

ANTÓNIO MIGUEL DA FONSECA FERNANDES GOMES

Abordagens Heurísticas ao
Posicionamento de Formas Irregulares

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Electrotécnica e de
Computadores e realizada sob a orientação científica do Doutor José
Fernando da Costa Oliveira, Professor Associado da Faculdade de
Engenharia da Universidade do Porto

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELECTROTÉCNICA E DE COMPUTADORES
FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO

2005

O trabalho de investigação apresentado nesta dissertação foi apoiado pelo programa PRODEP III – Acção 5.3 – Formação Avançada no Ensino Superior – Concurso nº 2/5.3/PRODEP/2001.

Resumo

Nesta tese aborda-se o problema de Posicionamento de Formas Irregulares, com especial ênfase na resolução de instâncias reais destes problemas. É feita uma classificação dos problemas de Posicionamento em geral e apresentada uma caracterização dos problemas de Posicionamento de Formas Irregulares. São ainda discutidas e analisadas diversas ferramentas geométricas necessárias para a resolução eficiente de problemas de Posicionamento de Formas Irregulares.

É apresentado um modelo matemático global para o problema de Posicionamento de Formas Irregulares, assim como simplificações ao modelo global que permitem resolver dois subproblemas de posicionamento: o de compactação e o de separação. Experiências computacionais com os modelos matemáticos permitiram mostrar as limitações na utilização do modelo global e as potencialidades e capacidades dos modelos simplificados na resolução de problemas de compactação e de separação.

Foi desenvolvida uma nova heurística construtiva de posicionamento de formas irregulares, baseada na ordenação prévia das formas irregulares e no posterior posicionamento de sucessivas formas irregulares por uma regra de posicionamento gulosa do tipo *bottom-left*. Foram também estudados diversos critérios de ordenação das formas irregulares.

Foi proposto um novo algoritmo de pesquisa local, 2-EXCHANGE, que se baseia na representação de padrões de corte por sequências de formas irregulares e na realização duma pesquisa local sobre a sequência de formas irregulares, por operações de troca entre todos os elementos de uma subvizinhança. Foi ainda estudada a possibilidade de utilizar uma meta-heurística para conduzir o processo de pesquisa sobre as sequências de formas irregulares, que veio a revelar-se pouco adequada devido à reduzida relação entre duas sequências vizinhas e os respectivos padrões de corte.

Foram também desenvolvidas e estudadas abordagens a problemas de

Posicionamento de Formas Irregulares baseadas em algoritmos híbridos de pesquisa local, que operam directamente sobre os padrões de corte. Estas abordagens baseiam-se numa estrutura de vizinhança, LOCALCOMPACT, que utiliza modelos matemáticos para realizar operações de compactação de padrões de corte e de remoção de situações de não admissibilidade. Os algoritmos híbridos combinam a meta-heurística pesquisa por arrefecimento simulado com os modelos matemáticos embebidos na estrutura de vizinhança.

Foi ainda proposta uma abordagem em várias fases, N -Fases, que decompõe o problema de posicionamento em grupos de formas irregulares de tamanho semelhante e no posterior posicionamento de cada grupo em fases “quase independentes”. O processo inicia-se pelo grupo com as formas irregulares maiores e em cada uma das fases de posicionamento é necessário ter em consideração as formas irregulares posicionadas em fases anteriores, designadamente pela tentativa de preencher espaços vazios deixados entre as formas irregulares maiores.

Testes e experiências computacionais, com instâncias reais de problemas de Posicionamento de Formas Irregulares, demonstraram as potencialidades das abordagens apresentadas neste trabalho, em particular dos algoritmos híbridos e da abordagem em N -Fases propostos.

Abstract

This thesis deals with the Irregular Strip Packing problem, also known as the Nesting problem, with a special emphasis put on the resolution of real world instances. A classification for Cutting and Packing problems is presented and the Irregular Strip Packing problem is characterised. Several geometric tools needed to tackle Irregular Strip Packing problems are presented and discussed.

A mathematical model for the global Irregular Strip Packing problem is presented, along with several simplifications introduced to this model that allow the resolution of two packing subproblems: the layout compaction and the layout separation problems. Computational experiments have shown the global model limitations and the potentialities of the compaction and the separation models.

A new constructive heuristic for positioning irregular shapes is presented, based on ordered sequences of irregular shapes and the successive positioning of the next irregular shape ruled by a greedy bottom-left heuristic. Several ranking criteria were studied.

A new local search algorithm for the Irregular Strip Packing problem, the 2-EXCHANGE, is presented. This algorithm uses sequences of irregular shapes to represent layouts and performs a search over the sequences by exchanging positions in the sequence. The possibility of using a metaheuristic to drive the search was also investigated, which came to be not so adequate due to the low relationship between two neighbour sequences and the respective layouts.

Irregular Strip Packing approaches based on hybrid local search algorithms were also studied and developed. These approaches rely on the LOCALCOMPACT neighbourhood structure to perform the search directly over the layouts. The LOCALCOMPACT neighbourhood structure is based on the compaction and separation mathematical models to compact layouts

and to remove any unfeasibility from the layouts. The hybrid local search algorithms combine the simulated annealing metaheuristic with the mathematical models embedded in the neighbourhood structure.

A multi-stage approach to tackle Irregular Strip Packing problems is also proposed. This approach divides the available irregular shapes in groups, accordingly to their relative sizes. At each stage, a different group is packed, starting by the groups with the bigger pieces. For the second and later stages it is necessary to take into account the previously placed irregular shapes, trying to fill the gaps among the bigger pieces.

Computational tests and experiments with real instances have shown the potentialities of the approaches presented in this thesis, specially of the proposed hybrid algorithms and multi-stage approaches.

Agradecimentos

O primeiro agradecimento vai para o Prof. José Fernando Oliveira, meu orientador científico, a quem agradeço o apoio incondicional e a confiança total. Tenho ainda a agradecer-lhe a cuidadosa revisão efectuada ao texto desta tese.

Agradeço também a vários colegas e amigos o apoio prestado e, ainda, a disponibilidade para ajudarem neste período final de escrita da tese, que as minhas teimosias e, principalmente, pouca organização não souberam aproveitar. Um agradecimento especial para a Ana, a Helena, o João, o José Fernando, a Maria Antónia, o Pedro e a Teresa que o conseguiram. Tenho ainda a agradecer ao José Fernando e à Maria Antónia o terem assegurado as minhas aulas neste período final de escrita da tese.

O agradecimento final vai para os meus pais, a quem agradeço a compreensão e, principalmente, a possibilidade de dedicação total à escrita da tese durante este último mês.

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Âmbito da Tese	1
1.2	Objectivos da Investigação e Trabalho Realizado	2
1.3	Estrutura da Tese	4
2	O Problema de Posicionamento de Formas Irregulares	7
2.1	O Problema de Posicionamento	8
2.1.1	Tipologia para Problemas de Posicionamento	10
2.1.2	Revisão Bibliográfica sobre Problemas de Posicionamento	24
2.2	Caracterização do Problema de PFI	35
2.2.1	Variantes ao Problema de PFI	37
2.2.2	Envolvente Industrial	39
2.3	Revisão Bibliográfica sobre o Problema de PFI	47
2.4	Forma do Problema abordado nesta Tese	65
3	Abordagens à Resolução do Problema de PFI	67
3.1	Complexidade Computacional do Problema de PFI	68
3.2	Ferramentas Geométricas para o Problema de PFI	70
3.2.1	Representação Geométrica de Formas Irregulares	73
3.2.2	Simplificação de Formas Irregulares	75
3.2.3	Concavidades em Formas Irregulares	76
3.2.4	Invólucro de Posicionamento	78
3.2.5	Invólucro e Rectângulo de Posicionamento Interior	81
3.3	Modelos Matemáticos para o problema de PFI	82
3.3.1	Modelo Matemático Global	83
3.3.2	Modelo Matemático de Compactação	92
3.3.3	Modelo Matemático de Separação	99

3.4	Abordagens baseadas em Heurísticas Construtivas	102
3.4.1	Estrutura da Heurística Construtiva de Posicionamento	103
3.4.2	Critérios de Ordenação de Formas Irregulares e de Se- lecção da próxima Forma Irregular	105
3.4.3	Regras de Posicionamento	107
3.4.4	Heurística Construtiva de Posicionamento	112
4	Abordagens ao PFI baseadas em Pesquisa Local	115
4.1	Algoritmos de Pesquisa Local	116
4.1.1	Algoritmos de Pesquisa Local Pura	117
4.1.2	Meta-heurísticas	119
4.2	Abordagens baseadas na Pesquisa sobre Sequências	126
4.2.1	Codificação das Soluções segundo Sequências de For- mas Irregulares	127
4.2.2	Decodificação de Sequências	128
4.2.3	Estrutura de Vizinhança	129
4.2.4	Pesquisa sobre Sequências	130
4.3	Abordagens baseadas na Pesquisa sobre Padrões	132
4.3.1	Estrutura de Vizinhança para Pesquisas sobre Padrões	133
4.3.2	Abordagens Híbridas	135
4.4	Abordagem em N -Fases	138
4.4.1	Decomposição do Problema	139
4.4.2	Algoritmo de Posicionamento na Primeira Fase	141
4.4.3	Algoritmo de Posicionamento nas Últimas Fases . . .	141
5	Testes Computacionais e Discussão de Resultados	145
5.1	Instâncias de problemas de PFI	146
5.2	Experiências Computacionais com Modelos Matemáticos . . .	152
5.2.1	Experiências Computacionais com o Modelo Matemá- tico Global	153
5.2.2	Experiências Computacionais com o Modelo Matemá- tico de Compactação	155
5.3	Testes às Abordagens baseadas em Sequências	159
5.3.1	Testes Computacionais à Heurística Construtiva de Posicionamento	159
5.3.2	Testes Computacionais ao Algoritmo de Posicionamento 2-EXCHANGE	168

5.3.3	Experiências Computacionais com a Meta-heurística GRASP_SEQ	174
5.4	Testes à Estrutura de Vizinhaça baseada em Padrões	176
5.4.1	Testes Computacionais à Estrutura de Vizinhaça LO- CALCOMPACT	176
5.4.2	Experiências Computacionais adicionais à Estrutura de Vizinhaça LOCALCOMPACT	181
5.5	Testes Computacionais à Abordagem em N -Fases	184
5.6	Comentários Finais	194
6	Conclusão	197
6.1	Contribuições desta Tese	197
6.2	Desenvolvimentos Futuros	199
A	Melhores Padrões de Corte	203
	Referências	213

Lista de Figuras

2.1	Exemplo de um padrão de corte.	9
2.2	Categorias de Problemas de Posicionamento (adaptado de [Wäscher <i>et al.</i> , 2004]).	14
2.3	Problemas de Posicionamento de maximização de produtos produzidos (adaptado de [Wäscher <i>et al.</i> , 2004]).	20
2.4	Problemas de Posicionamento de minimização de recursos utilizados (adaptado de [Wäscher <i>et al.</i> , 2004]).	20
2.5	Esquema de codificação para problemas de Posicionamento (adaptado de [Wäscher <i>et al.</i> , 2004]).	21
2.6	Exemplo de padrões de corte regulares.	63
3.1	Forma irregular representada por polígono orientado.	73
3.2	Aproximação de um arco de circunferência por 4 segmentos de recta.	74
3.3	Simplificação de Formas Irregulares.	76
3.4	Invólucro de posicionamento do polígono j relativamente ao polígono i ($NFP_{i,j}$).	79
3.5	Simetria do invólucro de posicionamento do polígono i relativamente ao polígono j ($NFP_{j,i}$).	80
3.6	Rectângulo de posicionamento interior do polígono i relativamente à placa (IFR_i).	82
3.7	Modelo matemático global para o problema de PFI.	84
3.8	Condições de posicionamento de uma forma irregular no interior da placa.	86
3.9	Condições de não sobreposição entre duas formas irregulares.	87
3.10	Condições de não sobreposição na presença de um invólucro de posicionamento não convexo.	88

3.11	Condições de não sobreposição na presença de um invólucro de posicionamento não convexo e com concavidades não convexas.	90
3.12	Exemplo da operação de compactação de padrões de corte. . .	93
3.13	Modelo matemático de compactação de padrões de corte. . .	94
3.14	Condições de não sobreposição num modelo de compactação. . .	97
3.15	Exemplo da operação de separação de padrões de corte. . . .	99
3.16	Modelo matemático de separação de padrões de corte.	101
3.17	Critério de selecção da relação de posicionamento entre formas irregulares em situações de sobreposição.	102
3.18	Heurística construtiva de posicionamento.	104
3.19	Crítérios de ordenação estáticos.	106
3.20	Crítérios de ordenação dinâmicos.	107
3.21	Regra de posicionamento.	108
3.22	Regra de posicionamento em grelha.	108
3.23	Exemplo de aplicação da regra de posicionamento <i>bottom-left</i> . . .	111
4.1	Estrutura do algoritmo de pesquisa local pura.	118
4.2	Evolução da trajectória da pesquisa local pura.	118
4.3	Evolução da trajectória da pesquisa por arrefecimento simulado. . .	122
4.4	Estrutura do algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado. . .	123
4.5	Estrutura da meta-heurística GRASP (adaptado de [Resende, 1998]).	124
4.6	Evolução das trajectórias do GRASP.	125
4.7	Estrutura de vizinhança baseada em trocas de posições na sequência.	130
4.8	Estrutura de vizinhança baseada em movimentos de inserção. . .	130
4.9	Operações de perturbação de padrões de corte.	134
4.10	LOCALCOMPACT: operação de troca de posições entre duas formas irregulares.	135
4.11	LOCALCOMPACT: operação de mover uma forma irregular. . .	136
4.12	Estrutura da abordagem híbrida.	137
4.13	Exemplo de padrão de corte típico da indústria de confecções. . .	139
4.14	Esquema de funcionamento da abordagem em N -fases.	140
4.15	Divisão das formas irregulares pelas várias fases.	140
4.16	Estrutura do algoritmo de posicionamento utilizado nas últimas fases.	143

5.1	Instâncias de referência (continua).	149
5.2	Instâncias de referência (continuação).	150
5.3	Instâncias de teste adicionais.	152
5.4	Padrões de corte ótimos e aproximados para as primeiras 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12 formas irregulares, sem rotações, da instância FU.	154
5.5	Exemplo de compactação de padrões de corte densos (TEST- DATA1).	157
5.6	Exemplo de compactação de padrões de corte em grelha (TEST- DATA1).	158
5.7	Exemplos de padrões de corte obtidos pela heurística cons- trutiva de posicionamento.	167
5.8	Influência da solução inicial no algoritmo de posicionamento 2-EXCHANGE.	171
5.9	Análise das variantes do algoritmo de posicionamento 2-EX- CHANGE.	171
5.10	Gráficos de dispersão dos resultados das variantes do algo- ritmo de posicionamento 2-EXCHANGE.	173
5.11	Diagramas do tipo caixa para diferentes valores do parâmetro α da meta-heurística GRASP_SEQ.	175
5.12	Diagramas do tipo caixa para diferentes valores do parâmetro α da estrutura de vizinhança LOCALCOMPACT.	182
5.13	Evolução da proporção do resultado das operações realizadas sobre a estrutura de vizinhança LOCALCOMPACT.	185
5.14	Divisão das formas irregulares em grupos.	187
5.15	Gráficos de dispersão para os resultados da abordagem em N -Fases (continua).	191
5.16	Gráficos de dispersão para os resultados da abordagem em N -Fases (continuação e continua).	192
5.17	Gráficos de dispersão para os resultados da abordagem em N -Fases (continuação).	193
A.1	Instância FU (31.22, 91.30%, algoritmo híbrido SAHA).	203
A.2	Instância JAKOBS1 (12.00, 81.67%, algoritmo híbrido SAHA).	204
A.3	Instância JAKOBS2 (24.53, 78.67%, algoritmo híbrido SAHA).	204
A.4	Instância SHAPES0 (59.67, 66.87%, algoritmo híbrido SAHA).	205
A.5	Instância SHAPES1 (56.00, 71.25%, algoritmo híbrido SAHA).	205

A.6	Instância SHAPES2 (25.84, 83.59%, algoritmo híbrido SAHA).	206
A.7	Instância ARTIF (48.59, 72.15%, abordagem em N -Fases).	206
A.8	Instância DIGHE1 (100.00, 100.00%, algoritmo híbrido SAHA).	207
A.9	Instância DIGHE2 (100.00, 100.00%, algoritmo híbrido SAHA).	207
A.10	Instância ALBANO (9918.79, 87.77%, algoritmo híbrido SAHA).	208
A.11	Instância DAGLI (57.71, 87.89%, algoritmo híbrido SAHA).	208
A.12	Instância MAO (1772.19, 83.17%, algoritmo híbrido SAHA).	209
A.13	Instância MARQUES (77.80, 88.91%, algoritmo híbrido SAHA).	209
A.14	Instância SHIPS (259.05, 85.87%, abordagem em N -Fases).	210
A.15	Instância SHIRTS (61.00, 88.53%, abordagem em N -Fases).	210
A.16	Instância SWIM (5948.37, 73.90%, abordagem em N -Fases).	211
A.17	Instância TROUSERS (241.09, 90.34%, abordagem em N -Fases).	211

Lista de Tabelas

5.1	Características das instâncias de referência	148
5.2	Melhores resultados publicados para as instâncias de teste . .	151
5.3	Experiências computacionais com o modelo matemático glo- bal (instância FU).	153
5.4	Modelo de compactação aplicado a posicionamentos denso. .	156
5.5	Modelo de compactação aplicado a posicionamento em grelha.	157
5.6	Resultados da heurística construtiva de posicionamento com critérios de ordenação estáticos (continua).	161
5.7	Resultados da heurística construtiva de posicionamento com critérios de ordenação estáticos (continuação e continua). . .	162
5.8	Resultados da heurística construtiva de posicionamento com critérios de ordenação estáticos (continuação).	163
5.9	Resultados da heurística construtiva de posicionamento com critérios de ordenação aleatórios.	165
5.10	Resultados da heurística construtiva de posicionamento com critérios de selecção dinâmicos.	166
5.11	Resultados do algoritmo de posicionamento 2-EXCHANGE. . .	169
5.12	Comparação dos resultados do algoritmo de posicionamento 2-EXCHANGE com os melhores resultados conhecidos na lite- ratura.	170
5.13	Tempos de processamento do algoritmo 2-EXCHANGE. . . .	172
5.14	Resultados dos testes computacionais à estrutura de vizinhança LOCALCOMPACT.	178
5.15	Comparação dos resultados da estrutura de vizinhança LOCAL- COMPACT.	179
5.16	Melhores resultados obtidos nas experiências adicionais à es- trutura de vizinhança LOCALCOMPACT.	183

5.17 Resultados dos testes computacionais à abordagem em N^- Fases (continua).	189
5.18 Resultados dos testes computacionais à abordagem em N^- Fases (continuação).	190

Capítulo 1

Introdução

1.1 Âmbito da Tese

O problema de posicionamento de formas irregulares (PFI) consiste em posicionar um conjunto de objectos de pequenas dimensões e com formas irregulares no interior de um objecto grande, sem sobreposições e de forma a minimizar a área não ocupada. Os problemas de Posicionamento em geral aparecem habitualmente associados a processos produtivos onde é necessário proceder ao corte de matérias-primas, tendo-se como objectivo a minimização do desperdício de matéria-prima, ou ao empacotamento de objectos no interior de outros, sendo o objectivo a maximização do espaço ocupado. O que diferencia os problemas de PFI é a necessidade de lidar com objectos de diferentes formas.

Os problemas de PFI surgem naturalmente nos processos produtivos de vários tipos de indústrias, tais como: confecções, calçado, mobiliário em madeira e metalomecânica. Em todas estas indústrias existe a necessidade de cortar objectos com formas irregulares a partir de uma determinada matéria-prima. A existência de diversos tipos de indústrias com problemas semelhantes, e onde o problema de PFI tem um significativo impacto económico, torna atraente e apelativa esta área de investigação e justifica o desenvolvimento de aplicações para estes problemas. Estes vários tipos de indústrias, apesar de partilharem o mesmo problema base — o corte de formas irregulares, apresentam, no entanto, algumas características específicas que diferenciam os respectivos problemas. Torna-se assim natural o desenvolvimento de aplicações de posicionamento de formas irregulares apropriadas para cada tipo de indústria. Cada tipo de indústria será mais

ou menos atractiva para o desenvolvimento de aplicações específicas conforme a respectiva envolvente económica, nomeadamente o peso do custo das matérias-primas no preço final do produto.

No seguimento do trabalho de investigação descrito nesta tese será abordado o problema de PFI. Neste problema será dada especial atenção à variante que surge na indústria de confecções, com a consideração de características específicas a esta área industrial. No entanto, os algoritmos apresentados neste trabalho são suficientemente genéricos para poderem ser aplicados a outras áreas industriais.

1.2 Objectivos da Investigação e Trabalho Realizado

O presente trabalho de investigação, concretizado no desenvolvimento de novas técnicas e abordagens ao problema de posicionamento de formas irregulares que são apresentadas nesta tese, almejava a resolução de instâncias reais de problemas de posicionamento. A resolução de instâncias reais apresenta dificuldades ao nível combinatório, devido ao elevado número de formas irregulares, que podem atingir a centena, e ao nível geométrico, devido à complexidade das formas irregulares (concavidades e elevado número de vértices). Foi colocado maior ênfase na resolução de instâncias reais da indústria de confecções.

Relativamente ao trabalho realizado, inicialmente foi efectuado um estudo sobre a viabilidade de abordar a resolução de problemas de posicionamento de formas irregulares por métodos exactos baseados em modelos matemáticos. Foram também estudadas e propostas simplificações ao modelo matemático global para resolver subproblemas de posicionamento, designadamente o problema da compactação de padrões de corte já existentes e o problema da remoção de situações não admissíveis em padrões de corte (sobreposições entre formas irregulares), que possam ser incorporados em abordagens de resolução do problema global.

Foi também proposta uma nova heurística construtiva de posicionamento de formas irregulares e uma implementação eficiente para ela. Esta heurística baseia-se na ordenação prévia das formas irregulares e no posterior posicionamento de sucessivas formas irregulares por uma regra gulosa do tipo “bottom-left”. Estudou-se também a influência do critério de ordenação das

formas irregulares e analisaram-se as características dos padrões de corte obtidos pela heurística construtiva com cada um dos critérios de ordenação. Foram também propostos novos critérios, que se baseiam em critérios dinâmicos de selecção da próxima forma irregular a posicionar.

O núcleo principal deste trabalho de investigação consistiu no entanto no desenvolvimento de abordagens baseadas em métodos de pesquisa local e segundo duas linhas de investigação: uma baseada em abordagens de pesquisa local sobre representações de padrões de corte, e em particular na representação de padrões de corte por sequências de formas irregulares, e outra baseada em métodos de pesquisa local que operam directamente sobre os padrões de corte. Da primeira linha de investigação resultou o desenvolvimento de um algoritmo de posicionamento original. Um maior esforço foi colocado na segunda linha de investigação e, em particular, no desenvolvimento de estruturas de vizinhança especialmente adequadas para abordagens a problemas de posicionamento de formas irregulares, baseadas em algoritmos de pesquisa local. Desta linha de investigação resultou a proposta de uma estrutura de vizinhança original baseada em operações de troca e de inserção, que actuam directamente sobre os padrões de corte, e na implementação de um algoritmo híbrido baseado na meta-heurística pesquisa por arrefecimento simulado.

Na sequência do trabalho sobre abordagens de pesquisa local que operam directamente sobre padrões de corte, foi desenvolvida uma nova estratégia para a resolução do problema de posicionamento de formas irregulares em várias fases. Esta abordagem baseia-se numa metodologia original de decomposição do problema em subproblemas e na posterior resolução destes subproblemas em sucessivas fases de forma “quase independente”. A criação dos grupos de formas irregulares é feita em função dos respectivos tamanhos, agrupando as formas irregulares de tamanho semelhante. Em cada uma das fases de resolução é utilizada uma das abordagens baseadas em pesquisa local para posicionar um grupo de formas irregulares, iniciando-se este processo pelo grupo com as formas irregulares de maiores dimensões. Em cada fase é necessário ter em conta o posicionamento das formas irregulares já posicionadas em fases anteriores. A abordagem proposta veio a revelar-se capaz de resolver problemas reais de posicionamento com formas irregulares, tirando partido das características específicas destas instâncias, de forma a reduzir o esforço computacional necessário sem comprometer a

qualidade dos padrões de corte obtidos.

1.3 Estrutura da Tese

Esta tese divide-se em 6 capítulos, dos quais o primeiro, a introdução, é dedicado à apresentação das principais motivações e dos objectivos para a realização deste trabalho.

O segundo capítulo aborda o problema de posicionamento de formas irregulares, o objecto de estudo desta tese, enquadrando-o nos problemas de posicionamento e caracterizando-o em termos de variantes e de envolvente industrial. É também apresentada uma revisão bibliográfica sobre problemas de posicionamento de formas irregulares. Neste capítulo é também feita referência ao problema de posicionamento genérico, com base numa tipologia recentemente proposta para classificação destes problemas.

O capítulo 3 é dedicado à apresentação das principais abordagens ao problema de posicionamento de formas irregulares. Inicialmente, é discutida a complexidade computacional destes problemas e apresentado um conjunto de ferramentas geométricas fundamentais para o desenvolvimento de abordagens a este tipo de problemas. De seguida são apresentados modelos matemáticos para o problema de posicionamento de formas irregulares, apresentando-se um estudo sobre as limitações de um modelo global e propõem-se modelos matemáticos para os subproblemas de compactação de padrões de corte e de remoção de situações de não admissibilidade em padrões de corte. Por fim, é proposta uma heurística construtiva de posicionamento baseada em critérios de ordenação de formas irregulares e na aplicação de regras de posicionamento.

No capítulo 4, introduzem-se as abordagens ao problema de posicionamento de formas irregulares baseadas em algoritmos de pesquisa local, que são propostas neste trabalho. De início introduzem-se os algoritmos de pesquisa local em termos genéricos. As duas secções seguintes abordam as duas principais linhas de investigação no desenvolvimento de abordagens a problemas de posicionamento de formas irregulares: as abordagens baseadas em pesquisas sobre sequências de formas irregulares e as abordagens baseadas em pesquisas directas sobre os padrões de corte. Na última secção é apresentada uma abordagem em várias fases, que decompõe o problema de posicionamento de formas irregulares original em sucessivos problemas mais

simples.

Os conjuntos de testes e de experiências computacionais realizados durante este trabalho são apresentados no capítulo 5. Esta apresentação inclui uma análise e discussão dos resultados obtidos nos vários testes e experiências computacionais realizados, para cada uma das abordagens estudadas. A primeira secção deste capítulo é dedicada à apresentação das instâncias de problemas de formas irregulares utilizadas. Nas secções seguintes, cada um dos tipos de abordagens estudados é sucessivamente apresentado em secções diferentes. Na última secção apresentam-se os comentários finais aos testes e experiências computacionais realizados.

No capítulo 6 resumem-se os principais assuntos abordados nesta tese, apresentam-se as principais conclusões desta tese e indicam-se desenvolvimentos futuros deste trabalho.

Adicionalmente, esta tese tem ainda um apêndice onde são apresentados, para cada uma das instâncias utilizadas, os melhores padrões de corte obtidos neste trabalho.

Capítulo 2

O Problema de Posicionamento de Formas Irregulares

O problema de Posicionamento de Formas Irregulares (PFI) consiste em posicionar um conjunto de objectos de pequenas dimensões e com formas irregulares no interior de um objecto grande, sem sobreposições e de forma a minimizar o desperdício de uma determinada matéria-prima. A necessidade de lidar com objectos de diferentes formas é o que caracteriza este tipo de problemas, tornando-os claramente identificáveis dentro da classe dos problemas de Posicionamento. Tal como os restantes problemas de Posicionamento, os problemas de PFI aparecem habitualmente associados a processos produtivos onde é necessário proceder ao corte de matérias-primas ou ao empacotamento de objectos no interior de outros.

A definição do problema de PFI apresentada realça as duas principais características inerentes a estes problemas: uma componente de natureza combinatória e um problema geométrico. Por um lado temos de combinar os posicionamentos dos objectos pequenos de forma a minimizar o desperdício e por outro lado temos de garantir a admissibilidade das soluções obtidas do ponto de vista geométrico. Em relação aos demais problemas de Posicionamento, o problema geométrico intrínseco aos problemas de PFI é de muito maior dificuldade.

A primeira secção deste capítulo é dedicada à apresentação e descrição dos problemas de Posicionamento. Esta apresentação terá como base a ti-

pologia para problemas de posicionamento de Wäscher *et al.* [2004] e será seguida de uma breve revisão bibliográfica com as publicações mais importantes da área dos problemas de Posicionamento. Na secção seguinte, é feita uma caracterização detalhada dos problemas de PFI, apresentando-se as suas principais variantes, e descreve-se quer a envolvente industrial quer o impacto económico que caracterizam estes problemas. Na terceira secção, apresenta-se a revisão bibliográfica e o estado da arte sobre os problemas de PFI. Por fim, na última secção, é apresentada a variante do problema de PFI abordado nesta tese.

2.1 O Problema de Posicionamento

Os problemas de Posicionamento são problemas de Optimização Combinatória em que a principal característica é a existência de uma importante componente geométrica. Estes problemas são também habitualmente conhecidos pela designação de problemas de Cortes e Empacotamentos (*Cutting and Packing Problems*, na versão inglesa). Tratam-se de problemas combinatórios que, do ponto de vista da sua resolução, são problemas $\mathcal{NP}$ -difíceis [Garey e Johnson, 1979]. Actualmente, mais de trezentos investigadores em todo o mundo, agrupados no grupo europeu de interesse em problemas de Posicionamento *EURO Special Interest Group on Cutting and Packing* [ESI-CUP], dedicam-se ao estudo destes problemas e ao desenvolvimento de novas aplicações capazes de resolver novas variantes destes problemas ou de lidar com instâncias de maior dimensão.

Nos problemas de Posicionamento pretende-se efectuar o posicionamento de um conjunto de objectos de pequenas dimensões, denominados pedidos, no interior de um conjunto de objectos maiores, designados por placas de stock, de acordo com um determinado objectivo. Este objectivo pode ser a minimização de uma determinada função de custo, por exemplo o desperdício¹, ou a maximização de uma qualquer função de valor. A resposta a problemas deste tipo, implica a determinação de:

- quais os objectos pequenos a posicionar;
- quais os objectos grandes a utilizar;
- que objectos pequenos afectar a cada objecto grande;

¹Desperdício é todo o espaço dos objectos grandes não ocupado por objectos pequenos.

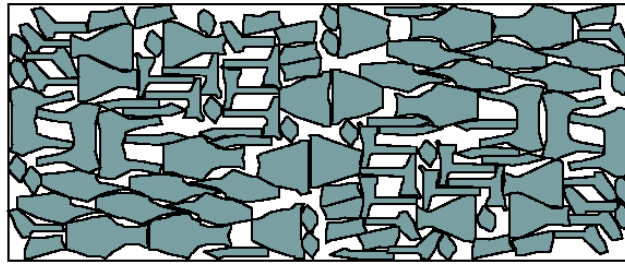


Figura 2.1: Exemplo de um padrão de corte.

- qual a disposição dos objectos pequenos dentro de cada objecto grande.

A componente combinatória dos problemas de Posicionamento está presente na selecção dos objectos pequenos e dos objectos grandes a utilizar e na afectação dos itens pequenos aos grandes. Por outro lado, a componente geométrica reflecte-se na necessidade de determinação da disposição dos objectos pequenos, sem sobreposições, no interior de cada objecto grande.

A disposição dos objectos pequenos no interior de um objecto grande designa-se por padrão de corte. Na figura 2.1 está representado um exemplo de um padrão de corte. A solução de um problema de Posicionamento é portanto constituída por um conjunto de padrões, que indicam, para cada objecto grande utilizado, quais os objectos pequenos posicionados no seu interior e a respectiva disposição.

Os problemas de Posicionamento surgem nas mais variadas áreas, como a Gestão da Produção, a Logística, a Economia ou as Ciências da Computação. Exemplos destas situações são: o balanceamento de linhas de produção, a definição de *layouts* fabris, o corte de peças, o carregamento de contentores ou de camiões, a criação e o empacotamento de paletes, a gestão de armazéns, o escalonamento de tarefas em multi-processadores, a gestão de memória, etc. Em todos estes exemplos existe o mesmo problema base: como posicionar um conjunto de pedidos (uma máquina, uma caixa, um processo) no interior de um conjunto de placas de stock (a planta de uma fábrica, um contentor, um processador).

Um último comentário sobre a origem da designação de problemas de Cortes e Empacotamentos como alternativa a problemas de Posicionamento. Esta designação alternativa resulta das seguintes interpretações para o posicionamento de um pedido no interior de um objecto grande:

- como cortar um pedido de um objecto grande — problema de corte;
- ou como empacotar um pedido no interior de um objecto grande — problema de empacotamento.

Estas designações surgem pela associação aos processos físicos de corte ou de empacotamento que surgem em aplicações concretas, tais como: o corte de uma placa em objectos mais pequenos para satisfazer um conjunto de pedidos e o empacotamento de um contentor por um conjunto de caixas. No entanto, estas duas designações são perfeitamente equivalentes entre si, uma vez que o empacotamento de um pedido pode ser sempre encarado como um corte do espaço disponível, e vice-versa.

2.1.1 Tipologia para Problemas de Posicionamento

Uma tipologia é uma organização sistemática em categorias homogéneas, de acordo com um conjunto de critérios característicos. Uma tipologia assemelha-se a uma classificação, sem no entanto ter a preocupação desta em ser completa e precisa, privilegiando os aspectos de índole prática em detrimento dos eminentemente teóricos. O estabelecimento de uma tipologia proporciona uma visão concisa do que é relevante e importante numa determinada área, permitindo a normalização de conceitos, definições e notações. Uma tipologia de problemas de Posicionamento, tal como em qualquer outra área da Investigação Operacional, estrutura e facilita o estudo, a comparação e o desenvolvimento de modelos, algoritmos e metodologias aplicados ou a aplicar a determinado tipo de problemas.

Nos finais dos anos oitenta surgiu por Dyckhoff *et al.* [1988] a primeira tentativa de estabelecimento de uma classificação para problemas de Posicionamento, seguida, pouco tempo depois, por uma tipologia que constituía um refinamento da classificação original [Dyckhoff, 1990]. Apesar dos seus méritos, estas iniciativas nunca tiveram grande aceitação por parte da comunidade científica que se dedica ao estudo dos problemas de Posicionamento, devido, por um lado, às insuficiências destas primeiras tentativas de classificação na distinção de todas as situações e na incorporação de novas variantes e desenvolvimentos, e, por outro lado, ao facto da tipologia apresentada em Dyckhoff [1990] propor uma codificação para os problemas de Posicionamento baseada na língua alemã, tornando a sua utilização bastante difícil por parte da comunidade internacional. De seguida, apresentam-se três

exemplos onde a tipologia apresentada por Dyckhoff apresenta insuficiências:

- situações conflituosas — problemas clássicos como o problema de carregamento de veículos ou de contentores foi codificado pelo próprio Dyckhoff de duas maneiras alternativas, $1/V/I/F$ e $1/V/I/M$, o que contribui para a existência de situações pouco claras;
- situações inconsistentes — Dyckhoff codifica o problema de *Strip Packing* como $2/V/D/M$, o que é uma codificação artificial e forçada em vez da mais natural e lógica $2/V/O/M$, com a agravante de usar a designação de *Two-dimensional Bin Packing* para este problema;
- existência de categorias de problemas não homogêneas — situações que requerem métodos e abordagens de resolução diferentes são classificadas por Dyckhoff na mesma categoria, como é o seguinte caso: quando um grande número de objectos pequenos e de poucos tipos diferentes tem de ser produzido a partir de um conjunto de objectos grandes, duas situações devem ser distinguidas, uma quando os objectos grandes podem ser agrupados em vários tipos de dimensões iguais e outra quando os objectos grandes são todos diferentes. Ambas as situações seriam codificadas como $1/V/D/R$ por Dyckhoff, apesar de recorrerem a metodologias de resolução diferentes, uma abordagem orientada à geração de padrões de corte na primeira situação e uma abordagem orientada ao objecto grande na segunda situação.

Apesar das suas limitações, a tipologia de Dyckhoff teve o mérito de ter contribuído para a existência de um grande consenso sobre a estrutura genérica dos problemas de Posicionamento e sobre quais as principais características que distinguem os vários tipos de problemas de Posicionamento. Para suprir essas limitações, durante a realização do 1º encontro anual do ESICUP, que teve lugar na cidade alemã de Lutherstadt Wittenberg entre 18 e 20 de Março de 2004, foi divulgada uma nova tipologia para os problemas de Posicionamento [Wäscher *et al.*, 2004]. Os autores desta nova tipologia abriram o seu trabalho à discussão dentro do grupo europeu de interesse especial em problemas de Posicionamento e durante a realização do 2º encontro anual do ESICUP, que teve lugar na cidade inglesa de Southampton entre 14 e 16 de Abril de 2005, divulgaram uma nova versão da tipologia [Wäscher *et al.*, 2005]. Este trabalho foi elaborado com base na primeira

versão da tipologia de Wäscher *et al.* [2004] e é de referir que a segunda versão da tipologia incorpora já algumas das sugestões referidas nesta tese.

A tipologia de Wäscher *et al.* [2004] tem como base quatro critérios que permitem definir os vários tipos de problemas básicos. O primeiro dos critérios considerados é o número de dimensões relevantes para a resolução do problema, sendo distinguidas 4 situações:

- unidimensionais (1D) — situações onde apenas uma dimensão é relevante, por exemplo o corte de tubos de secção constante, a afectação de intervalos de tempo a tarefas, etc.;
- bidimensionais (2D) — situações onde duas dimensões são relevantes, por exemplo o corte de placas de espessura constante, a construção de camadas de caixas de altura constante, etc.;
- tridimensionais (3D) — situações onde as três dimensões do espaço são relevantes, por exemplo o empacotamento de contentores, o corte de volumes tri-dimensionais, etc.;
- n-dimensionais — situações onde mais do que três dimensões são relevantes, por exemplo a gestão de armazéns (considerando o tempo como quarta dimensão), etc.

O segundo critério é o tipo de objectivo utilizado na afectação: maximização dos produtos produzidos ou minimização dos recursos utilizados. Na primeira situação pretende-se maximizar a utilização de um determinado conjunto de objectos grandes, ou seja, queremos maximizar o valor dos objectos pequenos que é possível produzir a partir de determinado conjunto de objectos grandes. Nesta situação, os objectos grandes existem em quantidades limitadas, pelo que não é possível posicionar todos os objectos pequenos. Na segunda situação pretende-se minimizar a quantidade de objectos grandes utilizados na produção de um determinado conjunto de objectos pequenos. Nesta situação, e ao contrário da anterior, a quantidade de objectos grandes é suficiente para que todos os objectos pequenos possam ser posicionados no interior dos objectos grandes.

O sortido de objectos pequenos é o terceiro critério da tipologia e são consideradas as seguintes situações:

- objectos pequenos idênticos — os objectos pequenos têm todos a mesma forma e tamanho;

- sortido de objectos pequenos fracamente heterogéneo — o conjunto de objectos pequenos pode ser agrupado em relativamente poucas classes de objectos idênticos, o número total de objectos em cada classe é relativamente elevado;
- sortido de objectos pequenos fortemente heterogéneo — muito poucos objectos pequenos têm forma e tamanho idêntico, sendo todos tratados como elementos diferentes.

Como quarto critério é considerado o sortido dos objectos grandes, sendo de distinguir duas situações: uma em que existe um único objecto grande e outra onde são considerados vários objectos grandes. A primeira das situações subdivide-se em duas: todas as dimensões do objecto grande são fixas e outra onde uma ou mais dimensões do objecto grande são variáveis. Na segunda situação, vários objectos grandes, é considerada uma subdivisão análoga ao sortido de objectos pequenos: objectos grandes idênticos, sortido de objectos grandes fracamente heterogéneo e sortido de objectos grandes fortemente heterogéneo.

As categorias básicas de problemas de Posicionamento propostas pelos autores da nova tipologia baseiam-se em dois dos quatro critérios atrás considerados, o tipo de objectivo utilizado na afectação e as características do sortido de objectos pequenos, e na existência ou não de objectos grandes com dimensões variáveis. As restantes características do sortido de objectos grandes são utilizadas para subdividir as categorias básicas em subcategorias de problemas de Posicionamento mais homogéneas. Na figura 2.2 estão representadas as seis categorias básicas de problemas de Posicionamento, assim como se podem observar as influências de cada critério na definição da tipologia e quais os graus de relacionamento existente entre as várias categorias.

Para cada categoria de problemas são também definidas na nova tipologia subcategorias com base nas características do sortido de objectos grandes, designadamente se todos os objectos grandes são idênticos ou não e na quantidade de objectos grandes disponível. De seguida, descrevem-se as seis categorias básicas e as respectivas subcategorias, apresentando-se também alguns exemplos concretos de problemas de Posicionamento para cada subcategoria. São também apresentados dois quadros resumo com as categorias e subcategorias de problemas de Posicionamento. Por fim é ainda discutida

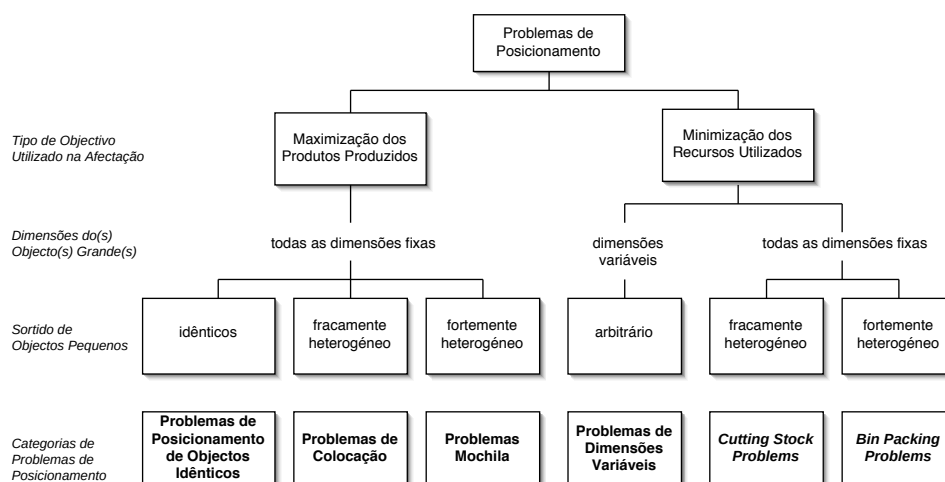


Figura 2.2: Categorias de Problemas de Posicionamento (adaptado de [Wäscher *et al.*, 2004]).

a opção dos autores da nova tipologia em não considerarem a geometria dos objectos como um dos critérios principais para caracterizar os problemas de posicionamento.

Problemas de Posicionamento de Objectos Idênticos

Nesta categoria, os objectos pequenos são todos idênticos e existe uma quantidade limitada de objectos grandes, pretendendo-se maximizar o número de objectos pequenos posicionados. É de salientar que nesta categoria os problemas reduzem-se à determinação do melhor padrão de corte para cada um dos objectos grandes, i.e. o padrão que maximiza o número de objectos pequenos cortados, não existindo os habituais problemas de selecção de objectos pequenos ou objectos grandes nem o problema de afectação de objectos pequenos a objectos grandes. Não é necessário subdividir esta categoria de problemas em função do sortido de objectos grandes, dado que um problema com vários objectos grandes é decomposto em vários problemas independentes, um problema para cada um dos objectos grandes. Exemplos de problemas desta categoria são: o problema de *Carregamento de Paletes do Fabricante* — pretende-se fazer o carregamento de uma palete rectangular por sucessivas camadas de caixas de um único tipo, maximizando-se o número de caixas por camada; o problema de *Empacotamento de Cilindros*

— semelhante ao anterior, sendo as caixas substituídas por cilindros, pretendendo-se maximizar o número de círculos iguais que se podem posicionar, sem sobreposições, dentro de um rectângulo; o problema de *Empacotamento de Contentores só com um tipo de caixa* — pretende-se efectuar o carregamento de um contentor com o maior número de caixas, não restringindo o empacotamento à criação de sucessivas camadas.

Problemas de Colocação

A categoria dos Problemas de Colocação caracteriza-se pela existência de um sortido de objectos pequenos fracamente heterogéneo e por um conjunto limitado de objectos grandes, pretendendo-se maximizar o valor dos objectos pequenos colocados ou minimizar o desperdício, o espaço dos objectos grandes não ocupado por objectos pequenos. Nesta categoria de problemas, dado o conjunto de objectos grandes ser limitado, ao contrário da categoria anterior existe um problema de selecção: que objectos pequenos posicionar. Considerando o critério do sortido dos objectos grandes, esta categoria subdivide-se nas seguintes:

- **Problema de Colocação com um único objecto grande**, esta subcategoria caracteriza-se pela existência de apenas um único objecto grande. Exemplos de problemas desta subcategoria são: o problema de *Posicionamento de Rectângulos ou de Círculos* — uma placa rectangular tem de ser cortada em rectângulos de diferentes tipos ou em círculos com raios diferentes; o problema de *Carregamento de um Contentor ou de um Camião* — um conjunto de caixas de relativamente poucos tipos diferentes tem de ser empacotado num único contentor ou camião; o problema de *Carregamento de Paletes do Distribuidor* — pretende-se fazer o carregamento de uma paleta com um sortido pouco heterogéneo de caixas.
- **Problema de Colocação com vários objectos grandes idênticos**, nesta subcategoria existem vários objectos grandes todos com as mesmas dimensões. Exemplos de problemas desta subcategoria podem ser directamente obtidos a partir dos exemplos da subcategoria anterior, considerando vários objectos grandes idênticos, por exemplo várias paletes de dimensões iguais, frota de camiões iguais, parque de contentores iguais e placas com a mesma dimensão.

- **Problema de Colocação com vários objectos grandes diferentes**, esta subcategoria caracteriza-se também pela existência de vários objectos grandes, mas ao contrário da anterior, nem todos possuem as mesmas dimensões. Mais uma vez, os exemplos de problemas de Posicionamento desta subcategoria podem ser obtidos pela extrapolação das duas subcategorias anteriores.

Problemas Mochila

Esta categoria de problemas é caracterizada por um sortido de objectos pequenos fortemente heterogéneo e por um conjunto limitado de objectos grandes. Pretende-se maximizar o valor dos objectos pequenos posicionados no interior de objectos grandes. Tal como na categoria anterior, existe o problema de selecção de objectos pequenos, já que a quantidade de objectos grandes é limitada. O critério do sortido dos objectos grandes permite subdividir esta categoria nas seguintes:

- **Problema da Mochila Única**, nesta subcategoria existe apenas uma mochila disponível. Exemplos de problemas desta subcategoria são: o problema da *Mochila Clássico* — um conjunto de objectos com determinado peso e valor tem de ser empacotado dentro de uma mochila com limite de peso; o problema da *Mochila com restrições adicionais* — incorporação de restrições adicionais ao problema da Mochila Clássico; o problema *Mochila Bidimensional e Tridimensional* — extensão do problema da Mochila Clássico para considerar duas e três dimensões geométricas.
- **Problema de Mochilas Idênticas**, esta categoria caracteriza-se pela existência de várias mochilas iguais. Exemplos de problemas de Posicionamento para esta subcategoria obtêm-se pela extensão dos problemas da subcategoria anterior a situações onde existem disponíveis várias mochilas idênticas.
- **Problema de Mochilas Heterogéneas**, extensão da subcategoria anterior a situações onde existem várias mochilas com características diferentes. Mais uma vez, exemplos de problemas para esta subcategoria obtêm-se pela extensão dos problemas das duas subcategorias anteriores.

Problemas de Dimensões Variáveis

A principal característica desta categoria de problemas é a existência de uma ou mais dimensões variáveis, i.e. não fixas, nos objectos grandes. Habitualmente só é tratado o caso em que se considera apenas um único objecto grande. Problemas de dimensões variáveis só são possíveis a duas ou mais dimensões. O objectivo nestes problemas é a colocação do conjunto de objectos pequenos no interior do objecto grande, minimizando a(s) dimensão(ões) variável(eis), ou seja minimizando o comprimento, a área ou o volume do objecto grande utilizado. Nestes problemas o tipo de objectivo utilizado na afectação é o de minimização dos recursos utilizados, já que se considera que a(s) dimensão(ões) variável(eis) do objecto grande pode(m) crescer o suficiente para conter todos os objectos pequenos. Exemplos de problemas de Posicionamento pertencentes a esta categoria são: o problema de *Strip Packing* — onde um conjunto de rectângulos tem de ser colocado no interior de um rectângulo de largura fixa e comprimento variável (i.e. uma *strip*); o problema de *Irregular Strip Packing* — semelhante ao anterior, mas com objectos pequenos de forma irregular em vez de forma rectangular, o objecto grande continua a ser um rectângulo de comprimento variável; o problema da *Envolvente Rectangular Mínima* — pretende-se encontrar o rectângulo de área mínima que envolve completamente um conjunto de objectos pequenos.

Problemas de *Cutting Stock*

Os problemas desta categoria caracterizam-se por apresentarem um sortido de objectos pequenos fracamente heterogéneo e pela existência de um conjunto de objectos grandes no qual é possível posicionar todos os objectos pequenos. Pretende-se minimizar o número de objectos grandes utilizados ou, alternativamente, o valor (comprimento, área, volume ou qualquer outra função) total dos objectos grandes utilizados. Nesta categoria existe o problema de selecção dos objectos grandes a utilizar. As dimensões dos objectos grandes são todas fixas e, considerando-se a heterogeneidade destes objectos, esta categoria divide-se nas três seguintes subcategorias:

- **Problema de *Cutting Stock* de tamanho único**, nesta subcategoria todos os objectos grandes têm o mesmo tamanho. Exemplos de problemas desta subcategoria são: o problema clássico de *Cutting Stock* unidimensional ou bidimensional — em que um conjunto de tubos ou

rectângulos pequenos, fracamente heterogéneo, tem de ser cortado a partir de um *stock* de tubos ou placas com as mesmas dimensões; o problema de Carregamento de várias Paletes ou Contentores — onde um conjunto de caixas fracamente heterogéneo tem de ser empacotado no menor número de paletes ou contentores.

- **Problema de *Cutting Stock* com vários tamanhos**, subcategoria que se caracteriza pela existência de um sortido fracamente heterogéneo de objectos grandes. Exemplos de problemas desta subcategoria são extensões naturais aos problemas da subcategoria anterior pela consideração de objectos grandes de vários tamanhos.
- **Problema de *Cutting Stock* residual**, esta subcategoria caracteriza-se por um sortido de objectos grandes fortemente heterogéneo. O nome de problema de *Cutting Stock* residual vem de casos práticos de problemas desta subcategoria, onde partes não utilizadas de objectos grandes em operações de corte anteriores dão origem a novos objectos grandes que podem ser utilizados em futuras operações de corte. Exemplos de problemas para esta subcategoria derivam das duas subcategorias anteriores e onde sucessivas operações de corte são efectuadas, com reaproveitamento das partes de objectos grandes não utilizadas.

Problemas de *Bin Packing*

Esta categoria de problemas tem como principais características a forte heterogeneidade do sortido de objectos pequenos e a existência de objectos grandes em quantidades suficientes para que todos os objectos pequenos possam ser posicionados no seu interior. Tal como nos problemas da categoria anterior, nesta categoria pretende-se minimizar os recursos utilizados: o número de objectos grandes utilizados ou uma qualquer função de valor desses objectos. Nesta categoria também existe o problema de selecção dos objectos grandes a utilizar. Por seu lado, os objectos grandes têm todas as dimensões fixas e, considerando a heterogeneidade deste sortido, esta categoria subdivide-se nas seguintes subcategorias:

- **Problema de *Bin Packing* de tamanho único**, subcategoria que se caracteriza pela existência de um sortido de objectos grandes apenas

com um tamanho em quantidade ilimitada. Exemplos de problemas nesta subcategoria são: o problema de *Bin Packing* clássico — onde um conjunto distinto de objectos pequenos tem de ser posicionado no menor número de objectos grandes; o problema de *Bin Packing* bidimensional e tridimensional — extensão do problema anterior a situações que envolvem duas e três dimensões geométricas.

- **Problema de *Bin Packing* com vários tamanhos**, nesta subcategoria o sortido de objectos grandes é fracamente heterogéneo e cada tipo de objecto grande existe em quantidade ilimitada e apresenta uma determinada capacidade e um valor específico. Exemplos de problemas nesta subcategoria são extensões da subcategoria anterior, considerando a existência de mais do que um tamanho para os objectos grandes.
- **Problema de *Bin Packing* residual**, subcategoria caracterizada por um sortido fortemente heterogéneo de objectos grandes. Como exemplo de um problema desta subcategoria, temos o problema de empacotamento de contentores onde existe uma grande variedade de contentores disponíveis.

Resumo das subcategorias de problemas de Posicionamento

A figura 2.3 apresenta um resumo das várias categorias e subcategorias de problemas de Posicionamento em que se pretende maximizar o total de produtos produzidos a partir de um conjunto de recursos limitado. Por sua vez, a figura 2.4 apresenta igual resumo para os problemas de Posicionamento em que se pretende minimizar os recursos utilizados na produção de um determinado conjunto de produtos.

Critérios adicionais para classificação de problemas de Posicionamento

A tipologia de problemas de Posicionamento proposta em Wäscher *et al.* [2004] baseia-se nos quatro critérios anteriormente referidos e que permitem classificar os problemas de Posicionamento em subcategorias de problemas relativamente homogéneas. Esta classificação dos problemas de Posicionamento nas subcategorias propostas facilita o estudo destes problemas e a comunicação entre os vários investigadores que se dedicam ao seu estudo.

Problemas de Maximização de Produtos Produzidos		Problemas de Posicionamento de Objectos Idênticos	Problemas de Colocação	Problemas Mochila
Sortido de Objectos Pequenos Sortido de Objectos Grandes		Idênticos	fracamente heterogéneo	fortemente heterogéneo
Todas as dimensões fixas	Um objecto grande	<i>Problema de Posicionamento de Objectos Idênticos</i>	<i>Problema de Colocação com um único objecto grande</i>	<i>Problema da Mochila única</i>
	Idênticos	X	<i>Problema de Colocação com vários objectos grandes idênticos</i>	<i>Problema de Mochilas idênticas</i>
	Heterogéneos		<i>Problema de Colocação com vários objectos grandes diferentes</i>	<i>Problema de Mochilas diferentes</i>

Figura 2.3: Problemas de Posicionamento de maximização de produtos produzidos (adaptado de [Wäscher *et al.*, 2004]).

Problemas de Minimização de Recursos Utilizados		Cutting Stock Problems	Bin Packing Problems
Sortido de Objectos Pequenos Sortido de Objectos Grandes		fracamente heterogéneo	fortemente heterogéneo
Todas as dimensões fixas	Um objecto grande	<i>Cutting Stock Problem com objectos grandes idênticos</i>	<i>Bin Packing Problem com objectos grandes idênticos</i>
	Idênticos	<i>Cutting Stock Problem com múltiplos objectos grandes</i>	<i>Bin Packing Problem com múltiplos objectos grandes</i>
	Heterogéneos	<i>Cutting Stock Problem Residual</i>	<i>Bin Packing Problem Residual</i>
Uma ou mais dimensões variáveis	Um objecto grande	Problema de Dimensões Variáveis	

Figura 2.4: Problemas de Posicionamento de minimização de recursos utilizados (adaptado de [Wäscher *et al.*, 2004]).

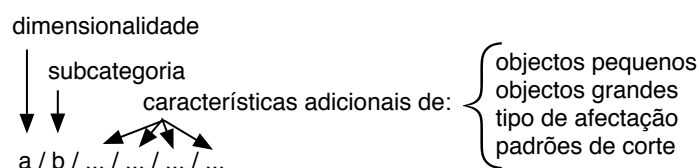


Figura 2.5: Esquema de codificação para problemas de Posicionamento (adaptado de [Wäscher *et al.*, 2004]).

No entanto, a referida tipologia revela algumas limitações, uma vez que o mesmo método de resolução pode não ser o mais adequado para resolver problemas pertencentes a uma mesma subcategoria. Os próprios autores da tipologia admitem limitações na tipologia proposta e sugerem um esquema de codificação (figura 2.5) de problemas de Posicionamento onde, para além dos critérios básicos, são também consideradas outras características, como:

- outras propriedades dos objectos grandes e pequenos, como a forma regular ou irregular dos objectos e restrições nas orientações admissíveis devido à existência de desenhos ou a razões tecnológicas, como a direcção da trama e da teia nos tecidos ou o veio na madeira;
- outros tipos de afectação, como a necessidade de considerar a ordem da carga e da descarga de um camião, em função da ordem em que os clientes são visitados;
- restrições tecnológicas a impor aos padrões de corte, como a necessidade de só se considerarem padrões com cortes do tipo guilhotina².

De entre estas características, e no âmbito da presente tese, a forma, regular ou irregular, dos objectos grandes e dos objectos pequenos merece uma discussão mais aprofundada. No entanto, antes da apresentação desta discussão, impõe-se um pequeno esclarecimento prévio sobre o que se considera ser uma forma regular ou irregular, uma vez que este conceito só será formalmente apresentado na secção 2.2. Considera-se que um determinado problema de Posicionamento é um problema de PFI quando se verifica

²Um corte do tipo guilhotina é um corte em que uma placa, ou subplaca, é obrigatoriamente cortada de uma borda à outra, como por exemplo quando o corte é feito por uma guilhotina ou uma serra circular.

uma das seguintes duas situações: quando existe pelo menos um objecto cuja forma é um polígono não regular³, habitualmente não convexo, ou então quando existem objectos cujas formas não são todas representadas pelo mesmo tipo de polígono regular.

A resolução de problemas de Posicionamento onde existem objectos, pequenos ou grandes, com formas irregulares apresenta um conjunto de dificuldades e questões adicionais, designadamente do ponto de vista geométrico, em relação aos problemas de Posicionamento só com formas regulares. Uma dessas questões é a necessidade de garantir uma precisão adequada na verificação da existência de sobreposições no posicionamento de dois polígonos ou do posicionamento de um polígono completamente no interior de outro, de forma a evitar a natural acumulação de erros, após sucessivas operações, em cálculos de vírgula flutuante. As operações de verificação de sobreposições de polígonos e de posicionamentos de polígonos no interior de outros polígonos devem também ser implementadas de uma forma muito eficiente, uma vez que são operações elementares na resolução deste tipo de problemas. Estas operações deverão também ser capazes de lidar com polígonos com formas não convexas. Outra questão relevante é a dificuldade em estabelecer uma relação entre a qualidade de uma solução intermédia e a qualidade da solução final obtida a partir de uma intermédia, devido à existência de uma grande diversidade nas formas geométricas presentes neste tipo de problemas. Devido à dificuldade no estabelecimento de uma relação deste tipo, torna-se muito difícil nos problemas de PFI reconhecer atempadamente quais são as soluções intermédias que conduzem a más soluções finais. Esta característica explica o pouco sucesso de abordagens baseadas em pesquisas em árvore na resolução de problemas de PFI, devido à enorme dificuldade em cortar ramos da árvore. Associada a esta característica está a dificuldade em estabelecer limites inferiores de boa qualidade, em problemas de minimização, que permitam estimar a qualidade das soluções obtidas por métodos heurísticos. A obtenção de um limite inferior de boa qualidade possibilitaria a utilização de critérios de aceitação de soluções baseados em distâncias a um bom limite inferior, o que permitiria garantir a qualidade das soluções obtidas.

Pelo que foi exposto, e apesar da opinião inicial contrária dos autores da nova tipologia, a forma, irregular ou não, dos objectos, pequenos ou gran-

³Um polígono é regular quando os seus lados e ângulos são congruentes, i.e. geometricamente iguais.

des, é uma das principais características dos problemas de Posicionamento, uma vez que condiciona fortemente a escolha do(s) método(s) de resolução a utilizar. A sua importância está ao mesmo nível da dimensionalidade do problema, podendo mesmo no limite, e à custa de alguma clareza⁴, substituir o número de dimensões no esquema de codificação, já que a partir da forma geométrica dos objectos é possível conhecer o número de dimensões relevantes. Desta forma, as características geométricas dos objectos, pequenos ou grandes, devem ser tidas em consideração na classificação dos problemas de Posicionamento.

Extensões e variantes a problemas de Posicionamento

A tipologia acabada de apresentar está vocacionada apenas para classificar problemas de Posicionamento puros, i.e. problemas onde se pretende obter a melhor forma de cortar (empacotar) uma selecção de objectos pequenos a partir de um (num) subconjunto de objectos grandes. Ficaram assim de fora do âmbito desta tipologia a consideração de aspectos adicionais inerentes aos problemas de planeamento onde os problemas de Posicionamento se inserem, bem como problemas que não se enquadrem nos pressupostos que estiveram na origem do estabelecimento desta tipologia.

A consideração de aspectos adicionais dos problemas de Posicionamento puros dá origem a extensões aos problemas de Posicionamento básicos. Uma extensão de um problema de Posicionamento distingue-se pela necessidade de se considerarem características adicionais na sua resolução, por oposição a um problema de Posicionamento puro onde apenas se pretende minimizar o desperdício ou maximizar o aproveitamento⁵, que são relevantes para o problema de planeamento onde o problema de Posicionamento está inserido. Exemplos de características que originam extensões a problemas de Posicionamento são:

- número de padrões diferentes — neste tipo de problema pretende-se minimizar o número de padrões diferentes obtido, ou em alternativa limitá-lo a um valor máximo, de forma a permitir elevados ritmos de

⁴ Apesar do número de dimensões relevantes do problema não trazer nenhuma informação adicional em relação à forma dos objectos, a sua inclusão, na forma 1D/2D/3D, torna mais fácil a identificação do número de dimensões relevantes.

⁵ Algumas restrições de ordem tecnológica, como a imposição de cortes em guilhotina, podem condicionar a obtenção de uma solução de melhor qualidade

produção e evitando a degradação da qualidade das soluções em termos de desperdício [Vanderbeck, 2000];

- sequência de processamento — nestes problemas pretende-se obter um conjunto de padrões que, para além de permitirem um bom aproveitamento da matéria-prima, possibilitem também sequenciar o processamento dos padrões de forma a que seja possível cumprir prazos de entrega [Foerster e Wäscher, 1998];
- *lot-size* — neste tipo de problemas é necessário atender a quantidades mínimas [Nonas e Thorstenson, 2000].

No estabelecimento da nova tipologia, Wäscher *et al.* [2004] assumiram um conjunto de pressupostos em relação a algumas propriedades dos problemas de Posicionamento, restringindo-os a problemas só com um objectivo, determinísticos e só com um período. A consideração de outros pressupostos dá origem a variantes de problemas de Posicionamento como:

- problemas estocásticos — nesta variante as dimensões dos objectos são variáveis aleatórias [Das e Spasovic, 2003];
- problemas *fuzzy* — esta variante caracteriza-se por ter coeficientes que são valores *fuzzy* [Katagiri *et al.*, 2004];
- problemas *online* — nestes problemas os objectos pequenos não são conhecidos à priori, mas vão chegando um de cada vez e, assim que chegam, têm de ser imediatamente posicionados [Hemminki *et al.*, 1998].

