + b*x + c*y$		Propriedades estimadas do material				
Ajustamento ^a		Urdume	Trama	Módulo de Young		Coeficiente de Poisson		
		ε_U	ε_T	E_U	E_T	ν_{UT}	ν_{TU}	
		(%)	(%)	(kN/m)	(kN/m)			
Experimental	Melhor ajuste	<i>a</i>	-0,114	-0,399	730 ^c (769)	355 ^c (374)	0,94	0,29
		<i>b</i>	0,137	-0,129				
		<i>c</i>	-0,082	0,282				
		R ²	0,86	0,92				
		RMSE	0,37	0,50				
Numérico ^b	$E_U = 773$ $E_T = 463$ $\nu_{TU} = 0,235$ $\nu_{UT} = 0,39$	<i>a</i>	-0,296	-0,525	740 ^c (779)	445 ^c (468)	0,40	0,24
		<i>b</i>	0,135	-0,054				
		<i>c</i>	-0,054	0,225				
		R ²	0,83	0,84				
		RMSE	0,40	0,73				
	$E_U = 773$ $E_T = 463$ $\nu_{TU} = 0,45$ $\nu_{UT} = 0,75$	<i>a</i>	0,038	-0,193	737 ^c (776)	443 ^c (467)	0,76	0,45
		<i>b</i>	0,136	-0,102				
		<i>c</i>	-0,102	0,226				
		R ²	0,84	0,89				
		RMSE	0,39	0,61				
	$E_U = 773$ $E_T = 463$ $\nu_{TU} = 0,70$ $\nu_{UT} = 1,17$	<i>a</i>	0,429	0,196	735 ^c (774)	441 ^c (465)	1,17	0,70
		<i>b</i>	0,136	-0,159				
		<i>c</i>	-0,158	0,227				
		R ²	0,65	0,88				
		RMSE	0,58	0,62				

^a As propriedades do material são estimadas com base num ajustamento de um plano linear do tipo $\varepsilon_{dir}(x,y) = a + b*x + c*y$ aos dados de tensão-tensão-deformação, utilizando a ferramenta de ajustamento de superfícies do Matlab, em que ε_{dir} representa as extensões respetivamente na direção do urdume e da trama, x e y as tensões no urdume e na trama, e os coeficientes a , b e c estão relacionados com as propriedades materiais: os módulos de elasticidade e os coeficientes de Poisson de acordo com a teoria do estado plano de tensão, sendo dados respetivamente no urdume e na trama por $a = \varepsilon_0$, $b = 1/E_U$ e $c = -\nu_{TU}/E_T$ e $a = \varepsilon_0$, $b = -\nu_{UT}/E_U$ e $c = 1/E_T$;

^b No ajustamento dos planos numéricos aos dados experimentais, as constantes b e c dos planos numéricos são obtidas com base num ajustamento realizado às curvas numéricas tensão-tensão-deformação dos caminhos de carga radial o que resulta num erro muito reduzido e R^2 igual a 1.

^c Os módulos de elasticidade estimados são cerca de 5% inferiores aos valores reais, dado o coeficiente de redução utilizado de 95% de acordo com o protocolo experimental de Bridgens (2005).

De acordo com a Tabela 5.40, é de notar que os planos de melhor ajuste aos dados experimentais permitem estimar módulos de elasticidade de aproximadamente $E_U = 730/0,95 = 769\text{kN/m}$ e $E_T = 355/0,95 = 374\text{kN/m}$, evidenciando na direção da trama um valor inferior ao considerado nas análises numéricas de 463kN/m . Este facto corrobora a conclusão elencada anteriormente na análise bidimensional do *caminho de carga A*, em que um módulo de elasticidade menor permitiria ajustar melhor os dados numéricos aos experimentais na resposta da trama. Note-se que este módulo de elasticidade menor permitiria também na direção do urdume reduzir as deformações numéricas e provavelmente balizar a resposta do urdume para coeficientes de Poisson ν_{TU} entre $0,235$ e $0,45$, em vez de $0,45$ e $0,70$, de acordo com a análise bidimensional do *caminho de carga A*, o que permitiria reforçar a conclusão de que esta direção é tendencialmente mais bem explicada utilizando um modelo com estes coeficientes de Poisson como se verificou anteriormente para os *caminhos de carga B, C e D*.

Relativamente aos coeficientes de Poisson, são estimados $\nu_{TU} = 0,29$ e $\nu_{UT} = 0,94$, mostrando em primeiro lugar que a gama de valores dos coeficientes de Poisson considerada para o balizamento numérico é adequada. Em segundo lugar, como referido anteriormente na secção 5.3, sugere a possibilidade dos valores apresentados em Bridgens (2005) de $\nu_{TU} = 0,98$ e $\nu_{UT} = 0,37$ estarem trocados, tendo sido neste trabalho sistematizados corretamente na Tabela 5.4. Embora não sejam aqui apresentados, os planos numéricos correspondentes a esses valores trocados foram adicionalmente gerados, em jeito de verificação, e sobrepostos às superfícies de resposta, conduzindo a um desajustamento visualmente evidente e erros e desvios elevados, reforçando essa possibilidade. É de salientar que essa troca levou a concluir erradamente no trabalho mencionado que o material se ajustaria melhor a um comportamento inverso ao estado plano de tensão para um material ortotrópico. A validade dos referidos valores bem como desse comportamento inverso já havia sido questionada em Gosling e Bridgens (2008) por um revisor informal, embora a troca dos coeficientes de Poisson não tenha sido especificamente apontada como causa dessa conclusão. É de salientar que estes dois planos de melhor ajuste não cumprem a relação de reciprocidade da matriz de flexibilidade, dado que $E_U / \nu_{UT} = 730/0,94 = 774$ e $E_T / \nu_{TU} = 355/0,29 = 1218$. Apesar disso, estes ajustamentos explicam relativamente bem a variação dos dados experimentais apresentando um coeficiente de R^2 de $0,86$ e $0,92$ respetivamente para a direção do urdume e da trama, podendo a deformação ser estimada respetivamente com um desvio $\pm 0,37\%$ e $\pm 0,50\%$.

Relativamente aos modelos numéricos, as propriedades do material estimadas estão de acordo com as consideradas no programa de cálculo, quer ao nível dos módulos de elasticidade, quer dos coeficientes de Poisson. Para além disso, verifica-se a relação de reciprocidade imposta através da utilização de um modelo constitutivo baseado no estado plano de tensão para um material ortotrópico linear elástico. Relativamente à deformação no urdume, verifica-se que os modelos constitutivos utilizando um coeficiente de Poisson ν_{TU} entre $0,235$ e $0,45$ e consequentemente ν_{UT} entre $0,39$ e $0,75$ explicam melhor a variabilidade dos dados experimentais, apresentando um coeficiente de R^2 de $0,83$ e $0,84$, em detrimento de $0,65$ no caso do modelo em que $\nu_{TU} = 0,70$ e $\nu_{UT} = 1,17$, podendo a deformação ser estimada respetivamente com um desvio $\pm 0,40\%$ e $\pm 0,39\%$. Este facto corrobora a conclusão elencada anteriormente na análise realizada à resposta do material a nível bidimensional de que a resposta do material na direção do urdume é mais bem explicada utilizando um coeficiente de Poisson ν_{TU} entre $0,235$ e $0,45$ e consequentemente ν_{UT} entre $0,39$ e $0,7$. Mais, que a análise da resposta do urdume tende a balizar o valor real de $\nu_{TU} = 0,29$ encontrado no plano de melhor ajuste. No caso da deformação na trama, verifica-se que os modelos constitutivos utilizando um coeficiente de Poisson ν_{TU} entre $0,45$ e $0,70$ e consequentemente ν_{UT} entre $0,75$ e $1,17$ explicam melhor a variabilidade dos dados experimentais, apresentando um coeficiente de R^2 de $0,89$ e $0,88$, em detrimento de $0,84$ no caso

do modelo em que $\nu_{TU} = 0,235$ e $\nu_{UT} = 0,39$, podendo a deformação ser estimada respetivamente com um desvio $\pm 0,61\%$ e $\pm 0,62\%$. Este facto corrobora novamente a conclusão elencada anteriormente na análise realizada à resposta do material a nível bidimensional de que a resposta do material na direção da trama é mais bem explicada utilizando um coeficiente de Poisson ν_{TU} entre $0,45$ e $0,70$ e consequentemente ν_{UT} entre $0,75$ e $1,17$. Mais, que a análise da resposta da trama tende a balizar o valor real de $\nu_{UT} = 0,94$ encontrado no plano de melhor ajuste.

De acordo com esta análise, é de verificar que o material não é caracterizado por um comportamento material ortotrópico linear perfeito, dado que a relação de reciprocidade não é cumprida. No entanto, introduzindo um coeficiente C na relação de reciprocidade traduzida pela equação (2.13), resultando em

$$\frac{\nu_{UT}}{E_U} = C \frac{\nu_{TU}}{E_T} \quad (5.8)$$

permite estimar um valor de $C = 1,57$, considerando os módulos de elasticidade e os coeficientes de Poisson que resultam dos planos de melhor ajustamento aos dados experimentais apresentados na Tabela 5.40, corroborando os valores médios obtidos para este tipo de material nos estudos de Bridgens (2005) de $C = 1,50$. Ainda assim, a consideração de um modelo ortotrópico linear na modelação numérica para a caracterização do comportamento deste material será certamente melhor do que um modelo constitutivo isotrópico.

Assim sendo, verifica-se que o modelo constitutivo ortotrópico linear elástico intermédio, isto é utilizando módulos de elasticidade $E_U = 773 \text{ kN/m}$ e $E_T = 463 \text{ kN/m}$ e coeficientes de Poisson $\nu_{TU} = 0,45$ e $\nu_{UT} = 0,75$, é a solução considerada que simultaneamente melhor permite explicar a variabilidade dos dados em ambas as direções, apresentando aliás níveis de erro e de desvio próximos dos que resultam do melhor ajustamento realizado aos dados, quer na direção do urdume, quer na direção da trama, motivo pelo qual será considerada na análise da estrutura sob a ação dos efeitos do vento. No entanto, é importante o estudo e desenvolvimento de modelos numéricos melhorados em trabalhos futuros no sentido de prever numericamente o comportamento real do material com um erro menor.

5.6. AÇÃO DO VENTO

As ações dinâmicas mais importantes sobre as estruturas em geral são devidas ao vento e aos sismos. As estruturas de membrana exibem um comportamento com grandes deslocamentos sob a ação do vento devido ao seu reduzido peso. No sentido de analisar corretamente a ação do vento sobre estas estruturas é importante conhecer a distribuição espacial das pressões do vento ao longo da superfície da estrutura, bem como o espectro em frequência e a magnitude da ação do vento.

A presente secção visa a correta determinação da ação estática e dinâmica do vento sobre a estrutura de cobertura em estudo, tendo em vista a posterior comparação entre a análise da resposta da estrutura sob a ação do vento através de uma abordagem estática equivalente e uma abordagem dinâmica no domínio do tempo. Para o efeito são determinados inicialmente os coeficientes aerodinâmicos para os diferentes elementos da estrutura com base nas normas disponíveis. De seguida, as forças aerodinâmicas estáticas e dinâmicas são determinadas. As forças estáticas são determinadas com base no método de análise quase-estático preconizado na norma EN1991-1-4 (1991). As séries temporais de forças dinâmicas são determinadas com base em registos artificiais da velocidade do vento obtidos com base na geração de amostras de processos estocásticos gaussianos, através da sobreposição de harmónicos com amplitudes do espectro de potência do processo, que é um procedimento no domínio do tempo, e apresenta uma vasta aplicação no domínio da análise dinâmica de estruturas sujeitas a excitações aleatórias.

5.6.1. DIREÇÃO DO VENTO E DISTRIBUIÇÃO ESPACIAL

Os coeficientes aerodinâmicos são determinados para duas direções distintas da ação do vento sobre a estrutura, de acordo com a Figura 5.80: a primeira direção do vento está alinhada com o eixo dos xx – *direção do vento 0°*; a segunda direção do vento está alinhada com o eixo dos yy – *direção do vento 90°*.

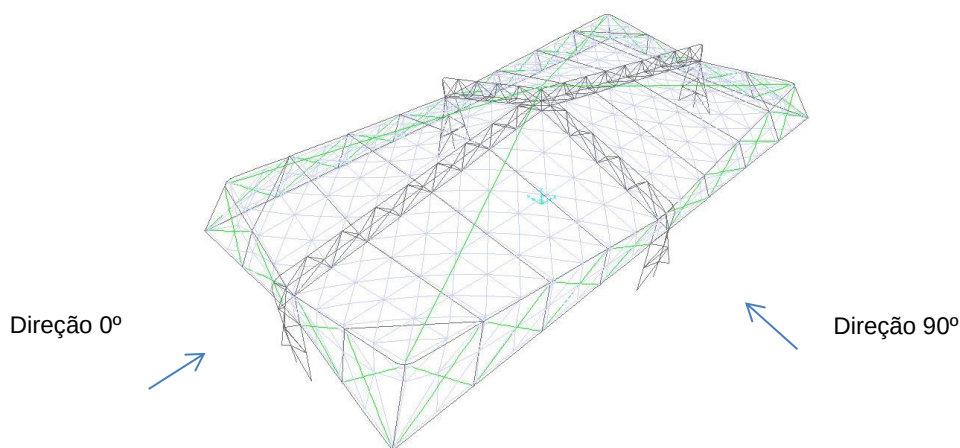


Figura 5.80 – Direção do vento e distribuição espacial

5.6.2. COEFICIENTES AERODINÂMICOS

5.6.2.1. Considerações iniciais

A quantificação dos coeficientes aerodinâmicos para a membrana baseia-se no manual europeu de estruturas de membrana (Forster e Mollaert 2004). Para os coeficientes de pressão exterior, C_{pe} , o manual apresenta as zonas dos coeficientes de pressão para diferentes tipologias de membrana, por

exemplo para estruturas cónicas e em parabolóide hiperbólico. No caso dos coeficientes de pressão interior, C_{pi} , e nos coeficientes de atrito, C_{fr} , o manual remete para a norma europeia de ação do vento sobre estruturas (EN1991-1-4 1991).

Na estrutura metálica, os coeficientes aerodinâmicos, nomeadamente os coeficientes de força, C_f , são determinados com base na norma europeia de ação do vento sobre estruturas (EN1991-1-4 1991).

5.6.2.2. Membrana

Coeficientes de pressão exterior – C_{pe}

(i) Módulo 1 – parabolóide hiperbólico

Os coeficientes de pressão exterior apresentados no manual europeu de estruturas de membrana (Forster e Mollaert 2004) baseiam-se em ensaios de túnel de vento realizados em estruturas tensas, com os lados fechados, bem como na literatura com base em estruturas flexíveis e rígidas. Os valores dos coeficientes de pressão apresentados no referido manual podem ser aplicados em painéis de membrana que variam entre 10 e 100 metros de dimensão. O comportamento do vento, e consequentemente dos coeficientes de pressão, C_p , não varia significativamente em estruturas que exibem pequenas alterações em relação à sua forma global (Forster e Mollaert 2004).

A Figura 5.81 apresenta as zonas dos coeficientes de pressão exterior num parabolóide hiperbólico, respetivamente para a direção do vento 0° e 90° , de acordo com esse manual. Os valores dos coeficientes de pressão estão sistematizados na Tabela 5.41.

A Figura 5.82 apresenta a definição das zonas dos coeficientes de pressão nos módulos de membrana da estrutura com formato de parabolóide hiperbólico, módulo 1, com base na aplicação das zonas definidas pelo manual europeu de estruturas de membrana (ver a Figura 5.81), no caso da direção 0° . Por sua vez, a Figura 5.83 apresenta as zonas dos coeficientes de pressão exterior no caso da direção 90° .

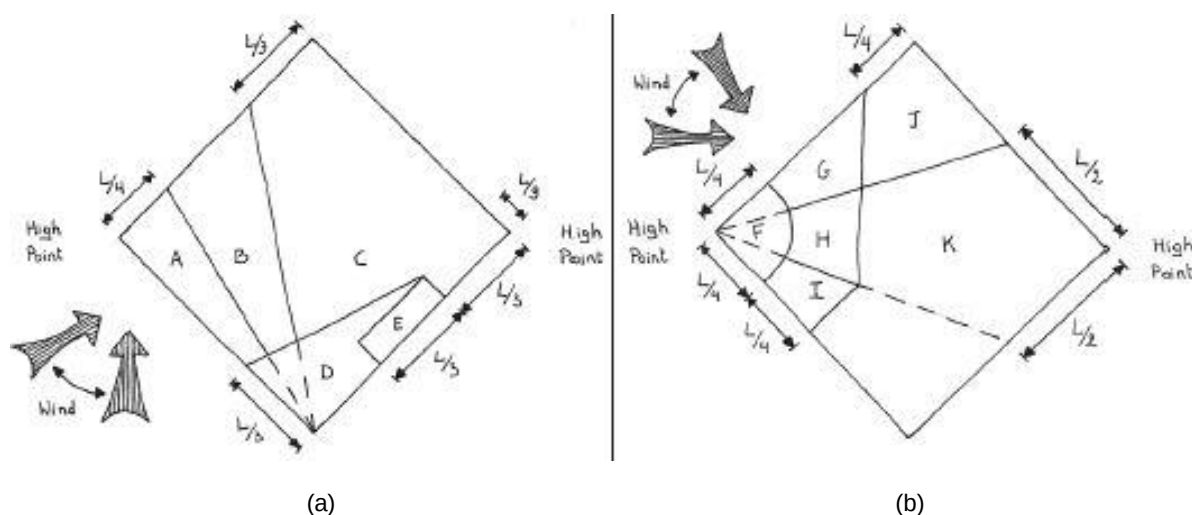
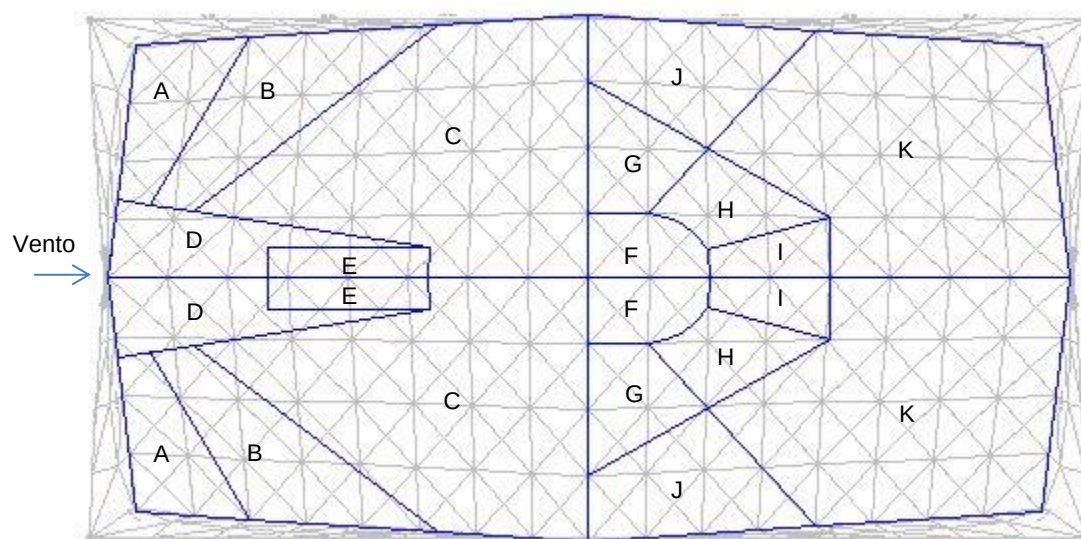
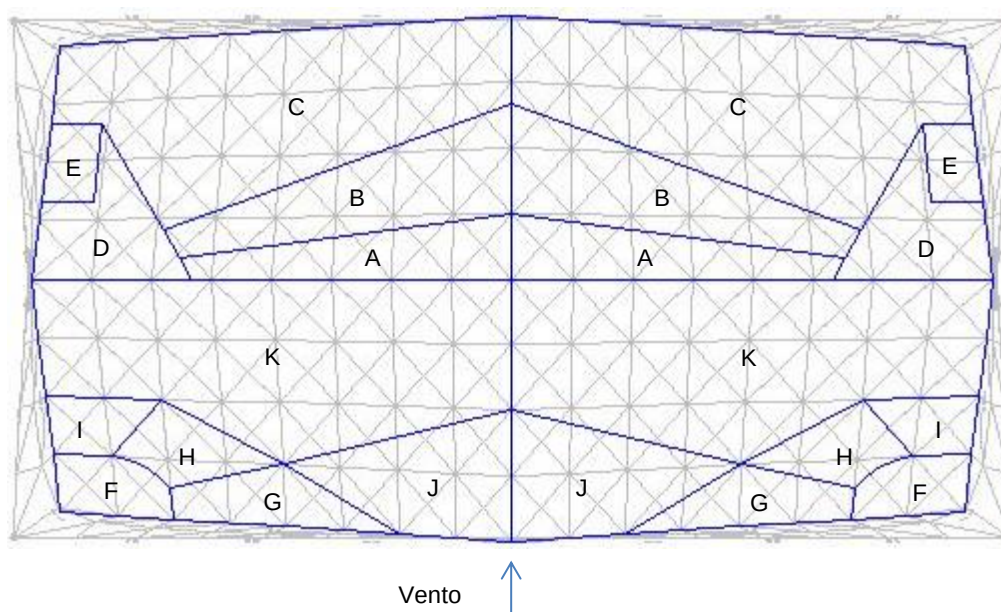


Figura 5.81 – Definição das zonas dos coeficientes de pressão num parabolóide hiperbólico: (a) Direção 0° e (b) Direção 90° (Forster e Mollaert 2004)

Tabela 5.41 – Coeficiente de pressão exterior para paraboloides hiperbólicos (Forster e Mollaert 2004)

C_{pe}	Zonas										
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Positivo	0	0	0,30	0,30	0,30	0	0	0,20	0	0	0
Negativo	-1,45	-0,90	-0,65	-0,70	-1,20	-1,80	-1,20	-0,90	-1,20	-0,65	-0,65

Figura 5.82 – Zonas dos coeficientes de pressão exterior da estrutura de cobertura - direção 0° Figura 5.83 – Zonas dos coeficientes de pressão exterior da estrutura de cobertura - direção 90°

(ii) Módulo 2 e 3

Nos módulos de membrana lateral, 2 e 3, os coeficientes de pressão baseiam-se na norma europeia, secção de paredes verticais de edifícios de planta retangular. As alturas de referência z_e para as paredes de barlavento em edifícios de planta retangular dependem da relação entre a altura do edifício, h , e a dimensão da direção transversal à direção do vento, b (ver a Figura 5.84). No presente caso, dado que $h < b$ em ambas as direções em análise, 0° e 90° , a forma do perfil da pressão dinâmica apresenta apenas uma parte ($z_e = h = 11m$), de acordo com a Figura 5.84.

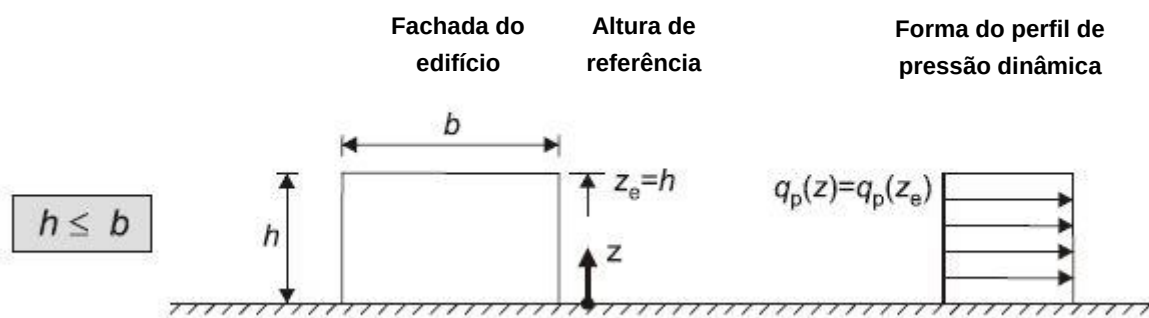


Figura 5.84 – Altura de referência z_e em função de h e b , e correspondente perfil de pressão dinâmica (EN1991-1-4 1991)

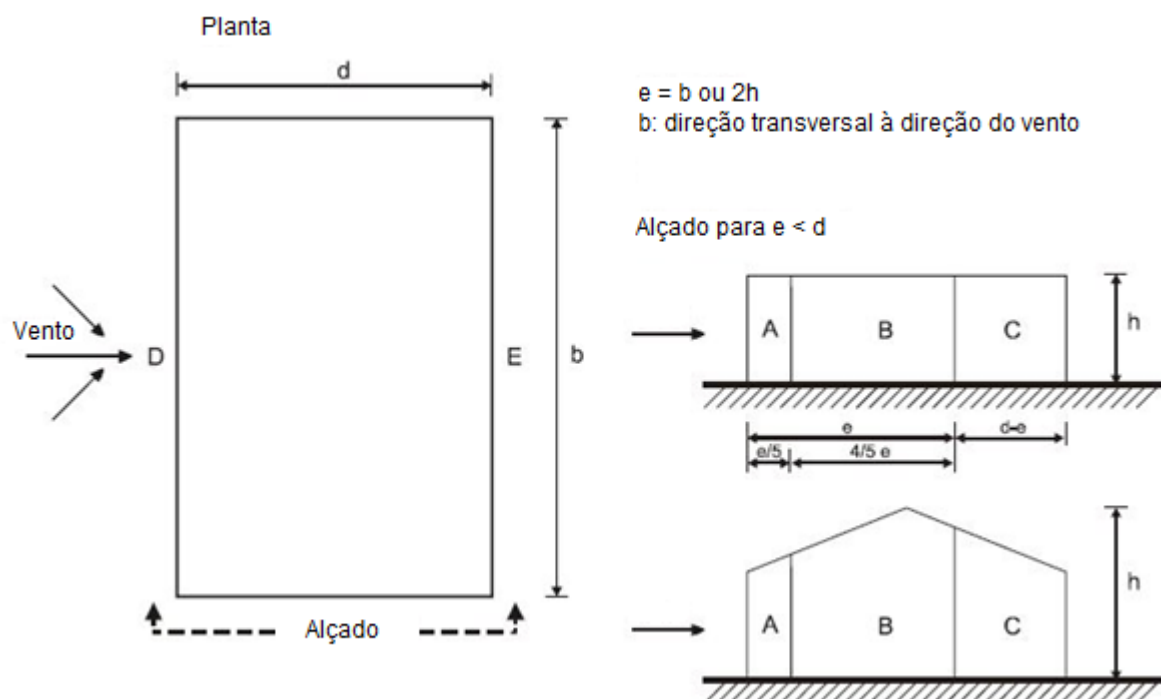


Figura 5.85 – Zonas dos coeficientes de pressão para paredes verticais (EN1991-1-4 1991)

As zonas dos coeficientes de pressão exterior, C_{pe} , para o módulo lateral de membrana são apresentadas na Figura 5.85, e os valores desses coeficientes são sistematizados na Tabela 5.42 para ambas as direções do vento 0° e 90° . São também apresentados os parâmetros geométricos da cobertura considerados para o cálculo, sendo de notar que o valor de h é a altura máxima da cobertura e os valores de b e d são valores médios dada a geometria variável dos painéis. É de salientar que todos os alçados apresentam C_{pe} de sucção à exceção do alçado a barlavento que apresenta valores de pressão, respetivamente para cada direção do vento.

Tabela 5.42 – Coeficientes de pressão exterior do módulo lateral para as direções 0° e 90°

Direção	Parâmetros geométricos (m)				C_{pe}				
	h	b	d	e	Zonas				
					A	B	C	D	E
0°	11	24	44	22	-1,2	-0,8	-0,5	+0,7*	-0,3*
90°	11	44	24	22	-1,2	-0,8	-0,5	+1,0*	-0,36*

* É aplicado um fator de redução de 0,85 na força exercida pelo vento, devido à falta de correlação das pressões exercidas pelo vento entre as faces de barlavento e de sotavento ($h/d < 1$)

Coeficientes de pressão interior – C_{pi}

As pressões exteriores e interiores devem atuar simultaneamente, devendo ser considerada a combinação mais desfavorável das pressões exteriores e interiores. O coeficiente de pressão interior depende da dimensão e da distribuição das aberturas na envolvente do edifício. Os coeficientes de pressão interior, C_{pi} , baseiam-se na norma europeia (EN1991-1-4 1991), segundo a qual se deve considerar o caso mais gravoso de aplicação de um coeficiente de pressão interior entre -0,3 e +0,2 ($-0,3 < C_{pi} < +0,2$).

Coeficientes de pressão resultante – $C_{p, net}$

Os coeficientes de pressão resultante na membrana são determinados com base nos coeficientes de pressão exterior e nos coeficientes de pressão interior, devendo, como mencionado anteriormente, ser considerada a combinação mais desfavorável. Por este motivo foram considerados dois casos para cada direção do vento, 0° e 90° :

- Caso 1 - Ação de sucção exterior e pressão interior;
- Caso 2 - Ação de pressão exterior e sucção interior.

No caso da direção do vento a 0° , e considerando o caso 1, os coeficientes de pressão resultante, $C_{p, net}$, no módulo 1 são obtidos combinando os C_{pe} negativos (ver a Tabela 5.41) e o C_{pi} positivo (+0,2), de acordo com a Figura 5.86. O valor de sucção máximo é de -2 na parte central da cobertura na vertente de sotavento - zona F, de acordo com a Figura 5.82, sendo de destacar também valores elevados nos cantos da cobertura junto ao alçado de barlavento nos 1° e 2° quadrantes – zona A.

No módulo lateral, os valores dos C_{pe} utilizados para determinar os valores dos $C_{p, net}$ serão iguais para o caso 1 e caso 2, com base nos valores sistematizados na Tabela 5.42, respetivamente para cada direção do vento, 0° e 90° . No caso 1, de acordo com a Figura 5.87, o valor de pressão máximo do $C_{p, net}$ é de +0,5 no alçado a barlavento, e o valor de sucção máximo é de -1,4 na zona A (ver a Figura 5.85), localizada no início dos alçados laterais junto ao alçado a barlavento.

Por sua vez, considerando o caso 2, os coeficientes de pressão resultante, $C_{p, net}$, no módulo 1 são obtidos combinando os C_{pe} positivos (ver a Tabela 5.41) e o C_{pi} negativo (-0,3). De acordo com a Figura 5.88, o valor de pressão máxima é de +0,6 nos 1º e 2º quadrantes na vertente de barlavento – zonas C, D e E (ver a Figura 5.82).

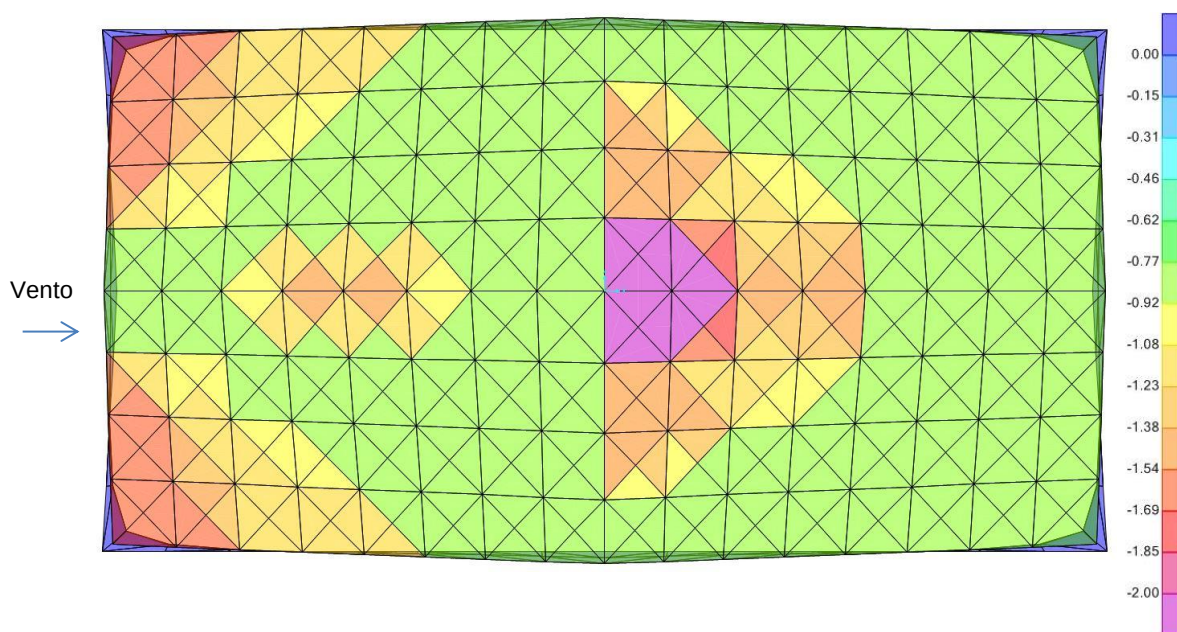


Figura 5.86 – Coeficientes de pressão resultante, $C_{p, net}$, da estrutura de cobertura, com destaque do módulo 1 (caso 1: sucção exterior e pressão interior) – direção 0º

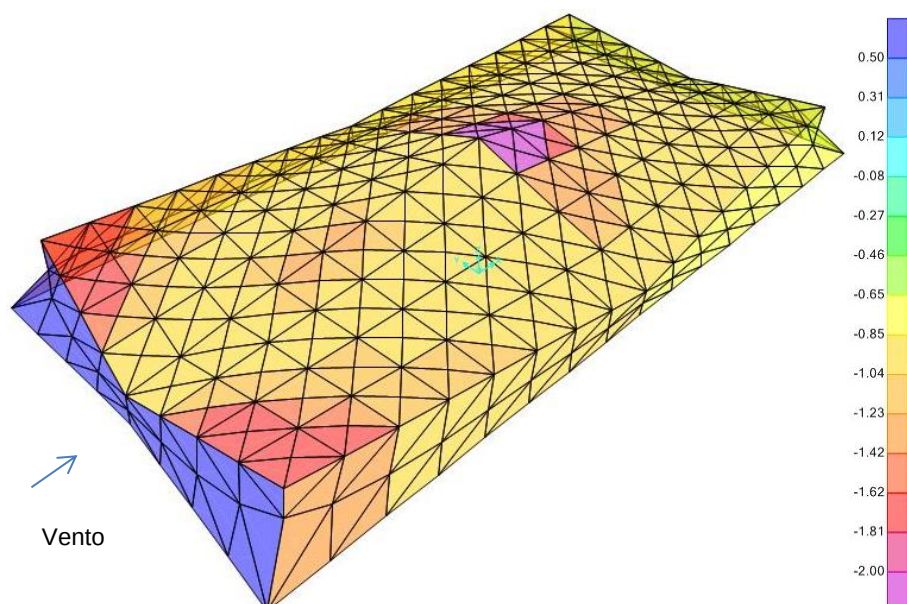


Figura 5.87 – Coeficientes de pressão resultante, $C_{p, net}$, da estrutura de cobertura, módulo 1 e módulo lateral (caso 1 sucção exterior e pressão interior) – direção 0º

No módulo lateral, de acordo com a Figura 5.89, o valor de pressão máxima do $C_{p, net}$ é de $+1$ no alçado a barlavento, e o valor de sucção máxima é de $-0,9$ na zona A, localizada no início dos alçados laterais junto ao alçado a barlavento, como sucedia no caso 1. De notar que no alçado de sotavento, os coeficientes de pressão exterior e interior anulam-se.

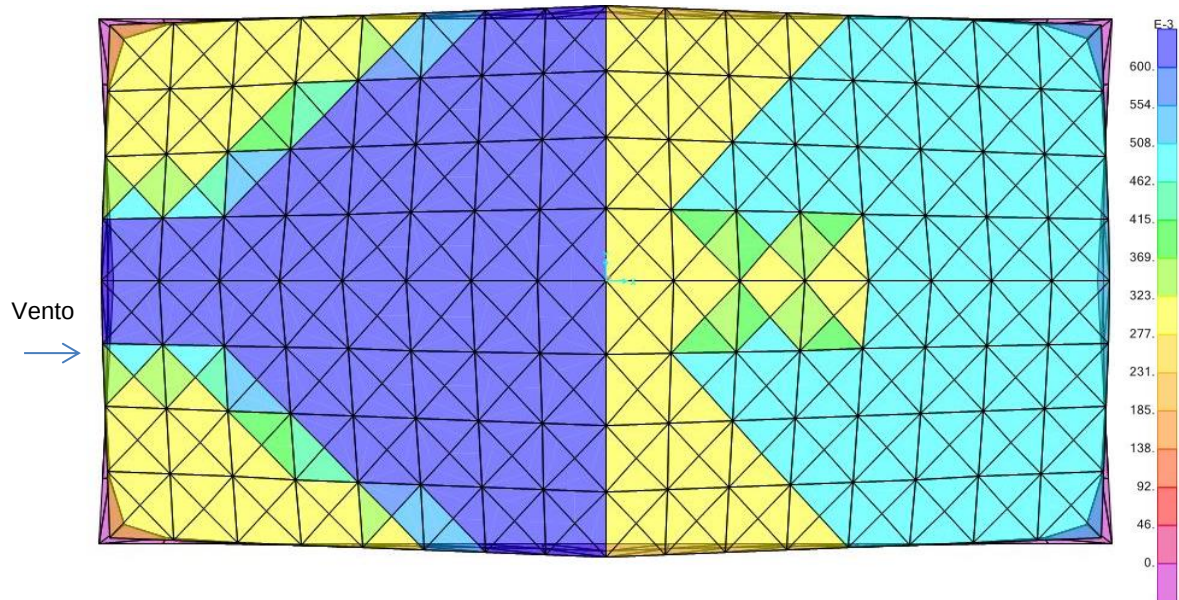


Figura 5.88 – Coeficientes de pressão resultante, $C_{p, net}$, da estrutura de cobertura, com destaque do módulo 1 (caso 2: pressão exterior e sucção interior) – direção 0°

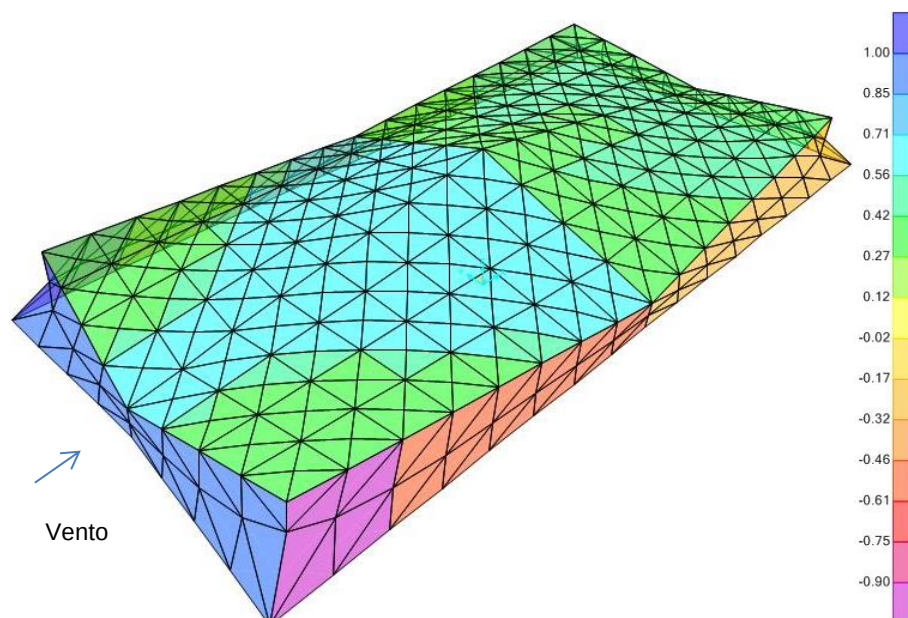


Figura 5.89 – Coeficientes de pressão resultante, $C_{p, net}$, da estrutura de cobertura, módulo 1 e módulo lateral (caso 2: pressão exterior e sucção interior) – direção 0°

No caso da direção do vento a 90° , e considerando o caso 1, os $C_{p, net}$ do módulo 1 são apresentados na Figura 5.90. O valor de sucção máximo é de -2 nos cantos junto ao alçado a barlavento - zona F (ver a Figura 5.83), sendo de destacar também valores elevados no início da vertente de sotavento nos 2º e 3º quadrantes – zona A. Por sua vez, no módulo lateral, de acordo com a Figura 5.91, o valor de pressão máximo do $C_{p, net}$ é de +0,8 no alçado a barlavento, e o valor de sucção máximo é de -1,4 na zona A, localizada no início dos alçados laterais junto ao alçado a barlavento.

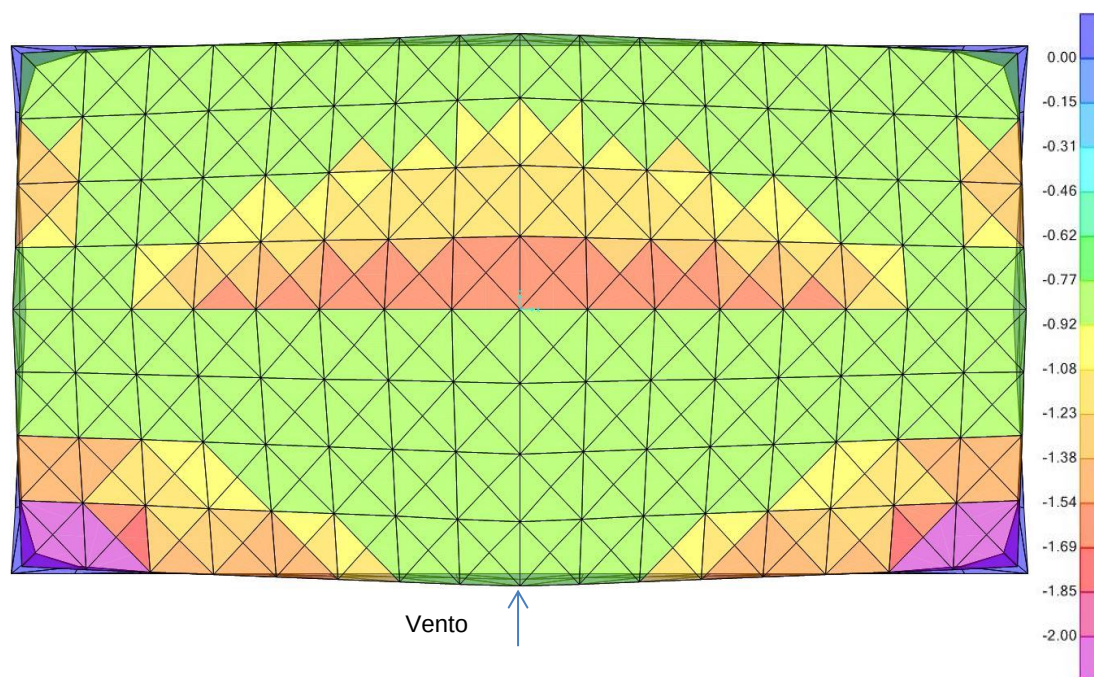


Figura 5.90 – Coeficientes de pressão resultante, $C_{p, net}$, da estrutura de cobertura, com destaque do módulo 1 (caso 1: sucção exterior e pressão interior) – direção 90°

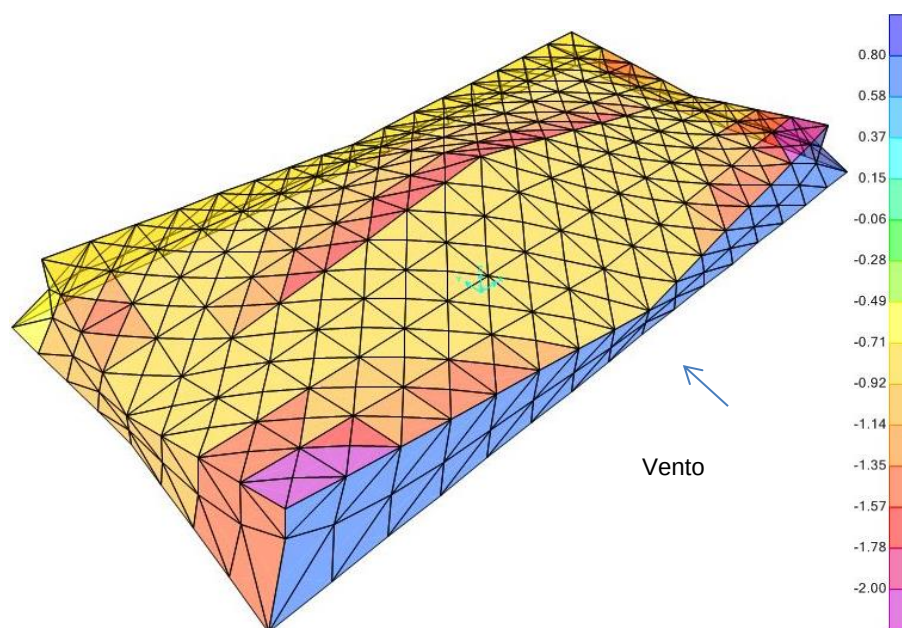


Figura 5.91 – Coeficientes de pressão resultante, $C_{p, net}$, da estrutura de cobertura, módulo 1 e módulo lateral (caso 1: sucção exterior e pressão interior) – direção 90°

Por sua vez, considerando o caso 2, de acordo com a Figura 5.92, o valor de pressão máxima do $C_{p, net}$ no módulo 1 é de $+0,6$ nos 2º e 3º quadrantes na vertente de sotavento – zonas C, D e E.

No módulo lateral, de acordo com a Figura 5.93, o valor de pressão máxima do $C_{p, net}$ é de $+1,3$ no alçado a barlavento, e o valor de sucção máxima é de $-0,9$ na zona A, localizada no início dos alçados laterais junto ao alçado a barlavento, como sucedia no caso 1.

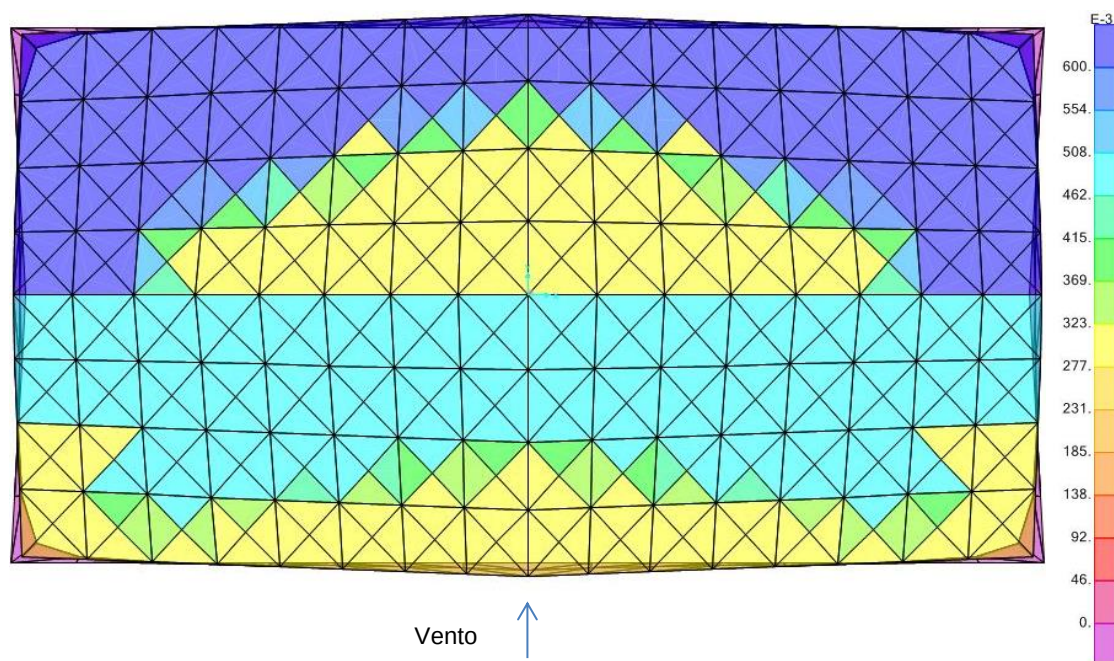


Figura 5.92 – Coeficientes de pressão resultante, $C_{p, net}$, da estrutura de cobertura, com destaque do módulo 1 (caso 2: pressão exterior e sucção interior) – direção 90°

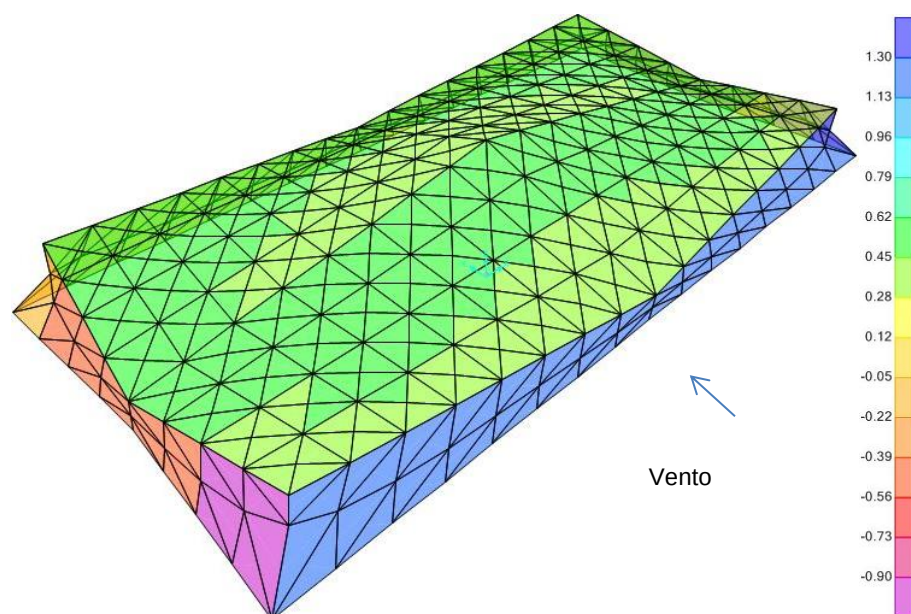


Figura 5.93 – Coeficientes de pressão resultante, $C_{p, net}$, da estrutura de cobertura, módulo 1 e módulo lateral (caso 2: pressão exterior e sucção interior) – direção 90°

Coeficientes de atrito – cfr

De acordo com a norma europeia, os efeitos do atrito do vento sobre a superfície podem ser ignorados quando a área total de todas as superfícies paralelas em relação ao vento é igual ou inferior a 4 vezes a área total de todas as superfícies exteriores perpendiculares ao vento ($A_{par,w} \leq 4 A_{perp}$), nos lados de barlavento e de sotavento.

Na direção 0° os efeitos do atrito não podem ser ignorados atendendo a que: $A_{par,w} = 154m^2 > 4 \times 291,2m^2 = 1165m^2$. O coeficiente de atrito a considerar será de $0,04$, assumindo uma superfície rugosa. As forças de atrito localizam-se numa área de referência, A_{fr} , na parte das superfícies exteriores paralelas ao vento localizada para além de uma distância, d , dos bordos de barlavento: $d = \min(2b; 4h)$. Sendo o valor $d = \min(48; 44) = 44m$ e considerando o comprimento máximo da estrutura $L = 46m$, conduz à inclusão do efeito do atrito apenas na última fiada de elementos de membrana num comprimento de $2m$, como mostra a Figura 5.94.

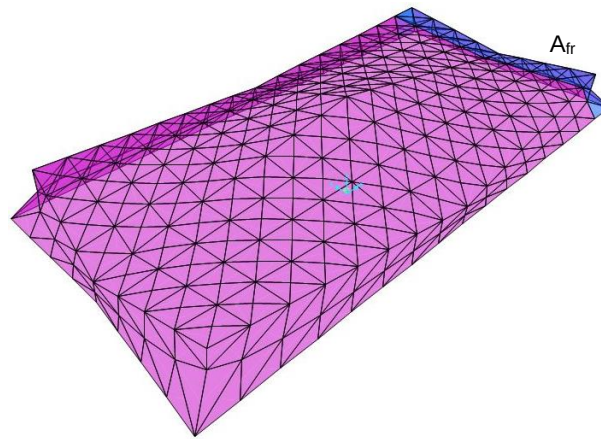


Figura 5.94 – Área de referência para as forças de atrito para a direção 0°

5.6.2.3. Estrutura Metálica

Na estrutura metálica, os coeficientes de força, c_f , são determinados com base na norma europeia de ação do vento sobre estruturas, secção de estruturas treliçadas (EN1991-1-4 1991).

Coeficientes de força – c_f

O coeficiente de força para estruturas treliçadas de cordas paralelas é obtido através da expressão

$$c_f = c_{f,0} \psi_\lambda \quad (5.9)$$

em que $c_{f,0}$ é o coeficiente de força para estruturas treliçadas sem efeitos de extremidade, em função do índice de cheios, φ , e do número de Reynolds, Re , ψ_λ é o coeficiente de efeitos de extremidade, o qual é função da esbelteza da estrutura λ .

O índice de cheios, φ , é definido pela relação A/A_c em que A é a soma das áreas de projeção no plano da face de todos os elementos e chapas de *gousset* e A_c é a área limitada pelo contorno da face em projeção normal à mesma.

O número de Re é obtido através de

$$Re = \frac{b_i v(z_e)}{\nu} \quad (5.10)$$

em que b_i é o diâmetro médio dos elementos, $v(z_e)$ é a velocidade de pico do vento definida à altura z_e , e ν é a viscosidade cinemática do ar. A velocidade de pico do vento, $v(z_e)$, é obtida por intermédio de

$$v(z_e) = \sqrt{\frac{2q_p}{\rho}} \quad (5.11)$$

em que q_p é a pressão dinâmica de pico e ρ é a massa volúmica do ar.

A Tabela 5.43 apresenta os parâmetros referidos anteriormente para o cálculo dos coeficientes de força c_f dos elementos que compõem a estrutura tubular, vigas e pilares, respetivamente para a direção do vento a 0° (ver a Figura 5.95) e a 90° (ver a Figura 5.96). É de salientar que nos elementos com índice de cheios de 100%, isto é, para cada direção do vento, esses elementos são o pilar central e a viga alinhada longitudinalmente com a direção do vento, os coeficientes de força baseiam-se nos coeficientes de pressão obtidos no módulo lateral (ver a Tabela 5.42), respetivamente para o pilar/viga localizados a barlavento (*b) e a sotavento (*s).

Tabela 5.43 – Parâmetros para o cálculo dos coeficientes de força c_f da estrutura tubular

Parâmetro			Direção 0°				Direção 90°			
			Viga 1	Viga 2	Pilar 1	Pilar 2	Viga 2	Viga 1	Pilar 2	Pilar 1
Diâmetro médio	b_i	(m)	0,226	-	0,280	-	0,220	-	0,300	-
Velocidade de pico à altura z_e	$v(z_e)$	(m/s)	25,90	-	25,90	-	25,90	-	25,90	-
Viscosidade cinemática	ν	$\times 10^{-6}$ (m ² /s)	15,00	-	15,00	-	15,00	-	15,00	-
Número de Reynolds	Re	$\times 10^{-6}$	0,39	-	0,48	-	0,38	-	0,52	-
Soma das áreas de projeção	A	(m ²)	12,60	-	4,81	-	24,00	-	5,27	-
Área limitada pelo contorno	A_c	(m ²)	24,00	4,80	5,63	11,25	41,30	4,80	6,10	11,25
Índice de cheios	φ		0,52	-	0,85	-	0,58	-	0,86	-
Esbelteza	λ		7,30	-	∞	-	13,20	-	∞	-
Coefficiente de efeitos de extremidade	ψ_λ		0,90	-	1,00	-	0,92	-	1,00	-
Coefficiente de efeitos de extremidade	$c_{f,0}$		0,90	-	0,90	-	0,90	-	0,90	-
Coefficiente de força	$^{*}c_f$		0,81	$^{*b}0,70$ $^{*s}0,30$	0,90	$^{*b}0,70$ $^{*s}0,30$	0,83	$^{*b}1,00$ $^{*s}0,36$	0,90	$^{*b}1,00$ $^{*s}0,36$

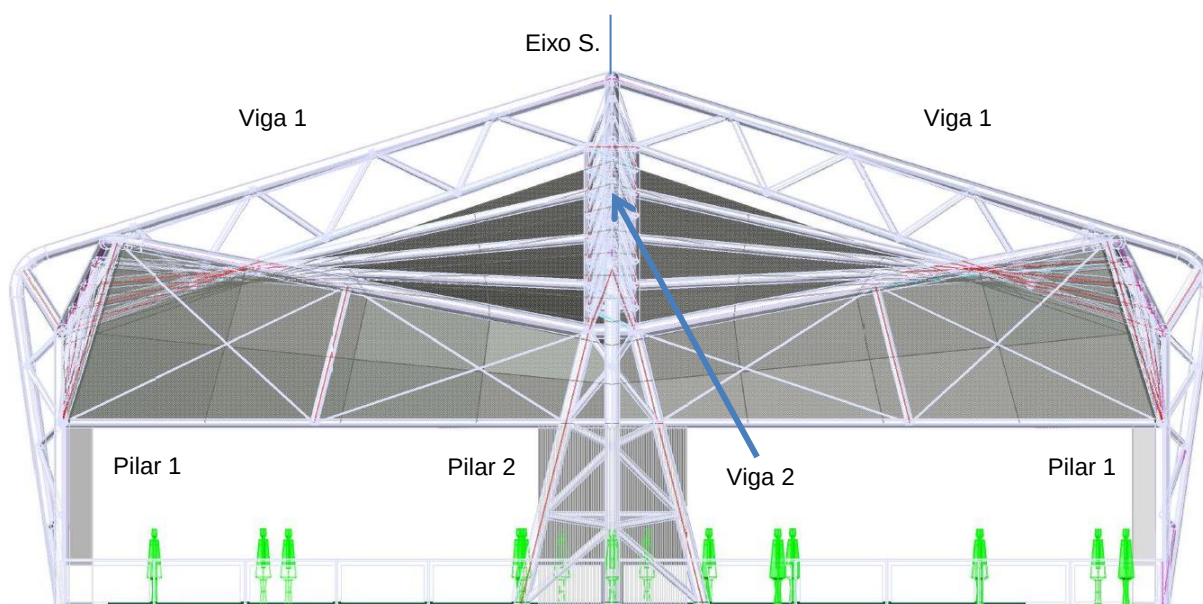


Figura 5.95 – Alçado de barlavento – Direção 0°, adaptado de Escrig e Sánchez (2009)

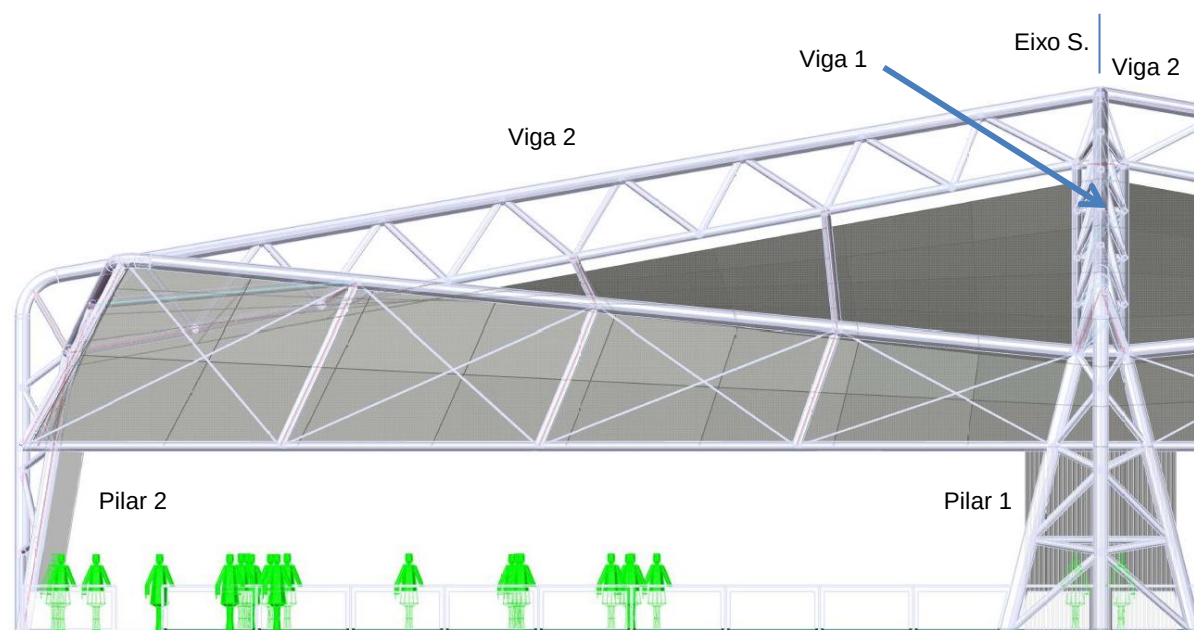


Figura 5.96 – Alçado de barlavento – Direção 90°, adaptado de Escrig e Sánchez (2009)

5.6.3. VELOCIDADE DO VENTO

A velocidade média do vento a uma altura z acima do terreno $\bar{U}(z)$ é obtida através de

$$\bar{U}(z) = c_r(z)c_0(z)v_b \quad (5.12)$$

em que $c_r(z)$ é o coeficiente de rugosidade, $c_0(z)$ é o coeficiente de orografia ($c_0(z)=1$) e v_b é o valor de referência da velocidade do vento.

O coeficiente de rugosidade $c_r(z)$ tem em conta a variabilidade da velocidade média do vento no local da construção e é determinada por intermédio de

$$\begin{aligned} c_r(z) &= k_r \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) & \text{para } z_{\min} \leq z \leq z_{\max} \\ c_r(z) &= c_r(z_{\min}) & \text{para } z \leq z_{\min} \end{aligned} \quad (5.13)$$

em que z_0 é o comprimento de rugosidade e k_r é o coeficiente de terreno dependente do comprimento de rugosidade z_0 , o qual é determinado por intermédio de

$$k_r(z) = 0,19 \left(\frac{z_0}{z_{0,II}} \right)^{0,07} \quad (5.14)$$

em que $z_{0,II}$ é o comprimento de rugosidade para a categoria de terreno do tipo II, $z_{\min}$ é a altura mínima e $z_{\max}$ a altura máxima. z_0 e $z_{\min}$ dependem da categoria de terreno.

O valor de referência da velocidade do vento v_b é determinado através de

$$v_b = c_{dir}c_{saz}v_{b,0} \quad (5.15)$$

em que c_{dir} é o coeficiente de direção, c_{saz} é o coeficiente de sazão e $v_{b,0}$ é o valor básico da velocidade de referência do vento.

A Tabela 5.44 apresenta os parâmetros descritos anteriormente para o cálculo da velocidade média do vento para a direção do vento 0° e 90° . O perfil da velocidade do vento é apresentado na Figura 5.97.

Tabela 5.44 – Parâmetros para o cálculo da velocidade média

$c_r(z)$		
Tipo de terreno		II
k_r		0,19
z_0		(m) 0,05
$z_{0,II}$		(m) 0,05
$z_{\min}$		(m) 3
$z_{\max}$		(m) 200
$c_0(z)$		1
v_b		(m/s) 27
c_{dir}		1
c_{saz}		1
$v_{b,0}$		(m/s) 27
Zona		A

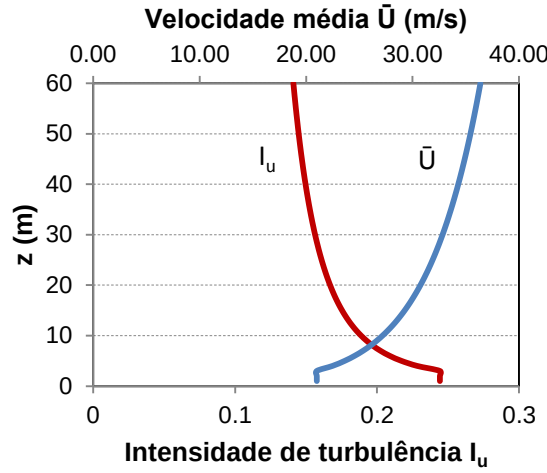


Figura 5.97 – Variação da velocidade média e da intensidade de turbulência em altura

5.6.4. PRESSÃO E FORÇA ESTATICA DO VENTO

A pressão dinâmica de pico à altura z , $q_p(z)$, resulta da velocidade média e das flutuações de curta duração da velocidade do vento, sendo determinada através de

$$q_p(z) = [1 + 7I_u(z)] \frac{1}{2} \rho \bar{U}^2(z) = c_e(z) q_b \quad (5.16)$$

em que $I_u(z)$ é a intensidade de turbulência à altura z , $c_e(z)$ é o coeficiente de exposição e q_b é a pressão dinâmica de referência, a qual é determinada através de

$$q_b(z) = \frac{1}{2} \rho v_b^2(z) \quad (5.17)$$

A intensidade de turbulência I_u associada à componente longitudinal u da velocidade do vento, num determinado ponto à cota z , é definida por intermédio de

$$I_u(z) = \frac{\sigma_u(z)}{\bar{U}(z)} \quad (5.18)$$

em que σ_u representa o desvio-padrão da flutuação da velocidade segundo a componente longitudinal, sendo, praticamente, constante nas camadas inferiores da atmosfera, em situações próximas do equilíbrio indiferente, sendo determinado através de

$$\sigma_u = k_r v_b k_I \quad (5.19)$$

em que k_I é o coeficiente de turbulência ($k_I = 1$).

A variação da intensidade de turbulência em altura decresce com o aumento da velocidade média, sendo determinada através de

$$I_u(z) = \frac{k_r v_b}{\bar{U}(z)} = \frac{1}{\ln\left(\frac{z}{z_0}\right)} \quad \text{para } z \geq z_{min} \quad (5.20)$$

$$I_u(z) = I_u(z_{min}) \quad \text{para } z < z_{min}$$

No presente trabalho, aplicando o método de análise quase-estática proposto pelo *Eurocódigo 1*, a pressão dinâmica de pico é determinada à altura de 11 metros, $q_p(11) = 1,1 \text{ kN/m}^2$. A Figura 5.97

apresenta o perfil da intensidade de turbulência. A pressão exercida pelo vento sobre a superfície da estrutura é dada por

$$w(z) = q_p(z)C_p = 1,1C_p [kN/m^2] \quad (5.21)$$

em que C_p é o coeficiente de pressão.

Com vista à determinação da força exercida pelo vento, é necessário determinar o coeficiente estrutural $c_s c_d$ que deverá ter em conta o efeito na ação do vento da não simultaneidade na ocorrência das pressões de pico sobre a superfície (c_s) em conjunto com o efeito das vibrações da estrutura devidas à turbulência (c_d). O coeficiente estrutural poderá ser decomposto num coeficiente de dimensão, c_s , e num coeficiente dinâmico, c_d . O coeficiente de dimensão c_s é determinado através de

$$c_s = \frac{1 + 7I_u(z)\sqrt{B^2}}{1 + 7I_u(z)} \quad (5.22)$$

em que B^2 é o coeficiente de resposta quase-estática, tendo em conta a total falta de correlação das pressões sobre a superfície de construção, o qual é determinado através de

$$B^2 = \frac{1}{1 + 0,9 \left(\frac{b+h}{L(z_s)} \right)^{0,63}} \quad (5.23)$$

em que b e h são a largura e a altura da construção, e $L(z_s)$ é a escala de turbulência à altura de referência z_s . O coeficiente de resposta quase-estática será conservativamente considerado igual a 1 ($B^2=1$). A escala de turbulência $L(z)$ é determinada através de

$$\begin{aligned} L(z) &= L_t \left(\frac{z}{z_t} \right)^{\alpha_L} & \text{para } z \geq z_{min} \\ L(z) &= L(z_{min}) & \text{para } z < z_{min} \end{aligned} \quad (5.24)$$

em que o expoente α_L é dado por intermédio de

$$\alpha_L = 0,67 + 0,05 \ln(z_0) \quad (5.25)$$

A escala de turbulência a considerar no cálculo da força estática do vento é igual a $L(z_s) = L(11) = 66,35m$.

De seguida, considerando que o modo de vibração principal da membrana é o primeiro modo, e tendo presente os estudos de análise modal levados a cabo ao longo do presente trabalho, quer na secção de análise da membrana com bordos rígidos, quer na secção dos efeitos do vento, considera-se uma frequência ponderada de $n = 3,88Hz$. Esta frequência natural conduz a uma frequência adimensional de

$$f_L(z, n) = \frac{nL(z)}{\bar{U}(z)} = \frac{3,88 * 66,35}{27,67} = 9,30 \quad (5.26)$$

e a um valor da função de densidade espectral de potência adimensional dado por

$$S_L(z, n) = \frac{nS_u(z, n)}{\sigma_u^2} = \frac{6,8f_L(z, n)}{(1 + 10,2f_L(z, n))^{5/3}} = \frac{6,8 * 9,3}{(1 + 10,2 * 9,3)^{5/3}} = 0,0315 \quad (5.27)$$

Com vista ao cálculo do coeficiente dinâmico c_d , para cada uma das direções do vento 0° e 90° , as funções de admitância aerodinâmica para uma configuração de modo fundamental podem ser traduzidas por

$$R_h = \frac{1}{\eta_h} - \frac{1}{2\eta_h^2}(1 - e^{-2\eta_h}); \quad R_h = 1 \quad \text{para} \quad \eta_h = 0 \quad (5.28)$$

$$R_b = \frac{1}{\eta_b} - \frac{1}{2\eta_b^2}(1 - e^{-2\eta_b}); \quad R_b = 1 \quad \text{para} \quad \eta_b = 0 \quad (5.29)$$

em que

$$\eta_h = \frac{4,6h}{L(z)} f_L(z, n) \quad (5.30)$$

$$\eta_b = \frac{4,6b}{L(z)} f_L(z, n) \quad (5.31)$$

Estas funções permitem determinar o coeficiente de resposta em ressonância R^2 , que tem em conta o efeito da turbulência em ressonância com o modo de vibração considerado da estrutura, sendo traduzido por

$$R^2 = \frac{\pi^2}{2\delta} S_L(z_s, n) R_h(\eta_h) R_b(\eta_b) \quad (5.32)$$

em que δ é o decremento logarítmico total de amortecimento. O coeficiente de resposta em ressonância permite determinar a frequência de passagens ascendentes ν , traduzida por

$$\nu = n \sqrt{\frac{R^2}{B^2 + R^2}}; \quad \nu \geq 0,08 \text{ Hz} \quad (5.33)$$

O fator de pico pode então ser determinado, sendo calculado através de

$$k_p = \max(\sqrt{2 \ln(\nu T)}; 3) \quad (5.34)$$

em que T é a duração de integração da velocidade média do vento, $T = 600 \text{ s}$.

Finalmente, o coeficiente dinâmico, c_d , vem traduzido por

$$c_d = \frac{1 + 2k_p I_u(z) \sqrt{B^2 + R^2}}{1 + 7I_u(z) \sqrt{B^2}} \quad (5.35)$$

A Tabela 5.45 apresenta os parâmetros descritos anteriormente para o cálculo do coeficiente estrutural $c_s c_d$ respetivamente para as direções do vento a 0° e 90° .

Por fim, a força quase-estática exercida pelo vento é dada por

$$F_w = c_s c_d w(z) A_{ref} \quad (5.36)$$

sendo na direção do vento a 0° traduzida por

$$F_w^{direc 0^\circ} = 1,06 * 1,1 C_p A_{ref} = 1,16 C_p A_{ref} \text{ [kN]} \quad (5.37)$$

e na direção do vento a 90° traduzida por

$$F_w^{direc 90^\circ} = 1,04 * 1,1 C_p A_{ref} = 1,14 C_p A_{ref} \text{ [kN]} \quad (5.38)$$

Tabela 5.45 – Parâmetros para o cálculo do coeficiente estrutural $c_s c_d$

		Direção 0°	Direção 90°
c_s		1	1
B^2		1	1
L (z)	(m)	66,35	66,35
n	(Hz)	3,88	3,88
$f_L(z,n)$		9,30	9,30
$S_L(z,n)$		0,031	0,031
R_h		0,13	0,13
R_b		0,06	0,03
η_h		7,10	7,10
η_b		15,48	28,38
h	(m)	11	11
b	(m)	24	44
R^2		0,064	0,035
δ		0,02	0,02
ν	(Hz)	0,95	0,72
k_p		3,73	3,65
c_d		1,06	1,04
$c_s c_d$		1,06	1,04

5.6.5. PRESSÃO E FORÇA DINÂMICA DO VENTO

As forças aerodinâmicas atuam perpendicularmente à superfície da estrutura, sendo traduzidas por

$$F_p(t) = \frac{1}{2} \rho_{ar} \cdot C_p \cdot A_p \cdot U^2(t) \quad (5.39)$$

A velocidade $U(t)$ é definida simplificadamente por

$$U^2(t) = [\bar{U} + u(t) + v(t) + w(t)]^2 \approx \bar{U}^2 + 2 \cdot u(t) \cdot \bar{U} \quad (5.40)$$

tal que $\bar{U}$ é a componente média da velocidade do vento e $u(t)$, $v(t)$ e $w(t)$ são as componentes flutuantes da velocidade do vento. De acordo com Simiu e Scanlan (1996), o valor da componente média $\bar{U}$ é significativamente superior ao valor absoluto de qualquer uma das componentes turbulentas, e ao valor da velocidade de resposta da estrutura, $\dot{q}(t)$. Deste modo, a substituição da equação (5.40) em (5.39) resulta em

$$F_p(t) = \frac{1}{2} \rho_{ar} \cdot C_p \cdot A_p \cdot \bar{U}^2(z) + \rho_{ar} \cdot C_p \cdot A_p \cdot \bar{U}(z) \cdot u(t) \quad (5.41)$$

$$F_p(t) = 0,625 \cdot C_p \cdot A_p \cdot \bar{U}^2(z) + 1,25 \cdot C_p \cdot A_p \cdot \bar{U}(z) \cdot u(t) \quad (5.42)$$

Em que a primeira parcela do segundo membro se refere à ação da componente média da velocidade do vento e a segunda parcela à componente dinâmica. As forças aerodinâmicas calculadas para cada um dos elementos estruturais dependem da altura, z , do ponto de aplicação da respetiva força aerodinâmica e do tempo, t , através da geração de amostras de séries temporais da componente longitudinal da velocidade do vento, $u(t)$, de acordo com a seção 5.6.6.

Na membrana, as forças aerodinâmicas de pressão são aplicadas através de uma pressão perpendicular às faces dos elementos de casca, sendo traduzidas por

$$w_p(t) = 0,625 \cdot C_p \cdot \bar{U}^2(z) + 1,25 \cdot C_p \cdot \bar{U}(z) \cdot u(t) \quad (5.43)$$

Complementarmente, no caso da direção do vento a 0° , onde se verificou anteriormente que os efeitos de atrito não são desprezáveis, as forças aerodinâmicas de atrito na membrana são aplicadas através de uma carga uniformemente distribuída segundo a direção da componente longitudinal da ação do vento traduzidas por

$$w_{fr}(t) = 0,625 \cdot c_{fr} \cdot \bar{U}^2(z) + 1,25 \cdot c_{fr} \cdot \bar{U}(z) \cdot u(t) \quad (5.44)$$

Na estrutura metálica, as forças aerodinâmicas são aplicadas através de forças concentradas em nós específicos dos principais elementos estruturais, vigas e pilares, como será mostrado na secção 5.6.6, sendo traduzidas por

$$F_w(t) = 0,625 \cdot c_f \cdot A_{ref} \cdot \bar{U}^2(z) + 1,25 \cdot c_f \cdot A_{ref} \cdot \bar{U}(z) \cdot u(t) \quad (5.45)$$

Finalmente, é de referir ainda que as séries temporais de forças aerodinâmicas são afetadas por uma função de modulação temporal, como mostra a Figura 5.98, atenuando as fases de arranque e de cessação da excitação dinâmica do vento, garantindo assim a ocorrência de uma fase de atuação da ação de natureza estacionária, com 10 minutos de duração.

