

Elsa de Sá Caetano

Identificação Experimental

DEEC
FEUP
1992

IDENTIFICAÇÃO EXPERIMENTAL DE PARÂMETROS DINÂMICOS EM SISTEMAS ESTRUTURAIS



ELSA DE SÁ CAETANO

1992

37-5-64
V. 64

IDENTIFICAÇÃO EXPERIMENTAL DE PARÂMETROS DINÂMICOS EM SISTEMAS ESTRUTURAIS

6211(13) CAGE/IDE cat

UNIVERSIDADE DO PORTO
Faculdade de Engenharia
BIBLIOTECAS
N.º 20152 - ef.
CDU
Data 29 / 11 / 99

U.M. 5950



043 M
C 131 i
2X.2

ELSA DE SÁ CAETANO

DEC
FEUP

1992

RESUMO

O principal objectivo do trabalho de investigação apresentado na presente dissertação consistiu no desenvolvimento de técnicas e métodos com vista à Identificação Experimental de Parâmetros Dinâmicos de Estruturas no âmbito da Engenharia Civil, supondo estas modeláveis como sistemas lineares, estáveis e de propriedades invariantes no tempo.

Neste contexto, começam por ser descritas as diversas componentes de um sistema de excitação e medição de vibrações em estruturas e sistematizados os principais conceitos da Teoria da Análise e Processamento de Sinal, julgados essenciais na observação do comportamento dinâmico de sistemas estruturais.

Posteriormente, são apresentados diversos métodos de identificação de parâmetros dinâmicos no domínio da frequência, descrevendo-se a arquitectura de vários programas de cálculo automático desenvolvidos com base nesses métodos e referindo-se alguns exemplos simples que, mediante o recurso a simulações numéricas, permitiram avaliar a eficiência dos programas de cálculo e o grau de rigor dos métodos.

Complementarmente, e no sentido de melhor ilustrar o interesse e utilidade dos métodos e programas desenvolvidos, apresentam-se dois exemplos resultantes de ensaios efectuados em estruturas reais, sendo realçados diversos aspectos práticos associados à aplicação das diferentes técnicas e efectuadas comparações entre os valores dos parâmetros dinâmicos obtidos por via experimental e numérica.

ABSTRACT

This dissertation is concerned with the problem of developing methods and techniques for the Parametric Experimental Identification of the dynamic characteristics of Civil Engineering structures, assuming a linear, time invariant and stable behaviour.

Having in mind the necessity of building a measurement system, a few concepts and ideas about the main components traditionally included in these systems are presented according to current equipment characteristics and needs. In the sequence of this, some of the most important Signal Processing Techniques are introduced and discussed. Several Modal Analysis methods in the frequency domain are also presented and analyzed, taking into consideration the peculiarity of full-scale Civil Engineering structures.

Computer codes were developed in order to perform signal processing and dynamic parameter identification. The organization of these programs is described and their efficiency is tested by means of simulated FRF obtained from a simple structure.

Two practical examples of experimental testing in real structures illustrate the interest and the validity of the developed algorithms and reveal particular aspects associated with the application of the different techniques involved.

AGRADECIMENTOS

Pretendo nesta nota prestar a minha homenagem e um agradecimento profundo a todas as pessoas que, no decorrer deste trabalho, me encorajaram e apoiaram com a sua compreensão, amizade e disponibilidade. De entre estas, gostaria de manifestar a minha especial gratidão:

- Ao Professor Álvaro Cunha, de quem fui aluna e assistente e que cedo me soube inculcar o gosto pelos métodos experimentais em Dinâmica Estrutural, pelo seu inextinguível cuidado em me proporcionar as condições necessárias à realização desta dissertação, pelo constante apoio, disponibilidade e imensos ensinamentos que me transmitiu que, sem dúvida, tornaram possível este trabalho e em muito o enriqueceram;
- Ao Professor Alfred Wicks, responsável pelo Laboratório de Análise Modal do Departamento de Engenharia Mecânica da Virginia Polytechnic Institute and State University (Blacksburg, USA), pelo excelente acolhimento que me proporcionou no estágio de especialização que tive oportunidade de efectuar naquela Universidade, no decorrer do qual me transmitiu, de forma totalmente desinteressada, preciosos ensinamentos decorrentes da sua riquíssima experiência no domínio da análise dinâmica experimental, tendo-me em particular cedido um excelente programa de cálculo automático (MODHAN), destinado à Identificação de Parâmetros Dinâmicos em Sistemas Estruturais, realizado sob sua orientação, e cuja utilização posterior se revelou da maior utilidade nas aplicações práticas realizadas em estruturas reais;
- Ao Professor Raimundo Delgado, de quem fui aluna e a quem devo todo o estímulo e apoio prestado no início da minha carreira docente e de investigação na FEUP, na área da Dinâmica de Estruturas, pela grande confiança em mim depositada, pelos meios materiais que sempre procurou colocar à minha disposição e pela cuidada revisão do texto desta dissertação;
- Ao Professor Francisco Restivo, do Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores da FEUP, autor do programa de aquisição de dados utilizado neste trabalho, por todas as suas importantes contribuições no sentido de resolver diversos problemas delicados surgidos no âmbito do desenvolvimento do sistema de aquisição e medição de vibrações desenvolvido;
- Ao Engenheiro Ricardo Teixeira Duarte, investigador coordenador do Núcleo de Dinâmica Aplicada do LNEC, pela grande amizade e espírito de abertura demonstrados ao tomar a iniciativa de me facultar o acesso à utilização das instalações do Laboratório Nacional de Engenharia Civil, onde parte do trabalho de programação foi desenvolvido;
- Ao Engenheiro Alexandre Portugal, assistente do Núcleo de Observação do Departamento de Barragens do LNEC, pela forma amável como me acolheu e pelas frutuosas trocas de impressões que, no decorrer do meu trabalho nesse Laboratório, me proporcionou;

Agradecimentos

- Ao colega e amigo Engenheiro Rui Faria, pela forma pronta como se dispôs a ceder-me um programa para análise dinâmica de cascas e me apoiou na sua utilização com vista à realização de comparações entre valores obtidos por via experimental e numérica;
- Ao Professor Nuno Maia, do Departamento de Engenharia Mecânica do Instituto Superior Técnico, pelo apoio bibliográfico facultado;
- Ao Senhor Manuel Carvalho, pela enorme disponibilidade e eficiência permanentemente demonstradas ao longo de todas as tarefas de processamento do texto.

Por último, gostaria ainda de expressar o meu apreço pelo apoio concedido pelo Instituto Nacional de Investigação Científica através da atribuição de uma bolsa de mestrado, nos anos lectivos de 1990/91 e 1991/92, e à Fundação Luso-Americana para o Desenvolvimento, que subsidiou um estágio de curta duração realizado nos Estados Unidos da América.

*Ao Álvaro
com quem compartilhei os últimos
3x52 fins de semana de trabalho e*

*a meus Pais
que me aguentaram as neuras*

ÍNDICE

Pág.

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 - IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS DINÂMICOS EM ESTRUTURAS. ENQUADRAMENTO DO PROBLEMA	1.1
1.2 - OBJECTIVO DO TRABALHO DE INVESTIGAÇÃO REALIZADO. DESCRIÇÃO SUMÁRIA	1.2

Capítulo 2

COMPORTAMENTO DINÂMICO DE SISTEMAS LINEARES

INTRODUÇÃO	2.1
2.1 - RELAÇÕES DETERMINÍSTICAS EXCITAÇÃO-RESPOSTA EM SISTEMAS LINEARES	2.2
2.1.1 - Sistemas de 1 grau de liberdade	2.2
2.1.2 - Sistemas de N graus de liberdade	2.6
2.2 - RELAÇÕES ESTOCÁSTICAS EXCITAÇÃO-RESPOSTA	2.14
2.2.1 - Considerações sobre a caracterização de processos estocásticos	2.14
2.2.2 - Sistemas de 1 grau de liberdade sujeitos a excitações aleatórias estacionárias	2.18
2.2.3 - Extensão a excitações aleatórias transientes	2.21
2.2.4 - Sistemas de N graus de liberdade	2.23
2.3 - CAMPO DE APLICAÇÃO DAS RELAÇÕES GERAIS EXCITAÇÃO-RESPOSTA. O PROBLEMA DA IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS	2.25

Capítulo 3

EXCITAÇÃO E MEDIÇÃO DE VIBRAÇÕES EM ESTRUTURAS

INTRODUÇÃO	3.1
3.1 - TÉCNICAS DE EXCITAÇÃO DA ESTRUTURA	3.1
3.2 - COMPONENTES DE UM SISTEMA DE EXCITAÇÃO E MEDIÇÃO DE VIBRAÇÕES	3.9
3.2.1 - Subsistema de excitação	3.10
3.2.2 - Subsistema de medição de vibrações	3.16
3.2.2.1 - Transdutores	3.16
3.2.2.2 - Amplificadores/condicionadores de sinal	3.20
3.2.2.3 - Analisador	3.21
3.3 - SISTEMA DE MEDIÇÃO EM DESENVOLVIMENTO NA FEUP	3.23
3.3.1 - Subsistema de excitação	3.23
3.3.2 - Subsistema de medição	3.28
3.3.2.1 - Transdutores e amplificadores/condicionadores de sinal	3.28
3.3.2.2 - Analisador / Controlador	3.29

Capítulo 4

ELEMENTOS DE ANÁLISE E PROCESSAMENTO DE SINAL

INTRODUÇÃO	4.1
4.1 - SÉRIES TEMPORAIS DE DADOS. AMOSTRAGEM E CONVERSÃO	4.2
4.2 - DESCRIÇÃO DE SINAIS NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA	4.4
4.2.1 - Decomposição em série de Fourier	4.4

	Pág.
4.2.2 - Transformada de Fourier	4.9
4.2.2.1 - Definição	4.9
4.2.2.2 - Propriedades e operações	4.13
4.2.3 - Transformada finita de Fourier	4.18
4.2.4 - Transformada discreta finita de Fourier	4.21
4.2.5 - Relacionamento da transformada discreta finita de Fourier com as séries de Fourier	4.28
4.2.6 - Transformada rápida de Fourier (FFT)	4.31
4.3 - ERROS	4.32
4.3.1 - Erros por escorregamento ("leakage")	4.34
4.3.2 - Erros por sobreposição ("aliasing")	4.39
4.4 - FILTRAGEM DE SINAIS	4.42
4.4.1 - Tipos de filtros	4.46
4.4.2 - Elementos de dimensionamento de um filtro digital	4.50
4.4.2.1 - Implementação de um filtro digital através do algoritmo FFT	4.50
4.4.2.2 - Implementação de filtros digitais através da decomposição em séries de Fourier	4.53
4.4.3 - Consequências da utilização de filtros	4.55
4.4.4 - Decimação	4.57
4.4.5 - Zoom	4.60
4.5 - CARACTERIZAÇÃO EXPERIMENTAL DE FUNÇÕES DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA	4.64
4.5.1 - Funções de auto-correlação e de correlação cruzada	4.65
4.5.2 - Funções densidade espectral de potência e densidade espectral de potência cruzada	4.67
4.5.3 - Funções de resposta em frequência e funções de coerência associadas	4.69
4.5.4 - Conceito de estimador: aplicação à análise de sinais	4.71

	Pág.
4.5.5 - Estimadores das funções densidade espectral de potência e densidade espectral de potência cruzada	4.73
4.5.6 - Estimadores da função de resposta em frequência e da função de coerência associada	4.79
4.5.7 - Casos particulares da estimação de funções de resposta em frequência	4.86
4.5.7.1 - Estrutura sujeita a excitação ambiental	4.86
4.5.7.2 - Estrutura sujeita a uma excitação forçada do tipo sinusoidal	4.89
 Capítulo 5	
IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS EM ESTRUTURAS	
 INTRODUÇÃO	 5.1
5.1 - ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS DINÂMICOS. CLASSIFICAÇÃO DAS TÉCNICAS EXISTENTES	5.2
5.1.1 - Análise no domínio do tempo e da frequência	5.2
5.1.2 - Modelo directo, modelo modal ou modelo modal baseado numa formulação de estado	5.3
5.1.3 - Sistemas de 1 ou N graus de liberdade	5.4
5.1.4 - Estimativas locais ou globais	5.4
5.1.5 - Sistemas de entrada simples ou múltipla	5.5
5.1.6 - Classificação das técnicas de identificação de sistemas	5.5
5.2 - FUNÇÕES DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA. PROPRIEDADES	5.8
5.3 - TÉCNICAS DE IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS	5.24
5.3.1 - Métodos de 1 grau de liberdade	5.24
5.3.1.1 - Método da amplitude de pico	5.24
5.3.1.2 - Métodos da resposta em quadratura e da máxima componente em quadratura	5.30

	Pág.
5.3.1.3 - Método do "circle fit"	5.30
5.3.1.4 - Método de Dobson	5.42
5.3.1.5 - Método de Mau	5.48
5.3.2 - Métodos de N graus de liberdade	5.51
5.3.2.1 - Métodos simplificados	5.52
5.3.2.2 - Método RFP	5.53
5.4 - VALIDAÇÃO DO MODELO TEÓRICO	5.62

Capítulo 6

DESENVOLVIMENTO DE PROGRAMAS DE CÁLCULO AUTOMÁTICO

INTRODUÇÃO	6.1
6.1 - PROGRAMA PARA ANÁLISE E PROCESSAMENTO DE SINAIS (PSINAL)	6.1
6.1.1 - Módulo de análise temporal	6.3
6.1.2 - Módulo de análise em frequência	6.5
6.1.3 - Módulo de análise excitação-resposta sinusoidal	6.10
6.2 - PROGRAMAS PARA IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS	6.12
6.2.1 - Programa PEAKAM - método da amplitude de pico	6.13
6.2.2 - Programa FITCIR - método do "circle-fit"	6.20
6.2.3 - Programa DOBSON - método de Dobson	6.32
6.2.4 - Programa SMSMET - método de Mau	6.41

Capítulo 7**EXEMPLOS DE APLICAÇÃO**

INTRODUÇÃO	7.1
7.1 - ENSAIO LABORATORIAL DE UMA VIGA METÁLICA DE PEQUENA DIMENSÃO SUJEITA A ACÇÕES TRANSIENTES PRODUZIDAS POR UM MARTELO DE IMPULSOS	7.1
7.1.1 - Modelação numérica	7.3
7.1.2 - Ensaios realizados. Processamento de sinal	7.4
7.1.3 - Identificação de parâmetros modais. Comparação com os resultados teóricos	7.12
7.2 - ENSAIO DE UMA LAJE QUADRADA DE BETÃO ARMADO SUJEITA A ACÇÕES TRANSIENTES PRODUZIDAS POR UM MARTELO DE IMPULSOS	7.16
7.2.1 - Descrição e modelação numérica	7.16
7.2.2 - Ensaios realizados	7.25
7.2.3 - Processamento de sinal	7.27
7.2.4 - Identificação de parâmetros dinâmicos	7.46
7.2.5 - Validação do modelo teórico	7.48

Capítulo 8**CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS DE DESENVOLVIMENTO FUTURO**

8.1 - Considerações finais	8.1
8.2 - Perspectivas de desenvolvimento futuro	8.5

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 - IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS DINÂMICOS EM ESTRUTURAS.

ENQUADRAMENTO DO PROBLEMA

Ao longo das últimas décadas a atenção de investigadores e projectistas no âmbito da Engenharia de Estruturas tem sido dirigida de forma predominante para a análise e dimensionamento de sistemas estruturais em regime linear ou não-linear sujeitos a acções de natureza estática ou dinâmica, determinísticas ou aleatórias, o que exige não só uma adequada idealização das acções actuantes, mas também a consideração de um conjunto de leis físicas, o desenvolvimento de um modelo matemático que, utilizando certos critérios simplificativos, traduza adequadamente o comportamento estrutural através de um conjunto de equações diferenciais que constituem as relações entrada-saída do sistema e, finalmente, a obtenção da resposta.

As relações excitação-resposta utilizadas na descrição do comportamento dinâmico de estruturas permitem todavia a abordagem de três tipos de problemas diferentes, designadamente:

- O *problema directo*, que consiste na determinação da resposta estrutural, sendo conhecidas a excitação e propriedades dinâmicas do sistema;
- O *problema inverso*, cujo objectivo é a identificação das características da excitação actuante sobre um sistema de que são conhecidas a resposta estrutural e as propriedades dinâmicas;
- O *problema da Identificação de Sistemas* que, em termos gerais, se traduz na caracterização das propriedades dinâmicas de um sistema de que são conhecidas a excitação actuante e a correspondente resposta estrutural. Este problema subdivide-se ainda em duas categorias, a primeira das quais diz respeito aos problemas de identificação não-paramétrica, também designados por *problemas de caixa preta* [122], nos quais não são conhecidas à partida as características gerais do comportamento do sistema, enquanto que a segunda se refere aos problemas de identificação paramétrica, também designados por *problemas de caixa cinzenta* [122], em que apenas são determinados os parâmetros associados a uma dada descrição do modelo matemático que se admite como representativo do comportamento do sistema a analisar.

A *Identificação de Sistemas* ou, em particular, a *Identificação Paramétrica de Sistemas*, que é afinal o objecto de trabalho aqui apresentado, constitui uma área da maior importância no contexto da Engenharia de Estruturas, viabilizando a abordagem de diversos problemas com elevado interesse neste domínio, nomeadamente:

- a validação experimental de modelos teóricos utilizados na análise numérica, com vista à caracterização do comportamento dinâmico de estruturas sob acções de serviço (funcionamento em regime linear ou quase-linear);
- a caracterização do comportamento dinâmico de sistemas de grande complexidade, em relação aos quais não seja viável a modelação numérica ou existam algumas indefinições, como por exemplo o grau de interactividade da estrutura com o solo de fundação ou com estruturas vizinhas;
- a caracterização da evolução temporal da degradação estrutural, aspecto da maior importância quer do ponto de vista da preservação de monumentos históricos, quer de grandes estruturas de betão ou metálicas construídas ao longo deste século e sujeitas a um processo permanente de envelhecimento (ex: pontes e barragens);
- a correcta caracterização dos efeitos dinâmicos produzidos por acções rodoviárias e ferroviárias sobre pontes e outras estruturas próximas de vias de circulação, contribuindo para a quantificação de coeficientes de majoração dinâmicos a utilizar no seu dimensionamento;
- a estimação de parâmetros associados a modelos que descrevam o comportamento não-linear hysterético-degradativo de estruturas de betão armado e metálicas, fundamentais para a quantificação da segurança de estruturas sujeitas a acções de grande intensidade, como por exemplo as acções sísmicas.

Este domínio de investigação é porém relativamente recente (as primeiras aplicações de que se tem conhecimento na área específica da Engenharia Civil realizaram-se na década de 70, embora se possa apontar como referência para o início de estudos noutras áreas a década de 50 [32]), facto a que não é alheio o desenvolvimento tecnológico levado a cabo nos últimos anos, nomeadamente no que se refere à evolução dos computadores, sistemas digitais de análise e transdutores de medida.

Na realidade, as enormes dificuldades relacionadas com a deficiente sensibilidade dos aparelhos de medida e com o armazenamento e processamento de um grande volume de informação resultante de medições efectuadas relegaram para um plano secundário a investigação na área da observação do comportamento experimental dinâmico de estruturas durante muitos anos, tendo esta começado por ser realizada exclusivamente através da análise de sinais temporais, com recurso a osciloscópios e registadores de papel, e sendo a extracção de parâmetros de interesse do modelo efectuada por simples análise visual desses sinais.

A análise de sinais no domínio da frequência apenas surgiu em meados da década de 60 [97], sendo nessa altura realizada através de filtros analógicos operando em bandas estreitas de frequência variável, mas com resoluções relativamente elevadas (da ordem de 1 a 2 Hz). De entre os vários métodos de identificação então possíveis, destaca-se o designado *método da excitação forçada dos modos normais de vibração*, baseado no princípio de que é possível, localizando adequadamente vários vibradores ao longo da estrutura e controlando a fase de excitação aplicada, mobilizar os modos de vibração não-amortecidos, quando o sistema vibra nas suas frequências próprias. Este método, ainda hoje utilizado na indústria aeroespacial, apresentava como inconveniente principal a grande lentidão dos ensaios (refira-se a título de exemplo que a análise espectral de um sinal numa banda de frequências de 0 a 500 Hz com uma resolução de 1,5 a 2 Hz podia então demorar cerca de duas horas [97]).

O aparecimento dos analisadores de Fourier em finais da década de 60, bem como o desenvolvimento da Teoria de Processamento Digital de Sinal, levaram, no início dos anos 70, à introdução de eficientes técnicas digitais de processamento baseadas na utilização do algoritmo FFT [97]. Por outro lado, o aumento da velocidade de processamento de cálculo e da capacidade de armazenamento e, paralelamente, o desenvolvimento operado nos transdutores de medida, que se tornaram mais sensíveis e precisos, e nos próprios sistemas de excitação, através dos quais se tornou possível a aplicação de sinais de banda larga à estrutura, possibilitaram um rápido desenvolvimento das técnicas de identificação de parâmetros dinâmicos em estruturas baseadas no conceito de função de resposta em frequência (FRF). Passou-se assim progressivamente dos métodos de 1 grau de liberdade [75], que utilizam apenas parte da FRF na estimação dos parâmetros modais, a métodos de N graus de liberdade de elevada complexidade e maior rigor [82], através dos quais se obtêm estimativas globais dos parâmetros dinâmicos associados a um conjunto de várias FRF's que são processadas em simultâneo. Ainda em resultado das facilidades proporcionadas pelo algoritmo FFT e pelas técnicas digitais de processamento, surgiram técnicas de identificação no domínio do tempo [109], cuja utilidade tem em certos casos vantagens [43] face às técnicas de identificação no domínio da frequência.

Actualmente, com o aparecimento de computadores portáteis com elevadas velocidades de processamento, com o desenvolvimento dos sistemas de aquisição de dados e com a possibilidade de recolher sinais num elevado número de canais simultaneamente, a realização de ensaios dinâmicos em estruturas tende a vulgarizar-se, estendendo-se as suas aplicações a estruturas tão diversas como os aviões, estruturas off-shore, pontes, barragens, componentes de máquinas, navios e, inclusivamente, ao próprio corpo humano.

Uma particularidade comum na generalidade das técnicas de observação experimental e de identificação de parâmetros dinâmicos até aqui desenvolvidas é a assunção de que os sistemas sobre os quais incidem têm características ideais, ou seja, são lineares, estáveis e invariantes no tempo.

No caso específico dos problemas analisados no âmbito da Engenharia Civil, envolvendo usualmente estruturas de grande porte, os ensaios dinâmicos são efectivamente realizados em regime linear ou quase-linear, facto que se deve à dificuldade e elevado custo de gerar excitações de grande intensidade susceptíveis de obrigar a estrutura a um comportamento não-linear.

A utilização de técnicas de identificação de sistemas lineares não é, no entanto, adequada a situações em que a intensidade das acções seja suficientemente elevada para poder induzir incursões significativas em regime não-linear, como pode suceder durante a actuação de um sismo.

Neste caso torna-se necessário o recurso a técnicas de identificação não-linear, sendo objectivo, por um lado, a caracterização do comportamento dinâmico estrutural e, por outro, a quantificação do nível de segurança da estrutura quando sujeita a um determinado nível de acções.

Em relação a este último ponto, refere-se a extensão do conceito de *identificação estrutural* proposta por Liu e Yao [85], consistindo na formulação do problema de identificação com inclusão de indicadores da degradação estrutural, mediante a introdução de *funções de dano* e de *fiabilidade*.

Mais recentemente, alguma investigação tem sido realizada no sentido de, por um lado, implementar técnicas de identificação não-linear de sistemas e, por outro, desenvolver metodologias para quantificação do dano estrutural [27,112,134]. A grande complexidade destes problemas não permitiu no entanto, até à data, desenvolvimentos significativos, considerando-se apesar disso ser do maior interesse a realização de trabalhos de investigação neste domínio.

1.2 - OBJECTIVO DO TRABALHO DE INVESTIGAÇÃO REALIZADO. DESCRIÇÃO SUMÁRIA

A crescente complexidade das estruturas construídas e a importância que cada vez mais vem sendo atribuída a uma correcta quantificação da respectiva segurança estrutural têm contribuído para que, também ao nível da Engenharia Civil Portuguesa, se tenha vindo a sentir um interesse cada vez maior na observação do comportamento dinâmico de estruturas.

Pela grande comodidade, versatilidade e relativo baixo custo proporcionados pelos actuais equipamentos de medida na realização de ensaios "in situ" sobre os protótipos a analisar, o Departamento de Engenharia Civil da Faculdade de Engenharia do Porto (FEUP) iniciou no final da década de 80 o desenvolvimento de um sistema de excitação e medição de vibrações em estruturas baseado num equipamento de excitação tradicional, num sistema de aquisição de dados e num conjunto de sensores de medida.

A presente dissertação reflecte o trabalho de investigação realizado nos últimos quatro anos neste domínio no sentido de tornar operacional este sistema, sendo seu objectivo apresentar de forma sistematizada conceitos e métodos que estão na base das Teorias de Processamento de Sinal e de Identificação Paramétrica de Sistemas, descrever as técnicas implementadas para o processamento de séries e para a extracção de parâmetros modais, e transmitir alguma da experiência adquirida nos ensaios realizados ao longo deste período.

O trabalho que neste contexto se apresenta está organizado em 6 capítulos fundamentais, sendo complementado com uma secção onde são apresentadas algumas considerações finais, bem como sugestões relativas a desenvolvimentos futuros.

No capítulo 2, onde se inicia o desenvolvimento desta dissertação, são estabelecidas as relações determinísticas e estocásticas excitação-resposta associadas aos chamados *sistemas ideais*. Estas relações são obtidas através de uma formulação geral, sendo igualmente apresentadas através da formulação modal clássica e da formulação de estado. Tendo por base o conjunto de relações excitação-resposta assim alcançadas, efectua-se ainda o enquadramento do tema Identificação de Parâmetros Dinâmicos em Estruturas Lineares, no contexto dos 3 problemas genéricos anteriormente mencionados em 1.1 (análise directa, problema inverso e problema de identificação).

Atendendo à necessidade de, nos problemas de Identificação, se proceder à medição da excitação aplicada e da correspondente resposta estrutural, descrevem-se no Capítulo 3 as principais técnicas de excitação e as várias componentes que actualmente integram um sistema de aquisição e medição de vibrações, tendo em consideração o problema específico da excitação e medição de vibrações em estruturas de grande porte. Neste capítulo apresenta-se também o sistema de excitação e medição de vibrações em desenvolvimento na FEUP.

O Capítulo 4 sistematiza as questões consideradas mais relevantes para a análise de sinais, descrevendo as técnicas de processamento por meio das quais, partindo de um conjunto de sinais contínuos caracterizadores da excitação e da resposta do sistema, se obtêm as funções de resposta em frequência experimentais. Estas técnicas englobam a digitalização do sinal, a sua descrição espectral, a análise e prevenção de erros, a filtragem digital, o zoom, a decimação e, finalmente, a estimação das funções de resposta em frequência e funções de coerência

associadas. Neste capítulo são ainda abordados dois casos particulares da construção de funções de resposta em frequência experimentais: os que respeitam a situações em que a excitação não é medida (ex: ensaios de vibração ambiental) e os que se referem à excitação através de sinais de banda estreita (ex: ensaios de vibração forçada sinusoidal).

O Capítulo 5 é dedicado à Identificação de Parâmetros Dinâmicos em Sistemas Estruturais, sendo nele apresentada uma classificação das principais técnicas de identificação existentes. Tendo-se optado neste trabalho pela aplicação exclusiva de métodos de identificação no domínio da frequência, são apresentadas algumas propriedades das funções de resposta em frequência, passando-se de seguida à descrição dos vários algoritmos de identificação utilizados. No final deste capítulo são ainda apresentadas algumas considerações relativas à questão da validação do modelo teórico.

No Capítulo 6 são descritos sumariamente os programas de cálculo automático desenvolvidos, contemplando por um lado as várias técnicas de processamento descritas no Capítulo 4 (programa PSINAL) e, por outro, os métodos de identificação de 1 grau de liberdade apresentados no Capítulo 5 (programas PEAKAM, FITCIR, DOBSON e SMSMET). No sentido de testar e avaliar a eficiência destas técnicas, procedeu-se à sua aplicação na identificação de parâmetros modais associados a um sistema de 2 graus de liberdade.

Descrevem-se finalmente no Capítulo 7 os resultados da aplicação das técnicas e metodologias apresentadas ao longo deste trabalho na identificação de parâmetros dinâmicos associados a uma viga metálica de pequenas dimensões e a uma laje quadrada de betão armado com cerca de 6m de lado, utilizando-se em ambos os casos uma excitação transiente aplicada por intermédio de martelos de impulsos.

CAPÍTULO 2

COMPORTAMENTO DINÂMICO DE SISTEMAS LINEARES

INTRODUÇÃO

A caracterização do comportamento dinâmico de uma estrutura exige uma adequada idealização das acções actuates e a consideração de um modelo matemático capaz de descrever de forma suficientemente aproximada o funcionamento estrutural, permitindo obter relações matemáticas entre as características essenciais da excitação e da resultante resposta do sistema analisado.

A idealização das acções pode ser efectuada através de modelos determinísticos, nos casos em que a sua evolução temporal é bem conhecida, ou então mediante o recurso a modelos estocásticos, nas situações em que a sua caracterização só pode ser convenientemente realizada com base em conceitos probabilísticos.

A obtenção do modelo matemático da estrutura e das relações excitação-resposta envolve, por outro lado, a adopção de um modelo espacial discreto ou contínuo que represente aproximadamente as suas propriedades geométricas e físicas, normalmente expressas através de matrizes de massa, rigidez e amortecimento, bem como a aplicação das leis da Mecânica, do que resulta um sistema de equações diferenciais caracterizador do movimento estrutural, a partir do qual as relações excitação-resposta podem ser alcançadas, quer numa óptica determinística, quer numa óptica estocástica.

A complexidade das estruturas reais leva à introdução de algumas simplificações na sua modelação. Um nível de simplificação frequentemente utilizado corresponde à consideração dos chamados *sistemas ideais* [11], caracterizados por serem *fisicamente realizáveis* (só existe resposta após a aplicação de uma excitação), terem *parâmetros constantes* (as suas propriedades são independentes do tempo), serem *estáveis* (a resposta a qualquer acção é limitada) e *lineares* (as propriedades de *aditividade* e *homogeneidade* são aplicáveis à excitação e correspondente resposta).

Assim, tomando como referência sistemas desta natureza, começam por ser apresentadas neste capítulo as relações excitação-resposta relativas a acções determinísticas, utilizando uma abordagem quer no domínio do tempo, quer no domínio da frequência, para o que se parte de um sistema de 1 grau de liberdade, efectuando-se posteriormente uma generalização das relações obtidas a sistemas de N graus de liberdade. Introduzem-se ainda em alternativa à *formulação geral*, a *formulação modal clássica* e a *formulação de estado*.

Este conjunto de relações é de seguida estendido ao caso de excitações aleatórias, situação em que a excitação e a resposta passam a ser descritas através de grandezas probabilísticas da Teoria dos Processos Estocásticos, razão pela qual algumas das suas noções essenciais são também brevemente sumarizadas. Embora admitindo inicialmente o carácter

estacionário das acções aleatórias actuantes, a importância da utilização de acções transientes no domínio experimental levou ainda à conveniente generalização de conceitos para sistemas lineares de 1 grau de liberdade sujeitos a excitações aleatórias de natureza não estacionária.

Tecem-se por fim diversas considerações sobre o campo de aplicação das relações excitação-resposta estabelecidas, localizando-se e delimitando-se nesse contexto o problema da Identificação de Sistemas que é objecto deste trabalho.

2.1 - RELAÇÕES DETERMINÍSTICAS EXCITAÇÃO-RESPOSTA EM SISTEMAS LINEARES

2.1.1 - Sistemas de 1 grau de liberdade

Considere-se o sistema de 1 grau de liberdade esquematicamente representado na Figura 2.1, de massa m , constante de rigidez k e constante de amortecimento viscoso c , sujeito à actuação de uma força $p(t)$. A sua resposta $q(t)$ pode ser obtida através da conhecida equação de equilíbrio dinâmico

$$m\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + kq(t) = p(t) \quad (2.1)$$

onde $\dot{q}(t)$ e $\ddot{q}(t)$ representam a 1ª e 2ª derivadas, respectivamente, do deslocamento $q(t)$ em ordem ao tempo.

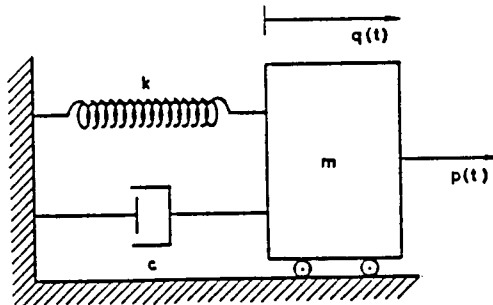


Figura 2.1 - Sistema linear de 1 grau de liberdade.

Admitindo serem nulos os valores do deslocamento e da velocidade no instante inicial $t = 0$, a resposta $q(t)$ pode ser determinada no domínio do tempo através do integral de convolução de Duhamel

$$q(t) = \int_{-\infty}^t p(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau = \int_0^{\infty} p(t-\tau) h(\tau) d\tau \quad (2.2)$$

sendo $h(t-\tau)$ designada por *função de resposta ao impulso unitário*.

Esta função representa a resposta do sistema no instante t a um impulso unitário de Dirac $\delta(t-\tau)$ actuando no instante τ , sendo definida através de

$$h(t-\tau) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\omega_r \xi_r (t-\tau)} \text{sen}[\omega_d (t-\tau)] \quad (2.3)$$

expressão onde apenas intervêm as propriedades do sistema, sendo ω_r a sua frequência natural circular, ξ_r o coeficiente de amortecimento (de valor usualmente muito pequeno em problemas da Engenharia de Estruturas, $\xi_r \ll 1$) e ω_d a correspondente frequência amortecida, dada por $\omega_d = \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2}$. Pode portanto dizer-se que um sistema ideal fica caracterizado pela função de resposta ao impulso unitário, $h(t-\tau)$.

Atendendo à linearidade dos sistemas ideais, que estão na base deste estudo, pode ainda dizer-se que as suas propriedades dinâmicas ficam caracterizadas através de qualquer função que resulte de uma transformação linear de $h(t-\tau)$.

Em particular, a abordagem no domínio da frequência, resultante da aplicação da transformada linear de Fourier, constitui uma forma intuitiva e útil de caracterizar um sistema dinâmico, na qual a função $h(\tau)$ dá origem a uma nova função $H(f)$, designada por *função de resposta em frequência* (FRF) e definida por

$$H(f) = \int_0^{\infty} h(\tau) e^{-i(2\pi f)\tau} d\tau \quad (2.4)$$

O estabelecimento da relação determinística excitação-reposta no domínio da frequência facilmente se pode efectuar, aplicando a transformada de Fourier a ambos os membros da equação (2.1).

Utilizando as propriedades desta transformada, pode escrever-se que

$$[-(2\pi f)^2 m + i(2\pi f)c + k]Q(f) = P(f) \quad (2.5)$$

sendo $Q(f)$ e $P(f)$ as transformadas de Fourier da resposta e da acção, respectivamente, dadas por

$$Q(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} q(\tau) e^{-i(2\pi f)\tau} d\tau \quad \text{e} \quad P(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\tau) e^{-i(2\pi f)\tau} d\tau$$

Note-se, por outro lado, que a excitação actuante pode ser decomposta no somatório de um número infinito de harmónicos, de amplitude infinitesimal $P(f) \cdot df$, através da transformada inversa de Fourier, de que resulta

$$p(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(f) e^{i(2\pi f)t} df \quad (2.6)$$

A substituição de (2.6) em (2.2) leva a

$$q(t) = \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} P(f) e^{i(2\pi f)(t-\tau)} df \right] \cdot h(\tau) d\tau$$

e a permutação da ordem dos integrais permite ainda obter

$$q(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(f) \cdot e^{i(2\pi f)t} df \cdot \int_0^{\infty} h(\tau) \cdot e^{-i(2\pi f)\tau} d\tau$$

Atendendo à definição apresentada para $H(f)$ através da expressão (2.4), vem assim que

$$q(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) \cdot P(f) e^{i(2\pi f)t} df$$

Sabendo que $q(t)$ é a transformada inversa de Fourier de $Q(f)$, facilmente se pode concluir ser

$$Q(f) = H(f) \cdot P(f) \quad (2.7)$$

expressão que estabelece, no domínio da frequência, a relação determinística excitação-resposta do sistema. Esta expressão permite também entender $H(f)$ como a resposta em frequência do sistema a um impulso unitário de Dirac, $\delta(t)$.

A relação de $H(f)$ com as propriedades m , c e k do sistema obtém-se tendo presente as equações (2.5) e (2.7), resultando que

$$H(f) = \frac{Q(f)}{P(f)} = \frac{1}{-(2\pi f)^2 m + i(2\pi f)c + k} \quad (2.8)$$

ou, atendendo a que

$$\xi_r = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad \text{e} \quad f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$H(f) = \frac{1/k}{[1 - (f/f_r)^2] + i(2\xi_r f/f_r)} \quad (2.9)$$

expressão que frequentemente vem definida em termos da frequência circular $\omega = 2\pi f$, assumindo a forma

$$H(\omega) = \frac{1/m}{(\omega_r^2 - \omega^2) + i(2\xi_r \omega_r \omega)} \quad (2.10)$$

Pode ainda verificar-se que a função de resposta em frequência $H(\omega)$ representa a resposta a uma excitação harmónica de amplitude unitária na frequência circular ω . Esta resposta, complexa, constitui também uma senoide de frequência ω , com um atraso de fase em relação ao harmónico caracterizador da excitação.

A análise de (2.9) ou (2.10) permite concluir que a função de resposta em frequência associada a um sistema de um grau de liberdade é uma função de natureza complexa, podendo exprimir-se através da sua *amplitude* ou *ganho* $|H(f)|$, dada por

$$|H(f)| = \frac{1/k}{\sqrt{[1 - (f/f_r)^2]^2 + (2\xi_r f/f_r)^2}} \quad (2.11)$$

e pela *fase*, $\phi(f)$, cuja expressão é

$$\phi(f) = \text{atan} \left[\frac{-2\xi_r f/f_r}{1 - (f/f_r)^2} \right] \quad (2.12)$$

Como se pode observar nas Figuras 2.2.a) e 2.2.b), onde estas funções se encontram representadas em termos da frequência normalizada f/f_r , $|H(f)|$ apresenta um máximo na zona de ressonância do sistema, cujo valor é tanto mais elevado quanto mais baixo é o coeficiente de amortecimento do sistema, ξ_r , enquanto que a fase $\phi(f)$ apresenta, na passagem por f_r , uma redução de 180° , tanto mais brusca quanto mais baixo o valor de ξ_r .

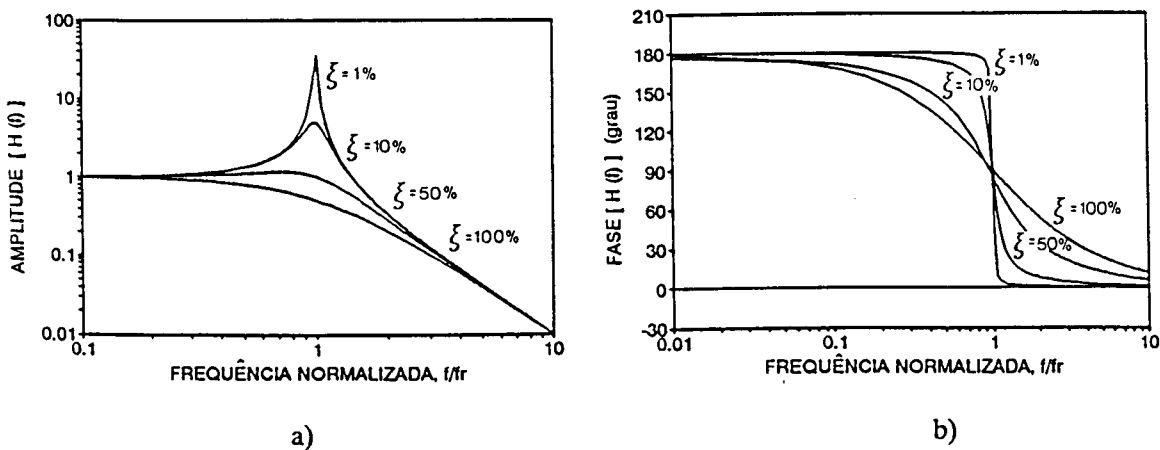


Figura 2.2 - Função de resposta em frequência de um sistema de 1 grau de liberdade:
a) amplitude vs f/f_r ; b) fase vs f/f_r .

As funções $h(\tau)$ e $H(f)$ recebem frequentemente a designação de *funções de transferência do sistema*, a primeira expressa no domínio do tempo e a segunda expressa no domínio da frequência.

De assinalar que, na Teoria de Processamento de Sinais e na Identificação de Sistemas, a designação *função de transferência* está reservada para a transformada de Laplace, dada por

$$H(s) = \int_0^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

com $s = \alpha + ib$. Na verdade, a função de resposta em frequência $H(f)$ não é mais de que a particularização da transformada de Laplace ao eixo imaginário, fazendo $\alpha = 0$ e $b = 2\pi f$.

Ao longo deste trabalho será reservada preferencialmente a designação de função de resposta em frequência para referir a função $H(f)$, considerando-se no entanto também útil e sugestiva a designação de função de transferência, pelo significado implícito que lhe está associado.

2.1.2 - Sistemas de N graus de liberdade

As relações excitação-resposta deduzidas na secção anterior para sistemas de 1 grau de liberdade podem ser estendidas a sistemas de N graus de liberdade através da generalização do conceito de função de transferência.

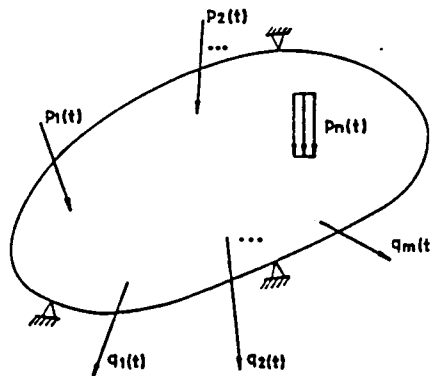


Figura 2.3 - Coordenadas generalizadas da excitação e da resposta num sistema de N graus de liberdade.

Para o efeito, considere-se então o sistema linear de N graus de liberdade representado na Figura 2.3, sujeito a um conjunto de forças generalizadas $\{p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)\}$ responsável por m respostas generalizadas $\{q_1(t), q_2(t), \dots, q_m(t)\}$.

Considerando, por simplicidade, a excitação e a resposta referidas ao mesmo conjunto de N coordenadas q_i , e utilizando as Leis da Mecânica para formular o equilíbrio dinâmico do sistema, obtém-se um conjunto de N equações diferenciais de 2ª ordem que se podem escrever matricialmente na forma

$$\underline{M}\ddot{\underline{q}}(t) + \underline{C}\dot{\underline{q}}(t) + \underline{K}\underline{q}(t) = \underline{p}(t) \quad (2.13)$$

sendo

- $\underline{M}$, $\underline{C}$ e $\underline{K}$, as matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez do sistema, cujos coeficientes m_{ij} , c_{ij} e k_{ij} representam as forças generalizadas em correspondência com a coordenada i quando na coordenada j são aplicadas uma aceleração, uma velocidade ou um deslocamento generalizados unitários, respectivamente;
- $\ddot{\underline{q}}(t)$, $\dot{\underline{q}}(t)$ e $\underline{q}(t)$, vectores contendo os valores das acelerações, velocidades e deslocamentos em correspondência com as coordenadas generalizadas consideradas;
- $\underline{p}(t)$, um vector cujas componentes $p_i(t)$ representam as forças exteriores aplicadas segundo aquelas coordenadas.

Definindo um conjunto de funções $h_{ij}(\tau)$ de resposta, na coordenada generalizada i , a um impulso unitário de Dirac aplicado em j , $p_j(t) = \delta(t)$, a resposta segundo i , $q_i(t)$, deste sistema pode ser obtida por sobreposição de efeitos através da relação

$$q_i(t) = \sum_{j=1}^N \left[\int_{-\infty}^t p_j(\tau) \cdot h_{ij}(t-\tau) d\tau \right] = \sum_{j=1}^N \left[\int_0^\infty p_j(t-\tau) h_{ij}(\tau) d\tau \right] \quad (2.14)$$

Tal como sucede com os sistemas de 1 grau de liberdade, a aplicação da transformada linear de Fourier proporciona uma abordagem no domínio da frequência que se revela de grande utilidade.

Seguindo então uma sequência de passos análoga à realizada para os sistemas de 1 grau de liberdade e aplicando a transformada de Fourier a ambos os membros do sistema de equações expresso por (2.13), pode concluir-se que o conjunto de relações determinísticas excitação-resposta do sistema no domínio da frequência, quando expresso na forma matricial tem a forma

$$\underline{Q}(f) = \underline{H}(f) \cdot \underline{P}(f) \quad (2.15)$$

onde $\underline{Q}(f)$ e $\underline{P}(f)$ são vectores cujas componentes $Q_i(f)$ e $P_j(f)$ representam as transformadas de Fourier da resposta e da excitação em correspondência com as coordenadas i e j , respectivamente, enquanto $\underline{H}(f)$ é uma matriz cuja componente genérica $H_{ij}(f)$ constitui a função de resposta em frequência (função de transferência) do sistema, expressa no sistema de coordenadas generalizadas correspondente aos deslocamentos q_i e relacionando a resposta segundo a coordenada i com a força generalizada aplicada segundo a coordenada j . Esta matriz relaciona-se com as propriedades da estrutura através de

$$\underline{H}(f) = [-(2\pi f)^2 \underline{M} + i(2\pi f) \underline{C} + \underline{K}]^{-1} \quad (2.16)$$

As funções de transferência $h_{ij}(t)$ e $H_{ij}(f)$ constituem, à semelhança do que se passa com os sistemas de 1 grau de liberdade, um par de transformadas de Fourier, ou seja,

$$H_{ij}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_{ij}(\tau) e^{-i(2\pi f)\tau} d\tau \quad (2.17)$$

$$h_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_{ij}(f) e^{i(2\pi f)t} df$$

Note-se que o problema da determinação das funções de transferência $H_{ij}(f)$ através da equação (2.16) é substancialmente laborioso, exigindo a inversão de uma matriz de ordem N para cada valor da frequência f .

Uma via alternativa para o estabelecimento de relações excitação-resposta em sistemas de N graus de liberdade consiste na utilização de uma formulação modal, através da qual o sistema de N equações diferenciais de 2ª ordem (2.13) é transformado num conjunto de N equações diferenciais independentes, expressas em termos das chamadas *coordenadas normais* ou *modais* y_k ($k = 1, 2, \dots, N$).

Estas coordenadas representam os coeficientes da decomposição do vector deslocamento $\underline{q}(t)$ num conjunto de N vectores $\underline{\phi}_k$, designados por *modos de vibração* do sistema.

Os vectores $\underline{\phi}_k$ satisfazem as bem conhecidas e importantes relações de ortogonalidade em relação à matriz de massa, de rigidez e, mediante certas hipóteses, à matriz de amortecimento [29], representando a configuração da deformada da estrutura quando esta vibra numa das suas N frequências próprias ω_k . Formando uma matriz $\underline{\phi}$ com o conjunto dos modos de vibração do sistema, tem-se pois que

$$\underline{q}(t) = \underline{\phi} \underline{y}(t) \quad (2.18)$$

A substituição desta equação no sistema de equações (2.13) e a aplicação das relações de ortogonalidade acima referidas conduz assim a

$$M_k \ddot{y}_k(t) + C_k \dot{y}_k(t) + K_k y_k(t) = P_k(t) \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (2.19)$$

com

$$M_k = \underline{\phi}_k^T \underline{M} \underline{\phi}_k \quad (2.20)$$

$$C_k = \underline{\phi}_k^T \underline{C} \underline{\phi}_k \quad (2.21)$$

$$K_k = \underline{\phi}_k^T \underline{K} \underline{\phi}_k \quad (2.22)$$

$$P_k = \underline{\phi}_k^T \underline{P} \quad (2.23)$$

sendo os escalares M_k , C_k e K_k designados por *massa modal*, *amortecimento modal* e *rigidez modal* em correspondência com o modo de vibração k do sistema.

Como cada uma das equações representadas por (2.19) pode ser interpretada como a equação de equilíbrio dinâmico de um sistema de 1 grau de liberdade, facilmente se pode verificar que as funções de transferência $h_k^y(\tau)$ e $H_k^y(w)$ ao nível das coordenadas modais são dadas por

$$h_k^y(\tau) = \frac{1}{M_k w_{dk}} \cdot e^{-\xi_k w_k \tau} \text{sen}(w_{dk} \tau) \quad (2.24)$$

e

$$H_k^y(w) = \frac{1 / M_k}{(w_k^2 - w^2) + i(2\xi_k w_k w)} \quad (2.25)$$

Estas funções podem agora relacionar-se com as funções de transferência do sistema em termos das coordenadas generalizadas iniciais, usando para tal as relações (2.18) e (2.20) a (2.23), obtendo-se assim

$$\underline{h}(\tau) = \underline{\phi} \underline{h}_y(\tau) \underline{\phi}^T \quad (2.26)$$

$$\underline{H}(w) = \underline{\phi} \underline{H}_y(w) \underline{\phi}^T \quad (2.27)$$

em que $\underline{h}_y(\tau)$ e $\underline{H}_y(w)$ representam matrizes diagonais constituídas pelas funções $h_k^y(\tau)$ e $H_k^y(w)$.

Efectuando o desenvolvimento dos produtos matriciais envolvidos na equação (2.27), e assumindo como unitário o valor das massas modais resulta em particular que

$$\underline{H}(w) = \sum_{k=1}^N \underline{\phi}_k \cdot \underline{\phi}_k^T H_k^y(w) = \sum_{k=1}^N \frac{\underline{\phi}_k \cdot \underline{\phi}_k^T}{(w_k^2 - w^2) + i(2\xi_k w_k w)} \quad (2.28)$$

sendo o termo geral $H_{ij}(w)$ desta matriz dado por

$$H_{ij}(w) = \sum_{k=1}^N \frac{(\phi_i)_k (\phi_j)_k}{(w_k^2 - w^2) + i(2\xi_k w_k w)} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.29)$$

$$(j = 1, 2, \dots, N)$$

expressão onde se convencionou representar a componente i do modo de vibração k por $(\phi_i)_k$.

Como se pode verificar, esta forma alternativa de obter as funções de resposta em frequência de um sistema é bastante mais simples do que a apresentada anteriormente (v. equação (2.16)). Uma vantagem adicional da sua aplicação reside no facto de a resposta da estrutura poder em geral ser aproximada, sem erros significativos, contabilizando apenas o contributo de um relativamente pequeno número de modos de vibração, o que permite uma significativa redução da dimensão do problema e do esforço de cálculo envolvido.

Casos há, no entanto, em que a aplicação da formulação modal não é viável. De facto, nem sempre é possível verificar a ortogonalidade dos modos de vibração em relação à matriz de amortecimento [26], condição que, como se mencionou na apresentação desta formulação, é essencial para que seja possível desligar o sistema de equações diferenciais que caracterizam o movimento da estrutura. Nestas situações há porém a alternativa de recorrer a uma *formulação de estado* [31].

Esta formulação, mais geral do que a anterior, é aplicável a sistemas lineares sem restrições à matriz de amortecimento, tornando-se viável por seu intermédio a transformação do sistema de N equações diferenciais de 2ª ordem, caracterizador do equilíbrio dinâmico da estrutura, num outro conjunto de $2N$ equações diferenciais de 1ª ordem independentes.

Considere-se então a equação diferencial do movimento definida através da expressão (2.13) e aplique-se uma mudança de variáveis, introduzindo o *vector de estado* $\underline{y}(t)$, definido por

$$\underline{y}(t) = \left\{ \begin{matrix} \underline{q}(t) \\ \underline{\dot{q}}(t) \end{matrix} \right\} \quad (2.30)$$

Substituindo em (2.13) e introduzindo a matriz de estado $\underline{A}$ e o vector $\underline{x}(t)$ dados por

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} \\ -\underline{M}^{-1}\underline{K} & -\underline{M}^{-1}\underline{C} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{x}(t) = \begin{Bmatrix} \underline{0} \\ \underline{M}^{-1}\underline{p}(t) \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

facilmente se pode concluir ser (2.13) equivalente a

$$\dot{\underline{y}}(t) = \underline{A}\underline{y}(t) + \underline{x}(t) \quad (2.32)$$

É possível verificar que, sendo as condições iniciais do sistema traduzidas pelo vector $\underline{y}(0)$ no instante $t = 0$, a solução deste sistema de $2N$ equações é [8]

$$\underline{y}(t) = e^{\underline{A}t} \underline{y}(0) + \int_0^t e^{\underline{A}(t-\tau)} \underline{x}(\tau) d\tau \quad (2.33)$$

sendo a matriz $e^{\underline{A}t}$ definida por

$$e^{\underline{A}t} = \underline{I} + \underline{A}t + \frac{1}{2!}(\underline{A}t)^2 + \frac{1}{3!}(\underline{A}t)^3 + \dots \quad (2.34)$$

embora seja mais facilmente quantificável através da resolução do problema de valores e vectores próprios

$$\underline{A}\underline{\psi}_i = \alpha_i \cdot \underline{\psi}_i \quad (i = 1, 2, \dots, 2N) \quad (2.35)$$

podendo então afirmar-se que

$$e^{\underline{A}t} = \underline{T} e^{\underline{\alpha}t} \underline{T}^{-1} \quad (2.36)$$

em que $\underline{\alpha}$ é uma matriz diagonal constituída pelos valores próprios α_i , $e^{\underline{\alpha}t}$ é também uma matriz diagonal cujo elemento de ordem i da respectiva diagonal principal vale $e^{\alpha_i t}$ e $\underline{T}$ é a matriz quadrada de dimensão $2N$, cujas colunas são constituídas pelos vectores próprios $\underline{\psi}_i$, normalizados em relação a uma matriz $\underline{D}$, dada por

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \underline{C} & \underline{M} \\ \underline{M} & \underline{0} \end{bmatrix}$$

de tal forma que

$$\underline{T}^T \underline{D} \underline{T} = \underline{I} \quad (2.37)$$

Admitindo que o sistema parte de uma situação inicial de repouso, a resposta $\underline{y}(t)$ poderá obter-se através do integral de convolução

$$\underline{y}(t) = \int_0^t \underline{T} e^{\underline{\alpha}\tau} \underline{T}^{-1} \cdot \underline{x}(t-\tau) d\tau \quad (2.38)$$

verificando-se então, por analogia com (2.14), que o produto $\underline{T} e^{\underline{\alpha}\tau} \underline{T}^{-1}$ corresponde à matriz $\underline{h}(\tau)$ das funções de transferência do sistema no domínio do tempo.

Pode ainda seguir-se uma variante modal complexa, introduzindo novas coordenadas modais $\beta_i(t)$, com $i = 1, 2, \dots, 2N$, relacionadas com o vector de estado $\underline{y}(t)$ através da transformação linear

$$\underline{y}(t) = \underline{T} \underline{\beta}(t) \quad (2.39)$$

Substituindo esta relação em (2.32) e, tendo em conta [31] que $\underline{T}^{-1} \underline{A} \underline{T} = \underline{\alpha}$, pode obter-se o seguinte conjunto de $2N$ equações diferenciais de 1ª ordem *independentes*

$$\dot{\underline{\beta}}(t) = \underline{\alpha} \underline{\beta}(t) + \underline{T}^{-1} \underline{x}(t) \quad (2.40)$$

cujas soluções são dadas por

$$\underline{\beta}(t) = e^{\underline{\alpha}t} \underline{\beta}(0) + \int_0^t e^{\underline{\alpha}(t-\tau)} \underline{T}^{-1} \underline{x}(\tau) d\tau$$

De (2.37) pode obter-se que $\underline{T}^{-1} = \underline{T}^T \cdot \underline{D}$. A substituição desta relação em (2.40) e a definição de $\underline{x}(t)$ permitem concluir que

$$\dot{\underline{\beta}}(t) = \underline{\alpha} \underline{\beta}(t) + \underline{T}^T \cdot \underline{P}(t) \quad (2.41)$$

com

$$\underline{P}(t) = \begin{Bmatrix} \underline{P}(t) \\ \underline{0} \end{Bmatrix}$$

Aplicando agora a transformada de Fourier a ambos os membros da equação (2.41), tem-se que

$$i\omega \underline{B}(\omega) = \underline{\alpha} \underline{B}(\omega) + \underline{T}^T \underline{P}(\omega)$$

ou, o que é equivalente

$$[i\omega \underline{I} - \underline{\alpha}] \cdot \underline{B}(\omega) = \underline{T}^T \underline{P}(\omega)$$

O vector $\underline{B}(\omega)$ das transformadas de Fourier das coordenadas modais $\beta_i(t)$ em correspondência com os $2N$ modos de vibração $\underline{\psi}_i$ é assim dado por

$$\underline{B}(w) = [iw\underline{I} - \underline{\alpha}]^{-1} \cdot \underline{T}^T \underline{P}(w) \quad (2.42)$$

Tendo presente a relação (2.39), pode finalmente concluir-se que a transformada de Fourier $\underline{Y}(w)$ da resposta $\underline{y}(t)$ é

$$\underline{Y}(w) = \underline{T} \underline{B}(w) = \underline{T} [iw\underline{I} - \underline{\alpha}]^{-1} \cdot \underline{T}^T \underline{P}(w) \quad (2.43)$$

Designando por $\underline{H}(w)$ a matriz

$$\underline{T} \left[\frac{1}{iw - \alpha_k} \right] \cdot \underline{T}^T \quad (2N \times 2N)$$

obtém-se a conhecida relação entre as transformadas de Fourier dos processos de excitação e de resposta do sistema

$$\underline{Y}(w) = \underline{H}(w) \underline{P}(w) \quad (2.44)$$

recebendo $\underline{H}(w)$ a designação de *matriz das funções de resposta em frequência* (ou de transferência), em que o termo genérico $H_{ij}(w)$ vale

$$H_{ij}(w) = \sum_{k=1}^{2N} T_{ik} \cdot \frac{1}{iw - \alpha_k} \cdot T_{jk}$$

ou, atendendo a que T_{ik} representa a componente i do modo de vibração complexo $\underline{\psi}_k$,

$$H_{ij}(w) = \sum_{k=1}^{2N} \frac{(\psi_i)_k \cdot (\psi_j)_k}{iw - \alpha_k}$$

Como, por outro lado, é possível verificar [107] que os valores próprios α_k ocorrem aos pares de conjugados,

$$\alpha_k = w_k \left(\xi_k \pm i\sqrt{1 - \xi_k^2} \right) \quad (k = 1, \dots, N) \quad (2.45)$$

e o mesmo acontece em relação aos vectores próprios que lhes estão associados, pode então obter-se a seguinte expressão final para a função de transferência $H_{ij}(w)$

$$H_{ij}(w) = \sum_{k=1}^N \left[\frac{(\psi_i)_k (\psi_j)_k}{iw - \alpha_k} + \frac{(\psi_i)_k^* (\psi_j)_k^*}{iw - \alpha_k^*} \right] \quad (2.46)$$

em que o símbolo "*" representa a operação "conjugado de".

Cada termo $H_{ij}(w)$ da matriz $\underline{H}(w)$ representa a função de transferência do sistema relacionando as componentes q_i ou $\dot{q}_i$ da resposta e as componentes p_j da acção aplicada.

2.2 - RELAÇÕES ESTOCÁSTICAS EXCITAÇÃO-RESPOSTA

2.2.1 - Considerações sobre a caracterização de processos estocásticos

Em muitas situações da análise estrutural, a excitação e, conseqüentemente, a resposta apresentam uma natureza acentuadamente aleatória, de que resulta a necessidade da sua caracterização em termos probabilísticos, para o que se torna conveniente o recurso ao conceito de *processo estocástico*.

Por *processo estocástico* $x(t)$ entende-se o conjunto de $n(n \rightarrow \infty)$ funções aleatórias (realizações do processo) $x_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) dependentes do parâmetro t e associadas à caracterização de uma determinada grandeza física. Nos problemas de Dinâmica Estrutural a variável t representa usualmente o tempo, podendo do ponto de vista matemático escrever-se que

$$x(t) = \{x_i(t) \ ; i = 1, 2, \dots, n(n \rightarrow \infty)\} \quad (2.47)$$

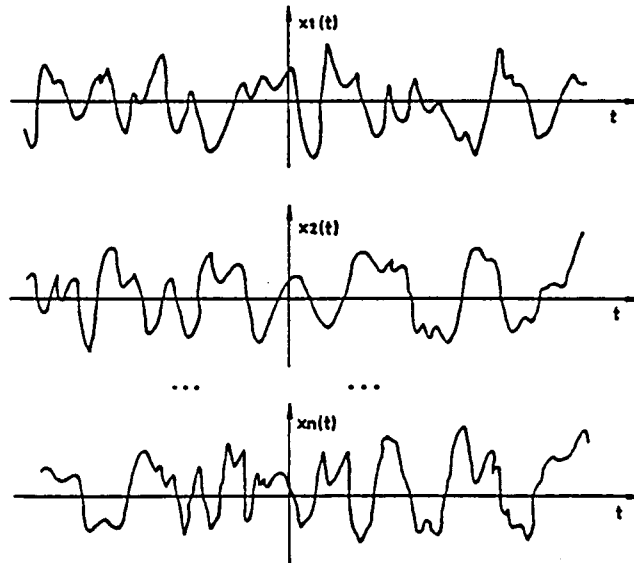


Figura 2.4 - Conjunto de realizações de um processo estocástico $x(t)$.

A caracterização completa de um processo estocástico exige, em princípio, o conhecimento de uma hierarquia infinita de funções densidade de probabilidade conjunta [31] o que, naturalmente, se revela impossível de realizar na prática. Assim, é corrente

efectuam-se uma análise simplificada baseada apenas, em regra, no conhecimento de grandezas estatísticas de primeira e segunda ordem, procedimento que é particularmente justificável nas situações em que seja razoável admitir a natureza gaussiana da excitação actuante, tendo em conta o enunciado do Teorema do Limite Central. As principais grandezas estatísticas utilizadas são então as seguintes:

- a) Valor médio do processo $x(t)$ no instante t_i

$$m_{x_i} = E[x(t_i)] = \int_{-\infty}^{+\infty} X_i p(X_i) dX_i \quad (2.48)$$

sendo $p(X_i)$ a função densidade de probabilidade associada à variável aleatória $X_i = x(t_i)$ e representando $E[\]$ o operador valor médio expectável tendo em conta todas as realizações do processo;

- b) Valor quadrático médio do processo $x(t)$ no instante t_i

$$m_{x_i^2} = E[x^2(t_i)] = \int_{-\infty}^{+\infty} X_i^2 p(X_i) dX_i \quad (2.49)$$

- c) Variância do processo $x(t)$ no instante t_i

$$\mu_{x_i} = E\{[x(t_i) - m_{x_i}]^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (X_i - m_{x_i})^2 p(X_i) dX_i \quad (2.50)$$

- d) Desvio-padrão do processo $x(t)$ no instante t_i

$$\sigma_{x_i} = \sqrt{\mu_{x_i}}$$

- e) Função de auto-correlação do processo $x(t)$ referida aos instantes t_i e t_j

$$R_x(t_i, t_j) = E[x(t_i)x(t_j)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X_i X_j p(X_i, X_j) dX_i dX_j \quad (2.51)$$

onde $p(X_i, X_j)$ representa a função densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias X_i e X_j ;

- f) Função de inter-correlação ou de correlação cruzada entre os processos $x(t)$ e $y(t)$ referida aos instantes t_i e t_j , respectivamente

$$R_{xy}(t_i, t_j) = E[x(t_i) \cdot y(t_j)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X_i Y_j p(X_i, Y_j) dX_i dY_j \quad (2.52)$$

g) Função de auto-covariância do processo $x(t)$ referida aos instantes t_i e t_j

$$\begin{aligned}\mu_x(t_i, t_j) &= E\{[x(t_i) - m_{x_i}][x(t_j) - m_{x_j}]\} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (X_i - m_{x_i})(X_j - m_{x_j}) p(X_i, X_j) dX_i dX_j\end{aligned}\quad (2.53)$$

h) Função de inter-covariância ou de covariância cruzada entre os processos $x(t)$ e $y(t)$ referida aos instantes t_i e t_j , respectivamente

$$\begin{aligned}\mu_{xy}(t_i, t_j) &= E\{[x(t_i) - m_{x_i}] \cdot [y(t_j) - m_{y_j}]\} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (X_i - m_{x_i})(Y_j - m_{y_j}) p(X_i, Y_j) dX_i dY_j\end{aligned}\quad (2.54)$$

No que respeita à modelação das acções ou das respostas, refere-se ainda que numa grande parte dos casos é legítima a idealização através dos chamados *processos estacionários e ergódicos*.

Diz-se que um processo estocástico é *estacionário* quando o valor de qualquer função densidade de probabilidade multidimensional $p(X_i, X_j, \dots, X_n)$ é independente da origem dos tempos, dependendo apenas dos desfasamentos temporais entre os instantes de tempo associados às variáveis aleatórias $X_i, X_j, \dots, X_n$.

Nesta situação, o valor médio expectável do processo é constante no tempo, ao passo que as funções de auto-correlação e de correlação cruzada $R_x(t_i, t_j)$ e $R_{xy}(t_i, t_j)$, respectivamente, podem ser expressas unicamente em termos da quantidade $\tau = t_j - t_i$ através de

$$R_x(\tau) = E[x(t) \cdot x(t + \tau)] \quad (2.55)$$

$$R_{xy}(\tau) = E[x(t) \cdot y(t + \tau)] \quad (2.56)$$

Um processo estocástico estacionário é ainda *ergódico*, quando os valores das funções estatísticas que o caracterizam, tendo em conta a globalidade das realizações, coincidem com os correspondentes valores médios temporais extraídos a partir de uma única realização $x_i(t)$ do processo estocástico $x(t)$.

Nesse caso, pode dizer-se que o valor médio $m_x = E[x(t)]$ do processo estocástico estacionário e ergódico coincide com o valor médio temporal, $\langle x_i(t) \rangle$, isto é

$$\langle x_i(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_i(t) dt = E[x(t)] \quad (2.57)$$

enquanto que as funções de auto-correlação $R_x(\tau)$ e de correlação cruzada $R_{xy}(\tau)$ podem obter-se através de duas quaisquer realizações $x_i(t)$ e $y_i(t)$ por

$$R_x(\tau) = R_{x_i}(\tau) = \langle x_i(t) \cdot x_i(t + \tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_i(t) \cdot x_i(t + \tau) d\tau \quad (2.58)$$

$$R_{xy}(\tau) = R_{x_i y_i}(\tau) = \langle x_i(t) \cdot y_i(t + \tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_i(t) \cdot y_i(t + \tau) d\tau \quad (2.59)$$

Na caracterização dos processos estocásticos estacionários é possível recorrer, em alternativa às funções de auto-correlação e de correlação cruzada, a duas novas funções, a *densidade espectral de potência*, $S_x(f)$, e a *densidade espectral de potência cruzada*, $S_{xy}(f)$, definidas matematicamente por

$$S_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{F_T[x(t)]^* F_T[x(t)]}{T} \right\} \quad (2.60)$$

e

$$S_{xy}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{F_T[x(t)]^* \cdot F_T[y(t)]}{T} \right\} \quad (2.61)$$

em que "*" indica a operação "conjugado de" e $F_T[x(t)]$ representa a transformada de Fourier do processo $x(t)$ restringido ao intervalo $[-T/2, T/2]$, isto é

$$F_T[x(t)] = X_T(f) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i(2\pi f)t} dt \quad (2.62)$$

Tendo em consideração todas as realizações constituintes do processo, as expressões (2.60) e (2.61) tomam a forma

$$S_x(f) = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \frac{F_{T,r}[x(t)]^* \cdot F_{T,r}[x(t)]}{T} \quad (2.63)$$

$$S_{xy}(f) = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \frac{F_{T,r}[x(t)]^* \cdot F_{T,r}[y(t)]}{T} \quad (2.64)$$

em que $F_{T,r}[x(t)]$ representa a transformada de Fourier associada à realização de ordem r .

Estas duas grandezas estatísticas de 2ª ordem estão estritamente ligadas à caracterização do conteúdo energético dos processos estocásticos estacionários analisados, verificando-se em particular que

$$\sigma_x^2 = R_x(0) - m_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(w)dw - m_x^2 \quad (2.65)$$

$$\mu_{xy} = R_{xy}(0) - m_x \cdot m_y = 2 \int_0^{\infty} \text{Re}[S_{xy}(w)]dw - m_x \cdot m_y \quad (2.66)$$

sendo $\text{Re}[S_{xy}(w)]$ a parte real da função $S_{xy}(w)$.

Entre as funções de auto-correlação ou de correlação cruzada e as funções densidade espectral de potência ou densidade espectral de potência cruzada verificam-se importantes relações, conhecidas por relações de Wiener-Khintchine, através das quais pode ser estabelecido um fácil relacionamento entre abordagens de análise no domínio do tempo e da frequência. Essas relações são as seguintes

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-i(2\pi f)\tau} d\tau \quad (2.67)$$

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) e^{i(2\pi f)\tau} df \quad (2.68)$$

e

$$S_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xy}(\tau) e^{-i(2\pi f)\tau} d\tau \quad (2.69)$$

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xy}(f) e^{i(2\pi f)\tau} df \quad (2.70)$$

Constata-se pois que as funções $R_x(\tau)$ e $S_x(f)$ constituem um par de transformadas de Fourier, o mesmo sucedendo entre $R_{xy}(\tau)$ e $S_{xy}(f)$.

2.2.2 - Sistemas de 1 grau de liberdade sujeitos a excitações aleatórias estacionárias

Em muitas situações de interesse no âmbito da Engenharia de Estruturas verifica-se ser aceitável a idealização das acções actuantes através de processos estocásticos estacionários. Por esse motivo, na presente secção começam por ser estabelecidas as relações excitação-resposta para o caso particular de a excitação ser daquela natureza, admitindo-se ainda que os sistemas envolvidos possuem parâmetros constantes e comportamento linear.

Considere-se então um sistema linear de 1 grau de liberdade cujas funções de transferência $h(\tau)$ e $H(f)$ no domínio do tempo e da frequência, respectivamente, foram caracterizadas na secção 2.1.1.

O valor médio da resposta deste sistema a uma excitação aleatória estacionária pode ser obtido através da aplicação do operador $E[\]$ à equação (2.2). Fazendo ainda uso da comutatividade entre as operações de integração e de cálculo dos valores médios expectáveis, resulta que

$$m_q(t) = \int_0^\infty m_p(t-\tau)h(\tau)d\tau = m_p \int_0^\infty h(\tau)d\tau \quad (2.71)$$

Esta relação permite extrair uma conclusão importante, que consiste no facto de a resposta de um sistema linear a uma excitação estacionária ser também estacionária.

A relação entre os valores médios m_p e m_q da excitação e da resposta pode ainda ser obtida através da função de transferência $H(f)$, expressa no domínio da frequência. Para tal, considere-se a equação (2.4) e determine-se o seu valor para $f = 0$

$$H(0) = \int_0^\infty h(\tau) \cdot e^0 d\tau = \int_0^\infty h(\tau) d\tau \quad (2.72)$$

Atendendo a (2.71), pode ainda escrever-se que

$$m_q = m_p \cdot H(0)$$

e como, por outro lado, $H(f)$ se relaciona com as propriedades do sistema através de (2.9), virá então

$$m_q = \frac{m_p}{k} \quad (2.73)$$

Conclui-se assim que, no caso particular de o processo de excitação ser de média nula, o mesmo sucede com o processo de resposta.

Da mesma forma que se procedeu para a obtenção das relações entre os valores médios da excitação e da resposta, também para a determinação da variância da resposta se podem utilizar, alternativamente, as abordagens no domínio do tempo e da frequência.

Começando por referir a abordagem no domínio do tempo e tomando como ponto de partida a equação (2.2), o produto $q(t) \cdot q(t+\tau)$ poderá ser obtido por

$$q(t) \cdot q(t+\tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty h(\tau_1)h(\tau_2) \cdot p(t-\tau_1) \cdot p(t+\tau-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

Aplicando o operador valor médio expectável a ambos os membros, e atendendo à comutatividade entre as operações de integração e de cálculo do valor médio expectável do produto $p(t-\tau_1) \cdot p(t+\tau-\tau_2)$, vem

$$R_q(\tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty h(\tau_1) \cdot h(\tau_2) \cdot R_p(\tau + \tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (2.74)$$

obtendo-se assim uma relação entre as funções de auto-correlação da excitação e da resposta do sistema. Relação semelhante pode ser estabelecida usando as funções de inter-correlação entre a entrada $p(t)$ e a saída $q(t)$ e a função de auto-correlação da entrada

$$R_{pq}(\tau) = \int_0^\infty h(\tau_1) \cdot R_p(\tau - \tau_1) d\tau_1 \quad (2.75)$$

Pode então quantificar-se a variância do processo da resposta μ_q , tendo em conta a sua definição, verificando-se que

$$\mu_q = R_q(0) - m_q^2 \quad (2.76)$$

A abordagem no domínio da frequência permite uma via alternativa para quantificação da variância da resposta μ_q com base na função densidade espectral de potência $S_q(f)$.

Com efeito, partindo da equação (2.7), que relaciona as transformadas de Fourier dos processos da excitação e da resposta, $P(f)$ e $Q(f)$, respectivamente, através da função de transferência $H(f)$ e, considerando $p(t)$ e $q(t)$ restringidos ao intervalo $[-T/2, T/2]$, com $T \rightarrow \infty$, tem-se que

$$Q_T(f) = H(f) \cdot P_T(f)$$

Multiplicando ambos os membros desta equação pelo respectivo complexo conjugado, vem então

$$Q_T^*(f) \cdot Q_T(f) = [H(f) \cdot P_T(f)]^* \cdot [H(f) \cdot P_T(f)]$$

ou seja

$$Q_T^*(f) \cdot Q_T(f) = [H(f)^* \cdot H(f)] \cdot [P_T(f)^* \cdot P_T(f)]$$

Finalmente, dividindo por T e atendendo à definição de função densidade espectral de potência, obtém-se a relação

$$S_q(f) = |H(f)|^2 \cdot S_p(f) \quad (2.77)$$

Um raciocínio semelhante permite ainda relacionar $S_{pq}(f)$ com $S_p(f)$ através da equação

$$S_{pq}(f) = H(f) S_p(f) \quad (2.78)$$

Atendendo à relação (2.65), a variância μ_q vem então dada por

$$\mu_q = \int_{-\infty}^{+\infty} S_q(f) df - m_q^2 \quad (2.79)$$

Outros momentos estatísticos de ordem superior poderiam ainda ser calculados, de forma a melhor caracterizar o processo de resposta. No entanto, e porque os parâmetros estatísticos de 1ª e 2ª ordem são os que contêm mais informação relativamente aos processos estocásticos a que respeitam, é vulgar a sua caracterização usando apenas m_q e μ_q . Por outro lado, sendo o processo estocástico estacionário também gaussiano, o conhecimento destes momentos estatísticos de primeira e segunda ordem é suficiente para uma completa caracterização probabilística da resposta [31].

2.2.3 - Extensão a excitações aleatórias transientes

A idealização das acções actuantes através de processos estocásticos estacionários nem sempre é razoável, já que a dependência temporal das suas principais propriedades estatísticas pode ser importante.

Não existindo uma metodologia única para a caracterização de processos estocásticos não-estacionários [11], algumas técnicas substancialmente mais complexas do que as aplicáveis a processos estacionários podem ainda ser utilizadas no sentido de introduzir uma generalização dos conceitos anteriormente definidos de funções de *auto-correlação* e de *inter-correlação cruzada* e de funções *densidade espectral de potência* e *densidade espectral de potência cruzada*, permitindo a obtenção de relações excitação-resposta não-estacionárias.

Merece contudo destaque particular uma classe de processos estocásticos não estacionários, cujas realizações apresentam valores significativos apenas num intervalo de tempo de duração muito curta: os chamados *processos estocásticos transientes*.

Correspondem a este tipo de processos as excitações e as respostas de sistemas associadas a sismos, explosões ou outros tipos de impulsos de pequena duração.

Embora, em princípio, processos desta natureza possam ser caracterizados recorrendo a técnicas existentes para processos não-estacionários como o espectro de Bendat-Piersol ou o espectro evolutivo de Priestley [11,31], é possível utilizar uma abordagem mais simples [11], baseada na metodologia desenvolvida para processos estocásticos estacionários, que se passa sumariamente a descrever.

Seja $x(t)$ o processo estocástico caracterizador da excitação actuante sobre um sistema linear, cuja função de resposta ao impulso unitário é $h(\tau)$. Diz-se que $x(t)$ constitui um *processo estocástico transiente*, se existir um instante T_1 para o qual se verifique [11]

$$\begin{aligned} x(t) &\neq 0, & 0 \leq t \leq T_1 \\ x(t) &= 0, & t < 0 \vee t > T_1 \\ h(\tau) &> \Delta, & \tau > T_1 \end{aligned} \quad (2.80)$$

sendo Δ uma quantidade finita não nula.

