

CARLOS ALBERTO DA CONCEIÇÃO ANTÓNIO

OPTIMIZAÇÃO MULTINÍVEL DE ESTRUTURAS
EM MATERIAIS COMPÓSITOS LAMINADOS

FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

1991

CARLOS ALBERTO DA CONCEIÇÃO ANTÓNIO

**OPTIMIZAÇÃO MULTINÍVEL DE ESTRUTURAS
EM MATERIAIS COMPÓSITOS LAMINADOS**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Estrutural

624.04(043)/ANTc/0PT

UNIVERSIDADE DO PORTO	
Faculdade de Engenharia	
BIBLIOTECA	
N.º	_____
CDU	624.04(043)
Data	____/____/19____

FEUP	
DEP ENG MEC	
3902	25/10 A1
	2361
BIBLIOTECA	

F3
ANT

**FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO**

1991

Aos meus pais e irmãos

— À Isabel Cristina, ao Mário e à Patrícia

ERRATA

Onde se lê :

Deve ler-se :

Página 3.2:

linha 16

" Na segunda *das* quais ... "

" Na segunda *etapa* ... "

Página 5.17:

equação (5.52.a)

$$" \frac{\partial a_{e,k,m}}{\partial x_{e,k,m}} = \dots "$$

$$" \frac{\partial a_{e,k,m}}{\partial x_l} = \dots "$$

Página 5.18:

equação (5.52.b)

$$" \frac{\partial a_{e,k,m}}{\partial u_l^e} = \dots "$$

$$" \frac{\partial a_{e,k,m}}{\partial x_l} = \dots "$$

equação (5.52.c)

$$" \frac{\partial b_k}{\partial x_l} = \dots "$$

$$" \frac{\partial b_{e,k,m}}{\partial x_l} = \dots "$$

equação (5.52.d)

$$" \frac{\partial b_{e,k,m}}{\partial u_l^e} = \dots "$$

$$" \frac{\partial b_{e,k,m}}{\partial x_l} = \dots "$$

Página 7.9:

penúltimo §

" ... a partir da equação (7.10.b) . "

" ... a partir da equação (7.9) . "

Página 7.13:

penúltimo §

$$" \alpha^k = \alpha_0 \quad \text{se} \quad \left| \frac{-k}{g} \right| \leq 0.6 \quad \alpha^k = \alpha_1 \quad \text{se} \quad \left| \frac{-k}{g} \right| \leq 0.6 "$$

$$" \alpha^k = \alpha_1 \quad \text{se} \quad \left| \frac{-k}{g} \right| > 0.6 \quad \alpha^k = \alpha_0 \quad \text{se} \quad \left| \frac{-k}{g} \right| > 0.6 "$$

ÍNDICE GERAL

Página

AGRADECIMENTOS

RESUMO

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

PRINCIPAIS NOTAÇÕES

CAPÍTULO 1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS E OBJECTIVOS

1.1	Considerações gerais	1.1
1.2	Objectivo do trabalho	1.4
1.3	Referências	1.7

CAPÍTULO 2 - A OPTIMIZAÇÃO NO CONTEXTO DOS MATERIAIS COMPÓSITOS

2.1	Introdução	2.1
2.2	Estado da arte - Resenha bibliográfica	2.3
2.3	Referências	2.10

CAPÍTULO 3 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

3.1	Introdução	3.1
3.2	Subestruturação e variáveis de projecto	3.2
3.3	Função objectivo	3.3
3.4	Restrições	3.4
3.5	Definição do problema	3.5
3.6	Referências	3.8

CAPÍTULO 4 - ANÁLISE ESTRUTURAL

4.1	Introdução	4.1
4.2	Caracterização do elemento	4.2
	4.2.1 - Sistemas de coordenadas	4.4
	4.2.2 - Geometria do elemento	4.6
	4.2.3 - Parâmetros nodais e campo de deslocamentos	4.8
	4.2.4 - Definição das deformações	4.10
	4.2.5 - Relações constitutivas	4.11
	4.2.6 - Esforços generalizados	4.14
	4.2.7 - Matriz das deformações	4.16
	4.2.8 - Matriz de rigidez	4.17
	4.2.9 - Vector solicitação	4.18
	4.2.9.1 - Acções volúmicas	4.18
	4.2.9.2 - Acções gravíticas	4.18
	4.2.9.3 - Acções distribuídas na superfície	4.18
	4.2.10 - Correção do corte transversal	4.19
4.3	Integração numérica	4.19
4.4	Elementos utilizados	4.20
4.5	Referências	4.21

CAPÍTULO 5 - ANÁLISE DE SENSIBILIDADES

5.1	Introdução	5.1
5.2	Métodos para a determinação analítica das sensibilidades	5.2
	5.2.1 - Método do espaço resposta	5.4
	5.2.2 - Método da carga virtual	5.5
5.3	Análise de sensibilidades pelo método da estrutura adjunta	5.7
	5.3.1 - Equação de equilíbrio do sistema	5.7
	5.3.2 - Restrições	5.7
	5.3.3 - Sensibilidades das restrições g_j em ordem às variáveis de projecto	5.8
	5.3.3.1 - Restrições de deslocamentos	5.10
	5.3.3.2 - Restrições de tensões	5.12
	5.3.4 - Derivação analítica	5.19
	5.3.4.1 - Determinação dos termos $\frac{\partial \sigma_r}{\partial u_i}$	5.20
	5.3.4.2 - Determinação dos termos $\frac{\partial \sigma_r}{\partial x_j}$	5.21
	5.3.4.3 - Determinação das sensibilidades da matriz rigidez do elemento e	5.34
	5.3.4.4 - Determinação dos termos $\frac{\partial F_l}{\partial x_i}$ e $\frac{\partial F_{lm}}{\partial x_i}$	5.37
5.4	Referências	5.40

CAPÍTULO 6 - PROGRAMAÇÃO DA ANÁLISE DE SENSIBILIDADES

6.1	Introdução	6.1
6.2	Descrição do programa desenvolvido para a análise de sensibilidades	6.2
	6.2.1 - Estrutura do programa SENSY	6.2
	6.2.2 - Breve descrição das subrotinas do programa SENSY	6.6
6.3	Apresentação dos resultados	6.8
6.4	Análise dos resultados	6.13
6.5	Referências	6.15

CAPÍTULO 7 - MÉTODO DE OPTIMIZAÇÃO

7.1	Algoritmo de optimização em etapas múltiplas	7.1
7.2	1ª Etapa - Algoritmo 1	7.3
	7.2.1 - Método de pesquisa segundo a direcção de declive máximo	7.4
	7.2.2 - Método de pesquisa segundo direcções conjugadas	7.7
7.3	2ª Etapa - Algoritmo 2	7.12
7.4	Algoritmo principal	7.16
7.5	Condições de convergência	7.17
	7.5.1 - Condições de convergência local	7.17
	7.5.2 - Condições de convergência global	7.18
7.6	Referências	7.20

**CAPÍTULO 8 - PROGRAMAÇÃO DO MÉTODO DE OPTIMIZAÇÃO
E ANÁLISE DOS RESULTADOS**

8.1	Introdução	8.1
8.2	Programação do método de optimização	8.2
8.3	Apresentação e análise dos resultados	8.8
	8.3.1 - Exemplo nº 1 - Placa sujeita a pressão uniforme (dois macroelementos)	8.9
	8.3.2 - Exemplo nº 2 - Placa sujeita a pressão uniforme (três macroelementos)	8.20
	8.3.3 - Exemplo nº 3 - Casca cilíndrica sujeita a cargas pontuais	8.28
	8.3.4 - Exemplo nº 4 - Placa sujeita a cargas pontuais	8.42
8.4	Referências	8.49

CAPÍTULO 9 - CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE TRABALHO FUTURO

9.1	Resultados e conclusões	9.1
9.2	Perspectivas de trabalho futuro	9.3

Agradecimentos

Ao apresentar esta dissertação desejo exprimir o meu reconhecimento a todas as pessoas que, de alguma forma, contribuíram para a concretização dos objectivos alcançados. Gostaria no entanto mencionar em particular as pessoas ou entidades cuja contribuição foi decisiva no decorrer dos trabalhos realizados.

Aos supervisores deste trabalho, Prof.^s Doutores Alfredo Vieira Soeiro do Departamento de Engenharia Civil e António Torres Marques do Departamento de Engenharia Mecânica, o meu profundo reconhecimento e gratidão pelo apoio e estímulo, sempre manifestados. A orientação prestada nas áreas da optimização e dos materiais compósitos, foi fulcral.

A todos os professores do curso de Mestrado em Engenharia Estrutural o meu agradecimento pela formação proporcionada. Em especial desejo lembrar o Prof. Doutor Paulo Tavares de Castro pelo apoio e incentivo prestados.

O meu reconhecimento aos colegas da Secção de Matemática do Departamento de Engenharia Mecânica pelo ambiente de amizade e camaradagem que me proporcionaram. Às Prof.^{as} Doutoras Maria Teresa Arêde e Filomena Dias d'Almeida, assim como ao Eng. André Puga agradeço os valiosos comentários e sugestões.

Ao Eng. António Ferreira o meu agradecimento pelas facilidades concedidas na cedência de alguns códigos de elementos finitos e pelas sugestões de carácter prático relacionadas com a caracterização e modelação dos materiais compósitos laminados.

Na área dos elementos finitos, agradeço as sugestões do Prof. Doutor Carlos Magalhães de Oliveira do Departamento de Engenharia Mecânica e do Eng. Rui Faria do Departamento de Engenharia Civil.

O Eng. Mário Vaz deu-me a possibilidade de poder apresentar neste trabalho algumas representações gráficas fundamentais na análise dos resultados. Para ele a minha gratidão e amizade.

Desejo ainda agradecer ao colega Eng.^o Álvaro Azevedo do Departamento de Engenharia Civil as facilidades concedidas na utilização de alguns meios de representação gráfica.

À Isabel Cristina agradeço o talento e a dedicação manifestados no processamento do texto .

RESUMO

Neste trabalho desenvolvem-se códigos integrados de cálculo automático de análise e concepção, visando o projecto óptimo de estruturas dos tipos placa ou casca, construídas em materiais compósitos laminados.

Na análise estrutural recorre-se ao método dos elementos finitos, em particular ao elemento isoparamétrico de casca degenerado de elementos tridimensionais, com consideração de anisotropia e empilhamento.

Idealiza-se um método de optimização, baseado na análise de sensibilidades, num critério de optimalidade e na programação matemática. O algoritmo de optimização traduz-se pela repetição sequencial de dois níveis.

Os objectivos são a minimização do peso da estrutura e a maximização da eficiência, com restrições de tensão e de deslocamento.

Consideram-se como variáveis de projecto as espessuras dos macroelementos e as orientações das respectivas camadas. A solução óptima contempla também a sequência de empilhamento das camadas.

O modelo de análise de sensibilidades desenvolvido baseia-se na aplicação do método da estrutura adjunta ao elemento de casca degenerado.

No primeiro nível do algoritmo efectua-se a maximização da eficiência da estrutura através da pesquisa segundo direcções conjugadas, considerando como variáveis de projecto as orientações das camadas dos macroelementos e mantendo as espessuras constantes.

No segundo nível do algoritmo efectua-se a minimização do peso da estrutura através duma pesquisa unidireccional, obedecendo a um critério de optimalidade. A este nível as variáveis de projecto são as espessuras dos laminados dos macroelementos. Para as variáveis orientações das camadas, que se consideram constantes, toma-se a solução obtida após o primeiro nível.

É analisada a convergência do método e o seu desempenho através de diversos exemplos cujos resultados são comparados com outras soluções óptimas. Os resultados revelam que o algoritmo de optimização é convergente e robusto.

ABSTRACT

The scope of this work is the development of integrated automatic software coding of analysis and design aiming at the optimal design of shells and plates made of laminated composites.

The structural analysis is made with finite element theory, in particular the degenerated tridimensional isoparametric shell element, considering anisotropy and stacking.

A multiple stage optimization method was created, based on sensitivity analysis, optimality criteria and mathematical programming. The optimization algorithm performs a sequential repetition at two levels.

Structural weight minimization and efficiency maximization are the objectives with constraints of the stresses and of the displacements.

The design variables are the macroelement thicknesses and the layers angles. The optimal solution contemplates the layer stacking.

The developed sensitivity analysis model is based on the adjoint structure method of the degenerated shell element.

At the first algorithm level the efficiency maximization is performed through the search along conjugate directions, considering as design variables the macroelement layers angles and keeping constant thicknesses.

During the second algorithm level the structural weight minimization is performed with a directional search using an optimality criteria. At this level the design variables are the macroelement laminate thicknesses. The layers angles variables are kept constant starting with the solution of the first level.

The method convergence and performance are analyzed using several examples compared with other optimal solutions. The results show that the optimization algorithm is reliable and robust.

ÍNDICE DE FIGURAS

Página

CAPÍTULO 1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS E OBJECTIVOS

Figura 1.1	Comparação entre estruturas fabricadas em alumínio e materiais compósitos	1.2
Figura 1.2	Resistência específica (tensão/densidade) [2]	1.2
Figura 1.3	Resistência de fadiga relativa (tensão nominal/tensão de rotura) [2]	1.2

CAPÍTULO 4 - ANÁLISE ESTRUTURAL

Figura 4.1	Degeneração de elementos tridimensionais em elementos de casca	4.2
Figura 4.2	Parâmetros nodais do elemento de casca degenerada	4.3
Figura 4.3	Sistemas de coordenadas	4.5
Figura 4.4	Elemento parente de 8 nós para funções de forma	4.7
Figura 4.5	Deslocamentos dum ponto da "normal" no nó k	4.8
Figura 4.6	Sistema de eixos para definição das deformações	4.10
Figura 4.7	Sistemas de eixos principais material (1,2,3) e local (x',y',z')	4.13
Figura 4.8	Convenção de sinais para as tensões resultantes de membrana, flexão e corte	4.15
Figura 4.9	Ordenação das camadas através da espessura do laminado	4.16
Figura 4.10	Elemento quadrático Serendipity	4.20

CAPÍTULO 5 - ANÁLISE DE SENSIBILIDADES

Figura 5.1	Definição da matriz [B] para a cota ζ_i	5.32
------------	---	------

CAPÍTULO 6 - PROGRAMAÇÃO DA ANÁLISE DE SENSIBILIDADES

Figura 6.1	Estrutura do programa de análise de sensibilidades	6.4
Figura 6.2	Diagrama de fluxo do programa de análise de sensibilidade	6.5
Figura 6.3	Placa quadrada simplesmente apoiada sujeita a pressão uniforme	6.8

CAPÍTULO 7 - MÉTODO DE OPTIMIZAÇÃO

Figura 7.1	Diagrama de fluxo do algoritmo 1	7.11
Figura 7.2	Diagrama de fluxo do algoritmo 2	7.15
Figura 7.3	Diagrama de fluxo do algoritmo principal	7.16

CAPÍTULO 8 - PROGRAMAÇÃO DO MÉTODO DE OPTIMIZAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Figura 8.1	Diagrama de blocos do programa RITMO	8.2
Figura 8.2	Fronteiras possíveis entre macroelementos - nó i	8.5
Figura 8.3	Definição geométrica do problema, condições de carregamento, condições de fronteira. Subestruturação: 2 macroelementos	8.10
Figura 8.4	Variação da função objectivo (peso) - 1ª e 2ª etapas	8.12

Figura 8.5	Variação da restrição máxima - 1ª e 2ª etapas	8.12
Figura 8.6	Variação da razão incremental β_i - 2ª etapa	8.13
Figura 8.7	Variação das espessuras t_i - 1ª e 2ª etapas	8.13
Figura 8.8	Distribuição das espessuras na placa após o processo de optimização	8.14
Figura 8.9	Variação da função objectivo (peso), com permutação dos algoritmos 1 e 2	8.17
Figura 8.10	Variação da restrição máxima, com permutação dos algoritmos 1 e 2	8.17
Figura 8.11	Variação das espessuras t_i com permutação dos algoritmos 1 e 2	8.18
Figura 8.12	Definição geométrica do problema, condições de carregamento e condições de fronteira. Subestruturação: 3 macroelementos	8.20
Figura 8.13	Variação da função objectivo (peso) - 1ª e 2ª etapas	8.21
Figura 8.14	Variação da restrição máxima - 1ª e 2ª etapas	8.22
Figura 8.15	Variação da razão incremental β_i - 2ª etapa	8.22
Figura 8.16	Variação das espessuras t_i - 1ª e 2ª etapas	8.23
Figura 8.17	Distribuição das espessuras após 9 iterações do processo de optimização (5 iterações algoritmo 2)	8.23
Figura 8.18	Distribuição das espessuras no fim processo de optimização (9 iterações algoritmo 2)	8.24
Figura 8.19	Campo de deslocamentos inicial	8.24
Figura 8.20	Campo de deslocamentos no fim do processo de optimização	8.25

Figura 8.21	Definição geométrica do problema, condições de carregamento e condições de fronteira. Subestruturação: 4 macroelementos	8.28
Figura 8.22	Variação da função objectivo (peso) - 1ª fase	8.30
Figura 8.23	Variação da função objectivo (peso) - 2ª fase	8.30
Figura 8.24	Variação da função objectivo (peso) - 3ª fase	8.31
Figura 8.25	Variação da função objectivo (peso) - 4ª fase	8.31
Figura 8.26	Variação da restrição máxima - 1ª fase	8.33
Figura 8.27	Variação da restrição máxima - 2ª fase	8.33
Figura 8.28	Variação da restrição máxima - 3ª fase	8.34
Figura 8.29	Variação da restrição máxima - 4ª fase	8.34
Figura 8.30	Variação das espessuras t_i - 1ª fase	8.36
Figura 8.31	Variação das espessuras t_i - 2ª fase	8.36
Figura 8.32	Variação das espessuras t_i - 3ª fase	8.37
Figura 8.33	Variação das espessuras t_i - 4ª fase	8.37
Figura 8.34	Distribuição das espessuras na casca (planificada) após a 2ª fase do processo de optimização	8.38
Figura 8.35	Distribuição das espessuras na casca (planificada) no fim do processo de optimização	8.38
Figura 8.36	Campo de deslocamentos da casca no fim do processo de optimização	8.39
Figura 8.37	Caracterização geométrica do problema. Subestruturação: 3 macroelementos	8.43

Figura 8.38	Varição da função objectivo (peso) - 1ª e 2ª etapas	8.45
Figura 8.39	Varição da restrição máxima - 1ª e 2ª etapas	8.45
Figura 8.40	Varição das espessuras t_i (x 10 mm) - 1ª e 2ª etapas	8.46
Figura 8.41	Varição das sensibilidades da restrição máxima relativamente às variáveis de projecto - 1ª e 2ª etapas	8.46
Figura 8.42	Distribuição óptima das espessuras na placa	8.47
Figura 8.43	Campo de deslocamentos no fim do processo de optimização	8.47

ÍNDICE DE TABELAS

Página

CAPÍTULO 5 - ANÁLISE DE SENSIBILIDADES

Tabela 5.1	Transformação de constantes elásticas	5.23
Tabela 5.2	Transformação de constantes elásticas de corte	5.23
Tabela 5.3	Transformação de constantes elásticas (derivação)	5.24
Tabela 5.4	Transformação de constantes elásticas de corte (derivação)	5.25
Tabela 5.5	Transformação dos parâmetros do critério de fractura	5.37
Tabela 5.6	Transformação dos parâmetros do critério de fractura	5.37
Tabela 5.7	Transformação dos parâmetros do critério de fractura (derivação)	5.38
Tabela 5.8	Transformação dos parâmetros do critério de fractura (derivação)	5.38

CAPÍTULO 6 - PROGRAMAÇÃO DA ANÁLISE DE SENSIBILIDADES

Tabela 6.1	Sensibilidades da restrição máxima de deslocamento relativamente às variáveis de projecto θ_i (orientação da camada i , $i=1,...,9$)	6.10
Tabela 6.2	Sensibilidades da restrição máxima de tensão relativamente às variáveis de projecto θ_i (orientação da camada i , $i=1,...,9$)	6.11
Tabela 6.3	Sensibilidades das restrições máximas de deslocamento e de tensão relativamente às variáveis de projecto t_m (espessura do macroelemento, $m=1$)	6.11

Principais Notações:

$A; dA$	Área de um elemento finito; elemento de área
$[A]; A$	Matriz Hessiana
$[B]; [B]_i$	Matriz de deformações; matriz de deformações da camada i
$[D]$	Matriz de elasticidade no sistema de eixos materiais (1, 2, 3)
$[D']$	Matriz de elasticidade no sistema de eixos locais (x', y', z')
$[D_1]; [D_2]$	Matriz de elasticidade de membrana e de flexão; corte
$[D]_i$	Matriz de elasticidade da camada i
d^k	Direcção de pesquisa na iteração k
$\det [J]$	Determinante do Jacobiano
E	Módulo de Young
E_1	Módulo de Young na direcção 1 (longitudinal)
E_2	Módulo de Young na direcção 2 (transversal)
$\{F\}$	Vector de forças exteriores aplicadas ao sistema estrutural
$F(\{\theta\})$	Função objectivo da primeira etapa (algoritmo 1)
F_{lm}, F_1	Parâmetros de resistência material do critério de fractura
$\{f\}$	Vector de forças nodais
G_{12}	Módulo de corte do plano 12 (xy)
g_j	Restrição j
$\bar{g}$	Restrição de maior valor relativo
$\bar{g}_{dis}$	Restrição máxima de deslocamento
$\bar{g}_{str}$	Restrição máxima de tensão

$\{g\}$	Vector de acções gravíticas
h	Espessura
$[J]$	Matriz Jacobiana
$[K]$	Matriz de rigidez do sistema
$[K]^e$	Matriz de rigidez do elemento
L_{tot}	Número de camadas dos laminados dos macroelementos
l^k	Passo na iteração k
M	Número de macroelementos
$\{M\}$	Vector dos esforços generalizados de flexão (momentos)
M_x	Momento flector no plano xz
M_y	Momento flector no plano yz
M_{xy}	Momento flector no plano xy
M_z	Momento torsor em torno do eixo z
nc	Número de camadas
$\bar{N}$	Número total de variáveis do tipo orientações das camadas
N_{dis}	Número total de restrições de deslocamento
N_{elem}	Número total de elementos finitos da estrutura
N_g	Número total de restrições
N_i	Função interpoladora correspondente no nó i
N_m	Número de camadas do macroelemento m
N_{str}	Número total de restrições de tensão
N_{var}	Número total de variáveis de projecto
$[N]$	Matriz contendo as funções de interpolação N_i

$\{N\}$	Vector dos esforços generalizados de membrana
N_x, N_y	Esforços segundo a direcção x, y
Q_{ij}	Constantes elásticas da camada genérica no referencial material
$\{Q\}$	Vector dos esforços generalizados de corte
$\{Q_j\}$	Vector de cargas virtuais
P_{int}	Número de pontos de integração
R_k	Parâmetro de resistência no ponto genérico k
R_0	Coefficiente de segurança da estrutura (tensões)
t	Espessura
$t_i; t_m$	Espessura da camada i ; espessura do macroelemento m
$\{t\}$	Vector global das variáveis espessuras dos macroelementos
$\{t_0\}$	Vector global das variáveis espessuras no início da primeira etapa
$[T]$	Matriz de transformação dos sistemas de eixos materiais e locais
u, v, w	Deslocamentos num ponto no referencial global
u', v', w'	Deslocamentos num ponto no referencial local
u_r	Deslocamento genérico do grau de liberdade r do sistema
u_0	Deslocamento máximo admissível
$\{u\}$	Vector de deslocamentos do sistema estrutural
$\{u^e\}$	Vector de deslocamentos reais do elemento
$\{u^{Q_j}\}$	Vector de deslocamentos virtuais
V, dV	Volume; elemento de volume
$W(\{t\})$	Função objectivo global peso da estrutura
X^k	Vector das variáveis de projecto na iteração k

$\{x\}$	Vector global das variáveis de projecto
x_i	Variável de projecto genérica
$\{x_i^k\}$	Vector das coordenadas do ponto i (referencial global), na iteração k
$\{x_i^0\}$	Vector das coordenadas iniciais do ponto i (referencial global)
x, y, z	Coordenadas globais de um ponto
α^k	Parâmetro de controlo da convergência (algoritmo 2) na iteração k
β_j^k	Razão incremental correspondente à variável j, na iteração k
δ	Parâmetro da condição de convergência local do algoritmo 2
$\bar{\delta}$	Parâmetro da convergência global C_2
$\{\delta\}$	Vector deslocamento de um ponto
Δx_i	Variação da variável x_i
$\epsilon_{\text{máx}}$	Deformação máxima admissível
$\{\epsilon\}$	Tensor das deformações
ϵ	Parâmetro da convergência local do algoritmo 1
$\bar{\epsilon}$	Parâmetro da convergência global C_1
$\underline{\epsilon}; \{\epsilon'\}$	Tensor das deformações no referencial local
$\{\phi_j^e\}$	Vector de deslocamentos adjuntos do elemento e associados à restrição j
$\{\phi_j\}$	Vector de deslocamentos adjuntos associados à restrição j
∇F^k	Gradiente da função F na iteração k
$\{\nabla g_j\}$	Vector das sensibilidades da restrição j relativamente às variáveis de projecto
ν	Coefficiente de Poisson
ν_{12}	Coefficiente de Poisson no plano 12
Ω_k	Área superficial do macroelemento k

ρ_k	Peso específico do material do macroelemento k
$\{\sigma\}$	Tensor das tensões
$\{\sigma'\}$	Tensor das tensões no referencial local
σ_x, σ_y	Tensões normais
σ_1, σ_2	Tensões normais no referencial do laminado
σ_6	Tensão de corte no referencial do laminado
$\sigma_{m\acute{a}x}$	Tensão máxima admissível
τ_{xy}	Tensão tangencial
τ_{xz}	Tensão transversal de corte no plano XZ
τ_{yz}	Tensão transversal de corte no plano YZ
$[\theta]$	Matriz de transformações entre os sistemas de eixos globais e locais
$\theta_{i, m}$	Orientação da camada i do macroelemento m
$\{\theta\}$	Vector global das variáveis orientações das camadas dos macroelementos
$\left\{ \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\}$	Sensibilidade do vector de forças aplicadas ao sistema
$\frac{dg_j}{dx_i}$	Sensibilidade da restrição j relativamente à variável de projecto i
$\frac{\partial g_j}{\partial x_i}$	Derivada parcial da restrição j relativamente à variável de projecto i
$\left\{ \frac{\partial g_j}{\partial u} \right\}$	Vector de forças adjuntas
$\left[\frac{\partial K}{\partial x_i} \right]$	Sensibilidade da matriz de rigidez do sistema

$$\left[\frac{\partial K^e}{\partial x_i} \right]$$

Sensibilidade da matriz de rigidez do elemento que contém a variável i

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial u_i^e}$$

Derivada parcial da componente r do tensor das tensões relativamente à componente i do vector de deslocamentos do elemento e

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial x_j}$$

Derivada parcial da componente r do tensor das tensões relativamente à variável de projecto j

Capítulo

1

CONSIDERAÇÕES GERAIS E OBJECTIVOS

1.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS

Os materiais compósitos nas suas formas mais simples sempre estiveram presentes nos processos produtivos da humanidade, mas podemos considerar que a utilização racional e científica destes materiais é relativamente recente.

Com efeito, a era moderna dos materiais compósitos, e em particular dos plásticos reforçados com fibras, tem o seu início após a Segunda Guerra Mundial e o seu advento dá-se com a utilização nas indústrias aeronáutica e aeroespacial, onde se expandiu rapidamente passando pela aplicação em acessórios, em componentes estruturais secundários e em componentes de grande responsabilidade estrutural, como sejam por exemplo as asas dos aviões [1].

As vantagens destes materiais quando comparadas com o alumínio e o titânio, materiais tradicionais na indústria aeronáutica, são numerosas. São de realçar as seguintes:

- a) a redução potencial do peso estrutural (fig. 1.1), devido à sua elevada resistência específica e excelentes propriedades de fadiga (fig. 1.2),
- b) as potencialidades para a redução dos ciclos produtivos e dos custos de produção, essencialmente devido ao reduzido número de partes móveis e ligações exigidas (fig. 1.3) e a redução dos custos de manutenção.

	Estruturas tipo "aileron"		Estruturas tipo alheta	
	Alumínio	Compósito	Alumínio	Compósito
Peso (N)	622.3	477.7	3816.6	2855.7
% Peso Compósito	5.8	61.9	0	76
Peso Economiz. (N)	--	144.6	--	960.8
% Peso Economizado	--	23.2	--	25.2
Nº de partes (excl. ligações)	398	205	716	201

Fig. 1.1 - Comparação entre estruturas fabricadas em alumínio e materiais compósitos [2].

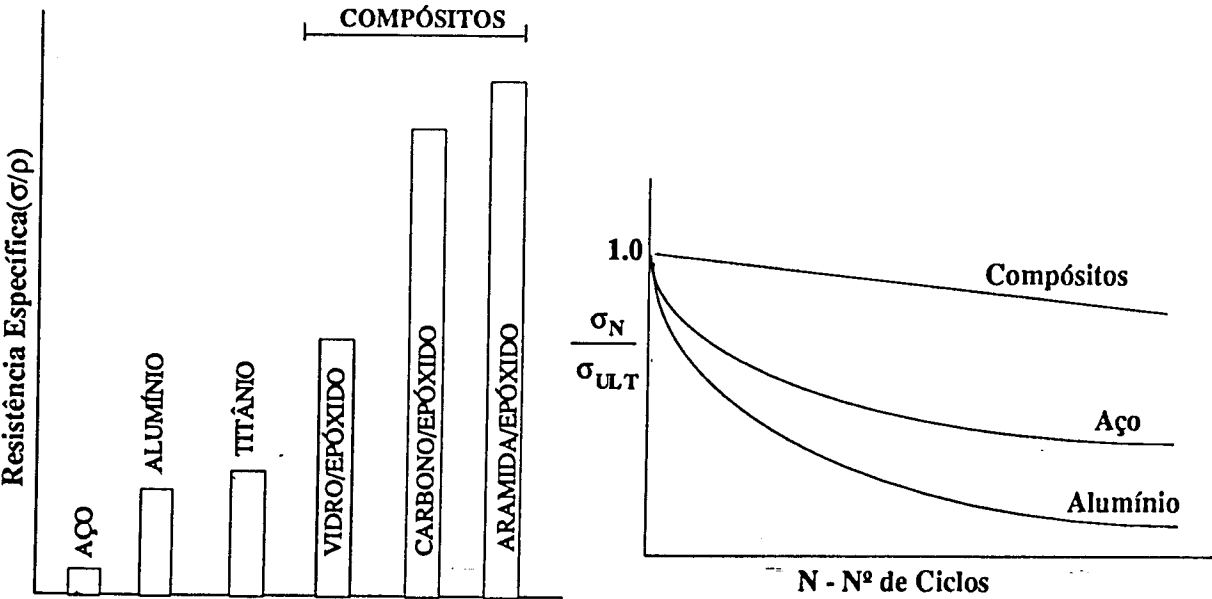


Fig.1.2 - Resistência específica (tensão / densidade) [2].

Fig. 1 - Resistência de fadiga relativa (tensão nominal / tensão de rotura) [2].

Outra vantagem dos materiais compósitos, ainda mais relevante que as anteriormente citadas, é a sua capacidade inata para a fabricação por medida do material laminado. Isto porque determinado comportamento estrutural pode ser induzido, isto é, o projectista tem o poder de idealizar o material tal como cria a estrutura.

Esta flexibilidade adicional de “design” que estes materiais apresentam, provêm das propriedades (direccionais) das fibras que os constituem. Orientando simplesmente as fibras segundo ângulos prescritos e seleccionando de forma apropriada a sequência de empilhamento das camadas, pode-se construir um material que tem a resistência e a rigidez desejadas, segundo direcções específicas. A manipulação adequada, sob o ponto de vista técnico, das variáveis de projecto acima enunciadas - orientações e sequências de empilhamento - proporciona a adaptação do material às condições de solicitação e trabalho, propriedade “sui generis” dos materiais compósitos [3].

As extraordinárias propriedades demonstradas pelos materiais quando apresentados sob a forma de fibra e a possibilidade de livre escolha da matriz base, de forma a “preparar” as propriedades do compósito da forma mais conveniente, têm sido os factores impulsionadores do rápido crescimento de aplicações dos materiais compósitos e da sua expansão a outras áreas para além das indústrias aeronautica e aeroespacial. Estão neste contexto, a indústria automóvel, a indústria eléctrica, a construção civil, etc., áreas habitualmente dominadas pelos materiais tradicionais mas que não têm resistido à sedução criada pela utilização dos materiais compósitos [4].

Reflectindo de certa forma a metamorfose evolutiva registada ao nível das aplicações, o esforço de investigação efectuado e o grau de responsabilidade exigido, os materiais de reforço utilizados nas diferentes áreas tem sido diversificados. Assim nas indústrias aeroespacial e aeronáutica têm sido utilizados de forma preferencial os designados “compósitos avançados” (advanced composite materials) onde aparecem como elementos de reforço as fibras de boro, carbono, grafite, aramídicas, carboneto de silício, “wiskers”, etc.. Nos restantes segmentos industriais o elemento reforçador tem sido predominantemente a fibra de vidro (PRF), embora se note um incremento assinalável das aplicações com as fibras de carbono e aramídicas, bem como dos compósitos híbridos [3].

Depreende-se que, a natureza das fibras e das matrizes, a forma e as dimensões das fibras, o estado em que a ligação reforço / matriz é efectivada, o próprio processo de fabrico e os agentes nele intervenientes, condicionam a qualidade do material e as suas propriedades.

Contrariamente aos materiais homogéneos isotrópicos, um material compósito manifesta geralmente comportamento heterogéneo, ortotrópico ou anisotrópico. Assim, um

estudo rigoroso destes materiais envolve domínios da micromecânica e da macromecânica. No primeiro analisa-se a interacção dos constituintes materiais à escala microscópica enquanto no segundo estuda-se o mesmo comportamento, mas neste caso as propriedades mecânicas dos materiais são analisadas à escala macroscópica, assumindo valores que são a média ponderada das propriedades dos diversos constituintes. É neste âmbito que se situam os laminados ou estratificados em que as propriedades de cada camada são consideradas bem definidas resultando da aplicação, por exemplo, da lei das misturas.

Os laminados ou estratificados são materiais compósitos formados por duas ou mais camadas sendo estas constituídas por uma matriz cujo estado de apresentação é variável, reforçada por um tecido unidireccional, bidireccional ou multidireccional. A constituição de cada camada, a orientação das fibras e sequência de empilhamento das camadas determinam as propriedades do laminado.

A análise da interacção das camadas e o seu efeito no comportamento global da estrutura é, todavia, um processo complexo e moroso. Para além disto, muitas das restrições de projecto habituais, tais como limites de tensão e de deformação, são funções não lineares das variáveis de projecto (espessura e orientação de cada camada e sequência de empilhamento das camadas). Como consequência deste facto não é simples formular regras práticas de dimensionamento ou usar a intuição do projectista como um guia fiável no projecto. Este facto tem limitado, no passado, o trabalho dos projectistas a determinadas orientações e sequências de empilhamento cuja influência no comportamento mecânico dos estratificados é bem conhecida e facilmente compreendida, e desta forma, em muitas circunstâncias, não se tem esgotado todo o potencial destes materiais.

A utilização de modernas técnicas de optimização combinadas com alguns métodos de análise estrutural apropriados para materiais compósitos têm tornado o projecto assistido por computador uma solução atractiva para o problema do dimensionamento dos materiais compósitos.

1.2 OBJECTIVO DO TRABALHO

Genèricamente, este trabalho tem como objectivo a idealização e implementação de um sistema interactivo de análise e concepção de estruturas em materiais compósitos, que assegure uma utilização eficiente e racional do material na estrutura dentro dos limites prescritos pelo projectista. Entende-se por utilização eficiente do material aquela que pode ser traduzida no custo mínimo do material utilizado na estrutura, o que no caso concreto anda

associado ao peso mínimo da estrutura (por serem quantidades proporcionais).

No seu todo este sistema deve ser interpretado como uma ferramenta à disposição do projectista com a finalidade de contornar as dificuldades subjacentes à complexidade, morosidade e à repetição dos cálculos inerentes à obtenção de um projecto estrutural óptimo.

Tem-se verificado que os requisitos básicos de um projecto optimizado, são a escolha adequada da função objectivo, das restrições e das variáveis de projecto e a selecção criteriosa dos algoritmos de optimização (em alguns casos com recurso a uma análise de sensibilidades exacta e computacionalmente económica).

Nestas condições, é dada no Capítulo 2 uma visão global do estado da arte no que concerne à optimização de estruturas em materiais compósitos, focando os itens citados no parágrafo anterior. Esta panorâmica é essencial para uma compreensão das alternativas para o problema em análise.

É estabelecida no Capítulo 3 a formulação do problema, definindo-se a função objectivo, as constricções, as variáveis de projecto e a filosofia geral de resolução do problema de optimização.

Este trabalho é dirigido fundamentalmente a estruturas contínuas dos tipos placa e casca fabricadas em materiais compósitos de matriz polimérica reforçados com fibras de tecido (essencialmente) unidireccional. Assim, em termos de análise estrutural a filosofia de trabalho baseia-se no elemento de casca degenerado (elemento de Amahd), apropriado para cascas moderadamente espessas. É feita no Capítulo 4 uma apresentação, em termos gerais, da formulação do elemento em causa.

Uma das partes mais importantes deste trabalho, e à qual foi dada ênfase particular, é a análise de sensibilidades. Esta matéria é de conteúdo valioso quer quando se utilizam algoritmos de optimização baseados em critérios de optimalidade ou programação matemática, quer quando se trabalha com aproximações das constricções ou da função objectivo. É vantagoso conhecer o comportamento das restrições quando se alteram as variáveis de projecto. Neste trabalho, as sensibilidades das restrições relativamente às variáveis de projecto são calculadas por recurso a um método analítico, o método da estrutura adjunta. No Capítulo 5, para além duma breve referência aos restantes métodos analíticos, efectua-se o desenvolvimento teórico da análise de sensibilidades pelo método da estrutura adjunta, especificamente para o elemento de casca degenerado.

A perda de generalidade devida à especificidade da dedução, é largamente compensada, conforme se justificará posteriormente, pelos ganhos conseguidos em termos de tempo de cálculo computacional (CPU). Apresentam-se no Capítulo 6 os resultados referentes à

validação do modelo de análise de sensibilidades implementado, comparando-se com os resultados obtidos pelo método das diferenças finitas (método numérico).

É apresentado no Capítulo 7 o método de optimização, respectivos algoritmos e condições de convergência.

É descrito no Capítulo 8 o programa de optimização e é efectuada a apresentação dos resultados, juntamente com a sua análise comparativa.

Apresentam-se no Capítulo 9 as conclusões e as perspectivas de desenvolvimento futuro.

Procurou-se imprimir a este trabalho dois aspectos que o autor considera fundamentais:

- um certo pragmatismo de utilização nas soluções apresentadas,
- simplicidade teórica dos modelos desenvolvidos explorando heurísticamente, as propriedades especiais exibidas pelos materiais compósitos.

Com efeito, é ineficiente insistir em modelos teóricos de optimização, mais ou menos complexos, exaustivos e morosos, quando na realidade a precisão dos resultados e a concretização das soluções propostas são ultrapassados pelo aparecimento de fenómenos físicos subjacentes à natureza dos materiais compósitos e pela pouca generalidade que predomina na maioria dos modelos de análise estrutural aplicáveis a estes materiais.

1.3 REFERÊNCIAS

[1]

Castro, P. M. S. T., Marques, A. T., "Tendencies and needs for R&D in composites", final report of European Atomic Energy Community, contract N° 320105, 1991

[2]

Watkins, R. I., "Multilevel optimum design of large laminated composite structures" Ph. D. Thesis, 1986

[3]

Marques, A. T., "Estratégia de desenvolvimento dos materiais compósitos em Portugal", Conferência na Ordem dos Engenheiros, Dezembro, 1988

[4]

Visconti, C. I., Esposito, R., Langella, A., Baldi, A., "Manufacturing report", Composites Manufacturing, Vol. 1, N° 1, March, 1990

Capítulo

2

A OPTIMIZAÇÃO NO CONTEXTO DOS MATERIAIS COMPÓSITOS

2.1 - INTRODUÇÃO

A aplicação crescente das técnicas de optimização ao projecto estrutural é uma actividade com cerca de três décadas de existência; embora em termos científicos seja muito anterior, pois por exemplo, já no fim do século XIX, Maxwell fê-lo utilizando a teoria dos campos de tensão. Todavia, a grande maioria deste trabalho tem sido limitada a actividades de investigação dirigidas para o desenvolvimento de métodos, implementação de algoritmos, e o estudo das suas capacidades e limitações.

A maioria dos trabalhos desenvolvidos em optimização estrutural tem como base estruturas fabricadas em materiais isotrópicos e as resenhas bibliográficas feitas por alguns autores como Ashley [1], Schmit [2] e Vanderplaats [3] oferecem numerosas referências sob

os pontos de vista teórico e prático. Formalmente, o problema reduz-se ao dimensionamento do peso mínimo, parâmetros de resposta, de forma, custo, sujeitos a limites de tensões, deslocamentos, vibrações, estabilidade estática ou aeroelástica, resposta dinâmica e de grandeza das variáveis. As variáveis de projecto típicas são dimensões dos componentes estruturais.

Embora no contexto deste trabalho apenas seja considerado o caso das estruturas em regime linear, uma vez que se considera a plastificação das matrizes poliméricas como um factor introdutor de defeitos de consequências imprevisíveis, a optimização em regime plástico constitui uma importante escola, sendo de considerar em Portugal o trabalho desenvolvido por T. Freitas.

Na área das estruturas em materiais compósitos de matriz polimérica, as variáveis de projecto incluem as espessuras das camadas (ou o número de camadas) e ocasionalmente as orientações das camadas. Em certos casos, o número de camadas é tratado como uma variável discreta mas, em geral, é considerado como uma variável contínua a qual é então arredondada para o número inteiro de camadas imediatamente superior quando se atinge a solução óptima.

A consideração da orientação das camadas como uma variável de projecto introduz uma relativa complexidade na medida em que a função objectivo (o peso) não depende das orientações das camadas mas essa dependência existe para as restrições. Mais importante do que isto é a constatação, através das relações constitutivas, de que o tratamento das orientações das camadas como variáveis de projecto introduz um mínimo relativo no problema da optimização [4], visto que para uma dada sequência de orientações das camadas existe um mínimo para função objectivo peso da estrutura.

Finalmente, a sequência de empilhamento não tem sido considerada como uma parte integrante do problema da optimização, porque introduz aspectos combinatoriais ao problema que ainda não são bem compreendidos, como por exemplo a interacção entre as fibras das camadas, a influência em termos de comportamento relativamente à resistência à fadiga, etc.

Nestas condições, torna-se evidente que as contrapartidas resultantes do processo de optimização de estruturas em materiais compósitos deverão ser tão importantes que justifiquem o esforço necessário à sua concretização. Para começar, existe pouca experiência adquirida que possa ser usada "a priori", resultante da introdução recente dos materiais compósitos ao nível estrutural e da sua grande variedade. Além disso, o número de variáveis de projecto é substancialmente superior ao das estruturas isotrópicas e a sua interacção relativamente desconhecida, limitando mais uma vez a possibilidade de agir em conformidade com o conhecimento físico do problema e a experiência existente.

Mais importante ainda é o facto da optimização nos providenciar uma ferramenta com a qual é possível seleccionar de uma maneira eficiente as propriedades estruturais. Registe-se que a optimização pode ser utilizada para definir as propriedades fibra/matriz, se for possível uma análise computacional adequada. Todavia, a generalidade dos investigadores considera que as propriedades dos estratificados são bem conhecidas e que é possível aplicar um critério de rotura de forma rentável.

2.2 - ESTADO DA ARTE - RESENHA BIBLIOGRÁFICA

Entre os pioneiros na adaptação e aplicação das técnicas de optimização a estruturas em materiais compósitos estão Khot et al. [5] e Schmit e Farshai [6]. Os seus trabalhos revelam duas facetas importantes na optimização dos materiais compósitos. Khot descreve métodos aplicáveis a grandes estruturas utilizando como método de análise estrutural o método dos elementos finitos e o trabalho de Schmit é dirigido no sentido do dimensionamento óptimo de painéis estruturais.

Passando em revista a literatura relacionada com a optimização de materiais compósitos constatamos, curiosamente, que pode ser rapidamente classificada em dois grandes campos incluindo ambos os dois aspectos atrás referidos.

É sem dúvida comparativamente maior o número de trabalhos envolvendo a optimização de componentes estruturais, podendo este facto ser atribuído ao menor esforço computacional exigido para este caso.

Seguindo a filosofia sugerida anteriormente, passam-se a citar e a descrever alguns dos trabalhos inscritos na área da optimização dos componentes estruturais em materiais compósitos:

- **Massard [7],**

descreve um método que inclui restrições com critérios de resistência, e esforços de membrana e de flexão, sendo as variáveis de projecto o número de camadas e as orientações das camadas.

- **Flanagan [8],**

apresenta um método que utiliza uma variante da técnica do gradiente para dimensionar um estratificado sujeito apenas a cargas no plano variando o número de camadas com determinada orientação ou variando as orientações para um determinado número de camadas.

- Park [9], [10],

considera como variáveis de projecto as espessuras das camadas e os respectivos ângulos para dimensionar painéis visando obter o peso mínimo quando sujeitos a cargas no plano e inclui restrições de tensão e rigidez.

- Schmit e Farshi [11],

utiliza o método da programação linear sequencial para otimizar um painel em estratificado, considerando sómente cargas no plano. Considera restrições de encurvadura, resistência e rigidez. As variáveis de projecto são as espessuras das camadas permanecendo as orientações fixas, durante o processo de optimização.