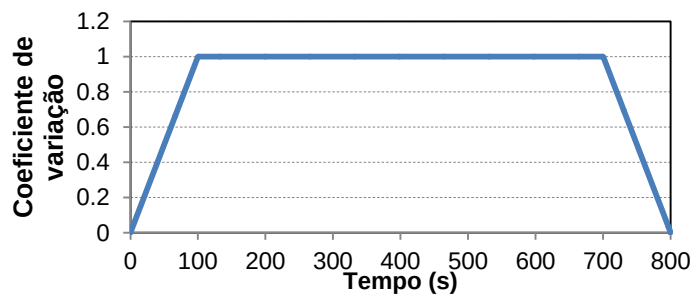


Figura 5.98 – Função de modulação temporal das forças aerodinâmicas

5.6.6. VARIAÇÃO DA VELOCIDADE DO VENTO COM O TEMPO

A geração de amostras de processos estocásticos gaussianos, através da sobreposição de harmónicos, é um procedimento no domínio do tempo, e apresenta uma vasta aplicação no domínio da análise dinâmica de estruturas sujeitas a excitações aleatórias, por exemplo na determinação dos efeitos da ação sísmica numa estrutura. Este método é também designado por *WAWS (Weighted Amplitude Wave Superposition)* e consiste na sobreposição de harmónicos com amplitudes do espetro de potência do processo, tendo sido utilizado por diversos autores.

O algoritmo utilizado no presente trabalho de geração de séries temporais artificiais da componente longitudinal da velocidade do vento foi implementado por Bastos (2009) e baseia-se na formulação de Deodatis (1996). Este algoritmo gera amostras de processos estocásticos estacionários unidimensionais e multivariados de acordo com uma matriz de funções de densidade espectral de potência previamente definida. Para o efeito, recorre-se à formulação de geração de processos estocásticos gaussianos unidimensionais (Shinozuka 1972; Shinozuka e Jan 1972) e à utilização de transformadas rápidas de Fourier (*FFT*) com vista ao melhoramento computacional.

Os parâmetros necessários à geração de amostras de séries temporais da velocidade turbulenta do vento de acordo com o algoritmo utilizado são: a geometria espacial dos pontos distribuídos pela estrutura em análise onde são pretendidas as séries; a primeira frequência natural da estrutura; e as propriedades do vento, tais como: a velocidade média, a escala de turbulência e o desvio-padrão, $\sigma_u = 5,13\text{m/s}$, respetivamente para cada ponto; e os coeficientes de atenuação nas direções das componentes turbulentas u , v e w , respetivamente $C_{ex} = 6$, $C_{ey} = 16$ e $C_{ez} = 10$.

A função densidade espectral de potência reduzida da componente longitudinal turbulenta da velocidade do vento preconizada na norma europeia (EN1991-1-4) baseia-se na expressão proposta por Kaimal *et al.* (1972). No entanto, dado que o algoritmo se baseia na expressão de von Kármán, foi efetuado um ajustamento da expressão de von Kármán à expressão de Kaimal, para cada ponto onde foram geradas séries temporais. Para o efeito, para cada ponto em análise, são adotados sucessivos valores de escalas integrais de turbulência, na expressão de von Kármán, até que o seu espectro se aproxime do outro espectro nas frequências de maior importância estrutural de aproximadamente 4-5Hz.

A Figura 5.99 mostra a distribuição espacial dos pontos onde foram geradas séries temporais. Na membrana são geradas séries em todos os elementos de casca: 224 pontos. Estes pontos estão localizados nos três módulos de membrana, 1, 2 e 3. Na estrutura metálica são geradas séries em todos os elementos estruturais principais, localizados nas 4 vigas dos pórticos e nos 4 pilares.

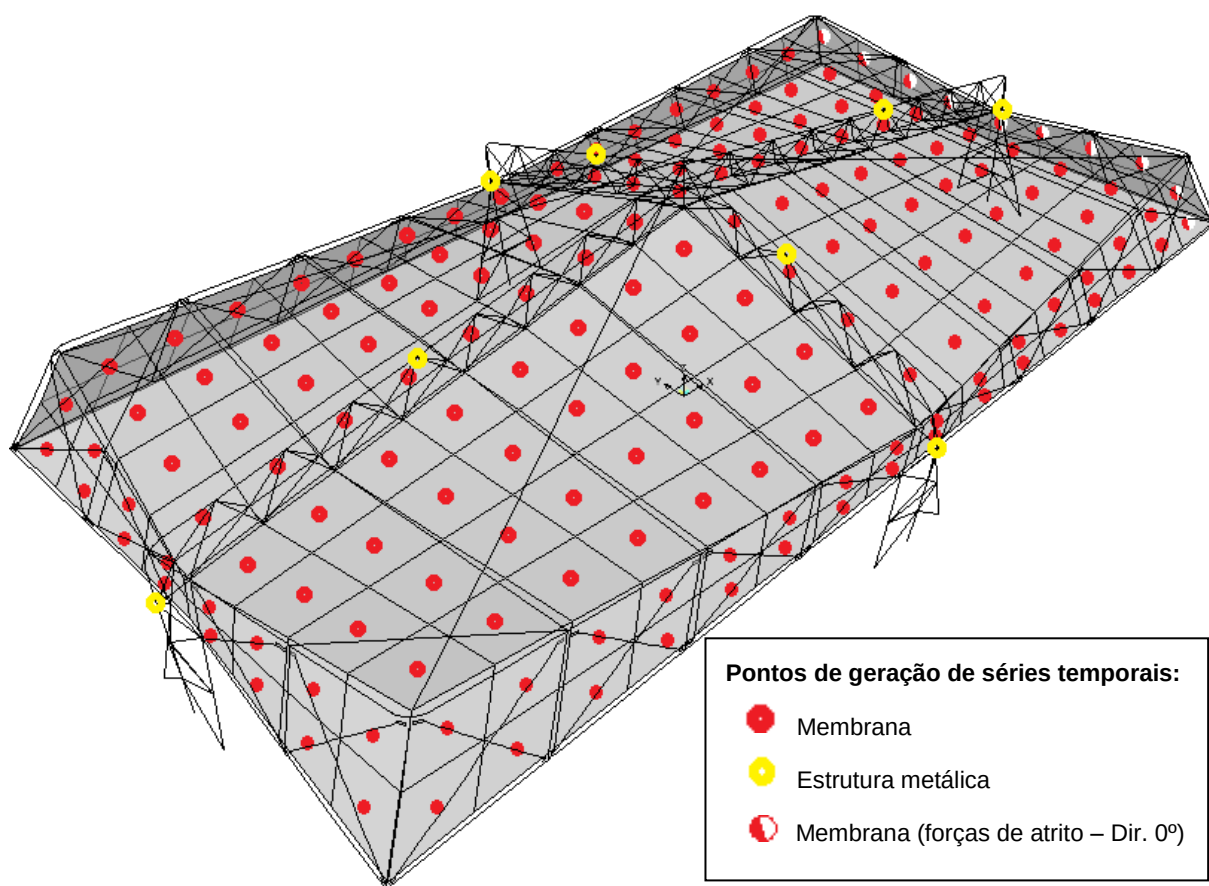


Figura 5.99 – Pontos de geração de séries temporais

Na direção do vento 0° foram geradas, complementarmente, 12 séries temporais para as forças aerodinâmicas de atrito, localizadas na última fiada de elementos de membrana localizada junto ao alçado de sotavento (ver a Figura 5.99).

Para além dos parâmetros descritos anteriormente necessários à geração das séries temporais, referem-se ainda parâmetros relacionados com as amostras, nomeadamente, o período máximo de tempo da amostra $T_0 = 800s$, a frequência de amostragem do sinal $F_s = 20Hz$, que é igual a duas vezes a frequência de corte $w_{cut} = 10Hz$ (ou de Nyquist), e o número de pontos N do conteúdo da frequência, $N = 16384$ (potência inteira de base 2, devido à presença das transformadas de Fourier).

A resolução em frequência Δw e o intervalo de tempo Δt são traduzidos por

$$\Delta w = \frac{w_{cut}}{N} \quad (5.46)$$

$$\Delta t = \frac{2\pi}{M \cdot \Delta w} < \frac{2\pi}{2 w_{cut}} \quad (5.47)$$

em que $M \geq 2N$. Deste modo, as séries geradas correspondem a um intervalo de tempo de 800s discretizado em 16384 intervalos de tempo elementares ($\Delta t = 0,0488s$). Desta forma, cada série resulta da sobreposição de $N/2 = 8192$ harmónicos, varrendo uma gama de frequências de 0 a 5Hz, com uma resolução em frequência de 0,00061Hz.

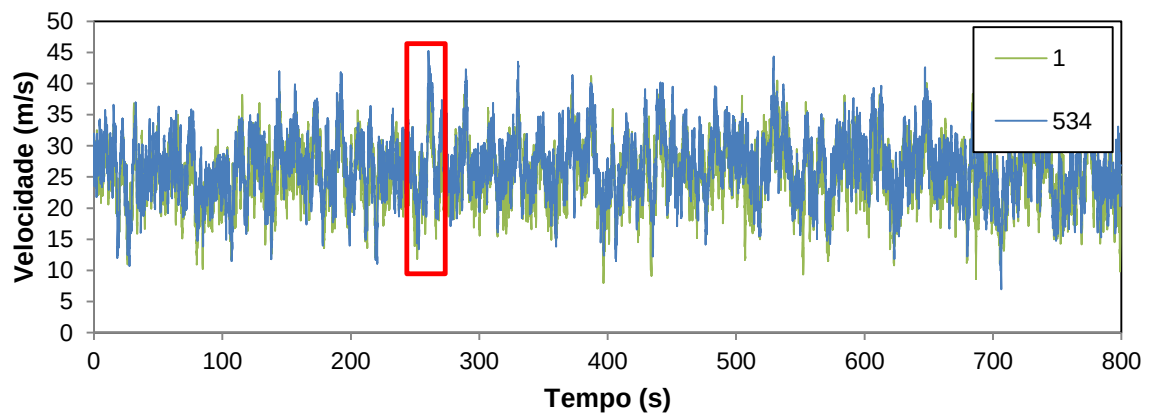
A Figura 5.100 apresenta duas séries temporais da velocidade do vento nos pontos às cotas 6,3m (1) e 9,9m (534), para as condições definidas anteriormente de acordo com a EN1991-1-4 (1991).

Na geração das séries foi considerada a hipótese de Taylor que considera que a turbulência se mantém constante num ponto que circula na direção longitudinal do vento. Esta hipótese é considerada apenas para intensidades de turbulência reduzidas. Assim, no presente caso, os pontos de geração de séries foram projetados num plano perpendicular à direção do vento, plano yz, em que x coincide com a direção do vento respetiva, y com o eixo transversal e z com o eixo vertical. De seguida, as séries temporais nos pontos localizados na estrutura são obtidos a partir das séries correspondentes no plano mencionado anteriormente, aplicando um desfazamento temporal traduzido por

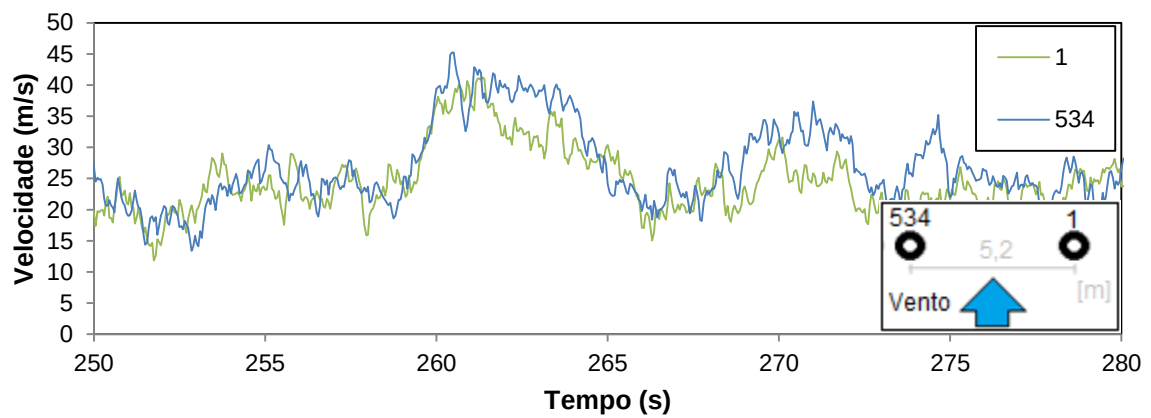
$$\Delta \tau = \frac{\Delta x}{\bar{U}(z)} \quad (5.48)$$

em que Δx é a distância entre o plano de geração das séries e o ponto da estrutura, e $\bar{U}(z)$ é a velocidade média à cota do ponto de geração da série. A Figura 5.101 apresenta três séries temporais da velocidade do vento em pontos aproximadamente colineares com a direção longitudinal do vento nos pontos às cotas 6,2, 6,5 e 7m.

De forma a aferir a qualidade deste método de geração de séries temporais de velocidade do vento, são comparados os espectros de potência de partida e as estimativas espectrais médias obtidas do autoespectro da componente longitudinal da velocidade do vento S_u do ponto 1, de acordo com a Figura 5.102. Neste exemplo, as estimativas baseiam-se em apenas um lote de séries temporais gerados, pelo que a concordância conseguida ao nível dos autoespectros é de razoável qualidade, aspeto que todavia pode ser melhorado recorrendo a um maior número de lotes.



(a)



(b)

Figura 5.100 – Séries temporais da velocidade do vento nos pontos às cotas 6,3m (1) e 9,9m (534): (a) Para um período de 800 segundos e (b) Para um período de 30 segundos

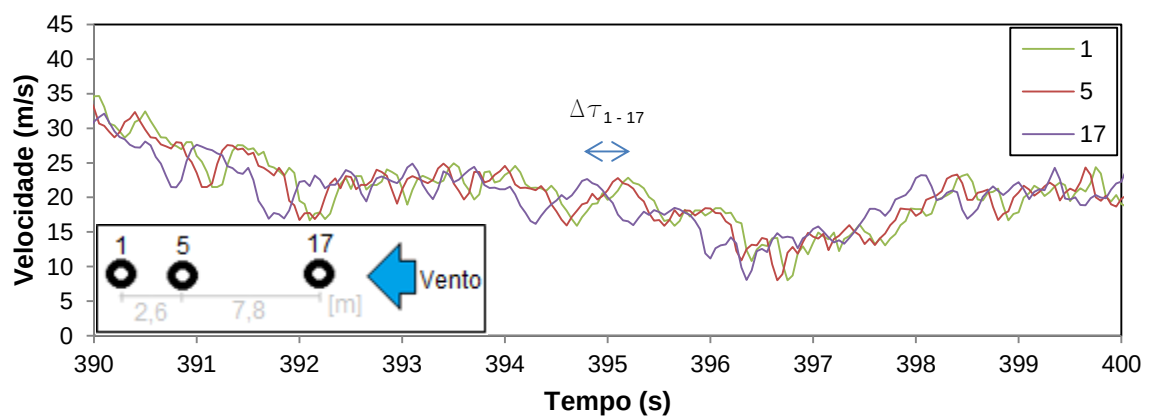


Figura 5.101 – Séries temporais da velocidade do vento em pontos aproximadamente colineares com a direção longitudinal do vento nos pontos às cotas 6,2m (1), 6,5m (5) e 7m (17)

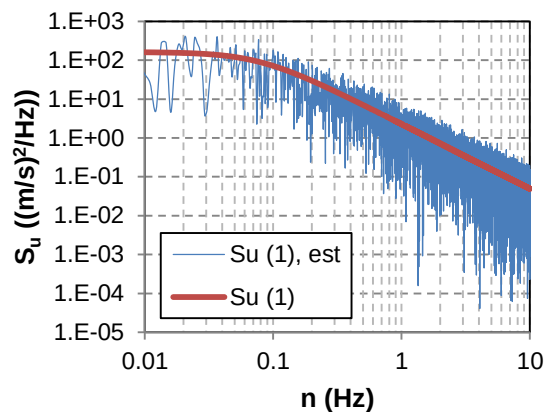


Figura 5.102 – Análise da qualidade do método de geração de séries de velocidade do vento por comparação entre a função densidade espectral de partida e a estimativa espectral média do ponto 1

5.7. EFEITOS DO VENTO NA ESTRUTURA DE COBERTURA

5.7.1. INTRODUÇÃO

A ação do vento é a principal fonte de excitação dinâmica de estruturas de membrana. A análise adequada da resposta destas estruturas sob a ação dinâmica do vento exige a realização de análises não-lineares dinâmicas que são dispendiosas computacionalmente. Por este motivo, investigadores e projetistas procuram um procedimento estático equivalente para a avaliação dessa resposta, evitando as análises não-lineares dinâmicas.

A elevada flexibilidade da estrutura de membrana em estudo motivou o desenvolvimento dos estudos levados a cabo nesta secção. A geometria aferida do módulo de membrana superior permite estimar um raio de curvatura de 46,94 e 47,84m, respetivamente na direção da teia e da trama. Assumindo um pré-esforço instalado na membrana hipoteticamente igual a 1, 2 ou 3kN/m, a rigidez da membrana disponível para reagir à ação do vento, aplicando a equação (4.10), é respetivamente igual a 0,042, 0,084 e 0,126kN/m². Dado que estes valores são inferiores a 0,15kN/m², a membrana tem um comportamento sensível à ação do vento (Forster e Mollaert, 2004).

Esta secção visa o estudo do comportamento não-linear dinâmico da estrutura de cobertura em membrana tensa descrita anteriormente sob a ação do vento. Para o efeito são realizadas análises no domínio do tempo considerando a não-linearidade geométrica do sistema com grandes deslocamentos. A resposta estrutural aos efeitos de rajada é determinada com base na aplicação das séries temporais das forças aerodinâmicas obtidas com base em registos artificiais da velocidade do vento, de acordo com a secção 5.6.5, para a direção do vento 0° caso 1 - ação de sucção exterior e pressão interior, e caso 2 - ação de pressão exterior e sucção interior. Nestas análises é considerado um modelo aeroelástico simplificado (Sun *et al.* 2008), em que o amortecimento estrutural e o amortecimento aerodinâmico são somados e introduzidos como um amortecimento viscoso, e considerando uma massa adicional da membrana devido à massa de ar em vibração com a membrana durante a interação fluido-estrutura. A resposta dinâmica máxima obtida, expressa em termos de deslocamentos em pontos localizados na membrana e na estrutura metálica, é comparada com a resposta da estrutura sob a ação quase-estática do vento (estimada na secção 5.6.4) através do coeficiente de amplificação dinâmico R_{din} . São também determinados espectros de potência nesses pontos com base nas amplitudes de vibração, aferindo as frequências naturais da estrutura mais relevantes.

5.7.2. MODELO NUMÉRICO

O modelo numérico é realizado no programa de cálculo estrutural *SAP*, e é constituído pela estrutura metálica e a membrana tensa. A estrutura metálica é formada por peças com secção tubular e por cabos. No modelo, as peças com secção tubular são realizadas com elementos finitos de viga com 6 graus de liberdade por nó e os cabos são realizados com elementos finitos de barra com 3 graus de liberdade por nó, de acordo com a Figura 5.103.

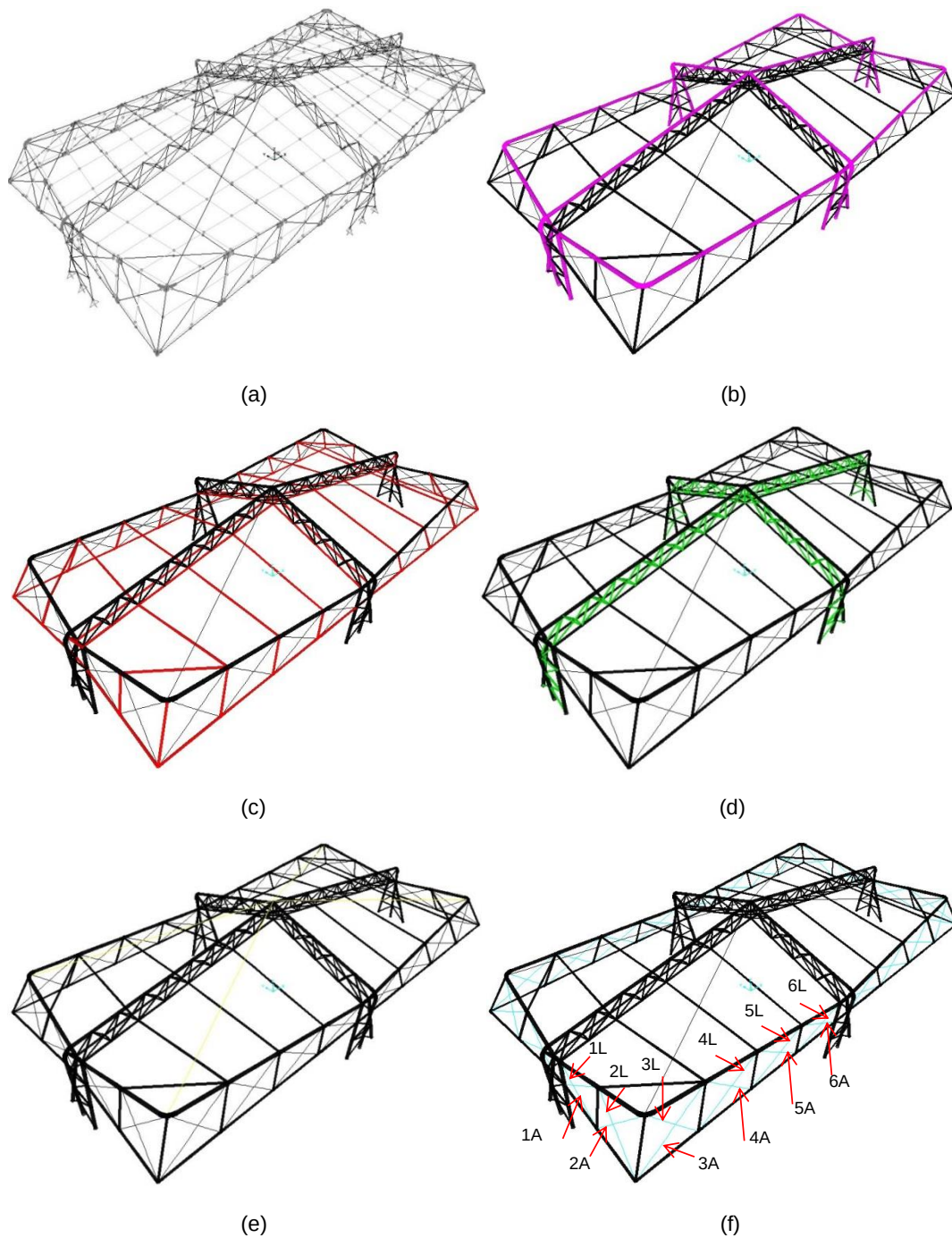


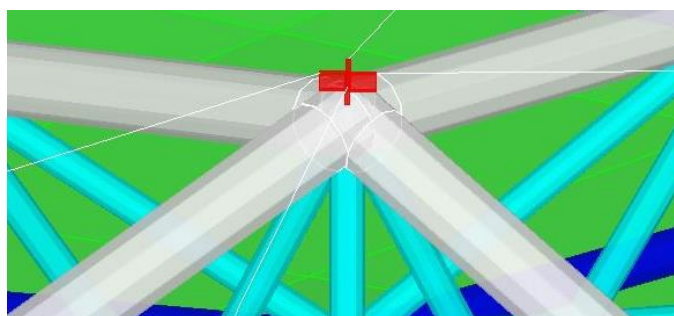
Figura 5.103 – Modelo numérico: (a) Modelo global; (b) Secção tubular $\phi 323 \times 8$ (mmxmm); (c) Secção tubular $\phi 200 \times 6$ (mmxmm); (d) Secção tubular $\phi 150 \times 5$ (mmxmm); (e) Cabos $\phi 36$ mm; (f) Barras calibradas $\phi 25$ mm

A Tabela 5.46 apresenta o comprimento indeformado dos cabos utilizados na cobertura, em correspondência com a Figura 5.103 (f), em que os cabos denominados com a letra *L* são cabos que devido ao seu encurtamento conduzem a um levantamento da estrutura em consola no quadrante respetivo, e com a letra *A* são cabos que devido ao seu encurtamento conduzem a um abaixamento da estrutura em consola no quadrante respetivo. Estes comprimentos foram determinados iterativamente na fase inicial da análise estática sob as ações permanentes, como será descrito na secção 5.7.2.1, e que conduzem à mínima flecha / deformada do anel inferior da estrutura metálica sob as ações permanentes do pré-esforço e do peso próprio.

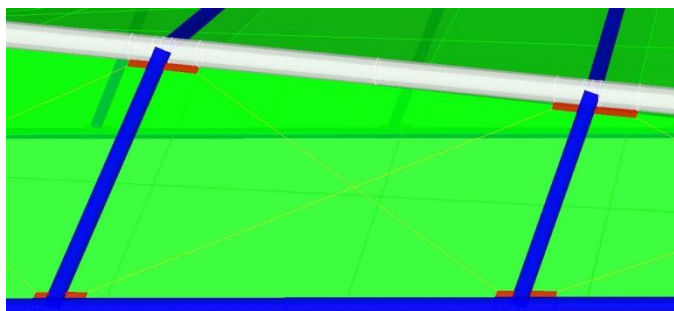
A modelação da estrutura metálica inclui ainda placas de reforço de ligação dos cabos à estrutura tubular. Estas placas de reforço localizam-se quer no topo da estrutura ligando os cabos de 36mm aos cantos da cobertura (ver a Figura 5.104 (a)), quer nos panos laterais na ligação de todos os cabos de 25mm à estrutura (ver a Figura 5.104 (b)). As dimensões destas placas são diferentes e específicas para cada ligação de cabo/estrutura tubular, e foram determinadas iterativamente de forma a fazer respeitar os desenhos de pormenor da Figura 5.23 e a Figura 5.25 (b), respeitando a orientação da direção longitudinal dos cabos entre os nós de ligação da estrutura tubular.

Tabela 5.46 – Comprimento indeformado dos cabos [m]

			Cabo 36		Cabo 25									
			1 L	2 L	3 L	4 L	5 L	6 L	1 A	2 A	3 A	4 A	5 A	6 A
Quadrante	1	23.433	5.322	6.356	4.702	6.532	5.894	5.280	4.691	5.446	7.172	4.631	4.441	4.312
	2	23.435	5.322	6.356	4.702	6.532	5.894	5.280	4.691	5.446	7.172	4.631	4.441	4.312
	3	23.434	5.322	6.356	4.702	6.532	5.894	5.280	4.691	5.446	7.172	4.631	4.441	4.312
	4	23.435	5.322	6.356	4.702	6.532	5.894	5.280	4.691	5.446	7.172	4.631	4.441	4.312



(a)



(b)

Figura 5.104 – Modelação das placas de reforço: (a) Topo da cobertura e (b) Panos laterais

A membrana é compatibilizada com a estrutura metálica. A ligação da membrana à estrutura metálica está de acordo com a descrição realizada na secção 5.2.3. Essencialmente, a compatibilização dos nós da membrana e da estrutura metálica é realizada ao nível dos anéis retangulares superior e inferiores, e ao nível do banzo inferior das vigas treliçadas dos pórticos (ver a Figura 5.105 (a)).

A membrana é realizada com elementos finitos de casca de quatro nós (ver a Figura 5.105 (b)), homogéneos na espessura, apresentando um comportamento puro de membrana (Computers and Structures Inc. 2011). Cada elemento de casca tem associado um sistema local de coordenadas que permite definir as propriedades ortotrópicas do material e as cargas aplicadas, bem como interpretar os resultados das análises.

O sistema local de coordenadas dos elementos de membrana é definido pelos eixos 1, 2 e 3, de acordo com a Figura 5.105 (c). Os dois primeiros eixos estão contidos no plano do elemento e a sua orientação é definida pelo utilizador. O terceiro eixo é normal ao plano do elemento. No presente caso o eixo 1 representa a direção do urdume e o eixo 2 representa a direção da trama.

No módulo superior de membrana, as direções principais de fabrico estão orientadas a 45° com as direções de desenvolvimento longitudinal e transversal da estrutura – solução utilizada na estrutura, de acordo com a Figura 5.106 (a). Portanto, em termos globais, a direção do urdume dos módulos superiores de membrana orienta-se radialmente em relação ao ponto mais elevado da cobertura e a direção da trama é ortogonal à anterior. Por sua vez, no módulo de membrana lateral, a orientação do urdume é aproximadamente vertical e a orientação da trama é aproximadamente horizontal (ver a Figura 5.106 (b)).

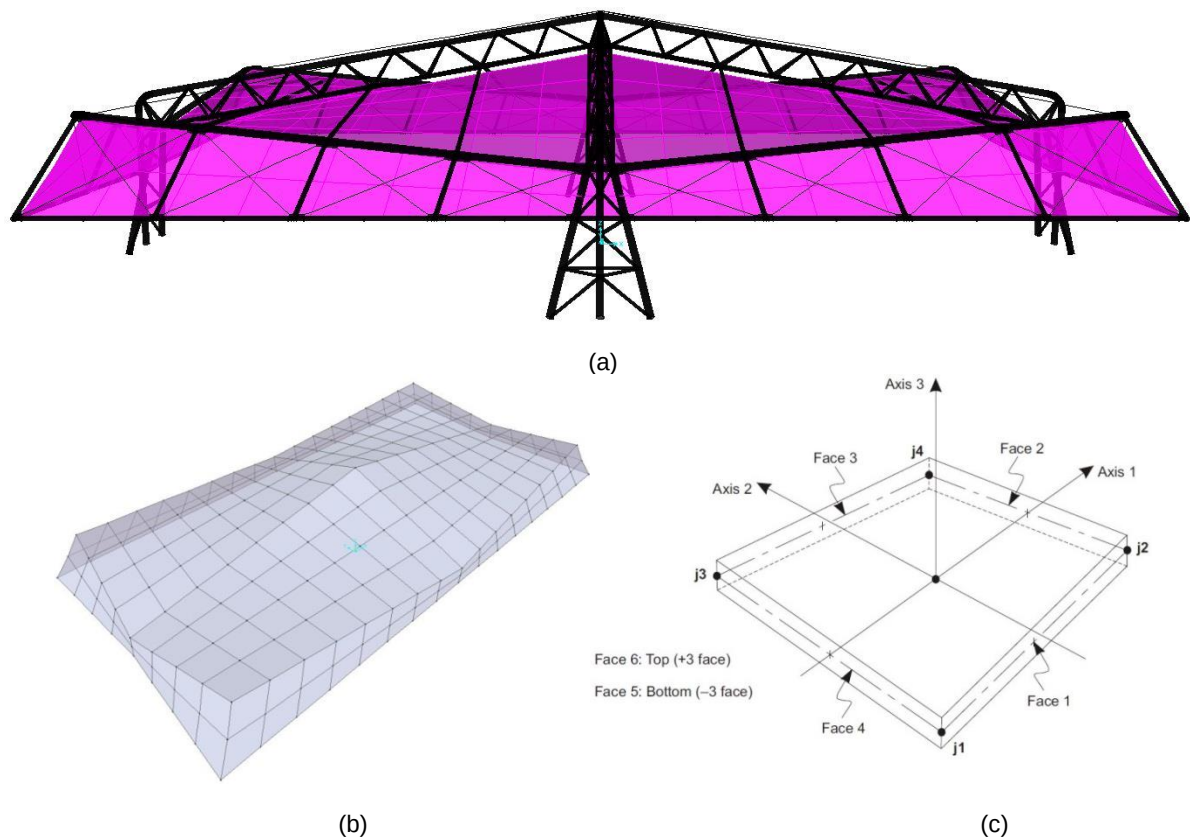


Figura 5.105 – Modelo da membrana tensa realizada com elementos de casca: (a) Compatibilizada com a estrutura metálica; (b) Vista isoladamente e (c) Elemento de casca de 4 nós (Computers and Structures Inc. 2011)

As propriedades dos materiais dos elementos finitos estão de acordo com as propriedades dos materiais utilizados na estrutura (Escrig e Sánchez 2009) e sistematizados na secção de materiais (ver a secção 5.3). A Tabela 5.47 apresenta o peso dos elementos utilizados no modelo numérico, sendo de destacar que o peso da membrana representa cerca de 3,2% do peso total da estrutura de cobertura.

Tabela 5.47 – Área e peso dos elementos do modelo numérico

		Área (m ²)	Massa (kg)	Peso (N)	Massa total (kg)	Peso total (N)
Membrana	Módulo 1	982,86	1032,00	10123,89		
	Módulo 2	139,69	146,68	1438,88	1444,79	14173,34
	Módulo 3	253,44	266,11	2610,57		
Estrutura metálica	Secção 323x8		17887,25	175414,04		
	Secção 200x6		15017,05	147266,99		
	Secção 150x5		7223,43	70837,67		
	Cabos 25		998,53	9792,20	41995,45	411834,69
	Cabos 36		566,15	5552,03		
	Placas de reforço		303,04	2971,76		
Detalhes construtivos			1323,48	12978,95	1323,48	12978,95
Total					44763,72	438986,98

Na membrana, é considerado simplificadamente um comportamento ortotrópico linear elástico com as propriedades sistematizadas na Tabela 5.4. No entanto, o valor dos coeficientes de Poisson é definido por $\nu_{UT} = 0,75$ e $\nu_{TU} = 0,45$. Relativamente ao valor do módulo de corte G considera-se igual a 120kN/m , atendendo a que as análises não-lineares estáticas e dinâmicas realizadas, sob a ação do vento, mostraram um comportamento altamente não-linear geométrico da membrana, durante o qual o material pode experimentar valores consideravelmente superiores ao valor inicialmente referido de 30kN/m . Estes valores podem variar entre 30 e 400kN/m segundo estudos realizados por Jackson *et al.* (2009).

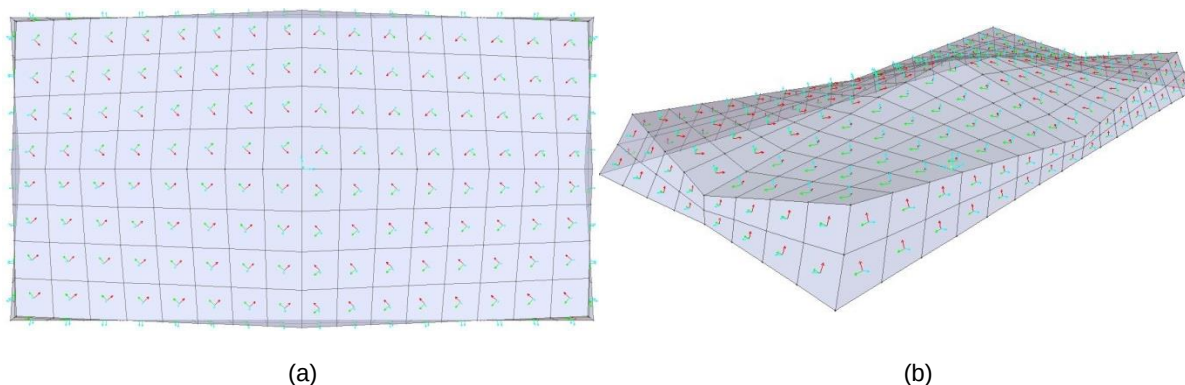


Figura 5.106 – Orientação das direções de fabrico do material de membrana - urdume (vermelho) e trama (verde): (a) Vista em planta e (b) Vista em 3D

5.7.2.1. Estado inicial sob as ações permanentes

Ajustamento do comprimento dos cabos da estrutura

Atendendo ao desconhecimento do comprimento indeformado dos cabos, bem como do próprio grau de controlo relativamente às forças instaladas e ao encurtamento utilizado na implementação dos mesmos durante a construção da cobertura, optou-se neste trabalho por determinar o comprimento indeformado destes elementos de uma forma iterativa, de modo a conduzir à mínima deformada do anel inferior da estrutura metálica sob as ações permanentes do pré-esforço e do peso próprio. A análise estática do modelo numérico é realizada tendo por base uma análise não-linear geométrica considerando grandes deslocamentos, através do método de Newton Raphson. Este processo permitiu reduzir a flecha máxima do anel inferior de $1,1\text{cm}$ para $0,06\text{cm}$, como mostra a Figura 5.107, onde se apresenta a deformada do anel inferior ao longo dos 4 quadrantes da estrutura, através dos nós de ligação com os montantes e com os pilares. A Figura 5.107 (b) e a Tabela 5.48 apresentam as forças obtidas nos cabos laterais e nos suspensos, observando-se valores semelhantes do esforço axial em cabos homólogos nos diferentes quadrantes, atendendo à aproximada dupla simetria da estrutura.

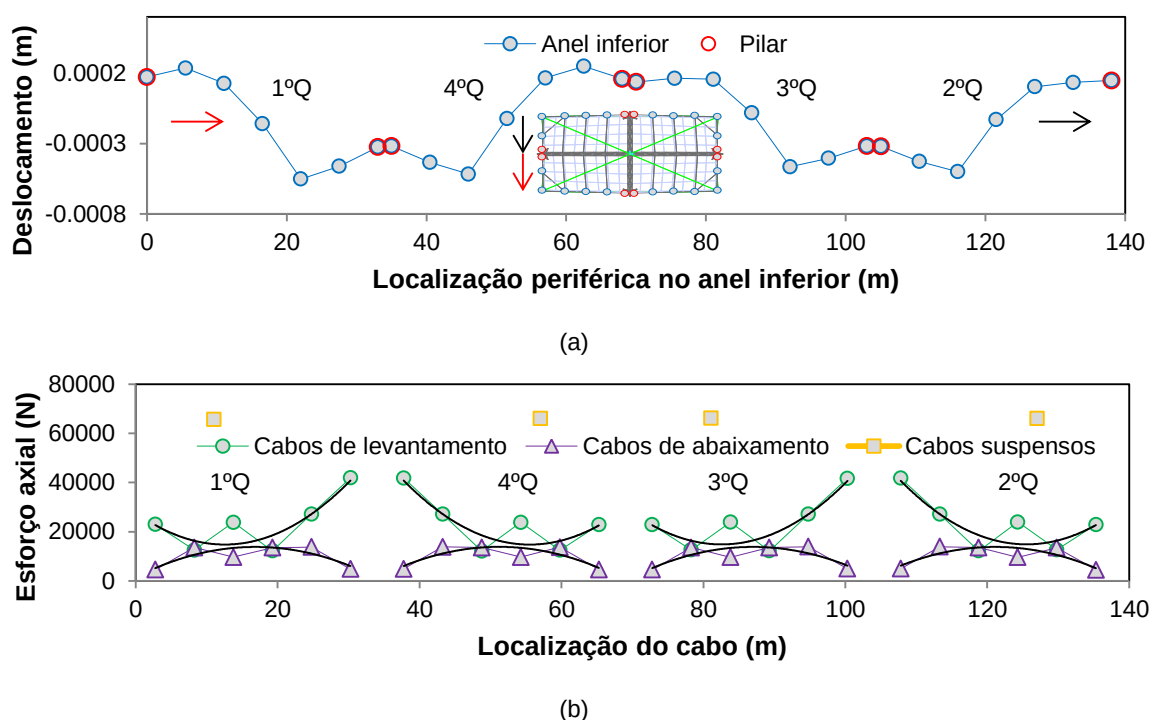


Figura 5.107 – Ajustamento dos cabos: (a) Deformada do anel inferior (b) Força nos cabos

Tabela 5.48 – Esforço axial nos cabos sob as ações permanentes [kN]

		Cabo 36	Cabo 25											
			1 L	2 L	3 L	4 L	5 L	6 L	1 A	2 A	3 A	4 A	5 A	6 A
Quadrante	1	65,7	23,0	12,5	23,8	12,2	27,2	41,9	4,6	13,6	9,7	13,5	13,8	4,8
	2	66,0	22,9	12,7	23,9	12,2	27,1	41,8	4,5	13,5	9,6	13,6	13,9	4,9
	3	66,1	22,9	12,6	23,9	12,2	27,1	41,7	4,6	13,6	9,6	13,6	13,9	5,0
	4	66,0	22,8	12,5	23,8	12,2	27,1	41,8	4,6	13,7	9,7	13,6	13,8	4,9

A Figura 5.108 apresenta a deformada da estrutura sob as ações permanentes do pré-esforço e do peso próprio, com destaque dos deslocamentos verticais, evidenciando deslocamentos máximos verticais na membrana de aproximadamente $2,7\text{cm}$. No caso da estrutura metálica, o topo da cobertura (nó 12) apresenta deslocamentos máximos descendentes de aproximadamente 1cm e o nó livre da consola (615, de acordo com a Figura 5.108) de aproximadamente $0,013\text{cm}$.

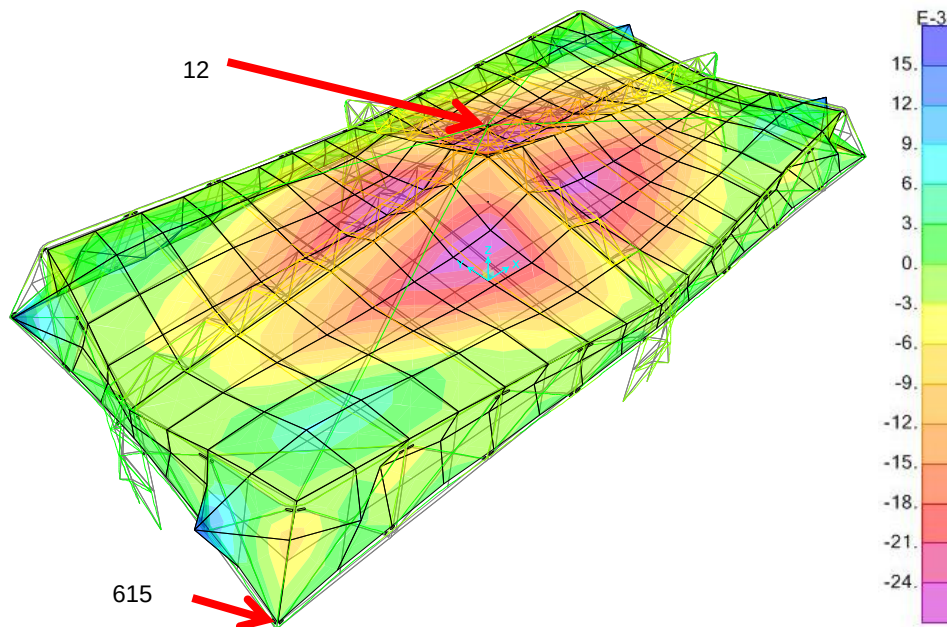


Figura 5.108 – Deformada da estrutura sob as ações permanentes, com destaque dos deslocamentos verticais, ampliada 70x [m]

Ajustamento da deformação da membrana

O ajustamento realizado anteriormente com os cabos suspensos e laterais conduz a ligeiras alterações na geometria dos bordos dos módulos de membrana, pelo que houve necessidade de reajustar as deformações de *input* da membrana que conduzem a tensões médias na membrana de 2kN/m , considerando a aplicação conjunta do pré-esforço e do peso próprio. A Tabela 5.49 apresenta o valor das deformações introduzidas aos elementos de membrana, quer para o módulo 1, quer para o módulo lateral, sendo de notar que nos cantos houve a necessidade de reforçar o pré-esforço no urdume.

Tabela 5.49 – Deformação introduzida nos elementos de membrana na direção do urdume (U) e da trama (T)

Módulo 1		Módulo Lateral			
Geral		Geral		Cantos	
$\varepsilon_{U, \text{input}}$	$\varepsilon_{T, \text{Input}}$	$\varepsilon_{U, \text{input}}$	$\varepsilon_{T, \text{Input}}$	$\varepsilon_{U, \text{input}}$	$\varepsilon_{T, \text{Input}}$
-0,0007225	-0,002304	-0,0012	-0,00251	-0,0025	-0,0025

As tensões na membrana apresentam um valor médio de aproximadamente 2kN/m em ambas as direções, urdume e trama, de acordo com a Figura 5.109. No módulo lateral a tensão média na direção do urdume é de $2,1\text{kN/m}$ e na trama de $1,9\text{kN/m}$. Na zona de transição do canto da cobertura, evidencia-se uma zona com tensões de compressão, o que por um lado confirma os fenómenos de enrugamento referidos anteriormente, mas por outro não reflete verdadeiramente o comportamento da membrana, atendendo a que a membrana não suporta esforços de compressão.

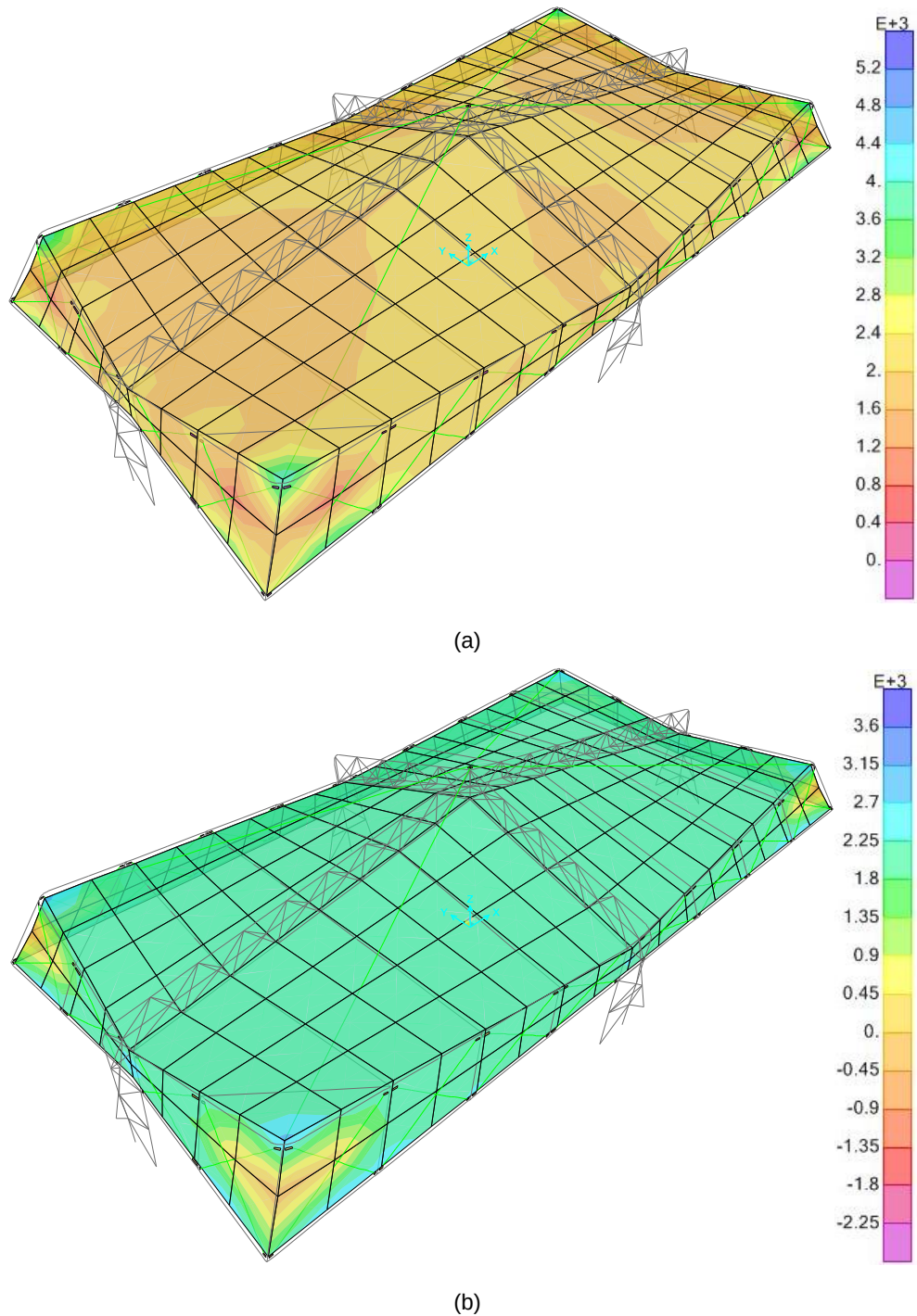


Figura 5.109 – Tensões da membrana sob as ações permanentes: (a) Direção do urdume e (b) Direção da trama [N/m]

A Tabela 5.50 apresenta as reações globais sob as ações permanentes do pré-esforço e do peso próprio, corroborando o peso da estrutura apresentado anteriormente na Tabela 5.47.

Tabela 5.50 – Reações globais sob as ações permanentes do pré-esforço e peso próprio

	Fx	Fy	Fz
	(N)	(N)	(N)
Reações globais	0	0	438986

5.7.2.2. Análise modal

A modelação em elementos finitos realizada no decorrer deste trabalho permitiu avaliar as características dinâmicas da estrutura. As frequências naturais obtidas são sistematizadas na Tabela 5.51, nomeadamente os valores das primeiras 9 frequências naturais e respetiva caracterização do tipo de configuração modal. A Figura 5.110 apresenta as frequências naturais e os respetivos fatores de participação modal nas direções cartesianas.

Tabela 5.51 – Frequências naturais e respetivas configurações modais referentes aos 9 primeiros modos de vibração sob as ações permanentes

Nº modo	n (Hz)	Configuração modal	
		Global	Quadrantes
1	3,15	1ASx com deslocamento horizontal do pórtico menor em y	1S
2	3,53	1ASy com deslocamento horizontal do pórtico maior em x	1S
3	3,55	1ASxy	1ASx'
4	3,58	1ASx	1ASx'
5	3,60	1S	1ASx'
6	3,75	1ASy	1ASx'
7	3,78	1ASxy	1ASx''
8	3,82	1S	1ASx''
9	3,86	1ASx	1ASx''

Da presente análise verifica-se, em primeiro lugar, que a membrana responde com vários modos de vibração para frequências abaixo de 5Hz, e com frequências muito próximas. Em termos globais, os dois primeiros modos de vibração têm uma participação elevada da estrutura metálica em y e x, respetivamente para o primeiro e segundo modos (ver a Figura 5.111). O primeiro modo corresponde ao primeiro antissimétrico em relação a x (1ASx), e o segundo modo ao primeiro antissimétrico em relação a y (1ASy). Ao nível dos quadrantes, analogamente à análise realizada na secção 5.5, verifica-se que a membrana apresenta o 1º modo simétrico (1S), quer no primeiro modo, quer no segundo modo. É de salientar que o 1S não aparecia no modelo homólogo de membrana tensa isolada estudado na secção 5.5 (ver a Tabela 5.38). Este facto pode estar relacionado com o aumento de rigidez da membrana devido ao módulo de corte ser superior nesta análise, 120 em vez de 30kN/m, ou devido à interação com a estrutura metálica. Os modos 3, 4, 5 e 6 são as quatro combinações possíveis em termos globais – 1ASxy, 1ASx, 1S e 1ASy, para o 1AS em relação a um eixo x' representado nos respetivos modos ao nível dos quadrantes. Analogamente, os modos 7, 8 e 9 são três combinações

possíveis em termos globais - $1AS_{xy}$, $1S$ e $1AS_x$, para o $1AS$ em relação a um eixo x'' (representado nos respectivos modos) ao nível dos quadrantes (ver a Figura 5.112).

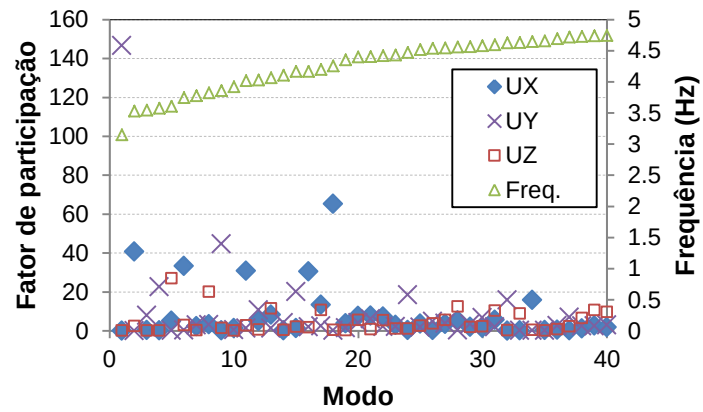


Figura 5.110 – Frequências naturais e fatores de participação modal da estrutura sob as ações permanentes

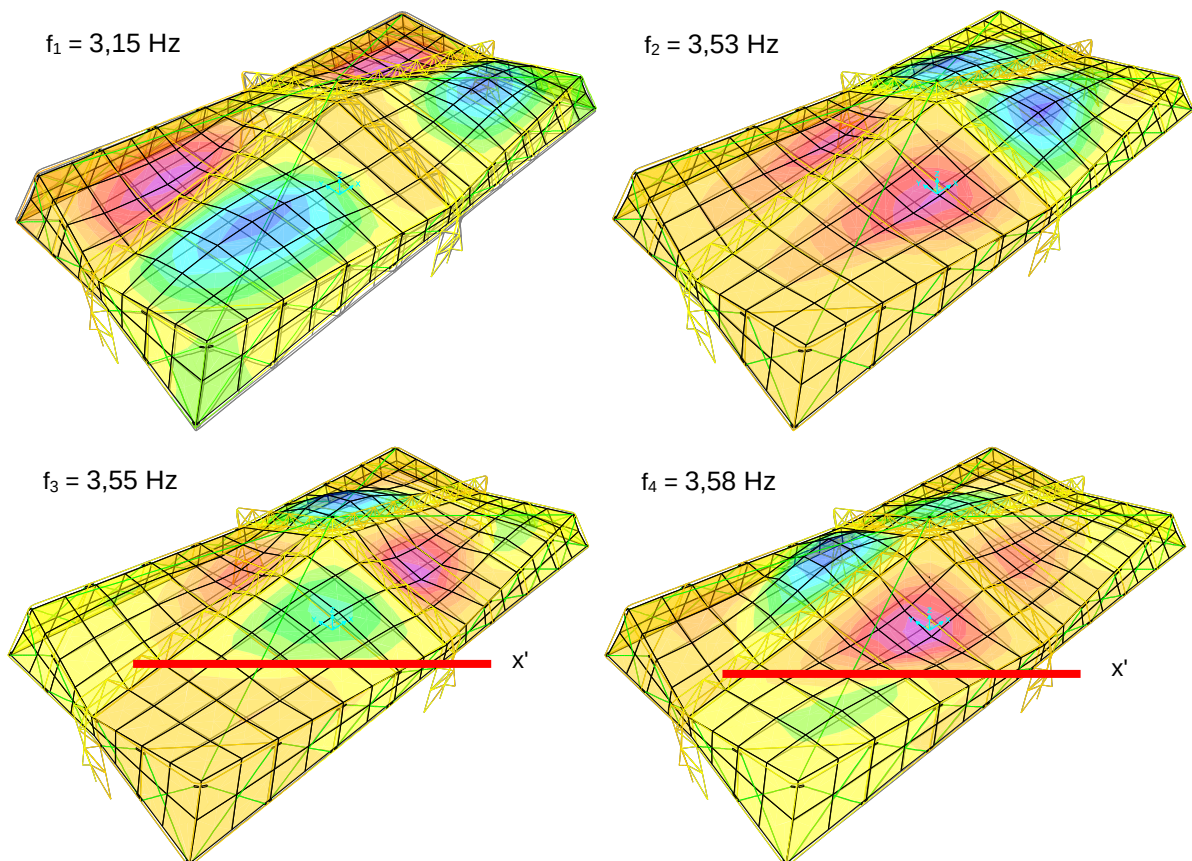


Figura 5.111 – Frequências naturais e configurações modais dos modos 1, 2, 3 e 4 sob as ações permanentes

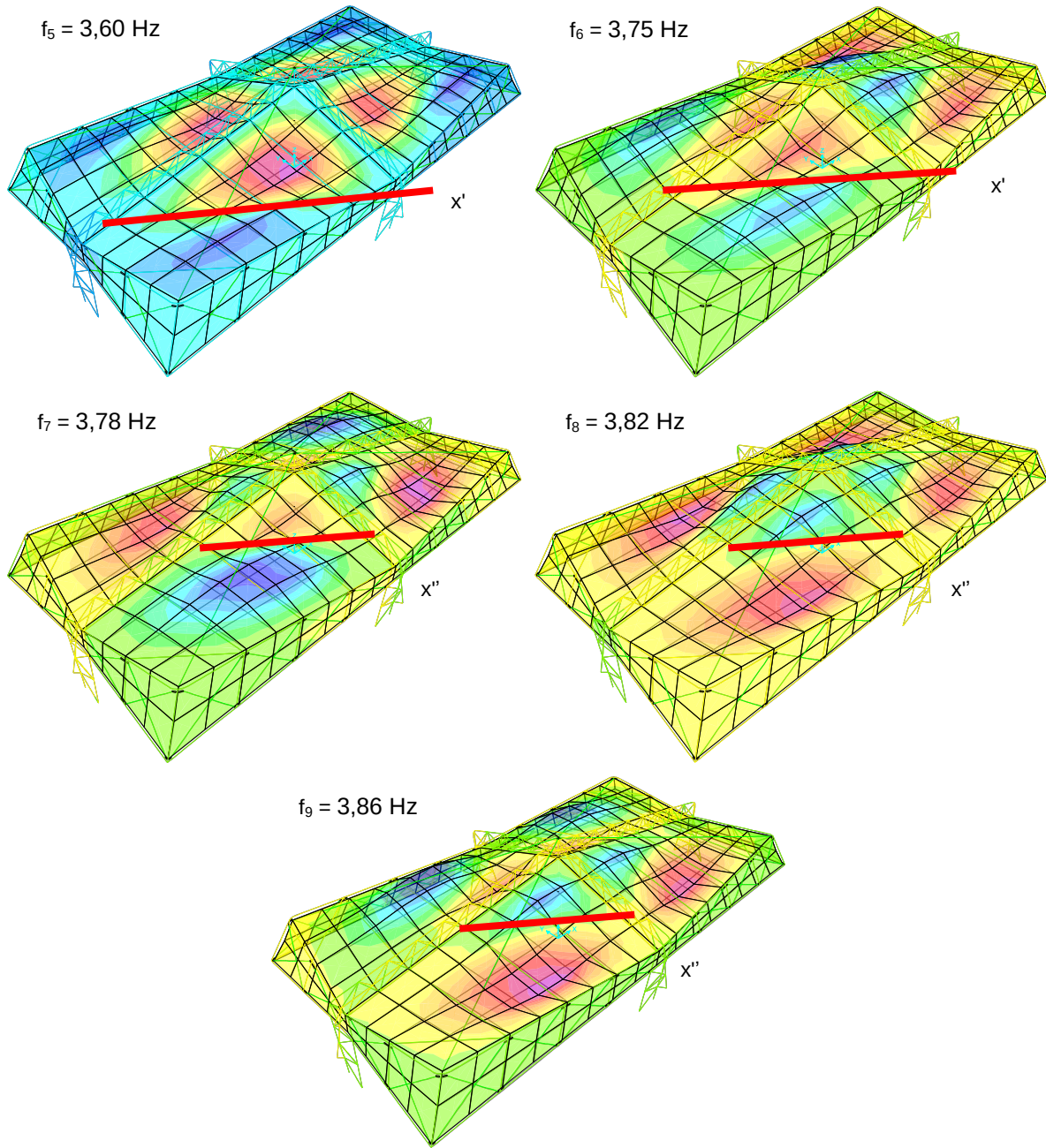


Figura 5.112 – Frequências naturais e configurações modais dos modos 5 a 9 sob as ações permanentes

5.7.2.3. Interação dinâmica membrana - estrutura metálica

De forma a aferir o grau de participação da membrana nas configurações modais, foi quantificado o fator de hibridização, FH , traduzido por (Caetano *et al.* 2008)

$$FH_{i,j} = \frac{(R_j \phi_i)^T M (R_j \phi_i)}{\phi_i^T M \phi_i}, \quad FH_{i,j} \in [0,1] \quad (5.49)$$

em que ϕ_i é o i -ésimo modo de vibração, M é a matriz de massa do modelo e R_j é uma matriz diagonal de zeros e uns que permite a seleção dos j -ésimos graus de liberdade da membrana. Os FH próximos

de zero indicam uma baixa participação da membrana e próximos de um indicam modos locais da membrana. Os valores intermédios do *FH* indicam modos com a interação membrana-estrutura. A Figura 5.113 apresenta os fatores de hibridização da estrutura para os primeiros 500 modos de vibração da estrutura de cobertura. Sensivelmente entre o modo 1 e 130 existem na maioria modos locais de membrana com alguma interação dinâmica, havendo aproximadamente 20 modos com uma interação significativa, por exemplo os modos 1, 18, 23, 29, 35, etc., respetivamente, 3,15, 4,26, 4,43, 4,57 e 4,66Hz. Depois, entre os modos 130 e 270 existem na maioria modos da estrutura metálica com baixa participação da membrana, havendo cerca de 10 com interação significativa, embora para frequências acima da gama de interesse do presente estudo. Depois do modo 270 são modos na maioria caracterizados por uma interação significativa.

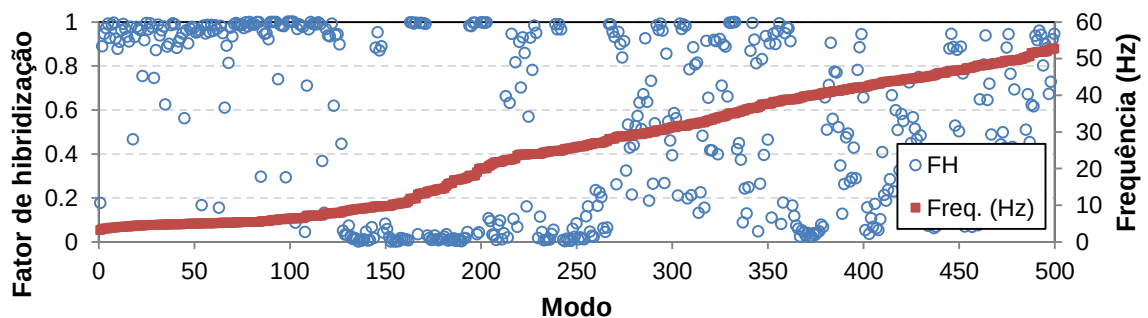


Figura 5.113 – Fatores de hibridização sob as ações permanentes

5.7.2.4. Influência dos cabos, membranas e detalhes construtivos no comportamento da estrutura

No sentido de complementar a análise realizada anteriormente e de forma a averiguar a influência dos diferentes elementos estruturais utilizados na estrutura nomeadamente em termos do contributo da massa e rigidez dos cabos e membranas para a estrutura global, assim como da massa dos detalhes construtivos, foi realizado um estudo na tentativa de introduzir os efeitos da massa e da rigidez de uma forma gradual, simulando de certa forma o processo construtivo da estrutura. As frequências naturais da estrutura obtidas neste estudo são apresentadas na Figura 5.114 de acordo com a nomenclatura apresentada na Tabela 5.52 baseada na adição gradual de massa e rigidez dos elementos à estrutura. É de notar alguma dispersão das frequências naturais obtidas, especialmente quando a rigidez da membrana é introduzida na estrutura metálica, atendendo ao desenvolvimento de modos de membrana, aspeto evidenciado anteriormente pelos fatores de hibridização próximos de 1 nesta gama de frequências em análise. Por esse motivo, são sistematizadas na Tabela 5.52 as frequências naturais organizadas por configurações modais com participação modal semelhante dos elementos estruturais e de acordo com os 3 primeiros modos de vibração da estrutura global mostrados anteriormente na Figura 5.111.

Começando pela influência dos cabos, de acordo com a Tabela 5.52, verifica-se que a colocação dos cabos suspensos na estrutura tubular conduz a um aumento das frequências devido ao aumento de rigidez. De seguida, a aplicação de massas concentradas relativas aos cabos laterais conduz a uma diminuição ligeira das frequências. A contabilização da rigidez destes cabos laterais conduz a um novo e mais significativo aumento das frequências da estrutura metálica.

A influência da massa da membrana conduz de seguida a uma diminuição das frequências da estrutura metálica, respetivamente igual a -17%, -18% e -27% para os 3 primeiros modos de vibração. A

contabilização da rigidez da membrana conduz a um aumento das frequências, mais significativo no primeiro modo na ordem de 14%. No entanto, no segundo modo apresenta uma ligeira redução que se deve essencialmente à distribuição da massa da membrana concentrada em poucos pontos na estrutura metálica, conduzindo a uma mobilização maior da estrutura metálica para o referido modo, o que não aconteceria se a massa fosse distribuída uniformemente.

A contribuição da massa dos detalhes construtivos é pouco significativa, diminuindo ligeiramente as frequências naturais da estrutura.

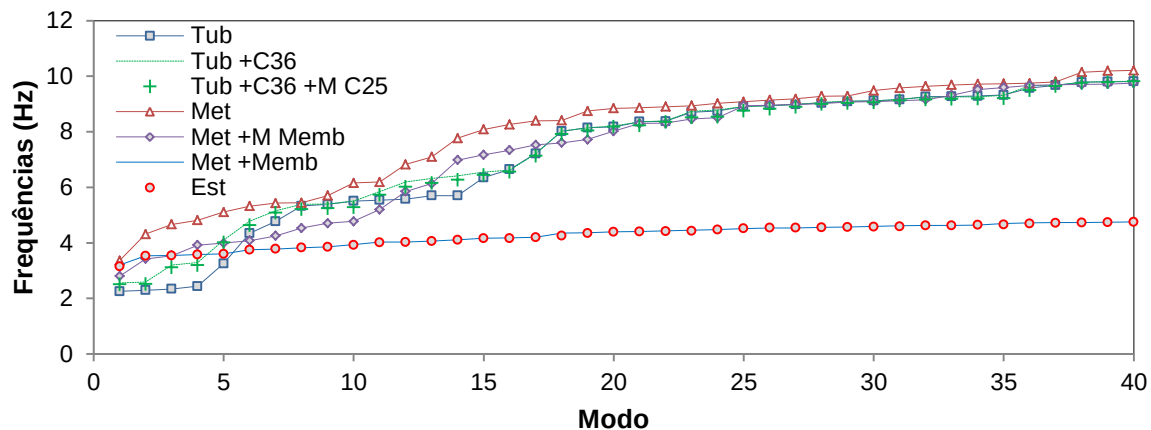


Figura 5.114 – Influência dos cabos, membranas e detalhes construtivos nas frequências naturais da estrutura em termos globais

Tabela 5.52 – Influência dos cabos, membranas e detalhes construtivos nas frequências naturais da estrutura em modos de vibração equivalentes

Nº modo	Estrutura Metálica: Influência dos cabos				Estrutura Metálica + Membrana: Influência da membrana			Est. Global
Est. Tubular	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Cabos	-	+M e K c36	+M e K c36 + M c25	+ M e K	+ M e K	+ M e K	+ M e K	+ M e K
Memb.	-	-	-	-	+ M	+ M e K	+ M e K	+ M e K
Det. Const.	-	-	-	-	-	-	-	+ M
Sigla	Tub	Tub +C36	Tub +C36 +M C25	Met	Met +M Memb	Met +Memb	Est	
				(1)	(2)	$\frac{(2) - (1)}{(1)} \times 100$	(3)	$\frac{(3) - (2)}{(2)} \times 100$
	(Hz)	(Hz)	(Hz)	(Hz)	(Hz)	(%)	(Hz)	(%)
1	2,294	2,558	2,502	3,358	2,799	-17	3,204	14
2	2,340	2,590	2,520	4,315	3,541	-18	3,538	0
3	4,777	4,785	4,635	4,669	3,421	-27	3,551	4

5.7.3. RESPOSTA DO MODELO ÀS AÇÕES PERMANENTES E À AÇÃO DO VENTO EM PRESSÃO

5.7.3.1. Análise não-linear geométrica da ação quase-estática da ação do vento segundo EC1-Parte 1-4

A análise estática do modelo sob as ações permanentes e da ação quase-estática do vento é realizada tendo por base uma análise não-linear geométrica considerando grandes deslocamentos, através do método de Newton Raphson. A análise é faseada, sendo determinada primeiro a resposta do modelo sob as ações permanentes e solicitando de seguida a estrutura à ação quase-estática do vento. A ação quase-estática do vento baseia-se nas forças obtidas na secção 5.6.4 de acordo com a norma *EC1-Parte 1-4*, segundo a direção do vento 0° e para o caso 2, isto é, ação de pressão exterior e sucção interior.

A Figura 5.115 apresenta a deformada da estrutura sob as ações permanentes e a ação quase-estática do vento, com destaque dos deslocamentos verticais, evidenciando deslocamentos máximos verticais da membrana de $-62,2\text{cm}$ (nó 13). No caso da estrutura metálica, o topo da cobertura (nó 12) apresenta um deslocamento máximo descendente de aproximadamente $2,8\text{cm}$, na direção x de $0,24\text{cm}$ e na direção y de $-0,03\text{cm}$, e o nó livre da consola (nó 615) apresenta um deslocamento máximo descendente de aproximadamente $0,5\text{cm}$.

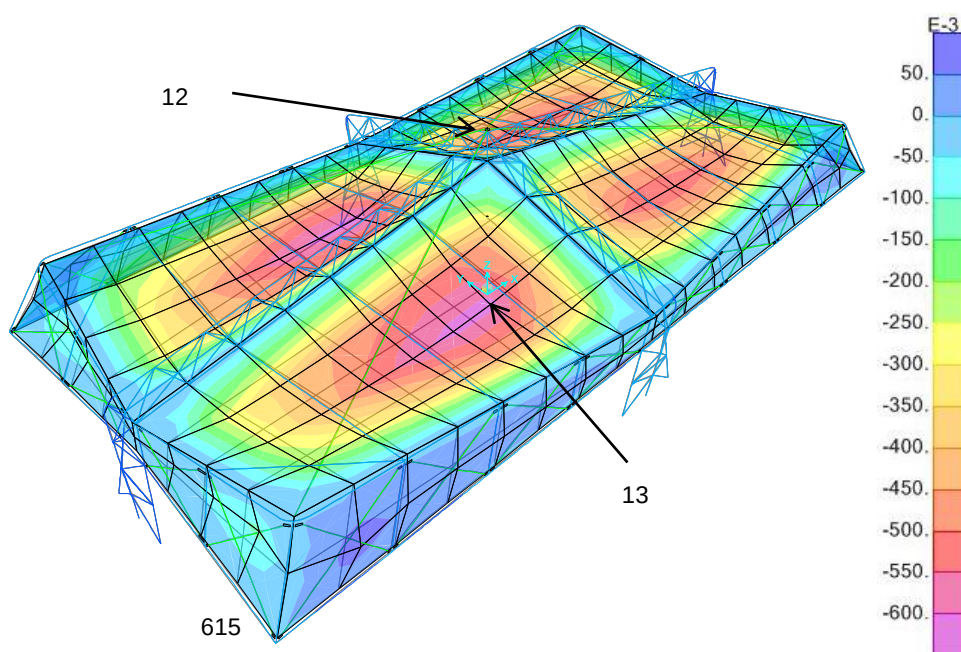


Figura 5.115 – Deformada da estrutura sob as ações permanentes e da ação quase-estática do vento em pressão, com destaque dos deslocamentos verticais, ampliada 4x [m]

As tensões da membrana na direção do urdume apresentam um valor máximo de $23,5\text{kN/m}$, como por exemplo no elemento de casca 4 próximo do topo da cobertura (ver a Figura 5.116 (a)), não cumprindo a tensão admissível de 17kN/m , e na direção da trama um valor máximo de $12,4\text{kN/m}$ no elemento 4, cumprindo a tensão admissível de 16kN/m (ver a Figura 5.116 (b)).

A Tabela 5.53 apresenta as reações globais sob as ações permanentes e a ação quase-estática do vento, verificando-se que a ação quase estática do vento de pressão representa aproximadamente 120% do peso total da estrutura.

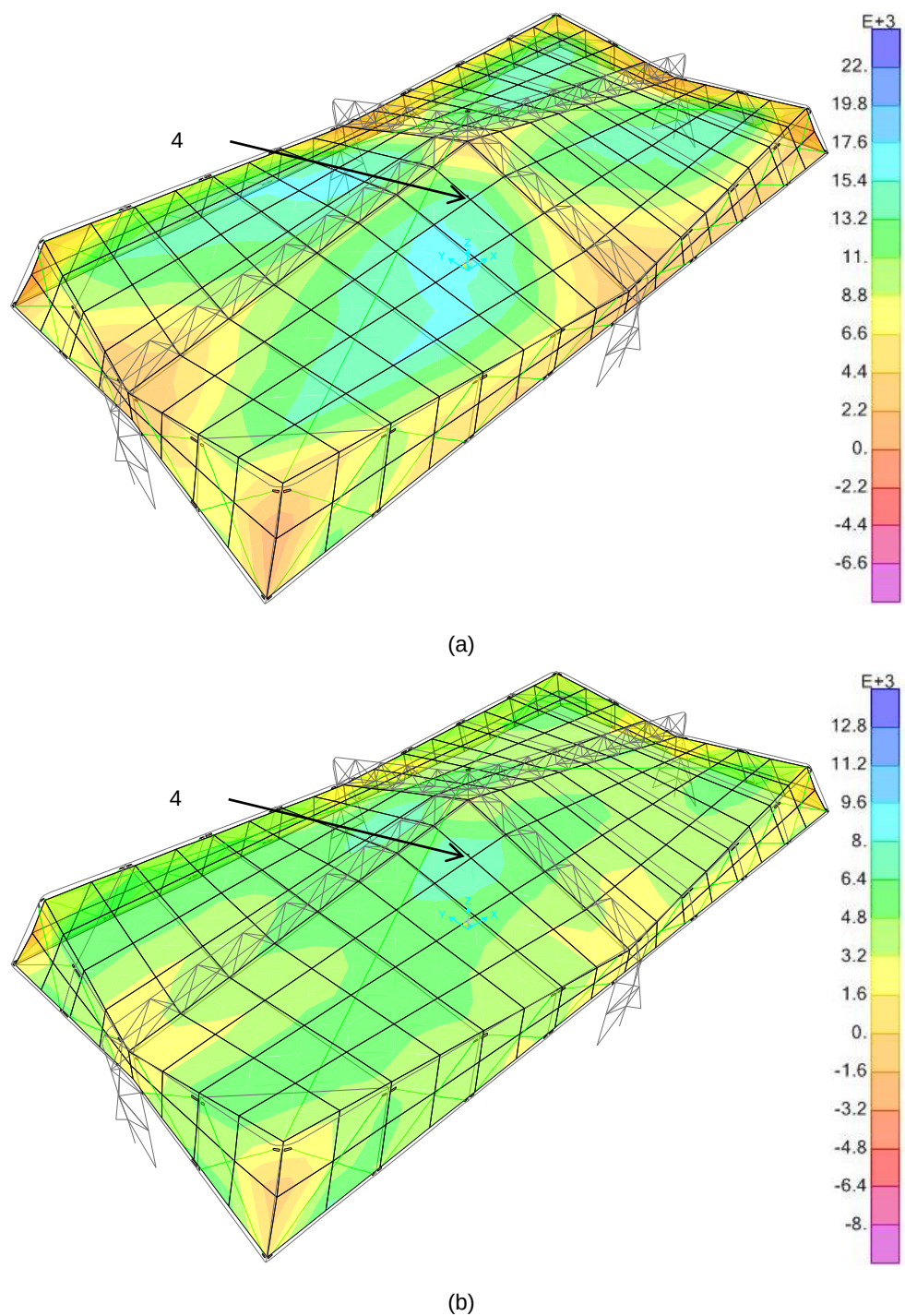


Figura 5.116 – Tensões da membrana sob as ações permanentes e da ação quase-estática do vento em pressão: (a) Direção do urdume e (b) Direção da trama [N/m]

Tabela 5.53 – Reações globais sob as ações permanentes e da ação quase-estática do vento em pressão

	Fx	Fy	Fz	$(F_z - F_{z_{est}}) / F_{z_{est}} * 100$
	(N)	(N)	(N)	(%)
Reações globais	-112527	-18	966677	120

A Tabela 5.54 apresenta o esforço axial dos cabos, verificando-se em geral um aumento do esforço axial dos cabos *L* em relação ao da posição estática sob as ações permanentes (cabos caracterizados por conduzir a um levantamento da consola com o seu encurtamento) devido à ação quase-estática do vento ser predominantemente descendente (ação de pressão exterior e sucção interior), efeito que conduz ao alongamento destes cabos e a um encurtamento dos cabos *A* com consequente perda de tensão. O esforço axial máximo é igual a $61,8kN$ e verifica-se para o cabo 1217 (6L) junto ao pilar do pórtico menor (ver a Figura 5.117 (a)).