Aplique-se agora a transformada de Fourier a uma realização do processo estocástico transiente $x_i(t)$

$$X_i(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_i(t) e^{-i(2\pi f)t} dt = \int_0^{T_1} x_i(t) e^{-i(2\pi f)t} dt \quad (2.81)$$

É possível definir uma função $\mathcal{S}_x(f)$, designada por *função densidade espectral de energia do processo transiente* $x(t)$, multiplicando $X_i(f)$ pelo conjugado e aplicando o valor expectável $E[\]$

$$\mathcal{S}_x(f) = E[X^*(f) \cdot X(f)] = E[|X(f)|^2] \quad (2.82)$$

Note-se que esta definição apenas difere da definição apresentada para a função densidade espectral de potência $S_x(f)$ no facto de $\mathcal{S}_x(f)$ não englobar uma divisão por T e de não lhe ser aplicado o limite quando $T \rightarrow \infty$. A introdução deste novo conceito é possibilitada pelo facto de, contrariamente ao que se passa com os processos estocásticos estacionários, o conteúdo energético de cada realização $x_i(t)$ do processo transiente ser finito.

Na prática a estimativa de $\mathcal{S}_x(f)$ é obtida a partir da estimativa da densidade espectral de potência $S_x(f)$ do processo estocástico suposto estacionário, relacionando-se estas funções através de um factor de escala T_1 , igual à duração do processo transiente, isto é

$$\mathcal{S}_x(f) = T_1 \cdot \hat{S}_x(f) \quad (2.83)$$

Podem ainda definir-se outras funções estatísticas para os processos transientes, referindo-se por exemplo a *função densidade espectral de energia cruzada* $\mathcal{S}_{xy}(f)$ de dois processos transientes $x(t)$ e $y(t)$

$$\mathcal{S}_{xy}(f) = E[X^*(f) \cdot Y(f)] \quad (2.84)$$

sendo a sua estimativa $\hat{\mathcal{S}}_{xy}(f)$ obtida através de

$$\hat{\mathcal{S}}_{xy}(f) = T_1 \hat{S}_{xy}(f) \quad (2.85)$$

As relações excitação-resposta podem assim assumir uma forma similar à das relações deduzidas para processos estocásticos estacionários, vindo então

$$\mathcal{S}_q(f) = |H(f)|^2 \mathcal{S}_p(f) \quad (2.86)$$

$$\mathcal{S}_{pq}(f) = H(f) \mathcal{S}_p(f) \quad (2.87)$$

2.2.4 - Sistemas de N graus de liberdade

No caso geral em que são utilizadas n coordenadas generalizadas $p_i(t)$ para caracterizar a excitação actuante sobre o sistema, suposta aleatória estacionária, e m coordenadas generalizadas $q_i(t)$ para caracterizar a sua resposta, a estrutura probabilística instantânea do processo estocástico vectorial $\underline{q}(t)$ é em geral avaliada através de um vector de valores médios da resposta $\underline{m}_q$ e de uma matriz $\underline{\mu}_q$, cujos termos μ_{kl}^q representam as *inter-covariâncias* entre as componentes $q_k(t)$ e $q_l(t)$.

Como sucede com os sistemas de 1 grau de liberdade, o conhecimento dos momentos estatísticos de 1ª e 2ª ordem é suficiente para caracterizar completamente a estrutura probabilística de excitações aleatórias de carácter gaussiano.

É possível verificar que, sendo $\underline{h}(\tau)$ e $\underline{H}(f)$ matrizes cujos termos $h_{ij}(\tau)$ e $H_{ij}(f)$ representam as funções de transferência generalizadas do sistema, relacionando as componentes i e j de entrada e de saída, respectivamente, o vector $\underline{m}_q(t)$ dos valores médios da resposta se relaciona com o correspondente vector $\underline{m}_p$ dos valores médios da excitação através de

$$\underline{m}_q(t) = \int_0^\infty \underline{h}(\tau) d\tau \underline{m}_p \quad (2.88)$$

ou

$$\underline{m}_q(t) = \underline{H}(0) \underline{m}_p \quad (2.89)$$

verificando-se pois que, se o processo estocástico que caracteriza a excitação for estacionário, então também o processo que caracteriza a resposta o será.

A matriz de inter-covariância $\underline{\mu}_q$ pode por sua vez ser obtida, seguindo uma abordagem no domínio do tempo, através das funções de inter-correlação $R_{ij}^q(\tau)$ associadas à componente de média nula do processo da resposta $\underline{q}(t)$ ou, alternativamente, através das correspondentes funções densidade espectral de potência cruzada $S_{ij}^q(f)$, no caso de ser utilizada uma abordagem no domínio da frequência, podendo verificar-se que [31]

$$\underline{R}_{q_o}(\tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty \underline{h}(\tau_1) \underline{R}_{p_o}(\tau + \tau_1 - \tau_2) \underline{h}^T(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (2.90)$$

e

$$\underline{S}_{q_o}(f) = \underline{H}^*(f) \cdot \underline{S}_{p_o}(f) \cdot \underline{H}(f)^T \quad (2.91)$$

sendo $\underline{p}_o(t)$ a componente de média nula da excitação.

Desse modo, atendendo às equações (2.54) e (2.66), os elementos da matriz de covariância $\underline{\mu}_q$ podem obter-se através das relações

$$\mu_{ij}^q = \mu_{ij}^{q_o} = R_{ij}^{q_o}(0) \quad (2.92)$$

ou

$$\mu_{ij}^q = 2 \int_0^\infty \text{Re}[S_{ij}^{q_o}(f)] df \quad (2.93)$$

Utilizando uma formulação modal para a caracterização da resposta do sistema, e sendo $\underline{h}_y(\tau)$ e $\underline{H}_y(f)$ as matrizes (diagonais) de funções de transferência no espaço modal, pode-se provar que o vector $\underline{m}_q(t)$ dos valores médios expectáveis da resposta relativo a cada uma das coordenadas generalizadas iniciais é dado por [31]

$$\underline{m}_q(t) = \underline{\phi} \int_0^{+\infty} \underline{h}_y(\tau) d\tau \cdot \underline{\phi}^T \cdot \underline{m}_p \quad (2.94)$$

ou por

$$\underline{m}_q(t) = \underline{K}^{-1} \underline{m}_p \quad (2.95)$$

sendo $\underline{\phi}$ e $\underline{K}$ as matrizes dos modos de vibração e de rigidez referidas na secção 2.1.2.

Analogamente, é possível definir as matrizes $\underline{R}_{y_o}(\tau)$ e $\underline{S}_{y_o}(f)$ das funções de inter-correlação e das funções densidade espectral de potência cruzada relativas às componentes de média nula da resposta no espaço modal, vindo respectivamente

$$\underline{R}_{y_0}(\tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty \underline{h}_y(\tau_1) \underline{\phi}^T \underline{R}_{p_0}(\tau + \tau_1 - \tau_2) \underline{\phi} \underline{h}_y(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (2.96)$$

e

$$\underline{S}_{y_0}(f) = \underline{H}_y(f)^* \cdot \underline{\phi}^T \underline{S}_{p_0}(f) \cdot \underline{\phi} \cdot \underline{H}_y(f) \quad (2.97)$$

Pode então obter-se a matriz de inter-covariância $\underline{\mu}_y$, associada ao processo de resposta em termos das coordenadas modais $\underline{y}(t)$, tendo em conta que

$$\mu_{ij}^y = \mu_{ij}^{y_0} = R_{ij}^{y_0}(0) \quad (2.98)$$

ou que

$$\mu_{ij}^y = \mu_{ij}^{y_0} = 2 \int_0^\infty \text{Re}[\underline{S}_{ij}^{y_0}(f)] df \quad (2.99)$$

Deste modo, tendo presente a transformação linear expressa por (2.18) pode finalmente obter-se

$$\underline{\mu}_q = \underline{\phi} \underline{\mu}_y \underline{\phi}^T \quad (2.100)$$

2.3 - CAMPO DE APLICAÇÃO DAS RELAÇÕES GERAIS EXCITAÇÃO-RESPOSTA. O PROBLEMA DA IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS

Nas secções anteriores foram estabelecidas as relações excitação-resposta que caracterizam o comportamento dinâmico de sistemas lineares. Como se pode constatar, estas relações envolvem características essenciais da *excitação* do *sistema* propriamente dito e da *resposta*, naturalmente função da excitação que lhe foi aplicada.

Em face deste conjunto de relações, três tipos básicos de problemas podem colocar-se:

1. *O problema directo*, que consiste em caracterizar a resposta, conhecendo as propriedades da excitação e as características do sistema;
2. *O problema inverso*, cujo objectivo é a caracterização da excitação a partir do conhecimento das características do sistema e da resposta;
3. *O problema da identificação de sistemas*, que consiste na caracterização das propriedades do sistema, a partir do conhecimento da excitação e da resposta.

O objectivo do presente trabalho enquadra-se no terceiro problema mencionado, de identificação de sistemas, o qual pode ser caracterizado de uma forma mais genérica com base no diagrama apresentado na Figura 2.5, de acordo com as referências [85,125].

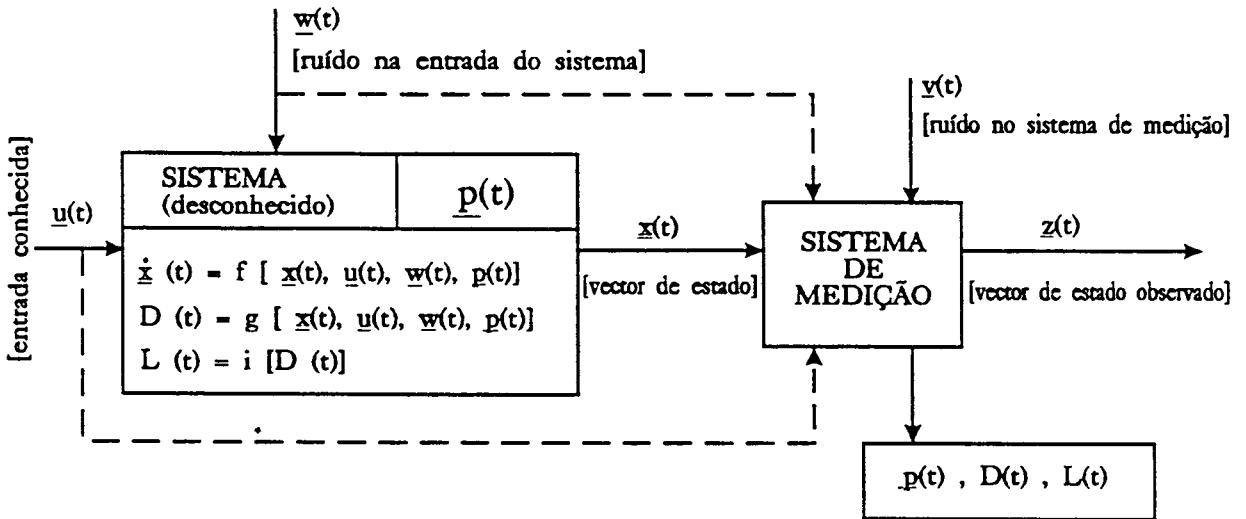


Figura 2.5 - Problema geral da identificação de sistemas (adaptado de Sage [125]).

Neste esquema, o sistema tem um comportamento desconhecido e é caracterizado por um conjunto de equações diferenciais de ordem também desconhecida, $\dot{\underline{x}}(t) = f[\underline{x}(t), \underline{u}(t), \underline{w}(t), \underline{p}(t)]$, em que intervêm a excitação $\underline{u}(t)$ o ruído $\underline{w}(t)$, não mensurável, que pode ou não atravessar o sistema, o vector $\underline{p}(t)$, cujas componentes representam os parâmetros do sistema, dependentes em geral do instante t e, finalmente, o vector de estado $\underline{x}(t)$, caracterizando a resposta às acções actuates.

A quantificação do vector $\underline{p}(t)$ passa pela observação do vector de estado $\underline{x}(t)$ e da entrada do sistema $\underline{u}(t)$.

Sucedendo ainda que, no decorrer de um ensaio, outras fontes de ruído $v(t)$ podem afectar o sistema de medição corrompendo o sinal captado, obtendo-se assim uma versão $\underline{z}(t)$ do vector de estado observado dada por $\underline{z}(t) = h[\underline{x}(t), \underline{u}(t), \underline{w}(t), \underline{p}(t), v(t)]$. Em resultado das incertezas associadas à presença de ruído nas séries observadas, a obtenção das componentes do vector $\underline{p}(t)$ degenera num problema de estimação.

Um outro aspecto de grande importância prende-se com o facto de a medição da resposta estrutural ser normalmente realizada para baixos níveis de excitação, o que se deve não só às limitações do equipamento por meio do qual esta é aplicada (questão essencial em estruturas de grande porte), mas ainda ao interesse em não introduzir dano na estrutura. Se as características assim extraídas do modelo podem considerar-se válidas, em muitos casos,

para as condições normais de utilização, a sua aplicação à descrição do mesmo sistema quando sujeito a elevados níveis de excitação, como por exemplo os decorrentes da acção de sismos, já será questionável pois, como se sabe, a resposta estrutural, linear ou fracamente não-linear em situações correntes, pode registar nessas circunstâncias uma forte incursão em regime plástico, tornando-se os mecanismos de dissipação de energia completamente diferentes.

Daí que Liu [85] tenha proposto a inclusão no problema da identificação de sistemas de um conjunto de características tradutoras do *estado de degradação da estrutura* ("damage state"), susceptível de ser caracterizado por uma *função de dano*, $D(t)$, e por uma *função de fiabilidade* ("reliability measure"), $L(t)$.

Embora a quantificação destas duas funções apresente elevada complexidade, assumindo eventualmente um carácter semi-empírico, a sua inclusão no problema da identificação de sistemas confere-lhe uma nova dimensão, porquanto abre uma via de abordagem dos problemas de degradação estrutural e de quantificação da segurança.

No trabalho aqui apresentado apenas uma parte deste relativamente novo e vasto campo que é a Identificação de Sistemas é abordado: a que se refere aos sistemas físicos ideais, caracterizados pela linearidade e pela invariância temporal dos seus parâmetros. Além disso, apenas três tipos de acções são utilizadas: as determinísticas, as aleatórias estacionárias e as aleatórias transientes.

Note-se que este tipo de abordagem é válido também para os sistemas fracamente não-lineares, sendo ainda possível a sua extensão a sistemas com comportamento fortemente não-linear, mediante a segmentação de séries observadas em troços nos quais se supõe haver linearidade do comportamento [83,85].

Por outro lado, a relativa simplicidade dos métodos de identificação aplicáveis a sistemas lineares face a abordagens que contemplem a não-linearidade do comportamento [10,112,134] faz com que na prática a sua utilização seja generalizada.

De assinalar que é ainda abordada neste trabalho uma questão particular da Identificação de Sistemas, correspondente à identificação de parâmetros dinâmicos em estruturas sujeitas a acções não facilmente mensuráveis. Esta situação é bastante corrente no estudo de edifícios de grande porte, ou de barragens, já que a concepção e utilização de excitadores capazes de induzir vibrações de amplitude significativamente superior às vibrações produzidas pelas acções ambientais torna-se demasiado onerosa. Deste modo e, desde que os sensores de medida tenham sensibilidade suficiente para detectar as vibrações ambientais, é possível a utilização desta forma de excitação no âmbito da aplicação de técnicas de identificação.

No caso de apenas ser conhecida a resposta estrutural, a solução do problema envolve no entanto o estabelecimento de algumas hipóteses relativas à caracterização probabilística da excitação, admitindo-se habitualmente que esta é idealizada através de um processo estocástico estacionário de densidade espectral constante numa dada gama de frequências (ruído branco de banda limitada).

CAPÍTULO 3

EXCITAÇÃO E MEDIÇÃO DE VIBRAÇÕES EM ESTRUTURAS

INTRODUÇÃO

Na secção 2.3 do capítulo anterior efectuou-se um enquadramento do problema geral da Identificação de Sistemas, tendo-se delimitado o objectivo central deste trabalho, que consiste afinal em sistematizar e desenvolver técnicas experimentais e numéricas por meio das quais as características dinâmicas de uma estrutura funcionando em regime linear possam ser estimadas.

Viu-se ainda nesse capítulo que a identificação das propriedades dinâmicas dos chamados *sistemas ideais* é geralmente realizada a partir de um conjunto de medições da resposta a uma excitação aplicada (da qual são igualmente obtidas medidas), através da construção de uma matriz de funções de transferência sobre as quais incidem as técnicas numéricas destinadas à obtenção dos parâmetros dinâmicos do sistema.

Neste capítulo, descrevem-se as principais técnicas de excitação utilizadas na identificação de parâmetros dinâmicos em estruturas, referindo-se as componentes mais importantes de um sistema de excitação e medição de vibrações.

Descreve-se ainda o sistema de excitação e medição que nos últimos anos tem sido desenvolvido na FEUP.

3.1 - TÉCNICAS DE EXCITAÇÃO DA ESTRUTURA

A excitação constitui um aspecto fundamental na análise experimental, já que é da sua ocorrência que resulta a vibração da estrutura e a inerente mobilização das suas características dinâmicas.

Como, do ponto de vista da teoria dos sistemas lineares, a estimativa da função de transferência é independente do sinal caracterizador da acção aplicada, qualquer forma de excitação poderia, em princípio, ser utilizada no problema em questão. Existe, no entanto, um certo número de considerações práticas que faz com que uma escolha conveniente da forma de excitação permita melhorar grandemente a precisão das estimativas obtidas.

Nesta secção apresenta-se uma classificação possível das técnicas de excitação mais utilizadas, fazendo-se referência às principais vantagens e inconvenientes da sua aplicação.

De acordo com esta classificação [64], os sinais caracterizadores da excitação podem ser divididos em dois grupos fundamentais, onde se incluem, por um lado, os sinais ditos de "banda larga" e, por outro, os sinais de "banda estreita".

Como se pode ver no Quadro 3.1, os sinais de "banda larga" são ainda subdivididos em três grupos: os sinais não-periódicos, periódicos e transientes. Quanto aos sinais de "banda estreita", há a considerar os de varrimento em seno lento ("swept sine") e os de varrimento sinusoidal por incrementos ("stepped sine").

Quadro 3.1 - Classificação dos principais tipos de excitação.

SINAIS DE "BANDA LARGA"		SINAIS DE "BANDA ESTREITA"
Não-periódicos	- Aleatório puro	- Varrimento em seno lento ("swept sine")
Periódicos	- Pseudo-aleatório - Aleatório periódico - "Periodic chirp"	
Transientes	- Aleatório transiente - "Burst chirp" - Impulso	- Varrimento sinusoidal por incrementos ("stepped sine")

A escolha de uma forma de excitação determina de imediato o equipamento a utilizar, bem como as características gerais do ensaio. Assim, por exemplo, a escolha de sinais de banda estreita conduz, como adiante se verá, à construção de funções de resposta em frequência (FRF's) ponto por ponto, o que se traduz numa substancial morosidade do ensaio, ao passo que a escolha de sinais de "banda larga" permite a construção das FRF's de uma só vez, embora exija normalmente o recurso a médias, de forma a reduzir a variância das estimativas obtidas.

a) Excitação não-periódica

Este tipo de excitação engloba os chamados sinais aleatórios puros, de natureza Gaussiana, com conteúdo espectral numa banda de frequências a definir.

Este sinal é aplicado usualmente através de um gerador de ruído e constitui a forma mais apropriada de excitação em sistemas que exibam um certo grau de não-linearidade, sendo as distorções produzidas por este tipo de comportamento atenuadas no inevitável processo de suavização realizado com médias de sinais.

O principal inconveniente da utilização deste sinal como forma de excitação, é o efeito de "leakage", fenómeno que no Capítulo 4 será abordado em detalhe e que ocorre em consequência da não periodicidade do sinal. Como será ainda referido nesse capítulo, esta forma de erro poderá minorar-se pela aplicação de técnicas específicas, de que se destacam as chamadas "janelas de dados".

A Figura 3.1 refere-se à representação no tempo e em frequência de um sinal aleatório puro.

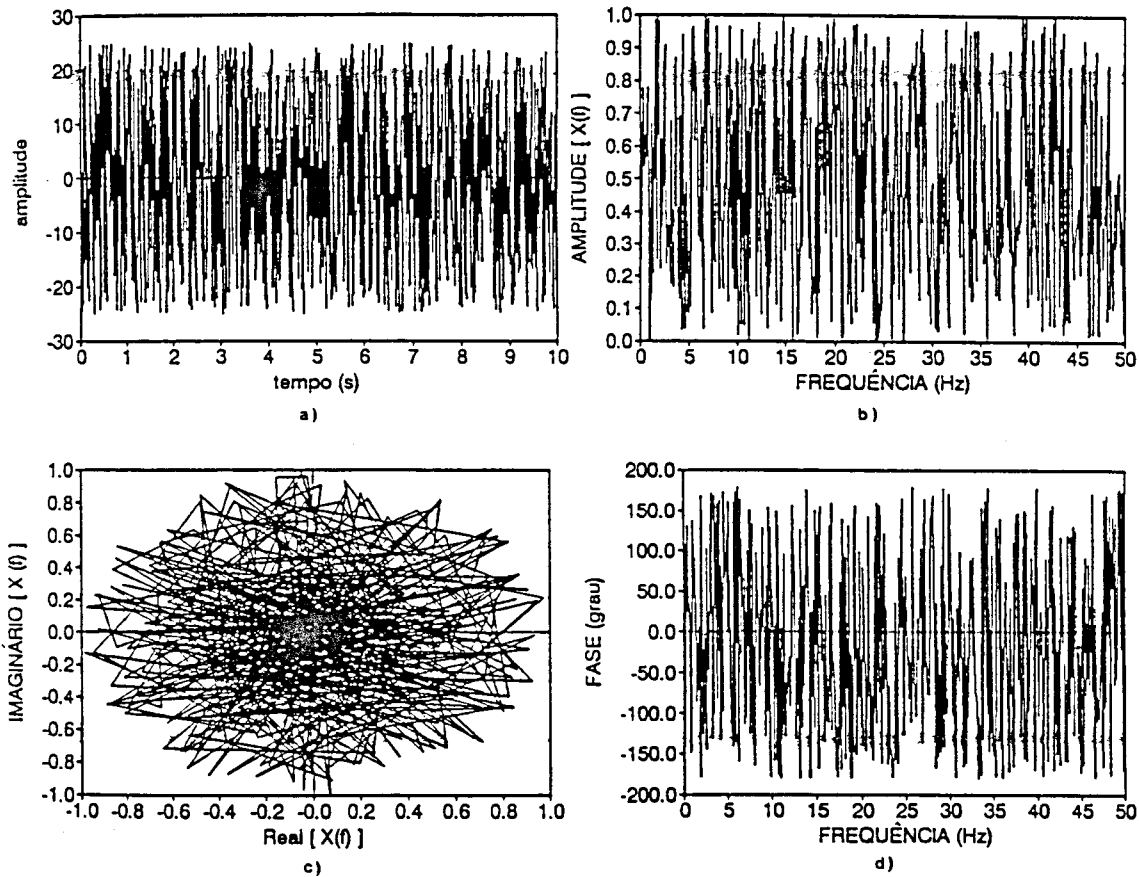


Figura 3.1 - Sinal aleatório puro: a) representação temporal; b) representação em frequência da amplitude; c) representação da componente espectral real versus componente espectral imaginária; d) representação em frequência da fase.

b) Excitação periódica

b.1) Sinal pseudo-aleatório

Um sinal pseudo-aleatório obtém-se através do somatório dos contributos de todos os harmónicos de amplitude unitária e frequência múltipla do intervalo Δf usado na sua descrição espectral, variando a fase correspondente de forma aleatória no intervalo $[0, 2\pi]$ de acordo com uma distribuição uniforme. Como se verá no próximo capítulo, um sinal deste tipo é periódico, não ocasionando consequentemente qualquer efeito de "leakage", o que se traduz em menores erros na representação em frequência da excitação e, consequentemente, na caracterização da função de resposta em frequência.

Apesar de não conduzir a uma eliminação das distorções induzidas pela eventual não-linearidade de comportamento da estrutura através de uma suavização realizada com

médias de vários sinais (o que se deve ao facto de em todos os sinais serem induzidas vibrações nas mesmas frequências e com idêntica amplitude), a utilização de um sinal pseudo-aleatório na excitação de um sistema linear exige a realização de médias de um número de registos inferior ao exigido no caso de o sinal ser aleatório puro, o que torna o ensaio mais rápido. Um exemplo deste tipo de sinal é apresentado na Figura 3.2.

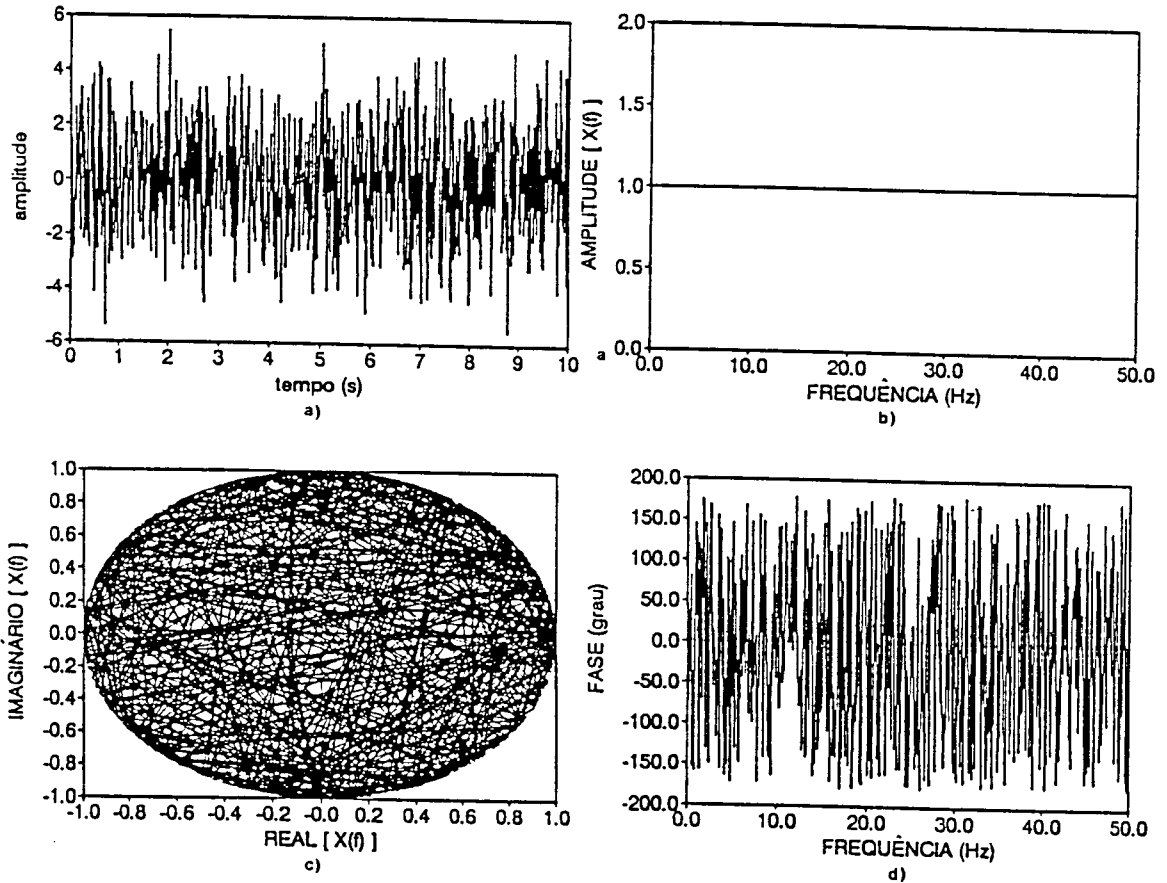


Figura 3.2 - Sinal pseudo-aleatório: a) representação temporal; b) representação em frequência da amplitude; c) representação da componente espectral real versus componente espectral imaginária; d) representação em frequência da fase.

b.2) Sinal aleatório periódico

À semelhança do sinal pseudo-aleatório, este sinal apenas apresenta componentes nos harmónicos cuja frequência é múltipla do incremento Δf usado na sua descrição em frequência. No entanto, a amplitude de cada harmónico é agora aleatória, sendo ainda cada registo constituído por um segmento que se repete várias vezes. Um exemplo de um sinal deste tipo vem ilustrado na Figura 3.3, sendo possível verificar [64] que esta forma de excitação encerra as vantagens de cada uma das anteriormente mencionadas, sem os inconvenientes que lhe estão associados, ou seja, atenua as distorções resultantes da não-linearidade do comportamento e não introduz erros por efeito de "leakage".

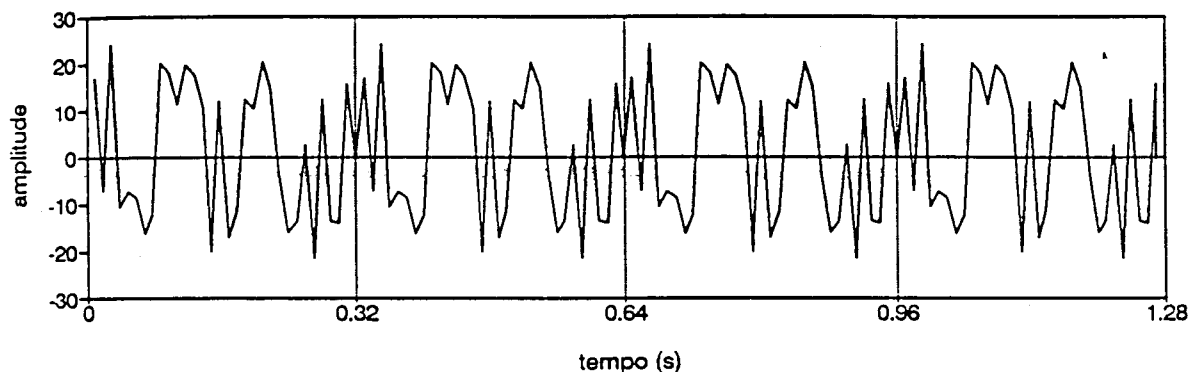


Figura 3.3 - Sinal aleatório periódico: representação temporal.

b.3) Sinal do tipo "periodic chirp"

Esta forma de excitação constitui um caso particular de um sinal pseudo-aleatório, em que se efectua um varrimento sinusoidal em frequência muito rápido dentro do período de observação. Este varrimento é repetido, de forma a tornar periódico o sinal, sendo as suas propriedades semelhantes às do sinal pseudo-aleatório. A Figura 3.4 refere-se à caracterização de um "periodic chirp" no domínio do tempo e da frequência.

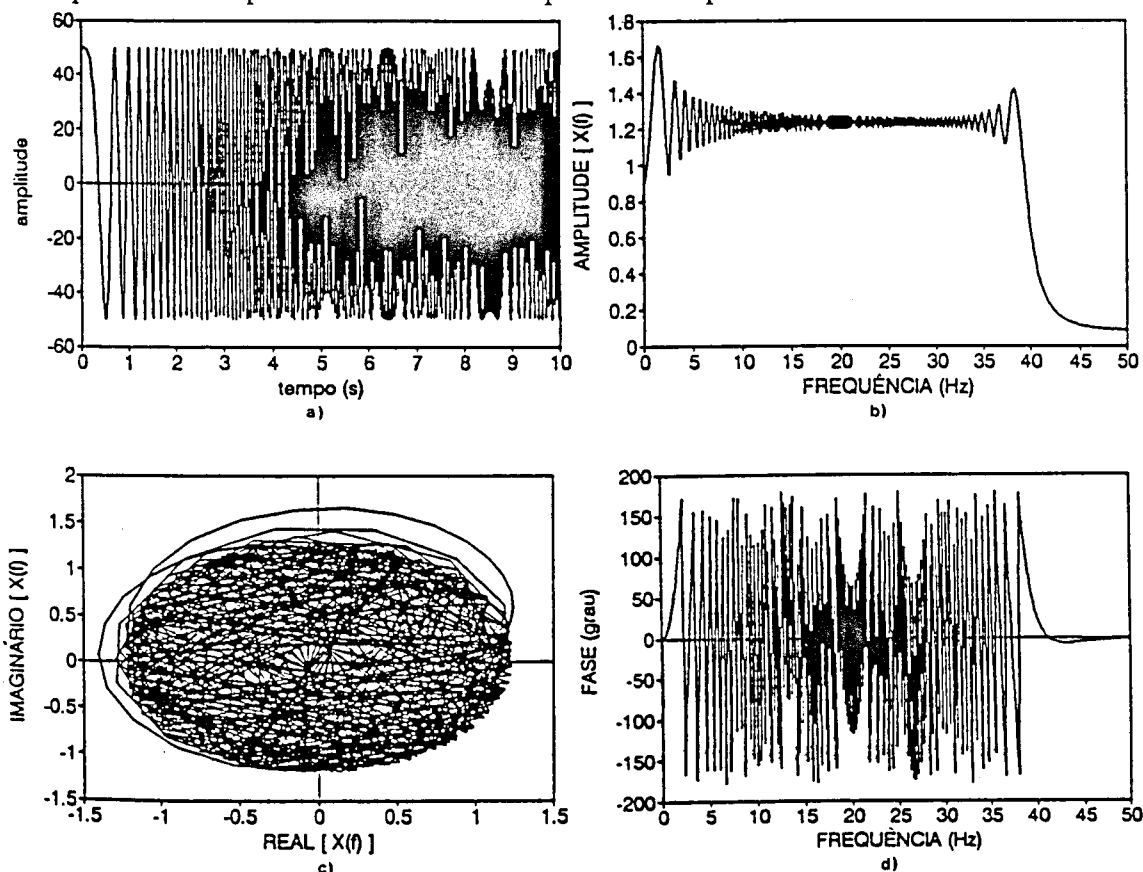
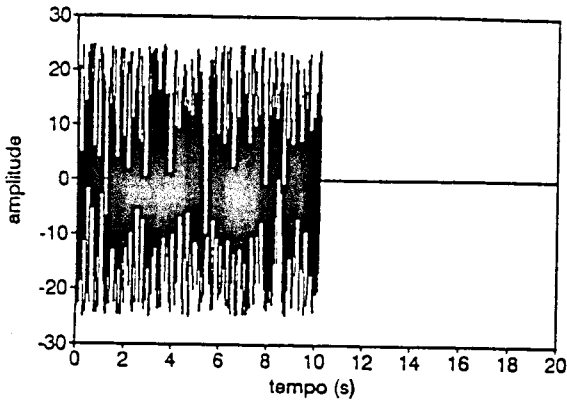


Figura 3.4 - Sinal "periodic chirp": a) representação temporal; b) representação em frequência da amplitude; c) representação da componente espectral real versus componente espectral imaginária; d) representação em frequência da fase.

c) *Excitação transiente*

c.1) Sinal do tipo aleatório transiente ("burst random")



Tem uma configuração idêntica à do sinal aleatório puro num segmento inicial, sendo de seguida interrompido, de forma que a resposta do sistema se possa anular no período de observação (v. Figura 3.5), permitindo atenuar o efeito de "leakage", considerado como o principal inconveniente associado ao sinal aleatório puro.

Figura 3.5 - Sinal do tipo aleatório transiente: representação temporal.

Atendendo à forma como é definido, o conteúdo espectral deste sinal é também semelhante, tanto em amplitude como em fase, ao do sinal aleatório puro, sendo esta a forma de excitação preferível nos ensaios, desde que exista equipamento capaz de a aplicar à estrutura em análise, conseguindo-se por essa via uma maior rapidez e simplicidade do ensaio, face às formas de excitação até aqui citadas [64].

c.2) Sinal do tipo "burst chirp"

Tal como o sinal aleatório transiente, este sinal é truncado antes de terminar o período de observação, apresentando na sua fase inicial a configuração tipo "chirp" (v. Figura 3.6). Relativamente a este, o "burst chirp" tem a vantagem de minimizar o erro por "leakage".

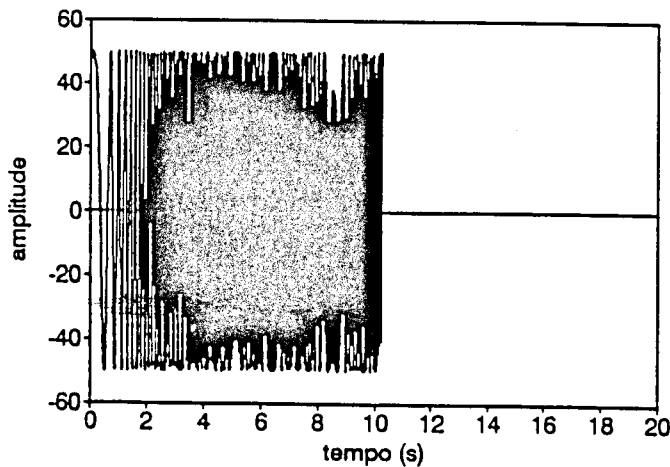


Figura 3.6 - Sinal do tipo "burst chirp".

c.3) Sinal impulsivo

Pode ser considerado como um sinal transiente de características determinísticas, que corresponde à actuação de uma força num espaço de tempo muito curto.

O conteúdo espectral deste sinal depende do tempo de actuação do impulso (quanto menor, mais larga é a banda de frequências com conteúdo espectral significativo), bem como da sua amplitude e configuração (estes 2 últimos factores interferem essencialmente na amplitude do espectro que lhe está associado).

A realização de ensaios usando uma excitação do tipo impulsivo está generalizada nos problemas de Engenharia Mecânica, o que se deve à grande rapidez da sua concretização, resultante de não haver necessidade de fixar um equipamento de excitação e de controlar a geração de um sinal. Apesar dos problemas decorrentes do efeito de "leakage" serem neste caso reduzidos em virtude de ser possível registar o anulamento da resposta dentro do intervalo de observação, existem alguns factores que podem contribuir para erros significativos na medição das funções de resposta em frequência, sendo de destacar a eventual falta de regularidade do impulso aplicado, habitual em operadores pouco experientes.

A Figura 3.7 ilustra a evolução temporal e a composição espectral de um sinal impulsivo.

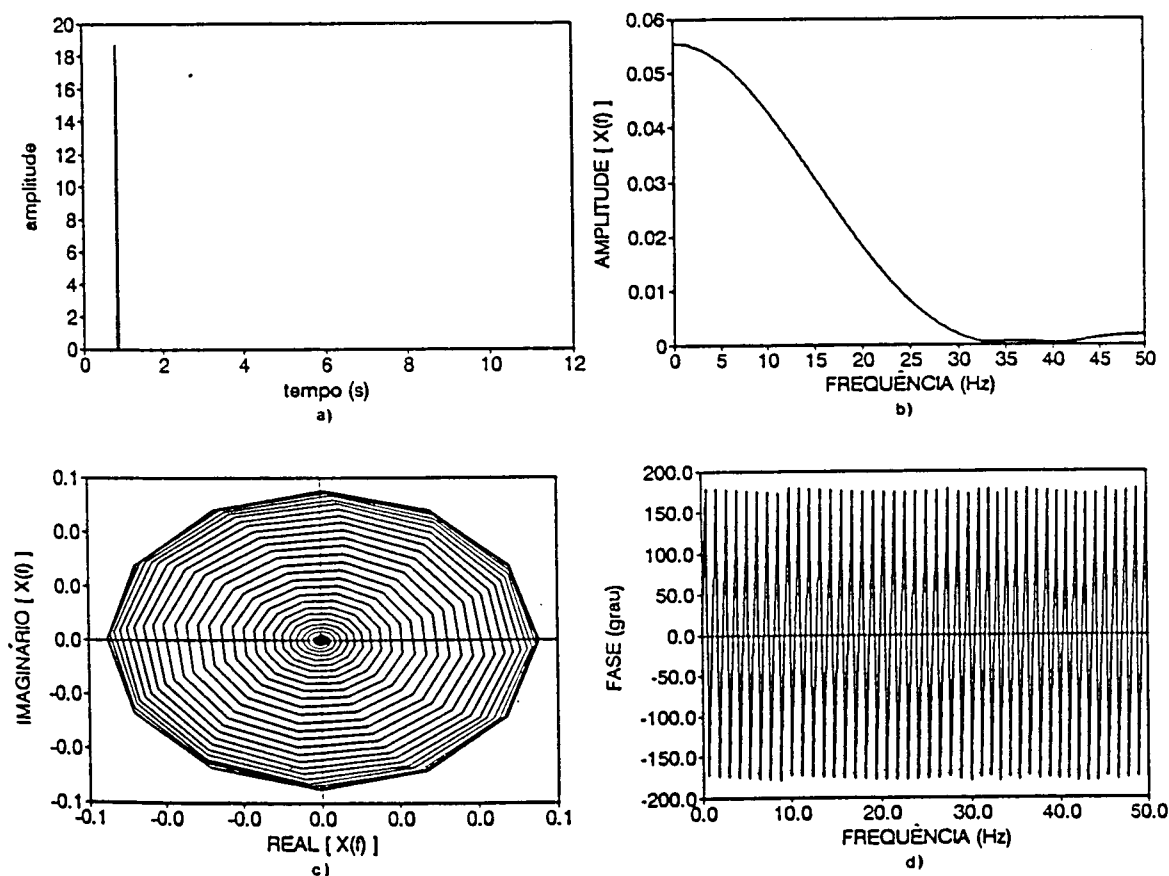


Figura 3.7 - Sinal do tipo impulsivo: a) representação temporal; b) representação em frequência da amplitude; c) representação da componente espectral real versus componente espectral imaginária; d) representação em frequência da fase.

d) Varrimento em seno lento ("swept sine")

Trata-se de uma excitação "pseudo-estacionária", que se caracteriza por uma senoide cuja frequência evolui muito lentamente com o tempo, de forma a que seja legítimo admitir que a resposta tem apenas componente estacionária, constituindo cada medição realizada ao longo do ensaio um sinal sinudoisal de frequência constante.

Como se compreende, a realização de um ensaio usando esta forma de excitação é extremamente morosa. Não obstante, a indução de vibrações na estrutura com uma frequência fixa em cada instante proporciona a mobilização dos modos ressonantes com grande rigor.

e) Varrimento sinusoidal por incrementos ("stepped sine excitation")

Esta forma de excitação resultou da descrita em d), fazendo variar a frequência da excitação sinusoidal de forma discreta. Na verdade, uma avaliação prévia das frequências de vibração da estrutura em análise com recurso a modelos numéricos simples, permite evitar o moroso processo de percorrer lenta e gradualmente uma banda de frequências. Note-se que, ainda assim, a necessidade de esperar pelo anulamento da componente transitória da resposta em cada frequência aplicada faz com que a aplicação desta técnica de excitação se revele substancialmente mais demorada do que qualquer das referidas nas alíneas a), b) e c).

Pelo facto de esta forma de excitação ter características essencialmente determinísticas, não é necessário realizar médias sobre vários registos efectuados, com a vantagem de, além disso, ser excelente a qualidade das FRF's obtidas. É fundamental no entanto prevenir ou reduzir a possibilidade de aparecimento de erros por "leakage", o que poderá conseguir-se actuando na frequência de amostragem do sinal, como se verá no próximo capítulo.

No Quadro 3.2 é apresentada de forma sumária uma análise comparativa, referida por Snoeys [129], relativa às diferentes técnicas de excitação mencionadas.

A escolha do tipo de técnica de excitação a utilizar deve ser baseada, não apenas nas propriedades de cada um dos sinais, mas também na disponibilidade de equipamento capaz de os produzir, tendo em consideração as características da estrutura a analisar.

Assim e no âmbito da Engenharia Mecânica, onde tipicamente são estudadas estruturas de dimensões reduzidas ou médias, é corrente a utilização dos sinais aleatório transiente e impulsivo.

Estruturas de grande porte são normalmente analisadas com recurso a um varrimento sinusoidal discreto, sendo cada vez mais utilizada, pela simplicidade introduzida no ensaio, a excitação de natureza ambiental que se supõe normalmente assumir as características de uma excitação do tipo aleatório puro.

Quadro 3.2 - Principais características das técnicas de excitação [129] (de + + +, muito bom, a ---, muito fraco).

		Tempo de ensaio	Custo da instrum.	Resolução em frequência	Aproximação linear das não-linearidades	Erro por "leakage"
SINAIS DE "BANDA LARGA"	<u>Não periódicos:</u>					
	Aleatório puro	++	+	-	+++	--
	<u>Periódicos:</u>					
	Pseudo-aleatório	++	-	-	-	+++
	Aleatório periódico	+	-	-	+++	+++
	"Periodic chirp"	++	+	+	-	+++
	<u>Transientes:</u>					
	Aleatório transiente	++	-	-	+++	+
	"Burst chirp"	+	-	+	-	-
	Impulso	+++	+++	-	---	+
SINAIS DE "BANDA ESTREITA"	Varrimento em seno lento	---	++	++	--	++
	Varrimento sinusoidal por incrementos	--	++	+++	-	+++

3.2 - COMPONENTES DE UM SISTEMA DE EXCITAÇÃO E MEDIÇÃO DE VIBRAÇÕES

A Figura 3.8 representa de forma esquemática as principais componentes actualmente incluídas num sistema de excitação e medição de vibrações. Estas componentes podem ser individualizadas em dois grupos, formando os designados *subsistemas de excitação* e de *medição de vibrações*.

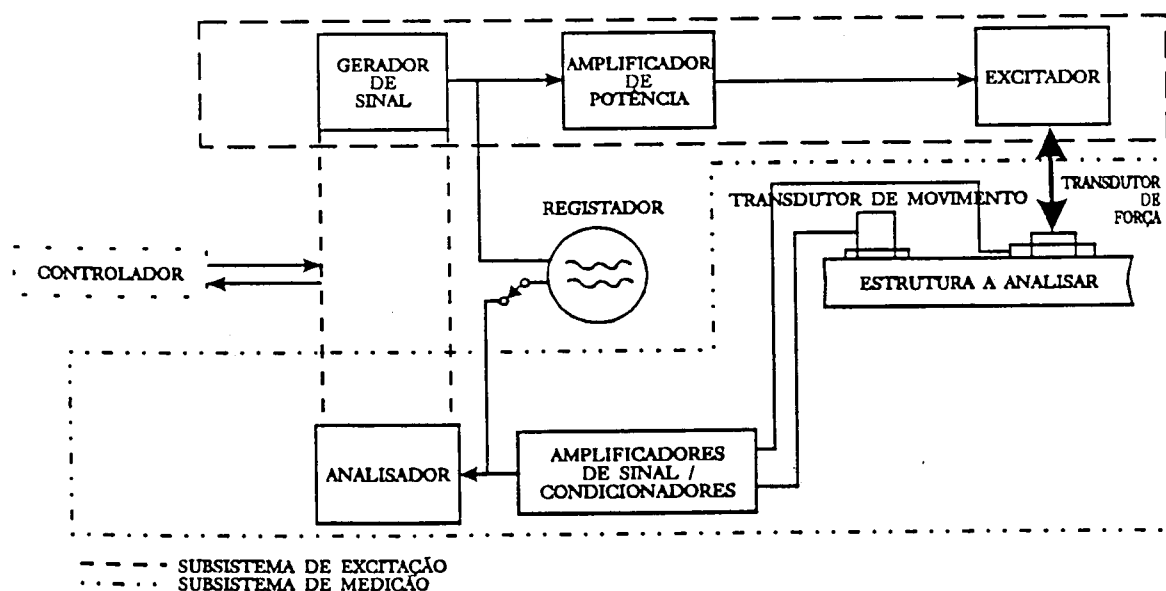


Figura 3.8 - Representação esquemática de um sistema de excitação e medição de vibrações [43].

3.2.1 - Subsistema de excitação

Tipicamente, este subsistema é constituído pelas 3 unidades fundamentais indicadas na Figura 3.8: *gerador de sinal, amplificador de potência e excitador* propriamente dito. Todavia, nem sempre estão presentes estas 3 componentes, havendo inclusivamente casos em que a realização de um ensaio se dá sem utilização de um subsistema de excitação: aqueles em que se utilizam as acções ambientais, resultantes do vento, do tráfego rodoviário ou ferroviário, do funcionamento de equipamentos mecânicos, de ondas marítimas ou de outras fontes presentes na envolvente da estrutura em análise. Atendendo às características aleatórias destas acções e, em geral, à presença simultânea de várias delas, é usual admitir que a excitação da estrutura é do tipo aleatório puro, não sendo normalmente possível efectuar a sua medição.

Embora de realização mais expedita e envolvendo menores custos de montagem e equipamento, a excitação ambiental conduz a erros substancialmente superiores aos obtidos na identificação de parâmetros dinâmicos mediante utilização de uma fonte conhecida de excitação, razão por que, sempre que possível, se recorre aos chamados *ensaios de vibração forçada*.

As técnicas de excitação mais conhecidas e utilizadas em problemas do âmbito da Engenharia Civil são as que se baseiam na fixação à estrutura de um vibrador, ou na aplicação de um martelo de impulsos.

Os vibradores actualmente utilizados em ensaios dinâmicos podem ser de um dos seguintes tipos:

- mecânicos;
- electromagnéticos (ou electrodinâmicos);
- electrohidráulicos.

a) Vibradores mecânicos

Dos vários sistemas mecânicos possíveis, destacam-se os chamados *vibradores de massas excêntricas*, capazes de aplicar forças sinusoidais elevadas, normalmente variando entre os 400N e os 20000N [20] em frequências na gama de 1 a 25Hz. Estes excitadores são constituídos normalmente por duas massas montadas simetricamente em relação a um plano vertical (Figura 3.9), rodando em direcções opostas.

Em consequência do movimento de rotação imposto com uma velocidade angular w , gera-se sobre cada massa m uma força centrífuga, de valor $F = m w^2 r$, sendo r a distância do centro de gravidade da massa ao eixo vertical de rotação.

Como se pode ver na Figura 3.9, as componentes horizontais $m\omega^2 r \cdot \sin(\omega t)$ das forças sobre as duas massas anulam-se sendo então a resultante uma força vertical de valor

$$F(t) = 2m\omega^2 r \cos(\omega t) \quad (3.1)$$

que é transmitida à estrutura por intermédio dos apoios do vibrador (que consistem normalmente em chumbadouros inseridos na estrutura, aos quais este é aparafusado).

É igualmente possível a aplicação de forças horizontais, quando a montagem da Figura 3.9 for realizada num plano horizontal. Alguns vibradores permitem a aplicação alternativa de forças verticais ou horizontais, sendo característica de todos a perfeita direccionalidade da força aplicada.

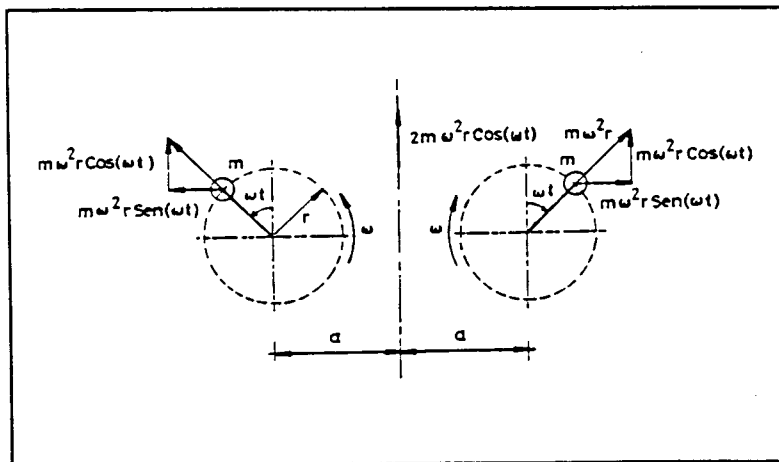


Figura 3.9 - Vibrador mecânico de massas excêntricas (representação esquemática).

É usual ainda dividir cada uma das massas excêntricas m num conjunto de outras massas de menor dimensão, que podem ser fixas em diferentes posições ao longo do braço giratório, variando-se desta forma a amplitude da força aplicada, o que permite dar alguma flexibilidade à utilização do vibrador.

Note-se ainda que, pelo facto de a amplitude de $F(t)$ variar com o quadrado da frequência ω , a força aplicada é relativamente reduzida nas frequências baixas, assumindo em contrapartida valores muito elevados em frequências altas, o que constitui uma importante limitação ao emprego deste aparelho, já que a sua utilização em estruturas no âmbito da Engenharia Civil exige a aplicação de forças relativamente elevadas em baixas frequências. Um outro inconveniente associado aos vibradores mecânicos, reside na impossibilidade de alterar o valor da força aplicada no decurso do ensaio para uma frequência específica de excitação, sem parar o aparelho.

Pelo facto de a força produzida pelo vibrador ser transmitida à estrutura através dos seus apoios, há dois aspectos cuja consideração é fundamental:

- em primeiro lugar, é essencial a perfeita fixação do vibrador à estrutura, de forma a reduzir eventuais perdas na transmissão da força gerada;
- por outro lado, a impossibilidade de proceder à medição da força efectivamente transmitida tem por consequência que normalmente seja estimada a sua amplitude, com base nas características do vibrador, sendo apenas efectuada, quando possível, uma medição da fase.

Refere-se por fim que, embora não seja estritamente necessário, há grandes vantagens na ligação do sistema de medição (neste caso, constituído exclusivamente pelo excitador) ao *controlador*, aparelho que tem a função de gerir todo o processo de excitação e medição de vibrações, já que dessa forma há a possibilidade de seleccionar exactamente a frequência de vibração a aplicar e, inclusivamente, de programar a evolução dessa frequência, aspecto fundamental quando se pretenda realizar um varrimento sinusoidal lento.

b) Vibradores electrodinâmicos

O princípio básico de funcionamento destes aparelhos é o da geração de uma força num condutor de corrente que atravesse um campo magnético alternante perpendicular à sua direcção. Na Figura 3.10 ilustra-se o processo: uma corrente de intensidade I é criada num gerador de sinal e injectada no condutor de corrente, constituído por uma bobina, através de um amplificador de potência. O atravessamento do campo magnético de densidade de fluxo B leva à geração de uma força F , proporcional ao valor instantâneo da corrente e com direcção perpendicular às direcções do campo magnético e da corrente.

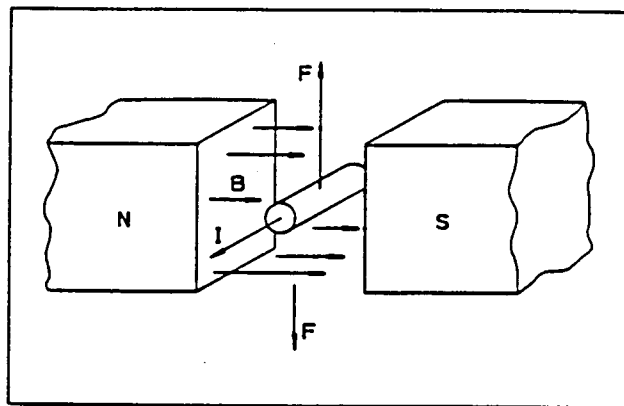


Figura 3.10 - Princípio da geração de forças num excitador electrodinâmico.

Do que foi dito, pode concluir-se ser possível, usando um excitador electrodinâmico, a indução de vibrações de qualquer tipo: periódicas, não-periódicas ou transientes; variando a gama de frequências mobilizadas em função das características do aparelho, numa gama de 0 até cerca de 50kHz.

Pelo facto de ser possível controlar independentemente a amplitude da força aplicada e a configuração do sinal, este aparelho possui maior flexibilidade de utilização que o excitador mecânico.

Há no entanto que ter em consideração os seguintes aspectos:

- os limitados valores das forças máximas aplicadas por intermédio destes vibradores (tanto quanto se conhece, não existem no mercado excitadores deste tipo capazes de comunicar à estrutura uma força superior a cerca de 500N numa gama de 0 a 100Hz) fazem com que a sua utilização se reduza a estruturas de dimensões pequenas (ensaios em modelos laboratoriais) ou médias (por exemplo, reservatórios ou lajes de dimensões moderadas);
- em geral, a força gerada pelo vibrador é distinta da aplicada à estrutura, facto que resulta da impedância do próprio aparelho, variável com a velocidade por este adquirida quando vibra solidariamente com a estrutura, e de valor máximo quando o aparelho opera numa frequência próxima de uma ressonância da estrutura [20,43]. Em consequência, a força efectivamente transmitida assume valores muito baixos sobre as ressonâncias, proporcionando nessa zona níveis de sinal que podem tornar-se inferiores ao nível de ruído, contrariamente ao que seria desejável. Além disso, torna-se fundamental a interposição, entre o vibrador e a estrutura, de um aparelho que permita medir a força que lhe é efectivamente transmitida.

c) Vibradores electrohidráulicos

Nestes aparelhos, a amplificação do sinal (proveniente de um gerador de sinal) é realizada por via hidráulica, através da circulação de um fluido a elevada pressão que origina o movimento do actuador e, portanto, da estrutura [20].

Em comparação com os excitadores mecânicos, estes aparelhos possuem a vantagem de permitir a aplicação de uma força qualquer, cuja amplitude não varie necessariamente com o quadrado da frequência de excitação, e caracterizada por um conteúdo espectral variável numa gama de frequências entre 0 e cerca de 150Hz.

Verifica-se no entanto que, para frequências baixas, é necessário utilizar massas de reacção elevadas, o que se traduz em grandes deslocamentos do actuador e, consequentemente, numa redução da força efectivamente transmitida à estrutura, exigindo, à semelhança do excitador electrodinâmico, a medição da excitação no seu ponto de aplicação.

Os principais inconvenientes associados à utilização de vibradores electrohidráulicos são, por um lado, o elevado custo e, por outro, o grande peso e volume ocupado pelo sistema hidráulico e vibrador, que exigem um transporte e acondicionamento próprio (refira-se, a título de curiosidade, que o excitador desenvolvido no Bundesversuchs - und Forschungsanstalt Arsenal (BVFA) em Viena [47], com um peso total de 85kN, é capaz de aplicar uma excitação na gama de 0,5Hz a 60Hz, sendo as forças sinusoidais dinâmicas máximas de 900N a 0,5Hz e 15000N a 8Hz e as dimensões do veículo de transporte próprio de 8x2,4x3,8m³).

d) Martelo de impulsos

A utilização de um martelo de impulsos permite aplicar excitações do tipo impulsivo que, como na secção anterior se referiu, constituem uma das formas de excitação mais generalizadas em ensaios efectuados no âmbito da Engenharia Mecânica.

O martelo de impulsos é um dispositivo com a forma de um martelo, munido em geral de um conjunto de "cabeças" e "pontas" (Figura 3.11), através das quais é possível modificar o conteúdo espectral da excitação aplicada.

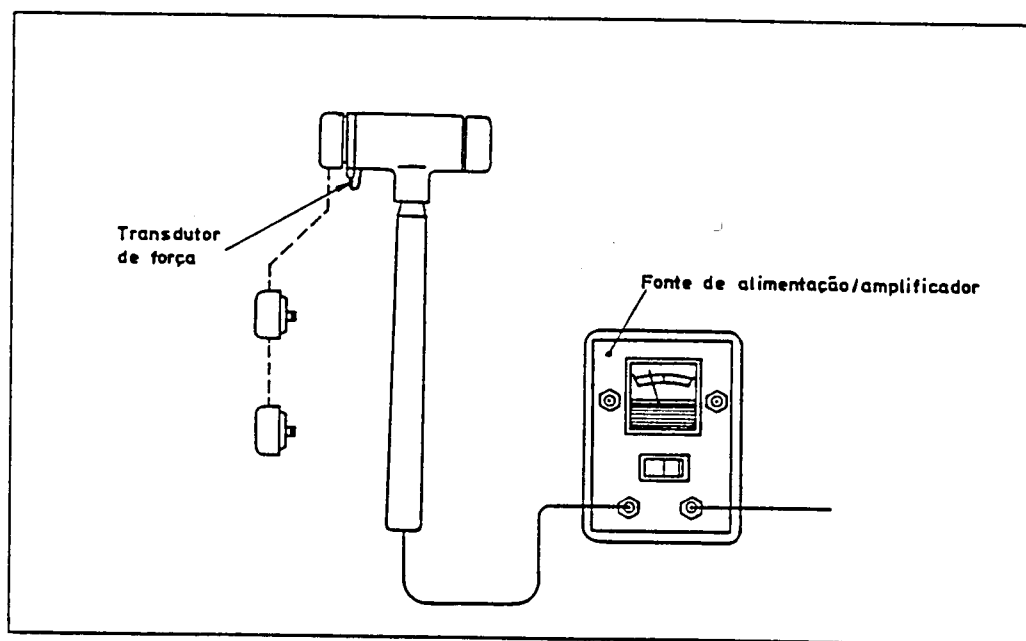


Figura 3.11 - Martelo de impulsos.

A excitação produzida por um martelo de impulsos tem uma configuração típica traduzida pela Figura 3.12.a), dependendo o seu valor máximo da massa sísmica ("cabeça" do martelo) e da correspondente velocidade no momento do impacto. Por outro lado, a composição espectral do sinal depende da duração do impulso, sendo a zona quase plana do espectro correspondente (Figura 3.12.b)) tanto mais extensa, quanto mais curto é o impulso, ou seja, quanto maior a dureza da "ponta" utilizada.

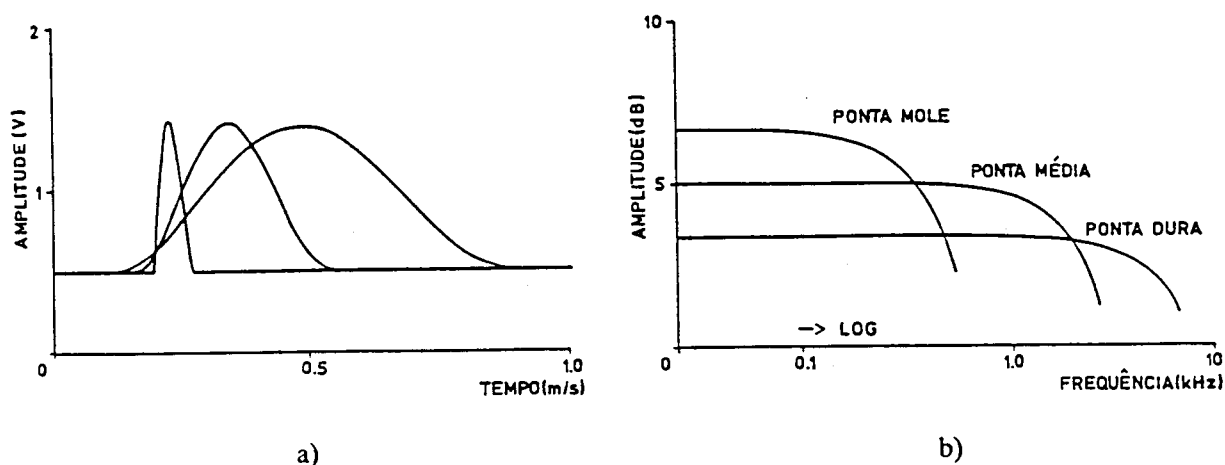


Figura 3.12 - a) Representação temporal de impulsos aplicados com diferentes "pontas" e b) respectivo espectro de Fourier.

A utilização desta técnica de excitação não teria qualquer interesse se não fosse possível medir a força aplicada. Daí que tradicionalmente lhe seja incorporado um sensor de força.

Embora a utilização do martelo de impulsos se revele muito prática e económica, quer em virtude da maior facilidade de transporte e utilização, quer do seu mais baixo custo, alguns inconvenientes são apontados a esta técnica de excitação, designadamente:

- o de não existirem no mercado martelos de impulsos capazes de mobilizar vibrações em estruturas de grande porte. Na verdade, o martelo de impulsos adquirido pela FEUP (v. secção 3.3.1) que, segundo indicação do fabricante, é adequado à realização de ensaios em estruturas dessa natureza, como edifícios, locomotivas, navios e fundações, apenas tem proporcionado resultados de qualidade em estruturas de porte médio;
- o de a configuração do impulso aplicado manualmente poder variar muito entre pancadas sucessivas e, especialmente, da sua deficiente aplicação poder resultar a introdução de ruído ou outros efeitos secundários susceptíveis de comprometer a qualidade das estimativas obtidas. Por este motivo, considera-se que nos ensaios realizados com recurso ao martelo de impulsos é fundamental a experiência do

operador. Surgiram recentemente, embora apenas em configurações próprias para estruturas de pequenas dimensões, martelos de impulsos munidos de dispositivos mecânicos através dos quais a aplicação da pancada é realizada automaticamente por um disparo, sendo assim possível melhorar substancialmente a qualidade dos ensaios realizados.

Descreveram-se até aqui os principais equipamentos de excitação utilizados tradicionalmente na análise dinâmica de estruturas. Todavia, limitações de diversa natureza nem sempre possibilitam a aquisição destes sistemas, bem como de todos os meios necessários à sua fácil utilização.

Daí que seja vulgar a indução de vibrações mediante o recurso a técnicas expeditas, como a designada *técnica de relaxação*, frequente em estruturas de grande altura e que consiste em afastar o sistema da sua posição de equilíbrio por intermédio de cabos posteriormente libertados, ou como a baseada na utilização de explosivos.

3.2.2 - Subsistema de medição de vibrações

3.2.2.1 - Transdutores

Tipicamente, as grandezas mecânicas a medir dizem respeito às forças aplicadas e ao movimento estrutural induzido, sendo este caracterizado através de deslocamentos, velocidades ou acelerações lineares.

Os instrumentos usados na medição destas grandezas são genericamente designados por *transdutores*, sendo por seu intermédio realizada a conversão de variações da grandeza mecânica medida em variações de outra quantidade física proporcional, normalmente uma tensão eléctrica [20, 136].

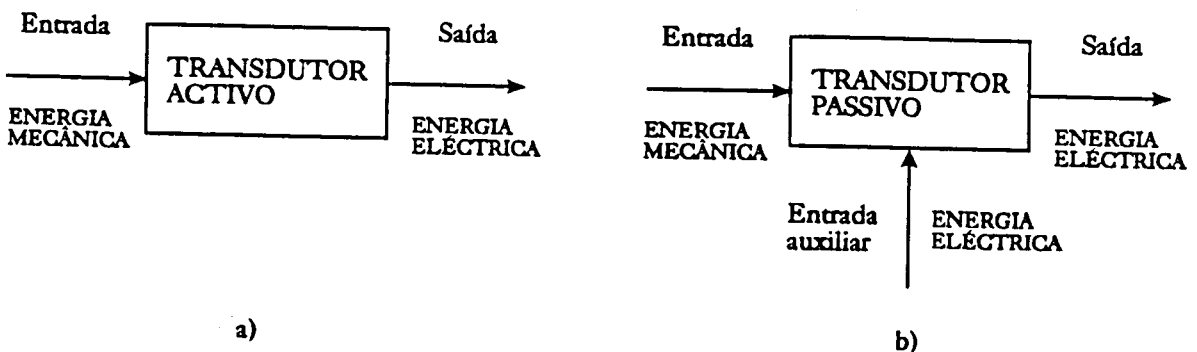


Figura 3.13 - Classes de transdutores.

É possível agrupar em duas grandes classes a enorme variedade de transdutores existentes: os *transdutores activos*, que convertem a energia mecânica da sua entrada em energia eléctrica (Figura 3.13.a)) e os *transdutores passivos*, cujo funcionamento exige o fornecimento de energia eléctrica (Figura 3.13.b)).

Pelo facto de a sua utilização se ter generalizado nos últimos anos e atendendo à sua grande versatilidade e excelentes características de funcionamento, apenas são apresentados neste trabalho os chamados *transdutores piezoeléctricos* (activos), cujo princípio básico assenta no facto de certos materiais, naturais ou cerâmicos, exibirem a propriedade de gerar uma carga eléctrica, quando submetidos a tensões mecânicas (Figura 3.14) [20].

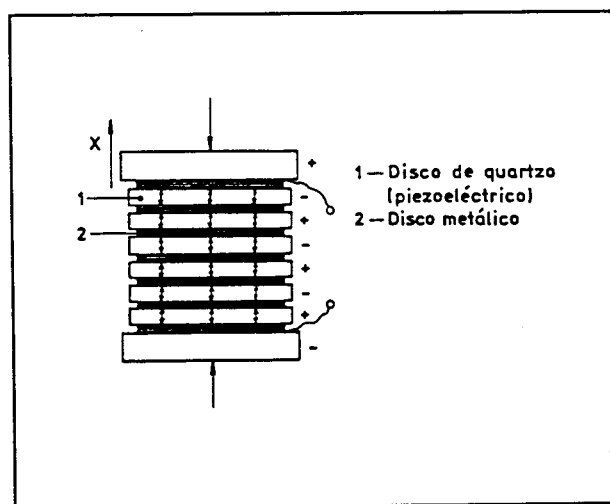


Figura 3.14 - Funcionamento de um material piezoeléctrico.

a) Transdutores de forças

O corte esquemático de um transdutor de forças apresentado na Figura 3.15 permite compreender o seu simples funcionamento: dois discos de material piezoeléctrico previamente comprimidos são submetidos à força F , gerando-se uma carga eléctrica de valor proporcional e em fase.

Em catálogos de fabricantes encontram-se sensores capazes de trabalhar numa larga gama de frequências (com frequências mínimas oscilando entre 0,0003Hz e 4Hz e máximas, entre 4kHz e 100kHz), susceptíveis de medirem forças máximas variáveis entre 45N e 60000N e com sensibilidades oscilando entre 0,025mV/N e 5000mV/N.

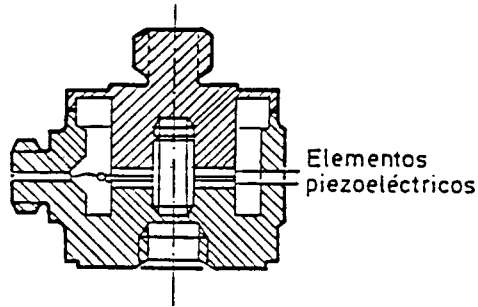


Figura 3.15 - Corte esquemático de um transdutor de forças (extraído de [17]).

b) Transdutores de movimento

Em termos teóricos, é indiferente que a medição do movimento seja realizada através de deslocamentos, velocidades ou acelerações.

Sabe-se no entanto que as medições realizadas em termos de deslocamentos dão um peso mais significativo às componentes de baixa frequência e que, pelo contrário, as medições efectuadas em termos de acelerações, dão um peso maior às componentes de frequência elevada. Por outro lado, a medição de velocidades fornece um indicador sobre o grau de severidade das acções presentes, já que esta grandeza se relaciona directamente com a energia do sinal.

Nos problemas colocados no âmbito da Engenharia Civil, que envolvem em geral baixas frequências, seria em princípio aconselhável a utilização de transdutores de deslocamento ou de velocidade. No entanto, em resultado da forma como são concebidos, estes transdutores possuem habitualmente grandes dimensões, sendo além disso substancialmente mais complexa e menos precisa a operação de diferenciação electrónica que eventualmente seja necessário fazer, do que a operação de integração por meio da qual se obtêm velocidades e deslocamentos a partir de registos de acelerações.

Desta forma e ainda porque os transdutores de acelerações, vulgarmente conhecidos por acelerómetros, apresentam um custo substancialmente mais baixo do que os restantes e têm excelentes sensibilidades, a sua utilização é cada vez mais corrente, razão por que apenas se faz aqui referência a estes aparelhos.

A Figura 3.16 ilustra vários tipos de configurações utilizadas na construção de acelerómetros. Em todas elas o transdutor pode ser associado a um oscilador de um grau de liberdade constituído por uma ou várias massas, designadas por *massas sísmicas*, associadas a elementos piezoelétricos que funcionam simultaneamente como mola, através de

deformações axiais (configuração c)) ou distorcionais (configurações a) e b)). Estes elementos encontram-se fortemente comprimidos por um anel, o que confere ao transdutor um elevado grau de linearidade, sendo além disso o amortecimento do sistema muito baixo [126].

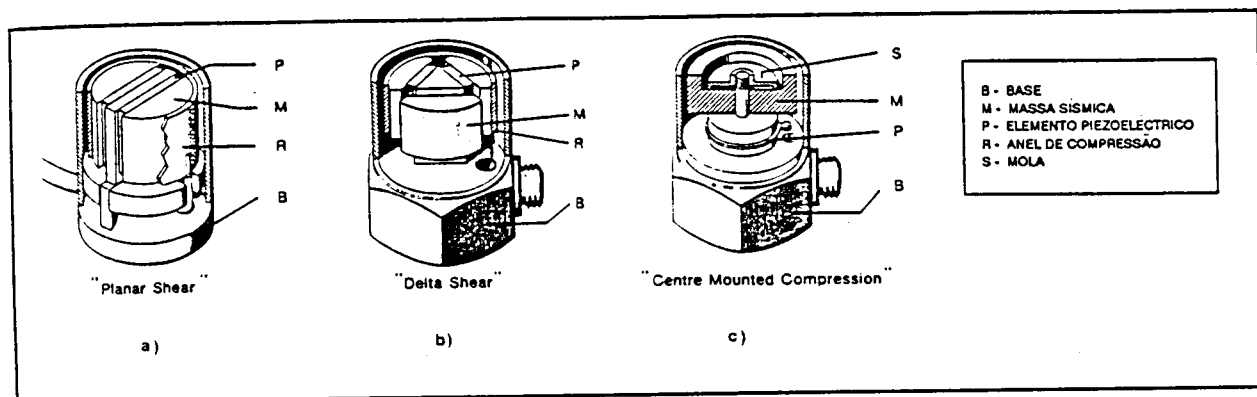


Figura 3.16 - Configurações possíveis usadas na construção de um acelerómetro (extraído de [126]).

O sinal eléctrico gerado nestes transdutores é proporcional à aceleração da estrutura no ponto e direcção de fixação, havendo no entanto que ter em atenção os seguintes aspectos:

- sendo o transdutor um sistema de 1 grau de liberdade, a sua resposta na vizinhança da frequência própria de ressonância (em regra muito elevada) perde a linearidade. Por este motivo, é usual definir-se para cada acelerómetro uma banda de frequências de funcionamento, cujo limite superior é da ordem de 30% da frequência própria do transdutor utilizado (Figura 3.17);
- ao induzir vibrações numa direcção, geram-se em geral vibrações na direcção transversal que afectam a medida, dizendo-se então que os acelerómetros apresentam uma *sensibilidade transversal*.

Embora este efeito tenha um peso substancialmente inferior ao da sensibilidade segundo o eixo de medição, sendo da ordem de 1% nos transdutores Brüel & Kjaer, a frequência de ressonância na direcção transversal é mais baixa (Figura 3.17), razão por que o seu efeito deverá ser tido em consideração (nos acelerómetros Brüel & Kjaer, assegura-se uma sensibilidade transversal inferior a 10% para frequências abaixo de 1/6 da frequência própria do transdutor).

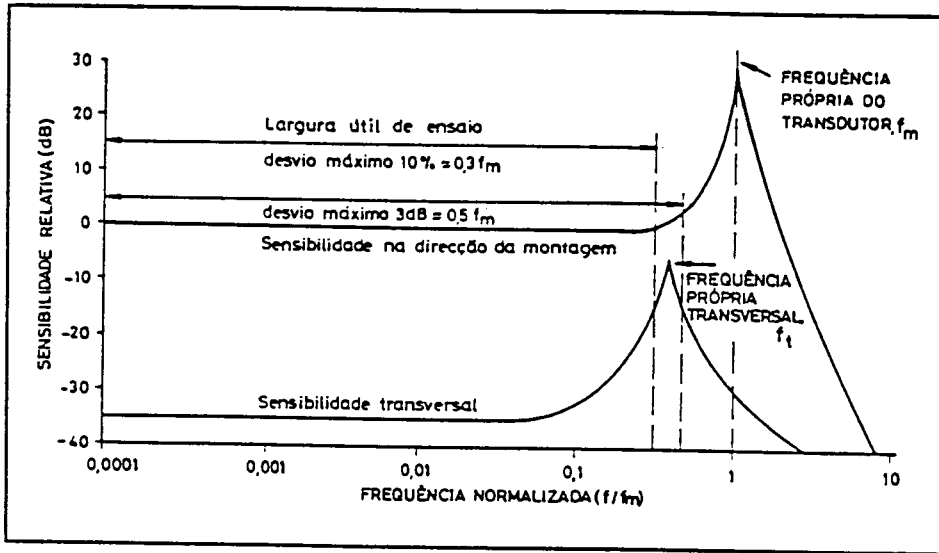


Figura 3.17 - Resposta de um acelerómetro em relação ao seu eixo médio e a um eixo transversal (extraído de [126]).

No que respeita às características de funcionamento encontradas em acelerómetros disponíveis no mercado, referem-se as seguintes:

- Gama de frequências: limite inferior de 0,01 a 0,1Hz; limite superior de 1 a 54kHz;
- Sensibilidade: entre 0,3mV/g e 1V/g
- Gama dinâmica: entre 0 e 20000 g

3.2.2.2 - Amplificadores / condicionadores de sinal

À saída do transdutor piezoeléctrico obtém-se um sinal analógico relativamente fraco, que se pretende tratar e armazenar, com a finalidade de extrair parâmetros dinâmicos relativos ao sistema analisado. Os *amplificadores* de sinal realizam a função de amplificar o sinal de forma a que este atinja o nível adequado para uma posterior aquisição e processamento pelo *analisador*, sem que se tornem significativos os efeitos de uma eventual atenuação do sinal ou de quaisquer interferências exteriores. Estes aparelhos são normalmente fornecidos conjuntamente com o transdutor.

Em muitos casos, o amplificador exerce ainda outras funções de *condicionamento de sinal*, ao permitir a integração do registo de acelerações para obtenção de velocidades e deslocamentos, bem como uma filtragem do sinal em bandas de frequência a definir.

3.2.2.3 - Analizador

O último elemento da cadeia de medição é o analisador, sendo as suas funções:

- a armazenagem e processamento dos registos colhidos, com vista à construção das funções de resposta em frequência;
- a extracção de parâmetros dinâmicos do sistema em análise, a partir de um conjunto de funções de resposta em frequência.