- Tauchert e Adibhatla [12], [13],

investigaram utilizando uma variante do método quasi-Newton diferentes tipos de painéis optimizados e deduziram métodos tendo como objectivo o dimensionamento de placas laminadas simétricas visando o máximo de rigidez [12] e de resistência à flexão [13], variando as espessuras das camadas e as respectivas orientações. O peso do painel não é considerado mas limita-se no entanto a espessura total.

- Stroud et al. [14], [15],

efectuam o dimensionamento visando o peso mínimo de painéis em compósito, rigidificados uniaxialmente e sujeitos a cargas combinadas no plano. É utilizada a programação matemática não linear (métodos das direcções admissíveis) para obter uma solução óptima. As variáveis de projecto são as espessuras das camadas e respectivas orientações, o espaçamento entre os rigidificadores, a largura e espessura respectivas.

- Mc Keown [16],

aborda aspectos diferentes do dimensionamento óptimo de painéis em materiais compósitos como, por exemplo, o número máximo de camadas em estado plano de tensão em bandas optimizadas destes materiais.

- Adali [17], [18], [19],

desenvolve técnicas de análise de sensibilidades [17] e métodos de optimização multiobjectivo (minimizando a flecha máxima com solicitação dinâmica e maximizando as frequências naturais) para laminados antisimétricos [18]. O mesmo autor [19] optimiza laminados simétricos sujeitos a cargas cíclicas no plano, carga de rotura sob fadiga, considerando como variáveis de projecto as espessuras das camadas e o teor de fibras do laminado.

- Liao, Sung e Thompson [20],

efectuam o dimensionamento óptimo de vigas em estratificados simétricos considerando a rigidez e amortecimento. As variáveis de projecto são as orientações das camadas, a sequência de empilhamento e as espessuras das camadas que constituem o laminado. É utilizado um algoritmo de optimização baseado em programação quadrática sequencial.

- Shin, Haftka et al. [21],

abordam a questão da influência da sequência de empilhamento na optimização de placas de laminados simétricos visando a carga máxima de encurvadura. A análise estrutural é baseada no método dos elementos finitos. Utilizam as condições de optimalidade e o método das transformações por homotopia para obterem uma solução óptima. As variáveis de projecto são as espessuras das camadas do estratificado.

- Miki e Tonomura [22],

tratam o problema de optimização de placas em estratificados do tipo sanduiche (híbridos), sujeitas a compressão axial. O objectivo do problema é a minimização do custo o que, segundo o autor, corresponde a maximizar as dimensões relativas do núcleo do estratificado, com espessura total considerada fixa. As variáveis de projecto são as orientações (balanceadas) das camadas que constituem a pele da sanduíche e a restrição é a resistência à encurvadura previamente determinada.

- **Ling e Zukang [23],**

obtêm o projecto óptimo de painéis em compósito utilizados na indústria aeronáutica com restrições de fiabilidade estrutural. A função objectivo é o peso (a minimizar) e as variáveis de projecto são o número de camadas com determinada orientação. As restrições são a fiabilidade estrutural do estratificado e ainda, por considerações de natureza constructiva, o teor mínimo de camadas orientadas a 90° .

- **Reiss e Ramachandran [24],**

consideram o problema da optimização de placas simétricas ortotrópicas baseado na maximização da frequência fundamental. As variáveis de projecto são as orientações das camadas que constituem o laminado.

- **Soares et al. [25], [26],**

abordam o problema da análise de sensibilidades de estruturas do tipo placa constituídas por materiais compósitos [25]. O método utilizado é um método semianalítico. As variáveis de projecto são as orientações das camadas e são consideradas restrições de deslocamentos, das tensões efectivas e das frequências naturais. O mesmo autor [26] trata ainda o problema da identificação das propriedades de placas de compósito recorrendo à análise das respectivas frequências próprias associadas a técnicas de optimização.

A literatura publicada revela que é consideravelmente menor o caudal de trabalhos envolvendo grandes estruturas fabricadas em materiais compósitos e possuindo um grande número de elementos. Entre os trabalhos efectuados nesta área destacam-se os seguintes:

- **Khot [27],**

desenvolveu um programa (OPTCOMP) baseado num critério de optimalidade obtido assumindo que a densidade de energia de deformação é igual para qualquer grupo de camadas quando a espessura do estratificado atinge o seu valor mínimo (i.e. peso mínimo). Nestas condições o número de camadas é ajustado de uma forma iterativa, permanecendo fixas as espessuras e as orientações das camadas. São incluídas restrições de encurvadura.

- **Mc Keown [28], [29],**

descreve um novo método de optimização em níveis múltiplos em que as variáveis são os deslocamentos nodais obtidos a partir do modelo de elementos finitos. O método revelou-se complexo e ineficiente para alguns tipos de restrições.

- **Starnes e Haftka [30],**

desenvolveram um programa de optimização estrutural adaptado a materiais compósitos (WIDOMAC) em que as variáveis de projecto consideradas são as espessuras das camadas (orientações fixas), sendo a técnica de optimização utilizada a das funções penalidade. As restrições admitidas consideram as tensões, os deslocamentos, torção e encurvadura.

- **Sobieski [31],**

desenvolve um processo utilizado no dimensionamento de estruturas aerospaciais baseado na análise por elementos finitos e na programação matemática. As variáveis de projecto são as espessuras das camadas e respectivas orientações, satisfazendo restrições de tensão e de deslocamento. O método apresenta o inconveniente de ser apenas aproximado visto que exige a decomposição do problema de optimização segundo os elementos da estrutura.

- **Schmit e Mehrinfar [32],**

efectuaram trabalho na área do dimensionamento de estruturas aeronauticas considerando restrições de tensão, deslocamento e encurvadura. As variáveis de projecto são as espessuras das camadas.

- **Stroud [33],**

aborda os aspectos relacionados com a influência de condições secundárias não consideradas no âmbito do projecto optimizado, e das imperfeições de fabrico, sugerindo técnicas que contemplem nesta fase os problemas potenciais decorrentes.

- Eschenauer [34],

trata o problema do dimensionamento óptimo de cascas esféricas construídas em materiais compósitos. Utiliza para o efeito uma função multiobjectivo considerando, simultâneamente, a minimização do deslocamento máximo e do peso ou a minimização da tensão máxima e do peso. As variáveis de projecto são as espessuras das camadas, respectivas orientações e o teor volúmico de fibras.

- Weiji e Baohua [35],

desenvolveram um processo de optimização em dois níveis para obtenção do peso mínimo de estruturas em compósitos. As variáveis de projecto a nível do sistema, são as espessuras dos estratificados. A nível do componente, assumindo uma espessura constante do estratificado e deslocamentos nodais invariantes, as espessuras das camadas são ajustadas de acordo com um critério energético.

- Watkins [36],

desenvolve um processo de optimização em vários níveis de grandes estruturas em materiais compósitos considerando como variáveis de projecto as espessuras das camadas e respectivas orientações. No nível inferior utiliza uma função objectivo multicritério, que combina uma função peso e uma função variação de energia de deformação, numa única função a minimizar (objectivos pesados). A minimização da variação da energia de deformação a este nível, assegura segundo o autor, o desacoplamento entre os dois níveis. A nível superior a função objectivo é o peso da estrutura. As restrições consideradas são de deformação, de encurvadura, de deslocamento e de grandeza das variáveis. Utiliza a programação linear sequencial.

- Sadr et all [37],

desenvolveram e implementaram um programa de optimização de estruturas em materiais compósitos considerando como variáveis de projecto as espessuras das camadas e as respectivas orientações. Utilizam um algoritmo com diversos níveis de optimização. A função objectivo ao nível do sistema é a função peso sendo a mesma ao nível do elemento. As restrições são definidas por um critério de rotura. As variáveis ao nível do

sistema, são apenas as espessuras das camadas enquanto que ao nível do elemento englobam também as respectivas orientações. As técnicas de optimização utilizadas são a da função penalidade associada ao método de Davidon - Fletcher - Powell, e a programação linear sequencial.

Finalmente, é de salientar, num âmbito mais geral, o importante trabalho desenvolvido por Fleury e Braibant [38], [39], [40], que tentou contribuir para a reconciliação entre duas estratégias baseadas na programação matemática e nos critérios de optimalidade. Há ainda a salientar a abordagem subsidiária de alguns aspectos relevantes na optimização de estruturas em materiais compósitos, tais como: o problema das variáveis discretas (número de camadas em estratificados, o tratamento das variáveis mistas, o problema da pesquisa de uma solução inicial admissível, etc.).

2.3 - REFERÊNCIAS

[1]

Ashley, H., "On making things the best - aeronautical uses of optimization", AIAA 1981 Wright Brothers Lecture, AIAA J. Aircraft, 19, 5 - 28, 1982

[2]

Schmit, L. A., "Structural synthesis - it's genesis and development", AIAA J., 19, Nº 10, 1981

[3]

Vanderplaats, G. N., "Structural optimization - Past, present and future", AIAA J., 20, 992 - 1000, 1982

[4]

Vanderplaats, G. N. Weisshaar, T. A., "Optimum design of composite structures", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 27, 437-448, 1989

[5]

Khot, N. S., Venkayya, V. B., Jonhson, C. D., Tischler, V. A., "Optimization of fibre reinforced composite structures", Int. J. Solids and Structures, Vol. 9, 1225 - 1236, 1973

[6]

Schmit, L. A., Farshi, B., "Optimum laminate design for strength and stiffness", Inter. Journ. Num. Methods in Engineering, Vol. 7, 519 - 536, 1973

[7]

Massard, T. N., "Computer sizing of composite laminates for strength", J. Reinf. Plastics and Composites, Vol. 3, 300 - 345, 1984

- [8] Flanagan, G. N., "Development and application of optimization techniques for composite laminates", M. S. Thesis, AFIT/GAE/AA/83.S.-4, Air Force Institute of Technology, Wright Patterson AFB, USA, 1983
- [9] Park, W. J., "An optimal design of simple symmetric laminates under first ply failure criterion", *Journal of Composite Materials*, Vol. 16, 341 - 345, 1982
- [10] Park, W. J., "Symmetric three-directional optimal laminate design", *Journal of Composite Materials*, Vol. 21, pp. 532 - 535, 1987
- [11] Schmit, L. A., Farshi, B., "Optimum design of laminated composite plates", *Inter. Journ. Num. Methods in Engineering*, Vol. 11, 623 - 640, 1977
- [12] Tauchert, T. R., Adibhatla, S., "Design of laminated plates for maximum stiffness", *J. Composite Materials*, Vol. 18 (1), 58 - 69, 1984
- [13] Tauchert, T. R., Adibhatla, S., "Design of laminated plates for maximum bending strength", *Engineering Optimization*, Vol. 8 (4), 253 - 263, 1985
- [14] Stroud, W. J., Agranoff, N., "Minimum-mass design of filamentary composite panels under combined loads: Design procedure based on simplified buckling equations", NASA TN D - 8257, 1976
- [15] Stroud, W. J., Agranoff, N., "Minimum-mass design of filamentary composite panels under combined loads: Design procedure based on rigorous buckling analysis", NASA TN D - 8257, 1976

[16]

Mc Keown, J. J., "A fixed upper bound on the number of layers in optimal composite sheets", *Inter. Journ. Solids and Structures*, Vol. 14, 113 - 119, 1978

[17]

Adali, S., "Design sensitivity analysis of an antisymmetric angle-ply laminate", TWISK 318, National Institute for Mathematical Sciences, CSIR, 1983

[18]

Adali, S., "Multiobjective design of an antisymmetric angle-ply laminate by non-linear programming", *ASME Journal of Mechanisms, Trans. and Automation in Design*, Vol.105(2), 214 - 219, 1983

[19]

Adali, S., "Optimization of fibre reinforced composite laminates subject to fatigue loading", *Composite Structures*, Elsevier Applied Science Publishers, Vol. 3, 43 - 55, 1985

[20]

Liao, D. X., Sung, C. K., Thompson, B. S., "The optimal design of symmetric laminated beams considering damping", *J. Composite Materials*, Vol. 20, 485 - 501, 1986

[21]

Shin, Y. S., Haftka, R. T., Watson, L. T., Plant, R. H., "Design of laminated plates for maximum buckling load", *Journal of Composite Materials*, Vol. 23, pp. 348 - 369, 1989

[22]

Miki, M., Tonomura, K., "Optimum design of hybrid fibrous laminated composite plates subject to axial compression", *Composite Structures* 4, Elsevier Applied Science Publishers, Vol. 1, 27, 1.368 - 1.377, 1987

[23]

Ling, Y., Zukang, M., "Optimum design based on reliability for composite laminates", *Composite Structures* 4, Elsevier Applied Science Publishers, Vol. 1, 28, 1.378 - 1.392, 1987

[24]

Reiss, R., Ramachandran, S., "Maximum frequency design of symmetric angle-ply laminates", *Composite Structures* 4, Elsevier Applied Science Publishers, Vol. 1, 36, 1.476 - 1.487, 1987

[25]

Correia, V. M. F., Soares, C. M. M., "Análise de sensibilidades de estruturas construídas de materiais compósitos", *MECOM 89*, X Congresso Ibero-Latino-Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia, Vol. 1, A 365 - A 376, 1989

[26]

Afonso, J. M. M., Soares, C. M. M., Freitas, M. J. M., Pedersen, P., "Identification of material properties of composite plates using optimization techniques", *Computer Aided Optimal Design*, Tróia, Portugal, Vol. 1, 1986

[27]

Khot, N. S., "Computer program (OPTCOMP) for optimization of composite structures for minimum weight design", *AFFDL TR - 76 - 149*, Air Force Flight Dynamics Laboratory, Wright Patterson AFB, USA, 1977

[28]

Mc Keown, J. J., "A quasi-linear programming algorithm for optimizing fibre reinforced structures of fixed stiffness", *Comp. Methods in Applied Mech. and Engineering*, Vol. 6, 123 - 154, 1975

[29]

Mc Keown, J. J., "Optimal composite structures by deflection variable programming", *Comp. Methods in Applied Mech. and Engineering*, Vol. 12, 155 - 179, 1977

[30]

Starnes, J. H., Haftka, R. T., "Preliminary design of composite wings for buckling, strenght and displacement constraints", *Proceedings of 19th AIAA, ASME Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, Bethesda, Md., USA, 1978

[31]

Sobieski, J., "An integrated computer procedure for sizing composite airframe structures", *NASA TP 1300*, 1979

[32]

Schmit, L. A., Mehrinfar, M., "Multilevel optimum design of structures with fibre - composite stiffened - panel components", *AIAA Journal*, Vol. 20, pp. 138 - 147, 1982

[33]

Stroud, W. J., "Optimization of composite structures", *Proceedings of the IUTAM Symposium on Mechanics of Composite Materials*, Blacksburg, Virginia, USA, 1982

[34]

Eschenauer, H. A., "Some aspects on optimization of composite structures", *Composite Structures, Preprints COMPOSITES-88 World Conference*, Nice, France, 13 - 27, 1988

[35]

Weiji, L., Boohua, S., "Multilevel optimization procedure of composite structure", *Composite Structures 4*, Elsevier Applied Science Publishers, Vol. 1, 26, 1.357 - 1.367, 1987

[36]

Watkins, R. I., "Multilevel optimization of composite structures", Composite Structures 4, Elsevier Applied Science Publishers, Vol. 1, 29, 1.393 - 1.403, 1986

[37]

Sadr, H., Afzali, M., Sabzevari, H., "Calcul et optimization des structures composites stratifiees", rapport CETIM Senlis, France, 1988

[38]

Fleury, C., Braibant, V., Hien, N. V., Strodriot, J. S., Merckx, C., "Strategies efficaces pour le dimensionnement optimal des structures", Laboratoire d'Aéronautique de l'Université de Liège, rapport SF - 127, 1984

[39]

Fleury, C., "Methods numeriques pour le dimensionnement optimal des structures", Laboratoire d'Aéronautique de l'Université de Liège, rapport SF - 92, 1979

[40]

Fleury, C., Braibant, V., "Dimensionnement optimal en variables discretes", Laboratoire d'Aéronautique de l'Université de Liège, rapport SF - 104, 1982



Capítulo

3

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

3.1 - INTRODUÇÃO

Os métodos habitualmente utilizados na optimização de estruturas têm encontrado, com frequência, dificuldades de aplicação e de eficiência de funcionamento quando se trata de estruturas em materiais compósitos. As causas fundamentais são o invulgar número de variáveis de projecto e de restrições associadas ao grau de estratificação das estruturas em compósitos e a elevada interdependência existente entre as referidas variáveis.

A necessidade premente de ultrapassar este problema tem levado os investigadores a adoptar soluções que conduzam à redução significativa do número de variáveis, mantendo este num nível considerado razoável. Todavia, a resolução do problema devido à sua complexidade não se resume apenas à redução do número de variáveis pois, com relativa facilidade, surgem problemas de convergência.

Entre as soluções mais racionais emerge sem dúvidas, a optimização multietapas (ou multinível). A divisão do problema de optimização em níveis resulta, efectivamente, num decréscimo do número de variáveis de projecto presentes simultaneamente no processo, mas implica a existência de compatibilidade entre os diversos níveis de optimização. Em muitos casos conduz apenas a uma solução incompleta do problema.

Com efeito, a compatibilização entre os diferentes níveis do processo de optimização é feita através do estabelecimento de relações de interdependência, traduzido muitas vezes na necessidade de modificar a função objectivo num dado nível ou introduzir novas restrições que tornem o processo coerente.

Pondo de lado qualquer tentativa de resolução generalista do problema e explorando as características peculiares da optimização dos materiais compósitos de matriz polimérica desenvolve-se, neste trabalho, um método de optimização aplicado a estes materiais.

Utilizando as ideias da optimização multietapas consideram-se duas etapas de optimização. Na primeira etapa de optimização o peso da estrutura não é alterado pois consideram-se as espessuras constantes sendo o objectivo a este nível a modificação do valor das restrições e as variáveis de projecto as orientações das camadas. Na segunda das quais a função objectivo é o peso da estrutura e as variáveis de projecto são as espessuras dos estratificados utilizados, sendo as orientações das camadas consideradas constantes.

A solução óptima é obtida recorrendo a um algoritmo que repete sequencialmente estas duas etapas do processo de optimização até se verificarem as condições de convergência global.

3.2 - SUBESTRUTURAÇÃO E VARIÁVEIS DE PROJECTO

Considerando que no contexto dos materiais compósitos de matriz polimérica, qualquer projecto optimizado deverá ser interactivo afim de contemplar os aspectos da produção e outros de carácter técnico, não se esgotando apenas na utilização dum algoritmo de optimização, pode-se afirmar que uma das etapas mais importantes do processo de optimização é a subestruturação. Esta consiste na divisão da estrutura em estudo em macroelementos, sendo estes constituídos por elementos mais pequenos cujo número se relaciona com o maior refinamento da malha de elementos finitos utilizada na modelação de estruturas contínuas do tipo casca.

Todos os elementos que constituem um dado macroelemento possuem a mesma espessura, o mesmo número de camadas e a mesma sequência de empilhamento.

Nestas condições as variáveis de projecto são:

i) a espessura de cada macroelemento t_m

ii) as orientações de cada camada que constitui o estratificado do macroelemento m ,

$\theta_{i,m}$, $i = 1, \dots, N_m$ sendo N_m o número de camadas do macroelemento m .

Note-se que enquanto o número de elementos que constituem um dado macroelemento obedece a considerandos de ordem numérica (relacionados com o método de análise estrutural (FEM)) o número de macroelementos funciona implicitamente como mais uma variável de projecto previamente determinada. Este relaciona-se com as características do dimensionamento, com os parâmetros constructivos e regras heurísticas de fabrico e com a previsão de fenómenos secundários, cuja ocorrência se relaciona com a natureza dos materiais a utilizar.

Considerando que, para um dado macroelemento, a orientação de cada camada é independente das orientações das restantes camadas que constituem o estratificado podemos afirmar que está presente no processo de optimização, embora de forma implícita, mais uma variável de projecto que é a sequência de empilhamento.

O número total de variáveis de projecto é assim:

$$N_{var} = M + \sum_{m=1}^M N_m \quad (3.1)$$

em que M designa o número de macroelementos e N_m o número de camadas do macroelemento m .

3.3 - FUNÇÃO OBJECTIVO

A função objectivo é o peso da estrutura, que pode ser definida da forma seguinte, uma vez que se tratam de estruturas do tipo placa ou casca moderadamente espessas:

$$W(\{t\}) = \sum_{k=1}^M \Omega_k \rho_k t_k \quad (3.2)$$

em que:

M = número de macroelementos

Ω_k = área superficial do macroelemento k (referida à superfície média)

ρ_k = peso específico do material que constitui o macroelemento k

t_k = espessura do estratificado que constitui o macroelemento k

3.4 - RESTRIÇÕES

As restrições consideradas neste trabalho são restrições de deslocamento e restrições de tensões admissíveis (resistência).

As restrições de deslocamento são do tipo:

$$g_j = \frac{u_r}{u_0} - 1 \leq 0 \quad , \quad j = 1, \dots, N_{dis} \quad (3.3)$$

em que u_r designa o deslocamento generalizado correspondente ao grau de liberdade r do sistema, u_0 o deslocamento máximo admissível correspondente e N_{dis} o número total de restrições.

As restrições de deslocamento contemplam um dos aspectos mais importantes na optimização de estruturas em materiais compósitos de matriz polimérica. Estes materiais apresentam deformações relativamente superiores às dos materiais isotrópicos convencionais. Por este motivo há necessidade de impôr determinados limites ao campo de deslocamentos, afim de garantir o cumprimento das especificações impostas pelas normas constructivas.

As restrições de tensões são da seguinte forma

$$g_j = 1 - \frac{R_k}{R_0} \leq 0 \quad , \quad j = 1, \dots, N_{str} \quad (3.4)$$

em que R_k é o parâmetro de resistência (tensão resistente / tensão instalada) que depende do estado de tensão calculado (índice k) e é obtido considerando um critério de rotura (critério quadrático interactivo de Tsai - Wu, vidé Capítulo 5); R_0 é o coeficiente de segurança da estrutura e N_{str} é o número total de restrições dado por:

$$N_{str} = N_{elem} \times L_{tot} \times P_{int} \quad (3.5)$$

sendo N_{elem} o número total de elementos, L_{tot} o número total de camadas e P_{int} o número de pontos de integração (FEM).

As restrições de tensões são introduzidas duma forma diferente da habitual. Com efeito, neste trabalho faz-se apelo ao parâmetro R de resistência, de acordo com o modelo proposto por Tsai [1],[2]. Trata-se da abordagem do problema da rotura do estratificado segundo o conceito da "First Ply Failure" (FPF). Embora seja uma abordagem conservativa, tem-se revelado, no entanto, de utilização prática simples e eficiente.

3.5 - DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Exprimindo de uma maneira formal o problema da optimização das estruturas contínuas em materiais compósitos do tipo placa ou casca é descrito genericamente nos seguintes termos:

$$\text{MIN } W(\{t\})$$

sujeito a:

$$g_j(\{\theta\}, \{t\}) \leq 0 \quad , \quad j = 1, \dots, N_{dis} + N_{str} \quad (3.6)$$

em que $\{\theta\}$ é o vector global das variáveis orientações das camadas e $\{t\}$ o vector global das espessuras dos estratificados dos macroelementos.

A definição do problema de acordo com as diferentes etapas correspondentes à sua resolução é dada por:

1ª Etapa

Encontrar $\{\theta\}$ para $\{t\}$ constante, $\{t_0\}$, tal que:

$$\text{MIN } F(\{\theta\})$$

sem restrições,

$$\text{com } F = \bar{g}(\{\theta\}, \{t_0\}) \quad (3.7)$$

em que $\bar{g}(\{\theta\}, \{t_0\})$ representa a restrição de maior valor relativo e $\{t_0\}$ o vector global das espessuras no início desta etapa do processo:

$$\bar{g}(\{\theta\}, \{t_0\}) = \text{MAX}(g_j, j = 1, \dots, N_{dis} + N_{str}) \quad (3.8)$$

Note-se que, minimizar F equivale a maximizar o parâmetro R referente à “First ply failure” para a fase k de iteração no caso da restrição máxima ser do tipo tensão.

Se a solução inicial não é admissível (restrições violadas), no fim da primeira etapa a solução estará mais próxima de se tornar admissível ou inclusive será admissível.

Se a solução inicial é admissível, então no fim da primeira etapa a solução será qualitativamente melhor do que a inicial.

2ª Etapa

Encontrar $\{t\}$ para $\{\theta\}$ constante, $\{\theta_0\}$, tal que

$$\text{MIN } W(\{t\})$$

sujeito a:

$$g_j(\{\theta_0\}, \{t\}) \leq 0, j = 1, \dots, N_{dis} + N_{str} \quad (3.9)$$

A decomposição do problema em dois níveis é possível da forma enunciada na medida em que existe independência entre eles. Com efeito, a função peso $W(\{t\})$ não depende das variáveis do projecto orientação das camadas, as quais apenas interferem nos valores das restrições.

Numa primeira etapa, a sequência de empilhamento e as orientações das camadas são alteradas de forma a minimizar uma função F de valor igual à restrição máxima, permanecendo as espessuras constantes. A modificação das variáveis orientação das camadas, no sentido referido, provoca necessariamente a alteração dos campos de deslocamentos e de tensões no sentido da diminuição das restrições.

Na segunda etapa o problema da optimização das estruturas em materiais compósitos é equivalente a minimizar o peso da estrutura para uma dada sequência de empilhamento e orientações constantes, manipulando as variáveis espessuras dos macroelementos.

Iterando entre os dois níveis obtém-se uma solução óptima que contempla tanto as variáveis de projecto espessuras dos estratificados como as variáveis de projecto orientação das camadas minimizando o peso da estrutura.

3.6 - REFERÊNCIAS

[1]

Tsai, S. W., Hahn, H.T., "Introduction to composite materials", Technomic Publishing Co., Inc., Westport, Connecticut, USA, 1980

[2]

Tsai, S. W., "Composites design", Third Edition, Think Composites, Dayton, USA, 1987

Capítulo

4

ANÁLISE ESTRUTURAL

4.1 - INTRODUÇÃO

Na representação de estruturas do tipo casca através da modelação por elementos finitos têm sido utilizadas três aproximações distintas:

- i) elementos de placa triangulares
- ii) elementos curvos formulados com base nas teorias das cascas
- iii) elementos derivados de elementos tridimensionais pela aplicação do denominado processo degenerativo

O elemento utilizado no desenvolvimento deste trabalho enquadra-se numa aproximação do terceiro tipo. Nesta abordagem são considerados elementos isoparamétricos com rotações e deslocamentos independentes, nos quais as condições de tensão e deformação tridimensionais são degeneradas para o comportamento do tipo casca.

Estes elementos têm a vantagem de requererem apenas funções de forma com continuidade C^* , dado que as equações de equilíbrio são equações de segunda ordem. Inicialmente proposta por Ahmad [1] para a análise linear de cascas moderadamente espessas, esta formulação foi objecto de estudo por numerosos investigadores. As dificuldades encontradas situam-se ao nível da análise de placas e cascas finas, onde o elemento exibe o fenómeno "locking", que se traduz num aumento incorrecto da rigidez do elemento à medida que a sua espessura se torna muito pequena, quando comparada com outras dimensões da casca. Este fenómeno é ultrapassado, em geral, pela utilização de regras de integração reduzida ou selectiva.

O elemento utilizado neste trabalho foi desenvolvido para a análise em regime linear tendo resultado dos conceitos apresentados por Figueiras [2] e posteriormente modificados por Ferreira [3].

4.2 - CARACTERIZAÇÃO DO ELEMENTO

Reduzindo uma dimensão dum elemento tridimensional, pode-se visualizar um elemento de casca não sendo possível, no entanto, a manutenção de todos os conceitos de análise tridimensional (fig. 4.1).

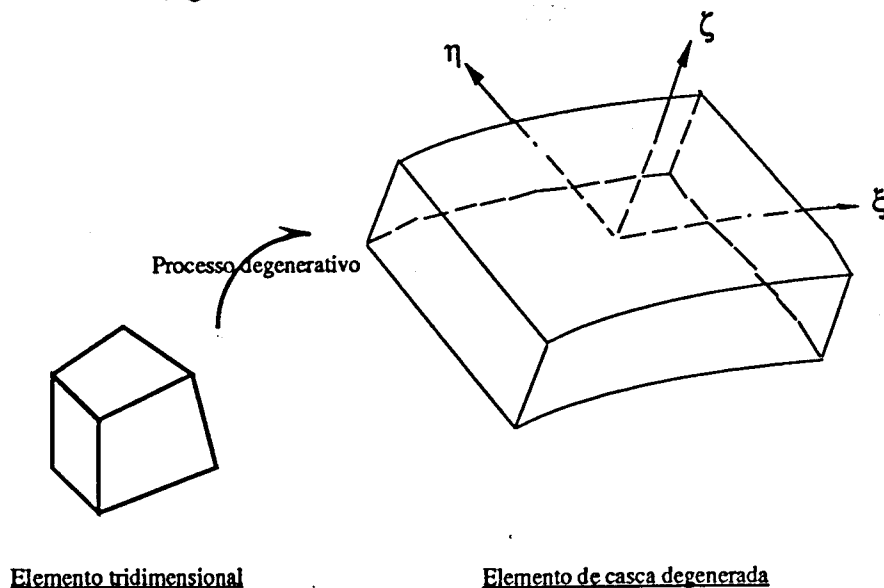


Fig. 4.1 - Degeneração de elementos tridimensionais em elementos de casca

Em particular, a retenção dos três graus de liberdade em cada nó conduz a coeficientes de rigidez elevados para deslocamentos ao longo do bordo correspondente à espessura do elemento [2], [3]. Esta questão é particularmente importante quando a espessura da casca é pequena relativamente às outras dimensões do elemento.

Por outro lado, a consideração de vários nós ao longo da espessura ignora o facto de nas cascas espessas as normais à superfície média permanecerem praticamente rectas após deformação [2], [3].

Na formulação do elemento considerado introduz-se a restrição da normal à superfície média do elemento tridimensional permanecer recta após deformação e despreza-se a energia correspondente às tensões perpendiculares à superfície média. No entanto, não se considera o conceito de que as normais à superfície média permanecem normais após deformação contradizendo assim a hipótese admitida na teoria das placas [2] [3].

Em cada ponto nodal, são considerados cinco graus de liberdade, correspondentes a deslocamentos em três direcções diferentes e duas rotações da normal à superfície média (fig. 4.2). A definição de deslocamentos e rotações independentes permite a inclusão da deformação de corte transverso, já que as rotações não se limitam à inclinação da superfície média. Esta aproximação é equivalente a usar uma teoria geral das cascas e reduz-se às hipóteses de Reissner [4] e Mindlin [5] na teoria das placas.

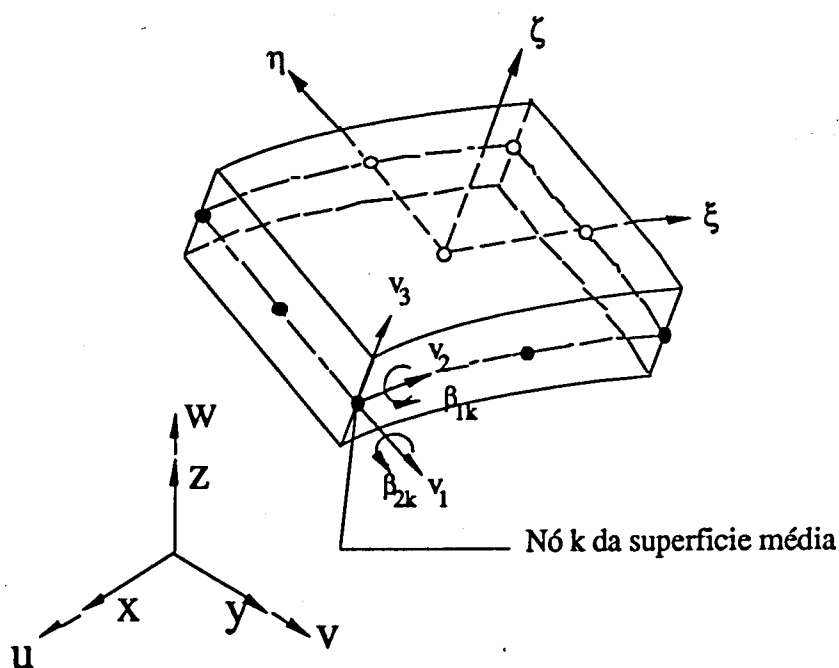


Fig.4.2 - Parâmetros nodais do elemento de casca degenerada

A formulação a seguir apresentada baseia-se na formulação de deslocamentos da teoria dos elementos finitos e será feita de forma sucinta.

4.2.1 - SISTEMAS DE COORDENADAS

Na formulação dos elementos de casca degenerados são utilizados diferentes sistemas de coordenadas (fig.4.3). Nomeadamente, são definidos na presente formulação cinco sistemas de coordenadas, cuja descrição pormenorizada é feita nos referências [2] e [3].

Genéricamente, os sistemas referidos são:

- 1. Sistema de Coordenadas Globais - x_i

É um sistema de coordenadas cartesianas escolhido livremente, relativamente ao qual é definida a geometria da estrutura no espaço. As coordenadas nodais, os deslocamentos, a matriz global e o vector de forças aplicadas são referidas a este sistema.

- 2. Sistema de Coordenadas Nodais - y_{ik}

Este sistema é definido em cada ponto nodal com origem na superfície de referência (superfície média).

Um dos eixos deste referencial é definido recorrendo às coordenadas nodais das superfícies superior e inferior num dado ponto nodal.

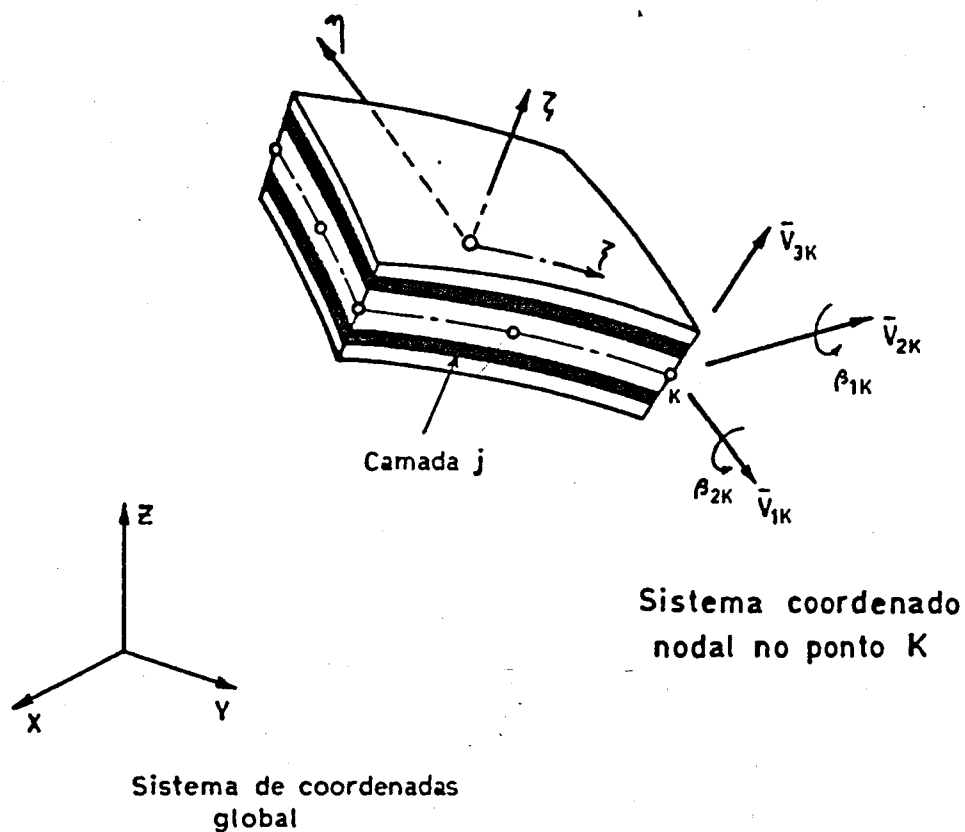
- 3. Sistema de Coordenadas Curvilíneas - ξ, η, ζ

Neste sistema ξ, η são duas coordenadas curvas no plano médio do elemento de casca e ζ é uma coordenada linear na direcção da espessura. As três coordenadas variam entre -1 e 1. A direcção ζ é aproximadamente perpendicular à superfície média da casca, já que ζ é definida como uma função de y_{3k} .

- 4. Sistema de Coordenadas Locais - x'_i

Este sistema é definido nos pontos de integração nos quais as tensões e deformações são calculadas. A direcção $\{x'_3\}$ ($\{z\}$) é perpendicular à superfície $\zeta = \text{constante}$, sendo obtida pelo produto vectorial das direcções ξ e η .

a)



b)

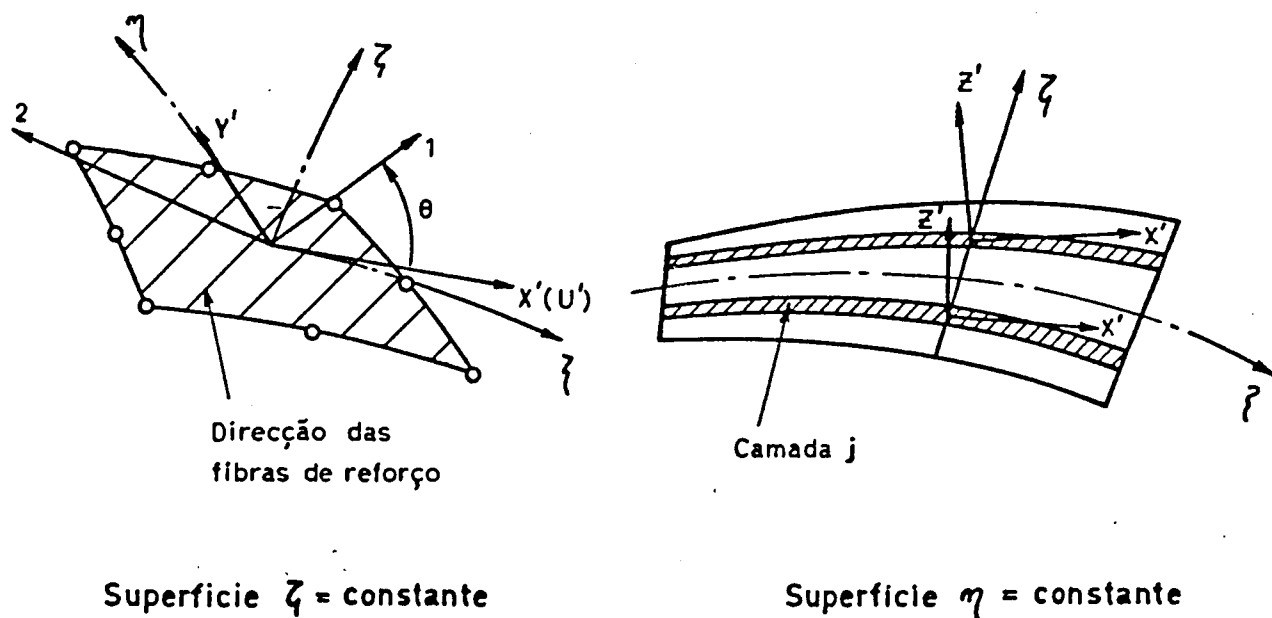


Fig. 4.3 - Sistemas de Coordenadas

a) coordenadas globais e nodais

b) coordenadas locais, materiais e curvilíneas

A direcção $\{x'_1\}$ ($\{x'\}$) é tomada como sendo tangente à direcção ξ no ponto de integração.

A terceira direcção é obtida pelo produto vectorial dos versores das duas direcções anteriormente referidas.

A matriz dos cosenos directores $[\theta]$ relaciona as transformações entre os sistemas de coordenadas global e local e é definida como: $[\theta] = [\{x'_1\}, \{x'_2\}, \{x'_3\}]$

• 5 - Sistema de Coordenadas materiais

A este sistema estão associados os eixos principais (1, 2, 3) do material ortotrópico. Num material compósito unidireccional os eixos estão associados às orientações longitudinal, transversal e normal das fibras de reforço.

4.2.2 - GEOMETRIA DO ELEMENTO

As faces externas do elemento são curvas, enquanto que as secções através da espessura são geradas por linhas rectas. As coordenadas cartesianas globais superiores e inferiores dos nós definem a geometria do elemento. Na formulação geométrica, as coordenadas de um ponto num elemento são obtidas aplicando as funções de forma às coordenadas nodais. A relação entre as coordenadas cartesianas globais e curvilíneas no elemento, num ponto genérico i do seu interior, é expressa pela relação

$$\{x_i\} = \sum_{k=1}^n \left\{ [N_k] \frac{1+\zeta}{2} \{x_k\}^{\text{sup}} + [N_k] \frac{1-\zeta}{2} \{x_k\}^{\text{inf}} \right\} \quad (4.1)$$

em que $\{x\} = \{x, y, z\}^T$. Considerando-se as coordenadas dos nós referidos à superfície média da casca e o vector definidor da normal nos mesmos, $\{V_{3k}\}$, as coordenadas do mesmo ponto genérico podem ser obtidas por:

$$\{x_i\} = \sum_{k=1}^n \left\{ [N_k] \{x_k\}^{\text{méd}} + [N_k] \frac{1}{2} \zeta h_k \{V_{3k}\} \right\} \quad (4.2)$$

em que n representa o número de nós associado ao elemento e $[N_k(\xi, \eta)]$ é uma matriz de funções interpoladoras que tomam o valor unitário no nó a que estão associadas e zero nos restantes nós.

No elemento isoparamétrico de 8 nós estas funções são parabólicas e equivalentes às funções de forma do elemento parente de 8 nós (fig. 4.4). Estas funções permitem a compatibilidade das incógnitas nas interfaces.

A espessura do laminado num ponto genérico i , é obtida através dos mesmos conceitos de representação isoparamétrica, ou seja, por:

$$h_i = \sum_{k=1}^n [N_k] h_k \quad (4.3)$$

Da mesma forma, as espessuras das camadas são obtidas por:

$$t_j = \sum_{k=1}^n [N_k] h_{kj} \quad (4.4)$$

em que h_{kj} representa a espessura da camada j na direcção da normal no nó k .

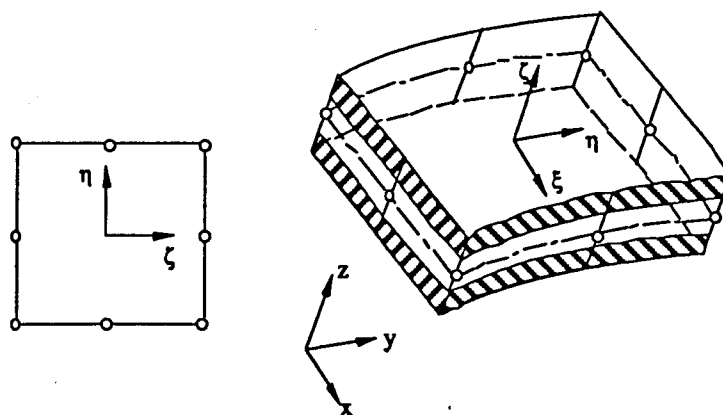


Fig.4.4 - Elemento parente de 8 nós para funções de forma

4.2.3 - PARÂMETROS NODAIS E CAMPO DE DESLOCAMENTOS

O vector deslocamento global num nó típico (fig. 4.5) contém 5 componentes definidas por três deslocamentos, u_0, v_0, w_0 da superfície média do elemento ao longo dos eixos cartesianos globais (x, y, z) , e duas rotações, β_{1k} e β_{2k} correspondentes à rotação do vector nodal $\{V_{3k}\}$ segundo $\{V_{2k}\}$ e $\{-V_{1k}\}$, respectivamente.

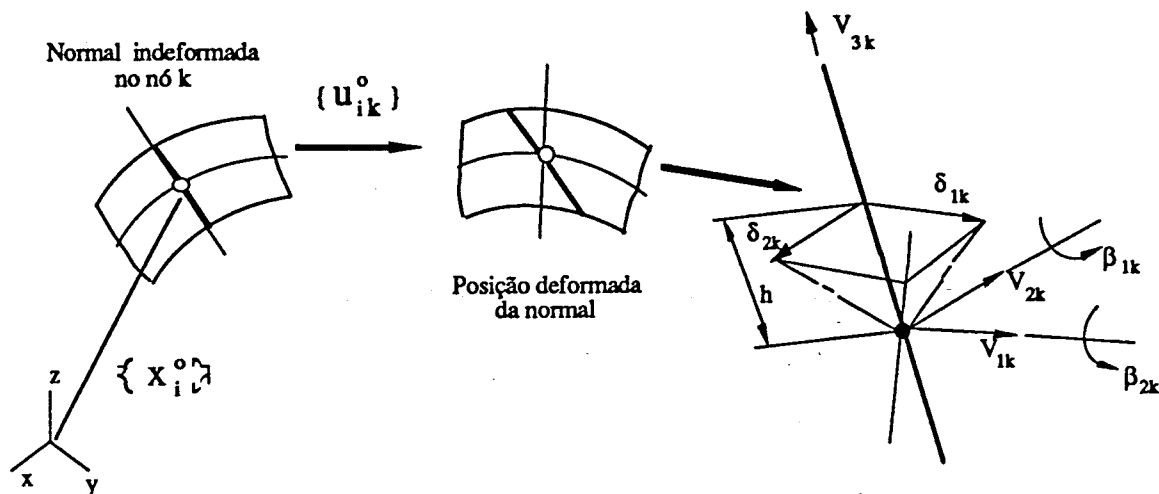


Figura 4.5 - Deslocamentos dum ponto da "normal" no nó k

Esta representação implica que todas as camadas rodem o mesmo ângulo. Uma melhor aproximação seria conseguida se se considerassem rotações independentes em cada camada. No entanto, o número de graus de liberdade seria considerável.