2.1.2 Revisão Bibliográfica sobre Problemas de Posicionamento

De seguida será apresentada uma breve revisão bibliográfica sobre problemas de Posicionamento. O principal objectivo desta revisão é o de mostrar a evolução na área dos problemas de Posicionamento ocorrida ao longo dos tempos, realçando as principais técnicas de resolução utilizadas e os principais resultados obtidos nesta área. Desta forma, fica de fora do âmbito deste trabalho a realização de uma revisão bibliográfica aprofundada para as várias subcategorias de problemas de Posicionamento, assim como a apresentação dos respectivos estados da arte. A presente revisão bibliográfica

irá sim ficar ao nível das categorias de problemas de Posicionamento, realçando-se, para cada categoria de problemas de Posicionamento, os de maior aplicação prática, como: os problemas de *Cutting Stock* e de *Bin Packing* uni e bidimensionais, os problemas de *Strip Packing*, os problemas de Carregamento de Paletes, os problemas de Empacotamento de Contentores e, por fim, uma breve referência aos problemas Mochila. Relativamente aos problemas de PFI, na secção 2.3 será apresentada uma revisão bibliográfica mais aprofundada sobre estes problemas. Para facilitar a exposição desta revisão bibliográfica, sempre que não há indicação da forma geométrica dos objectos envolvidos em problemas de Posicionamento bidimensionais de *Cutting Stock*, de *Bin Packing* ou de *Strip Packing*, assume-se que os objectos pequenos ou grandes têm forma rectangular. De igual modo, a forma paralelepípedica deve ser assumida para as variantes tridimensionais dos mesmos problemas.

Existe um vasto conjunto de trabalhos publicados sobre problemas de Posicionamento, que abrangem os vários tipos de subproblemas e que utilizam as mais variadas técnicas de resolução. A grande maioria destes trabalhos encontra-se referenciada numa das quatro bibliografias anotadas sobre problemas de Posicionamento [Dyckhoff e Finke, 1992] [Sweeney e Paternoster, 1992] [Dyckhoff *et al.*, 1997] [Wäscher *et al.*, 2004]. Dyckhoff e Finke [1992] referem mais de setecentos trabalhos sobre problemas de Posicionamento, incluindo extensões e variantes de problemas de Posicionamento. Sweeney e Paternoster [1992] listam mais de quatrocentas publicações apenas sobre aplicações de problemas de Posicionamento. Dyckhoff *et al.* [1997] seleccionam mais de cento e cinquenta referências anotadas sobre problemas de Posicionamento posteriores a 1985 e indicam possuir mais de mil e duzentas referências relacionadas com problemas de Posicionamento. Recentemente, Wäscher *et al.* [2004] identificam e classificam mais de trezentos trabalhos publicados em revistas, apenas nos últimos dez anos, sobre problemas de Posicionamento puros. Nós próprios, na base de dados sobre estes problemas por nós mantida, temos mais de 1500 entradas com publicações sobre cortes e empacotamento. É de salientar que a maioria destes trabalhos é de cariz eminentemente aplicado, o que enfatiza uma das principais e mais interessantes características dos problemas de Posicionamento. Outra característica importante dos problemas de Posicionamento é a sua multidisciplinaridade, congregando investigadores de várias áreas como: Investigação Operacional,

Gestão (*Management Science*), Informática (*Computer Science, Computational Geometry*), Matemática e Engenharias.

Um outro tipo de trabalhos que necessariamente tem de ser referido são outros trabalhos de revisão bibliográfica (*surveys*) e de descrição do estado da arte (*state of the art*) sobre problemas de Posicionamento. Neste tipo de trabalhos, e ao contrário dos trabalhos de listagem bibliográfica referidos anteriormente em que o objectivo principal é o de apenas listar exaustivamente (quase) todos os trabalhos publicados sobre problemas de Posicionamento, existe obviamente o valor acrescentado resultante do trabalho de selecção e de crítica por parte dos seus autores. Dada a grande diversidade de restrições e condicionantes em que as diferentes subcategorias de problemas de Posicionamento estão inseridas, que necessariamente conduzem à utilização de abordagens e de técnicas de resolução completamente diferentes, não existem trabalhos de revisão bibliográfica que cubram em detalhe a totalidade dos problemas de Posicionamento⁶. Os trabalhos que mais se aproximam deste objectivo são obviamente os trabalhos de apresentação das tipologias sobre problemas de Posicionamento [Dyckhoff, 1990] [Wäscher *et al.*, 2004], que naturalmente abordam os diferentes tipos de problemas de Posicionamento, mas falhando ao nível da enumeração das principais abordagens e técnicas utilizadas na resolução dos vários tipos e problemas, bem como na comparação e análise das vantagens e desvantagens entre essas mesmas abordagens e técnicas. Em contrapartida, existem vários trabalhos de revisão bibliográfica que analisam em pormenor um determinado ou determinados tipos de problemas de Posicionamento, discutindo modelos matemáticos, limites inferiores e superiores, métodos enumerativos e métodos baseados em heurísticas e meta-heurísticas. São de destacar os trabalhos de [Gilmore, 1979] [Haessler e Sweeney, 1991] [de Carvalho, 2002] [Gu *et al.*, 2002] para os problemas de Posicionamento unidimensionais, os trabalhos de [Dowsland e Dowsland, 1992] [Cheng *et al.*, 1994] [Lodi *et al.*, 2002] para os problemas de Posicionamento bidimensionais rectangulares e de Carregamento de Paletes, os trabalhos de [Boschetti, 2004] para os problemas de Posicionamento tridimensionais e, por fim, os trabalhos de [Dowsland e Dowsland, 1995] [Hopper e Turton, 2001] [Cagan *et al.*, 2002] para os problemas de PFI.

Problemas de “matemática recreativa” e puzzles envolvendo problemas

⁶Obviamente, e tal como já foi anteriormente referido, este trabalho não tem como objectivo a realização e a apresentação de uma revisão bibliográfica detalhada para as diferentes subcategorias de problemas de Posicionamento.

de empacotamento, dissecções de quadrados e rectângulos e *tesselations* sempre fascinaram o ser humano e já no século X o matemático persa Abul Wefa introduziu o problema da dissecção do quadrado [Dowland e Dowland, 1992]. As primeiras referências a trabalhos científicos sobre problemas de matemática recreativa (*recreational mathematics*) remontam ao período entre os anos quarenta e sessenta do século XX: [Brooks *et al.*, 1940] nos problemas de dissecção de quadrados e de rectângulos, [Lindgren, 1964] nos problemas de *tesselations*, [Golomb, 1966] nos problemas sobre *polyminoes* e [Segre e Mahler, 1944] nos problemas de empacotamento de círculos e de esferas.

Os problemas de Posicionamento de índole recreativa, apesar de claramente terem sido percursos e do seu evidente interesse teórico, têm um reduzido interesse em termos de aplicação a problemas reais. A primeira publicação a abordar problemas de Posicionamento aplicáveis a situações reais surge por Kantorovich [1939]. Neste trabalho, o autor apresenta um modelo matemático para o problema de *Cutting Stock* uni e bidimensional. Este trabalho foi originalmente publicado em Russo, sendo mais tarde reeditado em língua inglesa [Kantorovich, 1960]. Neste período inicial, merecem também destaque os seguintes trabalhos sobre problemas de *Cutting Stock* unidimensionais (conhecidos também como *Trim Loss*): o trabalho de Paull e Walter [1954] sobre a impressão de jornais, os trabalhos de Eise-mann [1957] e de Metzger [1958] sobre o problema genérico de minimização do desperdício e o trabalho de Eilon [1960] sobre o corte de barras de aço. Adicionalmente, é de realçar também neste período o trabalho de Sadowski [1959] sobre o problema do Sortido⁷.

Apesar da evidente aplicação prática de todos estes trabalhos pioneiros, apenas instâncias de pequena dimensão podiam ser resolvidas com sucesso. As razões para estas dificuldades residiam nas técnicas de resolução utilizadas na resolução dos modelos do problema de *Cutting Stock*, que não conseguiam lidar com o grande número de colunas da matriz das restrições. Note-se que existe uma coluna para cada padrão de corte diferente e claramente o número de padrões de corte cresce exponencialmente com o número de objectos pequenos diferentes. Por estes motivos, não surpreende

⁷No problema do Sortido, e ao contrário do problema de *Cutting Stock*, pretende-se determinar quais os tamanhos com que se devem produzir ou comprar os objectos grandes. Na tipologia de Wäschler *et al.* [2004] estes problemas são classificados como problemas de Dimensões Variáveis.

a dificuldade em obter soluções exactas para problemas de *Cutting Stock* de dimensão elevada.

As dificuldades na resolução de problemas de *Cutting Stock* de média e grande dimensão só foram ultrapassadas graças aos trabalhos de Gilmore e Gomory [1961, 1963]. Nestas publicações, os autores adaptam a técnica da geração atrasada de colunas, baseada na decomposição de Dantzig-Wolfe, ao problema de *Cutting Stock* unidimensional. Posteriormente, os mesmos autores estendem a mesma técnica a problemas de duas e três dimensões, aplicando-a na resolução de problemas de *Cutting Stock* de corte de rectângulos e de paralelepípedos (caixas) [Gilmore e Gomory, 1965]. Na resolução de problemas de *Cutting Stock* a duas e três dimensões por este método, os padrões de corte estão restritos apenas àqueles que se conseguem obter por cortes do tipo guilhotina. Um outro trabalho dos mesmos autores a merecer destaque é o trabalho sobre a resolução de problemas Mochila [Gilmore e Gomory, 1966], que surgem como problemas auxiliares durante a resolução dos problemas de *Cutting Stock* e são resolvidos por programação dinâmica. Dyckhoff [1981] apresenta uma nova formulação para o problema de *Cutting Stock*, que se baseia na utilização de variáveis de decisão que correspondem a uma única operação de corte sobre um único objecto (*onecut model*). Stadler [1988] introduz uma extensão a esta formulação que permite separar as restrições em dois tipos: um com uma estrutura em rede pura e o outro composto por restrições de limites superiores generalizados. de Carvalho [2002] apresenta uma outra formulação para o problema de *Cutting Stock* baseada na determinação do fluxo em arcos (*arc flow model*).

O problema de *Cutting Stock*, nas suas diferentes variantes, é intrinsecamente um problema inteiro, i.e. pretende-se minimizar o número de objectos grandes utilizados. Por outro lado, são conhecidas as dificuldades que a resolução de problemas inteiros apresentam, em particular para instâncias de média e de grande dimensão. Devido a estas dificuldades, a grande maioria das abordagens a estes problemas começam por resolver a relaxação contínua do problema inteiro. Posteriormente, a solução fraccionária obtida é “arredondada” através de regras heurísticas, mais ou menos elaboradas, como por exemplo pela resolução de problemas residuais.

De seguida, referem-se alguns trabalhos sobre problemas de *Cutting Stock* unidimensionais. Johnston [1986] apresenta um algoritmo para arredondamento de soluções fraccionárias, que simultaneamente limita o número de

padrões diferentes e elimina padrões pouco utilizados. Wäscher e Gau [1996] apresentam um estudo sistemático de várias heurísticas propostas na literatura para problemas de *Cutting Stock* unidimensionais. Os autores utilizaram quatro mil instâncias (geradas aleatoriamente por intermédio de um gerador automático de instâncias [Gau e Wäscher, 1995]) e reportam que duas das heurísticas se superiorizam às restantes, conseguindo resolver a totalidade das quatro mil instâncias com diferenças inferiores a uma unidade para o valor da função objectivo da solução óptima. Em [de Carvalho, 1998] é apresentada uma abordagem exacta ao problema de *Cutting Stock* unidimensional baseada em geração de colunas e numa pesquisa *branch-and-bound*, apresentando soluções para instâncias de problemas com o máximo de trinta encomendas. Nos trabalhos anteriores, os objectos grandes têm todos o mesmo tamanho, situação que facilita a tarefa de tornar inteiras as soluções fraccionárias. O problema de *Cutting Stock* unidimensional com objectos grandes de tamanhos diferentes é abordado por Belov e Scheithauer [2002], num trabalho que combina planos de corte com geração de colunas.

Relativamente a trabalhos sobre o problema de *Colocação* bidimensional, há vários merecedores de realce. Herz [1972] considera apenas pontos resultantes da combinação linear não-negativa inteira entre as dimensões dos objectos pequenos, o que permite reduzir o esforço computacional. Christofides e Whitlock [1977] aborda a variante do problema de *Colocação* em que existem limites para as quantidades de objectos pequenos através de uma pesquisa em árvore em que os ramos correspondem aos cortes guilhotináveis possíveis de efectuar num determinado nó. Por sua vez, Wang [1983] apresenta uma abordagem também baseada numa pesquisa em árvore, mas onde os padrões de corte guilhotináveis são construídos pela combinação sucessiva de objectos pequenos. Refinamentos a esta abordagem são apresentados por Vasko [1989] e por Oliveira e Ferreira [1990]. Riehme *et al.* [1996] abordam o caso especial do problema de *Colocação* bidimensional com grandes diferenças nas quantidades pedidas de objectos pequenos. Finalmente, Alvarez-Valdes *et al.* [2002] aplicam meta-heurísticas, *GRASP* e Pesquisa Tabu (*Tabu Search*), na resolução do problema de *Colocação* bidimensional.

Os métodos de resolução do problema de *Colocação* bidimensional acabados de referir recorrem a padrões de corte guilhotináveis, o que obviamente simplifica a resolução do problema, mas também limita a qualidade das soluções obtidas quando tal tipo de cortes não é obrigatório. A resolução do

problema de *Colocação* sem a imposição de cortes do tipo guilhotina é muito mais complexa e encontrar a solução óptima é extremamente difícil. Uma das primeiras tentativas para resolver com exactidão problemas deste tipo, foi efectuada por de Cani [1978] na resolução do problema de posicionar um conjunto objectos pequenos idênticos através de uma pesquisa em árvore. Os resultados reportados pelo autor não foram muito animadores: a obtenção da solução óptima para o posicionamento de apenas dez objectos pequenos só era conseguida ao fim de cinquenta horas de cálculo. Mais tarde, Beasley [1985] utiliza uma formulação inteira baseada na utilização de uma variável binária para cada ponto de posicionamento admissível (uma espécie de grelha) e recorre à técnica de relaxação lagrangeana de forma a conseguir resolver problemas de tamanho médio.

O problema de *Bin Packing* é estruturalmente semelhante ao problema de *Colocação*. Os dois tipos de problemas apenas diferem nas quantidades pedidas para cada um dos tipos de objectos pequenos: muito baixas para os primeiros (com valores próximos da unidade ou mesmo unitários) e muito altas para os segundos. Esta pequena diferença tem no entanto um grande impacto nos métodos de resolução utilizados para abordar cada um dos problemas: enquanto nos problemas de *Colocação* abordagens baseadas na resolução da relaxação contínua do problema inteiro e posterior “arredondamento” das soluções conduzem a bons resultados, o mesmo não acontece nos problemas de *Bin Packing*. Neste tipo de problemas, o “arredondamento” de soluções fraccionárias pode dar origem a soluções inteiras de muito má qualidade, devido às reduzidas quantidades existentes para cada um dos tipos de objectos pequenos. Um outro tipo de problemas com semelhanças em relação aos problemas de *Bin Packing* de duas ou mais dimensões são os problemas de *Strip Packing*⁸, os dois tipos de problemas têm o mesmo objectivo: minimização da quantidade de recursos utilizados na produção de um determinado conjunto de objectos pequenos. Estes dois tipos de problemas distinguem-se no entanto no tipo de recursos (objectos grandes) disponíveis. Os problemas de *Strip Packing* caracterizam-se pela existência de um objecto grande com uma das dimensões de tamanho infinito⁹, sendo o objectivo a minimização do tamanho do objecto grande.

⁸Um problema de *Strip Packing* unidimensional não faz sentido, já que a solução de um problema deste tipo seria trivial.

⁹Segundo a tipologia de Wäscher *et al.* [2004], os problemas de *Strip Packing* pertencem à categoria dos problemas de Dimensões Variáveis.

Por outro lado, nos problemas de *Bin Packing* todos os objectos grandes possuem dimensões fixas, pretendendo-se neste caso minimizar o número de objectos grandes utilizados. Apesar da diferença entre os objectos grandes disponíveis para cada um dos tipos de problemas, muitas das abordagens existentes para problemas de *Bin Packing* baseiam-se em técnicas desenvolvidas para problemas de *Strip Packing*. Estas abordagens aos problemas de *Bin Packing* baseiam-se numa estratégia em duas fases, inicialmente é resolvido um problema de *Strip Packing* onde uma das dimensões dos objectos grandes do problema de *Bin Packing* é tornada infinita. De seguida é resolvido um problema de *Bin Packing* unidimensional com a altura das tiras (*strips*) obtidas na primeira fase.

Os primeiros problemas de *Bin Packing* a serem tratados foram naturalmente os unidimensionais, através de abordagens heurísticas baseadas em regras de ordenação dos objectos pequenos e de selecção do objecto grande (*bin*) a ser utilizado no posicionamento do objecto pequeno corrente. Uma revisão bibliográfica sobre estas primeiras abordagens aos problemas de *Bin Packing* é apresentada em [Coffman Jr. *et al.*, 1984]. Uma abordagem ao problema de *Bin Packing* bidimensional baseada num procedimento de pesquisa local é apresentada por Bengtsson [1982]. Numa primeira fase, uma solução inicial é obtida por uma regra heurística, seguindo-se um processo iterativo que tenta reduzir o número de objectos grandes (*bins*) utilizados: o objecto grande com o maior desperdício é esvaziado, tentando-se de seguida posicionar os objectos pequenos retirados do seu interior nos restantes objectos grandes. Chung *et al.* [1982] utilizam a estratégia em duas fases descrita na frase anterior. Berkey e Wang [1987] apresentam e comparam várias heurísticas para o problema de *Bin Packing*. Entre as heurísticas analisadas neste trabalho encontram-se heurísticas baseadas em estratégias em duas fases, outras baseadas numa só fase e por níveis e uma outra com base numa regra de posicionamento do tipo *bottom-left*. Martello e Vigo [1998] apresentam um algoritmo exacto capaz de resolver problemas de *Bin Packing* bidimensionais de dimensão mediana (os autores apresentam um exemplo com cento e vinte objectos pequenos). Referem-se de seguida alguns trabalhos sobre o problema de *Strip Packing*. Um esquema aproximado de tempo completamente polinomial, de forma assintótica, para problemas de *Strip Packing* bidimensionais é apresentado em [Kenyon e Remila, 2000]. Hopper e Turton [2001] apresentam uma revisão bibliográfica sobre a apli-

cação de meta-heurísticas a problemas de *Strip Packing* bidimensionais, nas variantes rectangulares e irregulares.

Os problemas de Paletização pertencem à categoria de problemas de Posicionamento de Objectos Idênticos. Problemas desta categoria têm como objectivo a maximização do valor dos objectos pequenos empacotados, o que no caso dos problemas de Carregamento de Paletes equivale a maximizar o número de objectos pequenos posicionados. Apesar destes problemas serem intrinsecamente tridimensionais, em termos de resolução reduzem-se a apenas duas dimensões pelo facto dos objectos pequenos serem todos iguais. Desta forma, os problemas de Carregamento de Paletes acabam por se transformar em problemas de posicionamento de rectângulos idênticos (a base dos objectos pequenos) numa área também rectangular (a palete), com a construção de sucessivas camadas. Para garantir a estabilidade da paleta deve-se evitar a construção de colunas de objectos pequenos, utilizando camadas com diferentes disposições de modo a garantir o entrelaçamento de camadas sucessivas. O problema de Carregamento de Paletes com estas características também é vulgarmente conhecido como problema de Carregamentos de Paletes do Fabricante, já que retrata a situação do fabricante de um determinado produto que quer maximizar a quantidade desse produto enviada em cada paleta. Este nome surge por oposição ao nome de um outro problema, o problema de Carregamento de Paletes do Distribuidor, em que uma paleta é carregada com uma carga heterogénea, i.e. os objectos pequenos não são todos iguais. O nome de problema de Carregamento de Paletes do Distribuidor tem origem na situação em que um distribuidor de produtos se encontra: recebe encomendas de clientes que englobam vários tipos de produtos e depois tem de entregar os vários produtos numa ou mais paletes. O problema de Carregamento de Paletes do Distribuidor nem sempre pode ser reduzido a um problema bidimensional, exigindo abordagens próprias para problemas de Posicionamento tridimensionais.

Os primeiros trabalhos publicados sobre o problema de Carregamento de Paletes apareceram nos finais dos anos sessenta e são sobre a definição de padrões de paletização de referência. Estes padrões de referência eram posteriormente aplicados e validados para cada nova situação (dimensões dos objectos pequenos e da paleta), sendo escolhido o padrão de referência que conduz à solução com o maior número de objectos pequenos posicionados. O aparecimento e a generalização da utilização de computadores pessoais

permitiu alterar radicalmente o paradigma utilizado na resolução de problemas de Carregamento de Paletes, passando-se de uma pesquisa numa grande base de dados com padrões de referência para o desenvolvimento de abordagens baseadas em heurísticas capazes de construir boas soluções para cada novo problema. Em [Bischoff e Dowsland, 1983] é apresentada uma dessas novas abordagens, que tem como ideia base garantir bons preenchimentos do perímetro da paleta através da utilização de 4 blocos de caixas, preenchendo-se o miolo da paleta numa operação posterior. Dowsland [1987] apresenta um algoritmo exacto para o problema de Carregamento de Paletes, baseado numa pesquisa *branch-and-bound*. Em [Bischoff, 1991] são abordados diversos aspectos relacionados com a estabilidade da carga em problemas de Carregamento de Paletes. Ram [1992] apresenta uma revisão bibliográfica sobre o problema de Carregamento de Paletes, descrevendo não só modelos e abordagens ao problema, mas também relatando implementações destas soluções na prática. Em [Scheithauer e Terno, 1996] é apresentada uma nova heurística baseada em estruturas denominadas **G4** e que permitem padrões com um número arbitrário de blocos.

Os problemas de Posicionamento tridimensionais puros com maior aplicação prática são sem dúvida os problemas de Empacotamento de Contentores e de Camiões. Sob este nome genérico podem-se encontrar na literatura vários problemas que pertencem a diferentes categorias de problemas de Posicionamento e que têm como principal diferença o tipo de objectivo de cada um dos problemas, tais como: a maximização do valor da carga empacotada (problema de Colocação), a minimização do comprimento utilizado (problema de Dimensões Variáveis, vulgarmente conhecido como problema de *Strip Packing*) ou a minimização do número de contentores utilizados (problema de *Bin packing*). Em qualquer destas variantes, é sempre preciso ter em atenção algumas características especiais derivadas directamente das aplicações reais e que necessitam de serem consideradas, como por exemplo: a necessidade de garantir a estabilidade da carga, a distribuição do peso ao longo do contentor ou camião, a possibilidade de várias operações de descarga, a atenção à fragilidade da carga e a garantia de cumprir distâncias mínimas entre produtos perigosos. A grande maioria das abordagens existentes baseia-se na construção sucessiva de camadas/paredes, diferenciando-se principalmente nas estratégias utilizadas no aproveitamento do espaço livre existente numa camada/parede pelas que lhe estão adjacentes.

Estas abordagens por camadas/paredes são especialmente indicadas para situações onde a carga é pouco heterogénea. Por outro lado, abordagens baseadas em regras de posicionamento semelhantes às utilizadas nos problemas de *Bin Packing* são mais adequadas a problemas muito heterogéneos.

De seguida referem-se alguns dos trabalhos mais relevantes sobre este problema. George e Robinson [1980] apresentam uma heurística para o problema de Empacotamento de um Contentor baseada na construção de sucessivas paredes/camadas de caixas. Esta heurística está vocacionada para problemas pouco heterogéneos e com grandes quantidades de caixas para colocar. Ivancic *et al.* [1989] abordam o problema de Empacotamento em vários Contentores através de uma heurística baseada numa formulação inteira. Gehring *et al.* [1990] apresentam uma abordagem ao problema de Empacotamento de um Contentor também baseada na construção de paredes/camadas e que recorre à interacção com o utilizador para encontrar a “melhor” solução: são geradas e apresentadas ao utilizador várias soluções de boa qualidade, das quais o utilizador posteriormente seleccionará uma. Nesta selecção poderão ser considerados outros aspectos não contemplados pela heurística de posicionamento. Em [Bischoff e Ratcliff, 1995] são abordados e discutidos vários aspectos de grande importância no desenvolvimento de soluções automáticas de empacotamento de Contentores. Aspectos como a distribuição uniforme do peso, a estabilidade da carga e a possibilidade de se efectuarem várias descargas são vitais em muitas aplicações práticas. Uma abordagem ao problema de Carregamento de Paletes do Distribuidor é apresentada em [Bischoff *et al.*, 1995]. Mack *et al.* [2004] apresentam uma abordagem que recorre a implementações paralelas de meta-heurísticas.

Para finalizar esta revisão bibliográfica será feita uma referência aos problemas Mochila, que, recorde-se, se caracterizam pelo objectivo de maximizar o valor dos objectos pequenos posicionados no interior de um conjunto limitado de objectos grandes. Apesar de este tipo de problemas ter uma reduzida aplicação prática, aparecem no entanto frequentemente como subproblemas ou problemas auxiliares durante a resolução de problemas de Posicionamento de outros tipos. O livro [Martello e Toth, 1990] apresenta uma compilação sobre diferentes tipos de problemas Mochila, com descrição de abordagens de resolução para cada um deles. Gerasch e Wang [1994] fazem uma revisão bibliográfica sobre implementações paralelas de algoritmos para problemas Mochila. Mais recentemente, Martello *et al.* [2000] apresentam

as mais recentes técnicas de resolução de problemas Mochila “difíceis”.

A breve revisão bibliográfica sobre problemas de Posicionamento acabada de apresentar permite constatar a diversidade existente entre os vários tipos de problemas. Esta diversidade de tipos de problemas origina grandes diferenças a vários níveis: nas técnicas de resolução utilizadas, na dimensão das instâncias dos problemas resolvidos e, obviamente, na qualidade dos resultados obtidos. De seguida, apresenta-se um pequeno resumo das principais técnicas de resolução, do tamanho relativo das instâncias resolvidas e da qualidade das soluções obtidas, para os principais tipos de problemas de Posicionamento:

- simples técnicas de enumeração ou técnicas optimizantes — programação linear, programação dinâmica ou pesquisa em árvore — para instâncias de pequena dimensão e, obviamente, com resultados óptimos;
- técnicas optimizantes para problemas 1D e 2D rectangulares guilhotináveis de dimensão relativamente grande e, obviamente, também com resultados óptimos;
- técnicas optimizantes, com pequenas relaxações ou simplificações, ou métodos de pesquisa local baseados em meta-heurísticas para problemas 2D e 3D rectangulares, de dimensão elevada e com resultados onde é possível garantir uma determinada distância à solução óptima;
- heurísticas ou métodos de pesquisa local baseados em meta-heurísticas para problemas 2D irregulares e 3D irregulares, de média ou grande dimensão e com resultados satisfatórios.

2.2 Caracterização do Problema de Posicionamento de Formas Irregulares

A definição de problema de Posicionamento apresentada no início deste capítulo é relativamente genérica e não caracteriza totalmente estes problemas. Torna-se assim necessário proceder a uma discussão mais aprofundada sobre este assunto e que permita definir e caracterizar completamente o problema PFI. Adicionalmente serão também apresentadas algumas variantes ao problema de PFI base.

A forma irregular dos objectos pequenos é a principal característica dos problemas de PFI e também a principal diferença em relação aos restantes problemas de Posicionamento. Além de caracterizar este tipo de problemas, a forma irregular dos objectos pequenos torna a resolução destes problemas mais complexa do ponto de vista geométrico, para garantir a admissibilidade das soluções obtidas, e computacionalmente muito pesada. Torna-se assim quase que obrigatória a utilização de uma poderosa e eficiente biblioteca geométrica no desenvolvimento de soluções competitivas para o problema de PFI.

O número de dimensões relevantes para a resolução do problema é outra característica geométrica muito importante para os problemas de PFI, como aliás para qualquer problema de Posicionamento. No caso concreto dos problemas de PFI, apenas vai ser considerada a versão bidimensional do problema, já que a versão unidimensional do problema de PFI não faz sentido: uma vez que não existem objectos unidimensionais com formas irregulares. Por outro lado, a não consideração de problemas de PFI com três ou mais dimensões fica a dever-se à reduzida aplicação destas versões.

A maior complexidade e a dificuldade intrínseca aos problemas de PFI a nível geométrica levam naturalmente à simplificação dos problemas abordados do ponto de vista combinatório. Uma dessas simplificações é a resolução de problemas com apenas um objecto grande de cada vez ou, no caso de existirem mais do que um, resolver consecutivamente um problema para cada um dos objectos grandes de forma independente. Outra simplificação é a imposição ao objecto grande de uma forma regular (rectangular ou paralelepipedica) e um “comprimento” infinito numa das dimensões, o que elimina desta forma o problema de selecção dos objectos pequenos a posicionar.

A nível geométrico falta caracterizar as formas irregulares propriamente ditas. Estas serão representadas por regiões poligonais, simplesmente conexas e tal que o interior da fronteira poligonal está totalmente contido na região (região sem buracos no interior). Exige-se ainda que o polígono que descreve a fronteira não tenha pontos de multiplicidade superior a um, i.e. o polígono não passa duas ou mais vezes pelo mesmo ponto. De fora desta representação ficam as linhas curvas, o que em situações onde existam formas irregulares com curvas obriga a aproximá-las por segmentos de recta.

Após esta caracterização detalhada dos problemas de PFI é então possível apresentar a seguinte definição de problema de PFI: como posicionar um

conjunto de objectos pequenos bidimensionais descritos por polígonos simples (formas irregulares), no interior de um objecto maior (placa) de forma rectangular e de comprimento infinito, de modo a não existirem sobreposições entre as formas irregulares e minimizando o comprimento da placa utilizado. Segundo a tipologia de Wäscher *et al.* [2004], o problema de PFI tal como foi acabado de definir é um problema de Posicionamento com Dimensões Variáveis. O problema de PFI é também usualmente conhecido na literatura como *Irregular Strip Packing problem* ou *Nesting problem*.

2.2.1 Variantes ao Problema de Posicionamento de Formas Irregulares

A definição do problema de PFI acabada de apresentar corresponde indubitavelmente ao problema de formas irregulares mais frequentemente tratado e com maior aplicação prática. Existem no entanto algumas variantes a este problema base que merecem uma referência, uma vez que têm sido objecto de alguns trabalhos publicados e que também apresentam alguma aplicabilidade prática. Exemplos de trabalhos publicados sobre as variantes ao problema de PFI e a descrição de aplicações concretas destas variantes serão apresentadas quer na descrição da envolvente industrial quer na revisão bibliográfica.

A variante tridimensional ao problema de PFI base anteriormente definido (denominada problema de PFI Tridimensional), que recorde-se é bidimensional, é naturalmente uma dessas variantes. As diferenças desta variante estão obviamente no número de dimensões dos objectos, quer os pequenos quer o grande, e numa maior dificuldade de resolução em relação ao problema base. A principal aplicação da variante tridimensional do problema de PFI é a prototipagem rápida de peças.

Uma segunda variante considera o problema de PFI com um objecto grande finito, onde se procura maximizar o valor dos objectos pequenos posicionados. Segundo a tipologia de Wäscher *et al.* [2004] esta variante seria classificada como problema Mochila. Esta variante apresenta uma dificuldade acrescida em relação ao problema de PFI base, devido à necessidade adicional em se seleccionar os objectos pequenos que serão efectivamente posicionados.

A consideração de objectos grandes não homogéneos ou com forma irregular dá origem a uma terceira variante. Nesta variante o objecto grande

pode apresentar zonas defeituosas no seu interior, i.e. que não podem ser utilizadas, ou então zonas com diferentes níveis de qualidade e onde objectos pequenos têm de ser posicionados em zonas com um determinado nível de qualidade. Objectos grandes com forma irregular são modelizados como possuindo uma ou mais zonas defeituosas ao longo do perímetro de um rectângulo, de forma a recriar a forma irregular do objecto grande. Estas variantes aparecem frequentemente em situações onde o objecto grande é uma matéria-prima de origem natural (uma tábua de madeira ou uma pele de um animal), dado que não é possível garantir a homogeneidade da matéria-prima.

Em algumas aplicações concretas, admitem-se rotações no posicionamento das formas irregulares, o que origina uma outra variante ao problema de PFI base. A consideração de rotações no posicionamento das formas irregulares aumenta bastante a dificuldade dos problemas, quer ao nível da componente combinatória, por aumento no número de combinações possíveis, quer da componente geométrica, pela existência de maior diversidade de formas geométricas. As situações onde são admitidas rotações no posicionamento das formas irregulares agrupam-se nos seguintes casos típicos:

- rotações de ângulos específicos — $\{90^\circ, 180^\circ, 270^\circ\}$;
- pequenas variações em torno de um ângulo — $\alpha \pm 3^\circ$;
- ângulos de rotação num certo intervalo — $[30^\circ, 60^\circ]$;
- rotação de qualquer ângulo — $[0^\circ, 360^\circ]$.

Existem também situações que resultam da combinação de dois ou mais casos típicos.

Por fim será referida uma variante ao problema de PFI base com dois objectivos: pretende-se não só minimizar o desperdício de matéria-prima, mas também obter padrões de corte que sejam fáceis e rápidos de cortar. Esta variante surge em situações onde a operação de corte é crítica para o processo produtivo global. Uma situação semelhante ocorre nos problemas de Posicionamento unidimensionais, onde é frequente a existência de um segundo objectivo — a minimização do número de padrões de corte — a par com a minimização do desperdício, para garantir um processo de corte rápido.

2.2.2 Envolvente Industrial

Os problemas de PFI surgem naturalmente nos processos produtivos de vários tipos de indústrias, tais como: confecções, calçado, mobiliário em madeira e metalomecânica. Em todas estas indústrias existe a necessidade de cortar objectos com formas irregulares a partir de uma determinada matéria-prima. A existência de diversos tipos de indústrias com problemas semelhantes e onde o problema de PFI tem um significativo impacto económico, torna atraente e apelativa esta área de investigação e justifica o desenvolvimento de aplicações para estes problemas. Estes tipos de indústrias, apesar de partilharem o mesmo problema base — o corte de formas irregulares, apresentam, no entanto, algumas características específicas que diferenciam os respectivos problemas. Torna-se assim natural o desenvolvimento de aplicações de posicionamento de formas irregulares apropriadas para cada tipo de indústria. Cada tipo de indústria será mais ou menos atractiva para o desenvolvimento de aplicações específicas conforme a respectiva envolvente industrial.

As indústrias que necessitam de cortar peças com formas irregulares no seu processo produtivo precisam do apoio de aplicações informáticas em três grandes áreas: concepção e desenho das peças, determinação de padrões de corte e, por fim, na determinação do percurso de corte e no controlo automático da máquina de corte. Existem algumas aplicações informáticas isoladas e dedicadas à realização de apenas uma determinada tarefa, mas a tendência é adicionar estas capacidades a sistemas de CAD/CAM, através da integração de módulos adicionais para a realização de tarefas específicas. A área menos desenvolvida, e também a de maior complexidade, é claramente a de determinação de padrões de corte, ou seja a resolução de problemas de PFI.

Existem três grandes tipos de soluções informáticas, disponíveis comercialmente, destinadas a resolver ou a apoiar a resolução de problemas de PFI: soluções interactivas, soluções semiautomáticas e soluções automáticas. As soluções interactivas são as mais comuns e baseiam-se em sistemas de CAD/CAM puros, sendo a qualidade dos padrões de corte obtidos totalmente dependente da capacidade e da experiência do operador. As soluções semiautomáticas já possuem capacidade para gerarem padrões de corte a partir de regras heurísticas muito simples e com base em listas ordenadas de formas irregulares, estando no entanto ainda dependentes de um operador

especializado para alterar a lista ordenada ou mesmo para melhorar manualmente um padrão de corte de baixa qualidade. As soluções totalmente automáticas dispensam um operador especializado na elaboração de padrões de corte, mas são poucas as que conseguem garantir resultados robustos e de boa qualidade. As soluções automáticas mais competitivas recorrem a algoritmos especialmente desenvolvidos para um determinado tipo de indústria e que tiram partido das características específicas dessa indústria.

O preço elevado destas soluções informáticas, assim como a natureza interactiva de grande parte delas e, em alguns casos, a necessidade de utilização de um equipamento de corte específico, são alguns dos motivos que explicam a relativamente reduzida implantação destas aplicações a nível industrial. A solução adoptada na maioria das indústrias ainda é o posicionamento manual das formas irregulares, efectuado por operários altamente especializados, e, em algumas situações, com o auxílio de aplicações de CAD/CAM. No posicionamento totalmente manual das formas irregulares, o operário é responsável pela escolha das formas irregulares a posicionar, da ordem de posicionamento e também do posicionamento dos moldes de cada forma irregular no local exacto. Nas situações em que é auxiliado por aplicações de CAD/CAM, o operário não necessita de posicionar a forma irregular no sítio exacto, limitando-se a indicar o local aproximado do posicionamento, sendo a determinação do posicionamento exacto de cada forma irregular da responsabilidade da aplicação, que a encosta às restantes ou à borda da placa, evitando situações de sobreposição e minimizando o desperdício. Os operários que efectuam o posicionamento manual das formas irregulares conseguem obter elevados níveis de aproveitamento, dificilmente igualáveis pelas aplicações dedicadas existentes. Estes operários são, obviamente, bem pagos e necessitam de vários meses, ou mesmo anos, de treino. Esta situação de dependência em relação a operários especializados tem os seus inconvenientes, designadamente quando se torna necessário proceder à substituição de um deles, ou então em situações em que é preciso aumentar o ritmo de produção. Nestas situações, torna-se necessário investir na formação ou na contratação de um novo operário especializado.

De seguida, descreve-se a situação existente em cada uma das indústrias atrás indicadas, com especial destaque para as abordagens e técnicas utilizadas na resolução dos problemas de PFI. Apresentam-se também as principais características de cada tipo de indústria.

Indústria de Confecções

Apesar de ser uma indústria baseada em mão-de-obra intensiva, a indústria de confecções é a que se encontra numa fase mais avançada em termos da aplicação de ferramentas de posicionamento de formas irregulares. Aliás, esta indústria foi pioneira na aposta em aplicações informáticas para o apoio ao posicionamento de formas irregulares. Os primeiros contactos, entre a comunidade científica e a indústria de confecções, datam da segunda metade da década de sessenta [Art, 1966].

A indústria portuguesa de confecções tem um peso relativamente importante no contexto nacional e caracteriza-se por uma grande concorrência, tanto a nível nacional como também a nível internacional. O tecido industrial desta área é composto por um grande número de indústrias de pequena e média dimensão e relativamente poucas de grande dimensão.

O posicionamento de formas irregulares é uma das áreas de maior importância na indústria de confecções, principalmente devido ao elevado custo das matérias-primas, e destas principalmente o tecido, que na generalidade das indústrias têxteis se aproxima dos 50% dos custos totais de produção [NationalTextileCenter, 2003]. Esta elevada percentagem e a possibilidade do corte simultâneo de várias camadas de tecido (“colchões”) tornam atractivo qualquer esforço que permita diminuir o valor do desperdício de um padrão. Li e Milenkovic [1995] referem o caso de uma grande empresa produtora de calças onde são cortadas simultaneamente até sessenta camadas de tecido e onde a melhoria de 0.1% no desperdício médio dos padrões de corte permitiria à empresa poupar cerca de dois milhões de dólares por ano. Em função destes dados, não é de admirar que a indústria de confecções seja caracterizada pela elevada qualidade dos padrões de corte conseguidos. Estes bons níveis de aproveitamento ficam também muito a dever-se à grande diversidade nas dimensões das formas irregulares, que permite que as formas mais pequenas ocupem buracos que naturalmente ficam entre as formas de maiores dimensões.

Na indústria de confecções, algumas empresas não efectuem a operação de corte do tecido, já que trabalham em regime de subcontratação para outras empresas, dedicando-se principalmente às operações de mão-de-obra intensiva, como as de costura. Das empresas têxteis portuguesas que incluem processos de corte no seu sistema produtivo, aproximadamente metade recorre ao posicionamento totalmente manual ou com apoio de fer-

ramentas de CAD/CAM, enquanto nas restantes se aplicam ferramentas (semi-)automáticas.

O tipo de problemas de PFI que surge na indústria de confecções apresenta um conjunto de características específicas devido às propriedades intrínsecas dos tecidos. Estas características condicionam claramente as abordagens utilizadas na resolução destes problemas. O tecido é produzido em rolos de largura constante (são normais larguras entre um e dois metros) e com comprimentos que podem atingir os milhares de metros, o que, no caso dos problemas de PFI, permite representar os objectos grandes como rectângulos de comprimento infinito e minimizar o comprimento utilizado. Devido às características físicas da trama e da teia dos tecidos e em muitos casos também devido à existência de padrões e de desenhos estampados, as formas irregulares não podem ser posicionadas segundo uma orientação qualquer, sendo apenas permitidas rotações de 180° ou simetrias horizontais. Frequentemente também se admitem pequenas rotações sobre as orientações base de até um máximo de 3° .

Existem diversas aplicações e módulos específicos para a obtenção de padrões de corte de boa qualidade para a indústria de confecções, a grande maioria delas está mesmo integrada em sistemas que permitem controlar automaticamente as máquinas de corte. No entanto, em todas estas aplicações autónomas ou sistemas onde os módulos são ligados existe sempre a possibilidade de melhorar interactivamente a qualidade dos padrões de corte quando necessário. Uma referência a algumas destas soluções será apresentada no final da secção 2.3.

Indústria do Calçado

O calçado é, igualmente, uma das mais importantes áreas industriais portuguesas, com um tecido industrial composto por um grande número de empresas de pequena e média dimensão e relativamente poucas de grande dimensão. Trata-se de uma indústria igualmente de âmbito internacional e onde a concorrência é também muito elevada. É igualmente uma indústria baseada em mão-de-obra intensiva e que nos últimos anos tem sofrido com vários processos de deslocalização para países com menores custos de mão-de-obra.

A indústria do calçado apresenta uma série de particularidades que dificultam a utilização de ferramentas de posicionamento automático de formas

irregulares. As dificuldades específicas desta indústria devem-se principalmente à sua principal matéria-prima: a pele. Sendo um produto de origem natural, a pele caracteriza-se pela não homogeneidade, a possibilidade da existência de defeitos e por formas altamente irregulares, que naturalmente obrigam ao planeamento e ao corte de uma pele de cada vez. Apesar destas dificuldades, o posicionamento de formas irregulares é uma área importante na indústria do calçado, já que o custo total das matérias-primas representam entre 55 a 60% dos custos totais de produção nas indústrias de calçado portuguesas [Melo e Duarte, 2001].

O planeamento do processo de corte, na grande maioria das indústrias do calçado, é totalmente manual e, na maior parte dos casos, é realizado pelo próprio operário no momento do corte. Estes operários analisam a pele, detectando defeitos e zonas de menor qualidade, e procuram locais de qualidade adequada para o posicionamento e o corte de determinada forma irregular. Algumas indústrias recorrem a ferramentas de CAD/CAM para a realização do planeamento do processo de corte. Nestas situações, torna-se necessária uma análise prévia da pele para identificação dos defeitos e atribuição de um nível de qualidade às várias zonas da pele. É de referir que já existe equipamento e aplicações informáticas, que se integram em sistemas de CAD/CAM, para a realização desta tarefa de uma forma automática.

Como já foi referido, o problema de PFI existente na indústria do calçado é bastante condicionado pelas características naturais da pele, particularmente pela não homogeneidade (zonas de diferentes níveis de qualidade), pela forma irregular e pela existência de zonas defeituosas. Ferramentas automáticas para resolver este tipo de problemas necessitam não só de obter padrões de corte com bons aproveitamentos e sem sobreposições, mas também de conseguir lidar com estas características específicas. Assim, as ferramentas automáticas têm de ser capazes de lidar com zonas de diferente qualidade e de assegurar que o posicionamento de uma determinada forma irregular é feito numa zona onde a qualidade da pele tem um nível de qualidade igual ou superior ao exigido. A forma totalmente irregular das peles e a possibilidade de existência de buracos (zonas defeituosas) no seu interior obrigam à representação da pele por um polígono multiplamente conexo¹⁰ ou alternativamente a considerar o pré-posicionamento de objectos com as formas dos defeitos e do contorno da pele de forma a evitar que nessas zo-

¹⁰ Conceito a ser definido no capítulo seguinte.

nas sejam posicionadas formas irregulares a cortar. Como uma pele não tem uma orientação especial, as formas irregulares podem ser posicionadas segundo qualquer rotação, aumentando muito a complexidade destes problemas. Por fim, as ferramentas automáticas para resolver problemas de PFI da indústria do calçado necessitam também de seleccionar quais as formas irregulares a posicionar, dado que as peles têm dimensões finitas.

Apesar das dificuldades apresentadas, existem algumas ferramentas automáticas capazes de resolver satisfatoriamente os problemas de PFI específicos desta indústria. Tal como no caso da indústria das confecções, estas ferramentas integram-se preferencialmente em sistemas CAD/CAM que controlam todo o processo produtivo, desde a concepção dos produtos até à operação de corte. No final da secção 2.3 será feita referência a algumas destas ferramentas.

Indústria do Mobiliário em Madeira

A indústria portuguesa do mobiliário em madeira encontra-se numa situação completamente diferente relativamente às duas áreas industriais anteriores, possuindo uma importância consideravelmente menor na indústria portuguesa. O tecido industrial desta área é fundamentalmente constituído por pequenas e médias empresas, muitas delas ainda com processos de fabrico praticamente artesanais.

Esta indústria caracteriza-se por ter elevados níveis de desperdício de matéria-prima, tipicamente surgem valores entre 40 e 50%, ou mesmo mais altos. Existem várias razões para estes elevados valores de desperdício, das quais merecem particular destaque o preço relativamente baixo da madeira, a pouca precisão do processo de corte¹¹ e o tamanho relativamente grande das formas irregulares comparativamente ao tamanho das placas. Estes aspectos explicam a não obtenção de bons níveis de aproveitamento, que aliados à reduzida capacidade tecnológica das empresas desmotivam eventuais tentativas de resolução destes.

Na grande maioria das indústrias de mobiliário em madeira, o planeamento do posicionamento de formas irregulares é totalmente manual, realizado pelo próprio operador da máquina de corte. Nas restantes empresas, recorre-se a ferramentas de CAD/CAM para auxiliar o posicionamento de

¹¹O corte de madeira é um processo muito pouco preciso, em que é necessário considerar folgas entre as várias formas irregulares para a realização do corte.

formas irregulares. As razões anteriormente apontadas explicam esta situação.

O problema de PFI que surge na indústria de mobiliário encontra-se, de alguma forma, numa posição intermédia face aos problemas das indústrias de confecções e do calçado. Por um lado, a forma irregular e a existência de defeitos, nós, são abordados de forma semelhante à da indústria do calçado, embora não seja necessário considerar zonas de diferente qualidade. Por outro lado, a existência de um veio na madeira limita as possibilidades de posicionamento das formas irregulares a simetrias e a rotações de 180°, tal como na indústria de confecções.

As aplicações de posicionamento automático de formas irregulares existentes para a indústria do mobiliário em madeira resultam de adaptações a aplicações desenvolvidas para outro tipo de indústrias. Estas aplicações serão também referidas no final da secção 2.3.

Indústria Metalomecânica

A situação da indústria portuguesa de metalomecânica é substancialmente diferente das indústrias anteriores. Em primeiro lugar, a dimensão desta área industrial é consideravelmente menor, assim como a respectiva importância na indústria nacional. Por outro lado, o tecido industrial desta área é radicalmente diferente dos anteriores, constituído por empresas de alguma dimensão, em oposição às áreas industriais anteriores onde existe uma proliferação de pequenas e médias empresas.

A nível internacional, a indústria metalomecânica é, a par da indústria de confecções, das mais avançadas na utilização de ferramentas automáticas de posicionamento de formas irregulares. Dentro deste sector industrial, o subsector da construção naval foi o precursor no desenvolvimento das soluções de posicionamento automático, sendo seguido nos tempos mais recentes pela indústria automóvel e pela indústria aeronáutica. É de realçar que grande parte do desenvolvimento neste sector industrial deve-se aos investimentos dos grandes estaleiros navais e das multinacionais de construção de automóveis e de aviões.

O problema de PFI, que surge na indústria da metalomecânica é o que de base apresenta menos limitações. As placas metálicas são rectangulares, com dimensões finitas, homogéneas e sem defeitos, sendo representadas por um simples rectângulo. Também não existem restrições ao nível das orien-

tações possíveis para o posicionamento das formas irregulares. No entanto, o posicionamento de formas irregulares na indústria de metalomecânica está fortemente condicionado por um conjunto de regras específicas, impostas pela tecnologia utilizada no processo de corte, que limitam a tentativa de minimização do desperdício, que é o primeiro objectivo de qualquer problema de PFI. A imposição destas regras fica a dever-se à técnica de corte utilizada na indústria metalomecânica, baseada na aplicação de uma fonte de calor, e às propriedades físicas das placas de metal, que se deformam com o calor, e destinam-se a impedir que o corte de uma forma irregular provoque deformações nela própria ou numa forma irregular vizinha. As regras que é necessário respeitar podem-se resumir nos seguintes tópicos:

- as formas irregulares não podem ser posicionadas muito próximas de outras de tamanho muito diferente;
- o posicionamento das formas irregulares tem de levar em consideração a ordem de corte;
- é necessário prever pontos de suporte da forma irregular à placa durante o processo de corte.

A importância dos problemas de PFI na indústria metalomecânica está também directamente relacionada com o peso relativo do custo do metal (normalmente aço) no custo final dos produtos. No subsector da construção naval, [Bitzer e von Hirschhausen, 1997] indica-se que o custo do aço representa cerca de 20% do custo total da produção de um navio de cento e oitenta mil toneladas. As principais razões para esta grande percentagem devem-se por um lado às grandes dimensões dos objectos pequenos, em relação aos objectos grandes, e por outro lado também à tecnologia de corte utilizada, que induzem maiores níveis de desperdício nos padrões de corte obtidos. É de referir que neste tipo de indústria o material desperdiçado pode ser reenviado para a fundição e, como tal, parcialmente reaproveitado. No entanto este reaproveitamento será sempre parcial, uma vez que o valor acrescentado introduzido ao longo do processo é sempre perdido.

A indústria metalomecânica, particularmente os seus subsectores da construção naval, automóvel e aeronáutica, caracteriza-se também pela utilização intensiva das mais avançadas tecnologias de produção. Não é assim de admirar que, e apesar das dificuldades inerentes à tecnologia de corte, existam

aplicações informáticas capazes de resolver problemas de PFI que satisfaçam as regras de posicionamento específicas a este tipo de indústria. O recurso a ferramentas de CAD/CAM também é muito frequente para efectuar o posicionamento de formas irregulares. No final da secção 2.3 serão também referidas algumas das aplicações informáticas disponíveis para lidar com os problemas específicos da indústria metalomecânica.

2.3 Revisão Bibliográfica sobre o Problema de Posicionamento de Formas Irregulares

De seguida será apresentada a revisão bibliográfica sobre problemas de PFI, com especial destaque para as principais publicações existentes sobre este problema. As publicações serão apresentadas por ordem cronológica e com destaque para a descrição das técnicas e abordagens utilizadas. Será também dado realce à representação geométrica utilizada nas diferentes publicações.

Uma das principais características dos métodos de resolução de problemas de PFI é a representação geométrica utilizada para as formas irregulares dos objectos pequenos. Admitindo que todas as formas irregulares são correctamente representados por polígonos, podemos dividir a forma como as diferentes abordagens representam geometricamente as formas irregulares em dois grandes tipos: as representações exactas, baseadas em representações poligonais ou em *quadtrees*, e as representações aproximadas, baseadas em aproximações rectangulares ou matriciais. De seguida descrevem-se as representações geométricas mais importantes:

- matricial — as formas irregulares são discretizadas e aproximadas por uma grelha com a precisão desejada, sendo posteriormente representadas por matrizes;
- *quadtrees* — as formas irregulares são representadas por estruturas em árvore que recursivamente se subdividem dinamicamente dependendo das necessidades, funcionam como grelhas dinâmicas;
- aproximação rectangular — as formas irregulares representam-se pelos respectivos rectângulos envolventes;
- aproximação por n -rectângulos — nesta representação as formas irregulares são aproximadas por dois ou mais rectângulos;

- descrição poligonal inteira — as formas irregulares são descritas por polígonos com coordenadas inteiras, os vértices dos polígonos deverão estar sobre uma grelha de posicionamento;
- descrição poligonal — as formas irregulares são descritas por polígonos, não existindo nenhuma restrição para as coordenadas dos vértices.

Representações geométricas baseadas em grelhas permitem controlar facilmente a relação entre a precisão de cálculo utilizada e o tempo total de cálculo necessário. Nas representações baseadas em aproximações por um ou mais rectângulos, poderá proceder-se ao agrupamento de várias formas irregulares de forma a se obterem melhores aproximações rectangulares. As representações baseadas em descrições poligonais geralmente permitem obter resultados de melhor qualidade, mas requerem um muito maior esforço computacional.

Além da representação geométrica, os métodos de resolução de problemas de PFI caracterizam-se também pelo tipo de algoritmo utilizado, sendo de considerar os seguintes tipos:

- algoritmos interactivos — algoritmos deste tipo são caracterizados pela interacção com um operador especializado, que dirige o processo de determinação da solução;
- algoritmos construtivos — neste tipo de algoritmos a solução vai sendo construída iterativamente pelo posicionamento sucessivo de um objecto pequeno de acordo com uma regra heurística;
- algoritmos de melhorias sucessivas — este tipo de algoritmos baseiam-se em processos iterativos de pesquisa sobre vizinhanças de forma a melhorar sucessivamente a solução;
- meta-heurísticas — algoritmos baseados em meta-heurísticas caracterizam-se também por pesquisas sobre vizinhanças, distinguindo-se do tipo anterior por permitirem movimentos para soluções de pior qualidade de forma controlada;
- algoritmos optimizantes — neste tipo de algoritmos a solução é encontrada recorrendo à utilização de técnicas de optimização, tais como a programação matemática, a pesquisa em árvore, etc.

Nesta revisão bibliográfica não serão referidos algoritmos de tipo interactivo, já que este tipo de algoritmos fica fora do âmbito desta tese. Em contrapartida, serão referidas abordagens e métodos de resolução de problemas directamente relacionados com os problemas de PFI.

As primeiras publicações sobre problemas de PFI datam da segunda metade da década de 60, merecendo particular destaque o trabalho de Art [1966]. Neste trabalho, o autor trata o problema de posicionamento de um conjunto de formas irregulares num rectângulo de comprimento infinito, minimizando o comprimento utilizado. As formas irregulares são representadas por descrições poligonais e é utilizado um algoritmo construtivo na resolução do problema de posicionamento. Neste algoritmo, a selecção da próxima forma irregular a ser posicionada depende do posicionamento das formas irregulares anteriores e é feita pela aplicação sucessiva de várias regras que vão excluindo formas irregulares até restar apenas uma. As formas irregulares com formas não convexas, i.e. côncavas, são previamente aproximadas por formas convexas e não se admitem rotações das formas irregulares. O maior contributo deste autor é a introdução do conceito de invólucro de posicionamento entre duas formas irregulares (que o autor denomina de *envelope*) e que permite verificar se há intersecções entre duas formas irregulares. O conceito de invólucro de posicionamento entre duas formas irregulares é uma das mais importantes ferramentas disponíveis para resolver problemas de PFI e será apresentado em detalhe na subsecção 3.2.4.

Ainda na década de 60 são de destacar vários trabalhos sobre o problema de PFI específico da indústria de confecções realizados no centro de investigação da IBM de Nova Iorque (*IBM New York Scientific Center*). Em [Gurel, 1968b,a] é apresentada uma abordagem baseada na Teoria de Grafos, que utiliza várias regras e critérios de posicionamento, como: a ordenação das formas irregulares, a maximização do contacto entre arestas, a maximização do contacto entre arestas e fronteira, a minimização do comprimento do padrão e ainda regras derivadas dos procedimentos utilizados no posicionamento manual das formas irregulares. O mesmo autor apresenta em [Gurel, 1969] uma outra abordagem para o mesmo problema, baseada em Grafos e que combina vários objectivos, como a minimização do desperdício entre duas formas irregulares, a minimização do desperdício entre mais de duas formas irregulares e a minimização do desperdício entre formas irregulares e a fronteira da placa. Esta abordagem começa por posicionar as

formas irregulares maiores em dois cantos da placa de forma a obter um bom aproveitamento da largura do rectângulo. De seguida são construídas colunas de formas irregulares que vão sendo colocadas à esquerda ou à direita do rectângulo.

O primeiro algoritmo optimizante aplicado ao problema de PFI é apresentado por Adamowicz [1969]. Neste trabalho, o autor aborda o problema de posicionamento de um conjunto de formas irregulares no interior de um conjunto de placas de formas também irregulares. As formas irregulares e as placas podem ter formas não convexas e inclusivamente múltiplamente conexas, embora neste caso seja necessário uma conversão prévia para formas simplesmente conexas. O algoritmo optimizante apresentado decompõe o problema em duas fases: um problema matemático e um problema geométrico. A resolução do problema matemático permite determinar uma afectação das formas irregulares às placas. A admissibilidade desta afectação será verificada pela resolução do problema geométrico, tentando posicionar todas as formas irregulares nas placas sem sobreposições. Nas situações em que existe sobreposição, adicionam-se novas restrições ao problema matemático, indicativas da impossibilidade de posicionamento sem sobreposições. O problema matemático é de novo resolvido, obtendo-se uma nova afectação de formas irregulares às placas, cuja admissibilidade será de novo verificada pela resolução do problema geométrico. Este processo repete-se, até que seja encontrada uma afectação das formas irregulares à placa que não provoque sobreposições. De acordo com [Mahadevan, 1984], esta abordagem nunca ficou completamente operacional e nem sequer é conhecida qualquer medida do seu desempenho.

Haims e Freeman [1970] propõem uma abordagem em duas fases para o problema de PFI, que se baseia na criação de módulos rectangulares e no posterior posicionamento desses módulos. Os módulos rectangulares são obtidos a partir das envolventes rectangulares de área mínima de uma única forma irregular ou, para aumentar a eficiência da abordagem, de agrupamentos de várias formas irregulares. Os autores consideram agrupamentos com o máximo de oito formas irregulares o método utilizado para a criação dos agrupamentos está descrito em [Haims, 1966]. O posicionamento dos rectângulos é efectuado recorrendo a um algoritmo de programação dinâmica. Nesta abordagem é utilizada uma representação geométrica mista, com descrições poligonais na fase de criação dos módulos rectangulares e

simples rectângulos na fase de posicionamento dos rectângulos.

[Adamowicz e Albano, 1972] também apresentam uma abordagem em duas fases para o problema do PFI e que igualmente se baseia na criação de agrupamentos de formas irregulares e posterior posicionamento das envolventes rectangulares desses agrupamentos. A representação geométrica também é mista, com descrições poligonais na fase de criação dos agrupamentos e simples rectângulos na fase de posicionamento dos agrupamentos. O método de posicionamento das envolventes rectangulares dos agrupamentos também se baseia num algoritmo de programação dinâmica. Este algoritmo cria todas as combinações de tiras com as envolventes rectangulares disponíveis e, de seguida, selecciona as tiras que conduzem ao melhor posicionamento. O método de criação dos agrupamentos de formas irregulares baseia-se na escolha de uma forma irregular e a partir dela na selecção de um dos seguintes quatro tipos de agrupamento:

1. agrupamento apenas de uma forma irregular, com uma das arestas paralela em relação a um dos eixos de coordenadas ortogonais e com o rectângulo envolvente de menor área;
2. idêntico ao anterior, mas onde se podem utilizar até quatro rectângulos para preencher a área não ocupada do rectângulo envolvente;
3. agrupamento com duas formas irregulares iguais, mas rodadas de 180° entre si e orientadas de modo a minimizar a área do rectângulo envolvente¹²;
4. igual ao anterior, mas onde se podem utilizar até quatro rectângulos para preencher a área não ocupada do rectângulo envolvente.

Mais tarde, os mesmos autores apresentam em [Adamowicz e Albano, 1976a] e em [Adamowicz e Albano, 1976b] uma evolução da abordagem anterior. Em [Adamowicz e Albano, 1976b] é descrita uma nova versão do algoritmo de agrupamento de formas irregulares. Nesta nova versão é eliminado o limite de quatro formas irregulares para melhor preencher o rectângulo envolvente e é também apresentada a descrição do processo de cálculo

¹²O posicionamento relativo de duas formas irregulares que conduz ao rectângulo envolvente de área mínima, calcula-se a partir do conceito de invólucro de posicionamento. No entanto, neste trabalho não é apresentada a descrição do respectivo processo de cálculo.

do rectângulo envolvente de área mínima¹³. O método de posicionamento de rectângulos em tiras é aprofundado em [Adamowicz e Albano, 1976a].

Tanaka e Wachi [1973] propõem um algoritmo construtivo para a resolução do problema de PFI baseado no conceito de perfil do posicionamento. Este conceito não é mais do que o contorno exterior das formas irregulares já posicionadas. A representação geométrica utilizada é matricial, sendo as formas irregulares representadas por conjuntos convexos de células unitárias.

[Albano, 1977] retorna ao problema do posicionamento de formas irregulares no interior de uma placa rectangular, agora segundo uma perspectiva interactiva. Neste trabalho, o autor descreve um sistema de posicionamento semi-automático especialmente vocacionado para a indústria naval. Trata-se de um sistema baseado na abordagem em duas fases proposta em [Adamowicz e Albano, 1972]. Neste sistema, o utilizador pode aceitar as soluções propostas pelo algoritmo, alterá-las ou mesmo construir novas soluções, nos casos em que não ficar satisfeito com a qualidade das soluções propostas.

Merecem também destaque os livros [Stoyan e Gil, 1976] e [Stoyan e Sokolovski, 1980] que agrupam diversos trabalhos produzidos até ao final da década de 70 na antiga União Soviética sobre o posicionamento de rectângulos e de formas irregulares. Os livros estão publicados apenas em Russo e Dyckhoff *et al.* [1997] refere que abordam quer aspectos teóricos quer aplicações reais.

Em [Albano e Sapuppo, 1980] é apresentado um algoritmo de pesquisa em árvore no espaço das soluções e que utiliza uma descrição totalmente poligonal para representar as formas irregulares. O algoritmo apresentado baseia-se numa técnica genérica de resolução de problemas e, mais tarde, é descrita por Nilsson [1982]. Esta técnica é muito utilizada na resolução de problemas de inteligência artificial e, mesmo, de investigação operacional. Neste algoritmo, o posicionamento das formas irregulares na placa é determinado por uma regra heurística do tipo mais à esquerda e mais abaixo possível. A determinação deste ponto é feita a partir do invólucro de posicionamento entre a forma irregular a posicionar e o contorno exterior da região da placa ocupada por formas irregulares — o perfil da placa. Em face desta regra de posicionamento, a resolução deste problema consiste apenas na determinação da melhor sequência para o posicionamento das formas

¹³É de salientar que, conforme é demonstrado em [Oliveira, 1995], o método apresentado nesse artigo nem sempre permite determinar o rectângulo envolvente de área mínima.

irregulares na placa. É precisamente na determinação da sequência de posicionamento que é utilizado o processo de pesquisa em árvore, reduzindo-se deste modo a arbitrariedade da escolha da próxima forma irregular a ser posicionada em cada iteração. Um nó da árvore corresponde ao posicionamento de mais uma forma irregular no interior da placa, ou seja equivale a acrescentar uma determinada forma irregular à sequência de posicionamento. Para acelerar o algoritmo, os autores evitam a pesquisa exaustiva da árvore ao limitarem o número de descendentes de cada nó, ao considerarem um tamanho máximo para a lista de nós da árvore por explorar e ao fixarem um limite máximo para o número de níveis que a pesquisa pode retroceder na árvore (*backtracking*). A escolha dos descendentes de um nó e a selecção dos nós da árvore ainda por explorar que deverão ser mantidos na lista de nós por explorar são feitas em função da estimativa do desperdício final do solução. Esta estimativa do desperdício final é obtida pela soma do desperdício da solução até esse nó (ou seja o desperdício existente no interior do perfil) e do desperdício que o posicionamento da nova forma irregular irá originar, que os autores estimam como sendo uma percentagem fixa da área total da forma irregular a posicionar.

