

EXCITAÇÃO PARAMÉTRICA EM TIRANTES DE PONTES

Luís Miguel Lousas Carrilho Gomes

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto para a obtenção do grau de Mestre em Estruturas de Engenharia Civil, realizada sob orientação da Professora Elsa Caetano.

Junho de 2006

Resumo

O trabalho de investigação desenvolvido e apresentado nesta dissertação teve como principal objectivo o estudo de uma das mais importantes causas de oscilação de tirantes, o fenómeno da excitação paramétrica. Este tipo de instabilidade dinâmica acontece para pequenos movimentos das ancoragens na direcção do tirante, devido às oscilações do tabuleiro e/ou torres. O estudo deste fenómeno revela-se fundamental para a melhor compreensão do comportamento dinâmico das pontes atirantadas, e mais concretamente dos seus subsistemas constituídos pelos tirantes. Neste contexto, foram revistas as equações teóricas que permitem identificar a ocorrência desta instabilidade, identificando os parâmetros relevantes para a sua análise. Estabeleceu-se comparação entre resultados obtidos através de modelos analíticos não-lineares e por via numérica, os últimos obtidos através de simulações baseadas num programa comercial de elementos finitos. Complementarmente, foi desenvolvido um modelo experimental, de forma a poder validar os modelos analíticos e resultados numéricos, determinando-se os níveis de oscilação que favorecem o aparecimento desta instabilidade.

Discutem-se possíveis soluções para o projecto de tirantes, de forma a minimizar as vibrações devidas à acção de agentes exteriores. A ocorrência continuada desses fenómenos pode originar a rotura e colapso de tirantes por fadiga. Neste trabalho apresenta-se num possível tratamento do problema, procurando a sistematização num procedimento simplificado.

Abstract

The work developed and presented in this thesis had as main objective, the study of one of the most important causes of stay cables oscillation, the parametric excitation phenomenon. This type of dynamic instability occurs for small longitudinal movements in the anchorages, which is due to the oscillations of the deck and/or the towers. The study of this phenomenon is fundamental for the best understanding of the dynamic behaviour of cable-stayed bridges, and more concretely of its subsystems consisting of the cables. In this context, the theoretical equation that allows to identify the occurrence of this instability had been reviewed, identifying the parameters for its analysis.

A comparison between results obtained through a nonlinear analytical model and those obtained from a numerical model based on the finite element approach was established. Complementarily, with the aim of validating the numerical models and the analytical results an experimental model was developed, determining the oscillation levels that lead to the appearance of this instability.

Possible design solutions for stay-cables are presented, in order to minimize the vibrations due to different types of excitation. The continued occurrence of this phenomenon can originate the rupture and collapse of the cable due to fatigue. In this work a brief description of a simplified procedure is presented as a possible treatment of the problem.

Agradecimentos

Gostaria de deixar aqui expresso o meu sincero agradecimento a todos os familiares, amigos e colegas que contribuíram de forma directa ou indirectamente para a realização deste trabalho, e sem os quais esta árdua tarefa estaria mais dificultada. Contudo, gostaria de enviar algumas palavras especiais às pessoas que mais directamente intervieram na concretização desta dissertação, nomeadamente:

- à Professora Elsa Caetano que, na qualidade de orientadora, desempenhou a sua função com o maior dos profissionalismos. Procurando de forma atenta e dedicada, providenciar os meios necessários para a execução deste trabalho. Queria agradecer o tempo disponibilizado na transmissão de conhecimentos e a componente humana que sempre revelou, justificando de forma exemplar a minha escolha como orientadora;
- ao Professor Álvaro Cunha, pela bibliografia cedida, pelas sugestões realizadas e por ter intervido de forma interessada na realização desta dissertação;
- ao Professor Carlos Moutinho pela disponibilidade e dedicação demonstradas no apoio à construção do modelo experimental e acompanhamento na realização dos ensaios experimentais;
- ao meu amigo e colega Engenheiro Leonel Ramos pela ajuda, disponibilidade, dedicação e esclarecimentos demonstrados ao longo deste trabalho. O meu maior dos reconhecimentos pelas suas qualidades como ser humano;
- aos amigos e colegas Engenheiros Diogo Ribeiro e Helder Figueiredo pela disponibilidade, companheirismo e ajuda incansável demonstradas no decorrer do trabalho;
- ao Professor Vincenzo Gattulli pela bibliografia disponibilizada e pelos meios que colocou ao meu dispor;
- aos Srs. Manuel Macedo e Rui Macedo pela disponibilidade e simpatia no fornecimento de material para a realização do tirante do modelo experimental;
- aos amigos e colegas que, apesar de não terem contribuído de uma forma mais directa na realização deste trabalho, foram importantes na sua realização, pela ajuda e companheirismo demonstrados, sempre me apoiaram e incentivaram na realização do mesmo.

- aos meus Pais agradeço o seu apoio incondicional e presença ao longo da minha vida. As suas sugestões e conselhos sábios, a sua infinita paciência durante os momentos de maior nervosismo.
- à Carla, a minha querida esposa, por todo o apoio e carinho recebido, a sua compreensão, as palavras de incentivo e motivação nos momentos mais difíceis. A sua ajuda e dedicação incansáveis. Este trabalho a ela é dedicado com o mais profundo dos sentimentos.

Índice

CAPÍTULO 1 ..... 1.1
INTRODUÇÃO
1.1 MOTIVACÃO E OBJECTIVOS 1.2
1.2 ORGANIZAÇÃO DA TESE 1.3
CAPÍTULO 2 ..... 2.1
PONTES DE TIRANTES
2.1 ESTADO DE ARTE 2.2
2.1.1 Pontes Suspensas por Tirantes 2.2
2.1.2 Classificação das Pontes de Tirantes 2.4
2.1.3 Tirantes 2.10
2.1.4 Vibrações em Tirantes 2.13
2.1.4.1 Acção Directa do Vento 2.15
2.1.4.2 Acção Indirecta 2.22
CAPÍTULO 3 ..... 3.1
ANÁLISE ESTÁTICA DE TIRANTES
3.1 INTRODUÇÃO 3.2
3.1.1 Catenária Elástica 3.2
3.1.2 Parábola Elástica 3.8
3.1.3 Método de Elementos Finitos (MEF) 3.14
3.2 CASO GERAL DE TIRANTES INCLINADOS 3.19
3.2.1 Tirante Suspenso entre Dois Pontos Nivelados 3.19
3.2.2 Tirante Suspenso entre Dois Pontos Desnivelados 3.21
CAPÍTULO 4 ..... 4.1
ANÁLISE DINÂMICA DE TIRANTES
4.1 INTRODUÇÃO 4.2
4.2 TEORIA DAS CORDAS VIBRANTES 4.2
4.3 ANÁLISE LINEAR DE UM TIRANTE EM VIBRAÇÃO LIVRE (Teoria de Irvine)……4.3
4.3.1 Oscilação Transversal ao Plano do Tirante 4.7
4.3.2 Oscilação no Plano do Tirante 4.8
4.3.2.1 Modo Antissimétrico no Plano 4.9
4.3.2.2 Modo Simétrico no Plano 4.10

4.4 ANÁLISE COMPARATIVA DE RESULTADOS 4.24
4.5 TEORIA LINEAR DE VIBRAÇÃO DE TIRANTES INCLINADOS 4.25
4.5.1 Aproximação Simplificada 4.25
4.6 EXCITAÇÃO EXTERNA EM TIRANTES DE PONTES 4.28
4.6.1 Introdução 4.28
4.6.2 Modelo Linear 4.28
4.6.3 Análise Numérica 4.32
4.6.4 Modelo Não-Linear 4.35
4.6.5 Comparação de Resultados 4.39
CAPÍTULO 5 ..... 5.1
EXCITAÇÃO PARAMÉTRICA
5.1 INTRODUÇÃO 5.2
5.2 DETERMINAÇÃO DAS CURVAS DE INSTABILDADE 5.6
5.2.1 Curvas de Transição sem Amortecimento 5.7
5.2.2 Curvas de Transição com Amortecimento 5.14
5.3 ANÁLISE NUMÉRICA 5.17
5.4 ESTUDO ANALÍTICO 5.21
5.5 RESULTADOS ANALÍTICOS VS RESULTADOS NUMÉRICOS 5.22
CAPÍTULO 6 ..... 6.1
MODELO EXPERIMENTAL
6.1 INTRODUÇÃO 6.2
6.2 DESCRIÇÃO DO PROTÓTIPO 6.3
6.3 DEFINIÇÃO DOS FACTORES DE ESCALA 6.6
6.3.1 Semelhança Estrutural 6.6
6.4 MODELO FÍSICO 6.12
6.4.1 Equipamento de Ensaio 6.15
6.4.2 Tensionamento do Cabo 6.19
6.4.3 Estimativa do Amortecimento 6.20
6.5 ESTUDO DO FENÓMENO DE EXCITAÇÃO PARAMÉTRICA 6.23
6.5.1 Modelo Numérico 6.23
6.5.2 Moledo Experimental vs Modelo Numérico 6.24
CAPÍTULO 7 ..... 7.1
FADIGA EM TIRANTES
7.1 INTRODUÇÃO 7.2

7.2 METODOLOGIA DE ANÁLISE 7.3
7.2.1 Curvas S-N 7.4
7.2.2 Métodos de Análise 7.6
7.2.2.1 Acumulação de Danos por Fadiga 7.6
7.2.2.2 Espectro de Tensões ou Amplitude de Tensão de Amplitudes Variáveis. 7.7
7.2.2.3 Método da Tensão Equivalente de Fadiga a Amplitudes Constantes 7.9
7.2.3 Métodos de Contagem de Ciclos de Tensão 7.10
7.3 ENSAIOS DE FADIGA 7.16
7.3.1 Procedimento 7.16
7.4 ANÁLISE DA FADIGA EM TIRANTES USANDO AS CURVAS S-N . 7.20
7.4.1 Verificação Simplificada da Resistência à Fadiga 7.21
7.4.2 Estudo de um Tirante 7.22
CAPÍTULO 8 ..... 8.1
CONDIÇÕES PARA O PROJECTO DE TIRANTES
8.1 INTRODUÇÃO 8.2
8.2 AMORTECEDORES 8.2
8.3 TEXTURA DAS BAINHAS DOS TIRANTES 8.6
8.4 OUTROS DISPOSITIVOS 8.9
CAPÍTULO 9 ..... 9.1
CONCLUSÕES E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS
9.1 CONCLUSÕES 9.2
9.2 DESENVOLVIMENTOS FUTUROS 9.4

Índice de Figuras

Figura 2.1 Ponte Pedonal 2.2

Figura 2.2 Ponte de Dryburgh-Abbey 2.3

Figura 2.3 Sistema estrutural proposto por Dischinger 2.3

Figura 2.4 Ponte Suspensa 2.4

Figura 2.5 Ponte de tirantes (ou atirantada) 2.5

Figura 2.6 Ponte suspensa e atirantada 2.5

Figura 2.7 Ponte 25 de Abril, Portugal 2.6

Figura 2.8 Tipos de disposição de tirantes 2.6

Figura 2.9 Ponte Tatara 2.7

Figura 2.10 Ponte de Oresund 2.8

Figura 2.11 Ponte Vasco da Gama 2.8

Figura 2.12 Ponte de Stonecutters, Hong Kong 2.8

Figura 2.13 As pontes atirantadas com maior vão do mundo 2.9

Figura 2.14 Constituintes físicos de um tirante 2.10

Figura 2.15 Cabos com cordões (“strands”) paralelos e cordas helicoidais (“ropes”) 2.10

Figura 2.16 Cabos “locked-coil stands” 2.11

Figura 2.17 Cabos de cordões com fios paralelos (“parallel wire strands”) 2.11

Figura 2.18 Ponte de Brotonne, França 2.12

Figura 2.19 “Spiral strands” 2.12

Figura 2.20 Libertação de vórtices na esteira do escoamento em torno de um elemento com a forma cilíndrica (Simiu et al, 1996). 2.15

Figura 2.21 Configurações de escoamento sobre uma secção circular variando 2.16

Figura 2.22 Forças aplicadas num corpo não simétrico durante um escoamento 2.18

Figura 2.23 Esquemas de associação de tirantes em pontes 2.20

Figura 2.24 Ensaios em túnel de vento para estudo do fenómeno de oscilação induzido pela acção combinada do vento e da chuva 2.21

Figura 2.25 Regatos de água nas superfícies superior e inferior do tirante 2.22

Figura 2.26 Excitação externa e excitação paramétrica dos tirantes devido ao movimento do tabuleiro e torres 2.23

Figura 2.27 Tirante sujeito a excitação transversal à corda ($z_B(t) = Z_B \cdot \sin(2.\omega.t)$) .. 2.24

Figura 2.28 Tirante sujeito a excitação longitudinal à corda ($\times_B(t) = X_B \cdot \sin(2.\omega.t)$) 2.24

Figura 3.1 Modelo simplificado de um tirante sujeito à acção do peso próprio e a uma força axial 3.2

Figura 3.2 Forças do segmento AP em equilíbrio 3.3

Figura 3.3 Catenária elástica 3.4

Figura 3.4 Parábola elástica 3.9

Figura 3.5 Conjunto dos cabos analisados 3.11

Figura 3.6 Tirante HC01 (deslocamentos em metros) 3.11

Figura 3.7 Tirante HC24 ..... 3.12

Figura 3.8 Tirante HC015 ..... 3.12

Figura 3.9 Tirante Central1 ..... 3.12

Figura 3.10 Tirante Central16 ..... 3.13

Figura 3.11 Tirante da Ponte da Normandia 3.13

Figura 3.12 Tirante da Ponte Ikuchi 3.13

Figura 3.13 Modelação numérica de um Tirante 3.14

Figura 3.14 Comparação do traçado do tirante HC01. ..... 3.17

Figura 3.15 Comparação do traçado do tirante HC24. ..... 3.17

Figura 3.16 Comparação do traçado do tirante HC15 ..... 3.18

Figura 3.17 Comparação do traçado do tirante Central 1 ..... 3.18

Figura 3.18 Comparação do traçado do tirante Central 16 ..... 3.18

Figura 3.19 Comparação do traçado do tirante Normandia 3.19

Figura 3.20 Comparação do traçado do tirante Ikuchi 3.19

Figura 3.21 Configuração de deformada 3.20

Figura 3.22 Equilíbrio de um segmento infinitesimal do tirante extensível..... 3.20

Figura 3.23 Deformada do cabo inclinado 3.22

Figura 3.24 Transformação de eixos para a definição da deformada do tirante..... 3.23

Figura 4.1 Componentes do deslocamento de um elemento de cabo..... 4.4

Figura 4.2 1º modo simétrico 4.6

Figura 4.3 1º modo antissimétrico..... 4.7

Figura 4.4 Modo simétrico. Componente vertical w(x) simétrica e componente longitudinal u(x) antissimétrica. 4.9

Figura 4.5 Ponte Vasco da Gama. Tirante HC01 (λ^2 =0,023)..... 4.15

Figura 4.6 Ponte Vasco da Gama. Tirante HC24 (λ^2 =0,343)..... 4.16

Figura 4.7 Ponte Vasco da Gama. Tirante HC15 (λ^2 =0,241)..... 4.17

Figura 4.8 Ponte Guadiana. Tirante cabo central 1 (λ^2 =0,198)..... 4.18

Figura 4.9 Ponte Guadiana. Tirante cabo central 16 (λ^2 =0,005)..... 4.19

Figura 4.10 Ponte Normandia. Cabo 1 (λ^2 =3,11)..... 4.20

Figura 4.11 Ponte Ikuchi (λ^2 =1,260)..... 4.21

Figura 4.12 Variação da frequência natural dos três primeiros modos simétricos e antissimétricos de vibração com λ^2. Representação dos modos simétricos dos tirantes analisados 4.23

Figura 4.13 Perfil do cabo inclinado 4.26

Figura 4.14 Transformação de eixos para a caracterização do equilíbrio dinâmico de um tirante inclinado..... 4.26

Figura 4.15 Tirante sujeito a deslocamento transversal na ancoragem..... 4.29

Figura 4.16 Modelo numérico do tirante Central 16 (Ponte do Guadiana)..... 4.33

Figura 4.17 Deslocamento vertical a meio vão devido a oscilação vertical na ancoragem B de $0.50 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 3.2326 \cdot t)$ 4.35

Figura 4.18 Variação de $\sin(\gamma)$ com o valor da amplitude de oscilação para diferentes valores de amortecimento e $\lambda^2 = 0.005$ 4.39

Figura 4.19 Variação da amplitude de oscilação com a amplitude da oscilação harmónica no apoio, para a primeira ressonância, considerando $\xi = 0.1\%$ 4.39

Figura 4.20 Variação da amplitude de oscilação com a amplitude da oscilação harmónica no apoio, para a primeira ressonância, considerando $\xi = 0.5\%$ 4.40

Figura 4.21 Variação da amplitude de oscilação com a amplitude da oscilação harmónica no apoio, para a primeira ressonância, considerando $\xi = 1.0\%$ 4.40

Figura 4.22 Resposta para diversas amplitudes de excitação e respectivas séries temporais de deslocamentos (amortecimento de 0.5%) 4.44

Figura 4.23 Resposta para diversas amplitudes de excitação e respectivas séries temporais de deslocamentos 4.48

Figura 4.24 ..... 4.48

Figura 4.25 Resposta para diversas amplitudes de excitação e respectivas séries temporais de deslocamentos 4.52

Figura 5.1 Cabo horizontal sujeito a movimento harmónico longitudinal numa ancoragem 5.3

Figura 5.2 Cabo inclinado descrevendo um ciclo de oscilação quando solicitado harmonicamente ao longo do seu eixo 5.3

Figura 5.3 Modo de vibração principal para a excitação longitudinal ao cabo (paramétrica) 5.4

Figura 5.4 Movimento sinusoidal na direcção longitudinal e perpendicular do cabo ... 5.5

Figura 5.5 Diagrama de Strutt (sem amortecimento, $\xi = 0\%$) 5.14

Figura 5.6 Diagrama de Strutt para $\xi = 0{,}02\%$ 5.15

Figura 5.7 Diagrama de Strutt para $\xi = 0{,}1\%$ 5.16

Figura 5.8 Diagrama de Strutt para $\xi = 0{,}5\%$ 5.16

Figura 5.9 Resposta em z, excitação em $\frac{f_{cabo}}{2}$ 5.17

Figura 5.10 Resposta em y, excitação em $\frac{f_{cabo}}{2}$ 5.17

Figura 5.11 Resposta em z, excitação em f_{cabo} 5.18

Figura 5.12 Resposta em y, excitação em f_{cabo} 5.18

Figura 5.13 Resposta em z, excitação em $2.f_{cabo}$ 5.18

Figura 5.14 Resposta em y, excitação em $2.f_{cabo}$ 5.18

Figura 5.15 Resposta em z, excitação em $\frac{f_{cabo}}{2}$. 5.19

Figura 5.16 Resposta em y, excitação em $\frac{f_{cabo}}{2}$ 5.19

Figura 5.17 Resposta em z, excitação em f_{cabo} 5.19

Figura 5.18 Resposta em y, excitação em f_{cabo} 5.19

Figura 5.19 Resposta em z, excitação em $2.f_{cabo}$ 5.19

Figura 5.20 Resposta em y, excitação em $2.f_{cabo}$ 5.19

Figura 5.21 Resposta em z, excitação em $\frac{f_{cabo}}{2}$ 5.20

Figura 5.22 Resposta em y, excitação em $\frac{f_{cabo}}{2}$ 5.20

Figura 5.23 Resposta em z, excitação em f_{cabo} 5.20

Figura 5.24 Resposta em y, excitação em f_{cabo} 5.20

Figura 5.25 Resposta em z, excitação em $2.f_{cabo}$ 5.21

Figura 5.26 Resposta em y, excitação em $2.f_{cabo}$ 5.21

Figura 5.27 Excitação na frequência dupla do cabo, resposta na direcção perpendicular ao cabo. Amortecimento 0,1%. 5.22

Figura 5.28 Excitação na frequência dupla do cabo, resposta na direcção perpendicular ao cabo. Amortecimento 0,5%. 5.23

Figura 5.29 Excitação na frequência dupla do cabo, resposta na direcção perpendicular ao cabo. Amortecimento 1,0%. 5.23

Figura 5.30 Amplitude de excitação 0.008. Amortecimento 0.5% 5.24

Figura 5.31 Amplitude de excitação 0.01. Amortecimento 0.5% 5.24

Figura 5.32 Amplitude de excitação 0.02. Amortecimento 0.5% 5.24

Figura 5.33 Amplitude de excitação 0.03. Amortecimento 0.5% 5.25

Figura 5.34 Amplitude de excitação 0.04. Amortecimento 0.5% 5.25

Figura 5.35 Amplitude de excitação 0.05. Amortecimento 0.5% 5.25

Figura 6.1 Vista geral da Ponte Internacional do Guadiana (Foto: F. Piqueiro/FotoEngenho)..... 6.3

Figura 6.2 Características geométricas da ponte (está indicado com seta o tirante protótipo) 6.4

Figura 6.3 Espaçamentos entre nos tirantes da ponte do Guadiana..... 6.4

Figura 6.4 Guia de desvio e anel de neoprene..... 6.5

Figura 6.5 Sistema estrutural (Pórtico metálico)..... 6.13

Figura 6.6 Ensaio de tracção (Máquina WOLPERT)..... 6.14

Figura 6.7 Mostrador de Carga (à esquerda); "Garras" inferior e superior para amarração do cabo (à direita). 6.14

Figura 6.8 Resultados do ensaio de tracção. Determinação do módulo de elasticidade (E). 6.15

Figura 6.9 Modelo experimental do cabo. 6.16

Figura 6.10 Foto geral do dispositivo experimental..... 6.16

Figura 6.11 Acelerómetro fixo a uma esfera 6.17

Figura 6.12 Condicionadores de sinal da célula de carga (esquerda) e do acelerómetro (direita) 6.17

Figura 6.13 Analisador de Fourier..... 6.17

Figura 6.14 PC portátil para processamento de dados/aquisição de sinal 6.18

Figura 6.15 Ancoragem passiva com célula de carga acoplada**.** 6.18

Figura 6.16 Ancoragem activa. Dispositivo excitador 6.19

Figura 6.17 Amplificador para controlo dos deslocamentos a aplicar ao cabo 6.19

Figura 6.18 Parafuso para controlo da tensão instalada no cabo 6.20

Figura 6.19 Resposta sinusoidal para determinação do amortecimento do cabo a ser ensaiado 6.21

Figura 6.20 Ajuste exponencial aos pontos máximos da resposta sinusoidal. 6.22

Figura 6.21 Esquema estrutural do modelo numérico 6.23

Figura 6.22 Frequência de excitação igual a metade da frequência própria do cabo (5,79Hz). Resposta em três harmónicos 6.23

Figura 6.23 Frequência de excitação igual à frequência própria do cabo (11,59Hz). Resposta em três harmónicos 6.23

Figura 6.24 Frequência de excitação dupla da frequência própria do cabo (23,18Hz). Resposta em três harmónicos 6.24

Figura 6.25 Série temporal da aceleração longitudinal na frequência 5,79 Hz 6.24

Figura 6.26 “Zoom” da série temporal da aceleração longitudinal na frequência 5,79 Hz 6.25

Figura 6.27 Série temporal da aceleração longitudinal na frequência de 11,59Hz 6.25

Figura 6.28 “Zoom” da série temporal da aceleração longitudinal na frequência 11,59 Hz 6.26

Figura 6.29 Série temporal da aceleração longitudinal na frequência 23,18Hz 6.26

Figura 6.30 “Zoom” da série temporal da aceleração longitudinal na frequência 23,18 Hz 6.27

Figura 6.31 Aceleração transversal a meio vão: numérica vs experimental, na frequência de excitação de 5.79 Hz 6.27

Figura 6.32 Aceleração transversal a meio vão: numérica vs experimental, na frequência de excitação de 11.59 Hz 6.28

Figura 6.33 Aceleração transversal a meio vão: numérica vs experimental, na frequência de excitação de 23.18 Hz 6.28

Figura 6.34 Deslocamento transversal a meio vão: numérica vs experimental, na frequência de excitação de 5.79 Hz 6.30

Figura 6.35 Deslocamento transversal a meio vão: numérica vs experimental, na frequência de excitação de 11.59 Hz 6.30

Figura 6.36 Deslocamento transversal a meio vão: numérica vs experimental, na frequência de excitação de 23.18 Hz 6.31

Figura 6.37 Deslocamento transversal a meio vão na frequência de excitação de 0.832 Hz 6.31

Figura 6.38 Deslocamento transversal a meio vão na frequência de excitação de 1.63 Hz 6.32

Figura 6.39 Deslocamento transversal a meio vão na frequência de excitação de 3.267 Hz 6.32

Figura 6.40 Série temporal dos deslocamentos no nó 16 (meio vão) segundo a direcção perpendicular ao cabo para uma amplitude de excitação de 1.75E-4m..... 6.33

Figura 6.41 Série temporal das acelerações no nó 16 (meio vão) segundo a direcção perpendicular ao cabo para uma amplitude de excitação de 1.75E-4m..... 6.33

Figura 6.42 Diagrama de Strutt (com amortecimento de 0.09%)..... 6.34

Figura 6.43 Representação no diagrama de Strutt de alguns resultados obtidos do modelo experimental ($\xi = 0{,}09\%$)..... 6.35

Figura 6.44 Representação no diagrama de Strutt de alguns resultados obtidos do modelo numérico ($\xi = 0{,}09\%$) 6.36

Figura 6.45 "Zoom" da Figura 6.44 ..... 6.36

Figura 7.1 Aspecto típico de rotura por fadiga em Tirantes..... 7.2

Figura 7.2 Tirante danificado junto à ancoragem..... 7.3

Figura 7.3 Curva típica de resistência à fadiga no aço (adaptado de Tembe, 2001) 7.5

Figura 7.4 Série temporal de tensões num tirante ($\sigma - t$)..... 7.8

Figura 7.5 Espectro de tensões 7.8

Figura 7.6 Tensão equivalente de fadiga a amplitudes constantes (adaptado de Tembe, 2001) 7.9

Figura 7.7 Diagrama $\sigma - \varepsilon$ de um carregamento (Frýba, 1996) 7.11

Figura 7.8 Diagrama $\sigma - t$ de um carregamento (Frýba, 1996) 7.11

Figura 7.9 Método da gota de água (adaptado de Frýba) 7.12

Figura 7.10 Diagrama $\sigma - t$ idealizado (Frýba, 1996)..... 7.13

Figura 7.11 Dois casos de contagem de ciclos completos de acordo com a equação (7.11) 7.14

Figura 7.12 Contagem de meios ciclos..... 7.15

Figura 7.13 Exemplo de um espectro de tensões obtido sob a forma de um histograma da série temporal de tensões num tirante (Figura 7.4)..... 7.15

Figura 7.14 Banco de ensaio à fadiga..... 7.16

Figura 7.15 Vista Axométrica (3D)..... 7.16

Figura 7.16 Aplicação de um deslocamento transversal a meio do tirante (adaptado de Setra (2002)) 7.18

Figura 7.17 Ensaio em laboratório com introdução da sela ("saddle") no esquema estrutural. 7.18

Figura 7.18 Introdução de deslocamentos verticais na sela ("Saddle") (adaptado de Setra (2002)) 7.19

Figura 7.19 Sensor acústico na ancoragem 7.19

Figura 7.20 Curva típica de resistência à fadiga de um tirante (Setra, 2002)..... 7.20

Figura 7.21 Modelação do cabo 7.22

Figura 7.22 Curva de Wohler para 1 cordão de 15mm de diâmetro (ancoragens Freyssinet) 7.24

Figura 7.23 Secção transversal do cabo e guia de protecção..... 7.24

Figura 7.24 Modelação do cabo. Nó C do cabo encastra na guia de protecção. 7.25

Figura 7.25 Guia de protecção danificada..... 7.26

Figura 7.26 Danos provocados pelo contacto do cabo com a guia de protecção 7.27

Figura 8.1 Disposição dos amortecedores externos numa ponte atirantada..... 8.3

Figura 8.2 Amortecedores externos da ponte de Tsurumi Tsubasa (Yamada,1997)..... 8.3

Figura 8.3 Amortecedores externos na Ponte de Brotonne 8.3

Figura 8.4 Amortecedores externos da DAMPTECH, Dinamarca 8.4

Figura 8.5 Amortecedor da Ponte Iroise, sobre o rio Elorn..... 8.4

Figura 8.6 Amortecedores externos muito perto das ancoragens..... 8.5

Figura 8.7 Amortecedores externos (ponte da Normandia) 8.5

Figura 8.8 Amortecedor interno instalado na Ponte Vasco da Gama..... 8.6

Figura 8.9 Protuberâncias longitudinais na bainha do tirante (Ponte Higashi-Kobe) ... 8.7

Figura 8.10 Cavidades longitudinais na bainha (Ponte Yuge) 8.7

Figura 8.11 Séries de pequenas cavidades na bainha (Ponte de Tatara) 8.8

Figura 8.12 Nervura helicoidal na superfície da bainha (Ponte da Normandia) 8.8

Figura 8.13 Nervura helicoidal na superfície da bainha (Ponte Vasco da Gama)..... 8.9

Figura 8.14 Tirantes interligados (Ponte da Normandia) 8.10

Figura 8.15 Cabos de ligação (Ponte da Normandia)..... 8.10

Figura 8.16 Associação de tirantes (Ponte de Erasmus)..... 8.10

Figura 8.17 Amortecedor de ligação de 4 tirantes (Servia)..... 8.11

Figura 8.18 Amortecedores de ligação entre tirantes 8.11

Figura 8.19 Amortecedores tipo “Stockbridge” 8.12

Figura 8.20 Amortecedores tipo “Stockbridge” 8.13

Figura 8.21 Vista Geral da cobertura do Estádio Municipal do S.C.Braga..... 8.13

Índice de Tabelas

Tabela 2.1 As maiores Pontes de Tirantes do mundo..... 2.9

Tabela 3.1 Características geométricas e mecânicas dos tirantes estudados..... 3.6

Tabela 3.2 Reacções na ancoragem *A* 3.7

Tabela 3.3 Parâmetros geométricos e mecânicos dos tirantes estudados..... 3.8

Tabela 3.4 Comparação dos resultados das flechas obtidas. 3.10

Tabela 3.5 Determinação das frequências para um tirante de comprimento 20m e outro de 42,43m 3.15

Tabela 3.6 Determinação das frequências para um tirante de comprimento 250m e outro de 440m 3.15

Tabela 3.7 Comparação dos resultados das flechas obtidas. Aproximação pela catenária elástica e pelo modelo numérico 3.16

Tabela 4.1 Cálculo das frequências próprias dos tirantes pelo Método de Irvine. 4.12

Tabela 4.2 Sumário da relação dos deslocamentos máximos (em metros) para cada modo simétrico de vibração em cada cabo..... 4.22

Tabela 4.3 Frequências naturais dos primeiros 5 modos simétricos, T. Irvine vs Lei Cordas Vibrantes 4.24

Tabela 4.4 Características principais do tirante Central 16 da Ponte do Guadiana..... 4.33

Tabela 4.5 Frequências naturais do tirante 4.34

Tabela 6.1 Dados do cabo no Protótipo..... 6.6

Tabela 6.2 Quantidades físicas 6.8

Tabela 6.3 Dados do cabo no protótipo e no modelo 6.12

Tabela 6.4 Alguns resultados obtidos do modelo experimental..... 6.34

Tabela 6.5 Alguns resultados obtidos do modelo numérico..... 6.35

Tabela 7.1 Valores extremos ensaiados..... 7.17

Tabela 7.2 Sumário dos incrementos de tensão..... 7.25

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVACÃO E OBJECTIVOS

A construção de pontes atirantadas tem vindo a ser incrementada nos últimos anos, acompanhando os progressos dos materiais, bem como a adopção de técnicas de construção mais inovadoras. No entanto, o funcionamento estrutural deste tipo de pontes está longe de ser totalmente compreendido, dada a complexidade das diversas solicitações envolvidas, assim como do seu comportamento dinâmico e mais concretamente o comportamento dos tirantes. Os tirantes, dado serem elementos estruturais muito flexíveis, com massa e amortecimentos reduzidos, apresentam uma grande susceptibilidade à ocorrência de vibrações, exibindo um complexo comportamento não-linear.

De entre os diversos fenómenos associados à oscilação de tirantes, destaca-se o fenómeno de excitação paramétrica. Embora seja referido frequentemente na literatura como uma das causas possíveis de elevadas oscilações observadas, este fenómeno não se encontra ainda suficientemente compreendido e não são conhecidas inequivocamente situações práticas em que este fenómeno tenha sido observado. Contudo, a evidência de elevados níveis de vibração em numerosas situações e o risco do aparecimento de fissuras ao nível dos cordões dos tirantes perto das ancoragens, rotura e dano nas guias de desvio, susceptível de reduzir o tempo de vida destes elementos, justificam o interesse neste fenómeno.

Estudos anteriores conduzem à conclusão de que a situação mais favorável ao aparecimento de excitação paramétrica acontece quando a frequência de oscilação do tabuleiro e/ou torres está na vizinhança da frequência dupla da frequência fundamental dum tirante. A probabilidade de ocorrência deste fenómeno aumenta para pontes de grande vão, já que estas têm maior número de tirantes de grande comprimento cujas frequências próprias são baixas (inferiores a 1Hz) e consequentemente próximas de um maior número das frequências mais baixas do tabuleiro e das torres.

Nesta dissertação estuda-se o fenómeno de excitação paramétrica de um ponto de vista prático, determinando-se as amplitudes de oscilação críticas que levam ao aparecimento de oscilações transversais num tirante que foi alvo de estudo numérico e experimental. O papel do amortecimento do tirante é investigado na definição das regiões de instabilidade que levam à ocorrência de excitação paramétrica.

A vibração dos tirantes por excitação paramétrica é um problema estrutural, já que é motivado pela interacção dinâmica tabuleiro-torres-tirantes. Todavia, este fenómeno é iniciado por oscilação do tabuleiro/torres, ou dos próprios tirantes, em consequência da acção do vento e chuva. Uma fonte adicional de complexidade neste estudo, reside na possibilidade de vários fenómenos concorrerem em simultâneo para as oscilações observadas.

1.2 ORGANIZAÇÃO DA TESE

A presente dissertação está organizada em 9 capítulos. Nos parágrafos seguintes é efectuada a descrição sumária de cada um dos capítulos.

O primeiro capítulo foca a motivação do autor, bem como os objectivos a que se propõe alcançar com a escrita desta dissertação. Este capítulo inclui a descrição sumária da organização da tese.

No segundo capítulo são descritos e identificados os principais fenómenos de vibração que ocorrem em tirantes de Pontes, fazendo-se referência à sua origem e principais características. Apresenta-se uma breve descrição dos tipos de tirantes e dos principais constituintes e propriedades mecânicas das pontes de tirantes. Faz-se ainda, uma contextualização das pontes suspensas por tirantes, identificando as configurações dos sistemas estruturais mais correntes, as maiores pontes de tirantes do mundo e a evolução ao longo dos últimos anos do comprimento do vão, evidenciando os progressos do estudo dos fenómenos que causam vibração nos tirantes.

No terceiro capítulo é estudado o comportamento estrutural de um tirante pré-tensionado, sob a acção do peso próprio, utilizando uma modelação analítica da equação da catenária elástica, da parábola elástica e na modelação numérica através de elementos finitos. É feita a análise comparativa da flecha, o comprimento deformado e indeformado definidos pelas três aproximações referidas.

No quarto capítulo é descrito o comportamento dinâmico de um tirante, baseado na Teoria de Irvine. Introduz-se a definição do parâmetro de Irvine que permite definir as características de deformabilidade de um tirante. Estudam-se as formulações analíticas

que descrevem os diferentes modos de vibração, simétricos e anitissimétricos, de um tirante quando em oscilação livre no plano ou fora deste. São apresentados os resultados da análise comparativa das frequências naturais dos primeiros cinco modos simétricos de vibração de um conjunto de tirantes, determinadas pela Teoria de Irvine e Lei das Cordas Vibrantes. É efectuado o estudo da excitação externa em tirantes, comparando uma análise numérica por elementos finitos com modelos analíticos linear e não-linear. São sistematizados processos para avaliação do grau de não-linearidade do comportamento dinâmico de um tirante de uma ponte.

No quinto capítulo é apresentado o desenvolvimento do estudo do fenómeno da excitação paramétrica. Descreve-se o processo de determinação das curvas de transição (Diagrama de Strutt) com e sem amortecimento, que vão permitir definir as zonas estáveis ou instáveis para a ocorrência da excitação paramétrica. É feita a análise e posterior comparação dos resultados obtidos por via numérica e analítica não-linear de um tirante da Ponte do Guadiana, para três situações de ressonância do tirante. Nesse estudo foram considerados três valores de amortecimento.

No sexto capítulo é descrito o processo de execução de um modelo físico experimental e aplicado à construção de um modelo de um tirante da Ponte do Guadiana. São definidos os factores de escala através da teoria da semelhança estrutural. Descrevem-se as características do protótipo utilizado, e as correspondentes no modelo reduzido. É apresentado o dispositivo experimental, fazendo referência ao equipamento de ensaio, ao processo de tensionamento do cabo e à estimativa do seu amortecimento intrínseco. É desenvolvido o estudo da excitação paramétrica sobre o modelo físico, apresentam-se os resultados e confrontam-se com uma análise numérica. São comparados os resultados obtidos experimentalmente e numericamente, e posteriormente relacionados com as curvas de transição como forma de validar a formulação teórica.

No sétimo capítulo são apresentados alguns métodos para o estudo à fadiga em tirantes. É descrito um ensaio típico à fadiga de tirantes. Procede-se à análise da fadiga em tirantes usando as curvas S-N, acompanhando com um exemplo de aplicação de um tirante da Ponte do Guadiana.

No oitavo capítulo são apresentadas algumas soluções possíveis de redução das vibrações de tirantes em pontes. São documentadas com imagens as diversas soluções que correntemente são mais usadas no projecto de tirantes.

Por último, no nono capítulo, são apresentadas as conclusões do trabalho desenvolvido e apontam-se sugestões para futuros estudos complementares.

CAPÍTULO 2

PONTES DE TIRANTES

2.1 ESTADO DE ARTE

As pontes de tirantes são estruturas cuja envergadura, complexidade de execução, mobilização de meios e intervenção paisagística justificam o uso de técnicas de optimização, na fase de dimensionamento, com vista à obtenção de soluções económicas, respeitando simultaneamente um determinado conjunto de condições de ordem estética, construtiva e regulamentar.

2.1.1 Pontes Suspensas por Tirantes

As primeiras pontes suspensas por cabos de que há memória, foram pontes pedonais constituídas por cordas torcidas. As extremidades dos cabos eram amarradas a árvores, rochas ou outros elementos permanentes e o tabuleiro seria constituído por troncos de madeira que eram ancorados directamente sobre os cabos (Figura 2.1).



Figura 2.1 Ponte Pedonal

Diversas pontes atirantadas foram construídas no século XVIII. Contudo o uso de tirantes teve um retrocesso considerável, devido a uma série de acidentes. Em 1818, uma ponte pedonal, suspensa e dotada de tirantes sobre o Rio Tweed, perto de Dryburgh-Abbey (Inglaterra, Figura 2.2) colapsou devido à acção do vento (VSL, 1984). Nos tempos seguintes, outras pontes tiveram o mesmo fim.

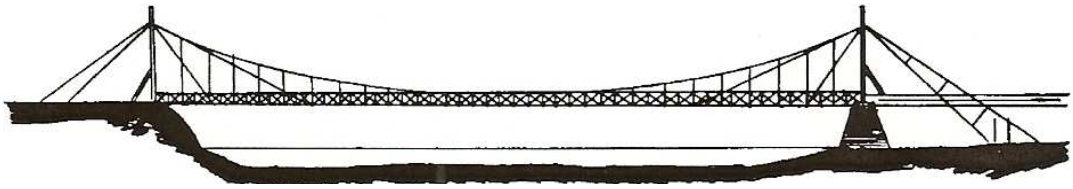


Figura 2.2 Ponte de Dryburgh-Abbey

Mas o princípio de usar tirantes para suportar uma ponte não desapareceu completamente das mentes dos engenheiros que viam a situação de descrédito em que a construção de pontes de tirantes tinha caído como um desafio, requerendo uma análise das forças internas do sistema com mais pormenor e uma atenção redobrada aos fenómenos dinâmicos experimentados por este tipo de estruturas, pela sua maior esbelteza, menor rigidez e não-linearidade de comportamento. No entanto, constituíam adversidades a não compreensão do comportamento do sistema de tirantes e os métodos para controlo do equilíbrio e compatibilidade de sistemas estruturais altamente hiperestáticos, o que fez com que houvesse perda de confiança neste tipo de estruturas e se abandonasse a sua concepção durante o século XIX e princípios do século XX.

A reutilização de tirantes em pontes acontece em 1938, com o trabalho do engenheiro alemão Franz Dishinger (Podolny W.). Este engenheiro enquanto projectava uma ponte suspensa sobre o Rio Elber, Hamburgo, apercebeu-se de grandes deformações verticais do tabuleiro quando sujeito a acção do tráfego, problema que solucionou com a introdução de tirantes no sistema estrutural da ponte suspensa (Figura 2.3).

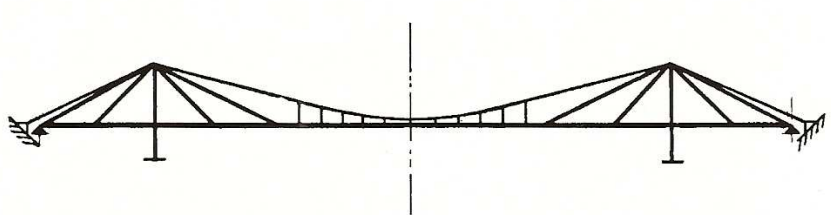


Figura 2.3 Sistema estrutural proposto por Dischinger

Mas o grande ímpeto que este tipo de estruturas teve foi na Alemanha, com o fim da Segunda Guerra Mundial, meados de 1950. O regresso de pontes de tirantes foi possível pela necessidade de rapidamente substituir as pontes destruídas com a guerra e da forma mais económica. Foi também vantajoso o contributo da evolução da

construção em metal, com o uso de aços de alta resistência, que permitiu a aplicação de elevadas forças iniciais em cabos.

A crescente sofisticação das técnicas de cálculo, os progressos dos materiais aplicados neste tipo de estruturas e a adopção de concepções modernas e optimizadas têm possibilitado o desenvolvimento e construção de pontes de tirantes cada vez mais arrojadas.

Contudo a utilização de tirantes em estruturas progressivamente mais esbeltas e complexas tem levantado inúmeros problemas relacionados com o seu funcionamento estrutural. Os maiores problemas que advém deste tipo de sistema estrutural dado se tratar de elementos muito flexíveis e possuidores de baixos amortecimentos intrínsecos, são na sua maioria relacionados com as vibrações resultantes de diversas fontes de excitação. Descrevem-se na secção 2.1.4 os principais fenómenos de oscilação em tirantes de pontes.

2.1.2 Classificação das Pontes de Tirantes

As Pontes de tirantes têm como principais elementos estruturais cabos de aço muito tensionados, podendo classificar-se como pontes suspensas ou pontes atirantadas. A principal diferença entre estas duas classes é a maneira como o tabuleiro é suportado pelos cabos.

No caso de pontes suspensas (Figura 2.4), o tabuleiro é seguro em intervalos relativamente pequenos por cabos verticalmente dispostos, os pendulares, estes por sua vez são suportados por um cabo principal. Os cabos principais são relativamente flexíveis e tomam a forma de uma catenária, sendo a sua forma função da grandeza e posição da carga.



Figura 2.4 Ponte Suspensa

Nas pontes atirantadas, Figura 2.5, o tabuleiro é apoiado por cabos bastante tensionados. As elevadas tensões dos cabos e o número significativo de tirantes tornam estas estruturas mais rígidas do que as pontes suspensas.



Figura 2.5 Ponte de tirantes (ou atirantada)

As pontes de tirantes apresentam simultaneamente um determinado conjunto de condições de ordem estética, construtiva e regulamentar, que as tornam soluções atractivas para o desempenho de funções em qualquer tipo de contexto.

Existem ainda pontes dotadas simultaneamente de um cabo principal suspenso entre ancoragens e de atirantamentos adicionais ao tabuleiro. Esta combinação proporciona maior resistência a cargas dinâmicas, podendo revelar-se mais eficiente para grandes vãos, do que cada um dos sistemas isolados. Um exemplo de uma ponte deste tipo constitui um dos estudos propostos para a Ponte 25 de Abril (Figura 2.6), que foi preterido em favor da solução de ponte suspensa adoptada (Figura 2.7)

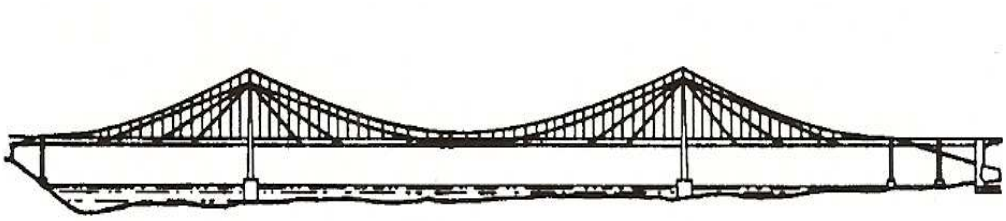


Figura 2.6 Ponte suspensa e atirantada



Figura 2.7 Ponte 25 de Abril, Portugal

Os problemas estudados nesta dissertação centram-se sobretudo nas pontes atirantadas, pelo que se descrevem de seguida alguns aspectos fundamentais destas estruturas.

A disposição dos tirantes pode ser realizada segundo várias configurações: harpa, feixe e radial (Figura 2.8).

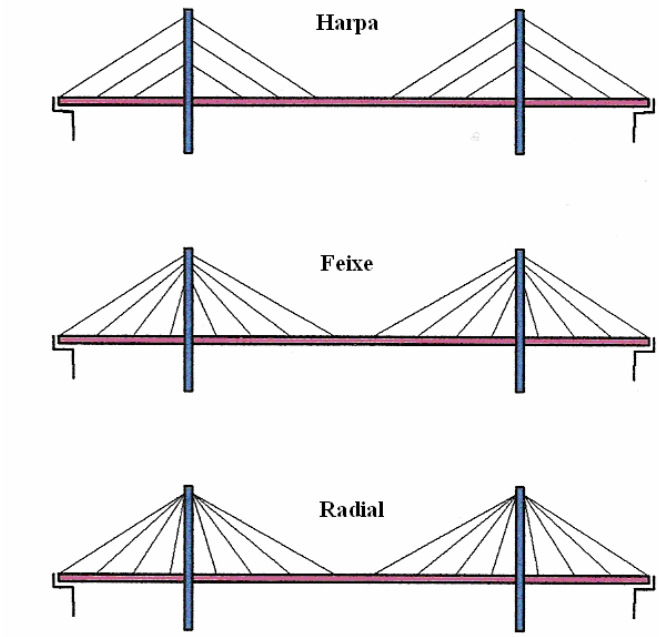


Figura 2.8 Tipos de disposição de tirantes

A configuração em harpa (Figura 2.10) permite uma maior transparência da ponte, proporciona maior repetição dos pormenores construtivos, mas induz maiores esforços de flexão no mastro. A disposição radial é a que conduz a menores esforços de flexão nos mastros, mas concentra a ancoragem dos tirantes no topo do mastro, tornando a sua concretização bastante complexa. Por fim, o tipo feixe, é a configuração intermédia, combina algumas vantagens dos dois sistemas referidos, e é a que é mais utilizada (Figura 2.9 e Figura 2.11).



Figura 2.9 Ponte Tatara



Figura 2.10 Ponte de Oresund



Figura 2.11 Ponte Vasco da Gama

O progresso tecnológico dos últimos anos tem permitido um aumento progressivo dos vãos construídos, estando presentemente em projecto uma ponte com um vão de 1088m a realizar na China, Suzhou-Nantong (Ponte Sutong). Apresenta-se também na Figura 2.12 uma imagem virtual da ponte de Stonecutters, presentemente em construção, com um vão de 1018m.



Figura 2.12 Ponte de Stonecutters, Hong Kong

Apresenta-se de seguida uma tabela com as maiores pontes de tirantes do mundo, algumas das quais se encontram ainda em construção.

Tabela 2.1 As maiores Pontes de Tirantes do mundo

Posição	Ponte	Vão (m)	Localização	País	Inauguração
1	Sutong	1088	Suzhou-Nantong	China	2009
2	Stonecutters	1018	Hong Kong	China	2008
3	Tatara	890	Onomichi-Imabari	Japão	1999
4	Normandia	856	Le Havre	França	1995
5	Incheon-2	800	Incheon-Songdo	Coreia do Sul	2009
6	Nanjing-3	648	Nanjing	China	2006
7	Nanjing-2	628	Nanjing	China	2001
8	Baishazhou	618	Wuhan	China	2000
9	Qingzhou	605	Fuzhou	China	2003
10	Yangpu	602	Shanghai	China	1993

É interessante verificar pela análise da Figura 2.13, onde se relaciona o ano de inauguração com o comprimento dos vão de várias pontes, que há um crescimento exponencial com o tempo do comprimento dos vãos, o que demonstra o crescente desenvolvimento tecnológico da época, bem como a necessidade da actualização das vias de comunicação, por forma a corresponder às necessidades dos mercados económicos.

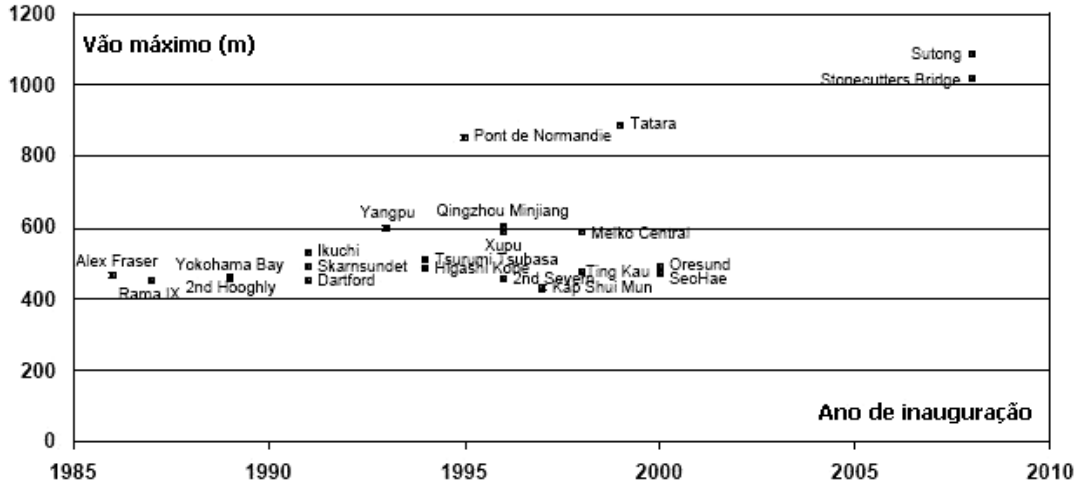


Figura 2.13 As pontes atirantadas com maior vão do mundo
(ano de inauguração/comprimento do vão)

2.1.3 Tirantes

Nas primeiras pontes de tirantes, os tirantes eram cordas ("ropes"), Figura 2.15, formados por um agrupamento helicoidal de fios metálicos (Virlogeux, M., 1998).

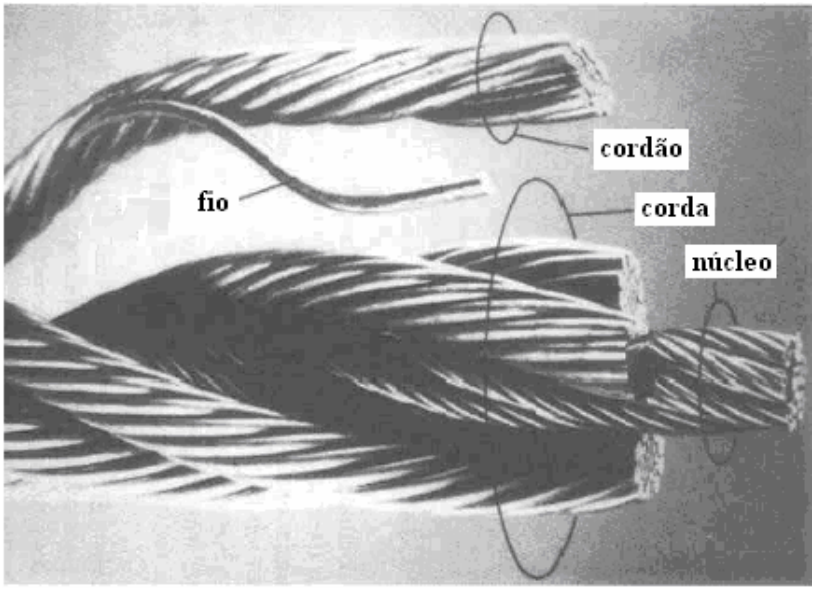


Figura 2.14 Constituintes físicos de um tirante

A protecção à corrosão era garantida preenchendo com produto inerte os vazios entre os fios e pintando o cabo com um material espesso e aderente. Mas, esta solução revelou-se bastante vulnerável. Um melhoramento introduzido baseou-se nos cabos do tipo "lock-coil strands" (Figura 2.16), formados também por fios metálicos, mas só nas camadas internas, sendo estes galvanizados. As camadas externas, normalmente em número de duas ou três, são constituídas por fios galvanizados em forma de Z, encaixando uns nos outros. Entre os fios era injectada tinta e outros elementos como o pó de zinco. Recentemente foram introduzidos produtos mais flexíveis, tais como polietileno amorfo ou cera epoxi, melhorando o comportamento à fadiga, mas reduzindo ao amortecimento.



Figura 2.15 Cabos com cordões ("strands") paralelos e cordas helicoidais ("ropes")



Figura 2.16 Cabos "locked-coil stands"

Uma solução mais recente introduzida por influência de Leonhardt, baseava-se na utilização de cordões dispostos com fios paralelos ("parallel wires"), com 7mm de diâmetro. Os cordões eram colocados dentro de uma bainha posteriormente injectada com calda de cimento. Inicialmente estes tubos eram de aço, mas desde o fim da década de 70, e com o desenvolvimento de tubos de polietileno de alta densidade, o aço foi substituído por aqueles. Esta inovação permitiu o desenvolvimento de cabos pré-fabricados, que eram fornecidos em rolos com as ancoragens e as bainhas, estes eram instalados, tensionados e injectados com calda de cimento no local de aplicação. Para uma melhor protecção, os fios ("wires") podiam ser galvanizados.

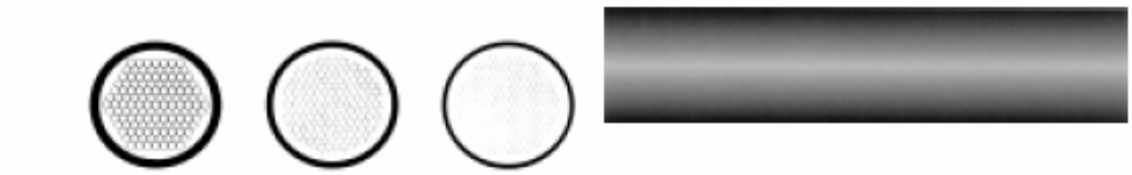


Figura 2.17 Cabos de cordões com fios paralelos ("parallel wire strands")

Com a construção da Ponte de Brotonne (Figura 2.18), a empresa Freyssinet começou a desenvolver cabos feitos com "strands" paralelos pré-tensionados, com 15 mm de diâmetro.



Figura 2.18 Ponte de Brotonne, França

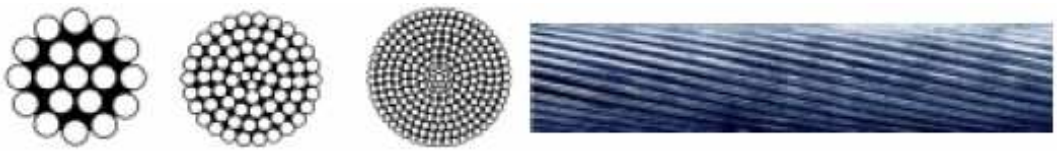


Figura 2.19 "Spiral strands"

O facto de os "strands" serem colocados independentemente e paralelos, e protegidos com um produto flexível limita as tensões de flexão. Isto levou à ideia de fazer cabos com "strands" paralelos e individualmente protegidos, desenvolvida pela Freyssinet. Os vazios entre os fios dos "strands" são preenchidos com cera epoxi, e o "strand" é protegido com polietileno extrudido de alta densidade. Por sua vez, as ancoragens são protegidas localmente com uma injecção de cera epoxi.

Esta solução tem a grande vantagem de permitir uma instalação e tensionamento individual dos "strands" através do método de isotensão. Trata-se de um método que permite que todos os "strands" quando tensionados individualmente, apresentem a mesma tensão.

Por fim, refere-se que a VSL desenvolveu uma solução alternativa com "strands" individualmente protegidos, envolvidos por uma bainha, e injectada calda de cimento, produzindo excelente protecção, mas sem algumas das vantagens da instalação de "strands" individuais.

Quanto às propriedades mecânicas (Caetano, 2000), e comparando com o aço estrutural, a resistência em tracção de um tirante é muito maior, embora tenha menor ductilidade. Nas "spiral strands" (Figura 2.19) a tensão resistente em tracção localiza-se no intervalo de 1500 a 1600MPa. No caso dos "parallel wire strands", a força varia entre 1570 a 1765MPa. Para o tipo "locked-coil strands" a resistência em tracção é ligeiramente menor. Quanto ao Módulo de Young, para o tipo "spiral strands" tem-se 160 GPa, para "locked-coil strands" 180GPa, e para "parallel wire strands" 190 GPa. De referir que novos materiais, com características mecânicas interessantes, têm vindo a ser introduzidos, nomeadamente materiais compósitos, como os CFRP, que surgiram nos anos 80. Apresentam algumas vantagens: peso baixo (cerca de 1/3 do peso do aço); resistência elevada (ronda os 2700MPa) e elevada resistência à corrosão. As desvantagens são essencialmente o baixo Módulo de Young, 160MPa e elevado custo.

Os tirantes são os elementos estruturais principais num projecto de uma ponte atirantada. O desempenho da ponte está condicionado pela boa "performance" dos tirantes, que depende da utilização do material adequado, e qualidade de fabrico, devendo satisfazer em particular aos seguintes requerimentos (Ohashi, 1991): resistência a cargas muito elevadas; módulo de Young elevado; uma secção transversal muito compacta, com poucos ou inexistentes vazios; resistência elevada à fadiga; garantir boa protecção à corrosão; facilidades de manejo e instalação; baixo custo. Assim, cabe ao projectista proceder a uma análise detalhada dos possíveis fenómenos intervenientes no desempenho destes elementos estruturais, escolhendo a melhor solução para o tipo de cabo a utilizar.

2.1.4 Vibrações em Tirantes

Os tirantes, sendo elementos muito flexíveis e com baixos amortecimentos intrínsecos, são muito propensos a vibrações. Considerando que a típica frequência natural dos cabos está compreendida entre 0,2 a 3 Hz (Ahmed M. et al, 1991), torna-se evidente que durante a sua vida útil haverá uma enorme quantidade de ciclos de variação de tensões, e os tirantes poderão sofrer danos por fadiga num curto período de tempo quando as amplitudes de oscilação se tornam significativas. Testes de fadiga (ver Capítulo 7), realizados com milhões de ciclos de carregamento, permitiram concluir que

o limite de resistência de um tirante pode ser atingido em menos de um mês para uma vibração constante de 1.0Hz (Abdel-Ghaffar, A.M. et al, 1991).

A evolução tecnológica conjugada com o desenvolvimento de métodos numéricos de análise permitiram tirar vantagem do melhoramento das propriedades de alguns materiais e analisar estruturas cada vez mais complexas.

Um dos desafios levantados pelo estudo das pontes atirantadas é a modelação dinâmica da resposta a diferentes acções. Estas pontes são sistemas altamente hiperestáticos, de elevada complexidade, dotados de uma grande flexibilidade e coeficientes de amortecimento baixos. A elevada flexibilidade resulta dos grandes vãos que estas estruturas podem ter, de que é maior exemplo a ponte em Suzhou-Nantong (China), com aproximadamente 1088m de vão, cuja conclusão está prevista para 2009.

Associado à flexibilidade, está o acentuado comportamento não-linear geométrico do tabuleiro e torres, e ainda predominantemente, dos tirantes. Estas características, combinadas com a diversidade e complexidade das cargas actuantes, são responsáveis pelas enormes exigências de análise e explicam porque é que a análise dinâmica tem sido incorporada como um procedimento regular e fundamental no projecto de pontes atirantadas.

No que respeita à modelação das acções, são consideradas especificamente nesta dissertação a que originam vibração de tirantes. Neste contexto, procede-se à identificação dos vários fenómenos possíveis. Estes podem ser divididos em dois grupos fundamentais, um associado às acções directas induzidas pela acção do vento, ou pela acção combinada do vento e da chuva, referindo-se o outro às acções indirectas, resultantes da oscilação das ancoragens, em consequência da vibração do tabuleiro e/ou das torres por efeito de diversos tipos de agentes ou acções exteriores. Podem destacar-se como agentes exteriores que podem constituir importantes fontes de excitação em tirantes de pontes os relacionados com as condições climatéricas (vento, chuva, efeito de combinação chuva-vento), o tráfego rodoviário e ferroviário, os sismos e as acções pedonais.

2.1.4.1 Acção Directa do Vento

A estabilidade ao vento é um aspecto crucial a ter em conta quando se projectam pontes atirantadas. O colapso da ponte de Tacoma Narrows em 1940 constitui um marco na consciencialização da importância do estudo dos fenómenos decorrentes da acção do vento em estruturas flexíveis.

Actualmente estão identificados os seguintes fenómenos aeroelásticos como principais mecanismos na vibração de cabos induzidos pelo vento: libertação de vórtices - "lock-in"; galope; interferência aerodinâmica; acção combinada vento – chuva.
Apresentam-se nas secções seguintes as principais características destes fenómenos, baseadas no trabalho de síntese de Caetano (2000).

2.1.4.1.1 Libertação de Vórtices – "lock-in"

Este fenómeno é causado pela formação de vórtices na esteira do escoamento, em consequência do fluxo de ar em torno do tirante, Figura 2.20.

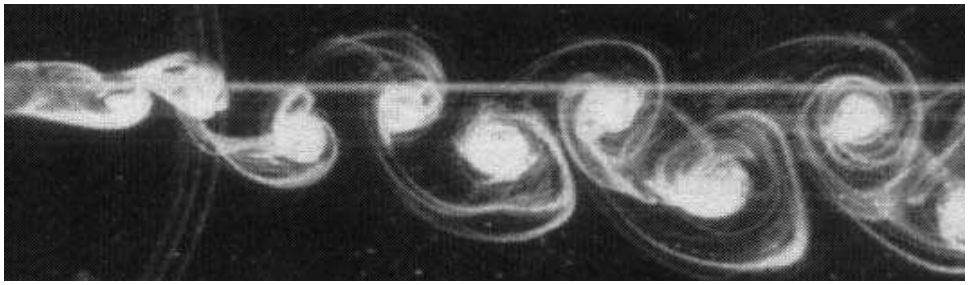


Figura 2.20 Libertação de vórtices na esteira do escoamento em torno de um elemento com a forma cilíndrica (Simiu et al, 1996).

Ocorre geralmente em tirantes mais curtos da ponte. Este fenómeno está detalhadamente descrito por Simiu e Scanlan (1996). Ao mergulhar um cabo, de secção circular, num escoamento com velocidade média U duas situações distintas podem ocorrer. Num primeiro caso, para velocidades reduzidas o escoamento é dominado pelas forças de viscosidade, e o fluxo decorre em contacto permanente com a superfície do cabo. Num segundo caso, e para velocidades progressivamente mais elevadas, o fluxo em torno do cabo tende a afastar-se, originando a formação alternada de vórtices na esteira do escoamento. Para caracterizar o escoamento, utiliza-se o número de Reynolds

(*Re*), um parâmetro adimensional que expressa a magnitude relativa entre as forças de inércia e de viscosidade,

$$\mathrm{Re} = \frac{U \cdot D}{\nu} \qquad \textbf{(2.1)}$$

sendo U a velocidade média do vento, D o diâmetro do tirante e ν a viscosidade cinemática do ar ($0.15\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$ a 20ºC).

De acordo com Simiu e Scanlan (1996), para números reduzidos de Reynolds ($\mathrm{Re} \approx 1$) as forças de viscosidade são as predominantes no escoamento e portanto o escoamento em torno da secção permanece colado na sua periferia (Figura 2.21a). À medida que a velocidade de escoamento aumenta, o numero de Reynolds aumenta e para $\mathrm{Re} \approx 20$, o escoamento "afasta-se" do cabo criando dois vórtices simétricos na zona a jusante da secção circular (Figura 2.21b). Para valores de *Re* entre 30 e 5000 verifica-se a formação alternada de vórtices, designada por trilho de vórtices de Von Karman, (Figura 2.21c). Para um número de Reynolds crescente, de 5000 a 200000 (Figura 2.21d), não se formam vórtices, escoamento do tipo turbulento. Finalmente para números de Reynolds elevados ($\mathrm{Re} \geq 200000$) o escoamento processa-se sem turbulência, (Figura 2.21e).

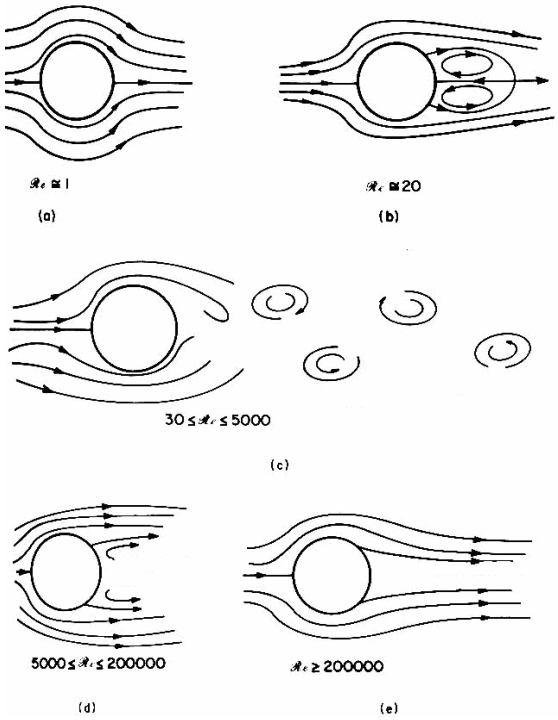


Figura 2.21 Configurações de escoamento sobre uma secção circular variando com o número de Reynolds

A formação cíclica de vórtices pode ser descrita por um parâmetro adimensional, o número de Strouhal, *S*, definido por:

$$S = \frac{N_S \cdot D}{U} \qquad \textbf{(2.2)}$$

em que N_s representa a frequência de ciclos completos na libertação de vórtices.

Um aspecto importante associado à existência de vórtices no escoamento do fluido é a geração de uma força transversal caracterizada por uma frequência N_s que origina oscilações transversais. No caso da frequência de oscilação do tirante coincidir com N_s, gera-se um fenómeno de interacção fluído-estrutura, que se designa por efeito de "lock-in" (Caetano, 2000) e se traduz pela manutenção da frequência de libertação de vórtices constante para uma gama de velocidade do vento, ocorrendo simultaneamente uma amplificação das vibrações. Este efeito pode ser interpretado como um fenómeno de sincronização, e constitui na realidade um fenómeno de instabilidade caracterizado por amplitudes de vibração limitadas num intervalo de velocidades de vento específico.

A existência de um escoamento turbulento é desfavorável ao aparecimento do efeito de "lock-in". Assim, é nos escoamentos uniformes que este fenómeno é mais gravoso.

Consegue-se, de forma simplificada, avaliar a amplitude de oscilação associada ao fenómeno de sincronização, utilizando um modelo simples definido através do número de Scruton, $S_{c,}$ e do número de Strouhal. O numero de Scruton é um parâmetro adimensional definido por

$$S_c = \frac{m \cdot \xi}{\rho \cdot D^2} \qquad \textbf{(2.3)}$$

sendo *m* massa por unidade de comprimento, ξ o coeficiente de amortecimento, *D* o diâmetro do tirante e ρ a densidade do ar ($1{,}225 Kg/m^3$) (Irwin et al, 1999).

A amplitude de oscilação, expressa adimensionalmente através de $\frac{y_0}{D}$, é dada por (Griffin, O. *et al*, 1975)

$$\frac{y_o}{D} = \frac{1.29}{\left[1 + 0{,}43\left(2.\pi.S^2.S_c\right)\right]^{3.35}} \qquad \textbf{(2.4)}$$

2.1.4.1.2 Galope

Este tipo de instabilidade é consequência de um distúrbio do escoamento do vento em torno dos tirantes, originando normalmente oscilações transversais ao escoamento que ocorrem com uma frequência próxima de uma frequência natural do tirante. Acontece para o caso de secções não simétricas, ou em secções simétricas cuja configuração é alterada pela deposição de gelo nos tirantes e/ou presença de regatos de água provenientes da chuva.

O fenómeno de galope é explicado considerando que um corpo em oscilação num escoamento modifica a direcção aparente das forças que lhe são aplicadas, dando origem a duas componentes de actuação, uma na direcção do movimento, designada de força de arrastamento $F_D(\alpha)$, e a outra perpendicular à primeira, com a designação de força de sustentação $F_L(\alpha)$. F_D e F_L são funções do ângulo relativo de incidência do escoamento α (Figura 2.22), sendo definidas por

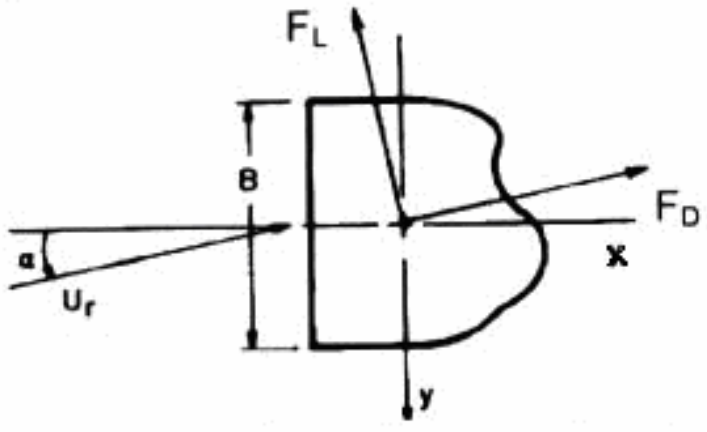


Figura 2.22 Forças aplicadas num corpo não simétrico durante um escoamento

$$F_D(\alpha) = \frac{1}{2}\rho U_r^2 B C_D(\alpha) \quad \textbf{(2.5)}$$

$$F_L(\alpha) = \frac{1}{2}\rho U_r^2 B C_L(\alpha) \quad \textbf{(2.6)}$$

em que U_r representa a velocidade média relativa do deslocamento e $C_D(\alpha)$ e $C_L(\alpha)$, representam respectivamente, o coeficiente de arrastamento e o coeficiente de sustentação. A expressão do equilíbrio dinâmico do corpo na direcção *x* traduz-se no aparecimento de uma força de amortecimento viscoso, cuja constante é definida por (Caetano, 2000):

$$d = 2.m.\omega.\xi + \frac{1}{2}.\rho.U.B.\left(\frac{dC_L}{d\alpha} + C_D\right)_{\alpha=0} \quad \textbf{(2.7)}$$

O primeiro termo desta expressão representa a componente de amortecimento mecânico, enquanto que o segundo termo traduz a componente de amortecimento aerodinâmico. Globalmente, a força de amortecimento pode ser negativa e, portanto, instabilizadora, dependendo dos valores de coeficientes $C_D(\alpha)$, $C_L(\alpha)$ e $dC_L/d\alpha$. O critério para a ocorrência de galope, estabelecido por Den Hartog (1932) corresponde à ocorrência de um amortecimento aerodinâmico negativo, situação em que

$$\left(\frac{dC_L}{d\alpha} + C_D\right) < 0 \quad \textbf{(2.8)}$$

esta condição não se manifesta numa secção simétrica, para a qual $\frac{dC_L}{d\alpha} = 0$. Mas pode ocorrer para o caso de secções não simétricas.

Embora aparentemente semelhante ao fenómeno de sincronização, descrito na secção 2.1.4.1.1, o galope tem características completamente distintas. Enquanto que a sincronização é um fenómeno de amplificação das oscilações que ocorre em intervalos específicos da velocidade média do vento e se manifesta com amplitudes relativamente reduzidas, o galope ocorre para qualquer velocidade do vento acima de um determinado valor crítico U_{cr}, definido por

$$U_{cr} = U_{CG} = c.f.D.\sqrt{S_C} \quad \textbf{(2.9)}$$

em que *f* representa a frequência de oscilação do tirante e c é uma constante dimensional, e traduz-se em oscilações de amplitude muito elevada em pontes atirantadas.

2.1.4.1.3 Interferência Aerodinâmica

A presença de equipamentos de construção nas imediações de um tirante ou no caso de pontes dotadas de tirantes muito próximos (Figura 2.10), pode originar fenómenos diversos de oscilação, tais como: sincronização, galope ou galope de interferência.

