



Universidade do Porto
Faculdade de Engenharia

FEUP



Maria Manuela Figueiredo Maia

Equações Diferenciais Estocásticas e Dinâmica de Populações

Equações Diferenciais Estocásticas e Dinâmica de populações

Maria Manuela Figueiredo Maia

Licenciada em Matemática – Estatística e Investigação Operacional
Pela Universidade Portucalense

Dissertação submetida para satisfação parcial dos requisitos do grau de mestre
em
Estatística Aplicada e Modelação



Dissertação orientada sob a supervisão de
Prof. Doutora Teresa Arede
do Departamento de Engenharia Mecânica
da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
e de
Prof. Doutor Francisco Calheiros
do Departamento de Engenharia Civil
da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

UNIVERSIDADE DO PORTO
Faculdade de Engenharia
BIBLIOTECA M
N.º 79811
CDU 511.2(043)
C-13 14.7.20.04

INDICE	
RESUMO	3
ABSTRACT	4
INTRODUÇÃO	5
ALGUMAS NOTAÇÕES E ABREVIATURAS MAIS UTILIZADAS	7
AGRADECIMENTOS	9
CAPITULO 1 - MODELOS DETERMINÍSTICOS	10
1.1 MODELO DE CRESCIMENTO POPULACIONAL COM DEPENDÊNCIA GERAL DA DENSIDADE	10
1.2 MODELO MALTHUSIANO	13
1.3 MODELO LOGÍSTICO DE PEARL - VERHULST	15
1.4 MODELO GOMPERTZ (OU DE FOX)	19
1.5 MODELO GERAL ALTERNATIVO – REPARAMETRIZAÇÃO SEGUNDO BRAUMANN	22
1.6 MODELO DE SCHAEFER	24
1.7 MODELO DE SCHAEFER – REPARAMETRIZAÇÃO SEGUNDO BRAUMANN	31
1.8 MODELO LOGÍSTICO GENERALIZADO	32
ANEXO	36
CAPITULO 2 TEORIA DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E DOS PROCESSOS DE DIFUSÃO	39
2.1 PROCESSO ESTOCÁSTICO, PROCESSO DE MARKOV E PROCESSO DE WIENER	39
2.1.1 PROCESSO ESTOCÁSTICO	39
2.1.2 PROCESSO DE MARKOV	40
2.1.3 PROCESSO DE WIENER (OU MOVIMENTO BROWNIANO)	41
2.1.4 RUÍDO BRANCO	44
2.2 INTEGRAL DE ITO	46
2.2.2 INTEGRAL DE STRATONOVICH	50
2.2.2 FÓRMULA DE ITO	53
2.3. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ESTOCÁSTICAS	56

2.3.1	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ESTOCÁSTICAS LINEARES	60
2.3.2	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS REDUTÍVEIS	65
2.3.3.	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ESTOCÁSTICAS E SUAS SOLUÇÕES	70
2.4	PROCESSOS DE DIFUSÃO	82
2.4.1	DEFINIÇÃO DE DIFUSÃO E PROPRIEDADES	82
2.4.2	CARACTERIZAÇÃO DOS PROCESSOS DE DIFUSÃO: GERADOR INFINITESIMAL E EQUAÇÕES DE KOLMOGOROV	84
2.4.3	DIFUSÃO COMO SOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL ESTOCÁSTICA	88
2.5.	CLASSIFICAÇÃO DAS FRONTEIRAS DE UM PROCESSO DE DIFUSÃO REGULAR	90
2.5.1	REPRESENTAÇÃO CANÔNICA DO GERADOR INFINITESIMAL DO PROCESSO	90
2.5.2	TEMPOS DE SAÍDA DE UM INTERVALO	93
2.5.3	CLASSIFICAÇÃO DAS FRONTEIRAS DE UM PROCESSO DE DIFUSÃO REGULAR	95
2.6	DISTRIBUIÇÃO ESTACIONÁRIA E SUA CARACTERIZAÇÃO	105
CAPITULO 3 MODELOS ESTOCÁSTICOS		109
3.1	PASSAGEM DO DETERMINÍSTICO AO ESTOCÁSTICO	109
3.2	MODELOS ESTOCÁSTICOS DE DINÂMICA DE POPULAÇÕES	115
3.2.1	MODELO EM AMBIENTE ALEATÓRIO SEM DEPENDÊNCIA	115
3.2.2	MODELO EM AMBIENTE ALEATÓRIO COM DEPENDÊNCIA GERAL	125
3.2.3.	MODELO LOGÍSTICO	130
3.2.3.1	Alteração da taxa de crescimento	131
3.2.3.2	Alteração na capacidade de sustento	138
3.2.4	MODELO DE POLANSKY	143
3.2.5	MODELO DE GOMPERTZ	149
3.2.6	APROXIMAÇÃO DE UM PROCESSO DISCRETO POR UMA DIFUSÃO	152
3.2.7	MODELOS DE PESCA COM ESFORÇO VARIÁVEL EM AMBIENTE ALEATÓRIO	157
3.2.7.1	Modelo Gordon-Schaefer	159
3.2.7.2	Modelo de Fox	163
CONCLUSÃO		166
BIBLIOGRAFIA		167

Resumo

Neste trabalho estudamos modelos da dinâmica de uma população sob a influência de diferentes factores aleatórios.

Os modelos determinísticos são habitualmente dados, no caso contínuo, por equações diferenciais ordinárias. E dentre estes modelos os mais frequentes apresentam dependência relativamente à dimensão (ou densidade) da população. Estudaremos vários tipos que podem ser vistos como casos particulares do modelo logístico generalizado.

Por sua vez, os modelos estocásticos que consideramos, são, na sua maioria, obtidos das equações determinísticas por perturbações estocásticas de parâmetros dessas equações. No entanto podemos também considerar modelos que são processos de difusão obtidos como aproximações de processos estocásticos discretos. Em qualquer dos casos teremos equações diferenciais estocásticas cujas soluções são processos de difusão que modelam a densidade da população.

Estudaremos diferentes modelos estocásticos usando a teoria das equações diferenciais estocásticas e dos processos de difusão, caracterizando cada modelo por uma expressão explícita, pelo comportamento nas fronteiras e comportamento assintótico e pelas suas probabilidades de transição.

Abstract

We study population dynamic models under the influence of different random factors.

The deterministic models are usually given on continuous time, by ordinary differential equations and among these models, the most frequent show dependence in what concern the population density. We'll study several kinds that may be regarded as particular cases of the generalized logistic model.

On the other hand, the stochastic models that we consider are in general obtained by stochastic perturbations of deterministic equations parameters. However, some stochastic models can be seen as diffusion approximations of discrete stochastic processes. In both cases we shall have stochastic differential equations which solutions are diffusions, modelling the population density.

We'll study different stochastic models using the theory of stochastic differential equations and diffusion processes, showing each model with an expression from the boundary behaviour and asymptotic behaviour and their transition probabilities.

Introdução

A dinâmica de populações de média ou grande dimensão, constituída por uma só espécie, é, em muitos casos, bem modelada por equações diferenciais ordinárias. Utilizando a teoria destas equações podemos conhecer a evolução da densidade (ou do nº de organismos) da população, a sua limitação e estabilidade e outras características como a sobrevivência ou extinção. (Ver por exemplo [17], [26]).

No entanto, diversos factores que influenciam aquela dinâmica são, muitas vezes, considerados como aleatórios. Os mais significativos são os que se traduzem em flutuações ao longo do tempo das taxas de nascimento e morte de uma população e que constituem a designada *estocasticidade ambiental*. Outros relacionam-se com a *estocasticidade demográfica*, ou seja com acontecimentos aleatórios, de mortalidade e reprodução individual, que são geralmente considerados como independentes entre indivíduos. Estes factores têm maior impacto em populações pequenas (Ver por exemplo [20], [23] e [26]).

A consideração e introdução destes factores leva a modelos estocásticos que podem ser formulados à custa de processos estocásticos de Markov discretos, como os processos de nascimento e morte e os processos ramificados, mas que também podem ser formulados à custa das equações diferenciais estocásticas (e.d.e.).

Assim, este trabalho encontra-se dividido em três capítulos:

No 1º Capítulo são apresentados os modelos determinísticos de crescimento populacional mais conhecidos, assim como uma breve descrição das suas características.

No 2º Capítulo procurou-se apresentar os principais resultados da teoria das e.d.e. que directa ou indirectamente serão necessários para o capítulo seguinte. (Sempre que necessário serão evocados resultados expostos neste capítulo).

No 3º e último capítulo realizamos um estudo dos modelos estocásticos de crescimento populacional, sob o ponto de vista das equações diferenciais estocásticas.

Por fim terminamos com algumas breves conclusões.

O objectivo deste trabalho é analisar, do ponto de vista das equações diferenciais estocásticas, diversos modelos estocásticos da dinâmica de uma população.

Algumas notações e abreviaturas mais utilizadas

<i>e.d.e.</i>	Equação diferencial estocástica
<i>e.d.o.</i>	Equação diferencial ordinária
<i>EFP</i>	Equação de Fokker – Plank
$X_n \xrightarrow{q.c.} X$	X_n converge quase certamente para X quando $n \rightarrow +\infty$
$X_n \xrightarrow{q.m.} X$	X_n converge em média quadrática (ou com probabilidade 1) para X quando $n \rightarrow +\infty$
<i>q.c.</i>	convergência quase certa
<i>q.m.</i>	convergência em média quadrática
<i>p.e.</i>	Processo estocástico
<i>f.d.p.</i>	Função densidade de probabilidade
<i>v.a.</i>	Variável aleatória
R	Conjunto dos números reais
<i>pag.</i>	Página
<i>cap.</i>	Capítulo
$N(\mu, \sigma^2)$	Distribuição normal de media μ e variância σ^2
$p(N N_0, t)$	Função densidade de probabilidade de transição
$\bar{p}(N N_0, \infty)$	Função densidade da distribuição estacionária
(Ω, A, P)	Espaço de probabilidades
$B(\mathbf{R})$	σ -álgebra dos Borelianos de R
<i>i.i.d.</i>	Independente e identicamente distribuída
$W(t), t \geq 0$	Processo de Wiener
$\mu(t, x)$	Média infinitesimal ou deriva de um processo
$\sigma^2(t, x)$	Variância infinitesimal de um processo
$S(x)$	Função escala de um processo
$m(x)$	Medida de velocidade de um processo
$\Sigma(l)$	Mede o tempo necessário para atingir a fronteira l
$Jl, r[$	Intervalo com fronteiras l e r

*Á memória de meu Pai,
Ao Francisco e à Rita*

Agradecimentos

A realização deste trabalho só foi possível porque pessoas e instituições deram o seu melhor contributo. Correndo o risco de, injustamente, me esquecer de alguém, começo assim por agradecer:

À Professora Doutora Teresa Arede pela orientação científica deste trabalho, pelo conhecimento e permanente disponibilidade para me orientar, sugerir e partilhar pontos de vista; mas também, pelo grande apoio, amizade e compreensão manifestada, que em momentos particularmente difíceis que ocorreram durante a elaboração deste trabalho, me deram a motivação imprescindível para prosseguir;

Ao Professor Doutor Francisco Calheiros pela amizade e ajuda prestada durante a realização deste Mestrado;

À Universidade Católica, em particular à FEG, por toda a disponibilidade que me foi concedida e pelo enquadramento académico proporcionado;

Aos meus colegas da Universidade Católica-Porto, em particular à Dra. Francisca Guedes de Oliveira e à Dra. Margarida Macedo;

Aos meus familiares não só pelo incentivo e apoio dado nos momentos difíceis mas também pela ajuda prestada ao longo de todo o mestrado;

De forma muito especial ao meu marido e à minha mãe.

Evidentemente que todos os erros e omissões me são integralmente imputáveis.

Capítulo 1 - Modelos Determinísticos

1.1 Modelo de crescimento populacional com dependência geral da densidade

Seja $N(t)$ o tamanho ou biomassa de uma população no instante t . O modelo determinístico de crescimento populacional mais geral, com dependência da densidade é caracterizado por

$$\frac{dN}{dt} = r N f(N) \quad (1)$$

em que

$r > 0$ – parâmetro de crescimento intrínseco e

$f(N)$ – representa as limitações ao crescimento (sejam elas limitações territoriais, alimentares e outras limitações de crescimento).

Consideremos ainda N_0 a população inicial conhecida, ou seja teremos $N(0) = N_0$.

Estas limitações existem em quase todos os modelos e serão tanto mais severas quanto maior for a população, ou seja $f(N)$ é uma função não crescente.

Assim, considerando o modelo geral sujeito a algumas hipóteses pouco restritivas e a que satisfazem todos os modelos, à exceção dos que contemplam os *efeitos de Allee*^{*}, admite-se que:

^{*} Descrito em anexo no fim deste capítulo

- a) $f(N_0) > 0$
- b) f é duas vezes continuamente diferenciável para $N > 0$
- c) f é não crescente para $N > 0$

Consideremos agora a *capacidade de sustento ou suporte do meio* definida por:

$$K = \inf\{N > 0 : f(N) = 0\}$$

Tipicamente a capacidade de sustento, K , é um valor finito, $K > N_0$ e corresponde ao *ponto de equilíbrio* do modelo geral (ou seja corresponde à dimensão que população atingirá no fim do processo de crescimento).

Definindo agora, para $N > 0$, a seguinte função :

$$c(N) = \int_{N_0}^N (x f(x))^{-1} dx$$

é necessário considerar duas hipóteses de natureza técnica para evitar variações excessivamente grandes de f , na vizinhança dos **pontos de equilíbrio** : $N=0$ e $N=K$. São elas,

$$\text{d) } c(0^+) = -\infty \qquad \text{e) } c(K^-) = +\infty$$

Da equação (1) por integração, obtemos $c(N(t)) = rt$. Isto significa que a função $c(N)$ para uma população de dimensão N é proporcional ao tempo que essa população leva a atingir essa mesma dimensão ($0 < N < K$). Por este motivo a função $c(N)$ é habitualmente designada por “*função relógio*”.

Todos os modelos analisados, com excepção dos que consideram efeitos de Allee, satisfazem as condições de a) a e).

Existem diversos modelos com funções $f(N)$ específicas.

No que se segue far-se-á um resumo dos modelos determinísticos mais comuns, modelos estes que correspondem a casos particulares, quer deste modelo, quer do modelo logístico generalizado apresentado no fim deste capítulo.

1.2 Modelo Malthusiano

Este modelo está associado a Thomas Malthus (1766-1839). Malthus foi o primeiro a constatar que as espécies tendem a aumentar a uma taxa proporcional à população.

Assim, sendo $N(t)$ a dimensão da população no instante t , teremos

$$\frac{dN}{dt} = r N \quad (2)$$

onde r é a taxa de crescimento, ou decrescimento, intrínseca e per capita conforme se considere $r > 0$ ou $r < 0$.

Este caso corresponde à função $f(N)=1$ na equação (1).

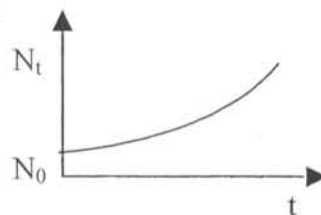
Considerando a condição inicial $N(0)=N_0$ a solução da equação (2) é dada por

$$N_t = N_0 e^{rt}$$

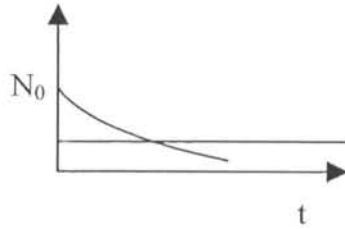
Neste modelo o crescimento ou decrescimento da população é exponencial pelo que não existem limitações ao crescimento

Podemos considerar três diferentes situações para a taxa de crescimento

1) $r > 0$ - crescimento exponencial



A população cresce exponencialmente, no entanto não tem em conta que os meios de subsistência são limitados.

2) $r < 0$ - decréscimo exponencial

A população decresce exponencialmente mesmo que os recursos sejam ilimitados.

3) $r = 0$ - não existe alteração

$$N(t) = N(0), \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{Modelo estacionário})$$

Relativamente aos **pontos de equilíbrio** para este modelo podemos apenas considerar o valor $N=0$ que corresponde a um equilíbrio instável.

De notar que a aplicação deste modelo pressupõe algumas condições, nomeadamente:

- A reprodução deve ser contínua (sem sazonalidade),
- Todos os organismos devem ser idênticos (sem estrutura de idade) e
- O ambiente deve ser constante em espaço e tempo (recursos ilimitados).

No entanto, com este modelo, Malthus não tomou em consideração que, num dado ambiente, o crescimento pode parar, quer devido à tendência de uns organismos destruírem outros, quer devido à existência de diferentes tipos de limitações (por exemplo alimentares). Daí a necessidade da procura de outros modelos.

1.3 Modelo Logístico de Pearl - Verhulst

No modelo logístico, para corrigir o facto de a população poder crescer exponencialmente, Verhulst considerou que a dimensão da população atingirá um nível de saturação que é caracterizado pelo ambiente. Isto significa que a taxa de crescimento per capita não é constante, como no modelo de Malthus, mas decresce com o aumento da dimensão da população. Assim, se no modelo de Malthus se substituir r pelo factor $r(1-N/K)$, obtém-se o chamado modelo *Modelo Logístico de Verhulst*. Pearl utilizou pela primeira vez este modelo para analisar o crescimento da população dos Estados Unidos em 1920.

A função $f(N)$ de 1.1 assume agora a forma $f(N) = \left(1 - \frac{N}{K}\right)$, e surge assim a equação logística

$$\frac{dN}{dt} = r N \left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (3)$$

em que

N - representa a dimensão da população

$r > 0$ - a taxa intrínseca de crescimento e

K - a capacidade de sustento

A função $g(N) = r \left(1 - \frac{N}{K}\right)$ representa então a taxa de crescimento per capita, que depende da densidade populacional. É, como se vê, uma relação linear decrescente¹.

¹ Se $N \ll K$ obtém-se o modelo de Malthus.

O facto dos indivíduos competirem por alimentação, habitat ou outros recursos limitados, leva a um aumento na taxa de mortalidade. Estes efeitos tornam-se mais pronunciados quando existem “encontros” entre indivíduos.

A equação (3) que pode ser escrita na forma

$$\frac{dN}{dt} = r N - \frac{r}{K} N^2$$

mostra-nos que a mortalidade é proporcional à taxa de “encontros” entre indivíduos (dada pelo segundo termo da equação)

A solução da equação (3) é dada por:

$$N(t) = \frac{N_0 K}{N_0 + (K - N_0) e^{-rt}} \quad (4)$$

com a condição inicial $N(0) = N_0$, $N_0 > 0$.

O modelo logístico obtém-se, como já observamos para $r > 0$.

Para $r < 0$ obter-se-á outro modelo de dinâmica de populações que pode ser visto como um modelo com um limiar de crescimento, no sentido em que abaixo desse limiar a população decresce sempre [ver 5]. Neste trabalho não analisamos este caso.

Para $r = 0$ a população mantém o seu valor inicial.

Para este modelo podemos realçar as seguintes características:

- 1) $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = K$, ou seja a população tende a atingir a capacidade de sustento.

Supondo $0 < N_0 < K$, pode concluir-se que $N(t)$ é crescente e $0 < N(t) < K$. Então:

2) A taxa relativa de crescimento $\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = g(N) = r \left(1 - \frac{N}{K}\right)$ decresce linearmente e atinge o valor mínimo (zero) em $N=K$, que é neste caso o valor máximo (assimptótico) de N .

3) Taxa de crescimento máxima

Temos

$$\frac{d^2 N}{dt^2} = r \left(1 - \frac{2N}{K}\right) \cdot \frac{dN}{dt} = r^2 N \left(1 - \frac{2N}{K}\right) \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

Logo $\frac{dN}{dt}$ cresce para $1 - \frac{2N}{K} > 0$, isto é $N < \frac{K}{2}$, e decresce para $\frac{K}{2} < N < K$. Assim

$N = \frac{K}{2}$ corresponde a um ponto de inflexão de $N(t)$ (onde $\frac{d^2 N}{dt^2} = 0$).

Neste ponto $\left(\frac{dN}{dt}\right)_{\max} = r \frac{K}{4}$ representa a taxa máxima de crescimento.

O ponto de inflexão é como já vimos

$$N_{\text{inf}} = \frac{K}{2}$$

sendo o tempo de inflexão, t_{inf} , dado por

$$t_{\text{inf}} = \frac{1}{r} \ln \left[\frac{K - N_0}{N_0} \right]$$

Se $N_0 > K$, a população $N(t)$ decresce, $N(t) > K$ continuando a verificar-se 1), ou seja $N(t) \rightarrow K$, $t \rightarrow \infty$. Verifica-se ainda que $\frac{d^2 N}{dt^2} > 0$. Em particular se $N_0 = K$, $N = K \forall t$, a população não se altera.

Assim o gráfico de (4) apresenta, para diferentes valores de N_0 , o seguinte comportamento

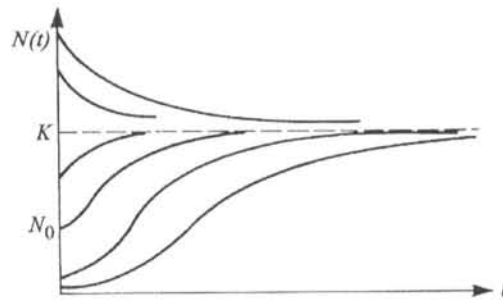


figura 1

Os pontos de equilíbrio deste modelo dados por $\frac{dN}{dt} = 0$. São eles $N=0$ e $N=K$.

$N=0$ é um *ponto instável* na medida em que um pequeno desvio deste ponto de equilíbrio leva a um aumento do crescimento da população. $N=K$ é um *ponto estável*, isto porque após pequenas alterações a população retoma o seu estado de equilíbrio.

1.4 Modelo Gompertz (ou de Fox)

O modelo de Gompertz bastante popular em oncologia (ver [15], [24]), é utilizado para descrever o crescimento de tumores sólidos. O problema de lidar com uma geometria complexa e com o facto de as células no interior dos tumores não terem acesso nem a oxigénio, nem a nutrientes, é simplificado assumindo que a taxa de crescimento diminui à medida que a massa celular aumenta.

Neste modelo a função dependência do modelo geral **1.1** toma a forma $f(N) = \ln\left(\frac{K}{N}\right)$, obtendo-se a equação

$$\frac{dN}{dt} = r N \ln\left(\frac{K}{N}\right) \quad (5)$$

em que

N - representa a dimensão da população

$r > 0$ - a taxa intrínseca de crescimento e

K - a capacidade de sustento

Notar que para $N=0$, $\ln N$ é indefinido pelo que em populações de muito pequena dimensão este modelo não se aplica.

A solução da equação **(5)** é dada por

$$N(t) = K \exp \left[\ln \left(\frac{N_0}{K} \right) e^{-rt} \right] \quad (6)$$

com a condição inicial, $N(0)=N_0$,

Podemos analisar as seguintes características do modelo:

1) $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = K$, ou seja a população tende a atingir a capacidade de sustento.

Supondo $0 < N_0 < K$ pode concluir-se que $N(t)$ é crescente, e $0 < N < K$. Nestas condições verifica-se que

2) A taxa relativa de crescimento $\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = g(N) = r \ln\left(\frac{K}{N}\right)$ é decrescente e atingindo o valor mínimo (zero) em $N=K$, que é neste caso o valor máximo de N .

3) Taxa de crescimento máxima

Seja

$$\frac{d^2N}{dt^2} = r^2 N \ln\left(\frac{K}{N}\right) \left(\ln\frac{K}{N} - 1\right)$$

Temos que $\frac{dN}{dt}$ cresce para $\ln\frac{K}{N} - 1 > 0$, isto é $N < \frac{K}{e}$, e decresce para $\frac{K}{e} < N < K$.

Assim $N = \frac{K}{e}$ corresponde a um ponto de inflexão de $N(t)$ (onde $\frac{d^2N}{dt^2} = 0$).

Neste ponto $\left(\frac{dN}{dt}\right)_{\max} = r \frac{K}{e}$ representa a taxa máxima de crescimento.

O ponto de inflexão, N_{inf} , como já foi referido é

$$N_{\text{inf}} = \frac{K}{e}$$

Se a propriedade anterior for satisfeita, diz-se que $X(t)$ é um processo de Markov com probabilidades de transição definidas por

$$P(s, x; t, B) = P[X(t) \in B \mid X(s) = x]$$

em que $s < t$. Para s, t e x fixos $P(s, x; t, \cdot)$ é uma função de probabilidade na σ -álgebra de $B(\mathbb{R})$.

A densidade da probabilidade de transição $P(s, x; t, \cdot)$, quando existe, é uma função $p(s, x; t, y)$ dada por

$$P(s, x; t, B) = \int_B p(s, x; t, y) dy$$

Pela definição de probabilidade condicional anterior vem que

$$p(s, x; t, y) = \frac{f_{s,t}(x, y)}{f_s(x)}$$

Diz-se que um *processo de Markov é homogéneo* no tempo, se todas as densidades de transição $p(s, x; t, y)$ dependem somente da diferença $t-s$ e não dos valores específicos de t e s .

2.1.3 Processo de Wiener (ou movimento Browniano)

O processo de Wiener $(W_t)_{t \geq 0}$, é um processo estocástico que pode ser definido da seguinte forma:

i) $W(0) = 0$ q.c.