Tabela 5.54 – Esforço axial nos cabos sob as ações permanentes e da ação quase-estática do vento em pressão [kN]

Cabo 36			Cabo 25											
			1 L	2 L	3 L	4 L	5 L	6 L	1 A	2 A	3 A	4 A	5 A	6 A
Quadrante	1	60,4	52,4	12,1	20,1	11,1	32,7	61,4	1,7	4,6	14,5	7,5	2,6	1,4
	2	61,1	53,1	12,8	20,5	11,0	32,2	61,1	1,7	4,4	14,1	7,8	2,7	1,4
	3	59,5	55,1	27,8	29,0	12,6	38,4	61,1	1,3	3,5	8,2	9,8	2,4	1,5
	4	58,8	55,1	27,2	28,7	12,6	38,9	61,8	1,3	3,6	8,4	9,6	2,3	1,5

Em geral, nas vigas treliçadas, o banzo superior está comprimido e o inferior está tracionado devido à ação global predominantemente descendente (ver a Figura 5.117 (b)). O esforço de tração máximo é igual a $446kN$ e ocorre na secção 40, no topo do pilar do pórtico menor, e o esforço de compressão máximo é igual a $-636kN$ e ocorre na secção 841 no topo da cobertura.

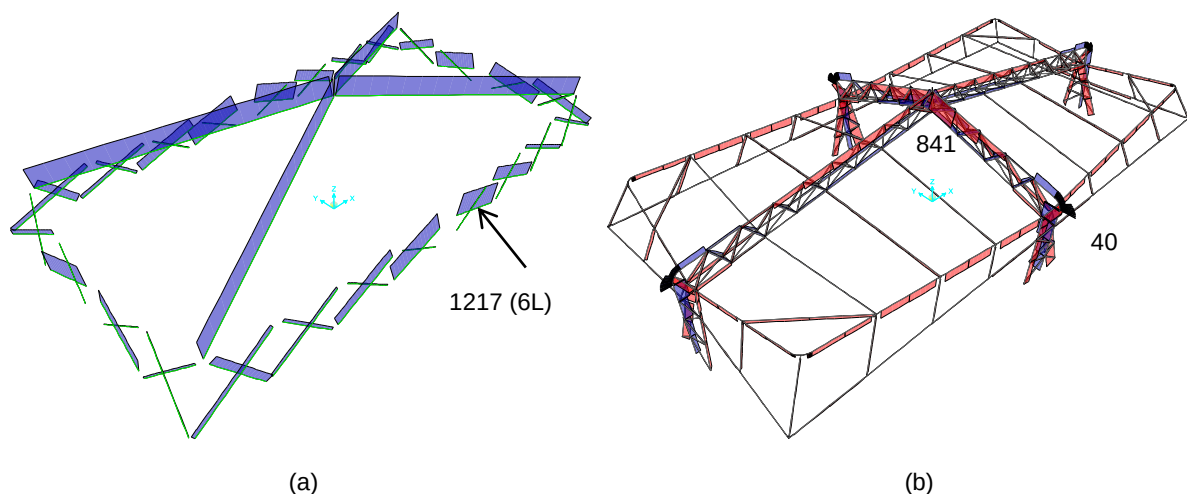


Figura 5.117 – Esforço axial na estrutura de cobertura sob as ações permanentes e da ação quase-estática do vento em pressão: (a) Cabos e (b) Secções tubulares

5.7.3.2. Análise não-linear dinâmica da ação do vento

A análise não-linear dinâmica do modelo numérico sob as ações permanentes e da ação dinâmica do vento é realizada faseadamente. A ação dinâmica do vento baseia-se na aplicação das forças aerodinâmicas obtidas na secção 5.6.5, segundo a direção do vento 0° e para o caso 2, isto é, ação de pressão exterior e sucção interior.

Em primeiro lugar é determinada a resposta da estrutura sob as ações permanentes e sob a ação da componente média da velocidade do vento, através de uma análise não-linear geométrica considerando grandes deslocamentos, com base no método de Newton Raphson. Com base nesta configuração deformada, é de seguida determinada a massa aerodinâmica e o amortecimento da estrutura.

De seguida, é realizada a análise não-linear dinâmica no domínio do tempo, sob a ação da componente dinâmica das forças aerodinâmicas.

Resposta da estrutura sob ação da componente média da velocidade do vento em pressão

(i) Análise estática

A análise estática do modelo numérico sob as ações permanentes e da ação da componente média das forças aerodinâmicas é realizada tendo por base uma análise não-linear geométrica considerando grandes deslocamentos, através do método de Newton Raphson. A análise é faseada, isto é, a ação da componente média das forças aerodinâmicas do vento atua sobre a estrutura no fim da análise estática da estrutura sob as ações permanentes.

A Figura 5.118 apresenta a deformada da estrutura sob as ações permanentes e a ação da componente média da velocidade do vento, com destaque dos deslocamentos verticais, evidenciando deslocamentos máximos verticais na membrana a barlavento de aproximadamente $33,4\text{cm}$ no nó 13. No caso da estrutura metálica, o topo da cobertura (nó 12) apresenta deslocamentos máximos descendentes de aproximadamente $1,7\text{cm}$, na direção x de $0,06\text{cm}$ e na direção y de $-0,01\text{cm}$, e o nó livre da consola (nó 615) apresenta deslocamentos máximos descendentes de $0,07\text{cm}$.

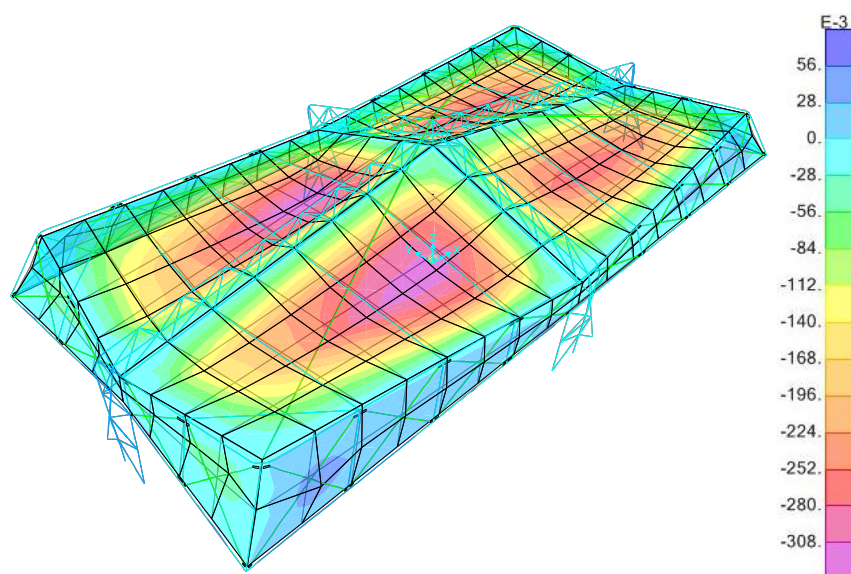


Figura 5.118 – Deformada da estrutura sob as ações permanentes e a ação da componente média da velocidade do vento em pressão, com destaque dos deslocamentos verticais, ampliada 7x [m]

As tensões da membrana, na direção do urdume, apresentam um valor máximo de $11,5\text{kN/m}$ no elemento de casca 4 (ver a Figura 5.119 (a)), e na direção da trama um valor máximo de $6,6\text{kN/m}$ no elemento de casca 4 (ver a Figura 5.119 (b)). De uma forma global, os módulos superiores de membrana apresentam valores ligeiramente superiores das tensões a barlavento.

A Tabela 5.55 apresenta as reações globais sob as ações permanentes e a ação da componente média da velocidade do vento, verificando-se que a ação da componente média do vento representa aproximadamente 40% do peso total da estrutura.

Tabela 5.55 – Reações globais sob as ações permanentes e a ação da componente média da velocidade do vento em pressão

	Fx	Fy	Fz	$(Fz - Fz_{\text{est}}) / Fz_{\text{est}} * 100$
	(N)	(N)	(N)	(%)
Reações globais	-35569	-7	614498	40

A Tabela 5.56 apresenta o esforço axial dos cabos, verificando-se em geral o mesmo efeito do aumento do esforço nos cabos L e de uma redução nos cabos A, embora não sendo tão significativo como na ação quase-estática do vento. O esforço axial máximo é igual a $62,4\text{kN}$ e verifica-se para o cabo de suspensão do 3º quadrante, a sotavento (ver a Figura 5.120 (a)).

Tabela 5.56 – Esforço axial nos cabos do primeiro quadrante sob as ações permanentes e a ação da componente média da velocidade do vento em pressão [kN]

Cabo 36			Cabo 25											
			1 L	2 L	3 L	4 L	5 L	6 L	1 A	2 A	3 A	4 A	5 A	6 A
Quadrante	1	61,4	29,7	12,0	21,5	12,0	27,8	46,7	3,0	10,8	11,3	11,0	8,9	2,5
	2	61,9	30,0	12,3	21,7	11,9	27,7	46,5	2,9	10,6	11,1	11,2	9,3	2,5
	3	62,4	30,7	16,2	24,9	12,2	29,1	46,4	2,4	9,7	9,3	12,3	9,0	2,6
	4	62,0	30,7	15,9	24,7	12,3	29,2	46,7	2,4	9,9	9,5	12,2	8,7	2,6

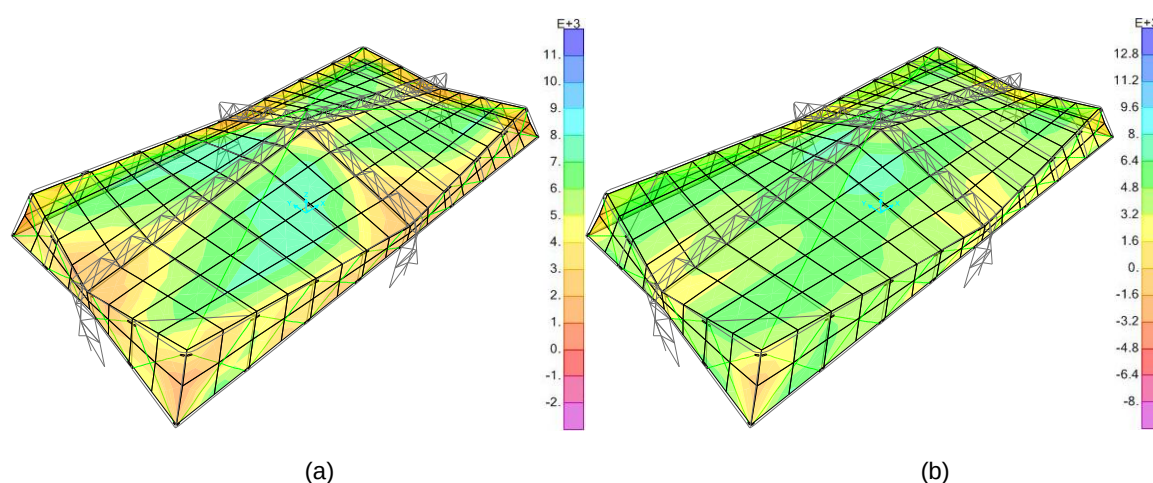


Figura 5.119 – Tensões da membrana sob as ações permanentes e a ação da componente média da velocidade do vento em pressão: (a) Direção do urdume e (b) Direção da trama [N/m]

Em geral, nas vigas treliçadas, o banzo superior está comprimido e o inferior está tracionado devido à ação global predominantemente descendente (ver a Figura 5.120 (b)), efeito semelhante ao da ação quase-estática do vento. O esforço de tração máximo é igual a $269kN$ e ocorre na secção 40, no topo do pilar do pórtico menor, e o esforço de compressão máximo é igual a $-384kN$ e ocorre na secção 841 no topo da cobertura.

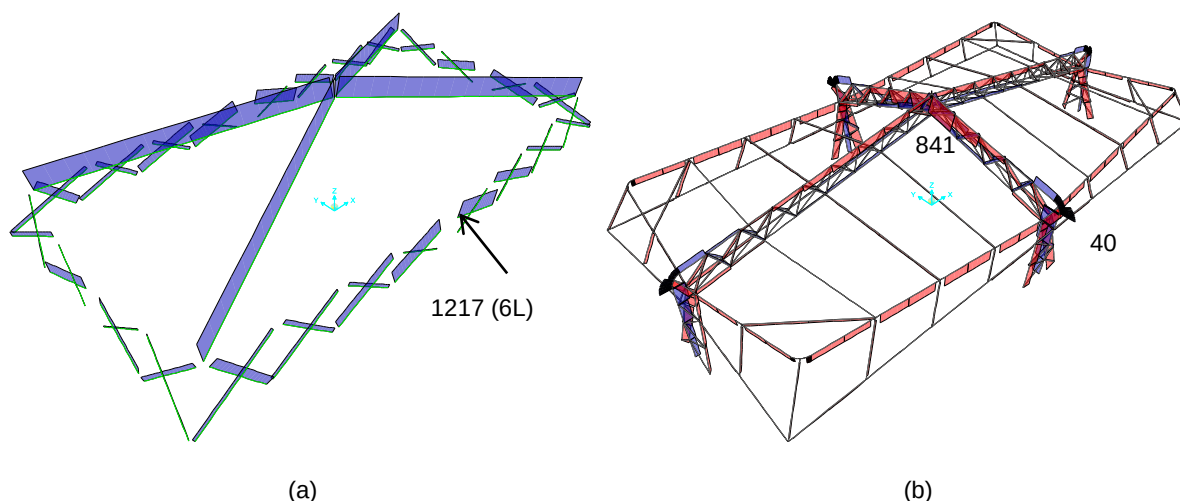


Figura 5.120 – Esforço axial na estrutura de cobertura sob as ações permanentes e a ação da componente média da velocidade do vento em pressão: (a) Cabos e (b) Secções tubulares

(ii) Análise modal

A modelação em elementos finitos realizada no decorrer deste trabalho permitiu avaliar as características dinâmicas da estrutura. As frequências naturais obtidas são sistematizadas na Tabela 5.57, nomeadamente os valores das primeiras 6 frequências naturais e respetiva caracterização do tipo de configuração modal. A Figura 5.121. apresenta as frequências naturais e os respetivos fatores de participação modal nas direções cartesianas.

Da presente análise verifica-se, em primeiro lugar, que a estrutura de membrana responde com vários modos de vibração para frequências abaixo de $5Hz$, embora menos do que na posição de equilíbrio, e com frequências próximas. Em geral houve um aumento das frequências naturais a partir da posição estática sob as ações permanentes devido ao aumento da rigidez da membrana, dado que a rigidez da membrana depende da tensão aplicada no plano da membrana, para além do pré-esforço e da própria geometria.

Em termos globais, os 6 primeiros modos de vibração têm aparentemente uma participação elevada da estrutura metálica, com base nas configurações modais apresentadas na Figura 5.122. O primeiro e segundo modos apresentam uma configuração semelhante aos da posição estática. O primeiro modo corresponde ao primeiro antissimétrico em relação a x ($1AS_x$), e o segundo modo ao primeiro antissimétrico em relação a y ($1AS_y$). Em termos de análise da membrana ao nível dos quadrantes, analogamente à análise realizada anteriormente, verifica-se que a membrana apresenta o 1^o modo simétrico ($1S$), quer no primeiro modo, quer no segundo modo.

Tabela 5.57 – Frequências naturais e respectivas configurações modais referentes aos 6 primeiros modos de vibração sob as ações permanentes e a ação da componente média da velocidade do vento em pressão

Nº modo	n (Hz)	Configuração modal	
		Globalmente	Quadrantes
1	3,18	1ASx com deslocamento horizontal do pórtico menor na direção y	1S
2	3,89	1ASy com deslocamento horizontal do pórtico maior na direção x	1S
3	4,35	1ASxy com flexão dos painéis laterais	1ASx'
4	4,41	1ASxy com levantamento antissimétrico (xy) das 4 consolas	1ASx''
5	4,62	1ASx com flexão dos painéis laterais	1ASx''
6	4,78	1S com levantamento simétrico das 4 consolas	1S

O modo 3 corresponde ao 1AS em relação a x e y com flexão dos painéis laterais. Em termos de análise da membrana ao nível dos quadrantes, verifica-se que a membrana apresenta o 1AS em relação a x'. Por sua vez, o modo 4 corresponde ao 1AS em relação a x e y com levantamento antissimétrico em relação a x e y das 4 consolas. Em termos de análise da membrana ao nível dos quadrantes, verifica-se que a membrana apresenta o 1AS em relação a x''.

O modo 5 corresponde ao 1AS em relação a x com flexão dos painéis laterais. Em termos de análise da membrana ao nível dos quadrantes, verifica-se que a membrana apresenta o 1AS em relação a x'. Por sua vez, o modo 6 corresponde ao 1S com levantamento simétrico das 4 consolas. Em termos de análise da membrana ao nível dos quadrantes, verifica-se que a membrana apresenta o 1S.

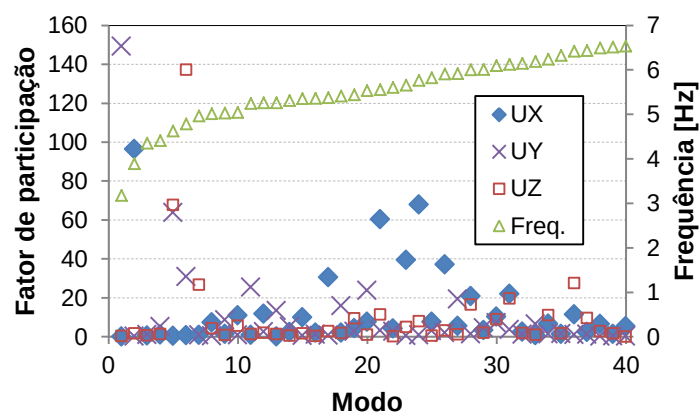


Figura 5.121 – Frequências naturais e fatores de participação modal da estrutura sob as ações permanentes e a ação da componente média da velocidade do vento em pressão

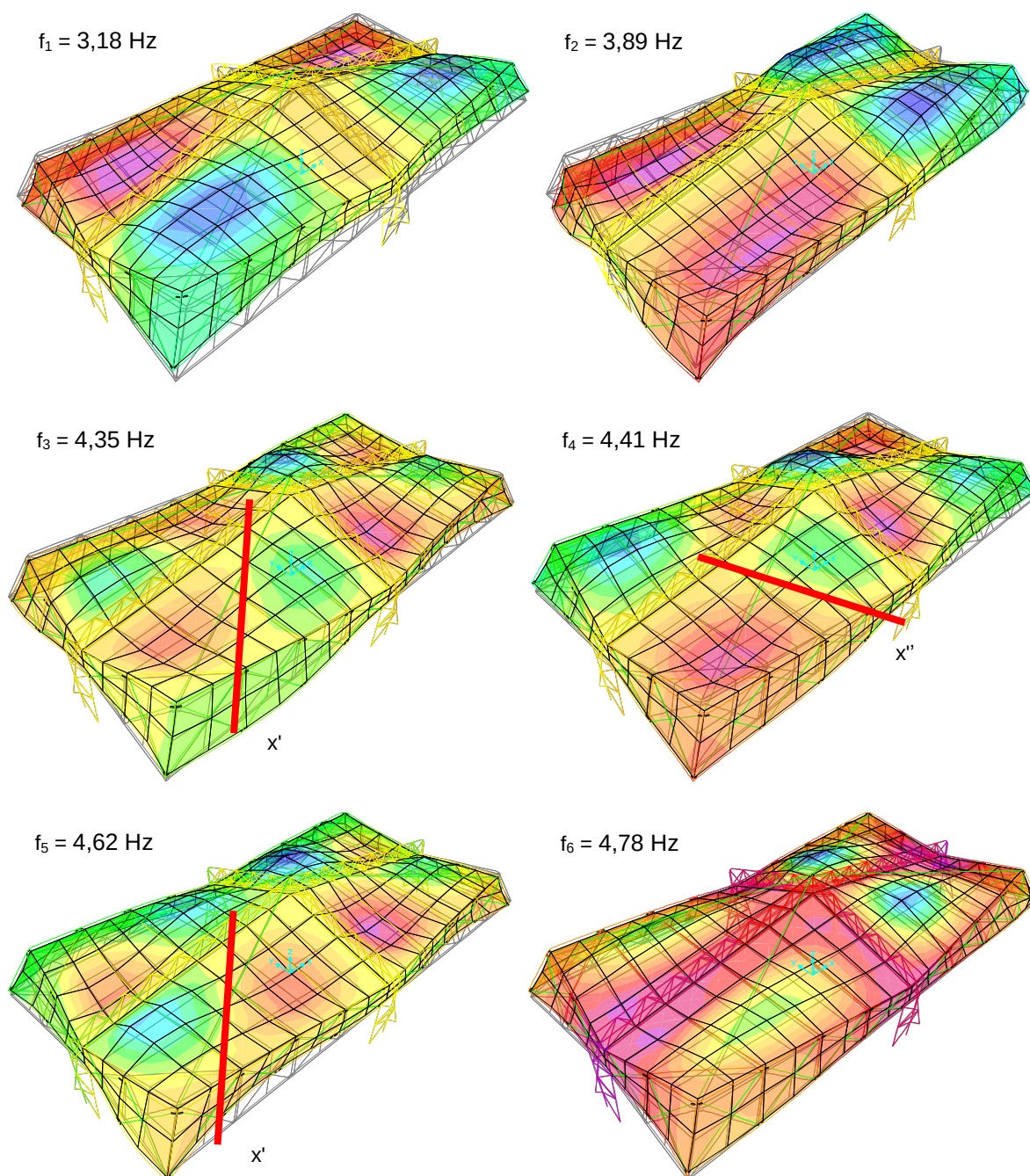


Figura 5.122 – Configurações modais dos modos 1 a 6 sob as ações permanentes e a ação da componente média da velocidade do vento em pressão

Massa aerodinâmica, análise modal e amortecimento

As frequências naturais de estruturas tensas são geralmente mais baixas do que nas estruturas convencionais de vão similar devido, principalmente, à baixa rigidez e ao efeito da massa do ar que envolve a membrana. Na prática, o elevado amortecimento viscoelástico do material de revestimento do tecido, em particular nas deformações cíclicas na direção do urdume, tem um efeito benéfico na resposta dinâmica da membrana à ação turbulenta do vento. Adicionalmente, existe amortecimento do

ar ou pneumático que, combinado com os efeitos anteriores, podem proporcionar o amortecimento crítico no caso de estruturas fechadas.

Tendo em vista a determinação da resposta da estrutura sob a ação turbulenta do vento através de uma análise dinâmica no domínio do tempo utilizando um modelo aeroelástico simplificado, pretende-se nesta secção quantificar a massa aerodinâmica, aplicando metodologias descritas na literatura, e avaliando o seu efeito no comportamento dinâmico da estrutura sujeita à ação da componente média do vento. De seguida, o amortecimento aerodinâmico é determinado com base na expressão do decremento logarítmico aerodinâmico apresentado na norma *EC1-Parte 1-4*, aplicando os parâmetros de caracterização da ação do vento quantificados na secção 5.6, e com base na massa equivalente obtida a partir das frequências e modos de vibração obtidos numa análise modal realizada à estrutura na configuração deformada da componente média da ação do vento considerando nessa análise modal a massa adicional estimada anteriormente. Finalmente, os coeficientes de amortecimento de Rayleigh α_0 e α_1 , respetivamente, coeficientes de amortecimento proporcional à massa e à rigidez, são determinados iterativamente com base em duas frequências e nos respetivos coeficientes de amortecimento calculados anteriormente até que sejam obtidos os coeficientes de amortecimento que melhor permitem caracterizar o amortecimento da estrutura para a gama de frequências de interesse.

A determinação da massa aerodinâmica não está regulamentada e a sua quantificação tem sido feita por diversos autores com base em formulações distintas aplicadas a casos particulares, e de uma forma geral, utilizando modelos numéricos, ou modelos reduzidos em túnel de vento, carecendo de validações experimentais à escala real. Por esse motivo, optou-se por determinar a massa aerodinâmica recorrendo a duas vias distintas, de acordo com formulações publicadas em artigos científicos, e de seguida avaliar a sua influência no comportamento dinâmico da estrutura sob ação da componente média do vento. A primeira via consiste em considerar uma massa adicional igual à massa da membrana seguindo os estudos experimentais de Sun *et al.* (2008). A segunda via consiste na determinação da massa de acordo com a formulação de Minami (1998), segundo o qual (ver a equação (4.17)) a massa aerodinâmica é equivalente à massa de ar uniformemente distribuída ao longo da membrana com uma altura estimada de 68% do comprimento da membrana, não dependendo, portanto, da frequência de vibração e da respetiva amplitude de vibração. De acordo, estima-se uma massa aerodinâmica para o módulo superior e lateral respetivamente de valor igual a 8,5 e 2,55 kg/m². Estes valores de massa aerodinâmica enquadram-se nos valores estimados em estudos numéricos recentes (Alsofi *et al.* 2015) para estruturas de membrana apresentando dimensões semelhantes.

As frequências naturais da estrutura obtidas através de uma análise modal realizada com base na rigidez da estrutura sob atuação das cargas permanentes, da ação da componente média da velocidade do vento e considerando a massa adicional obtida com base nas duas metodologias descritas anteriormente são apresentadas na Figura 5.123. A Tabela 5.58 apresenta as frequências naturais organizadas por configurações modais com participação modal semelhante dos elementos estruturais e de acordo com os 3 primeiros modos de vibração da estrutura global sob a ação das cargas permanentes mostrados anteriormente na Figura 5.111. É de salientar que o efeito do aumento das frequências naturais da configuração estática da estrutura para a configuração deformada da estrutura sob ação da componente média da ação do vento devido ao aumento da rigidez da estrutura é praticamente anulado considerando o efeito da massa adicional de membrana segundo a metodologia de Sun *et al.* (2008), isto é, considerando a massa adicional de valor igual à massa da membrana. Esta metodologia conduz a uma diminuição crescente das frequências respetivamente igual a -4%, -10% e -14% para os 3 primeiros modos de vibração equivalentes.

Por sua vez, aplicando a metodologia de Minami (1998), a redução das frequências naturais é mais significativa, resultando em termos globais em frequências inferiores com vários modos a partir de

1,65Hz e abaixo de 2Hz, e, analisando os 3 primeiros modos de vibração equivalentes, a redução é respetivamente igual a -45%, -55% e -59%. É de referir que, apesar da incerteza quanto à validação da referida metodologia para a determinação da massa aerodinâmica, esta redução significativa das frequências da membrana é muito importante no contexto da interação fluido-membrana, tendo em conta que a estrutura de membrana passou a ser caracterizada com frequências naturais mais baixas e próximas da gama de frequências em que a energia de excitação do vento é elevada, aproximadamente entre 0,5 e 1,5Hz. Com efeito, este tópico carece de um estudo mais aprofundado em estudos futuros sustentada por uma validação experimental dada a importância que este representa na resposta da membrana sob à ação do vento, optando-se por utilizar uma massa aerodinâmica de acordo com os estudos de Sun *et al.* (2008).

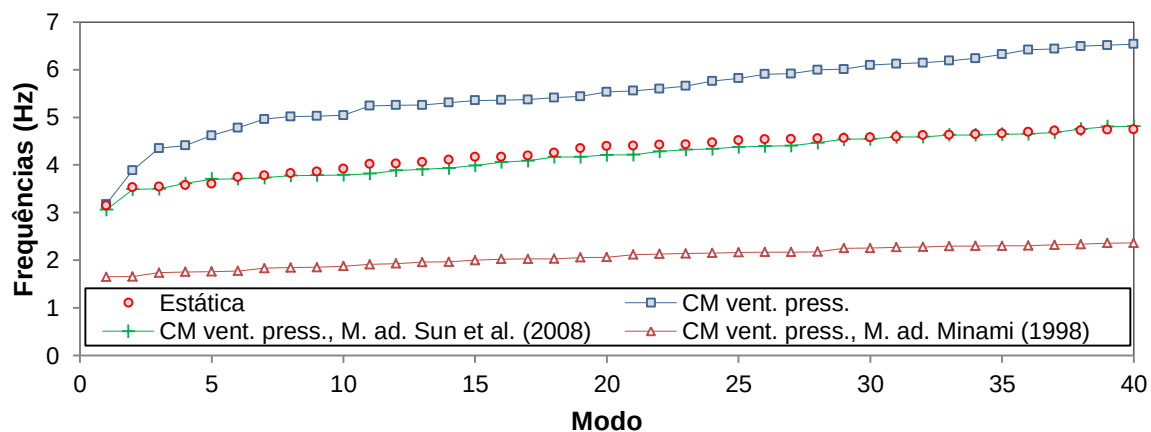


Figura 5.123 – Influência da massa aerodinâmica nas frequências naturais da estrutura sob efeito da velocidade do vento em pressão em termos globais

Tabela 5.58 – Influência da massa aerodinâmica nas frequências naturais da estrutura sob efeito da velocidade do vento em pressão em modos de vibração equivalentes

Nº modo	Estática	CM vent. press.	CM vent. press., M. ad. Sun et al. (2008)	CM vent. press., M. ad. Minami (1998)
		(1)	(2)	(3)
		$\frac{(2) - (1)}{(1)} \times 100$		$\frac{(3) - (1)}{(1)} \times 100$
		(Hz)	(Hz)	(Hz)
1	3,149	3,177	3,058	-4
2	3,527	3,886	3,487	-10
3	3,546	4,350	3,731	-14

As frequências naturais obtidas na análise modal realizada com base na configuração deformada da estrutura sob a ação da componente média do vento e considerando a massa aerodinâmica, de valor igual à massa da membrana (Sun *et al.* 2008), são apresentadas na Figura 5.124, assim como os respetivos fatores de participação modal nas direções cartesianas.

Da presente análise verifica-se, em primeiro lugar, que a estrutura de membrana responde com vários modos de vibração para frequências abaixo de 5Hz, à semelhança da posição de equilíbrio, e com frequências próximas. Em geral houve uma ligeira diminuição das frequências naturais a partir da posição estática, devido ao efeito da massa aerodinâmica que, como referido anteriormente, praticamente anula o efeito do aumento da rigidez nas frequências naturais (ver a Figura 5.123) da estrutura sob a ação da componente média do vento. Este efeito da diminuição das frequências é evidenciado na Figura 5.125 através da representação conjunta dos fatores de hibridização na configuração estática e sob ação da componente média do vento considerando a massa adicional, em particular a partir de frequências de 15Hz. Adicionalmente, destaca-se um maior número de modos de vibração com significativa interação membrana-estrutura, e um menor número de modos com baixa participação da membrana, interação potenciada pelo aumento da massa e da rigidez da membrana.

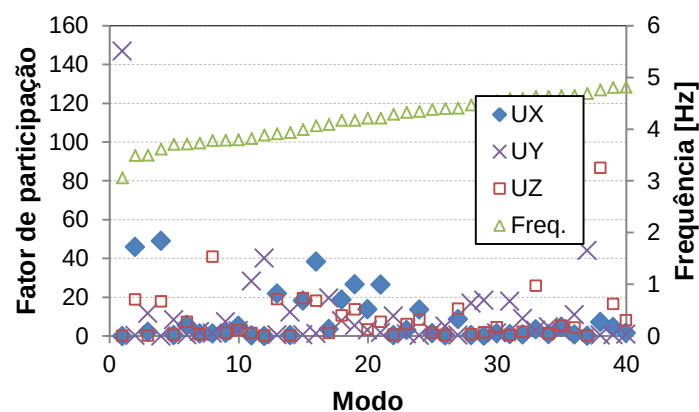


Figura 5.124 – Frequências naturais e fatores de participação modal da estrutura sob as ações permanentes, a ação da componente média da velocidade do vento em pressão e da massa adicional

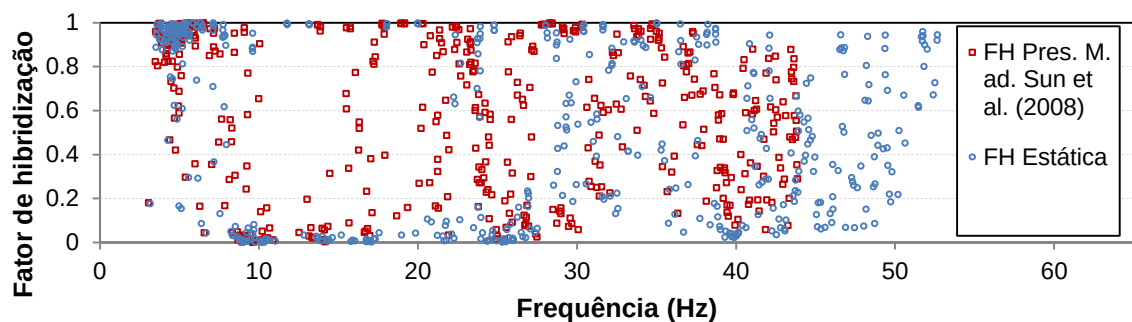


Figura 5.125 – Fatores de hibridização da estrutura na configuração estática e sob ação da componente média do vento em pressão considerando a massa adicional

As frequências naturais obtidas são sistematizadas na Tabela 5.59, nomeadamente os valores das primeiras 4 frequências naturais e respetiva caracterização do tipo de configuração modal. As configurações modais são apresentadas na Figura 5.126. Em termos globais, os 4 primeiros modos de vibração apresentam uma interação membrana-estrutura significativa com fatores de hibridização respetivamente iguais a 0,18, 0,82, 0,96 e 0,80. É de salientar a influência da ação da componente média da velocidade do vento nas configurações modais, em particular no 2º e 4º modo de vibração,

traduzida pela participação elevada da estrutura metálica na direção do vento, U_x . É de destacar que a elevada interação potencia a participação da estrutura metálica na direção vertical, U_z , em ambos os modos de vibração, em comparação com o modo homólogo, quer na posição estática, quer sob a ação da componente média apresentados anteriormente.

Tabela 5.59 – Frequências naturais e respetivas configurações modais referentes aos 4 primeiros modos de vibração sob as ações permanentes, a ação da componente média da velocidade do vento em pressão e da massa adicional

Nº modo	n (Hz)	Configuração modal	
		Globalmente	Quadrantes
1	3,06	1ASx com deslocamento horizontal do pórtico menor na direção y	1S
2	3,49	1ASy com deslocamento horizontal do pórtico maior na direção x	1S
3	3,50	1ASxy com flexão dos painéis laterais	1AS
4	3,61	1ASy com deslocamento horizontal do pórtico maior na direção x	1AS

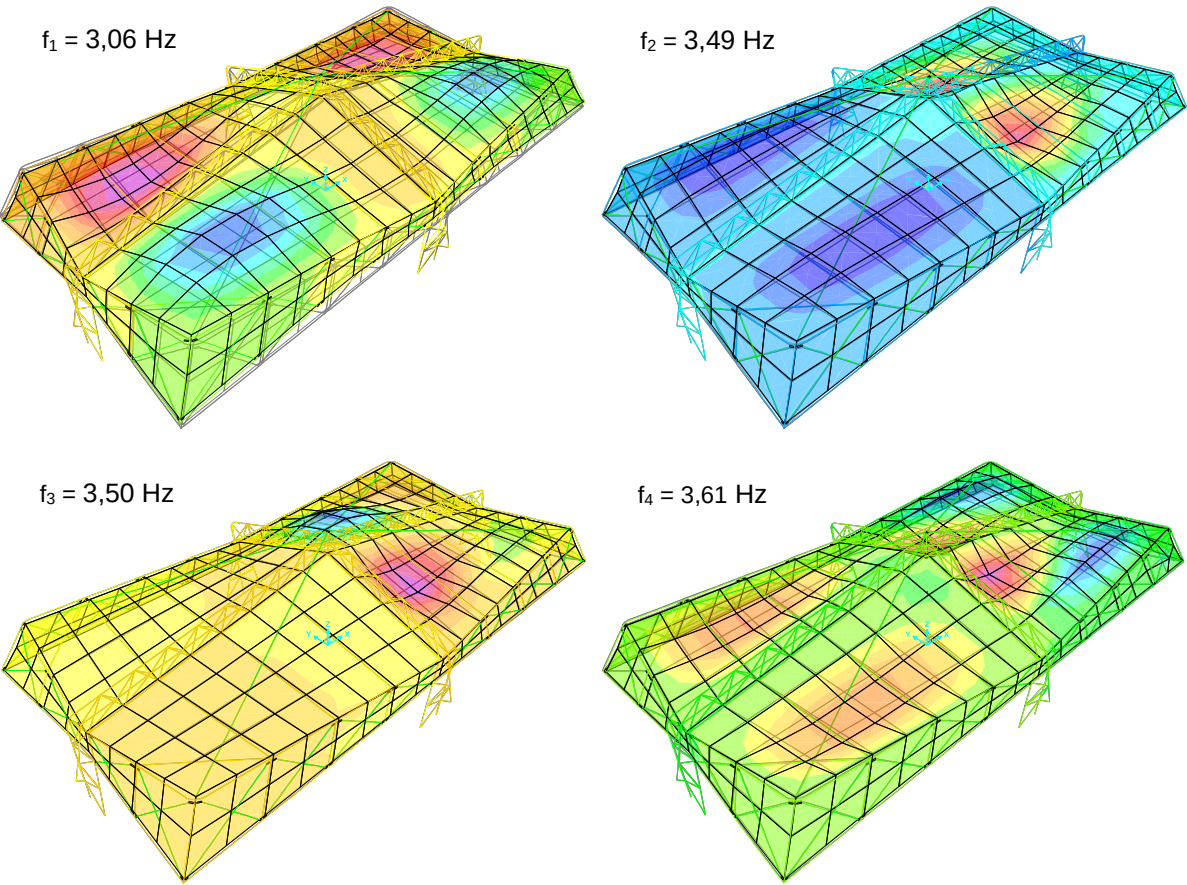


Figura 5.126 – Configurações modais dos modos 1 a 4 sob as ações permanentes, a ação da componente média da velocidade do vento em pressão e da massa adicional

O primeiro e segundo modos apresentam uma configuração semelhante aos da posição estática. O primeiro modo corresponde ao primeiro antissimétrico em relação a x ($1AS_x$) com deslocamento horizontal do pórtico menor na direção y , e o segundo modo ao primeiro antissimétrico em relação a y ($1AS_y$) com deslocamento horizontal do pórtico maior na direção x . Em termos de análise da membrana ao nível dos quadrantes, analogamente à análise realizada anteriormente, verifica-se que a membrana apresenta o 1º modo simétrico ($1S$), quer no primeiro modo, quer no segundo modo. No entanto, no segundo modo apresentam formas distintas nos módulos de membrana a barlavento e a sotavento, devido ao nível de tensões distinto e referido anteriormente na análise estática (ver a Figura 5.119) que conduzem a rigidezes diferentes da membrana. Este comportamento é originado pelos coeficientes de pressão resultante apresentando valores superiores a barlavento (ver a Figura 5.88).

O modo 3 corresponde ao $1AS$ em relação a x e y com flexão dos painéis laterais. Em termos de análise da membrana ao nível dos quadrantes, verifica-se que a membrana apresenta o $1AS$, apresentando formas diferentes nos módulos de membrana a barlavento e a sotavento, pelo mesmo motivo apresentado anteriormente. Por sua vez, o modo 4 corresponde ao $1AS$ em relação a y com deslocamento horizontal do pórtico maior na direção x . Em termos de análise da membrana ao nível dos quadrantes, verifica-se que a membrana apresenta o $1AS$ apresentando formas diferentes a barlavento e a sotavento, embora a barlavento seja pouco perceptível dado que a linha nodal se encontra muito próxima do topo da cobertura, conduzindo a duas regiões antissimétricas com áreas muito diferentes, e cuja discretização estrutural não permite evidenciar.

Tendo sido realizada a caracterização dinâmica da estrutura através da análise modal, pretende-se de seguida quantificar o amortecimento com base nos parâmetros entretanto estimados. O decremento logarítmico do amortecimento aerodinâmico da membrana é determinado com base na expressão da norma *EC1-Parte 1-4*, traduzida por

$$\delta_a = \frac{c_f \rho v_m(z_s)}{2n_1 \mu_e} \quad (5.50)$$

em que c_f é o coeficiente de força para a ação do vento na direção deste, ρ é a massa volúmica do ar, $v_m(z_s)$ é a velocidade média à altura de referência z_s , n_1 é a frequência da estrutura e μ_e é a massa equivalente por unidade de área de construção. No presente caso, aplicou-se o coeficiente de pressão médio na superfície da membrana, $c_f = c_{p \text{ médio}} = 0,47$ e a velocidade média na superfície de membrana, $v_m = 24,84 \text{ m/s}$. A massa equivalente μ_e é traduzida por

$$\mu_e = \frac{\int_0^h \int_0^b \mu(y, z) \phi_1^2(y, z) dy dz}{\int_0^h \int_0^b \phi_1^2(y, z) dy dz} \quad (5.51)$$

em que $\mu(y, z)$ é a massa por unidade de área de construção e ϕ_1 é a configuração do modo de vibração. No presente caso, e com base na expressão (5.51), foi determinada a massa equivalente da estrutura global através de

$$\mu_{ei} = \frac{\phi_i^T M \phi_i}{\phi_i^T \phi_i} \quad (5.52)$$

e, no sentido de complementar a análise, quantificou-se adicionalmente a contribuição da membrana para a massa equivalente da estrutura global através de

$$\mu_{ei} = \frac{(R_j \phi_i)^T M (R_j \phi_i)}{\phi_i^T \phi_i} \quad (5.53)$$

em que ϕ_i é o i -ésimo modo de vibração, M é a matriz de massa do modelo e R_j é uma matriz diagonal de zeros e uns que permite a seleção dos j -ésimos graus de liberdade da membrana. A Tabela 5.60 apresenta a massa equivalente obtida, evidenciando-se que de facto a massa da membrana tem uma contribuição importante para a massa equivalente global da estrutura de cobertura na gama de frequências naturais apresentadas entre 3 a 4Hz.

Os coeficientes aerodinâmicos da membrana e da estrutura global são apresentados na Tabela 5.60, observando-se que a membrana apresenta um valor de 8% no primeiro modo, decrescendo significativamente para os modos seguintes para valores médios de 2,3%, na gama de frequências apresentada. Por sua vez, o coeficiente de amortecimento aerodinâmico da estrutura global decresce em média na gama de frequências apresentada, apresentando um valor médio de 2,1%.

O coeficiente de amortecimento estrutural considera-se igual a 2%, dado que o manual europeu de estruturas de membrana baliza este valor entre 1,5% e 3%, conduzindo a valores de coeficientes de amortecimento total médios de aproximadamente 4% para a gama de frequências apresentadas. A Figura 5.127 apresenta os coeficientes de amortecimento calculados até uma frequência de 10Hz, sobre os quais é realizado um ajustamento iterativo para determinar os coeficientes de amortecimento de Rayleigh α_0 e α_1 , respetivamente, coeficientes de amortecimento proporcionais à massa e à rigidez, com base em duas frequências e nos respetivos coeficientes de amortecimento calculados anteriormente. O valor destes coeficientes que melhor permite caracterizar o amortecimento da estrutura é estimado com base nas frequências de 3,73 e 7,23Hz, e respetivos coeficientes de amortecimento de 4% e 3,6%, resultando em $\alpha_0 = 1,326$ e $\alpha_1 = 9,631 \cdot 10^{-4}$.

Tabela 5.60 – Massa equivalente e amortecimento da estrutura sob efeito da velocidade do vento em pressão

Modo	Freq.	Massa equivalente		Amortecimento aerodinâmico				Amortecimento total	
				Membrana		Global		Global	
		$\mu_{e\text{memb.}}$	$\mu_{e\text{global}}$	$\delta_{a\text{memb.}}$	$\xi_{a\text{memb.}}$	$\delta_{a\text{global}}$	$\xi_{a\text{global}}$	ξ_t	$\xi_{t\text{Rayleigh}}$
	(Hz)	(kg)	(kg)						
1	3,06	5	27	0,4995	0,0795	0,0900	0,0143	0,0343	0,0438
2	3,49	14	18	0,1452	0,0231	0,1195	0,0190	0,0390	0,0408
3	3,50	16	17	0,1288	0,0205	0,1236	0,0197	0,0397	0,0408
4	3,61	14	17	0,1473	0,0234	0,1184	0,0188	0,0388	0,0401
5	3,70	11	11	0,1804	0,0287	0,1789	0,0285	0,0485	0,0397
6	3,71	11	11	0,1792	0,0285	0,1786	0,0284	0,0484	0,0397
7	3,73	15	16	0,1298	0,0207	0,1230	0,0196	0,0396	0,0396
8	3,78	16	16	0,1236	0,0197	0,1216	0,0194	0,0394	0,0394
9	3,78	12	12	0,1659	0,0264	0,1644	0,0262	0,0462	0,0393
10	3,79	11	11	0,1705	0,0271	0,1701	0,0271	0,0471	0,0393
11	3,82	15	16	0,1310	0,0209	0,1213	0,0193	0,0393	0,0392
12	3,88	15	16	0,1253	0,0199	0,1139	0,0181	0,0381	0,0389
13	3,91	16	17	0,1194	0,0190	0,1125	0,0179	0,0379	0,0388
14	3,93	15	16	0,1205	0,0192	0,1128	0,0180	0,0380	0,0387
15	3,99	16	16	0,1162	0,0185	0,1118	0,0178	0,0378	0,0385

* O amortecimento total, ξ_t , é igual à soma do aerodinâmico, ξ_a , com o estrutural, ξ_s ; $\xi_s = 0,02$;

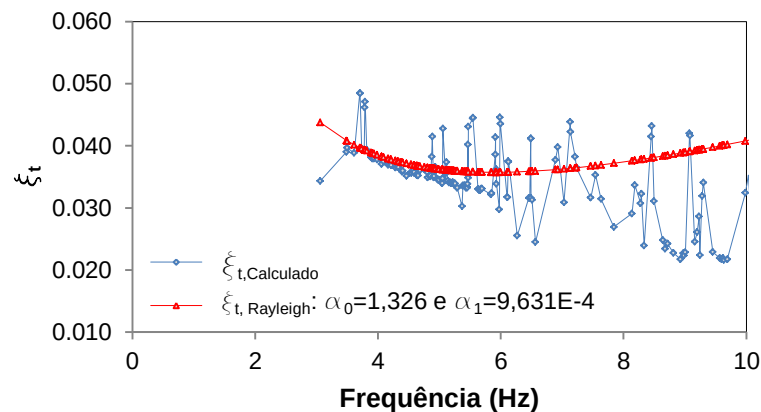


Figura 5.127 – Ajustamento dos coeficientes de amortecimento de Rayleigh ao amortecimento total calculado da estrutura sob efeito da velocidade do vento em pressão

Resposta da estrutura sob ação da componente turbulenta da velocidade do vento

A análise não-linear dinâmica no domínio do tempo dos efeitos de rajada induzidos pelo vento sobre a estrutura de cobertura em membrana tensa é realizada considerando a não-linearidade geométrica do sistema com grandes deslocamentos. A resposta estrutural aos efeitos de rajada é determinada com base na aplicação das forças aerodinâmicas determinadas na secção 5.6.5 para a direção do vento 0° e para o caso 2, isto é, ação de pressão exterior e sucção interior. A resposta temporal da estrutura é obtida por integração direta passo-a-passo da equação de equilíbrio dinâmico, aplicando o método de integração numérica de Newmark ($\alpha = 0,25$ e $\beta = 0,50$) com um tempo de integração igual a $0,005s$, e utilizando os coeficientes de amortecimento de Rayleigh determinados anteriormente.

A resposta dinâmica máxima, expressa em termos de deslocamentos em pontos localizados na membrana e na estrutura metálica, é comparada com a resposta calculada com base no método de análise quase-estático através do coeficiente de amplificação dinâmico R_{din} . Este coeficiente relaciona a resposta dinâmica da ação do vento com a da ação quase-estática do vento. Desta forma, avalia-se em que medida é conservativo o método de análise quase-estático proposto pelo *Eurocódigo 1* para a determinação da ação quase-estática do vento em estruturas de membrana. Adicionalmente, são determinadas as amplitudes de vibração e os respetivos espectros de potência, permitindo avaliar as frequências naturais e os respetivos modos de vibração com maior participação na resposta dinâmica.

No sentido de complementar a análise dinâmica aplicando o método de Newmark, foi determinada a resposta da estrutura aplicando o método da sobreposição modal, permitindo avaliar as diferenças e a aplicabilidade dos mesmos no cálculo de estruturas de cobertura em membrana tensa. Nesta análise, é utilizada a rigidez na configuração deformada da estrutura sob a ação da componente média da velocidade do vento em pressão; os coeficientes de amortecimento de Rayleigh quantificados anteriormente e utilizados na análise por integração direta; e 500 modos de vibração.

Começando pela resposta obtida ao nível da membrana, a Figura 5.128 (a) apresenta a evolução temporal do deslocamento do nó 13, verificando-se um deslocamento dinâmico máximo igual a $51,6cm$, inferior à resposta obtida com base na ação quase-estática do vento, resultando num coeficiente de amplificação dinâmico $R_{din} = 51,6/62,2 = 0,83$. A título de comparação, é apresentada a resposta obtida através da análise por sobreposição modal, verificando-se uma amplitude de resposta

menor, em comparação com a resposta por integração direta descrita anteriormente, e obtendo-se, no entanto, um deslocamento máximo ligeiramente superior. A resposta distinta obtida pelos dois métodos aplicando a mesma solicitação deve-se ao facto do método da sobreposição modal não atualizar a matriz de rigidez da estrutura à medida que esta se deforma sob a ação dinâmica do vento. Como a membrana se deforma significativamente, o estado de tensão também se altera, modificando consequentemente a rigidez da estrutura. Com efeito, a membrana apresenta um deslocamento máximo descendente ligeiramente superior na resposta obtida por sobreposição modal, e um deslocamento máximo ascendente superior na resposta obtida por integração direta.

A evolução temporal do deslocamento da membrana em função da velocidade do vento obtida pelos dois métodos, de acordo com a Figura 5.128 (b), permite evidenciar o efeito descrito anteriormente e destacar o comportamento não-linear geométrico da membrana. Para além disso, a evolução do deslocamento evidencia amplitudes de vibração mais significativas para velocidades do vento de aproximadamente 22m/s . A Figura 5.128 (c) mostra as amplitudes de vibração, apresentando máximos de aproximadamente 42m/s^2 .

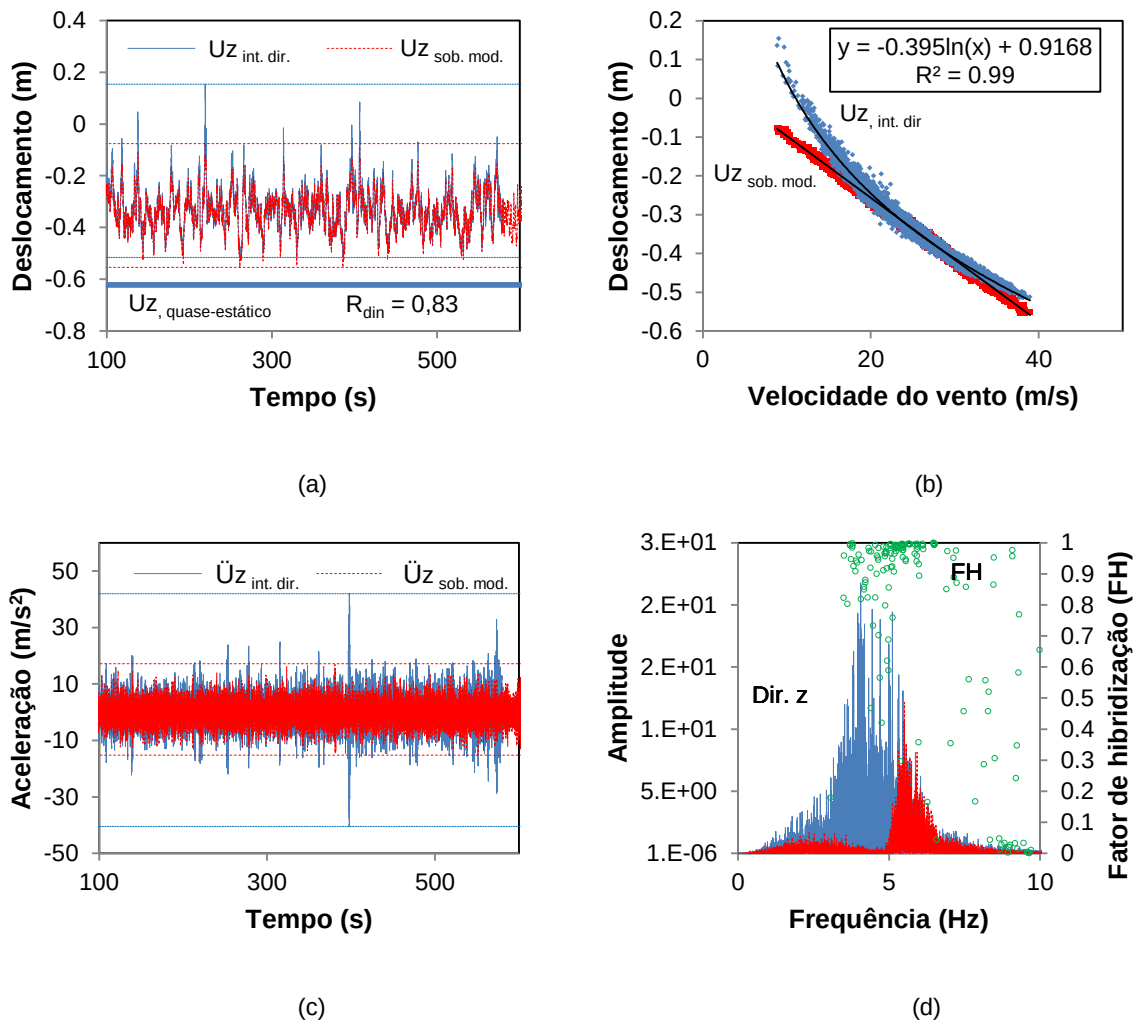


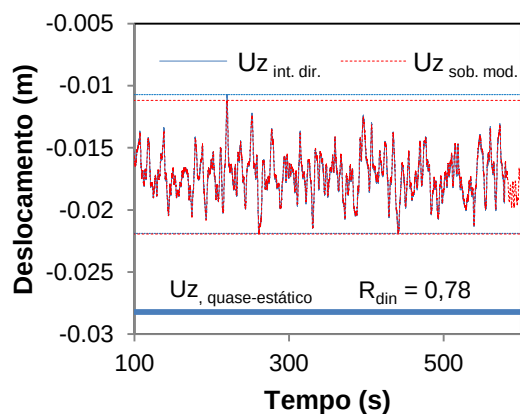
Figura 5.128 – Deslocamento vertical do nó 13 localizado na membrana por integração direta e por sobreposição modal: (a) Evolução temporal e (b) Evolução em função da velocidade do vento. (c) Evolução temporal da amplitude de vibração e (d) Espectro de potência

Apesar da resposta significativa da membrana, esta não envolve a participação de nenhum modo de vibração em particular, de acordo com o espectro de potência apresentado na Figura 5.128 (d). No entanto, a representação conjunta com os fatores de hibridização (FH) na Figura 5.128 (d) permite, de um modo geral, evidenciar uma elevada energia da resposta da estrutura numa gama de frequências naturais onde a participação da membrana é elevada (FH próximo de 1), e baixa energia em modos de vibração cuja participação da membrana é baixa (FH próximo de 0). Apesar de não haver participação de nenhum modo em particular, a resposta da membrana envolve uma energia considerável em modos de vibração apresentando fatores de hibridização intermédios, isto é, envolvendo interação membrana-estrutura significativa. É de salientar ainda que o espectro de potência obtido com base na resposta por integração direta apresenta uma área maior, e picos com maior energia, principalmente abaixo de 5Hz, gama de frequências onde se encontra a maioria dos modos de vibração da estrutura com participação significativa da membrana tensa. Este facto reforça a necessidade de se realizar uma análise dinâmica por integração direta para avaliar o comportamento de estruturas de membrana.

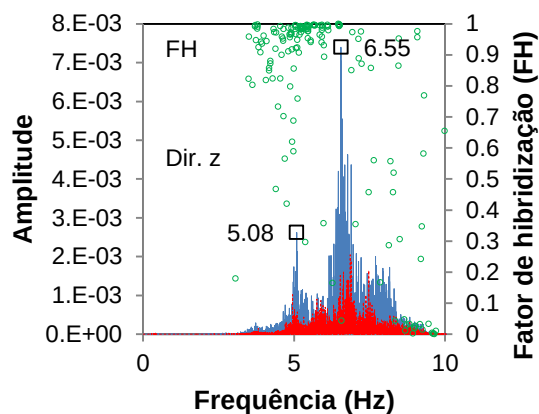
Em relação à resposta obtida ao nível da estrutura metálica, a Figura 5.129 (a) apresenta a evolução temporal do deslocamento vertical do nó 12 localizado no topo cobertura, verificando-se que a resposta dinâmica máxima é igual a 2,2cm, inferior à resposta obtida com base na ação quase-estática do vento, resultando num coeficiente de amplificação dinâmico $R_{din} = 0,78$. O espectro de potência apresentado na Figura 5.129 (b), determinado com base na amplitude de vibração respetivo (ver a Figura 5.130), permite identificar, por exemplo, a participação do modo de vibração com frequência de 6,55Hz, que consiste num modo de vibração de levantamento da parte central da cobertura com aproximação dos pilares. De um modo geral, a resposta em frequência evidencia elevada energia em modos de vibração cuja participação da membrana é elevada (FH próximo de 1).

A Figura 5.129 (c) apresenta a evolução temporal do deslocamento na direção y do nó 12 localizado no topo cobertura, verificando-se que a resposta dinâmica máxima é igual a 0,3cm, que é significativamente superior à resposta obtida com base na ação quase-estática do vento ($R_{din} = 11,82$). Este facto tem a ver com a ação dinâmica que, apesar de ser determinada com base na direção do vento a 0° , isto é, alinhada com x , as forças aerodinâmicas que atuam na estrutura têm uma componente na direção em y , nomeadamente resultante das pressões localizadas nos panos laterais da estrutura. Ora, atendendo a que as forças aerodinâmicas dependem da componente turbulenta da velocidade do vento, as forças aplicadas no painel lateral esquerdo vão ser distintas das forças aplicadas no painel lateral direito, conduzindo aos deslocamentos mais pronunciados da estrutura de cobertura transversalmente à direção do vento (na direção em y). Este efeito não acontece na simulação estática da ação do vento dado que as forças aerodinâmicas aplicadas nos painéis laterais são aproximadamente iguais, dada a simetria da estrutura, e anulam-se. O espectro da resposta permite identificar, por exemplo, a participação do modo de vibração com a frequência de 3,06Hz (ver a Figura 5.129 (d)), a primeira frequência da estrutura, correspondente a uma configuração modal caracterizada como o 1ASx com deslocamento horizontal do pórtico menor na direção y , cujo fator de participação modal na direção y apresenta o valor máximo, de entre os modos representados na análise modal (ver a Figura 5.124 e a Figura 5.126).

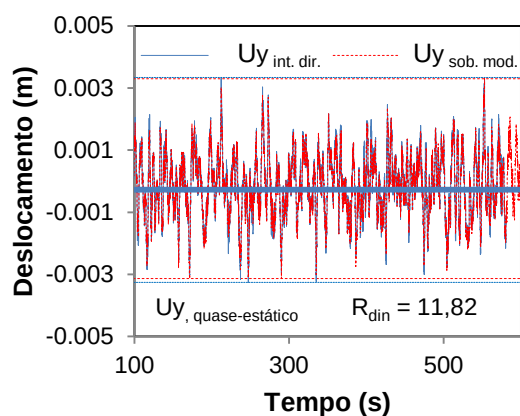
Por sua vez, a evolução temporal do deslocamento na direção x do nó 12 localizado no topo cobertura, de acordo com a Figura 5.129 (e), permite identificar uma resposta dinâmica máxima igual a 0,26cm, superior à resposta obtida com base na ação quase-estática do vento, resultando num coeficiente de amplificação dinâmico $R_{din} = 1,11$. O espectro da resposta permite identificar, por exemplo, a participação do modo de vibração com a frequência de 4,06Hz (ver a Figura 5.129 (f)), que coincide com uma frequência da estrutura apresentando um fator de participação modal elevado na direção x e uma elevada interação ($FH = 0,82$).



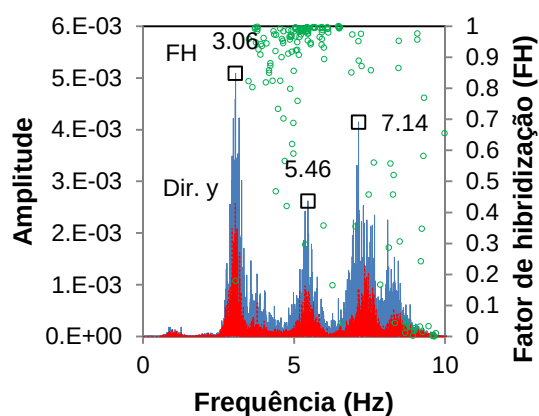
(a)



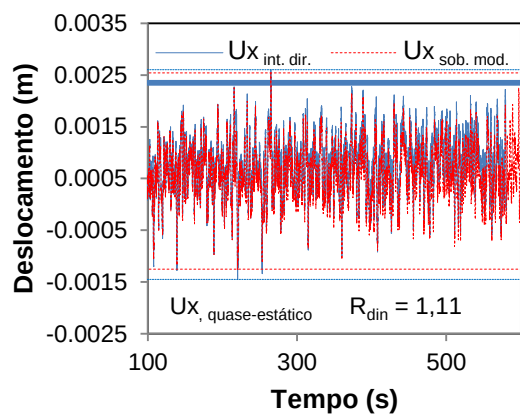
(b)



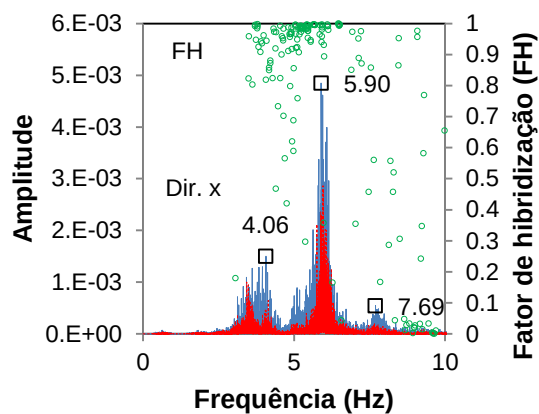
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 5.129 – Deslocamento do nó 12 localizado na estrutura metálica no topo da cobertura por integração direta e por sobreposição modal: (a) Evolução temporal na direção z; (b) Espectro de potência na direção z; (c) Evolução temporal na direção y; (d) Espectro de potência na direção y; (e) Evolução temporal na direção x e (f) Espectro de potência na direção x

A Figura 5.130 apresenta a evolução temporal das amplitudes de vibração no topo da estrutura metálica, no nó 12, nas direções x , y e z , apresentando valores máximos, respectivamente, de $0,22$, $0,34$ e $0,29\text{m/s}^2$, muito menos significativos do que na estrutura de membrana.

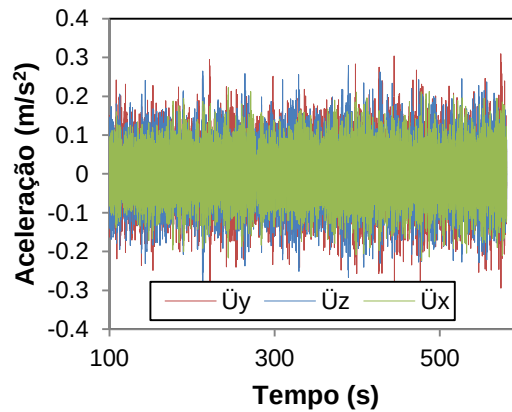


Figura 5.130 – Evolução das amplitudes de vibração no nó 12 no topo da estrutura metálica

A evolução temporal da amplitude de vibração vertical do nó 615 localizado no nó livre da consola da cobertura, como mostra a Figura 5.131 (a), permite determinar valores máximos de $0,89\text{m/s}^2$, sendo mais importantes do que no topo da cobertura. O espectro de potência apresentado na Figura 5.131 (b) permite identificar, por exemplo, a participação do modo de vibração com a frequência natural de $4,39\text{Hz}$ (ver a Figura 5.129 (f)), cuja configuração modal conduz ao levantamento antissimétrico das 4 consolas, e que, apesar de não apresentar fatores de participação modal elevados, apresenta elevada interação ($FH = 0,47$).

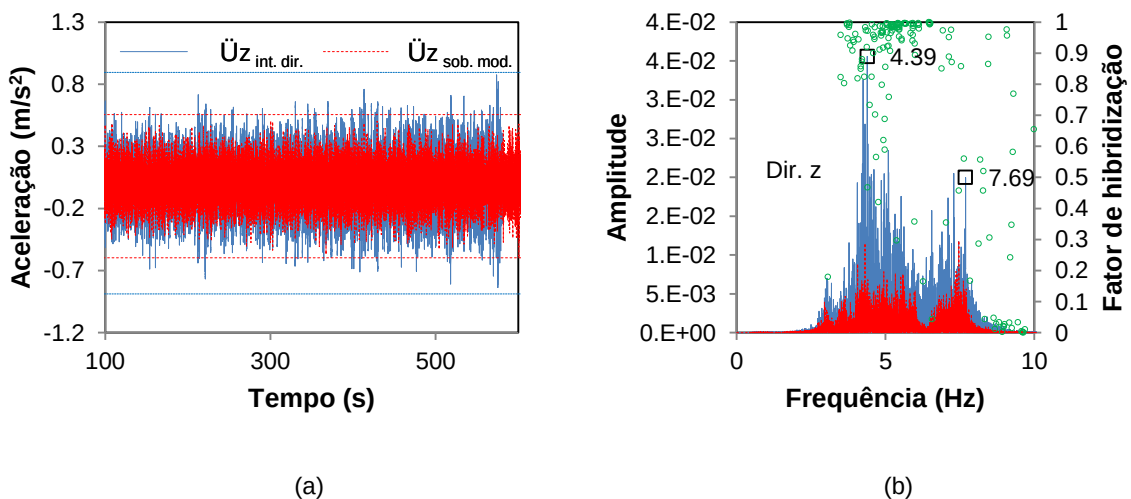


Figura 5.131 – Amplitude de vibração vertical do nó 615 localizado na consola da estrutura metálica por integração direta e por sobreposição modal: (a) Evolução temporal e (b) Espectro de potência

5.7.4. RESPOSTA DO MODELO ÀS AÇÕES PERMANENTES E À AÇÃO DO VENTO EM SUCÇÃO

A resposta do modelo sob as ações permanentes e a ação do vento em sucção é apresentada nesta secção de forma análoga à apresentada anteriormente para a ação do vento em pressão na secção 5.7.3. No sentido de simular a resposta da estrutura de forma mais realista às ações de vento em sucção, o modelo numérico utilizado anteriormente foi alterado de forma a impedir o levantamento da membrana acima das vigas de ligação entre os pórticos principais e os painéis laterais, através da compatibilização de deslocamentos verticais entre os nós da membrana e as referidas vigas de ligação.

5.7.4.1. Análise não-linear geométrica da ação quase-estática da ação do vento segundo EC1-Parte 1-4

A análise estática do modelo sob as ações permanentes e da ação quase-estática do vento é realizada tendo por base uma análise não-linear geométrica considerando grandes deslocamentos, através do método de Newton Raphson. A análise é faseada, sendo determinada primeiro a resposta do modelo sob as ações permanentes e solicitando de seguida a estrutura à ação quase-estática do vento. A ação quase-estática do vento baseia-se nas forças obtidas na secção 5.6.4 de acordo com a norma *EC1-Parte 1-4*, segundo a direção do vento 0° e para o caso 1, isto é, ação de sucção exterior e pressão interior.

A Figura 5.132 apresenta a deformada da estrutura sob as ações permanentes e a ação quase-estática do vento, com destaque dos deslocamentos verticais, evidenciando deslocamentos máximos verticais da membrana de $62,5\text{cm}$ (nó 85). No caso da estrutura metálica, o topo da cobertura (nó 12) apresenta um deslocamento máximo ascendente de $1,7\text{cm}$, na direção x de $0,39\text{cm}$ e na direção y de $0,02\text{cm}$, e o nó livre da consola (nó 615) apresenta um deslocamento máximo ascendente de $4,4\text{cm}$.

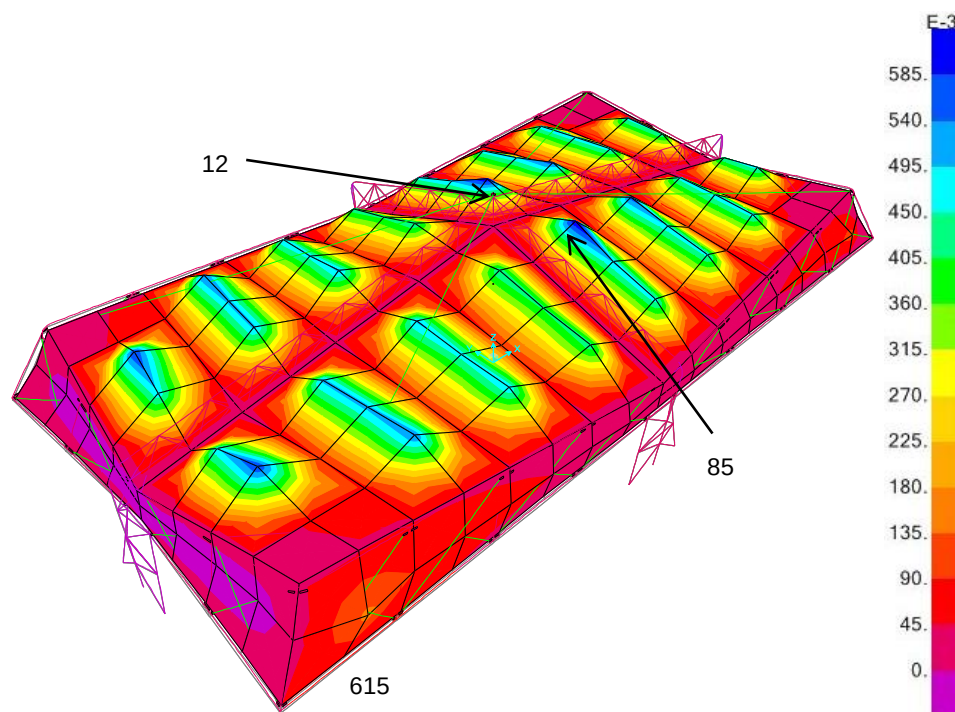


Figura 5.132 – Deformada da estrutura sob as ações permanentes e da ação quase-estática do vento em sucção, com destaque dos deslocamentos verticais, ampliada 3x [m]

As tensões da membrana na direção do urdume apresentam um valor máximo de $16,0\text{kN/m}$, como por exemplo no elemento de casca 67 próximo do topo da cobertura (ver a Figura 5.133 (a)), e na direção da trama um valor máximo de $21,4\text{kN/m}$ no elemento 67, não cumprindo a tensão admissível de 16kN/m (ver a Figura 5.133 (b)).

A Tabela 5.61 apresenta as reações globais sob as ações permanentes e a ação quase-estática do vento, verificando-se que a ação quase estática do vento de sucção representa aproximadamente 268% do peso total da estrutura.

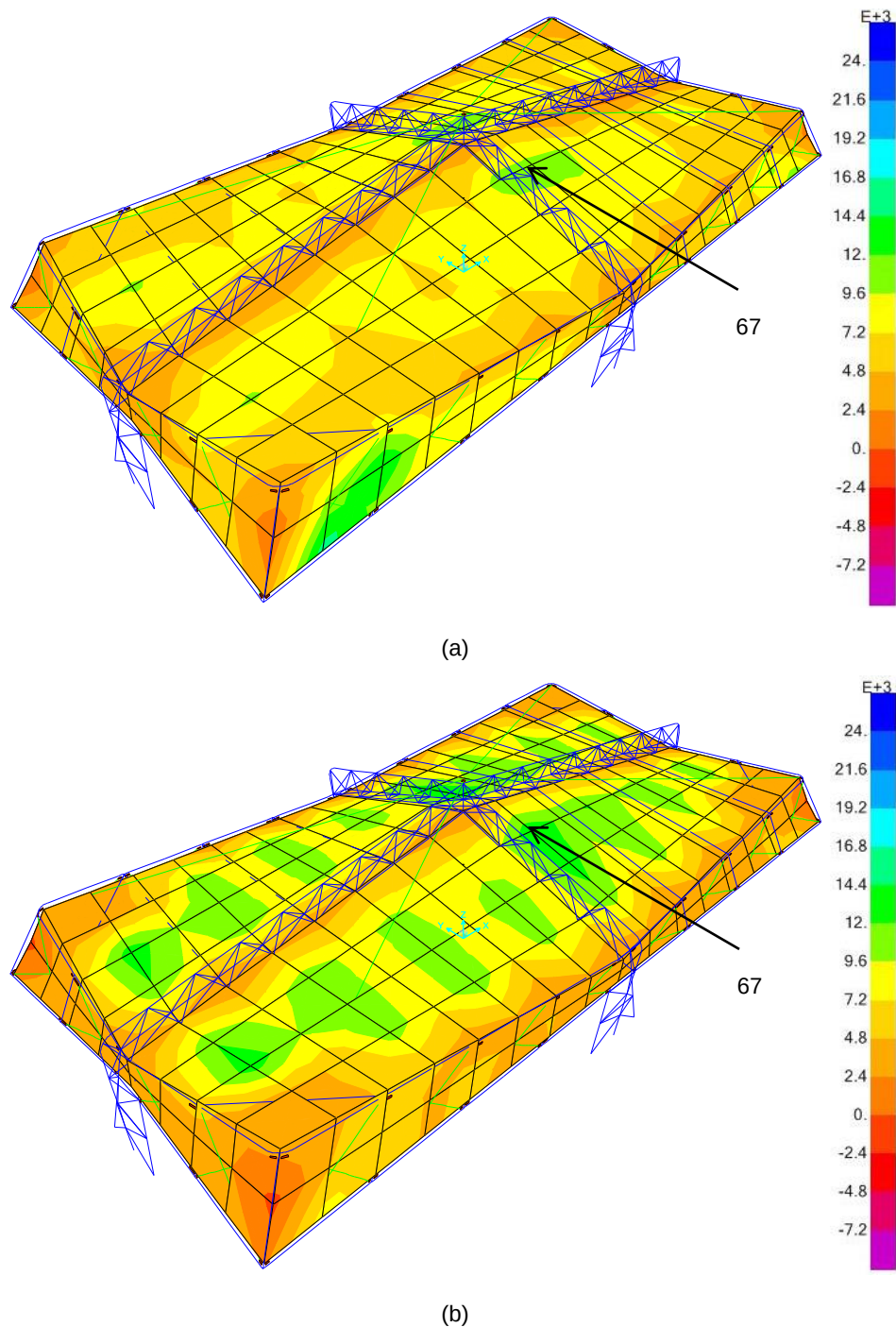


Figura 5.133 – Tensões da membrana sob as ações permanentes e da ação quase-estática do vento em sucção:
(a) Direção do urdume e (b) Direção da trama [N/m]

A Tabela 5.62 apresenta o esforço axial dos cabos, verificando-se em geral um efeito contrário ao analisado anteriormente para o caso da ação do vento em pressão, isto é, um aumento do esforço axial dos cabos *A* em relação ao da posição estática (cabos caracterizados por conduzir a um abaixamento da consola com o seu encurtamento) devido à ação quase-estática do vento ser predominantemente ascendente (ação de sucção exterior e pressão interior), efeito que conduz ao alongamento destes cabos e a um encurtamento dos cabos *L* com consequente perda de tensão. O esforço axial máximo é igual a *141,6kN* e verifica-se para o cabo *1174 (1A)* junto ao pilar do pórtico maior a barlavento (ver a Figura 5.134 (a)).