Os sistemas capazes de proceder a estas tarefas têm sofrido grandes evoluções nos últimos anos, existindo actualmente uma grande variedade de configurações, com diferentes níveis de capacidades e, naturalmente, de custo. Referem-se neste trabalho 3 sistemas que, por ordem crescente de capacidade, velocidade de operação e custo, se encontram actualmente disponíveis no mercado: os sistemas baseados num micro-computador e na utilização de cartas para conversão analógico-digital e para condicionamento analógico de sinal; os sistemas que se baseiam na utilização em simultâneo de um analisador de Fourier e de um micro-computador ou workstation; os sistemas constituídos por uma workstation e um módulo de aquisição.

a) Sistemas baseados num micro-computador e na utilização de cartas para conversão analógico-digital e para condicionamento analógico do sinal

O elemento central destes sistemas é um computador pessoal onde são inseridas em "slots" disponíveis uma ou mais cartas para conversão analógico-digital e, quando possível, uma carta para condicionamento analógico de sinal, permitindo a amplificação, filtragem, zoom e outras operações. Estas cartas vêm normalmente acompanhadas por um conjunto de rotinas a partir das quais o utilizador desenvolve software próprio para aquisição e processamento do sinal, ou então por software especificamente construído para a realização de determinadas operações.

Estão ainda disponíveis no mercado alguns "packages" de programas destinados à identificação de parâmetros modais.

De todas as configurações actualmente disponíveis, esta é a que apresenta um menor custo, tendo ainda como vantagem a grande versatilidade decorrente da possibilidade de incluir software desenvolvido pelo utilizador para executar certas operações específicas do problema a estudar.

Os maiores inconvenientes são as limitações inerentes à velocidade de análise e processamento, bem como à capacidade de análise: frequência de amostragem e número de canais amostrados. Note-se que, nos problemas de Engenharia Civil, em que estão usualmente envolvidas baixas frequências de amostragem (desde que seja possível a utilização de filtros "anti-aliasing"), as dificuldades relacionadas com este último ponto não se fazem praticamente sentir.

b) Sistemas baseados na utilização em simultâneo de um analisador de Fourier e de um micro-computador ou workstation

O analisador de Fourier é um aparelho desenvolvido especificamente com o objectivo de proceder à aquisição e tratamento digital do sinal, através da construção em tempo real de estimativas espectrais, de que se destaca a função de resposta em frequência. Esta componente do sistema de medição que, apesar de relativamente recente tem sofrido um rápido desenvolvimento, pode aparecer em diversas versões, desde as de mais baixo custo, contendo apenas 2 canais e permitindo uma análise na gama de frequências de 0 a 40kHz, com construção das funções espectrais mais correntes, às versões mais sofisticadas, de 8 canais, extensíveis a 32 canais, com possibilidade de análise na gama de frequências de 0 a 100kHz, com um pequeno disco duro destinado ao armazenamento de sinal, zoom, animação de modos de vibração, aplicação de algumas técnicas de identificação de parâmetros modais e, inclusivamente, um módulo programável.

Os sistemas baseados na utilização em simultâneo de um analisador de Fourier e de um micro-computador ou workstation podem funcionar de duas formas:

- a aquisição, processamento e armazenamento do sinal é efectuada através do analisador de Fourier, sendo numa segunda fase realizada a identificação de parâmetros modais em micro-computador ou workstation, através de software próprio, disponível no mercado;
- todas as operações desde a aquisição de sinal à extracção de parâmetros modais são realizadas a partir do micro-computador ou workstation, dotados de software próprio para comandar o analisador que, neste caso deverá possuir um módulo programável.

c) Sistemas constituídos por uma workstation e um módulo de aquisição

São os sistemas mais versáteis e também os mais caros, baseando-se o seu funcionamento num sistema de aquisição modular com 4 canais, extensível a 64 ou mais canais, em que a

cada canal está associado um amplificador / condicionador de sinal, através do qual é realizada a conversão analógico-digital e aplicado um filtro que pode ser programado pelo utilizador. Este sistema tem ainda a possibilidade de funcionar como um gerador de sinal a utilizar num excitador.

A utilização da workstation permite associar a este sofisticado sistema as suas conhecidas capacidades, associadas à rapidez de cálculo e elevado espaço de armazenamento. Além disso, existe actualmente software através do qual é possível articular a execução de programas de cálculo estrutural, como programas de elementos finitos, com dados provenientes de medições [62], o que confere novas perspectivas à análise e dimensionamento de estruturas.

Do que até aqui foi dito pode concluir-se que, na actualidade, a componente do sistema de aquisição e medição de vibrações designada por *Controlador* e cuja função é, afinal, comandar todo o processo de medição, está sempre presente, identificando-se com o micro-computador ou workstation, apresentados como elementos integrantes do *Analizador*.

3.3 - SISTEMA DE MEDIÇÃO EM DESENVOLVIMENTO NA FEUP

A actividade da FEUP na área da análise dinâmica experimental teve início em 1987, data em que foi possível adquirir um conjunto de transdutores de movimento, um martelo de impulsos, um micro-computador e duas cartas de aquisição de dados. Posteriormente, tem sido realizado um esforço no sentido de melhorar e completar o sistema de medição desenvolvido, para o que se adquiriu recentemente um sistema de filtragem e condicionamento de sinal, um novo conjunto de acelerómetros e um excitador electrodinâmico, estando em fase final de ensaio um vibrador de massas excêntricas construído pelo INEGI nas oficinas do Departamento de Engenharia Mecânica desta Faculdade e prevendo-se, num futuro próximo, a aquisição de um analisador de Fourier.

3.3.1 - Subsistema de excitação

Imagens das componentes do sistema de excitação são apresentadas nas Figuras 3.19 e 3.20.



Figura 3.18 - Subsistema de medição de vibrações da FEUP.



Figura 3.19 - Vibrador mecânico de massas excêntricas, martelo de impulsos e acelerómetro PCB.

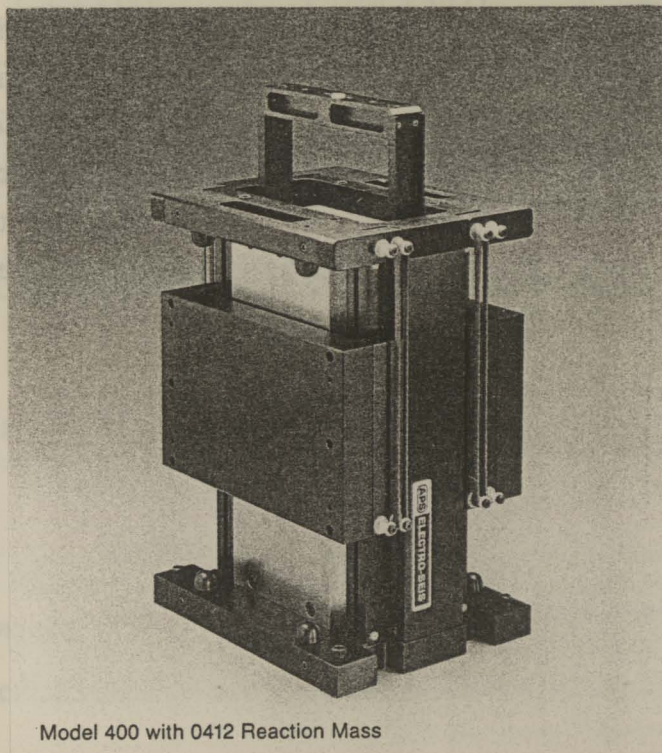


Figura 3.20 - Vibrador electrodinâmico.

As principais características destes aparelhos são:

a) Martelo de impulsos

Marca: PCB, modelo 086B50

Gama de frequências de excitação: 0-500Hz

Sensibilidade: 1V/0,23kN

Gama dinâmica (5V): 22,0kN

Frequência própria: 2700Hz

Massa: 5,4Kg

- Pontas:
- Muito mole, modelo 084A30
 - Mole, modelo 084A31
 - Média, modelo 084A32
 - Dura, modelo 084A33

Amplificador de potência: PCB, modelo 480D06, permitindo uma amplificação do sinal proveniente do sensor de força de 1x, 10x ou 100x.

Ligações: realizadas através de um par de fios torcidos.

Nos vários exemplos efectuados até à data com este sistema de excitação, constatou-se a inadequação da sua utilização a estruturas de grandes dimensões.

Embora o aproveitamento desta componente do sistema de excitação e medição de vibrações não tenha sido ainda total, o que resultou do facto de só muito recentemente se dispor de filtros anti-aliasing e de, mesmo utilizando a "ponta" mole, serem induzidas pelo martelo vibrações com conteúdo espectral significativo em frequências muito elevadas, pensa-se que a utilização deste equipamento é viável em ensaios de estruturas de porte médio, como tabuleiros de pontes e lajes flexíveis, reservatórios ou algumas estruturas porticadas com um número reduzido de pisos.

b) Excitador electrodinâmico

Marca: APS, modelo 400 ELECTRO-SEIS

Gama de frequências de excitação: 0-200Hz

Valores máximos da força aplicada:

até 0,1Hz ————— 314N

acima de 0,1Hz ————— 445N

acima de 20Hz ————— ver Figura 3.21

Peso: 73 Kg

Massa de reacção: modelo 0412

- 4 blocos de massa 30,6 Kg

- 2 blocos, de massa 17,9 Kg

Amplificador de potência: APS, modelo 144 DUAL-MODE

- Peso: 31 Kg

Este aparelho foi adquirido recentemente, não tendo ainda sido utilizado em ensaios.

Dada a limitada força transmitida, a sua utilização está prevista em ensaios laboratoriais realizados em modelos, admitindo-se no entanto que a utilização deste equipamento em estruturas de porte médio, do tipo daquelas para as quais o martelo de impulsos é adequado, conduza a bons resultados.

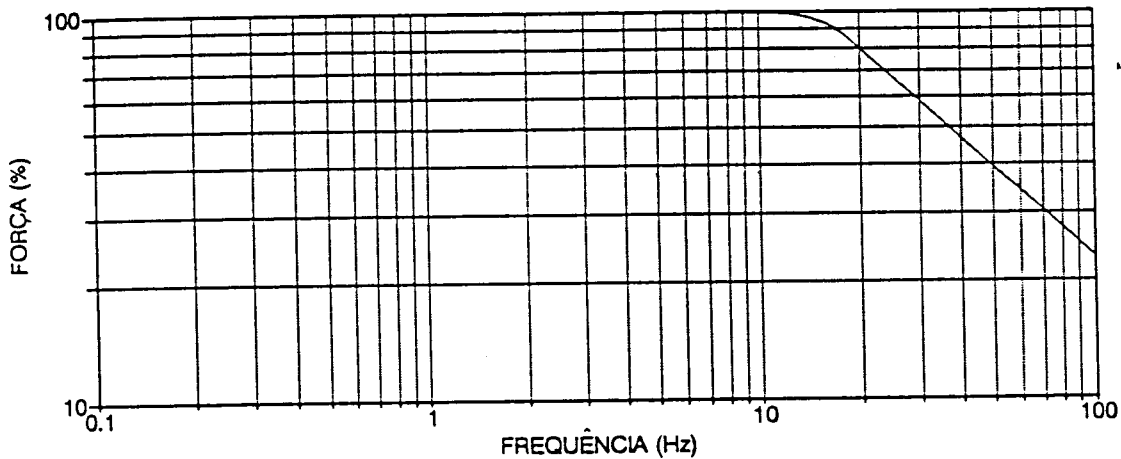


Figura 3.21 - Envolvente da força aplicada pelo excitador electrodinâmico APS, modelo 400 ELECTRO-SEIS.

c) *Excitador mecânico*

Trata-se de um excitador sinusoidal dotado de duas massas girantes de 22 Kg que podem ser aparafusadas a dois braços metálicos em 3 posições distintas, o que lhes confere um raio de rotação de 25cm, 30cm ou 36cm, permitindo a aplicação de forças horizontais sinusoidais variáveis numa gama de 0 a 10Hz, com um valor máximo de 25200N e com um incremento mínimo de 0,25Hz.

Este vibrador é alimentado por um motor de 3kW de potência e tem velocidade variável entre 0 e 1500rpm, sendo efectuada uma redução mecânica de 1:4.

O aparelho está equipado com um unidade de controle electrónico de pico em fase, através da qual é possível programar o valor da frequência da força sinusoidal a aplicar ou definir os parâmetros de um varrimento contínuo (frequência mínima, máxima e taxas de aceleração ou desaceleração).

Está prevista a inclusão de um módulo de software através do qual seja possível realizar todas as operações de comando a partir de um micro-computador.

A fixação deste vibrador, cujo peso total é de cerca de 250Kg, é realizada através de 3 perfis metálicos ligados à base por intermédio de 6 parafusos de 16mm que, idealmente, deverão ser chumbados na estrutura a analisar.

O aparelho descrito que, conforme foi referido, se encontra em fase final de ensaio, destina-se à aplicação de forças sinusoidais horizontais em estruturas de grande porte (ex: grandes pontes e barragens).

3.3.2 - Subsistema de medição

3.3.2.1 - Transdutores e amplificadores / condicionadores de sinal

- 12 acelerómetros piezoelétricos de alta sensibilidade, marca PCB

Modelo: 393C

Gama dinâmica ($\pm 2,5V$): $\pm 2,5g$

Sensibilidade: $1V/g$

Gama de frequências em que opera: $0,025$ a $800Hz$ ($\pm 5\%$)

Frequência própria: $3500Hz$

Sensibilidade transversal: 3% (máximo)

Amplificadores de potência: cada acelerómetro vem equipado com uma unidade de alimentação e amplificação PCB, modelo 480D06, que permite uma amplificação total do sinal por um factor de 1, 10 ou 100.

Ligações: realizadas através de pares de fios torcidos

- 4 acelerómetros de alta sensibilidade, marca Brüel & Kjaer

Modelo: 4379S

Sensibilidade: 260 mV/g

Gama de frequências em que opera: $0,1Hz$ a $3,9kHz$

Frequência própria: 13 kHz

Sensibilidade transversal: $2,5\%$ (a $30Hz$)

Amplificadores de potência: cada acelerómetro vem equipado com uma unidade de amplificação e condicionamento de sinal Brüel & Kjaer, modelo 2635, que permite não só a amplificação do sinal de forma a que a sensibilidade final varie entre $0,1$ e 1000 mV/ms^{-2} , mas também a filtragem anti-aliasing, através de um filtro de 2ª ordem de frequência de corte seleccionável entre $0,1$, 1 , 3 , 10 , 30 e 100 kHz e a integração do sinal para obtenção de registos de velocidades ou deslocamentos, dispondo ainda de um indicador de saturação do transdutor.

Os 16 acelerómetros piezoelétricos podem funcionar em simultâneo, tendo sido construídas 2 caixas de junção para 8 canais cada, que recebem os sinais provenientes dos diversos transdutores utilizados nos vários pontos de medida, e os transmitem à(s) unidade(s) de aquisição por intermédio de um cabo blindado.

Embora os acelerómetros sejam transdutores que apresentam uma grande sensibilidade em relação a frequências elevadas, e este aspecto de alguma forma contribua para uma certa

difficuldade em efectuar medições de vibrações em frequências mais baixas, a conjugação com filtros analógicos permite obter medidas de grande precisão em estruturas com frequências superiores a 1Hz.

3.3.2.2 - Analizador/controlador

O sistema de medição desenvolvido baseia-se na utilização de um micro-computador portátil e na inserção, em slots disponíveis, de 2 placas de conversão analógico-digital, que possibilitam a amostragem em regime de multiplexagem de 8 canais de entrada diferenciais analógicos cada [36].

As características destas componentes são as seguintes:

a) Microcomputador

Marca: Toshiba, modelo 5200

Processador: 80386

Memória RAM: 2Mb

Disco: 100Mb

Outras: expansão de memória de 2Mb e co-processador matemático

b) Placas de conversão A/D

Marca: Data Translation, modelo DT2801A

Conversor: 12 bits

Nº de canais: 8

Frequência máxima de amostragem: 27kHz

Amplificação: seleccionável, entre 1, 2, 4 e 8.

O software inicial de que partiu o desenvolvimento deste sistema, consistiu no conjunto de subrotinas fornecidas pelo fabricante das cartas de conversão, através das quais o utilizador pode realizar a aquisição e conversão do sinal medido.

Foi então desenvolvido em linguagem TurboPascal um programa de cálculo através do qual é possível visualizar, amostrar, armazenar e efectuar algumas operações de processamento (integração e aplicação do algoritmo FFT) no decorrer do ensaio de campo [36].

O restante software necessário com vista a efectuar as funções usuais de análise e processamento de sinal e identificação de parâmetros modais foi desenvolvido no âmbito do presente trabalho.

Não obstante a grande versatilidade possibilitada por este sistema e, principalmente, o seu relativo baixo custo, é importante referir as grandes limitações decorrentes da impossibilidade de em tempo real proceder à obtenção de estimativas de funções de resposta em frequência, tornando o processo de ensaio e de análise de resultados muito fastidioso e requerendo uma elevada capacidade de armazenamento em disco.

CAPÍTULO 4

ELEMENTOS DE ANÁLISE E PROCESSAMENTO DE SINAL

INTRODUÇÃO

O desenvolvimento tecnológico registado no passado recente conduziu ao advento dos sistemas digitais, através dos quais é actualmente possível a amostragem e armazenamento de um elevado volume de informação a um custo relativamente baixo, bem como o seu rápido processamento, com vista à obtenção dos principais parâmetros característicos dos sistemas observados.

A análise dos sinais medidos, que durante muitos anos foi realizada no domínio do tempo por simples observação visual e, posteriormente, foi efectuada no domínio da frequência através da utilização de filtros analógicos passa-banda, passou a ser feita digitalmente, utilizando conceitos e técnicas progressivamente mais complexas que deram origem à Teoria da Análise e Processamento de Sinal.

Esta teoria tem sido profundamente abordada em diversas publicações [24, 101, 108, 118], situando-se as suas aplicações essencialmente nas áreas da Engenharia Electrotécnica e Mecânica.

Considera-se no entanto que, pelo facto de uma grande parte dos investigadores que, no domínio da Engenharia de Estruturas, se dedicam a estas matérias não possuir uma sólida formação neste campo, o grau de compreensão e interligação de certos aspectos fundamentais nem sempre é o mais adequado.

Nestes termos e atendendo a que a Teoria da Análise e Processamento de Sinal constitui efectivamente o suporte teórico fundamental das várias técnicas experimentais de análise de vibrações e de identificação de parâmetros dinâmicos em estruturas, julgou-se oportuno apresentar de forma sistemática, embora não excessivamente extensa, as questões mais relevantes para a análise de sinais, cuja compreensão foi aliás essencial para o desenvolvimento do programa de cálculo automático PSINAL, descrito no Capítulo 6 deste trabalho, destinado à análise e processamento de séries.

Assim, este capítulo é iniciado com uma breve explicação do processo de digitalização de um sinal contínuo, passando-se de seguida à sua descrição em frequência. Para este efeito, introduz-se o conceito de transformada de Fourier de um sinal contínuo como uma extensão do desenvolvimento em série de Fourier de funções contínuas e periódicas e ainda as transformadas finita e discreta finita de Fourier, evidenciando-se também o seu relacionamento, de forma a compreender as hipóteses que estão subjacentes ao processo de discretização e as modificações introduzidas na imagem em frequência do sinal original dele decorrentes.

Descrevem-se de seguida as duas formas de erros tipicamente associadas às séries amostradas, o "leakage" e o "aliasing", discutindo-se também a possibilidade da sua eliminação ou atenuação. Para este efeito são apresentadas algumas janelas de dados de utilização corrente.

No que se refere à filtragem digital de sinal, é apresentado e descrito o funcionamento de dois filtros passa-banda, um a aplicar no domínio da frequência e outro no domínio do tempo, tendo ambos sido implementados no programa de processamento de sinal já mencionado.

Pelo facto de se basearem na aplicação de filtros digitais, duas outras operações fundamentais da Análise e Processamento de Sinal são ainda descritas: a decimação e o "zoom". Trata-se de operações que, apesar de frequentemente mencionadas na literatura especializada, raramente são objecto de explicação detalhada, sendo a sua aplicação susceptível de interpretações erróneas.

Tendo presente o conjunto de relações excitação-resposta apresentadas no Capítulo 2, passa-se finalmente à caracterização experimental das funções de resposta em frequência. Para tal, atendendo às modificações impostas ao sinal observado na operação de amostragem (discretização e observação do sinal através de uma janela definida no intervalo $[0, T]$), são apresentadas algumas estimativas simples para as funções de auto-correlação e de correlação cruzada, funções densidade espectral de potência e densidade espectral de potência cruzada e funções de resposta em frequência e de coerência associadas. Estas estimativas são em geral obtidas através do algoritmo FFT.

São ainda apresentados e utilizados alguns conceitos da Teoria de Estimação na caracterização das funções envolvidas nas relações excitação-resposta através de estimadores mais complexos, destacando-se em particular a quantificação do grau de incerteza associado a cada estimativa.

A terminar este capítulo, dois casos particulares da estimação de funções de resposta em frequência são abordados, referindo-se a situações concretas em que a aplicação dos conceitos gerais até aqui descritos não pode ser feita directamente: o caso de estruturas sujeitas a excitação ambiental e o de estruturas submetidas a uma excitação forçada sinusoidal.

4.1 - SÉRIES TEMPORAIS DE DADOS. AMOSTRAGEM E CONVERSÃO

Conforme foi evidenciado no Capítulo 3, diversas grandezas físicas envolvidas nos problemas de engenharia de estruturas são quantificadas correntemente através da utilização de transdutores. Os transdutores, entendidos como dispositivos que permitem converter grandezas mecânicas noutras grandezas de mais fácil medição e tratamento [24], fornecem usualmente como imagem da grandeza observada uma tensão eléctrica proporcional ao parâmetro físico que se pretende medir e que se apresenta como um registo contínuo no tempo.

Se se pretender aplicar a este sinal técnicas digitais de processamento, de forma a eliminar tanto quanto possível o ruído e a extrair parâmetros de interesse, será necessário proceder a uma observação discreta num espaço de tempo limitado. Esta operação, que consiste na recolha de um número finito N de pontos de um registo contínuo $x(t)$, por conveniência igualmente espaçados no tempo com intervalo Δt entre observações, é designada por *amostragem* e tem como resultado uma série temporal, ou amostra, com duração T (Figura 4.1).

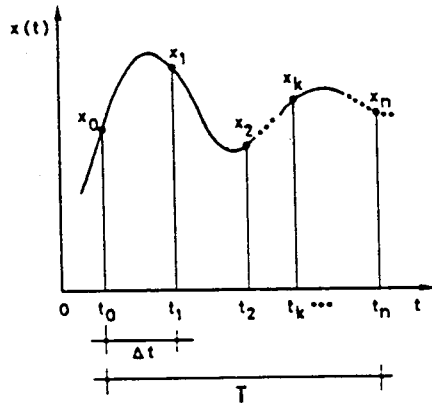


Figura 4.1 - Amostragem de um sinal contínuo $x(t)$.

Na prática, a transformação de um sinal analógico em digital é assegurada pela acção combinada de dois tipos de circuitos electrónicos dispostos em sequência: o *amostrador/retentor* (AR) e o *conversor analógico/digital* (A/D), também designados na literatura anglo-americana por "sample and hold" e "A/D converter", respectivamente [24].

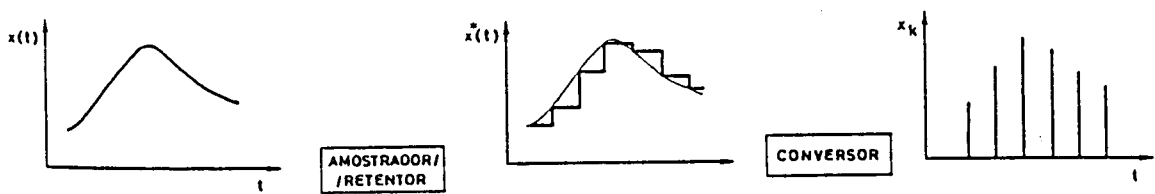


Figura 4.2 - Processo de transformação de um sinal analógico num sinal digital.

A Figura 4.2 ilustra o processo: na entrada do AR, o sinal eléctrico apresenta-se como um registo contínuo, variável no tempo. O AR procede a uma leitura do valor instantâneo do sinal eléctrico sempre que recebe um impulso de relógio e coloca na saída um valor que,

nos denominados *amostradores retentores de ordem zero*, mantém constante até à chegada de novo impulso, comandada por um sistema temporizador ("clock"). Na saída, obtém-se então um sinal contínuo variando por patamares.

A função do conversor A/D é a de criar, ao fim de cada intervalo de tempo Δt , um número x_k correspondente à ordenada do respectivo patamar do sinal eléctrico obtido na saída do AR. Atendendo às características do conversor, x_k terá de ser um inteiro não negativo, variável entre zero e um número N_q de níveis que lhe está associado.

Este processo de identificação de uma voltagem, quantidade real que representa um patamar de um sinal eléctrico, com um número inteiro variando entre zero e N_q , tem a designação de *quantificação do sinal*.

Sendo uma operação conceptualmente simples, a amostragem coloca problemas diversos ao nível da análise de sinal. Estes problemas resultam essencialmente da perda de informação decorrente do desconhecimento da evolução do sinal entre dois instantes de amostragem sucessivos, facto que leva à obtenção de séries com conteúdo energético distinto do conteúdo energético do sinal que lhes deu origem. Como se verá ao longo deste capítulo, fazendo algumas hipóteses relativamente à composição espectral do sinal contínuo original, é possível extrair do sinal amostrado qualquer informação relativa ao sinal que lhe deu origem, ou seja, é possível reconstruir o sinal contínuo através de uma série amostrada.

4.2 - DESCRIÇÃO DE SINAIS NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

4.2.1 - Decomposição em série de Fourier

A análise de um sinal pode processar-se no domínio da frequência através da sua decomposição num conjunto finito ou infinito de harmónicos de amplitude e frequência variáveis.

A via mais imediata para proceder a essa decomposição, no caso de funções periódicas, consiste na expansão em série de Fourier, através do conjunto de funções ortogonais: $1, \cos(\theta), \cos(2\theta), \dots, \sin(\theta), \sin(2\theta), \dots$ definidas no intervalo $[-\pi, \pi]$.

Este conjunto é designado por *conjunto ortogonal de funções de Fourier*.

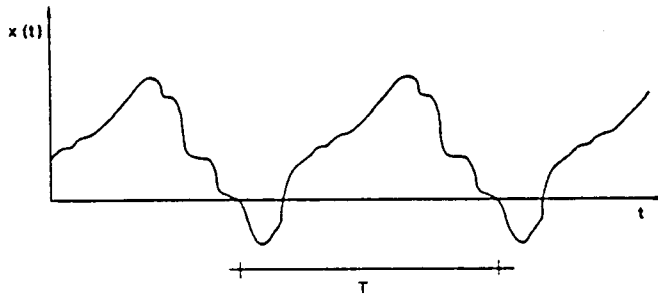


Figura 4.3 - Função periódica com período T .

Se o sinal $x(t)$ representar uma função periódica de período T (Figura 4.3), é possível verificar [146] que existe um conjunto de coeficientes constantes α_0, α_n e b_n ($n = 1, 2, \dots$), que permitem a expansão numa série trigonométrica infinita

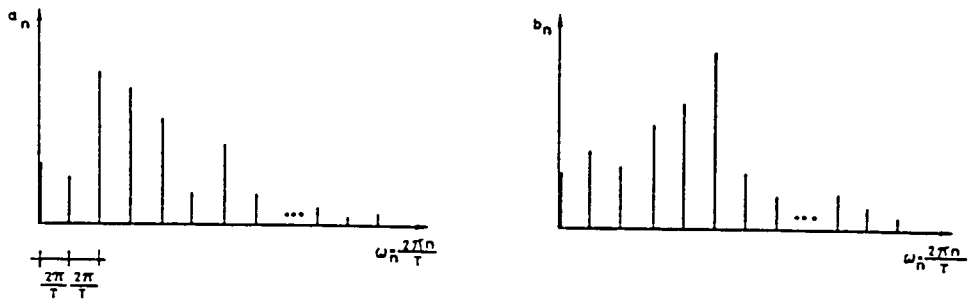
$$x(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_n \cdot \cos\left(n \cdot \frac{2\pi t}{T}\right) + b_n \cdot \sin\left(n \cdot \frac{2\pi t}{T}\right) \right] \quad (4.1)$$

sendo esses coeficientes definidos por

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \\ \alpha_n &= \frac{2}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot \cos\left(n \cdot \frac{2\pi t}{T}\right) dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot \sin\left(n \cdot \frac{2\pi t}{T}\right) dt \end{aligned} \quad (4.2)$$

O teorema de Dirichlet permite ainda afirmar que [146], se a função periódica $x(t)$ for limitada e apresentar um número finito de pontos de descontinuidade e de extremos locais, a série de Fourier convergirá para $x(t)$ em todos os pontos de continuidade e para a média dos valores à esquerda e à direita da função, nos pontos de descontinuidade.

Como ressalta da equação (4.1), os coeficientes α_n e b_n , representados de forma esquemática nas Figuras 4.4a) e 4.4b), traduzem a composição do sinal $x(t)$ em termos dos harmônicos de frequência $\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$, com $n = 1, 2, \dots$.



a)

b)

Figura 4.4 - Coeficientes α_n e b_n em correspondência com o harmônico de frequência $\omega_n = 2\pi n/T$.

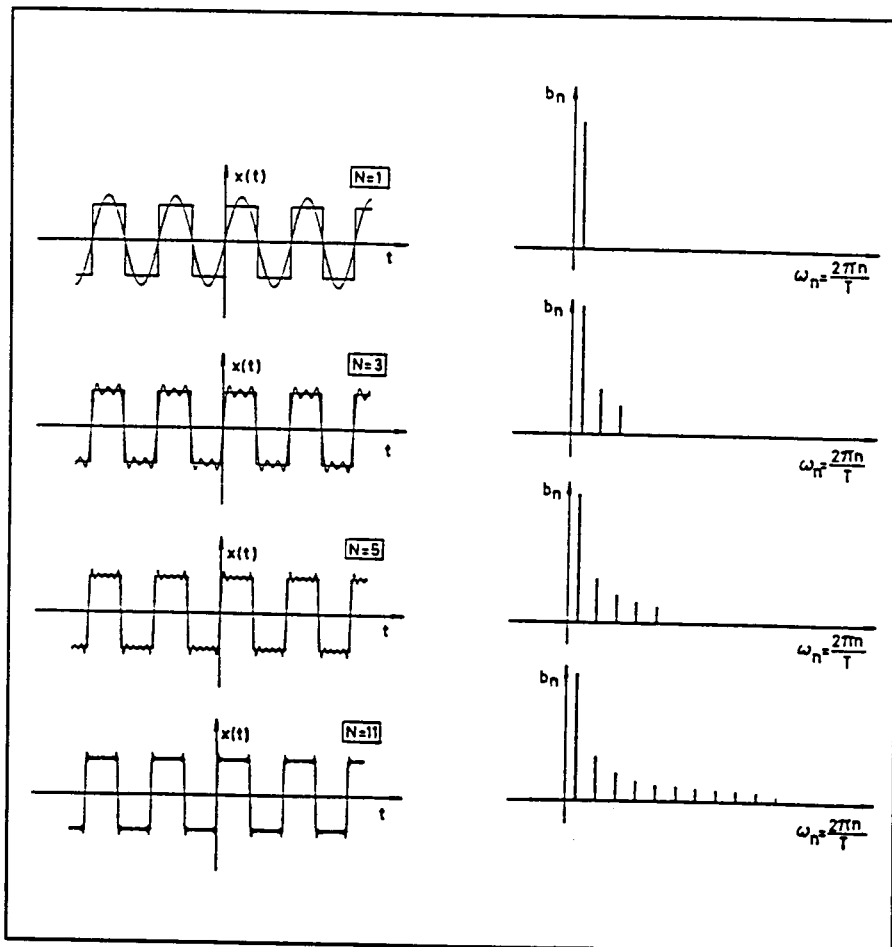


Figura 4.5 - Ajuste de uma onda quadrada por uma série de Fourier truncada contendo N termos do seu desenvolvimento.

A decomposição de um sinal numa série infinita é, evidentemente, impraticável. A utilização de uma série truncada com apenas N harmónicos, fornece-nos uma aproximação do sinal que será tanto melhor quanto maior for o número de termos da decomposição. Este facto é facilmente observável para o exemplo da Figura 4.5, relativo à decomposição em série de Fourier de um sinal periódico representando uma "onda quadrada", efectuada com 1, 3, 5 e 11 harmónicos.

Note-se contudo que, junto dos pontos de descontinuidade, os desvios da função contínua resultante da truncatura da série de Fourier em relação à onda quadrada não se atenuam com o aumento do número de termos da decomposição usados, mas antes tendem assintoticamente, com o aumento de N , para um valor da ordem de 9% do real [146].

Este curioso fenómeno, conhecido por *efeito de Gibbs*, manifesta-se em todos os pontos de descontinuidade do sinal $x(t)$. Apesar de se traduzir em erros pouco significativos na aproximação de uma função, este efeito assume uma certa importância quando essa função é utilizada como filtro digital, pelo que será necessário eliminá-lo.

A técnica desenvolvida por Lanczos [24, 58] para resolver este problema partiu da observação de que a ondulação de Gibbs tem frequência igual à frequência do último termo incluído no desenvolvimento em série de Fourier do sinal $x(t)$, e consiste num alisamento da série aproximada através de uma operação de média realizada para o instante t no intervalo $[t - T/2N, t + T/2N]$, de largura T/N igual ao período do harmónico em correspondência com o último termo incluído.

Então, sendo

$$x(t) \cong \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left[a_n \cdot \cos\left(\frac{n \cdot 2\pi}{T} t\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot 2\pi}{T} t\right) \right]$$

obtém-se

$$\tilde{x}(t) \cong \frac{N}{T} \int_{t-T/2N}^{t+T/2N} x(t') dt'$$

ou seja,

$$\tilde{x}(t) \cong \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left[\frac{N}{T} \int_{t-T/2N}^{t+T/2N} a_n \cdot \cos\left(\frac{n \cdot 2\pi}{T} t'\right) dt' + \frac{N}{T} \int_{t-T/2N}^{t+T/2N} b_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot 2\pi}{T} t'\right) dt' \right] \quad (4.3)$$

Atendendo a que

$$\frac{N}{T} \int_{t-T/2N}^{t+T/2N} a_n \cdot \cos\left(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t'\right) dt' = a_n \cdot \frac{\sin(\pi n/N)}{(\pi n/N)} \cdot \cos\left(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

e

$$\frac{N}{T} \int_{t-T/2N}^{t+T/2N} b_n \cdot \text{sen}\left(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t'\right) dt' = b_n \cdot \frac{\text{sen}(\pi n/N)}{(\pi n/N)} \cdot \text{sen}\left(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

pode escrever-se

$$\tilde{x}(t) \cong \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left[\tilde{a}_n \cdot \cos\left(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + \tilde{b}_n \cdot \text{sen}\left(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right] \quad (4.4)$$

expressão que tem por significado a substituição dos coeficientes α_n e b_n da decomposição em série de Fourier por coeficientes alisados $\tilde{\alpha}_n$ e $\tilde{b}_n$, definidos por

$$\tilde{\alpha}_n = \alpha_n \cdot \frac{\text{sen}(\pi n/N)}{(\pi n/N)}$$

$$\tilde{b}_n = b_n \cdot \frac{\text{sen}(\pi n/N)}{(\pi n/N)}$$

Na Figura 4.6 representa-se o desenvolvimento em série de Fourier da "onda quadrada", tomando 11 harmônicos e utilizando o alisamento de Lanczos. Confrontando com a Figura 4.5, para $N = 11$, pode constatar-se a eficiência desta técnica na eliminação do efeito de Gibbs.

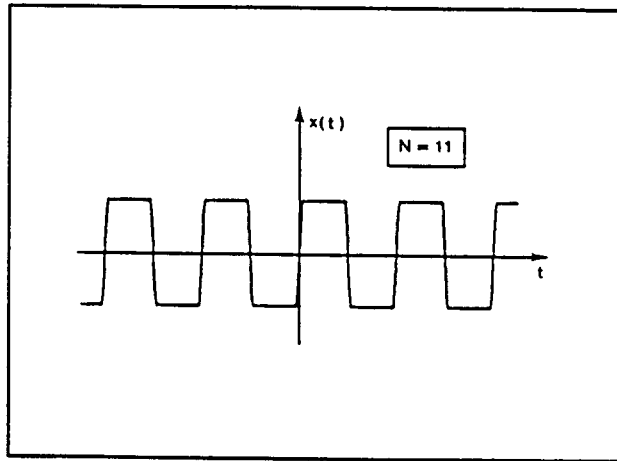


Figura 4.6 - Decomposição de uma "onda quadrada" em série de Fourier usando o alisamento de Lanczos.

4.2.2 - Transformada de Fourier

4.2.2.1 - Definição

Na decomposição de um sinal contínuo e periódico $x(t)$ em série de Fourier, obteve-se um conjunto de coeficientes α_n e b_n em correspondência com os harmônicos de frequência $w_n = 2\pi n/T$, cuja representação foi realizada na Figura 4.4.

Repare-se agora que, ao aumentar o período T do sinal, o espaçamento $\Delta w = 2\pi/T$ entre sucessivos harmônicos reduzir-se-á. Aumentando indefinidamente o valor de T , o sinal deixa de ser periódico e Δw reduz-se infinitamente, passando a sua composição espectral a ter um carácter contínuo.

Seja $x(t)$ um sinal periódico de período T , que satisfaça a condição de Dirichlet e cujo valor médio seja nulo.

A substituição em (4.1) das expressões dos coeficientes α_o , α_n e b_n definidos pelas equações (4.2) leva a

$$\begin{aligned} x(t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos\left(n \cdot \frac{2\pi t}{T}\right) dt \right\} \cdot \cos\left(n \cdot \frac{2\pi t}{T}\right) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin\left(n \cdot \frac{2\pi t}{T}\right) dt \right\} \cdot \sin\left(n \cdot \frac{2\pi t}{T}\right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Como $w_n = n \cdot \frac{2\pi}{T}$ e $\Delta w = \frac{2\pi}{T}$, a substituição em (4.5) permite escrever

$$\begin{aligned} x(t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\Delta w}{\pi} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(w_n t) dt \right\} \cdot \cos(w_n t) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\Delta w}{\pi} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(w_n t) dt \right\} \cdot \sin(w_n t) \end{aligned}$$

Quando $T \rightarrow \infty$, $\Delta w \rightarrow dw$, o somatório aproxima-se de um integral e $w_n \rightarrow w$, vindo

$$\begin{aligned} x(t) = & \int_0^{\infty} \left\{ \frac{dw}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(wt) dt \right\} \cdot \cos(wt) + \\ & + \int_0^{\infty} \left\{ \frac{dw}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(wt) dt \right\} \cdot \sin(wt) \end{aligned}$$

Fazendo

$$A(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(wt) dt$$

e

$$B(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(wt) dt$$

tem-se ainda

$$x(t) = 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{+\infty} A(w) \cos(wt) dw + \int_0^{+\infty} B(w) \sin(wt) dw \right]$$

ou, usando a forma complexa e atendendo à paridade dos integrandos,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(w) \cdot e^{iwt} dw \quad (4.6)$$

com

$$X(w) = A(w) - iB(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-iwt} dt \quad (4.7)$$

Então, quando o sinal $x(t)$ deixa de ser periódico, a sua decomposição espectral em série de Fourier é substituída por uma representação contínua, descrita pelo integral de Fourier (expressão (4.6)), sendo os coeficientes a_n e b_n dessa decomposição discreta substituídos pelas funções contínuas $A(w)$ e $B(w)$ ou, na forma complexa, por $X(w)$, cuja expressão (4.7) é designada por *Transformada de Fourier*, ou *Espectro de Fourier* de $x(t)$, exprimindo o peso do conteúdo em frequência do sinal em correspondência com cada frequência angular w . Pode dizer-se que $X(w)$ constitui a imagem no domínio da frequência de $x(t)$.

É também usual definir a transformada de Fourier de um sinal em termos da frequência expressa em ciclos por segundo (Hz), $f = w/2\pi$, obtendo-se nesse caso

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt \quad (4.8)$$

vindo então

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{+i2\pi f t} df \quad (4.9)$$

As expressões (4.8) e (4.9) permitem-nos concluir que, conhecido um sinal contínuo $x(t)$, é possível determinar a sua imagem em frequência $X(f)$ ou, se for dado $X(f)$, é possível determinar $x(t)$ através de uma *transformada inversa*, designação por que também é conhecido o *integral de Fourier*. Diz-se por isso que $x(t)$ e $X(f)$ constituem um par de *transformadas de Fourier*, facto que será traduzido ao longo deste texto através da seguinte representação

$$x(t) \longleftrightarrow X(f)$$

Resta agora estabelecer as condições para a existência da transformada de Fourier de $x(t)$. São *condições suficientes* [16]:

- que $x(t)$ seja uma função de módulo integrável, isto é, que $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$;
- que sejam satisfeitas as condições de Dirichlet em qualquer intervalo finito $[t_1, t_2]$.

A imposição destas restrições não permite assegurar a existência da transformada de Fourier de funções periódicas como, por exemplo, as funções sinusoidais. Com efeito, não é neste caso convergente o integral impróprio do valor absoluto destas funções, apesar de ser conhecida a sua composição em frequência.

Uma forma possível de ultrapassar este problema consiste em introduzir o conceito de função *impulso unitário de Dirac*, $\delta(t)$, fisicamente irrealizável e definida matematicamente por:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t \neq 0 \\ +\infty & , \quad t = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (4.10)$$

A utilização desta função permite extrair alguns resultados importantes [16], designadamente:

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) x(t) dt = x(t_0)$, em que $x(t)$ é uma função arbitrária, contínua no instante t_0 ;
- a transformada de Fourier da função impulsiva $h(t) = k \cdot \delta(t)$ é

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} k \delta(t) e^{-i2\pi ft} dt = k \cdot e^0 = k$$

constituindo as funções k e $k \cdot \delta(t)$ um par de transformadas de Fourier (Figura 4.7.a));

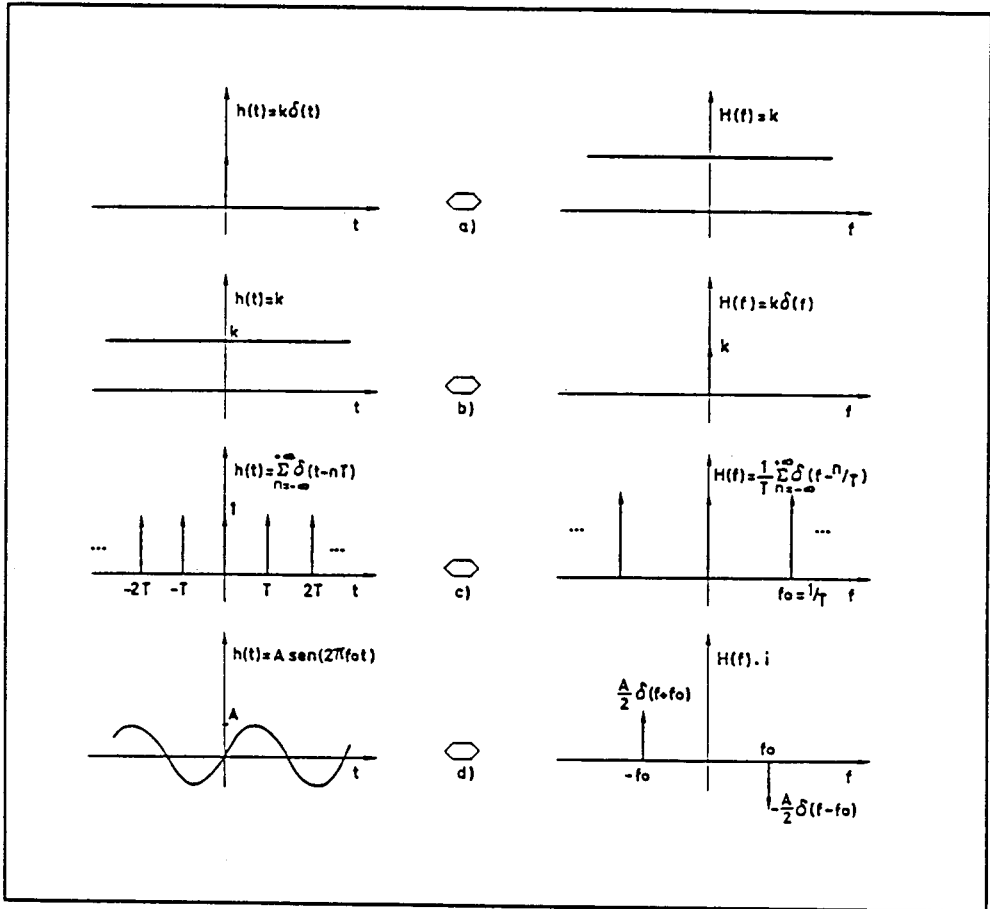


Figura 4.7 - Transformada de Fourier de algumas funções notáveis.

- a transformada de Fourier da função constante $h(t) = k$ é $H(f) = k\delta(f)$, constituindo também as funções k e $k\delta(f)$ um par de transformadas de Fourier (Figura 4.7.b));
- a transformada de Fourier de uma sequência de funções impulsivas igualmente espaçadas $h(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$ é dada por (Figura 4.7.c)):

$$H(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n/T)$$

- a transformada de Fourier de uma função sinusoidal $h(t) = A \text{sen}(2\pi f_0 t)$ é (Figura 4.7.d)):

$$H(f) = \frac{A}{2i} [-\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

4.2.2.2 - Propriedades e operações

Algumas das propriedades e operações com transformadas de Fourier permitem a extracção de conclusões notáveis no que respeita à natureza e características dos sinais estudados, facilitando também o seu manuseamento.

Sumarizam-se de seguida algumas dessas propriedades e operações, remetendo-se a respectiva demonstração para literatura especializada [16,108]:

i) Linearidade

Sejam $X(f)$ e $Y(f)$ as transformadas de Fourier de dois sinais $x(t)$ e $y(t)$ respectivamente. A transformada de Fourier do sinal soma, $x(t) + y(t)$, é igual à soma das transformadas, $X(f) + Y(f)$, ou seja

$$x(t) + y(t) \xrightarrow{\text{FT}} X(f) + Y(f) \quad (4.11)$$

A Figura 4.8 ilustra esta propriedade, tomando como exemplo um sinal obtido por soma de uma constante com uma senoide de frequência f_0 .

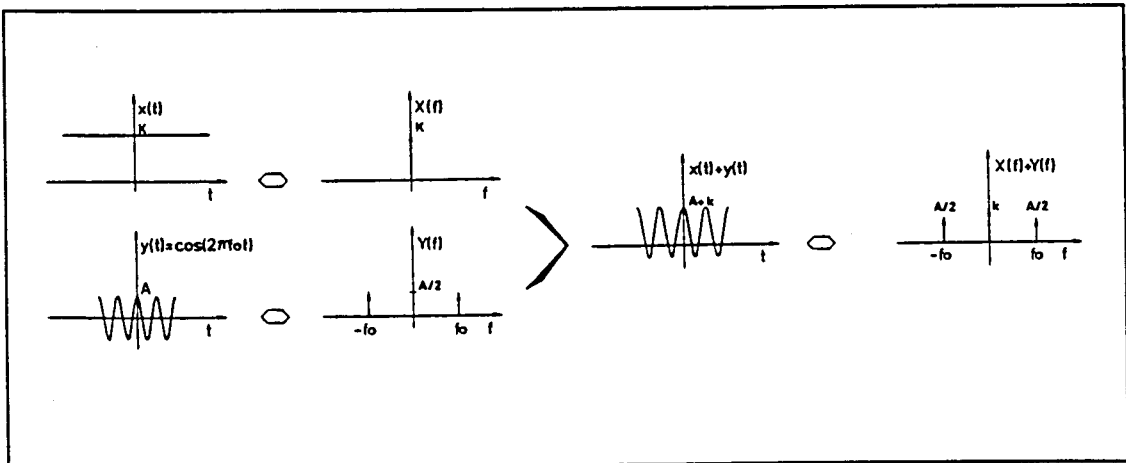


Figura 4.8 - Propriedade de linearidade da transformada de Fourier.

ii) Transformada de Fourier de um sinal $x(t)$ real

O espectro de Fourier de um sinal real obedece à seguinte relação

$$X(-f) = X^*(f) \quad (4.12)$$

onde o operador (*) significa "conjugado de".

Considerando a transformada de Fourier expressa em termos da amplitude $|X(f)|$ e da fase $\phi(f)$, isso significa dizer que

$$\begin{cases} |X(-f)| = |X(f)| \\ \phi(-f) = -\phi(f) \end{cases}$$

isto é, que $|X(f)|$ é uma função par e $\phi(f)$ é uma função ímpar em f .

iii) Contracção e expansão nos domínios do tempo e da frequência

Seja $X(f)$ a transformada de Fourier de um sinal $x(t)$. A transformada de Fourier do sinal $y(t) = x(kt)$ será $Y(f) = 1/|k| \cdot X(f/k)$, isto é

$$x(kt) \quad \text{hexagon} \quad \frac{1}{|k|} X(f/k) \quad (4.13)$$

Significa isto que uma expansão no domínio do tempo tem por consequência uma contracção no domínio da frequência (Figura 4.9) e que, inversamente, uma contracção no domínio do tempo tem por consequência uma expansão no domínio da frequência. Esta propriedade também é válida quando a expansão ou compressão é efectuada no domínio da frequência, podendo escrever-se que:

$$\frac{1}{|k|} \cdot x(t/k) \quad \text{hexagon} \quad X(kf) \quad (4.14)$$

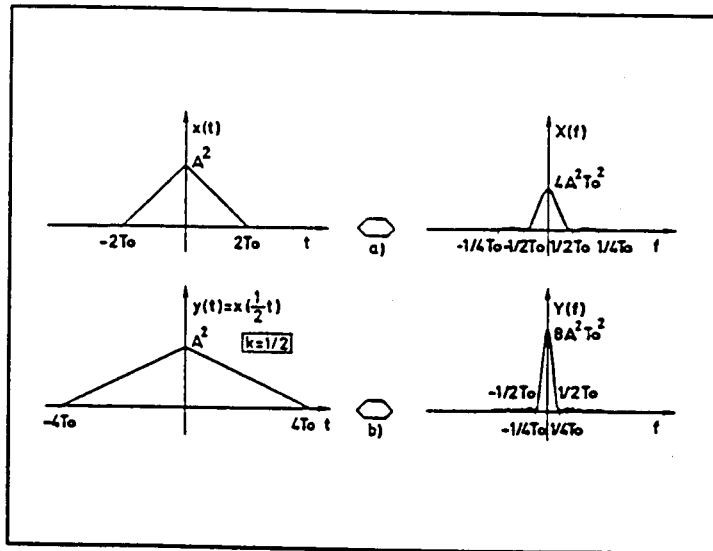


Figura 4.9 - Propriedade da expansão no domínio do tempo.

iv) Atraso no domínio do tempo e da frequência

Um atraso no tempo de um sinal $x(t)$ tem por consequência um atraso na fase da sua transformada $X(f)$, podendo dizer-se que

$$x(t - t_0) \quad \Longleftrightarrow \quad X(f) \cdot e^{-i2\pi f t_0} \quad (4.15)$$

Representa-se na Figura 4.10 uma função constituída por um cosseno de frequência f_0 e período $T_0 = 1/f_0$, onde foi introduzido um atraso no tempo de $T_0/4$.

A transformada de Fourier do sinal real é apresentada através de um espectro de amplitude, $|X(f)|$, e de um espectro de fase, $\phi(f)$, podendo visualizar-se neste último o efeito da introdução do atraso no sinal.

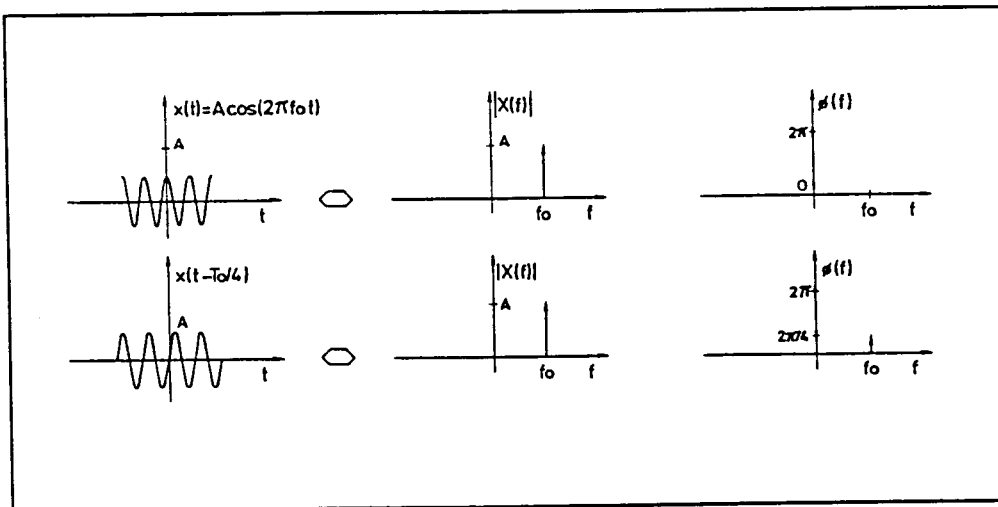


Figura 4.10 - Propriedade do atraso no domínio do tempo.

Por outro lado, um atraso f_0 no domínio da frequência traduz-se, no domínio do tempo, numa modulação por um harmónico com frequência f_0 , quando $X(f)$ seja real (Figura 4.11):

$$x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \quad \Longleftrightarrow \quad X(f - f_0) \quad (4.16)$$

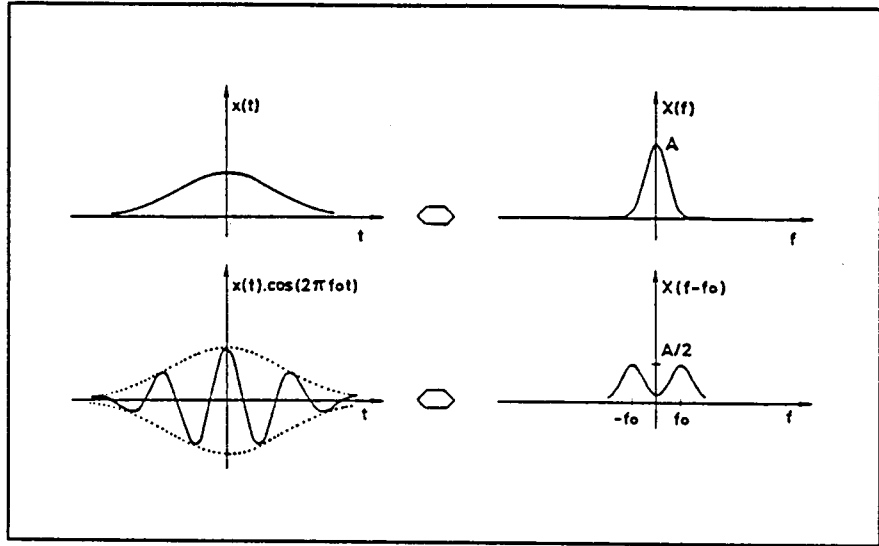


Figura 4.11 - Propriedade do atraso no domínio da frequência.

v) Integração e diferenciação:

Seja $X(f)$ a transformada de Fourier de um sinal $x(t)$. A transformada de Fourier da derivada de ordem n de $x(t)$ pode obter-se através da relação:

$$Y(f) = (i \cdot 2\pi f)^n \cdot X(f)$$

ou seja,

$$x^{(n)}(t) \quad \Longleftrightarrow \quad (i \cdot 2\pi f)^n \cdot X(f) \quad (4.17)$$

vi) Transformada de um produto:

A transformada de Fourier do produto de duas funções de quadrado somável $x(t)$ e $y(t)$, ou seja, para as quais existem os integrais $\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$ e $\int_{-\infty}^{\infty} y^2(t) dt$ [24], é igual à convolução das respectivas transformadas, $X(f)$ e $Y(f)$.

Esta operação, correntemente representada pelo símbolo "**", é traduzida matematicamente por

$$X(f) * Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f') \cdot Y(f - f') \cdot df' \quad (4.18)$$

Inversamente, o produto das transformadas de Fourier $X(f)$ e $Y(f)$ é igual à convolução de $x(t)$ com $y(t)$.

Obtêm-se então os seguintes pares de transformadas de Fourier

$$x(t) \cdot y(t) \quad \boxed{} \quad X(f) \cdot Y(f) \quad (4.19)$$

$$x(t) * y(t) \quad \boxed{} \quad X(f) \cdot Y(f) \quad (4.20)$$

A operação de convolução traduzida pela expressão (4.18) é utilizada na descrição física de diversos fenómenos. Em Dinâmica de Estruturas, por exemplo, é utilizada para determinação da resposta de um sistema a uma acção genérica por intermédio do conhecido integral de Duhamel. Reveste-se no entanto, no problema específico da análise de sinais, de uma particularidade muito importante, que consiste em permitir substituir a operação de integração, mais complexa e delicada do ponto de vista numérico, por um simples produto.

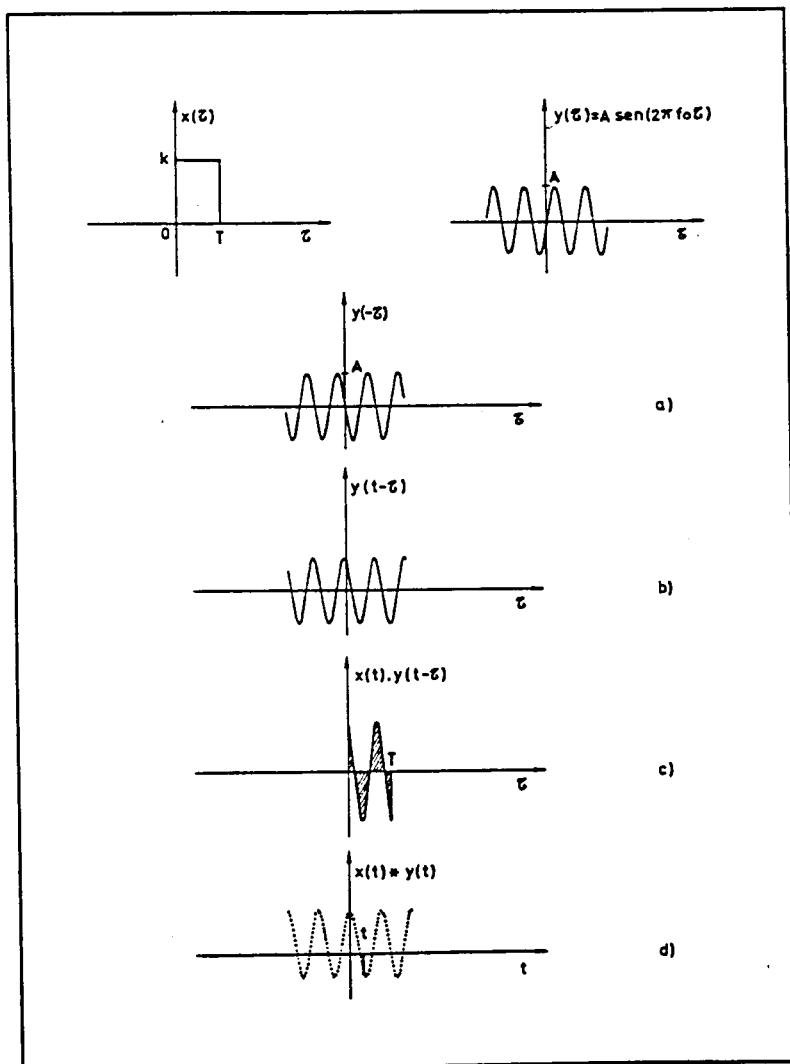


Figura 4.12 - Operação de convolução de dois sinais $x(t)$ e $y(t)$.

Na Figura 4.12 exemplifica-se a operação de convolução de dois sinais $x(t)$ e $y(t)$, $x(t)*y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot y(t-\tau) d\tau$, sendo $x(t)$ uma função traduzida por uma "janela rectangular" de duração T e definindo $y(t)$ uma senoide de frequência f_0 , respectivamente.

A 1ª operação a realizar consiste numa "dobragem" do sinal $y(\tau)$ em torno do eixo das ordenadas, do que resulta a função $y(-\tau)$ (Figura 4.12a)). Seguidamente, $y(-\tau)$ sofre uma translacção de t ao longo do eixo das abcissas (Figura 4.12.b)).

A função $y(t-\tau)$ assim obtida é multiplicada por $x(\tau)$ (Figura 4.12.c)) e a área subentendida pela função produto é agora calculada, representando o valor da convolução de $x(t)$ com $y(t)$ no instante t (Figura 4.12.d)).

4.2.3 - Transformada finita de Fourier

As expressões (4.8) e (4.9) usadas na definição da transformada e da transformada inversa de Fourier de um sinal contínuo não podem ser aplicadas a sinais que constituam amostras representativas de um processo estacionário, pelo facto de o integral não convergir no intervalo $]-\infty, +\infty[$. Acresce que, na prática, é também impossível a descrição num intervalo infinito de uma amostra representativa da evolução de qualquer grandeza.

Para ultrapassar esta limitação, introduz-se o conceito de *transformada finita de Fourier* de um sinal observado num intervalo de tempo de duração T , com início no instante $t_0 - T/2$, através de

$$X_T(f) = \int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} x(t) \cdot e^{-i2\pi ft} dt \quad (4.21)$$

A questão que se coloca é a de saber como relacionar esta nova transformada com o espectro de Fourier inicialmente definido, ou seja, que informação é possível obter em relação ao conteúdo espectral de um sinal contínuo $x(t)$ quando a observação de uma amostra que dele seja representativa tenha lugar num intervalo finito.

Seja $w_T(t)$ uma "janela rectangular" de largura T , definida por

$$w_T = \begin{cases} 1, & \text{se } t_0 - T/2 \leq t \leq t_0 + T/2 \\ 0, & \text{se } t < t_0 - T/2 \text{ e } t > t_0 + T/2 \end{cases} \quad (4.22)$$

Calcule-se o produto desta função por um sinal $x(t)$ contínuo:

$$y(t) = x(t) \cdot w_T(t)$$

Se $x(t)$ satisfizer as condições de Dirichlet, então o mesmo sucederá com o novo sinal construído $y(t)$, definido no intervalo $]-\infty, +\infty[$, sendo possível nestas condições calcular a sua transformada de Fourier

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t) \cdot w_T(t)] e^{-i2\pi f t} dt = \int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} x(t) \cdot e^{-i2\pi f t} dt \quad (4.23)$$

Da igualdade entre (4.21) e (4.23), pode concluir-se que a transformada finita de Fourier de um sinal observado num intervalo finito de largura T é igual à transformada de Fourier do produto do sinal inicial $x(t)$ por uma "janela rectangular" com a mesma largura. Por outro lado, atendendo à propriedade da transformada de Fourier do produto de 2 sinais, enunciada no ponto 4.2.2, pode concluir-se que $X_T(f)$ é igual à convolução da transformada de Fourier, de $x(t)$, $X(f)$ com a transformada de Fourier da janela de observação, $W_T(f)$

$$X_T(f) = X(f) * W_T(f) \quad (4.24)$$

Para exemplificar as consequências práticas deste resultado, considere-se um sinal $x(t)$ constituído por uma senoide de frequência f_0 e amplitude A ;

$$x(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t) \quad , \quad t \in]-\infty, +\infty[$$

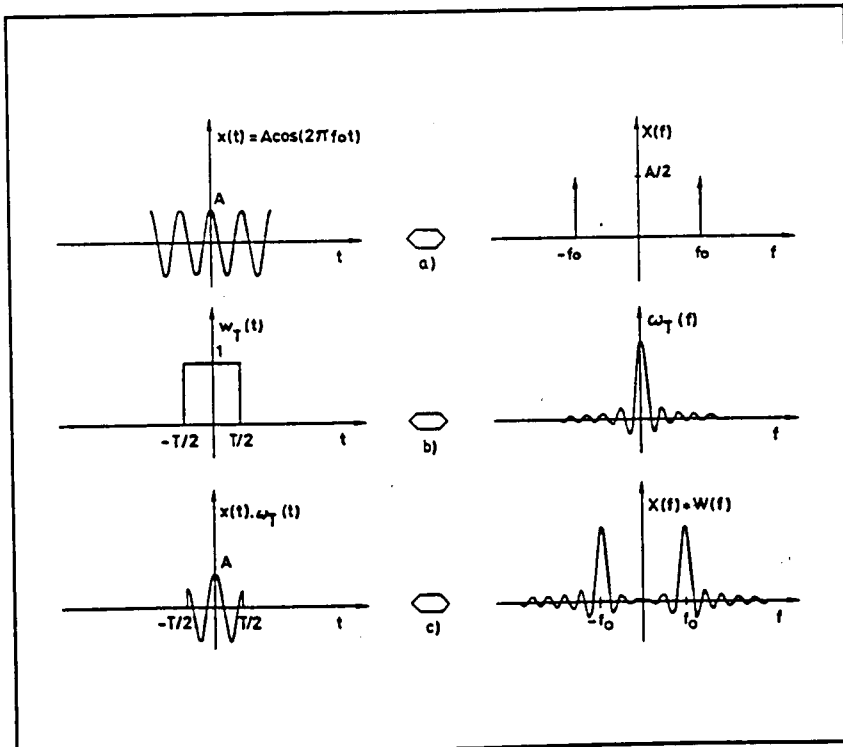


Figura 4.13 - Transformada finita de Fourier de uma função sinusoidal.

A transformada de Fourier deste sinal é real e tem valor [16] $X(f) = A/2 \cdot [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)]$ (Figura 4.13.a)). Admita-se que $x(t)$ é observado através de uma janela $w_T(t)$ de largura T , centrada na origem. O espectro de $w_T(t)$, $W_T(f)$, será (Figura 4.13.b))

$$W_T(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} w_T(t) e^{-i2\pi ft} dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i2\pi ft} dt = \frac{-1}{2i\pi f} \cdot e^{-i2\pi ft} \Big|_{-T/2}^{T/2} = \frac{\text{sen}(\pi f T)}{\pi f T} \cdot T \quad (4.25)$$

O produto $x(t) \cdot w_T(t)$ tem por transformada a convolução de $X(f)$ com $W_T(f)$, graficamente representada na Figura 4.13.c) e cuja quantificação envolve a realização das seguintes operações:

- "Dobra-se" $W_T(f)$ em torno do eixo das ordenadas (de que resulta uma função igual, $W_T(-f)$, dada a simetria de $W_T(f)$);
- Percorre-se o eixo das abcissas com $W_T(f)$ centrado numa frequência f' a variar no intervalo $]-\infty, +\infty[$ (Figura 4.14.a));
- Calcula-se para cada valor de f' a área subentendida pela função produto $X(f') \cdot W_T(f - f')$.

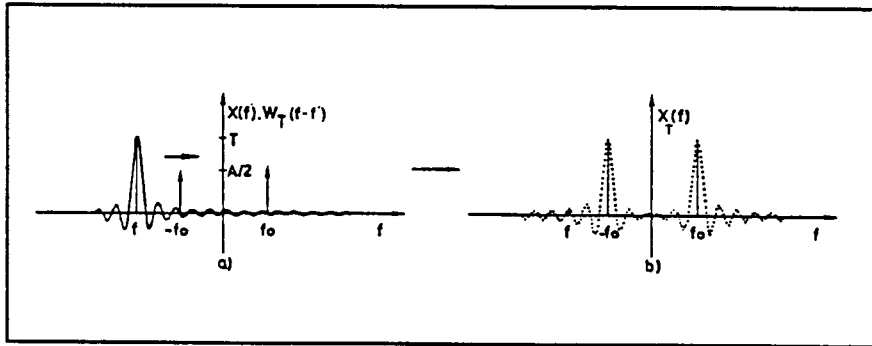


Figura 4.14 - Convolução de $X(f)$ com $W_T(f)$ para uma frequência genérica.

Dessa forma, atendendo à expressão (4.25) e às propriedades da função impulso, obtém-se que:

$$X_T(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f') \cdot W_T(f - f') df' = \frac{AT}{2} \cdot \left(\frac{\text{sen} \pi(f + f_0)}{\pi(f + f_0)T} + \frac{\text{sen} \pi(f - f_0)}{\pi(f - f_0)T} \right)$$

Conclui-se então que as duas riscas com área $A/2$ do espectro de uma função sinusoidal são transformadas, quando a sua observação é realizada num intervalo finito, numa função contínua com ordenadas máximas de valor $AT/2$, em correspondência com as frequências $-f_0$ e f_0 . O conteúdo espectral relativo às frequências $-f_0$ e f_0 passa assim a distribuir-se em frequência, através de um factor de ponderação do tipo $\text{sen}(\pi\Delta)/(\pi\Delta)$, que se torna progressivamente mais pequeno à medida que aumenta a distância da frequência f às frequências $-f_0$ e f_0 .

Pode dizer-se portanto que a natureza finita do intervalo de observação da função contínua $x(t)$ leva a um "escorregamento" do conteúdo em frequência para as frequências mais próximas, associado a um fenómeno de ondulação do espectro, fenómeno que na literatura de origem anglo-americana tem a designação de "leakage".

Se o período de observação T aumentar, a transformada $W_T(f)$ passará a ser constituída por um lóbulo central mais fino e de maior altura (Figura 4.13.b)), pelo que o "escorregamento" para as frequências laterais do contributo nas frequências f_0 e $-f_0$ será menor. No limite, quando $T \rightarrow \infty$, $W_T(f)$ representará o impulso de Dirac centrado na origem e a sua convolução com $X(f)$ terá por resultado a própria transformada $X(f)$.

Uma forma simples de reduzir os efeitos indesejados produzidos pelo "leakage" consistirá então em aumentar o período de observação do sinal.

4.2.4 - Transformada discreta finita de Fourier

A definição da transformada finita de Fourier de um sinal $x(t)$ num intervalo genérico $[t_0 - T/2, t_0 + T/2]$ não é ainda adequada à utilização de técnicas experimentais em Dinâmica Estrutural.

De facto, a utilização de modernos computadores e de técnicas de análise digital de sinais pressupõem a obtenção de amostras discretas de sinais contínuos. É no entanto possível definir, partindo do conceito de transformada de Fourier de um registo contínuo e utilizando as suas propriedades fundamentais, a *transformada discreta finita de Fourier*, aplicável a uma série amostrada num intervalo finito qualquer.

Seja $x(t)$ um sinal contínuo, com transformada de Fourier $X(f)$ (Figura 4.15.a)).

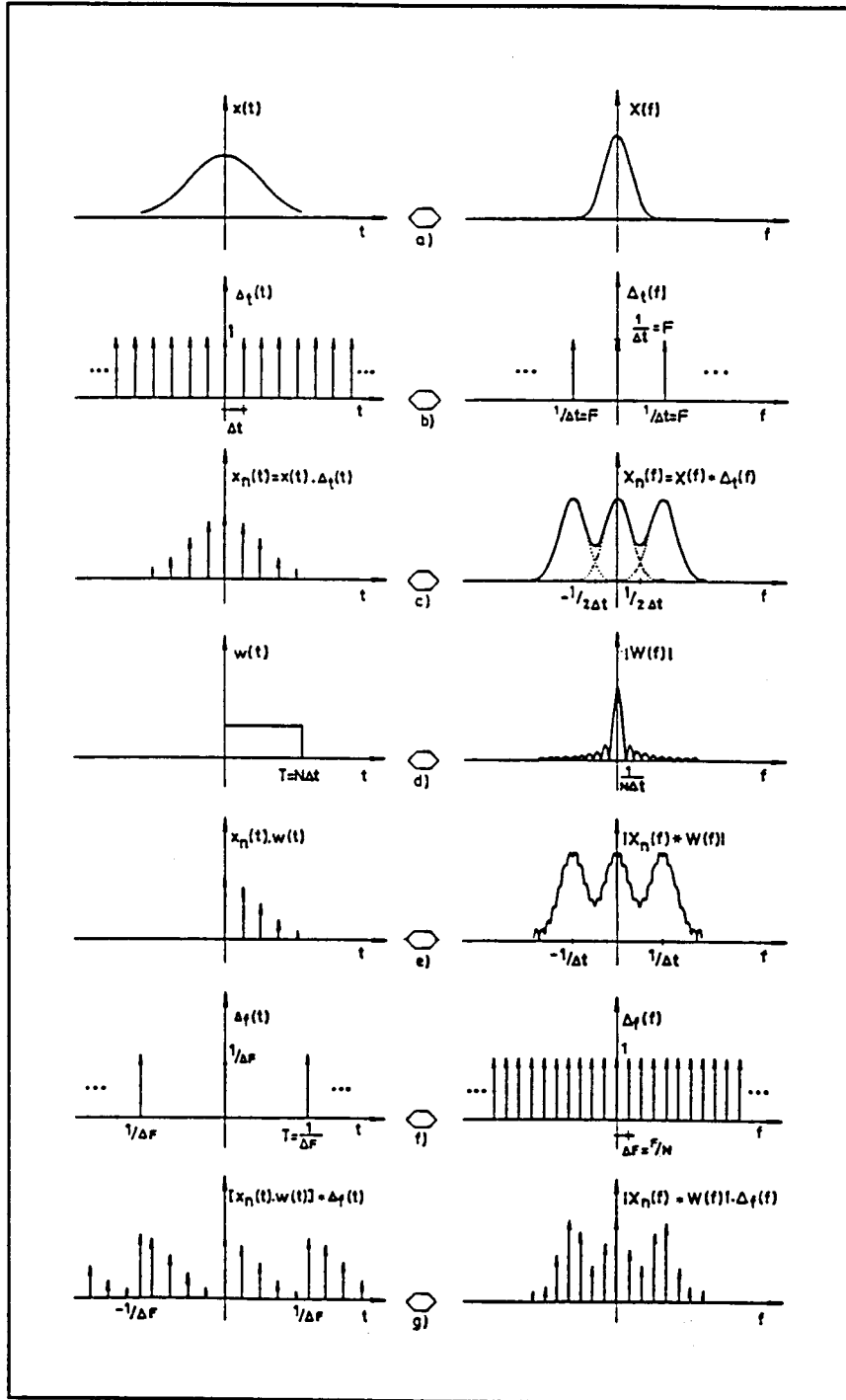


Figura 4.15 - Relacionamento entre a transformada discreta finita de Fourier e a transformada de Fourier associada a um sinal contínuo $x(t)$.

Admita-se que $x(t)$ é observado em instantes espaçados de Δt . Esta operação de amostragem, que consiste em tomar um valor x_n da função num instante $t_n = n \cdot \Delta t$, corresponde a efectuar o produto do sinal contínuo $x(t)$ por uma função de amostragem $\Delta_t(t)$, constituída por um trem de impulsos unitários de Dirac espaçados de Δt :

$$\Delta_t(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\Delta t)$$

Tem-se então:

$$\begin{aligned} x_n(t_n) &= x_n(n \cdot \Delta t) = x(t) \cdot \Delta_t(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\Delta t) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [x(n\Delta t) \cdot \delta(t - n\Delta t)] \end{aligned} \quad (4.26)$$

Na Figura 4.15.b) representa-se a função amostragem, $\Delta_t(t)$, e a respectiva transformada de Fourier, $\Delta_t(f)$, podendo visualizar-se na Figura 4.15.c) a série amostrada $x_n(t)$.

Atendendo à propriedade da transformada do produto enunciada em 4.2.2.2, pode dizer-se que a transformada de Fourier da série amostrada é igual à convolução do espectro $X(f)$ do sinal $x(t)$ contínuo que lhe deu origem com o espectro $\Delta_t(f)$ do trem de impulsos:

$$x(t) \cdot \Delta_t(t) \quad \Longleftrightarrow \quad X(f) * \Delta_t(f) \quad (4.27)$$

Fazendo $X_n(f) = X(f) * \Delta_t(f)$, vem

$$\begin{aligned} X_n(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f') \cdot \Delta_t(f - f') \cdot df' = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f') \cdot \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - f' - n/\Delta t) \right] df' \\ &= \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} X(f') \cdot \delta(f - f' - n/\Delta t) df' \right\} \\ &= \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(-f + n/\Delta t) \end{aligned} \quad (4.28)$$

A expressão (4.28) permite afirmar que o espectro $X_n(f)$ de uma série amostrada consiste numa soma de espectros $X(f)$, afectados pela constante $1/\Delta t$, centrados em frequências espaçadas de $1/\Delta t$ (Figura 4.15.c)), quantidade que representa a frequência de amostragem F da série.

Se $x(t)$ for um sinal de banda limitada em que o contributo em frequência é inferior a metade da frequência de amostragem, então os espectros não se sobrepõem e por isso manter-se-ão preservadas as ordenadas da transformada de Fourier do sinal contínuo original

para a gama de frequências contidas no intervalo $[-F, F]$. Isso significa que a operação de amostragem se traduz, no domínio da frequência, por uma periodização do espectro original, com uma frequência igual à frequência de amostragem do sinal, F .

Se, por outro lado, existir alguma sobreposição dos espectros contíguos constituintes de $X_n(f)$ (caso da Figura 4.15.c)), então as ordenadas do espectro do sinal amostrado serão afectadas por um erro, dito *erro de sobreposição* ou, em nomenclatura de origem anglo-americana, "*aliasing*".

Embora este assunto seja abordado no ponto 4.4, refere-se já, por ser evidente, que uma forma de evitar o "aliasing" consiste em aumentar a frequência de amostragem, pois deste modo Δt reduz-se, aumentando o espaçamento sucessivo entre os impulsos constituintes do trem de impulsos $\Delta_t(f)$ e, conseqüentemente, a distância entre os sucessivos espectros centrados em $f = n/\Delta t$, que fazem parte de $X_n(f)$.

