M. Helena Gonçalves da S. Correia

Paletização de Cilindros

DEEC
FEUP
1995

DEPARTAMENTO DE

ENGENHARIA ELECTROTÉCNICA E DE COMPUTADORES

Paletização de Cilindros

Pesquisa por arrefecimento simulado

FACULDADE DE ENGENHARIA

UNIVERSIDADE DO PORTO

Rua dos Bragas, 4099 Porto Codex – PORTUGAL

Maria Helena Gonçalves da Silva Correia

Paletização de Cilindros

Pesquisa por arrefecimento simulado

681.3(043)/CORM/PAL cat
UNIVERSIDADE DO PORTO
Faculdade de Engenharia
BIBLIOTECA
N.º 21695
CDU
Data 15 5 1996
NN.2164

DEEC

FEUP

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Outubro 1995

Tese submetida para satisfação parcial
dos requisitos do programa de mestrado
em
Engenharia Electrotécnica e de Computadores
(Perfil de Informática de Sistemas)

Tese realizada sob a supervisão do

Prof. Doutor José António Soeiro Ferreira

Professor Associado do Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores da

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Ao Pedro

Agradeço...

- ao meu orientador, Prof. Doutor José Soeiro Ferreira, pelo apoio dado na realização deste trabalho;
- aos meus colegas, Maria Antónia, Miguel e Zé Fernando pela amizade, companheirismo e apoio únicos;
- ao Pedro, pelo apoio, pela compreensão e paciência.

Muito Obrigada.

Resumo

São inúmeras as indústrias que incluem, em fases distintas da sua actividade, processos de armazenagem, manipulação e distribuição de objectos (de matérias primas a produtos acabados), e cuja eficácia constitui um factor económico de importância considerável no sucesso da empresa. Associado a cada uma destas operações existe o problema do posicionamento desses objectos no interior de espaços de maior dimensão, de forma a minimizar o espaço desocupado.

O problema da paletização de cilindros, objecto de estudo desta dissertação, identifica-se com situações em que se pretende proceder ao carregamento de ítens idênticos com base circular (tubos, rolos,...) sobre uma base rectangular (palete), em que, considerações de ordem prática, exigem a fixação da dimensão vertical dos objectos a colocar. A resolução do problema consistirá na determinação do padrão de posicionamento da base circular dos objectos sobre a base rectangular, de forma a maximizar o número de objectos colocados.

O trabalho realizado consistiu no desenvolvimento de dois algoritmos para a resolução do problema de paletização circular, baseados em implementações distintas de uma meta-heurística: a pesquisa por arrefecimento simulado. No âmbito do desenvolvimento destas aplicações, houve necessidade de realizar uma conjunto de testes com o objectivo de afinar os parâmetros dos algoritmos de pesquisa, para cada uma das versões implementadas. Os resultados obtidos indiciam, em termos de eficácia, uma elevada robustez do método de pesquisa por arrefecimento simulado na resolução do problema de paletização dos cilindros, em paralelo com uma elevada sensibilidade aos valores dos parâmetros, no que diz respeito à sua eficiência.

No contexto da paletização de formas circulares, foi ainda desenvolvido um método de cálculo de um limite superior para o número de círculos a posicionar num rectângulo, sem sobreposição entre si e com as margens do rectângulo. Os resultados obtidos com a sua aplicação apresentam melhorias significativas relativamente a dois métodos alternativos propostos na literatura.

Abstract

Stocking, manipulation and distribution procedures of small items, are included in several phases of industrial activities. The problem of positioning small items inside bigger spaces, so that the unsused space is minimised, arises in many of the above mentioned phases. It is generally known that the effectiveness of these procedures can be a quite important economical factor for the success of the industries.

The cylinder loading problem, studied in this dissertation, consists in loading identical items with a circular base (tubes, rolls, ...) into a rectangular base (the pallet). For practical reasons, all the loaded items are considered to have the same height. The resolution of this problem consists in determining the positioning pattern of the circular bases of the items on the rectangular pallet, trying to maximise the number of items. This pattern will be repeated for each layer stacked on the pallet.

Two algorithms, based on the meta-heuristic simulated annealing principle, have been developed and implemented. The tunning of the parameters for these algorithms implied the running of intensive tests. The results obtained, suggest that the developed algorithms are robust in what concerns effectiveness, but are highly sensitive to the parameter values in what concerns efficiency.

There was also developed a new upper bound on the number of identical circles that is possible to position inside a rectangle. This upper bound is significantly better than two alternative bounds proposed in the literature.

Índice

1 Introdução 1

1.1 Considerações gerais 1

1.2 Trabalho desenvolvido 3

1.3 Enquadramento e motivação 3

1.4 Organização da dissertação 4

2 O Problema de Paletização 6

2.1 Caracterização do problema de paletização 7

2.2 Paletização de formas rectângulares 10

2.2.1 Formulação do problema 10

2.2.2 Técnicas de resolução 10

2.3 Paletização de formas circulares 15

2.3.1 Formulação do problema 15

2.3.2 Técnicas de resolução 16

2.3.3 Revisão bibliográfica 18

3 Desenvolvimento de um Limite Superior 28

3.1 Cálculo de um limite inferior para o desperdício 30

3.1.1 Cálculo do desperdício externo 30

3.1.2 Cálculo do desperdício interno 35

3.2 Resultados Computacionais 38

4 Arrefecimento Simulado na Paletização de Cilindros 42

4.1 O algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado 43

4.2 Posicionamento de círculos idênticos num rectângulo 49

4.2.1 Implementação de um algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado baseado na minimização da sobreposição (ASMinS) 51

4.2.2 Implementação de um algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado baseado na maximização do número de peças (ASMaxP) 61

5 Testes Computacionais **71**

5.1 Algoritmo ASMinS 73

5.1.1 Análise comparativa com algoritmos de pesquisa local . . 74

5.2 Algoritmo PAS1 75

5.3 Algoritmo PAS2 77

5.3.1 Análise comparativa com algoritmos de pesquisa local . . 79

5.4 Análise comparativa dos algoritmos PAS1 e PAS2 80

6 Conclusão **86**

6.1 Conclusões genéricas 86

6.2 Perspectivas de desenvolvimento 89

Referências **90**

Lista de Figuras

2.1 Problema de paletização de objectos paralelipipédicos 8
2.2 Notação usada no modelo de Beasley 12
2.3 Utilização de limites em algoritmos de pesquisa em árvore 14
2.4 Problema de paletização de formas circulares 16
2.5 Notação usada no modelo de paletização de cilindros 18
2.6 Caracterização da formação homogénea de classe A 20
2.7 Caracterização da formação homogénea de classe B 21
2.8 Formação não homogénea 21
2.9 Estruturas de posicionamento regulares. a) Est. tipo Z b) Est. tipo I c) Est. tipo X 23
2.10 Esquema de posicionamento dos círculos 24
2.11 Estruturas de geradas pela aplicação de regras de posicionamento 25
2.12 Estabilidade das soluções. 26

3.1 Desperdício externo mínimo 31
3.2 Desperdício externo 32
3.3 Desperdício externo (tipo I) 34
3.4 Desperdício externo (tipo II) 34
3.5 Envolvente hexagonal 36
3.6 Estruturas regulares ($\alpha = 30°$) 37
3.7 Desperdício interno ($DespI$) 38

4.1 Algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado. 46
4.2 Algoritmo de pesquisa local, com escolha do melhor vizinho. . . . 49
4.3 Algoritmo de pesquisa local, com escolha do primeiro vizinho melhor. 50
4.4 Sobreposição (F(x)) e tempo de execução relativos em função da taxa de arrefecimento (α) 56

4.5 Variação de $F(x)$ durante o processo de pesquisa, para diversos valores de temperatura inicial 57
4.6 Variação de $F(x)$ e do número total de iterações em função do número de iterações de uma cadeia de temperatura (L_n) 58
4.7 Variação de $F(x)$ e do tempo de execução em função do critério de paragem 60
4.8 Comparação dos resultados obtidos pela implementação inicial e após a afinação dos parâmetros 61
4.9 Sobreposição (F(x)) e número de temperaturas em função da taxa de arrefecimento (α) 64
4.10 Variação de $F(x)$ e das iterações executadas, para diversos valores da temperatura inicial 65
4.11 Variação da taxa de aceitação efectiva das soluções piores, determinada experimentalmente, para diferente valores de p_0 66
4.12 Variação de $F(x)$ e do número de temperaturas executadas em função do número de iterações de uma cadeia de temperatura (L_n) 67
4.13 Resultados obtidos com a utilização da taxa de aceitação de soluções piores como critério de paragem 68
4.14 Variação de $F(x)$ e do número de temperaturas em função do critério de paragem 69
4.15 Comparação dos resultados obtidos pela implementação inicial e após a afinação dos parâmetros 70

5.1 Desempenho do algoritmo ASMinS 74
5.2 Comparação do algoritmo ASMinS com algoritmos de pesquisa local (Sobreposição) 75
5.3 Comparação do ASMinS com algoritmos de pesquisa local (Tempo de Execução) 76
5.4 Algoritmo PAS1 76
5.5 Variação do tempo de execução introduzida pela aplicação do algoritmo PAS1 às instâncias-teste 78
5.6 Desempenho do algoritmo PAS2 80
5.7 Comparação do algoritmo PAS2 com algoritmos de pesquisa local ($F(x)$) 81
5.8 Comparação do algoritmo PAS2 com algoritmos de pesquisa local (Tempo de Execução) 82

5.9 Comparação de tempos de execução dos algoritmos PAS1 e PAS2 83
5.10 Posicionamento dos círculos na solução obtida pela aplicação do algoritmo PAS1 à instância Iser1 84
5.11 Posicionamento dos círculos na solução obtida pela aplicação do algoritmo PAS1 à instância Iser2 85
5.12 Posicionamento dos círculos na solução obtida pela aplicação do algoritmo PAS1 à instância MultiP 85

Lista de Tabelas

3.1 Estruturas regulares 37
3.2 Desperdício em estruturas regulares 38
3.3 Resultados computacionais 39

5.1 Instâncias do problema utilizadas nos testes realizados 72
5.2 Parâmetros do algoritmo ASMinS 73
5.3 Número inicial de círculos usado no algoritmo PAS1 máximo número de círculos colocado 77
5.4 Comparação da eficácia dos algoritmos PAS1 e PAS2 (número máximo de peças colocadas e taxa de ocorrência desse valor) . . 83
5.5 Instâncias do problema utilizadas nos testes realizados 84

Capítulo 1

Introdução

1.1 Considerações gerais

São diversas as indústrias que incluem, em fases distintas da sua actividade, processos de armazenagem, manipulação e distribuição de objectos (matérias primas ou produtos acabados), e cuja eficácia constitui um factor económico de importância considerável no sucesso da empresa. Associado a cada uma destas operações existe o problema comum da determinação do posicionamento dos objectos no interior de espaços de maior dimensão, de forma a proceder à sua ocupação eficaz, através da minimização do espaço inutilizado. A ocupação de espaço em armazéns industriais, o transporte e manipulação de produtos em fase de fabrico, a distribuição do produto final feita pela empresa produtora ou através da contratação de empresas especializadas, constituem operações em que a racionalização do esforço envolvido na sua execução se poderá traduzir em vantagens consideráveis do ponto de vista económico, justificando o investimento na investigação e desenvolvimento de metodologias optimizantes para a resolução do problema.

O problema de paletização, objecto de estudo deste trabalho, apresenta como objectivo fundamental a determinação de planos de carga de ítens idênticos sobre uma base rectangular (palete) e em que, considerações de ordem prática, exigem a fixação da dimensão dos objectos a colocar na vertical. Deste modo, a resolução destes problemas consistirá na determinação do padrão de posicionamento das bases dos objectos sobre a palete de forma a obter o aproveitamento eficaz da sua área, definindo o seu agrupamento em camadas destinadas a serem sobrepostas e carregadas sobre a palete.

Para além das situações em que a identificação do problema de paletização é

imediata, outras há cuja formulação e resolução se podem adaptar aos modelos e técnicas desenvolvidos para este problema. Como exemplo podem referir-se situações em que se pretende proceder à ocupação de um espaço de dimensões fixas com objectos idênticos ou com, pelo menos, uma face idêntica, consistindo a determinação da disposição dos objectos na determinação do posicionamento de faces idênticas numa das faces do espaço maior. Deste modo problemas intrinsecamente tri-dimensionais vêem a sua dimensão reduzida, procurando-se desta forma simplificar a sua resolução.

Na prática, a complexidade dos contextos em que o problema surge, poderá determinar a necessidade de consideração de restrições variadas associadas ao objectivo da ocupação eficiente do espaço, cuja satisfação poderá determinar a admissibilidade de uma solução. Como exemplos podem referir-se aspectos relacionados com a estabilidade da carga, compacidade dos padrões, fragilidade dos objectos envolvidos e sistema de transporte do agrupamento. A consideração destes critérios de avaliação, por vezes de difícil quantificação, aumenta a complexidade de resolução do problema na sua forma original.

O problema de paletização encontra-se inserido no contexto mais vasto dos problemas de posicionamento, cuja resolução consiste fundamentalmente na afectação de vários objectos rígidos a um espaço n-dimensional de forma a obter uma solução que proporcione a ocupação eficaz desse espaço. Para além da selecção dos objectos a posicionar (o quê?), a resolução destes problema inclui ainda a determinação do posicionamento dos objectos no interior desse espaço (como?). É esta componente geométrica da solução que caracteriza este tipo de problemas, tornando-os numa classe particular dos problemas de optimização combinatória (problemas NP-difíceis), dependendo a sua complexidade, entre outros factores, da dimensionalidade do espaço envolvido e do número de objectos a colocar.

O desenvolvimento de algoritmos de resolução exactos para estes problemas, conducentes à optimalidade das soluções propostas, vê-se por vezes limitado pela necessidade de obtenção de resultados em tempo útil. Deste modo, é dada particular atenção ao desenvolvimento de métodos heurísticos que, não garantindo a resolução do problema até à optimalidade, devem proporcionar a obtenção de soluções de qualidade satisfatória de forma fiável e eficiente. As características de cada problema específico (dimensionalidade, forma dos objectos envolvidos e restrições de natureza não geométrica) condicionam o tipo de abordagem a adoptar na sua resolução.

1.2 Trabalho desenvolvido

O trabalho de investigação desenvolvido teve como objectivo o estudo de uma forma particular do problema de paletização, que se caracteriza pela forma cilíndrica dos objectos a carregar sobre a palete. Dada a escassez de publicações científicas nesta área, o trabalho realizado consistiu, numa fase inicial, no estudo do problema de paletização na sua forma mais usual: empacotamento de formas rectangulares. O estudo das formulações e abordagens propostas para esta forma do problema surgiu numa tentativa de adaptação dos seus conceitos e técnicas de resolução ao problema da paletização de cilindros. O trabalho de investigação culminou no desenvolvimento de dois algoritmos baseados em implementações distintas de uma meta-heurística: a pesquisa por arrefecimento simulado. A aplicação desta técnica ao problema de paletização de formas circulares exigiu um esforço experimental adicional tendo como objectivo a instanciação adequada dos parâmetros envolvidos em cada uma das implementações.

No contexto da paletização de formas circulares, foi ainda desenvolvido um processo de determinação de um limite superior para o número de círculos a posicionar num rectângulo sem sobreposição entre eles.

1.3 Enquadramento e motivação

O trabalho realizado enquadra-se numa linha de investigação desenvolvida pelo grupo de Decisão e Optimização do INESC (Instituto de Engenharia de Sistemas e Computadores). Nos últimos anos, este grupo tem vindo a dedicar particular atenção à resolução de problemas de posicionamento a uma, duas e três dimensões. O esforço envolvido no estudo destes problemas tem sido regido por uma manifesta preocupação de índole prática, culminando geralmente no desenvolvimento de sistemas informáticos de aplicação industrial.

A necessidade de desenvolvimento de um sistema de paletização de cilindros surgiu na sequência dos contactos industriais estabelecidos por este grupo com vista à divulgação do sistema informático para o planeamento do empacotamento/carregamento de contentores com uma carga de objectos exclusivamente paralelipipédicos, tendo como objectivo a minimização do espaço livre no interior do contentor, aliada à satisfação de restrições de caráter prático, tais como estabilidade da carga, orientação dos objectos e ordem de descarga [10]. Por

vezes, surge a necessidade de agrupar unidades individuais idênticas sobre uma palete, passando este agrupamento a constituir uma das unidades sobre as quais incidirá o processo de empacotamento no contentor. Assim, surgiu, no contexto do empacotamento tridimensional, a necessidade de resolução dos problemas de paletização. De facto, a consideração da paletização de formas circulares, em particular, surge como tentativa de resposta à solicitação apresentada por parte de uma cordoaria, cujo procedimento de expedição dos produtos fabricados consiste, numa fase inicial, na paletização de bobines de corda destinadas a serem posteriorente carregadas num contentor ou camião.

As reduzidas referências bibliográficas disponíveis sobre o assunto contribuiram para fazer do trabalho de investigação realizado um trabalho inovador e criativo, tendo resultado numa abordagem original ao problema.

1.4 Organização da dissertação

A presente dissertação encontra-se organizada em seis capítulos. No presente capítulo é apresentado o tema deste trabalho, referindo-se as suas principais características sob o ponto de vista industrial e científico. É ainda referida a metodologia adoptada e o enquadramento científico do seu desenvolvimento.

No capítulo 2, é abordado o problema da paletização inserindo-o no contexto mais vasto dos problemas de posicionamento. É apresentada uma formulação matemática do problema juntamente com uma breve revisão bibliográfica das publicações sobre este tema, referindo-se ainda as principais técnicas adoptadas para a sua resolução. A descrição apresentada distingue dois tipos de problemas de paletização consoante a forma das peças a empacotar são parlelipipédicas (secção 2.2) ou cilíndricas (secção 2.3).

No terceiro capítulo é desenvolvido um método de cálculo de limites superiores e inferiores para o problema da paletização de cilindros, tendo como objectivo proporcionar uma medida de optimalidade para os algoritmos heurísticos desenvolvidos posteriormente. A utilização deste processos de cálculo revelou-se ainda de grande utilidade na limitação do número de círculos considerados pelos algoritmos desenvolvidos.

No capítulo 4 são apresentados dois algoritmos (PAS1 e PAS2) baseados na aplicação de uma técnica meta-heurística (a pesquisa por arrefecimento simulado) à resolução do problema de paletização de formas circulares. Os resultados computacionais obtidos com estas duas implementações, aplicadas a um

conjunto diversificado de instâncias do problema, são apresentados no capítulo 5. Neste capítulo procede-se ainda à comparação do desempenho das implementações do algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado realizadas com as de dois algoritmos de pesquisa local pura.

Finalmente no capítulo 6 são tecidos alguns comentários ao trabalho realizado, salientando-se as conclusões mais relevantes da sua realização, sendo ainda apresentadas as perspectivas de desenvolvimento futuro.

Capítulo 2

O Problema de Paletização

A resolução de problemas de posicionamento[1] consiste basicamente na afectação de vários itens a um espaço n-dimensional de forma a obter uma solução que proporcione um aproveitamento eficiente desse espaço. Para além da selecção dos objectos a posicionar (o quê?), a resolução destes problemas inclui ainda a determinação do posicionamento dos objectos no interior do espaço (como?). É esta componente geométrica da solução que caracteriza este tipo de problemas, tornando-os numa classe particular dos problemas de optimização combinatória (problemas NP-difíceis), dependendo a sua dificuldade de resolução, entre outros factores, da dimensionalidade do espaço envolvido (1D, 2D, 3D, ...) e do número de objectos a colocar. Por vezes, a normalização de uma ou mesmo mais dimensões possibilita a redução da dimensionalidade do problema contribuindo geralmente para a simplificação da sua resolução.

Dentro desta classe de problemas, os de resolução mais simples são, como é natural, aqueles em que apenas uma dimensão é relevante (1D). Estes surgem na prática quando se pretende cortar tubos, rolos ou barras. Quando se trata de cortar materiais planos, placas ou chapas, em figuras geométricas mais pequenas, regulares (rectangulares) ou irregulares, estamos perante um problema a duas dimensões, sendo ignorada a terceira dimensão, que nos casos referidos se identificaria com a espessura das placas e peças. Os problemas a três dimensões surgem sobretudo quando se pretende seleccionar o conjunto de peças a empacotar num espaço maior de dimensões fixas.

Para além das situações referidas, em que é imediata a identificação de problemas de posicionamento, outras há que, apesar dessa associação não ser

[1] Estes problemas são geralmente referidos na literatura como *Cutting & Packing Problems*. Neste texto foi adoptada a designação de *problemas de posicionamento* introduzida em [25].

tão evidente, podem ser formuladas como tal. É o caso do projecto de circuitos VLSI, problemas económicos de aplicação de capitais, balanceamento de linhas de produção, e ainda gestão de memória por blocos, alocação de memória e escalonamento de sistemas multiprocessados.

Como justificação do interesse crescente manifestado por parte da comunidade científica por este tipo de problemas pode referir-se a variedade de situações industriais em que estes surgem, explícita ou implicitamente, onde, apesar de uma estrutura básica comum, cada situação particular apresentará características próprias ao nível dos objectivos a atingir e das restrições impostas, requerendo a reformulação de modelos e adaptação de algoritmos de forma a satisfazer as necessidades específicas de cada caso. Dada a complexidade do problema, o desenvolvimento de algoritmos exactos mais eficientes e de métodos heurísticos de resolução que garantam soluções próximas da optimalidade constitui ainda um desafio aliciante, justificando o crescente número de publicações sobre este grupo de problemas de optimização combinatória (ver [28], [15] e [18]).

Uma descrição exaustiva e sistemática dos problemas de posicionamento pode ser encontrada em [25], sendo ainda referidos os contextos industriais em que estes problemas mais frequentemente surgem.

Neste capítulo procurar-se-á caracterizar um sub-grupo dos problemas de posicionamento: o problema da paletização. Após uma descrição genérica do problema na secção 2.1, a sua abordagem far-se-á segundo duas vertentes que se distinguem fundamentalmente pela forma geométrica das peças. Na secção 2.2, será considerada a paletização de formas rectangulares, sendo feita uma breve descrição das abordagens mais comuns a esta versão do problema. É também apresentado um conjunto de referências bibliográficas das principais publicações sobre a paletização de rectângulos e afins. A paletização de formas circulares será abordada na secção 2.3. Uma vez que esta formulação do problema constitui o objecto de estudo do trabalho aqui apresentado, é abordada de forma mais promenorizada, sendo apresentados as técnicas de resolução propostas na escassa literatura disponível sobre o assunto.

2.1 Caracterização do problema de paletização

O objecto de estudo deste trabalho constitui um sub-grupo dos problemas de posicionamento, o problema de paletização, o qual consiste fundamentalmente na

determinação de planos de carga de objectos idênticos (normalmente de forma paralelipipédica ou cilindríca) sobre uma base rectangular, denominada palete, em que, considerações de ordem prática, exigem a fixação da orientação vertical de uma das dimensões do objecto a colocar, passando a sua resolução pelo agrupamento destes em camadas destinadas a serem sobrepostas e carregadas sobre a palete (figura 2.1). Assim, o problema de paletização, intrinsecamente tridimensional, surgindo geralmente associado ao problema de empacotamento em contentores, é geralmente abordado numa perspectiva bidimensional cuja resolução consiste na selecção de um padrão de empacotamento da base dos objectos a posicionar sobre a palete, de forma a obter um aproveitamento eficiente da sua área. Uma vez que a orientação vertical dos objectos a empacotar é fixa, o empilhamento de camadas com aproveitamento óptimo possibilita a resolução óptima do problema de empacotamento tridimensional.

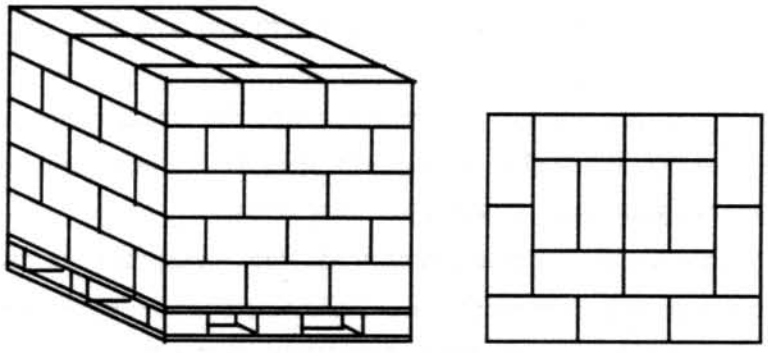


Figura 2.1: Problema de paletização de objectos paralelipipédicos

Este problema surge frequentemente em actividades que envolvam a manipulação, armazenamento e distribuição de várias embalagens de um mesmo produto agrupadas e colocadas sobre paletes, podendo o acréscimo do número de ítens de uma palete ter uma importância considerável do ponto de vista económico.

Na prática, o problema de paletização poderá surgir em contextos mais complexos, constituindo um sub-problema do problema real, onde, pela complexidade da situação global, cada parte do problema é resolvido separadamente. Uma situação frequentemente abordada consiste em planear a dimensão do agrupamento de unidades individuais idênticas, de dimensões pré-definidas, numa embalagem, incidindo sobre esta última o processo de paletização. Assim, aquando da análise da situação com o objectivo de optimizar o aproveitamento

da base da palete, é importante considerar o dimensionamento adequado das unidades secundárias que se podem construir a partir da unidade elementar. Outras vezes há necessidade de considerar a possibilidade de colocação de objectos no interior de outros de maiores dimensões os quais são colocados directamente sobre a palete, ou a distribuição da carga constituída por ítens de vários tipos por paletes de dimensões distintas.

O objectivo de minimização do espaço desocupado poderá surgir associado a outros critérios de avaliação das soluções, os quais deverão ser contemplados pelos métodos adoptados para a resolução do problema, apesar de serem geralmente conflituosos com este objectivo. É geralmente necessário considerar restrições relativas ao peso e altura das paletes e limites do peso suportado pelos objectos a carregar, as quais limitarão o número de peças (camadas) a empacotar. Também as considerações da compacidade dos padrões gerados e de critérios de estabilidade se impõem pelas condições turbulentas de transporte e armazenamento a que a palete é sujeita, sendo os objectos que a constituem sujeitos a um conjunto de forças às quais deverão reagir, mantendo a sua posição na pilha, e garantindo assim a estabilidade do empacotamento. O processo de transporte da palete é outro factor que poderá determinar a admissibilidade de um plano de carga. Sempre que a palete possa estar sujeita a um sistema de transporte por pressão lateral, torna-se necessária a existência na palete de duas superfícies laterais planas de forma a possibilitar o contacto entre a palete e as pinças do sitema de pressão. Assim, os padrões de empacotamento e as formas de empilhamento deverão ser definidos de forma a garantir esta característica, sempre que necessário.