Em [Konopasek, 1981] é descrita a primeira formulação matemática para o problema de PFI. Esta formulação baseia-se no estabelecimento de um conjunto de restrições obtidas a partir das posições relativas entre pares de arestas das formas irregulares e que garantem a não existência de sobreposições. Enquanto algumas destas restrições necessitam de ser obrigatoriamente respeitadas em simultâneo, outras restrições necessitam de ser verificadas alternativamente, i.e. basta que uma delas de verifique. O autor apresenta duas formulações, uma com restrições não lineares, capaz de resolver apenas problemas muito simples, e uma outra baseada em modelos de programação mista com variáveis binárias, que o autor acaba por não testar devido aos grandes quadros *Simplex* que a formulação origina mesmo para problemas com poucas formas irregulares. As condições de não intersecção entre as formas irregulares, que estão na origem das restrições, são geradas a partir de *D-Functions*. Estas funções são um rearranjo da expressão analítica do cálculo da distância de um ponto a uma recta e permitem determinar a posição relativa entre um ponto e um segmento de recta.

Mahadevan [1984] aborda o problema do posicionamento de formas irregulares no interior de placas rectangulares. O autor começa por estabelecer

as condições necessárias e suficientes de não intersecção entre duas arestas com base em *D-Functions*, considerando situações de toque e de colinearidade entre arestas. Estas condições são depois utilizadas na definição das condições de não sobreposição e de não intersecção de dois polígonos e estão na base do algoritmo de determinação do invólucro de posicionamento entre dois polígonos que foi pela primeira vez descrito neste trabalho. Ainda neste trabalho, é abordado o problema do posicionamento repetido de uma só forma irregular, apresentando uma solução óptima para este problema quando não se consideram os efeitos das bordas da placa. Por fim, o autor apresenta também uma evolução da formulação de programação mista com variáveis binárias proposta em [Konopasek, 1981] para o problema do PFI. Nesta formulação o número de variáveis e de restrições é significativamente reduzido pela utilização do invólucro de posicionamento e são apenas consideradas formas convexas, pelo que as formas irregulares côncavas são decompostas em formas convexas justapostas.

Segenreich e Braga [1986] apresentam uma abordagem heurística ao problema de PFI baseada numa representação matricial das formas irregulares. Esta representação matricial aproxima as formas irregulares e permite distinguir o interior, a fronteira e o exterior de cada forma irregular ao atribuir respectivamente os valores de 3, 1 e 0 a cada posição da matriz. A matriz da placa é inicializada com zeros. Esta representação é capaz de lidar com formas irregulares representadas por polígonos com multiplicidade superior a um e com regiões não conexas. A abordagem proposta baseia-se numa heurística de posicionamento gulosa do tipo *bottom-left*, que procura posicionamentos admissíveis a partir do canto inferior esquerdo ou a partir do ponto do último posicionamento admissível para uma forma irregular do mesmo tipo. A operação de verificação de sobreposições é feita adicionando-se a matriz que representa a forma irregular que se quer posicionar à matriz da placa nas coordenadas correspondentes ao ponto de posicionamento e, de seguida, analisa-se o resultado da adição à procura de valores superiores a 3, que são indicativos da existência de sobreposições. Esta heurística tem a particularidade de conseguir detectar e preencher buracos no meio de um padrão de corte e é totalmente dependente da ordem escolhida para o posicionamento das formas irregulares. A abordagem proposta pelos autores inclui um processo iterativo, onde um número de sequências de posicionamento pré-determinado pelo utilizador é gerado aleatoriamente.

Qu e Sanders [1987] propõem uma solução vocacionada para resolver problemas de PFI típicos da indústria metalomecânica, onde um grande número de formas são rectângulos puros e as restantes são facilmente decompostas num número finito de rectângulos. A representação geométrica utilizada neste trabalho é assim baseada em rectângulos, sendo as formas irregulares decompostas num número pré-determinado de rectângulos. Esta solução usa uma heurística de posicionamento baseada na construção de camadas sucessivas e dentro de cada camada é utilizada uma estratégia de posicionamento do tipo *bottom-left*.

No início da década de 90, o problema de PFI específico da indústria de confecções foi alvo da atenção por parte do grupo de investigação liderado por Victor Milenkovic. Milenkovic *et al.* [1991] estabelecem o objectivo de virem a conseguir igualar os resultados obtidos manualmente por operadores especializados em pelo menos 80% dos casos. O problema alvo desta investigação é o posicionamento de formas irregulares no interior de um rectângulo e é utilizada uma representação poligonal para a descrição das formas irregulares a colocar. A abordagem adoptada consistiu no desenvolvimento de um algoritmo que incorporasse as regras e as estratégias de posicionamento utilizadas por operadores especializados. Em primeiro lugar, trataram o problema específico do posicionamento de calças, começando por identificar dois tipos formas irregulares, as grandes, denominadas painéis, e as outras, bastante mais pequenas, denominadas simplesmente peças. A abordagem adoptada divide-se nas seguintes três fases:

- posicionamento dos painéis [Milenkovic *et al.*, 1992] — os painéis posicionam-se em sucessivas colunas de quatro elementos, formando uma grelha. Na geração das colunas, são tentadas todas as ordenações possíveis de painéis e é dada prioridade aos painéis mais difíceis de posicionar. A coluna escolhida é aquela que tiver a altura mínima.
- compactação dos painéis [Li e Milenkovic, 1993, 1995] — o processo de compactação é descrito pelos autores como sendo a aplicação de uma força aos painéis, no sentido de reduzir o comprimento do padrão, ou a aplicação de uma força nos painéis que estejam à volta de um buraco, no sentido de aumentar as dimensões deste. O processo de compactação consiste na resolução de um problema de programação linear, para o qual o autor afirma serem habitualmente precisas apenas

uma ou duas iterações. As restrições de não sobreposição são obtidas por intermédio do invólucro de posicionamento entre pares de peças e de painéis, sendo só consideradas restrições para pares de peças e ou de painéis vizinhos.

- posicionamento das peças mais pequenas [Milenkovic *et al.*, 1992] — as peças pequenas são posicionadas, por uma estratégia idêntica à do posicionamento dos painéis, nos buracos livres existentes entre os painéis.

Bøgelund [1992] aborda o problema de posicionamento de formas irregulares no interior de uma placa rectangular de comprimento infinito. Neste trabalho, a autora baseia-se no algoritmo apresentado em [Albano e Sappuppo, 1980] e utiliza uma representação poligonal inteira para descrever as formas irregulares. Este trabalho tem como principal motivo de interesse, a possibilidade de tratamento de formas irregulares com arcos de circunferência. A representação de formas irregulares com arcos de circunferência é feita por um processo semelhante ao utilizado na representação de polígonos, acrescentando-se mais um parâmetro às coordenadas dos vértices indicador da curvatura da linha. No entanto, a autora refere dificuldades na implementação do algoritmo capaz de tratar arcos de circunferência, apresentando resultados apenas para problemas com formas poligonais.

Scheithauer e Terno [1993] abordam o problema de PFI segundo uma perspectiva optimizante. Neste trabalho, os autores apresentam modelos de programação linear mista para este problema, construídos a partir da aplicação do conceito de invólucro de posicionamento entre todos os pares de formas irregulares. Os modelos apresentados aplicam-se quando os invólucros de posicionamento são convexos e a placa de posicionamento é rectangular. Os autores sugerem a utilização do invólucro de posicionamento interior nos casos em que a placa tem forma irregular, não sendo, no entanto, apresentada qualquer definição do conceito.

Em [Blazewicz *et al.*, 1993] e [Blazewicz e Walkowiak, 1995] é proposta uma abordagem em duas fases para o problema do posicionamento de formas irregulares no interior de uma placa rectangular. Neste trabalho é utilizada uma representação poligonal e também são consideradas formas com linhas curvas regulares, circunferências e arcos de circunferência, que são aproximados por segmentos de recta. Na abordagem proposta, a primeira

fase consiste na geração de uma solução inicial por uma regra heurística de posicionamento sequencial das formas irregulares, que no entanto tem a possibilidade de preencher buracos livres existentes entre formas irregulares previamente posicionadas. A segunda fase da abordagem consiste na aplicação de um algoritmo de pesquisa tabu, com o objectivo de melhorar a solução inicial. A estrutura de vizinhança utilizada baseia-se em mover uma forma irregular para uma zona não ocupada da placa, um buraco.

O problema do PFI é também abordado por Oliveira e Ferreira [1993]. Neste trabalho, os autores utilizam duas representações, uma matricial e outra poligonal, para descrever as formas irregulares. Apresentam duas versões de um método de pesquisa por arrefecimento simulado, uma utilizando a representação matricial e outra a representação poligonal inteira.

Oliveira [1995] volta a abordar o problema de PFI, considerando agora várias hipóteses para a forma da placa, designadamente: rectangular, rectangular com comprimento infinito e irregular com defeitos. O autor volta a utilizar várias representações para descrever as formas irregulares, designadamente: matricial e descrição poligonal inteira e não inteira. São igualmente aplicadas várias técnicas de resolução a este problema, desde meta-heurísticas a algoritmos construtivos. O autor apresenta ainda algoritmos para a determinação do invólucro de posicionamento de dois polígonos e para determinação do polígono resultante da fusão de dois polígonos. Dos resultados apresentados, merecem particular destaque os obtidos pelos algoritmos construtivos, principalmente ao nível da eficiência.

Heistermann e Lengauer [1995] e Heckmann e Lengauer [1995] propõem duas abordagens desenvolvidas especificamente para a indústria do calçado e para a indústria de confecções, respectivamente. As duas abordagens utilizam descrições poligonais para representarem as formas irregulares. Em Heistermann e Lengauer [1995] a placa é ela própria uma forma irregular e não homogénea, possuindo zonas de diferentes qualidades e mesmo defeitos no seu interior. Já em Heckmann e Lengauer [1995] a placa é um rectângulo homogéneo de comprimento infinito. As duas abordagens utilizam ainda um método de posicionamento muito interessante, que começa por efectuar o posicionamento das formas irregulares considerando aproximações grosseiras das formas irregulares (i.e. com poucos vértices), o que permite estabelecer rapidamente as posições relativas entre as formas irregulares. As aproximações vão sendo cada vez menos grosseiras, acabando-se

eventualmente por se usarem as descrições poligonais exactas das formas irregulares e obter-se assim um padrão de corte compacto. Este método permite obter abordagens muito eficientes para a resolução de problemas de PFI e capazes de encontrar soluções de boa qualidade. Em [Heistermann e Lengauer, 1995] a abordagem baseia-se num algoritmo construtivo, devido ao elevado grau combinatório dos problemas da indústria do calçado que a não existência de restrições nas rotações de posicionamento admissíveis provoca. Já em [Heckmann e Lengauer, 1995] é utilizado um algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado baseado em três tipos de movimentos: translações, rotações e trocas de posição.

Diversas abordagens baseadas em algoritmos genéticos têm sido propostas para resolver problemas de PFI [Ismail e Hon, 1995] [Bounsaythip *et al.*, 1995] [Jakobs, 1996] [Bounsaythip e Maouche, 1996]. Estas abordagens caracterizam-se por utilizarem aproximações discretas, com maior ou menor precisão, na representação geométrica das formas irregulares, devido ao grande esforço computacional requerido pelos algoritmos que trabalham com populações. Em [Jakobs, 1996] as formas irregulares são aproximadas por rectângulos, após serem rodadas para a orientação que conduz ao rectângulo envolvente de área mínima. Em [Ismail e Hon, 1995] as formas irregulares são também rodadas para a orientação que conduz ao rectângulo envolvente de área mínima, sendo de seguida aproximadas por uma representação matricial. Em [Bounsaythip *et al.*, 1995] e [Bounsaythip e Maouche, 1996] as formas irregulares são representadas por uma descrição poligonal aproximada que usa como base os rectângulos envolventes das formas irregulares e adicionalmente considera quatro “buracos”, um em cada canto do rectângulo envolvente, descritos por polígonos sobre uma grelha inteira e que permitem obter uma melhor aproximação da forma irregular.

Stoyan *et al.* [1996] apresentam uma abordagem baseada em modelos de programação matemática para o problema de PFI, com a particularidade de considerarem a existência de defeitos na placa rectangular. Neste trabalho, os autores utilizam descrições poligonais para representarem as formas irregulares e as zonas defeituosas. O modelo de programação matemática é construído a partir de funções que são generalizações do invólucro de posicionamento, a que os autores dão o nome de Φ -*Functions*. O modelo assim obtido pode ser reescrito sob a forma de sistemas de equações disjuntos e pode ser resolvido por técnicas optimizantes ou por técnicas heurísticas. As

técnicas optimizantes utilizadas diferem do método *Simplex* clássico, procurando tirar partido da estrutura particular dada ao modelo e permitem resolver até à optimalidade problemas de pequena dimensão. As técnicas heurísticas permitem obter óptimos locais e baseiam-se num processo iterativo que parte de diferentes padrões iniciais.

Em [Daniels e Milenkovic, 1997] e [Milenkovic, 1997] é abordado o problema de posicionar formas irregulares de pequenas dimensões no interior de placas já parcialmente preenchidas por formas irregulares de maiores dimensões, de forma a aproveitar os espaços vazios existentes entre as formas irregulares de maiores dimensões. Estes trabalhos usam descrições poligonais para representarem as formas irregulares e invólucros de posicionamento para garantir a admissibilidade das soluções. Em [Daniels e Milenkovic, 1997] é apresentada uma abordagem heurística ao problema, puramente geométrica, enquanto em [Milenkovic, 1997] são propostos algoritmos exactos para resolver a versão do problema onde as formas irregulares de pequenas dimensões necessitam de ser convexas. Em [Milenkovic e Daniels, 1999], os mesmos autores abordam o mesmo problema com base em modelos de programação matemática e sem restrições quanto à convexidade das formas irregulares de pequenas dimensões.

Dowsland *et al.* [1998] tratam o problema de PFI no interior de uma placa rectangular de comprimento infinito. Neste trabalho, os autores apresentam uma abordagem heurística à resolução deste problema, que utiliza uma descrição poligonal inteira para representar as formas irregulares. Esta abordagem baseia-se numa regra de posicionamento das formas irregulares do tipo o mais à esquerda possível, seguido de um processo iterativo, denominado *jostle*, em que as formas irregulares vão sendo sucessivamente empurradas para a esquerda e para a direita, alternadamente, de modo a encaixarem-se melhor. Esta abordagem caracteriza-se ainda pela possibilidade de detectar e preencher buracos. Os resultados apresentados atestam a boa qualidade da abordagem proposta neste trabalho.

Cagan *et al.* [1998] apresentam uma abordagem baseada num algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado para o problema de PFI tridimensional. Esta abordagem utiliza uma representação geométrica baseada numa decomposição hierárquica dos objectos irregulares. Trata-se de uma representação geométrica exacta que usa o princípio de funcionamento das *octrees*, em que a precisão utilizada vai sendo refinada à medida das necessidades.

Em [Heckmann e Lengauer, 1998] é abordado o problema de PFI da indústria de confecções segundo uma perspectiva completamente diferente, já que os autores, além de descreverem uma abordagem de resolução do problema, preocupam-se também em apresentar medidas da qualidade das soluções obtidas. Estas medidas são calculadas pela diferença entre um limite superior e um limite inferior para a solução ótima. O limite superior é calculado pela abordagem de resolução aproximada descrita neste trabalho, que usa estratégias gulosas baseadas em invólucros de posicionamentos e um algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado. Já o limite inferior é calculado com técnicas de *branch-and-bound* que determinam soluções ótimas para subproblemas e permitem estabelecer um limite inferior para o problema de PFI. Os autores reportam resultados competitivos para a abordagem de resolução descrita quando comparados com os obtidos por operadores especializados e tempos de cálculo inferiores a uma hora. Já os limites inferiores necessitam de várias horas de tempo de cálculo e apresentam diferenças para os limites superiores menores do que 0.4% para certo tipo de problemas da indústria de confecções, como por exemplo os problemas de posicionamento de partes de calças.

Milenkovic [1998] aborda o problema de encontrar as posições e orientações para um conjunto de polígonos posicionados numa placa, de forma a minimizar as sobreposições entre polígonos, com uma metodologia que recorre à resolução de sucessivos modelos de programação matemática. Neste trabalho, são utilizadas representações geométricas baseadas em descrições poligonais e as formas irregulares não convexas necessitam de ser transformadas em uniões de polígonos convexos. É também apresentada uma alteração aos modelos de programação matemática que permite compactar padrões de corte sem sobreposições e onde as formas irregulares possam sofrer rotações.

Milenkovic [1999] volta a abordar o problema de posicionar formas irregulares de pequenas dimensões no interior de placas já parcialmente preenchidas por formas irregulares de maiores dimensões, mas agora as formas irregulares de pequenas dimensões podem sofrer rotações. Mais uma vez a abordagem baseia-se em modelos de programação matemática e utiliza descrições poligonais para representar as formas irregulares. O autor introduz também o conceito de *nearest pair rounding* que permite que cálculos numéricos possam ser feitos em vírgula flutuante arredondada de uma forma robusta.

Oliveira *et al.* [2000] apresentam uma heurística construtiva para o problema de PFI denominada TOPOS. Esta heurística baseia-se na adição de uma forma irregular de cada vez à solução parcial, que vai assim sendo sucessivamente construída. No entanto, e ao contrário de outras heurísticas construtivas do tipo *bottom-left*, na heurística TOPOS a solução parcial não é construída directamente sobre a placa, o que permite ir construindo a solução segundo todas as orientações. É no entanto necessário garantir que a solução parcial não ultrapasse os limites em altura da placa, para que no final seja possível posicioná-la sobre a placa. Neste trabalho são também apresentados e testados vários critérios para escolher a próxima forma irregular a posicionar e em que orientação, assim como se apresentam diferentes objectivos para avaliar e comparar soluções parciais. A representação geométrica das formas irregulares baseia-se em descrições poligonais e o invólucro de posicionamento é utilizado para garantir soluções admissíveis e compactas.

Em Bennell e Dowsland [2001] é proposta uma abordagem híbrida entre uma meta-heurística, a pesquisa tabu com *threshold*, e técnicas de optimização baseadas em modelos de programação linear. Esta abordagem baseia-se no algoritmo de pesquisa tabu para movimentar as formas irregulares para áreas diferentes da placa. Nesta abordagem são permitidas soluções não admissíveis, i.e. soluções onde existem sobreposições entre formas irregulares, que são obviamente penalizadas na função objectivo. Para simplificar os cálculos, o valor da sobreposição é aproximado pela soma das extensões horizontais de todas as sobreposições. Em [Bennell e Dowsland, 1999] é apresentada uma descrição detalhada do algoritmo de pesquisa tabu com *threshold*. As técnicas de optimização são utilizadas na fase de pesquisa local do algoritmo de pesquisa tabu com *threshold* e possibilitam a ocorrência de pequenos movimentos em várias formas irregulares simultaneamente, o que permite remover situações de sobreposições em soluções muito densas e em simultâneo compactar as soluções. Estas técnicas de optimização baseiam-se em modelos de programação linear construídos a partir das posições relativas das formas irregulares e das condições de não sobreposição entre polígonos obtidas a partir dos invólucros de posicionamento. A representação geométrica utilizada nesta abordagem é baseada em descrições poligonais e são utilizados dois tipos de vizinhanças: uma em que os pontos de posicionamento são definidos por uma grelha e outra onde os pontos de

posicionamento são definidos pelo invólucro de posicionamento.

Carravilla *et al.* [2003] apresentam uma abordagem ao problema de PFI baseada numa técnica de optimização completamente diferente: a programação em lógica por restrições. A dificuldade em lidar com disjunções de restrições inerente aos modelos de programação linear, não se verifica na programação por restrições. Nos problemas de PFI as restrições lógicas surgem naturalmente a partir das condições de não sobreposição entre polígonos e são obtidas directamente dos invólucros de posicionamento. Neste trabalho as formas irregulares não convexas são decompostas em formas convexas e os pontos de posicionamento estão limitados a uma grelha. Mais recentemente, em [Ribeiro e Carravilla, 2004] as mesmas autoras descrevem uma nova abordagem ao problema de PFI, agora baseada em programação por restrições e que apresentam uma restrição global específica para problemas de PFI denominada de *outside*.

Nielsen e Odgaard [2003] apresentam uma abordagem ao problema de PFI baseada no algoritmo de pesquisa local guiada. Este algoritmo de pesquisa local é uma meta-heurística que se caracteriza pela aplicação de alterações na função objectivo por forma a evitar os mínimos locais. Neste trabalho é também proposta a primeira verdadeira alternativa ao invólucro de posicionamento, para o estabelecimento das condições de não sobreposição entre polígonos, e que se baseia no cálculo da variação da sobreposição quando um polígono é movimentado horizontalmente ou verticalmente. Os autores apresentam, e provam a sua validade, a expressão geral da função que permite calcular esta sobreposição. Neste trabalho as formas irregulares são representadas por descrições poligonais. Os resultados apresentados mostram claramente a validade da abordagem proposta, particularmente em termos de tempo de cálculo. Os autores descrevem ainda uma extensão da abordagem proposta para problemas de PFI tridimensionais.

Em [Burke *et al.*, 2005] é apresentada uma nova abordagem ao problema de PFI. Esta abordagem baseia-se em dois algoritmos de pesquisa local: um algoritmo completamente guloso e um algoritmo de pesquisa tabu. As principais inovações deste trabalho são a capacidade de lidar directamente com formas irregulares descritas por arcos de circunferência e com buracos no seu interior. Os autores propõem ainda uma nova heurística de posicionamento do tipo *bottom-left* que utiliza uma grelha horizontal para restringir o conjunto de pontos de posicionamento admissíveis. Nesta abordagem são

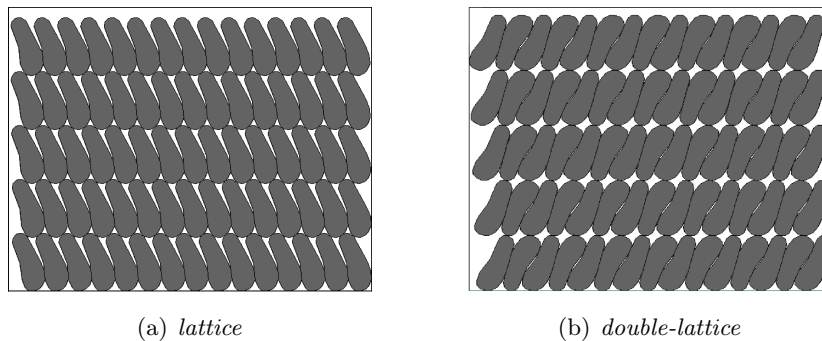


Figura 2.6: Exemplo de padrões de corte regulares.

utilizadas representações exactas das formas geométricas, com base em descrições poligonais e arcos de circunferência.

Um outro tipo de problemas de Posicionamento que envolve formas irregulares surge quando é necessário cortar grandes quantidades da mesma forma irregular (figura 2.6(a)). Nestas situações o posicionamento regular das formas irregulares surge como uma alternativa muito interessante, já que permite obter padrões de corte com baixos níveis de desperdício e que também são fáceis de cortar de uma forma automática. Os padrões de corte regulares, habitualmente denominados de *lattice*, são obtidos a partir da determinação de um par de vectores linearmente independentes v_1 e v_2 e da escolha da orientação mais adequada para a forma irregular de forma a melhor preencher a placa. Uma variante muito frequente é a consideração do posicionamento regular de duas formas irregulares iguais e onde uma delas está rodada de 180 graus (figura 2.6(b)), habitualmente denominado de *double-lattice*. Uma extensão deste conceito pode ser obtida ao realizar-se o agrupamento prévio de várias formas irregulares, seguido do posicionamento regular do agrupamento de formas irregulares.

De seguida referem-se alguns trabalhos publicados sobre posicionamento regular de peças com formas irregulares. Dori e Benbassat [1984] apresentam uma abordagem a este problema baseada na aproximação da forma irregular por uma forma mais adequada ao posicionamento regular. Inicialmente a forma irregular é aproximada por um polígono convexo, que por sua vez é aproximado por um hexágono irregular de fácil replicação num posicionamento regular. Em [Segenreich, 1988] são apresentados exemplos de posicionamentos regulares de polígonos convexos e de círculos. Cheng e Rao [1999] descrevem uma abordagem ao problema de posicionamento regu-

lar, especialmente vocacionada para as situações onde as formas irregulares não podem sofrer rotações. Em [Cheng e Rao, 2000], os mesmos autores apresentam uma evolução à abordagem anterior baseada na utilização de algoritmos genéticos. Stoyan e Pankratov [1999] aborda o problema de posicionamento regular baseado numa estratégia de construção de linhas ou colunas de formas irregulares e num modelo de programação matemática que permite determinar uma orientação adequada para o posicionamento das formas irregulares. Em [Milenkovic, 2002] também é abordado o problema de posicionamento regular, mas agora segundo uma estratégia que se baseia na construção de agrupamentos de poucas formas irregulares e posterior replicação dos agrupamentos. A construção dos agrupamentos baseia-se na minimização da envolvente rectangular do agrupamento e os exemplos mostram agrupamentos com um máximo de quatro formas irregulares.

Um outro tipo de problemas que também envolve o corte de formas irregulares, frequente na indústria de confecções, é a selecção dos padrões de corte a utilizar e em que quantidades. Neste tipo de problemas, a ênfase não está colocada na determinação dos padrões, mas sim em como os combinar de forma a minimizar os custos de produção. Farley [1988] apresenta uma abordagem a este problema baseada em modelos de programação inteira e quadrática, que minimiza os custos totais de produção. Nestes custos estão incluídos os custos de corte, de costura, de armazenamento e de comercialização, bem como os custos de subprodução e de sobreprodução. Elomri *et al.* [1994] descreve uma abordagem não-linear para o problema de minimização dos custos inerentes ao processo de corte das formas irregulares. Nesta abordagem é necessário respeitar os tamanhos, as cores e as quantidades pedidas e otimizar a utilização de tecido e reduzir o tempo de operação. Este problema também é abordado por Degraeve *et al.* [2002], que propõem modelos de programação inteira para minimizar o excesso de produção.

Para finalizar esta revisão bibliográfica será feita uma breve referência às principais aplicações comerciais disponíveis para resolver problemas de PFI. Uma lista mais exhaustiva pode ser consultada em [Hopper, 2000] e em [Nielsen e Odgaard, 2003]. A maioria das aplicações comerciais destinam-se à indústria metalomecânica, não havendo no entanto nenhuma que se destaque em relação às restantes. Estas aplicações apresentam fortes capacidades interactivas e disponibilizam também algoritmos de posicionamento automático utilizados principalmente como complemento ao posicionamento

manual. O número de aplicações comerciais dedicadas às indústrias de confecções e de calçado é substancialmente menor. Para estas indústrias existe uma aplicação que claramente se destaca em relação às restantes quer em termos de tempo de cálculo quer em qualidade dos resultados, o *AutoNester*. Esta aplicação é baseada nos trabalhos de [Heckmann e Lengauer, 1995] e de [Heistermann e Lengauer, 1995].

2.4 Forma do Problema abordado nesta Tese

No seguimento do trabalho de investigação descrito nesta tese será abordado o problema de PFI. Neste problema será dada especial atenção à variante que surge na indústria de confecções, com a consideração de características específicas a esta área industrial. No entanto, os algoritmos apresentados neste trabalho são suficientemente genéricos para poderem ser aplicados a outras áreas industriais.

No problema de PFI apenas são relevantes duas dimensões e, como já foi referido, este problema consiste na determinação do posicionamento de um conjunto de formas irregulares no interior de uma placa. O posicionamento das formas irregulares deve evitar sobreposições entre elas e deverá ter como objectivo a minimização de uma função de custo ou a maximização de uma função de valor, sendo habitualmente utilizado como objectivo a minimização do comprimento do rectângulo utilizado. Neste trabalho, são utilizadas descrições poligonais para representar as formas irregulares, pelo que formas curvilíneas deverão previamente ser aproximadas por polígonos. As formas irregulares podem ser não convexas, mas não podem ter buracos no seu interior e também não podem ter zonas de multiplicidade superior a um.

Capítulo 3

Abordagens à Resolução do Problema de Posicionamento de Formas Irregulares

Como já foi anteriormente referido, o problema de PFI caracteriza-se por apresentar simultaneamente dificuldades ao nível combinatório e ao nível geométrico. Do ponto de vista combinatório, as dificuldades advêm da própria natureza combinatória do problema de PFI. Já ao nível geométrico, as dificuldades residem na necessidade em realizar milhares de operações elementares de forma a garantir a admissibilidade das soluções obtidas. O desenvolvimento de abordagens à resolução de problemas de PFI necessita obrigatoriamente de ter em consideração estas duas características, não só de uma forma isolada mas também quando consideradas em simultâneo. Este capítulo será dedicado a apresentar e a analisar diferentes técnicas e metodologias utilizadas no desenvolvimento de abordagens de resolução de problemas de PFI.

Uma questão que obrigatoriamente tem de ser considerada, aquando do desenvolvimento de abordagens de resolução a um problema combinatório, é a complexidade computacional do problema. Esta questão é de primordial importância na selecção das técnicas e dos métodos de resolução a adoptar. Assim, será feita referência à complexidade computacional do problema de PFI. De igual modo, serão também referidas as complexidades computacionais de outros problemas relacionados com problemas de PFI ou que surgem durante a resolução de problemas de PFI.

Na primeira secção deste capítulo far-se-á referência à complexidade computacional dos problemas de PFI. Na secção seguinte apresentar-se-ão diversas ferramentas de geometria computacional de importância fundamental na resolução de problemas de PFI. Na terceira secção serão apresentados modelos matemáticos para o problema de PFI. Na última secção, será apresentada uma abordagem à resolução de problemas de PFI baseada em heurísticas construtivas de posicionamento.

3.1 Complexidade Computacional do Problema de Posicionamento de Formas Irregulares

A complexidade computacional dos problemas de Posicionamento tem sido alvo de diversos estudos, que deram origem a vários resultados publicados. Um dos resultados clássicos neste domínio é o da classificação do problema de *Bin Packing* unidimensional como $\mathcal{NP}$ -difícil no sentido forte [Garey e Johnson, 1979]. Igualmente conhecido é o resultado relativo ao problema Mochila unidimensional de $\mathcal{NP}$ -difícil, embora seja possível distinguir subproblemas com diferentes graus de dificuldade [Martello *et al.*, 2000]. A generalização destes resultados para problemas de dimensão superior é imediata a partir dos problemas unidimensionais. Martello *et al.* [2003] apresentam o resultado de $\mathcal{NP}$ -difícil no sentido forte para o problema de *Strip Packing* bidimensional, obtido por redução do problema de *Bin Packing* unidimensional.

Relativamente à complexidade computacional do problema de PFI, e recordando que este problema foi definido como um problema de Dimensões Variáveis (mais concretamente de minimização do comprimento utilizado), a classificação de $\mathcal{NP}$ -difícil no sentido forte pode ser obtida a partir do resultado apresentado para o problema de *Strip Packing* rectangular apresentado no parágrafo anterior. Em [Li e Milenkovic, 1993] e [Li e Milenkovic, 1995] o mesmo resultado é obtido, mas a partir da redução do problema de partição de um conjunto de S inteiros em dois subconjuntos S_1 e S_2 de forma que a soma dos dois subconjuntos seja igual.

Existem também resultados publicados sobre a complexidade computacional de problemas relacionados com o problema de PFI. Um dos problemas mais estudados a este nível tem sido o problema de Compactação de padrões de corte com formas irregulares. Neste problema pretende-se reduzir

o comprimento de um padrão de corte, movimentando simultaneamente as formas irregulares de um modo contínuo e sem sobreposições. Nos mesmos trabalhos referidos no parágrafo anterior para o problema de PFI [Li e Milenkovic, 1993] [Li e Milenkovic, 1995], os autores demonstram o resultado de $\mathcal{NP}$ -difícil para o problema de Compactação de rectângulos (generalizável a problemas com formas irregulares) e adicionalmente mostram que o problema de Compactação pertence à classe PSPACE-difícil ao apresentarem exemplos de padrões de corte que necessitam de um número exponencial de movimentos para atingirem o estado final.

Em [Daniels e Milenkovic, 1997] é apresentado um outro resultado relevante para o desenvolvimento de abordagens ao problema de PFI. Neste trabalho, os autores abordam o problema de encontrar um posicionamento válido de formas irregulares de pequenas dimensões no interior de placas já parcialmente preenchidas por formas irregulares de maiores dimensões¹ e mostram que o problema é $\mathcal{NP}$ -completo.

Na análise sobre a complexidade computacional do problema de PFI apresentada até ao momento, apenas foi considerada a existência de um conjunto de N objectos com formas irregulares que se pretende posicionar no interior de uma placa sem sobreposições. Para finalizar esta secção será discutida a questão da influência dos objectos irregulares que se pretende posicionar na performance das abordagens de resolução utilizadas, ao nível da quantidade de objectos iguais para posicionar, do número de vértices utilizado na representação geométrica do objecto irregular e na própria forma do objecto irregular. A existência de vários objectos irregulares com a mesma forma para posicionar permite obviamente reduzir a dificuldade do problema, devido às simetrias originadas pelo posicionamento de objectos iguais. Por isso, habitualmente os problemas de PFI são caracterizados não só pelo número total de objectos de pequenas dimensões, mas também pelo número de objectos diferentes. O número de vértices utilizado na representação dos objectos irregulares tem um grande impacto na complexidade dos problemas de PFI, já que as operações de verificação de sobreposições num padrão de corte dependem do número total de objectos irregulares N e do número de arestas de cada objecto envolvido m_i e m_j : é necessário verifi-

¹Os autores designam este problema como kNN e definem-no como sendo o problema de encontrar um posicionamento válido de k polígonos não convexos (N) no interior de um polígono não convexo (N). Referem também variações pela substituição do N por C (polígonos convexos), R (rectângulos) e P (paralelogramos).

car todos os pares de objectos irregulares (C_2^N) e para cada par é preciso verificar² todas as arestas de um dos objectos irregulares contra todas as arestas do outro objecto irregular ($m_i * m_j$). Para exemplificar esta situação compare-se o tempo de cálculo entre a instância ARTIF e a instância SWIM apresentados nas tabelas 5.17(a) e 5.18(c) e atente-se nas características das duas instâncias (tabela 5.1), designadamente no número total de formas irregulares (respectivamente 99 e 48), no número de formas irregulares diferentes (respectivamente 8 e 10) e no número médio de vértices por forma irregular (respectivamente 7.625 e 21.9). Apesar do número total de formas irregulares da instância SWIM ser menos de metade do número total de formas irregulares da instância ARTIF, os tempos de cálculo³ são substancialmente superiores. Já a forma do objecto irregular tem uma influência claramente menor na complexidade do problema, fazendo-se sentir mais fortemente nas instâncias com maior número de concavidades e com concavidades de maior tamanho. Nestas situações os objectos irregulares estão mais entrelaçados, o que conseqüentemente vai dar origem a um maior número de operações de verificação de sobreposições.

A descrição das instâncias de problemas de PFI utilizadas no trabalho de investigação descrito nesta tese está disponível na secção 5.1. Para cada instância, apresentam-se as características mais relevantes do ponto de vista de resolução do problema de PFI, como: o número total de formas irregulares, o número de formas irregulares diferentes, número médio de vértices, orientações admissíveis, largura da placa e origem da instância. Uma rápida análise a estas características permite constatar a existência de uma grande diversidade entre as diferentes instâncias, que obviamente se irá reflectir na qualidade dos resultados obtidos, ao nível da complexidade computacional e no tempo de cálculo.

3.2 Ferramentas Geométricas para o Problema de Posicionamento de Formas Irregulares

A utilização de uma biblioteca geométrica é crucial para o desenvolvimento de abordagens de resolução do problema de PFI, já que nestas abordagens as

²Algumas destas verificações podem não ser necessárias, se se recorrer à análise prévia das envolventes rectangulares de polígonos e de arestas.

³Nos tempos de cálculo apresentados não está incluído nenhum tempo referente a tarefas de inicialização de estruturas de dados.

operações elementares realizadas são em grande número e envolvem sempre operações geométricas. A biblioteca geométrica deverá disponibilizar um conjunto de capacidades ao nível da representação geométrica de formas irregulares e funcionalidades como a detecção de sobreposições e de contactos entre formas irregulares.

Ao nível de capacidades de representação geométrica é necessário representar com uma precisão adequada às necessidades as formas irregulares. Nos problemas de PFI, a precisão está habitualmente associada a um processo de corte mecânico, para o qual é suficiente considerar dimensões da ordem do milímetro. Este nível de exigência permite utilizar representações geométricas com muito maior precisão (mais três ou quatro dígitos) sem grandes problemas. Esta questão é de extrema importância, dado os sucessivos cálculos em vírgula flutuante que irão sendo efectuados, com a consequente introdução e acumulação de erros. Ao nível da representação geométrica é ainda necessário considerar a representação de linhas curvas. Esta representação poderá ser exacta ou, mais frequentemente, ser aproximada por linhas curvas elementares (arcos de circunferência ou *splines*) ou por segmentos de recta.

Já ao nível das funcionalidades necessárias numa biblioteca geométrica, é necessário em primeiro lugar disponibilizar as operações de transformação geométricas básicas, como a translação, o escalamento, a rotação e a reflexão de formas irregulares. Operações de simplificação de formas irregulares são também cruciais para garantir bons índices de desempenho. É também necessário disponibilizar implementações eficientes de operações mais complexas, como a detecção de sobreposições ou de contactos e o posicionamento sem sobreposições.

Uma das opções existentes no desenvolvimento de aplicações de resolução de problemas de posicionamento é o recurso à utilização de bibliotecas geométricas genéricas, comerciais ou de acesso livre na *internet*. As várias bibliotecas geométricas disponíveis apresentam diferentes níveis de funcionalidade e de limitações, existindo no entanto duas que claramente se distinguem: a LEDA (*Library of Efficient Data Types and Algorithms*) [LEDA] e a CGAL (*Computational Geometry Algorithms Library*) [CGAL] .

A LEDA é uma biblioteca de C++ desenvolvida no *Max-Planck-Institut für Informatik* desde o final dos anos oitenta. Esta biblioteca não só disponibiliza estruturas de dados e algoritmos básicos, como também oferece

implementações de algoritmos específicos para problemas de redes e grafos, de geometria computacional e de optimização combinatória. Existem também várias extensões à biblioteca base para domínios de aplicação mais específicos. Actualmente esta biblioteca é mantida pela *Algorithmic Solutions Software GmbH*, uma empresa fundada em 1995 por antigos investigadores do *Max-Planck-Institut für Informatik* ligados ao desenvolvimento da biblioteca. A disponibilização é feita por dois tipos de licenças, académicas e industriais, e sob duas formas: com acesso ao código fonte ou apenas com possibilidade de *linkagem* à biblioteca.

A **CGAL** é o resultado da colaboração entre várias instituições, europeias e israelitas, ligadas ao mundo académico e tem como principal objectivo a disponibilização das mais avançadas soluções e métodos de geometria computacional aos níveis académico e industrial. É igualmente disponibilizada como uma biblioteca de **C++**, que contém um núcleo com primitivas geométricas (pontos, linhas e vectores), predicados para testar posições relativas de pontos e operações com cálculo de intersecções e distâncias. São também disponibilizadas várias estruturas de dados e algoritmos geométricos como: invólucro convexo, triangulações e estruturas de *query* multidimensionais. A biblioteca oferece também interfaces com outros pacotes de *software* para visualização e entrada e saída de dados. A disponibilização da **CGAL** é feita sob uma licença de *software* livre, existindo também licenças comerciais destinadas ao desenvolvimento de aplicações industriais.

A alternativa à utilização de bibliotecas geométricas genéricas é o desenvolvimento de bibliotecas geométricas específicas para problemas de PFI. As principais desvantagens desta opção são o tempo necessário ao seu desenvolvimento e a atenção a ter com questões de eficiência, eficácia e precisão das técnicas implementadas. As maiores vantagens residem na flexibilidade proporcionada pela possibilidade de dispor de funcionalidades à medida das necessidades e na total liberdade de utilização das abordagens de resolução de problemas de PFI desenvolvidas. A opção pelo desenvolvimento de bibliotecas geométricas específicas deve recorrer e tirar partido dos muitos livros e publicações disponíveis, de que são exemplo [Agarwal e Sharir, 1998] [Goodman e O'Rourke, 2004].

Para o desenvolvimento deste trabalho, a escolha recaiu na utilização de uma biblioteca geométrica desenvolvida ao longo dos últimos 14 anos pelo grupo de investigação no qual estou inserido. Esta biblioteca já deu

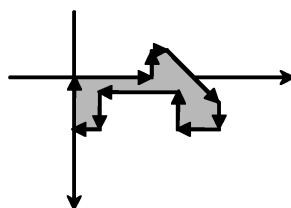


Figura 3.1: Forma irregular representada por polígono orientado.

provas das suas capacidades ao nível da eficiência e da eficácia, tendo já sido utilizada em vários trabalhos [Oliveira e Ferreira, 1993] [Oliveira *et al.*, 1993] [Oliveira, 1995] [Gomes, 1996] [Gomes e Oliveira, 1999] [Oliveira *et al.*, 2000] [Gomes e Oliveira, 2001] [Gomes e Oliveira, 2002] [Gomes e Oliveira, In Press] [Gomes *et al.*, 2005] [Moreira *et al.*, 2005].

De seguida apresentam-se as principais capacidades e funcionalidades da biblioteca geométrica utilizada. Será também feita referência às capacidades e funcionalidades existentes nas bibliotecas geométricas genéricas disponíveis mais importantes. Serão também descritas as principais alternativas às técnicas geométricas utilizadas neste trabalho.

3.2.1 Representação Geométrica de Formas Irregulares

A representação geométrica utilizada para descrever as formas irregulares baseia-se em polígonos orientados. Cada polígono tem um ponto de referência relativamente ao qual as coordenadas de todos os vértices do polígono estão referidas (o ponto de referência constitui a origem do sistema de coordenadas). As arestas dos polígonos estão orientadas de modo a que o lado direito da aresta corresponda ao interior do polígono e o lado esquerdo ao exterior do polígono. A figura 3.1 ilustra um polígono orientado que representa uma forma irregular.

A principal vantagem da utilização de polígonos orientados e, consequentemente, de arestas orientadas na representação geométrica das formas irregulares está na simplificação das operações de verificação de intersecções e de sobreposições, através da utilização de *D-Functions*. Estas funções permitem analisar rapidamente a posição de um ponto em relação a uma aresta orientada, e consequentemente em relação à respectiva recta suporte, e baseiam-se num rearranjo da expressão da distância entre um ponto P e uma recta definida por dois pontos A e B (equação 3.1). Os valores possí-

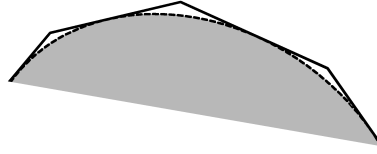


Figura 3.2: Aproximação de um arco de circunferência por 4 segmentos de recta.

veis para D_{ABP} são -1, 0 e +1, significando respectivamente que o ponto P está à esquerda, sobre ou à direita da recta suporte do segmento de recta orientado $\vec{AB}$.

$$D_{ABP} = \text{sinal}((x_A - x_B)(y_A - y_P) - (y_A - y_B)(x_A - x_P)) \quad (3.1)$$

A representação geométrica utilizada assegura uma precisão de 10^{-6} na representação das formas irregulares e nos cálculos efectuados, o que é mais do que suficiente para as dimensões e para a precisão exigida pelos processos de corte industriais. Não existem limites para o número de vértices de um polígono. A biblioteca geométrica é também capaz de lidar com situações de polígonos com pontos de multiplicidade superior a um. Apesar das formas irregulares não poderem ter pontos deste tipo (ver secção 2.2), situações deste tipo podem surgir durante o processo de cálculo. A representação geométrica utilizada é apenas capaz de lidar com formas e polígonos simplesmente conexos e sem buracos no seu interior.

Apesar da representação geométrica utilizada e das formas irregulares admissíveis não poderem ter linhas curvas, a biblioteca geométrica utilizada tem capacidade para aproximar arcos de circunferência por n segmentos de recta exteriores à forma irregular (figura 3.2). Esta capacidade deverá apenas ser utilizada em pré-processamento.

Outra capacidade da biblioteca geométrica utilizada é a possibilidade de fazer “aumentar” o tamanho dos polígonos, de forma a considerar o material destruído pelo processo de corte ou a garantir que o corte de uma forma irregular não danifica as formas irregulares vizinhas. A biblioteca geométrica utiliza um parâmetro, denominado `ESPESSURA_CORTE`, para controlar a distância mínima entre as formas irregulares. Numa fase de pré-processamento, todas as formas irregulares e a placa são “aumentadas” em metade do valor da espessura de corte. Em algumas situações é ainda necessário

garantir um afastamento mínimo das formas irregulares à borda da placa. Um outro parâmetro, denominado `AFAST_MIN`, permite controlar esse afastamento mínimo e que é garantida pela redução prévia do tamanho da placa de um valor igual ao do parâmetro `AFAST_MIN`. É ainda de referir que estas capacidades são cruciais no tratamento de problemas reais, especialmente nas indústrias do mobiliário e metalomecânica.

A biblioteca geométrica disponibiliza também capacidades de leitura e de escrita de ficheiros `DXF`⁴. Estas capacidades permitem que abordagens de resolução de problemas de PFI desenvolvidas sobre esta biblioteca geométrica possam ser integradas em sistemas de CAD/CAM.

As bibliotecas geométricas `LEDA` e `CGAL` apresentam capacidades e funcionalidades muito semelhantes ao nível da representação geométrica. Algumas dessas funcionalidades chegam mesmo a estender as apresentadas pela biblioteca geométrica utilizada neste trabalho. É o caso da aproximação de linhas curvas, que não se restringem a arcos de circunferência. Actualmente, começam a surgir as primeiras abordagens e ferramentas geométricas capazes de lidar directamente com linhas curvas.

3.2.2 Simplificação de Formas Irregulares

Na secção anterior foi demonstrada a relação entre o número de vértices das formas irregulares e a complexidade dos problemas de PFI. Esta relação pode ser aproveitada para reduzir a complexidade destes problemas, através da simplificação das formas irregulares (i.e. da redução do número de vértices). A simplificação de formas irregulares é uma das ferramentas geométricas disponíveis na biblioteca geométrica utilizada. O funcionamento desta ferramenta é controlado por três parâmetros (`DIST_MIN`, `COMP_MIN` e `PERC_ÁREA`) de forma a evitar simplificações excessivas. Um dos parâmetros estabelece um valor mínimo para a distância de uma reentrância (`DIST_MIN`). Reentrâncias mais estreitas do que o valor de `DIST_MIN` são eliminadas. Outra simplificação ocorre quando dois vértices estão ligados por uma aresta muito pequena de comprimento inferior ao parâmetro `COMP_MIN`. Nestas situações, elimina-se um dos vértices se a área originada pela nova aresta

⁴O `AutoCAD DXF` (*Drawing Interchange Format* ou *Drawing Exchange Format*) é um formato de um ficheiro de dados desenvolvido pela `Autodesk` para sistemas CAD e que se tornou no formato padrão de importação e de exportação de dados entre esse tipo de sistemas.

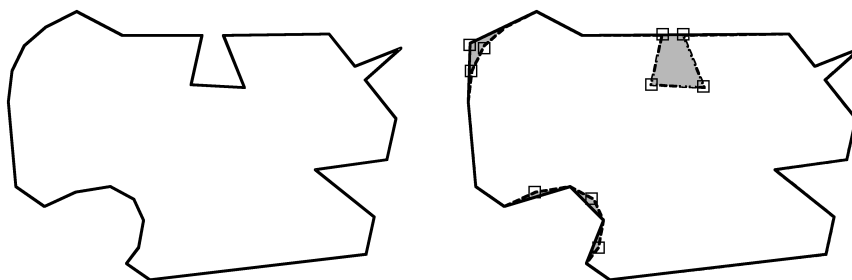


Figura 3.3: Simplificação de Formas Irregulares.

for inferior a uma determinada percentagem da área do polígono original ($PERC_ÁREA$). Há também situações onde se eliminam dois vértices simultaneamente e é criado um novo vértice “exterior” aos dois eliminados.

Um exemplo de simplificação de formas irregulares é apresentado na figura 3.3, com a forma irregular original à esquerda, a simplificada à direita e a cinzento as zonas onde ocorreram simplificações. Neste caso concreto, a simplificação da forma irregular original permitiu reduzir o número total de vértices em 8 vértices, tendo sido eliminados 9 vértices (4 na reentrância eliminada, 3 na reentrância à esquerda e 2 no canto superior esquerdo) e foi necessário criar um vértice novo (no canto superior esquerdo).

Note-se que todas as simplificações são efectuadas de forma que o polígono simplificado contenha o polígono original. Desta forma garante-se que as soluções obtidas com os polígonos simplificados são admissíveis para o problema original.

3.2.3 Concavidades em Formas Irregulares

A existência de formas irregulares com concavidades coloca grandes dificuldades na resolução de problemas de PFI, já que aumenta a complexidade geométrica dos problemas. Existem várias estratégias possíveis para lidar com estas dificuldades, desde o recurso a aproximações convexas, passando por decomposições em polígonos convexas e até mesmo por análise directa das concavidades. Cada uma destas abordagens apresenta vantagens e desvantagens, que se apresentam de seguida.

Aproximação por Invólucro Convexo

A utilização de invólucros convexos para aproximar formas irregulares com concavidades tem como principal vantagem a grande simplificação introduzida nos problemas. Esta simplificação resulta não só da eliminação das concavidades, mas também pela redução do número de vértices. A principal desvantagem desta abordagem está obviamente na menor qualidade dos resultados obtidos, com padrões de corte menos compactos (quando se substituem os invólucros convexos pelas formas irregulares originais).

A determinação do invólucro convexo de formas irregulares é uma operação geométrica trivial, para a qual existem vários algoritmos disponíveis [Seidel, 2004]. Esta é uma das operações básicas que se encontram disponíveis em todas as bibliotecas geométricas.

Decomposição em Polígonos Convexos

A decomposição das formas irregulares com concavidades em polígonos convexos é a abordagem mais utilizada na geometria computacional, estando disponível em todas as bibliotecas geométricas genéricas. As principais vantagens são a simplificação dos problemas ao nível do cálculo de sobreposições e intersecções. A desvantagem está no aumento do número de polígonos, principalmente em situações onde existem concavidades resultantes da aproximações de linhas curvas. Em situações extremas deste tipo, o número de polígonos convexos necessários para cobrir a forma irregular original não é controlável, podendo obrigar à utilização de aproximações mais grosseiras das linhas curvas.

Existem dois tipos de decomposições de formas irregulares, as baseadas em partições e as baseadas em coberturas. No primeiro tipo, a forma irregular é “dividida” em polígonos convexos que não se sobrepõem, enquanto no segundo tipo os polígonos convexos podem-se sobrepor. O problema de decompor uma forma irregular numa partição ou numa cobertura de polígonos convexos não é simples, existindo várias estratégias e algoritmos. Uma dessas estratégias é decompor a forma irregular numa partição de triângulos (*triangulation*) [Bern, 2004], que é uma operação relativamente simples, e manipular triângulos é trivial, mas tem o inconveniente de originar um grande número de triângulos. Outra estratégia é não limitar a forma dos polígonos convexos a utilizar na decomposição e permitindo ou não a criação de novos vértices [O’Rourke e Suri, 2004] [Agarwal *et al.*, 2002]. A estratégia

de decompor a forma irregular com uma cobertura de polígonos convexos tem a vantagem de necessitar de um menor número de polígonos, mas por outro obriga a um maior esforço na posterior utilização da decomposição por causa das sobreposições [O'Rourke e Suri, 2004].

Análise directa das Concauidades

A análise directa das concauidades é a abordagem implementada na biblioteca geométrica utilizada e baseia-se obviamente na utilização das próprias formas irregulares não convexas. Sempre que houver necessidade recorre-se à análise aresta a aresta para detectar situações de sobreposição, de intersecção ou de contacto. O recurso às envolventes rectangulares das arestas permite reduzir o número de vezes em que é necessário utilizar a análise aresta a aresta.

3.2.4 Invólucro de Posicionamento

O conceito de invólucro de posicionamento é a forma mais eficiente para a analisar a posição relativa de dois polígonos. A utilização deste conceito na resolução de PFI permite assegurar a admissibilidade dos padrões de corte, i.e. padrões de corte onde não há sobreposições entre os polígonos que descrevem as formas irregulares. O conceito de invólucro de posicionamento também é conhecido sob outras designações como as de hodógrafo e de *Minkowski sum* (também conhecida como soma vectorial de polígonos). O invólucro de posicionamento é também equivalente às Φ -Functions de nível zero entre dois polígonos.

O invólucro de posicionamento do polígono j relativamente ao polígono i ($NFP_{i,j}$) é a trajectória descrita pelo ponto de referência⁵ do polígono j (R_j), quando este polígono desliza ao longo do contorno exterior do polígono i . Durante este movimento de deslizamento, os dois polígonos mantêm as mesmas orientações relativas e o polígono j descreve uma trajectória orbital em torno do polígono i , que é mantido fixo. O polígono j , denominado polígono orbital, não pode intersectar o polígono i , designado por polígono estacionário, e os dois polígonos têm de estar sempre em contacto (figura 3.4). Os invólucros de posicionamento são representados por polígonos ori-

⁵O ponto de referência de um polígono é a origem do sistema de coordenadas (0,0) sobre o qual as coordenadas dos vértices do polígono estão definidas.

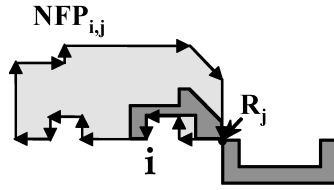


Figura 3.4: Invólucro de posicionamento do polígono j relativamente ao polígono i ($NFP_{i,j}$).

entados e, como tal, o exterior do polígono corresponde ao lado esquerdo das arestas.

Desta definição constata-se imediatamente que:

- se o ponto de referência do polígono j (R_j) estiver no interior do invólucro de posicionamento $NFP_{i,j}$, então existe sobreposição entre os polígonos i e j ;
- se o ponto de referência do polígono j (R_j) estiver na fronteira do invólucro de posicionamento $NFP_{i,j}$, então o polígono j está em contacto, do lado exterior, com o polígono i ;
- se o ponto de referência do polígono j (R_j) estiver no exterior do invólucro de posicionamento $NFP_{i,j}$, então não existe sobreposição nem contacto entre os polígonos i e j .

Convém referir que o invólucro de posicionamento não é uma operação simétrica, já que o invólucro de posicionamento de j em relação a i ($NFP_{i,j}$) não é igual ao invólucro de posicionamento de i em relação a j ($NFP_{j,i}$). No entanto e como as figuras 3.4 e 3.5 mostram, o invólucro de posicionamento $NFP_{j,i}$ pode ser obtido a partir do invólucro de posicionamento $NFP_{i,j}$ pela aplicação de uma rotação de 180 graus.

A utilização do invólucro de posicionamento permite transformar o problema de analisar a posição relativa de dois polígonos, no problema bem mais simples de analisar a posição relativa de um ponto (o ponto de referência do polígono orbital) face a um polígono (o invólucro de posicionamento). Com base no invólucro de posicionamento entre dois polígonos é possível estabelecer as condições de não sobreposição entre os polígonos. A aplicação

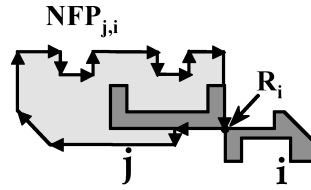


Figura 3.5: Simetria do invólucro de posicionamento do polígono i relativamente ao polígono j ($NFP_{j,i}$).

de invólucros de posicionamento na resolução de problemas de PFI permite obter padrões de corte compactos e sem sobreposições.

A dificuldade de determinação do invólucro de posicionamento entre dois polígonos depende muito das características dos dois polígonos, em especial da existência ou não de concavidades nos polígonos. No caso dos dois polígonos serem convexos, a determinação do invólucro de posicionamento é relativamente simples, ficando mais complicada na presença de polígonos não convexos. Em [Agarwal *et al.*, 2002] são referidas ordens de grandeza para o tempo de cálculo do invólucro de posicionamento entre vários tipos de polígonos (m e n representam o número de arestas de cada um dos polígonos): $O(m + n)$ quando os dois polígonos são convexos, $O(mn \log mn)$ quando só o polígono orbital é convexo. Quando nenhum dos polígonos é convexo, os mesmos autores indicam $O(m^2n^2)$ como sendo um limite superior apertado para o tempo de determinação do invólucro de posicionamento.

Existem várias alternativas para determinar invólucros de posicionamento. Mahadevan [1984] apresenta uma descrição compreensiva de um algoritmo para geração de invólucros de posicionamento baseado no esquema de deslizamento orbital. Em [Oliveira, 1995] é apresentada uma extensão ao trabalho de Mahadevan [1984] que considera invólucros de posicionamento com pontos de multiplicidade superior a um e que se encontra implementada na biblioteca geométrica utilizada neste trabalho. Os algoritmos de determinação de invólucros de posicionamento baseados em deslizamentos orbitais podem ser aplicados a polígonos não convexos. Este tipo de algoritmos apresentam no entanto problemas, quando um dos polígonos apresenta reentrâncias apertadas, pelas quais o outro polígono não pode deslizar, e que se alargam no interior do polígono.

Um método alternativo para determinar invólucros de posicionamento

baseia-se em percorrer as arestas dos polígonos originais, ordenadas com base nos respectivos ângulos. Ghosh [1991] apresenta um algoritmo baseado nesta abordagem capaz de lidar com formas não convexas que não se entrelacem. Bennell *et al.* [2001] apresenta uma extensão ao algoritmo de Ghosh [1991], que remove esta limitação.

Uma terceira alternativa consiste em utilizar uma estratégia baseada na decomposição em polígonos convexos. O invólucro de posicionamento de dois polígonos convexos é uma operação trivial. Nesta estratégia a dificuldade do cálculo do invólucro de posicionamento é transferida para a decomposição convexa dos polígonos não convexas. Flato [2000] apresenta um algoritmo baseado nesta estratégia. Os inconvenientes desta estratégia, para além do problema da decomposição em polígonos convexos, são a necessidade de calcular e gerir um grande número de invólucros de posicionamento e é necessário uma particular atenção às junções de dois invólucros de posicionamento parcelares.

Stoyan *et al.* [2004] apresenta uma abordagem para determinar Φ -*Functions*, que também pode ser utilizada para gerar invólucros de posicionamento. Esta abordagem também se baseia na decomposição dos polígonos em formas primárias (círculos, rectângulos, polígonos regulares e polígonos convexas), para as quais os autores, num trabalho anterior [Stoyan *et al.*, 2002], tinham desenvolvido as expressões analíticas das Φ -*Functions*.

3.2.5 Invólucro e Rectângulo de Posicionamento Interior

Para além da necessidade em garantir a não sobreposição entre formas irregulares, é também necessário garantir o posicionamento das formas irregulares no interior de placas irregulares. O conceito de invólucro de posicionamento pode ser adaptado de forma a dar resposta a esta questão, dando origem ao invólucro de posicionamento interior. Este conceito foi originalmente introduzido por Scheithauer e Terno [1993] e a adaptação consiste em realizar o movimento de deslizamento pelo interior da fronteira da placa, em vez de o fazer pelo exterior da fronteira. As principais desvantagens desta abordagem são a dificuldade em encontrar um ponto admissível para iniciar o deslizamento e os problemas colocados por zonas onde existam estrangulamentos. Uma implementação desta abordagem é apresentada em [Gomes, 1996]. Stoyan *et al.* [2002] apresentam Φ -*Functions*, deduzidas analiticamente, para o posicionamento de formas primárias no interior de outras

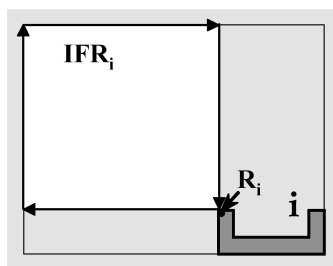


Figura 3.6: Rectângulo de posicionamento interior do polígono i relativamente à placa (IFR_i).

formas primárias.

Relativamente ao problema de PFI e tal como ele foi definido, a forma da placa é sempre rectangular. Este facto vem simplificar muito o problema de garantir que as formas irregulares sejam posicionadas no interior da placa: basta verificar se um rectângulo (o rectângulo envolvente da forma irregular) pode ser posicionado no interior de outro rectângulo (a placa). A região admissível para o posicionamento de uma forma de qualquer tipo no interior de uma placa rectangular é sempre um rectângulo e recebe o nome de rectângulo de posicionamento interior (figura 3.6). O rectângulo de posicionamento interior também é representado por um polígono orientado, onde o lado esquerdo das arestas orientadas corresponde ao exterior do rectângulo.

3.3 Modelos Matemáticos para o Problema de Posicionamento de Formas Irregulares

A partir das condições de não sobreposição entre formas irregulares, apresentadas na subsecção 3.2.4, e das condições de posicionamento das formas irregulares no interior da placa, apresentadas na subsecção 3.2.5, obtém-se o modelo matemático standard para problemas de PFI. Neste modelo, as condições de não sobreposição derivam directamente dos invólucros de posicionamento entre todos os pares de formas irregulares e as condições de posicionamento no interior da placa baseiam-se nos rectângulos de posicionamento interior de todas as formas irregulares. As condições de posicionamento no interior da placa não colocam dificuldades na resolução do modelo, já que crescem linearmente com o número de formas irregulares e

dão origem a restrições lineares. Já as condições de não sobreposição entre formas irregulares colocam grandes dificuldades na resolução do modelo, já que crescem factorialmente com o número de formas irregulares e, principalmente, dão origem a restrições que envolvem variáveis binárias. O número de variáveis binárias cresce com o número de formas irregulares e com o número de arestas das formas irregulares. Um modelo com estas características, que denominaremos de modelo matemático global, tem reduzida aplicação prática já que só pode ser resolvido para instâncias de pequena dimensão.

O maior interesse deste modelo matemático global não está porém na resolução de problemas de PFI, que como vimos é bastante limitada, mas sim na possibilidade, de a partir dele, obter modelos matemáticos mais simples e de grande utilidade na resolução de subproblemas de posicionamento ou na melhoria de soluções. É o caso dos modelos de compactação e de separação, que permitem resolver os problemas, respectivamente, de compactar um padrão de corte (problema de Compactação) e de separar as formas irregulares de modo a eliminar sobreposições em padrões de corte (problema de Separação). Estes modelos podem ser utilizados isoladamente ou de forma conjunta e sincronizada. Na utilização isolada destacam-se a melhoria de padrões de corte obtidos por operadores manuais e o reaproveitamento de padrões de corte de boa qualidade quando se verificam apenas pequenas alterações no conjunto de formas irregulares a posicionar, sejam alterações nas quantidades ou nos tamanhos das formas irregulares. A utilização conjunta e sincronizada destes modelos permite a implementação de métodos de resolução do problema de PFI baseados em algoritmos de pesquisa local.

De seguida será descrito em detalhe o modelo matemático global para a resolução do problema de PFI. Nas secções seguintes serão introduzidos os modelos matemáticos para os problemas de Compactação e de Separação.

3.3.1 Modelo Matemático Global

A elaboração do modelo matemático global para a resolução de problemas de PFI baseia-se em dois conjuntos de restrições, um conjunto que garante a não sobreposição entre as várias formas irregulares e um outro conjunto que garante o posicionamento das formas irregulares no interior da placa. Existe ainda um terceiro conjunto de restrições auxiliares. A estrutura deste modelo é relativamente simples e é apresentada na figura 3.7.

$$\begin{aligned}
& \min z & (3.2a) \\
& \text{sujeito a:} \\
& z \geq x_i + L_i & i = 1, \dots, N & (3.2b) \\
& F(x_i - X_0, y_i - Y_0) \geq 0 & i = 1, \dots, N & (3.2c) \\
& G(x_i - x_j, y_i - y_j) \leq 0 & \begin{matrix} i = 1, \dots, N \\ j = i + 1, \dots, N \end{matrix} & (3.2d) \\
& x_i, y_i, z \geq 0 & i = 1, \dots, N & (3.2e)
\end{aligned}$$

Figura 3.7: Modelo matemático global para o problema de PFI.