Voltando agora à expressão de $x(t)$ para o instante $t_n = n \cdot \Delta t$, a definição de integral de Fourier (4.8) aplicado a uma função contínua permite afirmar que:

$$x(t_n) = x_n(n \cdot \Delta t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{i2\pi f(n\Delta t)} df \quad , \quad \text{com } n = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$$

Admitindo não existirem erros de sobreposição e, atendendo à expressão (4.28), pode escrever-se

$$x_n(t_n) = \Delta t \cdot \int_{-F/2}^{F/2} X_n(f) \cdot e^{i2\pi f \cdot (n\Delta t)} df \quad (4.29)$$

Sendo $X_n(f)$ uma função periódica de período F , então será decomponível em série de Fourier:

$$X_n(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{F} \int_{-F/2}^{F/2} X_n(f) \cdot e^{-i2\pi f(n\Delta t)} df \cdot e^{+i2\pi f(n\Delta t)} \right]$$

Usando (4.29), vem

$$X_n(f) = \frac{1}{F} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \cdot e^{-i2\pi n \frac{f}{F}} \quad (4.30)$$

O conhecimento dos valores amostrados x_n do sinal contínuo $x(t)$ permite então, através de (4.30), a obtenção de $X_n(f)$. Note-se que $X_n(f)$ representa ainda uma descrição contínua do conteúdo espectral do sinal amostrado e está definida no intervalo $]-\infty, +\infty[$. Como na realidade só podemos trabalhar com valores discretos de uma função e, por outro

lado, tem de ser finito o intervalo de observação do sinal $x(t)$, torna-se ainda necessário efectuar uma operação de limitação do tempo de observação a um intervalo finito $[0, T]$ e proceder a uma amostragem do espectro $X_n(f)$.

- *Truncatura do sinal amostrado:*

Sendo Δt o espaçamento entre amostras sucessivas do sinal $x(t)$, a consideração de N desses valores corresponde a uma amostragem de duração finita no intervalo $[0, T]$, com $T = N \cdot \Delta t$.

Ora, como foi visto em 4.2.3, a observação de um sinal num intervalo finito pode ser interpretada como o produto no domínio do tempo desse sinal por uma janela (Figura 4.15.e)), o que, no domínio da frequência, corresponde a uma convolução:

$$x_n(t) \cdot w(t) \quad \longleftrightarrow \quad X_n(f) * W(f) \quad (4.31)$$

Note-se que, ao calcular a transformada de Fourier de $w(t)$, obteve-se uma função $W(f)$ complexa. Isso constitui o resultado de proceder a um avanço no tempo de $T/2$ da janela $w(t)$, a partir de uma janela simétrica em relação ao eixo das ordenadas, cujo espectro de Fourier é real, o que se traduz no domínio da frequência por um avanço de fase. Para facilitar a compreensão do problema em questão, optou-se pela representação da amplitude $|W(f)|$ do espectro $W(f)$ em 4.15.d).

O resultado da operação de convolução assinalada por (4.31) é o "escorregamento" das componentes relativas a uma frequência f genérica para as frequências laterais, traduzindo-se numa modificação das ordenadas do espectro $|X_n(f)|$ (dependente da largura T da janela), com o aparecimento de uma ondulação ("rippling") (Figura 4.15.e)).

- *Discretização de $X_n(f) * W(f)$:*

Sendo $F = 1/\Delta t$ a frequência de amostragem do sinal, define-se um intervalo de discretização em frequência $\Delta F = F/N$ e uma função $\Delta_f(f)$, constituída por um trem de impulsos unitários espaçados de ΔF (Figura 4.15.f)), que representa a operação de amostragem em frequência.

A amostragem de $X_n(f) * W(f)$ traduz-se no produto desta função pelo trem de impulsos $\Delta_f(f)$:

$$X_n(n\Delta F) * W(n\Delta F) = (X_n(f) * W(f)) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n\Delta F) \quad , \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

Um raciocínio análogo ao que foi utilizado para a amostragem no domínio do tempo permite-nos agora afirmar que, ao produto no domínio da frequência de $(X_n(f) * W(f))$ por $\Delta_f(f)$ corresponde, no domínio do tempo, uma convolução de $(x_n(t) \cdot w(t))$ com $\Delta_f(t)$:

$$[x_n(t) \cdot w(t)] * \Delta_f(t) \quad \Longleftrightarrow \quad [X_n(f) * W(f)] \cdot \Delta_f(f) \quad (4.32)$$

Partindo da equação (4.30) e desenvolvendo a convolução $[X_n(f) * W(f)]$, vem

$$\begin{aligned} X_n(f) * W(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{F} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \cdot e^{-i2\pi n \frac{f'}{F}} \right] \cdot W(f - f') df' \\ &= \frac{1}{F} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x_n e^{-i2\pi n \frac{f}{F}(f-u)} \cdot W(u) du \right] \\ &= \frac{1}{F} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \cdot e^{-i2\pi n \frac{f}{F}} \cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} W(u) e^{i2\pi n \frac{u}{F}} du \right] \\ &= \frac{1}{F} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \cdot w(t) e^{-i2\pi n \frac{f}{F}} \\ &= \frac{1}{F} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-i2\pi n \frac{f}{F}} \end{aligned}$$

A amostragem para a frequência $f_k = k \cdot \Delta F$ permite escrever:

$$X_{nk}(f_k) = \frac{1}{F} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} \quad , \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (4.33)$$

Esta expressão representa a *transformada de Fourier discreta finita* do sinal de que se obtiveram N amostras.

Conhecendo as ordenadas X_{nk} da transformada discreta finita de Fourier para um conjunto de N frequências $f_k = k \cdot \Delta F$, é ainda possível obter as N ordenadas de um sinal $x_{pn}(t) = [x_n(t) \cdot w(t)] * \Delta f(t)$ para instantes $t_n = n \cdot \Delta t$ (Figura 4.15.g) do intervalo finito $[0, T]$, com $T = N \cdot \Delta t$, através de

$$x_{pn}(t_n) = \frac{F}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_{nk}(f_k) \cdot e^{i2\pi n \frac{k}{N}} \quad , \quad \text{com } n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.34)$$

relação que representa a *transformada inversa discreta finita de Fourier* de X_{nk} . Para o demonstrar, basta substituir (4.33) em (4.34)

$$x_{pn}(t_n) = \frac{F}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{1}{F} \sum_{j=0}^{N-1} x_j \cdot e^{-i2\pi \frac{jk}{N}} \right] \cdot e^{i2\pi \frac{nk}{N}}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{j=0}^{N-1} x_j \cdot e^{i2\pi \frac{k}{N} (n-j)} \right]$$

Sendo as funções $e^{i2\pi \frac{k}{N} j}$ ortogonais, então cada somatório em j contém uma única parcela não nula, aquela em que $n = j$, cujo valor é $x_n \cdot e^0$, pelo que

$$x_{pn}(t_n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_n = \frac{1}{N} \cdot N \cdot x_n = x_n$$

Note-se agora que $x_{pn}(t)$ é igual a $x_n(t)$ para o intervalo $[0, T]$, pelo que a expressão (4.34) fica demonstrada.

A transformada discreta de Fourier goza de propriedades idênticas às propriedades da transformada de Fourier de um sinal, sendo no entanto a sua representação matemática distinta. Na Tabela 4.1, resumem-se algumas das propriedades mais importantes para o caso discreto [16] e contínuo.

Tabela 4.1 - Principais propriedades das transformadas vs transformadas discretas de Fourier.

Transformada de Fourier	Propriedade	Transformada discreta de Fourier
$x(t) + y(t) \longleftrightarrow X(f) + Y(f)$	Linearidade	$x(n) + y(n) \longleftrightarrow X(k) + Y(k)$
$X(t) \longleftrightarrow x(-f)$	Simetria	$\frac{1}{N} X(n) \longleftrightarrow x(-k)$
$x(t - t_0) \longleftrightarrow X(f) \cdot e^{-i2\pi f t_0}$	Atraso no tempo	$x(n - j) \longleftrightarrow X(k) \cdot e^{-i2\pi n j / N}$
$x(t) \cdot e^{i2\pi f t_0} \longleftrightarrow X(f - f_0)$	Atraso na frequência	$x(n) \cdot e^{i2\pi n j / N} \longleftrightarrow X(k - j)$
$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot y(t - \tau) d\tau$	Convolução	$x(n) * y(n) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \cdot y(n - j)$
$x(t) * y(t) \longleftrightarrow X(f) \cdot Y(f)$	Teorema da convolução no tempo	$x(n) * y(n) \longleftrightarrow X(k) \cdot Y(k)$
$x(t) \cdot y(t) \longleftrightarrow X(f) * Y(f)$	Teorema da convolução na frequência	$x(n) \cdot y(n) \longleftrightarrow X(k) * Y(k)$
$x(t)^{(p)} \longleftrightarrow (i \cdot 2\pi f)^p \cdot X(f)$	Derivação	$x(n)^{(p)} \longleftrightarrow \left(i2\pi \frac{k}{N}\right)^p \cdot X(k)$

4.2.5 - Relacionamento da transformada discreta finita de Fourier com as séries de Fourier

Seja $x(t)$ um sinal contínuo definido num intervalo finito $[0, \tau]$ (Figura 4.16.a)).

A partir deste sinal é possível definir um sinal periódico $x_p(t)$, ilimitado no tempo, obtido por repetição do sinal original colocado em posições espaçadas do período do sinal, τ (Figura 4.16.b)).

A periodicidade de $x_p(t)$ permite a decomposição em série de Fourier, obtendo-se então

$$x_p(t) = \frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i2\pi \frac{nt}{\tau}} \quad (4.35)$$

com

$$c_n = \int_0^{\tau} x_p(t) \cdot e^{-i2\pi \frac{nt}{\tau}} dt$$

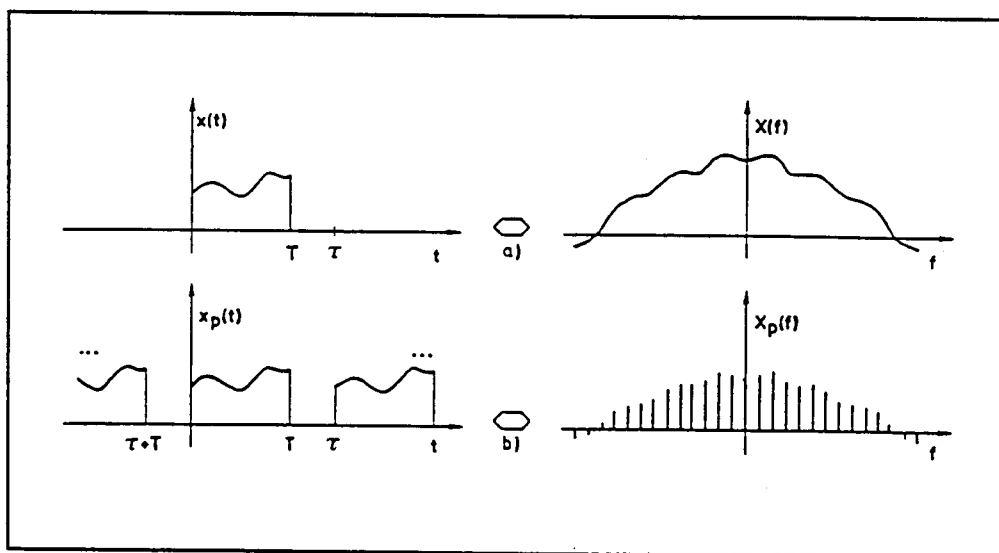


Figura 4.16 - a) Transformada de Fourier de um sinal contínuo num intervalo finito; b) e de um sinal periódico construído a partir de $x(t)$.

Como no intervalo $[0, \tau]$ $x_p(t) = x(t)$, conclui-se que c_n representa a transformada finita de Fourier do sinal $x(t)$ para uma frequência $f = n/\tau$, isto é

$$c_n = X_{\tau}(f) \quad (4.36)$$

Para conhecer o conteúdo espectral de $x_p(t)$, aplica-se a transformada de Fourier

$$X_p(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_p(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad (4.37)$$

Substituindo (4.35) e (4.36) em (4.37), vem

$$X_p(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_T(f) e^{i2\pi \frac{n}{\tau} t} \right] \cdot e^{-i2\pi ft} dt$$

Trocando a ordem do somatório com o integral, vem

$$X_p(f) = \frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_T(f) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi \frac{n}{\tau} t} \cdot e^{-i2\pi ft} dt$$

Como, por outro lado,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi \frac{n}{\tau} t} \cdot e^{-i2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi (f - \frac{n}{\tau}) t} dt = \delta(f - n/\tau)$$

pode então concluir-se que

$$X_p(f) = \frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_T(f) \cdot \delta(f - n/\tau) = \frac{1}{\tau} X_T(f) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n/\tau) \quad (4.38)$$

O significado desta equação é o de que, ao periodizar um sinal, o seu conteúdo espectral passa a ser descrito por um espectro de riscas cuja envolvente é, a menos de um factor de escala, o espectro do sinal original, $X_T(f)$, resultado a que já se tinha chegado, também no sentido inverso, para um sinal amostrado no domínio do tempo, em consequência da periodização no domínio da frequência (Figura 4.15.g)).

Considere-se agora para período do sinal $x_p(t)$, $\tau = T$ e obtenham-se no intervalo $[0, T]$ N amostras igualmente espaçadas, de forma que $N \cdot \Delta t = T$.

Para um instante $t_n = n \cdot \Delta t = n \cdot \frac{T}{N}$, a equação (4.35) toma a forma

$$x_p(t_n) = \frac{1}{N \Delta t} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_j \cdot e^{i2\pi j \frac{n}{N}}$$

Como, por outro lado, $e^{i2\pi j \frac{n}{N}}$ é uma função circular, pode escrever-se

$$e^{i2\pi j \frac{n}{N}} = e^{i2\pi \frac{n}{N} (j + Np)} \quad , \quad \text{para } p = \dots, -1, 0, 1, \dots \quad (4.39)$$

Fazendo a mudança de variável $j = k + N \cdot p$ e usando (4.39), virá

$$x_p(t_n) = \frac{1}{N \Delta t} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{k=0}^{N-1} c_{k+NP} \cdot e^{i2\pi \frac{\Delta}{N} (k+NP)} \right]$$

$$= \frac{1}{N \Delta t} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{k=0}^{N-1} c_{k+NP} \cdot e^{i2\pi n \frac{k}{N}} \right]$$

ou, finalmente,

$$x_p(t_n) = \frac{1}{N \Delta t} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_{k+NP} \right] \cdot e^{i2\pi n \frac{k}{N}} \quad (4.40)$$

Comparem-se agora as equações (4.34) e (4.40). O termo $X_{nk}(f_k)$ da transformada discreta finita de Fourier de um sinal periódico em correspondência com a frequência $f_k = k \cdot \Delta f$ pode ser entendido como uma soma infinita de coeficientes c_{k+NP} da série de Fourier associados aos harmônicos dessa frequência.

Pode então concluir-se o seguinte:

- um sinal periódico, contínuo ou com um número finito de pontos de descontinuidade apresenta uma composição espectral discreta e infinita (Figura 4.16.b));
- em consequência da operação de amostragem, a composição em frequência do sinal passa a ser contínua e definida num intervalo finito $[0, F]$. Além disso, a componente associada a uma dada frequência desse intervalo passa a conter o contributo de todos os harmônicos múltiplos dessa frequência situados fora do intervalo $\left[-\frac{F}{2}, \frac{F}{2}\right]$ (Figura 4.17).

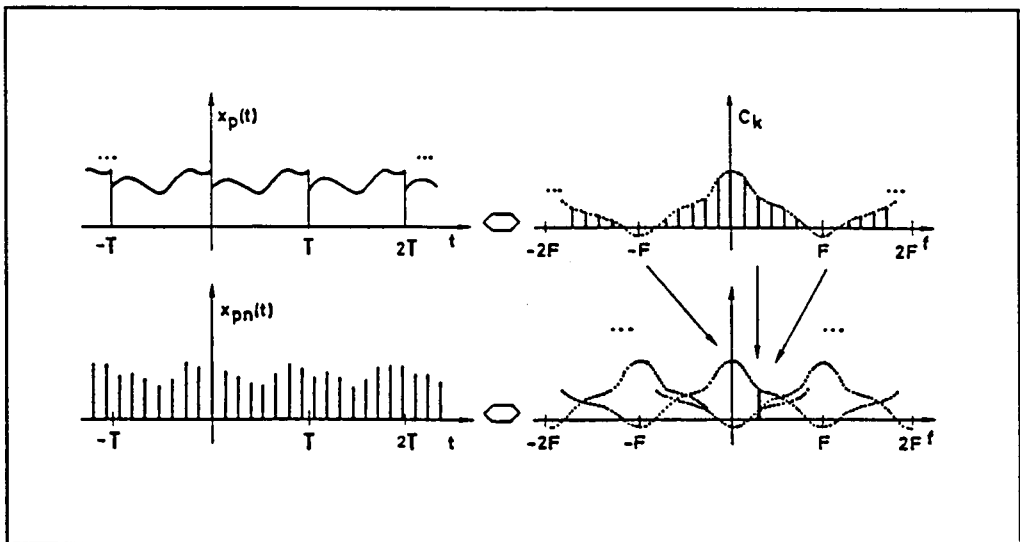


Figura 4.17 - Relação entre as componentes c_k do desenvolvimento em série de Fourier de um sinal periódico e a transformada discreta do sinal amostrado.

4.2.6 - Transformada rápida de Fourier (FFT)

Como foi visto em 4.2.5, o cálculo de uma transformada discreta de Fourier consiste na determinação de um conjunto de N quantidades $X_{nk}(k)$, definidas por

$$X_{nk}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n \cdot W_N^{n \cdot k} \quad (4.41)$$

em que

$$W_N = e^{-i \frac{2\pi}{N}} \quad \text{e} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Como a adição é uma operação de execução computacional muito mais rápida do que a multiplicação, o tempo de cálculo de cada coeficiente $X_{nk}(k)$ da transformada discreta de Fourier pode ser avaliado com base no número de produtos que envolve.

Assim, sendo $X_{nk}(k) = \alpha_0 + \alpha_1 W_N^k + \alpha_2 W_N^{2k} + \dots + \alpha_{N-1} W_N^{(N-1)k}$ e como cada potência de k envolve a realização de $(N-1)$ multiplicações, então é de $(N-1)^2$ o número total de multiplicações necessário para calcular $X_{nk}(k)$.

É possível reduzir consideravelmente, a uma quantidade da ordem de $N \log_2 N$, o número de operações na avaliação de $X_{nk}(k)$ (Figura 4.18), através da utilização de uma técnica denominada *transformada rápida de Fourier*, também conhecida como "Fast Fourier Transform", ou FFT [30].

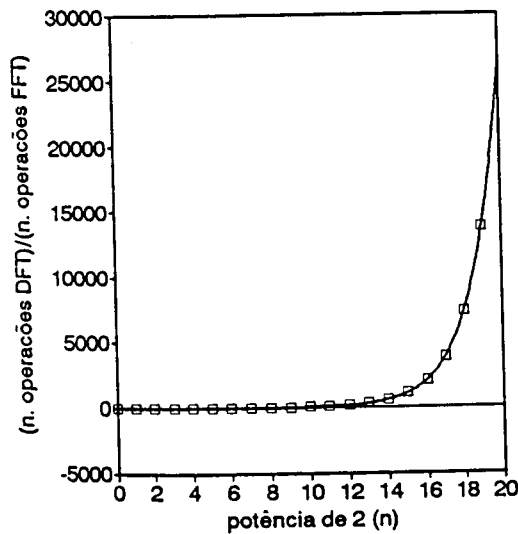


Fig. 4.18 - Comparação do número de multiplicações necessárias para o cálculo de $X_{nk}(k)$ através de um cálculo directo (DFT) e usando o algoritmo FFT.

Esta técnica baseia-se na partição de uma série contendo N valores, $\{x_n\}$, em duas sequências $\{x_n\}_1$ e $\{x_n\}_2$, cada uma com $N/2$ valores extraídos alternadamente da série $\{x_n\}$. Cada uma destas séries é decomposta seguidamente em outras duas séries com $N/4$ valores cada e assim sucessivamente, até à obtenção de sequências elementares contendo 1 ponto. Sendo conhecida a transformada discreta de Fourier de uma série constituída por um ponto, uma progressiva combinação das sucessivas transformadas permite obter a

quantidade final $X_{nk}(k)$. Na Figura 4.19 [101] apresentam-se esquematicamente os passos do algoritmo FFT para uma sequência contendo quatro valores.

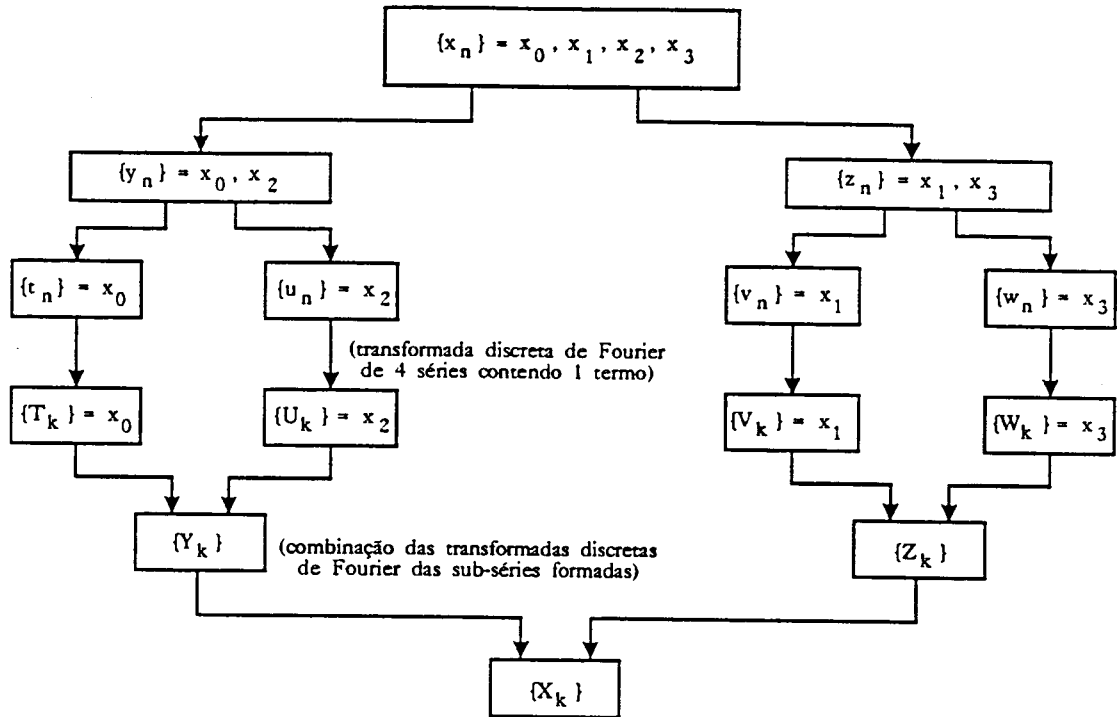


Figura 4.19 - Sequência de passos do algoritmo FFT para uma série contendo 4 elementos.

Repare-se que, pela forma como está implementado, este algoritmo exige a utilização de sequências contendo 2^N amostras, o que pode constituir uma limitação, obrigando a uma truncatura da série amostrada. Esta dificuldade pode ser contornada por adição de zeros ao sinal até à potência de dois mais próxima sem perda ou adição de informação, como se verá no ponto 4.4.5.

É ainda de sublinhar outra vantagem importante decorrente da utilização do algoritmo FFT, que consiste numa redução dos erros numéricos resultantes da truncatura das variáveis e é consequência de o número de operações ser substancialmente inferior ao de um cálculo directo.

4.3 - ERROS

Na caracterização do conteúdo espectral associado a uma determinada grandeza física através da aquisição e análise de um sinal contínuo suposto representativo da sua evolução temporal, são cometidos diversos erros provenientes, quer do processo de medição, quer da aplicação das técnicas de processamento já citadas.

É importante conhecer as características destes erros, identificar as causas do seu aparecimento e estudar formas de os reduzir ou eliminar, de maneira a que a imagem espectral final construída para o sinal analisado represente tanto quanto possível o sinal real e, portanto, a grandeza física medida.

Basicamente, os erros encontrados nas estimativas do conteúdo espectral de um sinal podem classificar-se nos seguintes tipos: *erros de viés* e *erros de variância*.

Os erros de viés manifestam-se através de desvios sistemáticos das quantidades estimadas em relação às quantidades reais, enquanto que os erros de variância se traduzem por desvios aleatórios relativamente à média estimada dessas quantidades.

Quanto às origens destas formas de erros, pode apontar-se o seguinte:

- As maiores fontes de erros são as associadas ao processo de medição, decorrendo das limitações impostas pela necessária natureza finita da informação e pela discretização. O carácter finito da informação é consequência da impossibilidade de observar o sinal indefinidamente e traduz-se na conversão da energia associada a uma frequência específica em energia distribuída numa banda de frequências em torno desta última. O erro daqui decorrente é designado por *erro de escorregamento*, ou por "*leakage*", na literatura anglo-americana. Por outro lado, a impossibilidade de caracterizar numericamente um sinal sob forma contínua leva a que apenas se possa obter uma caracterização do correspondente conteúdo espectral num intervalo limitado $[-F/2, F/2]$, verificando-se uma sobreposição da energia contida em frequências situadas fora desse intervalo ao conteúdo nas frequências mais baixas dentro dessa banda. Esta forma de enviesamento é designada por *erro de sobreposição* ou "*aliasing*";
- De grande importância é ainda o ruído introduzido ao longo da cadeia de medição, dito *ruído analógico*, proveniente dos sensores, condicionadores e das ligações entre aparelhos. Este tipo de erro leva em geral a grandes distorções nos sinais medidos, sendo por esse motivo fácil a sua identificação por simples análise visual. A sua redução ou eliminação depende de uma boa montagem e disposição dos aparelhos de medida, com particular destaque para as ligações e tipos de cabos utilizados;
- Com importância secundária, referem-se por fim os erros aleatórios resultantes da quantificação do sinal no processo de conversão analógico-digital. Pelo facto de a tensão eléctrica medida ter de ser traduzida por um dos n^2 níveis do conversor utilizado, surge um erro de truncatura ou arredondamento, cuja distribuição de probabilidade é aproximadamente uniforme. Se o sinal ocupar toda a gama dinâmica do conversor, o erro de quantificação será muito pequeno

e, em face dos outros tipos de erros, desprezável. Tal não acontece se se utilizar um sinal que ocupe uma pequena parte da gama dinâmica do conversor, situação que será sempre de evitar.

Nas secções seguintes descreve-se com maior detalhe o efeito de "leakage" e o "aliasing", considerados os mais importantes erros na análise de sinais, referindo-se ainda as técnicas mais correntemente utilizadas na sua redução ou eliminação.

4.3.1 - Erros por escorregamento ("leakage")

Como já foi referido anteriormente, nomeadamente no ponto 4.2.4 e na introdução a esta secção, o fenómeno de "leakage" ocorre em consequência de ser necessário observar um sinal $x(t)$ num intervalo de tempo finito, o que se traduz, na prática, pela multiplicação de $x(t)$ por uma janela rectangular $w(t)$ de largura T (Figura 4.15.e) ou, no domínio da frequência, por uma convolução da transformada de Fourier $X(f)$ do sinal original com a transformada de Fourier da janela, $W(f)$. Como se pode ainda constatar da Figura 4.15.d), a transformada da janela rectangular é constituída por um lóbulo central de amplitude máxima T e largura na base de $2/T$, centrado em torno da frequência nula e por lóbulos laterais de largura na base $1/T$ e com amplitude máxima decrescente com o valor absoluto da frequência.

Se T aumentar, tornam-se mais estreitos os lóbulos de $W(f)$ e mais alto o lóbulo central, aumentando a resolução em frequência e reduzindo-se o "escorregamento" para as frequências laterais. Isto significa que, quanto maior for o tempo de observação, menor será o "leakage". Aumentar o tempo de observação constitui, portanto, uma maneira de reduzir este tipo de erro.

Considere-se agora o sinal periódico $x(t)$ de período T_0 representado na Figura 4.20.a). $X(f)$ é um espectro de riscas em correspondência com as frequências $-1/T_0$ e $1/T_0$.

Escolhendo uma janela de observação com uma largura qualquer T_1 , $W(f)$ anular-se-á para frequências múltiplas de $1/T_1$ (Figura 4.20.b)). Como a operação de amostragem no domínio da frequência é realizada para pontos espaçados de $\Delta f = 1/T_1$, então a operação de convolução conduzirá a um escorregamento como ilustrado em 4.20.d). Se, no entanto, a largura da janela $w(t)$ for T_0 ou um múltiplo, kT_0 (Figura 4.21), $W(f)$ anular-se-á para frequências espaçadas de $\Delta F = T_0$ e, conseqüentemente, não haverá "escorregamento" sobre esses pontos (Figura 4.21.e)).

Significa isso que é possível eliminar o "leakage" na transformada discreta de Fourier de um sinal periódico $x(t)$, contanto que a janela de observação tenha uma largura que seja múltipla do período T_0 do sinal.

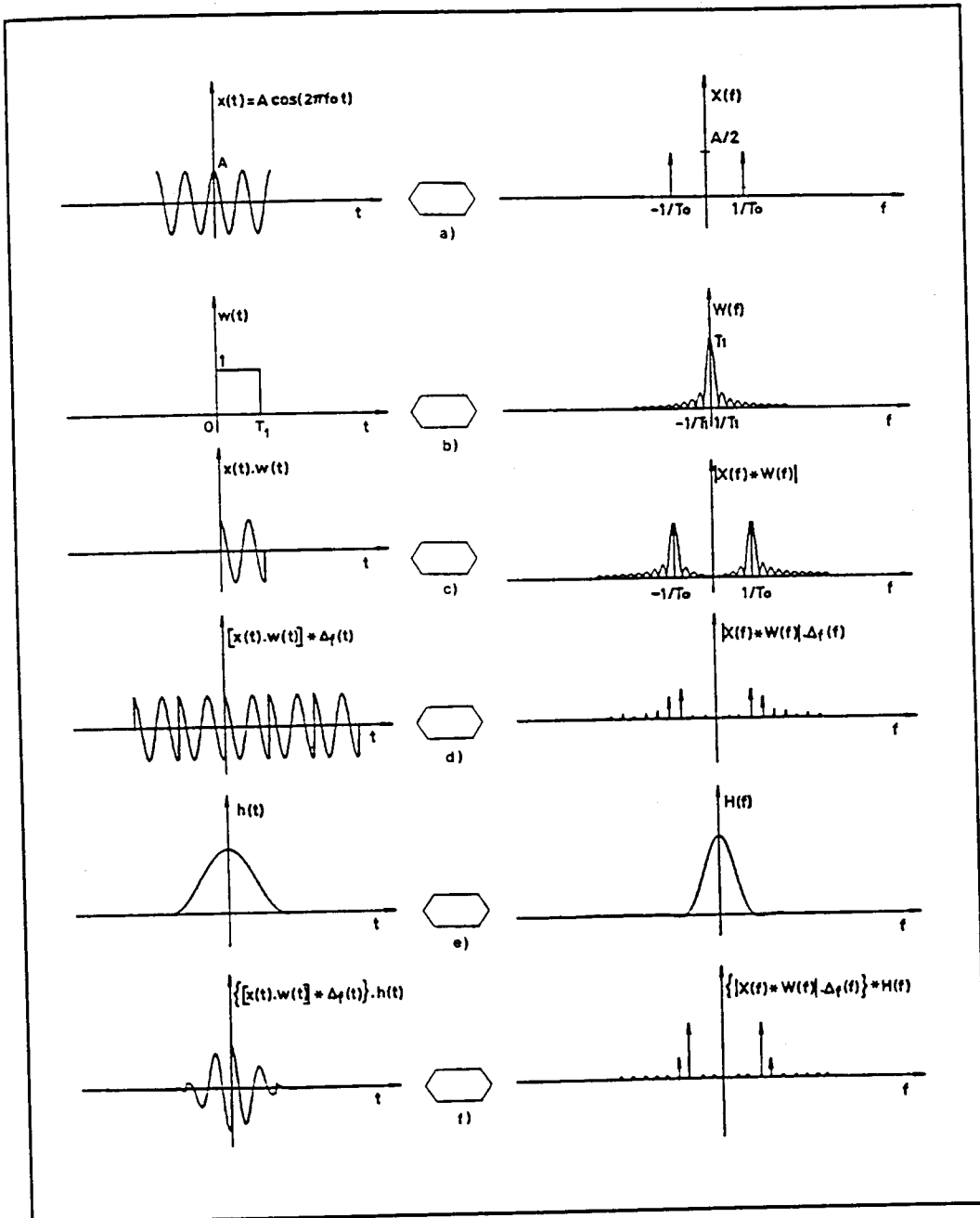


Figura 4.20 - Aparecimento de "leakage" na transformada discreta de Fourier de um sinal periódico de período T_0 observado através de uma janela de largura $T_1 \neq kT_0$.

Acontece contudo que, na prática, dificilmente um sinal é periódico (seria necessário que o sistema observado tivesse um comportamento linear perfeito e fosse actuado por uma força periódica que produzisse uma relação sinal-ruído elevada) e mais dificilmente será possível observá-lo numa janela cuja largura seja um múltiplo do período T_0 (particularmente se utilizarmos o algoritmo FFT, em que o número de pontos amostrados tem de ser uma potência de 2).

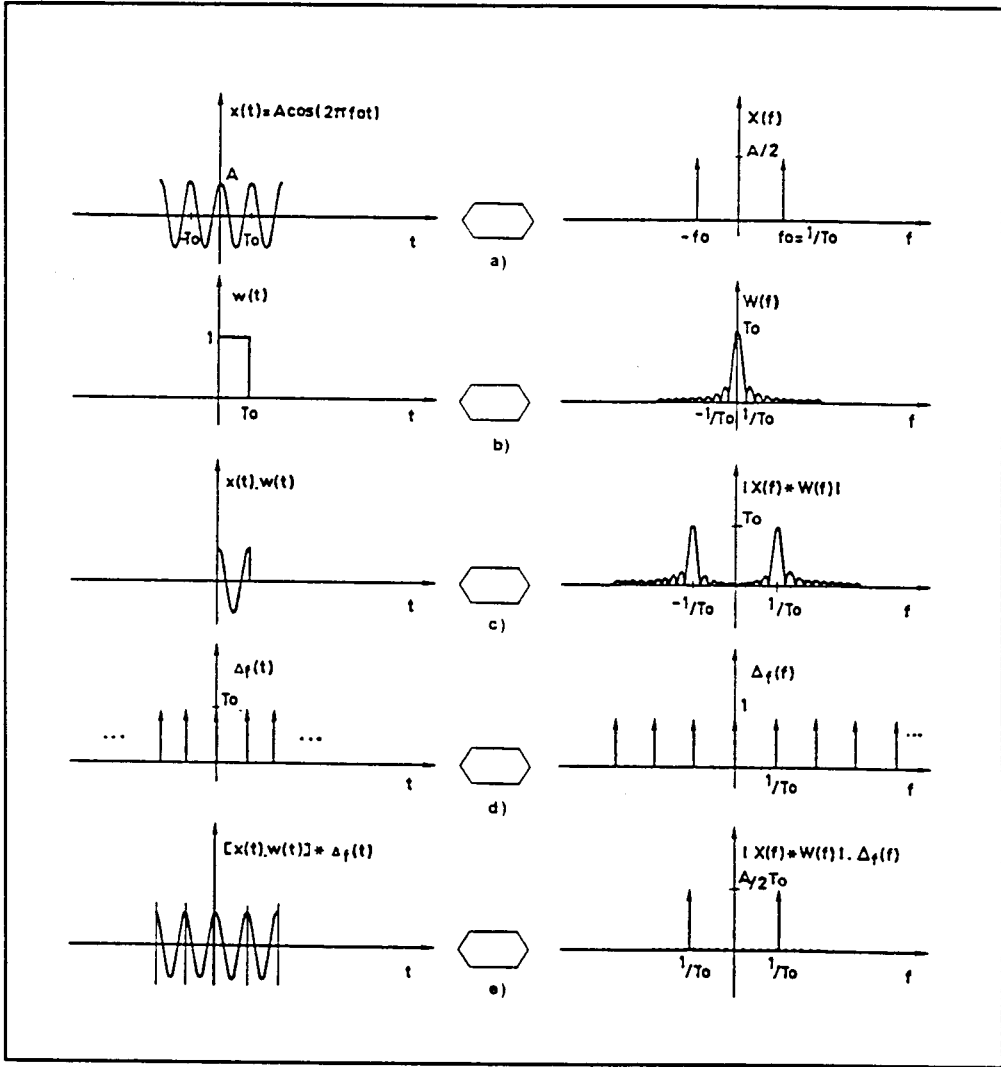
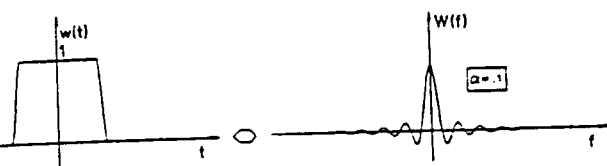


Figura 4.21 - Anulamento do "leakage" para um sinal periódico de período T_0 observado através de uma janela de largura T_0 .

Aumentar o intervalo de tempo de observação é sempre possível, embora o custo desta operação seja elevado, podendo aumentar consideravelmente o tempo de cálculo em virtude do aumento do número de amostras utilizadas com a potência de 2.

Uma técnica que permite com grande eficiência reduzir o erro de "escorregamento", consiste na aplicação de "janelas de dados" com uma forma distinta da rectangular. O objectivo da aplicação de uma janela de dados não rectangular é o de reduzir as discontinuidades do sinal periodizado (Figura 4.20.f) nas fronteiras do período de amostragem, T , reduzindo-se então o efeito de "leakage". Em termos de uma representação em frequência, isso corresponde a uma redução da amplitude dos lóbulos laterais de $W(f)$. Na Figura 4.22 apresentam-se algumas das janelas de dados mais correntemente utilizadas e as respectivas transformadas de Fourier.

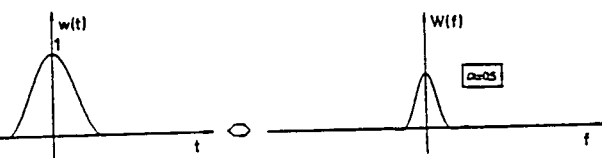
1. Janela de dados "cosine-taper"



$$w(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[1 - \cos \frac{\pi}{\alpha T} (t - T/2) \right] & , -T/2 \leq t \leq -T \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \\ 1 & , -T \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \leq t \leq T \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \\ \frac{1}{2} \left[1 - \cos \frac{\pi}{\alpha T} \left(t - \frac{T}{2} \right) \right] & , T \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

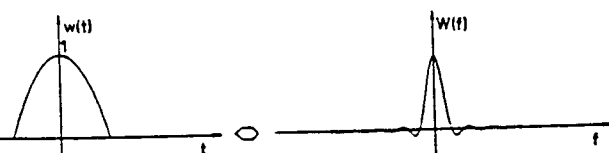
$$W(f) = T(1-\alpha) \cdot \frac{\sin[(1-\alpha)\pi f T]}{(1-\alpha)\pi f T} \left[\frac{1}{1-(2\alpha f T)^2} \cdot \cos(\alpha\pi f T) \right]$$

2. Janela de dados "Hanning"



obtem-se de 1., escolhendo $\alpha = 0.50$

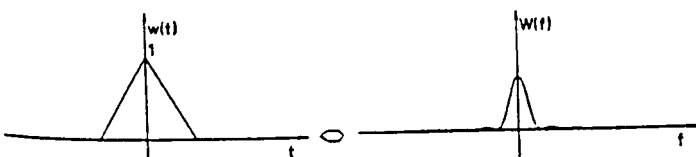
3. Janela de dados "Welch"



$$w(t) = 1 - \frac{4}{T^2} \cdot t^2 \quad , -T/2 \leq t \leq T/2$$

$$W(f) = \frac{2}{\pi^2 f^2 T} \left[\sin \frac{\pi f T}{2} - \cos(\pi f T) \right]$$

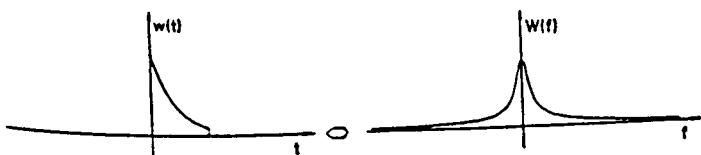
4. Janela de dados triangular ("Parzen")



$$w(t) = 1 - \frac{2}{T} |t| \quad , -T/2 \leq t \leq T/2$$

$$W(f) = \frac{1}{\pi^2 f^2 T} [1 - \cos(\pi f T)]$$

5. Janela de dados exponencial



$$w(t) = \alpha e^{-\alpha t} \quad , 0 \leq t \leq T$$

$$|W(f)| = \frac{\alpha^2}{(2\pi f)^2 + \alpha^2}$$

Figura 4.22 - Janelas de dados.

Os parâmetros utilizados na caracterização de uma "janela de dados" são [79]: (P1) a largura da base do lóbulo principal e (P2) o cociente entre as amplitudes do lóbulo principal e dos lóbulos laterais de maior amplitude. Como se pode constatar na Figura 4.23, em que se sobrepõem as imagens em frequência de algumas das janelas seleccionadas, um aumento de (P2) é conseguido apenas com um aumento de (P1).

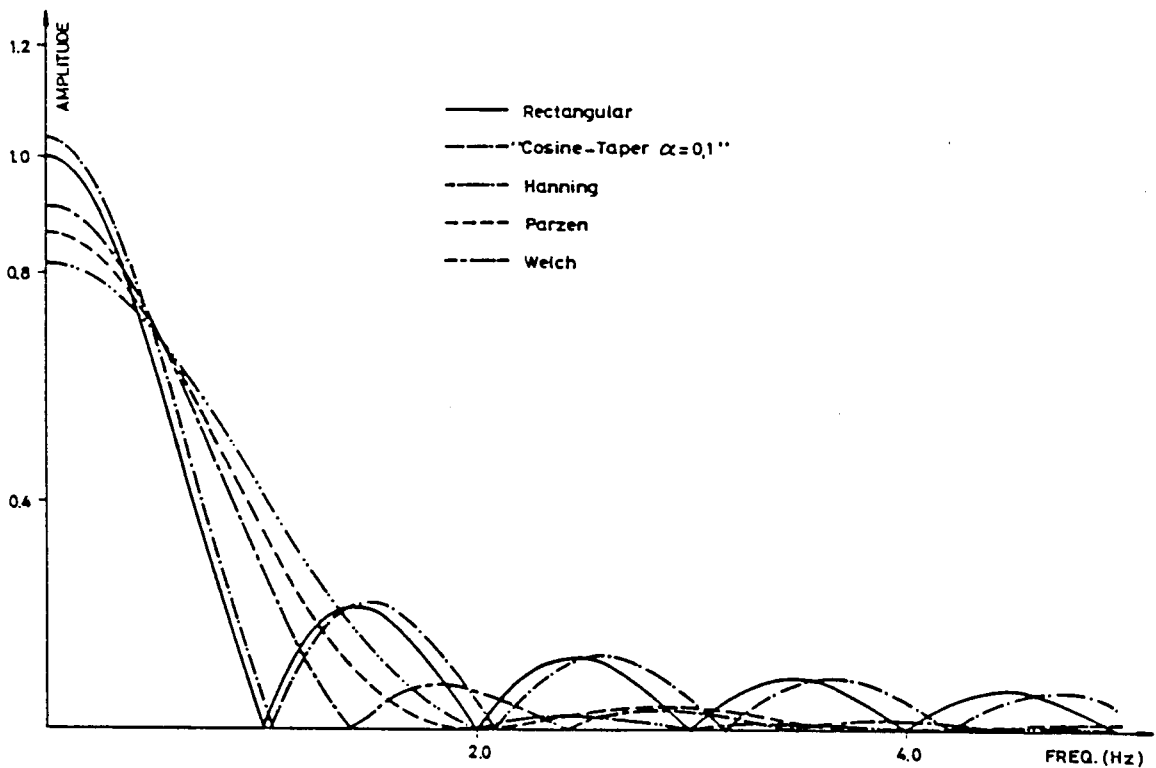


Figura 4.23 - Sobreposição em frequência de algumas janelas de dados.

Facilmente se pode verificar que a aplicação de uma janela de dados cuja largura do lóbulo central seja grande traduzir-se-á numa fraca aproximação da transformada de Fourier do sinal original nas zonas onde esta apresenta grandes variações. Por outro lado, se o cociente entre a amplitude do lóbulo central e dos lóbulos laterais for baixo, a "fuga" para as frequências laterais do conteúdo espectral numa dada risca será mais acentuada e, como tal, a ondulação artificial ("rippling") introduzida pela janela será também mais significativa. A escolha de uma janela de dados deverá assim resultar de um compromisso entre estes dois parâmetros, face às características específicas dos sinais a analisar.

Assim, é usual [53] a utilização de janelas de dados rectangulares ou exponenciais para sinais impulsivos, sendo as primeiras aconselhadas quando a resposta se anule no período de tempo analisado (situação em que o efeito de "leakage" não chega a fazer-se sentir) e as segundas quanto tal não aconteça, introduzindo-se então um amortecimento artificial do sinal.

Para sinais aleatórios, é generalizada [53] a utilização da janela de Hanning, por conjugar uma relativamente estreita largura do lóbulo principal com uma pequena altura dos lóbulos laterais.

Ilustra-se a título de exemplo na Figura 4.20.f) o efeito da aplicação da janela de Hanning a uma função periódica observada num intervalo de tempo T , qualquer.

Refira-se por fim que a aplicação de uma janela de dados tem por consequência uma modificação da variância da série à qual é aplicada, que se poderá tomar em consideração, através da aplicação de um factor correctivo, U .

É possível provar [24] que, se for V_{x_j} a variância associada à série amostrada inicial antes de aplicar a janela, e V_{y_j} a variância da série amostrada quando observada através da janela $w(t)$, estas podem relacionar-se por

$$V_{y_j} = U \cdot V_{x_j} \quad (4.42)$$

sendo

$$U = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} w_j^2$$

em que N é o número de amostras da série x_j e $w_j = w(t_j)$, onde $t_j = j \cdot \Delta t$, representando Δt o intervalo de tempo entre amostras.

4.3.2 - Erros por sobreposição ("aliasing")

Viu-se em 4.2.4 que, à operação de discretização do sinal contínuo no domínio do tempo corresponde, no domínio da frequência, uma convolução. Constatou-se ainda que as ordenadas da transformada discreta finita de Fourier na gama de frequências $[-F/2, F/2]$ só se preservam relativamente às ordenadas da transformada de Fourier da função contínua original, se a função $x(t)$ for de banda limitada num intervalo interior a este. A não satisfação desta condição resulta, como se pode ver na Figura 4.15.c), numa sobreposição de ordenadas (designada por "aliasing"), e tem por consequência a impossibilidade de reconstruir o sinal original [24].

O Teorema de Amostragem de Shannon estabelece que [24], se de um sinal contínuo $x(t)$ com transformada de Fourier definida numa banda de frequência limitada no intervalo

$[-F/2, F/2]$, se obtiver uma série x_n amostrada em intervalos de tempo espaçados de Δt , é possível reconstruir de forma exacta o sinal contínuo $x(t)$ usando os termos x_n da série, através da fórmula de interpolação

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \frac{\text{sen}[2\pi f_s(t - n\Delta t)/2]}{2\pi f_s(t - n\Delta t)/2} \quad (4.43)$$

desde que a frequência de amostragem do sinal, f_s , satisfaça a condição

$$f_s = \frac{1}{\Delta t} > F \quad (4.44)$$

O valor máximo da frequência $f_N = F/2 = f_s/2$, em relação à qual é possível obter-se uma caracterização exacta do conteúdo espectral de um sinal amostrado em instantes espaçados de $\Delta t = 1/F$, tem a designação de *frequência de Nyquist*.

Na Figura 4.24 ilustra-se um exemplo de ocorrência de "aliasing" num sinal obtido pela adição de 3 sinusoides com frequências de 5, 10 e 25Hz. Este sinal é amostrado a 40Hz, o que significa ser o intervalo de tempo entre amostras $\Delta t = 1/40 = 0,025$ s. Como se pode constatar em 4.24.c), a componente na frequência de 25Hz não pertence ao intervalo limitado pela frequência de Nyquist, $f_N = 20$ Hz. Repare-se ainda que a operação de convolução em frequência originou um rebatimento da componente situada na frequência exterior ao intervalo $[-f_N, f_N]$ em torno do eixo vertical que passa pela frequência de Nyquist, acabando por se localizar sobre a frequência de 15Hz. Este facto corresponde aliás a uma operação de "dobragem" em harmónio, como se de uma folha de papel se tratasse (Figura 4.25.d)), do conteúdo espectral do sinal sobre o intervalo $[-f_N, f_N]$.

No caso presente, pelo facto de a frequência de amostragem ser pequena relativamente ao conteúdo espectral do sinal analisado, a ordenada em correspondência com a frequência de 25Hz acaba por ser observada na frequência de 15Hz.

A Figura 4.25 mostra a ambiguidade que existe na representação de duas funções sinusoidais com frequências de 15Hz e 25Hz, respectivamente, quando amostradas a 40Hz.

A eliminação desta forma de enviesamento não pode porém ser conseguida, de forma absolutamente garantida, unicamente à custa de um aumento da frequência de amostragem, dado que o verdadeiro conteúdo espectral do sinal é desconhecido à partida. Efectivamente, a única maneira de o conseguir, consiste em intercalar um filtro analógico, designado por filtro "anti-aliasing", entre a saída do transdutor e a entrada no sistema de conversão, de forma a eliminar o contributo de todas as frequências acima da frequência de Nyquist.

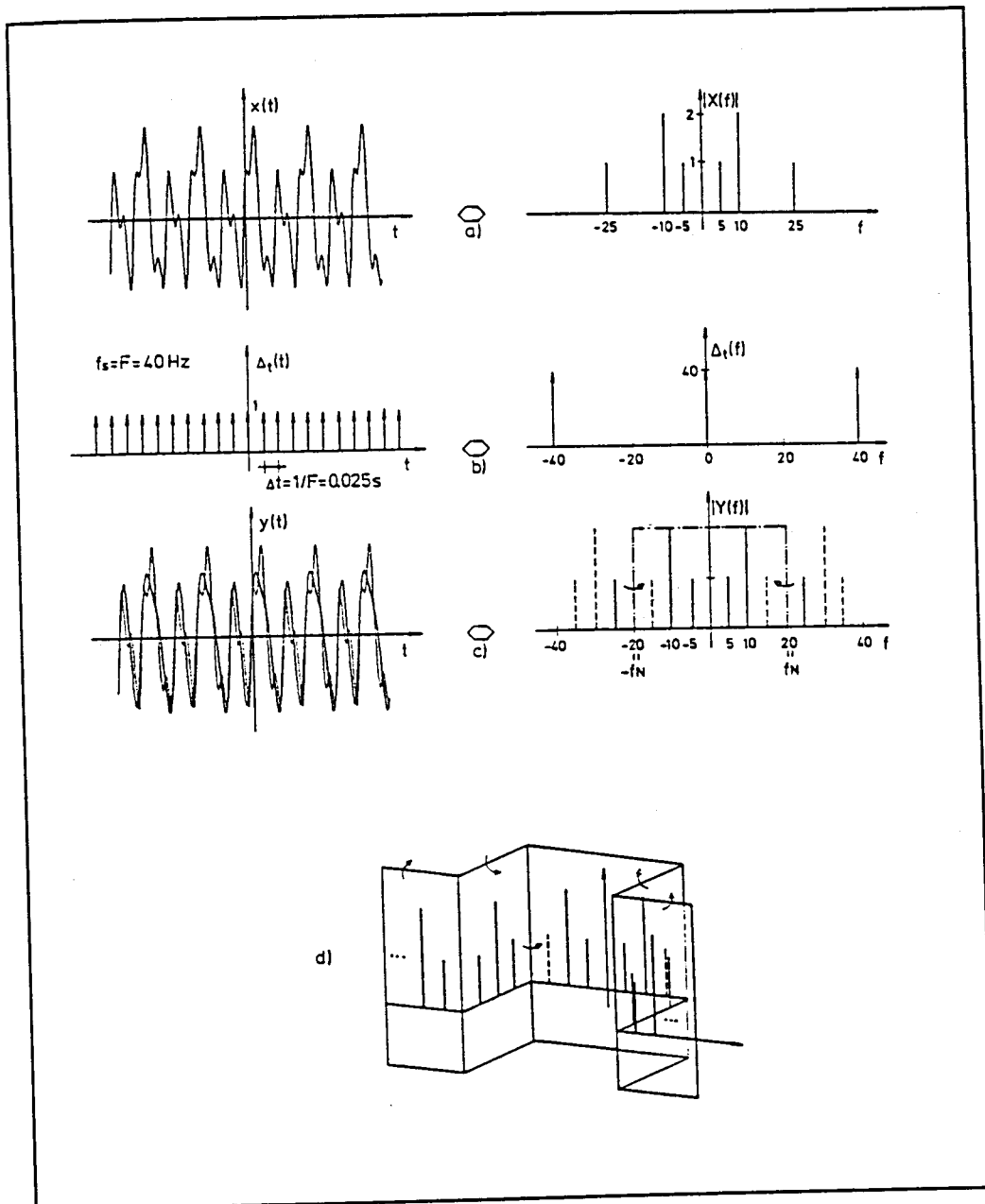


Figura 4.24 - Exemplo de "aliasing".

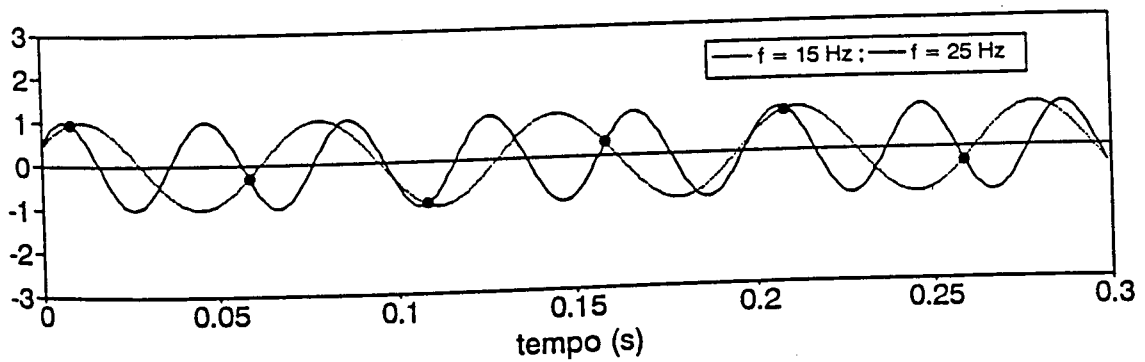


Figura 4.25 - Exemplo de "aliasing" na amostragem a 40Hz de uma senoide com frequência de 25Hz.

4.4 - FILTRAGEM DE SINAIS

Como já foi referido ao longo deste trabalho, a amostragem de séries de valores constitui uma via possível para a caracterização de uma determinada grandeza física. Nota-se contudo que a informação relativa a essa grandeza vem frequentemente "mascarada" ou mesmo afectada, em consequência da existência de erros na fase de medição e processamento do sinal, ou da perturbação por fontes exteriores ao sistema analisado.

Foram descritas em 4.3 duas das formas de erro mais correntes na análise de sinais: o efeito de "leakage" e o "aliasing". Mas igualmente importante é o ruído presente no sinal produzido por acções não quantificadas ou não quantificáveis sobre o sistema. Além disso é útil, em certas situações, eliminar componentes do sinal relativas a frequências fora de uma determinada banda de interesse.

Considera-se assim fundamental prevenir o aparecimento, antes da amostragem, e proceder à eliminação ou atenuação, após a amostragem, das componentes do sinal que não sejam intrínsecas da grandeza física analisada ou que se revelem inúteis ou prejudiciais para o estudo a desenvolver, para o que se recorre, normalmente, à aplicação de *filtros*.

Por *filtro*, entende-se [24] um sistema capaz de modificar um sinal colocado na sua entrada, através da extracção de determinadas componentes sem interesse (Figura 4.26).



Figura 4.26 - Representação do funcionamento de um filtro.

A concretização de um filtro pode ser realizada analógica ou digitalmente, correspondendo a primeira via a uma implementação física, efectuada através de um conjunto de circuitos electrónicos, e a segunda a uma implementação numérica por meio da qual um conjunto de operações aritméticas de precisão finita é efectuado sobre o sinal amostrado [79].

No texto que se segue é dada particular ênfase aos filtros digitais, dada a extrema importância de que a aplicação destes se reveste, em especial pelo seu baixo custo face ao custo dos filtros analógicos (esta tendência aumentou espectacularmente nos últimos anos, em resultado do desenvolvimento dos sistemas informáticos). Note-se contudo que a aplicação dos filtros digitais não dispensa a utilização de filtros analógicos, como sucede nas situações em que se pretende eliminar ou atenuar o efeito de "aliasing", sendo então fundamental excluir

as componentes de frequência superior à frequência de Nyquist antes da aquisição do sinal, pois de outra forma a série amostrada poderá vir contaminada por erros de sobreposição, impossíveis de eliminar em fase posterior à custa de qualquer tipo de filtragem digital, correndo-se o risco de interpretar erradamente certas componentes em frequência como componentes do sistema analisado.

Admite-se em todas as considerações aqui apresentadas que os filtros são sistemas lineares e invariantes no tempo.

Assim, se forem $X(f)$ e $Y(f)$ as imagens em frequência da entrada e saída do filtro, respectivamente, poderá escrever-se que

$$Y(f) = H(f) \cdot X(f) \quad (4.45)$$

onde $H(f)$ representa a função de resposta em frequência do filtro ao impulso unitário, também designada por *função de transferência do filtro*.

No domínio do tempo, por seu turno, o relacionamento da série temporal à entrada do filtro, $\{x_n\}$, com a série correspondente à saída, $\{y_n\}$, é realizado por uma operação de convolução.

Seja então $\{x_n\}$ uma série amostrada por observação de um sinal contínuo $x(t)$. A aplicação de um filtro digital colocará na saída uma série $\{y_n\}$, cujo termo y_n é genericamente dado por

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k x_{n-k} + \sum_{k=1}^{+\infty} d_k \cdot y_{n-k} \quad (4.46)$$

Com esta definição, pode-se facilmente constatar que a determinação de uma média móvel a p pontos não é mais do que a aplicação de um filtro digital a uma série, através da qual se realiza um alisamento em frequência.

Considere-se, por exemplo, a média móvel a 3 pontos. Por esta operação, uma série amostrada $\{x_n\}$ é transformada numa outra série $\{y_n\}$, cujo termo genérico y_n pode ser definido por $y_n = \frac{1}{3}(x_{n-1} + x_n + x_{n+1})$.

Atendendo à definição de *impulso unitário de Dirac* $\delta(t)$ apresentada em 4.2.2.1, y_n pode também ser dado por

$$y_n = \frac{1}{3} x(t) \{ \delta[t - (n-1)\Delta t] + \delta[t - n\Delta t] + \delta[t - (n+1)\Delta t] \}$$

em que Δt representa o intervalo de tempo entre amostras sucessivas.

Fazendo uso das propriedades de linearidade e do atraso no domínio do tempo, a transformada de Fourier $Y_n(f)$ virá

$$Y_n(f) = \frac{1}{3} X(f) [e^{-i2\pi f(n-1)} + e^{-i2\pi f n} + e^{-i2\pi f(n+1)}]$$

ou seja,

$$Y_n(f) = \frac{1}{3} X(f) [1 + 2\cos(2\pi f)]$$

e, finalmente, a função de transferência $H(f)$, representada na Figura 4.27, será

$$H(f) = \frac{1}{3} [1 + 2\cos(2\pi f)] \quad (4.47)$$

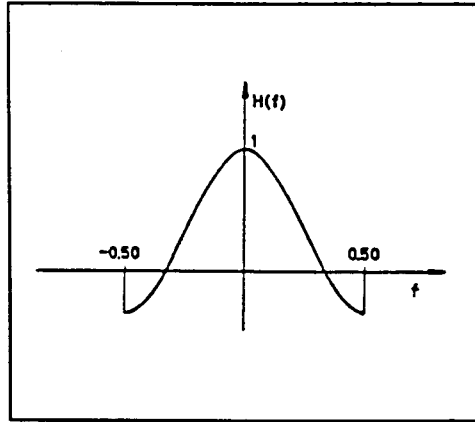


Figura 4.27 - Alisamento com média móvel a 3 pontos: função de transferência do filtro.

Um outro exemplo de aplicação de um filtro é o da eliminação da tendência no sinal. Com efeito, a operação de amostragem pode revelar a existência de um "off-set" no sinal, resultante da não estabilização completa do sensor no intervalo de observação. Por poder introduzir algumas perturbações no processamento, é conveniente remover tal tendência, o que é realizável através de um ajuste por mínimos quadrados de uma função polinomial [24].

Em muitos dos casos correntes, pode admitir-se que a tendência é aproximadamente constante (Figura 4.28), pelo que o polinômio a ajustar será de grau zero. Verifica-se nesse caso [24] que a constante que minimiza o quadrado da diferença entre o sinal e o polinômio é, afinal, a média do sinal. Assim, se for $\{x_n\}$ a série amostrada inicial, a remoção de uma tendência constante conduzirá a uma série $\{y_n\}$ cujos valores são dados por

$$y_n = x_n - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \quad (4.48)$$

que é o mesmo que

$$y_n = x_n - \frac{1}{N} (x_0 + x_1 + \dots + x_n + \dots + x_{N-1})$$

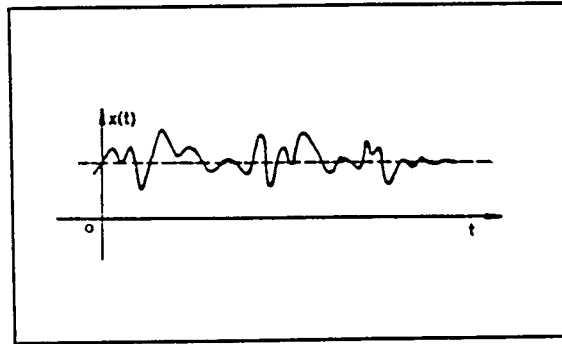


Figura 4.28 - Sinal com tendência constante.

Pode interpretar-se a segunda parcela de (4.48) como uma média móvel a N pontos e generalizar-se a expressão (4.47) à determinação da função de transferência desta parte do filtro, obtendo-se

$$H'(f) = \frac{1}{N} [1 + 2 \cos(2\pi f) + 2 \cos(4\pi f) + \dots + 2 \cos(2\pi \cdot (N-2)f)] \quad (4.49)$$

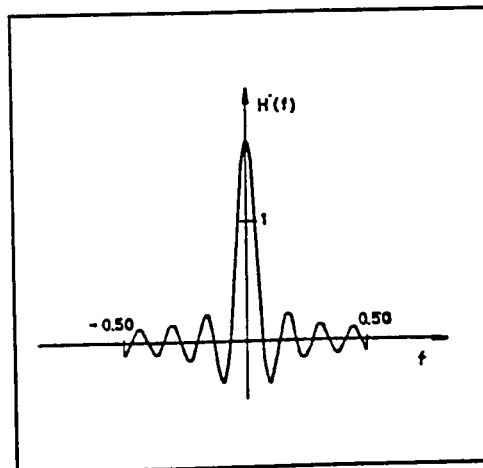


Figura 4.29 - Alisamento com média móvel a 10 pontos.

Como se pode constatar por observação da Figura 4.29, $H'(f)$ aproxima-se do impulso de Dirac conforme cresce N . Este resultado seria aliás de esperar, atendendo a que a transformada de Fourier de uma função constante k é um impulso de Dirac, de área $1/k$. A função de transferência do filtro que remove uma tendência constante do sinal será então, quando N tende para infinito,

$$H(f) = 1 - \delta(f) \quad (4.50)$$

e o efeito da sua aplicação é o de eliminar o valor na origem da transformada de Fourier do sinal amostrado.

Nos dois exemplos de filtros apresentados, os coeficientes d_k da expressão (4.46) são nulos. Filtros desta natureza são designados por *filtros não-recursivos*. Quando algum coeficiente d_k é não nulo, o filtro tem a designação de *filtro recursivo*. Um exemplo de um filtro deste tipo é o que se obtém quando se efectua uma integração numérica usando, por exemplo, a regra dos trapézios [58]:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} [x_n + x_{n+1}]$$

Com o objectivo de sistematizar alguns conceitos relativos à Teoria dos Filtros, cuja importância é fulcral para o processamento digital de sinal, será apresentada em seguida uma breve classificação e alguns elementos relativos ao dimensionamento dos filtros, sendo também realçadas as principais consequências da sua utilização. Indicar-se-ão ainda duas técnicas de processamento que se baseiam na aplicação de filtros digitais: a *decimação* e o *"zoom"*.

4.4.1 - Tipos de filtros

Considere-se um sistema linear e invariante no tempo, cuja função de transferência seja dada por

$$H(f) = |H(f)| \cdot e^{i\phi(f)} \quad (4.51)$$

$|H(f)|$ é designado por *ganho do filtro* e exprime-se habitualmente em dB através de

$$G(f) = 20 \log |H(f)| \quad dB \quad (4.52)$$

Chama-se ainda *atenuação*, $A(f)$, ao inverso da amplitude, exprimindo-se em dB por

$$A(f) = -20 \log |H(f)| \quad dB \quad (4.53)$$

e atraso de grupo, $\tau(f)$ a

$$\tau(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(f)}{df} \quad (4.54)$$

Idealmente, um filtro pode classificar-se como *passa-baixo*, ("Low-pass"), *passa-alto* ("High-pass"), *passa-banda* ("Band-pass") e filtro *elimina-banda* ("Bandstop"). Estes quatro tipos de filtros são representados na Figura 4.30.

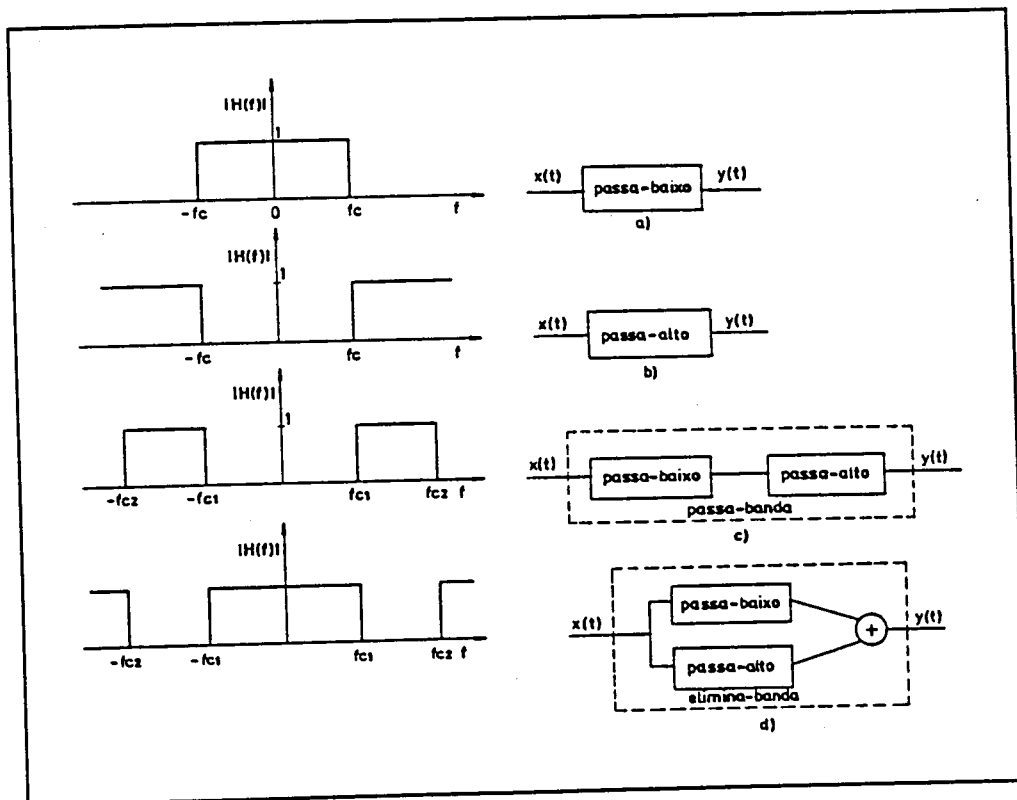


Figura 4.30 - Filtros ideais.

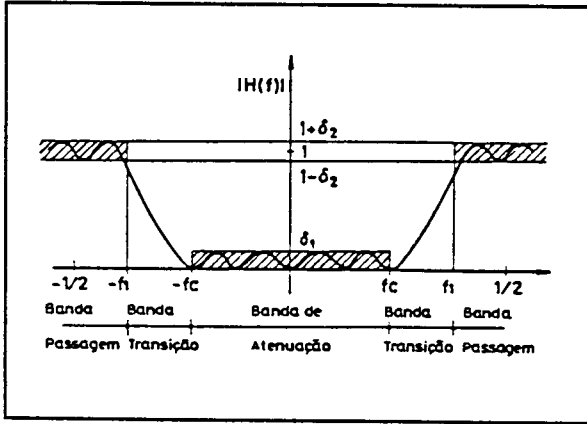
Um filtro ideal passa-baixo (Figura 4.30.a)) deixa passar todas as componentes em frequência sem as atenuar ($A(f) = 0$), desde zero até à frequência de corte, f_c , impedindo completamente a passagem das restantes frequências acima de f_c ($A(f) = \infty$).

Pelo contrário, um filtro passa-alto (Figura 4.30.b)) só permite a passagem de componentes relativas a frequências acima da frequência de corte.

Um filtro passa-banda (Figura 4.30.c)) pode ser obtido pela associação em série de um filtro passa-baixo com um filtro passa-alto, permitindo apenas a passagem sem atenuação de frequências no intervalo $[f_{c1}, f_{c2}]$.

Finalmente, um filtro elimina-banda (Figura 4.30.d)) apenas impede a passagem de componentes em frequência no intervalo $[f_{c1}, f_{c2}]$, podendo ser obtido por associação em paralelo de um filtro passa-baixo com um filtro passa-banda.

Os filtros reais apenas satisfazem aproximadamente as características acima indicadas, de forma que as suas especificações têm de ser definidas com tolerâncias.



Um filtro passa-alto, por exemplo, fica definido através de uma atenuação máxima, A_M , na banda de passagem e uma atenuação mínima, A_m , na banda de atenuação, para uma frequência de corte f_c . A atenuação máxima A_M deverá ocorrer a uma frequência f_1 , designada por frequência limite da banda de atenuação.

Figura 4.31 - Bandas de tolerância de um filtro.

A exigência da satisfação de certas bandas de tolerância não se traduz na definição de uma configuração para um filtro. Esta é, normalmente, determinada pela necessidade de garantir que o filtro possua determinadas propriedades.

Assim, os conhecidos filtros de Butterworth são obtidos por imposição de um "aplanamento máximo" na banda de passagem [24]. Ao obrigar a atenuação a ser "maximamente plana" junto da frequência nula, obtêm-se filtros passa-baixo de ordem n , cuja função de transferência é dada, se n for par, por

$$H(f) = \frac{H(0)}{\prod_{k=1}^{n/2} \left[\left(\frac{if}{f_c} \right)^2 + \left(2 \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n} \right) \cdot \left(\frac{if}{f_c} \right) + 1 \right]} \quad (4.55)$$

ou por

$$H(f) = \frac{H(0)}{\left(\frac{if}{f_c} + 1 \right)^{(n-1)/2} \prod_{k=1}^{(n-1)/2} \left[\left(\frac{if}{f_c} \right)^2 + \left(2 \cos \frac{k\pi}{n} \right) \cdot \left(\frac{if}{f_c} \right) + 1 \right]} \quad (4.56)$$

se n for ímpar, em que $H(0)$ é determinado através das tolerâncias exigidas para a atenuação na banda de passagem.

Este tipo de filtros é normalmente aplicado a sinais persistentes (periódicos ou aleatórios estacionários), tendo como principal inconveniente o da grande distorção que pode ser introduzida na fase, mesmo quando a atenuação é já muito pequena (Figura 4.32.b)).

Para sinais transientes, é mais eficiente a utilização dos filtros de Bessel [24], cuja configuração é obtida obrigando a ser máximo o aplanamento da fase junto a $f = 0$ (Figura 4.33).

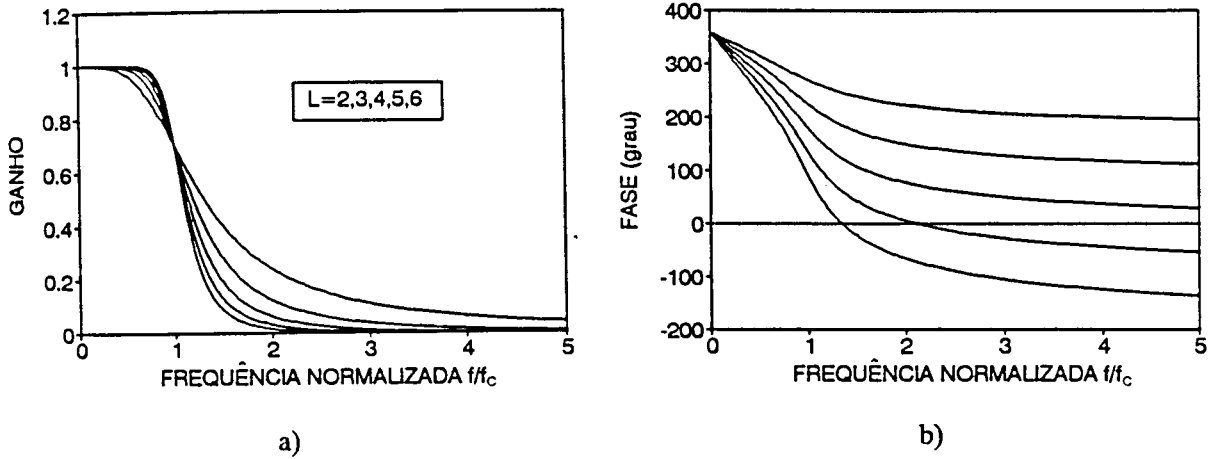


Figura 4.32 - Ganho a) e fase b) de filtros de Butterworth com ordens diferentes.

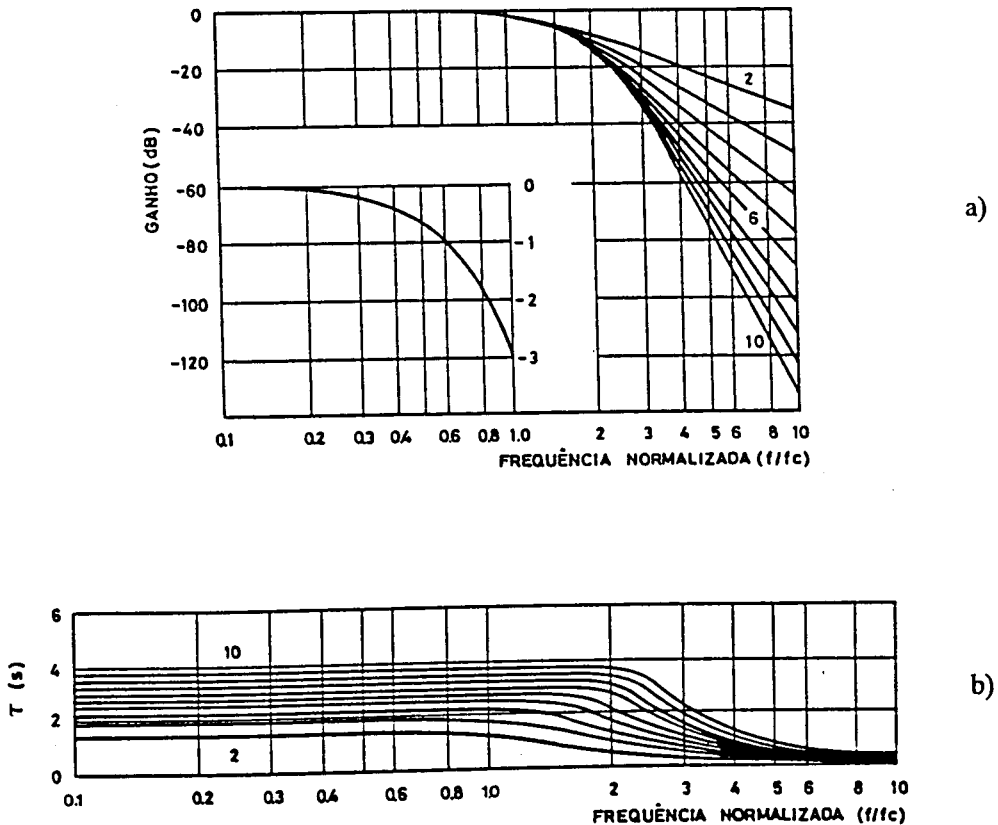


Figura 4.33 - Ganho a) e atraso b) de filtros de Bessel com ordens diferentes.

4.4.2 - Elementos de dimensionamento de um filtro digital

Pelo facto de os filtros analógicos possuírem propriedades de grande interesse e se poderem, na generalidade, definir por expressões que não são demasiado complexas é muito corrente o dimensionamento de filtros digitais por aproximação de certos filtros analógicos [118]. Uma das técnicas de aproximação possível consiste na aplicação do *método da conservação da resposta impulsiva*, cujo princípio é o de obrigar a resposta ao impulso unitário do filtro analógico a ser igual à resposta do filtro digital.

Mais corrente, é a aproximação através da *transformação bilinear* por evitar certas dificuldades inerentes à aplicação do método da conservação da resposta impulsiva, entre as quais se destaca a complexidade das operações algébricas envolvidas no dimensionamento e a possibilidade de aparecimento de "aliasing", resultante de a resposta impulsiva de um filtro analógico não ser, usualmente, uma função de banda limitada [79].