O estudo destas questões de índole prática tem vindo a ser praticamente ignorado, realçando-se o trabalho realizado por Carpenter e Dowsland [8], no qual são definidos critérios quantificáveis de avaliação dos padrões gerados por algoritmos de paletização relativamente à estabilidade e transportabilidade da palete resultante do empilhamento de camadas com esses padrões, sendo ainda referidas as inevitáveis implicações que a consideração destes critérios tem na estrutura dos algoritmos que pretendam fornecer planos de carga satisfatórios. Mais recentemente, E. Bischoff [5] propôs uma extensão ao algoritmo de Bischoff e Dowsland para a resolução do problema de minimização do espaço desperdiçado no preenchimento de um rectângulo com rectângulos de menores dimensões, incluindo a consideração de critérios de estabilidade.

2.2 Paletização de formas rectângulares

2.2.1 Formulação do problema

A forma mais comum de ocorrência do problema de paletização, sendo, por essa razão, a mais frequentemente abordada na literatura, é aquela em que os objectos a carregar apresentam a forma paralelipipédica (base rectângular), sendo comum a exigência da ortogonalidade dos padrões de empacotamento das peças, isto é, que os rectângulos da base dos objectos a carregar sejam colocados com os seus lados paralelos/perpendiculares aos lados da palete. O estudo desta forma do problema de paletização surge aqui não só por questões históricas, uma vez que esta é a forma segundo a qual o problema foi originalmente abordado, mas também como uma tentativa de adaptação dos seus conceitos e técnicas de resolução ao problema da paletização de cilindros.

2.2.2 Técnicas de resolução

O problema de paletização distingue-se dentro da classe de problemas 2D pelas características particulares que apresenta, as quais irão, por vezes, requerer o desenvolvimento de técnicas de resolução próprias e, outras vezes, permitem a adaptação das técnicas desenvolvidas para outro tipo de problemas bidimensionais. De entre estas características é de realçar a não exigência de guilhotinabilidade dos padrões de carga. Esta característica é geralmente exigida na geração de padrões de corte de placas e traduz-se pela necessidade de que a colocação das peças permita efectuar os cortes de um lado ao outro da placa ou subplacas que vão sendo cortadas. No entanto, a guilhotinabilidade dos padrões gerados na resolução de um problema de paletização não é necessária, sendo mesmo indesejável em certos casos, pois contribui para a instabilidade da palete. Quando tal ocorre, é habitual recorrer-se ao empilhamento de camadas sucessivas alternadamente rodadas de 180° ou simétricas relativamente a um eixo paralelo a um dos lados da palete, de forma a minimizar os efeitos da guilhotinabilidade dos padrões. Um procedimento alternativo consitirá na geração de mais do que um padrão diferente (normalmente dois) que serão alternadamente aplicados às camadas empilhadas, devendo procurar-se garantir sempre bases de apoio estáveis para as peças que constituem cada camada.

Tratando-se de um problema NP-difícil, a aplicação de algoritmos de resolução exactos vê-se limitada pela necessidade de obtenção dos resultados em tempo útil, justificando-se desta forma que as abordagens adoptadas na sua

resolução tendam a ser maioritariamente heurísticas. Estas técnicas permitem contornar a dificuldade da não exigência de guilhotinabilidade e ainda incluir a consideração de restrições adicionais de difícil modelização, mas que são, no entanto, comuns em Problemas de Paletização.

Existem, contudo, algumas abordagens optimizantes para o problema, baseadas em algoritmos de pesquisa em árvore, e que consistem basicamente na resolução do problema de posicionamento de rectângulos idênticos no interior de um rectângulo de maiores dimensões. Um procedimento comum consiste na adaptação da formulação proposta por Beasley [4] para a resolução do problema bidimensional, não-guilhotinável, do empacotamento de m tipos de rectângulos num rectângulo de dimensões $L \times W$, encontrando-se associados a cada tipo de rectângulo um valor, V_i, e uma quantidade disponível, b_i. É imposta a condição de aplicação de que todas as dimensões envolvidas apresentem um valor inteiro. A formulação deste problema será a seguinte (a notação usada no modelo apresentado encontra-se esquematizada na figura 2.2):

$L \times W$	dimensões do rectângulo
m	número de tipos de rectângulos
$L_i \times W_i$	dimensões do rectângulo i
b_i	quantidade disponível do rectângulo i
V_i	valor associado ao rectângulo i
$a_{ipqrs} = \begin{cases} 1, \\ 0, \end{cases}$	se $p \leq r \leq p + L_i - 1$ e $q \leq s \leq q + W_i - 1$ noutros casos
$x_{ipq} = \begin{cases} 1, \\ 0, \end{cases}$	se uma peça do tipo i é colocada com o canto inferior esquerdo em (p, q) noutros casos.

Modelo:

$$\text{Max} \sum_{i=1}^{m} \sum_{p=0}^{L_0 - L_i} \sum_{q=0}^{W_0 - W_i} V_i x_{ipq}$$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{p=0}^{L_0-L_i} \sum_{q=0}^{W_0-W_i} a_{ipqrs} x_{ipq} \leq 1, \quad r = 0, 1, ..., L_0 - 1, \quad s = 0, 1, ..., W_0 - 1,$$

$$\sum_{p=0}^{L_0-L_i} \sum_{q=0}^{W_0-W_i} x_{ipq} \leq b_i, \quad i = 1, ..., m,$$

$$x_{ipq} \in (0,1), \quad i = 1, ..., m, \quad p = 0, 1, ..., L_0 - 1, \quad q = 0, 1, ..., W_0 - 1.$$

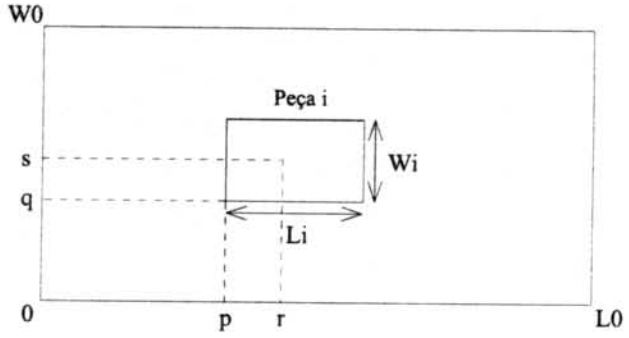


Figura 2.2: Notação usada no modelo de Beasley

A aplicação deste modelo ao problema de paletização, em que se pretende determinar o maior número de rectângulos idênticos de dimensões $a \times b$ que é possível posicionar sobre uma palete de dimensões $A \times B$ é directa, salientando-se, no entanto, dois aspectos a levar em consideração na instanciação dos parâmetros do modelo. Um primeiro aspecto relaciona-se com a rotação das peças: uma vez que o modelo apresentado não considera esta possibilidade, dois tipos de rectângulos devem ser considerados, apresentando dimensões $a \times b$ e $b \times a$. Outro aspecto a levar em consideração refere-se à limitação no número de peças que esta formulação implica. Uma vez que no problema de paletização o número de peças a colocar não é limitado, a restrição que impõe este limite pode ser ignorado. No entanto, por uma questão de eficiência dos algoritmos de resolução deste problema de programação matemática inteira, poderá ser vantajoso manter esta restrição, considerando-se $b_i = \left\lfloor \frac{A \times B}{a \times b} \right\rfloor$.

Em [13], K. Dowsland afirma que a aplicação do modelo de Beasley ao problema de paletização, caso em que o número de tipos de peças é pequeno (dois tipos de peças que consistem na rotação de 90° do mesmo rectângulo) e a quantidade disponível de cada peça é elevada, resulta num algoritmo pouco eficiente,

propondo alternativamente uma técnica optimizante baseada na aplicação da teoria de grafos a este problema.

Grande parte das heurísticas propostas para o problema de paletização baseiam-se na construção de padrões por blocos, distinguindo-se basicamente pelo número máximo de blocos que se permitem combinar na construção de um padrão, limitando desta forma o número de padrões admissíveis considerados. Como exemplos podem referir-se os trabalhos realizados por Smith e De Cani [27] (máximo de 4 blocos) e Bischoff e Dowsland [6] (máximo de 5 blocos). Em [24], J. Neliβen apresenta um resumo deste tipo de heurísticas, referindo ainda heurísticas de 7 e 9 blocos, assim como uma explicação sucinta do seu funcionamento, utilizando estes resultados no desenvolvimento de uma heurística de carácter recursivo, a qual permite obter melhorias significativas ao nível da eficácia dos padrões gerados.

A sensibilidade das soluções do problema de paletização a alterações das dimensões dos objectos envolvidos é analisada por W. Dowsland em [17]. Este aspecto é comum aos problemas de posicionamento em geral, podendo uma pequena variação nas dimensões dos objectos envolvidos determinar alterações significativas no padrão de empacotamento. Por esta razão, esta análise de sensibilidade torna-se de primordial importância em situações práticas, p.e., na determinação das tolerâncias a admitir nas dimensões estabelecidas para os rectângulos ou na selecção do material de embalagem quando é realizado o agrupamentos dos objectos em unidades secundárias destinadas a ser carregadas sobre uma palete.

A necessidade de estabelecer medidas de optimalidade das soluções de forma a permitir avaliar comparativamente o desempenho das heurísticas, e dada a dificuldade na obtenção eficiente de soluções óptimas para este problema, impôs o desenvolvimento de métodos de cálculo de estimativas tão precisas quanto possível das soluções óptimas, ou seja, a determinação de valores limites para essas soluções. Desta forma, o desempenho dos algoritmos poderá ser avaliado pela comparação das soluções obtidas por esses algoritmos com esses valores limites.

Também a eficiência dos algoritmos optimizantes poderá ser significativamente melhorada através da utilização de limites, superiores ou inferiores, conforme o problema seja de maximização ou minimização, respectivamente, como limitadores das direcções a explorar em processos de pesquisa em árvore. A utilização destes limites consiste na resolução de problemas auxiliares que, in-

corporando informação gerada até ao momento, são resolvidos em cada nó. A figura 2.3 exemplifica a utilização de limites superiores na resolução de um problema de maximização através de um algoritmo de pesquisa em árvore: para os nós P_{i1} e P_{i2}, ramificações do nó P_i, são calculados os limites superiores ub_{i1} e ub_{i2} os quais são posteriormente comparados com s^* (melhor solução encontrada até ao momento); se algum dos valores calculados para limite superior for inferior ao valor de s^*, a direcção de pesquisa que lhe corresponde é eliminada.

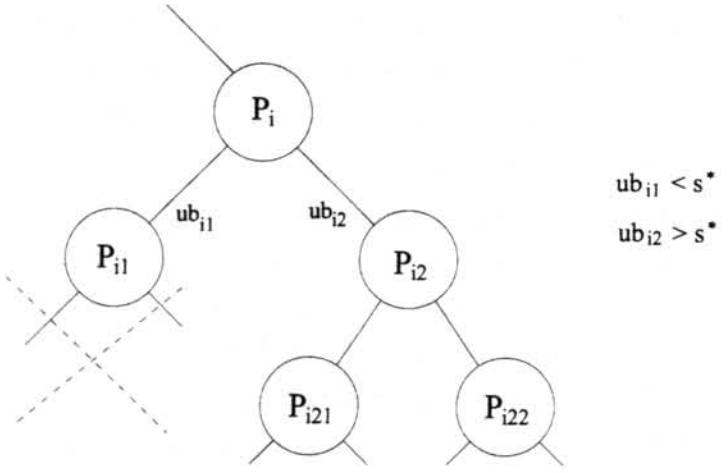


Figura 2.3: Utilização de limites em algoritmos de pesquisa em árvore

No contexto do problema de paletização, o limite superior mais simples da estimativa do número máximo de rectângulos a empacotar, consiste em tomar o maior inteiro contido no resultado da divisão da área da palete pela área do rectângulo a colocar. Tem, no entanto, a desvantagem de apresentar uma precisão reduzida, apenas 15%, de acordo com o que é referido em [12].

Estudos realizados sobre casos particulares do problema de posicionamento de rectângulos no interior de um rectângulo maior, têm também sido usados na definição de limites superiores. É o caso do trabalho apresentado em 1967 por Barnett e Kynch [3], que propõe um procedimento para a determinação de padrões óptimos para o problema, no caso em que os rectângulos a colocar apresentam largura unitária e valores inteiros para o comprimento. Estes resultados serviram de base ao trabalho realizado posteriormente por Barnes [2] que determina uma solução óptima para o problema de posicionamento de rectângulos idênticos $m \times n$, sendo m e n números primos entre si. Também

em [7], Brualdi & Foregger discutem o desenvolvimento de processos de cálculo de limites superiores para este problema, no contexto do empacotamento de objectos paralelipipédicos idênticos, numa caixa de maior dimensão. Uma conjugação destes resultados foi utilizada por J. Nelißen [24] no desenvolvimento de um novo limite, cujo desempenho é consideravelmente melhor do que o dos anteriores.

Mais recentemente, na sequência do algoritmo de pesquisa em árvore desenvolvido por K. Dowsland [13] para a resolução do problema de paletização, a mesma autora propõe um limite superior baseado nas dimensões reduzidas da palete, isto é, em dimensões que são obtidas através do cálculo de combinações lineares do comprimento e da largura do rectângulo pequeno e que maximizam a utilização do comprimento e da largura do rectângulo grande, determinando assim a área que é efectivamente utilizável na paletização. Este trabalho foi utilizado em [13], onde o processo de pesquisa em árvore é adaptado através da utilização de limites nos nós de forma a garantir soluções óptimas em tempo útil, mesmo para casos em que a aplicação directa do algoritmo original não o permitia, demonstrando assim a eficiência deste limite como acelerador do processo de pesquisa. Uma melhoria deste limite superior é introduzida por Daniels e Ghandforoush [11], que desenvolve um processo de cálculo particular para os casos em que as combinações lineares, calculadas para cada um dos lados do rectângulo pelo método proposto por K. Dowsland, não são compatíveis, conseguindo com este limite atingir a solução óptima em 57 a 80% dos casos.

2.3 Paletização de formas circulares

2.3.1 Formulação do problema

A ocorrência de situações práticas em que a base dos objectos a empacotar é circular (rolos, tubos, ...) é também bastante frequente constituindo o objecto de estudo deste trabalho. Sendo este problema vulgarmente referido como problema da paletização de cilindros, podem considerar-se englobados nesta designação todos os casos em que os objectos a empacotar apresentem uma base circular, sendo imposta a restrição de que o empacotamento seja executado em camadas, com a base circular paralela à base rectângular sobre a qual é executada a paletização. O problema consistirá então em determinar o posicionamento de círculos idênticos sobre um rectângulo, tendo como objectivo a maximização do número de círculos colocados (figura 2.4).

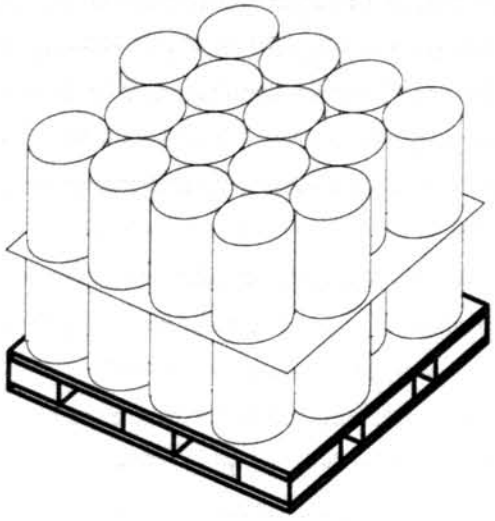


Figura 2.4: Problema de paletização de formas circulares

2.3.2 Técnicas de resolução

Apesar de ocorrerem com alguma frequência situações práticas que se identificam com o problema de paletização de cilindros, só recentemente este problema recebeu alguma atenção por parte da comunidade científica, sendo ainda escassa a literatura publicada sobre este caso particular do problema de paletização. Para justificação deste facto podem evocar-se razões históricas, uma vez que tem vindo a ser privilegiado o tratamento de formas rectangulares, aliadas à complexidade acrescida que este problema apresenta, no que respeita ao desenvolvimento de técnicas optimizantes para a sua resolução.

A aplicação do modelo proposto por Beasley apresentado na secção 2.2.2, ao problema em estudo, vê-se impossibilitada pela incapacidade de definir as variáveis de decisão binárias $a_{ipqp_0q_0}$ dada a forma circular das peças a colocar. Em [20] é apresentado um modelo de optimização não linear inteiro misto, para o problema do empacotamento numa base rectângular $A \times B$ de círculos, considerando a possibilidade destes apresentarem raios R_i diferentes (a notação usada no modelo apresentado encontra-se esquematizada na figura 2.5):

$A \times B$	dimensões do rectângulo
n	número de círculos a empacotar
R_i	raio do círculo i (círculos com o mesmo raio são considerados diferentes)
W_i	valor associado ao círculo i
$\delta_i = \begin{cases} 1, \\ 0, \end{cases}$	se o círculo se encontrar colocado no interior do rectângulo, senão
(x_i, y_i)	coordenadas do centro do círculo i, quando colocado

Modelo:

$$\text{Max} \sum_{i=1}^{n} W_i \delta_i$$

sujeito a

$$\begin{aligned}
&\delta_i R_i \leq x_i \leq (A - R_i), && i = 1, ..., n, \\
&\delta_i R_i \leq y_i \leq (B - R_i), && i = 1, ..., n, \\
&\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \geq \delta_i \delta_j (R_i + R_j), && i = 1, ..., n, \\
& && j = 1, ..., i-1, \\
&x_i \geq 0, \quad y_i \geq 0, && \forall_{i \in N},\ 1 \leq i \leq n \\
&\delta_i \in \{0, 1\} && \forall_{i \in N},\ 1 \leq i \leq n
\end{aligned}$$

Para um conjunto de n círculos esta formulação envolve n variáveis de decisão binárias (δ_i), $2n$ variáveis de decisão contínuas (x_i e y_i) e $2n + C_2^n$ restrições. As primeiras $2n$ restrições asseguram a admissibilidade do posicionamento dos círculos, os quais devem ser completamente colocados no interior do rectângulo. As seguintes C_2^n restrições previnem a sobreposição dos círculos colocados no interior do rectângulo.

O valor numérico dos coeficientes da função objectivo W_i utilizados nesta formulação dependerão do contexto de resolução do problema (área ou densidade do círculo, valor económico, prioridade do círculo, ...).

Mesmo para pequenos valores de n, as técnicas de resolução disponíveis não garantem a resolução eficiente da formulação apresentada, impossibilitando a sua resolução até à optimalidade para problemas de certa dimensão [20]. Assim, dada a complexidade apresentada por este tipo de problemas, assumem particular importância o desenvolvimento de técnicas heurísticas eficientes que garantam a eficácia das soluções propostas.

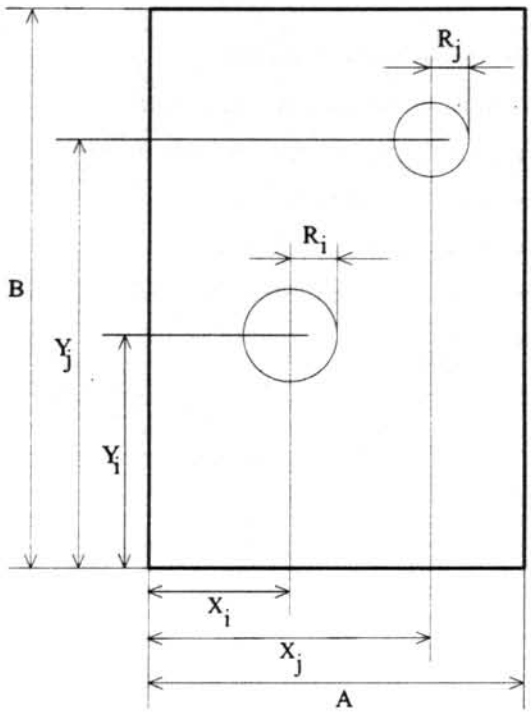


Figura 2.5: Notação usada no modelo de paletização de cilindros

2.3.3 Revisão bibliográfica

Sendo escassa a bibliografia publicada sobre o Problema da Paletização circular, e visto tratar-se do objecto de estudo do trabalho realizado, passa-se a apresentar, de uma forma mais exaustiva do que a adoptada no caso da paletização de formas rectangulares, um resumo dos artigos disponíveis que mais directamente abordam este tema.

Isermann, H. 1991

Heuristiken zur Lösung des zweidimensionalen Packproblems für Rundgefäße

Este artigo [21] propõem uma abordagem para a resolução do problema da paletização de círculos idênticos de raio r num rectângulo de dimensões $L \times B$, verificando-se a relação $L \geq B \geq 5r$. Esta abordagem fundamenta-se na enumeração de formações (padrões) pré-definidos, considerando a combinação de vários padrões, de forma a maximizar o número de círculos colocados no interior do rectângulo. São sugeridos alguns algoritmos para a geração de formações

homogéneas[2] óptimas, construídas através da justaposição de linhas e colunas congruentes, assim como heurísticas de geração de formações não homógeneas obtidas pela combinação de formações homogéneas.

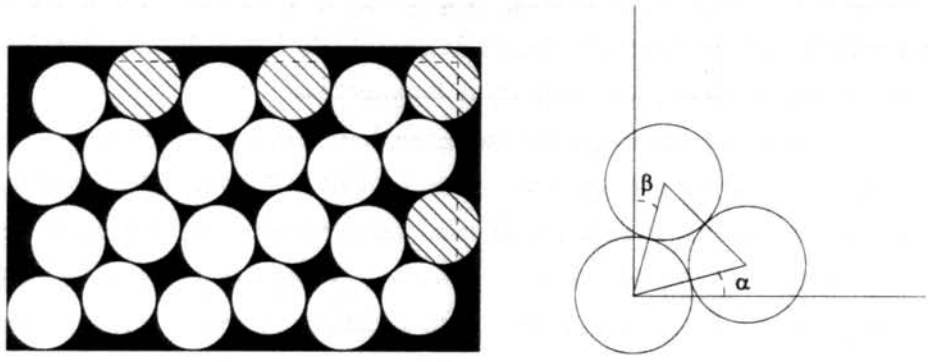
A metodologia adoptada por Isermann baseia-se na identificação de duas classes de formações homogéneas (classe A e classe B), sendo desenvolvido um procedimento que, para cada uma dessas classes permite determinar a estrutura de posicionamento óptima para os círculos. A construção destas formações homogéneas é iniciada pela colocação de um círculo no canto inferior esquerdo do rectângulo, a partir do qual se irá iniciar a construção da primeira linha e coluna da formação. São características importantes das formações homogéneas de classe A o número de linhas e colunas dessa formação, e os ângulos α e β formados pelos centros de círculos justapostos numa mesma linha ou coluna, respectivamente (figura 2.6.b)), sendo imposto que $\alpha + \beta \leq 30°$ e $0° \leq \beta \leq 30°$, de forma a garantir que os círculos não se sobrepõem. Uma vez que a limitação das dimensões da placa poderá não permitir a colocação completa da última linha e/ou coluna (círculos representados a sombreado na figura 2.6.a), esta informação constituirá também um elemento de caracterização importante, sendo a base da divisão da classe A em 4 sub-classes:

- A1: última linha e coluna completas;
- A2: última linha incompleta e última coluna completa;
- A3: última linha completa e última coluna incompleta;
- A4: última linha e coluna incompletas.

De acordo com esta classificação, a formação homogénea representada na figura 2.6.a) será de classe A1 se forem considerados as círculos representados a sombreado. Se as dimensões do rectângulo fossem tais que não permitissem o empacotamento destes círculos, então a formação constituída pelos restantes círculos seria de classe A3.

A classe B de formações homogéneas contempla os casos em que o círculo colocado no canto inferior esquerdo vai estar em contacto apenas com um círculo (figura 2.7)). As restrições angulares impostas neste caso serão $30° \leq \alpha \leq 60°$ e $\beta = 90° - \alpha$.

[2]Formações homógeneas são, segundo lo descrito neste artigo, formações em que os círculos apresentam um posicionamento relativo regular.

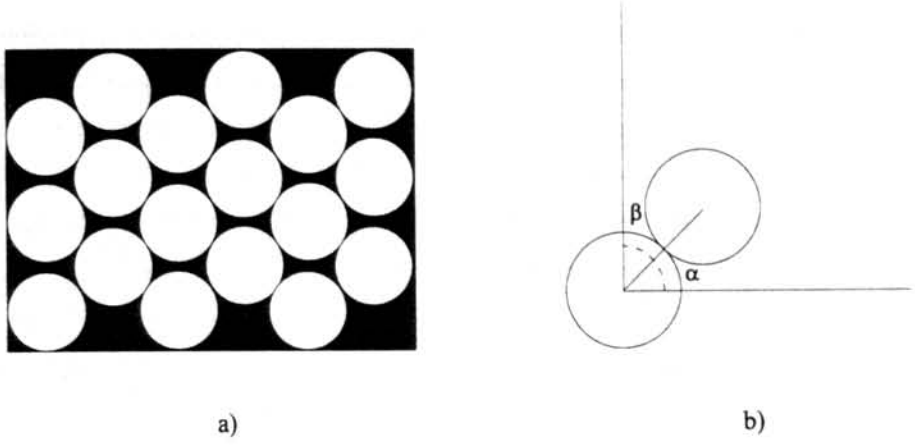


a) b)

Figura 2.6: Caracterização da formação homogénea de classe A

A determinação do maior número de círculos que é possível colocar no interior do rectângulo de dimensões $L \times B$, usando cada uma das referidas formações homogéneas, recorre a um processo lexicográfico em que, para uma ocupação total de uma das dimensões do rectângulo, os ângulos α e β são determinados de forma a minimizar a ocupação da outra dimensão. É depois calculado o número máximo de círculos que esse posicionamento relativo permite empacotar obedecendo às características da formação homogénea em causa. Demonstrando-se que a nova função objectivo de minimização, resultante desta reformulação, é estritamente monótona, são identificados os extremos dos intervalos de variação dos ângulos α e β, determinando-se o máximo número de círculos que cada configuração angular extrema permite empacotar na palete em causa. Os valores óptimos calculados para cada uma das configurações são comparados de forma a determinar o maior número de círculos que é possível empacotar usando uma estrutura de posicionamento homogénea.

No entanto, não é garantido que o posicionamento óptimo dos círculos no interior do rectângulo seja obtido com uma formação do tipo das enunciadas. A mesma filosofia de construção de blocos, referida para o caso da paletização de formas rectangulares, constitui a base da metodologia adoptada pelo autor na obtenção de formações não homogéneas, as quais são construídas através da combinação de formações homogéneas parcelares (blocos), e com as quais se consegue, por vezes, aumentar o número de círculos colocados. Na figura 2.8 é apresentado um exemplo em que, a construção de uma estrutura de posicionamento não homogénea com 4 blocos permitiu empacotar 23 círculos, mais um do



a) b)

Figura 2.7: Caracterização da formação homogénea de classe B

que o conseguido com a consideração apenas de estruturas de posicionamentos homogéneas.