Neste modelo as variáveis de decisão x_i e y_i são as próprias coordenadas de posicionamento de cada uma das N formas irregulares e z é uma variável auxiliar que representa o comprimento do padrão. As constantes L_i representam o comprimento de cada forma irregular, relativamente ao respectivo ponto de referência, e as constantes X_0 e Y_0 representam o ponto de referência da placa (ver figura 3.8). A função objectivo, equação 3.2a, e o conjunto de equações 3.2b asseguram a correcta minimização do comprimento do padrão de corte. O posicionamento das formas irregulares no interior da placa é assegurado pelo conjunto de sistemas de inequações 3.2c, existindo um sistema de inequações para cada forma irregular i . A não sobreposição entre formas irregulares é conseguida pelo conjunto de colecções de disjunções de inequações 3.2d, existindo uma colecção de disjunção de inequações para cada par de formas irregulares i e j (com $j > i$).

Cada um dos sistemas de inequações de 3.2c ($F(x_i - X_0, y_i - Y_0) \geq 0$) é obtido a partir do rectângulo de posicionamento interior da respectiva forma irregular i (IFR_i) e constituído por quatro inequações. Cada uma das inequações baseia-se na equação da recta suporte de cada uma das quatro arestas orientadas do IFR_i . Considerando cada uma das equações das rectas suportes escrita na forma $f(x, y) = 0$ e atribuindo às variáveis x e y a diferença entre as coordenadas do ponto de posicionamento⁶ de uma forma irregular (x_i, y_i) e as coordenadas do ponto de referência da placa (X_0, Y_0) ,

⁶O ponto de posicionamento de uma forma irregular é o ponto do plano onde o ponto de referência da forma irregular é posicionado.

podemos verificar se o posicionamento é válido ou não pela simples análise do valor de cada uma das funções $f(x, y)$:

- $f(x, y) < 0$ — o ponto de posicionamento está à esquerda da recta suporte da aresta orientada, logo é um posicionamento inválido;
- $f(x, y) \geq 0$ — o ponto de posicionamento está sobre ou à direita da recta suporte da aresta orientada, logo poderá ser um posicionamento válido.

Para que o posicionamento de uma forma irregular seja efectivamente válido, as quatro funções $f(x, y)$ têm de ser simultaneamente não negativas. Estas condições para o posicionamento válido de uma forma irregular no interior de uma placa dão naturalmente origem a um sistema de quatro inequações por cada forma irregular a posicionar. O exemplo da figura 3.8 ilustra as condições de posicionamentos válidos de uma forma irregular i no interior de uma placa, com a indicação das grandezas relevantes para escrita das inequações. De seguida apresenta-se o respectivo sistema de inequações:

$$F(x_i - X_0, y_i - Y_0) \geq 0 \implies \begin{cases} (x_i - X_0) - L_i^* \geq 0 \\ (y_i - Y_0) - W_i^* \geq 0 \\ -(x_i - X_0) + (L_0 - L_i) \geq 0 \\ -(y_i - Y_0) + (W_0 - W_i) \geq 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Deste sistema retira-se directamente o conjunto de restrições a incluir no modelo matemático para garantir o posicionamento de uma forma irregular no interior da placa.

De um modo semelhante, cada uma das colecções de disjunções de inequações de 3.2d ($G(x_i - x_j, y_i - y_j) \leq 0$) é obtida a partir do invólucro de posicionamento entre as formas irregulares i e j ($NFP_{i,j}$). O número de inequações da colecção é igual ao número de arestas orientadas de $NFP_{i,j}$ ($M_{i,j}$), onde cada uma das inequações se baseia igualmente na equação da recta suporte de uma das arestas orientadas de $NFP_{i,j}$. Considerando cada uma das equações das rectas suporte escrita da forma $g(x, y) = 0$ e atribuindo às variáveis x e y a diferença entre as coordenadas dos pontos de posicionamento das duas formas irregulares (x_i, y_i) e (x_j, y_j) , podemos verificar se existe ou não sobreposição entre as duas formas irregulares, admitindo que $NFP_{i,j}$ é convexo, pela análise do valor de cada uma das funções $g(x, y)$:

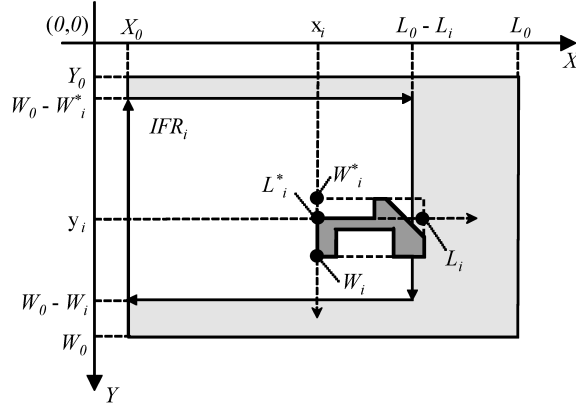


Figura 3.8: Condições de posicionamento de uma forma irregular no interior da placa.

- $g(x, y) \leq 0$ — o ponto de posicionamento está sobre ou à esquerda da recta suporte da aresta orientada, logo é um posicionamento válido;
- $g(x, y) > 0$ — o ponto de posicionamento está à direita da recta suporte da aresta orientada, logo poderá ser um posicionamento inválido.

Para que o posicionamento relativo de duas formas irregulares seja válido, basta que uma das $M_{i,j}$ funções $g(x, y)$ seja não positiva. Estas condições para o posicionamento sem sobreposições de duas formas irregulares originam uma colecção de $M_{i,j}$ disjunções de inequações, para cada par de formas irregulares. A modelização de disjunções de inequações obriga à utilização de variáveis binárias e às consequentes dificuldades de resolução do modelo resultante. A figura 3.9 ilustra as condições de posicionamento válido entre duas formas irregulares, apresentando-se de seguida a respectiva colecção de disjunção de inequações:

$$G(x_i - x_j, y_i - y_j) \geq 0 \implies \begin{cases} -(y_j - y_i) + 2 \leq 0 & (a) \\ (x_j - x_i) + 1 \leq 0 & (b) \\ (x_j - x_i) + (y_j - y_i) + 2 \leq 0 & (c) \\ (y_j - y_i) + 1 \leq 0 & (d) \\ -(x_j - x_i) + (y_j - y_i) + 2 \leq 0 & (e) \\ -(x_j - x_i) + 2 \leq 0 & (f) \end{cases} \quad (3.4)$$

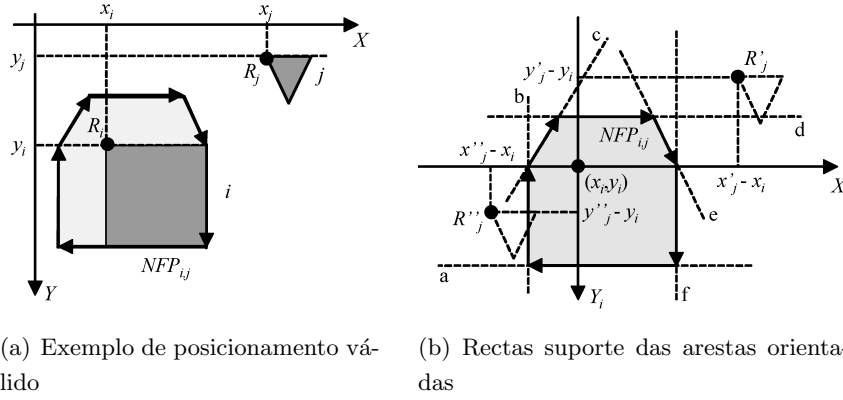


Figura 3.9: Condições de não sobreposição entre duas formas irregulares.

A modelização das disjunções de inequações (equação 3.4) com variáveis binárias dá origem ao seguinte sistema de inequações:

$$\begin{cases}
 -(y_j - y_i) + 2 - M\delta_a \leq 0 & (a) \\
 (x_j - x_i) + 1 - M\delta_b \leq 0 & (b) \\
 (x_j - x_i) + (y_j - y_i) + 2 - M\delta_c \leq 0 & (c) \\
 (y_j - y_i) + 1 - M\delta_d \leq 0 & (d) \\
 -(x_j - x_i) + (y_j - y_i) + 2 - M\delta_e \leq 0 & (e) \\
 -(x_j - x_i) + 2 - M\delta_f \leq 0 & (f) \\
 \delta_a + \delta_b + \delta_c + \delta_d + \delta_e + \delta_f \leq 5 \\
 \text{com: } \delta_a, \delta_b, \delta_c, \delta_d, \delta_e, \delta_f \in \{0, 1\}
 \end{cases} \quad (3.5)$$

Onde M é uma constante suficientemente grande e as variáveis $\delta_a, \dots, \delta_f$ são variáveis binárias. Pelo menos uma das variáveis binárias tem de ser nula, o que obriga à verificação de pelo menos uma das inequações de 3.4 e assegura a não sobreposição entre as duas formas irregulares. O número de variáveis binárias é igual ao número de arestas do invólucro convexo de posicionamento. A partir do sistema de inequações 3.5 retiram-se de imediato as restrições a incluir no modelo matemático para garantir a não sobreposição de duas formas irregulares.

No exemplo acabado de apresentar, como as duas formas irregulares i e j são convexas, o invólucro de posicionamento não apresenta concavidades, o que facilita o estabelecimento das condições de não sobreposição entre formas irregulares. De seguida será apresentada a generalização para invólucros de

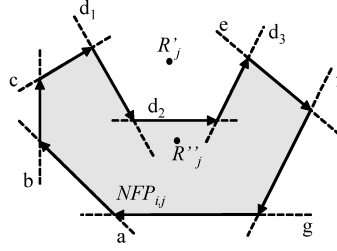


Figura 3.10: Condições de não sobreposição na presença de um invólucro de posicionamento não convexo.

posicionamento não convexas, com o recurso a um pequeno exemplo que está ilustrado na figura 3.10. Neste exemplo, o invólucro de posicionamento $NFP_{i,j}$ tem nove arestas orientadas, das quais três (d_1 , d_2 e d_3) definem uma concavidade. As condições de não sobreposição entre formas irregulares apresentadas no parágrafo anterior falham na presença de concavidades, porque tratam as arestas de uma concavidade individualmente em vez de as consideram em conjunto. No exemplo da figura 3.10, o posicionamento da forma irregular j em R'_j conduz a uma situação de sobreposição, apesar de o ponto R'_j estar à esquerda de duas arestas orientadas do invólucro convexo (d_1 e d_3). Se considerarmos as três arestas que definem a concavidade em conjunto, o ponto R'_j é correctamente identificado como conduzindo a uma situação de sobreposição porque não está à esquerda de d_2 , ao contrário do ponto R''_j que conduz a um posicionamento válido por estar à esquerda das três arestas. Considerar as três arestas que definem a concavidade em simultâneo não levanta dificuldades, uma vez que se trata de uma conjunção de inequações. Para o exemplo da figura 3.10 obteríamos a seguinte colecção de disjunções de inequações que garantem a não existência de sobreposição entre as duas formas irregulares:

$$\left[\begin{array}{ll} g_a(x_i - x_j, y_j - y_i) \leq 0 & (a) \\ g_b(x_i - x_j, y_j - y_i) \leq 0 & (b) \\ g_c(x_i - x_j, y_j - y_i) \leq 0 & (c) \\ F_d(x_i - x_j, y_j - y_i) \leq 0 & (d) \\ g_e(x_i - x_j, y_j - y_i) \leq 0 & (e) \\ g_f(x_i - x_j, y_j - y_i) \leq 0 & (f) \\ g_g(x_i - x_j, y_j - y_i) \leq 0 & (g) \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Onde cada uma das inequações $g(x_i - x_j, y_j - y_i) \leq 0$ tem como base a recta suporte da respectiva aresta orientada e a inequação $F(x_i - x_j, y_j - y_i) \leq 0$ representa um sistema de inequações com base nas três rectas suporte das arestas orientadas que definem a concavidade. A modelização destas disjunções de inequações (3.6) com variáveis binárias dá origem ao seguinte sistema de inequações:

$$\left\{ \begin{array}{ll} g_a(x_i - x_j, y_j - y_i) - M\delta_a \leq 0 & (a) \\ g_b(x_i - x_j, y_j - y_i) - M\delta_b \leq 0 & (b) \\ g_c(x_i - x_j, y_j - y_i) - M\delta_c \leq 0 & (c) \\ g_{d1}(x_i - x_j, y_j - y_i) - M\delta_d \leq 0 & (d1) \\ g_{d2}(x_i - x_j, y_j - y_i) - M\delta_d \leq 0 & (d2) \\ g_{d2}(x_i - x_j, y_j - y_i) - M\delta_d \leq 0 & (d3) \\ g_e(x_i - x_j, y_j - y_i) - M\delta_e \leq 0 & (e) \\ g_f(x_i - x_j, y_j - y_i) - M\delta_f \leq 0 & (f) \\ g_g(x_i - x_j, y_j - y_i) - M\delta_g \leq 0 & (g) \\ \delta_a + \delta_b + \delta_c + \delta_d + \delta_e + \delta_f + \delta_g \leq 6 \\ \text{com: } \delta_a, \delta_b, \delta_c, \delta_d, \delta_e, \delta_f, \delta_g \in \{0, 1\} \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Neste sistema, é de salientar que todas as inequações associadas a arestas que definem uma concavidade partilham a mesma variável binária. Mais uma vez, as restrições a incluir no modelo matemático retiram-se directamente do sistema de inequações 3.7.

Nas situações onde as concavidades não são convexas o processo acabado de descrever não pode ser directamente aplicado, sendo necessário proceder, sucessivamente, à análise e subdivisão das concavidades em zonas convexas. No exemplo da figura 3.11, seria necessário utilizar nove variáveis binárias para modelizar as disjunções de condições. É ainda de salientar que uma aresta orientada pode estar a definir mais do que uma concavidade e, conseqüentemente, deverá originar uma inequação em cada concavidade. Em termos práticos, situações deste tipo só muito raramente vão além do segundo nível.

O modelo matemático para o problema de PFI acabado de apresentar tem um conjunto de características que apenas permitem a sua utilização na resolução de instâncias de pequena dimensão. As principais dificuldades residem na necessidade de utilização de variáveis binárias na modelização

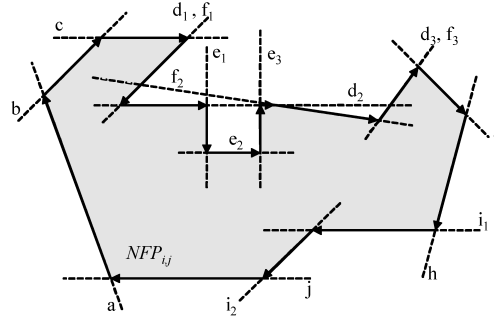


Figura 3.11: Condições de não sobreposição na presença de um invólucro de posicionamento não convexo e com concavidades não convexas.

das colecções de disjunções de inequações, com a consequente necessidade de resolver modelos de programação mista com variáveis binárias. Deve ser realçado que estas dificuldades já estão presentes nas instâncias que só têm formas irregulares convexas. O número de variáveis binárias cresce factorialmente com o número de formas irregulares e linearmente com o número de arestas orientadas de cada invólucro convexo de posicionamento ($\approx C_2^N \times M'_{i,j}$, onde N é o número de formas irregulares e $M'_{i,j}$ é o número médio de arestas dos invólucros convexas de posicionamento). A existência de concavidades simples, i.e. concavidades convexas, não aumenta a complexidade do modelo, ao contrário das concavidades não convexas que obrigam à utilização de um maior número de variáveis binárias.

Uma questão que não é tratada pelo modelo matemático apresentado é a possibilidade de as formas irregulares poderem ser posicionadas segundo diferentes orientações. Existem duas situações distintas, uma onde as possibilidades de rotações estão restritas a um conjunto discreto de valores (p.e 180 graus ou múltiplos de 90 graus) e outra onde os valores possíveis pertencem a um intervalo contínuo. A primeira das situações seria modelizada com o recurso a variáveis binárias, com as consequentes implicações na complexidade do modelo. Já a segunda das situações obriga a utilizar técnicas de optimização não linear ou a recorrer a aproximações lineares.

O modelo matemático apresentado não tira partido da possibilidade de existirem formas irregulares iguais, o que dá origem a simetrias indesejadas na árvore de pesquisa e ao consequente aumento do tempo de processamento. Uma possibilidade para eliminar este tipo de simetrias seria considerar po-

sicionamentos relativos fixos entre duas ou mais formas irregulares, pela adição de restrições do tipo: a forma irregular f_1 tem coordenadas x e y inferiores às coordenadas da forma irregular f_2 e assim sucessivamente. A opção de não incluir restrições deste tipo no modelo matemático apresentado deveu-se, por um lado, aos reduzidos benefícios em termos de capacidade de resolução de instâncias reais e, por outro lado, às vantagens em manter o modelo matemático simples e genérico.

Foi realizado um pequeno conjunto de experiências computacionais para testar e avaliar o modelo matemático acabado de apresentar. Estas experiências computacionais são apresentadas na subsecção 5.2.1.

Como comentários finais ao modelo matemático global, devem ser referidas as principais dificuldades da resolução de problemas de PFI com base em modelos matemáticos. A primeira dificuldade deve-se à reduzida sensibilidade da função objectivo, que só depende do posicionamento das formas irregulares que estão a definir o comprimento do padrão de corte. O posicionamento das restantes formas irregulares não tem influência no valor da função objectivo, não permitindo distinguir dois padrões de corte com o mesmo comprimento e onde num deles as formas irregulares estão concentradas, existindo grandes espaços vazios, de outro onde as formas irregulares estão espalhadas ao longo de toda área do padrão de corte, existindo apenas uma grande quantidade de pequenos espaços vazios. Outra dificuldade é a comparação de diferentes soluções parciais, devido à diversidade das formas irregulares presentes em cada solução parcial. Desta forma torna-se praticamente impossível conduzir a pesquisa de um modo mais eficiente. Uma última dificuldade é o estabelecimento de limites de aspiração que permitam fazer cortes na árvore de pesquisa. Limites de aspiração baseados na área das formas irregulares são muito grosseiros, devido à dificuldade em conseguir bons encaixes entre as formas irregulares em muitas situações. Aproximações das formas irregulares por rectângulos envolventes levam a problemas de sobrestimação do desperdício. A este respeito deve ser referido o trabalho de Heckmann e Lengauer [1998], onde são apresentados limites inferiores para instâncias com 30 formas irregulares e com diferenças de tamanho muito grandes entre as formas irregulares, considerando apenas as formas irregulares muito grandes. Esta abordagem permitiu aos autores apresentarem soluções para o problema com todas as formas irregulares, pequenas e grandes, de muito boa qualidade, com diferenças para a solução

óptima inferiores a 1% para problemas de posicionamento de partes de calças e inferiores a 8% para problemas consistindo de outro tipo de peças de vestuário. Convém referir que estas dificuldades acabadas de apresentar não são exclusivas da resolução de problemas de PFI por modelos matemáticos, surgindo também noutras abordagens de resolução.

3.3.2 Modelo Matemático de Compactação

A compactação de padrões de corte é uma das mais poderosas ferramentas disponíveis para se obter padrões de corte com valores de aproveitamento altos e que se baseia na utilização de modelos matemáticos. Estes modelos matemáticos de compactação conseguem aumentar o aproveitamento dos padrões de corte, ao aplicarem um conjunto de movimentos coordenados e contínuos às formas irregulares e obtendo padrões de corte que são óptimos locais (figura 3.12). Num padrão de corte compactado é preservada a estrutura do padrão não compactado, i.e. as posições relativas entre pares de formas irregulares é preservada, apesar do posicionamento exacto das formas irregulares, as coordenadas do ponto de posicionamento, poder ser completamente diferente. Durante a aplicação do conjunto de movimentos coordenados e contínuos, não são admitidas sobreposições entre formas irregulares, rotações das formas irregulares e adicionalmente também não são permitidos saltos de uma forma irregular sobre outras formas irregulares. No exemplo da figura 3.12 temos à esquerda um padrão de corte obtido por uma regra heurística gulosa do tipo *bottom-left*,⁷ ao meio os sentidos dos movimentos que as formas irregulares vão sofrer e à direita o padrão de corte resultante da operação de compactação. Atente-se que as posições relativas entre as várias formas irregulares mantêm-se, apesar de duas delas terem sofrido alterações no seu posicionamento. Este pequeno exemplo permite demonstrar completamente o conceito de compactação de padrões de corte, assim como mostra o poder e a eficácia desta operação.

O modelo matemático de compactação de padrões de corte baseia-se numa simplificação do modelo matemático global para problemas de PFI apresentado na subsecção anterior. A ideia principal que está por detrás do

⁷Na realidade, a heurística segue um critério do tipo esquerda-acima, existem no entanto motivos para utilizar a expressão *bottom-left*: por um lado o eixo vertical está invertido em relação ao habitual e por outro lado a expressão *bottom-left* tem um significado que ultrapassa o seu significado literal, justificando igualmente a utilização do termo em inglês.

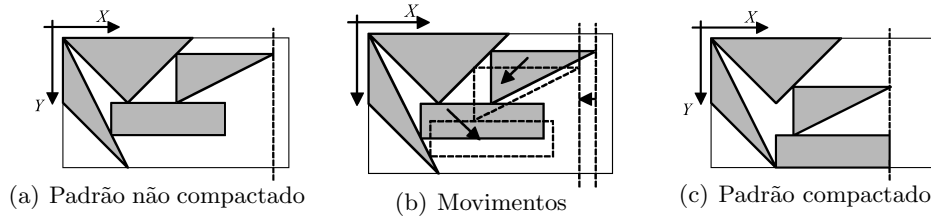


Figura 3.12: Exemplo da operação de compactação de padrões de corte.

modelo de compactação é tirar partido dos posicionamentos relativos entre as formas irregulares existentes no padrão de corte não compactado e utilizar apenas uma única inequação para garantir a não sobreposição entre duas formas irregulares, de forma a evitar as disjunções de inequações do modelo matemático global. Recorde-se que estas posições relativas são preservadas pelo processo de compactação, uma vez que os movimentos das formas irregulares são contínuos e não são admitidos saltos de formas irregulares sobre outras formas irregulares. Desta forma uma inequação entre duas formas irregulares manter-se-á necessariamente válida após a aplicação do modelo de compactação, garantindo assim a admissibilidade do padrão de corte e permitindo prescindir das disjunções de inequações do modelo matemático global.

A estrutura geral do modelo matemático de compactação está representada na figura 3.13. Esta estrutura geral é também utilizada por outros autores [Li e Milenkovic, 1995] [Stoyan *et al.*, 1996] [Bennell e Dowsland, 2001] em abordagens ao problema de PFI. A implementação desta estrutura geral varia de autor para autor, com diferenças ao nível da função objectivo e da regra utilizada na selecção da inequação que garante a não sobreposição entre formas irregulares. No entanto, a maior diferença está no tipo de utilização que é dada ao modelo de compactação. De seguida, será apresentada a implementação da estrutura genérica desenvolvida durante a realização deste trabalho e que se encontra publicada em [Gomes e Oliveira, In Press]. Serão também referidas as principais diferenças para as restantes implementações.

O modelo matemático de compactação implementado baseia-se na estrutura geral da figura 3.13 e apresenta duas diferenças em relação ao modelo matemático global para o problema de PFI (figura 3.7). Uma dessas diferenças reside nas condições de não sobreposição entre formas irregulares,

$$\begin{aligned}
& \min z & (3.8a) \\
& \text{sujeito a:} \\
& z \geq x_i + L_i & i = 1, \dots, N & (3.8b) \\
& F(x_i - X_0, y_i - Y_0) \geq 0 & i = 1, \dots, N & (3.8c) \\
& F(x_i - x_j, y_i - y_j) \leq 0 & \begin{array}{l} i = 1, \dots, N \\ j = i + 1, \dots, N \end{array} & (3.8d) \\
& H(x_i, y_i, X'_i, Y'_i) \leq 0 & i = 1, \dots, N & (3.8e) \\
& x_i, y_i, z \geq 0 & i = 1, \dots, N & (3.8f)
\end{aligned}$$

Figura 3.13: Modelo matemático de compactação de padrões de corte.

equações 3.2d e 3.8d, que no caso do modelo global são asseguradas por uma colecção de disjunções de inequações para cada par de formas irregulares ($G(x_i - x_j, y_i - y_j) \leq 0$), enquanto no modelo de compactação são asseguradas por um sistema de inequações para cada par de formas irregulares ($F(x_i - x_j, y_i - y_j) \leq 0$). Refira-se que a necessidade de se utilizar um sistema de inequações para garantir a não sobreposição de duas formas irregulares no modelo de compactação, deve-se às condições de não sobreposição na presença de invólucros de posicionamento não convexos. Quando não estão concavidades envolvidas, basta utilizar uma inequação por cada par de formas irregulares para garantir a não sobreposição das formas irregulares. A outra diferença para o modelo global é a consideração de mais um sistema de inequações (equação 3.8e), que limita a amplitude dos deslocamentos das formas irregulares a um valor máximo e que pressupõe um processo iterativo que será descrito no próximo parágrafo. Este conjunto de inequações e o processo iterativo permitem assegurar que a operação de compactação se processe de uma forma mais suave e, conseqüentemente, mais eficaz. O valor das constantes X'_i e Y'_i é igual ao valor das coordenadas do ponto de referência da forma irregular i no padrão de corte não compactado. Os parâmetros DX_i e DY_i , que limitam a amplitude dos deslocamentos, dependem das dimensões do rectângulo envolvente da forma irregular i e, após algumas experiências computacionais, foram fixados, respectivamente, em metade do

comprimento e em metade da largura do rectângulo envolvente. O sistema de inequações 3.8e é apresentado de seguida:

$$H(x_i, y_i, X'_i, Y'_i) \leq 0 \implies \begin{cases} x_i - X'_i - DX_i \leq 0 & (a) \\ y_i - Y'_i - DY_i \leq 0 & (b) \\ -x_i + X'_i - DX_i \leq 0 & (c) \\ -y_i + Y'_i - DY_i \leq 0 & (d) \end{cases} \quad (3.9)$$

A utilização de modelos matemáticos de compactação exige um padrão de corte inicial admissível, que poderá ser obtido das mais variadas maneiras, por exemplo por uma heurística de posicionamento gulosa, por disposição aleatória e sem sobreposições das formas irregulares ou, ainda, manualmente por operários especializados. O primeiro passo consiste na análise do padrão de corte de forma a estabelecer relações de posicionamento entre todos os pares de formas irregulares, com base nos respectivos invólucros de posicionamento. Como foi referido na subsecção 3.2.4, a forma irregular j não se sobrepõe à forma irregular i se o respectivo ponto de referência (R_j) estiver sobre ou no exterior do invólucro de posicionamento de j em relação a i ($NFP_{i,j}$) e que se traduzem nas condições de não sobreposição entre formas irregulares expressas na equação 3.6. Estas condições dizem que R_j tem de estar à esquerda de pelo menos uma das arestas orientadas do invólucro convexo de $NFP_{i,j}$ ou então à esquerda de todas as arestas orientadas que definem uma concavidade. Considerando o posicionamento de duas formas irregulares num determinado padrão de corte admissível, uma ou mais arestas orientadas ou concavidades do invólucro de posicionamento necessariamente satisfazem a condição anterior e como é preciso seleccionar apenas uma aresta ou concavidade, podem ser utilizadas várias regras que conduzem a diferentes implementações do modelo matemático de compactação. O segundo passo consiste na resolução do modelo de compactação, obtendo-se um padrão de corte compactado e que é uma solução óptima local para as relações de posicionamento entre formas irregulares consideradas. No terceiro e último passo, o padrão de corte acabado de compactar é reanalisado para se detectar a possibilidade de proceder a compactações adicionais. Este processo iterativo é necessário porque após o sucesso de uma operação de compactação, as formas irregulares passam a estar posicionadas em coordenadas diferentes, sendo possível seleccionar novos conjuntos de relações entre formas irregulares que possibilitem compactações adicionais. Este processo iterativo termina quando não é possível obter melhorias no padrão de corte.

Li e Milenkovic [1995] demonstram que, em situações extremas, o processo iterativo de compactação pode requerer um número exponencial de iterações. Apesar deste resultado, os testes computacionais apresentados na subsecção 5.2.2 mostram que habitualmente são precisas menos de dez iterações para se compactar completamente um padrão de corte, podendo ser necessárias mais iterações nos casos mais difíceis.

Para completar a descrição do modelo matemático de compactação, falta apresentar a regra utilizada na selecção da inequação que garante a não sobreposição entre duas formas irregulares. Esta regra deverá seleccionar a inequação válida que impuser menos limitações ao movimento relativo das duas formas irregulares. Relembre-se que estas inequações se baseiam nas rectas suporte das arestas orientadas do invólucro de posicionamento, entre uma forma irregular estacionária (i) e uma forma irregular orbital (j), e ainda que as arestas orientadas válidas são aquelas em que o ponto de referência da forma irregular orbital (R_j) está sobre ou à esquerda da aresta orientada. Sendo assim, a selecção da inequação a incluir no modelo de compactação baseia-se no cálculo das distâncias entre R_j e as rectas suporte válidas, escolhendo-se a recta suporte com a maior distância para R_j , ou seja a que deixa maior liberdade para o movimento relativo das duas formas irregulares. Em caso de igualdade entre as distâncias de duas ou mais rectas suporte, é dada preferência à recta suporte menos inclinada. Com este critério de desempate evitam-se as inequações com base em rectas verticais, que são as mais restritivas em termos de minimização do comprimento do padrão de corte. Nas situações onde existem invólucros de posicionamento com concavidades, mais uma vez as arestas que definem uma concavidade devem ser tratadas como um conjunto indivisível, onde: todas as arestas orientadas que definem a concavidade devem ter R_j sobre ou à esquerda, deverá ser considerada a distância da aresta orientada mais próxima de R_j como sendo a distância a considerar para todas as arestas que definem a concavidade e caso esta distância seja a maior, devem ser adicionadas ao modelo de compactação todas as arestas que definem a concavidade.

Na figura 3.14 apresenta-se um pequeno exemplo de aplicação da regra de selecção acabada de apresentar. O padrão de corte antes da compactação está representado na figura 3.14(a), onde se destacam as duas formas irregulares i e j , respectivamente a estacionária e a orbital, para as quais irá ser seleccionada a inequação que impede a existência de sobreposição entre as

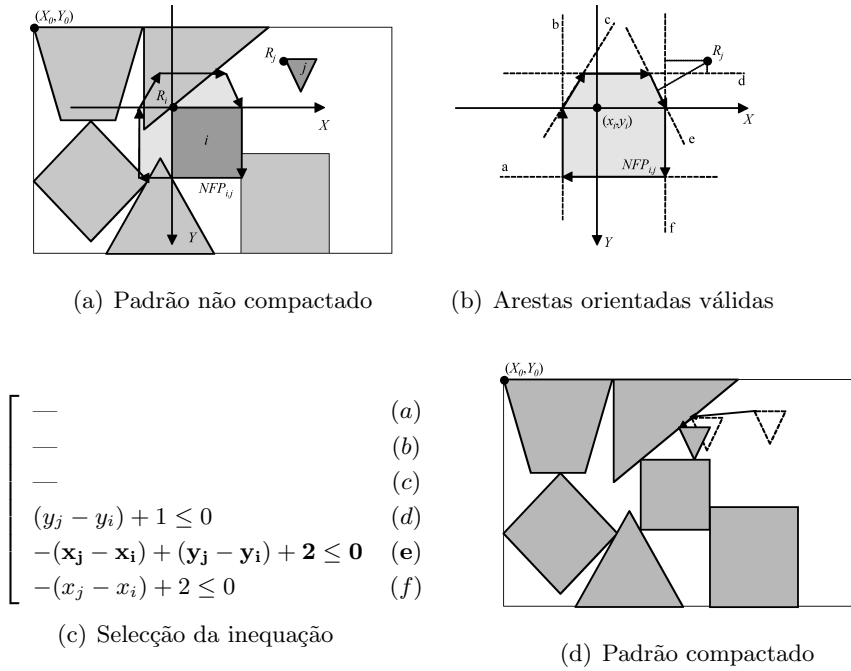


Figura 3.14: Condições de não sobreposição num modelo de compactação.

referidas formas irregulares. Na figura 3.14(b) apresenta-se o invólucro de posicionamento entre i e j e as respectivas rectas suporte das arestas orientadas, onde se constata que, para este posicionamento relativo das duas formas irregulares, apenas três arestas orientadas (**d**, **e**, **f**) respeitam as condições de não sobreposição entre formas irregulares. Das rectas suporte destas três arestas orientadas, a recta que está mais afastada é a recta suporte da aresta **e** e, como tal, a inequação seleccionada é a inequação que tem como base a recta suporte da aresta **e** (figura 3.14(c)). O padrão de corte compactado está representado na figura 3.14(d), sendo de realçar que este padrão já é o resultado de uma segunda operação de compactação. A traço interrompido indicam-se as posições, inicial e no final da primeira compactação, da forma irregular j .

Existem ainda duas situações na selecção da inequação a adicionar ao modelo matemático de compactação que merecem ser comentadas. Uma dessas situações surge quando o ponto de referência da forma irregular orbital (R_j) está sobre uma aresta vertical do invólucro de posicionamento ($NFP_{i,j}$). Nestas situações, a aresta orientada vertical vai necessariamente ser a aresta escolhida para dar origem à inequação. Esta escolha levanta

problemas na resolução do modelo de compactação, porque a função objetivo do modelo utilizada, minimização do comprimento do padrão de corte, é insensível a deslocamentos verticais e pode originar situações de bloqueio no processo de compactação. A outra situação ocorre quando R_j está sobre um vértice do $NFP_{i,j}$, já que existe a necessidade de escolher apenas uma das arestas. Esta situação corresponde a uma igualdade nas distâncias entre R_j e duas arestas do $NFP_{i,j}$ e como tal está abrangida pelo critério de desempate anteriormente referido. No entanto, a escolha de uma das arestas quando R_j está sobre um vértice é mais forte do que nos outros casos de igualdade entre distâncias, já que pode conduzir o processo de compactação sobre um dos lados do invólucro de posicionamento, sem dar hipótese ao outro lado sequer de ser experimentado. Estas duas situações acabadas de descrever deveriam ser explicitamente consideradas pelo processo de compactação, através da adição ao modelo de compactação de disjunções de inequações baseadas nas arestas vizinhas (respectivamente as arestas anterior e seguinte à aresta vertical e as duas arestas na situação de distância nula), com recurso a variáveis binárias, ou então pela implementação de um processo iterativo onde as várias alternativas são experimentadas. Um pequeno conjunto de experiências computacionais mostrou que este processo é computacionalmente muito dispendioso e a melhoria nos resultados não é significativa, pelo que foi tomada a decisão de não considerar as duas situações descritas quer no modelo matemático de compactação quer no processo de compactação.

O modelo matemático de compactação proposto é assim um modelo de programação linear puro e de fácil resolução, sem variáveis binárias nem inteiras e onde o número de restrições cresce factorialmente com o número de formas irregulares. Este modelo é assim adequado à utilização em processos iterativos, seja o processo iterativo de compactação acabado de descrever ou sejam processos iterativos incluídos em algoritmos de pesquisa local. Apesar da sua simplicidade, o modelo matemático de compactação revela-se uma ferramenta capaz de compactar padrões de corte obtidos por heurísticas de posicionamento gulosas e por algoritmos de pesquisa local, como o demonstram os resultados obtidos nos testes computacionais apresentados na subsecção 5.2.2. Adicionalmente, o modelo de compactação revela-se também uma ferramenta muito poderosa quando utilizado em abordagens de resolução de problemas de PFI, contribuindo decisivamente para a qualidade dos

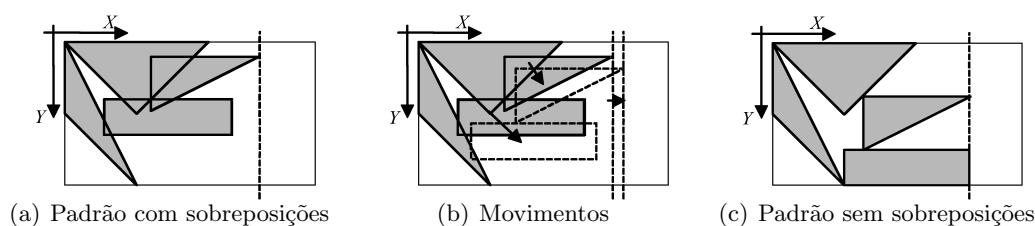


Figura 3.15: Exemplo da operação de separação de padrões de corte.

resultados obtidos por estas abordagens.

3.3.3 Modelo Matemático de Separação

A separação de formas irregulares em padrões de corte é uma operação que permite remover situações de sobreposição entre formas irregulares e re-posicionar formas irregulares que não estejam totalmente posicionadas no interior de placas. A operação de separação também se baseia em modelos matemáticos que aplicam um conjunto de movimentos coordenados às formas irregulares, mas agora com o objectivo de remover inadmissibilidades de padrões de corte (figura 3.15). Durante o processo de separação, as situações de inadmissibilidade não podem aumentar, os movimentos das formas irregulares são contínuos e não se admitem saltos sobre formas irregulares. No exemplo da figura 3.15, do lado esquerdo está representado um padrão de corte com sobreposições entre formas irregulares. Ao centro indica-se a direcção de um conjunto de movimentos a aplicar às formas irregulares de modo a remover as sobreposições. Do lado direito apresenta-se o padrão de corte resultante da operação de separação, já com as formas irregulares correctamente posicionadas na placa.

O modelo matemático de separação baseia-se numa adaptação feita ao modelo matemático de compactação apresentado na subsecção anterior, de modo a conseguir lidar com situações de inadmissibilidade. Um padrão de corte não admissível, seja por situações de sobreposição entre formas irregulares ou por posicionamento de formas irregulares parcialmente no exterior da placa, apresenta necessariamente situações onde a aplicação do modelo matemático de compactação falha. É no entanto possível introduzir uma pequena modificação no modelo de compactação por forma a ultrapassar estes problemas. A ideia base da modificação consiste na adição de uma variável artificial a todas as restrições do modelo de compactação, que, quando

necessário, tornam as restrições válidas e permitem a aplicação do modelo. É ainda necessário substituir a função objectivo por uma que minimize a utilização das variáveis artificiais (equação 3.11a) e, conseqüentemente, as situações de inadmissibilidade. Implementações de modelos de separação baseadas nas respectivas implementações do modelo de compactação, são também propostas por Li e Milenkovic [1995] e Bennell e Dowsland [2001]. Estas implementações não recorrem à utilização de variáveis artificiais, para formularem expressamente as situações de inadmissibilidade, e optam pela inclusão no modelo das restrições potencialmente inválidas, na esperança de ser possível encontrar uma solução admissível.

A figura 3.16 apresenta a estrutura geral do modelo de separação implementado e que também se encontra publicada em [Gomes e Oliveira, In Press]. Neste modelo destaca-se a utilização de uma variável artificial (a_k) associada a cada uma das restrições do modelo, num total de K variáveis artificiais. Os conjuntos de restrições das equações 3.11b e 3.11c são semelhantes aos existentes no modelo de compactação, apenas com a inclusão de uma variável artificial por restrição. Nas situações onde existem concavidades envolvidas, é usada a mesma variável artificial a_k em todas as restrições de uma concavidade. Em relação ao modelo de compactação, é ainda de notar que a variável z e o conjunto de restrições auxiliares, que asseguram a minimização do comprimento do padrão de corte, passam a ser desnecessárias no modelo de separação e, como tal, são eliminadas. O número de variáveis artificiais (K) cresce factorialmente com o número de formas irregulares (N) do padrão de corte e é dado pela seguinte expressão:

$$K = 4N + C_2^N \quad (3.10)$$

O modo de utilizar o modelo matemático de separação é muito semelhante à descrição feita na subsecção anterior para a utilização do modelo de compactação. O primeiro passo consiste na análise do padrão de corte, para seleccionar as relações de posicionamento entre todos os pares de formas irregulares que devem dar origem às restrições de não sobreposição a adicionar ao modelo. Seguindo-se, no segundo passo, a resolução do modelo de separação. Caso a resolução do modelo não tenha conseguido eliminar todas as situações de inadmissibilidade, o terceiro passo inicia um processo iterativo, com a reanálise do padrão de corte para o possível estabelecimento de novas relações de posicionamento que possam conduzir a mais elimina-

$$\min \sum_{i=1}^K a_i \quad (3.11a)$$

sujeito a:

$$F(x_i - X_0, y_i - Y_0) + a_k \geq 0 \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, N \\ k = 0, \dots, 4N - 1 \end{array} \quad (3.11b)$$

$$F(x_i - x_j, y_i - y_j) - a_k \leq 0 \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, N \\ j = i + 1, \dots, N \\ k = 4N, \dots, K \end{array} \quad (3.11c)$$

$$H(x_i, y_i, X'_i, Y'_i) \leq 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (3.11d)$$

$$x_i, y_i, a_k \geq 0 \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, N \\ k = 0, \dots, K \end{array} \quad (3.11e)$$

Figura 3.16: Modelo matemático de separação de padrões de corte.

ções de inadmissibilidades. Este processo termina quando todas as situações de inadmissibilidade são removidas (quando a função objectivo tem o valor nulo) ou quando não é possível estabelecer novas relações de posicionamento. Tal como no processo iterativo associado ao modelo de compactação, habitualmente também aqui são precisas muito poucas iterações para se atingir um padrão admissível ou chegar a uma situação onde as inadmissibilidades não podem ser totalmente removidas.

O processo de selecção das restrições de não sobreposição entre formas irregulares (equação 3.11c) é o mesmo que é utilizado para seleccionar as restrições a incluir no modelo de compactação, naturalmente com a excepção das situações onde existe sobreposição entre duas formas irregulares. Nestes casos, não existe nenhuma aresta orientada do invólucro de posicionamento que respeite as condições de não sobreposição entre formas irregulares, seleccionando-se a aresta orientada do invólucro de posicionamento ($NFP_{i,j}$) que está mais próxima do ponto de referência (R_j) da forma irregular orbital. Este critério de selecção privilegia a aresta orientada que exige o menor movimento de afastamento entre as duas formas irregulares para a remoção da sobreposição. A figura 3.17 exemplifica o funcionamento deste critério de selecção, com a selecção da aresta orientada e para servir de base à restrição a

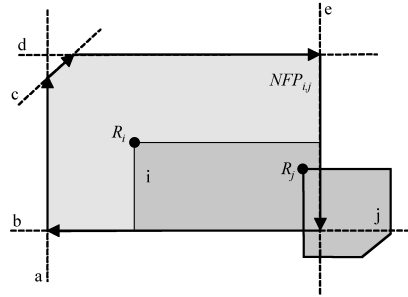


Figura 3.17: Critério de selecção da relação de posicionamento entre formas irregulares em situações de sobreposição.

incluir no modelo. Situações onde estão presentes concavidades são tratadas da mesma maneira que no caso do modelo matemático de compactação.

A utilização do modelo matemático de separação apresenta dois aspectos negativos, a possibilidade já anteriormente referida do processo de separação falhar e a de os padrões de corte resultantes do processo de separação serem muito esparsos. Relativamente ao primeiro aspecto, ele acontece em situações onde as formas irregulares estão muito entrelaçadas entre si e a única maneira de o evitar seria se a placa, para além de não ter comprimento fixo, também não tivesse largura fixa. Já o segundo aspecto é facilmente corrigido pela aplicação de um processo de compactação após a operação de separação, o que permite obter um padrão de corte admissível e simultaneamente compacto.

O modelo matemático de separação é uma ferramenta muito eficaz na remoção de situações de sobreposição entre formas irregulares, de forma a obter padrões de corte admissíveis. A incorporação de variáveis artificiais neste modelo constitui uma inovação que aumenta as probabilidades de sucesso na remoção das inadmissibilidades, ao permitir que tal seja conseguido ao longo de várias fases.

3.4 Abordagens baseadas em Heurísticas Construtivas

Esta secção é dedicada às abordagens ao problema de PFI baseadas em heurísticas construtivas e em especial à apresentação de uma heurística de

posicionamento do tipo *bottom-left*. O recurso à utilização deste tipo de abordagens é muito frequente na resolução de problemas $\mathcal{NP}$ -Difíceis, principalmente nas situações onde se pretende obter rapidamente uma solução de boa qualidade. Normalmente, as heurísticas construtivas baseiam-se em sequências ordenadas e em regras gulosas de construção. A sequência ordenada é obtida pela ordenação inicial dos elementos, com base num determinado critério. A solução é sucessivamente construída pela aplicação de uma regra gulosa sobre o elemento seguinte da sequência ordenada. Existem também heurísticas construtivas que seleccionam o próximo elemento de forma dinâmica, ou seja a selecção do próximo elemento depende dos elementos anteriores e dos efeitos do elemento a seleccionar. Heurísticas com este tipo de selecção dinâmica do próximo elemento designam-se por heurísticas adaptativas.

As heurísticas construtivas para problemas de PFI utilizam critérios de ordenação baseados nas características geométricas das formas irregulares. Estes critérios privilegiam as formas irregulares potencialmente mais difíceis de posicionar, as maiores ou as mais irregulares, ao colocá-las no início da sequência, de forma a que sejam as primeiras a serem posicionadas. A construção dos padrões de corte é assegurada por heurísticas de posicionamento gulosas, que se baseiam na avaliação do desperdício das soluções parciais, no comprimento do padrão de corte ou nas coordenadas do ponto de posicionamento. Estas heurísticas de posicionamento podem funcionar sobre sequências estáticas de formas irregulares ou podem seleccionar dinamicamente a próxima forma irregular a posicionar.

Durante a realização deste trabalho, foi desenvolvida uma nova heurística construtiva de posicionamento para a resolução de problemas de PFI. O desenvolvimento desta heurística de posicionamento teve em vista não só a resolução de problemas de PFI de forma isolada, mas também a geração de soluções iniciais para abordagens que necessitem de soluções iniciais admissíveis. De seguida será descrita a heurística construtiva de posicionamento desenvolvida

3.4.1 Estrutura da Heurística Construtiva de Posicionamento

A principal característica da heurística construtiva de posicionamento desenvolvida é a possibilidade de preenchimento de buracos a meio de padrões de corte. A implementação desta característica baseia-se na determinação de

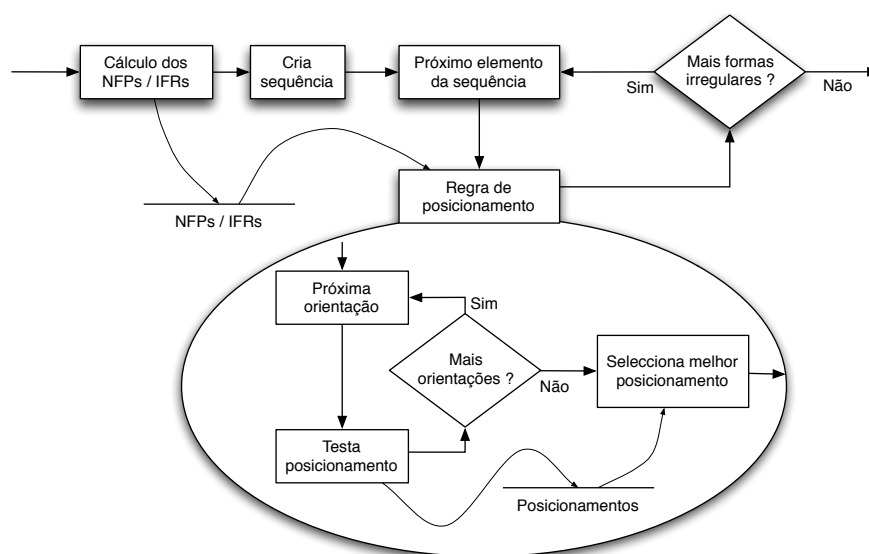


Figura 3.18: Heurística construtiva de posicionamento.

intersecções entre invólucros de posicionamento e a sua principal vantagem é permitir a redução da dependência em relação à sequência ordenada de formas irregulares. No desenvolvimento da heurística construtiva de posicionamento foram ainda privilegiadas a flexibilidade e a modularidade dos seus principais módulos, de forma a possibilitar a sua reutilização. Os principais componentes são os seguintes:

- **Cálculo dos NFPs/IFRs** — este módulo é responsável pelo cálculo dos invólucros de posicionamento (NFPs), entre todos os pares de formas irregulares e segundo todas as orientações, e dos rectângulos de posicionamento interior (IFRs), de todas as formas irregulares e em todas as orientações em relação à placa, bem como em guardar os NFPs e IFRs em estruturas de dados adequadas para posterior reutilização;
- **Cria sequência** — módulo responsável por gerar uma sequência ordenada de formas irregulares, segundo um determinado critério;
- **Regra de posicionamento** — este módulo é responsável por determinar o melhor ponto de posicionamento de uma determinada forma irregular e segundo uma determinada regra de posicionamento.

Convém realçar que o cálculo dos invólucros de posicionamento e dos retângulos de posicionamento interior é efectuado em pré-processamento, uma vez que só dependem das orientações relativas entre as formas irregulares e não dos seus pontos de posicionamento. Esta característica é fundamental para a eficiência das abordagens baseadas em invólucros de posicionamento.

3.4.2 Critérios de Ordenação de Formas Irregulares e de Selecção da próxima Forma Irregular

Foram utilizados três tipos de critérios para seleccionar a próxima forma irregular a ser posicionada. Dois deles criam sequências ordenadas de formas irregulares, critérios estáticos e aleatórios, e o terceiro tipo de critério não cria nenhuma sequência, critério dinâmico. Nos critérios estáticos e aleatórios, a selecção da próxima forma irregular a posicionar está pré-determinada pela ordenação da sequência, enquanto nos critérios dinâmicos são experimentadas as várias hipóteses e escolhida a melhor em cada momento.

Critérios Estáticos

Os critérios estáticos baseiam-se nas características geométricas das formas irregulares para criarem as sequências ordenadas, dando prioridade na colocação às formas irregulares potencialmente mais difíceis de posicionar. Os critérios utilizados foram os seguintes:

- AREA — maior área;
- PERIMETER — maior perímetro;
- LENGTH — maior comprimento;
- WIDTH — maior largura;
- IRREGULARITY — maior irregularidade;
- NONRECTANGULARITY — menor rectangularidade;
- AGGREGATE — maior índice agregado.

Os quatro primeiros critérios (figuras 3.19(a)-3.19(d)) dão prioridade às formas irregulares maiores. Os dois critérios seguintes (figuras 3.19(e)-3.19(f)) privilegiam as formas irregulares mais difíceis de encaixar. A irregularidade é medida como a diferença de áreas entre a forma irregular e o seu

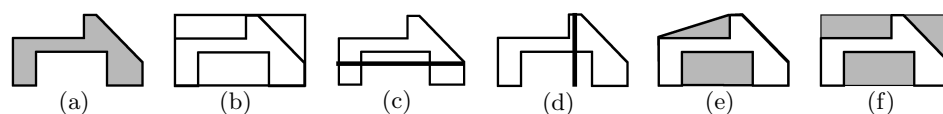


Figura 3.19: Critérios de ordenação estáticos.

invólucro convexo, enquanto a rectangularidade é medida como a diferença de áreas entre a forma irregular e o seu rectângulo envolvente ortogonal. Por fim, o último critério é obtido pelo somatório das posições obtidas pelas formas irregulares em cada uma das ordenações segundo os seis critérios anteriores.

Critérios Aleatórios

Os critérios aleatórios criam sequências de formas irregulares completamente aleatórias, onde todas as formas irregulares têm igual probabilidade, ou sequências onde a aleatoriedade é controlada por pesos, onde a probabilidade de cada forma irregular depende de um critério de ordenação. Os critérios utilizados foram os seguintes:

- RANDOM — completamente aleatório;
- RANDOM_WEIGHTED_LENGTH — aleatório, pesado pelo comprimento das formas irregulares;
- RANDOM_WEIGHTED_AGGREGATE — aleatório, pesado pelo índice agregado das formas irregulares.

O objectivo da utilização de critérios aleatórios é permitir a obtenção de soluções variadas que possam servir de solução inicial para as abordagens baseadas em algoritmos de pesquisa local. Sob este ponto de vista, são particularmente interessantes os dois últimos critérios, que permitem a obtenção de soluções variadas e que simultaneamente apresentam alguma estrutura.

Critérios Dinâmicos

Ao contrário dos critérios anteriores, os critérios dinâmicos não geram nenhuma sequência ordenada de formas irregulares, actuando ao nível da regra de posicionamento ao alargarem a selecção da próxima forma irregular a todas as disponíveis e escolhendo a forma irregular e orientação que melhores

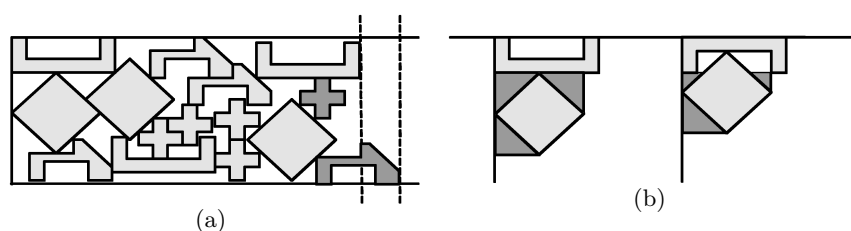


Figura 3.20: Critérios de ordenação dinâmicos.

benefícios introduz no momento da selecção. Foram utilizados os seguintes critérios dinâmicos:

- LAYOUT_LENGTH_RELATIVE — comprimento relativo do padrão de corte;
- INNER_WASTE_RELATIVE — desperdício interno adicionado relativo.

O primeiro critério selecciona a forma irregular que conduz ao menor quociente entre o comprimento do padrão de corte e o comprimento da forma irregular (figura 3.20(a)). O segundo critério privilegia a forma irregular que origina o menor desperdício interno relativo ao longo das arestas superiores e do lado esquerdo (figura 3.20(b)). O desperdício interno é aproximado pela soma das áreas não utilizadas ao longo das arestas superior e esquerda do rectângulo envolvente, descontando as zonas de sobreposição com os rectângulos envolventes previamente colocados. Esta aproximação do desperdício interno é posteriormente dividida pela área da forma irregular, de forma a obter-se uma medida relativa. Para finalizar, convém referir que estes critérios dinâmicos apenas avaliam posicionamentos e que a determinação dos pontos de posicionamento das formas irregulares é da responsabilidade das regras de posicionamento a descrever de seguida.

3.4.3 Regras de Posicionamento

A regra de posicionamento é responsável pela determinação do ponto de posicionamento de uma determinada forma irregular, sendo aplicada sucessivamente a todas as formas irregulares de forma a obter-se o padrão de corte (figura 3.21). Na escolha do melhor de ponto de posicionamento são consideradas as várias orientações possíveis para cada forma irregular (figura 3.18). No desenvolvimento deste trabalho consideram-se duas regras de po-

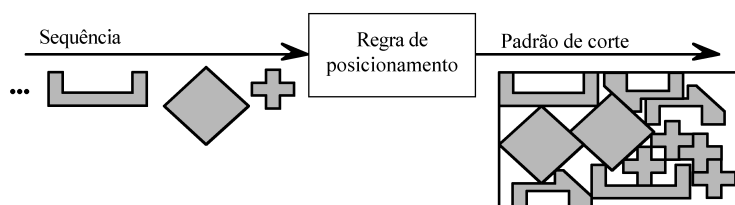


Figura 3.21: Regra de posicionamento.

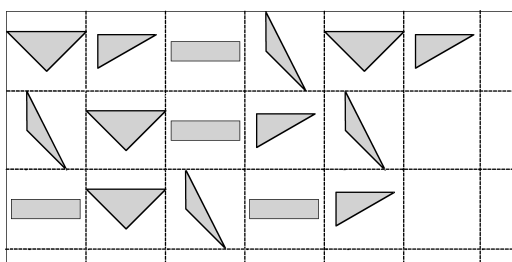


Figura 3.22: Regra de posicionamento em grelha.

sicionamento, segundo uma grelha e regra de posicionamento *bottom-left*, que serão descritas de seguida.

Regra de Posicionamento em Grelha

A regra de posicionamento em grelha posiciona as formas irregulares segundo uma grelha, conforme está ilustrado na figura 3.22. As dimensões das células da grelha são definidas pelas dimensões máximas, em comprimento e em largura das formas irregulares. O desenvolvimento desta regra de posicionamento teve como objectivo a obtenção de padrões de corte esparsos para serem usados nos testes computacionais sobre compactação de padrões de corte.

Regra de Posicionamento *Bottom-Left*

A regra de posicionamento *bottom-left* é uma heurística de posicionamento gulosa, que determina o ponto de posicionamento admissível o mais à esquerda e o mais acima para o posicionamento de uma determinada forma irregular segundo qualquer uma das suas orientações admissíveis. A principal característica desta regra de posicionamento é a capacidade de preencher

zonas não ocupadas no meio de padrões de corte, habitualmente designadas por “buracos”. O padrão de corte da figura 3.21 ilustra o tipo de padrões de corte que se obtém com esta regra de posicionamento.

O princípio de funcionamento desta heurística de posicionamento baseia-se na geração de todos os pontos de posicionamento admissíveis, para uma determinada forma irregular e orientação de posicionamento, e posterior selecção do ponto mais à esquerda e mais acima. Matematicamente este princípio de funcionamento pode ser expresso, recorrendo aos conceitos de invólucros de posicionamento (NFP) e de rectângulos de posicionamento interior (IFR), como sendo um conjunto de pontos onde o posicionamento é admissível (conjunto A na equação 3.12a), e a uma operação de minimização para se obter o ponto de posicionamento mais à esquerda e mais acima (equações 3.12b e 3.12c). Esta operação de minimização corresponde a uma minimização sobre um conjunto não convexo, multi-conecto e infinito de pontos. Nestas equações, k representa a próxima forma irregular a ser posicionada, m representa as formas irregulares já posicionadas e $NFP_{i,k}(x_i, y_i)$ representa o invólucro de posicionamento de k em relação a uma forma irregular já posicionada (i) nas coordenadas de posicionamento (x_i, y_i).

$$A = \{(x, y) : (x, y) \in \text{interior}(IFR_k)) \quad \wedge \quad (x, y) \notin \text{interior}(NFP_{i,k}(x_i, y_i)), \forall i=1\dots M\} \quad (3.12a)$$

$$B = \{(x_{min}, y) : x_{min} \leq x, \forall (x, y) \in A\} \quad (3.12b)$$

$$(x_{min}, y_{min}) : y_{min} \leq y, \forall (x_{min}, y) \in B \quad (3.12c)$$

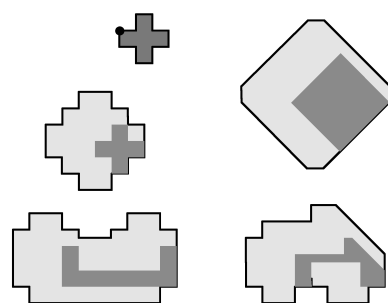
As equações 3.12b e 3.12c garantem que o ponto de posicionamento não vai estar no interior da região de posicionamento admissível, mas sobre um seu vértice. Qualquer vértice da região de posicionamento admissível está numa das quatro seguintes situações:

- é um vértice de um invólucro de posicionamento entre a forma irregular k e uma das m formas irregulares já posicionadas, com o ponto de referência do invólucro de posicionamento colocado no ponto de posicionamento de k ($NFP_{i,k}(x_i, y_i)$);
- é um vértice do rectângulo de posicionamento interior de k (IFR_k);

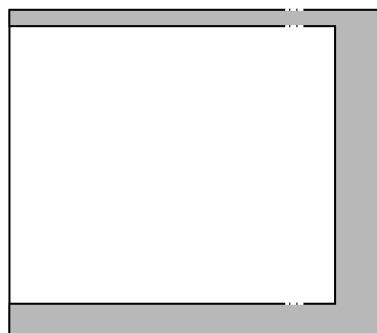
- é uma intersecção entre arestas de dois dos invólucros de posicionamento de k com formas irregulares já posicionadas i e j ($NFP_{i,k}(x_i, y_i)$ e $NFP_{j,k}(x_j, y_j)$);
- é uma intersecção entre arestas do rectângulo de posicionamento interior de k (IFR_k) e arestas de um dos invólucros de posicionamento de k e uma das m formas irregulares já posicionadas ($NFP_{i,k}(x_i, y_i)$).

Adicionalmente, qualquer vértice da região de posicionamento admissível tem também de estar no interior do rectângulo de posicionamento de k ($NFP_{i,k}(x_i, y_i)$) e no exterior de todos os invólucros de posicionamento de k com qualquer uma das m formas irregulares já posicionadas ($NFP_{i,k}(x_i, y_j)$). Este procedimento permite reduzir a pesquisa a um conjunto discreto e finito de pontos admissíveis, sobre o qual uma simples ordenação permite determinar o ponto de posicionamento mais à esquerda e mais acima. A figura 3.23 apresenta um exemplo de aplicação da regra de posicionamento *bottom-left*, com a indicação da forma irregular a posicionar e dos respectivos invólucros de posicionamento na figura 3.23(a) e do rectângulo de posicionamento interior na figura 3.23(b). A figura 3.23(c) apresenta o padrão de corte actual a cinzento escuro, a região admissível de posicionamento a branco e os vértices da região admissível de posicionamento estão assinalados por pontos pretos. Por fim, a figura 3.23(d) mostra o padrão de corte após o posicionamento da nova forma irregular, no vértice da região admissível de posicionamento mais à esquerda e mais acima.

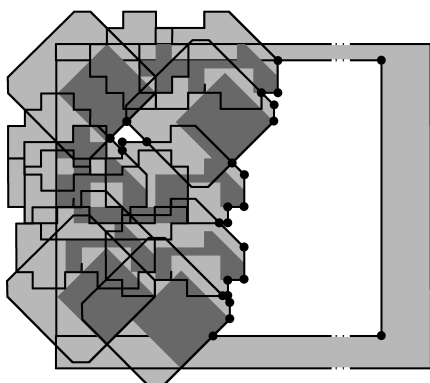
A implementação da regra de posicionamento *bottom-left* necessita de alguns cuidados, sob pena de se obter um algoritmo muito pouco eficiente e onde os mesmos cálculos são efectuados repetidas vezes. A origem do problema está na necessidade de determinar os vértices da região admissível de posicionamento, segundo o processo acabado de descrever, sempre que se pretender posicionar uma forma irregular. Adicionalmente, o número de formas irregulares vai aumentando, o que provoca um maior número de intersecções a calcular e testes de inclusão a realizar. A repetição de cálculos acontece quando se pretende posicionar uma forma irregular que é igual a uma das formas anteriormente posicionadas, já que a região admissível só depende da geometria e dos pontos de posicionamento das formas irregulares já posicionadas e da geometria da forma irregular a posicionar. Para evitar a repetição de cálculos é assim necessário ir guardando os vértices das regiões



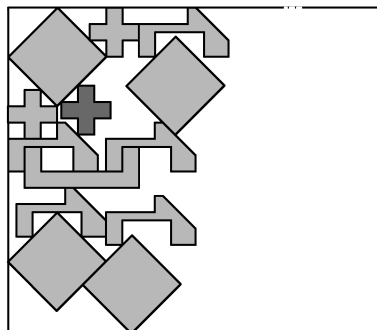
(a) Forma irregular a posicionar e invólucros de posicionamento.



(b) Rectângulo de posicionamento interior.



(c) Região admissível de posicionamento.



(d) Padrão de corte após o posicionamento da nova forma irregular.

Figura 3.23: Exemplo de aplicação da regra de posicionamento *bottom-left*.

admissíveis de posicionamento para todas as formas irregulares ao longo da construção do padrão de corte e ir removendo posicionamentos que deixaram de ser válidos. Isto representa o cálculo de novas intersecções entre pares de invólucros de posicionamento e entre invólucros de posicionamento e o rectângulo de posicionamento interior, a que se segue a eliminação dos pontos que estão no interior de pelo menos um invólucro de posicionamento ou no exterior do rectângulo de posicionamento interior.