Os métodos baseados na transformação bilinear recorrem a uma discretização da operação de integração da função de transferência analógica através da regra dos trapézios [24], sendo-lhes atribuída a vantagem de a sua aplicação ser simples e de garantirem a conversão em filtros estáveis de filtros analógicos também estáveis (entende-se que um filtro é estável se, ao colocar na sua entrada um sinal finito, a saída for também um sinal finito).

As duas técnicas que sumariamente se descrevem nos pontos 4.4.2.1 e 4.4.2.2 têm, respectivamente, a vantagem de tirar partido da rapidez proporcionada pelo algoritmo FFT, de determinação da transformada discreta finita de Fourier, e a de produzir menores distorções no sinal, sendo a sua programação bastante simples.

4.4.2.1 - Implementação de um filtro digital através do algoritmo FFT

Admita-se que se pretende eliminar de uma série $\{x_n\}$, obtida por amostragem de um sinal analógico $x(t)$, o conteúdo em frequência associado aos intervalos $[-f_1, f_1]$, $[f_2, f_N]$ e $[-f_N, -f_2]$. Como se pode constatar por observação da Figura 4.34, isso consiste afinal em aplicar uma janela rectangular no domínio da frequência, ou seja, em realizar o produto $X_{nk}(f_k) \cdot W_f(f_k)$.

Então, conhecida uma série $\{x_n\}$ e definida uma janela $W_f(f_k)$ em frequência, tendo ou não a forma de um filtro ideal, a técnica consiste em: i) calcular a transformada discreta finita $X_{nk}(f_k)$ da série amostrada $\{x_n\}$, usando o algoritmo FFT; ii) multiplicar os

coeficientes $X_{nk}(f_k)$ assim obtidos pelas ordenadas correspondentes da janela $W_f(f)$, obtendo-se $Y_{nk}(f_k) = X_{nk}(f_k) \cdot W_f(f_k)$; iii) calcular a transformada inversa do sinal $Y_{nk}(f_k)$, usando de novo o algoritmo FFT: $y_n = FFT^{-1}[Y_{nk}(f_k)]$.

Relativamente à aplicação de técnicas alternativas, como, por exemplo, a da transformação bilinear, esta forma de implementação revela-se vantajosa desde que a série amostrada tenha mais de 30 valores [79], como se verifica habitualmente na prática.

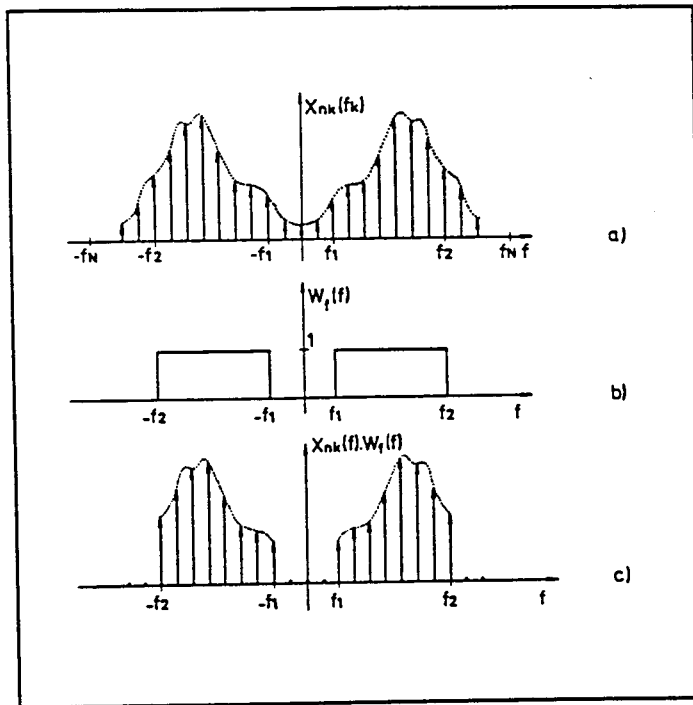


Figura 4.34 - Aplicação de um filtro digital através do algoritmo FFT.

A aplicação de janelas com transições bruscas como a da Figura 4.34.b) não é no entanto aconselhável, porque pode provocar o aparecimento no sinal de ondulações espúrias do tipo das produzidas pelo efeito de "leakage". Deve então procurar-se sempre um certo "adoçamento" da janela, sem contudo adoptar bandas de transição demasiado largas em relação à frequência de corte do filtro.

Na Figura 4.35 apresenta-se uma forma possível [65] para a função de transferência de um filtro com bandas de transição de largura fixa, cuja expressão numérica é dada por

$$\begin{cases} \sin^2 \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{f - f_l}{f_{ul} - f_l} \right) \right] & , \text{ se } f_l \leq f \leq f_{ul} \\ 1 & , \text{ se } f_{ul} \leq f \leq f_{hl} \\ \sin^2 \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{f_{ht} - f}{f_{ht} - f_{hl}} \right) \right] & , \text{ se } f_{hl} \leq f \leq f_{ht} \end{cases} \quad (4.57)$$

onde f_l e f_h representam as frequências de corte inferior e superior do filtro passa-banda, respectivamente, e f_{ul} , f_{hl} e f_{ht} são as frequências limite das bandas de transição (Figura 4.35).

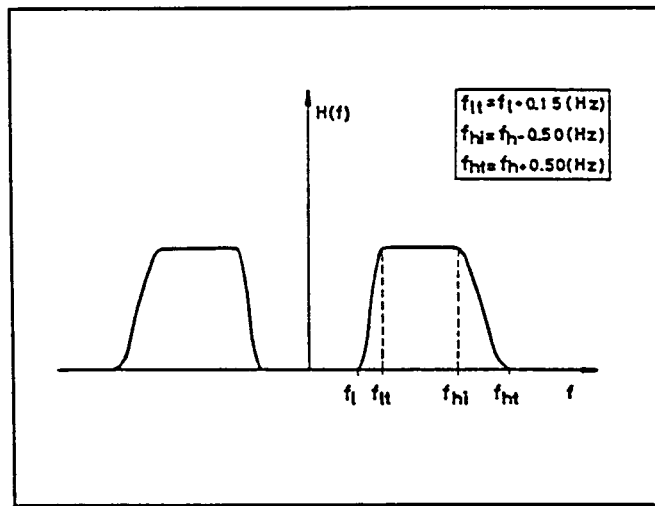


Figura 4.35 - "Adoçamento" da janela em frequência numa banda de transição de largura fixa [65].

O cuidado em definir uma função de transferência simétrica em frequência resulta da propriedade de a transformada inversa de Fourier de uma função simétrica ser sempre um sinal real, qualidade que interessa preservar no sinal amostrado após a aplicação do filtro.

Outra função de transferência para o filtro pode obter-se quadrando a amplitude do filtro analógico de Butterworth de ordem N (Figura 4.36). Para uma frequência normalizada definida por

$$f_n = \frac{f^2 - f_n \cdot f_l}{f \cdot (f_h - f_l)}$$

a função $H(f)$ vem dada por

$$H(f) = \frac{1}{1 + f_n^{2N}} \quad (4.58)$$

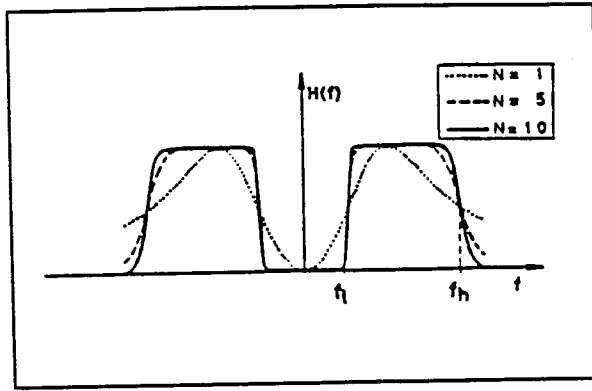


Figura 4.36 - Janela em frequência definida pelo quadrado da amplitude de um filtro Butterworth de ordem N .

4.4.2.2 - Implementação de filtros digitais através da decomposição em séries de Fourier

A técnica de implementação de um filtro digital através do algoritmo FFT apresenta uma simplicidade notável e permite excelentes velocidades de cálculo. Existe contudo uma dificuldade levantada pela aplicação da FFT, que consiste no aparecimento de erros de "leakage", em consequência da truncatura das séries.

Usando as propriedades da decomposição em série de Fourier, é possível definir um filtro digital cuja aplicação é realizada no domínio do tempo, com a vantagem de os erros de implementação apenas se manifestarem em alguns termos das extremidades da série amostrada.

Considerando a expressão (4.46) definidora de um filtro digital, é possível obter um filtro não-recursivo simétrico constituído por um número finito de $2L$ termos,

$$y_n = \sum_{k=-L}^L c_k \cdot x_{n-k} \quad (4.59)$$

Tendo presente as características de simetria, a aplicação da transformada Z [24] permite escrever que

$$Y(f) = X(f) \cdot \sum_{k=0}^L \left[\bar{c}_k \cdot \cos\left(2\pi k f \cdot \frac{1}{2f_N}\right) \right]$$

onde

$$\bar{c}_k = \begin{cases} c_0 & , \quad k=0 \\ 2c_k & , \quad k=1, \dots, L \end{cases}$$

Fazendo a analogia com (4.45), vem

$$H(f) = \sum_{k=0}^L \bar{c}_k \cos\left(2\pi k f \cdot \frac{1}{2f_N}\right) \quad (4.60)$$

o que sugere que a função de transferência do filtro pode ser entendida como uma série de Fourier truncada, em que os coeficientes c_k são obtidos através da decomposição de uma função $H_p(f)$ periódica, de período $2f_N$, definida a partir de $H(f)$ (Figura 4.37), sendo os seus valores dados por

$$c_k = \frac{1}{2f_N} \int_{-f_N}^{f_N} H_p(f) e^{-i2\pi \frac{f}{2f_N} \cdot k} df = \frac{1}{f_N} \int_0^{f_N} H(f) \cos\left(2\pi \frac{f}{2f_N} k\right) df \quad (4.61)$$

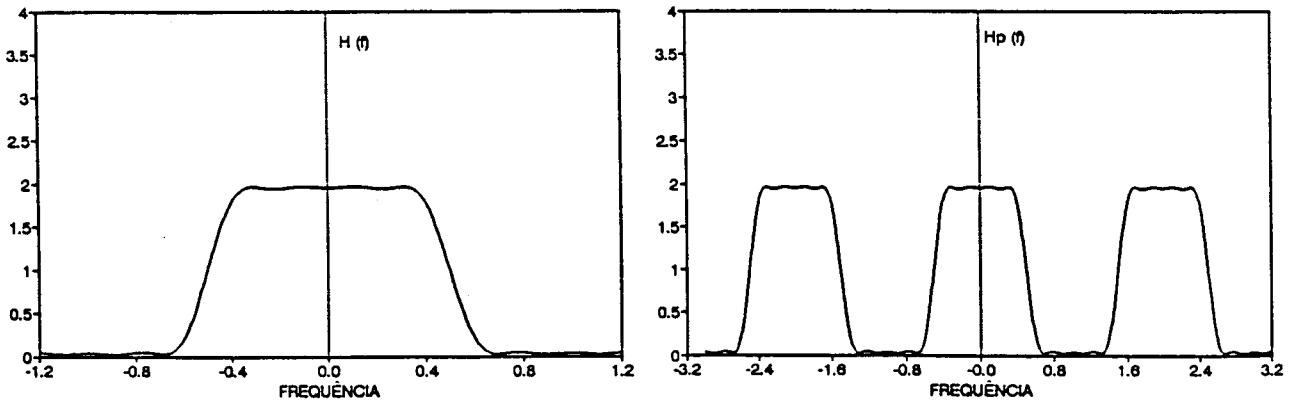


Figura 4.37 - Função periódica $H_p(f)$ obtida a partir da função de transferência $H(f)$ de um filtro.

Para evitar o efeito de Gibbs resultante da decomposição em série de Fourier da janela em frequência $H_p(f)$, pode ainda efectuar-se um alisamento dos coeficientes c_k , usando a técnica de Lanczos, por exemplo, obtendo-se assim coeficientes $\tilde{c}_k$ dados por

$$\tilde{c}_k = c_k \cdot \frac{\text{sen}(\pi k / L)}{\pi k / L} \quad (4.62)$$

Na Figura 4.38 representa-se o resultado da decomposição em série de Fourier de uma janela rectangular constituindo um filtro passa-baixo com frequência de corte f_c , utilizando um alisamento de Lanczos, para diferentes números de termos, L .

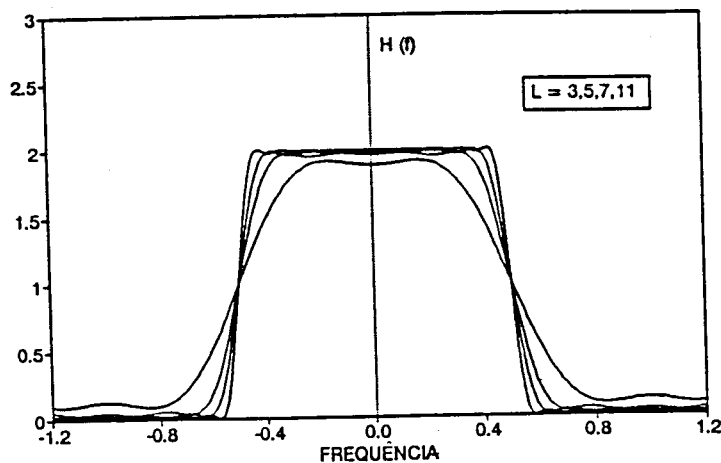


Figura 4.38 - Decomposição em série de Fourier de uma janela rectangular representando um filtro passa-baixo ideal, com alisamento de Lanczos.

Repare-se que a operação descrita por (4.59) representa uma convolução discreta em que são usados $2L$ termos.

A sua aplicação a uma série amostrada com N termos conduz, pelo facto de serem desconhecidos os termos $x_{-L}, x_{-L+1}, \dots, x_{-1}$ e $x_{N+1}, x_{N+2}, \dots, x_{N+L}$ (normalmente arbitra-se para estes termos o valor zero), a erros nas primeiras e últimas L amostras da série. Este facto não tem grande importância se se atender a que a série amostrada tem normalmente um elevado número de termos relativamente aos $2L$ valores errados das extremidades.

O inconveniente que se pode apontar a esta técnica consiste no elevado tempo de cálculo exigido, resultado do grande número de operações que é necessário efectuar.

4.4.3 - Consequências da utilização de filtros

Como foi já referido, é fundamental a utilização de filtros na extracção dos parâmetros de interesse de um sinal amostrado. É no entanto necessário ter em consideração que a sua aplicação pode conduzir ao aparecimento de certas perturbações no sinal, de que pode resultar uma má interpretação das suas características.

De facto, a utilização de filtros analógicos é responsável por uma distorção da fase do sinal (Figura 4.32.b)), efeito cuja importância depende, quer do tipo de filtro utilizado, quer da proximidade da sua banda de transição em relação ao conteúdo em frequência com interesse do sinal.

É precisamente sobre estes 2 factores que é possível actuar, de forma a reduzir a distorção no sinal. Assim, e no que respeita à filtragem "anti-aliasing", deve seleccionar-se o filtro analógico mais adequado às características do sinal [79], conjugando-se este aspecto com uma frequência de amostragem suficientemente elevada, de forma a poder aumentar também a frequência de corte do filtro, afastando deste modo a zona de transição susceptível de introduzir perturbações das componentes em frequência de maior interesse. Normalmente adopta-se uma frequência de amostragem da ordem de quatro a cinco vezes a frequência de corte do filtro.

Admita-se por exemplo que se dispõe de um filtro "anti-aliasing" de Butterworth de ordem 2. A expressão da sua função de transferência, obtida a partir de (4.55), é

$$H(f) = \frac{H(0)}{1 - \left(\frac{f}{f_c}\right)^2 + \sqrt{2}i\left(\frac{f}{f_c}\right)}$$

sendo f_c a frequência de corte do filtro.

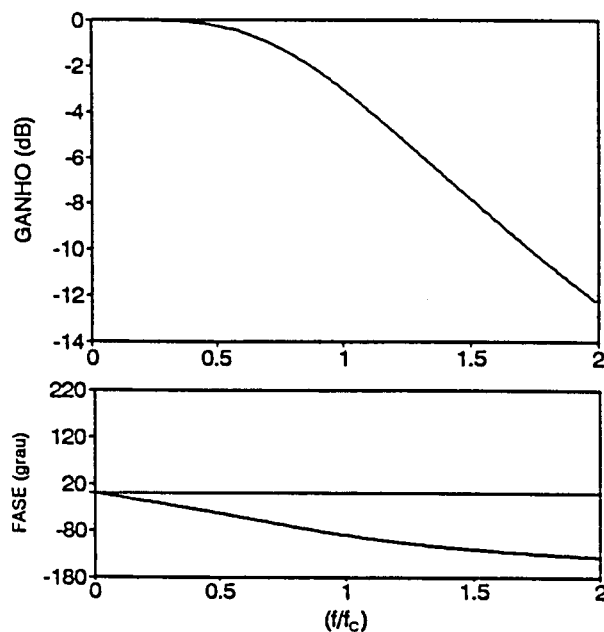


Figura 4.39 - Filtro de Butherworth de ordem 2: características de atenuação e fase.

Adoptando uma frequência de amostragem de 500Hz, é necessário regular a frequência de corte do filtro para cerca de 100Hz.

Considerando $f_c = 100 Hz$ e escolhendo uma frequência $f = f_c/5 = 20 Hz$, vem

$$H(20) = \frac{H(0)}{1 - 0,04 + 0,20\sqrt{2}i} \cong 0,9992e^{-i \cdot (16,4^\circ)} \cdot H(0)$$

Constata-se que, para uma frequência de 20Hz, embora a atenuação proporcionada pelo filtro seja praticamente nula, existe um atraso de fase bastante significativo no sinal, de $16,4^\circ$. Todavia, elevando a frequência de amostragem para 1000Hz, pode-se fixar a frequência de corte do filtro em cerca de 200Hz, obtendo-se nesse caso, para $f = 20 \text{ Hz}$

$$H(20) = \frac{H(0)}{1 - 0,01 + 0,10\sqrt{2}i} \cong 0,99995e^{-i(8^\circ)}$$

Foi assim possível reduzir a metade o atraso de fase introduzido no sinal, embora esta distorção possa ser ainda considerada importante.

De assinalar no entanto que, se as características do filtro utilizado forem conhecidas, será sempre possível eliminar, quer o atraso de fase, quer a atenuação introduzida no sinal. Para tal, será necessário proceder a uma operação de desconvolução [24]. Utilizando as propriedades da transformada discreta finita de Fourier, esta operação poderá ser simplificada, realizando-se nas seguintes etapas: i) calcula-se a transformada discreta finita de Fourier $\{X_{nk}\}$ do sinal filtrado amostrado $\{x_n\}$; ii) multiplica-se cada coeficiente X_{nk} pela função $r_k \cdot e^{i\phi_k}$ que compense a atenuação e o atraso de fase introduzidos pelo filtro na frequência f_k , de acordo com a relação $\{Y_{nk}\} = \{X_{nk}\} \cdot r_k e^{i\phi_k}$; iii) calcula-se a transformada inversa discreta finita da nova série obtida, $\{Y_{nk}\}$, obtendo-se a série $\{y_n\}$, que representa o sinal amostrado filtrado, liberto dos efeitos negativos referidos decorrentes da aplicação do filtro "anti-aliasing".

Quando se procede ao dimensionamento de filtros digitais, este tipo de consideração é igualmente aplicável, pese embora o facto de que é agora possível exigir na fase de dimensionamento que o filtro não introduza atrasos de fase. Um filtro deste tipo é designado por *filtro de fase zero*.

Os filtros digitais são ainda susceptíveis de introduzir erros numéricos no sinal, em resultado do elevado número de operações necessárias à sua aplicação, ou ainda erros de "escorregamento", em consequência da utilização de séries truncadas.

4.4.4 - Decimação

A operação de decimação, no contexto da Análise e Processamento de Sinal, consiste em extrair uma em cada p amostras sucessivas de uma série ou, quando se processa no sentido inverso, em adicionar p amostras entre cada dois valores consecutivos da mesma.

A necessidade de proceder à decimação de um sinal tem essencialmente a ver com a economia de espaço em memória e de tempo de cálculo. Quando realizada no sentido inverso, o objectivo é comparar séries que tenham sido amostradas com frequências diferentes.

Seja N o número de amostras de uma série observada com uma frequência f_s . O intervalo de tempo entre amostras sucessivas é então $\Delta t = 1 / f_s$ e o tempo de duração da série será $T = N \cdot \Delta t = N / f_s$. Viu-se anteriormente que a máxima resolução em frequência que é possível obter, é $\Delta F = 1 / T = f_s / N$, sendo apenas possível representar o conteúdo energético do sinal sem cometer erros de sobreposição, se a sua banda for limitada num intervalo $[-F_N, F_N]$, onde F_N é a frequência de Nyquist ou frequência de dobragem do sinal, com valor $F_N = f_s / 2$.

Repare-se que, estando as riscas do espectro de Fourier do sinal igualmente espaçadas, o erro relativo cometido na identificação de cada frequência f_k , dado por $\epsilon = \Delta F / f_k$, decresce com f_k .

Ao analisar o conteúdo energético do sinal nas frequências baixas, pode ser necessário aumentar o número de riscas do espectro, ou seja, reduzir o valor de ΔF . Sendo $\Delta F = f_s / N$, a redução do espaçamento em frequência só é possível através do aumento do número de pontos da série amostrada, ou de uma redução da frequência de amostragem do sinal.

A actuação na frequência de amostragem nem sempre é possível, já que o sinal pode conter algumas componentes em frequência elevada que os filtros "anti-aliasing" não conseguem eliminar, em resultado das características para que foram dimensionados. Resta portanto aumentar o número de amostras da série.

Considere-se por exemplo a série $\{x_n\}$ representada na Figura 4.40.a), constituindo uma observação de um sinal $x(t)$ realizada com 64 amostras, a uma frequência de amostragem de 80Hz, ou seja, num período de 0,80s. A resolução em frequência é $\Delta F = 1,25 \text{ Hz}$.

Usando a técnica mencionada, se se pretender reduzir quatro vezes o valor de ΔF , será necessário aumentar o número de amostras para $N = 4 \times 64 = 256$, o que significa aumentar consideravelmente o espaço em memória, bem como tornar mais lento o cálculo de todas as grandezas espectrais necessárias. Este problema tem especial acuidade quando são utilizados microcomputadores, dadas as limitações de memória e a velocidade de execução dos cálculos.

A aplicação de uma decimação consiste em filtrar o sinal numa banda de frequências de interesse, eliminando frequências superiores a $f_s / 2p$, e extraíndo em seguida da série filtrada uma de entre cada p amostras, de modo a formar uma nova série, cuja frequência de amostragem é agora $f' = f_s / p$.

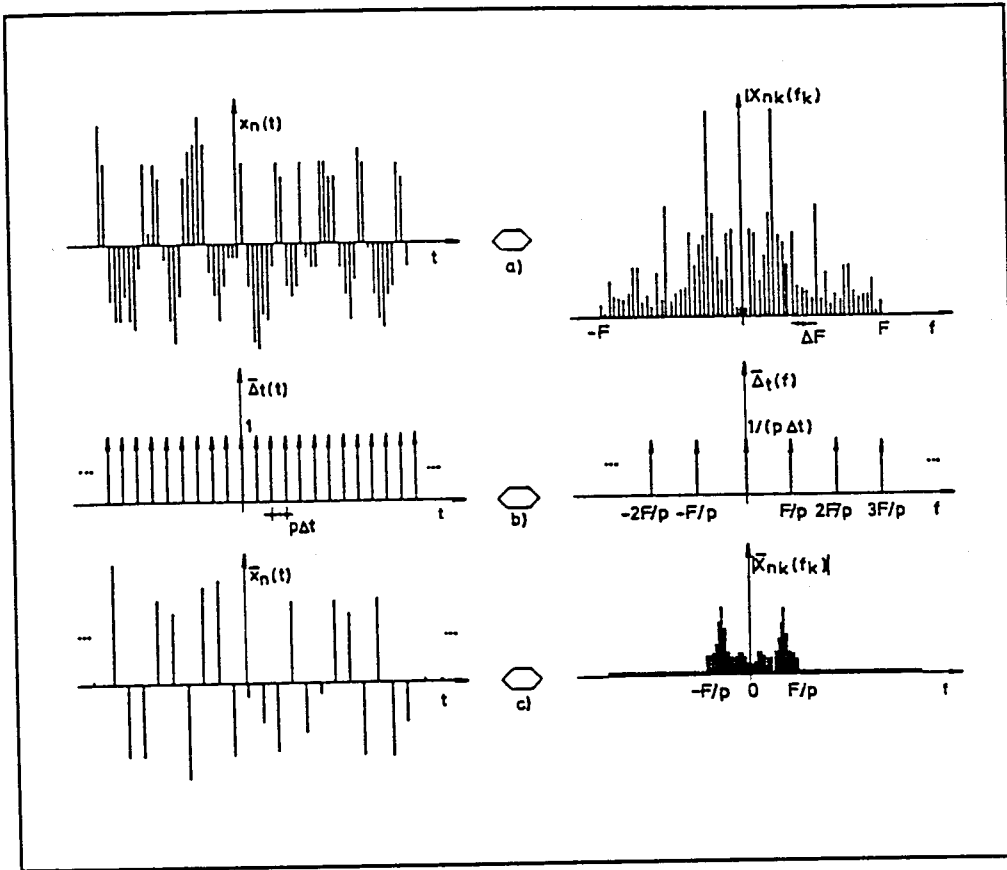


Figura 4.40 - Decimação do sinal para redução da frequência de amostragem.

Admitindo que no exemplo da Figura 4.40 a banda de interesse em frequência se situa no intervalo $[-10, 10]$ Hz, será necessário aplicar um filtro passa-baixo com frequência de corte $f_c \leq 10$ Hz e amostrar de seguida a série a 20Hz, o que corresponde a tomar um valor de $p = f_s / f' = 80 / 20 = 4$.

Tem-se então uma série com as 64 amostras iniciais, amostrada a 20Hz, a que corresponde uma resolução em frequência de $\Delta F = 20 / 64 = 0,3125$ Hz, quatro vezes maior que a inicial (Figura 4.40.c)).

Esta técnica pode ainda ser aplicada em sentido inverso [119], situação que ocorre quando se pretendem comparar duas séries amostradas com frequências diferentes, f_{s1} e f_{s2} . Como as riscas dos respectivos espectros correspondem a frequências diferentes, não necessariamente múltiplas, interessa transformar uma, ou as duas séries em sinais amostrados a igual frequência. Para o fazer, adicionam-se $(p-1)$ zeros entre cada duas amostras sucessivas, construindo-se uma nova série $\{y_n(t)\}$ que, para o exemplo da Figura 4.41, em que $p = 3$, será $\{x_0, 0, 0, x_1, 0, 0, x_2, 0, 0, \dots\}$.

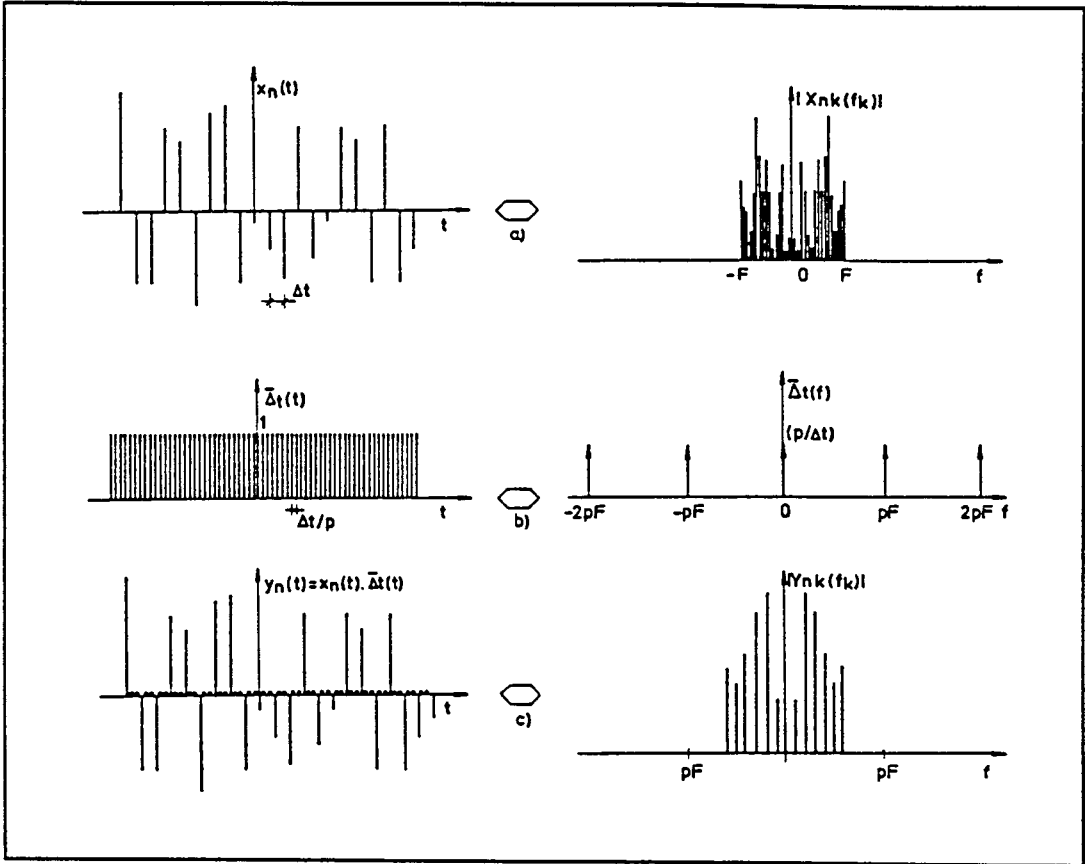


Figura 4.41 - Decimação para aumento da frequência de amostragem do sinal.

As considerações anteriormente tecidas relativamente às propriedades e operações envolvendo a transformada de Fourier permitem agora concluir que, na gama de frequências $[-F_N, F_N]$, os espectros das séries $\{x_n(t)\}$ e $\{y_n(t)\}$ são iguais, a menos do factor de escala p , por que deverá ser $Y_{nk}(f)$ multiplicado. Para que $X_{nk}(f)$ e $p \cdot Y_{nk}(f)$ sejam idênticos, resta agora filtrar $p \cdot Y_{nk}(f)$ acima da frequência de Nyquist, F_N do sinal original.

4.4.5 - Zoom

A operação de decimação descrita no ponto 4.4.4 constitui uma das técnicas de processamento frequentemente utilizadas com a finalidade de melhorar a resolução em frequência, sem com isso aumentar o espaço de armazenamento do sinal observado.

Note-se contudo que, dada a forma como é realizada, a sua aplicação apenas permite melhorar substancialmente a resolução nas baixas frequências.

Quando se pretende aumentar muito a resolução do espectro de um sinal numa banda estreita em torno de uma frequência f_k qualquer, é usada uma técnica de "zoom".

Existem duas vias possíveis de implementação de um zoom em frequência: uma baseada em técnicas destrutivas e a outra em técnicas não destrutivas, entendendo-se por *destrutivos* os métodos através dos quais são introduzidas modificações no sinal observado.

Uma das técnicas destrutivas cuja implementação é usual nos analisadores espectrais tem a designação de "zoom em tempo real" e fundamenta-se na utilização de certas propriedades da transformada de Fourier, consistindo no seguinte:

- Seja $X(f)$ o espectro de Fourier de um sinal contínuo $x(t)$ e admita-se que se pretende expandir uma banda estreita em torno de uma certa frequência f_k , como representado na Figura 4.42.

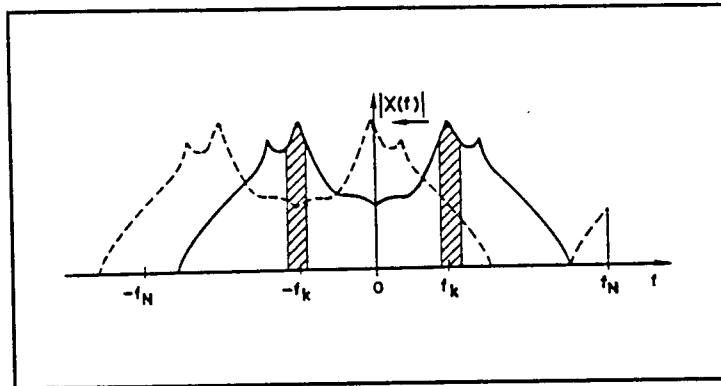


Figura 4.42 - Translação em frequência introduzida pelo produto $x(t) \cdot e^{-i2\pi f_k t}$.

Atendendo à propriedade do atraso em frequência, apresentada em 4.4.2 (Tabela 4.1), o produto do sinal $x(t)$ por $e^{-i2\pi f_k t}$ resulta, no domínio da frequência, numa translação (v. Figura 4.42), por meio da qual a componente na frequência f_k passa a localizar-se na origem. Como se pode verificar também na Figura 4.42, a modulação pela frequência f_k leva à formação de um sinal complexo cujo espectro de amplitudes deixa, portanto, de ser simétrico podendo, por outro lado, estar contaminado por "aliasing". O passo seguinte, consiste em eliminar as frequências situadas fora da banda de interesse, por aplicação de um filtro passa-baixo (Figura 4.43). A inversão da transformada de Fourier $\bar{X}(f)$ e a reamostragem do sinal complexo obtido a uma frequência de amostragem $\bar{f}$,

mais baixa permitem a expansão do espectro pretendida, restando então apenas aplicar-lhe uma translação, de forma a que a componente na frequência nula passe a situar-se sobre f_k , como inicialmente.

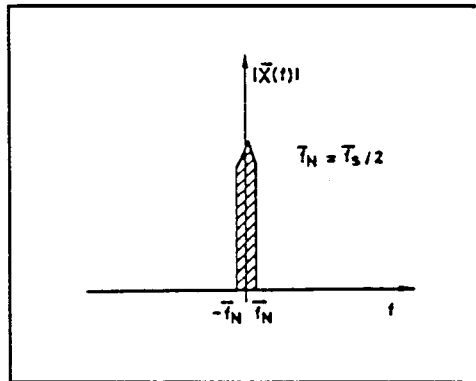


Figura 4.43 - Banda de frequências a expandir por reamostragem a uma frequência $\bar{f}_s$.

Do ponto de vista da utilização por um analisador espectral, o grande inconveniente desta técnica está em que, sendo destrutiva, é necessário armazenar o sinal antes de repetir o processo para outra banda de frequências que interesse analisar. A grande vantagem está, obviamente, em que não é necessário aumentar o tamanho da série.

As técnicas não-destrutivas para implementação de zoom baseiam-se no aumento do tamanho da amostra, quer por aumento do tempo de observação da série, quer por adição de zeros.

Como se viu, o aumento do tempo de observação tem por consequência um aumento da resolução em frequência, com a vantagem de ocorrer em todo o intervalo de frequências analisado. É, obviamente, a técnica que interessaria aplicar ao estudo de um sinal, já que a sua observação num intervalo de tempo maior permite que a série colhida contenha mais informação relativamente ao sinal de que é imagem.

Atendendo, no entanto, às limitações de espaço de armazenamento e à lentidão resultante do processamento de séries demasiado longas, não são geralmente usadas mais do que 1024 amostras nos analisadores espectrais. Quando o processamento é realizado em micro computador, a utilização de mais de 8192 amostras por série torna os cálculos fastidiosos e coloca problemas na gestão da memória central disponível.

Por outro lado, é corrente a constatação da necessidade de realização de um "zoom" apenas depois da aquisição da série ter sido realizada.

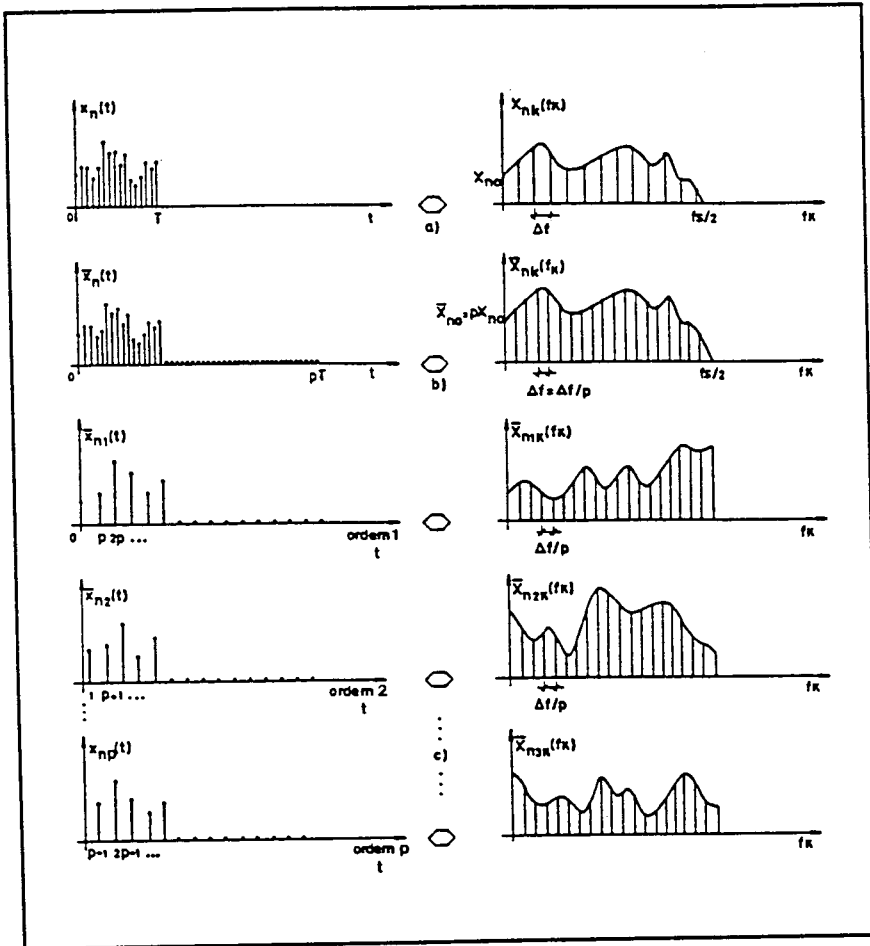


Figura 4.44 - Implementação de um zoom de factor 4.

Uma técnica de "zoom" que proporciona bons resultados, com a vantagem de não introduzir modificações na série amostrada pode ser enunciada de acordo com os seguintes passos:

- Adicionam-se zeros à série amostrada numa das extremidades, em número tal que o tamanho final da amostra seja P vezes o tamanho inicial, N , para um "zoom" de factor P (Figura 4.44.b)). Ao adicionar zeros à amostra, não se acrescenta nenhuma informação complementar ao sinal contínuo observado. Obtém-se, no entanto, mais informação relativamente ao sinal truncado observado, $x(t) \cdot w(t)$ e, portanto, mais informação relativamente ao conteúdo espectral deste último;
- Da nova série contendo $N \cdot P$ amostras extraem-se P séries de dimensão N , atribuindo a cada uma destas um de entre cada P elementos consecutivos, como representado em 4.44.c), o que corresponde a extrair P séries amostradas a uma frequência f_s / P ;

- Atendendo à propriedade da linearidade da transformada discreta de Fourier, o espectro da série inicial contendo $N \cdot P$ pontos é igual à soma dos espectros de cada uma das P séries com N pontos dele obtidas, sendo no entanto necessário aplicar uma correcção de escala e outra de fase à sua transformada de Fourier, para atender por um lado, à modificação do factor $\Delta t = 1/F$ interveniente na expressão (4.33) da transformada discreta finita de Fourier, decorrente de cada uma das séries parciais passar a ser observada em instantes de tempo espaçados de $P \cdot \Delta t$ e, por outro, ao atraso introduzido na amostragem de cada uma das P séries com N pontos. Tem-se então

$$X_{nk}(f_k) = \frac{1}{P} [X_{nk}^0 + X_{nk}^1 e^{-i2\pi k/2N} + \dots + X_{nk}^P \cdot e^{-i2\pi k(P-1)/2N}] \quad (4.63)$$

Esta técnica corresponde, na realidade, à decomposição realizada sobre a série pelo algoritmo FFT nos primeiros passos da sua aplicação. Obviamente que este processo de decomposição se traduz numa maior lentidão da técnica de "zoom", facto que se afigura aliás como o seu único inconveniente.

4.5 - CARACTERIZAÇÃO EXPERIMENTAL DE FUNÇÕES DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

O inevitável carácter discreto e finito dos sinais medidos tem por consequência a impossibilidade de aplicar directamente a definição na construção experimental das funções intervenientes nas relações excitação-resposta apresentadas ao longo do Capítulo 2.

Numa primeira aproximação, é possível obter *estimativas simples* para esse conjunto de funções através de uma operação de discretização. Descrevem-se nas secções 4.5.1, 4.5.2 e 4.5.3 essas estimativas para as funções de auto-correlação e de correlação cruzada, para as funções densidade espectral de potência e densidade espectral de potência cruzada e para as funções de resposta em frequência e funções de coerência associadas.

Verifica-se contudo que estas estimativas apresentam erros inaceitáveis relativamente às correspondentes funções caracterizadoras dos processos estocásticos da excitação ou da resposta do sistema, o que se deve não só à operação de discretização de que resultaram, mas ainda ao facto de se basearem apenas num troço de uma realização destes processos. Daí que surja a necessidade de recorrer à utilização de estimadores mais complexos, que envolvam um alisamento, ponderado ou não, através de um conjunto de realizações desses processos estocásticos, procurando-se ainda quantificar e qualificar, na medida do possível, os erros

presentes nas estimativas obtidas. Nesse contexto, apresentam-se na secção 4.5.4 alguns conceitos da Teoria da Estimação, realçando-se diversos aspectos relacionados com a sua aplicação ao problema específico da análise de sinais.

Pelo facto de a abordagem do problema de Identificação de Sistemas se realizar neste trabalho exclusivamente no domínio da frequência, são apresentados e discutidos apenas os estimadores relativos a funções definidas nesse domínio, referindo-se assim a secção 4.5.5 aos estimadores das funções densidade espectral de potência e densidade espectral de potência cruzada e a secção 4.5.6 aos estimadores da função de resposta em frequência e da função de coerência associada.

Finalmente, reserva-se a secção 4.5.7 para a descrição de casos particulares da estimação da função de resposta em frequência em que a aplicação das relações excitação-resposta consideradas em secções anteriores não pode ser feita directamente, o que acontece em resultado de não existir uma medida da excitação actuante (caso de ensaios de vibração ambiental), ou de o conteúdo espectral da excitação actuante cobrir apenas uma parte da gama de frequências na qual interessa caracterizar a função de resposta em frequência (caso de ensaios de vibração forçada sinusoidal).

4.5.1 - Funções de auto-correlação e de correlação cruzada

Estas funções constituem uma medida da dependência entre valores correspondentes a instantes de tempo diferentes de um processo estocástico estacionário ou de um par de processos estocásticos dessa natureza, podendo contribuir na prática para a detecção de componentes de carácter determinístico mascaradas por componentes aleatórias [12].

No Capítulo 2 deste trabalho foi apresentada a definição de função de auto-correlação quando aplicada a uma realização $x_i(t)$ de um processo estocástico estacionário e ergódico.

Esta realização constitui um sinal contínuo definido no intervalo $]-\infty, +\infty[$, sendo dela conhecida na prática apenas uma série $\{x_n\}$ com N pontos, amostrados em instantes espaçados de Δt no intervalo finito $[0, T]$.

O cálculo da função de auto-correlação $R_x(\tau)$ é então substituído por uma sua estimativa $\hat{R}_x(\tau_r)$ associada a um desfasamento discreto $\tau_r = r \cdot \Delta t$ dos valores da série amostrada, a qual pode obter-se por [12]

$$\hat{R}_r = \hat{R}_x(r \Delta t) = \frac{1}{N-r} \sum_{n=0}^{N-r-1} x_n \cdot x_{n+r} \quad , \quad \text{com } r = 0, 1, 2, \dots, m \quad (4.64)$$

Da mesma forma, o cálculo da função de correlação cruzada entre dois sinais $x_i(t)$ e $y_i(t)$ que constituam realizações dos processos estocásticos estacionários e ergódicos $x(t)$ e $y(t)$ é substituído por uma estimativa $\hat{R}_{xy}(\tau_r)$, baseada nas séries temporais $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ amostradas em instantes espaçados de Δt no intervalo finito $[0, T]$, sendo

$$\hat{R}_{xy}(r \cdot \Delta t) = \frac{1}{N-r} \sum_{n=0}^{N-r-1} x_n \cdot y_{n+r} \quad , \quad \text{com } r = 0, 1, 2, \dots, m \quad (4.65)$$

Uma via alternativa pode ainda seguir-se para a estimação de $R_x(\tau)$ e $R_{xy}(\tau)$, quando se disponha das estimativas $\hat{S}_x(f_k)$ e $\hat{S}_{xy}(f_k)$ das funções densidade espectral de potência cruzada.

Com efeito, atendendo às relações de Wiener-Khintchine, expressas através das equações (2.67) a (2.70) por meio das quais se constata constituírem as funções $[R_x(\tau), S_x(f)]$ e $[R_{xy}(\tau), S_{xy}(f)]$ pares de transformadas de Fourier e, introduzindo o algoritmo FFT para a determinação da transformada de Fourier discreta finita de uma série $\{x_n\}$, pode verificar-se que

$$\hat{R}_x(r \cdot \Delta t) = FFT^{-1}[\hat{S}_x(f_k)] \quad (4.66)$$

$$\hat{R}_{xy}(r \cdot \Delta t) = FFT^{-1}[\hat{S}_{xy}(f_k)] \quad (4.67)$$

Como se verá no ponto 4.5.2, a aplicação do algoritmo FFT permite de uma forma bastante simples a obtenção das estimativas $\hat{S}_x(f_k)$ e $\hat{S}_{xy}(f_k)$, tornando-se assim muito eficiente a obtenção de estimativas para $R_x(\tau)$ e $R_{xy}(\tau)$ através de (4.66) e (4.67), respectivamente.

A avaliação da estimativa $\hat{R}_x(r \cdot \Delta t)$, por exemplo, pode então resumir-se aos seguintes passos:

1. Acrescentar N zeros à série temporal $\{x_n\}$ contendo N valores, obtendo-se uma nova sequência com $2N$ termos. Embora não seja fundamental a duplicação do tamanho da série, é conveniente utilizar este procedimento, com vista a evitar os chamados efeitos de circularidade associados à convolução discreta [12];
2. Calcular a FFT, X_{nk} , da sequência de $2N$ pontos obtida em 1.;
3. Estimar $\hat{S}_x(f_k)$ através da relação (4.68) que adiante se apresenta;
4. Calcular a transformada inversa de Fourier de $\hat{S}_x(f_k)$, usando o algoritmo FFT;

5. Os primeiros N pontos da sequência obtida em 4 multiplicados pelo coeficiente $N/(N-r)$, constituem os valores das estimativas pretendidas, $\hat{R}_r$, definidas através de (4.64).

4.5.2 - Funções densidade espectral de potência e densidade espectral de potência cruzada

Conforme foi referido no Capítulo 2 deste trabalho, as funções densidade espectral de potência, $S_x(f)$ e densidade espectral de potência cruzada, $S_{xy}(f)$ estão relacionadas com a caracterização do conteúdo energético dos processos estocásticos estacionários a que se referem, sendo actualmente generalizada a sua utilização em problemas de Identificação de Sistemas nas áreas de engenharia mecânica e civil, onde se utilizam predominantemente abordagens de análise no domínio da frequência.

Como, na prática, todo o conhecimento que se possui acerca dos processos estocásticos e ergódicos $x(t)$ e $y(t)$ a analisar é dado pelas séries temporais $\{x_n(t)\}$ e $\{y_n(t)\}$ amostradas em instantes espaçados de Δt no intervalo finito $[0, T]$, apenas se podem obter estimativas para as funções $S_x(f)$ e $S_{xy}(f)$, definidas através das equações (2.63) e (2.64).

Assim, designando por $X_{nk}(f_k)$ e $Y_{nk}(f_k)$ as transformadas de Fourier discretas finitas das séries $\{x_n(t)\}$ e $\{y_n(t)\}$ definidas no intervalo finito $[0, T]$, as estimativas $\hat{S}_x(f_k)$ e $\hat{S}_{xy}(f_k)$ das funções densidade espectral de potência e densidade espectral de potência cruzada podem obter-se, respectivamente, para uma frequência $f_k = k \cdot \Delta f = k/(N \cdot \Delta t)$, através de

$$\hat{S}_x(f_k) = \frac{1}{N \Delta t} \cdot |X_{nk}(f_k)|^2 \quad (4.68)$$

e

$$\hat{S}_{xy}(f_k) = \frac{1}{N \Delta t} \cdot [X_{nk}^*(f_k) \cdot Y_{nk}(f_k)] \quad (4.69)$$

$$(k = -\frac{N}{2} + 1, \dots, 0, \dots, \frac{N}{2} - 1)$$

Por ser mais cómodo trabalhar apenas com frequências positivas, e atendendo às propriedades de simetria ou anti-simetria destas funções, é vulgar trabalhar com as estimativas $\hat{G}_x(f_k)$ e $\hat{G}_{xy}(f_k)$, definidas por

$$\hat{G}_x(f_k) = \frac{2}{N \Delta t} |X_{nk}(f_k)|^2 \quad (4.70)$$

e

$$\hat{G}_{xy}(f_k) = \frac{2}{N\Delta t} [X_{nk}^*(f_k) \cdot Y_{nk}(f_k)] \quad (4.71)$$

fazendo k variar de 0 a $\frac{N}{2} - 1$

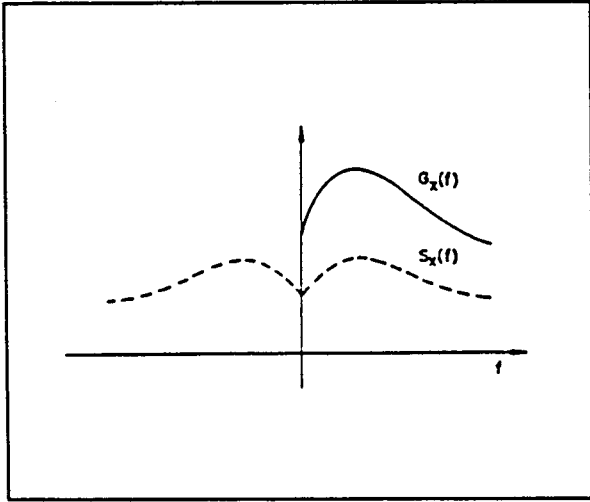


Fig. 4.45 - Relação entre as funções $S_x(f)$ e $G_x(f)$.

É ainda frequente a aplicação de janelas de dados às séries $\{x_n(t)\}$ e $\{y_n(t)\}$, com o objectivo de reduzir o efeito de "leakage" em $\hat{G}_x(f_k)$ e $\hat{G}_{xy}(f_k)$. Obtêm-se assim novas estimativas "alisadas" ("smoothed"), a representar por $\tilde{G}_x(f_k)$ e $\tilde{G}_{xy}(f_k)$.

Tomando como exemplo uma função densidade espectral de potência, o processo de obtenção da estimativa $\tilde{G}_x(f_k)$ pode resumir-se aos seguintes passos:

1. Aplicar uma janela de dados $w(t)$ à série $\{x_n(t)\}$, através do produto $w(t) \cdot \{x_n(t)\}$;
2. Determinar a transformada discreta finita de Fourier, $X_{nk}(f_k)$, da série de N pontos obtida em 1.;
3. Avaliar $\tilde{G}_x(f_k)$ através de (4.70), usando apenas os primeiros $\frac{N}{2}$ valores de f_k ;
4. Ajustar a estimativa $\tilde{G}_x(f_k)$ obtida em 3. por um factor de escala dependente da janela de dados que compense o efeito de alteração da variância introduzido pela aplicação da janela.

4.5.3 - Funções de resposta em frequência e funções de coerência associadas

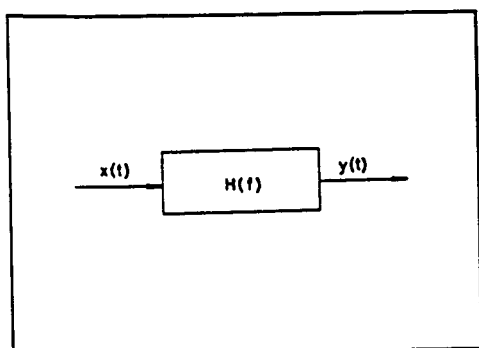
Viu-se no Capítulo 2 que a caracterização das propriedades dinâmicas de uma estrutura que constitua um sistema linear e invariante no tempo pode ser efectuada, no domínio da frequência, através de uma *função de resposta em frequência* $H(f)$ que pode ser entendida, através de (2.15), como a resposta complexa deste sistema a um impulso unitário de Dirac e se relaciona com as transformadas de Fourier da entrada e saída, ou com as funções densidade espectral de potência e densidade espectral de potência cruzada dos processos estocásticos estacionários da excitação e correspondente resposta, através das equações (2.15), (2.77) e (2.78) que aqui se transcrevem, designando agora estes processos por $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente

$$\begin{aligned} Y(f) &= H(f) \cdot X(f) \\ S_y(f) &= |H(f)|^2 \cdot S_x(f) \\ S_{xy}(f) &= H(f) \cdot S_x(f) \end{aligned}$$

Usando as funções $G_x(f)$, $G_y(f)$ e $G_{xy}(f)$ tem-se consequentemente que

$$G_y(f) = |H(f)|^2 \cdot G_x(f) \quad (4.72)$$

$$G_{xy}(f) = H(f) \cdot G_x(f) \quad (4.73)$$



Atendendo à necessidade de usar estimativas para caracterizar cada uma das funções densidade espectral de potência e densidade espectral de potência cruzada envolvidas no relacionamento com $H(f)$, a obtenção desta função só será possível através de uma estimativa $\hat{H}(f_k)$ dada por uma das seguintes expressões

Figura 4.46 - Sistema linear com uma entrada $x(t)$ e uma saída $y(t)$.

$$\hat{H}(f_k) = \frac{Y_{nk}(f_k)}{X_{nk}(f_k)} \quad (4.74)$$

$$|\hat{H}(f_k)| = \left[\frac{\hat{S}_y(f_k)}{\hat{S}_x(f_k)} \right]^{1/2} \quad (4.75)$$

$$\hat{H}(f_k) = \frac{\hat{S}_{xy}(f_k)}{\hat{S}_x(f_k)} \quad (4.76)$$

$$|\hat{H}(f_k)| = \left[\frac{\hat{G}_y(f_k)}{\hat{G}_x(f_k)} \right]^{1/2} \quad (4.77)$$

e

$$\hat{H}(f_k) = \frac{\hat{G}_{xy}(f_k)}{\hat{G}_x(f_k)} \quad (4.78)$$

com $f_k = k \cdot \Delta f = k / N \Delta t$, em que N é o número de pontos amostrados e Δt é o intervalo de tempo entre instantes sucessivos de amostragem.

$H(f)$ é, como se sabe, uma função complexa, podendo escrever-se na forma

$$H(f) = |H(f)| e^{i\phi(f)} \quad (4.79)$$

em que $|H(f)|$ e $\phi(f)$ representam a amplitude e a fase de $H(f)$, respectivamente, sendo dadas pelas equações (2.11) e (2.12).

A escolha de uma qualquer das estimativas representadas pelas expressões (4.74) a (4.78) para caracterizar $H(f)$ não é indiferente, já que, por um lado, as equações (4.75) e (4.77) apenas permitem avaliar a amplitude de $H(f)$ e, por outro, o grau de incerteza associado às restantes equações é diferente, aspecto que será melhor abordado no ponto seguinte deste trabalho.

É ainda possível definir, em correspondência com a função de resposta em frequência associada a um dado sistema, uma nova função designada de *função de coerência*, $\gamma_{xy}^2(f)$, que goza da particularidade de fornecer indicações úteis sobre o grau de linearidade do sistema observado, ou acerca da presença de ruído na entrada ou saída do sistema. $\gamma_{xy}^2(f)$ é definida por

$$\gamma_{xy}^2 = \frac{|G_{xy}(f)|^2}{G_x(f) \cdot G_y(f)} \quad (4.80)$$

Como apenas se dispõe das estimativas $\hat{G}_{xy}(f_k)$, $\hat{G}_x(f_k)$ e $\hat{G}_y(f_k)$ para uma frequência genérica f_k , então o cálculo da função de coerência $\gamma_{xy}^2(f)$ tem de ser substituído por uma sua estimativa, dada por

$$\hat{\gamma}_{xy}^2(f_k) = \frac{|\hat{G}_{xy}(f_k)|^2}{\hat{G}_x(f_k) \cdot \hat{G}_y(f_k)} \quad (4.81)$$

Pela forma como está definida, a função de coerência apenas toma valores no intervalo $[0,1]$, qualquer que seja o valor da frequência f_k [11].

Se o sistema for linear e invariante no tempo, não existindo ruído misturado com a sua entrada $x(t)$ ou a saída $y(t)$, então $\gamma_{xy}^2 = 1$. Pelo contrário, quando $x(t)$ e $y(t)$ não estão relacionados, $\gamma_{xy}^2 = 0$. Nos casos correntes, γ_{xy}^2 apresenta valores que podem ser próximos de 1, evidenciando assim uma excelente correlação entre a entrada e a saída do sistema e um baixo nível de ruído presente nos sinais, ou valores próximos de zero, resultantes da existência de um elevado nível de ruído nos sinais, de não-linearidade do comportamento estrutural, ou da presença de outras fontes de excitação não consideradas na quantificação das séries $\{x_n\}$ da entrada.

Na prática, é corrente considerar-se que valores de γ_{xy}^2 inferiores a 80% estão associados a funções de resposta em frequência insatisfatórias do ponto de vista da caracterização do sistema.

4.5.4 - Conceito de estimador: Aplicação à análise de sinais

Seja $\{x(t)\}$ um processo estocástico estacionário e ergódico do qual se obtêm, por amostragem, m séries representativas $\{x_n\}_0, \{x_n\}_1, \dots, \{x_n\}_{m-1}$, contendo N pontos cada, igualmente espaçados de um intervalo Δt .

A estimativa $\hat{\alpha}$ de um parâmetro α do processo estocástico aleatório descrito pelas m séries $\{x_n\}_m$ pode ser definida por

$$\hat{\alpha} = S(\{x_n\}_0, \{x_n\}_1, \dots, \{x_n\}_{m-1}) \quad (4.82)$$

em que S é designado por *estimador* do parâmetro α . Por ser uma função de variáveis aleatórias, S é também uma variável aleatória.

O critério para a escolha do estimador mais adequado baseia-se na quantificação do *erro de viés* e da *variância* em correspondência com a definição usada.

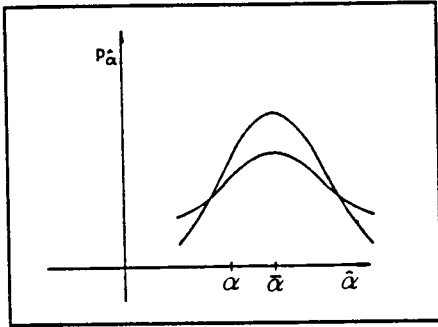
O *erro de viés*, $B_{\hat{\alpha}}$ ("bias"), associado a um estimador S pode ser definido pela diferença entre o valor expectável e o valor real

$$B_{\hat{\alpha}} = E[\hat{\alpha}] - \alpha \quad (4.83)$$

Se $B_{\hat{\alpha}}$ for nulo diz-se que o estimador é *não enviesado* ("unbiased estimator"). Caso contrário, o estimador é *enviesado* ("biased estimator"). Esta última situação corresponde a uma função densidade de probabilidade da estimativa $\hat{\alpha}$, $p_{\hat{\alpha}}(\alpha)$, não centrada no valor real, α (Figura 4.47).

É possível definir um erro de enviesamento normalizado, ϵ_b , por

$$\epsilon_b = \frac{B_{\hat{\alpha}}}{\alpha} = \frac{E[\hat{\alpha}]}{\alpha} - 1 \quad (4.84)$$



A variância, $\text{Var}[\hat{\alpha}]$, de um estimador é por sua vez definida por

$$\text{Var}[\hat{\alpha}] = E[(\hat{\alpha} - E(\hat{\alpha}))^2] = \sigma_{\hat{\alpha}}^2 \quad (4.85)$$

Fig. 4.47 - Densidades de probabilidade associadas a estimadores enviesados.

constituindo uma medida da forma como a função densidade de probabilidade da estimativa $\hat{\alpha}$ se distribui em torno do seu valor médio $\bar{\alpha} = E[\hat{\alpha}]$. Uma variância pequena indica uma concentração de $p_{\hat{\alpha}}$ em torno de $\bar{\alpha}$, enquanto que uma variância elevada está associada a uma grande dispersão em torno de $\bar{\alpha}$.

Pode definir-se também, com base nesta medida, um erro aleatório normalizado, ϵ_r , dado por

$$\epsilon_r = \frac{\sigma_{\hat{\alpha}}}{\alpha} = \frac{\sqrt{E[\hat{\alpha}^2] - E^2[\hat{\alpha}]}}{\alpha} \quad (4.86)$$

Uma forma alternativa de caracterizar a eficiência do estimador S consiste em recorrer ao conceito de intervalo de confiança. Representando por $P(\hat{\alpha} - \alpha)$ a probabilidade de $\hat{\alpha} - \alpha$ se situar num intervalo $[-\alpha_1, \alpha_2]$, pode escrever-se

$$P(-\alpha_1 \leq \hat{\alpha} - \alpha \leq \alpha_2) = 1 - \beta$$

ou seja,

$$P(\hat{\alpha} - \alpha_2 \leq \alpha \leq \hat{\alpha} + \alpha_1) = 1 - \beta \quad (4.87)$$

onde $1 - \beta$ representa a área subentendida pela função $p_{\hat{\alpha}}$ entre $\hat{\alpha} - \alpha_2$ e $\hat{\alpha} + \alpha_1$, podendo o intervalo $[\hat{\alpha} - \alpha_2, \hat{\alpha} + \alpha_1]$ ser entendido como o intervalo de confiança no qual o valor de α se situa com uma probabilidade $1 - \beta$.

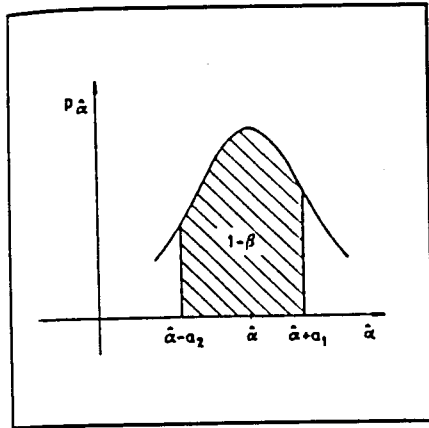


Fig. 4.48 - Caracterização do intervalo de confiança associado a uma estimativa de α com probabilidade $1 - \beta$.

Desejavelmente, um estimador deverá ser não-enviesado e apresentar uma variância pequena. Verifica-se no entanto que, em geral, para um dado conjunto de séries, a redução da variância só é possível à custa de um aumento do enviesamento e, inversamente, a redução do erro de viés do estimador resulta num aumento da sua variância, pelo que a escolha entre vários estimadores possíveis terá de ser feita através de um compromisso entre estes dois parâmetros.

Um estimador diz-se *consistente* se, à medida que aumenta o número N de amostras utilizadas, a variância e o erro de viés tendem para zero.

Exemplos de estimadores consistentes [79], são o estimador para a média, definido a partir de N valores amostrados x_n do sinal aleatório $x(t)$ por

$$\hat{m}_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \quad (4.88)$$

o estimador para a função de correlação $R_x(\tau)$, dado por (4.64), ou ainda o estimador para a função de correlação cruzada $R_{xy}(\tau)$, dado por (4.65).

Já o estimador simples utilizado na definição de função densidade espectral de potência (4.68), ou o estimador usado na definição de função densidade espectral de potência cruzada (4.69) são enviesados e, portanto, não-consistentes.

4.5.5 - Estimadores das funções densidade espectral de potência e densidade espectral de potência cruzada

Tal como foram definidos, os estimadores da função densidade espectral de potência, $\hat{S}_x(f)$ e densidade espectral de potência cruzada, $\hat{S}_{xy}(f)$, estão associados a erros de viés não nulos [11], podendo verificar-se que, de forma aproximada

$$B[\hat{S}_x(f)] \cong \frac{\Delta f^2}{24} \cdot S_x''(f) \quad (4.89)$$

ou

$$B[\hat{C}_{xy}(f)] \cong \frac{\Delta f^2}{24} \cdot C_{xy}''(f)$$

e

(4.90)

$$B[\hat{Q}_{xy}(f)] \cong \frac{\Delta f^2}{24} \cdot Q_{xy}''(f)$$

em que Δf é a resolução em frequência da série, relacionada com o número de amostras N e a frequência de amostragem F , através de $\Delta f = F/N$, o símbolo ($''$) traduz a 2ª derivada da função a que se refere em ordem a f e $\hat{C}_{xy}$ e $\hat{Q}_{xy}$ representam as partes real e imaginária de $\hat{S}_{xy}$, respectivamente.

É possível ainda verificar que a variância associada à utilização destes estimadores é muito elevada, conduzindo a um valor unitário para o erro aleatório normalizado.

Este erro é naturalmente inaceitável, pelo que a utilização dos estimadores espectrais simples na obtenção de estimativas da função densidade espectral de potência ou função densidade espectral de potência cruzada não é satisfatória.

É possível reduzir a variância em correspondência com as estimativas obtidas por (4.68) ou (4.69) através de uma operação de alisamento [11]. Esta operação pode ser realizada fundamentalmente de duas maneiras:

- em frequência;
- por troços.

O alisamento em frequência consiste em, após a aplicação do estimador espectral simples à série contendo N amostras, calcular a média aritmética da cada l componentes espectrais consecutivas (Figura 4.49), tomando

$$\tilde{S}_x(\bar{f}_k) = \frac{1}{l} [\hat{S}_x(f_{(k-1)l+1}) + \hat{S}_x(f_{(k-1)l+2}) + \dots + \hat{S}_x(f_{(k-1)l+l})] \quad (4.91)$$

sendo

$$\bar{f}_k = \frac{1}{2} [f_{(k-1)l+1} + f_{(k-1)l+l}]$$

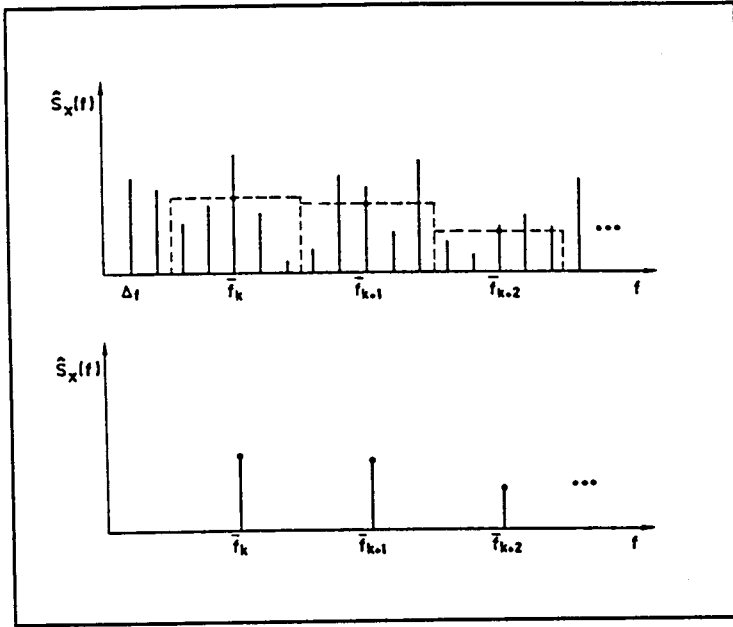


Figura 4.49 - Alisamento em frequência para obtenção de uma estimativa $\hat{S}_x(f_k)$ da função densidade espectral de potência.

Usando o alisamento por troços, uma série contendo N amostras é dividida em p troços de $\frac{N}{p}$ pontos, aplicando-se de seguida a cada segmento o estimador espectral simples. Cada componente na frequência $\bar{f}_k = \frac{kp}{N\Delta t}$, com k a variar de 0 a N/p , é obtida através da média aritmética das componentes correspondentes de cada um dos troços em que a série inicial foi dividida (Figura 4.50), isto é

$$\tilde{S}_x(\bar{f}_k) = \frac{1}{p} [(\hat{S}_x(\bar{f}_k))_1 + (\hat{S}_x(\bar{f}_k))_2 + \dots + (\hat{S}_x(\bar{f}_k))_p] \quad (4.92)$$

A média aritmética, operação realizada nas duas formas de alisamento apresentadas, é a operação que mais se aproxima da operação valor expectável, interveniente na definição de função densidade espectral de potência. É justamente essa operação que torna estes estimadores alisados consistentes.

De facto, é possível provar [9] que, aos estimadores alisados $\tilde{S}_x(f_k)$ e $\tilde{S}_{xy}(f_k)$ obtidos através de (4.91) e (4.92), estão associados erros de viés dados pelas expressões (4.89) e (4.90) apresentadas para os estimadores espectrais simples, e erros aleatórios normalizados de valor

$$\epsilon_r[\tilde{S}_x(f_k)] = \frac{1}{\sqrt{n_d}} \quad (4.93)$$

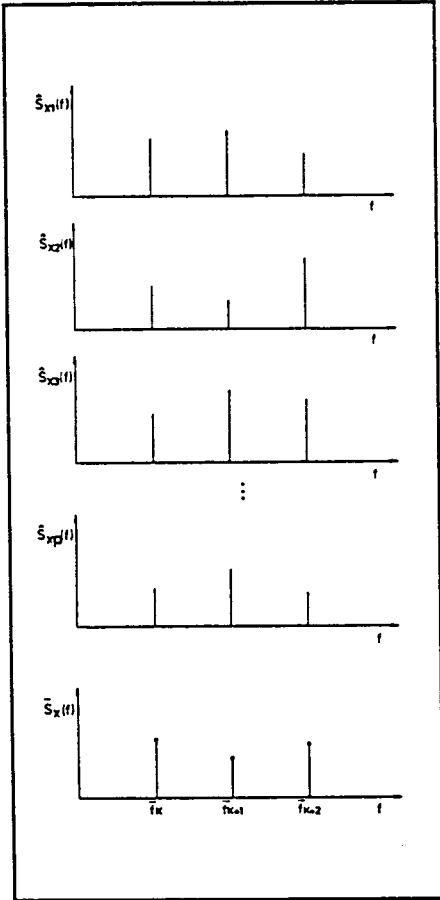


Figura 4.50 - Alisamento por troços.

e

$$\epsilon_r[|\tilde{S}_{xy}(f_k)|] = \frac{1}{|\gamma_{xy}(f)|} \cdot \frac{1}{\sqrt{n_d}} \quad (4.94)$$

em que n_d é igual ao número de pontos l utilizados no alisamento em frequência, ou ao número de segmentos p em que a série inicial é dividida, se o alisamento for realizado por troços.

É também possível relacionar ϵ_r com o tempo de duração total da amostra, T , e com a resolução em frequência do estimador analisado, Δf , por

$$\epsilon_r[\tilde{S}_x(f_k)] = \frac{1}{\sqrt{\Delta f \cdot T}} \quad (4.95)$$

e

$$\epsilon_r[\tilde{S}_{xy}(f_k)] = \frac{1}{|\gamma_{xy}(f)|} \cdot \frac{1}{\sqrt{\Delta f \cdot T}} \quad (4.96)$$

Analisando as expressões (4.93) a (4.96), pode concluir-se que, ao aumentar o número de pontos a usar na obtenção de cada estimativa espectral (alisamento em frequência), ou o número de segmentos em que a série inicial é dividida (alisamento por troços), é possível reduzir a variância do estimador, tendendo esta para zero quando T tende para infinito. Note-se contudo que qualquer das operações de alisamento acarreta uma perda de resolução em frequência, associada a uma descrição espectral através de um menor número de riscas.

Se a série amostrada tiver um comprimento fixo, será pois necessário conciliar os valores destas grandezas (variância e viés) na escolha dos parâmetros de alisamento.

A questão que neste momento se coloca é a de saber como utilizar as expressões apresentadas para os erros de viés e de variância na obtenção das estimativas espectrais $\tilde{S}_x(f_k)$ e $\tilde{S}_{xy}(f_k)$.

Começando por observar as expressões (4.89) e (4.90) relativas ao erro de viés, de imediato se constata que este é dependente da segunda derivada em ordem à frequência das funções $S_x(f)$ ou $S_{xy}(f)$, respectivamente.

Tomando como exemplo o estimador espectral $\hat{S}_x(f_k)$, e admitindo que $x(t)$ representa a resposta do sistema (aproximado na vizinhança da ressonância f_r por um sistema de um grau de liberdade) a um ruído branco de banda limitada, de densidade espectral de potência $S_w(f) = S_0$, com $f_1 \leq f \leq f_2$ e $f_1 \ll f_r \ll f_2$, tem-se que

$$S_x(f) = |H(f)|^2 S_w(f) = \frac{S_0/k^2}{[1 - (f/f_r)^2]^2 + (2\xi_r f/f_r)^2}$$

Tendo em conta esta expressão, facilmente se pode verificar que a segunda derivada $S_x''(f)$ tem o seu valor máximo na proximidade de f_r , concluindo-se que

$$\frac{S_x''(f_r)}{S_x(f_r)} \cong \frac{-2}{\xi_r^2 f_r^2}$$

sendo ξ_r o coeficiente de amortecimento em correspondência com o modo de frequência f_r (suposto pequeno: $\xi_r^2 \ll 1$).

Como a largura de meia potência do modo r , B_r , é dada por $B_r = 2\xi_r f_r$, o erro de viés normalizado será

$$\epsilon_b[\hat{S}_x(f_r)] \cong -\frac{1}{3} \left(\frac{\Delta f}{B_r} \right)^2 \quad (4.97)$$

Através desta expressão, representada graficamente na Figura 4.51, torna-se possível escolher de forma simples a resolução em frequência do sinal adequada à menor frequência que se pretenda analisar.

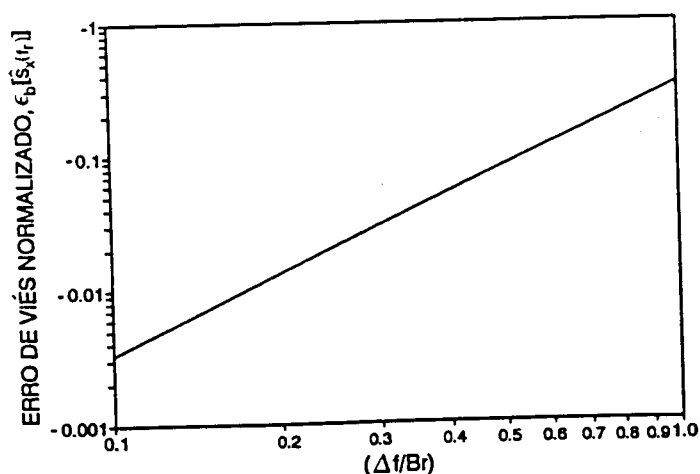


Figura 4.51 - Erro de viés normalizado para o estimador $\hat{S}_x(f_k)$.

Admita-se por exemplo, que de um sinal a amostrar, a menor frequência que interessa analisar é da ordem de 2Hz, sendo o amortecimento de cerca de 5%. Nestas condições, $B_r = 2 \times 0,05 \times 2 = 0,20 \text{ Hz}$. Se se pretender que $|\epsilon_r| \leq 0,10$, o valor mínimo da resolução em frequência Δf do sinal a amostrar será 0,11Hz ou seja, $\Delta f / B_r \geq 0,55$.

As expressões (4.93) e (4.94) para o erro aleatório normalizado permitem por sua vez, escolher o tempo total da amostra. Com efeito, observando a Figura 4.52, na qual se representa ϵ_r em função de n_d , é possível escolher um valor de n_d de forma a que ϵ_r não exceda um dado limite. Se, por exemplo, se pretender obter uma estimativa alisada $\tilde{S}_x(f_k)$ com erro aleatório normalizado não superior a 10%, será necessário efectuar médias sobre 100 estimativas simples. Usando (4.95) e admitindo ser $\overline{\Delta f} = 0,11 \text{ Hz}$, virá $T = 909 \text{ s}$. Seleccionando uma frequência de amostragem de 20Hz, serão necessários, no mínimo, 18180 valores amostrados, número que será ainda mais elevado para as estimativas cruzadas $\tilde{S}_{xy}(f)$, atendendo à variação de ϵ_r com o inverso da raiz quadrada da função de coerência.

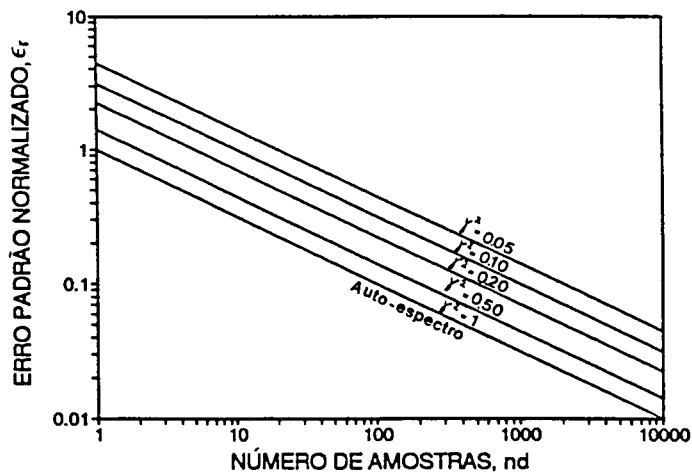


Figura 4.52 - Erro padrão normalizado relativo às estimativas $\tilde{S}_x(f_k)$ e $|\tilde{S}_{xy}(f_k)|$.