No caso do agrupamento em associação de dois ou mais tirantes, com espaçamentos da ordem de poucos diâmetros, o galope pode ocorrer no tirante que se encontra por detrás do tirante ou grupo de tirantes situados na direcção do vento, em resultado da formação de vórtices na esteira do escoamento. Por sua vez a vibração deste último altera o escoamento em torno do primeiro tirante ou grupo de tirantes, originando assim uma interacção entre os tirantes.

O estudo deste fenómeno, levou à definição de intervalos de espaçamentos longitudinais e transversais para os quais ocorrem instabilidade. De acordo com (Tanaka, 2003), a estabilidade de grupos de tirantes está assegurada quando as configurações definidas pela Figura 2.23, o afastamento medido na direcção x e y se situa nos intervalos $1<x/D<4$ e $-2<y/D<2$.

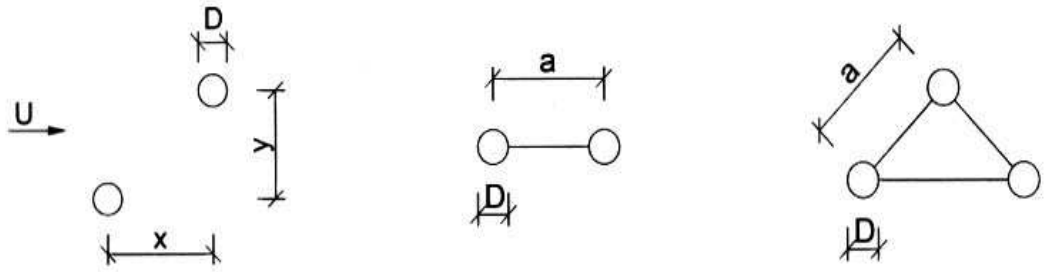


Figura 2.23 Esquemas de associação de tirantes em pontes

2.1.4.1.4 Acção Combinada Vento – Chuva

Um outro tipo de fenómeno de oscilação dos tirantes tem origem na acção combinada do vento e da chuva. Esta instabilidade tende a ocorrer para velocidades do vento da ordem dos 6 a 18 m/s (Tanaka, 2003), com direcção predominante de 20º a 60º com o eixo longitudinal da ponte, intensidade de turbulência baixa, em locais de baixo relevo, ocorrência de chuva com intensidade baixa a elevada, tirantes com frequências fundamentais na gama de 0.6 a 3.0Hz, com amortecimento baixo, declinando no sentido de actuação do vento com inclinações de 20º a 45º, com diâmetro variável de 140 a 220mm e superfície lisa da bainha. Observações de campo e ensaios em túnel de vento (Figura 2.24) permitiram ainda identificar, valores do número de Reynolds entre 70000 e 200000.

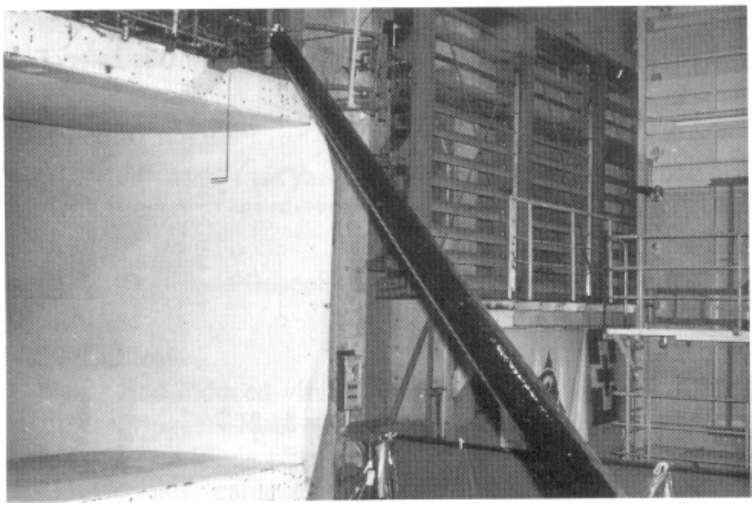


Figura 2.24 Ensaios em túnel de vento para estudo do fenómeno de oscilação induzido pela acção combinada do vento e da chuva

Este complexo fenómeno pode ser entendido em duas fases. Em primeiro lugar, mediante a acção combinada de vento e chuva, ambos com intensidade moderada, formam-se regatos de água na superfície superior e inferior do tirante (Figura 2.25). Estes regatos surgem em resultado do equilíbrio entre forças gravíticas, forças aerodinâmicas e da própria capilaridade da superfície. Consequentemente ocorre a alteração da secção transversal do tirante traduzindo-se numa modificação das forças aerodinâmicas a que está submetida e determina em particular a variação dos coeficientes de arrastamento e sustentação referidos na secção 2.1.4.1.2, podendo levar a uma situação de instabilidade do tirante por galope, se ocorrer a condição:

$$\left(\frac{dC_L}{d\alpha} + C_D\right) < 0 \qquad \textbf{(2.10)}$$

Numa segunda fase, a oscilação do tirante resultante da instabilidade por galope motiva a oscilação circunferencial do regato de água da superfície superior, facto que pode tender a amplificar as vibrações do próprio tirante. Yamaguchi (1990) desenvolveu um modelo analítico simplificado de análise de instabilidade de um tirante, com base na descrição do movimento circunferencial do regato superior, de acordo com a representação da Figura 2.25.

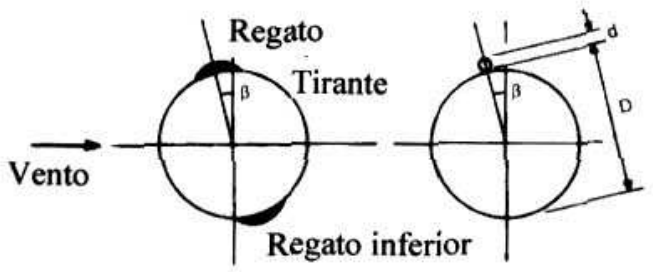


Figura 2.25 Regatos de água nas superfícies superior e inferior do tirante

2.1.4.2 Acção Indirecta

Os agentes exteriores como o vento, os sismos, as acções rodo ou ferroviárias e as acções pedonais constituem acções dinâmicas sobre pontes atirantadas, produzindo oscilação do tabuleiro e torres, as quais são comunicadas aos tirantes através das ancoragens (Figura 2.26). As oscilações do tabuleiro e/ou torres podem ser de tal ordem, que originam amplificações significativas nos tirantes, dando origem a fenómenos de oscilação identificados como de excitação externa ou excitação paramétrica.

Embora estes fenómenos de vibração de tirantes estejam interligados e aconteçam simultaneamente, é comum, de forma a um melhor entendimento destes, proceder-se ao seu estudo em separado. Assim, associa-se à componente de oscilação transversal à corda o fenómeno da excitação externa, sendo que a excitação paramétrica está relacionada com a oscilação de componente longitudinal à corda do tirante.

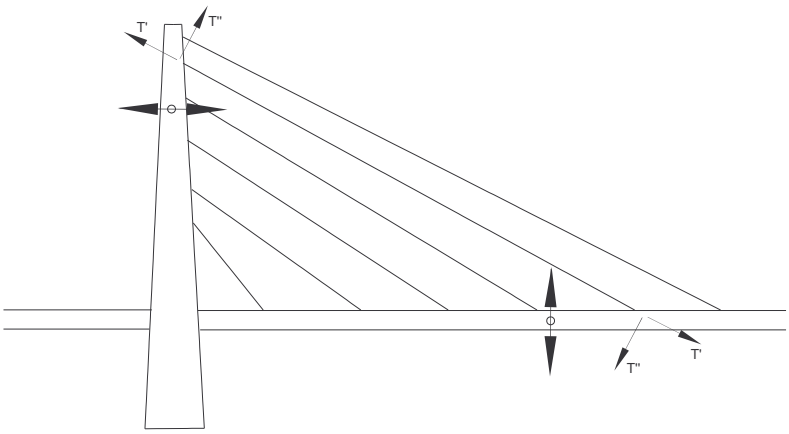


Figura 2.26 Excitação externa e excitação paramétrica dos tirantes devido ao movimento do tabuleiro e torres

2.1.4.2.1 Excitação Externa

A resposta de um tirante excitado por um movimento periódico, ortogonal à corda numa das ancoragens (Figura 2.27), caracteriza-se por uma oscilação com a mesma frequência da excitação. Na situação de ressonância, i.e., quando a frequência de excitação coincide com a frequência do tirante, a resposta atinge o seu valor máximo, dado por

$$|A| = \frac{2 \cdot X_B}{\delta \cdot r} \qquad \textbf{(2.11)}$$

Em que δ é o decremento logarítmico do tirante, $\delta = 2 \cdot \pi \cdot \xi$, ξ é o coeficiente de amortecimento do tirante (0,1-0,5%), X_B é amplitude da excitação sinusoidal. Sendo tipicamente muito baixo o valor do decremento logarítmico, facilmente se comprende que a amplitude de oscilação do tirante é da ordem de 200 a 300 vezes a amplitude de oscilação da ancoragem no caso de ser $\xi = 0.1\%$ a 0.5%. Na realidade, amplitudes desta ordem de grandeza não ocorrem, dada a não-linearidade de comportamento do tirante. Contudo, esta mesma não-linearidade, reflecte-se no aparecimento de ressonâncias para frequências de valor igual a múltiplos ou sub-múltiplos da frequência do tirante. A resposta em correspondência com tais frequências é, apesar de tudo inferior à resposta na frequência fundamental do tirante (Caetano, 2000).

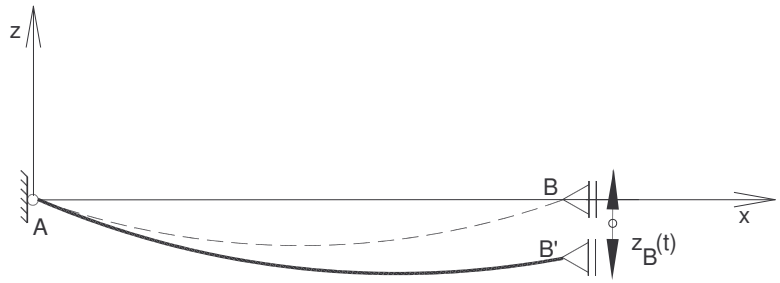


Figura 2.27 Tirante sujeito a excitação transversal à corda ($z_B(t) = Z_B \cdot \sin(2.\omega.t)$)

2.1.4.2.2 Excitação Paramétrica

Tal como na situação da excitação ortogonal à direcção do tirante, a excitação longitudinal origina um comportamento não linear, de que resulta a amplificação da resposta quando a frequência de excitação for múltiplo inteiro ou fraccionário da frequência fundamental ω do tirante: $\frac{1}{2}\cdot\omega$, $\frac{1}{3}\cdot\omega$, $2\cdot\omega$ e $3\cdot\omega$. O estudo simplificado deste fenómeno, designado por excitação paramétrica, pode ser efectuado recorrendo à equação de Mathieu-Hill modificadas (Nayfeh & Mook, 1979). A esta equação estão associadas zonas de instabilidade correspondentes a intervalos de frequência e amplitudes de excitação para os quais ocorre oscilação. De entre as várias regiões de instabilidade, considera-se que é particularmente gravosa a correspondente a ser a frequência de oscilação da ancoragem, no sentido do eixo da corda, dupla da frequência natural do tirante.

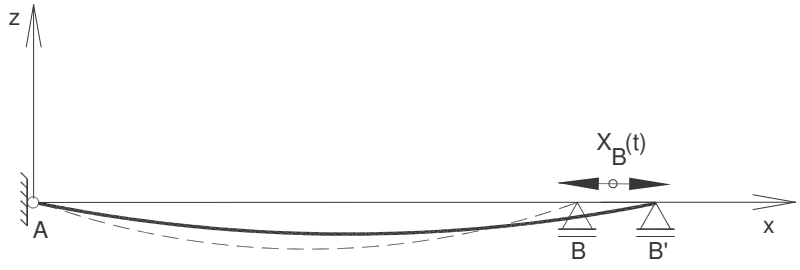


Figura 2.28 Tirante sujeito a excitação longitudinal à corda ($\times_B(t) = X_B \cdot \sin(2.\omega.t)$)

A oscilação do tabuleiro tem, em geral, maior amplitude do que a das torres. Assim, para pontes de tirantes cujo vão principal se aproxima dos 900m parece bastante

provável a ocorrência de amplitudes de oscilação do tabuleiro e/ou torres de vários centímetros (Pinto da Costa, 1993). Se oscilações com tais amplitudes excitarem os tirantes nos intervalos críticos, são de esperar amplitudes de resposta de vários metros.

CAPÍTULO 3

ANÁLISE ESTÁTICA DE TIRANTES

3.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo procedeu-se ao estudo do comportamento estrutural de um tirante pré-tensionado sob acção do peso próprio tendo por base uma modelação analítica baseada na equação da catenária elástica, da parábola elástica, e ainda uma modelação numérica através de elementos finitos. Na análise comparativa usando estas três aproximações definiram-se como parâmetros de estudo a flecha *d*, o comprimento indeformado L_0 do tirante e o seu comprimento deformado L_f.

Os estudos realizados incidiram sobre um conjunto de 7 tirantes: 3 da Ponte Vasco da Gama, 2 da Ponte do Guadiana (Portugal), 1 da Ponte da Normandia (França) e 1 da Ponte Ikuchi (Japão), com diversos comprimentos, inclinações e rigidezes axiais.

3.1.1 Catenária Elástica

Considerou-se que o tirante tem um comportamento elástico e não tem rigidez à flexão, tendo em conta o seu baixo valor em relação à rigidez axial EA_0 (os efeitos de flexão podem, no entanto, ser quantificados localmente para o comportamento estático nas ancoragens ou integrados num modelo dinâmico de forma simplificada).

O tirante *AB* representado na Figura 3.1 está em equilíbrio sob acção do seu peso próprio *W(s)*.

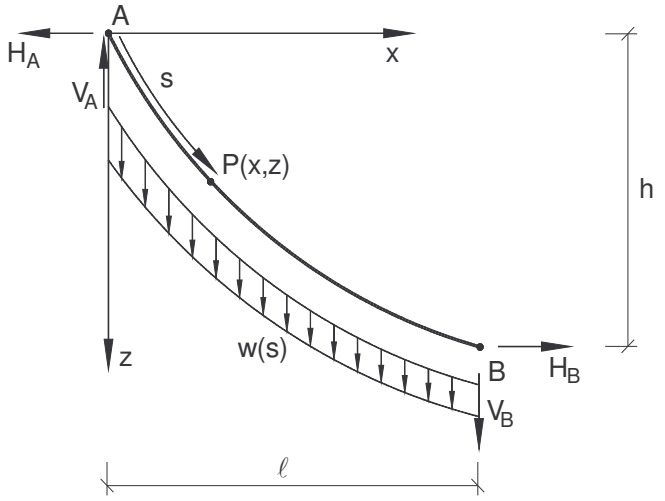


Figura 3.1 Modelo simplificado de um tirante sujeito à acção do peso próprio e a uma força axial

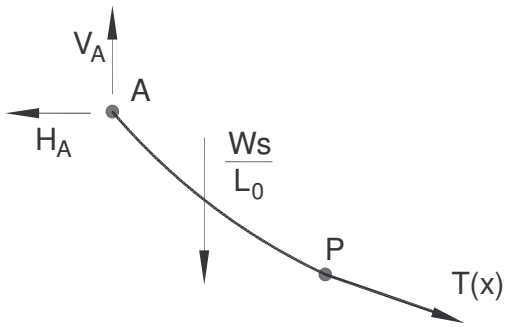


Figura 3.2 Forças do segmento AP em equilíbrio

Escrevendo as equações de equilíbrio do troço *AP* representado na Figura 3.2, em ambas as direcções do plano, obtém-se:

$$T \cdot \frac{dx}{ds} = H_A \tag{3.1}$$

$$T \cdot \frac{dz}{ds} = V_A - \frac{W \cdot s}{L_0} \tag{3.2}$$

Nestas equações, L_0 representa o comprimento do cabo indeformado, T é o esforço axial na secção P do tirante (coordenada s) e W representa o peso do tirante, definido por $W = m.g.L_0$, onde m é a massa por unidade de comprimento e g a aceleração da gravidade.

A solução das equações diferenciais (3.1) e (3.2) define a chamada catenária, e é dada, de acordo com Irvine (1981) por

$$x(s) = \frac{H_A \cdot s}{E \cdot A_o} + \frac{H_A \cdot L_o}{W} \cdot \left[\sinh^{-1}\left(\frac{V_A}{H_A}\right) - \sinh^{-1}\left(\frac{V_A - W \cdot s / L_o}{H_A}\right) \right] \tag{3.3}$$

$$z(s) = \frac{W \cdot s}{E \cdot A_o}\left(\frac{V_A}{W} - \frac{s}{2 \cdot L_o}\right) + \frac{H_A \cdot L_o}{W}\left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{V_A}{H_A}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{V_A - W \cdot s / L_o}{H_A}\right)^2} \right\} \tag{3.4}$$

$$T(s) = \sqrt{H_A{}^2 + (V_A - \frac{W \cdot s}{L_o})^2} \tag{3.5}$$

Nestas equações, H_A e V_A representam as reacções de apoio no ponto A.

A determinação das reacções H_A e V_A em (3.3) e (3.4) é feita mediante a introdução das condições fronteira: $s = 0$, $x = 0$ e $z = 0$; $s = L_0$, $x = \ell$ e $z = h$.

$$\ell = \frac{H_A \cdot L_o}{EA_o} + \frac{H_A \cdot L_o}{W} \cdot \left[\sinh^{-1}\left(\frac{V_A}{H_A}\right) - \sinh^{-1}\left(\frac{V_A - W}{H_A}\right) \right] \tag{3.6}$$

$$h = \frac{W \cdot L_o}{E \cdot A_o}\left(\frac{V_A}{W} - \frac{1}{2}\right) + \frac{H_A \cdot L_o}{W}\left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{V_A}{H_A}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{V_A - W}{H_A}\right)^2} \right\} \tag{3.7}$$

O cálculo deste sistema de equações foi realizado com o auxílio de um programa de cálculo, MatLab, tomando como referência o ponto A e o $T_{máx}$ dado.

A força máxima instalada no tirante ocorre no ponto mais alto A, sendo dada por:

$$T_A = \sqrt{H_A{}^2 + V_A{}^2} \tag{3.8}$$

A flecha (d) do tirante, definida como sendo a máxima distância vertical entre a corda (recta que une os dois pontos extremos do cabo) e o cabo indeformado, é determinada através da diferença entre a coordenada z num ponto S_s (coordenada Lagrangeana, ver equação (3.9)) e a coordenada z da corda para a abcissa do ponto S_s (equação (3.10)) (Irvine, 1981).

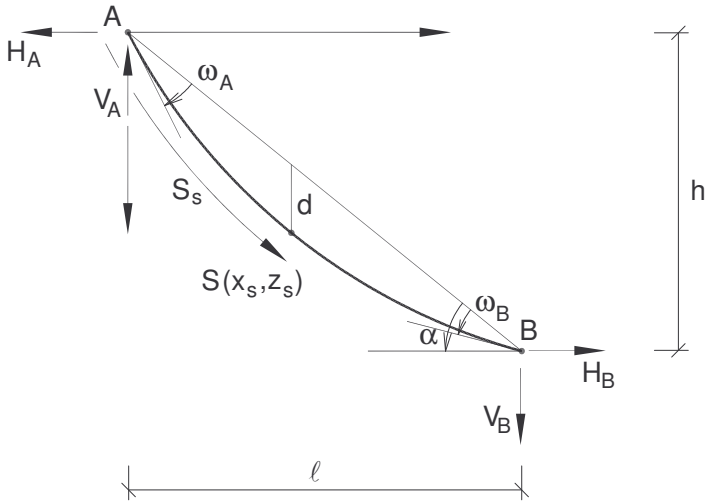


Figura 3.3 Catenária elástica

$$S_S = \frac{L_o}{W}\left(V_A - h\frac{H_A}{l}\right) \tag{3.9}$$

$$d = z(S_S) - \frac{h}{l}x(S_S) \tag{3.10}$$

O comprimento do tirante deformado L_f, pode ser obtido por (Irvine, 1981):

$$\begin{aligned} L_f = L_o + \frac{H^2 \cdot L_o}{2 \cdot W \cdot E \cdot A_o} \cdot \left[\frac{V_A}{H_A} \cdot \sqrt{1+\left(\frac{V_A}{H_A}\right)^2} + \ln\left(\frac{V_A}{H_A} + \sqrt{1+\left(\frac{V_A}{H_A}\right)^2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{V_A - W}{H_A} \cdot \sqrt{1+\left(\frac{V_A - W}{H_A}\right)^2} - \ln\left(\frac{V_A - W}{H_A} + \sqrt{1+\left(\frac{V_A - W}{H_A}\right)^2} \right) \right. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Foi também determinado um parâmetro λ^2, designado por parâmetro de Irvine, que constitui uma medida das características geométricas e de deformabilidade do tirante, e é definido por:

$$\lambda^2 = \left(\frac{m \cdot g \cdot L}{T}\right)^2 \cdot \frac{L}{\frac{T \cdot L_e}{E \cdot A_0}} \tag{3.12}$$

em que os parâmetros L e T representam o comprimento da corda e a componente da força no tirante na direcção da corda, respectivamente. L_e representa um comprimento virtual do tirante dado por:

$$L_e = \int_0^L \left(\frac{ds}{dx}\right)^3 dx \approx L \cdot \left\{1 + 8 \cdot \left(\frac{d}{L}\right)^2\right\} \tag{3.13}$$

Os valores típicos de λ^2 no caso de pontes atirantadas situam-se no intervalo de 0 a 1, enquanto que para pontes suspensas λ^2 são habitualmente superiores a 1. Assim, valores baixos de λ^2 traduzem tirantes bastante tensionados e com flechas relativamente pequenas, cuja deformação é devida essencialmente à extensão do tirante, enquanto que valores elevados são típicos de tirantes pouco tensionados e com elevadas flechas, e cuja deformação é predominantemente de natureza geométrica, exibindo portanto uma relativa inextensibilidade.

Tendo por base as fórmulas (3.3) a (3.13) e utilizando o software MatLab para a resolução das equações implícitas, determinaram-se as características de tensão e deformação do conjunto de tirantes referidos na secção 3.1. Apresentam-se na Tabela 3.1 os principais resultados obtidos.

Tabela 3.1 Características geométricas e mecânicas dos tirantes estudados

Tirante	*Area* (cm^2)	*EA* (KN)	*m* (Kg/m)	*W* (KN)	ℓ (m)	*h* (m)	α (º)	T_{max} (KN)	*L* (m)	L_0 (m)	L_f (m)
V. Gama											
HC01	46,5	906750	42,9	14,56954	1,81	34,65	87,0098	2045,0	34,697	34,700	34,780
HC24	109,5	2135250	100,1	221,2094	205,96	92,97	24,295	6785,5	225,972	226,584	227,301
HC15	82,5	1608750	74,8	107,9182	126,05	76,52	31,2596	4305,5	147,457	147,752	148,145
Guadiana											
Central 1	77	1501500	72,9	120,1535	152,42	71,94	25,2664	4817,0	168,544	168,992	169,531
Central 16	27	518700	21	10,15232	18,64	45,84	67,8768	2154,0	49,485	49,518	49,722
Normandia											
1	153	2907000	133	574,0231	420	134	17,6952	6850,5	440,858	441,930	442,960
Ikuchi											
1	85,8	1716000	72,5	174,7635	231,35	84,2	20	3502,2	246,2	246,671	247,171

Apresentam-se na Tabela 3.2 os valores obtidos para as variáveis H_A e V_A , bem como a força instalada na ancoragem A:

Tabela 3.2 Reacções na ancoragem *A*

Tirante	T_A (KN)	H_A (KN)	V_A (KN)
V. Gama			
HC01	2045,0	107,3	2042,2
HC24	6785,5	6228,8	2691,8
HC15	4305,5	3706,8	2190,1
Guadiana			
Central 1	4817,0	4377,9	2009,4
Central 16	2154,0	815,8	1993,5
Normandia			
1	6850,5	6605,6	1815,4
Ikuchi			
1	3502,3	3318,9	1118,4

A flecha (*d*) foi determinada através da diferença máxima entre as ordenadas da corda e as ordenadas correspondentes do tirante, obtidas pelas equações (3.3) e (3.4), estando representada na Tabela 3.3. O valor da flecha também pode ser determinado utilizando a equação (3.10).

A Tabela 3.3 resume ainda os valores do parâmetro λ^2, da coordenada *Ss*, e da componente da força *T(Ss)* na direcção da corda calculada através de (3.5) para os tirantes seleccionados.

Tabela 3.3 Parâmetros geométricos e mecânicos dos tirantes estudados

Tirante	S_s(m)	d(m)	T(S_s)=T(KN)	λ^2
V. Gama				
HC01	27,900	0,020	2033,3	0,023
HC24	122,790	0,931	6738,8	0,344
HC15	82,348	0,461	4275,2	0,241
Guadiana				
Central 1	79,966	0,531	4793,6	0,198
Central 16	62,222	0,038	2142,2	0,005
Normandia				
1	224,886	4,685	6778,9	3,085
Ikuchi				
1	126,353	1,553	3474,7	1,254

3.1.2 Parábola Elástica

A dificuldade levantada pela utilização das equações da catenária levou à aproximação pela designada parábola elástica na situação em que a relação flecha/vão seja inferior a 0,12 (Caetano, 2000).

Esta equação é definida em coordenadas cartesianas por (Irvine, 1981):

$$z(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{m.g}{H} \cdot \sec\alpha \cdot x \cdot (l - x) \cdot \left[1 + \frac{\varepsilon}{6} \cdot \left(1 - 2\frac{x}{l} \right) \right] + \frac{h}{l} \cdot x \qquad \textbf{(3.14)}$$

O parâmetro ε, definido por (3.15), tem um valor muito reduzido para o caso de tirantes com flechas também reduzidas.

$$\varepsilon = \frac{m \cdot g \cdot \ell \cdot \sin\alpha}{H} \qquad \textbf{(3.15)}$$

Assim, desprezando-se ε obtém-se uma equação simples da parábola para definir o traçado do tirante,

$$z(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{m.g}{H} \cdot \sec\alpha \cdot x \cdot (l - x) + \frac{h}{l} \cdot x \qquad \textbf{(3.16)}$$

em que a quantidade $T=H.\sec(\alpha)$ representa a força no tirante na secção cuja tangente é paralela à corda.

Usando a aproximação pela parábola, tem-se que a secção em que a força axial T é paralela à corda, ocorre a meio vão (Figura 3.4), sendo a flecha d_p definida por

$$d_p = \frac{m \cdot g \cdot L^2}{8 \cdot T} \qquad \textbf{(3.17)}$$

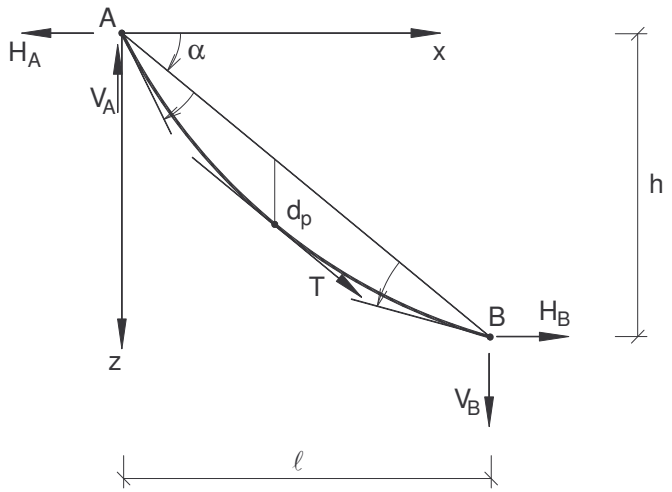


Figura 3.4 Parábola elástica

Nestas condições, o comprimento do cabo deformado L_{fp} pode ser aproximado pela expressão (Irvine, 1981)

$$L_{fp} = L \cdot \left[1 + \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{d_p}{L} \right)^2 - \frac{32}{5} \cdot \left(\frac{d_p}{L} \right)^4 \right] \qquad \textbf{(3.18)}$$

Procedeu-se à comparação dos resultados obtidos da aproximação pela catenária e pela parábola, sistematizando-se na Tabela 3.4 os valores da flecha e dos comprimentos deformados para os tirantes em análise.

Tabela 3.4 Comparação dos resultados das flechas obtidas.
Aproximação pela catenária e pela parábola.

Tirante	Catenária *d* (m)	Parábola *dp* (m)	*erro* (%)	Catenária *Lf* (m)	Parábola *Lfp* (m)	*erro* (%)
V. Gama						
HC01	0,020	0,031	58,1	34,780	34,697	-0,2
HC24	0,931	0,930	-0,2	227,301	225,982	-0,6
HC15	0,461	0,466	1,1	148,145	147,461	-0,5
Guadiana						
Central 1	0,531	0,530	-0,3	169,531	168,548	-0,6
Central 16	0,038	0,029	-22,8	49,722	49,485	-0,5
Normandia						
1	4,685	4,673	-0,3	442,960	440,990	-0,4
Ikuchi						
1	1,553	1,551	-0,1	247,171	246,226	-0,4

Observou-se que o erro na avaliação da flecha para os vários tirantes foi maior para o tirante instalado quase na vertical (HC01), cerca de 60%. O tirante Central 16 da ponte do Guadiana também registou um erro considerável (aprox. 23%). Estes erros podem ser justificados pelo facto da aproximação do traçado do tirante pela parábola ser mais desvantajosa nos casos dos tirantes terem grande inclinação.

Nos restantes tirantes o erro é manifestamente pequeno. Efectivamente, para pontos à mesma altura a hipótese de carregamento uniformemente distribuído associada à parábola elástica é válido.

Assim, quanto à aproximação da deformada do tirante pela parábola, poderá ser utilizada em tirantes com grandes comprimentos e inclinações baixas, permitindo uma

avaliação bastante precisa no estudo do comportamento estático, como é o caso do processo de instalação de tirantes.

Apresentam-se de seguida a comparação das configurações dos cabos para os casos de aproximação por catenária e parábola.

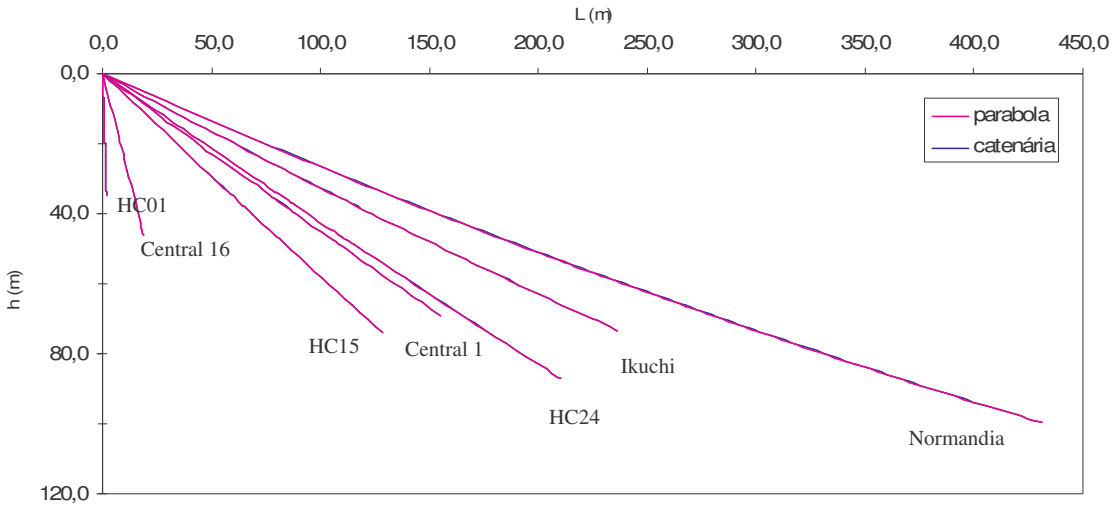


Figura 3.5 Conjunto dos cabos analisados

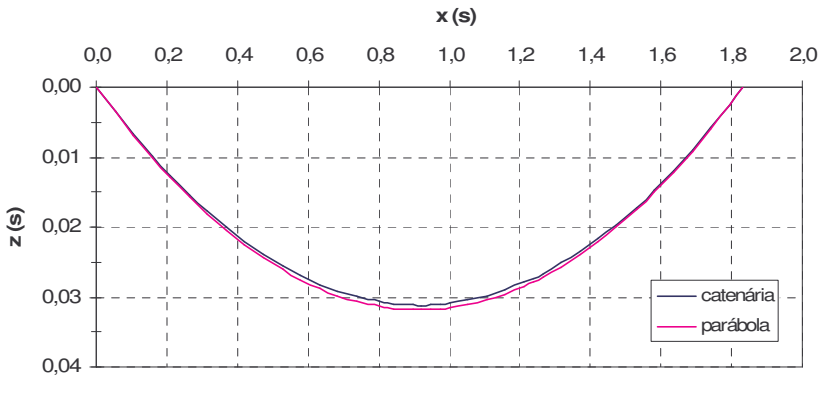


Figura 3.6 Tirante HC01 (deslocamentos em metros)

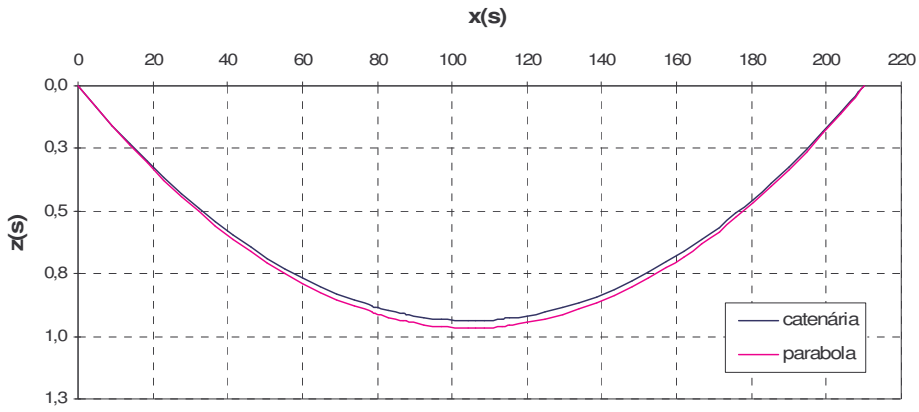


Figura 3.7 Tirante HC24

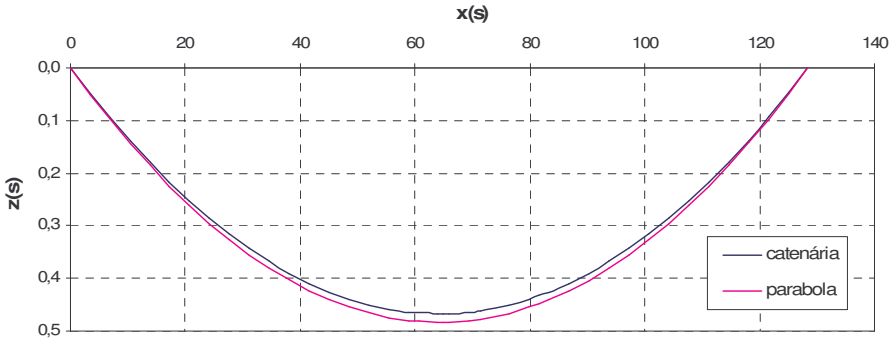


Figura 3.8 Tirante HC015

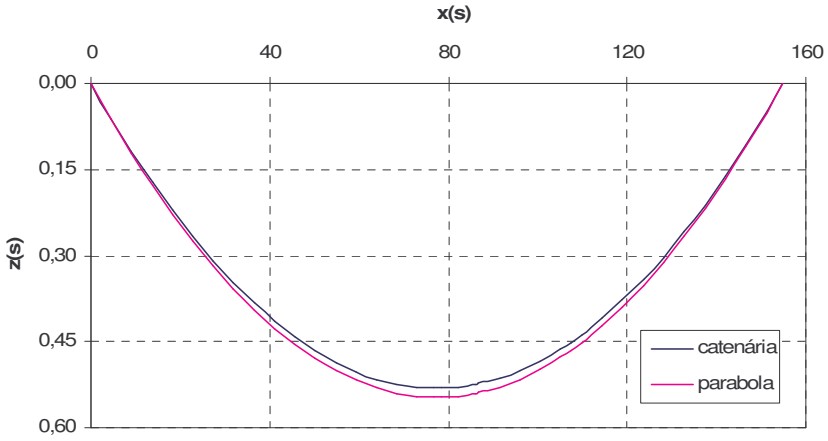


Figura 3.9 Tirante Central1

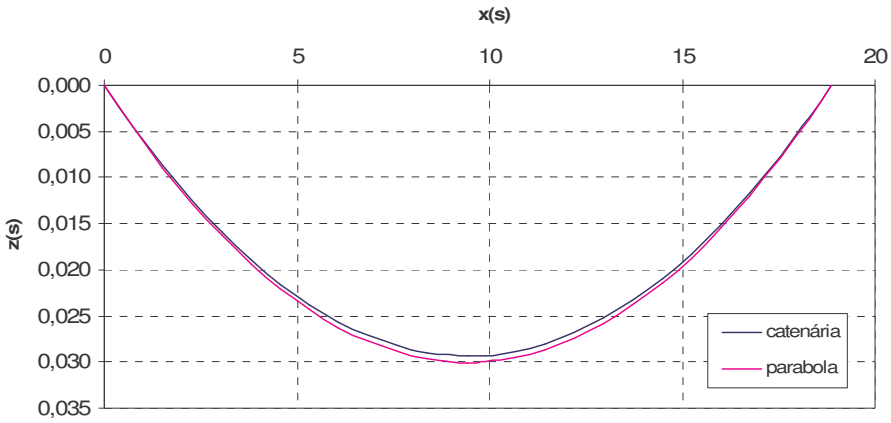


Figura 3.10 Tirante Central16

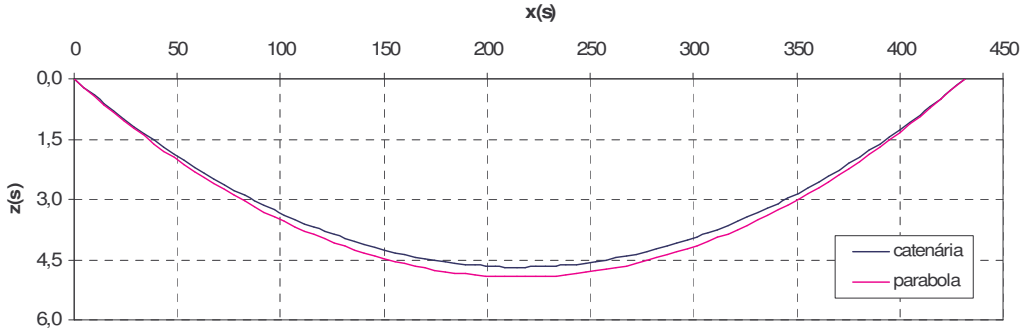


Figura 3.11 Tirante da Ponte da Normandia

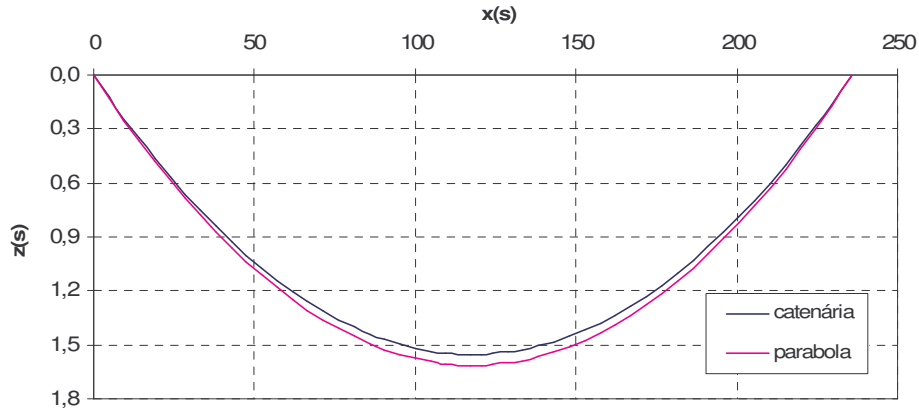


Figura 3.12 Tirante da Ponte Ikuchi

3.1.3 Método de Elementos Finitos (MEF)

O problema de analisar tirantes sob diferentes configurações e condições de carga é muito complexo, uma vez que a relação tensão/extensão para tirantes é altamente não linear e grandes deslocamentos introduzem não linearidades ao nível da geometria.

Uma vez que a flecha é função do estado de tensão instalado no cabo, a sua variação de deformação e, portanto a sua rigidez é também função da tensão. Está-se perante um problema geometricamente não linear, que pode também ser simulado como um efeito materialmente não linear, desde que seja possível definir uma rigidez equivalente que torne compatíveis as variações de alongamento do cabo e da flecha.

Por forma a analisar o problema da não linearidade geométrica foi aplicado o método incremental iterativo de Newton-Raphson, usando para tal um programa comercial de cálculo de elementos finitos, SOLVIA 99.0.

O tirante foi modelado usando elementos de treliça ("truss elements") (Figura 3.13).

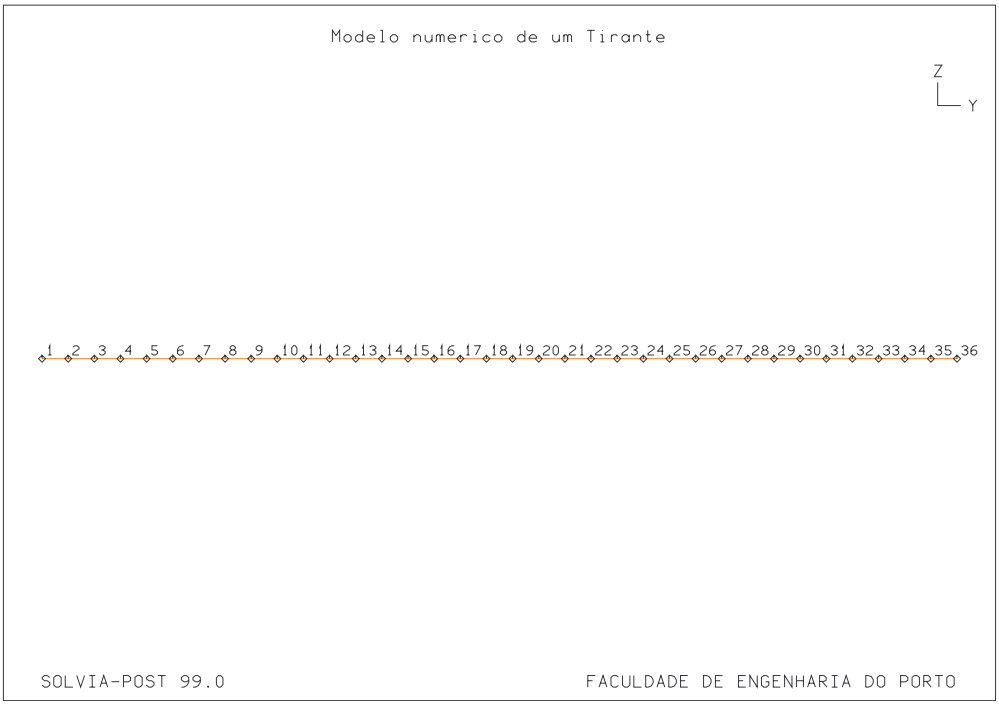


Figura 3.13 Modelação numérica de um Tirante

Cada elemento é caracterizado por ser elástico finito de dois nós, sem rigidez à flexão e com rigidez axial de EA_0/L.

Na realização de um modelo apropriado, por forma a traduzir com uma razoável aproximação o seu comportamento estático, revelou-se importante optimizar o número de elementos que melhor discretizem o tirante, aproximando a distribuição do peso do tirante à realidade. Por isto, e numa primeira fase, procedeu-se à estimativa do número de elementos de barra que poderiam melhor caracterizar o cabo. O critério utilizado foi baseado na determinação até à 5ª frequência natural do tirante discretizado e comparando com os valores teóricos das frequências naturais obtidas, através da lei das cordas vibrantes (equação (3.19)), obter um erro inferior a 1%.

Apresentam-se em seguida os resultados obtidos na determinação das frequências para um modelo constituído por 35 elementos de barra, para quatro comprimentos de um tirante: 20m, 42.43m, 250m e 440m.

Tabela 3.5 Determinação das frequências para um tirante de comprimento 20m e outro de 42,43m

35 barras	L = 20,0 m		Erro (%)	L = 42,43 m		Erro (%)
Frequência (Hz)	MEF (SOLVIA)	Lei Cordas Vibrantes	< 1%	MEF (SOLVIA)	Lei Cordas Vibrantes	< 1%
1ª	5,4406	5,4423	0,031	2,5645	2,565	0,019
2ª	10,8700	10,8845	0,134	5,1238	5,130	0,120
3ª	16,2780	16,3268	0,299	7,6729	7,6958	0,298
4ª	21,6530	21,7691	0,533	10,2064	10,260	0,522
5ª	26,984	27,2113	0,835	12,719	12,820	0,785

Tabela 3.6 Determinação das frequências para um tirante de comprimento 250m e outro de 440m

35 barras	L = 250,0 m		Erro (%)	L = 440,0 m		Erro (%)
Frequência (Hz)	MEF (SOLVIA)	Lei Cordas Vibrantes	< 1%	MEF (SOLVIA)	Lei Cordas Vibrantes	< 1%
1ª	0,4353	0,4354	0,030	0,2473	0,2474	0,031
2ª	0,8696	0,8708	0,131	0,4941	0,4948	0,132
3ª	1,3022	1,3061	0,302	0,7399	0,7421	0,299
4ª	1,7322	1,7415	0,536	0,9842	0,9895	0,534
5ª	2,159	2,1769	0,836	1,227	1,2369	0,831

De acordo com a Lei das Cordas Vibrantes (ver secção 4.2), a frequência natural F_n de ordem n é dada por

$$F_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{m}} \tag{3.19}$$

sendo n o número do harmónico, L o comprimento da corda, T a força instalada no tirante e m a massa por unidade de volume.

Da observação dos resultados obtidos, concluiu-se ser o número mínimo de elementos a utilizar na discretização do tirante levando a erros inferiores a 1% na 5ª frequência natural e estando abaixo de 0.5% até à 3ª frequência.

Apresenta-se na Tabela 3.7 a comparação das flechas determinadas pelo MEF e pelo método da catenária elástica (secção 3.1.1) com base na discretização com 35 elementos. De referir que foi utilizado o modulo de Young E sem considerar o comportamento não linear geométrico.

Tabela 3.7 Comparação dos resultados das flechas obtidas. Aproximação pela catenária elástica e pelo modelo numérico

Tirante	T(Ss)=T (KN)	MEF d_{MEF} (m)	Catenária d (m)	erro (%)
V. Gama				
HC01	2033,3	0,0002	0,0197	99,2
HC24	6738,8	0,7724	0,9313	17,1
HC15	4275,2	0,3400	0,4612	26,3
Guadiana				
Central 1	4793,6	0,4330	0,5313	18,5
Central 16	2142,2	0,0043	0,0379	88,8
Normandia				
1	6778,9	4,2430	4,6849	9,4
Ikuchi				
1	3474,7	1,3690	1,5527	11,8

Verificou-se dos resultados obtidos pelo método de elementos finitos que o erro é maior no caso do cabo HC01, onde a inclinação é elevada e no caso do cabo Central 16, que embora seja um cabo pequeno (cerca de 50m de comprimento) possui também uma inclinação grande. Por hipótese, sendo que a aproximação do MEF foi baseada numa deformada parabólica, o facto de haver grandes inclinações origina maior discrepância de resultados quando comparada com a aproximação da deformada pela catenária.

Apresentam-se de seguida os gráficos que comparam o traçado dos tirantes deformados sob acção do seu peso próprio, pelos três métodos referidos anteriormente: parábola, catenária e MEF.

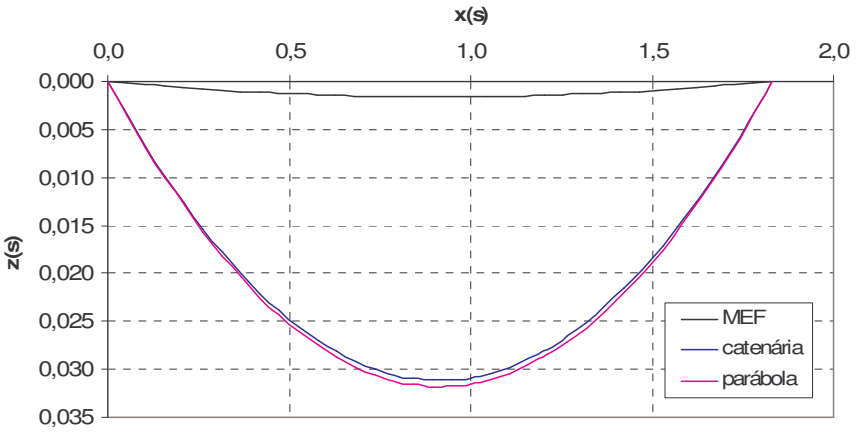


Figura 3.14 Comparação do traçado do tirante HC01.

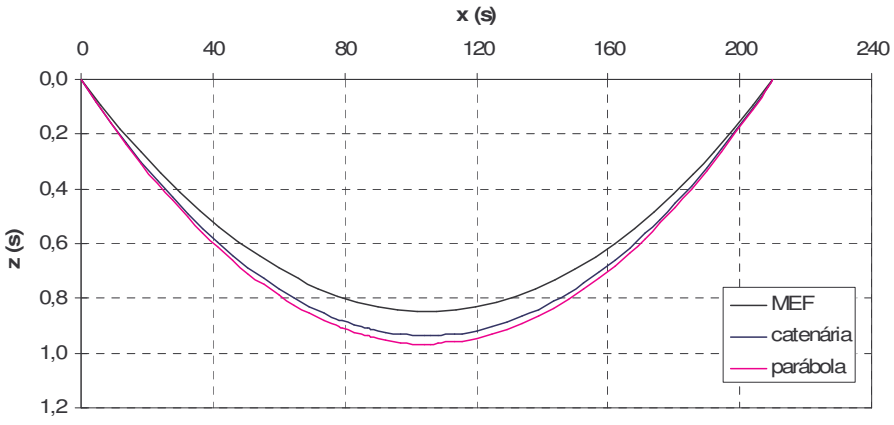


Figura 3.15 Comparação do traçado do tirante HC24.

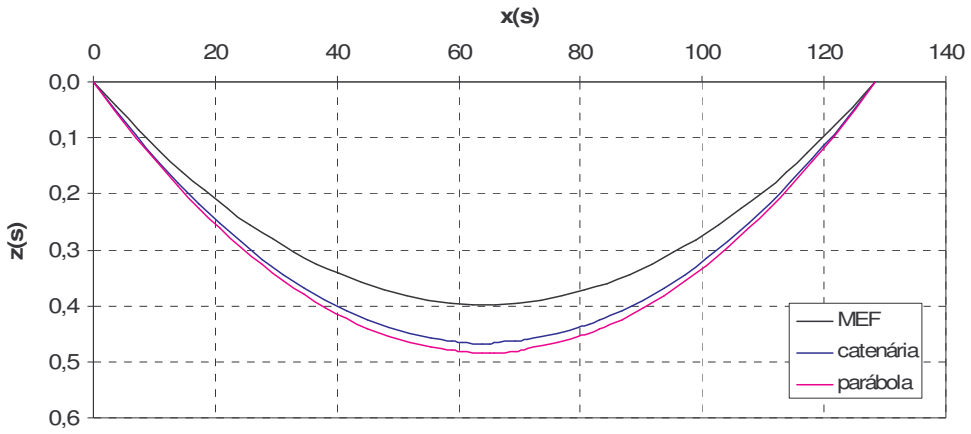


Figura 3.16 Comparação do traçado do tirante HC15

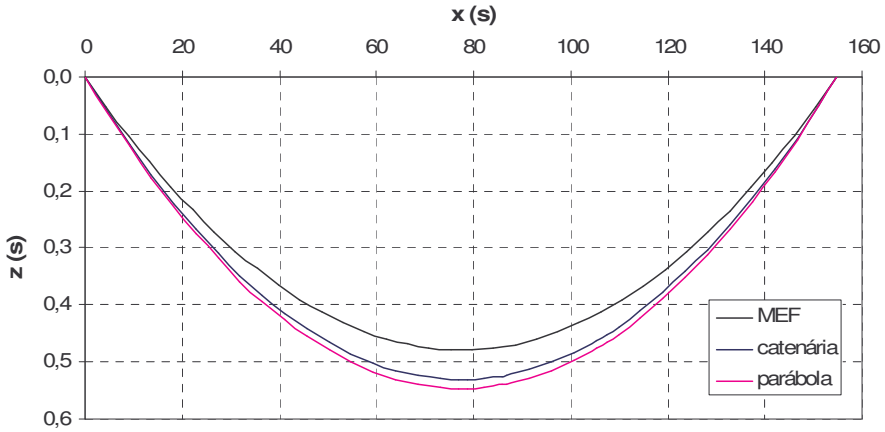


Figura 3.17 Comparação do traçado do tirante Central 1

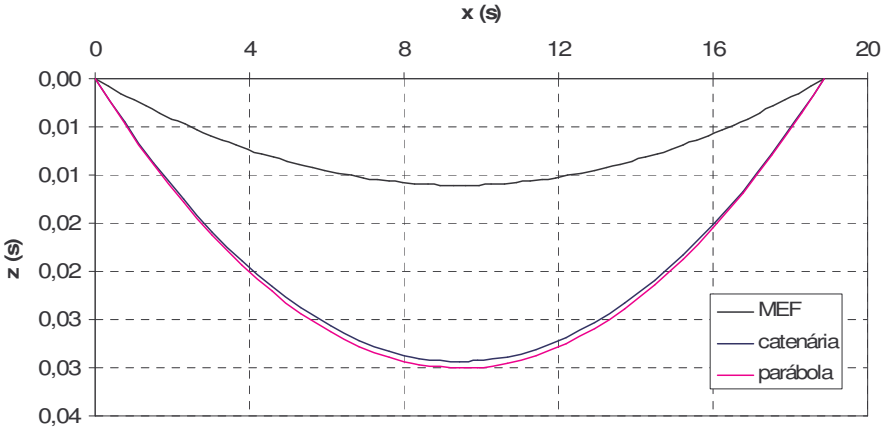


Figura 3.18 Comparação do traçado do tirante Central 16

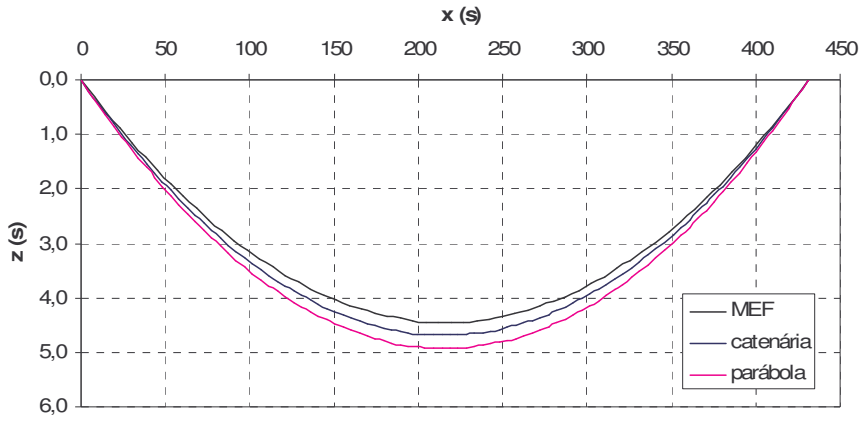


Figura 3.19 Comparação do traçado do tirante Normandia

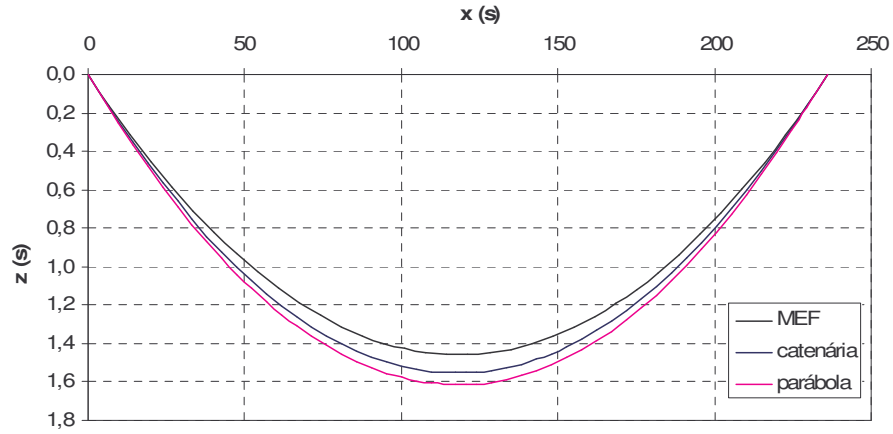


Figura 3.20 Comparação do traçado do tirante Ikuchi

3.2 CASO GERAL DE TIRANTES INCLINADOS

Um aspecto importante na análise estática de tirantes é a extensão da teoria do comportamento do tirante enquanto colocado na horizontal para o caso mais geral do tirante inclinado (Caetano E., 2000). Foi Irvine (1977) que generalizou a expressão de deformada estática de tirantes inclinados, considerando que a componente paralela do peso do tirante podia ser desprezada e fazendo uma transformação de eixos.

3.2.1 Tirante Suspenso entre Dois Pontos Nivelados

A Figura 3.21 representa um tirante horizontal suspenso na sua configuração deformada, nas duas hipóteses de inextensibilidade ou extensibilidade.

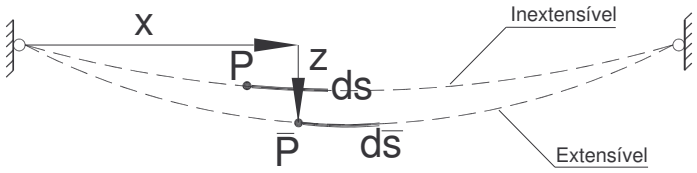


Figura 3.21 Configuração de deformada

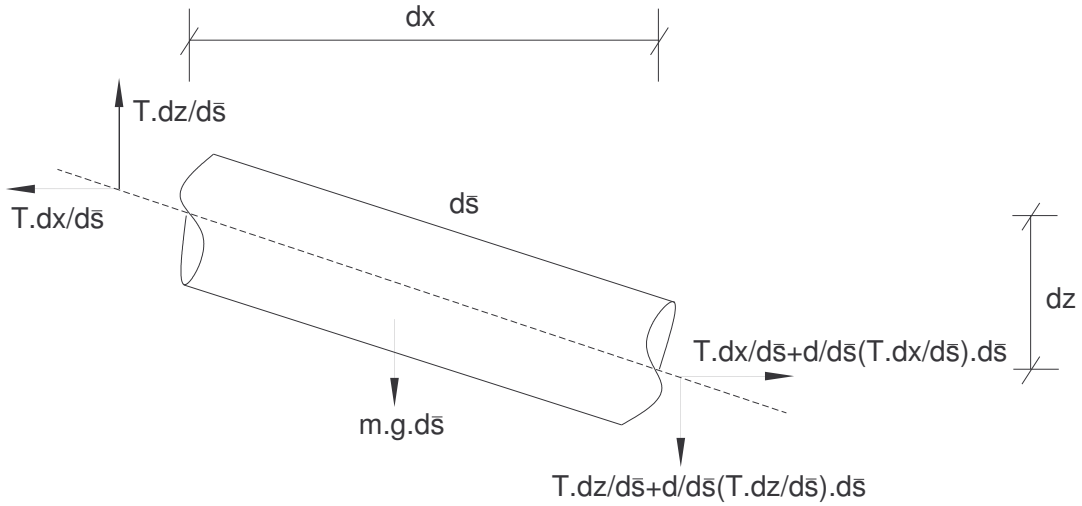


Figura 3.22 Equilíbrio de um segmento infinitesimal do tirante extensível

A análise do equilíbrio de um troço deformado de comprimento infinitesimal na direcção horizontal (3.20) e vertical (3.21) resulta nas equações

$$\frac{d}{d\bar{s}}\left(T \cdot \frac{dx}{d\bar{s}}\right) = 0 \tag{3.20}$$

$$\frac{d}{d\bar{s}}\left(T \cdot \frac{dz}{d\bar{s}}\right) = m \cdot g \cdot \frac{ds}{d\bar{s}} \tag{3.21}$$

em que $d\bar{s}$ corresponde ao comprimento deformado de um tirante extensível e T é o esforço axial instalado numa secção genérica do tirante.

No caso de um tirante inextensível, em que a relação flecha/vão não exceda 0.12, considera-se que a razão entre o comprimento não deformado e deformado $\frac{ds}{d\bar{s}}$ é

próximo da unidade. E assim, as equações (3.20) e (3.21) podem apresentar-se sob a forma:

$$T \cdot \frac{dx}{d\bar{s}} = H = const. \tag{3.22}$$

$$H \cdot \frac{d^2 z}{dx^2} = m \cdot g . \frac{d\bar{s}}{dx} \tag{3.23}$$

onde,

$$\frac{d\bar{s}}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \tag{3.24}$$

3.2.2 Tirante Suspenso entre Dois Pontos Desnivelados

Considere-se um tirante suspenso entre os pontos A e B, desnivelados conforme a Figura 3.23, cuja corda faz um ângulo θ com o eixo horizontal. Tomando um ponto genérico $\overline{P}$ na configuração da deformada com as coordenadas (x,z), em que z corresponde à distância, medida na vertical, de $\overline{P}$ à corda inclinada AB, a equação de equilíbrio na direcção vertical pode escrever-se na seguinte forma:

$$H \frac{d^2 z}{dx^2} = m \cdot g \cdot \left[1 + \left(\tan\theta + \frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.25}$$

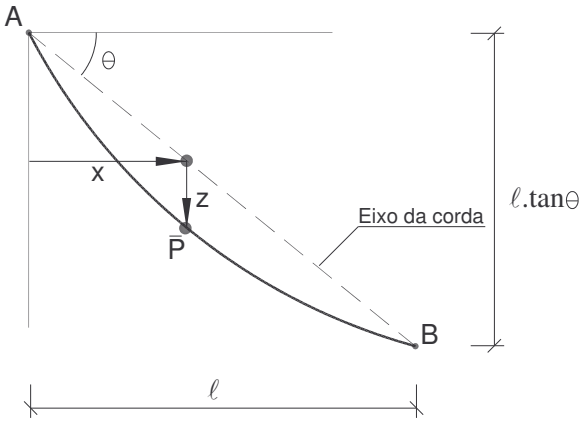


Figura 3.23 Deformada do cabo inclinado

Para um tirante inextensível, com a relação flecha/vão não superior a 0.12, o termo $\left(\frac{dz}{dx}\right)^2$ pode ser desprezado. A expansão em série do segundo membro da equação (3.25) retendo apenas os termos de primeira ordem em $\frac{dz}{dx}$ e a solução da equação diferencial conduzem a (Irvine, 1981)

$$z(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{m \cdot g}{H} \cdot \sec\theta \cdot x \cdot (\ell - x) \cdot \left[1 + \frac{\varepsilon}{6} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot x}{\ell}\right)\right] \tag{3.26}$$

em que o parâmetro ε representa uma quantidade muito pequena sempre que o tirante esteja muito tensionado, e é definido por:

$$\varepsilon = \frac{\left(m \cdot g \cdot \ell \cdot \sin\theta\right)}{H} \tag{3.27}$$

A equação (3.26) pode aparecer sob uma forma mais prática e conveniente, se se fizer uma transformação dos eixos, como representado na Figura 3.24, onde as novas coordenadas *x'* e *z'* se relacionam com *x* e *z* através de

$$x' = x \cdot \sec\theta + z \cdot \sin\theta \tag{3.28}$$

$$z' = z \cdot \cos\theta \tag{3.29}$$

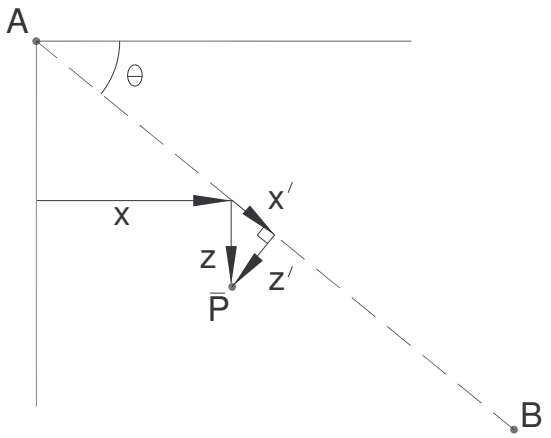


Figura 3.24 Transformação de eixos para a definição da deformada do tirante

Fazendo a transformação de eixos para outras quantidades obtemos, para um ponto intermédio no tirante onde a tangente é paralela à corda, $\ell' = \ell \cdot \sec\theta$ e $H' = H \cdot \sec\theta$, sendo o primeiro o comprimento da corda do tirante e o segundo a força instalada no tirante naquele ponto (valor médio da força ao longo do tirante).

A deformada do tirante pode ser agora definida por

$$z'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{m \cdot g}{H'} \cdot \cos\theta \cdot x' \cdot (\ell' - x') \cdot \left[1 - \frac{\varepsilon'}{3} \cdot (1 - \frac{2 \cdot x'}{\ell'})\right] \qquad \textbf{(3.30)}$$

com $\varepsilon' = \frac{(m \cdot g \cdot \ell' \cdot \sin\theta)}{H'}$, ou simplificando e desprezando o termo ε', resulta

$$z'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{m \cdot g}{H'} \cdot \cos\theta \cdot x' \cdot (\ell' - x') \qquad \textbf{(3.31)}$$

esta expressão é válida para inclinações da corda de $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE DINÂMICA DE TIRANTES

4.1 INTRODUÇÃO

O estudo do comportamento dinâmico de tirantes tem constituído um dos maiores desafios no projecto de pontes, procurando meios eficazes de identificação dos seus modos de vibração e respectivas frequências naturais. Neste capítulo, são revistas as equações que permitem descrever o movimento de vibração do tirante no plano e fora deste.

4.2 TEORIA DAS CORDAS VIBRANTES

Um cabo tensionado, fixo em ambas as extremidades constitui um sistema cuja velocidade de propagação de ondas é independente da frequência. Assim, uma solicitação transversal aplicada num ponto qualquer do cabo origina uma onda estacionária que se propaga até às suas extremidades e é sucessivamente reflectida, originando configurações deformadas com forma sinusoidal, caracterizadas pelas frequências naturais de vibração do cabo f_n, dadas pela Lei de Mersenne/Taylor das cordas vibrantes.

$$f_n = \frac{n}{2 \cdot L} \cdot \sqrt{\frac{T}{m}} \tag{4.1}$$

A apreciação de (4.1) permite constatar que os factores que afectam a formação de ondas estacionárias são: o comprimento da corda (*L*), a sua massa por unidade de comprimento (m) e a força de tracção instalada (*T*). O parâmetro n é a ordem do harmónico (n = 1 para o modo fundamental) e o termo correspondente à velocidade de propagação de ondas (*c*) é representado por:

$$c = \sqrt{\frac{T}{m}} \tag{4.2}$$

Assim, e no caso específico de cabos que são esticados devido ao aumento de tensão, cujos comprimento e massa linear permanecem praticamente constantes e são conhecidos, obtemos a força instalada no cabo pelo conhecimento da sua frequência própria, aplicando a equação (4.1).

4.3 ANÁLISE LINEAR DE UM TIRANTE EM VIBRAÇÃO LIVRE (TEORIA DE IRVINE)

O estudo das vibrações dos cabos com flechas muito reduzidas foi realizado por Irvine (1981), que desenvolveu a Teoria Linear para a análise da vibração livre de um tirante com a relação flecha/vão não superior a 0,12. Irvine demonstrou que os modos simétricos no plano dependem consideravelmente de um parâmetro (λ^2) que permite caracterizar as características geométricas e de deformabilidade do tirante, ou seja, é o valor deste que dá a indicação do grau relativo de contribuição da extensão axial do material e da configuração geométrica na deformação do tirante.

Na configuração de equilíbrio estático, um ponto genérico P do tirante é caracterizado pelas coordenadas $\overline{P}\,(x,\ 0,\ z)$, após deformação por efeito das acções estáticas.

Considerou-se aplicado um pequeno deslocamento à posição de equilíbrio estático $\overline{P}$, originando movimento do ponto P para $\overline{P}'(x + u,\ v,\ z + w)$, onde u e w representam as componentes longitudinal e vertical do movimento no plano, respectivamente e v é a componente horizontal fora do plano (perpendicular ao plano do tirante (Figura 4.1)).

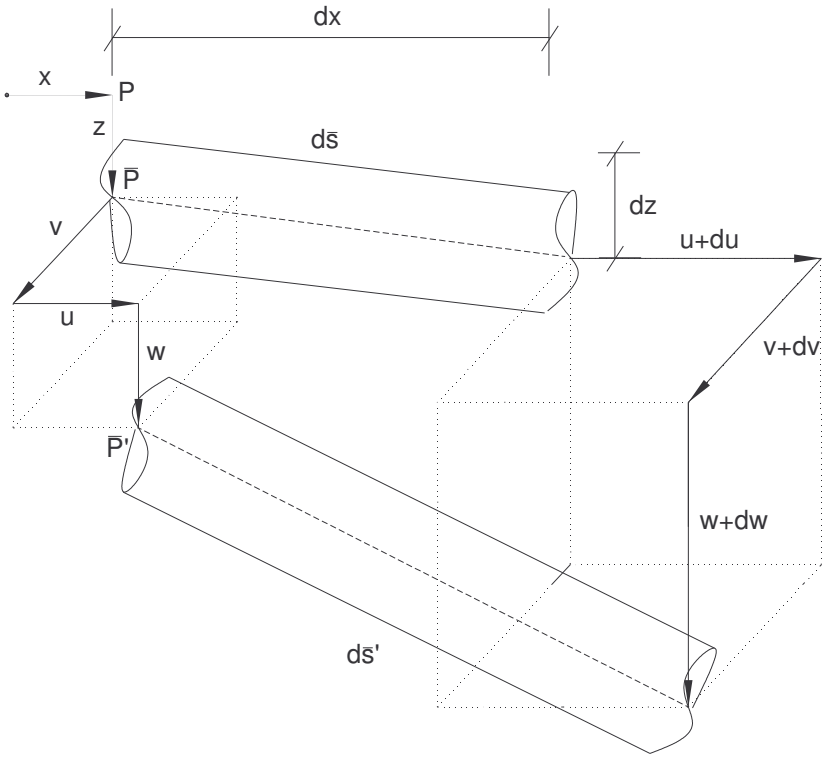


Figura 4.1 Componentes do deslocamento de um elemento de cabo

A análise do equilíbrio dinâmico de um segmento de cabo $d\bar{s}$ leva às seguintes equações:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{s}}\{(T+\tau)\cdot\beta_x\} = m\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{s}}\{(T+\tau)\cdot\beta_y\} = m\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{s}}\{(T+\tau)\cdot\beta_z\} = m\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - m\cdot g \tag{4.5}$$

Sendo τ o incremento de força no cabo, e os termos β_x, β_y e β_z definidos por:

$$\beta_x = \frac{dx}{d\bar{s}'} + \frac{\partial u}{\partial \bar{s}'} \tag{4.6}$$

$$\beta_y = \frac{\partial v}{\partial \bar{s}'} \tag{4.7}$$

$$\beta_z = \frac{dz}{d\bar{s}'} + \frac{\partial w}{\partial \bar{s}'} \tag{4.8}$$

Assumindo que a flecha do cabo é reduzida, torna-se possível linearizar as equações de equilíbrio dinâmico, fazendo a hipótese de ser constante o incremento de tensão dinâmico do cabo (τ) ao longo do seu comprimento (o que é legítimo, quando comparado τ com a força estática instalada (*T*)). Fazendo $d\bar{s}' \cong dx$ e $u(x,t) \cong 0$, expandindo as equações (4.3), (4.4) e (4.5) e utilizando as equações do equilíbrio estático ((3.20) e (3.21)), obtêm-se as seguintes equações do movimento (Caetano, 2000):

$$H \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + h_\tau \cdot \frac{d^2 z}{dx^2} = m \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{4.9}$$

sendo $H = T \cdot \cos\left(\arctan\left(\frac{dz}{dx}\right)\right)$ e $h_\tau = \tau \cdot \frac{dx}{d\bar{s}'}$. A equação (4.9) traduz o equilíbrio dinâmico na direcção vertical (Irvine e Caughey, 1974). A equação de equilíbrio dinâmico fora do plano do cabo é dada por

$$H \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = m \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{4.10}$$

É requerida uma terceira equação, associada à relação força-deslocamento do cabo. Esta equação é obtida, desprezando os termos de 2ª ordem, através de:

$$\frac{h \cdot \left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right)^3}{E \cdot A} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dz}{dx}\frac{\partial w}{\partial x} \tag{4.11}$$

Integrando (4.11) ao longo do comprimento do cabo, obtém-se:

$$\frac{h \cdot L_e}{E \cdot A} = \frac{m \cdot g}{H} \cdot \int_0^l w dx \tag{4.12}$$

em que o parâmetro h representa a componente horizontal do incremento de força gerado na vibração, e está relacionado com h_τ e H por:

$$h = h_\tau - H \cdot \frac{dz}{dx} \frac{\partial w}{\partial x} \tag{4.13}$$

e L_e corresponde ao comprimento virtual definido pela equação (3.13).