Em geral, nas vigas treliçadas, o banzo superior está tracionado e o inferior está comprimido devido à ação global predominantemente ascendente (ver a Figura 5.134 (b)). O esforço de tração máximo é igual a *379kN* e ocorre na secção *841*, no topo da cobertura, e o esforço de compressão máximo é igual a *-344kN* e ocorre na secção *984*, no topo do pilar do pórtico maior a barlavento.

Tabela 5.61 – Reações globais sob as ações permanentes e da ação quase-estática do vento em sucção

	Fx	Fy	Fz	$(Fz - F_{z_{est}}) / F_{z_{est}} * 100$
	(N)	(N)	(N)	(%)
Reações globais	-108189	16	-735453	-268%

Tabela 5.62 – Esforço axial nos cabos sob as ações permanentes e da ação quase-estática do vento em sucção [kN]

			Cabo 36					Cabo 25						
			1 L	2 L	3 L	4 L	5 L	6 L	1 A	2 A	3 A	4 A	5 A	6 A
Quadrante	1	37,1	1,5	2,0	0,8	7,2	2,9	2,0	141,6	65,8	58,3	8,7	81,0	130,9
	2	36,2	1,5	2,0	0,8	7,2	2,9	2,0	141,1	65,9	58,6	8,7	80,9	130,0
	3	37,4	1,8	3,2	1,2	10,6	4,6	2,3	93,4	41,1	33,9	5,4	61,7	118,9
	4	38,1	1,8	3,2	1,2	10,8	4,6	2,3	94,4	41,2	33,8	5,2	61,5	118,7

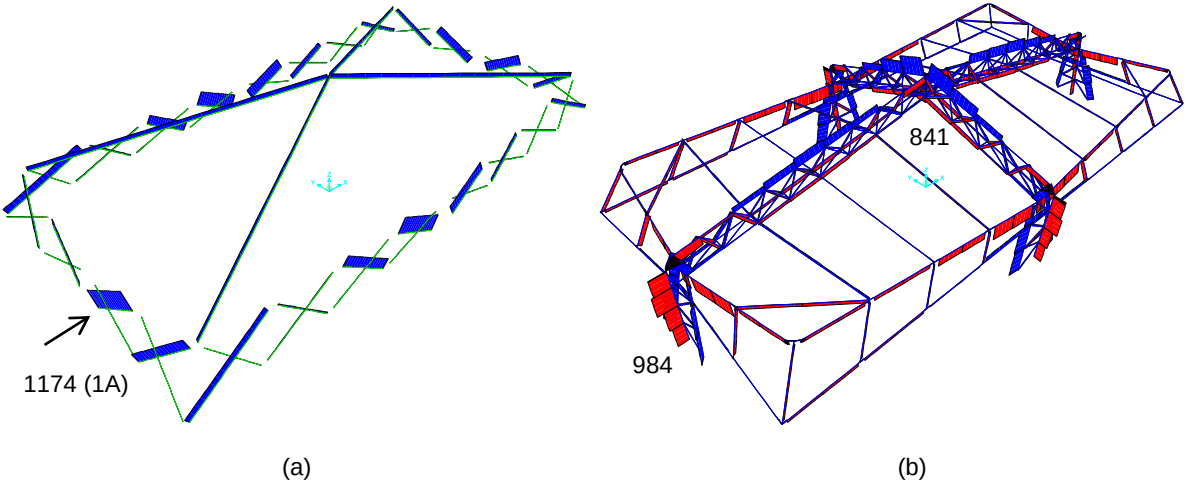


Figura 5.134 – Esforço axial na estrutura de cobertura sob as ações permanentes e da ação quase-estática do vento em sucção: (a) Cabos e (b) Secções tubulares

5.7.4.2. Análise não-linear dinâmica da ação do vento

A análise não-linear dinâmica do modelo numérico sob as ações permanentes e da ação dinâmica do vento é realizada faseadamente. A ação dinâmica do vento baseia-se na aplicação das forças aerodinâmicas obtidas na secção 5.6.5, segundo a direcção do vento 0° e para o caso 1, isto é, ação de sucção exterior e pressão interior.

Em primeiro lugar é determinada a resposta da estrutura sob as ações permanentes e sob a ação da componente média da velocidade do vento, através de uma análise não-linear geométrica considerando grandes deslocamentos, com base no método de Newton Raphson. Com base nesta configuração deformada, é de seguida determinada a massa aerodinâmica e o amortecimento da estrutura.

De seguida, é realizada a análise não-linear dinâmica no domínio do tempo, sob a ação da componente dinâmica das forças aerodinâmicas.

Resposta da estrutura sob ação da componente média da velocidade do vento em sucção

(i) Análise estática

A análise estática do modelo numérico sob as ações permanentes e da ação da componente média das forças aerodinâmicas é realizada tendo por base uma análise não-linear geométrica considerando grandes deslocamentos, através do método de Newton Raphson. A análise é faseada, isto é, a ação da componente média das forças aerodinâmicas do vento atua sobre a estrutura no fim da análise estática da estrutura sob as ações permanentes.

A Figura 5.135 apresenta a deformada da estrutura sob as ações permanentes e a ação da componente média da velocidade do vento, com destaque dos deslocamentos verticais, evidenciando deslocamentos máximos verticais na membrana a sotavento de $37,0\text{cm}$ no nó 85. No caso da estrutura metálica, o topo da cobertura (nó 12) apresenta deslocamentos máximos descendentes de $-0,09\text{cm}$, na direcção x de $0,1\text{cm}$ e na direcção y de $-0,001\text{cm}$, e o nó livre da consola (nó 615) apresenta deslocamentos máximos ascendentes de $1,4\text{cm}$.

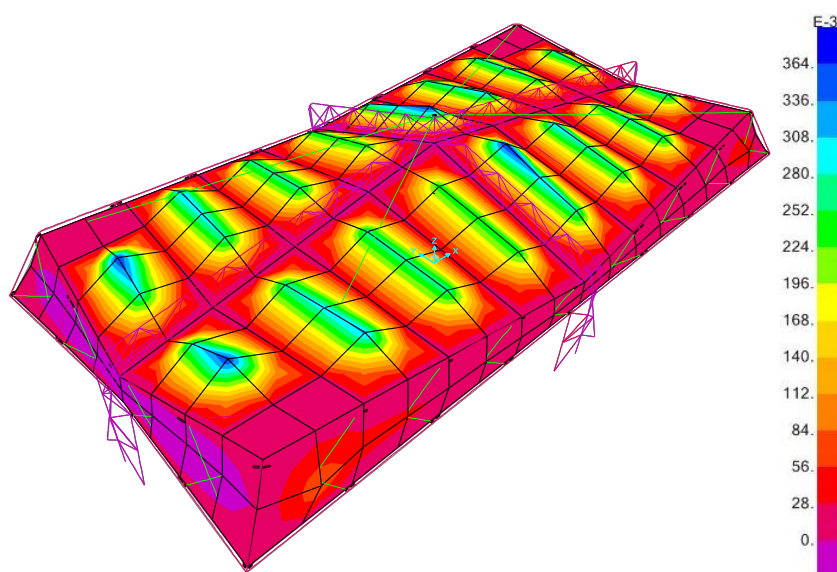


Figura 5.135 – Deformada da estrutura sob as ações permanentes e a ação da componente média da velocidade do vento em sucção, com destaque dos deslocamentos verticais, ampliada 4x [m]

As tensões da membrana, na direção do urdume, apresentam um valor de $7,8kN/m$ no elemento de casca 67 (ver a Figura 5.136 (a)), e na direção da trama um valor de $10,7kN/m$ no elemento de casca 67 (ver a Figura 5.136 (b)). De uma forma global, os módulos superiores de membrana apresentam valores ligeiramente superiores das tensões a sotavento.

A Figura 5.63 apresenta as reações globais sob as ações permanentes e a ação da componente média da velocidade do vento, verificando-se que a ação da componente média do vento de sucção representa aproximadamente -89% do peso total da estrutura.

Tabela 5.63 – Reações globais sob as ações permanentes e a ação da componente média da velocidade do vento em sucção

	Fx	Fy	Fz	$(Fz - F_{z_{est}}) / F_{z_{est}} * 100$
	(N)	(N)	(N)	(%)
Reações globais	-35408	6	49258	-89%

A Tabela 5.64 apresenta o esforço axial dos cabos, verificando-se em geral o mesmo efeito do aumento do esforço nos cabos A e de uma redução nos cabos L, embora não sendo tão significativo como na ação quase-estática do vento. O esforço axial máximo é igual a $58,3kN$ e verifica-se para o cabo de suspensão do 4º quadrante, a sotavento (ver a Figura 5.137 (a)).

Tabela 5.64 – Esforço axial nos cabos do primeiro quadrante sob as ações permanentes e a ação da componente média da velocidade do vento em sucção [kN]

Cabo 36			Cabo 25											
			1 L	2 L	3 L	4 L	5 L	6 L	1 A	2 A	3 A	4 A	5 A	6 A
Quadrante	1	58,2	4,3	4,3	6,7	10,6	15,7	21,5	43,7	28,6	16,0	11,6	31,0	38,4
	2	58,0	4,3	4,3	6,7	10,6	15,7	21,6	43,5	28,6	16,0	11,6	31,0	38,3
	3	58,1	6,8	7,2	11,8	11,7	18,7	23,3	28,0	21,2	12,8	10,7	27,1	36,2
	4	58,3	6,7	7,1	11,8	11,8	18,8	23,4	28,3	21,3	12,8	10,6	27,0	36,1

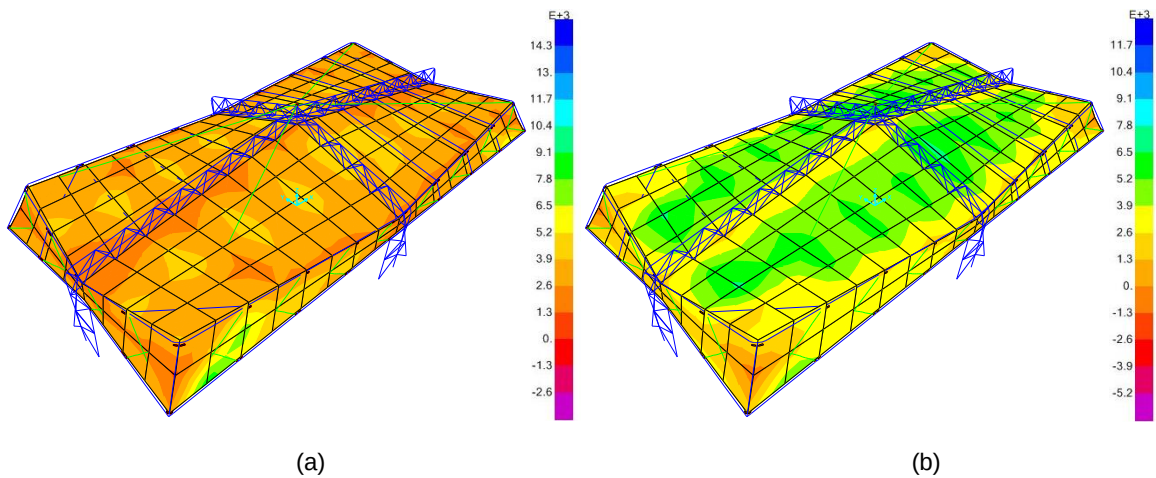


Figura 5.136 – Tensões da membrana sob as ações permanentes e a ação da componente média da velocidade do vento em sucção: (a) Direção do urdume e (b) Direção da trama [N/m]

Em geral, nas vigas treliçadas, os banzos superiores e inferiores apresentam barras em compressão e tração (ver a Figura 5.137 (b)). O esforço de tração máximo é igual a $51,6kN$ e ocorre na secção 891, localizada no anel inferior no pilar do pórtico maior a barlavento, e o esforço de compressão máximo é igual a $-154kN$ e ocorre na secção 1744, localizada no anel superior junto ao pilar do pórtico menor.

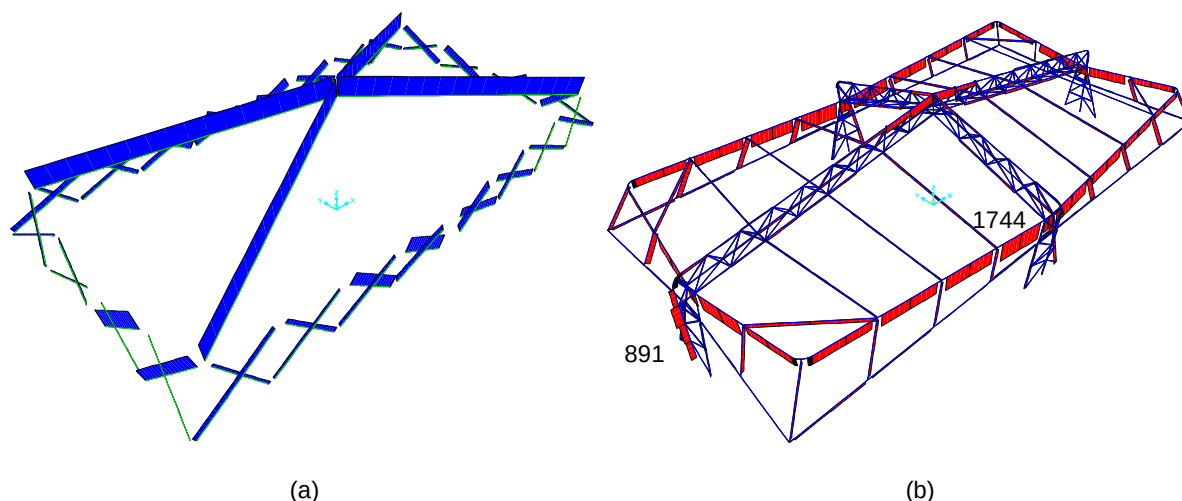


Figura 5.137 – Esforço axial na estrutura de cobertura sob as ações permanentes e a ação da componente média da velocidade do vento em sucção: (a) Cabos e (b) Secções tubulares

(ii) Análise modal

A modelação em elementos finitos realizada no decorrer deste trabalho permitiu avaliar as características dinâmicas da estrutura. As frequências naturais obtidas são sistematizadas na Tabela 5.65, nomeadamente os valores das primeiras 6 frequências naturais e respetiva caracterização do tipo de configuração modal. A Figura 5.138 apresenta as frequências naturais e os respetivos fatores de participação modal nas direções cartesianas.

Da presente análise verifica-se, em primeiro lugar, que a estrutura de membrana responde com vários modos de vibração para frequências abaixo de $5Hz$, embora menos do que na posição de equilíbrio, e com frequências próximas. Em geral houve um aumento das frequências naturais a partir da posição estática devido ao aumento da rigidez da membrana, dado que a rigidez da membrana depende da tensão aplicada no plano da membrana, para além do pré-esforço e da própria geometria.

Em termos globais, os 6 primeiros modos de vibração têm aparentemente uma participação elevada da estrutura metálica, com base nas configurações modais apresentadas na Figura 5.139. O primeiro e segundo modos apresentam uma configuração semelhante aos da posição estática em termos de participação da estrutura metálica. O primeiro modo corresponde ao primeiro antissimétrico em relação a x ($1AS_x$) com deslocamento horizontal do pórtico menor na direção y , e o segundo modo ao primeiro antissimétrico em relação a y ($1AS_y$) com deslocamento horizontal do pórtico maior na direção x . Em termos de análise da membrana ao nível dos quadrantes, analogamente à análise realizada anteriormente, verifica-se que a compatibilização da membrana com as vigas superiores conduz a configurações modais diferentes das analisadas anteriormente. O 1º modo é o primeiro antissimétrico ($1AS$) em relação a x' , e no 2º modo é o $1AS$ em relação a x'' .

Tabela 5.65 – Frequências naturais e respectivas configurações modais referentes aos 6 primeiros modos de vibração sob as ações permanentes e a ação da componente média da velocidade do vento em sucção

Nº modo	n (Hz)	Configuração modal	
		Globalmente	Quadrantes
1	3,31	1ASx com deslocamento horizontal do pórtico menor na direção y	1ASx'
2	4,26	1ASy com deslocamento horizontal do pórtico maior na direção x	1ASx''
3	4,51	1ASxy com flexão antissimétrica (x) dos painéis laterais	1ASx'''
4	4,71	1ASxy com levantamento antissimétrico (xy) das 4 consolas	1S
5	4,89	1ASx com flexão simétrica (xy) dos painéis laterais	1ASx'''
6	4,93	1S com flexão simétrica dos painéis laterais	1S

O modo 3 corresponde ao 1AS em relação a x e y com flexão antissimétrica em relação a x dos painéis laterais. Em termos de análise da membrana ao nível dos quadrantes, verifica-se que a membrana apresenta o 1AS em relação a x'''. Por sua vez, o modo 4 corresponde ao 1AS em relação a x e y com levantamento antissimétrico em relação a x e y das 4 consolas. Em termos de análise da membrana ao nível dos quadrantes, verifica-se que a membrana apresenta o 1S.

O modo 5 corresponde ao 1AS em relação a x com flexão simétrica em relação a x e y dos painéis laterais. Em termos de análise da membrana ao nível dos quadrantes, verifica-se que a membrana apresenta o 1AS em relação a x'''. Por sua vez, o modo 6 corresponde ao 1S com flexão simétrica dos painéis laterais. Em termos de análise da membrana ao nível dos quadrantes, verifica-se que a membrana apresenta o 1S.

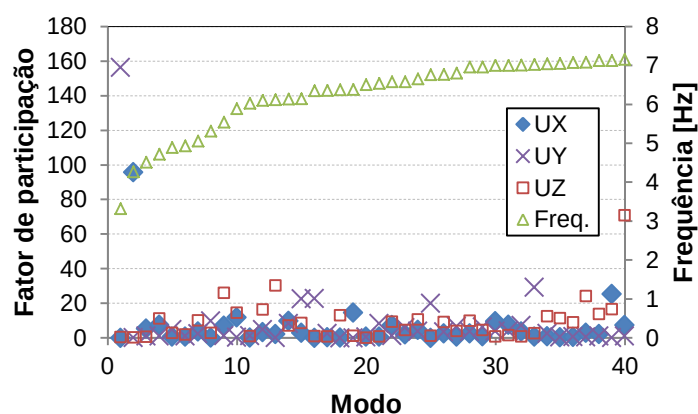


Figura 5.138 – Frequências naturais e fatores de participação modal da estrutura sob as ações permanentes e a ação da componente média da velocidade do vento em sucção

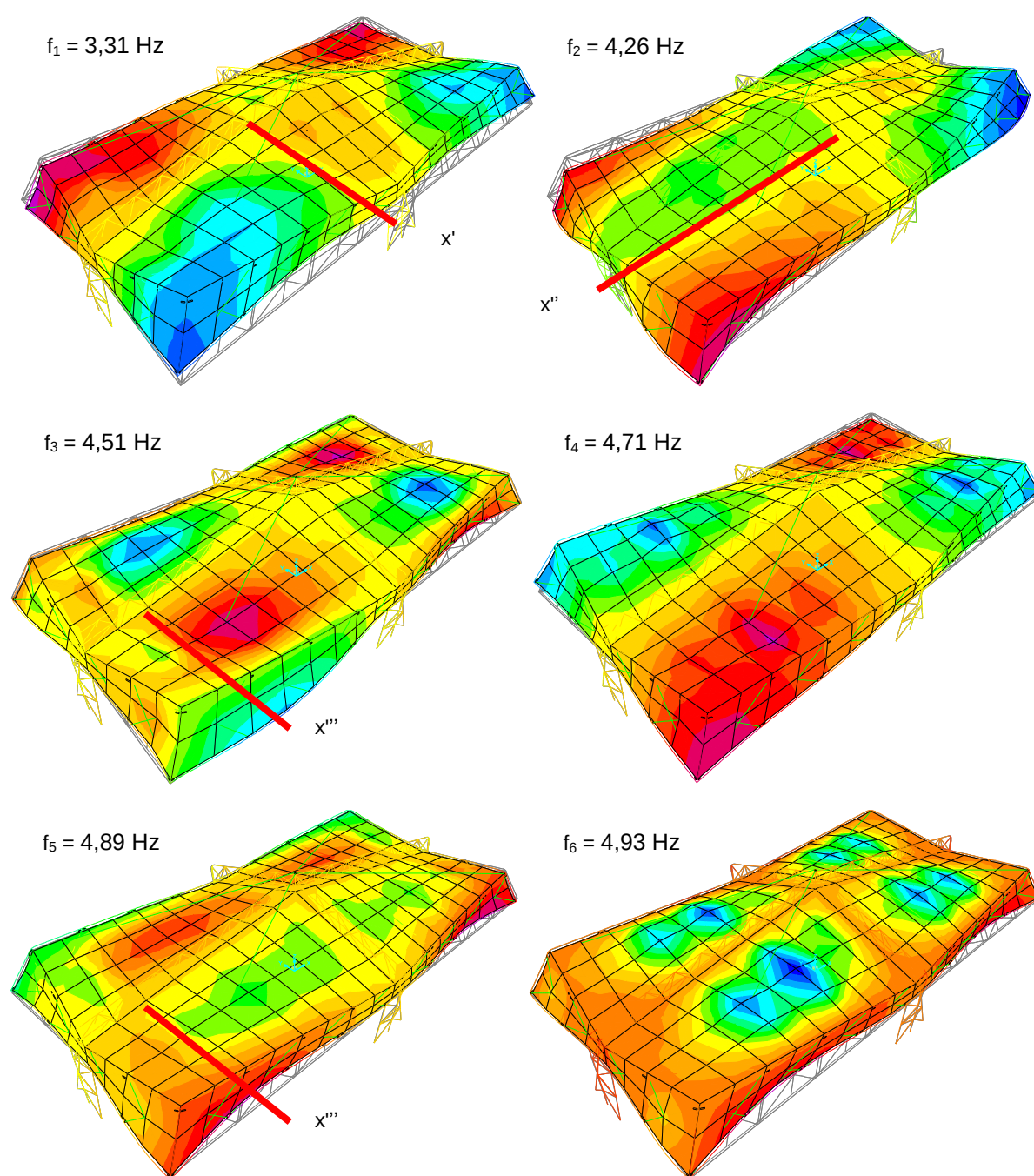


Figura 5.139 – Configurações modais dos modos 1 a 6 sob as ações permanentes e a ação da componente média da velocidade do vento em sucção

Massa aerodinâmica, análise modal e amortecimento

Tendo em vista a determinação da resposta da estrutura sob a ação turbulenta do vento através de uma análise dinâmica no domínio do tempo utilizando um modelo aeroelástico simplificado, pretende-se nesta secção, aplicando a mesma metodologia de análise realizada anteriormente na secção homóloga na análise da resposta do vento em pressão (secção 5.7.3.2), quantificar a massa aerodinâmica,

aplicando metodologias descritas na literatura, e avaliando o seu efeito no comportamento dinâmico da estrutura sujeita à ação da componente média do vento. De seguida, o amortecimento aerodinâmico é determinado com base na expressão do decremento logarítmico aerodinâmico apresentado na norma EC1-Parte 1-4, aplicando os parâmetros de caracterização da ação do vento quantificados na secção 5.6, e com base na massa equivalente obtida a partir das frequências e modos de vibração obtidos numa análise modal realizada à estrutura na configuração deformada da componente média da ação do vento considerando nessa análise modal a massa adicional estimada anteriormente. Finalmente, os coeficientes de amortecimento de Rayleigh α_0 e α_1 , respetivamente, coeficientes de amortecimento proporcional à massa e à rigidez, são determinados iterativamente com base em duas frequências e nos respetivos coeficientes de amortecimento calculados anteriormente até que sejam obtidos os coeficientes de amortecimento que melhor permitem caracterizar o amortecimento da estrutura para a gama de frequências de interesse.

A determinação da massa aerodinâmica é realizada recorrendo a duas vias distintas. A primeira via consiste em considerar uma massa adicional igual à massa da membrana seguindo os estudos experimentais de Sun *et al.* (2008), e a segunda via consiste na determinação da massa de acordo com a formulação de Minami (1998), segundo o qual (ver equação (4.17)) a massa aerodinâmica é equivalente à massa de ar uniformemente distribuída ao longo da membrana com uma altura estimada de 68% do comprimento da membrana. De acordo, estima-se uma massa aerodinâmica para o módulo superior e lateral respetivamente de valor igual a 4,25 e 2,55 kg/m². Estes valores de massa aerodinâmica enquadram-se nos valores estimados em estudos numéricos recentes (Alsofi *et al.* 2015) para estruturas de membrana apresentando dimensões semelhantes.

As frequências naturais da estrutura obtidas através de uma análise modal realizada com base na rigidez da estrutura sob atuação das cargas permanentes, da ação da componente média da velocidade do vento e considerando a massa adicional obtida com base nas duas metodologias descritas anteriormente são apresentadas na Figura 5.140. A Tabela 5.66 apresenta as frequências naturais organizadas por configurações modais com participação modal semelhante dos elementos estruturais e de acordo com os 3 primeiros modos de vibração da estrutura global sob a ação das cargas permanentes mostrados anteriormente na Figura 5.111. Analogamente à ação do vento em pressão, é de verificar um aumento das frequências naturais da configuração estática da estrutura para a configuração deformada da estrutura sob ação da componente média da ação do vento devido ao aumento da rigidez da estrutura. A consideração da massa adicional de membrana segundo a metodologia de Sun *et al.* (2008) conduz a uma diminuição das frequências de -2% para os 3 primeiros modos de vibração equivalentes.

Por sua vez, aplicando a metodologia de Minami (1998), a redução das frequências naturais é mais significativa, resultando em termos globais em frequências inferiores com vários modos a partir de 2,7Hz e abaixo de 3,6Hz. Analisando os 3 primeiros modos de vibração equivalentes, a redução das frequências é respetivamente igual a -18%, -36% e -37%. É de referir que, apesar da incerteza quanto à validação da referida metodologia para a determinação da massa aerodinâmica, esta redução significativa das frequências da membrana é muito importante no contexto da interação fluido-membrana, tendo em conta que a estrutura de membrana passa a ser caracterizada com frequências naturais mais baixas e próximas da gama de frequências em que a energia de excitação do vento é elevada. Com efeito, como referido anteriormente, este tópico carece de um estudo mais aprofundado em estudos futuros sustentada por uma validação experimental dada a importância que este representa na resposta da membrana sob à ação do vento, optando-se por utilizar uma massa aerodinâmica de acordo com os estudos de Sun *et al.* (2008).

As frequências naturais obtidas na análise modal realizada com base na configuração deformada da estrutura sob a ação da componente média do vento e considerando a massa aerodinâmica, de valor igual à massa da membrana (Sun *et al.* 2008), são apresentadas na Figura 5.141, assim como os respectivos fatores de participação modal nas direções cartesianas. A Figura 5.142 apresenta os fatores de hibridização na configuração estática e sob ação da componente média do vento considerando a massa adicional.

Da presente análise verifica-se que a estrutura de membrana responde com vários modos de vibração para frequências abaixo de 5Hz, à semelhança da posição estática, e com frequências próximas. Em geral, comparando com a posição estática, houve um ligeiro aumento das frequências naturais na gama de frequências mais baixas, abaixo de 10Hz, e uma diminuição das frequências naturais acima de 10Hz. Este facto deve-se à mobilização das vigas metálicas ligadas à membrana em configurações modais com elevada participação modal da membrana. Adicionalmente, observando os fatores de hibridização obtidos, destaca-se um maior número de modos de vibração com significativa interação membrana-estrutura e um menor número de modos com baixa participação da membrana, comparando com os fatores obtidos, quer na posição estática, quer sob a ação do vento em pressão (ver a Figura 5.125). Esta interação significativa membrana-estrutura é potenciada pelo aumento da massa e da rigidez da membrana, e pela compatibilização dos deslocamentos verticais com as vigas metálicas.

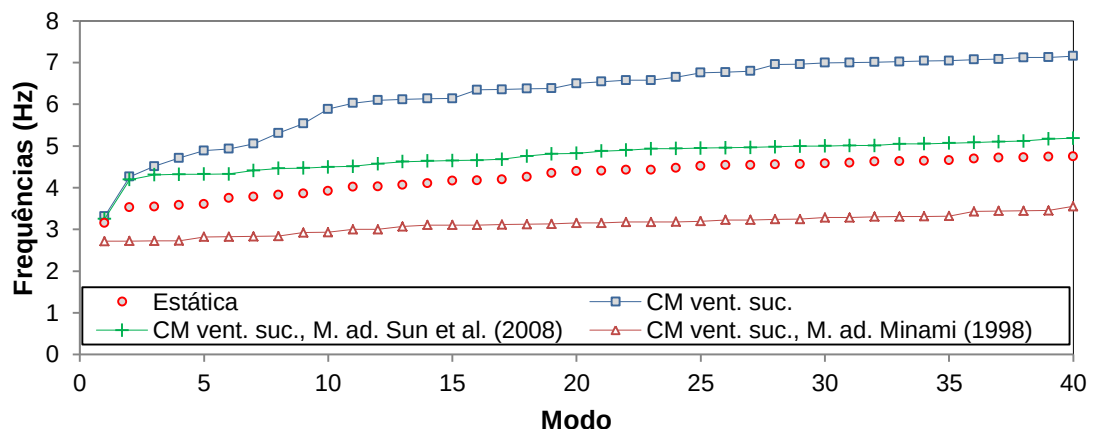


Figura 5.140 – Influência da massa aerodinâmica nas frequências naturais da estrutura sob efeito da velocidade do vento em sucção em termos globais

Tabela 5.66 – Influência da massa aerodinâmica nas frequências naturais da estrutura sob efeito da velocidade do vento em sucção em modos de vibração equivalentes

Nº modo	Estática	CM vent. press.	CM vent. press., M. ad. Sun et al. (2008)		CM vent. press., M. ad. Minami (1998)	
		(1)	(2)	$\frac{(2) - (1)}{(1)} \times 100$	(3)	$\frac{(3) - (1)}{(1)} \times 100$
		(Hz)	(Hz)	(%)	(Hz)	(%)
1	3,149	3,314	3,252	-2	2,717	-18
2	3,527	4,263	4,192	-2	2,721	-36
3	3,546	4,512	4,412	-2	2,830	-37

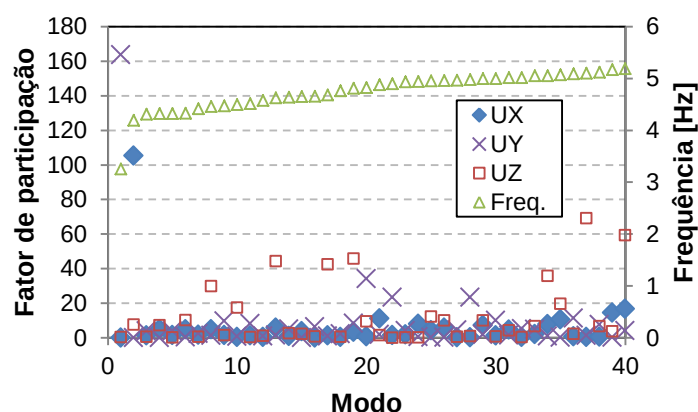


Figura 5.141 – Frequências naturais e fatores de participação modal da estrutura sob as ações permanentes, a ação da componente média da velocidade do vento em sucção e da massa adicional

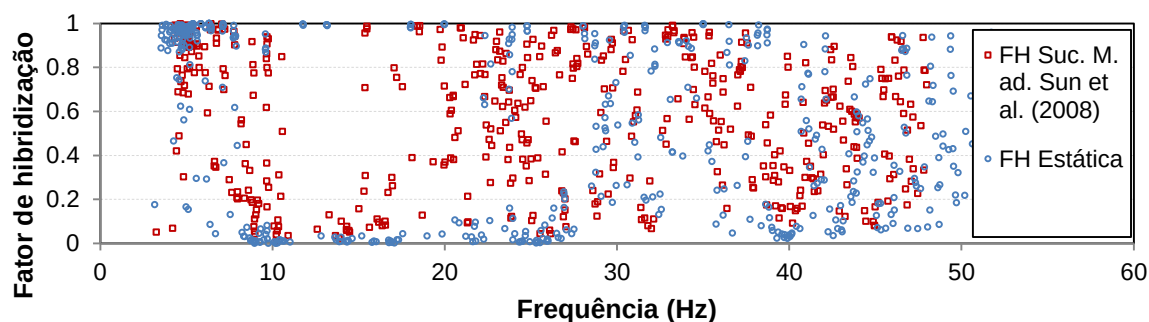


Figura 5.142 – Fatores de hibridização da estrutura na configuração estática e sob ação da componente média do vento em sucção considerando a massa adicional

As frequências naturais obtidas são sistematizadas na Tabela 5.67, nomeadamente os valores das primeiras 4 frequências naturais e respetiva caracterização do tipo de configuração modal. As configurações modais são apresentadas na Figura 5.143. Em termos globais, os 2 primeiros modos de vibração apresentam uma interação membrana-estrutura significativa com fatores de hibridização respetivamente iguais a 0,05 e 0,07, e os modos 3 e 4 apresentam menor interação com *FH* respetivamente iguais a 0,93 e 0,99. É de salientar a influência da ação da componente média da velocidade do vento nas configurações modais, em particular no 2º modo de vibração, traduzida pelo aumento ligeiro do fator de participação modal da estrutura na direção do vento, U_x , comparando com o da posição estática. É de destacar que a elevada interação neste modo potencia o aumento da participação modal da estrutura metálica na direção vertical, U_z , em comparação com o modo homólogo, quer na posição estática, quer sob a ação da componente média apresentados anteriormente.

O primeiro e segundo modos apresentam uma configuração semelhante aos da posição estática. O primeiro modo corresponde ao primeiro antissimétrico em relação a x ($1AS_x$) com deslocamento horizontal do pórtico menor na direção y , e o segundo modo ao primeiro antissimétrico em relação a y ($1AS_y$) com deslocamento horizontal do pórtico menor na direção x . Em termos de análise da membrana ao nível dos quadrantes, analogamente à análise realizada anteriormente, verifica-se que a membrana apresenta o $1AS$ em relação a x' no primeiro modo, e o $1AS$ em relação a x'' no segundo

modo. No entanto, no segundo modo apresentam formas ligeiramente distintas nos módulos de membrana a barlavento e a sotavento, devido ao nível de tensões médio ligeiramente superior a sotavento, conduzindo a rigidezes diferentes da membrana. Este comportamento é originado pelos coeficientes de pressão resultante apresentando uma distribuição e valores diferentes a barlavento e a sotavento (ver a Figura 5.86).

Tabela 5.67 – Frequências naturais e respetivas configurações modais referentes aos 4 primeiros modos de vibração sob as ações permanentes, a ação da componente média da velocidade do vento em sucção e da massa adicional

Nº modo	n (Hz)	Configuração modal	
		Globalmente	Quadrantes
1	3,25	1ASx com deslocamento horizontal do pórtico menor na direção y	1ASx'
2	4,19	1ASy com deslocamento horizontal do pórtico maior na direção x	1ASx''
3	4,31	1ASxy com flexão antissimétrica (x) dos painéis laterais	1AS/2S
4	4,32	1ASy com flexão simétrica (xy) dos painéis laterais	2AS

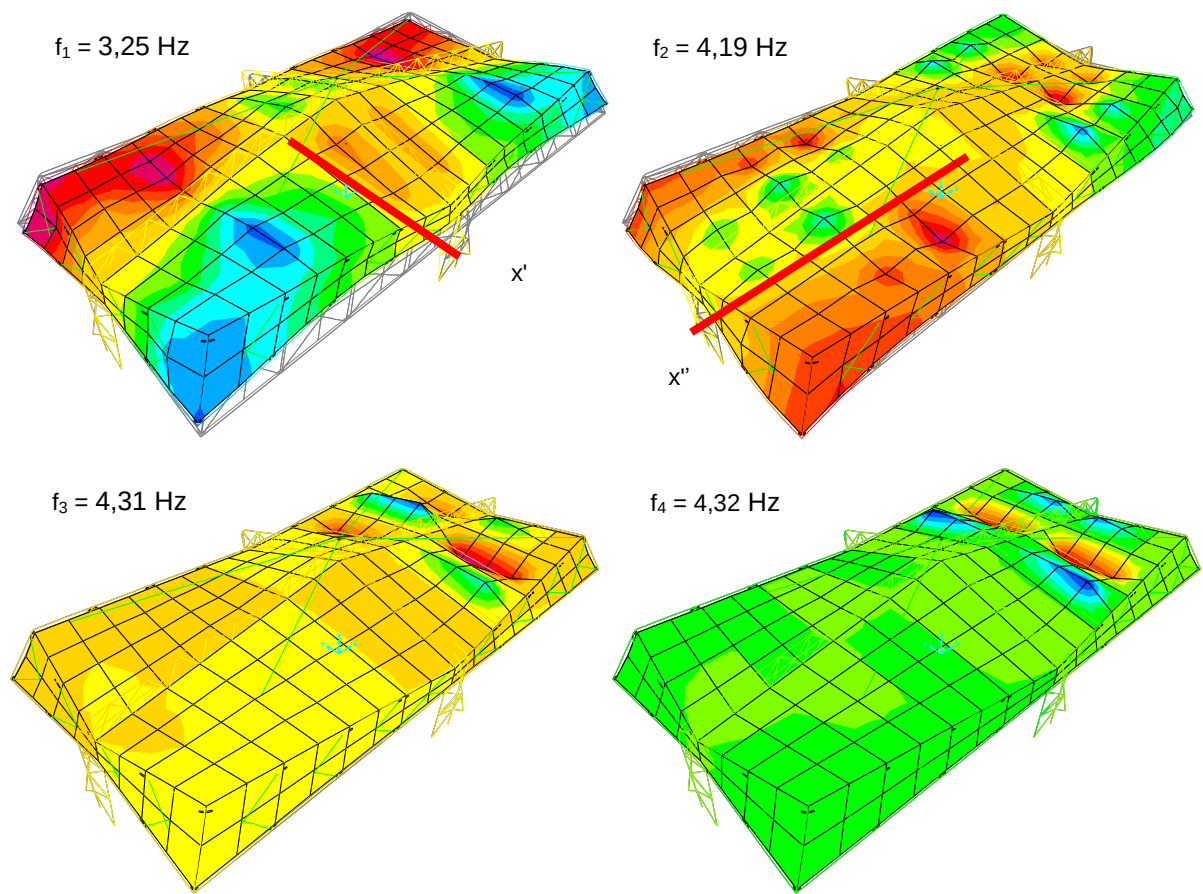


Figura 5.143 – Configurações modais dos modos 1 a 4 sob as ações permanentes, a ação da componente média da velocidade do vento em sucção e da massa adicional

O modo 3 corresponde ao 1AS em relação a x e y com flexão dos painéis laterais. Em termos de análise da membrana ao nível dos quadrantes, verifica-se que a membrana apresenta formas diferentes nos módulos a barlavento e a sotavento, pelo mesmo motivo apresentado anteriormente: a barlavento aproximando-se do segundo modo simétrico (2S), e a sotavento do 1AS. Por sua vez, o modo 4 corresponde ao 1AS em relação a y com flexão simétrica em relação a x e y dos painéis laterais. Em termos de análise da membrana ao nível dos quadrantes, verifica-se que a membrana apresenta o 2AS apresentando formas diferentes a barlavento e a sotavento, embora pouco perceptível a barlavento.

Tendo sido realizada a caracterização dinâmica da estrutura através da análise modal, pretende-se de seguida quantificar o amortecimento com base nos parâmetros entretanto estimados. O decremento logarítmico do amortecimento aerodinâmico da membrana é determinado com base na expressão (5.50), apresentada anteriormente na secção 5.7.3.2, aplicando o coeficiente de pressão médio na superfície da membrana, $c_f = c_{p \text{ medio}} = 1,01$ e a velocidade média na superfície de membrana, $v_m = 24,84 \text{ m/s}$. A massa equivalente da estrutura global μ_e é determinada com base na expressão (5.52) e, no sentido de complementar a análise, é quantificada adicionalmente a contribuição da membrana para a massa equivalente da estrutura global através da expressão (5.53).

A Tabela 5.68 apresenta a massa equivalente obtida, evidenciando-se que de facto a massa da membrana tem uma contribuição importante para a massa equivalente global da estrutura de cobertura na gama de frequências naturais apresentadas entre 3,25 a 4,65 Hz.

Tabela 5.68 – Massa equivalente e amortecimento da estrutura sob efeito da velocidade do vento em sucção

Modo	Freq.	Massa equivalente		Amortecimento aerodinâmico				Amortecimento total	
				Membrana		Global		Global	
		$\mu_{e \text{ memb.}}$	$\mu_{e \text{ global}}$	$\delta_{a \text{ memb.}}$	$\xi_{a \text{ memb.}}$	$\delta_{a \text{ global}}$	$\xi_{a \text{ global}}$	ξ_t	$\xi_{t \text{ Rayleigh}}$
	(Hz)	(kg)	(kg)						
1	3,25	2	30	3,1016	0,4936	0,1583	0,0252	0,0452	0,0675
2	4,19	1	22	2,5116	0,3997	0,1724	0,0274	0,0474	0,0570
3	4,31	15	16	0,2434	0,0387	0,2267	0,0361	0,0561	0,0561
4	4,32	16	16	0,2312	0,0368	0,2293	0,0365	0,0565	0,0560
5	4,32	16	16	0,2224	0,0354	0,2205	0,0351	0,0551	0,0560
6	4,33	16	16	0,2232	0,0355	0,2202	0,0350	0,0550	0,0559
7	4,41	7	18	0,4798	0,0764	0,2021	0,0322	0,0522	0,0553
8	4,46	15	16	0,2359	0,0376	0,2159	0,0344	0,0544	0,0550
9	4,47	13	16	0,2724	0,0434	0,2163	0,0344	0,0544	0,0550
10	4,50	16	16	0,2225	0,0354	0,2140	0,0341	0,0541	0,0548
11	4,51	11	16	0,3077	0,0490	0,2123	0,0338	0,0538	0,0547
12	4,57	8	17	0,4104	0,0653	0,2005	0,0319	0,0519	0,0543
13	4,62	14	17	0,2341	0,0373	0,2000	0,0318	0,0518	0,0540
14	4,64	14	15	0,2340	0,0372	0,2293	0,0365	0,0565	0,0539
15	4,65	11	11	0,2996	0,0477	0,2992	0,0476	0,0676	0,0538

* O amortecimento total, ξ_t , é igual à soma do aerodinâmico, ξ_a , com o estrutural, ξ_s ; $\xi_s = 0,02$;

Os coeficientes aerodinâmicos da membrana e da estrutura global são apresentados na Tabela 5.68, observando-se que a membrana apresenta um valor de 49% no primeiro modo, decrescendo significativamente para os modos seguintes para valores médios de 4,7%, na gama de frequências apresentada. Por sua vez, o coeficiente de amortecimento aerodinâmico da estrutura global apresenta um valor médio 3,5%.

O coeficiente de amortecimento estrutural considera-se igual a 2%, dado que o manual europeu de estruturas de membrana baliza este valor entre 1,5% e 3%, conduzindo a valores de coeficientes de amortecimento total médios de aproximadamente 5,4% para a gama de frequências apresentadas. A Figura 5.144 apresenta os coeficientes de amortecimento calculados até uma frequência de 10Hz, sobre os quais é realizado um ajustamento iterativo para determinar os coeficientes de amortecimento de Rayleigh α_0 e α_1 , com base em duas frequências e nos respetivos coeficientes de amortecimento calculados anteriormente. O valor destes coeficientes que melhor permite caracterizar o amortecimento da estrutura é estimado com base nas frequências de 4,31 e 8,17Hz, e respetivos coeficientes de amortecimento de 6% e 4,6%, resultando em $\alpha_0 = 2,389$ e $\alpha_1 = 8,838 \cdot 10^{-4}$.

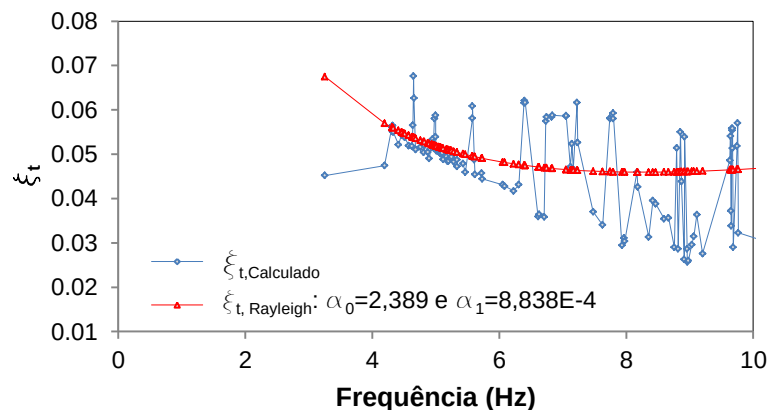


Figura 5.144 – Ajustamento dos coeficientes de amortecimento de Rayleigh ao amortecimento total calculado da estrutura sob efeito da velocidade do vento em sucção

Resposta da estrutura sob ação da componente turbulenta da velocidade do vento

A análise não-linear dinâmica no domínio do tempo dos efeitos de rajada induzidos pelo vento sobre a estrutura de cobertura de membrana tensa é realizada considerando a não-linearidade geométrica do sistema com grandes deslocamentos. A resposta estrutural aos efeitos de rajada é determinada com base na aplicação das forças aerodinâmicas determinadas na secção 5.6.5 para a direção do vento 0° e para o caso 1, isto é, ação de sucção exterior e pressão interior. A resposta temporal da estrutura é obtida por integração direta passo-a-passo da equação de equilíbrio dinâmico, aplicando o método de integração numérica de Newmark ($\alpha = 0,25$ e $\beta = 0,50$) com um tempo de integração igual a 0,005s., e utilizando os coeficientes de amortecimento de Rayleigh determinados anteriormente.

A resposta dinâmica da estrutura é analisada com base em amplitudes de vibração em pontos localizados na membrana e na estrutura metálica, e os respetivos espectros de potência, que permitem avaliar as frequências naturais e os respetivos modos de vibração com maior participação na resposta dinâmica do vento em sucção.

No sentido de complementar a análise dinâmica aplicando o método de Newmark, foi determinada a resposta da estrutura aplicando o método da sobreposição modal, permitindo avaliar as diferenças e a aplicabilidade dos mesmos no cálculo de estruturas de cobertura em membrana tensa. Nesta análise, é utilizada a rigidez na configuração deformada da estrutura sob a ação da componente média da velocidade do vento em sucção; os coeficientes de amortecimento de Rayleigh quantificados anteriormente e utilizados na análise por integração direta; e 500 modos de vibração.

Começando pela resposta obtida ao nível da membrana, a Figura 5.145 (a) apresenta a evolução temporal da amplitude de vibração vertical do nó 85, verificando-se uma amplitude de vibração dinâmica máxima de $73,6\text{m/s}^2$, mais significativa comparativamente com a resposta obtida sob a ação do vento em pressão. A título de comparação, é apresentada a resposta obtida através da análise por sobreposição modal, verificando-se uma amplitude de resposta menor, em comparação com a resposta por integração direta. Apesar da resposta da membrana ser significativa, esta não envolve a participação de nenhum modo de vibração em particular, de acordo com o espectro de potência apresentado na Figura 5.145 (b), mas apresenta uma elevada energia da resposta na gama de frequências entre 5,45 e 6,55Hz. A representação conjunta com os fatores de hibridização (FH) permite, de um modo geral, evidenciar uma elevada energia da resposta da estrutura numa gama de frequências naturais onde a participação da membrana é elevada (FH próximo de 1), e baixa energia em modos de vibração cuja participação da membrana é baixa (FH próximo de 0). Apesar de não haver participação de nenhum modo em particular, a resposta da membrana envolve uma energia considerável em modos de vibração apresentando fatores de hibridização intermédios, isto é, envolvendo interação membrana-estrutura significativa. É de salientar ainda que o espectro de potência obtido com base na resposta por integração direta apresenta uma área maior, e picos com maior energia, principalmente abaixo de 6,55Hz, gama de frequências onde se encontra a maioria dos modos de vibração da estrutura com participação significativa da membrana tensa. Este facto, que se repete nos resultados dos restantes parâmetros de controlo como se verá de seguida, reforça a necessidade de se realizar uma análise dinâmica por integração direta para avaliar o comportamento de estruturas de membrana, de forma a considerar a atualização da matriz de rigidez da estrutura à medida que esta se deforma sob a ação dinâmica do vento, analogamente à análise da resposta sob a ação do vento em pressão.

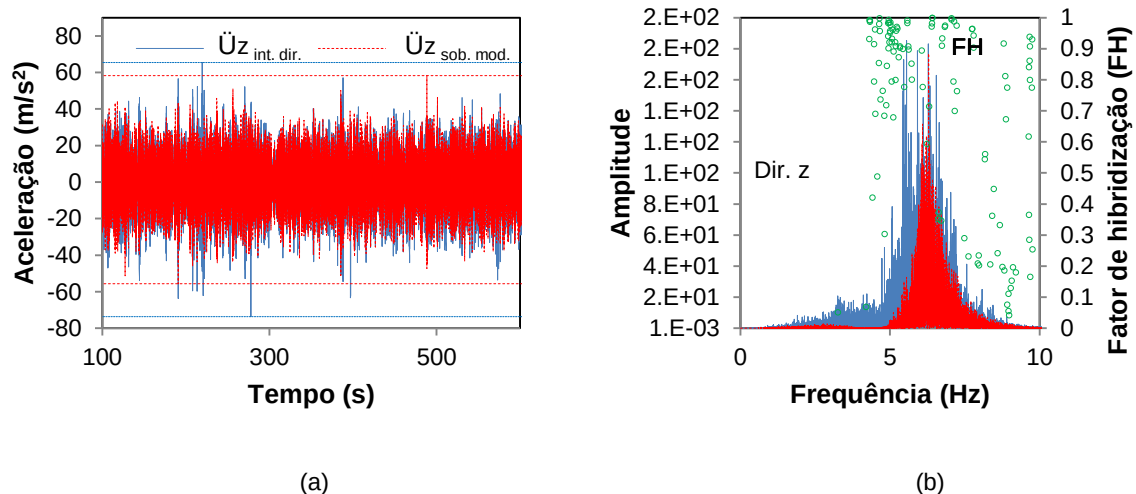


Figura 5.145 – Amplitudes de vibração vertical do nó 85 localizado na membrana por integração direta e por sobreposição modal: (a) Evolução temporal e (b) Espectro de potência

Em relação à resposta obtida ao nível da estrutura metálica, a Figura 5.146 (a) apresenta a evolução temporal das amplitudes de vibração no topo da estrutura metálica, no nó 12, nas direções x , y e z , apresentando valores máximos, respetivamente, de $0,48$, $0,57$ e $0,86\text{m/s}^2$. Estes valores são menos significativos do que na estrutura de membrana e mais importantes comparativamente com a resposta obtida sob a ação do vento em pressão, demonstrando que a estrutura metálica é mais solicitada sob os efeitos do vento em sucção.

O espetro de potência apresentado na Figura 5.146 (b), determinado com base na amplitude de vibração na direção vertical, permite identificar, por exemplo, a participação do modo de vibração com frequência natural de $6,64\text{Hz}$, cuja configuração modal conduz à flexão das vigas treliçadas dos pórticos, apresentando elevada interação membrana-estrutura com $FH = 0,37$. De um modo geral, a resposta em frequência evidencia elevada energia em modos de vibração cuja participação da membrana é elevada (FH próximo de 1) ou com elevada interação.

O espetro de potência apresentado na Figura 5.146 (c), determinado com base na amplitude de vibração na direção transversal, permite identificar, por exemplo, a frequência natural de $3,27\text{Hz}$, próxima da primeira frequência da estrutura, correspondente a uma configuração modal caracterizada como o 1ASx com deslocamento horizontal do pórtico menor na direção y , cujo fator de participação modal na direção y apresenta o valor máximo, de entre os modos representados na análise modal (ver a Figura 5.141 e Figura 5.143). Este modo de vibração apresenta baixa interação membrana-estrutura com $FH = 0,05$. De um modo geral, a resposta em frequência evidencia elevada energia em modos de vibração com elevada interação membrana-estrutura. Por sua vez, o espetro de potência apresentado na Figura 5.146 (d), determinado com base na amplitude de vibração na direção longitudinal, permite identificar, para além de uma frequência natural de $4,27\text{Hz}$, próxima da 2ª e 3ª frequência natural da estrutura (ver a respetiva caracterização na Tabela 5.67), a frequência natural de $6,19\text{Hz}$, próxima da frequência natural $6,22\text{Hz}$ correspondente a uma configuração modal caracterizada pelo deslocamento horizontal do pórtico menor na direção y , associado ao levantamento antissimétrico das consolas em relação à direção x , e cuja interação é elevada ($FH = 0,59$).

É de notar que a identificação de frequências naturais da estrutura com elevada participação da estrutura na direção transversal ao vento tem a ver com a ação dinâmica que, apesar de ser determinada com base na direção do vento a 0° , isto é, alinhada com x , as forças aerodinâmicas que atuam na estrutura têm uma componente na direção em y , nomeadamente resultante das pressões localizadas nos panos laterais da estrutura. Ora, atendendo a que as forças aerodinâmicas dependem da componente turbulenta da velocidade do vento, as forças aplicadas no painel lateral esquerdo vão ser distintas das forças aplicadas no painel lateral direito, conduzindo aos deslocamentos mais pronunciados da estrutura de cobertura transversalmente à direção do vento (na direção em y), e consequentemente à excitação de frequências naturais com elevada participação na direção transversal.

A evolução temporal da amplitude de vibração vertical do nó 615 localizado no nó livre da consola da cobertura, como mostra a Figura 5.147 (a), permite determinar um valor máximo de $2,20\text{m/s}^2$, sendo menos significativo do que na estrutura de membrana e do que no topo da cobertura, e mais importante comparativamente com a resposta obtida sob a ação do vento em pressão, demonstrando que a estrutura metálica é mais solicitada sob os efeitos do vento em sucção. O espetro de potência apresentado na Figura 5.147 (b) permite identificar, por exemplo, a participação do modo de vibração com a frequência natural de $4,09\text{Hz}$, próxima da 2ª frequência natural da estrutura (ver a respetiva caracterização na Tabela 5.67), cuja configuração modal conduz também ao levantamento antissimétrico das 4 consolas em relação à direção y , e apresenta baixa interação ($FH = 0,07$).

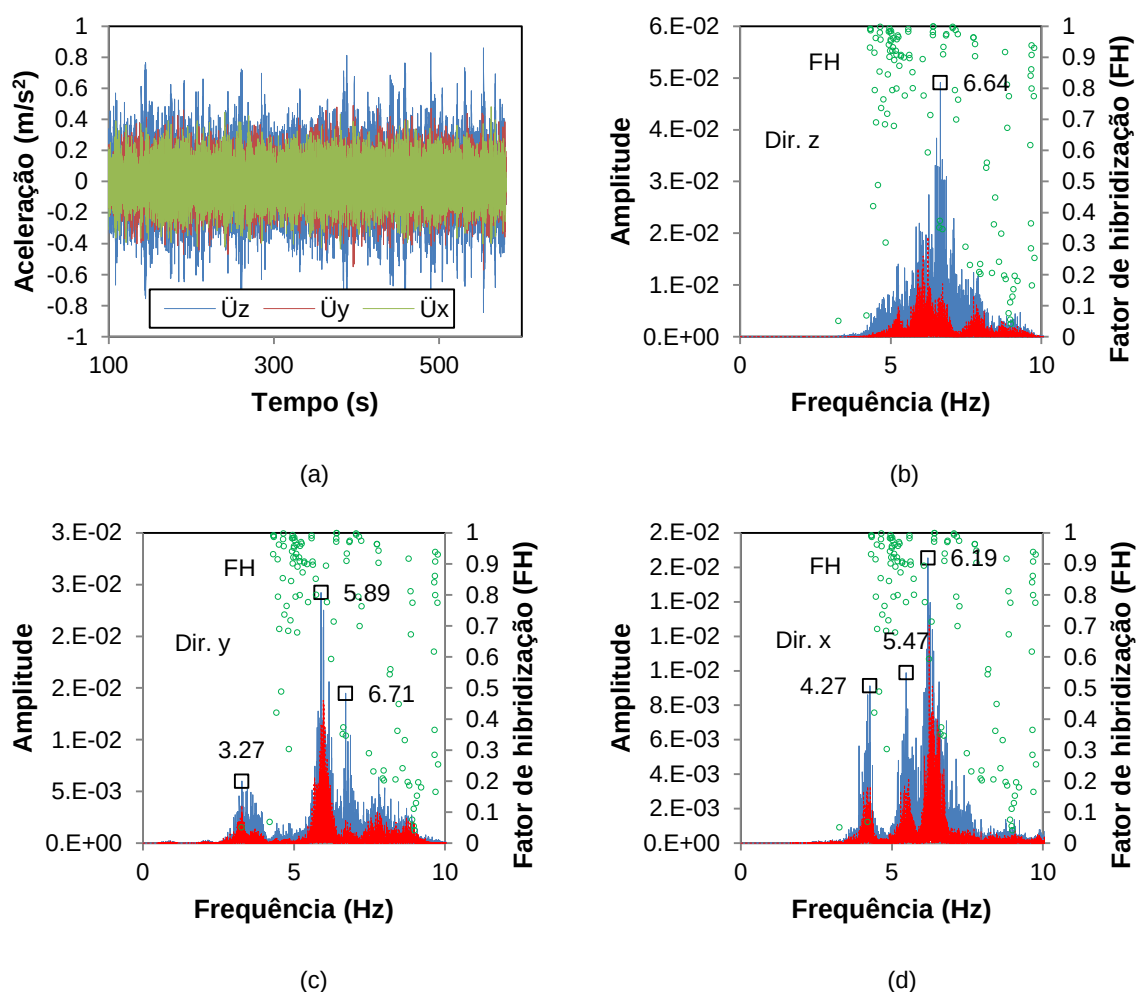


Figura 5.146 – Amplitudes de vibração do nó 12 localizado na estrutura metálica no topo da cobertura: (a) Evolução temporal; (b) Espectro de potência na direção z; (c) Espectro de potência na direção y e (d) Espectro de potência na direção x

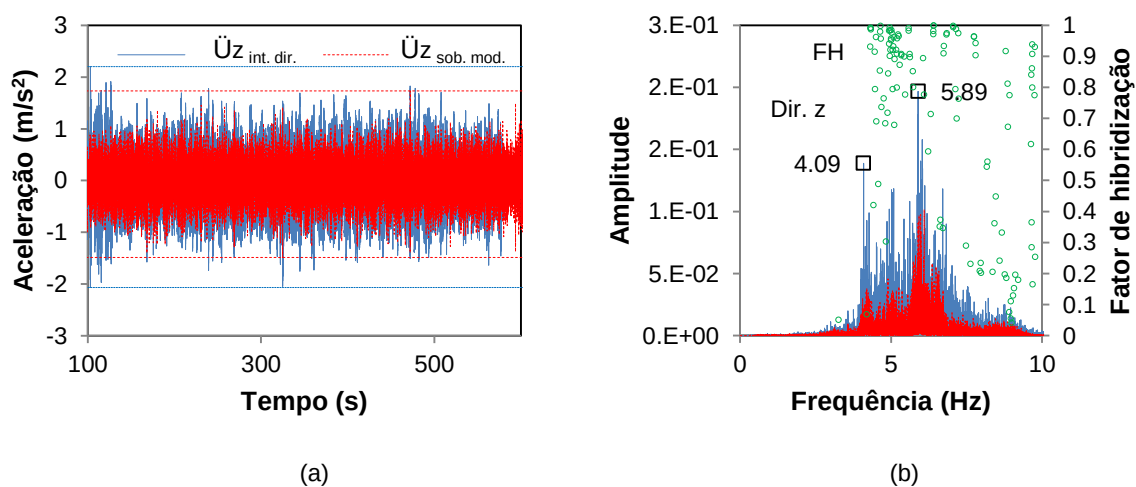


Figura 5.147 – Amplitude de vibração vertical do nó 615 localizado na consola da estrutura metálica por integração direta e por sobreposição modal: (a) Evolução temporal e (b) Espectro de potência

5.7.5. CONCLUSÕES

Nesta secção foi realizado o estudo do comportamento não-linear dinâmico da estrutura de cobertura em membrana tensa sob a ação do vento. Para o efeito foram realizadas análises no domínio do tempo considerando a não-linearidade geométrica do sistema com grandes deslocamentos. A resposta estrutural aos efeitos de rajada foi determinada com base na aplicação das forças aerodinâmicas determinadas na secção 5.6.5 para a direção do vento 0° para o caso 1 - ação de sucção exterior e pressão interior, e para o caso 2 - ação de pressão exterior e sucção interior. Para o efeito, foi considerado um modelo aeroelástico simplificado (Sun *et al.* 2008), em que o amortecimento estrutural e aerodinâmico é introduzido como um amortecimento viscoso, e uma massa adicional da membrana devido à massa de ar em vibração com a membrana durante a interação fluido-estrutura. A resposta temporal da estrutura é obtida por integração direta passo-a-passo da equação de equilíbrio dinâmico, aplicando o método de integração numérica de Newmark e, complementarmente, por sobreposição modal, no sentido de avaliar as diferenças e a aplicabilidade dos mesmos no cálculo de estruturas de cobertura em membrana tensa. A resposta dinâmica máxima, expressa em termos de deslocamentos em pontos localizados na membrana e na estrutura metálica, é comparada com a resposta calculada com base no método de análise quase-estático através do coeficiente de amplificação dinâmico R_{din} .

Em geral verificou-se que a resposta dinâmica não excede a resposta da ação quase-estática do vento. Os valores de amplificação dinâmica R_{din} são geralmente de aproximadamente 0,8, embora se tenha obtido um valor de 1,11 no deslocamento do pórtico maior na direção do vento. Esta análise permitiu constatar que o método de análise quase-estático proposto pelo *Eurocódigo 1* para a determinação da ação quase-estática do vento em estruturas de membrana, aliado aos coeficientes de pressão propostos pela norma europeia de membrana, conduz em geral a um dimensionamento conservativo da estrutura de cobertura em membrana tensa.

Das análises realizadas há ainda a referir o seguinte:

- A ação quase estática do vento em pressão representa aproximadamente 120% do peso total da estrutura, e em sucção aproximadamente 268%;
- As tensões da membrana na direção do urdume excedem as tensões admissíveis sob a ação combinada das ações permanentes do pré-esforço, do peso próprio e da ação do vento na direção 0° , considerando pressões exteriores e sucções interiores; e na direção da trama considerando sucções exteriores e pressões interiores; A membrana exhibe um comportamento altamente não-linear geométrico, sendo evidente através da análise da resposta dos parâmetros de controlo em função da velocidade do vento;
- Das análises modais realizadas, verificou-se, em primeiro lugar, que a estrutura de membrana responde com vários modos de vibração para frequências a partir de 3Hz e abaixo de 5Hz, na configuração da estrutura sob a ação da componente média da velocidade do vento, embora menos do que na posição de equilíbrio, e com frequências próximas entre si; Em geral houve um aumento das frequências naturais a partir da posição estática devido ao aumento da rigidez da membrana, dado que a rigidez da membrana depende da tensão aplicada no plano da membrana e da própria geometria; No entanto, o efeito do aumento das frequências naturais da configuração estática da estrutura para a configuração deformada da estrutura sob ação da componente média da ação do vento, devido ao aumento da rigidez da estrutura, é praticamente anulado considerando o efeito da massa adicional de membrana segundo a metodologia Sun *et al.* (2008);
- A massa aerodinâmica aplicando a metodologia Sun *et al.* (2008) conduz a uma diminuição crescente das frequências respetivamente igual a -4%, -10% e -14% para os 3 primeiros modos

de vibração equivalentes, no caso da ação da componente média do vento em pressão; e igual a -2% no caso da ação do vento em sucção; Aplicando a metodologia de Minami (1998), a redução das frequências naturais é mais significativa, aproximadamente igual a -45%, -55% e -59%, no caso da ação do vento em pressão; e igual a 18%, -36% e -37% no caso do vento em sucção; Apesar da incerteza quanto à validação desta última metodologia para a determinação da massa aerodinâmica, a redução significativa das frequências da membrana é muito importante no contexto da interação fluido-membrana, tendo em conta que a estrutura de membrana passa a ser caracterizada com frequências naturais mais baixas e próximas da gama de frequências em que a energia de excitação do vento é elevada, aproximadamente entre 0,5 e 1,5Hz. Com efeito, este tópico carece de um estudo mais aprofundado em estudos futuros sustentada por uma validação experimental dada a importância que este representa na resposta da membrana sob à ação do vento;

- Em relação às configurações modais da estrutura, é realizada uma análise em termos globais, e ao nível dos 4 quadrantes: Dada a dupla simetria da estrutura, em termos globais surgem geralmente 4 combinações possíveis em relação aos eixos de desenvolvimento principal da estrutura x e y - $1AS_{xy}$, $1AS_x$, $1AS_y$ e $1S$; Na configuração da estrutura sob a ação da componente média da velocidade do vento, verifica-se que, em termos globais, os dois primeiros modos de vibração têm uma participação elevada da estrutura metálica em y e x , respetivamente para o primeiro e segundo modos; O primeiro modo corresponde ao primeiro antissimétrico em relação a x ($1AS_x$), e o segundo modo ao primeiro antissimétrico em relação a y ($1AS_y$). Em termos de análise da membrana ao nível dos quadrantes, verifica-se que a membrana apresenta o 1º modo simétrico ($1S$), quer no primeiro modo, quer no segundo modo, sendo de salientar que o $1S$ não aparecia no modelo homólogo de membrana tensa isolada, estudado na secção 5.5, facto que pode estar relacionado com o aumento de rigidez da membrana devido ao reajustamento do pré-esforço da membrana, do módulo de corte ser superior nesta análise, 120 em vez de 30kN/m, ou devido à interação com a estrutura metálica;
- As amplitudes de vibração são muito mais significativas na membrana do que na estrutura metálica, estimando-se um máximo, respetivamente, de 74 e 2,2m/s² nos parâmetros de controlo analisados; No caso da membrana, evidenciam-se amplitudes de vibração mais significativas para velocidades do vento de aproximadamente 22m/s, numa gama analisada de 0-40m/s;
- Da resposta dinâmica da estrutura, ao nível dos parâmetros de controlo da membrana, não foram identificadas frequências em particular numa gama de 0-10Hz, embora os espetros da resposta apresentassem elevada energia na gama de frequências correspondentes aos modos de vibração da estrutura com elevada participação da membrana ou com significativa interação; ao nível dos parâmetros de controlo da estrutura metálica os picos dos espetros de potência são mais bem definidos, tendo sido identificadas frequências da estrutura independentemente do nível de interação da membrana;

Em geral, os espetros de potência da resposta da estrutura obtidos com base no método de integração direta apresentam uma área maior, e picos com maior energia, em comparação com os obtidos por sobreposição modal, principalmente na gama de frequências onde se encontra a maioria dos modos de vibração da estrutura com participação significativa da membrana tensa. Este facto, reforça a necessidade de se realizar uma análise dinâmica por integração direta para avaliar o comportamento de estruturas de membrana, de forma a considerar a atualização da matriz de rigidez da estrutura à medida que esta se deforma sob a ação dinâmica do vento, pese embora o esforço de cálculo computacional muito maior associado às análises por integração direta.

6

DETERMINAÇÃO DA FORMA DA VELA DE UM BARCO EM TEMPO REAL

6.1. INTRODUÇÃO

No âmbito dos estudos sobre a determinação da forma de membranas foi sugerido pela empresa *FIBERSAIL* o desenvolvimento de uma metodologia de determinação da forma da vela de um barco em tempo real. Deste modo, foi necessário desenvolver uma aplicação informática que permitisse caracterizar a forma da vela num veleiro, possibilitando a otimização do desempenho da embarcação em tempo real.

O conhecimento da forma da vela em tempo real é um dos tópicos de investigação na área da aerodinâmica de velas (Viola 2013). Os outros tópicos de interesse são a determinação da distribuição de pressões ao longo das velas (Viola e Flay 2011) e a determinação das forças aerodinâmicas desenvolvidas pelas velas (Viola e Flay 2009). Os estudos desenvolvidos nestes tópicos têm sido levados a cabo utilizando métodos numéricos (Lombardi *et al.* 2012; Valdés *et al.* 2009; Augier *et al.* 2014), ensaios em túnel de vento (Bot *et al.* 2014; Fossati *et al.* 2006), e ensaios à escala real (Bergsma *et al.* 2012; Motta *et al.* 2014). Estes últimos estudos são normalmente necessários para a validação dos resultados dos dois primeiros.

A determinação da forma da vela em tempo real recorrendo a medições à escala real, em ambientes controlados e em provas, fornece informações relevantes para o dimensionamento e para o desempenho das velas. Por um lado, essa informação é útil para os projetistas de iates durante o processo de otimização do dimensionamento da forma da vela em funcionamento (Nascimbene 2013), e consequentemente para o fabricante da vela. Por outro lado, os dados da forma da vela podem ser correlacionados com os dados do desempenho da embarcação (Masuyama *et al.* 2009), numa análise posterior, facultando informações importantes acerca do desempenho da vela em condições específicas durante o seu funcionamento. Esta informação pode melhorar consequentemente a capacidade da tripulação em manobrar a vela e o aparelho, constituído pelo mastro, retranca e cordas, visando a otimização das forças aerodinâmicas e a obtenção da máxima velocidade da embarcação. Na verdade, uma das maiores dificuldades de um capitão prende-se com a interpretação visual do comportamento de todo o sistema composto pelas velas e pelo aparelho e, de seguida, manobrar apropriadamente esse sistema. Por este motivo, apesar das operações em navegação se atribuírem geralmente ao sentimento, seria útil recorrer a medições à escala real no sentido de recolher os parâmetros mais relevantes da forma da vela em funcionamento, dado que forneceria informação relevante à tripulação para uma ação eficiente no barco, melhorando consequentemente o desempenho da embarcação em tempo real.

Nos últimos anos, a captação da forma da vela tem-se tornado prática corrente em competições de iates, havendo vários investigadores a desenvolverem os seus próprios sistemas. Os sistemas baseados na visão são as técnicas mais utilizadas para este fim. O sistema V-SPARS (*The Visual Sail Position And Rig Shape*) (Pelley e Modral 2008) utiliza câmaras montadas na plataforma do barco, orientadas para cima e direcionadas para as velas e para o aparelho. O sistema determina a localização global das velas e do aparelho através das coordenadas cartesianas de alvos específicos colocados nesses elementos. No caso das velas, os alvos são constituídos por listas horizontais coloridas colocadas na vela grande, na genoa e no balão. No caso do aparelho, são colocados pontos coloridos em diferentes alturas do mastro. Este sistema pode fornecer a posição global das velas e do aparelho acima da plataforma do barco através da geometria das listas ligadas à deformação do mastro. Outros sistemas de visão (BSG Développements 2008; Olsson *et al.* 1992; Augier *et al.* 2012) incorporam câmaras no topo do mastro orientadas para baixo e direcionadas para as listas colocadas nas velas e, de seguida, utilizam técnicas de imagem para determinar a geometria da vela em funcionamento. Alguns destes sistemas também utilizam imagens fotografadas para cima, a partir da plataforma do barco, para obter mais informação acerca do topo das velas (Masuyama *et al.* 2009), e fornecer uma verdadeira fotogrametria tridimensional (Krebber e Hochkirch 2006; Graf e Müller 2009). Todavia, os sistemas de visão requerem a colocação de câmaras com visibilidade para a vela deformada, o que nem sempre é possível. Para além disso, estas técnicas têm associado alguns problemas, maioritariamente derivados da suscetibilidade das lentes sob as condições ambientais: baixa precisão; apenas funcionam durante o dia com luz solar; efeitos negativos da chuva e da humidade nas lentes das câmaras, fotografando imagens desfocadas; e complexidade da aplicação que mostra os dados.

Alternativamente, um sistema de monitorização baseado em fibra ótica pode superar as limitações identificadas anteriormente. Até ao momento, foram apresentados apenas dois sistemas na literatura com este propósito. Um desses sistemas (Gedeon 2001) compreende uma solução da *Measurand, Inc.*, mas não apresenta o número de sensores envolvidos, e respetiva disposição, ou a própria metodologia utilizada para a obtenção da forma da vela. Por sua vez, o segundo sistema (Farrell *et al.* 2010) baseia-se na aplicação de sensores de Bragg na vela para a medição da temperatura e das deformações, a partir dos quais é possível estimar curvaturas pontuais da vela e de seguida obter a forma da vela usando um método específico. Contudo, com base na informação disponível, não foi realizada qualquer implementação e/ou validação do sistema mencionado e respetivo método. Além disso, o método desse sistema só é adequado para a determinação da forma de velas rígidas, como se explica de seguida. De acordo com esse sistema, cada sensor de Bragg é colocado diretamente sobre uma pequena camada de laminado, que é ligada diretamente à superfície da vela usando adesivo. Ora, apesar de ser flexível, se aplicada num material de vela mais flexível, nomeadamente em membranas finas/plásticas, a camada de laminado dominaria a deformação. Por exemplo, no caso de grandes deformações da vela, a deformação da camada de laminado não acompanharia a deformação “desejada” da vela, atendendo a que a primeira seria mais rígida. Nessa situação, a curvatura local da vela seria inferior à que resultaria se a camada laminar não estivesse presente, afetando consequentemente a forma global da vela mostrada pelo sistema. No entanto, se o material da vela for mais rígido do que o da camada de laminado, garante-se que a vela domina a deformação e, consequentemente, as curvaturas estimadas com base nos sensores corresponderão às curvaturas “desejadas” da vela. Em suma, uma vela rígida assegura a continuidade da deformação da vela entre os vários sensores instalados ao longo da mesma, não sendo possível assegurar o mesmo no caso de velas flexíveis.