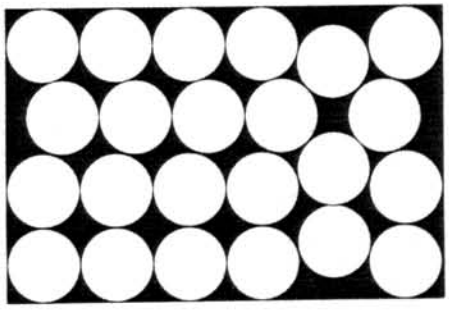


Figura 2.8: Formação não homogénea

Dowsland, K. 1991

Optimizing the palletisation of cylinders in cases

Nesta publicação [14] o problema da paletização de cilindros é abordado

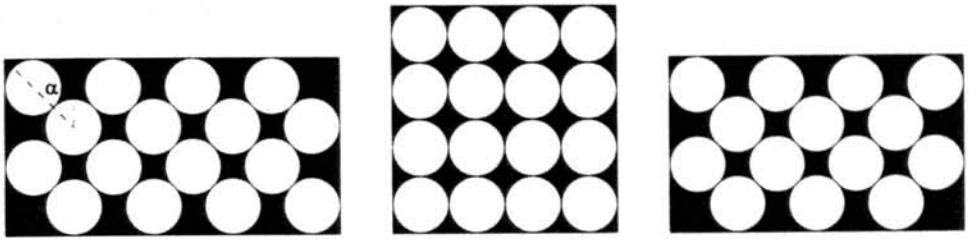
sob uma perspectiva diferente: dados os objectos de base circular com raio r e a palete de dimensões $M \times N$ sob a qual estes vão ser colocados, pretende-se determinar as dimensões $m \times n$ da base rectangular sob a qual um número pré-definido desses objectos deve ser agrupado de forma a maximizar o número destas bases circulares sobre a palete. Desta forma, a resolução do problema de paletização incidirá sobre a forma rectangular dos agrupamentos idênticos de objectos cilindricos e não sobre estes últimos.

Apesar de não abordar directamente o problema de paletização de cilindros, este artigo introduz alguns conceitos de grande utilidade na análise deste problema. Também aqui são enumeradas um conjunto de estruturas regulares[3] de posicionamento relativo dos círculos, que são depois considerados na determinação da formação óptima a incluir na base $m \times n$. As estruturas consideradas são construídas pela justaposição de linhas, sendo estas constituídas por círculos com centros colineares e dispostas paralelamente a um dos lados da palete. É considerada a possibilidade de encaixe entre duas linhas adjacentes, devendo, no entanto, garantir-se que o ângulo α entre centros de círculos em linhas adjacentes se mantém constante, sendo esta característica desejável em muitas situações práticas. Este condicionalismo reduz a três o número de tipos de estruturas admitidas, sendo estas referidas por Z (figura 2.9.a)), I (figura 2.9.b)) e X (figura 2.9.c)). A estrutura tipo Z apresenta o mesmo número de círculos em todas as linhas, encontrando-se estas alternadamente deslocadas para a direita e para a esquerda, respectivamente. A estrutura do tipo I pode ser considerada como um caso particular da estrutura Z, em que $\alpha = 0$. Nas estruturas do tipo X, linhas adjacentes diferem de um círculo, encontrando-se as linhas mais pequenas encaixadas nas linhas maiores. Esta estrutura pode ainda ser sub-dividida em outras três sub-estruturas que permitem classificar a sua constituição relativamente ao número de linhas de cada tipo: a sub estrutura X_e que apresenta um número par de linhas, a sub-estrutura X_w que apresenta um número ímpar de linhas, sendo em maior número as linhas com mais um círculo, e a sub-estrutura X_s, que também apresenta um número ímpar de linhas, mas em que as linhas de maior número são as que apresentam um menor número de círculos.

Cada uma das estruturas regulares aqui referidas tem um equivalente nas formações homogéneas enunciadas por Isermann, não sendo no entanto, verdadeiro o inverso uma vez que as estruturas regulares consideradas por K. Dows-

[3] ou homogéneas.

land não consideram todas as possibilidades contempladas pela classe A do modelo de Isermann, considerando apenas quelas em que pelo menos um dos ângulos α e/ou β, é nulo.



a) b) c)

Figura 2.9: Estruturas de posicionamento regulares. a) Est. tipo Z b) Est. tipo I c) Est. tipo X

Fraser, H. George, J. 1994

Integrated container loading software for pulp and paper industry

O problema da paletização de cilindros é novamente abordado por Fraser e George [19]no contexto da expedição de produtos de papel em forma de rolos e folhas. Neste artigo é descrito um Sistema de Apoio à Decisão (SAD) para o planeamento da produção e transporte de rolos e folhas de papel em vários contentores. Dada a dimensão das encomendas a satisfazer pode impôr-se a restrição de que o carregamento de um contentor seja feito exclusivamente com rolos do mesmo diâmetro, podendo estes apresentar alturas diversas. O planeamento do posicionamento das bases circulares dos rolos na base do contentor consistirá na resolução de um problema da paletização de cilindros, incluindo o referido SAD um método heurístico para a sua resolução. Este método baseia-se na identificação de dois padrões-tipo de posicionamento e de três regras de colocação, os quais cobrem uma larga variedade de padrões possíveis. Os padrões-tipo identificados coincidem com as estruturas regulares X e Z identificadas em [14]. As três regras de posicionamento referidas consideram a determinação do padrão de posicionamento através da resolução do problema de minimização

$$\text{Min } w_1 x_1 + w_2 x_2$$

Após a colocação do primeiro círculo no canto superior esquerdo do rectângulo, são determinadas as coordenadas de posicionamento (x_1, x_2) admissíveis para círculos sucessivos, de forma a satisfazer a função objectivo de minimização (figura 2.10). As regras de posicionamento referem-se à relação de grandeza entre os valores dos coeficientes das variáveis de decisão na função objectivo, w_1 e w_2:

Regra 1: $w_1 \gg w_2$
Regra 2: $w_1 \ll w_2$
Regra 3: $w_1 = w_2$

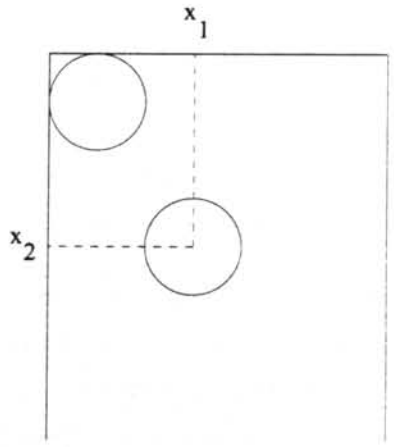
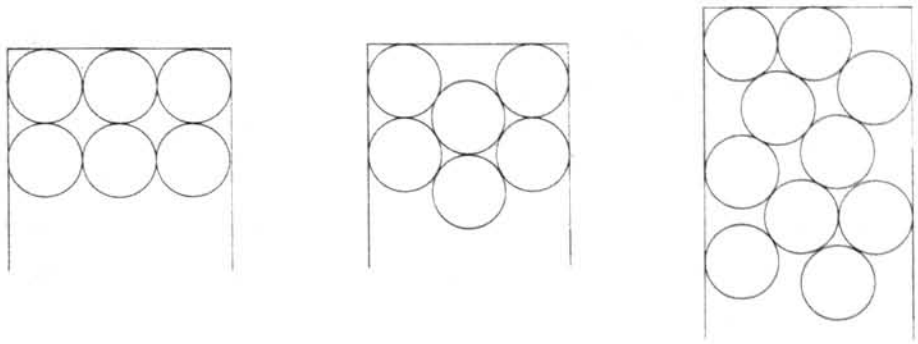


Figura 2.10: Esquema de posicionamento dos círculos

Na figura 2.11 podem observar-se padrões de posicionamento óptimos apresentados por Fraser e George, cuja geração se pode obter pela aplicação das regras anteriores à resolução do problema de minimização: a figura 2.11.a) pode ser obtida pela aplicação das regras 1 e 3, a figura 2.11.b) pode ser obtida pela aplicação da regra 3 e a figura 2.11.c) pela aplicação da regra 2.

O processo de resolução do problema consiste na geração dos cinco padrões de posicionamento mencionados para cada problema específico, sendo escolhido aquele que se apresenta mais adequado não só em termos de número de círculos colocados mas também relativamente à facilidade de empacotamento.



a) b) c)

Figura 2.11: Estruturas de geradas pela aplicação de regras de posicionamento

George, J. A. George, J. M. Lamar, B. 1995

Packing different-sized circles into a rectangular container

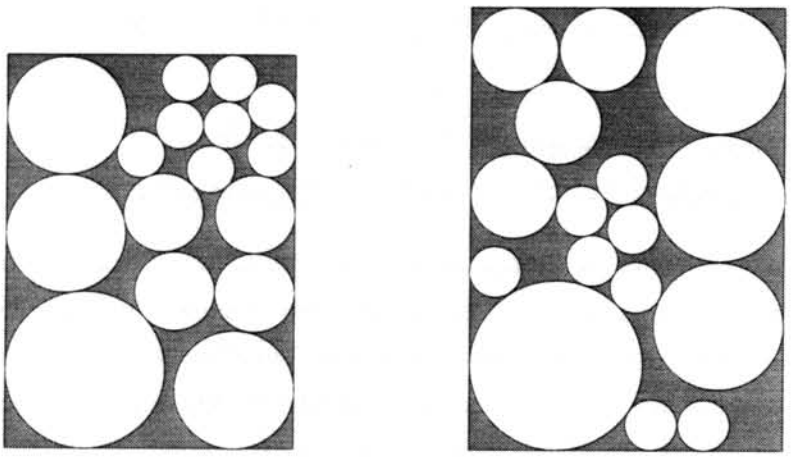
Uma abordagem inovadora ao problema da paletização de círculos foi proposta nesta publicação [20]. Motivados pelo problema de empacotar tubos de raios variados e comprimento constante, longitudinalmente num contentor, George et al. desenvolvem um conjunto de técnicas heurísticas para a determinação do padrão de posicionamento das secções circulares dos tubos num rectângulo com as dimensões da secção transversal do contentor. Estas heurísticas baseiam-se num conjunto de regras construtivas que pretendem simular práticas comuns no processo manual de empacotamento.

Apesar do problema abordado diferir conceptualmente do problema de paletização circular abordado até aqui pelos métodos de resolução referidos, uma vez que considera vários tipos de círculos e aspectos de estabilidade particulares, consistindo as técnicas de resolução na satisfação de regras de colocação de índole essencialmente prática, a referência a este trabalho impôs-se não só pelas abordagens inovadoras propostas, mas também pela possibilidade dos conceitos e métodos expostosao problema da paletização circular (círculos idênticos).

No contexto de aplicação específico das técnicas desenvolvidas, toma particular importância a estabilidade de um carregamento. Esta é avaliada pela maior ou menor necessidade de recorrer a material de enchimento para que a posição dos tubos seja mantida durante o transporte, sendo apresentadas três regras de avaliação da estabilidade do posicionamento de um círculo durante o processo de geração das soluções. Segundo essas regras, o posicionamento de um círculo é considerado estável se:

- estiver em contacto com a base do rectângulo;
- estiver em contacto com um dos lados do rectângulo e sobre um círculo de tamanho igual ou superior ao seu;
- estiver apoiado sobre dois círculos posicionados previamente.

Na figura 2.12.a) e b) são apresentadas dois padrões de empacotamento sendo a primeira classificada de estável segundo o critério apresentado e a segunda de instável.



a) Solução Estável b) Solução Instável

Figura 2.12: Estabilidade das soluções.

As seis heurísticas propostas pelos autores dividem-se, de acordo com a metodologia adoptada, em dois grupos. No primeiro grupo incluem-se duas heurísticas de posicionamento bastante complexas mas eficientes do ponto de vista da ocupação da base do rectângulo, não considerando, no entanto, aspectos relacionados com a estabilidade da carga e exequibilidade da configuração proposta. As restantes quatro heurísticas apresentam em comum a consideração da estabilidade dos círculos durante a construção dos padrões de posicionamento, assumindo uma orientação vertical para o rectângulo.

Do trabalho apresentado salienta-se o desempenho de duas heurísticas pertencentes a este último grupo, não só pela qualidade dos resultados gerados, mas também pela sua eficiência. Estas heurísticas têm em comum o facto de se basearem num processo aleatório de geração do posicionamento das peças. Na caracterização deste posicionamento é utilizada uma lista de valores escala-

res, gerados aleatoriamente, que permitem identificar a posição de cada círculo relativamente às margens do rectângulo e aos círculos que o precedem na ordem de colocação. Uma ordenação prévia dos círculos por ordem crescente do raio, permite não só satisfazer requisitos de estabilidade, mas também garantir que círculos maiores não são empacotados sobre círculos menores. Dada a facilidade de geração destas listas de posicionamento, uma destas heurísticas consiste simplesmente na geração aleatória de um número elevado destas estruturas e na sua descodificação, sendo seleccionada no final a melhor solução. A segunda heurística baseia-se na aplicação dos conceitos associados a algoritmos genéticos no desenvolvimento de um processo de pesquisa adaptativo efectuado sobre uma população constituída por listas de posicionamento geradas aleatoriamente segundo o processo descrito.

A escassez de publicações sobre o problema da paletização circular, a falta de articulação entre as abordagens propostas e a omissão de resultados experimentais não permitem a análise comparativa do desempenho das técnicas descritas.

Capítulo 3

Desenvolvimento de um Limite Superior para o Empacotamento de Cilindros

Na aplicação de métodos heurísticos à resolução de problemas de optimização surge a necessidade de definir um processo de medida da optimalidade das soluções obtidas. Idealmente, esta avaliação consistiria na medida da distância entre estas soluções e o valor óptimo para o problema. No entanto, a natureza combinatória dos problemas e a dimensão que por vezes estes assumem, torna impraticável a aplicação de algoritmos optimizantes na sua resolução impossibilitando assim o estabelecimento de uma medida exacta para avaliação do desempenho da heurística. Desta forma, recorre-se ao cálculo de valores teóricos que consistem numa estimativa do valor óptimo e com os quais se pretende estabelecer uma medida comparativa da qualidade das soluções obtidas pela aplicação da heurística. A precisão proporcionada pelos processos de cálculo destas estimativas do valor óptimo, permite considerá-las como medidas de maior ou menor fiabilidade na avaliação da qualidade dos métodos heurísticos.

A justificação do esforço investido no desenvolvimento de técnicas para a estimação de valores óptimos (limites superiores ou inferiores, conforme se trate de problemas de maximização ou minimização) ultrapassa a avaliação da qualidade das heurísticas desenvolvidas para a resolução dos problemas. A maior precisão destas técnicas possibilita utilização destes limites como níveis de aspiração em algoritmos de pesquisa em árvore, onde, através de limitações nas

direcções de pesquisa, permite ainda reduzir significativamente o tempo de processamento necessário para a obtenção da solução óptima.

Para o problema em estudo, onde se pretende maximizar o número de cilindros idênticos a carregar numa palete, procurou-se estabelecer uma estimativa do valor óptimo para cada instância do problema, através do cálculo de um majorante para esse número, sendo de toda a conveniência a definição de um valor que seja o mais aproximado possível da solução óptima. Dadas as características do problema em estudo, o cálculo do valor estimado para o número máximo de cilindros passa pela consideração do problema bidimensional do empacotamento de círculos (bases dos cilindros) num rectângulo (palete).

A estimativa obtida pela razão *área da palete/área da peça*, ineficiente para o problema de empacotamento de formas rectangulares [12], é, por maioria de razão, inadequada para o caso em estudo, uma vez que, no carregamento de formas circulares, é inevitável a existência de espaços entre estas. A adaptação com sucesso a este problema das técnicas desenvolvidas para o cálculo de limites superiores para os problemas de empacotamento de formas rectangulares vê-se impossibilitada pela forma como estas se encontram vinculadas e exploram a forma rectangular das peças. A consideração dos quadrados envolventes das bases dos cilindros, com o objectivo de aplicação de uma destas técnicas, ao conter um elevado desperdício no interior do quadrado, conduz inevitavelmente a formações em que os cilindros se encontram alinhados da forma apresentada na figura 2.9. Este processo de cálculo, não conduz, como é evidente, à estimação de um limite superior do valor máximo, podendo no entanto consistir num bom limite inferior, como veremos a seguir.

Como já foi referido, é escassa a existência de literatura sobre problemas de empacotamento de formas cilíndricas, tendo-se baseado o trabalho de desenvolvimento de um limite superior mais preciso para o número de peças a carregar numa adaptação das técnicas de composição de padrões regulares propostas em [14]. O procedimento adoptado consistiu no cálculo de um limite inferior para o problema de minimização do espaço desperdiçado no carregamento de cilindros, obtendo-se assim uma medida reduzida da área útil da palete. É a razão entre esta área reduzida e a área da base do cilindro que permitirá estabelecer um valor mais aproximado para o número máximo de cilindros a empacotar.

3.1 Cálculo de um limite inferior para o desperdício

Considere-se o problema do carregamento de uma palete de dimensões $X \times Y$ com cilindros de raio R.

O método de cálculo proposto para a redução da área útil da palete parte de um valor de 100% da área da palete ($X \times Y$), tentando quantificar espaços que inevitavelmente ficarão desocupados, qualquer que seja o padrão óptimo de empacotamento. O processo de identificação destes espaços deverá ser executado com a máxima precaução, de forma a não sobre-avaliar a área livre, o que poderia conduzir a uma sub-avaliação do número máximo de cilindros a empacotar.

A avaliação do espaço livre total (desperdício) na palete, irá considerar a existência de dois tipos de desperdício:

- desperdício existente nas margens da palete (desperdício externo - D_e);
- desperdício existente no interior do empacotamento (desperdício interno - D_i).

Assim, o desperdício total, D, será obtido pela soma dos desperdícios pelos desperdícios parciais, D_e e D_i. Uma vez que a avaliação dos desperdícios parciais se processa de forma independente, deveremos garantir que o valor estimado para cada um destes desperdícios (D'_e e D'_i) não ultrapasse o desperdício mínimo de cada tipo, garantindo assim que a sua soma (D') constitui um limite inferior para o desperdício total (D) apresentado pela solução óptima:

$$D = D_e + D_i$$
$$D' = D'_e + D'_i$$
$$D'_e \leq D_e \wedge D'_i \leq D_i \Rightarrow D' \leq D.$$

3.1.1 Cálculo do desperdício externo

No desenvolvimento de um método de cálculo do limite inferior para o desperdício externo obtido no empacotamento de cilindros, procurar-se-á provar que este desperdício é mínimo quando os cilindros externos, que delimitam o agrupamento de cilindros empacotados, se encontram alinhados em contacto com a margem da palete conforme representado na figura 3.1.a).

O limite inferior para a área externa será então calculado com base no número máximo de cilindros que é possível encostar a cada margem da palete,

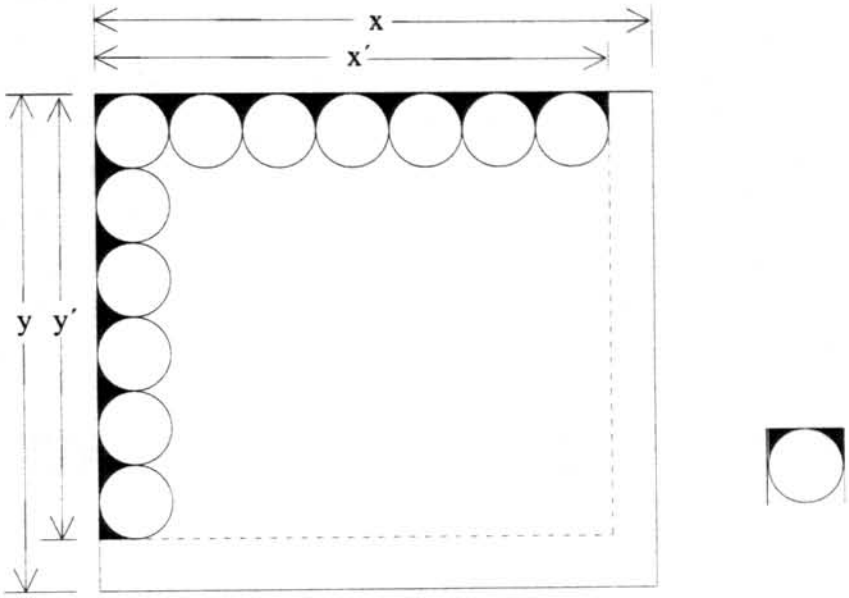


Figura 3.1: Desperdício externo mínimo

contabilizando a área livre daí resultante, considerando para tal a palete de dimensões reduzidas $(X' \times Y')$. Estas dimensões consistem na maior combinação linear do diâmetro dos cilindros contida em cada um dos lados da palete, X e Y. Isto é, sendo

$$N_x = \left\lfloor \frac{X}{2R} \right\rfloor \text{ e } N_y = \left\lfloor \frac{Y}{2R} \right\rfloor$$

teremos, para dimensões reduzidas da palete:

$$X' = N_x \times 2R \text{ e } Y' = N_y \times 2R.$$

O cálculo do limite inferior para o desperdício externo, consistirá na soma das áreas livres indicadas a sombreado na figura 3.1.a), existentes junto às quatro margens da palete, sendo o seu valor, D'_e, dado pela expressão:

$$D'_e = 2(N_x + N_y - 1)A,$$

onde $A = (2 - \frac{\pi}{2})R^2$ representa o desperdício associado a cada círculo externo, encontrando-se assinalado a sombreado na figura 3.1.b).

Passaremos agora a demonstrar que esta área corresponde, de facto, a um limite inferior do desperdício externo para o empacotamento de círculos de raio R numa palete de dimensões $X' \times Y'$, consistindo, por extensão deste resultado,

num limite inferior para o mesmo desperdício quando o carregamento é feito numa palete de maiores dimensões ($X \times Y$).

A consideração de outro tipo de disposição dos círculos junto à margem da palete exigirá a remoção de pelo menos um dos círculos, permitindo assim a formação de espaço livre entre estes círculos e passando a área externa de desperdício a ser delimitada também por círculos pertencentes à segunda linha de empacotamento. O número de novos espaços junto à margem apresentados por esta disposição dos círculos terá que ser sempre superior ao número de peças removidas, pois, de outra forma, estariamos novamente na situação inicial.

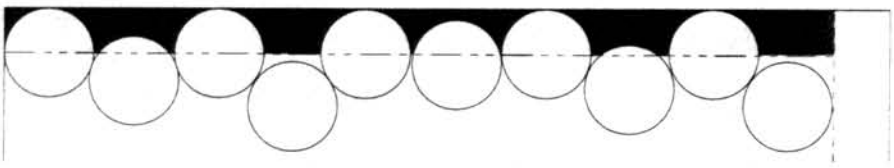


Figura 3.2: Desperdício externo

Consideremos a situação representada na figura 3.2 em que, com a remoção de n círculos externos, foi construída uma formação de forma a permitir o aparecimento de novos espaços junto á margem delimitados por círculos da segunda linha de empacotamento.

Distinguiremos a possibilidade de formação de dois tipos de espaços: aquele apresentado na figura 3.3 em que os círculos da segunda linha de empacotamento que se encontram a delimitar os novos espaços gerados ultrapassam a linha de união entre os centros dos círculos que se encontram encostados à margem (tipo I) e os espaços em que isso não acontece (tipo II) exemplificados na figura 3.4 Para demonstrar que o desperdício externo apresentado por esta disposição das peças é maior do que o correspondente à solução inicial, considerar-se-á as áreas assinaladas a sombreado na figura 3.2 como uma aproximação da área efectiva dos novos espaços gerados. Sendo o seu valor inferior à área real do espaço a que se encontra associada, estas vão permitir provar que o valor total da área do desperdício externo associada a estes novos espaços é superior ao desperdício correspondente às n peças removidas $A = (2-\frac{\pi}{2})R^2$, quando estas se encontram encostadas à margem da palete.

Comecemos por considerar os espaços do primeiro tipo representados na figura 3.3, procurando determinar qual o posicionamento relativo dos três cilindros delimitadores destes espaços que minimiza o desperdício externo. Procu-

remos então minimizar o valor A_r da área reduzida associada a espaços deste tipo:

$$A_r = R \times l - A_s$$

onde A_s corresponde à área do segmento de círculo conforme o indicado na figura 3.3 e l é função da distância da fronteira do círculo central à margem da palete (h):

$$A_s = R^2 \left(\arccos\left(\frac{R-h}{R}\right) - \left(\frac{R-h}{R}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{R-h}{R}\right)^2} \right)$$
$$l = 2\left(\sqrt{\left(4R^2 - (R-h)^2\right)} - R\right)$$
$$0 \leq h \leq R$$

A derivada da função A_r em ordem a h permite-nos calcular os seus pontos extremos através da resolução da equação:

$$\frac{dA_r}{dh} = \frac{2R(R-h)}{\sqrt{4R^2 - (R-h)^2}} - \frac{2\left(R^2 - (R-h)^2\right)}{\sqrt{R^2 - (R-h)^2}} = 0$$

Esta função apresenta apenas um ponto extremo no interior do intervalo de variação de h, sendo este um máximo relativo da função, pelo que podemos concluir que o valor de h que minimiza o desperdício se encontra na fronteira desse intervalo. Uma vez que $A_r(h = 0) > A_r(h = R)$, podemos afirmar que, para este tipo de espaços, o desperdício delimitado pelas três circunferências é mínimo quando estas se encontram encostadas à margem da palete ($h = R$). No caso de espaços deste tipo que surjam nas extremidades do empacotamento, a área que lhes está associada é, como se pode concluir por inspecção visual, superior à apresentada por espaços deste tipo delimitados por três círculos.

Considerando a possibilidade de encostar n círculos à margem da palete, e sendo e o número total de novos espaços gerados com uma configuração das peças do tipo representado na figura 3.2 ($e = n + i$, $i \geq 1$) e e_1 o número de espaços do tipo representado na figura 3.3 (tipo I), poderemos considerar, para limite inferior da área associada aos restantes e_2 espaços, o somatório das áreas rectangulares representadas a sombreado na figura 3.4. O seu valor pode ser calculado através da expressão $R \sum_{i=1}^{e_2} l_i$, onde l_i representa as larguras parciais desses espaços. Como já foi referido, estes espaços distinguem-se dos anteriores pelo facto de os círculos da segunda linha de empacotamento, que se encontram a delimitar os espaços externos, não ultrapassarem a linha de união entre os centros dos círculos que lhe são adjacentes.