- ii) os incrementos do processo são independentes; ou seja para $0 \leq t_1 < \dots < t_n$, os incrementos $W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ são independentes.
- iii) $W_{t_i} - W_{t_{i-1}} \sim N(0, t_i - t_{i-1})$

Sendo $(W_t)_{t \geq 0}$ um processo de incrementos independentes é um processo de Markov, pelo que a densidade de transição é dada por,

$$P(s, x, t, y) = [2\pi(t-s)]^{-1/2} e^{-\frac{|y-x|^2}{2(t-s)}}$$

para $s < t$.

Propriedades do processo de Wiener [3], [4] e [18]

- a) O processo de Wiener tem trajectórias contínuas *q.c.*, em $[0, +\infty[$.
- b) O processo de Wiener é não diferenciável *q.c.*, em $[0, +\infty[$.
- c) As variações quadráticas das trajectórias, no intervalo $[s, t]$, convergem em média quadrática para $(t-s)$; ou seja, considerando a seguinte decomposição do intervalo $[s, t]$

$$s = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < t_n^{(n)} = t$$

com

$$\delta_n = \max (t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)})$$

e sendo

$$S_n = \sum_{k=1}^n [W(t_k^{(n)}) - W(t_{k-1}^{(n)})]^2$$

prova-se que o limite em média quadrática da sequência S_n é igual a:

$$q.m. \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \delta_n \rightarrow 0}} S_n = t - s$$

Como consequência de c) teremos

d) O processo de Wiener tem variação ilimitada num qualquer intervalo de tempo finito.

e) O processo de Wiener é uma martingala, isto é,

$$E [W(t) | W(r), 0 \leq r \leq s] = W(s)$$

f) *Lei do logaritmo iterado*

Num processo de Wiener, por analogia à lei forte dos grandes números,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{W(t)}{t} = 0, \text{ q.c.}$$

Mais precisamente o comportamento assymptótico do processo de Winer pode ser descrito pelas igualdades

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{W(t)}{\sqrt{2t \log \log t}} = 1, \text{ q.c.} \quad \text{e} \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{W(t)}{\sqrt{2t \log \log t}} = -1, \text{ q.c.}$$

que constituem a chamada lei do logaritmo iterado

2.1.4 Ruído Branco

Um ruído branco Gaussiano é um modelo para um processo estocástico completamente aleatório constituído por v.a. com distribuição Normal. Em muitas aplicações é definido como um processo Gaussiano estacionário $\varepsilon(t)$, $-\infty < t < +\infty$, com $E[\varepsilon(t)] = 0$ e uma função densidade espectral, $f(\lambda)$, constante para $\lambda \in \mathbf{R}$; isto é, sendo

$$C(t) = E[\varepsilon(s) \varepsilon(t+s)]$$

a covariância do processo, a função densidade espectral é

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t} C(t) dt = \frac{C}{2\pi}$$

em que C é uma constante real.

Considerando que a f.d. espectral pode ser interpretada como uma medida da contribuição relativa da frequência, λ , no comportamento oscilatório de $C(t)$, a equação anterior mostra que, estando todas as frequências presentes em igual medida, o nome de *ruído branco* é justificado por analogia com a luz branca.

Esta equação implica ainda que a função $C(t)$ é a transformada de Fourier inversa de $f(\lambda)$, donde

$$C(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} f(\lambda) d\lambda = \frac{C}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} d\lambda = C\delta(t)$$

e $\delta(t)$ é a função delta de Dirac.

Concluimos então que o processo do ruído branco, é um processo não correlacionado, em tempos distintos, e por isso independente, uma vez que é Gaussiano.

Em particular,

$$C(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d\lambda = \infty$$

Pela análise da covariância verifica-se que um processo desta natureza não é um processo estocástico no sentido usual. Para tratar rigorosamente este tipo de processos recorre-se a funções generalizadas ou às chamadas distribuições de Schwartz.

A relação entre ruído branco Gaussiano e o processo de Wiener pode ser formalmente traduzido do seguinte modo.

A covariância do processo de Wiener é dada por

$$C_w(t, s) = E[W(t) W(s)] = \min(t, s)$$

Se considerarmos formalmente a derivada do processo de Wiener, $(W_t)_{t \geq 0}$, temos que a sua covariância satisfaz a igualdade

$$C_{\dot{W}}(t, s) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} C_w(t, s)$$

que neste caso é

$$C_{\dot{W}}(t, s) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \min(t, s) = \delta(t - s).$$

Pode então concluir-se que a covariância da derivada do processo de Wiener é a covariância do ruído branco.

Em sentido generalizado (ou das distribuições) o ruído branco Gaussiano é a derivada do processo de Wiener.

2.2 Integral de Ito

No que se segue vamos definir o integral de um processo estocástico relativamente ao processo de Wiener $(W(t))_{t \in [a,b]}$.

2.2.1 Integral de Ito: Definição e propriedades

Vamos considerar o processo Wiener, $(W(t))_{t \in [a,b]}$, definido no espaço de probabilidades (Ω, \mathcal{A}, P) .

Seja $\{\mathcal{A}_t : t \in [a,b]\}$ uma família de sub- σ -álgebras de \mathcal{A} , em que:

- 1) $\mathcal{A}(t_1) \subseteq \mathcal{A}(t_2)$ se $t_1 < t_2$
- 2) $W(t)$ é \mathcal{A}_t -mensurável
- 3) Para $s > 0$, $W(t+s) - W(t)$ é independente de \mathcal{A}_t .

Consideremos um p.c., $(X_t)_{t \in [a,b]}$ tal que

- a) $X(t, \omega)$ é mensurável nas duas variáveis, relativamente à σ -álgebra produto $B([a,b]) \times \mathcal{A}$, onde $B([a,b])$ é a σ -álgebra dos Borelianos de $[a, b]$.
- b) X_t é uma função \mathcal{A}_t -mensurável para cada $t \in [a, b]$, ou de outro modo, o processo $(X_t)_{t \in [a,b]}$ é $(\mathcal{A}_t)_{t \in [a,b]}$ adaptado.
- c) $X_t(\omega)$ é de quadrado integrável em média, no intervalo $[a, b]$, ou seja,

$$E \left[\int_a^b X^2(t, \omega) dt \right] < +\infty$$

O *p.e.* que satisfaz as condições a) e b) diz-se *não antecipativo* relativamente a $(W(t))_{t \in [a,b]}$.
O espaço dos processos que satisfazem as condições a), b) e c) designa-se por $L^2[a, b]$.

Seja $(g_t)_{t \in [a,b]}$ um *p.e. simples* em $L^2[a,b]$, isto é, $(g_t)_{t \in [a,b]}$ diz-se simples se existe uma partição do intervalo, $a=t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, tal que $g(t) = g(t_i)$, $t \in [t_i, t_{i+1}[$, e satisfaz a), b) e c) anteriores.

Define-se *integral de Wiener ou integral de Ito em [a,b]*, para uma função simples, por

$$\int_a^b g(t) dW(t) = \sum_{i=0}^{n-1} g(t_i) [W(t_{i+1}) - W(t_i)]$$

Proposição [18]

Dado um processo $(X_t)_{t \in [a,b]}$ em $L^2[a, b]$, existe uma sequência de *p.e. simples* em $L^2[a,b]$, $\{g_n(t), t \in [a,b], n \in \mathbb{N}\}$ tal que:

$$E \left[\int_a^b |X(t) - g_n(t)|^2 dt \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

o que significa que $(g_n(t))$ é uma sucessão de *p.e. simples* que converge em $L^2[a, b]$ para o processo $(X_t)_{t \in [a,b]}$.

Prova-se que, [18], a sequência $\int_a^b g_n(t) dW(t) = I_n$ converge em média quadrática para uma variável aleatória I

$$I = q.m. \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n(t) dW(t) = q.m. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} g_n(t_i) [W(t_{i+1}) - W(t_i)]$$

definindo-se então o integral de Wiener do processo $(X_t)_{t \in [a,b]}$ por

$$\int_a^b X(t) dW(t) = I$$

Notar que nas somas anteriores o valor da função g é calculado no extremo esquerdo do intervalo da partição, de modo a garantir a independência desse valor relativamente ao incremento do processo de Wiener no intervalo considerado. Como veremos mais adiante esta definição depende do ponto escolhido para calcular o valor de $g(t)$. O integral acima definido designa-se também por *integral estocástico de Ito*.

Propriedades do integral de Ito

Da definição anterior decorrem as seguintes propriedades:

1- Linearidade

Dados dois processos $(X_1(t))_{t \in [a,b]}$ e $(X_2(t))_{t \in [a,b]}$, definidos em $L^2[a, b]$, temos

$$\int_a^b (\alpha X_1(t) + \beta X_2(t)) dW(t) = \alpha \int_a^b X_1(t) dW(t) + \beta \int_a^b X_2(t) dW(t)$$

para α e $\beta \in \mathbf{R}$.

2- Média do integral de Wiener

$$E\left(\int_a^b X(t) dW(t)\right) = 0$$

3- Variância do integral de Wiener

$$E\left(\int_a^b X(t) dW(t)\right)^2 = E\int_a^b X^2(t) dt = \int_a^b EX^2(t) dt$$

4- Aditividade relativamente ao domínio de integração

$$\int_a^b X(t) dW(t) = \int_a^c X(t) dW(t) + \int_c^b X(t) dW(t) \quad a < c < b$$

Definindo agora

$$I(t) = \int_a^t X(s) dW(s)$$

temos que $(I(t))_{t \in [a, b]}$ é um novo p.e. com as seguintes propriedades:

5 - A variável aleatória $I(t)$ é mensurável relativamente à σ -álgebra

$$\mathcal{A}_t = \sigma[W(s), a \leq s \leq t]$$

6 - $(I(t))_{t \in [a, b]}$ tem trajectórias contínuas q.c., em $[a, b]$

7 - Dados t_1 e $t_2 \in [a, b]$

$$E[I(t_1)I(t_2)] = \int_a^{\min(t_1, t_2)} EX^2(s) ds$$

8 – $(I(t))_{t \in [a,b]}$ é uma martingala relativamente ao movimento Browniano; ou seja:

$$E[I(t) | \mathcal{A}_s] = I(s) \quad , \quad a \leq s \leq t$$

9 – $(I(t))_{t \in [a,b]}$ é um processo de Markov.

2.2.1 Integral de Stratonovich

Como referimos atrás, o integral estocástico que definimos depende do ponto da partição onde se calcula a função integranda.

Vamos agora definir um outro integral estocástico.

Suponhamos que $X \in L^2[a, b]$ e que é contínuo em $[a, b]$, para quase todo $w \in \Omega$.

Então, dado uma partição $a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < t_n^{(n)} = b$ de $[a, b]$, a função

$$g^{(n)}(t) = X^{(n)}(t) \quad , \quad t \in [t_j, t_{j+1}[$$

é uma função em degrau que pertence a $L^2[a, b]$ e tal que

$$E \int_a^b |g^{(n)}(t) - X(t)|^2 dt \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$

O integral de Ito de X , que definimos anteriormente, é então dado por

$$\int_a^b X(t) dW(t) = q.m. \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \delta_n \rightarrow 0}} \sum_{j=0}^{n-1} X(t_j^{(n)}) [W(t_{j+1}) - W(t_j)]$$

Se definirmos agora

$${}^{(S)}\int_a^b X(t) dW(t) = q.m. \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \delta_n \rightarrow 0}} \sum_{j=1}^n X\left(\frac{t_{j+1}^{(n)} + t_j^{(n)}}{2}\right) [W(t_{j+1}) - W(t_j)]$$

teremos, sempre que o limite existir, um novo integral designado por *Integral de Stratonovich*.

Embora tenhamos aqui considerado um p.e. contínuo em $[a, b]$ esta definição pode estender-se a qualquer processo estocástico em $L^2[a, b]$ já que estes podem ser aproximados por sequências de processos contínuos.

Para identificar que se trata de um Integral de Stratonovich, geralmente coloca-se um (S) antes do integral, ou utiliza-se a s notação

$$\int_0^t X(s) \circ dW(s)$$

A diferença entre os integrais de Ito e de Stratonovich pode ser exemplificada da seguinte forma. Usando a definição de Ito podemos obter

$$\int_a^b W_s dW_s = \frac{W^2(b) - W^2(a)}{2} - \frac{b-a}{2}$$

enquanto que segundo Stratonovich virá

$${}^{(S)}\int_a^b W_s dW_s = \frac{W^2(b) - W^2(a)}{2}$$

Assim, enquanto que no integral de Ito aparece um termo extra devido à variação não limitada de $W(t)$, no integral de Stratonovich é seguida a regra habitual de cálculo. Este é um aspecto que torna útil o integral de Stratonovich.

Podemos estabelecer uma relação mais geral entre os dois integrais.

Consideremos agora uma função $h(t, x)$ definida para $(t, x) \in [a, b] \times \mathbf{R}$, tal que é contínua

em t e $\frac{\partial h}{\partial x}$ é contínua em t e x .

Suponhamos também que

$$\int_a^b E[|h(t, W_t)|^2] dt < \infty \quad \text{isto é} \quad h(t, W_t) \in L^2[a, b]$$

Então define-se

$$(S) \int_a^b h(t, W_t) dW(t) \equiv q.m \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max(t-t_{i-1}) \downarrow 0}} \sum_{i=1}^n h\left(t_{i-1}, \frac{W_{t_i} + W_{t_{i-1}}}{2}\right) [W(t_i) - W(t_{i-1})]$$

Se o processo no integrando do integral estocástico for uma função aleatória independente de $(W(t))_{t \in [a, b]}$ então os dois integrais coincidem.

É importante conhecer a relação entre o integral de Ito e o de Stratonovich.

No caso anterior da função $h(t, W_t)$ podemos demonstrar que ([3], e [18]):

$$\int_a^b h(t, W_t) dW_t = (S) \int_a^b h(t, W_t) dW_t - \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\partial h}{\partial x}(t, W_t) dt$$

Esta expressão pode ser generalizada como se pode ver adiante a propósito das e.d.e.

Como já foi referido o integral de Stratonovich utiliza as regras usuais de cálculo. No entanto o integral de Ito tem, do ponto de vista probabilístico, melhores propriedades como

vimos anteriormente. Vamos em seguida apresentar uma propriedade que permite algumas regras de cálculo com o integral de Ito

2.2.2 Fórmula de Ito

A definição de integral de Ito não é muito útil para calcular integrais, nomeadamente pelo facto do integral de Ito não poder ser considerado como um integral de Riemann-Stieltjes e por isso também não permitir usar as regras usuais de cálculo integral.

A fórmula de Ito, que veremos a seguir, estabelece uma versão da regra em cadeia para integrais de Ito, que é bastante útil no cálculo desses integrais.

Consideremos um processo $(X(t))_{t \geq 0}$ para o qual dados dois quaisquer instantes $0 \leq t_1 \leq t_2$, se verifica:

$$X(t_2) - X(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a(t, w) dt + \int_{t_1}^{t_2} b(t, w) dW(t)$$

e em particular

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s, w) ds + \int_0^t b(s, w) dW(s)$$

Nestas igualdades $(W(t))_{t \geq 0}$ é o movimento Browniano a uma dimensão, e $(a(t, w))_{t \geq 0}$ e $(b(t, w))_{t \geq 0}$ são *p. e.* tais que:

$$E \int_0^t |a(s, w)| ds < +\infty \quad \forall t \geq 0 \quad \text{e} \quad E \int_0^t |b(s, w)|^2 ds < +\infty \quad \forall t \geq 0$$

e são *p. e. não antecipativos* relativamente a $(W(t))_{t \geq 0}$.

O processo $(X(t))_{t \geq 0}$ diz-se um *p.e. de Ito a 1 dimensão*, definindo-se o **diferencial de X(t)** como:

$$dX(t) = \underbrace{a(t)}_{a(t,w)} dt + \underbrace{b(t)}_{b(t,w)} dW(t)$$

Seja agora $f(t,x)$ uma função contínua em $t \in [0, \infty[$, com derivadas $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ contínuas em t e x .

Definindo um novo processo $Y(t)$ como $Y(t) = f(t, X(t))$, onde $X(t)$ é o processo de Ito acima considerado, verifica-se que $Y(t)$ também é um processo de Ito e o seu diferencial vem

$$dY(t) = df(t, X(t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X(t)) dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X(t)) dX(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X(t)) b^2(t) dt$$

Substituindo $dX(t)$ pela sua expressão fica:

$$dY(t) = \left[\frac{\partial f}{\partial t}(t, X(t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X(t)) b^2(t) + a(t) \frac{\partial f}{\partial x}(t, X(t)) \right] dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X(t)) b(t) dW(t)$$

ou simplesmente,

$$dY(t) = \bar{a}(t) dt + \bar{b}(t) dW(t)$$

em que $\bar{a}(t)$ é o novo coeficiente de dt , $\bar{b}(t)$ o novo coeficiente de $dW(t)$

Observação: Seja

$$\bar{a}(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X(t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X(t)) b^2(t) + a(t) \frac{\partial f}{\partial x}(t, X(t))$$

Podemos escrever

$$\bar{a}(t) = \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} b^2(t) + a(t) \frac{\partial}{\partial x} \right] f(t, X(t))$$

ou ainda

$$\bar{a}(t) = L f(t, X(t))$$

onde L é um *operador diferencial de derivadas parciais* designado por *gerador infinitesimal do processo* $X(t)$.

A fórmula de Ito pode ser generalizada para processos multidimensionais. Em particular: sejam $X_1(t)$ e $X_2(t)$ dois processos de Ito dados por

$$dX_i(t) = a_i(t) dt + b_i dW(t), \quad i = 1, 2$$

Pode provar-se que (ver [18])

$$\begin{aligned} d(X_1(t), X_2(t)) &= X_1(t) dX_2(t) + X_2(t) dX_1(t) + b_1(t) b_2(t) dt \\ &= [X_1(t) a_2(t) + X_2(t) a_1(t) + b_1(t) b_2(t)] dt + [X_1(t) b_2(t) + X_2(t) b_1(t)] dW(t) \end{aligned}$$

O que nos fornece uma regra de “diferenciação” do produto de dois processos de Ito.

2.3. Equações diferenciais estocásticas

A inclusão de efeitos aleatórios em equações diferenciais ordinárias conduz a diferentes classes de equações, para as quais os processos solução apresentam propriedades distintas, nomeadamente na regularidade das suas trajectórias.

Uma classe, e a mais simples, resulta quando a equação diferencial ordinária (e.d.o.) tem coeficientes aleatórios e/ou o seu valor inicial é também uma v. a. Estas equações também chamadas equações diferenciais aleatórias (e.d.a.) são consideradas, trajectória a trajectória, como equações diferenciais ordinárias. As trajectórias do processo solução duma e.d.a., são pelo menos, funções diferenciáveis.

Como exemplo, considere-se a seguinte equação linear:

$$\frac{dX}{dt} = a(\omega)X + b(t, \omega) \quad (1)$$

em que b é um processo contínuo em t para cada ω . A solução desta equação, com valor inicial $X_0(\omega)$ em $t=0$, é dada pelo p.e.:

$$X(t, \omega) = e^{a(\omega)t} \left(X_0(\omega) + \int_0^t e^{-a(\omega)s} b(s, \omega) ds \right) \quad (2)$$

Claramente as trajectórias são funções diferenciáveis em t .

Uma outra classe ocorre quando, na e.d.o., é introduzida uma perturbação dada por um p.e. irregular, como por exemplo um ruído branco Gaussiano. Estas equações são traduzidas por diferenciais estocásticos, mas interpretadas segundo integrais estocásticos de Ito ou

Stratonovich. São chamadas equações diferenciais estocásticas (e.d.e.), e em geral, as suas soluções herdam a não diferenciabilidade das trajectórias do processo de Wiener .

É deste tipo de equações que nos ocuparemos nesta secção. Exemplos de aplicação serão tratados no cap.3.

Em geral as e.d.e. que consideramos são da forma

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t$$

ou, em termos integrais

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t b(s, X_s) dW_s$$

onde X_{t_0} é uma dada condição inicial, e $a(t,x)$ e $b(t,x)$ são funções que satisfazem determinadas condições que veremos adiante. O integral da última parcela é o integral de Wiener que vimos anteriormente.

Começemos por enunciar o *teorema de existência e unicidade* para estas equações.

Teorema 1 (*teorema da existência e unicidade da solução*) (ver [18])

Suponhamos que

- As funções $a(t,x)$ e $b(t,x)$ são mensuráveis em relação a t e x , para todo $t \in [0, T]$ e todo o $x \in \mathbf{R}$.
- Existe uma constante K , tal que, para todo $t \in [0, T]$, e todo $x, y \in \mathbf{R}$ satisfaz as condições

$$\text{a) } |a(t, x) - a(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq K|x - y|$$

$$\text{b) } |a(t, x)|^2 + |b(t, x)|^2 \leq K^2(1 + |x|^2)$$

- X_{t_0} é independente de $W(t)$, para $t_0 > 0$, e $E(X_{t_0})^2 < \infty$.

Então existe uma solução $X(t)$ da equação anterior definida em $[0, T]$, contínua com probabilidade 1, e tal que $\sup_{[0, T]} E(X_t)^2 < \infty$.

Mais ainda uma solução com estas propriedades é única por caminhos, ou seja, se X e Y são duas soluções da equação.

$$P\left(\sup_{[0, T]} |X(t) - Y(t)| = 0\right) = 1$$

A demonstração deste teorema é, como no caso das e.d.o, feita recorrendo ao *Método das aproximações sucessivas* (ver [18]).

Em relação às estimativas dos momentos das soluções das e.d.e. podemos ainda enunciar o seguinte teorema.

Teorema 2 [18]

Considere-se que as funções a e b satisfazem as condições do Teorema 1; se existe um número inteiro positivo n tal que

$$E|X_0|^{2n} < \infty$$

então a solução $X(t)$ da e.d.e. anterior, no intervalo $[0, T]$, de valor inicial $X(0)=X_0$ satisfaz as condições

$$E|X_t|^{2n} \leq (1 + E|X_0|^{2n})e^{Ct} \quad \text{e} \quad E|X_t - X_0|^{2n} \leq D(1 + E|X_0|^{2n})t^n e^{Ct}$$

para todo $t \in [0, T]$ e em que $C=2n(2n+1)K^2$ e D são constantes (que dependem apenas de n, K e T)

Teorema 3 [18]

Considere-se que as funções $a(x)$ e $b(x)$ satisfazem as condições do Teorema 1. Então para qualquer valor inicial $X(0)=X_0$, a solução da e.d.e.

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t$$

é um processo de Markov no intervalo $[0, T]$, com distribuição inicial e probabilidades de transição dadas, respectivamente, por

$$P_0(B) = P(X(0) \in B)$$

$$P(s, x, t, B) = P(X(t) \in B | X(s) = x)$$

Atendendo à definição e propriedades do integral de Ito e Stratonovich vistas em 2.2.1 podemos escrever as e.d.e. à custa desses integrais e relacionar as duas formas de escrita.

Assim, a e.d.e., segundo Stratonovich

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t) \circ dW_t$$

corresponde à e.d.e. segundo Ito

$$dX_t = \left[a + \frac{1}{2} \frac{\partial b}{\partial x} b \right] (t, X_t) dt + b(t, X_t) dW_t$$

2.3.1 Equações diferenciais estocásticas lineares

Tal como nas equações diferenciais ordinárias, as soluções das e.d.e. lineares podem ser determinadas explicitamente.

Considerando o caso escalar, uma e.d.e. linear pode ser escrita na seguinte forma

$$dX_t = [a_1(t)X_t + a_2(t)]dt + [b_1(t)X_t + b_2(t)]dW_t \quad (3)$$

em que a_1 , a_2 , b_1 e b_2 são, em geral, funções do tempo ou constantes.

Contanto que, estas funções sejam Lebesgue mensuráveis e limitadas no intervalo $0 \leq t \leq T$, o teorema da existência e unicidade é aplicável garantindo a existência da solução X_t , para $t_0 \leq t \leq T$ para cada $0 \leq t_0 < T$, com condição inicial $X(t_0) = X_{t_0}$ independente de $W_t - W_{t_0}$, $t \geq t_0$.

Quando os coeficientes são constantes a e.d.e. é autónoma e as soluções, que existirão para todo $t \geq 0$, são processos homogêneos de Markov.

Se $a_2(t) \equiv 0$ e $b_2(t) \equiv 0$ a equação anterior diz-se e.d.e. linear homogênea

$$dX_t = a_1(t)X_t dt + b_1(t)X_t dW_t \quad (4)$$

em que $X_t = 0$ é solução. De particular importância é a chamada *solução fundamental* Φ_{t,t_0} , que satisfaz a condição inicial $\Phi_{t_0,t_0} = 1$ (uma vez que todas as outras soluções podem ser expressas a partir desta).

O problema reside então na determinação da solução fundamental.

Quando $b_1(t) \equiv 0$, e e.d.e. (3), assume a forma

$$dX_t = [a_1(t)X_t + a_2(t)]dt + b_2(t) dW_t \quad (5)$$

e o ruído aparece de forma aditiva. Diz-se neste caso que a e.d.e. é linear em sentido restrito.