O presente trabalho tem como objetivo desenvolver uma metodologia para um sistema de monitorização baseado em fibras óticas, com base em medições de deformação à escala real, possibilitando a determinação da forma da vela em tempo real (Ferreira, Caetano, e Pinto 2017; Rocha

et al. 2015). Este sistema visa contribuir para a otimização do desempenho da navegação em tempo real, superando as desvantagens dos sistemas descritos anteriormente. Para o efeito, um conjunto de vigas flexíveis são instrumentadas com sensores de deformação e, de seguida, é inserido em secções horizontais da vela. A geometria de uma viga deformada é a mesma da secção da vela onde está inserida. O algoritmo implementado no presente trabalho permite tratar os dados dos sensores, de forma a identificar experimentalmente os parâmetros mais significativos da forma da vela com base nas secções horizontais da vela, analogamente aos sistemas de visão.

A determinação da geometria de vigas com recurso a sistemas de medição de deformações é relativamente escassa na literatura. Por um lado, estes sistemas são encontrados, por exemplo, em estudos relacionados com a medição de flechas em estruturas convencionais de engenharia civil (Kim e Cho 2004; Chung *et al.* 2008; Rodrigues *et al.* 2010; Zhu *et al.* 2010; Sousa *et al.* 2013) onde estão envolvidas pequenas deformações. A maioria destes sistemas são constituídos por sensores de Bragg (Hill e Meltz 1997), que superam as tecnologias de sensores tradicionais desde o seu desenvolvimento como sensores de deformação e de temperatura (Kuang *et al.* 2001; Guemes e Menéndez 2002; Castellucci *et al.* 2013; Du *et al.* 1998), atendendo à sua imunidade a interferências eletromagnéticas, peso reduzido, dimensão pequena, capacidade de incorporação, recalibração desnecessária, sinal relativamente estável e aptidão para a multiplexagem em comprimento de onda. Por conseguinte, estes sensores têm sido amplamente utilizados em muitas estruturas civis para a monitorização da saúde estrutural (*SHM*) (Kinet *et al.* 2014; Lally *et al.* 2012; Pedrazzani *et al.* 2012; McKenzie e Karafolas 2005). Por outro lado, quando estão envolvidas grandes deformações, alguns sistemas foram relatados na literatura (Moore 2010; Moore e Rogge 2012; Froggatt e Duncan 2010) utilizando sensores de Bragg distribuídos em soluções com múltiplos núcleos de fibra ótica. Apesar de serem caros, estes últimos sistemas podem ser aplicados numa grande variedade de problemas em engenharia. A determinação de curvaturas a partir da medição das extensões é um procedimento comum nas metodologias destes sistemas, permitindo aceder posteriormente à forma deformada por interpolação.

Outro sistema que pode ser utilizado para adquirir a forma deformada de estruturas é por intermédio de imagem, quer por fotografia ou vídeo. A aquisição e o processamento subsequente das fotografias são amplamente utilizados em várias áreas, nomeadamente em fotografia profissional ou em visão computacional e *software* de reconhecimento de padrões, e vários métodos para a calibração de câmaras podem ser encontrados na literatura. Recentemente, as técnicas de imagem têm sido utilizadas até mesmo para acompanhar os deslocamentos dinâmicos em pontes ferroviárias (Ribeiro *et al.* 2014). Contudo, os requisitos do problema em questão passam pela realização de um procedimento constituído por vários passos, incluindo correção da distorção, extração de pontos de controlo, ajustamento do modelo e correção de perspetiva, passos que têm sido ocasionalmente abordados (Heikkila e Silven 1997), e ainda a deteção do contorno é necessária no presente caso. Por outro lado, os pacotes modernos incluídos em *softwares* como o *MATLAB*® incluem funções individuais que permitem o desenvolvimento de ferramentas personalizadas, onde as caixas de ferramentas podem ser utilizadas em aplicações diversas (Barreto 2012). No presente projeto, foi realizado um pacote de *software* com base em funções e ferramentas previamente desenvolvidas, tendo em vista a confirmação de resultados do sistema com sensores óticos.

Nesse sentido, desenvolveu-se no presente trabalho uma metodologia de caracterização da deformada de uma barra com base na medição de extensões. A validação desta metodologia é realizada primeiramente com recurso a simulações numéricas. De seguida, é implementado um algoritmo baseado nessa metodologia numa aplicação informática.

De acordo com os objetivos referidos anteriormente, foi realizada uma validação da metodologia através do ensaio de um modelo físico, contemplando a instalação de redes de Bragg numa barra de

dimensões conhecidas, de modo a obter curvaturas em pontos específicos, a partir das quais se avaliam, por interpolação, as coordenadas da barra no estado deformado. A barra consiste num perfil pultrudido de um polímero reforçado com fibra de vidro (*GFRP*), feito de uma resina de *vinylester*. Este tipo de perfil tem sido utilizado num crescente número de aplicações (Correia *et al.* 2010; Gonilha *et al.* 2013), atendendo à sua elevada resistência, peso reduzido, boa durabilidade e elevada deformabilidade (Cabral-Fonseca *et al.* 2012), que são características importantes quando estão envolvidas grandes deformações.

Desenvolveu-se um sistema de monitorização baseado em fibras óticas (Ferreira, Caetano, e Pinto 2017), constituído por um computador portátil, onde está alocada a aplicação informática desenvolvida, e por uma unidade de leitura, que faz a aquisição dos sinais provenientes de todos os sensores instalados no modelo. A aplicação informática permite realizar o controlo do sistema de interrogação, o tratamento dos dados recolhidos e a representação da configuração deformada do modelo em tempo real.

A fim de validar o sistema de monitorização desenvolvido, realizou-se em paralelo medições recorrendo a um sistema baseado na análise de imagem.

6.2. CARACTERIZAÇÃO DO PROBLEMA

Um veleiro dispõe de uma vela de genoa e de uma vela grande, respetivamente localizadas à frente e atrás do mastro, de acordo com a Figura 6.1. Por vezes também se dispõe de uma vela de grandes dimensões que se iça à frente do mastro, quando a embarcação navega na direção do vento, denominada de balão, de acordo com a Figura 6.2.



Figura 6.1 – Veleiro da equipa suíça da *America's Cup 2007* (Decision SA 2007)



Figura 6.2 – Balão (Wikipedia 2014b)

6.2.1. CARACTERIZAÇÃO DO ESTADO DE DEFORMAÇÃO

A vela de um barco constitui uma superfície tridimensional, cuja forma está sempre a mudar devido à ação do vento. Embora a deformação no plano influencie a forma da vela, são as deformações isométricas que predominam. Numa deformação isométrica, a distância entre pontos da superfície da vela permanece inalterável. Por outras palavras, a vela não estica, não encolhe / enruga, nem rasga.

Uma característica das superfícies caracterizadas por deformações isométricas é a de serem delimitadas por um fator, denominado de curvatura de Gauss. Este fator é também abordado no capítulo dois. De acordo com a lei introduzida por Gauss, o produto do maior pelo menor raio de curvatura, em todo e qualquer ponto da superfície, permanece constante, desde que não haja enrugamento, nem alongamento.

Assim, na vela, se a curvatura aumentar na direção vertical, irá reduzir na direção horizontal, e vice-versa. A curvatura gaussiana é única em cada vela, e define a sua forma, mantendo-se constante em todas as grandes deformações a que estiver sujeita.

6.2.2. PARÂMETROS DO PERFIL DE SECÇÃO DE VELA

A navegação de um veleiro é habitualmente feita através da observação visual direta da forma das velas, por análise de um conjunto de parâmetros mais relevantes em secções específicas ao longo da genoa e da vela grande. Para definir a geometria de cada vela, são consideradas, geralmente, três secções, localizadas a 25%, 50% e 75% da altura (Sails 2012), de acordo com a Figura 6.1.

A forma de cada secção é definida através de duas percentagens e dois ângulos: a profundidade máxima e respetiva localização a partir da extremidade da corda, de acordo com a Figura 6.3, respetivamente d/c e l/c e os ângulos de entrada e e de saída f . A profundidade máxima e a respetiva localização também se podem caracterizar dimensionalmente através de d e l .

Em navegação, poderá ocorrer o fenómeno de *backwind*, ilustrado na Figura 6.4, originado pelo mudança de direção do vento, sendo relevante a sua quantificação, quer pela profundidade BW , quer pela sua posição BWP .

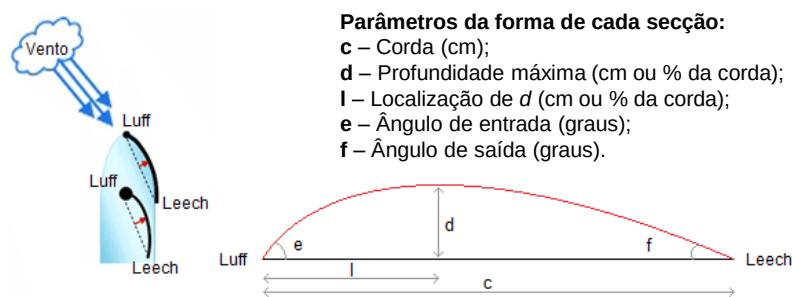
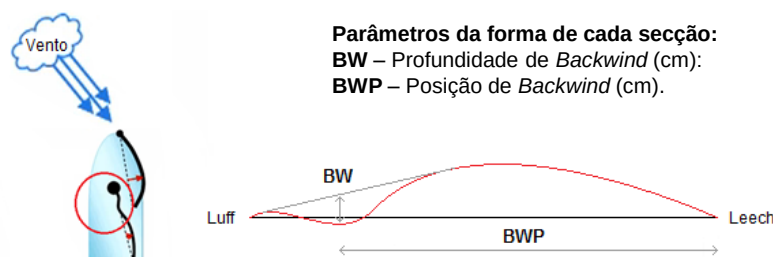


Figura 6.3 – Perfil de secção da vela

Figura 6.4 – Perfil de secção de vela na ocorrência de *Backwind*

6.2.3. CARACTERIZAÇÃO DA FORMA DA VELA COM BASE EM MEDIÇÕES EM TEMPO REAL

No sentido de promover a otimização da navegação, pretende-se que os parâmetros referidos na secção anterior sejam quantificados por via experimental e em tempo real, razão por que se pretende monitorizar a vela utilizando um sistema baseado num conjunto de sensores óticos, de deformação, a instalar em pontos adequados, transformando as quantidades medidas nos parâmetros acima mencionados.

De acordo com o esquema da Figura 6.5 (a), baseado na especificação da demonstração desenvolvida em conjunto com a empresa *FIBERSAIL*, os sensores são instalados nas faces de barras, inseridas num conjunto de secções ao longo da superfície (Figura 6.5 (b)): duas na genoa *GEN* e três na vela grande *VG*.

A aquisição de dados é efetuada com recurso a um interrogador e a um computador portátil que transmite para um dispositivo móvel, via *GSM*, dados relativos à forma das velas, baseados nos parâmetros descritos na secção 6.2.2, e realizando a atualização da informação, a cada segundo.

Neste sentido, o principal objetivo, deste capítulo, é a implementação de um algoritmo que permita tratar os dados de um sistema de monitorização instalado num barco à vela, tendo em vista a identificação experimental dos parâmetros mais significativos da forma destas estruturas flexíveis. Estes parâmetros serão visualizados num dispositivo móvel, ao nível de cada secção de cada vela, de acordo com a Figura 6.6, possibilitando a otimização do desempenho do barco em tempo real.

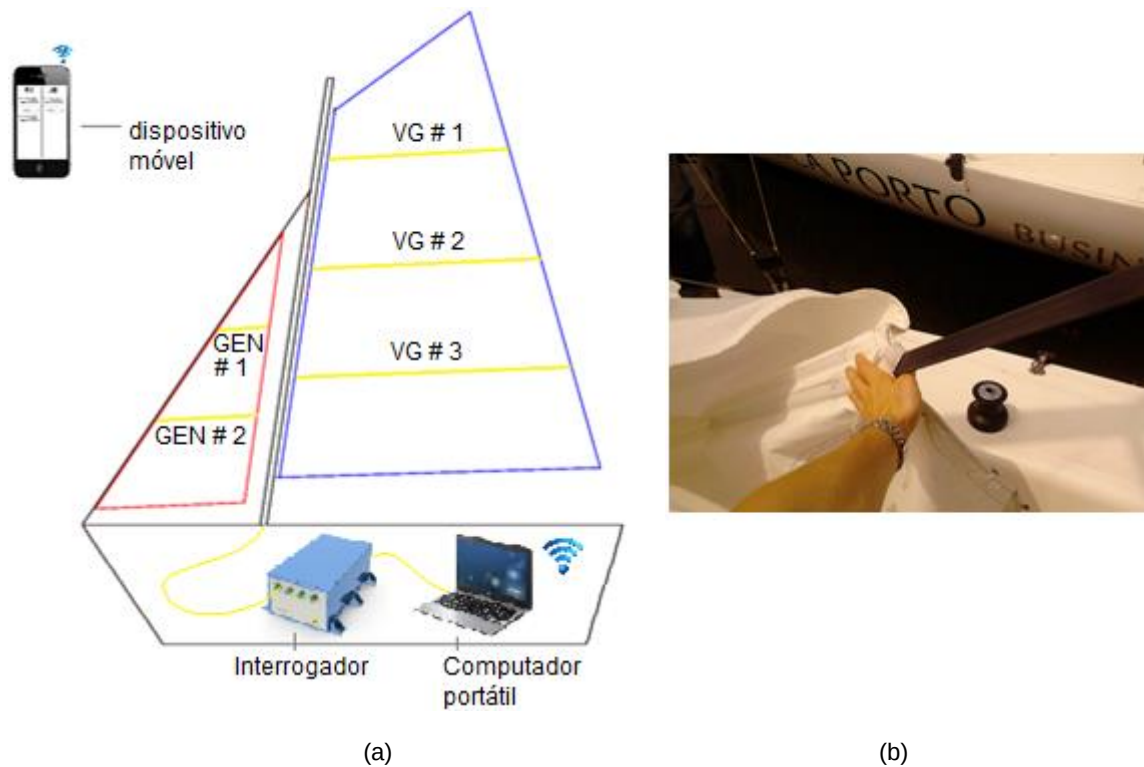


Figura 6.5 – Caracterização do sistema de monitorização baseado em fibras óticas: (a) Localização das secções instrumentadas da vela: vela grande (VG) e genoa (GEN); e equipamentos utilizados; (b) Inserção de barras instrumentadas em bainhas

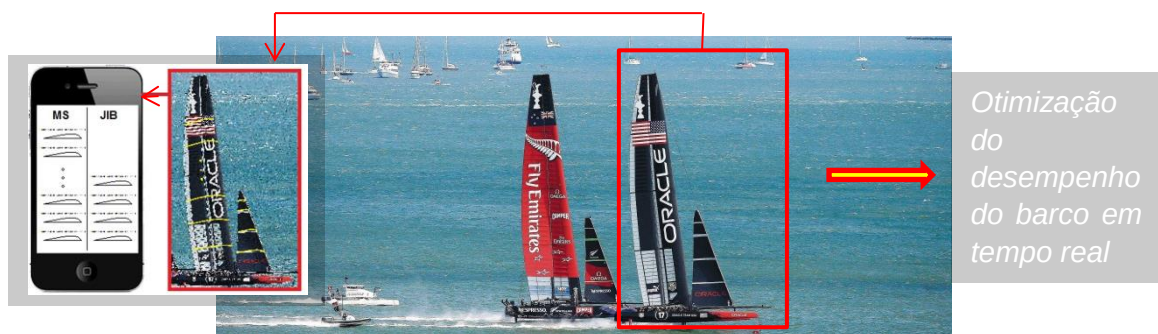


Figura 6.6 – Otimização do desempenho do barco em tempo real

6.3. CARACTERIZAÇÃO DA DEFORMADA DE UMA BARRA COM BASE NA MEDIÇÃO DE EXTENSÕES

A colocação da barra numa bainha da vela deve ser feita de modo a que as faces de maior dimensão estejam em contacto com a bainha e esta possa deslizar interiormente, acompanhando apenas a deflexão fora do plano da vela.

Por efeito do enfunamento da vela, a barra fica submetida a flexão simples. Esta primeira hipótese, relativa ao comportamento da barra instrumentada, implica que a sua espessura seja bastante inferior à largura, de modo a evitar a ocorrência de rotação em torno do eixo longitudinal, que resultaria em torção.

Em cada barra, um conjunto de $2NS$ sensores de *Bragg* é colado nas faces opostas, de acordo com o esquema da Figura 6.7 (a), perfazendo um total de NS secções de barra instrumentadas. Pretende-se definir um número adequado de secções a instrumentar NS , de modo a ser possível, com um nível de precisão adequado, a interpolação das rotações ao longo da extensão da barra, através das quais será definida a sua deformada.

6.3.1. METODOLOGIA

Os $2NS$ sensores de *Bragg* serão distribuídos pelas duas faces da barra e colocados em oposição, de modo a poder calcular-se a curvatura em cada secção, por diferença entre as extensões em fibras opostas $\Delta\epsilon$, as rotações, ao longo da barra e, finalmente, reconstituir-se a deformada da barra.

6.3.1.1. Lei de variação das extensões – interpolação *SPLINE*-cúbica

As extensões são determinadas pontualmente ao longo das faces de barra instrumentada a partir dos sensores de deformação instalados. É calculada a diferença entre extensões de fibras opostas $\Delta\epsilon$. De forma a obter as extensões nos troços de barra não instrumentada, é feita uma interpolação do tipo *SPLINE*-cúbica às extensões medidas, de acordo com a Figura 6.7 (b).

A interpolação, do tipo *SPLINE*-cúbica, tem a vantagem de preservar as extensões medidas pontualmente, ao contrário de outro tipo de interpoladores. No entanto, as interpolações polinomiais de ordem 2, 3 ..., n , por exemplo, também podem ser empregues, apesar de perderem eficácia à medida que a ordem aumenta.

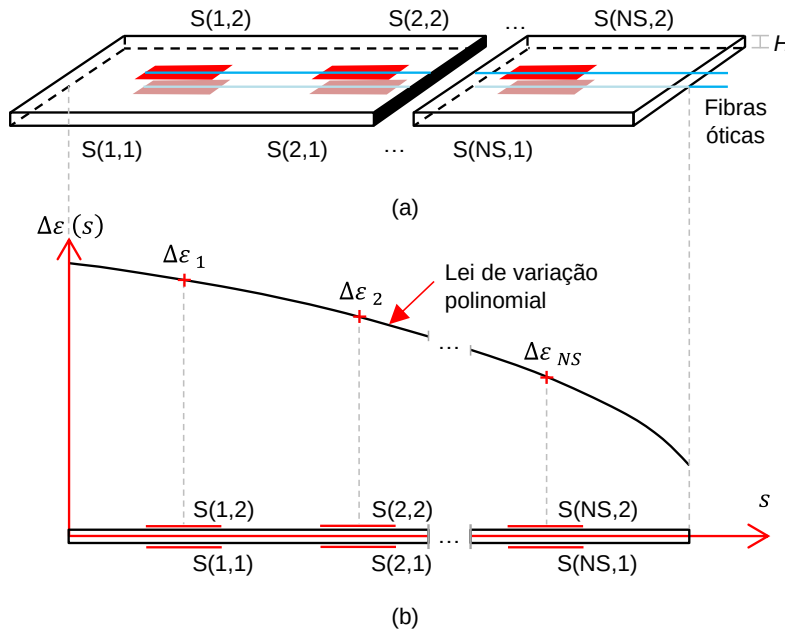


Figura 6.7 – (a) Disposição das fibras e dos sensores de *Bragg* na barra; (b) Lei de variação de $\Delta\epsilon(s)$

6.3.1.2. Curvatura das secções

A curvatura $K(s)$ pode ser calculada com base na deformação de duas fibras. Para esse efeito, são utilizados sensores de deformação apropriados, colocados na fibra inferior e superior, designados S_{inf} e S_{sup} (Figura 6.8). Deste modo, a curvatura da secção é calculada por intermédio de

$$K(s) = \frac{\varepsilon_{inf} - \varepsilon_{sup}}{H} \quad (6.1)$$

em que, ε_{inf} e ε_{sup} são, respetivamente, as extensões na fibra inferior e superior, e H é a distância entre essas fibras.

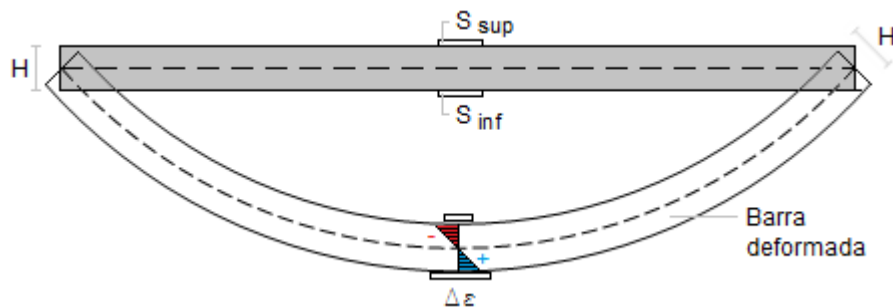


Figura 6.8 – Cálculo da curvatura da secção da barra baseado em medições de sensores de deformação

6.3.1.3. Rotação das secções

As rotações envolvidas na deformação da barra são elevadas, quando comparadas com as ocorridas em problemas correntes da engenharia civil. Este facto decorre da não-linearidade geométrica acentuada no problema em questão. Tendo em vista a reconstituição da deformada da barra, de uma forma discreta, a rotação vem dada por

$$\theta_i(ds) = \arctg \left(\int_{s_i}^{s_f} K(s) ds \right) , \text{ com } i = 1, 2, \dots, m \quad (6.2)$$

em que m representa o número de elementos discretos, na reconstituição da deformada da barra, K é a curvatura e s_i e s_f representam, respetivamente, as coordenadas iniciais e finais do elemento i , no referencial longitudinal da barra s , como ilustrado na Figura 6.7 (b).

Esta metodologia permite que o número de sensores utilizados, na instrumentação da barra, seja independente do número de elementos utilizados na reconstituição da deformada, como se descreve de seguida.

6.3.1.4. Reconstituição da deformada da barra

De acordo com a Figura 6.9, a reconstituição da deformada do eixo da barra é levada a cabo, tendo por base uma discretização em elementos retilíneos de comprimento l_i , assumindo o mesmo comprimento que o “comprimento de arco” que lhes corresponde na deformada real.

Note-se porém que esta hipótese tem um erro associado, sendo tanto maior quanto menor for a discretização, o que pode afetar os parâmetros que se pretendem estimar, nomeadamente o ângulo de entrada, assinalado na Figura 6.9. Se este ângulo for estimado com uma discretização reduzida, erros

consideráveis poderão ocorrer. Esta hipótese está indiretamente relacionada com a premissa de que a barra sofre apenas flexão simples, não havendo, conseqüentemente, encurtamento, nem alongamento do seu eixo.

A reconstituição da deformada da barra é levada a cabo com base nas estimativas das rotações das secções da barra e das condições de fronteira do problema. A deformada é determinada, em termos das coordenadas cartesianas dos nós da barra, no referencial (x,z) , de acordo com o esquema da Figura 6.10, sendo o eixo dos xx tangente à deformada. De seguida, é aplicada uma transformação de coordenadas que permite passar do referencial (x,z) para o referencial local da barra (x^1,z^1) . Neste último, o eixo x^1 coincide com a corda da secção da vela em que está inserida a barra.

Finalmente, é realizado um ajustamento das coordenadas cartesianas dos nós da barra reconstituídos, através de uma linha de tendência polinomial. Este ajustamento permite estimar o perfil da secção, ficando a corda definida pela coordenada do último nó da barra, no eixo x^1 . A derivada da equação, que define o perfil, permite determinar os restantes parâmetros.

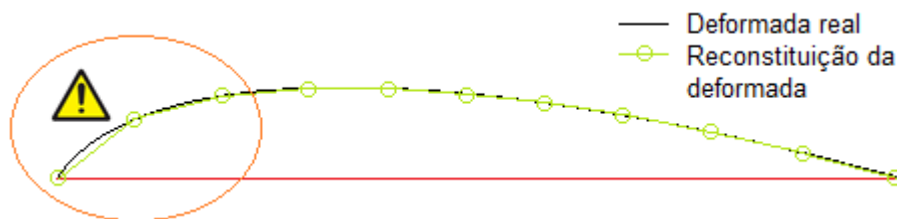


Figura 6.9 – Reconstituição da deformada da barra

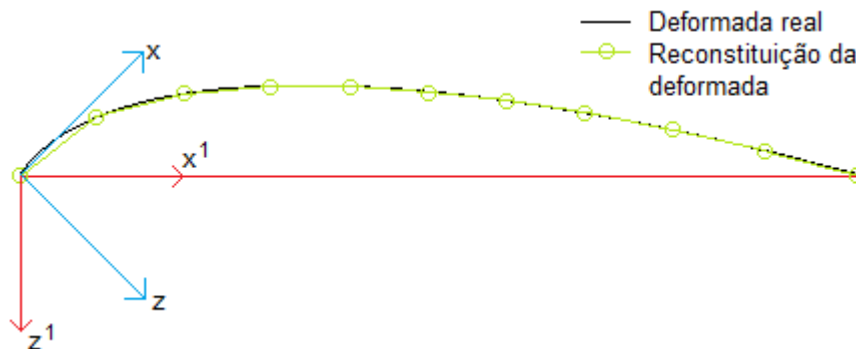


Figura 6.10 – Referencial local da barra

6.3.2. IMPLEMENTAÇÃO

A metodologia apresentada na secção anterior foi implementada inicialmente em ambiente *MATLAB*[®], com vista à validação numérica. Posteriormente, na validação experimental que será descrita na secção 6.4, a metodologia foi implementada em ambiente *LABVIEW*[®], para agregar, no mesmo *software*, a aquisição de sinal dos sensores, o tratamento dos sinais e a reconstituição da deformada, bem como a sua visualização em tempo real, tornando o cálculo mais eficiente.

A Figura 6.11 apresenta o fluxograma da metodologia, com base na formulação apresentada anteriormente. A atualização da deformada é realizada a cada 1 segundo.

De seguida, apresentam-se exemplos de aplicação da metodologia exposta a uma barra com deformada conhecida numericamente, através da utilização do método dos elementos finitos, de forma a averiguar o erro de caracterização da deformada em função do número de secções NS instrumentadas na barra.

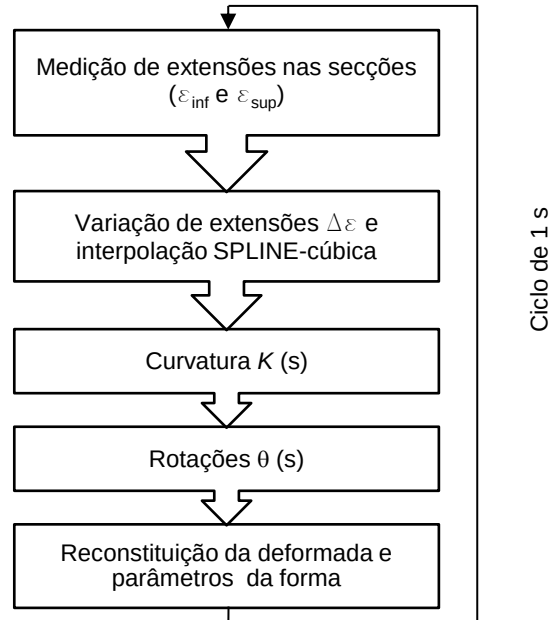


Figura 6.11 – Fluxograma da metodologia

6.3.3. VALIDAÇÃO NUMÉRICA DA METODOLOGIA

Os exemplos numéricos estudados baseiam-se no modelo de uma barra com 1 metro de comprimento, espessura de $2mm$, módulo de Young de $20GPa$, sujeita a um carregamento que procura reproduzir as configurações típicas das secções das velas em navegação.

Neste sentido, estudaram-se dois modelos de barra: o primeiro, consiste numa barra encastrada numa das extremidades; e o segundo, numa barra simplesmente apoiada.

As análises não-lineares são levadas a cabo através do programa de elementos finitos *SOLVIA*[®], que permite obter a deformada da estrutura em resposta às solicitações. É utilizada uma discretização da barra em 100 elementos de casca, de comprimento igual a $1cm$. São, então, calculadas as extensões na fibra superior ε_2 e inferior ε_1 , e o respetivo diferencial $\Delta\varepsilon$, por elemento, ao longo da barra, simulando os valores dos sensores de *Bragg* caso estivessem colocados na barra nessas posições.

Modelo de barra encastrada

O exemplo estudado numericamente consiste numa barra encastrada, sujeita a uma força na extremidade livre de intensidade $1N$, de acordo com a Figura 6.12. A análise da estrutura usando uma formulação não-linear geométrica permite obter a sua deformada em resposta à solicitação mencionada. As extensões são obtidas nas fibras superior ε_2 e inferior ε_1 (ver a Figura 6.13), por elemento, a partir da deformada da barra.

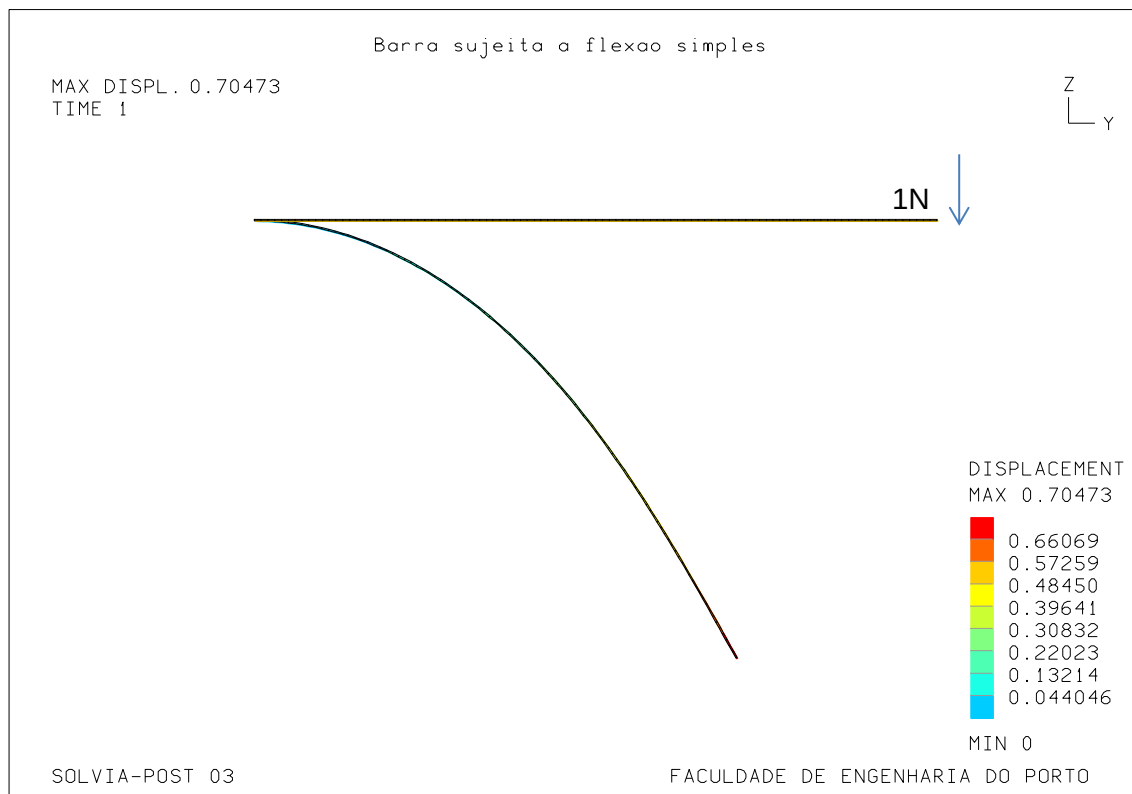


Figura 6.12 – Modelo de barra encastrada sujeita a flexão simples

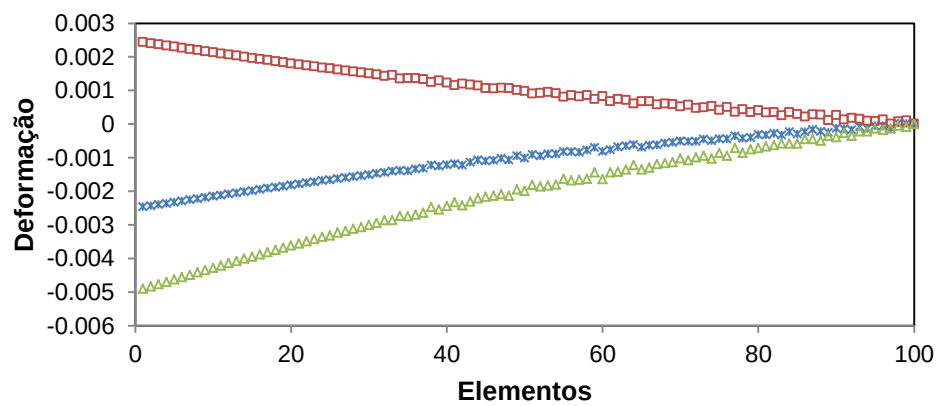


Figura 6.13 – Variação das deformações ao longo do modelo de barra encastrada

Modelo de barra simplesmente apoiada

Neste exemplo, utiliza-se uma barra simplesmente apoiada, submetida a diferentes ações, como esquematizado na Figura 6.14: uma pressão $p_r(s)$, aplicada perpendicularmente aos elementos; uma força concentrada, na extremidade direita, de intensidade F_{101} ; e uma força concentrada, aplicada ao nível de cada nó, de intensidade t . O valor das solicitações anteriores, para cada uma das 3 configurações estudadas, apresenta-se na Tabela 6.1.

É de notar que, nas análises não-lineares realizadas, as ações anteriores são aplicadas ao modelo de barra em duas fases: primeiramente, aplica-se a pressão $p_r(s)$ e, de seguida, aplicam-se as restantes ações, F_{101} e t .

A análise da resposta da estrutura a cada solicitação permite obter a deformada associada a cada solicitação (ver as Figuras 6.15 a 6.17, respetivamente, para as configurações 1 a 3, associadas a uma flecha crescente e assimétrica).

As deformadas obtidas permitiram reproduzir, com alguma verosimilhança, configurações correntes em navegação (Sails 2012) da forma das secções das velas, fazendo variar a localização da profundidade máxima em relação à corda de 50% a 40%.

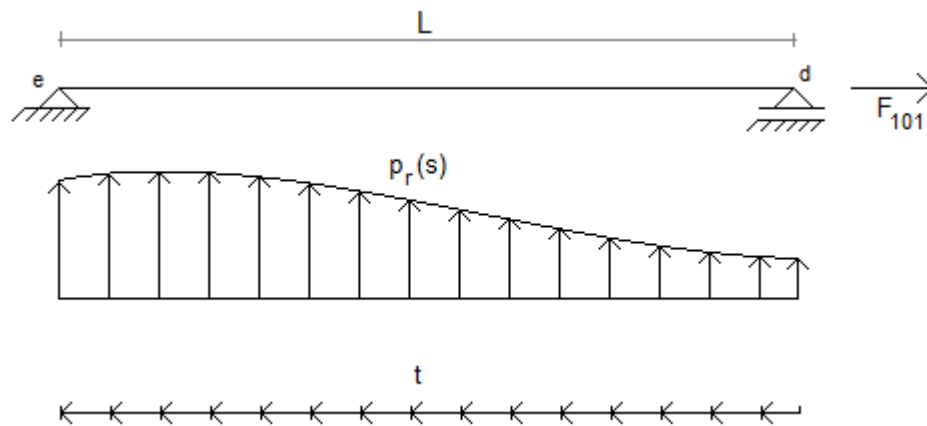


Figura 6.14 – Esquema das solicitações genéricas no modelo de barra simplesmente apoiada

Tabela 6.1 – Valor das solicitações no modelo de barra simplesmente apoiada para cada configuração

Solicitação	p_r (N/m)	t (N)	F_{101} (N)
C1	1000	-	-
C2	1000	0,10	5
C3	$p_r(s) = \begin{cases} -1,00E6 s^2 + 2,00E5 s, & s \leq 0,10 \\ -1,23E4 s^2 + 2,47E3 s + 9,88E3, & s > 0,10 \end{cases}$	0,15	15

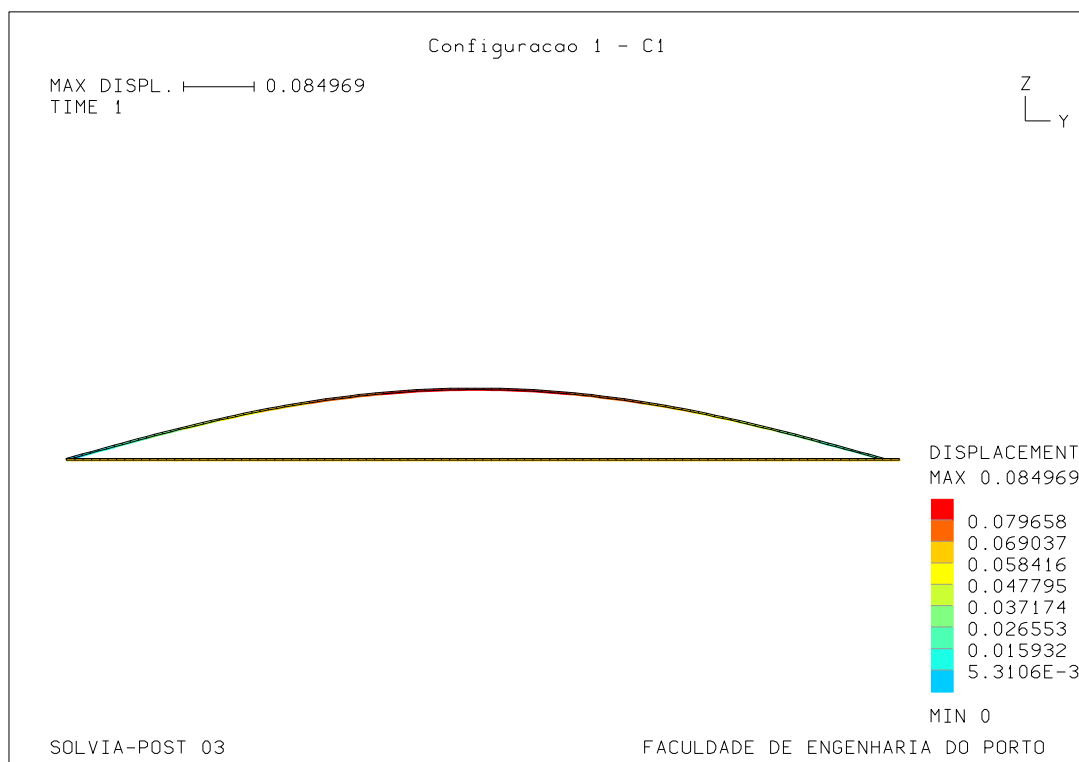


Figura 6.15 – Deformada associada à solicitação C1

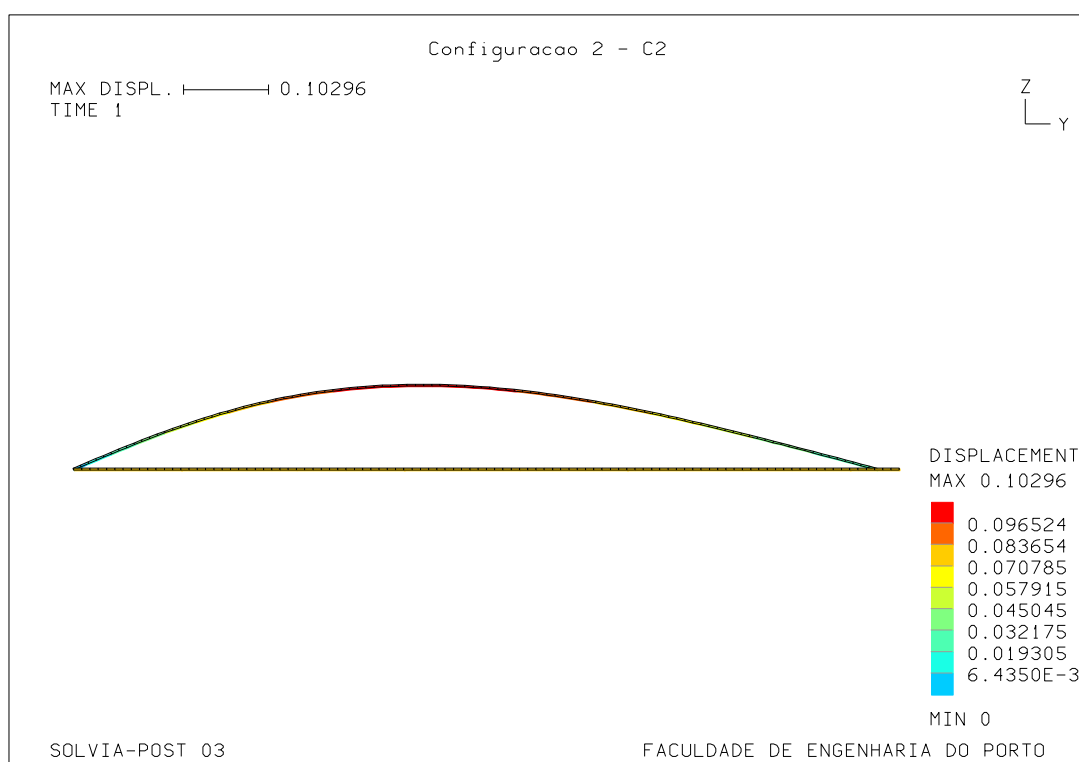


Figura 6.16 – Deformada associada à solicitação C2

A resposta estrutural associada a cada solicitação permite avaliar as extensões na fibra superior, ε_2 , e inferior, ε_1 , e o respetivo diferencial, $\Delta\varepsilon$, por elemento, ao longo da barra (ver a Figura 6.18), simulando os valores dos sensores de *Bragg* caso estivessem colocados na barra nessas posições.

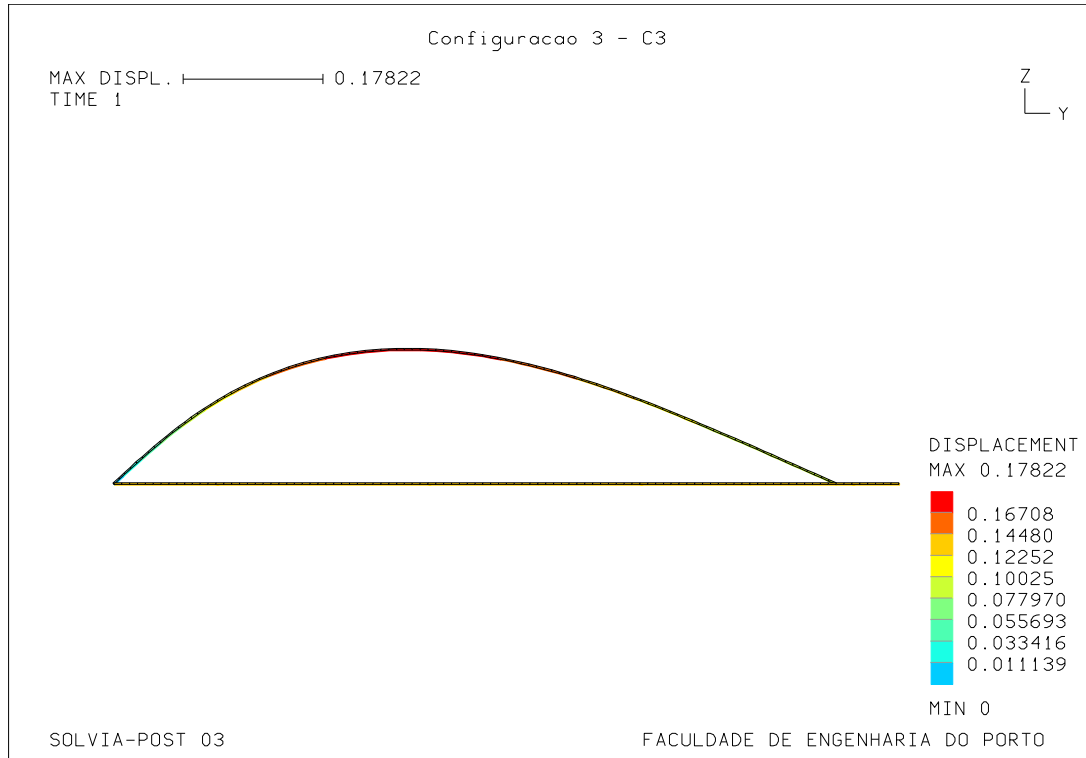


Figura 6.17 – Deformada associada à solicitação C3

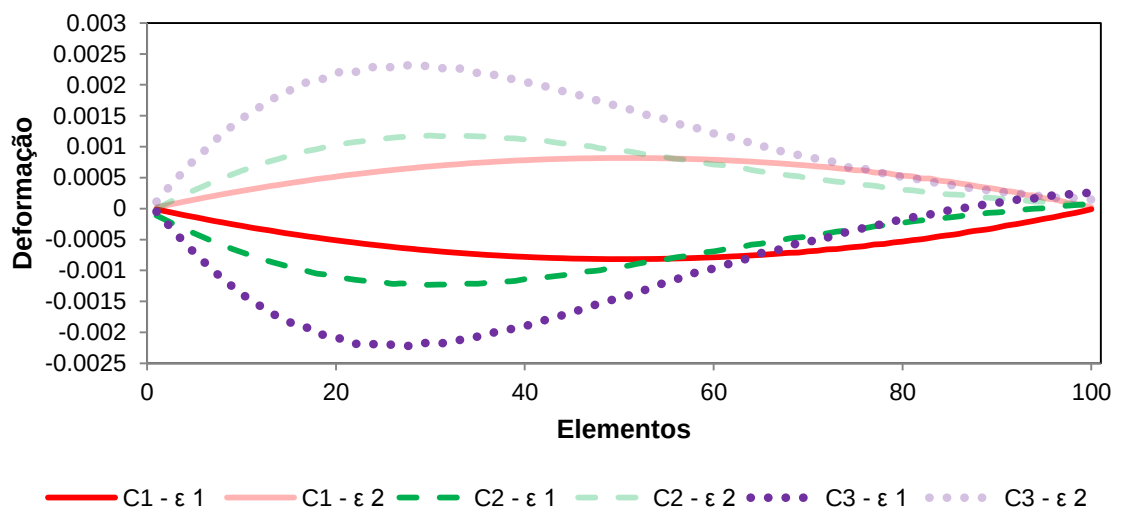


Figura 6.18 – Variação das extensões ao longo da barra nas fibras inferior ε_1 e superior ε_2

6.3.3.2. Resultados das simulações

Na presente secção apresenta-se a reconstituição da deformada obtida através das simulações numéricas, tendo por base a metodologia abordada anteriormente, quer para o modelo de barra encastrada, quer para o modelo de barra simplesmente apoiada.

O erro de caracterização da profundidade da deformada é obtido por comparação entre as deformadas obtidas pelas duas vias mencionadas anteriormente, uma baseada no cálculo estrutural e outra na metodologia implementada. Este erro é dado pelo quociente entre a distância ($dist$) entre nós homólogos das deformadas obtidas pelas duas vias e a profundidade máxima da deformada real ($dmáx$), como esquematizado na Figura 6.19, sendo designado por E_{pm} . A deformada real corresponde à obtida numericamente usando o *software* SOLVIA® (SOLVIA 2010).

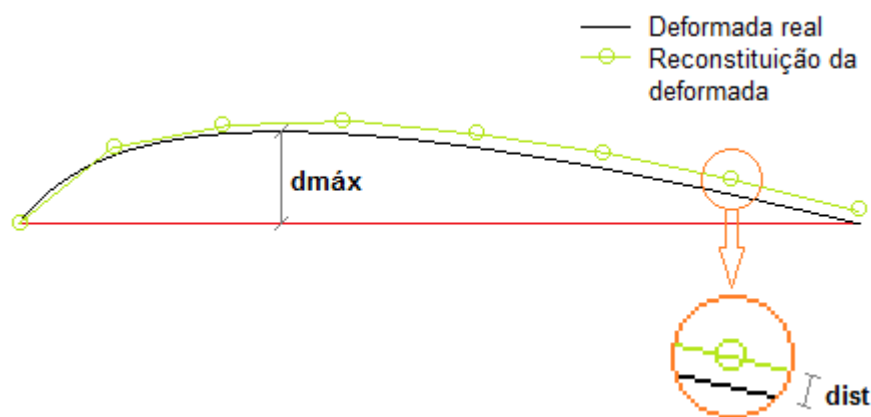


Figura 6.19 – Definição do erro de caracterização da profundidade da deformada

Modelo de barra encastrada

Na presente secção apresentam-se os resultados da simulação para o modelo de barra encastrada, realizando-se uma análise com 200, 40, 20, 10 e 6 das extensões calculadas ($NS=[100;20;10;5;3]$), o que corresponde à utilização de 200, 40, 20, 10 e 6 sensores de *Bragg*, respetivamente.

A seleção das secções instrumentadas foi realizada de forma a definir distâncias iguais entre sensores ao longo da barra, de acordo com a Tabela 6.2. Para além dos parâmetros anteriores, consideraram-se 100 elementos na reconstituição da deformada.

Tabela 6.2 – Seleção das secções instrumentadas da barra

Sensores	s (cm)
200 sensores FBG; m=100	0,5; 1,5; 2,5; ...; 99,5
40 sensores FBG; m=100	2,5; 7,5; 12,5; ...; 97,5
20 sensores FBG; m=100	4,5; 14,5; 24,5; ...; 94,5
10 sensores FBG; m=100	9,5; 29,5; 49,5; 69,5; 89,5
6 sensores FBG; m=100	15,5; 49,5; 83,5

Na Figura 6.20 apresenta-se a reconstituição da deformada utilizando, respetivamente, 6 e 10 sensores de Bragg, em comparação com a deformada de referência calculada numericamente. Verifica-se uma boa aproximação das deformadas reconstituídas com apenas 3 e 5 secções instrumentadas, optando-se por não representar as restantes, na medida em que são praticamente coincidentes com a solução de referência. As deformadas são apresentadas no referencial local da barra, em relação ao qual se calcularam os parâmetros mais relevantes para 5 secções instrumentadas. Estes parâmetros encontram-se também sistematizados na Tabela 6.3, juntamente com os obtidos para 3, 10, 20 e 100 secções.

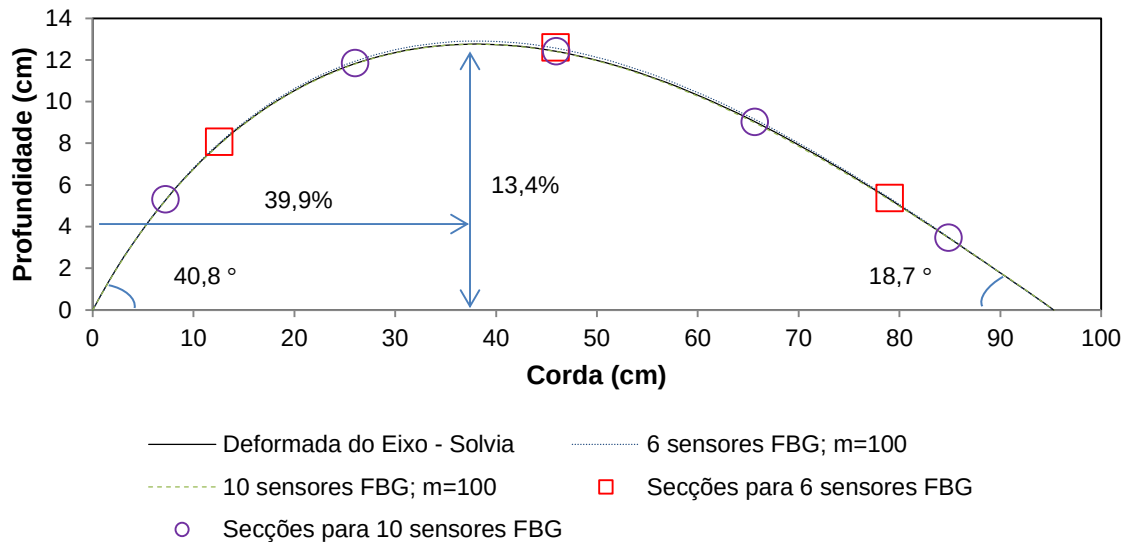


Figura 6.20 – Comparação entre deformada calculada numericamente e reconstituída para o modelo de barra encastrada

Tabela 6.3 – Parâmetros da deformada do modelo de barra encastrada calculada numericamente e reconstituída com 3, 5, 10, 20 e 100 secções instrumentadas

Resultados							
NS	Corda	Profundidade máxima		Localização		Ângulo de entrada	Ângulo de saída
	c (cm)	d (cm)	d/c (%)	l (cm)	l/c (%)	e (°)	f (°)
100	95,3	12,8	13,4	38,1	39,9	40,8	18,5
20	95,3	12,8	13,4	38,3	40,2	40,9	18,6
10	95,3	12,7	13,3	37,9	39,7	40,8	18,3
5	95,3	12,8	13,4	38,1	39,9	40,8	18,7
3	95,2	12,9	13,6	38,1	40,1	40,9	18,9
Referência (SOLVIA®)	95,3	12,8	13,4	38,0	39,9	41,5	18,5

Na Figura 6.21 apresenta-se o erro de caracterização da profundidade da deformada E_{pm} , concluindo-se que é tanto maior quanto menor o número de sensores de *Bragg* utilizados. Este erro atinge valores máximos de 1,3% e 0,1%, utilizando, respetivamente, 6 e 200 sensores de *Bragg*.

É de notar que a curva do erro associado à reconstituição da deformada utilizando 40 sensores de *Bragg* apresenta um erro máximo superior ao valor apresentado para 20 sensores, respetivamente, 0,5% e 0,4%. Este facto resulta de pequenas flutuações associadas à deformada obtida numericamente (ver a Figura 6.13).

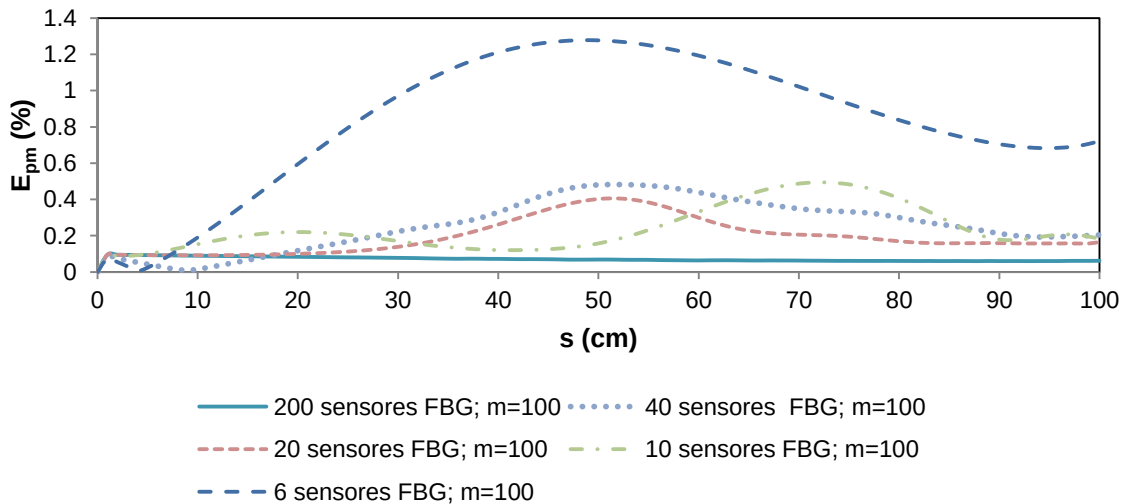


Figura 6.21 – Variação do erro de caracterização da profundidade da deformada ao longo da barra

Modelo de barra simplesmente apoiada

Na presente secção, apresentam-se os resultados das simulações para o modelo de barra simplesmente apoiada, realizando-se uma análise com 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8 e 6 das extensões calculadas ($NS=[10;9;8;7;6;5;4;3]$), o que corresponde à utilização de 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8 e 6 sensores de *Bragg*, respetivamente.

A seleção das secções instrumentadas seguiu a ordem apresentada na Tabela 6.4, em que, por exemplo, para 6 sensores de *Bragg*, ou seja, 3 secções instrumentadas, se instrumentaram as secções localizadas em $s = (4,5; 44,5; 94,5)$.

Nas Figuras 6.22 a 6.24 apresenta-se a reconstituição da deformada utilizando, respetivamente, 6 e 10 sensores de *Bragg*, em comparação com a deformada de referência calculada numericamente. Na deformada reconstituída com 10 sensores de *Bragg* evidencia-se uma sobreposição praticamente perfeita com a deformada real. Por consequência, opta-se por não representar as restantes deformadas contendo mais do que 5 secções instrumentadas, na medida em que são praticamente coincidentes com a solução de referência. As deformadas são apresentadas no referencial local da barra, em relação ao qual se calcularam os parâmetros mais relevantes para 5 secções instrumentadas. Estes parâmetros, juntamente com os obtidos para 3 secções, encontram-se sistematizados na Tabela 6.5 para as 3 solicitações estudadas.

Tabela 6.4 – Seleção das secções instrumentadas da barra

Sensores	s (cm)									
	4,5	14,5	24,5	34,5	44,5	54,5	64,5	74,5	84,5	94,5
20 sensores FBG; m=100	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
18 sensores FBG; m=100	x	x	x	x	x	x	x	x		x
16 sensores FBG; m=100	x		x	x	x	x	x	x		x
14 sensores FBG; m=100	x		x	x	x	x		x		x
12 sensores FBG; m=100	x		x		x	x		x		x
10 sensores FBG; m=100	x		x		x			x		x
8 sensores FBG; m=100	x		x		x					x
6 sensores FBG; m=100	x				x					x

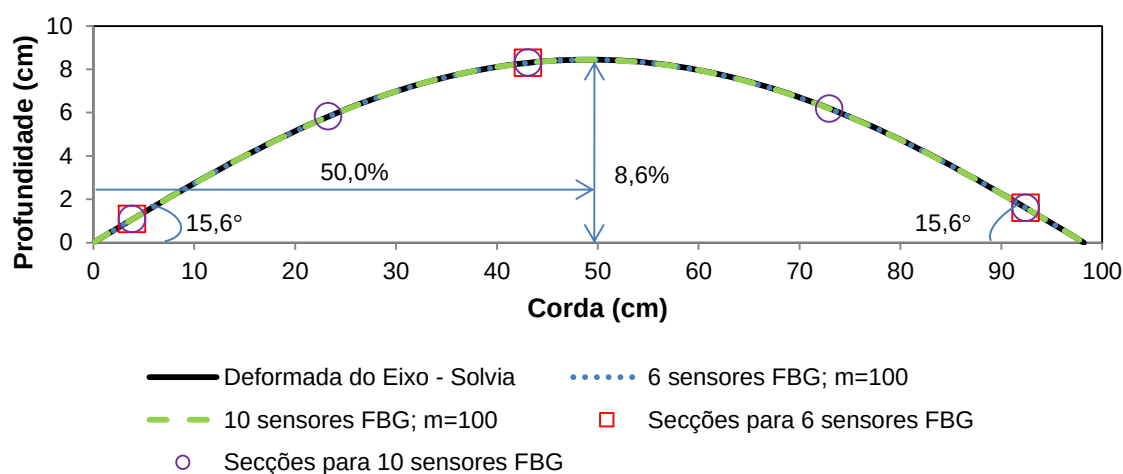


Figura 6.22 – Comparação entre deformada calculada e reconstituída para a solicitação C1

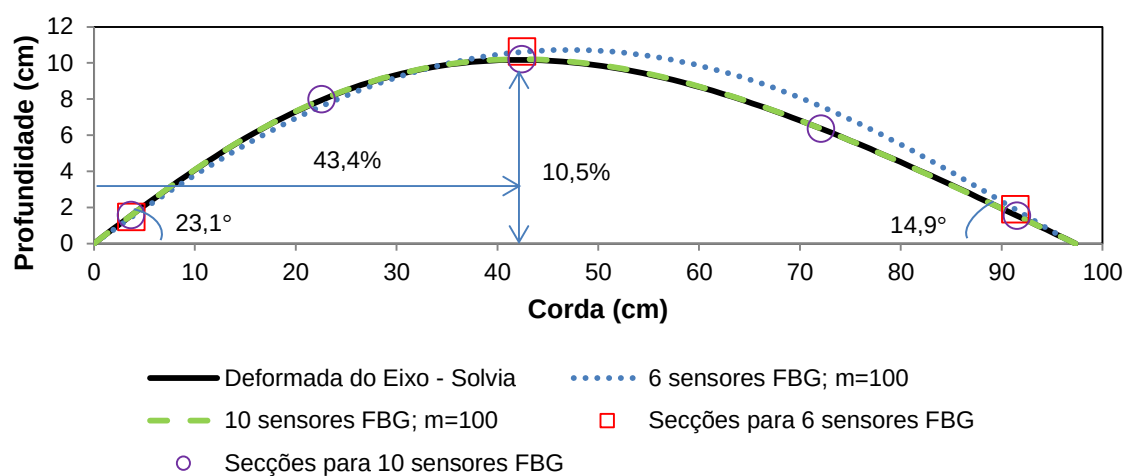


Figura 6.23 – Comparação entre deformada calculada e reconstituída para a solicitação C2

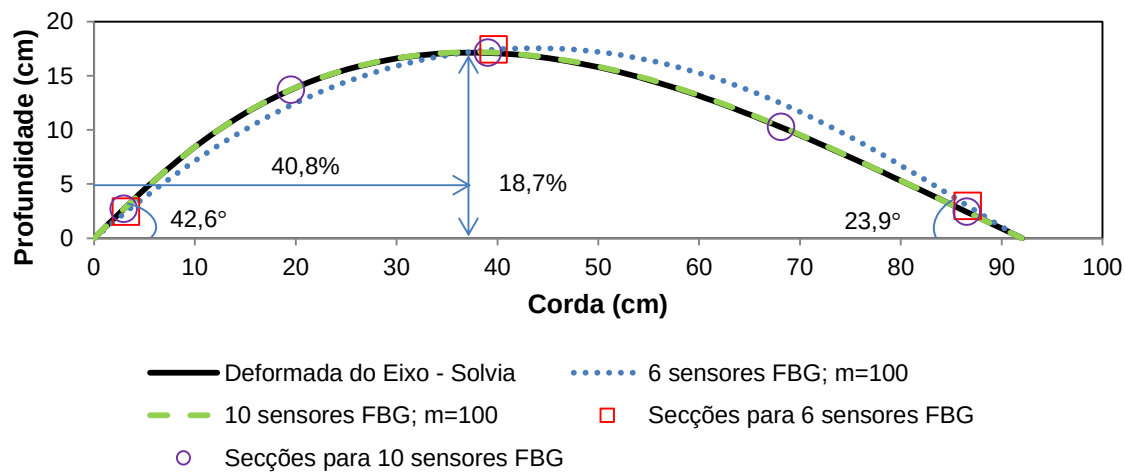


Figura 6.24 – Comparação entre deformada calculada e reconstituída para a solicitação C3

Tabela 6.5 – Parâmetros da deformada do modelo de barra simplesmente apoiada calculada numericamente e reconstituída com 3 e 5 secções instrumentadas

Resultados								
Solicitação	NS	Corda	Profundidade máxima		Localização		Ângulo de entrada	Ângulo de saída
		c (cm)	d (cm)	d/c (%)	l (cm)	l/c (%)	e (°)	f (°)
C1	3	98,2	8,4	8,6	49,1	50,0	15,6	15,6
	5	98,2	8,4	8,6	49,1	50,0	15,6	15,6
	Referência (SOLVIA®)	98,2	8,5	8,6	49,1	50,0	15,6	15,6
C2	3	97,1	10,7	11,0	47,0	48,4	21,6	18,2
	5	97,3	10,2	10,5	42,2	43,4	23,1	14,9
	Referência (SOLVIA®)	97,3	10,2	10,5	42,1	43,3	23,0	14,8
C3	3	91,9	17,5	19,1	43,6	47,5	37,8	29,3
	5	92,0	17,2	18,7	37,5	40,8	42,6	23,9
	Referência (SOLVIA®)	92,0	17,1	18,6	37,4	40,6	42,6	23,8

Nas Figuras 6.25 a 6.27 apresentam-se os erros resultantes desta análise, concluindo-se que o erro de caracterização da deformada é tanto maior quanto menor o número de sensores de Bragg utilizados. São obtidos valores máximos de 12,4% e mínimos de 0,04% utilizando 6 e 20 sensores de Bragg, respetivamente, nas solicitações C2 e C1.

Como já foi referido anteriormente, procurou-se reduzir a localização da profundidade máxima em relação à corda de 50% a 40%, respetivamente da configuração 1 à 3. É de salientar que o erro aumenta à medida que a localização da profundidade máxima vai reduzindo, isto é, à medida que a deformada se vai tornando assimétrica, sendo inviável a utilização de 6 ou 8 sensores de *Bragg*, com erros a atingir cerca de 12% (ver a Figura 6.27).

A utilização de 10 sensores de *Bragg* conduz a um erro máximo de 0,47% para a solicitação C3, o que é razoável, embora no modelo de barra encastrada fosse de 0,5%.

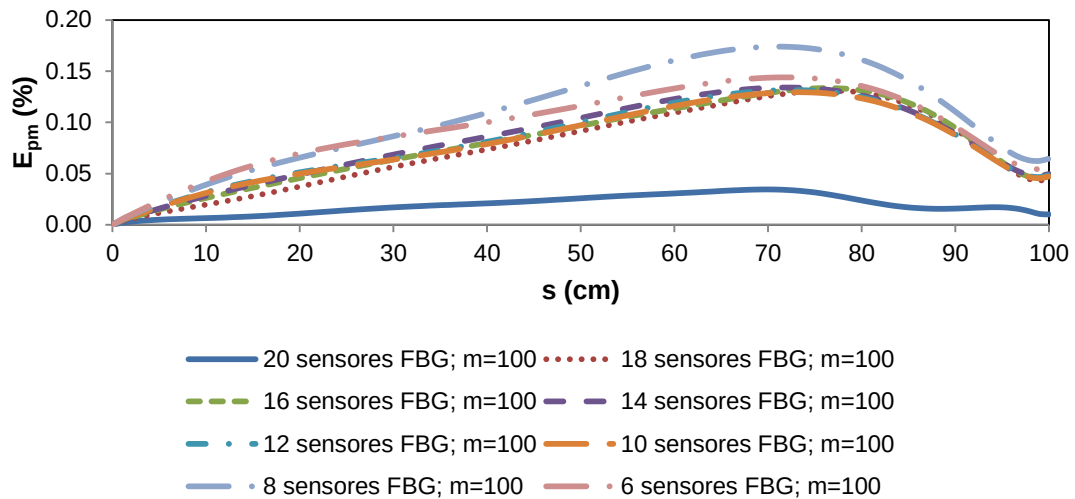


Figura 6.25 – Variação do erro de caracterização da profundidade da deformada ao longo da barra para a solicitação C1

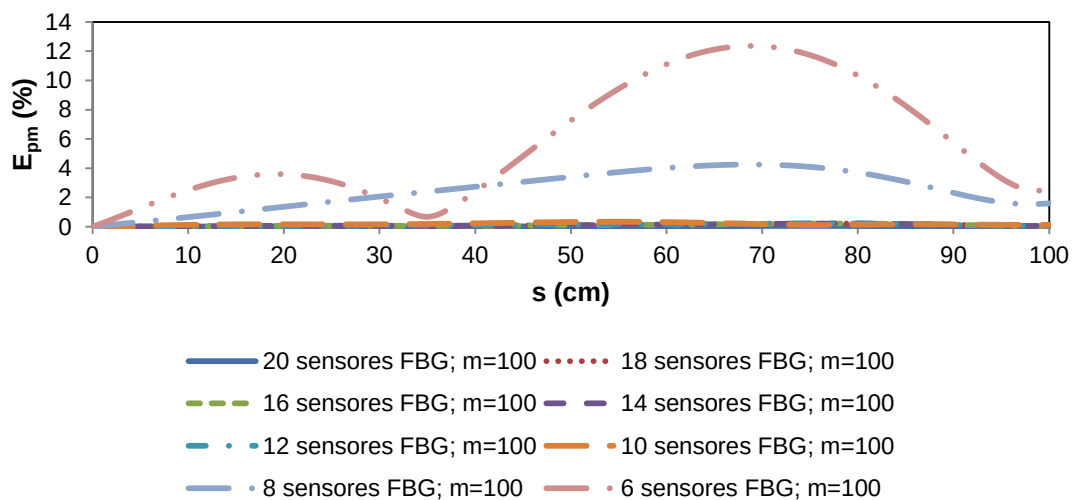


Figura 6.26 – Variação do erro de caracterização da profundidade da deformada ao longo da barra para a solicitação C2

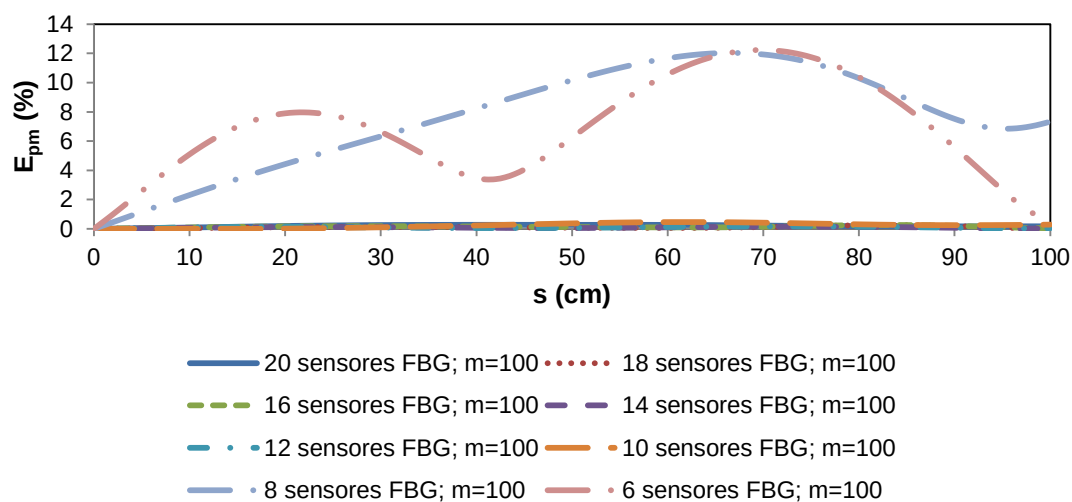


Figura 6.27 – Variação do erro de caracterização da profundidade da deformada ao longo da barra para a solicitação C3

6.3.3.3. Conclusões

Considerando as simulações realizadas e desprezando erros de outra natureza, nomeadamente experimentais, conclui-se que a utilização de 10 sensores de *Bragg*, isto é, 5 secções instrumentadas em cada barra, permite obter um erro máximo da ordem de 0,5% no valor da profundidade da secção reconstituída da barra. No entanto, a validação experimental desta metodologia é fundamental, através de ensaios, dado que assenta num conjunto de hipóteses não verificadas.

6.4. VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL DA METODOLOGIA DESENVOLVIDA

6.4.1. GERAL

A instalação de redes de *Bragg* numa barra de dimensões conhecidas permite obter curvaturas em pontos específicos, a partir das quais se avaliam, por interpolação, as coordenadas da barra no estado deformado.

Incertezas relacionadas com a validade da aplicação da metodologia desenvolvida obrigam à calibração / confirmação de resultados, através de um sistema de medição alternativo. Dada a amplitude das deformações a medir e a elevada precisão na realização em testes laboratoriais, optou-se pela reconstituição da deformada da barra com base na análise de imagem.

A validação da metodologia desenvolvida para a reconstituição da deformada foi realizada com base na instrumentação de uma barra de dimensões conhecidas. Esta foi fixa nas suas extremidades numa mesa graduada, onde se procedeu à sua deflexão em configurações que procuraram reproduzir situações correntes do enfunamento da vela. A identificação da deformada foi realizada por intermédio de um sistema de medição das extensões do material e com recurso a um sistema de imagem.

Efetuararam-se estudos paramétricos, não só para avaliar os parâmetros pretendidos, com diferentes números de secções instrumentadas, mas também para explorar diferentes configurações de distribuição dos sensores pelas faces da barra.

Por fim, realizou-se uma análise das incertezas nas medições, nomeadamente ao nível da caracterização da espessura e da localização das secções de barra instrumentadas, bem como ao nível do impacto dos efeitos da temperatura na medição dos extensómetros de fibra ótica.

6.4.2. MODELO FÍSICO

O modelo físico ensaiado é constituído por uma barra compósita de *vinylester* com 2mm de espessura, 10mm de largura, 1m de comprimento, módulo de *Young E* entre 15000 e 30000MPa e resistência à flexão entre 300 e 600MPa.

A barra foi instrumentada com um total de 20 sensores de *Bragg*, agrupados em duas séries multiplexadas, denominadas por *arrays*, cada uma integrando 10 sensores de *Bragg* espaçados longitudinalmente de 10cm. O conjunto de sensores foi colado em duas posições paralelas, em faces opostas da barra, de acordo com a Figura 6.28, por forma a fazer coincidir a localização dos sensores em 10 secções da barra, perfazendo, consequentemente, dois sensores por secção, colados nas faces superior e inferior.

A colagem foi realizada com recurso a um adesivo, denominado NP50, com base de poliéster, contendo duas componentes A e B. A componente B é adicionada à primeira, gota-a-gota, com uma quantidade de cerca de 2% - 4% do peso da primeira. O tempo de cura é de cerca de 2 a 3h, à temperatura ambiente. A amplitude de temperatura operacional do adesivo varia entre -30° e 300°C, sendo especialmente utilizado em aplicações expostas a temperaturas elevadas.

A geometria dos *arrays* de sensores é representada esquematicamente na Figura 6.29 (a). Cada *array* inclui 10 sensores de *Bragg* com uma resolução de $1\mu\epsilon$, amplitude de $2500\mu\epsilon$ e comprimentos de onda de referência (CWL) e sensibilidade (S1) apresentados na Tabela 6.6.

A fibra ótica monomodo utilizada para a realização dos *arrays* apresenta $8\mu m$ de diâmetro de núcleo, $125\mu m$ de diâmetro da bainha, e $250\mu m$ de diâmetro de revestimento, de acordo com a representação esquemática de uma porção de fibra, contendo um sensor de *Bragg*, da Figura 6.29 (b). Esta fibra funciona para uma banda entre 1300 e 1550nm. As redes de *Bragg* apresentam uma base de medida de 4mm e estão inseridas em janelas de 15mm, com revestimento de polimida de $255\mu m$ de diâmetro (ver Figura 6.29 (c)).