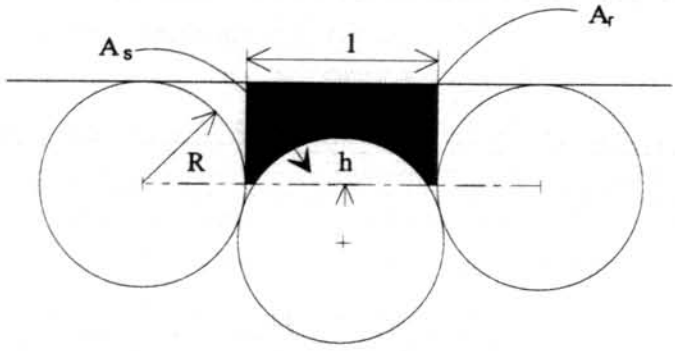


Figura 3.3: Desperdício externo (tipo I)

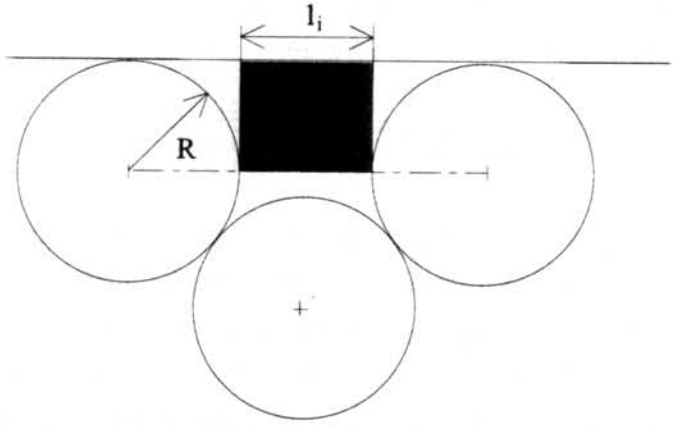


Figura 3.4: Desperdício externo (tipo II)

No caso de ϵ_1 não ser inferior a n pode-se desde já afirmar que o desperdício associado à nova configuração é superior ao desperdício apresentado pela solução inicial uma vez que o desperdício associado a cada um deste ϵ_1 espaços é superior ao desperdício associado a cada uma das n peças retiradas, como se demonstrou anteriormente.

Consideremos agora o caso mais geral, em que a condição anterior não se verifica e procuremos provar que o desperdício obtido com uma configuração diferente da apresentada na figura 3.1 é sempre superior aquele que esta configuração apresenta, i.e., demonstremos que:onde A_{ri} corresponde à área A_r associada ao círculo i.

$$\sum_{i=1}^{e_1} A_{ri} + R \sum_{i=1}^{e_2} l_i \geq nA$$

Decompondo a inequação anterior, passaremos a ter que:

$$\sum_{i=1}^{e_1} A_{ri} + R \sum_{i=1}^{e_2} l_i \geq e_1 A + (n - e_1)A = \sum_{i=1}^{e_1} A + (n - e_1)A$$

Uma vez que $\sum_{i=1}^{e_1} A_{ri} \geq \sum_{i=1}^{e_1} A$, resta provar que $R \sum_{i=1}^{e_2} l_i \geq (n - e_1)A$ para que a desigualdade inicial fique provada.

Considerando o caso limite (pior caso) em que as e_1 peças se encontram encostadas à margem da palete, minimizando o somatório das larguras dos restantes espaços, teremos que:

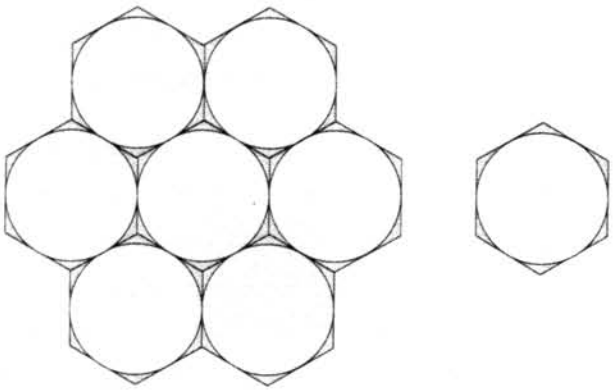
$$\sum_{i=1}^{e_2} l_i > 2R(n - e_1) \Rightarrow 2(n - e_1)R^2 \geq (n - e_1)\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)R^2$$

Desta forma se demonstra que, de facto, a disposição das peças que conduz a um desperdício externo mínimo é aquela em que as peças se encontram alinhadas em contacto com a margem da palete, permitindo assim considerar o desperdício associado a esta disposição como um limite inferior para D_e. A extensão destas conclusões, obtidas para a dimensão reduzida da palete, à sua dimensão real é imediata se considerarmos que este acréscimo da dimensão não permite alinhar mais nenhum círculo com os restantes.

3.1.2 Cálculo do desperdício interno

Antes de mais deve referir-se que a mínima área ocupada pelo carregamento de um círculo no interior do empacotamento é a área do hexágono envolvente. Este facto pode ser facilmente observado na figura 3.5.a) onde o carregamento de círculos numa estrutura tipo colmeia apresenta um encaixe perfeito entre estes, minimizando a área interna livre e permitindo definir as suas envolventes hexagonais sem que haja sobreposição entre elas. De facto, no empacotamento de círculos idênticos é este tipo de encaixe que apresenta um desperdício interno mínimo, uma vez que não é possível definir uma disposição alternativa que conduza a uma menor área desocupada entre os círculos. Por esta razão podemos afirmar que a cada peça se encontra associado um desperdício interno mínimo resultante da consi-deração da sua envolvente hexagonal. No processo de estimação do desperdício interno mínimo do padrão de empacotamento, procurou-se aproveitar este facto através da enumeração das diferentes estruturas regulares que apresentam esta disposição relativa entre os círculos, sendo seleccionada aquela que conduz a um maior número de peças colocadas. Tratando-se de uma solução admissível para o problema, a solução óptima

apresentará um número de peças igual ou superior ao desta solução, o que permite afirmar que o desperdício interno existente na solução óptima nunca será inferior ao valor obtido pela contabilização das áreas internas livres que a disposição regular seleccionada apresenta, uma vez que corresponde ao desperdício mínimo associado a cada círculo. A contabilização do desperdício externo não é calculada com base na envolvente hexagonal por esta conduzir a uma avaliação deste desperdício menos precisa do que a exposta atrás.

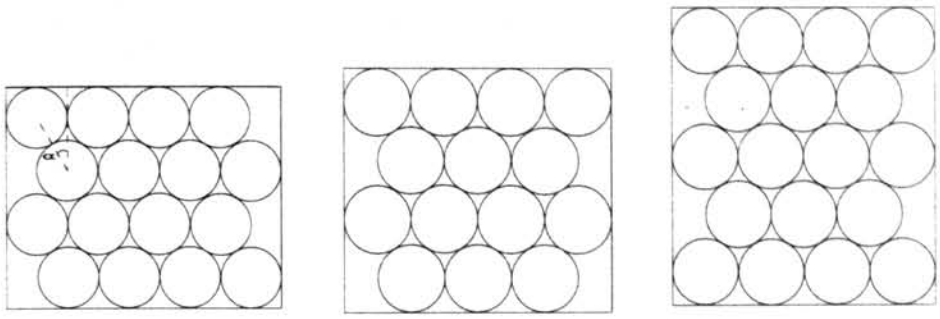


a) b)

Figura 3.5: Envolvente hexagonal

No processo de cálculo do desperdício interno, foram consideradas duas das estruturas regulares identificadas em [14] por Z e X. A estrutura tipo Z apresenta o mesmo número de círculos em cada uma das suas linhas ao contrário da estrutura tipo X em que o número de círculos em linhas contíguas difere de uma unidade. Dentro desta última categoria, distinguiram-se ainda os casos em que um empacotamento em X apresenta um número par ou ímpar de linhas. Para o estudo em curso interessou apenas considerar padrões que apresentem a disposição relativa dos círculos que conduz à minimização do espaço livre entre eles (figura 3.6), ou seja, em que o ângulo α, formado pelos centros dos círculos em linhas contíguas e a margem da palete, toma o valor de 30°, pois é o ângulo que permite o contacto de círculos de uma mesma linha (estrutura hexagonal).

A caracterização de cada uma destas estruturas relativamente às dimensões do empacotamento (C e L), em função do número de linhas do empacotamento



a) Z b) X (par) c) X (impar)

Figura 3.6: Estruturas regulares ($\alpha = 30°$)

Estrutura	Comprimento	Largura
Z	$C = (1 + (2S - 1)\ \text{sen}\alpha) \times 2R$	$L = (1 + (V - 1)\ \cos\alpha) \times 2R$
X (par)	$C = (1 + 2S\ \text{sen}\alpha) \times 2R$	$L = (1 + (V - 1)\ \cos\alpha) \times 2R$
X (impar)	$C = (1 + 2S\ \text{sen}\alpha) \times 2R$	$L = (1 + (V - 1)\ \cos\alpha) \times 2R$

Tabela 3.1: Estruturas regulares

(V) e do número de peças da menor linha[1] (S), é apresentada na tabela 3.1 para o carregamento de círculos com raio R [14].

A determinação do limite inferior para o desperdício interno, passa pela enumeração das diferentes soluções para a instância em causa do problema, seleccionando aquela que permite empacotar um maior número de peças.

O desperdício obtido passa pela contabilização dos desperdícios internos delimitados por três círculos em contacto (figura 3.7).

O desperdício interno obtido com cada uma das configurações atrás referidas depende do número de linhas que é possível empacotar (V) e do número de peças da menor linha (S). A caracterização de cada estrutura relativamente ao número de peças empacotadas (N), condicionado pelas dimensões da palete, e ao desperdício interno ($Desp$) apresentado por cada uma das estruturas é feita na tabela 3.2, onde $DespI$ representa o desperdício interno a três círculos (figura 3.7):

[1] Para a estrutura regular tipo Z, S representa o número de círculos que contém cada linha. Para as estruturas do tipo X, S representa o número de círculos da linha com menor número de peças.

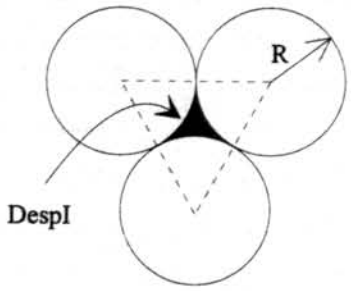


Figura 3.7: Desperdício interno ($DespI$)

Estrutura	Número de Peças	Desperdício
Z	$N = V \times S$	$Desp = (V-1) * 2(S-1) * DespI$
X (par)	$2N = V \times (2S+1)$	$Desp = (V-1) * (2S-1) * DespI$
X (impar)	$2N-1 = V \times (2S+1)$	$Desp = (V-1) * (2S-1) * DespI$

Tabela 3.2: Desperdício em estruturas regulares

$$DespI = R^2 \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)$$

Inerente ao processo adoptado no cálculo do desperdício interno mínimo existente na solução óptima, está a definição de um limite inferior para o número máximo de peças a empacotar, uma vez que passa pela determinação de uma solução admissível para o problema. Dada a finalidade do cálculo desta solução (determinação de um limite inferior para o desperdício interno), esta poderá não apresentar a estrutura regular que conduz a um maior número de peças colocadas. O refinamento deste valor poderá por vezes conseguir-se pela determinação do número de círculos que um carregamento em I ($\alpha = 0°$) possibilita, uma vez que, não tendo sido anteriormente considerada esta estrutura regular de empacotamento, o cálculo do número máximo de círculos que permite empacotar é imediato ($N_x \times N_y$).

3.2 Resultados Computacionais

Os métodos de cálculo de limites superior e inferior para o problema de paletização descritos neste capítulo foram testados com um conjunto de instâncias de tipologia diversificada, de forma permitir estudar o sua qualidade em função do tipo de instância a que se aplica. Os resultados obtidos encontram-se suma-

Problema	Red. Int. (Max)	Red. Int. (LI)	LI vs LF
data1	0.51	0.50	0.06
data2	0.54	0.53	0.08
data3	0.35	0.35	0.00
	0.47	0.46	0.05

Tabela 3.3: Resultados computacionais

riados na tabela 3.3. Estes resultados encontram-se agrupados por dimensão das instâncias consideradas: data1, data2 e data3, e consistem em agrupamentos em que a área do círculo (base dos cilindros) é de 5%, 10% e 15% da área da palete, respectivamente.

Na impossibilidade de cálculo dos valores óptimos para estes problemas, procedeu-se à comparação dos limites superiores calculados com o maior número de cilindros que foi possível colocar no rectângulo através da execução de diversas corridas para cada instância dos algoritmos heurísticos de paletização que serão descritos no capítulo 4, podendo este valor ser considerado como um limite inferior do valor óptimo. A melhoria de precisão proporcionada pelo método de cálculo do limite superior desenvolvido foi medida pela razão da distância entre este e o maior valor obtido para o problema relativamente à estimativa baseada na razão entre as áreas (**Red. Int. (Max)**), isto é, através da expressão:

$$Red.Int.(Max) = \frac{Limite\ Superior - Máximo}{\frac{Área\ da\ palete}{Área\ do\ círculo} - Máximo}$$

Como se pode observar na tabela 3.3, aredução relativa deste intervalo foi em média, para as instâncias do problema testadas, de 47%, havendo mesmo coincidência entre os valores do limite superior e o número máximo de peças que a heurística conseguiu empacotar em três dos casos testados.

A identificação de um limite superior e inferior para o número de cilindros a carregar permite definir, à partida, um intervalo de localização do valor óptimo, sendo de toda a conveniência o estreitamento da amplitude desse intervalo. A tabela anterior permite observar em **Red. Int. (LI)** a redução da amplitude deste intervalo conseguida com o processo de cálculo do limite superior proposto, relativamente ao definido pela razão das áreas, considerando como limite inferior do intervalo o número máximo de peças que possibilita uma estrutura regular de empacotamento (**LI**). De facto, é significativa a redução da amplitude do intervalo, tendo sido em média de 46% relativamente à precisão permitida pelo

método da razão das áreas. Por vezes, são mesmo conseguidos intervalos de amplitude nula, o que permite desde logo identificar a solução óptima sem recorrer a outros algoritmos.

Na tabela 3.3 é ainda feita a análise comparativa dos valores obtidos para limites inferior e superior, através da razão entre as distância do limite inferior ao máximo e a distância do máximo ao limite superior calculado (**LI vs LF**), isto é, **LI vs LF** é calculado através da expressão:

$$LI\ vs\ LF = \frac{Máximo - Limite\ Inferior}{Limite\ Superior - Máximo}$$

A análise dos resultados permite concluir da maior proximidade do limite inferior ao número máximo de círculos colocados, consistindo assim numa estimativa mais precisa do número máximo de peças admitido no empacotamento. De facto, dos 27 casos testados, apenas em três deles o valor do limite inferior não coincidiu com o número máximo de peças.

O processo proposto para o cálculo de um limite superior para o problema da paletização de cilindros permite obter uma melhoria significativa relativamente à estimativa obtida pela razão *área da palete/área da base do cilindro.* No entanto, o limite inferior inerente ao processo de cálculo apresentado constitui uma estimativa mais eficaz do número máximo de peças, coincidindo estes dois valores, na maioria dos casos testados.

Em [21], é referido um método de cálculo do limite superior para o número de círculosidênticos que é possível colocar sem sobreposição num poliedro convexo bidimensional com área A, desde que nenhum dos ângulos do poliedro seja superior a 120° (o que inclui o rectângulo). Este limite foi proposto por Segre e Mahler e é calculado, para o caso do rectângulo, pela expressão:

$$Limite\ Superior\ S\&G = \frac{Área\ do\ rectângulo}{\sqrt{12}r^2}$$

onde r representa o raio do círculo. Os valores obtidos pela aplicação desta expressão às instâncias estudadas não conduziram, em nenhum dos casos, a valores inferiores aos calculados pelo método de cálculo do limite superior desenvolvido neste capítulo, apresentando mesmo valores superiores em 13 das 27 instâncias testadas.

Desta forma, pode afirmar-se que o método desenvolvido para o cálculo de um limite superior para o número de círculos a posicionar sem sobreposição no interior de um rectângulo, constitui uma melhoria relativamente aos métodos de cálculo até agora disponíveis. No entanto, verifica-se ainda que o processo

de cálculo do limite inferior aqui proposto constitui uma medida mais precisa do número máximo e círculos.

Capítulo 4

Aplicação do Algoritmo de Pesquisa por Arrefecimento Simulado à Paletização de Cilindros

Neste capítulo serão descritos os algoritmos de pesquisa implementados para a resolução do problema da paletização de formas circulares. A concepção destes algoritmos baseou-se numa meta-heurística: a pesquisa por arrefecimento simulado[1].

Na secção seguinte proceder-se-á a uma breve descrição do algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado. Os conceitos fundamentais envolvidos serão referidos no contexto da analogia entre este algoritmo e o processo de arrefecimento e cristalização da matéria sólida. É também aí apresentada a nomenclatura que será posteriormente utilizada na descrição do trabalho de implementação realizado.

Foram adoptadas duas abordagens na aplicação do algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado ao problema em estudo. Estas diferem em questões específicas de implementação relacionadas com a estrutura de vizinhança estabelecida e com a formulação da função objectivo. Na secção 4.2.1, é apresentada uma versão do algoritmo, designada ASMinS, na qual, partindo de uma solução inicial com número pré-determinado de peças colocadas aleatoriamente sobre a

[1]Será aqui utilizada a designação *algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado* proposta em [25] em substituição do termo anglo-saxónico *simulated annealing*.

palete, o objectivo consiste na determinação do posicionamento que conduz à minimização da sobreposição. A resolução do problema de paletização consistirá na aplicação sucessiva deste algoritmo a instâncias do problema com número de peças variável (algoritmo PAS1). Uma outra versão da implementação, designada por ASMaxP, é apresentada na secção 4.2.2, a qual difere da anterior pela possibilidade de variação do número de peças ao longo da pesquisa, procurando aliar a minimização da sobreposição apresentada pela solução final com a maximização do número de círculos colocados.

4.1 O algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado

A aplicação do algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado à resolução de problemas de optimização combinatória tem tido bons resultados para uma vasta gama de aplicações, pelo que tem vindo a receber grande atenção nos últimos anos por parte da comunidade científica de áreas diversas (matemática, investigação operacional, estatística, física e ciências da computação).

O nome do algoritmo deriva da analogia estabelecida entre a resolução de problemas de optimização combinatória e a modelização do processo de arrefecimento e cristalização de corpos sólidos, baseada no algoritmo proposto por Metropolis et al. [23]. A aplicação deste método à resolução de problemas de optimização combinatória deve-se originalmente ao trabalho de Kirkpatrick et al. [22] e Cerny [9]. Desde aí, o algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado tem sido aplicado na resolução de problemas em diversas áreas tais como projecto de circuitos de VLSI, processamento de imagem, física e química molecular, ou escalonamento de tarefas.

O processo físico que serve de base a esta analogia pressupõe o aquecimento prévio de um corpo sólido de forma a que as suas partículas adquiram energia suficiente para quebrarem as ligações intramoleculares e se movimentarem livremente. Neste estado, as partículas assumem uma disposição aleatória, tendendo a reorganizar-se segundo uma estrutura reticular particular à medida que a temperatura diminui e o corpo solidifica. Este arrefecimento deve ser suficientemente lento de forma a permitir o estabelecimento de uma estrutura correspondente ao equilíbrio térmico a cada temperatura, evitando assim a incorporação de defeitos durante o processo de arrefecimento. Estes impediriam a obtenção final da estrutura cristalina de energia de interacção mínima entre

as partículas,o que se traduziria na conclusão do processo de arrefecimento num ponto de mínimo local. Quando se procede a uma diminuição rápida da temperatura, o sistema é conduzido através de um conjunto de estados em que o nível de energia tende a ser elevado, uma vez que não é permitido o estabelecimento do equilibrio térmico a cada temperatura. Por outro lado, o arrefecimento lento do sistema permite atingir o equilíbrio a cada nível possibilitando o estabelecimento de uma estrutura cristalina de menor nível energético.

O algoritmo de Metropolis propõe um método de Monte Carlo para simular a evolução para o equílibrio térmico de um sólido a uma temperatura fixa, através da geração sucessiva de um elevado número de estados. Este algoritmo parte de uma disposição inicial das partículas, sendo, em cada iteração, seleccionada aleatoriamente uma partícula que é submetida a uma perturbação também de carácter aleatório. Se o valor energético do estado resultante for inferior ao do estado anterior, este passa a estado corrente; se, por outro lado, a variação da energia for positiva, a aceitação do novo estado é determinada por uma função de probabilidade do tipo $e^{-\frac{\Delta E}{K_b T}}$, em que T é a temperatura e K_b é uma constante física (constante de Boltzmann). Desta forma, a probabilidade de um estado de energia superior ser aceite diminui com a diminuição da temperatura. Para um elevado número de iterações, o sistema tende para o equílibrio térmico.

O algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado consiste na aplicação sucessiva do algoritmo de Metropolis a temperaturas com valores decrescentes. Na analogia estabelecida, faz-se corresponder os diferentes estados térmicos a diferentes soluções do problema de optimização combinatória e à energia do sistema associa-se o valor da função objectivo a ser minimizada, consistindo o algoritmo na pesquisa do estado de equilíbrio térmico a cada temperatura, até que seja atingido o estado de "congelação", a partir do qual não é possível diminuir o seu nível energético. É a diminuição do valor da temperatura que simula o arrefecimento e determina o conjunto de estados admíssiveis, constituindo por isso o parâmetro de controlo do algoritmo.

O algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado será aqui descrito, aplicado a problemas de optimização combinatória, com minimização da função objectivo, sendo imediata a sua adaptação a problemas de maximização. Grande parte destes problemas são NP-difíceis, o que significa que o esforço computacional necessário para a sua resolução até à optimalidade é uma função exponencial do tamanho da instância do problema. Tratando-se de um método heurístico, o algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado não garante a optimalidade

da solução obtida, permitindo geralmente obter soluções de qualidade aceitável com um tempo de processamento razoável.

O algoritmo parte de um estado inicial a uma determinada temperatura. O sistema é alterado pela geração de uma novo estado pertencente à vizinhança da solução original, e ao qual corresponde uma alteração do valor da função objectivo. Se esta variação for negativa, a passagem para o novo estado é imediatamente aceite. Se, por outro lado, a essa transformação corresponder um aumento do valor da função objectivo, a sua aceitação irá ser determinada por uma função de probabilidade que geralmente toma a forma de $e^{-\frac{\Delta E}{T}}$, onde ΔE representa a variação do valor da função objectivo provocada pela transformação e T é o parâmetro de controlo correspondente à temperatura. O algoritmo prossegue gerando a cada temperatura um número de vizinhos pré-definido. O valor da temperatura vai decrescendo, até que o valor da solução se mantenha inalterado para um determinado número de temperaturas sucessivas. O algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado é apresentado na figura 4.1.

Esta versão do algoritmo apresenta uma ligeira alteração relativamente à sua forma original, uma vez que guarda a melhor solução encontrada durante a pesquisa, apresentando-a como solução final e afastando-se assim da analogia física do método. De facto, uma vez que durante a pesquisa, o algoritmo aceita soluções piores do que a solução corrente, é possível que a solução final não seja a melhor solução encontrada. Com a alteração apresentada, é possível obter soluções de melhor qualidade sem acréscimo significativo do esforço computacional.

Na implementação do algoritmo é ainda necessário proceder a escolhas de índole genérica e específica do problema a tratar. As decisões de carácter genérico a tomar passam pela forma de determinação da temperatura inicial, pela selecção do esquema de arrefecimento (função de variação da temperatura e número de iterações a cada temperatura) e definição da função de probabilidade de aceitação e do critério de paragem do algoritmo.

O valor da temperatura inicial (T_0) é geralmente elevado, de forma a permitir a aceitação da maior parte das transformações e evitar assim que o sistema fique retido num óptimo local, logo numa fase inicial da pesquisa, o que, na analogia física, corresponde ao aquecimento de um corpo sólido até que todas as partículas se encontrem dispostas aleatoriamente no líquido. No entanto, o estabelecimento de uma temperatura inicial demasiado alta poderá originar

```
algoritmo arrefecimento_simulado;
    x_n = gera_solução_inicial();
    x* = x_n;
    F* = F(x_n);
    T_n = temperatura_inicial();
    repete
        para k = 1 até L_n
            x = vizinho_aleatório(x_n);
            se F(x) ≤ F(x_n) então
                x_n = x;
                se F(x) < F* então
                    x* = x;
                    F* = F(x);
            senão
                ΔF_n = F(x) − F(x_n)
                se p ∈ [0,1] ≤ p(ΔF_n, T_n) então
                    x_n = x;
        actualiza(L_n);
        actualiza(T_n);
    enquanto critério_paragem == falso;
```

Figura 4.1: Algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado.

perdas de eficiência consideráveis, uma vez que se perderá bastante tempo num estado demasiado volátil do sistema.

O esquema de arrefecimento proposto inicialmente por Kirkpatrick et al. consistia numa diminuição geométrica da temperatura: $T_{n+1} = \alpha T_n$, $(0 < \alpha < 1)$, onde o factor α é uma constante com valores típicos entre 0.90 e 0.99, de forma a produzir pequenas variações no valor da temperatura, decrescendo a amplitude destas variações com a diminuição da temperatura. Este esquema de arrefecimento é o mais usual, mostrando-se satisfatório para escolhas adequadas dos outros parâmetros do algoritmo. No entanto, é também possível encontrarem-se esquemas de arrefecimento do tipo adaptativo, em que o valor da temperatura varia com o número de soluções aceites ou rejeitadas na temperatura anterior.

A definição do número de iterações executadas à mesma temperatura (L_n) encontra-se directamente relacionado com a estrutura de vizinhança e esquema de arrefecimento adoptados. Nalguns casos, o número de iterações é determinado pelo número de soluções aceites, sujeito a um limite superior constante para as soluções geradas. Outros esquemas simples definem um valor constante L para L_n, ou fazem-no depender da instanciação do problema ou da dimensão da vizinhança. Do número de iterações executadas à mesma temperatura depende a capacidade do algoritmo de explorar convenientemente uma vizinhança e estabelecer o estado de equilíbrio, sendo, no entanto inútil na prática aumentar L_n para além de um determinado valor uma vez que a melhoria das soluções obtidas não justifica o acréscimo de esforço computacional.

Da analogia com o sistema físico, e de acordo com o algoritmo de Metropolis, a função de probabilidade de aceitação toma geralmente a forma $e^{-\frac{\Delta F}{T}}$ e a sua maior ou menor adequação depende da forma da função objectivo a minimizar e da estrutura de vizinhança definida, podendo optar-se pelo desenvolvimento e aplicação de outro tipo de funções de probabilidade [16].