O vector dos deslocamentos nodais é, então, representado por:

$$\{\delta\} = \{u_k, v_k, w_k, \beta_{1k}, \beta_{2k}\}^T \quad (4.5)$$

e o vector dos deslocamentos do elemento é obtido por:

$$\{\delta\} = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}^T \quad (4.6)$$

em que n representa o número de nós do elemento.

As rotações β_{1k} e β_{2k} originam deslocamentos na superfície ζ da casca, obtidos por:

$$\begin{aligned} \delta_{1k} &= \zeta \beta_{1k} \\ \delta_{2k} &= \zeta \beta_{2k} \end{aligned} \quad (4.7)$$

As componentes de deslocamentos correspondentes são obtidas por:

$$\begin{aligned} \{u_i\}_{\beta_{1k}} &= \delta_{1k} \{\underline{Y}_{1k}^i\}, & i=1,2,3 \\ \{u_i\}_{\beta_{2k}} &= \delta_{2k} \{-\underline{Y}_{2k}^i\}, & i=1,2,3 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Os deslocamentos no interior do elemento podem, então, ser expressos através das mesmas funções de forma $[N_k(\xi, \eta)]$, por:

$$\{u_i\} = \sum_{k=1}^n \left\{ [N_k] \{u_k\}^{\text{méd}} + [N_k] \frac{1}{2} \zeta h_k \begin{bmatrix} \{v_{1k}\} \\ -\{v_{2k}\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \end{Bmatrix} \right\} \quad (4.9)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} &= \sum_{k=1}^n \left\{ [N_k] \begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{Bmatrix}^{\text{méd}} + [N_k] \frac{1}{2} \zeta h_k \begin{bmatrix} v_{1k}^x, -v_{2k}^x \\ v_{1k}^y, -v_{2k}^y \\ v_{1k}^z, -v_{2k}^z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \end{Bmatrix} \right\} = \\ &= [N'_1, N'_2, \dots, N'_n] \{\delta\} = \\ &= \begin{bmatrix} N_k & 0 & 0 & N_k \zeta \frac{h_k}{2} v_{1k}^x & -N_k \zeta \frac{h_k}{2} v_{2k}^x \\ \dots & 0 & -N_k & N_k \zeta \frac{h_k}{2} v_{1k}^y & -N_k \zeta \frac{h_k}{2} v_{2k}^y \\ 0 & 0 & N_k & N_k \zeta \frac{h_k}{2} v_{1k}^z & -N_k \zeta \frac{h_k}{2} v_{2k}^z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vdots \\ u_k \\ v_k \\ w_k \\ \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (4.10) \end{aligned}$$

4.2.4 - DEFINIÇÃO DAS DEFORMAÇÕES

Por forma a respeitar as hipóteses habituais para a análise de cascas, nas quais se assume que as tensões normais à superfície média da casca são tão pequenas que se podem desprezar, as componentes de tensão e deformação devem ser referidas a eixos ortogonais locais relacionados com superfícies $\zeta = \text{constante}$. Assim, estabelece-se em cada ponto dessa superfície, um sistema de eixos (fig.4.6) constituído por uma normal, z' , à superfície e dois eixos tangentes à mesma, x' e y' .

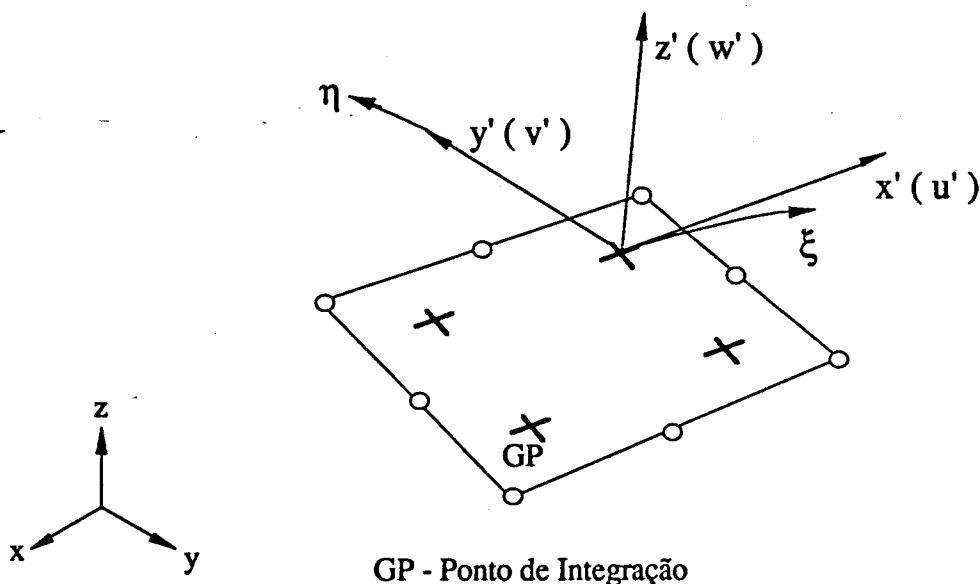


Figura 4.6 - Sistema de eixos para definição das deformações

Neste sistema, o tensor das deformações é obtido pelas relações

$$\{\epsilon'\} = \begin{Bmatrix} \epsilon'_x \\ \epsilon'_y \\ \gamma'_{xy} \\ \gamma'_z \\ \gamma'_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial w'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial z'} \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

Estas componentes de deformação podem ser calculadas, através de duas transformações. Na primeira transformação, as derivadas dos deslocamentos u, v, w relativamente a x, y, z , são obtidas por:

$$\frac{\partial (u,v,w)}{\partial (x,y,z)} = [J]^{-1} \frac{\partial (u,v,w)}{\partial (\xi,\eta,\zeta)} \quad (4.12)$$

em que $[J]$ corresponde à matriz Jacobiana cujos termos são definidos por:

$$[J] = \frac{\partial (x,y,z)}{\partial (\xi,\eta,\zeta)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Na segunda transformação, as derivadas dos deslocamentos u, v, w em relação aos eixos locais x', y', z' , são definidos por:

$$\frac{\partial (u,v,w)}{\partial (x',y',z')} = [\theta]^T \frac{\partial (u,v,w)}{\partial (x,y,z)} [\theta] \quad (4.14)$$

A equação (4.14) escrita sob a forma

$$\{\epsilon'\} = [B] \{\delta\} \quad (4.15)$$

define a matriz das deformações, $[B]$. Esta matriz, de dimensão dada pelo produto do número de parâmetros nodais pelo número de graus de liberdade do elemento, contém as derivadas das funções de forma, de acordo com as equações (4.10).

4.2.5 - RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

Assume-se, em cada camada do laminado da casca, um estado tridimensional de tensão no qual se despreza a contribuição da tensão normal transversa σ_z , de acordo com as hipóteses habituais. As relações constitutivas (tensão - deformação) elásticas para uma camada típica referidas aos seus eixos materiais (1, 2, 3) são obtidas por:

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\} \quad (4.16)$$

O tensor das tensões $\{\sigma\}$ é definido por:

$$\{\sigma\} = \{\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}\}^T \quad (4.17)$$

e o correspondente tensor das deformações expresso por:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}\}^T \quad (4.18)$$

A matriz $[D]$ representa a matriz de elasticidade do material constituinte da camada típica, referida ao sistema de eixos materiais, sendo obtida pela seguinte expressão:

$$[D] = \begin{bmatrix} [D_1] & [0] \\ [0] & [D_2] \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

em que as matrizes $[D_1]$ e $[D_2]$ compreendem os termos de membrana e de flexão ($[D_1]$), e os termos de corte ($[D_2]$), respectivamente, sendo estabelecidos pelas expressões

$$[D_1] = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_{12}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_{12}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$[D_2] = \begin{bmatrix} k_1 G_{13} & 0 \\ 0 & k_2 G_{23} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Refira-se que, geralmente, para um material ortotrópico G_{12} , G_{13} e G_{23} são características independentes a determinar, contrariamente ao que sucede nos materiais isotrópicos em que $G_{12} = G_{13} = G_{23} = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

Os termos k_1 e k_2 são factores correctivos do corte. A introdução na matriz das constantes elásticas tem por objectivo aproximar, em média, as energias de deformação de corte transversal obtidas pelas suposições de Mindlin [5] e a energia exacta.

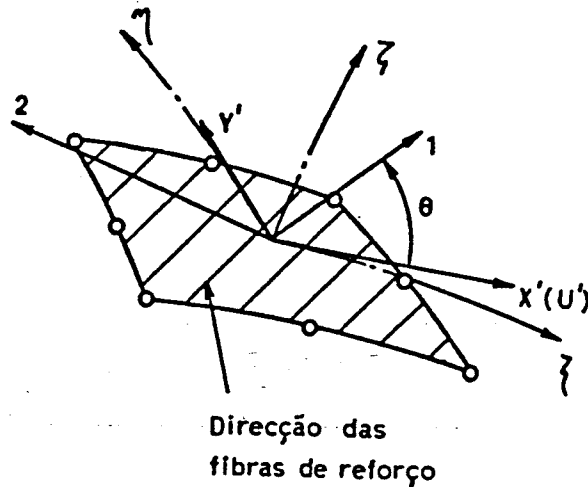


Figura. 4.7 - Sistemas de eixos principais material (1, 2, 3) e local (x', y', z')

Se os eixos principais de ortotropia 1, 2 não coincidem com os eixos de referência x', y', estando desfazadas dum dado ângulo θ , (fig. 4.7), a nova matriz de constantes elásticas é obtida por

$$[D'] = [T]^T [D] [T] \quad (4.22)$$

em que $[T]$ representa a matriz de transformação dos sistemas de eixos materiais (1, 2, 3) e local (x', y', z'), sendo obtida por:

$$[T] = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$[T_1]$ é utilizada para a transformação dos termos de membrana e flexão,

$$[T_1] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ -2 \sin \theta \cos \theta & 2 \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

e $[T_2]$ para a transformação dos termos de corte

$$[T_2] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

As tensões no sistema de eixo local passarão a ser obtidas por:

$$\boxed{\{\sigma'\} = [D'] \{\epsilon'\}} \quad (4.26)$$

em que

$$\{\sigma'\}^T = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}\} \quad (4.27)$$

$$e \quad \{\epsilon'\}^T = \{\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}\} \quad (4.28)$$

4.2.6 - ESFORÇOS GENERALIZADOS

A obtenção dos esforços generalizados de membrana $\{N\}$, flexão $\{M\}$ e corte $\{Q\}$ é realizada através da seguinte forma

$$\{N\} = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^T = \int_{-h/2}^{+h/2} \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T dz \quad (4.29)$$

$$\{M\} = \{M_x, M_y, M_{xy}\}^T = \int_{-h/2}^{+h/2} \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T z dz \quad (4.30)$$

$$e \quad \{Q\} = \{Q_x, Q_y\}^T = \int_{-h/2}^{+h/2} \{\tau_{xz}, \tau_{yz}\}^T dz \quad (4.31)$$

A convenção de sinais para estes vectores é ilustrada na fig. 4.8.

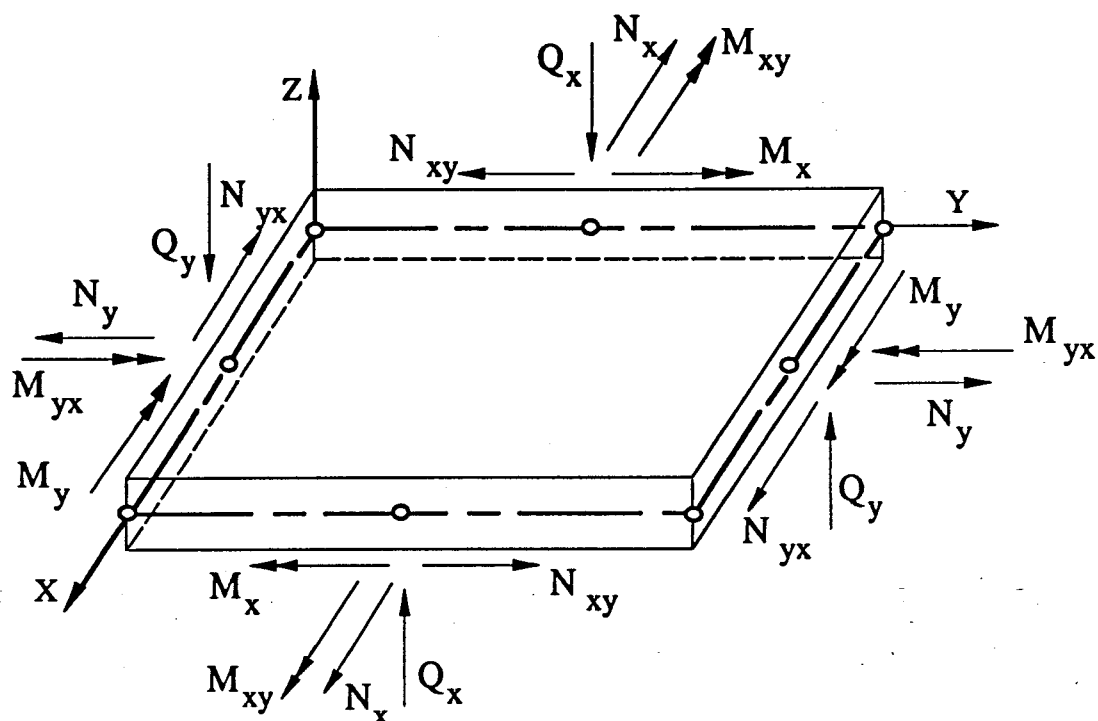


Figura. 4.8 - Convenção de sinais para as tensões resultantes de membrana, flexão e corte.

Dado que as tensões são calculadas discretamente na espessura, desde a superfície inferior até à superfície superior do laminado (fig.4.9) a forma integral das expressões (4.29) a (4.31) é substituída por um somatório estendido às camadas:

$$\begin{aligned} \{N_x, N_y, N_{xy}\}^T &= \sum_{k=1}^{nc} \int_{z_k}^{z_k^{sup}} \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}_k^T dz_k \\ &= \sum_{k=1}^n \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}_k^T h_k = \sum_{k=1}^{nc} \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}_k^T \frac{h}{2} \Delta\zeta_k \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \{M_x, M_y, M_{xy}\}^T &= \sum_{k=1}^{nc} \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}_k^T h_k z_k = \\ &= \sum_{k=1}^{nc} \frac{h^2}{4} \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}_k^T z_k \Delta\zeta_k \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\{Q_x \ Q_y\}^T = \sum_{k=1}^{nc} \int_{z_k^{inf}}^{z_k^{sup}} \{\tau_{xz} \ \tau_{yz}\}_k^T dz_k = \sum_{k=1}^{nc} \{\tau_{xz} \ \tau_{yz}\}_k^T \frac{h}{2} \Delta \zeta_k \quad (4.34)$$

em que nc representa o número de camadas do laminado constituinte do elemento.

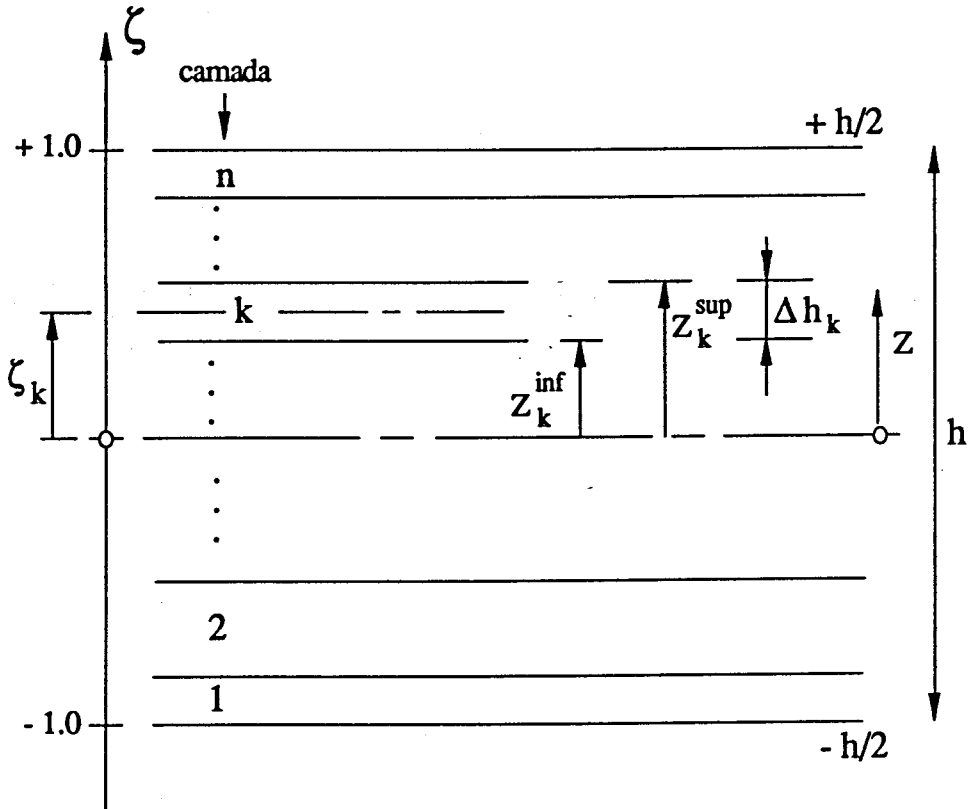


Fig. 4.9 - Ordenação das camadas através da espessura do laminado.

4.2.7 - MATRIZ DAS DEFORMAÇÕES

No trabalho presente simplifica-se o modelo tipo (Ahmad [1] e Figueiras [2]), reduzindo-se os tempos de computação (Ferreira [3]).

A matriz das deformações resultante das relações deformações - deslocamentos (4.15), é constituída por funções de forma e pelas derivadas, de acordo com as relações (4.10). Dado que a análise está referida a situações elásticas, despreza-se a variação do comprimento não deformado da fibra situada na superfície $\zeta = \text{constante}$ e o comprimento da fibra correspondente situada na superfície $\zeta = 0$.

A matriz das deformações $[B]$ é linear através da espessura, sendo calculada para duas superfícies de ζ (+1 e -1). Posteriormente, na fase de cálculo da matriz de rigidez, será calculada a contribuição desta matriz em cada camada pela expressão:

$$[B]_{\zeta_1} = [B]_{\zeta=+1} - \frac{1 - \zeta_1}{2} \left([B]_{\zeta=+1} - [B]_{\zeta=-1} \right) \quad (4.35)$$

4.2.8 - MATRIZ DE RIGIDEZ

Pela aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais obtém-se um sistema de equações de equilíbrio, figurando no primeiro termo a energia de deformação e no segundo termo o trabalho das forças exteriores. A energia de deformação conduz à matriz de rigidez através da seguinte expressão:

$$[K]^e = \int_{V^e} [B]^T [D] [B] dV^e \quad (4.36)$$

No modelo tipo de Ahmad [1], o elemento de volume do elemento é substituído por:

$$dV^e = \det [J] d\xi d\eta d\zeta \quad (4.37)$$

passando a matriz de rigidez a ser obtida por:

$$[K]^e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T [D'] [B] \det [J] d\xi d\eta d\zeta \quad (4.38)$$

Esta forma de calcular a matriz de rigidez torna-se indispensável para a análise de cascas na generalidade e, em particular, para a análise de cascas moderadamente espessas constituídas por laminados compósitos.

4.2.9- VECTOR SOLICITAÇÃO

4.2.9.1- ACÇÕES VOLÚMICAS

Num elemento de volume, sujeito a acções volúmicas X, Y, e Z por unidade de volume, as forças nodais equivalentes para tais acções são obtidas por:

$$\{f\}^e = \int_V [N]^T \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} dV \quad (4.39)$$

em que

$$\{f_e\} = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}^T$$

sendo

$$\{f_i\} = \{f_{xi}, f_{yi}, f_{zi}, M_{xi}, M_{yi}\}^T \quad (4.40)$$

4.2.9.2- ACÇÕES GRAVÍTICAS

As componentes do vector de acções gravíticas

$$\{g\} = \{g_x, g_y, g_z\}^T \quad (4.41)$$

são obtidas por

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \rho \cdot \begin{Bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{Bmatrix} \quad (4.42)$$

em que ρ representa a massa do corpo por unidade de volume.

4.2.9.3 - ACÇÕES DISTRIBUÍDAS NA SUPERFÍCIE

Considerando um elemento sujeito a cargas distribuídas uniformes ou variáveis na sua superfície, o vector solicitação correspondente no elemento é obtido por:

$$\{f\}^e = - \int_A [N]^T p \, d\vec{A} \quad (4.43)$$

em que $d\vec{A}$ é o vector de área dado por

$$d\vec{A} = d\vec{\eta} \wedge d\vec{\xi} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{Bmatrix} d\eta d\xi \quad (4.44)$$

4.2.10 - CORRECÇÃO DO CORTE TRANSVERSO

No elemento degenerado de casca espessa, a distribuição das deformações de corte transversal através da espessura é considerada constante. Nestas condições, são introduzidos, nos termos de corte transversal da matriz elasticidade, factores correctivos $K_1 = K_2 = 5/6$ para compensar os erros introduzidos. Na realidade a distribuição das tensões de corte transversal têm uma forma quadrática ao longo da espessura.

Em estratificados que possuam diferentes materiais através da espessura, as tensões de corte transversal são contínuas nas interfaces das camadas. A suposição inicial, que as deformações de corte transversal são constantes nas camadas viola essa continuidade.

Na formulação do elemento utilizado como base de trabalho é considerada uma filosofia de correcção de corte proposta por Ferreira [3]. A ideia baseia-se na suposição de que os factores de correcção de corte podem ser calculados simplesmente para flexão cilíndrica, independentemente da situação real. Os inconvenientes de tal simplificação, bem como o processo de determinação dos factores de correcção de corte, poderão ser constatados [3].

A correcção de corte transversal não tem, no entanto, um papel importante no estudo agora desenvolvido, pois no critério de rotura implícito nas restrições de tensão não são consideradas as tensões de corte transversal.

Não obstante, a importância em termos de trabalho futuro, nomeadamente no caso da modelação do fenómeno da delaminação, é evidente.

4.3 - INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Embora o método esteja preparado para outros tipos de integração, foi considerada apenas a integração reduzida.

4.4 - ELEMENTOS UTILIZADOS

O elemento adoptado neste trabalho foi o elemento Serendipity de 8 nós.

Originalmente utilizado por Ahmad [1] como elemento degenerado este elemento tem sido muito usado na análise de placas e cascas.

Tido inicialmente bastante promissor este elemento revelou, no entanto, alguns problemas em situação de placa fina, sendo o comportamento melhorado nestas circunstâncias pela aplicação de regras de integração reduzida.

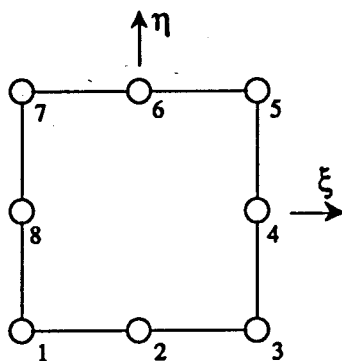


Fig. 4.10 - Elemento quadrático Serendipity.

4.5. - REFERÊNCIAS

[1]

Ahmad, S., "Curved finite elements in the analysis of solid, shell and plate structures", Ph. D. Thesis, University College of Swansea, 1969

[2]

Figueiras, Joaquim A. "Ultimate load analysis of anisotropic and reinforced concrete plates and shells", Ph. D. Thesis, University College of Swansea, 1983

[3]

Ferreira, A. J. M., "Análise por elementos finitos de estruturas tipo casca em materiais compósitos", Tese de Mestrado, Universidade do Porto, Porto, 1990

[4]

Reissner, E., "The effects of transverse shear deformation on the bending of elastic-plates", Journal Appl. Mech., 12 (2), Trans. ASME, Vol. 67, 69-67, 1945

[5]

Mindlin, R. D., "Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates", J. Appl. Mech., Vol. 18(1), Trans. ASME, 31-38, 1951

Capítulo

5

ANÁLISE DE SENSIBILIDADES

5.1 - INTRODUÇÃO

Um dos tópicos mais importantes na optimização de sistemas estruturais é sem dúvida o cálculo das derivadas das restrições relativamente às variáveis de projecto, geralmente designado por análise de sensibilidades. Com efeito, o conhecimento de tais derivadas ou gradientes tem-se revelado essencial na aplicação de métodos de optimização mais eficientes.

As derivadas das restrições são também exigidas em alguns métodos de reanálise e no desenvolvimento explícito de aproximações das funções representativas das restrições. As restrições de tensões e de deslocamentos são geralmente funções não lineares implícitas das variáveis de projecto pelo que o cálculo do valor das referidas restrições em qualquer ponto, para efeitos de projecto, requer a análise da estrutura. Com esta finalidade são utilizados os métodos de reanálise. Para reduzir o número de análises exactas durante o processo de optimização são utilizados, muitas vezes, desenvolvimentos em série de Taylor de restrições o que requer o conhecimento das respectivas derivadas.

A utilização da análise de sensibilidades e a aproximação explícita das funções das restrições podem incrementar significativamente a eficiência dos algoritmos de optimização. Mais ainda, a combinação destes conceitos com os critérios de optimalidade e a programação matemática pode levar ao desenvolvimento de métodos mais eficientes para sistemas complexos como é o caso das estruturas em materiais compósitos, onde o número de variáveis de projecto e de restrições pode tornar-se significativo e problemático.

Quando em qualquer processo de optimização é procurado um extremo da função objectivo sujeita a um conjunto de restrições, as variáveis de projecto serão logicamente alteradas. Este facto implica necessariamente a alteração do valor das restrições que poderão eventualmente ser violadas. O valor das restrições apenas permite ter a noção quantitativa da alteração provocada à posteriori e, consequentemente, tomar as decisões apropriadas enquanto que o conhecimento das sensibilidades das restrições relativamente às variáveis de projecto possibilita uma análise qualitativa de importância capital na decisão de alterar quanto e como as variáveis de projecto no sentido da procura de óptimo obedecendo às restrições impostas.

5.2 - MÉTODOS PARA A DETERMINAÇÃO

ANALITICA DAS SENSIBILIDADES [1]

Como anteriormente se afirmou a análise estrutural utilizada neste trabalho foi o Método dos Elementos Finitos baseado na formulação de deslocamentos.

Assim, considerando a equação de equilíbrio estático de um sistema estrutural

$$\boxed{[K] \{u\} = \{F\}} \quad (5.1)$$

o objectivo é geralmente determinar as derivadas dos deslocamentos $\{u\}$. As derivadas das tensões ou das deformações podem ser obtidas através da derivação das equações da elasticidade que relacionam as deformações e os deslocamentos ou as tensões e os deslocamentos,

$$\boxed{\{\sigma\} = [S] \{u\}} \quad (5.2)$$

Antes de abordar os diferentes métodos utilizados em análise de sensibilidades é de assinalar que para a obtenção de uma solução eficiente da equação (5.1) é necessário, muitas vezes, efectuar a decomposição da matriz rigidez $[K]$ no produto de uma matriz triangular superior $[U]$ por uma matriz triangular inferior $[U]^T$.

Registe-se, no entanto, que a técnica utilizada no método aqui desenvolvido para a determinação das sensibilidades é uma técnica diferente da acima referida. Com efeito, o método utilizado para resolver o sistema (5.1) e outros similares foi o método frontal, sendo este assunto abordado noutra local deste trabalho.

Para um problema de optimização com n variáveis de projecto x_i ($i = 1, \dots, n$), o cálculo das derivadas dos deslocamentos relativamente às variáveis de projecto pelo método das diferenças finitas implica necessariamente que a resolução do sistema (5.1) seja repetida para cada uma das $(n + 1)$ matrizes de rigidez diferentes $[K]$ obtidas.

As derivadas podem, todavia, ser determinadas analiticamente de uma forma mais eficiente e, assim, pode ser evitado o elevado número de análises associado ao método das diferenças finitas. Estes métodos analíticos são:

- i) O método da estrutura adjunta
- ii) O método do espaço resposta
- iii) O método da carga virtual

O primeiro método foi deduzido e implementado com base na formulação de elementos finitos apresentados no capítulo anterior e constitui a primeira fase deste trabalho. Para além da descrição detalhada do método e da sua aplicação ao caso concreto do elemento de casca degenerado, apresentam-se nos capítulos seguintes o programa implementado, os resultados obtidos, e a sua comparação com a técnica das diferenças finitas e a análise das vantagens e desvantagens resultantes.

Nestas circunstâncias apresenta-se sómente a descrição dos dois últimos métodos.

5.2.1 - MÉTODO DO ESPAÇO RESPOSTA

As variáveis $\{u\}$ que traduzem o comportamento do sistema são consideradas nesta aproximação como variáveis dependentes e podem ser expressas em termos das variáveis independentes, que são as variáveis de projecto $\{x\}$, da seguinte forma:

$$\{\Delta u\} = [\partial u / \partial x] \{\Delta x\} \quad (5.3)$$

onde

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Por outro lado, considerando $\{u\}$ e $\{x\}$ como variáveis independentes, a primeira variação (variação de primeira ordem) de uma função restrição $g_j(\{x\}, \{u\})$ é dada por

$$\Delta g_j = \left\{ \frac{\partial g_j}{\partial x} \right\}^T \{\Delta x\} + \left\{ \frac{\partial g_j}{\partial u} \right\}^T \{\Delta u\} \quad (5.5)$$

Substituindo a equação (5.3) na equação (5.5), obtemos

$$\Delta g_j = \left(\left\{ \frac{\partial g_j}{\partial x} \right\}^T + \left\{ \frac{\partial g_j}{\partial u} \right\}^T \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] \right) \{\Delta x\}$$

e finalmente

$$\boxed{\left\{ \nabla g_j \right\}^T = \left\{ \frac{\partial g_j}{\partial x} \right\}^T + \left\{ \frac{\partial g_j}{\partial u} \right\}^T \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]} \quad (5.6)$$

A matriz $[\partial u / \partial x]$ pode ser calculada por derivação implícita da equação (5.1) e assim obtemos:

$$\boxed{[\partial K / \partial x] \{u\} + [K] \{\partial u / \partial x\} = \{\partial F / \partial x\}} \quad (5.7)$$

que pode ser reescrita como

$$[K] \{ \partial u / \partial x \} = [H] \quad (5.8.a)$$

sendo

$$[H] = \left[\left\{ \frac{\partial F}{\partial x_1} \right\}, \dots, \left\{ \frac{\partial F}{\partial x_n} \right\} \right] - \left[\left[\frac{\partial K}{\partial x_1} \right] \{u\}, \dots, \left[\frac{\partial K}{\partial x_n} \right] \{u\} \right] \quad (5.8.b)$$

Em problemas onde o vector de forças aplicadas ao sistema $\{F\}$ é considerado independente das variáveis de projecto $\left\{ \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\} = \{0\}$ e a equação (5.7) reduz-se a:

$$[K] \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\} = - \left[\left[\frac{\partial K}{\partial x_i} \right] \{u\} \right], \quad i = 1, \dots, n \quad (5.9)$$

Na hipótese das restrições de deslocamento, isto é, assumido $g_j \equiv u_j$ (constante), então

$\left\{ \frac{\partial g_j}{\partial x} \right\} = \{0\}$, $\left\{ \frac{\partial g_j}{\partial u} \right\} = \{I_j\}$ e a equação (5.6) transformava-se em

$$\{ \nabla u_j \}^T = \{ I_j \}^T \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad (5.10)$$

O vector gradiente $\{ \nabla u_j \}$ é então calculado da seguinte forma:

- 1 • A matriz $\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]$ é calculada através da resolução do sistema equações, representado pela equação (5.7), para as n incógnitas $\left\{ \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\}$ ($i = 1, \dots, n$).
- 2 • O gradiente desejado é calculado pela equação (5.10)

5.2.2 - MÉTODO DA CARGA VIRTUAL

Nesta aproximação assume-se, tal como no método anteriormente abordado, que o vector de deslocamentos $\{u\}$ é constituído pelas variáveis dependentes e pode ser expresso em função das variáveis independentes que são as variáveis de projecto $\{x\}$.

Nestas condições as equações (5.3) a (5.6) deduzida no método anterior, permanecem válidas para o método da carga virtual.

Qualquer deslocamento desejado u_j pode ser expresso como:

$$u_j = \{Q_j\}^T \{u\} \quad (5.11)$$

onde $\{Q_j\}^T$ é um vector de cargas virtuais o qual tem um valor unitário na componente j e zero nas restantes. Derivando a equação (5.11) relativamente a $\{x\}$ obtemos:

$$\left\{ \frac{\partial u_j}{\partial x} \right\}^T = \{\nabla u_j\}^T = \{Q_j\}^T \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad (5.12)$$

O vector de deslocamentos virtuais $\{u_j^Q\}$ correspondente ao vector de cargas virtuais $\{Q_j\}$ é determinado por

$$[K] \{u_j^Q\} = \{Q_j\} \quad (5.13)$$

o qual pode ser substituído na equação (5.12) obtendo-se

$$\{\nabla u_j\}^T = \{u_j^Q\}^T [K] \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad (5.14)$$

Utilizando a equação (5.7) desenvolvida para o método anterior e substituindo na equação (5.14) obtemos

$$\{\nabla u_j\}^T = \{u_j^Q\}^T [H] \quad (5.15)$$

sendo $[H]$ definida pela equação (5.8).

O vector gradiente $\{\nabla u_j\}$ é então calculado da seguinte forma:

- 1 • O vector $\{u_j^Q\}$ é calculado através da resolução do sistema de equações da equação (5.13)
- 2 • O gradiente desejado é determinado pela equação (5.15)

5.3 - ANÁLISE DE SENSIBILIDADES PELO MÉTODO

DA ESTRUTURA ADJUNTA [1] [2]

5.3.1 - EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO DO SISTEMA

Conforme se viu anteriormente a equação de equilíbrio do sistema estrutural é dada pela seguinte expressão:

$$[K] \{u\} = \{F\}$$

(5.16)

com :

$[K]$ - matriz rigidez do sistema

$\{u\}$ - vector de deslocamentos nodais globais do sistema

$\{F\}$ - vector de forças globais

5.3.2 - RESTRIÇÕES

De acordo com a formulação apresentada no capítulo 3, as restrições são do tipo:

$$g_j = g_j(\{x\}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, N_g$$

(5.17)

$\{x\}$ - vector das variáveis de projecto

N_g - número de restrições

5.3.3.- SENSIBILIDADES DAS RESTRIÇÕES g_j

EM ORDEM ÀS VARIÁVEIS DE PROJECTO

As sensibilidades das restrições em ordem às variáveis de projecto são calculadas pelo método da estrutura adjunta. Neste método consideram-se $\{u\}$ e $\{x\}$ como variáveis independentes.

A 1ª variação de qualquer restrição g_j pode ser escrita da seguinte forma:

$$\{\Delta g_j\} = \left\{ \partial g_j / \partial x \right\}^T \{\Delta x\} + \left\{ \partial g_j / \partial u \right\}^T \{\Delta u\} \quad (5.18)$$

em que $\{\Delta x\}$ e $\{\Delta u\}$ representam pequenas variações em $\{x\}$ e $\{u\}$ respectivamente.

A variação das restrições deve todavia ser escrita em função das variáveis $\{x\}$:

$$\{\Delta g_j\}^T = \left\{ dg_j / dx_1, \dots, dg_j / dx_n \right\} \{\Delta x\} \quad (5.19)$$

a fim de exprimir o termo $\left\{ \partial g_j / \partial u \right\}^T \{\Delta u\}$ em função de Δx define-se o vector variável adjunta $\{\phi_j\}$ associado à restrição g_j :

$$\boxed{[K] \{\phi_j\} = \left\{ \partial g_j / \partial u \right\}} \quad (5.20)$$

Tomando a 1ª variação da equação (5.16) relativamente a x_i obtemos:

$$[K] \{\Delta u\} + \sum_{i=1}^n \left[\partial K / \partial x_i \right] \{u\} \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \left\{ \partial F / \partial x_i \right\} \Delta x_i \quad (5.21)$$

ou sob a forma matricial:

$$[K] \{\Delta u\} + \left[\left[\frac{\partial K}{\partial x_1} \right] \{u\}, \dots, \left[\frac{\partial K}{\partial x_n} \right] \{u\} \right] \{\Delta x\} = \left[\left\{ \frac{\partial F}{\partial x_1} \right\}, \dots, \left\{ \frac{\partial F}{\partial x_n} \right\} \right] \{\Delta x\} \quad (5.22)$$

Definindo a matriz $[H]$ como:

$$[H] = \left[\left\{ \frac{\partial F}{\partial x_1} \right\}, \dots, \left\{ \frac{\partial F}{\partial x_n} \right\} \right] - \left[\left[\frac{\partial K}{\partial x_1} \right] \{u\}, \dots, \left[\frac{\partial K}{\partial x_n} \right] \{u\} \right] \quad (5.23)$$

a equação (5.21) pode ser escrita:

$$[K] \{\Delta u\} = [H] \{\Delta x\} \quad (5.24)$$

Multiplicando a equação (5.24) pelo vector variável adjunta $\{\phi_j\}^T$ e substituindo em (5.20) obtemos sucessivamente:

$$\begin{aligned} \{\phi_j\}^T [K] \{\Delta u\} &= \{\phi_j\}^T [H] \{\Delta x\} \\ [K]^T \{\phi_j\}^T \{\Delta u\} &= \{\phi_j\}^T [H] \{\Delta x\} \\ \{\partial g_j / \partial u\}^T \{\Delta u\} &= \{\phi_j\}^T [H] \{\Delta x\} \end{aligned} \quad (5.25)$$

e assim a equação (5.18) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\{\Delta g_j\} = \{\partial g_j / \partial x\}^T \{\Delta x\} + \{\phi_j\}^T [H] \{\Delta x\} \quad (5.26)$$

ou

$$\{\Delta g_j\} = \left(\{\partial g_j / \partial x\}^T + \{\phi_j\}^T [H] \right) \{\Delta x\} \quad (5.27)$$

Comparando com a equação (5.19) concluímos que:

$$\boxed{\{\nabla g_j\} = \left\{ \frac{dg_j}{dx_1}, \dots, \frac{dg_j}{dx_i}, \dots, \frac{dg_j}{dx_n} \right\} = \{\partial g_j / \partial x\}^T + \{\phi_j\}^T [H]} \quad (5.28)$$

ou

$$\frac{dg_j}{dx_i} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i} + \{\phi_j\}^T \left(\left\{ \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\} - \left[\frac{\partial K}{\partial x_i} \right] \{u\} \right) \quad (5.29)$$

com

$$\{\phi_j\}^T = [K]^{-1} \left\{ \frac{\partial g_j}{\partial u} \right\} \quad (5.30)$$

$$\left\{ \frac{\partial g_j}{\partial u} \right\} = \begin{pmatrix} - \\ \frac{\partial g_j}{\partial u_k} \\ - \end{pmatrix}$$

$\left[\frac{\partial K}{\partial x_i} \right]$ - sensibilidades da matriz rigidez do sistema

$\left\{ \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\}$ - sensibilidades do vector de forças do sistema

$\{\phi_j\}$ - vector de deslocamentos adjuntos

$\left\{ \frac{\partial g_j}{\partial u} \right\}$ - vector das forças adjuntas

5.3.3.1 - RESTRIÇÕES DE DESLOCAMENTOS

De acordo com a formulação apresentada no Capítulo 3, as restrições de deslocamento são do tipo:

$$g_j = \frac{u_r}{u_o} - 1 \leq 0 \quad (5.31)$$

em que:

u_r - deslocamento generalizado correspondente ao grau de liberdade r do sistema

u_0 - deslocamento máximo admissível

Nestas condições o vector de forças adjuntas vem:

$$\left\{ \frac{\partial g_j}{\partial u} \right\} = \left\{ \frac{\partial g_j}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial g_j}{\partial u_r}, \dots, \frac{\partial g_j}{\partial u_{nf}} \right\}^T = \left\{ 0, \dots, \frac{1}{u_0}, \dots, 0 \right\}^T \quad (5.32)$$

sendo

$$\frac{\partial g_j}{\partial u_r} = \frac{1}{u_0} \quad (5.33)$$

com

nf = número de graus de liberdade do sistema.

Dado que $\frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$, a sensibilidade da restrição relativamente à variável

de projecto x_i é:

$$\boxed{\frac{dg_j}{dx_i} = - \left\{ \phi_j \right\}^T \left[\frac{\partial K}{\partial x_i} \right] \{ u \}} \quad (5.34)$$

com

$$\boxed{\left\{ \phi_j \right\}^T = [K]^{-1} \left\{ 0, \dots, \frac{1}{u_0}, \dots, 0 \right\}^T}$$

Supondo que a variável de projecto x_i pertence apenas ao macroelemento M pode-se escrever:

$$\boxed{\frac{dg_j}{dx_i} = - \sum_{e \in M} \left\{ \phi_j^e \right\}^T \left[\frac{\partial K^e}{\partial x_i} \right] \{ u^e \}} \quad (5.35)$$

com:

- $\left[\frac{\partial K^e}{\partial x_i} \right]$ - sensibilidade da matriz de rigidez do elemento e (que contém a variável x_i).
- $\{ \phi_j^e \}$ - vector de deslocamentos adjuntos do elemento e.
- $\{ u^e \}$ - deslocamentos reais do elemento e.

5.3.3.2 - RESTRIÇÕES DE TENSÕES

Definindo o parâmetro R como a razão entre a tensão resistente e a tensão aplicada, (parâmetro de resistência), [3].

Assumindo que o material é linear e elástico então para cada estado de tensão há um estado de deformação correspondente.

Assume-se também carregamento proporcional, i. e., todas as componentes de tensão e de deformação são incrementadas na mesma proporção.

$$\begin{aligned} \{ \sigma \}_{\text{máx.}} &= R \{ \sigma \}_{\text{aplica.}} \\ e \\ \{ \epsilon \}_{\text{máx.}} &= R \{ \epsilon \}_{\text{aplica.}} \end{aligned} \quad (5.36)$$

A utilização deste parâmetro e dum critério de fractura no espaço das tensões permite estabelecer as restrições de tensões.

Por definição o parâmetro R deverá obedecer à seguinte condição:

$$\begin{aligned} R &\geq 1 \\ \text{ou} \\ R &\geq R_0 \end{aligned} \quad (5.37)$$

em que R_0 é assimilado como sendo o coeficiente de segurança da estrutura.