A equação homogénea associada a (5) corresponde à e.d.o

$$\frac{dX_t}{dt} = a_1(t)X_t \quad (6)$$

cuja solução fundamental é dada por:

$$\Phi_{t,t_0} = \exp\left(\int_{t_0}^t a_1(s) ds\right) \quad (7)$$

Aplicando a fórmula de Ito à transformação $U(t,x) = \Phi_{t,t_0}^{-1} x$ da solução X_t de (5), obtém-se

$$d(\Phi_{t,t_0}^{-1} X_t) = \left[\frac{d\Phi_{t,t_0}^{-1}}{dt} X_t + (a_1(t)X_t + a_2(t))\Phi_{t,t_0}^{-1} \right] dt + b_2(t) \Phi_{t,t_0}^{-1} dW_t$$

Uma vez que

$$\frac{d\Phi_{t,t_0}^{-1}}{dt} = -\Phi_{t,t_0}^{-1} a_1(t)$$

obtém-se

$$d(\Phi_{t,t_0}^{-1} X_t) = a_2(t) \Phi_{t,t_0}^{-1} dt + b_2(t) \Phi_{t,t_0}^{-1} dW_t$$

Como esta equação apenas envolve funções conhecidas, em t e ω , integrando vem,

$$\Phi_{t,t_0}^{-1} X_t = \Phi_{t_0,t_0}^{-1} X_{t_0} + \int_{t_0}^t a_2(s) \Phi_{s,t_0}^{-1} ds + \int_{t_0}^t b_2(s) \Phi_{s,t_0}^{-1} dW_s$$

Sendo $\Phi_{t_0,t_0} = 1$, a solução da e.d.e. (3), é dada por

$$X_t = \Phi_{t,t_0} \left(X_{t_0} + \int_{t_0}^t a_2(s) \Phi_{s,t_0}^{-1} ds + \int_{t_0}^t b_2(s) \Phi_{s,t_0}^{-1} dW_s \right) \quad (8)$$

onde Φ_{t,t_0} é dada por (7).

Esta solução será um processo Gaussiano quando o valor inicial for uma constante ou uma v.a. Gaussiana, independente de $(W_t - W_{t_0})$, $t \geq t_0$.

No caso geral (3) a determinação da solução é mais complexa uma vez que a equação homogênea associada é uma e.d.e.

A solução fundamental da equação (6) satisfaz a equação diferencial ordinária

$$d(\ln \Phi_{t,t_0}) = a_1(t) dt.$$

Por analogia, supondo agora que Ψ_{t,t_0} é a solução fundamental de (4), apliquemos a fórmula de Ito a $\ln \Psi_{t,t_0}$. Temos

$$d(\ln \Psi_{t,t_0}) = \left(a_1(t) \Psi_{t,t_0} \Psi_{t,t_0}^{-1} - \frac{1}{2} b_1^2(t) \Psi_{t,t_0}^{-2} \Psi_{t,t_0}^2 \right) dt + b_1(t) \Psi_{t,t_0} \Psi_{t,t_0}^{-1} dW_t$$

donde

$$d(\ln \Psi_{t,t_0}) = \left(a_1(t) - \frac{1}{2} b_1^2(t) \right) dt + b_1(t) dW_t$$

que também, envolve apenas, funções em t . Assim,

$$\ln \Psi_{t,t_0} = \int_{t_0}^t \left(a_1(s) - \frac{1}{2} b_1^2(s) \right) ds + \int_{t_0}^t b_1(s) dW_s$$

uma vez que para solução fundamental temos $\Psi_{t_0,t_0} = 1$. Donde

$$\Psi_{t,t_0} = \exp \left(\int_{t_0}^t \left(a_1(s) - \frac{1}{2} b_1^2(s) \right) ds + \int_{t_0}^t b_1(s) dW_s \right) \quad (9)$$

será a solução fundamental da equação homogénea (6) e que se reduz à equação (7) fazendo $b_1(t) \equiv 0$.

Consideremos agora a solução X_t da equação linear não homogénea geral (3).

Como no caso restrito, visto anteriormente, consideremos o processo

$$U_t = \Psi_{t,t_0}^{-1} X_t$$

De (9) temos

$$\Psi_{t,t_0}^{-1} = \exp \left[\int_{t_0}^t \left(-a_1(s) + \frac{1}{2} b_1^2(s) \right) ds - \int_{t_0}^t b_1(s) dW_s \right]$$

donde pela fórmula de Ito obtemos

$$d(\Psi_{t,t_0}^{-1}) = [-a_1(t) + b_1^2(t)]\Psi_{t,t_0}^{-1} dt - b_1(t)\Psi_{t,t_0}^{-1} dW_t \quad (10)$$

Aplicando mais uma vez a fórmula de Ito, agora ao processo U_t (fórmula de Ito para o produto), vem

$$\begin{aligned} d(\Psi_{t,t_0}^{-1} X_t) &= (d\Psi_{t,t_0}^{-1})X_t + \Psi_{t,t_0}^{-1} dX_t + [b_1(t)X_t + b_2(t)] [-b_1(t)\Psi_{t,t_0}^{-1}] dt = \\ &= [(-a_1(t) + b_1^2(t))X_t + (a_1(t)X_t + a_2(t))]\Psi_{t,t_0}^{-1} dt - b_1(t)[(b_1(t)X_t + b_2(t))]\Psi_{t,t_0}^{-1} dt + \\ &+ [-b_1(t)\Psi_{t,t_0}^{-1}X_t + (b_1(t)X_t + b_2(t))\Psi_{t,t_0}^{-1}] dW_t \end{aligned}$$

e então

$$d(\Psi_{t,t_0}^{-1} X_t) = (a_2(t) - b_1(t)b_2(t))\Psi_{t,t_0}^{-1} dt + b_2(t)\Psi_{t,t_0}^{-1} dW_t$$

Integrando e fazendo $\Psi_{t_0,t_0} = 1$, obtemos

$$\Psi_{t,t_0}^{-1} X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t (a_2(s) - b_1(s)b_2(s))\Psi_{s,t_0}^{-1} ds + \int_{t_0}^t b_2(s)\Psi_{s,t_0}^{-1} dW_s$$

pelo que

$$X_t = \Psi_{t,t_0} \left(X_{t_0} + \int_{t_0}^t (a_2(s) - b_1(s)b_2(s))\Psi_{s,t_0}^{-1} ds + \int_{t_0}^t b_2(s)\Psi_{s,t_0}^{-1} dW_s \right) \quad (11)$$

em que Ψ_{t,t_0} é dado por (9). Obtemos assim a solução geral de (3).

2.3.2 Equações diferenciais redutíveis

Certas e.d.e. não lineares da forma

$$dY_t = a(t, Y_t) dt + b(t, Y_t) dW_t \quad (12)$$

podem ser reduzidas, através de uma substituição apropriada, do tipo $X_t = U(t, Y_t)$, a e.d.e. lineares em X_t ,

$$dX_t = (a_1(t)X_t + a_2(t)) dt + (b_1(t)X_t + b_2(t)) dW_t \quad (13)$$

Se $\frac{\partial U}{\partial y}(t, y) \neq 0$ o *Teorema da Função Inversa* garante a existência de uma função inversa local $y = V(t, x)$ de $x = U(t, y)$, ou seja $x = U(t, V(t, x))$ e $y = V(t, U(t, y))$. A solução da equação (12) será então $Y_t = V(t, X_t)$ em que X_t é solução de (13) com os coeficientes a_1 , a_2 , b_1 e b_2 apropriados.

Pela fórmula de Ito obtemos

$$dU(t, Y_t) = \left(\frac{\partial U}{\partial t} + a \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) dt + b \frac{\partial U}{\partial y} dW_t$$

onde os coeficientes e as derivadas parciais são avaliadas em (t, Y_t) . Esta expressão coincide com a e.d.e. linear (13) se

$$\frac{\partial U}{\partial t}(t, y) + a(t, y) \frac{\partial U}{\partial y}(t, y) + \frac{1}{2} b^2(t, y) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = a_1(t) U(t, y) + a_2(t) \quad (14)$$

e

$$b(t, y) \frac{\partial U}{\partial y}(t, y) = b_1(t) U(t, y) + b_2(t) \quad (15)$$

Obter através de (14) e (15), quer a transformação de U, quer os coeficientes a_1, b_1, a_2 e b_2 de (13), para a situação mais geral, é na prática bastante complexo. Vamos por isso considerar algumas situações particulares.

Particularizando para o caso em que $a_1(t) = b_1(t) = 0$ e fazendo $a_2(t) = \alpha(t)$ e $b_2(t) = \beta(t)$, obtém-se, em (13) uma equação imediatamente integrável.

Nestas condições, derivando a equação (14) em ordem a y, obtemos

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial t}(t, y) = -\frac{\partial}{\partial y} \left(a(t, y) \frac{\partial U}{\partial y}(t, y) + \frac{1}{2} b^2(t, y) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(t, y) \right)$$

Derivando também a equação (15) em ordem a y e em ordem a t obtemos, respectivamente,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(b(t, y) \frac{\partial U}{\partial y}(t, y) \right) = 0$$

e

$$b(t, y) \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial y}(t, y) + \frac{\partial b}{\partial t}(t, y) \frac{\partial U}{\partial y}(t, y) = \beta'(t)$$

Assumindo agora que $b(t, y) \neq 0$, e eliminando U e as suas derivadas das equações anteriores vem,

$$\beta'(t) = \beta(t) b(t, y) \left(\frac{1}{b^2(t, y)} \frac{\partial b}{\partial t}(t, y) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a(t, y)}{b(t, y)} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 b}{\partial y^2}(t, y) \right)$$

Definindo

$$\gamma(t, y) = \frac{1}{b(t, y)} \frac{\partial b}{\partial t}(t, y) - b(t, y) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a(t, y)}{b(t, y)} - \frac{1}{2} \frac{\partial b}{\partial y}(t, y) \right) \quad (16)$$

obtemos da expressão anterior

$$\gamma(t, y) = \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}$$

isto é, $\gamma(t, y)$ é independente de y . Logo $\frac{\partial \gamma}{\partial y}(t, y) = 0$.

Esta é uma condição necessária e suficiente para a redutibilidade das e.d.e. não lineares (12), às e.d.e. explicitamente integráveis,

$$dX_t = \alpha(t) dt + \beta(t) dW_t$$

pela utilização de uma transformação do tipo $x = U(t, y)$.

A partir de (14) e (15) e, neste caso especial, a transformação U pode ser conhecida.

Efectivamente (14) e (15) reescrevem-se

$$\frac{\partial U}{\partial t}(t, y) + a(t, y) \frac{\partial U}{\partial y}(t, y) + \frac{1}{2} b^2(t, y) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(t, y) = \alpha(t)$$

e

$$b(t, y) \frac{\partial U}{\partial y}(t, y) = \beta(t)$$

resultando desta última expressão e de $\gamma(t, y) = \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}$, a fórmula

$$U(t, y) = C \exp \left(\int_0^t \gamma(s, y) ds \right) \int_0^y \frac{1}{b(t, z)} dz \quad (17)$$

em que C é uma constante arbitrária.

Este método, com algumas alterações, pode também ser aplicado para reduzir as e.d.e não lineares autónomas

$$dY_t = a(Y_t)dt + b(Y_t)dW_t \quad (18)$$

a e.d.e. lineares autónomas

$$dX_t = (a_1 X_t + a_2)dt + (b_1 X_t + b_2)dW_t \quad (19)$$

a partir de uma transformação independente do tempo $X_t = U(Y_t)$. Neste caso as identidades (14) e (15) assumem a forma:

$$a(y) \frac{\partial U}{\partial y}(y) + \frac{1}{2} b^2(y) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = a_1 U(y) + a_2 \quad (20)$$

e

$$b(y) \frac{\partial U}{\partial y}(y) = b_1 U(y) + b_2 \quad (21)$$

Assumindo que $b(y) \neq 0$ e $b_1 \neq 0$, obtém-se a partir de (21)

$$U(y) = C \exp(b_1 B(y)) - \frac{b_2}{b_1} \quad (22)$$

em que

$$B(y) = \int_{y_0}^y \frac{ds}{b(s)}$$

e C uma constante arbitrária.

Substituindo esta expressão de $U(y)$ em (20) vem, após algumas considerações que a transformação adequada será,

$$U(y) = C \exp(b_1 B(y)) \quad \text{se} \quad b_1 \neq 0$$

$$U(y) = b_2 B(y) + C \quad \text{se} \quad b_1 = 0$$

e em que b_2 é escolhido de modo que (21) seja satisfeito.

Esta fórmula de redução será aplicada nas e.d.e que estudaremos no cap. 3.

Outras situações em que esta técnica é aplicável podem ser estudadas [21]. No entanto como não serão utilizadas no presente trabalho optamos por não as referir.

2.3.3. Equações diferenciais estocásticas e suas soluções

Neste ponto, a título de exemplo, serão apresentadas algumas equações diferenciais lineares, assim como as suas soluções gerais.

Apresentaremos ainda algumas equações não lineares que podem ser reduzidas a equações lineares.

De salientar que em muitos casos em que a solução é uma função do processo de Wiener, o coeficiente deriva consiste unicamente na correção do termo de Stratonovich e, conseqüentemente, a e.d.e., segundo Stratonovich, não tem coeficiente de deriva.

(Por uma questão de brevidade, não serão apresentados os intervalos de existência das soluções gerais ou restrições às soluções).

E.D.E. Lineares: Ruído Aditivo

Coefficientes constantes, caso homogêneo:

Consideremos a equação

$$dX_t = -a X_t dt + b dW_t$$

designada habitualmente por *equação de Langevin*.

Seguindo o processo anteriormente descrito aplicamos a fórmula de Ito ao processo

$$Y_t = e^{at} X_t$$

Obtém-se

$$dY_t = (a e^{at} X_t - a e^{at} X_t) dt + b e^{at} dW_t$$

donde

$$Y_t = b \int_0^t e^{as} dW_s + X_0$$

Então a solução da equação vem

$$X_t = e^{-at} \left(X_0 + b \int_0^t e^{as} dW_s \right)$$

Este processo é o processo de *Ornstein-Uhlenbeck*, que é um processo Gaussiano de média e covariância dadas, respectivamente por,

$$E(X_t) = e^{-at} E(X_0) \quad \text{e} \quad \text{Cov}(X_t, X_s) = \frac{b^2}{2a} (e^{-a(t+s)} - e^{-a(t-s)})$$

Facilmente se verifica que se $X_0=0$ este processo pode ser dado por

$$X_t = \frac{b}{2a} e^{-at} W(e^{2at} - 1)$$

Coefficientes constantes, caso não homogéneo:

Seja agora a equação

$$dX_t = (aX_t + b) dt + c dW_t$$

De modo análogo ao caso anterior consideremos $Y_t = e^{-at} X_t$. Pela fórmula de Ito obtém-se

$$dY_t = \left[-a e^{-at} X_t + e^{-at} (aX_t + b) \right] dt + c e^{-at} dW_t$$

ou seja

$$dY_t = b e^{-at} dt + c e^{-at} dW_t$$

Então temos

$$Y_t = X_0 + \int_0^t e^{-as} b ds + c \int_0^t e^{-as} dW_s$$

ou ainda

$$Y_t = X_0 + \frac{b(1 - e^{-at})}{a} + c \int_0^t e^{-as} dW_s$$

donde a solução neste caso é dada por

$$X_t = e^{at} X_0 + \frac{b(e^{-at} - 1)}{a} + ce^{at} \int_0^t e^{-as} dW_s$$

Coefficientes variáveis:

Consideremos

$$dX_t = [a(t)X_t + b(t)]dt + c(t) dW_t$$

Fazendo agora $Y_t = \Phi_{t,t_0}^{-1} X_t$ onde, como vimos na secção anterior, Φ_{t,t_0} é

$$\Phi_{t,t_0} = \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right)$$

vem novamente pela fórmula de Ito

$$dY_t = \left[-a(t)\Phi_{t,t_0}^{-1} X_t + \Phi_{t,t_0}^{-1} (a(t)X_t + b(t))\right]dt + \Phi_{t,t_0}^{-1} c(t)dW_t$$

donde

$$dY_t = \Phi_{t,t_0}^{-1} b(t) dt + \Phi_{t,t_0}^{-1} c(t)dW_t$$

e então

$$Y(t) = X_{t_0} + \int_{t_0}^t \Phi_{s,t_0}^{-1} b(s) ds + \int_{t_0}^t \Phi_{s,t_0}^{-1} c(s) dW_s$$

Finalmente obtemos

$$X_t = \Phi_{t,t_0} \left(X_{t_0} + \int_{t_0}^t \Phi_{s,t_0}^{-1} b(s) ds + \int_{t_0}^t \Phi_{s,t_0}^{-1} c(s) dW_s \right)$$

Um exemplo deste caso é dado pela equação

$$dX_t = \left(\frac{b - X_t}{T - t} \right) dt + dW_t$$

para $t \in [0, T]$, cuja solução é dada por

$$X_t = X_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right) + b \frac{t}{T} + (T-t) \int_0^t \frac{1}{T-s} dW_s$$

no intervalo $0 \leq t \leq T$.

Se $X_0=0$ este processo é designado por ponte Browniana entre 0 e b já que $X_0=0$ e $X_T=b$.

E.D.E. Lineares : Ruído Multiplicativo

Coeficientes constantes, caso homogéneo:

$$dX_t = aX_t dt + bX_t dW_t$$

Como vimos na secção 2.3.2, pela fórmula de Ito obtém-se

$$d \ln X_t = \left(a - \frac{1}{2} b^2 \right) dt + b dW_t$$

donde

$$\ln X_t = \ln X_0 + \left(a - \frac{1}{2} b^2 \right) t + bW_t$$

e

$$X_t = X_0 \exp \left[\left(a - \frac{1}{2} b^2 \right) t + bW_t \right]$$

Este processo é, em geral, designado por Browniano geométrico sendo o caso mais habitual dado por

$$dX_t = \frac{1}{2} X_t dt + X_t dW_t$$

onde $a = \frac{1}{2}$, $b^2 = 1$ e portanto

$$X_t = X_0 \exp(W_t)$$

Coeficientes constantes, caso não homogêneo:

$$dX_t = (aX_t + c)dt + (bX_t + d)dW_t$$

Partindo da solução fundamental da equação homogênea associada (exemplo anterior), isto é sendo

$$\Psi_{t,0} = \exp\left[\left(a - \frac{b^2}{2}\right)t + bW_t\right]$$

aplicamos a fórmula de Ito a $Y_t = \Psi_{t,0}^{-1} X_t$, donde obtemos

$$dY_t = X_t d\Psi_{t,0}^{-1} + \Psi_{t,0}^{-1} dX_t - (bX_t + d)b X_t dt$$

ou seja

$$dY_t = \Psi_{t,0}^{-1}(c - bd) dt + \Psi_{t,0}^{-1} dW_t$$

Então

$$Y_t = X_0 + (c - bd) \int_0^t \Psi_{s,0}^{-1} ds + d \int_0^t \Psi_{s,0}^{-1} dW_s$$

donde a solução fundamental da equação não homogénea vem

$$X_t = \Psi_{t,0} \left(X_0 + (c - bd) \int_0^t \Psi_{s,0}^{-1} ds + d \int_0^t \Psi_{s,0}^{-1} dW_s \right)$$

Muitos exemplos de e.d.e. não lineares redutíveis a lineares podem ser encontradas na literatura. Ver por exemplo [21]. Daremos aqui apenas alguns exemplos de interesse para o capítulo seguinte.

E.D.E. Redutíveis: 1º Caso

A e.d.e. segundo Ito

$$dX_t = \frac{1}{2} b(X_t) b'(X_t) dt + b(X_t) dW_t \quad (23)$$

para uma determinada função diferenciável b , é equivalente à e.d.e. de Stratonovich

$$dX_t = b(X_t) \circ dW_t \quad (24)$$

Para se obter a solução geral bastará fazer

$$X_t = h^{-1}(W_t + h(X_0))$$

em que

$$y = h(x) = \int \frac{ds}{b(s)}$$

Pode reduzir-se a equação (23) a uma e.d.e. linear ou integrar directamente a e.d.e. (24). Muitos dos funcionais de um processo de Wiener satisfazem as e.d.e. da forma (23).

E.D.E. Redutíveis a Lineares: 2º Caso

A e.d.e. de Ito

$$dX_t = \left[\alpha b(X_t) + \frac{1}{2} b(X_t) b'(X_t) \right] dt + b(X_t) dW_t$$

é equivalente à e.d.e. de Stratonovich

$$dX_t = \alpha b(X_t) dt + b(X_t) \circ dW_t$$

mas pode também reduzir-se ao diferencial estocástico

$$dY_t = \alpha dt + dW_t$$

em que $Y_t = h(X_t)$ e $y = h(x) = \int \frac{ds}{b(s)}$.

A solução geral é assim dada por,

$$X_t = h^{-1}[\alpha t + W_t + h(X_0)]$$

Exemplos deste caso podem ser vistos em [21].

E.D.E. Redutíveis a Lineares: 3º Caso

Consideremos agora a e.d.e. de Ito

$$dX_t = \left[\alpha b(X_t) h(X_t) + \frac{1}{2} b(X_t) b'(X_t) \right] dt + b(X_t) dW_t$$

Fazendo como anteriormente

$$y = h(x) = \int \frac{ds}{b(s)}$$

a equação anterior reduz-se a uma e.d.e. linear, análoga à equação de Langevin, na variável $Y_t = h(X_t)$. Efectivamente, pela fórmula de Ito

$$dY_t = \left[\frac{1}{b(X_t)} \alpha b(X_t) h(X_t) + \frac{1}{2} b'(X_t) + \frac{1}{2} \left(-\frac{b'(X_t)}{b^2(X_t)} b^2(X_t) \right) \right] dt + \frac{1}{b(X_t)} b(X_t) dW_t$$

donde

$$dY_t = \alpha h(X_t) dt + dW_t$$

e então

$$dY_t = \alpha Y_t dt + dW_t$$

Assim como vimos no 1º exemplo (caso aditivo de coeficientes constantes, homogéneo), vem

$$Y_t = e^{at} \left(h(X_0) + \int_0^t e^{-as} dW_s \right)$$

A solução da e.d.e inicial será então

$$X_t = h^{-1} \left(e^{at} h(X_0) + e^{at} \int_0^t e^{-as} dW_s \right)$$

Também para este caso podemos ver vários exemplos.

E.D.E. Redutíveis: Diversos casos

Em seguida serão apresentados exemplos de e.d.e., não lineares, redutíveis, não incluídos nos casos anteriores.

Como primeiro exemplo, consideremos *uma e.d.e. com deriva polinomial de grau n*, isto é

$$dX_t = (aX_t^n + bX_t) dt + cX_t dW_t$$

A substituição $y = h(x) = x^{1-n}$ reduz a equação anterior a uma e.d.e. linear com ruído multiplicativo.

Efectivamente sendo $Y_t = X_t^{1-n}$, temos

$$dY_t = \left[(1-n) X_t^{-n} (aX_t^n + bX_t) + \frac{1}{2} (1-n)(-n) X_t^{-n-1} c^2 X_t^2 \right] dt + (1-n) X_t^{-n} c X_t dW_t$$

donde

$$\begin{aligned} dY_t &= \left[a(1-n) + b(1-n)X_t^{-n+1} + \frac{c^2}{2}(1-n)(-n)X_t^{-n+1} \right] dt + c(1-n)X_t^{-n+1} dW_t = \\ &= \left[a(1-n) + \left(b(1-n) + \frac{c^2}{2}(1-n)(-n) \right) X_t^{-n+1} \right] dt + c(1-n)X_t^{-n+1} dW_t, \end{aligned}$$

e finalmente

$$dY_t = \left[a(1-n) + (1-n) \left(b - \frac{c^2}{2}n \right) Y_t \right] dt + c(1-n)Y_t dW_t$$

Usando a solução já obtida para esta e.d.e. linear vem

$$Y_t = \Psi_{t,0} \left[h(X_0) + a(1-n) \int_0^t \Psi_{s,0}^{-1} ds \right]$$

onde

$$\Psi_t = \exp \left[\left((1-n) \left(b - \frac{nc^2}{2} \right) - \frac{(1-n)^2 c^2}{2} \right) t + c(1-n) W_t \right]$$

é a solução fundamental da e.d.e. linear homogénea associada à anterior.

Então,

$$X_t^{(1-n)} = \left\{ \exp \left[\left(b - \frac{nc^2}{2} - \frac{(1-n)c^2}{2} \right) t + cW_t \right] \right\}^{1-n} \left[h(X_0) + a(1-n) \int_0^t \Psi_{s,0}^{-1} ds \right]$$

donde ainda

$$X_t = \Theta_t \left(X_0^{1-n} + a(1-n) \int_0^t \Theta_s^{n-1} ds \right)^{1/(1-n)}$$

onde fizemos $\Theta_t^{1-n} = \Psi_t$ com

$$\Theta_t = \exp \left[\left(b - \frac{c^2}{2} \right) t + c W_t \right]$$

Um exemplo especial é o caso $n=2$. A equação

$$dX_t = (\lambda X_t - X_t^2) dt + \sigma X_t dW_t$$

que se designa por *equação estocástica de Verhulst* tem como solução

$$X_t = \frac{X_0 \exp \left(\left(\lambda - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right)}{1 + X_0 \int_0^t \exp \left(\left(\lambda - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) s + \sigma W_s \right) ds}$$

qu é obtida à custa da solução anterior.

Outro exemplo, que utiliza uma substituição exponencial do tipo $y=h(x)=\exp(-cx)$, é:

$$dX_t = (a \exp(c X_t) + b) dt + \sigma dW_t$$

para a qual se obtém

$$X_t = X_0 + bt + \sigma W_t - \frac{1}{c} \ln \left(1 - ac \int_0^t \exp(cX_0 + bcs + \sigma cW_s) ds \right)$$

Este e outros exemplos podem ser vistos em [21].

2.4 Processos de difusão

Os processos de difusão podem ser considerados como casos especiais dos processos de Markov com trajectórias contínuas e resultam em bons modelos teórico-probabilísticos de processos físicos de difusão. O exemplo mais simples e conhecido é o movimento Browniano que descreve o movimento de pequenas partículas, por exemplo grãos de pólen suspensos num dado fluído.