As equações (4.9), (4.10) e (4.12) constituem as equações básicas da teoria linear de vibração de cabos.

Apresentam-se de seguida soluções particulares destas equações para descrever os diferentes modos de vibração quando em oscilação livre no plano ou fora deste. Em cabos de corda horizontal, há que distinguir dois tipos diferentes de modos de oscilação, os modos simétricos e antissimétricos.

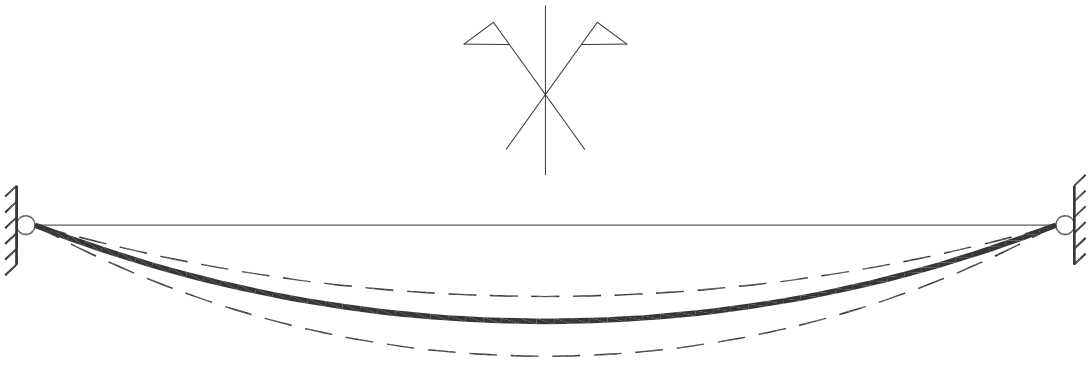


Figura 4.2 1º modo simétrico



Figura 4.3 1º modo antissimétrico

A equação (4.10) linearizada permite caracterizar o movimento fora do plano. Sendo independente de u e w, pode concluir-se que uma solicitação aplicada no plano do cabo não produz qualquer movimento com componente fora do plano. Da mesma maneira, a equação (4.9) que exprime o movimento no plano é independente de *v*. Este é um dos aspectos importantes na teoria linear de vibração de cabos, podendo o movimento ser analisado considerando duas componentes independentes, fora e no plano. Salienta-se que esta independência do movimento só existe realmente para reduzidos níveis de oscilação do cabo.

4.3.1 Oscilação Transversal ao Plano do Tirante

Uma solução geral da equação (4.10) é dada por (Irvine, 1981)

$$v(x,t) = \tilde{v}(x)e^{i\omega t} \tag{4.14}$$

Substituindo (4.14) em (4.10), vem

$$H \cdot \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + m \cdot \omega^2 \cdot \tilde{v} = 0 \tag{4.15}$$

A introdução em (4.15) das condições fronteira $\tilde{v}(0) = \tilde{v}(L) = 0$ leva à solução geral que representa as frequências angulares naturais de vibração e os respectivos modos:

$$\omega_n = \frac{n \cdot \pi}{L} \cdot \sqrt{\frac{H}{m}} \tag{4.16}$$

$$\tilde{v}_n = A_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \tag{4.17}$$

em que ω_n representa a frequência angular de ordem *n* e $\tilde{v}_n$ representa a configuração modal associada.

A frequência natural de ordem *n* do tirante f_n relaciona-se com a frequência angular ω_n através de

$$f_n = \frac{\omega_n}{2 \cdot \pi} \tag{4.18}$$

4.3.2 Oscilação no Plano do Tirante

A análise da equação (4.13), permite verificar que, quando $\int_0^l w dx = 0$ tem-se $h = 0$. Claramente os modos de vibração antissimétricos seguem esta condição pelo que a vibração com tais configurações não origina um incremento de força no cabo. Sendo, por outro lado, o parâmetro de Irvine definido por (3.12), verifica-se ainda por análise de (4.13) que, quando λ^2 tender para infinito, $\int_0^l w dx$ tende para zero, pelo que também para os modos simétricos, o incremento de força no cabo se aproxima de zero. Em todos os restantes casos de modos simétricos, a oscilação origina um incremento de força no cabo.

Verifica-se ainda que nos modos antissimétricos no plano, caracterizados por uma componente vertical do movimento antissimétrico em relação ao plano médio do cabo, a componente longitudinal é simétrica, enquanto que nos modos simétricos no

plano, caracterizados por uma componente vertical simétrica em relação ao plano médio do cabo, a componente longitudinal é antissimétrica (Figura 4.4).

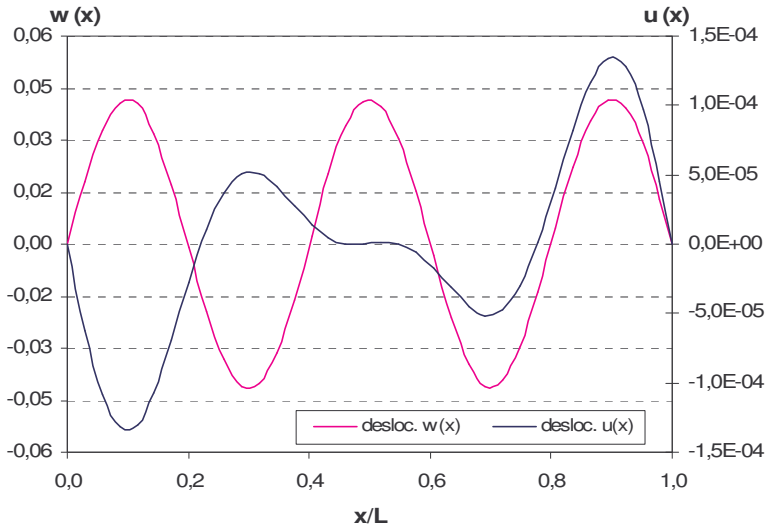


Figura 4.4 Modo simétrico. Componente vertical w(x) simétrica e componente longitudinal u(x) antissimétrica.

4.3.2.1 Modo Antissimétrico no Plano

Considerando a substituição das variáveis $u(x,t)$ e $w(x,t)$, que descrevem o movimento da vibração no plano, por:

$$u(x,t) = \tilde{u}(x) \cdot e^{i\omega t} \tag{4.19}$$

$$w(x,t) = \tilde{w}(x) \cdot e^{i\omega t} \tag{4.20}$$

nas equações (4.9) e (4.11) e introduzindo as condições fronteira $\tilde{w}(0) = \tilde{w}(L) = 0$, obtêm-se as seguintes equações

$$H \cdot \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} + m \cdot \omega^2 \cdot \tilde{w} = 0 \tag{4.21}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{dz}{dx}\frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} = 0 \qquad \textbf{(4.22)}$$

A solução da equação (4.21) para o caso de modos antissimétricos é representada por:

$$\omega_n = \frac{2 \cdot n \cdot \pi}{L} \cdot \sqrt{\frac{H}{m}} \qquad \textbf{(4.23)}$$

onde $n = 1, 2, 3,\ldots$ representam a primeira, a segunda, a terceira frequência natural dos modos antissimétricos, e assim sucessivamente. A componente vertical do modo de vibração antissimétrico é dada por:

$$\tilde{w}_n = A_n \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \qquad (n = 1, 2, 3,\ldots) \qquad \textbf{(4.24)}$$

A componente longitudinal é representada pela equação

$$\tilde{u}_n(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{m \cdot g \cdot L}{H}\right) \cdot A_n \cdot \left\{\left(1 - \frac{2 \cdot x}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) + \frac{1 - \cos\left(\frac{2 \cdot n \cdot \pi \cdot x}{L}\right)}{n \cdot \pi}\right\} \qquad \textbf{(4.25)}$$

em que A_n é a amplitude da componente vertical no enésimo modo antissimétrico no plano.

4.3.2.2 Modo Simétrico no Plano

O modo simétrico no plano é caracterizado por uma componente vertical simétrica em relação ao plano médio do cabo e uma componente longitudinal antissimétrica. Neste caso é induzido pelo movimento um incremento de força no cabo, que se supõe constante ao longo do cabo, e dado por

$$h_\tau(t) = \tilde{h}_\tau . e^{i\omega t} \tag{4.26}$$

Substituindo na equação (4.9), obtém-se

$$H \cdot \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} + m \cdot \omega^2 \cdot \tilde{w} = \frac{m \cdot g}{H} \cdot \tilde{h}_\tau \tag{4.27}$$

Para chegar a esta equação, procedeu-se também à substituição das variáveis $u(x,t)$ $w(x,t)$, através das equações (4.19) e (4.20), respectivamente.

Para a determinação das soluções da equação (4.27), introduziram-se as condições fronteira, e expandiu-se a equação sobre a forma adimensional. Obteve-se a seguinte equação implícita

$$\tan\frac{\overline{\omega}}{2} = \frac{\overline{\omega}}{2} - \frac{4}{\lambda^2} \cdot \left(\frac{\overline{\omega}}{2}\right)^3 \tag{4.28}$$

em que $\overline{\omega}$ é um parâmetro adimensional das frequências naturais, definido por

$$\overline{\omega} = \frac{\omega \cdot \ell}{\sqrt{\frac{H}{m}}} \tag{4.29}$$

A equação (4.28) foi resolvida, determinando o parâmetro $\overline{\omega}$, através de um programa de cálculo (*MatLab*). Apresentam-se na Tabela 4.1 os resultados obtidos na determinação das frequências naturais dos modos de vibração simétricos do plano, até à 5ª frequência, dos tirantes das pontes referidas no Capítulo 3.

Tabela 4.1 Cálculo das frequências próprias dos tirantes pelo Método de Irvine.

Tirante (n)	H (KN)	λ^2	m (Kg/m)	L (m)	x_0	$\overline{\omega}$	ω	$\frac{\overline{\omega}}{\pi}$	f (Hz)
V.Gama									
HC01									
1					3,1450	3,1446	19,76142	1,00094	3,1451
2					9,4250	9,4249	59,22903	3,00003	9,4266
3	2033	0,023	42,9	34,697	15,7090	15,7080	98,71405	5,00001	15,7108
4					21,9913	21,9912	138,1995	7,00000	21,9951
5					28,2744	28,2743	177,685	9,00000	28,2795
HC24									
1					3,1450	3,1856	3,657828	1,01400	0,5822
2					9,4250	9,4264	10,82388	3,00052	1,7227
3	6739	0,344	100,1	225,972	15,7090	15,7083	18,03705	5,00011	2,8707
4					21,9913	21,9913	25,25145	7,00004	4,0189
5					28,2744	28,2744	32,46603	9,00002	5,1671
HC15									
1					3,1450	3,1725	5,144444	1,00984	0,8188
2					9,4250	9,4259	15,28489	3,00037	2,4327
3	4275	0,241	74,8	147,457	15,7090	15,7082	25,4721	5,00008	4,0540
4					21,9913	21,9912	35,66052	7,00003	5,6755
5					28,2744	28,2744	45,84912	9,00001	7,2971

Guadiana									
Central 1									
1					3,1450	3,1671	4,817269	1,00811	0,7667
2					9,4250	9,4257	14,337	3,00030	2,2818
3	4794	0,198	72,9	168,544	15,7090	15,7082	23,89291	5,00007	3,8027
4					21,9913	21,9912	33,44975	7,00002	5,3237
5					28,2744	28,2744	43,00673	9,00001	6,8447
Central 16									
1					3,1450	3,1423	20,31478	1,00022	3,2332
2					9,4250	9,4248	60,93092	3,00001	9,6975
3	2142	0,005	21,0	49,485	15,7085	15,7080	101,5513	5,00000	16,1624
4					21,9913	21,9912	142,1718	7,00000	22,6273
5					28,2744	28,2743	182,7923	9,00000	29,0923
Normandia									
1					3,1450	3,5190	1,7992	1,12013	0,2864
2					9,4250	9,4401	4,826584	3,00488	0,7682
3	6779	3,085	133,0	440,858	15,7085	15,7112	8,032895	5,00104	1,2785
4					21,9913	21,9923	11,24433	7,00038	1,7896
5					28,2744	28,2749	14,4565	9,00018	2,3008
Ikuchi									
1					3,1450	3,2996	2,93256	1,05028	0,4667
2					9,4250	9,4309	8,38189	3,00194	1,3340
3	3475	1,254	72,5	246,2	15,7085	15,7093	13,96197	5,00042	2,2221
4					21,9913	21,9916	19,54555	7,00015	3,1108
5					28,2744	28,2746	25,12965	9,00007	3,9995

As componentes longitudinal ($u(x,t)$) e vertical ($w(x,t)$) dos modos de vibração simétricos definidos no plano, podem ser determinadas pelas seguintes expressões (Caetano, 2000):

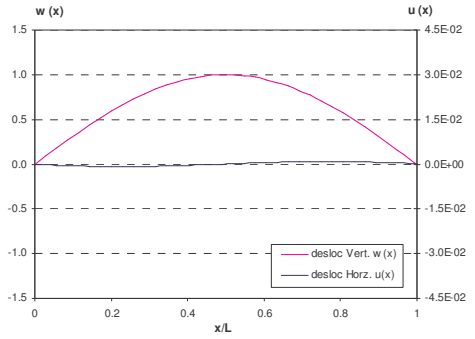
$$\tilde{u}(x) = \frac{m.g.L}{H}.\frac{m.g.L^2}{\overline{\omega}^2.H^2}.\tilde{h}_\tau.\left[\frac{\overline{\omega}^2}{\lambda^2}.\frac{L_x}{L_e} - \frac{1}{2}\left(1-2.\frac{x}{L}\right).\left\{1-\tan\frac{\overline{\omega}}{2}.\sin\left(\overline{\omega}.\frac{x}{L}\right)-\cos\left(\overline{\omega}.\frac{x}{L}\right)\right\} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\overline{\omega}}.\left\{\overline{\omega}.\frac{x}{L} - \tan\frac{\overline{\omega}}{2}.\left(1-\cos\left(\overline{\omega}.\frac{x}{L}\right)\right) - \sin\left(\overline{\omega}.\frac{x}{L}\right)\right\}\right] \qquad \textbf{(4.30)}$$

$$\tilde{w}(x) = \frac{m.g.L^2}{\overline{\omega}^2.H^2}.\tilde{h}_\tau.\left(1-\tan\frac{\overline{\omega}}{2}.\sin\frac{\overline{\omega}.x}{L} - \cos\frac{\overline{\omega}.x}{L}\right) \qquad \textbf{(4.31)}$$

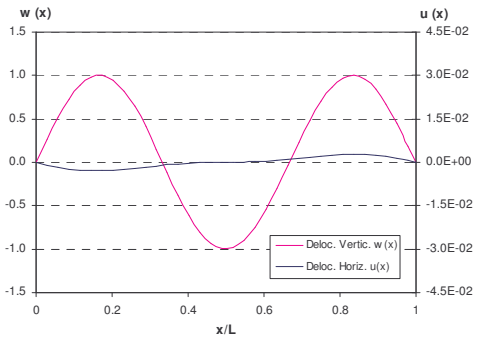
onde L_x é definido por:

$$L_x = L.\left[\frac{x}{L} + \frac{3}{8}\left(\frac{m.g.L}{H}\right)^2.\left\{\frac{x}{L} - 2\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \frac{4}{3}\left(\frac{x}{L}\right)^3\right\}\right] \qquad \textbf{(4.32)}$$

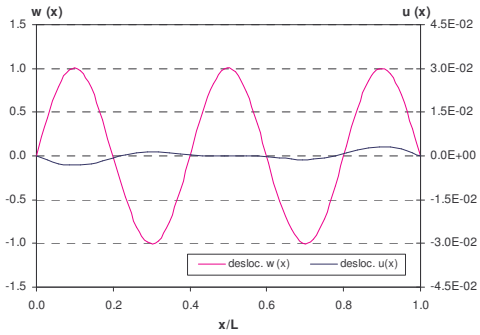
Apresentam-se na Figura 4.5 as configurações dos cinco primeiros modos simétricos de vibração no plano, para cada tirante referido no Capítulo 3, aquando da análise estática de tirantes.



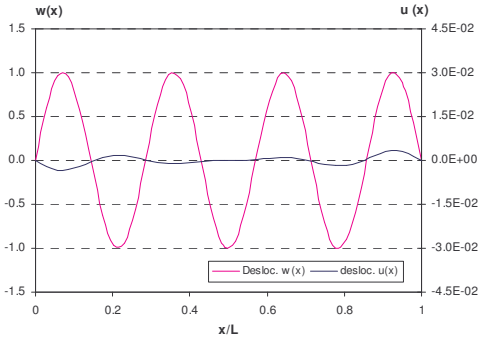
1º modo simétrico



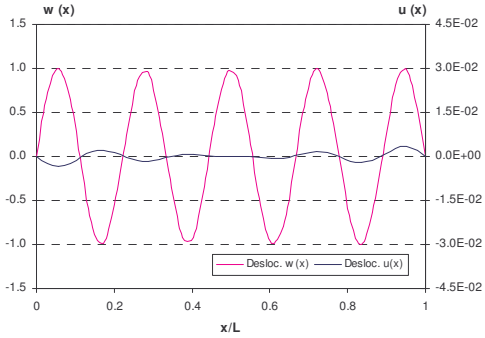
2º modo simétrico



3º modo simétrico

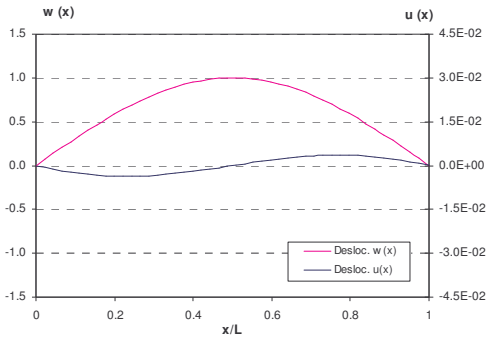


4º modo simétrico

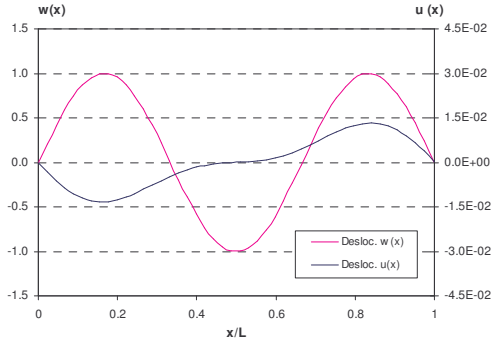


5º modo simétrico

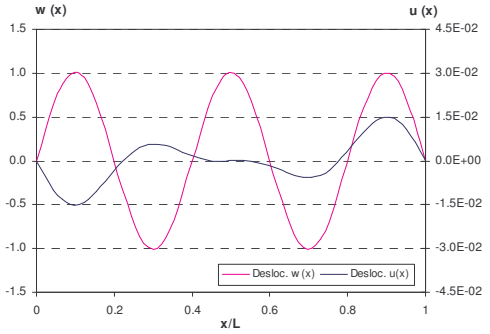
Figura 4.5 Ponte Vasco da Gama. Tirante HC01 (λ^2 =0,023)



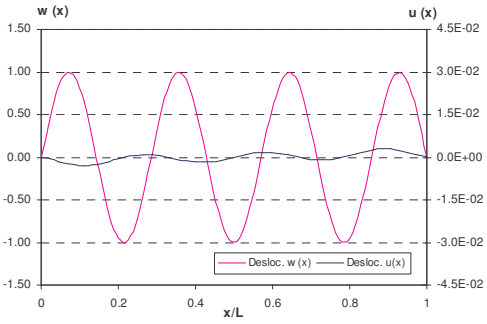
1º modo simétrico



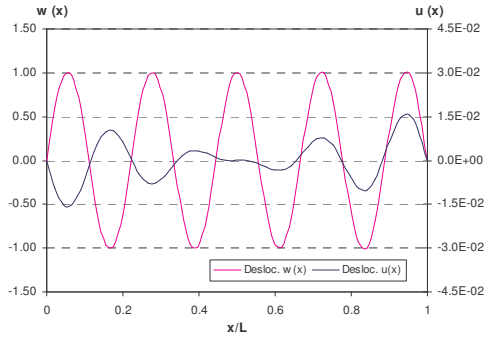
2º modo simétrico



3º modo simétrico

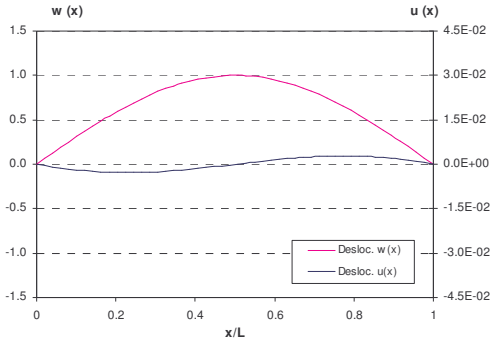


4º modo simétrico

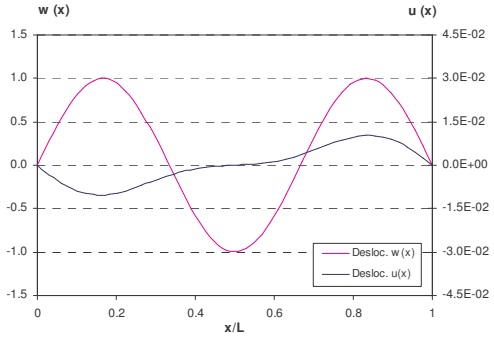


5º modo simétrico

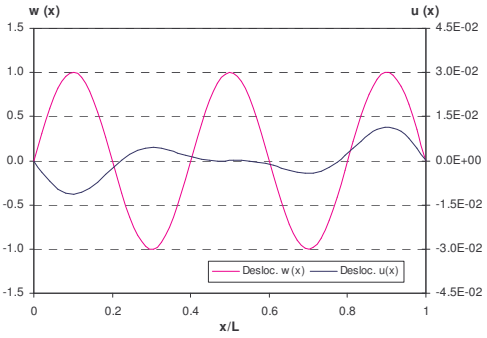
Figura 4.6 Ponte Vasco da Gama. Tirante HC24 (λ^2 =0,343)



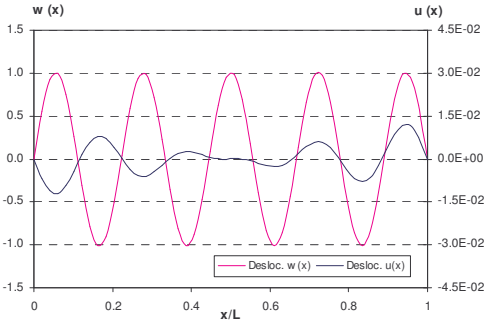
1º modo simétrico



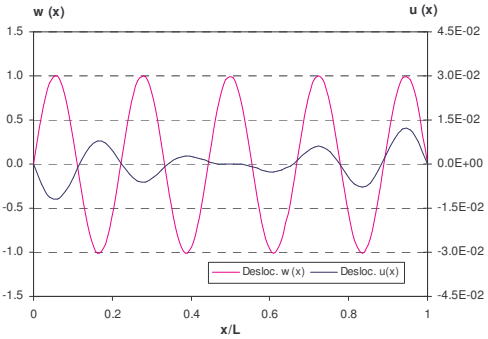
2º modo simétrico



3º modo simétrico

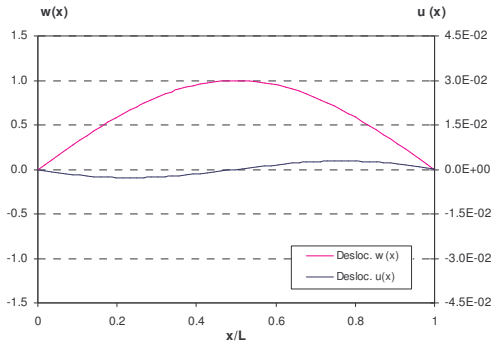


4º modo simétrico

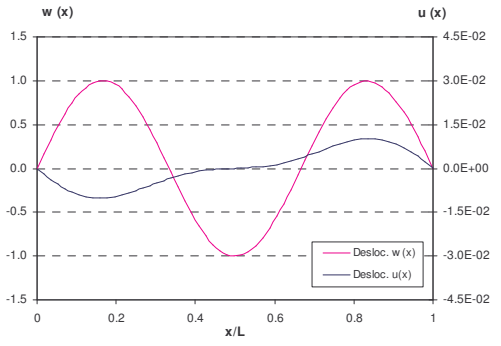


5º modo simétrico

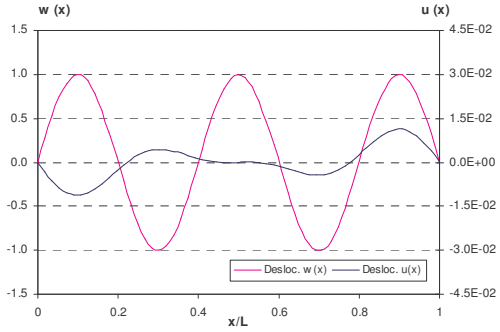
Figura 4.7 Ponte Vasco da Gama. Tirante HC15 (λ^2 =0,241)



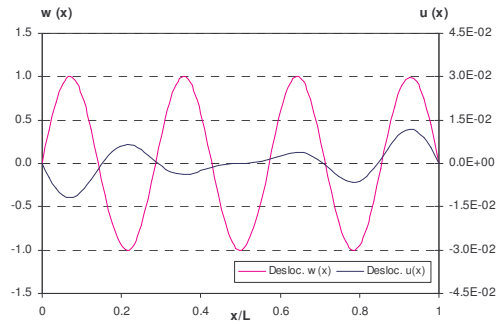
1º modo simétrico



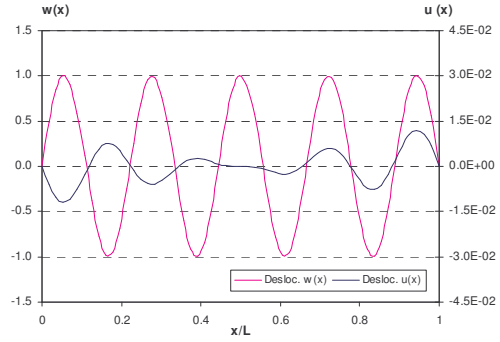
2º modo simétrico



3º modo simétrico

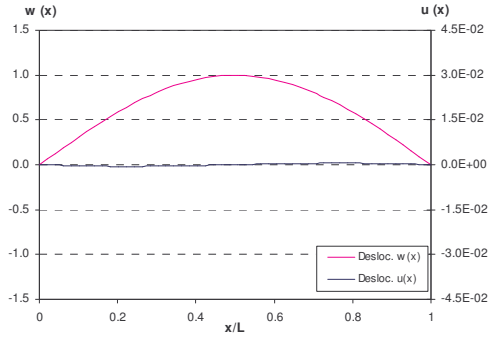


4º modo simétrico

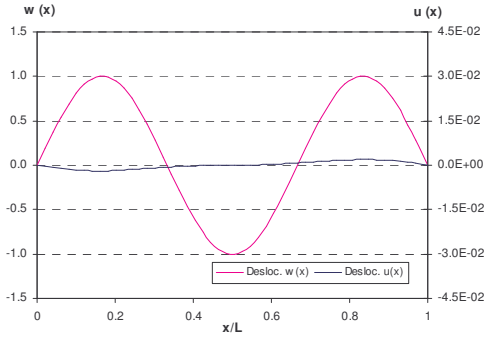


5º modo simétrico

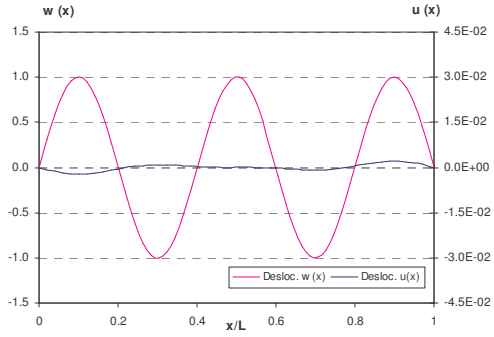
Figura 4.8 Ponte Guadiana. Tirante cabo central 1 (λ^2 =0,198)



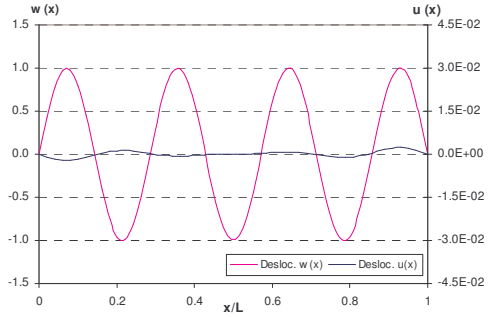
1º modo simétrico



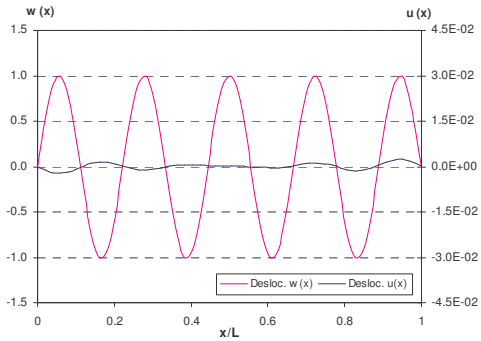
2º modo simétrico



3º modo simétrico

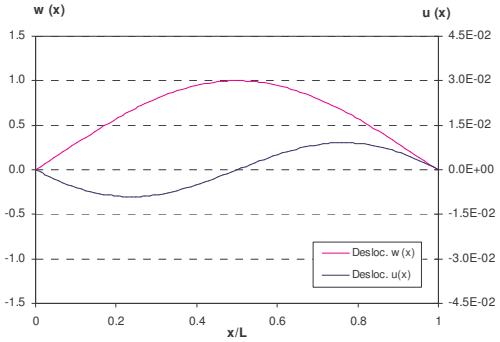


4º modo simétrico

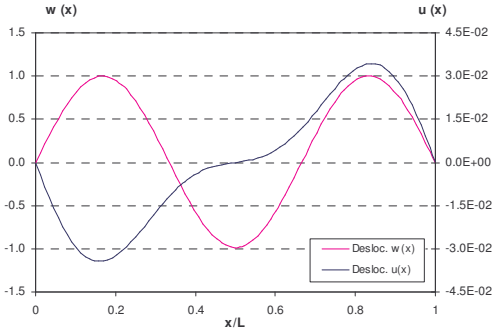


5º modo simétrico

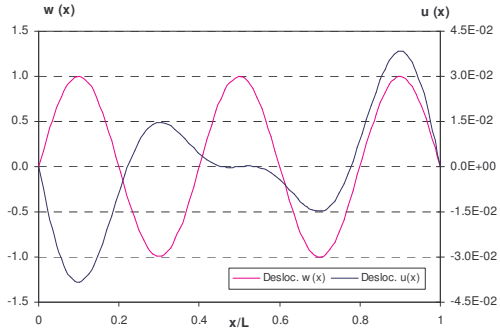
Figura 4.9 Ponte Guadiana. Tirante cabo central 16 (λ^2 =0,005)



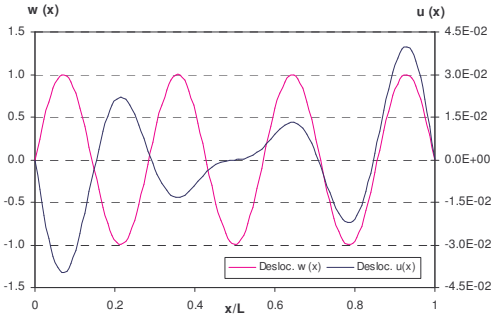
1º modo simétrico



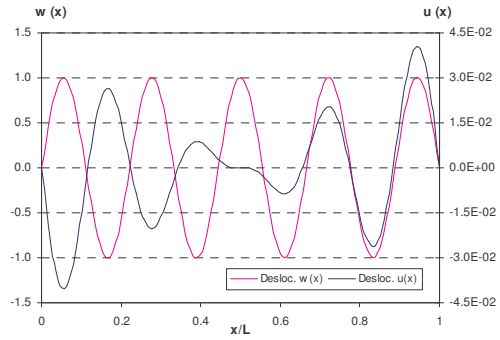
2º modo simétrico



3º modo simétrico

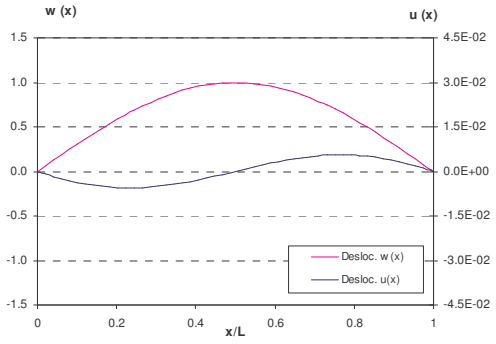


4º modo simétrico

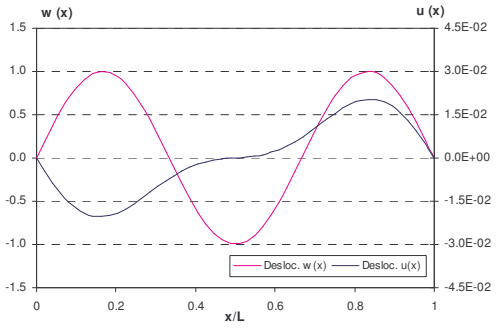


5º modo simétrico

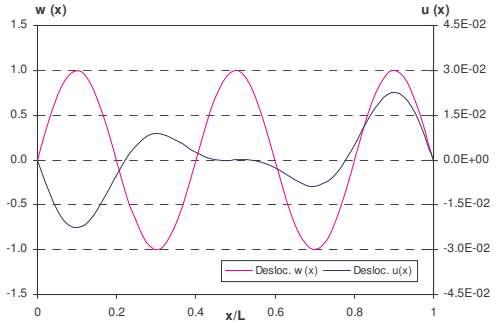
Figura 4.10 Ponte Normandia. Cabo 1 (λ^2 =3,11)



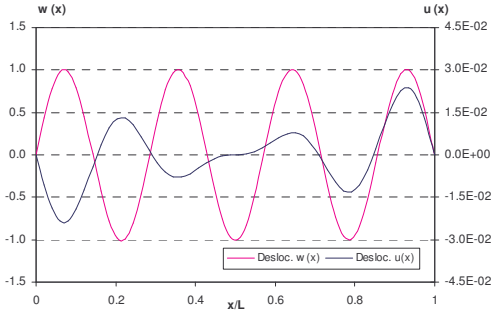
1º modo simétrico



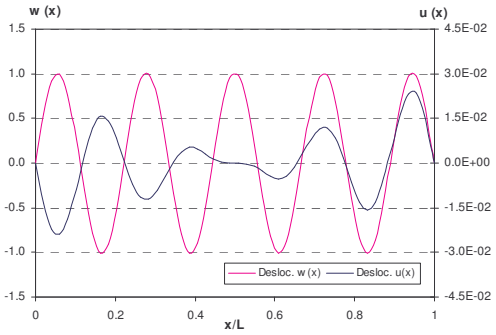
2º modo simétrico



3º modo simétrico



4º modo simétrico



5º modo simétrico

Figura 4.11 Ponte Ikuchi (λ^2 =1,260)

Apresentam-se na Tabela 4.2 a relação de amplitudes máximas, para cada tirante, dos deslocamentos horizontais e verticais nos cinco primeiros modos de vibração simétricos.

Tabela 4.2 Sumário da relação dos deslocamentos máximos (em metros) para cada modo simétrico de vibração em cada cabo

		Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5
Tirante	λ^2	$\left(\frac{u_{máx}}{w_{máx}}\right)$	$\left(\frac{u_{máx}}{w_{máx}}\right)$	$\left(\frac{u_{máx}}{w_{máx}}\right)$	$\left(\frac{u_{máx}}{w_{máx}}\right)$	$\left(\frac{u_{máx}}{w_{máx}}\right)$
HC01	0.023	8.32E-04	2.91E-03	3.23E-03	3.35E-03	3.36E-03
HC24	0.344	3.66E-03	1.34E-02	1.49E-02	2.95E-03	1.57E-02
HC15	0.241	2.82E-03	1.02E-02	1.14E-02	1.19E-02	1.18E-02
Central 1	0.198	2.80E-03	1.02E-02	1.13E-02	1.17E-02	1.20E-02
Central 16	0.005	5.30E-04	1.92E-03	2.12E-03	2.33E-03	2.39E-03
Normandia	3.085	9.11E-03	3.44E-02	3.83E-02	3.98E-02	4.04E-02
Ikuchi	1.254	5.54E-03	2.04E-02	2.26E-02	2.36E-02	2.34E-02

Verifica-se que para valores crescentes de λ^2, maior é a diferença entre a componente horizontal e vertical dos deslocamentos. Observa-se também, que para maiores modos de vibração, aumenta a diferença entre os deslocamentos horizontais e verticais.

A equação (4.28) demonstra a dependência das frequências naturais dos modos simétricos no plano com o parâmetro λ^2, o que revela a importância das características de deformabilidade do tirante no comportamento dinâmico do sistema.

Soluções particulares da equação (4.28) podem ser obtidas, quer estejamos no caso do estudo de um cabo, integrado numa ponte suspensa, quer no caso de tirante fortemente tensionado integrado numa ponte atirantada.

Tipicamente, as frequências naturais de cabos integrados em pontes suspensas podem ser obtidas da equação (4.28) considerando λ^2 elevado, do que resulta

$$\tan\frac{\overline{\omega}}{2} = \frac{\overline{\omega}}{2} \tag{4.33}$$

cujas raízes são dadas por:

$$\overline{\omega}_n = (2 \cdot n + 1) \cdot \pi \cdot \left(1 - \frac{4}{(2 \cdot n + 1)^2 \cdot \pi^2} \right) \qquad \textbf{(4.34)}$$

Com $n = 1, 2, 3, \ldots$. As frequências naturais devem então ser determinadas pela equação (4.34) para valores elevados de λ^2.

No caso de tirantes, em que o parâmetro λ^2 é muito reduzido, as raízes da equação (4.28) que traduz a vibração no plano com configuração modais simétricas assumem os valores

$$\overline{\omega}_n = (2 \cdot n - 1) \cdot \pi \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots.) \qquad \textbf{(4.35)}$$

Comparando as equações (4.34) e (4.35) verifica-se que a passagem do caso de vibração de um tirante, com λ^2 muito reduzido, para um cabo catenária (λ^2 de valor elevado) traduz-se numa variação de cerca de 2π no valor da frequência angular adimensional associada à configuração do mesmo modo simétrico.

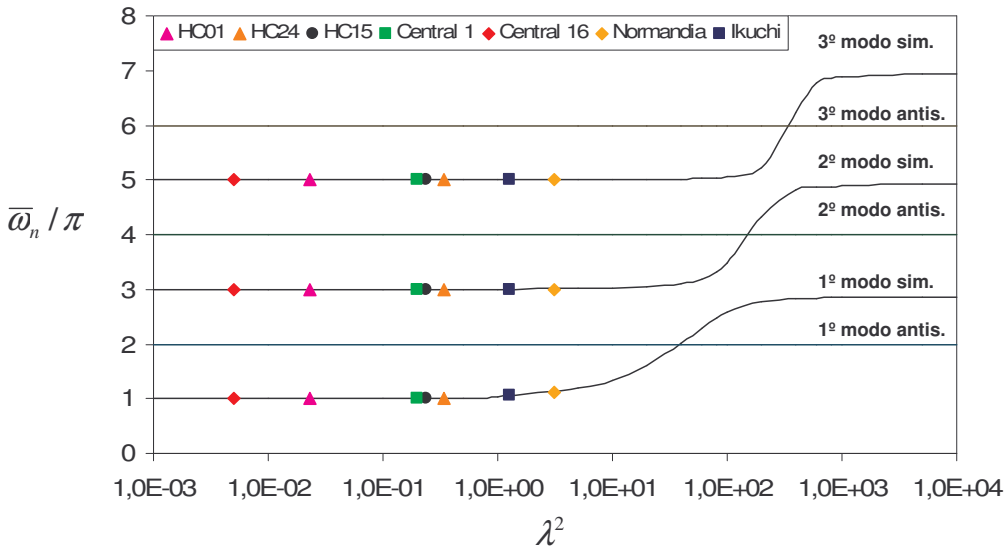


Figura 4.12 Variação da frequência natural dos três primeiros modos simétricos e antissimétricos de vibração com λ^2. Representação dos modos simétricos dos tirantes analisados

4.4 ANÁLISE COMPARATIVA DE RESULTADOS

Procedeu-se ao cálculo das frequências pela Teoria de Irvine, para a série de cabos referida no Capítulo 3, tendo-se confrontado os valores obtidos com os resultados da aplicação da Lei das Cordas Vibrantes.

Os resultados calculados pela Lei das Cordas Vibrantes e os obtidos pela Teoria de Irvine, para os primeiros três modos simétricos, são apresentados na Tabela 4.3.

Tabela 4.3 Frequências naturais dos primeiros 5 modos simétricos, T. Irvine vs Lei Cordas Vibrantes

			Métodos		Erro (%)
Tirantes	λ^2	**Frequência (Hz)**	**Lei Cordas Vibrantes**	**Teoria de Irvine**	**< 1%**
HC01	0,022785	1ª	3,137	3,145	0,26
		3ª	9,411	9,427	0,16
		5ª	15,685	15,711	0,16
		7ª	21,959	21,995	0,16
		9ª	28,233	28,279	0,16
HC24	0,343447	1ª	0,574	0,582	1,38
		3ª	1,722	1,723	0,02
		5ª	2,871	2,871	0,00
		7ª	4,019	4,019	0,00
		9ª	5,167	5,167	0,00
HC15	0,240769	1ª	0,811	0,819	0,99
		3ª	2,432	2,433	0,03
		5ª	4,053	4,054	0,02
		7ª	5,674	5,676	0,02
		9ª	7,296	7,297	0,02
Central 1	0,19833	1ª	0,761	0,767	0,78
		3ª	2,282	2,282	-0,02
		5ª	3,804	3,803	-0,03
		7ª	5,325	5,324	-0,03
		9ª	6,847	6,845	-0,03
Central 16	0,005429	1ª	3,227	3,233	0,19
		3ª	9,681	9,697	0,17
		5ª	16,135	16,162	0,17
		7ª	22,589	22,627	0,17
		9ª	29,043	29,092	0,17

Normandia	3,114378	1ª	0,256	0,286	10,58
		3ª	0,768	0,768	0,00
		5ª	1,280	1,278	-0,14
		7ª	1,792	1,790	-0,16
		9ª	2,304	2,301	-0,16
Ikuchi	1,257429	1ª	0,445	0,467	4,74
		3ª	1,334	1,334	0,01
		5ª	2,223	2,222	-0,04
		7ª	3,112	3,111	-0,05
		9ª	4,002	4,000	-0,05

A análise da Tabela 4.3 mostra que, para os cabos mais curtos (HC01 e Central 16), com λ^2 próximo de zero, a aproximação das frequências obtida pela Lei das Cordas Vibrantes leva a erros quase nulos. Os cabos mais longos com λ^2 superior a 1 (Normandia e Ikuchi), têm as frequências naturais afectadas mais significativamente pela curvatura, de que resultam erros elevados para a primeira frequência natural, 10.6% no caso do tirante da Normandia e de 4.7% no caso do tirantes da ponte de Ikuchi. As frequências dos restantes modos apresentam diferenças máximas de 0.17% relativamente às correspondentes frequências calculadas a partir da Lei das Cordas Vibrantes. Neste sentido, pode concluir-se que, desde que não seja utilizada a frequência do primeiro modo de vibração simétrico, a aproximação da Lei das Cordas vibrantes permite de forma simples a determinação da força instalada nos tirantes, baseada na medição directa das frequências dos modos de vibração no plano.

4.5 TEORIA LINEAR DE VIBRAÇÃO DE TIRANTES INCLINADOS

4.5.1 Aproximação Simplificada

A teoria da vibração de um cabo horizontal foi extendida por Irvine (1981) a um cabo inclinado, fazendo a transformação dos eixos horizontal e vertical em eixos paralelos e perpendiculares à corda do cabo, assumindo que era desprezável a componente do seu peso próprio paralela à corda. Assim, considere-se o cabo inclinado da Figura 4.13

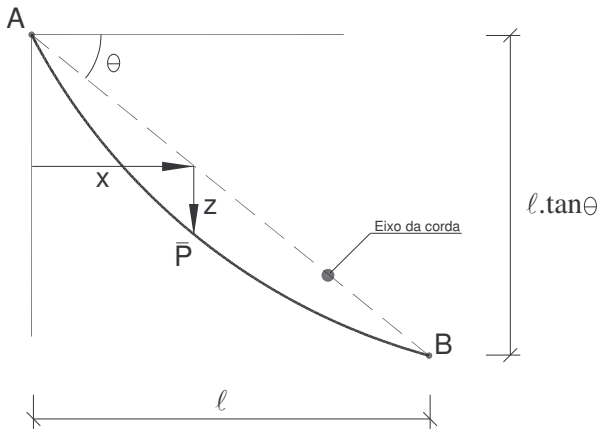


Figura 4.13 Perfil do cabo inclinado

e a transformação dos eixos representados na Figura 4.14. O ponto *P*, que no referencial inicial tem coordenadas (*x*, *z*), passa a ser caracterizado pelas coordenadas (*x'*, *z'*) definidas por

$$x' = x \cdot \sec\theta + z \cdot \sin\theta \tag{4.36}$$

$$z' = z \cdot \cos\theta \tag{4.37}$$

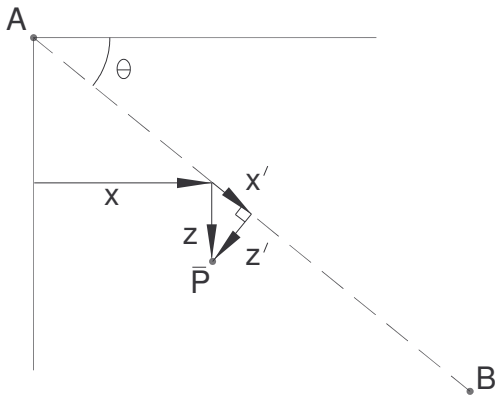


Figura 4.14 Transformação de eixos para a caracterização do equilíbrio dinâmico de um tirante inclinado

À semelhança dos cabos horizontais, o movimento fora do plano é independente do movimento no plano. Também a componente longitudinal do movimento no plano é muito menor do que a componente transversal no plano, não afectando o cálculo das frequências naturais. Assim, designando por ω_n' a frequência natural de ordem n de um cabo inclinado, e por $\overline{\omega}_n'$ a frequência natural dada por

$$\overline{\omega}_n' = \omega_n' \cdot \ell' \cdot \sqrt{\frac{m}{H'}} \tag{4.38}$$

com $\ell' = \ell \cdot \sec\theta$ e $H' = H \cdot \sec\theta$, os modos fora do plano de um cabo inclinado podem ser caracterizados por

$$\overline{\omega}_n' = n \cdot \pi \qquad\qquad n = 1, 2, 3, ... \tag{4.39}$$

Para os modos anti-simétricos no plano, as frequências naturais são obtidas por

$$\overline{\omega}_n' = 2 \cdot n \cdot \pi \qquad\qquad n = 1, 2, 3, ... \tag{4.40}$$

enquanto que para os modos simétricos no plano, o parâmetro adimensional $\overline{\omega}_n'$ é obtido através da solução da equação implícita

$$\tan\left(\frac{\overline{\omega}_n'}{2}\right) = \frac{\overline{\omega}_n'}{2} - \frac{4}{\lambda^{2\prime}}\left(\frac{\overline{\omega}_n'}{2}\right)^3 \tag{4.41}$$

De acordo com Irvine (1981) as equações (4.39) e (4.41), não são válidas para todos os ângulos do primeiro quadrante, sendo que a sua precisão diminui com o aumento da inclinação (θ) do cabo. Normalmente assume-se que para o caso mais comum ($\theta \leq 60^\circ$) se verifica a validade desta teoria.

4.6 EXCITAÇÃO EXTERNA EM TIRANTES DE PONTES

4.6.1 Introdução

A vibração de cabos pode ter origem na oscilação dos seus suportes, correspondendo ao movimento harmónico do tabuleiro ou torres de uma ponte. Este tipo de excitação indirecta do cabo resulta de qualquer tipo de acção sobre a estrutura da ponte, como o vento, o tráfego, a passagem de peões ou a actividade sísmica. Atendendo a que os deslocamentos das ancoragens dos tirantes permitem a transferência de energia do tabuleiro e das torres para os mesmos, e tendo em conta a massa relativa entre estes, é esperado que pequenas oscilações nos apoios originem grandes amplitudes de vibração nos tirantes.

A excitação na direcção perpendicular ao tirante denomina-se de excitação externa. Quando os tirantes estão sujeitos a excitação externa, geram-se grandes amplitudes de resposta, sempre que a frequência da excitação se aproxima de uma das frequências naturais do sistema.

Nesta secção, apoiando-se no trabalho de tese de doutoramento (Caetano, 2000), estudou-se o caso da excitação externa, caracterizando-se numa primeira aproximação o movimento de um tirante com um modelo linear. Efectuou-se posteriormente a comparação entre a resposta linear e a resposta calculada numericamente através de um modelo de elementos finitos, usando uma formulação não-linear geométrica.

4.6.2 Modelo Linear

Considere-se o cabo horizontal representado na Figura 4.15, cuja ancoragem B está sujeita à oscilação harmónica $z_B(t)$ dada por

$$z_B(t) = Z_B \cdot \sin(\omega \cdot t) \tag{4.42}$$

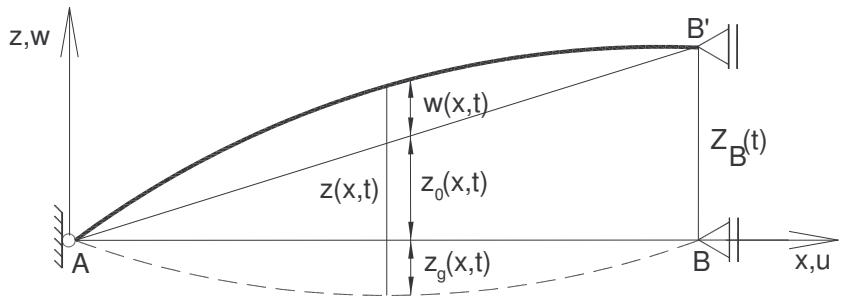


Figura 4.15 Tirante sujeito a deslocamento transversal na ancoragem

A posição $z(x,t)$ de um ponto genérico é dada pela seguinte soma

$$z(x,t) = z_g(x) + z_0(x,t) + w(x,t) \tag{4.43}$$

onde $z_g(x)$ é a deformação do cabo devido à acção do seu peso próprio, aproximada por uma parábola definida pela equação

$$z(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{m \cdot g}{H} \cdot x \cdot (\ell - x) \tag{4.44}$$

o termo $z_0(x,t)$ representa o movimento produzido pela oscilação da ancoragem B, que pode ser obtido por

$$z_0(x,t) = z_B(t) \cdot \frac{x}{\ell} \tag{4.45}$$

e $w(x,t)$ é a vibração intrínseca do cabo.

Assumindo o cabo como uma corda tensionada e desprezando a componente adicional de tensão τ em comparação com a tensão inicial *T*, a equação de equilíbrio dinâmico do cabo na direcção vertical pode ser simplificada para

$$T\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = m\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - m.g \tag{4.46}$$

substituindo as equações (4.43) e (4.45) na (4.46) obtém-se:

$$T\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + m\frac{x}{\ell}\frac{\partial^2 z_B(t)}{\partial t^2} \tag{4.47}$$

A equação (4.47) pode agora ser resolvida pela decomposição do termo $w(x,t)$ numa série de Fourier, cujos coeficientes $\alpha_K(t)$ representam a contribuição do modo de vibração de ordem k, assumindo a seguinte configuração sinusoidal

$$w(x,t) = \sum_{K=1}^{n} \alpha_K(t).\sin(\frac{k.\pi.x}{\ell}) \tag{4.48}$$

introduzindo a equação (4.48) na (4.47) é obtida a equação

$$\sum_{K=1}^{n}\left[m\frac{\partial^2\alpha_K(t)}{\partial t^2} + T\left(\frac{k.\pi}{\ell}\right)^2\alpha_K(t)\right].\sin\left(\frac{k.\pi.x}{\ell}\right) = -m\cdot\frac{x}{\ell}\cdot\frac{\partial^2 Z_B(t)}{\partial t^2} \tag{4.49}$$

Pela propriedade da ortogonalidade dos modos de vibração sinusoidais, podemos estabelecer n equações nos coeficientes $\alpha_K(t)$, (k=1, 2,…, n), associados aos n modos de vibração considerados. Multiplicando os dois termos da equação (4.49) pela função genérica $\sin\left(\frac{j\cdot\pi\cdot x}{\ell}\right)$ e integrando ao longo do comprimento do cabo, a equação (4.49) é transformada em

$$\sum_{K=1}^{n}\left[m\frac{\partial^2\alpha_K(t)}{\partial t^2} + T\left(\frac{k.\pi}{\ell}\right)^2\alpha_K(t)\right].\int_0^{\ell}\sin\left(\frac{k.\pi.x}{\ell}\right).\sin\left(\frac{j.\pi.x}{\ell}\right)dx = -m\frac{\partial^2 z_B(t)}{\partial t^2}.\int_0^{\ell}\frac{x}{\ell}\sin\left(\frac{j.\pi.x}{\ell}\right)dx \tag{4.50}$$

Para j = k a equação (4.50) reduz-se a

$$\frac{\partial^2 \alpha_k(t)}{\partial t^2} + \frac{T}{m}\left(\frac{k.\pi}{\ell}\right)^2 \alpha_k(t) = \frac{2}{k.\pi}(-1)^k \frac{\partial^2 Z_B(t)}{\partial t^2} \tag{4.51}$$

Tendo em conta a teoria de cabo tensionado (ver secção 4.2), a frequência natural ω_k associada ao modo de vibração de ordem k é dada por

$$\omega_k = \frac{k.\pi}{\ell}\sqrt{\frac{T}{m}} \tag{4.52}$$

Considerando que o movimento da ancoragem é uma sinusóide de amplitude $Z_B(t)$ de frequência ω dada pela equação (4.42) e introduzindo-a na equação (4.51) e um termo de amortecimento viscoso caracterizado por um coeficiente de amortecimento ξ_k, é obtida a seguinte equação do movimento

$$\frac{\partial^2 \alpha_k(t)}{\partial t^2} + 2.\xi_k.\omega_k \frac{\partial \alpha_k(t)}{\partial t} + \omega_k^2.\alpha_k(t) = \frac{2}{k.\pi}(-1)^k.\omega^2.z_B.\sin(\omega.t) \tag{4.53}$$

cuja solução $\alpha_k(t)$ é a resposta de um oscilador de um grau de liberdade com amortecimento a uma excitação sinusoidal, dada por

$$\alpha_k(t) = \frac{\frac{2}{k.\pi}(-1)^k.\beta_k^2.z_B}{\sqrt{\left(1-\beta_k^2\right)^2 + \left(2.\xi_k.\beta_k\right)^2}}.\sin(\omega.t - \theta_k) \tag{4.54}$$

com $\beta_k = \frac{\omega}{\omega_k}$ e $\theta = \tan^{-1}\frac{2.\xi_k.\beta_k}{1-\beta_k^2}$.

A vibração de um ponto genérico ao longo do cabo é dada por

$$\bar{z}(x,t) = z_B.\frac{x}{\ell}.\sin(\omega.t) + \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{\frac{2}{k\pi}(-1)^k.\beta_k^2.z_B}{\sqrt{\left(1-\beta_k^2\right)^2+\left(2.\xi_k.\beta_k\right)^2}}.\sin(\omega.t-\theta_k).\sin\frac{k.\pi.x}{\ell}\right] \qquad \textbf{(4.55)}$$

A equação (4.55) evidencia que a contribuição de um modo de ordem k depende da razão β_k entre a frequência de excitação ω e a frequência do cabo ω_k, e do coeficiente de amortecimento ξ_k. O parâmetro $\alpha_k(t)$ é máximo quando β_k é unitário, isto é, quando a frequência de excitação está em ressonância com uma das frequências naturais do cabo e, em particular, quando k=1. Neste caso estamos perante a primeira ressonância, e a máxima amplitude de oscilação no primeiro modo é determinada por

$$(\alpha_1)_{\max} = \frac{z_B}{\pi \cdot \xi_1} \qquad \textbf{(4.56)}$$

4.6.3 Análise Numérica

Para realizar numericamente a análise dinâmica de tirantes aplicou-se o método de Newmark. Este método, descrito no Apêndice B, resolve implicitamente por integração directa o sistema de equações diferenciais do equilíbrio dinâmico

$$M \cdot \ddot{u}(t) + C \cdot \dot{u}(t) + K \cdot u(t) = f(t) \qquad \textbf{(4.57)}$$

Com o propósito de analisar o grau da não linearidade na vibração do tirante associada à excitação externa, foi avaliada numericamente a resposta de um cabo de tamanho médio à oscilação harmónica no apoio, usando para tal a formulação de elementos finitos no programa de cálculo SOLVIA99.0.

Foi simulado o tirante central 16 da Ponte do Guadiana, cujas características estão indicadas na Tabela 4.4.

Tabela 4.4 Características principais do tirante Central 16 da Ponte do Guadiana

Variáveis	Valor	Unidades
T (Força de pré-esforço)	2149.3	KN
m(massa)	21	Kg/m
L (comprimento do tirante)	49.485	M
E (módulo de elasticidade)	1.92111×10^{11}	Pa
A (área)	27.0×10^{-4}	m^2

O cabo foi analisado na horizontal e dividido num total de 35 elementos de treliça. Estes elementos simulam adequadamente o comportamento de cabo visto ser muito baixa a sua inércia e, consequentemente, os esforços de flexão, quando comparados com a rigidez axial. Os elementos de treliça foram sujeitos numa fase inicial a uma análise estática, considerando a acção do peso próprio do cabo e uma extensão inicial aplicada no mesmo, de forma a obter uma força inicial T de valor igual a 2149.3 KN. Fixando o deslocamento vertical da ancoragem B, com o cabo na sua configuração deformada, o problema linear dos valores próprios foi resolvido.

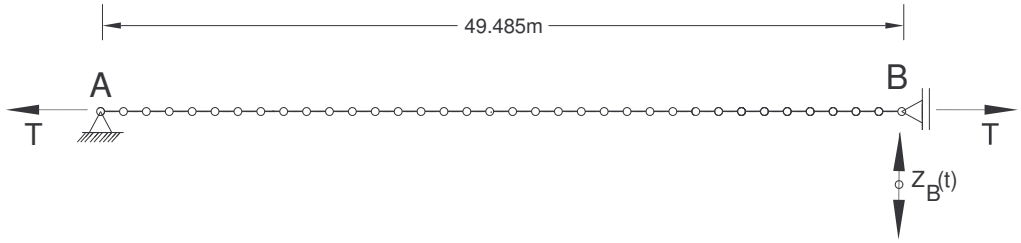


Figura 4.16 Modelo numérico do tirante Central 16 (Ponte do Guadiana)

Seguidamente, foi avaliada a resposta ao deslocamento harmónico vertical na extremidade B, baseada numa formulação não linear geométrica (SOLVIA 99.0), considerando amplitudes variáveis entre 0.0005m e 0.05m, e com três frequências de excitação: $\omega = \pi . f$; $\omega = 2.\pi . f$ e $\omega = 4.\pi . f$. Nesta análise foi usada a matriz de amortecimento de Rayleigh (ver Apêndice C), considerando proporcionalidade em

relação à matriz de massa, e três coeficientes de amortecimentos (0.1%; 0.5%; 1%) para o primeiro modo de vibração ($f_1 = 3.2326Hz$).

Apresentam-se na Tabela 4.5 as primeiras frequências naturais das vibrações no plano.

Tabela 4.5 Frequências naturais do tirante

Modo de Vibração	Frequência (Hz)
1	3.2326
2	6.4573
3	9.6697
4	12.863
5	16.030

Obtiveram-se os gráficos da resposta na direcção perpendicular ao cabo (eixo Z) do ponto central do cabo (nó 18) às amplitudes de excitação no apoio B de 0.0005m, 0.001m, 0.002m, 0.004m, 0.006m, 0.008m, 0.01m, 0.02m, 0.03m, 0.04m e 0.05m. Foi analisada a resposta num intervalo de tempo de 69.225s considerando intervalos de tempo de 0.015s.

Apresenta-se, na Figura 4.17, o gráfico da resposta dos deslocamentos a meio vão, para uma oscilação na ancoragem B de amplitude máxima de 0.5m e frequência de 3.2326Hz (excitação na frequência fundamental do cabo).

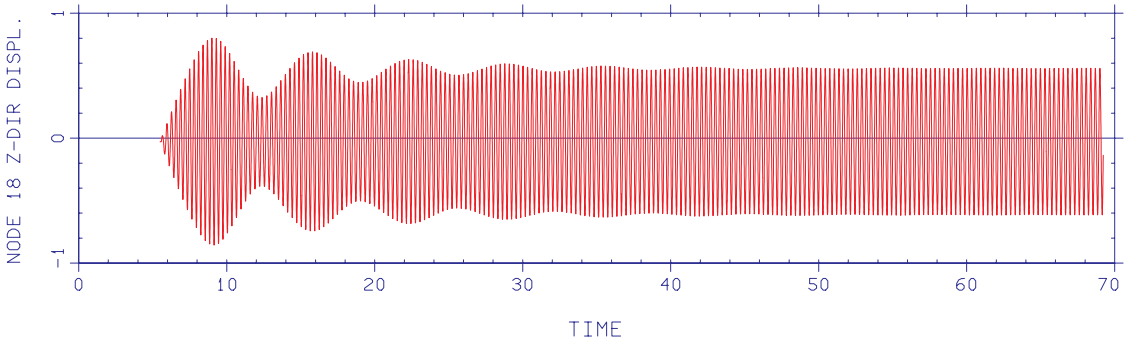


Figura 4.17 Deslocamento vertical a meio vão devido a oscilação vertical na ancoragem B de

$$0.50 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 3.2326 \cdot t)$$

O valor máximo da resposta (em regime estacionário) está representado, para cada situação analisada, em termos de amortecimento, nas figuras (Figura 4.19, Figura 4.20 e Figura 4.21, da secção 4.6.5.

4.6.4 Modelo Não-Linear

Considerando a possibilidade de o comportamento exibido pelo cabo ser não-linear, Caetano (2000) adaptou as equações diferenciais não lineares desenvolvidas por Pinto da Costa et al. (1996) para um cabo inclinado sujeito ao movimento harmónico vertical de um dos apoios, obtendo a solução associada ao primeiro modo de vibração.

Assumindo que a configuração da deformação estática do cabo é uma parábola, e desprezando as forças inerciais longitudinais, aplicando uma formulação não linear geométrica na avaliação da energia potencial de acordo com Perkins (1992), e aproximando os deslocamentos transversais por uma função contendo o primeiro modo da oscilação livre de um cabo

$$w(x,t) = z_B \cdot \frac{x}{\ell} \cdot \sin(\omega t) + \alpha_1(t) \cdot \sin\frac{\pi . x}{\ell} \qquad \textbf{(4.58)}$$

Os autores acima mencionados aplicaram o método de Galerkin e derivaram duas equações diferenciais em $\alpha_1(t)$. Desprezando os termos associados a magnitudes da resposta de ordem inferior, a equação em $\alpha_1(t)$ reduz, no caso particular do cabo horizontal a

$$\ddot{\alpha}_1(t)+2.\xi_1.\omega_1.\dot{\alpha}_1(t)+\omega_1^2.\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^4.\lambda^2-\frac{\lambda.z_B}{2.\sqrt{X_0.\ell}}.\sin(\omega t)\right].\alpha_1(t)-\frac{3.\omega_1^2}{\pi.\sqrt{X_0.\ell}}.\lambda.\alpha_1^2(t)+\frac{\pi^2}{4}.\frac{\omega_1^2}{X_0.\ell}.\alpha_1^3(t)= \\ =2.\frac{\omega_1^2}{\pi}.z_B.\left[1-\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2\right].\sin(\omega t) \tag{4.59}$$

onde X_0 é o alongamento elástico do cabo, $X_0=\dfrac{T.\ell}{E.A_0}$, e ω_1 é a frequência natural associada ao primeiro modo de vibração de uma corda tensionada, dado por $\omega_1=\dfrac{\pi}{\ell}.\sqrt{\dfrac{T}{m}}$.

Considerando a aplicação a cabos tensionados, para os quais λ^2 é muito pequeno ($\lambda^2 \leq 0.5$), o termo de componente periódica em $\alpha_1(t)$, denominado de termo paramétrico, tem normalmente uma magnitude de ordem menor do que os outros termos e consequentemente é desprezado. Assim, a equação diferencial em $\alpha_1(t)$ fica

$$\ddot{\alpha}_1(t)+2.\xi_1.\omega_1.\dot{\alpha}_1(t)+\omega_1^2.\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^4.\lambda^2\right].\alpha_1(t)-\frac{3.\omega_1^2}{\pi.\sqrt{X_0.\ell}}.\lambda.\alpha_1^2(t)+\frac{\pi^2}{4}.\frac{\omega_1^2}{X_0.\ell}.\alpha_1^3(t)= \\ =2.\frac{\omega_1^2}{\pi}.z_B.\left[1-\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2\right].\sin(\omega t) \tag{4.60}$$

e pode ser interpretada como a equação de um sistema com não linearidades quadrática e cúbica sujeito a excitação harmónica.

Uma importante característica de sistemas não-lineares é a existência de ressonâncias secundárias. Um sistema com não linearidades quadráticas (cabo tenso) possui uma ressonância sub-harmónica de ordem ½ e uma ressonância super-harmónica de ordem 2, para além da ressonância fundamental, de ordem 1. Um sistema com não

linearidades cúbicas (cabo inextensível) possui uma ressonância sub-harmónica de ordem 1/3 e uma ressonância super-harmónica de ordem 3. Em ambos os casos, a existência de ressonâncias secundárias significa que, se o sistema é sujeito a excitação harmónica caracterizada por uma frequência ω na proximidade da frequência natural ω_1, será adicionada à resposta estacionária da frequência ω_1 uma componente devido às frequências sub e super-harmónicas ($1/2\,\omega_1$, $1/3\,\omega_1$, $2\,\omega_1$, $3\,\omega_1$). Esta componente pode anular-se no tempo ou convergir para um valor finito, dependendo das condições iniciais.

Da mesma maneira, a aplicação de uma excitação na proximidade de uma das frequências sub-harmónicas ou super-harmónicas resultará na resposta do sistema nessa mesma frequência e ainda na frequência fundamental.

No sistema em causa, quando temos não linearidades quadráticas e cúbicas, existem ressonâncias sub-harmónicas de ordem 1/3, ½, e super-harmónicas de ordem 2 e 3. Pode ainda adicionalmente acontecer a existência da combinação de ressonâncias, se o sistema é excitado por uma combinação de harmónicos com valores particulares (Nayfeh & Mook, 1979).

No presente estudo só será focada a primeira ressonância, sendo a dominante da resposta em regime estacionário. Nayfeh e Mook (1979) desenvolveram a solução para a equação (4.60), na vizinhança da ressonância ω_1, usando o método das múltiplas escalas, que é um método de perturbação, obtendo

$$\alpha_1(t) = a.\sin(\omega.t - \gamma) + \frac{3.\lambda}{2.\pi.\sqrt{X_0.\ell}}.a^2.\left[1 - \frac{1}{3}.\sin(2.\omega.t - 2.\gamma)\right] \qquad \textbf{(4.61)}$$

depende dos parâmetros a e γ, e cujos valores são dados por

$$a = \frac{z_B}{\pi.\xi_1}.\frac{1-\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2}{\sqrt{\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^4.\lambda^2\right]}}.\sin(\gamma) \qquad \textbf{(4.62)}$$

e pela solução de

$$\sin^2(\gamma).\tan(\gamma) = \frac{32}{3}.X_0.\ell.\frac{\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^4.\lambda^2\right]}{\left[1-\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2\right]^2.\left[1-32\frac{\lambda^2}{\pi^4}\right]}.\frac{\xi_1^3}{z_B^2} \qquad \textbf{(4.63)}$$

De referir que para valores muito pequenos de λ^2 (λ^2 <0.2) teremos

$$\frac{1-\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2}{\sqrt{\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^4.\lambda^2\right]}} \approx 1 \qquad \textbf{(4.64)}$$

O máximo valor da amplitude da resposta estacionária "a" na frequência ω reduz-se a

$$a = \frac{z_B}{\pi.\xi_1}.\sin(\gamma) \qquad \textbf{(4.65)}$$

Isto não é mais do que a amplitude linear multiplicada por uma função $\sin(\gamma)$ que reflecte o carácter não linear do sistema e cujo valor é obtido pela solução numérica da equação (4.63). Esta equação, uma vez que é implícita, foi determinada por um programa de cálculo (MatLab). Os resultados obtidos encontram-se na secção 4.6.5.

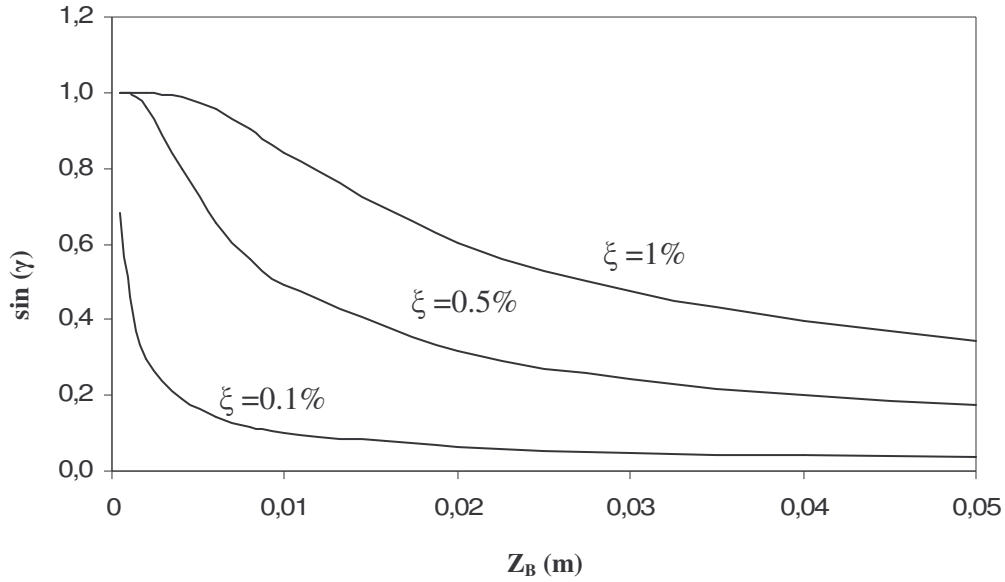


Figura 4.18 Variação de $\sin(\gamma)$ com o valor da amplitude de oscilação para diferentes valores de amortecimento e λ^2 = 0.005

4.6.5 Comparação de Resultados

Apresentam-se os gráficos da resposta transversal a meio vão, obtidos para uma frequência de excitação igual à frequência natural do tirante Central 16 da ponte do Guadiana, com amplitudes variáveis sentido vertical no intervalo 0 – 0.05m.