Por outro lado o critério de fractura (critério quadrático interactivo Tsai - Wu) estabelece [3] o seguinte:

$$\begin{aligned} F_{ij} \sigma_i^{\text{máx}} \sigma_j^{\text{máx}} + F_i \sigma_i^{\text{máx}} &= 1 \\ i, j &= 1, 2, 6 \end{aligned} \quad (5.38)$$

A introdução do parâmetro R , equação (5.36) permite escrever:

$$[F_{ij} \sigma_i \sigma_j] R^2 + [F_i \sigma_i] R - 1 = 0 \quad (5.39)$$

$$i, j = 1, 2, 6$$

ou

$$a_k R_k^2 + b_k R_k - 1 = 0 \quad (5.40)$$

$$k = 1, \dots, nc \quad nc = \text{número de camadas}$$

com

$$a_k = \left(F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} \sigma_2^2 + F_{66} \sigma_6^2 + 2 F_{12} \sigma_1 \sigma_2 + 2 F_{16} \sigma_1 \sigma_6 + 2 F_{26} \sigma_2 \sigma_6 \right)_k = f_1(\{u\}, \{x\})$$

e

$$b_k = (F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_6 \sigma_6)_k = f_2(\{u\}, \{x\})$$

Considerando que a verificação do critério de fractura faz-se camada a camada, a resolução da equação (5.40), para uma camada genérica k , dá:

$$R_k = \left(-\left(\frac{b}{2a}\right) + \left[\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{1}{a} \right]^{0.5} \right)_k \quad (5.41)$$

Por outro lado a equação (5.37) permite escrever as restrições de tensão sob a seguinte forma:

$$g_j = 1 - \frac{R_k}{R_o} \leq 0 \quad (5.42)$$

ou

$$g_j = 1 + \frac{1}{R_o} \left(\left(\frac{b}{2a}\right) - \left[\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{1}{a} \right]^{0.5} \right)_k \leq 0 \quad (5.43)$$

Verificamos assim que,

$$g_j = f(\{u\}, \{x\})$$

$$\text{pois } F_{1,p} = f(x_k) \quad , \quad F_1 = f(x_k) \quad 1, p = 1, 2, 6$$

$$e \quad \sigma_i = f(\{u\}, \{x\}) \quad i = 1, 2, 6$$

O vector de forças adjuntas $\{\partial g_j / \partial u_e\}$, para a restrição j do elemento e , camada k e ponto de Gauss (ou nodal) m escolhido, é dado analiticamente derivando a equação (5.43):

$$\left\{ \frac{\partial g_j}{\partial u_e} \right\} = \frac{1}{R_o} \left(\left\{ \frac{\partial}{\partial u_e} \left(\frac{b}{2a} \right) \right\} - \left\{ \frac{\partial}{\partial u_e} \left[\left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{1}{a} \right]^{0.5} \right\} \right)_{e, k, m} \quad (5.44)$$

ou, em ordem a cada componente do vector de deslocamentos do elemento:

$$\frac{\partial g_j}{\partial u_i} = \frac{1}{R_o} \left(\frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{b}{2a} \right) - \frac{\partial}{\partial u_i} \left[\left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{1}{a} \right]^{0.5} \right)_{e, k, m} \quad (5.45)$$

A derivação explícita de R_k torna-se bastante morosa pelo que se recorre à derivação implícita da equação (5.40) a fim de obter $\frac{\partial R_k}{\partial u_i}$:

$$a_k R_k^2 + b_k R_k - 1 = 0 \quad (5.40)$$

Assim obtém-se sucessivamente,

$$\frac{\partial a_k}{\partial u_i} R_k^2 + 2 a_k R_k \frac{\partial R_k}{\partial u_i} + \frac{\partial b_k}{\partial u_i} R_k + b_k \frac{\partial R_k}{\partial u_i} = 0$$

$$\frac{\partial a_k}{\partial u_i} R_k^2 + \frac{\partial b_k}{\partial u_i} R_k = - \left(2 a_k R_k + b_k \right) \frac{\partial R_k}{\partial u_i}$$

$$\frac{\partial R_k}{\partial u_i} = - \frac{\frac{\partial a_k}{\partial u_i} R_k^2 + \frac{\partial b_k}{\partial u_i} R_k}{2 a_k R_k + b_k} \quad (5.46)$$

ou

$$\frac{\partial R_k}{\partial u_i^e} = \left(- \frac{\frac{\partial a}{\partial u_i^e} R^2 + \frac{\partial b}{\partial u_i^e} R}{2 a R + b} \right)_K$$

Considerando que a restrição j pertence ao elemento e , camada k e ponto de Gauss m , as componentes do vector de forças adjuntas vêm:

$$\boxed{\frac{\partial g_j}{\partial u_i^e} = \frac{1}{R_o} \left(\frac{\frac{\partial a}{\partial u_i^e} R^2 + \frac{\partial b}{\partial u_i^e} R}{2 a R + b} \right)_{e, k, m}} \quad (5.47)$$

sendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_{e, k, m}}{\partial u_i^e} = & \left[2 F_{11} \sigma_1 \frac{\partial \sigma_1}{\partial u_i^e} + 2 F_{22} \sigma_2 \frac{\partial \sigma_2}{\partial u_i^e} + 2 F_{66} \sigma_6 \frac{\partial \sigma_6}{\partial u_i^e} + 2 F_{12} \left(\sigma_2 \frac{\partial \sigma_1}{\partial u_i^e} + \sigma_1 \frac{\partial \sigma_2}{\partial u_i^e} \right) \right]_{e, k, m} \\ & \left[2 F_{16} \left(\sigma_6 \frac{\partial \sigma_1}{\partial u_i^e} + \sigma_1 \frac{\partial \sigma_6}{\partial u_i^e} \right) + 2 F_{26} \left(\sigma_6 \frac{\partial \sigma_2}{\partial u_i^e} + \sigma_2 \frac{\partial \sigma_6}{\partial u_i^e} \right) \right]_{e, k, m} \end{aligned} \quad (5.48)$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_{e, k, m}}{\partial u_i^e} = & \left[2 \left(F_{11} \sigma_1 + F_{12} \sigma_2 + F_{16} \sigma_6 \right) \frac{\partial \sigma_1}{\partial u_i^e} + 2 \left(F_{12} \sigma_1 + F_{22} \sigma_2 + F_{26} \sigma_6 \right) \frac{\partial \sigma_2}{\partial u_i^e} \right]_{e, k, m} + \\ & \left[2 \left(F_{16} \sigma_1 + F_{26} \sigma_2 + F_{66} \sigma_6 \right) \frac{\partial \sigma_6}{\partial u_i^e} \right]_{e, k, m} \end{aligned} \quad (5.49.a)$$

que pode ser representado sob a forma de produto matricial seguinte:

$$\frac{\partial a_{e, k, m}}{\partial u_i^e} = \left(2 \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \sigma_1}{\partial u_i^e} \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial u_i^e} \\ \frac{\partial \sigma_6}{\partial u_i^e} \end{array} \right\}^T \left[\begin{array}{ccc} F_{11} & F_{12} & F_{16} \\ F_{12} & F_{22} & F_{26} \\ F_{16} & F_{26} & F_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{array} \right\} \right)_{e, k, m} \quad (5.49.b)$$

e por outro lado:

$$\frac{\partial b_{e, k, m}}{\partial u_i^e} = \left(F_1 \frac{\partial \sigma_1}{\partial u_i^e} + F_2 \frac{\partial \sigma_2}{\partial u_i^e} + F_6 \frac{\partial \sigma_6}{\partial u_i^e} \right)_{e, k, m} \quad (5.50.a)$$

com a seguinte representação sob a forma de producto vectorial:

$$\frac{\partial b_{e, k, m}}{\partial u_i^e} = \left(\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \sigma_1}{\partial u_i^e} \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial u_i^e} \\ \frac{\partial \sigma_6}{\partial u_i^e} \end{array} \right\}^T \cdot \left\{ \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_6 \end{array} \right\} \right)_{e, k, m} \quad (5.50.b)$$

sendo as derivadas $\{\partial \sigma_r / \partial u_i^e\}$ calculadas analiticamente.

A sensibilidade da restrição g_j relativamente às variáveis de projecto, equação (5.29), é calculada pela expressão:

$$\frac{dg_j}{dx_i} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i} + \{ \phi_j \}^T \left(\left\{ \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\} - \left[\frac{\partial K}{\partial x_i} \right] \{ u \} \right)$$

como $\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$ e cada variável de projecto x_i diz respeito apenas ao macroelemento M ,
obtem-se:

$$\boxed{\frac{dg_j}{dx_i} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i} - \sum_{e \in M} \{\phi_j^e\}^T \left[\frac{\partial K^e}{\partial x_i} \right] \{u^e\}} \quad (5.51)$$

As derivadas $\partial g_j / \partial x_i$ são obtidas por uma expressão semelhante à equação (5.47):

$$\frac{\partial g_j}{\partial x_i} = \frac{1}{R_0} \left(\frac{\frac{\partial a}{\partial x_i} R^2 + \frac{\partial b}{\partial x_i} R}{2aR + b} \right)_{e, k, m} \quad (5.52)$$

com:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_{e, k, m}}{\partial x_{e, k, m}} = & \left(\sigma_1^2 \frac{\partial F_{11}}{\partial x_k} + \sigma_2^2 \frac{\partial F_{22}}{\partial x_k} + \sigma_6^2 \frac{\partial F_{66}}{\partial x_k} + 2\sigma_1\sigma_2 \frac{\partial F_{12}}{\partial x_k} + 2\sigma_1\sigma_6 \frac{\partial F_{16}}{\partial x_k} + \right. \\ & \left. 2\sigma_2\sigma_6 \frac{\partial F_{26}}{\partial x_k} \right)_{e, i=k, m} + \left[2 \left(F_{11}\sigma_1 + F_{12}\sigma_2 + F_{16}\sigma_6 \right) \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_i} + 2 \left(F_{12}\sigma_1 + \right. \right. \\ & \left. \left. F_{22}\sigma_2 + F_{26}\sigma_6 \right) \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_i} + 2 \left(F_{16}\sigma_1 + F_{26}\sigma_2 + F_{66}\sigma_6 \right) \frac{\partial \sigma_6}{\partial x_i} \right]_{e, i=k, m} \end{aligned} \quad (5.52.a)$$

ou sob a forma de produto matricial:

$$\frac{\partial a_{e,k,m}}{\partial u_i^e} = \left(\begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{array} \right\}^T \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial F_{11}}{\partial x_k} & \frac{\partial F_{12}}{\partial x_k} & \frac{\partial F_{16}}{\partial x_k} \\ \frac{\partial F_{12}}{\partial x_k} & \frac{\partial F_{22}}{\partial x_k} & \frac{\partial F_{26}}{\partial x_k} \\ \frac{\partial F_{16}}{\partial x_k} & \frac{\partial F_{26}}{\partial x_k} & \frac{\partial F_{66}}{\partial x_k} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{array} \right\} \\ + \\ 2 \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_i} \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_i} \\ \frac{\partial \sigma_6}{\partial x_i} \end{array} \right\}^T \left[\begin{array}{ccc} F_{11} & F_{12} & F_{16} \\ F_{12} & F_{22} & F_{26} \\ F_{16} & F_{26} & F_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{array} \right\} \end{array} \right)_{e,i=k,m} \quad (5.52.b)$$

e

$$\frac{\partial b_k}{\partial x_i} = \left(\sigma_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_k} + \sigma_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_k} + \sigma_6 \frac{\partial F_6}{\partial x_k} \right)_{e,i=k,m} + \left(F_1 \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_i} + F_2 \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_i} + F_6 \frac{\partial \sigma_6}{\partial x_i} \right)_{e,i=k,m} \quad (5.52.c)$$

ou sob a forma de produto vectorial:

$$\frac{\partial b_{e,k,m}}{\partial u_i^e} = \left(\begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial F_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_k} \\ \frac{\partial F_6}{\partial x_k} \end{array} \right\}^T \cdot \left\{ \begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_k} \\ \frac{\partial \sigma_6}{\partial x_k} \end{array} \right\}^T \cdot \left\{ \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_6 \end{array} \right\} \end{array} \right)_{e,i=k,m} \quad (5.52.d)$$

Note-se que, no caso das variáveis de projecto orientações das camadas. ($x_i = \theta_i$), se $i \neq k$, i.e., se a variável θ_i não corresponde à orientação da camada k onde se localiza a restrição g_j , então

$$\frac{\partial F_{l,p}}{\partial x_i} = 0, \quad l,p = 1, 2, 6 \quad (5.52.e)$$

$$\frac{\partial \sigma_j}{\partial x_i} = 0, \quad j = 1, 2, 6 \quad (5.52.f)$$

e ainda:

$$\frac{\partial F_l}{\partial x_i} = 0, \quad l = 1, 2, 6 \quad (5.52.g)$$

No caso das variáveis espessuras dos macroelementos as igualdades (5.52.e) e (5.52.g) são válidas em qualquer situação, uma vez que os parâmetros de resistência F_l e F_{lp} não dependem das espessuras.

5.3.4 - DERIVAÇÃO ANALITICA

Neste parágrafo deduzem-se as derivadas das tensões em ordem aos parâmetros nodais do elemento, $\partial \sigma_i / \partial u^e$, em relação às variáveis de projecto, $\partial \sigma_i / \partial x_i$, e as sensibilidades da matriz rigidez e dos parâmetros F_i e F_{ij} em relação às variáveis de projecto, respectivamente $[\partial K^e / \partial x_i]$, $\partial F_l / \partial x_i$ e $\partial F_{lm} / \partial x_i$.



5.3.4.1 - DETERMINAÇÃO DOS TERMOS $\frac{\partial \sigma_r}{\partial u_i^e}$

$$\{\sigma'\}_{e,k,m} = ([D'] \{\epsilon'\})_{e,k,m} \quad (5.53)$$

$$\{\sigma'\}_{e,k,m} = ([D'] [B] \{u^e\})_{e,k,m} \quad (5.54)$$

$$\{\sigma'\} = \{\sigma_{x'}, \sigma_{y'}, \tau_{x'y'}, \tau_{x'z'}, \tau_{y'z'}\}^T \quad (5.55)$$

$\{\sigma'\}$ - vector das tensões no referencial local (x', y', z') .

$\{\epsilon'\}$ - vector das deformações no referencial local (x', y', z') .

$[D']$ - matriz de elasticidade no referencial local (x', y', z') .

$[B]$ - matriz das deformações

Derivando a equação (5.54) obtemos :

$$\left\{ \frac{\partial \sigma'}{\partial u_i^e} \right\}_{e,k,m} = ([D'] [B] \{\delta\})_{e,k,m}$$

com $\{\delta\} = \{0, \dots, \delta_r, \dots, 0\}$, $\begin{cases} \delta_r = 1, & i = r \\ \delta_r = 0, & i \neq r \end{cases} \quad (5.56)$

ou ainda:

$$\left[\left\{ \frac{\partial \sigma'}{\partial u_1^e} \right\}, \dots, \left\{ \frac{\partial \sigma'}{\partial u_i^e} \right\}, \dots, \left\{ \frac{\partial \sigma'}{\partial u_n^e} \right\} \right]_{e,k,m} = ([D'] [B])_{e,k,m} \quad (5.57)$$

5.3.4.2 - DETERMINAÇÃO DOS TERMOS $\frac{\partial \sigma_r}{\partial x_j}$

Derivando a equação (5.54)

$$\left\{ \frac{\partial \sigma'}{\partial x_i} \right\} = \left[\frac{\partial D'}{\partial x_i} \right]_{k=i} [B] \{u^e\} \quad \text{para } x_i = \theta_i \text{ (orientações das camadas)} \quad (5.58)$$

ou

$$\left\{ \frac{\partial \sigma'}{\partial x_i} \right\} = \left(\left[\frac{\partial D'}{\partial x_i} \right] [B] + [D'] \left[\frac{\partial B'}{\partial x_i} \right] \{u^e\} \right)_{e, k, m} \quad \text{para } x_i = t_e \text{ (espessura do elemento)} \quad (5.59)$$

i) Caso em que as variáveis de projecto x_i são as orientações θ_i de cada camada que constitui o elemento ($x_i = \theta_i$).

$$\boxed{\left\{ \frac{\partial \sigma'}{\partial x_i} \right\} = \left(\left[\frac{\partial D'}{\partial x_i} \right] [B] \{u^e\} \right)_{e, k, m}} \quad (5.60)$$

sendo

$$[D'] = [T]^T [D] [T]$$

A matriz $[D]$ representa a matriz de elasticidade do material constituinte da camada típica, referida ao sistema de eixos materiais (1, 2, 3), e $[T]$ é a matriz de transformação do referencial, material (1, 2, 3), para o referencial local (x' , y' , z'), ou seja:

$$\begin{aligned} [D'] &= \begin{bmatrix} [T_1] & 0 \\ 0 & [T_2] \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} [D_1] & 0 \\ 0 & [D_2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [T_1] & 0 \\ 0 & [T_2] \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} [T_1]^T [D_1] [T_1] & 0 \\ 0 & [T_2]^T [D_2] [T_2] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.61)$$

em que:

$$[D_1] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} \end{bmatrix} ; \quad [D_2] = \begin{bmatrix} K_1 G_{13} & 0 \\ 0 & K_2 G_{23} \end{bmatrix}$$

$$[T_1] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & mn \\ n^2 & m^2 & -mn \\ -2mn & 2mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} ; \quad [T_2] = \begin{bmatrix} m & n \\ -n & m \end{bmatrix}$$

Sendo $m = \cos \theta$ e $n = \sin \theta$

A equação (5.61) pode ainda ser escrita da seguinte forma:

$$[D] = \begin{bmatrix} [D_1^{(1)}] & 0 \\ 0 & [D_2^{(1)}] \end{bmatrix}$$

sendo:

$$[D_1^{(1)}] = \begin{bmatrix} d_{11}^{(1)} & d_{12}^{(1)} & d_{16}^{(1)} \\ d_{21}^{(1)} & d_{22}^{(1)} & d_{26}^{(1)} \\ d_{61}^{(1)} & d_{62}^{(1)} & d_{66}^{(1)} \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \begin{aligned} d_{21}^{(1)} &= d_{12}^{(1)} \\ d_{16}^{(1)} &= d_{61}^{(1)} \\ d_{26}^{(1)} &= d_{62}^{(1)} \end{aligned} \quad (5.62)$$

e

$$[D_2^{(1)}] = \begin{bmatrix} d_{11}^{(2)} & d_{12}^{(2)} \\ d_{21}^{(2)} & d_{22}^{(2)} \end{bmatrix}$$

Os termos $d^{(1)}_{ij}$ e $d^{(2)}_{ij}$ podem ser calculados através das equações (5.61) ou alternativamente recorrendo às Tabelas 5.1 e 5.2.

	Q_{11}	Q_{22}	Q_{12}	Q_{33}
$d^{(1)}_{11}$	m^4	n^4	$2m^2n^2$	$4m^2n^2$
$d^{(1)}_{22}$	n^4	m^4	$2m^2n^2$	$4m^2n^2$
$d^{(1)}_{12}$	m^2n^2	m^2n^2	m^4+n^4	$-4m^2n^2$
$d^{(1)}_{66}$	m^2n^2	m^2n^2	$-2m^2n^2$	$(m^2-n^2)^2$
$d^{(1)}_{16}$	m^3n	$-mn^3$	mn^3-m^3n	$2(mn^3-m^3n)$
$d^{(1)}_{26}$	mn^3	$-m^3n$	m^3n-mn^3	$2(m^3n-mn^3)$

$m = \cos \theta, n = \sin \theta$

Tabela 5.1 - Transformação de constantes elásticas a partir do referencial da camada para o referencial do estratificado

sendo

$Q_{11} = E_1 / (1 - \nu_{12} \nu_{21})$

$Q_{22} = E_2 / (1 - \nu_{12} \nu_{21})$

$Q_{12} = \nu_{12} Q_{22} = \nu_{21} Q_{11}$

$Q_{33} = G_{12}$

	$K_1 G_{13}$	$K_2 G_{23}$
$d^{(2)}_{11}$	m^2	n^2
$d^{(2)}_{22}$	n^2	m^2
$d^{(2)}_{12}$	mn	$-mn$
$d^{(2)}_{21}$	mn	$-mn$

Tabela 5.2

Derivando as equações (5.62) obtém-se:

$$\left[\frac{\partial D'}{\partial x_i}\right] = \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial D_1^{(1)}}{\partial x_i}\right] & 0 \\ 0 & \left[\frac{\partial D_2^{(1)}}{\partial x_i}\right] \end{bmatrix} \tag{5.63}$$

Esta matriz é constituída pelas seguintes matrizes bloco:

$$\left[\frac{\partial D_1^{(1)}}{\partial x_i}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial d_{11}^{(1)}}{\partial x_i} & \frac{\partial d_{12}^{(1)}}{\partial x_i} & \frac{\partial d_{16}^{(1)}}{\partial x_i} \\ \frac{\partial d_{21}^{(1)}}{\partial x_i} & \frac{\partial d_{22}^{(1)}}{\partial x_i} & \frac{\partial d_{26}^{(1)}}{\partial x_i} \\ \frac{\partial d_{61}^{(1)}}{\partial x_i} & \frac{\partial d_{62}^{(1)}}{\partial x_i} & \frac{\partial d_{66}^{(1)}}{\partial x_i} \end{bmatrix} \tag{5.64}$$

cujas componentes se podem obter recorrendo à Tabela 5.3.

	Q_{11}	Q_{22}	Q_{12}	Q_{33}
$\frac{\partial d_{11}^{(1)}}{\partial x_i}$	$-4m^3n$	$4n^3m$	$4(m^3n-mn^3)$	$8(m^3n-mn^3)$
$\frac{\partial d_{22}^{(1)}}{\partial x_i}$	$4mn^3$	$-4m^3n$	$4(m^3n-n^3m)$	$8(m^3n-mn^3)$
$\frac{\partial d_{12}^{(1)}}{\partial x_i}$	$2(m^3n-mn^3)$	$2(m^3n-mn^3)$	$4(n^3m-nm^3)$	$8(n^3m-m^3n)$
$\frac{\partial d_{66}^{(1)}}{\partial x_i}$	$2(m^3n-mn^3)$	$2(m^3n-mn^3)$	$4(n^3m-nm^3)$	$8(n^3m-m^3n)$
$\frac{\partial d_{16}^{(1)}}{\partial x_i}$	$m^4-3m^2n^2$	$n^4-3m^2n^2$	$6m^2n^2-n^4-m^4$	$2(6m^2n^2-n^4-m^4)$
$\frac{\partial d_{26}^{(1)}}{\partial x_i}$	$2(mn^3-m^3n)$	$3m^2n^2-m^4$	$m^4+m^4-6m^2n^2$	$2(m^4+m^4-6m^2n^2)$

Tabela 5.3

e

$$\left[\frac{\partial D_2^{(1)}}{\partial x_i} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial d_{11}^{(2)}}{\partial x_i} & \frac{\partial d_{12}^{(2)}}{\partial x_i} \\ \frac{\partial d_{21}^{(2)}}{\partial x_i} & \frac{\partial d_{22}^{(2)}}{\partial x_i} \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

cujas componentes são apresentadas na Tabela 5.4

	$K_1 G_{13}$	$K_2 G_{23}$
$\frac{\partial d_{11}^{(2)}}{\partial x_i}$	-2mn	2mn
$\frac{\partial d_{22}^{(2)}}{\partial x_i}$	2mn	- 2mn
$\frac{\partial d_{12}^{(2)}}{\partial x_i}$	$m^2 - n^2$	$n^2 - m^2$
$\frac{\partial d_{21}^{(2)}}{\partial x_i}$	$m^2 - n^2$	$n^2 - m^2$

Tabela 5.4

A obtenção de $\left[\frac{\partial D'}{\partial x_i} \right]$ pode ser feita sob a forma matricial, processo aliás seguido na implementação:

$$\left(\left[\frac{\partial D'}{\partial x_i} \right] \right)_{e,k} = \left(\left[\frac{\partial T}{\partial x_i} \right]^T [D] [T] + [T]^T [D] \left[\frac{\partial T}{\partial x_i} \right] \right)_{e,k} \quad (5.66)$$

ii) Caso em que as variáveis de projecto x_i são as espessuras t_e de cada elemento ($x_i = t_e$).

$$\left\{ \frac{\partial \sigma'}{\partial x_i} \right\}_{e,k,m} = \left(\left[\frac{\partial D'}{\partial x_i} \right] [B] + [D] \left[\frac{\partial B}{\partial x_i} \right] \right)_{e,k,m} \{u^e\}$$

mas $\left[\frac{\partial D'}{\partial x_i} \right] = 0$ pelo que:

$$\boxed{\left\{ \frac{\partial \sigma'}{\partial x_i} \right\}_{e, k, m} = \left([D'] \left[\frac{\partial B}{\partial x_i} \right] \{u^e\} \right)_{e, k, m}} \quad (5.67)$$

Definição da matriz [B]:

Definindo as deformações no referencial local (x', y', z') [2]:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{x'} \\ \epsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y'} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y'} & \frac{\partial}{\partial x'} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z'} & 0 & \frac{\partial}{\partial x'} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z'} & \frac{\partial}{\partial y'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{Bmatrix} = [S] \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{Bmatrix} \quad (5.68)$$

Os deslocamentos no referencial local (x', y', z') podem ser expressos a partir da seguinte transformação:

$$\begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{Bmatrix} = [\theta]^T \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

em que $[\theta]^T$ representa a matriz transformação do referencial local para o global, referida no Capítulo 4.

Assim pode-se exprimir a equação (5.68) da seguinte forma:

$$\underline{\varepsilon} = [S] [\theta]^T \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (5.69)$$

Sabendo que o campo de deslocamentos do elemento expresso à custa das funções de forma é:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & N_k & 0 & 0 & N_k \zeta \frac{h_k}{2} \bar{v}_{1k} & -N_k \zeta \frac{h_k}{2} \bar{v}_{2k} & \dots \\ \dots & 0 & N_k & 0 & N_k \zeta \frac{h_k}{2} \bar{v}_{1k} & -N_k \zeta \frac{h_k}{2} \bar{v}_{2k} & \dots \\ \dots & 0 & 0 & N_k & N_k \zeta \frac{h_k}{2} \bar{v}_{1k} & -N_k \zeta \frac{h_k}{2} \bar{v}_{2k} & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vdots \\ \dots \\ u_k \\ v_k \\ w_k \\ \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

ou

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [N] \{u^e\} \quad (5.70)$$

pelo que:

$$\underline{\varepsilon} = [S] [\theta]^T [N] \{u^e\} = [B] \{u^e\} \quad (5.71.a)$$

com,

$$B = [S] [\theta]^T [N] \quad (5.71.b)$$

Se

$$[\theta] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \quad ; \quad [\theta]^T = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$[B] = [S] \begin{bmatrix} \dots & b_{11}N_k & b_{21}N_k & b_{31}N_k & N_k \zeta \frac{h_k}{2} \left(b_{11}\bar{v}_{1k} + b_{21}\bar{v}_{1k} + b_{31}\bar{v}_{1k} \right) \\ \dots & b_{12}N_k & b_{22}N_k & b_{32}N_k & N_k \zeta \frac{h_k}{2} \left(b_{12}\bar{v}_{1k} + b_{22}\bar{v}_{1k} + b_{32}\bar{v}_{1k} \right) \\ \dots & b_{13}N_k & b_{23}N_k & b_{33}N_k & N_k \zeta \frac{h_k}{2} \left(b_{13}\bar{v}_{1k} + b_{23}\bar{v}_{1k} + b_{33}\bar{v}_{1k} \right) \\ & & & & - N_k \zeta \frac{h_k}{2} \left(b_{11}\bar{v}_{2k} + b_{21}\bar{v}_{2k} + b_{31}\bar{v}_{2k} \right) \dots \\ & & & & - N_k \zeta \frac{h_k}{2} \left(b_{12}\bar{v}_{2k} + b_{22}\bar{v}_{2k} + b_{32}\bar{v}_{2k} \right) \dots \\ & & & & - N_k \zeta \frac{h_k}{2} \left(b_{13}\bar{v}_{2k} + b_{23}\bar{v}_{2k} + b_{33}\bar{v}_{2k} \right) \dots \end{bmatrix} \quad (5.72)$$

Assim a matriz [B] vem:

$$[B] = \begin{bmatrix} \dots & B_{11}^k & B_{12}^k & B_{13}^k & B_{14}^k & B_{15}^k & \dots \\ \dots & B_{21}^k & B_{22}^k & B_{23}^k & B_{24}^k & B_{25}^k & \dots \\ \dots & B_{31}^k & B_{32}^k & B_{33}^k & B_{34}^k & B_{35}^k & \dots \\ \dots & B_{41}^k & B_{42}^k & B_{43}^k & B_{44}^k & B_{45}^k & \dots \\ \dots & B_{51}^k & B_{52}^k & B_{53}^k & B_{54}^k & B_{55}^k & \dots \end{bmatrix}$$

com

$$B_{11}^k = b_{11} \frac{\partial N_k}{\partial x'}$$

$$B_{12}^k = b_{21} \frac{\partial N_k}{\partial x'}$$

$$B_{13}^k = b_{31} \frac{\partial N_k}{\partial x'}$$

$$B_{14}^k = \frac{h_k}{2} \left(b_{11} \bar{v}_{1k}^x + b_{21} \bar{v}_{1k}^y + b_{31} \bar{v}_{1k}^z \right) \frac{\partial}{\partial x'} (N_k \zeta) \quad (5.73)$$

$$B_{15}^k = - \frac{h_k}{2} \left(b_{11} \bar{v}_{2k}^x + b_{21} \bar{v}_{2k}^y + b_{31} \bar{v}_{2k}^z \right) \frac{\partial}{\partial x'} (N_k \zeta)$$

$$B_{21}^k = b_{12} \frac{\partial N_k}{\partial y'}$$

$$B_{22}^k = b_{22} \frac{\partial N_k}{\partial y'}$$

$$B_{23}^k = b_{32} \frac{\partial N_k}{\partial y'}$$

$$B_{24}^k = \frac{h_k}{2} \left(b_{12} \bar{v}_{1k}^x + b_{22} \bar{v}_{1k}^y + b_{32} \bar{v}_{1k}^z \right) \frac{\partial}{\partial y'} (N_k \zeta)$$

$$B_{25}^k = - \frac{h_k}{2} \left(b_{12} \bar{v}_{2k}^x + b_{22} \bar{v}_{2k}^y + b_{32} \bar{v}_{2k}^z \right) \frac{\partial}{\partial y'} (N_k \zeta)$$

$$B_{31}^k = b_{11} \frac{\partial N_k}{\partial y'} + b_{12} \frac{\partial N_k}{\partial x'}$$

$$B_{32}^k = b_{21} \frac{\partial N_k}{\partial y'} + b_{22} \frac{\partial N_k}{\partial x'}$$

$$B_{33}^k = b_{31} \frac{\partial N_k}{\partial y'} + b_{32} \frac{\partial N_k}{\partial x'}$$

$$B_{34}^k = \frac{h_k}{2} \left(b_{11} \bar{v}_{1k}^x + b_{21} \bar{v}_{1k}^y + b_{31} \bar{v}_{1k}^z \right) \frac{\partial}{\partial y'} (N_k \zeta) + \frac{h_k}{2} \left(b_{12} \bar{v}_{1k}^x + b_{22} \bar{v}_{1k}^y + b_{32} \bar{v}_{1k}^z \right) \frac{\partial}{\partial x'} (N_k \zeta)$$

$$B_{35}^k = - \frac{h_k}{2} \left(b_{11} \bar{v}_{2k}^x + b_{21} \bar{v}_{2k}^y + b_{31} \bar{v}_{2k}^z \right) \frac{\partial}{\partial x'} (N_k \zeta) - \frac{h_k}{2} \left(b_{12} \bar{v}_{2k}^x + b_{22} \bar{v}_{2k}^y + b_{32} \bar{v}_{2k}^z \right) \frac{\partial}{\partial x'} (N_k \zeta)$$

$$B_{41}^k = b_{11} \frac{\partial N_k}{\partial z'} + b_{13} \frac{\partial N_k}{\partial x'}$$

$$B_{42}^k = b_{21} \frac{\partial N_k}{\partial z'} + b_{23} \frac{\partial N_k}{\partial x'}$$

$$B_{43}^k = b_{31} \frac{\partial N_k}{\partial z'} + b_{33} \frac{\partial N_k}{\partial x'}$$

$$B_{44}^k = \frac{h_k}{2} \left(b_{11} \bar{v}_{1k}^x + b_{21} \bar{v}_{1k}^y + b_{31} \bar{v}_{1k}^z \right) \frac{\partial}{\partial z'} (N_k \zeta) + \frac{h_k}{2} \left(b_{13} \bar{v}_{1k}^x + b_{23} \bar{v}_{1k}^y + b_{33} \bar{v}_{1k}^z \right) \frac{\partial}{\partial x'} (N_k \zeta)$$

$$B_{45}^k = - \frac{h_k}{2} \left(b_{11} \bar{v}_{2k}^x + b_{21} \bar{v}_{2k}^y + b_{31} \bar{v}_{2k}^z \right) \frac{\partial}{\partial z'} (N_k \zeta) - \frac{h_k}{2} \left(b_{13} \bar{v}_{2k}^x + b_{23} \bar{v}_{2k}^y + b_{33} \bar{v}_{2k}^z \right) \frac{\partial}{\partial x'} (N_k \zeta)$$

$$B_{51}^k = b_{12} \frac{\partial N_k}{\partial z'} + b_{13} \frac{\partial N_k}{\partial y'}$$

$$B_{52}^k = b_{22} \frac{\partial N_k}{\partial z'} + b_{23} \frac{\partial N_k}{\partial y'}$$

$$B_{53}^k = b_{32} \frac{\partial N_k}{\partial z'} + b_{33} \frac{\partial N_k}{\partial y'}$$

$$B_{54}^k = \frac{h_k}{2} \left(b_{12} \bar{v}_{1k}^x + b_{22} \bar{v}_{1k}^y + b_{32} \bar{v}_{1k}^z \right) \frac{\partial}{\partial z'} (N_k \zeta) + \frac{h_k}{2} \left(b_{13} \bar{v}_{1k}^x + b_{23} \bar{v}_{1k}^y + b_{33} \bar{v}_{1k}^z \right) \frac{\partial}{\partial y'} (N_k \zeta)$$

$$B_{55}^k = - \frac{h_k}{2} \left(b_{12} \bar{v}_{2k}^x + b_{22} \bar{v}_{2k}^y + b_{32} \bar{v}_{2k}^z \right) \frac{\partial}{\partial z'} (N_k \zeta) - \frac{h_k}{2} \left(b_{13} \bar{v}_{2k}^x + b_{23} \bar{v}_{2k}^y + b_{33} \bar{v}_{2k}^z \right) \frac{\partial}{\partial y'} (N_k \zeta)$$

Por outro lado sabemos que:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial x'} & \frac{\partial(N_k \zeta)}{\partial x'} \\ \frac{\partial N_k}{\partial y'} & \frac{\partial(N_k \zeta)}{\partial y'} \\ \frac{\partial N_k}{\partial z'} & \frac{\partial(N_k \zeta)}{\partial z'} \end{bmatrix} = [\theta]^T \begin{bmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial x} & \frac{\partial(N_k \zeta)}{\partial x} \\ \frac{\partial N_k}{\partial y} & \frac{\partial(N_k \zeta)}{\partial y} \\ \frac{\partial N_k}{\partial z} & \frac{\partial(N_k \zeta)}{\partial z} \end{bmatrix} = [\theta]^T [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial \xi} & \frac{\partial(N_k \zeta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_k}{\partial \eta} & \frac{\partial(N_k \zeta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_k}{\partial \zeta} & \frac{\partial(N_k \zeta)}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$$

$$= [\theta]^T [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial \xi} & \frac{\partial N_k \zeta}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_k}{\partial \eta} & \frac{\partial N_k \zeta}{\partial \eta} \\ 0 & N_k \end{bmatrix} \quad (5.74)$$

com

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$$

Definição da matriz $\left[\frac{\partial B}{\partial x_i} \right]$:

Se o elemento for de espessura contante $t_e = h$:

$$\left[\frac{\partial B}{\partial x_i} \right] = \left[\frac{\partial B}{\partial t_e} \right]$$

Consideremos a aproximação efectuada por Ferreira [4], (fig. 5.1) para o cálculo da matriz $[B]$ correspondente à cota ζ_i (equação 4.35):

$$[B]_{\zeta_i} = [B]_{\zeta=+1} - \frac{1 - \zeta_i}{2} ([B]_{\zeta=+1} - [B]_{\zeta=-1})$$

em que as matrizes $[B]_{\zeta=+1}$ e $[B]_{\zeta=-1}$ são determinadas respectivamente para $+\frac{h + \Delta h}{2}$ e $-\frac{h + \Delta h}{2}$.

A equação (5.76) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{[B]_{\zeta=+1} - [B]_{\zeta_i = \frac{h}{h+\Delta h}}}{\Delta h} = \frac{[B]_{\zeta=+1}}{h + \Delta h} \quad (5.77)$$

Extraindo limites a ambos os membros da equação 5.77:

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{[B]_{\zeta=+1} - [B]_{\zeta_i = \frac{h}{h+\Delta h}}}{\Delta h} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{[B]_{\zeta=+1}}{h + \Delta h} \quad (5.78)$$

Quando $\Delta h \rightarrow 0$, então $\zeta_i \rightarrow +1$ e $h + \Delta h \rightarrow h$.

Por outro lado o limite que figura no primeiro membro da equação (5.78), corresponde à definição de derivada, pelo que se pode escrever:

$$\frac{\partial [B]_{\zeta=+1}}{\partial h} = \frac{[B]_{\zeta=+1}}{h} \quad (5.79.a)$$

A dedução teórica para a superfície $\zeta = -1$ é idêntica à anterior, pelo que se pode escrever:

$$\frac{\partial [B]_{\zeta=-1}}{\partial h} = \frac{[B]_{\zeta=-1}}{h} \quad (5.79.b)$$

Esta definição da derivada da matriz [B] em ordem às espessuras é aproximadamente válida para o caso em que não existe a simetria anteriormente referida, uma vez que se tratam de estratificados moderadamente espessos.

5.3.4.3 - DETERMINAÇÃO DAS SENSIBILIDADES DA MATRIZ RIGIDEZ DO ELEMENTO e

Sabendo que (Capítulo 4, eq.(4.36))

$$[K^e] = \int_V [B]^T [D'] [B] dv^e$$

$$dv^e = \det [J] d\xi d\eta d\zeta \quad (5.80)$$

A matriz rigidez do elemento é obtida por:

$$[K^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D'] [B] \det [J] d\xi d\eta d\zeta \quad (5.81)$$

Na determinação das sensibilidades da matriz do elemento relativamente às variáveis do projecto há a considerar duas situações:

a) $x_i = \theta_i$ (orientação de cada camada no elemento)

Nesta situação obtém-se:

$$\left[\frac{\partial K^e}{\partial x_i} \right] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T \left[\frac{\partial D'}{\partial x_i} \right] [B] \det [J] d\xi d\eta d\zeta \quad (5.82)$$

A integração segundo a espessura, da equação (5.81), pode no entanto ser escrita sob a seguinte forma, sendo nc o número de camadas do elemento (estratificado):

$$[K^e] = \sum_{i=1}^{nc} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B^*]_i^T [D']_i [B^*]_i (\det [J]) d\xi d\eta \quad (5.83)$$

em que $[D']_i$ representa a matriz elasticidade de cada camada no referencial local (x', y', z') e $[B^*]_i$ é a matriz das deformações referidas à superfície média de cada camada, obtida por interpolação linear a partir de $[B]$ para as superfícies $\zeta = 1$ e $\zeta = -1$ segundo a equação (5.84):

$$[B^*]_i = [B]_{\zeta=+1} - \frac{1 - \zeta_i}{2} ([B]_{\zeta=+1} - [B]_{\zeta=-1}) \quad (5.84)$$

$\zeta_i = \zeta$ correspondente à superfície média da camada i

Também o valor de $[J]$, é obtido para ζ correspondente à superfície média da camada.

Assim pode-se escrever, considerando x_i independente para cada camada e para cada elemento:

$$\left[\frac{\partial K^e}{\partial x_i} \right] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B^*]_i^T \left[\frac{\partial D'}{\partial x_i} \right]_i [B^*]_i (\det[J])_i d\xi d\eta \quad (5.85)$$

sendo $[\partial D' / \partial x_i]_i$ obtida a partir das equações (5.64) e (5.65), ou (5.66).

b) $x_i = t_e$ (espessura do elemento)

Nesta situação a sensibilidade da matriz rigidez do elemento é:

$$\left[\frac{\partial K^e}{\partial x_i} \right] = \sum_{i=1}^{nc} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\left(\left[\frac{\partial B^*}{\partial x_i} \right]_i^T [D']_i [B^*]_i + [B^*]_i^T [D']_i \left[\frac{\partial B^*}{\partial x_i} \right]_i \right) (\det[J])_i + \left([B^*]_i^T [D']_i [B^*]_i \right) \frac{\partial}{\partial x_i} (\det[J])_i \right] d\xi d\eta \quad (5.86)$$

Conforme se depreende da equação (5.84), a matriz das deformações $[B^*]_i$ depende explicitamente da espessura do elemento t_e .

Derivando a equação (5.84) obtemos:

$$\left[\frac{\partial B^*}{\partial t_e} \right]_i = \left[\frac{\partial B}{\partial t_e} \right]_{\zeta=+1} - \frac{1 - \zeta_i}{2} \left(\left[\frac{\partial B}{\partial t_e} \right]_{\zeta=+1} - \left[\frac{\partial B}{\partial t_e} \right]_{\zeta=-1} \right) \quad (5.87)$$

As derivadas $\left[\frac{\partial B}{\partial t_e} \right]_{\zeta=+1}$ e $\left[\frac{\partial B}{\partial t_e} \right]_{\zeta=-1}$ são obtidas através das equações (5.79.a) e (5.79.b) para as superfícies $\zeta = +1$ e $\zeta = -1$, respectivamente.

As derivadas do determinante do Jacobiano em ordem às variáveis de projecto x_i , $\frac{\partial}{\partial x_i} (\det [J])_i$, são calculadas por derivação directa do determinante da matriz da equação (4.13).

5.3.4.4 - DETERMINAÇÃO DOS TERMOS $\partial F_I / \partial x_i$ e $\partial F_{Im} / \partial x_i$

As Tabelas 5.5 e 5.6 apresentam os valores dos F_I e F_{Im} , respectivamente. Estes valores são utilizados nas equações (5.50), constando do critério de fractura e representam as propriedades mecânicas dos materiais que constituem as camadas do estratificado. Devido à anisotropia material e devido a que as tensões são calculadas no referencial do estratificado (x' , y' , z') existe dependência destas propriedades relativamente às variáveis orientação das camadas.

	F_{xx}	F_{yy}	F_{xy}	F_{ss}
F_{11}	m^4	n^4	$2m^2n^2$	m^2n^2
F_{22}	n^4	m^4	$2m^2n^2$	m^2n^2
F_{12}	m^2n^2	m^2n^2	m^4+n^4	$-m^2n^2$
F_{66}	$4m^2n^2$	$4m^2n^2$	$-8m^2n^2$	$(m^2-n^2)^2$
F_{16}	$2m^3n$	$-2mn^3$	$2(mn^3-m^3n)$	mn^3-m^3n
F_{26}	$2mn^3$	$-2m^3n$	$2(m^3n-mn^3)$	m^3n-mn^3

$m = \cos\theta$, $n = \sin\theta$

Tabela 5.5

	F_x	F_y
F_1	m^2	n^2
F_2	n^2	m^2
F_6	$2mn$	$-2mn$

$m = \cos\theta$, $n = \sin\theta$

Tabela 5.6

As Tabelas 5.7 e 5.8 apresentam as sensibilidades dos parâmetros F_I e F_{Im} respectivamente.

	F_{xx}	F_{yy}	F_{xy}	F_{ss}
$\frac{\partial F_{11}}{\partial x_i}$	$-4m^3n$	$4n^3m$	$4(m^3n-mn^3)$	$2(m^3n-mn^3)$
$\frac{\partial F_{22}}{\partial x_i}$	$4mn^3$	$-4m^3n$	$4(m^3n-n^3m)$	$2(m^3n-mn^3)$
$\frac{\partial F_{12}}{\partial x_i}$	$2(m^3n-mn^3)$	$2(m^3n-mn^3)$	$4(n^3m-nm^3)$	$2(n^3m-m^3n)$
$\frac{\partial F_{66}}{\partial x_i}$	$8(m^3n-mn^3)$	$8(m^3n-mn^3)$	$16(n^3m-nm^3)$	$8(n^3m-m^3n)$
$\frac{\partial F_{16}}{\partial x_i}$	$2(m^4-3m^2n^2)$	$2(n^4-3m^2n^2)$	$2(6m^2n^2-n^4-m^4)$	$6m^2n^2-n^4-m^4$
$\frac{\partial F_{26}}{\partial x_i}$	$2(3n^2m^2-n^4)$	$2(3m^2n^2-m^4)$	$2(m^4+n^4-6m^2n^2)$	$m^4+n^4-6m^2n^2$

$m = \cos\theta \text{ , } n = \sin\theta$

Tabela 5.7

	F_x	F_y
$\frac{\partial F_1}{\partial x_i}$	$-2mn$	$2mn$
$\frac{\partial F_2}{\partial x_i}$	$2mn$	$-2mm$
$\frac{\partial F_6}{\partial x_i}$	$2(m^2-n^2)$	$2(n^2-m^2)$

$m = \cos\theta \text{ , } n = \sin\theta$

Tabela 5.8

As expressões seguintes indicam os parâmetros materiais de resistência da camada no referencial material (1, 2, 3), estando as fibras orientadas segundo o eixo 1 (o plano xy da camada corresponde ao plano formado pelos eixos 1 e 2 respectivamente):

$$F_{xx} = \frac{1}{XX'} \quad F_{yy} = \frac{1}{YY'} \quad F_{xy} = F_{xy}^* (F_{xx} F_{yy})^{0.5}, \quad -0.5 \leq F_{xy}^* \leq 0$$
$$F_{ss} = \frac{1}{S^2} \quad F_x = \frac{1}{X} - \frac{1}{X'} \quad F_y = \frac{1}{Y} - \frac{1}{Y'} \quad F_s = 0 \quad (5.89)$$

em que:

X - Resistência longitudinal à tracção X' - Resistência longitudinal à compressão Y - Resistência transversal à tracção Y' - Resistência transversal à compressão S - Resistência longitudinal ao corte
--

5.4 - REFERÊNCIAS

[1]

Arora, J. S., "Introduction to optimum design", MacGraw-Hill Book Company, Singapore, 1989

[2]

Kirsch, U., "Optimum structural design", MacGraw-Hill Book Company, Singapore, 1982

[3]

Tsai, S. W., "Composites design", Third Edition, Think Composites, Dayton, USA, 1987

[4]

Ferreira, A. J. M., "Análise por elementos finitos de estruturas tipo casca em materiais compósitos", Tese de Mestrado, Universidade do Porto, 1990

[5]

Ahmad, S., "Curved finite element in the analysis of solid, shell and plates structures", Ph. D. Thesis, University College of Swansea, 1969

[6]

Figueiras, Joaquim A. "Ultimate load analysis of anisotropic and reinforced concrete plates and shells", Ph. D. Thesis, University College of Swansea, 1983

Capítulo

6

PROGRAMAÇÃO DA ANÁLISE DE SENSIBILIDADES

6.1 - INTRODUÇÃO

Este capítulo tem como objectivo, a apresentação do programa resultante da implementação da análise de sensibilidades pelo método da estrutura adjunta, baseado no elemento de casca degenerado, e a apresentação de exemplos, com análise dos resultados com a finalidade de validar o modelo desenvolvido.

A programação da análise de sensibilidades foi implementada de acordo com o desenvolvimento teórico efectuado no Capítulo 5. Consta de um programa principal em linguagem FORTRAN 77, SENSY, e de um conjunto de subrotinas.

Considerou-se inicialmente que o número de restrições de deslocamentos é arbitrário.

Sendo as tensões calculadas dentro de cada elemento, em cada ponto de integração (Gauss) e em cada camada, optou-se por considerar que o número total de restrições de tensão é igual ao produto do número de elementos pelo número pontos de Gauss pelo número de camadas.

Todavia, a utilização da análise de sensibilidades no algoritmo de optimização segue uma via diferente, no que se refere ao número de restrições utilizado, tendo em vista evitar cálculos supérfluos e obter assim uma economia de tempo de CPU. Foi criada, para o efeito, uma versão rápida do programa de análise de sensibilidades tendo apenas como objectivo a obtenção da informação estritamente necessária.

Os exemplos apresentados foram implementados no computador VAX VT 320 da DIGITAL e todos os resultados foram obtidos em dupla precisão.