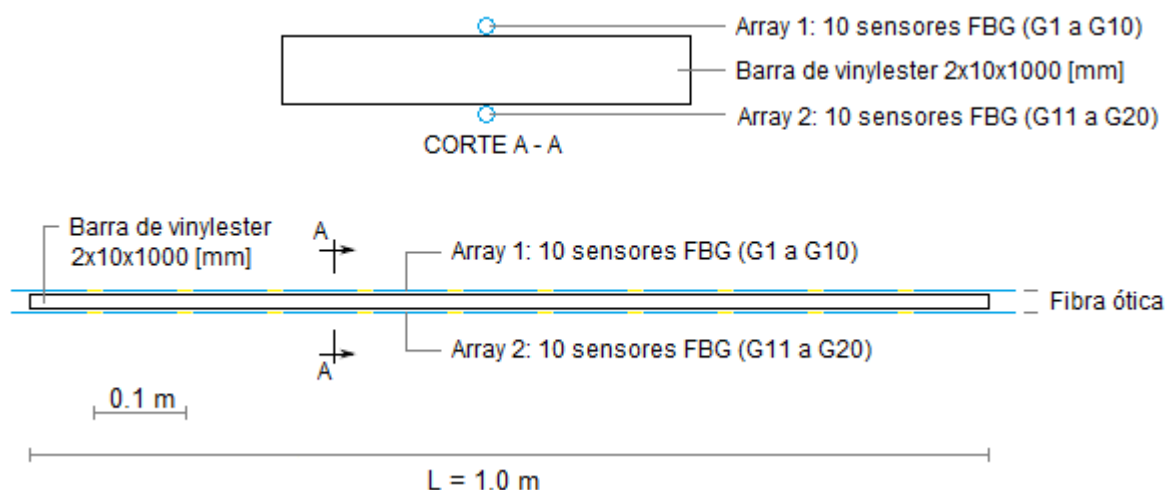
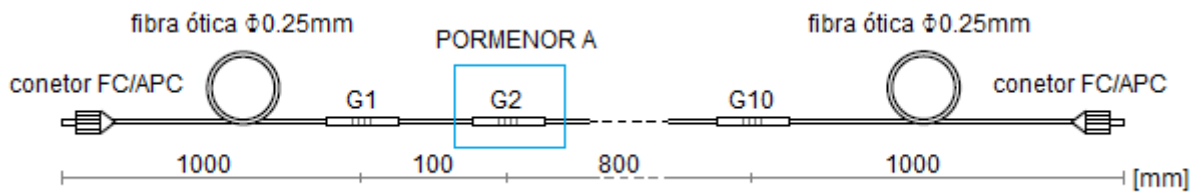
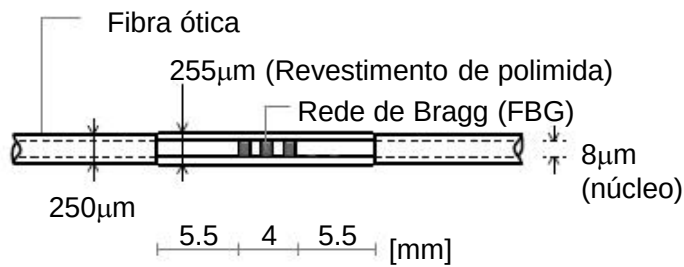


Figura 6.28 – Representação esquemática do modelo físico indicando a disposição dos dois *arrays*

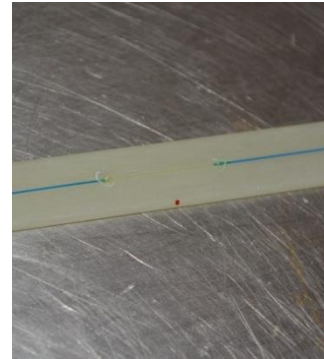


(a)



PORMENOR A

(b)



(c)

Figura 6.29 – Sensores de Bragg: (a) Array instalado na barra com 10 sensores de Bragg; (b) Pormenor de um sensor de Bragg e (c) Foto de um sensor de Bragg

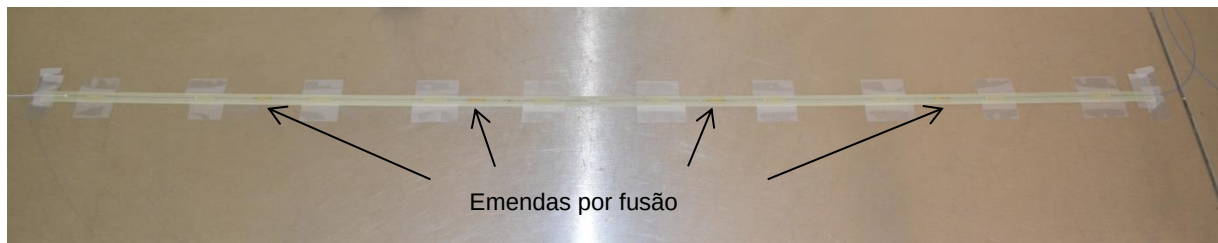
Tabela 6.6 – Características dos sensores de Bragg agrupados pelos dois arrays

Identificação dos sensores do modelo					
Array 1 / Face superior			Array 2 / Face inferior		
Sensor	CWL (nm)	S1 ($\mu\epsilon/\text{nm}$)	Sensor	CWL (nm)	S1 ($\mu\epsilon/\text{nm}$)
G1	1522,475	833,5	G11	1522,416	833,6
G2	1528,906	830,0	G12	1528,842	830,1
G3	1535,148	826,7	G13	1534,874	826,8
G4	1541,342	823,3	G14	1541,257	823,4
G5	1547,786	819,9	G15	1547,822	819,9
G6	1554,141	816,6	G16	1554,146	816,5
G7	1560,543	813,2	G17	1560,683	813,1
G8	1567,096	809,8	G18	1566,938	809,9
G9	1573,936	806,3	G19	1573,778	806,4
G10	1580,168	803,1	G20	1580,105	803,1

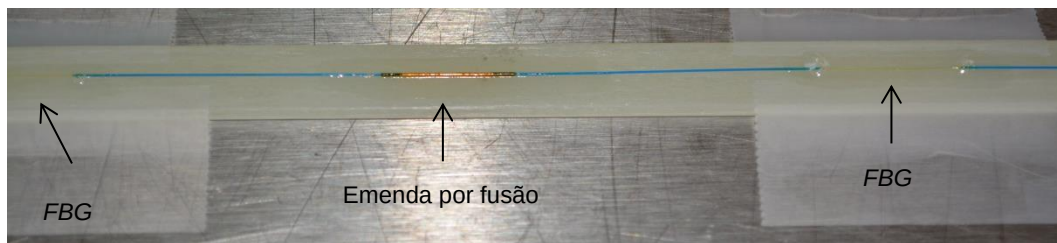
O esquema de multiplexagem, baseado na diferenciação dos vários sensores através do comprimento de onda refletido por cada sensor, permite a interrogação de múltiplos sensores, partilhando a mesma fonte de luz, bloco de deteção e sistema de medição.

Neste sentido, o esquema de multiplexagem utilizado em cada *array* consiste no agrupamento de 5 séries multiplexadas, contendo cada uma 2 *FBG* espaçados de 10cm. O agrupamento das 5 séries multiplexadas é realizado por fusão através de 4 emendas (ver Figura 6.30), assegurando a transmissão de sinal entre fibras subsequentes, tendo o cuidado de se garantir a distância entre sensores contíguos de 10cm, ao realizar a fusão.

A técnica de multiplexagem utilizada, aplicada particularmente a sensores de *Bragg*, implica que sejam conhecidas as bandas de funcionamento em comprimento de onda dos diversos sensores, beneficiando-se, portanto, do facto do espetro de luz refletido ser constituído por um conjunto de picos independentes, correspondentes à luz refletida por cada um dos sensores. Nas Figuras 6.31 e 6.32 são apresentados os conteúdos espectrais dos *arrays* 1 e 2, respetivamente, onde se evidenciam no total 20 picos referentes a cada um dos sensores, com as características sistematizadas na Tabela 6.6.



(a)



(b)

Figura 6.30 – Emenda por fusão: (a) Modelo físico e (b) Ampliação de emenda por fusão entre dois sensores de Bragg

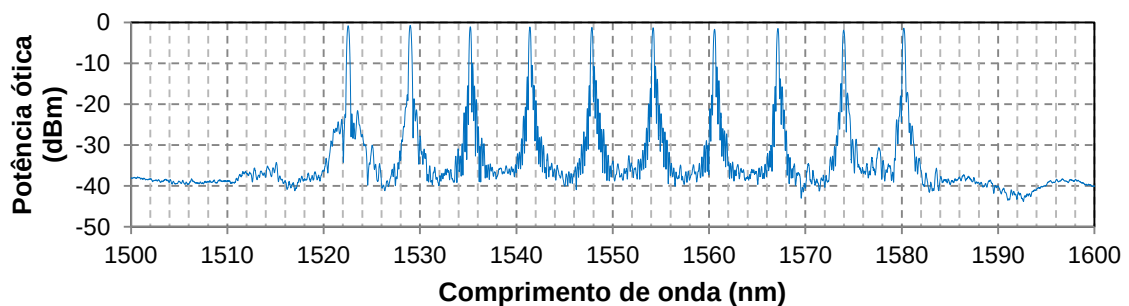


Figura 6.31 – Conteúdo espectral do *array* 1 aplicado na face superior do modelo

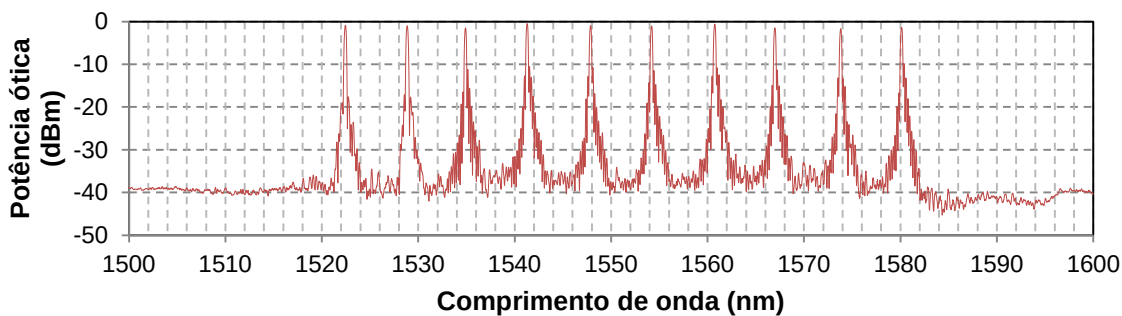


Figura 6.32 – Conteúdo espectral do *array 2* aplicado na face inferior do modelo

No entanto, tendo em conta que a resposta dos sensores às variações externas de temperatura e de deformação é também expressa em comprimento de onda, esta técnica carece de alguns cuidados, nomeadamente na contabilização da gama de espectro disponível para a multiplexagem, bem como, na banda de funcionamento de cada sensor, devendo-se garantir que as bandas de funcionamento de cada sensor não se cruzam durante o ensaio.

Assim, o número de sensores multiplexados e os respetivos comprimentos de onda são definidos para que todos os sensores operem em comprimentos de onda distintos. Neste sentido, fixou-se, sensivelmente, a banda de funcionamento de cada sensor a $\pm 3\text{nm}$, o equivalente em deformação a $\pm 2500\mu\epsilon$, limitando a deformação de cada sensor a estes valores.

Devido à técnica manual de multiplexagem utilizada na criação dos *arrays*, bem como a própria colagem dos *arrays* à barra, os sensores de *Bragg* não ficaram exatamente distanciados de 10cm e, consequentemente, os sensores da face superior e inferior não coincidem exatamente nas 10 secções de barra instrumentada.

Consequentemente, no final da colagem dos *arrays*, foi feita uma medição da localização das 10 secções de barra instrumentada, ponderada pela localização dos sensores da face superior e inferior, na respetiva secção de barra instrumentada, como mostra a Tabela 6.7.

Note-se que, os sensores de *Bragg* não são identificáveis visualmente na janela de acrilato de 15mm de comprimento. Contudo, sabe-se que estes sensores estão aproximadamente centrados nessa janela.

Deste modo, foram medidas primeiramente as localizações inicial e final das janelas, correspondentes a cada um dos sensores. De seguida, determinaram-se as localizações médias dos sensores de *Bragg* s_{med} , ao longo dos *arrays*, das faces superior e inferior. No final, definiu-se a localização média das secções de barra instrumentadas, a partir das localizações anteriores, para um comprimento de barra de 100cm , e também para um comprimento de 95cm .

A determinação da localização média, para um comprimento de 95cm , deve-se ao facto de ter sido o comprimento de barra utilizado na identificação das configurações deformadas no ensaio realizado, no âmbito da validação experimental, como se verá na secção 6.4.6. Esta informação encontra-se sistematizada na Tabela 6.7.

Tabela 6.7 – Localização das secções de barra instrumentadas [cm]

Face superior					Face inferior			S _{med} (cm)			
Seção	S _{janela} (i-inicial; f-final)		l _{janela}	S _{med}	S _{janela} (i-inicial;f-final)		l _{janela}	S _{med}	100 cm	95 cm	
	i	f			i	f					
	1	i	4,28	1,57	5,07	i	4,20	1,55	4,98	5,02	2,52
		f	5,85			f	5,75				
	2	i	14,32	1,53	15,09	i	14,20	1,55	14,98	15,03	12,53
		f	15,85			f	15,75				
	3	i	24,23	1,57	25,02	i	24,25	1,53	25,02	25,02	22,52
		f	25,80			f	25,78				
	4	i	34,28	1,52	35,04	i	34,24	1,56	35,02	35,03	32,53
		f	35,80			f	35,80				
5	i	44,28	1,52	45,04	i	44,27	1,55	45,05	45,04	42,54	
	f	45,80			f	45,82					
6	i	54,30	1,55	55,08	i	54,37	1,51	55,13	55,10	52,60	
	f	55,85			f	55,88					
7	i	64,12	1,58	64,91	i	64,20	4,60	66,50	65,71	63,21	
	f	65,70			f	68,80					
8	i	74,19	1,59	74,99	i	74,28	1,54	75,05	75,02	72,52	
	f	75,78			f	75,82					
9	i	84,20	1,50	84,95	i	84,20	1,58	84,99	84,97	82,47	
	f	85,70			f	85,78					
10	i	94,21	1,49	94,96	i	94,20	1,60	95,00	94,98	92,48	
	f	95,70			f	95,80					

6.4.3. SISTEMA DE MONITORIZAÇÃO BASEADO EM FIBRAS ÓTICAS

A identificação da configuração deformada do modelo é levada a cabo por um sistema de monitorização baseado em fibras óticas, constituído por um computador portátil, que controla todo o processo de aquisição de dados, e por uma unidade de leitura, que faz a aquisição simultânea dos sinais provenientes de todos os sensores.

A unidade de leitura utilizada é um interrogador *BraggMeter FS2200* com uma banda de funcionamento de 100nm (de 1500 a 1600nm), resolução de 1pm, precisão absoluta de +/- 2pm, 4 canais e frequência de amostragem de 100Hz.

A aquisição de sinais é realizada através de uma aplicação informática em ambiente *LABVIEW®* (versão 8.2), cujo interface gráfico se apresenta parcialmente na Figura 6.33, permitindo o controlo do sistema de interrogação e o tratamento dos dados recolhidos.

Esta aplicação disponibiliza a representação da configuração deformada do modelo em tempo real, bem como os parâmetros mais relevantes, nomeadamente a profundidade máxima e respetiva

localização, corda e ângulos de entrada e de saída. Para efeito de controlo da integridade do modelo, durante o ensaio de validação experimental são também disponibilizados outros parâmetros, nomeadamente as extensões nas faces superior e inferiores.

O gestor do sistema tem ainda a possibilidade de configurar os parâmetros relativos ao modelo, nomeadamente o comprimento, a distância efetiva entre sensores, medida na direção da espessura, e a localização das secções, bem como os parâmetros relativos aos sensores utilizados, nomeadamente a sensibilidade à deformação.

Tendo por propósito a redução do efeito do ruído nos resultados experimentais, foi aplicado um filtro baseado na realização de médias aritméticas móveis das dez últimas amostras, para uma frequência de amostragem de 10Hz.

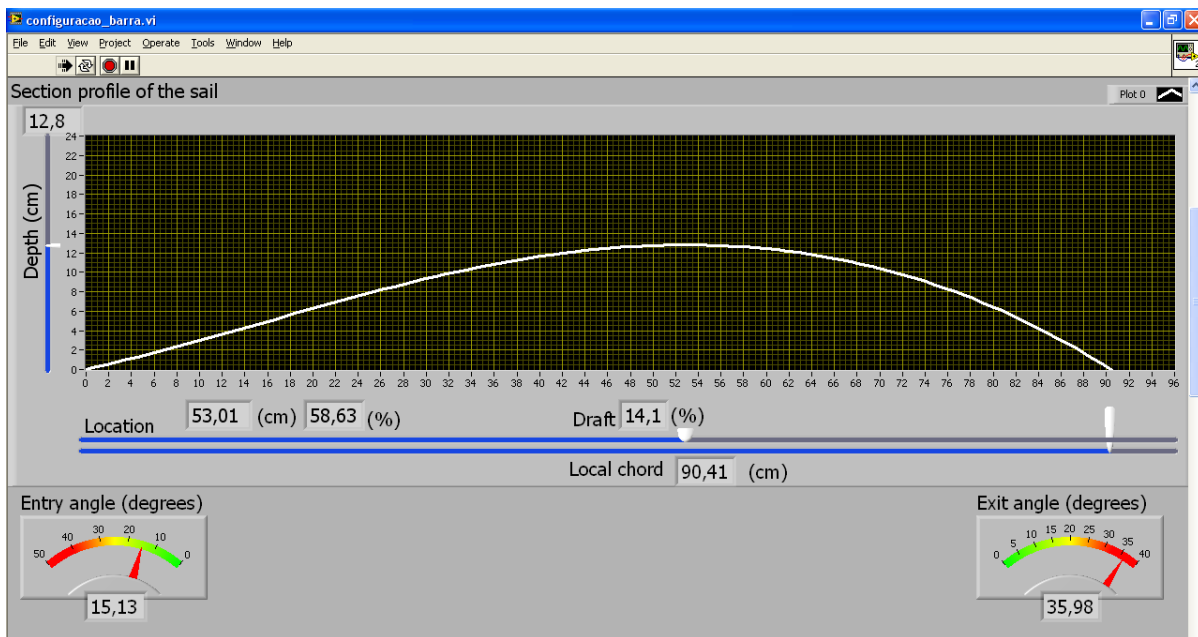


Figura 6.33 – Aplicação informática para controlo do sistema de interrogação ótico

6.4.4. SISTEMA DE MONITORIZAÇÃO BASEADO EM ANÁLISE DE IMAGEM

Este sistema de monitorização é baseado na recolha de imagens fotográficas do objeto deformado e no seu processamento de forma a identificar os seus contornos, consequentemente efetuando a caracterização dessa deformação.

O esquema de montagem de ensaio é apresentado na Figura 6.34. No caso presente, o objeto deformado é a barra curvilínea, que é montada numa mesa vertical graduada. Recolhe-se então uma imagem fotográfica da barra e de um conjunto de medidas da mesa graduada, a partir das quais é efetuada a retificação da imagem.

A retificação da imagem consiste numa correção de distorção da lente, seguida de uma correção de perspetiva. Finalmente, com a imagem retificada, procede-se à identificação de fronteiras, ou deteção do contorno da barra, o que permite a identificação das coordenadas de um conjunto de pontos.

Com o propósito de eliminar sombras, dispõe-se de um *kit* de iluminação de luz contínua *Photoflex First Studio Portrait*, constituído por 2 cabeças de luz contendo lâmpadas de halogéneo de 250 w, 2 tripés e 2 sombrinhas.

A imagem é obtida com recurso a uma máquina fotográfica *Nikon 5200* com 24 Mega Pixels e lente 18-55G VR, conetada a um computador portátil onde é feito o processamento e posterior tratamento de imagem, através de uma aplicação informática realizada em ambiente *MATLAB*[®], concebida especificamente para esta finalidade (Ramos 2013). A resolução da imagem de ensaio é de cerca de 5 pixels / mm.

A mesa de apoio / calibração utilizada foi realizada em chapa de duralumínio, com espessura de 10mm, largura de 600mm e comprimento de 1200mm, sobre a qual foi criada uma matriz de fundo 500x1100mm, com discretização de 5mm (ver a Figura 6.35 (a)). Nesta mesa são incorporados dois sistemas basculantes que permitem fixar a barra nas suas extremidades durante os ensaios. Um destes apoios permite realizar translações, com a finalidade de fazer variar a corda do perfil da configuração deformada. É ainda colocado um fundo homogéneo sobre a chapa, realizado com alvos de calibração de imagem por forma a facilitar o reconhecimento da barra (ver a Figura 6.35 (b)). O fundo em matriz é apenas utilizado em ensaios preliminares, na correção da distorção da imagem, inerente à lente da câmara, nas condições de utilização em ensaios.

Para a correção de distorção, que resulta no efeito do tipo barril ou *pincushion*, é utilizado um parâmetro aferido num ensaio inicial, que se passa a descrever. Nesse ensaio, foi definido primeiramente um sistema de eixos com origem no vértice do quadrado do canto superior esquerdo e que passa nos vértices dos restantes alvos dos alinhamentos vertical e horizontal. De seguida, foi gerada uma matriz de pontos, com discretização compatível com a utilizada na plataforma de fundo, tendo em atenção as devidas condições de perspetiva não distorcida da imagem, a partir do sistema de eixos gerado anteriormente, e coincidindo com os 4 alvos mais extremos identificados, de acordo com a Figura 6.36.

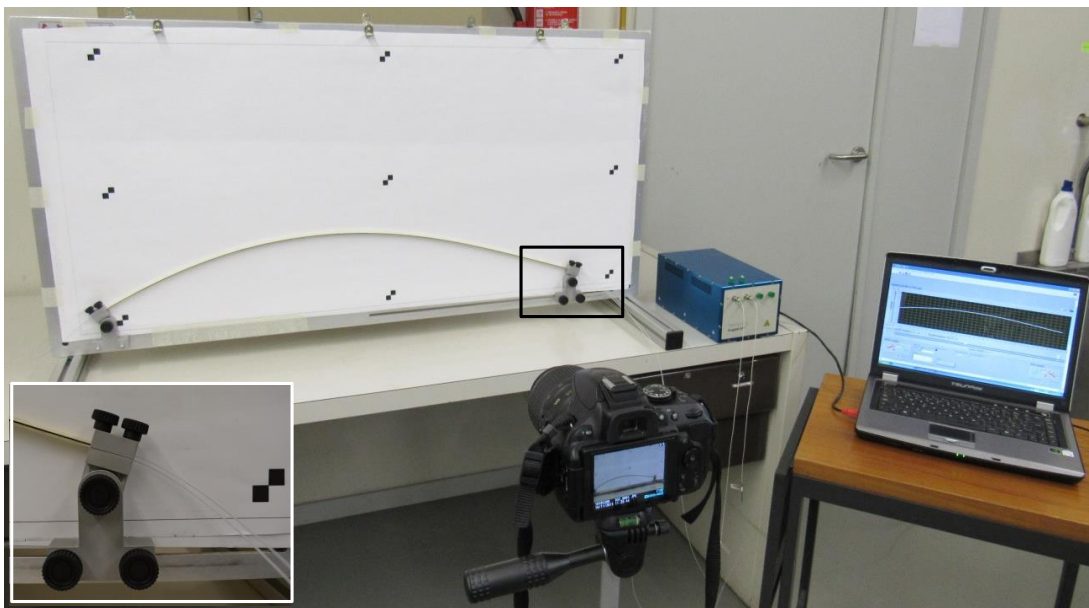
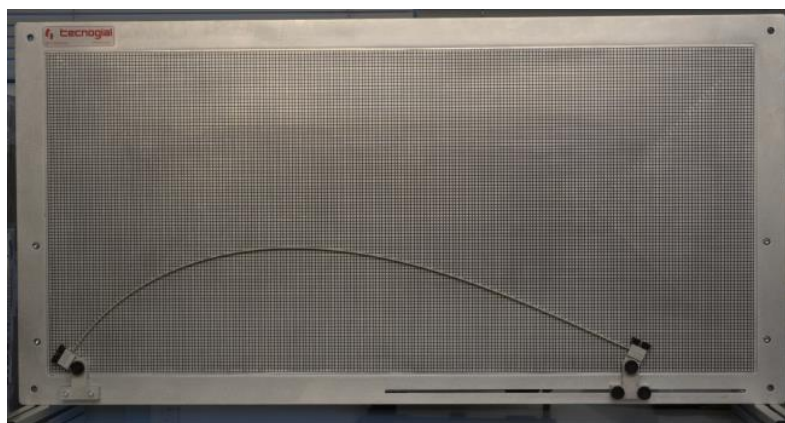
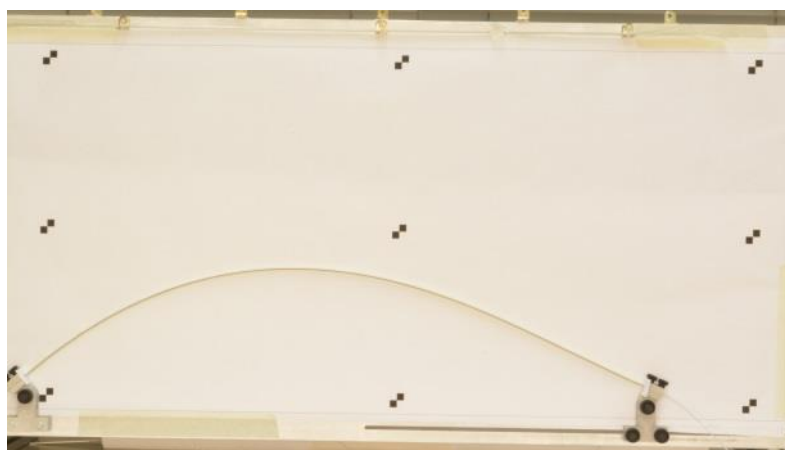


Figura 6.34 – Montagem dos sistemas de medição com base em fibras óticas e em análise de imagem durante ensaio experimental



(a)



(b)

Figura 6.35 – (a) Mesa de apoio / calibração 600x1200mm e (b) Fundo homogêneo

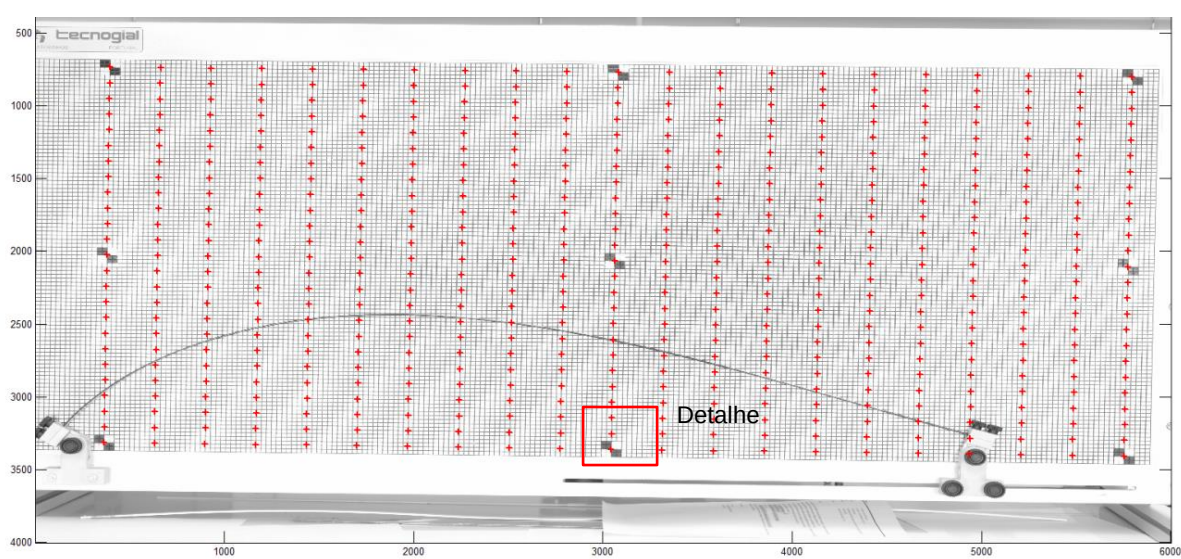


Figura 6.36 – Matriz de pontos para a correção de distorção

A sobreposição da matriz, baseada numa perspectiva não distorcida com a matriz de fundo da chapa, evidenciava a necessidade de correção de distorção da lente, conforme é visível no desalinhamento ilustrado na Figura 6.37, entre os pontos estimados a vermelho da matriz de pontos, e a matriz de base da plataforma de fundo. Assim sendo, foi realizado um ajuste da posição dos pontos à intersecção das linhas da matriz da plataforma de fundo, através de uma análise iterativa onde foi utilizada também a aplicação do comando de *MATLAB*[®] *lensdistort* (Vries 2012), corrigindo consequentemente a distorção da lente (Figura 6.38), ficando definido o parâmetro corretivo a utilizar nos ensaios subsequentes.

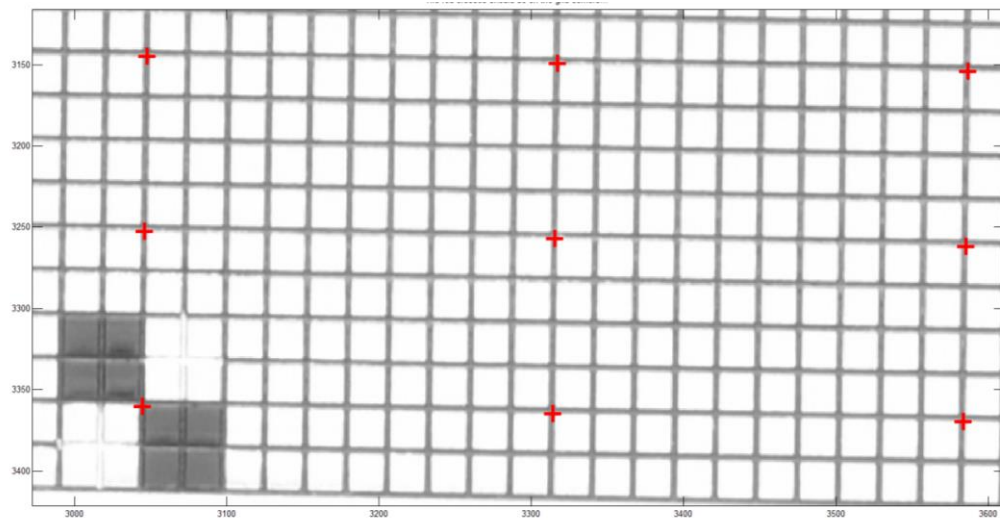


Figura 6.37 – Matriz de pontos antes da correção de distorção da imagem

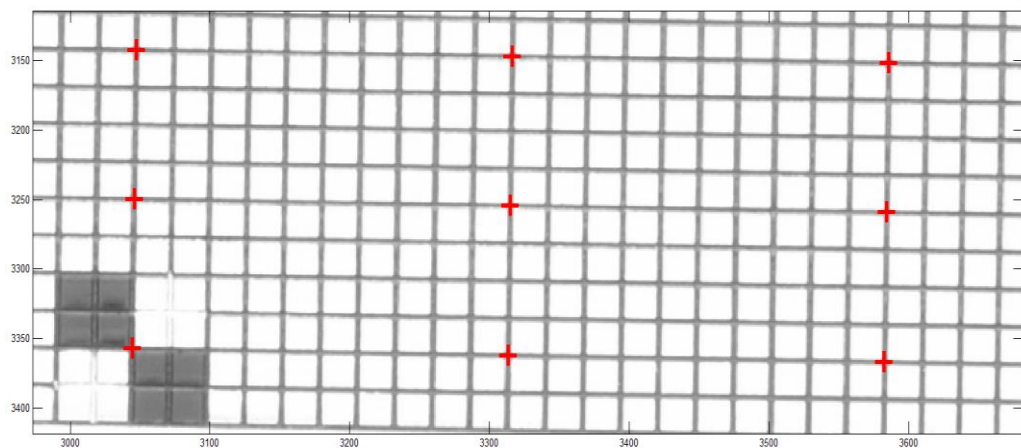


Figura 6.38 – Matriz de pontos após correção de distorção da imagem

Deste modo, para a realização de um ensaio, a barra curvilínea, cuja configuração se pretende identificar é, primeiramente, fixa nas suas extremidades na mesa de graduação, ficando colocada sobre um referencial bidimensional de dimensões conhecidas (ver a Figura 6.39).



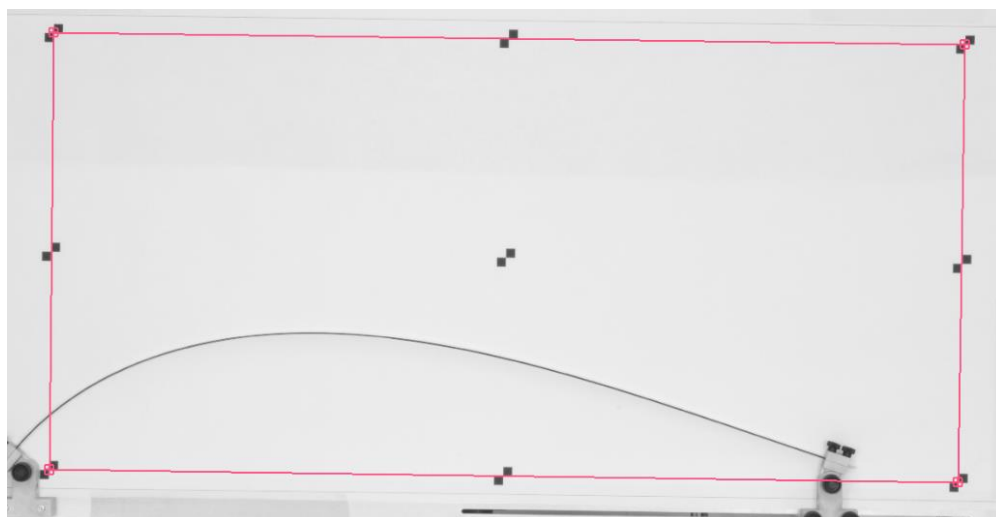
Figura 6.39 – Barra curvilínea sobre referencial normalizado

De seguida, é utilizado um algoritmo de identificação de vértices (ver a Figura 6.40 (a)), baseado numa variante do algoritmo de Harris e Stephens (1988), de modo a criar uma representação vetorial de 4 pontos conhecidos na imagem, para posterior aplicação de correções.

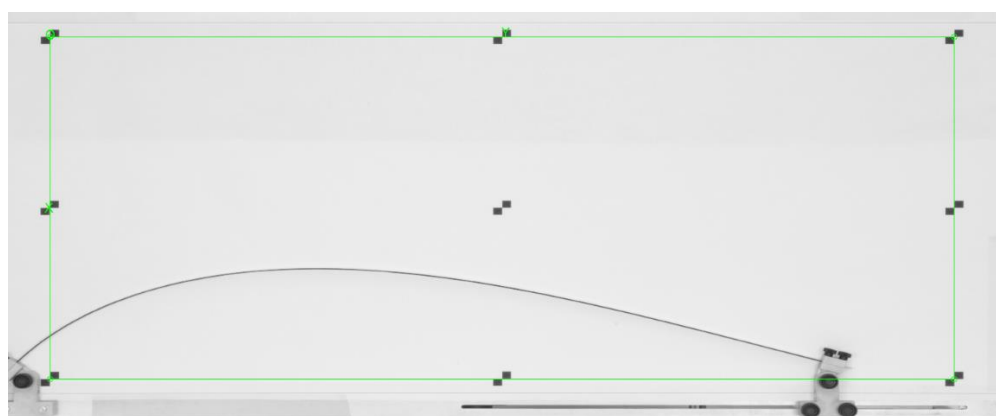
A primeira correção é a da distorção, sendo levada a cabo por aplicação do comando *lensdistort* com o parâmetro estimado no ensaio inicial, como foi abordado anteriormente.

A correção de perspetiva decorre da falta de uma perfeita perpendicularidade da câmara e do plano sobre o qual assenta o objeto de observação. Esta correção recorre às coordenadas dos vértices dos 4 quadrados pretos, representados na plataforma de fundo, através das quais se realiza uma transformação espacial de carácter projetivo, que corrige a perpendicularidade. Em simultâneo, realiza-se uma transformação de rotação, de modo a criar um referencial ortonormado vertical / horizontal, de coordenadas proporcionais aos píxeis da imagem, resultando nos alinhamentos ilustrados na Figura 6.40 (b).

Com a imagem perfeitamente retificada, procede-se à aplicação do algoritmo de identificação de fronteiras, resultando contornos tais como os ilustrados na Figura 6.41. De seguida, os contornos identificados são intercetados por linhas verticais, pertencentes ao referencial conhecido, para determinar as coordenadas das fronteiras superior e inferior, a partir das quais se determinam as coordenadas do eixo médio da barra, por aplicação de uma média aritmética das anteriores (ver a Figura 6.42). Finalmente, os resultados são guardados num ficheiro independente e são comparados com os resultados obtidos pelo sistema de monitorização baseado em fibras óticas.



(a)



(b)

Figura 6.40 – (a) Identificação de 4 alvos e (b) Definição de um sistema de coordenadas

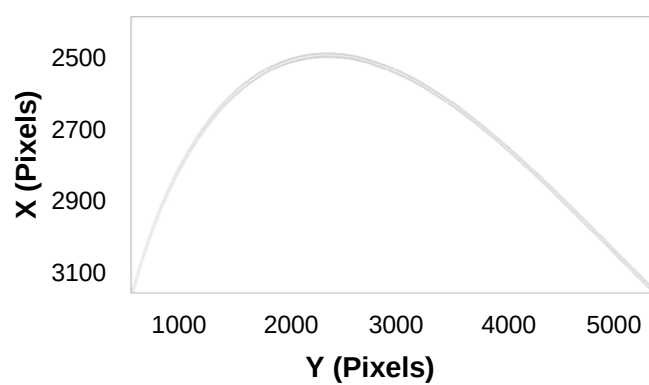


Figura 6.41 – Contorno identificado da barra com base no algoritmo de detecção de fronteiras

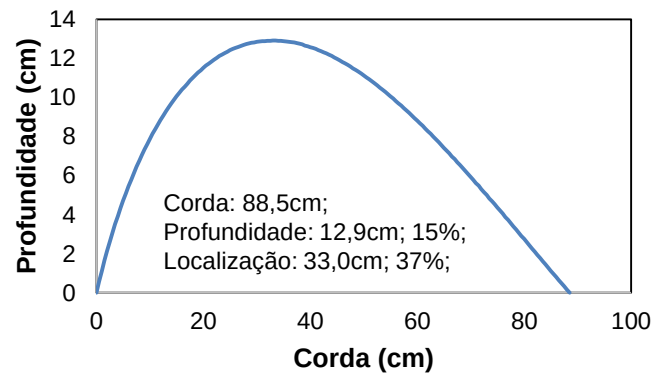


Figura 6.42 – Perfil da configuração deformada da barra identificado através do sistema de monitorização baseado em análise de imagem

6.4.5. PROCEDIMENTO DE ENSAIO

A Figura 6.43 apresenta a instrumentação das duas barras utilizadas nos ensaios: a barra que constitui o modelo, e uma barra auxiliar idêntica. A instrumentação desta barra auxiliar tem o propósito de estudar o impacto da variação da temperatura nas medições dos sensores. Deste modo, a barra permanece inalterável na posição indeformável ao longo de todo o ensaio, sujeita apenas a deformações devido a variações de temperatura.

A barra auxiliar está instrumentada com dois *dummies* do tipo *FBG*, semelhantes aos sensores utilizados no modelo, e com uma sonda de temperatura. As características destes sensores estão sistematizadas na Tabela 6.8, e os conteúdos espectrais estão ilustrados na Figura 6.44.

De acordo com a Figura 6.43, os *arrays* das faces superior e inferior são, respetivamente, ligados aos canais 0 e 1 da unidade de aquisição de dados, descrita anteriormente, na secção 6.4.3. O *array* 3, que contém os *dummies*, é ligado ao canal 2. As medições relativas à sonda de temperatura são efetuadas por intermédio do canal 3.

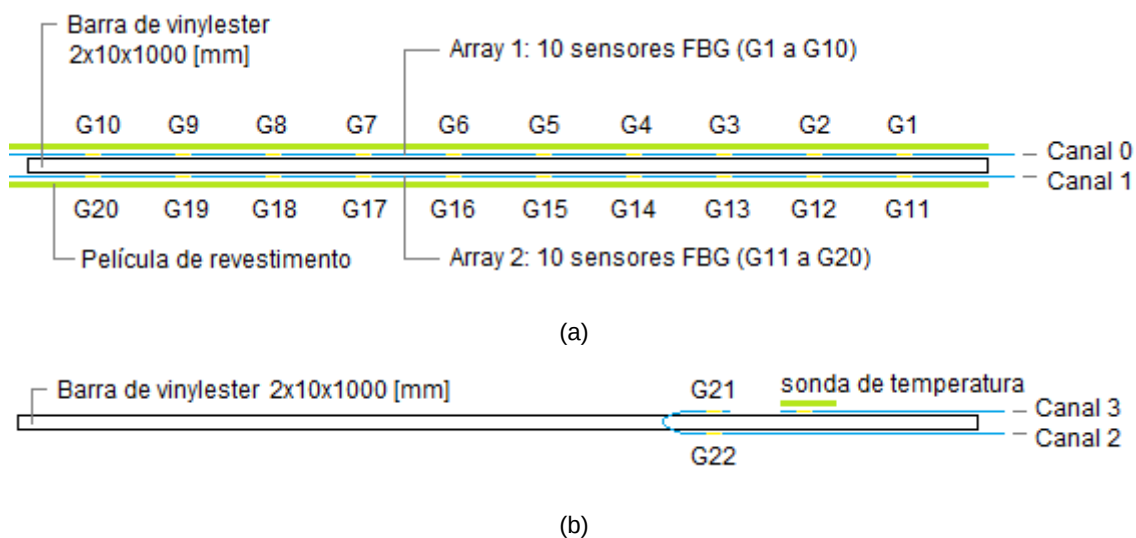


Figura 6.43 – Instrumentação das barras: (a) Modelo e (b) Barra auxiliar

O modelo é envolvido com uma película de revestimento, tendo em vista uma correta interpretação da configuração deformada pelo sistema de imagem, homogeneizando as faces superior e inferior que contêm os *arrays* e pintando a face frontal com uma risca preta de cerca de 1mm de espessura.

A sonda de temperatura, colocada na barra auxiliar, é revestida com a película acima referida, de forma a estar sujeita a idêntica variação de temperatura à que estão sujeitos os sensores do modelo. Os *dummies* permanecem sem película de revestimento.

O ensaio inicia com o modelo na posição de referência – horizontal. De seguida, a barra é fixa nas suas extremidades, na mesa graduada, onde se procede à deflexão do modelo, em configurações correntes do enfunamento da vela.

A identificação da deformada realiza-se por intermédio do sistema de medição das extensões do material, apresentado anteriormente na secção 6.4.3, e com recurso ao sistema de imagem, apresentado na secção 6.4.4. Finalmente, cruzam-se as deformadas obtidas pelos diferentes métodos, com vista a validar a metodologia de identificação da deformada baseada na medição de extensões.

Tabela 6.8 – Características dos sensores da barra auxiliar

Sensor	CWL (nm)	S1 ($\mu\epsilon$ /nm)	CWL (nm) @ 30°C	S0 (°C)	S1 (°C/nm)	S2 (°C/nm)
G21	1533,241	827,7	-	-	-	-
G22	1554,466	816,4				
Sensor de temperatura	-	-	1560,567	30	35,1	-0,9

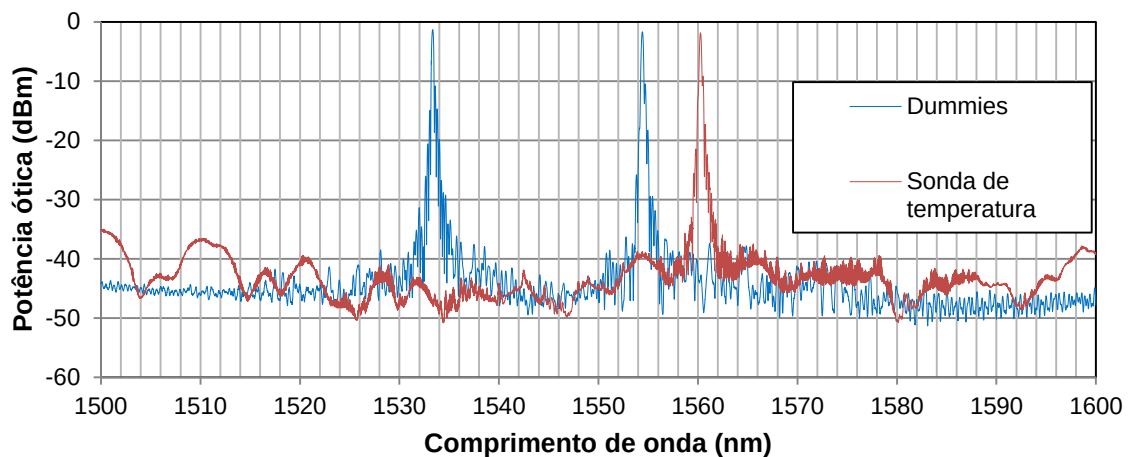


Figura 6.44 – Conteúdo espectral dos sensores da barra auxiliar

Assim sendo, de forma a avaliar o erro de medição associado ao conjunto de 20 sensores instalados, foi realizado um ensaio. A metodologia utilizada na deflexão da barra baseou-se no aumento gradual da profundidade da secção, através da aplicação de deslocamentos horizontais sucessivos de 5mm no apoio onde está fixada a extremidade direita do modelo, na mesa graduada, até perfazer um deslocamento total de 14,5mm. São obtidas configurações deformadas, aproximadamente simétricas, em 30 níveis de profundidade, de acordo com a Figura 6.45 (a).

De seguida, em cada nível de profundidade, criou-se gradualmente assimetria na configuração deformada, através do aumento do ângulo de entrada e da diminuição do ângulo de saída, de acordo com a Figura 6.45 (b).

Embora o modelo utilizado seja de 1 metro de comprimento, é de salientar que o comprimento efetivo, que é alvo de identificação é de 95cm, de forma a compatibilizar as configurações deformadas obtidas pelos dois sistemas de identificação, na medida em que o modelo é fixado na mesa graduada em dois apoios nas suas extremidades, ficando conseqüentemente 2,5cm de cada extremidade da barra ocultados do sistema de imagem.

Todavia, o sistema de monitorização baseado em fibras óticas permite a identificação da configuração deformada do comprimento total do modelo. De seguida apresentam-se alguns resultados do ensaio, baseados neste sistema de monitorização, utilizando um comprimento de 95cm, espessura efetiva de 2,25mm e localização das secções instrumentadas de acordo com a Tabela 6.7.

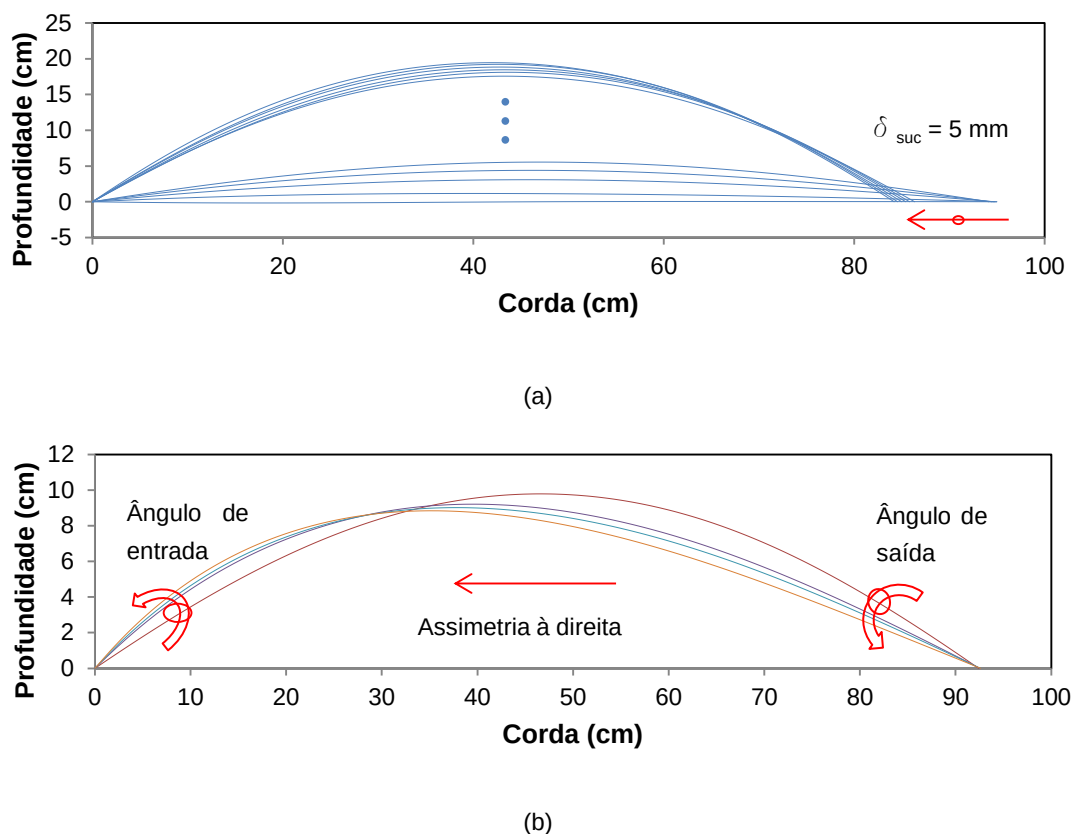


Figura 6.45 – Ensaio de deflexão do modelo na mesa graduada: (a) aumento gradual da profundidade; (b) criação de assimetria em cada nível de profundidade

6.4.6. RESULTADOS DOS ENSAIOS

6.4.6.1. Validação da metodologia

De acordo com a Figura 6.46 (a), apresenta-se a evolução da corda ao longo do ensaio, determinada com base no sistema de monitorização baseado em fibras óticas, evidenciando um decréscimo progressivo de 95 a cerca de 85cm, respetivamente correspondente a uma posição inicial do modelo, aproximadamente horizontal, até uma posição final com profundidade pronunciada.

A profundidade máxima entre estas posições aumenta, gradualmente, entre 0 e 20cm, ou entre 0% e 22% em relação à corda, de acordo com a Figura 6.46 (b).

A evolução da localização da profundidade máxima, no decorrer do ensaio, não tem uma tendência como os parâmetros anteriores (ver a Figura 6.46 (c)), na medida em que este parâmetro, tal como foi referido anteriormente, varia a cada nível de profundidade máxima, obtido pelos deslocamentos horizontais sucessivos de 5mm no apoio direito (ver a Figura 6.45 (a)). Este parâmetro está portanto mais relacionado com a assimetria que se cria a cada nível de profundidade (ver a Figura 6.45 (b)), sendo que a amplitude dessa variação, a cada nível de profundidade, é mais notória nos primeiros ensaios e vai reduzindo ao longo do ensaio. De acordo com a Figura 6.46 (c), no início do ensaio varia sensivelmente entre 45 e 22cm, correspondente a 50% e 25% em relação à corda, e, no final do ensaio, entre 42 e 38,5cm, o equivalente a 50% e 45% em relação à corda.

A redução da amplitude referida no parágrafo anterior prende-se com o facto de não se querer exceder a deformação máxima dos sensores de $\pm 2500\mu\epsilon$ ao longo do ensaio, como se evidencia na Figura 6.47, para a face superior e inferior, respetivamente, tracionada e comprimida. É de salientar ainda, por análise da Figura 6.47, que as extensões médias aumentam com a profundidade. Este facto reforça a preocupação associada a potenciais efeitos de histerese e/ou fadiga, presentes nos sensores e respetivo adesivo, devido às elevadas amplitudes em termos de extensões que poderão surgir em permanência à escala real, conduzindo a uma diminuição na medição das extensões, ao longo do tempo, com consequências ao nível da precisão da configuração deformada do modelo. Neste sentido, é necessário realizar um ensaio do protótipo, correspondente à solicitação do modelo a um conjunto de ciclos com carga sinusoidal, com amplitude constante e uma dada frequência, procurando avaliar estes efeitos.

Em relação aos ângulos de entrada e de saída, verifica-se, de acordo com a Figura 6.46 (d), que são parâmetros principalmente influenciados pelo aumento gradual da profundidade, variando, sensivelmente, entre 0 e 50 graus. No entanto, é notória também a assimetria criada em cada nível de profundidade, levando à divergência dos mesmos, na medida em que, os ângulos de entrada e de saída, aumentam e diminuem, respetivamente, para criar uma configuração deformada assimétrica à direita, como referido anteriormente, de acordo com a Figura 6.45 (b).

De seguida, e tendo sido exposta claramente a metodologia utilizada na deflexão da barra ao longo do ensaio através da análise de alguns parâmetros obtidos com recurso ao sistema de monitorização baseado em fibras óticas, pretende-se agora comparar com os resultados obtidos pelo sistema de monitorização baseado em análise de imagem, com vista a validar a metodologia implementada no sistema de monitorização baseado em fibras óticas.

Para o efeito, do conjunto de configurações disponíveis do ensaio realizado, foram analisadas 12 configurações deformadas, de acordo com a Figura 6.48, onde se apresentam distribuídas em três níveis de profundidade distintos, com as respetivas assimetrias. É evidente a sobreposição das configurações deformadas obtidas pelos dois sistemas de análise. Note-se que as configurações deformadas aqui ilustradas, obtidas com recurso ao sistema ótico, referem-se a um conjunto de 20 secções instrumentadas.

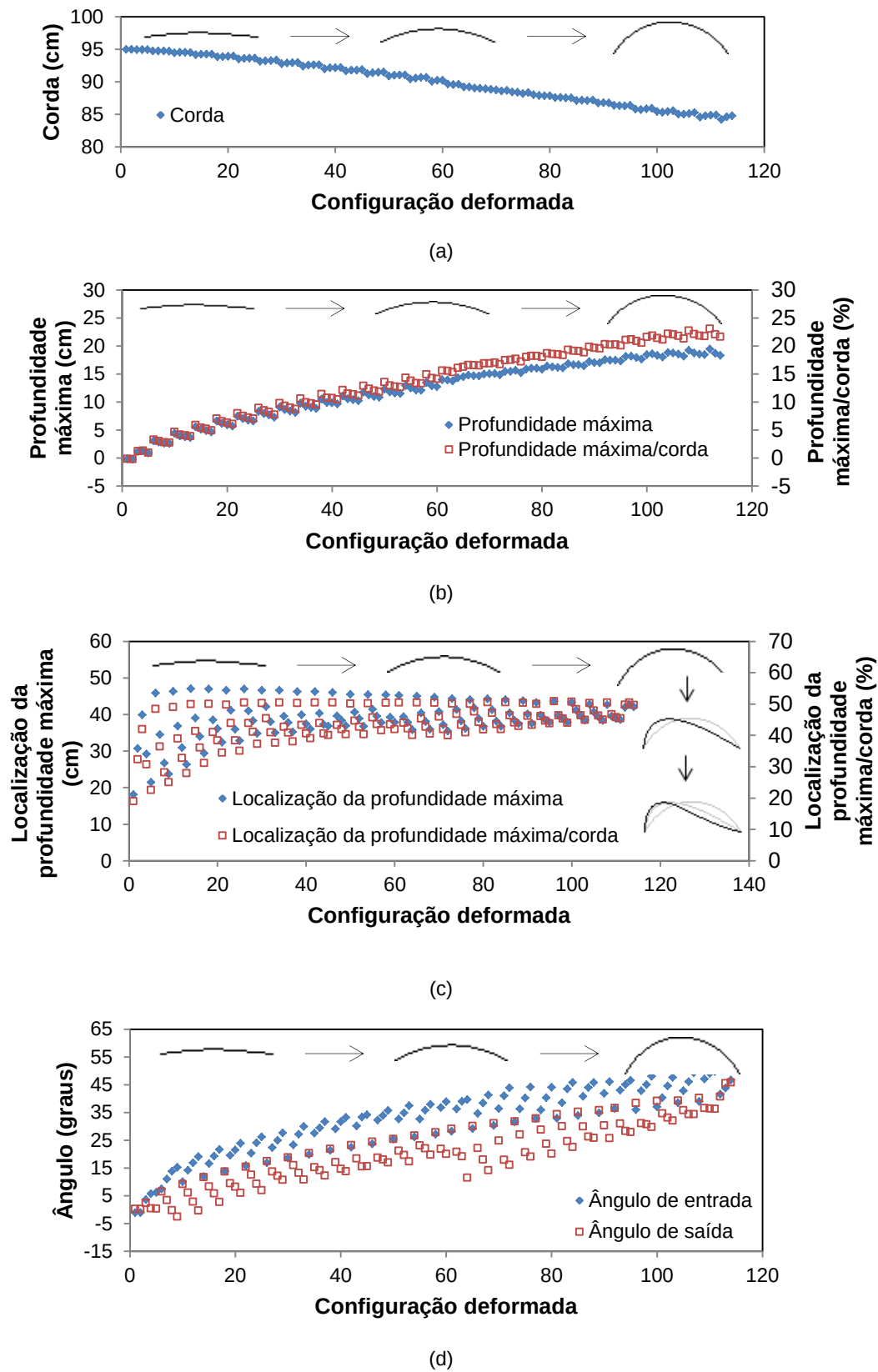


Figura 6.46 – Resultados dos parâmetros da configuração deformada do modelo com base na medição de extensões: (a) Corda (cm); (b) Profundidade máxima (cm e percentualmente em relação à corda); (c) Localização da profundidade máxima (cm e percentualmente em relação à corda) e (d) Ângulos de entrada e de saída (graus)

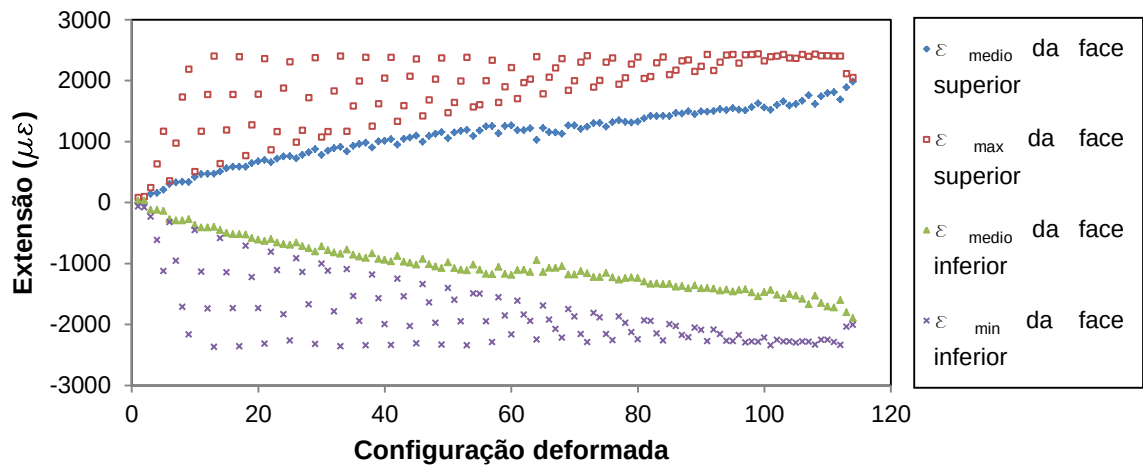


Figura 6.47 – Extensões das faces do modelo em termos dos seus valores médios e máximos absolutos

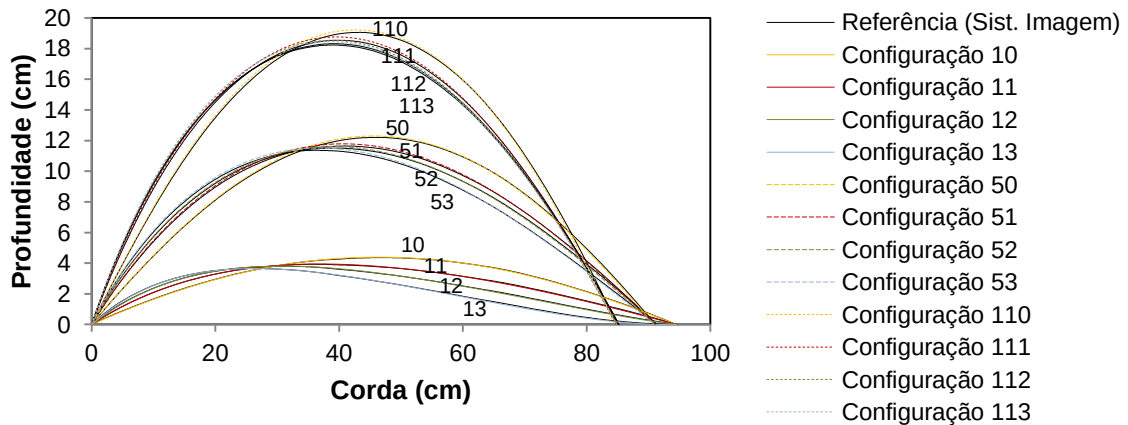


Figura 6.48 – Sobreposição das configurações deformadas – Sistema de Imagem vs Sistema Ótico

No entanto, pretende-se analisar o erro associado às configurações deformadas do modelo obtidas através de um conjunto inferior de secções instrumentadas, ou com outro tipo de arquitetura em termos de distribuição de sensores de *Bragg* pelo modelo, apresentando-se de seguida os estudos paramétricos realizados.

6.4.6.2. Estudos paramétricos para otimização da monitorização

O objetivo deste estudo é o de quantificar o número mínimo de secções / sensores a instrumentar em protótipo, a fim de identificar a deformada da vela com suficiente precisão. Assim, quantificou-se inicialmente o erro associado às configurações deformadas do modelo obtidas através de um conjunto inferior de secções instrumentadas, com dois sensores por secção. De seguida, foi realizado o mesmo estudo com sensores localizados somente numa das faces, e, por último, com sensores em ambas as faces, distribuídos de forma alternada.

Redução do número de secções de barra instrumentada com 2 sensores por secção

A redução do número de secções instrumentadas seguiu a metodologia apresentada na Tabela 6.9, iniciando-se com 10 secções instrumentadas e 20 sensores de *Bragg* e finalizando com 3 secções instrumentadas e 6 sensores de *Bragg*. A localização das secções em relação ao referencial longitudinal da barra s está de acordo com a Tabela 6.7, para um comprimento efetivo de 95cm, devido à compatibilização das coordenadas obtidas pelo sistema de imagem e pelo sistema ótico. Por exemplo, para identificar a deformada com 3 secções instrumentadas utilizaram-se as secções localizadas em $s = (2,52; 42,54; 92,48)$ (cm).

Neste sentido, foram comparadas as deformadas obtidas pelos dois sistemas de monitorização com base no erro de caracterização da profundidade da deformada E_{pm} . Este erro já havia sido utilizado na validação numérica do algoritmo, apresentada anteriormente na secção 6.3.3. Note-se que, de acordo com o esquema da Figura 6.19, o E_{pm} é dado pelo quociente entre a distância de nós homólogos das duas deformadas $dist$ e a flecha máxima da deformada do sistema de imagem $dmáx$.

Por exemplo, a configuração deformada 10 é ilustrada na Figura 6.49, obtida pelos dois sistemas de monitorização anteriormente descritos, utilizando 10 a 3 secções instrumentadas. A configuração de referência é obtida pelo sistema de imagem. A evolução do erro de caracterização E_{pm} é apresentada na Figura 6.50, sendo semelhante quando se utilizam 10 a 5 secções instrumentadas, apresentando valores máximos de cerca de 2,2%. É de salientar um afastamento do erro obtido quando se utilizam 3 e 4 secções instrumentadas.

O diferente nível de erro acima reportado com 3 a 4 ou 5 a 10 secções instrumentadas repete-se de uma forma semelhante em todas as configurações estudadas, sendo menos evidente quando se aumenta a profundidade do perfil em termos simétricos, de acordo com a Figura 6.51, do que quando se faz variar a assimetria em cada nível, como mostra a Figura 6.52. Deste modo, daqui em diante, apresentar-se-ão os valores nos gráficos referentes a 5 secções instrumentadas.

De uma forma geral, verifica-se que o erro máximo de caracterização da profundidade nas configurações estudadas, utilizando mais de 5 secções instrumentadas, é da ordem de 4% (ver a Figura 6.52). Conclui-se que a instrumentação com 3 e 4 secções conduz a erros de reconstituição da deformada inaceitáveis.

Tabela 6.9 – Seleção das secções instrumentadas da barra à medida que se diminui o número de secções utilizadas na identificação da configuração deformada - 10 a 3

Secções	Sensores	Secção instrumentada da barra									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	20 sensores FBG	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
9	18 sensores FBG	x	x	x	x	x	x	x	x		x
8	16 sensores FBG	x		x	x	x	x	x	x		x
7	14 sensores FBG	x		x	x	x	x		x		x
6	12 sensores FBG	x		x		x	x		x		x
5	10 sensores FBG	x		x		x			x		x
4	8 sensores FBG	x		x		x					x
3	6 sensores FBG	x				x					x

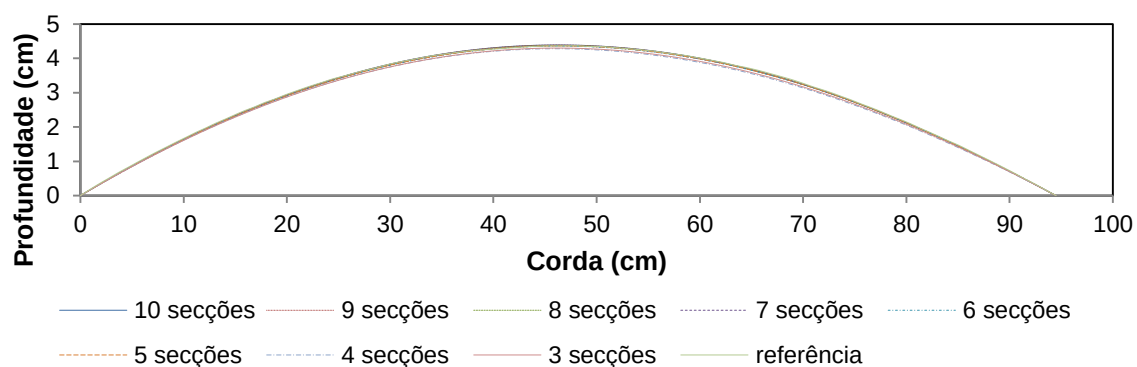


Figura 6.49 – Configuração deformada 10 obtida pelo sistema de imagem ou referência e pelo sistema ótico utilizando 10 a 3 seções instrumentadas

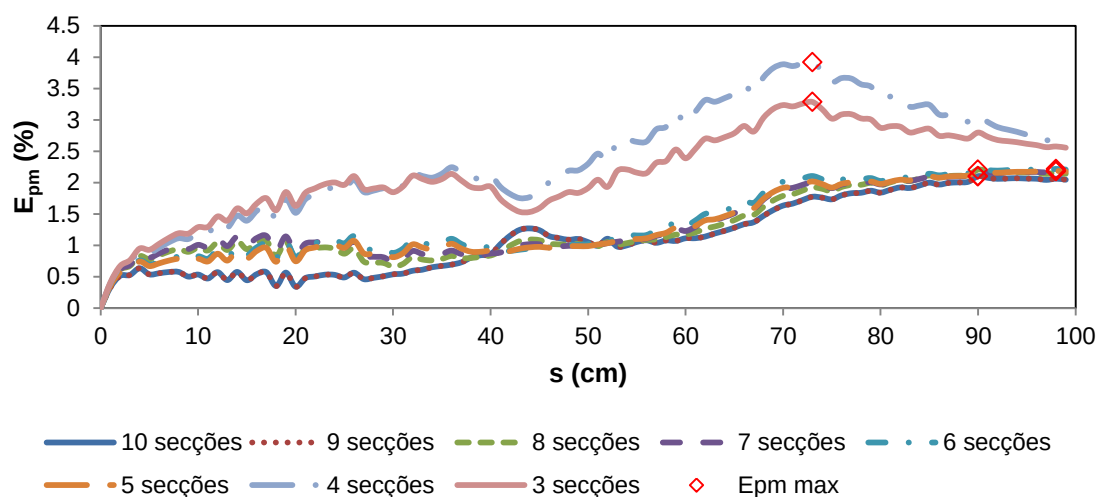


Figura 6.50 – Erro de caracterização da profundidade da deformada 10

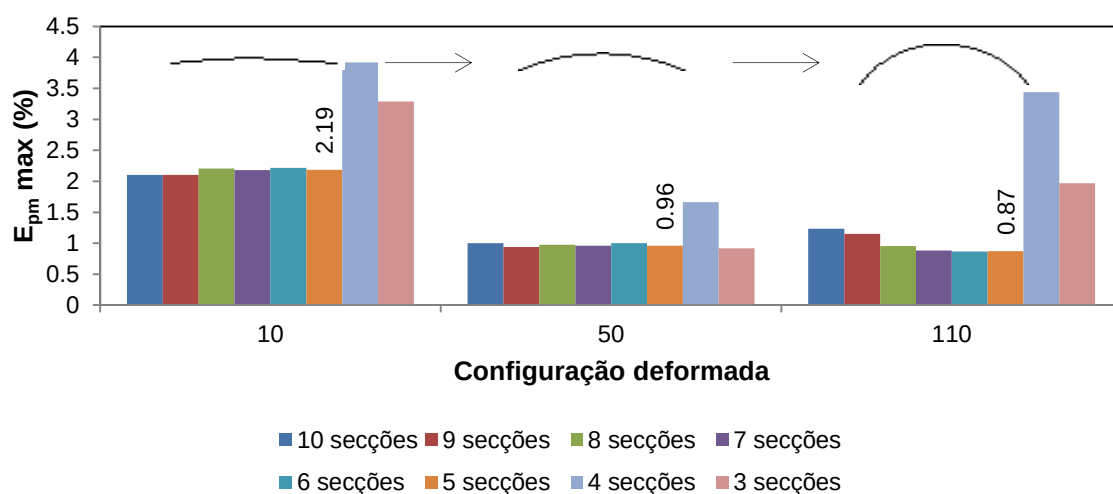


Figura 6.51 – Erro de caracterização máximo da profundidade da deformada variando a profundidade dos perfis

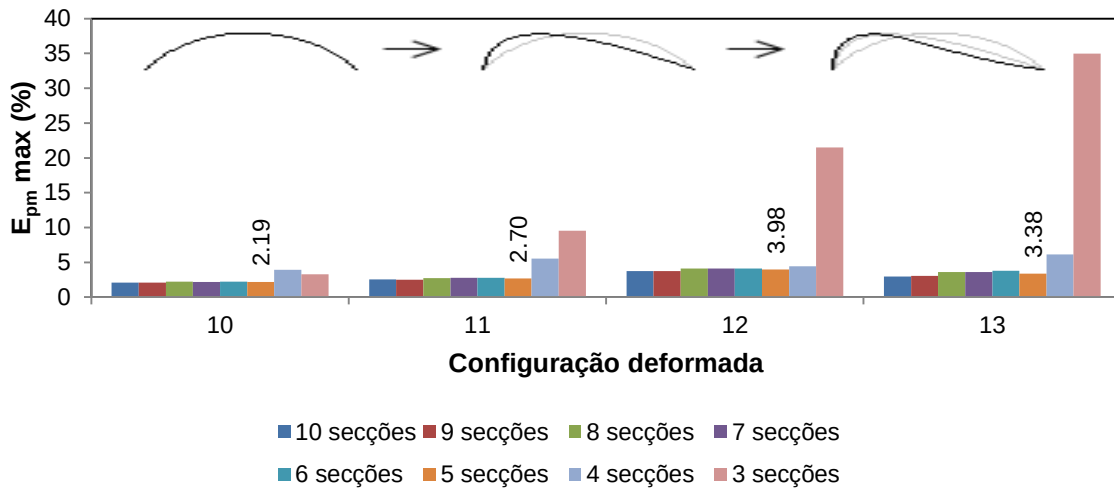


Figura 6.52 – Erro de caracterização máximo da profundidade da deformada variando a assimetria dos perfis

Para além do erro de caracterização da profundidade da deformada, E_{pm} , foram analisados também um conjunto de erros associados às estimativas dos parâmetros dos perfis das configurações deformadas, de acordo com a Tabela 6.10. Estes erros referem-se à corda E_c , à profundidade máxima E_d e $E_{d/c}$ (intrinsecamente ligados ao erro de caracterização da profundidade máxima E_{pm}), à localização da profundidade máxima E_l , ao ângulo de entrada E_e , e ao de saída E_f . Estes dois últimos erros são determinados em valor absoluto, dada a elevada sensibilidade dos mesmos. Estes erros comparam os parâmetros obtidos pelo sistema ótico com os de referência obtidos pelo sistema de imagem.

Tabela 6.10 – Erros de caracterização dos parâmetros do perfil da secção da vela

Corda		Profundidade máxima		Localização		Ângulo de entrada	Ângulo de saída
c (cm)	d (cm)	d/c (%)	l (cm)	l/c (%)	e (°)	f (°)	
E _c (%)	E _d (%)	E _{d/c} (%)	E _l (%)	E _{l/c} (%)	E _e (°)	E _f (°)	
$\frac{ c-c_{ref} }{c_{ref}}*100$	$\frac{ d-d_{ref} }{d_{ref}}*100$	$\frac{ d/c-d/c_{ref} }{d/c_{ref}}*100$	$\frac{ l-l_{ref} }{l_{ref}}*100$	$\frac{ l/c-l/c_{ref} }{l/c_{ref}}*100$	$ e-e_{ref} $	$ f-f_{ref} $	

* A solução de referência é obtida pelo sistema de monitorização baseado em análise de imagem

A título de exemplo, apresentam-se os resultados para a configuração 10 na Tabela 6.11, destacando-se, em termos gerais, que os erros de caracterização dos parâmetros relativos à profundidade máxima, e respetiva localização, são mais afetados utilizando menos do que 5 secções. No entanto, note-se que esta é uma configuração simétrica, não sendo muito exigente em termos de determinação, com suficiente precisão, dos parâmetros do perfil, interessando consequentemente fazer uma análise em termos globais.

Em termos globais, de acordo com a Figura 6.53, o E_c apresenta valores máximos 0,3%, analisando mais do que 4 secções instrumentadas. É menos representativo no primeiro nível de profundidade, evidenciando-se um aumento ligeiro com a profundidade, como se comprova pelos 3 níveis de profundidade analisados.