Basicamente existem dois tipos de aproximações diferentes aos processos de difusão, mas que conduzem à mesma classe de processos.

A primeira consiste em definir o processo em termos de probabilidades de transição (como um processo de Markov), enquanto a segunda consiste no estudo da variação, em relação ao tempo, de um dado processo $X(t)$. Esta segunda aproximação conduzirá à e.d.e. para $X(t)$.

2.4.1 Definição de difusão e propriedades

Seja $\{X(t), t \geq 0\}$ um processo estocástico cujo espaço de estados é um intervalo, $I \subset \mathbf{R}$, (aberto ou fechado) com extremidades em l e r , em que $l \geq -\infty$ e/ou $r \leq +\infty$. Define-se então

$\{X(t), t \geq 0\}$ é um processo de difusão se for processo de Markov, com trajectórias contínuas, q.c., que satisfaz:

1. Para todo $\varepsilon > 0$, $\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} P \{ |X(t+h) - X(t)| > \varepsilon \mid X(t) = x \} = 0 \quad \forall x \in I$
2. $\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} E \{ X(t+h) - X(t) \mid X(t) = x \} = \mu(x, t)$, para alguma função $\mu(x, t)$, $l < x < r$

$$3. \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} E \left\{ [X(t+h) - X(t)]^2 \mid X(t) = x \right\} = \sigma^2(x, t), \text{ para alguma função } \sigma(x, t), \\ I < x < r$$

As funções $\mu(x, t)$ e $\sigma^2(x, t)$ designam-se por *parâmetros infinitesimais do processo*, em particular $\mu(x, t)$ é a deriva, ou a média infinitesimal ou o desfasamento infinitesimal esperado e $\sigma^2(x, t)$ é o coeficiente de difusão ou variância infinitesimal do processo.

A definição anterior é uma das definições possíveis, para um processo de difusão, encontramos na literatura. Esta definição explicita as principais propriedades duma difusão.

A condição **1** mostra que, desfasamentos superiores a um dado ε são pouco prováveis, em intervalos de tempo muito pequenos. Isto pode ser considerado como uma formalização da propriedade de que as trajectórias do processo são contínuas. Aliás pode demonstrar-se que, se um processo de Markov satisfaz a condição **1**, de um modo uniforme, convenientemente definido, então é um processo de difusão [209].

Nas condições **2** e **3** que, como dissemos descrevem a média e a variância infinitesimais do processo, supõe-se que esses momentos existem. Mais geralmente essas condições podem ser dadas em termos de momentos truncados, [3] e [20].

Em geral para um processo de difusão $\mu(x, t)$ e $\sigma(x, t)$ são funções contínuas em x e t .

Um **processo de difusão** diz-se **regular** se, a transição entre dois quaisquer pontos do interior do intervalo I , pode ser obtida com probabilidade positiva. Podemos expressar esta noção, de um modo mais rigoroso, como se segue, [20].

Para um dado ponto $z \in I$, considere-se, \mathbf{T}_z , a v.a. que representa o primeiro instante em que o processo atinge o valor z ; isto é $T_z = \inf\{t \geq 0; X_t = z\}$. No caso em que z nunca é atingido, por convenção, $T_z = \infty$.

T_z designa-se por, o primeiro tempo de chegada a z .

Um **processo de difusão** diz-se **regular** se:

$$P\{T_z < \infty \mid X(0) = x\} > 0 \quad \text{para } l < x, z < r$$

Em geral num *processo regular* $\sigma^2(x,t) > 0$ para todo $l < x < r$ e $t > 0$.

Para um processo de difusão, existem os momentos infinitesimais de ordem superior a 2, que geralmente satisfazem:

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{E\left\{\left|\Delta_h X(t)\right|^r \mid X(t) = x\right\}}{h} = 0 \quad r > 2$$

Neste trabalho consideraremos unicamente processos de difusão homogéneos, ou seja, processos com probabilidades de transição invariantes no tempo. Neste caso, facilmente se conclui que, os coeficientes infinitesimais são independentes do tempo e teremos

$$\mu(x, t) = \mu(x) \quad \text{e} \quad \sigma^2(x, t) = \sigma^2(x).$$

2.4.2 Caracterização dos processos de difusão: Gerador infinitesimal e equações de Kolmogorov

As funções $\mu(x,t)$ e $\sigma^2(x,t)$, atrás definidas, resumem a informação necessária acerca do processo de difusão. Efectivamente as suas probabilidades de transição $P(s,x,t,y)$, sob certas condições de regularidade, podem ser determinadas a partir destes coeficientes.

Considere-se no intervalo aberto $]l, r[$ um processo de difusão regular e homogéneo no tempo, $\{X(t), t \geq 0\}$.

A função distribuição de probabilidade de transição de $X(t)$ é dada por,

$$P(t, x, y) = P\{X(t) \leq y \mid X(0) = x\}$$

com a distribuição inicial

$$P(0, x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq y \\ 0 & \text{se } x > y \end{cases} \quad (25)$$

ou seja uma distribuição pontual concentrada em x .

Supomos que $P(t, x, y)$ admite uma função densidade em $]l, r[$.

Sendo $\{X(t), t \geq 0\}$ um processo de Markov podemos obter o seu gerador infinitesimal. Usando a definição dada em 2.2.2, e para o caso de um processo de Markov homogêneo, teremos o gerador dado por

$$A g(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \int [g(y) - g(x)] P(t, x, dy)$$

onde g é uma função mensurável e limitada em \mathbf{R}

Supondo ainda que g é duas vezes continuamente diferenciável em \mathbf{R} podemos obter, (ver por exemplo [3]), à custa do desenvolvimento em série de Taylor de g , em torno de x , que

$$A g(x) = \left[\mu(x) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] g(x) \quad (26)$$

onde são usadas as condições 2. e 3. da definição de difusão de $\{X(t), t \geq 0\}$.

Mais ainda, podemos provar que definindo

$$u(t, x) = E[g(X(t)) \mid X(0) = x] = \int_{R^n} g(y) P(t, x, dy) \quad (27)$$

para $x \in I$, $t > 0$ e para g contínua por secções e limitada em I , a função $u(\dots)$ é contínua e limitada em $]l, r[$, assim como as suas derivadas parciais $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ e satisfaz

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \sigma^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu(x) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (28)$$

com a condição inicial $\lim_{t \downarrow 0} u(t, x) = g(x)$, $x \in]l, r[$.

A equação (28) é chamada *equação backward de Kolmogorov*.

Considerando o caso especial da função g , dada por $g(\eta) = 1$ se $\eta \leq y$ e 0 se $\eta > y$, obtém-se a função distribuição de probabilidade de transição,

$$u(t, x) = P(t, x, y)$$

Para $P(t, x, y)$ a equação de Kolmogorov vem

$$\frac{\partial P(t, x, y)}{\partial t} = \frac{1}{2} \sigma^2(x) \frac{\partial^2 P(t, x, y)}{\partial x^2} + \mu(x) \frac{\partial P(t, x, y)}{\partial x} \quad (29)$$

com $t > 0$ e $l < x, y < r$, e condição inicial,

$$P(0+, x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq y \\ 0 & \text{se } x > y \end{cases} \quad (30)$$

A **função densidade de transição** $p(t, x, y)$ também satisfaz a equação backward de Kolmogorov, para $t > 0$ e com x e y pertencentes $]l, r[$,

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} \sigma^2(x) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \mu(x) \frac{\partial p}{\partial x} \quad (31)$$

com a condição inicial $\lim_{t \downarrow 0} p(t, x, y) = \delta(x - y)$ e onde δ é a função delta de Dirac. Esta densidade é então uma solução fundamental da equação backward.

Notemos que as equações diferenciais anteriores, assim como as seguintes, são aqui consideradas no intervalo $]l, r[$. No entanto não estamos a considerar condições fronteira para essas equações, condições essas que dependem do comportamento do processo na fronteira de I . Por este motivo as referidas equações podem não admitir solução única,

Se o processo de difusão $\{X(t), t \geq 0\}$, não é homogéneo no tempo, as equações anteriores são modificadas como se segue.

Consideremos para $t > s$ e $l < x < r$

$$u(s, t, x) = E[g(X(t)) \mid X(s) = x] \quad (32)$$

que evidencia a dependência do instante inicial s e do estado x nesse instante e t é fixo.

A **equação diferencial backward** de **Kolmogorov** para $u(s, t, x)$ é dada por:

$$\frac{\partial u(s, t, x)}{\partial s} = \frac{1}{2} \sigma^2(s, x) \frac{\partial^2 u(s, t, x)}{\partial x^2} + \mu(s, x) \frac{\partial u(s, t, x)}{\partial x} \quad (33)$$

com a condição inicial

$$\lim_{s \uparrow t} u(s, t, x) = g(x) \quad (34)$$

Esta equação é chamada “backward” uma vez que a diferenciação é feita relativamente às variáveis iniciais s e x .

Teríamos equações análogas para $P(s, x, t, y)$ e para a sua densidade $p(s, x, t, y)$.

Em condições análogas às anteriormente indicadas a função densidade de transição satisfaz ainda (mais uma vez no caso homogéneo) a equação

$$\frac{\partial p}{\partial t}(t, x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [\sigma^2(y) p(t, x, y)] - \frac{\partial}{\partial y} [\mu(y) p(t, x, y)] \quad (35)$$

com a condição inicial $\lim_{t \downarrow 0} p(t, x, y) = \delta(x - y)$

Esta e.d. é agora nas variáveis t e y e designa-se por **equação forward** de **Kolmogorov** ou equação de **Fokker – Plank**; $p(t, x, y)$ é então em t e y uma solução fundamental de (35) (ver também [3]).

2.4.3 Difusão como solução de uma equação diferencial estocástica

Como já foi referido os processos de difusão são processos de Markov cujas leis de probabilidade podem ser determinadas a partir dos coeficientes infinitesimais.

Uma vez que as soluções das e.d.e são processos de Markov podemos então determinar em que condições estas soluções são processos de difusão.

Podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 4 [3]

Consideremos a e.d.e

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t$$

com condição inicial $X(0) = x_0 \in \mathbf{R}$.

Supondo que as funções $a(t,x)$ e $b(t,x)$ satisfazem as condições do Teorema 1 (Teorema de existência e unicidade das soluções), e que são contínuas para $(t,x) \in [0, T] \times \mathbf{R}$, a solução de X_t é um processo de difusão no intervalo $[0, T]$, com coeficiente deriva $\mu(t,x)=a(t,x)$ e coeficiente de difusão $\sigma^2(t,x)=b(t,x)$.

Em suma, podemos dizer que as soluções das e.d.e. e os processos de difusão, apesar de terem definições completamente diferentes, representam a mesmo tipo de processos, [3].

Este resultado tem particular importância e será bastante utilizado no capítulo seguinte.

2.5. Classificação das fronteiras de um processo de difusão regular

Nesta secção supomos que $\{X(t), t \geq 0\}$ é um processo de difusão homogéneo que satisfaz as seguintes condições:

- i) O espaço de estados é um intervalo I de extremos l e r onde $-\infty \leq l < r \leq +\infty$
- ii) O processo é regular no interior de I , isto é

$$P\{T_y < \infty \mid X(0) = x\} > 0, \quad l < x \text{ e } y < r$$

onde T_y é o 1º tempo de chegada a y como já foi definido anteriormente

- iii) O processo tem parâmetros infinitesimais $\mu(x)$ e $\sigma^2(x)$ para $l < x < r$, que são funções contínuas de x , com $\sigma^2(x) > 0$.

O nosso objectivo nesta secção é classificar em termos de coeficientes infinitesimais, o comportamento do processo na fronteira do seu intervalo de estados.

Seguiremos aqui essencialmente [19].

2.5.1 Representação canónica do gerador infinitesimal do processo

Começamos aqui por definir algumas funções que dependem dos coeficientes infinitesimais do processo.

Consideremos a função

$$s(x) = \exp\left\{-\int \frac{2\mu(x)}{\sigma^2(x)} dx\right\}$$

bem definida para $l < x < r$ já que $\sigma^2(x) > 0$.

Definimos *função escala* de $\{X(t), t \geq 0\}$ como a função

$$S(x) = \int s(x) dx = \int \exp\left\{-\int \frac{2\mu(x)}{\sigma^2(x)} dx\right\} dx$$

Mais adiante veremos a justificação para esta designação.

Se $S(x) = x$ é a função escala de $\{X(t), t \geq 0\}$ diremos que o processo está na escala natural.

Podemos provar a seguinte proposição

Proposição: Se $\{X(t), t \geq 0\}$ é um processo de difusão com função escala $S(x)$, então o processo $Y(t) = S(X_t)$ é uma difusão com função em escala natural, em $S(I)$.

Introduziremos agora o conceito de *medida de velocidade* do processo de difusão. Seja

$$m(x) = \frac{1}{\sigma^2(x) s(x)} \quad l < x < r$$

Definimos *medida (função) de velocidade* do processo por

$$M(x) = \int m(x) dx$$

Pode verificar-se (ver [16]) que a função $m(x)$ representa o “tempo” que X_t leva a sair de um pequeno intervalo centrado em x ; daí a designação de “medida” (densidade de medida) de velocidade.

Consideremos agora o gerador infinitesimal de $\{X(t), t \geq 0\}$. Como já vimos anteriormente esse gerador é da forma

$$Lf = \mu(x) \frac{d}{dx} + \frac{1}{2} \sigma^2(x) \frac{d^2}{dx^2}$$

Este operador pode ser escrito em função da função de $s(x)$, e de $m(x)$. Para tal verificamos que

$$\frac{s'(x)}{s(x)} = -\frac{2\mu(x)}{\sigma^2(x)}$$

e então, introduzindo o factor integrante $\frac{1}{s(x)}$, podemos escrever

$$Lf(x) = \mu(x) \frac{df}{dx} + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} \sigma^2(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\cancel{1}[\sigma^2(x)s(x)]} \right) \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{s(x)} \frac{df(x)}{dx} \right]$$

ou de forma mais simplificada

$$Lf(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m(x)} \right) \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{s(x)} \frac{df(x)}{dx} \right]$$

Escrevendo ainda $dS(x)=dS=s(x)dx$ e $dM(x)=dM=m(x)dx$ o operador virá apenas:

$$Lf(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dM} \left[\frac{df(x)}{dS} \right]$$

que se designa por **representação canónica do operador infinitesimal**.

Veremos na secção seguinte aplicações quer desta representação, quer das funções aqui introduzidas.

2.5.2 Tempos de saída de um intervalo

Definimos já o primeiro tempo de chegada do processo $\{X(t), t \geq 0\}$ a um valor y , T_y . Consideremos agora $l < a < b < r$ e designemos

$$T^* = T_{a,b} = \min \{T_a, T_b\}$$

isto é o primeiro instante de chegada a a ou b .

Podemos demonstrar (ver [19]) que a probabilidade de que o processo atinja primeiro b do que a , ou seja a função

$$u(x) = P\{T(b) < T(a) \mid X(0) = x\} \quad a < x < b$$

satisfaz a equação diferencial:

$$0 = \mu(x) \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \sigma^2(x) \frac{d^2u}{dx^2} \quad \text{para } a < x < b \quad u(a)=0 \text{ e } u(b)=1$$

Usando a *representação canónica* do operador L , dada em 2.5.1, a equação anterior escreve-se

$$Lf(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dM} \left[\frac{du(x)}{dS} \right] = 0 \quad a < x < b$$

sujeita às condições $u(a)=0$ e $u(b)=1$

Assim obtém-se facilmente que

$$u(x) = C_1 + C_2 S(x).$$

Impondo as condições fronteira concluímos que a *solução da equação* é dada por

$$u(x) = \frac{S(x) - S(a)}{S(b) - S(a)} \quad \text{para } a < x < b$$

Tem ainda interesse considerarmos o tempo médio para atingir a ou b , isto é, a função

$$v(x) = E[T^* | X(0) = x] \quad \text{para } a < x < b$$

À semelhança do caso anterior demonstra-se que esta função satisfaz a equação diferencial:

$$-1 = \mu(x) \frac{dv}{dx} + \frac{1}{2} \sigma^2(x) \frac{d^2v}{dx^2} \quad \text{para } a < x < b$$

com as condições fronteira $v(a) = v(b) = 0$

Considerando novamente a *representação canónica do operador infinitesimal*, obtemos

$$-1 = \frac{1}{2} \frac{d}{dM} \left[\frac{dv(x)}{dS(x)} \right] \quad \text{para } a < x < b$$

sujeito à condições $v(a) = v(b) = 0$

Esta equação pode então ser resolvida e obtemos sucessivamente

$$\frac{dv}{ds} = -2 \int_a^x m(\xi) d\xi + C_1$$

e

$$v(x) = -2 \int_a^x \left(\int_a^r m(\xi) d\xi \right) s(r) dr + C_1 S(x) + C_2$$

Aplicando as condições fronteira vem

$$v(x) = 2 \left\{ u(x) \int_a^b \left(\int_a^r m(\xi) d\xi \right) s(r) dr - \int_a^x \left(\int_a^r m(\xi) d\xi \right) s(r) dr \right\}$$

onde $u(x) = \frac{S(x) - S(a)}{S(b) - S(a)}$ é a função obtida no caso anterior.

Mudando agora a ordem de integração podemos obter a *solução da equação* na forma

$$v(x) = 2 \left\{ u(x) \int_x^b [S(b) - S(\xi)] m(\xi) d\xi + [1 - u(x)] \int_a^x [S(\xi) - S(a)] m(\xi) d\xi \right\}$$

As funções $u(x)$ e $v(x)$ vão ser utilizadas na subsecção seguinte.

2.5.3 Classificação das fronteiras de um processo de difusão regular

Considere-se como anteriormente um processo de difusão regular num intervalo I , com fronteira inferior l e fronteira superior r . Supomos também que os coeficientes infinitesimais $\mu(x)$ e $\sigma^2(x) > 0$ são contínuos para $x \in]l, r[$.

A classificação das duas fronteiras é semelhante, pelo que apenas se irá desenvolver o estudo para a fronteira esquerda l.

Consideremos também como em 2.5.2

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_{a,b}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}\{T_b < T_a \mid \mathbf{X}(0) = \mathbf{x}\} \quad \mathbf{l} < \mathbf{a} < \mathbf{x} < \mathbf{b} < \mathbf{r} \quad (36)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_{a,b}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}[T_{a,b} \mid \mathbf{X}(0) = \mathbf{x}] \quad \mathbf{l} < \mathbf{a} < \mathbf{x} < \mathbf{b} < \mathbf{r} \quad (37)$$

em que T_z é o tempo de chegada a z e $T_{a,b} = T_a \wedge T_b = \min\{T_a, T_b\}$.

Podemos reescrever a *função escala* na forma

$$S(x) = \int_{x_0}^x s(\xi) d\xi \quad \text{onde} \quad s(\xi) = \exp\left\{-\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{2\mu(\eta)}{\sigma^2(\eta)} d\eta\right\} \quad (38)$$

em que x_0 e ξ_0 são dois pontos arbitrários fixos pertencentes ao intervalo]l, r[.

Introduzimos agora uma medida, $\mathbf{S}[\mathbf{J}]$ de intervalos fechados $\mathbf{J} = [\mathbf{c}, \mathbf{d}] \subset]\mathbf{l}, \mathbf{r}[$ definida por

$$\mathbf{S}[\mathbf{J}] = \mathbf{S}[\mathbf{c}, \mathbf{d}] = \mathbf{S}(\mathbf{d}) - \mathbf{S}(\mathbf{c})$$

Claro que esta medida é absolutamente contínua relativamente à medida de Lebesgue (em]l, r[, ou seja

$$\mathbf{S}[dx] = \mathbf{S}(x+dx) - \mathbf{S}(x) = d\mathbf{S}(x) = s(x)dx$$

Notar que $0 < \mathbf{S}[\mathbf{c}, \mathbf{d}] < \infty$ para $\mathbf{l} < \mathbf{c} < \mathbf{x} < \mathbf{d} < \mathbf{r}$
 e ainda $\mathbf{S}[\mathbf{c}, \mathbf{d}] = \mathbf{S}[\mathbf{c}, \mathbf{x}] + \mathbf{S}[\mathbf{x}, \mathbf{d}]$ (39)

A *medida de velocidade M* induzida pela função densidade de velocidade pode também reescrever-se como

$$M[J] = M[c, d] = \int_c^d m(x) dx = \int_c^d \frac{1}{\sigma^2(x) s(x)} dx \quad l < c < d < r$$

Em termos de medida de escala e de medida de velocidade (36) e (37) pode ser reescritos como,

$$u(x) = u_{a,b} = \frac{S[a, x]}{S[a, b]} \quad l < c < x < d < r \quad (40)$$

$$v(x) = v_{a,b}(x) = 2 \left\{ u(x) \int_x^b S[\eta, b] dM(\eta) + [1 - u(x)] \int_a^x S[a, \eta] dM(\eta) \right\} \quad (41)$$

Como resultado da não negatividade da medida S e devido a (39), $S[a, b]$ é monótona em a para um dado b fixo definindo-se assim $S(l, b) \leq \infty$ por:

$$S(l, b) = \lim_{a \downarrow l} S[a, b] \leq \infty \quad l < b < r \quad (42)$$

Se $[a, b] \subset]l, r[$ então $0 \leq S[a, b] < \infty$; por isto e por (39)

$S(l, b) = \infty$ para algum b pertencente a $]l, r[\Leftrightarrow S(l, b) = \infty$ para todo b pertencente a $]l, r[$ (43)

A utilização dos parênteses curvos em vez de rectos serve para salientar a definição como um limite. O valor de $S(l, r]$ depende apenas dos parâmetros do processo no interior do espaço de estados e não do facto de o ponto l estar ou não incluído nesse espaço de estados.

Para cada trajectória iniciada em $X(0) = x$ no intervalo (a, b) o *tempo de chegada* T_a é uma função monótona não crescente de a , podendo ser definido o *tempo aleatório* T_{l+} como:

$$T_{l+} = \lim_{a \downarrow l} T_a \leq \infty$$

Prova-se que $T_{l+} = T_l$, ou seja, ao tempo de chegada a l . Efectivamente se $X(0) = x \in (a, b)$
 $T_a \leq T_l$ donde $T_{l+} = \lim_{a \downarrow l} T_a \leq T_l$.

Provaremos em seguida a desigualdade oposta.

Notemos antes de mais que se $T_{l+} = \infty$ então $T_l = T_{l+} = \infty$, pelo que podemos supor que
 $T_{l+} < \infty$.

Como as trajectórias são contínuas

$$X(T_{l+}) = \lim_{a \downarrow l} X(T_a) = \lim_{a \downarrow l} a = l > -\infty$$

e assim $T_{l+} \geq T_l = \inf\{t \geq 0, X(t) = l\}$.

Logo como $T_{l+} \geq T_l$ e $T_{l+} \leq T_l$, $T_{l+} = T_l$.

T_l é definido mesmo quando não se trata de um estado possível, e nesse caso $T_l = \infty$.

Como resultado das considerações anteriores temos

Lema 1 [20]

i) Se $S(l, x_0] < \infty$, para algum x_0 em $]l, r[$ então,

$$P\{T_{l+} \leq T_b \mid X(0) = x\} > 0 \text{ para todo } l < x < b < r$$

ii) Se $S(l, x_0] = \infty$, para algum x_0 em $]l, r[$ então,

$$P\{T_{l+} \leq T_b \mid X(0) = x\} = 0 \text{ para todo } l < x < b < r$$

Nota

Dados dois pontos distintos a e b de $]l, r[$, a igualdade $T_a = T_b$ nunca pode ocorrer, uma vez que uma trajectória contínua não pode estar simultaneamente em dois pontos distintos. No entanto, $T_{l+} = T_b$ pode ocorrer contanto que ambos sejam infinitos.

Definição 1

Uma *fronteira l é atractiva se $S(l, x) < \infty$* , e este critério é independente do $x \in]l, r[$.

Uma fronteira atractiva não necessita de pertencer ao espaço de estados do processo e também a *probabilidade de atingir uma fronteira atractiva em tempo finito pode ser zero*. (Ver [20] para exemplos).

Podemos agora analisar quando é que uma fronteira atractiva é ou não atingível.

Pelo Lemma 1, sempre que uma fronteira é atractiva esta pode ser atingida primeiro do que um dado estado b , com probabilidade positiva, a partir de um ponto $x < b$, mas não necessariamente em tempo finito.

Para um dado b fixo, $b < r$, **o tempo médio da primeira passagem pela fronteira l ou pelo nível b , partindo de x será**

$$\lim_{a \downarrow l} E_x [T_a \wedge T_b] \quad \text{para } x < b < r$$

e onde E_x é o valor esperado condicionado ao estado inicial x .

Em termos de medida de escala e de velocidade obtemos de (41):

$$\lim_{a \downarrow l} E_x [T_a \wedge T_b] = \lim_{a \downarrow l} \frac{2 S[a, x]}{S[a, b]} \int_x^b S[\xi, b] dM(\xi) + \lim_{a \downarrow l} \frac{2 S[x, b]}{S[a, b]} \int_a^x S[a, \xi] dM(\xi)$$

Como, por hipótese, l é *atractiva*, $\lim_{a \downarrow l} \frac{S[a, x]}{S[a, b]}$ e $\lim_{a \downarrow l} \frac{S[x, b]}{S[a, b]}$ são finitos e positivos, logo a primeira parcela da expressão acima é finita. Então teremos

$$\lim_{a \downarrow l} E_x [T_a \wedge T_b] < \infty \quad \text{se e só se} \quad \lim_{a \downarrow l} \int_a^x S[a, \xi] dM(\xi) < \infty$$

Define-se então a grandeza

$$\begin{aligned} \Sigma(l) &= \lim_{a \downarrow l} \int_a^x S[a, \xi] dM(\xi) = \int_l^x S(l, \xi) dM(\xi) = \int_l^x \left\{ \int_l^\xi s(\eta) d\eta \right\} m(\xi) d\xi \\ &= \int_l^x \left\{ \int_\eta^x m(\xi) d\xi \right\} s(\eta) d\eta = \int_l^x M[\eta, x] dS(\eta) \end{aligned}$$

Definição 2

A fronteira l diz-se:

- a) **atingível** se $\Sigma(l) < \infty$
- b) **não atingível** se $\Sigma(l) = \infty$

Se uma fronteira l é **atingível** então é **atractiva**, mas uma **fronteira não atingível pode ou não ser atractiva**.