A regra de posicionamento também é responsável pela selecção da orientação da forma irregular, pelo que é necessário ir mantendo os vértices das regiões admissíveis de posicionamento para cada uma das orientações possíveis. Estes conjuntos de vértices das regiões de posicionamento admissível para todas as formas irregulares e segundo todas as orientações necessitam de ser mantidos, de iteração em iteração, ao longo da construção de um padrão de corte.

Para finalizar, será feita uma referência aos critérios dinâmicos de selecção da próxima forma irregular. Nestes critérios, a próxima forma irregular a ser posicionada ainda não está determinada, o que obriga à necessidade de determinar o melhor posicionamento para todas as formas irregulares e segundo todas as orientações possíveis para que posteriormente o critério dinâmico possa seleccionar a forma irregular a ser efectivamente posicionada. Ou seja, é necessário gerar os vértices das regiões admissíveis de posicionamento para todas as formas irregulares e segundo todas as orientações possíveis sempre que se pretender posicionar uma forma irregular. A implementação da regra de posicionamento acabada de descrever já responde a esta exigência dos critérios dinâmicos, uma vez que os vértices das regiões admissíveis de posicionamento de todas as formas irregulares e segundo todas as orientações já são mantidos durante a construção de um padrão de corte.

3.4.4 Heurística Construtiva de Posicionamento

A heurística construtiva de posicionamento acabada de apresentar foi desenvolvida no decurso do presente trabalho e teve em vista dois objectivos, por um lado a resolução de problemas de PFI e por outro lado a geração de soluções admissíveis para serem usadas como soluções iniciais por outras abordagens. Relativamente ao primeiro dos objectivos, foi realizado um conjunto de testes computacionais para avaliar o desempenho da heurística

construtiva de posicionamento e cujos resultados são apresentados na subsecção 5.3.1. É ainda de referir que uma versão desta heurística construtiva, que considera apenas a regra de posicionamento *bottom-left*, se encontra publicada em [Gomes e Oliveira, 2002].

Capítulo 4

Abordagens ao Problema de Posicionamento de Formas Irregulares baseadas em Pesquisa Local

Este capítulo é dedicado à apresentação de abordagens ao problema de PFI baseadas em algoritmos de pesquisa local, descrevendo as estratégias de pesquisa local utilizadas e as estruturas de vizinhança desenvolvidas. Grande parte do esforço desenvolvido, durante a realização deste trabalho, foi colocado na concepção e implementação de abordagens ao problema de PFI baseadas neste tipo de algoritmos e, em especial, no estudo e desenvolvimento de estruturas de vizinhança que operam directamente sobre padrões de corte. Na implementação destas abordagens baseadas em algoritmos de pesquisa local utilizaram-se as ferramentas geométricas, os modelos matemáticos de compactação e de separação e a heurística construtiva de posicionamento anteriormente apresentados.

As vantagens da utilização de abordagens baseadas em algoritmos de pesquisa local, relativamente às abordagens baseadas em heurísticas construtivas, são a melhor qualidade das soluções obtidas e, principalmente, uma maior robustez face a variações nas características específicas das instâncias. O preço a pagar está, obviamente, nos maiores tempos de processamento de que estas abordagens necessitam, já que se baseiam em processos de pesquisa iterativos.

O desenvolvimento de abordagens ao problema de PFI baseadas em algoritmos de pesquisa local teve como principal objectivo a obtenção de soluções de muito boa qualidade, em detrimento da obtenção de boas soluções em pouco tempo. Este objectivo explica algumas das opções tomadas na concepção e implementação destas abordagens, designadamente a colocação do maior esforço no estudo e desenvolvimento de estruturas de vizinhança especialmente adequadas para problemas de PFI em detrimento da estratégia de pesquisa local. Na realização deste trabalho, também não se pretendeu realizar nenhum estudo comparativo entre estratégias de pesquisa local, nem sequer refinar a estratégia de pesquisa. O trabalho a este nível foi desenvolvido segundo duas linhas de investigação diferentes, numa primeira fase com abordagens baseadas em algoritmos que realizam pesquisas sobre sequências de formas irregulares e, posteriormente, em abordagens que realizam pesquisas directamente sobre padrões de corte. Nos algoritmos que pesquisam directamente sobre padrões de corte, a pesquisa foi restrita apenas a soluções admissíveis, ou seja todas as novas soluções geradas pela estrutura de vizinhança são obrigatoriamente admissíveis.

De seguida, descrevem-se as estratégias utilizadas nas abordagens ao problema de PFI baseadas em algoritmos de pesquisa local. Nas subsecções seguintes apresentam-se as estruturas de vizinhança desenvolvidas para abordagens baseadas em pesquisas sobre sequências e em pesquisas sobre padrões de corte.

4.1 Algoritmos de Pesquisa Local

Os algoritmos de pesquisa local podem ser descritos como sendo processos iterativos, que se baseiam em operações de pesquisa sobre vizinhanças¹, na realização de movimentos entre soluções vizinhas e em estratégias de pesquisa que aceitam ou não as novas soluções. A vizinhança e os movimentos possíveis entre soluções vizinhas definem a estrutura de vizinhança, que desempenha um papel crucial no desempenho global dos algoritmos de pesquisa local. Habitualmente, as vizinhanças apresentam um número de elementos suficientemente grande, que impede a sua pesquisa exaustiva e obriga à utilização de subvizinhanças. A estratégia de pesquisa é responsá-

¹O conceito de vizinhança define-se como sendo o conjunto de soluções passíveis de serem atingidas a partir de uma determinada solução, o centro da vizinhança, com um único movimento.

vel pela aceitação dessas novas soluções, baseando-se na avaliação das novas soluções e na aplicação de um critério de aceitação. Existem estratégias de pesquisa baseadas em critérios de aceitação gulosos, onde só são aceites soluções de melhor qualidade, e estratégias de pesquisa que tentam evitar a paragem em mínimos locais, ao permitirem que soluções de pior qualidade sejam aceites. Existem ainda outros tipos de estratégias de pesquisa que se baseiam em pesquisas locais iteradas, a partir de diferentes soluções iniciais. Os algoritmos que se baseiam no primeiro tipo de estratégia denominam-se por algoritmos de pesquisa local pura, enquanto os algoritmos que se baseiam no segundo e terceiro tipo de estratégia são exemplos de meta-heurísticas. É de assinalar que as estratégias de pesquisa utilizadas por meta-heurísticas não se limitam às estratégias aqui referidas, existindo uma grande diversidade nas estratégias de pesquisa e de metodologias utilizadas tais como as baseadas em métodos populacionais, em analogias com a natureza ou por modificação da estrutura de vizinhança. O elemento comum que une e caracteriza as várias meta-heurísticas é a tentativa de evitarem a paragem da pesquisa em mínimos locais.

4.1.1 Algoritmos de Pesquisa Local Pura

Os algoritmos de pesquisa local pura são processos iterativos, que se baseiam na realização de pesquisas sistemáticas à (sub)vizinhança centrada na solução corrente, em busca de uma solução de melhor qualidade. Caso seja encontrada uma solução de melhor qualidade, a solução corrente é actualizada e dá-se início a uma nova iteração. O processo iterativo termina quando não é possível encontrar nenhuma solução de melhor qualidade na (sub)vizinhança da solução corrente. O esquema geral deste processo iterativo está representado na figura 4.1. As principais características destes algoritmos são a simplicidade de implementação, não requerendo estruturas de memória elaboradas, e dependência da solução inicial, uma vez que só aceitam soluções melhores e não conseguem fugir de soluções óptimas locais (figura 4.2).

A implementação de um algoritmo de pesquisa local pressupõe a pesquisa exaustiva e sistemática da (sub)vizinhança, na procura da melhor solução dessa (sub)vizinhança para actualizar a solução corrente. Este processo pode revelar-se computacionalmente muito pesado quando as (sub)vizinhanças são de grande dimensão. Nestes casos, existe a possibilidade de parar a

```
procedimento PesquisaLocalPura()  
  
   $s = \text{GeraSoluçãoInicial}()$   
   $\text{condição} = 0$   
  repita  
     $s' = \text{PesquisaVizinhança}(s)$   
    se  $(s' == s)$  então  $\text{condição} = 1$   
     $s = s'$   
  até  $\text{condição} == 1$   
  retorna  $s$   
fim.
```

Figura 4.1: Estrutura do algoritmo de pesquisa local pura.

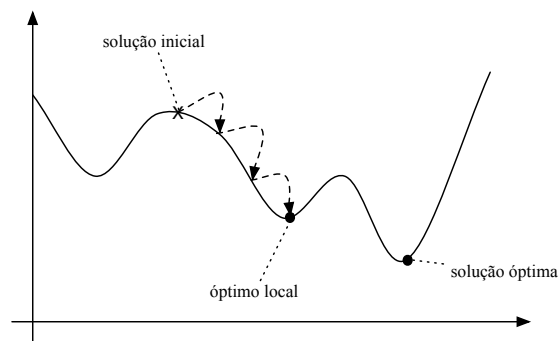


Figura 4.2: Evolução da trajetória da pesquisa local pura.

pesquisa da (sub)vizinhança assim que se encontra uma solução melhor e actualizar imediatamente a solução corrente. Uma terceira alternativa de implementação de um algoritmo de pesquisa local pura surge quando se escolhe aleatoriamente uma solução melhor de entre todas as soluções encontradas na (sub)vizinhança que são melhores do que a solução corrente. A estas três diferentes implementações de algoritmos de pesquisa local pura designaremos, respectivamente por: BEST, FIRST e RANDOM.

4.1.2 Meta-heurísticas

Uma meta-heurística é uma abordagem algorítmica para obter aproximações à solução óptima de problemas de optimização combinatória. De entre as muitas e variadas definições para meta-heurística, a definição apresentada é uma das mais genéricas e abrangentes. Esta definição engloba os dois principais tipos de meta-heurísticas, as que se baseiam na descrição de trajectórias (por exemplo: pesquisa por arrefecimento simulado, pesquisa tabu, GRASP) e as baseadas em populações (por exemplo: algoritmos genéticos, colónias de formigas). As meta-heurísticas baseadas em populações ficam fora do âmbito desta tese, pelo que nos parágrafos seguintes será apenas dada atenção às meta-heurísticas que se baseiam na descrição de trajectórias. As meta-heurísticas têm sido aplicadas com sucesso aos mais variados problemas de optimização combinatória e inclusivamente a problemas reais, com provas dadas designadamente na resolução de instâncias de grandes dimensões. As razões para estes sucessos estão na sua simplicidade de implementação, na flexibilidade e robustez que demonstram face a variações nas características das instâncias e à facilidade de inclusão dos mais variados tipos de restrições.

As meta-heurísticas que descrevem trajectórias são também conhecidas por se basearem em estratégias de pesquisa local, o que permite refinar a definição muito abrangente de meta-heurística anteriormente apresentada. Considerando apenas as meta-heurísticas baseadas na descrição de trajectórias, uma meta-heurística pode ser vista como a estratégia utilizada na condução da pesquisa e exploração do espaço de soluções. O aspecto geral do espaço de soluções (*landscape*) é definido pela representação do problema utilizada e pela estrutura de vizinhança, enquanto as características da instância a resolver definem em detalhe o espaço das soluções. Segundo esta definição mais refinada, as meta-heurísticas baseadas em pesquisa local podem ser vistas como estratégias de pesquisa inteligentes para ultrapassar as

limitações dos algoritmos de pesquisa local pura. Como exemplos destas estratégias podemos destacar a aceitação de soluções de pior qualidade na pesquisa por arrefecimento simulado, a imposição de movimentos proibidos na pesquisa tabu ou o recurso sistemático à utilização de diferentes vizinhanças na pesquisa por vizinhanças variáveis. Estas estratégias de pesquisa vão utilizando, de uma forma concertada, fases de intensificação e diversificação da pesquisa, consoante se pretenda realizar uma pesquisa mais profunda numa determinada zona do espaço das soluções (intensificação) ou dirigir a pesquisa para outras zonas do espaço de soluções (diversificação).

Segue-se uma breve referência às principais tendências na investigação e desenvolvimento sobre meta-heurísticas. Actualmente, uma das tendências mais fortes é a utilização das estratégias e ideias originadas no contexto de uma determinada meta-heurística na implementação de outras meta-heurísticas. Assiste-se também à utilização de meta-heurísticas como componentes de outras meta-heurísticas. Um exemplo desta situação é a utilização de um algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado (que por definição de meta-heurística é um algoritmo de pesquisa local) para realizar as pesquisas locais noutras meta-heurísticas. Uma outra tendência é a hibridização de meta-heurísticas com métodos exactos, como a programação por restrições, a pesquisa em árvore ou modelos de programação matemática. Um exemplo de hibridização de uma meta-heurística, a pesquisa por arrefecimento simulado, com modelos de programação matemática será apresentado nas próximas subsecções. Como exemplo de uma referência recente sobre meta-heurísticas e a sua aplicação a problemas de optimização combinatória indicamos [Blum e Roli, 2003].

Este trabalho centra-se no desenvolvimento de abordagens ao problema de PFI baseadas em algoritmos de pesquisa local. A este nível foi colocada maior ênfase no desenvolvimento de estruturas de vizinhança adequadas para problemas de PFI, optando-se por utilizar na condução da pesquisa duas meta-heurísticas relativamente simples, a pesquisa por arrefecimento simulado e o GRASP, de forma a valorizar os resultados obtidos com as estruturas de vizinhança desenvolvidas. De seguida serão apresentadas com maior detalhe as duas meta-heurísticas utilizadas.

Pesquisa por Arrefecimento Simulado

A pesquisa por arrefecimento simulado (*Simulated Annealing*) é uma meta-heurística que se inspira no processo físico de arrefecimento e cristalização de sólidos. As origens da pesquisa por arrefecimento simulado remontam ao trabalho de Metropolis *et al.* [1953], ainda sob o nome de algoritmo de *Metropolis*. Neste trabalho, os autores propõem um algoritmo para simular o arrefecimento de um sólido depois de ter sido aquecido até atingir o estado líquido. Mais tarde, Kirkpatrick *et al.* [1983] e Cerny [1985] propõem as primeiras aplicações de algoritmos de pesquisa por arrefecimento simulado à resolução de problemas de otimização combinatória. Desde essa altura tem havido uma grande quantidade de trabalhos sobre a aplicação de algoritmos de pesquisa por arrefecimento simulado aos mais variados problemas de otimização combinatória.

Nas abordagens baseadas em algoritmos de pesquisa local pura, as soluções acabam frequentemente por ficar presas em ótimos locais, uma vez que só aceitam movimentos para soluções de melhor qualidade numa vizinhança e, por definição, um ótimo local corresponde à melhor solução numa determinada vizinhança. A pesquisa por arrefecimento simulado pode ser vista como uma evolução da pesquisa local pura, ao aceitar movimentos para soluções de pior qualidade de uma forma controlada, de forma a ser possível atingir a solução ótima global (figura 4.3). A aceitação de um movimento para uma solução de pior qualidade é probabilística e depende de um parâmetro de controlo, a temperatura, e da amplitude do desvio da função objectivo, ou seja, de quanto pior é a nova solução. No início da pesquisa a temperatura é muito alta, o que dá origem a uma elevada probabilidade de aceitação de movimentos para soluções de pior qualidade. Com o evoluir da pesquisa, um esquema de arrefecimento vai fazendo baixar gradualmente a temperatura por patamares, o que naturalmente diminui a probabilidade de aceitação de movimentos para soluções de pior qualidade e leva à cristalização da solução. Em [van Laarhoven e Aarts, 1987] são discutidas e analisadas as condições de convergência teórica da pesquisa por arrefecimento simulado. Do ponto de vista prático, o sucesso dos algoritmos de pesquisa por arrefecimento simulado traduz-se no grande número de publicações sobre a aplicação destes algoritmos a problemas de otimização combinatória e, principalmente, no grande número de problemas reais que têm sido resolvidos com sucesso por abordagens baseadas neste tipo de al-

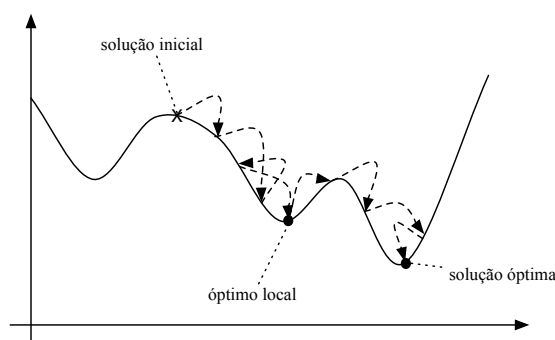


Figura 4.3: Evolução da trajectória da pesquisa por arrefecimento simulado.

goritmos. As principais razões para o sucesso dos algoritmos de pesquisa por arrefecimento simulado são a muito boa qualidade das soluções obtidas, a fácil inclusão de todo o tipo de restrições, incluindo restrições complexas de problemas reais, e a grande robustez destas abordagens a variações nas características das instâncias de dados. A principal desvantagem é o grande esforço computacional necessário, que pode inviabilizar a utilização de abordagens baseadas em algoritmos de pesquisa por arrefecimento simulado em situações onde o tempo de processamento é crítico.

A implementação do algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado baseou-se na descrição feita em [Pirlot, 1996]. Neste trabalho, o autor define um conjunto de decisões estratégicas a tomar na implementação deste algoritmo. Estas decisões estratégicas podem ser divididas em dois grupos, um grupo de decisões genéricas, cuja resposta não depende do problema a ser tratado, e um de decisões específicas, que, ao contrário do anterior, varia de problema para problema. Nas decisões genéricas estão incluídas a escolha da probabilidade de aceitação de movimentos para soluções de pior qualidade, o esquema de arrefecimento da temperatura, a temperatura inicial, a largura do patamar e a condição de paragem. As decisões específicas de cada problema são a função objectivo, a estrutura de vizinhança e a solução inicial. Ao nível das decisões genéricas, a opção recaiu em escolhas conservadoras e convencionais, devido ao objectivo global desta tese estar colocado no estudo e desenvolvimento de estruturas de vizinhança para problemas de PFI. Assim, a probabilidade de aceitação ($P(n)$) utiliza a distribuição de Boltzmann:

```

procedimento PesquisaArrefecimentoSimulado()

     $s = \text{GeraSoluçãoInicial}()$ 
     $t = t_0$ 
    repita
        para  $i = 0$  até  $\text{larguraPatamar}$  faça
             $s' = \text{SeleccionaAleatoriamenteVizinho}(s)$ 
             $\delta = s' - s$ 
            se  $(\delta > 0)$  então  $s = s'$ 
        senão
             $x = \text{DistribuiçãoUniforme}[0, 1]$ 
            se  $(x < \exp(-\delta/t))$  então  $s = s'$ 
        fim
    fim
     $t = \alpha \times t$ 
até  $\text{condiçãoParagem}$ 
retorna  $s$ 
fim.

```

Figura 4.4: Estrutura do algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado.

$$P(n) = \exp\left(-\frac{\Delta F_n}{T(n)}\right) \quad (4.1)$$

onde $\Delta F_n = F(x) - F(x_n)$, $F(x)$ é o valor da solução x e $T(n)$ é o valor da temperatura no patamar n . O esquema de arrefecimento escolhido foi o geométrico, $T(n) = \alpha T(n-1)$, com $\alpha = 0.9$. A temperatura inicial ($T(0)$) é ajustada de forma a garantir 50% de probabilidade de aceitação de piores soluções no primeiro patamar. A condição de paragem foi fixada em dois patamares sem alterações e a largura de um patamar é dada pelo número de combinações entre pares de elementos (C_2^N). Relativamente às decisões específicas, as opções foram a utilização da heurística construtiva de posicionamento, descrita na secção 3.4, para a geração da solução inicial e o comprimento do padrão de corte como função objectivo. As estruturas de vizinhança serão alvo de discussão nas próximas subsecções. A estrutura geral do algoritmo de pesquisa por arrefecimento simulado é apresentada na figura 4.4.

Informações adicionais sobre o algoritmo de pesquisa por arrefecimento

```

procedimento GRASP()

     $s^* = +\infty$ 
    para  $i = 0$  até númeroIterações faça
         $s' = \text{HeurísticaConstrutiva}(\alpha)$ 
         $s = \text{PesquisaLocalPura}(s')$ 
        se  $(s < s^*)$  então  $s^* = s$ 
    fim
    retorna  $s^*$ 
fim.

```

Figura 4.5: Estrutura da meta-heurística GRASP (adaptado de [Resende, 1998]).

simulado podem ser obtidas em [Vidal, 1993] [Dowsland, 1995] [Aarts e Lenstra, 1997] e [Henderson *et al.*, 2003].

GRASP

O GRASP (*Greedy Randomised Adaptive Search Procedure*) é uma meta-heurística que se baseia num processo iterativo, onde sucessivas soluções são construídas e melhoradas de uma forma independente. A estrutura geral da meta-heurística GRASP é apresentada na figura 4.5. Cada iteração do processo iterativo é constituída por duas fases: uma fase construtiva e uma fase de melhoramentos. Na fase construtiva, uma solução é obtida por intermédio de uma heurística construtiva. Esta heurística construtiva vai sucessivamente adicionando elementos à solução, com base na selecção aleatória, controlada pelo parâmetro α , de um elemento a partir de uma lista de candidatos restrita (LCR). A LCR é construída com base na ordenação de todos os elementos candidatos por um critério guloso e considerando apenas os elementos melhor colocados nesta ordenação. Após a adição de um novo elemento à solução, é necessário reconstruir a lista ordenada de elementos candidatos e a LCR, de forma a ter em consideração os efeitos da adição de um novo elemento à solução. A fase de melhoramentos consiste na aplicação de um algoritmo de pesquisa local à solução obtida através da heurística construtiva.

As principais características da meta-heurística GRASP estão explícitas na definição acabada de apresentar. Por um lado é uma meta-heurística cujo

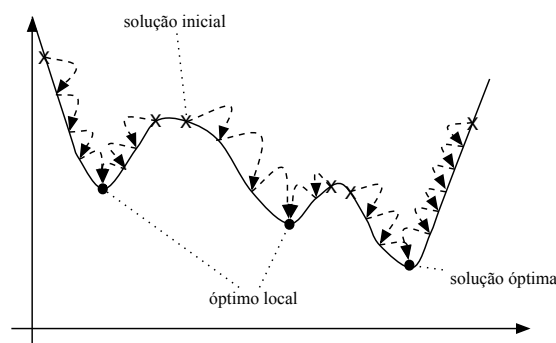


Figura 4.6: Evolução das trajetórias do GRASP.

princípio de funcionamento se baseia num processo iterativo de geração de soluções independentes que são ótimos locais (figura 4.6), na expectativa de numa dessas iterações se conseguir atingir o ótimo global. Ao nível da implementação, a meta heurística GRASP não apresenta grandes dificuldades. A fase de melhoramentos garante a obtenção de ótimos locais, enquanto as características gulosa e aleatória da fase construtiva garantem a obtenção de soluções de boa qualidade e variadas como soluções iniciais para a pesquisa local. Uma última e importante característica da meta-heurística GRASP é a independência entre iterações, o que permite a fácil paralelização desta meta-heurística pela utilização de vários computadores. O segredo para o sucesso da aplicação da meta-heurística GRASP está na heurística construtiva, que deve gerar soluções de boa qualidade e com características variadas. A utilização de uma heurística construtiva que gere soluções de boa qualidade e todas muito semelhantes, pode dar origem a que muitas pesquisas locais convirjam para o mesmo ótimo local. Por outro lado, se a heurística construtiva for demasiado aleatória, corre-se o risco de a meta-heurística GRASP se transformar numa pesquisa totalmente aleatória, muito próxima do método de Monte-Carlo.

A aplicação da meta-heurística GRASP ao problema de PFI requer, por um lado, uma heurística para gerar padrões de corte de boa qualidade e com características diferentes e, por outro lado, um algoritmo de pesquisa local. A heurística construtiva apresentada na secção 3.4 foi implementada de forma a ter estas características, designadamente ao basear a selecção da próxima forma irregular e do respectivo ponto de posicionamento em listas ordenadas sobre as quais é possível introduzir e controlar a aleatoriedade e a

selectividade das escolhas a efectuar. Relativamente à fase de melhoramentos e em particular ao algoritmo de pesquisa local utilizado, a próxima secção irá debruçar-se sobre esta questão.

As origens da meta-heurística GRASP remontam aos finais dos anos oitenta com os trabalhos de Hart e Shogan [1987] e Feo e Resende [1989], assistindo-se a uma grande expansão na utilização desta meta-heurística na segunda metade dos anos noventa. Informações adicionais sobre a implementação e aplicação da meta-heurística GRASP podem ser encontradas em [Feo e Resende, 1995] [Pitsoulis e Resende, 2001] [Festa e Resende, 2002].

4.2 Abordagens baseadas na Pesquisa sobre Sequências

Uma estratégia muito frequente, em algoritmos de pesquisa para problemas de optimização combinatória, é a utilização de pesquisas sobre representações de soluções, em vez das soluções naturais para os problemas em questão. A ideia por detrás deste tipo de estratégias é a simplificação do espaço de soluções onde vai decorrer o processo de pesquisa, tornando-o principalmente mais estruturado e, como tal, potencialmente menos complexo de pesquisar. A escolha de representações das soluções adequadas, também conhecida por codificação das soluções, é assim crucial para o sucesso deste tipo de abordagens. O problema de escolha da codificação de soluções adequadas tem merecido atenção, principalmente na aplicação de algoritmos genéticos, tendo sido identificadas propriedades desejáveis nas codificações a utilizar. Imahori *et al.* [2003] apresentam as seguintes quatro propriedades desejáveis para codificar padrões de corte:

- a dimensão do espaço das soluções codificadas, i.e. o número total de soluções codificadas, é finito;
- todas as soluções codificadas têm uma solução admissível, i.e. um padrão de corte sem sobreposições;
- a decodificação, i.e. a operação de construção do padrão de corte associado a uma solução codificada, é possível em tempo polinomial;
- existe uma solução codificada que dá origem ao padrão de corte óptimo.

Estratégias de abordagens a problemas de Posicionamento baseadas em meta-heurísticas e que operam sobre soluções codificadas são muito frequentes, principalmente as baseadas em algoritmos genéticos. Em [Hopper e Turton, 2001] é apresentada uma revisão bibliográfica sobre a aplicação de meta-heurísticas a problemas de Posicionamento bidimensionais retangulares e irregulares, com a identificação das codificações utilizadas na representação de padrões de corte. Os autores referem que a grande maioria das abordagens referidas neste trabalho se baseiam em permutações de sequências, utilizando ou não informações adicionais.

Abordagens baseadas em representações de soluções com esquemas de codificação necessitam obrigatoriamente de uma operação de decodificação. Esta operação de decodificação é de grande importância, não só para não se comprometer a qualidade das soluções (descodificadas) obtidas, mas também para garantir a eficiência global da abordagem, uma vez que esta operação irá ser realizada um grande número de vezes (sempre que for necessário avaliar a solução descodificada). Relativamente às abordagens a problemas de PFI baseadas em representações de soluções com esquemas de codificação, a operação de decodificação é ainda mais crítica dado o problema geométrico que caracteriza estes problemas.

Esta secção é dedicada à apresentação de duas abordagens ao problema de PFI baseadas em algoritmos de pesquisa local e que operam sobre permutações de sequências de formas irregulares. Na primeira subsecção é apresentada a representação das soluções utilizada: permutações de sequências de formas irregulares. Na subsecção seguinte é descrito o algoritmo de decodificação utilizado. Na terceira subsecção são apresentadas as estruturas de vizinhança implementadas. Finalmente, nas duas últimas secções, apresentam-se as duas abordagens desenvolvidas, uma baseada em pesquisa local pura e a outra que utiliza a meta-heurística GRASP.

4.2.1 Codificação das Soluções segundo Sequências de Formas Irregulares

O esquema de codificação utilizado na representação das soluções é a permutação de sequências de formas irregulares. A operação de geração das sequências, designada por codificação, terá portanto de gerar sequências de formas irregulares segundo um determinado critério. A implementação desta operação baseia-se nos critérios de ordenação de formas irregulares apresen-

tados em 3.4.2.

Cada sequência de formas irregulares é constituída por uma série de números inteiros que identificam o tipo de forma irregular. Desta forma é possível reduzir a dimensão do espaço de soluções codificadas, já que a troca de posição entre duas formas irregulares do mesmo tipo não provoca nenhuma alteração na sequência. Convém notar que a codificação utilizada não especifica qual é a orientação de posicionamento para as formas irregulares, pelo que a escolha da orientação de posicionamento será da responsabilidade do algoritmo de decodificação.

Relativamente às quatro propriedades, referidas anteriormente, desejáveis num esquema de codificação, a primeira delas, o número de soluções codificadas ser finito, é verificada, já que o número de soluções codificadas é, no pior dos casos, igual às permutações das N formas irregulares. As restantes três propriedades dependem do algoritmo de decodificação e serão analisadas na subsecção seguinte.

4.2.2 Descodificação de Sequências

O algoritmo de decodificação é responsável pela geração de padrões de corte admissíveis, a partir de sequências de formas irregulares e está a cargo de uma heurística que se baseia na regra de posicionamento *bottom-left* descrita na subsecção 3.4.3. Esta heurística não faz mais do que aplicar consecutivamente a regra de posicionamento a cada uma das formas irregulares da sequência, de forma a determinar a orientação de posicionamento e o ponto de posicionamento para cada uma das formas irregulares.

Em relação às três últimas propriedades, anteriormente referidas, desejáveis num esquema de codificação, uma delas é verificada e duas, as duas últimas, não se verificam. A verificação da propriedade relativa à existência de padrões de corte admissíveis para todas as soluções codificadas é imediata e intuitiva, bastando para tal atentar nas características da regra de posicionamento utilizada e no comprimento infinito da placa nos problemas de PFI². A terceira propriedade, a decodificação de soluções ser possível em tempo polinomial não se verifica, bastando para tal observar o seguinte

²Assume-se que todas as formas irregulares cabem na placa, i.e não existe nenhuma forma irregular que não possa ser posicionada devido à largura da placa. Verificando-se esta assunção, uma solução intuitiva e trivial seria colocar todas as formas irregulares ao longo do comprimento da placa, umas encostadas às outras, e obtendo-se uma solução de valor igual à soma dos comprimentos de todas as formas irregulares.

raciocínio: o posicionamento da N -ésima e última forma irregular da sequência obriga ao cálculo de intersecções entre N invólucros de posicionamento. Ora, considerando que em média têm m arestas seria necessário calcular m^N intersecções de arestas para determinar todos os vértices da região admissível de posicionamento. Este resultado mostra que, no pior caso, a operação de decodificação requer um tempo exponencial. Em termos práticos, a situação não é tão grave já que muitas das intersecções podem ser evitadas recorrendo a simples análises entre $N - 1$ envoltentes rectangulares. O resultado anterior mostra também que a operação de decodificação é muito dependente do número de arestas dos invólucros de posicionamento e do número de formas irregulares, o que necessariamente dará origem a problemas de eficiência quando os valores de m e ou de N forem aumentando. A última propriedade, a existência de uma solução que dê origem ao padrão de corte óptimo, também não se verifica, o que é intuitivo já que haverá situações em que escolher o ponto mais à esquerda e mais acima não permite obter sempre a melhor solução. A não verificação desta propriedade não é no entanto dramática, uma vez que os padrões de corte obtidos pelo algoritmo de decodificação são necessariamente densos e como tal de boa qualidade. Recorde-se que a regra de posicionamento *bottom-left* encosta uma forma irregular a um vértice da região admissível de posicionamento e buracos vazios no meio do padrão de corte podem ser preenchidos por formas irregulares colocadas nas últimas posições da sequência.

4.2.3 Estrutura de Vizinhança

A estrutura de vizinhança utilizada baseia-se em dois tipos de movimentos, um de inserção e outro de troca, para introduzir alterações nas soluções codificadas, i.e. nas sequências de formas irregulares. As alterações introduzidas deverão ser graduais, mas por outro lado devem permitir que a pesquisa se estenda a todo o espaço de soluções codificadas. Foram considerados os seguintes movimentos:

- SWAP — troca de posições entre duas formas irregulares na sequência (figura 4.7);
- INSERT — inserção de uma forma irregular noutra posição da sequência (figura 4.8).

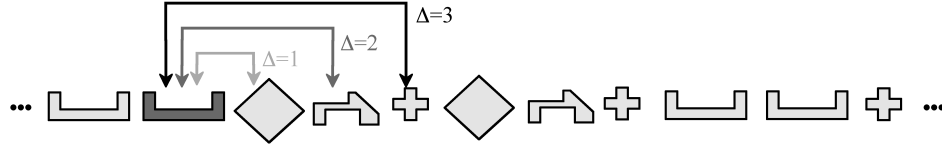


Figura 4.7: Estrutura de vizinhança baseada em trocas de posições na sequência.

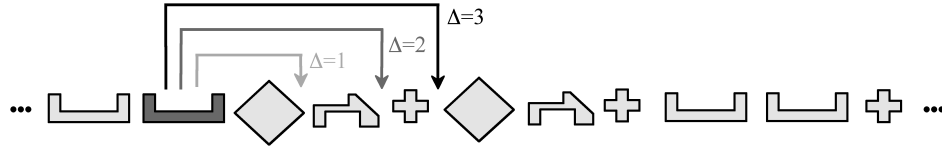


Figura 4.8: Estrutura de vizinhança baseada em movimentos de inserção.

O tamanho da vizinhança é controlado por um parâmetro, Δ , e imediatamente se constata das figuras 4.7 e 4.8 que quando $\Delta = 1$, os dois movimentos são iguais. Esta estrutura de vizinhança pressupõe um tipo de pesquisa exaustivo e sistemático da vizinhança.

4.2.4 Pesquisa sobre Sequências

De seguida descrevem-se as duas abordagens propostas para a resolução de problemas de PFI, baseadas em algoritmos de pesquisas sobre sequências de formas irregulares. Os dois algoritmos usam estratégias de pesquisa diferentes, um deles baseia-se em pesquisa local pura e o outro utiliza a meta-heurística GRASP.

2-EXCHANGE

A primeira das abordagens baseia-se numa pesquisa local pura e é denominada de 2-EXCHANGE. Esta abordagem encontra-se publicada em [Gomes e Oliveira, 2002] e a estrutura de vizinhança é definida por trocas entre dois elementos, com posições próximas, na sequência. O conceito de proximidade entre elementos numa sequência é definido pelo parâmetro Δ . Nesta abordagem foram utilizados três valores para este parâmetro: $\Delta = \{1, 2, 3\}$. Como já foi referido, o tipo de pesquisa realizado é exaustivo, com a vizinhança a ser sistematicamente percorrida a partir do primeiro elemento até

ao último e efectuando as trocas com os elementos seguintes que estão na proximidade definida pelo valor de Δ (figura 4.7). São ainda consideradas as três estratégias de selecção de soluções anteriormente indicadas, BEST, FIRST e RANDOM, respectivamente aceitar apenas a melhor solução de toda a vizinhança, aceitar a primeira melhor solução encontrada na vizinhança e escolher aleatoriamente uma de entre todas as soluções melhores encontradas na vizinhança.

Posteriormente à publicação de [Gomes e Oliveira, 2002], foi ainda considerada uma variante onde é utilizado o movimento de inserção em alternativa ao movimento de troca. Para além desta alteração, esta variante introduz apenas mais uma pequena adaptação que é a de não considerar o valor de $\Delta = 1$. Apesar desta variante já não ser baseada em trocas, o nome de 2-EXCHANGE foi mantido e a distinção entre as duas variantes é efectuada pela indicação do tipo de movimentos utilizado, SWAP ou INSERT.

Nas duas variantes, as soluções codificadas iniciais, i.e. as sequências, são obtidas pelos critérios de ordenação de formas irregulares apresentados em 3.4.2 e a decodificação é efectuada pela regra de posicionamento *bottom-left* proposta em 3.4.3. Os testes computacionais a estas variantes estão disponíveis na subsecção 5.3.2.

GRASP sobre sequências de formas irregulares

A segunda da abordagem baseia-se na meta-heurística GRASP, também deu origem a uma publicação [Gomes e Oliveira, 2001] e será designada por GRASP_SEQ. A principal diferença desta abordagem, em relação à abordagem 2-EXCHANGE, está na geração do padrão de corte inicial por parte da heurística construtiva de posicionamento, que alia uma componente aleatória na selecção dos posicionamentos à característica gulosa intrínseca da heurística construtiva. Relativamente à fase de pesquisa local, nesta abordagem apenas foi considerada a estrutura de vizinhança definida por movimentos de trocas entre pares de formas irregulares e é apenas utilizada a estratégia de seleccionar a melhor solução de uma vizinhança. A subsecção 5.3.3 apresenta os testes computacionais realizados com esta abordagem.

4.3 Abordagens baseadas na Pesquisa sobre Padrões de Corte

A utilização de estratégias baseadas em pesquisas sobre representações de soluções facilita a realização da operação de pesquisa, mas, por outro lado, torna estas estratégias muito dependentes quer das representações de soluções quer dos algoritmos de decodificação utilizados. Esta estratégia é utilizada pelas duas abordagens propostas na secção anterior, que, recorde-se, baseiam-se em pesquisas sobre sequências de formas irregulares, o que as torna dependentes das limitações da representação e do algoritmo de decodificação utilizados. A principal destas limitações é imposta pela complexidade computacional do algoritmo de decodificação utilizado, que se baseia na regra de posicionamento *bottom-left*, e que restringe seriamente a capacidade de pesquisa destas abordagens.

Uma alternativa à estratégia de utilizar uma representação para os padrões de corte e realizar a pesquisa sobre as soluções codificadas consiste em realizar a pesquisa local directamente sobre os padrões de corte. Nesta estratégia, a dificuldade está no estabelecimento de uma estrutura de vizinhança que permita introduzir alterações nos padrões de corte, pela aplicação de movimentos às formas irregulares de modo a alterar os respectivos posicionamentos. A resposta para estas dificuldades está nas relações de posicionamento entre formas irregulares, que podem ser estabelecidas em qualquer padrão de corte, e, a partir delas, aplicar os modelos matemáticos de compactação e de separação anteriormente apresentados que garantem a obtenção de padrões de corte diferentes, compactos e admissíveis. Com a garantia de obtenção de padrões de corte admissíveis, ficam assim eliminadas as dificuldades existentes no estabelecimento de estruturas de vizinhança apropriadas para a realização de pesquisas sobre padrões de corte.

De seguida será proposta uma nova estrutura de vizinhança para problemas de PFI, que se baseia nas relações de posicionamento entre formas irregulares. Na segunda e última subsecção será apresentada a abordagem híbrida proposta para a resolução de problemas de PFI, que se baseia na utilização de uma forma integrada de algoritmos de pesquisa local e de modelos de programação linear.

4.3.1 Estruturas de Vizinhança para Pesquisas sobre Padrões de Corte

A utilização de uma estrutura de vizinhança adequada é um dos factores cruciais para o sucesso de algoritmos baseados em pesquisa local, devendo possibilitar a introdução de pequenas perturbações nas soluções e em simultâneo permitir que todo o espaço de soluções possa ser atingível. Uma estrutura de vizinhança que opere sobre padrões de corte terá necessariamente de possibilitar a “movimentação” de uma ou mais formas irregulares e, em simultâneo, garantir padrões de corte compactos e admissíveis.

A utilização do modelo matemático de compactação, apresentado na subsecção 3.3.2, permite obter padrões de corte compactos, de uma forma eficiente e que garantidamente são óptimos locais. No entanto, a aplicação do modelo de compactação exige padrões de corte admissíveis e com este modelo só é possível realizar optimizações locais, porque as formas irregulares não podem saltar por cima de outras e não são permitidas situações não admissíveis. Por outro lado, a utilização do modelo matemático de separação, apresentado na subsecção 3.3.3, permite eliminar situações não admissíveis de padrões de corte e assim obter padrões de corte admissíveis, apesar de esparsos. Utilizando estes dois modelos de forma coordenada é possível obter um padrão compacto e admissível a partir de um padrão inicial que pode ser não admissível.

Garantida a obtenção de padrões de corte compactos e admissíveis, fica a faltar definir as operações de perturbação que introduzam modificações nos padrões de corte. Estas operações devem alterar o posicionamento relativo das formas irregulares, para que a pesquisa produza padrões de corte com relações de posicionamento diferentes e novos modelos de separação e compactação possam ser gerados com a consequente obtenção de novos padrões de corte localmente óptimos. Foram consideradas duas operações de perturbação sobre padrões de corte, uma que troca as posições de duas formas irregulares e outra que move uma forma irregular para outra posição no padrão de corte (figura 4.9). É de realçar que a garantia de padrões de corte compactos e admissíveis é obtida sem impor qualquer restrição às operações de perturbação sobre padrões de corte. No entanto, em termos práticos existem limitações nas operações devido à incapacidade do modelo de separação em conseguir remover sempre todas as situações não admissíveis. Estas situações não são muito frequentes e quando acontecem é aplicada uma nova

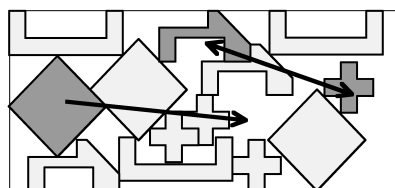


Figura 4.9: Operações de perturbação de padrões de corte.

operação de perturbação.

A estrutura de vizinhança para pesquisas sobre padrões de corte proposta, denominada LOCALCOMPACT, define a vizinhança a pesquisar com base nas relações de posicionamento entre formas irregulares. Os movimentos que permitem a passagem entre padrões de corte vizinhos são constituídos por três fases consecutivas. Na primeira fase, é aplicada uma operação de perturbação ao padrão de corte, que introduz alterações nas relações de posicionamento entre formas irregulares. A segunda fase consiste na aplicação do modelo matemático de separação de forma a obter-se um padrão de corte admissível. No caso da aplicação do modelo de separação não conseguir remover todas as situações não admissíveis, é, como já foi referido, aplicada uma nova operação de perturbação ao padrão de corte original. Na terceira e última fase é aplicado o modelo de compactação de forma a que o novo padrão de corte seja localmente ótimo.

Uma palavra em relação às situações onde são possíveis posicionamentos de formas irregulares segundo várias orientações. Um pequeno conjunto de experiências computacionais mostrou ser preferível não fixar uma determinada orientação de posicionamento no novo padrão de corte, permitindo que todas as combinações de orientações sejam experimentadas e seleccionada a melhor. Isto significa que a realização de um movimento de um padrão de corte para um outro padrão de corte numa vizinhança, corresponde na realidade a experimentar vários padrões de corte vizinhos, em número igual às combinações de orientações admissíveis para as formas irregulares envolvidas, e à escolha do melhor.

Na implementação das operações de perturbação em padrões de corte da estrutura de vizinhança LOCALCOMPACT, foram consideradas operações totalmente aleatórias. Esta estrutura de vizinhança é apresentada detalhadamente em seguida.

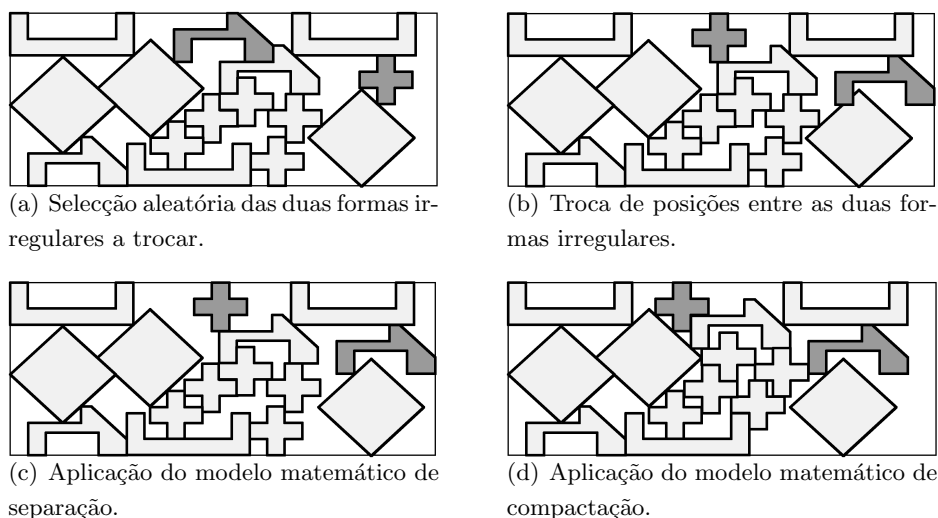


Figura 4.10: LOCALCOMPACT: operação de troca de posições entre duas formas irregulares.

LocalCompact

A estrutura de vizinhança LOCALCOMPACT caracteriza-se pela aleatoriedade existente nas operações de trocar de posição duas formas irregulares e de mover uma forma irregular. A figura 4.10 ilustra a aplicação de uma operação de troca de posições entre duas formas irregulares num padrão de corte. Note-se que a selecção das duas formas irregulares envolvidas na troca é aleatória, sendo apenas impedida a selecção de duas formas irregulares iguais. Na figura 4.11 está representado um pequeno exemplo de aplicação da operação de mover uma forma irregular num padrão de corte. Neste caso, além da escolha aleatória da forma irregular a mover, é ainda necessário seleccionar aleatoriamente o novo ponto de posicionamento. Deve ainda ser referido que nesta estrutura de vizinhança é preciso seleccionar aleatoriamente qual das operações de perturbação deverá ser aplicada.

4.3.2 Abordagens Híbridas

A abordagem híbrida para problemas de PFI, a descrever nesta subsecção, constitui a maior contribuição resultante deste trabalho e deu origem à publicação de um artigo [Gomes e Oliveira, In Press]. Esta abordagem híbrida utiliza a meta-heurística pesquisa por arrefecimento simulado para pesquisar o espaço de soluções, tirando partido da poderosa estrutura de vizinhança

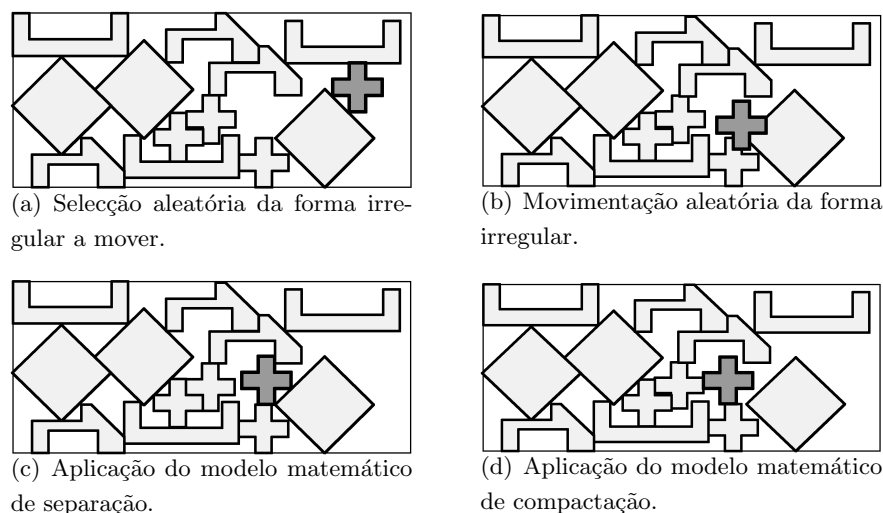


Figura 4.11: LOCALCOMPACT: operação de mover uma forma irregular.

proposta na subsecção anterior, que avalia um padrão de corte de forma eficiente. A componente híbrida desta abordagem está presente na utilização integrada de meta-heurísticas e de modelos matemáticos de programação linear.

A estrutura da abordagem híbrida está representada na figura 4.12 e é relativamente simples. Uma solução inicial é gerada pela heurística construtiva de posicionamento descrita na subsecção 3.4.1. De seguida, é aplicada uma operação de perturbação ao padrão de corte, uma troca de posicionamento entre formas irregulares ou uma movimentação de uma forma irregular, de forma a obter-se um novo padrão de corte. A este novo padrão de corte, potencialmente não admissível, são aplicados de forma consecutiva os modelos matemáticos de separação e de compactação, para se obter um padrão de corte admissível e compacto. O padrão de corte assim gerado é posteriormente sujeito ao critério de aceitação da pesquisa por arrefecimento simulado e o processo de pesquisa prossegue com nova iteração. A estrutura relativamente simples da abordagem híbrida apresentada na figura 4.12 é enganadora, já que esconde o poder proporcionado pela estrutura de vizinhança LOCALCOMPACT.

Um comentário adicional relativamente à opção de colocar maior ênfase no desenvolvimento de estruturas de vizinhança adequadas para problemas de PFI na realização deste trabalho. Como já foi referido, esta opção justifica a escolha de uma meta-heurística simples, como o algoritmo de pesquisa

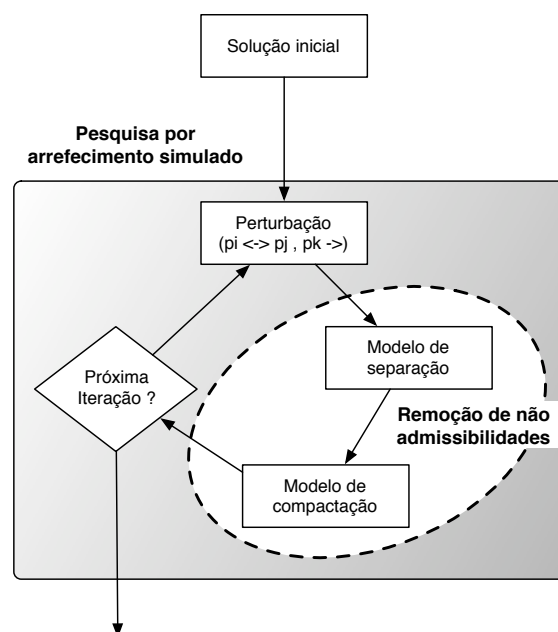


Figura 4.12: Estrutura da abordagem híbrida.

por arrefecimento simulado, para conduzir o processo de pesquisa do algoritmo híbrido. Para reforçar esta ideia e verificar a capacidade e o poder da estrutura de vizinhança, foi também considerada uma variante do algoritmo híbrido baseada numa pesquisa local pura. De seguida serão descritas estas duas abordagens.

Pesquisa por Arrefecimento Simulado Híbrida

A pesquisa por arrefecimento simulado híbrida, designada por SAHA, foi implementada de acordo com as decisões indicadas na subsecção 4.1.2. Recorrendo essas decisões, a nível genérico temos: a probabilidade de aceitação de um padrão de corte é baseada na distribuição de Boltzmann, o esquema de arrefecimento é o geométrico com $\alpha = 0.9$, temperatura inicial (T_0) ajustada de forma a garantir 50% de probabilidade de aceitação de piores soluções no primeiro patamar, dois patamares sem alteração como critério de paragem e a largura de um patamar é igual ao número de combinações entre pares de formas irregulares (C_2^N). Relativamente às decisões específicas, a solução inicial é obtida pela heurística construtiva de posicionamento, onde o critério de ordenação das formas irregulares é o critério de ordenação aleatório pesado

pelo comprimento das formas irregulares (RANDOM-WEIGHTED-LENGTH) e o posicionamento das formas irregulares é obtido pela regra de posicionamento *bottom-left*. A função objectivo é o comprimento do padrão de corte e foi utilizada a estrutura de vizinhança LOCALCOMPACT.

A abordagem SAHA foi alvo de um conjunto alargado de testes computacionais, que incidiram sobre a estrutura de vizinhança LOCALCOMPACT proposta. A subsecção 5.4.1 apresenta os testes computacionais efectuados à variante SAHA.

Pesquisa Local Pura Híbrida

Relativamente à implementação da pesquisa local pura, designada por GLSHA, é de referir que se baseou na pesquisa por arrefecimento simulado híbrida, pela transformação desta num algoritmo de pesquisa local pura ao impor uma temperatura inicial nula ($T_0 = 0$). As características desta implementação do GLSHA derivam directamente das características do SAHA, designadamente a aceitação da primeira solução melhor encontrada.

Nos testes computacionais à abordagem GLSHA também foi utilizada a estrutura de vizinhança LOCALCOMPACT. O principal objectivo da realização destes testes incidiu na avaliação da estrutura de vizinhança e não sobre a abordagem utilizada. Os testes computacionais efectuados à variante GLSHA apresentam-se na subsecção 5.4.1.

4.4 Abordagem em N -Fases

Um dos objectivos estabelecidos para este trabalho foi o de desenvolver abordagens de resolução de problemas de PFI reais provenientes da indústria de confecções. Uma das principais características dos problemas de PFI desta indústria é a existência de uma grande diversidade nos tamanhos das formas irregulares, visível no exemplo da figura 4.13 que ilustra um padrão de corte típico da indústria de confecções. Nestas situações, o comprimento dos padrões de corte é (quase) totalmente determinado pelo posicionamento das formas irregulares grandes, já que as formas irregulares pequenas podem facilmente ser posicionadas nos buracos existentes entre as grandes. Simultaneamente, o número total de formas irregulares pode atingir a centena, o que levanta problemas de eficiência durante a realização da pesquisa (a dimensão dos patamares depende do número de formas irregulares, C_2^N). A

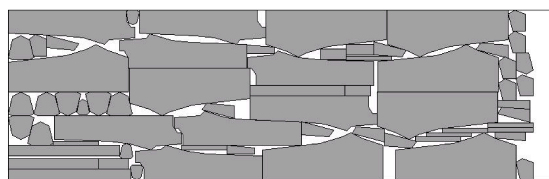


Figura 4.13: Exemplo de padrão de corte típico da indústria de confecções.

abordagem em N -fases proposta tenta tirar partido destas características, de forma a reduzir o esforço computacional necessário sem comprometer a qualidade dos padrões de corte.

A estratégia da abordagem em N -fases proposta para a resolução de problemas de PFI reais baseia-se na divisão das formas irregulares em vários grupos em função dos respectivos tamanhos e, de seguida, no posicionamento de cada grupo em fases quase independentes. O motivo do “quase independentes” prende-se com a necessidade de ter em consideração as formas irregulares posicionadas em fases anteriores, em termos de admissibilidade dos padrões de corte, apesar de não serem considerados do ponto de vista combinatório. Um esquema geral desta abordagem é apresentado na figura 4.14. Este esquema geral do funcionamento da abordagem em N -fases irá sendo clarificado durante a exposição das próximas subsecções.

Na primeira subsecção é descrita em pormenor a operação de decomposição do problema em várias fases. Na segunda subsecção apresenta-se a estratégia utilizada na primeira fase da abordagem e na última subsecção é descrita a estratégia utilizada nas restantes fases da abordagem. Os testes computacionais a esta abordagem serão apresentados na secção 5.5.

4.4.1 Decomposição do Problema

A abordagem em N -fases decompõe um problema de PFI em dois subproblemas mais simples, pela divisão das formas irregulares em dois grupos. O critério para realizar a divisão das formas irregulares baseia-se no tamanho relativo das formas irregulares e cria dois grupos, um grupo com as formas irregulares grandes e outro com as pequenas. Cada grupo de formas irregulares é posicionado em fases diferentes e quase independentes. Este processo é controlado por um parâmetro, denominado SIZE, que é uma percentagem do tamanho da forma irregular maior. O tamanho de uma forma irregular

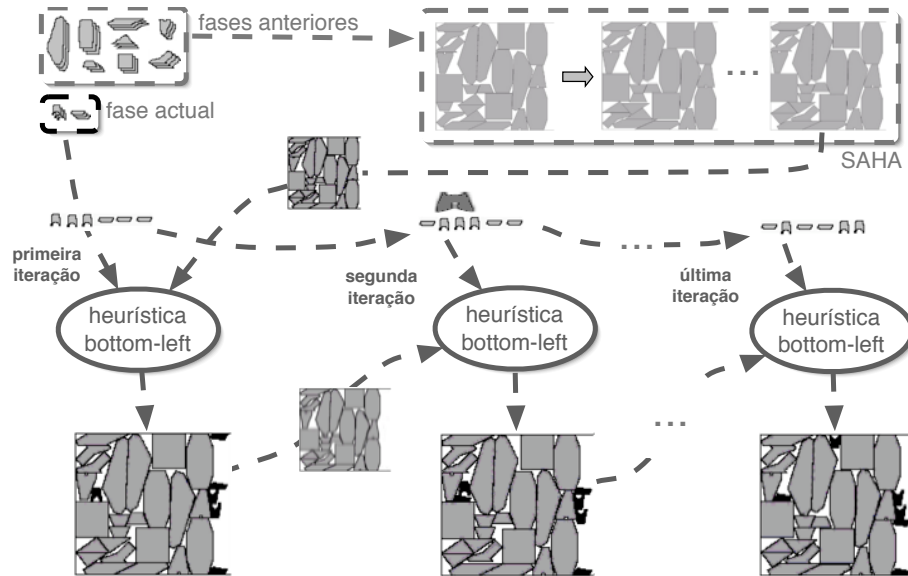


Figura 4.14: Esquema de funcionamento da abordagem em N -fases.

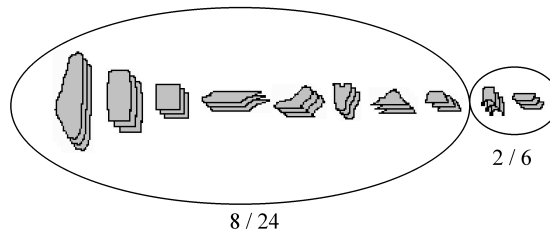


Figura 4.15: Divisão das formas irregulares pelas várias fases.

pode ser medido de várias maneiras (área, comprimento, largura, perímetro, ...), no entanto, como a ideia desta abordagem é permitir o preenchimento de buracos no meio de padrões de corte, a escolha óbvia é utilizar a área como medida do tamanho das formas irregulares. A figura 4.15 apresenta um exemplo de divisão das formas irregulares da instância ALBANO em dois grupos, um com 8 formas irregulares diferentes num total de 24 e o outro com 2 formas irregulares diferentes num total de 6. Refira-se ainda que esta divisão de formas irregulares foi utilizada no exemplo da figura 4.14.

Este processo de decomposição do problema de PFI, baseado na divisão das formas irregulares em dois grupos e posterior resolução do problema por fases, pode ser recursivamente aplicado para criar mais grupos e fases. No

entanto, a ideia não é criar mais do que três ou quatro grupos de formas irregulares, já que se pretende tirar partido da existência de formas irregulares diferentes, em cada uma das fases, pela aplicação de algoritmos de pesquisa local. A criação de grupos de formas irregulares, para além de levar em consideração o tamanho das formas irregulares e o número total de formas irregulares diferentes, deve também atender ao número de formas irregulares diferentes e ao número total de formas irregulares existente em cada grupo. Os testes computacionais mostraram que as abordagens híbridas propostas começam a apresentar problemas de eficiência para instâncias com mais de trinta formas irregulares (tabela 5.14). Estas questões levaram à adopção dos seguintes princípios gerais para a criação de grupos: grupos criados em função da área das formas irregulares, com pelo menos três formas irregulares diferentes e com o número total de formas irregulares a valer, no máximo, entre trinta e quarenta. A criação do grupo de formas irregulares de maiores dimensões é crucial para o sucesso da abordagem e deverá condicionar a criação dos restantes grupos.

Em cada fase, um grupo diferente de formas irregulares é posicionado, iniciando-se pelo grupo com as formas irregulares maiores. Os algoritmos de posicionamento utilizados na segunda e subsequentes fases têm de ter em consideração as formas irregulares posicionadas em fases anteriores.

4.4.2 Algoritmo de Posicionamento na Primeira Fase

A abordagem em N -fases proposta neste trabalho utiliza, como estratégia de posicionamento para as formas irregulares da primeira fase, o algoritmo híbrido baseado em pesquisa por arrefecimento simulado descrito na secção anterior. O principal motivo para esta escolha deve-se à grande importância que o resultado da primeira fase de posicionamento tem no resultado global da abordagem em N -fases. Recorde-se que, como mostra o exemplo da figura 4.14, nesta fase são posicionadas as formas irregulares muito grandes, que por si só podem determinar o comprimento final do padrão de corte.

4.4.3 Algoritmo de Posicionamento nas Últimas Fases

Numa abordagem a problemas de PFI em N -Fases, os objectivos presentes nas várias fases são diferentes, já que as características específicas de cada fase também o são. Em especial, a primeira fase distingue-se claramente das restantes, por não ter de lidar com formas irregulares previamente po-

sicionadas, e é a única cujas características e objectivo se assemelham aos de um problema de PFI. Nas restantes fases é necessário ter em atenção as formas irregulares já posicionadas e o objectivo principal é o aproveitamento dos buracos vazios entre as formas irregulares já posicionadas. Justifica-se assim a utilização de um algoritmo diferente no posicionamento das formas irregulares das últimas fases³. Na abordagem em N -Fases proposta, o posicionamento das formas irregulares das últimas fases baseia-se no algoritmo 2-EXCHANGE, com um conjunto de adaptações de forma a torná-lo apto a lidar com formas irregulares já posicionadas e a aumentar as hipóteses de sucesso na utilização de buracos vazios. A opção por este algoritmo deveu-se à capacidade de detecção e de preenchimento de buracos, proporcionada pela regra de posicionamento *bottom-left*, e à possibilidade de pesquisa sobre que formas irregulares usar para preencher cada buraco vazio, proporcionada pela pesquisa sobre a sequência de formas irregulares do próprio algoritmo 2-EXCHANGE.

A estrutura geral do algoritmo de posicionamento utilizado nas últimas fases está representada na figura 4.16. O princípio de funcionamento deste algoritmo baseia-se em duas ideias chave: reduzir o tamanho das formas irregulares a posicionar, para aumentar as probabilidades de sucesso na detecção e preenchimento de buracos vazios, e ajustar localmente o posicionamento das formas irregulares posicionadas em fases anteriores, de forma a remover situações de sobreposição com as formas irregulares posicionadas nesta fase depois de aumentadas para o tamanho normal. De seguida descrevem-se os principais componentes deste algoritmo. A sequência inicial é obtida ordenando as formas irregulares a posicionar por áreas decrescentes, que, recorde-se, foi o critério utilizado para distribuir as formas irregulares pelas várias fases. A operação de redução do tamanho das formas irregulares consiste em aplicar um factor multiplicativo inferior a um a todas as coordenadas. O posicionamento da sequência de formas irregulares a posicionar é efectuado com base na regra de posicionamento *bottom-left* e sobre o padrão de corte já com as formas irregulares posicionadas em fases anteriores. A operação de aumento das formas irregulares posicionadas nesta fase consiste na simples substituição das formas irregulares reduzidas pelas originais. A aplicação dos modelos matemáticos de separação e de compactação permite

³Neste contexto, a expressão últimas fases refere-se a todas as fases exceptuando a primeira.

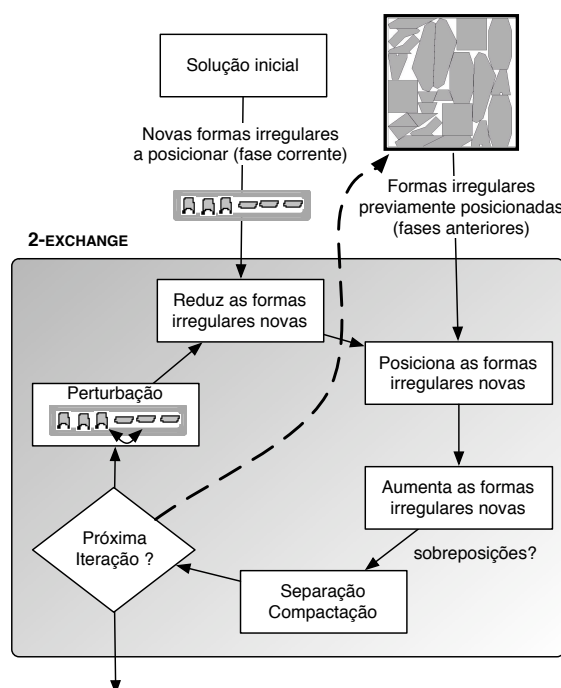


Figura 4.16: Estrutura do algoritmo de posicionamento utilizado nas últimas fases.

remover situações não admissíveis. Convém realçar que após a aceitação de um novo padrão de corte, o padrão de corte só com as formas irregulares posicionadas em fases anteriores é actualizado. A perturbação consiste na troca de posição entre dois elementos na sequência de formas irregulares. O processo de pesquisa é controlado pelo algoritmo 2-EXCHANGE, na variante que aceita a primeira solução melhor encontrada (FIRST) e onde todas as trocas entre formas irregulares numa sequência são tentadas, ou seja o parâmetro Δ é igual ao número de formas irregulares. O processo de pesquisa termina quando não é encontrada nenhuma melhoria numa vizinhança completa ou quando é encontrado um padrão de corte com comprimento inferior ou igual ao comprimento do padrão de corte da fase anterior.