Este pequeno exemplo serve desde já para realçar ser, em geral, necessária a utilização de um elevado número de amostras na obtenção das estimativas espectrais associadas a um dado sinal.

Convirá assinalar no entanto que é possível reduzir um pouco o número de amostras necessárias à estimativa espectral, introduzindo uma variante no processo de alisamento por troços. Esta consiste em sobrepor os troços em que a série inicial é dividida, de forma que cada segmento contenha alguns pontos do segmento seguinte (Figura 4.53).

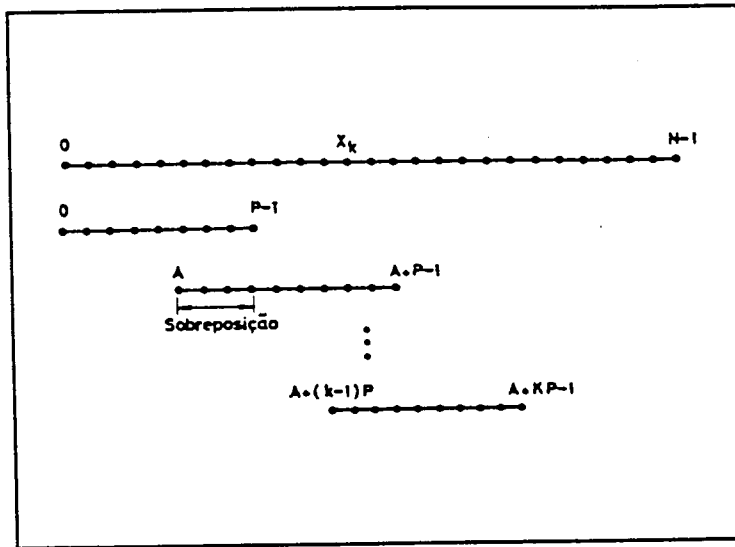


Figura 4.53 - Divisão da série amostrada inicial em troços sobrepostos.

Através deste procedimento consegue-se, usando o mesmo número de troços, uma menor redução da resolução em frequência, embora a redução da variância seja também menor. Segundo Welch [24], os melhores resultados são obtidos quando os troços se sobrepõem em metade da sua extensão.

Uma segunda variante, que se pode introduzir no alisamento por troços, consiste em aplicar a cada troço uma janela de dados antes de obter as estimativas espectrais. Consegue-se desta maneira reduzir o efeito de "leakage" proveniente da truncatura das séries.

4.5.6 - Estimadores da função de resposta em frequência e da função de coerência associada

Atendendo a que os estimadores alisados das funções espectrais $S_x(f)$ e $S_{xy}(f)$ definidos em 4.5.5 apresentam melhores características de comportamento no que respeita à variância e enviesamento das estimativas, a sua substituição pelos correspondentes estimadores simples nas expressões (4.75) a (4.78) da função de resposta em frequência e (4.80), da função de coerência associada, é aconselhável.

Os novos estimadores obtidos para a função de resposta em frequência possuem ainda erros de viés, cujas causas são as seguintes:

1. Erros de viés inerentes às estimativas das funções densidade espectral de potência e densidade espectral de potência cruzada envolvidas no cálculo;
2. Enviesamento decorrente do processo de estimação;
3. Comportamento não-linear do sistema analisado;
4. Existência de ruído na entrada ou saída do sistema;
5. Contribuição de outras entradas do sistema não quantificadas para a resposta total medida.

Como foi referido em 4.5.5, o erro de viés associado às estimativas espectrais tem especial importância nas zonas de maior interesse da descrição espectral do sinal, ou seja, junto das ressonâncias, sendo a sua redução possível através de um *aumento* da resolução em frequência, o que na prática se traduz num aumento da duração da série amostrada, T .

O enviesamento decorrente do processo de estimação tem a ver com o facto de que, ao substituir os estimadores espectrais $\hat{G}_{xy}(f_k)$ e $\hat{G}_x(f_k)$, por exemplo, pelos estimadores alisados $\tilde{G}_{xy}(f_k)$ e $\tilde{G}_x(f_k)$, acontece que, em geral,

$$E[\hat{H}(f_k)] = E\left[\frac{\hat{G}_{xy}(f_k)}{\hat{G}_x(f_k)}\right] \neq \frac{E[\hat{G}_{xy}(f_k)]}{E[\hat{G}_x(f_k)]}$$

Logo, $E[\hat{H}(f_k)] \neq H(f_k)$. Verifica-se no entanto que, para o número total N de amostras normalmente necessárias para minorar outras fontes de erro, esta forma de enviesamento tem uma importância muito reduzida em face das restantes [11].

O enviesamento das estimativas pode também ser produzido em consequência da utilização de um modelo linear para descrever um sistema com comportamento não-linear. Verifica-se no entanto que este estimador constitui, do ponto de vista dos mínimos quadrados, a melhor aproximação linear possível para $H(f)$ [142].

A existência de ruído na entrada ou na saída do sistema influencia o enviesamento das estimativas de forma variável, de acordo com o estimador escolhido. Conhecendo as características do ruído presente nas séries amostradas é possível, em muitos casos, a utilização de estimadores não enviesados [141].

Considere-se o sistema de um grau de liberdade esquematicamente representado na Figura 4.54, sendo $x(t)$ e $y(t)$ os sinais medidos na entrada e na saída, respectivamente. Admita-se ainda que $m(t)$ e $n(t)$ representam o ruído, proveniente de diversas fontes exteriores ao sistema, que aparece misturado com os sinais de entrada, $u(t)$, e de saída, $v(t)$.

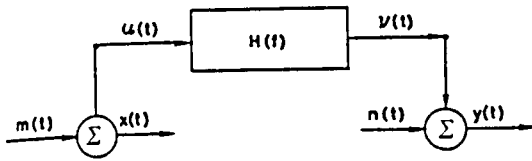


Fig. 4.54 - Sistema linear de um grau de liberdade com ruído não-correlacionado na entrada e na saída.

Pelo facto de $m(t)$ e $n(t)$ não atravessarem o sistema, diz-se que existe *ruído não-correlacionado*.

Tem-se então que

$$x(t) = u(t) + m(t)$$

e

$$y(t) = v(t) + n(t)$$

Usando a propriedade de linearidade da transformada de Fourier de um sinal, o cálculo das estimativas espectrais alisadas $\tilde{G}_x(f_k)$, $\tilde{G}_y(f_k)$ e $\tilde{G}_{xy}(f_k)$ conduzirá a

$$\tilde{G}_x(f_k) = \tilde{G}_u(f_k) + \tilde{G}_m(f_k) \quad (4.98)$$

$$\tilde{G}_y(f_k) = \tilde{G}_v(f_k) + \tilde{G}_n(f_k) \quad (4.99)$$

$$\tilde{G}_{xy}(f_k) = \tilde{G}_{uv}(f_k) + \tilde{G}_{un}(f_k) + \tilde{G}_{mv}(f_k) + \tilde{G}_{mn}(f_k) \quad (4.100)$$

Sendo o ruído do tipo *não-correlacionado*, as estimativas cruzadas $\tilde{G}_{un}$, $\tilde{G}_{mv}$ e $\tilde{G}_{mn}$ anulam-se, vindo desta forma o estimador obtido através da expressão (4.78) por substituição pelas estimativas espectrais analisadas, definido através de

$$\hat{H}_1(f_k) = \frac{\tilde{G}_{xy}(f_k)}{\tilde{G}_x(f_k)} = \frac{\tilde{G}_{uv}(f_k)}{\tilde{G}_u(f_k) + \tilde{G}_m(f_k)} \quad (4.101)$$

Pode claramente constatar-se que este estimador, correntemente designado por *estimador H_1* é *enviesado*, se existir ruído na entrada do sistema. Se, no entanto, existir ruído do tipo não-correlacionado na saída, o estimador será *não-enviesado*.

Ora, nos casos práticos correntes, o ruído na entrada do sistema tem menor significado do que o ruído presente na sua saída, sendo além disso mais facilmente eliminável pelo facto de resultar de uma fonte localizada de características bem conhecidas. Pode portanto concluir-se que o *estimador H_1* é o adequado para aplicação em sistemas onde o ruído exista essencialmente na saída, sendo além disso do tipo não-correlacionado.

Pelo contrário, o *estimador H_2* , definido por

$$\hat{H}_2(f_k) = \frac{\tilde{G}_y(f_k)}{\tilde{G}_{yx}(f_k)} = \frac{\tilde{G}_v(f_k) + \tilde{G}_n(f_k)}{\tilde{G}_{vu}(f_k)} \quad (4.102)$$

é *enviesado* quando existe ruído na saída do sistema e não *enviesado* se existir ruído do tipo não-correlacionado apenas na entrada, sendo a sua utilização aconselhável apenas em problemas específicos onde a resposta seja perfeitamente controlável, de forma a que se torne desprezável o ruído na saída.

Existindo simultaneamente ruído (não-correlacionado) na entrada e na saída do sistema, a aplicação dos estimadores H_1 ou H_2 conduz inevitavelmente a estimativas enviesadas. Verifica-se no entanto que [119], não havendo outras fontes de enviesamento, como o "leakage" ou comportamento não-linear do sistema, estes estimadores enquadram o verdadeiro valor de $H(f)$. De facto, os estimadores H_1 e H_2 podem escrever-se, para esse caso, na forma

$$\hat{H}_1(f_k) = \hat{H}(f_k) \cdot \left[\frac{1}{1 + \frac{\tilde{G}_n(f_k)}{\tilde{G}_u(f_k)}} \right] \quad (4.103)$$

$$\hat{H}_2(f_k) = \hat{H}(f_k) \cdot \left[1 + \frac{\tilde{G}_n(f_k)}{\tilde{G}_v(f_k)} \right] \quad (4.104)$$

sendo $\hat{H}(f_k) = \hat{G}_{uv}(f_k) / \hat{G}_u(f_k) = \hat{G}_v(f_k) / \hat{G}_{vu}(f_k)$, pelo que

$$\hat{H}_1(f_k) \leq \hat{H}(f_k) \leq \hat{H}_2(f_k) \quad (4.105)$$

De realçar também que ao longo dos últimos anos têm sido desenvolvidos outros estimadores que, embora de natureza mais complexa, permitem obter estimativas consideradas não enviesadas, quando em presença de ruído do tipo não-correlacionado à entrada e à saída [99]. Referem-se aqui os *estimadores* H_c e H_s .

O estimador H_c é definido através de

$$\hat{H}_c(f_k) = \frac{\tilde{G}_{sy}(f_k)}{\tilde{G}_{sx}(f_k)} \quad (4.106)$$

sendo s um sinal sem ruído que, em aplicações de análise modal, se faz coincidir com o sinal de entrada do excitador ("shaker Source signal").

Ao construir as estimativas alisadas cruzadas $\tilde{G}_{sx}$ e $\tilde{G}_{sy}$, o ruído não-correlacionado presente na entrada e saída cancela-se, verificando-se em geral que as estimativas proporcionadas por este estimador são substancialmente superiores em qualidade às obtidas através dos estimadores H_1 e H_2 [99].

O estimador H_s ("scaled frequency response function"), proposto por Wicks e Vold [143], é definido através de

$$\hat{H}_s(f_k) = \frac{\tilde{G}_y - S^2 \tilde{G}_x + \sqrt{(S^2 \tilde{G}_x - \tilde{G}_y)^2 + 4 S^2 \tilde{G}_{xy} \cdot \tilde{G}_{yx}}}{2 \tilde{G}_{yx}} \quad (4.107)$$

onde S representa um factor de escala, dado pelo cociente entre os conteúdos espectrais não-correlacionados estimados do ruído na entrada e na saída: $S^2 = \tilde{G}_n / \tilde{G}_m$.

Esta expressão resultou da minimização de uma função de erro escalada, usando uma técnica de mínimos quadrados que se encontra referida em [7].

Naturalmente que o não-enviesamento deste estimador depende da qualidade da estimativa de S utilizada na sua aplicação.

Ainda na situação de o ruído presente no sinal ser do tipo não-correlacionado, refere-se que o enviesamento produzido por utilização quer do estimador H_1 , quer de H_2 , se manifesta apenas no ganho da função $H(f)$ e não na sua fase, como aliás se pode constatar por observação das expressões (4.103) e (4.104).

Desta forma, e a menos da existência de outras fontes de erro (não-linearidades, "leakage"), a análise do gráfico da fase da função de transferência versus frequência constitui a melhor via para a identificação das frequências próprias do sistema no que concerne à existência de erros de viés.

No que respeita ao ruído do tipo correlacionado $q(t)$, que ocorre em consequência de existirem outras entradas do sistema para além da medida (Figura 4.55), refere-se que a aplicação de qualquer dos estimadores H_1 e H_2 levará a estimativas enviesadas para $H(f)$.

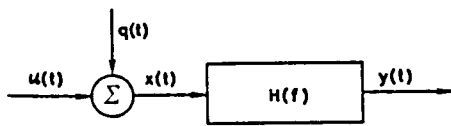


Figura 4.55 - Sistema linear de um grau de liberdade com ruído correlacionado.

Quanto à aleatoriedade das estimativas, é possível verificar [9] que o erro aleatório normalizado ϵ_r associado ao ganho da função de resposta em frequência do sistema é dado por

$$\epsilon_r[|\hat{H}(f_k)|] = \frac{(1 - \gamma_{xy}^2)^{1/2}}{|\gamma_{xy}| \sqrt{2n_d}} \quad (4.108)$$

em que n_d é o número de pontos utilizados no alisamento em frequência, ou o número de troços em que a série inicial foi dividida, se se utilizar um alisamento por troços. Ilustra-se na Figura 4.56.a) a variação de ϵ_r com n_d para diferentes valores da função de coerência, γ_{xy}^2 .

Verifica-se ainda [9] que o desvio-padrão associado à estimativa da fase ϕ da função de resposta em frequência é dado por [9]

$$\sigma_\phi \cong \frac{[1 - \gamma_{xy}^2]^{1/2}}{|\gamma_{xy}| \sqrt{2n_d}} \quad (4.109)$$

Tem-se, portanto, que

$$\sigma_{\hat{H}} \cong \epsilon_r[|\hat{H}(f_k)|] \quad (4.110)$$

Na prática, a utilização destas expressões para avaliação dos erros cometidos nas estimativas é realizada por substituição da função de coerência $\gamma_{xy}^2(f)$ por uma sua estimativa, $\hat{\gamma}_{xy}^2(f)$.

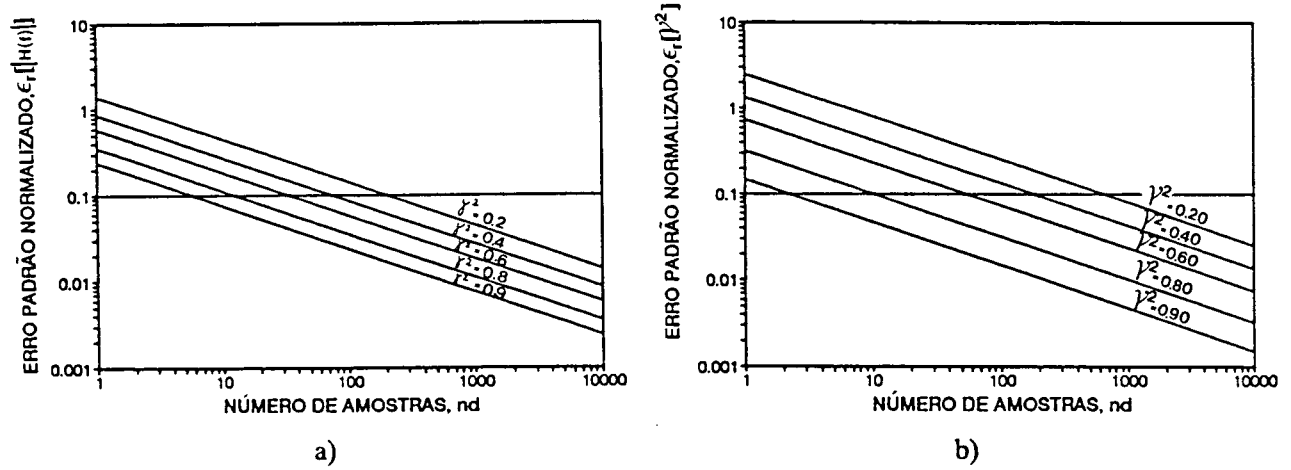


Figura 4.56 - Erro aleatório normalizado associado a) às estimativas do ganho da função de resposta em frequência do sistema b) e da função de coerência associada.

É possível ainda obter estimativas dos erros aleatórios ϵ_r associados ao estimador da função de coerência, através da relação [12]

$$\epsilon_r[\hat{\gamma}_{xy}^2(f)] = \frac{\sqrt{2}[1 - \gamma_{xy}^2(f)]}{|\gamma_{xy}(f)|\sqrt{n_d}} \quad (4.111)$$

Representa-se na Figura 4.56.b) a variação do erro padrão normalizado, $\epsilon_r[\hat{\gamma}_{xy}^2(f)]$ com n_d , para diversos valores da coerência, $\gamma_{xy}^2(f)$.

De realçar que, tal como se pode constatar por análise dos gráficos das Figuras 4.52, 4.56.a) e 4.56.b), os erros associados às estimativas espectrais são muito superiores aos erros em correspondência com as estimativas das funções de resposta em frequência e das funções de coerência.

No sentido de melhor compreender a utilidade das expressões anteriormente apresentadas, imagine-se, por exemplo, que se obtiveram $n_d = 100$ séries representativas de um sinal a que está associada uma coerência de 0,80, para uma dada frequência f_k . O erro padrão normalizado associado às estimativas será:

$$\epsilon_r[\tilde{G}_x(f_k)] = \frac{1}{\sqrt{100}} = 0,10$$

$$\epsilon_r[\tilde{G}_{xy}(f_k)] = \frac{1}{\sqrt{0,80}\sqrt{100}} = 0,11$$

$$\epsilon_r[|\hat{H}(f_k)|] = \frac{(1-0,80)^{1/2}}{0,80 \cdot \sqrt{2 \times 100}} = 0,04$$

$$\epsilon_r[|\hat{\gamma}_{xy}(f_k)|] = \frac{\sqrt{2}[1-0,80]}{\sqrt{0,80 \times 100}} = 0,03$$

enquanto que o desvio-padrão associado à estimativa da fase da função de resposta em frequência será

$$\sigma_{\hat{\phi}} = \epsilon_r[|\hat{H}(f_k)|] = 0,04 \text{ rad} \cong 2,3^\circ$$

De assinalar que na generalidade dos casos é ainda possível verificar que os erros aleatórios associados à determinação de $\hat{\phi}(f_k)$ são muito pequenos, de modo que também deste ponto de vista se considera que a utilização da estimativa da fase da função de resposta em frequência é fundamental para a identificação de frequências naturais do sistema, não devendo por isso abdicar-se da sua aplicação em favor do gráfico amplitude vs frequência (prática que aliás é usual, particularmente em aplicações realizadas no domínio da Engenharia Civil).

A finalizar este Capítulo, apresenta-se uma Tabela onde se resumem as expressões utilizadas na obtenção de estimativas dos erros por variância em correspondência com os estimadores definidos ao longo deste texto.

Tabela 4.2 - Erros aleatórios em sistemas com uma entrada e uma saída.

Função	Erro aleatório, ϵ_r
$\tilde{G}_x(f), \tilde{G}_y(f)$	$1/\sqrt{n_d}$
$ \tilde{G}_{xy}(f) $	$\frac{1}{ \gamma_{xy}(f) \sqrt{n_d}}$
$\hat{\gamma}_{xy}^2(f)$	$\frac{\sqrt{2}[1-\gamma_{xy}^2(f)]}{ \gamma_{xy}(f) \sqrt{n_d}}$
$ \hat{H}(f) $	$\frac{[1-\gamma_{xy}^2(f)]^{1/2}}{ \gamma_{xy}(f) \sqrt{2n_d}}$
$\hat{\phi}(f)$	$\sigma_{\hat{\phi}} = \frac{[1-\gamma_{xy}^2(f)]^{1/2}}{ \gamma_{xy}(f) \sqrt{2n_d}}$

Seria desejável, em princípio, fazer preceder a fase de aquisição de dados da utilização destas expressões na previsão da incerteza associada às estimativas dos parâmetros a obter, de forma a estabelecer o comprimento necessário da série a amostrar em conformidade com um dado valor do erro.

Na prática, porém, tal não é viável, porquanto nessas expressões intervêm parâmetros cujo conhecimento só é possível após a amostragem.

No entanto, algumas simplificações do tipo da realizada anteriormente para aproximação do erro de viés em correspondência com uma estimativa espectral, podem ser efectuadas com grande utilidade [12].

4.5.7 - Casos particulares da estimação de funções de resposta em frequência

As relações excitação-resposta descritas no Capítulo 2 e os estimadores apresentados ao longo da secção 4.5 foram estabelecidos no pressuposto de que a excitação, determinística ou aleatória, é conhecida, apresentando um conteúdo espectral significativo ao longo de toda a gama de frequências onde se pretende estimar a função de resposta em frequência.

Há no entanto situações reais em que estas condições não se verificam. Dois casos correntes nos problemas analisados no âmbito da engenharia civil são aqui mencionados, ocorrendo o primeiro quando a identificação das propriedades dinâmicas do sistema é efectuada por análise de vibrações ambientais e o segundo, quando a estrutura é sujeita a uma excitação forçada de tipo sinusoidal.

4.5.7.1 - Estrutura sujeita a excitação ambiental

Na realidade, todas as estruturas se encontram sujeitas, em maior ou menor grau, a vibrações ambientais, sendo estas induzidas por fontes tão diversas, como o vento, o tráfego, o funcionamento de máquinas e a própria actividade humana.

Em face das características da estrutura e, tendo em conta a amplitude das vibrações induzidas por esta forma de excitação, designada por *ruído ambiental*, duas atitudes podem tomar-se.

A primeira consiste em aplicar ao sistema uma acção dinâmica bem conhecida por intermédio de um excitador, induzindo vibrações de amplitude substancialmente superior à

amplitude das vibrações ambientais, de forma que a origem destas últimas possa ser desprezada, sendo o correspondente efeito assimilado a ruído do tipo correlacionado misturado com o sinal que constitui a resposta à excitação forçada do sistema.

A aplicação dos estimadores definidos nas secções 4.5.5 e 4.5.6 é assim realizada directamente, havendo vantagem em minorar tanto quanto possível o ruído ambiental, de forma a reduzir o enviesamento dos estimadores utilizados.

Acontece contudo que, em estruturas de grande porte, a indução de vibrações de amplitude superior às ambientais envolve sistemas de excitação muito potentes e dispendiosos, colocando problemas delicados de fixação e de utilização.

A atitude que progressivamente tem sido tomada [1, 2, 3, 18, 19, 124] neste tipo de problemas, consiste em utilizar o próprio ruído ambiente como forma de excitação e proceder à medição da resposta estrutural com sensores de grande sensibilidade, obtendo-se assim registos de sinais que podem ser considerados como realizações do processo estocástico caracterizador da resposta do sistema.

Como não é possível proceder a uma medição da excitação, a aplicação das relações excitação-resposta estabelecidas no Capítulo 2 não pode ser feita sem a admissão de algumas hipóteses relativas à sua caracterização probabilística.

Assim, é usual, pelo facto de contribuírem para a excitação ambiental acções de diversas origens, totalmente independentes entre si, proceder à sua idealização através de um ruído branco de banda limitada, o que corresponde a tomar como constante a densidade espectral de potência da entrada do sistema na gama de frequências de interesse.

Das possíveis abordagens do problema [1, 18, 19, 124], refere-se a mais simples, apresentada por Bendat e Piersol [12], aplicável a sistemas lineares com baixo amortecimento ($\xi < 0.05$) e cujos modos se encontram bem separados.

Esta abordagem baseia-se na constatação de que, quando é constante a densidade espectral de potência da entrada do sistema, a amplitude da função de resposta em frequência pode considerar-se proporcional à raiz quadrada da função densidade espectral de potência da resposta, ou seja

$$|H_{ij}(f)| \cong k \cdot \sqrt{S_{yi}(f)} \quad (4.112)$$

Isto significa que todos os picos de $|H_{ij}(f)|$ serão picos de $S_{yi}(f)$, do que se pode deduzir ser possível identificar as frequências naturais do sistema por análise da função densidade espectral de potência da resposta $S_{yi}(f)$ num conjunto de pontos de medida a definir.

Da mesma forma, é possível obter estimativas da amplitude da componente ϕ_i do modo de vibração k por relações do tipo

$$(\phi_i)_k \cong K_k \sqrt{S_{y_i}(f_k)} \quad (4.113)$$

Acontece no entanto que, na realidade, a função densidade espectral de potência da entrada do sistema $S_{x_j}(f)$ dificilmente é constante e, em consequência, os picos de $S_{y_i}(f)$ reflectem, não apenas as ressonâncias do sistema, mas também certas componentes dominantes da excitação, motivo por que se considera insuficiente, para a caracterização do sistema, a análise das funções $S_{y_i}(f)$.

Sabendo-se no entanto que, no caso de a estrutura possuir modos de vibração não complexos, a diferença de fase entre as componentes associadas a um dado modo de vibração só pode ser de 0° ou 180° , Bendat e Piersol [12] propõem que se construam funções densidade espectral de potência cruzadas $S_{y_i y_j}(f)$ em correspondência com registos da resposta, $y_i(t)$ e $y_j(t)$, tomados em pontos de medida distintos i e j , respectivamente, e se obtenham as funções de coerência associadas, definidas através de

$$\gamma_{y_i y_j}^2(f) = \frac{|S_{y_i y_j}(f)|^2}{S_{y_i}(f) S_{y_j}(f)} \quad (4.114)$$

A análise da fase da função $S_{y_i y_j}(f)$ permite verificar se os picos em correspondência com a frequência f_k se referem ou não a um modo de vibração. Por outro lado, o conhecimento de $\gamma_{y_i y_j}^2(f)$ constitui uma medida do grau em que as respostas $y_i(t)$ e $y_j(t)$ são produzidas por uma fonte de excitação comum [12], sendo ainda possível por seu intermédio quantificar o erro aleatório associado à fase da estimativa de $S_{y_i y_j}(f)$ (por uma expressão do tipo de (4.109)), o que permite, em suma, estabelecer a importância dos erros cometidos nas estimativas obtidas.

No que respeita à obtenção dos coeficientes de amortecimento modais, Bendat e Piersol [12] sugerem a aplicação do método da meia potência (v. Capítulo 5) à estimativa de $S_{y_i y_j}(f)$, já que esta função contém menores erros do que a função densidade espectral de potência $S_{y_i}(f)$. Referem contudo que só é possível obter estimativas de qualidade para as quantidades ξ_k , quando algumas condições se verificarem, nomeadamente:

- ser suficiente a definição da estimativa $\hat{S}_{y_i y_j}(f)$ na vizinhança de cada ressonância (sugere-se que, se for B_k a largura de meia potência associada à frequência de ressonância f_k do sistema (v. Capítulo 5), o incremento de frequência ΔF usado na estimativa $\hat{S}_{y_i y_j}(f)$ seja inferior a $0,20 B_k$);
- o coeficiente de amortecimento assuma valores muito baixos ($\xi_k < 0,05$);

- a densidade espectral de potência da entrada $S_x(f)$ seja uniforme numa banda de frequência de largura igual a cerca de $6B_k$, centrada em f_k ;
- os modos de vibração se encontrem suficientemente separados (o critério sugerido consiste em exigir que, sendo f_{k-1} e f_k as frequências de ressonância associadas a modos de vibração consecutivos, cujas larguras de meia potência sejam, respectivamente, B_{k-1} e B_k , se verifique a relação $(f_k - f_{k-1}) > 2(B_k + B_{k-1})$).

4.5.7.2 - Estrutura sujeita a uma excitação forçada do tipo sinusoidal

Como o conteúdo espectral da excitação é neste caso constituído essencialmente por uma risca na frequência correspondente ao harmónico aplicado, a função de resposta em frequência terá que ser construída ponto por ponto, sendo necessário obter, para cada frequência, pelo menos um registo da resposta do sistema.

Como nos restantes casos, o tratamento desta forma de excitação como aleatória ou como determinística tem essencialmente a ver com o grau de importância da parcela de ruído que no sinal aparece misturada com a resposta à excitação forçada.

No caso em que a excitação forçada é sinusoidal, levando à necessidade de colher um grande número de sinais no varrimento em frequência efectuado, há especial interesse em utilizar uma abordagem determinística na obtenção da função de resposta em frequência, de modo a que cada ponto desta função possa ser obtido a partir de uma série temporal e não através da estimação sobre um conjunto de séries medidas.

Nestas condições, o valor $H_{ij}(f_k)$ da função de resposta em frequência na frequência f_k pode ser calculado directamente pela definição, efectuando o cociente entre as transformadas de Fourier das séries que constituem a resposta e a excitação

$$H_{ij}(f_k) = \frac{Y(f_k)}{X(f_k)} \quad (4.115)$$

Como na prática apenas se dispõe de uma série amostrada num intervalo limitado, a estimativa de $H_{ij}(f_k)$ terá de ser obtida usando as transformadas discretas de Fourier $Y_{nk}(f_k)$ e $X_{nk}(f_k)$

$$\hat{H}_{ij}(f_k) = \frac{Y_{nk}(f_k)}{X_{nk}(f_k)} \quad (4.116)$$

Se a frequência de amostragem do sinal não for múltipla da frequência da excitação aplicada, o que possivelmente acontecerá em vários pontos, se ao longo do ensaio aquele parâmetro se mantiver fixo, (como é costume, aliás), então a estimativa $\hat{H}_{ij}(f_k)$ será demasiado grosseira, por estar sujeita a importantes erros decorrentes do efeito de "leakage".

Nestas circunstâncias, torna-se fundamental efectuar um "alisamento", através da aplicação de uma janela de dados (por exemplo, a janela de Hanning) às séries observadas.

Uma forma alternativa e que se considera, aliás, mais eficiente na obtenção de estimativas para $H_{ij}(f_k)$, resulta de constatar que a amplitude da transformada de Fourier de uma senoide é igual a metade da amplitude desta função, enquanto que a correspondente fase coincide com a fase do harmónico em relação à origem dos tempos. Assim sendo, a estimativa destas duas quantidades, amplitude e fase do harmónico que constitui cada série observada permite obter directamente

$$\hat{H}_{ij}(f_k) = \frac{\hat{Y} e^{i\hat{\phi}_y}}{\hat{X} e^{i\hat{\phi}_x}} \quad (4.117)$$

sendo $\hat{Y}$ e $\hat{X}$ as estimativas da amplitude das sinusoides que constituem a entrada e a saída do sistema, respectivamente e $\hat{\phi}_y$ e $\hat{\phi}_x$ as estimativas da fase correspondentes.

O processo desenvolvido neste trabalho para a avaliação de $\hat{Y}$, $\hat{X}$, $\hat{\phi}_y$ e $\hat{\phi}_x$ consistiu em dividir cada série temporal em intervalos de duração igual ao período do harmónico aplicado, extraindo de cada troço uma amplitude, igual à semi-soma dos valores absolutos do mínimo e do máximo, obtidos por interpolação sinusoidal, e ainda uma fase, substituindo os valores de dois instantes de tempo próximos t_1 , t_2 da série e os correspondentes valores observados $y(t_1)$, $y(t_2)$ na forma geral

$$y(t) = \hat{Y}_i \sin(\omega_k t + \hat{\phi}_{iy}) \quad (4.118)$$

o que leva a

$$\hat{\phi}_{iy} = \text{atan} \frac{y(t_2) \cdot \sin(\omega_k t_1) - y(t_1) \cdot \sin(\omega_k t_2)}{y(t_1) \cdot \cos(\omega_k t_2) - y(t_2) \cdot \cos(\omega_k t_1)} \quad (4.119)$$

sendo $\omega_k = 2\pi f_k$. As estimativas $\hat{Y}$, $\hat{X}$, $\hat{\phi}_y$ e $\hat{\phi}_x$ são finalmente avaliadas através do valor médio das correspondentes estimativas $\hat{Y}_i$, $\hat{X}_i$, $\hat{\phi}_{iy}$ e $\hat{\phi}_{ix}$ obtidas em cada um dos intervalos em que as séries $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ foram divididas.

CAPÍTULO 5

IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS EM ESTRUTURAS

INTRODUÇÃO

É objectivo da Identificação de Sistemas construir um modelo matemático caracterizador do funcionamento estrutural que se aproxime, tanto quanto possível, do conjunto de relações excitação-resposta determinadas experimentalmente.

Como atrás foi referido, a estas relações experimentais estão associados erros aleatórios e erros de viés, aspecto que, associado ao excesso de informação experimental normalmente colhida em relação à estritamente necessária, leva a que os parâmetros do modelo extraídos por aplicação dos métodos de identificação de sistemas constituam apenas estimativas dos valores reais, sendo a sua obtenção possível através da aplicação de técnicas de ajuste. É precisamente da diversidade de critérios de optimização possíveis que resulta a enorme variedade de técnicas de identificação existentes.

No presente capítulo procede-se à apresentação e discussão de algumas destas técnicas, dando ênfase a certos aspectos práticos mais relevantes evidenciados pelas aplicações realizadas com base num conjunto de séries obtidas experimentalmente, recorrendo a programas de cálculo automático desenvolvidos no âmbito deste trabalho.

Assim, são referidos inicialmente alguns dos conceitos sobre os quais assentam os diferentes métodos de identificação existentes, apresentando-se também uma classificação desses métodos baseada em diferentes critérios.

Seguidamente, tendo optado pelo desenvolvimento de algoritmos para identificação de parâmetros no domínio da frequência, incidindo portanto sobre as funções de resposta em frequência experimentalmente determinadas, passa-se à descrição das suas propriedades mais relevantes, de acordo com as formas possíveis de representação gráfica.

Neste contexto são apresentados dois conjuntos de métodos de identificação, o primeiro dos quais referente às técnicas designadas como de 1 grau de liberdade e englobando os métodos da amplitude de pico, do "circle fit", de Mau e de Dobson, enquanto que o segundo, dizendo respeito a técnicas de N graus de liberdade, contém o designado método da decomposição em polinómios ortogonais de Forsythe.

Qualquer uma das técnicas referidas assenta na hipótese de serem conhecidas as funções de resposta em frequência $H_{ij}(w)$, relacionando a resposta segundo a coordenada i com a acção segundo j . Como se pode compreender, a acção aplicada pode ser de qualquer tipo, contanto que a sua aplicação seja pontual (apenas são estudados os chamados sistemas de entrada única).

São por fim apresentadas algumas considerações relativas à questão da validação do modelo teórico, enquadrando-se devidamente os aspectos desta questão que são abordados no trabalho presente e que dizem respeito exclusivamente à comparação entre os resultados obtidos experimental e numericamente através de modelos modais.

5.1 - ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS DINÂMICOS. CLASSIFICAÇÃO DAS TÉCNICAS EXISTENTES

5.1.1 - Análise no domínio do tempo e da frequência

O critério mais conhecido para a classificação dos métodos de identificação de parâmetros dinâmicos em estruturas é o que se refere ao domínio em que são processadas as séries medidas.

Com a introdução do algoritmo FFT e com o desenvolvimento tecnológico levado a cabo em anos recentes, esta classificação tornou-se artificial porquanto a passagem do domínio da frequência para o domínio do tempo passou a ser uma operação banal em que basta, no caso de as ordenadas espectrais da FRF (frequency response function) se encontrarem igualmente espaçadas, proceder à sua inversão através do algoritmo FFT, de que resulta a chamada função de resposta impulsiva, usualmente designada por IRF (impulse response function).

As primeiras técnicas de identificação de sistemas foram desenvolvidas no domínio da frequência. O recurso a formulações no domínio do tempo ocorreu na sequência de algumas dificuldades levantadas por este tipo de abordagem, de que se destacam a limitação da resolução em frequência da FRF, os erros nas estimativas decorrentes do efeito de "leakage" nas funções obtidas e, por fim, alguma dificuldade na extracção de parâmetros modais em determinadas aplicações em que a densidade de frequências próprias é elevada.

Pode dizer-se genericamente [93] que os métodos de identificação no domínio do tempo se revelam vantajosos quando as frequências naturais do sistema se encontram distribuídas num intervalo de grande amplitude e quando é elevado o número de modos de vibração a identificar, enquanto que as técnicas no domínio da frequência conduzem a melhores resultados quando é limitado o número de modos de vibração a identificar, bem como a gama de frequências a que correspondem. O principal inconveniente da identificação no domínio do tempo está em que só se podem identificar modos de vibração na gama de frequências seleccionada para análise, não sendo igualmente possível tomar em consideração os efeitos residuais dos modos de vibração localizados fora daquele intervalo.

Pela natureza dos problemas estudados no âmbito da Engenharia Civil e ainda pelo facto de a identificação no domínio da frequência ser um processo de mais fácil interpretação do ponto de vista físico, optou-se neste trabalho exclusivamente pela abordagem em frequência.

Considera-se no entanto que será desejável no futuro, com vista a uma melhor exploração das capacidades dos diversos algoritmos de identificação, realizar também uma incursão nos métodos de identificação baseados em abordagens no domínio do tempo.

5.1.2 - Modelo directo, modelo modal ou modelo modal baseado numa formulação de estado

A resposta dinâmica de uma estrutura pode ser determinada através de modelos directos, modelos modais ou de modelos modais baseados numa formulação de estado.

Os modelos directos, conducentes às chamadas *técnicas directas de identificação*, baseiam-se nas equações diferenciais do movimento de uma estrutura, constituindo a identificação dos seus parâmetros na estimação dos coeficientes constantes (para sistemas lineares e invariantes no tempo) dessas equações diferenciais.

Os métodos directos de identificação de parâmetros podem ser aplicados no domínio do tempo, através da aproximação de cada equação diferencial de 2ª ordem por uma equação às diferenças, onde intervêm as séries de entrada e saída no sistema, ou então no domínio da frequência, situação em que a relação entrada-saída toma a forma de um cociente de polinómios [82].

Mais correntemente utilizados são os modelos modais, em que a resposta dinâmica do sistema é construída começando por desligar as N equações diferenciais de 2ª ordem à custa de uma adequada transformação de coordenadas e efectuando de seguida uma combinação linear das soluções relativas às equações desacopladas, nas quais intervêm os chamados *parâmetros modais* (frequências naturais, coeficientes de amortecimento e modos de vibração), cujo significado é bem conhecido.

A identificação dos parâmetros modais, que pode ser realizada tanto no domínio do tempo, como no domínio da frequência, é efectuada através de um ajuste (*curve-fit*) entre as IRF ou FRF obtidas por via experimental, respectivamente, e as correspondentes soluções teóricas resultantes das hipóteses admitidas para o funcionamento estrutural.

Uma terceira forma de abordagem consiste na descrição do comportamento da estrutura através da evolução de um conjunto de variáveis características, designadas por *variáveis de estado*, que permitem transformar o sistema de N equações diferenciais de 2ª ordem num sistema de $2N$ equações diferenciais de 1ª ordem.

Estas $2N$ equações podem também ser desacopladas mediante a introdução de uma transformação de coordenadas semelhante à utilizada na formulação modal clássica, dando origem a novas funções de resposta em frequência sobre as quais se apoiam as técnicas de identificação.

5.1.3 - Sistemas de 1 ou N graus de liberdade

Quando a caracterização de uma estrutura é feita através do modelo modal, a resposta a uma acção dinâmica qualquer é determinada, como referido em 5.1.2, através da sobreposição das diversas contribuições modais.

Verifica-se no entanto que, se as frequências do sistema estiverem bem separadas, a contribuição do conjunto de modos não-ressonantes, na vizinhança de uma frequência de ressonância, é muito pequena, podendo ser desprezada. Pode então modelar-se a resposta do sistema junto de cada frequência natural através de um sistema de um grau de liberdade. As técnicas de identificação de parâmetros modais que utilizam esta hipótese são designadas por *técnicas de 1 grau de liberdade* (single-degree of freedom techniques - SDOF).

Acontece contudo que estas técnicas não são válidas nas situações em que as frequências de ressonância se encontram bastante próximas, como sucede vulgarmente em diversos tipos de estruturas.

Os métodos desenvolvidos para aplicação a sistemas mais complexos são designados por *métodos de N graus de liberdade* (multi-degree of freedom techniques - MDOF), constituindo usualmente processos iterativos onde são utilizados como valores iniciais os parâmetros extraídos através da aplicação de métodos de 1 grau de liberdade.

Refere-se ainda que, se se optar por uma abordagem no domínio do tempo, apenas poderão ser empregues métodos de N graus de liberdade, à semelhança do que acontece quando a identificação é realizada por via directa, independentemente de esta se processar no domínio do tempo ou da frequência.

5.1.4 - Estimativas locais ou globais

As técnicas de identificação podem ser designadas por locais ou globais, conforme conduzam a estimativas locais, através da análise individual de cada FRF ou IRF, ou a estimativas globais, realizadas através da análise de um conjunto de FRF ou IRF, obtido para diversos pontos instrumentados da estrutura.

No primeiro caso, obtém-se um conjunto de estimativas dos parâmetros identificados através de cada FRF ou IRF, resultando os valores finais adoptados daqueles parâmetros do cálculo de uma média ponderada e do correspondente desvio-padrão dos valores encontrados mediante cada análise individual.

A aplicação de técnicas globais de identificação tem a vantagem de produzir um conjunto de parâmetros que, em princípio, caracterizam melhor o comportamento global da estrutura. No entanto, alguns desvios existentes entre os valores da mesma frequência natural nos diferentes registos obtidos podem conduzir a erros relativamente grosseiros, ao introduzir simultaneamente um conjunto de IRF ou FRF no algoritmo de identificação.

5.1.5 - Sistemas de entrada simples ou múltipla

No processo de recolha de sinais com vista à identificação de parâmetros modais em sistemas estruturais, a excitação pode ser aplicada em apenas um ponto, ou simultaneamente em vários pontos.

Reconhece-se actualmente que é conveniente, na prática, a excitação simultânea de vários pontos da estrutura, com vista a distribuir o mais possível a energia que lhe é aplicada, mobilizando dessa forma em maior grau os seus modos de vibração. Este aspecto é particularmente relevante para estruturas de grande porte e, embora a sua concretização nem sempre possa ser levada a efeito, pelas elevadas exigências de equipamento e de montagem que em muito podem onerar os ensaios, proporciona normalmente excelentes estimativas dos parâmetros identificados, particularmente quando em combinação com esta forma de excitação se recorre à aplicação de técnicas de identificação globais.

Mais generalizada, por mera questão de simplicidade, está porém a utilização de apenas uma fonte de excitação (sistemas de entrada única).

5.1.6 - Classificação das técnicas de identificação de sistemas

Neste ponto é apresentada uma possível classificação das técnicas de identificação de sistemas mais conhecidas, baseada no conjunto de conceitos apresentados de 5.1.1 a 5.1.5.

Genericamente, as técnicas de identificação de sistemas são divididas em dois grandes grupos, conforme se utilize uma abordagem no domínio do tempo ou da frequência. Em qualquer dos casos a estimação dos parâmetros pode ser efectuada por via directa, usando as equações diferenciais do movimento, ou indirecta, através de formulações modais.

Conforme referido em 5.1.3, a aproximação por sistemas de 1 grau de liberdade (SDOF) só pode ser realizada no domínio da frequência para formulações modais.

Por fim, é possível classificar as técnicas de identificação de acordo com a sua aplicação a sistemas de entrada simples (single-input) ou de entrada múltipla (multi-input) e ainda consoante a sua aplicação seja efectuada localmente a cada IRF ou FRF (single-output) ou globalmente a cada conjunto de IRF ou FRF (multi-output). As combinações possíveis são então, para as técnicas indirectas:

- as correspondentes a sistemas com uma entrada e uma saída (SISO - single-input-single-output), constituindo os métodos de mais simples aplicação, dos quais se destacam o método da amplitude de pico e o método do "circle fit";
- as correspondentes a sistemas com uma entrada e várias saídas (SIMO - single-input-multi-output), constituindo métodos substancialmente mais potentes do que os SISO, embora de aplicação mais morosa;
- as correspondentes a sistemas com várias entradas e saídas (MIMO - multi-input-multi-output), também designadas por "Polyreference methods" que, dotadas de maior generalidade, conduzem normalmente a parâmetros de maior qualidade do que as restantes, embora possam envolver um processo iterativo moroso e algumas dificuldades de convergência;

Para as técnicas directas, apenas podem ser utilizados os métodos SISO ou MIMO.

A Figura 5.1 ilustra a classificação aqui apresentada, sendo possível encontrar no Quadro 5.1 uma caracterização de alguns dos métodos de identificação existentes.

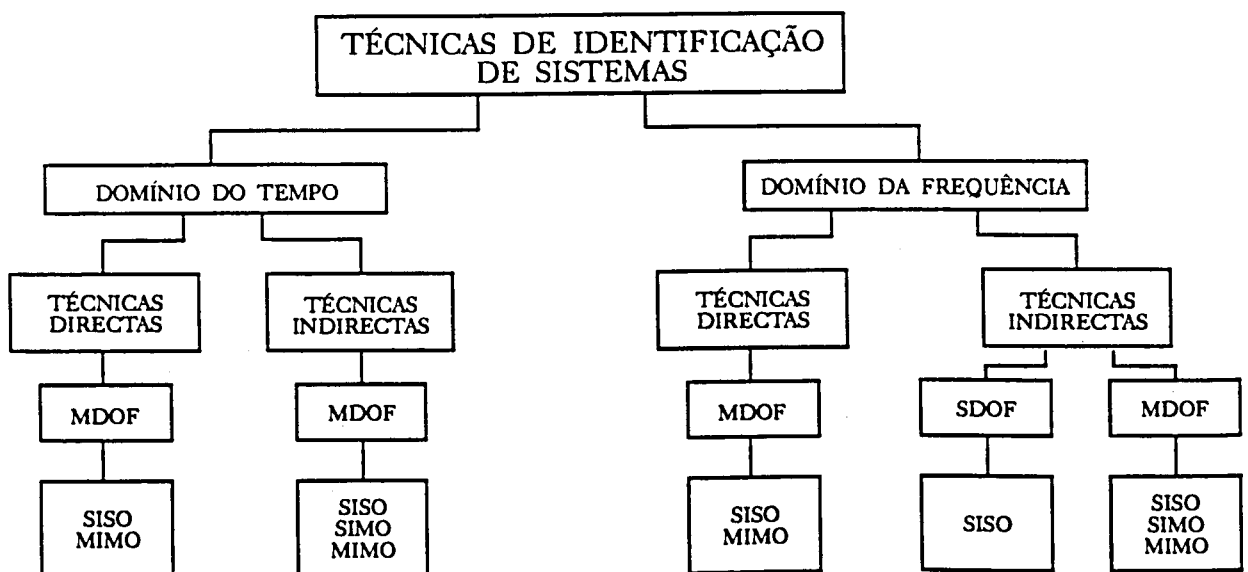


Figura 5.1 - Classificação de técnicas de identificação de sistemas.

Para apresentação neste trabalho seleccionaram-se apenas, como aqui já foi referido, os métodos de identificação que utilizam abordagens no domínio da frequência.

Quadro 5.1 - Caracterização de alguns métodos de identificação de sistemas.

MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO	Domínio do tempo ou frequência	Modelo directo ou modelo modal	SDOF ou MDOF	SISO, SIMO ou MIMO
Método da amplitude de pico	Frequência	Modal	SDOF	SISO
Método de "circle fit"	Frequência	Modal	SDOF	SISO
Método de Dobson	Frequência	Modal	SDOF	SISO
Método de Mau	Frequência	Modal	SDOF	SISO
Métodos de mínimos quadrados no domínio da frequência	Frequência	Modal	MDOF	SISO MIMO
Métodos de polinómios ortogonais	Frequência	Modal	MDOF	SIMO MIMO
Método de Ibrahim	Tempo	Modal	MDOF	MIMO
Métodos directos (ARMA - autoregressive moving average)	Tempo	Directo	MDOF	MIMO

A investigação realizada incidiu essencialmente sobre as técnicas de 1 grau de liberdade e sobre métodos simplificados de N graus de liberdade baseados nos métodos de 1 grau de liberdade, tendo sido desenvolvidos programas de cálculo automático para técnicas que constituem variações dos seguintes métodos:

- amplitude de pico;
- "circle fit";
- Dobson;
- Mau.

Pelo facto de ter sido utilizado nas aplicações práticas um outro programa (programa MODHAN) baseado no método dos polinómios ortogonais, apresenta-se ainda uma descrição da formulação utilizada na sua elaboração.

Atendendo a que o conjunto de métodos mencionados utiliza uma abordagem no domínio da frequência, baseada em algumas particularidades das funções de resposta em frequência, realiza-se primariamente uma descrição dessas propriedades.

5.2 - FUNÇÕES DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA. PROPRIEDADES

As relações excitação-resposta estabelecidas no Capítulo 2 para sistemas lineares invariantes no tempo conduziram à sua caracterização no domínio da frequência através de uma matriz de funções de resposta em frequência cujos elementos se podem exprimir, na hipótese de o amortecimento ser do tipo proporcional viscoso, em função das componentes dos modos de vibração não amortecidos do sistema, pela relação (2.29) que aqui se transcreve,

$$H_{ij}(w) = \sum_{k=1}^N \frac{(\phi_i)_k \cdot (\phi_j)_k}{(w_k^2 - w^2) + i(2\xi_k w_k w)} \quad (5.1)$$

ou, no caso mais geral, através da relação (2.46), estabelecida através de uma formulação de estado, cuja expressão é

$$H_{ij}(w) = \sum_{k=1}^N \left[\frac{(\psi_i)_k \cdot (\psi_j)_k}{(iw - \alpha_k)} + \frac{(\psi_i)_k^* \cdot (\psi_j)_k^*}{(iw - \alpha_k^*)} \right] \quad (5.2)$$

onde se fazem intervir os modos de vibração complexos do sistema amortecido.

Tal como foram definidas, as expressões (5.1) e (5.2) traduzem a relação no domínio da frequência w entre a resposta do sistema segundo o grau de liberdade i , expressa em termos de deslocamentos, e a força aplicada em correspondência com o grau de liberdade j , recebendo por vezes a designação de *Receptância* do sistema.

É possível, no entanto, se se atender à propriedade da derivação no domínio da frequência (v. 4.2.2.2), definir duas outras formas para a função de resposta em frequência, uma das quais através da expressão da resposta em velocidade, normalmente designada por *Mobilidade* e representada por $Y_{ij}(w)$ e a outra, através da expressão da resposta em aceleração, vulgarmente chamada de *Inertância* (ou *Acelerância*) e sendo representada por $A_{ij}(w)$.

A *Mobilidade* vem então expressa por

$$Y_{ij}(w) = \sum_{k=1}^N \frac{iw(\phi_i)_k \cdot (\phi_j)_k}{(w_k^2 - w^2) + i(2\xi_k w_k w)} \quad (5.3)$$

ou por

$$Y_{ij}(w) = \sum_{k=1}^N iw \left[\frac{(\psi_i)_k \cdot (\psi_j)_k}{(iw - \alpha_k)} + \frac{(\psi_i)_k^* \cdot (\psi_j)_k^*}{(iw - \alpha_k^*)} \right] \quad (5.4)$$

consoante a formulação utilizada.

Da mesma forma, a *Inertância* é dada por

$$A_{ij}(w) = \sum_{k=1}^N \frac{-w^2 (\phi_i)_k \cdot (\phi_j)_k}{(w_k^2 - w^2) + i(2\xi_k w_k w)} \quad (5.5)$$

ou

$$A_{ij} = - \sum_{k=1}^N w^2 \left[\frac{(\psi_i)_k \cdot (\psi_j)_k}{(iw - \alpha_k)} + \frac{(\psi_i)_k^* \cdot (\psi_j)_k^*}{(iw - \alpha_k^*)} \right] \quad (5.6)$$

Embora seja teoricamente indiferente a caracterização de um sistema por qualquer dos três tipos de funções mencionadas, realça-se que há vantagem em usar, nos problemas que envolvam estruturas no âmbito da Engenharia Civil, funções de resposta em frequência em que a resposta venha expressa em deslocamentos. De facto, os sinais colhidos neste tipo de estruturas apresentam tipicamente uma composição espectral envolvendo frequências de interesse muito baixas, e, por outro lado, a utilização da receptância na caracterização da FRF conduz a uma amplificação das ordenadas espectrais dessas frequências relativamente às ordenadas nas frequências mais elevadas (fundamentalmente provenientes de ruído presente no sinal), por comparação com as ordenadas espectrais decorrentes da caracterização da FRF através da *Mobilidade* ou da *Inertância*.

Sublinha-se contudo que, para além de nem sempre compensar a operação de integração ou dupla integração, necessária quando se utilizam na amostragem do sinal transdutores de velocidade ou de aceleração, a mobilidade, $Y_{ij}(w)$, e a inertância, $A_{ij}(w)$, possuem certas propriedades que adiante serão referidas, e que podem tornar a sua utilização preferencial em determinadas circunstâncias.

No que respeita à visualização das FRF, refere-se que, dado o seu carácter complexo, uma representação completa englobando as 3 variáveis intervenientes é realizada, normalmente, através de dois gráficos bidimensionais.

São as seguintes as representações mais conhecidas:

- Representação de Bode:

Consiste na apresentação de dois gráficos em que se tomam para abcissas frequências e para ordenadas a amplitude da FRF e a respectiva fase. Exemplos desta representação são os que dizem respeito às Figuras 5.2, 5.4 e 5.6, onde se pode observar uma FRF associada a um sistema de dois graus de liberdade, com frequências naturais de 6,7Hz e 17,5Hz e coeficientes de amortecimento de 2% e 4%, expressa em termos de *Receptância*, *Mobilidade* e *Inertância*, respectivamente.

Nesta representação é também usual utilizar escalas logarítmicas para a frequência e para a amplitude com a vantagem de, por um lado, ser possível descrever num gráfico de dimensões aceitáveis a composição espectral de sinais com conteúdo numa larga banda de frequências e de, por outro, vir atenuada a desproporção, por vezes muito elevada, entre ordenadas espectrais na vizinhança de diferentes frequências de ressonância, o que se deve tanto à distinta contribuição dos modos de vibração em correspondência para a composição do sinal, como aos valores dos coeficientes de amortecimento que lhes estão associados.

Repare-se que, atendendo a que nos problemas estudados no âmbito da Engenharia Civil a gama de frequências de interesse envolvida é normalmente muito baixa, torna-se essencialmente útil uma representação logarítmica em ordenadas. As Figuras 5.3, 5.5 e 5.7 ilustram esta forma de representação para o exemplo dado, segundo cada uma das três formas de FRF referidas;

- Representação Co-Quad:

Consiste na utilização de dois gráficos onde as abcissas são também frequências, sendo as ordenadas a parte real da FRF e a correspondente parte imaginária, ou seja a parcela em fase da resposta (também designada por *parcela da resposta coincidente*) a uma força unitária sinusoidal e a parcela da resposta em quadratura a essa força, respectivamente. Nas Figuras 5.8, 5.10 e 5.12 evidencia-se a aplicação deste formato à FRF acima mencionada, para as funções $H_{ij}(w)$, $Y_{ij}(w)$ e $A_{ij}(w)$;

- Representação de Nyquist:

Baseia-se na utilização de um único gráfico em que o eixo das abcissas e o eixo das ordenadas descrevem a parte real e a parte imaginária da FRF, respectivamente, sendo necessária uma caracterização simultânea da frequência associada a cada ponto.

As Figuras 5.9, 5.11 e 5.13 exemplificam a representação de Nyquist para cada uma das formas da FRF tomadas como exemplo.

Cada uma das representações mencionadas e ilustradas possui um conjunto de particularidades que se passam a descrever e que constituem afinal a base das técnicas de identificação de parâmetros modais correntemente utilizadas.

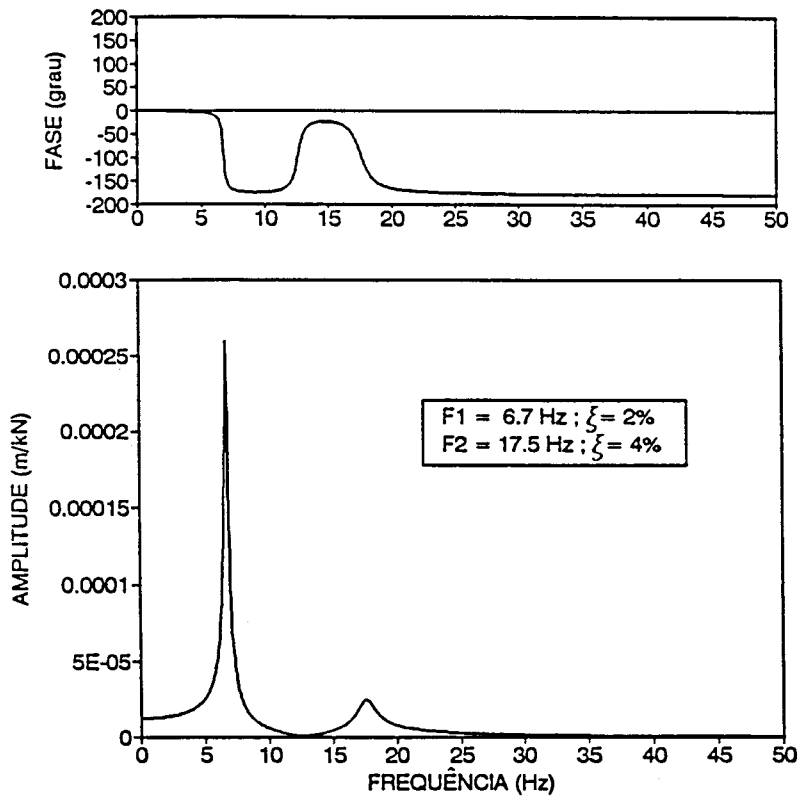


Figura 5.2 - Representação de Bode para uma FRF expressa através da relação deslocamento/força.

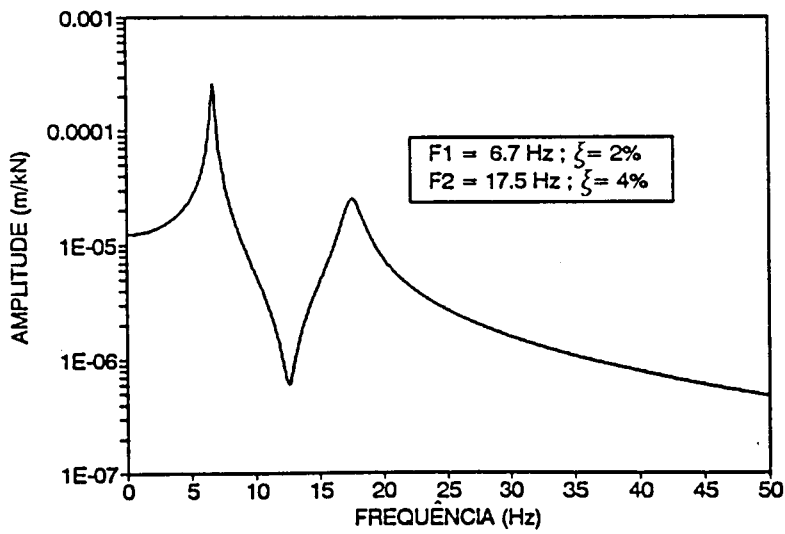


Figura 5.3 - Representação em escala logarítmica da amplitude de uma FRF expressa através da relação deslocamento/força.

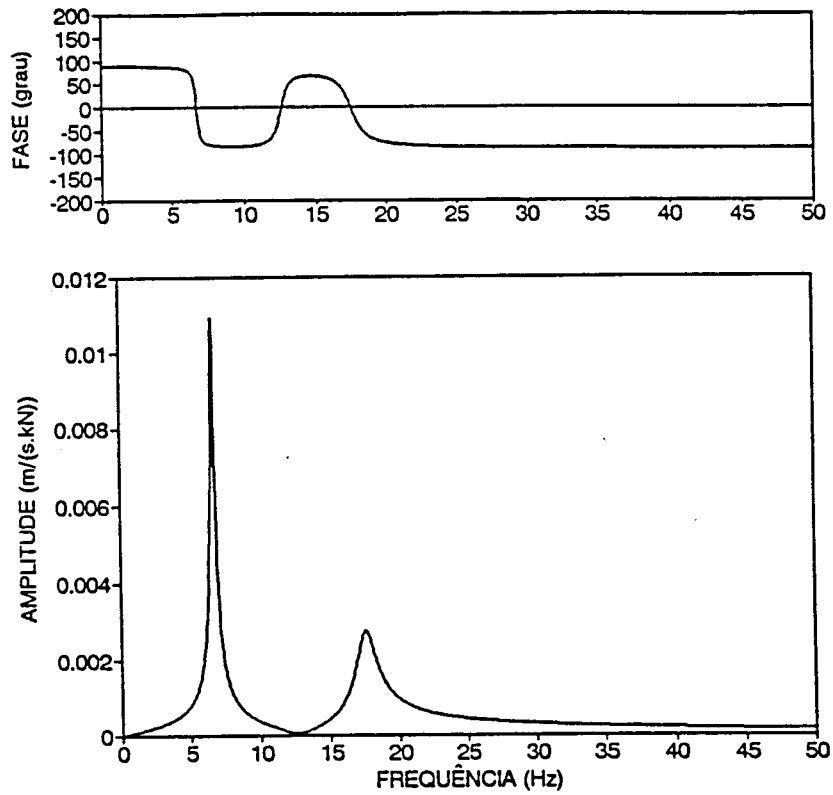


Figura 5.4 - Representação de Bode para uma FRF expressa através da relação velocidade/força.

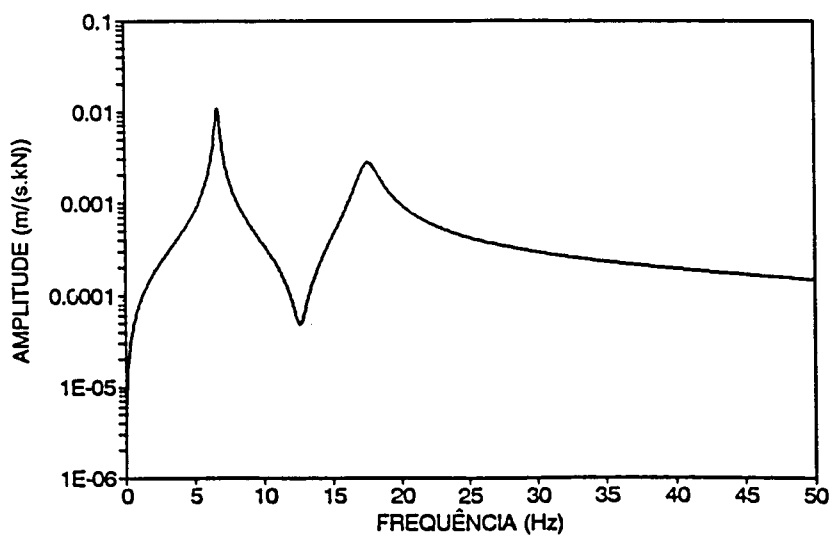


Figura 5.5 - Representação em escala logarítmica da amplitude de uma FRF expressa através da relação velocidade/força.

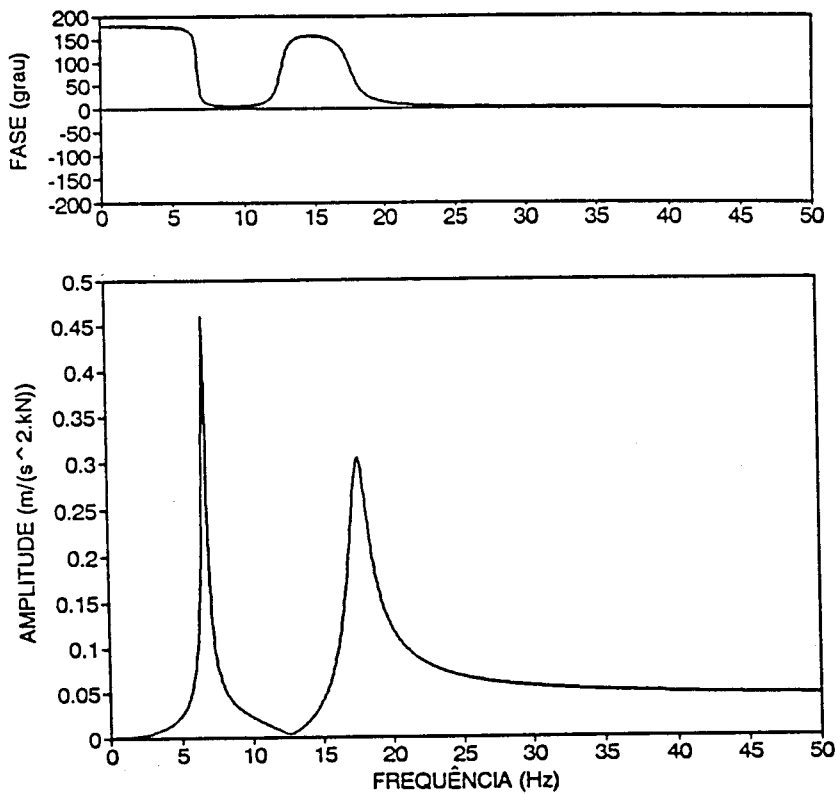


Figura 5.6 - Representação de Bode para uma FRF expressa através da relação aceleração/força.

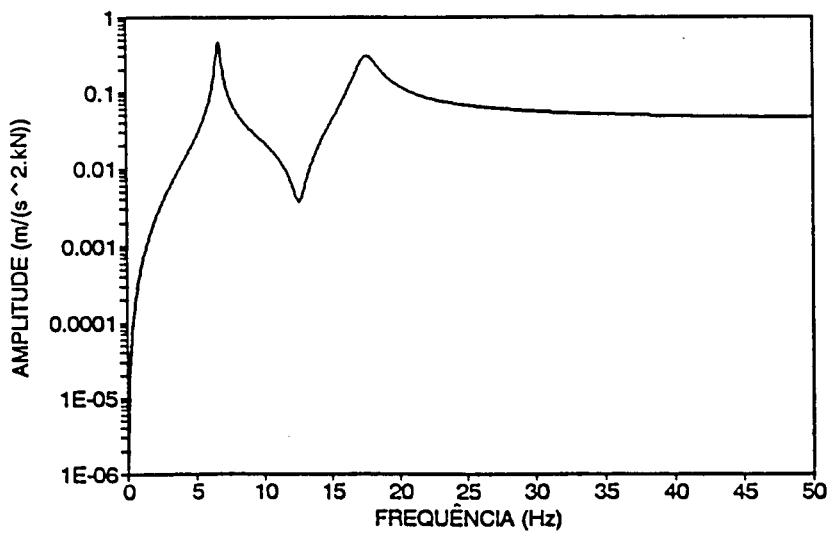


Figura 5.7 - Representação em escala logarítmica da amplitude de uma FRF expressa através da relação aceleração/força.

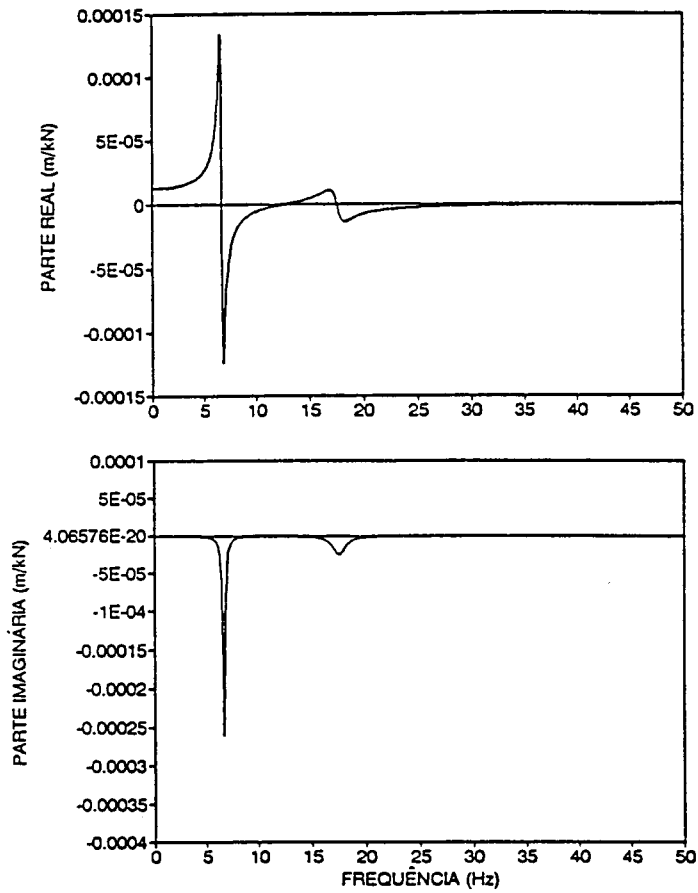


Figura 5.8 - Representação Co-Quad para uma FRF expressa através da relação deslocamento/força.

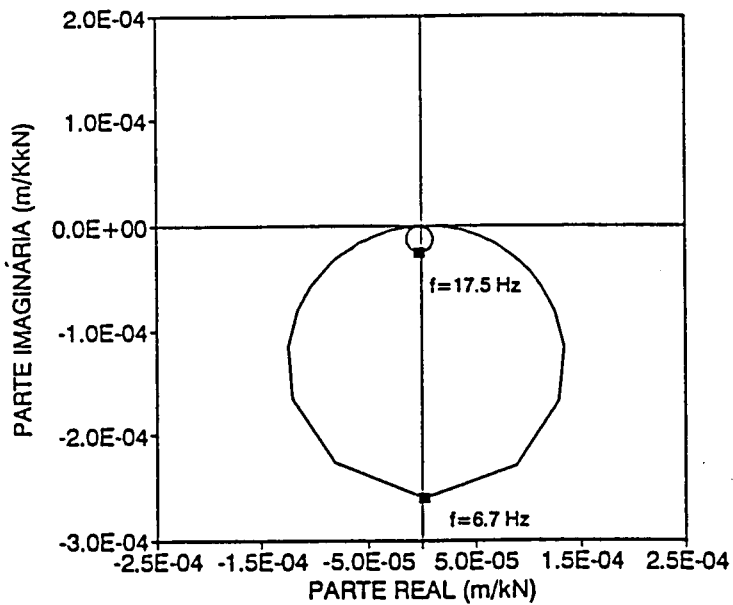


Figura 5.9 - Representação de Nyquist para uma FRF expressa através da relação deslocamento/força.

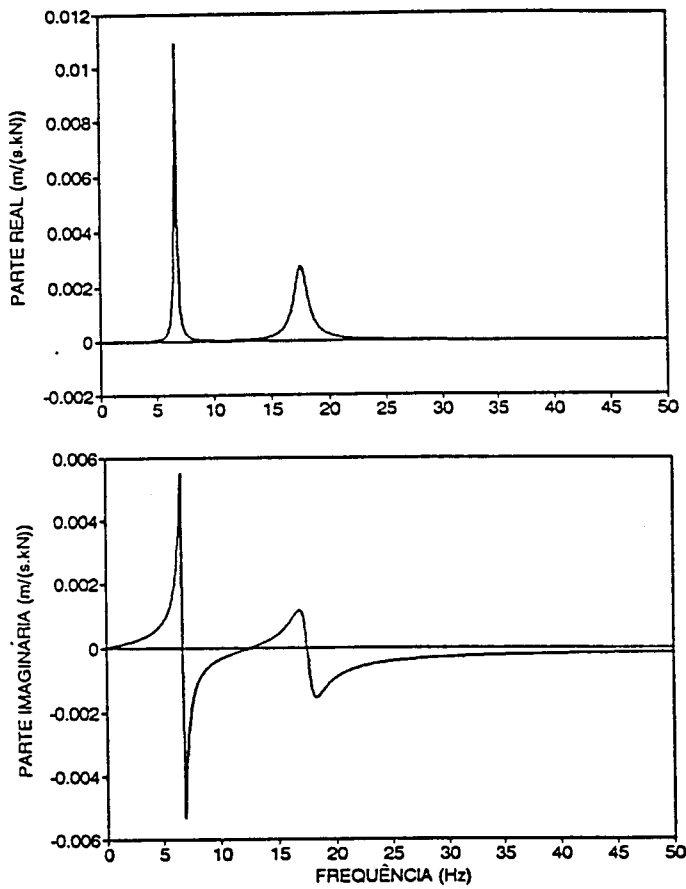


Figura 5.10 - Representação Co-Quad para uma FRF expressa através da relação velocidade/força.

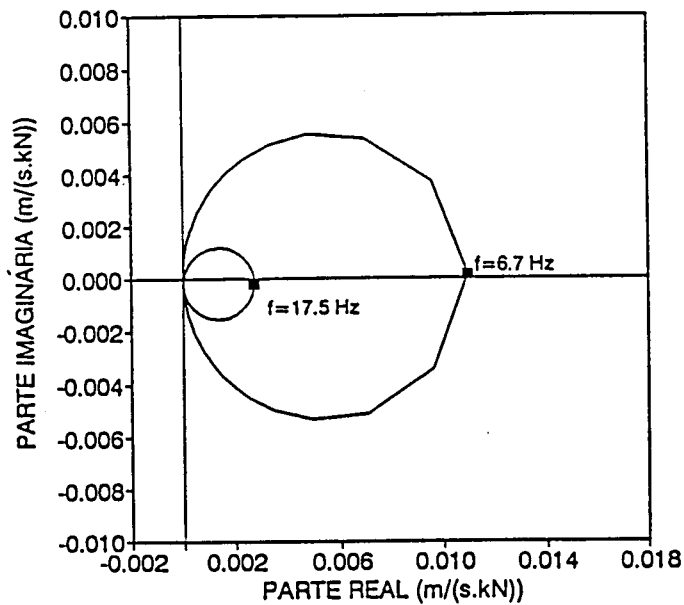


Figura 5.11 - Representação de Nyquist para uma FRF expressa através da relação velocidade/força.

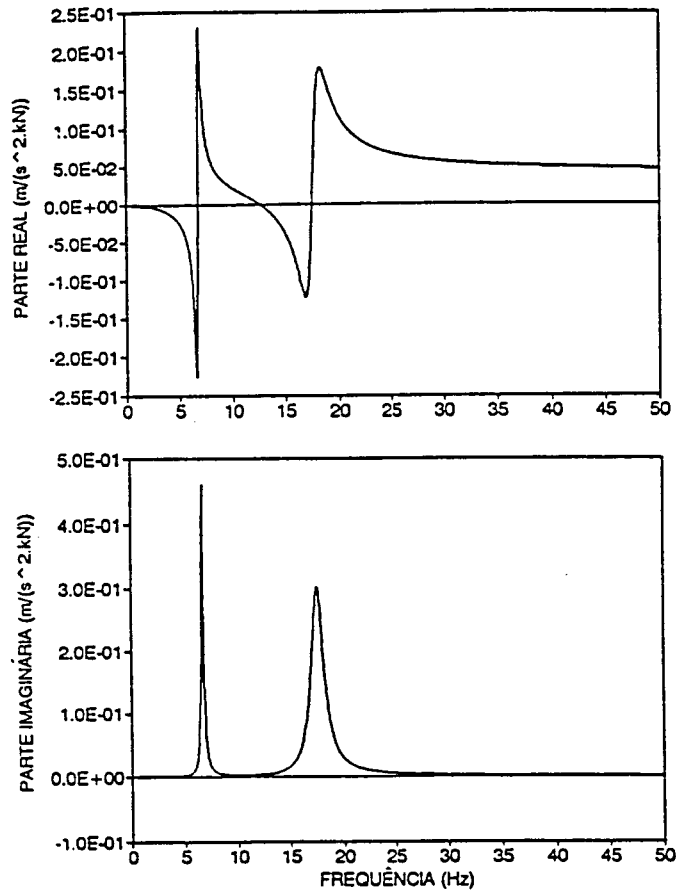


Figura 5.12 - Representação Co-Quad para uma FRF expressa através da relação aceleração/força.

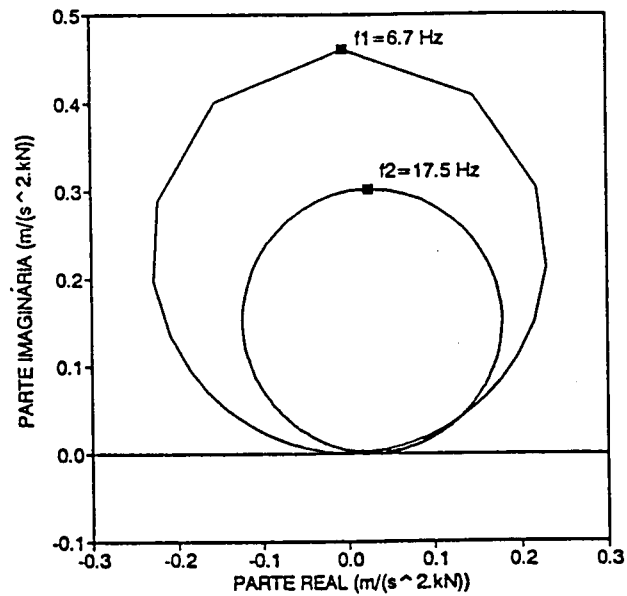


Figura 5.13 - Representação de Nyquist para uma FRF expressa através da relação aceleração/força.

a) Representação de Bode

- a.1) A amplitude da função de resposta em frequência relativa a um sistema linear de 1 grau de liberdade assume um valor máximo para uma frequência w_{mxk} próxima da frequência natural w_k , constituindo uma aproximação aceitável supor que, para sistemas com baixos coeficientes de amortecimento ($\xi_k < 10\%$), as ressonâncias correspondem efectivamente aos máximos da FRF.