Lema 2 [20]

Se l for uma *fronteira atractiva* e $l < x < b < r$, as afirmações seguintes são equivalentes:

- i) a fronteira l pode ser atingida em tempo finito com probabilidade positiva

$$P\{T_1 < \infty \mid X(0) = x\} > 0;$$

- ii) o tempo médio da 1ª passagem por l ou b é finito

$$E[T_1 \wedge T_b \mid X(0) = x] < \infty;$$

$$\text{iii) } \sum(l) = \int_l^x S(l, \eta) dM(\eta) < \infty .$$

De um modo geral $\Sigma(l)$ mede o tempo necessário para atingir a fronteira l , ou um dado estado interior, b , partindo de um ponto interior $x < b$.

Considere-se agora a **velocidade do processo perto de l** , ou seja

$$M(l, x) = \lim_{a \downarrow l} M[a, x] \quad (44)$$

e a grandeza

$$N(l) = \int_l^x S[\eta, x] dM(\eta) = \int_l^x M[l, \xi] dS(\xi) \quad (45)$$

que representa uma **medida do tempo que o processo leva para alcançar um ponto x no interior de l, r** partindo de l .

A classificação das fronteiras é baseada no facto dos valores de $\Sigma(l)$, $N(l)$, $S(l, x)$ e $M(l, x)$ serem finitos ou infinitos.

Lemma 3 [20]

As condições que se seguem mostram a relação entre $\Sigma(l)$, $N(l)$, $S(l, x)$ e $M(l, x)$:

- i) $S(l, x) = \infty$ implica $\Sigma(l) = \infty$
- ii) $\Sigma(l) < \infty$ implica $S(l, x) < \infty$
- iii) $M(l, x) = \infty$ implica $N(l) = \infty$
- iv) $N(l) < \infty$ implica que $M(l, x) < \infty$
- v) $\Sigma(l) + N(l) = S(l, x) M(l, x)$



Das 16 combinações possíveis dos valores finitos das quatro quantidades acima definidas, só seis são realizáveis depois de aplicadas as conclusões do Lemma 3.

Estas seis combinações realizáveis dão-nos então critérios para a classificação da fronteira 1.

A tabela que se segue apresenta essa classificação usando quer a terminologia original de Feller, quer a terminologia adoptada pela escola Russa.

Terminologia utilizada por Feller e pela escola Russa na classificação de fronteiras

Critério S(l, x] M(l, x] Σ(l) N(l)	Terminologia			
	Feller	Russos		
$< \infty^* \quad < \infty^* \quad < \infty \quad < \infty$	regular			
$< \infty \quad = \infty^* \quad < \infty^* \quad = \infty$	Saida –Absorvente- “trap”		Atractiva	Atingível
$< \infty^* \quad = \infty^* \quad = \infty^* \quad = \infty$	Natural Σ(l)= ∞*, N(l)= ∞*	Atractiva, não atingível		Não atingível
$= \infty^* \quad < \infty^* \quad = \infty \quad = \infty^*$		Natural	Não	
$= \infty^* \quad = \infty^* \quad = \infty \quad = \infty$		S(l, x] = ∞*	attractiva	
$= \infty^* \quad < \infty \quad = \infty \quad < \infty^*$	Entrada			

*Condição suficiente mínima em cada linha

Para melhor compreensão do comportamento do processo, junto das fronteiras, podemos incluir uma descrição intuitiva da terminologia de Feller. Assim:

Fronteira Regular

Um processo de difusão pode entrar ou sair de uma fronteira regular. Para a completa caracterização do processo deve ser especificado o comportamento na fronteira, atribuindo-lhe uma velocidade $M[\{l\}]$.

O comportamento pode variar desde a reflexão $M[\{l\}] = \infty$ até à absorção $M[\{l\}] = 0$. O comportamento intermédio para, $0 < M[\{l\}] < \infty$, é uma barreira elástica onde uma duração estritamente positiva é gasta na fronteira; esta duração na fronteira não contém nenhum intervalo e não é descrita de forma elementar, [20].

Para se estabelecer se um *ponto fronteira l é regular* é suficiente verificar que

$$S(l, x] < \infty \text{ e } M(l, x] < \infty$$

Fronteira de Saída

Para que uma fronteira l seja de saída é necessário que:

$$\lim_{b \downarrow l} \lim_{x \downarrow l} P\{T_b < t \mid X(0) = x\} = 0 \quad \text{para todo } t > 0$$

O que significa que em l é impossível atingir qualquer estado interior b, por muito perto que ele se encontre de l. Isto é equivalente a dizer que uma vez atingida a fronteira l, não há trajetórias contínuas a partir de l.

Se l é uma fronteira de saída então T_l , o tempo de saída em l é $T_l = \lim_{a \downarrow l} T_a$, para processos que se iniciem em $X(0) \in]l, r[$.

Para estabelecer que uma *fronteira é de saída* é suficiente mostrar que

$$\Sigma(l) < \infty \text{ mas } M(l, x] = \infty$$

Fronteira de Entrada

Uma fronteira de entrada não pode ser alcançada a partir do interior do espaço de estados, sendo no entanto possível considerar que o processo aí se inicia. Estes processos movem-se muito rapidamente para o interior do estado de espaços e não retornam à fronteira de entrada. As fronteiras de entrada podem pertencer ao espaço de estados

Para mostrar que a *fronteira l é de entrada* é suficiente estabelecer que,

$$S(l, x] = \infty \text{ enquanto } N(l) < \infty$$

Fronteira Natural ou Fronteira de Feller

De acordo com a classificação apresentada na tabela anterior uma fronteira natural ou é atractiva mas não atingível ou é não atractiva.

Logo, podemos dizer, que um processo de difusão nunca atingirá uma fronteira natural em tempo médio finito, ou não poderá ser iniciado a partir de uma fronteira natural.

As fronteiras naturais não pertencem ao espaço de estados.

Para estabelecer que l é **uma fronteira natural no sentido de Feller** é necessário que,

$$\Sigma(l) = \infty \text{ e } N(l) = \infty$$

Para a *fronteira superior* r os critérios são análogos. As quantidades envolvidas são neste caso

$$S[x, r) = \lim_{b \uparrow r} S[x, b] \qquad M[x, r) = \lim_{b \uparrow r} M[x, b]$$

$$\Sigma(r) = \int_x^r M[x, \xi] dS(\xi) = \int_x^r S[\eta, r) dM(\eta) \qquad \text{e} \qquad N(r) = \int_x^r S[x, \xi] dM(\xi) = \int_x^r M[\eta, r) dS(\eta)$$

A classificação das fronteiras vista anteriormente pode ser relacionada com o comportamento assintótico do processo. Nomeadamente podemos dizer que um processo de difusão com fronteiras de entrada em l e r tem distribuição estacionária limitada.

Na secção que se segue consideraremos a existência ou não de uma distribuição (limite) estacionária.

2.6 Distribuição estacionária e sua caracterização

Seja $\{X(t), t \geq 0\}$ um processo de difusão homogêneo.

Uma distribuição de probabilidade P^0 , no espaço de estados do processo (\mathbf{R} ou \mathbf{I} , intervalo em \mathbf{R}), é uma distribuição invariante se for uma medida de probabilidade que satisfaz

$$P^0(B) = \int P(t, x, B) P^0(dx)$$

onde $P(t, x, B)$ é a distribuição de probabilidade de transição de $X(t)$ e B um Boreliano do espaço de estados.

Demonstra-se que se $\{X(t), t \geq 0\}$ possui uma distribuição invariante P^0 , então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(X_t \in B) = P^0(B)$$

para distribuições iniciais arbitrárias. Concluímos então que uma distribuição invariante do processo é uma distribuição limite estacionária e independentemente da distribuição inicial. Ver por exemplo [3].

Se existe uma função densidade estacionária $\psi(x)$ de P^0 , então necessariamente ela satisfaz,

$$\psi(y) = \int \psi(x) p(t, x, y) dx \quad (46)$$

Por analogia com o teorema limite das cadeias de Markov esta densidade estacionária pode ser dada por

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t, x, y) = \psi(y) \quad (47)$$

sendo o limite tomado em sentido apropriado.

Imitando a derivação da equação de Fokker-Planck para $p(t, x, y)$, pode deduzir-se que $\psi(y)$ satisfaz a equação,

$$0 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [\sigma^2(y) \psi(y)] - \frac{\partial}{\partial y} [\mu(y) \psi(y)] \quad (48)$$

Efectivamente sob certas condições sobre o limite em (47) pode passar-se ao limite na equação de Fokker-Planck. Considerando que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial p(t, x, y)}{\partial t} = 0$$

obtém-se a relação (48).

A equação (48) pode ser formalmente integrada donde se obtém:

$$\frac{1}{2} C_1 = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\sigma^2(y)}{2} \psi(y) \right] - [\mu(y) \psi(y)] \quad (49)$$

e C_1 é uma constante.

Se se multiplicar pelo factor integrante

$$s(y) = \exp \left\{ - \int \frac{2\mu(\xi)}{\sigma^2(\xi)} d\xi \right\}$$

pode escrever-se (49) na forma

$$\frac{d[s(y)\sigma^2(y)\psi(y)]}{dy} = C_1 s(y)$$

Integrando novamente e fazendo $S(x) = \int^x s(y) dy$, vem

$$\psi(x) = C_1 \frac{S(x)}{s(x)\sigma^2(x)} + C_2 \frac{1}{s(x)\sigma^2(x)} = m(x)[C_1 S(x) + C_2] \quad (50)$$

As constantes C_1 e C_2 são determinadas de forma a garantir as condições: $\psi(x) \geq 0$ em $]l,r[$

e $\int_l^r \psi(\xi) d\xi = 1$.

Se for possível deste modo determinar $\psi(x)$ diz-se então que *existe densidade estacionária*.

Temos concretamente o seguinte resultado

Teorema [29]

Seja X_t um processo de difusão homogéneo de fronteiras l e r . Supondo que

$$S(l) = -\infty \text{ e } S(r) = +\infty \quad \text{e} \quad \int_l^r \psi(\xi) d\xi < \infty,$$

$\{X(t), t \geq 0\}$ admite uma distribuição invariante P^0 cuja densidade é dada por

$$\psi(x) = \frac{m(x)}{\int_l^r m(u) du}$$

onde m é a densidade de velocidade vista atrás.

Um exemplo de aplicação deste teorema pode ser dado por uma difusão regular unidimensional em que os limites do intervalo constituem fronteira de entrada. Neste caso como $S(x)$ é monótona em $]l, r[$ esta deve aumentar para ∞ à medida que $x \uparrow r$ e diminuir para $-\infty$ à medida que $x \downarrow l$. Também $M]l, x[< \infty$ como se vê na tabela (da classificação de fronteiras da secção 2.5.3.) para as fronteiras de entrada. Assim são verificadas as hipóteses do teorema.

Por outro lado de (50) temos

$$\psi(x) = m(x) [C_1 S(x) + C_2]$$

Para manter $\psi(x)$ positivo no intervalo $]l, r[$ é necessário $C_1=0$, logo C_2 é escolhido para assegurar que $\int_l^r \psi(x) dx = 1$.

Assim a densidade estacionária é única e dada por

$$\psi(x) = \frac{m(x)}{\int_l^r m(\xi) d\xi} = \frac{1}{\sigma^2(x)s(x) \int_l^r [\sigma^2(\xi)m(\xi)]^{-1} d\xi}$$

Capítulo 3 Modelos Estocásticos

3.1 Passagem do determinístico ao estocástico

Os ambientes estão sujeitos a flutuações aleatórias que afectam o crescimento populacional, podendo conduzir à extinção de uma população que, de forma determinística, sobreviveria indefinidamente.

Por exemplo, nos modelos determinísticos de pesca para os quais existe uma estratégia de “colheita” máxima (esforço de pesca) a introdução da estocasticidade pode interferir com o esforço de pesca conduzindo essa mesma população à extinção.

As flutuações mais significativas são, essencialmente, produzidas por

- 1) *Estocasticidade ambiental* que se traduz em flutuações ao longo do tempo das taxas de nascimento e morte de uma população.
- 2) *Estocasticidade demográfica* em que os acontecimentos aleatórios, de mortalidade e reprodução individual, são geralmente considerados como independentes entre indivíduos. Estes factores têm maior impacto em populações de pequena dimensão.

A introdução destes factores conduz a modelos estocásticos que podem ser formulados à custa de processos estocásticos de Markov discretos, como *os processos de nascimento e morte* e *os processos ramificados*, mas que podem também ser formulados à custa de equações diferenciais estocásticas (e.d.e.).

As e.d.e. para modelos de dinâmica de populações aparecem essencialmente por duas vias:

Na primeira via, alguns dos parâmetros das equações determinísticas são considerados como processos estocásticos. Assim admitindo que a *taxa de crescimento intrínseca* – parâmetro r – é a mais afectada pela aleatoriedade do meio ambiente e supondo que a correlação das flutuações ambientais ao longo do tempo é pequena, r será substituído por

$$\alpha + \beta \varepsilon(t)$$

onde α representa agora o *parâmetro de crescimento médio*, $\beta > 0$ mede a intensidade das flutuações e $\varepsilon(t)$ é um ruído colorido (com correlações não nulas), que pode ser aproximado a um ruído branco unitário (esta aproximação é razoável se as flutuações ocorrem muito rapidamente na escala de tempo em que o processo se encontra definido).

Considerando ainda que os modelos de dinâmica da população são dependentes da dimensão desta, outros parâmetros podem também ser considerados aleatórios, como por exemplo a própria *capacidade de sustento*.

Uma outra via, para a obtenção de modelos de dinâmica de populações, será a de considerar processos de difusão como aproximações de modelos estocásticos discretos. Esta aproximação pode ser obtida através do limite (em distribuição) de sequências de processos estocásticos discretos.

Quer num caso quer noutro podemos apresentar resultados que justificam de uma maneira rigorosa que os modelos estocásticos obtidos estão bem definidos, e têm como soluções processos de difusão.

Em seguida, passaremos a enunciar alguns dos Teoremas que permitem tratar a primeira via, isto é a modelação por e.d.e.

Consideremos uma e.d.o. que, perturbada por um ruído correlacionado, fornece um modelo preciso de um dado sistema físico, em ambiente aleatório. A equação para esse modelo pode então ser escrita na forma geral

$$\frac{dX}{dt} = f(X) + g(X)\xi(t) \quad (1)$$

em que $X(t)$, $t \geq 0$, representa o estado do sistema, $\xi(t)$ representa um ruído autocorrelacionado para $t \geq 0$, $f(x)$ representa a dinâmica do sistema na ausência de efeitos aleatórios e $g(x)$ dá a indicação da intensidade do ruído.

De um modo rigoroso, a solução da equação anterior pode ser aproximada pela solução de uma e.d.e., construída à custa do processo de Wiener $W(t)$, $t \geq 0$, e considerada no sentido de Stratonovich, isto é a e.d.e.

$$dX = f(X)dt + g(X) \circ dW(t) \quad (2)$$

Para isso consideremos uma sucessão de equações de forma idêntica à de (1)

$$\frac{dX_n}{dt} = f(X_n) + g(X_n)\xi_n(t) \quad (3)$$

mas onde agora $\xi_n(t)$ representam aproximações ao ruído branco Gaussiano.

Vamos considerar dois tipos de aproximação.

Seja $\xi_n(t)$, $t \geq 0$, um processo *estritamente estacionário*, de *média zero* e *função covariância*,

$$K_n(s) = E(\xi_n(t+s)\xi_n(t)) \quad (4)$$

No primeiro tipo de aproximação consideramos que ξ_n são processos de trajectórias regulares e aproximam um ruído branco Gaussiano, concretamente

$$\xi_n = \frac{dY_n}{dt}$$

onde, com probabilidade 1, as trajectórias de Y_n são contínuas, de variação limitada e convergem para as trajectórias de W , e que existe ainda um inteiro aleatório, n_0 , e uma variável aleatória k , de médias finitas tal que $Y_n(t) \leq k$, para todo $n \geq n_0$ e $t \in [a, b]$.

Assim podemos enunciar:

Teorema 1 [18]

Suponhamos para todo o x e $y \in \mathbf{R}$ se verificam as condições

- a) as funções f , g e g' satisfazem a condição de Lipschitz para alguma constante k_1

$$|f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| + |[gg'](x) - [gg'](y)| \leq k_1 |x - y|.$$

- b) para alguma constante k_2 , $g^{-2}(X) \leq k_2$.

Suponhamos ainda que

- $X(t)$ e $X_n(t)$ são, respectivamente, as soluções da equação (2) e (3) para $t \in [a, b]$

- $X_n(a) = X_a = X(a)$ onde X_a é uma variável aleatória independente dos incrementos

$W(t) - W(a)$ para todo o $t \in [a, b]$.

Então

$$X_n(t) \rightarrow X(t) \quad \text{as } n \rightarrow \infty, \quad \text{q.c.} \quad t \in [a, b]$$

O segundo teorema, que pode ser considerado como uma generalização do teorema anterior, utiliza a convergência em sentido fraco.

Concretamente consideramos agora

$$\xi_n(t) = \sqrt{n} \eta(nt) \quad (5)$$

em que η é um processo de trajectórias contínuas, estritamente estacionário, de média zero e função covariância K , e que satisfaz a condição:

- existe uma função φ tal que para acontecimentos A e B e instantes t e $s > 0$, quaisquer, se tem

$$|P(\eta(t+s) \in A | \eta(t) \in B) - P(\eta(t+s) \in A)| \leq \varphi(s) \quad (6)$$

$$\text{e } \varphi(s) \rightarrow 0 \text{ q.c. } s \rightarrow \infty \quad (7)$$

Façamos

$$\gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} K(s) ds \quad (8)$$

Teorema 2 [18]

Suponhamos que para todo $x \in \mathbf{R}$ a função f , para alguma constante C e inteiro $q \geq 0$, satisfaz as condições:

- i) $|f(x)| \leq C(1 + |x|)$
- ii) $|f'(x)| \leq C$
- iii) $|f''(x)| + |f'''(x)| + |f^{(4)}(x)| \leq C(1 + |x|^q)$

e ainda que a função g também satisfaz i) a iii). Suponhamos ainda que os processos ξ_n satisfazem as condições (5) a (8) com

$$\int_0^{\infty} \sqrt{\varphi(s)} ds < \infty$$

Seja $X_n(t)$ a solução equação (3) no intervalo $[a, b]$ que satisfaz $X_n(a) = X_a$, (X_a é uma variável aleatória). Então, para todo $t \in [a, b]$,

$$X_n(t) \rightarrow X_\gamma(t) \quad n \rightarrow \infty, \text{ em distribuição}$$

onde X_γ é um processo de difusão em $[a, b]$ que satisfaz $X_\gamma(a) = X_a$, com coeficientes

deriva	$f(x) + \gamma g(x) g'(x)$
difusão	$\gamma g^2(x)$

Neste Teorema a convergência de X_n para X_γ ocorre em distribuição, e ξ_n aproxima, também em distribuição, um ruído branco. Notemos ainda que a difusão X_γ obtida por este Teorema só coincide com a solução de (2) para $\gamma = 1$.

Gostaríamos de salientar que em ambos os resultados somos conduzidos à solução da e.d.e. de Statonovich. Uma justificação para este facto pode ser dada do seguinte modo.

A equação (3) é equivalente a um integral da forma

$$X_n(t) = X(a) + \int_a^t f(X_n(s)) ds + \int_a^t g(X_n(s)) dY_n(s)$$

quando consideramos a aproximação dada no Teorema 1. Na expressão integral acima o último integral pode agora ser interpretado como um integral de Riemann-Stieltjes ordinário. Assim tomando o limite este integral vai convergir para o integral de Statonovich. A este respeito podemos ainda ver [3].

3.2 Modelos estocásticos de dinâmica de populações

Nesta secção estudaremos modelos de dinâmica populacional onde as ideias da secção anterior estão subjacentes.

Utilizaremos de um modo geral e.d.e. no sentido de Stratonovich e estudaremos todos os modelos, com o maior detalhe possível, do ponto de vista probabilístico.

Assim resolveremos explicitamente cada e.d.e., estudaremos o comportamento na fronteira da respectiva solução, consideraremos a equação de Fokker-Planck e resolveremos esta para obter as probabilidades de transição em cada modelo.

Faremos ainda, em muitos casos, um estudo de simulação que nos permite visualizar o comportamento de cada difusão em tempo finito e estudaremos também o comportamento assintótico.

3.2.1 Modelo em ambiente aleatório sem dependência

Como já foi referido no Capítulo 1, o modelo determinístico mais simples é do tipo

$\frac{dN}{dt} = r N$ em que r (constante) representa a taxa de crescimento da população a modelar.

A principal incapacidade destes modelos reside no facto de serem modelos de crescimento não limitado, o que não acontece na realidade.

Considerando agora que as flutuações aleatórias que afectam o crescimento da população obteremos a correspondente e.d.e.

Assim fazendo $r = \alpha + \beta \varepsilon(t)$, onde $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta > 0$ e $\varepsilon(t)$ é um ruído branco Gaussiano, podemos escrever

$$\frac{dN}{dt} = (\alpha + \beta \varepsilon(t)) N$$

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N + \beta N \varepsilon(t) \quad (1)$$

$$dN = \alpha N dt + \beta N dW$$

onde $W_t, t \geq 0$, é um processo de Wiener

A equação (1), considerada segundo Stratonovich, é obtida de acordo com o estabelecido no Teorema 1 da secção 3.1.

Esta e.d.e. foi já resolvida no cap.2 e a sua solução é um movimento Browniano geométrico, dado por

$$N_s(t) = N(0) e^{\alpha t + \beta w(t)} \quad (2)$$

para $N(0) > 0$.

Esta solução é um processo de difusão em $]0, \infty[$ de coeficientes infinitesimais

$$\mu(N) = \left(\alpha + \frac{\beta^2}{2} \right) N \quad \sigma^2(N) = \beta^2 N^2 \quad (3)$$

Em relação ao comportamento desta solução teremos que, à medida que $t \rightarrow \infty$, podem ocorrer 3 situações distintas:

1ª) $N_s(t) \xrightarrow[\text{q.c.}]{} 0$ se $\alpha < 0$, o que significa que a população tende a extinguir-se caso

o parâmetro de crescimento médio seja negativo.

2ª) $N_s(t) \xrightarrow{q.c.} \infty$ se $\alpha > 0$, ou seja a população tende a aumentar indefinidamente

se o parâmetro de crescimento médio for positivo

3ª) $N_s(t)$ irá flutuar entre valores arbitrariamente grandes e pequenos, caso o parâmetro de crescimento médio seja nulo, $\alpha=0$.

Esta análise decorre da expressão 2 e do comportamento de $W(t)$ para $t \rightarrow \infty$, dado pela lei do logaritmo iterado (ver cap. 2).

Para qualquer $N(0) > 0$ a solução $N(t)$ pertence ao intervalo $]0, \infty [$.

Segundo a classificação de Feller as fronteiras $N=0$ e $N=\infty$ são ambas fronteiras naturais, ou seja são ambas atractivas e não atingíveis.

Efectivamente relembando a análise das fronteiras descrita no cap. 2 diremos que:

-Uma fronteira L é atractiva se $s(N) = \exp\left\{-\int_{N_0}^N \frac{2\mu(y)}{\sigma^2(y)} dy\right\}$ for **integrável** numa

vizinhança desse valor

-Uma fronteira L é atingível se for atractiva e se

$$\Sigma(L) = \int_{N_0}^L s(N) \int_{N_0}^N \frac{1}{\sigma^2(y) s(y)} dy dN \text{ for finita.}$$

Neste modelo a função escala é da forma $s(N) = \left(\frac{N_0}{N}\right)^{\frac{2\alpha}{\beta^2+1}}$, pelo que:

- $s(N)$ é integrável em $]0, N_0]$ se $\frac{2\alpha}{\beta^2} + 1 < 1$ ou seja $\alpha < 0$; logo se $\alpha < 0$ a fronteira $N=0$ é

atractiva.

- $s(N)$ é integrável em $[N_0, +\infty[$ se $\frac{2\alpha}{\beta^2} + 1 > 1$ ou seja $\alpha > 0$; logo se $\alpha > 0$ a fronteira

$N=+\infty$ é **atractiva**.

Para mostrar que são não atingíveis considere-se

$$\Sigma(L) = \int_{N_0}^L \left(\frac{N_0}{N} \right)^{\frac{2\alpha}{\beta^2} + 1} \int_{N_0}^N \frac{1}{\beta^2 y^2 \left(\frac{N_0}{y} \right)^{\frac{2\alpha}{\beta^2} + 1}} dy dN = \int_{N_0}^L \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{1}{N} - \frac{N_0^{\frac{2\alpha}{\beta^2}}}{N^{\frac{2\alpha}{\beta^2} + 1}} \right) dN$$

Então

- para $L=0$ se $\alpha < 0$, $\Sigma(0)=+\infty$, logo a fronteira $N=0$ é **não atingível**.