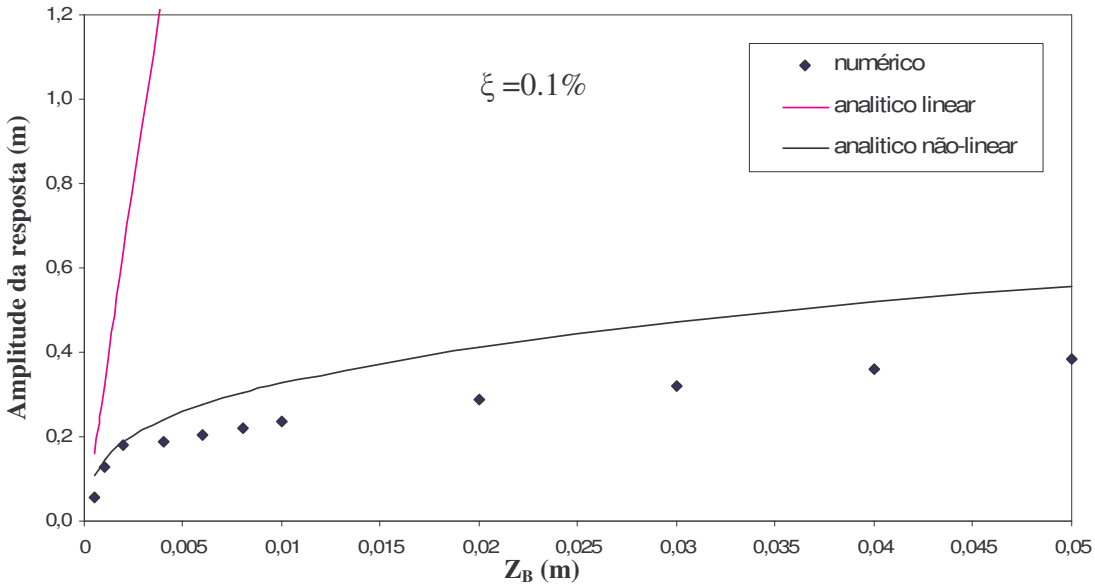


Figura 4.19 Variação da amplitude de oscilação com a amplitude da oscilação harmónica no apoio, para a primeira ressonância, considerando ξ = 0.1%

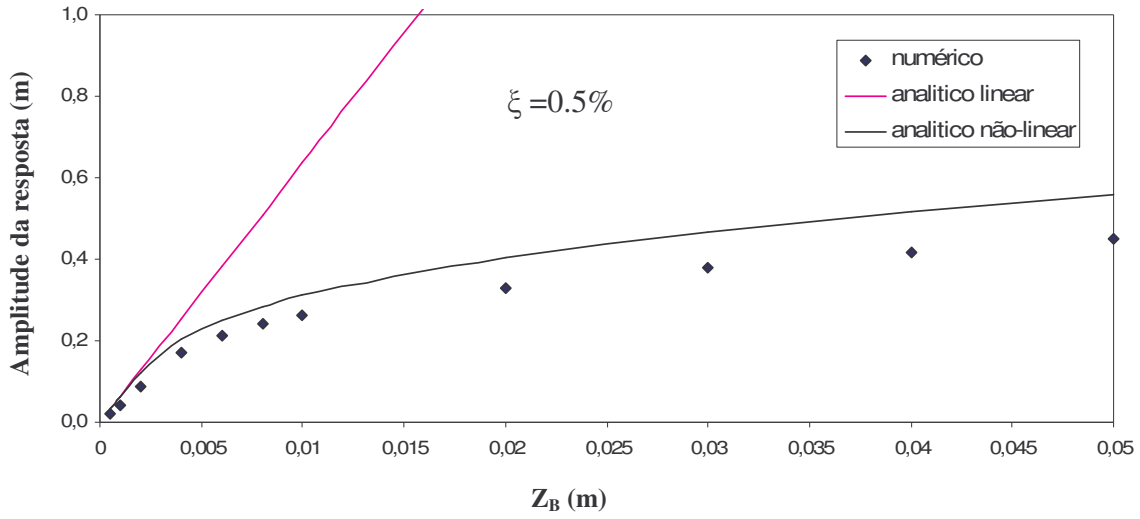


Figura 4.20 Variação da amplitude de oscilação com a amplitude da oscilação harmónica no apoio, para a primeira ressonância, considerando ξ = 0.5%

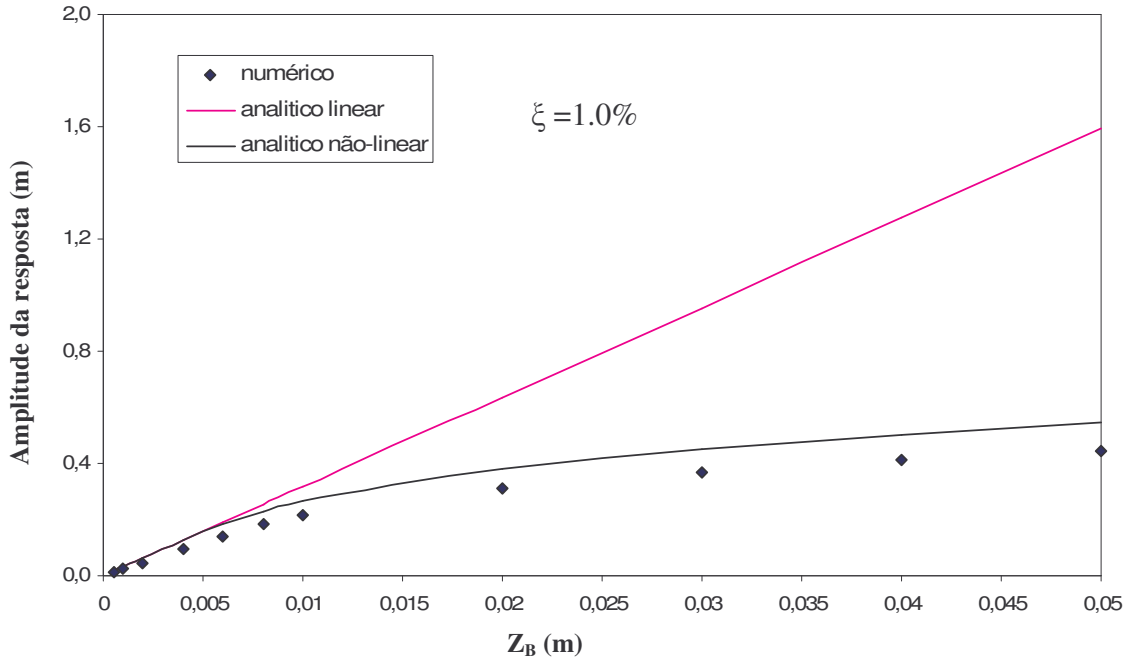


Figura 4.21 Variação da amplitude de oscilação com a amplitude da oscilação harmónica no apoio, para a primeira ressonância, considerando ξ = 1.0%

A observação dos gráficos representados nas Figuras Figura 4.19 a Figura 4.21 mostra que para amplitudes muito baixas da oscilação do apoio o comportamento dinâmico do tirante exibe uma significativa não-linearidade.

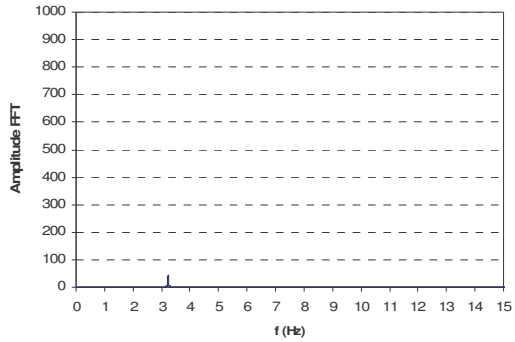
Para amplitudes de oscilação na ordem de 0,01m a diferença entre a resposta analítica não-linear e linear, para ξ = 0.1%, é superior a 80%, enquanto que para ξ = 0.5% verifica-se uma diferença na ordem dos 50%. Para o caso de ξ = 1.0% as diferenças da resposta não-linear e linear situam-se a 15% para a amplitude de oscilação referida. Assim, conclui-se também que, para amortecimentos menores, acontece mais cedo a não-linearidade.

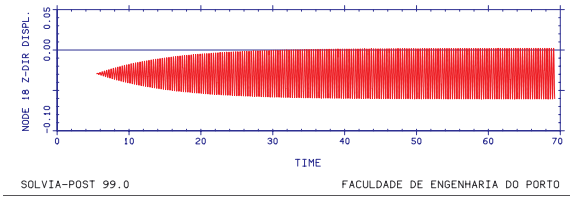
Por outro lado, verifica-se ainda que a resposta calculada numericamente é ligeiramente inferior à resposta obtida por via analítica. Tal facto resulta de esta última contemplar exclusivamente a resposta no modo de vibração fundamental do cabo, enquanto que a análise numérica envolve o contributo de vários modos, cuja acção conjunta pode originar uma atenuação da resposta.

Pelo referido anteriormente, é conservativo utilizar a expressão analítica baseada no 1º modo.

Efectuou-se uma análise da resposta para várias amplitudes de excitação combinadas com 4 diferentes coeficientes de amortecimento, pelo método da integração directa (Método de Rayleigh). Analisou-se a não-linearidade implícita no sistema.

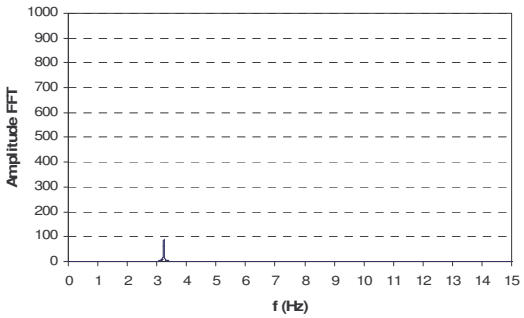
Apresentam-se de seguida os gráficos FFT da resposta segundo a direcção transversal ao cabo para uma excitação perpendicular com frequência do primeiro harmónico do cabo. A análise foi efectuada para um nó a meio vão (nó 18) e foi considerado um amortecimento de 0.5%. Foi considerado suficiente o intervalo de $\Delta t = 0.015s$ para aquisição de dados da série temporal

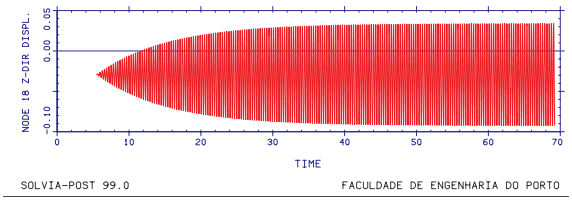




Amplitude de excitação de 0.0005m

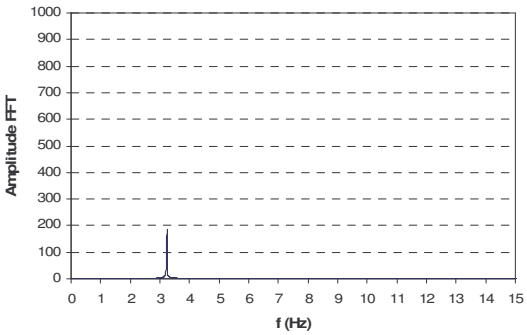
Série temporal

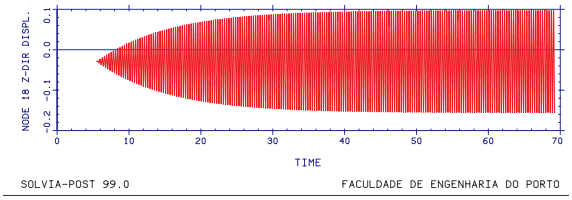




Amplitude de excitação de 0.001m

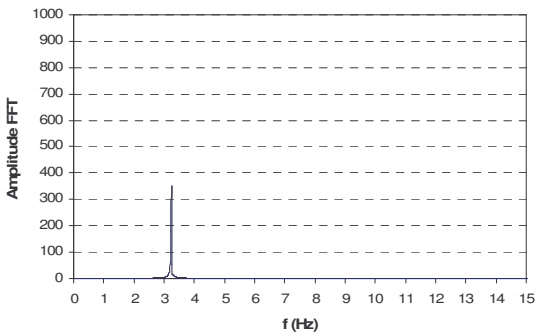
Série temporal

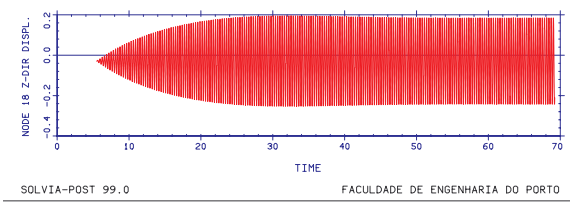




Amplitude de excitação de 0.002m

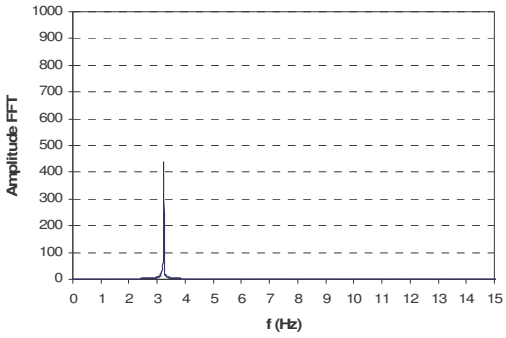
Série temporal



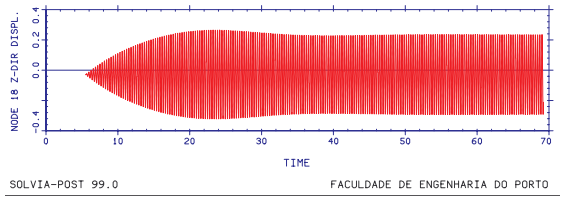


Amplitude de excitação de 0.004m

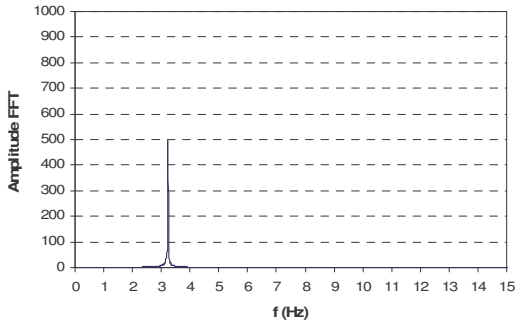
Série temporal



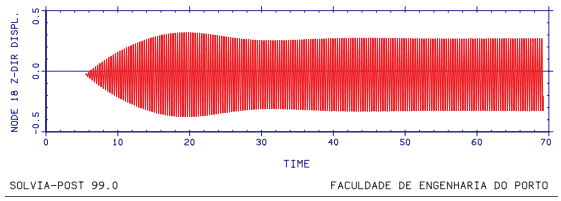
Amplitude de excitação de 0.006m



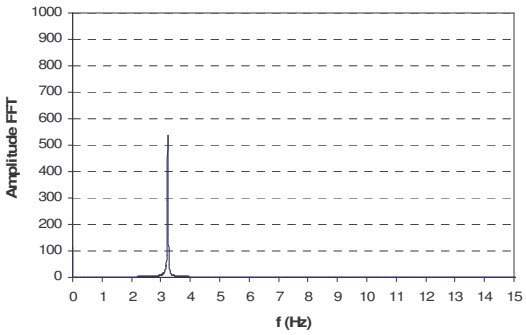
Série temporal



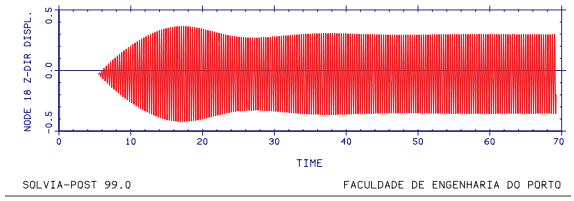
Amplitude de excitação de 0.008m



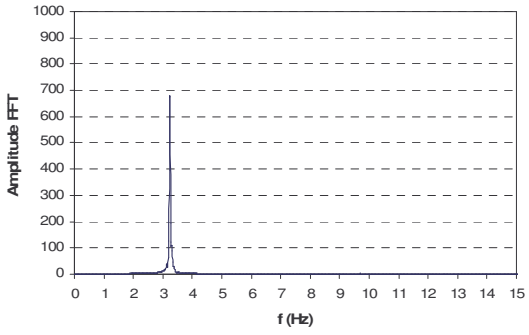
Série temporal



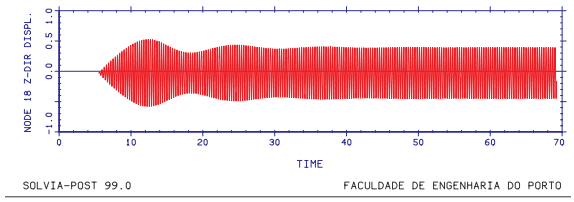
Amplitude de excitação de 0.01m



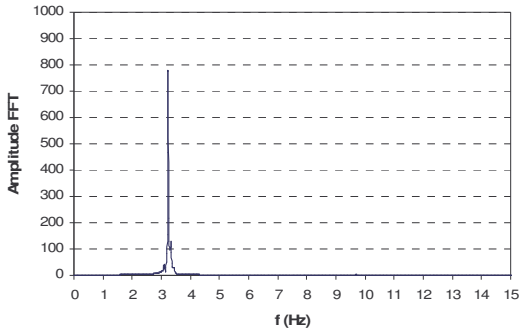
Série temporal



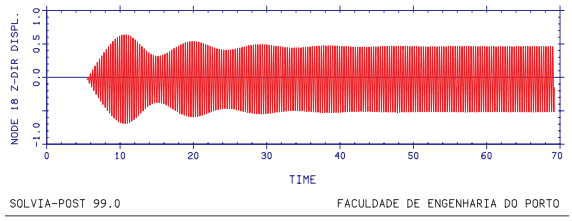
Amplitude de excitação de 0.02m



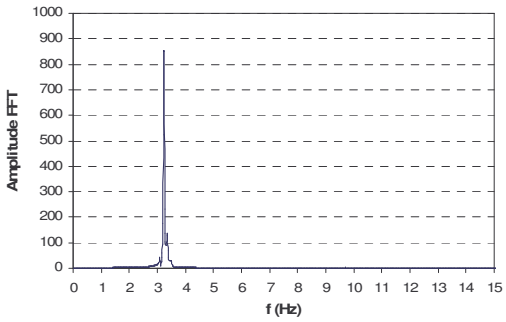
Série temporal



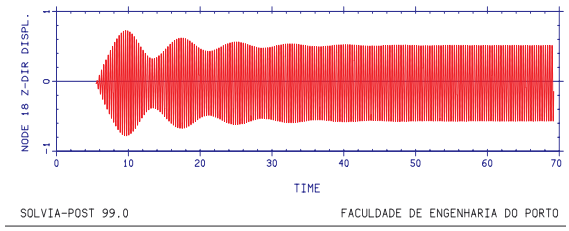
Amplitude de excitação de 0.03m



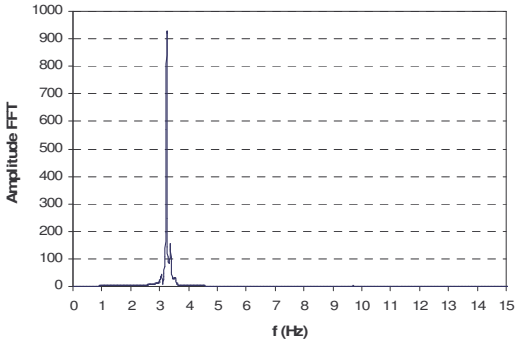
Série temporal



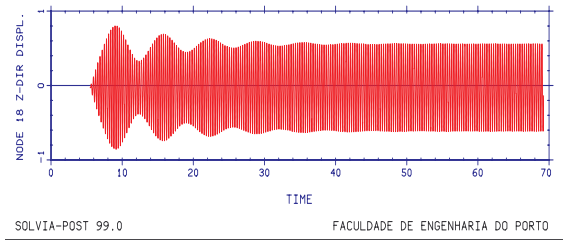
Amplitude de excitação de 0.04m



Série temporal



Amplitude de excitação de 0.05m



Série temporal

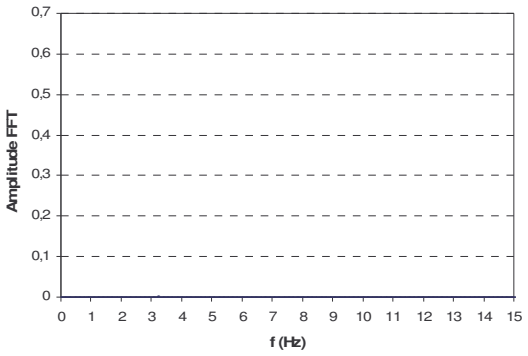
Figura 4.22 Resposta para diversas amplitudes de excitação e respectivas séries temporais de deslocamentos (amortecimento de 0.5%)

Observa-se que quanto maior a amplitude de excitação maior o número de picos de frequências da resposta na proximidade da frequência fundamental (3.2326 Hz). Isto deve-se, provavelmente à alteração da tensão instalada no cabo devido a amplitudes de excitação elevada, que por sua vez vão originar a modificação da frequência própria do cabo, justificando o aparecimento de picos nas frequências vizinhas.

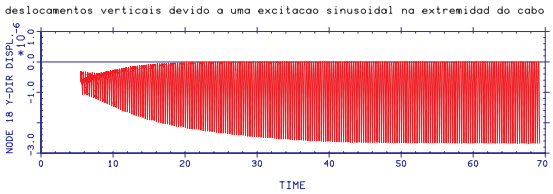
O cabo quando sujeito a vibração com deslocamentos elevados, aproxima-se do eixo da sua corda (Figura 4.24), ficando distensionado. Esta distensão origina alteração

das características próprias do cabo, modificando as suas frequências de ressonâncias. Assim, os efeitos da não-linearidade do cabo manifestam-se com maior intensidade quando o cabo se aproxima do eixo da corda, verificando-se pela Figura 4.23 (amplitude de excitação de 0.0005, segundo z) que durante a série temporal o cabo raramente passa pelo eixo da corda o que corresponde a uma resposta com pico apenas na primeira frequência de ressonância.

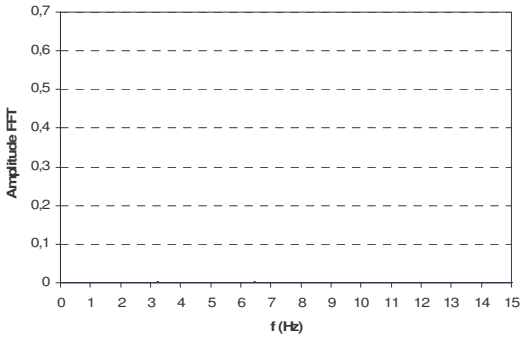
Apresentam-se de seguida os gráficos FFT da resposta segundo a direcção longitudinal do cabo para uma excitação perpendicular, com frequência igual ao primeiro harmónico do cabo. Foi considerado um amortecimento de 0.5%.



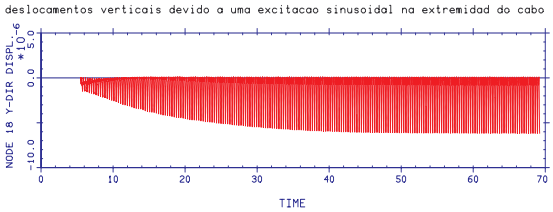
Amplitude de excitação de 0.0005m



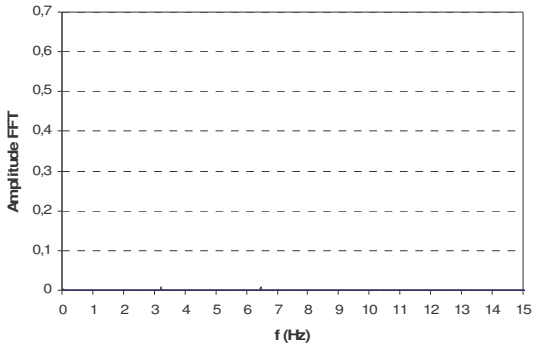
Série temporal

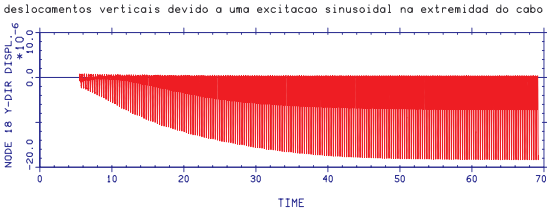


Amplitude de excitação de 0.001m



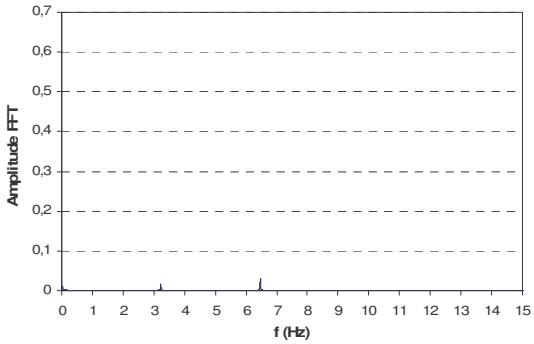
Série temporal

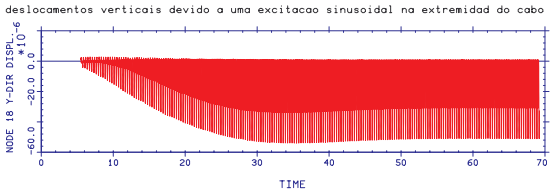




Amplitude de excitação de 0.002m

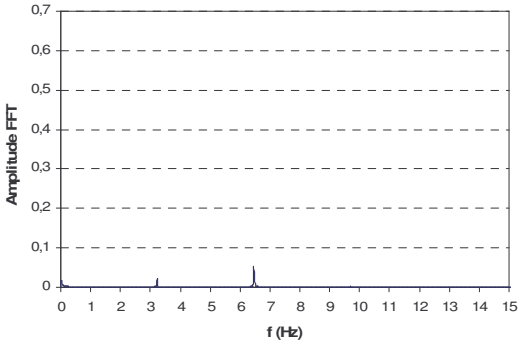
Série temporal

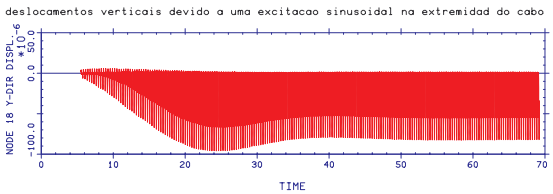




Amplitude de excitação de 0.004m

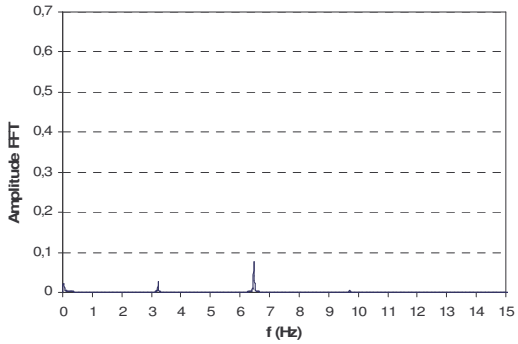
Série temporal

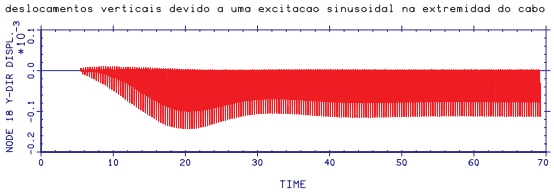




Amplitude de excitação de 0.006m

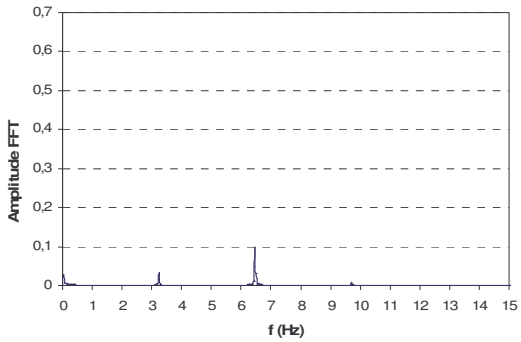
Série temporal

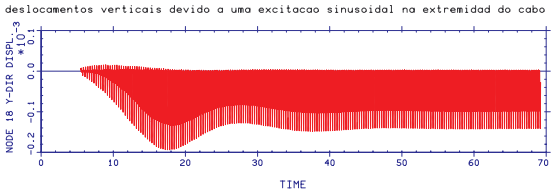




Amplitude de excitação de 0.008m

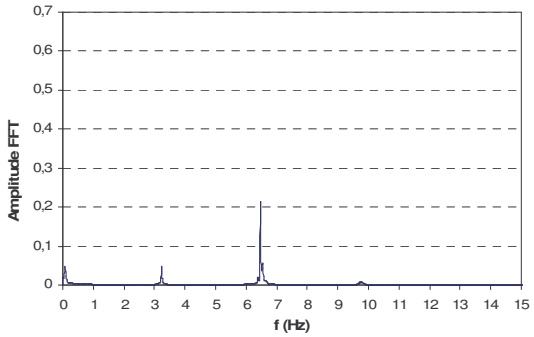
Série temporal

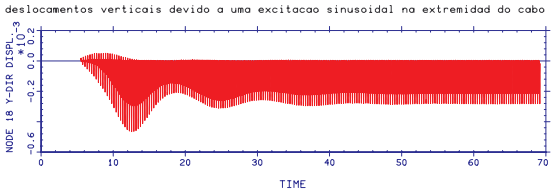




Amplitude de excitação de 0.01m

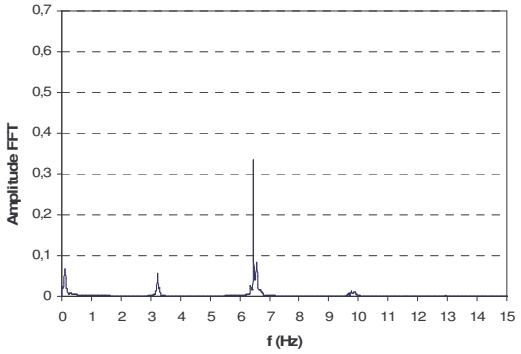
Série temporal

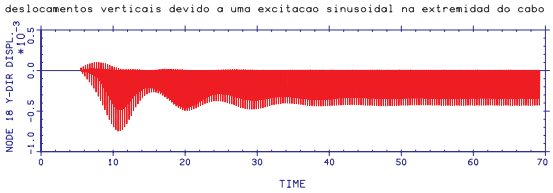




Amplitude de excitação de 0.02m

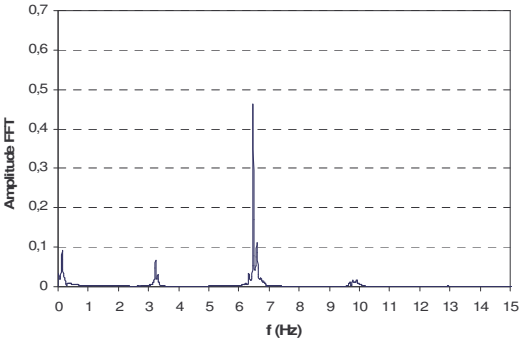
Série temporal

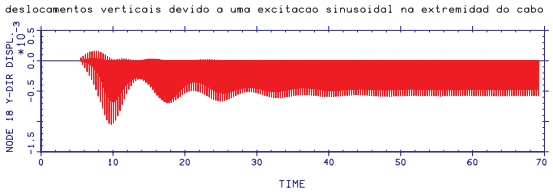




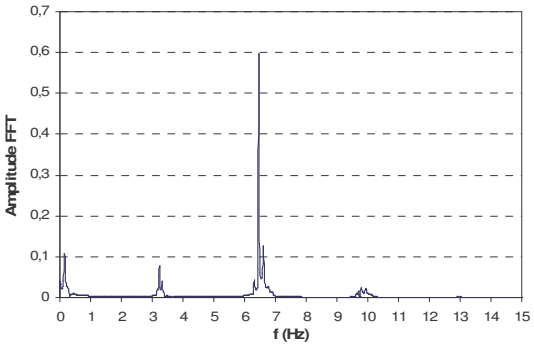
Amplitude de excitação de 0.03m

Série temporal

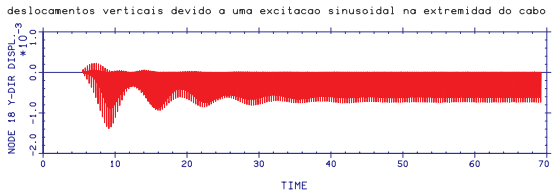




Amplitude de excitação de 0.04m



Série temporal



Amplitude de excitação de 0.05m

Série temporal

Figura 4.23 Resposta para diversas amplitudes de excitação e respectivas séries temporais de deslocamentos

Verifica-se que a densidade da resposta das oscilações no sentido longitudinal, no nó a meio vão, têm maior valor para a 2ª frequência do cabo (6.4652 Hz) do que a respectiva frequência do 1º harmónico. E esta diferença será tanto maior quanto maior a amplitude de oscilação. Isto acontece pelo facto de um período completo da oscilação na análise da direcção vertical corresponder à ocorrência de 2 períodos no mesmo intervalo de tempo na direcção longitudinal, pelo que teremos uma frequência o dobro da frequência fundamental. E esta diferença será tanto maior quanto maior a amplitude de oscilação.

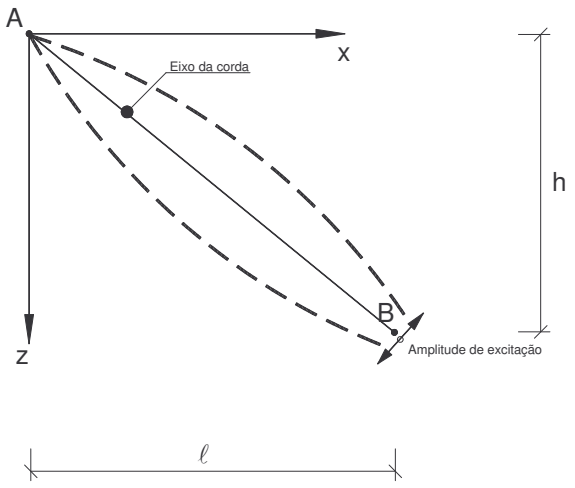
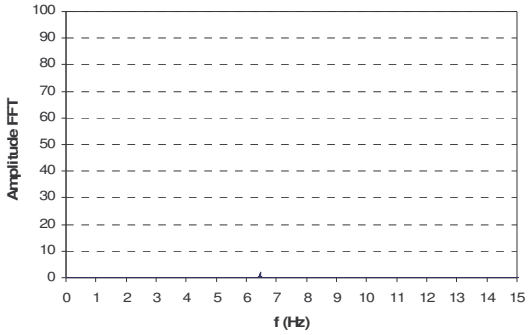
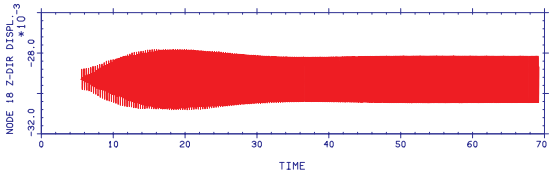


Figura 4.24

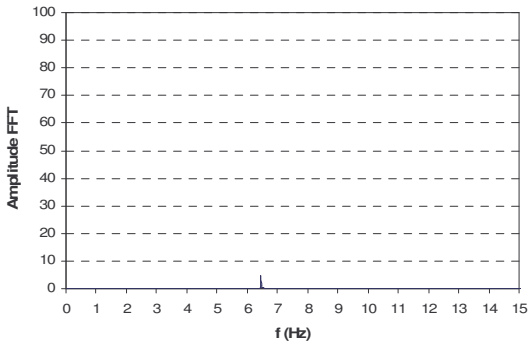
Apresentam-se de seguida os gráficos FFT da resposta segundo a direcção transversal do cabo para uma excitação perpendicular ao cabo, com frequência dupla da primeira frequência natural do cabo. Foi considerado um amortecimento de 0.5%.



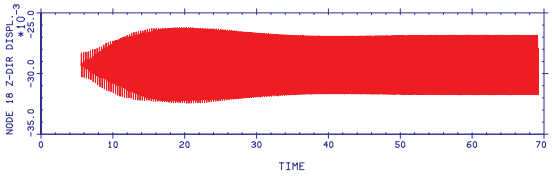
Amplitude de excitação de 0.0005m



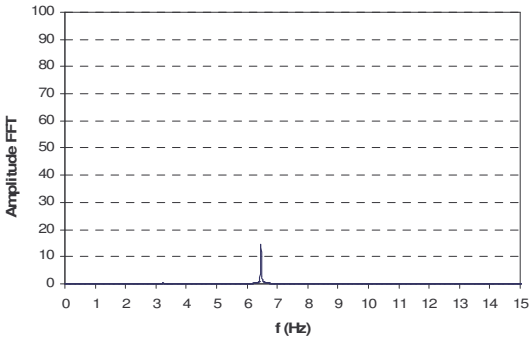
Série temporal



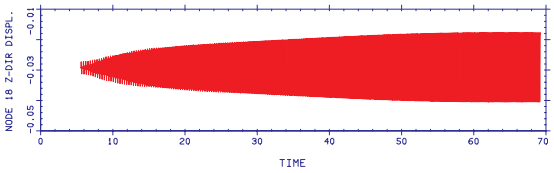
Amplitude de excitação de 0.001m



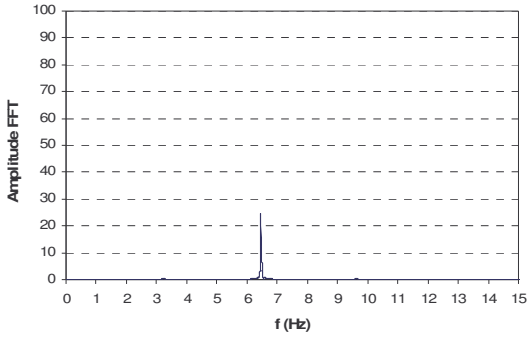
Série temporal

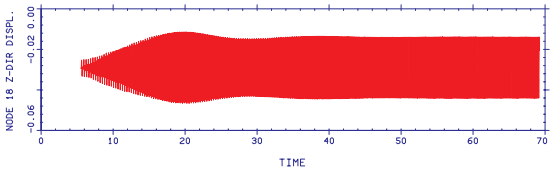


Amplitude de excitação de 0.002m



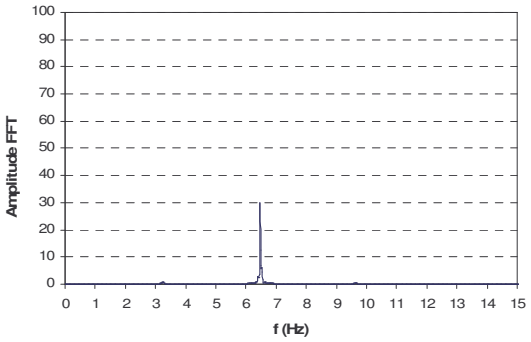
Série temporal

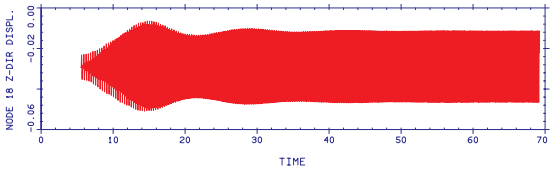




Amplitude de excitação de 0.004m

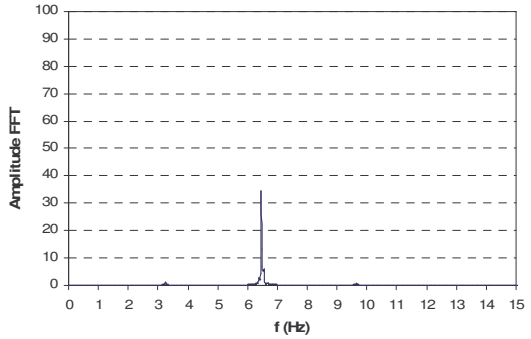
Série temporal

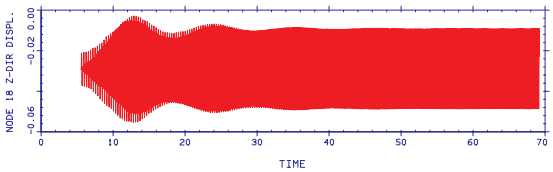




Amplitude de excitação de 0.006m

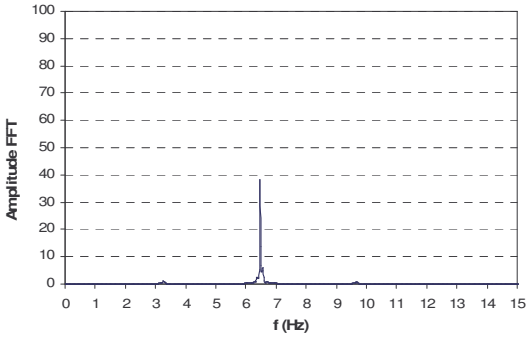
Série temporal

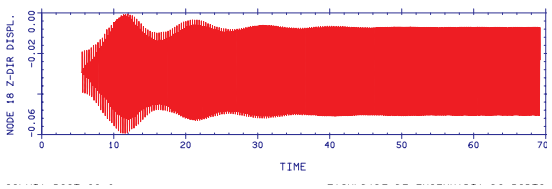




Amplitude de excitação de 0.008m

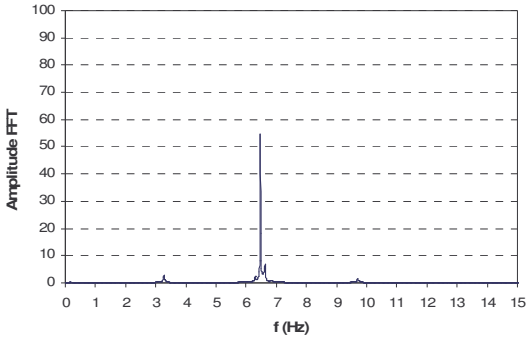
Série temporal



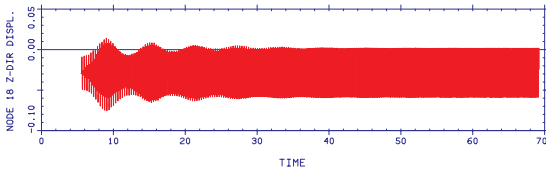


Amplitude de excitação de 0.01m

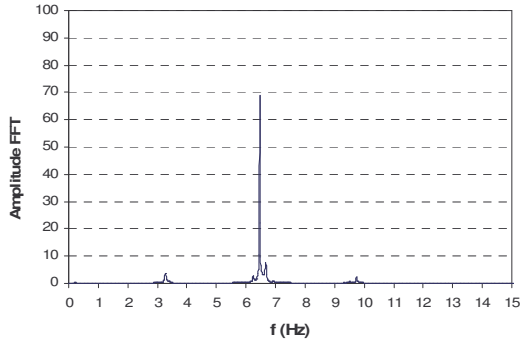
Série temporal



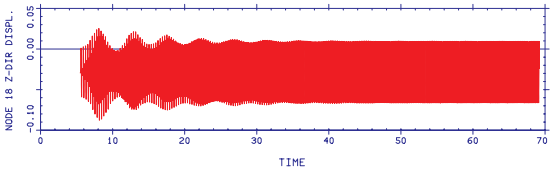
Amplitude de excitação de 0.02m



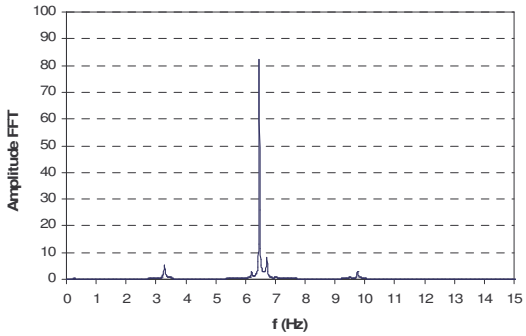
Série temporal



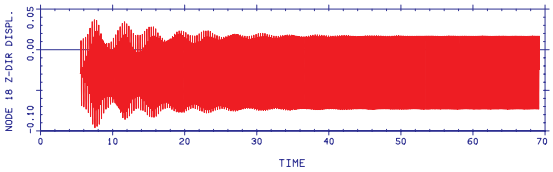
Amplitude de excitação de 0.03m



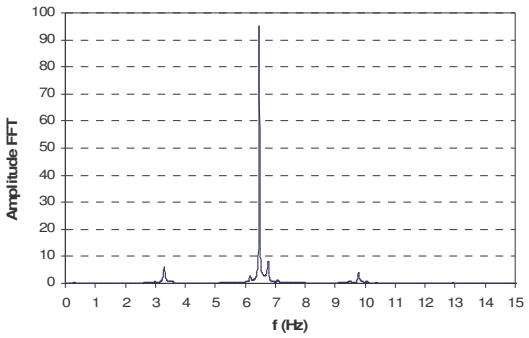
Série temporal

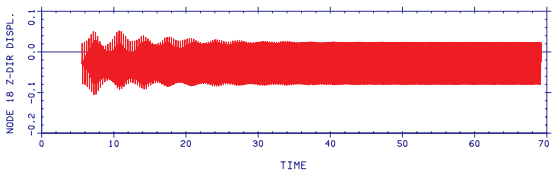


Amplitude de excitação de 0.04m



Série temporal





Amplitude de excitação de 0.05m Série temporal

Figura 4.25 Resposta para diversas amplitudes de excitação e respectivas séries temporais de deslocamentos

CAPÍTULO 5

EXCITAÇÃO PARAMÉTRICA

5.1 INTRODUÇÃO

Em contraste com o caso de excitação externa (direcção perpendicular ao cabo) para a qual, pequenas amplitudes de oscilação produzem grandes amplitudes de resposta no caso da frequência de excitação ser próxima da frequência natural do sistema estrutural, a excitação paramétrica (direcção longitudinal) pode originar uma resposta de amplitude particularmente elevada quando a frequência de excitação está afastada da frequência natural do sistema estrutural, mais precisamente é igual ao dobro da frequência natural.

Até ao fim do século XX, poucos trabalhos foram apresentados na área da excitação paramétrica de tirantes. O estudo deste fenómeno pretende fornecer um contributo para a melhor compreensão do comportamento dinâmico dos cabos das pontes de tirantes.

Uma ponte de tirantes é caracterizada por um conjunto de frequências naturais a que estão associadas configurações modais ortogonais. Estas são dominadas pela vibração global do tabuleiro e torres, podendo envolver em maior ou menor grau as vibrações de um ou mais tirantes. A menor rigidez destes elementos face à rigidez do tabuleiro e torres origina ainda o aparecimento de modos de vibração de natureza local, ou quase local, de frequências próximas das frequências naturais de sistemas simples formados por tirantes individuais apoiados nas extremidades. Em situações de proximidade entre frequências de modos locais e globais, a interacção dinâmica ponte/tirante torna-se mais acentuada, e, consequentemente, a vibração do tabuleiro e torres pode originar vibração dos tirantes e vice-versa.

Nesta dissertação é discutida a oscilação local do subsistema estrutural constituído por um cabo e pelas ancoragens colocadas na sua extremidade, uma passiva e outra activa, sendo esta última (e para o caso de excitação paramétrica) solicitada axialmente por uma força sinusoidal, e com frequências de metade, igual ou o dobro da frequência fundamental do cabo em estudo.

A oscilação harmónica aplicada na extremidade B do cabo, na direcção do seu eixo, pode ser definida sob a forma,

$$\times_B (t) = X_B \cdot \sin(2.\omega.t) \qquad \textbf{(5.1)}$$

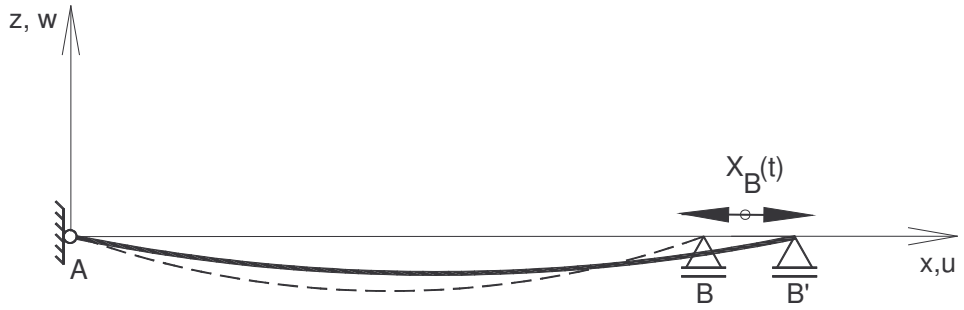


Figura 5.1 Cabo horizontal sujeito a movimento harmónico longitudinal numa ancoragem

De acordo com Nayfeh (1979) a situação mais gravosa, do ponto de vista das oscilações do tirante, ocorre quando a frequência do tabuleiro e/ou torres é dupla da frequência natural do tirante.

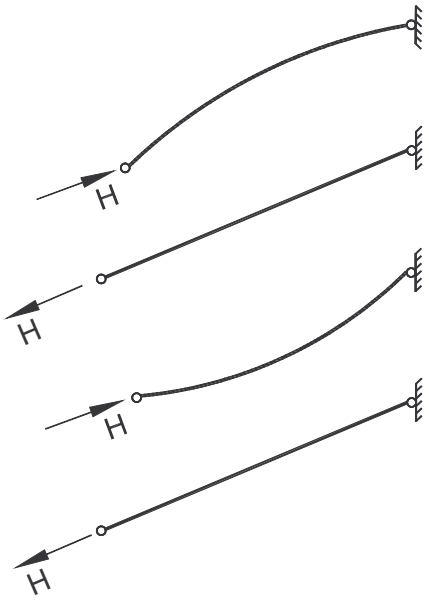


Figura 5.2 Cabo inclinado descrevendo um ciclo de oscilação quando solicitado harmonicamente ao longo do seu eixo

No caso particular das pontes de tirantes, estes possuem frequências fundamentais na gama de 0.6 a 3.0Hz. Considerando que as acções dos agentes exteriores mobilizam frequências tipicamente inferiores a 5Hz, compreende-se que os tirantes oscilam maioritariamente nos 1º e 2º modos. Por este facto, procederam-se a várias simplificações nas deduções de expressões matemáticas, eliminando-se contribuições de modos de ordem mais elevada.

A Figura 5.3 ilustra o fenómeno de excitação paramétrica na ressonância de segunda ordem, i.e., quando a frequência de excitação é dupla da frequência do tirante.

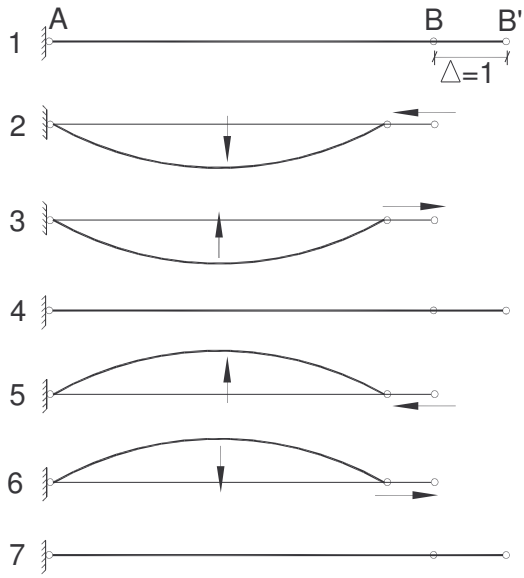


Figura 5.3 Modo de vibração principal para a excitação longitudinal ao cabo (paramétrica)

Apresenta-se na Figura 5.4 a variação temporal dos deslocamentos longitudinal e transversal da extremidade e a meio vão do cabo, respectivamente, indicando-se as fases 1 a 7 definidas na Figura 5.3.

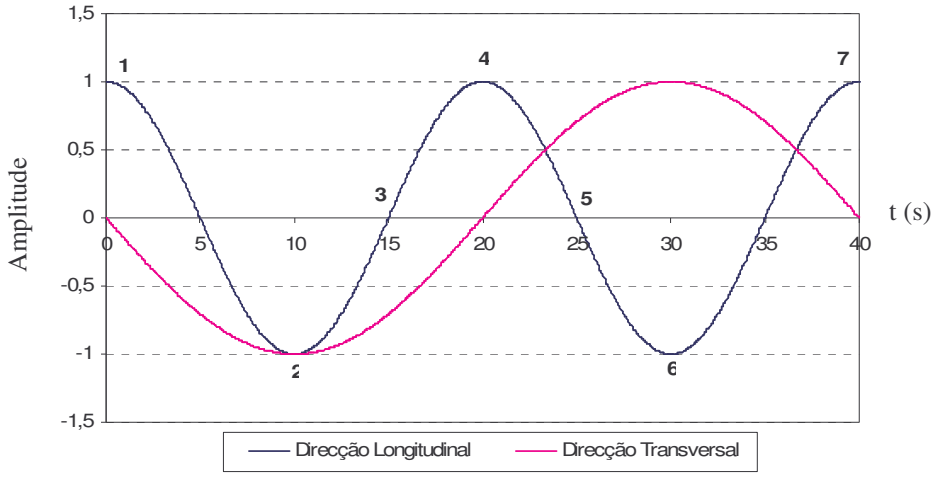


Figura 5.4 Movimento sinusoidal na direcção longitudinal e perpendicular do cabo

Enquanto que na direcção transversal ao cabo se completa um período (T), na direcção longitudinal do cabo completam-se dois períodos (2.T). Assim, resulta

$$2.T_{Longitudinal} = T_{CABO} \tag{5.2}$$

$$2.\frac{1}{f_{longitudinal}} = \frac{1}{f_{CABO}} \tag{5.3}$$

e portanto $2.f_{CABO} = f_{longitudinal}$, logo se o cabo for excitado na direcção longitudinal com uma frequência igual ao dobro da sua frequência natural, os deslocamentos transversais atingem valores máximos.

Uma das preocupações relacionadas com o estudo do fenómeno de excitação paramétrica, prende-se com a variação de tensão nos tirantes durante a oscilação e consequentemente a alteração das combinações de projecto para as quais estes foram dimensionados.

5.2 DETERMINAÇÃO DAS CURVAS DE INSTABILDADE

Por forma a estudar as amplitudes das oscilações e correspondentes incrementos de tensão de um cabo submetido a uma excitação paramétrica, pode utilizar-se a equação geral de Mathieu (Nayfeh & Mook, 1979),

$$\ddot{u} + (\delta + 2\varepsilon \sin 2\bar{t}).u = \varepsilon.f(\dot{u},u) \tag{5.4}$$

que simplificadamente traduz o equilíbrio dinâmico na direcção longitudinal de um tirante submetido a uma força periódica.

Sendo o parâmetro δ respeitante ao rácio de frequências entre a frequência de excitação e a frequência natural da estrutura, ε desempenha a contribuição da excitação paramétrica e $2\varepsilon \sin 2\bar{t}$ corresponde ao movimento sinusoidal que vai excitar parametricamente o sistema.

A função $f(\dot{u},u)$ incorporando o efeito do amortecimento e a não-linearidade do sistema e é definida por,

$$f = -\alpha.u^3 - 2\mu.\dot{u} \tag{5.5}$$

Substituindo (5.5) em (5.4), resulta a chamada equação de Duffing (Nayfeh & Mook, 1979), que representa o equilíbrio dinâmico da corda vibrante (sem peso)

$$\ddot{u} + (\delta + 2\varepsilon \sin 2\bar{t}).u = -\varepsilon.\alpha.u^3 - 2.\varepsilon.\mu.\dot{u} \tag{5.6}$$

$$\ddot{u} + 2.\varepsilon.\mu.\dot{u} + (\delta + 2\varepsilon \sin 2\bar{t}).u + \varepsilon.\alpha.u^3 = 0 \tag{5.7}$$

em que : $\bar{t} = \omega.t$; $u(\bar{t}) = \dfrac{\alpha_1(\bar{t})}{K}$; $\delta = \left(\dfrac{\omega_1}{\omega}\right)^2$ (ω_1 é a frequência natural do cabo e ω é a frequência de excitação). Temos ainda a expressão da constante adimensional K:

$$K = \frac{4}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{X_0.\ell}{3}} \tag{5.8}$$

onde X_0 representa o alongamento do cabo depois de pré-tensionado e ℓ o comprimento do cabo.

A quantidade ε é definida por

$$\varepsilon = \delta^2 . \frac{x_B}{2.X_0} \tag{5.9}$$

sendo x_B a amplitude de excitação. Apresentam-se ainda as definições dos parâmetros α e μ

$$\alpha = \frac{4}{3} \cdot \frac{\delta^2}{\varepsilon} \tag{5.10}$$

$$\mu = \xi_1 . \frac{\delta}{\varepsilon} \tag{5.11}$$

A soluções de (5.7) podem ser limitadas ou não, de acordo com os parâmetros δ, ε e μ. Desprezando o termo crítico, obtém-se um conjunto de curvas de transição, também chamadas de Diagrama de Strutt, que dividem o plano $\varepsilon - \delta$ em regiões estáveis ou instáveis.

5.2.1 Curvas de Transição sem Amortecimento

Apresentam-se de seguida as curvas de transição para o caso de um sistema sem amortecimento. Neste caso $\mu = 0$, de que resulta a equação de Mathieu sob a forma canónica

$$\ddot{u} + (\delta + 2\varepsilon \sin 2\bar{t}).u = 0 \tag{5.12}$$

A determinação das equações das curvas de transição para a solução trivial foi baseada na Equação de Hill (Nayfeh & Mook, 1979), que traduz o movimento de um sistema excitado parametricamente. Considere-se a sua forma geral

$$\ddot{u} + \left[\delta + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m . f_m(t) \right] . u = 0 \qquad \textbf{(5.13)}$$

onde $f_m(t + \pi) = f_m(t)$.

Assumindo que $\int_0^{\pi} f_m(t).dt = 0$ e portanto a função f_m pode ser representada por uma Série de Fourier sob a forma

$$f_m = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{m.n} . \cos 2nt + \beta_{m.n} . \sin 2nt) \qquad \textbf{(5.14)}$$

Considera-se na determinação das curvas de transição a solução $\mu(t, \varepsilon)$ expressa na forma

$$u(t;\varepsilon) = u_0(t) + \varepsilon \cdot u_1(t) + \varepsilon^2 \cdot u_2(t) + ... \qquad \textbf{(5.15)}$$

$$\delta(\varepsilon) = \delta_0 + \delta_1 . \varepsilon + \delta_2 . \varepsilon^2 + ... \qquad \textbf{(5.16)}$$

em que se desprezam os termos de ordem cúbica e superiores, uma vez que o parâmetro ε é muito pequeno. Substituindo (5.15) e (5.16) em (5.13), e igualando os coeficientes nas potências idênticas de ε, resultam as seguintes equações

$$\ddot{u}_0 + \delta_0 . u_0 = 0 \qquad \textbf{(5.17)}$$

$$\ddot{u}_1 + \delta_0 . u_1 = -(\delta_1 + f_1) . u_0 \qquad \textbf{(5.18)}$$

$$\ddot{u}_2 + \delta_0 . u_2 = -(\delta_1 + f_1) . u_1 - (\delta_2 + f_2) . u_0 \qquad \textbf{(5.19)}$$

Em resultado da Teoria de Floquet (Nayfeh & Mook, 1979), conclui-se que a solução μ de (5.13) tem período π ou 2π, pelo que

$$\mu_o = a_o \cos(nt) + b_o \sin(nt) \tag{5.20}$$

Substituindo em (5.17), obtém-se $\delta_0 = n^2$. Usando um raciocínio semelhante para μ_1, conclui-se que

$$\delta_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{4}\left(\alpha_{1.n}^2 + \beta_{1.n}^2\right)} \tag{5.21}$$

sendo μ_1 dado por

$$\begin{aligned}\mu_1 = &\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{8.m.(m+n)}\left[\left(a_0.\alpha_{1.m} - b_0.\beta_{1.m}\right)\cos(2.m+n).t + \left(a_0.\beta_{1.m} + b_0.\alpha_{1.m}\right).\sin(2.m+n).t\right] + \\ &+ a_1.\cos(nt) + b_1.\sin(nt) + \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq n}}^{\infty} \frac{1}{8.m.(m-n)}\left[\left(a_o.\alpha_{1.m} + b_o.\beta_{1.m}\right).\cos(2.m-n).t + \left(a_o.\beta_{1.m} - b_o.\alpha_{1.m}\right).\sin(2.m-n).t\right]\end{aligned} \tag{5.22}$$

Substituindo (5.20) e (5.22) em (5.19), resulta

$$\begin{aligned}\ddot{u}_2 + \delta_0.u_2 = &-\left[\left(\delta_1 + \frac{1}{2}.\alpha_{1.n}\right).a_1 + \frac{1}{2}.\beta_{1.n}.b_1 - y_1.a_0 - y_2.b_0\right].\cos(n.t) - \\ &-\left[\frac{1}{2}.\beta_{1.n}.a_1 + \left(\delta_1 - \frac{1}{2}.\alpha_{1.n}\right).b_1 - y_2.a_0 - y_3.b_0\right].\sin(n.t)\end{aligned} \tag{5.23}$$

cujos coeficientes y_1, y_2 e y_3 são definidos através de

$$y_1 = -\delta_2 - \frac{1}{2}\alpha_{2n} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_{1.m}^2 + \beta_{1.m}^2 + 2.(\alpha_{1.m}.\alpha_{1.m+n} + \beta_{1.m}.\beta_{1.m+n})}{16.m.(m+n)} - \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq n}}^{\infty} \frac{\alpha_{1.m}^2 + \beta_{1.m}^2}{16.m.(m-n)} - \\ - \sum_{m=1}^{n-1} \frac{(\alpha_{1.n-m}.\alpha_{1.m} - \beta_{1.n-m}.\beta_{1.m})}{16.m.(m-n)} \tag{5.24}$$

$$y_2 = -\frac{1}{2}\beta_{2n} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\alpha_{1.m}.\beta_{1.n+m} - \beta_{1.m}.\alpha_{1.n+m})}{16.m.(m+n)} - \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq n}}^{\infty} \frac{(\alpha_{1.m}.\beta_{1.m+n} - \beta_{1.m}.\alpha_{1.m+n})}{16.m.(m+n)} - \\ - \sum_{m=1}^{n-1} \frac{(\alpha_{1.n-m}.\beta_{1.m} + \beta_{1.n-m}.\alpha_{1.m})}{16.m.(m-n)} \tag{5.25}$$

$$y_3 = -\delta_2 - \frac{1}{2}\alpha_{2n} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_{1.m}^2 + \beta_{1.m}^2 + 2.(\beta_{1.m}.\beta_{1.m+n} + \alpha_{1.m}.\alpha_{1.m+n})}{16.m.(m+n)} - \\ - \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq n}}^{\infty} \frac{\alpha_{1.m}^2 + \beta_{1.m}^2}{16.m.(m-n)} - \sum_{m=1}^{n-1} \frac{(\beta_{1.n-m}.\beta_{1.m} - \alpha_{1.n-m}.\alpha_{1.m})}{16.m.(m-n)} \tag{5.26}$$

Para $\delta_1 \neq 0$ poderemos determinar δ_2 resolvendo a equação que se apresenta de seguida,

$$\beta_{1.n}[(2.\delta_1 + \alpha_{1.n})y_2 - \beta_{1.n} \cdot y_1] - (2.\delta_1 + \alpha_{1.n}) \cdot [(2.\delta_1 + \alpha_{1.n})y_3 - \beta_{1.n} \cdot y_2] = 0 \tag{5.27}$$

N o caso particular de $\delta_0 \approx 0$, vem

$$\delta(\varepsilon) = \delta_1.\varepsilon + \delta_2.\varepsilon^2 + ... \tag{5.28}$$

As equações para determinação de δ_1 e δ_2 são então

$$\ddot{u}_0 = 0 \tag{5.29}$$

$$\ddot{u}_1 = -(\delta_1 + f_1).u_0 \tag{5.30}$$

$$\ddot{u}_2 = -(\delta_1 + f_1).u_1 - (\delta_2 + f_2).u_0 \tag{5.31}$$

A solução periódica de (5.29) é então

$$\mu_0 = a_0 \tag{5.32}$$

Substituindo (5.32) e (5.14) em (5.30) resulta

$$\delta_1 = 0 \tag{5.33}$$

de onde se pode obter

$$\mu_1 = a_1 + \frac{1}{4}.a_0.\sum_{m=1}^{\infty}(\alpha_{1.m}.\cos(2.m.t) + \beta_{1.m}.\sin(2.m.t)) \tag{5.34}$$

Substituindo finalmente (5.32), (5.33) e (5.34)em (5.31), pode concluir-se que δ_2 é dado por

$$\delta_2 = -\frac{1}{8}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\alpha_{1.m}^2 + \beta_{1.m}^2}{m^2} \tag{5.35}$$

Para o caso específico em estudo e tendo em conta a equação representativa de equilíbrio dinâmico (5.12) associada a uma excitação paramétrica, a analogia com (5.13) e (5.14) mostra que $\beta_{11} = 2$ e os restantes $\beta_{i.j} = 0$. Igualmente, todos os $\alpha_{i.j} = 0$. Lembrar que $\delta_0 = n^2$ e $\delta \approx n^2$.

São agora determinadas três zonas de instabilidade, que corresponderam `s seguintes frequências de excitacão ($\delta = \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2$ com $f_{excitação} = 2.\omega$).

- ✓ **Caso I** (frequência de excitação dupla da frequência própria do cabo)

$$f_{excitação} = 2.f_{CABO} \tag{5.36}$$

$$2.\omega = 2.\omega_1 \Rightarrow \delta = 1 \tag{5.37}$$

- ✓ **Caso II** (frequência de excitação igual à frequência própria do cabo)

$$f_{excitação} = f_{CABO} \tag{5.38}$$

$$2.\omega = \omega_1 \Rightarrow \delta = 4 \tag{5.39}$$

- ✓ **Caso III** (frequência de excitação igual a metade da frequência própria do cabo)

$$f_{excitação} = \frac{1}{2} f_{CABO} \tag{5.40}$$

$$2.\omega = \frac{1}{2}\omega_1 \Rightarrow \delta = 16 \tag{5.41}$$

Assim,

- para $n = 1$ (**Caso I**)

$\delta_0 = 1$;

$\delta_1 = \pm 1$ (como $\delta_1 \neq 0$ determinar δ_2 pela equação (5.27));

$\delta_2 = -\frac{1}{8}$.

Pela equação (5.16)) define-se então a primeira região de instabilidade através das curvas de transição

$$\delta = 1 \pm 1.\varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2 \tag{5.42}$$

- para $n = 2$ (**Caso II**)

$\delta_0 = 4$;

$\delta_1 = 0$ (como $\delta_1 = 0$ determinar δ_2 pela equação $y_1.y_3 - y_2^2 = 0$);

$\delta_2 = -\frac{1}{12} \vee \delta_2 = +\frac{5}{12}$.

A segunda região de instabilidade fica definida por pelas curvas

$$4 - \frac{1}{12}\varepsilon^2 \leq \delta \leq 4 + \frac{5}{12}\varepsilon^2 \qquad \textbf{(5.43)}$$

- para $n = 4$ (**Caso III**)

$\delta_0 = 16$;

$\delta_1 = 0$ (como $\delta_1 = 0$ determinar δ_2 pela equação $y_1.y_3 - y_2^2 = 0$)

$\delta_2 = 0 \vee \delta_2 = +\frac{1}{24}$.

A terceira região de instabilidade fica definida por

$$16 \leq \delta \leq 16 + \frac{1}{24}\varepsilon^2 \qquad \textbf{(5.44)}$$

A determinação das equações (5.42), (5.43) e (5.44) permitem o traçado das linhas que separam as zonas estáveis das zonas instáveis na caracterização de um fenómeno paramétrico.

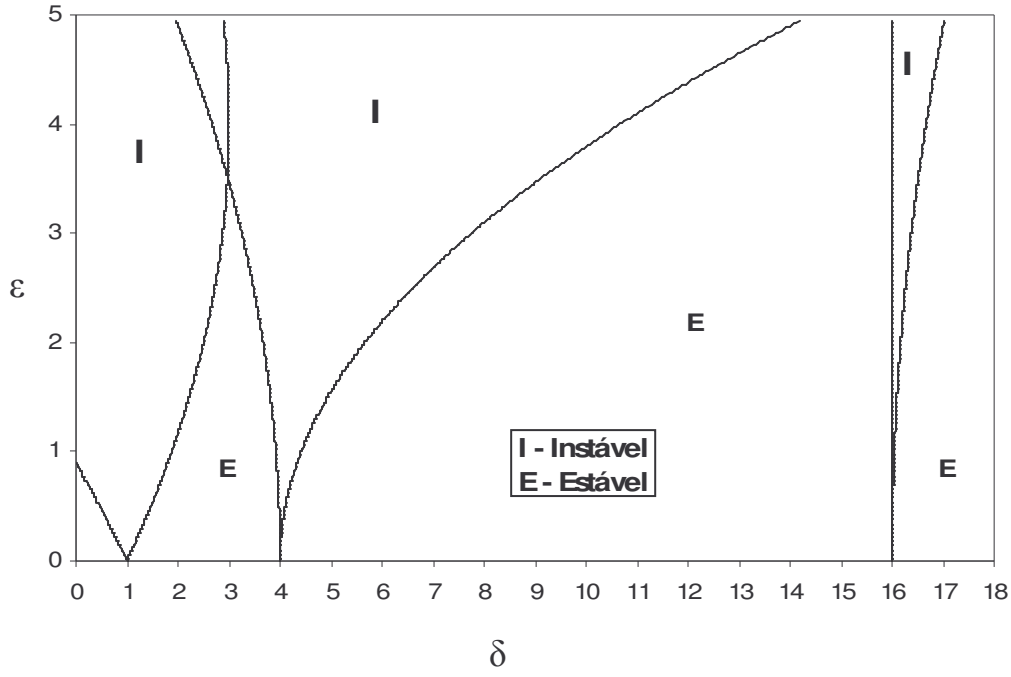


Figura 5.5 Diagrama de Strutt (sem amortecimento, $\xi = 0\%$)

5.2.2 Curvas de Transição com Amortecimento

Considera-se agora o efeito do amortecimento na resposta do sistema à excitação paramétrica. A equação de equilíbrio dinâmico assume agora a forma

$$\ddot{u} + 2.\mu.\dot{u} + \left[\delta + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m . f_m(t)\right].u = 0 \text{, com } \mu > 0 \qquad \textbf{(5.45)}$$

Resolvendo as equações,

$$\ddot{u}_0 + \delta_0 . u_0 = 0 \qquad \textbf{(5.46)}$$

$$\ddot{u}_1 + \delta_0 . u_1 = -(\delta_1 + f_1).u_0 - 2.\frac{\mu}{\varepsilon}.\dot{u}_0 \qquad \textbf{(5.47)}$$

Resulta então

$$\delta = n^2 \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\alpha_{1.n}^2 + \beta_{1.n}^2\right) - 4.\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^2 .n^2} \qquad \textbf{(5.48)}$$

Particularizando para a equação em estudo, vem:

A primeira região de instabilidade fica então definida por, (Nayfeh & Mook, 1979)

$$\delta = 1 \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 4.\mu^2} - \frac{1}{8}\varepsilon^2 \tag{5.49}$$

A segunda região de instabilidade fica definida por,

$$\delta = 4 \pm \sqrt{\frac{1}{16}.\varepsilon^4 - 16.\mu^2} + \frac{1}{6}\varepsilon^2 \tag{5.50}$$

A terceira região de instabilidade fica definida por,

$$\delta = 16 + \frac{1}{24}\varepsilon^2 \pm \sqrt{\frac{1}{256}\varepsilon - 64.\mu^2} \tag{5.51}$$

Ao concretizar as equações (5.49), (5.50) e (5.51) que limitam as zonas de estabilidade com amortecimento, obtém-se para três amortecimentos (ξ) diferentes, as curvas $\varepsilon - \delta$ (Figura 5.6 a Figura 5.8).

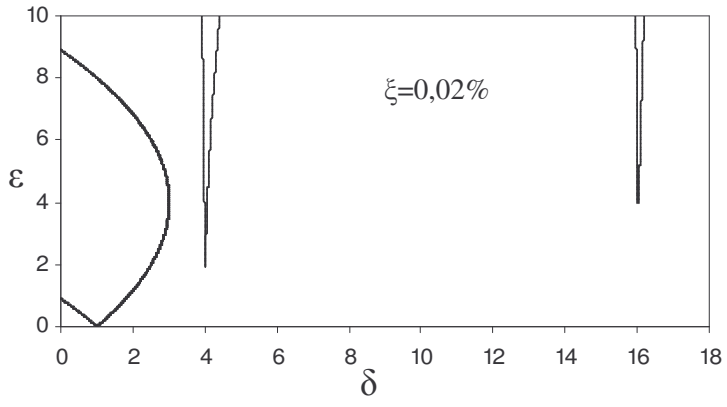


Figura 5.6 Diagrama de Strutt para $\xi = 0{,}02\%$

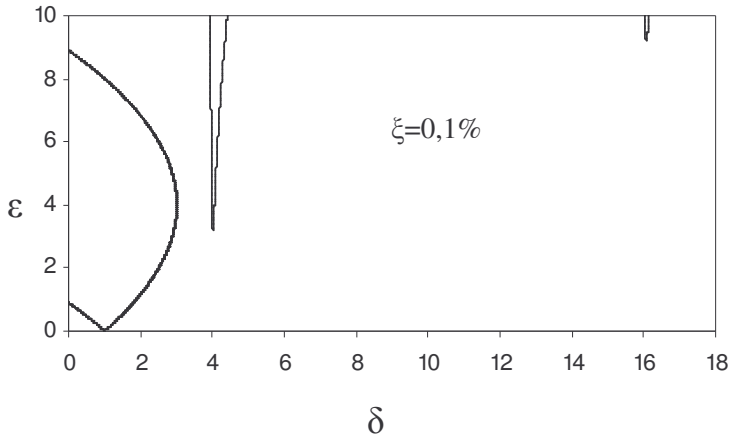


Figura 5.7 Diagrama de Strutt para $\xi = 0{,}1\%$

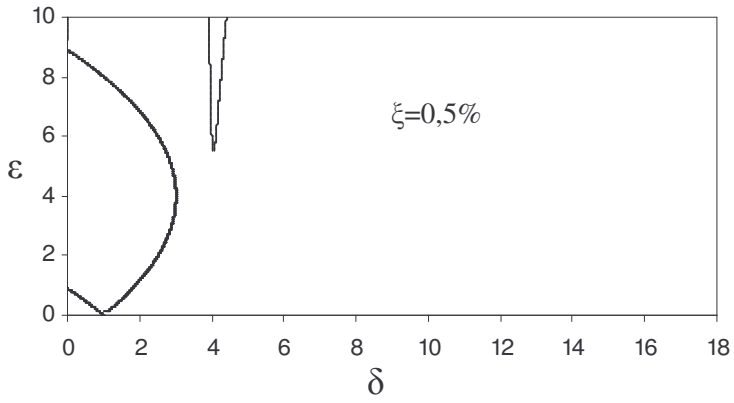


Figura 5.8 Diagrama de Strutt para $\xi = 0{,}5\%$

Verifica-se que a introdução de amortecimento no sistema origina uma subida das zonas instáveis em relação ao eixo das abcissas (δ). A análise da equação (5.9) mostra que, sendo o parâmetro ε directamente proporcional à amplitude de excitação (X_B), a instabilidade para amortecimentos crescentes, acontece para crescentes amplitudes de excitação.