Tabela 6.11 – Erros de caracterização dos parâmetros do perfil da configuração deformada 10

Secções	Corda		Profundidade máxima				Localização				Ângulo de entrada		Ângulo de saída	
	c (cm)	E_c (%)	d (cm)	E_d (%)	d/c (%)	$E_{d/c}$ (%)	l (cm)	E_l (%)	l/c (%)	$E_{l/c}$ (%)	e (°)	E_e (°)	f (°)	E_f (°)
10	94,5	0,0	4,4	0,7	4,6	0,7	46,3	0,5	49,0	0,4	10,1	0,8	9,2	0,1
9	94,5	0,0	4,4	0,7	4,6	0,7	46,3	0,5	49,0	0,4	10,1	0,8	9,2	0,1
8	94,5	0,0	4,4	0,3	4,6	0,4	46,4	0,3	49,1	0,3	9,9	0,9	9,1	0,1
7	94,5	0,0	4,4	0,2	4,6	0,2	46,3	0,4	49,0	0,4	9,9	1,0	9,2	0,2
6	94,5	0,0	4,4	0,1	4,6	0,1	46,4	0,3	49,1	0,3	10,0	0,9	9,2	0,1
5	94,5	0,0	4,4	0,1	4,6	0,1	46,4	0,2	49,1	0,2	10,0	0,9	9,2	0,2
4	94,5	0,0	4,3	1,8	4,5	1,8	46,0	1,2	48,6	1,2	9,9	1,0	8,9	0,2
3	94,5	0,0	4,3	1,4	4,6	1,4	46,2	0,6	48,9	0,6	9,9	1,0	9,0	0,1
Referência - Sistema de imagem	94,5		4,4		4,6		46,5		49,2		10,9		9,0	

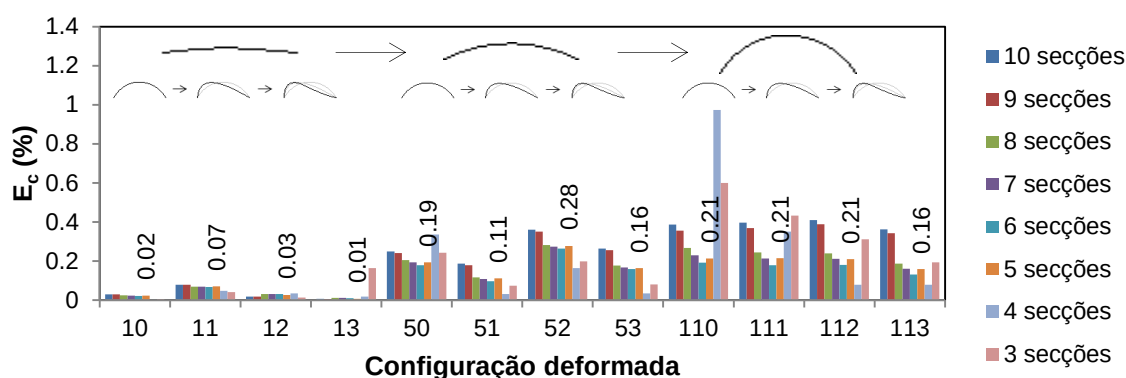
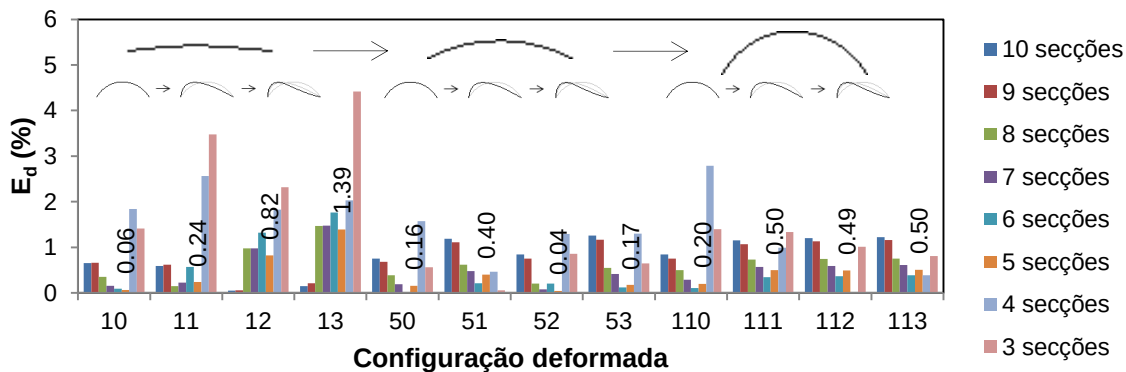
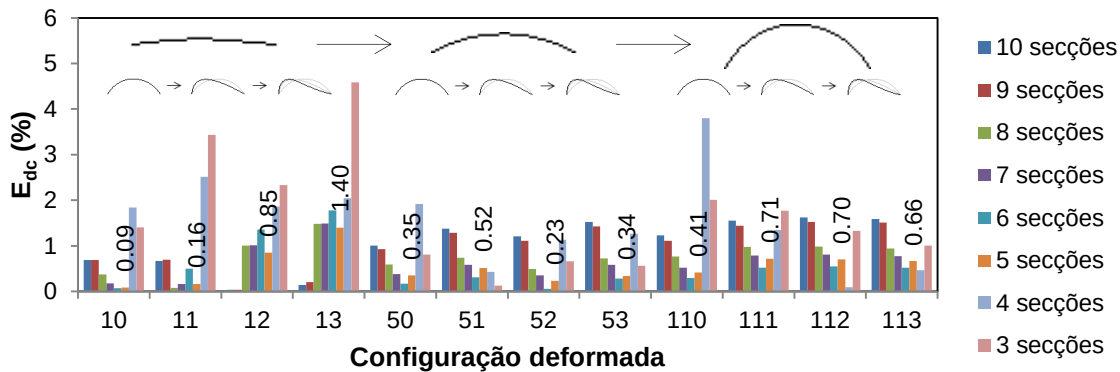


Figura 6.53 – Erro de caracterização da corda E_c das configurações deformadas analisadas, variando o número de secções instrumentadas de 10 a 3

Em relação ao erro de caracterização da profundidade máxima, quer em termos absolutos E_d , quer em relação à corda E_{dc} , de acordo com a Figuras 6.54 (a) e (b), respetivamente, verifica-se que apresentam valores máximos de cerca de 1,4%, em ambos. Este valor máximo é registado para a configuração deformada correspondente à configuração de maior assimetria criada (13), para todas as configurações analisadas, nos três níveis de profundidade. Aliás, verifica-se que estes parâmetros são francamente influenciados por configurações com maior assimetria, dados os valores mais elevados, e crescentes, das 4 configurações deformadas do primeiro nível de profundidade.



(a)

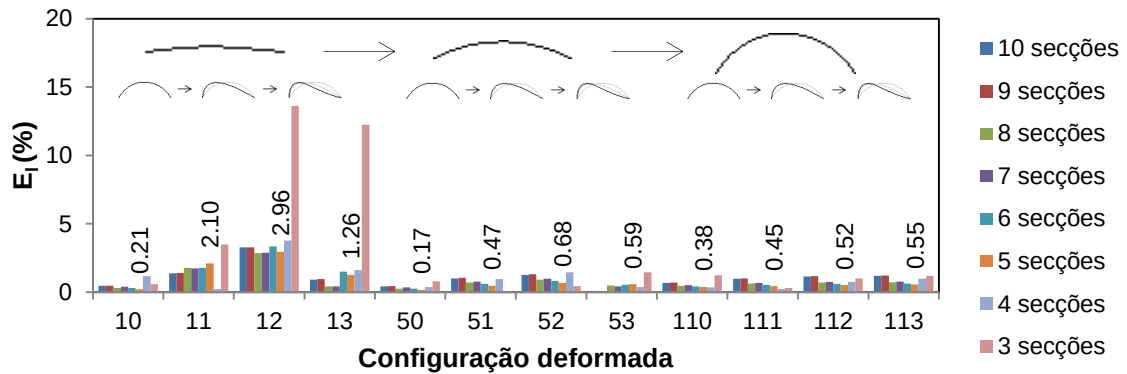


(b)

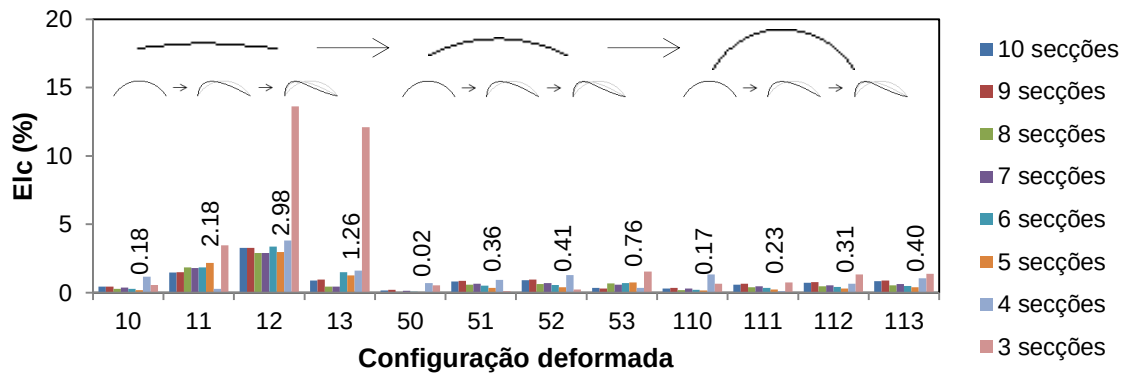
Figura 6.54 – Erro de caracterização da profundidade máxima das configurações deformadas analisadas, variando o número de secções instrumentadas de 10 a 3: (a) Em termos absolutos e (b) Percentualmente em relação à corda

À semelhança dos erros dos parâmetros anteriores, o erro de caracterização da localização da profundidade máxima, quer em termos absolutos E_l , quer em relação à corda E_{lc} , de acordo com a Figuras 6.55 (a) e (b), respetivamente, é também influenciado pelo grau de assimetria. E_l e E_{lc} apresentam valores máximos de cerca de 3% para a mesma configuração deformada (12).

Por último, em relação aos erros de caracterização dos ângulos de entrada E_e e de saída E_f , verifica-se, de acordo com as Figuras 6.56 (a) e (b) respetivamente, que estes são também influenciados pelo grau de assimetria, à semelhança dos 4 parâmetros anteriores. E_e e E_f apresentam valores máximos de cerca de 1,8 graus. Estes parâmetros são significativamente mais sensíveis do que todos os anteriores, daí se apresentar o respetivo erro em valor absoluto.



(a)



(b)

Figura 6.55 – Erro de caracterização da localização da profundidade máxima das configurações deformadas analisadas, variando o número de secções instrumentadas de 10 a 3: (a) Em termos absolutos e (b) Percentualmente em relação à corda

Tendo sido feita uma análise global dos erros associados aos parâmetros que interessa estimar ao nível do perfil de cada secção de vela, pretende-se agora fazer uma análise de sensibilidade do modelo em termos da precisão / exatidão que se pode obter em cada parâmetro analisado.

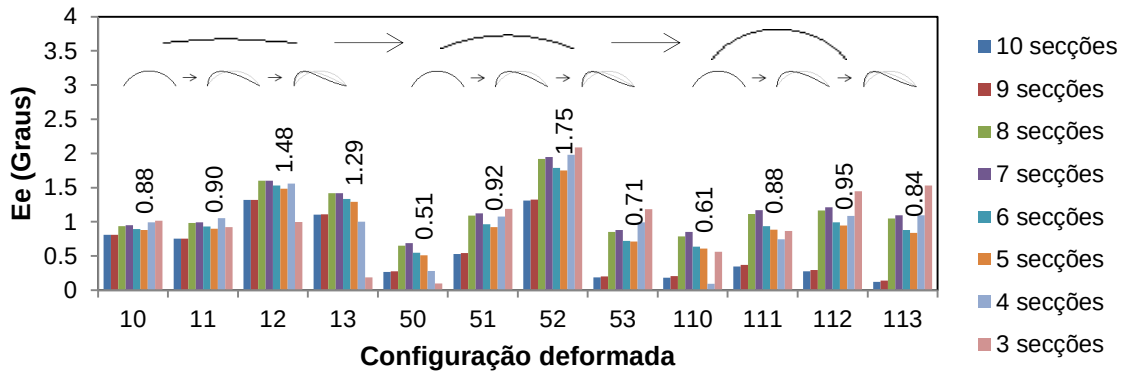
Da análise anterior, verificou-se que os parâmetros são sensíveis, quer ao nível de profundidade do perfil da secção de vela, quer ao nível da assimetria criada em cada nível. Por isso, o desvio da estimativa de cada parâmetro deve ser calculado de uma forma ponderada em relação ao nível de profundidade e à assimetria. Neste sentido, optou-se por determinar o desvio baseado num desvio-

padrão de média móvel de forma a atender a estas circunstâncias de deformação do modelo, sendo dado por

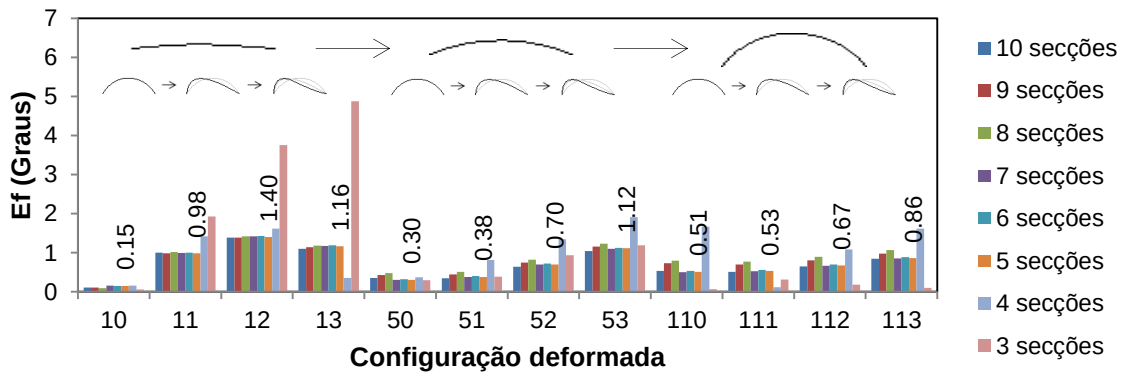
$$\sigma = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n_c} (x_i^{ot} - x_i^{im})^2}}{n_c} \quad (6.3)$$

tal que, x_i^{ot} e x_i^{im} são, respectivamente, os valores dos parâmetros em análise, determinados pelo sistema de monitorização baseado em fibras óticas, e pelo sistema de monitorização baseado em análise de imagem, na configuração deformada i , e n_c é o número de configurações deformadas analisadas.

Desta forma, o desvio da estimativa dos parâmetros do modelo quando este se encontra, por exemplo, a um nível de profundidade muito pequeno e simétrico, onde os erros são baixos, não será tão influenciado pelo desvio que resultaria a um nível de profundidade e assimetrias elevados, onde resultam erros superiores, e vice-versa.



(a)



(b)

Figura 6.56 – Erro de caracterização, variando o número de secções instrumentadas de 10 a 3: (a) Do ângulo de entrada e (b) Do ângulo de saída

A Tabela 6.12 apresenta o desvio da estimativa dos parâmetros do modelo a implementar em secções de vela, baseado na expressão (6.3) para as 12 configurações deformadas analisadas anteriormente ($n_c=12$), variando o número de secções instrumentadas.

Tabela 6.12 – Desvio da estimativa dos parâmetros do modelo variando o número de secções instrumentadas de 10 a 3

	Número de secções instrumentadas							
	10	9	8	7	6	5	4	3
σ_c (cm)	0,07	0,07	0,05	0,04	0,04	0,04	0,08	0,06
σ_d (cm)	0,04	0,04	0,02	0,02	0,01	0,02	0,05	0,04
$\sigma_{d/c}$ (%)	0,06	0,06	0,04	0,03	0,02	0,02	0,08	0,06
σ_l (cm)	0,13	0,14	0,11	0,11	0,12	0,12	0,14	0,47
$\sigma_{l/c}$ (%)	0,21	0,21	0,34	0,35	0,31	0,30	0,32	0,33
σ_e (°)	0,21	0,21	0,34	0,35	0,31	0,30	0,32	0,33
σ_f (°)	0,23	0,25	0,27	0,24	0,24	0,24	0,35	0,55

Embora não seja preocupante, é de salientar alguma incongruência nos resultados, na medida em que, por vezes, alguns parâmetros apresentam um desvio superior para um maior número de secções instrumentadas, que se pressupõe, à partida, produzirem configurações deformadas mais fidedignas. No entanto, este facto resulta da configuração deformada obtida pelo sistema de monitorização baseado em técnicas óticas, com maior número de secções instrumentadas, não estar ajustada com a configuração deformada obtida pelo sistema de imagem. Caso contrário, tal facto deixaria de acontecer.

Assim sendo, por exemplo para 5 secções instrumentadas com 10 sensores de *Bragg*, os parâmetros são determinados com uma precisão / desvio apresentados na Tabela 6.13. No entanto, embora 5 secções, com 10 sensores de *Bragg*, produzam resultados satisfatórios, decidiu-se analisar outro tipo de distribuições dos sensores *FBG*, pelas secções.

Tabela 6.13 – Estimativa dos parâmetros do modelo utilizando 5 secções instrumentadas com 10 sensores de *Bragg*

Corda	c	±	0,04	(cm)
Profundidade máxima	d	±	0,02	(cm)
	d/c	±	0,02	(%)
Localização	l	±	0,12	(cm)
	l/c	±	0,30	(%)
Ângulo de entrada	e	±	0,30	(°)
Ângulo de saída	f	±	0,30	(°)

Sensores localizados somente numa das faces da barra

Tendo-se verificado, anteriormente, que as extensões em faces opostas da barra são aproximadamente simétricas, decidiu-se analisar a contabilização de sensores somente numa das faces, para a determinação da configuração deformada do modelo. A componente das extensões, referente ao alongamento e encurtamento da barra, devido a variações térmicas, é considerada desprezável quando comparada com a componente que resulta do nível de deformação imposto nas configurações correntes dos perfis da secção da vela.

Deste modo, as extensões na face que não têm sensores são simétricas em relação à face que tem sensores. São considerados 10 sensores de *Bragg* para esta análise. Contudo, a consideração de sensores somente numa das faces conduz a erros inaceitáveis. Tal é evidenciado na Figura 6.57 (a) no afastamento pronunciado das configurações deformadas obtidas em relação à de referência. É de realçar que a configuração deformada identificada a partir da instrumentação em 5 secções, com 10 sensores de *Bragg*, é praticamente coincidente com a solução de referência.

Sensores localizados em ambas as faces da barra distribuídos de forma alternada

Em segunda análise, consideraram-se apenas as 5 secções instrumentadas, de acordo com a localização preconizada na Tabela 6.9, no entanto com apenas 5 sensores de *Bragg*: 3 numa das faces e dois na face oposta, de uma forma alternada, e vice-versa (ver a Figura 6.57 (b)).

As extensões da face oposta, onde não há sensor, são assumidas como sendo simétricas em relação à face que tem sensor, analogamente à análise anterior. Na Figura 6.57 (b) apresentam-se as configurações deformadas resultantes, que conduzem a erros elevados.

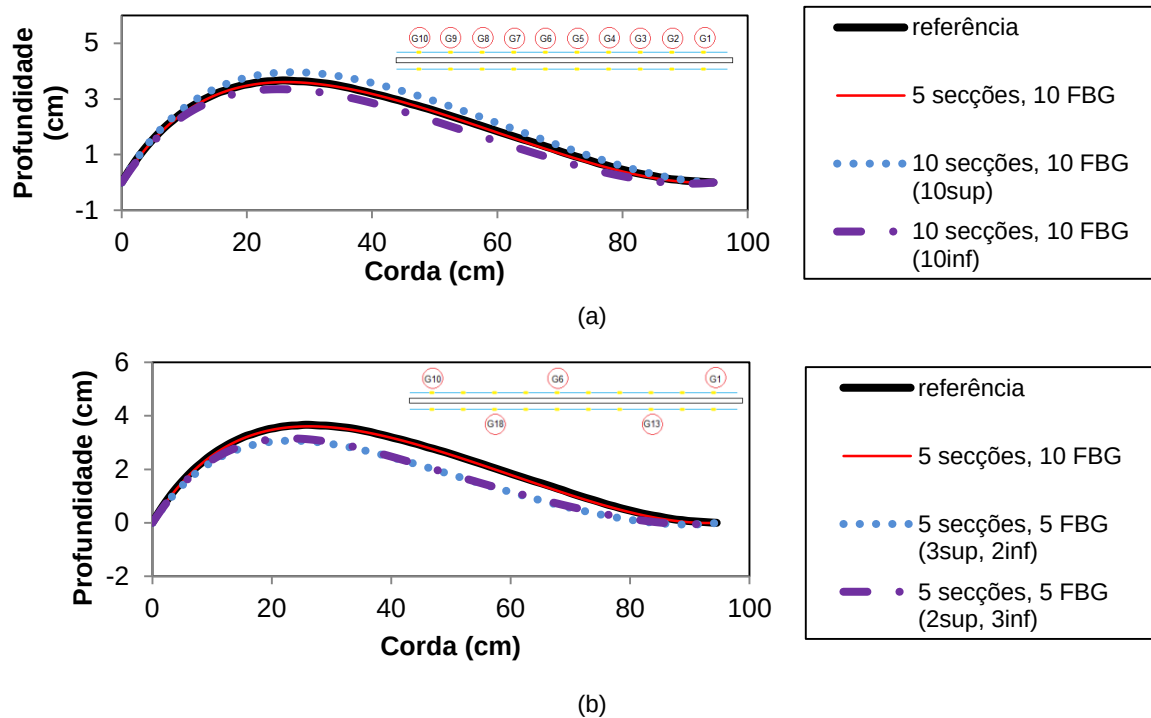


Figura 6.57 – Configurações deformadas do modelo com base em diferentes arquiteturas de distribuição de sensores de *Bragg*: (a) 10 secções instrumentadas com 10 sensores localizados numa só face e (b) 5 secções instrumentadas com 5 sensores localizados alternadamente nas duas faces

Poderiam ser testadas inúmeras arquiteturas de distribuição de sensores com vista a melhorar os resultados experimentais, enquadrando, no limite, distribuições de sensores ao tipo de vela, e respetiva altura da secção, o que exigiria o conhecimento de um vasto número de formas de perfis, inexistentes na bibliografia.

No entanto, como resultado das análises efetuadas anteriormente, torna-se mais relevante, do ponto de vista da presente validação experimental, avaliar a incerteza nas medições do sistema ótico. Esta incerteza é avaliada, quer em termos da espessura e da localização das secções instrumentadas utilizadas na reconstituição da deformada, quer em termos do impacto dos efeitos da temperatura nas medições. Deste modo, procede-se à análise das incertezas descritas na secção 6.5.

6.5. INCERTEZAS NAS MEDIÇÕES

6.5.1. CARACTERIZAÇÃO DA ESPESSURA

De forma a avaliar a incerteza associada à espessura, ou mais concretamente, a distância efetiva entre sensores de faces opostas, foram determinadas as configurações deformadas da configuração 13, perfil com maior assimetria (ver a Figura 6.48), tendo por base uma espessura de 2mm e 2,5mm. Foram utilizadas 10 secções instrumentadas, com 20 sensores, resultando na envolvente apresentada na Figura 6.58.

Nessa envolvente, apresentam-se também as configurações de referência e a obtida utilizando 5 secções instrumentadas com 10 sensores de *Bragg* para uma espessura de 2,25mm. Esta espessura foi utilizada ao longo do ensaio anterior (baseada na informação da *FIBERSENSING*, responsável pela colagem dos *arrays* na barra de *vinylester*), considerando que a janela de acrilato tem 250 μ m de diâmetro. No entanto, na bibliografia refere-se um valor de 255 μ m, que resultaria numa espessura de 2,255mm, em vez de 2,250mm (ver a ilustração da Figura 6.29 (b)).

A caracterização da espessura com a maior precisão possível conduz a resultados mais fidedignos. Assim, embora o processo de fabrico do protótipo, provavelmente seja diferente do utilizado no presente modelo, a determinação deste parâmetro deve ter uma precisão de cerca de 0,001 – 0,005mm de forma a garantir um erro de 4% na avaliação da profundidade.

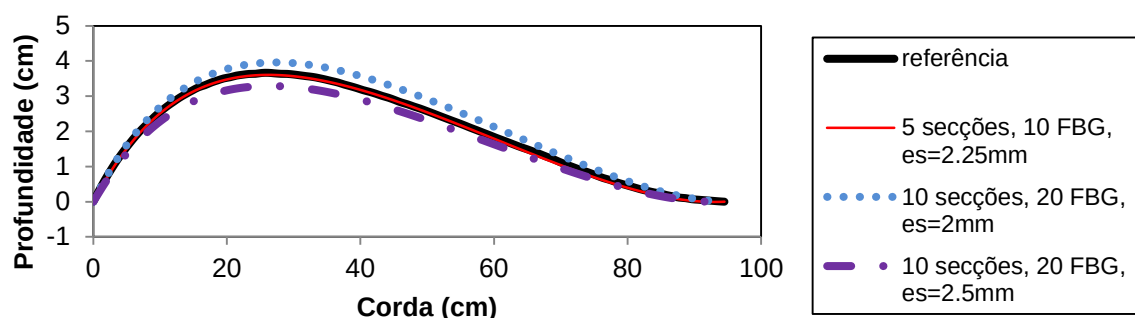


Figura 6.58 – Configurações deformadas do modelo com base em diferentes espessuras efetivas: 2, 2,25 e 2,5mm

6.5.2. CARACTERIZAÇÃO DA LOCALIZAÇÃO DAS SECÇÕES DE BARRA INSTRUMENTADAS

Depois de efetuada a colagem dos *arrays* constatou-se que as secções instrumentadas não coincidiam exatamente em secções distanciadas de 10 em 10cm (ver Tabela 6.7), não só devido ao processo manual de multiplexagem dos *arrays*, que resultou em distâncias diferenciais entre sensores consecutivos, em ambos os *arrays*, mas também devido à colagem manual dos mesmos nas faces da barra. Daí a localização das secções instrumentadas ter sido determinada, de uma forma ponderada, tendo por base a localização do sensor da face superior e inferior.

Neste sentido, é essencial avaliar em que medida estes desajustamentos interferem com as configurações deformadas obtidas. Para o efeito, foi determinada a configuração deformada 13, perfil com maior assimetria (ver a Figura 6.48), com base num desajustamento da localização dos sensores de *Bragg* nas faces da barra, resultando na envolvente apresentada na Figura 6.59. São apresentadas duas configurações deformadas, com uma localização $s = s_i \pm 2mm$.

Nessa envolvente apresentam-se, também, as configurações de referência e a obtida utilizando 5 secções instrumentadas com 10 sensores de *Bragg*, e localização das secções s_i , de acordo com a Tabela 6.7. É de notar que, ao contrário do parâmetro anterior, a configuração deformada não é tão sensível à localização das secções instrumentadas, embora esta envolvente se refira a um desajustamento de apenas 4mm. Ainda assim, a localização das secções instrumentadas deve ser determinada com precisão de pelo menos 1mm de forma a garantir um erro de 4% na avaliação da profundidade.

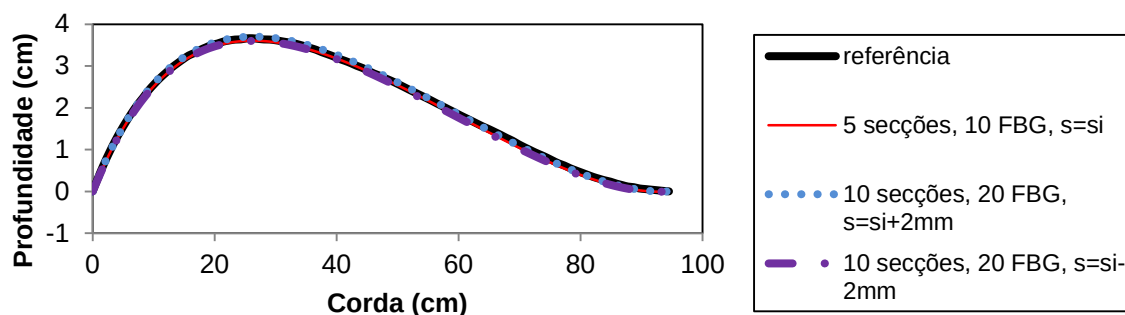


Figura 6.59 – Configurações deformadas do modelo com base em diferentes localizações das secções instrumentadas: $s = s_i$ e $s = s_i \pm 2mm$

6.5.3. IMPACTO DOS EFEITOS DA TEMPERATURA NA MEDIÇÃO DOS EXTENSÓMETROS DE FIBRA ÓTICA

Primeiramente, foi realizado um ensaio de caracterização térmica do modelo e, posteriormente, foi analisado o impacto dos efeitos da temperatura na configuração deformada.

6.5.3.1. Sensibilidade à temperatura

O modelo foi sujeito a um ensaio de caracterização térmica, devido à esperada sensibilidade dos sensores a variações de temperatura. De acordo com a Figura 6.60, realizaram-se dois ciclos de 24h, com 6 horas de aquecimento e 18 horas de arrefecimento. A variação de temperatura em cada ciclo é de cerca de 5°C.

O desempenho dos sensores de *Bragg* durante o ensaio é avaliado através da correlação entre a variação de temperatura e a variação de comprimento de onda normalizado de cada sensor. O ajuste linear das correlações, como se apresenta na Figuras 6.61 (a) e (b), respetivamente, para os sensores dos *arrays 1* e *2*, permite estimar a sensibilidade à temperatura, bem como os erros quadráticos médios associados ao ajuste linear, de acordo com a Tabela 6.14. Verifica-se uma excelente linearidade entre a variação de temperatura e a variação de comprimento de onda normalizado dos sensores, exibindo uma sensibilidade média correspondente a $13,72 \pm 1,82$ e $13,53 \pm 1,89 \text{ pm.}^\circ\text{C}^{-1}$, respetivamente para os *arrays 1* e *2*.

Embora a técnica de colagem e o adesivo adotados tenham sido iguais em ambos os *arrays*, e o ensaio tenha sido realizado com uma amplitude de temperatura baixa e sem controlo de humidade, verifica-se que, ainda assim, as sensibilidades médias obtidas diferem em cerca de 1,4%. A dispersão de sensibilidades ao longo de cada *array* é de assinalar, verificando-se coeficientes de variação iguais a 5,1% e 4,5%, respetivamente para os *arrays 1* e *2*, a qual se deve à variabilidade da temperatura ao longo do modelo, bem como à dificuldade em uniformizar a proteção dos sensores.

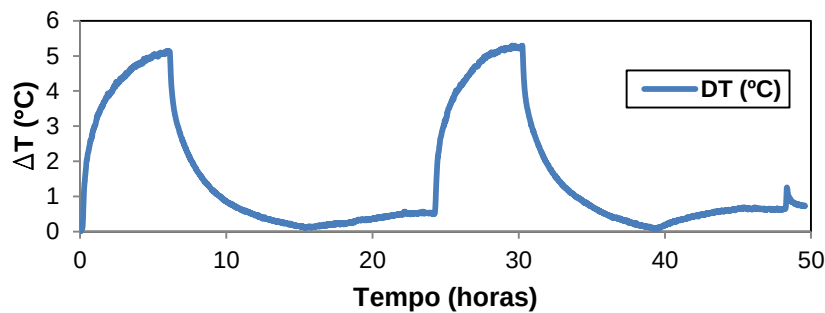


Figura 6.60 – Evolução da temperatura durante o ensaio

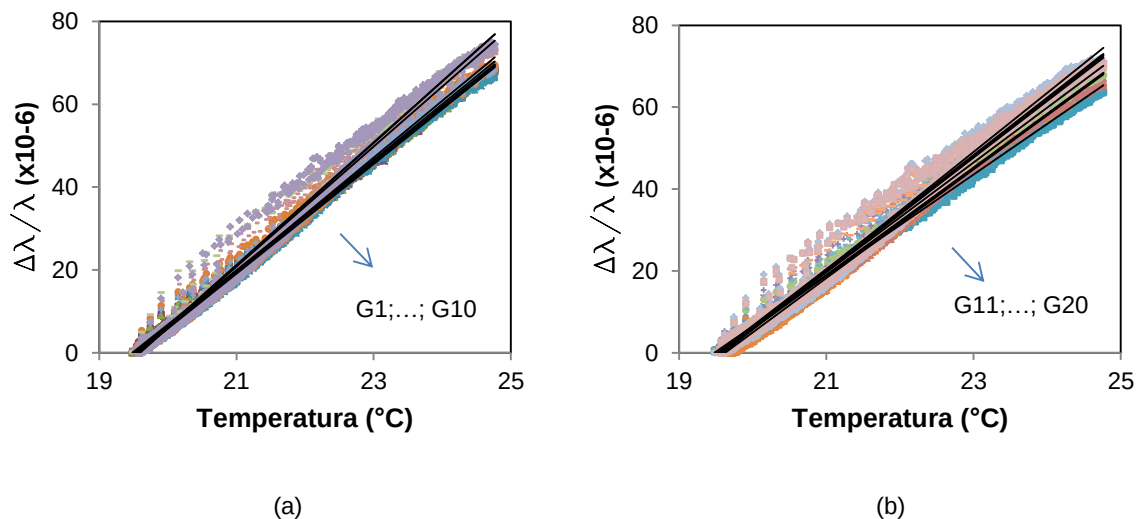


Figura 6.61 – Correlação entre a variação do comprimento de onda normalizado e a temperatura: (a) Array 1 e (b) Array 2

Tabela 6.14 – Quantificação experimental das sensibilidades dos sensores à temperatura

Array 1			Array 2		
Sensor	$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\Delta T^{(-1)}$	RMSE ($\times 10^{-6}$)	Sensor	$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\Delta T^{(-1)}$	RMSE ($\times 10^{-6}$)
G1	13,22	0,75	G11	12,36	1,04
G2	13,10	0,64	G12	13,26	1,27
G3	13,13	0,74	G13	13,10	0,99
G4	13,28	0,85	G14	13,05	1,21
G5	13,21	1,02	G15	13,40	1,02
G6	13,70	1,15	G16	13,84	1,31
G7	13,45	0,97	G17	13,82	1,19
G8	14,47	1,40	G18	14,05	1,82
G9	14,77	1,78	G19	14,41	2,11
G10	14,87	2,00	G20	14,00	1,80

Como referido anteriormente, foi aplicada uma película de revestimento para a realização dos ensaios de identificação da deformada, durante os quais a mesma se foi degradando devido às grandes amplitudes de deformação. Consequentemente, a proteção dos sensores durante o ensaio térmico deixou de ser uniforme, com inevitável impacto na sensibilidade à variação de temperatura em cada um dos sensores. O desvio observado é, contudo, compatível com o rigor pretendido na presente aplicação de validação experimental do modelo físico.

É de salientar que a sensibilidade à temperatura que se está a referir reflete, não só a deformação do material da barra do modelo, mas também a sensibilidade intrínseca dos sensores de *Bragg* à temperatura. Com vista a determinar o coeficiente de dilatação térmica para o material da barra, apresenta-se de seguida a formulação inerente às medições com sensores de *Bragg*.

Considerando que a fibra ótica se deforma apenas na direção do seu eixo longitudinal e, tendo em conta as características mecânicas e óticas, o comprimento de onda normalizado é expresso simplifadamente por (Ferreira, Caetano, Ramos, *et al.* 2017)

$$\frac{\Delta\lambda_b}{\lambda_b} = \beta_\varepsilon \Delta\varepsilon_M + [\beta_\varepsilon(\alpha_m - \alpha_f) + \beta_T] \Delta T \quad (6.4)$$

ou por

$$\frac{\Delta\lambda_b}{\lambda_b} = (1 + \rho_e) \Delta\varepsilon_M + [(1 + \rho_e)(\alpha_m - \alpha_f) + \alpha_f + \zeta] \Delta T \quad (6.5)$$

tal que $\Delta\lambda_b$ é a variação do comprimento de onda, que tanto pode ser detetada pelo espectro de luz transmitida como no de luz refletida (Kersey 1997; Hill e Meltz 1997) e λ_b é o comprimento de onda central do sensor de *Bragg*. Este comprimento de onda normalizado está relacionado com a atuação de grandezas externas, tais como a variação da extensão mecânica $\Delta\varepsilon_M$ e as variações de temperatura ΔT , que são agentes perturbadores tanto no índice de refração efetivo da fibra, como do espaçamento da rede. Estas grandezas estão afetadas pelas sensibilidades do *FBG* à deformação β_ε e à temperatura β_T , e ainda pelos coeficientes de dilatação térmica do material da estrutura de suporte α_m e da própria

fibra α_f . A sensibilidade à deformação β_ε depende de uma constante foto-elástica ρ_e e a sensibilidade à temperatura depende do coeficiente de dilatação térmica da fibra α_f e do coeficiente termo-ótico ζ (FIBERSENSING 2013).

No caso particular das fibras óticas de sílica, utilizadas no fabrico dos sensores de *Bragg* da presente aplicação, os parâmetros indicados nas expressões (6.4) e (6.5) assumem os valores apresentados na Tabela 6.15.

Tabela 6.15 – Valores característicos relativamente à sensibilidade dos sensores de *Bragg* (FIBERSENSING 2013)

Símbolo	Valor característico
β_ε	$0,788 \times 10^{-6} (\mu\varepsilon)^{-1}$
ρ_e	-0,212
α_f	$0,55 \times 10^{-6} ^\circ\text{C}^{-1}$
ζ	$5,77 \times 10^{-6} ^\circ\text{C}^{-1}$

Assim sendo, tendo em conta o valor médio determinado para as sensibilidades à temperatura, com base nos valores apresentados na Tabela 6.14, pode-se estimar, de acordo com a expressão (6.5), um coeficiente de dilatação térmica para o material da barra de $17,14 \times 10^{-6} ^\circ\text{C}^{-1}$, perfeitamente enquadrado com as especificações do fabricante do *vinylester* utilizado na barra do modelo.

Os resultados do ensaio de caracterização de resposta dos sensores à temperatura para as condições de aplicação e características dos materiais adotados alertam para a elevada sensibilidade dos sensores de *Bragg*.

Assim, independentemente do encapsulamento adotado para o protótipo, é necessário realizar um ensaio de caracterização térmica, ponderando a hipótese de utilização de uma metodologia para a compensação dos efeitos termo-óticos.

6.5.3.2. Impacto do coeficiente termo-ótico nas medições dos sensores

A Figura 6.62 (a) apresenta a deformação aparente dos sensores, baseada na variação de comprimento de onda, sendo obtida agregando as duas parcelas do 2º membro da expressão (6.5), relativas, respetivamente, às ações mecânicas e térmicas, resultando em

$$\Delta\varepsilon_{total} = \frac{\Delta\lambda_b}{\beta_\varepsilon\lambda_b} \quad (6.6)$$

A Figura 6.62 (b) apresenta a deformação aparente teórica do material pelo efeito térmico, com base no coeficiente de dilatação térmica linear, estimado no ensaio de caracterização térmica. Ambas as deformações evidenciam tendências muito semelhantes e máximos semelhantes, de cerca de $90 \mu\varepsilon$, acompanhando inclusivamente a linha de tendência da variação de temperatura, indiciando que os sensores estão de facto a medir, quase integralmente as variações de deformação da barra devido aos efeitos térmicos. No entanto, subtraindo as deformações referidas, anteriormente, é possível estimar o erro associado à deformação devido aos efeitos termo-óticos.

A Figura 6.62 (c) apresenta o erro associado à medição, com uma amplitude máxima de cerca de $25 \mu\varepsilon$, para uma variação de temperatura de cerca de 5°C . Com o fim de avaliar o impacto dos efeitos

termo-ópticos nas medições e, conseqüentemente, na configuração deformada do modelo, considere-se um erro de $50\mu\epsilon$. Para além disso, considere-se conservativamente que atua sobre as faces do modelo uma variação de temperatura diferencial, que originaria hipoteticamente um aumento na face superior de $50\mu\epsilon$ e uma redução na face inferior do mesmo valor.

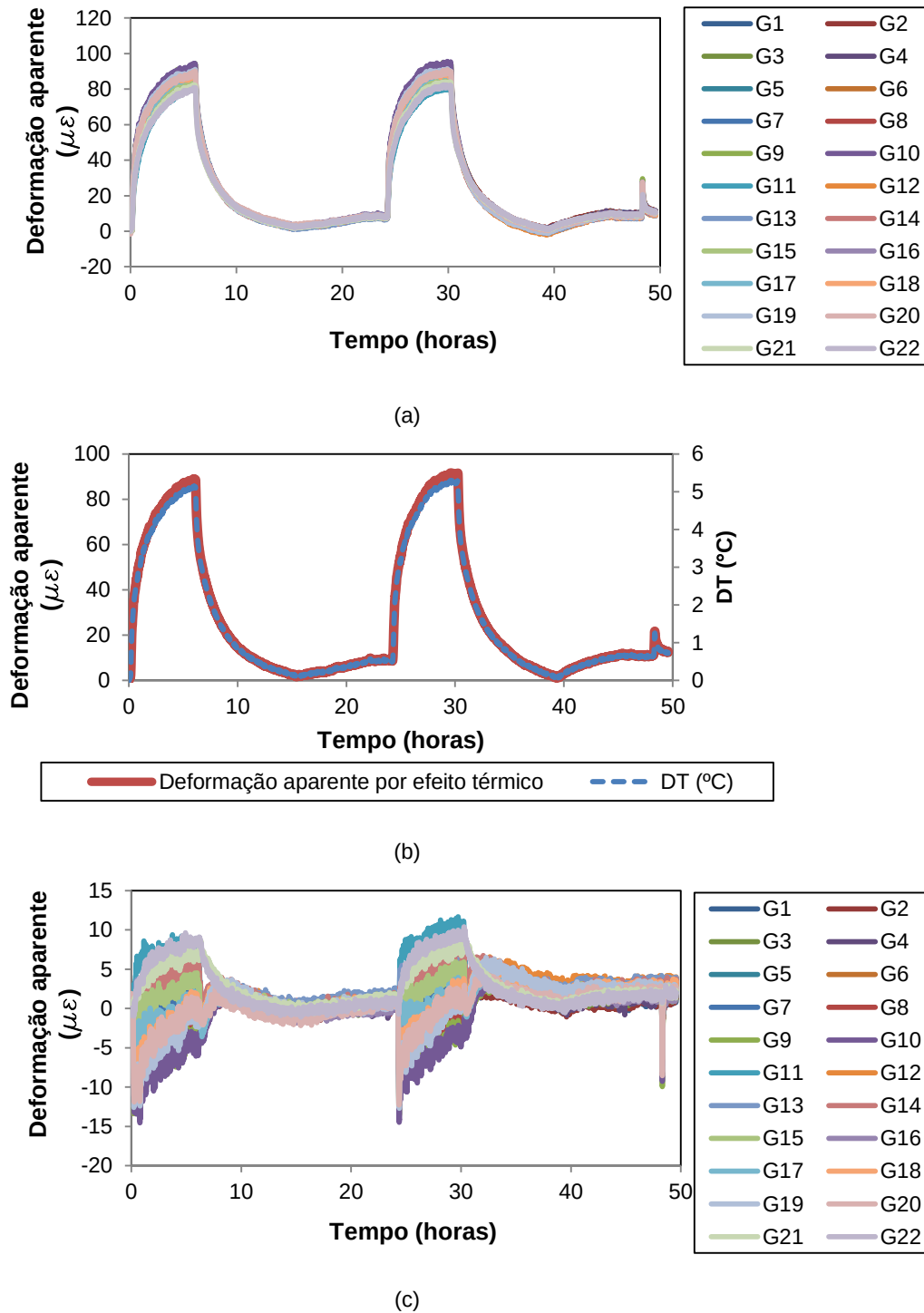


Figura 6.62 – (a) Deformação aparente obtida a partir da variação do comprimento de onda de cada sensor; (b) Deformação aparente estimada a partir da medição da temperatura; (c) Erro associado à deformação

A Figura 6.63 apresenta a envolvente criada nesta situação hipotética, de variação diferencial de temperatura, e apresenta também as configurações de referência e a obtida utilizando 5 secções instrumentadas com 10 sensores de *Bragg*, com as medições de deformação aparentes, baseadas em variação de comprimento de onda. Esta envolvente evidencia uma clara sensibilidade dos sensores aos efeitos termo-óticos, embora se tenha procedido de uma forma conservativa para a estimar, constituindo, a par da espessura, o parâmetro que mais influencia o erro na caracterização da deformação da barra.

Tal como referido anteriormente, alerta-se para o facto de se realizar um ensaio de caracterização térmica, independentemente do encapsulamento adotado para o protótipo, ponderando a hipótese de utilização de uma metodologia para a compensação dos efeitos termo-óticos.

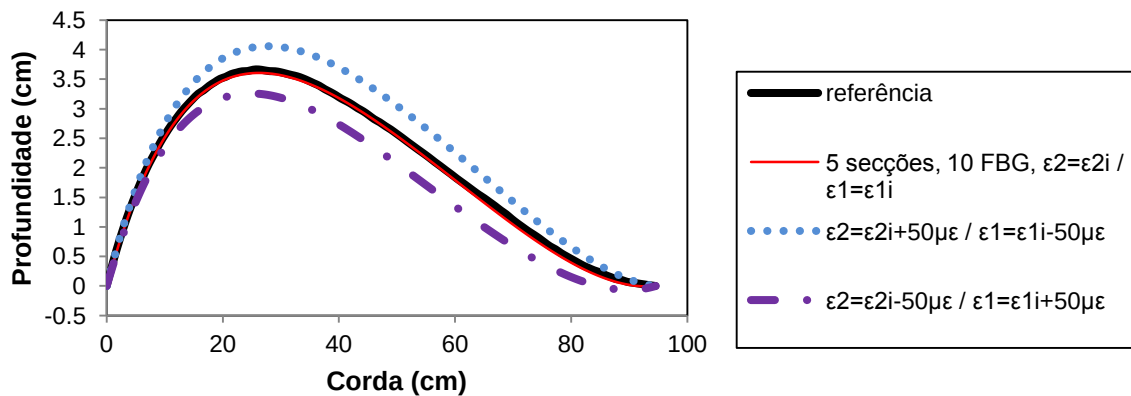


Figura 6.63 – Configurações deformadas do modelo com base em variações diferenciais de deformação originados pelos efeitos termo-óticos

6.6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tendo por base os estudos realizados descritos na secção anterior, pode concluir-se ser eficiente a instrumentação de uma barra em 5 secções instrumentadas, com 10 sensores de *Bragg*, de modo a obter um erro na estimativa da profundidade de cerca de 4% em relação à profundidade máxima. Em relação aos parâmetros que se pretendem estimar, o erro é de cerca de 0,3% para a corda, 1,4% para a profundidade máxima, 3% para a localização da profundidade máxima e 1,8 graus para os ângulos de entrada e de saída para ângulos de cerca de 50 graus.

Contudo, são de realçar os seguintes aspetos:

- A barra de *vinylester* com 2mm de espessura e 10mm de largura será mais adequada a velas mais rígidas, atendendo a que as configurações deformadas correntes das velas mais flexíveis são mais suscetíveis ao fenómeno de *backwind*, para o qual esta barra poderá não ser suficientemente flexível para acompanhar a deformada resultante; e também devido aos requisitos em termos de provas de competição que poderão não permitir a utilização de elementos mais rígidos na vela. O próprio manuseamento pelos operadores teria de ser cuidado;
- Em relação ao adesivo, foram testados dois: *loctite* (cianoacrilado) e *NP50*. O modelo onde foi utilizado a *loctite* ficou danificado em resultado da quebra das fibras óticas. A causa desta

quebra pode estar relacionada com a reduzida flexibilidade do adesivo utilizado, bem como no facto de se ter excedido $2500\mu\epsilon$ com alguma frequência. Daí ter sido criado um segundo modelo, utilizando o adesivo *NP50*, tendo funcionado corretamente durante os ensaios da validação experimental, embora não se tenha excedido o nível de deformação de $2500\mu\epsilon$;

- Na eventualidade de se poder exceder os $2500\mu\epsilon$, os comprimentos de onda de referência dos sensores terão de ser mais espaçados, uma vez que a amplitude atual de leitura, pelo *software Braggmonitor*, para cada sensor, encontra-se em cerca de $3nm$;
- O parâmetro de *input* do algoritmo que mais influencia os resultados é a distância entre *gratings* nas faces opostas da secção instrumentada, ou espessura efetiva. Deve garantir-se a sua medida com precisão entre $0,001$ e $0,005mm$;
- Ao contrário do parâmetro anterior, a configuração deformada não é tão sensível à localização das secções instrumentadas longitudinalmente. No entanto, esta deve ser determinada com precisão de pelo menos $1mm$.

Atendendo às considerações anteriores, propõe-se realizar o protótipo com encapsulamento adequado ao tipo de sensores utilizados, de acordo com as diretivas da *FIBERSENSING* e a avaliação posterior do desempenho dos sensores de *Bragg* do protótipo, nomeadamente no que respeita ao erro de medição, sensibilidade à deformação e temperatura, bem como potenciais efeitos de histerese e/ou fadiga presentes nos sensores e respetivo adesivo.

Para além disso, dever-se-á testar configurações deformadas simulando condições de *backwind*, apresentadas na secção 6.2.2, que originarão deformações acima dos $2500\mu\epsilon$, de forma a averiguar se o protótipo está preparado para suportar os níveis de deformação a que estará exposto à escala real.

7

CONCLUSÕES

7.1. SUMÁRIO

A percepção da utilização crescente das estruturas formadas por cabos e membranas tensas em coberturas de grandes vãos e a constatação da existência de uma assinalável distância entre o conhecimento científico e a prática de projeto em diversas questões ligadas à sua conceção e dimensionamento têm contribuído para que, também ao nível da Engenharia Civil Portuguesa, se tenha vindo a sentir um interesse cada vez maior no estudo destas estruturas.

Tendo por base o conhecimento alcançado nos domínios do comportamento estático e dinâmico de estruturas de cabos e membranas tensas e da engenharia do Vento, este trabalho de investigação contribui para uma fundamentação das hipóteses utilizadas no projeto, através da investigação do comportamento estrutural de estruturas de cabos e membranas tensas, com particular enfoque para a caracterização dos efeitos dinâmicos do vento nestas estruturas.

O presente trabalho reflete a investigação realizada neste domínio, apresentando o estudo e desenvolvimento de metodologias de determinação da forma e a análise do efeito do vento em estruturas de cabos e membranas tensas, tendo como exemplo duas estruturas: uma cobertura em membrana de um recinto polidesportivo e a vela de um barco.

7.2. CONCLUSÕES

No **capítulo 2** foi apresentado um estado de arte sobre estruturas de cabos e membranas tensas, onde foram caracterizadas as propriedades dos materiais e apresentados detalhes dos elementos de ligação, bem como sistematizados os principais conceitos relacionados com o dimensionamento destas estruturas especiais.

No **capítulo 3**, foram apresentados diversos métodos de determinação e otimização da forma estrutural, descrevendo-se a formulação que fundamenta os vários programas de cálculo automático desenvolvidos com base nesses métodos e referindo-se alguns exemplos simples que, mediante o recurso a simulações numéricas, permitiram avaliar a aplicabilidade e eficiência desses programas. Os programas de cálculo foram desenvolvidos com base, respetivamente, no Método da Densidade de Força (*MDF*), no Método da Densidade de Tensão Superficial (*MDTS*) e no Método da Relaxação Dinâmica (*MRD*). Estes programas de cálculo foram implementados em ambiente *MATLAB* no âmbito da presente dissertação.

No **capítulo 4** foi caracterizado o vento atmosférico e o escoamento em torno de coberturas, sintetizando-se as principais instabilidades aerodinâmicas e formas de mitigação com vista à sua estabilidade aerodinâmica, sendo adicionalmente sistematizados os coeficientes de pressão de estruturas de membrana correntes. Foram abordadas formas experimentais de caracterização dos efeitos do vento, à escala reduzida e à escala real. Finalmente, foram abordadas as simulações numéricas dos efeitos do vento mais comuns em estruturas de cabos e membranas. Essencialmente, existem duas vias distintas de análise dos efeitos turbulentos do vento, uma a partir de uma análise dinâmica no domínio da frequência e outra no domínio do tempo. A maior simplicidade da primeira técnica leva à sua utilização preferencial pelos projetistas, embora os princípios em que se baseia a sua utilização possam ser colocados em causa, dado que utilizam métodos lineares, que contrastam com o comportamento destas estruturas, geralmente, não-linear. Porém, no domínio do tempo, essa lacuna é preenchida, apesar do processo ser mais moroso, dada a necessidade de gerar séries temporais da velocidade do vento e de determinar a resposta estrutural. No entanto, o comportamento dinâmico das estruturas de membrana ainda não está devidamente caracterizado, pelo que foram sistematizados vários estudos acerca da determinação da massa aerodinâmica e do amortecimento aerodinâmico que têm um papel preponderante na devida caracterização aerodinâmica durante a modelação aeroelástica da ação da componente turbulenta do vento.

No **capítulo 5** foi apresentada a estrutura de cobertura em membrana de um recinto polidesportivo, no centro de alto rendimento da ilha da *Cartuja*, em Sevilha, e foram realizados diversos estudos estáticos e dinâmicos de forma a caracterizar adequadamente a estrutura.

Primeiramente, foi realizado um estudo de determinação da forma da membrana tensa da estrutura de cobertura, sendo arbitrado o nível de pré-esforço com base nas recomendações do manual europeu, e realizando um estudo acerca da topologia que melhor caracteriza a membrana tensa com base nas diferentes metodologias implementadas no âmbito do presente trabalho – Método da Densidade de Força (*MDF*), Método da Densidade de Tensão Superficial (*MDTS*) e Método da Relaxação Dinâmica (*MRD*). Em suma, concluiu-se que o modelo do módulo superior de membrana a considerar no modelo numérico global da estrutura era o modelo baseado na topologia C e obtido com base na metodologia do *MRD*. Em primeiro lugar, porque os elementos lineares deste modelo estavam alinhados em correspondência com as direções principais de fabrico na estrutura. Em segundo lugar, porque este modelo se aproximava a uma superfície minimal, com tensões isotrópicas, validando a premissa inicial de rácio de pré-esforço unitário. Por sua vez, no modelo do módulo lateral de membrana a considerar no modelo numérico global da estrutura era o modelo baseado no *MDF*, atendendo à malha da geometria obtida ser mais regular do que a sua homóloga obtida pelo *MRD*.

Posteriormente, foi realizado um estudo da influência do pré-esforço e da ortotropia da membrana tensa com bordos rígidos sob as ações permanentes, quer no seu comportamento estático, quer no seu comportamento dinâmico, sendo de referir o seguinte:

- Na primeira parte pretendia-se verificar em que medida a disposição dos padrões de corte, no módulo superior de membrana, orientada a 0° em relação às direções de desenvolvimento principal da estrutura era de facto menos vantajosa do que orientada a 45° - solução utilizada na estrutura. Foram realizados dois modelos de membrana distintos, consoante a orientação das direções principais de fabrico, e de seguida foram realizadas simulações numéricas de análise estática não-linear geométrica sob as ações previstas no dimensionamento destas estruturas. Nestas análises, o nível de pré-esforço foi balizado entre 0,5 e 3kN/m (0,5, 0,9, 1, 2 e 3kN/m), face ao desconhecimento do pré-esforço realmente aplicado à membrana tensa. Para este estudo o coeficiente de Poisson foi considerado igual $\nu_{TU} = 0,235$ ($\nu_{UT} = 0,39$). Em suma, a opção de orientar as direções principais de fabrico do módulo 1 a 45° com as direções

principais da estrutura, aparentemente, foi uma escolha que otimiza as propriedades do material de membrana utilizado, isto é, por um lado consegue tirar mais proveito das propriedades ortotrópicas, alinhando as direções principais de fabrico com as direções principais dos esforços resultantes, ao mesmo tempo que origina tensões de corte inferiores. Este último facto é fundamental para que, durante as operações de montagem da membrana na estrutura metálica, haja menor probabilidade do enrugamento da tela, embora esse fenómeno dependa também de outros fatores;

- Na segunda parte, face à incerteza na definição adequada dos parâmetros de ortotropia nas simulações numéricas, foi avaliada a influência do pré-esforço e do coeficiente de Poisson no comportamento da membrana. Neste estudo foi considerado o modelo com as direções principais de fabrico orientadas a 45° com as direções de desenvolvimento longitudinal e transversal da estrutura e foram realizadas simulações numéricas de análise estática não-linear geométrica sob as ações previstas no dimensionamento destas estruturas. Nestas análises, o nível de pré-esforço foi balizado entre 1 e 3kN/m (1, 2 e 3kN/m), e o coeficiente de Poisson ν_{TU} foi balizado entre 0,235 e 0,7 (0,235, 0,37, 0,45, 0,62, e 0,7), e ν_{UT} respetivamente entre 0,39 e 1,17 (0,39, 0,62, 0,75, 1,04 e 1,17). Em suma, verificou-se que, ao nível das deformações em ambos os módulos de membrana em análise - módulo 1 e lateral, quanto maior é o nível de pré-esforço pretendido, maior é a dispersão das deformações na direção da teia e da trama; No geral, verificou-se uma relação linear entre a deformação introduzida e o coeficiente de Poisson; As deformações introduzidas na direção da teia são sempre inferiores às da direção da trama, para cada nível de pré-esforço. Este facto tem a ver com as propriedades do modelo ortotrópico, em que o módulo de elasticidade nas direções de fabrico é distinto, sendo superior na direção da teia (773 e 463kN/m, respetivamente). Ora, para que nessas direções de fabrico o nível de pré-esforço seja igual, é necessário introduzir deformações superiores na direção da trama; Para além disso, a deformação introduzida decresce com o aumento do coeficiente de Poisson, o que significa que quanto maior é a interação entre as direções de fabrico, menor é a deformação necessária para que a membrana cumpra o nível de pré-esforço pretendido, 1, 2 e 3kN/m. Este comportamento verificou-se quer para a direção da teia, quer para a direção da trama; No entanto, no caso do módulo 1, o aumento da deformação com o coeficiente de Poisson não é linear, ao contrário do módulo lateral. Este facto deve-se ao comportamento distinto dos dois módulos sob a atuação de cargas aplicadas; Em relação às tensões de corte, no módulo 1, de um modo geral, as tensões de corte decresceram com o aumento do pré-esforço, apresentando, no entanto, um valor mínimo / ótimo para um pré-esforço de 2kN/m, e no módulo lateral, as tensões de corte aumentaram com o nível de pré-esforço da membrana tensa. Em geral, o impacto da variação do pré-esforço na deformada da estrutura é mais significativo do que a variação do coeficiente de Poisson; Ao nível do comportamento dinâmico, em geral, para cada nível do coeficiente de Poisson, as frequências naturais aumentaram com o nível de pré-esforço aplicado na membrana tensa. No entanto, para cada nível de pré-esforço e fazendo variar o coeficiente de Poisson, a tendência das frequências não é análoga à anterior;
- Em suma, da análise destes dois estudos é de referir que o comportamento estático e dinâmico da membrana tensa é fortemente influenciado pelas propriedades materiais e pelo nível de pré-esforço, pelo que a sua correta caracterização e inclusão nas simulações numéricas é fundamental para o dimensionamento adequado destas estruturas;

Adicionalmente, no sentido de averiguar o grau do erro associado à consideração de um modelo constitutivo ortotrópico linear em detrimento do seu comportamento real, foram realizadas simulações

numéricas de um ensaio de tração biaxial segundo o protocolo de ensaio proposto em Bridgens (2005), e foram sobrepostos os resultados aos obtidos experimentalmente num ensaio real. A análise do comportamento do material foi realizada a nível bidimensional - tensão-deformação, e através das superfícies de resposta - tensão-tensão deformação, para ambas as direções de fabrico teia e trama. Verificou-se que o modelo constitutivo ortotrópico linear elástico intermédio, isto é, utilizando módulos de elasticidade $E_U = 773\text{kN/m}$ e $E_T = 463\text{kN/m}$ e coeficientes de Poisson $\nu_{TU} = 0,45$ e $\nu_{UT} = 0,75$, seria a solução considerada que simultaneamente melhor permitia explicar a variabilidade dos dados em ambas as direções, apresentando aliás níveis de erro e de desvio próximos dos que resultam do melhor ajustamento realizado aos dados, quer na direção do urdume, quer na direção da trama, motivo pelo qual foi a solução considerada na análise da estrutura sob a ação dos efeitos do vento.

Por último, no capítulo 5 foi realizado o estudo do comportamento não-linear dinâmico da estrutura de cobertura em membrana tensa sob a ação do vento. Para o efeito foi realizada uma análise no domínio do tempo considerando a não-linearidade geométrica do sistema com grandes deslocamentos. A resposta estrutural aos efeitos de rajada foi determinada com base na aplicação das forças aerodinâmicas com base numa ação do vento em pressão e em sucção. Foi considerado um modelo aeroelástico simplificado, em que o amortecimento estrutural e o amortecimento aerodinâmico são somados e introduzidos como um amortecimento viscoso, e considerando uma massa adicional da membrana devido à massa de ar em vibração com a membrana durante a interação fluido-estrutura. A resposta temporal da estrutura foi obtida por integração direta passo-a-passo da equação de equilíbrio dinâmico, aplicando o método de integração numérica de Newmark e, complementarmente, por sobreposição modal, no sentido de avaliar as diferenças e a aplicabilidade dos mesmos no cálculo de estruturas de cobertura em membrana tensa. A resposta dinâmica máxima, expressa em termos de deslocamentos em pontos localizados na membrana e na estrutura metálica, foi comparada com a resposta calculada com base no método de análise quase-estático através do coeficiente de amplificação dinâmico R_{din} .

Em geral verificou-se que a resposta dinâmica não excedeu a resposta da ação quase-estática do vento. Os valores de amplificação dinâmica R_{din} foram geralmente de aproximadamente 0,8, embora se tenha obtido um valor de 1,11 no deslocamento do pórtico maior na direção do vento. Esta análise permitiu constatar que o método de análise quase-estático proposto pelo *Eurocódigo 1* para determinação da ação quase-estática do vento em estruturas de membrana, aliado aos coeficientes de pressão propostos pela norma europeia de membrana, conduz em geral a um dimensionamento conservativo da estrutura de cobertura em membrana tensa.

Das análises realizadas há ainda a referir o seguinte:

- A ação quase estática do vento em pressão representa aproximadamente 120% do peso total da estrutura, e em sucção aproximadamente 268%;
- As tensões da membrana na direção do urdume excederam as tensões admissíveis sob a ação combinada das ações permanentes do pré-esforço, do peso próprio e da ação do vento na direção 0°, considerando pressões exteriores e sucções interiores; e na direção da trama considerando sucções exteriores e pressões interiores; A membrana exhibe um comportamento altamente não-linear geométrico, sendo evidente através da análise da resposta dos parâmetros de controlo em função da velocidade do vento;
- Das análises modais realizadas, verificou-se, em primeiro lugar, que a estrutura de membrana responde com vários modos de vibração para frequências a partir de 3Hz e abaixo de 5Hz, na configuração da estrutura sob a ação da componente média da velocidade do vento, embora menos do que na posição de equilíbrio, e com frequências próximas entre si; Em geral houve

um aumento das frequências naturais a partir da posição estática devido ao aumento da rigidez da membrana, dado que a rigidez da membrana depende da tensão aplicada no plano da membrana e da própria geometria; No entanto, o efeito do aumento das frequências naturais da configuração estática da estrutura para a configuração deformada da estrutura sob ação da componente média da ação do vento, devido ao aumento da rigidez da estrutura, é praticamente anulado considerando o efeito da massa adicional de membrana;

- A consideração da massa aerodinâmica conduz a uma diminuição das frequências naturais da estrutura que, dependendo da metodologia utilizada, pode conduzir a frequências naturais próximas da gama de frequências em que a energia de excitação do vento é elevada, aproximadamente entre 0,5 e 1,5Hz. Com efeito, este tópico carece de um estudo mais aprofundado em estudos futuros sustentada por uma validação experimental, dada a importância que este representa na resposta da membrana sob à ação do vento;
- As amplitudes de vibração são muito mais significativas na membrana do que na estrutura metálica, estimando-se um máximo, respetivamente, de 74 e $2,2m/s^2$ nos parâmetros de controlo analisados; No caso da membrana, evidenciam-se amplitudes de vibração mais significativas para velocidades do vento de aproximadamente 22m/s, numa gama analisada de 0-40m/s;
- Da resposta dinâmica da estrutura, ao nível dos parâmetros de controlo da membrana, não foram identificadas frequências em particular numa gama de 0-10Hz, embora os espetros da resposta apresentassem elevada energia na gama de frequências correspondentes aos modos de vibração da estrutura com elevada participação da membrana ou com significativa interação, apresentando fatores de hibridização intermédios; ao nível dos parâmetros de controlo da estrutura metálica os picos dos espetros de potência são mais bem definidos, tendo sido identificadas frequências da estrutura independentemente do nível de interação da membrana;
- Em geral, os espetros de potência da resposta da estrutura obtidos com base no método de integração direta apresentam uma área maior, e picos com maior energia, em comparação com os obtidos por sobreposição modal, principalmente na gama de frequências onde se encontra a maioria dos modos de vibração da estrutura com participação significativa da membrana tensa. Este facto, reforça a necessidade de se realizar uma análise dinâmica por integração direta para avaliar o comportamento de estruturas de membrana, de forma a considerar a atualização da matriz de rigidez da estrutura à medida que esta se deforma sob a ação dinâmica do vento, pese embora o esforço de cálculo computacional muito maior associado às análises por integração direta.

No **capítulo 6**, foi desenvolvida uma metodologia de determinação da forma da vela de um barco em tempo real, visando a caracterização da forma da vela num veleiro e possibilitando a otimização do desempenho da embarcação em tempo real.

A metodologia baseia-se na caracterização da deformada de uma barra com base na medição de extensões. A validação desta metodologia foi realizada primeiramente com recurso a simulações numéricas. De seguida, foi implementado um algoritmo baseado nessa metodologia numa aplicação informática.

De acordo com os objetivos referidos anteriormente, foi realizada uma validação da metodologia através do ensaio de um modelo físico, contemplando a instalação de redes de Bragg numa barra de dimensões conhecidas, de modo a obter curvaturas em pontos específicos, a partir das quais se avaliaram, por interpolação, as coordenadas da barra no estado deformado.

Pode concluir-se, ao nível da validação experimental realizada, ser eficiente a instrumentação de uma barra em 5 secções instrumentadas, com 10 sensores de *Bragg*, de modo a obter um erro na estimativa da profundidade de cerca de 4% em relação à profundidade máxima. Em relação aos parâmetros que se pretendem estimar, o erro é de cerca de 0,3% para a corda, 1,4% para a profundidade máxima, 3% para a localização da profundidade máxima e 1,8 graus para os ângulos de entrada e de saída para ângulos de cerca de 50 graus.

Contudo, são de realçar os seguintes aspetos:

- A barra de vinylester com 2mm de espessura e 10mm de largura será mais adequada a velas mais rígidas, atendendo a que as configurações deformadas correntes das velas mais flexíveis são mais suscetíveis ao fenómeno de *backwind*, para o qual esta barra poderá não ser suficientemente flexível para acompanhar a deformada resultante; e também devido aos requisitos em termos de provas de competição que poderão não permitir a utilização de elementos mais rígidos na vela. O próprio manuseamento pelos operadores teria de ser cuidado;
- Em relação ao adesivo, foram testados dois: *loctite* (cianoacrilado) e *NP50*. O modelo onde foi utilizado a *loctite* ficou danificado em resultado da quebra das fibras óticas. A causa desta quebra pode estar relacionada com a reduzida flexibilidade do adesivo utilizado, bem como no facto de se ter excedido 2500 $\mu\epsilon$ com alguma frequência. Daí ter sido criado um segundo modelo, utilizando o adesivo *NP50*, tendo funcionado corretamente durante os ensaios da validação experimental, embora não se tenha excedido o nível de deformação de 2500 $\mu\epsilon$;
- Na eventualidade de se poder exceder os 2500 $\mu\epsilon$, os comprimentos de onda de referência dos sensores terão de ser mais espaçados, uma vez que a amplitude atual de leitura, pelo *software Braggmonitor*, para cada sensor, encontra-se em cerca de 3nm;
- O parâmetro de input do algoritmo que mais influencia os resultados é a distância entre gratings nas faces opostas da secção instrumentada, ou espessura efetiva. Deve garantir-se a sua medida com precisão entre 0,001 e 0,005mm;
- Ao contrário do parâmetro anterior, a configuração deformada não é tão sensível à localização das secções instrumentadas longitudinalmente. No entanto, esta deve ser determinada com precisão de pelo menos 1mm.

Atendendo às considerações anteriores, propõe-se realizar o protótipo com encapsulamento adequado ao tipo de sensores utilizados, de acordo com as diretivas da *FIBERSENSING* e a avaliação posterior do desempenho dos sensores de *Bragg* do protótipo, nomeadamente no que respeita ao erro de medição, sensibilidade à deformação e temperatura, bem como potenciais efeitos de histerese e/ou fadiga presentes nos sensores e respetivo adesivo.

Para além disso, dever-se-á testar configurações deformadas simulando condições de *backwind*, que originarão deformações acima dos 2500 $\mu\epsilon$, de forma a averiguar se o protótipo está preparado para suportar os níveis de deformação a que estará exposto à escala real.

7.3. PERSPETIVAS DE INVESTIGAÇÃO FUTURA

O trabalho apresentado nesta tese incluiu o desenvolvimento de importantes ferramentas de caracterização do comportamento estrutural de estruturas de cabos e de membranas tensas, permitiu identificar lacunas ligadas à prática do projeto e tirar conclusões em relação aos parâmetros mais importantes do seu comportamento, em particular sob os efeitos dinâmicos do vento, como é o caso da massa e do amortecimento aerodinâmico. A quantificação destes parâmetros não está regulamentada e as formulações existentes na literatura carecem de validação experimental à escala real. A instrumentação futura da cobertura da Cartuja permitiria obter dados necessários à calibração do modelo numérico desenvolvido no presente trabalho, e estudar os efeitos dinâmicos do vento. A instrumentação da membrana utilizando sensores de forma de fibra ótica com sensores de Bragg, semelhantes ao sensor desenvolvido no segundo caso de estudo deste trabalho para monitorizar a forma estrutural de velas flexíveis de barcos de alta competição, é aparentemente uma solução viável. Estes sensores são flexíveis e leves, o que facilitaria a implementação prática, e possuem uma comprovada capacidade para realizar medições dinâmicas na gama de frequências naturais expectável da estrutura, informação obtida com base nos vários estudos paramétricos realizados no presente trabalho, e na gama de frequências de interesse no âmbito da interação fluido-estrutura. Adicionalmente, poder-se-ia estudar e desenvolver um sistema de controlo ativo que, em simultâneo com o sensor de forma de fibra ótica, permitisse mitigar vibrações excessivas, ou eventuais instabilidades aerodinâmicas da membrana.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abbott, M. B. 1966. *An introduction to the method of characteristics*. American Elsevier.
- Abbott, N. J. e J. Skelton. 1972. "Crack propagation in woven fabrics". *Journal of Coated Fibrous Materials* no. 1:234-252.
- Abel, J. F., J. Chilton, D. P. Billington, E. Ramm, M. Balz, H. Bösigler, T. Kotnik, J. Schwartz e H. Kloft. 2011. "Special Issue on Heinz Isler". *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures (J. IASS)* no. 52.
- Allemang, R. 2003. "The Modal Assurance Criterion – Twenty Years of Use and Abuse". *Sound and Vibration*:14-21.
- Allgower, E. L. e K. Georg. 1990. *Numerical continuation methods. An introduction*. Springer Series in Computational Mathematics. ISBN 3-540-12760-7.
- Alsofi, H., R. Wüchner e K. U. Bletzinger. 2015. "Evaluation of added mass modeling approaches for the design of membrane structures by fully coupled FSI simulations". Comunicação apresentada em 7th International Conference on Textile Composites and Inflatable Structures, Structural Membranes 2015.
- Ames, W. F. 1967. *Nonlinear partial differential equations : a symposium on methods of solution*. New York: Academic Press. ISBN 0-12-056754-7.
- Anderson, J. D. 1995. *Computational fluid dynamics : the basics with applications*. New York [u.a.]: McGraw Hill. ISBN 0070016852 9780070016859 0071132104 9780071132107.
- Architecture, W. G. f. T. 2002. *Guide to textile buildings*. Messe Frankfurt.
- Argyris, J. H. 1964. "Recent advances in matrix methods of structural analysis". *Progress in aeronautical Sciences* no. 4.
- Argyris, J. H., T. Angelopoulos e B. Bichat. 1974. "A general method for the shape finding of lightweight tension structures". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* no. 3 (1):135-149.
- Argyris, J. H., P. C. Dunne, T. Angelopoulos e B. Bichat. 1974. "Large natural strains and some special difficulties due to non-linearity and incompressibility in finite elements". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* no. 4 (2):219-278.
- Armitt, J. 1976. Wind Structures. Em *Wind Effects on Buildings and Structures*. Rhode-Saint-Genève: Von Kármán Institute for Fluid Dynamics.
- ASCE. 2009. *Tensile Membrane Structures*.
- Ashby, M. F. 2010. *Materials Selection in Mechanical Design*. Third ed. Burlington: Elsevier Science. ISBN 0 7506 6168 2.
- Augier, B., P. Bot, F. Hauville e M. Durand. 2012. "Experimental validation of unsteady models for fluid structure interaction: Application to yacht sails and rigs". *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* no. 101:53-66.
- Augier, B., F. Hauville, P. Bot, N. Aubin e M. Durand. 2014. "Numerical study of a flexible sail plan submitted to pitching: Hysteresis phenomenon and effect of rig adjustments". *Ocean Engineering* no. 90:119-128.

- Baraff, D. 2001. "Implicit methods for differential equations". Comunicação apresentada em Proceedings of the 28th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques (SIGGRAPH).
- Baraff, D. e A. Witkin. 1998. "Large steps in cloth simulation". Comunicação apresentada em Proceedings of the 25th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques.
- Baranger, T. 2002. "Form finding method of tensile fabric structures: Revised geometric stiffness method". *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures (J. IASS)* no. 43 (138):13-21.
- Barnes, M. R. 1977. "Form Finding and Analysis of Tension Structures by Dynamic Relaxation". Dissertação de Doutorado, The City University.
- Barnes, M. R. 1988. "Form-finding and analysis of prestressed nets and membranes". *Computers & Structures* no. 30 (3):685-695.
- Barnes, M. R. 1999. "Form Finding and Analysis of Tension Structures by Dynamic Relaxation". *International Journal of Space Structures* no. 14 (2):89-104.
- Barnes, M. R. e D. Wakefield. 1984. "Dynamic relaxation applied to interactive form finding and analysis of air-supported structures". Comunicação apresentada em Proceedings of Conference on the Design of Air-supported Structures.
- Barreto, J. P. 2012. EasyCamCalib Toolbox: Calibration of cameras with lens distortion from one or more images of a checkerboard pattern. <http://arthronav.isr.uc.pt/easycamcalib/>.
- Bassett, R. J., R. Postle e N. Pan. 1999. "Grip point spacing along the edges of an anisotropic fabric sheet in a biaxial tensile test". *Polymer Composites* no. 20 (2):305-313.
- Basso, P. e A. D. Grosso. 2009. "Computational morphogenesis in architecture: the cost optimization of free-form grid-shells". *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures (J. IASS)* no. 50 (3):143-151.
- Basso, P. e A. D. Grosso. 2011a. "Adaptive frameworks topology optimization". Comunicação apresentada em IASS Annual Symposium: IABSE-IASS : Taller, Longer, Lighter, em London.
- Basso, P. e A. D. Grosso. 2011b. "Form-finding methods for structural frameworks: a review". Comunicação apresentada em IASS Annual Symposium: IABSE-IASS: Taller, Longer, Lighter, em London.
- Basso, P., A. D. Grosso, A. Pugnale e M. Sassone. 2009. "Applications of a "virtual" force density method ". Comunicação apresentada em IASS Symposium: Evolution and Trends in Design, Analysis and Construction of Shell and Spatial Structures, em Valencia.
- Bastos, F. 2009. "Comportamento aerodinâmico de estruturas esbeltas : análise de efeitos de rajada". Dissertação de Mestrado, Universidade do Porto.
- Bastos, F. 2015. "Aerodynamic behaviour of long span structures : numerical analysis and experimental validation based on full-scale measurements". Dissertação de Doutorado, Universidade do Porto.
- Bathe, K. J. 1996. *Finite element procedures*. Upper Saddle River: Prentice-Hall. ISBN 0-13-301458-4.
- Bazilevs, Y., K. Takizawa e T. E. Tezduyar. 2012. *Computational Fluid-Structure Interaction: Methods and Applications*. John Wiley and Sons. ISBN 9780470978771.