- para $L=+\infty$ se $\alpha > 0$, $\Sigma(+\infty)=+\infty$, pelo que a fronteira $N=+\infty$ é, **também, não atingível**.

A partir dos coeficientes infinitesimais (3), podemos escrever a equação de Fokker-Planck (EFP) para as probabilidades de transição desta difusão. Obtemos para este modelo

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial N} (\mu(N) p) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial N^2} (\sigma^2(N) p)$$

onde $p(N|N_0, t)$ é a função densidade de probabilidade (f.d.p.) de transição de $N(t)$ dado que $N(0)=N_0$.

Como se sabe $p(N|N_0, t)$, descreve completamente, do ponto de vista probabilístico, a evolução do processo.

Assim, para obter a solução desta equação podemos considerar as seguintes transformações:

$$z = \int \frac{1}{\sigma(\varepsilon)} d\varepsilon = \frac{1}{\beta} \ln N \quad \text{donde} \quad \frac{dz}{dN} = \frac{1}{\beta N} \Leftrightarrow dz = \frac{dN}{\beta N} \quad (4)$$

Sendo $g(z|z_0, t)$ a densidade de probabilidade de transição de z , obtém-se, pela transformação da variável anterior (ver [19])

$$g(z | z_0, t) = \sigma(N) p(N | N_0, t) \Big|_{N=N(z)} \quad (5)$$

Uma vez que estamos a considerar a equação (1) segundo Stratonovich, podemos fazer a mudança de variável anterior nessa equação que virá

$$\frac{dN}{\beta N} = \frac{\alpha N}{\beta N} dt + \frac{\beta N}{\beta N} dW$$

ou ainda

$$dz = \frac{\alpha}{\beta} dt + dW \quad (6)$$

obtendo-se assim uma e.d.e. para um processo de Wiener com deriva $\frac{\alpha}{\beta}$. Temos então

$$z(t) = \frac{\alpha}{\beta} t + W(t) + z_0.$$

De (6) a **f.d.p. de transição de z , $g(z | z_0, t)$** satisfaz a EFP

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\alpha}{\beta} g \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \quad (7)$$

com as condições fronteira

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} g(z | z_0, t) = 0$$

que correspondem às fronteiras não atingíveis de $N(t)$. Efectivamente

$$\begin{aligned} \text{se } N=0 \quad \text{vem } z &= \frac{1}{\beta} \ln(0) & \text{donde} & \quad z = -\infty \\ \text{se } N=\infty \quad \text{vem } z &= \frac{1}{\beta} \ln(\infty) & \text{ou seja} & \quad z = +\infty \end{aligned}$$

A função $g(z|z_0,t)$ é Gaussiana dada por :

$$g(z|z_0,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{1}{2t}\left(z - z_0 - \frac{\alpha t}{\beta}\right)^2\right\} \quad (8)$$

já que é a f.d.p de um processo de Wiener , com deriva $\frac{\alpha}{\beta}$ e média $E(z(t))= z_0 + \frac{\alpha t}{\beta}$

Utilizando a relação (5) e substituindo (8), obtém-se

$$p(N|N_0,t) = \frac{g(z|z_0,t)}{\beta N} = \frac{1}{\beta N \sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{1}{2t}\left(z - z_0 - \frac{\alpha t}{\beta}\right)^2\right\} \quad (9)$$

Mas sendo $z = \frac{1}{\beta} \ln N$ e $z_0 = \frac{1}{\beta} \ln N_0$ teremos

$$p(N|N_0,t) = \frac{1}{\beta N \sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{1}{2t}\left(\frac{1}{\beta} \ln N - \frac{1}{\beta} \ln N_0 - \frac{\alpha t}{\beta}\right)^2\right\}$$

ou ainda

$$p(N|N_0,t) = \frac{1}{\beta N \sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{1}{2t\beta^2}\left(\ln \frac{N}{N_0} - \alpha t\right)^2\right\} \quad (10)$$

que é a **função densidade de transição** do movimento Browniano geométrico $N(t)$.

Podemos verificar o comportamento da solução $N(t)$ deste modelo observando o gráfico

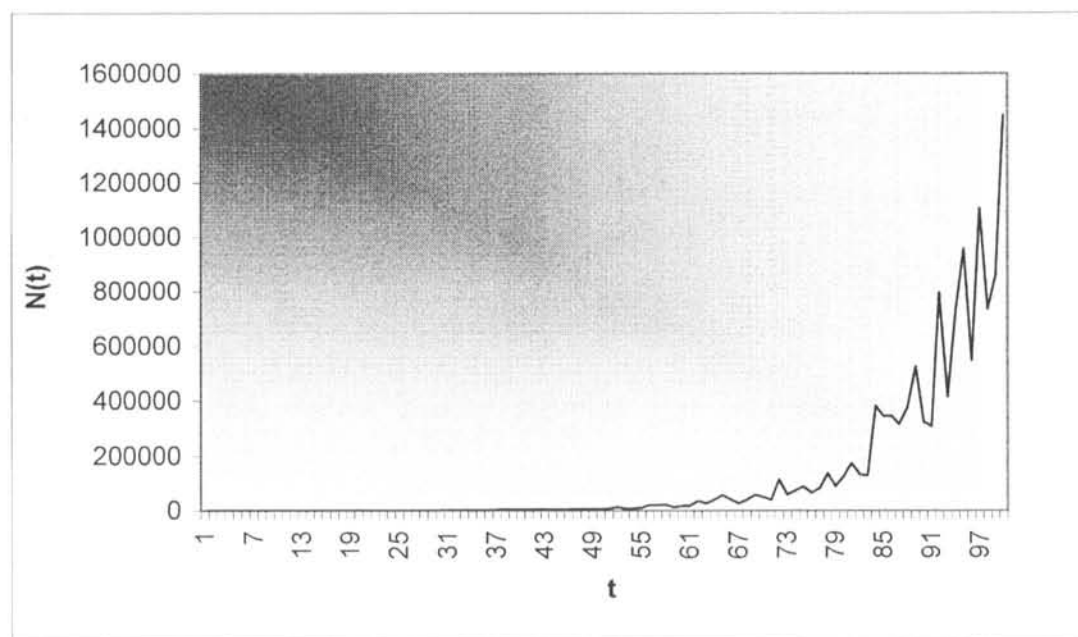


Fig. 3.1 - Simulação do comportamento da solução do modelo Malthusiano, segundo Stratonovich, para $\alpha=0,1$, $\beta=0,3$ e uma população inicial $N(0)=50$.

Observação:

Se usarmos a *interpretação de Ito* para o integral estocástico, a solução da equação (1) toma a forma

$$N(t) = N(0) e^{\left(\alpha - \frac{1}{2}\beta^2\right)t + \beta w(t)} \quad (13)$$

que é também um movimento Browniano geométrico.

As soluções da equação (1) constituem, nesta interpretação, um processo de difusão em $]0, \infty[$, com coeficientes de deriva e de difusão, respectivamente,

$$\mu(N) = \alpha N \quad \text{e} \quad \sigma^2(N) = \beta^2 N^2 \quad (14)$$

Em relação ao comportamento desta solução, quando $t \rightarrow \infty$, e à semelhança da análise feita segundo a interpretação de Stratonovich, podem também ocorrer três diferentes situações:

1ª) $N(t) \xrightarrow[q.c.]{t \rightarrow \infty} 0$ se $\alpha < \frac{\beta^2}{2}$ ou seja, se a taxa de crescimento médio for inferior à intensidade da média das flutuações, a população tende a extinguir-se;

2ª) $N(t) \xrightarrow[q.c.]{t \rightarrow \infty} \infty$ se $\alpha > \frac{\beta^2}{2}$ se a taxa de crescimento médio for superior à intensidade da média das flutuações isto significa que a população tende a aumentar indefinidamente;

3ª) $N(t)$ irá flutuar entre valores arbitrariamente grandes e pequenos, caso a intensidade média das flutuações seja igual à taxa de crescimento médio $\alpha = \frac{\beta^2}{2}$.

Segundo a classificação de Feller as fronteiras $N=0$ e $N=\infty$ são, também aqui, fronteiras naturais (atractivas e não atingíveis).

Procedendo de igual modo, podemos verificar que neste caso $s(N) = \left(\frac{N_0}{N}\right)^{\frac{2\alpha}{\beta^2}}$ é

integrável em

$]0, N_0]$ se $\alpha < \frac{\beta^2}{2}$ pelo que 0 é fronteira atractiva e

$[N_0, +\infty[$ se $\alpha > \frac{\beta^2}{2}$ pelo que, $+\infty$ é também fronteira atractiva.

São não atingíveis na medida em que $\Sigma(L) = \int_{N_0}^L \frac{1}{2\alpha - \beta^2} \left(\frac{1}{N} - \frac{N_0}{N \frac{2\alpha}{\beta^2}} \right) dN$, em cada

intervalo considerado, é não integrável.

Este comportamento coincide com o caso de Stratonovich, mas para diferentes valores dos parâmetros.

Procedendo como no caso anterior obteríamos que a *densidade de probabilidade de transição* é aqui dada por

$$p(N | N_0, t) = \frac{1}{\beta N \sqrt{2\pi t}} \exp \left\{ -\frac{1}{2t\beta^2} \left[\ln \frac{N}{N_0} - \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta^2}{2} \right) t \right]^2 \right\} \quad (15)$$

O **comportamento da solução** deste modelo considerando a equação inicial **segundo Ito**, é a difusão com os coeficientes dados em (14), e pode ser analisado através do gráfico

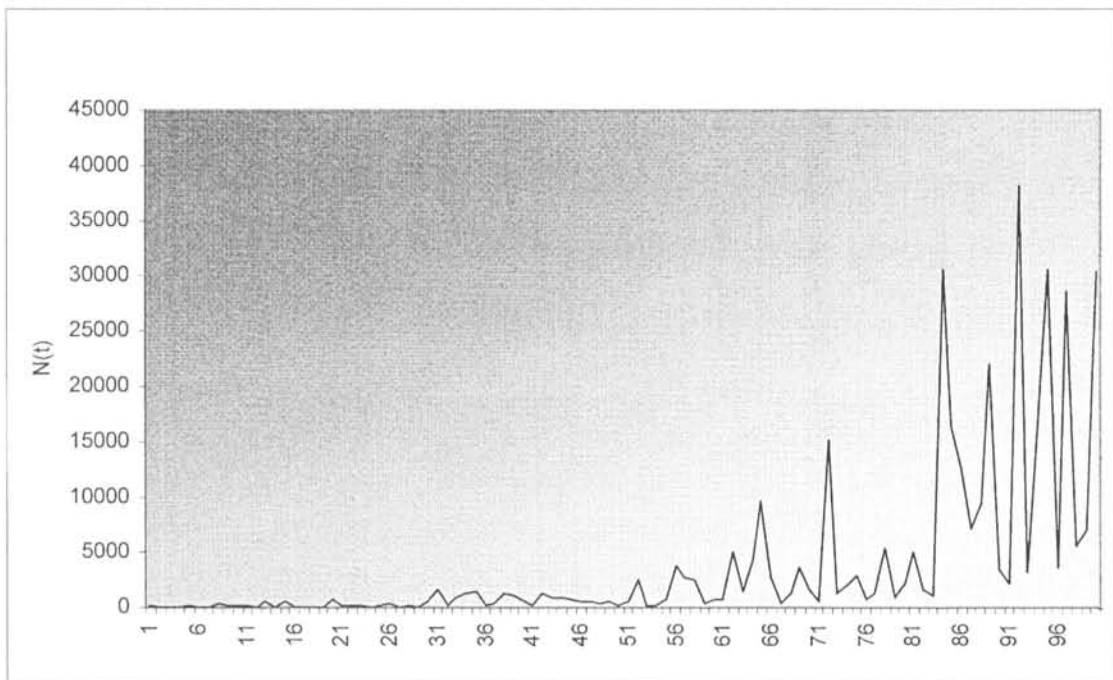


Fig. 3.2 - Simulação do comportamento da solução do modelo Malthusiano, segundo Ito para $\alpha=0,1$, $\beta=0,3$ e uma população inicial $N(0)=50$ indivíduos.

É de realçar o aumento da intensidade das flutuações o que pode traduzir uma maior influência da intensidade do ruído, β , na solução deste modelo segundo a interpretação de Ito.

Em qualquer dos casos, no entanto, a população cresce indefinidamente (pelo menos para alguns valores dos parâmetros) quando $t \rightarrow \infty$.

3.2.2 Modelo em ambiente aleatório com dependência geral

Consideremos agora um modelo que além da aleatoriedade no parâmetro de crescimento contém também uma dependência geral da densidade da população. Teremos o modelo estocástico correspondente ao determinístico descrito em 1.1 e que tem sido estudado em diversos artigos. (Ver por exemplo [7], [9] e [27]).

Neste modelo a e.d.e. será da forma

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= (\alpha + \beta \varepsilon(t)) N f(N) \\ \frac{dN}{dt} &= \alpha N f(N) + \beta N f(N) \varepsilon(t)\end{aligned}$$

$$dN = \alpha N f(N) dt + \beta N f(N) dW \quad (16)$$

em que

N – representa a dimensão da população

$r = \alpha + \beta \varepsilon(t)$ – é como anteriormente o processo estocástico que nos dá a taxa de crescimento sob a influência de factores aleatórios

$\varepsilon(t)$ – é um ruído branco Gaussiano

$f(N)$ – é uma função que representa as limitações ao crescimento da população (ver estas condições em 1.1)

A solução desta equação, segundo Stratonovich, é um processo de difusão homogêneo de coeficientes,

$$\mu(N) = \alpha N f(N) + \frac{1}{4} \frac{d\sigma^2(N)}{dN} \quad e \quad \sigma^2(N) = \beta^2 N^2 [f(N)]^2 \quad (17)$$

Consideremos como em 1.1 a quantidade determinística $K = \inf\{N > 0 : f(N) = 0\}$ onde tipicamente se tem $K > N_0$.

Sendo $\sigma^2(0) = \sigma^2(K) = 0$ e $\sigma^2(x) > 0$, para $x \in]0, K[$ teremos que se $N_0 \in]0, K[$ então $N(t) \in]0, K[$, para $t \geq 0$.

Vamos então analisar as fronteiras $N=0$ e $N=K$.

Para este modelo temos

$$s(y) = -\frac{N_0 f(N_0)}{y f(y)} \exp\left\{-\frac{2\alpha}{\beta^2} \int_{N_0}^y \frac{1}{r f(r)} dr\right\}$$

donde

$$S(N) = \int_{N_0}^N s(y) dy = -\frac{\beta^2}{2\alpha} N_0 f(N_0) \left[\exp\left(-\frac{2\alpha}{\beta^2} \int_{N_0}^N \frac{1}{y f(y)} dy\right) - 1 \right]$$

e

$$\Sigma(L) = \frac{1}{2\alpha} \int_{N_0}^L \frac{1}{N f(N)} dN + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} \left[\exp\left(-\frac{2\alpha}{\beta^2} \int_{N_0}^L \frac{1}{r f(r)} dr\right) - 1 \right]$$

Utilizando as condições sobre f dadas por (também de 1.1)

$$\int_{N_0}^{0^+} \frac{1}{y f(y)} dy = -\infty \quad \text{e} \quad \int_{N_0}^{K^-} \frac{1}{y f(y)} dy = +\infty$$

pela classificação das fronteiras temos:

- $N=0$ é não atractiva porque $S(0^+) = -\infty$ ou porque $S]0, N_0] = S(N_0) - S(0^+) = +\infty$. Isto significa que é nula a probabilidade de alguma vez ocorrer a extinção da população onde por extinção se entende $N=0$.

- $N=K$ é no entanto atractiva já que $S(K) = \frac{\beta^2}{2\alpha} N_0 f(N_0) < +\infty$.

Ambas as fronteiras são **não atingíveis** em tempo finito porque $N=0$ é não atractiva e em $N=K$ temos $S(K) = +\infty$.

Por este facto podemos concluir mais uma vez que se N_0 se situa dentro do intervalo $]0, K[$, $N(t)$ permanece nesse intervalo para todo $t \geq 0$.

A partir da e.d.e., e segundo as regras de Stratonovich a EFP é dada por

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial N}(\mu(N) p) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial N^2}(\sigma^2(N) p) \tag{18}$$

Veremos mais adiante a solução fundamental desta equação, ou seja a f.d.p. de transição $p(N | N_0, t)$.

Consideremos como no modelo anterior a função

$$\int_{N_0}^N \frac{1}{\sigma(x)} dx = c(N) = \int_{N_0}^N (x f(x))^{-1} dx$$

que é estritamente crescente em $]0, K[$, desde que $f(N) > 0$ nesse intervalo

Esta função (designada por função relógio em alguns textos, [10], (como já foi referido no cap.1) transforma $N(t)$ em

$$z(t) = \int_{N_0}^{N(t)} (x f(x))^{-1} dx \tag{19}$$

Usando o cálculo de Stratonovich obtém-se

$$\frac{dz}{dN} = \frac{1}{Nf(N)} = \frac{\beta}{\sigma(N)}$$

Assim considerando a E.D.E. (16) e multiplicando-a por $\frac{dz}{dN}$ vem

$$\frac{dN}{Nf(N)} = \alpha dt + \beta dW$$

ou seja

$$dz = \alpha dt + \beta dW$$

com a condição inicial $z(0)=c(N_0)=0$.

A solução da equação em $z(t)$ é um movimento Browniano $z(t)=\alpha t+\beta W(t)$, com média αt , para $t \geq 0$, e onde $W(t)$ é um processo de Wiener habitual.

A solução de (16) pode assim ser dada por,

$$N(t) = c^{-1}(z(t)) = c^{-1}(\alpha t + \beta W(t)) \quad (20)$$

cuja expressão explícita depende do conhecimento de $f(\cdot)$.

A **f. d. p. de transição de z** , $g(z|z_0,t)$, satisfaz a EFP para z que se escreve

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}(\alpha g) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\beta g)$$

com as condições fronteira

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} g(z | z_0, t) = 0$$

que correspondem às fronteiras não atingíveis. Efectivamente de (19) $N=0$ corresponde a $z = -\infty$ e $N=K$ a $z = +\infty$

A função $g(z | z_0, t)$ é Gaussiana dada por :

$$g(z | z_0, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{1}{2t}(z - \alpha t)^2\right\} \quad (21)$$

já que é a f.d.p de transição de um processo de Wiener com deriva α e média $E(z(t)) = \alpha t$.

Utilizando a relação (5) obtém-se

$$p(N | N_0, t) = \frac{g(z | z_0, t)}{\beta N f(N)} = \frac{1}{\beta N f(N) \sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{1}{2t} \left(\int_{N_0}^N \frac{1}{x f(x)} dx - \alpha t \right)^2\right\} \quad (22)$$

Em relação ao comportamento assintótico da população sabe-se que $z(t) \xrightarrow[\text{q.c.}]{} +\infty$ à medida que $t \rightarrow +\infty$, pelo que $N(t) \xrightarrow[\text{q.c.}]{} c^{-1}(+\infty) = K$ à medida que $t \rightarrow +\infty$.

Assim, à semelhança do modelo determinístico, no modelo estocástico a dimensão da população converge para a capacidade de sustento, K .

Uma vez que a dimensão da população do modelo (16) varia de modo contínuo, este modelo não será o mais adequado para populações de pequena dimensão, populações estas que se revelam de particular interesse em estudos de extinção.

3.2.3. Modelo Logístico

Como foi já referido em 1.3, as limitações ambientais “regulam” o crescimento da população, impedindo a coexistência de mais do que um certo número de indivíduos num dado meio. Ou seja, são autoreguláveis impedindo que a população assuma grandes densidades.

Os modelos determinísticos de crescimento que têm em conta este tipo de mecanismo autoregulador são da forma

$$\frac{dN}{dt} = r N(1 - \varphi(N))$$

em que $\varphi(N)$ é uma função crescente em N . O modelo deste tipo, mais conhecido e mais simples, é o chamado modelo logístico para o qual $\varphi(N) = N/K$, ($K > N_0$)

Teremos então

$$\frac{dN}{dt} = r N \left(1 - \frac{N}{K} \right) \quad (23)$$

em que

N - representa a dimensão da população

r - a taxa intrínseca de crescimento ($r > 0$) e

K - a capacidade de sustento ($K > 0$).

Este modelo determinístico já foi analisado em 1.3 e é um caso particular de 1.1 .

Como já foi referido em 3.1, as flutuações aleatórias no ambiente podem afectar de diferentes formas o crescimento de uma população, através da introdução dessa aleatoriedade, seja na taxa de crescimento, seja no parâmetro da capacidade de sustento (ver [18]). Passaremos em seguida a apresentar estas duas situações.

3.2.3.1 Alteração da taxa de crescimento

Esta alteração consiste, como nos casos anteriores, na substituição do parâmetro de crescimento, r , pelo parâmetro estocástico $\alpha + \beta \varepsilon(t)$, em que $\varepsilon(t)$, é um ruído branco, $\beta > 0$ é uma constante e $E(\alpha + \beta \varepsilon(t)) = \alpha$ é o parâmetro de crescimento médio.

Como também já foi referido a utilização do ruído branco para modelar as flutuações aleatórias justifica-se já que as mudanças ambientais podem ser consideradas muito rápidas quando comparados com o crescimento da população.

Assim substituindo r por $\alpha + \beta \varepsilon(t)$ na equação (23) obtém-se uma e.d.e. que descreve o comportamento da população perante esta alteração. Teremos

$$dN = \alpha N \left(1 - \frac{N}{K}\right) dt + \beta N \left(1 - \frac{N}{K}\right) dW \quad (24)$$

Este modelo é um caso particular de 3.2.2. e portanto as conclusões obtidas nessa secção podem ser aqui parafraseadas. Veremos no entanto, explicitamente, algumas expressões e conclusões.

Na interpretação de Stratonovich a solução da equação (24), para uma condição inicial $N(0) = N_0 \in]0, K[$ é um processo de difusão em $]0, K[$ de coeficientes infinitesimais,

$$\mu(N) = N \left(1 - \frac{N}{K}\right) \left[\alpha + \frac{\beta^2}{2} \left(1 - \frac{2N}{K}\right) \right] \quad \text{e} \quad \sigma^2(N) = \beta^2 N^2 \left(1 - \frac{N}{K}\right)^2 \quad (25)$$

Verifica-se que $\sigma^2(0) = \sigma^2(K) = 0$ e $\sigma^2(N) = \beta^2 N^2 \left(1 - \frac{N}{K}\right)^2 > 0$ em $]0, K[$. Assim, $N(t)$ pertencerá a esse intervalo para $t \geq 0$, desde que $N_0 \in]0, K[$

Notar que para K muito grande $\left(1 - \frac{N}{K}\right) \approx 1$, e obtém-se os coeficientes infinitesimais:

$$\mu(N) \cong \left(\alpha + \frac{\beta^2}{2}\right)N \quad \text{e} \quad \sigma^2(N) \cong \beta^2 N^2$$

ou seja, os mesmos coeficientes obtidos em 3.2.1, para o Modelo Malthusiano segundo Stratonovich.

Vamos agora analisar as fronteiras $N=0$ e $N=K$. Para este modelo temos

$$S(N) = -\frac{\beta^2}{2\alpha} N_0 \left(1 - \frac{N_0}{K}\right) \left[\exp\left(-\frac{2\alpha}{\beta^2} \int_{N_0}^N \frac{1}{y\left(1 - \frac{y}{K}\right)} dy\right) - 1 \right]$$

e

$$\Sigma(L) = \frac{1}{2\alpha} \int_{N_0}^L \frac{1}{N\left(1 - \frac{N}{K}\right)} dN + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} \left[\exp\left(-\frac{2\alpha}{\beta^2} \int_{N_0}^L \frac{1}{y\left(1 - \frac{y}{K}\right)} dy\right) - 1 \right]$$

sendo neste caso

$$C(z) = \int_{N_0}^z \frac{1}{y f(y)} dy = \int_{N_0}^z \frac{1}{y \left(1 - \frac{y}{K}\right)} dy = \ln \frac{z}{1 - \frac{z}{K}} - \ln \frac{N_0}{1 - \frac{N_0}{K}}$$

Concluimos como anteriormente que:

$$\text{se } z \rightarrow 0^+ \quad , \quad C(z) \rightarrow -\infty$$

$$\text{se } z \rightarrow K^- \quad , \quad C(z) \rightarrow +\infty$$

Assim pela classificação das fronteiras, $N=0$ é uma fronteira não atractiva uma vez que $S(0^+) = -\infty$ ou como anteriormente $S([0, N_0]) = S(N_0) - S(0^+) = +\infty$

Mas $N=K$ é uma fronteira atractiva pois $S(K) = N_0 \left(1 - \frac{N_0}{K}\right) \frac{\beta^2}{2\alpha} < +\infty$.

Mais ainda, $N=0$ sendo não atractiva é não atingível e $N=K$ é também não atingível porque $\Sigma(K) = +\infty$ sendo por isso considerada como um limite superior da densidade populacional.

Este modelo descreve uma população que se encontra longe da extinção e cujas flutuações, que se situam em torno de um valor médio menor que K , são devidas a flutuações na taxa de crescimento.

A partir da e.d.e., e segundo as regras de Stratonovich, a EFP é dada por

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial N} (\mu(N) p) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial N^2} (\sigma^2(N) p)$$

com $\mu(N)$ e $\sigma(N)$ dados em (25).