Observa-se pela configuração das curvas do gráfico que o amortecimento tem maior influência para a segunda ($\delta = 4$) e terceira ($\delta = 16$) ressonâncias.

5.3 ANÁLISE NUMÉRICA

Usando o cabo central 16 da ponte do Guadiana, descrito 4.6.3 e utilizando o software Solvia, calculou-se a amplitude da resposta do cabo ao movimento harmónico longitudinal numa das ancoragens (activa) para amplitudes crescentes da excitação. Foi calculada a resposta para três frequências de excitação do sistema: $\frac{f_{cabo}}{2}$; f_{cabo} (3.2326Hz) e $2.f_{cabo}$. Utilizaram-se 3 valores de amortecimento (0.1 %, 0.5% e 1.0%).

Foram apenas representados os 1º e 2º modos de oscilação dos tirantes, uma vez que no caso particular das pontes atirantadas as frequências fundamentais dos tirantes são baixas (0.6 a 3.0Hz), e como as acções mais correntes nesse tipo de pontes mobilizam frequências inferiores a 5 Hz consideraram-se desprezáveis a contribuição dos modos superiores.

Refere-se que os valores da resposta (em metros) foi retirado de gráficos de FFT de deslocamentos.

Apresentam-se os resultados do estudo numérico para o caso de $\xi = 0{,}1\%$

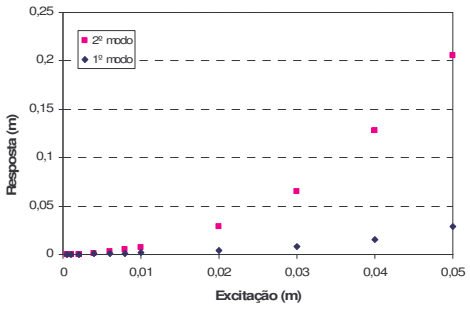


Figura 5.9 Resposta em z, excitação em $\frac{f_{cabo}}{2}$

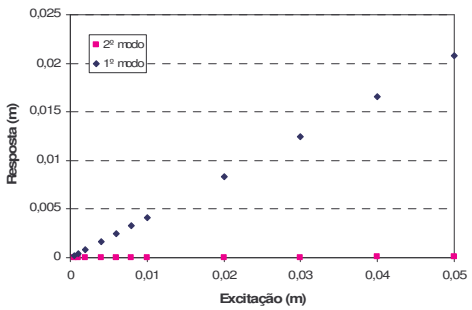


Figura 5.10 Resposta em y, excitação em $\frac{f_{cabo}}{2}$

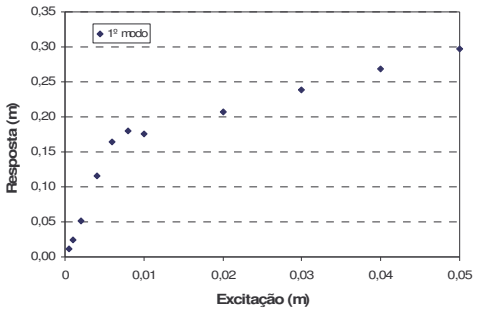


Figura 5.11 Resposta em z, excitação em f_{cabo}

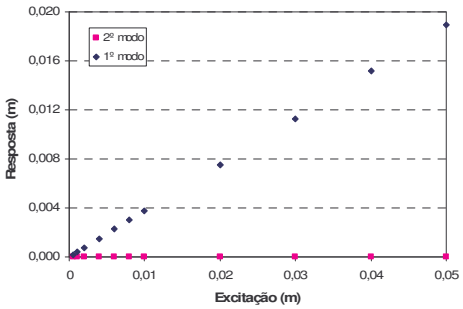


Figura 5.12 Resposta em y, excitação em f_{cabo}

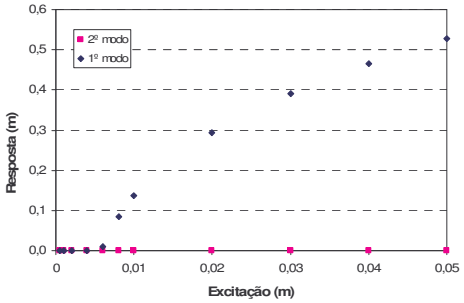


Figura 5.13 Resposta em z, excitação em $2.f_{cabo}$

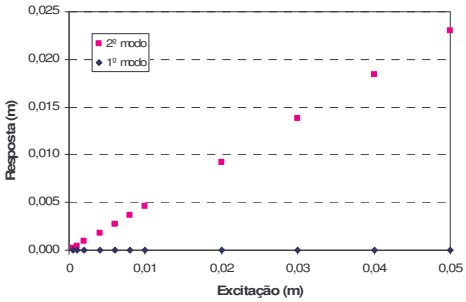


Figura 5.14 Resposta em y, excitação em $2.f_{cabo}$

Em termos gerais, verificou-se que as maiores amplitudes de oscilação transversal são obtidas quando a excitação é aplicada na frequência dupla da frequência do cabo. Verificou-se igualmente o carácter não linear das oscilações associadas a frequências de excitação de metade ou duplas da frequência do cabo, com o aparecimento súbito de vibração, a partir de uma determinada amplitude de oscilação longitudinal do cabo.

Para frequências de excitação iguais à frequência fundamental do cabo, a resposta vertical no 1º modo de vibração apresenta um comportamento linear até amplitudes de excitação na ordem dos 0.006m, altura em que se inicia a resposta noutos harmónicos.

Para a frequência de excitação dupla da frequência fundamental do cabo (6.465Hz), observou-se, segundo z, a ocorrência de uma abrupta subida da resposta para uma amplitude de excitação entre 0.004 e 0.006m. Este fenómeno de salto justifica-se pelo fenómeno da ocorrência de excitação paramétrica, verificando-se um aumento de

amplitude de 15 vezes. Na direcção y, o 2º modo de vibração apresentou valores muito superiores ao 1º modo, com crescimento linear.

Apresentam-se os resultados do estudo numérico para o caso de $\xi = 0{,}5\%$.

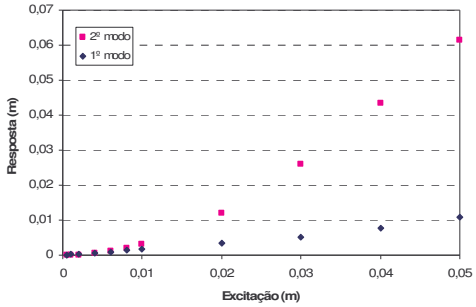


Figura 5.15 Resposta em z, excitação em $\frac{f_{cabo}}{2}$.

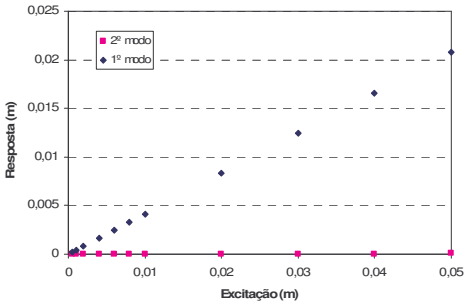


Figura 5.16 Resposta em y, excitação em $\frac{f_{cabo}}{2}$

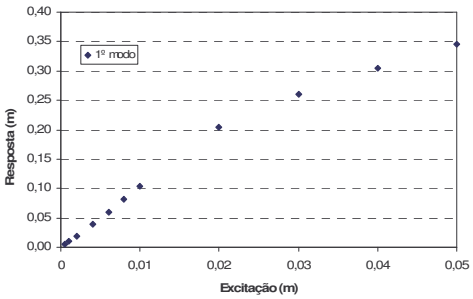


Figura 5.17 Resposta em z, excitação em f_{cabo}

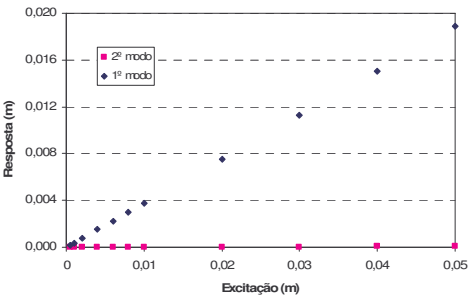


Figura 5.18 Resposta em y, excitação em f_{cabo}

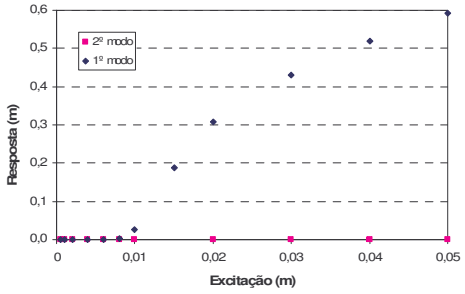


Figura 5.19 Resposta em z, excitação em $2.f_{cabo}$

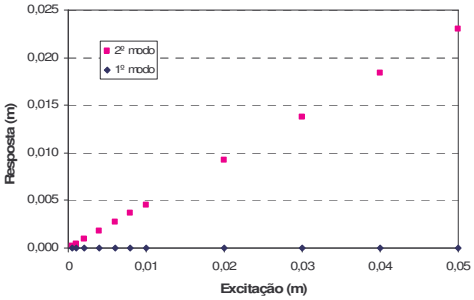


Figura 5.20 Resposta em y, excitação em $2.f_{cabo}$

O comportamento dinâmico exibido é semelhante ao correspondente a um amortecimento de 0.1%. Verifica-se todavia uma ocorrência das não-linearidades e, especificamente da excitação paramétrica, para amplitudes da oscilação mais elevadas.

Para a frequência de excitação 6.465Hz, observou-se, segundo a direcção transversal ao cabo, a ocorrência de excitação paramétrica para uma amplitude de excitação entre 0.008 e 0.01m.

Apresentam-se ainda os resultados numéricos obtidos para $\xi = 1{,}0\%$

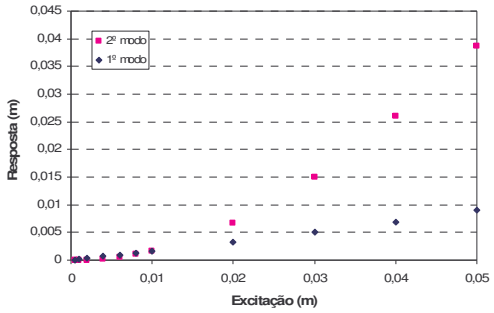


Figura 5.21 Resposta em z, excitação em $\frac{f_{cabo}}{2}$

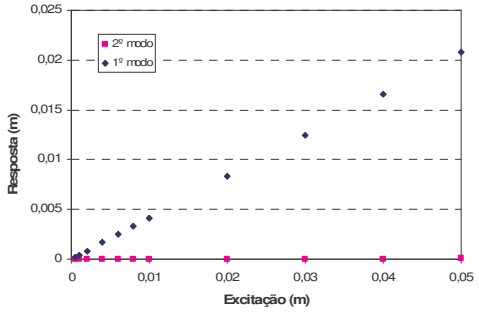


Figura 5.22 Resposta em y, excitação em $\frac{f_{cabo}}{2}$

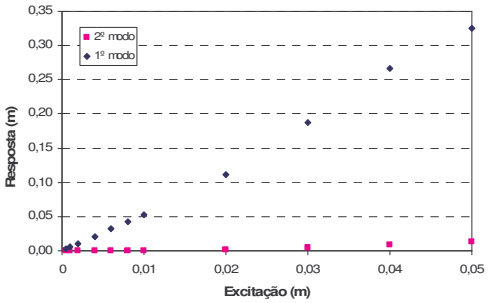


Figura 5.23 Resposta em z, excitação em f_{cabo}

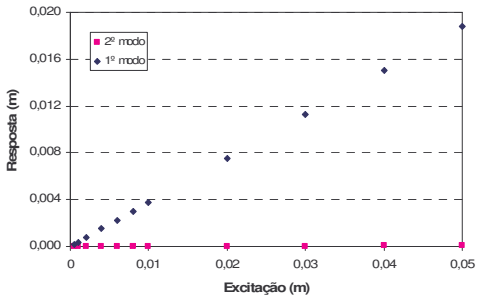


Figura 5.24 Resposta em y, excitação em f_{cabo}

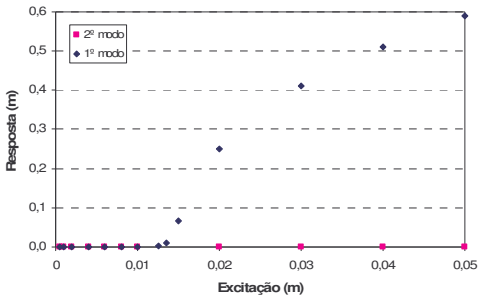


Figura 5.25 Resposta em z, excitação em $2.f_{cabo}$

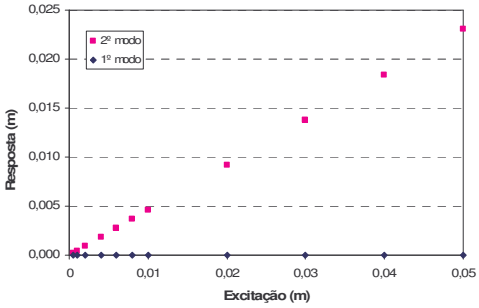


Figura 5.26 Resposta em y, excitação em $2.f_{cabo}$

Para um valor do amortecimento de $\xi = 1{,}0\%$ na frequência de excitação de 6.465Hz, observou-se, segundo a direcção transversal ao cabo, a ocorrência de excitação paramétrica para uma amplitude de excitação entre 0.0125 e 0.015m.

Do conjunto de gráficos apresentados (Figura 5.21 a Figura 5.26) concluiu-se especificamente que o aumento do factor de amortecimento origina a ocorrência de excitação paramétrica para amplitudes de oscilação mais elevadas. Contudo, os níveis de oscilação atingidos são semelhantes para os três níveis de amortecimento estudados.

5.4 ESTUDO ANALÍTICO

A via analítica é utilizada nesta secção para determinar a amplitude da oscilação paramétrica na situação de instabilidade. Contabilizou-se o termo cúbico de não-linearidade da equação (5.7) do equilíbrio dinâmico. A inclusão deste termo impede que a amplitude de oscilação cresça indefinidamente dentro de uma região de instabilidade, mas antes convirja para um valor finito de amplitude. Nayfeh e Mook (1979) usando o método das escalas múltiplas, obtiveram uma aproximação da resposta da parte estacionária na vizinhança da 1ª ressonância ($\delta \approx 1$).

Apresenta-se a fórmula geral da amplitude dos deslocamentos da resposta equação (5.52) (Caetano, 2000).

$$\alpha_1(t) = a.\sin\left(\omega.t - \frac{1}{2}\psi\right) \qquad \textbf{(5.52)}$$

Sendo a e ψ definidos por,

$$a = \frac{4}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{X_0.\ell}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\delta}} \cdot \left\{ 1 - \delta \pm \left[\delta^2 \cdot \left(\frac{x_B}{2.X_0} \right)^2 - 4.\delta .\xi^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{5.53}$$

$$\tan\psi = -\frac{2.\xi_1.\delta}{2.\left(1-\sqrt{\delta}\right) - \delta^2.a^2} \tag{5.54}$$

5.5 RESULTADOS ANALÍTICOS VS RESULTADOS NUMÉRICOS

Apresentam-se na Figura 5.27 os resultados da análise numérica do tirante descrito em 5.3, juntamente com as amplitudes de oscilação em correspondência obtidas analiticamente, considerando factores de amortecimento de 0.1%, 0.5% e 1%.

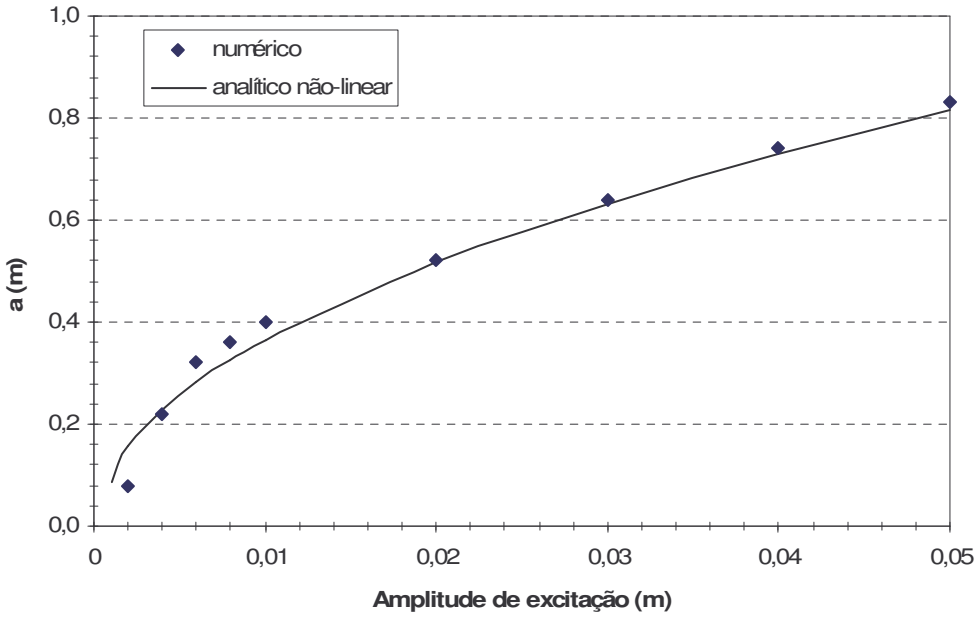


Figura 5.27 Excitação na frequência dupla do cabo, resposta na direcção perpendicular ao cabo. Amortecimento 0,1%.

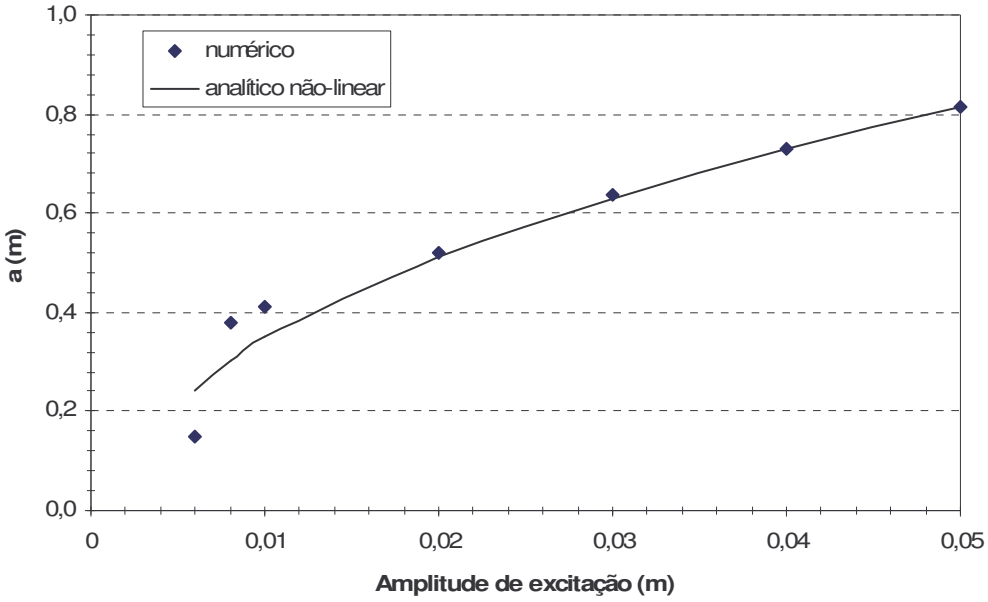


Figura 5.28 Excitação na frequência dupla do cabo, resposta na direcção perpendicular ao cabo. Amortecimento 0,5%.

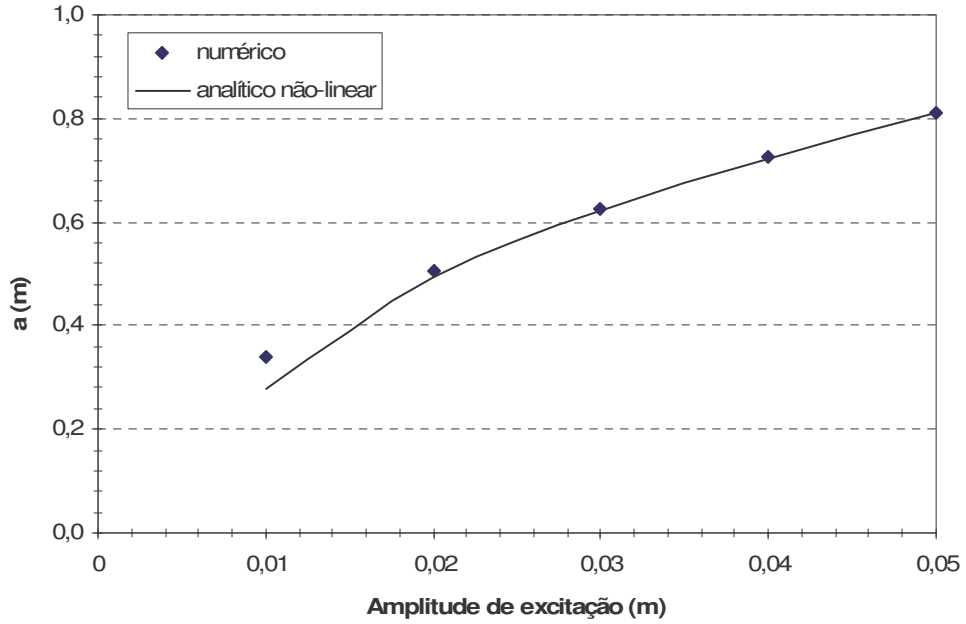


Figura 5.29 Excitação na frequência dupla do cabo, resposta na direcção perpendicular ao cabo. Amortecimento 1,0%.

Verifica-se genericamente uma excelente concordância entre resultados analíticos e numéricos. As maiores discrepâncias ocorrem na vizinhança do inicio da ocorrência do fenómeno, podendo no entanto concluir-se ser a via analítica de grande utilidade no cálculo da resposta paramétrica.

Apresentam-se nas FigurasFigura 5.30 a Figura 5.35 algumas séries temporais de onde foram retiradas as amplitudes de oscilação da parte estacionária do modelo numérico, que permitiram construir o gráfico da Figura 5.28.

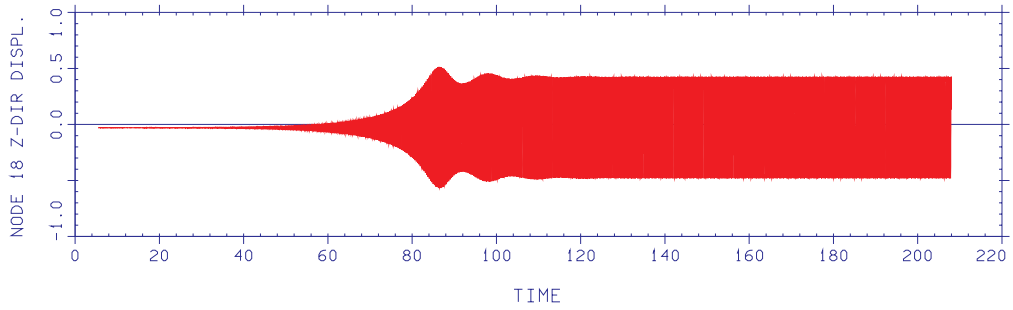


Figura 5.30 Amplitude de excitação 0.008. Amortecimento 0.5%

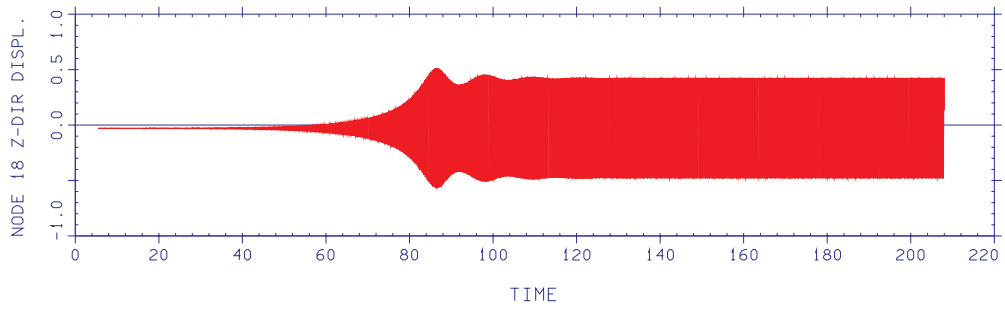


Figura 5.31 Amplitude de excitação 0.01. Amortecimento 0.5%

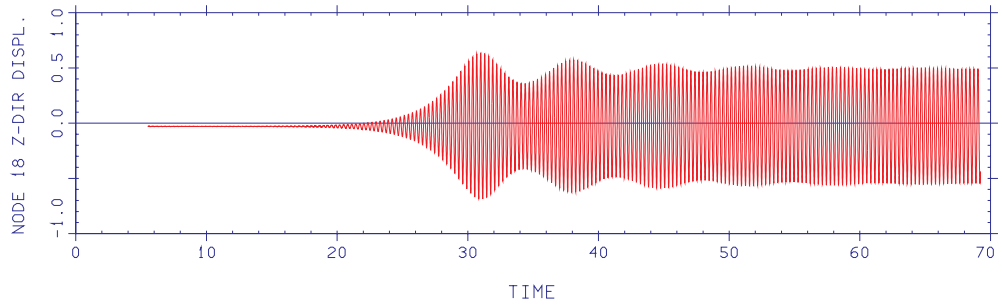


Figura 5.32 Amplitude de excitação 0.02. Amortecimento 0.5%

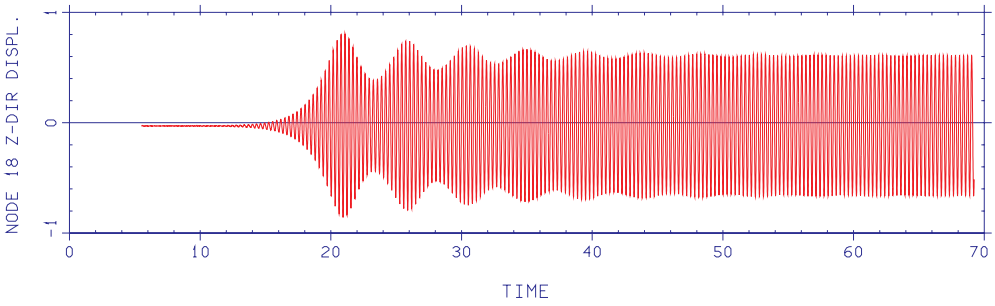


Figura 5.33 Amplitude de excitação 0.03. Amortecimento 0.5%

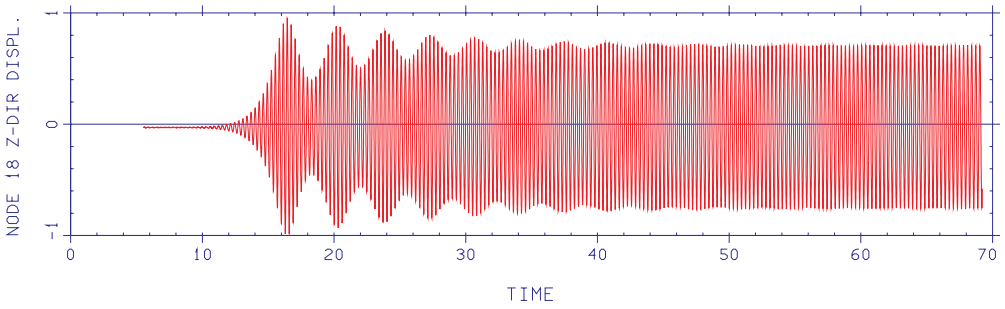


Figura 5.34 Amplitude de excitação 0.04. Amortecimento 0.5%

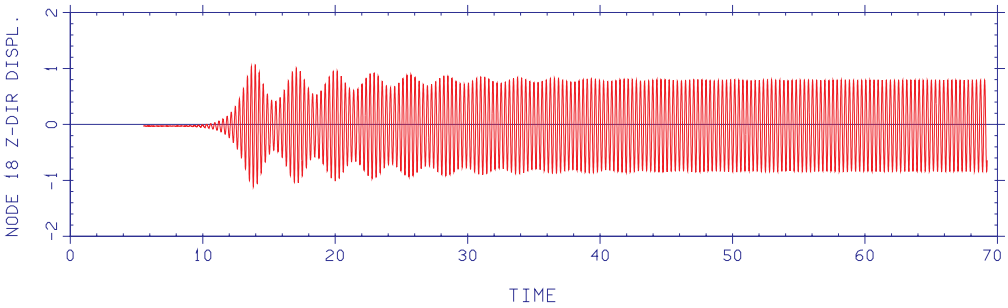


Figura 5.35 Amplitude de excitação 0.05. Amortecimento 0.5%

CAPÍTULO 6

MODELO EXPERIMENTAL

6.1 INTRODUÇÃO

Modelos estruturais e estruturas de escala reduzida desempenham um papel significativo na investigação e projecto da engenharia de estruturas.

Um modelo de uma estrutura é definido como uma qualquer representação de uma estrutura ou parte dela, que normalmente é construída a uma escala reduzida (Sabnis et al, 1983). Sendo objectivo o conhecimento de determinadas grandezas físicas, o modelo estrutural é construído respeitando as leis de semelhança estrutural e é seguidamente testado, relacionando-se as grandezas físicas medidas com as grandezas do protótipo através das leis de semelhança estabelecidas.

As características de um modelo físico devem ser estipuladas em função dos objectivos do estudo a desenvolver, já que a reprodução à escala de todas as propriedades da estrutura é impossível. Alguns aspectos essenciais no processo de construção do modelo físico são os seguintes (Sabnis et at, 1983):

a) Definir o alvo do problema, decidindo-se o que se pretende obter com o modelo e aquilo que é dispensável;
b) Decidir o nível requerido para a confiança ou precisão. Se $\pm 30\%$ é adequado para condições de projecto, então a tentativa de chegar a resultados perto de uma precisão de $\pm 10\%$ é uma perda de tempo e esforço;
c) Especificar os requisitos de semelhança para a geometria, materiais, acções e interpretação de resultados;
d) Seleccionar os materiais do modelo, tendo em conta os passos já descritos;
e) Planear a fase de fabricação do modelo, consultando empresas e técnicos especializados. O engenheiro deve seguir por perto esta fase, dando o apoio necessário, e explicitando as suas ideias para uma concretização mais eficiente e possíveis alterações ao projecto devido à sua inexequibilidade. Esta fase é normalmente a mais demorada, podendo ser optimizada se houver um diálogo eficaz entre o engenheiro "modelador" e a entidade fabricadora;
f) Projecto e preparação do equipamento de carga: novos sistemas ou sistemas com elevada sensibilidade devem ser calibrados;
g) Escolher a instrumentação adequada. Este passo pode ser coordenado com os passos e) e f);

h) Observação da resposta do modelo durante a aplicação das acções, tirando notas completas (data/hora/observações), registos fotográficos, vídeo e registo em meios informáticos dos dados;
i) Antes de experimentar o modelo, devem ser realizados cálculos para estimar os níveis de resposta esperados;
j) Analisar os dados recolhidos e redigir o relatório assim que possível. Não esquecer de adicionar ao relatório sugestões para o melhoramento das técnicas para obtenção de melhores resultados em futuras experiências.

6.2 DESCRIÇÃO DO PROTÓTIPO

O protótipo escolhido diz respeito a um tirante da ponte do Guadiana. Esta ponte (Figura 6.1) estabelece a ligação da rede rodoviária portuguesa com a rede espanhola, constituindo o principal ponto de passagem entre Portugal e Espanha na região sul dos dois países, nas proximidades das localidades de Ayamonte (Espanha) e Castro Marim (Portugal). Está localizada a cerca de 6 Km da foz do rio Guadiana. Foi projectada pelo Engenheiro Câncio Martins e entrou em serviço em 1991.



Figura 6.1 Vista geral da Ponte Internacional do Guadiana (Foto: F. Piqueiro/FotoEngenho)

A ponte é atirandada de suspensão parcial, apresentando uma extensão total de 666m, subdividida em 5 vãos parciais. Destes, 3 são suspensos com 64 pares de tirantes. O vão central tem 324m, os adjacentes 135m e os extremos, que estabelecem a continuidade dos tramos suspensos com os encontros, 36m (Figura 6.2).

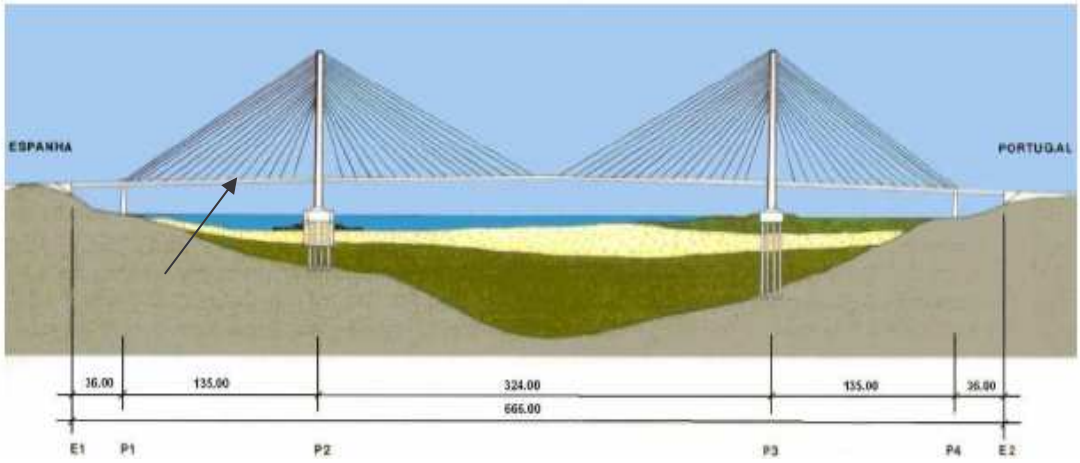


Figura 6.2 Características geométricas da ponte (está indicado com seta o tirante protótipo)

O tabuleiro é em betão pré-esforçado, com 18m de largura, comportando 4 faixas de circulação e passagens de peões. As duas torres são em betão armado com forma de "A", e têm uma altura total de cerca de 100m.

Os tirantes estão ancorados em "feixe" às torres, com espaçamentos de 1,80m, e ao tabuleiro, com espaçamentos de 9m (Figura 6.3). Os tirantes são formados por grupos de 22 a 55 cordões em aço galvanizado protegidos por duas barreiras anticorrosivas adicionais constituídas por uma bainha de polietileno com os vazios cheios com cera epoxi.



Figura 6.3 Espaçamentos entre nos tirantes da ponte do Guadiana

Cada tirante é autónomo, ou seja, dispõe de duas ancoragens, situando-se a ancoragem fixa no tabuleiro e a móvel na torre. Os cordões estão amarrados por cintas metálicas a meio vão, no caso de tirantes mais curtos (comprimentos de 50m a 70m), e aos terços de vão, no caso dos tirantes mais longos (70m a 169m). Junto das ancoragens no tabuleiro, os tirantes são inseridos em guias de desvio, na extremidade das quais é colocado um anel de neoprene (Figura 6.4).



Figura 6.4 Guia de desvio e anel de neoprene

A dimensão do tirante a modelar em laboratório, foi um dos aspectos preponderantes na definição da escala do modelo, uma vez que o espaço em laboratório era um dos factores condicionantes. O tirante escolhido para o estudo foi o 5º tirante do lado direito no sentido Portugal – Espanha, a contar desde a torre mais próxima de Espanha (ver figura 521). Neste tirante observaram-se elevadas amplitudes de oscilação como resposta a acções exteriores, suspeitando-se da ocorrência do fenómeno de excitação paramétrica, já que a sua frequência natural é próxima de uma frequência global da ponte. As principais características deste tirante são apresentadas na Tabela 6.1.

Tabela 6.1 Dados do cabo no Protótipo

Variável	Valor	Unidades
L (comprimento)	76,420	m
A (área)	30,799	cm^2
Peso	238,09	N/m
M (massa)	24,27	Kg/m
Fmáx (força instalada)	1513,12	KN
f1 (1ª frequência própria)	1,633	Hz
f2 (2ª frequência própria)	3,267	Hz
E (Módulo de Elasticidade)	200	GPa

6.3 DEFINIÇÃO DOS FACTORES DE ESCALA

De forma a relacionar os resultados obtidos através do ensaio do modelo construído em laboratório com o correspondente protótipo, são definidos factores de escala apropriados na construção do modelo físico. Estes são definidos baseados na Teoria de Semelhança Estrutural e podem ser deduzidos por uma análise dimensional do fenómeno físico mais relevante no estudo em causa.

6.3.1 Semelhança Estrutural

Qualquer modelo estrutural deve ser projectado, actuado e interpretado de acordo com condições de semelhança estabelecidas, relacionando o modelo com o protótipo. Para além do estabelecimento de tais condições, torna-se necessário garantir que qualquer equação matemática que descreva algum aspecto da natureza esteja sob uma forma homogénea no que concerne as dimensões, ou seja, a equação deve ser válida independentemente da escolha das unidades das variáveis físicas medidas. Como exemplo, considere-se a tensão de compressão $\sigma = \frac{N}{A}$. Esta fórmula é válida independentemente de a força e o comprimento $\left(\acute{a}rea = comprimento^2\right)$ serem medidos em Newtons e metros, pounds e polegadas, ou outras unidades consistentes.

Pode demonstrar-se que qualquer equação sob a forma

$$F\left(X_1, X_2, ..., X_n\right) = 0 \qquad \textbf{(6.1)}$$

pode ser expressa na forma (Sabnis et al, 1983)

$$G(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_m) = 0 \qquad \textbf{(6.2)}$$

sendo os termos π_i (Pi) variáveis adimensionais das *n* variáveis fisicas $(X_1, X_2, ..., X_n)$ e $m = n - r$, sendo r o numero de dimensões fundamentais que estão envolvidas nas variáveis físicas consideradas.

Este ponto tem duas importantes implicações:

i) O fenómeno físico a investigar deve ser traduzido parcialmente pela correcta consideração das dimensões das *n* quantidades físicas (X_i) envolvidas. Estas deduções são feitas pela análise dimensional, que permite ao investigador combinar variáveis de forma conveniente utilizando os termos π_i (Pi), com a subsequente redução de uma série de quantidades desconhecidas.

ii) Sistemas físicos que diferem unicamente nas magnitudes das unidades usadas para medir as quantidades *n* de X_i, tais como as quantidades de um protótipo e o seu modelo a escala reduzida, terão funções de G idênticas. Os requerimentos de semelhança para modelação resultam forçando os termos π_i $(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_m)$ a serem iguais no modelo e no protótipo, constituindo condição necessária para a total equivalência na ligação entre ambos.

Os modelos estruturais podem classificar-se em três categorias:

i) O modelo verdadeiro, que mantém uma semelhança completa, ou seja, satisfaz todas as relações adimensionais estabelecidas;

ii) O modelo adequado, que satisfaz as condições de semelhança essenciais do problema, não satisfazendo outras condições que não são, contudo, relevantes para o estudo em causa;

iii) O modelo distorcido, que não satisfaz uma ou mais condições de semelhança fundamentais para o estudo em causa.

O estudo presente tem por objectivo a investigação do comportamento dinâmico de um tirante da ponte Internacional do Guadiana, através da realização de ensaios dinâmicos de um modelo físico, construído a uma escala a definir. Resumem-se na Tabela 6.2 as principais grandezas físicas envolvidas na definição dos dados do

problema, que se podem agrupar nas seguintes categorias: geometria, propriedades dos materiais, acções e resposta.

Tabela 6.2 Quantidades físicas

Grupo	Variável	Símbolo
Geometria	Comprimento	L
	Área	A
	Inércia	I
Propriedades dos Materiais	Modulo de Elasticidade	E
	Massa	M
Acções	Força	F
	Tempo	t
	Aceleração gravítica	g
	Frequência	f
Resposta	Deslocamento	d

O factor de escala S_X associado a uma grandeza física *X*, corresponde ao cociente entre a quantidade *X* do protótipo $(X)_P$ e do modelo físico $(X)_m$.

$$S_X = \frac{(X)_P}{(X)_m} \tag{6.3}$$

As mais importantes características envolvidas na simulação do comportamento dinâmico do modelo em estudo são a rigidez axial dos tirantes, as forças gravíticas e as forças elásticas. Os termos π adimensionais deverão portanto envolver tais grandezas: *EA*, *g*, *d* e *F*.

Na obtenção de tais termos utilizam-se relações entre estas grandezas, como a relação força-deslocamento,

$$F = \frac{E.A}{L} \cdot d \tag{6.4}$$

que fornece um termo adimensional.

$$(\pi)_{Axial} = \frac{E.A}{F.L} \cdot d \qquad \textbf{(6.5)}$$

As forças gravíticas, definidas por

$$F = M.g \qquad \textbf{(6.6)}$$

levam ao termo adimensional

$$(\pi)_{Gravíticas} = \frac{M.g}{F} \qquad \textbf{(6.7)}$$

Pretendendo-se que o modelo físico reproduza a relação entre forças gravíticas e forças elásticas, resulta:

$$\frac{(\pi)_{Gravítica}}{(\pi)_{Axial}} \doteq \frac{M.g}{E.A} \qquad \textbf{(6.8)}$$

onde "≐" significa "dimensionalmente equivalente a".

Tendo em conta que na definição das dimensões das grandezas apresentadas na Tabela 6.2 apenas 3 são independentes, então apenas se podem fixar 3 factores de escala. Um dos factores de escala fixado, é o que se refere ao comprimento, S_L, definido por,

$$S_L = \frac{(L)_P}{(L)_m} \qquad \textbf{(6.9)}$$

Adoptou-se a escala de 1:50, ou seja, $S_L = 50$. Então o comprimento do tirante no protótipo de 76,420m terá no modelo o valor de 1,528m. Para a escolha desta escala houve diversos factores que se tiveram em conta, tais como o aproveitamento de estruturas de fixação existentes no laboratório, espaço existente, custo do material, facilidade em encontrar o material e resistência associada.

Um segundo factor de escala a respeitar, é o que diz respeito à gravidade, por razões óbvias.

$$S_g = \frac{(g)_P}{(g)_m} = 1 \qquad \textbf{(6.10)}$$

O terceiro factor de escala relaciona-se com as características do material a utilizar no modelo, especificamente com o módulo de elasticidade. Foi usada uma corda de piano para modelar o cabo, apresentando um valor de E = 212 GPa no ensaio à tracção realizado em laboratório (Figura 6.6 e Figura 6.7). Admitindo para o cabo do protótipo E = 200GPa, resulta:

$$S_E = \frac{(E)_P}{(E)_m} = 0{,}943 \qquad \textbf{(6.11)}$$

Está-se agora em condições de definir os outros factores de escala necessários à construção do modelo.

Relacionando as equações (6.8) para o protótipo e o modelo físico, vem

$$\left(\frac{M.g}{E.A}\right)_P = \left(\frac{M.g}{E.A}\right)_m \qquad \textbf{(6.12)}$$

Esta equação pode ser apresentada na forma,

$$\frac{\frac{(M)_P}{(M)_m}\cdot\frac{(g)_P}{(g)_m}}{\frac{(E)_P}{(E)_m}\cdot\frac{(A)_P}{(A)_m}} = 1 \qquad \textbf{(6.13)}$$

correspondendo a,

$$\frac{S_M \cdot S_g}{S_E \cdot S_A} = 1 \qquad \textbf{(6.14)}$$

Considerando agora os factores de escala conhecidos, tem-se que

$$S_M = S_E \cdot S_A \qquad \textbf{(6.15)}$$

$$S_M = 0{,}943 \cdot S_A \tag{6.16}$$

e

$$S_A = S_L^2 \tag{6.17}$$

Relacionando as equações (6.7) para o protótipo e o modelo físico,

$$\left(\frac{M.g}{F}\right)_P = \left(\frac{M.g}{F}\right)_m \tag{6.18}$$

chega-se a

$$\frac{S_M \cdot 1}{S_F} = 1 \tag{6.19}$$

e logo

$$S_M = S_F \tag{6.20}$$

Por fim, os factores de escala S_g, S_L e S_T (factor de escala tempo) relacionam-se da seguinte forma:

$$S_g = \frac{S_L}{(S_T)^2} = 1 \tag{6.21}$$

levando a que

$$S_T = \sqrt{S_L} \tag{6.22}$$

e logo o factor de escala de frequências $S_{freq.}$, vem definido por

$$S_{freq.} = \frac{1}{\sqrt{S_L}} \tag{6.23}$$

Apresentam-se na Tabela 6.3 as características do protótipo e os correspondentes valores no modelo.

Tabela 6.3 Dados do cabo no protótipo e no modelo

Variável	Protótipo	Modelo	Unidades	Factor escala
L (comprimento)	76,420	1,528	m	50
A (área)	30,799	0,01232	cm^2	2500
Diâmetro	-	0,125	cm	-
Peso	238,09	5,145	N/m	46,27
M (massa)	24,27	0,5145	Kg/m	47,17
Fmáx (força instalada)	1513,12	0,6415	KN	2358,72
f1 (1ª frequência própria)	1,633	11,55	Hz	0,141
f2 (2ª frequência própria)	3,267	23,10	Hz	0,141
E (Módulo de Elasticidade)	200	212	GPa	0,943

6.4 MODELO FÍSICO

Nesta secção descreve-se o modelo construído no Laboratório de Vibrações e Monitorização VIBEST, da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto (*FEUP*).

O modelo do cabo é constituído por uma corda de piano. A satisfação do factor de escala S_A conduziu a um diâmetro de 1.25mm. Sendo a massa distribuída de tal cabo muito baixa, comparada com a massa necessária para satisfazer as relações de semelhança estabelecidas, foi necessário compensar com a adição de massa. Esta foi concretizada através da colagem de esferas de chumbo furadas, com uma massa de 25 gramas cada, distanciadas de 0,0478m, totalizando um total de 31 esferas (ver Figura 6.5).



Figura 6.5 Sistema estrutural (Pórtico metálico)

O cabo foi fixo em posição horizontal a um pórtico existente, para o qual foi construída uma estrutura específica para tensionamento e aplicação de deslocamentos longitudinais, de forma a reproduzir o fenómeno de excitação paramétrica.

O módulo de elasticidade do aço utilizado foi estimado em 212GPa. Este valor resultou de um ensaio de tracção realizado no Laboratório de Materiais de Construção da *FEUP* (Figura 6.6 e Figura 6.7).

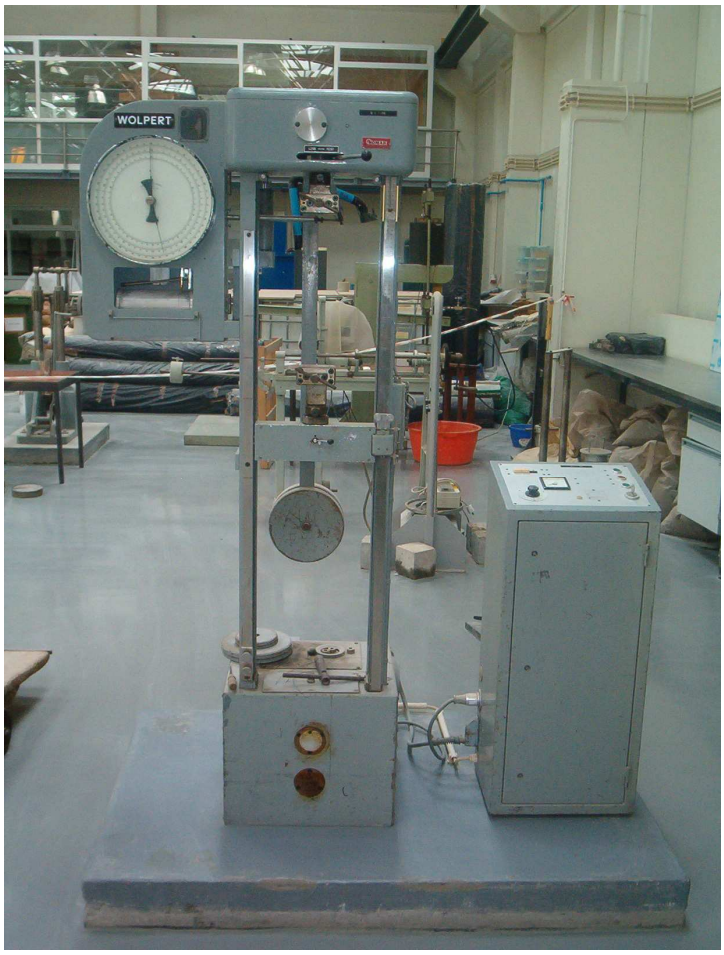


Figura 6.6 Ensaio de tracção (Máquina WOLPERT).

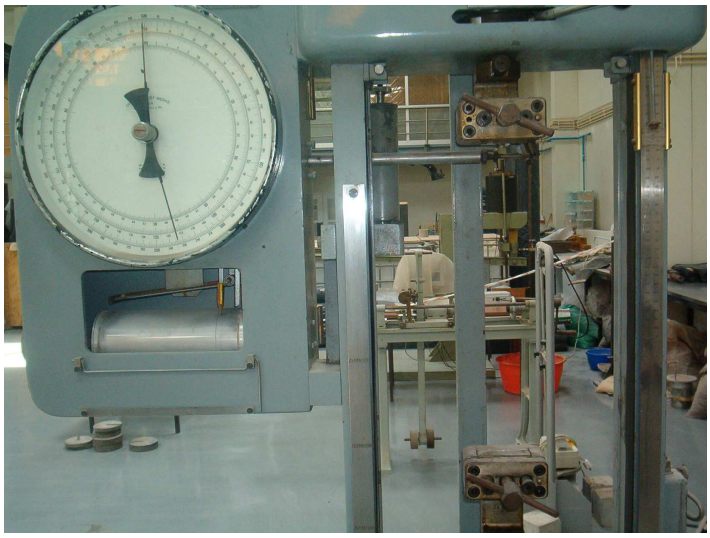


Figura 6.7 Mostrador de Carga (à esquerda); "Garras" inferior e superior para amarração do cabo (à direita).

Na Figura 6.8 encontra-se representada a curva obtida aplicando tensões crescentes e medindo a correspondente extensão. O ajuste linear permitiu a estimativa do Módulo de Elasticidade (E).

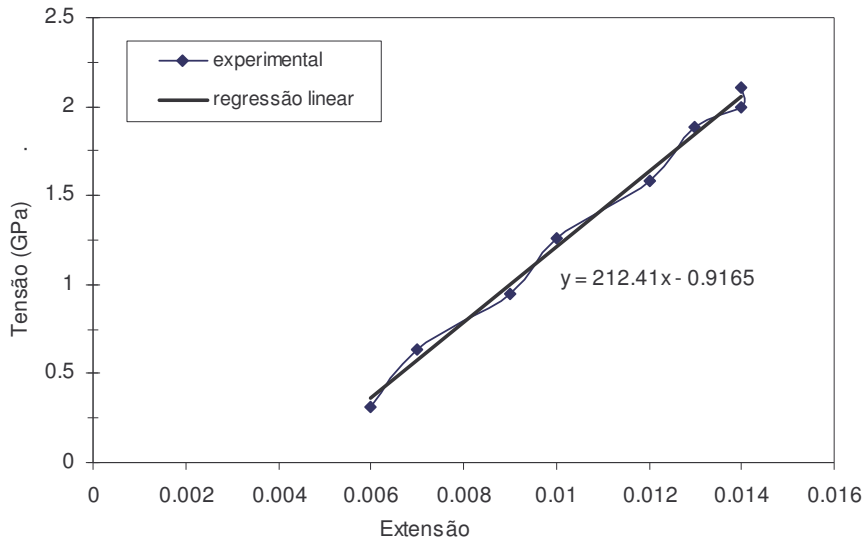


Figura 6.8 Resultados do ensaio de tracção. Determinação do módulo de elasticidade (E).

6.4.1 Equipamento de Ensaio

O dispositivo experimental (Figura 6.9) é composto por um acelerómetro unidireccional, colado com cera de abelha à esfera a meio vão do modelo do cabo, permitindo registar as acelerações transversais no plano do cabo. O acelerómetro foi ligado a um condicionador (Figura 6.12) para amplificação do sinal, sendo este medido por um analisador de Fourier HP5366A, formado por uma unidade de aquisição e filtragem de sinal (Figura 6.13) ligada a um computador portátil (Figura 6.14), que realiza o processamento de sinal.

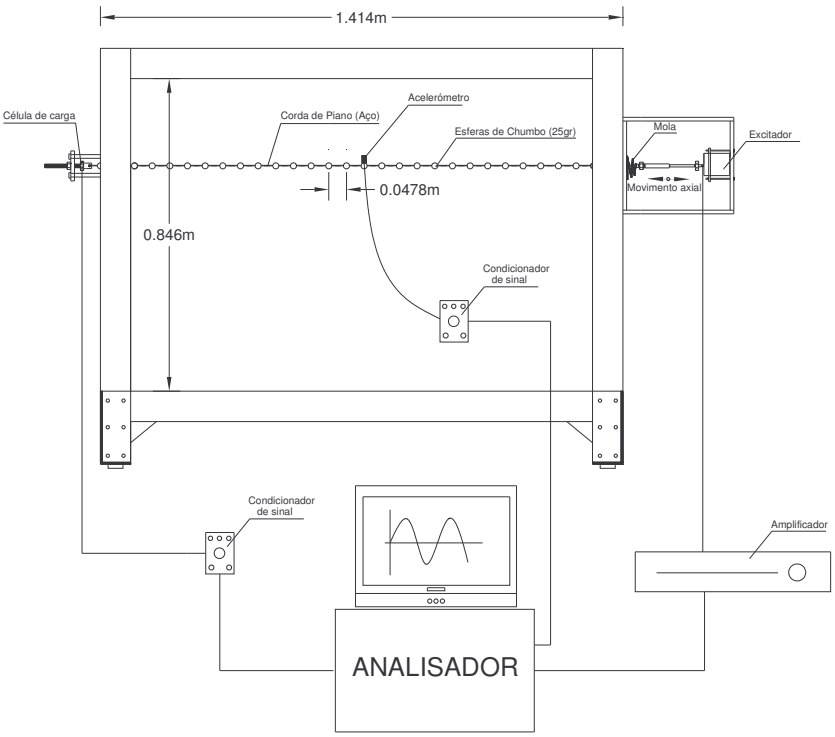


Figura 6.9 Modelo experimental do cabo.

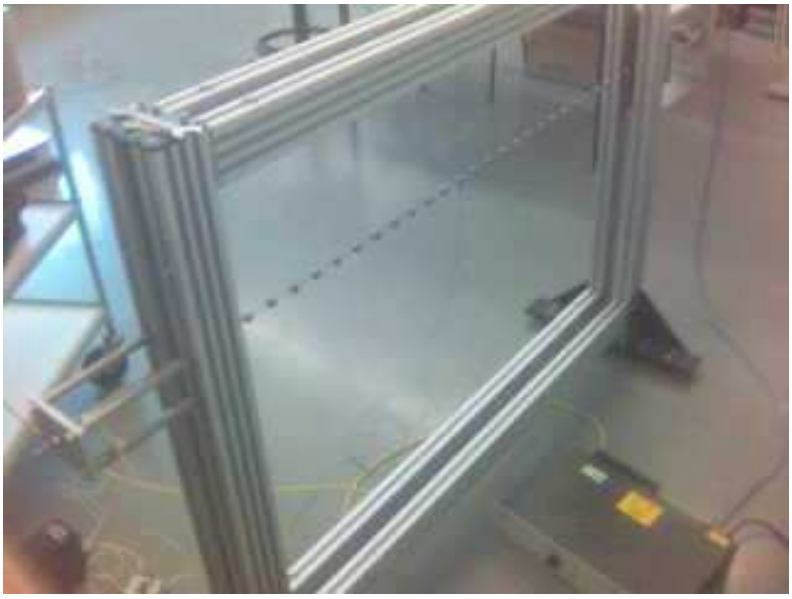


Figura 6.10 Foto geral do dispositivo experimental

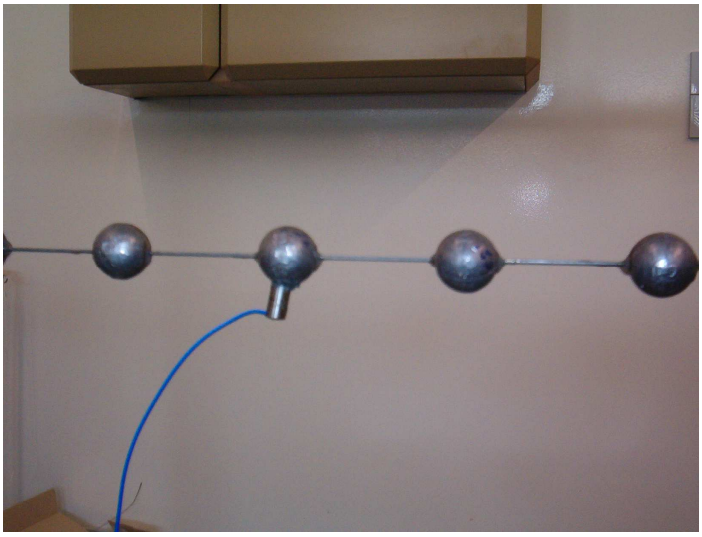


Figura 6.11 Acelerómetro fixo a uma esfera

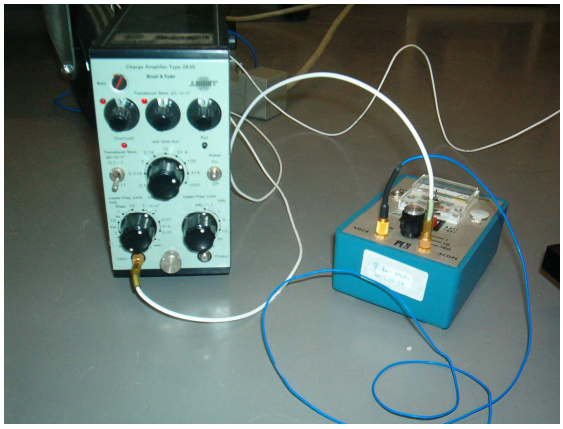


Figura 6.12 Condicionadores de sinal da célula de carga (esquerda) e do acelerómetro (direita)

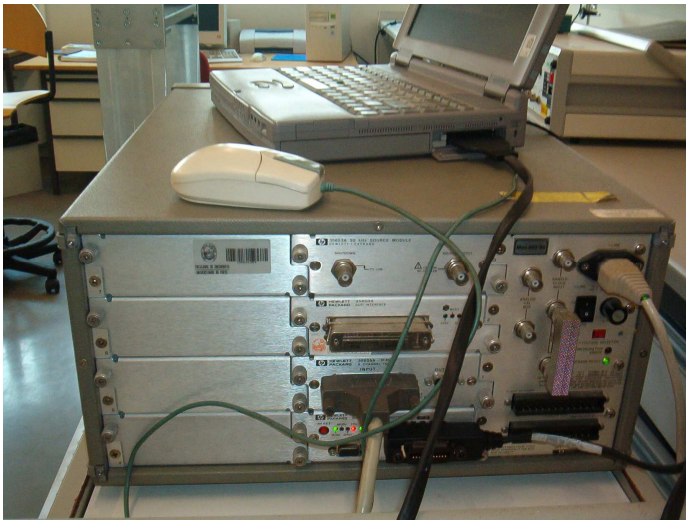


Figura 6.13 Analisador de Fourier

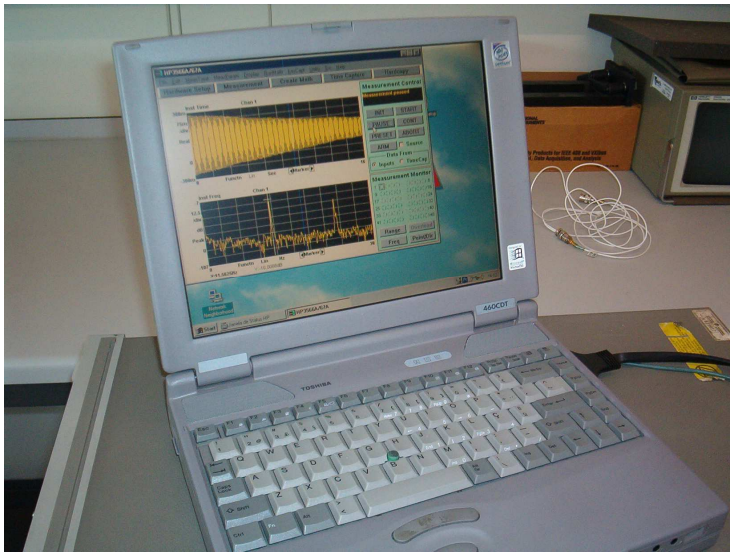


Figura 6.14 PC portátil para processamento de dados/aquisição de sinal

Foi instalada uma célula de carga na ancoragem passiva do modelo (Figura 6.15) retirando-se desta séries temporais de força instalada. Esta célula de carga está ligada a um condicionador de sinal e ao analisador de Fourier.



Figura 6.15 Ancoragem passiva com célula de carga acoplada.

Na ancoragem activa está aplicado um excitador (Figura 6.16)

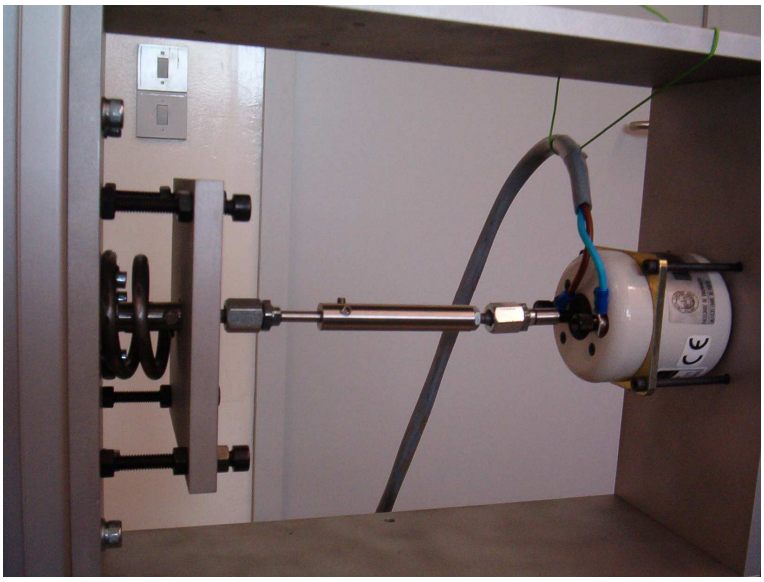


Figura 6.16 Ancoragem activa. Dispositivo excitador

Para controlo da aplicação da amplitude dos deslocamentos no modelo foi usado um amplificador (Figura 6.17) ligado ao excitador. Por sua vez o amplificador está ligado ao analisador, onde é gerado o sinal aplicado



Figura 6.17 Amplificador para controlo dos deslocamentos a aplicar ao cabo

6.4.2 Tensionamento do Cabo

O cabo foi fixo numa extremidade e ligado à outra extremidade com interposição de uma mola (Figura 6.16), o que permitiu aplicar a força de tracção especificada para o modelo. Esta força foi aplicada mediante controlo de parafusos

(Figura 6.18) nessa extremidade sendo o valor medido de forma indirecta, aplicando a lei das cordas vibrantes, medindo a frequência da resposta a uma excitação aplicada por impulso manual num ponto do cabo.

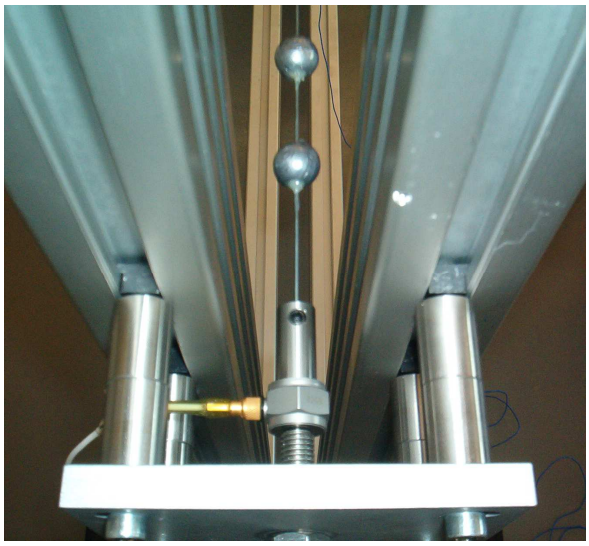


Figura 6.18 Parafuso para controlo da tensão instalada no cabo

6.4.3 Estimativa do Amortecimento

A estimativa do amortecimento foi obtida através da medição da resposta em vibração livre a um impulso aplicado manualmente no cabo.

Apresenta-se na Figura 6.19 uma série temporal de acelerações para um dos ensaios realizados.

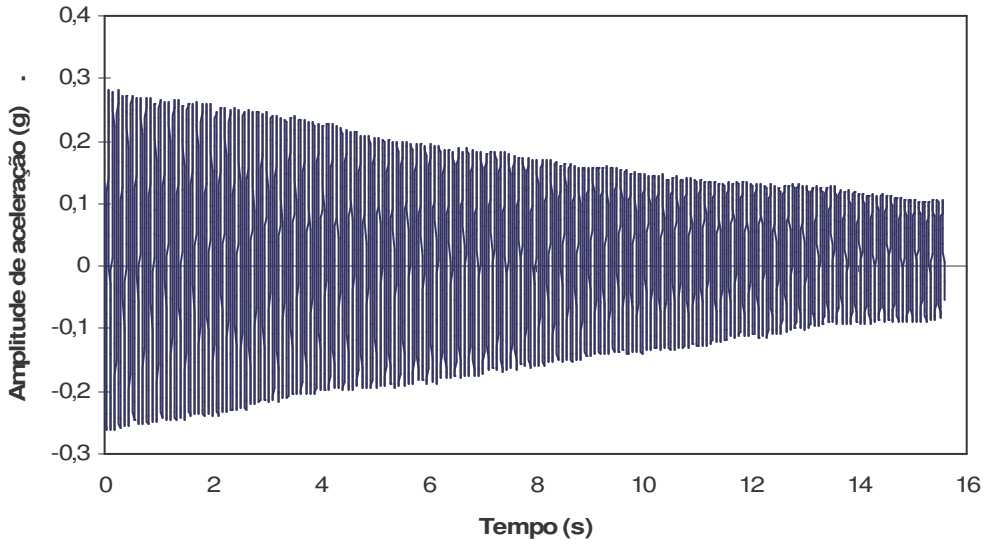


Figura 6.19 Resposta sinusoidal para determinação do amortecimento do cabo a ser ensaiado

Fazendo o ajuste dos pontos máximos positivos da resposta sinusoidal por uma curva exponencial, obtêm-se os parâmetros da resposta ξ e ω

$$A.e^{-\xi.\omega.t} \qquad \textbf{(6.24)}$$

Tendo em conta a irregularidade do sinal obtido para os primeiros instantes, estimou-se o amortecimento considerando os pontos máximos da sinusoide num dado intervalo. Fizeram-se 7 ensaios (com acelerómetro a meio vão e a um terço de vão). Apresentam-se na Figura 6.20 os resultados de um dos ensaios.

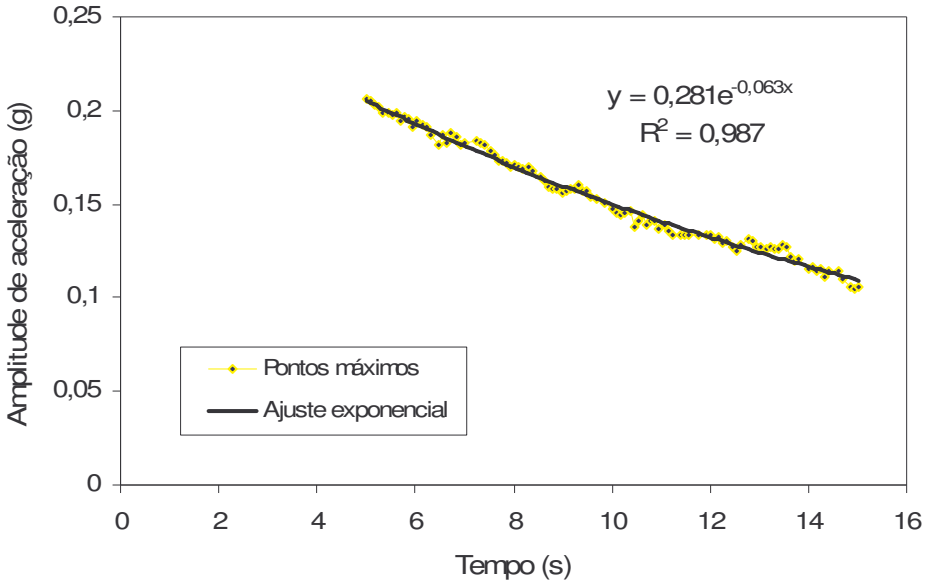


Figura 6.20 Ajuste exponencial aos pontos máximos da resposta sinusoidal.

O ajuste por uma função exponencial da envolvente da resposta levou à equação da curva $y = 0{,}281.e^{-0{,}063.x}$.

Igualando os termos

$$-\xi.\omega = -0{,}063 \tag{6.25}$$

vem

$$-\xi.2.\pi.f = -0{,}063 \tag{6.26}$$

Para a frequência medida de $f = 11{,}5625Hz$ tem-se

$$\xi = 0{,}000867 \cong 0{,}09\% \tag{6.27}$$

Repetiu-se o procedimento descrito para mais 6 casos e calculou-se uma média aritmética, obtendo-se o valor do coeficiente de amortecimento de 0,09 %. Este valor foi o assumido no cálculo do modelo numérico, para posteriores comparações.

6.5 ESTUDO DO FENÓMENO DE EXCITAÇÃO PARAMÉTRICA

6.5.1 Modelo Numérico

Modelou-se numericamente o modelo físico construído, usando 32 elementos de treliça para discretizar o cabo, de comprimento total igual a 1,528m.

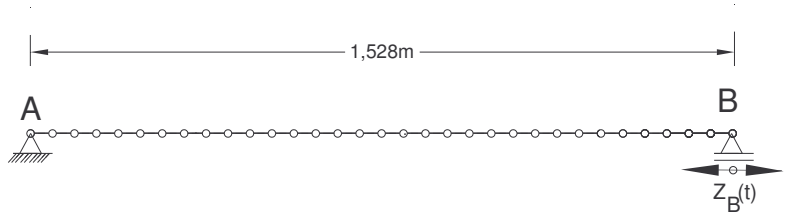
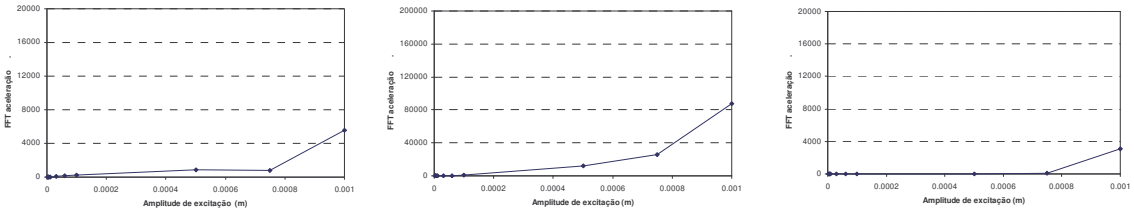


Figura 6.21 Esquema estrutural do modelo numérico

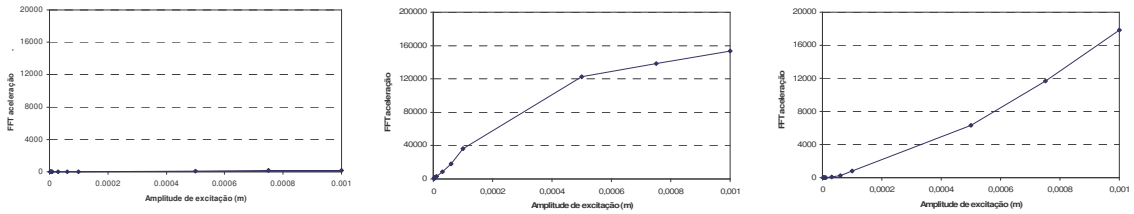
Na ancoragem B foram introduzidas oscilações harmónicas com várias amplitudes, nas três frequências de excitação correspondentes a metade da frequência do cabo, à frequência e ao dobro da frequência fundamental. O amortecimento considerado foi de 0.09%, igual ao obtido experimentalmente (secção 6.4.3).

As acelerações transversais calculadas na secção de meio vão são apresentadas nos gráficos das Figura 6.22 a Figura 6.24.