- Beccarelli, P. 2015. *Biaxial Testing for Fabrics and Foils: Optimizing Devices and Procedures*. Editado por SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology. Springer International Publishing. ISBN 9783319022277.
- Beccarelli, P., B. Bridgens, C. Galliot, P. Gosling, B. Stimpfle e A. Zanelli. 2011. "Round-robin biaxial tensile testing of architectural coated fabrics". Comunicação apresentada em IASS Annual Symposium: IABSE-IASS : Taller, Longer, Lighter, em London.
- Bellés, P., N. Ortega, M. Rosales e O. Andrés. 2009. "Shell form-finding: Physical and numerical design tools". *Engineering Structures* no. 31 (11):2656-2666.
- Bendsoe, M. P. e O. Sigmund. 2003. *Topology optimization: theory, methods and applications*. Berlin: Springer. ISBN 3540429921 9783540429920.
- Berestycki, H. e H. Brezis. 1981. *Recent contributions to nonlinear partial differential equations*. Research notes in mathematics. London: Pitman Advanced Publishing Program. ISBN 0-273-08492-5.
- Bergsma, F., D. Motta, D. J. Le Pelley, P. J. Richards e R. G. J. Flay. 2012. "Investigation of sailing yacht aerodynamics using real time pressure and sail shape measurements at full scale". Comunicação apresentada em Proceedings of the 18th Australasian Fluid Mechanics Conference, em Launceston, Australia. 3-7 December 2012.
- Biagini, P., C. Borri e L. Facchini. 2007. "Wind response of large roofs of stadiums and arena". *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* no. 95 (9-11):871-887.
- Biagini, P., C. Borri, M. Majowiecki, M. Orlando e L. Procino. 2006. "BLWT tests and design loads on the roof of the new olympic stadium in Piraeus". *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* no. 94 (5):293-307.
- Bidégaray, B. e L. Moisan. 2000. *Petits problèmes de mathématiques appliquées et de modélisation issus des concours d'entrée à l'école normale supérieure de Cachan*. SCOPOS. Berlin: Springer. ISBN 3-540-67303-2.
- Birnstiel, C. 1972. "Analysis and design of cable structures". *Computers & Structures* no. 2 (5-6):817-831.
- Blessmann, J. 1991. *Ação do vento em telhados*. SAGRA, Porto Alegre, Brazil. ISBN: 9788538600275.
- Bletzinger, K. U., M. Firi, J. Linhard e R. Wüchner. 2009. "Computational morphogenesis of free form shells: Filter methods to create alternative solutions". Comunicação apresentada em IASS Symposium: Evolution and Trends in Design, Analysis and Construction of Shell and Spatial Structures, em Valencia. 2009-12-01.
- Bletzinger, K. U., M. Firl, J. Linhard e R. Wüchner. 2010. "Optimal shapes of mechanically motivated surfaces". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* no. 199 (5-8):324-333.
- Bletzinger, K. U. e E. Ramm. 1999. "A general finite element approach to the form finding of tensile structures by the updated reference strategy". *International Journal of Space Structures* no. 14 (2):131-144.
- Bletzinger, K. U. e E. Ramm. 2001. "Structural optimization and form finding of light weight structures". *Computers & Structures* no. 79 (22-25):2053-2062.

- Bletzinger, K. U., R. Wüchner, F. Daoud e N. Camprubí. 2005. "Computational methods for form finding and optimization of shells and membranes". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* no. 194 (30–33):3438-3452.
- Bletzinger, K. U., R. Wüchner e A. Kupzok. 2006. "Algorithmic treatment of shells and free form-membranes in FSI". Comunicação apresentada em Lecture Notes in Computational Science and Engineering.
- Block, P. 2009. "Thrust Network Analysis: Exploring Three-dimensional Equilibrium". Dissertação de Doutorado, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA.
- Block, P. e L. Lachauer. 2012. "Three-dimensional Equilibrium Analysis of Gothic Masonry Vaults". Comunicação apresentada em 8th International Conference on Structural Analysis of Historical Constructions (SAHC 2012), em Wroclaw, Poland.
- Block, P. e J. Ochsendorf. 2007. "Thrust Network Analysis: A new methodology for three-dimensional equilibrium". *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures* no. 48 (3):167-173.
- Borri, C., M. Majowiecki e P. Spinelli. 1992. "Wind response of a large tensile structure: The new roof of the olimpic stadium in Rome". *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* no. 42 (1–3):1435-1446.
- Bot, P., I. M. Viola, R. G. J. Flay e J.-S. Brett. 2014. "Wind-tunnel pressure measurements on model-scale rigid downwind sails". *Ocean Engineering* no. 90:84-92.
- Botelho, J. 2008. "Utilização de cabos em pontes : estudos paramétricos". Dissertação de Mestrado, Universidade do Porto.
- Bradshaw, R. 1996. "Characteristics of fabrics". Em *Tensioned Fabric Structures: A Practical Introduction*, editado por R.E. Shaeffer. The American Society of Civil Engineers. Task Committee on Tensioned Fabric Structures.
- Brezis, H. e J. L. Lions. 1983. *Nonlinear partial differential equations and their applications Collège de France Seminar*. Research notes in mathematics. Boston: Pitman Advanced Publishing Program. ISBN 0-273-08491-7.
- Bridgens, B. e M. Birchall. 2012. "Form and function: The significance of material properties in the design of tensile fabric structures". *Engineering Structures* no. 44:1-12.
- Bridgens, B. N. 2005. "Architectural fabric properties: determination, representation & prediction". Dissertação de Doutorado, Newcastle University.
- Bridgens, B. N. e P. D. Gosling. 2002. "NURBS representation of coated woven fabric behaviour". Comunicação apresentada em ICCST '02 Proceedings of the sixth conference on Computational structures technology.
- Bridgens, B. N. e P. D. Gosling. 2004a. "Direct stress-strain representation for coated woven fabrics". *Computers & Structures* no. 82 (23–26):1913-1927.
- Bridgens, B. N. e P. D. Gosling. 2004b. "A new biaxial test protocol for architectural fabrics". *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures* no. 45 (146):175-181.
- Bridgens, B. N., P. D. Gosling e M. J. S. Birchall. 2004a. "Membrane material behaviour: Concepts, practice & developments". *Structural Engineer* no. 82 (14):28-33.

- Bridgens, B. N., P. D. Gosling e M. J. S. Birchall. 2004b. "Tensile fabric structures: Concepts, practice & developments". *Structural Engineer* no. 82 (14):21-27.
- Broughton, P. e P. Ndumbaro. 1994. *The analysis of cable and catenary structures*. London: Thomas Telford. ISBN 0727720082 9780727720085.
- Buchholdt, H. A. 1997. *Structural Dynamics for Engineers*. Thomas Telford Ltd. ISBN: 0727725599, 9780727725592.
- Buchholdt, H. A. 1999. *An introduction to cable roof structures*. 2nd ed. London: Thomas Telford. ISBN 0-7277-2624-2.
- Bungartz, H. J. e M. Schäfer. 2006. *Fluid-structure Interaction: Modelling, Simulation, Optimisation*. Springer-Verlag. ISBN: 3540345965, 9783540345961.
- Burton, J. e P. D. Gosling. 2004. "Wind loading pressure coefficients on a conic shaped fabric roof - Experimental methods". *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures* no. 45 (146):183-189.
- Cabral-Fonseca, S., J. R. Correia, M. P. Rodrigues e F. A. Branco. 2012. "Artificial accelerated ageing of GFRP pultruded profiles made of polyester and vinylester resins: characterisation of physical-chemical and mechanical damage". *Strain* no. 48 (2):162-173.
- Caetano, E. 2007. *Cable vibrations in cable-stayed bridges*. Structural Engineering Documents, SED 9, IABSE. ISBN 978-3-85748-115-4.
- Caetano, E., R. Bartek, F. Magalhães, C. Keenan e G. Trippick. 2013. "Assessment of Cable Forces at the London 2012 Olympic Stadium Roof". *Structural Engineering International* no. 23 (4):489-500.
- Caetano, E. e Á. Cunha. 2011. "On the Observation and Identification of Cable-supported Structures ". Comunicação apresentada em Proceedings of EUROLYN em Belgium
- Caetano, E., A. Cunha, V. Gattulli e M. Lepidi. 2008. "Cable-deck dynamic interactions at the International Gadiana Bridge: On-site measurements and finite element modelling". *Structural Control and Health Monitoring* no. 15 (3):237-264.
- Caetano, E., N. Martins e Á. Cunha. 2013. "Characterisation of the aerodynamic behaviour of the Braga Stadium suspension roof from prototype monitoring". Comunicação apresentada em ECCOMAS Thematic Conference - COMPDYN 2013: 4th International Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering.
- Campbell, D. M. 2003. "Snow induced ponding of Textile Membrane Roof Structures". Comunicação apresentada em TensiNet Symposium Designing Tensile Architecture.
- Castellucci, M., S. Klute, E. M. Lally, M. E. Froggatt e D. Lowry. 2013. "Three-axis distributed fiber optic strain measurement in 3D woven composite structures". Comunicação apresentada em Proceedings SPIE 8690, Industrial and Commercial Applications of Smart Structures Technologies, em San Diego, California, USA. 10-14 March 2013.
- Chen, Z., Y. Wu e X. Sun. 2015. "Research on the added mass of open-type one-way tensioned membrane structure in uniform flow". *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* no. 137:69-77.
- Chilton, J. e H. Isler. 2000. *The engineer's contribution to contemporary architecture: Heinz Isler*. London: Thomas Telford. ISBN 0-7277-2878-4.

Chung, W., S. Kim, N.-S. Kim e H.-u. Lee. 2008. "Deflection estimation of a full scale prestressed concrete girder using long-gauge fiber optic sensors". *Construction and Building Materials* no. 22 (3):394-401.

Clough, R. W. e J. Penzien. 1993. *Dynamics of structures*. Vol. 2nd ed. New York: McGraw Hill. ISBN 0-07-113241-4.

Coelho, M., D. Roehl e K. U. Bletzinger. 2013. "Using NURBS as response surface for membrane material behavior". Comunicação apresentada em 6th International Conference on Textile Composites and Inflatable Structures, Structural Membranes 2013, em Munich.

Coenders, J. L. e D. Bosia. 2006. "Computational tools for design and engineering of complex geometrical structures: from a theoretical and a practical point of view". Em *The architecture co-laboratory: game, set and match II on computer games, advanced geometries, and digital technologies*, editado por Rotterdam: Episode publishers, 271-279.

Colman, A. G., B. N. Bridgens, P. D. Gosling, G. T. Jou e X. Y. Hsu. 2014. "Shear behaviour of architectural fabrics subjected to biaxial tensile loads". *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* no. 66 (0):163-174.

Computers and Structures Inc. 2011. *CSI Analysis Reference Manual*. Berkeley, California.

Connelly, R. e A. Back. 1995. "Mathematics and tensegrity". *American Scientist* (86):142-151.

Cook, R. D., M. E. Plesha e D. S. Malkus. 1989. *Concepts and applications of finite element analysis*. John Wiley and Sons; New York : cop. 1989, 3rd ed. ISBN 0-471-84788-7, 0-471-50319-3.

Correia, C. 2013. "Dimensionamento de estruturas de cobertura de estacionamento com aproveitamento solar". Dissertação de Mestrado, Universidade do Porto.

Correia, J. R., F. Branco, J. Gonilha, N. Silva e D. Camotim. 2010. "Glass fibre reinforced polymer pultruded flexural members: Assessment of existing design methods". *Structural Engineering International* no. 20 (4):362-369.

Courant, R., K. Friedrichs e H. Lewy. 1967. "On the partial difference equations of mathematical physics". *IBM Journal of Research and Development* no. 11 (2):215-234.

Cremona, C. e J. C. Foucriat. 2002. Comportement au vent des ponts. Em *Presses de l'école nationale des Ponts et Chaussées*. Paris - France.

Cui, C., H. Ohmori e M. Sasaki. 2003. "Computational Morphogenesis of 3D Structures by Extended ESO Method". *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures (J. IASS)* no. 44 (1):51-62.

Cundall, P. A. 1976. "Explicit finite difference methods in geomechanics". *Proceedings of the EF Conference on Numerical Methods in Geomechanics* no. 1:132-150.

Dang, H. K. e M. A. Meguid. 2010. "Evaluating the performance of an explicit dynamic relaxation technique in analyzing non-linear geotechnical engineering problems". *Computers and Geotechnics* no. 37 (1-2):125-131.

Davenport, A. G. 1967. "Gust Loading Factors". *Journal of the Structural Division, ASCE* no. 93:11-34.

Davenport, A. G. 1988. "The Response of Tension Structures to Turbulent Wind: the Role of Aerodynamic Damping". Comunicação apresentada em 1st Oleg Kerensky Memorial Conference, em London.

- Daw, D. J. e A. G. Davenport. 1989. "Aerodynamic damping and stiffness of a semi-circular roof in turbulent wind". *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* no. 32 (1–2):83-92.
- Day, A. S. 1965. "An introduction to dynamic relaxation". *The Engineer* no. 219 218–221.
- Day, A. S. e J. H. Bunce. 1970. "Analysis of cable networks by dynamic relaxation". *Civil Engineering and Public Works Review* no. 4:384-386.
- Debnath, L. 1997. *Nonlinear partial differential equations for scientists and engineers*. Boston: Birkhauser. ISBN 0-8176-3902-0.
- Deodatis, G. 1996. "Simulation of ergodic multivariate stochastic processes". *Journal of Engineering Mechanics* no. 122 (8):778-787.
- Descamps, B., R. Filomeno Coelho, L. Ney e P. Bouillard. 2011. "Multicriteria optimization of lightweight bridge structures with a constrained force density method". *Computers & Structures* no. 89 (3–4):277-284.
- Diana, G., D. Rocchi, E. Sabbioni, S. Giappino e A. Collina. 2009. "Wind tunnel tests on the roof of the new Turin stadium". Comunicação apresentada em 5th European and African Conference on Wind Engineering, EACWE 5.
- Dieringer, F., R. Wüchner e K. U. Bletzinger. 2012. "Practical Advances in Numerical Form Finding and Cutting Pattern Generation for Membrane Structures". *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures (J. IASS)* no. 53 (3):147-156.
- DIN4134. 1983. *Tragluftbauten; Berechnung, Ausführung und Betrieb (English: Air-supported structures; structural design, construction and operation)*.
- Dinh, T. D., A. Rezaei, L. De Laet, M. Mollaert, D. Van Hemelrijck e W. Van Paepegem. 2014. "A new elasto-plastic material model for coated fabric". *Engineering Structures* no. 71:222-233.
- Du, W., X. M. Tao, H. Y. Tam e C. L. Choy. 1998. "Fundamentals and applications of optical fiber Bragg grating sensors to textile structural composites". *Composite Structures* no. 42 (3):217-229.
- Dugundji, J., E. Dowell e B. Perkin. 1962. *Subsonic Flutter of Panels on Continuous Elastic Foundations-Experiment and Theory*. Cambridge, Massachusetts Institute of Technology, Aeroelastic and Structures Research Laboratory (Technical Report No. ASRL-TR-74-4).
- Dugundji, J., E. Dowell e B. Perkin. 1963. "Subsonic Flutter of Panels on Continuous Elastic Foundations". *AIAA Journal* no. 1 (5):1146-1154.
- Dürr, H. 2000. "Seilnetze - Planung, Berechnung, Ausführung und Werkplanung". *Stahlbau* no. 69 (8):585-594.
- Dyrbye, C. e S. O. Hansen. 1997. *Wind loads on structures*. Chichester:: John Wiley. ISBN 0-471-95651-1.
- Ellen, C. H. 1977. "The Stability of an Isolated Rectangular Surface Embedded in Uniform Subsonic Flow". *Journal of Applied Mechanics* no. 44 (2):201-206.
- EN1991-1-1. 1991. *Eurocode 1: Actions on structures - Part 1-1: General actions - Densities, self-weight, imposed loads for buildings*.
- EN1991-1-3. 1991. *Eurocode 1: Actions on structures - Part 1-3: General actions - Snow Loads*.
- EN1991-1-4. 1991. *Eurocode 1: Actions on structures - Part 1-4: General actions - Wind Loads*. CEN.

EN1993-1-11. 2003. *Eurocode 3 : Design of steel structures - Part 1-11: Design of structures with tension components*. CEN.

Escrig, F., J. Sánchez-Sánchez e M. Ponce. 2012. "Roofing a multifunctional outdoor court with four hypar fabric structure (Cubierta para un recinto multifuncional abierto con cuatro paraboloides hiperbólicos textiles)". *Informes de la Construcción* no. 64 (528):437-444.

Escrig, F. e J. Sánchez. 2009. Memória Descritiva: Cubierta Desmontable de Pista Polidesportiva en Centro de Alto Rendimiento, Cartuja, Sevilla.

Esquillan, N. e Y. Saillard. 1963. *Hanging roofs : proceedings of the IASS Colloquium on Hanging Roofs, Continuous Metallic Shell Roofs and Superficial Lattice Roofs*. Paris, France: North-Holland/John Wiley.

Estrada, G. G., H. J. Bungartz e C. Mohrdieck. 2006. "Numerical form-finding of tensegrity structures". *International Journal of Solids and Structures* no. 43 (22–23):6855-6868.

Farrell, T., J. Levins e M. Todd. 2010. System and method for real-time measurement of sail conditions and dynamics. US20100140462 A1, publicada em 10 Jun 2010. <http://www.google.com/patents/US20100140462>.

Ferreira, P. 2010. "Análise e Dimensionamento de uma Estrutura de Cobertura em Membrana Tensa". Dissertação de Mestrado, Universidade do Porto.

Ferreira, P. 2011. "Comportamento Aerodinâmico de Estruturas Esbeltas - Estudo de uma Laje". em *unidade curricular de Dinâmica de Estruturas e Engenharia Sísmica do Programa Doutoral em Engenharia Civil (PRODEC)*.

Ferreira, P. 2012. "Superfícies minimais". em *unidade curricular de Simulação Numérica de Modelos Matemáticos em Engenharia do Programa Doutoral em Engenharia Civil (PRODEC)*.

Ferreira, P. 2013. "Métodos Numéricos para a Determinação da Forma e Análise de Estruturas Leves". em *unidade curricular de Edifícios Altos e Estruturas Especiais do Programa Doutoral em Engenharia Civil (PRODEC)*.

Ferreira, P., E. Caetano e P. Pinto. 2017. "Real-time flying shape detection of yacht sails based on strain measurements". *Ocean Engineering* no. 131:48-56.

Ferreira, P., E. Caetano, L. Ramos e P. Pinto. 2017. "Shape sensing monitoring system based on fiber-optic strain measurements: laboratory tests". *Experimental Techniques* no. 41 (4):407–420.

FIBERSENSING - Sistemas avançados de monitorização, S. A. 2013. What is the temperature compensation and how does it work.

Fisher, R. e L. Tippett. 1928. "Limiting Forms of the Frequency Distribution of the Largest or Smallest Member of a Sample". *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* no. 24:p. 180-190.

Forster, B. e M. Mollaert. 2004. *The European design guide for tensile surface structures*. Brussels: Tensinet. ISBN 90-8086-871-X 9789080868717.

Fossati, F., S. Muggiasca, I. M. Viola e A. Zasso. 2006. "Wind tunnel techniques for investigation and optimization of sailing yacht aerodynamics". Comunicação apresentada em Proceedings of the 2nd High Performance Yacht Design Conference, em Auckland, New Zealand. 14-16 February 2006.

Freeston, W. D. e W. D. Claus. 1973. "Crack propagation in woven fabric". *Journal of Applied Physics* no. 44 (7):3130-3138.

- Froggatt, M. E. e R. G. Duncan. 2010. Fiber optic position and/or shape sensing based on rayleigh scatter. 7,772,541 B2, publicada em 10th August 2010. <http://www.google.com.ar/patents/US7772541>.
- Galliot, C. e R. H. Luchsinger. 2009. "A simple model describing the non-linear biaxial tensile behaviour of PVC-coated polyester fabrics for use in finite element analysis". *Composite Structures* no. 90 (4):438-447.
- Galliot, C. e R. H. Luchsinger. 2010. "The shear ramp: A new test method for the investigation of coated fabric shear behaviour – Part I: Theory". *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* no. 41 (12):1743-1749.
- Galliot, C. e R. H. Luchsinger. 2011a. "Determination of the response of coated fabrics under biaxial stress: Comparison between different test procedures". Comunicação apresentada em 5th International Conference on Textile Composites and Inflatable Structures, Structural Membranes 2011.
- Galliot, C. e R. H. Luchsinger. 2011b. "Uniaxial and biaxial mechanical properties of ETFE foils". *Polymer Testing* no. 30 (4):356-365.
- Gedeon, S. A. 2001. Sailboat and crew performance optimization system. 6308649 B1, publicada em 30 Out 2001. <http://www.google.com/patents/US6308649>.
- Ghafari Oskoei, S. A., G. McClure e I. Mahmoudzadeh Kani. 2010. "Dynamic analysis of cable roofs under turbulent wind using a frequency domain approach". *Civil-Comp Proceedings* no. 93.
- Glück, M., M. Breuer, F. Durst, A. Halfmann e E. Rank. 2001. "Computation of fluid–structure interaction on lightweight structures". *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* no. 89 (14–15):1351-1368.
- Glück, M., M. Breuer, F. Durst, A. Halfmann e E. Rank. 2003. "Computation of wind-induced vibrations of flexible shells and membranous structures". *Journal of Fluids and Structures* no. 17 (5):739-765.
- Goldberg, D. E. 1989. *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc. ISBN 0201157675.
- Gomes, L. e B. J. Vickery. 1978. "Extreme wind speeds in mixed wind climates". *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* no. 2 (4):331-344.
- Gonilha, J. A., J. R. Correia, F. A. Branco, E. Caetano e Á. Cunha. 2013. "Modal identification of a GFRP-concrete hybrid footbridge prototype: Experimental tests and analytical and numerical simulations". *Composite Structures* no. 106:724-733.
- Gosling, P. D. e B. N. Bridgens. 2008. "Material testing & computational mechanics - A new philosophy for architectural fabrics". *International Journal of Space Structures* no. 23 (4):215-232.
- Gosling, P. D., B. N. Bridgens, A. Albrecht, H. Alpermann, A. Angeleri, M. Barnes, N. Bartle, R. Canobbio, F. Dieringer, S. Gellin, W. J. Lewis, N. Mageau, R. Mahadevan, J. M. Marion, P. Marsden, E. Milligan, Y. P. Phang, K. Sahlin, B. Stimpfle, O. Suire e J. Uhlemann. 2013. "Analysis and design of membrane structures: Results of a round robin exercise". *Engineering Structures* no. 48:313-328.
- Gossen, P., D. Chen, W. Shan e D. Campbell. 2008. "Snow induced ponding of Toyota pavilion canopy, montage mountain, PA". Comunicação apresentada em 2008 Structures Congress - Structures Congress 2008: Crossing the Borders.

Graf, K. e O. Müller. 2009. "Photogrammetric investigation of the flying shape of spinnakers in a twisted flow wind tunnel". Comunicação apresentada em Proceedings of the 19th Chesapeake Sailing Yacht Symposium (CSYS), em Annapolis, Maryland, United States. 20-21 March 2009.

Graver, J. E., B. Servatius e H. Servatius. 1993. *Combinatorial rigidity*. Providence, RI: American Mathematical Society. ISBN 0821838016 9780821838013.

Greco, L. e M. Cuomo. 2012. "On the force density method for slack cable nets". *International Journal of Solids and Structures* no. 49 (13):1526-1540.

Grosberg, P. e B. J. Park. 1966. "The Mechanical Properties of Woven Fabrics: Part V: The Initial Modulus and the Frictional Restraint in shearing of Plain Weave Fabrics". *Textile Research Journal* no. 36 (5):420-431.

Grosso, A. D. e P. Basso. 2010. "Adaptive building skin structures". *Smart Materials and Structures* no. 19 (12):124011.

Gründig, L., Moncrieff, E., Singer, P., Ströbel, D. 2000. "A history of the principal developments and applications of the force density method in Germany 1970–1999". Comunicação apresentada em IASS-IACM 2000 Fourth International Colloquium on Computation of Shell & Spatial Structures, em Chania-Crete, Greece.

Guemes, J. A. e J. M. Menéndez. 2002. "Response of Bragg grating fiber-optic sensors when embedded in composite laminates". *Composites Science and Technology* no. 62 (7–8):959-966.

Guirardi, D. M. 2011. "O método da relaxação dinâmica aplicado à análise de estruturas de cabos e membranas". Dissertação de Doutorado, Universidade de São Paulo.

Gumbel, E. J. 1954. *Statistical theory of extreme values and some practical applications*. U.S. National Bureau of Standards.

Haber, R. B. e J. F. Abel. 1982a. "Initial equilibrium solution methods for cable reinforced membranes part I—formulations". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* no. 30 (3):263-284.

Haber, R. B. e J. F. Abel. 1982b. "Initial equilibrium solution methods for cable reinforced membranes part II—implementation". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* no. 30 (3):285-306.

Han, D. J. e J. J. Luo. 2007. "Simulation of Stochastic Fluctuating Wind Field Using the Wave Superposition Method with Random Frequencies". Em *Computational Methods in Engineering & Science*, 51-58. Springer Berlin Heidelberg.

Harding, J. e P. Shepherd. 2011. "Structural form finding using zero-length springs with dynamic mass". Comunicação apresentada em IASS Annual Symposium: IABSE-IASS : Taller, Longer, Lighter, em London.

Harris, C. e M. Stephens. 1988. "A combined corner and edge detector". Comunicação apresentada em Proceedings of the 4th Alvey Vision Conf., em Manchester. 31st August - 2nd September 1988.

Harris, R. I. 1970. The Nature of Wind. Em *Seminar on Modern Design of Wind-Sensitive Structures*. London: Construction Industry Research & Information, CIRIA.

Haruo, K. 1975. "Flutter of hanging roofs and curved membrane roofs". *International Journal of Solids and Structures* no. 11 (4):477-492.

Haug, E., P. D. Kermel, B. Gawenat e A. Michalski. 2009. "Industrial Design and Analysis of Structural Membranes". *International Journal of Space Structures* no. 24 (4):191-204.

- Haug, E. e G. H. Powell. 1972. "Analytical shape finding for cable nets". Comunicação apresentada em Proceedings of the 1971 IASS Pacific Symposium Part II on Tension Structures and Space Frames, em Tokyo and Kyoto, Japan.
- Hedgepeth, J. M. 1961. *Stress concentrations in filamentary structures*. NASA technical note.
- Hegyi, D. e K. Hincz. 2005. "Long-term analysis of prestressed membrane structures". *Journal of Computational and Applied Mechanics* no. 6 (2):219-235.
- Heikkilä, J. e O. Silven. 1997. "A four-step camera calibration procedure with implicit image correction". Comunicação apresentada em Proceedings of the IEEE Computer Society Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition, em San Juan. 17-19 Jun 1997.
- Hilber, H. M., T. J. R. Hughes e R. L. Taylor. 1977. "Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics". *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* no. 5 (3):283-292.
- Hill, K. O. e G. Meltz. 1997. "Fiber Bragg grating technology fundamentals and overview". *Journal of Lightwave Technology* no. 15 (8):1263-1276.
- Holmes, J. D. 2001. *Wind loading of structures*. London: Spon Press. ISBN 0-419-24610-X.
- Huang, X. e M. Xie. 2010. *Evolutionary Topology Optimization of Continuum Structures: Methods and Applications*. Chichester: John Wiley & Sons. ISBN 9780470689479 0470689471 1282548735 9781282548732.
- Hughes, T. J. R. 1987. *The finite element method linear static and dynamic finite element analysis*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall. ISBN 0-13-317017-9.
- IASS. 1986. *Recommendations for the Design of Air Supported Structures*.
- Ibrahimbegovic, A. e E. L. Wilson. 1991. "A unified formulation for triangular and quadrilateral flat shell finite elements with six nodal degrees of freedom". *Communications in Applied Numerical Methods* no. 7 (1):1-9.
- Irwin, H. P. A. H. e R. L. Wardlaw. 1979. "A wind tunnel investigation of a retractable fabric roof for the Montreal Olympic Stadium". Comunicação apresentada em Proceedings of the Fifth International Conference, em Fort Collins, Colorado, USA.
- Isler, H. 1994. "Concrete Shells Derived from Experimental Shapes". *Structural Engineering International* no. 4 (3):142-147.
- Jackson, A. L., B. N. Bridgens e P. D. Gosling. 2009. "A new biaxial and shear test protocol for architectural fabrics". Comunicação apresentada em IASS Symposium: Evolution and Trends in Design, Analysis and Construction of Shell and Spatial Structures, em Valencia.
- Jones, R. T. 1946. *Properties of Low-Aspect Ratio Pointed Wings at Speeds Below and Above the Speed of Sound*. National Advisory Committee for Aeronautics (Technical report no. 835) NASA.
- Kadkhodayan, M., J. Alamatian e G. J. Turvey. 2008. "A new fictitious time for the dynamic relaxation (DXDR) method". *International Journal for Numerical Methods in Engineering* no. 74 (6):996-1018.
- Kadkhodayan, M., L. C. Zhang e R. Sowerby. 1997. "Analyses of wrinkling and buckling of elastic plates by DXDR method". *Computers & Structures* no. 65 (4):561-574.

- Kaimal, J. C., J. C. Wyngaard, Y. Izumi e O. R. Coté. 1972. "Spectral characteristics of surface-layer turbulence". *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* no. 98 (417):563-589.
- Kalro, V. e T. E. Tezduyar. 2000. "Parallel 3D computational method for fluid-structure interactions in parachute systems". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* no. 190 (3-4):321-332.
- Kareem, A. 2008. "Numerical simulation of wind effects: A probabilistic perspective". *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* no. 96 (10-11):1472-1497.
- Kareem, A. e K. Gurley. 1996. "Damping in structures: its evaluation and treatment of uncertainty". *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* no. 59 (2-3):131-157.
- Kassem, M. e M. Novak. 1991. "Response of Hemispherical, Air-Supported Structures to Wind". *Journal of Engineering Mechanics* no. 117 (8):1718-1737.
- Kato, S., T. Yoshino e H. Minami. 1999. "Formulation of constitutive equations for fabric membranes based on the concept of fabric lattice model". *Engineering Structures* no. 21 (8):691-708.
- Kawamura, S. e E. Kimoto. 1979. "Aerodynamic stability criteria of one-way type hanging roofs in smooth uniform flow". Comunicação apresentada em 5th International Conference on Wind Engineering, em Fort Collins, Colorado, USA.
- Kersey, A. D. 1997. "Optical Fiber Sensors". Em *Optical Measurement Techniques and Applications*, editado por P. Rastogi, 217-254. Boston: Artech House.
- Kilian, A. e J. Ochsendorf. 2005. "Particle-Spring Systems for Structural Form Finding". *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures (J. IASS)* no. 46 (2):77-84.
- Kim, J. Y., E. Yu, D. Y. Kim e Y. Tamura. 2011. "Long-term monitoring of wind-induced responses of a large-span roof structure". *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* no. 99 (9):955-963.
- Kim, N. S. e N. S. Cho. 2004. "Estimating deflection of a simple beam model using fiber optic Bragg-grating sensors". *Experimental Mechanics* no. 44 (4):433-439.
- Kimoto, E. e S. Kawamura. 1983. "Aerodynamic behaviour of one-way type hanging roofs". *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* no. 13 (1-3):395-405.
- Kinet, D., P. Mégret, K. W. Goossen, L. Qiu, D. Heider e C. Caucheteur. 2014. "Fiber Bragg grating sensors toward structural health monitoring in composite materials: Challenges and solutions". *Sensors (Switzerland)* no. 14 (4):7394-7419.
- Kornecki, A., E. H. Dowell e J. O'Brien. 1976. "On the aeroelastic instability of two-dimensional panels in uniform incompressible flow". *Journal of Sound and Vibration* no. 47 (2):163-178.
- Koza, J. R. 1996. *Genetic programming : on the programming of computers by means of natural selection*. Cambridge, Massachusetts: MIT Press. ISBN 0262111705 9780262111706.
- Krebber, B. e K. Hochkirch. 2006. "Numerical investigation on the effects of trim for a yacht rig". Comunicação apresentada em Proceedings of the 2nd High Performance Yacht Design Conference, em Auckland, New Zealand. 14-16 February 2006.
- Kuang, K. S. C., R. Kenny, M. P. Whelan, W. J. Cantwell e P. R. Chalker. 2001. "Embedded fibre Bragg grating sensors in advanced composite materials". *Composites Science and Technology* no. 61 (10):1379-1387.

- Lally, E. M., M. Reaves, E. Horrell, S. Klute e M. E. Froggatt. 2012. "Fiber optic shape sensing for monitoring of flexible structures". Comunicação apresentada em Proceedings SPIE 8345, Sensors and Smart Structures Technologies for Civil, Mechanical, and Aerospace Systems, em San Diego, California. 11 March 2012.
- Lazzari, M., M. Majowiecki, A. V. Saetta e R. V. Vitaliani. 2002. "F.E. Analysis of Montreal Stadium Roof Under Variable Loading Conditions". Comunicação apresentada em IABSE Symposium: Towards a Better Built Environment - Innovation, Sustainability, Information Technology.
- Lazzari, M., M. Majowiecki, R. V. Vitaliani e A. V. Saetta. 2009. "Nonlinear F.E. analysis of Montreal Olympic Stadium roof under natural loading conditions". *Engineering Structures* no. 31 (1):16-31.
- Le, C., T. Bruns e D. Tortorelli. 2011. "A gradient-based, parameter-free approach to shape optimization". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* no. 200 (9–12):985-996.
- Lee, K. S., S. E. Han e T. Park. 2011. "A simple explicit arc-length method using the dynamic relaxation method with kinetic damping". *Computers & Structures* no. 89 (1–2):216-233.
- Lemelin, D. R., D. Surry e A. G. Davenport. 1988. "Simple approximations for wind speed-up over hills". *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* no. 28 (1–3):117-127.
- Letchford, C. W., R. O. Denoon, G. Johnson e A. Mallam. 2002. "Dynamic characteristics of cantilever grandstand roofs". *Engineering Structures* no. 24 (8):1085-1090.
- Lewis, W. J. 2003. *Tension structures: form and behaviour*. London: Thomas Telford. ISBN 0 7277 3236 6.
- Lewis, W. J., M. S. Jones e K. R. Rushton. 1984. "Dynamic relaxation analysis of the non-linear static response of pretensioned cable roofs". *Computers & Structures* no. 18 (6):989-997.
- Li, Y., L. Wang, Z. Shen e Y. Tamura. 2011. "Added-mass estimation of flat membranes vibrating in still air". *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* no. 99 (8):815-824.
- Li, Y., L. Wang, Y. Tamura e Z. Shen. 2009. "Wind tunnel test on Levy type cable dome". Comunicação apresentada em 7th Asia-Pacific Conference on Wind Engineering, APCWE-VII.
- Light, W. 1991. *Advances in Numerical Analysis: Nonlinear partial differential equations and dynamical systems*. Vol. I. Oxford: Clarendon Press. ISBN 0-19-853438-8.
- Linkwitz, K. 1976. "Combined use of computation techniques and models for the process of form finding for prestressed nets, grid shells and membranes". Comunicação apresentada em Proceedings of Internationalen Symposium Weitgespannte Flächentragwerke.
- Linkwitz, K. e H. J. Schek. 1971. "Einige Bemerkungen zur Berechnung von vorgespannten Seilnetzkonstruktionen". *Ingenieur-archiv* no. 40 (3):145-158.
- Lombardi, M., N. Parolini, A. Quarteroni e G. Rozza. 2012. "Numerical simulation of sailing boats: Dynamics, FSI, and shape optimization". Em *Variational Analysis and Aerospace Engineering: Mathematical Challenges for Aerospace Design*, editado por Giuseppe Buttazzo e Aldo Frediani, 339-378. New York: Springer.
- Lovelock, D. e H. Rund. 1989. *Tensors, Differential Forms, And Variational Principles*. New York: Dover Publications. ISBN 0-486-65840-6.
- Lucey, A. D. e P. W. Carpenter. 1993. "The Hydroelastic Stability of Three-Dimensional Disturbances of a Finite Compliant Wall". *Journal of Sound and Vibration* no. 165 (3):527-552.

- Macrory, B. M., J. R. McCraith e A. B. McNamara. 1977. "Experimental Investigation of the Biaxial Load-Extension Properties of Plain, Weft-Knitted Fabrics". *Textile Research Journal* no. 47 (4):233-239.
- Magalhães, F. M. R. L. d. 2010. "Operational modal analysis for testing and monitoring of bridges and special structures". Dissertação de Doutoramento, Universidade do Porto.
- Majowiecki, M. 1998. "Snow and wind experimental analysis in the design of long-span sub-horizontal structures". *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* no. 74–76 (0):795-807.
- Malerba, P. G., M. Patelli e M. Quagliaroli. 2012. "An extended Force Density Method for the form finding of cable systems with new forms". *Structural Engineering and Mechanics* no. 42 (2):191-210.
- Martins, N. 2009. "Estudo dos cabos e pendurais de uma ponte pedonal suspensa face ao seu processo construtivo". Dissertação de Mestrado, Universidade do Porto.
- Martins, N., E. Caetano, S. Diord, F. Magalhães e Á. Cunha. 2014. "Dynamic monitoring of a stadium suspension roof: Wind and temperature influence on modal parameters and structural response". *Engineering Structures* no. 59 (0):80-94.
- Martins, N., A. Cardoso e E. Caetano. 2012. "Development of an observation system based on anemometry to characterize the wind action over a suspension roof". Comunicação apresentada em YIC2012.
- Masuyama, Y., Y. Tahara, T. Fukasawa e N. Maeda. 2009. "Database of sail shapes versus sail performance and validation of numerical calculations for the upwind condition". *Journal of Marine Science and Technology* no. 14 (2):137-160.
- Matsumoto, T. 1992. "Aeroelastic modelling of air-supported roofs". *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* no. 42 (1–3):1497-1507.
- Matthews, L. A., D. M. Greaves e C. J. K. Williams. 2008. "Numerical simulation of viscous flow interaction with an elastic membrane". *International Journal for Numerical Methods in Fluids* no. 57 (11):1577-1602.
- Maurin, B. e R. Motro. 1998. "The surface stress density method as a form-finding tool for tensile membranes". *Engineering Structures* no. 20 (8):712-719.
- Maurin, B. e R. Motro. 2001. "Investigation of minimal forms with conjugate gradient method". *International Journal of Solids and Structures* no. 38 (14):2387-2399.
- McKenzie, I. e N. Karafolas. 2005. "Fiber optic sensing in space structures: The experience of the European Space Agency (Invited Paper)". Comunicação apresentada em Proceedings SPIE 5855, 17th International Conference on Optical Fibre Sensors, 262, em Bruges, Belgium. 23 May 2005.
- Meek, J. L. 1991. *Computer methods in structural analysis*. Singapore: Fong & Sons Printers Pte. Ltd. ISBN 041915440X.
- Membrane Structures Association of Japan. 1990. *Guide for Specific Membrane Structures*.
- Mendes, P. A. M. 1994. "Modelação Numerica do Comportamento Aerodinâmico de Estruturas Esbeltas". Dissertação de Doutoramento, IST-UTL.
- Mendonça, P. 1997. "Aplicações inteligentes dos têxteis em arquitectura". Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho.

- Michalski, A., E. Haug, J. Bradatsch e K. U. Bletzinger. 2009. "Virtual Design Methodology for Lightweight Structures - Aerodynamic Response of Membrane Structures". *International Journal of Space Structures* no. 24 (4):211-221.
- Michalski, A., P. D. Kermel, E. Haug, R. Löhner, R. Wüchner e K. U. Bletzinger. 2011. "Validation of the computational fluid-structure interaction simulation at real-scale tests of a flexible 29 m umbrella in natural wind flow". *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* no. 99 (4):400-413.
- Miles, J. W. 1956. "On the Aerodynamic Instability of Thin Panels". *Journal of the Aeronautical Sciences* no. 23 (8):771-780.
- Minami, H. 1998. "Added mass of a membrane vibrating at finite amplitude". *Journal of Fluids and Structures* no. 12 (7):919-932.
- Minte, J. 1981. "Das mechanische Verhalten von Verbindungen beschichteter Chemiefasergewebe ". Dissertação de Doutorado, Techn. Hochsch Aachen.
- Mitchell, M. 1996. *An introduction to genetic algorithms*. Cambridge, Massachusetts: MIT Press. ISBN 0262133164 9780262133166 0262631857 9780262631853.
- Mohr, O. 1885. "Beitrag zur Theorie des Fachwerks". *Der Civilingenieur* no. 31:289-310.
- Moore, J. P. 2010. Method and apparatus for shape and end position determination using an optical fiber. 7,813,599 B2, publicada em 12th October 2010. <http://www.google.com/patents/US7813599>.
- Moore, J. P. e M. D. Rogge. 2012. "Shape sensing using multi-core fiber optic cable and parametric curve solutions". *Optics Express* no. 20 (3):2967-2973.
- Moreira, R. 2008. "Utilização de Membranas Tensionadas Leves na Execução de Estruturas Especiais". Dissertação de Mestrado, Universidade do Porto.
- Morris, N. F. 1975. "Modal analysis of cable networks". *ASCE J Struct Div* no. 101 (1):97-108.
- Morris, N. F. 1977. "The use of modal superposition in nonlinear dynamics". *Computers and Structures* no. 7 (1):65-72.
- Motro, R. 2003. *Tensegrity: structural systems for the future*. London: Kogan Page Science. ISBN-13: 978-1903996379 ISBN-10: 1903996376.
- Motta, D., R. G. J. Flay, P. J. Richards, D. J. L. Pelley, J. Deparday e P. Bot. 2014. "Experimental investigation of asymmetric spinnaker aerodynamics using pressure and sail shape measurements". *Ocean Engineering* no. 90:104-118.
- MSAJ/M-02. 1995. *Membrane Structures Association of Japan: Testing Method for Elastic Constants of Membrane Materials*.
- Munghan, I. e J. F. Abel. 2011. "Section 12.2: Form finding and morphogenesis". Em *Fifty years of progress for shell and spatial structures : in celebration of the 50th anniversary jubilee of the IASS (1959-2009)*, 459-482. Madrid: International Association for Shell and Spatial Structures.
- Murakami, H. e Y. Nishimura. 2001. "Static and dynamic characterization of regular truncated icosahedral and dodecahedral tensegrity modules". *International Journal of Solids and Structures* no. 38 (50-51):9359-9381.
- Nagai, Y., A. Okada, N. Miyasato e M. Saitoh. 2010. "Basic study on multi-bay horn-shaped membrane roof: Evaluation of wind load and influence of supporting system on structural behavior under winds". *International Journal of Space Structures* no. 25 (1):35-43.

- Nagai, Y., A. Okada, N. Miyasato e M. Saitoh. 2012. "Wind response of horn-shaped membrane roof and proposal of gust effect factor for membrane structure". *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures* no. 53 (3):169-176.
- Nascimbene, R. 2013. "Analysis and optimal design of fiber-reinforced composite structures: Sail against the wind". *Wind and Structures, An International Journal* no. 16 (6):541-560.
- Newman, B. G. 1987. "Aerodynamic theory for membranes and sails". *Progress in Aerospace Sciences* no. 24 (1):1-27.
- Newman, B. G. e M. P. Paidoussis. 1991. "The stability of two-dimensional membranes in streaming flow". *Journal of Fluids and Structures* no. 5 (4):443-454.
- Nguyen, D. Q. 2001. "Extended evolutionary structural optimization method for multi-storey buildings". Dissertação de Mestrado, Victoria University of Technology.
- Norm. 1995. *Instructions for the Design, Realisation, Verification, Use and Maintenance of Tents, Tensile Structures and Air-Supported Structures*.
- O'Dwyer, D. 1999. "Funicular analysis of masonry vaults". *Computers & Structures* no. 73 (1-5):187-197.
- Oakley, D. R. e N. F. Knight. 1995. "Adaptive dynamic relaxation algorithm for non-linear hyperelastic structures Part I. Formulation". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* no. 126 (1-2):67-89.
- Olsson, O. J., P. W. Power, C. C. Bowman, G. T. Palmer e R. S. Clist. 1992. "SailSpy: A vision system for yacht sail shape measurement". Comunicação apresentada em Proceedings SPIE 1823, Machine Vision Applications, Architectures, and Systems Integration, 256, em Boston, MA. 15 November 1992.
- Oskoei, S. A. G. e G. McClure. 2008. "Dynamic Analysis of Cable Roofs Under Transient Wind: A Comparison Between Time Domain and Frequency Domain Approaches". *Tsinghua Science & Technology* no. 13, Supplement 1 (0):53-57.
- Otter, J. R. H. 1965. "Computations for prestressed concrete reactor pressure vessels using dynamic relaxation". *Nuclear Structural Engineering* no. 1 (1):61-75.
- Otto, F. 1962. *Tensile Structures* Cambridge, MA: MIT Press.
- Paidoussis, M. P. 2003. *Fluid-Structure Interactions, Slender Structures and Axial Flow*. Vol. 2. ISBN 9780123973344.
- Pajand, M. R., M. Kadhodayan, J. Alamatian e L. C. Zhang. 2011. "A new method of fictitious viscous damping determination for the dynamic relaxation method". *Computers & Structures* no. 89 (9-10):783-794.
- Papadrakakis, M. 1981. "A method for the automatic evaluation of the dynamic relaxation parameters". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* no. 25 (1):35-48.
- Papadrakakis, M. 1983. "Inelastic Dynamic Response of Cable Networks". *Journal of Structural Engineering* no. 109 (5):1139-1154.
- Papadrakakis, M. e V. Balopoulos. 1991. "Improved Quasi-Newton Methods for Large Nonlinear Problems". *Journal of Engineering Mechanics* no. 117 (6):1201-1219.

- Papadrakakis, M. e C. J. Gantes. 1988. "Truncated newton methods for nonlinear finite element analysis". *Computers & Structures* no. 30 (3):705-714.
- Papadrakakis, M. e C. J. Gantes. 1989. "Preconditioned conjugate- and secant-Newton methods for non-linear problems". *International Journal for Numerical Methods in Engineering* no. 28 (6):1299-1316.
- Pargana, J. B. e V. M. A. Leitão. 2015. "A simplified stress-strain model for coated plain-weave fabrics used in tensioned fabric structures". *Engineering Structures* no. 84:439-450.
- Pargana, J. B., D. L. Smith e B. A. Izzuddin. 2007. "Advanced material model for coated fabrics used in tensioned fabric structures". *Engineering Structures* no. 29 (7):1323-1336.
- Pastor, M., M. Binda e T. Harčarik. 2012. "Modal Assurance Criterion". *Procedia Engineering* no. 48:543-548.
- Pauletti, R. M. 1999. Tensoestruturas - Ideias básicas. Escola Politécnica da USP, BT/PEF/9909.
- Pauletti, R. M. O. e E. Neto. 2011. "A finite-difference approximation to Newton's method jacobian matrices". Comunicação apresentada em IASS Annual Symposium: IABSE-IASS : Taller, Longer, Lighter, em London. 20-23, September.
- Pauletti, R. M. O. e P. M. Pimenta. 2008. "The natural force density method for the shape finding of taut structures". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* no. 197 (49-50):4419-4428.
- Pedrazzani, J. R., S. M. Klute, D. K. Gifford, A. K. Sang e M. E. Froggatt. 2012. "Embedded and surface mounted fiber optic sensors detect manufacturing defects and accumulated damage as a wind turbine blade is cycled to failure". Comunicação apresentada em Proceedings of the International SAMPE Technical Conference - Emerging Opportunities: Materials and Process Solutions, em Baltimore, MD, United States. 21-24 May 2012.
- Pellegrino, S. 1986. "Mechanics of kinematically indeterminate structures". Dissertação de Doutorado, University of Cambridge.
- Pelley, D. J. L. e O. Modral. 2008. "VSPARS: A combined sail and rig shape recognition system using imaging techniques". Comunicação apresentada em Proceedings of the 3rd High Performance Yacht Design Conference, em Auckland, New Zealand. 2-4 December 2008.
- Plateau, J. A. F. 1873. *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*. Paris: Gauthier-Villars.
- Polianin, A. D. e V. F. Zaitsev. 2004. *Handbook of nonlinear partial differential equations*. Boca Raton, Fla.: Chapman & Hall/CRC. ISBN 1584883553.
- Pugnale, A. e M. Sassone. 2007. "Morphogenesis and Structural Optimization of Shell Structures with the Aid of a Genetic Algorithm". *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures (J. IASS)* no. 48 (3):161-166.
- Querin, O. M., G. P. Steven e Y. M. Xie. 1998. "Evolutionary structural optimisation (ESO) using a bidirectional algorithm". *Engineering Computations* no. 15 (8):1031 - 1048.
- Ramar, P. R. e S. D. Guest. 2011. "Minimizing the self-weight deflection of tensegrity structures". Comunicação apresentada em IASS Annual Symposium: IABSE-IASS : Taller, Longer, Lighter, em London.

- Ramm, E., K. U. Bletzinger e R. Reiter. 1993. "Shape optimization of shell structures". *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures (J. IASS)* no. 34 (112):103-121.
- Ramos, L. 2013. Aplicação informática em linguagem Basic (Matlab) para o tratamento de imagens de uma barra curvilínea num referencial conhecido. Em *FEUP*.
- Reinhardt, H. W. 1976. "On the biaxial testing and strength of coated fabrics". *Experimental Mechanics* no. 16 (2):71-74.
- Ribeiro, D., R. Calçada, J. Ferreira e T. Martins. 2014. "Non-contact measurement of the dynamic displacement of railway bridges using an advanced video-based system". *Engineering Structures* no. 75:164-180.
- Rizzo, F. 2012. "Wind tunnel tests on hyperbolic paraboloid roofs with elliptical plane shapes". *Engineering Structures* no. 45:536-558.
- Rizzo, F., P. D'Asdia, F. Ricciardelli e G. Bartoli. 2012. "Characterisation of pressure coefficients on hyperbolic paraboloid roofs". *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* no. 102 (0):61-71.
- Rizzo, F., P. D'Asdia, M. Lazzari e L. Procino. 2011. "Wind action evaluation on tension roofs of hyperbolic paraboloid shape". *Engineering Structures* no. 33 (2):445-461.
- Rocha, V., P. Pinto, E. Caetano e P. Ferreira. 2015. Real-time shape measuring method and system. EP 2,921,817 A1, publicada em 23rd September 2015. <https://www.google.com.ar/patents/EP2921817A1?cl=en>.
- Rodrigues, C., C. Félix, A. Lage e J. Figueiras. 2010. "Development of a long-term monitoring system based on FBG sensors applied to concrete bridges". *Engineering Structures* no. 32 (8):1993-2002.
- RSA. 1983. *Decreto-Lei nº 235-83 de 31 de Maio : [Regulamento de segurança e acções para estruturas de edifícios e pontes]*. Imprensa Nacional-Casa da Moeda.
- Rushton, K. R. 1969. "Dynamic relaxation solutions of elastic plate problems". *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design* no. 3:23-32.
- Samaras, E., M. Shinozuka e A. Tsurui. 1985. "Arma representation of random processes". *Journal of Engineering Mechanics* no. 111 (3):449-461.
- Sánchez, J., M. A. Serna e P. Morer. 2007. "A multi-step force-density method and surface-fitting approach for the preliminary shape design of tensile structures". *Engineering Structures* no. 29 (8):1966-1976.
- Scanlan, R. H. 1997. "Some observations on the state of bluff-body aeroelasticity". *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* no. 69-71 (0):77-90.
- Schek, H. J. 1974. "The force density method for form finding and computation of general networks". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* no. 3 (1):115-134.
- Schock, H. J. 1991. "On The Structural Behavior and Material Characteristics of PTFE-Coated Glass-Fiber Fabric". *Journal of Industrial Textiles* no. 20 (4):277-288.
- SEBTP. 2009. *Recommandations pour la conception, la confection et la mise en œuvre des ouvrages permanents de couverture textile*.
- Seidel, M. 2009. *Tensile surface structures a practical guide to cable and membrane construction*. Berlin: Ernst & Sohn. ISBN 978-3-433-02922-0.

- Sewall, J. L., R. Miserentino e R. S. Pappa. 1983. *Vibration studies of a lightweight three-side membrane suitable for space application*. NASA Technical Paper 2095.
- Shinozuka, M. 1972. "Monte Carlo solution of structural dynamics". *Computers and Structures* no. 2 (5-6):855-874.
- Shinozuka, M. e C. M. Jan. 1972. "Digital simulation of random processes and its applications". *Journal of Sound and Vibration* no. 25 (1):111-128.
- Siev, A. e J. Eidelman. 1964. "Stress analysis of prestressed suspended roofs". *Journal of the Structural Division* no. 90 (4):103-121.
- Simiu, E. e R. H. Scanlan. 1996. *Wind effects on structures fundamentals and applications to design*. Vol. 3th ed. John Wiley & Sons, Inc: New York. ISBN 0-471-12157-6.
- Singer, P. 1995. "Die Berechnung von Minimalflächen, Seifenblasen, Membrane und Pneus aus geodätischer Sicht". Dissertação de Doutorado, University of Stuttgart.
- Skelton, J. 1980. "Shear of woven fabrics". Em *Mechanics of Flexible Fibre Assemblies*, editado por John W. S. Hearle, John J. Thwaites e Jafargholi amirbayat. Netherlands: Stijhoff & Noordhoff.
- Sockel, H. 1994. *Wind-excited vibrations of structures*. Wien; New York: Springer-Verlag. ISBN 978-3-7091-2708-7.
- Solari, G. e G. Piccardo. 2001. "Probabilistic 3-D turbulence modeling for gust buffeting of structures". *Probabilistic Engineering Mechanics* no. 16 (1):73-86.
- Sousa, H., F. Cavadas, A. Henriques, J. Bento e J. Figueiras. 2013. "Bridge deflection evaluation using strain and rotation measurements". *Smart Structures and Systems* no. 11 (4):365-386.
- Souza, D. 2008. "Sobre a Busca de Superfícies Minimais e seu Emprego nas Estruturas de Membrana". Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
- Spanos, D. e G. Deodatis. 2002. "Computational Stochastic Mechanics". Comunicação apresentada em Proceedings of 4th international conference on computational stochastic mechanics, em Corfu, Greece.
- Stefanou, G. D. 1992. "Dynamic response of tension cable structures due to wind loads". *Computers & Structures* no. 43 (2):365-372.
- Sun, X. Y., Y. Wu, Q. Yang e S. Shen. 2008. "Wind tunnel tests on the aeroelastic behaviours of pretensioned saddle-shaped suspended roofs". Comunicação apresentada em Bluff Bodies Aerodynamics & Applications - BBAA VI International colloquium, em Milano, Italy.
- Suzuki, M., S. Sanada, Y. Hayami e S. Ban. 1997. "Prediction of wind-induced response of a semi-rigid hanging roof". *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* no. 72:357-366.
- Swaddiwudhipong, S., C. M. Wang, K. M. Liew e S. L. Lee. 1989. "Optimal pretensioned forces for cable networks". *Computers and Structures* no. 33 (6):1349-1354.
- Sygulski, R. 1993. "Vibrations of pneumatic structures interacting with air". *Computers and Structures* no. 49 (5):867-876.
- Sygulski, R. 1994. "Dynamic analysis of open membrane structures interacting with air". *International Journal for Numerical Methods in Engineering* no. 37 (11):1807-1823.
- Sygulski, R. 1995. "Application of curvilinear elements with internal collocation points to air-pneumatic structure interaction". *Engineering Analysis with Boundary Elements* no. 15 (1):37-42.

- Sygulski, R. 1996. "Dynamic stability of pneumatic structures in wind: Theory and experiment". *Journal of Fluids and Structures* no. 10 (8):945-963.
- Sygulski, R. 1997. "Numerical analysis of membrane stability in air flow". *Journal of Sound and Vibration* no. 201 (3):281-292.
- Sygulski, R. 2007. "Stability of membrane in low subsonic flow". *International Journal of Non-Linear Mechanics* no. 42 (1):196-202.
- Tabarrok, B. e Z. Qin. 1992. "Nonlinear analysis of tension structures". *Computers & Structures* no. 45 (5-6):973-984.
- Takizawa, K., M. Fritze, D. Montes, T. Spielman e T. E. Tezduyar. 2012. "Fluid-structure interaction modeling of ringsail parachutes with disreefing and modified geometric porosity". *Computational Mechanics* no. 50 (6):835-854.
- Takizawa, K., T. Spielman, C. Moorman e T. E. Tezduyar. 2012. "Fluid-structure interaction modeling of spacecraft parachutes for simulation-based design". *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME* no. 79 (1).
- Takizawa, K., T. E. Tezduyar, J. Boben, N. Kostov, C. Boswell e A. Buscher. 2013. "Fluid-structure interaction modeling of clusters of spacecraft parachutes with modified geometric porosity". *Computational Mechanics* no. 52 (6):1351-1364.
- Talay, D. e L. Tubaro. 1995. "Probabilistic models for nonlinear partial differential equations". Comunicação apresentada em 1st Session of the Centro Internazionale Matematico Estivo, em Berlin.
- Tamura, Y., A. Kareem, G. Solari, K. C. S. Kwok, J. D. Holmes e W. H. Melbourne. 2005. "Aspects of the dynamic wind-induced response of structures and codification". *Wind and Structures, An International Journal* no. 8 (4):251-268.
- Taylor, R. L. e J. C. Simo. 1985. "Bending and membrane elements for analysis of thick and thin shells". Comunicação apresentada em Proceedings of the NUMETA Conference, em Swansea, Wales.
- Testa, R. e L. Yu. 1987. "Stress-Strain Relation for Coated Fabrics". *Journal of Engineering Mechanics* no. 113 (11):1631-1646.
- Tibert, A. G. 1999. "Numerical analyses of cable roof structures". Dissertação de Mestrado, Department of Structural Engineering, Royal Institute of Technology.
- Tibert, A. G. e S. Pellegrino. 2003. "Review of Form-Finding Methods for Tensegrity Structures". *International Journal of Space Structures* no. 18 (4):209-223.
- Topping, A. D. 1973. "The Critical Slit Length of Pressurized Coated Fabric Cylinders". *Journal of Industrial Textiles* no. 3 (2):96-110.
- Topping, B. H. V. e P. Ivanyi. 2007. *Computer Aided Design of Cable Membrane Structures*. Saxe-Coburg Publications. ISBN 978-1-874672-11-1.
- Tran, H. C. e J. Lee. 2010a. "Advanced form-finding for cable-strut structures". *International Journal of Solids and Structures* no. 47 (14-15):1785-1794.
- Tran, H. C. e J. Lee. 2010b. "Advanced form-finding of tensegrity structures". *Computers & Structures* no. 88 (3-4):237-246.

- Ubertini, F. e F. Giuliano. 2010. "Computer simulation of stochastic wind velocity fields for structural response analysis: Comparisons and applications". *Advances in Civil Engineering* no. 2010.
- Uematsu, Y., T. Moteki e T. Hongo. 2008. "Model of wind pressure field on circular flat roofs and its application to load estimation". *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* no. 96 (6–7):1003-1014.
- Uhlemann, J. e N. Stranghöner. 2013. "Spectra of computed fabric stress and deformation values due to a range of fictitious elastic constants obtained from different established determination procedures". Comunicação apresentada em 6th International Conference on Textile Composites and Inflatable Structures, Structural Membranes 2013.
- Valdés, J. G., J. Miquel e E. Oñate. 2009. "Nonlinear finite element analysis of orthotropic and prestressed membrane structures". *Finite Elements in Analysis and Design* no. 45 (6–7):395-405.
- Veenendaal, D. e P. Block. 2012. "An overview and comparison of structural form finding methods for general networks". *International Journal of Solids and Structures* no. 49 (26):3741-3753.
- Vickery, B. J. e M. Majowiecki. 1992. "Wind induced response of a cable supported stadium roof". *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* no. 42 (1–3):1447-1458.
- Viola, I. M. 2013. "Recent advances in sailing yacht aerodynamics". *Applied Mechanics Reviews* no. 65 (4):40801-40801-12.
- Viola, I. M. e R. G. J. Flay. 2009. "Force and pressure investigation of modern asymmetric spinnakers". *Transactions of the Royal Institution of Naval Architects Part B: International Journal of Small Craft Technology* no. 151 (2):31-40.
- Viola, I. M. e R. G. J. Flay. 2011. "Sail pressures from full-scale, wind-tunnel and numerical investigations". *Ocean Engineering* no. 38 (16):1733-1743.
- von Karman, T. 1948. "Progress in the Statistical Theory of Turbulence". *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* no. 34 (11):530-539.
- Vries, J. d. 2012. "Barrel and pincushion lens distortion correction". *Matlab function - lensdistort*, <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/37980-barrel-and-pincushion-lens-distortion-correction>.
- Wakefield, D. S. 1999. "Engineering analysis of tension structures: theory and practice". *Engineering Structures* no. 21 (8):680-690.
- Waziri, M. Y., W. J. Leong, M. A. Hassan e M. Monsi. 2010. "Jacobian Computation-free Newton's Method for Systems of Nonlinear Equations". *Journal of Numerical Mathematics and Stochastics* no. 2 (1):54-63.
- Wei, D. M., M. L. Zhu e D. Li. 2011. "Aerodynamic unstable critical wind velocity for three-dimensional open cable-membrane structures". *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)* no. 32 (3):277-284.
- Weinstock, R. 1974. *Calculus of variations, with applications to physics and engineering*. New York: Dover Publications. ISBN 0-486-63069-2.
- Williams, C. J. K. 1984. "Defining and designing curved flexible tensile surface structures". Comunicação apresentada em The Mathematics of Surfaces, em University of Manchester.
- Wu, S. 1995. "Adaptive dynamic relaxation technique for static analysis of catenary mooring". *Marine Structures* no. 8 (5):585-599.

- Wu, Y. 2003. *考虑流固耦合作用的索膜结构风致动力响应研究* (Study on Wind-Induced Vibration of Tension Structures with the Consideration of Wind-Structure Interaction). Dissertação de Doutorado (em chinês), Civil Engineering Institute, Harbin Institute of Technology.
- Wu, Y., X. Sun e S. Shen. 2008. "Computation of wind-structure interaction on tension structures". *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* no. 96 (10–11):2019-2032.
- Wüchner, R. e K. U. Bletzinger. 2005. "Stress-adapted numerical form finding of pre-stressed surfaces by the updated reference strategy". *International Journal for Numerical Methods in Engineering* no. 64 (2):143-166.
- Wüchner, R., A. Kupzok e K. U. Bletzinger. 2006. "Simulation of fluid-structure-interaction with free form membrane structures using an implicit coupling scheme with adaptive under relaxation". Comunicação apresentada em European Conference on Computational Fluid Dynamics ECCOMAS CFD, em TU Delft.
- Wüchner, R., A. Kupzok e K. U. Bletzinger. 2007. "A framework for stabilized partitioned analysis of thin membrane-wind interaction". *International Journal for Numerical Methods in Fluids* no. 54 (6-8):945-963.
- Xie, Y. M. e G. P. Steven. 1997. *Evolutionary structural optimization*. London; New York: Springer. ISBN 3540761535 9783540761532.
- Xu, G., X. Q. Peng, L. Wu e H. Zhu. 2009. "Numerical simulation of wind interference effect for a stadium and a gymnasium". Comunicação apresentada em 7th Asia-Pacific Conference on Wind Engineering, APCWE-VII.
- Xu, Y., Z. Zheng, C. Liu, W. Song e J. Long. 2011. "Aerodynamic Stability Analysis of Geometrically Nonlinear Orthotropic Membrane Structure with Hyperbolic Paraboloid". *Journal of Engineering Mechanics* no. 137 (11):759-768.
- Yadykin, Y., V. Tenetov e D. Levin. 2003. "The added mass of a flexible plate oscillating in a fluid". *Journal of Fluids and Structures* no. 17 (1):115-123.
- Yasui, H., H. Marukawa, J. Katagiri, A. Katsumura, Y. Tamura e K. Watanabe. 1999. "Study of wind-induced response of long-span structure". *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* no. 83 (1–3):277-288.
- Ye, J., R. Q. Feng, S. Zhou e J. Tian. 2012. "The modified force-density method for form-finding of membrane structures". *International Journal of Steel Structures* no. 12 (3):299-310.
- Zhang, J. Y. e M. Ohsaki. 2005. "Form-finding of self-stressed structures by an extended force density method". *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures (J. IASS)* no. 46 (3):159-166.
- Zhang, J. Y. e M. Ohsaki. 2006. "Adaptive force density method for form-finding problem of tensegrity structures". *International Journal of Solids and Structures* no. 43 (18–19):5658-5673.
- Zhang, L. G. e T. X. Yu. 1989. "Modified adaptive Dynamic Relaxation method and its application to elastic-plastic bending and wrinkling of circular plates". *Computers & Structures* no. 33 (2):609-614.
- Zhou, X., Z. Han, M. Gu, A.-a. Zhang, W. Zhang e W. Fang. 2013. "Research on wind-induced responses of a large-scale membrane structure". *Earthquake Engineering and Engineering Vibration* no. 12 (2):297-305.

Zhou, Y., Y. Li, Z. Shen, L. Wang e Y. Tamura. 2014. "Numerical analysis of added mass for open flat membrane vibrating in still air using the boundary element method". *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* no. 131:100-111.

Zhou, Y., Y. Q. Li, Z. Y. Shen e Y. Tamura. 2012. "Numerical estimation of added mass for circular membrane vibrating in still air". Comunicação apresentada em 7th International Colloquium on Bluff Body Aerodynamics & Applications (BBAA7), em Shanghai, China, September 2-6.

Zhu, H. H., J. H. Yin, L. Zhang, W. Jin e J. H. Dong. 2010. "Monitoring internal displacements of a model dam using FBG sensing bars". *Advances in Structural Engineering* no. 13 (2):249-261.

REFERÊNCIAS WEB

Architect. 2010. "Medina Haram Piazza". Acedido a 06/07/2015. <http://www.architectmagazine.com/project-gallery/medina-haram-piazza>.

Bagarai. 2010. "Construções diferentes - Projeto Eden". Acedido a 22/05/2014. <http://bagarai.com.br/construcoes-diferentes.html>.

Bahia Recôncavo. 2013. "Lona da cobertura da Fonte Nova cede com acúmulo de água". Acedido a 13/03/2015. <http://bahiareconcavo.com.br/site/2013/05/lona-da-cobertura-da-fonte-nova-cede-com-acumulo-de-agua/>.

Bostonmsbl. 1987. "Olympic stadium - Montreal, Quebec". Acedido a 13/03/2015. <http://www.bostonmsbl.com/fields/olympic.html>.

Brisbane Times. 2008. "Gabba 'roof' torn apart by wind". Acedido a 11/06/2014. <http://www.brisbanetimes.com.au/news/sport/gabba-roof-torn-apart-by-wind/2008/11/20/1226770589542.html>.

BSG Développements. 2008. "Sail Vision". Acedido a 25/02/2015. <http://www.bsgdev.com/CMS2/>.

CMD Ingenieros. 1999. "Roof structure for L'Oceanogràfic. Valencia. Spain". Acedido a 13/03/2015. <http://www.cmdingenieros.com/en/proyectos/puentes-y-estructuras/cubiertas-oceanografico-valencia/>.

Cook & Sons' Baseball Adventures. 2010. "Metrodome Roof". Acedido a 11/06/2014. <https://mlblogscookandsonbats.files.wordpress.com/2011/03/320-20glorious20from20the20air1.jpg>

CTV News. 2008. "BC Place Stadium dome collapse preventable: report". Acedido a 12/06/2014. <http://www.ctvnews.ca/bc-place-stadium-dome-collapse-preventable-report-1.269970>.

Decision SA. 2007. "Alinghi SUI-100". Acedido a 11.11.2015. <http://www.decision.ch/en/achievements/marine/alinghi-sui-100/>.

Foltinek, D. 2011. "Barcelona, the works of Gaudi: Inverted arch design model". Acedido a 11/05/2015. <http://frontrange.ca/blog/2011/12/barcelona-the-works-of-gaudi/>.

Fotos de Barcos. 2012. "Veleiro". Acedido a 11/06/2014. <http://fotosdebarcos.com.br/fotos-de-barcos-com-velas/barco-a-vela-3>.

GE Reports Brasil. 2011. "Espírito olímpico no coração". Acedido a 22/05/2014. <http://brazil.geblogs.com/espírito-olimpico-no-coracao/>.

Idealista. 2015. "Pavilhão de Portugal". Acedido a 13/03/2015. <http://www.idealista.pt/news/imobiliario/empresas/2015/03/13/26405-estado-entrega-exploracao-de-pavilhao-de-portugal-a-universidade>

In Retrospect. 2007. "Crisis Communications 101: BC Place & Canada Place Case Studies". Acedido a 13/03/2015. <https://inretrospect21.wordpress.com/2012/06/20/crisis-communications-101-bc-place-canada-place-case-studies/>.

Kittner, M. 2012. "The Bedouin Tent – Cool in the day, Warm at Night and Dry Under the Rain". Acedido a 11/06/2014. <http://74fdc.wordpress.com/2012/03/30/the-bedouin-tent-cool-in-the-day-warm-at-night-and-dry-under-the-rain/>.

Martifer. 2014. "Estádio Arena Fonte Nova". Acedido a 11/06/2014. <http://www.martifer.com/fotos/editor2/galerias/MMC/fontenova.jpg>.

Meteorology News. 2010. "Minnesota Blizzard Collapses Metrodome Roof". Acedido a 11/06/2014. <http://www.meteorologynews.com/2010/12/12/minnesota-blizzard-collapses-metrodome-roof-photos/>.

NASA. 2015. "Testing Sub-Scale Parachutes for NASA's Orion Spacecraft". Acedido a 20/02/2015. <http://www.nasa.gov/content/testing-sub-scale-parachutes-for-nasas-orion-spacecraft>

Ojakgyoo. 2001. "Jeu World Cup Stadium". Acedido a 06/07/2015. <http://ojakgyoo.com.ne.kr/2002/seogwipo.htm>.

Performance S.L. 2010. "Pista polidesportiva cubierta y con cerramiento lateral eventual en el centro de alto rendimiento de la Cartuja en Sevilla". Acedido a 24/09/2015. <http://www.performance-starbooks.com/proyectos.htm>.

Picasa. 2013. "Nuclear plant cooling towers". Acedido a 03/09/2015. <http://picasaweb.google.com/104100684882073364145/ConicSections#5404799977042427010>.

Pinterest. 1898. "Igreja de Colònia Güell". Acedido a 11/05/2015. <https://www.pinterest.com/pin/490892428104983598/>.

Quatro Maiores. 2013. "Arena Fonte Nova tem problema em cobertura". Acedido a 11/06/2014. <http://www.quatromaiiores.com.br/arena-fonte-nova-tem-problema-em-cobertura/>.

Sails, W.-. 2012. "Aerodynamics". Acedido a 20/06/2013. http://www.wb-sails.fi/Portals/209338/news/98_11_PerfectShape/Main.htm.

Sanrocon. 2009. "Cubierta para Pista Polideportiva en el Centro Especializado de Alto Rendimiento de la Isla de la Cartuja, Sevilla ". Acedido a 18/09/2014. <http://www.sanrocon.com/pdf/2009/ecubiertacar.pdf>.

Schedule, W. C. 2015. "The Gabba/Brisbane Cricket Ground". Acedido a 13/03/2015. <http://worldcup2015schedule.in/blog/icc-world-cup-2015-grounds-records-stats/gabbabrisbane-cricket-ground/>.

Sodré, U. 2003. "Equações Diferenciais Parciais". Acedido a 07/03/2013. <http://www.mat.uel.br/matessencial/superior/pdfs/edp.pdf>.

SOLVIA. 2010. "Finite Element System". Acedido a 03/09/2015. <http://www.solvvia.com/doc.html>.

Sopheakchan. 2012. "L'Océanogràfic". Acedido a 13/03/2015. http://sopheakchan.blogspot.pt/2012_01_01_archive.html.

Structure. 2014. "Cable Net of Raleigh Arena". Acedido a 26/05/2014. <http://www.structuremag.org/article.aspx?articleID=553>.

Taylornoakes. 1987. "Olympic Stadium: Holes in the plan". Acedido a 13/03/2015. <http://www.taylornoakes.com/tag/olympic-stadium/>.

Tensinet. 2013. "Project: Cable-net Cooling Tower in Schmehausen". Acedido a 08/09/2014. <http://www.tensinet.com/database/viewProject/3810.html>.

The Courier. 2009. "Gabba roof may have to be replaced as stadiums drain coffers". Acedido a 11/06/2014. <http://www.couriermail.com.au/news/ailing-stadiums-drain-coffers/story-e6freon6-1225705194675>.

The Globe And Email. 2013. "Roof partly collapses at Brazilian soccer stadium". Acedido a 11/06/2014. <http://www.theglobeandmail.com/video/video-roof-partly-collapses-at-brazilian-soccer-stadium/article12165661/>.

The University of Arizona. 2013. "Hyperbolic paraboloid as doubly ruled surface". Acedido a 24/05/2014. http://math.arizona.edu/~models/Ruled_Surfaces/source/16.html.

Tonybynum. 2014. "Tenda Tipi". Acedido a 11/06/2014. <http://tonybynum.photoshelter.com/image/I0000JpFl65oJ8Ds>.

UticaOD. 2010. "Aud architecture made it 'breakthrough facility'". Acedido a 26/05/2014. <http://www.uticaod.com/article/20100606/News/306069974>.

Wikimedia. 2006. "Espectro de Van der Hooven". Acedido a 17/09/2015. <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:SpectreVanDerHoven.png>.

Wikipedia. 2013. "Superfície regrada". Acedido a 24/05/2014. https://pt.wikipedia.org/wiki/Superf%C3%ADcie_regrada.

Wikipedia. 2014a. "Catenóide". Acedido a 15/04/10. <http://pt.wikipedia.org/wiki/Catenóide>.

Wikipedia. 2014b. "Spinnaker". Acedido a 15.04.10. <http://pt.wikipedia.org/wiki/Spinnaker>.

Wikipédia. 1966. "Ponte 25 de Abril". Acedido a 12/03/2015. https://pt.wikipedia.org/wiki/Ponte_25_de_Abril.

Wikipédia. 1972. "Estádio Olímpico de Munique". Acedido a 12/03/2015. https://pt.wikipedia.org/wiki/Est%C3%A1dio_Ol%C3%ADmpico_de_Munique.

World Stadiums. 1998. "Estádio de Faro-Loulé". Acedido a 11/06/2014. http://www.worldstadiums.com/stadium_menu/tournaments/thumbnails/euro_2004/faro.jpg.