Consideremos agora a transformação análoga aos casos anteriores, isto é

$$z(t) = \int_{N_0}^{N(t)} \frac{1}{\sigma(x)} dx.$$

Neste caso obtemos

$$z = \frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{N}{1 - \frac{N}{K}} \right) \quad \text{donde} \quad \frac{dz}{dN} = \frac{1}{\beta N \left(1 - \frac{N}{K}\right)} = \frac{1}{\sigma(N)} \quad \text{e ainda} \quad dN = \sigma(N) dz \quad (26)$$

Uma vez que estamos a considerar a equação (24) segundo Stratonovich, podemos utilizar (26) e teremos

$$\sigma(N)dz = \alpha N \left(1 - \frac{N}{K}\right) dt + \beta N \left(1 - \frac{N}{K}\right) dW$$

donde

$$dz = \frac{\alpha N \left(1 - \frac{N}{K}\right)}{\beta N \left(1 - \frac{N}{K}\right)} dt + \frac{\beta N \left(1 - \frac{N}{K}\right)}{\beta N \left(1 - \frac{N}{K}\right)} dW$$

e finalmente

$$dz = \frac{\alpha}{\beta} dt + dW$$

Obtemos assim, mais uma vez, uma e.d.e. para um processo de Wiener, com deriva $\frac{\alpha}{\beta}$, ou

seja $z(t) = z_0 + \frac{\alpha}{\beta} t + W(t)$.

Então, invertendo (26), a solução da equação diferencial (24), sujeita à condição inicial, $N(0) = N_0$ é dada por

$$N(t) = \frac{K N_0 e^{\alpha t + \beta W_t}}{(K - N_0) + N_0 e^{\alpha t + \beta W_t}} \quad (27)$$

Quando $K \rightarrow +\infty$, o significa que a população está longe da saturação, ou que não existem restrições alimentares, verificamos que a expressão de $N(t)$ coincide com a do caso Malthusiano anterior.

A f.d.p. de transição de z , $g(z|z_0,t)$ satisfaz a EFP para z , isto é

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\alpha}{\beta} g \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \quad (28)$$

com as condições fronteira

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} g(z|z_0,t) = 0 \quad (29)$$

que correspondem às fronteiras não atingíveis. De (26) temos que se $N=0$, vem $z = \frac{1}{\beta} \ln(0)$, donde $z = -\infty$, e se $N=K$ vem $z = \frac{1}{\beta} \ln(\infty)$ donde $z = +\infty$.

A função $g(z|z_0,t)$ é, como anteriormente, Gaussiana dada por :

$$g(z|z_0,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp \left\{ -\frac{1}{2t} \left(z - z_0 - \frac{\alpha t}{\beta} \right)^2 \right\} \quad (30)$$

Utilizando a relação (5) de 3.2.1, obtemos

$$g(z|z_0,t) = \sigma(N) p(N|N_0,t) \Big|_{N=N(z)} = \left[\beta N \left(1 - \frac{N}{K} \right) \right] p(N|N_0,t) \Big|_{N=N(z)}$$

Substituindo agora (30) vem

$$p(N|N_0,t) = \frac{g(z|z_0,t)}{\left[\beta N \left(1 - \frac{N}{K} \right) \right]} = \frac{1}{\beta N \left(1 - \frac{N}{K} \right) \sqrt{2\pi t}} \exp \left\{ -\frac{1}{2t} \left(z - z_0 - \frac{\alpha t}{\beta} \right)^2 \right\} \quad (31)$$

Mas

$$z = \frac{1}{\beta} \left[\ln N - \ln \left(1 - \frac{N}{K} \right) \right] \quad \text{e} \quad z_0 = \frac{1}{\beta} \left[\ln N_0 - \ln \left(1 - \frac{N_0}{K} \right) \right]$$

pelo que se escreve

$$\begin{aligned} p(N | N_0, t) &= \\ &= \frac{1}{\beta N \left(1 - \frac{N}{K} \right) \sqrt{2\pi t}} \exp \left\{ -\frac{1}{2t} \left(\frac{1}{\beta} \left[\ln N - \ln \left(1 - \frac{N}{K} \right) \right] - \frac{1}{\beta} \left[\ln N_0 - \ln \left(1 - \frac{N_0}{K} \right) \right] - \frac{\alpha t}{\beta} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{\beta \sqrt{2\pi t} N \left(1 - \frac{N}{K} \right)} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2t} \left[\frac{1}{\beta} \ln \frac{N}{N_0} - \frac{1}{\beta} \ln \frac{\left(1 - \frac{N}{K} \right)}{\left(1 - \frac{N_0}{K} \right)} - \frac{\alpha t}{\beta} \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (32)$$

obtendo-se assim a **função densidade de transição** que determina o comportamento probabilístico da população para este modelo.

Relativamente ao *comportamento assintótico*, da expressão (27) e de cálculos já efectuados para o modelo Malthusiano, podemos concluir que $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = K$, q.c., o que, mais uma vez, conduz à conclusão de que K é um limite (superior) da densidade populacional.

Uma simulação da solução (27) conduz ao seguinte gráfico.

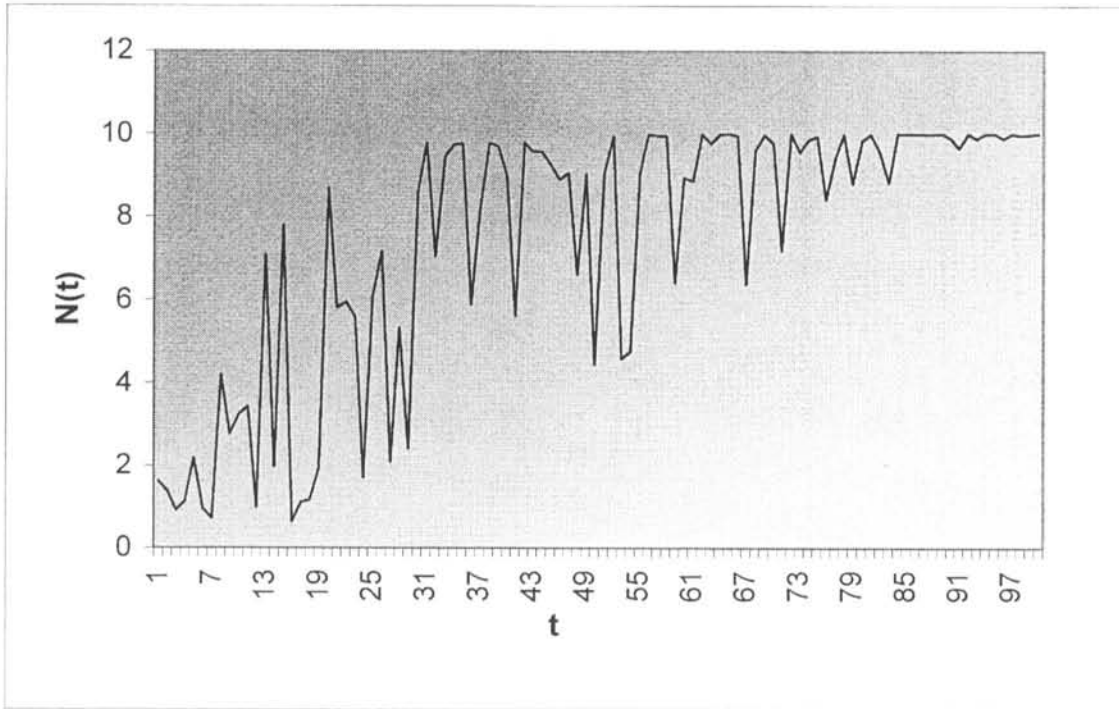


Fig. 3.3 - Simulação do comportamento da solução do modelo logístico, com alteração na taxa de crescimento, para $\alpha=0,1$, $\beta=0,3$, $K=10$ e uma população inicial $N(0) = 1$ indivíduo.

3.2.3.2 Alteração na capacidade de sustento

Como já foi referido em 3.1, outro possível modelo é obtido introduzindo variações aleatórias na capacidade de sustento. Assim para introduzir a aleatoriedade em K , podemos considerar

$$M(t) = \frac{1}{K(t)}$$

e supor que $M(t)$ pode ser aproximado pelo processo estocástico

$$M(t) = \bar{M} + \beta \varepsilon(t) \quad (33)$$

onde $E[M(t)] = \bar{M}$, β é uma constante positiva e $\varepsilon(t)$ um ruído branco.

Substituindo (33) na equação (23), esta assume a forma

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= rN - rN^2[\bar{M} + \beta\varepsilon(t)] \\ dN &= rN(1 - \bar{M}N)dt - \beta rN^2 dW \end{aligned} \quad (34)$$

Segundo Stratonovich a solução desta equação, com a condição inicial $N(0)=N_0>0$ é um processo de difusão de coeficientes infinitesimais

$$\mu(N) = rN - r\bar{M}N^2 - \beta^2 r^2 N^3 \quad (35)$$

$$\sigma^2(N) = \beta^2 r^2 N^4$$

Neste caso temos $\sigma^2(0)=0$ e $\sigma^2(x)>0$, para $x \in]0, +\infty[$ pelo que $N(t) \in]0, +\infty [$, para $t \geq 0$. Assim podemos considerar $N=0$ e $N=+\infty$ como fronteiras de $N(t)$.

A solução da equação (34) assim como o estudo das fronteiras e da EFP correspondente pode ser feito utilizando transformações análogas às utilizadas nos modelos anteriores.

Neste caso consideramos a transformação

$$z = \frac{\frac{1}{N} - \bar{M}}{\beta r} \quad \text{donde} \quad \frac{dz}{dN} = -\frac{1}{\beta r N^2} = -\frac{1}{\sigma(N)} \quad (36)$$

Utilizando (36) e substituindo convenientemente em (34), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{dN}{\sigma(N) dt} &= -\frac{rN(1-\bar{M}N)}{\beta r N^2} + \frac{\beta r N^2}{\beta r N^2} \varepsilon(t) \\ \frac{dz}{dt} &= -\frac{(1-\bar{M}N)}{\beta N} + \varepsilon(t) \\ \frac{dz}{dt} &= -\underbrace{\frac{\frac{1}{N} - \bar{M}}{\beta}}_{rz} + \varepsilon(t) \end{aligned}$$

que transforma a e.d.e. em

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= -r z + \varepsilon(t) \\ dz &= -r z dt + dW \end{aligned} \quad (37)$$

ou seja numa e.d.e. de um processo Ornstein-Uhlenbeck de drift $-r$. Tem-se que

$$z(t) = z_0 e^{-rt} + \int_0^t e^{-r(t-s)} dW(s) \quad \text{ou} \quad \text{ainda} \quad z(t) = z_0 e^{-rt} + \frac{e^{-rt}}{\sqrt{2r}} W(e^{2rt} - 1).$$

Assim a solução da equação diferencial (34), sujeita à condição inicial $N(0)=N_0$, é dada por

$$N(t) = \frac{\sqrt{2} N_0 e^{rt}}{\sqrt{2} + N_0 \sqrt{r\beta^2} W(e^{2rt} - 1)} \quad (38)$$

Ao utilizar a variável z , as fronteiras $N=0$ e $N=+\infty$ correspondem a $z=+\infty$ e $z=-\frac{\bar{M}}{\beta r}$, respectivamente. Podemos agora analisar as fronteiras para o p.e. $z(t)$ e concluir a classificação das fronteiras para $N(t)$.

Da equação (37) podemos obter os coeficientes do processo $z(t)$ e calcular a função escala

$$s(z) = \exp\left\{ \int_{z_0}^z 2ry \, dy \right\} = \exp(rz^2 - rz_0^2) \quad (39)$$

Facilmente se conclui que $s(z)$ é não integrável em $]z_0, +\infty[$ e integrável em $]-\frac{\bar{M}}{\beta r}, z_0[$.

Então $z = +\infty$ é não atractiva e portanto não atingível enquanto que $z = -\frac{\bar{M}}{\beta r}$ é atractiva.

Assim $N=0$ é uma fronteira natural e $N=+\infty$ será uma fronteira regular.

A partir dos coeficientes (35) a EFP é dada por

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial N} (\mu(N) p) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial N^2} (\sigma^2(N) p)$$

e a EFP para $z(t)$ é

$$\frac{\partial g(z, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} (r z g) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \quad (40)$$

com as condições fronteira

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} g(z | z_0, t) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{z \rightarrow \frac{\bar{M}}{\beta r}} g(z | z_0, t) = 0 \quad (41)$$

A f.d.p de transição $g(z | z_0, t)$ pode ser obtida a partir da relação entre $z(t)$ (processo de Ornstein-Uhlenbeck) e o processo de Wiener. Assim teremos.

$$g(z | z_0, t) = \frac{\sqrt{2r}}{\sqrt{2\pi(1 - e^{-2rt})}} \exp\left[-\frac{r}{1 - e^{-2rt}} (z - z_0 e^{-rt})^2\right]$$

e então a f.d.p.de transição de $N(t)$ vem dada por

$$p(N | N_0, t) = \frac{1}{\sqrt{r\pi(1 - e^{-2rt})} \beta N^2} \exp\left\{-\frac{1}{\beta^2 r(1 - e^{-2rt})} \left[\frac{1}{N} - \bar{M} - \left(\frac{1}{N_0} - \bar{M}\right) e^{-rt}\right]^2\right\} \quad (42)$$

O comportamento assintótico de $N(t)$ pode ser analisado como se segue.

A **densidade estacionária de z** , é dada por (como podemos ver em [19])

$$g(z, \infty) = C \exp(-r z^2) \quad (43)$$

e em que C é uma constante de normalização que se pode determinar uma vez que $\exp(-r z^2)$ é integrável ($r > 0$).

Tendo em conta que e

$$\bar{p}(N | N_0, \infty) = \frac{g(z, \infty)}{\sigma(N)} \quad (44)$$

e fazendo a substituição da variável, z , na equação anterior a **densidade estacionária** para $N(t)$ vem

$$\bar{p}(N | N_0, \infty) = \frac{C}{\beta r} \frac{1}{N^2} \exp \left[-\frac{\left(\frac{1}{N} - \bar{M} \right)^2}{\beta^2 r} \right] \quad (45)$$

Neste modelo, a ideia da capacidade de sustento, como limite da densidade populacional não é de todo possível [19], ao contrário do que acontece em vários modelos estudados anteriormente.

A análise deste modelo apresenta algumas dificuldades de interpretação quer na expressão (38) para a solução $N(t)$ quer na classificação das fronteiras.

Efectivamente a aleatoriedade introduzida em (33) pode conduzir a valores negativos para $K(t)$ e para $N(t)$.

Por outro lado os cálculos efectuados levam-nos a concluir que $N = +\infty$ é regular, isto é, atractiva e atingível, o que terá que acontecer em tempo infinito.

Sem ter em conta se a interpretação é de Ito ou Stratonovich, os modelos estudados neste ponto podem ser considerados como opostos relativamente à propriedade autoregulação do modelo logístico determinístico. Enquanto que em 3.2.3.1, K mantém o papel de fronteira atractiva, não atingível, em 3.2.3.2 a dimensão da população já não converge para K mas admite uma distribuição estacionária.

Este comportamento ocorre também no modelo de Polansky, modelo este que se irá descrever no ponto seguinte.

3.2.4 Modelo de Polansky

O modelo que a seguir se apresenta, é obtido a partir do modelo logístico determinístico com uma parametrização do tipo

$$\frac{dN}{dt} = N(r - sN) \quad (46)$$

onde $\frac{r}{s}$ desempenha o papel de capacidade de sustento.

À semelhança dos modelos anteriores podemos substituir o parâmetro de crescimento r por $\alpha + \beta \varepsilon(t)$. Obtemos assim o correspondente modelo estocástico, designado por modelo de Polansky [1979], (Ver [18]):

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= N(\alpha + \beta \varepsilon(t) - sN) \\ \frac{dN}{dt} &= N\alpha - sN^2 + \beta N \varepsilon(t) \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} dN &= N(\alpha - sN) dt + \beta N dW \\ &= N\left(1 - \frac{N}{\alpha/s}\right) dt + \beta N dW \end{aligned}$$

Consideremos, no sentido de Ito, a seguinte e.d.e.

$$dN = \alpha N \left(1 - \frac{N}{K}\right) dt + \beta N dW \quad (48)$$

em que

$\alpha > 0$ - parâmetro médio de crescimento

$\beta > 0$ - intensidade do ruído

N - dimensão da população

$W(t)$ - processo de Wiener

K - capacidade de sustento ($K = \alpha/s$)

Para um tratamento análogo aos anteriores anteriores consideremos a correspondente equação de Stratonovich

$$dN = \left[\alpha N \left(1 - \frac{N}{K} \right) - \frac{1}{2} \beta^2 N \right] dt + \beta N \circ dW \quad (49)$$

A solução desta equação para $N(0) > 0$ é um processo de difusão no intervalo $(0, \infty)$. Este facto será justificado mais adiante quer através da expressão da solução (49) quer do seu comportamento assintótico.

Os coeficientes infinitesimais da solução de (49) são

$$\mu(N) = N\alpha \left(1 - \frac{N}{K} \right) \quad \text{e} \quad \sigma^2(N) = \beta^2 N^2 \quad (50)$$

Em particular para valores de N muito pequenos, $\left(1 - \frac{N}{K} \right) \approx 1$, pelo que obterá novamente os coeficientes infinitesimais do modelo Malthusiano,

$$\mu(N) = \alpha N \quad \text{e} \quad \sigma^2(N) = \beta^2 N^2$$

Consideremos agora o problema da classificação das fronteiras $N=0$ e $N = +\infty$.

A função escala neste caso é dada por

$$s(N) = \left(\frac{N_0}{N} \right)^{\frac{2\alpha}{\beta^2}} \exp \left\{ \frac{2\alpha}{\beta^2} \frac{N - N_0}{K} \right\}$$

Podemos então ver que em $]0, N_0]$, $s(N)$ é não integrável para $\frac{2\alpha}{\beta^2} \geq 1$, mas é integrável para $\frac{2\alpha}{\beta^2} < 1$. Assim, $N=0$ é atractiva se $0 < \alpha < \frac{\beta^2}{2}$ e não atractiva para $\alpha \geq \frac{\beta^2}{2}$.

Por sua vez em $[N_0, +\infty[$, podemos verificar que $s(N)$ é sempre não integrável. Efectivamente neste caso $s(y)$ é da forma $y^{\frac{c}{a}} e^{by}$ com $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$ donde se conclui pelo comportamento da função exponencial, naquele intervalo, que aquela expressão é não integrável.

Assim $N = +\infty$ será sempre não atractiva.

Falta agora concluir a natureza de $N=0$ para $0 < \alpha < \frac{\beta^2}{2}$. Já vimos que, neste caso, $N=0$ é atractiva. Vamos ver que, no entanto, não é atingível.

Temos agora

$$\Sigma(0) = \int_{N_0}^{0^+} s(N) \int_{N_0}^N \frac{e^{-\frac{2\alpha}{\beta^2 k}(y-N_0)}}{\beta^2 N_0^{\frac{2\alpha}{\beta^2}} y^{2\left(1-\frac{\alpha}{\beta^2}\right)}} dy dN$$

Enquadrando, convenientemente, o integrando no intervalo $]0, N_0]$, concluímos que $\Sigma(0) = -\infty$.

Resumindo temos que:

$N=0$ é não atractiva (logo não atingível) para $\alpha \geq \frac{\beta^2}{2}$

é atractiva mas não atingível para $\alpha < \frac{\beta^2}{2}$

$N=+\infty$ é sempre não atractiva.

Para resolver a e.d.e (49) podemos efectuar transformações análogas às realizadas nos modelos anteriores.

Assim, consideremos

$$z = \frac{1}{\beta} \ln N \quad \text{donde} \quad \frac{dz}{dN} = \frac{1}{\beta N} = \frac{1}{\sigma(N)} \Rightarrow dN = \sigma(N) dz \quad (51)$$

Seguindo o mesmo método, obtém-se a e.d.e.

$$dz = \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{2} \right) - \frac{\alpha e^{\beta z}}{\beta K} \right] dt + dW \quad (52)$$

equação esta que, não sendo linear, pode no entanto ser resolvida sendo a sua solução dada por

$$z_t = Z_0 + \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{2} \right) t + W_t - \frac{1}{\beta} \ln \left[1 - \frac{\alpha}{K} \int_0^t \exp \left(\beta z_0 + \left(\alpha - \frac{\beta^2}{2} \right) s + \beta W_s \right) ds \right] \quad (53)$$

Esta solução foi obtida a partir de uma substituição do tipo exponencial que se encontra descrita em 2.3.3.

Assim a solução da e.d.e. (49), sujeita à condição inicial $N(0)=N_0$, é dada por,

$$N(t) = \frac{N_0 e^{\left(\frac{\alpha - \beta^2}{2} \right) t + \beta W_t}}{1 - \frac{\alpha N_0}{K} \int_0^t \exp \left[\left(\alpha - \frac{\beta^2}{2} \right) s + \beta W_s \right] ds} \quad (54)$$

A EFP para este modelo é

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial N} (\mu(N) p) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial N^2} (\sigma^2(N) p)$$

e para o processo $z(t)$ virá

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{2} \right) - \frac{\alpha e^{\beta z}}{\beta K} \right] g \right\} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \quad (55)$$

com as condições fronteira

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} g(z | z_0, t) = 0$$

que correspondem às fronteiras não atingíveis $N=0$ e $N= +\infty$, respectivamente.

As soluções destas equações não são no entanto conhecidas.

Como vimos na secção 2.6 a partir dos coeficientes infinitesimais podemos obter a *densidade estacionária*, quando ela existir. Neste caso teremos

$$\bar{p}(N | N_0, \infty) = C N^{2\left(\frac{\alpha}{\beta^2}-1\right)} \exp\left(-\frac{2\alpha}{\beta^2 K} N\right) \quad (56)$$

em que C é uma constante de integração, que pode ser obtida porque a expressão

$$N^{2\left(\frac{\alpha}{\beta^2}-1\right)} \exp\left(-\frac{2\alpha}{\beta^2 K} N\right)$$

é integrável intervalo $(0, \infty)$, desde que $\alpha > \frac{\beta^2}{2}$. Efectivamente o integral da expressão

anterior no intervalo $[0, \infty]$ é da forma

$$\int_{0^+}^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$$

que converge quando $s > 0$. Este integral é habitualmente designado por função gamma e escreve-se $\Gamma(s)$.

Assim a densidade estacionária existe, e corresponde à distribuição gama de parâmetros

$\frac{2\alpha}{\beta^2} - 1$ e $\frac{2\alpha}{\beta^2 K}$ com média e variância dadas por:

$$\text{Média} = \frac{\frac{2\alpha}{\beta^2} - 1}{\frac{2\alpha}{\beta^2 K}} = K \left(1 - \frac{\beta^2}{2\alpha} \right)$$

$$\text{Var} = \frac{\frac{2\alpha}{\beta^2} - 1}{\left[\frac{2\alpha}{\beta^2 K} \right]^2} = K^2 \left(1 - \frac{\beta^2}{2\alpha} \right) \left(\frac{\beta^2}{2\alpha} \right)$$

3.2.5 Modelo de Gompertz

Partindo do modelo determinístico, descrito em 1.4 por

$$\frac{dN}{dt} = r \ln\left(\frac{K}{N}\right)$$

e considerando que as flutuações aleatórias, que afectam o crescimento da população são devido à aleatoriedade na taxa de crescimento, r , podemos substituir este parâmetro pelo parâmetro estocástico $\alpha + \beta \varepsilon(t)$, obtendo-se, assim, a e.d.e.

$$\frac{dN}{dt} = N\alpha \ln\left(\frac{K}{N}\right) + N\beta \ln\left(\frac{K}{N}\right) dW \quad (57)$$

em que

N – dimensão da população

$\alpha > 0$ – parâmetro médio de crescimento

K – capacidade de sustento

$\beta > 0$ – intensidade do ruído

$W(t)$ – processo de Wiener

Este modelo é um outro caso particular, para além do logístico, do modelo geral apresentado em 3.2.2. Assim, as conclusões serão análogas, embora possamos apresentar algumas expressões mais explicitamente.

Segundo Stratonovich, as soluções da equação (57) constituem um processo de difusão de coeficientes infinitesimais

$$\mu(N) = N \ln\left(\frac{K}{N}\right) \left[\alpha + \frac{\beta^2}{2} \ln\left(\frac{K}{N}\right) - \frac{\beta^2}{2} \right] \quad e \quad \sigma^2(N) = \beta^2 N^2 \left[\ln\left(\frac{K}{N}\right) \right]^2 \quad (58)$$

As fronteiras deste modelo são $N=0$ e $N=K$. Pela análise feita no caso geral em 3.2.2 $N=0$ é uma fronteira natural não atractiva e $N=K$ é também fronteira natural mas atractiva o que revela também aqui o papel de K como limite superior da dimensão da população.

Partindo dos coeficientes (58) a EFP é dada por

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial N} (\mu(N) p) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial N^2} (\sigma^2(N) p)$$

Para determinar a densidade de probabilidade de transição considera-se a transformação

$$z = -\frac{1}{\beta} \ln \left[\ln \left(\frac{K}{N} \right) \right] \quad \text{pelo que} \quad dz = \frac{dN}{\sigma(N)} \quad (59)$$

que transforma a e.d.e. (57) em

$$dz = \frac{\alpha}{\beta} dt + dW \quad (60)$$

ou seja, numa e.d.e. de um processo de Wiener com deriva $\frac{\alpha}{\beta}$. Concretamente

$$z(t) = \frac{\alpha}{\beta} t + W(t) + z(0)$$

Assim a solução da e.d.e. (57), sujeita á condição inicial $N(0)=N_0$, é dada por

$$N(t) = K \exp \left[\ln \left(\frac{N_0}{K} \right) e^{-(\alpha + \beta W(t))} \right] \quad (61)$$

A f.d. de transição de z satisfaz a EFP para z ,

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\alpha}{\beta} g \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \quad (62)$$

com as condições fronteira

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} g(z | z_0, t) = 0$$

que correspondem às fronteiras não atingíveis $N=0$ e $N=K$.