O critério de paragem (ponto de congelação) mais usual é do tipo "nível de aspiração" e consiste em terminar o algoritmo após a ocorrência de um número pré-determinado de temperaturas sucessivas sem uma melhoria do valor da função objectivo superior a $x\%$, sendo usual fazer $x = 0$. Outro tipo de critério consistirá em terminar o algoritmo quando a taxa de aceitação das soluções geradas for inferior a um valor de referência. No entanto uma diminuição da temperatura não é, por vezes seguida pela diminuição da taxa de aceitação, sendo usual a adopção de um critério mais fiável que consistirá em

aceitar a "congelação" do sistema somente após um determinado número de temperaturas sem a ocorrência de valores da taxa de aceitação superiores ao valor de referência [1].

As decisões de carácter específico a tomar na implementação do algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado poderão ter uma influência determinante no desempenho do algoritmo. Estas passam pela clara formulação do problema de forma a definir correctamente a função objectivo e o conjunto de soluções admíssiveis. O cálculo da variação da função objectivo e o processo de geração de soluções vizinhas deverão ser muito eficientes uma vez que são repetidos em cada iteração. É vulgar recorrer ao uso de funções objectivo "aproximadas", que variam da mesma forma que a função objectivo que se pretende minimizar, e cujo cálculo é normalmente muito mais rápido, acelerando assim o processo de avaliação das soluções. A estrutura de vizinhança deverá ser definida de forma a possibilitar a pesquisa em direcções que conduzam à solução óptima, ou pelo menos a valores da função objectivo próximos do valor óptimo. A solução inicial pode ser gerada aleatoriamente ou ser o resultado de alguma heurística que proporcione uma boa solução, não sendo possível, à partida, determinar qual o processo mais adequado: para além do tempo computacional necessário para o cálculo de uma solução inicial boa, a consideração desta poderá enviezar a direcção de pesquisa do algoritmo, afastando-o do valor óptimo.

O algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado constitui assim um algoritmo heurístico de aplicação genérica, dependendo o seu desempenho não só da sua adequação ao problema em questão, mas também da formulação adoptada e dos algoritmos de baixo nível usados para a geração das soluções e avaliação da função objectivo. Este tipo de heurísticas de nível superior são designados vulgarmente por meta-heurísticas, sendo o seu desempenho fortemente dependente da instanciação dos seus parâmetros, cuja afinação exige a análise dos resultados obtidos com um elevado número de experiências.

Os algoritmos tradicionais de pesquisa local podem ser interpretados como algoritmos de pesquisa por arrefecimento simulado executados à temperatura 0, em que a probabilidade de aceitação de soluções de valor energético superior é nula, sendo só aceites soluções que conduzem a uma diminuição da energia do sistema. Desta forma, o algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado apresenta-se como uma estratégia menos gulosa e mais sensata uma vez que, ao permitir a passagem por estados de energia superior, possibilita a exploração de direcções de pesquisa potencialmente conducentes a soluções de melhor qua-

algoritmo pesquisa_local;
x_n = gera_solução_inicial();
$x^* = x_n$;
$F^* = F(x_n)$;
repete
$V(x_n)$ = vizinhança(x_n);
x_{n+1} = melhor_solução($V(x_n)$);
se $F(x_{n+1}) \leq F(x_n)$ **então**
$x_n = x_{n+1}$;
$x^* = x_{n+1}$;
$F^* = F(x_{n+1})$;
enquanto $F(x_{n+1}) \leq F(x_n)$;

Figura 4.2: Algoritmo de pesquisa local, com escolha do melhor vizinho.

lidade que as obtidas com os procedimentos tradicionais, evitando os óptimos locais em que estes habitualmente caem.

Neste trabalho, comparar-se-á o desempenho do algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado com os resultados obtidos com duas variantes do algoritmo de pesquisa local: a primeira variante algoritmo é do tipo "melhor vizinho", uma vez que o movimento entre soluções é precedido pela selecção, entre os vizinhos da solução corrente, daquele que apresenta melhor valor da função objectivo (figura 4.2); a segunda variante é do tipo "primeiro vizinho melhor" e difere da anterior pelo processo de selecção da nova solução, uma vez que aqui é adoptada para nova solução corrente a primeira solução, gerada aleatoriamente, que conduza à melhoria do valor da função objectivo (figura 4.3).

4.2 Posicionamento de círculos idênticos num rectângulo

Nesta secção serão descritas as implementações realizadas com base no algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado para a resolução do problema da paletização de figuras circulares. A resolução deste problema consistirá então em determinar o posicionamento de círculos idênticos sobre uma placa rectan-

algoritmo pesquisa_local;
x_n = gera_solução_inicial();
$x^* = x_n$;
$F^* = F(x_n)$;
repete
x = vizinho_aleatório(x_n);
se $F(x) \leq F(x_n)$ **então**
$x_n = x$;
$x^* = x$;
$F^* = F(x)$;
enquanto toda_vizinhança_testada(x_n) == falso;

Figura 4.3: Algoritmo de pesquisa local, com escolha do primeiro vizinho melhor.

gular tendo como objectivo a maximização do número de círculos aí colocados. Não é admitida a existência de sobreposição dos círculos entre si ou com a fronteira da placa.

De seguida serão apresentadas duas abordagens para a resolução deste problema, as quais diferem fundamentalmente nas escolhas de carácter específico (estrutura de vizinhança e função objectivo) adoptadas na implementação do algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado em que se baseiam, determinando assim a necessidade da afinação dos parâmetros do algoritmo em cada um dos casos.

Uma primeira abordagem desenvolvida (o algoritmo PAS1) consiste na aplicação iterativa de uma versão do algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado cujo objectivo consiste na minimização da sobreposição apresentada na solução final pelo posicionamento de um número de círculos fixo ao longo da execução do algoritmo (algoritmo ASMinS). A segunda abordagem desenvolvida (algoritmo PAS2) assenta directamente num algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado que alia o objectivo de minimização da sobreposição à maximização do número de círculos apresentados pela solução final, admitindo para tal variações no número de círculos ao longo da sua execução(algoritmo ASMaxP).

4.2.1 Implementação de um algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado baseado na minimização da sobreposição (ASMinS)

A aplicação do algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado exige a definição de um conjunto numerável de soluções. Para o problema em questão, uma solução consistirá nas coordenadas de posicionamento dos círculos que estejam colocados no interior do rectângulo. Para tal, recorre-se à definição de uma grelha sobre este rectângulo sobre a qual é definido o posicionamento das peças, tornando-se por esta razão necessário impôr a restrição de valores inteiros para as dimensões das peças envolvidas.

A metodologia adoptada na implementação do algoritmo PAS1 consiste num processo iterativo em que o algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado ASMinS é aplicado sucessivamente a uma dada instância do problema de forma a obter uma solução final sem sobreposição e que proporcione a maximização do número de cilindros colocados. A geração de uma solução inicial para o problema consiste em posicionar aleatoriamente os círculos sobre o rectângulo, de forma a que estes não intersectem a sua fronteira, não impondo restrições de não sobreposição entre si e tentando-se, pela aplicação do algoritmo de pesquisa, obter uma solução que minimize esta sobreposição. O número de círculos a incluir na solução inicial é determinado pelo cálculo de um limite inferior para o problema, conforme descrito no capítulo 3. Em execuções sucessivas do algoritmo ASMinS, o número de cilindros vai sendo incrementado até que seja obtida uma solução final com sobreposição. Quando tal acontecer, considerar-se-á como solução final a última solução obtida sem sobreposição.

Nesta secção será apresentado o algoritmo que executa uma iteração deste método de resolução - o algoritmo ASMinS, isto é, que partindo de uma solução inicial, procura minimizar a sobreposição entre as peças colocadas sobre a base rectangular.

A estrutura de vizinhança adoptada é constituída por todas as soluções que se obtêm a partir da solução corrente, aplicando ao centro de uma das peças um deslocamento de uma unidade da grelha segundo cada uma das direcções e sentidos admissíveis. Foram considerados movimentos em ambos os sentidos sobre as duas direcções ortogonais aos lados do rectângulo (cima, baixo, esquerda e direita), e ainda movimentos diagonais à quadrícula da grelha (a 45°, 135°, 225° e 315°), sendo no entanto imposta a limitação de que o movimento do

círculo não provoque a sua sobreposição com a fronteira da palete. Uma solução vizinha é obtida através da aplicação de um movimento elementar deste tipo a um círculo seleccionado aleatoriamente entre os círculos colocados na palete, sendo igual a probabilidade de deslocação em cada uma das direcções e sentidos admissíveis para esse círculo.

No âmbito das decisões de carácter específico, a tomar na implementação da algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado, resta agora formular a função objectivo ($F(x)$) e o processo de cálculo da sua variação (ΔF). Na implementação em questão, a função objectivo quantifica a sobreposição dos círculos contida numa solução. No entanto, dado que a complexidade do cálculo da área de intersecção de dois círculos degradaria consideravelmente o desempenho do algoritmo, optou-se pela consideração de uma função objectivo "aproximada" onde cada peça é comparada com todas as outras e, no caso de existir sobreposição, e apenas neste caso, esta é medida pela área de intersecção dos quadrados envolventes dos dois círculos a comparar. Esta função objectivo aproximada, de cálculo mais eficiente, tem o mesmo sentido de variação da função objectivo original, permitindo assim conduzir a pesquisa na direcção adequada. Desta forma, avalia-se eficientemente da variação da função objectivo através do cálculo da variação da sobreposição total determinada pelo deslocamento de um círculo segundo determinada direcção.

Após a tomada das decisões de índole específica apresentadas, houve necessidade de proceder á realização de um conjunto de testes conducentes à afinação dos parâmetros do algoritmo (temperatura inicial, esquema de arrefecimento, função de probabilidade de aceitação e critério de paragem). Para a realização destes testes foram utilizadas três instâncias do problema. A base de colocação rectangular utilizada foi a mesma nos três problemas, apresentando as dimensões 120×80 cm, correspondendo estas às dimensões de um tipo de palete normalizada, denominada no meio industrial por *Euro-palete*. O raio dos círculos utilizados foi de 12, 17 e 21 cm, correspondendo a sua área aproximadamente a 5%, 10% e 15% da área da palete, respectivamente. Desta forma pretendeu-se analisar o comportamento do algoritmo em instâncias com dimensões diversas, tentando-se obter uma implementação adequada à resolução de diferentes casos reais. Dado o carácter aleatório incorporado no algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado, todos os testes realizados, e os resultados computacionais apresentados, se referem a 10 execuções do algoritmo sobre cada uma das instâncias do problema, partindo em cada execução de soluções

iniciais diferentes. O número de círculos utilizado em cada problema foi determinado através do método de cálculo de um limite superior para o problema da paletização de cilindros, desenvolvido no capítulo 3. Desta forma, pretendeu-se garantir a existência de sobreposição nas soluções, de forma a permitir o estudo efectivo do comportamento da função objectivo.

A análise do comportamento do algoritmo em função da instanciação de cada um dos seus parâmetros isoladamente não pode ser considerada uma metodologia ideal para a determinação do conjunto de parâmetros mais adequado a cada implementação, uma vez que ignora as correlações existentes entre eles. Contudo, a complexidade de um estudo exaustivo desta natureza, determinou a simplificação da metodologia adoptada na selecção dos parâmetros a utilizar. Esta consistiu num processo de experimentação construtivo em que a determinação dos valores adequados para os parâmetros é feita de uma forma sequencial, com base nos "bons" valores identificados para os parâmetros previamente analisados.

A escolha dos valores a atribuir inicialmente aos parâmetros do algoritmo foi feita com base na experiência de outros autores, sendo escolhidos aqueles que à partida, e dadas as características da formulação utilizada, pareceram mais adequados.

Foram então adoptadas as seguintes opções de inicialização do algoritmo:

- **Função de probabilidade de aceitação** ($p(\Delta F, T_n)$)
  Por motivo da analogia termodinâmica, subjacente à meta-heurística utilizada, foi adoptada uma função de probabilidade de aceitação semelhante à distribuição de Boltzmann:

$$p(\Delta F_n, T_n) = e^{-\frac{\Delta F_n}{T_n}}$$

  onde $\Delta F_n = F(x) - F(x_n)$ e T_n corresponde á "temperatura" a que é executada a iteração n.

- **Esquema de arrefecimento**
  Foi utilizado o esquema de arrefecimento geométrico proposto por Kirkpatrick et al., uma vez que, de entre os esquemas de arrefecimento do tipo "a priori", não parece haver justificação para escolher outro mais complexo [26]. Neste esquema, temperaturas sucessivas são determinadas pela multiplicação da temperatura corrente (T_n) por um factor constante α:

$$T_{n+1} = \alpha T_n$$

sendo tipicamente atribuídos a α valores entre 0.90 e 0.99.

- **Temperatura inicial (T_0)**
  A temperatura inicial foi determinada de forma a garantir uma probabilidade de aceitação de uma solução pior, a essa temperatura, igual a 0.5. Para tal calculou-se um limite superior de variação da função objectivo entre duas soluções vizinhas, considerando-se o movimento elementar de uma das peças quando todas elas se encontram sobrepostas.

- **Número de iterações à mesma temperatura (L_n)**
  Foi inicialmente considerado um valor constante para o número de iterações à mesma temperatura ($L_n = L$). Sendo este valor geralmente definido de acordo com a estrutura de vizinhança, consistindo numa medida da capacidade do algoritmo explorar o espaço de soluções a uma determinada temperatura, o seu valor inicial foi calculado da seguinte forma:

  $$L = 5 * \textit{tamanho médio da vizinhança}$$

  onde o tamanho da vizinhança é calculada com base no número de círculos e os seus movimentos admíssiveis.

- **Critério de paragem**
  Como critério de paragem foi utilizada a ocorrência de 10 temperaturas sem melhoria do valor da função objectivo. A definição deste valor baseou-se na consideração de que a sua ocorrência constitui um indicador significativo da estabilização do processo de pesquisa, podendo assim admitir-se a independência do desempenho do algoritmo relativamente a este parâmetro.

Os valores de inicialização que acabamos de apresentar para os parâmetros do algoritmo, serviram de ponto de partida para a realização dos testes com vista à sua afinação.

As decisões tomadas no âmbito da caracterização genérica da implementação são apresentadas de seguida, no contexto dos resultados obtidos com os testes computacionais realizados. A identificação de valores apropriados para os parâmetros testados consistiu fundamentalmente na selecção de um valor de compromisso entre o valor final da função objectivo e o tempo de execução do algoritmo.

A agregação da informação relativa aos três problemas testados implicou a adopção de um procedimento de uniformização dos resultados obtidos. As diferenças apresentadas pelos problemas ao nível da dimensão dos círculos e do número de círculos de cada instância têm implicações determinantes ao nível dos resultados obtidos com a implementação desenvolvida. Por esta razão, procedeu-se à normalização dos resultados obtidos para cada instância, estabelecendo-se uma medida de qualidade das soluções que consiste na razão entre o valor de cada solução e o valor da solução que apresenta um mínimo de sobreposição, ou seja, a melhor solução encontrada para o problema.

Taxa de arrefecimento (α)

O valor da taxa de arrefecimento (α) irá determinar a função de variação da temperatura. Como se infere da analogia física do método, um arrefecimento mais lento (com variações mais suaves da temperatura) possibilita a aproximação ao estado de energia mínima a cada temperatura, reflectindo-se na melhoria dos valores finais da função objectivo. No entanto, a esta melhoria dos resultados está associado um custo em termos do tempo de processamento requerido para a execução de um processo de arrefecimento mais lento. Na figura 4.4 podem ser observados os resultados obtidos, em termos de valor final da função objectivo e tempo de execução relativo, com os testes realizados para diferentes valores de α compreendidos entre 0.91 e 0.99. A análise dos resultados obtidos permite identificar o valor 0.97 como o mais adequado para o problema em questão, uma vez que, para valores de α superiores (0.99) o decréscimo de sobreposição obtido é bastante oneroso em termos de tempo de processamento, sem que a melhoria dos resultados seja significativa.

O valor adoptado para α reflecte-se ainda em termos de fiabilidade da solução final, correspondendo a consideração de $\alpha = 0.97$ a um aumento de aproximadamente 10% no número de vezes em que a melhor solução é atingida, relativamente aos resultados obtidos para $\alpha = 0.95$.

Temperatura inicial (T_0)

O valor da temperatura à qual se inicia o processo de pesquisa deverá ser suficientemente elevado de forma a impedir a estagnação prematura da pesquisa num estado correspondente a um mínimo local da função objectivo. Contudo, um valor demasiados elevado para a temperatura inicial poderá conduzir a uma

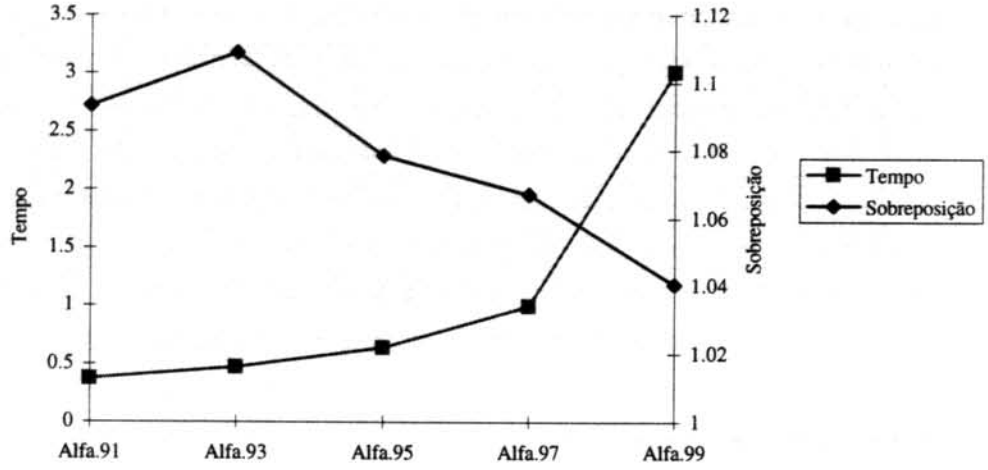


Figura 4.4: Sobreposição (F(x)) e tempo de execução relativos em função da taxa de arrefecimento (α)

perda excessiva de tempo num estado demasiado agitado do sistema, sem melhoria do resultado final, redundando assim numa perda de eficiência significativa.

Uma vez que será o valor de T_0 a determinar a probabilidade de aceitação inicial de soluções piores (p_0), o seu valor é geralmente definido em função de um valor pré-estabelecido para esta probabilidade. Nos testes realizados, procurou-se estudar o comportamento do sistema quando p_0 toma os valores 0.5, 0.1, 0.05 e 0.01. Os três problemas em estudo não apresentaram diferenças significativas relativamente ao seu comportamento ao longo da pesquisa para os diferente valores de p_0. Na figura 4.5 encontra-se representado o comportamento característico do valor da função objectivo no decorrer da pesquisa para os valores considerados. A observação das diferentes curvas permite-nos concluir do desajustamento a este tipo de problemas do valor 0.5 inicialmente considerado, uma vez que determina a iniciação da pesquisa num estado demasiado agitado sem consequências benéficas em termos de valor final da função objectivo. Este facto justifica-se pela forma idêntica dos círculos a posicionar, tornando desnecessária a elevação da temperatura a níveis que permitam a rearranjos globais do posicionamento dos círculos relativamente ao apresentado pela solução inicial.

Dadas as semelhanças do comportamento das restantes curvas, procedeu-se à selecção do valor de p_0 com base na determinação experimental da taxa

de aceitação de soluções piores à temperatura inicial. Os resultados obtidos determinaram a adopção do valor $p_0 = 0.1$.

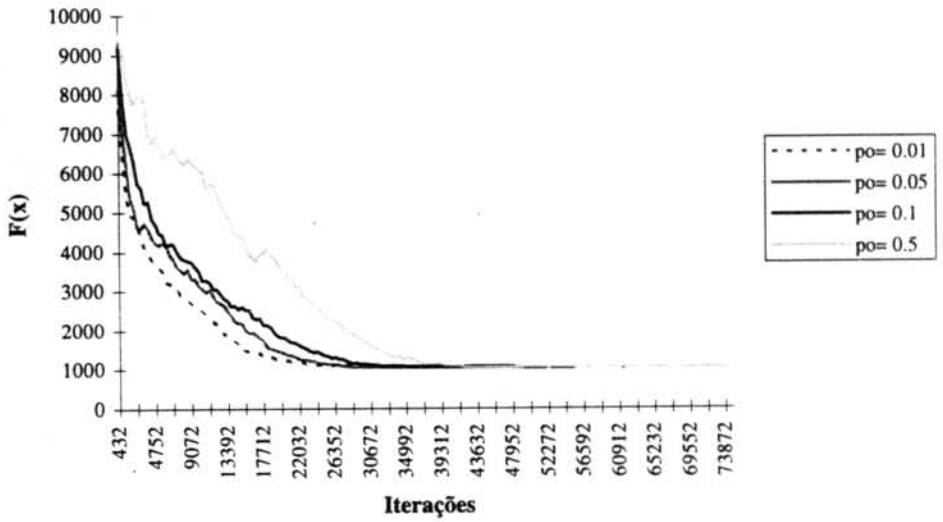


Figura 4.5: Variação de $F(x)$ durante o processo de pesquisa, para diversos valores de temperatura inicial

Número de iterações a cada temperatura (L_n)

Do número de iterações geradas à mesma temperatura irá depender a capacidade do algoritmo estabelecer o equilíbrio térmico através da exploração conveniente do espaço de soluções a cada temperatura.

Nos testes realizados, optou-se, inicialmente, pela consideração de um valor constante para o número de iterações à mesma temperatura ($L_n = L, \forall_n$), sendo testados valores múltiplos do tamanho médio da estrutura de vizinhança. Desta forma, pretendeu-se encontrar o valor de L a partir do qual o aumento do número de iterações não se reflecte significativamente ao nível da melhoria do valor final da função objectivo. Os resultados obtidos com os problemas testados determinaram a adopção de $L = 4 \times$ *tamanho médio da vizinhança*. Este valor corresponde a relativamente poucas iterações à mesma temperatura, nomeadamente às temperaturas mais baixas, mas a sua associação a um valor elevado para a taxa de arrefecimento ($\alpha = 0.97$) permite a aproximação de estados de equilíbrio térmico a cada temperatura. Na figura 4.6 são apresentados os resultados obtidos, em termos de valor final da sobreposição e número total

de iterações, em função do número de iterações em cada cadeia de temperatura.

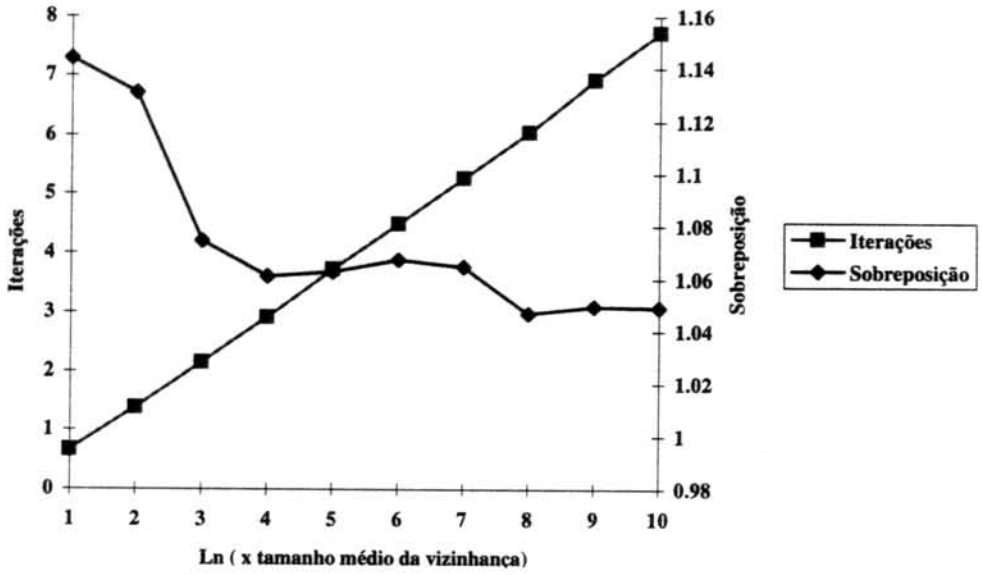


Figura 4.6: Variação de $F(x)$ e do número total de iterações em função do número de iterações de uma cadeia de temperatura (L_n)

Foi ainda testada uma segunda abordagem na determinação de L_n, que consistiu em fazer variar este valor ao longo da pesquisa em função da taxa de soluções piores aceites a cada temperatura, calculada da seguinte forma:

$$Tx.\ aceit.\ sol.\ piores = \frac{N^o de\ soluções\ piores\ aceites}{N^o de\ soluções\ piores\ geradas}$$

Desta forma, pretendeu-se adaptar L_n ao valor da temperatura a que as iterações são executadas: a temperaturas superiores, a taxa de aceitação de soluções piores tende a ser elevada, logo o número de iterações necessário para atingir o limiar definido para taxa de aceitação de soluções piores será baixo; a temperaturas perto do "ponto de congelação", o número de soluções piores aceites será muito baixo, determinando a execução de um número de iterações elevado. Nos testes realizados, foram considerados valores entre 0.1 e 0.5 para limiares da taxa de aceitação da soluções piores, sendo imposto um mínimo de iterações equivalente ao tamanho médio da vizinhança. Também foi imposto um número máximo de iterações. De forma a permitir confrontar os resultados obtidos segundo este processso com os referidos anteriormente na determinação de $L_n = L$, o número de iterações foi limitado a quatro vezes o tamanho médio

da vizinhança. Desta forma, os resultados obtidos anteriormente, com L_n constante e igual a quatro vezes o tamanho médio da vizinhança, correspondem neste caso a adoptar um limiar para o valor da taxa de aceitação de 1.

Os testes realizados não permitiram identificar um valor da taxa de aceitação inferior a 1 que apresente vantagens significativas em termos de tempo de execução sem degradação da função objectivo, tendo-se por esta razão optado pela adopção de um número de iterações constante a cada temperatura e correpondente a quatro vezes o tamanho médio da vizinhança.

Critério de paragem

Com a aplicação de um critério de paragem pretende-se identificar o momento em que o processo de pesquisa estabiliza, ou seja, em que o "ponto de congelação" é atingido. A adequação do valor adoptado para este parâmetro tem implicações directas ao nível da eficiência e eficácia do algoritmo: um critério de paragem precoce, possibilitará a paragem do algoritmo sem que o processo de pesquisa tenha estabilizado; um critério de paragem mais exigente poderá conduzir a custos significativos em termos de eficiência.