No exemplo da figura 4.14 é possível observar o funcionamento deste algoritmo e em particular a sua capacidade em efectivamente detectar e preencher buracos vazios no meio de padrões de corte. Sobre este algoritmo são ainda de destacar a hidridização do algoritmo 2-EXCHANGE com modelos matemáticos de compactação e de separação e, principalmente, a novidade

do processo de redução do tamanho das formas irregulares para aumentar a eficácia de detecção e preenchimento de buracos vazios.

Capítulo 5

Testes Computacionais e Discussão de Resultados

Este capítulo agrupa todos os testes e experiências computacionais realizados no âmbito deste trabalho, bem como as respectivas análises e discussões sobre os resultados obtidos. A opção por esta organização da apresentação e discussão dos resultados teve em vista permitir uma mais fácil comparação entre os resultados das várias abordagens propostas.

A organização dos testes propriamente dita divide-se em dois grandes tipos, um tipo onde são efectuados testes de uma forma sistemática, designados por testes computacionais, e um outro tipo que agrupa testes realizados de uma forma *ad hoc*, designados por experiências computacionais. Os testes computacionais destinam-se a avaliar e comparar as diferentes abordagens propostas e baseiam-se na resolução sistemática de todo o conjunto de instâncias de problemas de PFI de referência utilizadas durante este trabalho. Os testes computacionais permitem também comparar as abordagens propostas neste trabalho com os resultados obtidos por outros investigadores. Já o objectivo principal das experiências computacionais é o de mostrarem a viabilidade, ou não, de uma determinada abordagem de resolução ou avaliarem a opção por determinada escolha de implementação. As experiências computacionais utilizam apenas algumas das instâncias do conjunto de instâncias de problemas de PFI de referência ou mesmo alguma outra instância específica. Do conjunto de instâncias de problemas de PFI de referência fazem parte instâncias com origens e características geométricas muito diferentes, desde instâncias criadas artificialmente, e relativamente poucos vértices,

a instâncias reais com linhas curvas aproximadas por centenas de vértices.

Os diversos testes e experiências computacionais foram realizados ao longo de vários anos e naturalmente em computadores com características diferentes, o que torna a comparação directa de tempos de processamento impossível. Desta forma, todos os resultados apresentados em testes computacionais foram normalizados para um computador actual. Este processo de normalização consistiu na repetição de um pequeno conjunto de testes no computador de referência, de forma a obter um factor de correcção a aplicar aos testes computacionais realizados num determinado computador. As características do computador de referência adoptado são as seguintes: processador *Pentium IV* a 3.2 GHz, correndo o sistema operativo *Linux*, 1 Gb de memória *RAM* e 2 Gb de memória em *swapfile*.

Os tempos de processamento a apresentar neste capítulo não incluem o tempo de pré-processamento utilizado no cálculo dos invólucros de posicionamento entre todos os pares de formas irregulares e segundo todas as orientações admissíveis. Este tempo de processamento só depende da instância, podendo atingir os vinte segundos nas instâncias mais complexas.

Na primeira secção deste capítulo serão descritas as instâncias de problemas de PFI utilizadas no decurso deste trabalho, incluindo as pertencentes ao conjunto de referência e as duas instâncias adicionais. Nas secções seguintes serão apresentados os resultados dos testes e das experiências computacionais realizados. Na última secção serão tecidos comentários aos resultados obtidos nos testes computacionais às abordagens propostas.

5.1 Instâncias de problemas de Posicionamento de Formas Irregulares

O sítio do grupo europeu de interesse em problemas de Posicionamento (*EURO Special Interest Group on Cutting and Packing*) [ESICUP] disponibiliza diversos grupos de instâncias de teste para diversos problemas de Posicionamento, entre os quais um para problemas de PFI, sob o nome de *Nesting Problems*. Deste grupo de instâncias de problemas de Posicionamento, foram retiradas as instâncias que deram origem ao conjunto de instâncias de problemas de PFI de referência utilizado neste trabalho. A utilização destas instâncias permite uma comparação directa com o trabalho de outros investigadores que também as utilizem. Foram utilizadas todas

as instâncias de problemas de PFI disponíveis no sítio do grupo europeu de interesse em problemas de Posicionamento, exceptuando dois grupos de instâncias (HAN e POLY) constituídos por polígonos criados artificialmente e semelhantes a outras instâncias já consideradas.

O conjunto de instâncias de referência é constituído por dezassete instâncias, cujas principais características são apresentadas na tabela 5.1. É de referir que as instâncias desta tabela assinaladas com * foram obtidas a partir de digitalizações sobre padrões de corte impressos. Este processo implica naturalmente um certo nível de imprecisão, que, no entanto, não compromete a avaliação do desempenho de algoritmos e abordagens. Excepto para a instância SHIPS, os detalhes sobre o processo de digitalização utilizado e sobre as referências para os padrões impressos estão disponíveis em [Hopper, 2000].

As instâncias de referência da tabela 5.1 podem ser divididas em quatro tipos diferentes: artificiais (que inclui o tipo convexo), puzzles, confecções e indústria naval. As instâncias de tipo artificial foram criadas artificialmente e caracterizam-se por terem coordenadas inteiras. Os puzzles são instâncias onde todas as formas irregulares encaixam perfeitamente e onde é possível atingir níveis de aproveitamento de 100%. Instâncias deste tipo são interessantes porque o padrão óptimo é conhecido antecipadamente. Finalmente, os dois últimos tipos incluem instâncias reais das indústrias de confecções e naval. Nas figuras 5.1 e 5.2 estão desenhadas as formas irregulares de todas as instâncias, sendo possível observar claramente as diferenças de tamanho existentes nas formas irregulares da indústria de confecções e, principalmente, na indústria naval.

Na tabela 5.2 apresenta-se o melhor resultado conhecido para cada uma das instâncias de referência, em termos de comprimento e percentagem de aproveitamento¹ do padrão de corte. É também indicado o algoritmo que obteve esse resultado e feita a referência para o trabalho onde o resultado foi publicado. Na elaboração desta tabela foram considerados resultados muito recentes, mas excluem-se os resultados obtidos neste trabalho mesmo que já tenham sido objecto de publicação.

Adicionalmente às instâncias do conjunto de referência foram ainda consideradas mais duas instâncias TESTDATA1 e TESTDATA2 que são apresen-

¹O aproveitamento de um padrão de corte é medido como sendo o quociente entre a área das formas irregulares posicionadas e a área rectangular da placa utilizada (largura da placa $\times$ comprimento do padrão de corte).

Tabela 5.1: Características das instâncias de referência

Instância	# f.i. diferentes	# total f.i.	Vértices por f.i.	Orientações admissíveis	Largura da placa	Tipo de problema
FU*	12	12	3.58	0, 90, 180	38	convexo
JAKOBS1*	25	25	5.6	0, 90, 180	40	artificial
JAKOBS2 ^{*a}	25	25	5.36	0, 90, 180	70	artificial
SHAPES0	4	43	8.75	0	40	artificial
SHAPES1 [†]	4	43	8.75	0, 180	40	artificial
SHAPES2 ^{†b}	7	28	6.29	0, 180	15	artificial
ARTIF [‡]	8	99	7.63	0	27	artificial
DIGHE1 ^{*c}	16	16	3.87	0	100	puzzle
DIGHE2 ^{*c}	10	10	4.7	0	100	puzzle
ALBANO*	8	24	7.25	0, 180	4900	confeccções
DAGLI*	10	30	6.3	0, 180	60	confeccções
MAO*	9	20	9.22	0, 90, 180	2550	confeccções
MARQUES ^{*d}	8	24	7.37	0, 90, 180	104	confeccções
SHIPS*	22	53	8.14	0, 180	108	ind. naval
SHIRTS [†]	8	99	6.63	0, 180	40	confeccções
SWIM [†]	10	48	21.9	0, 180	5752	confeccções
TROUSERS [†]	17	64	5.06	0, 180	79	confeccções

^a Factor de escala de 2 quando comparado com a publicação original.

^b Instância também conhecida como BLAZ.

^c Instância semelhante à da publicação original.

^d Factor de escala de 5 quando comparado com a publicação original.

[†] Instância com coordenadas publicadas em [Oliveira *et al.*, 2000].

[‡] Instância disponibilizada pelos autores.

* Instância com coordenadas digitalizadas a partir de padrão de corte.

(f.i.: formas irregulares)

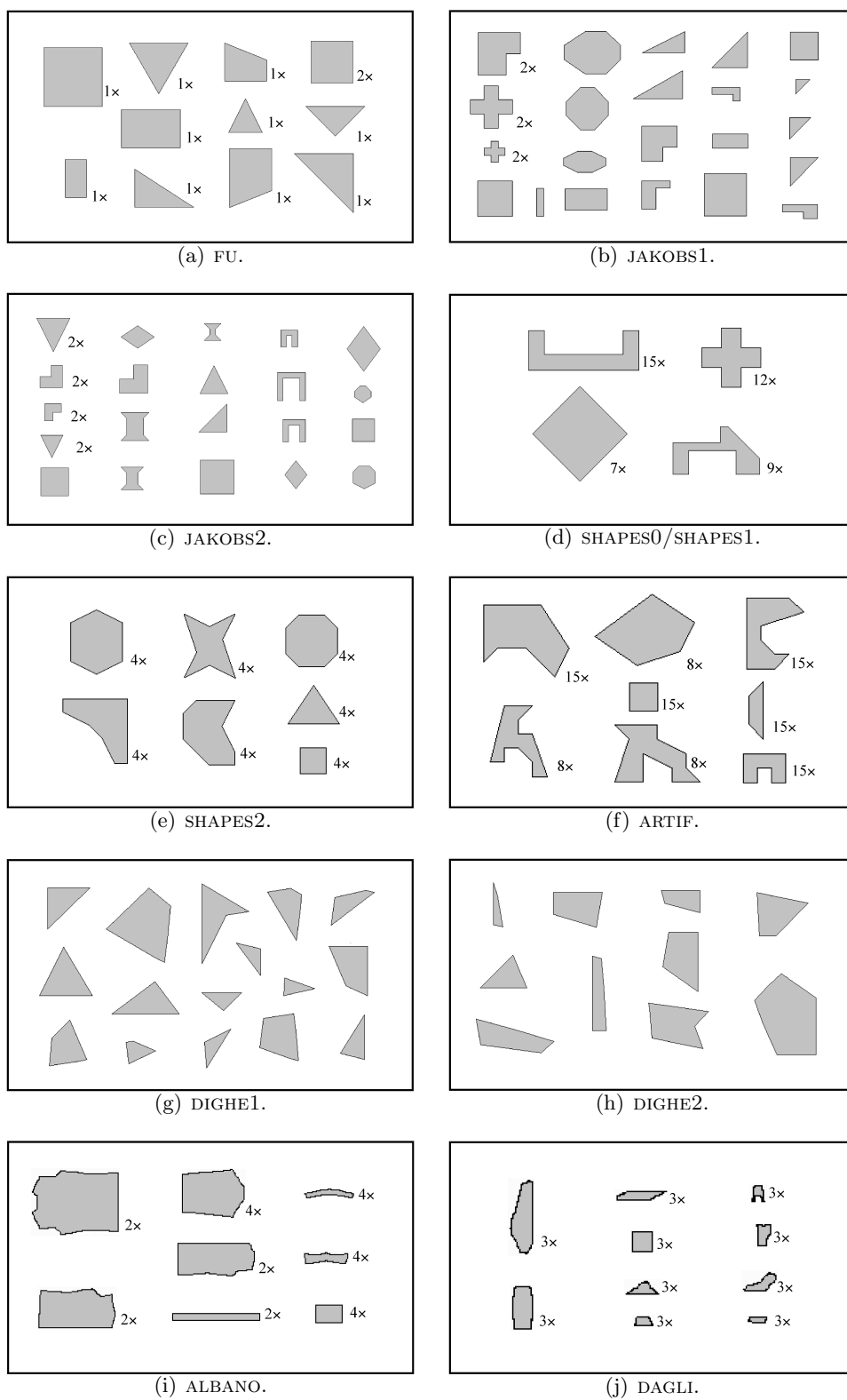


Figura 5.1: Instâncias de referência (continua).

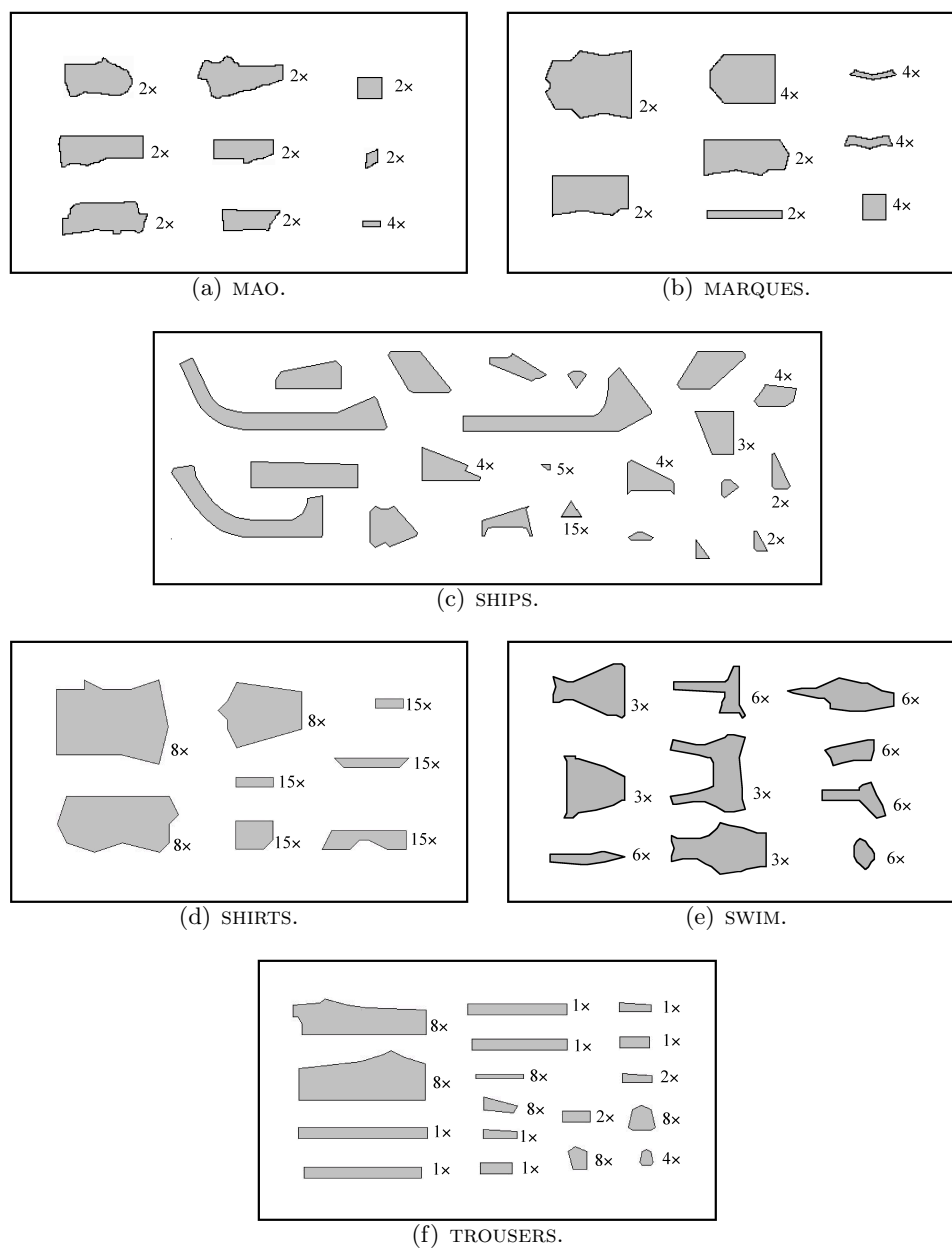


Figura 5.2: Instâncias de referência (continuação).

Tabela 5.2: Melhores resultados publicados para as instâncias de teste

Instância	Comprim.	Aprov. (%)	Algoritmo e referência à publicação
FU	32.80	86.9%	BL-TS [Burke <i>et al.</i> , 2005]
JAKOBS1	11.86	82.6%	BL-TS [Burke <i>et al.</i> , 2005]
JAKOBS2	25.80	74.8%	BL-TS [Burke <i>et al.</i> , 2005]
SHAPES0	60.3	66.2%	2DNEST [Nielsen e Odgaard, 2003]
SHAPES1	55.00	72.5%	2DNEST [Nielsen e Odgaard, 2003]
SHAPES2	26.5	81.8%	AUTONESTER-T [Nielsen e Odgaard, 2003]
ARTIF	44.73	73.38%	HYBRIDTS [Bennell e Dowsland, 2001]
DIGHE1	129.23	77.4%	BL-TS [Burke <i>et al.</i> , 2005]
DIGHE2	126.00	79.4%	BL-TS [Burke <i>et al.</i> , 2005]
ALBANO	10122.63	86.1%	HOPPERSA [Hopper, 2000]
DAGLI	60.57	83.7%	BL-TS [Burke <i>et al.</i> , 2005]
MAO	1854.30	79.5%	BL-TS [Burke <i>et al.</i> , 2005]
MARQUES	80.00	86.5%	BL-TS [Burke <i>et al.</i> , 2005]
SHIPS	—	—	—
SHIRTS	61.76	87.4%	AUTONESTER-T [Nielsen e Odgaard, 2003]
SWIM	5846.93	75.6%	AUTONESTER-T [Nielsen e Odgaard, 2003]
TROUSERS	240.86	90.6%	AUTONESTER-T [Nielsen e Odgaard, 2003]

BL-TS — Heurística de posicionamento *bottom-left* com pesquisa tabu.

2DNEST — Abordagem baseada em *guided local search*.

AUTONESTER-T — Pacote de *software* comercial.

HYBRIDTS — Pesquisa tabu hibridizada com programação matemática.

HOPPERSA — Abordagem baseado em pesquisa por arrefecimento simulado.

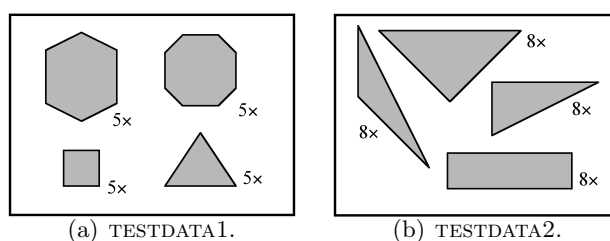


Figura 5.3: Instâncias de teste adicionais.

tadas na figura 5.3. Trata-se de duas instâncias só com formas irregulares convexas e que foram utilizadas apenas nas experiências computacionais com o modelo matemático de compactação apresentadas na subsecção 5.2.2. As formas irregulares das duas instâncias só admitem uma orientação de posicionamento. É ainda de referir que a instância TESTDATA1 é constituída pelas formas irregulares convexas da instância SHAPES2.

5.2 Experiências Computacionais com Modelos Matemáticos

Nesta secção são apresentadas as experiências computacionais realizadas com dois dos modelos matemáticos apresentados, o global e o de compactação. No modelo matemático global pretendeu-se verificar até que dimensão seria possível resolver optimamente problemas muito simples. Já os objectivos das experiências computacionais com o modelo matemático de compactação não se limitaram à verificação da validade do modelo. Pretendeu-se também verificar o número reduzido de iterações necessárias até se atingir um padrão compacto e a capacidade de se conseguir compactar padrões de corte já densos. Um último objectivo foi o de comparar a qualidade dos padrões de corte obtidos por compactação quando se parte de padrões iniciais densos ou esparsos.

Na resolução dos modelos matemáticos foi utilizado o ILOG CPLEX 9.0 e um computador com processador *Pentium IV* a 3.2 GHz, correndo *Linux*, com 1 Gb de memória *RAM* e 2 Gb de memória em *swapfile*. É ainda de referir que para estas experiências computacionais não foi feito nenhum ajuste aos parâmetros de omissão do CPLEX.

Tabela 5.3: Experiências computacionais com o modelo matemático global (instância FU).

# f.i.	# restr.	# variáveis		Árvore de pesquisa		Solução ótima		Tempo (seg.)
		bin.	cont.	# iterações	# nós	comp.	aprov.	
6	120	73	13	2206	549	23.0	72.5%	0.13
7	163	105	15	8608	2061	24.0	77.2%	0.54
8	207	137	17	215084	47308	24.0	82.1%	9.90
9	260	177	19	321.9×10^6	100.4×10^6	25.0	89.2%	25302.8
10	322	225	21	$769.1 \times 10^6^*$	$196.0 \times 10^6^*$	29.0*	87.7%*	62140.7*
11	396	284	23	$386.8 \times 10^6^*$	$77.6 \times 10^6^*$	30.1*	87.2%*	57731.3*
12	477	349	25	$268.4 \times 10^6^*$	$38.5 \times 10^6^*$	34.0*	83.8%*	21740.3*

* Valores obtidos após o término dos processos de cálculo.

5.2.1 Experiências Computacionais com o Modelo Matemático Global

Foi realizado um pequeno conjunto de experiências computacionais preliminares para testar e avaliar o modelo matemático apresentado na subsecção 3.3.1. Para estas experiências computacionais foi escolhida uma instância muito simples, denominada FU, com um total de doze formas irregulares e com apenas duas formas irregulares iguais. As formas irregulares desta instância apresentam tamanhos semelhantes, são todas convexas e têm no máximo quatro vértices (três quadrados, dois retângulos, cinco triângulos e dois trapézios). Apesar de originalmente esta instância admitir rotações de múltiplos de 90 graus no posicionamento das formas irregulares, nas experiências computacionais realizadas apenas foi considerada a orientação base. Dada a simplicidade das suas formas irregulares, esta instância permite avaliar os limites do modelo matemático em função do número de formas irregulares. As experiências computacionais consistiram na resolução do problema de PFI considerando apenas as primeiras seis formas irregulares da instância FU, depois as primeiras sete e assim sucessivamente até se atingir a totalidade das formas irregulares. As principais características dos modelos e resultados obtidos estão disponíveis na tabela 5.3, apresentando-se o número de restrições, de variáveis contínuas e de variáveis binárias do modelo, de iterações efectuados e de nós explorados, bem como o comprimento e o aproveitamento do padrão de corte ótimo e o tempo de cálculo.

Os resultados da tabela 5.3 mostram claramente o enorme impacto que

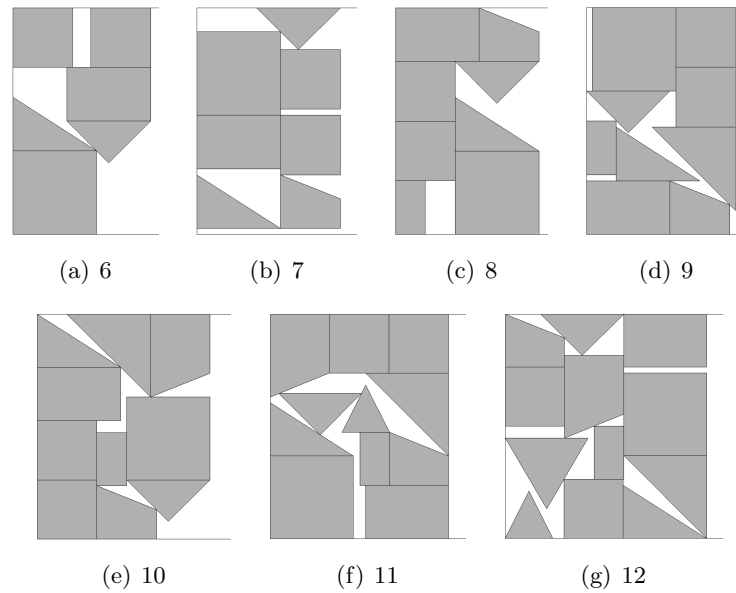


Figura 5.4: Padrões de corte óptimos e aproximados para as primeiras 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12 formas irregulares, sem rotações, da instância FU.

o número de formas irregulares tem na complexidade de um problema de PFI. O simples incremento de uma unidade no número de formas irregulares implica um aumento no número de variáveis binárias, com os consequentes aumentos exponenciais do tamanho da árvore de pesquisa e do tempo de resolução. Nas experiências com 10, 11 e 12 formas irregulares o CPLEX não conseguiu obter a solução óptima, porque o tamanho da árvore de pesquisa esgotou a capacidade de armazenamento do computador em memória *RAM* e *swapfile*, levando ao consequente término do processo de resolução. Os padrões de corte óptimos para as primeiras 6, 7, 8 e 9 formas irregulares, sem rotações, da instância FU são apresentados nas figuras 5.4(a)-5.4(d). As melhores aproximações da solução óptima para as primeiras 10, 11 e 12 formas irregulares, sem rotações, da instância FU são apresentados nas figuras 5.4(e)-5.4(g).

Para além dos comentários já feitos na subsecção 3.3.2, é ainda de referir que a árvore de pesquisa depende muito das dimensões das formas irregulares e, principalmente, da relação destas com a largura da placa. Isto significa que, com outras formas irregulares ou uma largura da placa diferente, poderia ser possível resolver por este processo problemas de PFI com mais uma ou duas formas irregulares, mas não com muito mais do que isso.

5.2.2 Experiências Computacionais com o Modelo Matemático de Compactação

As experiências computacionais realizadas com o modelo matemático de compactação foram muito simples, mas, no entanto, permitiram responder a várias questões como: a validade do modelo, o número de iterações de compactação necessárias e a capacidade de compactar padrões de corte densos e esparsos. Nestas experiências computacionais foram utilizadas duas instâncias de teste muito simples, TESTDATA1 e TESTDATA2. Como já foi referido, estas instâncias apenas têm formas irregulares convexas, no entanto, os resultados obtidos nestas experiências computacionais são perfeitamente generalizáveis a formas não convexas.

Um primeiro conjunto de experiências com o modelo matemático de compactação foi realizado sobre padrões de corte obtidos pelo algoritmo de posicionamento 2-EXCHANGE. Os resultados obtidos após dez corridas a partir de sequências aleatórias de formas irregulares, para cada uma das instâncias, são apresentados na tabela 5.4. As colunas apresentam respectivamente o comprimento antes e depois da compactação, a percentagem de melhoria obtida pelo processo de compactação e, finalmente, o número de iterações do processo de compactação. Convém notar que no número de iterações do processo de compactação se inclui a iteração que leva ao fim do processo iterativo.

Os resultados da tabela 5.4 mostram claramente a efectividade do modelo matemático de compactação em conseguir melhorar, se bem que ligeiramente, padrões de corte densos. Atente-se também no reduzido número de iterações necessário. O tempo de processamento, relativo ao processo de compactação, não é apresentado porque é insignificante (inferior a um segundo). Na figura 5.5 apresenta-se um exemplo, para a instância TESTDATA1, de compactação de padrões de corte densos.

O outro conjunto de experiências com o modelo matemático de compactação incidiu sobre a compactação de padrões de corte esparsos, obtidos aleatoriamente por disposição das formas irregulares sobre uma grelha. Os resultados obtidos após quatro corridas, para cada uma das instâncias, são apresentados na tabela 5.5. As colunas apresentam respectivamente o comprimento depois da compactação, a distância em percentagem para o melhor resultado obtido nestas experiências e nas anteriores e, por fim, o número de iterações do processo de compactação.

Tabela 5.4: Modelo de compactação aplicado a posicionamentos denso.

(a) Instância TESTDATA1

	Comprimento Inicial	Comprimento Final	Melhoria (%)	# iter.
#1	13.333	13.257	0.57	3
#2	13.600	13.333	1.96	2
#3	14.000	14.000	0.00	1
#4	13.667	13.300	2.69	5
#5	14.000	14.000	0.00	1
#6	14.000	14.000	0.00	1
#7	14.000	13.587	2.95	6
#8	13.200	13.200	0.00	1
#9	13.333	13.250	0.62	2
#10	13.733	13.529	1.49	3
média	13.687	13.546	1.03	2.5

(b) Instância TESTDATA2

	Comprimento Inicial	Comprimento Final	Melhoria (%)	# iter.
#1	17.000	16.455	3.21	3
#2	17.000	16.882	0.69	4
#3	17.000	16.727	1.61	3
#4	17.333	16.697	3.67	4
#5	18.333	17.021	7.16	3
#6	17.333	16.607	4.19	14
#7	17.000	16.542	2.69	3
#8	16.917	16.331	3.46	2
#9	17.000	17.000	0.00	1
#10	17.667	16.964	3.98	3
média	17.258	16.723	3.10	3.9

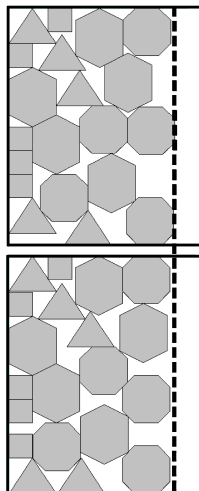


Figura 5.5: Exemplo de compactação de padrões de corte densos (TEST-DATA1).

Tabela 5.5: Modelo de compactação aplicado a posicionamento em grelha.

(a) Instância TESTDATA1

	Comprimento	Distância (%)	# iter.
#1	14.000	6.06	4
#2	16.000	21.21	2
#3	14.000	6.06	5
#4	14.000	6.06	7
média	14.500	9.85	4.50

(b) Instância TESTDATA2

	Comprimento	Distância (%)	# iter.
#1	17.000	4.10	19
#2	19.364	18.57	12
#3	18.716	14.60	13
#4	19.231	17.76	7
média	18.578	13.76	12.75

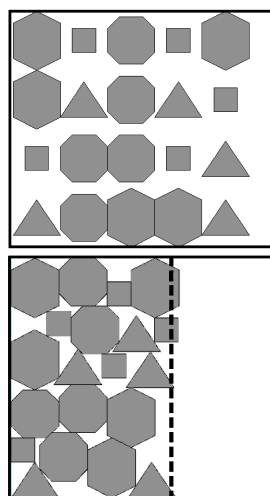


Figura 5.6: Exemplo de compactação de padrões de corte em grelha (TESTDATA1).

Os resultados da tabela 5.5 mostram claramente que os resultados de compactações obtidos a partir de padrões de corte em grelha são piores do que os obtidos a partir de padrões de corte densos, sendo a menor distância de 4.10%. Atente-se também no reduzido número de iterações necessário. O tempo de processamento torna a não ser apresentado pelos motivos avançados anteriormente. Na figura 5.6 apresenta-se o melhor padrão de corte, para a instância TESTDATA1, obtido por compactação de uma solução inicial em grelha. No padrão desta figura está também assinalado o comprimento do melhor padrão de corte obtido a partir de soluções iniciais densas.

As experiências computacionais com o modelo matemático de compactação mostraram não só a validade do modelo, mas também o reduzido número de iterações necessárias até se atingir um padrão compacto, assim como a capacidade de se compactarem padrões de corte densos. Finalmente, foi ainda possível constatar a existência de diferentes níveis na qualidade dos padrões de corte obtidos por compactação, quando se parte de padrões iniciais densos ou esparsos.

Sobre a generalização a problemas com formas não convexas, assiste-se a dois fenómenos de sentidos opostos. Por um lado, o número de iterações do processo de compactação tende a diminuir devido ao maior entrelaçamento entre as formas irregulares, exactamente devido às concavidades, e por outro lado esse mesmo número de iterações tende a aumentar devido ao

potencialmente maior número de arestas dos invólucros de posicionamento.

5.3 Testes Computacionais às Abordagens baseadas em Pesquisa sobre Sequências

Nesta secção apresentam-se os testes e as experiências computacionais realizados às abordagens desenvolvidas que se baseiam em sequências ordenadas de formas irregulares e em selecções dinâmicas da próxima forma irregular a posicionar, designadamente a heurística construtiva de posicionamento, o algoritmo de posicionamento 2-EXCHANGE e a meta-heurística GRASP_SEQ. Os testes computacionais à heurística construtiva de posicionamento incidiram sobre a comparação entre os vários critérios de ordenação e de selecção de formas irregulares. O objectivo destes testes computacionais não foi apenas o de avaliar a qualidade dos resultados obtidos, mas também o de analisar as características dos padrões de corte no que se refere à sua adequação para serem utilizados como soluções iniciais de algoritmos de pesquisa local. O principal objectivo dos testes computacionais realizados ao algoritmo de posicionamento 2-EXCHANGE foi o de verificar a validade desta abordagem, baseada na representação de padrões de corte por sequências de formas irregulares, na resolução de problema de PFI. Foram ainda analisados os impactos dos vários parâmetros e configurações do algoritmo, tais como a dimensão da vizinhança, a comparação entre as várias estratégias de pesquisa da vizinhança e o tipo de movimento realizado. Finalmente foi ainda realizado um conjunto de experiências computacionais destinado a avaliar a viabilidade da aplicação de meta-heurísticas baseadas em estratégias de pesquisa local, designadamente o GRASP, a problemas de PFI representados por sequências de formas irregulares.

Nas próximas subsecções apresentam-se os testes computacionais à heurística construtiva de posicionamento e ao algoritmo de posicionamento 2-EXCHANGE. Na última subsecção são apresentadas as experiências computacionais com a meta-heurística GRASP_SEQ.

5.3.1 Testes Computacionais à Heurística Construtiva de Posicionamento

A heurística construtiva de posicionamento foi testada com o conjunto de instâncias de problemas de PFI de referência anteriormente referido. Estes

testes consistiram na resolução de cada uma das instâncias pela heurística construtiva de posicionamento, considerando consecutivamente os vários critérios de ordenação e de selecção de formas irregulares. Estes testes estão divididos em três grupos: um grupo com os critérios de ordenação estáticos, um outro grupo com os critérios de ordenação aleatórios e um terceiro grupo com os critérios de selecção dinâmicos. Relativamente aos critérios de ordenação dinâmicos foram consideradas vinte corridas, com sementes diferentes, da heurística construtiva de posicionamento. Por razões óbvias, a regra de posicionamento a utilizar durante estes testes computacionais é a regra de posicionamento *bottom-left*.

Os resultados computacionais para os critérios estáticos estão apresentados nas tabelas 5.6, 5.7 e 5.8, com a indicação do nome da instância, do critério de ordenação, do comprimento e do aproveitamento do padrão de corte. Os melhores resultados para cada instância estão assinalados a negrito. Os tempos de processamento são para a grande maioria das instâncias inferiores a um segundo, atingindo os dois segundos para a instância de maior complexidade².

Nenhum critério de ordenação se superioriza em relação aos demais, nem sequer é possível estabelecer uma regra para escolher determinado critério para problemas reais ou artificiais. As boas notícias estão no reduzido tempo de cálculo, que possibilita utilizar todos os critérios sequencialmente e escolher a melhor solução. Relativamente à comparação com os melhores resultados conhecidos, a heurística construtiva de posicionamento fica obviamente muito distante.

Na tabela 5.9 apresentam-se os resultados obtidos pela heurística construtiva de posicionamento com critérios de ordenação aleatórios para cada uma das instâncias de referência. Além do nome da instância e do critério de ordenação, a tabela apresenta também o comprimento e o aproveitamento do melhor padrão, do pior padrão e da média das vinte corridas. Na indicação do critério de ordenação aleatório, utilizam-se as designações de RP, RWA e RWL respectivamente para RANDOM_PIECE, RANDOM_WEIGHTED_AGGREGATE e RANDOM_WEIGHTED_LENGTH. O melhor resultado para cada um dos critérios de ordenação aleatórios está assinalado a negrito. Curiosamente, o critério de ordenação RANDOM_WEIGHTED_AGGRE-

²Refira-se que o método de determinação do tempo de processamento adoptado é pouco preciso, porque foi elaborado com o objectivo de conseguir lidar com tempos de processamento de várias horas.

Tabela 5.6: Resultados da heurística construtiva de posicionamento com critérios de ordenação estáticos (continua).

Instância	Critério de ordenação	Comprimento	Aproveitamento (%)
FU	AGGREGATE	37.67	75.66 %
	AREA	39.83	71.55 %
	CONCAVITY	39.61	71.94 %
	LENGTH	38.00	75.00 %
	PERIMETER	41.00	69.51 %
	NONRECTANGULARITY	40.00	71.25 %
	WIDTH	43.00	66.28 %
JAKOBS1	AGGREGATE	14.00	70.00 %
	AREA	13.00	75.39 %
	CONCAVITY	17.00	57.65 %
	LENGTH	14.00	70.00 %
	PERIMETER	14.00	70.00 %
	NONRECTANGULARITY	15.00	65.33 %
	WIDTH	15.00	65.33 %
JAKOBS2	AGGREGATE	29.00	66.55 %
	AREA	31.50	61.27 %
	CONCAVITY	31.75	60.79 %
	LENGTH	29.00	66.55 %
	PERIMETER	29.86	64.64 %
	NONRECTANGULARITY	32.92	58.62 %
	WIDTH	29.00	66.55 %
SHAPES0	AGGREGATE	67.00	59.55 %
	AREA	68.50	58.25 %
	CONCAVITY	71.00	56.20 %
	LENGTH	67.00	59.55 %
	PERIMETER	67.00	59.55 %
	NONRECTANGULARITY	69.00	57.83 %
	WIDTH	77.00	51.82 %
SHAPES1	AGGREGATE	67.00	59.55 %
	AREA	65.50	60.92 %
	CONCAVITY	70.00	57.00 %
	LENGTH	67.00	59.55 %
	PERIMETER	67.50	59.11 %
	NONRECTANGULARITY	67.00	59.55 %
	WIDTH	67.00	59.55 %
SHAPES2	AGGREGATE	29.88	72.30 %
	AREA	29.84	72.39 %
	CONCAVITY	29.04	74.38 %
	LENGTH	29.59	72.99 %
	PERIMETER	29.04	74.38 %
	NONRECTANGULARITY	29.60	72.97 %
	WIDTH	29.81	72.45 %
ARTIF	AGGREGATE	50.17	69.87 %
	AREA	54.02	64.90 %
	CONCAVITY	56.19	62.39 %
	LENGTH	54.02	64.90 %
	PERIMETER	51.59	67.95 %
	NONRECTANGULARITY	55.31	63.37 %
	WIDTH	54.28	64.59 %

Tabela 5.7: Resultados da heurística construtiva de posicionamento com critérios de ordenação estáticos (continuação e continua).

Instância	Critério de ordenação	Comprimento	Aproveitamento (%)
DIGHE1	AGGREGATE	155.84	64.17 %
	AREA	145.39	68.78 %
	CONCAVITY	182.38	54.83 %
	LENGTH	152.53	65.56 %
	PERIMETER	165.49	60.43 %
	NONRECTANGULARITY	156.28	63.99 %
	WIDTH	170.29	58.73 %
DIGHE2	AGGREGATE	153.90	64.98 %
	AREA	154.30	64.81 %
	CONCAVITY	195.84	51.06 %
	LENGTH	145.56	68.70 %
	PERIMETER	158.07	63.26 %
	NONRECTANGULARITY	155.72	64.22 %
	WIDTH	170.53	58.64 %
ALBANO	AGGREGATE	11397.97	76.38 %
	AREA	11409.48	76.30 %
	CONCAVITY	12390.99	70.26 %
	LENGTH	11075.96	78.60 %
	PERIMETER	11066.31	78.67 %
	NONRECTANGULARITY	11635.01	74.82 %
	WIDTH	12217.40	71.26 %
DAGLI	AGGREGATE	69.57	72.90 %
	AREA	64.33	78.83 %
	CONCAVITY	80.29	63.17 %
	LENGTH	69.37	73.11 %
	PERIMETER	67.39	75.25 %
	NONRECTANGULARITY	73.04	69.43 %
	WIDTH	75.74	66.96 %
MAO	AGGREGATE	2104.75	70.03 %
	AREA	2093.70	70.40 %
	CONCAVITY	2102.05	70.12 %
	LENGTH	2093.53	70.41 %
	PERIMETER	2104.75	70.03 %
	NONRECTANGULARITY	2076.10	71.00 %
	WIDTH	2076.10	71.00 %
MARQUES	AGGREGATE	85.83	80.59 %
	AREA	90.40	76.52 %
	CONCAVITY	100.27	68.99 %
	LENGTH	95.03	72.79 %
	PERIMETER	88.96	77.76 %
	NONRECTANGULARITY	87.94	78.66 %
	WIDTH	88.05	78.56 %
SHIPS	AGGREGATE	290.30	76.62 %
	AREA	290.69	76.52 %
	CONCAVITY	330.03	67.40 %
	LENGTH	309.92	71.77 %
	PERIMETER	298.90	74.42 %
	NONRECTANGULARITY	346.22	64.25 %
	WIDTH	323.59	68.74 %

Tabela 5.8: Resultados da heurística construtiva de posicionamento com critérios de ordenação estáticos (continuação).

Instância	Critério de ordenação	Comprimento	Aproveitamento (%)
SHIRTS	AGGREGATE	67.17	80.40 %
	AREA	67.17	80.40 %
	CONCAVITY	67.14	80.43 %
	LENGTH	64.80	83.33 %
	PERIMETER	64.59	83.61 %
	NONRECTANGULARITY	64.85	83.27 %
	WIDTH	65.44	82.52 %
SWIM	AGGREGATE	6747.73	65.56 %
	AREA	7439.92	59.46 %
	CONCAVITY	7357.62	60.12 %
	LENGTH	7041.92	62.82 %
	PERIMETER	7131.43	62.03 %
	NONRECTANGULARITY	7417.38	59.64 %
	WIDTH	7257.06	60.96 %
TROUSERS	AGGREGATE	269.00	80.97 %
	AREA	253.63	85.88 %
	CONCAVITY	269.00	80.97 %
	LENGTH	259.55	83.92 %
	PERIMETER	256.11	85.04 %
	NONRECTANGULARITY	287.79	75.68 %
	WIDTH	283.43	76.85 %

GATE superioriza-se sempre aos outros dois para as instâncias artificiais utilizadas e nunca é o melhor para as oito instâncias das indústrias de confecções e naval. Os tempos de processamento para estes critérios são semelhantes aos tempos dos critérios estáticos.

Finalmente, os resultados obtidos pela heurística construtiva de posicionamento com critérios de selecção dinâmicos são apresentados na tabela 5.10, indicando-se o comprimento e o aproveitamento obtidos por cada um dos critérios em cada instância de referência. Mais uma vez, o melhor resultado para cada instância é assinalado a negrito. Apesar da pesquisa efectuada para seleccionar a melhor forma irregular a posicionar em cada instante, os tempos de processamento continuam a ser semelhantes aos tempos de processamento dos critérios estáticos e aleatórios. O motivo pelo qual os tempos de processamento dos critérios dinâmicos não são superiores deve-se à implementação utilizada para a regra de posicionamento *bottom-left*, que mantém sempre a lista de pontos de posicionamento admissíveis actualizada para todas as formas irregulares.

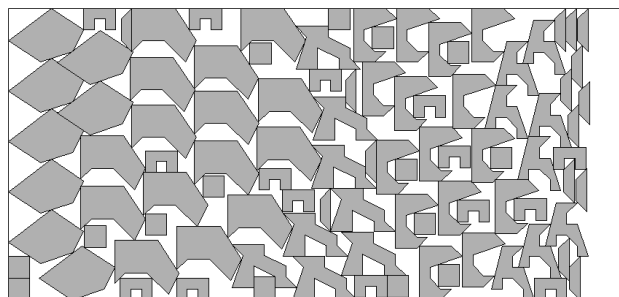
A comparação entre os resultados obtidos pelos diferentes tipos de critérios não é muito conclusiva. No entanto a análise dos padrões pode permitir decidir sobre que tipo de critério utilizar em função da aplicação concreta. Na figura 5.7 apresentam-se exemplos de padrões de corte típicos resultantes da aplicação da heurística de posicionamento com cada um destes tipos de critérios. Os padrões de corte resultantes da aplicação de critérios de ordenação estáticos são muito estruturados (figuras 5.7(a)), com grandes zonas com formas irregulares iguais e sem tirar partido do entrelaçamento entre formas irregulares diferentes. Estes tipos de padrões podem ser úteis em situações onde existem processos de corte automáticos. Do lado oposto encontram-se os padrões de corte resultantes da aplicação de critérios aleatórios, e em particular do critério `RANDOM_PIECE` (figura 5.7(b)). Já os critérios dinâmicos dão origem a padrões de corte muito desequilibrados, com bons níveis de aproveitamento no início e muito maus no final. Podem ser úteis em situações onde não existem quantidades fixas de formas irregulares a posicionar. Estas características típicas, levaram à adopção de critérios de ordenação aleatórios pesados (figura 5.7(c)), na geração de soluções iniciais para abordagens baseadas em pesquisa local.

Tabela 5.9: Resultados da heurística construtiva de posicionamento com critérios de ordenação aleatórios.

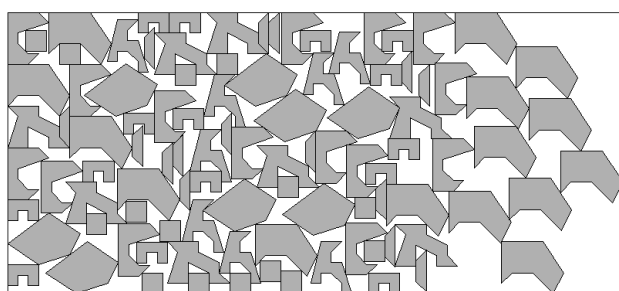
Instância	Critério de ordenação	Melhor solução		Solução média		Pior solução	
		Comprim.	Aprov. (%)	Comprim.	Aprov. (%)	Comprim.	Aprov. (%)
FU	RP	37.78	75.44	40.59	70.44	45.79	62.24
	RWA	36.00	79.17	39.32	72.75	45.14	63.13
	RWL	37.00	77.03	40.84	70.07	46.92	60.74
JAKOBS1	RP	14.00	70.00	15.40	63.89	17.38	56.40
	RWA	13.00	75.39	15.23	64.78	18.00	54.44
	RWL	14.00	70.00	15.35	64.02	17.00	57.65
JAKOBS2	RP	28.58	67.52	32.12	60.22	36.00	53.61
	RWA	28.00	68.93	30.70	63.00	34.00	56.77
	RWL	29.00	66.55	32.54	59.60	37.00	52.16
SHAPES0	RP	69.00	57.83	72.58	55.04	78.00	51.15
	RWA	65.00	61.39	69.63	57.39	75.00	53.20
	RWL	66.00	60.46	69.64	57.36	74.50	53.56
SHAPES1	RP	65.00	61.39	69.26	57.68	73.00	54.66
	RWA	61.50	64.88	66.70	59.99	76.00	52.50
	RWL	62.00	64.36	66.10	60.42	70.50	56.60
SHAPES2	RP	30.25	71.42	32.04	67.50	34.05	63.44
	RWA	29.22	73.92	31.03	69.67	32.57	66.33
	RWL	29.22	73.92	31.03	69.75	35.37	61.07
ARTIF	RP	53.32	65.74	56.08	62.56	59.19	59.22
	RWA	52.42	66.87	54.13	64.80	57.38	61.09
	RWL	52.48	66.79	53.98	65.00	60.20	58.23
DIGHE1	RP	155.69	64.23	175.30	57.24	199.19	50.20
	RWA	157.83	63.36	173.96	57.71	207.37	48.22
	RWL	153.07	65.33	171.81	58.43	197.93	50.52
DIGHE2	RP	145.91	68.54	166.80	60.44	216.76	46.13
	RWA	139.59	71.64	165.79	60.68	195.67	51.11
	RWL	139.19	71.84	162.75	61.89	184.59	54.17
ALBANO	RP	10761.13	80.90	12158.21	71.85	13406.80	64.93
	RWA	10857.48	80.18	11736.06	74.33	12597.43	69.11
	RWL	10857.48	80.18	11905.17	73.34	13064.21	66.64
DAGLI	RP	65.31	77.65	74.13	68.67	84.21	60.23
	RWA	65.92	76.94	72.17	70.52	78.88	64.29
	RWL	64.67	78.43	70.40	72.19	76.13	66.62
MAO	RP	2175.97	67.74	2362.97	62.58	2599.86	56.69
	RWA	2080.83	70.84	2360.43	62.80	2699.35	54.61
	RWL	2067.74	71.28	2339.73	63.33	2757.12	53.46
MARQUES	RP	87.06	79.45	97.39	71.42	110.60	62.54
	RWA	88.35	78.30	95.41	72.62	103.81	66.64
	RWL	91.55	75.56	98.99	70.10	110.87	62.39
SHIPS	RP	310.16	71.72	336.38	66.50	426.64	52.14
	RWA	297.98	74.65	322.50	69.20	388.13	57.31
	RWL	293.46	75.80	310.58	71.73	348.90	63.76
SHIRTS	RP	64.57	83.62	68.28	79.15	71.17	75.87
	RWA	65.10	82.95	66.93	80.70	69.10	78.14
	RWL	64.86	83.26	65.86	82.00	67.45	80.06
SWIM	RP	6822.22	64.84	7266.63	60.95	7763.23	56.98
	RWA	6779.67	65.25	7082.69	62.51	7518.19	58.84
	RWL	6619.99	66.82	7107.76	62.31	7756.22	57.03
TROUSERS	RP	268.59	81.09	293.62	74.28	314.94	69.16
	RWA	264.75	82.27	285.53	76.42	313.98	69.37
	RWL	259.44	83.95	280.48	77.76	298.16	73.05

Tabela 5.10: Resultados da heurística construtiva de posicionamento com critérios de selecção dinâmicos.

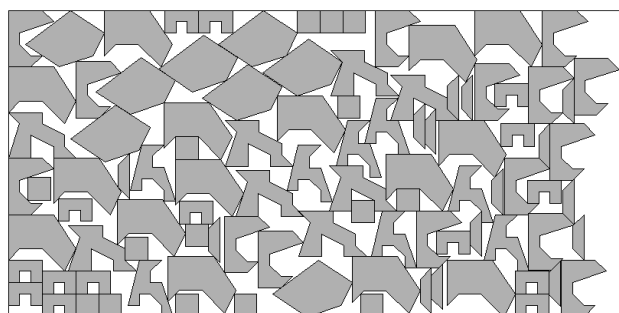
Instância	Critério de selecção	Comprimento	Aproveitamento(%)
FU	INNER_WASTE_RELATIVE	39.83	71.55
FU	LAYOUT_LENGTH_RELATIVE	38.66	73.72
JAKOBS1	INNER_WASTE_RELATIVE	13.00	75.39
JAKOBS1	LAYOUT_LENGTH_RELATIVE	14.00	70.00
JAKOBS2	INNER_WASTE_RELATIVE	28.00	68.93
JAKOBS2	LAYOUT_LENGTH_RELATIVE	30.00	64.33
SHAPES0	INNER_WASTE_RELATIVE	69.50	57.41
SHAPES0	LAYOUT_LENGTH_RELATIVE	68.50	58.25
SHAPES1	INNER_WASTE_RELATIVE	66.50	60.00
SHAPES1	LAYOUT_LENGTH_RELATIVE	66.00	60.46
SHAPES2	INNER_WASTE_RELATIVE	29.78	72.52
SHAPES2	LAYOUT_LENGTH_RELATIVE	30.84	70.04
ARTIF	INNER_WASTE_RELATIVE	54.02	64.90
ARTIF	LAYOUT_LENGTH_RELATIVE	53.76	65.21
DIGHE1	INNER_WASTE_RELATIVE	162.46	61.55
DIGHE1	LAYOUT_LENGTH_RELATIVE	145.95	68.52
DIGHE2	INNER_WASTE_RELATIVE	171.12	58.44
DIGHE2	LAYOUT_LENGTH_RELATIVE	152.66	65.50
ALBANO	INNER_WASTE_RELATIVE	11486.02	75.79
ALBANO	LAYOUT_LENGTH_RELATIVE	11108.58	78.37
DAGLI	INNER_WASTE_RELATIVE	67.69	74.92
DAGLI	LAYOUT_LENGTH_RELATIVE	66.19	76.62
MAO	INNER_WASTE_RELATIVE	2112.46	69.78
MAO	LAYOUT_LENGTH_RELATIVE	2024.21	72.82
MARQUES	INNER_WASTE_RELATIVE	87.44	79.11
MARQUES	LAYOUT_LENGTH_RELATIVE	92.86	74.49
SHIPS	INNER_WASTE_RELATIVE	290.69	76.52
SHIPS	LAYOUT_LENGTH_RELATIVE	309.92	71.77
SHIRTS	INNER_WASTE_RELATIVE	66.72	80.94
SHIRTS	LAYOUT_LENGTH_RELATIVE	65.69	82.21
SWIM	INNER_WASTE_RELATIVE	7275.69	60.80
SWIM	LAYOUT_LENGTH_RELATIVE	7144.29	61.92
TROUSERS	INNER_WASTE_RELATIVE	279.81	77.84
TROUSERS	LAYOUT_LENGTH_RELATIVE	256.08	85.05



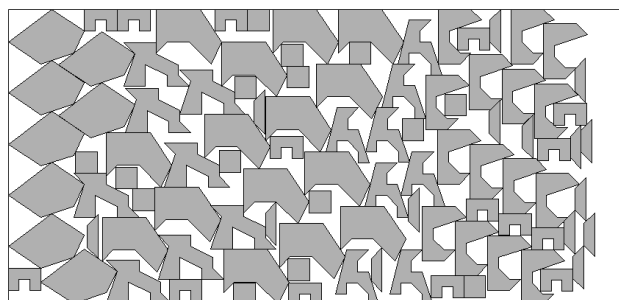
(a) Critério estático (LENGTH).



(b) Critério aleatório (RANDOM_PIECE).



(c) Critério aleatório (RANDOM_WEIGHTED_LENGTH).



(d) Critério dinâmico (INNER_WASTE_RELATIVE).

Figura 5.7: Exemplos de padrões de corte obtidos pela heurística construtiva de posicionamento.

5.3.2 Testes Computacionais ao Algoritmo de Posicionamento 2-EXCHANGE

Os testes computacionais ao algoritmo de posicionamento 2-EXCHANGE foram publicados no artigo [Gomes e Oliveira, 2002]. Estes testes foram realizados num computador pessoal da época, com processador *Pentium III* a 450 MHz, e só incluíram seis dos critérios de ordenação de sequências, que eram os que na altura estavam implementados. De igual modo, só foram utilizadas cinco das seis instâncias de teste disponíveis na época, já que a sexta, a instância SWIM, se revelou muito complexa para ser resolvida nos computadores disponíveis na altura. Para além do menor número de critérios de ordenação das formas irregulares, também só foram utilizados movimentos de trocas entre formas irregulares na sequência ordenada. Um último comentário em relação aos resultados a apresentar sobre o algoritmo de posicionamento 2-EXCHANGE. Na implementação utilizada no artigo, a selecção do ponto de posicionamento dependia apenas das coordenadas do ponto de referência da forma irregular, independentemente de existir algum vértice com coordenadas mais à esquerda e mais acima da forma irregular. Na versão actual, utilizada nos testes computacionais da heurística construtiva de posicionamento apresentados na subsecção anterior, a escolha do ponto de posicionamento é feita em função das coordenadas do vértice mais à esquerda e acima da forma irregular, o que naturalmente levou a algumas inconsistências entre os resultados apresentados nos testes computacionais do algoritmo de posicionamento 2-EXCHANGE e da heurística construtiva de posicionamento.

Os resultados obtidos nos testes computacionais efectuados ao algoritmo de posicionamento 2-EXCHANGE obtiveram, na altura da publicação do artigo Gomes e Oliveira [2002], os melhores resultados conhecidos para quatro das cinco instâncias de teste utilizadas (tabela 5.12). As quatro instâncias onde se obtiveram os melhores resultados foram SHAPES1, SHAPES2, SHIRTS e TROUSERS, com melhorias respectivamente de 3.28%, 2.85%, 2.88% e 7.00%. A instância para a qual não foi obtido o melhor resultado foi a instância SHAPES0, ficando a 3.17% de distância do melhor resultado conhecido na altura.

A análise da influência da solução inicial no desempenho do algoritmo de posicionamento 2-EXCHANGE é apresentada no gráfico da figura 5.8. Cada coluna do gráfico representa, para cada instância, a distância média entre os resultados obtidos por cada uma das variantes do algoritmo e a melhor

Tabela 5.11: Resultados do algoritmo de posicionamento 2-EXCHANGE.

Instância	Solução inicial Critério de ordenação	FIRST_SOLUTION			BEST_SOLUTION			RANDOM_SOLUTION					
		$\Delta = 1$	$\Delta = 2$	$\Delta = 3$	$\Delta = 1$	$\Delta = 2$	$\Delta = 3$	$\Delta = 1$		$\Delta = 2$		$\Delta = 3$	
								média	melhor	média	melhor	média	melhor
SHAPES0	RP (média)	69.09	68.18	67.80	69.26	68.15	68.39	69.05	—	67.78	—	67.84	—
	RP (melhor)	65.50	66.00	65.50	66.50	65.00	66.00	—	67.00	—	65.00	—	65.00
	AREA	70.00	68.00	67.50	70.00	68.50	67.50	70.00	70.00	68.38	68.00	68.20	65.00
	LENGTH	67.00	67.00	67.00	67.00	67.00	67.00	67.00	67.00	67.00	67.00	67.00	67.00
	WIDTH	75.00	68.00	68.00	75.00	68.00	68.00	75.00	75.00	68.00	68.00	68.00	68.00
	IRREGULARITY	68.50	68.00	68.00	68.50	68.00	67.00	68.43	68.00	68.08	68.00	67.48	66.00
SHAPES1	NONRECTANGULARITY	71.00	69.00	69.00	71.00	69.00	69.00	71.00	71.00	70.10	69.00	70.10	69.00
	RP (média)	65.88	64.46	64.44	65.10	64.19	63.91	65.15	—	64.20	—	63.59	—
	RP (melhor)	62.00	60.00	61.00	62.00	60.00	61.00	—	60.00	—	60.00	—	60.00
	AREA	65.50	63.00	63.00	65.50	63.00	63.00	65.50	65.50	63.13	63.00	63.13	63.00
	LENGTH	67.00	64.00	63.00	67.00	64.00	63.00	67.00	67.00	64.00	64.00	63.70	63.00
	WIDTH	65.00	65.00	64.00	65.00	63.00	63.00	64.20	63.00	63.00	63.00	63.00	63.00
SHAPES2	IRREGULARITY	69.00	68.00	66.50	69.00	68.00	66.50	69.00	69.00	68.15	66.50	66.25	65.00
	NONRECTANGULARITY	63.00	63.00	62.00	63.00	63.00	60.00	63.00	63.00	63.00	63.00	61.55	59.00
	RP (média)	29.90	29.59	29.34	29.88	29.52	29.13	29.78	—	29.52	—	29.34	—
	RP (melhor)	28.42	28.53	28.33	28.61	28.23	28.22	—	28.90	—	28.38	—	28.50
	AREA	29.40	29.40	28.25	29.40	29.40	28.73	29.40	29.40	28.88	28.36	28.45	28.05
	LENGTH	28.40	28.18	27.93	28.70	28.73	27.44	28.30	27.76	28.15	27.60	28.13	27.30
SHIRTS	Width	29.45	28.92	29.20	29.45	28.38	28.38	29.45	29.45	28.38	28.38	28.33	27.92
	IRREGULARITY	30.04	30.04	28.50	30.04	30.04	29.06	30.04	30.04	30.04	30.04	29.13	28.83
	NONRECTANGULARITY	28.65	28.30	28.30	28.65	28.30	28.30	28.65	28.65	28.30	28.30	28.27	27.90
	RP (média)	67.97	67.12	67.14	67.69	67.16	66.86	67.05	—	66.99	—	66.79	—
	RP (melhor)	66.53	65.27	65.63	65.40	65.38	64.63	—	65.40	—	65.32	—	65.40
	AREA	65.97	64.75	64.75	65.97	65.80	65.00	65.88	65.80	65.30	64.75	64.91	63.81
TROUSERS	LENGTH	65.74	64.63	64.41	65.74	65.74	64.35	65.74	65.74	64.88	64.32	64.09	63.49
	WIDTH	65.36	65.36	64.82	65.36	63.66	63.66	65.36	65.36	63.64	63.58	63.60	63.39
	IRREGULARITY	65.14	65.03	65.03	65.14	65.03	65.03	68.88	65.80	65.30	64.75	64.91	64.81
	NONRECTANGULARITY	63.73	63.54	63.54	63.73	63.17	63.17	63.73	63.73	63.17	63.17	63.17	63.13
	RP (média)	269.49	263.35	259.90	267.59	260.86	260.51	265.33	—	260.88	—	257.13	—
	RP (melhor)	254.98	249.33	247.93	247.52	247.52	247.30	—	247.52	—	247.52	—	247.52
TROUSERS	AREA	283.60	247.50	257.46	283.60	249.51	257.46	283.60	283.60	251.42	247.50	253.67	246.60
	LENGTH	259.00	259.00	245.94	259.00	259.00	252.78	259.00	259.00	259.00	259.00	251.54	246.67
	WIDTH	279.60	280.60	280.60	279.60	280.60	280.60	279.75	279.60	279.86	279.60	279.70	275.73
	IRREGULARITY	259.00	250.40	248.22	259.00	250.40	250.40	259.00	259.00	249.06	246.74	249.67	245.75
	NONRECTANGULARITY	284.93	279.40	278.82	279.60	281.64	279.60	280.62	279.60	280.18	278.82	279.07	275.33

Tabela 5.12: Comparação dos resultados do algoritmo de posicionamento 2-EXCHANGE com os melhores resultados conhecidos na literatura.

Instância	2-EXCHANGE		Melhor resultado conhecido*	
	Comprimento	Tempo (seg.)	Comprimento	Referência
SHAPES0	65.00	819.32	63.00	[Dowland <i>et al.</i> , 1998]
SHAPES1	59.00	2019.77	61.00	[Oliveira <i>et al.</i> , 2000]
SHAPES2	27.30	551.73	28.10	[Gomes, 1996]
SHIRTS	63.13	6367.57	65.00	[Dowland <i>et al.</i> , 1998]
TROUSERS	245.75	13613.67	263.17	[Oliveira <i>et al.</i> , 2000]

* Resultados conhecidos na altura da publicação do artigo [Gomes e Oliveira, 2002].

solução obtida de cada instância. Mais uma vez se observa que os resultados dependem fortemente das características da instância de teste, não sendo possível estabelecer regras sobre a solução inicial a adoptar.

A comparação entre as nove variantes pode ser observada no gráfico da figura 5.9, onde voltam a ser apresentadas as distâncias médias de cada uma das variantes para a melhor solução encontrada. A variante com a vizinhança de maior dimensão ($\Delta = 3$) e pesquisa da vizinhança aleatória (RANDOM_BETTER) superioriza-se claramente às restantes, com distâncias médias de 0.00% para as instâncias SHAPES0 e SHAPES1, 0.06% para a instância TROUSERS, 0.21% para a instância SHIRTS e 0.36% para a instância SHAPES2. Para uma determinada instância e solução inicial, esta variante apenas não conseguiu o melhor resultado em seis casos de um total de trinta combinações (tabela 5.11), designadamente: 1.00% pior para RANDOM_PIECE/SHAPES2, 1.16% pior para IRREGULARITY/SHAPES2, 1.19% pior para RANDOM_PIECE/SHIRTS, 0.09% pior para IRREGULARITY/SHIRTS, 0.69% pior para RANDOM_PIECE/TROUSERS e, finalmente, 0.30% pior para LENGTH/TROUSERS.