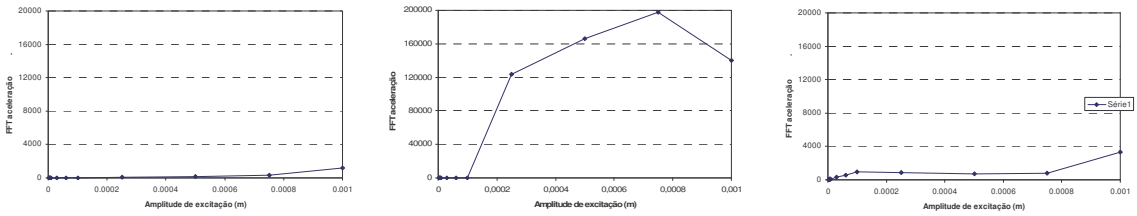
Resposta para f = 5,79Hz **Resposta para f = 11,59Hz** **Resposta para f = 23,18Hz**

Figura 6.22 Frequência de excitação igual a metade da frequência própria do cabo (5,79Hz). Resposta em três harmónicos



Resposta para f = 5,79Hz **Resposta para f = 11,59Hz** **Resposta para f = 23,18Hz**

Figura 6.23 Frequência de excitação igual à frequência própria do cabo (11,59Hz). Resposta em três harmónicos



Resposta para f = 5,79Hz **Resposta para f = 11,59Hz** **Resposta para f = 23,18Hz**

Figura 6.24 Frequência de excitação dupla da frequência própria do cabo (23,18Hz). Resposta em três harmónicos

6.5.2 Moledo Experimental vs Modelo Numérico

Realizaram-se ensaios no modelo para várias amplitudes de oscilação longitudinal, controladas por um amplificador. Os ensaios foram executados para 3 frequências de excitação: 5.79Hz; 11.59Hz e 23.18Hz, que correspondem a metade da frequência do cabo, à frequência própria do cabo e à frequência dupla do cabo, respectivamente.

Foi instalado um acelerómetro unidireccional numa das extremidades de forma a controlar os deslocamentos longitudinais do cabo.

Para cada caso de frequência de excitação apresenta-se uma série temporal da resposta medida longitudinalmente na ancoragem passiva.

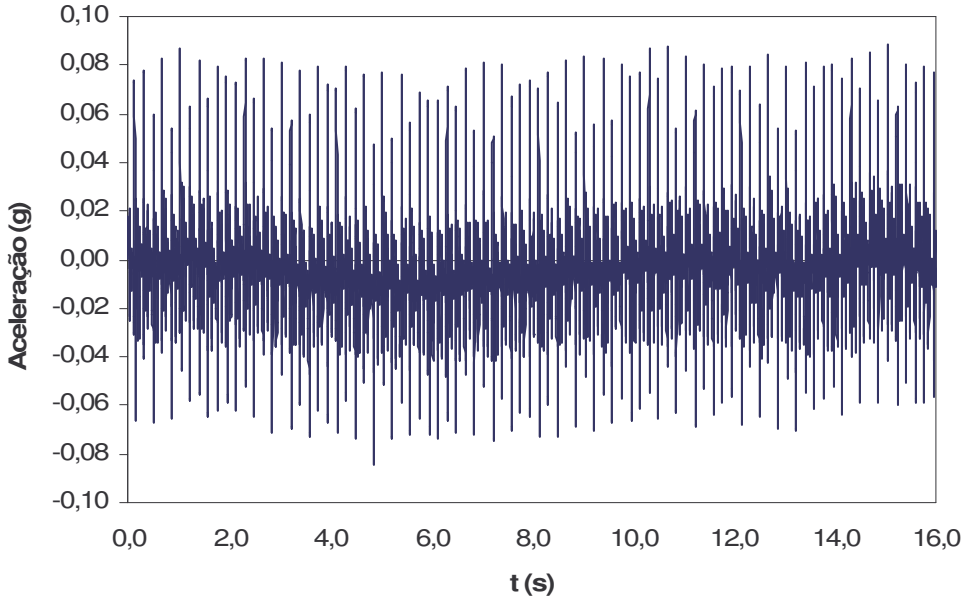


Figura 6.25 Série temporal da aceleração longitudinal na frequência 5,79 Hz

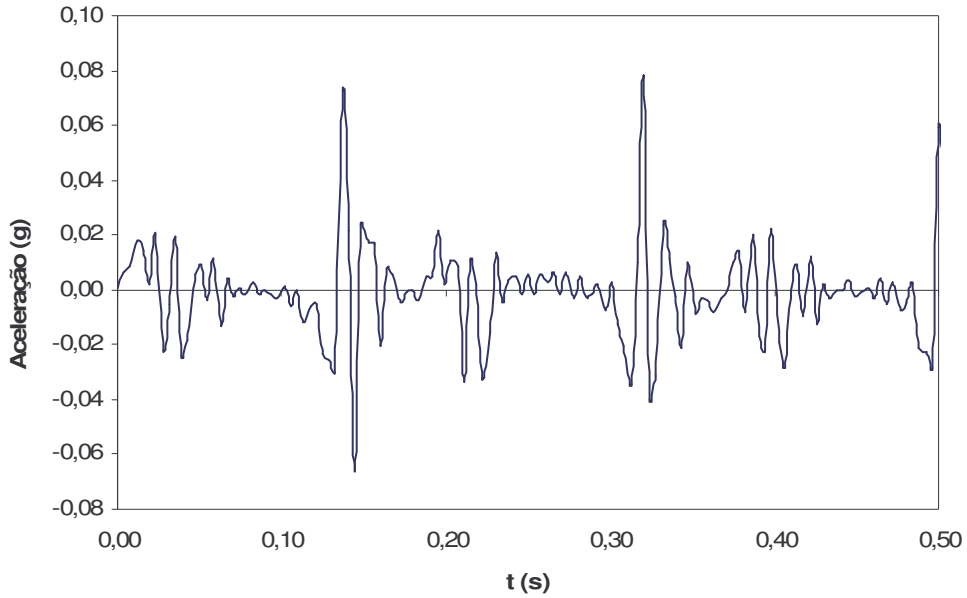


Figura 6.26 "Zoom" da série temporal da aceleração longitudinal na frequência 5,79 Hz

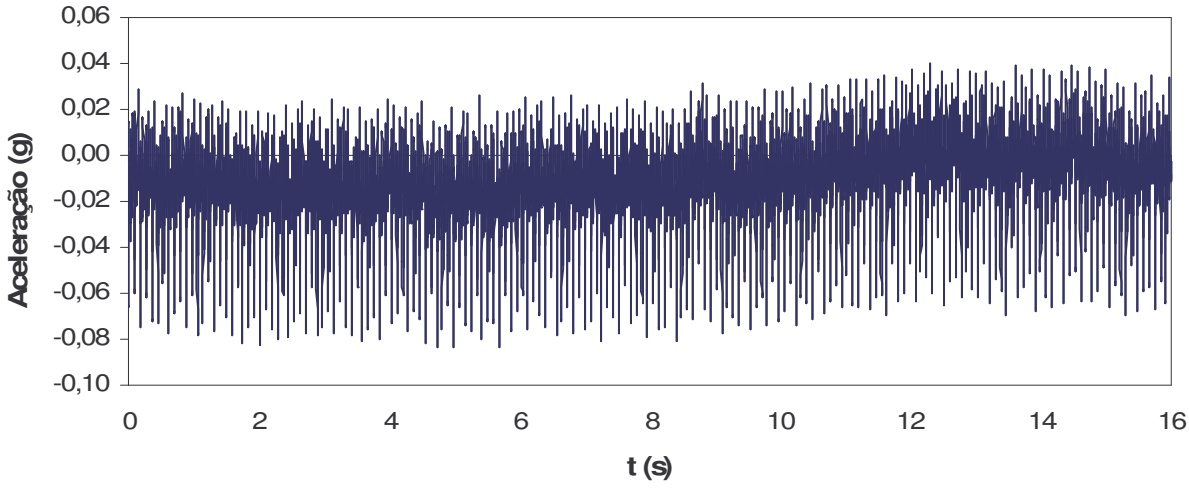


Figura 6.27 Série temporal da aceleração longitudinal na frequência de 11,59Hz

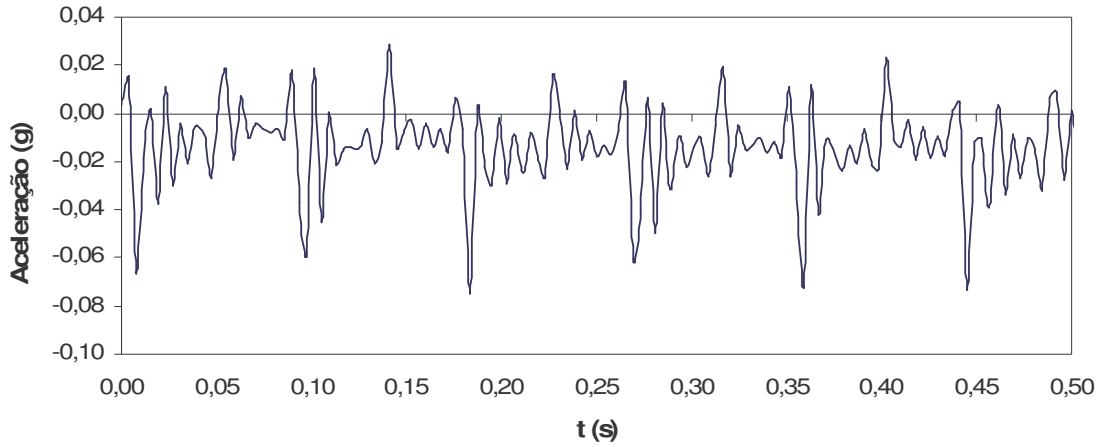


Figura 6.28 "Zoom" da série temporal da aceleração longitudinal na frequência 11,59 Hz

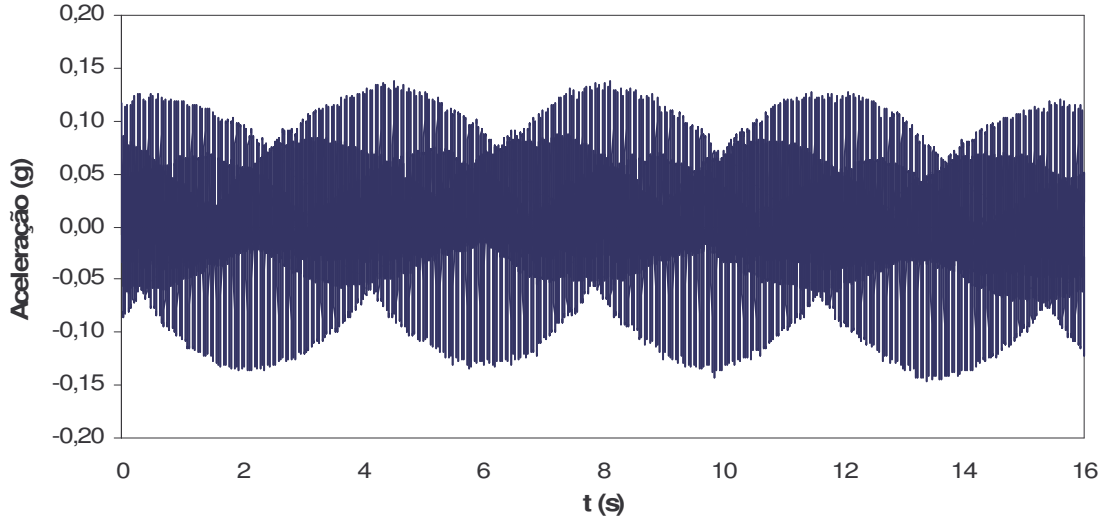


Figura 6.29 Série temporal da aceleração longitudinal na frequência 23,18Hz

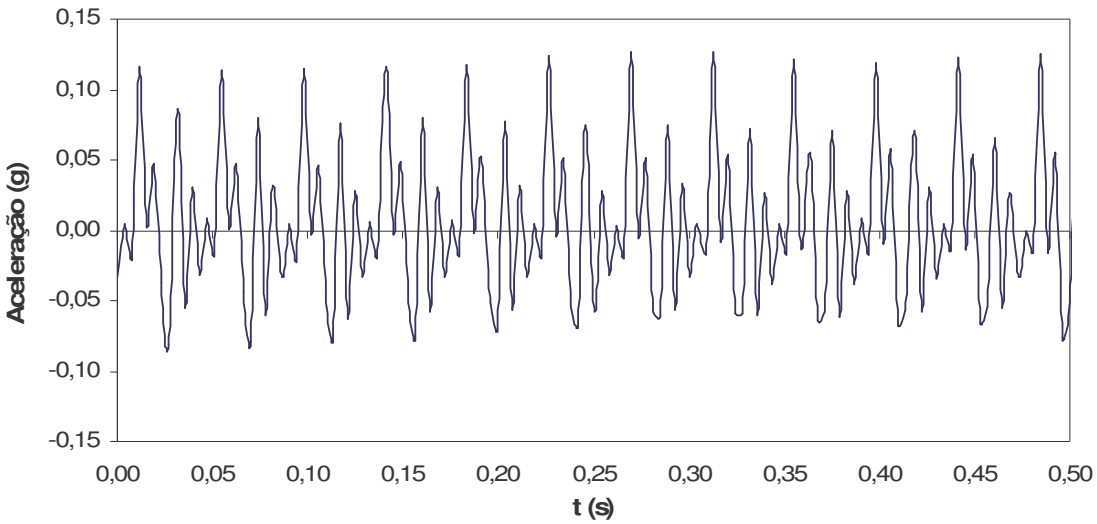


Figura 6.30 "Zoom" da série temporal da aceleração longitudinal na frequência 23,18 Hz

As Figuras Figura 6.31 a Figura 6.33 apresentam a resposta no primeiro modo do tirante obtida numericamente na secção a meio vão, juntamente com a resposta medida, para cada frequência de excitação estudada para amplitudes do movimento longitudinal crescentes.

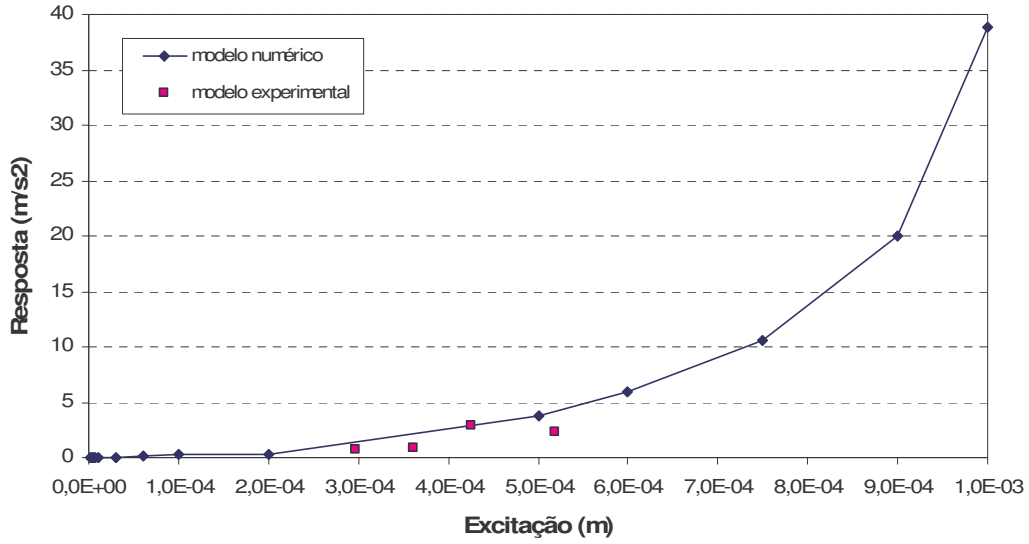


Figura 6.31 Aceleração transversal a meio vão: numérica vs experimental, na frequência de excitação de 5.79 Hz

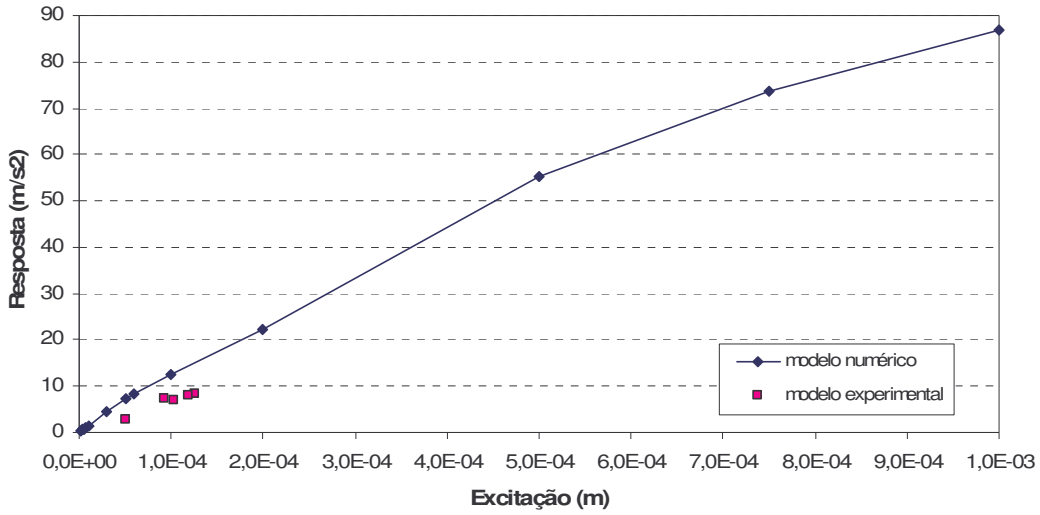


Figura 6.32 Aceleração transversal a meio vão: numérica vs experimental, na frequência de excitação de 11.59 Hz

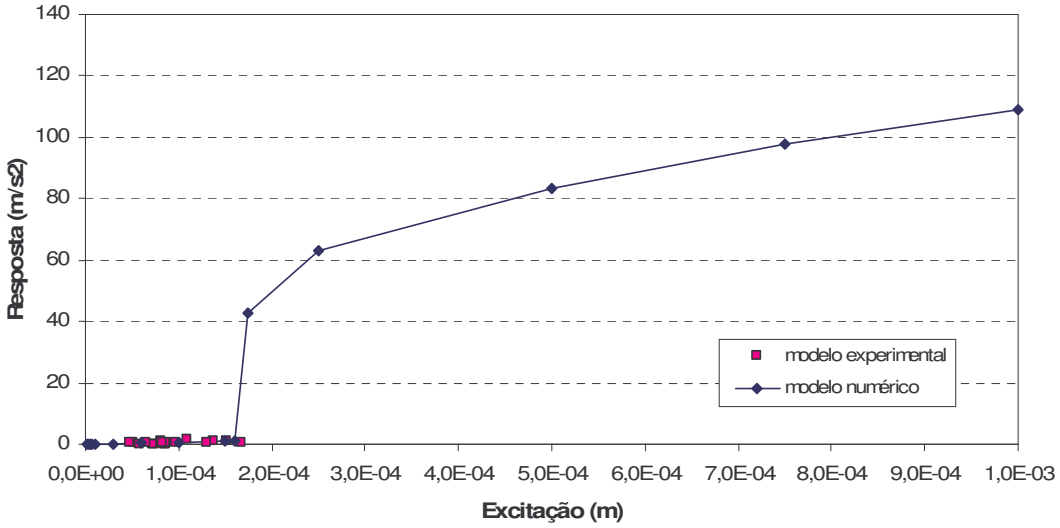


Figura 6.33 Aceleração transversal a meio vão: numérica vs experimental, na frequência de excitação de 23.18 Hz

Conforme já observado na secção 5.5 por via analítica e numérica, a excitação longitudinal na frequência do cabo (Figura 6.32) origina respostas crescentes, lineares num troço inicial, e não lineares a partir de uma determinada amplitude, enquanto que a excitação longitudinal nas frequências de metade e dupla da frequência do cabo originam o fenómeno de salto. Claramente, para uma excitação na frequência igual a metade da frequência do cabo, as acelerações na frequência fundamental crescem de

forma gradual a partir de um nível reduzido de oscilação longitudinal. Pelo contrário, para a excitação na frequência dupla do cabo (Figura 6.33), o fenómeno de salto ocorre para amplitudes do movimento longitudinal mais elevadas, traduzindo-se num incremento abrupto da amplitude das oscilações transversais.

A Figura 6.31 e Figura 6.32 mostram que os resultados experimentais são genericamente ligeiramente inferiores aos numéricos, facto que provavelmente se deve à dificuldade em induzir movimento exactamente na frequência de metade ou igual à do tirante, em virtude da limitação em frequência do gerador de sinal.

A Figura 6.33 mostra ainda não ter sido atingido experimentalmente o fenómeno de salto. Efectivamente, por limitação de potência do excitador utilizado e por dificuldades de centragem do veio do excitador, sucedeu que para as amplitudes de excitação testadas mais elevadas, as vibrações do tirante afectavam o movimento do veio, acabando por danificá-lo sem verdadeiramente entrar em excitação paramétrica. A instabilidade observada do tirante sugere contudo que para as últimas amplitudes observadas se estaria na fronteira deste fenómeno, o que é de resto concordante com os registos numéricos.

No modelo numérico, o fenómeno do salto aconteceu para uma amplitude de 1.75E-4m e uma frequência de oscilação dupla da frequência fundamental do cabo (23,18Hz). Quanto ao modelo experimental, a amplitude do movimento induzido teve um máximo de 1.66E-4m.

As Figura 6.34 a Figura 6.36 apresentam os resultados obtidos em deslocamentos.

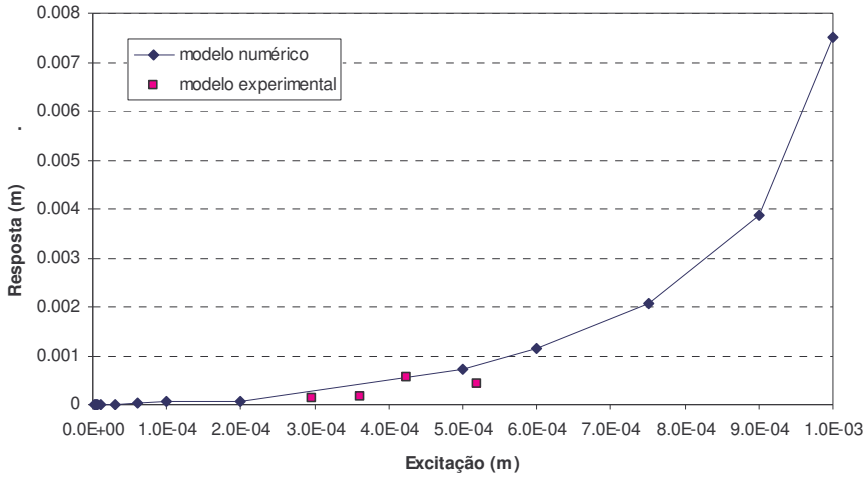


Figura 6.34 Deslocamento transversal a meio vão: numérica vs experimental, na frequência de excitação de 5.79 Hz

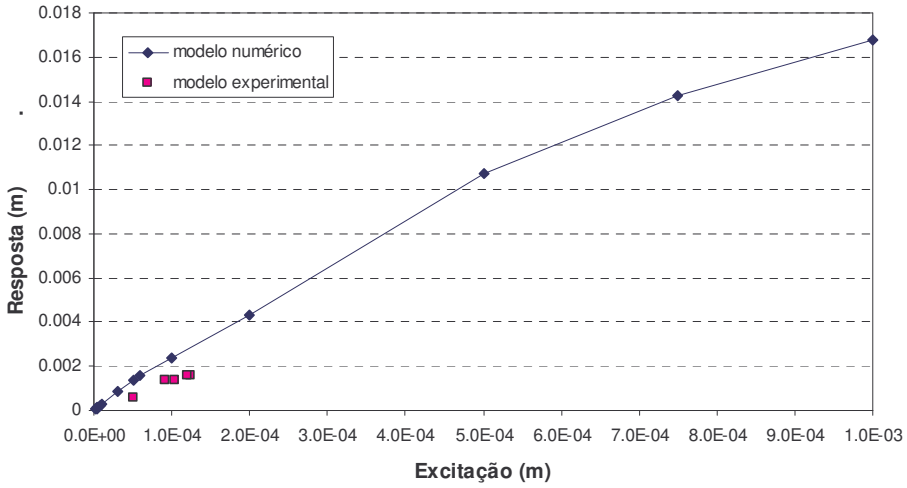


Figura 6.35 Deslocamento transversal a meio vão: numérica vs experimental, na frequência de excitação de 11.59 Hz

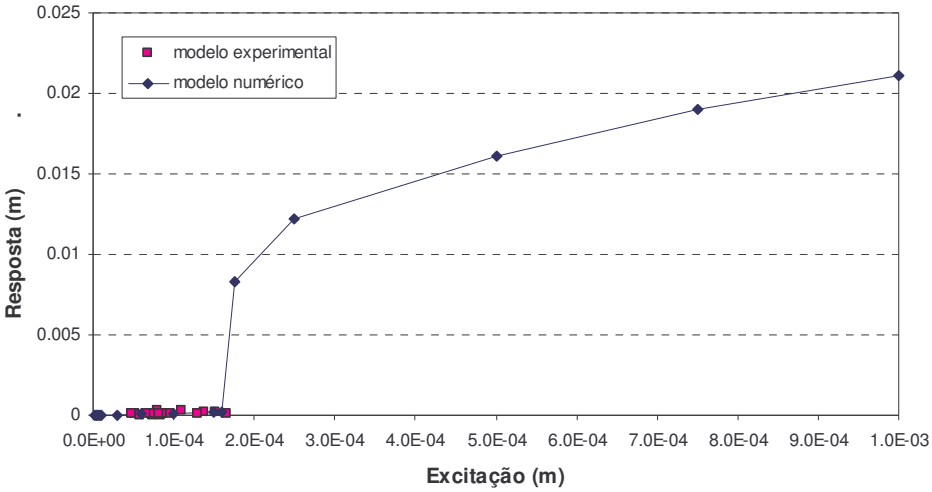


Figura 6.36 Deslocamento transversal a meio vão: numérica vs experimental, na frequência de excitação de 23.18 Hz

Transpõem-se agora os resultados obtidos numericamente para o protótipo, utilizando a teoria de semelhança, e mais concretamente o factor de escala dos comprimentos, S_L. As Figura 6.37 a Figura 6.39 representam a variação dos deslocamentos transversais no cabo do protótipo em correspondência com o movimento longitudinal aplicado nas frequências de 0.832Hz, 1.63Hz e 3.267Hz.

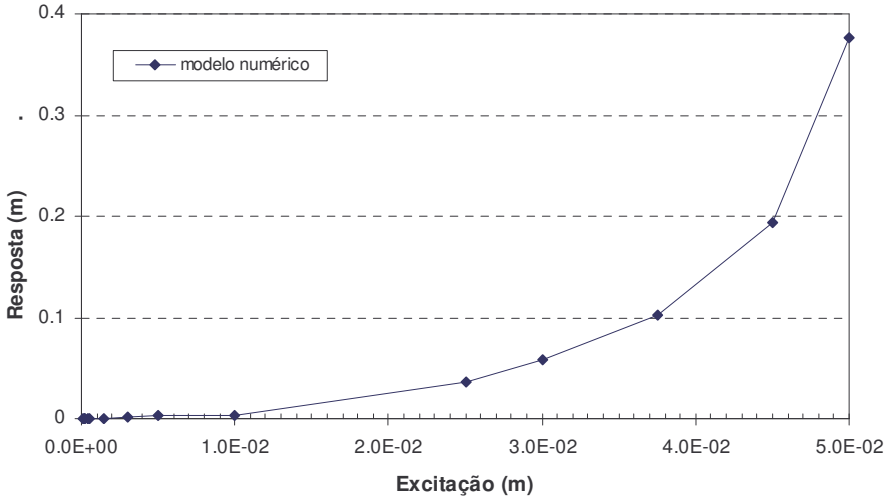


Figura 6.37 Deslocamento transversal a meio vão na frequência de excitação de 0.832 Hz

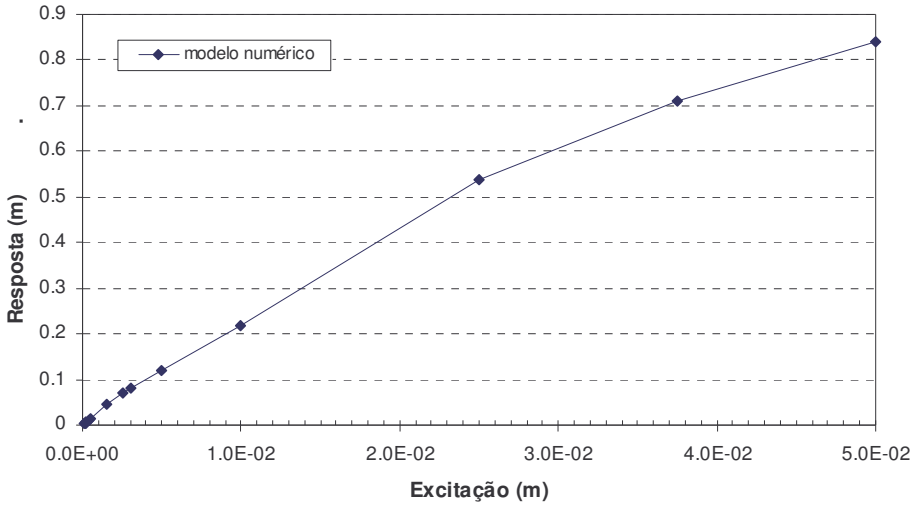


Figura 6.38 Deslocamento transversal a meio vão na frequência de excitação de 1.63 Hz

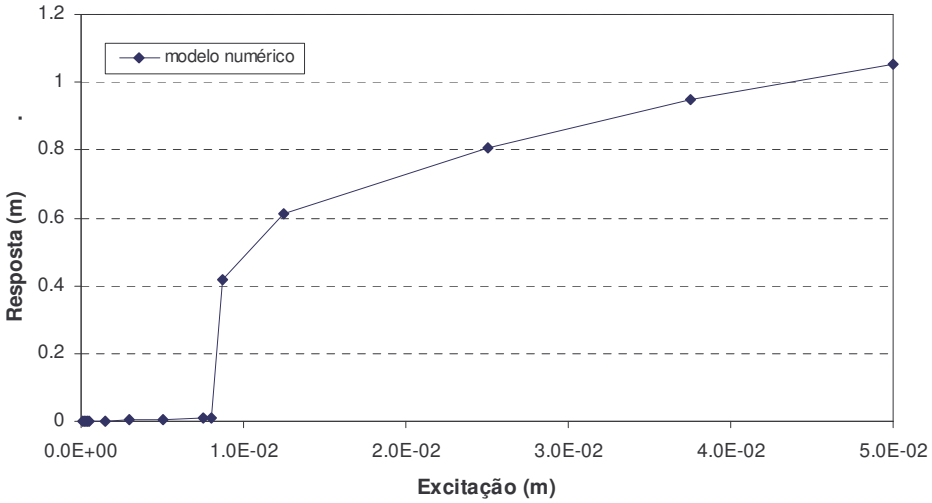


Figura 6.39 Deslocamento transversal a meio vão na frequência de excitação de 3.267 Hz

Verifica-se que amplitudes de oscilação muito elevadas podem ocorrer para excitações longitudinais de relativamente baixa amplitude nas três frequências estudadas, sendo estas particularmente críticas na frequência dupla do cabo (Figura 6.39). Observa-se que uma amplitude de oscilação induzida numa ancoragem do protótipo, na sua frequência dupla de 3.267Hz, no sentido longitudinal do cabo, de cerca de 1cm, corresponde a uma amplitude de resposta de cerca de 50 cm, verificando-se a excitação paramétrica. Para uma amplitude de excitação de 5cm tem-se uma resposta de amplitude máxima de aproximadamente 100cm.

Os gráficos apresentados nas Figura 6.40 e Figura 6.41 mostram a variação da resposta temporal expressa em deslocamentos e acelerações respectivamente, para a amplitude crítica correspondente à excitação paramétrica.

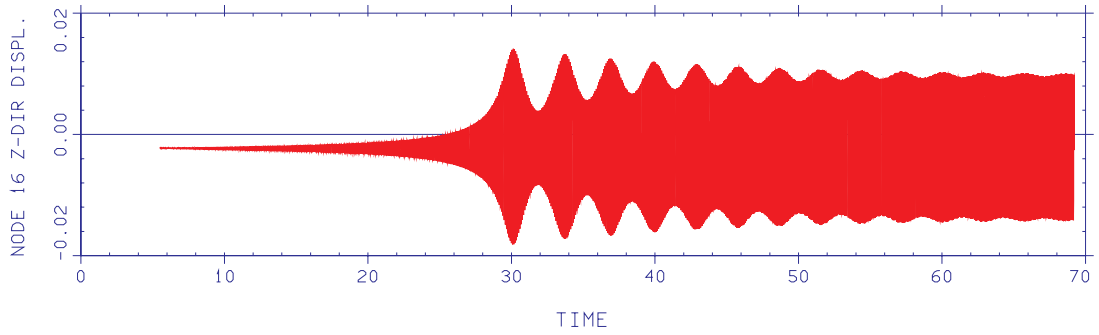


Figura 6.40 Série temporal dos deslocamentos no nó 16 (meio vão) segundo a direcção perpendicular ao cabo para uma amplitude de excitação de 1.75E-4m

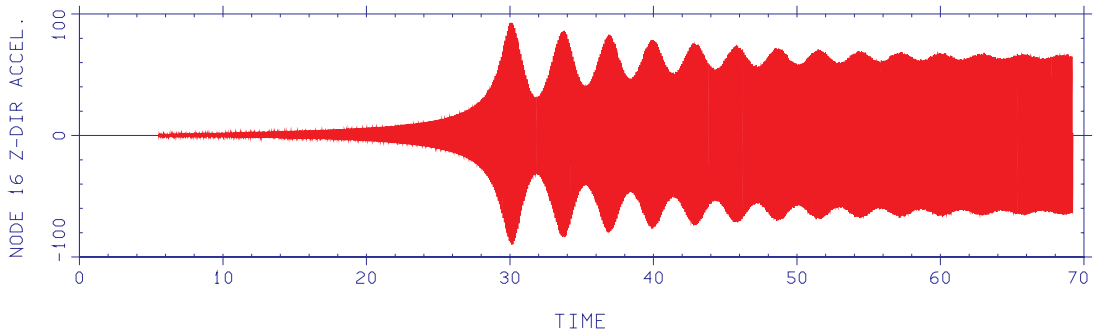


Figura 6.41 Série temporal das acelerações no nó 16 (meio vão) segundo a direcção perpendicular ao cabo para uma amplitude de excitação de 1.75E-4m

Procura finalmente caracterizar-se a posição de alguns pontos críticos da resposta obtidas nos ensaios acima referidos, tendo presentes as regiões de instabilidade definidas na secção 5.2.2.

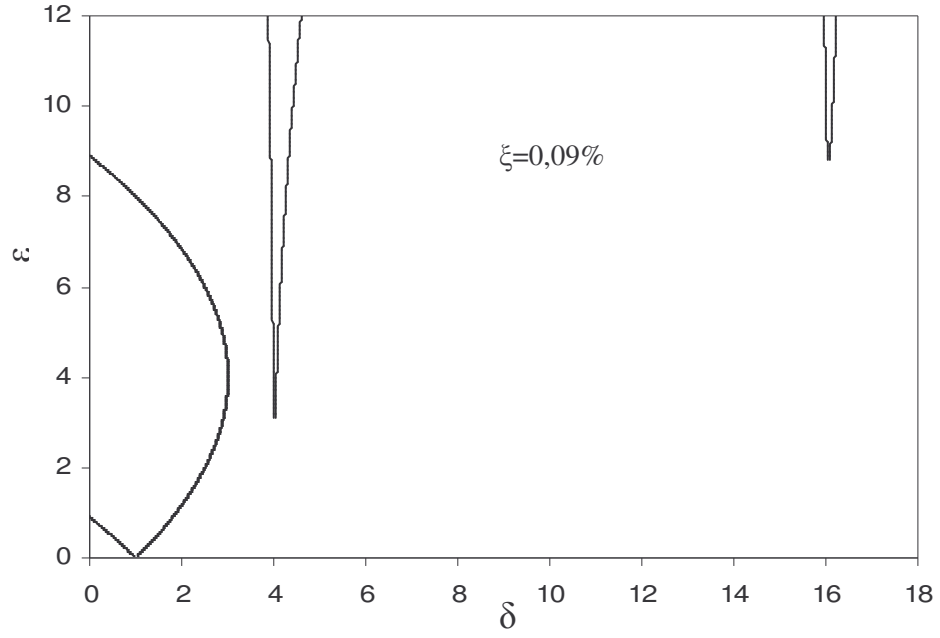


Figura 6.42 Diagrama de Strutt (com amortecimento de 0.09%)

As ordenadas ε e abcissas δ estão relacionadas por

$$\varepsilon = \delta^2 . \frac{x_B}{2.X_0} \qquad \textbf{(6.28)}$$

Estas quantidades são calculadas para os pontos seleccionados na Tabela 6.4, correspondentes aos estudos experimentais desenvolvidos. São representados na Figura 6.43 no diagrama de Strutt.

Tabela 6.4 Alguns resultados obtidos do modelo experimental

Ressonância (Hz)	**Ponto de Estado (p.e.)**	**Amplitude Excitação (m)**	**δ**	**ε**
5,79	p.e.2	4,24E-04	16,0	11,41
	p.e.3	5,19E-04	16,0	13,94
11,59	p.e.4	5,10E-05	4,0	0,084
	p.e.5	1,25E-04	4,0	0,206
23,18	p.e.6	1,66E-04	1,0	0,0159
	p.e.7	7,43E-05	1,0	0,0071

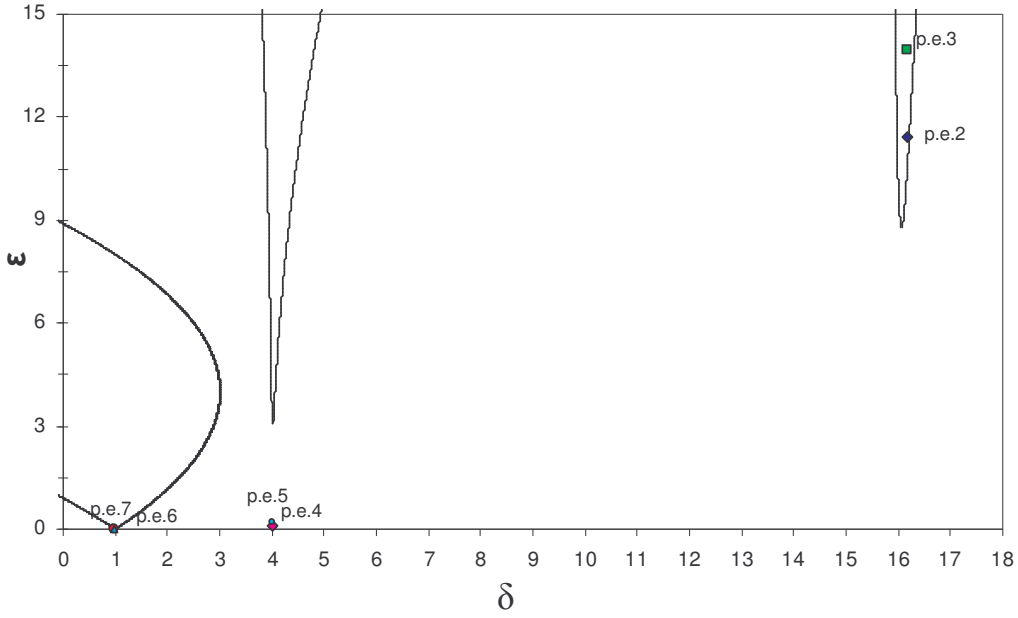


Figura 6.43 Representação no diagrama de Strutt de alguns resultados obtidos do modelo experimental ($\xi = 0{,}09\%$)

Fez-se uma representação semelhante para alguns resultados obtidos numericamente.

Tabela 6.5 Alguns resultados obtidos do modelo numérico

Ressonância (Hz)	**Ponto de Estado (p.e.)**	**Amplitude Excitação (m)**	**δ**	**ε**
5,79	p.e.2	2,0E-04	16,1	5,369
	p.e.3	6,0E-04	16,1	16,107
11,59	p.e.4	5,0E-04	4,0	0,822
	p.e.5	1,0E-03	4,0	1,644
23,18	p.e.6	1,60E-04	0,98	0,0154
	p.e.7	2,5E-04	1,0	0,025
	p.e.8	1,75E-04	1,0	0,0168
	p.e.9	1,0E-03	1,0	0,102

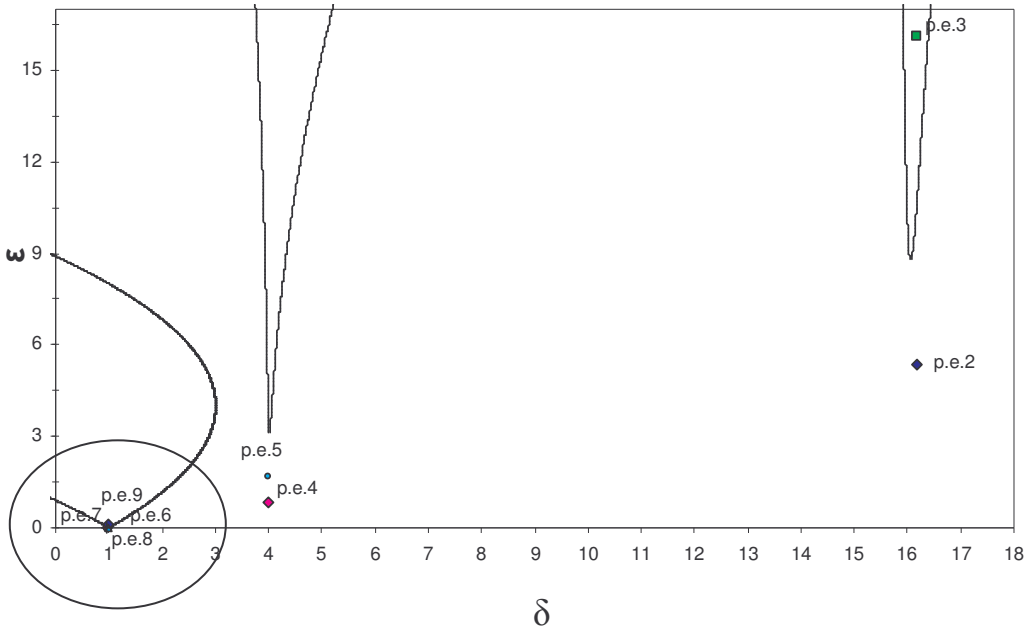


Figura 6.44 Representação no diagrama de Strutt de alguns resultados obtidos do modelo numérico ($\xi = 0{,}09\%$)

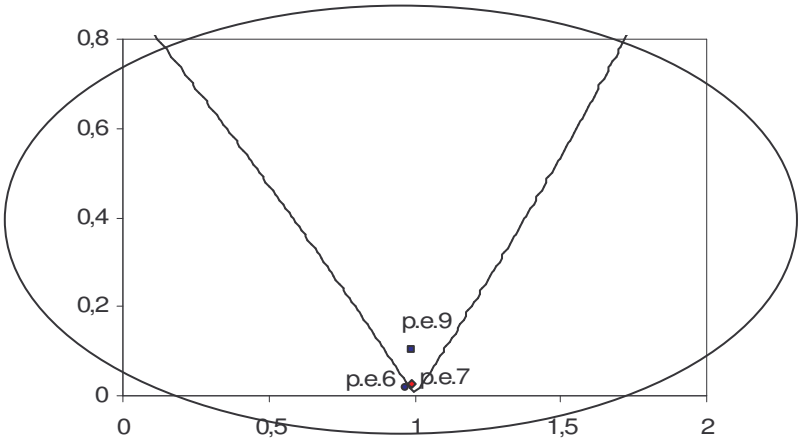


Figura 6.45 "Zoom" da Figura 6.44

Verifica-se que para as condições respeitantes ao ponto de estado 7 e 9, encontra-se no domínio da zona instável, ocorrendo a excitação paramétrica, sendo concordante com o que se verificou na Figura 6.39.

CAPÍTULO 7

FADIGA EM TIRANTES

7.1 INTRODUÇÃO

Um dos aspectos mais importantes associados às pontes atirantadas, é o desempenho dos tirantes ao longo do seu período de funcionamento. Pretende-se que os tirantes possuam o maior tempo de vida útil, tendo em consideração os custos elevados associados à sua manutenção e substituição.

Quando integrados em pontes, os tirantes estão sujeitos a cargas repetidas (tráfego rodo e ferroviários, pessoas, vento, etc…), caracterizando-se além disso por uma elevada sensibilidade a oscilações. A aplicação destas cargas repetidas vezes durante a vida útil da estrutura, embora originando valores de tensão inferiores à tensão de rotura, pode levar a uma degradação progressiva dos tirantes e/ou elementos constituintes das ligações destes à ponte. Este fenómeno designa-se por fadiga, e constitui um dos principais motivos de desgaste e rotura em elementos estruturais sujeitos a cargas dinâmicas.

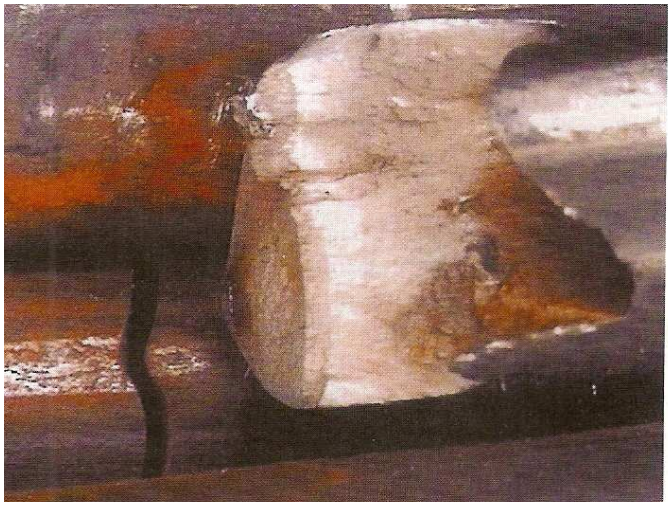


Figura 7.1 Aspecto típico de rotura por fadiga em Tirantes

Em pontes atirantadas, o dano por fadiga ocorre frequentemente nas ancoragens dos tirantes, em resultado da variação dos esforços axiais e repetida flexão causada pelo desvio angular nas suas extremidades. Estes desvios angulares são devidos principalmente às vibrações dos cabos provocadas por efeitos como o efeito de rajada

("buffeting"). No caso das ancoragens inferiores, podem dever-se ainda à rotação do tabuleiro.

A Figura 7.2 mostra um tirante com cerca de 20 anos de uma ponte sobre o rio Loire (França) que foi substituído por demonstrar elevada deterioração na extremidade ligada ao tabuleiro (Siegert, 2000).



Figura 7.2 Tirante danificado junto à ancoragem

Análises dinâmicas efectuadas sobre o tirante demonstraram que a combinação das tensões originadas por flexão e atrito entre a bainha e os arames do tirante levaram a tensões acima do seu limite de resistência. Foram também medidos e analisados os deslocamentos transversais perto da ancoragem, registando níveis de vibração elevados devido à libertação de vórtices, facto que pode estar na origem dos danos observados.

7.2 METODOLOGIA DE ANÁLISE

A análise à fadiga de um elemento estrutural pode ser efectuada segundo duas abordagens (Branco et al.,1999; Tembe, 2001).

Um primeiro método baseia-se na mecânica da fractura, em que é estudada a propagação de fissuras devidas à fadiga. Com este método pretende-se estimar o comportamento de uma fenda, observando a forma como se propaga durante o período de vida útil da estrutura.

O outro método é baseado no uso de curvas S-N, curvas de resistência à fadiga determinadas experimentalmente.

Tendo em conta que no primeiro método se desconhece à partida a dimensão das fissuras, torna-se insuficiente a sua aplicação. Quanto ao segundo método, como só exige o conhecimento do espectro de tensões a que os elementos estruturais ou componentes destes estão sujeitos, será o mais adequado a utilizar durante a fase de projecto.

7.2.1 Curvas S-N

Um dos métodos de análise da fadiga num tirante pode ser baseado na utilização de curvas de resistência à fadiga, designadas por curvas S-N ou curvas de Woehler. Estas curvas são determinadas experimentalmente (Tembe, 2001) e relacionam o número de ciclos de tensão (N) a que os tirantes vão estar sujeitos com a amplitude de tensão (S). A sua determinação é baseada a partir do tratamento estatístico de resultados experimentais, a maior parte dos quais obtidos para amplitudes de tensão constante. As características das curvas de resistência à fadiga podem ser explicadas de uma forma geral relacionando o número de ciclos de tensão com a amplitude de tensão normal, expressa por:

$$N = C \cdot \Delta\sigma^{-m} \tag{7.1}$$

em que N é o número de ciclos de tensão, sendo $\Delta\sigma$ a amplitude de tensão normal e tendo como constantes da curva determinadas experimentalmente parâmetros C *e* m.

Estas curvas, em aplicações práticas, são representadas na escala logarítmica dupla em forma de linhas rectas. Aplicando logaritmos a ambos os membros da equação (6.1), tem-se a relação seguinte:

$$\log N = \log C - m \cdot \log \Delta\sigma \qquad \textbf{(7.2)}$$

em que o parâmetro *m* corresponde à inclinação de uma recta na escala logarítmica.

As curvas S-N são normalmente caracterizadas por uma resistência à fadiga aos 2 milhões de ciclos, para uma amplitude de tensão de $\Delta\sigma_C$; uma resistência à fadiga sob ciclos de tensão de amplitude constante $\Delta\sigma_D$; e uma tensão limite de fadiga $\Delta\sigma_L$, associada normalmente aos 100 milhões de ciclos de tensão. Na Figura 7.3 representa-se uma curva típica de resistência à fadiga para tensões normais no aço.

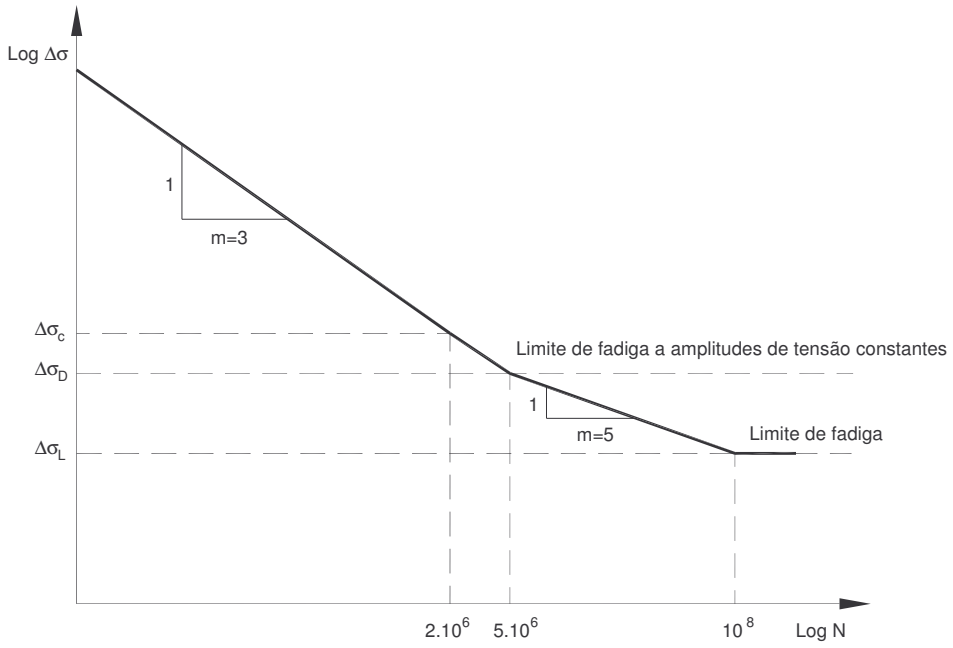


Figura 7.3 Curva típica de resistência à fadiga no aço (adaptado de Tembe, 2001)

Na utilização das curvas S-N existem dois parâmetros fundamentais na avaliação da resistência à fadiga: o limite de fadiga a amplitudes de tensão constante, $\Delta\sigma_D$ e o limite de fadiga, $\Delta\sigma_L$ ("cut-off-limit"). O primeiro aplica-se aos casos de espectros de tensão (ver secção 6.2.1.1) de amplitudes constantes ou variáveis, e permite constatar que se a amplitude máxima de tensão do espectro for inferior a $\Delta\sigma_D$, o elemento ou material não sofrerá rotura por fadiga independentemente do número de ciclos durante a sua vida útil.

Para valores de tensão superiores a $\Delta\sigma_D$ ocorrerá a propagação de fissuras ou defeito inicial, o que por sua vez implica uma diminuição de $\Delta\sigma_D$ com o tempo. Deste modo, será cada vez maior o número de ciclos para amplitudes de tensão menores que $\Delta\sigma_D$ que contribuirão para a propagação dessa fissura. Este fenómeno é tido em conta considerando que os ciclos de tensão abaixo do limite $\Delta\sigma_D$ contribuem também para a propagação da fissura através do 2º troço da curva S-N. O segundo limite referido ($\Delta\sigma_L$) aparece como um limite último abaixo do qual não ocorrerão quaisquer rotura por fadiga independentemente do espectro de tensões, constituindo este uma limitação à contribuição dos ciclos com amplitude menor que $\Delta\sigma_D$ na propagação de fissuras.

A amplitude de tensão $\Delta\sigma_C$ pode ser denominada de categoria de detalhe, referindo-se geralmente aos 2 milhões de ciclos de tensão de amplitudes constantes. A cada categoria corresponderá uma curva S-N.

7.2.2 Métodos de Análise

7.2.2.1 Acumulação de Danos por Fadiga

Quando um elemento estrutural é sujeito a aplicação cíclica de uma carga, a partir de um dado nível de amplitude de tensão, ocorre deterioração das suas propriedades, gastando uma fracção da sua vida útil. Este fenómeno é denominado de dano por fadiga (D).

Miner (Branco et al.,1999) propôs uma teoria de danos acumulados, através de uma regra linear, considerando que a deterioração da resistência sob aplicação de uma tensão cíclica de amplitude constante é proporcional à energia absorvida pelo material, sendo expressa pela relação seguinte

$$D = \frac{n}{N} \tag{7.3}$$

sendo n o número de ciclos aplicados e N o número de ciclos total que provocaria a rotura.

No caso das condições de carga corresponderem a espectros de amplitudes variáveis ($\Delta\sigma_i$,n_i), estes espectros devem ser decompostos numa série de espectros parciais (equação (7.4)) de amplitude constante, utilizando a expressão (7.3) para a caracterização de cada espectro.

$$\frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} + \ldots + \frac{n_n}{N_n} = 1 \tag{7.4}$$

levando à expressão da regra de Miner :

$$D = \sum_i^n \frac{n_i}{N_i} = 1 \tag{7.5}$$

A rotura ocorre quando o somatório de danos é igual à unidade e N_i é obtido a partir das curvas S-N (Figura 7.3).

7.2.2.2 Espectro de Tensões ou Amplitude de Tensão de Amplitudes Variáveis.

A solicitação do tabuleiro da ponte por diversas fontes (tráfego rodo e ferroviário, pessoas, vento) origina variações de tensão nos tirantes que podem ser

representadas através de uma série temporal, de acordo com a representação da Figura 7.4.

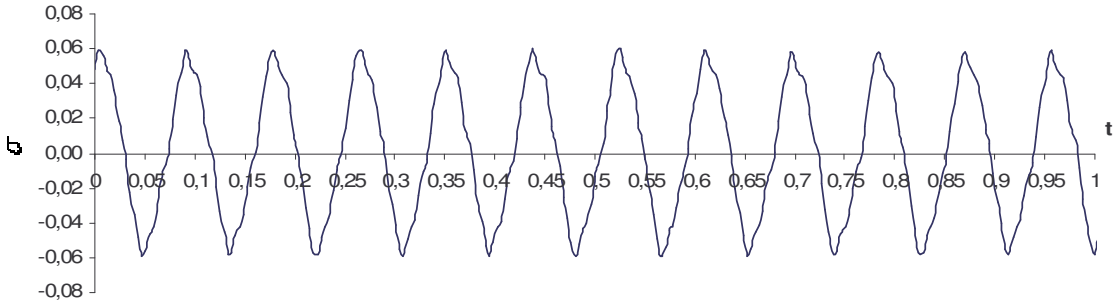


Figura 7.4 Série temporal de tensões num tirante ($\sigma - t$)

Com base nestas séries e utilizando métodos de contagem adequados, extraem-se as amplitudes de tensão relevantes e o correspondente número de ciclos de tensão, para a consideração da fadiga. É possível obter dessa contagem um histograma de frequências da amplitude de tensão também designado por espectro de tensões ou de amplitude de tensão (Branco e tal, 1999) (Figura 7.5).

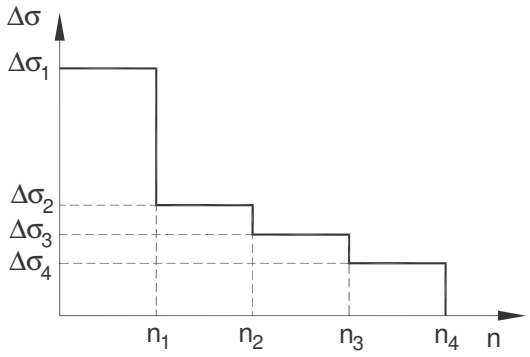


Figura 7.5 Espectro de tensões

A amplitude de tensão é definida através da diferença entre um máximo local $\sigma_{máx}$ e um mínimo local $\sigma_{\min}$ da tensão,

$$\Delta\sigma = \sigma_{máx} - \sigma_{\min} \tag{7.6}$$

São considerados valores algébricos de $\sigma_{máx}$ e $\sigma_{\min}$ de forma que a amplitude de tensão seja sempre positiva.

Na presença de espectros de tensão bastante complexos torna-se difícil caracterizar os ciclos de tensão ou quantos ciclos devem ser considerados. Para a contagem dos ciclos de tensão pode-se usar o método de números de amplitude (gamas) de tensão. Este método possui duas versões: o método da gota de água ("rainflow") e o método do reservatório. A sua aplicação está demonstrada na secção 7.2.3.

7.2.2.3 Método da Tensão Equivalente de Fadiga a Amplitudes Constantes

Baseada no método da acumulação de danos de Miner pode determinar-se uma tensão equivalente de fadiga a amplitudes constantes ($\Delta\sigma_e$), que tenha o mesmo nível de danos do espectro de tensões de amplitudes variáveis e o mesmo número de ciclos de tensão (Figura 7.6).

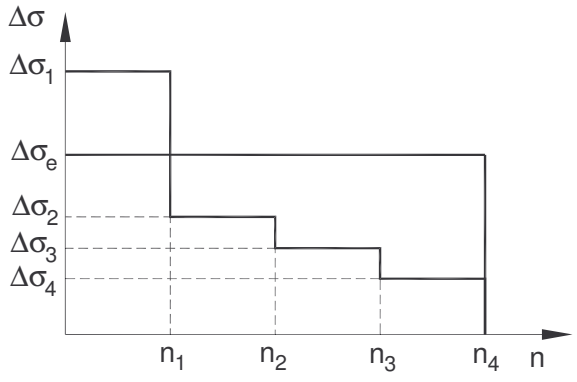


Figura 7.6 Tensão equivalente de fadiga a amplitudes constantes (adaptado de Tembe, 2001)

A determinação de $\Delta\sigma_e$ baseia-se na aplicação das curvas de resistência à fadiga. Assim, representando cada bloco de amplitude de tensão ($\Delta\sigma_i$) pela equação das curvas de fadiga (7.1) teremos

$$N_i = C \cdot \Delta\sigma_i^{-m} \tag{7.7}$$

A equação de danos acumulados (7.5) pode ser apresentada por

$$D = \sum_i \frac{n_i}{C \cdot \Delta\sigma^{-m}} = \frac{1}{C} \sum_i n_i \cdot \Delta\sigma_i^m \tag{7.8}$$

o dano (D) provocado pela tensão equivalente de fadiga com uma única amplitude de tensão $\Delta\sigma_e$ e com um número de ciclos $\sum n_i$, expressa-se pela equação

$$D = \frac{n}{N} = \frac{1}{C} \cdot n \cdot \Delta\sigma_e^m \tag{7.9}$$

Igualando as equações (7.8) e (7.9) obtém-se:

$$\Delta\sigma_e = \left[\frac{\sum_{\mathrm{i}} n_i \cdot \Delta \cdot \sigma_i^m}{\sum_{\mathrm{i}} n_i} \right]^{\frac{1}{m}} \tag{7.10}$$

De referir que a expressão (7.10) é aplicável aos casos em que os blocos de amplitudes de tensão $\Delta\sigma_i$ do espectro se situam sob o mesmo troço da curva S-N, ou seja, para C e m constantes. Para os casos em que tal não acontece, deverá recorrer-se ao método da tensão equivalente de danos (Tembe, 2001).

7.2.3 Métodos de Contagem de Ciclos de Tensão

Existem vários métodos propostos para a contagem dos ciclos de tensão (Branco et al, 1999; Tembe, 2001). Na presente dissertação, apenas se refere o método da gota de água (“rainflow”), de aplicação bastante prática.

O método da gota de água determina o número de ciclos n e a amplitude $\Delta\sigma_i$ de um diagrama real ou teórico de variação de tensão. No estudo da fadiga importa estudar a relação entre as tensões σ e as extensões ε, uma vez que o dano por fadiga é

particularmente afectado pela alternância das deformações plásticas, consistindo num processo de histerese (Figura 7.7). Assim, a avaliação de fenómenos aleatórios como a fadiga de elementos estruturais, não pode ser baseada no registo de tensões em função do tempo ($\sigma - t$), onde só são registadas as tensões na zona em que são directamente proporcionais às extensões $\varepsilon(t)$, Figura 7.8.

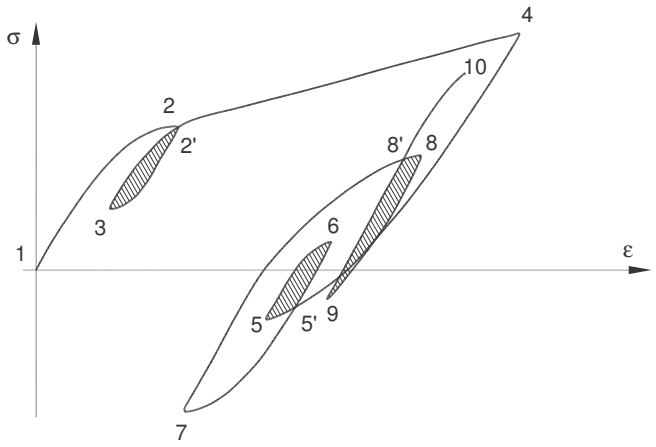


Figura 7.7 Diagrama $\sigma - \varepsilon$ de um carregamento (Frýba, 1996)

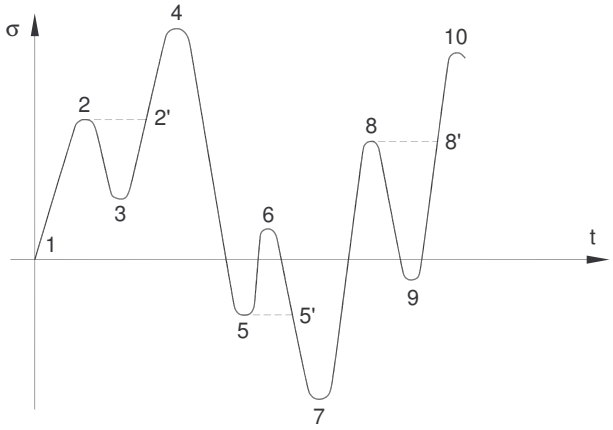


Figura 7.8 Diagrama $\sigma - t$ de um carregamento (Frýba, 1996)

Verifica-se pela Figura 7.7 a contagem dos ciclos (2-3-2'; 5-6-5'; 8-9-8') e meios ciclos (1-2-4; 4-5-7; 7-8-10). O diagrama $\sigma - t$, Figura 7.8, é convertido num

diagrama do tipo $\sigma - \varepsilon$ através do método de gota de água, pela analogia da queda de uma gota de água ao longo de um telhado de pagode.

De modo a visualizar mais facilmente o método, o registo de tensões no tempo é colocado na posição vertical, substituindo os picos e vales do espectro de carga por um espectro com a forma de dentes de serra.

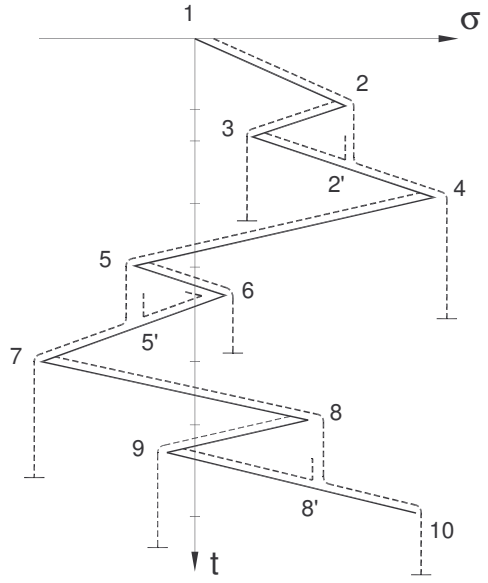


Figura 7.9 Método da gota de água (adaptado de Frýba)

Os picos são numerados com números pares e os vales com números impares. O escoamento de uma gota de água pode começar tanto da direita para a esquerda como da esquerda para a direita. O início e fim de cada caminho de escoamento definem as extremidades de metade de um ciclo, podendo o caminho iniciar-se tanto nos picos como nos vales.

A gota inicia o seu movimento no ponto 1, percorrendo o primeiro telhado até atingir um pico ou vale; neste momento, a gota cai verticalmente até atingir outro telhado e o processo é repetido até que uma das condições seguintes seja satisfeita:

a) uma gota escoando-se ao longo de um telhado pára se se cruzar com uma gota que caia de um telhado acima. Por exemplo, o percurso 6-5' que intersecta o percurso da gota que precipita verticalmente de 5;

b) uma gota que cai da ponta de um telhado termina o seu percurso se a gota ao cair passar do lado oposto a um pico de tensão mais positiva do que a tensão do inicio do percurso em estudo, ou um vale que possui tensão mais negativa do que no inicio do percurso. Neste contexto a origem é considerada um vale se a tensão se desenvolve numa direcção negativa. Por exemplo, temos o caso da gota que precipita do pico 6, sendo que o trajecto de 5 para 6 acaba após 6 uma vez que o vale 7 é mais negativo do que o vale 5. Um outro exemplo é o percurso 2-3, que termina em 3 porque o pico 4 é mais positivo que o 2;

c) um percurso não é iniciado antes do anterior ter terminado.

Pelo referido anteriormente, cada percurso completo, 1-2-4, 4-5-7, 7-8-10 é contabilizado como meio ciclo, sendo que a junção de dois meios ciclos de igual amplitude de tensão formam um ciclo completo. As interrupções do percurso, tais como 2-3-2', 5-6-5' e 8-9-8', constituem ciclos completos. Esta analogia permite de uma forma prática aproximarmo-nos de uma análise aproximada dos ciclos de tensão com a Figura 7.7. Podemos idealizar um diagrama $\sigma - t$ equivalente ao da Figura 7.8, em termos de ciclos e meios ciclos de tensão (Figura 7.10).

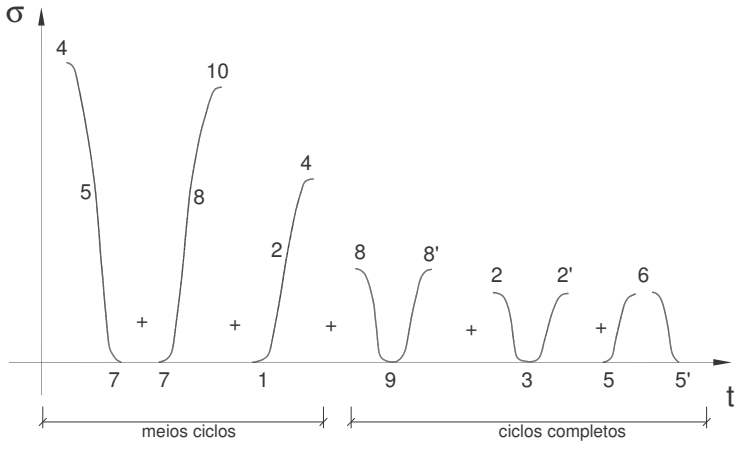


Figura 7.10 Diagrama $\sigma - t$ idealizado (Frýba, 1996)

Assim, pelo referido, o método da gota de água reflecte o comportamento do material e caracteriza a sua histerese. O algoritmo do método é apresentado em (Frýba,1996), sendo aqui referidos de forma genérica os seguintes passos do procedimento (Ribeiro, 2005):

a) Começa-se por identificar os extremos locais (máximos e mínimos) do registo de determinada série temporal de tensões, introduzindo-os consecutivamente num vector A(i) (A(0), A(1),…, A(k));

b) A condição para contagem dos ciclos é definida pelas relações (Figura 7.11)

$$A(i-1) \le A(i+1) < A(i) \le A(i+2) \tag{7.11}$$

ou

$$A(i-1) \ge A(i+1) > A(i) \ge A(i+2) \tag{7.12}$$

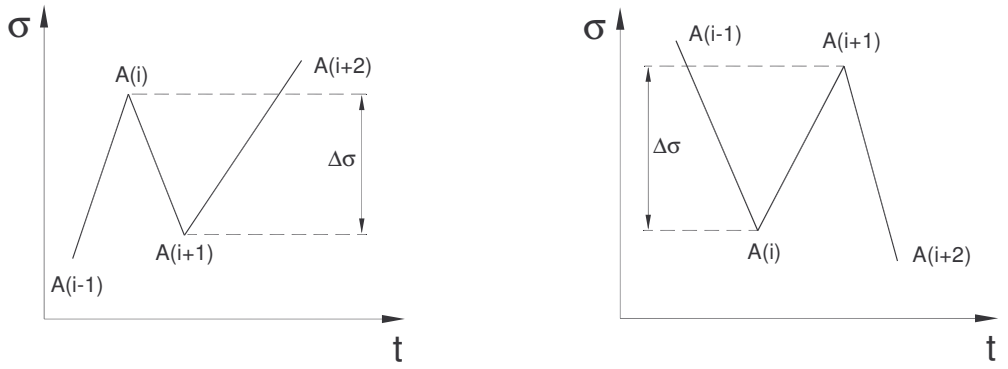


Figura 7.11 Dois casos de contagem de ciclos completos de acordo com a equação (7.11)

c) A contagem inicia-se em i = 1 até i = k – 2 (k é o número de extremos locais). Se umas das condições (7.11) ou (7.12) forem cumpridas, é contabilizado um ciclo (dois meios ciclos) com uma amplitude $\Delta\sigma$ correspondente a:

$$\Delta\sigma = \left| A(i) - A(i-1) \right| \tag{7.13}$$

d) Os termos $A(i)$ e $A(i+1)$ são eliminados da sequência de extremos locais e a sequência renumerada;

e) O passos c) e d) são repetidos até não restarem mais ciclos completos por contabilizar;

f) Os extremos que restaram são contados como meios ciclos de amplitude $\Delta\sigma$, conforme representado na Figura 7.12;

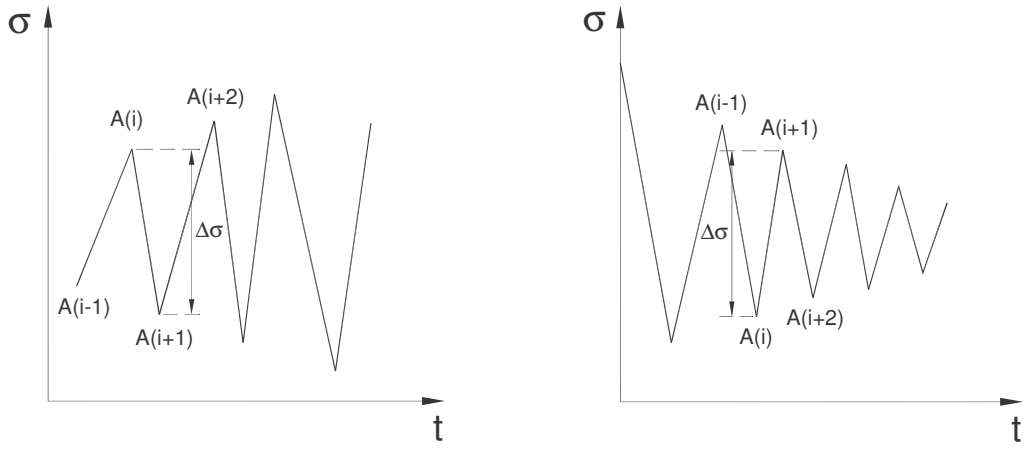


Figura 7.12 Contagem de meios ciclos

g) Definindo classes de amplitudes de tensão, e somando para cada classe os ciclos completos e meios ciclos contabilizados, obtém-se finalmente o espectro de tensões sob a forma de um histograma ($\Delta\sigma_i$,n_i), Figura 7.13.