Como já foi referido, foi inicialmente considerado para critério de paragem a ocorrência de 10 temperaturas consecutivas sem melhoria da função objectivo, tendo-se admitido este valor como um garante da estabilização do processo de pesquisa. Com os testes realizados pretendeu-se analisar a possibilidade de estreitar este valor, aumentando a eficiência do algoritmo sem degradação significativa do valor final da função objectivo. Na figura 4.7 encontram-se representadas as curvas de variação da função objectivo e tempo de execução em função do critério de paragem, quantificado como o número de temperaturas consecutivas sem melhoria da função objectivo. De acordo com a análise dos resultados obtidos, a diminuição deste valor para 6 temperaturas revela-se satisfatória para o conjunto de problemas testados.

Foi ainda tentada uma segunda abordagem na afinação deste parâmetro, a qual consistiu em terminar a pesquisa após duas temperaturas consecutivas sem que a taxa de aceitação das soluções geradas atinja um valor pré-estabelecido. Foram experimentados os valores de 0.01, 0.02 e 0.05 para limiares da taxa de aceitação, tendo-se no entanto obtido uma degradação considerável nos resultados finais relativamente aos obtidos com o critério de paragem apresentado anteriormente.

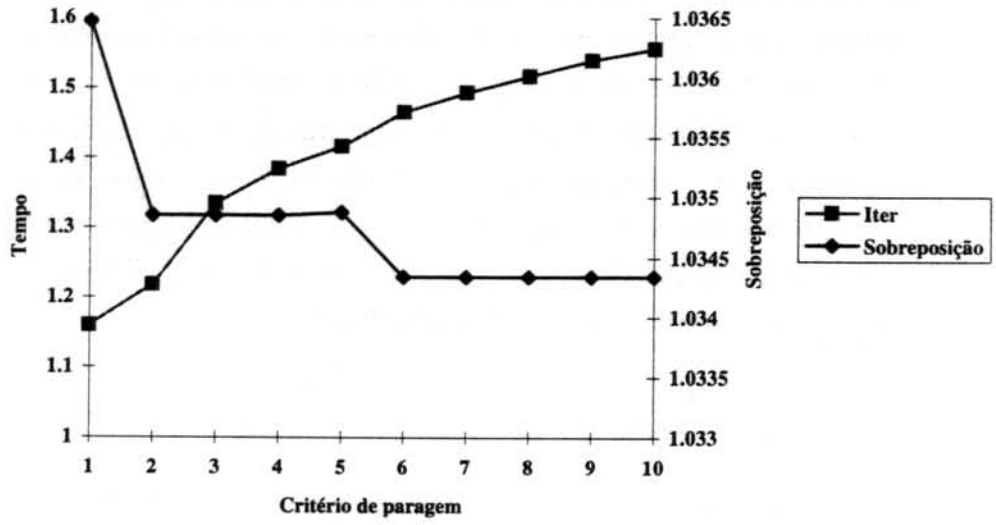


Figura 4.7: Variação de $F(x)$ e do tempo de execução em função do critério de paragem

Resultados computacionais

Após a afinação dos parâmetros, procedeu-se à realização de testes computacionais de modo a avaliar, ao nível do desempenho do algoritmo, as melhorias introduzidas pelos valores determinados experimentalmente. Os testes realizados incidiram novamente sobre o conjunto de três problemas anteriormente descritos, e tiveram como objectivo permitir a comparação dos resultados obtidos com os novos valores dos parâmetros e os atribuídos inicialmente. Na figura 4.8 é apresentada a síntese destes resultados, em termos de valor da função objectivo ($F(x)$), tempo de execução e número de iterações executadas.

Da análise dos resultados pode constatar-se a pequena variação relativa da sobreposição da solução final introduzida pela consideração dos novos valores dos parâmetros face a reduções elevadas no número de iterações executadas e, consequentemente, no tempo de execução do algoritmo. Por outras palavras, pode-se dizer que estes resultados indiciam, em termos de eficácia, uma elevada robustez do método de pesquisa por arrefecimento simulado na resolução do problema da paletização de cilindros, em paralelo com uma elevada sensibilidade ao valor dos parâmetros, no que diz respeito à sua eficiência.

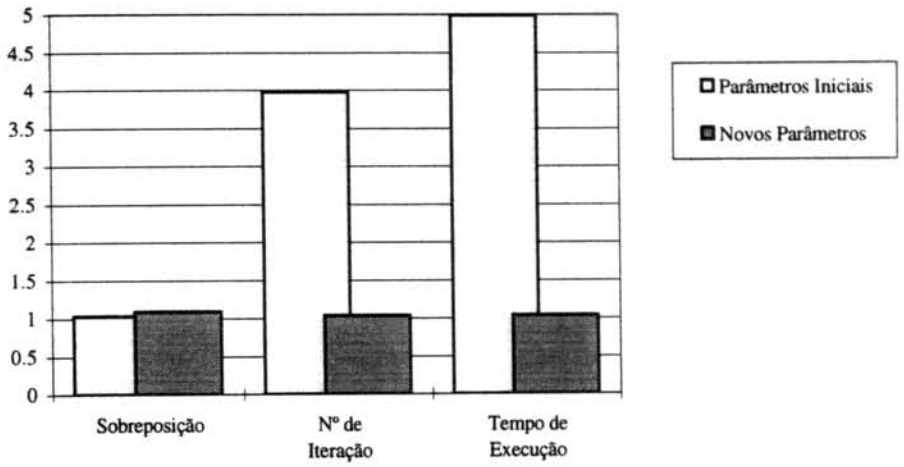


Figura 4.8: Comparação dos resultados obtidos pela implementação inicial e após a afinação dos parâmetros

4.2.2 Implementação de um algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado baseado na maximização do número de peças (ASMaxP)

A segunda abordagem desenvolvida na aplicação do algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado ao problema da paletização de cilindros (algoritmo ASMaxP) difere fundamentalmente da anterior em aspectos de índole específica, tais como a estrutura de vizinhança adoptada e a definição da função objectivo.

Para além da movimentação dos círculos na grelha definida sobre a base rectangular, esta implementação do algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado considera ainda a possibilidade de variação do número de círculos colocados sobre o rectângulo durante o processo de pesquisa, sendo uma solução do problema constituída pelas coordenadas de posicionamento sobre o rectângulo de um número variável de círculos. Deste modo, para além dos oito movimentos considerados na implementação anterior, outros dois tipos de ocorrências são consideradas na geração de soluções vizinhas: a retirada de uma peça, seleccionada aleatoriamente, ou a colocação de mais uma peça sobre o rectângulo, com um posicionamento aleatório. Por razões óbvias, o número de círculos de uma solução foi limitado ao valor determinado segundo o método de cálculo do limite superior para a paletização de cilindros, desenvolvido e apresentado no capítulo 3.

A definição desta nova estrutura de vizinhança implicou a reformulação da função objectivo. Considerando como único objectivo a minimização da sobreposição entre as peças, estas tenderiam a ser colocadas em número reduzido, ou mesmo nulo, o que iria contrariar o objectivo do problema de paletização. Torna-se desta forma necessário incluir na função objectivo uma segunda componente, antagónica da primeira, que conduza à maximização do número de peças colocadas. Deste modo, a função objectivo tomará a forma

$$\min F(x) = \text{sobreposição}(x) - \beta \times \text{área_das_peças}(x)$$

onde x representa uma solução do problema. A função "sobreposição(x)" mede a sobreposição apresentada por essa solução com base nas envolventes quadradas dos círculos, conforme já descrito para a implementação anterior. A função "área_das_peças(x)" pretende medir a área total das peças colocadas, sendo também medida, por uma questão de coerência, com base na envolvente quadrada do círculo. O valor do coeficiente β - peso da segunda componente da função objectivo - pretende distinguir situações em que a inclusão de uma peça provoca variações idênticas, em valor absoluto, nas duas componentes da função objectivo, procurando assim valorizar-se soluções com sobreposição nula, uma vez que é a condição necessária para a sua admissibilidade na resolução do problema de paletização. Deste modo, a formulação da função objectivo estabelecida alia a maximização do número de peças colocadas à minimização da sobreposição apresentada pela solução final, procurando obter soluções óptimas para o problema final da paletização.

Relativamente ao algoritmo ASMinS, pretendeu-se com esta nova abordagem aumentar a eficiência do processo de resolução através da obtenção de soluções admíssiveis para o problema da paletização sem considerar a aplicação sucessiva do algoritmo. Deste modo, a determinação de um valor adequado para o coeficiente β, que garanta a inexistência de sobreposição na solução final terá uma importância fulcral no desempenho do algoritmo. O valor inicialmente atribuído a este parâmetro (0.5) foi determinado empiricamente, com base num conjunto reduzido de execuções das instâncias teste. A realização de testes sistemáticos permitiram a sua posterior afinação.

Após a caracterização dos aspectos de índole específica, necessária à implementação do algoritmo, houve novamente necessidade de proceder à tomada de decisões de carácter genérico, relativas à instanciação dos seus parâmetros. A metodologia de teste adoptada foi idêntica à utilizada anteriormente no desen-

volvimento do algoritmo ASMinS, sendo os testes executados sobre o mesmo conjunto de problemas. Analisaremos aqui o desempenho do algoritmo AS-MaxP, avaliado pelo valor da função objectivo e tempo de execução/número de iterações executadas, independentemente de a solução proposta ser ou não admissível em termos de solução final para o problema da paletização de cilindros. Esta análise só será considerada quando se proceder à determinação do valor mais adequado para β, priveligiando nessa altura as soluções com menor área de sobreposição.

No presente caso, optou-se pela inicialização dos parâmetros envolvidos com os os valores considerados adequados para a implementação anterior. Tratou-se de uma opção arbitrária, uma vez que as diferenças ao nível dos aspectos específicos de implementação não garantem a adequação destes valores à nova implementação. As opções tomadas na inicialização do algoritmo foram então as seguintes:

- Esquema de arrefecimento: $T_{n+1} = \alpha T_n$;
- Função probabilidade de aceitação: $p(\Delta F_n, T_n) = e^{-\frac{\Delta F_n}{T_n}}$;
- Temperatura inicial: T_0 é calculada de forma a que a probabilidade de aceitação das soluções piores seja pelo menos 0.1 ($p_0 = 0.1$);
- Número de iterações à mesma temperatura: $L = 4*$ *tamanho médio da vizinhança*, calculada como anteriormente, com base no número de movimentos e pelo limite superior do número de peças;
- Critério de paragem: ocorrência de 6 temperaturas sem melhoria da função objectivo.

Dadas as características da nova implementação, foi adoptado um processo de uniformização dos resultados diferente do estabelecido anteriormente. Uma vez que os valores finais da função objectivo se revelaram nesta implementação, aproximadamente iguais, não foi necessário neste caso proceder a qualquer normalização dos valores da função objectivo $F(x)$ para as três instâncias-teste. Mas, uma vez que o número de iterações realizado à mesma temperatura continua a ser determinado pelo limite superior calculado para o problema, dependendo assim da área dos círculos em causa, o significado do número de iterações/tempo envolvido na resolução de cada um dos problemas não é comparável. Por esta razão optou-se por contabilizar o número de temperaturas

para cada problema, tentando assim obter uma medida de eficiência relativa, independente do limite superior calculado.

Taxa de arrefecimento (α)

O valor mais adequado para a taxa de arrefecimento foi determinado experimentalmente como sendo $\alpha = 0.97$. Na determinação deste valor pretendeu-se estabelecer uma solução de compromisso entre tempo de execução e valor final da função objectivo. Na figura 4.9 podem ser observados os resultados obtidos para os valores de $F(x)$ e número de temperaturas executadas, para valores de α entre 0.91 e 0.99. São notórias as semelhanças de evolução com o gráfico apresentado na figura 4.4, a propósito da implementação anterior, sendo clara a desaceleração na convergência provocada por arrefecimentos mais lentos, sem que haja compensação significativa por parte do valor final da função objectivo.

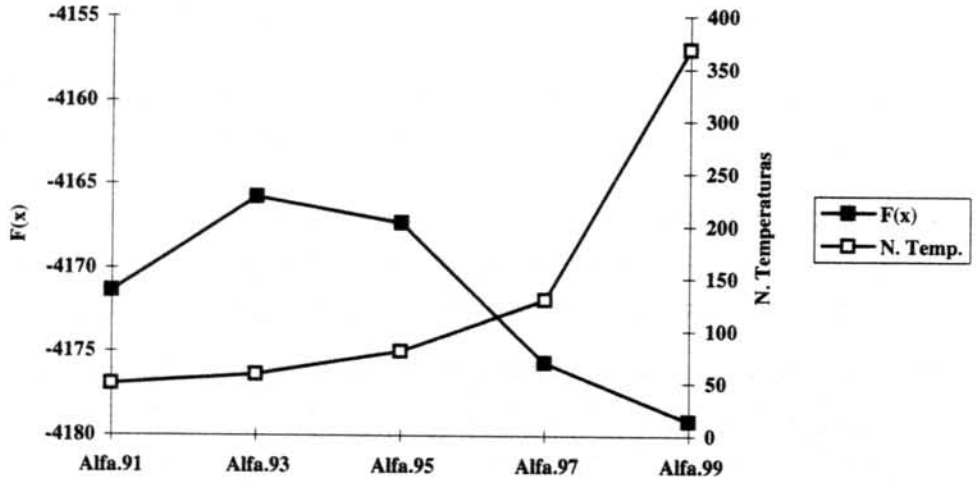


Figura 4.9: Sobreposição (F(x)) e número de temperaturas em função da taxa de arrefecimento (α)

Temperatura inicial (T_0)

O mesmo critério, que procura garantir um valor adequado para a probabilidade de aceitação das soluções piores do que a solução corrente, foi adoptado na determinação do valor da temperatura inicial. Foram novamente testados valores de 0.5, 0.1, 0.05 e 0.01 para a probabilidade de aceitação da pior solução

possível (valor da função objectivo majorado) - p_0 -, tendo sido observadas curvas de evolução semelhantes à apresentada pela implementação anterior: o valor $p_0 = 0.5$ destaca-se dos restantes, conduzindo tardiamente à estabilidade térmica sem melhoria da função objectivo, sendo pouco diferenciado o comportamento das restantes curvas. Na figura 4.10 encontra-se representada a variação do valor final da função objectivo e do número de temperaturas necessárias à sua obtenção para os diversos valores de p_0 testados.

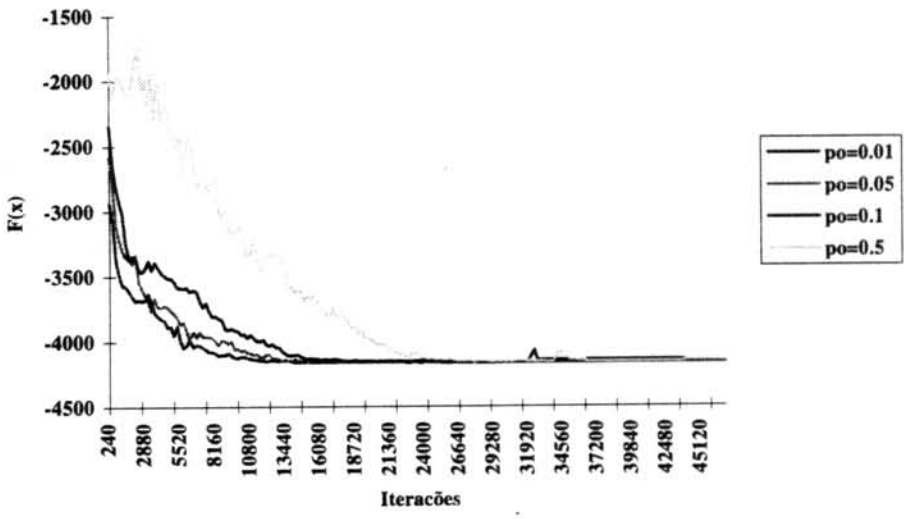


Figura 4.10: Variação de $F(x)$ e das iterações executadas, para diversos valores da temperatura inicial

Dadas as semelhanças de comportamento das curvas da função objectivo para valores de p_0 de 0.01, 0.05 e 0.1, procedeu-se à determinação experimental da probabilidade de aceitação das soluções piores à temperatura inicial, procurando-se determinar o valor de p_0 que proporciona uma taxa de aceitação real de 0.5 à temperatura inicial. Os resultados obtidos encontram-se representados na figura 4.11, tendo determinado novamente a adopção de $p_0 = 0.1$.

Número de iterações à mesma temperatura

A determinação do número adequado de iterações a realizar à mesma temperatura, consistiu novamente na experimentação de duas abordagens distintas. Inicialmente, procurou-se determinar um valor constante para L_n. Os testes

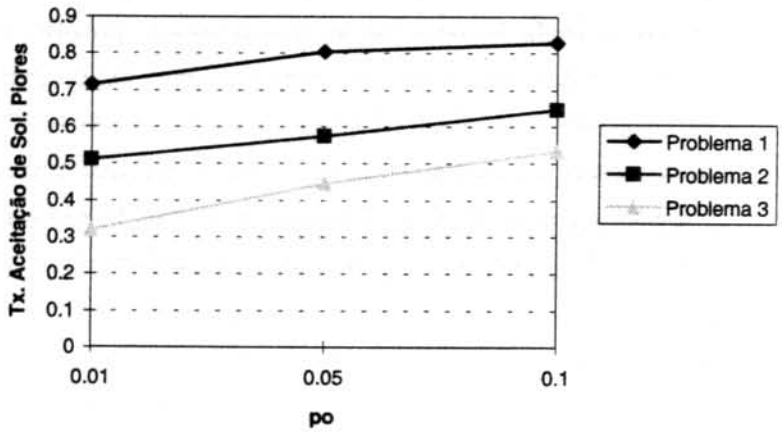


Figura 4.11: Variação da taxa de aceitação efectiva das soluções piores, determinada experimentalmente, para diferente valores de p_0

realizados neste contexto consistiram em analisar o comportamento do valor da função objectivo, e do número de iterações executadas, em função de valores múltiplos do tamanho médio da vizinhança, sendo L calculado da seguinte forma:

$$L = n \times \textit{ tamanho médio da vizinhança,}$$

tendo sido considerados para n valores de 1 a 10.

Dada a dificuldade de determinar o tamanho médio da vizinhança, uma vez que este é muito variável de solução para solução, dependendo do número de círculos colocados, adoptou-se o processo de cálculo definido para a situação anterior em que o tamanho da vizinhança é determinado com base no número de movimentos e no limite superior para o número de círculos. O valor adoptado não será totalmente desajustado uma vez que, idealmente, a temperaturas perto do "ponto de congelação", o número de peças tende para esse valor.

Os resultados obtidos em termos de $F(x)$ e do número de temperaturas executadas, encontram-se representados na figura 4.12. Estes resultados permitem definir $n = 3$ como valor adequado, não sendo interessante ultrapassá-lo.

As características da estrutura de vizinhança apresentada por esta implementação favorecem, à partida, a consideração da variação do número de iterações executadas a cada temperatura, adaptando-se assim ao tamanho variável da vizinhança. Deste modo, procedeu-se novamente à realização de testes em que L_n é variável e determinado pela ocorrência de um valor para a taxa

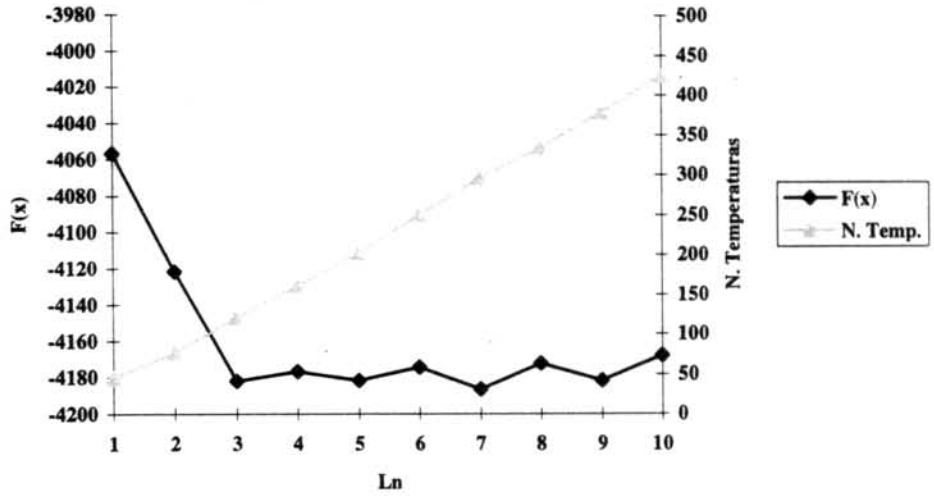


Figura 4.12: Variação de $F(x)$ e do número de temperaturas executadas em função do número de iterações de uma cadeia de temperatura (L_n)

de aceitação das soluções piores a cada temperatura. Quando esse limiar pré-definido é atingido, diminui-se a temperatura. Foram testados valores limiares entre 0.1 e 0.5 para essa taxa. De forma a permitir a comparação dos resultados com os obtidos para o número fixo de iterações, o número de iterações executadas a cada temperatura foi ainda limitado ao valor de L definido anteriormente. A figura 4.13 apresenta a variação do valor de $F(x)$, e do número de temperaturas, em função dos valores considerados para a taxa de aceitação de soluções piores. A sua observação permite-nos afirmar que a definição de uma taxa de 0.4, menos exigente do que 1 (caso em que o número de iterações é fixo), conduz a valores semelhantes em termos de $F(x)$, para um menor número de temperaturas executadas (cf. figura 4.12).

Critério de paragem

Os testes relativos à definição do critério de paragem consistiram na determinação do número de temperaturas necessárias ao estabelecimento do equilíbrio térmico. Os resultados obtidos para os valores do número de temperaturas sucessivas sem melhoria da função objectivo entre 1 e 10, encontram-se representados na figura 4.14. Estes resultados permitem-nos admitir 5 temperaturas como o valor mais adequado: apesar do aumento no número de iterações introduzida, relativamente a 4 temperaturas, conduz a uma melhoria significativa do

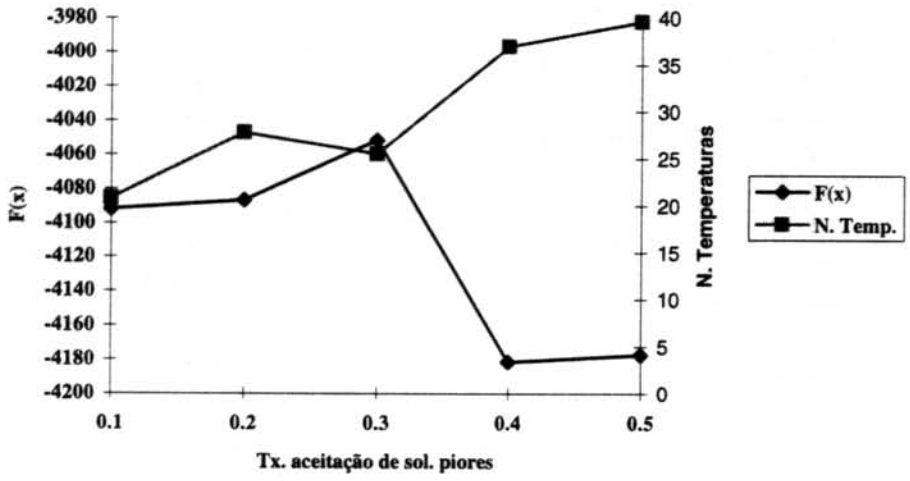


Figura 4.13: Resultados obtidos com a utilização da taxa de aceitação de soluções piores como critério de paragem

valor da função objectivo. Foi, novamente, testado o desempenho do algoritmo quando o critério de paragem é definido pela ocorrência de taxas de aceitação de soluções piores, a uma dada temperatura, inferiores a valores limiar pré-estabelecidos. Foram considerados valores limiares de 0.05, 0.02 e 0.01.Da sua afinação resultou no entanto uma degradação considerável para $F(x)$.

Coeficiente β

Após a definição dos parâmetros do algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado, procedeu-se à determinação do valor adequado para o coeficiente β da componente "área_das_peças(x)" da função objectivo. A consideração deste valor deriva da necessidade de atribuir pesos diferentes às duas componentes da função objectivo, pretendendo-se deste modo distinguir situações em que a colocação de um novo círculo no rectângulo provoca variações idênticas nessas componentes, mas apresenta um grau de adequação diferente em termos de resolução do problema de paletização. É o caso, por exemplo, da colocação de um novo círculo em posição coincidente com a de um círculo já colocado. Sendo igual a variação de cada uma das componentes da função objectivo ("sobreposição(x)" e "área_das_peças(x)") introduzida pela ocorrência desta situação, pretende-se definir para β um valor adequado, de forma a que situações equivalentes à descrita sejam distinguidas da solução com mais um círculo e sem sobreposição.

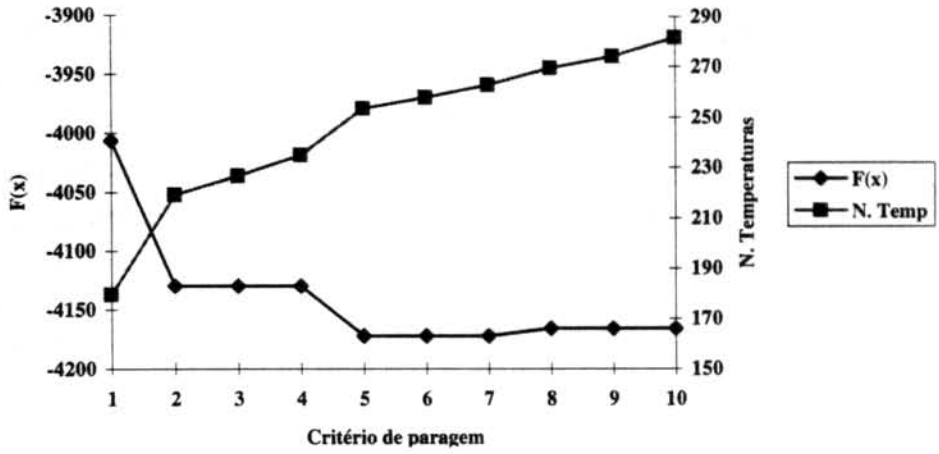


Figura 4.14: Variação de $F(x)$ e do número de temperaturas em função do critério de paragem

Como já foi referido, o valor inicialmente atribuído a β foi determinado empiricamente, tendo-se revelado satisfatório no decorrer dos testes realizados, conduzindo grande parte das vezes a situações sem sobreposição. Ainda assim, pretendeu-se analisar a influência de β na solução final, em termos de número de peças colocadas ("área_das_peças(x)") e sobreposição apresentada, tentando assim identificar os valores mais adequados para este coeficiente.