Com efeito, tomando por base a expressão de uma FRF de um sistema de 1 grau de liberdade (v. equação (5.1)), obtém-se

$$|H_{ij}(w)| = \frac{(A_{ij})_k}{[(w_k^2 - w^2)^2 + (2\xi_k w_k w)^2]^{1/2}} \quad (5.7)$$

sendo $(A_{ij})_k = (\phi_i)_k \cdot (\phi_j)_k$, ocorrendo o máximo desta função para $w_{mxk} = w_k \sqrt{1 - 2\xi_k^2}$.

Como se pode observar nas Figuras 5.2 a 5.6, o valor do coeficiente de amortecimento afecta significativamente a forma da FRF junto das ressonâncias, originando variações tanto mais suaves quanto mais elevado for.

Verifica-se além disso, como aliás tinha sido antes mencionado, que a importância dos modos de frequência elevada relativamente aos modos de baixa frequência é progressivamente mais acentuada quando se exprime a FRF através da função *Mobilidade* ou através da função *Inertância*, o que se deve ao facto de a relação entre as funções $H_{ij}(w)$ e $Y_{ij}(w)$, ou $Y_{ij}(w)$ e $A_{ij}(w)$ se estabelecer pelo factor iw (v. equações (5.3) a (5.6)).

- a.2) Na proximidade de uma frequência natural de um sistema linear de um grau de liberdade, a fase tem uma evolução que é sempre decrescente, baixando abruptamente junto dessa frequência de 180° (v. Figuras 5.2, 5.4 e 5.6). Como se pode observar ainda nessas figuras, quanto mais elevado é o coeficiente de amortecimento, mais suave é essa transição.

Na verdade, se se considerar, por exemplo, a receptância $H_{ij}(w)$ de um sistema de um grau de liberdade, a fase em correspondência com a frequência w é definida por

$$\phi = \text{atan}\left(\frac{-2\xi_k p}{1 - p^2}\right) \quad (5.8)$$

em que $p = w/w_k$ e w_k é a frequência natural do sistema, expressa em rad/s.

A primeira derivada da fase em ordem à frequência é dada por

$$\frac{d\phi}{dw} = \frac{-2\xi_k w_k (1 + p^2)}{(1 - p^2)^2 + (2\xi_k p)^2} \quad (5.9)$$

constatando-se pois que $d\phi/dw$ assume valores sempre negativos, independentemente do valor da frequência w . É possível, além disso, determinar os valores das frequências para os quais $d\phi/dw$ é máximo em valor absoluto. Derivando (5.9) em ordem a w , vem

$$\frac{d}{dw} \left(\frac{d\phi}{dw} \right) = \frac{4\xi_k w_k^2 p [p^4 + 2p^2 + (4\xi_k^2 - 3)]}{[(1 - p^2)^2 + (2\xi_k p)^2]^2} \quad (5.10)$$

e, anulando a derivada, tem-se que

$$\frac{d}{dw} \left(\frac{d\phi}{dw} \right) = 0 \Leftrightarrow p^2 = -1 \pm 2\sqrt{1 - \xi_k^2} \quad (5.11)$$

Pode então concluir-se que, para baixos coeficientes de amortecimento, a variação da fase é máxima junto da ressonância. Por último, a análise dos limites para que tende ϕ à esquerda e à direita da frequência natural permite constatar ser de 180° o decréscimo da fase na passagem por uma frequência natural.

Note-se que, em sistemas de múltiplos graus de liberdade, esta conclusão, bem como a referida em a.1) são em geral válidas para a vizinhança de cada ressonância, podendo no entanto ser perturbadas pela existência de coeficientes de amortecimento elevados ou de acoplamento modal significativo.

- a.3) Em sistemas de múltiplos graus de liberdade, as FRF associadas a cada grau de liberdade, ou melhor, relacionando a resposta segundo esse grau de liberdade com a força aplicada em correspondência com essa mesma coordenada, quando representadas à escala logarítmica em termos de amplitude vs frequência, evidenciam um mínimo entre cada duas ressonâncias. Este mínimo, designado por anti-ressonância, tem ainda a particularidade de ocorrer com uma alteração da concavidade da curva, como ilustram as Figuras 5.3, 5.5 e 5.7.

Já no caso de FRF cruzadas, ou seja, relacionando a resposta segundo um dado grau de liberdade e a força aplicada em correspondência com outra coordenada, a ocorrência de um mínimo entre duas ressonâncias não se faz necessariamente acompanhar de uma alteração da concavidade da curva. Exemplo disso é o apresentado na Figura 5.14, dizendo respeito à amplitude da receptância $H_{12}(\omega)$ do sistema de dois graus de liberdade já anteriormente considerado.

Este aspecto está relacionado com os sinais das constantes modais $(A_{ij})_k = (\phi_i)_k \cdot (\phi_j)_k$ em correspondência com cada grau de liberdade e pode facilmente ser identificado analisando a evolução da FRF entre cada par de ressonâncias.

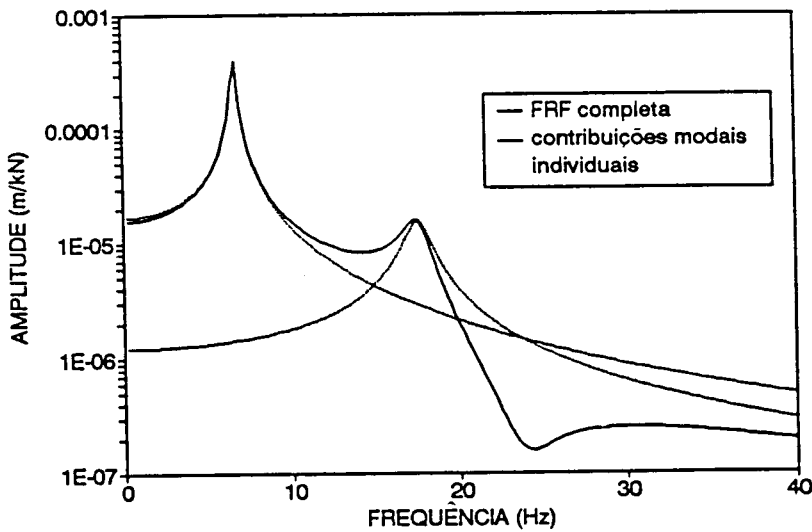


Figura 5.14 - Representação em escala logarítmica da amplitude de uma FRF cruzada, expressa através da relação deslocamento/força.

b) Representação Co-Quad

b.1) Em sistemas de um grau de liberdade verifica-se que, sobre uma ressonância, a parte real da *Receptância* anula-se, enquanto que a parte imaginária assume um valor próximo do mínimo.

Com efeito, tomando $N = 1$ na equação (5.1), a receptância $H_{ij}(\omega)$ pode ser definida através das suas partes real e imaginária, dadas por

$$Re[H_{ij}(\omega)] = \frac{(A_{ij})_k (\omega_k^2 - \omega^2)}{(\omega_k^2 - \omega^2)^2 + (2\xi_k \omega_k \omega)^2} \quad (5.12)$$

$$Im[H_{ij}(w)] = \frac{-2(A_{ij})_k \xi_k w_k w}{(w_k^2 - w^2)^2 + (2\xi_k w_k w)^2} \quad (5.13)$$

com $A_{ij} = (\phi_i)_k \cdot (\phi_j)_k$.

No que respeita à verificação do anulamento da parte real de $H_{ij}(w)$ junto da ressonância do sistema, a equação (5.12) é por si conclusiva. Quanto à ocorrência de um mínimo de $Im[H_{ij}]$, a condição de estacionaridade é dada por

$$\frac{\partial Im[H_{ij}(w)]}{\partial w} = \frac{2\xi_k w_k [3w^4 - 2w_k^2 w^2 (1 - 2\xi_k^2) - w_k^4]}{[(w_k^2 - w^2)^2 + (2\xi_k w_k w)^2]^2} = 0 \quad (5.14)$$

o que acontece para

$$w^2 = \frac{w_k^2 (1 - 2\xi_k^2) + 2w_k^2 \sqrt{1 + \xi_k^4 - \xi_k^2}}{3} \quad (5.15)$$

Para valores baixos do coeficiente de amortecimento ξ_k , pode aceitar-se que $w^2 \cong w_k^2$ e, portanto, que o extremo (mínimo) da parte imaginária da receptância ocorre sobre a ressonância do sistema.

Note-se ainda que, atendendo a que a mobilidade é uma função que se apresenta desfasada de 90° relativamente à receptância, as conclusões extraídas para a parte real da segunda são agora válidas para a parte imaginária da primeira, enquanto que as relativas à sua parte imaginária são aplicáveis à parte real da mobilidade, embora com inversão do sentido do extremo. Verifica-se no entanto que, independentemente do valor do amortecimento, a frequência para a qual $Re[Y_{ij}(w)]$ assume valor extremo coincide exactamente com a frequência natural do sistema.

Estas conclusões podem também transpor-se para a *Inertância* $A_{ij}(w)$, atendendo ao seu atraso de fase de 180° relativamente à *Receptância* $H_{ij}(w)$, havendo no entanto uma inversão dos sinais das partes real e imaginária relativamente aos correspondentes à função $H_{ij}(w)$.

- b.2) Em sistemas de um grau de liberdade, a parte real da receptância atinge dois extremos de sinais contrários, em frequências localizadas, respectivamente, antes e depois da ressonância. Essas frequências correspondem aproximadamente aos pontos de meia potência de $H_{ij}(w)$.

Os pontos de meia potência de uma função de resposta em frequência são, como se sabe, definidos pelos valores das frequências para as quais o quadrado da amplitude da FRF é de metade do seu valor máximo.

Para a receptância $H_{ij}(w)$ de um sistema, cujo máximo do quadrado da amplitude ocorre à frequência $w = w_k / \sqrt{1 - 2\xi_k^2}$ e vale

$$|H_{ij}(w)|_{\max}^2 = \frac{(A_{ij})_k^2}{4\xi_k^2(1 - \xi_k^2)} \quad (5.16)$$

os pontos de meia potência são dados por

$$w^2 = \frac{w_k^2(1 - 2\xi_k^2) \pm 2\xi_k w_k^2 \sqrt{1 - \xi_k^2}}{1 - 8\xi_k^2 + 8\xi_k^4} \quad (5.17)$$

Por sua vez, tomando a parte real $Re[H_{ij}(w)]$, a determinação dos extremos de sinal contrário na vizinhança da ressonância conduz às frequências

$$w_a = \frac{w_k}{\sqrt{1 - 2\xi_k}} \quad \text{e} \quad w_b = \frac{w_k}{\sqrt{1 + 2\xi_k}} \quad (5.18)$$

para as quais se tem

$$|H_{ij}(w_a)|^2 = \frac{(A_{ij})_k^2}{8\xi_k^2(1 - \xi_k)} \quad \text{e} \quad |H_{ij}(w_b)|^2 = \frac{(A_{ij})_k^2}{8\xi_k^2(1 + \xi_k)} \quad (5.19)$$

valores que, para baixos coeficientes de amortecimento ξ_k , se podem considerar coincidentes com a amplitude de meia potência da FRF.

Esta conclusão pode ser generalizada à parte imaginária da *Mobilidade*, $Im[Y_{ij}(w)]$ e à parte real da *Inertância*, $Re[A_{ij}(w)]$, atendendo mais uma vez à relação verificada entre *Receptância*, *Mobilidade* e *Inertância*.

Convirá realçar que, em sistemas de múltiplos graus de liberdade as propriedades enunciadas em b.1) e b.2) só se verificam se os modos de vibração estiverem suficientemente afastados de forma a que, na vizinhança de uma frequência natural, o contributo dos restantes modos de vibração possa ser entendido como aproximadamente constante. É esta situação que se verifica para o exemplo apresentado nas Figuras 5.2 a 5.14, correspondente a um sistema de 2 graus de liberdade.

c) Representação de Nyquist

c.1) Em sistemas de um grau de liberdade os pontos representativos da *Receptância* localizam-se aproximadamente sobre uma circunferência de centro $C_H \equiv (0, -(A_{ij})_k / (4\xi_k w_k^2))$ e raio $R_H = (A_{ij})_k / (4\xi_k w_k^2)$.

Mais uma vez é possível verificar idêntica propriedade para a *Mobilidade* e *Inertância*, sendo para a primeira o centro dado por $C_Y \equiv ((A_{ij})_k / (4\xi_k w_k), 0)$ e o raio por $R_Y = (A_{ij})_k / (4\xi_k w_k)$ e, para a última o centro $C_A \equiv (0, (A_{ij})_k / (4\xi_k))$ e o raio $R_A = (A_{ij})_k / (4\xi_k)$.

É possível verificar além disso que, sendo o modelo de amortecimento utilizado proporcional e viscoso, todos os pontos da função *Mobilidade* se localizam exactamente sobre a circunferência de centro C_Y e raio R_Y . Com efeito, nesse caso as partes real e imaginária desta função podem escrever-se na forma

$$Re[Y_{ij}(w)] = \frac{2\xi_k w_k w^2 (A_{ij})_k}{[(w_k^2 - w^2)^2 + (2\xi_k w_k w)^2]} \quad (5.20)$$

$$Im[Y_{ij}(w)] = \frac{w(w_k^2 - w^2)(A_{ij})_k}{[(w_k^2 - w^2)^2 + (2\xi_k w_k w)^2]} \quad (5.21)$$

pelo que

$$\begin{aligned} & \left\{ Re[Y_{ij}(w)] - \frac{(A_{ij})_k}{4\xi_k w_k} \right\}^2 + \{ Im[Y_{ij}(w)] \}^2 = \\ & = (A_{ij})_k^2 \cdot \left\{ \left(\frac{8\xi_k^2 w_k^2 w^2 - (w_k^2 - w^2)^2 - (2\xi_k w_k w)^2}{[(w_k^2 - w^2)^2 + (2\xi_k w_k w)^2]} \right)^2 + \frac{16\xi_k^2 w_k^2 w^2 (w_k^2 - w^2)^2}{[(w_k^2 - w^2)^2 + (2\xi_k w_k w)^2]^2} \right\} = \\ & = \frac{(A_{ij})_k^2}{16\xi_k^2 w_k^2} = R_Y^2 \end{aligned} \quad (5.22)$$

o que comprova a afirmação feita.

Verifica-se ainda que o afastamento das curvas obtidas através da representação de Nyquist para a *Receptância* e *Inertância* relativamente às circunferências com centros e raios anteriormente indicados é pequeno para valores baixos do coeficiente de amortecimento do sistema, crescendo com o aumento de ξ_k .

Em sistemas de múltiplos graus de liberdade com frequências naturais bem separadas pode admitir-se que a aproximação por circunferências das curvas representativas das FRF é válida na vizinhança de cada ressonância,

já que nessa zona a contribuição dos modos não-ressonantes é aproximadamente constante (Figuras 5.9, 5.11 e 5.13). Note-se contudo que o contributo desses modos é responsável por pequenas translacões e rotações no plano complexo, relativamente às circunferências definidas por sistemas equivalentes de 1 grau de liberdade.

- c.2) Os pontos de meia potência ω_1 e ω_2 da FRF de um sistema de 1 grau de liberdade são os extremos de um diâmetro do círculo modal correspondente à representação de Nyquist.

Esta afirmação é exacta para a representação da *Mobilidade* associada a um sistema de 1 grau de liberdade, constituindo no entanto uma boa aproximação para as restantes representações se o coeficiente de amortecimento não for muito elevado, e para sistemas de N graus de liberdade se a interferência modal não for significativa.

A comprovação desta propriedade pode fazer-se por simples observação da Figura 5.15, onde se representa a *Mobilidade* de um sistema de 1 grau de liberdade.

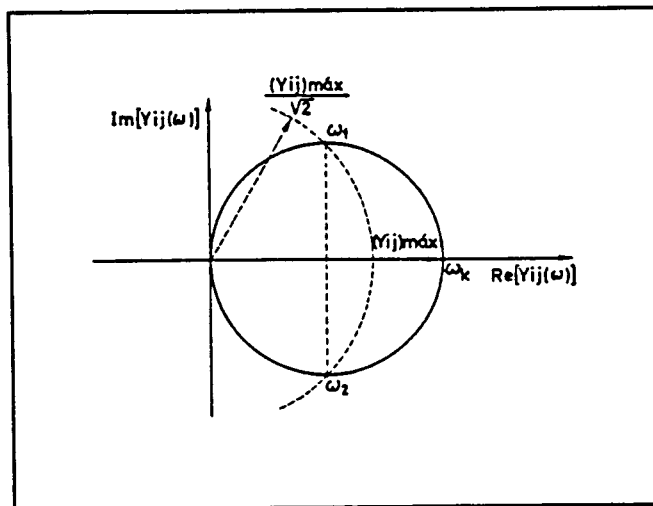


Figura 5.15 - Pontos de meia-potência da *Mobilidade* Y_{ij} .

- c.3) A variação do ângulo ao centro formado a partir de pontos consecutivos da FRF igualmente espaçados em frequência é máxima na vizinhança de uma ressonância do sistema.

A comprovação desta propriedade pode obter-se, tendo em conta que a variação do ângulo ao centro definida é igual a 2 vezes a variação de fase entre pontos igualmente espaçados em frequência de uma FRF, cuja evolução em frequência foi já analisada em a.2).

Este efeito é facilmente identificável nas Figuras 5.9, 5.11 e 5.13, onde estão representados e unidos por segmentos de recta os valores da *Receptância*, *Mobilidade* e *Inertância* de uma das FRF de um sistema de dois graus de liberdade, para frequências igualmente espaçadas.

5.3 - TÉCNICAS DE IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS

5.3.1 - Métodos de 1 grau de liberdade

São os mais simples de entre todos os métodos de identificação de parâmetros modais em estruturas, na medida em que se baseiam no ajuste de apenas uma parte da função de resposta em frequência à curva teórica adoptada.

É possível encontrar na literatura especializada uma enorme variedade de métodos de 1 grau de liberdade, muitos dos quais constituem meras variações relativas a métodos anteriormente desenvolvidos. A hipótese comum a estas técnicas é a de, na vizinhança de uma ressonância, a resposta dinâmica de uma estrutura ser dominada pela contribuição do modo ressonante. As diferenças encontram-se, em particular, na forma como é aproximada a contribuição dos restantes modos na vizinhança de cada ressonância, na forma escolhida para representar a FRF e no número de pontos adoptados no ajuste de cada modo de vibração.

5.3.1.1 - Método da amplitude de pico

É porventura o mais antigo e também um dos mais utilizados métodos de Identificação de Sistemas, recebendo na nomenclatura anglo-americana a designação corrente de "peak-picking method".

A sua formulação [43] baseia-se na assunção de que é nula a contribuição dos modos não-ressonantes na vizinhança de cada ressonância, sendo então possível substituir nessa zona a FRF em estudo pela FRF de um sistema equivalente de 1 grau de liberdade, cuja frequência natural e coeficiente de amortecimento coincidem com os correspondentes parâmetros do modo de vibração em questão (Figura 5.16).

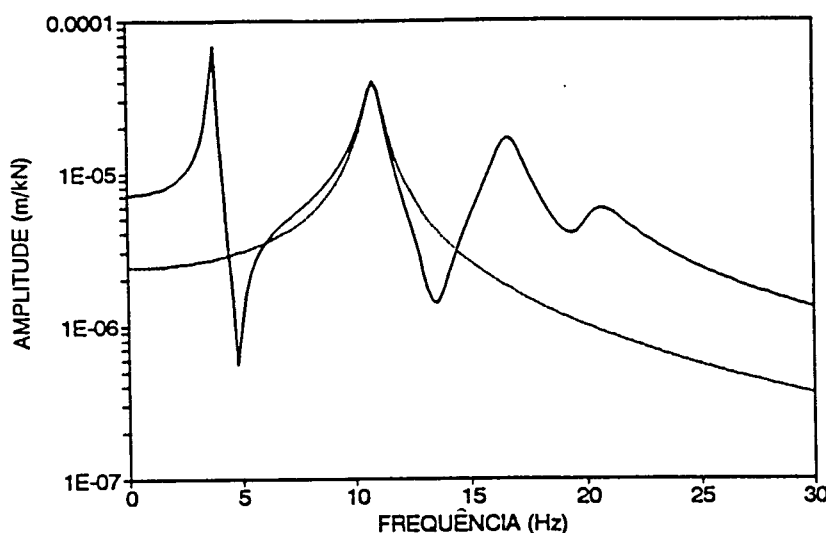


Figura 5.16 - Método da amplitude de pico: aproximação pela *Receptância* de um sistema de 1 grau de liberdade equivalente na vizinhança da ressonância em estudo.

A *Receptância*, $H_{ij}(\omega)$, passa a ser definida na proximidade de cada frequência natural $\omega_k = 2\pi f_k$ por

$$H_{ij}(\omega) = \frac{(\phi_i)_k \cdot (\phi_j)_k}{(\omega_k^2 - \omega^2) + i(2\xi_k \omega_k \omega)} \quad (5.23)$$

Como foi visto em 5.2, esta função tem um máximo da amplitude sobre uma frequência aproximadamente coincidente com ω_k , facto que é aliás confirmado pela Figura 5.17.a), na qual se representa uma FRF de um sistema com 4 graus de liberdade, com frequências naturais de 3,8, 10,8, 16,6 e 20,4Hz e coeficientes de amortecimento modais de 2%, 3%, 4% e 5%, respectivamente, podendo observar-se que o desvio entre as abcissas correspondentes ao máximo da amplitude e à frequência natural é muito pequeno para coeficientes de amortecimento inferiores a 5%.

Usando esta propriedade, a estimação dos parâmetros dinâmicos associados a cada modo de vibração passa a ser realizada nas seguintes etapas:

- a) - Determinam-se as abcissas de todos os picos da amplitude da FRF a estudar, utilizando para tal a representação de Bode. Estas abcissas constituem as estimativas das frequências de ressonância do sistema ω_k ;

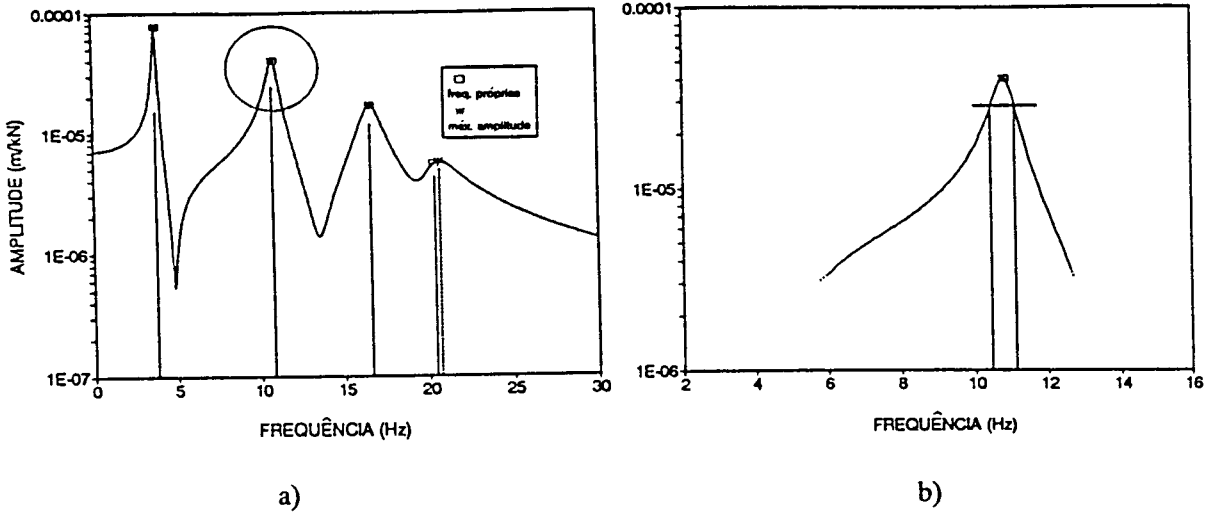


Figura 5.17 - a) Identificação das frequências de ressonância do sistema; b) pormenor relativo à extracção do coeficiente de amortecimento modal.

b) - Calculam-se os coeficientes de amortecimento em correspondência com cada modo de vibração através do método da meia potência que, como se sabe [29], se baseia na determinação das frequências para as quais o quadrado da amplitude da FRF é igual a metade do seu valor máximo. Ora, atendendo às hipóteses admitidas, pode dizer-se que este valor é dado por

$$\left(|H_{ij}|^2 \right)_{\max} = |H_{ij}(w = w_k)|^2 = \frac{[(\phi_i)_k \cdot (\phi_j)_k]^2}{(2\xi_k w_k^2)^2} \quad (5.24)$$

sendo os pontos de meia potência então definidos pelas raízes da equação

$$\left| \frac{(\phi_i)_k \cdot (\phi_j)_k}{(w_k^2 - w^2) + i(2\xi_k w_k w)} \right|^2 = \frac{1}{2} \frac{[(\phi_i)_k \cdot (\phi_j)_k]^2}{(2\xi_k w_k^2)^2} \quad (5.25)$$

as quais tomam os seguintes valores

$$w_1^2 = w_k^2 \left(1 - 2\xi_k^2 - 2\xi_k \sqrt{1 + \xi_k^2} \right) \quad (5.26)$$

e

$$w_2^2 = w_k^2 \left(1 - 2\xi_k^2 + 2\xi_k \sqrt{1 + \xi_k^2} \right)$$

o que, para valores pequenos de ξ_k ($\xi_k \leq 10\%$), permite concluir que

$$w_2^2 - w_1^2 \cong 4\xi_k w_k^2$$

ou seja, que

$$\xi_k \cong \frac{w_2^2 - w_1^2}{4w_k^2} \cong \frac{w_2 - w_1}{2w_k} \quad (5.27)$$

Esta expressão é aliás exacta quando obtida através da *Mobilidade* $Y_{ij}(w)$ do sistema, independentemente do valor de ξ_k .

- c) - Com base nos valores de w_k e ξ_k , obtêm-se as constantes modais $(A_{ij})_k = (\phi_i)_k \cdot (\phi_j)_k$ para cada uma das FRF medidas, bastando para tal escrever (5.24) na forma

$$(A_{ij})_k^2 = (2\xi_k w_k^2)^2 \cdot (|H_{ij}|_k^2)_{\max} \quad (5.28)$$

onde $(|H_{ij}|_k)_{\max}$ é o valor de pico em correspondência com cada frequência w_k , para cada uma das FRF determinadas experimentalmente.

Obtém-se então para cada w_k um conjunto de valores $(A_{11})_k, (A_{12})_k, \dots, (A_{1n})_k$, a partir dos quais se extraem as componentes do modo de vibração $(\phi)_k$:

$$(\phi_1)_k = \sqrt{(A_{11})_k} \quad ; \quad (\phi_2)_k = (A_{12})_k / (\phi_1)_k \quad ; \dots \quad ; \quad (\phi_n)_k = (A_{1n})_k / (\phi_1)_k \quad (5.29)$$

Do que foi dito, pode concluir-se que a identificação de parâmetros dinâmicos fica dependente, para cada modo de vibração, da caracterização de apenas 3 pontos sobre cada FRF (o ponto de máxima amplitude e os pontos de meia potência). Se isto representa, efectivamente, uma grande simplificação no processo de identificação de parâmetros modais, constitui também uma grande limitação, porquanto as estimativas obtidas podem ser muito grosseiras (em especial para os coeficientes de amortecimento), o que pode facilmente compreender-se tendo em consideração os seguintes aspectos:

1 - Separação entre modos de vibração:

Se as frequências naturais do sistema não estiverem convenientemente separadas, a interferência modal resultante pode retirar validade à aproximação em que se baseia o método de apenas ser contabilizada a contribuição do modo ressonante. Note-se que, mesmo quando frequências consecutivas se encontram bem separadas, é possível que a contribuição de modos laterais tenha algum significado;

2 - Resolução em frequência:

Atendendo à necessária discretização das funções espectrais obtidas, a estimativa de qualquer ponto da FRF (como o ponto de máxima amplitude ou os pontos de meia potência) vem sempre afectada de um erro que é tanto maior, quanto maior o intervalo ΔF entre 2 riscas espectrais consecutivas;

3 - Coeficiente de amortecimento:

A questão da resolução em frequência ganha particular acuidade quando o coeficiente de amortecimento modal é muito baixo, situação em que os picos da FRF se tornam bastante aguçados e a variação da amplitude da FRF entre duas riscas consecutivas se torna muito elevada na vizinhança de cada ressonância, sendo por consequência também essa a zona onde os erros das estimativas espectrais assumem maior significado. Por outro lado, se os coeficientes de amortecimento modais do sistema forem elevados, então a resposta dinâmica na vizinhança de cada ressonância poderá vir fortemente afectada por modos de vibração não-ressonantes, o que contribui também para os erros das estimativas dos parâmetros pretendidos.

4 - Modelo de amortecimento:

A aplicação do método da amplitude de pico conduz a estimativas reais dos valores das constantes modais e, consequentemente, dos modos de vibração da estrutura, hipótese que apenas tem validade se o amortecimento do sistema for do tipo proporcional. Na prática, verifica-se [107] que o amortecimento das estruturas reais pode ser aproximado sem erros elevados por este modelo quando, os coeficientes de amortecimento são baixos ($\xi_k \leq 5\%$).

Em suma, pode afirmar-se que o método da amplitude de pico produz resultados satisfatórios quando aplicado a sistemas cujo amortecimento é do tipo proporcional, não sendo o seu valor demasiado baixo ou elevado, onde as frequências se encontram bem separadas e para os quais as estimativas da FRF apresentam uma boa resolução em frequência.

A finalizar esta secção, acrescente-se que é possível, sem um esforço adicional significativo, melhorar as estimativas obtidas para os parâmetros identificados usando o método da amplitude de pico. Apresentam-se de seguida algumas sugestões que podem ser utilizadas para esse efeito:

- 1 - Obtenção do pico da FRF por interpolação, usando alguns pontos da FRF na vizinhança da ressonância: a qualidade da estimativa da frequência ω_k melhora substancialmente, mas o valor de pico da FRF já depende mais fortemente da função de interpolação utilizada. Da mesma forma, os pontos de meia potência

podem ser determinados por interpolação, usando uma função interpoladora do mesmo tipo (ou de ordem inferior, visto que, quanto maior a distância à frequência de ressonância, tanto mais suave é a variação da FRF e, portanto, melhor é o ajuste);

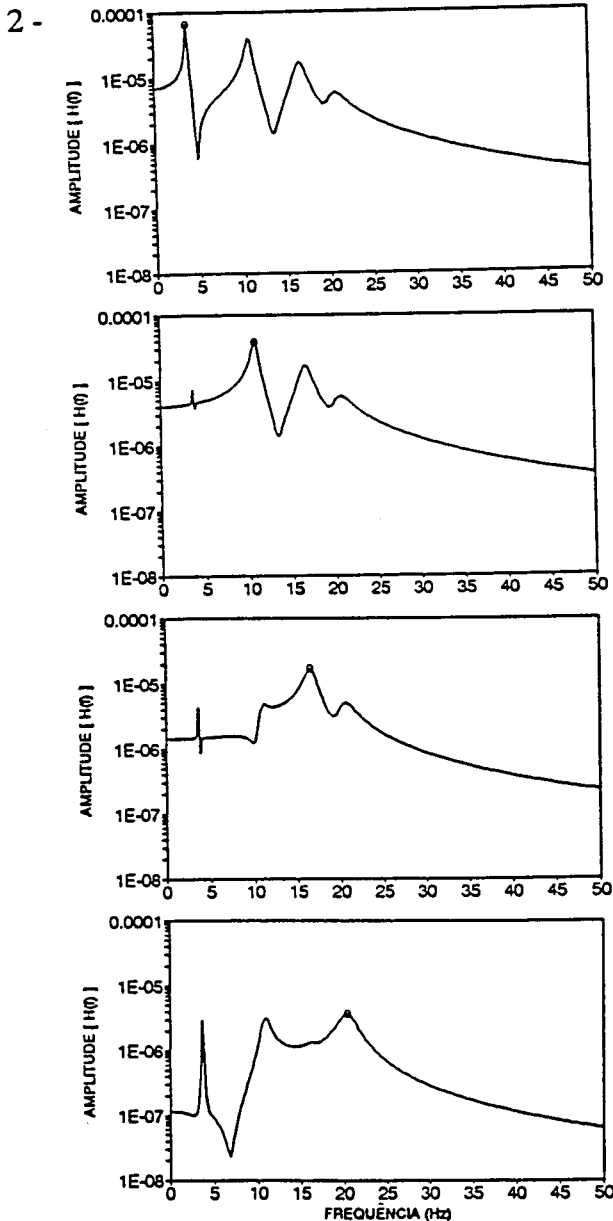


Figura 5.18 - Eliminação progressiva dos modos ajustados na FRF original para a *Receptância* $H_{11}(w)$ de um sistema de 4 graus de liberdade.

Eliminação progressiva dos modos de vibração ajustados na FRF medida: esta técnica, que constitui na realidade uma técnica simplificada de N graus de liberdade, consiste em, na fase de análise da FRF, efectuar sucessivamente o ajuste dos modos de vibração cuja importância é maior em termos de amplitude, subtraindo da FRF medida no final de cada etapa a soma das FRF correspondentes a sistemas de 1 grau de liberdade cujos parâmetros são os já extraídos. Este processo está ilustrado na Figura 5.18, relativa à *Receptância* $H_{24}(w)$ do sistema de 4 graus de liberdade que tem sido usado para exemplo ao longo deste trabalho. O efeito da aplicação deste procedimento é, obviamente, reduzir o efeito negativo da interferência modal.

5.3.1.2 - Métodos da resposta em quadratura e da máxima componente em quadratura

No que se refere à identificação das frequências de ressonância do sistema, estes dois métodos baseiam-se nos mesmos pressupostos e processam-se de forma idêntica ao *método da amplitude de pico* descrito em 5.3.1.1, com a diferença de recorrerem às propriedades das FRF expressas através da representação Co-Quad (v. secção 5.2). Assim, cada frequência natural ω_k é identificada tendo em conta que, na vizinhança de uma ressonância, a parte real da *Receptância* de um sistema se anula (*método da resposta em quadratura*), enquanto que a parte imaginária tem um valor mínimo (*método da máxima componente em quadratura*).

Por sua vez, no que respeita à identificação de coeficientes de amortecimento modal, a única diferença relativamente ao processo já descrito para o método da amplitude de pico, diz respeito ao método da resposta em quadratura, onde as frequências ω_1 e ω_2 correspondentes aos pontos de meia potência necessários para substituição em (5.27) são aproximadamente (conforme foi já visto em 5.2) as abcissas dos extremos da parte real da FRF analisada, à esquerda e à direita da frequência do modo de vibração em estudo.

Note-se contudo que os valores extraídos para as frequências naturais não coincidem exactamente quando se utiliza na identificação um qualquer dos métodos até aqui descritos, o que facilmente se compreende, se se atender a que as simplificações utilizadas na identificação são diferentes.

5.3.1.3 - Método do "circle fit"

A formulação aqui apresentada engloba já variadas modificações [43, 76, 93, 94, 127] em relação ao método original, designado por *método de Kennedy-Pancu*, desenvolvido e publicado em 1947 [75] por estes dois investigadores, com o objectivo de resolver as dificuldades introduzidas na aplicação do método da amplitude de pico a sistemas em que a proximidade das frequências naturais é responsável por uma interferência modal significativa.

Este método é possivelmente o mais utilizado na análise modal, consistindo o princípio em que se baseia em admitir que, na vizinhança de uma ressonância, a contribuição dos modos não-ressonantes é independente da frequência.

De facto, a expressão (5.3) pode escrever-se na forma

$$Y_{ij}(\omega) = i\omega \cdot \left[\frac{(\phi_i)_k \cdot (\phi_j)_k}{(\omega_k^2 - \omega^2) + i(2\xi_k \omega_k \omega)} + \sum_{\substack{n=1 \\ (n \neq k)}}^N \frac{(\phi_i)_n \cdot (\phi_j)_n}{(\omega_n^2 - \omega^2) + i(2\xi_n \omega_n \omega)} \right] \quad (5.30)$$

em que k é a ordem do modo de vibração em estudo.

De acordo com o princípio enunciado, a expressão (5.30) poderá ser escrita, na vizinhança da ressonância a analisar, sob a forma

$$Y_{ij}(\omega) = \frac{i\omega \cdot (\phi_i)_k \cdot (\phi_j)_k}{(\omega_k^2 - \omega^2) + i(2\xi_k \omega_k \omega)} + (B_{ij})_k \quad (5.31)$$

o que corresponde a substituir a FRF na vizinhança dessa ressonância pela FRF de um sistema de 1 grau de liberdade adicionada de um termo $(B_{ij})_k$, constante e complexo.

Tendo a FRF de um sistema de 1 grau de liberdade a forma aproximada de uma circunferência na representação de Nyquist, tal corresponde também a afirmar que a FRF em estudo pode ser caracterizada pela *circunferência modal* do sistema de 1 grau de liberdade rodada e transladada no plano complexo.

A aproximação cometida por esta formulação é bastante boa para sistemas com frequências bem separadas e coeficientes de amortecimento não muito elevados. Vejam-se por exemplo as Figuras 5.19 e 5.20, onde se representam separadamente o 1º e 2º termos da expressão (5.30) para uma *Receptância*, $H_{11}(\omega)$, e uma *Mobilidade*, $Y_{11}(\omega)$, do sistema de 4 graus de liberdade utilizado em exemplos anteriores, fazendo $k = 1$. A representação associada ao 1º termo diz respeito a um conjunto de pontos que se localizam aproximada ou exactamente sobre a circunferência modal, consoante a FRF seja expressa em termos de receptância ou mobilidade, respectivamente. A representação em correspondência com o 2º termo para as frequências situadas na vizinhança da frequência de ressonância (num intervalo de frequências de amplitude superior à largura de meia potência) é, praticamente, um ponto.

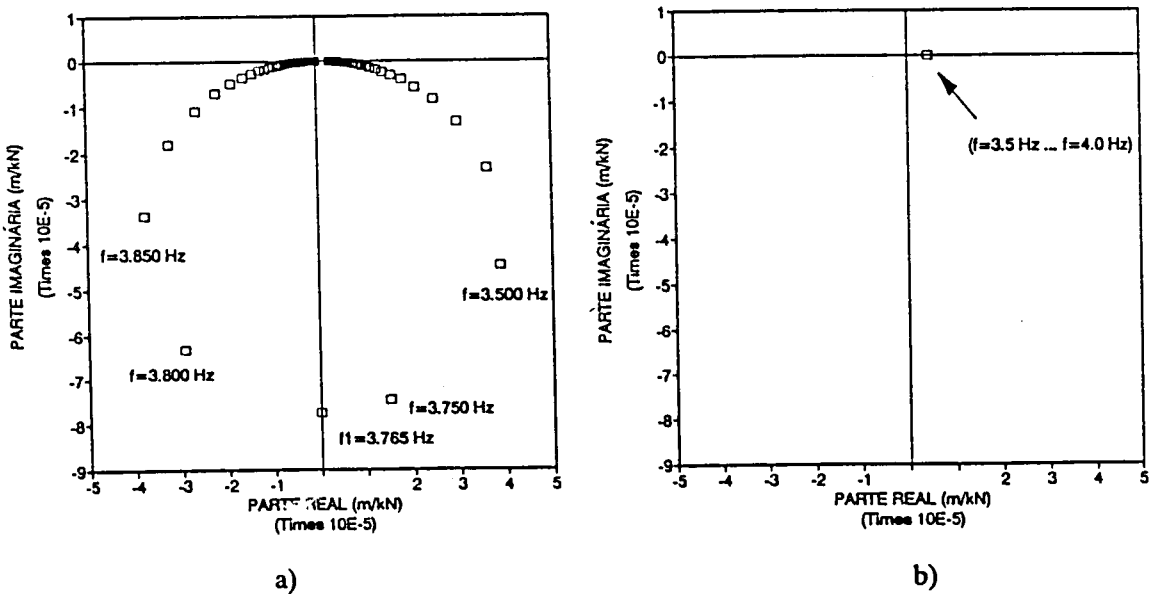


Figura 5.19 - Representação de Nyquist para uma *Receptância* de um sistema de 4 graus de liberdade: a) - contribuição do modo ressonante; b) - contribuição dos restantes modos.

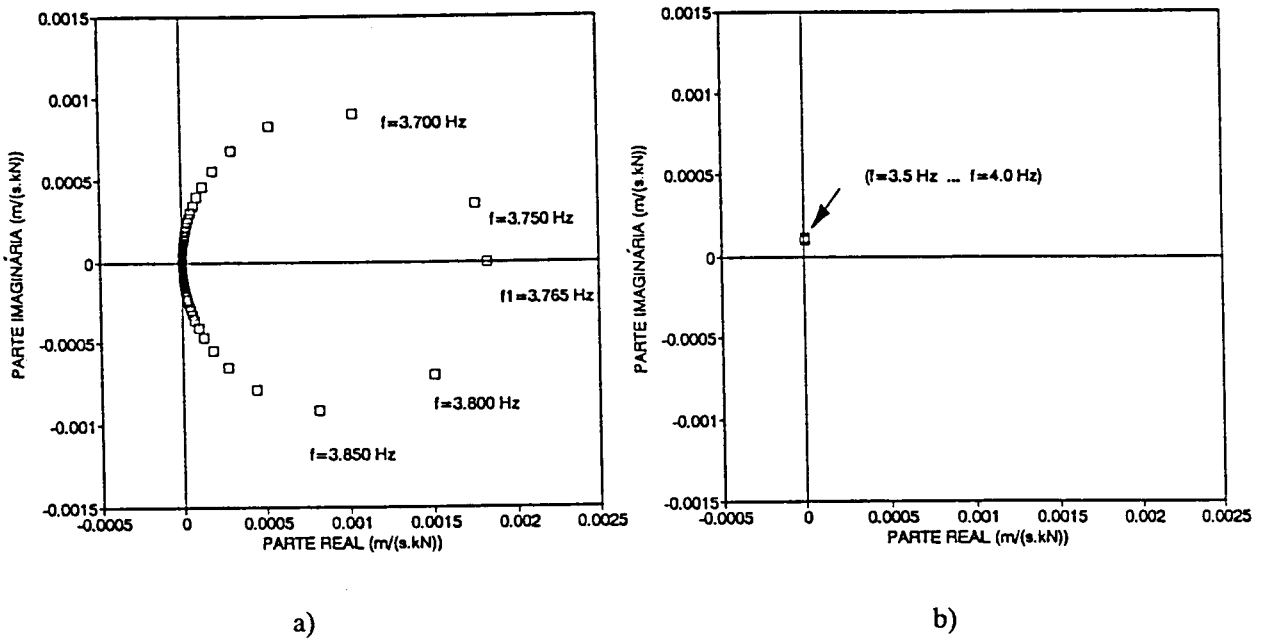


Figura 5.20 - Representação de Nyquist para uma *Mobilidade* de um sistema de 4 graus de liberdade: a) contribuição do modo ressonante; b) - contribuição dos restantes modos.

Sem perda de generalidade, as considerações realizadas a partir daqui incidirão sobre a representação da FRF sob a forma de mobilidade.

Utilizando o método do "circle fit", dever-se-á então proceder, para cada modo de vibração a identificar, ao ajuste por uma circunferência na vizinhança da correspondente frequência de ressonância. A obtenção dos parâmetros modais será realizada a partir dos valores estimados das coordenadas do centro e raio dessa circunferência modal, utilizando as suas propriedades, já discutidas em 5.2.

A sequência de passos a seguir para o efeito é, para cada modo de vibração, a seguinte:

- 1 - selecção do conjunto de pontos da FRF a utilizar no ajuste da circunferência modal;
- 2 - ajuste pela circunferência modal utilizando, por exemplo, uma técnica de minimização por mínimos quadrados;
- 3 - identificação da frequência de ressonância, empregando uma das propriedades da circunferência modal relativas à sua localização;
- 4 - extracção do coeficiente de amortecimento modal, tendo em conta a estimativa da frequência de ressonância e também as propriedades da circunferência modal antes enunciadas;

- 5 - determinação da constante modal $(A_{ij})_k$, tendo por base a relação entre $(A_{ij})_k$ e o diâmetro da circunferência modal, bem como as estimativas de ω_k e ξ_k obtidas nos pontos 3 e 4.

No que respeita à selecção do conjunto de pontos a utilizar no ajuste da circunferência modal, refere-se que há vantagem em escolher o maior número possível de valores na vizinhança da frequência própria do modo de vibração, contribuindo desse modo para um melhor ajuste entre os valores medidos e a curva teórica. Note-se contudo que, à medida que aumenta a distância à frequência de ressonância, aumenta também a interferência modal, pelo que os pontos representativos da FRF se afastarão progressivamente da circunferência modal, sendo portanto susceptíveis de introduzir erros na estimação dos seus parâmetros (Figura 5.21). Considerando imprescindível a utilização de pelo menos 6 pontos na vizinhança de cada ressonância, dever-se-á procurar também que os pontos usados no ajuste de cada circunferência modal descrevam um arco de cerca de 270° [43]. Note-se que nem sempre tal é possível, em consequência do acoplamento significativo que possa existir com modos de vibração próximos.

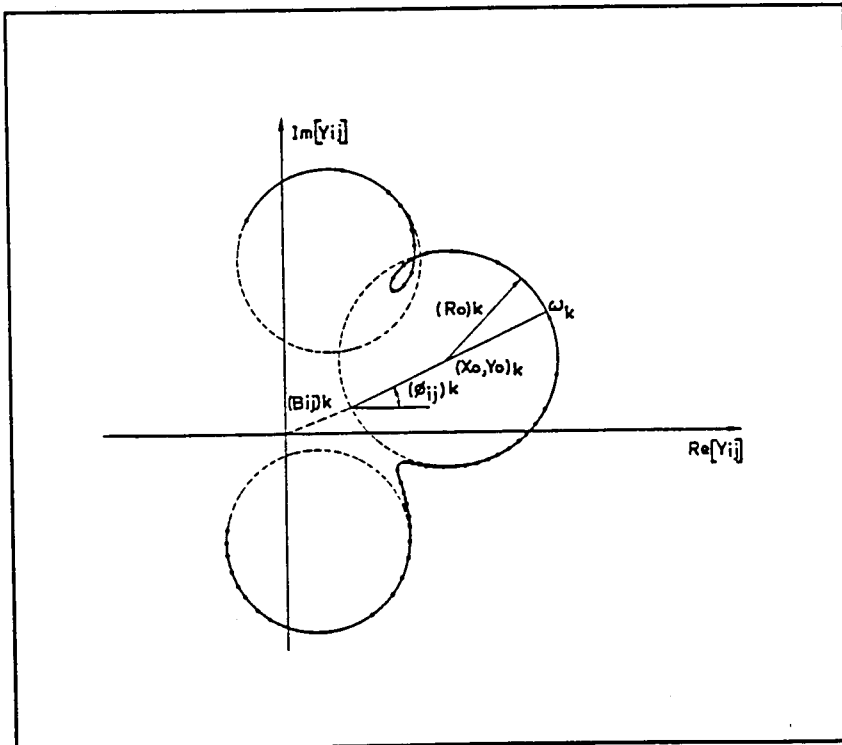


Figura 5.21 - Importância da interferência dos modos de vibração no conjunto de pontos a utilizar no ajuste pela circunferência modal.

Relativamente a esta questão, realça-se ainda a utilidade de tornar possível, na programação automática deste método, que o utilizador seleccione criteriosamente os pontos a usar no ajuste de cada circunferência modal, eliminando de imediato certas riscas da FRF onde visualmente se detectem perturbações provenientes de erros de medição ou de ruído presente no sinal.

Quanto à técnica a utilizar no ajuste por uma circunferência modal, é usual a aplicação de algoritmos de minimização do erro quadrático entre as curvas medida e teórica, diferindo estes entre si na forma como esse erro é definido.

Basicamente, o ajuste pode ser realizado por 2 vias diferentes, consistindo a primeira na minimização do desvio, medido no plano complexo, entre os pontos seleccionados da FRF medida e os pontos mais próximos da curva teórica representada pela circunferência modal, enquanto que a segunda, realizada em duas etapas, consta da minimização do desvio entre uma "nuvem" de pontos obtidos como centros de um conjunto de circunferências passando por combinações de 3 dos pontos da FRF medida seleccionados e o centro da curva teórica, cuja localização se pretende determinar, e de uma segunda minimização do desvio entre os pontos da FRF utilizados no ajuste e os correspondentes pontos mais próximos da curva teórica, quantificando-se desta maneira o respectivo raio.

- Seguindo a primeira das vias apontadas na estimação dos parâmetros X_0, Y_0 e R_0 (coordenadas do centro e raio, respectivamente) da circunferência modal, o erro quadrático será definido por

$$E = \sum_{i=1}^n \left[R_0 - \sqrt{(x_i - X_0)^2 + (y_i - Y_0)^2} \right]^2 \quad (5.32)$$

onde x_i e y_i são as coordenadas, no plano complexo, dos n pontos da FRF medida (Figura 5.22).

A minimização deste erro conduz à necessidade de resolver um conjunto de 3 equações não-lineares em X_0, Y_0 e R_0 , utilizando um processo iterativo [54]. Para evitar este procedimento, susceptível de tornar muito lento o processo de identificação, foi proposto [127] um critério simplificado de definição do erro quadrático, E_1 , através de

$$E_1 = \sum_{i=1}^n \{ R_0^2 - [(x_i - X_0)^2 + (y_i - Y_0)^2] \}^2 \quad (5.33)$$

Desenvolvendo (5.33) e fazendo $\alpha_1 = -2X_0, \alpha_2 = -2Y_0$ e $\alpha_3 = R_0^2 - X_0^2 - Y_0^2$, vem

$$E_1 = \sum_{i=1}^n \{ \alpha_3 - (x_i^2 + \alpha_1 x_i + \alpha_2 y_i + y_i^2) \}^2 \quad (5.34)$$

Exprimindo a condição de mínimo do erro E_1 através do anulamento das correspondentes derivadas parciais em ordem a α_1 , α_2 e α_3 , obtém-se um sistema de equações lineares na forma

$$\begin{bmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i y_i & -\sum x_i \\ \sum x_i y_i & \sum y_i^2 & -\sum y_i \\ -\sum x_i & -\sum y_i & n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -(\sum x_i^3 + \sum x_i y_i^2) \\ -(\sum y_i^3 + \sum x_i^2 y_i) \\ -(\sum x_i^2 + \sum y_i^2) \end{Bmatrix} \quad (5.35)$$

cuja solução permite extrair X_0 , Y_0 e R_0 .

Desenvolvendo (5.32) e (5.33), pode concluir-se que $E_1 \cong 4R_0^2 E$.

Note-se ainda que, pelo facto de as variáveis α_1 , α_2 e α_3 não serem independentes, é introduzido um erro adicional na minimização do erro quadrático. É possível no entanto verificar [127] que o erro introduzido usando esta técnica é perfeitamente aceitável.

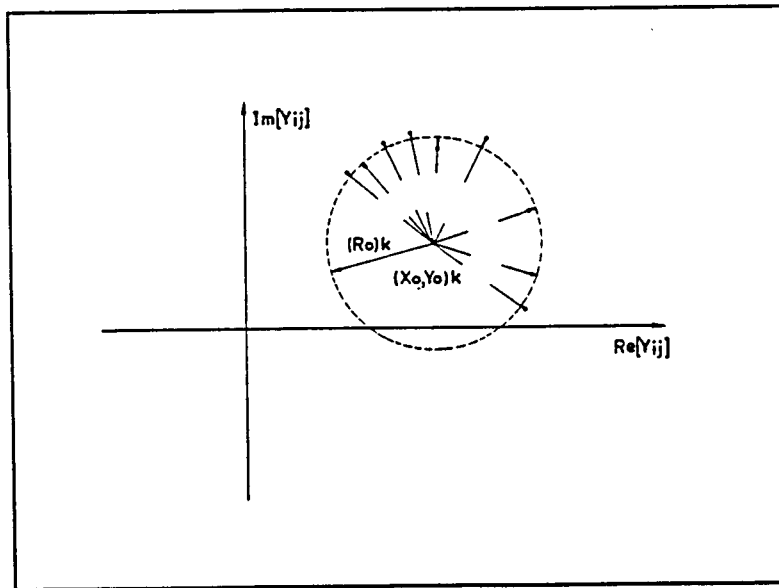


Figura 5.22 - Ajuste da circunferência modal minimizando o desvio entre pontos da FRF medida e os pontos mais próximos da curva teórica.

- Usando a 2ª via acima descrita para o ajuste da circunferência modal, formam-se grupos de 3 entre os pontos da FRF seleccionados para o ajuste (num total de $n' = C_3^n$, combinações de n 3 a 3), correspondendo a cada grupo uma circunferência cujas coordenadas do centro se designam por x_{oi} e y_{oi} . O erro quadrático em correspondência com as coordenadas X_0 e Y_0 do centro da curva teórica pode então ser definido como sendo

$$E_2 = \sum_{i=1}^{n'} \left\{ [(x_{oi} - X_0)^2 + (y_{oi} - Y_0)^2]^{1/2} \right\}^2 \quad (5.36)$$

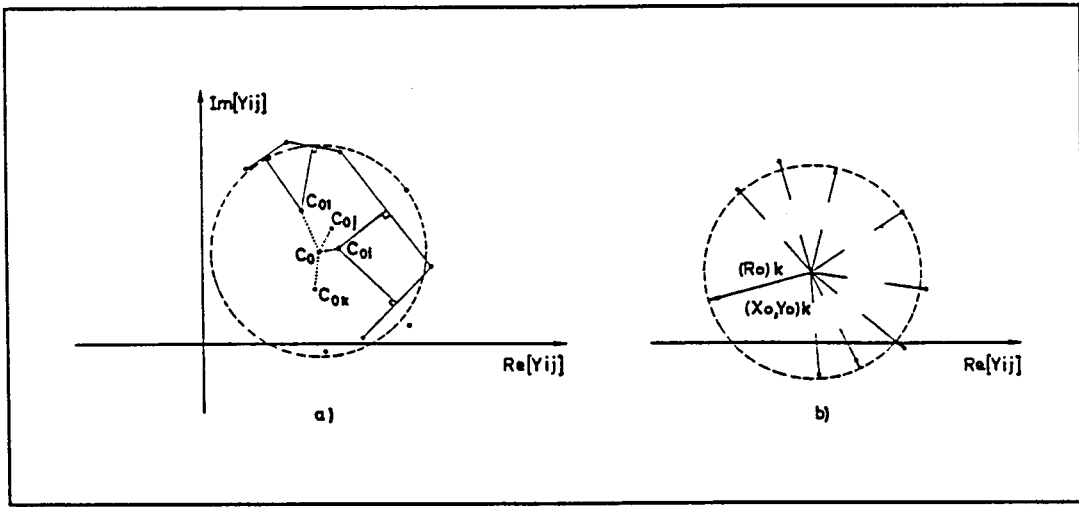


Figura 5.23 - Ajuste da circunferência modal: a) - minimizando em primeiro lugar a distância ao centro da curva teórica da "nuvem" de centros de circunferências possíveis e, em segundo, b) - o desvio entre pontos da FRF medida e os correspondentes pontos mais próximos da curva teórica.

A minimização deste erro conduz, aos seguintes valores dos parâmetros X_0 e Y_0 :

$$X_0 = \left(\sum_{i=1}^{n'} x_{oi} \right) / n' \quad ; \quad Y_0 = \left(\sum_{i=1}^{n'} y_{oi} \right) / n' \quad (5.37)$$

Conhecido o centro $C_0 = (X_0, Y_0)$ da circunferência modal, o seu raio R_0 é estimado minimizando o erro quadrático E definido através de (5.32), mas em que R_0 é o único parâmetro a determinar, vindo dado por

$$R_0 = \left[\sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - X_0)^2 + (y_i - Y_0)^2} \right] / n \quad (5.38)$$

A comparação entre o nível de rigor proporcionado pelas duas vias referidas para a realização do ajuste da circunferência modal não é fácil à partida, podendo contudo constatar-se que, do ponto de vista prático, é mais simples a aplicação da técnica baseada na minimização das distâncias à curva teórica. No programa FITCIR, descrito no Capítulo 6, destinado à identificação de parâmetros modais através do método do "circle fit", pode utilizar-se qualquer um dos processos descritos.

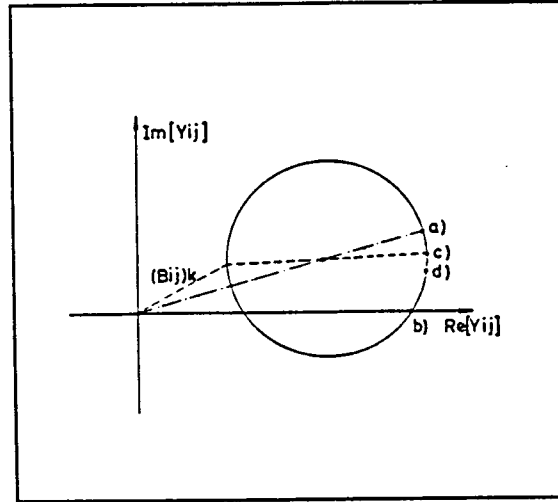


Figura 5.24 - Identificação da frequência de ressonância: a) - através do ponto de máxima amplitude da circunferência modal; b) - através do ponto de anulamento da parte imaginária de $Y_{ij}(\omega)$; c) - através do ponto de máxima parte real de $Y_{ij}(\omega)$; d) - através do ponto de máximo cociente $\Delta\theta/\Delta\omega^2$.

Efectuando o ajuste pela circunferência modal, procede-se à estimação da frequência de ressonância ω_k associada ao modo de vibração em estudo. Como se disse, podem ser utilizadas para o efeito quaisquer das seguintes propriedades das FRF:

- sobre uma ressonância, a amplitude da FRF é aproximadamente igual à máxima: a identificação de ω_k reduz-se assim à determinação do ponto da circunferência mais distante da origem (Figura 5.24.a));
- sobre uma ressonância, a parte imaginária da *Mobilidade* é aproximadamente nula: nesse caso, ω_k corresponde ao mais afastado (em relação à origem) dos pontos de intersecção da circunferência modal com o eixo das abcissas (Figura 5.24.b));
- sobre uma ressonância, a parte real da mobilidade é aproximadamente igual à máxima, correspondendo neste caso ω_k aproximadamente ao ponto de maior abscissa na representação de Nyquist (Figura 5.24.c));

- sobre uma ressonância, é aproximadamente máxima a taxa de varrimento do ângulo ao centro θ com a frequência w ou, se se quiser, com w^2 ; assim, utilizando o método das diferenças finitas ou o método das diferenças divididas, é possível localizar sobre a curva teórica o ponto em correspondência com w_k (Figura 5.24.d)).

Pode constatar-se todavia que, pelo facto de as propriedades aplicadas envolverem aproximações decorrentes de diferentes simplificações, as localizações sobre a circunferência modal obtidas para a frequência de ressonância não coincidem. Se, no que respeita à estimação do valor de w_k , a variação registada por aplicação dos diferentes critérios referidos nos pontos a), b), c) e d) pode não ter grande importância, já na estimação de ξ_k podem surgir erros significativos que se repercutem também no valor da constante modal $(A_{ij})_k$. Considera-se porém usualmente [75] que a localização de w_k através da máxima taxa de variação do ângulo ao centro com o quadrado da frequência, $\Delta\theta/\Delta w^2$, é a que conduz a menores erros. Foi essa a via seguida na realização do programa de cálculo automático FITCIR e que se passa a desenvolver.

Sabendo que, para o modo de vibração k , desprezando o termo constante de (5.31), a fase γ em correspondência com a frequência natural w é dada por

$$\gamma = \text{atan} \left\{ \frac{w_k^2 - w^2}{2\xi_k w_k w} \right\} \quad (5.39)$$

e admitindo que a variação da fase (dupla da variação do ângulo ao centro θ) com w^2 é máxima sobre a ressonância, tem-se que

$$w = w_k \Rightarrow \frac{d}{dw} \left[\frac{d\theta}{dw^2} \right] = 0$$

equação que pode ser aproximada numericamente e resolvida através do método das diferenças divididas [127]. Para o efeito, partindo também do princípio de que os valores da FRF dizem respeito a riscas igualmente espaçadas em frequência, pode construir-se o seguinte quadro, em correspondência com a Figura 5.25

Quadro 5.2 - Diferenças de 1ª e 2ª ordem em correspondência com θ .

Ponto	Frequência	θ	$\Delta\theta$	$\Delta^2\theta$
A	ω_A	θ_1	$\Delta\theta_1$	
B	ω_B	θ_2	$\Delta\theta_2$	$\Delta^2\theta_1$
C	ω_C	θ_3	$\Delta\theta_3$	$\Delta^2\theta_2$
D	ω_D	θ_4	$\Delta\theta_4$	$\Delta^2\theta_3$
E	ω_E	θ_5	$\Delta\theta_5$	$\Delta^2\theta_4$
F	ω_F	θ_6		

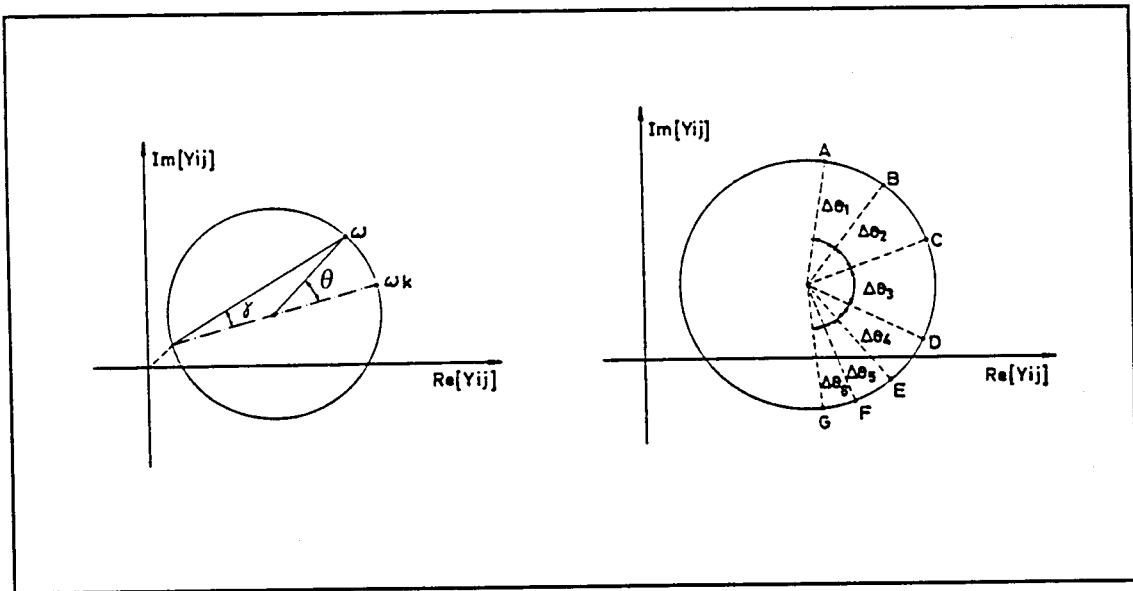


Figura 5.25 - Extracção da frequência de ressonância, usando o método das diferenças divididas.

Atendendo à mudança de sinal de $\Delta^2\theta$, é possível localizar sobre a circunferência modal os pontos entre os quais se encontra a frequência natural, ω_k . O valor de ω_k pode ser obtido através da fórmula de Newton das diferenças divididas, dada por

$$f(v) = f(v_0) + (v - v_0)f(v_0, v_1) + (v - v_0)(v - v_1)f(v_0, v_1, v_2) + \dots + (v - v_0)(v - v_1)\dots(v - v_{n-1})f(v_0, v_1, v_2, \dots, v_n) \quad (5.40)$$

em que

$$f(v_0, v_1, \dots, v_n) = \frac{f(v_0, v_1, \dots, v_{n-1}) - f(v_1, v_2, \dots, v_n)}{(v_0 - v_n)} \quad (5.41)$$

Para tal, substitua-se em (5.40) v por w^2 e $f(v)$ por θ .

Tem-se então que $d\theta/dw^2 = d[f(v)]/dv$. Usando os primeiros 4 termos do desenvolvimento de (5.40) e escolhendo, de entre os pontos seleccionados da FRF medida para o ajuste da circunferência modal, 4 valores v_0, v_1, v_2 e v_3 tais que os primeiros 2 sejam os pontos imediatamente anteriores a w_k^2 e os dois últimos lhe sejam imediatamente posteriores, vem

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dw^2} = & f(v_0, v_1) + (2v - v_0 - v_1)f(v_0, v_1, v_2) + [3v^2 - 2v(v_0 + v_1 + v_2) + \\ & + (v_0v_1 + v_1v_2 + v_0v_2)] \cdot f(v_0, v_1, v_2, v_3) \end{aligned} \quad (5.42)$$

O máximo desta função é obtido para

$$w_k^2 = v = \frac{1}{3}[(v_0 + v_1 + v_2) - f(v_0, v_1, v_2)/f(v_0, v_1, v_2, v_3)] \quad (5.43)$$

podendo obter-se a posição de w_k^2 sobre a circunferência modal por substituição de $v = w_k^2$ em (5.40).

A técnica acima descrita foi utilizada no programa FITCIR já referido, tendo-se verificado que, para a gama de frequências habitualmente presente nos problemas de Engenharia Civil e para a resolução normalmente utilizada ($\Delta f > 0,1 \text{ Hz}$), os pontos na vizinhança de uma ressonância encontram-se muito separados sobre a circunferência modal (por vezes de um arco superior a 90°), o que pode conduzir a erros importantes na localização de w_k . Para tentar minorá-los, utilizou-se um procedimento que consistiu em dividir o arco da circunferência modal ajustada entre os pontos imediatamente anterior e posterior ao representativo da ressonância, em 20 partes, a que correspondem as frequências $w_1^2, w_2^2, \dots, w_{20}^2$, obtidas por aplicação de (5.43) e que são utilizadas adicionalmente na estimação de w_k , através do processo descrito baseado no método das diferenças divididas. A melhoria introduzida foi significativa.

Pode agora proceder-se à extracção do coeficiente de amortecimento modal, ξ_k , e da constante modal, $(A_{ij})_k$.

Seleccionando dois pontos, (1) e (2), da FRF medida, em correspondência com as frequências imediatamente inferior e superior à frequência de ressonância w_k e, atendendo à definição da fase através de (5.39), tem-se que

$$\text{tg}(\gamma_1) = \frac{w_k^2 - w_1^2}{2\xi_k w_k w_1} \quad \text{e} \quad \text{tg}(\gamma_2) = \frac{w_2^2 - w_k^2}{2\xi_k w_k w_2}$$

o que permite obter ξ_k por

$$\xi_k = \frac{1}{2w_k} \left[\frac{w_2^2 - w_1^2}{w_1 \operatorname{tg}(\gamma_1) + w_2 \operatorname{tg}(\gamma_2)} \right] \quad (5.44)$$

expressão que, no caso particular em que (1) e (2) são os pontos de meia potência do modo de vibração em causa ($\operatorname{tg}(\gamma_1) = \operatorname{tg}(\gamma_2) = 1$), assume a conhecida forma

$$\xi_k = \frac{w_2 - w_1}{2w_k}$$

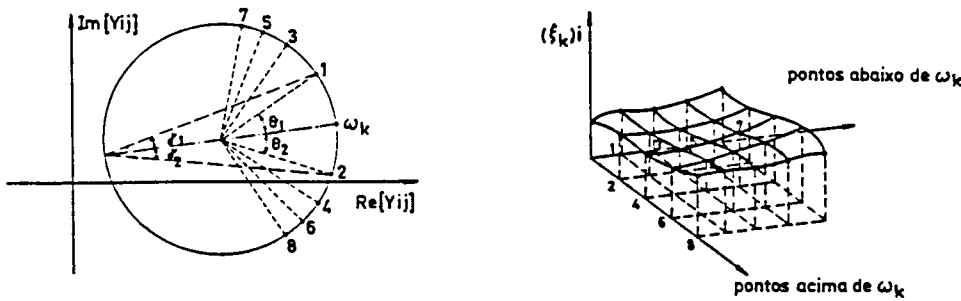


Figura 5.26 - Estimação de coeficientes de amortecimento ξ_k com base em combinações de pontos localizados à esquerda e à direita da ressonância.

A análise de (5.44) evidencia a importância da correcta localização de w_k sobre a circunferência modal. Pelo facto de o erro associado à estimação de ξ_k ser manifestamente superior ao associado à frequência de ressonância w_k , é usual a obtenção de ξ_k por média de um conjunto de estimativas deste coeficiente, onde intervêm pares de pontos resultantes das possíveis combinações dos pontos situados antes da frequência de ressonância (1, 3, 5 e 7, na Figura 5.26) com os localizados após esta frequência (2, 4, 6 e 8, na mesma figura). As estimativas obtidas são seguidamente representadas num gráfico tridimensional do tipo do apresentado na Figura 5.26, sendo possível por análise da superfície gerada, detectar as origens dos erros envolvidos na estimação de ξ_k . Idealmente, a superfície gerada por esse conjunto de pontos seria um plano. No entanto, a existência de erros de medição ou a natureza do modelo utilizado produz desvios em relação a um plano médio, cuja cota é a média (ponderada ou não) das estimativas $(\xi_k)_i$ obtidas. Desvios aleatórios da ordem de 4-5% [43] são típicos dos erros de medida envolvidos no processo de aquisição e análise do sinal. Desvios

sistemáticos podem dever-se a um comportamento não-linear do sistema, à inadequação do modelo de amortecimento considerado ou, mais correntemente, à interferência de modos próximos.

Refira-se ainda, em relação a esta questão, a importância de utilizar na expressão (5.44) dois pontos i e j a que correspondam valores de γ_i e γ_j cuja tangente seja da mesma ordem de grandeza, de forma a evitar erros numéricos na avaliação de ξ_k .

Finalmente, é possível estimar a constante modal $(A_{ij})_k = (\phi_i)_k \cdot (\phi_j)_k$ com as estimativas de w_k e ξ_k obtidas para o modelo de vibração em estudo, devendo-se para tal ter em conta que:

- da intersecção do diâmetro passando por w_k com a circunferência modal resulta um ponto, cujas coordenadas se relacionam, conforme ilustrado na Figura 5.21, com a amplitude e fase de $(B_{ij})_k$ (v. equação (5.31));
- sobre a ressonância, a *Mobilidade* $Y_{ij}(w_k)$ é dada por

$$Y_{ij}(w_k) = \frac{(A_{ij})_k}{2\xi_k w_k} + (B_{ij})_k \quad (5.45)$$

pelo que

$$(A_{ij})_k = 2\xi_k w_k \cdot [Y_{ij}(w_k) - (B_{ij})_k] \quad (5.46)$$

À semelhança do que foi dito para o método da amplitude de pico, é possível melhorar as estimativas obtidas para os parâmetros modais se se subtrair à FRF medida, após a identificação de cada modo de vibração, a FRF do sistema de 1 grau de liberdade equivalente, reconstituída com base no conjunto de parâmetros dinâmicos identificados. Esta técnica pode ainda ser melhorada com a entrada num processo iterativo onde progressivamente são corrigidas as estimativas dos parâmetros modais que haviam sido calculados sem eliminação da contribuição de certos modos.

No programa FITCIR utilizou-se este melhoramento sem, no entanto, se recorrer ao processo iterativo mencionado, tendo-se obtido excelentes resultados mesmo quando existe algum acoplamento modal, tendo em conta o grau de rigor das aproximações efectuadas nos métodos de 1 grau de liberdade.

5.3.1.4 - Método de Dobson

Este método de 1 grau de liberdade foi desenvolvido recentemente [37], enquadrando-se num conjunto de métodos designados por *métodos inversos*, que se baseiam na hipótese adoptada pelo *método do "circle fit"*, segundo a qual a contribuição dos modos não-ressonantes

é constante numa vizinhança da ressonância e ainda no facto de que o inverso da função *Receptância* de um sistema com amortecimento estrutural pode ser representado através de pares de rectas.

Apesar da investigação actual no domínio da análise modal incidir fundamentalmente sobre o desenvolvimento de potentes técnicas de N graus de liberdade, Dobson considerou ser muito útil a informação fornecida por técnicas simples de 1 grau de liberdade, quer para o conhecimento de parâmetros dinâmicos de estruturas, quer para adquirir sensibilidade relativamente ao seu comportamento dinâmico, facto que justifica a apresentação do método que nesta secção se descreve, aplicável a sistemas lineares e invariantes no tempo com amortecimento do tipo estrutural.

Esta técnica pretende ser uma alternativa ao popular *método do "circle fit"*, eliminando algumas das dificuldades que a sua aplicação prática suscita, nomeadamente as relacionadas com a falta de precisão das estimativas das frequências naturais (quer em consequência de se utilizarem no ajuste da circunferência modal os pontos da FRF localizados na vizinhança das ressonâncias, onde a possibilidade de existência de erros é maior, quer em resultado da necessária interpolação) e com o tempo exigido pelo ajuste por mínimos quadrados das circunferências modais.

A *Receptância* $\alpha_{ij}(w)$ relacionando os graus de liberdade i e j de um sistema de N graus de liberdade com um amortecimento do tipo estrutural pode ser caracterizada por

$$\alpha_{ij}(w) = \sum_{k=1}^N \frac{(A_{ij})_k}{(w_k^2 - w^2) + i\eta_k w_k^2} \quad (5.47)$$

em que η_k é o coeficiente de amortecimento estrutural em correspondência com o modo de vibração k , sendo a sua constante modal $(A_{ij})_k$ um complexo.

É possível verificar [43] que, nestas condições, a representação de Nyquist desta função é tal que todos os pontos de $\alpha_{ij}(w)$ se situam exactamente sobre uma circunferência de centro $(0, -(A_{ij})_k / (2\eta_k w_k^2))$ e raio $(A_{ij})_k / (2\eta_k w_k^2)$.

Usando a aproximação correspondente a considerar constante a contribuição dos modos não-ressonantes na vizinhança de uma ressonância w_k , a equação (5.47) toma a forma

$$\alpha_{ij}(w) = \frac{(A_{ij})_k}{(w_k^2 - w^2) + i\eta_k w_k^2} + (C_{ij})_k \quad (5.48)$$

Considerando, por uma questão de generalidade, que $(A_{ij})_k$ é um número complexo, pode escrever-se $(A_{ij})_k = (A + iB)_{ijk}$.

A eliminação do termo residual $(C_{ij})_k$ pode ser feita na vizinhança de uma ressonância subtraindo a (5.48) o valor de α_{ij} para uma frequência Ω fixa nessa banda,

$$\alpha_{ij}(\Omega) = \frac{(A + iB)_{ijk}}{(w_k^2 - \Omega^2) + i\eta_k w_k^2} + (C_{ij})_k$$

vindo assim

$$\alpha_{ij}(w) - \alpha_{ij}(\Omega) = (A + iB)_{ijk} \cdot \left[\frac{1}{(w_k^2 - w^2) + i\eta_k w_k^2} - \frac{1}{(w_k^2 - \Omega^2) + i\eta_k w_k^2} \right] \quad (5.49)$$

Eliminando, por simplicidade, os índices i, j e k associados às designações da constante modal e da função de transferência, e desenvolvendo (5.49), vem

$$\Delta = \frac{w^2 - \Omega^2}{\alpha(w) - \alpha(\Omega)} = \frac{A - iB}{A^2 + B^2} [(w_k^2 - w^2)(w_k^2 - \Omega^2) - \eta_k^2 w_k^4 + i\eta_k w_k^2 (2w_k^2 - w^2 - \Omega^2)] \quad (5.50)$$

Como se pode observar nesta expressão, as componentes real e imaginária da função Δ são funções lineares em w^2 , podendo escrever-se que

$$Re[\Delta] = m_R w^2 + c_R$$

e

$$(5.51)$$

$$Im[\Delta] = m_I w^2 + c_I$$

em que

$$\begin{aligned} m_R &= -\frac{1}{A^2 + B^2} [A(w_k^2 - \Omega^2) + B\eta_k w_k^2] \\ c_R &= \frac{w_k^2}{A^2 + B^2} \{w_k^2 [A(1 - \eta_k^2) + 2B\eta_k] - \Omega^2 (A + B\eta_k)\} \\ m_I &= -\frac{1}{A^2 + B^2} [A\eta_k w_k^2 - B(w_k^2 - \Omega^2)] \\ c_I &= \frac{w_k^2}{A^2 + B^2} \{w_k^2 [2A\eta_k - B(1 - \eta_k^2)] - \Omega^2 (A\eta_k - B)\} \end{aligned} \quad (5.52)$$

Tomando um conjunto de frequências Ω_L na proximidade da ressonância em estudo, a variação de $Re(\Delta)$ e $Im(\Delta)$ em função de w^2 é traduzida por dois feixes de rectas do tipo dos ilustrados nas Figuras 5.27.a) e b), cujos declives m_R e m_I são também funções lineares em Ω^2 (Figuras 5.28.a) e b)) e cujos pontos de intersecção, w_R^2 e w_I^2 , são dados por

$$w_R^2 = w_k^2 \cdot \frac{A + B \eta_k}{A} \quad (5.53)$$

$$w_I^2 = w_k^2 \cdot \frac{B - A \eta_k}{B}$$

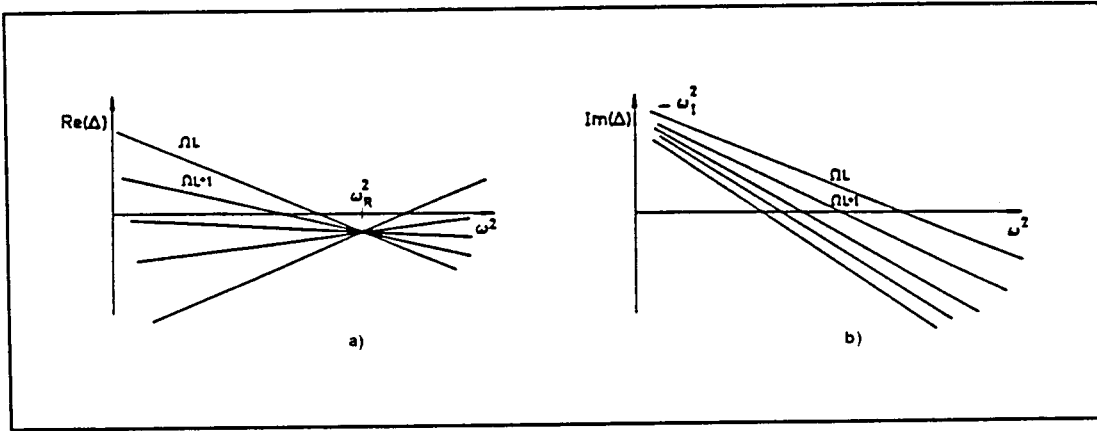


Figura 5.27 - Feixes de rectas em correspondência com a) $Re(\Delta)$ e b) $Im(\Delta)$, para um conjunto de frequências Ω_i fixas na zona de ressonância em estudo.