A função $g(z | z_0, t)$ é Gaussiana dada por :

$$g(z | z_0, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp \left\{ -\frac{1}{2t} \left(z - z_0 - \frac{\alpha t}{\beta} \right)^2 \right\}$$

e corresponde à f.d.p de um Wiener com deriva $\frac{\alpha}{\beta}$ e de média $E[z(t)] = \frac{\alpha}{\beta} t + z(0)$.

Utilizando novamente a relação 5 obtém-se a **função densidade de transição** de $N(t)$:

$$p(N | N_0, t) = \frac{1}{\beta N \ln \left[\ln \left(\frac{K}{N} \right) \right] \sqrt{2\pi t}} \exp \left\{ -\frac{1}{2t\beta^2} \left[\ln \left(\ln \frac{K}{N} \right) - \ln \left(\ln \frac{K}{N_0} \right) \right]^2 + \alpha t \right\} \quad (63)$$

Da expressão (61) para $N(t)$, e do comportamento do movimento Browniano, podemos dizer que $N(t) \xrightarrow{q.c.} K$ quando $t \rightarrow \infty$. À semelhança de outros modelos já abordados, podemos então dizer que a dimensão da população converge para a capacidade de sustento, K .

Com este comportamento assintótico este modelo não terá portanto uma distribuição estacionária.

3.2.6 Aproximação de um processo discreto por uma difusão

Os modelos anteriormente apresentados têm como ponto de partida o modelo logístico ou uma variação deste modelo, e nesses a aleatoriedade é introduzida de diferentes formas.

Noutro sentido, em [28] e suas referências, é obtida uma difusão como aproximação de um processo aleatório discreto. Nesta secção faremos um estudo desse modelo usando as técnicas de e.d.e..

Considerando um modelo discreto de uma população num 'habitat' limitado com uma determinada regra de dispersão (a regra de dispersão de Bose-Einstein), podemos obter o crescimento médio da população, assim como a variância desse crescimento num intervalo de tempo infinitesimal Δt . Aproximadamente, para $\mu p < 1$, tem-se

$$E(\Delta N | N_t = N) \cong (\mu p - \lambda) N \left(1 - \frac{\mu p \rho N}{(\mu p - \lambda) K_1} \right) \quad V(\Delta N | N_t = N) \cong \mu \rho N \left(1 - \frac{\rho N}{K_1} \right)$$

onde

N - dimensão da população

K_1 - capacidade de sustento

μ - taxa de fecundidade

p - sobrevivência inicial da descendência

λ - taxa de morte e $\rho = 1 - \lambda$

Fazendo uma mudança de notação teremos

$$E(\Delta N | N_t = N) \cong r N \left(1 - \frac{N}{K} \right) \quad V(\Delta N | N_t = N) \cong (r + \lambda) N \left(1 - \frac{r N}{(r + \lambda) K} \right)$$

onde $r = \mu p - \lambda$ e $K = \frac{(\mu p - \lambda)K_1}{\mu p \rho}$

Obtemos uma aproximação deste modelo considerando a difusão $N(t)$, que é solução da seguinte e.d.e.

$$dN = r N \left(1 - \frac{N}{K}\right) dt + \left[(r + \lambda) N \left(1 - \frac{r N}{(r + \lambda) K}\right) \right]^{1/2} dW$$

No caso em que a taxa de morte é nula, $\lambda = 0$, (e só para este caso) obtém-se uma e.d.e. mais simples,

$$dN = r N \left(1 - \frac{N}{K}\right) dt + \sqrt{r N \left(1 - \frac{N}{K}\right)} dW \quad (64)$$

Estas equações aparecem quando se considera a difusão $N(t)$ como limite de uma sequência de processos discretos [28]. De acordo com as considerações feitas em 3.1 este procedimento leva-nos a tomar as equações anteriores segundo Ito.

A solução da equação (64), segundo Ito, tem como coeficientes infinitésimos

$$\mu(N) = r N \left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad \text{e} \quad \sigma^2(N) = r N \left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (65)$$

Se se considerar valores de N muito pequenos, a e.d.e. assume a forma

$$dN = r N dt + \sqrt{r N} dW \quad (66)$$

A difusão associada a esta equação é uma aproximação contínua de um processo estocástico ramificado [16].

Sendo $\sigma^2(N) > 0$, para $N \in]0, K[$, e supondo $N(0) \in]0, K[$ podemos considerar $N=0$ e $N=K$, como as fronteiras do processo.

Neste caso teremos a seguinte função escala:

$$s(N) = e^{-2(N-N_0)}$$

onde $N, N_0 \in]0, K[$.

Então, é imediato concluir que $s(N)$ é integrável quer em $]0, N_0 [$, quer em $]N_0, K [$, pelo que ambas as fronteiras são atractivas.

Por outro lado

$$\begin{aligned} \Sigma(0) &= \int_{0^+}^{N_0} s(N) \int_N^{N_0} \frac{1}{\sigma^2(y) s(y)} dy dN \\ &= \int_{0^+}^{N_0} e^{-2(N-N_0)} \int_N^{N_0} \frac{1}{r y \left(1 - \frac{y}{K}\right) e^{-2(y-N_0)}} dy dN \end{aligned}$$

onde $0^+ < N < y < N_0 < K$. Majorando convenientemente a exponencial no integrando conclui-se que $\Sigma(0)$ é finito logo $N=0$ é atingível. Assim segundo a classificação de Feller esta fronteira é uma fronteira de saída.

Por outro lado

$$\Sigma(K) = \int_{N_0}^{K^-} s(N) \int_{N_0}^N \frac{1}{\sigma^2(y) s(y)} dy dN$$

onde $0 < N_0 < y < N < K$.

De modo análogo ao caso anterior verifica-se que $\Sigma(K)$ é finito e portanto $N=K$ é também atingível. Assim $N=K$ é uma fronteira de saída.

Estes resultados permitem a seguinte interpretação:

Se N atinge exactamente o valor zero, esta fronteira irá actuar como fronteira absorvente, ou seja a população atinge a extinção e conseqüentemente não existirá descendência.

De igual modo, se todos os habitats de uma determinada região restrita, forem ocupados e a taxa de morte for nula, essa população nunca irá decrescer para valores abaixo da capacidade de sustento, K .

Podemos ainda salientar que a variabilidade introduzida no modelo dado por (64) permite a possibilidade de extinção em contraste com o caso determinístico ou outros modelos logísticos estocásticos.

Pelos coeficientes infinitesimais (65) a EFP é dada por

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial N}(\mu(N) p) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial N^2}(\sigma^2(N) p)$$

Para estudar esta equação e a sua solução usando as técnicas dos modelos anteriores, devemos considerar a e.d.e. segundo Stratonovich.

A e.d.e. (64), segundo Stratonovich, vem

$$dN = \left[rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - \frac{r}{4} \left(1 - 2\frac{N}{K}\right) \right] dt + \sqrt{rN \left(1 - \frac{N}{K}\right)} \circ dW \quad (67)$$

Seja então $z(t)$ tal que

$$\frac{dz}{dN} = \frac{1}{\sqrt{rN \left(1 - \frac{N}{K}\right)}} = \frac{1}{\sigma(N)} \quad (68)$$

Facilmente se obtém

$$z = -2\sqrt{\frac{K}{r}} \operatorname{arsen} \sqrt{\frac{2N}{K} - 1}$$

A e.d.e. (67) é transformada em

$$dz = \left[\frac{\sqrt{rK}}{2} \cos\left(\sqrt{\frac{r}{K}} z\right) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r}{K}} \operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{r}{K}} z\right) \right] dt + dW(t) \quad (69)$$

Esta equação é bastante complicada e não conhecemos a sua solução.

Assim a expressão explícita de $N(t)$ e a sua f.d.p. de transição $p(N|N_0, t)$ também não podem ser obtidas.

Pela análise que fizemos da fronteiras conclui-se que não existe distribuição estacionária.

Efectivamente a função $\frac{1}{\sigma^2(y)s(y)}$ não é integrável em $]0, K[$.

3.2.7 Modelos de pesca com esforço variável em ambiente aleatório

Estudamos agora, modelos de dinâmica de populações sujeitos, não só às flutuações aleatórias do meio ambiente, mas também a um esforço de pesca com dependência geral da densidade da população. Consideraremos, essencialmente, os dois modelos analisados em [8], concretamente o caso em que a aleatoriedade do meio afecta principalmente a taxa de crescimento intrínseca e também o caso em que a aleatoriedade afecta a taxa de crescimento per capita.

Ambos os modelos provém de um modelo de pesca determinístico geral, que embora não tenha sido considerado no cap.1, tem como exemplo particular, o modelo de Schaefer analisado em 1.6.

Consideremos, aqui, brevemente, esse modelo de pesca determinístico geral dado pela equação

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = rf(N) - g(N) \quad (73)$$

onde $f(N)$ satisfaz as condições dadas em 1.1, r é como habitualmente a taxa intrínseca de crescimento e $g(N)$ é o esforço de pesca, que é uma função da densidade da população N , não negativa e duas vezes diferenciável.

Como já foi referido podemos considerar duas formas de modelar a influência das flutuações ambientais aleatórias, nas populações.

Na primeira consideramos que o parâmetro r é mais sensível a essa aleatoriedade, e, substituindo-o por $r + \beta \varepsilon(t)$, vem

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = r f(N) - g(N) + \beta f(N) \varepsilon(t)$$

donde resulta a e.d.e. no sentido de Stratonovich

$$dN = N(r f(N) - g(N))dt + \beta N f(N) dW(t) \quad (74)$$

Como exemplo deste caso trataremos na secção seguinte o modelo de Gordon-Schaefer. Uma outra forma será a de supor que a aleatoriedade do ambiente afecta a taxa de crescimento per capita da população, aparecendo assim um modelo em que o ruído é aditivo. Partindo de (73) teremos

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = r f(N) - g(N) + \beta \varepsilon(t)$$

ou ainda

$$dN = N(r f(N) - g(N))dt + \beta N dW(t) \quad (75)$$

Na última secção apresentaremos o modelo de Fox como um exemplo deste caso.

3.2.7.1 Modelo Gordon-Schaefer

Este modelo é um caso particular da equação (74), na qual a função $f(N) = 1 - \frac{N}{K}$ e a função esforço de pesca assume um valor constante E , ou seja $g(N) = E$.

A equação (74) fica então

$$dN = N \left[r \left(1 - \frac{N}{K} \right) - E \right] dt + N\beta \left(1 - \frac{N}{K} \right) dW \quad (76)$$

onde $K > 0$ é, como habitualmente, a capacidade de sustento do meio.

É claro que este modelo pode ser obtido do modelo de Schaefer determinístico visto em 1.6. Basta para isso substituir na equação (9), do cap.1, o parâmetro r , pelo processo estocástico $r + \beta \varepsilon(t)$.

A equação (76) é considerada no sentido de Stratonovich e a sua solução, com a condição inicial $N(0) = N_0$, é um processo de difusão de coeficientes infinitesimais

$$\mu(N) = N \left[\left(1 - \frac{N}{K} \right) \left(r + \frac{\beta^2}{2} \left(1 - \frac{2N}{K} \right) \right) - E \right] \quad \text{e} \quad \sigma^2(N) = \beta^2 N^2 \left(1 - \frac{N}{K} \right)^2 \quad (77)$$

Uma vez que $\sigma^2(0) = \sigma^2(K) = 0$ e $\sigma^2(N) > 0$, para $N \in]0, K$, os valores $N=0$ e $N=K$ são fronteiras da solução $N(t)$.

A análise das fronteiras neste caso é feita pelo mesmo processo dos modelos anteriores. No entanto pela quantidade de cálculos envolvidos não os apresentaremos aqui.

A partir do Teorema 2 de [8] teremos essencialmente que:

se	$0 < E < r$,	$N=0$ é não atractiva
e se	$E > 0$,	$N=K$ é não atractiva

Ou seja, se $0 < E < r$ não haverá extinção da população e para $E > 0$ não haverá fixação no nível K .

Para todas as justificações referimos [8].

Para determinar a expressão da solução de $N(t)$ podemos considerar uma transformação análoga aos modelos anteriores.

Neste caso,

$$z = \frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{N}{1 - \frac{N}{K}} \right) \quad \text{donde} \quad \frac{dz}{dN} = \frac{1}{\beta N \left(1 - \frac{N}{K} \right)} = \frac{1}{\sigma(N)} \Rightarrow dz = \frac{dN}{\sigma(N)} \quad (78)$$

obtendo-se a e.d.e.

$$dz = \left[\frac{r}{\beta} - \frac{E}{\beta} \left(1 + \frac{e^{z\beta}}{K} \right) \right] dt + dW = \left[\frac{r-E}{\beta} - \frac{E}{\beta K} e^{z\beta} \right] dt + dW \quad (79)$$

Esta equação, tal como a obtida no modelo 3.2.4 não é linear e a obtenção da solução passa por uma substituição exponencial do mesmo tipo; a solução, com a condição inicial $z(0)=z_0$, é então dada por,

$$z_t = z_0 + \frac{1}{\beta} (r-E)t + W_t - \frac{1}{\beta} \ln \left[1 + \frac{E}{K} \int_0^t \exp(\beta z_0 + (r-E)s + \beta W_s) ds \right] \quad (80)$$

A solução da e.d.e. (76) sujeita à condição inicial, $N(0)=N_0$ é então dada por

$$N(t) = \frac{N_0 e^{(r-E)t + \beta W_t}}{1 - \frac{N_0}{K} \left[1 + E \int_0^t \exp((r-E)s + \beta W_s) ds + e^{(r-E)t + \beta W_t} \right]} \quad (81)$$

A partir da e.d.e.(76), e segundo as regras de Stratonovich, a EFP para a densidade de probabilidade de transição de $N(t)$ é dada por

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial N}(\mu(N) p) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial N^2}(\sigma^2(N) p)$$

A f.d.p. de transição de z , $g(z|z_0, t)$ satisfaz a equação de FP para z , isto é

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{r}{\beta} - \frac{E}{\beta} \left(1 + \frac{e^{-z\beta}}{K} \right) \right) g \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}$$

com as condições fronteira

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} g(z|z_0, t) = 0 \tag{82}$$

que correspondem às fronteiras não atingíveis

$$N = 0 \quad \text{vem} \quad z = \frac{1}{\beta} \ln(0) \quad \text{donde} \quad z = -\infty$$

$$\text{e para } N = K \quad \text{vem} \quad z = \frac{1}{\beta} \ln(\infty) \quad \text{donde} \quad z = +\infty$$

Relativamente à existência de densidade estacionária podemos referir mais uma vez o Teorema 2 de [8]. Conclui-se que, neste caso, se $0 < E < r$ existe uma distribuição estacionária cuja densidade é dada pela fórmula (12) de [8].

Pode dizer-se que, em contexto estocástico, a taxa intrínseca de crescimento é uma quantidade que varia aleatoriamente ao longo do tempo, em torno de um valor médio r .

Por sua vez a quantidade $rf(N)$, pode ser visto como um “esforço médio de crescimento”.

Assim, para este modelo teremos

- a) Se a dimensão da população é muito pequena, o esforço de pesca deve ser mais pequeno que o esforço médio de crescimento para que não haja extinção.
- b) Se a dimensão da população for próxima da capacidade de sustento, então o esforço de pesca deve exceder o esforço médio de crescimento para que não haja fixação em K .
- c) Se o esforço de pesca satisfaz a) e b) então existe uma distribuição estacionária.

3.2.7.2 *Modelo de Fox*

O modelo aqui apresentado é um caso particular da e.d.e. (75), na qual as flutuações aleatórias do ambiente são do tipo aditivo

Considerando que, a função dependência da densidade, na e.d.e. (75), assume a forma

$f(N) = \ln\left(\frac{K}{N}\right)$, e que o esforço de pesca é constante, $g(N)=E$, obtém-se o chamado

Modelo de Fox, dado por

$$dN = N \left[r \ln\left(\frac{K}{N}\right) - E \right] dt + N\beta dW(t) \quad (84)$$

No sentido de Stratonovich a solução da equação (84), com a condição inicial $N(0)=N_0$, é um processo de difusão de coeficientes infinitesimais,

$$\mu(N) = N \left[r \ln\frac{K}{N} - E + \frac{\beta^2}{2} N \right] \quad \text{e} \quad \sigma^2(N) = \beta^2 N^2 \quad (85)$$

Considerando agora, como anteriormente o trabalho [8], teorema 3, podemos concluir que, neste caso, se $0 < K < +\infty$, as fronteiras $N=0$ e $N=+\infty$ são sempre não atractivas e existe uma distribuição estacionária dada pela fórmula (18), de [8].

Para determinar a expressão de $N(t)$ vamos considerar uma transformação análoga aos casos anteriores.

Neste caso,

$$z = \frac{1}{\beta} \ln N \quad \text{donde} \quad \frac{dz}{dN} = \frac{1}{\beta N} = \frac{1}{\sigma(N)} \Rightarrow dz = \frac{dN}{\sigma(N)} \quad (86)$$

obtendo-se a e.d.e.

$$dz = \left[\frac{1}{\beta} (r \ln K - E) - zr \right] dt + dW \quad (87)$$

que é uma e.d.e.linear cuja solução é dada por

$$z_t = e^{-rt} \left[z_0 + \left(\frac{E}{r\beta} - \frac{\ln K}{\beta} \right) (e^{rt} - 1) + \int_0^t e^{rs} dW_s \right] \quad (88)$$

A solução da e.d.e. (84), com a condição inicial, $N(0)=N_0$ é então dada por

$$N_t = \exp \left[e^{-rt} \ln N_0 + e^{-rt} \left(\frac{E}{r} - \ln K \right) (e^{rt} - 1) + \beta e^{-rt} \int_0^t e^{rs} dW_s \right] \quad (89)$$

A partir da e.d.e. (84), a EFP para $p(N|N_0, t)$ é dada por

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial N} (\mu(N) p) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial N^2} (\sigma^2(N) p)$$

A **f.d.p. de transição de z**, $g(z|z_0, t)$, satisfaz a equação de FP para z, isto é

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left[\frac{1}{\beta} (r \ln K - E) - zr \right] g \right\} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \quad (90)$$

com as condições fronteira

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} g(z|z_0, t) = 0$$

que correspondem às fronteiras não atingíveis

$$N = 0 \quad \text{donde} \quad z = \frac{1}{\beta} \ln(0) \quad \text{e} \quad z = -\infty$$

e para $N = K$ donde $z = \frac{1}{\beta} \ln(\infty)$ e $z = +\infty$

Atendendo a que o processo z_t pode ser visto como um processo de Ornstein-Uhlenbeck modificado a f.d.p. de transição $g(z|z_0, t)$ pode ser obtida explicitamente e desta conheceremos a expressão de $p(N | N_0, t)$.

Pela sua extensão não apresentaremos aqui essas expressões.

Resumindo podemos dizer que neste modelo

- $N=0$ é não atractiva e portanto a extinção não ocorre
- à medida que N se aproxima da extinção o “esforço médio de crescimento”, $z = r \ln\left(\frac{K}{N}\right)$, aumenta, indefinidamente
- a população N pode tomar valores arbitrariamente grandes e não há fixação em K
- existe uma distribuição estacionária.

CONCLUSÃO

Neste estudo pretendeu-se demonstrar que a modelação de problemas de dinâmica de populações através de e.d.e., permite a utilização da teoria destas equações, assim como os resultados sobre difusões, para o estudo do comportamento daquela dinâmica.

Foi ainda possível analisar alterações nesse comportamento, face a variações nos coeficientes da equação, em especial no coeficiente de difusão. Podemos referir que um aumento neste coeficiente, que traduz um aumento na estocasticidade ambiental, implica um decrescimento na densidade média da população acelerando o processo de extinção. (Ver por exemplo [1] e [2]).

De salientar que este estudo foi realizado considerando apenas uma população, sem estrutura de idade e em que a taxa de mortalidade e natalidade dos indivíduos é aproximadamente igual.

O estudo de modelos estocásticos para populações mais gerais, com estrutura de idade ou com distribuição espacial têm também sido realizados, no entanto a consideração de e.d.e. torna esses modelos mais difíceis.

Para populações com estrutura etária é possível considerar difusões que aproximam a densidade da população numa situação estacionária. A consideração de distribuição espacial conduzir-nos-á por sua vez a e.d.e. em derivadas parciais.

No entanto neste estudo, as populações com estrutura de idade ou com distribuição espacial não foram abordadas, uma vez que não foi esse o nosso objectivo, ficando em aberto para próximos trabalhos.



BIBLIOGRAFIA

- [1] ALVAREZ, L., On the comparative static properties of the expected population density in the presence of stochastic fluctuations, *J. Math. Biol.*, 40, pp. 432-442, 2000
- [2] ALVAREZ, L., Does increased stochasticity speed up extinction ?, *J. Math. Biol.*, 43, pp. 534-544, 2001
- [3] ARNOLD, Ludwig - *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*. John Wiley & Sons, Inc, 1975. ISBN 0-471-03359-6.
- [4] BERNT Oksendal - *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. 5th Edition. Springer – Verlag, 1998.
- [5] BOYCE W., E; DiPrima R.- *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Sixth Edition. John Wiley & Sons, Inc., 1996,
- [6] BRAUMANN, C. A. (1979)-*Population Growth in Random Environments*.(1979) Ph.D. Thesis, State University of New York at Stony Brook.
- [7] BRAUMANN, C., *Population Growth Models in Random Environments and Parameter Estimation*, *Math.Popul. Dynamics*, vol.III, O.Arino, D.E.Axelrod, M.Kimmel, (eds), Wuerz Publ., Winnipeg, 1997 .
- [8] BRAUMANN, C. A. (1999).*Variable effort fishing models in random environments*. *Mathematical Biosciences*, vol. 156, p.1-19.

- [9] BRAUMANN, C. A. (1980)- Population Growth in Random Environments. Bull. Of Mathem. Biol., vol. 45 (4), p. 635-641.
- [10] BRAUMANN, Carlos, A (1991). Estimação de Probabilidades de extinção em ambiente aleatório, Actas das 1^{as} Jornadas da Sociedade Portuguesa de estatística. Braga: Universidade do Minho
- [11] BRAUMANN, Carlos, A (1992). Estimação e previsão em modelos de crescimento populacional em ambiente aleatório, em D.Pestana (ed.) , Estatística Robusta, Extremos e mais alguns , Lisboa: Sociedade Portuguesa de estatística.
- [12] BRAUMANN, Carlos, A (1995). Estimação de parâmetros em modelos de crescimento em ambientes aleatórios Actas do III Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de estatística, Guimarães.
- [13] BRAUMANN, Carlos, A (1997). O acaso, a bolsa e a vida, Actas do V Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de estatística, Curia.
- [14] BRAUMANN, Carlos, A (2002). O uso de diferentes cálculos estocásticos na modelação do crescimento populacional em ambiente aleatório, Actas do X Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de estatística, Porto: Faculdade de Economia do Porto.
- [15] BRAUN, M., Differential Equations and their Applications, 3nd ed., Springer-Verlag, 1979
- [16] DURRETT, R., Stochastic Calculus: A practical Introduction, CRC Press, 1996.
- [17] EDELSTEIN-KESHET, L., Mathematical Models in Biology, Birkhauser Mathematical Series, McGraw-Hill, 1988

- [18] GARD, T., Introduction to Stochastic Differential Equations, Marcel Dekker, Inc., 1987.
- [19] GOEL, N. S., RICHTER-DYN, N., Stochastic Models in Biology, Academic Press, INC., 1974.
- [20] KARLIN, S., Taylor, H., A second course in Stochastic Process, Academic Press, 1981
- [21] KLOEDEN, P.; PLATEN, E. - Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Springer-Verlag, 1995.
- [22] KLIEMANN, W., Qualitative Theory of Stochastic Dynamical Systems – Applications to Life Sciences, Bull. of Math. Biology, vol.45, nº4, pp.483-506, 1983
- [23] LANDE, R., Engen, S., Saether, B., Stochastic Population Dynamics in Ecology and Conservation, Oxford Univ.Press, 2003
- [24] NEWTON, C.M., Biomathematics in oncology: modelling of cellular systems, Ann. Rev. Bioeng., 9, 541-579, 1980.
- [25] NICOLAU, João Carlos H.C. – Modelação e Estimação de Séries Financeiras através de Equações Diferenciais Estocásticas. Lisboa, 2001. Dissertação para obtenção de grau de Doutor em Matemática Aplicada à Economia e Gestão.
- [26] RICCIARDI, L., Diffusion Processes and Related Topics in Biology, Lect. Notes in Math., 14, Springer-Verlag, 1977
- [27] TSOULARIS, A. Wallace, J., Analysis of Logistic Growth Models, Mathematical Biosciences, 179, pp.21-55, 2002

- [28] TUCKWELL, H., Koziol, J., Logistic Population Growth under Random Dispersal, Bull. of Math. Biology, vol.49, n°4, pp.495-506, 1987
- [29] WILLIAMS D., Rogers, L., Diffusions, Markov Processes and Martingales, vol.2, John Wiley & Sons, Inc., 1990.



FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

BIBLIOTECA



0000079811