Para a análise dos resultados obtidos foi necessário determinar o maior número de círculos colocados sem sobreposição em cada uma das instâncias-teste, consistindo esta na melhor solução encontrada. Para cada valor de β foi determinada a taxa de ocorrência dessa solução. A análise dos resultados determinou a adopção de $\beta = 0.5$ como o melhor valor para este coeficiente, tendo-se notado a depêndencia deste valor relativamente à dimensão dos círculos: na resolução de problemas envolvendo círculos de maior raio, há necessidade de considerar menores valores para β, ou seja, menor peso da componente "área_das_peças(x)".

Deste modo se conclui que, idealmente, o valor de β deveria ser função da área dos círculos a colocar. No entanto, uma vez que a determinação dessa relação não é trivial, adoptou-se o valor fixo de 0.5, sendo a sua eficácia testada no capítulo 5, na aplicação do algoritmo PAS2 a um conjunto mais alargado de problemas.

Resultados computacionais

De forma a avaliar as melhorias ao nível do desempenho do algoritmo introduzidas pela consideração dos novos valores dos parâmetros, procedeu-se à realização de testes computacionais utilizando estes valores e os atribuídos inicialmente. Os testes realizados incidiram novamente sobre o conjunto de três problemas anteriormente descritos, e tiveram como objectivo permitir a comparação dos resultados obtidos ao nível da função objectivo, número de iterações realizadas e tempo de execução.

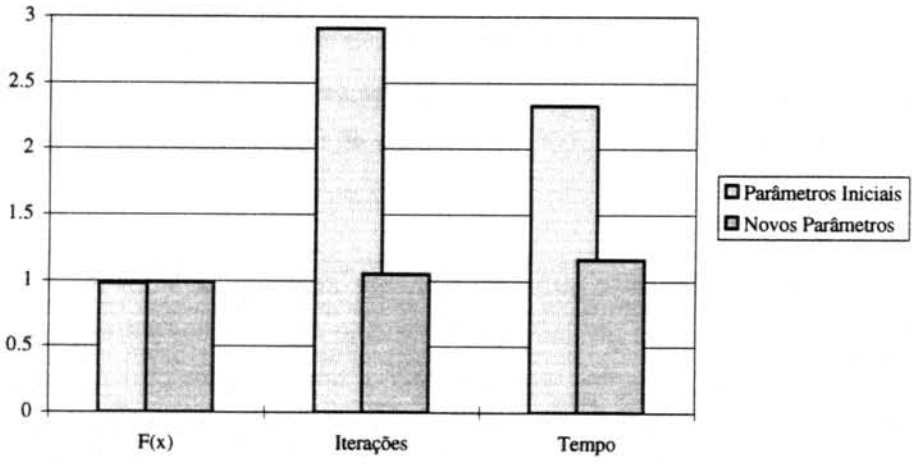


Figura 4.15: Comparação dos resultados obtidos pela implementação inicial e após a afinação dos parâmetros

Da análise dos resultados apresentados na figura 4.15 pode constatar-se a pequena variação relativa do valor da função objectivo da solução final introduzida pela consideração dos novos parâmetros, face a reduções elevadas no número de iterações executadas e no tempo de execução do algoritmo. Mais uma vez, realça-se a sensibilidade da implementação aos valores dos parâmetros, relativamente à sua eficiência, sendo este processo de afinação indispensável na aplicação do método.

Capítulo 5

Testes Computacionais

Após o desenvolvimento e afinação dos algoritmos de pesquisa por arrefecimento simulado descritos nas secções 4.2.1 e 4.2.2, procedeu-se à realização de testes computacionais sobre um conjunto alargado de instâncias-teste de forma a avaliar o desempenho destas implementações e a sua adequação à resolução do problema de paletização.

Os testes realizados destinaram-se ainda a servir de base a um estudo comparativo entre as variantes do algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado implementadas, e entre estas e duas versões do algoritmo de pesquisa local pura.

Como já foi referido, o comportamento do algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado depende, em elevado grau, das características dos objectos envolvidos (forma e dimensões da palete e relação entre o raio dos cilindro e as dimensões da palete). Este facto motivou em grande parte os testes realizados, tentando-se, com as instâncias testadas, abranger um conjunto diversificado de tipologias. As instâncias utilizadas foram classificadas de acordo com a relação entre as duas dimensões da palete (quadrada, rectangular curta, rectangular longa) e pela relação entre a área do círculo e a área da palete (5%, 10% e 15%). As dimensões das paletes usadas nos testes realizados variaram entre 80 e 240 unidades de grelha, tendo sido considerados círculos com raio entre 10 e 37 unidades de grelha. A descrição destas instâncias é apresentada na tabela 5.1.

Na realização dos testes foi utilizado um computador pessoal baseado num processador 80486DX2 a 66MHz. Os resultados apresentados foram obtidos com a realização de 10 execuções dos algoritmos, para cada uma das instâncias, aptindo de soluções iniciais diferentes. Os valores apresentados relativamente ao tempo de execução e valor da função objectivo correspondem à média aritmética

Problema	Dimensões da palete	Raio
data11	100 x 200	18
data12	120 x 80	12
data13	100 x 100	13
data21	100 x 200	25
data22	120 x 80	17
data23	100 x 100	18
data31	100 x 200	31
data32	120 x 80	21
data33	100 x 100	22

Tabela 5.1: Instâncias do problema utilizadas nos testes realizados

dos valores obtidos nessas 10 execuções.

Nas secções seguintes será analisado o desempenho dos algoritmos PAS1 e PAS2 cujos fundamentos foram descritos no capítulo 4. O algoritmo PAS1 baseia-se na aplicação sucessiva do algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado cuja estrutura de vizinhança e função objectivo assentam na minimização da sobreposição entre os círculos (algoritmo ASMinS). Em cada xecução do algoritmo ASMinS, o número de círculos é incrementado de uma unidade.

O algoritmo PAS2 assenta directamente no algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado que, para além de minimizar a sobreposição entre os círculos, procura maximizar o número de peças (algoritmo ASMaxP). Na presente implementação os algoritmos PAS2 e ASMaxP são idênticos, pelo que são referenciados pelo nome único de PAS2.

A análise dos resultados computacionais obtidos durante os testes encontra-se dividida em quatro fases:

- Análise do desempenho do algoritmo ASMinS e sua comparação com os algoritmos de pesquisa local pura;
- Análise do desempenho do algoritmo PAS1;
- Análise do algoritmo PAS2 e sua comparação com os algoritmos de pesquisa local pura;
- Análise comparativa dos algoritmos PAS1 e PAS2.

Problema	Número de Círculos	T_0	L
data11	17	250.15	544
data12	18	177.19	576
data13	16	169.37	512
data21	8	152.00	256
data22	9	118.13	288
data23	8	109.44	256
data31	5	107.71	160
data32	6	91.20	192
data33	5	76.44	160

Tabela 5.2: Parâmetros do algoritmo ASMinS

Em todos os testes foram utilizadas as instâncias acima referidas.

5.1 Algoritmo ASMinS

Nesta secção são estendidos os testes computacionais realizados na secção 4.2.1 ao algoritmo ASMinS, a um conjunto mais vasto de instâncias. As decisões de carácter geral tomadas na implementação deste algoritmo foram as seguintes (secção 4.2.1):

- Esquema de arrefecimento: $T_{n+1} = \alpha T_n$, com $\alpha = 0.97$;
- Função probabilidade de aceitação: $p(\Delta F_n, T_n) = e^{-\frac{\Delta F_n}{T_n}}$;
- Temperatura inicial: T_0 é calculada com base no valor p_0=0.1 (ver tabela 5.2);
- Número de iterações à mesma temperatura: $L = 4*$ *tamanho médio da vizinhança* (ver tabela 5.2);
- Critério de paragem: ocorrência de 6 temperaturas sem melhoria da função objectivo.

Na figura 5.1 é apresentado o desempenho do algoritmo ASMinS, de acordo com o descrito na secção 4.2.1. Da observação dos resultados obtidos, podemos concluir da maior eficiência do algoritmo quando aplicado a instâncias do problema em que o número de círculos em causa é menor[1]. Tal facto deve-se

[1] O número de círculos é determinado pelo processo de cálculo do limite superior desenvolvido no capítulo 3 e encontra-se representado na tabela 5.2.

à maior dimensão do tamanho da vizinhança, o que, como se referiu no contexto da afinação dos parâmetros do algoritmo, é determinante no número de iterações a executar a cada temperatura e, consequentemente, no seu tempo de execução.

Uma vez que o número de círculos foi considerado corresponde ao limite superior para o número de peças, compreende-se que, na maior parte dos casos, o algoritmo não consiga atingir a sobreposição nula, pois tal poderá ser fisicamente impossível.

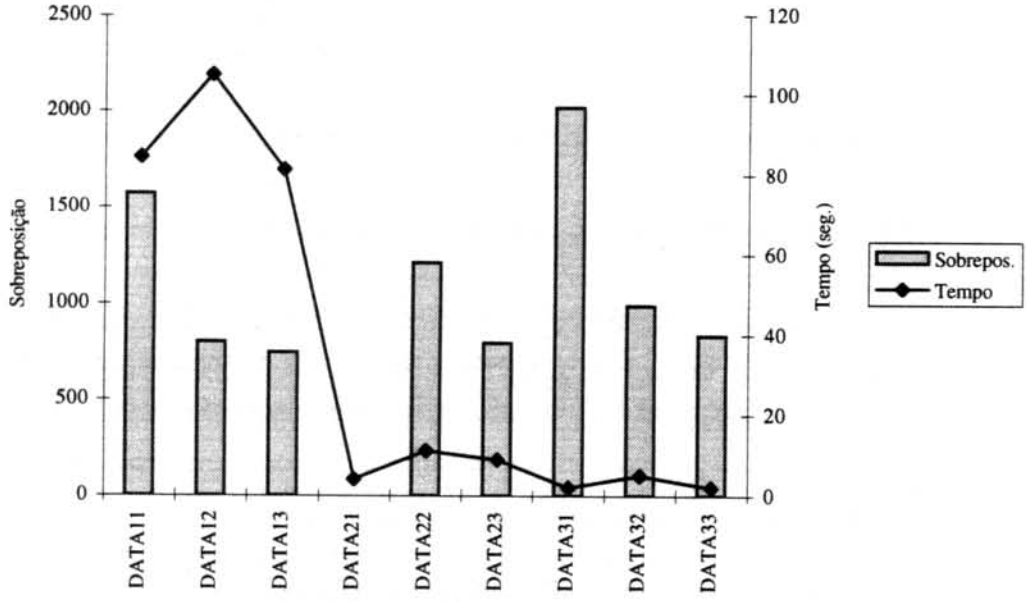


Figura 5.1: Desempenho do algoritmo ASMinS

5.1.1 Análise comparativa com algoritmos de pesquisa local

O algoritmo ASMinS foi ainda comparado com os resultados obtidos pela aplicação de dois métodos de pesquisa local pura, descritos anteriormente na secção 4.1:

- Pesq. Loc. 1: Algoritmo de pesquisa local, com escolha de melhor vizinho (figura 4.2);
- Pesq. Loc. 2: Algoritmo de pesquisa local, com escolha do primeiro vizinho melhor (figura 4.3).

Na figura 5.2 apresenta-se a comparação da implementação do algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado baseado na minimização da sobreposição, com os referidos algoritmos de pesquisa local, ao nível da eficácia das soluções propostas, sendo evidentes as melhorias introduzidas pela aplicação desta meta-heurística.

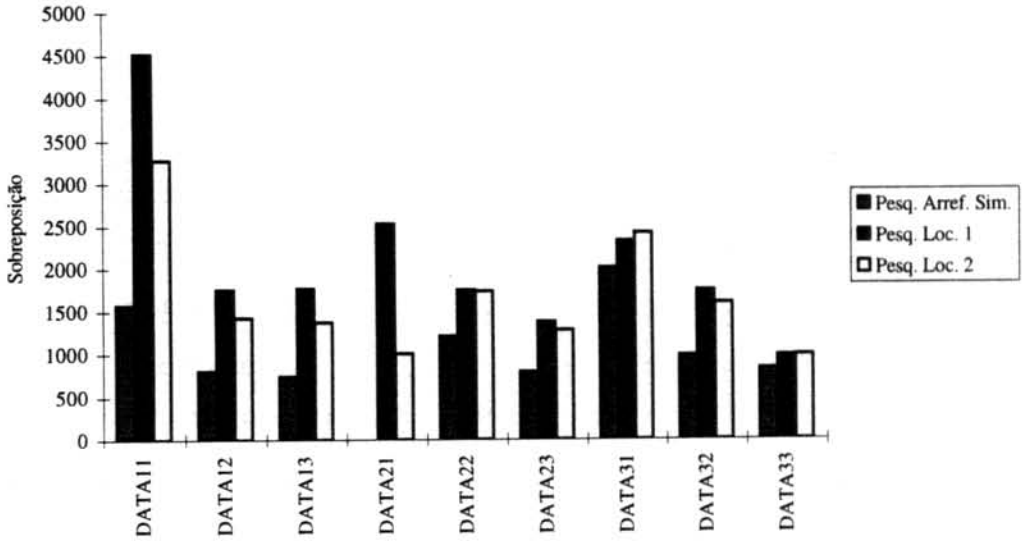


Figura 5.2: Comparação do algoritmo ASMinS com algoritmos de pesquisa local (Sobreposição)

No entanto, estas melhorias ao nível da sobreposição são conseguidas à custa de um tempo de execução mais elevado. Na figura 5.3 são apresentados os tempos de execução de cada um dos algoritmos.

5.2 Algoritmo PAS1

Nesta secção serão apresentados e analisados os resultados computacionais obtidos com o algoritmo PAS1 descrito na secção 4.2.1. Este algoritmo tem como base o algoritmo ASMinS (algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado com minimização da sobreposição entre os círculos posicionados num rectângulo). O algoritmo PAS1 consiste então num processo iterativo em que o algoritmo ASMinS é aplicado sucessivamente a instâncias com um número crescente de círculos, até que seja identificado o número máximo de círculos que é possível posicionar no rectângulo sem sobreposição. O algoritmo parte

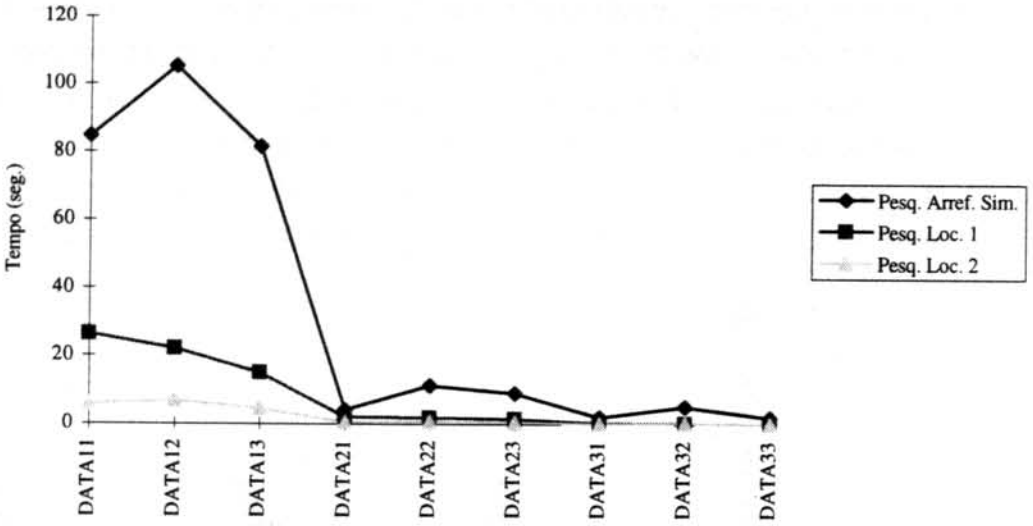


Figura 5.3: Comparação do ASMinS com algoritmos de pesquisa local (Tempo de Execução)

de um número de círculos inicial igual ao limite inferior calculado pelo método descrito no capítulo 3, sendo instâncias consecutivas criadas através do incremento de uma unidade ao número de círculos. Na figura 5.4 é apresentada uma desrição deste algoritmo.

O número inicial de círculos é apresentado na tabela 5.3, tendo sido obtido em cada caso, pela aplicação do método de cálculo do limite inferior exposto no capítulo 3.

```
algoritmo PAS1;
    número_círculos = limite_inferior();
    repete
        sol = ASMinS(número_círculos);
        se sobreposição(sol) == 0 então
            sol_final = sol;
            número_círculos = número_círculos + 1;
    enquanto sobreposição(sol) == 0 ;
```

Figura 5.4: Algoritmo PAS1

Problema	Limite Inferior	Max.
data11	15	15
data12	15	15
data13	12	13
data21	8	8
data22	6	7
data23	6	6
data31	3	4
data32	4	4
data33	4	4

Tabela 5.3: Número inicial de círculos usado no algoritmo PAS1 máximo número de círculos colocado

A aplicação do algoritmo PAS1 a cada uma das instâncias testadas veio a revelar-se bastante eficaz e fiável, uma vez que permitiu obter resultados apresentando um número de peças constanteem todas as execuções do algoritmo para a mesma instância, e igual ao número máximo de peças que para cada instância do problema foi possível posicionar (ver tabela 5.3).

A figura 5.5 pretende comparar a variação, ao nível do tempo de processamento, introduzida pelo algoritmo PAS1 comparativamente com o algoritmo ASMinS.

A variação introduzida no tempo de execução é função do número de círculos em causa que, como já foi referido, dimensiona o tamanho médio da vizinhança, e também da diferença entre o limite inferior calculado e o número de círculos apresentados na solução final. De interpretação menos imediata são os resultados obtidos para a instância Data22, onde o tempo de execução do algoritmo PAS1 é, em média, menor do que o tempo de execução médio do algoritmo ASMinS para essa instância. Tal deve-se à proximidade de valores entre o limite inferior e o máximo número de círculos colocado pelo algoritmo PAS1 e ao relativamente elevado número de círculos calculado para limite superior e considerado na execução do algoritmo ASMinS.

5.3 Algoritmo PAS2

O algoritmo PAS2, desenvolvido também para a resolução do problema da paletização de cilindros, difere da abordagem descrita na secção anterior pela estru-

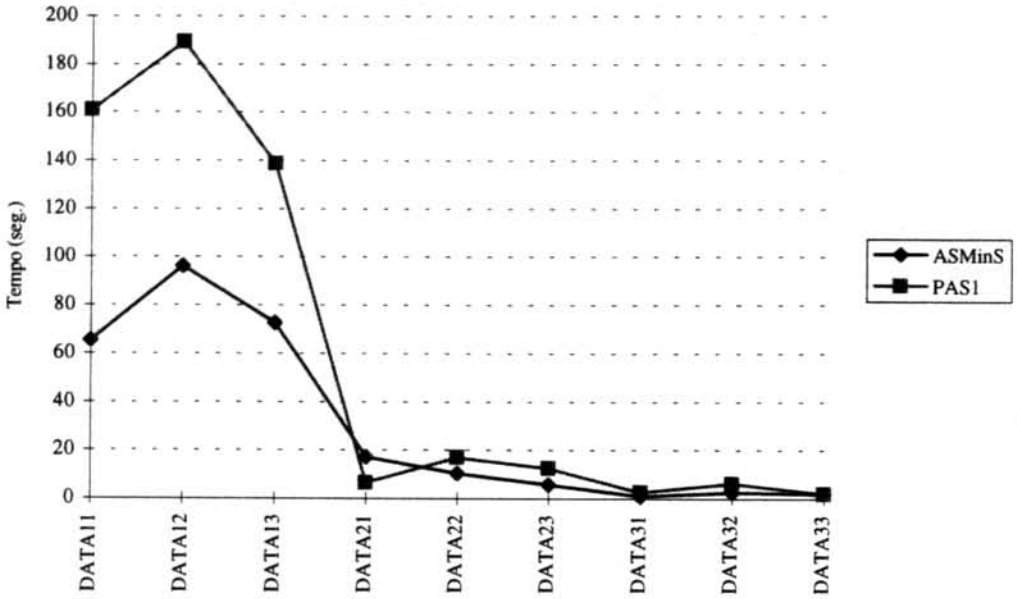


Figura 5.5: Variação do tempo de execução introduzida pela aplicação do algoritmo PAS1 às instâncias-teste

tura de vizinhança usada pelo algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado (ASMaxP). Esta abordagem considera a possibilidade de variação do número de círculos durante o algoritmo de pesquisa, para além da movimentação das peças admitida em ASMinS. Este processo de geração da estrutura de vizinhança de uma solução implicou a reformulação da função objectivo, passando esta a incluir uma componente relativa à maximização do número de círculos colocados. O algoritmo PAS2 consiste na aplicação deste algoritmo de pesquisa, pretendendo-se assim obter soluções que, simultaneamente, procurem a maximização do número de círculos colocados e a minimização da sobreposição desses círculos. Esta implementação não garante a inexistência de sobreposição na solução final, procurando-se, nos testes realizados avaliar a sua eficácia na resolução de instâncias diversificadas do problema.

Optou-se por inicializar o número de círculos com o valor calculado para limite superior de cada instância do problema (ver tabela 5.2), limitando-se ainda o número de círculos a este valor. Desta forma, o número de círculos inicial e, consequentemente, a temperatura inicial, coincidem com os valores calculados aquando da aplicação do algoritmo ASMinS.

As decisões de carácter geral tomadas no âmbito desta implementação foram

as seguintes (secção 4.2.2)

- Esquema de arrefecimento: $T_{n+1} = \alpha T_n$, com $\alpha = 0.97$;
- Função probabilidade de aceitação: $p(\Delta F_n, T_n) = e^{-\frac{\Delta F_n}{T_n}}$;
- Temperatura inicial: T_0 é calculada com base no valor p_0=0.1 (ver tabela 5.2);
- Número de iterações à mesma temperatura: L_n é calculado definido um valor limiar de 0.4 para a taxa de aceitação de soluções piores a cada temperatura;
- Critério de paragem: ocorrência de 5 temperaturas sem melhoria da função objectivo.

Na figura 5.6 apresenta-se o desempenho do algoritmo PAS2 na resolução das diversas instâncias consideradas. Os resultados obtidos evidenciam uma maior adaptação a situações em que as dimensões dos círculos são menores (Data 11, Data12 e Data21). Os elevados níveis de sobreposição obtidos por um algoritmo que se pretendia que resolvesse o problema de paletização, não podem ser considerados como indicadores de insucesso da aplicação do algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado ao problema da paletização de cilindros, indiciando sim a necessidade de proceder à afinação mais precisa dos parâmetros do algoritmo, principalmente no que diz respeito à determinação do parâmetro β (coeficiente da componente da função objectivo "área_das_peças(x)" - secção 4.2.2), em função de cada instância do problema. Esta versão veio ainda a revelar-se pouco robusta ao nível do número de círculos colocados, uma vez que este apresenta alguma variação nas diversas execuções de cada instância. Este aspecto será quantificado na secção 5.4, no contexto da análise comparativa dos dois algoritmos implementados.

5.3.1 Análise comparativa com algoritmos de pesquisa local

Uma análise comparativa semelhante à realizada na secção 5.1.1 foi realizada para o algoritmo PAS2, sendo os resultados obtidos ao nível da eficácia e da eficiência apresentados nas figuras 5.7 e 5.8, respectivamente.

Relativamente à figura 5.7 deve referir-se que os valores negativos apresentados são devidos à função objectivo $F(x)$ adoptada (secção 4.2.2), que alia à minimização da sobreposição, a maximização da àrea das peças colocadas. Os

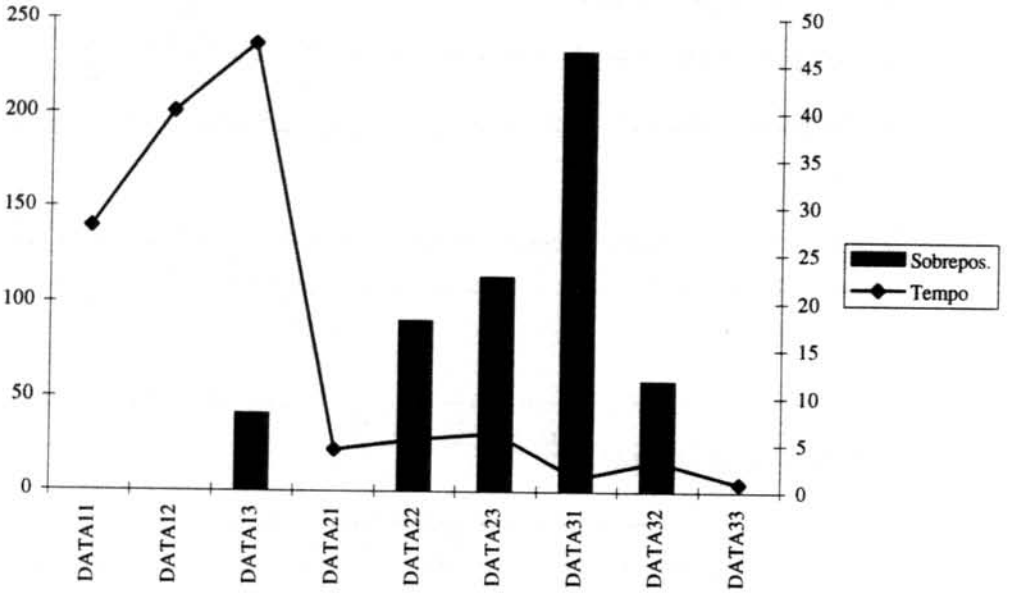


Figura 5.6: Desempenho do algoritmo PAS2

resultados obtidos evidenciam uma menor variação dos valores finais da sobreposição entre os três métodos, do que a apresentada pelos resultados da figura 5.2 podendo atribuir-se tal facto às características de índole específica consideradas na implementação do algoritmo PAS2 (função objectivo e estrutura de vizinhança). Refere-se no entanto que as pequenas variações obtidas poderão determinar a admissibilidade da solução final na resolução do problema de paletização.

As melhorias conseguidas ao nível da função objectivo são obtidas através de um agravamento do tempo de execução. Na figura 5.8 estão representados, para cada instância, os tempos de execução médios.