Na apresentação dos resultados é feita a comparação com o método numérico das diferenças finitas, baseado no mesmo programa de elementos finitos a que se refere o Capítulo 4 (Programa NEWSHELL), visando a validação do programa desenvolvido para a análise de sensibilidades.

6.2 - DESCRIÇÃO DO PROGRAMA DESENVOLVIDO PARA A ANÁLISE DE SENSIBILIDADES

6.2.1 - ESTRUTURA DO PROGRAMA SENSY

A aplicação do método da estrutura adjunta é, genericamente, constituída por dois passos fundamentais:

- 1 • A resolução do sistema de equações representado pela equação (5.20):

$$[K] \{ \delta_j \} = \left\{ \frac{\partial g_j}{\partial u} \right\} \quad j = 1, \dots, N_{dis} + N_{str}$$

necessária para a determinação dos deslocamentos adjuntos $\{ \delta_j \}$.

No modelo implementado as soluções são obtidas por recurso ao método frontal.

- 2 • Cálculo do gradiente das restrições $\{\nabla g_j\}$, através das equações (5.28) ou (5.29).

A estrutura de programação é condicionada por estes dois passos fundamentais. Assim, podemos subdividir o programa de análise de sensibilidades, SENSY, nos seguintes blocos, consoante a função das subrotinas implementadas:

- 1 • Inicialização e entrada de dados.

Subrotinas: DIMEN1, INPUT, INDATA

- 2 • Cálculo intermédio de todas as grandezas necessárias à determinação das sensibilidades das restrições em ordem às variáveis de projecto.

Subrotinas: MODAN, CORCOT, DMODAN, WORKS, DBGMAT, DVDJAC, DSTIF1, DSTIF2, PSTRAN, MULTI1

- 3 • Cálculo do valor das restrições.

Subrotinas: GJRES1, GJRES2

- 4 • Cálculo das variáveis adjuntas, derivadas parciais das restrições em ordem às variáveis de projecto e determinação das sensibilidades das restrições em ordem às variáveis de projecto.

Subrotinas: ADJDI1, ADJDI2, FRONEW, AUX4, DISGRA, SSRGRA, etc.

- 5 • Saída de resultados.

Subrotina: OUTDAT

A execução do programa SENSY deverá ser precedida de uma análise estrutural a fim de serem calculados os campos de deslocamentos e de tensões bem como as matrizes de rigidez dos elementos que constituem a estrutura. A leitura dos campos de deslocamentos e de tensões é feita a nível do bloco 1 e a leitura das matrizes de rigidez dos elementos é efectuada directamente na subrotina que resolve o sistema de equações (5.20). A utilização dos valores correspondentes aos campos de deslocamentos e de tensões é feita a nível do bloco 4.

Na figura 6.1 apresenta-se esquemáticamente a estrutura do programa de análise de sensibilidades e na figura 6.2 o fluxograma respectivo.

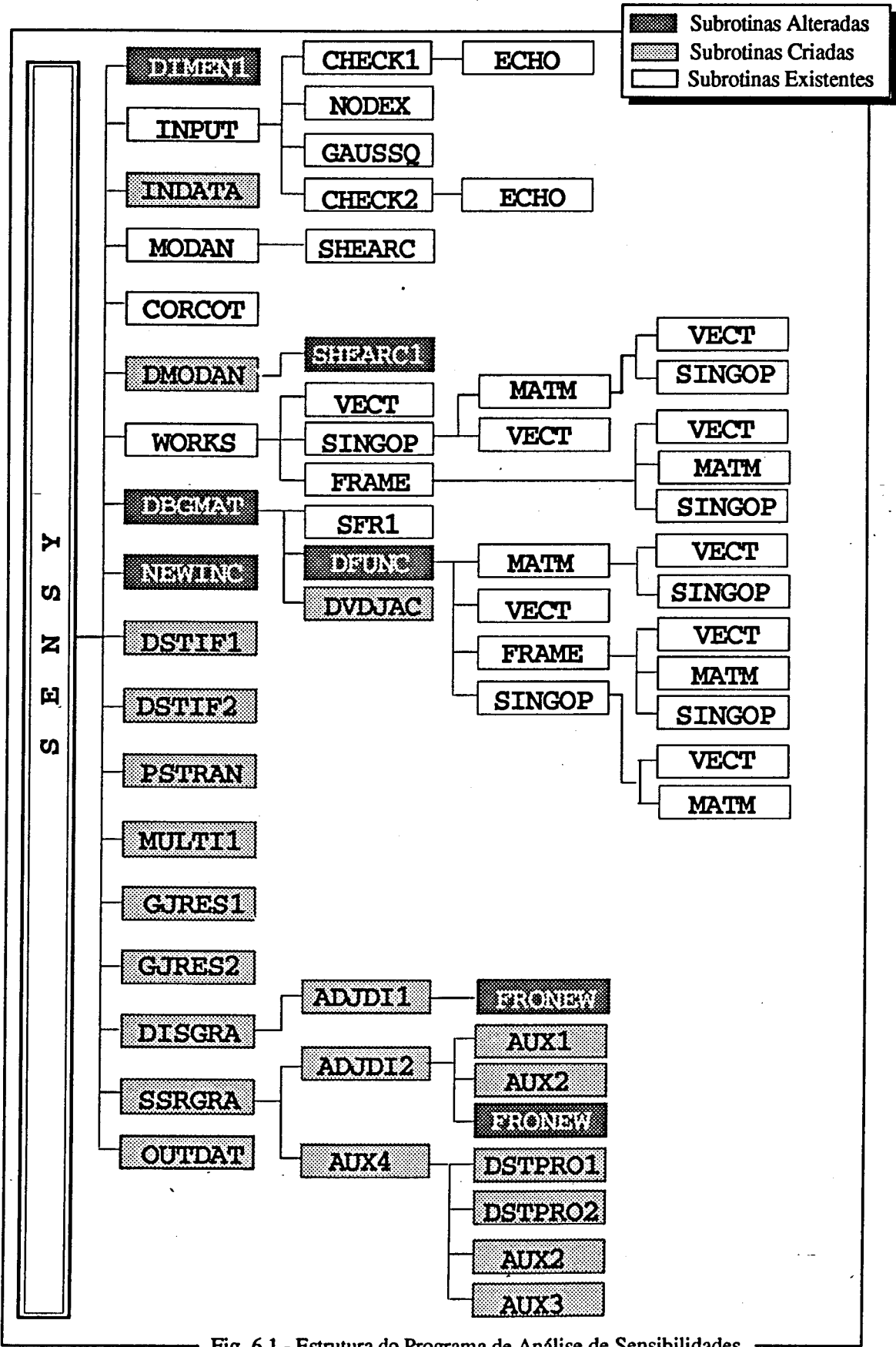


Fig. 6.1 - Estrutura do Programa de Análise de Sensibilidades

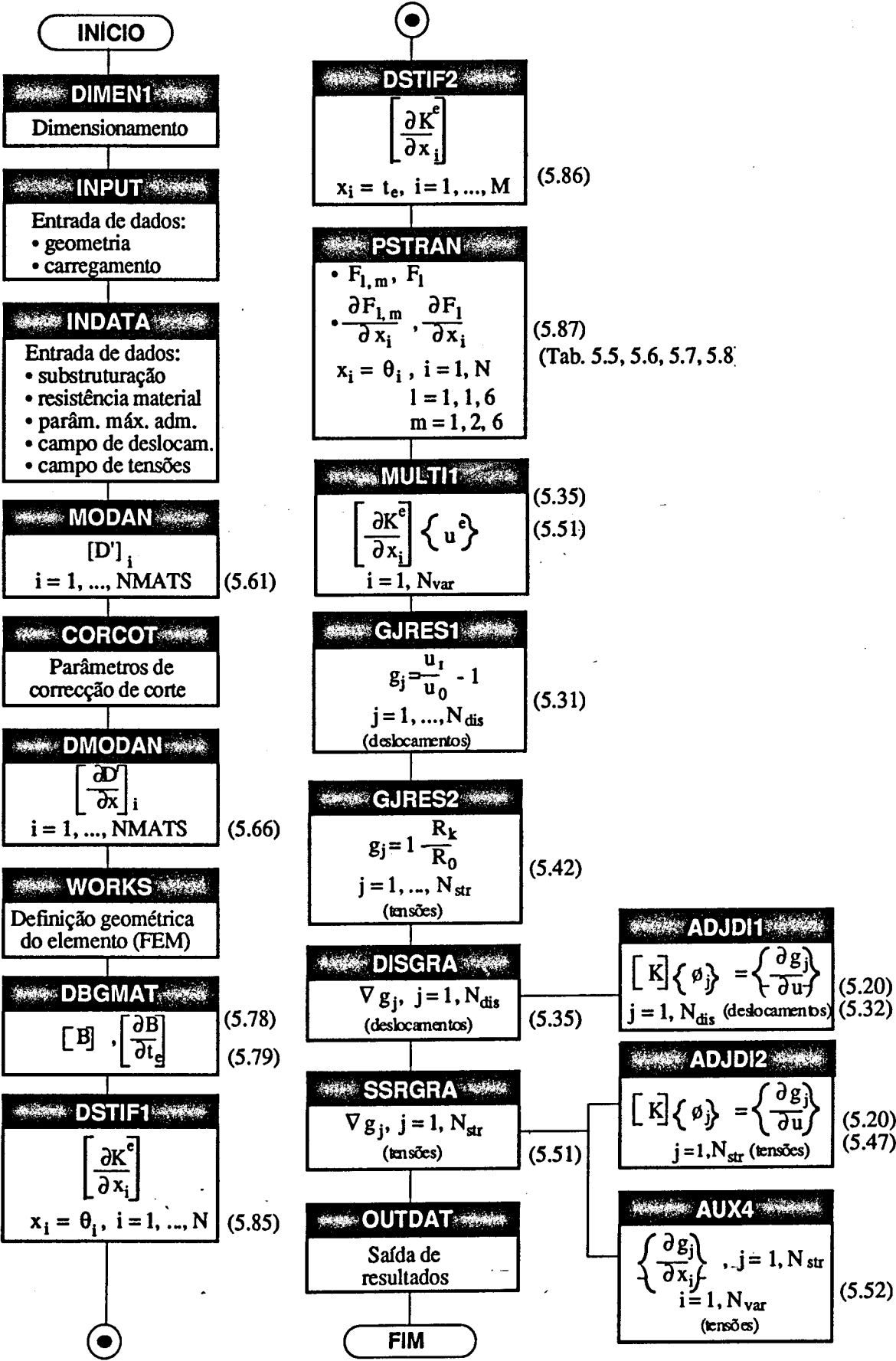


Fig. 6.2 - Diagrama de Fluxo do Programa de Análise de Sensibilidades

6.2.2 - BREVE DESCRIÇÃO DAS SUBROTINAS DO PROGRAMA SENSY

DIMEN1	Estabelece os parâmetros de dimensionamento dos vectores.
INPUT	Introduz os dados referentes às características geométricas e de carregamento da estrutura.
INDATA	Introduz os dados referentes à subestruturação do problema, as características de resistência dos materiais constituintes e os parâmetros máximos admissíveis. Efectua a leitura dos campos de deslocamentos e de tensões.
MODAN	Calcula a matriz elasticidade [D] para cada material e transforma-a para o referencial do estratificado (referencial material).
CORCOT	Calcula os parâmetros de correcção das tensões de corte.
DMODAN	Determina as derivadas da matriz elasticidade em ordem às variáveis de projecto orientações das camadas.
WORKS	Subrotina de caracterização geométrica dos elementos que constituem a estrutura (FEM).
DBGMAT	Determina a matriz das deformações [B] e as suas derivadas em ordem às espessuras dos elementos.
DSTIF1	Calcula as sensibilidades das matrizes de rigidez dos elementos relativamente às variáveis de projecto orientações das camadas.
DSTIF2	Calcula as sensibilidades das matrizes de rigidez dos elementos relativamente às variáveis de projecto espessuras dos macroelementos.
DVDJAC	Calcula as derivadas do determinante do Jacobiano relativamente às variáveis de projecto espessuras dos macroelementos.
PSTRAN	Determina os parâmetros de resistência material do critério de rotura e as respectivas derivadas em ordem às variáveis de projecto orientações das camadas.

MULTI1	Efectua o produto intermédio das sensibilidades das matrizes de rigidez dos elementos pelos vectores de deslocamentos reais correspondentes.
GJRES1	Calcula o valor das restrições de deslocamento.
GJRES2	Calcula o valor das restrições de tensão.
DISGRA	Determina as sensibilidades das restrições de deslocamento relativamente às variáveis do projecto.
ADJDI1	Calcula os deslocamentos adjuntos para as restrições de deslocamento.
SSRGRA	Determina as sensibilidades parciais das restrições de tensão relativamente às variáveis de projecto.
ADJDI2	Calcula os deslocamentos adjuntos para as restrições de tensão.
AUX1	Calcula as derivadas parciais das tensões em ordem aos deslocamentos.
AUX2	Calcula as derivadas parciais das restrições de tensão em ordem aos deslocamentos reais ou em ordem às variáveis de projecto espessuras dos macroelementos.
AUX3	Calcula as derivadas parciais das restrições de tensão em ordem às variáveis de projecto orientações das camadas.
FRNEW	Resolve os sistemas de equações pelo Método Frontal.
DSTPRO1	Determina as derivadas das tensões em ordem às variáveis de projecto orientações das camadas.
DSTPRO2	Determina as derivadas das tensões em ordem às variáveis de projecto espessuras dos macroelementos.

Existem ainda um conjunto de subrotinas referentes à caracterização geométrica do elemento finito, feita de modo tradicional e de acordo com os conceitos apresentados no Capítulo 4 [1], [2].

6.3 - APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

Apresentam-se dois exemplos incidindo sobre dois materiais compósitos diferentes para o mesmo problema sob os pontos de vista geométrico e de carregamento.

Consideremos uma placa quadrada simplesmente apoiada e sujeita a pressão uniforme de 100 Pa. A placa apresenta as dimensões indicadas na figura 6.3 e o material que a constitui é um material compósito formado por nove camadas sendo cada camada constituída por uma matriz polimérica reforçada com um tecido unidirecional de fibra de vidro. As propriedades mecânicas do material de cada camada são consideradas bem definidas sob o ponto de vista macromecânico, e são as seguintes:

$$E_1 = 206,84 \text{ GPa}$$

$$E_2 = 5,17 \text{ GPa}$$

$$G_{12} = 3,1 \text{ GPa}$$

$$G_{13} = 2,586 \text{ GPa}$$

$$G_{23} = 2,586 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0,25$$

$$X = 760 \text{ MPa}$$

$$Y = 30 \text{ MPa}$$

$$S = 70 \text{ MPa}$$

$$\rho = 2,5 \text{ E}+03 \text{ Kg/m}^3$$

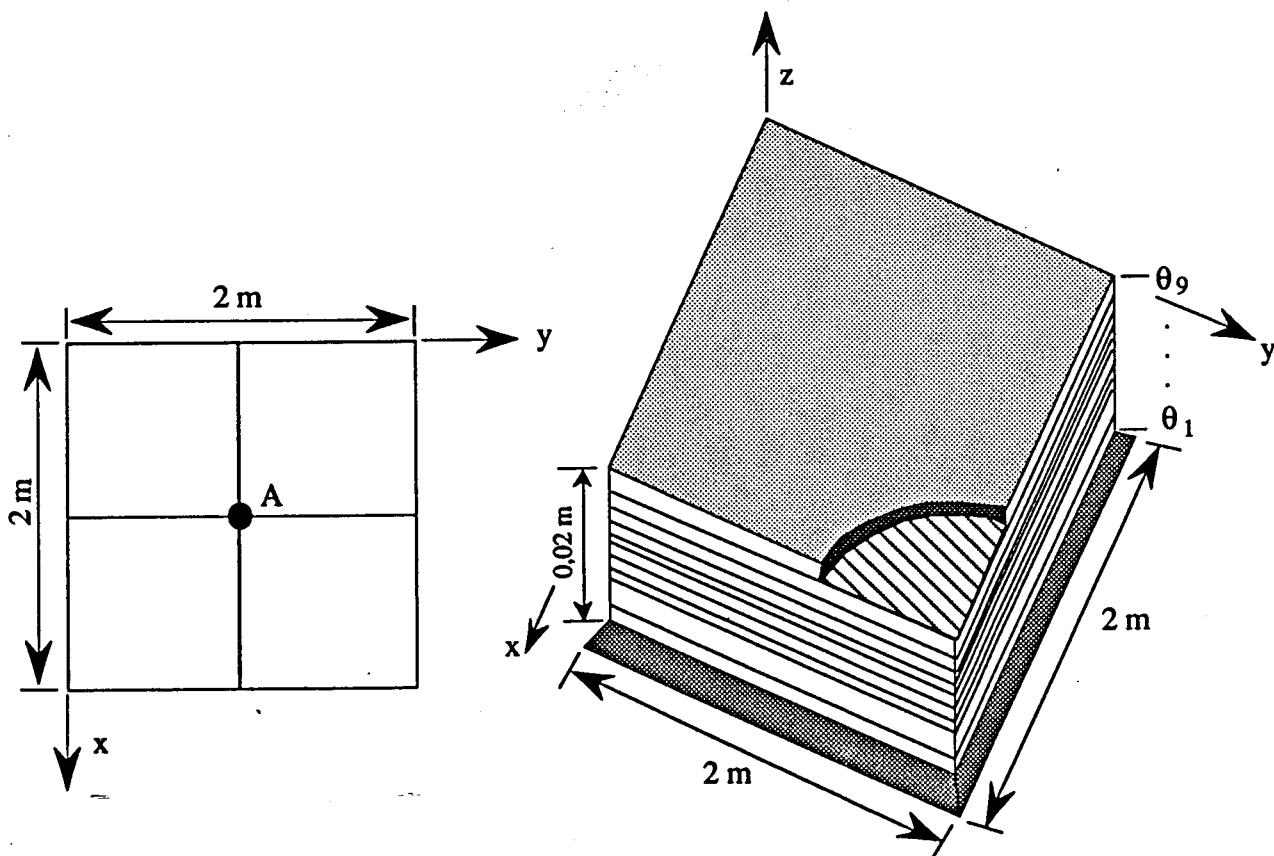


Fig.6.3 - Placa quadrada simplesmente apoiada sujeita a pressão uniforme

Para efeitos da análise estrutural e de determinação das sensibilidades considerou-se a discretização em elementos finitos indicada na figura 6.3. Os quatro elementos considerados constituem um único macroelemento. Nestas condições as variáveis de projecto consideradas são, nos termos do Capítulo 3, as orientações das camadas (9) e a espessura do macroelemento (1), totalizando 10 variáveis de projecto.

Nos exemplos apresentados consideram-se apenas duas restrições:

- a restrição de deslocamento de valor máximo
- a restrição de tensão de valor máximo

Em ambos os exemplos apresentados, devido às condições de carregamento e à geometria do problema, a restrição máxima de deslocamento verifica-se no centro da placa (ponto A), conforme se observa na figura 6.3.

Quanto à restrição máxima de tensão esta situa-se nos pontos de integração (Gauss) mais próximos do ponto A e nas camadas exteriores do estratificado.

O deslocamento máximo admissível u_0 e o coeficiente de segurança R_0 , são considerados unitários.

Nas três primeiras colunas das Tabelas 6.1, 6.2, 6.4 e 6.5, apresentam-se as sensibilidades das restrições máximas de deslocamento ((6.1) e (6.4)) e de tensão ((6.2) e (6.5)), relativamente às variáveis de projecto orientações das camadas, calculadas pelo método das diferenças finitas à frente, para diferentes valores da variação $\Delta\theta$ imposta às variáveis de projecto:

$$\frac{d\bar{g}_{dis}}{d\theta_i} \approx \frac{\bar{g}_{dis}(\theta_i + \Delta\theta_i) - \bar{g}_{dis}(\theta_i)}{\Delta\theta_i} \quad (6.1)$$

ou

$$\frac{d\bar{g}_{str}}{d\theta_i} \approx \frac{\bar{g}_{str}(\theta_i + \Delta\theta_i) - \bar{g}_{str}(\theta_i)}{\Delta\theta_i} \quad (6.2)$$

sendo $\Delta\theta_i = \Delta\theta$, $i = 1, \dots, 9$

Na quarta coluna das mesmas tabelas são apresentadas as sensibilidades pelo método da estrutura adjunta desenvolvido neste trabalho.

Nas três primeiras colunas das Tabelas 6.3 e 6.6 apresentam-se as sensibilidades das restrições máximas de deslocamento e de tensão, relativamente à variável de projecto

espessura do macroelemento, calculadas pelo método das diferenças finitas à frente, para diferentes valores do incremento Δt imposto:

$$\frac{d\bar{g}_{dis}}{dt} \approx \frac{\bar{g}_{dis}(t + \Delta t) - \bar{g}_{dis}(t)}{\Delta t} \tag{6.3}$$

ou

$$\frac{d\bar{g}_{str}}{dt} \approx \frac{\bar{g}_{str}(t + \Delta t) - \bar{g}_{str}(t)}{\Delta t} \tag{6.4}$$

Exemplo 1

Considere-se que o estratificado é simétrico e apresenta a sequência de empilhamento [30 / 60 / 30 / 60 / 30 / 60 / 30 / 60 / 30].

Devido à simetria existente na sequência de empilhamento das camadas e ao tipo de restrição (deslocamentos) as sensibilidades apresentadas na tabela 6.1 reflectem essa mesma simetria. Assim,

$$\frac{d\bar{g}_{dis}}{d\theta_1} = \frac{d\bar{g}_{dis}}{d\theta_9}, \quad \frac{d\bar{g}_{dis}}{d\theta_2} = \frac{d\bar{g}_{dis}}{d\theta_8}, \text{ etc.}$$

θ_i	METODO DAS DIFERENÇAS FINITAS			METODO PROPOSTO
	$\Delta\theta = 0.001$	$\Delta\theta = 0.0001$	$\Delta\theta = 0.00001$	
θ_1	-2,259 653 E-05	-2,263 511 E-05	-2, 263 897 E-05	-2,263 939 E-05
θ_2	+1,393 967 E-05	+1,392 088 E-05	+1,391 899 E-05	+1,391 878 E-05
θ_3	-5,649 748 E-06	-5,658 841 E-06	-5,659 748 E-06	-5,659 849 E-06
θ_4	+1,548 835 E-06	+1,546 763 E-06	+1,546 555 E-06	+1,546 532 E-06
θ_5	+8,000 000 E-17	0,000 000 E+00	+6,000 000 E-15	-8,968 300 E-20
θ_6	+1,548 834 E-06	+1,546 762 E-06	+1,546 655 E-06	+1,546 531 E-06
θ_7	-5,649 746 E-06	-5,658 839 E-06	-5,659 747 E-06	-5,659 848 E-06
θ_8	+1,393 967 E-05	+1,392 087 E-05	+1,391 899 E-05	+1,391 878 E-05
θ_9	-2,259 653 E-05	-2,263 511 E-05	-2,263 896 E-05	-2,263 939 E-05
	$\frac{d\bar{g}_{dis}}{d\theta_i}$			

TABELA 6.1 - Sensibilidades da restrição máxima de deslocamento relativamente às variáveis de projecto θ_i (orientação da camada i , $i = 1, \dots, 9$)

θ_i	METODO DAS DIFERENÇAS FINITAS			METODO PROPOSTO
	$\Delta\theta = 0.015$	$\Delta\theta = 0.01$	$\Delta\theta = 0.001$	
θ_1	-37,954 033	-37,894 495	-35,277 800	-38,601 326
θ_2	448,229 880	447,979 301	447,308 019	447,007 289
θ_3	-44,235 882	-47,248 860	-52,370 311	-52,681 978
θ_4	100,958 135	101,477 580	104,402 662	101,479 886
θ_5	0,0 E +00	0,0 E +00	0,0 E +00	-4,950 005 E-08
θ_6	-52,417 735	-53,047 081	-51,426 352	-53,957 342
θ_7	-131,279 822	-130,830 621	-122,587 618	-128,653 292
θ_8	-12,091 843	-14,328 748	-22,234 771	-19,304 397
θ_9	-439,426 144	-439,664 651	-437,761 428	-438,641 856
	$\frac{\overline{d}g_{str}}{d\theta_i}$			

TABELA 6.2 - Sensibilidades da restrição máxima de tensão relativamente às variáveis de projecto θ_i (orientação da camada i , $i = 1, \dots, 9$)

Como é óbvio, devido ao facto da restrição máxima de tensão se situar na camada exterior do laminado, a influência das diferentes variáveis de projecto é diferenciada e não existe a simetria anteriormente referida para o caso da restrição máxima de deslocamento.

	METODO DAS DIFERENÇAS FINITAS			METODO PROPOSTO
	$\Delta t = 0.05 \text{ mm}$	$\Delta t = 0.01 \text{ mm}$	$\Delta t = 0.005 \text{ mm}$	
$\frac{\overline{d}g_{dis}}{dt_m}$	- 1,735253 E-02	-1,742172 E-02	-1,743040 E-02	-1,765206 E-02
$\frac{\overline{d}g_{str}}{dt_m}$	-158087,795	-157738,702	-157411,179	-159239,602

TABELA 6.3 - Sensibilidades das restrições máximas de deslocamento e de tensão relativamente à variável de projecto t_m (espessura do macroelemento, $m = 1$)

Exemplo 2

Neste caso considera-se um estratificado não simétrico com a seguinte sequência de empilhamento [-30 / 45 / 60 / -45 / 0 / -45 / 60 / 45 / 30].

θ_i	METODO DAS DIFERENÇAS FINITAS			METODO PROPOSTO
	$\Delta\theta = 0.001$	$\Delta\theta = 0.0001$	$\Delta\theta = 0.00001$	
θ_1	+1,570 447 E-05	+1,568 711 E-05	+1,568 536 E-05	+1,568 517 E-05
θ_2	+4,563 517 E-06	+4,517 790 E-06	+4,513 216 E-06	+4,512 708 E-06
θ_3	+1,274 756 E-05	+1,273 413 E-05	+1,273 279 E-05	+1,273 264 E-05
θ_4	+1,227 007 E-07	+1,206 343 E-07	+1,204 276 E-07	+1,204 045 E-07
θ_5	+3,428 494 E-07	0,000 000 E+00	0,000 000 E+00	+3,446 869 E-07
θ_6	+2,811 582 E-07	+2,685 411 E-07	+2,672 796 E-07	+2,671 394 E-07
θ_7	+2,790 513 E-06	+2,787 886 E-06	+2,787 622 E-06	+2,787 592 E-06
θ_8	-1,233 600 E-06	-1,256 588 E-06	-1,258 887 E-06	-1,259 142 E-06
θ_9	-1,945 167 E-05	-1,947 036 E-05	-1,947 223 E-05	-1,947 243 E-05
	$\frac{d\bar{g}_{ds}}{d\theta_i}$			

TABELA 6.4 - Sensibilidades da restrição máxima de deslocamento relativamente às variáveis de projecto θ_i (orientação da camada i , $i = 1, \dots, 9$)

θ_i	METODO DAS DIFERENÇAS FINITAS			METODO PROPOSTO
	$\Delta\theta = 0.015$	$\Delta\theta = 0.01$	$\Delta\theta = 0.005$	
θ_1	308,458 392	305,352 603	288,885 630	296,118 623
θ_2	100,759 716	95,644 986	85, 709 372	84,000 640
θ_3	385,454 014	384,040 903	382,622 318	379,639 041
θ_4	-34,885 258	-31,261 514	-33,638 634	-31,194 020
θ_5	-41,420 181	-46,597 532	-42,926 905	-40,880 672
θ_6	-7,861 409	-11,723 864	-18,358 145	-9,030 446
θ_7	15,910 641	11,192 300	11,291 700	17,354 965
θ_8	14,117 381	11,200 254	13,143 356	12,816 206
θ_9	-177,685 987	-191,232 429	-179,963 944	-178,560 586
	$\frac{d\bar{g}_{str}}{d\theta_i}$			

TABELA 6.5 - Sensibilidades da restrição máxima de tensão relativamente às variáveis de projecto θ_i (orientação da camada i , $i = 1, \dots, 9$)

	METODO DAS DIFERENÇAS FINITAS			METODO PROPOSTO
	$\Delta t = 0.1 \text{ mm}$	$\Delta t = 0.01 \text{ mm}$	$\Delta t = 0.005 \text{ mm}$	
$\frac{\bar{d}g_{dis}}{dt_m}$	-1,761 456 E-02	-1,777 292 E-02	-1,778 178 E-02	-1,792 207 E-02
$\frac{\bar{d}g_{str}}{dt_m}$	-190 207,281	-194 908,217	-197 181,156	-190 071,225

TABELA 6.6 - Sensibilidades das restrições máximas de deslocamento e de tensão relativamente à variável de projecto t_m (espessura do macroelemento, $m = 1$)

6.4 - ANÁLISE DOS RESULTADOS

Os resultados obtidos para as sensibilidades podem-se considerar bons quando comparados com os valores obtidos pelo método das diferenças finitas.

Todavia, a comparação estabelecida envolve um certo grau de subjectividade quando se trata de analisar a precisão dos resultados. Com efeito, o método das diferenças finitas é um método numérico, e a precisão da aproximação efectuada aquando da sua aplicação, é obviamente dependente do grau de não-linearidade das funções g_j , do incremento Δx_i no ponto em questão e do tipo de diferenças finitas seleccionado.

As restrições g_j não apresentam todas o mesmo grau de não-linearidade no que concerne à sua dependência relativamente às variáveis de projecto. Embora seja difícil quantificar o grau de não-linearidade existente pode-se afirmar em termos qualitativos, que essa mesma não-linearidade é muito superior no que se refere à dependência das restrições relativamente às variáveis de projecto orientações das camadas.

Nestas condições a comparação efectuada entre os resultados obtidos pelo método das diferenças finitas e pelo método da estrutura adjunta deve ser entendida sob o ponto de vista de coerência dos referidos resultados.

Abordada a questão da precisão dos resultados parece evidente que a análise comparativa se deve situar ao nível das vantagens e inconvenientes inerentes á utilização dos dois métodos.

O facto do método das diferenças finitas à frente requerer $n+1$ análises estruturais por elementos finitos (n variáveis de projecto) para cada iteração do processo de optimização constitui o maior inconveniente da utilização deste método na determinação das derivadas das restrições relativamente às variáveis de projecto.

Assim, o método das diferenças finitas implica necessariamente um maior esforço computacional que o associado aos métodos analíticos. Este facto é evidenciado pelos valores constantes da tabela 6.7 onde se verifica que, para apenas 10 variáveis de projecto, a diferença de tempo de CPU, relativamente ao método da estrutura adjunta, é de 2 a 3 vezes superior. Recorde-se, no entanto, que nos exemplos analisados apenas se consideraram as restrições máximas de deslocamentos e de tensão (2).

É um dado adquirido que a diferença torna-se menos significativa quando o número de restrições activas é incrementado. Com efeito, uma das maiores vantagens exibidas pelo método das diferenças finitas é exactamente a independência relativamente ao número de restrições considerado.

Registe-se, todavia que, em métodos de optimização eficientes aplicados a estruturas contínuas em materiais compósitos, o número de restrições activas de tensão e deslocamento envolvidas no processo é relativamente reduzido, conforme se pode constatar no método de optimização desenvolvido neste trabalho.

Concluindo, podemos afirmar que, em termos gerais, o único inconveniente resultante da utilização do método da estrutura adjunta é o que se relaciona com a perda de generalidade inerente ao facto de se basear numa formulação de elementos finitos específica. Esta especificidade é no entanto relegada para plano secundário se se considerar o número elevado de variáveis de projecto presentes na caracterização estrutural dos materiais compósitos.

	Método das Diferenças Finitas	Método Proposto
Análise Estrutural	10	10
Análise de Sensibilidades	110	33
Tempo Total de CPU	110	43

TABELA 6.7 - Tempos de Cálculo (em segundos)
referentes aos exemplos 1 e 2 do § 6.3.

6.5 - REFERÊNCIAS

[1]

Ahmad, S., "Curved finite elements in the analysis of solid, shell and plate structures", Ph. D. Thesis, University College of Swansea, 1969

[2]

Figueiras, Joaquim A. "Ultimate load analysis of anisotropic and reinforced concrete plates and shells", Ph. D. Thesis, University College of Swansea, 1983

[3]

Kreyszig, Erwin "Advanced engineering mathematics", Fourth Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, USA, 1979

Capítulo

7

MÉTODO DE OPTIMIZAÇÃO

7.1 - ALGORITMO DE OPTIMIZAÇÃO EM ETAPAS MÚLTIPLAS

O método de optimização desenvolvido neste trabalho baseia-se num algoritmo em etapas múltiplas. A concretização do objectivo, que é a minimização do peso da estrutura e maximização da eficiência, é conseguida tirando partido da especificidade do problema relacionada com a natureza dos materiais utilizados. Concretamente, o facto da função objectivo não depender de todas as variáveis de projecto permite estabelecer duas etapas de acordo com a formulação do problema apresentada no Capítulo 3.

O algoritmo geral de pesquisa é, na realidade, constituído pela repetição sequencial de dois algoritmos de natureza diferente. Em harmonia com a formulação do problema este é decomposto em duas etapas. Na primeira minimiza-se uma função de valor igual ao da restrição máxima considerando o peso constante e, como variáveis de projecto, as

orientações das camadas dos estratificados. Na segunda considera-se o problema da minimização do peso da estrutura. Ambos os objectivos são complementares e correspondem à consideração da contribuição de todas as variáveis - espessuras dos macroelementos, orientações das camadas e sequência de empilhamento - na obtenção do projecto óptimo da estrutura.

Podemos assim estabelecer de forma esquemática as diferentes etapas do processo de optimização:

1ª Etapa - Algoritmo 1:

- (1) Consideração de uma solução inicial, admissível ou não.
- (2) Admitindo as espessuras constantes, procede-se à minimização da função objectivo F . Esta é o valor da restrição máxima, modificando as variáveis de projecto orientações das camadas e consequentemente a sequência de empilhamento. O processo nesta fase corresponde a uma minimização sem restrições.
- (3) Verificação da convergência local.

2ª Etapa - Algoritmo 2:

- (1) A solução inicial desta etapa começa após a obtenção da solução final da etapa anterior.
- (2) Se a solução inicial for admissível, isto é se nenhuma restrição for violada, efectua-se a minimização da função W , que traduz o peso da estrutura. Corresponde a obter uma solução óptima intermédia, uma vez que esta apenas depende das variáveis de projecto espessuras dos macroelementos.
- (3) Se a solução inicial não for admissível, procede-se à pesquisa de um valor aceitável incrementando as variáveis de projecto espessuras dos macroelementos. Neste caso a solução encontrada coincide com a solução óptima intermédia (mínimo local).
- (4) Verificação da convergência local

O processo de optimização prossegue com a repetição das duas etapas descritas da seguinte forma:

- (1) Repetição da 1ª etapa considerando como solução inicial os valores da solução óptima obtida no fim da 2ª etapa da fase anterior.
- (2) Verificação da condição de convergência global C_1 (definida no §7.5).
- (3) Repetição da 2ª etapa.
- (4) Verificação da condição de convergência global C_2 (definida no §7.5).

Quando uma das condições de convergência global C_1 ou C_2 é satisfeita, o processo de optimização é interrompido e a solução encontrada é a solução óptima.

Considerando a formulação geral do problema, salienta-se que o valor da função objectivo global, ou seja o peso da estrutura, não é alterado durante a primeira etapa do processo de optimização, sendo modificado apenas o valor das restrições.

7.2 - 1ª ETAPA - ALGORITMO 1

A função objectivo a nesta etapa foi definida no Capítulo 3 como sendo:

$$F(\{\theta\}) = \bar{g}(\{\theta\}, \{t_o\}) \quad (3.8)$$

em que

$$\bar{g}(\{\theta\}, \{t_o\}) = \text{MAX} (g_j, j = 1, \dots, \bar{N}) \quad (3.9)$$

O problema nesta etapa resume-se a minimizar a função F sem restrições. Para o efeito pretende-se:

- 1) Calcular em cada fase k do processo iterativo de optimização a função $F(\{\theta\})$.

2) Calcular X^{k+1} de forma a obter um valor próximo do óptimo X^* ao fim de um número finito de iterações:

$$X^{k+1} = X^k + l^k d^k \quad (7.1)$$

em que

l^k - passo escalar da fase k de iteração

d^k - direcção de pesquisa da fase k de iteração

sendo:

$$X^{k+1} = \left\{ \theta^{k+1} \right\} \quad e \quad X^* = \left\{ \theta^* \right\}$$

Existem diversos métodos de determinação quer da direcção de pesquisa d^k , quer do passo escalar l^k .

7.2.1 - MÉTODO DE PESQUISA SEGUNDO A DIRECÇÃO DE DECLIVE MÁXIMO

Escolhendo

$$d^k = -\nabla F^k \quad (7.2)$$

vem, se $\nabla \bar{g}^k \neq 0$:

$$X^{k+1} = X^k - l^k \nabla \bar{g}^k \quad (7.3)$$

Caso contrário $X = X^*$, em que X^* representa a solução óptima se a matriz Hessiana correspondente for definida positiva (ou negativa).

A equação (7.3) pode ser escrita para cada variável de projecto orientação da camada i:

$$\theta_i^{k+1} = \theta_i^k - l^k \frac{d\bar{g}^k}{d\theta_i} \quad i = 1, \dots, \bar{N} \quad (7.4)$$

O valor de l^k é obtido através de uma minimização univariável, isto é, l^k é o escalar que minimiza a função $F(X + l^k d^k)$. Consideremos para o efeito, o desenvolvimento em série de Taylor de segunda ordem:

$$\bar{g}(x) = \bar{g}(X^k) + \sum_{i=1}^{\bar{N}} \left(\frac{d\bar{g}^k}{dx_i} \right) (x_i - x_i^k) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{\bar{N}} \left(\frac{d^2\bar{g}^k}{dx_i dx_j} \right) (x_i - x_i^k) (x_j - x_j^k) \quad (7.5)$$

Calculando $\bar{g}[z(l^k)]$, com $z(l^k) = X^k - l^k \nabla \bar{g}^k$, obtemos após substituição:

$$\bar{g}(X^k - l^k \nabla \bar{g}^k) = \bar{g}(X^k) - l^k \sum_{i=1}^{\bar{N}} \left(\frac{d\bar{g}^k}{dx_i} \right)^2 + \frac{1}{2} (l^k)^2 \sum_{i,j=1}^{\bar{N}} \left(\frac{d^2\bar{g}^k}{dx_i dx_j} \right) \left(\frac{d\bar{g}^k}{dx_i} \right) \left(\frac{d\bar{g}^k}{dx_j} \right) \quad (7.6)$$

Derivando em ordem a l^k obtemos:

$$\frac{d}{dl^k} [\bar{g}(X^k - l^k \nabla \bar{g}^k)] = - \sum_{i=1}^{\bar{N}} \left(\frac{d\bar{g}^k}{dx_i} \right)^2 + (l^k) \sum_{i,j=1}^{\bar{N}} \left(\frac{d^2\bar{g}^k}{dx_i dx_j} \right) \left(\frac{d\bar{g}^k}{dx_i} \right) \left(\frac{d\bar{g}^k}{dx_j} \right) \quad (7.7)$$

Igualando a zero o primeiro termo da equação (7.7), obtemos a seguinte expressão para l^k :

$$l^k = \frac{\sum_{i=1}^{\bar{N}} \left(\frac{d\bar{g}^k}{dx_i} \right)^2}{\sum_{i,j=1}^{\bar{N}} \left(\frac{d^2\bar{g}^k}{dx_i dx_j} \right) \left(\frac{d\bar{g}^k}{dx_i} \right) \left(\frac{d\bar{g}^k}{dx_j} \right)} \quad (7.8)$$

O valor de $\frac{d^2 \bar{g}}{dx_i dx_j}$ na fase k do processo iterativo, pode ser calculado por Diferenças Finitas a trás, a partir do conhecimento da derivada de primeira ordem:

$$\frac{d^2 \bar{g}}{dx_i dx_j} \approx \frac{\frac{d\bar{g}^k}{dx_j} - \frac{d\bar{g}^{k-1}}{dx_j}}{x_i^k - x_i^{k-1}} \quad (7.9)$$

e assim temos

$$I^k = \frac{\sum_{i=1}^{\bar{N}} \left(\frac{d\bar{g}^k}{dx_i} \right)^2}{\sum_{i,j=1}^{\bar{N}} \left(\frac{\frac{d\bar{g}^k}{dx_j} - \frac{d\bar{g}^{k-1}}{dx_j}}{x_i^k - x_i^{k-1}} \right) \left(\frac{d\bar{g}^k}{dx_i} \right) \left(\frac{d\bar{g}^k}{dx_j} \right)} \quad (7.10.a)$$

ou

$$I^k = \frac{\sum_{i=1}^{\bar{N}} \left(\frac{d\bar{g}^k}{d\theta_i} \right)^2}{\sum_{i,j=1}^{\bar{N}} \left(\frac{\frac{d\bar{g}^k}{d\theta_j} - \frac{d\bar{g}^{k-1}}{d\theta_j}}{\theta_i^k - \theta_i^{k-1}} \right) \left(\frac{d\bar{g}^k}{d\theta_i} \right) \left(\frac{d\bar{g}^k}{d\theta_j} \right)} \quad (7.10.b)$$

O processo é iniciado fazendo $I^0 = K$, e assim temos:

$$X^1 = X^0 - \nabla \bar{g}^0 \quad (7.11)$$

em que X^0 é a solução inicial e $\nabla \bar{g}^0$ o respectivo gradiente.

A selecção do passo inicial $l^0 = K$ é um aspecto importante, pois o valor de K deve obedecer a considerandos de ordem prática e numérica relacionados com o processo de optimização.

Com efeito, tratando-se de variáveis do tipo orientações das camadas, o passo inicial não deverá ser tão grande que perturbe significativamente a evolução do processo, nomeadamente no que concerne à sua convergência.

Os aspectos relacionados com a convergência do processo e uma certa consistência de ordem prática da grandeza da alteração a provocar nas variáveis de projecto, condicionou a selecção do valor $K = 0,1 \text{ rad } (\approx 6^\circ)$ para o passo inicial.

A equação (7.11) pode ainda ser escrita considerando a variável de projecto, orientação da camada i :

$$\theta_i^1 = \theta_i^0 - \frac{d\bar{g}}{d\theta_i} \quad (7.12)$$

A velocidade de convergência deste método revelou-se bastante lenta na prática, talvez devido à forma da função F pelo que optou-se pela implementação do método apresentado de seguida.

7.2.2 - MÉTODO DE PESQUISA SEGUNDO DIRECÇÕES CONJUGADAS

Considerando a equação (7.1):

$$X^{k+1} = X^k + l^k d^k$$

O processo consiste então em obter :

- l^k - escalar que minimiza a função $F(X^k + l^k d^k)$.

$$d^{k+1} = -\nabla \bar{g}^{k+1} + \gamma^k d^k \quad (7.13)$$

Segundo a proposta de Fletcher e Reeves:

$$\gamma^k = \frac{\|\nabla \bar{g}^{k+1}\|^2}{\|\nabla \bar{g}^k\|^2} = \frac{\nabla \bar{g}^{k+1} \cdot \nabla \bar{g}^{k+1}}{\nabla \bar{g}^k \cdot \nabla \bar{g}^k} \quad (7.14.a)$$

ou segundo Polak e Ribiere:

$$\gamma^k = \frac{(\nabla \bar{g}^{k+1} - \nabla \bar{g}^k) \cdot \nabla \bar{g}^{k+1}}{\nabla \bar{g}^k \cdot \nabla \bar{g}^k} \quad (7.14.b)$$

O processo inicia-se considerando para o efeito que $l^0 = 0,1 \text{ rad}$ e $d^0 = -\nabla \bar{g}^0$.

Para determinar l^k começemos por considerar o desenvolvimento em série de Taylor de segunda ordem da equação (7.5):

$$\bar{g}(x) = \bar{g}(X^k) + \sum_{i=1}^{\bar{N}} \left(\frac{d\bar{g}}{dx_i} \right) (x_i - x_i^k) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{\bar{N}} \left(\frac{d^2 \bar{g}}{dx_i dx_j} \right) (x_i - x_i^k) (x_j - x_j^k) \quad (7.5)$$

Calculando $\bar{g}[z(l^k)]$ com $z(l^k) = X^k + l^k d^k$ obtemos:

$$\begin{aligned} \bar{g}(X^k + l^k d^k) &= \bar{g}(X^k) + \sum_{i=1}^{\bar{N}} \left(\frac{d\bar{g}}{dx_i} \right) (x_i^k + l^k d_i^k - x_i^k) + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{\bar{N}} \left(\frac{d^2 \bar{g}}{dx_i dx_j} \right) (x_i^k + l^k d_i^k - x_i^k) (x_j^k + l^k d_j^k - x_j^k) \end{aligned} \quad (7.15)$$

ou

$$\bar{g}(X^k + l^k d^k) = \bar{g}(X^k) + l^k \sum_{i=1}^{\bar{N}} \left(\frac{d\bar{g}}{dx_i} \right) d_i^k + \frac{1}{2} (l^k)^2 \sum_{i,j=1}^{\bar{N}} \left(\frac{d^2 \bar{g}}{dx_i dx_j} \right) (d_i^k) (d_j^k) \quad (7.16)$$

Derivando em ordem a l^k e igualando a zero obtemos:

$$l^k = \frac{- \sum_{i=1}^{\bar{N}} \left(\frac{d\bar{g}^k}{dx_i} \right) d_i^k}{\sum_{i,j=1}^{\bar{N}} \left(\frac{d^2 \bar{g}^k}{dx_i dx_j} \right) (d_i^k) (d_j^k)} \quad (7.17)$$

Considerando a aproximação da equação (7.9) e substituindo na equação (7.17), obtemos:

$$l^k = \frac{- \sum_{i=1}^{\bar{N}} \left(\frac{d\bar{g}^k}{dx_i} \right) d_i^k}{\sum_{i,j=1}^{\bar{N}} \left(\frac{\frac{d\bar{g}^k}{dx_j} - \frac{d\bar{g}^{k-1}}{dx_j}}{x_i^k - x_i^{k-1}} \right) (d_i^k) (d_j^k)} \quad (7.18.a)$$

ou

$$l^k = \frac{- \sum_{i=1}^{\bar{N}} \left(\frac{d\bar{g}^k}{d\theta_i} \right) d_i^k}{\sum_{i,j=1}^{\bar{N}} \left(\frac{\frac{d\bar{g}^k}{d\theta_j} - \frac{d\bar{g}^{k-1}}{d\theta_j}}{\theta_i^k - \theta_i^{k-1}} \right) (d_i^k) (d_j^k)} \quad (7.18.b)$$

A equação (7.17) pode no entanto ser reescrita sob a forma matricial:

$$l^k = \frac{- \nabla \bar{g}^k \cdot d^k}{d^k \cdot A \cdot d^k} \quad (7.19)$$

em que A representa a matriz Hessiana (matriz das segundas derivadas), sendo as suas componentes calculadas a partir da equação (7.10.b).