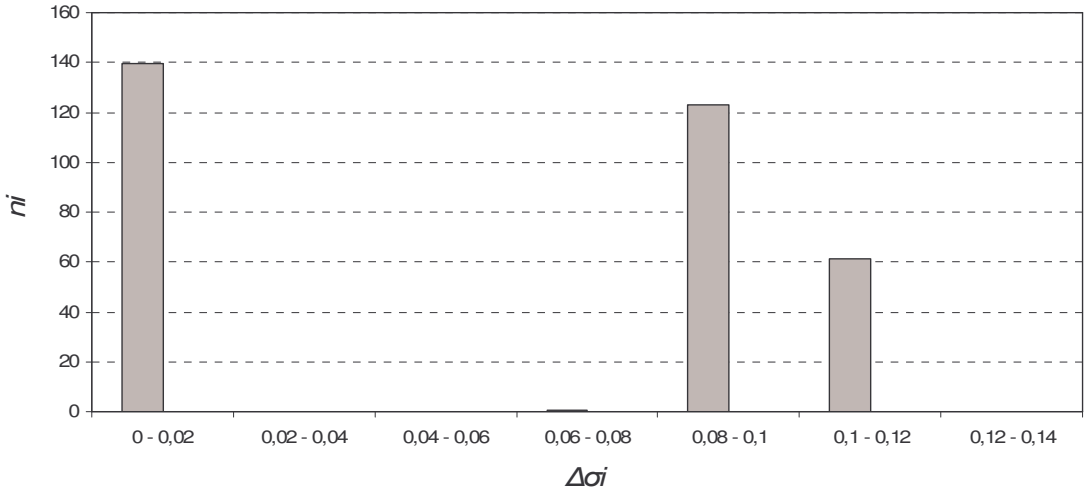


Figura 7.13 Exemplo de um espectro de tensões obtido sob a forma de um histograma da série temporal de tensões num tirante (Figura 7.4)

7.3 ENSAIOS DE FADIGA

Um ensaio típico de fadiga implica uma série de condições técnicas de que poucos laboratórios de estruturas dispõem. Este tipo de ensaio, sendo ainda relativamente recente, tem sofrido alguns ajustes para o seu aperfeiçoamento. Nesta secção são descritos os processos mais comuns num ensaio à fadiga de um tirante.

7.3.1 Procedimento

O provete (tirante) a ensaiar não deve ter menos de 5 metros, é colocado num banco de ensaio (Figura 7.14) fixo em ambas as extremidades, sendo inicialmente sujeito a 5 a 10 ciclos de carga (um número superior de ciclos pode ser aplicado, dependendo dos requerimentos e especificações pretendidos), de forma a estabilizar os componentes do sistema, entre as tensões $\sigma_{máx}/2$ e $\sigma_{máx}$ (Setra, 2002). Estes ciclos iniciais não são contabilizados nos 2 milhões de ciclos de carga.



Figura 7.14 Banco de ensaio à fadiga (Setra, 2002)

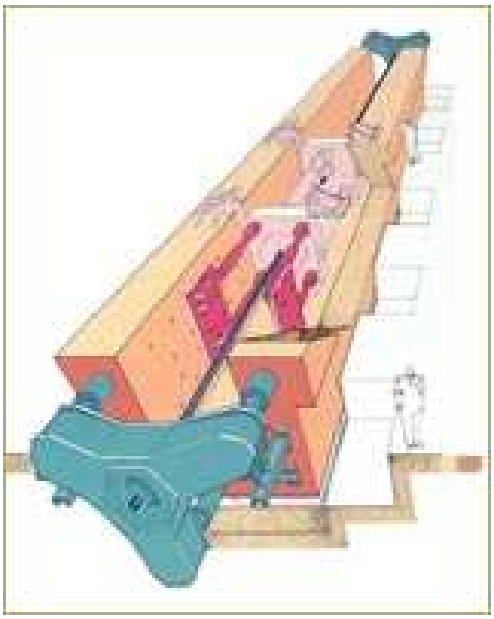


Figura 7.15 Vista Axométrica (3D)

O provete é seguidamente ensaiado para valores de tensões e ângulos de desvio conforme representados na tabela (Norma Francesa NF A 35-035).

Tabela 7.1 Valores extremos ensaiados

Categoria de utilização	Tirante
$\Delta\sigma$	200 MPa
$\Delta\alpha$	10 mrad
$\sigma_{máx}$	0.45 f_{yk}
$\sigma_{\min}$	0.45 f_{yk} – 200MPa
$\alpha_{máx}$	10 mrad
$\alpha_{\min}$	0 mrad

sendo f_{yk} a tensão característica do aço do tirante.

As tensões axiais aplicadas variam entre $\sigma_{\min}$ e $\sigma_{máx}$ com amplitude de $\Delta\sigma/2$, ao mesmo tempo que o cabo sofre desvios da linha de eixo da ancoragem, entre $\alpha_{\min}$ e $\alpha_{máx}$, com amplitude de $\Delta\alpha/2$.

As tensões máximas e mínimas aplicadas devem estar sincronizadas com os ângulos máximos de desvio, obtendo o caso mais gravoso de deformação do tirante. Mas, como por vezes o banco de ensaio não possui um mecanismo de controlo para o efeito, pode-se tentar chegar a múltiplas combinações aleatórias de esforços axiais e angulares fazendo o ensaio com a frequência angular de oscilação com uma percentagem um pouco superior à frequência de aplicação da variação da tensão. É de salientar o facto deste último processo referido poder aproximar-se mais da realidade, uma vez que o carregamento axial e angular acontece aleatoriamente.

Diferentes tipos de ensaios podem ser realizados para aplicação de tensões e desvios angulares. São referidos dois:

Num primeiro ensaio, o desvio angular é conseguido introduzindo um deslocamento transversal a meio do tirante (Figura 7.16). Este deslocamento transversal (Δh) permite ter em conta as rotações que ocorrem nas extremidades do tirante.

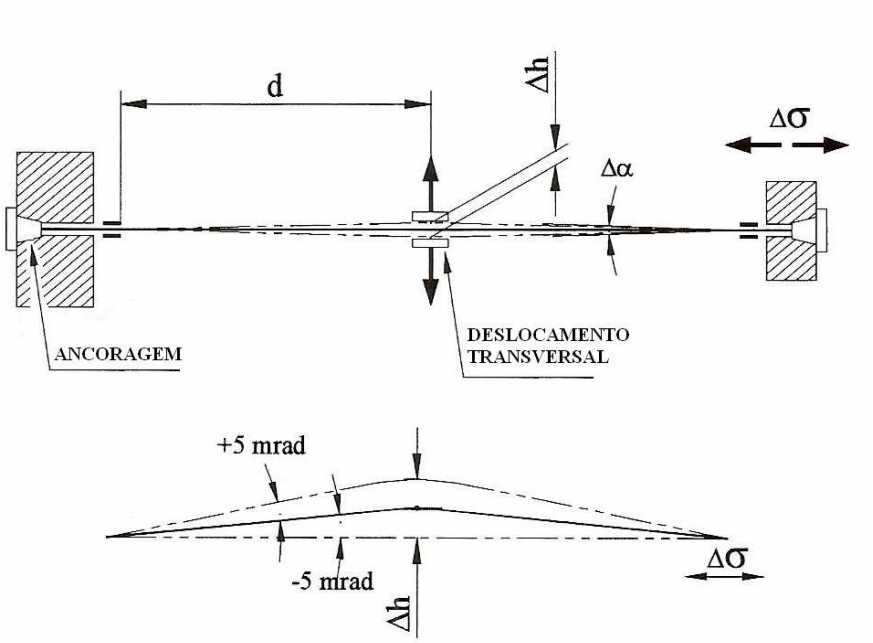


Figura 7.16 Aplicação de um deslocamento transversal a meio do tirante (adaptado de Setra (2002))

Um segundo ensaio pode ser realizado, montando o tirante com "sela" (Figura 7.17) e introduzindo deslocamentos verticais na "sela", de que resulta a aplicação simultânea de tensões axiais e desvios angulares, Figura 7.18.



Figura 7.17 Ensaio em laboratório com introdução da sela ("saddle") no esquema estrutural.

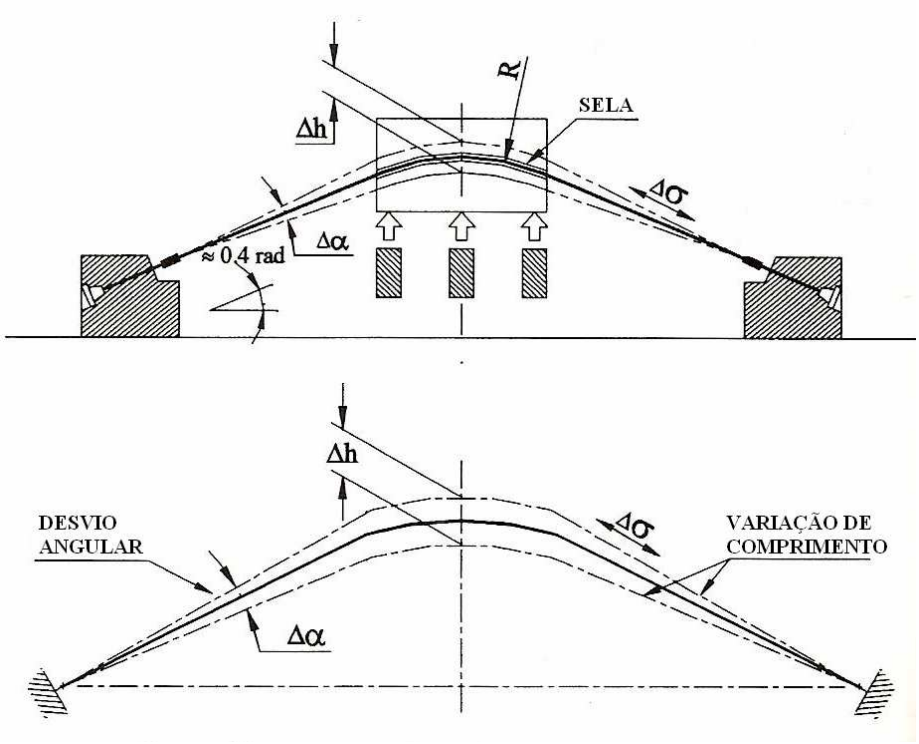


Figura 7.18 Introdução de deslocamentos verticais na sela ("Saddle") (adaptado de Setra (2002))

Qualquer ensaio deve ser acompanhado de um sistema de monitorização capaz de detectar o surgimento de fendas ou fissuras de um cordão, por exemplo através da introdução de um sensor acústico na ancoragem (Figura 7.19). É também necessário, um sistema que meça o decaimento de tensão devido a roturas, registando o número de ciclos aquando da rotura. Um outro sistema deverá monitorizar a deformação longitudinal do provete e das suas ancoragens ao longo do tempo.



Figura 7.19 Sensor acústico na ancoragem

Considera-se que o ensaio à fadiga é positivo quando: o tirante (provete) ensaiado atinge os 2 milhões de ciclos sob carga axial, sem se detectarem fissuras em mais de 2% dos arames que constituem o tirante; o comprimento efectivo do tirante estabilizar depois de 100.000 ciclos, não variando mais de 5mm até aos 2 milhões de ciclos.

7.4 ANÁLISE DA FADIGA EM TIRANTES USANDO AS CURVAS S-N

As curvas S-N de um tirante, sujeito a tensões normais, dependem do sistema estrutural do tirante e do tipo de ligação ao tabuleiro, e têm uma forma trilinear (ver Figura 7.20 (Setra, 2002)).

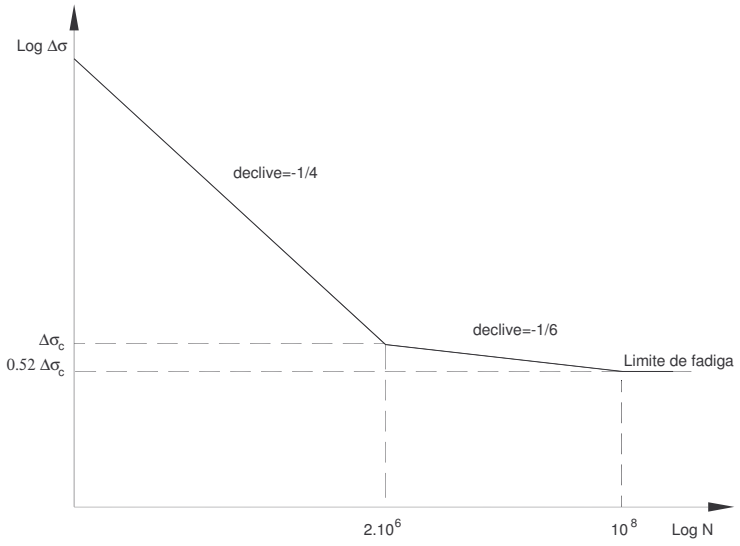


Figura 7.20 Curva típica de resistência à fadiga de um tirante (Setra, 2002)

As curvas são normalmente caracterizadas por uma resistência à fadiga aos 2 milhões de ciclos, para uma amplitude de tensão de $\Delta\sigma_C$ e uma tensão limite de fadiga $0.52\Delta\sigma_C$, associada normalmente aos 100 milhões de ciclos de tensão.

A curva de resistência à fadiga no segundo troço é traduzida pela expressão:

$$\Delta\sigma_R^m \cdot N = \Delta\sigma_C^m \cdot 2\times10^6 \tag{7.14}$$

como primeira aproximação, a inclinação da segunda parte da curva pode ser estimada com um valor de m=6 (declive = 1/6) para $2.10^6 \le N \le 10^8$. A tensão limite última $\Delta\sigma_R$ é dada por:

$$\Delta\sigma_R = \left(\frac{2\times10^6}{10^8}\right)^{\frac{1}{6}} \Delta\sigma_C \tag{7.15}$$

ou seja,

$$\Delta\sigma_R = 0.52 \cdot \Delta\sigma_C \tag{7.16}$$

Quando se prevê problemas de fadiga, devido a deslocamentos relativamente pequenos, e possível corrosão em tirantes, pode-se adoptar uma curva S-N com uma inclinação menor do segundo troço. Esta pode ser estimada a partir de uma série de ensaios à fadiga para além de 2 milhões de ciclos.

7.4.1 Verificação Simplificada da Resistência à Fadiga

A tensão limite de resistência à fadiga deve ser afectada de um coeficiente parcial de segurança γ_{Mf}. Segundo Setra (2002), deve-se afectar a amplitude de tensão $\Delta\sigma_C$ (para 2 milhões de ciclos) de um factor γ_{Mf} igual a 1.5. Este coeficiente pretende ter em conta os desfasamentos e incertezas dos ensaios à fadiga; a ausência de tratamento estatístico na qualificação dos ensaios, visto estes serem de elevado custo, não podendo ser repetidos vezes suficientes para uma fiável análise estatística; a natureza parcial das verificações à fadiga, que simplesmente adoptam um valor convencional para o dano causado pela variação angular.

Considere-se como exemplo, o caso de os tirantes de uma ponte rodoviária serem projectados para 100 milhões de passagens de um modelo de carga LM3 (EC3, prEN1993-1-9). Nessa situação, seria necessária a verificação

$$\Delta\sigma(LM3) \leq \frac{0.52 \cdot \Delta\sigma_C}{\gamma_{Mf}} \tag{7.17}$$

em que $\Delta\sigma$ corresponderia à variação máxima (amplitude) de tensões na ponte para um modelo de carga LM3, para não ocorrerem problemas por fadiga

7.4.2 Estudo de um Tirante

Recorreu-se a um exemplo correspondente ao estudo de um cabo da ponte do Guadiana, de forma a verificar qual o incremento de tensão ($\Delta\sigma$) associado a uma amplitude de oscilação máxima de 1,0m que poderia levar à rotura dos cordões de um cabo por fadiga. Considerou-se que esta oscilação máxima ocorre durante 1 hora em cada semana. A modelação foi executada em elementos viga, usando o programa comercial SOLVIA99.0.

Apresenta-se o modelo do cabo estudado na Figura 7.21. Trata-se de uma associação de 36 elementos de viga, a que está aplicada uma deformação inicial tal que o esforço axial instalado no tirante coincida com o valor de projecto para a situação de carregamento por acções permanentes. Ambas as extremidades do cabo estão fixas, e a solicitação corresponde a uma carga uniformemente distribuída com variação sinusoidal

$$p(t) = A.\sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) \tag{7.18}$$

sendo A a amplitude da força aplicada.

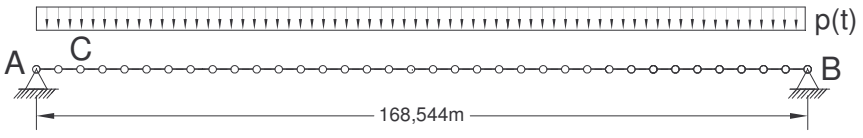


Figura 7.21 Modelação do cabo

Considerou-se que o cabo tem um diâmetro aproximado de 200mm, a que corresponde a inércia I_0 dada por

$$I_0 = \frac{\pi \cdot D^4}{64} \tag{7.19}$$

Tratando-se de um cabo formado por cordões individuais não confinados, facilmente se compreende ser a sua inércia claramente inferior à inércia I_0 da secção cheia. Valores indicados na literatura situam-se no intervalo 10% I_0 a 30% I_0, pelo que serão experimentados os casos de $0.10I_0$, $0.15I_0$, $0.20I_0$ e $0.30I_0$.

A análise realizada consistiu na avaliação do incremento de tensão ($\Delta\sigma$) associado à variação máxima de esforço axial (ΔF) que leva à amplitude de oscilação máxima de 1,0m (amplitude de oscilação observada).

$$\Delta\sigma = \frac{\Delta F}{A} \tag{7.20}$$

Recorreu-se à curva de Wohler (Figura 7.22) para a estimativa do número de ciclos com $\Delta\sigma$ que levam à rotura por fadiga. Assim, sabendo a frequência natural do cabo ($f = 0{,}79Hz$) determinou-se que o tempo de 1 ciclo ($f = \frac{1}{T}$) é de 1,265seg. Considerando que $\Delta\sigma$ acontece 1 hora por semana, tem-se 2846 ciclos/semana, ou seja 147992 ciclos/ano. Logo o tempo de vida útil do cabo (em anos) pode estimar-se por

$$\frac{n(ciclos\ retirados\ da\ curva\ de\ Wohler)}{147992\ ciclos/ano} \tag{7.21}$$

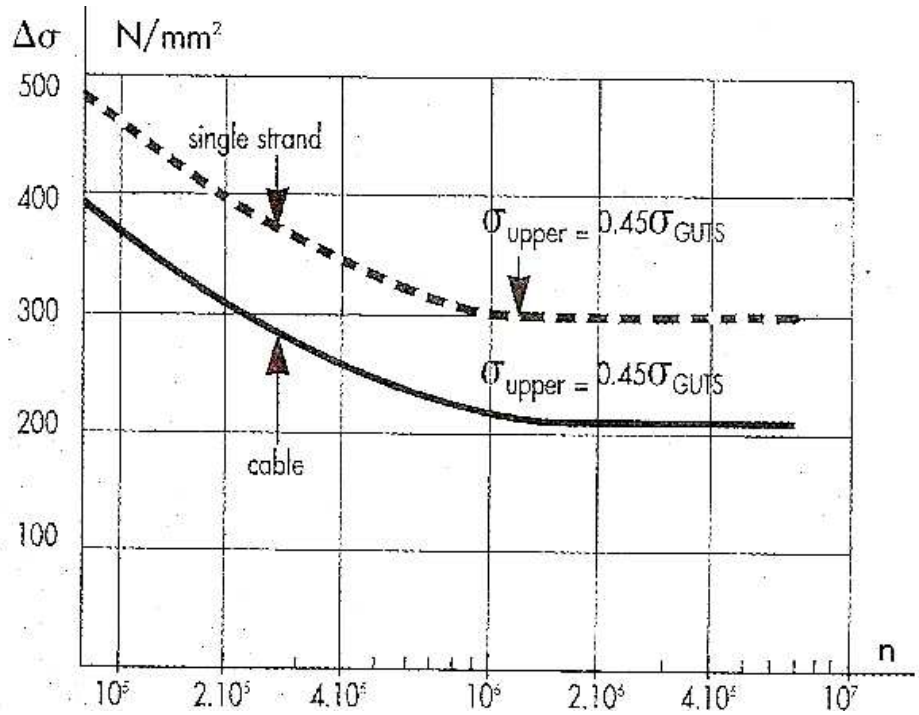


Figura 7.22 Curva de Wohler para 1 cordão de 15mm de diâmetro (ancoragens Freyssinet)

Analisou-se de seguida o facto de existirem guias de protecção na ancoragem inferior, em aproximadamente 3m de comprimento do cabo. Pela oscilação do cabo, e devido às amplitudes pela oscilação imprimidas por $p(t)$, o cabo pode encastrar nas guias (Figura 7.23) modificando as condições fronteira (Figura 7.24).

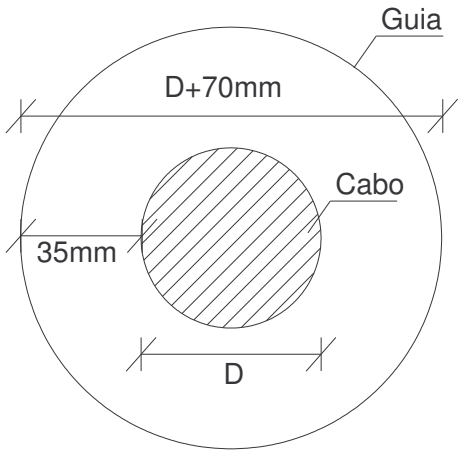


Figura 7.23 Secção transversal do cabo e guia de protecção

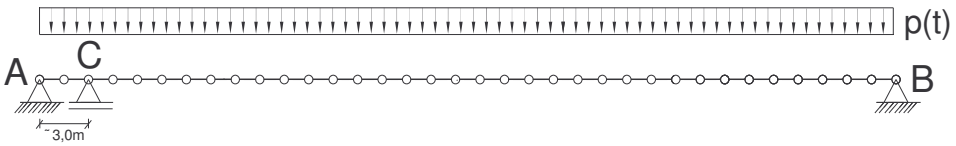


Figura 7.24 Modelação do cabo. Nó C do cabo encastra na guia de protecção.

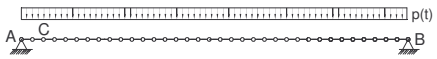
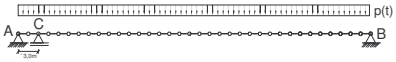
Considerou-se que para amplitudes do nó C superiores a 35mm há contacto com a guia de protecção, sendo o incremento de tensão ($\Delta\sigma$) relacionado com a variação do esforço de flexão (ΔM) no nó C.

$$\Delta\sigma = \frac{\Delta M}{W} \tag{7.22}$$

Procurou-se estimar o tempo de vida útil do tirante nestas condições recorrendo à curva de Wohler (Figura 7.22) e utilizando a equação (7.21).

Resumem-se na Tabela 7.2 os principais resultados

Tabela 7.2 Sumário dos incrementos de tensão

					
I_0	$\Delta\sigma$ **(MPa)**	**Vida útil (anos)**	δ_C **(mm)**	$\Delta\sigma$ **(MPa)**	**Vida útil (anos)**
10%	18,04	Infinito	55,60	206,9	Infinito
15%	18,03	Infinito	52,97	212,1	9,8
20%	17,89	Infinito	50,50	214,0	7,4
30%	17,73	Infinito	46,76	215,7	6,7

Verifica-se que no caso de ter fixas apenas as duas extremidades, o incremento de tensão axial associado a uma oscilação de 1m é suficientemente baixo para que o

cabo nunca atinja a fadiga, tendo um tempo infinito de vida útil. No entanto, e porque possui um deslocamento no nó C maior do que 35mm (espaço entre o cabo e as guias) analisou-se no segundo caso, o incremento de tensão decorrente da flexão na situação de contacto com a guia em C. Verificou-se que, quanto maior a inércia do cabo, maior o incremento de tensão e consequentemente menor o número de ciclos que podem levar à fadiga. O limite de fadiga está estabelecido para $\Delta\sigma$ igual a 210 MPa.

O contacto entre o cabo e a respectiva guia de protecção pode provocar danos como os demonstrados pelas Figura 7.25 e Figura 7.26.



Figura 7.25 Guia de protecção danificada



Figura 7.26 Danos provocados pelo contacto do cabo com a guia de protecção

CAPÍTULO 8

CONDIÇÕES PARA O PROJECTO DE TIRANTES

8.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentam-se diferentes soluções para o controlo de vibrações de tirantes em pontes.

Os tirantes possuem um amortecimento intrínseco bastante baixo. Assim, um dos modos convencionais de limitação ou anulação das amplitudes de vibração envolve aumentar o seu amortecimento, através da adição de dispositivos especiais, os amortecedores.

A textura da superfície do cabo pode ser estudada de forma a evitar fenómenos de excitação por acção combinada do vento e da chuva, atendendo a que a formação de regatos de água é condição determinante para a ocorrência de instabilidades.

Um outro método de prevenir oscilações nos tirantes, consiste na associação de tirantes em grupos, fornecendo a cada tirante um amortecimento adicional.

Qualquer solução que visa a diminuição de amplitudes elevadas de oscilação e o número de oscilações, tem implicação directa na redução do fenómeno da fadiga, sendo esta uma das principais causas de corrosão e rotura dos cordões em tirantes.

8.2 AMORTECEDORES

Existem vários tipos de amortecedores, os externos e os internos. Os amortecedores externos, são normalmente de funcionamento hidráulico, sendo colocados perto das ancoragens, o mais possível na perpendicular ao tirante, de forma a exercer uma força de amortecimento transversal ao cabo (Figura 8.1). É mais usual a sua aplicação na ancoragem inferior (Figura 8.2 a Figura 8.5).

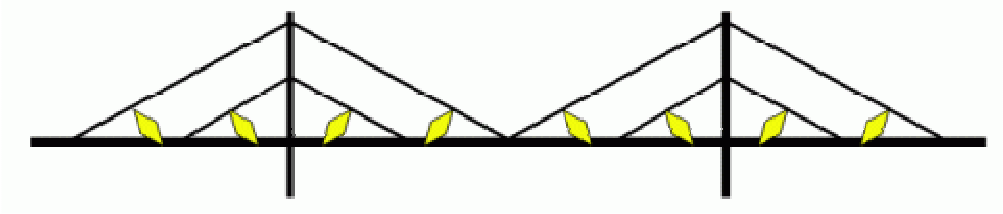


Figura 8.1 Disposição dos amortecedores externos numa ponte atirantada



Figura 8.2 Amortecedores externos da ponte de Tsurumi Tsubasa (Yamada,1997)



Figura 8.3 Amortecedores externos na Ponte de Brotonne

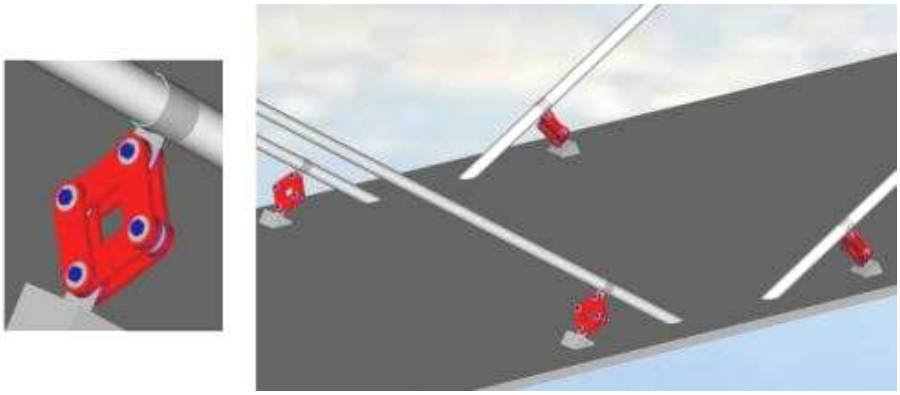


Figura 8.4 Amortecedores externos da DAMPTECH, Dinamarca



Figura 8.5 Amortecedor da Ponte Iroise, sobre o rio Elorn

A eficácia dos amortecedores externos depende da sua localização. É possível visualizar na Figura 8.6 um caso da colocação de amortecedores muito perto das ancoragens. Por outro lado tem a vantagem de não serem muito visíveis, não alterando a estética da ponte.



Figura 8.6 Amortecedores externos muito perto das ancoragens



Figura 8.7 Amortecedores externos (ponte da Normandia)

Os amortecedores internos são usualmente em forma de anel e são colocados entre o tirante e a guia de protecção em aço rigidamente ligada à estrutura. Geralmente são aplicados à ancoragem mais baixa (Figura 8.8).

O funcionamento dos amortecedores internos baseia-se na aplicação de um material dissipador, tipo neoprene, capaz de dissipar por atrito as vibrações.



Figura 8.8 Amortecedor interno instalado na Ponte Vasco da Gama

A importância dos efeitos da variação angular sobre a tensão de fadiga em tirantes, e a dificuldade em prever e quantificar o fenómeno envolvido, podem levar a apontar possíveis formas para eliminar a maior parte dos efeitos que levam à rotura por fadiga. Assim, poderá revelar-se benéfica a instalação de sistemas de guias perto das ancoragens reduzindo a variação angular dos cabos junto às extremidades. Também o uso de amortecedores externos ou internos pode reduzir a amplitude dos ciclos de tensão.

8.3 TEXTURA DAS BAINHAS DOS TIRANTES

A textura da bainha do tirante pode ser estudada de forma a evitar oscilações elevadas pela acção combinada do vento e da chuva, referida no capítulo 2. Nesse caso, o estudo em túnel de vento permite escolher secções aerodinâmicas que impeçam a formação de regatos de água à volta do tirante, através da modificação da configuração da rugosidade das bainhas (Figura 8.9)

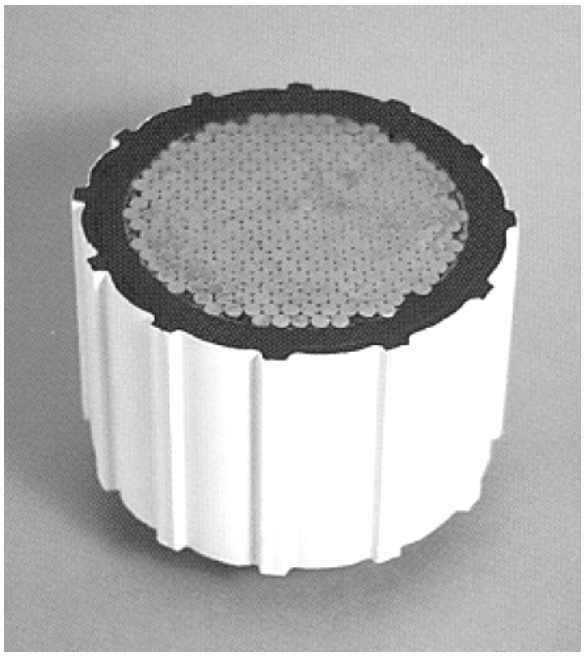


Figura 8.9 Protuberâncias longitudinais na bainha do tirante (Ponte Higashi-Kobe)

As rugosidades implementadas nas bainhas podem, não só impedir a formação de regatos de água interrompendo o seu escoamento em torno do tirante, por exemplo através de cavidades (Figura 8.10 e Figura 8.11), como ainda reduzir o coeficiente de arrastamento F_D retratado no Capítulo 2.

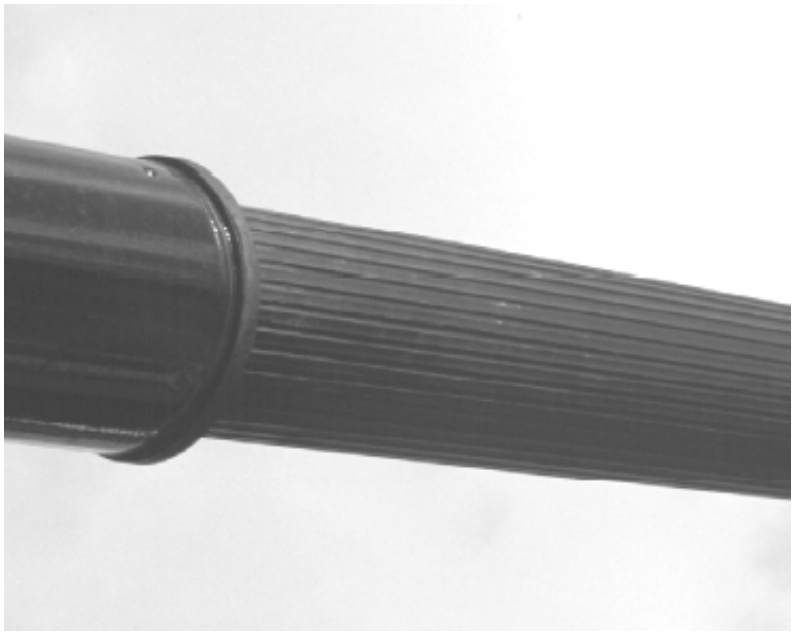


Figura 8.10 Cavidades longitudinais na bainha (Ponte Yuge)

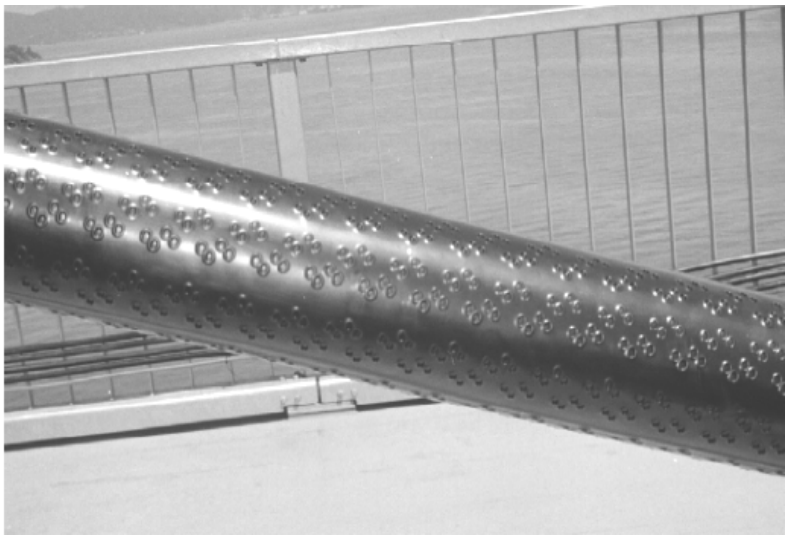


Figura 8.11 Séries de pequenas cavidades na bainha (Ponte de Tatara)

Na Ponte da Normandia (Figura 8.12), foi aplicada à bainha na sua superfície uma nervura helicoidal, medida que foi posteriormente também implementada na Ponte Vasco da Gama (Figura 8.13) e, mais recentemente, na Ponte de Millau.

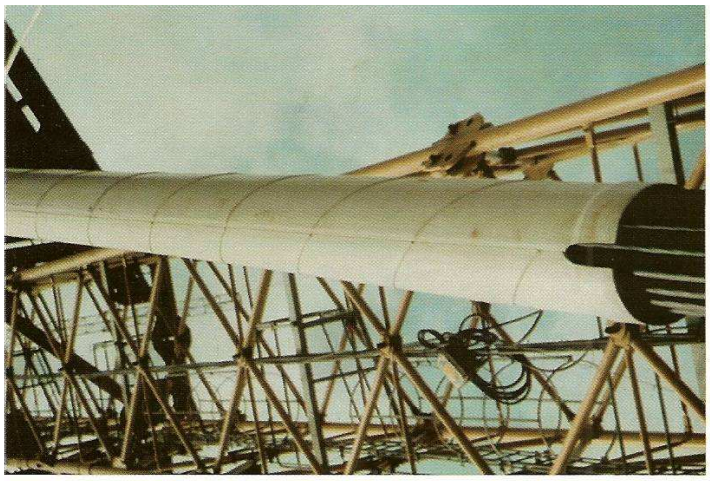


Figura 8.12 Nervura helicoidal na superfície da bainha (Ponte da Normandia)

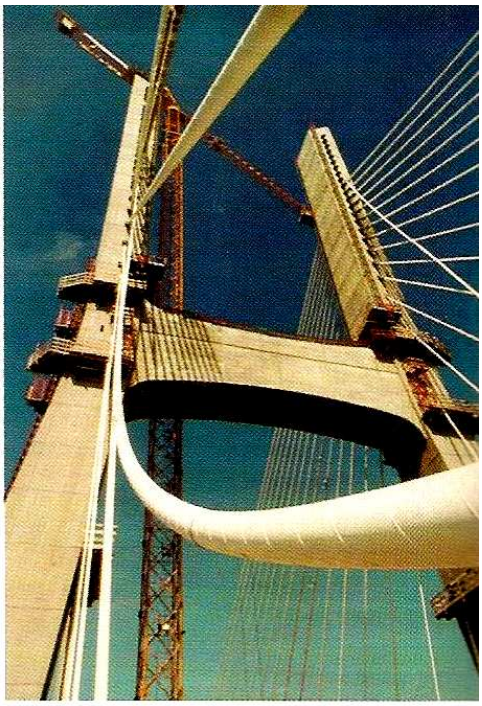


Figura 8.13 Nervura helicoidal na superfície da bainha (Ponte Vasco da Gama)

8.4 OUTROS DISPOSITIVOS

A instalação de dispositivos que permitem ligar vários cabos entre si (Figura 8.14), tem sido realizada em algumas pontes de grande vão, para prevenir a vibração excessiva dos tirantes. Dois tipos de soluções podem surgir: o atirantamento secundário do "pano" de tirantes e a associação de grupos de tirantes. Nas duas situações estes dispositivos, revelam-se vantajosos em pontes cujas frequências do tabuleiro são próximas às dos tirantes, modificando o período de vibração destes. A interligação aumenta a frequência do conjunto de tirantes, providenciando um amortecimento adicional.



Figura 8.14 Tirantes interligados (Ponte da Normandia)

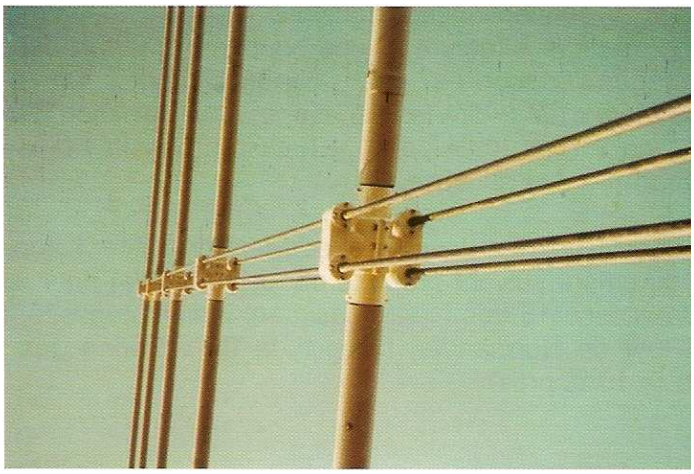


Figura 8.15 Cabos de ligação (Ponte da Normandia)



Figura 8.16 Associação de tirantes (Ponte de Erasmus)

Os dispositivos de ligação podem ser rígidos ou funcionar com amortecedores (Figura 8.17 e Figura 8.18)

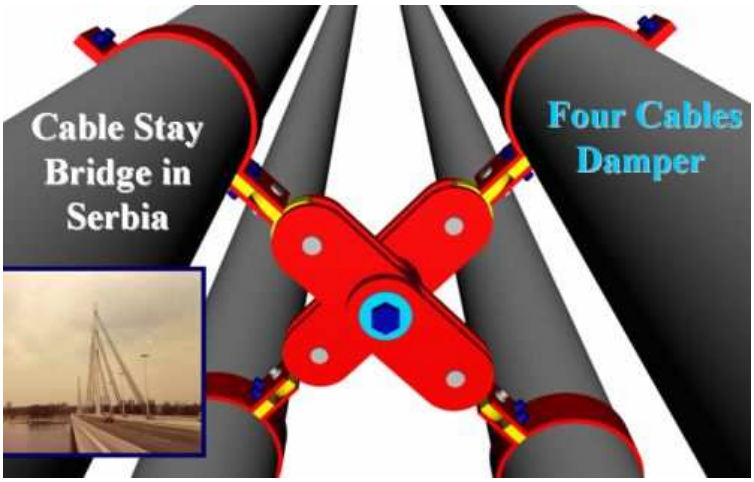


Figura 8.17 Amortecedor de ligação de 4 tirantes (Servia)

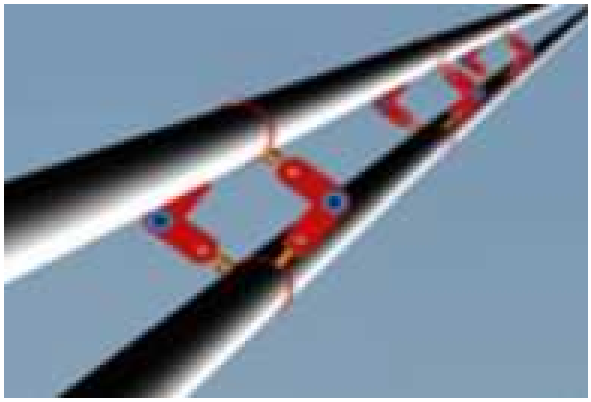


Figura 8.18 Amortecedores de ligação entre tirantes

Este tipo de solução tem sido utilizado na resolução de problemas de instabilidade em tirantes. Note-se que esta forma de actuar pode trazer consequências que não foram previstas no projecto. A introdução destes dispositivos altera a geometria dos tirantes, podendo ter implicações ao nível da estrutura. Assim, deve ter-se em conta ao nível do projecto a interligação entre os tirantes, e todas as características mecânicas que envolvem e se modificam com a introdução destes dispositivos.

Na tentativa de diminuir as vibrações em cabos constituintes de subsistemas, podem ser aplicados dispositivos acoplados aos cabos cujo funcionamento visa implementar amortecimento, amortecedor do tipo "Stockbridge" (Figura 8.19 e Figura 8.20). O Estádio Municipal do S.C.Braga, cuja cobertura é suportada por uma série de cabos pré-esforçados, apoiados no topo das duas bancadas laterais (Figura 8.21), constitui um caso recente desta aplicação.



Figura 8.19 Amortecedores tipo "Stockbridge"

O amortecedor do tipo "Stockbridge" (Leblond *et al*, 1999) consiste em duas massas suspensas nas extremidades de um cabo de aço (cabo mensageiro), este por sua vez está ligado ao cabo principal através de uma abraçadeira metálica. O cabo mensageiro possui baixa rigidez à flexão, e quando solicitado a responder numa das suas frequências naturais, ocorre a separação dos seus fios constituintes, dissipando-se a energia de vibração através da fricção entre os fios.

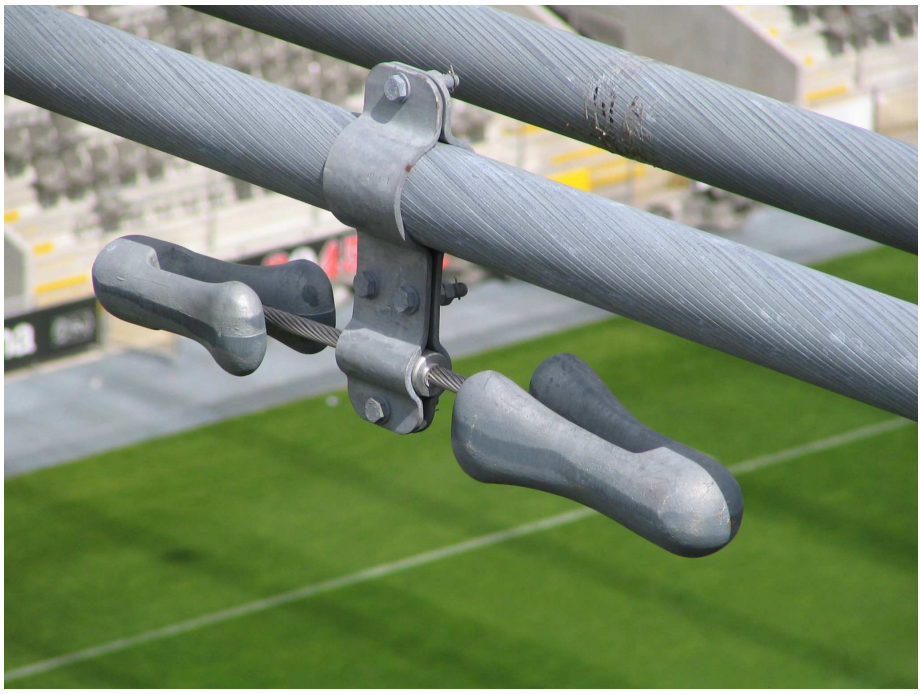


Figura 8.20 Amortecedores tipo "Stockbridge"



Figura 8.21 Vista Geral da cobertura do Estádio Municipal do S.C.Braga

CAPÍTULO 9

CONCLUSÕES E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

9.1 CONCLUSÕES

A elaboração da presente dissertação teve como principal objectivo a aquisição de conhecimentos na área da dinâmica de tirantes de pontes, identificando as principais características dos fenómenos de vibração associados aos tirantes, apontando soluções para atenuar e/ou eliminar estes fenómenos. Foi efectuado o estudo mais pormenorizado do fenómeno de vibração denominado por excitação paramétrica, compreendendo-se as suas características e desenvolvendo-se metodologias de identificação da sua potencial ocorrência e caracterização dos níveis de oscilação desenvolvidos.

Nesta secção sistematiza-se a organização da dissertação e apresentam-se os principais resultados obtidos.

O capítulo 2 apresenta alguns aspectos gerais relativos às pontes atirantadas e às características dos tirantes de pontes.

No capítulo 3 procedeu-se ao estudo do comportamento estrutural de vários tirantes sob acção do peso próprio, útil no processo de instalação de tirantes. O estudo teve como base uma modelação analítica baseada na equação da catenária elástica, da parábola elástica, e ainda uma modelação numérica através de elementos finitos. Efectuou-se a análise comparativa usando as três aproximações mencionadas, e analisaram-se os resultados.

Concluiu-se que a aproximação habitual pela parábola elástica introduz erros elevados na deformada no caso dos tirantes terem grande inclinação tendo-se registado um erro máximo de 60% para um tirante com inclinação de 87º. A modelação numérica foi realizada discretizando o tirante em elementos de treliça, tendo-se verificado que erros inferiores a 27% nos parâmetros do cabo mais importantes são obtidos utilizando 35 elementos finitos. No entanto, verificaram-se diferenças elevadas na aproximação à flecha dos cabos com maiores inclinações.

No capítulo 4 apresentou-se a formulação teórica para a análise da vibração livre de um tirante com a relação flecha/vão não superior a 0.12, baseada na Teoria de Irvine verificou-se que os modos simétricos no plano dependem consideravelmente de um parâmetro λ^2 (parâmetro de Irvine) que caracteriza as propriedades geométricas e de deformabilidade do tirante, dando a indicação do grau relativo de contribuição da extensão axial do material e da configuração geométrica na deformação do tirante. Calculou-se o parâmetro de Irvine para diversos cabos, o que permitiu determinar as frequências dos modos simétricos. Procurou-se comparar estas frequências

determinadas pela Teoria de Irvine com a Lei Teórica das Cordas Vibrantes, verificando-se que, desde que não seja utilizada a frequência do primeiro modo de vibração simétrico, a aproximação da Lei das Cordas vibrantes permite de forma simples a determinação da força instalada nos tirantes, baseada na medição directa das frequências dos modos de vibração no plano.

Através do estudo do fenómeno de vibração por excitação externa, avaliou-se o grau de não-linearidade da resposta de um cabo à oscilação da ancoragem ortogonal ao seu eixo, aplicando amplitudes crescentes de oscilação num dos apoios, para 3 valores diferentes de amortecimento. Concluiu-se que para níveis muito baixos de oscilação da ancoragem o cabo exibe um significativo grau de não-linearidade, que se traduz numa variação da própria frequência durante a oscilação e se reflecte no aparecimento de diversos picos em torno das frequências naturais, nos espectros de acelerações calculadas.

No capítulo 5 foi revista a equação de Mathieu, que caracteriza simplificadamente o fenómeno de excitação paramétrica, e a partir da qual são definidas curvas de transição que definem regiões de amplitude/frequência de excitação longitudinal em que o cabo é instável. Foram ainda apresentadas expressões analíticas que caracterizam a amplitude da oscilação paramétrica e do incremento de força nos cabos. Verificou-se que a introdução de amortecimento no sistema origina uma redução das zonas instáveis. Em termos práticos, isso traduz-se na ocorrência de excitação paramétrica para amplitudes de oscilação mais elevadas. Verifica-se igualmente que, comparado com as ressonâncias na frequência igual à do cabo, ou igual a metade da frequência do cabo, a excitação na frequência dupla do cabo origina instabilidade para amplitude de oscilação longitudinal mais elevadas. Todavia, as amplitudes da oscilação transversal gerada nesta situação são claramente superiores às amplitudes de oscilação induzidas nas outras ressonâncias.

No capítulo 6 efectuou-se a descrição da construção de um modelo físico em laboratório. O modelo foi ensaiado à excitação paramétrica, registando-se os resultados e comparando-os com os resultados obtidos com uma modelação numérica através de um programa comercial de elementos finitos.

Pelos resultados obtidos, por hipótese, para uma gama de tirantes semelhantes ao do protótipo ensaiado, observam-se amplitudes de resposta em regime estacionário, na direcção transversal ao cabo, de cerca de 10 vezes superior à amplitude de oscilação que

origina a ocorrência do fenómeno da excitação paramétrica, sendo que esta proporção diminui para crescentes amplitudes de excitação.

No capítulo 7 apresentam-se conceito gerais sobre a fadiga, fazendo-se a aplicação à estimativa do tempo de vida útil de um tirante à fadiga, recorrendo à curva de Wohler. Estudaram-se dois casos. O primeiro caso consiste na avaliação da fadiga para oscilações de elevada amplitude, em virtude do incremento de esforço axial no cabo. No segundo caso avaliou-se a importância do incremento de tensões decorrente da flexão do cabo por contacto com a guia de protecção.

Concluiu-se que, no primeiro caso, o incremento de tensão gerado por efeito da vibração com elevada amplitude é muito baixo, tendo o tirante um tempo infinito de vida útil. No segundo caso, verificou-se que, quanto maior a inércia do cabo, maior o incremento de tensão e consequentemente menor o número de ciclos que podem levar à fadiga. Assim, exige-se algum cuidado na colocação do tirante e inserção na guia de protecção.

9.2 DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

Sendo o comportamento dinâmico dos tirantes associado a fenómenos de elevado comportamento não-linear, dependentes do comportamento de outras subestruturas, podem apresentar-se algumas sugestões para investigação futura, de forma a contribuir para um maior conhecimento desta área:

- Estudar o comportamento dinâmico de um tirante introduzindo uma oscilação com movimento oblíquo à linha dos apoios, procurando uma melhor aproximação à realidade;
- A modelação do amortecimento do cabo constitui um dos pontos fundamentais para a melhor compreensão da resposta dos tirantes aos fenómenos a que estão sujeitos. Por isso, torna-se preponderante a melhor estimativa do amortecimento dos cabos;
- O estudo de vibração de tirantes nesta dissertação foi efectuado sem a consideração da existência de guias de protecção, excepção feita ao capítulo 7. Seria um estudo mais realista a consideração destas;
- Nesta dissertação foi abordada de forma introdutória o problema de fadiga nos tirantes. Tendo em conta a vastidão deste tema, sugere-se um estudo mais

elaborado deste fenómeno procurando sistematizar o tempo de vida útil de tirantes em função do incremento de tensão;

- Dimensionar dispositivos de amortecimento das vibrações, apresentando soluções estéticas e eficazes;
- O modelo experimental apenas incidiu sobre o estudo da excitação paramétrica, poderia mostrar-se interessante validar os resultados numéricos e analíticos do estudo à excitação externa, através da modelação experimental.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

A

Abdel-Ghaffar, A. M. e Magdi, A., 1991. "Importance of Cable Vibration in Dynamic of Cable-Stayed Bridges", Journal of Engineering Mechanics, Vol. 117, No.11, November.

Achkire, Y., 1997. "Active Tendon Control of Cable-Stayed Bridges", 6 May, Belgium.

C

Caetano, A., Cunha, A., Carvalho, A., Lage, A., Correia, M. e Magalhães F. "Desenvolvimento de um Sistema de Monitorização para uma Ponte Atirantada", FEUP, Porto.

Caetano, E. e Cunha, A. "Identification of Parametric Excitation at the International Guadiana Bridge", Dept. Civil Engineering, Faculty of Engineering, University of Porto (FEUP), Porto.

Caetano, E., 2000. "Dynamics of Cable-Stayed Bridges", Tese de Doutoramento, FEUP, Porto.

Câncio Martins, J.L., 1993. "Ponte Internacional sobre o Guadiana em Castro Marim". Fernandes & Santos, Pontes Atirantadas do Guadiana e do Arade – Sessão integrada no 4º Encontro Nacional sobre Estruturas Pré-Esforçadas: 3-15. LNEC.

Chopra, A., 1995. "Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering", University of California at Berkeley, Prentice-Hall.

Clough, R. & Penzien, J. 1986. "Dynamics of structures", McGraw-Hill International Editions, 7th Edition. ISBN 0-07-Y85098-4.

D

Delgado, R., Cunha, A., Caetano, E. e Calçada, R., 1998. "Ensaios Dinâmicos da Ponte Vasco da Gama", Instituto da Construção, FEUP, Porto.

Den Hartog, J. P., 1932. "Transmission Line Vibration Due to Sleet", AIEE Trans.(51), Pág. 1074-1076.

Dyrbye, C. e Hansen, S., 1999. "Wind Loads on Structures", John Wiley & Sons.

F

Ferreira, M., 2004. "Efeito da Variabilidade Espacial da Acção Sismica em Pontes Atirantadas", Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Estruturas, Universidade de Coimbra, Coimbra.

Freyssinet. "Stay Cables", Catálogo, Belgium.

Frýba, L., 1996. "Dynamics of Railway Bridges", Thomas Telford, Prague.

Fujino, Y., 2002. "Vibration, Control and Monitoring of Long-Span Bridges – Recent Research, Developments and Practice in Japan", Department of Civil Engineering, University of Tokyo, Tokyo 113-8656, Japan, Elsevier Science Publishers.

Fujino, Y., Warnitchai, P. e Pacheco, B.M., 1993. "An Experimental and Analytical Study of Autoparametric Resonance in a 3DOF Model of Cable-Stayed-Beam", Nonlinear Dynamics, No. 4: 111-138, Kluwer Academic Publishers.

G

Griffin, O., Skop, R. e Ramberg, S., 1995. "The Resonant Vortex-Excited Vibrations of Structures and Cable Systems, Offshore Technology Conference", Paper OTC-2319, Houston.

I

Irvine, H. M. & Caughey, T. K., 1974. " The Linear Theory of Free Vibations of a Suspended Cable", Proceedings of the Royal Society, London, Series A, Vol. 341:299-315.

Irvine, H. M., 1977. “Free Vibration of Inclined Cables”, Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol.104, No. ST2: 343-347, ASCE.

Irvine, H. M., 1981. “Cables Structures”. The MIT Press.

Irwin P. A., Alca, N. e Telang, N., 1999. “Wind Induced Stay Cable Vibrations – a Case Study”, Third Internations Symposium on Cable Dynamics, 16-18 August, Ttondheim, Norway.

K

Kovàs, I., 1982. “Zur Frage der Seilschwingungen und der Seildampfung. Die Bautechnik”, pág. 325-332, October.

L

Leblond, A. e Hardy, C., 1999. “On the Estimation of a 2x2 Complex Stiffness Matrix of Symmetric Stockbridge-Type Dampers”, Third International Symposium on Cable Dynamics, 16-18 August, Trondheim, Norway.

Lilien, J.L., Pinto da Costa, A. e Martins, J. “Parametric Excitation of Cables of Cable-Stayed Bridges”, Journal of Sound and Vibration.

M

Moura Branco, C., Augusto Fernandes, A. e Tavares de Castro, P. M., 1999. ”Fadiga de Estruturas Soldadas ”, Fundação Calouste Gulbenkian.

N

Nayfeh, A. e Mook, D., 1979. “Nonlinear Oscillations”, John Wiley & Sons.

P

Pinto da Costa, A., 1993. “Excitação Paramétrica de Tirantes de Pontes”, Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Estruturas, Universidade Técnica de Lisboa, IST, Lisboa, Abril.

Podolny W. “Cable-Suspended Bridges”, Section 15, U.S. Department of Transportation, Washington, D.C.

R

Ribeiro, D., 2004. “Comportamento Dinâmico de Pontes sob Acção de Tráfego Ferroviário a Alta Velocidade”, Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Estruturas, FEUP, Porto.

S

Sabnis, G., Harris, H., White, R. e Mirza, M., 1983. “Structural Modeling and Experimental Techniques”, Prentice-Hall, Inc.. ISBN 013853960X.

Setra, 2002. “Cable Stays - Recommendations of French interministerial commission on Prestressing”, Juin, France.

Siegert, D. e Brevet, P., 2000. “Fatigue of Stay Cables inside end fittings High Frequencies of Wind Induced Vibrations ”, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, France.

Simiu, E. e Scanlan, R., 1996. “Wind Effects on Structures: Fundamentals and Applications to Design”, Third Edition, John Wiley & Sons, Inc.

SOLVIA 99.0 1999. “Finite Element System”, SOLVIA Engineering AB. Sweden.

T

Tabatabai, H. e Mehrabi, A. “Vibration Supression Measures for Stay Cables”, Construction Technology Laboratoires, Inc., Ilinois.

Tanaka, H., 2003. “Aerodynamics of Cables”, Fifth Internacional Symposium on Cable Dynamics, 15-18 September, Santa Margherita, Ligure, Italy.

Tembe, A., 2001. “Fadiga em Pontes Mistas Aço-Betão”, Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Estruturas, Universidade Técnica de Lisboa, IST, Lisboa.

V

Virlogeux, M., 1998a. “Design of Cables for Cable-Stayed Bridges”, XIII Congress FIP98, Amsterdam.

Virlogeux, M., 1998b. “Cable Vibrations in Cable-Stayed Bridges”, Larsen & Esdahl (eds), Bridge Aerodynamics: 213-233, Balkema, Rotterdam.

Virlogeux, M., 2005. “State-of-art in cable vibrations of cable-stayed bridges”, Bidge Structures, Vol.1, No. 3, pp.133-168. Taylor & Francis.

VSL Stay Cables for Cables-Stayed Bridges, 1984. VSL International LTD. Berne/Switzerland.

Y

Yamada, H., 1998. “Control of Wind-Induced Cable Vibrations from a Viewpoint of the Wind Resistant Design of Cable-Stayed Bridges”, Department of Civil Engineering, Yokohama National University, Japan.

Yamaguchi, H., 1990. “Analytical Study on Grwth Mechanism of Rain Vibration of Cables”, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, Vol. 33, pag. 73-80, Elsevier Science Publishers, Amsterdam.

APÊNDICE A

MÉTODO DA SOBREPOSIÇÃO MODAL

O método da sobreposição modal aparece como alternativa aos métodos de integração directa do sistema de equações diferenciais de equilíbrio dinâmico. Consiste na transformação das coordenadas iniciais em coordenadas modais, permitindo transformar o sistema de n equações diferenciais do movimento num conjunto de n equações diferenciais independentes. Assim são obtidas as respostas correspondentes a cada um dos modos de vibração da estrutura independentemente dos restantes, podendo ser posteriormente combinadas para obter a resposta total.

Os deslocamentos dos nós da estrutura no sistema global são então calculados com base na transformação das coordenadas

$$\{q(t)\} = [\phi] \cdot \{y(t)\} \tag{A.1}$$

em que $\{y(t)\}$ é o vector das componentes do deslocamento em coordenadas modais e $[\phi]$ é a matriz dos vectores próprios obtidos pela resolução da equação,

$$\left([K] - \omega^2 \cdot [M]\right) \cdot \{\phi\} = 0 \tag{A.2}$$

com $[\phi] = [\phi_1, \phi_2, ..., \phi_i, ..., \phi_n]$, n sendo o número de modos de vibração usados.

A partir da equação do equilíbrio dinâmico

$$[M] \cdot \{\ddot{q}(t)\} + [C] \cdot \{\dot{q}(t)\} + [K] \cdot \{q(t)\} = \{F(t)\} \tag{A.3}$$

fazendo a mudança de base (1) e a multiplicação da matriz de massa, de amortecimento e de rigidez por ϕ_i^T obtém-se a relação seguinte,

$$\phi_i^T \cdot [M] \cdot [\phi] \cdot \{\ddot{y}(t)\} + \phi_i^T \cdot [C] \cdot [\phi] \cdot \{\dot{y}(t)\} + \phi_i^T \cdot [K] \cdot [\phi] \cdot \{y(t)\} = \phi_i^T \cdot \{F(t)\} \tag{A.4}$$
(2)

Assumindo a ortogonalidade dos modos de vibração em relação às matrizes de massa e rigidez, verifica-se que, para $i \neq j$,

$$\phi_i^T \cdot [M] \cdot \phi_j = 0 \tag{A.5}$$

$$\phi_i^T \cdot [K] \cdot \phi_j = 0 \qquad \textbf{(A.6)}$$

Em virtude desta propriedade, as matrizes gerais de massa e de rigidez são diagonais. O problema pode ser simplificado admitindo que também se aplica a condição de ortogonalidade à matriz de amortecimento

$$\phi_i^T \cdot [C] \cdot \phi_j = 0 \qquad \textbf{(A.7)}$$

Assim, a equação (A.2) pode ser escrita na seguinte forma,

$$[m] \cdot \{\ddot{y}(t)\} + [c] \cdot \{\dot{y}(t)\} + [k] \cdot \{y(t)\} = \{p(t)\} \qquad \textbf{(A.8)}$$

As matrizes $[m]$, $[c]$ e $[k]$ são matrizes diagonais, pelo que os seus termos são obtidos de,

$$\phi_i^T \cdot [K] \cdot \phi_i = k_i \qquad \textbf{(A.9)}$$

$$\phi_i^T \cdot [M] \cdot \phi_i = m_i \qquad \textbf{(A.10)}$$

$$\phi_i^T \cdot [C] \cdot \phi_i = c_i \qquad \textbf{(A.11)}$$

$$\phi_i^T \cdot \{F(t)\} = p_i \qquad \textbf{(A.12)}$$

O sistema reduz-se a um sistema de *n* equações diferenciais independentes de 2ª ordem, comportando-se como se tratasse de *n* osciladores simples independentes.

As *n* equações diferenciais independentes escrevem-se assim na forma

$$\ddot{y}_i(t) + 2 \cdot \xi_i \cdot \omega_i \cdot y_i(t) + \omega_i^2 \cdot y_i(t) = \frac{p_i(t)}{m_i} \qquad \textbf{(A.13)}$$

sendo ξ_i os factores de amortecimento determinados através de $\xi_i = c_i / (2 \cdot m_i \cdot \omega_i)$.

A determinação da resposta modal pode ser feita através do Integral de Duhamel

$$y_i(t) = \frac{1}{m_i \cdot \omega_{di}} \cdot \int_0^t p_i(\tau) \cdot e^{-\xi_i \cdot \omega_i \cdot (t-\tau)} \cdot \sin(\omega_{di} \cdot (t-\tau)) \cdot d\tau \qquad \textbf{(A.14)}$$

com $\omega_{di} = \omega_i \cdot \sqrt{1-\xi_i^2}$. Tendo os valores dos deslocamentos modais, $y_i(t)$ podemos obter os deslocamentos $\{q(t)\}$ da estrutura.

APÊNDICE B

MÉTODO DE NEWMARK

Para realizar numericamente a análise dinâmica de tirantes, aplicou-se o método de Newmark. Este método resolve implicitamente por integração directa o sistema de equações diferenciais do equilíbrio dinâmico

$$M \cdot \ddot{u}(t) + C \cdot \dot{u}(t) + K \cdot u(t) = f(t) \qquad \textbf{(B.1)}$$

O método permite determinar no instante de tempo $t + \Delta t$, os deslocamentos, as velocidades e as acelerações $(u(t+\Delta t), \dot{u}(t+\Delta t), \ddot{u}(t+\Delta t))$ sabendo o valor das mesmas grandezas no instante anterior, t. Considerou-se no estudo presente que os acréscimos de tempo Δt são iguais por facilidades computacionais, e o seu valor foi adoptado de forma a caracterizar com precisão suficiente a excitação e a obter uma solução estável.

Dois parâmetros α e β, aparecem na definição da lei de variação linear das acelerações, imposta no método, e são determinados de modo a obter-se precisão e estabilidade durante o processo de integração. Adoptaram-se os seguintes valores: $\alpha = 0.5$ e $\beta = 0.25$.

APÊNDICE C

AMORTECIMENTO DE RAYLEIGH

A matriz de amortecimento utilizada nesta dissertação **Erro! A origem da referência não foi encontrada.**foi a designada matriz de amortecimento de Rayleigh, definida por

$$C = a_0 \cdot M + a_1 \cdot K \qquad \textbf{(C.1)}$$

Esta definição permite a separação das equações diferenciais do movimento num conjunto de equações independentes, já que a ortogonalidade dos modos de vibração em relação à matriz de massa e à matriz de rigidez, conduz à ortogonalidade em relação à matriz de amortecimento. Habitualmente, os parâmetros a_0 e a_1 são estipulados fixando os factores de amortecimento modais ξ_i relativos a dois modos de vibração

$$c = 2 \cdot m_i \cdot \omega_i \cdot \xi_i = a_0 \cdot m_i + a_1 \cdot k_i \qquad \textbf{(C.2)}$$

em que $m_i = \phi_i^T \cdot M \cdot \phi_i$ e $k_i = \phi_i^T \cdot K \cdot \phi_i$.

No caso presente, ao utilizar o "software" SOLVIA, a matriz C é definida proporcionalmente à matriz de massa e à parte linear da matriz de rigidez. Ora, num problema não-linear geométrico a matriz de rigidez tem carácter não-linear pelo que C vem definido através de

$$C = a_0 \cdot M \qquad \textbf{(C.3)}$$

De acordo com (Clough, 1986), ao fixar o factor de amortecimento ξ_n relativo ao modo de vibração *n*, obtém-se

$$a_0 = 2 \cdot \omega_n \cdot \xi_n \qquad \textbf{(C.4)}$$

A Figura C.1 ilustra a variação do factor de amortecimento modal ξ_n com a frequência angular ω_n, quando se adopta uma matriz de amortecimento proporcional à matriz de massa.

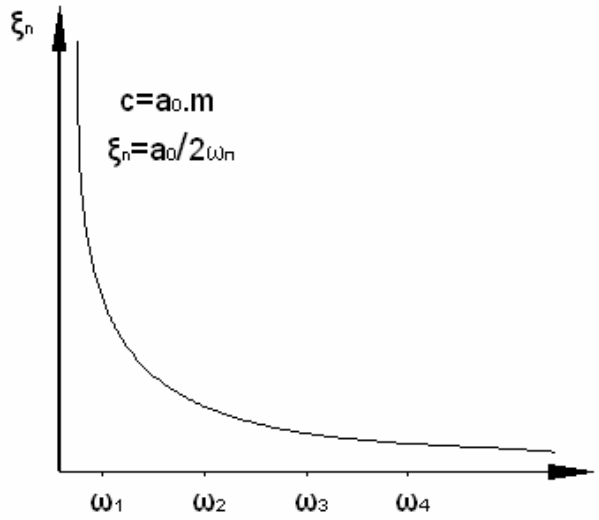


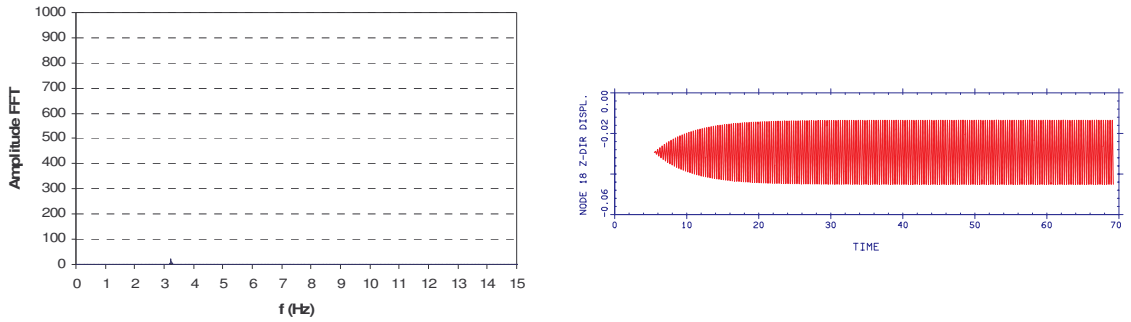
Figura C.1 Variação do amortecimento modal com as frequências naturais

APÊNDICE D

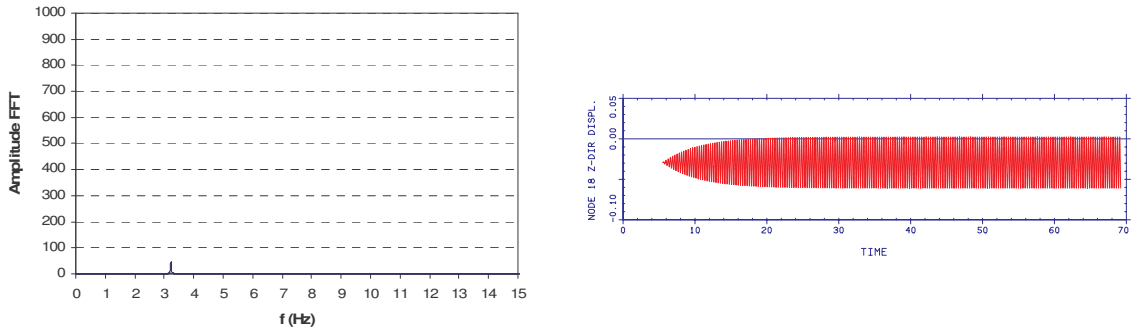
RESULTADOS DINÂMICOS

Neste Apêndice apresentam-se os resultados da resposta para amplitudes crescentes, segundo as direcções transversal e longitudinal do cabo, para uma excitação perpendicular ao cabo, para três níveis de ressonância: metade, igual e dupla da primeira frequência natural. O amortecimento adoptado foi de 1%.

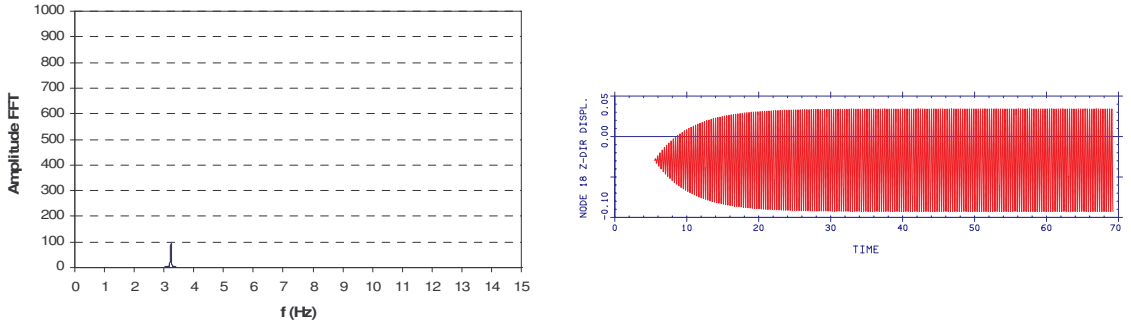
Apresentam-se de seguida os resultados da resposta segundo a direcção transversal do cabo, com frequência igual à primeira frequência natural do cabo.