5.4 Análise comparativa dos algoritmos PAS1 e PAS2

A comparação dos algoritmos PAS1 e PAS2, na resolução dos problemas de paletização atrás descritos, foi realizada a dois níveis:

- da eficiência, pela comparação dos tempos de execução dos dois algoritmos na resolução das instâncias propostas (figura 5.9);

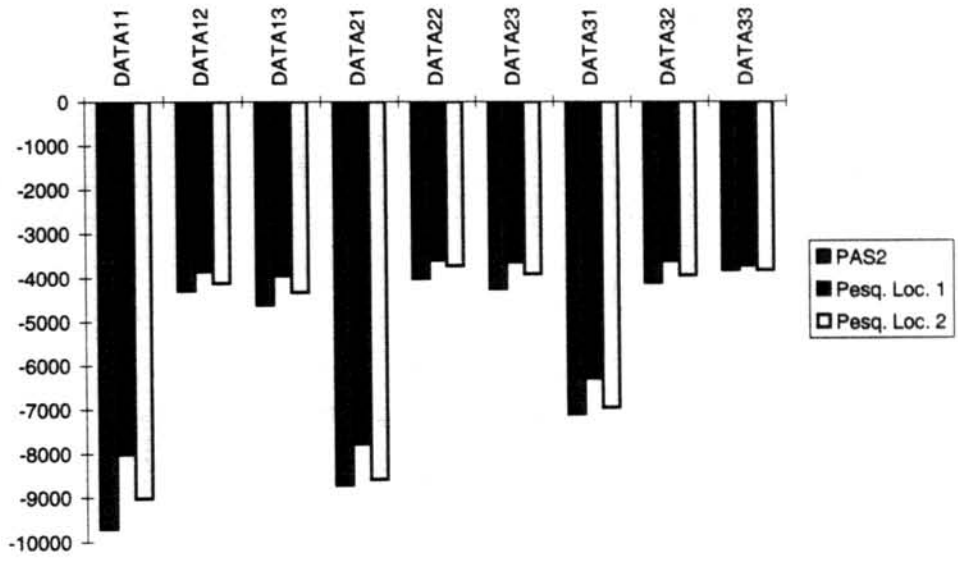


Figura 5.7: Comparação do algoritmo PAS2 com algoritmos de pesquisa local ($F(x)$)

- da eficácia, pela comparação do número máximo de círculos colocados por cada um dos algoritmos, e da taxa com que esse valor ocorreu nas várias execuções do algoritmos (tabela 5.4).

Os resultados apresentados na figura 5.9 vão de encontro ao esperado: se considerarmos que o algoritmo PAS1 consiste na aplicação sucessiva do algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado ASMinS, é natural que o seu tempo de execução seja bastante superior ao apresentado pelo algoritmo PAS2, que consiste em apenas uma execução de um algoritmo semelhante (ASMaxP). Se considerarmos o facto de que os limites inferiores, cujo cálculo determina o número inicial de círculos no algoritmo PAS1, apresentam uma precisão elevada aliado a um menor número de peças, compreende-se que a variação relativa dos tempos de execução seja menor nos casos em que a dimensão dos círculos é superior.

Na tabela 5.4, apresentam-se os resultados obtidos com as duas implementações, relativos ao número máximo de círculos colocados. Para o caso do algoritmo PAS2 só foram considerados casos em que a solução final não apresentava sobreposição das peças. É ainda apresentada a taxa de ocorrência do valor máximo do número de círculos nas execuções realizadas para cada instância e

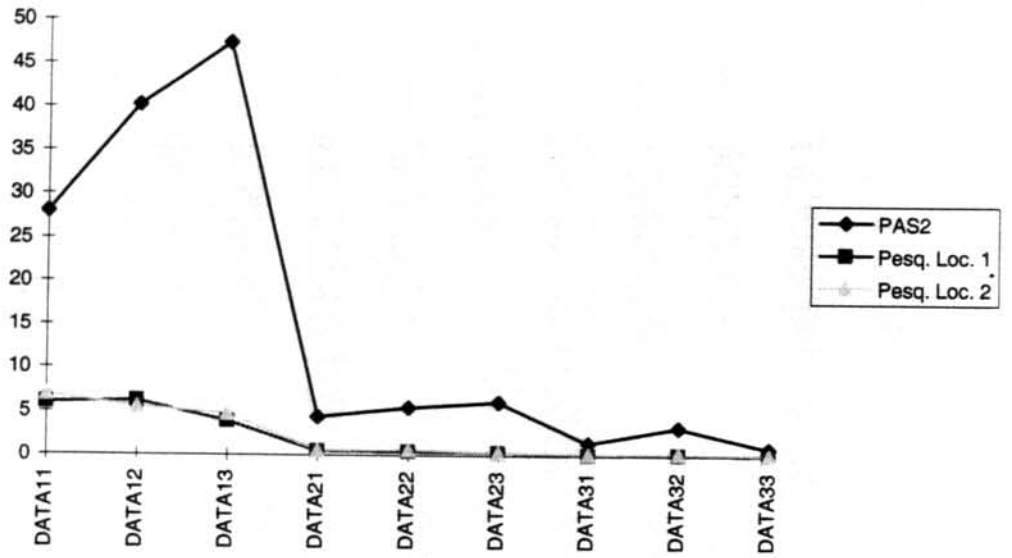


Figura 5.8: Comparação do algoritmo PAS2 com algoritmos de pesquisa local (Tempo de Execução)

algoritmo. É notória a maior robustez do algoritmo PAS1, apresentando uma taxa de ocorrência da melhor solução de 1 para todos os casos.

Desta forma, podemos concluir que a implementação realizada com base no algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado baseado na minimização das sobreposições (algoritmo PAS1), se manifestou bastante mais eficaz e robusta do que a implementação baseada na maximização do número de círculos (algoritmo PAS2). A pouca robustez apresentada por este último, impede a sua aplicação, por si só, na determinação de soluções admissíveis para o problema da paletização de cilindros. No entanto, este método de resolução veio a revelar-se bastante atractivo em termos de eficiência de resolução. Esta característica poderá ser explorada através da aplicação de um mecanismo de pós-optimização, que retire as peças eventualmente em excesso e reposicione as restantes, ou seja, que transforme o algoritmo PAS2 na aplicação do algoritmo ASMaxP seguida de uma fase de pós-optimização.

Neste contexto, foram ainda realizados alguns testes com exemplos apresentados em publicações sobre o assunto. Nomeadamente, foram testadas duas instâncias do problema apresentadas em [21], que designaremos por Iser1 e Iser2, e uma instância apresentada na documentação de divulgação de um pacote de software denominado Multipack, destinado a apoiar o planeamento do carrege-

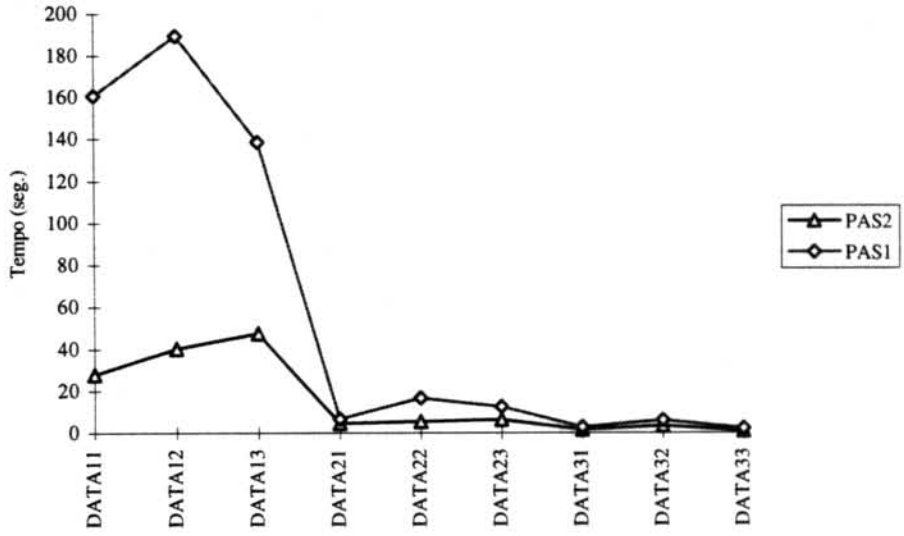


Figura 5.9: Comparação de tempos de execução dos algoritmos PAS1 e PAS2

mento de paletes, contentores e camiões. Este último problema passaremos a designar por MultiP.

As dimensões apresentadas por cada uma destas instâncias são apresentadas na tabela 5.5. Nesta tabela é ainda apresentado o número de círculos apresentado como máximo para cada um dos problemas nas respectivas publicações (NumPubl), e o número máximo de círculos colocado com a aplicação dos algoritmos implementados(NumPAS). É ainda de referir que as soluções corres-

	PAS1		PAS2	
Problema	**N. de Círculos**	**Tx. de Ocorrência**	**N. de Círculos**	**Tx. de Ocorrência**
data11	15	1	15	1
data12	15	1	15	1
data13	13	1	0	-
data21	8	1	7	1
data22	7	1	7	0.1
data23	6	1	0	-
data31	3	1	0	-
data32	4	1	4	0.1
data33	4	1	4	1

Tabela 5.4: Comparação da eficácia dos algoritmos PAS1 e PAS2 (número máximo de peças colocadas e taxa de ocorrência desse valor)

Problema	Dimensões da palete	Raio	NumPubl	NumPAS
iser1	1200 x 800	204	22	22
iser2	1200 x 800	202	23	22
MultiP	1200 x 800	125	14	14

Tabela 5.5: Instâncias do problema utilizadas nos testes realizados

pondentes a estes valores foram obtidas pela aplicação do algoritmo PAS1, não tendo sido conseguidas soluções admissíveis para a resolução do problema de paletização com a aplicação do algoritmo PAS2.

A representação gráfica das soluções obtidas para o posicionamento do número máximo de círculos é apresentada nas figuras 5.10, 5.11 e 5.12.

Como já foi referido, a pouca disponibilidade de referências sobre o assunto não permite estender a realização de testes comparativos com instâncias retiradas da literatura. No entanto, pode afirmar-se que os testes realizados indiciam o sucesso da aplicação do algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado ao problema da paletização de cilindros.

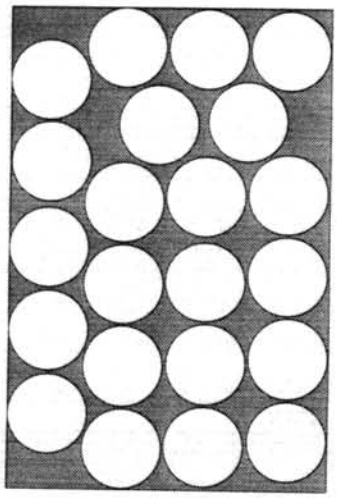


Figura 5.10: Posicionamento dos círculos na solução obtida pela aplicação do algoritmo PAS1 à instância Iser1

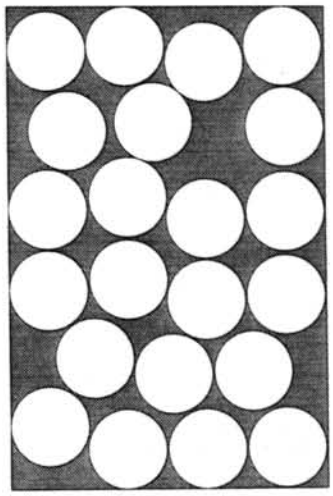


Figura 5.11: Posicionamento dos círculos na solução obtida pela aplicação do algoritmo PAS1 à instância Iser2

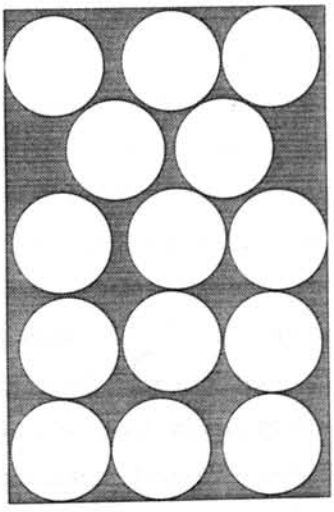


Figura 5.12: Posicionamento dos círculos na solução obtida pela aplicação do algoritmo PAS1 à instância MultiP

Capítulo 6

Conclusão

6.1 Conclusões genéricas

Nesta dissertação foi abordado o problema da paletização de cilindros, propondo-se a sua resolução pela aplicação de algoritmos de pesquisa por arrefecimento simulado. Este problema é abordado no enquadramento mais geral dos problemas de posicionamento, cujo objectivo principal consiste na afectação de vários objectos rígidos a uma espaço n-dimensional de forma a obter uma solução que proporcione um aproveitamento eficiente desse espaço

O problema da paletização de cilindros pode ser identificado com situações em que se pretende proceder à colocação sobre um rectângulo de objectos idênticos com base circular (rolos, tubos, ...). A resolução do problema consistirá na determinação do padrão de posicionamento da base circular dos objectos sobre uma base rectangular, de forma a maximizar o número de objectos colocados. Os padrões de posicionamento obtidos são repetidos no agrupamento dos objectos em camadas, destinadas a serem sobrepostas e colocadas sobre a palete.

O trabalho realizado iniciou-se pela realização de um estudo da bibliografia disponível sobre o problema da paletização, de uma forma geral, distinguindo-se dois tipos de problemas, que se caracterizam pela forma dos objectos a empacotar: problemas de paletização de formas rectangulares e de formas circulares. O estudo realizado sobre as abordagens propostas na literatura para o problema de paletização rectangular justifica-se não só por questões históricas, uma vez que esta é a forma segundo a qual o problema de paletização foi originalmente abordado, mas também como uma tentativa de adaptação dos seus conceitos e técnicas de resolução ao problema da paletização de cilindros. Na revisão

bibliográfica realizada sobre a paletização de formas rectangulares pretendeu-se referir as publicações mais relevantes na área e as técnicas de resolução mais comuns.

Só recentemente começou a ser abordado na literatura o problema da paletização de cilindros, sendo escassas as referências na literatura a esta forma do problema de paletização. Na revisão bibliográfica apresentada nesta dissertação pretendeu-se apresentar uma breve descrição dos principais conceitos e técnicas de resolução propostas para o problema.

De seguida, procedeu-se ao desenvolvimento de um método de cálculo de um limite superior para o número de círculos que é possível posicionar no interior de um rectângulo, sem sobreposição entre eles e com as margens do rectângulo. A justificação do esforço investido no desenvolvimento de técnicas para a estimação de limites superiores ultrapassa a avaliação da qualidade das heurísticas desenvolvidas para os problemas. A maior precisão destas técnicas possibilita a sua utilização como níveis de aspiração em algoritmos de pesquisa em árvore, onde através da limitação das direcções de pesquisa, se permite reduzir significativamente o tempo de processamento necessário para a obtenção da solução óptima. A sua aplicação ao problema em questão é evidente: para além de constituir uma referência na avaliação do desempenho das heurísticas implementadas, a sua integração nos algoritmos implementados assumiu uma importância significativa, limitando o número de peças a considerar no processo de paletização.

Realça-se a maior qualidade do método desenvolvido para o cálculo de um limite superior para o problema da paletização de cilindros, que apresentou, nos testes realizados, melhorias significativas relativamente a dois métodos alternativos propostos na literatura.

A estratégia adoptada no desenvolvimento de um método de resolução para o problema da paletização de cilindros, consistiu na aplicação de uma meta-heurística: a pesquisa por arrefecimento simulado. Dada a natureza combinatória apresentada pelo problema de paletização de cilindros, a sua resolução eficiente vê-se impossibilitada para problemas com alguma dimensão. Assim, assumem particular importância na sua resolução o desenvolvimento de técnicas heurísticas eficientes que garantam a eficácia das soluções propostas.

As meta-heurísticas consistem em heurísticas genéricas que pretendem modelizar mecanismos da natureza, considerados de optimização, exigindo a sua aplicação a cada problema a tomada de um conjunto de decisões de índole

genérica e específica do problema a tratar. O nome do algoritmo em que se baseia o trabalho realizado deriva da analogia estabelecida entre a resolução de problemas de optimização combinatória e a modelização do processo de arrefecimento e cristalização de corpos sólidos. Na sua implementação houve necessidade de definir aspectos relacionados com a modelização do problema a resolver (função objectivo e espaço de soluções), consistindo estas nos aspectos genéricos da sua implementação. Foram adoptadas duas abordagens distintas relativas a estes aspectos: uma abordagem inicial consistiu na aplicação do algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado ao posicionamento de um número fixo de círculos no interior de um rectângulo, tendo como objectivo a minimização da sobreposição apresentada pela solução final (algoritmo ASMinS); uma variante desta implementação consistiu na admissão da variação do número de círculos durante o processo de pesquisa, aliando o objectivo de minimização da sobreposição à maximização do número de círculos apresentado pela solução final (algoritmo PAS2).

No âmbito da aplicação do algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado ao problema da paletização de cilindros, houve ainda necessidade de realizar um elevado conjunto de testes com o objectivo de afinar os parâmetros do algoritmo (temperatura inicial, esquema de arrefecimento, função de probabilidade de aceitação e critério de paragem) para cada uma das versões implementadas. Os resultados obtidos indiciam, em termos de eficácia, uma elevada robustez do método de pesquisa por arrefecimento simulado na resolução do problema da paletização de cilindros, em paralelo com uma elevada sensibilidade aos valores dos parâmetros, no que diz respeito à sua eficiência.

Após a afinação das duas implementações do algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado, procedeu-se à realização de testes computacionais sobre um conjunto de problemas variados, de forma a avaliar o seu desempenho e adequação à resolução do problema de paletização.

Resumindo, os principais resultados do trabalho de investigação realizado foram:

- desenvolvimento um limite superior original para o número de círculos idênticos a colocar sobre um rectângulo, introduzindo melhorias consideráveis comparativamente com os existentes;
- aplicação do algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado à resolução do problema da paletização de cilindros, constituindo uma abordagem

heurística inovadora ao problema, e que se revelou satisfatória no seu desempenho, quer ao nível da eficácia, quer ao nível da eficiência.

- o facto de se ter abordado o problema da paletização de cilindros pode aindaser referido como uma contribuição importante do trabalho realizado, uma vez que tem sido escassa a atenção que lhe tem sido dispensada por parte da comunidade científica.

6.2 Perspectivas de desenvolvimento

O trabalho apresentado nesta dissertação preconiza um conjunto de desenvolvimentos futuros. Estes consistirão fundamentalmente na inclusão de extensões às implementações realizadas, de forma a expandir o seu domínio de aplicação.

Em situações reais, a paletização de objectos poderá assumir formas diversas, onde a satisfação de restrições de ordem prática poderá determinar a admissibilidade de uma solução. A consideração de questões relacionadas com a estabilidade da carga, fragilidade dos objectos, compacidade dos padrões de empacotamento e processo de transporte da palete, aliadas à determinação do posicionamento óptimo dos círculos, determinarão a adaptação do método de resolução a cada caso particular. É ainda de realçar que, apesar de o presente trabalho ter sido realizado no contexto da paletização de carga cilindrica, os seus resultados aplicam-se em contextos mais genéricos, sempre que o problema em questão se possa reduzir à maximização do número de círculos a posicionar sobre um rectângulo, como, por exemplo, o corte de peças circulares. A sua aplicação, neste contexto, poderá também exigir a consideração de aspectos específicos, como a consideração da espessura inutilizada pelo instrumento de corte, ou do corte de peças circulares em rectângulos de comprimento "infinito" (ilimitado).

O trabalho de implementação realizado permitiu resolver com sucesso o problema da paletização de cilindros, quando apenas são considerados aspectos de natureza geométrica. A sua aplicação em domínios mais complexos poderá ser feita através da inclusão de novas restrições ou adaptações da função objectivo a cada caso particular, tendo como base a implementação realizada.

A estrutura de dados adoptada nas implementações desenvolvidas foi concebida tendo em vista a facilidade da sua extensão a casos mais genéricos, tais como:

- determinação do posicionamento de círculos de dimensões variadas sobre um rectângulo;
- consideração da combinação de carga de diferentes formas geométricas (rectangular e circular);
- posicionamento de círculos em rectângulos de comprimento "infinito", tendo como objectivo a compacidade dos padrões.

Como já foi referido, a necessidade do desenvolvimento de um sistema de paletização de cilindros surgiu como resposta à solicitação de uma empresa industrial, cujo procedimento de expedição dos produtos fabricados é feita em contentores, considerando-se a possibilidade de agrupamento de parte da carga sobre paletes de dimensões diversas. Desta forma, deverá proceder-se à inclusão do algoritmo de paletização desenvolvido no sistema de empacotamento de contentores, de forma a permitir o planeamento integrado do carregamento das paletes e dos contentores nos quais estas vão ser carregadas.

Espera-se assim que o trabalho desenvolvido no âmbito da paletização de cilindros se venha a revelar como precursor no desenvolvimento de aplicações práticas inovadoras na área do posicionamento a duas e três dimensões.

Referências

[1] M.L. Alves and M.T. Almeida. Simulated annealing for the simple plant location problem. *Investigação Operacional*, 12(2):145–157, 1992.

[2] F.W. Barnes. Packing the maximum number of m x n tiles in a large p x q rectangle. *Discrete Mathematics*, 26:93–100, 1979.

[3] S. Barnett and G.J. Kynch. Exact solution of a simple cutting problem. *Operations Research*, 15:1051–1056, 1967.

[4] J.E. Beasley. An exact two-dimensional non-guillotine cutting tree search procedure. *Operations Research*, 33(1):49–64, 1985.

[5] E.E. Bischoff. Stability aspects of pallet loading. *OR Spektrum*, 13:189–197, 1991.

[6] E.E. Bischoff and W.B. Dowsland. An application of the micro to product design and distribution. *Journal of the Operational Research Society*, 33:271–280, 1982.

[7] R.A. Brualdi and T.H. Foregger. Packing boxes with harmonic bricks. *Journal of Combinatorial Theory*, 17:81–114, 1974.

[8] H. Carpenter and W.B. Dowsland. Practical considerations of the pallet-loading problem. *Journal of the Operational Research Society*, 36(6):489–497, 1985.

[9] V. Cerny. A thermodynamical approach to the travelling salesman problem: an efficient simulated annealing. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 45:41–51, 1985.

[10] M.H. Correia, A.M. Gomes, J.F. Oliveira, and J.S. Ferreira. Problemas de empacotamento tri-dimensional. *Investigação Operacional*, 12(2):169–180, 1992.

[11] J.J. Daniels and P. Ghandforoush. An improved algorithm for the non-guillotine constrained cutting-stock problem. *Journal of the Operational Research Society*, 41(2):141–149, 1990.

[12] K. Dowsland. Determining an upper bound for a class of rectangular packing problems. *Computers and Operations Research*, 12(2):201–205, 1985.

[13] K. Dowsland. An exact algorithm for the pallet loading problem. *European Journal of Operational Research*, 31:78–84, 1987.

[14] K. Dowsland. Optimising the palletisation of cylinders in cases. *OR Spektrum*, 13:204–212, 1991.

[15] K. Dowsland and W. Dowsland. Packing problems. *European Journal of Operational Research*, 56:2–14, 1992.

[16] K. Dowsland and W. Dowsland. Heuristic approaches to irregular cutting problems. Working Paper EBMS/1993/13, European Business Management School, UC Swansea, UK, 1993.

[17] W.B. Dowsland. Sensitivity analysis for pallet loading. *OR Spektrum*, 13:198–203, 1991.

[18] H. Dyckhoff and U. Finke. *Cutting and Packing in Production and Distribution: A Typology and Bibliography*. Physica-Verlag, 1992.

[19] H.J. Fraser and J.A. George. Integrated container loading software for pulp and paper industry. *European Journal of Operational Research*, 77:466–474, 1994.

[20] J.A. George, J.M. George, and B.W. Lamar. Packing different sized circles into a rectangular container. *European Journal of Operational Research*, 84:693–712, 1995.

[21] H. Isermann. Heuristiken zur Lösung des zweidimensionalen Packproblems für Rundgefässe. *OR Spektrum*, 13:213–223, 1991.

[22] S. Kirkpatrick, C.D. Gelatt, Jr., and M.P. Vecchi. Optimization by simulated annealing. *Science*, 220:671–680, 1983.

[23] N. Metropolis, A. Rosenbluth, M. Rosenbluth, A. Teller, and E. Teller. Equation of state calculations by fast computing machines. *Journal of Chemical Physics*, 21:1087–1092, 1953.

[24] J. Nelissen. New approaches to the pallet loading problem. *European Journal of Operational Research*, 84, 1995.

[25] J.F. Oliveira. *Problemas de Posicionamento de Figuras Irregulares : Uma Perspectiva de Optimização.* PhD thesis, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1995.

[26] M. Pirlot. General local search heuristics in combinatorial optimization: a tutorial. *Belgium Journal of Operations Research, Statistics and Computer Science*, 32(1-2):7–67, 1992.

[27] A. Smith and P. De Cani. An algorithm to optimize the layout of boxes in pallets. *Journal of the Operational Research Society*, 31(7):573–578, 1980.

[28] P.E. Sweeney and E.R. Paternoster. Cutting and packing problems: A categorized application-orientated research bibliography. *Journal of the Operational Research Society*, 43(7):691–706, 1992.

BIBLIOTECA F.E. PORTO

Resumo

São inúmeras as indústrias que incluem, em fases distintas da sua actividade, processos de armazenagem, manipulação e distribuição de objectos (de matérias primas a produtos acabados), e cuja eficácia constitui um factor económico de importância considerável no sucesso da empresa. Associado a cada uma destas operações existe o problema do posicionamento desses objectos no interior de espaços de maior dimensão, de forma a minimizar o espaço desocupado.

O problema da paletização de cilindros, objecto de estudo desta dissertação, identifica-se com situações em que se pretende proceder ao carregamento de ítens idênticos com base circular (tubos, rolos,...) sobre uma base rectangular (palete), em que, considerações de ordem prática, exigem a fixação da dimensão vertical dos objectos a colocar. A resolução do problema consistirá na determinação do padrão de posicionamento da base circular dos objectos sobre a base rectangular, de forma a maximizar o número de objectos colocados.

O trabalho realizado consistiu no desenvolvimento de dois algoritmos para a resolução do problema de paletização circular, baseados em implementações distintas de uma meta-heurística: a pesquisa por arrefecimento simulado. No âmbito do desenvolvimento destas aplicações, houve necessidade de realizar uma conjunto de testes com o objectivo de afinar os parâmetros dos algoritmos de pesquisa, para cada uma das versões implementadas. Os resultados obtidos indiciam, em termos de eficácia, uma elevada robustez do método de pesquisa por arrefecimento simulado na resolução do problema de paletização dos cilindros, em paralelo com uma elevada sensibilidade aos valores dos parâmetros, no que diz respeito à sua eficiência.

No contexto da paletização de formas circulares, foi ainda desenvolvido um método de cálculo de um limite superior para o número de círculos a posicionar num rectângulo, sem sobreposição entre si e com as margens do rectângulo. Os resultados obtidos com a sua aplicação apresentam melhorias significativas relativamente a dois métodos alternativos propostos na literatura.

FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO
BIBLIOTE

0000002164