No caso dos denominadores das equações 7.18.a, 7.18.b e 7.19 serem nulos toma-se $l^k = 0$. Em consequência, o processo é interrompido prematuramente, pois o passo calculado nestas condições é muito grande, conduzindo à divergência.

Na prática, esta situação é contornada tomando para valor do passo $l^k = 0,1$ sempre que a grandeza dos denominadores das equações referidas for inferior a um determinado valor infinitesimal.

A equação 7.19 pressupõem que a matriz Hessiana A é simétrica definida positiva. Na realidade esta propriedade nem sempre se verifica, pois durante o processo de optimização a matriz Hessiana pode ser simétrica definida negativa. Inclusivamente pode suceder a alternância das duas situações, conforme se verificou em alguns dos exemplos apresentados no Capítulo 8.

O problema reside no facto do passo resultar negativo (absurdo) se a matriz A for simétrica definida negativa.

Foram implementadas três soluções para resolver o problema:

1 - Tomar o valor absoluto do denominador da equação 7.19. A solução não é geral pois provoca a divergência do processo de optimização em algumas situações.

2 - Reiniciar o processo sempre que a matriz Hessiana é simétrica definida negativa, isto é, tomando $l^0 = 0,1 \text{ rad}$ e $d^0 = -\nabla \bar{g}^0$. No caso extremo da matriz Hessiana ser sempre simétrica definida negativa, esta solução coincide com o método da direcção de máximo declive mas com o passo constante. A solução revelou-se de convergência lenta.

3 - Considerando a direcção de pesquisa correspondente à iteração, altera-se apenas o valor do passo, o qual toma o valor inicial $l^k = 0,1 \text{ rad}$. Esta solução revelou-se consistente e de convergência mais rápida do que a anterior, nos exemplos de teste efectuados.

Os resultados referentes aos exemplos implementados e apresentados no Capítulo 8 basearam-se nesta última solução.

Na figura 7.1 apresenta-se o diagrama de fluxo referente ao algoritmo 1 correspondente a esta etapa do processo de optimização.

Com o intuito de controlar o processo o número de iterações é limitado pelo valor $I1$ previamente estabelecido.

O parâmetro γ^k é calculado na versão de Polak e Ribiere, equação (7.14.b).

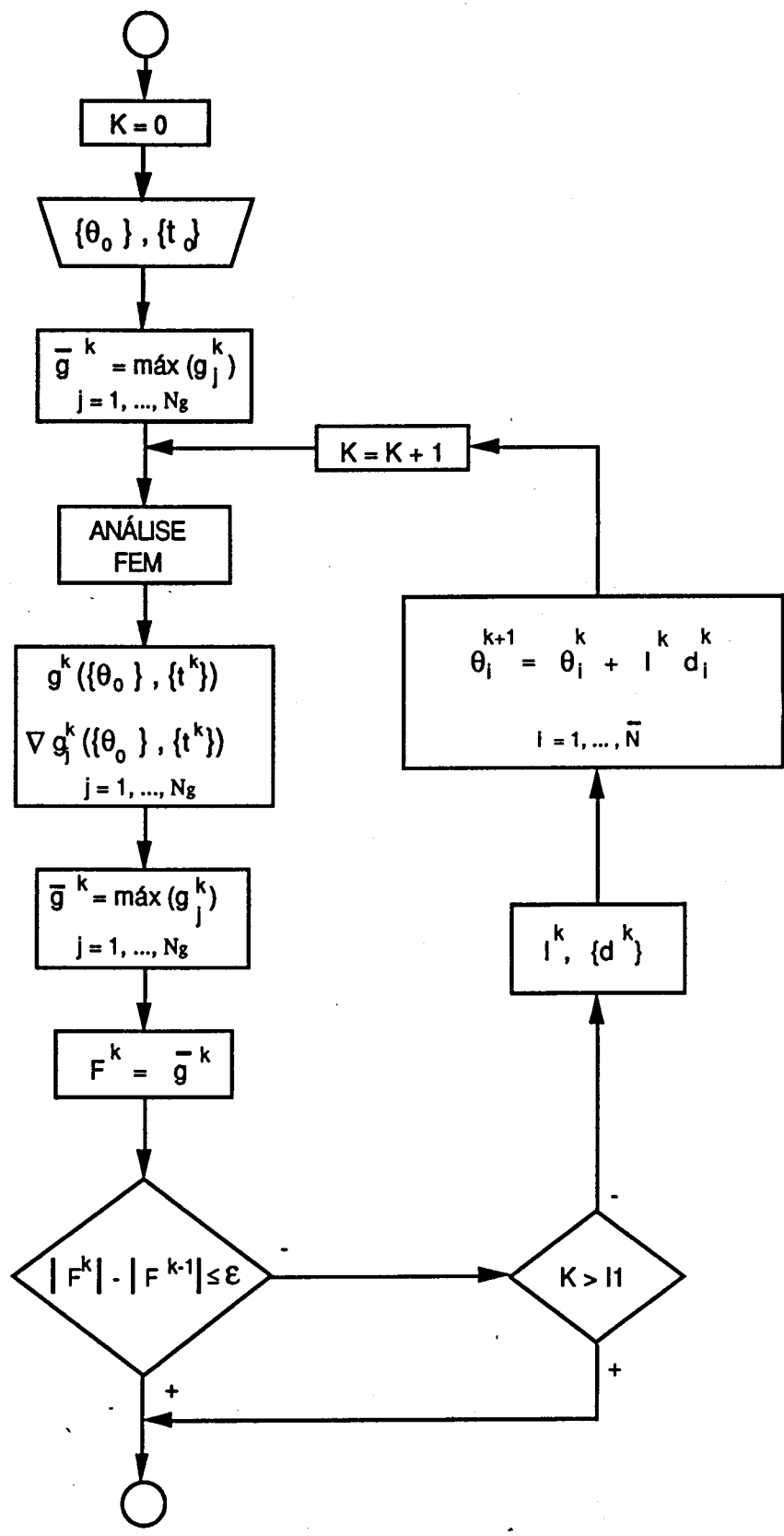


Figura 7.1 - Diagrama de fluxo do algoritmo 1

7.3 - 2ª ETAPA - ALGORITMO 2

A função objectivo, que representa o peso da estrutura, foi definida da seguinte forma no Capítulo 3:

$$W(\{t\}) = \sum_{k=1}^M \Omega_k \rho_k t_k \quad (7.20)$$

em que:

M = número de macroelementos

Ω_k = área superficial do macroelemento k

ρ_k = peso específico do material que constitui o macroelemento k

t_k = espessura do estratificado que constitui o macroelemento k

Pretende-se efectuar a minimização desta função, sujeita à verificação das restrições:

$$g_j \leq 0 \quad j = 1, \dots, \bar{N} = N_{dis} + N_{str} \quad (7.21)$$

O algoritmo desenvolvido tendo em vista a minimização da função $W(\{t\})$ baseia-se em dois pressupostos:

i) O comportamento do sistema é determinado pela restrição de maior valor relativo:

$$\bar{g}(\{\theta_0\}, \{t\}) = \text{MAX}(g_j, j = 1, \dots, \bar{N}) \quad (7.22)$$

ii) O valor óptimo $\{t^*\}$, é alcançado quando :

$$\bar{g}(\{\theta_0\}, \{t\}) = 0 \quad (7.23)$$

Condição de optimalidade:

$$\alpha^k = \frac{\bar{g}^{k+1}}{\bar{g}^k} \approx 1 \quad (7.24)$$

Esta condição estabelece que, quer a solução inicial $\{t_0\}$ seja admissível ou não, caminhamos sempre para óptimo que é encontrado quando $\bar{g} = 0$.

Na prática, toma-se $\alpha^k \leq 1$ mas próximo de 1, pois o valor absoluto de $\bar{g}$ deverá ser decrementado.

Este parâmetro α^k define conjuntamente com $\bar{g}^k$ o passo a dar na direcção de pesquisa, isto é, estabelece quanto se deve alterar as variáveis de projecto afim de se caminhar em direcção ao valor óptimo da função objectivo.

O valor de α^k está relacionado por um lado com a solução inicial admitida e por outro com velocidade de convergência do método. Deverá por isso ser seleccionado mediante uma solução de compromisso entre os dois factores citados.

Na prática, constatou-se que, se a solução inicial está muito afastada do valor óptimo considerando o valor da restrição máxima, então α^k deverá tomar um valor muito próximo de 1. Se a solução inicial está próxima da solução óptima então pode-se assumir para este parâmetro valores menores. Constatou-se, através dos exemplos, que 0.95 ou 0.975 são os valores mais indicados.

Uma solução alternativa testada, que melhora os aspectos relacionados com a velocidade de convergência, foi a consideração de dois valores para o parâmetro α^k estabelecidos da seguinte forma:

$$\alpha^k = \alpha_0 \quad \text{se} \quad \left| \bar{g}^k \right| \leq 0.6$$

$$\alpha^k = \alpha_1 \quad \text{se} \quad \left| \bar{g}^k \right| > 0.6$$

sendo α_0 e α_1 dois valores previamente escolhidos de acordo com as considerações efectuadas e a sensibilidade do projectista. Estes valores correspondem aos parâmetros de controlo inicial e final da convergência, respectivamente.

Fórmula de recorrência:

Considerando a aproximação

$$\frac{\bar{g}^{k+1} - \bar{g}^k}{t_j^{k+1} - t_j^k} \approx \frac{d\bar{g}^k}{dt_j^k} \quad (7.25)$$

e o facto de $\bar{g}^{k+1} = \alpha^k \bar{g}^k$ (eq.7.24) obtém-se:

$$t_j^{k+1} = t_j^k + \frac{\bar{g}^k}{\frac{d\bar{g}^k}{dt_j^k}} (\alpha^k - 1) \quad , \quad j = 1, \dots, M \quad (7.26)$$

ou seja

$$t_j^{k+1} = t_j^k + \Delta t_j^k \quad (7.27)$$

com

$$\Delta t_j^k = \frac{\bar{g}^k}{\frac{d\bar{g}^k}{dt_j^k}} (\alpha^k - 1) \quad , \quad j = 1, \dots, M \quad (7.28)$$

em que $\bar{g}^k$ designa a restrição de maior valor relativo na fase de iteração k e $\frac{d\bar{g}^k}{dt_j^k}$ a sensibilidade desta restrição relativamente à variável de projecto t_j .

As equações (7.26) e (7.27), podem ainda ser escrita de outra forma:

$$t_j^{k+1} = \beta_j^k t_j^k \quad (7.29)$$

com

$$\beta_j^k = 1 + \frac{\bar{g}^k}{\frac{d\bar{g}^k}{dt_j^k}} (\alpha^k - 1) \quad (7.30)$$

Cada componente j do vector direcção de pesquisa depende do valor da sensibilidade da restrição máxima relativamente à variável de projecto t_j conforme se depreende da equação (7.29).

Na figura 7.2 apresenta-se o diagrama de fluxo deste algoritmo.

O número de iterações é limitado pelo valor I2 imposto previamente.

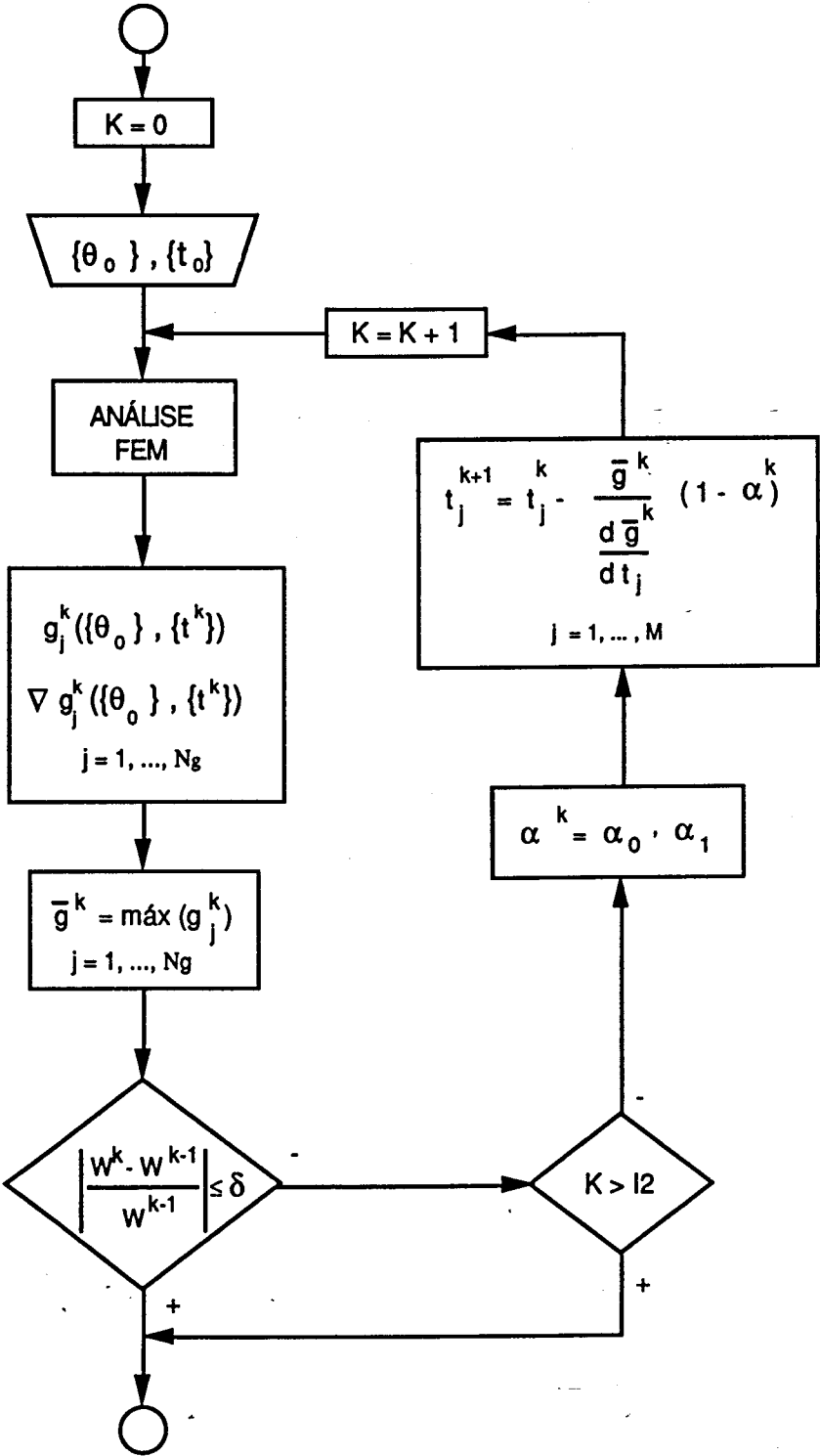


Figura 7.2 - Diagrama de fluxo do algoritmo 2

7.4 - ALGORITMO PRINCIPAL

Este algoritmo estabelece a ligação entre os dois algoritmos de optimização apresentados anteriormente e representa por natureza o processo geral de optimização ou seja a trajectória de pesquisa do óptimo global.

Na figura 7.3 apresenta-se o diagrama de fluxo deste algoritmo onde se constata a existência de duas condições de convergência global C_1 e C_2 . Estas condições de convergência são definidas no parágrafo seguinte. O processo de optimização considera-se terminado quando uma destas condições for satisfeita. Isto significa que o processo pode terminar após a primeira ou a segunda etapa.

O número de iterações do algoritmo principal é limitado pelo valor $I3$ imposto previamente.

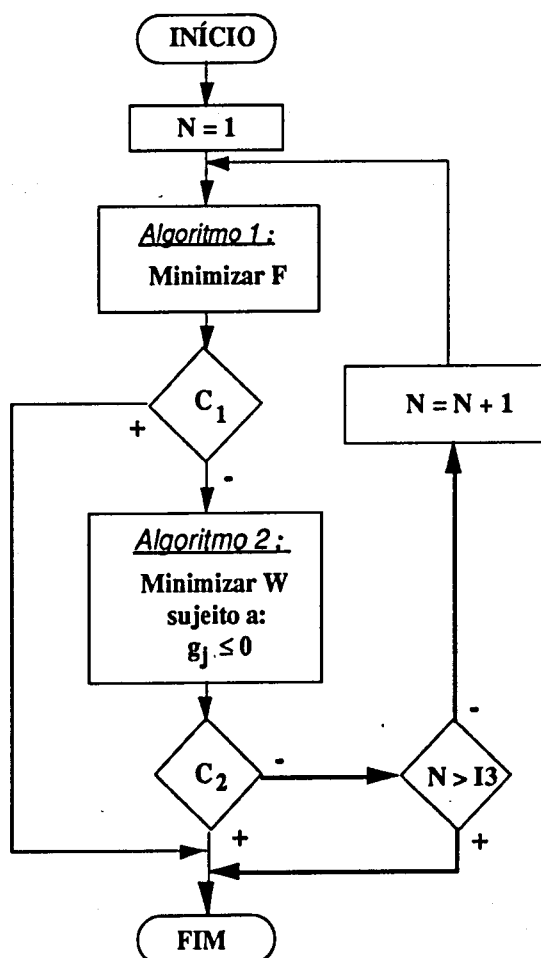


Figura 7.3 - Diagrama de fluxo do algoritmo principal

7.5 - CONDIÇÕES DE CONVERGÊNCIA

7.5.1 - CONDIÇÕES DE CONVERGÊNCIA LOCAL

Algoritmo 1:

A condição de convergência local do algoritmo 1 é definida como sendo a maior variação absoluta da função objectivo admitida entre duas iterações consecutivas:

$$| F^{k+1} | - | F^k | \leq \varepsilon \quad (7.31)$$

Neste caso considera-se a condição de convergência definida desta forma, em virtude da função objectivo F assumir na prática valores absolutos próximos de zero. Com efeito sendo a função objectivo F definida como a restrição de valor máximo relativo verificam-se, por análise das restrições, as seguintes situações possíveis:

- restrição do tipo deslocamento $\Rightarrow F \geq -1$
- restrição do tipo tensão $\Rightarrow F \leq 1$

Com efeito nas restrições de deslocamento, equação (3.3), verifica-se que, se a relação $\frac{u_r}{u_0}$ é maior do que 1 (caso em que a restrição é violada) então F é positiva.

Se a referida relação é menor do que 1, F é negativa. Quando, no caso extremo, o deslocamento u_r é muito mais pequeno do que o deslocamento máximo admissível u_0 , obtém-se:

$$\frac{u_r}{u_0} \approx 0$$

e nestas condições resulta $F \approx -1$.

No que se refere às restrições de tensão, equação (3.4), conclui-se que sendo o parâmetro R sempre positivo é imediata a conclusão: $F \leq 1$.

Durante o processo de optimização pode eventualmente ocorrer uma mudança na natureza da restrição máxima, isto é, ela pode passar de restrição do tipo deslocamento para restrição do tipo tensão. Nestas condições, dada a relação entre os campos de tensão e de deslocamento, parece lógica a conclusão de que F assumirá a seguinte gama de valores:

$$-1 \leq F \leq 1 \quad (7.32)$$

Algoritmo 2:

Neste algoritmo a condição de convergência é traduzida pela maior variação relativa da função objectivo W admitida entre duas iterações consecutivas:

$$\left| \frac{W^{k+1} - W^k}{W^k} \right| \leq \delta \quad (7.33)$$

Esta condição é apresentada sob a forma de valor relativo em virtude da função objectivo W , que representa o peso da estrutura, ser normalmente um valor elevado, e pelo facto de haver interesse em limitar a variação percentual.

7.5.2 - CONDIÇÕES DE CONVERGÊNCIA GLOBAL

Sendo o método de optimização desenvolvido um método em etapas múltiplas existe a necessidade de estabelecer condições de convergência que permitam interromper o processo em qualquer ponto da trajectória de pesquisa do valor óptimo para a função objectivo W que representa o peso da estrutura.

As condições de convergência global do algoritmo principal devem ser testadas após cada etapa que constitui o processo de optimização e a sua verificação determina a interrupção do processo.

Durante cada etapa do processo de optimização, são produzidas (ou não) alterações no valor da função objectivo correspondente. É a grandeza dessas alterações que, quando comparadas com as condições de convergência, estabelece o prosseguimento do processo ou a sua interrupção.

Existem duas condições de convergência global determinadas pela natureza dos algoritmos que constituem o processo geral de optimização:

a) Condição de convergência C_1

Esta condição de convergência global situa-se após a primeira etapa do processo de optimização (algoritmo 1) e é estabelecida pela seguinte relação:

$$|F_f| - |F_0| \leq \bar{\varepsilon} \quad (7.34)$$

para $n \neq 1$, em que F_f e F_0 representam os valores da função objectivo F no fim e no início, respectivamente, da primeira etapa do processo de optimização, e n é o número de iterações (ou fases) do algoritmo principal.

Entre a condição de convergência local do algoritmo 1 e a condição de convergência global C_1 , verifica-se a seguinte relação: $\varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$.

b) Condição de convergência C_2

Esta condição de convergência global situa-se após a primeira etapa do processo de optimização (algoritmo 2) e é estabelecida pela seguinte relação:

$$\left| \frac{W_f - W_0}{W_0} \right| \leq \bar{\delta} \quad (7.35)$$

em que W_f e W_0 representam respectivamente o valor da função objectivo W no final e no início da segunda etapa do processo de optimização (algoritmo 2).

Entre a condição de convergência local do algoritmo 2 e a condição de convergência global C_2 , verifica-se a seguinte relação: $\delta \leq \bar{\delta}$.

7.6 - REFERÊNCIAS

[1]

Arora, J. S., "Introduction to optimum design", MacGraw-Hill Book Company, Singapore, 1989

[2]

Kirsch, U., "Optimum structural design", MacGraw-Hill Book Company, Singapore, 1982

[3]

Tsai, S. W., "Composites design", Third Edition, Think Composites, Dayton, USA, 1987

[4]

Braibant, V., "Conditions d'optimalite en programmation mathematique, methodes d'optimisation pour problemes non lineaires constraints", Rapport SF-130, Laboratoire d'Aeronautique de l'Universite de Liege, Belgique, Mai, 1985

[5]

Tavares, L. V., Correia, F. N., "Optimização linear e não linear", Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1984

Capítulo

8

PROGRAMAÇÃO DO MÉTODO DE OPTIMIZAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

8.1 - INTRODUÇÃO

O presente capítulo tem como finalidade a apresentação do programa desenvolvido com base no método de optimização exposto no Capítulo 7. Para além deste facto procede-se à apresentação e análise dos resultados obtidos para diferentes exemplos visando a validação do método de optimização proposto.

O programa de optimização desenvolvido denomina-se RITMO, foi escrito em linguagem FORTRAN77 e implementado num computador VAX VT320 da DIGITAL. Todos os resultados foram obtidos em dupla precisão.

Os exemplos apresentados foram escolhidos com a finalidade de demonstrarem a eficiência do método proposto relativamente a estruturas do tipo placa ou casca moderadamente espessas, construídas em materiais compósitos de matriz polimérica.

8.2 - PROGRAMAÇÃO DO MÉTODO DE OPTIMIZAÇÃO

Genéricamente, o programa RITMO além de materializar os algoritmos propostos no Capítulo 7, utiliza o programa de análise estrutural por elementos finitos NEWSHELL, na sua versão em subrotina (NEWSHELL1) baseado nos conceitos expostos no Capítulo 4, e o programa de análise de sensibilidades apresentado no Capítulo 6 na sua versão rápida SENSY02.

As subrotinas MODIFY1 e MODIFY2 concretizam as alterações a efectuar nas variáveis de projecto.

Na figura 8.1 representa-se o diagrama de blocos do programa RITMO.

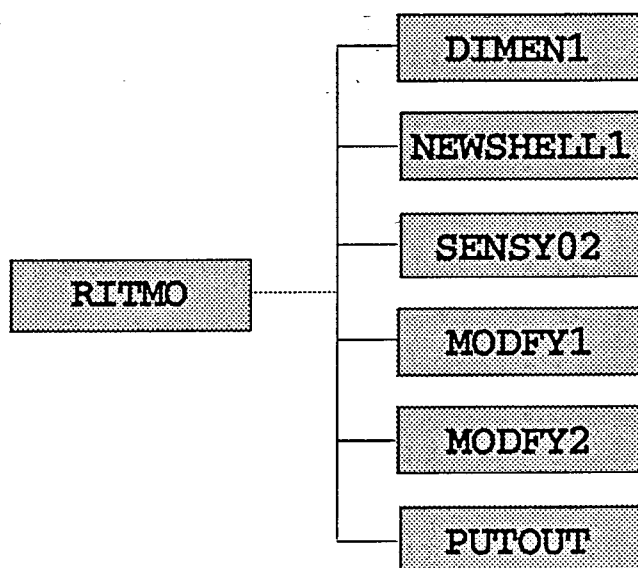


Figura 8.1 - Diagrama de blocos do programa RITMO

Estruturalmente o programa RITMO divide-se nos seguintes blocos:

1 - Inicialização e entrada de dados

Procede-se ao dimensionamento dos vectores e à entrada de dados relacionados com a definição geométrica do problema em análise, condições de fronteira, características de carregamento, subestruturação, constantes elásticas dos diferentes materiais utilizados, propriedades de resistência mecânica dos materiais e valores máximos admissíveis para os deslocamentos e para as tensões.

Na definição geométrica do problema está considerada implicitamente a solução inicial para as variáveis de projecto espessuras dos macroelementos, orientações das camadas constituintes dos estratificados e sequência de empilhamento.

A entrada de dados é feita por duas vias possíveis:

- * entrada directa - no programa principal através do "input" directo no decorrer da execução do programa. Abrange essencialmente a abertura de ficheiros e a definição dos parâmetros de controlo e das condições de convergência.
- * entrada indirecta - através de dois ficheiros criados pelo utilizador e cuja leitura é efectuada pela subrotina de análise estrutural, NEWSHELL1, e pela subrotina que procede à determinação das sensibilidades, SENSY02.

2 - Cálculo do valor da função objectivo $W(t)$, das restrições g_j e das sensibilidades

O valor da função objectivo que representa o peso da estrutura é determinado por recurso à definição geométrica do problema estabelecida na análise estrutural.

As restrições do tipo deslocamento podem ser seleccionadas pelo utilizador ou definidas genericamente, isto é, o programa pode calcular de forma exhaustiva este tipo de restrições utilizando para o efeito o conhecimento do campo de deslocamentos.

As restrições do tipo tensão são calculadas de forma exhaustiva para cada ponto de integração de Gauss, para cada camada do estratificado e para cada elemento independentemente do macroelemento a que este pertence.

Afim de conhecer o valor das restrições é necessário conhecer os campos de deslocamentos e de tensões, isto é., é indispensável efectuar uma análise estrutural do problema (subrotina NEWSHELL1).

Após o cálculo das restrições o programa determina a restrição de maior valor relativo e procede à determinação das sensibilidades desta restrição relativamente às variáveis de projecto (subrotina SENSY02).

3 - Verificação das condições de convergência local e global

As condições de convergência local dos algoritmos 1 e 2, bem como as condições de convergência global enunciadas no Capítulo 7, são testadas de forma a interromper o processo quando se encontra uma solução óptima ou próxima do óptimo.

4 - Determinação do passo escalar e da direcção de pesquisa

Quando as condições de convergência não se verificam prossegue-se o processo de optimização, pelo que se torna necessário determinar como e quanto se deve alterar as variáveis de projecto tendo em vista alcançar pelo menos um valor próximo do óptimo para a função objectivo.

Na prática isto concretiza-se através da determinação, em cada iteração, de uma nova direcção de pesquisa (como) e de um novo passo escalar (quanto).

Os dois conceitos acima referidos são fundamentais na medida em que se pretende modificar simultâneamente todas as variáveis e não apenas uma, o que é conseguido conhecendo o sistema e a respectiva sensibilidade a possíveis alterações.

As técnicas utilizadas para o efeito foram convenientemente expostas no Capítulo 7.

5 - Modificação das variáveis de projecto

Depois de se conhecer os parâmetros que regem as alterações a efectuar nas variáveis de projecto é necessário concretizar essas alterações pela via numérica.

As subrotinas MODFY1 e MODFY2 efectuem as alterações das variáveis de projecto espessuras e orientações das camadas dos macroelementos, respectivamente.

A alteração é concretizada pela actualização do ficheiro de entrada de dados que contém os dados referentes à definição geométrica do problema estrutural, as propriedades dos materiais e as condições de carregamento (ficheiro correspondente à análise estrutural propriamente dita).

Em particular é de salientar que, devido às características do elemento finito considerado, conforme se pode verificar pela exposição efectuada no Capítulo 4, a

modificação das variáveis de projecto espessuras dos macroelementos reveste-se de alguma dificuldade e poderia eventualmente provocar problemas de convergência numérica.

Com efeito, na caracterização geométrica do elemento finito não se considera uma espessura única para cada elemento. Introduce-se o conceito de coordenada nodal de espessura, isto é, as estruturas do tipo placa ou casca são definidas por recurso a duas superfícies uma superior e outra inferior, ficando determinada deste modo de uma forma implícita a espessura em cada nó.

A espessura poderá, portanto, variar de ponto para ponto dentro do próprio elemento.

Esta forma implícita de definir as espessuras implica a existência de seis coordenadas cartesianas (no sistema de coordenadas globais) por cada ponto, conforme se poderá constatar no Capítulo 4. Suscita o problema de saber qual a espessura em cada nó da fronteira entre dois ou mais macroelementos, uma vez que a espessura é única para os nós interiores de um dado macroelemento, de acordo com a formulação do problema, Capítulo 3.

A resolução do problema da determinação das espessuras dos nós das fronteiras passa em primeiro lugar pela definição dos diferentes tipos de fronteiras possíveis, o que poderá ser observado através da figura 8.2.

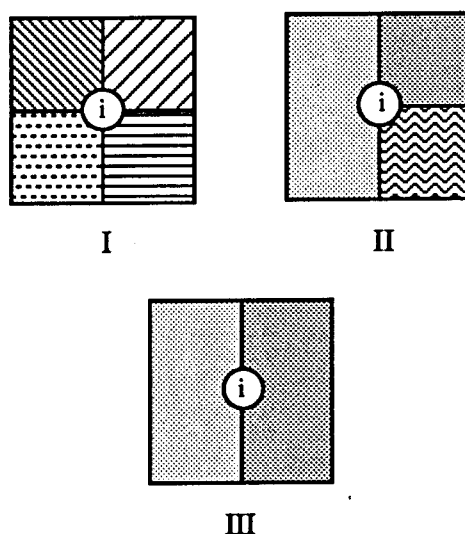


Figura 8.2 - Fronteiras possíveis entre macroelementos - Nó i

Assim, considera-se na solução inicial que a coordenada de espessura de um nó genérico situado na fronteira entre dois ou mais macroelementos, é igual à média aritmética das espessuras dos macroelementos adjacentes.

Posteriormente em cada iteração, as coordenadas de espessura destes nós são alteradas considerando que a razão incremental β_i^k , correspondente, definida no Capítulo 7 (equação 7.29), é igual à média aritmética das razões incrementais das variáveis espessuras dos macroelementos adjacentes:

$$\beta_i^k = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \beta_j^k \quad (8.1)$$

representando L o número de macroelementos a que pertence o nó i da fronteira (fig.8.1).

A modificação das variáveis de projecto - espessuras dos macroelementos, é efectuada começando por impor que a superfície média da placa ou casca se mantém após as alterações produzidas em cada iteração.

Por outro lado, considerando a definição de coordenada nodal de espessura apresentada no Capítulo 4 (§4.2.2.) e a equação (7.29) do Capítulo 7,

$$t_j^{k+1} = \beta_j^k t_j^k$$

em cada iteração k as coordenadas actualizadas para o ponto nodal i são as seguintes:

$$\left\{ x_i^{sup^k} \right\} = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \beta_i^k \right) \left\{ x_i^{sup^0} \right\} + \left(1 - \beta_i^k \right) \left\{ x_i^{inf^0} \right\} \right] \quad (8.2)$$

$$\left\{ x_i^{inf^k} \right\} = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \beta_i^k \right) \left\{ x_i^{sup^0} \right\} + \left(1 + \beta_i^k \right) \left\{ x_i^{inf^0} \right\} \right] \quad (8.3)$$

indicando os índices *sup* e *inf* a localização nas superfícies superior e inferior respectivamente.

A modificação das variáveis de projecto orientações das camadas é feita de acordo com a equação (7.1) a qual pode ser reescrita da seguinte forma, considerando apenas cada componente do vector que contém as variáveis deste tipo:

$$\theta_i^{k+1} = \theta_i^k + \Delta\theta_i^k \quad (8.4)$$

6 - Saída de resultados

A saída de resultados abrange o valor da função objectivo, o valor da restrição máxima e as respectivas sensibilidades relativamente às variáveis de projecto, os valores das variáveis de projecto, o parâmetro incremental β_i^k , etc. A subrotina PUTOUT efectua a saída de resultados.

8.3 - APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste subcapítulo apresentam-se quatro exemplos de aplicação do método de optimização desenvolvido e implementado através do programa RITMO.

Os dois primeiros exemplos incidem sobre o mesmo problema geométrico sujeito às mesmas condições de carregamento.

Trata-se de uma estrutura do tipo placa e os exemplos diferem entre si apenas na subestruturação seguida e na solução inicial admitida para as variáveis do tipo orientação das camadas.

O terceiro exemplo é uma aplicação a uma estrutura do tipo casca sujeita a cargas nodais no plano de simetria geométrica e representa um caso típico de aplicação do método a grandes estruturas.

O quarto exemplo de aplicação foi extraído do trabalho efectuado por Sadr et al [1], e pretende-se com a sua implementação comparar os resultados obtidos pelo autor visando, desta forma, validar o modelo de optimização desenvolvido.

Verifica-se que os tempos de cálculo e os ganhos obtidos dependem da solução inicial considerada.

Em cada exemplo define-se especificamente as características geométricas, o carregamento, as condições de fronteira e a subestruturação seguida.

Os materiais utilizados nos três primeiros exemplos são compósitos laminados constituídos por cinco camadas de características individuais bem definidas sob o ponto de vista macromecânico e que constam da tabela 8.1. —

O peso específico do material cujas propriedades constam da tabela 8.1, é: $\rho = 2,1 \times 10^3$ Kg/m³.

As características do material utilizado no quarto exemplo, por serem diferentes das utilizadas nos restantes exemplos, são apresentadas na tabela 8.11.

Constantes elásticas		Valores	Resistência mecânica		Valores
Módulos elásticos (GPa)	E1	206,84	Longitudinal (MPa) Tracção Compressão	X	760
	E2	5,17		X'	760
Módulos de corte (GPa)	G12	3,1	Transversal (MPa) Tracção Compressão	Y	30
	G13	2,586		Y'	30
	G23	2,586			
Coeficientes de Poisson	V12	0,25	Corte (MPa)	S	70
	V13	0,25			
	V23	0,25			

TABELA 8.1 - Características materiais das camadas constituintes dos estratificados.

8.3.1 - EXEMPLO Nº1 - PLACA SUJEITA A PRESSÃO UNIFORME

(DOIS MACROELEMENTOS)

Este exemplo consiste numa placa quadrada de dimensões 2 m × 2 m , de espessura inicial igual a 0,02 m e sujeita a uma carga uniformemente distribuída de P = 5,0 kN/m2.

A placa está apoiada nos bordos assinalados por A na figura 8.3 (deslocamentos restringidos segundo x,y,z).

O modelo de elementos finitos seleccionado apresenta uma discretização de 2 × 2 elementos distribuídos por dois macroelementos conforme se pode observar através da figura 8.3.

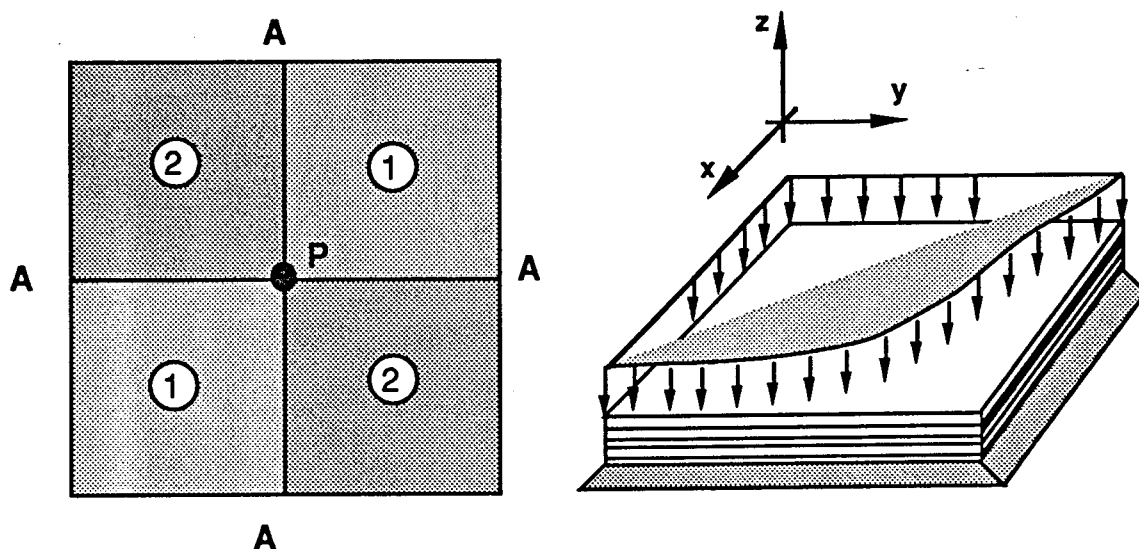


Figura 8.3 - Definição geométrica do problema, condições de carregamento, condições de fronteira. Subestruturação: 2 Macroelementos.

As figuras seguintes descrevem a história do processo de optimização. A trajectória de pesquisa do valor óptimo para a função objectivo (peso mínimo) consiste em duas etapas (algoritmos 1 e 2) sequenciais verificando-se as condições de convergência ao fim de 19 iterações, sendo as primeiras 6 inputadas à 1ª etapa do processo.

As condições de convergência local e global consideradas, foram as seguintes:

$$\begin{array}{ll} \epsilon = 0,005 & ; \quad \bar{\epsilon} = 0,005 \\ \delta = 0,005 & ; \quad \bar{\delta} = 0,005 \end{array}$$

Para o parâmetro de convergência α do algoritmo 2 (2ª etapa) tomou-se o seguinte valor:

$$\alpha = 0,95$$

Os valores iniciais das variáveis de projecto estão apresentados na tabela 8.2.

Dadas as características geométricas e de carregamento do problema, considerou-se apenas uma restrição de deslocamento vertical para o nó central da placa (ponto P da figura 8.3), com o deslocamento máximo admissível de $u_0 = 0,01$ m.

Nas restrições de tensão tomou-se como coeficiente de segurança da estrutura $R_0 = 4$ (valor exemplificativo).

A figura 8.4 mostra a variação da função objectivo $W(t)$, que representa o peso da estrutura. Este permanece constante na primeira etapa do processo durante a qual se efectua a minimização da função F de valor igual ao da restrição máxima, o que poderá ser constatado através da figura 8.5 que representa a variação da restrição máxima ao longo do processo de optimização.

Ao longo do processo a restrição máxima permanece sempre do tipo deslocamento. Tal facto está, provavelmente, muito mais relacionado com as características geométricas e de carregamento do problema em estudo do que com o valor das restrições impostas na sua formulação.

Outro dado a reter relaciona-se com a pequena variação da função objectivo F (de valor igual ao da restrição máxima) durante a primeira etapa do processo o que se relaciona com a solução inicial considerada para as variáveis de projecto orientações das camadas dos estratificados que constituem os macroelementos provavelmente muito próxima do óptimo (mínimo local).

Pode-se verificar ainda, através da figura 8.5, a convergência local da primeira etapa do processo de optimização.

De acordo com o método de optimização proposto, na segunda etapa do processo de optimização o valor da restrição máxima aumenta.

Nas figuras 8.5 e 8.6 representa-se a variação das razões incrementais β_i^k e das variáveis espessuras dos macroelementos respectivamente. O comportamento destas variáveis prova a convergência local da segunda etapa do processo de optimização.

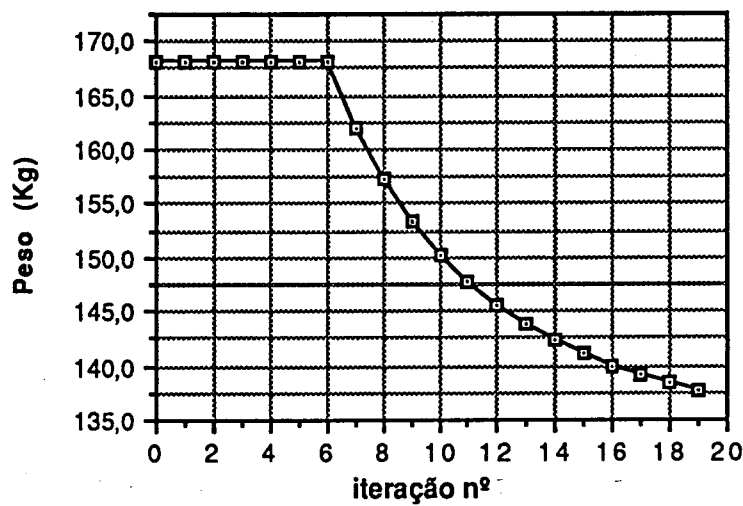


Figura 8.4 - Variação da função objectivo (Peso) - 1ª e 2ª etapas

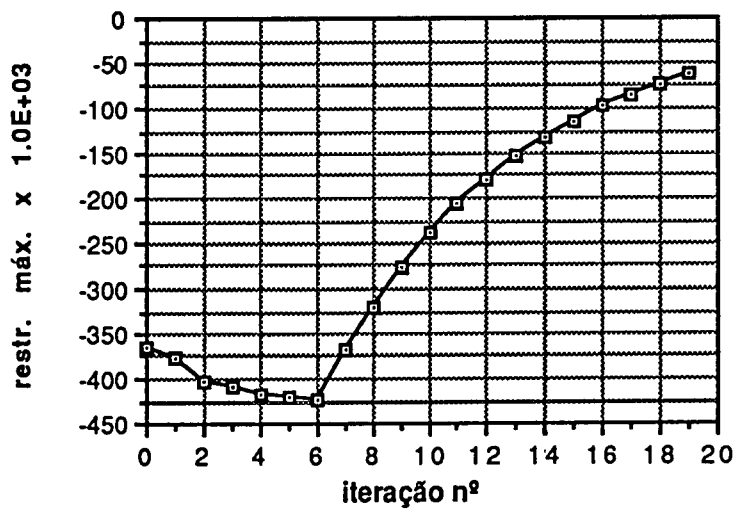


Figura 8.5 - Variação da restrição máxima - 1ª e 2ª etapas

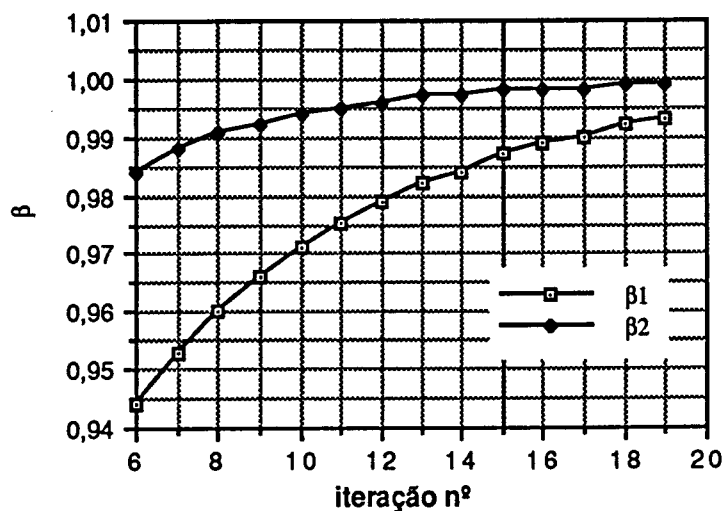


Figura 8.6 - Variação da razão incremental β_i - 2ª etapa

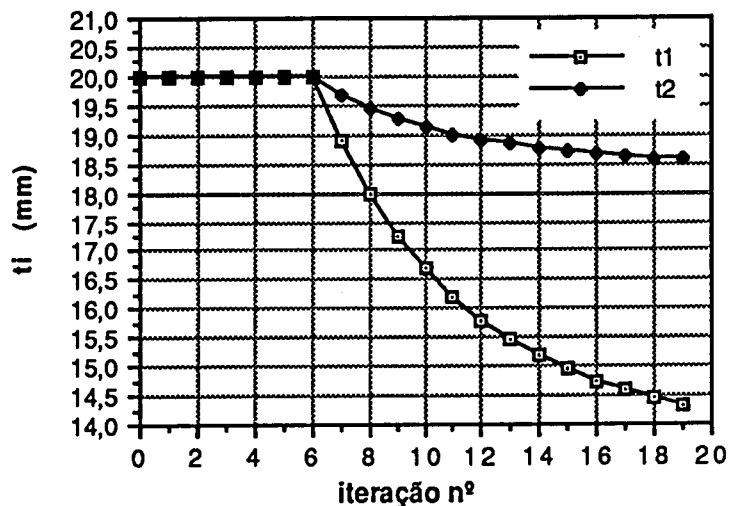


Figura 8.7 - Variação das espessuras t_i - 1ª e 2ª etapas

A figura 8.8 exibe uma representação curiosa da distribuição das espessuras na placa após o processo de optimização. A representação gráfica foi obtida por recurso a um utilitário e baseia-se no método dos elementos finitos. O grau de representatividade do gráfico relaciona-se com o refinamento da malha de elementos finitos que no presente caso não é grande.