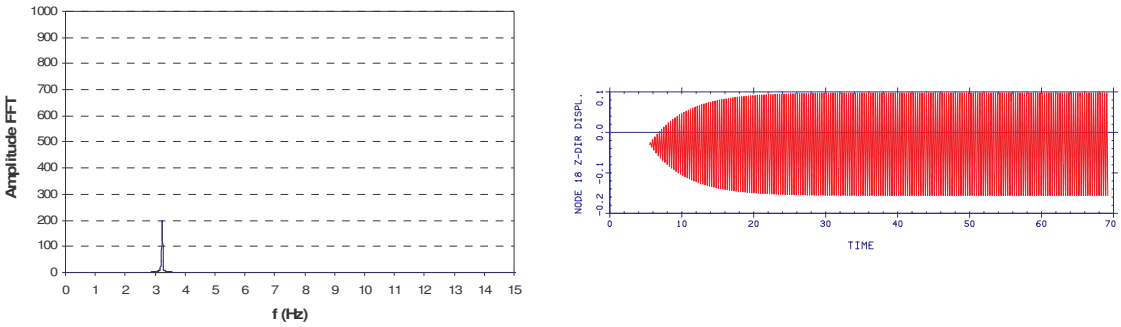
a) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.0005m



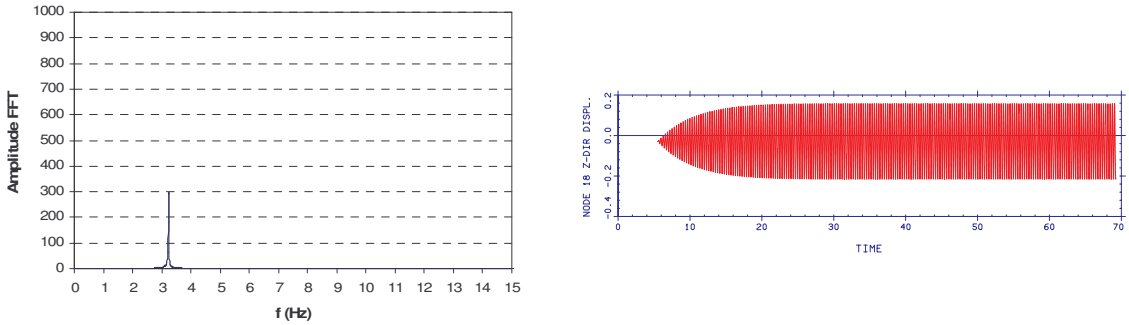
b) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.001m



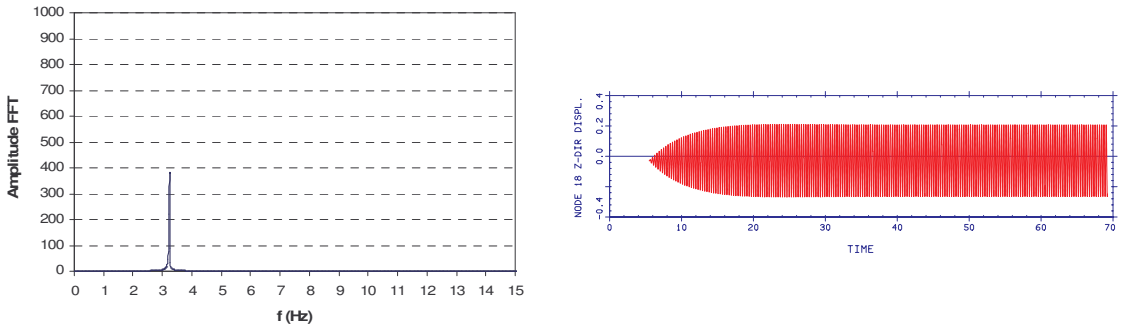
c) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.002m



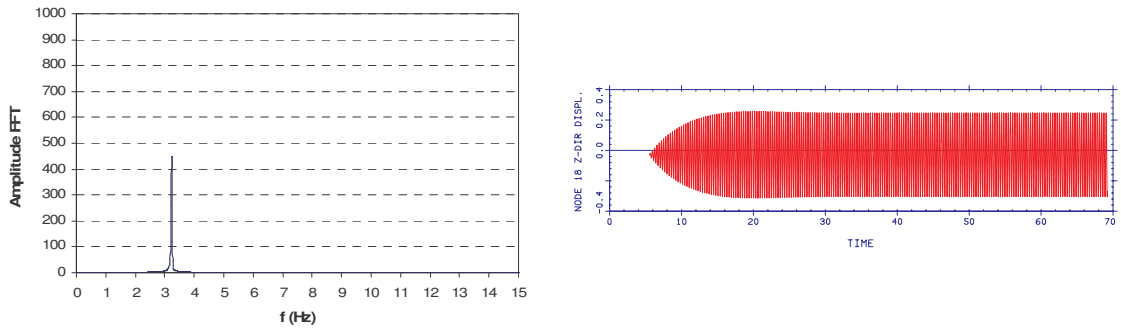
d) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.004m



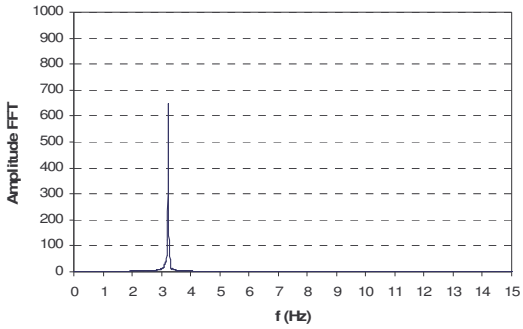
e) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.006m

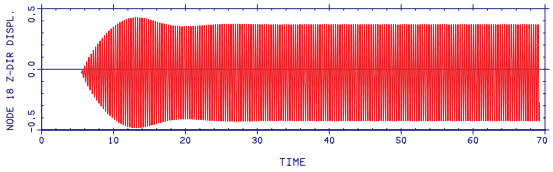


f) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.008m

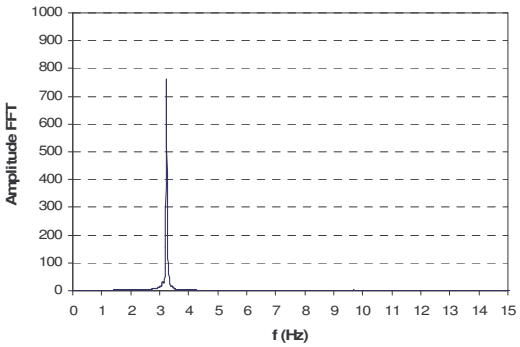


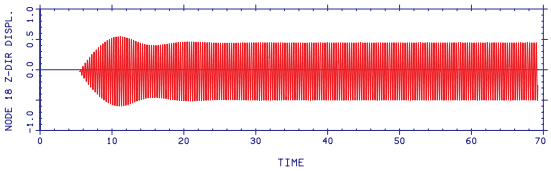
g) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.01m



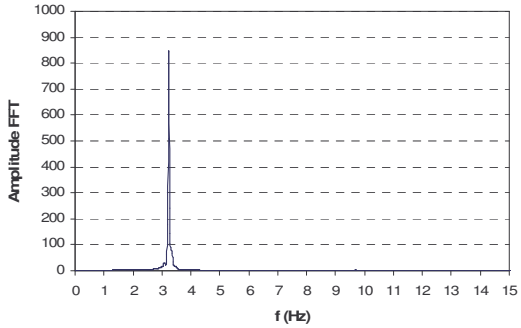


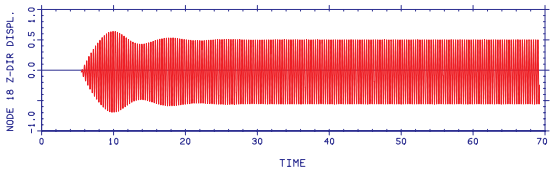
h) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.02m



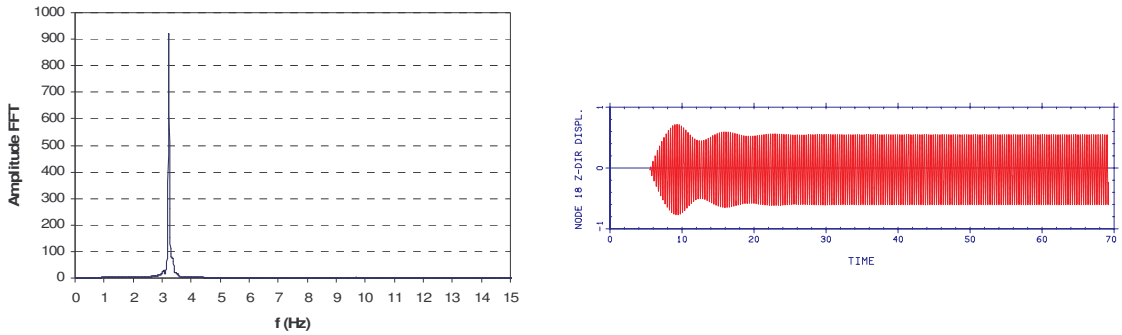


i) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.03m





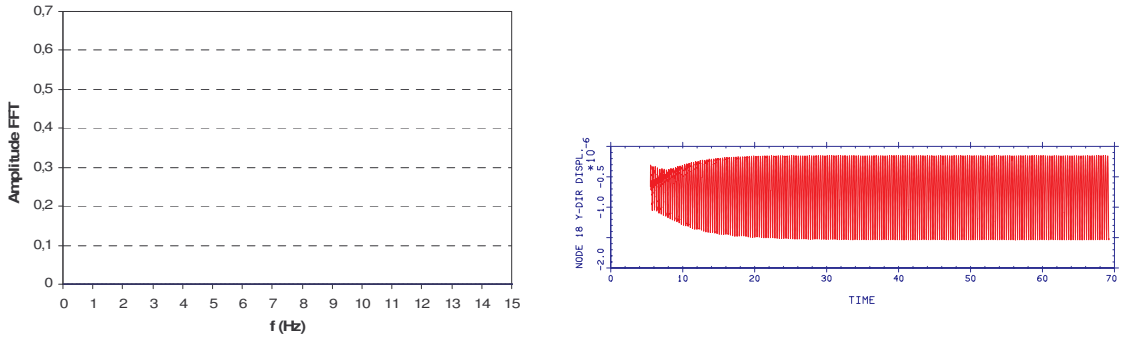
k) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.04m



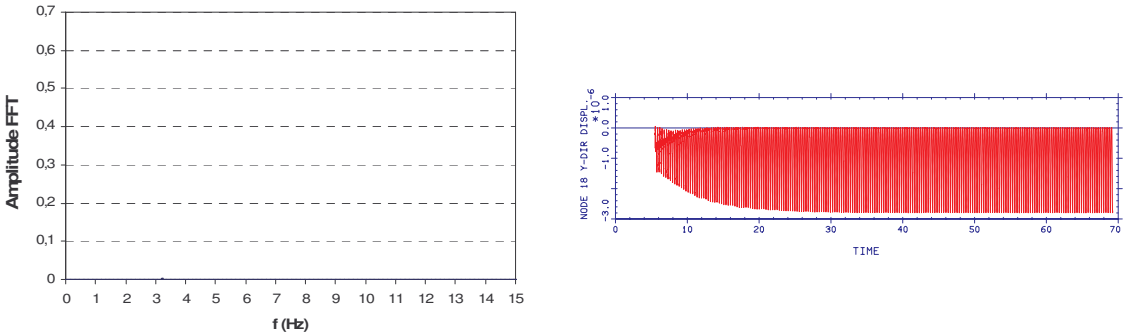
k) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.05m

Figura D.1 Resposta na direcção transversal do cabo para frequência igual ao 1º harmónico do cabo. Amortecimento de 1%

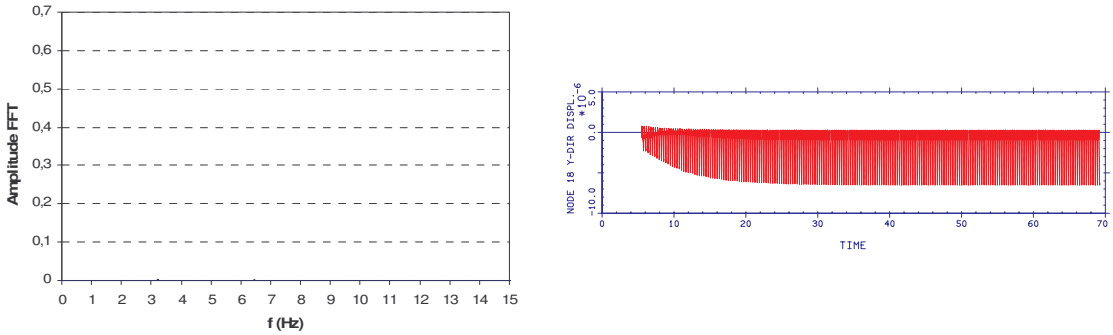
Apresentam-se de seguida os resultados da resposta segundo a direcção longitudinal do cabo, com frequência igual à primeira frequência natural do cabo.



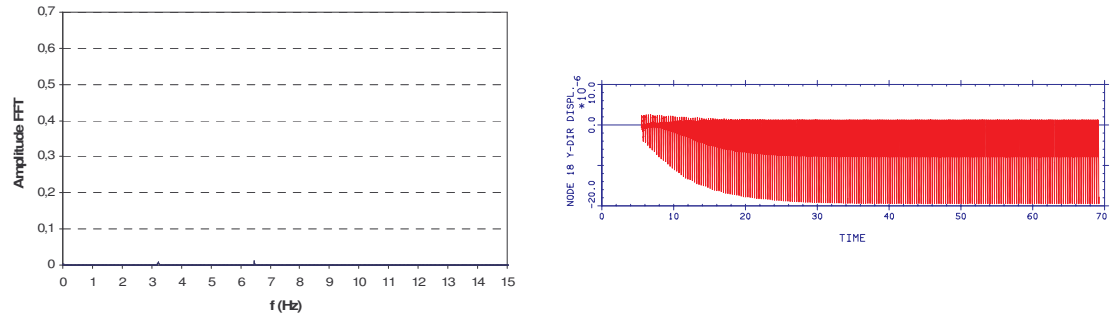
a) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.0005m



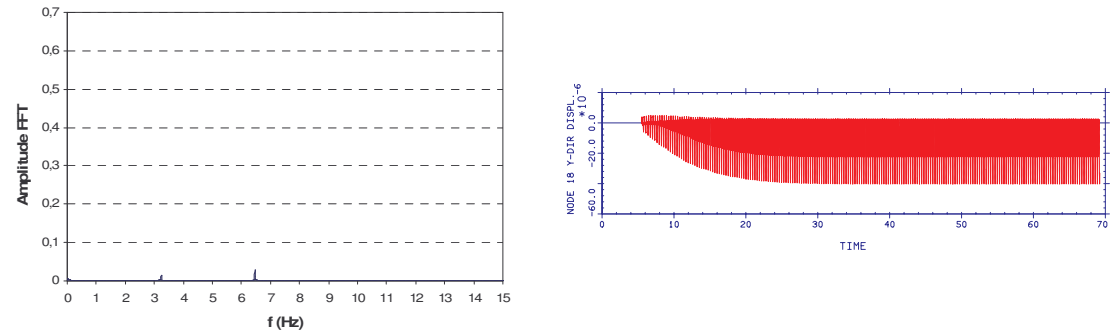
b) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.001m



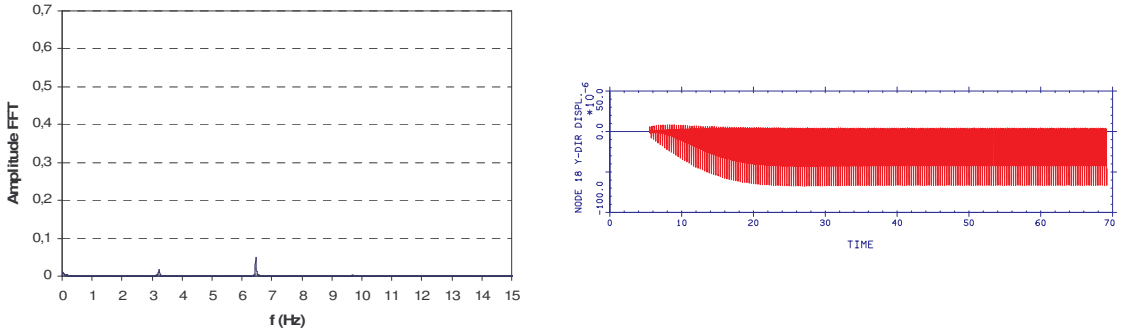
c) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.002m



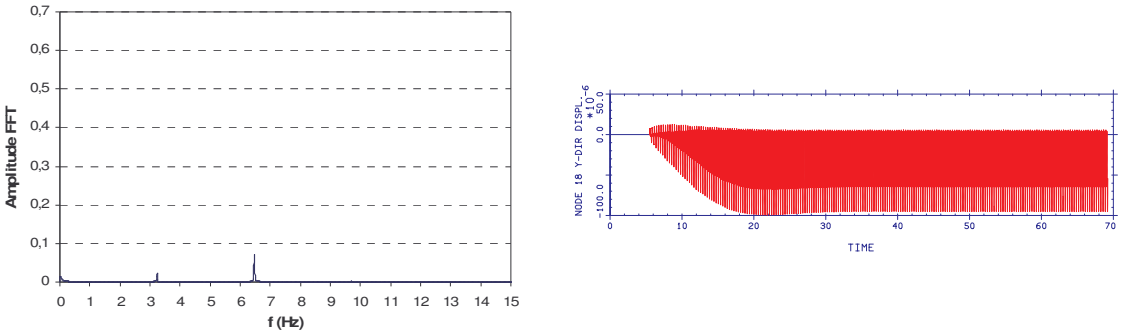
d) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.004m



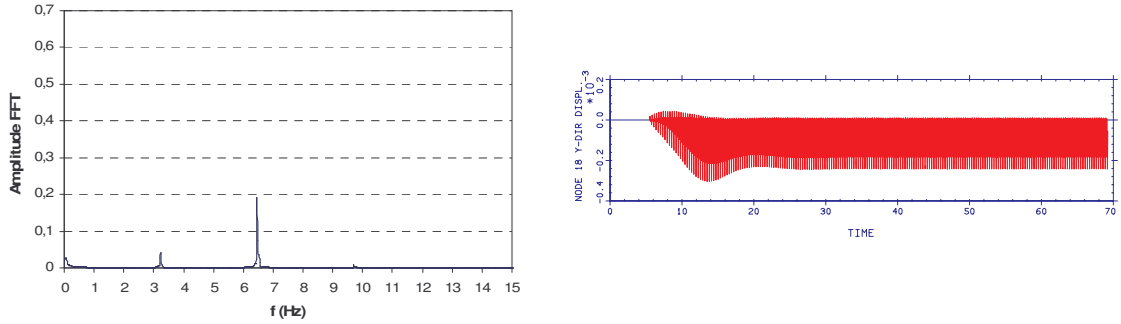
e) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.006m



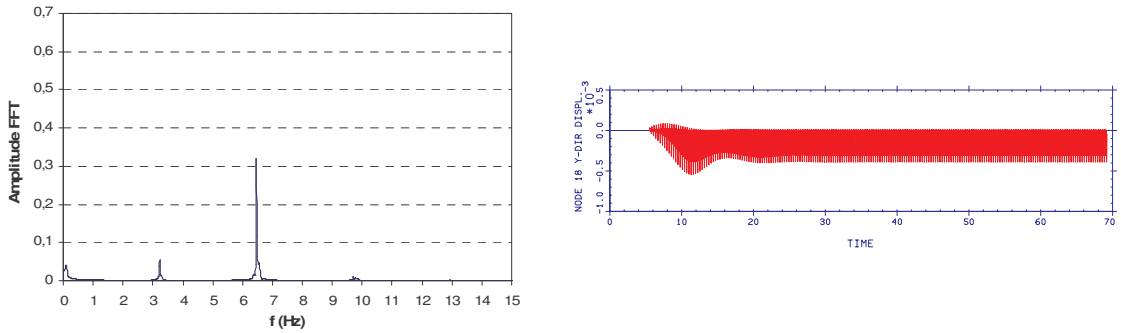
f) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.008m



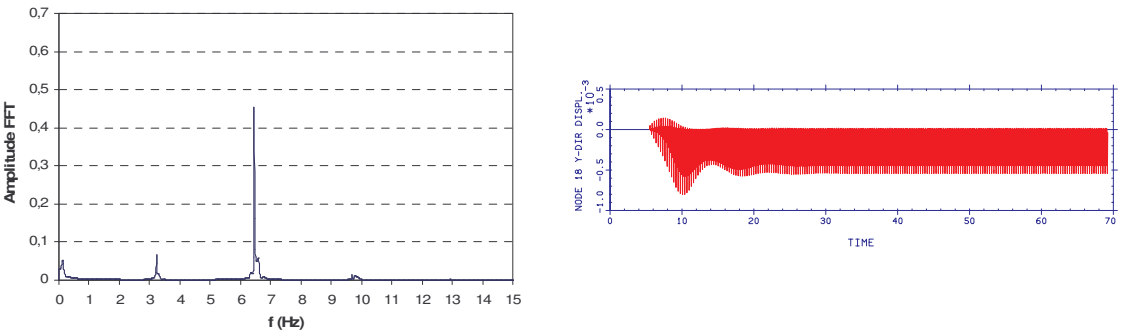
g) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.01m



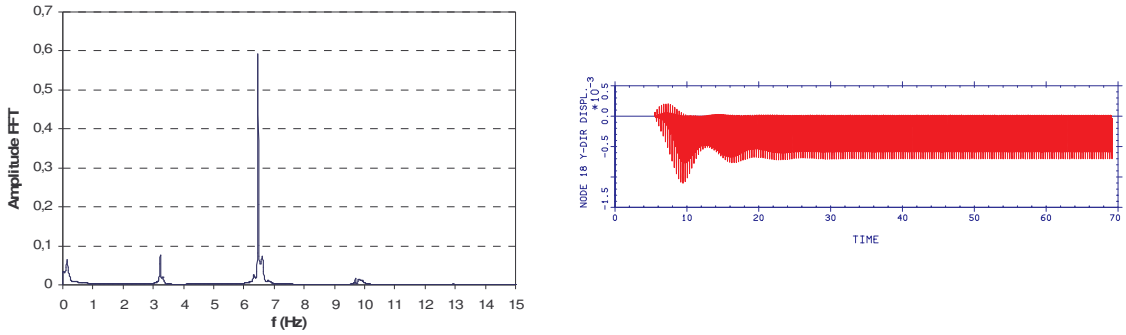
h) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.02m



i) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.03m



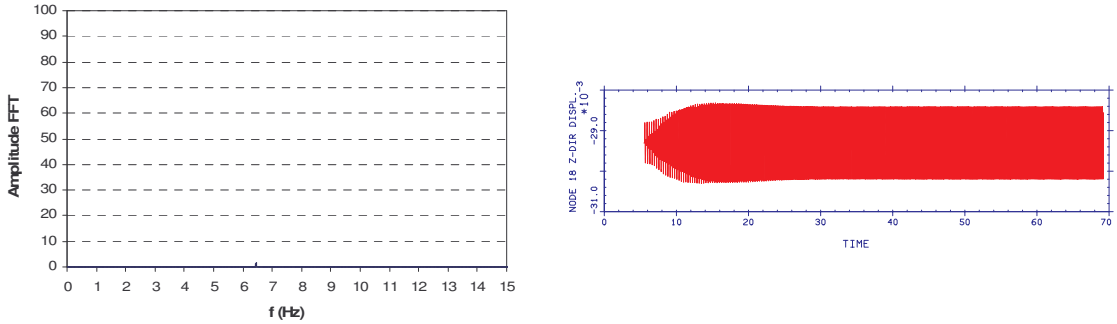
j) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.04m



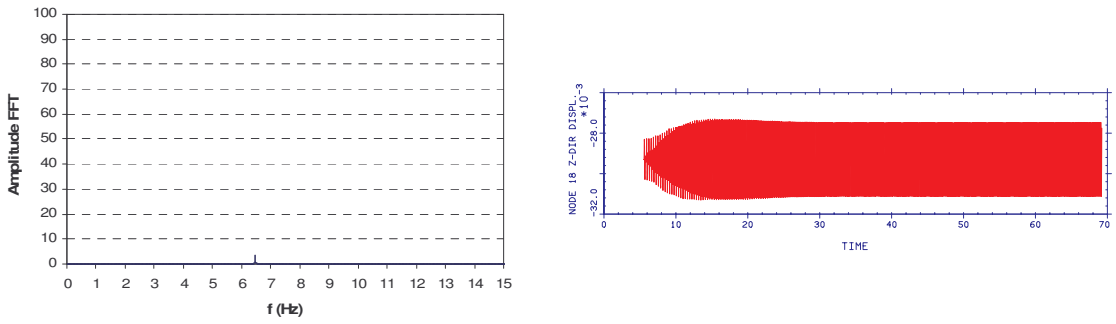
k) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.05m

Figura D.2 Resposta na direcção longitudinal do cabo para frequência igual ao 1º harmónico do cabo. Amortecimento de 1%

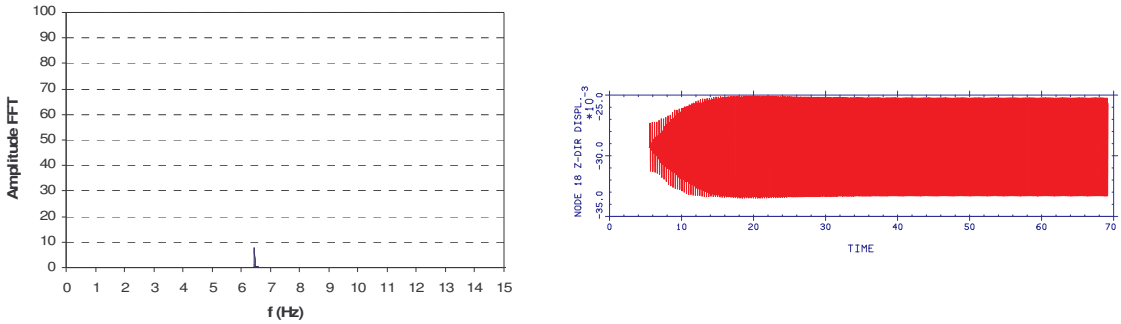
Apresentam-se de seguida os resultados da resposta segundo a direcção transversal do cabo, com frequência dupla à primeira frequência natural do cabo.



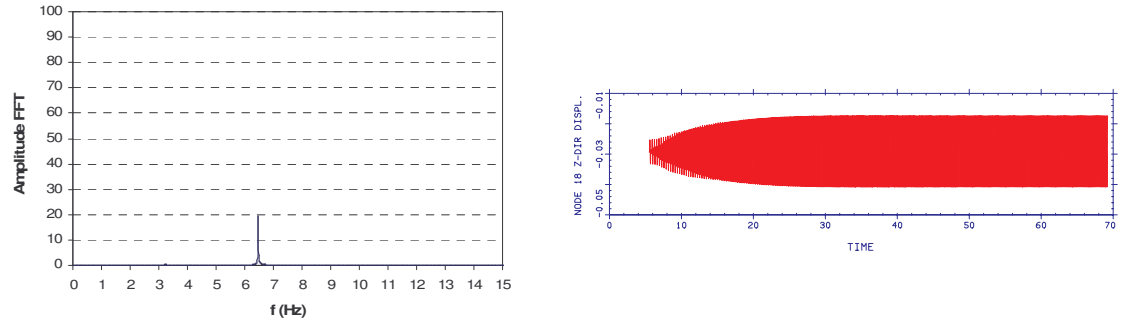
a) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.0005m



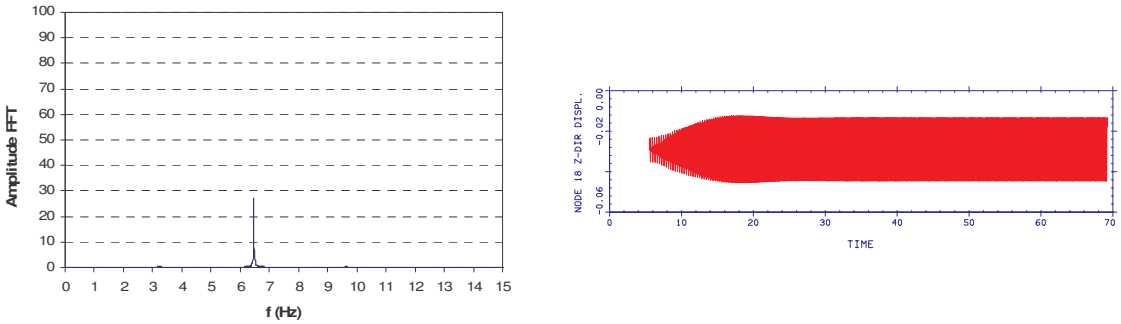
b) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.001m



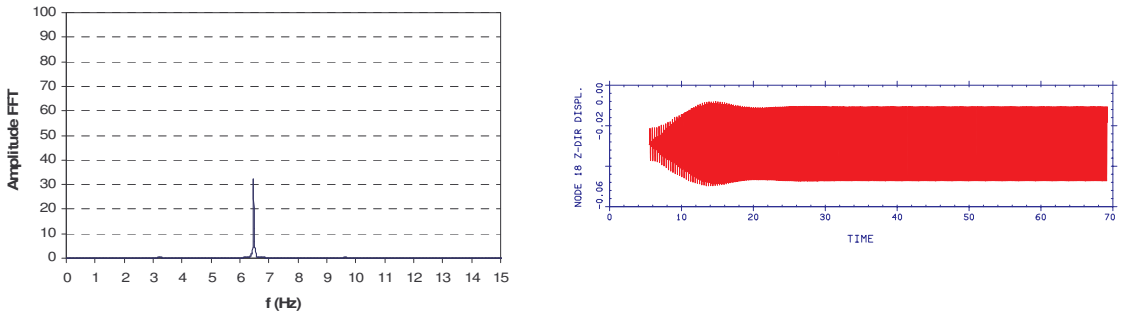
c) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.002m



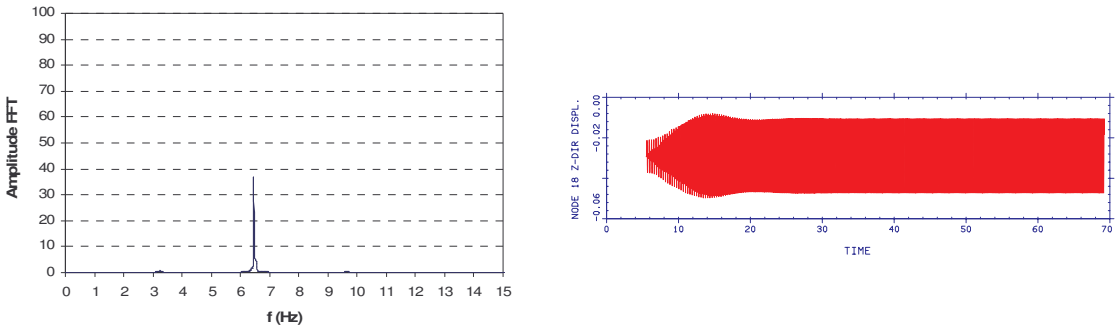
d) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.004m



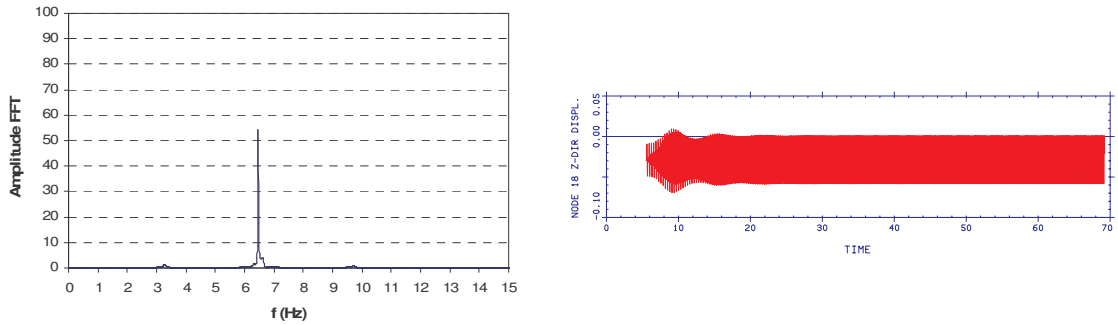
e) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.006m



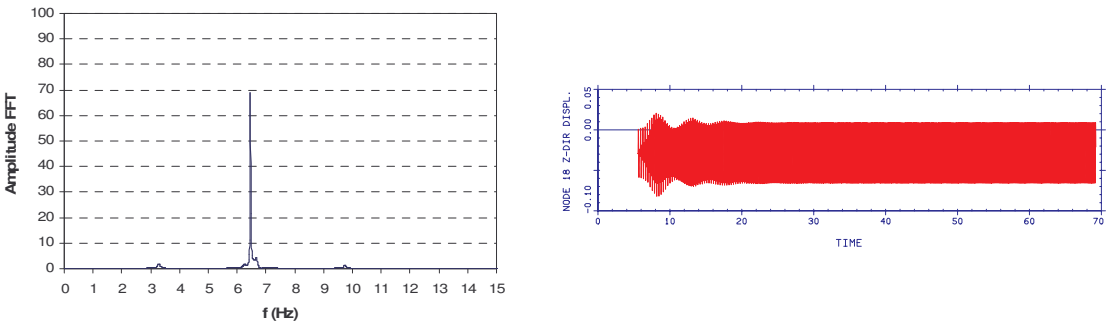
f) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.008m



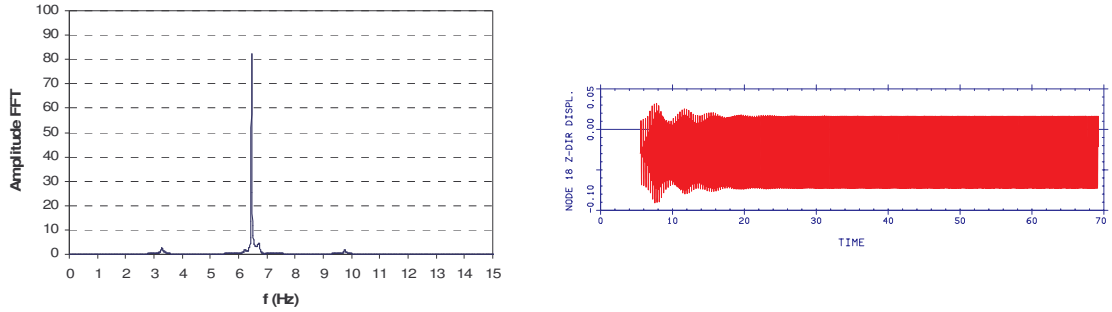
g) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.01m



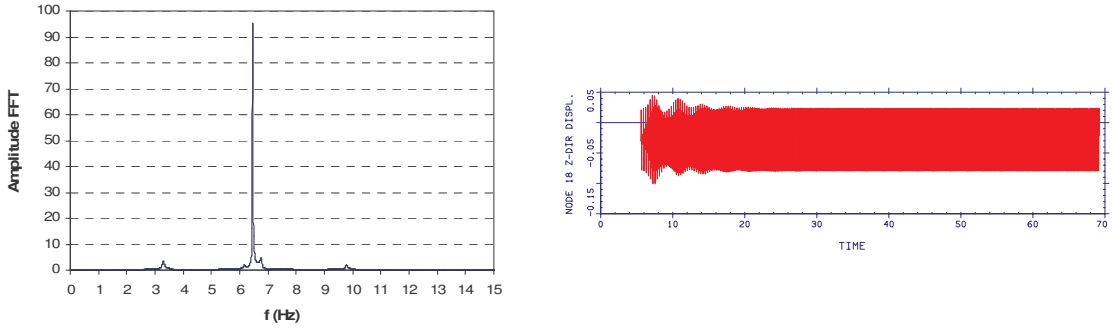
h) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.02m



i) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.03m



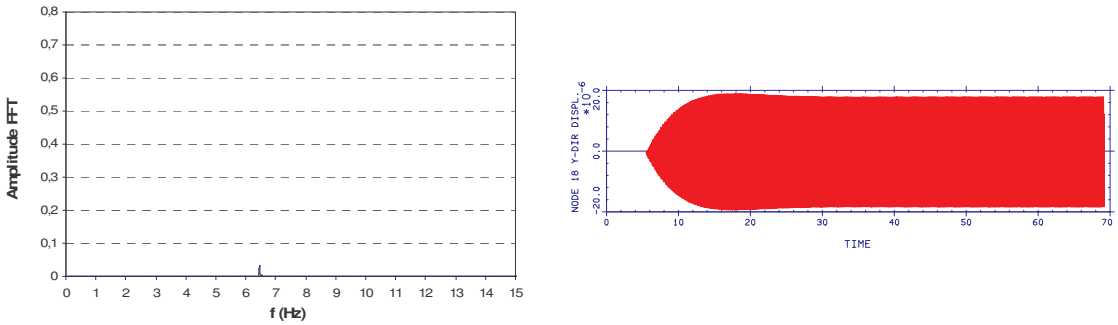
j) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.04m



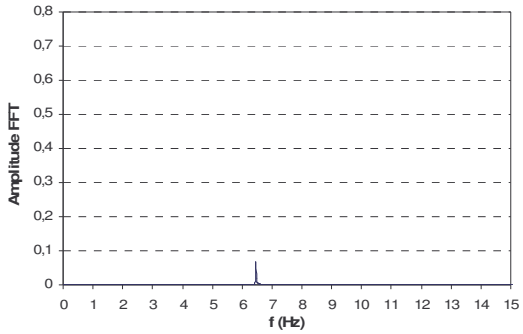
k) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.05m

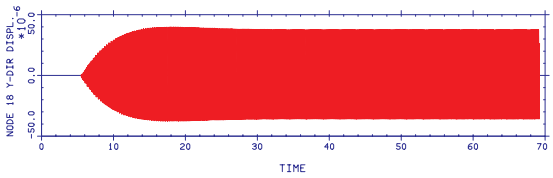
Figura D.3 Resposta na direcção transversal do cabo para frequência dupla do 1º harmónico do cabo. Amortecimento de 1%

Apresentam-se os resultados da resposta segundo a direcção longitudinal do cabo, com frequência dupla à primeira frequência natural do cabo.

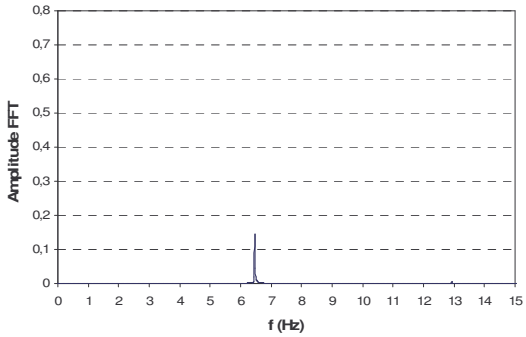


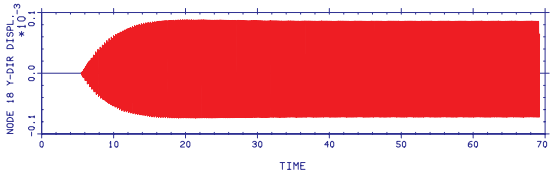
a) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.0005m



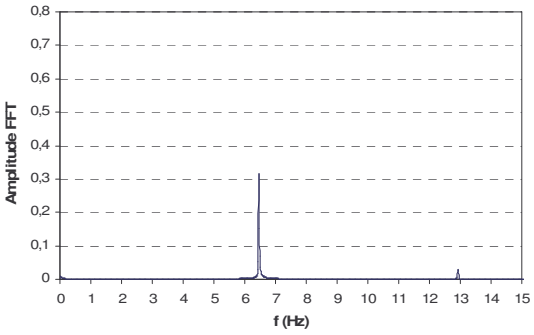


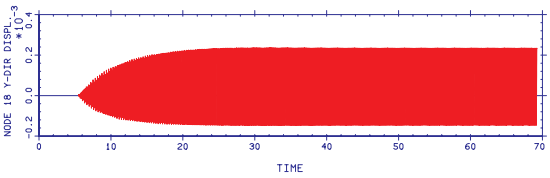
b) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.001m



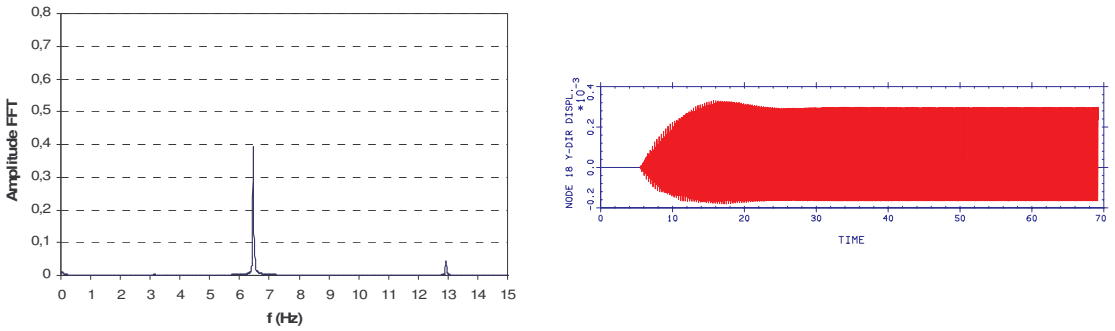


c) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.002m

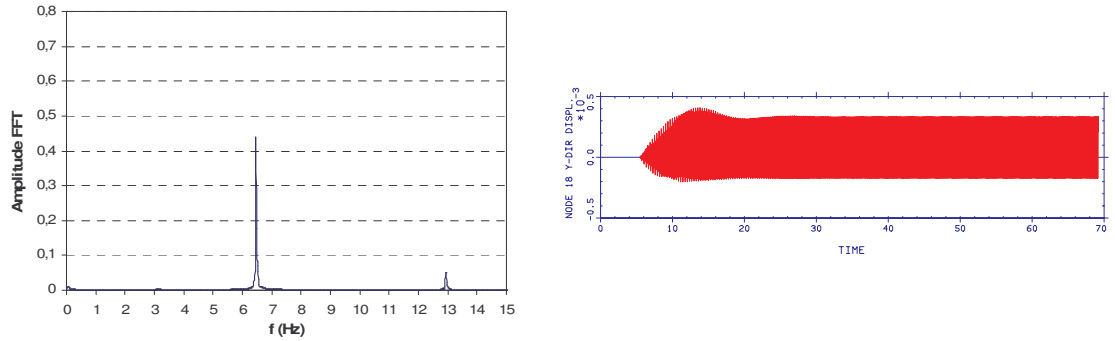




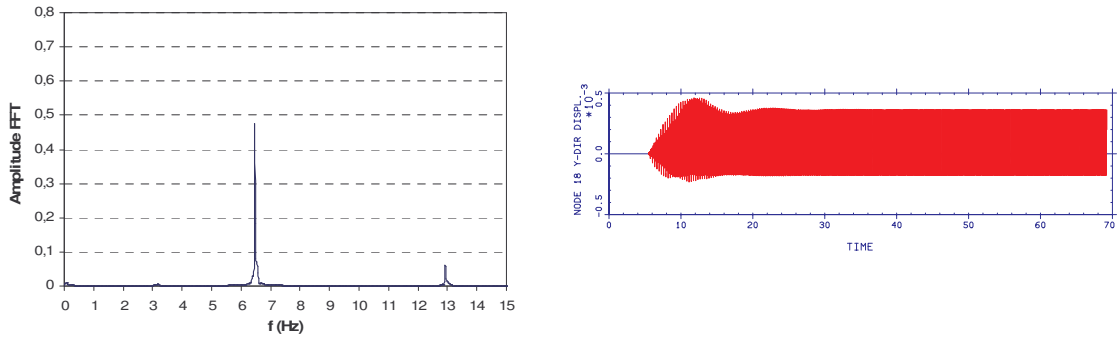
d) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.004m



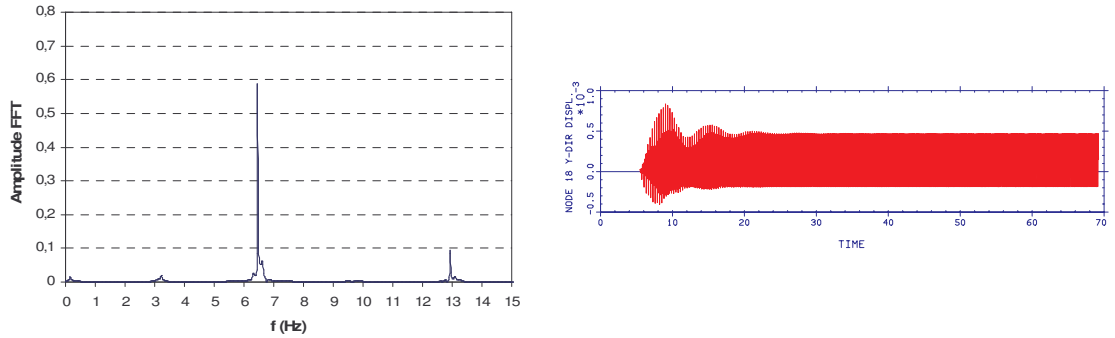
e) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.006m



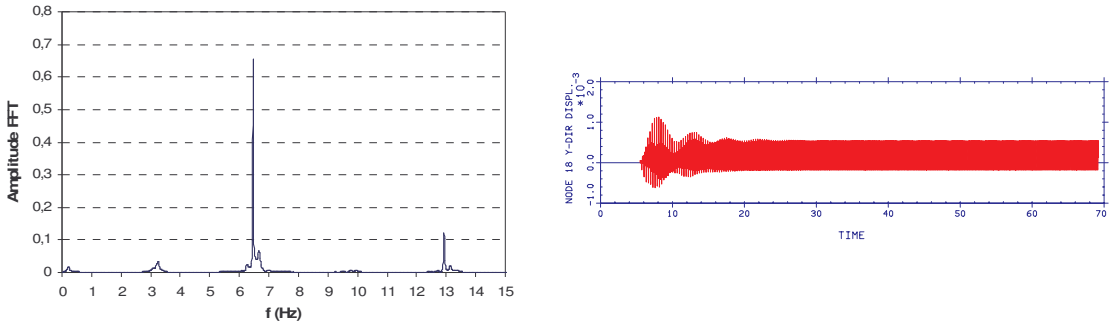
f) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.008m



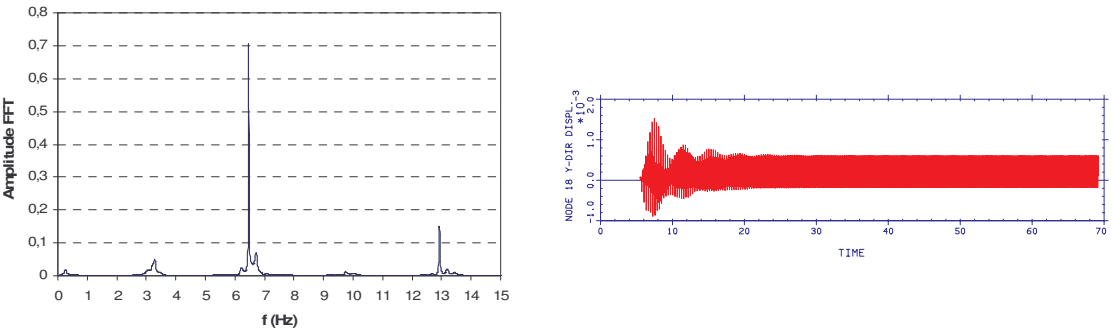
g) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.01m



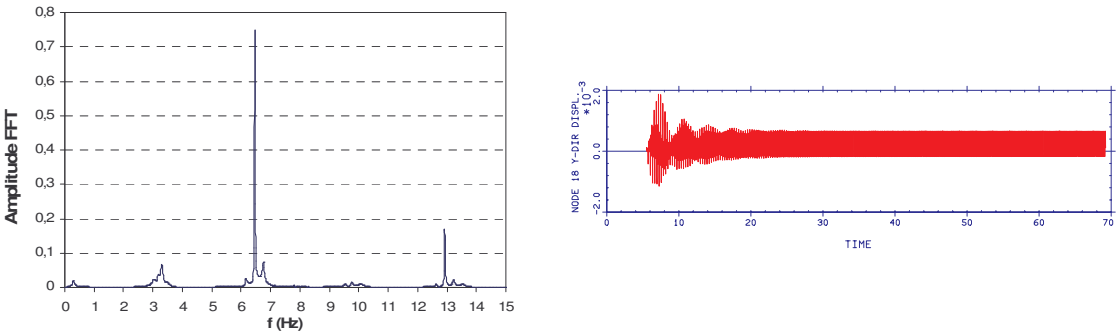
h) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.02m



i) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.03m



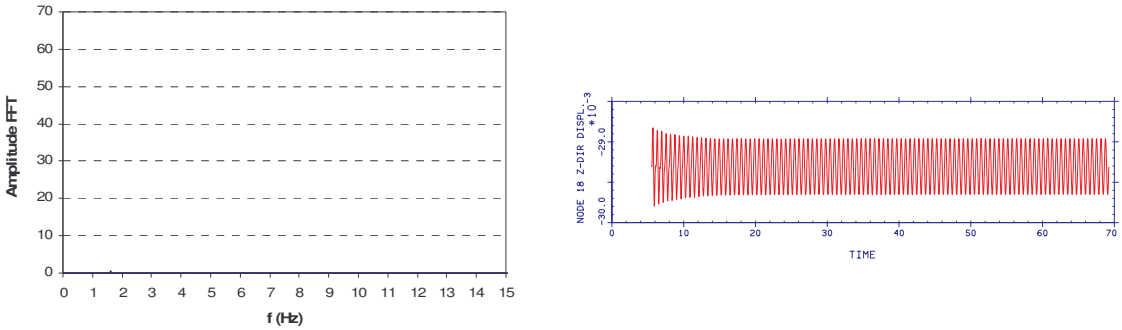
j) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.04m



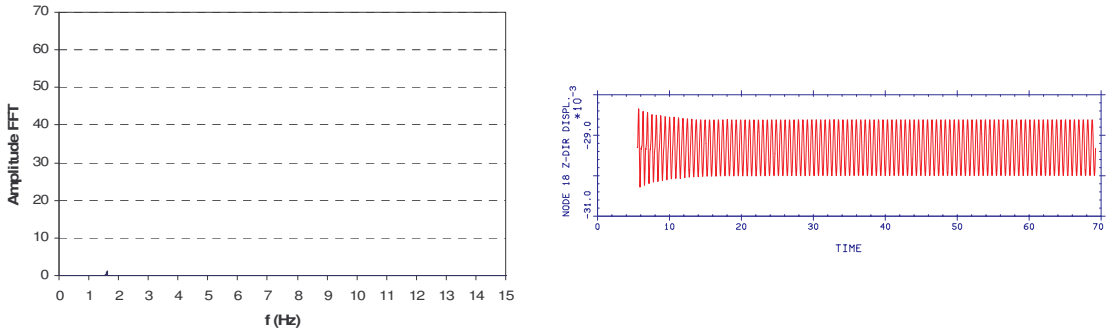
k) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.05m

Figura D.4 Resposta na direcção longitudinal do cabo para frequência dupla do 1º harmónico do cabo. Amortecimento de 1%

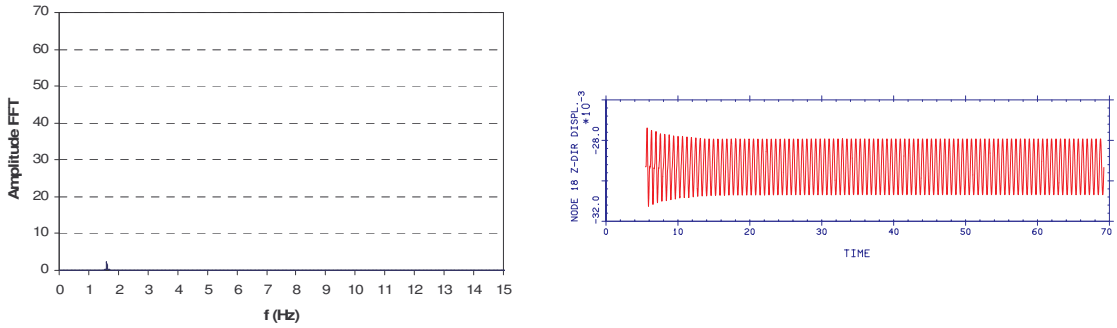
Os resultados obtidos da resposta segundo a direcção transversal do cabo, com metade da frequência da primeira frequência natural do cabo são apresentados nas figuras seguintes.



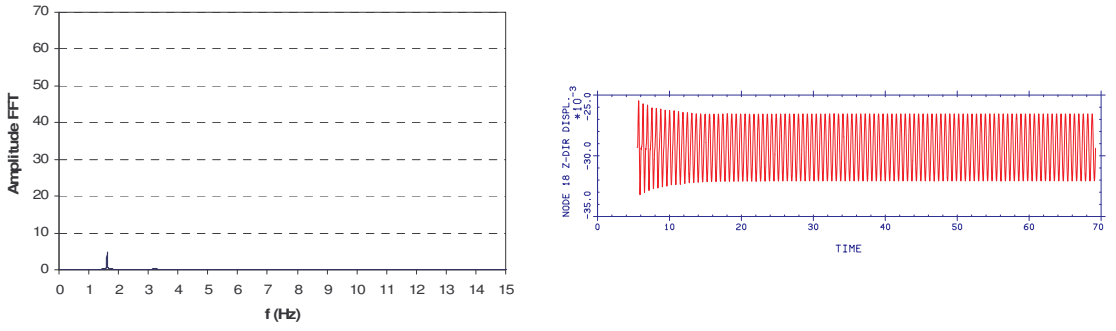
a) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.0005m



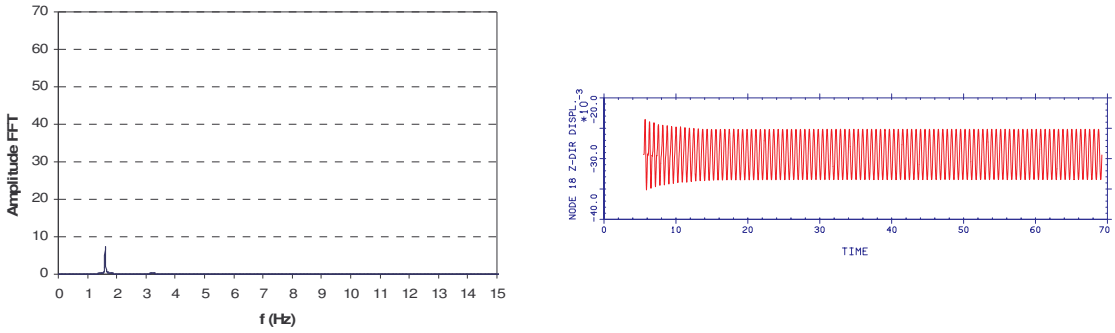
b) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.001m



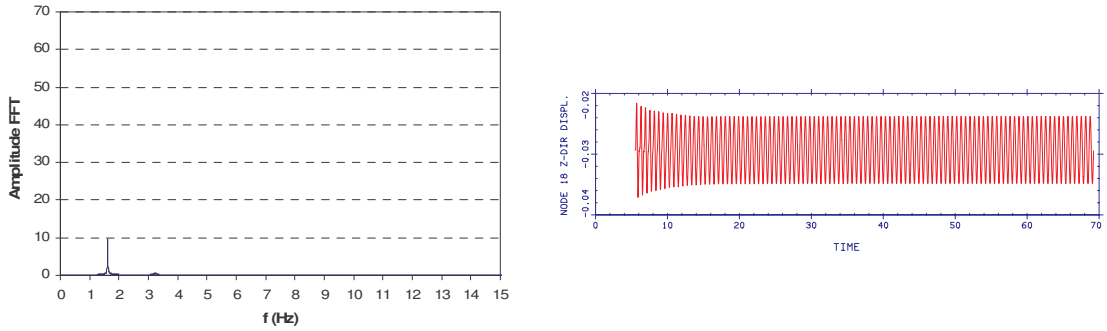
c) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.002m



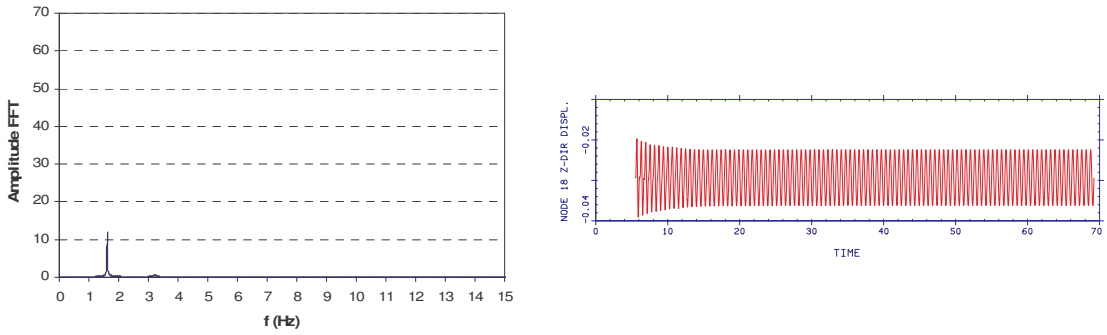
d) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.004m



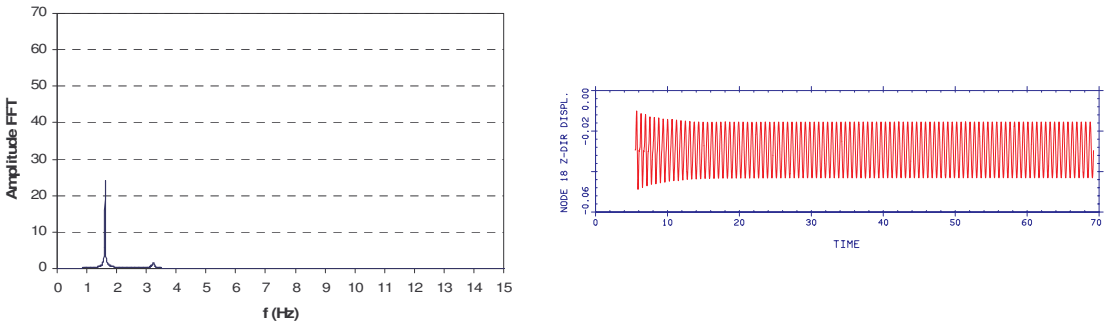
e) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.006m



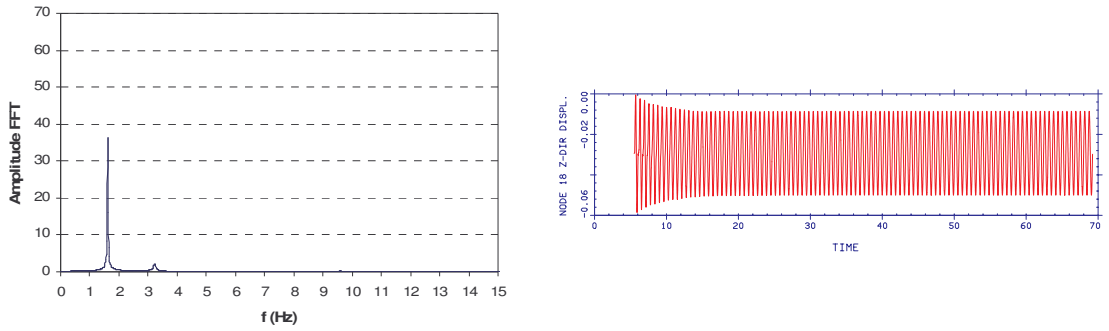
f) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.008m



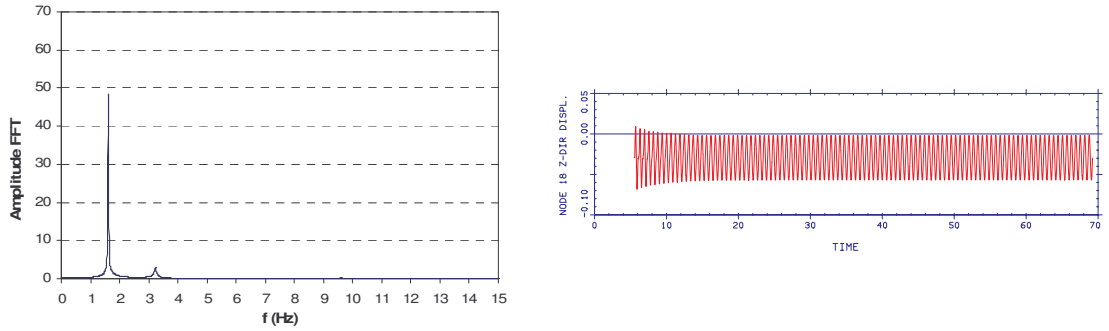
g) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.01m



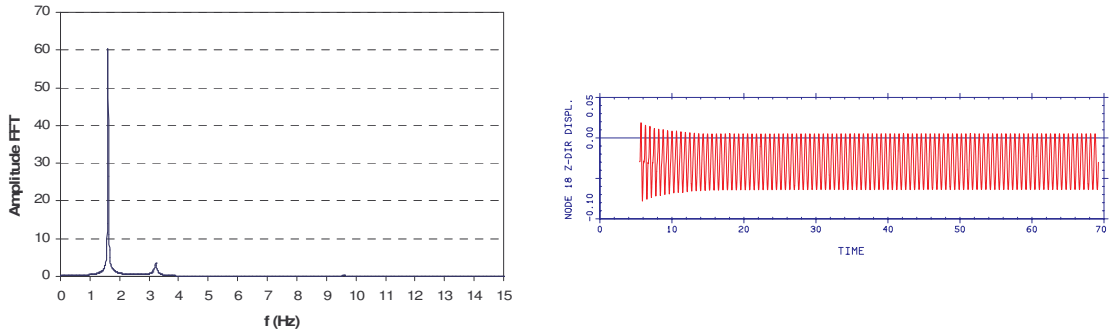
h) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.02m



i) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.03m



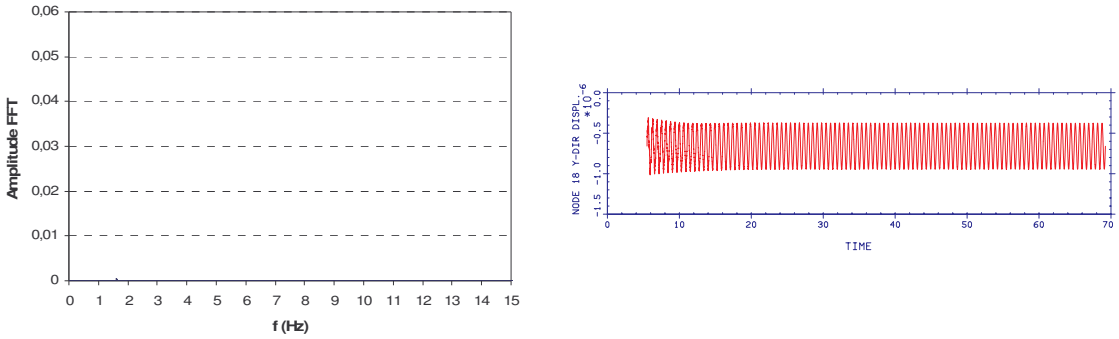
j) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.04m



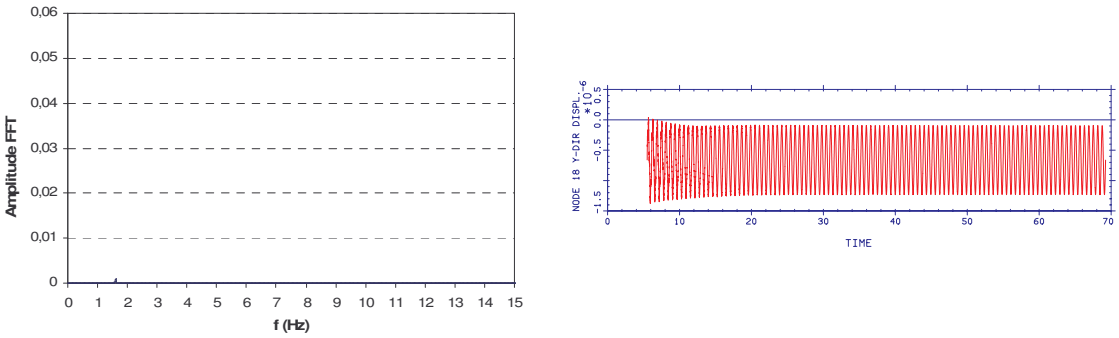
k) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.05m

Figura D. 5 Resposta na direcção transversal do cabo para metade da frequência do 1º harmónico do cabo. Amortecimento de 1%

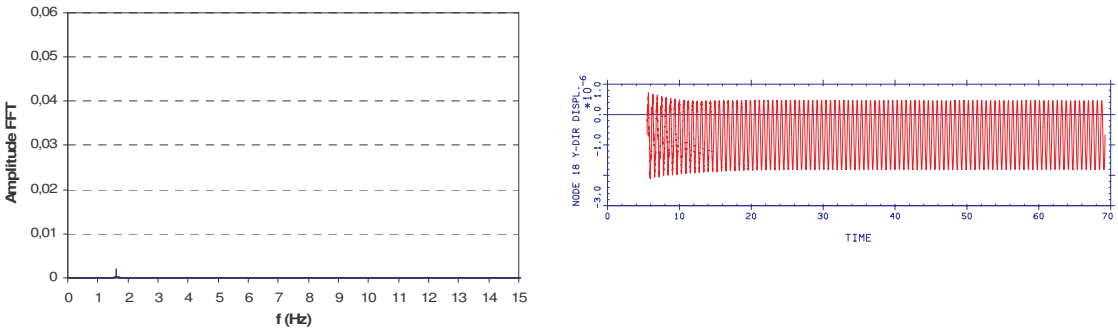
Apresentam-se os resultados da resposta segundo a direcção longitudinal do cabo, com frequência metade da primeira frequência natural do cabo.



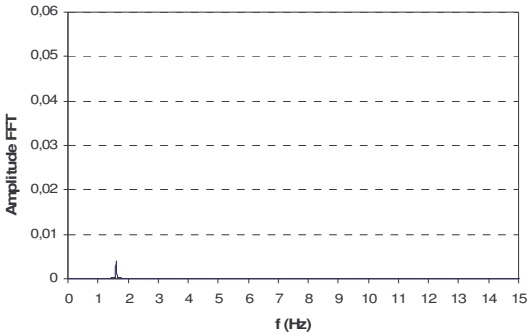
a) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.0005m

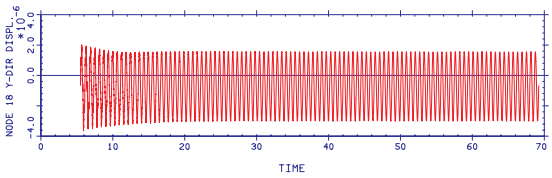


b) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.001m

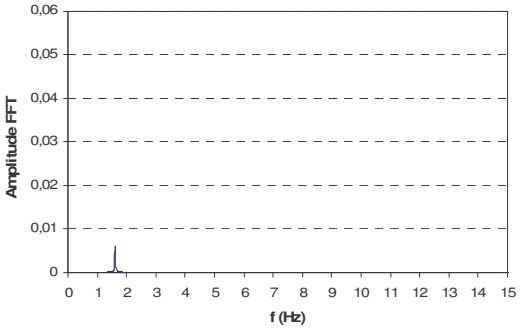


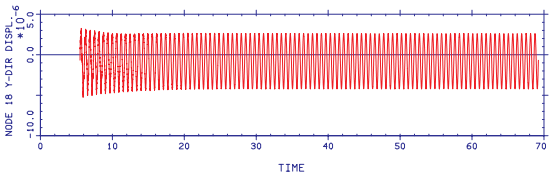
c) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.002m



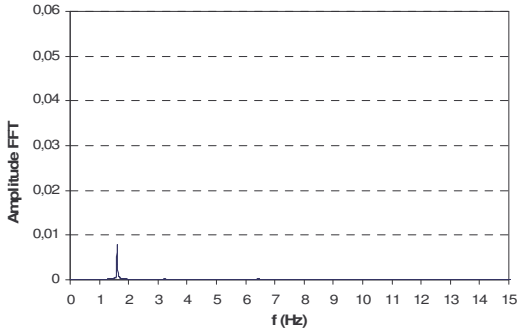


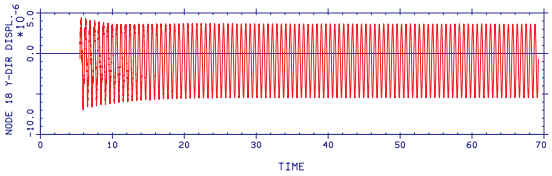
d) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.004m



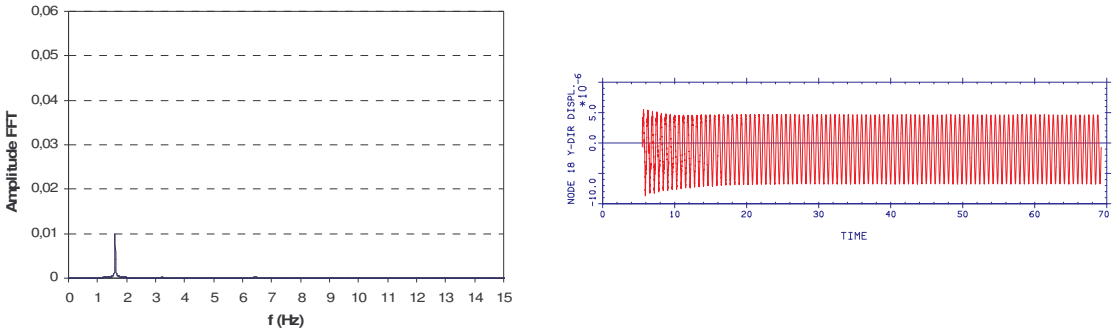


e) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.006m

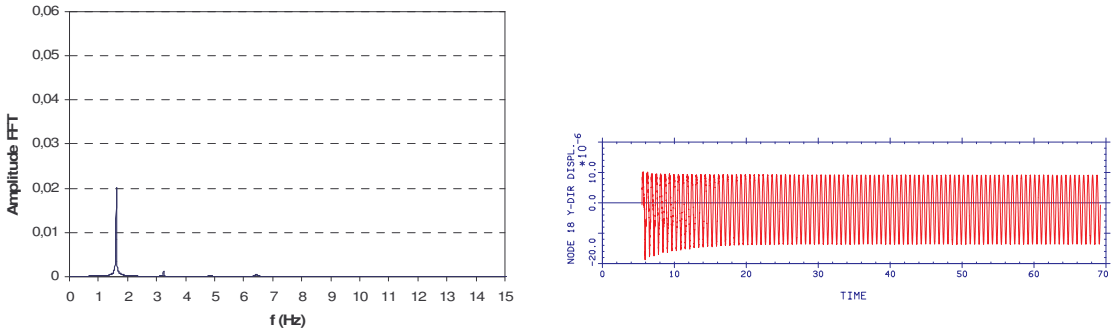




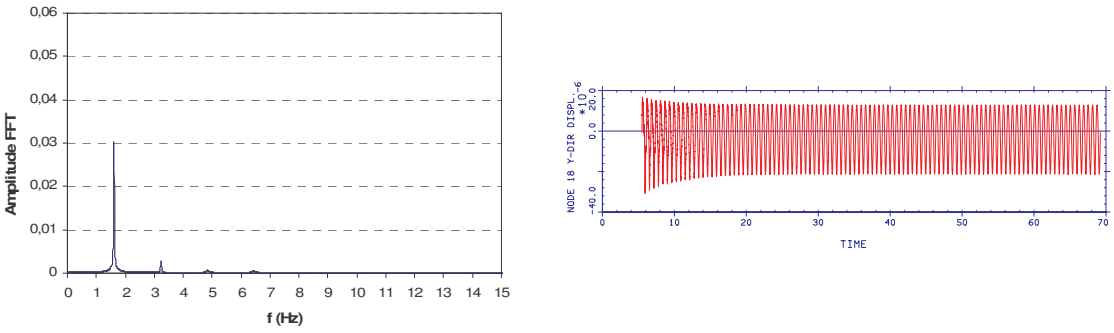
f) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.008m



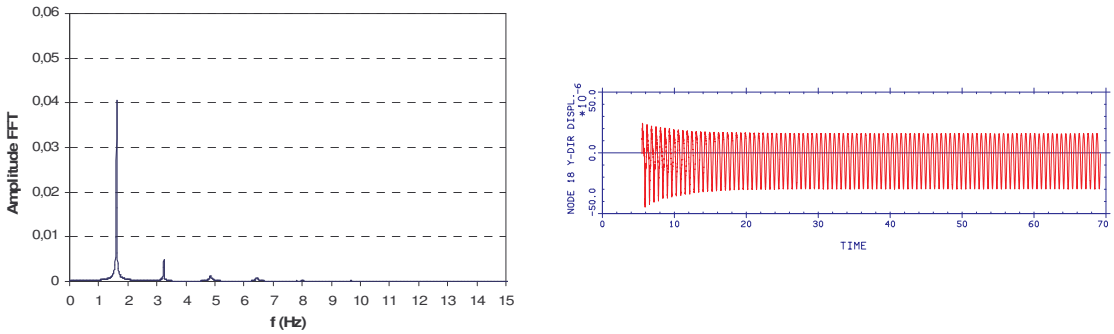
g) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.01m



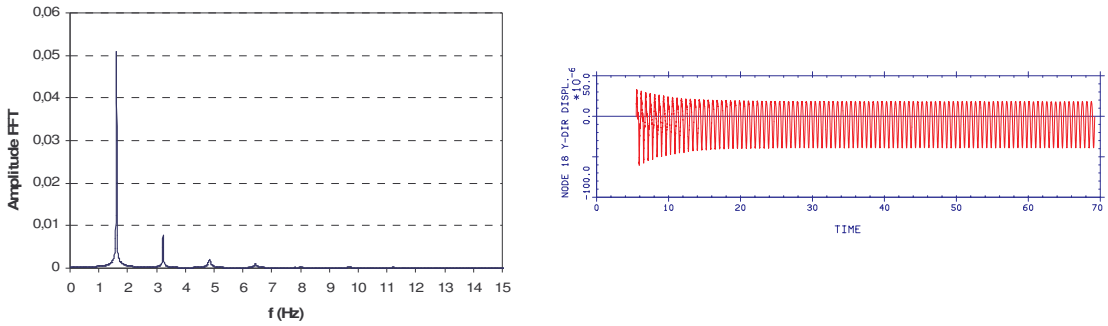
h) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.02m



i) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.03m



j) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.04m



k) Gráficos da resposta à amplitude máxima de oscilação de 0.05m

Figura D.6 Resposta na direcção longitudinal do cabo para metade da frequência do 1º harmónico do cabo