Uma outra perspectiva na comparação das nove variantes do algoritmo de posicionamento 2-EXCHANGE é a análise do compromisso entre a qualidade do padrão de corte e os tempos de processamento. Na figura 5.10 são apresentados os gráficos de dispersão para as nove variantes do algoritmo de posicionamento 2-EXCHANGE. Para cada variante são apresentados resultados relativos a 300 corridas do algoritmo, resultantes de: 5 instâncias $\times$ 3 valores de $\Delta \times$ 20 soluções iniciais aleatórias. Cada ponto do gráfico tem uma abcissa resultante do quociente entre o respectivo tempo de processamento e o menor tempo de processamento de todas as corridas dessa

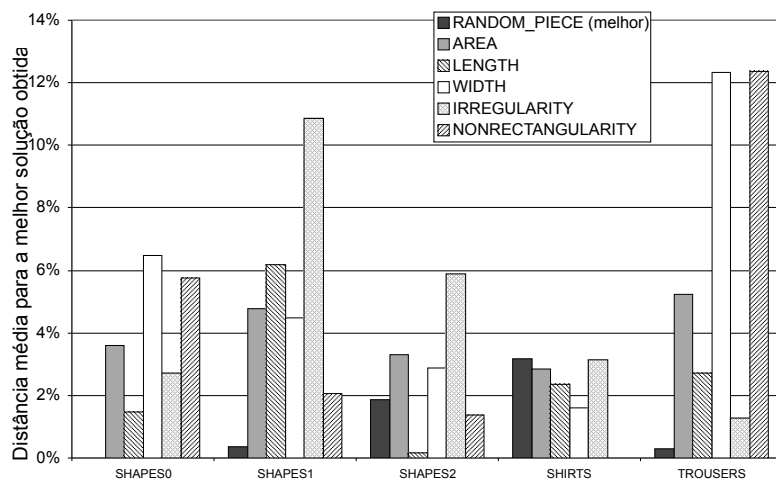


Figura 5.8: Influência da solução inicial no algoritmo de posicionamento 2-EXCHANGE.

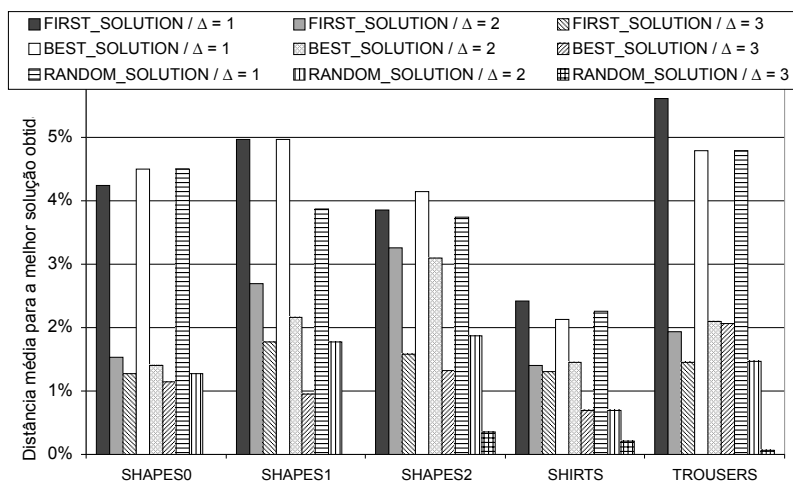


Figura 5.9: Análise das variantes do algoritmo de posicionamento 2-EXCHANGE.

Tabela 5.13: Tempos de processamento do algoritmo 2-EXCHANGE.

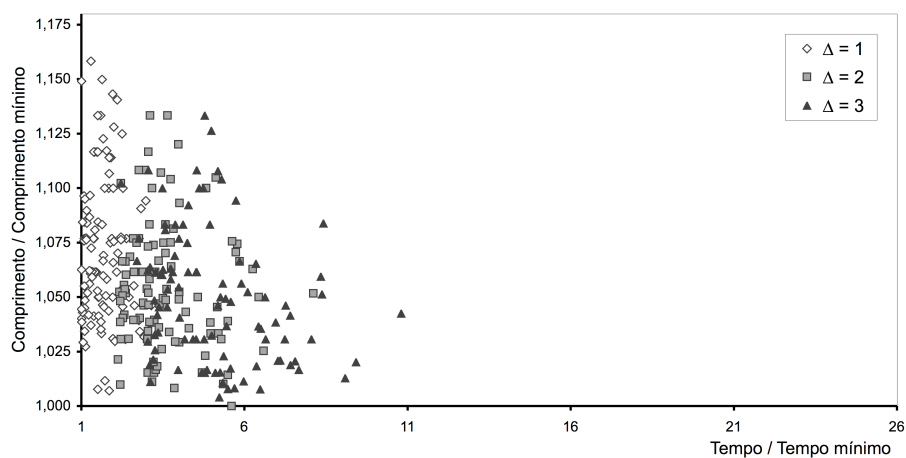
Instância		Comprim.	Tempo* (seg.)	# de padrões	Tempo Padrão
SHAPES0	FIRST_SOLUTION	65.50	161.31	59	2.734
	BEST_SOLUTION	65.00	1145.48	392	2.922
	RANDOM_SOLUTION	65.00	819.32	268	3.057
SHAPES1	FIRST_SOLUTION	60.00	1191.93	206	5.786
	BEST_SOLUTION	60.00	2402.93	409	5.875
	RANDOM_SOLUTION	59.00	2019.77	327	6.177
SHAPES2	FIRST_SOLUTION	27.93	161.15	155	1.040
	BEST_SOLUTION	27.44	437.76	423	1.035
	RANDO_SOLUTION	27.30	551.73	539	1.024
SHIRTS	FIRST_SOLUTION	63.54	960.97	54	17.796
	BEST_SOLUTION	63.17	1739.00	95	18.305
	RANDO_SOLUTION	63.13	6367.57	344	18.510
TROUSERS	FIRST_SOLUTION	245.94	2978.23	357	8.342
	BEST_SOLUTION	247.30	6237.12	664	9.393
	RANDOM_SOLUTION	245.75	13613.67	1667	8.167

* Tempos medidos num computador com processador *Pentium III* a 450 MHz.

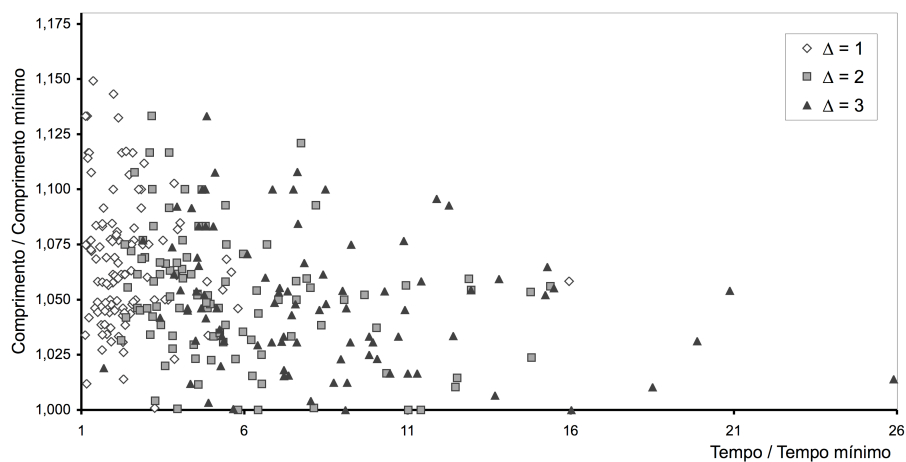
instância e uma ordenada que é obtida pelo quociente entre o respectivo comprimento do padrão de corte e o menor comprimento obtido entre todas as variantes para essa instância. Como seria de esperar, o tempo de processamento e a qualidade dos padrões de corte crescem com o tamanho da vizinhança (parâmetro Δ) e com a estratégia de selecção do próximo vizinho (FIRST_SOLUTION, BEST_SOLUTION, e RANDOM_SOLUTION).

Finalmente, na tabela 5.13 apresentam-se os tempos de processamento para os melhores resultados obtidos, para cada uma das estratégias de pesquisa da vizinhança. São também apresentados o número de padrões de corte avaliados durante a pesquisa e o tempo médio de avaliação por padrão de corte. Como já foi visto, a estratégia de pesquisa influencia o tempo de processamento, no entanto o tempo de gerar e avaliar um padrão de corte é aproximadamente constante para cada instância.

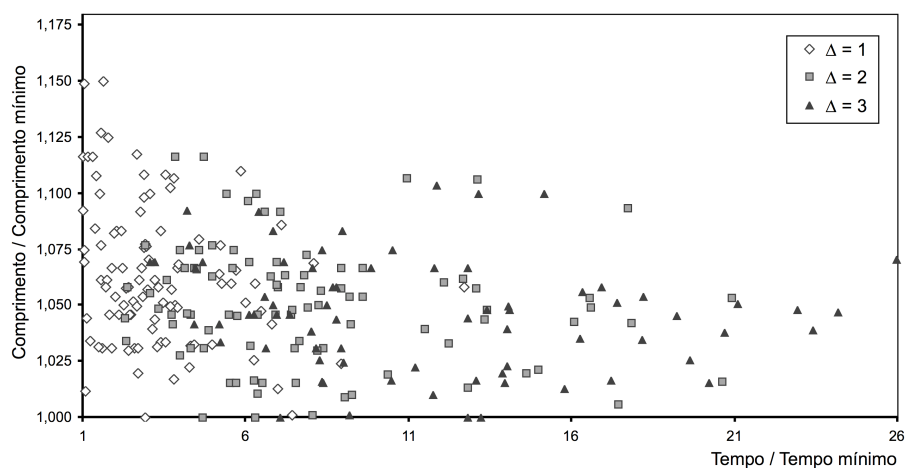
Um último comentário ao comportamento do algoritmo de posicionamento 2-EXCHANGE. Durante a realização dos testes computacionais a este algoritmo, foi notória a grande influência que alterações na sequência de formas irregulares provocam nos padrões de corte. Designadamente, uma simples troca de dois elementos no início da sequência provoca grandes alterações no padrão de corte, ou seja, a duas sequências vizinhas não cor-



(a) FIRST_SOLUTION.



(b) BEST_SOLUTION.



(c) RANDOM_SOLUTION.

Figura 5.10: Gráficos de dispersão dos resultados das variantes do algoritmo de posicionamento 2-EXCHANGE.

respondem necessariamente dois padrões de corte “vizinhos”. Este tipo de comportamento não é desejável em algoritmos de pesquisa local, que se baseiam no conceito de vizinhanças e na introdução de pequenas alterações às soluções. Assim, a representação de padrões de corte por sequências de formas irregulares, com o posterior posicionamento das formas irregulares por uma regra de posicionamento do tipo *bottom-left*, não demonstrou ser a estratégia mais adequada para abordagens baseadas em algoritmos de pesquisa local para problemas de PFI.

5.3.3 Experiências Computacionais com a Meta-heurística GRASP_SEQ

A meta-heurística GRASP_SEQ, baseada na pesquisa sobre sequências de formas irregulares e conduzida pela meta-heurística GRASP, foi apresentada na conferência *4th Metaheuristic International Conference* e encontra-se publicada no respectivo livro de resumos alargados [Gomes e Oliveira, 2001]. Esta meta-heurística foi alvo de um pequeno conjunto de experiências computacionais com o objectivo de avaliar até que ponto seria possível controlar a geração de sequências de formas irregulares e a pesquisa sobre essas sequências.

As experiências computacionais realizadas consistiram na realização de quinze corridas da meta-heurística GRASP_SEQ para duas instâncias, SHAPES1 e SHAPES2, e segundo os dois critérios dinâmicos de selecção da próxima forma irregular, LAYOUT_LENGTH_RELATIVE e INNER_WASTE_RELATIVE. Foram considerados diferentes valores para o parâmetro α (0.0, 0.1, 0.2, ..., 1.0) que controla o nível de aleatoriedade da fase construtiva desta meta-heurística, onde $\alpha = 0.0$ corresponde a um comportamento totalmente aleatório e $\alpha = 1.0$ a um comportamento totalmente guloso. Os resultados das experiências computacionais realizadas estão resumidos nos diagramas do tipo caixa da figura 5.11. Como valor mínimo do eixo das ordenadas foi escolhido o valor do comprimento do melhor padrão de corte conhecido na altura, respectivamente 59.00 e 27.30. Refira-se que estes valores foram obtidos pelo algoritmo de posicionamento 2-EXCHANGE.

A análise dos diagramas do tipo caixa da figura 5.11 mostra que os resultados da meta-heurística GRASP_SEQ não melhoram os resultados do algoritmo de posicionamento 2-EXCHANGE. Adicionalmente, observou-se também o problema de a duas sequências vizinhas não corresponder dois

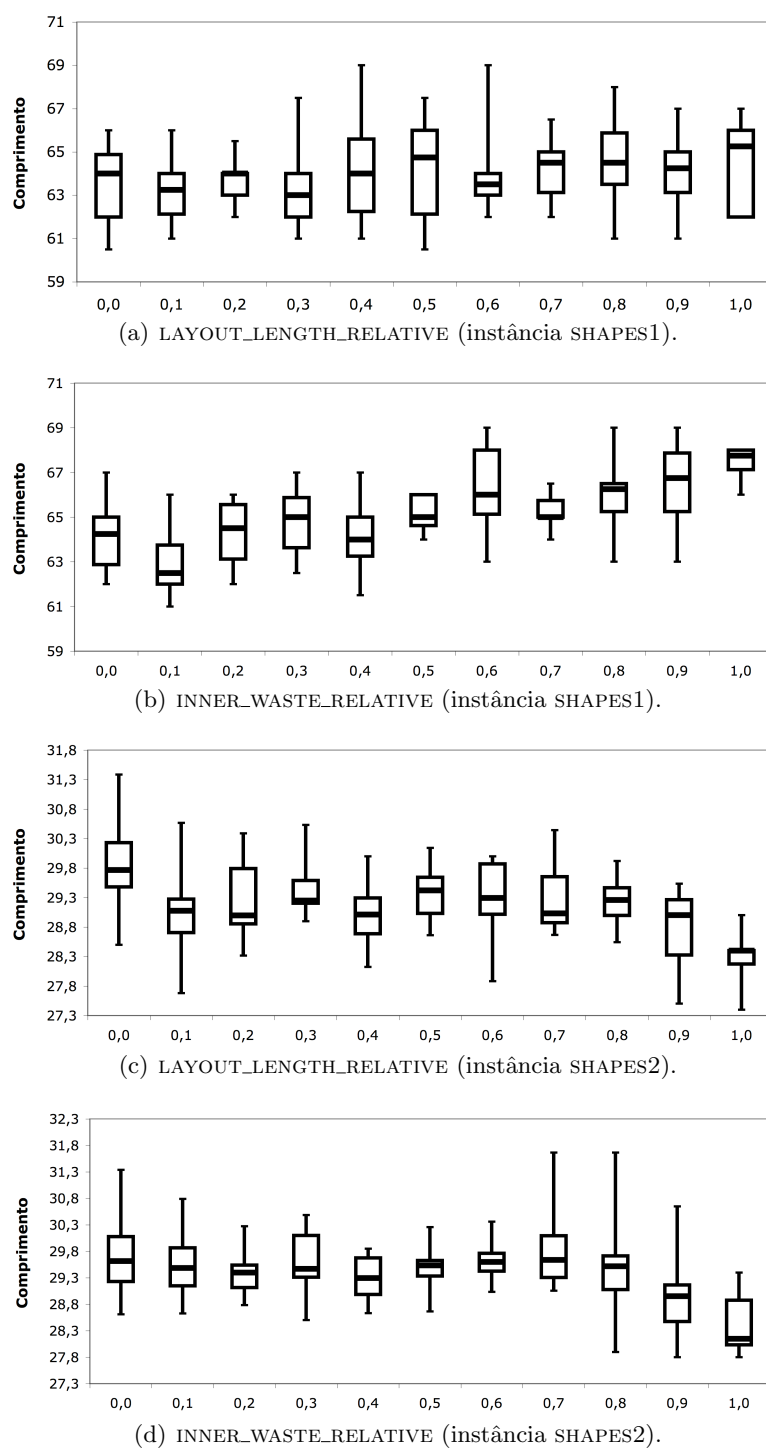


Figura 5.11: Diagramas do tipo caixa para diferentes valores do parâmetro α da meta-heurística GRASP_SEQ.

padrões de corte “vizinhos” na fase de pesquisa local da meta-heurística GRASP_SEQ, anteriormente constatado no algoritmo de posicionamento 2-EXCHANGE. Por fim, os critérios de selecção da próxima forma irregular a posicionar e o parâmetro α não conseguiram controlar o nível de aleatoriedade na geração das soluções iniciais³.

5.4 Testes Computacionais à Estrutura de Vizinhaça baseadas em Padrões de Corte

Nesta secção apresentam-se os testes e as experiências computacionais realizados à estrutura de vizinhaça LOCALCOMPACT, baseada em padrões de corte, proposta neste trabalho. Estes testes computacionais utilizaram as duas abordagens híbridas, SAHA e GLSHA apresentadas na subsecção 4.3.2. Estes testes incidiram, numa primeira fase, na análise do comportamento da estrutura de vizinhaça LOCALCOMPACT, considerando apenas operações de troca entre os posicionamentos de duas formas irregulares. Numa segunda fase, foi realizado um conjunto de experiências computacionais adicionais para avaliar a influência da utilização de operações de movimentação de formas irregulares em padrões de corte.

Nas subsecções seguintes serão apresentados os resultados obtidos em cada uma destas fases de testes e de experiências computacionais.

5.4.1 Testes Computacionais à Estrutura de Vizinhaça LOCALCOMPACT

A estrutura de vizinhaça LOCALCOMPACT foi alvo de um intenso conjunto de testes computacionais por parte das duas variantes do algoritmo híbrido proposto neste trabalho, o SAHA, baseado em pesquisa por arrefecimento simulado, e o GLSHA, baseado em pesquisa local pura. Os testes computacionais encontram-se publicados no artigo sobre hibridização de métodos de pesquisa local com modelos de programação matemática [Gomes e Oliveira, In Press].

Os testes computacionais a esta estrutura de vizinhaça consistiram na realização de vinte corridas com os dois algoritmos híbridos, SAHA e GLSHA,

³Uma explicação para este comportamento está na existência de formas irregulares com dimensões iguais, que originam muitos empates no processo de selecção da próxima forma irregular.

para cada instância. Nestes testes foram utilizadas apenas as instâncias de problemas de PFI de referência com menos de 45 formas irregulares, devido ao tamanho do patamar depender do número total de formas irregulares existentes (C_2^N). Os testes foram realizados num computador com processador *Pentium IV* a 2.4 GHz e com 512 Mb de RAM. Os modelos matemáticos de separação e de compactação foram resolvidos utilizando a versão 8.0 do ILOG CPLEX.

As tabelas 5.14(a) e 5.14(b) resumizam os resultados obtidos nestes testes computacionais para cada um dos algoritmos híbridos. Cada tabela apresenta o nome da instância, o comprimento e o aproveitamento do melhor padrão de corte obtido, os valores médios do comprimento e do tempo de processamento das vinte corridas de cada algoritmo para cada instância e o comprimento do melhor padrão de corte conhecido (mais informações sobre os melhores resultados podem ser obtidas na tabela 5.2). As instâncias para as quais o melhor resultado conhecido foi melhorado, encontram-se assinaladas a negrito. Os tempos de processamento apresentados nesta tabela foram convertidos para o computador de referência, pelo processo anteriormente descrito. As comparações entre os resultados dos dois algoritmos híbridos e entre estes e o melhor resultado conhecido da literatura são apresentadas na tabela 5.15. As primeiras três colunas referem-se às comparações dos comprimentos dos melhores padrões de corte e as três seguintes às comparações entre os valores médios dos comprimentos dos padrões de corte. As comparações são realizadas com base na percentagem de melhoria de um algoritmo face a outro, por exemplo ALG_1 vs ALG_2 é obtido pela seguinte expressão: $melhoria(\%) = -100 \times (ALG_1 - ALG_2)/ALG_2$. A última coluna mostra o quociente entre os tempos de processamento médios dos algoritmos SAHA e GLSHA.

A qualidade dos padrões de corte obtidos pelo algoritmo SAHA é excepcional. O melhor resultado publicado na literatura foi melhorado em dez das doze instâncias de referência (apenas as instâncias JAKOBS1 e SHAPES1 não foram melhoradas). Mesmo quando se consideram os comprimentos médios dos padrões de corte das vinte corridas do algoritmo SAHA, os melhores resultados publicados são melhorados em metade das instâncias de referência. A percentagem média global de melhoria, quando consideradas as doze instâncias, do melhor padrão de corte em relação ao melhor resultado publicado é de 4.9% e é de apenas 0.6% pior quando se compara a

Tabela 5.14: Resultados dos testes computacionais à estrutura de vizinhança LOCALCOMPACT.

(a) Algoritmo GLSHA					
Instância	Melhor padrão		Valores médios		Melhor resultado
	Comprim.	Aprov. (%)	Comprim.	Tempo (seg.)	
FU	32.54	87.57	33.17	35.72	32.80
JAKOBS1	12.00	81.67	13.30	28.12	11.86
JAKOBS2	26.00	74.23	26.37	41.8	25.80
SHAPES0	62.00	64.35	64.09	471.96	60.30
SHAPES1	57.00	70.00	58.71	1477.44	55.00
SHAPES2	26.40	81.82	26.92	264.48	26.50
DIGHE1	120.96	82.67	130.87	13.68	129.23
DIGHE2	100.00	100.00	130.45	2.28	126.00
ALBANO	10074.08	86.41	10476.8	158.84	10122.63
DAGLI	59.32	85.49	61.11	605.72	60.57
MAO	1819.40	81.01	1851.68	506.92	1854.30
MARQUES	80.49	85.94	82.44	601.16	80.00

(b) Algoritmo SAHA					
Instância	Melhor padrão		Valores médios		Melhor resultado
	Comprim.	Aprov. (%)	Comprim.	Tempo (seg.)	
FU	31.33	90.96	32.70	224.96	32.80
JAKOBS1	12.42	75.89	12.93	252.32	11.86
JAKOBS2	24.97	77.28	25.86	345.04	25.80
SHAPES0	60.00	66.50	63.15	2974.64	60.30
SHAPES1	56.00	71.25	58.17	7838.64	55.00
SHAPES2	25.84	83.60	26.53	1715.32	26.50
DIGHE1	100.00	100.00	122.00	63.08	129.23
DIGHE2	100.00	100.00	119.53	16.72	126.00
ALBANO	9957.41	87.43	10280.05	1715.32	10122.63
DAGLI	58.20	87.15	59.41	3883.6	60.57
MAO	1785.73	82.54	1842.70	6266.2	1854.30
MARQUES	78.48	88.14	79.63	5705.32	80.00

Tabela 5.15: Comparação dos resultados da estrutura de vizinhaça LOCAL-COMPACT.

Instância	Melhor padrão de corte melhoria (%)			Comprimento médio melhoria (%)			Tempo médio ($\frac{SAHA}{GLSHA}$)
	*	*		*	*		
	GLSHA vs MRP	SAHA vs MRP	SAHA vs GLSHA	GLSHA vs MRP	SAHA vs MRP	SAHA vs GLSHA	
FU	0.8	4.5	3.7	-1.1	0.3	1.4	6.3
JAKOBS1	-1.2	-4.7	-3.5	-12.1	-9.0	2.8	9.0
JAKOBS2	-0.8	3.2	4.0	-2.2	-0.2	1.9	8.3
SHAPES0	-2.8	0.5	3.2	-6.3	-4.7	1.5	6.3
SHAPES1	-3.6	-1.8	1.8	-6.7	-5.8	0.9	5.3
SHAPES2	0.4	2.5	2.1	-1.6	-0.1	1.4	6.5
DIGHE1	6.4	22.6	17.3	-1.3	5.6	6.8	4.6
DIGHE2	20.6	20.6	0.0	-3.5	5.1	8.4	7.3
ALBANO	0.5	1.6	1.2	-3.5	-1.6	1.9	10.8
DAGLI	2.1	3.9	1.9	-0.9	1.9	2.8	6.4
MAO	1.9	3.7	1.9	0.1	0.6	0.5	12.4
MARQUES	-0.6	1.9	2.5	-3.1	0.5	3.4	9.5
Média	2.0	4.9	3.0	-3.5	-0.6	2.8	7.7

* Melhor Resultado Publicado.

média das vinte corridas com o melhor resultado publicado. Os resultados do algoritmo GLSHA também podem ser considerados de boa qualidade, já que apenas não melhoram os melhores resultados conhecidos em cinco das doze instâncias (JAKOBS1, JAKOBS2, SHAPES0, SHAPES1 e MARQUES). Relativamente à comparação entre os algoritmos SAHA e GLSHA, apenas uma vez, para a instância JAKOBS1, o algoritmo baseado em pesquisa local pura consegue bater o algoritmo baseado em pesquisa por arrefecimento simulado. Este resultado apesar de inesperado, dada a estratégia de pesquisa mais complexa do algoritmo SAHA, deve-se à importante componente aleatória deste algoritmo. Quando se comparam os valores médios das vinte corridas, o algoritmo GLSHA é sempre batido pelo algoritmo SAHA.

Como seria de esperar, os tempos de processamento dos dois algoritmos são muito dependentes das características das instâncias e, quando considerada a mesma instância, são muito diferentes entre si. Os tempos de processamento estão directamente relacionados com as principais características das instâncias apresentadas na tabela 5.1. A relação é mais forte quando se considera o número total de formas irregulares, o número de orientações admissíveis e o número de vértices por forma irregular e mais ainda quando se considera o número de formas irregulares diferentes. Relativamente à comparação dos tempos de processamento dos dois algoritmos, o algoritmo SAHA, baseado em pesquisa por arrefecimento simulado, é 5 a 12 vezes mais lento que o algoritmo GLSHA, baseado em pesquisa local pura. Quando se consideram as doze instâncias, o algoritmo SAHA é 7.7 vezes mais lento do que algoritmo GLSHA.

O principal comentário a retirar destes resultados é a grande adequabilidade da estrutura de vizinhança LOCALCOMPACT à resolução de problemas de PFI, onde algoritmos baseados em simples estratégias de pesquisa local conseguem obter resultados de boa qualidade num tempo de processamento razoável. Por outro lado, resultados excepcionais podem ser obtidos por algoritmos baseados em estratégias de pesquisa mais complexas, como a pesquisa por arrefecimento simulado, com grandes tempos de processamento. Ainda em relação a esta estrutura de vizinhança, é de referir a dificuldade de lidar com instâncias com muitas formas irregulares ($N > 40$), que inviabilizou a utilização de cinco das instâncias de problemas de referência.

5.4.2 Experiências Computacionais adicionais à Estrutura de Vizinhaça LOCALCOMPACT

Os testes computacionais à estrutura de vizinhaça LOCALCOMPACT apresentados na subsecção anterior incidiram apenas na operação de troca de posições no padrão de corte entre formas irregulares. A segunda operação, mover uma forma irregular para outra posição no padrão de corte, foi analisada no conjunto de experiências computacionais adicionais a apresentar nesta subsecção. Neste conjunto de experiências computacionais foram utilizados diferentes valores para a proporção (α) de cada uma das duas operações, troca de posições de duas formas irregulares e mover o posicionamento de uma forma irregular, na pesquisa de uma vizinhaça. Foram utilizados onze valores para a proporção α , variando entre 0.0 e 1.0 com intervalos de 0.1, que correspondem a onze configurações do algoritmo. O valor de $\alpha = 0.0$ corresponde só a operações de mover o posicionamento de uma forma irregular, enquanto o valor de $\alpha = 1.0$ corresponde só a operações de trocas entre duas formas irregulares. As experiências computacionais adicionais à estrutura de vizinhaça LOCALCOMPACT consistiram então na realização de dez corridas do algoritmo SAHA para cada valor de α e para cada uma das quatro instâncias utilizadas. A escolha recaiu sobre quatro instâncias com características diversas, do conjunto de instâncias de referência: FU, SHAPES0, SHAPES2 e ALBANO. Foi utilizado o mesmo computador dos testes da subsecção anterior, um PC com um processador *Pentium IV* a 2.4 MHz e 500 Mb de memória RAM, e os modelos de separação e de compactação foram resolvidos com o ILOG CPLEX 8.0.

Os resultados obtidos nestas experiências computacionais estão resumidos nos diagramas do tipo caixa da figura 5.12. Nestes diagramas, o melhor valor conhecido para cada instância é assinalado com uma recta horizontal. É também de referir, que para a configuração correspondente a $\alpha = 1.0$, só operações de troca entre duas formas irregulares, apenas foram consideradas as primeiras dez corridas do algoritmo SAHA, das vinte utilizadas na subsecção anterior.

Para além das experiências computacionais com estas quatro instâncias, realizadas para todos os valores de α , foram ainda testados alguns dos valores de α para as restantes instâncias de referência utilizadas nos testes computacionais da subsecção anterior. Os melhores resultados obtidos para cada uma destas instâncias são apresentados na tabela 5.16. A negrito as-

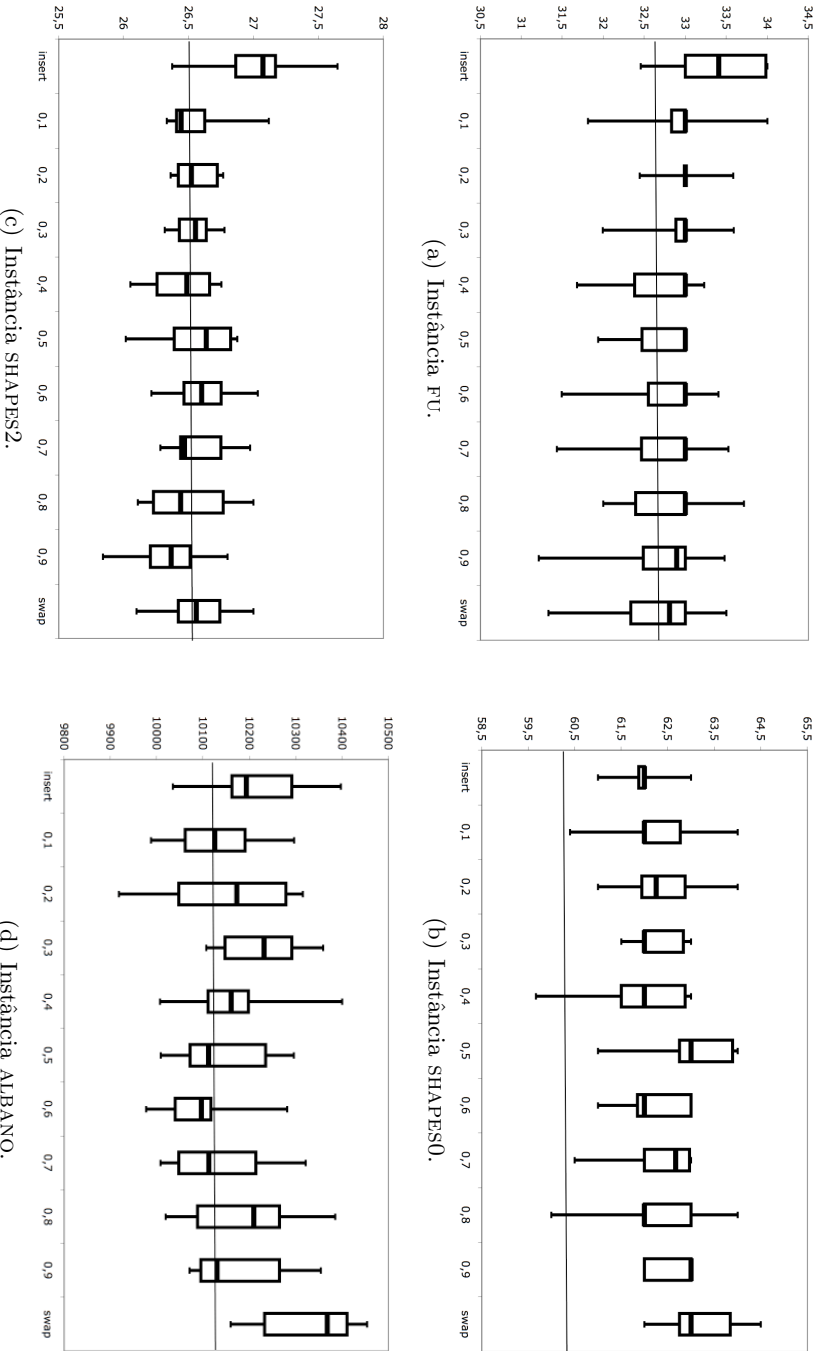


Figura 5.12: Diagramas do tipo caixa para diferentes valores do parâmetro α da estrutura de vizinhança LOCALCOMPACT.

Tabela 5.16: Melhores resultados obtidos nas experiências adicionais à estrutura de vizinhaça LOCALCOMPACT.

Instância	α	Melhor padrão		SAHA/GLSHA	Melhor resultado
		Comprim.	Aprov. (%)	Comprim.	
FU	0.90	31.22	91.30	31.33	32.80
JAKOBS1	vários*	12.00	81.67	12.00	11.86
JAKOBS2	0.60	24.53	78.67	24.97	25.80
SHAPES0	0.40	59.67	66.87	60.00	60.30
SHAPES1	1.00	56.00	71.25	56.00	55.00
SHAPES2	0.90	25.84	83.59	25.84	26.50
DIGHE1	vários*	100.00	100.00	100.00	129.23
DIGHE2	todos†	100.00	100.00	100.00	126.00
ALBANO	0.20	9918.79	87.77	9957.41	10122.63
DAGLI	0.70	57.71	87.89	58.20	60.57
MAO	0.90	1772.19	83.17	1785.73	1854.30
MARQUES	0.50	77.80	88.91	78.48	80.00

* Vários valores de α produziram o mesmo resultado.† Todos valores de α produziram o mesmo resultado.

sinalam-se os casos onde foi melhorado o melhor resultado conhecido, na literatura ou nos testes computacionais realizados neste trabalho. É também indicado qual o valor de α , o valor da proporção entre operações de troca de formas irregulares e de mover uma forma irregular, que originou o melhor resultado.

Os gráficos da figura 5.13 permitem analisar os dois tipos de operações por uma perspectiva diferente. Em cada gráfico são apresentadas as proporções médias, relativas a dez corridas do algoritmo SAHA, do resultado de cada iteração do algoritmo de pesquisa simulada agrupadas por patamares. Cada coluna corresponde a um patamar e apresenta, de baixo para cima, a proporção, nesse patamar, de operações que originaram padrões de corte com comprimento menor, padrões de corte com comprimento igual, padrões de corte com comprimento maior mas aceites, padrões de corte com comprimento maior e não aceites e, finalmente, padrões para os quais não foi possível obter uma solução admissível. Nestes gráficos, são analisadas duas instâncias, SHAPES2 e MAOG⁴, de características diferentes, porque enquanto a instância MAOG tem todas as formas irregulares de tamanhos semelhantes,

⁴A instância MAOG é uma variante da instância MAO onde se consideram apenas as seis formas irregulares diferentes de maiores dimensões (figura 5.2(a)).

a instância SHAPES2 apresenta duas formas irregulares mais pequenas que as restantes. Para cada instância são apresentados dois gráficos relativos a configurações distintas do algoritmo SAHA, uma onde só foram consideradas operações de troca de posições entre duas formas irregulares e outra onde se consideraram apenas operações de mover o posicionamento de uma forma irregular. Os gráficos mostram que a operação de troca de posições entre formas irregulares apresenta problemas quando existem formas irregulares de tamanhos diferentes. Já a operação de troca de posições entre duas formas irregulares apresenta problemas nas duas instâncias, que no entanto são atenuadas quando a instância tem formas irregulares pequenas.

Como comentário final a este conjunto de experiências adicionais, é de realçar que a utilização dos dois tipos de operações é vantajosa como o comprovam o facto do melhor resultado conhecido em sete das dozes instâncias utilizadas ter sido superado. O principal motivo para a obtenção destas melhorias deve-se à introdução de maior diversidade no processo de pesquisa. A principal dificuldade está em escolher o valor de α mais adequado, que como mostra a tabela 5.16 com os melhores resultados obtidos pode variar entre 0.20 e 1.00.

5.5 Testes Computacionais à Abordagem a problemas de PFI baseada em N -Fases

Nesta secção serão apresentados os testes computacionais à abordagem em N -Fases, para problemas de PFI, que é proposta neste trabalho. Esta abordagem foi desenvolvida tendo em vista a resolução de problemas de PFI reais, com muitas formas irregulares (cerca de 100) e onde existam formas irregulares muito diversas. Problemas com estas características são muito frequentes na indústria de confecções e levantaram problemas na utilização do algoritmo SAHA.

Os testes computacionais à abordagem em N -Fases consistiram na realização de dez corridas e foram experimentadas diferentes divisões das formas irregulares em grupos, para serem posicionados em diferentes fases. Foram também considerados seis valores para o factor de redução das formas irregulares nas últimas fases da abordagem, parâmetro SIZE. Nestes testes foram utilizadas as cinco instâncias do conjunto de instâncias de referência não utilizadas nos testes à(s) estrutura(s) de vizinhança, as instâncias AR-

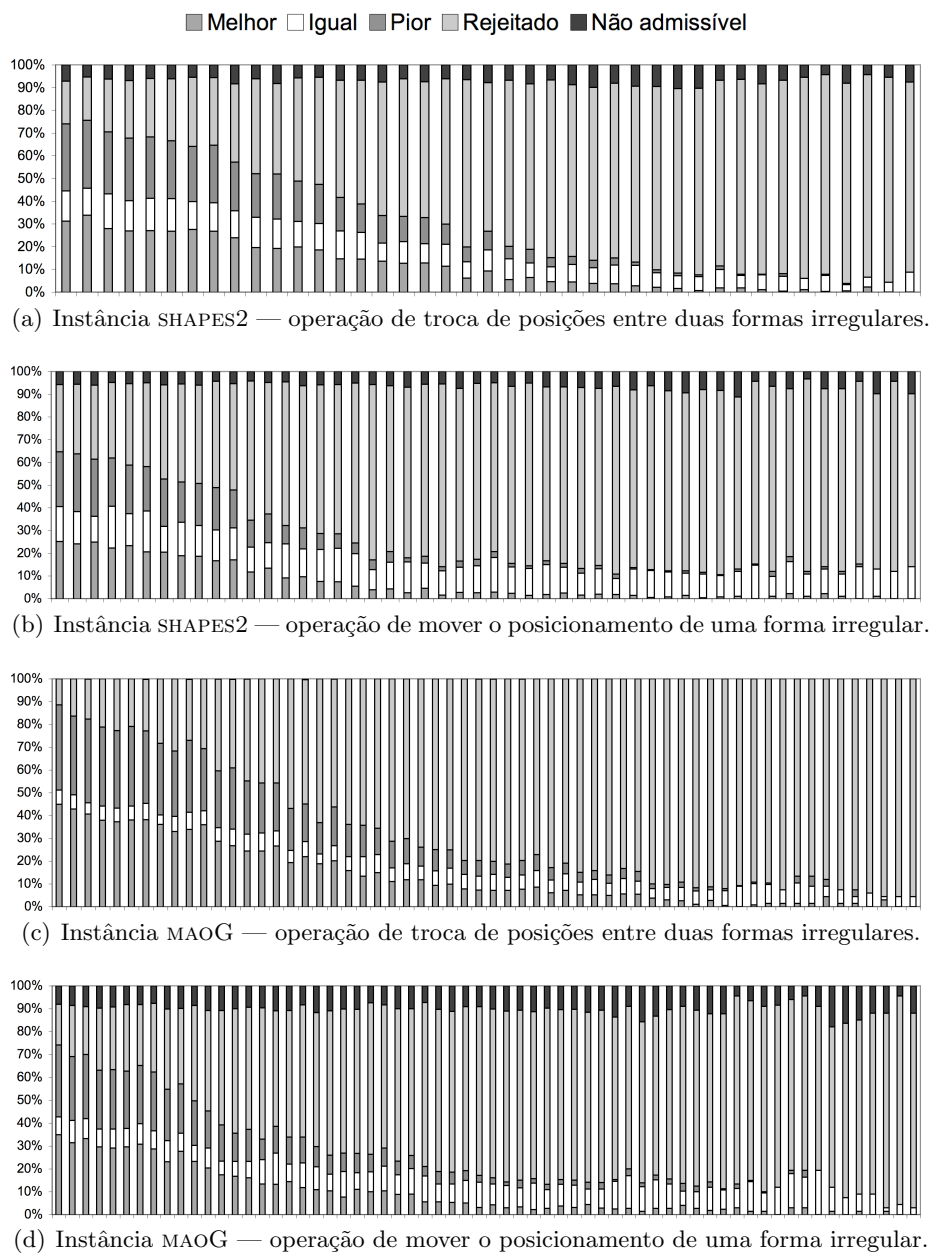


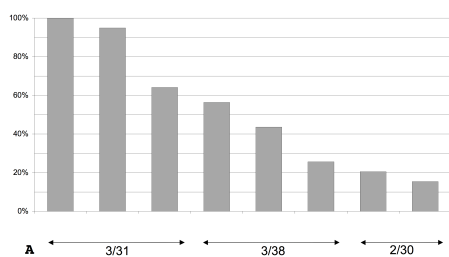
Figura 5.13: Evolução da proporção do resultado das operações realizadas sobre a estrutura de vizinhança LOCALCOMPACT.

TIF, SHIPS, SHIRTS, SWIM e TROUSERS, e ainda as restantes quatro instâncias da indústria das confecções, as instâncias ALBANO, DAGLI, MAO e MARQUES. Os testes foram realizados num computador pessoal com processador *Pentium IV* a 2.4 GHz e com 512 Mb de RAM e na resolução dos modelos matemáticos de separação e de compactação foi utilizado o ILOG CPLEX 8.0.

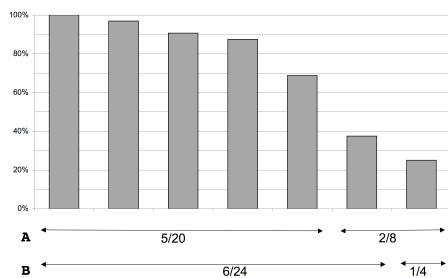
Na figura 5.14 são apresentadas as diferentes divisões experimentadas das formas irregulares pelos grupos, para cada uma das instâncias consideradas. Na criação destes grupos foram seguidos os princípios gerais enunciados em 4.4.1 e considerada ainda, na maior parte das instâncias, uma divisão alternativa à estabelecida pelos princípios gerais. Na instância SWIM foram consideradas duas divisões alternativas, enquanto que para as instâncias ARTIF e SHIPS não foram consideradas divisões alternativas. Os princípios gerais de divisão de formas irregulares em grupos tiveram de ser adaptados para poderem ser aplicados às instâncias com “poucas” formas irregulares, utilizadas nestes testes: ALBANO, DAGLI, MAO e MARQUES. Por fim, para as instância ARTIF, SHIRTS e TROUSERS, as formas irregulares foram divididas em três grupos, e consequentemente o problema decomposto em três fases, devido ao número elevado de formas irregulares. As várias divisões das formas irregulares em grupos foram designadas por A, B e C. Nos gráficos da figura 5.14 são também indicados o número de formas irregulares diferentes e o número total de formas irregulares em cada grupo.

Os resultados obtidos nestes testes computacionais são apresentados nas tabelas 5.17 e 5.18. Para cada uma das instâncias são apresentados o comprimento e o aproveitamento, em percentagem, do melhor padrão de corte e os valores médios dos comprimentos dos padrões de corte e dos tempos de processamento, em segundos. Os resultados para as várias divisões das formas irregulares em grupos são apresentados em conjuntos horizontais, com uma linha da tabela para cada par formado pelas maneiras de dividir (A, B e C) e pelo factor de redução ($SIZE \in \{0.75, 0.80, 0.85, 0.90, 0.95, 1.00\}$). Na última linha de cada tabela são apresentados os valores, quando disponíveis, obtidos numa só fase pelo algoritmo híbrido SAHA, que constituem uma referência para os valores obtidos pela abordagem em *N*-Fases⁵. Para facilitar a análise e a comparação de resultados apresentam-se nas figuras 5.15, 5.16 e 5.17 os gráficos de dispersão para as várias divisões entre formas

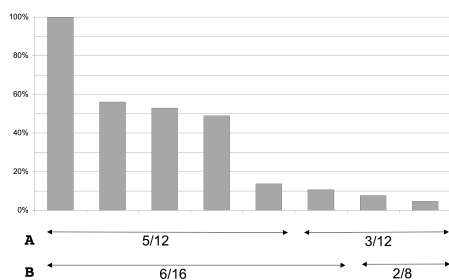
⁵Só foram consideradas dez corridas do algoritmo SAHA, as primeiras dez, para tornar as condições idênticas às utilizadas pela abordagem em *N*-Fases.



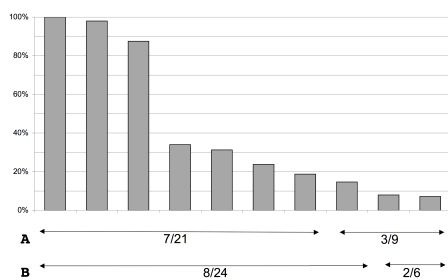
(a) Instância ARTIF.



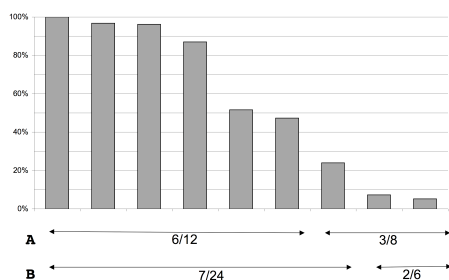
(b) Instância SHAPES2.



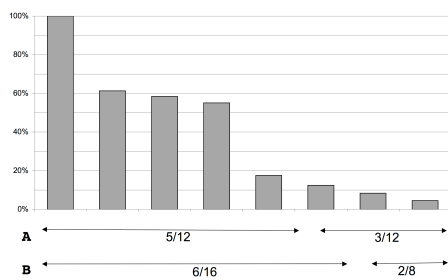
(c) Instância ALBANO.



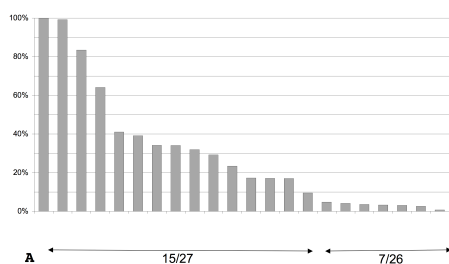
(d) Instância DAGLI.



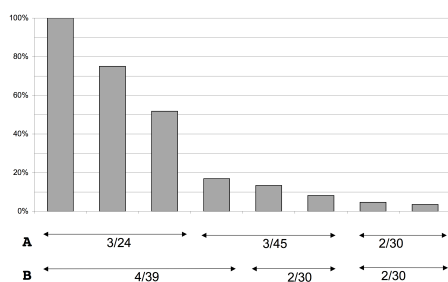
(e) Instância MAO.



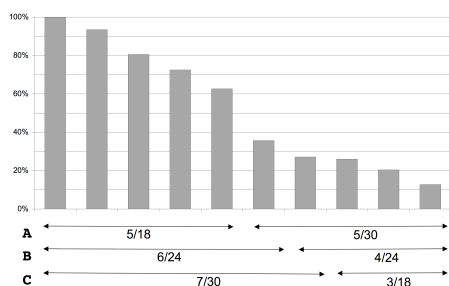
(f) Instância MARQUES.



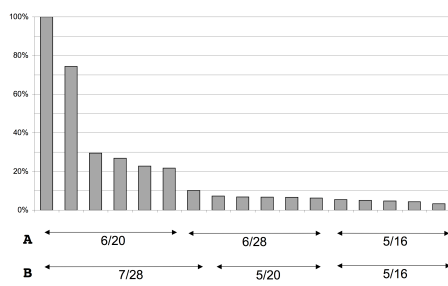
(g) Instância SHIPS.



(h) Instância SHIRTS.



(i) Instância SWIM.



(j) Instância TROUSERS.

Figura 5.14: Divisão das formas irregulares em grupos.

irregulares. Nestes gráficos estão assinalados os valores dos comprimentos dos padrões de corte das dez corridas para cada configuração, no eixo vertical e em valores absolutos, e o tempo de processamento, no eixo horizontal e segundo uma escala logarítmica. As divisões das formas irregulares partilham o mesmo símbolo ($A = \triangle$, $B = \square$, $C = \diamond$ e **Uma fase** = $\times$), enquanto os diferentes valores para o parâmetro SIZE variam do mais escuro, preto, para o mais claro, branco, à medida que o valor do parâmetro decresce. Não são apresentados gráficos de dispersão para as instâncias ARTIF e SHIPS porque só foi utilizada uma divisão e não existem valores de referência.

A análise das tabelas de resultados e dos gráficos de dispersão permite concluir que a abordagem em N -Fases diminui os tempos de processamento sem comprometer a qualidade dos resultados obtidos. Os tempos de computação sofrem reduções de quatro a oito vezes para as instâncias em que existe a referência da resolução em uma só fase pelo algoritmo híbrido SAHA. É também claramente visível nos gráficos de dispersão a grande influência do número de formas irregulares existentes na primeira fase, que é determinante no tempo de processamento global da abordagem em N -Fases. Em relação ao nível de qualidade das soluções, em duas das situações, onde existe a referência do resultado numa única fase, o resultado de referência foi melhorado, enquanto nas restantes ficou muito próximo com a exceção da instância SHAPES2. Refira-se, no entanto, que as características desta instância são muito pouco indicadas para a utilização de uma estratégia de resolução em várias fases, como o comprova o gráfico da figura 5.14(b) onde é claramente visível que esta instância apresenta a menor diferença entre as áreas da forma irregular maior e da menor. É ainda de realçar que a abordagem em N -Fases conseguiu obter um resultado melhor que o melhor resultado conhecido anteriormente para a instância SHIRTS, tendo melhorado o aproveitamento em 1.1% (de 61,76 para 61.00). Como comentário final, é de realçar talvez o aspecto mais importante desta abordagem, que é o tornar possível a resolução de problemas de PFI em tempo aceitável e sem comprometer a qualidade dos padrões de corte. Adicionalmente, o processo de divisão das formas irregulares em grupos, variando o número total de formas irregulares na primeira fase, permite controlar o tempo de processamento global da abordagem em N -Fases.

Tabela 5.17: Resultados dos testes computacionais à abordagem em N -Fases (continua).

	SIZE	Melhor padrão		Valores médios	
		Comprim.	Aprov.	Comprim.	Tempo
A	0.75	50.40	69.55	50.94	5209.9
	0.80	49.17	71.29	49.94	11721.4
	0.85	48.79	71.86	49.38	5232.0
	0.90	48.59	72.15	49.52	1348.2
	0.95	49.13	71.35	49.47	1479.1
	1.00	49.68	70.56	49.94	1451.0
—	—	—	—	—	—
	—	—	—	—	—
	—	—	—	—	—
	—	—	—	—	—
	—	—	—	—	—
	—	—	—	—	—
REF	—	—	—	—	—

	SIZE	Melhor padrão		Valores médios	
		Comprim.	Aprov.	Comprim.	Tempo
A	0.75	26.95	80.16	27.64	384.3
	0.80	26.88	80.35	27.49	388.2
	0.85	26.88	80.35	27.48	390.3
	0.90	26.88	80.35	27.49	394.4
	0.95	26.88	80.35	27.47	390.1
	1.00	26.88	80.35	27.47	390.1
B	0.75	27.12	79.66	27.37	856.1
	0.80	27.12	79.66	27.37	856.5
	0.85	27.12	79.66	27.37	856.0
	0.90	27.12	79.66	27.37	856.4
	0.95	27.12	79.66	27.37	857.8
	1.00	27.12	79.66	27.37	859.3
REF	26.10	82.76	26.50	5344.4	

	SIZE	Melhor padrão		Valores médios	
		Comprim.	Aprov.	Comprim.	Tempo
A	0.75	10560.15	82.44	10793.22	116.8
	0.80	10262.95	84.82	10693.23	120.6
	0.85	10093.21	86.25	10523.99	127.7
	0.90	10383.63	83.84	10565.94	121.9
	0.95	10332.00	84.26	10535.23	120.7
	1.00	10290.58	84.60	10526.37	120.8
B	0.75	10611.97	82.03	11132.22	225.6
	0.80	10233.89	85.07	10969.42	226.6
	0.85	9934.74	87.63	10862.50	226.5
	0.90	9932.45	87.65	10971.86	225.9
	0.95	10018.26	86.90	11003.53	226.0
	1.00	10382.98	83.84	10793.40	226.0
REF	9957.41	87.43	10298.37	1609.2	

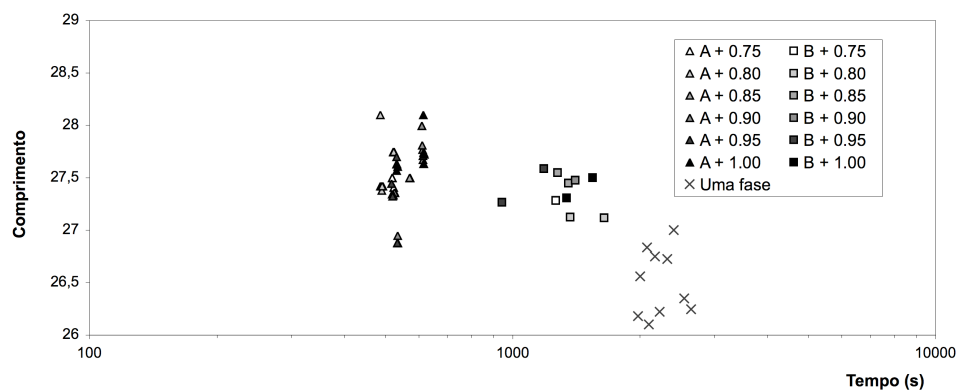
	SIZE	Melhor padrão		Valores médios	
		Comprim.	Aprov.	Comprim.	Tempo
A	0.75	59.43	85.34	61.84	1018.3
	0.80	59.41	85.37	61.54	1020.5
	0.85	59.41	85.37	61.30	1022.3
	0.90	59.41	85.37	61.53	1022.1
	0.95	59.97	84.57	62.05	1022.8
	1.00	60.13	84.34	62.23	1020.3
B	0.75	58.38	86.87	60.47	1601.5
	0.80	58.57	86.60	60.34	1601.5
	0.85	58.83	86.20	60.64	1601.3
	0.90	58.88	86.13	61.29	1601.3
	0.95	60.10	84.38	61.60	1601.0
	1.00	59.31	85.51	61.78	1600.6
REF	58.33	86.95	59.64	4053.9	

	SIZE	Melhor padrão		Valores médios	
		Comprim.	Aprov.	Comprim.	Tempo
A	0.75	1810.56	81.41	1899.10	134.9
	0.80	1810.56	81.41	1907.12	135.6
	0.85	1810.56	81.41	1897.27	135.8
	0.90	1810.56	81.41	1898.43	135.7
	0.95	1810.56	81.41	1886.61	134.8
	1.00	1810.56	81.41	1887.89	134.4
B	0.75	1832.42	80.44	1859.25	273.1
	0.80	1832.42	80.44	1857.92	273.2
	0.85	1821.06	80.94	1853.16	273.2
	0.90	1821.05	80.94	1850.05	273.2
	0.95	1821.05	80.94	1842.25	272.9
	1.00	1821.05	80.94	1843.59	272.4
REF	1849.44	79.70	1860.35	1398.2	

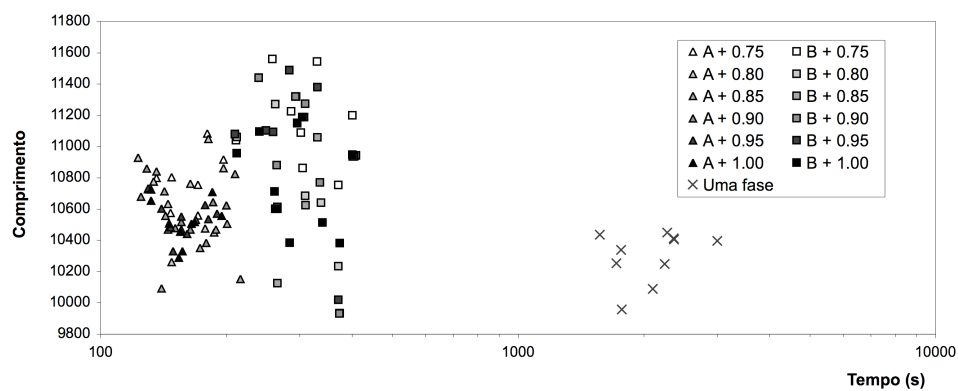
	SIZE	Melhor padrão		Valores médios	
		Comprim.	Aprov.	Comprim.	Tempo
A	0.75	80.38	86.06	81.62	384.3
	0.80	80.00	86.47	81.18	388.2
	0.85	79.46	87.05	80.72	390.3
	0.90	79.51	87.00	80.38	394.4
	0.95	79.63	86.87	80.38	390.1
	1.00	79.58	86.92	80.19	390.1
B	0.75	79.43	87.09	81.18	856.1
	0.80	79.00	87.56	81.17	856.5
	0.85	78.95	87.62	80.87	856.0
	0.90	78.78	87.81	81.03	856.4
	0.95	78.62	87.99	80.99	857.8
	1.00	79.47	87.04	81.02	859.3
REF	78.48	88.14	79.76	5344.4	

Tabela 5.18: Resultados dos testes computacionais à abordagem em N -Fases (continuação).

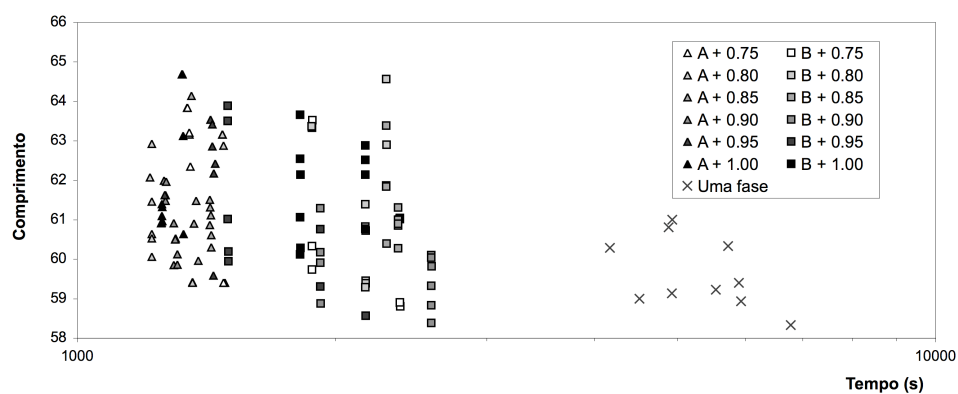
(a) Instância BARCOS						(b) Instância SHIRTS					
	SIZE	Melhor padrão		Valores médios			SIZE	Melhor padrão		Valores médios	
		Comprim.	Aprov.	Comprim.	Tempo			Comprim.	Aprov.	Comprim.	Tempo
A	0.75	266.49	83.47	268.58	427.1	A	0.75	63.49	85.05	64.79	2422.2
	0.80	262.54	84.73	267.52	485.7		0.80	63.31	85.29	64.54	2738.2
	0.85	261.85	84.95	266.43	595.4		0.85	62.64	86.21	63.61	3307.8
	0.90	259.54	85.71	265.41	589.4		0.90	62.81	85.98	63.30	3624.9
	0.95	259.05	85.87	265.41	690.8		0.95	62.36	86.59	63.11	3346.6
	1.00	259.53	85.71	264.23	597.5		1.00	62.22	86.79	63.03	3226.0
—	—	—	—	—	—	B	0.75	61.35	88.02	64.01	9368.1
	—	—	—	—	—		0.80	61.72	87.49	63.62	9546.6
	—	—	—	—	—		0.85	61.62	87.64	63.32	10073.8
	—	—	—	—	—		0.90	61.41	87.93	62.72	10267.4
	—	—	—	—	—		0.95	61.00	88.53	62.51	10256.1
	—	—	—	—	—		1.00	61.29	88.10	62.38	10079.0
REF						REF					
(c) Instância SWIM						(d) Instância TROUSERS					
	SIZE	Melhor padrão		Valores médios			SIZE	Melhor padrão		Valores médios	
		Comprim.	Aprov.	Comprim.	Tempo			Comprim.	Aprov.	Comprim.	Tempo
A	0.75	6181.94	71.56	6321.82	3051.66	A	0.75	250.00	87.12	253.13	1399.7
	0.80	6027.24	73.40	6178.22	3001.73		0.80	246.88	88.22	251.06	1597.0
	0.85	5996.73	73.77	6134.59	2986.15		0.85	247.74	87.92	252.16	1321.8
	0.90	6049.24	73.13	6166.44	2970.22		0.90	243.50	89.45	247.83	1406.7
	0.95	6035.64	73.29	6201.15	2563.13		0.95	241.09	90.34	247.63	1624.3
	1.00	6009.71	73.61	6153.44	3090.84		1.00	245.20	88.93	248.38	1613.1
B	0.75	6219.12	71.13	6359.90	4892.63	B	0.75	251.04	86.76	254.09	2785.8
	0.80	6098.36	72.54	6240.42	5218.93		0.80	245.81	88.61	253.31	2783.1
	0.85	5973.15	74.06	6141.90	5207.34		0.85	246.42	88.39	252.28	2819.5
	0.90	6000.58	73.72	6103.16	5225.81		0.90	244.70	89.01	249.57	2860.7
	0.95	5998.50	73.75	6101.51	4944.35		0.95	248.05	87.81	250.16	2898.0
	1.00	5996.86	73.77	6121.39	5272.36		1.00	244.08	89.23	248.97	5467.1
C	0.75	6201.28	71.34	6367.25	13146.96	—	—	—	—	—	—
	0.80	6106.24	72.45	6282.79	13138.45		—	—	—	—	—
	0.85	6102.48	72.49	6288.60	13292.80		—	—	—	—	—
	0.90	6098.12	72.54	6240.53	13807.13		—	—	—	—	—
	0.95	6007.39	73.64	6246.32	14653.42		—	—	—	—	—
	1.00	5948.37	73.90	6169.65	14168.54		—	—	—	—	—
REF						REF					



(a) Instância SHAPES2.

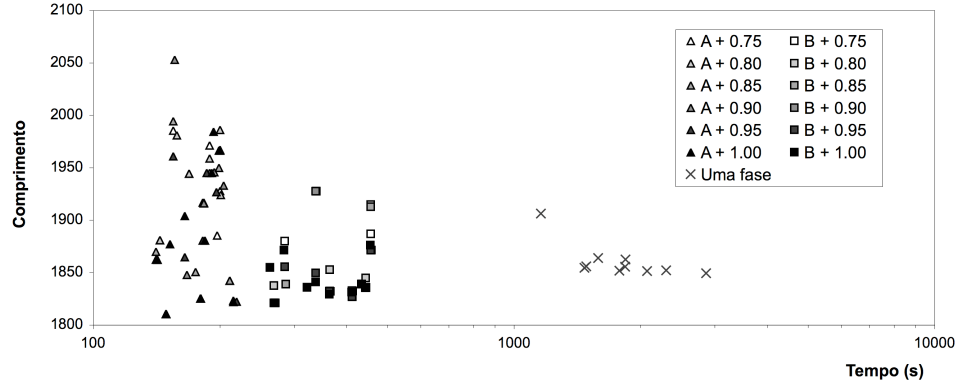


(b) Instância ALBANO.