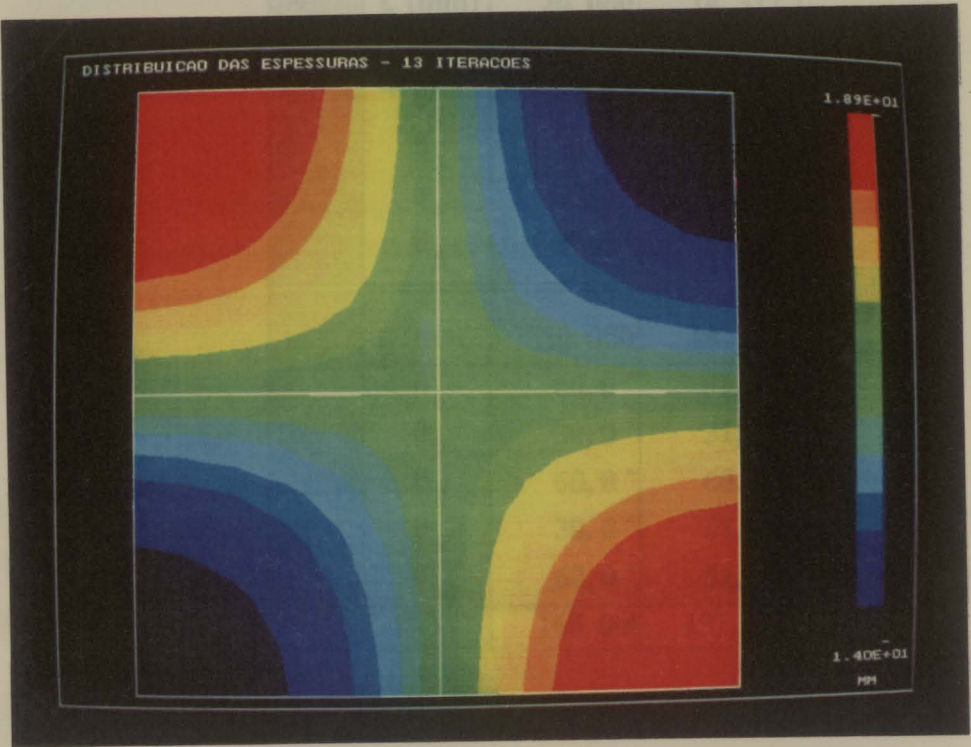


Figura 8.8 - Distribuição das espessuras na placa após o processo de optimização

A tabela 8.2 mostra os valores iniciais e finais das variáveis de projecto e da função objectivo global. As variáveis de projecto encontram-se agrupadas por macroelemento (2).

Na tabela 8.3 apresenta-se um estudo dos tempos de cálculo referentes ao processo de optimização e às diferentes etapas que o constitui. É feita ainda referência à economia obtida no peso da estrutura.

M	Variável	Valor Inicial	Valor Final
1	t_1 (mm)	20, 000	14, 317
	θ_1	30, 0 °	32, 8 °
	θ_2	60, 0 °	61, 0 °
	θ_3	30, 0 °	30, 0 °
	θ_4	60, 0 °	61, 0 °
	θ_5	30, 0 °	32, 8 °
2	t_2 (mm)	20, 000	18, 572
	θ_6	60, 0 °	51, 1 °
	θ_7	30, 0 °	31, 3 °
	θ_8	60, 0 °	60, 0 °
	θ_9	30, 0 °	31, 3 °
	θ_{10}	60, 0 °	51, 1 °
Peso (Kg)		168, 000	137, 697

TABELA 8.2

	1ª Etapa	2ª Etapa	Totais
Nº variáveis	10	2	12
Nº iterações	6	13	19
CPU (s)	188	378	566
CPU / iteração (s)	31, 3	29, 1	29, 8
CPU / variável (s)	47, 1	189, 0	47, 1
CPU / iter. / var. (s)	3, 1	14, 5	2, 5
% PESO RECUPERADO			18, 1

TABELA 8.3

Uma questão importante é conhecer as consequências da permutação na aplicação dos algoritmos 1 e 2.

A priori, apenas razões heurísticas relacionadas com o comportamento da estrutura e de bom senso justificam a ordem de aplicação dos referidos algoritmos a qual define a trajectória de pesquisa do óptimo global.

A filosofia escolhida para o algoritmo principal tem como base de apoio o pressuposto de que o processo de minimização do peso da estrutura apenas deverá ser iniciado após o conhecimento duma solução óptima contemplando as variáveis de projecto orientações das camadas.

Por outras palavras o processo de optimização visando a concretização do objectivo global, que é a minimização do peso da estrutura, deverá incidir sobre a melhor desempenho possível da estrutura.

As figuras 8.9, 8.10 e 8.11 e a tabela 8.4 mostram para o exemplo em análise o efeito da permutação da ordem de aplicação dos algoritmos 1 e 2.

Para as mesmas condições de convergência consideradas anteriormente, o processo comporta três etapas:

- 1 - Minimização da função $W(t)$ que representa o peso da estrutura, algoritmo 2 (12 iterações).
- 2 - Minimização da função F de valor igual ao da restrição máxima, algoritmo 1 (1 iteração).
- 3 - Minimização da função $W(t)$ que representa o peso da estrutura, algoritmo 2 (2 iterações).

O tempo de cálculo total (CPU) foi de 515 segundos.

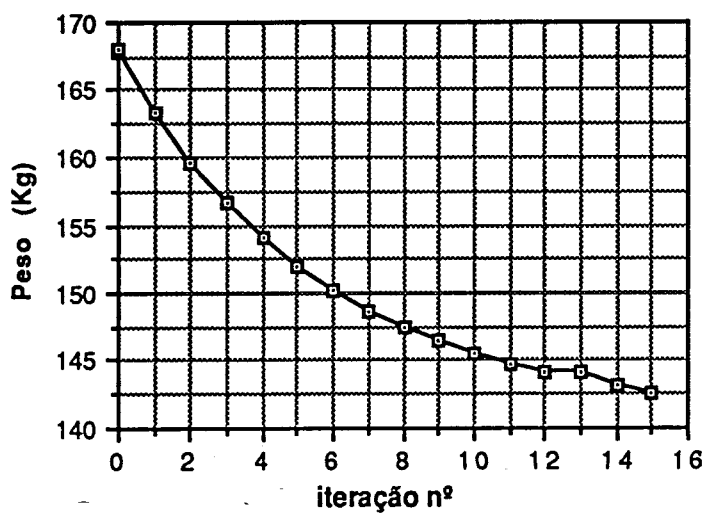


Figura 8.9 - Variação da função objectivo (Peso), com permutação dos algoritmos 1 e 2.

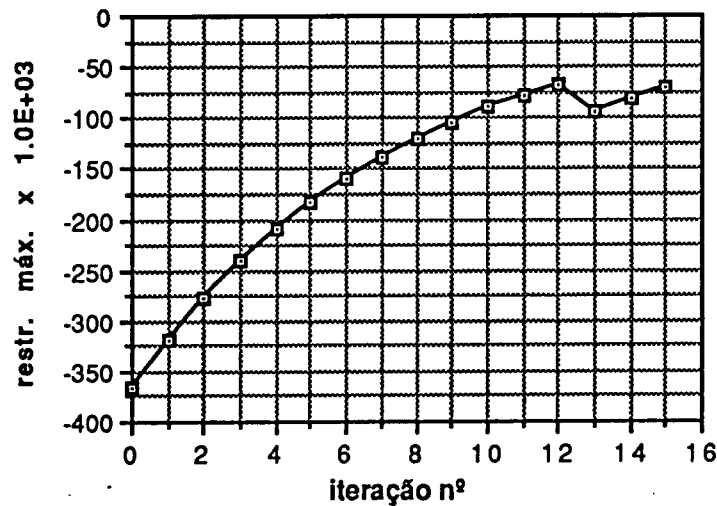


Figura 8.10 - Variação da restrição máxima, com permutação dos algoritmos 1 e 2

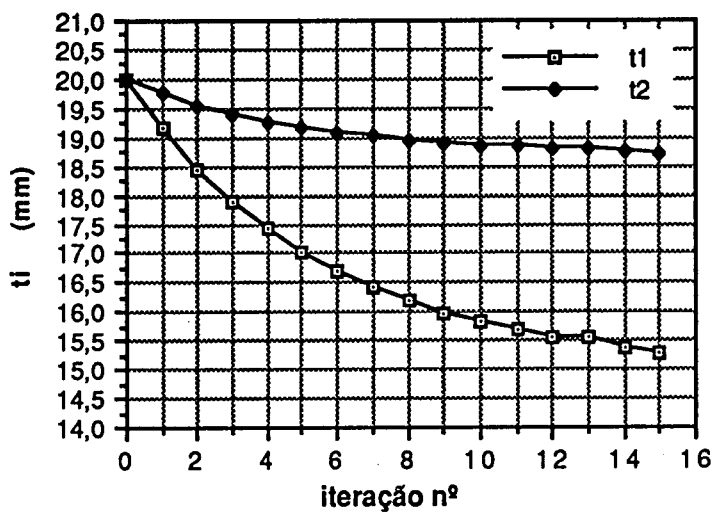


Figura 8.11 - Variação das espessuras t_i com permutação dos algoritmos 1 e 2

M	Variável	Valor Inicial	Valor Final
1	t_1 (mm)	20,000	15,263
	θ_1	30,0°	30,4°
	θ_2	60,0°	60,2°
	θ_3	30,0°	30,0°
	θ_4	60,0°	60,2°
	θ_5	30,0°	30,4°
2	t_2 (mm)	20,000	18,735
	θ_6	60,0°	58,0°
	θ_7	30,0°	30,3°
	θ_8	60,0°	60,0°
	θ_9	30,0°	30,3°
	θ_{10}	60,0°	58,0°
Peso (Kg)		168,000	142,508

Tabela 8.4

Da análise dos resultados apresentados podemos extrair as seguintes ilações:

A solução óptima encontrada para as variáveis de projecto - espessuras dos macroelementos, e o valor óptimo da função objectivo $W(t)$ são idênticos aos valores encontrados através do algoritmo principal do método de optimização proposto. Se as condições de convergência forem refinadas é de prever, para o exemplo em estudo, uma aproximação maior.

Como a trajectória de pesquisa é diferente os tempos de cálculo são diferentes embora neste exemplo tal facto não seja evidente. As próprias condições de convergência do processo serão necessariamente diferentes.

Com o refinamento das condições de convergência quer locais quer globais é de prever, para o exemplo em estudo, valores idênticos para as variáveis de projecto orientações das camadas, relativamente ao método proposto.

Em geral, pode-se afirmar que, da permutação dos algoritmos 1 e 2 e consequentemente da alteração do algoritmo principal, resulta um valor óptimo para a função objectivo global $W(t)$ idêntico ao obtido pela aplicação do algoritmo principal proposto.

A trajectória de pesquisa do valor óptimo global será necessariamente diferente, como aliás ficou demonstrado no exemplo em estudo. A pesquisa do óptimo em cada etapa do processo de optimização será diferente e as condições de convergência locais também.

Embora não se apresentem exemplos que demonstrem tal facto, os testes efectuados parecem evidenciar que da permutação dos algoritmos 1 e 2 resulta uma certa perturbação na convergência local de ambos os algoritmos (convergência oscilatória).

O fenómeno citado poderá estar relacionado com o facto dos campos de deslocamentos e de tensões se reajustarem às características gerais de anisotropia dos materiais que constituem a estrutura, ao considerar em primeiro lugar o processo de optimização envolvendo as variáveis de projecto orientações das camadas, o que não acontece se se permutarem os algoritmos 1 e 2.

Também a solução inicial considerada para as variáveis espessuras dos macroelementos ou para as orientações das camadas terá alguma influência no que concerne o tipo de convergência associada aos diferentes algoritmos que compõem o método.

8.3.2 - EXEMPLO Nº2 - PLACA SUJEITA A PRESSÃO UNIFORME

(TRÊS MACROELEMENTOS)

Neste exemplo consideraram-se as mesmas características geométricas e de carregamento e as mesmas condições fronteira do exemplo anterior. Trata-se de uma placa $2\text{ m} \times 2\text{ m}$, apoiada nos bordos (assinalados por A na figura 8.12), sujeita a uma carga uniformemente distribuída de $P = 5\text{ kN/m}^2$.

A malha de elementos finitos é constituída por 16 elementos distribuídos por 3 macroelementos, conforme se pode observar através da figura 8.12.

As condições de convergência locais e globais, e o valor do parâmetro α são os mesmos considerados no exemplo anterior.

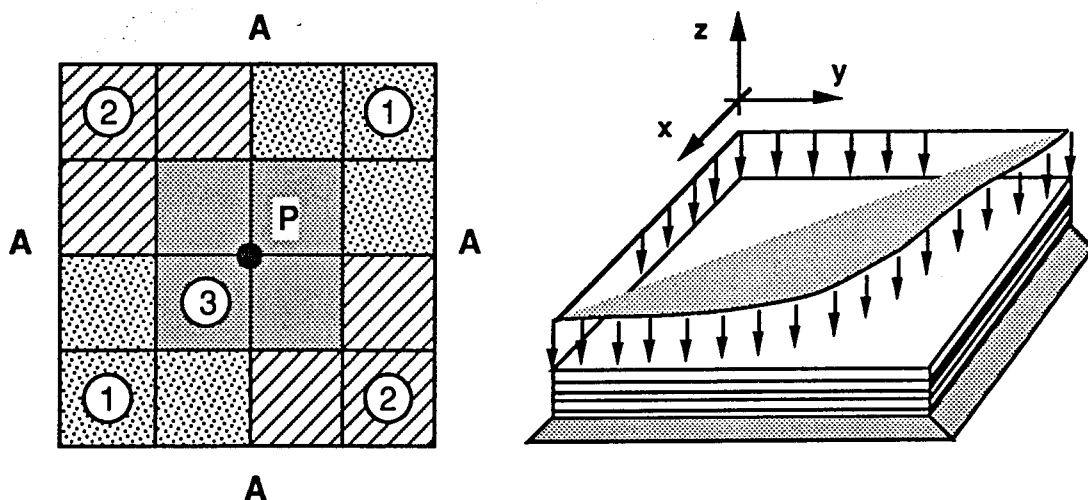


Figura 8.12 - Definição geométrica do problema, condições de carregamento e condições de fronteira. Subestruturação: 3 Macroelementos.

O número total de variáveis de projecto é de 18, das quais três são variáveis espessuras dos macroelementos e as restantes são as orientações das camadas dos estratificados que constituem os macroelementos. Os valores iniciais das variáveis de projecto estão apresentados na tabela 8.5.

Considerou-se apenas uma restrição de deslocamento vertical para o nó central da placa (ponto P da figura 8.12), com o deslocamento máximo admissível de $u_0 = 0,01$ m.

Nas restrições de tensão tomou-se como coeficiente de segurança da estrutura $R_0 = 1$.

As figuras 8.13 a 8.16 e a Tabela 8.5, descrevem o processo de optimização nos seus vários aspectos.

A trajectória de pesquisa do valor óptimo para a função objectivo global $W(t)$ comporta uma única sequência constituída pelas 1ª e 2ª etapas do processo de optimização.

O gráfico da figura 8.13 representa o valor da função objectivo global (peso da estrutura) ao longo do processo de optimização cuja convergência pode ser observada por análise dos graficos das figuras 8.15 e 8.16.

A figura 8.14 mostra a pequena influência das variáveis orientações das camadas traduzida na reduzida variação da restrição máxima durante a primeira etapa. Ao longo de todo o processo de optimização a restrição máxima é sempre do tipo deslocamento.

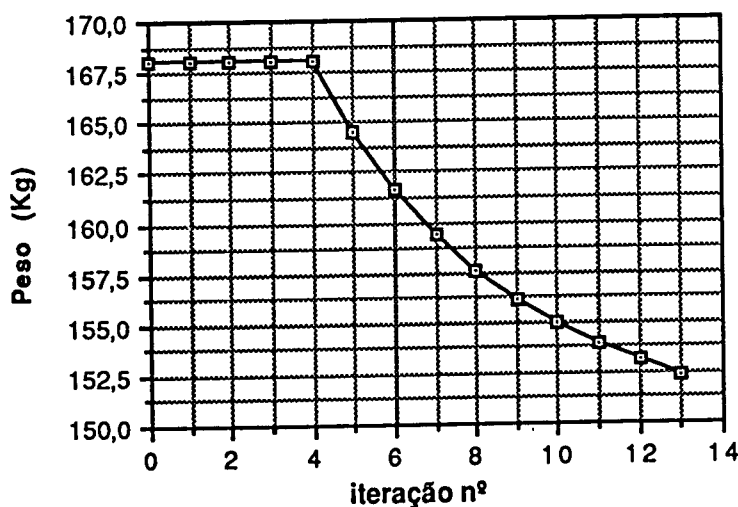


Figura 8.13 - Variação da função objectivo (Peso) - 1ª e 2ª etapas

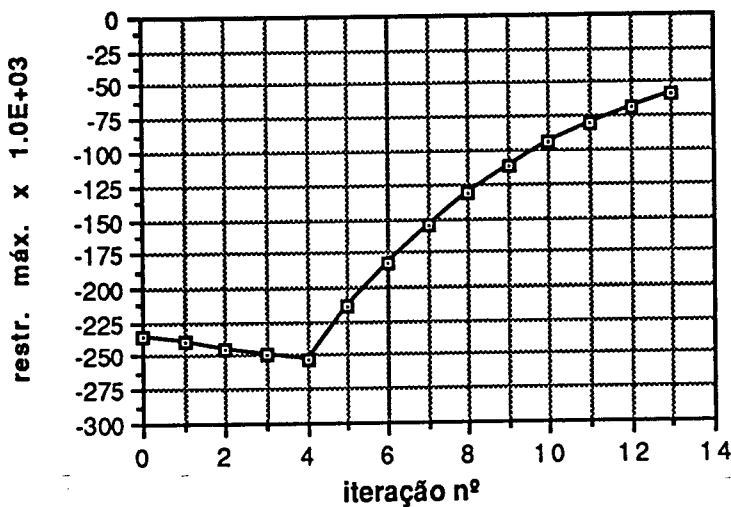


Figura 8.14 - Variação da restrição máxima - 1ª e 2ª etapas

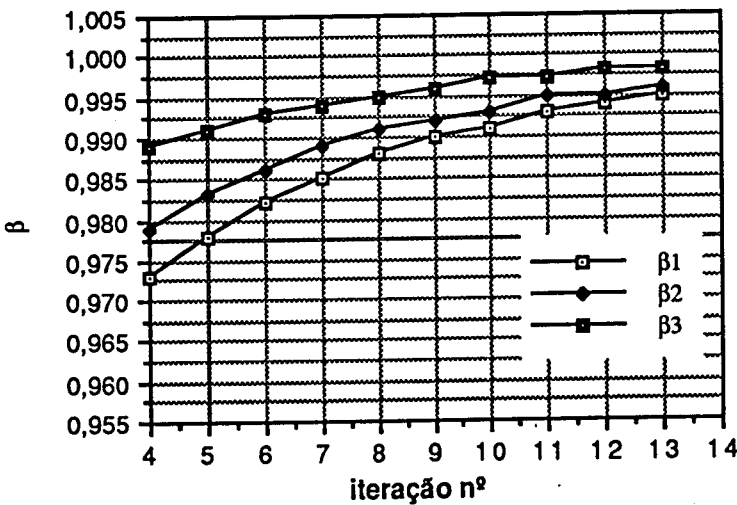


Figura 8.15 - Variação da razão incremental β_i - 2ª etapa

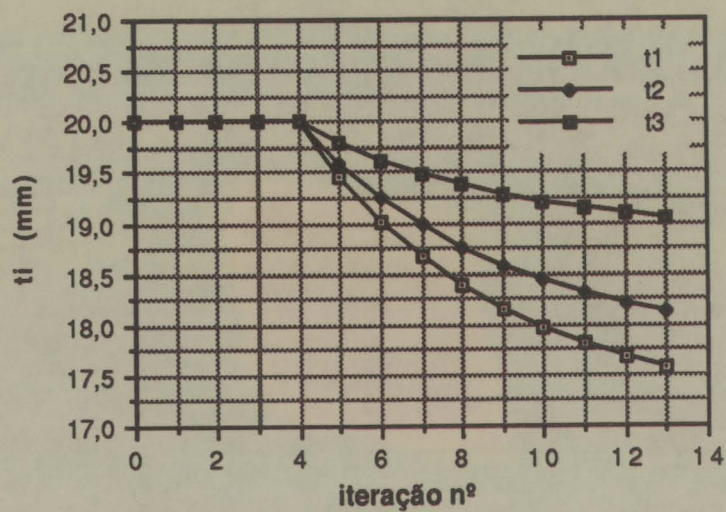


Figura 8.16 - Variação das variáveis espessuras t_i - 1ª e 2ª etapas

Figura 8.18 - Distribuição das espessuras no fim do processo de optimização (9 iterações algoritmo 2)

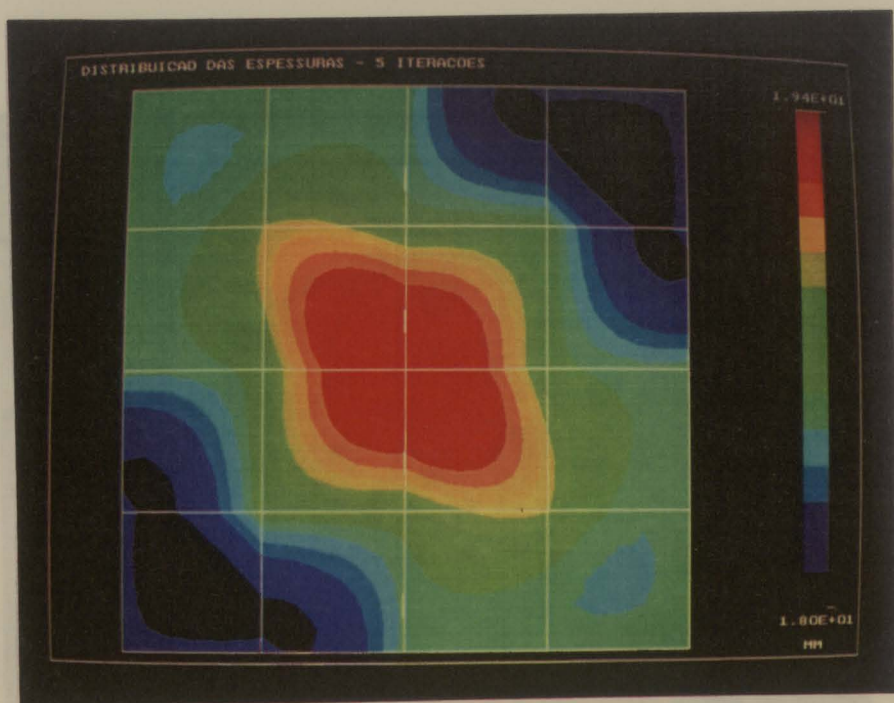


Figura 8.17 - Distribuição das espessuras após 9 iterações do processo de optimização (5 iterações algoritmo 2)

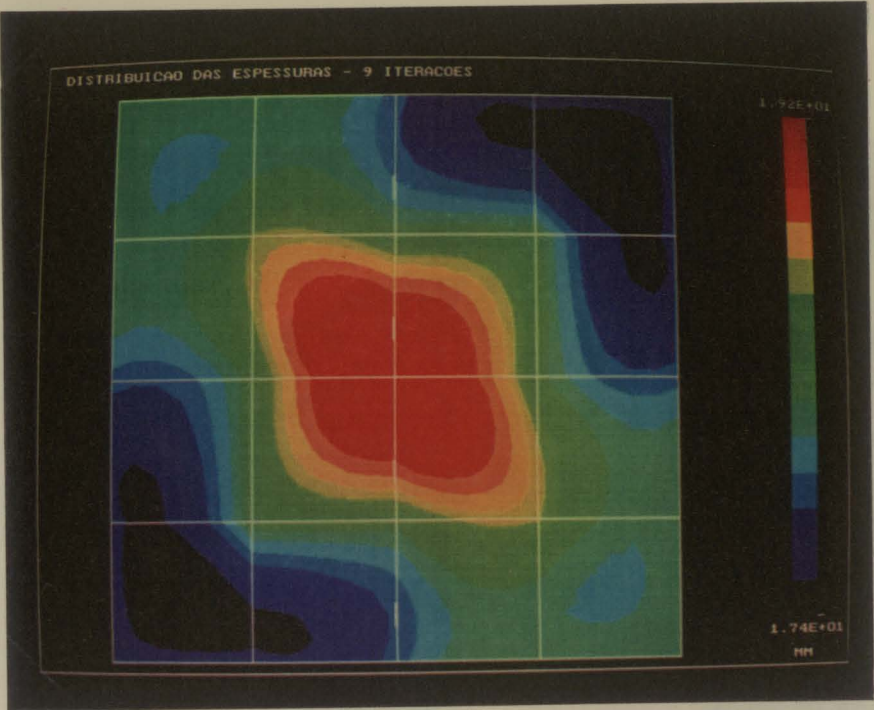


Figura 8.18 - Distribuição das espessuras no fim do processo de optimização (9 iterações algoritmo 2)

Figura 8.20 - Campo de deslocamentos no fim do processo de optimização

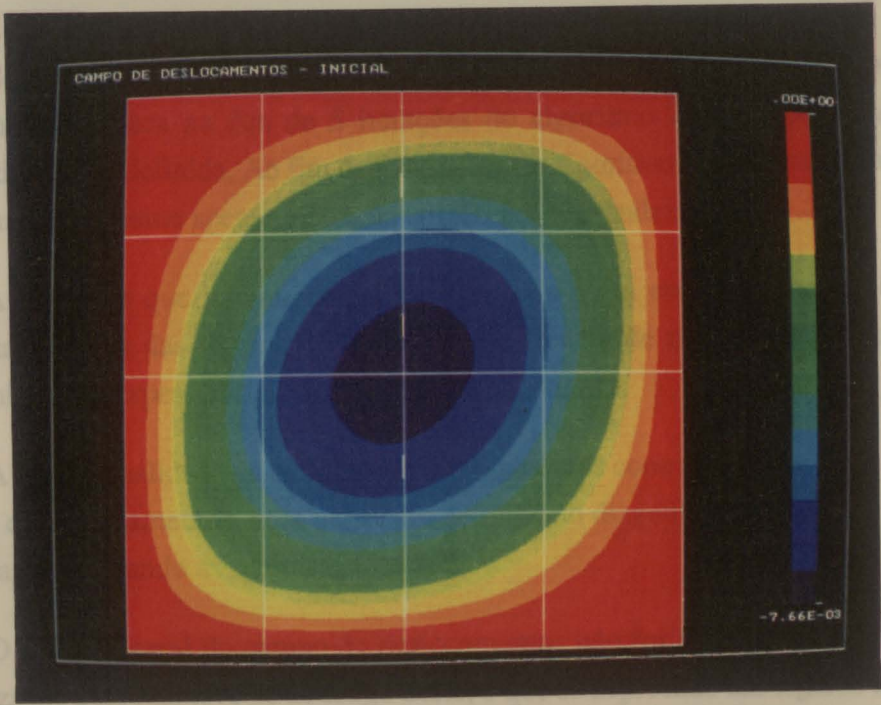


Figura 8.19 - Campo de deslocamentos inicial

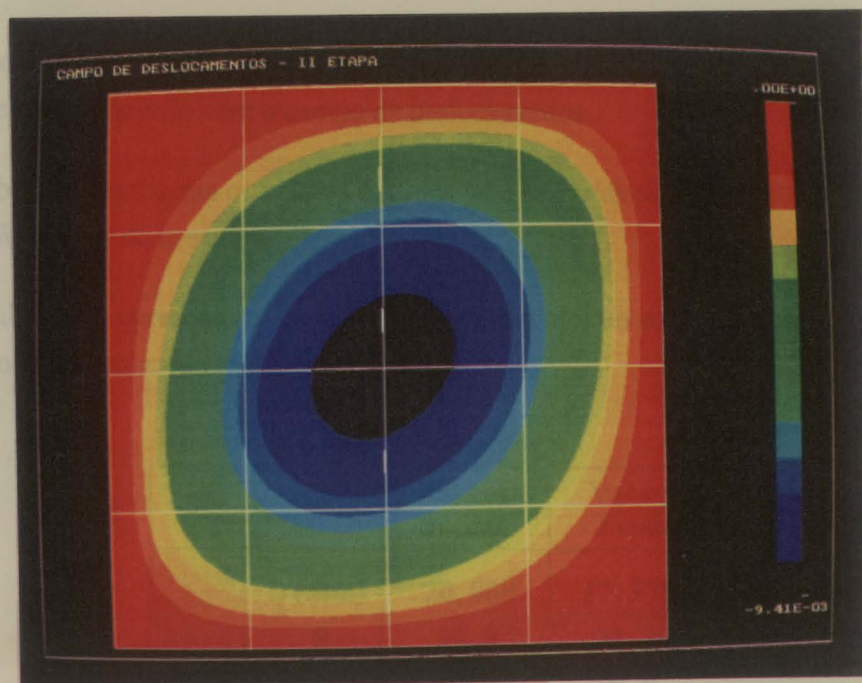


Figura 8.20 - Campo de deslocamentos no fim do processo de optimização

Conforme se poderá observar através das figuras 8.17 e 8.18, a distribuição das espessuras na placa ao fim de 5 iterações do algoritmo 2 (2ª etapa) já se encontrava qualitativamente definida. Ao fim de 9 iterações do algoritmo 2 o aspecto geral do campo de espessuras é o mesmo apenas diferindo em termos de grandeza.

Assinale-se que inicialmente a espessura da placa era uniforme, pelo que se pode constatar através das figuras 8.17 e 8.18 a existência de uma forte direccionalidade da distribuição das espessuras na solução óptima encontrada.

A direccionalidade da distribuição das espessuras contrasta com a direccionalidade do campo de deslocamentos, pois verificam-se segundo diagonais opostas, conforme se pode observar comparando as figuras 8.18 e 8.20.

O aspecto geral do campo de deslocamentos não foi influenciado pelo processo de optimização pois manteve-se ao longo deste, o que se depreende das figuras 8.19 e 8.20.

A direcionalidade do campo de deslocamentos está relacionada directamente com as características geométricas e de carregamento do problema e com a anisotropia dos laminados utilizados.

Outro aspecto a assinalar relaciona-se com o valor da espessura na região central da placa o que está de acordo com o campo de deslocamentos.

A tabela 8.5 apresenta os valores óptimos para as variáveis de projecto e para a função objectivo $W(t)$ peso da estrutura.

Na tabela 8.6 apresentam-se os resultados referentes ao estudo dos tempos de cálculo do processo de optimização global e por etapa.

M	Variável	Valores Iniciais	Valores Finais
1	t_1 (mm)	20, 000	17, 578
	θ_1	30, 0 °	31, 0 °
	θ_2	60, 0 °	60, 0 °
	θ_3	30, 0 °	30, 0 °
	θ_4	60, 0 °	60, 0 °
	θ_5	30, 0 °	31, 0 °
2	t_2 (mm)	20, 000	18, 128
	θ_6	60, 0 °	56, 0 °
	θ_7	30, 0 °	30, 8 °
	θ_8	60, 0 °	60, 0 °
	θ_9	30, 0 °	30, 8 °
	θ_{10}	60, 0 °	56, 0 °
3	t_3 (mm)	20, 000	19, 041
	θ_{11}	45, 0 °	45, 3 °
	θ_{12}	- 45, 0 °	- 45, 2
	θ_{13}	45, 0 °	45, 0 °
	θ_{14}	- 45, 0 °	45, 2 °
	θ_{15}	45, 0 °	45, 3 °
Peso (Kg)		168, 000	152, 37

TABELA 8.5

	1 ^a Etapa	2 ^a Etapa	Totais
N ^o variáveis	15	3	18
N ^o iterações	4	9	13
CPU (s)	523	1046	1569
CPU / iteração (s)	130, 8	116, 2	120, 7
CPU / variável (s)	34, 9	348, 7	87, 2
CPU / iter. / var. (s)	2, 3	38, 7	6, 7
% PESO RECUPERADO			9, 3

TABELA 8.6

8.3.3 - EXEMPLO Nº3- CASCA CILINDRICA SUJEITA A CARGAS PONTUAIS

Consideremos uma estrutura do tipo casca cilíndrica com as características geométricas indicadas na figura 8.21, encastrada nos bordos assinalados por A, e sujeita a cargas pontuais verticais $P = 20 \text{ kN}$ nos nós situados no plano de simetria geométrica da estrutura.

A estrutura foi discretizada em 16 elementos iguais distribuídos por quatro macroelementos conforme se indica na figura 8.21.

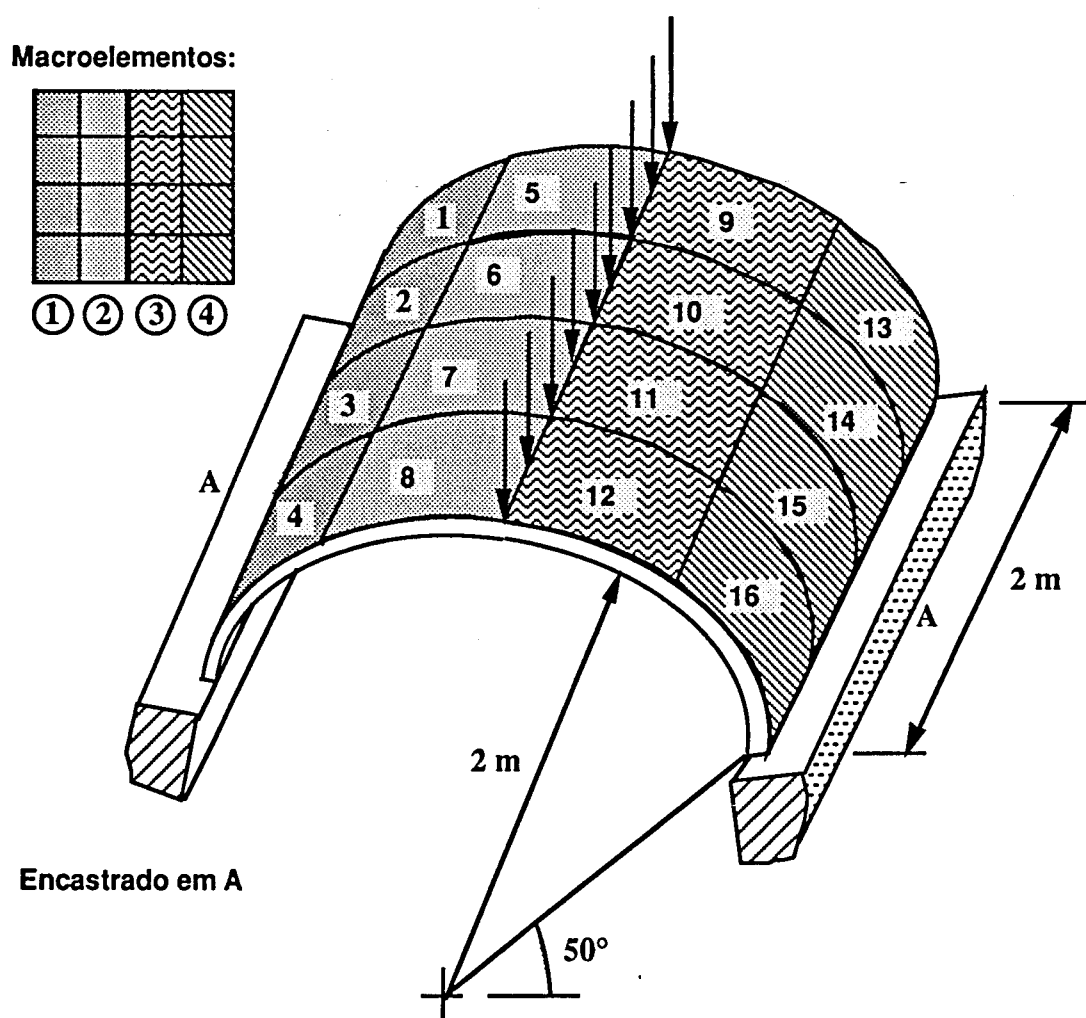


Figura 8.21 - Definição geométrica do problema, condições de carregamento e condições de fronteira. Subestruturação: 4 Macroelementos.

Tal como nos exemplos apresentados anteriormente a estrutura é construída em material compósito sendo todos os estratificados formados por cinco camadas cujas propriedades macromecânicas constam da tabela 8.1.

Em função da subestruturação escolhida o número total de variáveis de projecto é de 24, das quais 20 são do tipo orientações das camadas dos estratificados e as restantes são as espessuras dos macroelementos. Os valores iniciais das variáveis de projecto constam da tabela 8.9.

De acordo com a formulação do problema apresentada no Capítulo 3 o número total de restrições de tensão considerado é de 320 (produto do número de camadas pelo número de elementos pelo número de pontos de integração). O coeficiente de segurança da estrutura adoptado nas restrições de tensões foi de $R_0 = 2$.

Os deslocamentos verticais dos nós onde estão aplicadas as cargas pontuais não poderão exceder o valor $u_0 = 0,05 \text{ m}$. Estas condições constituem as restrições de deslocamento (9 restrições).

As condições de convergências adoptadas nas diferentes fases do processo de optimização encontram-se sintetizadas na tabela 8.7.

FASE	ε	δ	$\bar{\varepsilon}$	$\bar{\delta}$	α_0	α_1
I	0,005	0,005	0,005	0,005	0,985	0,975
II	0,005	0,005	0,005	0,005	0,950	0,950
III	0,005	0,005	0,005	0,005	0,950	0,950
IV	0,005	0,005	0,005	0,005	0,950	0,950

TABELA 8.7

As figuras 8.22 a 8.33 mostram a variação dos parâmetros mais importantes durante o processo de optimização. Este consiste de quatro fases cada uma das quais constitui uma sequência de duas etapas correspondentes aos algoritmos 1 e 2.

Nas figura 8.22, 8.23, 8.24 e 8.25 podemos observar o comportamento da função objectivo global $W(t)$ que é o peso da estrutura e constatar a convergência do método. Este apenas sofre uma perturbação na iteração número 28, que corresponde a uma transição do tipo de restrição máxima a qual passa do tipo tensão (27) para o tipo deslocamento (28), passando novamente para o tipo tensão (29).

A perturbação accidental referida pode ser atribuída a uma acomodação do sistema às modificações produzidas nas variáveis de projecto, conjuntamente com a mudança registada no tipo de restrição máxima, com as implicações daí resultantes em termos de grandeza e de sinal das sensibilidades da restrição máxima em ordem às variáveis de projecto espessuras dos macroelementos. O processo retoma o seu curso normal logo que é atingida uma nova situação de equilíbrio.

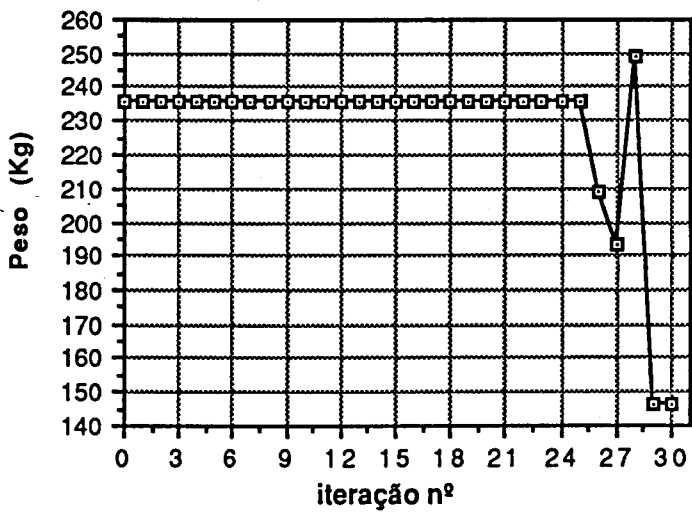


Figura 8.22 - Variação da função objectivo (Peso) - 1ª fase

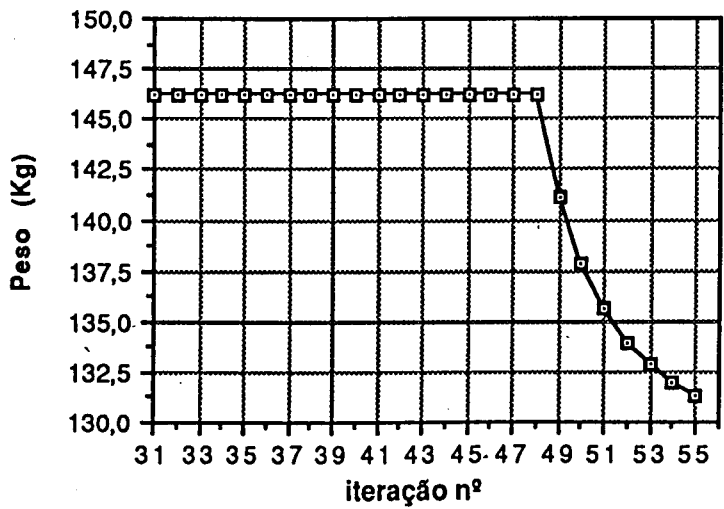


Figura 8.23 - Variação da função objectivo (Peso) - 2ª fase

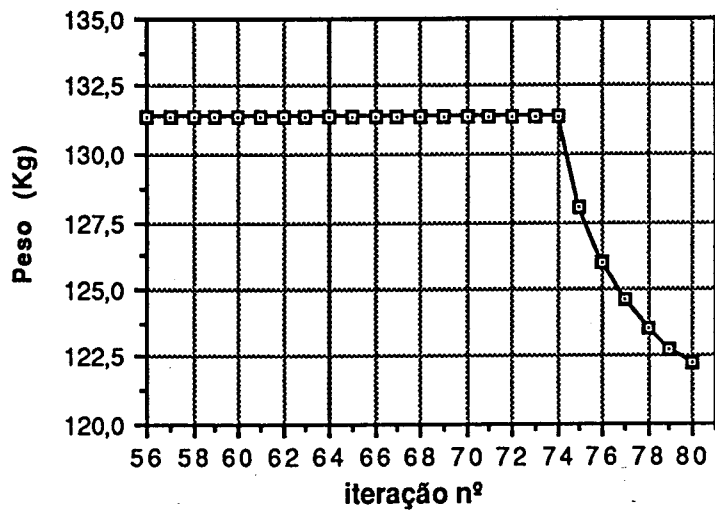


Figura 8.24 - Variação da função objectivo (Peso) - 3ª fase

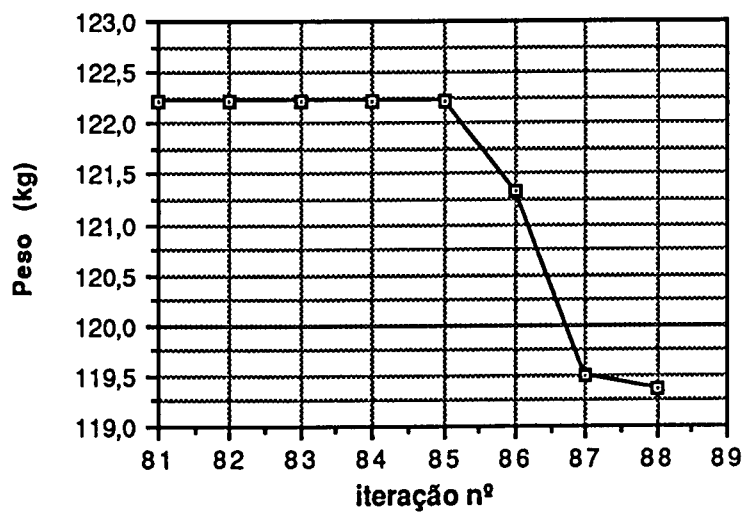


Figura 8.25 - Variação da função objectivo (Peso) - 4ª fase

As figuras 8.26, 8.27, 8.28 e 8.29 mostram o comportamento da restrição máxima independentemente do seu tipo, ao longo do processo de optimização.

As diferentes mutações da restrição máxima, que governa o processo de optimização, no que concerne à sua natureza (de tensão ou de deslocamento), podem ser constatadas na tabela 8.8.

Este aspecto reveste-se de significativa importância na validação do método de optimização proposto, pois a mudança no tipo de restrição pode provocar eventualmente perturbações no processo se não houver uma certa continuidade em termos de grandeza e de sinal das sensibilidades da restrição máxima em ordem às variáveis de projecto.

Na realidade, analisando a tabela 8.8 e os gráficos das figuras representativas do comportamento da função objectivo $W(t)$ e da restrição máxima, conclui-se que as oscilações são pequenas e os desvios pontuais existentes não afectam a concretização dos objectivos finais propostos em ambas as etapas que constituem o método.