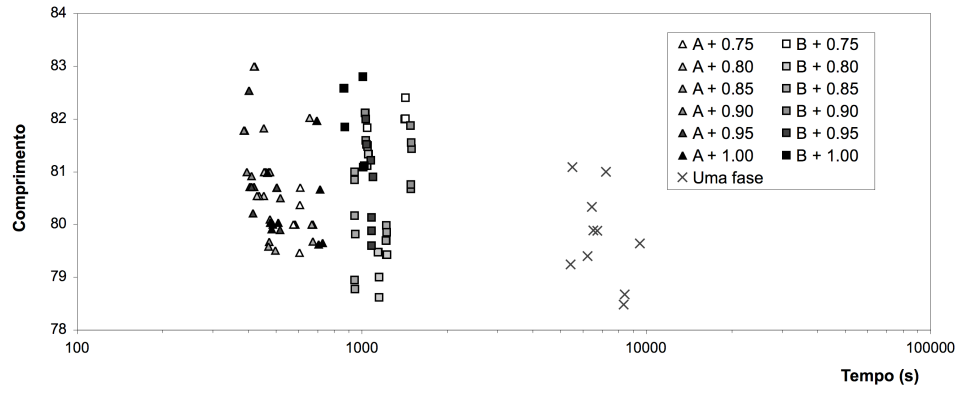


(c) Instância DAGLI.

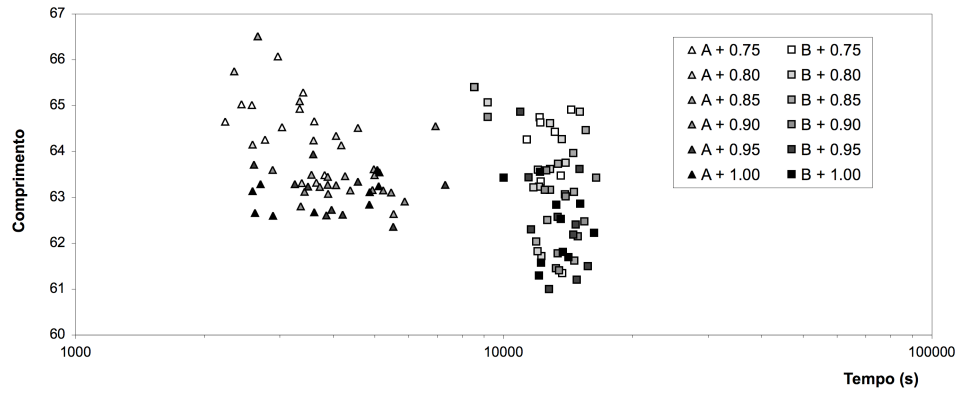
Figura 5.15: Gráficos de dispersão para os resultados da abordagem em N -Fases (continua).



(a) Instância MAO.

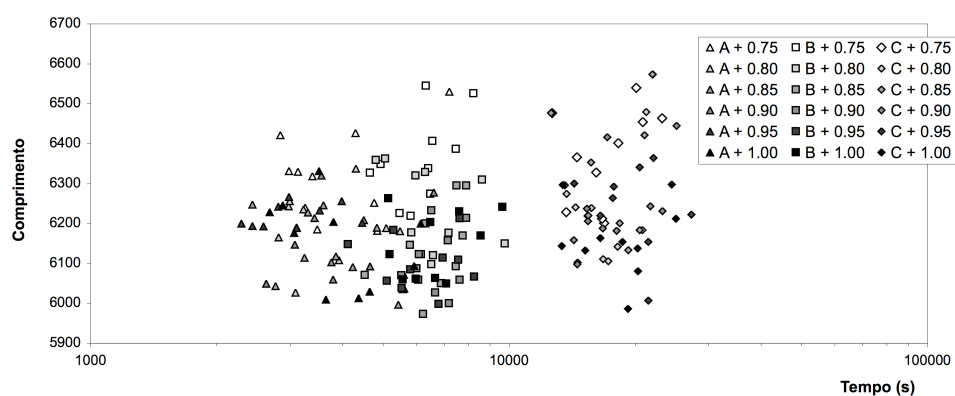


(b) Instância MARQUES.

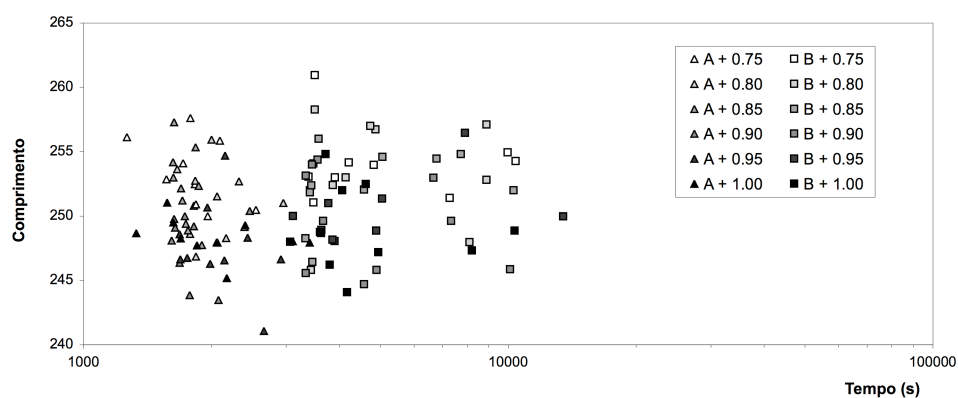


(c) Instância SHIRTS.

Figura 5.16: Gráficos de dispersão para os resultados da abordagem em N -Fases (continuação e continua).



(a) Instância SWIM.



(b) Instância TROUSERS.

Figura 5.17: Gráficos de dispersão para os resultados da abordagem em N -Fases (continuação).

5.6 Comentários Finais sobre os Resultados dos Testes Computacionais

Os vários conjuntos de testes e experiências computacionais realizados comprovam claramente a dificuldade de resolução dos problemas de PFI, quer pela complexidade do problema combinatório quer do problema geométrico.

As experiências realizadas com modelos matemáticos mostraram que a resolução de problemas de PFI através de métodos exactos baseados em modelos de programação matemática não é viável, para problemas de média ou de grande dimensão. No entanto, essas experiências mostraram também que simplificações do modelo exacto podem ser usadas com sucesso na melhoria de padrões de corte já existentes, através de operações de compactação, ou na remoção de situações não admissíveis em padrões de corte. Estas simplificações do modelo exacto consistem principalmente na eliminação das variáveis binárias do modelo e na escolha de um subconjunto de restrições, transformando o modelo exacto num modelo de programação linear capaz de realizar optimizações locais e de poder ser utilizado em algoritmos de pesquisa local.

Os testes computacionais realizados à heurística construtiva de posicionamento permitiram mostrar que se trata de uma heurística muito rápida e muito dependente do critério utilizado na ordenação das formas irregulares. As principais características desta heurística de posicionamento são a capacidade efectiva de preenchimento de buracos no meio de padrões de corte e a sua rapidez, não ultrapassando os dois segundos para as instâncias mais complexas. Uma escolha adequada do critério de ordenação das formas irregulares permite obter padrões de corte com características muito diversas, o que permite utilizar esta heurística construtiva de posicionamento em situações também muito diversas, seja na geração de soluções iniciais aleatórias para métodos de pesquisa local seja na construção de padrões de corte estruturados.

A realização dos testes e das experiências computacionais às abordagens a problemas de PFI baseadas em estratégias de pesquisa local sobre sequências de formas irregulares revelou a existência de diversos problemas ao nível da condução da pesquisa. Estas abordagens baseiam-se na representação de um padrão de corte por uma sequência de formas irregulares e na posterior construção do padrão de corte por uma heurística construtiva de posiciona-

mento. O principal problema destas abordagens reside na reduzida relação existente entre duas sequências vizinhas e os respectivos padrões de corte, que podem ser completamente diferentes. Este problema dificulta a implementação de abordagens baseadas em pesquisa local, já que não é possível realizar uma pesquisa “suave” do espaço dos padrões de corte a partir de uma pesquisa sobre o espaço das soluções. O algoritmo 2-EXCHANGE é relativamente imune a este problema, já que realiza uma pesquisa cega, isto é não guiada, ao percorrer exaustivamente uma determinada subvizinhança.

Os resultados obtidos nos testes e nas experiências computacionais realizados às abordagens a problemas de PFI baseadas em métodos de pesquisa local, que actuam directamente sobre padrões de corte, foram de excelente qualidade, mostrando claramente as potencialidades destas abordagens na resolução de problemas de PFI. Nos resultados destes testes há a destacar a obtenção do melhor resultado conhecido para dez, em doze, instâncias de referência utilizadas. O mérito para estes resultados de excelente qualidade deve-se principalmente à estrutura de vizinhança LOCALCOMPACT proposta neste trabalho. Esta estrutura de vizinhança baseia-se na utilização de modelos matemáticos de compactação e de separação para realizar optimizações locais e assim obter padrões de corte muito densos. A integração desta estrutura de vizinhança num método de pesquisa local como a pesquisa por arrefecimento simulado permite tirar partido do seu enorme potencial.

Os testes realizados à abordagem em N -Fases para problemas de PFI mostraram ser esta uma abordagem válida na resolução de problemas reais de PFI, capaz de lidar com instâncias reais e de garantir resultados de boa qualidade. Esta abordagem baseia-se na criação de grupos de formas irregulares, em função dos respectivos tamanhos, e sucessivo posicionamento de cada grupo de formas irregulares em diferentes fases. O processo inicia-se pelo grupo das formas irregulares maiores e no durante o posicionamento de um determinado grupo é necessário ter em consideração as formas irregulares posicionadas em fases anteriores. Os testes computacionais mostraram a grande dependência do processo de divisão das formas irregulares em grupos e, em especial, do número de formas irregulares do primeiro grupo.

Para terminar, uma palavra relativa à comparação com os melhores resultados publicados. Os testes computacionais realizados permitiram obter a melhor solução para doze das dezassete instâncias de referência utilizadas. As cinco instâncias em que não se conseguiu bater o melhor resultado conhe-

cido foram: JAKOBS1, 12.00 contra 11.86; SHAPES1, 56.00 contra 55.00; ARTIF, 48.49 contra 44.73; SWIM, 5948.27 contra 5846.93, e TROUSERS, 241.09 contra 240.86. No apêndice A apresentam-se os melhores padrões de corte obtidos para cada uma das instâncias de problemas de PFI de referência utilizadas nestes testes e experiências computacionais.

Capítulo 6

Conclusão

Nesta tese foi descrito um trabalho de investigação sobre a resolução de problemas de posicionamento de formas irregulares com base em algoritmos de pesquisa local. O principal objectivo desta tese, o desenvolvimento de abordagens capazes de lidar com a resolução de instâncias reais de problemas de posicionamento de formas irregulares, foi genericamente conseguido, como o demonstram os resultados apresentados relativos aos vários testes e experiências computacionais. Este não é, obviamente, o primeiro trabalho nesta área, nem sequer o primeiro que é realizado na perspectiva, bem própria da Engenharia, de abordar os casos reais que surgem na indústria e nos serviços. Sem pretendemos ter obtido a solução final e geral para este tipo de problemas, cremos ter avançado significativamente nessa direcção através de novos desenvolvimentos na concepção das abordagens, na metodologia de desenvolvimento dos respectivos algoritmos e na implementação computacional dos mesmos. Estes desenvolvimentos são transversais às áreas da Geometria Computacional, da Algoritmia e da Optimização Combinatória, que naturalmente se integram na resolução de problemas de posicionamento de formas irregulares.

Nas secções seguintes detalham-se as principais contribuições parcelares desta tese e um conjunto de desenvolvimentos futuros.

6.1 Contribuições desta Tese

Para além do objectivo principal do trabalho de investigação desta tese, são ainda de realçar várias contribuições adicionais. Estas contribuições adicionais apresentam-se de seguida, segundo a ordem com que foram abordadas

na tese.

A primeira contribuição a realçar são as experiências realizadas com o modelo matemático global para o problema de posicionamento de formas irregulares, com o qual foi possível comprovar a intratabilidade ao nível combinatório destes problemas. Mesmo abordagens de resolução de modelos mais sofisticadas acabariam por esbarrar na fronteira da complexidade destes problemas. De facto, mesmo para formas irregulares convexas e muito simples, não foi possível obter a solução óptima para mais do que nove formas irregulares. Ainda dentro dos modelos matemáticos, são de destacar os modelos de compactação e de separação apresentados, que se revelaram eficientes e eficazes nas operações de melhorar padrões de corte, densos ou esparsos, e de eliminar situações de não admissibilidade em padrões de corte.

Uma segunda contribuição é o desenvolvimento de uma heurística construtiva de posicionamento, que se baseia na ordenação das formas irregulares, muito rápida e flexível. As principais características desta heurística de posicionamento são a capacidade efectiva de preenchimento de buracos no meio de padrões de corte e a sua rapidez, não ultrapassando os dois segundos para as instâncias mais complexas. A dependência desta heurística construtiva de um critério de ordenação das formas irregulares, torna-a muito flexível já que permite obter padrões de corte com características muito diversas e ser utilizada nas mais variadas situações, desde a resolução de problemas de posicionamento até à geração de soluções iniciais para abordagens baseadas em métodos de pesquisa local.

A terceira contribuição desta tese é relativa à utilização de sequências de formas irregulares na representação de padrões de corte e na realização de pesquisas locais sobre as sequências de formas irregulares. Os resultados obtidos nos testes e nas experiências computacionais realizados, mostraram existir uma reduzida correlação entre duas sequências vizinhas e os respectivos padrões de corte. Este problema dificulta a implementação de abordagens baseadas em pesquisa local, já que não é possível realizar uma pesquisa “suave” do espaço dos padrões de corte a partir de uma pesquisa sobre o espaço das soluções. O algoritmo 2-EXCHANGE é relativamente imune a este problema, já que executa uma pesquisa cega, i.e. não guiada, ao percorrer exaustivamente uma determinada subvizinhança.

O desenvolvimento da estrutura de vizinhança LOCALCOMPACT é talvez a mais importante contribuição desta tese. Esta estrutura de vizinhança

permite o desenvolvimento de métodos de pesquisa local que actuam directamente sobre padrões de corte, possibilitando uma condução suave da pesquisa. A excelente qualidade dos resultados obtidos nos testes e experiências computacionais realizados comprovam a efectividade desta estrutura de vizinhança. Nos resultados destes testes há a destacar a obtenção do melhor resultado conhecido para dez em doze, instâncias de referência utilizadas. Esta estrutura de vizinhança baseia-se na utilização de modelos matemáticos de compactação e de separação para realizar optimizações locais e assim obter padrões de corte muito densos. A integração desta estrutura de vizinhança num método de pesquisa local como a pesquisa por arrefecimento simulado permite tirar partido do enorme potencial desta estrutura de vizinhança.

A última contribuição a realçar é a abordagem em N -Fases. Os testes realizados mostraram tratar-se de uma abordagem válida na resolução de problemas reais de PFI, capaz de lidar com instâncias reais e de garantir resultados de boa qualidade. Esta abordagem baseia-se na criação de grupos de formas irregulares, em função dos respectivos tamanhos, e no posicionamento de cada grupo de formas irregulares em diferentes fases.

6.2 Desenvolvimentos Futuros

Os desenvolvimentos futuros deste trabalho de investigação podem ser colocados a dois níveis: um nível imediato que continua o trabalho de investigação apresentado nesta tese e um nível onde se segue uma linha de investigação diferente. Os desenvolvimentos imediatos deste trabalho de investigação consistem no refinamento e na automatização dos algoritmos e abordagens propostos, de forma a poderem ser utilizados em ambiente industrial. Um exemplo de uma situação deste tipo é a selecção adaptativa da proporção de operações de troca de posições entre duas formas irregulares e de mover o posicionamento de uma forma irregular na estrutura de vizinhança LOCALCOMPACT. Um outro caso é a automatização da criação dos grupos de formas irregulares na abordagem em N -Fases e mesmo a consideração de outros critérios e estratégias de criação dos grupos. Finalmente, uma terceira situação a considerar é a substituição da meta-heurística pesquisa por arrefecimento simulado nas situações onde o tempo de processamento disponível é limitado.

Ainda na linha dos desenvolvimentos ao trabalho de investigação apresentado nesta tese propomos a utilização de uma estratégia diferente na resolução de problemas de posicionamento de formas irregulares, baseada na utilização de descrições poligonais com muito poucos vértices numa primeira fase, para determinar apenas o posicionamento relativo entre as diferentes formas irregulares, e utilizar as descrições completas apenas para obter os padrões de corte finais. Esta estratégia permite reduzir a complexidade geométrica dos problemas de posicionamento de formas irregulares reais, como o comprovam os resultados obtidos nos testes computacionais realizados neste trabalho de investigação, e, conseqüentemente, os tempos de processamento.

Uma linha de investigação completamente diferente é o posicionamento regular de peças com formas irregulares. Há problemas de posicionamento onde o número de formas irregulares diferentes a colocar é muito reduzido, mas, simultaneamente, o número total de formas irregulares é muito elevado, ultrapassando a centena. O elevado número de formas irregulares inviabiliza a aplicação das abordagens de posicionamento automático clássicas, que se baseiam no posicionamento das formas irregulares uma a uma. A alternativa consiste no posicionamento regular de grupos de formas irregulares, onde um pequeno número de formas irregulares, quatro ou cinco, são previamente agrupadas e os respectivos posicionamentos relativos determinados, de forma a minimizar-se o desperdício deixado entre as várias formas irregulares. De seguida é definido o posicionamento de três grupos de formas irregulares, pela determinação de um par de vectores linearmente independentes e da escolha da orientação mais adequada para o grupo de formas irregulares de forma a melhor preencher a placa. Finalmente, o padrão de corte é obtido, a partir do par de vectores linearmente independente, pela replicação do posicionamento relativo entre os três grupos de formas irregulares. A criação dos grupos pode ser obtida a partir dos modelos matemáticos apresentados nesta tese, pela consideração de diferentes funções objectivo. Teve início recentemente um projecto de investigação, financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia e onde sou investigador, exactamente sobre o posicionamento regular de peças com formas irregulares, denominado: *APIS - Colocação automática de formas irregulares: uma abordagem baseada em grupos geométricos*. Este projecto tem como objectivo o estudo e o desenvolvimento de algoritmos para o posicionamento automático de formas irregulares, baseados na criação de pré-agrupamentos das formas

irregulares. A abordagem e os algoritmos desenvolvidos neste projecto estão especialmente vocacionados para a resolução de instâncias industriais reais (confeccões, calçado, máquinas-ferramenta), dado que há problemas nestas indústrias que possuem exactamente as características anteriormente descritas.

Um comentário final sobre a área do posicionamento de formas irregulares. Após a realização deste trabalho de investigação e das contribuições apresentadas nesta tese, podemos sem dúvida afirmar que se trata de uma área de investigação ainda em aberto. Esta afirmação é atestada pelos desenvolvimentos futuros aqui apresentados e também pelo crescente número de publicações nesta área nos últimos anos. Existe já uma ou outra solução de sucesso para subproblemas muito específicos, o que nos faz acreditar que vivemos tempos prometedores em que a conjugação do desenvolvimento dos recursos computacionais com o desenvolvimento dos métodos de optimização, nomeadamente de pesquisa em espaços de soluções, e ainda o crescente número de investigadores que se dedica a este problema, poderá levar num futuro próximo a importantes conquistas nesta área.

Apêndice A

Melhores Padrões de Corte

De seguida apresentam-se os melhores padrões de corte obtidos, no decurso deste trabalho de investigação, para cada uma das instâncias de referência utilizadas nos testes e nas experiências computacionais realizadas. Para cada padrão de corte apresentado, indicam-se também os respectivos comprimento e aproveitamento, assim como o algoritmo ou a abordagem que o obteve. É de referir que os melhores padrões de corte apresentados, foram obtidos ou pelo algoritmo híbrido SAHA, durante as experiências computacionais adicionais (tabela 5.16), ou pela abordagem em N -Fases (tabelas 5.17 e 5.18).

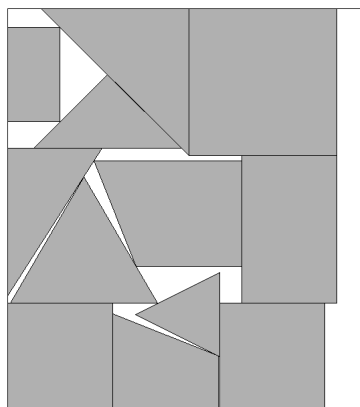


Figura A.1: Instância FU (31.22, 91.30%, algoritmo híbrido SAHA).

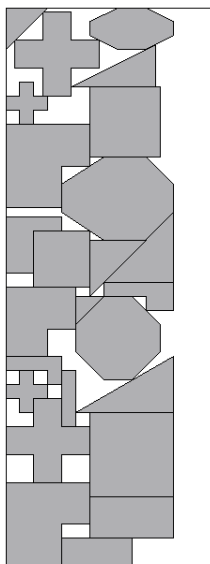


Figura A.2: Instância JAKOBS1 (12.00, 81.67%, algoritmo híbrido SAHA).

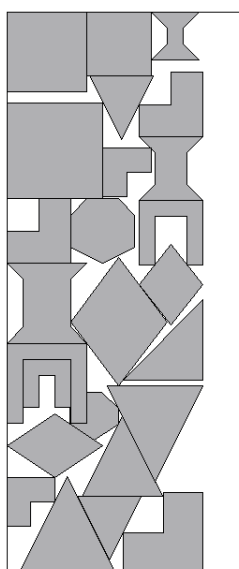


Figura A.3: Instância JAKOBS2 (24.53, 78.67%, algoritmo híbrido SAHA).

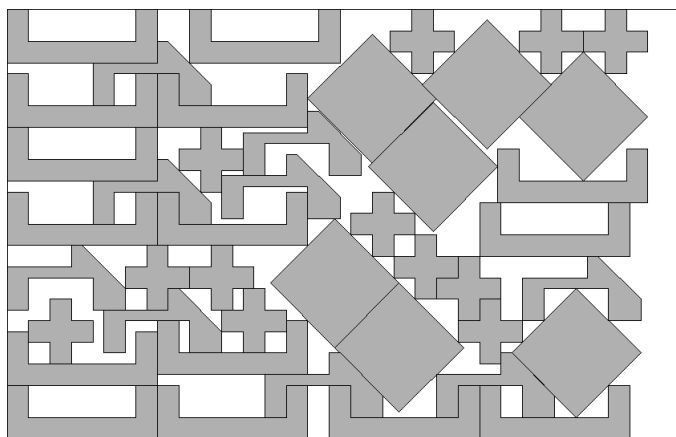


Figura A.4: Instância SHAPES0 (59.67, 66.87%, algoritmo híbrido SAHA).

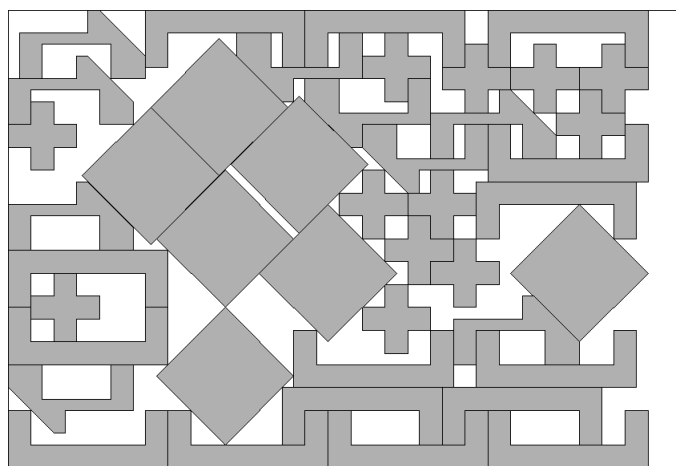


Figura A.5: Instância SHAPES1 (56.00, 71.25%, algoritmo híbrido SAHA).

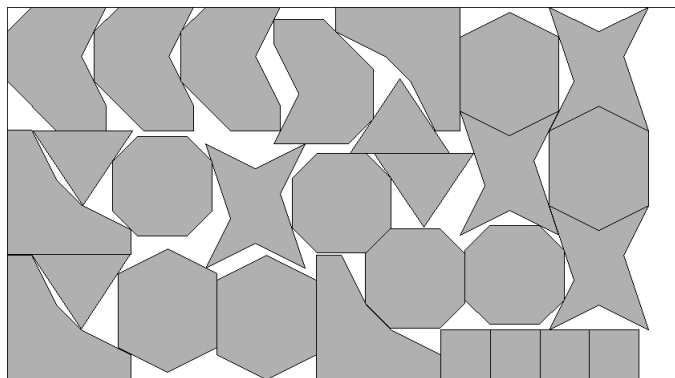


Figura A.6: Instância SHAPES2 (25.84, 83.59%, algoritmo híbrido SAHA).

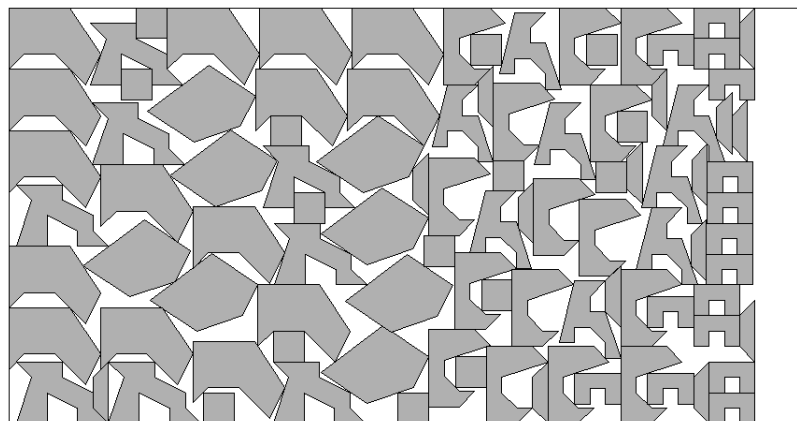


Figura A.7: Instância ARTIF (48.59, 72.15%, abordagem em N -Fases).

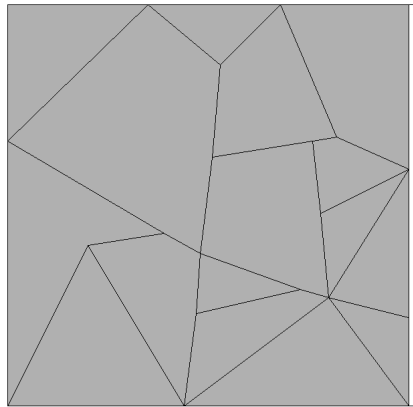


Figura A.8: Instância DIGHE1 (100.00, 100.00%, algoritmo híbrido SAHA).

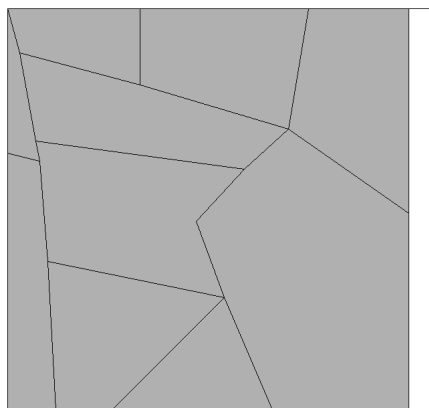


Figura A.9: Instância DIGHE2 (100.00, 100.00%, algoritmo híbrido SAHA).

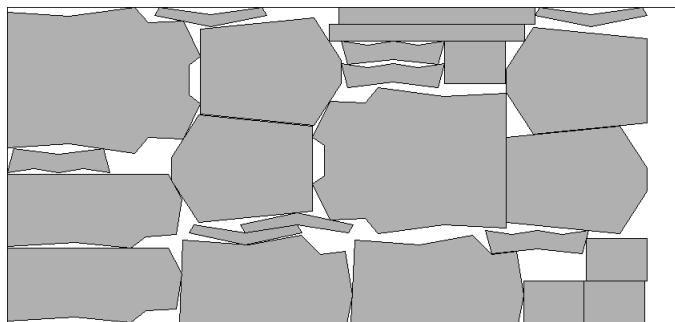


Figura A.10: Instância ALBANO (9918.79, 87.77%, algoritmo híbrido SAHA).

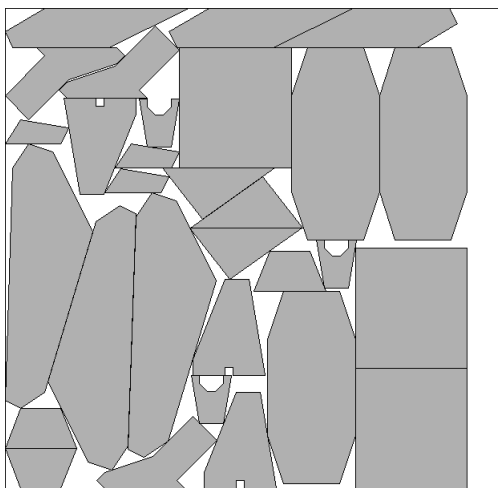


Figura A.11: Instância DAGLI (57.71, 87.89%, algoritmo híbrido SAHA).

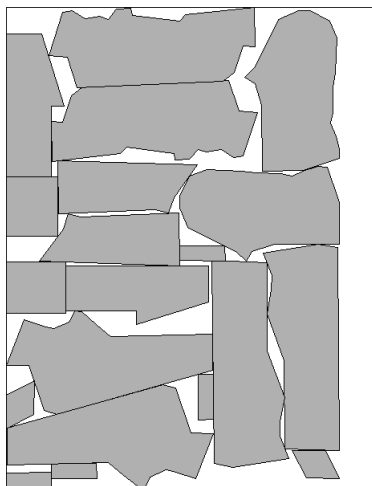


Figura A.12: Instância MAO (1772.19, 83.17%, algoritmo híbrido SAHA).

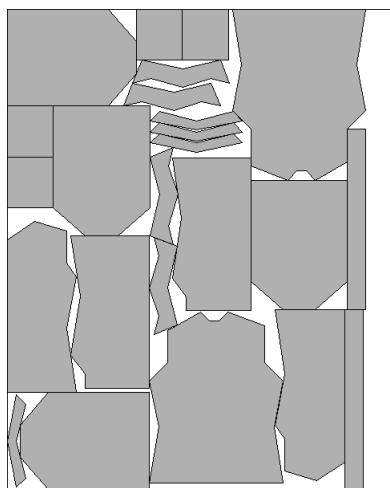


Figura A.13: Instância MARQUES (77.80, 88.91%, algoritmo híbrido SAHA).

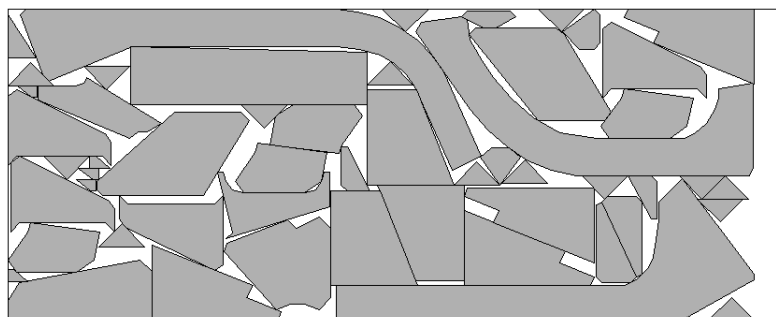


Figura A.14: Instância SHIPS (259.05, 85.87%, abordagem em N -Fases).

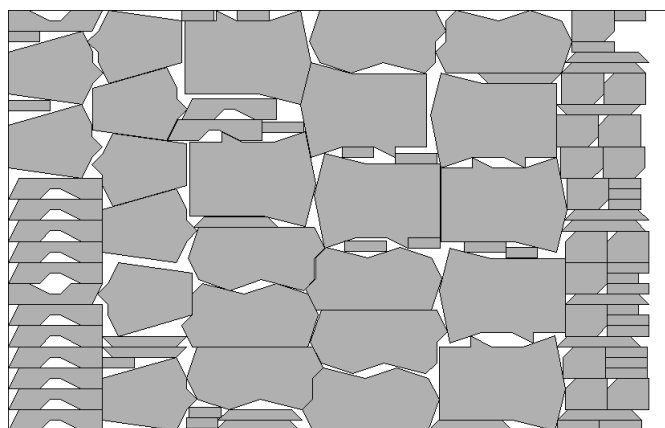


Figura A.15: Instância SHIRTS (61.00, 88.53%, abordagem em N -Fases).

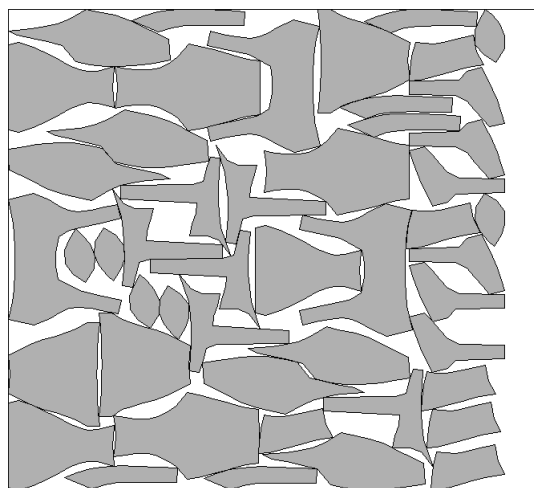


Figura A.16: Instância SWIM (5948.37, 73.90%, abordagem em N -Fases).

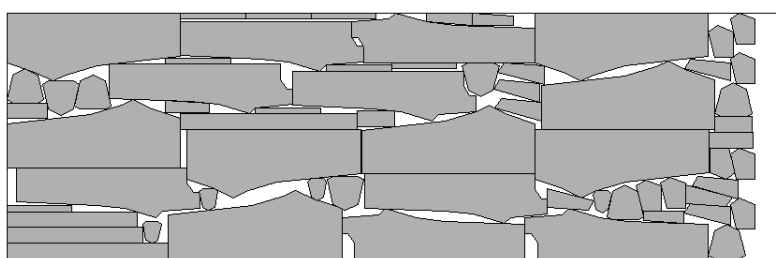


Figura A.17: Instância TROUSERS (241.09, 90.34%, abordagem em N -Fases).

Bibliografia

E. H. L. Aarts e J. K. Lenstra. *Local Search in Combinatorial Optimization*. John Wiley & Sons, New York, 1997.

M. Adamowicz. *The Optimum Two-Dimensional Allocation of Irregular, Multiply-Connected Shapes with Linear, Logical and Geometric Constraints*. Tese de Doutorado, Department of Electrical Engineering, New York University, 1969.

M. Adamowicz e A. Albano. Two-stage solution of the cutting problem. *Information Processing Proceedings*, páginas 1086–1091, 1972.

M. Adamowicz e A. Albano. Nesting two-dimensional shapes in rectangular modules. *Computer-Aided Design*, 8(1):27–33, 1976a.

M. Adamowicz e A. Albano. A solution of the rectangular cutting-stock problem. *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics*, 6(4):302–310, 1976b.

P. K. Agarwal, E. Flato e D. Halperin. Polygon decomposition for efficient construction of Minkowski sums. *Computational Geometry-Theory and Applications*, 21(1-2):39–61, 2002.

P. K. Agarwal e M. Sharir. Efficient algorithms for geometric optimization. *ACM Computing Surveys*, 30(4):412–458, 1998.

A. Albano. A method to improve two-dimensional layout. *Computer-Aided Design*, 9(1):48–52, 1977.

A. Albano e G. Sapuppo. Optimal allocation of two-dimensional irregular shapes using heuristic-search methods. *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics*, 10(5):242–248, 1980.

- R. Alvarez-Valdes, A. Parajon e J. M. Tamarit. A computational study of lp-based heuristic algorithms for two-dimensional guillotine cutting stock problems. *OR Spectrum*, 24(2):179–192, 2002.
- R. C. Art. *An Approach to the Two Dimensional, Irregular Cutting Stock Problem*. Relatório Técnico 36.Y08, IBM Cambridge Scientific Report, 1966.
- J. E. Beasley. An exact two-dimensional non-guillotine cutting tree-search procedure. *Operations Research*, 33(1):49–64, 1985.
- G. Belov e G. Scheithauer. A cutting plane algorithm for the one-dimensional cutting stock problem with multiple stock lengths. *European Journal of Operational Research*, 141(2):274–294, 2002.
- B. E. Bengtsson. Packing rectangular pieces - a heuristic approach. *Computer Journal*, 25(3):353–357, 1982.
- J. A. Bennell e K. A. Dowsland. A tabu thresholding implementation for the irregular stock cutting problem. *International Journal of Production Research*, 37(18):4259–4275, 1999.
- J. A. Bennell e K. A. Dowsland. Hybridising tabu search with optimisation techniques for irregular stock cutting. *Management Science*, 47(8):1160–1172, 2001.
- J. A. Bennell, K. A. Dowsland e W. B. Dowsland. The irregular cutting-stock problem - a new procedure for deriving the no-fit polygon. *Computers & Operations Research*, 28(3):271–287, 2001.
- J. O. Berkey e P. Y. Wang. Two-dimensional finite bin-packing algorithms. *Journal of the Operational Research Society*, 38(5):423–429, 1987.
- M. Bern. Triangulations and mesh generation. In J. E. Goodman e J. O'Rourke, editores, *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, páginas 563–582. Chapman & Hall/CRC, 2004.
- E. Bischoff e W. B. Dowsland. An application of the micro to product design and distribution. *Journal of the Operational Research Society*, 34(4):317–317, 1983.

- E. E. Bischoff. Stability aspects of pallet loading. *OR Spektrum*, 13(4):189–197, 1991.
- E. E. Bischoff, F. Janetz e M. S. W. Ratcliff. Loading pallets with non-identical items. *European Journal of Operational Research*, 84(3):681–692, 1995.
- E. E. Bischoff e M. S. W. Ratcliff. Issues in the development of approaches to container loading. *Omega-International Journal of Management Science*, 23(4):377–390, 1995.
- J. Bitzer e C. von Hirschhausen. *The Shipbuilding Industry in East and West: Industry Dynamics, Science and Technology Policies and Emerging Patterns of Co-operation*. Relatório Técnico Discussion Paper No. 151, Deutsches Institut für Wirtschaftsforschung, 1997.
- J. Blazewicz, P. Hawryluk e R. Walkowiak. Using a tabu search approach for solving the two-dimensional irregular cutting problem. *Annals of Operations Research*, 41:313–325, 1993.
- J. Blazewicz e R. Walkowiak. A local search approach for 2-dimensional irregular cutting. *OR Spektrum*, 17(2-3):93–98, 1995.
- C. Blum e A. Roli. Metaheuristics in combinatorial optimization: Overview and conceptual comparison. *ACM Computing Surveys*, 35(3):268–308, 2003.
- M. Bøgelund. *Optimal Allocation of Irregular Shapes*. MSc thesis, IMSOR - Technical University of Denmark, 1992.
- M. A. Boschetti. New lower bounds for the three-dimensional finite bin packing problem. *Discrete Applied Mathematics*, 140(1-3):241–258, 2004.
- C. Bounsaythip e S. Maouche. A genetic approach to the marker making problem in textile manufacturing industry. In *2nd Nordic Workshop on Genetic Algorithms (2NWGA)*, páginas 19–23, 1996.
- C. Bounsaythip, S. Maouche e M. Neus. Evolutionary search techniques: Application to automated lay-planning optimization problem. In *IEEE International Conference on Systems, Manufacturing and Cybernetics (SMC'95)*, volume 5, páginas 4497–4503. Vancouver, Canada, 1995.

- R. L. Brooks, C. A. B. Smith, A. H. Stone e W. Tutte. The dissection of rectangles into squares. *Duke Mathematical Journal*, 7:312–340, 1940.
- E. Burke, R. Hellier, G. Kendall e G. Whitwell. A new bottom-left-fill heuristic algorithm for the 2D irregular packing problem. *Operations Research*, 2005. Accepted for publication.
- J. Cagan, D. Degentesh e S. Yin. A simulated annealing-based algorithm using hierarchical models for general three-dimensional component layout. *Computer-Aided Design*, 30(10):781–790, 1998.
- J. Cagan, K. Shimada e S. Yin. A survey of computational approaches to three-dimensional layout problems. *Computer-Aided Design*, 34(8):597–611, 2002.
- M. A. Carravilla, C. Ribeiro e J. F. Oliveira. Solving nesting problems with non-convex polygons by constraint logic programming. *International Transactions in Operational Research*, 10(6):651–663, 2003.
- V. Cerny. Thermodynamical approach to the traveling salesman problem - an efficient simulation algorithm. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 45(1):41–51, 1985.
- CGAL. Computational Geometry Algorithms Library, . "<http://www.cgal.org/>".
- C. H. Cheng, B. R. Feiring e T. C. E. Cheng. The cutting stock problem - a survey. *International Journal of Production Economics*, 36(3):291–305, 1994.
- S. K. Cheng e K. P. Rao. Concepts of neighbourhood and universal compact yield towards achieving best pattern layouts. *International Journal of Production Research*, 37(16):3643–3658, 1999.
- S. K. Cheng e K. P. Rao. Large-scale nesting of irregular patterns using compact neighborhood algorithm. *Journal of Materials Processing Technology*, 103(1):135–140, 2000.
- N. Christofides e C. Whitlock. Algorithm for 2-dimensional cutting problems. *Operations Research*, 25(1):30–44, 1977.

- F. R. K. Chung, M. R. Garey e D. S. Johnson. On packing two-dimensional bins. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, 3(1):66–76, 1982.
- E. G. Coffman Jr., M. R. Garey e D. S. Johnson. Approximation algorithms for bin-packing. In G. Ausiello, M. Lucertini e P. Serafini, editores, *Algorithm Design for Computer Systems Design*, páginas 49–106. Springer-Verlag, 1984.
- K. Daniels e V. J. Milenkovic. Multiple translational containment .1. an approximate algorithm. *Algorithmica*, 19(1-2):148–182, 1997.
- S. K. Das e L. Spasovic. Scheduling material handling vehicles in a container terminal. *Production Planning & Control*, 14(7):623–633, 2003.
- P. de Cani. A note on 2-dimensional rectangular cutting-stock problem. *Journal of the Operational Research Society*, 29(7):703–706, 1978.
- J. M. V. de Carvalho. Exact solution of cutting stock problems using column generation and branch-and-bound. *International Transactions in Operational Research*, 5(1):35–44, 1998.
- J. M. V. de Carvalho. Lp models for bin packing and cutting stock problems. *European Journal of Operational Research*, 141(2):253–273, 2002.
- Z. Degraeve, W. Gochet e R. Jans. Alternative formulations for a layout problem in the fashion industry. *European Journal of Operational Research*, 143(1):80–93, 2002.
- D. Dori e M. Benbassat. Efficient nesting of congruent convex figures. *Communications of the ACM*, 27(3):228–235, 1984.
- K. A. Dowsland. An exact algorithm for the pallet loading problem. *European Journal of Operational Research*, 31(1):78–84, 1987.
- K. A. Dowsland. Simulated annealing. In C. R. Reeves, editor, *Modern Heuristics Techniques for Combinatorial Problems*. McGraw-Hill International, 1995.
- K. A. Dowsland e W. B. Dowsland. Packing problems. *European Journal of Operational Research*, 56(1):2–14, 1992.
- K. A. Dowsland e W. B. Dowsland. Solution approaches to irregular nesting problems. *European Journal of Operational Research*, 84(3):506–521, 1995.

- K. A. Dowsland, W. B. Dowsland e J. A. Bennell. Jostling for position: local improvement for irregular cutting patterns. *Journal of the Operational Research Society*, 49(6):647–658, 1998.
- H. Dyckhoff. A new linear-programming approach to the cutting stock problem. *Operations Research*, 29(6):1092–1104, 1981.
- H. Dyckhoff. A typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, 44(2):145–159, 1990.
- H. Dyckhoff e U. Finke. *Cutting and Packing in Production and Distribution - A Typology and Bibliography*. Contributions to Management Science. Physica-Verlag, 1992.
- H. Dyckhoff, H.-J. Kruse, D. Abel e T. Gal. Classification of real world trim loss problems. In G. Fandel, H. Dyckhoff e J. Reese, editores, *Essays on Production Theory and Planning*, páginas 191–208. Springer-Verlag, 1988.
- H. Dyckhoff, G. Scheithauer e J. Terno. Cutting and packing: An annotated bibliography. In M. Dell’Amico, F. Maffioli e S. Martello, editores, *Annotated Bibliographies in Combinatorial Optimization*, páginas 393–412. Wiley, 1997.
- S. Eilon. Optimizing the shearing of steel bars. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 2(2):129–142, 1960.
- K. Eisemann. The trim problem. *Management Science*, 3(3):279–284, 1957.
- A. Elomri, P. Morel, L. Pun e G. Doumeingts. Solving a cutting problem-based on existing patterns. *European Journal of Operational Research*, 77(1):169–178, 1994.
- ESICUP. EURO Special Interest Group on Cutting & Packing, . ”<http://www.apdio.pt/esicup>”.
- A. A. Farley. Mathematical-programming models for cutting-stock problems in the clothing industry. *Journal of the Operational Research Society*, 39(1):41–53, 1988.
- T. A. Feo e M. G. C. Resende. A probabilistic heuristic for a computationally difficult set covering problem. *Operations Research Letters*, 8(2):67–71, 1989.

- T. A. Feo e M. G. C. Resende. Greedy randomized adaptive search procedures. *Journal of Global Optimization*, 6:109–133, 1995.
- P. Festa e M. G. C. Resende. GRASP: An annotated bibliography. In C. C. Ribeiro e P. Hansen, editores, *Essays and surveys in metaheuristics*, páginas 325–367. Kluwer Academic Publishers, 2002.
- E. Flato. *Robust and Efficient Construction of Planar Minkowski Sums*. Msc thesis, Department of Computer-Science, Tel-Aviv University, 2000.
- H. Foerster e G. Wäscher. Simulated annealing for order spread minimization in sequencing cutting patterns. *European Journal of Operational Research*, 110(2):272–281, 1998.
- M. R. Garey e D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. Series of Books in the Mathematical Sciences. W. H. Freeman & Co., New York, NY, USA, 1979.
- T. Gau e G. Wäscher. Cutgen1 - a problem generator for the standard one-dimensional cutting stock problem. *European Journal of Operational Research*, 84(3):572–579, 1995.
- H. Gehring, K. Menschner e M. Meyer. A computer-based heuristic for packing pooled shipment containers. *European Journal of Operational Research*, 44(2):277–288, 1990.
- J. A. George e D. F. Robinson. A heuristic for packing boxes into a container. *Computers & Operations Research*, 7(3):147–156, 1980.
- T. E. Gerasch e P. Y. Wang. A survey of parallel algorithms for one-dimensional integer knapsack-problems. *Infor*, 32(3):163–186, 1994.
- P. K. Ghosh. An algebra of polygons through the notion of negative shapes. *Cvgip-Image Understanding*, 54(1):119–144, 1991.
- P. C. Gilmore. Cutting stock, linear programming, knapsacking, dynamic programming and integer programming, some interconnections. *Annals of Discrete Mathematics*, 4(1):217–235, 1979.
- P. C. Gilmore e R. E. Gomory. A linear-programming approach to the cutting-stock problem. *Operations Research*, 9(6):849–859, 1961.

- P. C. Gilmore e R. E. Gomory. A linear-programming approach to the cutting stock problem .2. *Operations Research*, 11(6):863–888, 1963.
- P. C. Gilmore e R. E. Gomory. Multistage cutting stock problems of two and more dimensions. *Operations Research*, 13(1):94–120, 1965.
- P. C. Gilmore e R. E. Gomory. The theory and computation of knapsack functions. *Operations Research*, 14(6):1045–1074, 1966.
- S. Golomb. *Polyominoes*. Allen and Unwin, London, 1966.
- A. M. Gomes. *Novas Contribuições para o Problema de Posicionamento de Figuras Irregulares*. MSc thesis, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1996.
- A. M. Gomes, M. T. Costa e J. F. Oliveira. An iterated local search approach to the large-scale regular packing of irregular shapes in a limited sheet. In *MIC 2005 - The 6th Metaheuristics International Conference*, páginas 421–428. Vienna, 2005.
- A. M. Gomes e J. F. Oliveira. Nesting irregular with simulated annealing. In *MIC'99 - The 3rd Metaheuristics International Conference*, páginas 235–239. Angra dos Reis, Brazil, 1999.
- A. M. Gomes e J. F. Oliveira. A grasp approach to the nesting problem. In *MIC 2001 - The 4th Metaheuristics International Conference*, páginas 47–52. Porto, 2001.
- A. M. Gomes e J. F. Oliveira. A 2-exchange heuristic for nesting problems. *European Journal of Operational Research*, 141(2):359–370, 2002.
- A. M. Gomes e J. F. Oliveira. Solving irregular strip packing problems by hybridising simulated annealing and linear programming. *European Journal of Operational Research*, In Press. Accepted for publication, available online 19 October 2004.
- J. E. Goodman e J. O'Rourke. *Handbook of Discrete and Computational Geometry*. Chapman & Hall/CRC, 2004.
- X. D. Gu, G. L. Chen, J. Gu, L. S. Huang e Y. J. Jung. Performance analysis and improvement for some linear on-line bin-packing algorithms. *Journal of Combinatorial Optimization*, 6(4):455–471, 2002.

- O. Gurel. *Additional considerations on marker layout problem via graph theory*. Relatório Técnico IBM Scientific Centre Report 320-2945, IBM, 1968a.
- O. Gurel. *Marker layout problem via graph theory: an attempt for optimal layout of irregular patterns*. Relatório Técnico IBM Scientific Centre Report 320-2921, IBM, 1968b.
- O. Gurel. *Circular graph of market layout*. Relatório Técnico IBM Scientific Centre Report 320-2965, IBM, 1969.
- R. W. Haessler e P. E. Sweeney. Cutting stock problems and solution procedures. *European Journal of Operational Research*, 54(2):141–150, 1991.
- M. J. Haims. *On the optimum two-dimensional allocation problem*. Phd, New York University, 1966.
- M. J. Haims e H. Freeman. A multistage solution of template-layout problem. *IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics*, SSC6(2):145–151, 1970.
- J. P. Hart e A. W. Shogan. Semi-greedy heuristics: An empirical study. *Operations Research Letters*, 6:107–114, 1987.
- R. Heckmann e T. Lengauer. A simulated annealing approach to the nesting problem in the textile manufacturing-industry. *Annals of Operations Research*, 57:103–133, 1995.
- R. Heckmann e T. Lengauer. Computing closely matching upper and lower bounds on textile nesting problems. *European Journal of Operational Research*, 108(3):473–489, 1998.
- J. Heistermann e T. Lengauer. The nesting problem in the leather manufacturing industry. *Annals of Operations Research*, 57:147–173, 1995.
- J. Hemminki, T. Leipala e O. Nevalainen. On-line packing with boxes of different sizes. *International Journal of Production Research*, 36(8):2225–2245, 1998.
- D. Henderson, S. H. Jacobson e A. W. Johnson. The theory and practice of simulated annealing. In F. Glover e G. Kochenberger, editores, *Handbook*

- on *Metaheuristics*. Kluwer Academic Publishers, Norwell, Massachusetts, 2003.
- J. C. Herz. Recursive computational procedure for 2-dimensional stock cutting. *IBM Journal of Research and Development*, 16(5):462–469, 1972.
- E. Hopper. *Two-dimensional Packing utilising Evolutionary Algorithms and other Meta-Heuristic Methods*. Tese de Doutorado, University of Wales, 2000.
- E. Hopper e B. C. H. Turton. A review of the application of meta-heuristic algorithms to 2D strip packing problems. *Artificial Intelligence Review*, 16(4):257–300, 2001.
- S. Imahori, M. Yagiura e T. Ibaraki. Local search algorithms for the rectangle packing problem with general spatial costs. *Mathematical Programming*, 97(3):543–569, 2003.
- H. S. Ismail e K. K. B. Hon. The nesting of two-dimensional shapes using genetic algorithms. In *Institution of Mechanical Engineers Part B-Journal of Engineering Manufacture*, volume 209, páginas 115–124, 1995.
- N. Ivancic, K. Mathur e B. B. Mohanty. An integer programming based heuristic approach to the three-dimensional packing problem. *Journal of Manufacturing and Operations Management*, 2(4):268–298, 1989.
- S. Jakobs. On genetic algorithms for the packing of polygons. *European Journal of Operational Research*, 88(1):165–181, 1996.
- R. E. Johnston. Rounding algorithm for cutting stock problems. *Asian-Pacific Operations Research Societies*, 3(2):166–171, 1986.
- L. V. Kantorovich. *Mathematical methods in the organisation and planning of production*. Publication House of the Leningrad State University, Leningrad, 1939. In russian. Translated into english in: *Management Science*, vol. 6, 1960, 366–422.
- L. V. Kantorovich. Mathematical-methods of organizing and planning production. *Management Science*, 6(4):366–422, 1960.
- H. Katagiri, H. Ishii e M. Sakawa. On fuzzy random linear knapsack problems. *Central European Journal of Operations Research*, 12(1):59–70, 2004.

- C. Kenyon e E. Remila. A near-optimal solution to a two-dimensional cutting stock problem. *Mathematics of Operations Research*, 25(4):645–656, 2000.
- S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt e M. P. Vecchi. Optimization by simulated annealing. *Science*, 220(4598):671–680, 1983.
- M. Konopasek. *Mathematical treatments of some apparel marking and cutting problems*. Relatório Técnico 99-26-90857-10, U.S. Dept of Commerce, 1981.
- LEDA. Library of Efficient Data Types and Algorithms, . "<http://www.algorithmic-solutions.com/enleda.htm>".
- Z. Li e V. J. Milenkovic. The complexity of the compaction problem. In *Fourth Canadian Conference on Computational Geometry*, páginas 236–243, 1993.
- Z. Y. Li e V. Milenkovic. Compaction and separation algorithms for non-convex polygons and their applications. *European Journal of Operational Research*, 84(3):539–561, 1995.
- H. Lindgren. *Geometric Dissections*. D. Van Nostrand co., Toronto, 1964.
- A. Lodi, S. Martello e M. Monaci. Two-dimensional packing problems: A survey. *European Journal of Operational Research*, 141(2):241–252, 2002.
- D. Mack, A. Bortfeldt e H. Gehring. A parallel hybrid local search algorithm for the container loading problem. *International Transactions in Operational Research*, 11(5):511–533, 2004.
- A. Mahadevan. *Optimization in Computer-Aided Pattern Packing*. Tese de Doutorado, North Carolina State University, 1984.
- S. Martello, M. Monaci e D. Vigo. An exact approach to the strip-packing problem. *Inform Journal on Computing*, 15(3):310–319, 2003.
- S. Martello, D. Pisinger e P. Toth. New trends in exact algorithms for the 0-1 knapsack problem. *European Journal of Operational Research*, 123(2):325–332, 2000.

- S. Martello e P. Toth. *Knapsack problems: algorithms and computer implementations*. Wiley Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 1990.
- S. Martello e D. Vigo. Exact solution of the two-dimensional finite bin packing problem. *Management Science*, 44(3):388–399, 1998.
- M. Melo e T. Duarte. *O Calçado em Portugal - Uma Análise da Competitividade*. Relatório Técnico DT 36, GEPE - Gabinete de Estudos e Prospectiva Económica do Ministério da Economia, 2001.
- N. Metropolis, A. Rosenbluth, M. Rosenbluth, A. Teller e E. Teller. Equation of state calculations by fast computing machine. *Journal of Chemical Physic*, 21:1087–1092, 1953.
- R. Metzger. Stock slitting (chapter 8). In *Elementary Mathematical Programming*. Wiley, New York, 1958.
- V. Milenkovic. Multiple translational containment .2. exact algorithms. *Algorithmica*, 19(1-2):183–218, 1997.
- V. J. Milenkovic. Rotational polygon overlap minimization and compaction. *Computational Geometry-Theory and Applications*, 10(4):305–318, 1998.
- V. J. Milenkovic. Rotational polygon containment and minimum enclosure using only robust 2D constructions. *Computational Geometry-Theory and Applications*, 13(1):3–19, 1999.
- V. J. Milenkovic. Densest translational lattice packing of non-convex polygons. *Computational Geometry-Theory and Applications*, 22(1-3):205–222, 2002.
- V. J. Milenkovic e K. Daniels. Translational polygon containment and minimal enclosure using mathematical programming. *International Transactions in Operational Research*, 6(5):525–554, 1999.
- V. J. Milenkovic, K. Daniels e Z. Li. Placement and compaction of non-convex polygons for clothing manufacture. In *Fourth Canadian Conference on Computational Geometry*, páginas 236–243, 1992.

- V. J. Milenkovic, K. M. Daniels e Z. Li. Automatic marker making. In *Third Canadian Conference on Computational Geometry*, páginas 243–246, 1991.
- L. M. Moreira, J. F. Oliveira, A. M. Gomes e J. S. Ferreira. Heuristics for the dynamic rural postman problem. *Computers & Operations Research*, 2005. Submitted for publication.
- NationalTextileCenter. *Strategies for Increasing Competitiveness of the Domestic Textile and Apparel Industries: A Production-Cost Approach*. Relatório Técnico NTC Project: S03-PH02, National Textile Center, 2003.
- B. Nielsen e A. Odgaard. *Fast Neighborhood Search for the Nesting Problem*. Relatório Técnico 03-03, Dept. of Computer Science, University of Copenhagen, 2003.
- N. J. Nilsson. *Principles of Artificial Intelligence*. Springer Verlag, 1982.
- S. L. Nonas e A. Thorstenson. A combined cutting-stock and lot-sizing problem. *European Journal of Operational Research*, 120(2):327–342, 2000.
- J. F. Oliveira. *Problemas de Posicionamento de Figuras Irregulares: uma perspectiva de otimização*. Tese de Doutorado, Universidade do Porto, 1995.
- J. F. Oliveira e J. S. Ferreira. An improved version of Wang algorithm for 2-dimensional cutting problems. *European Journal of Operational Research*, 44(2):256–266, 1990.
- J. F. Oliveira e J. S. Ferreira. Algorithms for nesting problems. In R. V. V. Vidal, editor, *Applied Simulated Annealing*, Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems. Springer-Verlag, 1993.
- J. F. Oliveira, J. S. Ferreira e R. V. V. Vidal. Solving real-life combinatorial optimization problems using simulated annealing. *JORBEL - Belgium Journal of Operations Research, Statistics and Computer Science*, 33(1-2):49–63, 1993.
- J. F. Oliveira, A. M. Gomes e J. S. Ferreira. Topos - a new constructive algorithm for nesting problems. *OR Spektrum*, 22(2):263–284, 2000.

- J. O'Rourke e S. Suri. Polygons. In J. E. Goodman e J. O'Rourke, editores, *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, páginas 583–606. Chapman & Hall/CRC, 2004.
- A. Paull e J. Walter. The trim problem: an application of linear programming to the manufacture of newsprint paper. In *Annual Econometric Meeting*. Montreal, 1954.
- M. Pirlot. General local search methods. *European Journal of Operational Research*, 92(3):493–511, 1996.
- L. Pitsoulis e M. G. C. Resende. Greedy randomized adaptive search procedures. In P. M. Pardalos e M. G. C. Resende, editores, *Handbook of Applied Optimization*, páginas 168–181. Oxford University Press, 2001.
- W. S. Qu e J. L. Sanders. A nesting algorithm for irregular parts and factors affecting trim losses. *International Journal of Production Research*, 25(3):381–397, 1987.
- B. Ram. The pallet loading problem: A survey. *International Journal of Production Economics*, 28(2):217–225, 1992.
- M. G. C. Resende. *Greedy Randomized Adaptive Search Procedures (GRASP)*. Relatório Técnico Technical Report: 98.41.1, AT&T Labs Research, 1998.
- C. Ribeiro e M. A. Carravilla. A global constraint for nesting problems. In J.-C. Régim e M. Rueher, editores, *Integration of AI and OR Techniques in Constraint Programming for Combinatorial Optimization Problems: First International Conference, CPAIOR 2004*, volume 3011, páginas 256–270. Springer-Verlag Heidelberg, Nice, France, 2004.
- J. Riehme, G. Scheithauer e J. Terno. The solution of two-stage guillotine cutting stock problems having extremely varying order demands. *European Journal of Operational Research*, 91(3):543–552, 1996.
- W. Sadowski. A few remarks on the assortment problem. *Management Science*, 6(1):13–24, 1959.
- G. Scheithauer e J. Terno. Modelling of packing problems. *Optimization*, 28:63–84, 1993.

- G. Scheithauer e J. Terno. The g4-heuristic for the pallet loading problem. *Journal of the Operational Research Society*, 47(4):511–522, 1996.
- S. A. Segenreich. How to build a lattice nesting in any arbitrary direction. *Computers & Graphics*, 12(2):255–259, 1988.
- S. A. Segenreich e L. M. P. F. Braga. Optimal nesting of general plane figures - a monte-carlo heuristic approach. *Computers & Graphics*, 10(3):229–237, 1986.
- B. Segre e K. Mahler. On the densest packing of circles. *American Mathematical Monthly*, 51(5):261–270, 1944.
- R. Seidel. Convex hull computations. In J. E. Goodman e J. O'Rourke, editores, *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, páginas 495–512. Chapman & Hall/CRC, 2004.
- H. Stadtler. A comparison of 2 optimization procedures for 1-dimensional and 1.5-dimensional cutting stock problems. *OR Spektrum*, 10(2):97–111, 1988.
- Y. Stoyan, G. Scheithauer, N. Gil e R. Tatiana. ϕ -functions for complex 2D-objects. *4OR: Quarterly Journal of the Belgian, French and Italian Operations Research Societies*, 2(1):69–84, 2004.
- Y. Stoyan, J. Terno, G. Scheithauer, N. Gil e T. Romanova. ϕ -functions for primary 2D-objects. *Studia INFORMATICA UNIVERSALIS*, 2(1):1–32, 2002.
- Y. G. Stoyan e N. I. Gil. *Methods and Algorithms for the Arrangement of Planar Geometric Objects*. Naukova Dumka, Kiev, 1976. In russian.
- Y. G. Stoyan, M. V. Novozhilova e A. V. Kartashov. Mathematical model and method of searching for a local extremum for the non-convex oriented polygons allocation problem. *European Journal of Operational Research*, 92(1):193–210, 1996.
- Y. G. Stoyan e A. V. Pankratov. Regular packing of congruent polygons on the rectangular sheet. *European Journal of Operational Research*, 113(3):653–675, 1999.

- Y. G. Stoyan e V. Z. Sokolovski. *Solution of Some Multi-Extremal Problems by Method of Decreasing Neighborhoods*. Naukova Dumka, Kiev, 1980. In russian.
- P. E. Sweeney e E. R. Paternoster. Cutting and packing problems - a categorized, application-orientated research bibliography. *Journal of the Operational Research Society*, 43(7):691–706, 1992.
- M. Tanaka e T. Wachi. Computerized marker making. *Journal of The Textile Machinery Society of Japan*, 26(7):74–81, 1973.
- P. J. M. van Laarhoven e E. H. L. Aarts. *Simulated Annealing : Theory and Applications*. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1987.
- F. Vanderbeck. On Dantzig-Wolfe decomposition in integer programming and ways to perform branching in a branch-and-price algorithm. *Operations Research*, 48(1):111–128, 2000.
- F. J. Vasko. A computational improvement to wang two-dimensional cutting stock algorithm. *Computers & Industrial Engineering*, 16(1):109–115, 1989.
- V. V. Vidal. *Applied Simulated Annealing*. Springer-Verlag, 1993.
- P. Y. Wang. Two algorithms for constrained two-dimensional cutting stock problems. *Operations Research*, 31(3):573–586, 1983.
- G. Wäscher e T. Gau. Heuristics for the integer one-dimensional cutting stock problem: A computational study. *OR Spektrum*, 18(3):131–144, 1996.
- G. Wäscher, H. Haußner e H. Schumann. *An Improved Typology of Cutting and Packing Problems*. Relatório técnico, Faculty of Economics and Management Magdeburg, 2004.
- G. Wäscher, H. Haußner e H. Schumann. An improved typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, 2005. To appear.