Uma segunda conclusão a extrair, é a de que a grande maioria das oscilações registadas não se devem à mudança do tipo de restrição máxima.

Com efeito, embora a tabela 8.8 não permita um maior aprofundamento da questão, verificou-se através dos resultados obtidos que as oscilações se devem em grande parte ao facto da restrição máxima não ser sempre a mesma, independentemente da natureza desta.

A mudança da restrição máxima em termos de localização relativamente à estrutura, deve-se às variações registadas durante o processo nos campos de deslocamentos e de tensões.

Quanto à convergência local dos algoritmos 1 e 2 pode ser justificada, em geral, pelo comportamento da restrição máxima durante as diferentes fases do processo e, em particular, em cada etapa que o constitui.

Saliente-se que inicialmente todas as restrições são violadas. Logo na primeira etapa da primeira fase do processo esta situação é ultrapassada, utilizando apenas como variáveis de projecto as orientações das camadas que constituem os estratificados, ou seja, manipulando de forma adequada as propriedades anisotrópicas dos materiais.

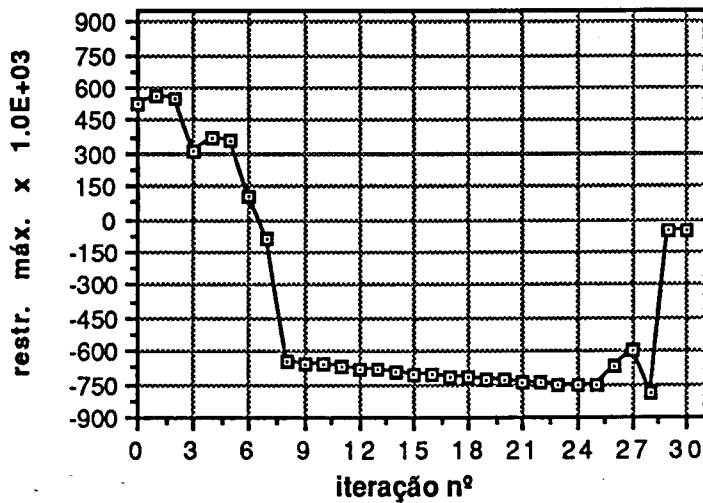


Figura 8.26 - Variação da restrição máxima - 1ª fase

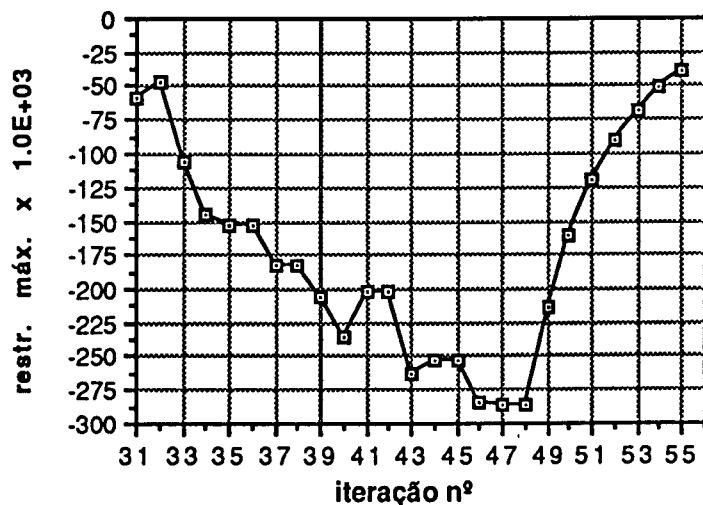


Figura 8.27 - Variação da restrição máxima - 2ª fase

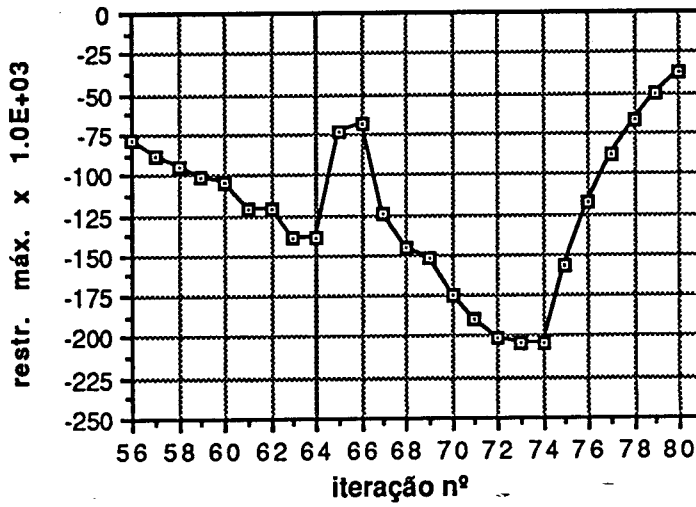


Figura 8.28 - Variação da restrição máxima - 3ª fase

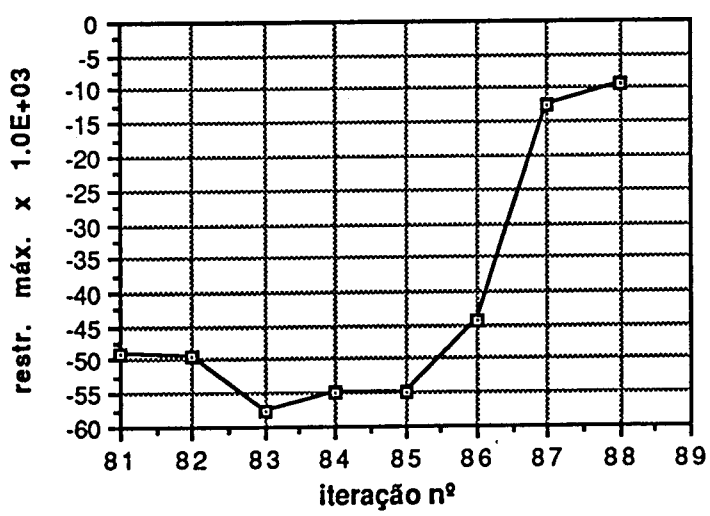


Figura 8.29 - Variação da restrição máxima - 4ª fase

FASE	ETAPA	Intervalo de iteração	Tipo rest. máx.
I	1ª	0 - 7	1
		8 - 25	2
	2ª	26	2
		27	1
		28	2
		29 - 30	1
II	1ª	31 - 47	1
	2ª	48 - 55	2
III	1ª	56	2
		57 - 58	1
		59	2
		60 - 67	1
		68 - 72	2
		73 - 74	1
	2ª	75 - 80	2
IV	1ª	81 - 82	1
		83	2
		84 - 85	1
	2ª	86	1
		87 - 88	2

TABELA 8.8

Tipo de restrição: 1 - tensão, 2 - deslocamento

As figuras 8.30, 8.31, 8.32 e 8.33 mostram a variação das variáveis de projecto - espessuras dos macroelementos durante o processo de optimização e pode-se constatar que, exceptuando uma oscilação pontual numa das variáveis durante a primeira fase, a convergência local e global do processo é evidente.

As figuras 8.34 e 8.35 mostram que a distribuição óptima das espessuras na casca não é simétrica como eventualmente se poderia supor pela configuração geométrica e de carregamento do problema. Este facto é uma consequência directa da contribuição simultânea dos dois tipos de variáveis de projecto para a solução óptima. A imposição de simetria na solução óptima implicaria a imposição de simetria na subestruturação a seguir.

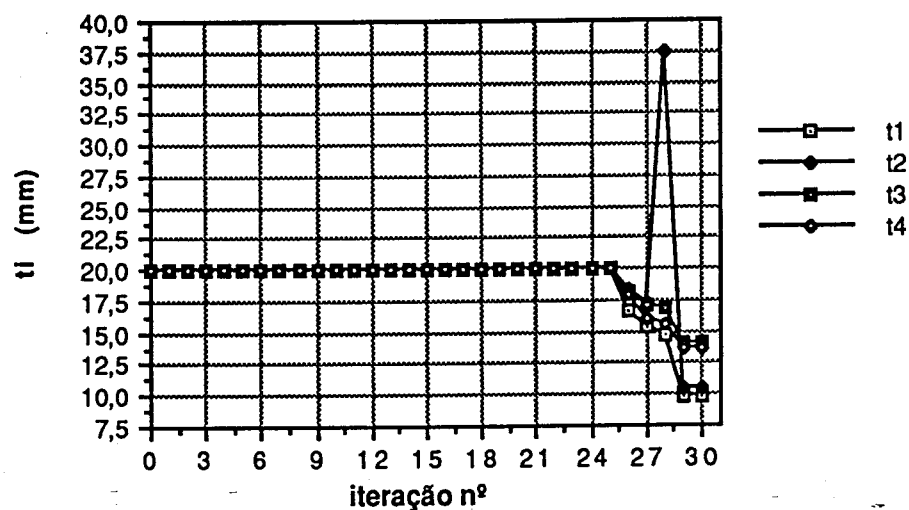


Figura 8.30 - Variação das espessuras t_i - 1ª fase

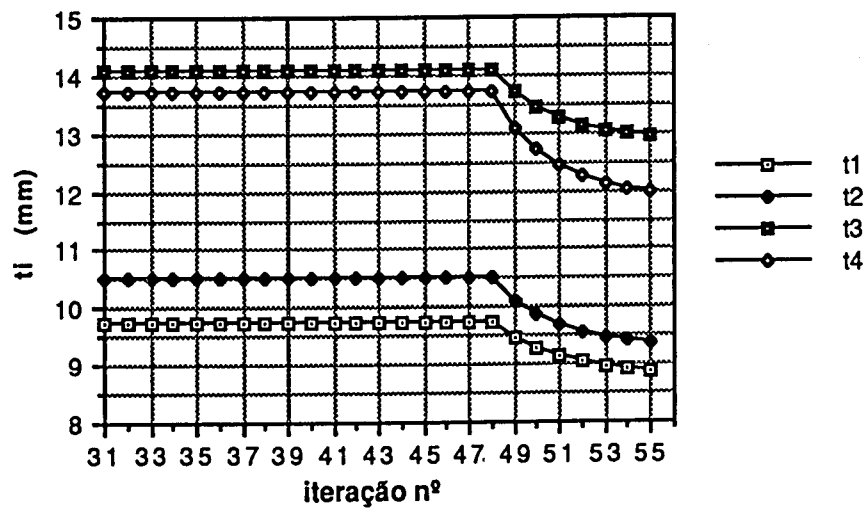


Figura 8.31 - Variação das espessuras t_i - 2ª fase

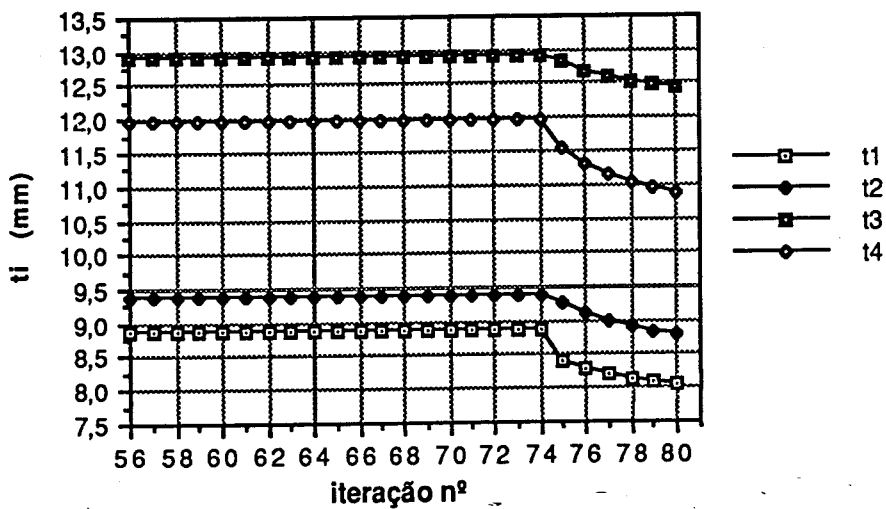


Figura 8.32 - Variação das espessuras t_i - 3ª fase

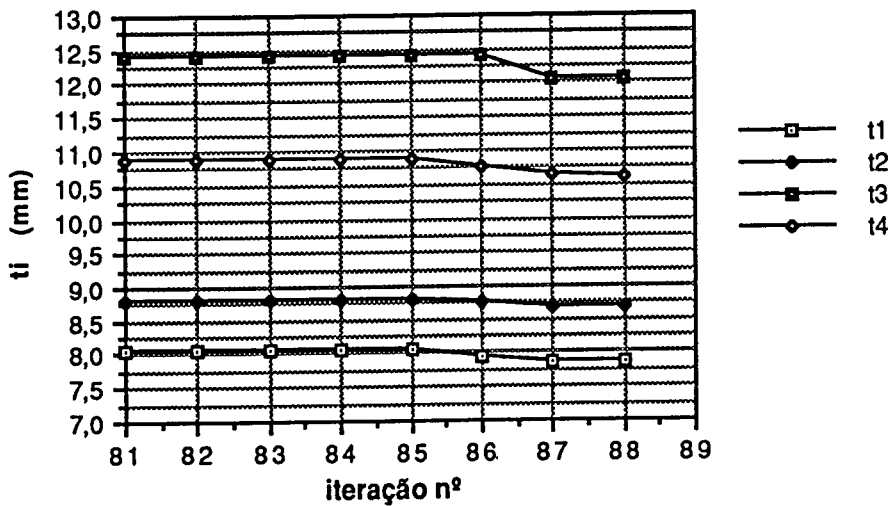


Figura 8.33 - Variação das espessuras t_i - 4ª fase

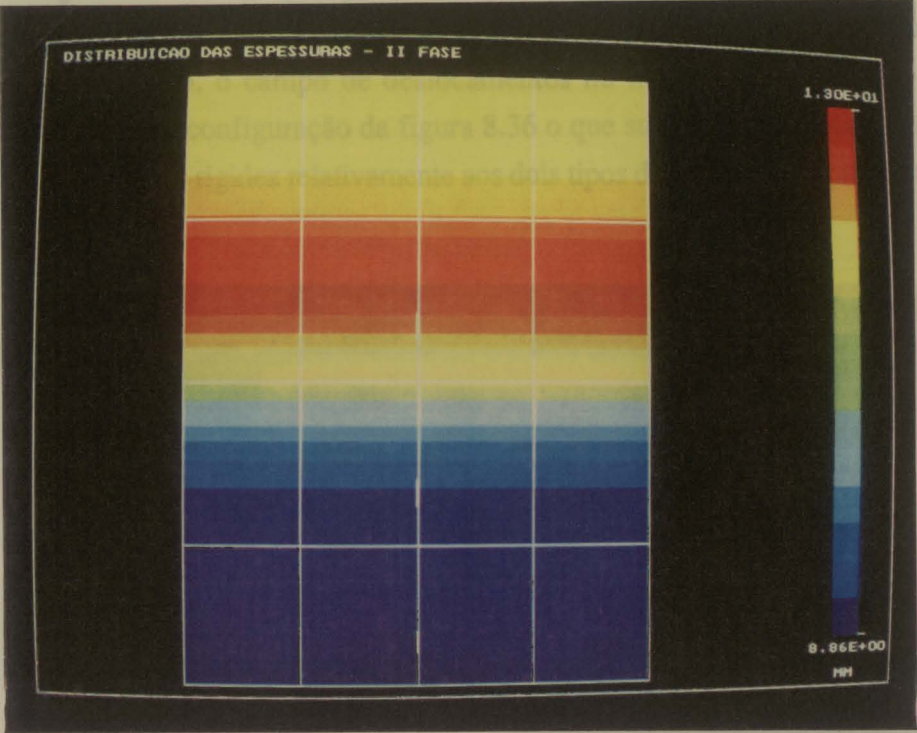


Figura 8.34 - Distribuição das espessuras na casca (planificada) após a 2ª fase do processo de optimização

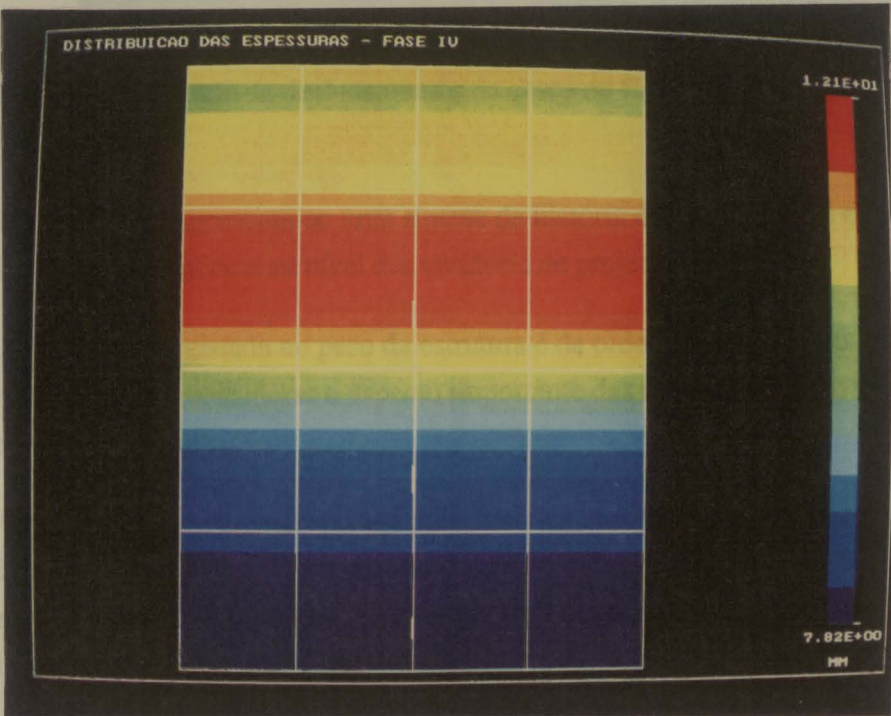


Figura 8.35 - Distribuição das espessuras na casca (planificada) no fim do processo de optimização

A figura 8.36 mostra que apesar da solução não simétrica encontrada para as variáveis espessuras dos macroelementos, o campo de deslocamentos é simétrico. Embora não se faça a sua representação, o campo de deslocamentos no início do processo de optimização apresenta a mesma configuração da figura 8.36 o que sugere a existência de compensação mútua em termos de rigidez relativamente aos dois tipos de variáveis de projecto.

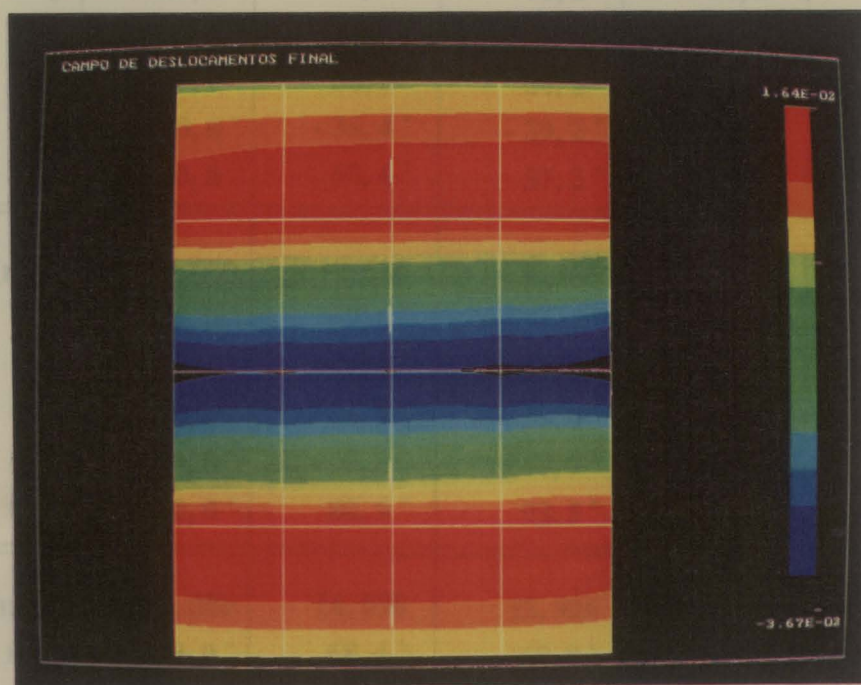


Figura 8.36 - Campo de deslocamentos da casca no fim do processo de optimização

Na tabela 8.9 apresenta-se uma síntese da história do processo nas diferentes fases. É de salientar a convergência ao nível das variáveis de projecto.

A economia registada no peso da estrutura é da ordem dos 50%, mas este facto é ainda mais relevante se se considerar o aspecto importante das restrições serem violadas no início do processo de optimização.

Constatou-se que ignorando as importantes propriedades de anisotropia exibidas pelos materiais utilizados e considerando uma espessura uniforme para toda a estrutura, o peso necessário para as restrições deixarem de ser violadas seria duas vezes superior ao seu valor inicial.

Na tabela 8.10 apresentam-se os resultados do estudo efectuado sobre os tempos de cálculo totais e por fase e os ganhos respectivos.

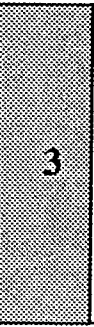
M	Variável	Valores Iniciais	Valores Finais			
			I Fase	II Fase	III Fase	IV Fase
	t_1 (mm)	20, 000	9, 746	8, 886	8, 051	7, 863
	θ_1	30, 0 °	54, 7 °	76, 2 °	86, 3 °	85, 9 °
	θ_2	- 30, 0 °	- 36, 3 °	- 46, 6 °	- 56, 2 °	- 56, 4 °
	θ_3	30, 0 °	30, 6 °	30, 2 °	32, 8 °	32, 7 °
	θ_4	- 30, 0 °	- 35, 4 °	- 39, 2 °	- 44, 7 °	- 45, 4 °
	θ_5	30, 0 °	50, 4 °	57, 2 °	76, 1 °	78, 5 °
	t_2 (mm)	20, 000	10, 506	9, 366	8, 797	8, 689
	θ_6	30, 0 °	57, 6 °	54, 0 °	62, 7 °	63, 4 °
	θ_7	- 30, 0 °	- 47, 2 °	- 51, 0 °	- 53, 2 °	- 53, 7 °
	θ_8	30, 0 °	26, 9 °	35, 6 °	45, 2 °	45, 0 °
	θ_9	- 30, 0 °	- 60, 8 °	- 68, 7 °	- 71, 6 °	- 71, 7 °
	θ_{10}	30, 0 °	80, 9 °	93, 5 °	92, 8 °	92, 3 °
	t_3 (mm)	20, 000	14, 098	12, 926	12, 423	12, 043
	θ_{11}	30, 0 °	68, 4 °	60, 9 °	55, 3 °	57, 8 °
	θ_{12}	- 30, 0 °	- 52, 4 °	- 48, 4 °	- 49, 9 °	- 51, 5 °
	θ_{13}	30, 0 °	27, 8 °	29, 1 °	32, 7 °	32, 6 °
	θ_{14}	- 30, 0 °	- 47, 6 °	- 51, 8 °	- 57, 6 °	- 57, 6 °
	θ_{15}	30, 0 °	76, 8 °	84, 8 °	85, 7 °	86, 8 °
	t_4 (mm)	20, 000	13, 702	11, 978	10, 882	10, 617
	θ_{16}	30, 0 °	50, 5 °	51, 1 °	58, 2 °	60, 0 °
	θ_{17}	- 30, 0 °	- 36, 7 °	- 37, 6 °	- 40, 1 °	- 40, 7 °
	θ_{18}	30, 0 °	30, 3 °	30, 3 °	30, 1 °	30, 0 °
	θ_{19}	- 30, 0 °	- 34, 0 °	- 34, 5 °	- 35, 3 °	- 35, 4 °
	θ_{20}	30, 0 °	47, 7 °	52, 0 °	61, 7 °	63, 8 °
Peso (Kg)		235, 738	146, 261	131, 351	122, 211	119, 378

TABELA 8.9

	Valores Parciais								Totais	
	I Fase		II Fase		III Fase		IV Fase			
	1ª Etapa	2ª Etapa	1ª Etapa	2ª Etapa	1ª Etapa	2ª Etapa	1ª Etapa	2ª Etapa	1ª Etapa	2ª Etapa
Nº variáveis	20	4	20	4	20	4	20	4	20	4
Nº iterações	25	5	17	7	19	6	5	4	66	22
CPU (s)	2871	657	1970	847	2156	737	639	429	7636	2880
CPU / iteração (s)	114,8	131,4	115,9	121	113,5	122,8	127,8	107,3	115,7	130,9
CPU / variável (s)	143,6	164,3	98,5	211,8	107,8	184,3	32	107,3	381,8	720
CPU / iter. / var. (s)	5,7	26,3	5,8	30,3	5,7	30,7	6,4	26,8	5,8	32,7
% Peso recuperado	38		10,8		7		2,3		49,4	

TABELA 8.10

8.3.4 - EXEMPLO Nº4 - PLACA SUJEITA A CARGAS PONTUAIS

Este exemplo foi extraído do trabalho de Sadr et al [1] e tem como objectivo estabelecer a comparação com a solução encontrada pelo autor deste trabalho.

Embora as condições sejam as mesmas sob o ponto de vista da geometria do problema, propriedades dos materiais, número de camadas, solução inicial, etc., existem algumas diferenças no algoritmo de resolução do problema de optimização. Essas diferenças residem no tipo de variáveis utilizadas e são as seguintes:

i) contrariamente a [1], neste trabalho não se considera simetria material, pelo que em termos de variáveis de projecto do tipo orientações das camadas o número duplica. Para além deste aspecto, tem que se considerar o facto da simetria material constituir uma limitação no que concerne à sequência de empilhamento.

ii) o outro tipo de variáveis de projecto considerado neste trabalho são as espessuras dos macroelementos enquanto na referência [1] se consideram as espessuras das camadas tendo a placa uma espessura uniforme.

iii) neste trabalho considera-se a subestruturação do problema pelo que aumentam as possibilidades de exploração das características de anisotropia dos materiais.

Consideremos então uma placa rectangular em material compósito com as dimensões indicadas na figura 8.37, solicitada por dois carregamentos pontuais idênticos $P_1 = P_2 = 20\text{N}$ segundo o eixo z , nos nós A e B, apoiada nos nós C, D e E (restringidos os deslocamentos segundo x, y, z).

Os laminados utilizados são constituídos por seis camadas de resina epóxida reforçada com tecido unidireccional de fibra de vidro, cujas características macromecânicas estão indicadas na tabela 8.11. O peso específico do material é de 1600 Kg/m^3 .

Em termos de formulação estamos perante o mesmo problema ou seja minimizar o peso da placa sujeito à verificação do critério de rotura (critério quadrático de Tsai-Wu).

Afim de simular as mesmas condições tomou-se como coeficiente de segurança $R_0 = 1$. Considerou-se ainda que o deslocamento segundo z do nó P não poderia exceder o valor de $u_0 = 0,05m$.

As condições de convergência são as seguintes:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 0,005 & ; & & \bar{\varepsilon} &= 0,005 \\ \delta &= 0,0005 & ; & & \bar{\delta} &= 0,0005 \end{aligned}$$

Considerou-se o seguinte parâmetro de controle da convergência local do algoritmo 2:

$$\alpha_0 = \alpha_1 = 0,95$$

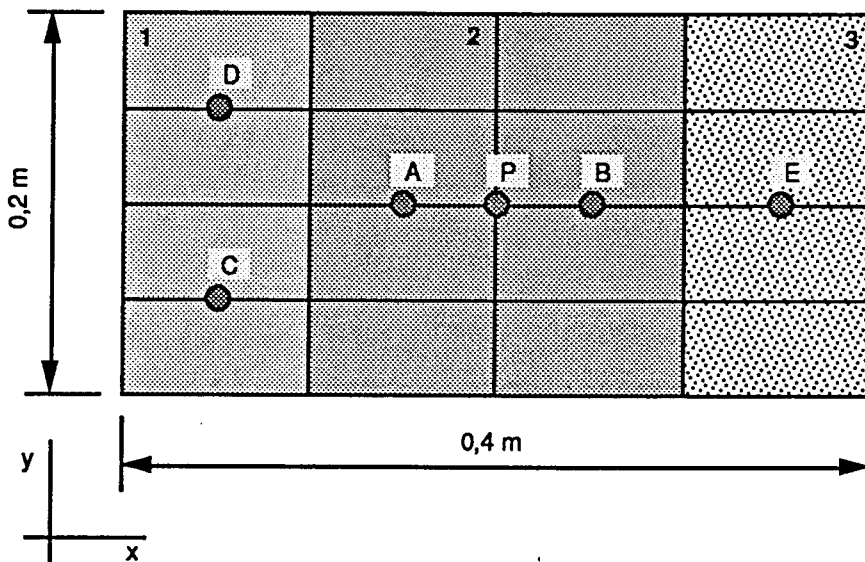


Figura 8.37 - Caracterização geométrica do problema.

Subestruturação : 3 Macroelementos

Constantes elásticas		Valores	Resistência mecânica		Valores
Módulos elásticos (GPa)	E1	382,22	Longitudinal (MPa) Tracção Compressão	X X'	994 600
	E2	114,12			
Módulos de corte (GPa)	G12	3,4765	Transversal (MPa) Tracção Compressão	Y Y'	47,7 193
	G13	3,4765			
	G23	3,4765			
Coeficientes de Poisson	V12	0,29	Corte (MPa)	S	55,9
	V13	0,29			
	V23	0,29			

TABELA 8.11

Nas figuras 8.38,8.39 e 8.40 representa-se gráficamente a história do processo de optimização.

Relativamente aos exemplos apresentados anteriormente a convergência do processo é mais evidente devido ao facto das condições de convergência serem mais refinadas.

Na figura 8.42 apresenta-se a distribuição das espessuras na placa optimizada e na figura 8.43 o respectivo campo de deslocamentos verticais.

A distribuição das espessuras não é simétrica apesar de se verificar através da tabela 8.12 a pouca influência das variáveis do tipo orientações das camadas. Tal facto é uma consequência da inexistência de simetria nos apoios da placa. O mesmo tipo de considerações explica a configuração do campo de deslocamentos.

Através da figura 8.41 observa-se que a restrição máxima é muito mais sensível a alterações na variável t_2 (2° macroelemento) do que nas restantes. Este facto relaciona-se com o campo de deslocamentos da estrutura.

A solução encontrada para este problema por Sadr et al [1] considera uma espessura uniforme para a placa de 1,88 mm e a sequência de empilhamento $[57,1^\circ / 117,1^\circ / 37,4^\circ]_S$.

Na tabela 8.12 apresenta-se a solução óptima encontrada pelo autor a qual representa uma economia no peso da placa de cerca 30% relativamente ao peso inicial.

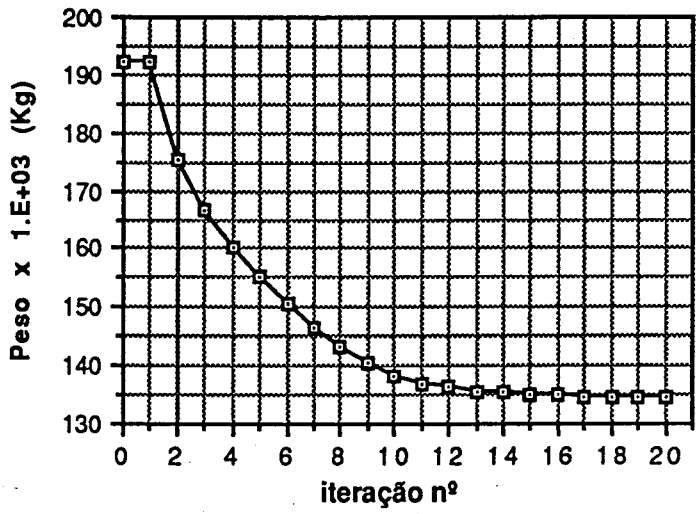


Figura 8.38 - Variação da função objectivo (Peso) - 1ª e 2ª etapas

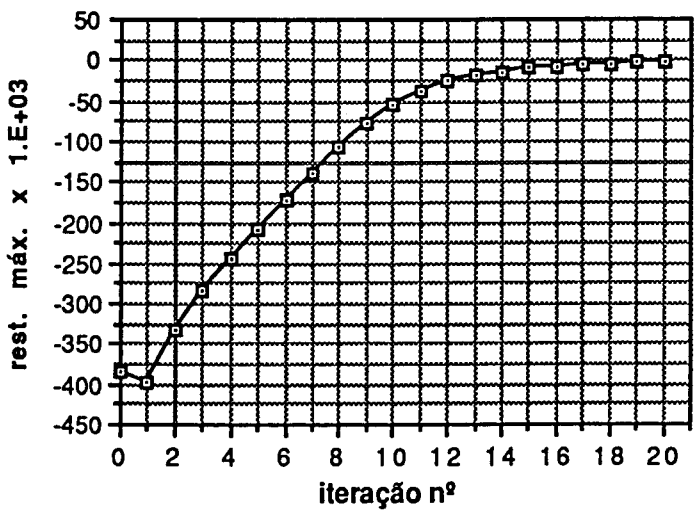


Figura 8.39 - Variação da restrição máxima - 1ª e 2ª etapas

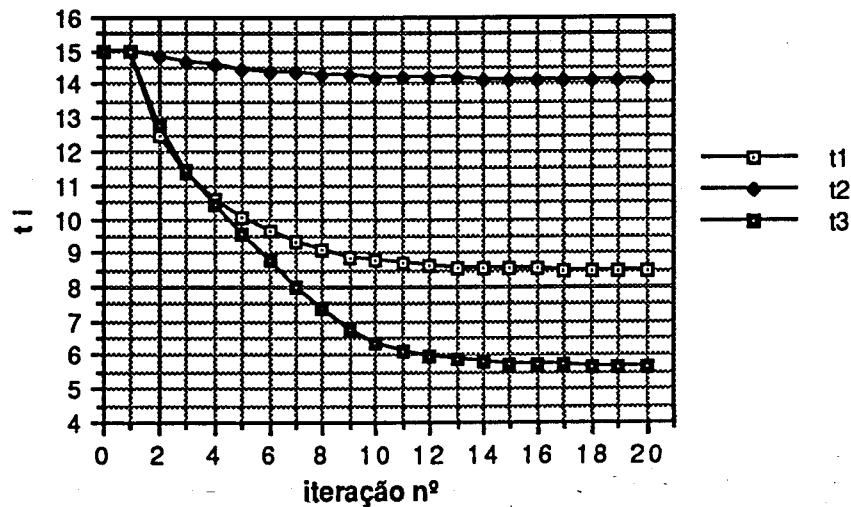


Figura 8.40- Variação das variáveis espessuras t_i (x10 mm) - 1ª e 2ª etapas

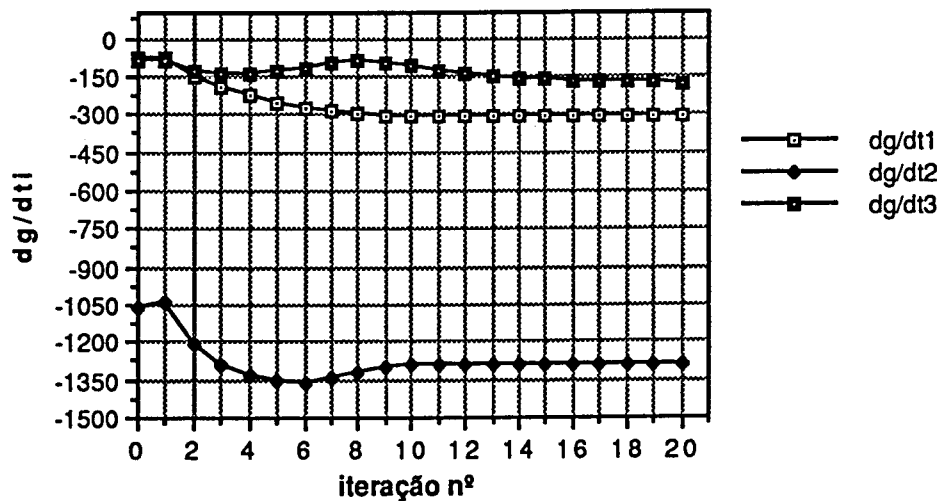


Figura 8.41 - Variação das sensibilidades da restrição máxima relativamente às variáveis de projecto - 1ª e 2ª etapas

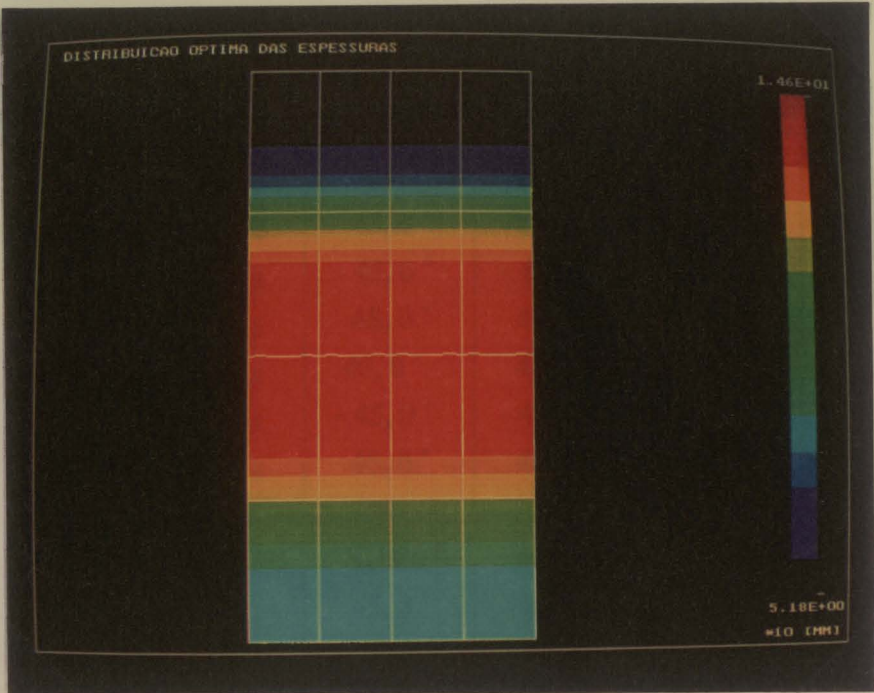


Figura 8.42 - Distribuição óptima das espessuras na placa

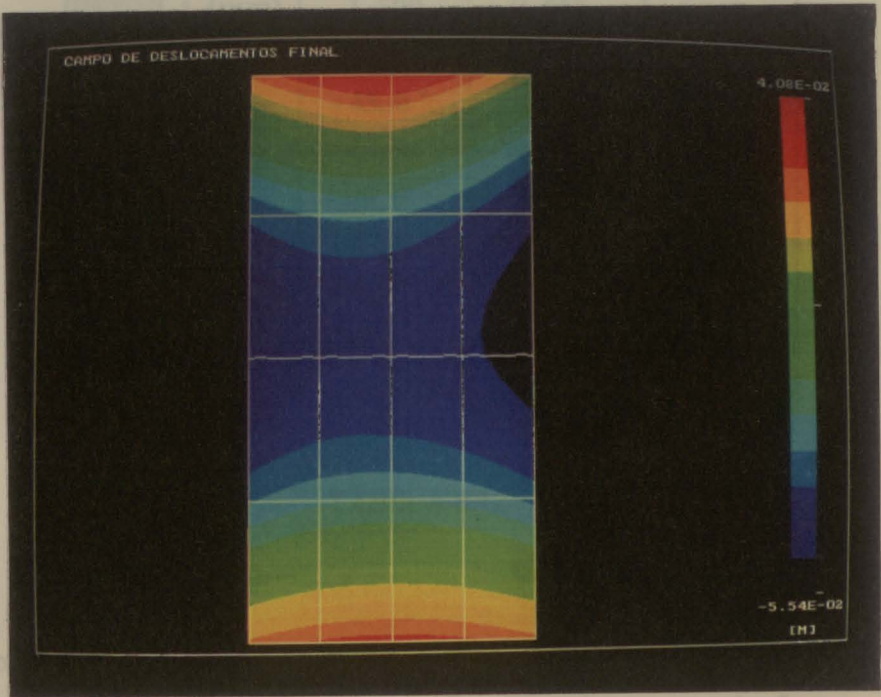


Figura 8.43 - Campo de deslocamentos no fim do processo de optimização

M	Variável	Valores Iniciais	Valores Finais	Valores Finais [1]
1	t_1 (mm)	1,500	0,848	1,880 57,1° 117,1° 37,4° 37,4° 117,1° 57,1°
	θ_1	45,0°	44,9°	
	θ_2	-45,0°	-45,1°	
	θ_3	45,0°	45,0°	
	θ_4	45,0°	45,0°	
	θ_5	-45,0°	-45,1°	
	θ_6	45,0°	44,9°	
2	t_2 (mm)	1,500	1,414	
	θ_7	45,0°	45,8°	
	θ_8	-45,0°	-46,2°	
	θ_9	45,0°	45,0°	
	θ_{10}	45,0°	45,0°	
	θ_{11}	-45,0°	-46,2°	
	θ_{12}	45,0°	45,8°	
3	t_3 (mm)	1,500	0,565	
	θ_{13}	45,0°	45,0°	
	θ_{14}	-45,0°	-45,0°	
	θ_{15}	45,0°	45,0°	
	θ_{16}	45,0°	45,0°	
	θ_{17}	-45,0°	-45,0°	
	θ_{18}	45,0°	45,0°	
Peso x 1.E+03 (Kg)		192,000	134,466	240,640

TABELA 8.12

Conforme se verifica através da tabela 8.12 a solução proposta por Sadr et al [1] representa um incremento do peso da placa. Comparando com a solução proposta neste trabalho conclui-se que as diferenças registadas traduzem a influência do tipo de variáveis consideradas.

8.4 - REFERENCIAS

[1]

Sadr, H , Afzali, M., Sabzevari, H, "Calcul et optimisation des structures composites stratifiees", CETIM, Senlis, France, 1989

Capítulo

9

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE TRABALHO FUTURO

9.1 - RESULTADOS E CONCLUSÕES

Analisando os resultados pode-se afirmar, que os objectivos definidos no início deste trabalho foram alcançados.

O desenvolvimento analítico do método da estrutura adjunta, baseado na formulação do elemento de casca degenerado (elemento Amahd), permitiu a implementação duma ferramenta eficaz na determinação das sensibilidades em estruturas construídas de materiais compósitos.

A comparação dos resultados com o método numérico das diferenças finitas, demonstraram as vantagens do método desenvolvido em termos de precisão dos resultados e

de economia de tempo de cálculo, aspectos considerados fundamentais nos métodos de optimização que utilizam gradientes.

Paralelamente, desenvolveu-se um método de optimização de estruturas em compósitos laminados que permite a consideração em projecto dos dois tipos de variáveis mais importantes: as espessuras dos laminados e as orientações das camadas.

A utilização da análise de sensibilidades, da programação matemática (algoritmo 1), de critérios de optimalidade (algoritmo 2) e o aproveitamento da especificidade das características dos compósitos laminados, permitiu o desenvolvimento de um método de optimização especialmente dirigido para estes materiais.

A filosofia geral do método é baseada num algoritmo em etapas múltiplas no qual se considera a alternância da contribuição das diferentes variáveis de projecto.

A definição do número de variáveis e da sua natureza (espessuras ou orientações) ficou associada à técnica da subestruturação, aumentando assim as possibilidades de selecção por parte do projectista.

Por outro lado a independência da orientação de cada camada relativamente às restantes, permitiu a consideração numa forma integral da sequência de empilhamento das camadas também considerada implicitamente como uma variável de projecto.

Os exemplos testados que serviram para avaliar o desempenho do método são estruturas dos tipos placa ou casca e procurou-se na sua selecção contemplar diferentes graus de complexidade para além duma relativa previsibilidade dos resultados visando a respectiva validação.

A convergência local e global do método ficou patenteada nos diferentes exemplos implementados e pode-se considerar como boa em ambos os níveis.

Em termos gerais o desempenho do método revelou-se bom, tomando em consideração os resultados obtidos, embora alguns aspectos devam ainda ser aperfeiçoados e convenientemente explorados.

9.2 - PERSPECTIVAS DE TRABALHO FUTURO

Em termos de trabalho futuro pensa-se que este deverá incidir sobre dois aspectos fundamentais:

- a melhoria do desempenho do algoritmo principal
- a exploração de outras técnicas de optimização em cada uma das etapas

No que concerne ao algoritmo principal um dos aspectos a explorar será a modificação da trajectória de pesquisa do óptimo global visando acelerar a convergência do processo.

Uma das soluções alternativas seria interromper o processo iterativo correspondente a cada uma das etapas, antes de se alcançar a convergência local, acelerando assim a alternância da contribuição dos dois tipos de variáveis de projecto.

Ao nível das diferentes etapas a introdução de outras técnicas de optimização teria como objectivo melhorar a pesquisa do óptimo local em termos de tempo de cálculo. Entre as alternativas, salienta-se a utilização do método das direcções admissíveis no algoritmo 1 e da programação linear com a estratégia dos limites móveis no algoritmo 2.

Também a dependência da convergência do algoritmo 2 relativamente ao parâmetro α poderia ser controlada de forma mais precisa efectuando por exemplo uma minimização univariável visando obter o passo óptimo em cada iteração, o qual depende do parâmetro referido.

Em termos de filosofia de projecto, a utilização de conceitos probabilísticos na análise do desempenho das estruturas, constitui uma via alternativa interessante, na abordagem do projecto óptimo de estruturas construídas com materiais compósitos.

A inclusão de outros objectivos e restrições que alarguem o campo de aplicação do trabalho desenvolvido, a adaptação a outras ferramentas de cálculo estrutural que permitam explorar de forma eficaz as pontencialidades dos materiais compósitos e o uso de técnicas de optimização alternativa, constituem as áreas chave do desenvolvimento de trabalho futuro.



FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

BIBLIOTECA



0000051862