Note-se que, se a constante modal for real, $B = 0$, as rectas $Re(\Delta)$ intersector-se-ão sobre a frequência de ressonância w_k , enquanto que as rectas $Im(\Delta)$ serão paralelas.

No caso geral, os declives m_R e m_I poderão escrever-se na forma

$$m_R = n_R \Omega^2 + d_R \quad ; \quad m_I = n_I \Omega^2 + d_I \quad (5.54)$$

onde

$$n_R = \frac{A}{A^2 + B^2}$$

$$d_R = -w_k^2 \cdot \frac{A + B \eta_k}{A^2 + B^2}$$

$$n_I = \frac{-B}{A^2 + B^2}$$

$$d_I = -w_k^2 \frac{A \eta_k - B}{A^2 + B^2} \quad (5.55)$$

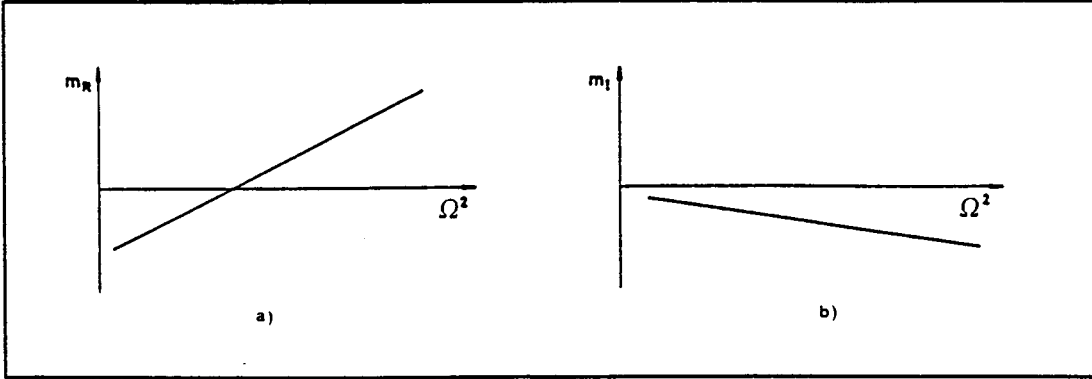


Figura 5.28 - Variação dos declives a) m_R e b) m_I das rectas (5.51) com Ω^2 .

A combinação das equações (5.55) permite extrair os parâmetros modais, que passam a ser definidos por

$$\begin{aligned}\eta_k &= \frac{q - p}{1 + pq} \\ w_k^2 &= \frac{-1}{1 - p\eta_k} \cdot \frac{d_R}{n_R} \\ A &= \frac{1}{(1 + p^2)n_R} \\ B &= -pA\end{aligned}\tag{5.56}$$

onde $p = n_I/n_R$ e $q = d_I/d_R$.

Resumindo, a aplicação do método de Dobson à identificação dos parâmetros dinâmicos associados a cada modo de vibração do sistema poderá processar-se nas seguintes etapas:

- 1 - Selecciona-se um conjunto de n pontos da FRF, numa banda de frequências localizada em torno da ressonância em estudo;
- 2 - Para cada um dos pontos seleccionados, em correspondência com a frequência Ω_L , constroi-se a função $\Delta = (w^2 - \Omega_L^2)/(\alpha(w) - \alpha(\Omega_L))$, assumindo w os valores de todas as restantes frequências seleccionadas, Ω_m ($m = 1, \dots, n$, com $m \neq L$);
- 3 - Usando o método dos mínimos quadrados, ajusta-se a parte real e a parte imaginária da função Δ pelas rectas (5.51), cujos coeficientes são definidos, para a hipótese de se minimizarem distâncias segundo a direcção das ordenadas, por

$$m_R = \frac{\sum_{m=1}^n \Omega_m^2 \operatorname{Re}[\Delta(\Omega_m)] - \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \Omega_m^2 \sum_{m=1}^n \operatorname{Re}[\Delta(\Omega_m)]}{\sum_{m=1}^n \Omega_m^4 - \frac{1}{n} \left(\sum_{m=1}^n \Omega_m^2 \right)^2}$$

$$c_R = \left(\sum_{m=1}^n \operatorname{Re}[\Delta(\Omega_m)] - m_R \cdot \sum_{m=1}^n \Omega_m^2 \right) / n \quad (5.57)$$

$$m_I = \frac{\sum_{m=1}^n \Omega_m^2 \operatorname{Im}[\Delta(\Omega_m)] - \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \Omega_m^2 \cdot \sum_{m=1}^n \operatorname{Im}[\Delta(\Omega_m)]}{\sum_{m=1}^n \Omega_m^4 - \frac{1}{n} \left(\sum_{m=1}^n \Omega_m^2 \right)^2}$$

$$c_I = \left(\sum_{m=1}^n \operatorname{Im}[\Delta(\Omega_m)] - m_I \sum_{m=1}^n \Omega_m^2 \right) / n$$

em que $m \neq L$, podendo em alternativa recorrer-se a expressões do mesmo tipo, resultantes da minimização da distância à recta segundo a direcção horizontal.

Como a regressão linear não exige um tempo de cálculo muito elevado, propõe-se que se obtenha inicialmente o coeficiente de correlação linear associado a cada tipo de ajuste mencionado, escolhendo-se aquele a que corresponda um maior valor deste factor;

- 4 - Com o conjunto dos parâmetros $(m_R)_L$ e $(m_I)_L$, obtidos para $w = \Omega_L$, com $L = 1, 2, \dots, n$, pode então proceder-se a uma nova regressão linear, de forma a obter os coeficientes n_R, d_R, n_I e d_I das rectas (5.54), através dos quais os parâmetros modais são finalmente estimados, com base nas equações (5.56).

O método acima descrito serviu de base ao desenvolvimento de um programa de cálculo automático, designado por DOBSON, cuja apresentação é realizada no Capítulo 6 deste trabalho. Verificou-se que, para além de reduzir alguns dos inconvenientes já mencionados introduzidos pelos métodos da amplitude de pico e do "circle fit", este método permite a obtenção de alguns indicadores de interesse relativos a certas características do ajuste e do sistema, como por exemplo à existência de modos muito próximos (pela presença de uma forte não-linearidade nas curvas) e à largura da banda de frequências escolhida (à medida que aumenta a distância à ressonância, aumenta o contributo dos modos não ressonantes e, consequentemente, o desvio em relação à recta ajustada dos pontos da FRF).

Tal como nos métodos até aqui descritos, Dobson propõe a eliminação progressiva na FRF medida do contributo dos modos já ajustados, com vista a uma redução dos resíduos

associados aos modos não ressonantes. Adicionalmente, propõe a análise em simultâneo de várias funções de transferência, como forma de obter estimativas globais dos parâmetros do sistema.

5.3.1.5 - Método de Mau

Este método foi apresentado recentemente [95] e é designado também por "Single-Mode Sweep Method", tendo sido desenvolvido com a finalidade de obter estimativas iniciais dos parâmetros modais de uma estrutura, a fornecer como entrada num método de N graus de liberdade.

Em geral, os métodos de N graus de liberdade que aparecem referenciados na literatura da especialidade degeneram em processos iterativos cujo resultado é obtido através de técnicas de programação matemática, dependendo fortemente das estimativas utilizadas como solução inicial.

Pretende-se, naturalmente, que essas estimativas iniciais estejam tão próximas quanto possível da solução do problema, exigindo-se contudo que sejam obtidas de forma rápida e simples, envolvendo o menor esforço computacional possível. Isto leva a que normalmente se recorra ao *método da amplitude de pico*, ao *método do "circle fit"*, ou então a um *método inverso*, do tipo do *método de Dobson*.

Como se sabe, o *método da amplitude de pico* só conduz a resultados aceitáveis perante um determinado número de condições (v. 5.3.1.1) que não se verificam na generalidade das estruturas analisadas, em consequência da interferência modal.

A utilização do *método do "circle fit"* ou do *método de Dobson*, baseados numa aproximação de nível superior ao *método da amplitude de pico*, conduz, como já foi referido, a resultados mais rigorosos, mesmo quando existem modos de vibração próximos.

No entanto, e para além de substancialmente mais morosa, a sua aplicação pode não ser possível, como frequentemente acontece na identificação de parâmetros modais em barragens, onde o sistema de excitação é constituído por um vibrador mecânico ou hidráulico, não sendo fácil a medição da excitação ou da sua fase. Nesta situação, casos há em que apenas se estima a amplitude da FRF através do cociente entre a amplitude da resposta medida e a amplitude da força (calculada de forma aproximada, com base nas características do vibrador).

Pelo facto de se basear exclusivamente nas estimativas da amplitude da FRF, de a sua implementação e aplicação ser extremamente simples e rápida e ainda por proporcionar

estimativas substancialmente superiores ao *método da amplitude de pico* (ainda que inferiores às obtidas através dos *métodos do "circle fit"* e de *Dobson*), entendeu-se ser interessante incluir neste trabalho a apresentação do método de Mau, que se passa a descrever.

Tal como acontece com o *método da amplitude de pico*, a hipótese fundamental em que se baseia este método é a de assumir que a contribuição dos modos não-ressonantes na vizinhança de cada frequência natural do sistema w_k é nula, sendo então a resposta deste a uma força sinusoidal de frequência w_L aproximada, para um intervalo de frequências centrado em w_k , pela resposta de um sistema equivalente de um grau de liberdade, com amplitude A_L dada por

$$A_L = \frac{P_k}{\sqrt{(w_k^2 - w_L^2)^2 + (2\xi_k w_k w_L)^2}} \quad (5.58)$$

onde P_k assume o significado de um factor de participação modal.

O objectivo é então determinar os parâmetros w_k , ξ_k e P_k a partir de um conjunto de n valores da amplitude $\bar{A}_L$ medidos em correspondência com frequências de excitação w_L ($L = 1, 2, \dots, n$).

Utilizando mínimos quadrados, seria natural definir o erro quadrático por

$$E = \sum_{L=1}^n (A_L - \bar{A}_L)^2 \quad (5.59)$$

o que no entanto levaria a um sistema não-linear de equações nas incógnitas w_k , ξ_k e P_k .

Para contornar esta dificuldade, Mau propôs um rearranjo de (5.58) na forma

$$-w_L^4 = w_k^4 + w_L^2(4\xi_k^2 w_k^2 - 2w_k^2) - \frac{1}{A_L^2} \cdot P_k^2 \quad (5.60)$$

e, definindo um novo conjunto de parâmetros α_1 , α_2 e α_3 por

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= w_k^4 \\ \alpha_2 &= 4\xi_k^2 w_k^2 - 2w_k^2 \\ \alpha_3 &= P_k^2 \end{aligned} \quad (5.61)$$

estabeleceu um novo critério para o erro quadrático E_1 , através de

$$E_1 = \sum_{L=1}^n (-w_L^4 + \bar{w}_L^4)^2 \quad (5.62)$$

sendo $\bar{w}_L$ o valor da frequência associado ao valor medido da amplitude da resposta $\bar{A}_L$.

A minimização deste erro conduz à solução do seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} n & \sum w_L^2 & -\sum \frac{1}{\bar{A}_L^2} \\ \sum w_L^2 & \sum w_L^4 & -\sum \frac{w_L^2}{\bar{A}_L^2} \\ -\sum \frac{1}{\bar{A}_L^2} & -\sum \frac{w_L^2}{\bar{A}_L^2} & \sum \frac{1}{\bar{A}_L^4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sum w_L^4 \\ -\sum w_L^6 \\ \sum \frac{w_L^4}{\bar{A}_L^2} \end{Bmatrix} \quad (5.63)$$

de que resulta, finalmente,

$$\begin{aligned} w_k &= \sqrt[4]{\alpha_1} \\ \xi_k &= \sqrt{(\alpha_2 + 2w_k^2)} / (2w_k) \\ P_k &= \sqrt{\alpha_3} \end{aligned} \quad (5.64)$$

Embora o número mínimo de pontos a utilizar nos somatórios que intervêm em (5.63) seja de 3, considera-se que os melhores resultados são obtidos com 5 pontos [95].

Mau considerou ainda a possibilidade de analisar simultaneamente duas ou mais FRF, obtendo-se assim estimativas globais dos parâmetros identificados.

Note-se que, se forem analisadas duas FRF em simultâneo, uma incógnita adicional $\alpha_4 = Q_k^2$ surge na definição do erro quadrático, conduzindo a minimização deste erro a um sistema de 4 equações lineares a 4 incógnitas, em que Q_k tem o significado de um factor de participação modal em correspondência com o modo de vibração de ordem k da segunda FRF analisada.

Uma última modificação que se sugere é a regeneração da FRF medida após identificação de cada conjunto de parâmetros modais, eliminando a contribuição dos modos de vibração já identificados, com a finalidade de reduzir a interferência modal.

Desenvolveu-se com base no método de Mau acima descrito o programa de cálculo automático SMSMET, cuja descrição é apresentada no Capítulo 6 deste trabalho, tendo-se obtido na sua aplicação a diversas situações práticas, resultados superiores aos provenientes da utilização do método da amplitude de pico. Verificou-se igualmente que as estimativas globais, obtidas pela identificação em simultâneo de 2 FRF são genericamente muito inferiores às estimativas locais.

5.3.2 - Métodos de N graus de liberdade

Na prática, uma grande parte das estruturas analisadas no âmbito de problemas de Engenharia Civil e Mecânica constituem sistemas bastante complexos que não preenchem as condições enumeradas ao longo da secção 5.3.1, necessárias para que sejam obtidos bons resultados quando a estimação dos respectivos parâmetros modais for realizada através de métodos de 1 grau de liberdade.

Efectivamente, é corrente encontrar, particularmente na análise de componentes de máquinas, estruturas com amortecimentos muito baixos e cujas FRF medidas apresentam, consequentemente, uma fraca definição na vizinhança das frequências próprias, susceptível de conduzir a resultados menos precisos caso se recorra a métodos de 1 grau de liberdade para a identificação dos seus parâmetros dinâmicos.

Igualmente vulgar é encontrar estruturas com frequências naturais muito próximas, ou com coeficientes de amortecimento relativamente elevados, gerando-se uma interferência modal que se traduz numa contribuição significativa dos modos não-ressonantes para a resposta na vizinhança de uma frequência própria, invalidando as hipóteses em que assentam os algoritmos de 1 grau de liberdade (SDOF).

Torna-se assim necessário recorrer a algoritmos mais potentes que realizem o ajuste da FRF completa, procedendo a uma extracção em simultâneo dos parâmetros dinâmicos em correspondência com todos os modos de vibração intervenientes. Tal como acontece com os métodos SDOF, as técnicas de N graus de liberdade (MDOF) baseiam-se normalmente na minimização de um erro quadrático através da técnica de mínimos quadrados, sendo no entanto utilizada na construção da função de erro a expressão completa da FRF. Deste facto resulta que a extracção dos parâmetros modais envolve a resolução de um sistema de equações não-lineares, efectuada através de um processo iterativo, ou em apenas uma etapa, quando se proceda à linearização dessas equações.

Nesta secção começa por se fazer referência a um conjunto de métodos simplificados de N graus de liberdade, que constituem meras extensões dos métodos de 1 grau de liberdade já descritos, uma das quais foi implementada no programa de cálculo automático FITCIR já mencionado, descrevendo-se ainda um método de N graus de liberdade mais geral, baseado na descrição da FRF através do conjunto de polinómios ortogonais de Forsythe. Esta potente técnica de identificação está na base de um programa de cálculo automático [59] que foi utilizado numa das aplicações descritas no Capítulo 7.

5.3.2.1 - Métodos simplificados

Os métodos de 1 grau de liberdade descritos ao longo da secção 5.3.1 procedem ao ajuste da função de resposta em frequência medida pela FRF de um sistema de 1 grau de liberdade equivalente na vizinhança de cada ressonância, desprezando ou admitindo ser constante o valor do somatório indicado no segundo membro da equação (5.30) através da qual esta função vem definida. Dois tipos de modificações podem ser introduzidos na sequência da aplicação de um algoritmo de 1 grau de liberdade, com a finalidade de simplificar a contabilização da contribuição dos modos não-ressonantes na vizinhança de cada frequência própria analisada. A primeira destas alterações foi já mencionada em 5.3.1 e consiste em, após a identificação dos parâmetros modais em correspondência com o modo $k - 1$, construir uma nova função de transferência fictícia, $\bar{H}_{ij}$, definida por

$$\bar{H}_{ij}(w) = H_{ij}(w) - \sum_{n=1}^{k-1} \frac{(\phi_i)_n \cdot (\phi_j)_n}{(w_n^2 - w^2) + i(2\xi_n w_n w)} \quad (5.65)$$

onde intervêm, no segundo termo, os parâmetros modais já identificados. Atendendo a (5.30), mas utilizando agora, por simplicidade, a definição da *Receptância*, tem-se

$$\bar{H}_{ij}(w) = \frac{(\phi_i)_k \cdot (\phi_j)_k}{(w_k^2 - w^2) + i(2\xi_k w_k w)} + \sum_{n=k+1}^N \frac{(\phi_i)_n \cdot (\phi_j)_n}{(w_n^2 - w^2) + i(2\xi_n w_n w)} \quad (5.66)$$

A identificação dos parâmetros em correspondência com o modo de vibração k pode agora realizar-se através de (5.66), podendo verificar-se que, com o aumento de k , a contribuição residual dos modos não-ressonantes, dada pelo segundo termo dessa expressão, vai baixando, reduzindo-se assim a interferência modal e melhorando as estimativas dos parâmetros identificados.

Como os parâmetros extraídos para os primeiros modos identificados estão sujeitos a maiores erros, haverá vantagem em identificar inicialmente os modos de vibração a que estejam associadas contribuições mais significativas para a função de resposta em frequência.

Em alternativa, e eventualmente como complemento deste procedimento, a identificação pode ser realizada através de um processo iterativo onde são utilizados, como estimativas iniciais, os parâmetros modais extraídos através de um algoritmo de um grau de liberdade em correspondência com os modos de vibração presentes na FRF. Neste processo procede-se à estimativa do segundo termo de (5.65) com os parâmetros da iteração anterior, mas estendendo agora o somatório às $N-1$ contribuições dos modos não-ressonantes o que permite melhorar as estimativas em correspondência com o modo de vibração k , já que a função $\bar{H}_{ij}$ passa a representar aproximadamente a FRF de um sistema de 1 grau de liberdade de parâmetros iguais aos deste modo.

Considera-se que o processo iterativo converge quando a variação percentual dos parâmetros identificados relativamente à iteração anterior não excede uma determinada tolerância.

5.3.2.2 - Método RFP

O método aqui designado por RFP, que na literatura de origem anglo-americana recebe o nome de Rational Fraction Polynomial Method, constitui o suporte de uma grande parte dos "packages" comercialmente disponíveis, baseando-se na aplicação do algoritmo de minimização por mínimos quadrados a uma função de erro onde intervém a FRF expressa através de um cociente entre dois polinómios. Para evitar os problemas de mau condicionamento da matriz de coeficientes do sistema de equações que resulta da minimização do erro quadrático, são utilizados polinómios ortogonais (no caso presente, os polinómios de Forsythe), o que conduz a excelentes resultados, tanto em precisão, como em velocidade de cálculo. A descrição sumária que neste trabalho se apresenta constitui o fundamento teórico de um programa de cálculo automático desenvolvido por Man-Cheol-Han [59] (MODHAN).

Começando com a construção da função de erro e_n , tem-se neste caso que, para uma frequência genérica w_n , e_n é dada pela diferença entre o valor teórico, $H_{ij}(w_n)$, da FRF expressa na sua forma mais geral (eq. (5.2)) e o correspondente valor medido, H_n

$$e_n = H_{ij}(w_n) - H_n \quad (5.67)$$

Por outro lado, é possível exprimir $H_{ij}(w)$ através do cociente entre dois polinómios [91], na forma geral

$$H_{ij}(w) = \frac{\sum_{l=0}^{2N-1} a_l (iw)^l}{\sum_{l=0}^{2N} b_l (iw)^l} \quad (5.68)$$

ou então, através de um conjunto de polinómios ortogonais $\phi_l(w)$ e $\theta_l(w)$, por

$$H_{ij}(w) = \frac{N(w)}{D(w)} = \frac{\sum_{l=0}^{2N-1} c_l \phi_l(w)}{\sum_{l=0}^{2N} d_l \theta_l(w)} \quad (5.69)$$

sendo N o número de graus de liberdade do sistema analisado e designando-se por $N(w)$ e $D(w)$ os polinómios do numerador e denominador, respectivamente.

De entre as escolhas possíveis de polinómios ortogonais, optou-se pelos polinómios de Forsythe [52], definidos através da seguinte fórmula de recorrência

$$\begin{aligned}\phi_0(w) &= 1/D_0 \\ \phi_1(w) &= [(w - u_1)\phi_0(w)]/D_1 \\ \phi_2(w) &= [(w - u_2)\phi_1(w) - v_1\phi_0(w)]/D_2 \\ &\vdots \\ \phi_l(w) &= [(w - u_l)\phi_{l-1}(w) - v_{l-1}\phi_{l-2}(w)]/D_l\end{aligned}\tag{5.70}$$

em que

$$\begin{aligned}u_l &= \frac{\sum_{n=1}^L w_n [\phi_{l-1}(w_n)]^2 W_n^2}{D_{l-1}} \\ v_{l-1} &= \frac{\sum_{n=1}^L w_n \phi_{l-1}(w_n) \phi_{l-2}(w_n) W_n^2}{D_{l-2}} \\ D_l &= \sum_{n=1}^L [\phi_l(w_n)]^2 W_n^2\end{aligned}$$

sendo L o número de pontos da FRF envolvidos no ajuste e W_n^2 uma função de ponderação, cujo significado e importância serão referidos adiante.

Os coeficientes u_l e v_{l-1} dos polinómios de Forsythe são determinados de forma a satisfazer a seguinte condição de ortogonalidade

$$\sum_{n=1}^L W_n^2 \phi_l(w_n) \phi_j(w_n) = \begin{cases} 1 & , \quad l = j \\ 0 & , \quad l \neq j \end{cases}\tag{5.71}$$

A substituição de (5.69) em (5.67) conduz a um problema de mínimos quadrados não-linear, em virtude de parte das incógnitas do problema aparecerem no polinómio do denominador. Por outro lado, sabe-se que estatisticamente a precisão associada a cada risca da FRF é variável, devendo este aspecto ser contabilizado na definição da função de erro dando um peso menor aos valores espectrais onde maiores erros existam. Han [59] propôs a ponderação através do inverso do erro aleatório normalizado, $1/\epsilon_r(w)$, do estimador

utilizado na determinação da amplitude da FRF, dado por (4.108) (para os estimadores H_1 e H_2) e dependente da função de coerência. Em alternativa, propôs também a ponderação de e_n pela própria função de coerência.

Define-se assim uma nova função de erro através de

$$e'_n = \frac{1}{(\epsilon_r)_n} W_n [N(w_n) - H_n D(w_n)] \quad (5.72)$$

em que W_n é uma função de ponderação destinada a aproximar o inverso do polinómio do denominador de (5.69), $W_n = 1/D(w_n)$. Como, no entanto, os coeficientes do polinómio $D(w)$ não são conhecidos no início do ajuste, o problema será resolvido iterativamente, tomando para solução inicial uma constante, ou uma função construída a partir de um conjunto de estimativas primárias das frequências próprias e coeficientes de amortecimento.

Note-se desde já que a escolha dos polinómios ortogonais de Forsythe relativamente a outros conjuntos de polinómios como, por exemplo, os polinómios ortogonais de Chebyshev, Legendre ou Hermite, apresenta duas vantagens. A primeira vantagem está em que a condição de ortogonalidade (5.71) pode ser verificada com uma função de ponderação W_n arbitrariamente escolhida. Pelo contrário, as funções de ponderação a utilizar na presença de outro tipo de polinómios ortogonais terão de ser as específicas desses polinómios. Por outro lado, e contrariamente ao que se passa com outros tipos de polinómios, não se perde a ortogonalidade quando os pontos utilizados no ajuste da FRF não se encontram igualmente espaçados.

Substituindo (5.69) em (5.72), definindo um vector $\underline{e}'$ de componentes e'_n iguais ao erro na frequência w_n e designando simplifcadamente $(\epsilon_r)_n$ por ϵ_n , vem

$$\underline{e}' = \{e_1, e_2, \dots, e_L\}^T = \underline{P}\underline{c} - \underline{Q}\underline{d} - \underline{r} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{W_1}{\epsilon_1} \phi_0(w_1) & \frac{W_1}{\epsilon_1} \phi_1(w_1) & \dots & \frac{W_1}{\epsilon_1} \phi_{2N-1}(w_1) \\ \frac{W_2}{\epsilon_2} \phi_0(w_2) & \frac{W_2}{\epsilon_2} \phi_1(w_2) & \dots & \frac{W_2}{\epsilon_2} \phi_{2N-1}(w_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{W_L}{\epsilon_L} \phi_0(w_L) & \frac{W_L}{\epsilon_L} \phi_1(w_L) & \dots & \frac{W_L}{\epsilon_L} \phi_{2N-1}(w_L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{2N-1} \end{Bmatrix} -$$

$$\begin{aligned}
 & - \begin{bmatrix} \frac{W_1}{\epsilon_1} H_1 \theta_0(w_1) & \frac{W_1}{\epsilon_1} H_1 \theta_1(w_1) & \dots & \frac{W_1}{\epsilon_1} H_1 \theta_{2N-1}(w_1) \\ \frac{W_2}{\epsilon_2} H_2 \theta_0(w_2) & \frac{W_2}{\epsilon_2} H_2 \theta_1(w_2) & \dots & \frac{W_2}{\epsilon_2} H_2 \theta_{2N-1}(w_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{W_L}{\epsilon_L} H_L \theta_0(w_L) & \frac{W_L}{\epsilon_L} H_L \theta_1(w_L) & \dots & \frac{W_L}{\epsilon_L} H_L \theta_{2N-1}(w_L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{2N-1} \end{Bmatrix} - \\
 & - \begin{Bmatrix} \frac{W_1}{\epsilon_1} H_1 \theta_{2N}(w_1) \\ \frac{W_2}{\epsilon_2} H_2 \theta_{2N}(w_2) \\ \vdots \\ \frac{W_L}{\epsilon_L} H_L \theta_{2N}(w_L) \end{Bmatrix} \quad (5.73)
 \end{aligned}$$

contendo os vectores $\underline{c}$ e $\underline{d}$ os coeficientes c_n e d_n dos polinómios do numerador e denominador de $H_{ij}(w)$, respectivamente. As componentes que constituem o vector $\underline{r}$ resultaram de fazer unitário o coeficiente d_{2N} do polinómio característico do denominador, o que, naturalmente, não tem consequência na definição de H_{ij} , visto que é sempre possível dividir as expressões do numerador e denominador por uma constante d_{2N} qualquer.

Pode então construir-se finalmente a função a minimizar, dada por

$$E = (\underline{e}')^T \cdot \underline{e}' = [(\underline{P}\underline{c} - \underline{Q}\underline{d} - \underline{r})^*]^T (\underline{P}\underline{c} - \underline{Q}\underline{d} - \underline{r}) \quad (5.74)$$

onde os símbolos '*' e 'T' indicam 'conjugado de' e 'transposto de', respectivamente.

Impondo o anulamento das derivadas parciais de E em ordem às componentes c_n e d_n dos polinómios ortogonais,

$$\frac{\partial E}{\partial c_n} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial E}{\partial d_n} = 0$$

obtém-se um sistema de equações lineares do tipo

$$\begin{bmatrix} 2\text{Re}[(\underline{P}^*)^T \underline{P}] & -2\text{Re}[(\underline{P}^*)^T \underline{Q}] \\ -2\text{Re}[(\underline{Q}^*)^T \underline{P}] & 2\text{Re}[(\underline{Q}^*)^T \underline{Q}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{c} \\ \underline{d} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2\text{Re}[(\underline{P}^*)^T \underline{r}] \\ -2\text{Re}[(\underline{Q}^*)^T \underline{r}] \end{Bmatrix} \quad (5.75)$$

onde

$$(\underline{P}^*)^T \underline{P} = \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^L \left(\frac{W_n}{\epsilon_n} \right)^2 \phi_0^*(w_n) \phi_0(w_n) & \sum_{n=1}^L \left(\frac{W_n}{\epsilon_n} \right)^2 \phi_0^*(w_n) \phi_1(w_n) & \dots & \sum_{n=1}^L \left(\frac{W_n}{\epsilon_n} \right)^2 \phi_0^*(w_n) \phi_{2N-1}(w_n) \\ \sum_{n=1}^L \left(\frac{W_n}{\epsilon_n} \right)^2 \phi_1^*(w_n) \phi_0(w_n) & \sum_{n=1}^L \left(\frac{W_n}{\epsilon_n} \right)^2 \phi_1^*(w_n) \phi_1(w_n) & \dots & \sum_{n=1}^L \left(\frac{W_n}{\epsilon_n} \right)^2 \phi_1^*(w_n) \phi_{2N-1}(w_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{n=1}^L \left(\frac{W_n}{\epsilon_n} \right)^2 \phi_{2N-1}^*(w_n) \phi_0(w_n) & \sum_{n=1}^L \left(\frac{W_n}{\epsilon_n} \right)^2 \phi_{2N-1}^*(w_n) \phi_1(w_n) & \dots & \sum_{n=1}^L \left(\frac{W_n}{\epsilon_n} \right)^2 \phi_{2N-1}^*(w_n) \phi_{2N-1}(w_n) \end{bmatrix}$$

$$(\underline{Q}^*)^T \underline{Q} = \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^L \left(\frac{W_n}{\epsilon_n} \right)^2 H_n^2 \theta_0^*(w_n) \theta_0(w_n) & \sum_{n=1}^L \left(\frac{W_n}{\epsilon_n} \right)^2 H_n^2 \theta_0^*(w_n) \theta_1(w_n) & \dots & \sum_{n=1}^L \left(\frac{W_n}{\epsilon_n} \right)^2 H_n^2 \theta_0^*(w_n) \theta_{2N-1}(w_n) \\ \sum_{n=1}^L \left(\frac{W_n}{\epsilon_n} \right)^2 H_n^2 \theta_1^*(w_n) \theta_0(w_n) & \sum_{n=1}^L \left(\frac{W_n}{\epsilon_n} \right)^2 H_n^2 \theta_1^*(w_n) \theta_1(w_n) & \dots & \sum_{n=1}^L \left(\frac{W_n}{\epsilon_n} \right)^2 H_n^2 \theta_1^*(w_n) \theta_{2N-1}(w_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{n=1}^L \left(\frac{W_n}{\epsilon_n} \right)^2 H_n^2 \theta_{2N-1}^*(w_n) \theta_0(w_n) & \sum_{n=1}^L \left(\frac{W_n}{\epsilon_n} \right)^2 H_n^2 \theta_{2N-1}^*(w_n) \theta_1(w_n) & \dots & \sum_{n=1}^L \left(\frac{W_n}{\epsilon_n} \right)^2 H_n^2 \theta_{2N-1}^*(w_n) \theta_{2N-1}(w_n) \end{bmatrix}$$

$$(\underline{P}^*)^T \underline{Q} = \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^L \left(\frac{W_n}{\epsilon_n} \right)^2 H_n \phi_0^*(w_n) \theta_0(w_n) & \sum_{n=1}^L \left(\frac{W_n}{\epsilon_n} \right)^2 H_n \phi_0^*(w_n) \theta_1(w_n) & \dots & \sum_{n=1}^L \left(\frac{W_n}{\epsilon_n} \right)^2 H_n \phi_0^*(w_n) \theta_{2N-1}(w_n) \\ \sum_{n=1}^L \left(\frac{W_n}{\epsilon_n} \right)^2 H_n \phi_1^*(w_n) \theta_0(w_n) & \sum_{n=1}^L \left(\frac{W_n}{\epsilon_n} \right)^2 H_n \phi_1^*(w_n) \theta_1(w_n) & \dots & \sum_{n=1}^L \left(\frac{W_n}{\epsilon_n} \right)^2 H_n \phi_1^*(w_n) \theta_{2N-1}(w_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{n=1}^L \left(\frac{W_n}{\epsilon_n} \right)^2 H_n \phi_{2N-1}^*(w_n) \theta_0(w_n) & \sum_{n=1}^L \left(\frac{W_n}{\epsilon_n} \right)^2 H_n \phi_{2N-1}^*(w_n) \theta_1(w_n) & \dots & \sum_{n=1}^L \left(\frac{W_n}{\epsilon_n} \right)^2 H_n \phi_{2N-1}^*(w_n) \theta_{2N-1}(w_n) \end{bmatrix}$$

$$(\underline{Q}^*)^T \underline{P} = \{[(\underline{P}^*)^T \underline{Q}]\}^T$$

$$(\underline{P}^*)^T \underline{r} = \left\{ \begin{array}{c} \sum_{n=1}^L \left(\frac{W_n}{\epsilon_n} \right)^2 H_n \phi_0^*(w_n) \theta_{2N}(w_n) \\ \sum_{n=1}^L \left(\frac{W_n}{\epsilon_n} \right)^2 H_n \phi_1^*(w_n) \theta_{2N}(w_n) \\ \vdots \\ \sum_{n=1}^L \left(\frac{W_n}{\epsilon_n} \right)^2 H_n \phi_{2N-1}^*(w_n) \theta_{2N}(w_n) \end{array} \right\}$$

e, finalmente

$$(\underline{Q}^*)^T \underline{r} = \left\{ \begin{array}{c} \sum_{n=1}^L \left(\frac{W_n}{\epsilon_n} \right)^2 H_n^2 \theta_0^*(w_n) \theta_{2N}(w_n) \\ \sum_{n=1}^L \left(\frac{W_n}{\epsilon_n} \right)^2 H_n^2 \theta_1^*(w_n) \theta_{2N}(w_n) \\ \vdots \\ \sum_{n=1}^L \left(\frac{W_n}{\epsilon_n} \right)^2 H_n^2 \theta_{2N-1}^*(w_n) \theta_{2N}(w_n) \end{array} \right\}$$

Atendendo à ortogonalidade dos polinômios ϕ_i e θ_i , as sub-matrizes da diagonal da equação (5.75) são iguais à matriz identidade $\underline{I}$, sendo também $(\underline{Q}^*)^T \underline{r} = \underline{0}$. Deste modo, (5.75) passa a escrever-se na forma

$$\begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{X} \\ \underline{X}^T & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{c} \\ \underline{d} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{g} \\ \underline{0} \end{Bmatrix} \quad (5.76)$$

com

$$\underline{X} = -2Re[(\underline{P}^*)^T \underline{Q}]$$

e

$$\underline{g} = 2Re[(\underline{P}^*)^T \underline{r}]$$

o que permite concluir que os vectores $\underline{c}$ e $\underline{d}$ constituídos pelos coeficientes dos polinómios ortogonais $\phi_n(w)$ e $\theta_n(w)$ respeitam as equações

$$(\underline{I} - \underline{X}^T \underline{X}) \underline{d} = -\underline{X}^T \underline{g} \quad (5.77)$$

e

$$\underline{c} = \underline{g} - \underline{X} \underline{d} \quad (5.78)$$

Os coeficientes a_l e b_l dos polinómios em termos dos quais a FRF foi expressa na sua forma geral (5.68) podem então obter-se, bastando para tal ter em conta que

$$N(w) = \sum_{l=0}^{2N-1} a_l (iw)^l = \sum_{l=0}^{2N-1} c_l \phi_l(w) \quad (5.79)$$

Formando dois vectores $\underline{a}$ e $\underline{b}$ contendo as componentes a_l e b_l destes polinómios, é possível [59] provar que

$$\underline{c} = \underline{T}_{ac} \cdot \underline{a} \quad (5.80)$$

e

$$\underline{d} = \underline{T}_{bd} \cdot \underline{b} \quad (5.81)$$

sendo $\underline{T}_{ac}$ e $\underline{T}_{bd}$ matrizes triangulares superiores do tipo

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} r_0^0 & r_0^1 & r_0^2 & \dots & r_0^{2N} \\ 0 & r_1^1 & r_1^2 & \dots & r_1^{2N} \\ 0 & 0 & r_2^2 & \dots & r_2^{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r_{2N}^{2N} \end{bmatrix}$$

com coeficientes r_l^n dados por

$$r_l^n = \begin{cases} 0 & , \quad l < 0 \\ 0 & , \quad l > n \\ 1 & , \quad l = n \\ r_{l-1}^{n-1} - u_n r_l^{n-1} - v_{n-1} r_l^{n-2} & , \quad 0 \leq l \leq n \end{cases}$$

onde u_n e v_{n-1} são coeficientes obtidos na geração dos polinómios ortogonais de Forsythe.

O polinómio do denominador é utilizado agora na actualização da função de ponderação w_n e, portanto, do erro e'_n , definido por (5.72), num processo iterativo cuja convergência é atingida quando os parâmetros determinados sofrem uma variação entre duas iterações consecutivas que não excede uma tolerância previamente estabelecida, critério que pode ser complementado com a fixação de um número máximo de iterações.

Os coeficientes dos vectores $\underline{\alpha}$ e $\underline{b}$ permitem, finalmente, a extracção dos parâmetros modais. É possível verificar [91] que as raízes (também designadas por pólos da FRF) do polinómio do denominador de (5.68) aparecem em pares de complexos conjugados e se relacionam directamente com as frequências de ressonância e coeficientes de amortecimento, sendo

$$\sum_{l=0}^{2N} b_l (iw)^l = \sum_{k=0}^N (iw - \alpha_k)(iw - \alpha_k^*) \quad (5.82)$$

em que $\alpha_k = -\xi_k w_k + iw_k \sqrt{1 - \xi_k^2}$.

Factorizando o denominador de (5.68), $H_{ij}(w)$ passa a escrever-se através do somatório

$$H_{ij}(w) = \sum_{k=0}^N \left[\frac{A_k}{(iw - \alpha_k)} + \frac{A_k^*}{(iw - \alpha_k^*)} \right] \quad (5.83)$$

cujas constantes complexas A_k , também designadas por *resíduos*, dependem dos coeficientes α_l do polinómio do numerador e se relacionam com as componentes dos modos amortecidos (complexos) em correspondência (v. (5.6)) através de

$$A_k = (\psi_i)_k (\psi_j)_k \quad (5.84)$$

A técnica acima descrita tem especial interesse na aplicação à estimação global de parâmetros modais da estrutura. Efectivamente, atendendo a que as frequências de ressonância e coeficientes de amortecimento são parâmetros próprios do sistema, os polinómios do denominador têm coeficientes iguais (igual vector $\underline{b}$), independentemente da

FRF a que estão associados. O mesmo não acontece com os coeficientes dos polinómios do numerador, expressos por $\underline{\alpha}$, cujas componentes reflectem o contributo específico de cada modo de vibração para a FRF a que respeitam.

Desta forma, a identificação de parâmetros modais com utilização simultânea de um conjunto de p FRF relativas a diferentes localizações dos pontos de medida, será realizada para um vector comum $\underline{b}$, a partir da substituição da expressão (5.81) em (5.77). Tem-se assim

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1(T_{bd})_1 \\ \underline{U}_2(T_{bd})_2 \\ \vdots \\ \underline{U}_p(T_{bd})_p \end{bmatrix} \underline{b} = \begin{Bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \vdots \\ \underline{v}_p \end{Bmatrix} \quad (5.85)$$

com

$$\begin{aligned} \underline{U}_m &= \underline{I} - \underline{X}_m^T \underline{X}_m \\ \underline{v}_m &= -\underline{X}_m^T \underline{g}_m \quad , \quad m = 1, 2, \dots, p \end{aligned}$$

podendo a solução deste conjunto de equações obter-se, por exemplo, por mínimos quadrados.

A aplicação de (5.78) e (5.80) a cada FRF individualmente permite agora estimar o vector $\underline{\alpha}$ dos parâmetros que lhe correspondem.

Refere-se ainda relativamente a este assunto que, embora seja de esperar uma melhor precisão dos parâmetros extraídos globalmente, em particular no que respeita a modos para os quais algumas FRF exibam nodos, nem sempre tal facto se verifica, particularmente quando, em consequência do acoplamento modal, as frequências naturais associadas a um dado modo de vibração assumam variações significativas entre as diversas FRF presentes.

Apresenta-se por fim uma última questão que se prende, não apenas com o método descrito nesta secção, mas com qualquer método de identificação de parâmetros modais em estruturas.

Qualquer sistema analisado em Dinâmica de Estruturas apresenta um número infinito de graus de liberdade. Na prática, as modelações numéricas e experimentais são realizadas mediante determinadas simplificações que permitem a análise de um sistema discreto equivalente com N graus de liberdade. Mas nem sempre interessa que a identificação experimental dos seus parâmetros incida sobre todos estes graus de liberdade, até porque o sistema excitador nem sempre tem capacidade para induzir todos os modos de vibração da estrutura simplificada.

Se, utilizando um qualquer dos métodos até agora descritos, se proceder apenas ao ajuste de alguns dos modos de vibração da estrutura, a reconstituição da FRF a partir dos parâmetros identificados afastar-se-á substancialmente da FRF medida para certas gamas de frequência, ainda que esses parâmetros coincidam com os reais (v. Figura 5.29), o que resulta da não contabilização da contribuição residual dos modos não identificados.

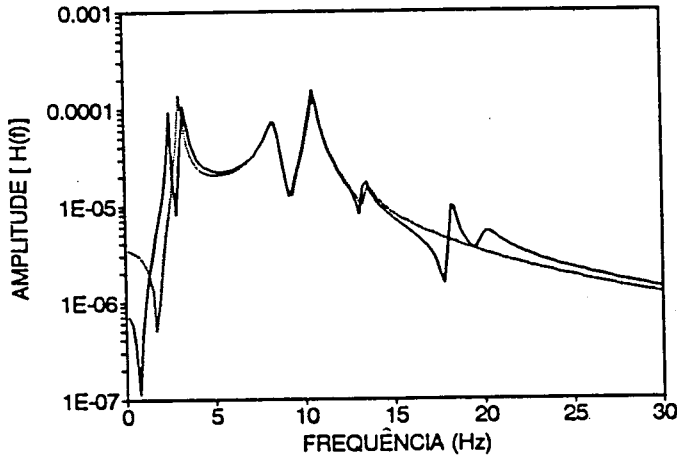


Figura 5.29 - FRF medida vs FRF reconstituída a partir de 4 dos 6 modos presentes.

A técnica usualmente empregue para contornar esta dificuldade consiste em adicionar à FRF reconstituída dois novos termos, R_K e R_M , designados respectivamente por *rigidez* e *massa residual*, cuja função é a de aproximar o contributo dos modos residuais associados a frequências acima ou abaixo da gama de frequências de interesse, respectivamente. Verifica-se também [43] que a rigidez residual é aproximadamente constante para cada receptância, enquanto que a massa residual varia inversamente com o quadrado da frequência, escrevendo-se usualmente que

$$R_K = \frac{1}{K_{ij}} \quad \text{e} \quad R_M = \frac{1}{w^2 M_{ij}} \quad (5.86)$$

As expressões gerais (5.1) e (5.2) de uma FRF podem assim aproximar-se por

$$H_{ij}(w) = \frac{1}{w^2 M_{ij}} + \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{(\phi_i)_k \cdot (\phi_j)_k}{(w_k^2 - w^2) + i(2\xi_k w_k w)} + \frac{1}{K_{ij}} \quad (5.87)$$

e

$$H_{ij}(w) = \frac{1}{w^2 M_{ij}} + \sum_{l=l_1}^{l_2} \left[\frac{(\psi_i)_l \cdot (\psi_j)_l}{(iw - \alpha_l)} + \frac{(\psi_i)_l^* \cdot (\psi_j)_l^*}{(iw - \alpha_l^*)} \right] + \frac{1}{K_{ij}} \quad (5.88)$$

onde k_1, k_2, l_1 e l_2 representam as ordens dos modos mais baixo e mais alto a identificar, para cada forma de exprimir $H_{ij}(w)$.

A determinação dos termos residuais é realizada escolhendo para cada FRF medida dois pontos nas suas extremidades localizados, tanto quanto possível, junto de anti-ressonâncias aí existentes. Com os valores medidos H_m e H_M e com os valores da FRF reconstituída nessas frequências, a obtenção de R_K e R_M resulta na solução de um sistema de 2 equações lineares a duas incógnitas, K_{ij} e M_{ij} .

Uma forma alternativa de contabilizar os termos residuais provenientes de modos localizados fora da banda de frequências analisada, consiste na identificação adicional de 2 modos de vibração artificiais localizados nas extremidades da FRF em estudo [59].

5.4 - VALIDAÇÃO DO MODELO TEÓRICO

A identificação de sistemas tem como um dos principais objectivos, em última análise, a validação de modelos teóricos utilizados em problemas de análise estrutural, consistindo essa operação, não apenas no estabelecimento de comparações entre os parâmetros obtidos experimentalmente e os utilizados em modelos teóricos, mas ainda no estudo das discrepâncias existentes e na introdução de modificações aos modelos utilizados.

O chamado problema da *modificação estrutural*, que nos últimos anos tem sido amplamente estudado, constitui um domínio que de alguma forma excede os objectivos inicialmente propostos neste trabalho, razão por que não será aqui abordado.

A comparação entre os resultados experimentais e os resultados do modelo teórico pode, em princípio, ser realizada a três níveis diferentes:

- através da comparação das respostas dinâmicas;
- através da comparação de modelos modais, compreendendo a matriz das frequências de vibração e coeficientes de amortecimento e a matriz dos modos de vibração;
- através da comparação dos modelos espaciais, envolvendo a matriz de massa e a matriz de rigidez da estrutura.

a) Comparação da resposta dinâmica experimental vs teórica:

Atendendo a que a resposta dinâmica pode ser traduzida através de um conjunto de FRF da estrutura, a via mais simples para proceder a uma comparação entre o modelo teórico

e o modelo experimental consiste em sobrepor às FRF ajustadas usando uma das técnicas descritas ao longo desta secção, as FRF teóricas, obtidas do modelo teórico de elementos finitos, por exemplo, tomando como referência os diversos pontos utilizados na excitação e na medição da resposta estrutural e incluindo os coeficientes de amortecimento medidos.

Por este processo é possível identificar desvios sistemáticos provenientes de erros do modelo teórico, ou desvios aleatórios, mais ou menos significativos, evidenciando os erros normais decorrentes do processo de medição, ou um elevado nível de ruído, associado a insuficiente excitação da estrutura.

Surgem no entanto algumas dificuldades na comparação, em especial quando a FRF reconstituída a partir dos parâmetros modais identificados englobe um número de modos de vibração insuficiente face ao número de modos presente numa determinada banda de frequências de interesse, situação agravada quando existe um forte acoplamento modal. Outro aspecto que importa tomar em consideração é o facto de que nem sempre os pontos de medição e de aplicação da excitação coincidem exactamente com nós da malha de elementos finitos utilizada, facto que pode ser responsável por alguma discrepância verificada entre a FRF teórica e a FRF ajustada com base nos parâmetros medidos.

Na prática, o reduzido número de modos de vibração identificados e os consideráveis efeitos residuais dos modos de vibração associados a frequências exteriores à gama de interesse tornam frequentemente difícil a comparação entre as FRF experimentais e teóricas da estrutura.

b) Comparação do modelo modal experimental vs teórico:

É este o tipo mais comum de comparação, tendo a sua utilização especial vantagem quando é muito pequeno o número de modos de vibração identificados.

Note-se que, teoricamente, um modelo modal de uma estrutura poderá ser caracterizado por apenas uma frequência de vibração, um coeficiente de amortecimento e um modo de vibração, o que claramente simplifica o problema. É no entanto fundamental ter presente a necessidade de utilizar um número suficiente de pontos na definição do modo de vibração, de forma a que a identificação da sua configuração seja perfeitamente conhecida, evitando os conhecidos problemas de *"aliasing" espacial*.

- Comparação das frequências de ressonância:

A forma mais simples de o fazer consiste em representar num quadro os valores teóricos e os correspondentes valores experimentais.

Uma forma mais rica de interpretar as diferenças entre os valores encontrados consiste em construir um gráfico do tipo do ilustrado na Figura 5.30, onde em abcissas são representadas as frequências previstas e, em ordenadas, os correspondentes valores medidos.

Esta representação fornece, por simples análise visual, indicações preciosas no que respeita ao grau de correlação e à natureza das discrepâncias entre valores teóricos e experimentais.

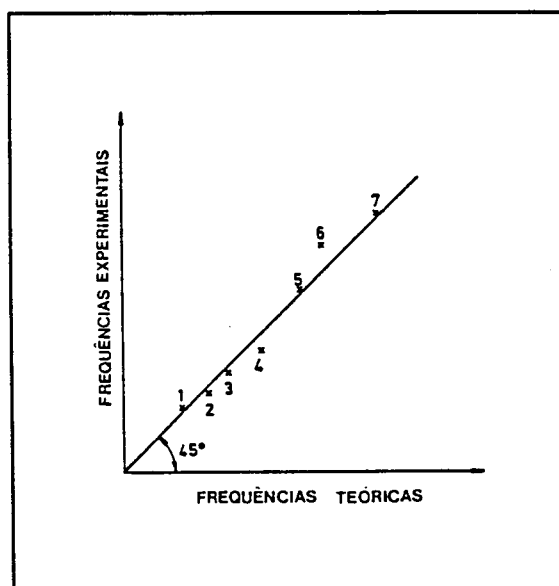


Figura 5.30 - Comparação entre frequências experimentais e teóricas do modelo modal.

Assim, pode dizer-se que pontos localizados aleatoriamente na proximidade da recta de declive 1 passando pela origem do referencial indicado em 5.30 são típicos dos erros habitualmente presentes no processo de medição.

Pelo contrário, um declive não unitário da recta que ajusta os pontos representados pode denunciar um erro na avaliação das propriedades do material na construção do modelo teórico.

- *Comparação dos modos de vibração:*

Também para os modos de vibração a representação que mais informação contém relativamente à concordância entre o modelo teórico e o modelo

experimental é a ilustrada na Figura 5.31, cujos pontos têm por abcissas e ordenadas a amplitude das componentes teóricas e medidas, respectivamente, para cada modo de vibração.

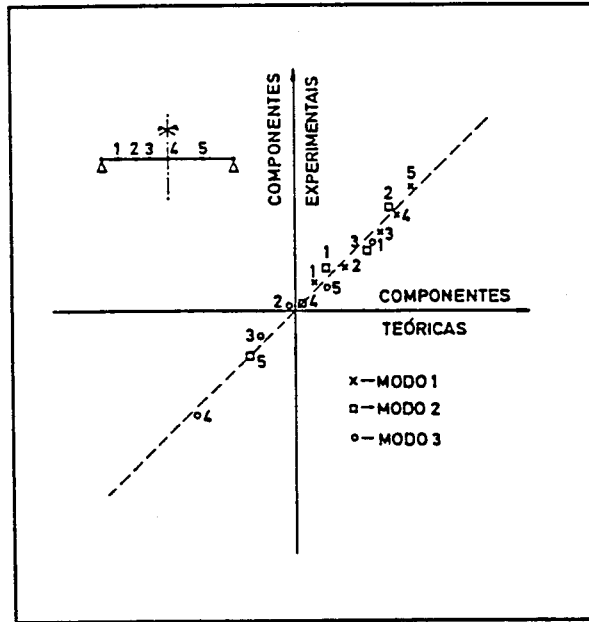


Figura 5.31 - Comparação entre as componentes experimentais e teóricas dos modos de vibração.

Se nesta representação os modos de vibração estiverem normalizados em relação à matriz de massa, todos os pontos ficarão dispostos em torno de uma recta de declive 1 passando pela origem do referencial. Tal como para as frequências de ressonância, a análise visual permite a identificação de certas formas de erro, bem como uma avaliação do grau de correlação entre parâmetros teóricos e parâmetros reais.

O maior inconveniente desta forma de comparação reside na impossibilidade de fazer intervir, numa representação bidimensional, a fase dos modos complexos, o que em muito pode afectar a correlação experimental/teórico, particularmente quando as componentes dos modos de vibração forem fortemente complexas e o amortecimento for não-proporcional (a substituição de componentes complexas pela sua amplitude só é válida para sistemas em que o amortecimento seja do tipo proporcional).

É ainda vulgar a utilização de indicadores numéricos na comparação dos modos de vibração. O indicador MSF (*Modal Scale Factor*) representa o declive da recta

que melhor se ajusta ao conjunto de pontos da Figura 5.31, por mínimos quadrados, sendo definido através de

$$MSF(x, t) = \frac{\sum_{j=1}^n (\phi_{xj} \cdot \phi_{tj}^*)}{\sum_{j=1}^n (\phi_{tj} \cdot \phi_{tj}^*)} \quad (5.89)$$

em que ϕ_{tj} é a componente j do modo de vibração teórico e ϕ_{xj} é a correspondente componente experimental, sendo n o número de componentes medidas desse modo. Nesta expressão toma-se para referência o modo teórico, ϕ_t . Tomando para referência o modo experimental, ϕ_x , o indicador MSF será expresso por

$$MSF(t, x) = \frac{\sum_{j=1}^n (\phi_{tj} \cdot \phi_{xj}^*)}{\sum_{j=1}^n (\phi_{xj} \cdot \phi_{xj}^*)} \quad (5.90)$$

Mais interessante é o indicador MSCC (Mode Shape Correlation Coefficient), mais conhecido por MAC (Modal Assurance Criterion), que fornece uma medida do desvio quadrático entre os pontos representados na Figura 5.31 e a recta resultante da regressão linear deste conjunto de valores, sendo dado por

$$MAC(t, x) = \left| \sum_{j=1}^n (\phi_{xj} \cdot \phi_{tj}^*) \right|^2 / \left[\sum_{j=1}^n (\phi_{xj} \cdot \phi_{xj}^*) \cdot \sum_{j=1}^n (\phi_{tj} \cdot \phi_{tj}^*) \right] \quad (5.91)$$

e tendo idealmente valor unitário.

Note-se no entanto que a utilização destes indicadores isoladamente não fornece informações relativamente às causas e formas dos desvios à recta ajustada.

c) Comparação do modelo espacial experimental vs teórico:

Na prática, a comparação da matriz de rigidez teórica com a correspondente matriz experimental ou mesmo a comparação entre matrizes de massa teórica e experimental não são habitualmente realizadas porque, em primeiro lugar, a quantidade de informação proporcionada pelos ensaios não é em geral suficiente para a construção completa destas matrizes e, por outro lado, a comparação entre termos de matrizes de rigidez ou de massa, não fornece indicações físicas simples acerca do tipo de erros envolvidos no ensaio ou na modelação teórica, como acontece quando a comparação é realizada através de modelos modais.

CAPÍTULO 6

DESENVOLVIMENTO DE PROGRAMAS DE CÁLCULO AUTOMÁTICO

INTRODUÇÃO

Na sequência dos Capítulos 4 e 5 deste trabalho, onde se sistematizaram diversos conceitos fundamentais da Teoria da Análise e Processamento de Sinal e se apresentaram algumas das principais técnicas de Identificação de Sistemas, descrevem-se em seguida os programas de cálculo automático desenvolvidos, nomeadamente:

- O programa PSINAL, destinado à construção de funções de resposta em frequência e funções de coerência associadas a partir de um conjunto de séries amostradas (por intermédio de um programa de aquisição de dados já existente [36]), onde são implementadas variadas operações no domínio do tempo e da frequência;
- Um conjunto de programas destinados à identificação de parâmetros modais em estruturas, usando os métodos de 1 grau de liberdade descritos no Capítulo 5, designadamente o método da amplitude de pico (PEAKAM), o método do "circle fit" (FITCIR), o método de Dobson (DOBSON) e o método de Mau (SMSMET).

Os programas mencionados foram escritos em linguagem FORTRAN 77, englobando na totalidade cerca de 15000 linhas.

No que respeita aos programas de identificação de parâmetros modais, realça-se o facto de ter sido propositadamente desenvolvido software gráfico permitindo um certo nível de interactividade durante a sua execução, através da possibilidade de visualizar as FRF medida e regenerada, bem como diversos gráficos correspondentes a passos intermédios do ajuste, de forma a tornar possível actuar sobre alguns dos parâmetros envolvidos. Ainda em relação a estes programas, e com o intuito de ilustrar a sua aplicação, procede-se à apresentação de um exemplo correspondente a um sistema de dois graus de liberdade, utilizando-se para tal, numa primeira fase, as funções de resposta em frequência teóricas amostradas (para comprovar o correcto funcionamento dos algoritmos desenvolvidos) e, posteriormente, numa segunda fase, um conjunto de funções de resposta em frequência simulando a existência de um ruído branco na saída de intensidade espectral constante ao longo de toda a gama de frequências analisada (para observar o comportamento de cada uma das técnicas de identificação implementadas em condições mais próximas das reais).

6.1 - PROGRAMA PARA ANÁLISE E PROCESSAMENTO DE SINAIS (PSINAL)

Este programa permite executar operações em vários níveis, organizadas em torno de três módulos fundamentais: o que compreende acções realizadas exclusivamente no domínio do tempo e que se designou por *módulo de análise temporal*, o que respeita a acções no domínio

do tempo e que se designou por *módulo de análise temporal*, o que respeita a acções no domínio da frequência, designado por *módulo de análise em frequência* e, finalmente, um módulo destinado a construir funções de resposta em frequência para o caso particular de a excitação forçada do sistema ser do tipo sinusoidal, com a designação de *módulo de análise excitação-resposta sinusoidal*. Note-se que, apesar de envolver operações no domínio da frequência, este bloco de funções foi separado do módulo de análise em frequência, o que se deveu ao facto de as operações nele envolvidas serem específicas do problema a que respeitam, conforme se viu, aliás, na secção 4.5.7.2 do Capítulo 4.

Refere-se ainda que, pelo facto de em muitos casos ser necessário processar séries muito extensas e, atendendo à impossibilidade de executar este programa em micro-computador para séries contendo mais de 8192 valores x 4 canais ou, no máximo, 32768 valores x 1 canal, houve a preocupação de, no desenvolvimento de PSINAL, usar linguagem standard, de forma a assegurar a sua portabilidade com um mínimo de modificações.

Nesta secção descrevem-se as funções implementadas em PSINAL, programa desenvolvido em cerca de 6700 linhas, que tem sido utilizado em todos os trabalhos de análise de vibrações realizados, dos quais se destaca a aplicação apresentada no ponto 7.2 do Capítulo 7.

Apresenta-se na Figura 6.1 um organigrama do programa PSINAL, onde se evidencia

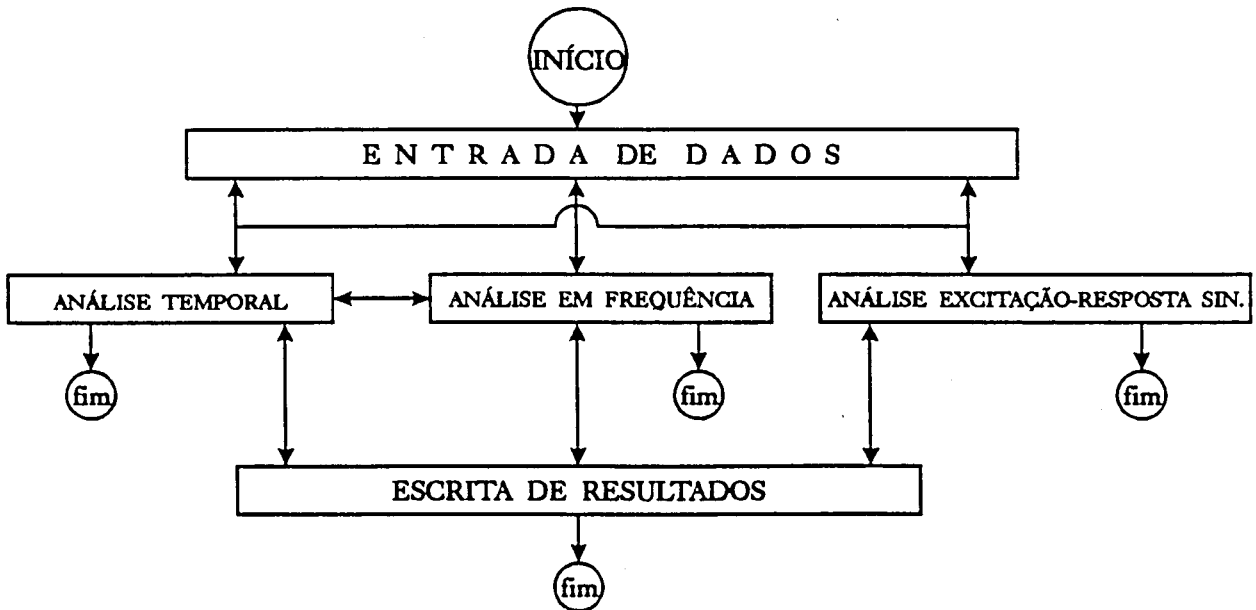


Figura 6.1 - Organigrama do programa PSINAL.

a articulação entre os 3 módulos já referidos, destinados à *análise temporal*, *análise em frequência* e *análise excitação-resposta sinusoidal*. Estes 3 blocos de operações, a designar abreviadamente por *AT*, *AF* e *AS*, respectivamente, são caracterizados com maior detalhe nas Figuras 6.2, 6.3 e 6.4.

6.1.1 - Módulo de análise temporal

AT	ANÁLISE TEMPORAL																
1 - Conversão de escala 2 - Aplicação de janelas de dados (c/ correcção de escala) 3 - Eliminação da componente DC 4 - Eliminação da componente DC (todos os canais menos o 1º) 5 - Adição de zeros 6 - Determinação de extremos 7 - Default 1: passos 1 a 6 (-4), janela Hanning 8 - Default 2: passos 1 a 6 (-3), s/ janela 9 - Default 3: passos 2 a 6 (-4), janela Hanning 10 - Default 4: passos 2 a 6 (-3), s/ janela	<table><tr><th>AT-2</th><th>JANELAS DE DADOS</th></tr><tr><td>2.1 - Rectangular</td><td></td></tr><tr><td>2.2 - Hamming</td><td></td></tr><tr><td>2.3 - Hanning</td><td></td></tr><tr><td>2.4 - Parzen</td><td></td></tr><tr><td>2.5 - Welch</td><td></td></tr><tr><td>2.6 - Cosine Taper ($\alpha = 0,1$)</td><td></td></tr><tr><td>2.7 - Exponencial</td><td></td></tr></table>	AT-2	JANELAS DE DADOS	2.1 - Rectangular		2.2 - Hamming		2.3 - Hanning		2.4 - Parzen		2.5 - Welch		2.6 - Cosine Taper ($\alpha = 0,1$)		2.7 - Exponencial	
AT-2	JANELAS DE DADOS																
2.1 - Rectangular																	
2.2 - Hamming																	
2.3 - Hanning																	
2.4 - Parzen																	
2.5 - Welch																	
2.6 - Cosine Taper ($\alpha = 0,1$)																	
2.7 - Exponencial																	

Figura 6.2 - Módulo de análise temporal (AT).

Compreende este módulo o conjunto de operações realizadas imediatamente a jusante da digitalização e armazenamento do sinal (v. Figura 6.2).

A primeira operação, de CONVERSÃO DE ESCALA, consiste na transformação do conjunto de valores inteiros da série $\{x_n\}$, definidos no intervalo $[0, N_q]$ (N_q é o número de níveis de quantificação do conversor utilizado na amostragem), num conjunto de valores reais representando a tensão eléctrica em Volt, ou então no valor da grandeza mecânica que lhe corresponde (aceleração, velocidade, deslocamento ou força). Nesta transformação, intervêm ainda o factor de amplificação do sinal, *ampf*, e o ganho da placa, *ganho*, utilizados na aquisição.

Para um conversor de 12 bits, em que $N_q = 4096$ e, cuja gama dinâmica se situa no intervalo $[0, 20V]$, cada valor da série $\{x_n\}$ é transformado de acordo com a relação

$$x'_n = (x_n - 2048) / 204.8 / \text{ganho} / \text{ampf} / \text{fact} \quad (6.1)$$

em que *fact* representa a sensibilidade do aparelho, ou seja, o factor de proporcionalidade entre a tensão eléctrica medida e o valor da grandeza mecânica que lhe corresponde.

A APLICAÇÃO DE JANELAS DE DADOS consiste em efectuar o produto da nova série $\{x'_n\}$, obtida após conversão de escala, por uma janela de dados $w(t)$, temporal

$$\{y_n\} = \{x'_n\} \cdot w(t_n) \quad (6.2)$$

tendo sido implementadas as seguintes janelas: Janela de Hamming, de Hanning, de Parzen, de Welch, Cosine Taper ($\alpha = 0, 1$) e Exponencial.

Conforme se referiu no ponto 4.3.1 deste trabalho, a aplicação de uma janela de dados não rectangular tem por efeito uma redução da variância do sinal, pelo que se torna conveniente efectuar uma correcção de escala, dividindo cada valor da série $\{y_n\}$ por um factor correctivo U dado por

$$U = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} w_j^2} \quad (6.3)$$

em que N representa o número de pontos da série amostrada e w_j é o valor da janela de dados $w(t_j)$ no instante $t_j = (j - 1) \cdot \Delta t$.

Pode então proceder-se à ELIMINAÇÃO DA COMPONENTE DC da série. Como já foi referido anteriormente, a existência de um "off-set" no sinal deve-se ao facto de os sensores não estarem completamente estabilizados na fase de aquisição e a sua eliminação é realizada, normalmente, aproximando essa componente por uma função polinomial e efectuando o ajuste pelo método dos mínimos quadrados.

A opção implementada envolve apenas a aproximação por um polinómio de grau zero, o que corresponde a eliminar a média à série $\{y_n\}$, obtendo-se uma nova série $\{y'_n\}$, cujo termo genérico y'_n é dado por

$$y'_n = y_n - \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j \quad (6.4)$$

tendo-se verificado que, na generalidade dos casos, esta operação produz bons resultados.

Como se pode verificar na Figura 6.2, foram introduzidas duas opções relativamente à operação de eliminação da componente DC, referindo-se a primeira a todos os canais do registo amostrado, enquanto que a segunda contempla as situações em que a excitação é do tipo impulsivo, sendo medida através do primeiro canal da entrada amostrada.

Obviamente que a eliminação da componente DC da série relativa à excitação não pode neste caso ser realizada da mesma forma que para as restantes séries, associadas às respostas em vários pontos do sistema, tendo sido implementado um processo automático de detecção do início e fim do impulso aplicado, o que permite determinar a média da série fora desse intervalo, subtraindo de seguida esta componente a todos os valores amostrados do canal correspondente.

A ADIÇÃO DE ZEROS consiste em aumentar o tempo de duração da série com zeros, com a finalidade de tornar o número de pontos que a constitui igual a uma potência de 2. Esta operação pode também ser implementada com o objectivo de aumentar a resolução em frequência.

A DETERMINAÇÃO DE EXTREMOS é uma operação de rotina através da qual, usando uma interpolação polinomial de 6º grau, se procede à detecção dos valores de pico da resposta ou da excitação observada.

As operações acima descritas são aplicadas normalmente de forma sistemática e segundo a ordem em que estão indicadas na Figura 6.2, pelo que, para evitar a fastidiosa escolha individual de cada opção, foram implementadas 4 sequências de operações, designadas por DEFAULT 1, DEFAULT 2, DEFAULT 3, e DEFAULT 4, que envolvem a aplicação de todas as funções até aqui descritas (englobando ou não uma janela de dados de Hanning), dizendo a primeira e a terceira respeito a registos contendo a excitação e resposta do sistema a uma acção do tipo impulsivo, enquanto que as duas restantes se referem às situações em que excitação e resposta deverão ter média nula.

6.1.2 - Módulo de análise em frequência

Pode dizer-se que este bloco de funções constitui o núcleo central do programa PSINAL. Como indicado na Figura 6.3, distinguem-se neste módulo os seguintes grupos de funções: 1 - DECIMAÇÃO; 2 - FILTRAGEM DIGITAL; 3 - INTEGRAÇÃO/DIFERENCIAÇÃO; 4 - ZOOM; 5 - TRANSFORMADAS DE FOURIER; 6 - ESTIMAÇÃO ESPECTRAL.

1 - DECIMAÇÃO

A operação de decimação, já descrita no ponto 4.4.4 deste trabalho, é aplicada por intermédio de uma operação de filtragem digital em que se recorre a um filtro operando no domínio da frequência através do algoritmo FFT, cuja função de transferência é constante e unitária em toda a banda passante, à excepção das bandas de transição, que são sinusoidais (v. equação (4.57)).

2 - FILTRAGEM DIGITAL

Foram implementados no programa PSINAL os dois grupos de filtros digitais passa-banda descritos em 4.4.2. Os primeiros recorrem directamente ao algoritmo FFT, sendo a sua aplicação mais rápida, embora eventualmente não tão eficiente. Os últimos são aplicados no domínio do tempo através de uma operação de convolução discreta onde intervêm os coeficientes da decomposição de uma janela rectangular em série de Fourier.

Na definição da função de transferência dos filtros baseados na aplicação directa do algoritmo FFT são utilizadas opcionalmente 3 configurações distintas. Tem-se assim em primeira opção um filtro para o qual a amplitude da função de transferência $|H(f)|$ é constante em toda a banda passante, excepto numa banda de transição que é do tipo sinusoidal, sendo nos restantes casos $|H(f)|$ dado pelo quadrado da amplitude do filtro de Butterworth de ordem N , com a particularidade de, na última das opções, as frequências de corte inferior e superior, ao invés de serem fixadas exteriormente pelo utilizador, serem automaticamente definidas pela fixação de uma largura de $1/3$ de oitava em torno da frequência de corte do filtro.

Note-se que a aplicação de qualquer um destes três filtros apenas afecta a amplitude da descrição espectral do sinal, mantendo intacta a respectiva fase. Trata-se portanto de *filtros de fase zero*.

Quanto aos filtros implementados operando no domínio do tempo, refere-se a necessidade de fixar exteriormente o número de termos da decomposição em série de Fourier a utilizar (v. Figura 4.38), para além das frequências de corte superior e inferior. A fixação deste parâmetro depende da largura da banda de transição que se pretenda utilizar.

3 - INTEGRAÇÃO/DIFERENCIAÇÃO

A integração ou diferenciação de uma série de dados pode ser realizada através de conhecidas regras de integração numérica, como a regra dos trapézios ou a regra de Simpson.

Revela-se no entanto mais útil e menos susceptível de levar a erros numéricos a integração ou diferenciação baseada nas propriedades da transformada de Fourier e implementada através do algoritmo FFT.

Na verdade e, conforme foi visto em 4.2.4, a transformada de Fourier do sinal derivado de ordem p do sinal $x(t)$, $x(t)^{(p)}$ relaciona-se com a transformada de Fourier deste último, $X(f)$, através de

$$F[x(t)^{(p)}] = (i \cdot 2\pi f)^p \cdot X(f)$$

Particularizando para o sinal $\dot{x}(t) = x(t)^{(1)}$, tem-se que

$$\dot{X}(f) = F[\dot{x}(t)] = (i2\pi f) \cdot X(f) \quad (6.5)$$

podendo também obter-se $X(f)$ a partir de $\dot{X}(f)$, ou seja, pode obter-se a transformada de Fourier do sinal integrado, conhecendo a transformada de Fourier $\dot{X}(f)$ do sinal $\dot{x}(t)$ que lhe deu origem

$$X(f) = \frac{1}{(i2\pi f)} \dot{X}(f) \quad (6.6)$$

Passando ao caso discreto e tendo por base o algoritmo FFT, pode esquematizar-se o processo de derivação ou integração de acordo com os seguintes passos:

- 1 - Aplicação do algoritmo FFT à série $\{x_n\}$ original, obtendo-se uma série $X_{nk}(f_k)$, de N pontos;
- 2 - Multiplicação de cada termo da FFT, $X_{nk}(f_k)$, pela quantidade $(i2\pi k/N)^p$, sendo p a ordem da derivada a calcular (se se pretender integrar, p será um inteiro negativo)

$$X_{nk}^{(p)}(f_k) = \left(i2\pi \frac{k}{N}\right)^p \cdot X_{nk}(f_k) \quad , \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

- 3 - Filtragem digital usando um filtro digital passa-alto, de frequência de corte ligeiramente superior ao inverso do tempo de duração da série amostrada;
- 4 - Inversão da FFT do sinal derivado (ou integrado)

$$\{x_n^{(p)}\} = F^{-1}[X_{nk}^{(p)}(f_k)]$$

A inclusão de uma filtragem digital precedendo a inversão da FFT do sinal revela-se necessária em consequência da periodização sofrida por este no acto de amostragem da transformada finita de Fourier, a qual se traduz no aparecimento de uma componente de frequência igual ao inverso desse período no sinal derivado/integrado.

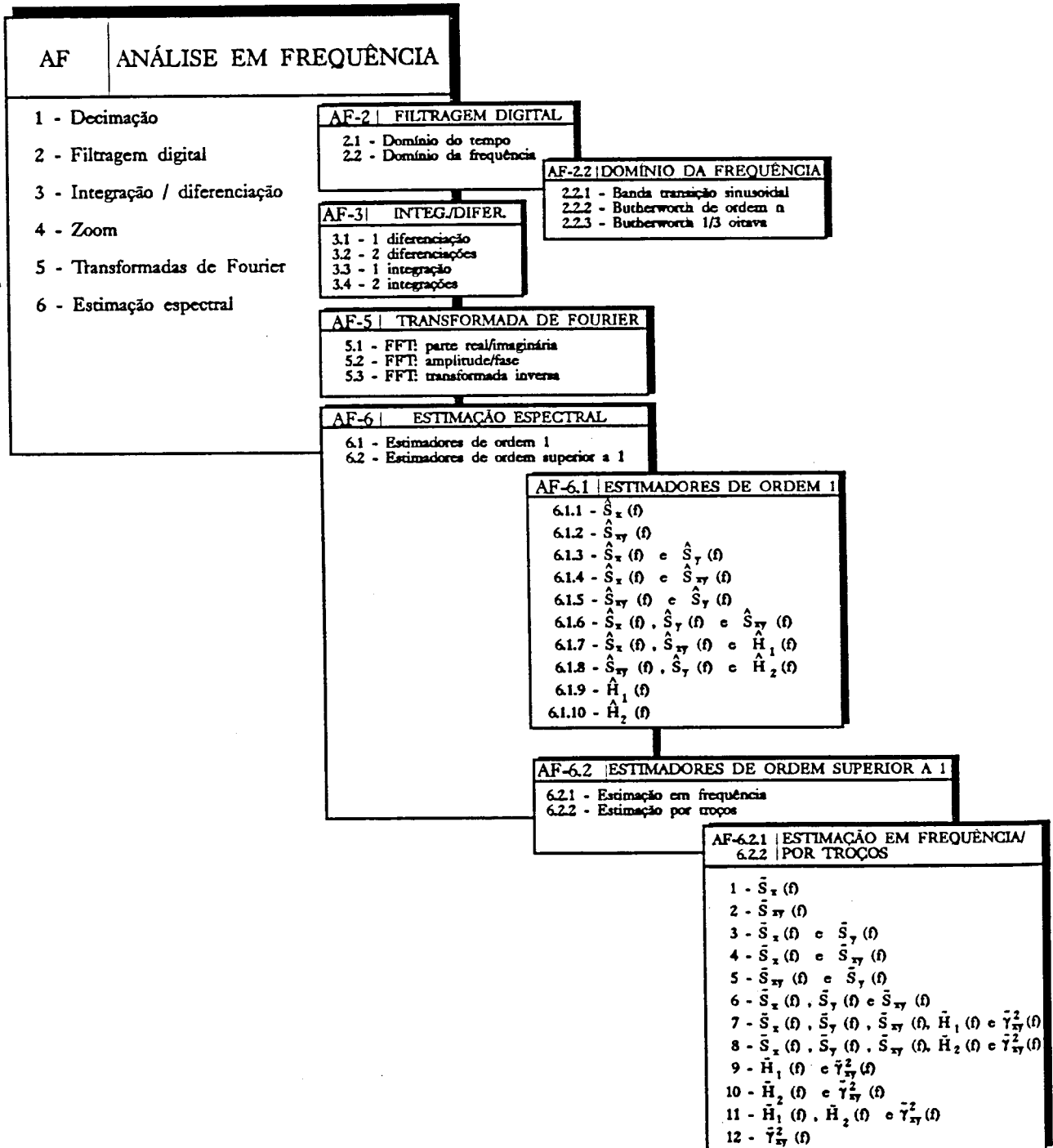


Figura 6.3 - Módulo de Análise em Frequência (AF).

Como essa componente ocorre numa frequência baixa e, além disso, as componentes nas frequências baixas são ampliadas mediante uma integração, a operação de filtragem torna-se fundamental nesse caso específico, de modo a evitar-se a sobreposição de componentes espúrias ao sinal observado.

4 - ZOOM

Pelo facto de ser bastante simples e rápida a implementação de um Zoom por adição de zeros à série observada, foi desenvolvida neste módulo uma opção baseada na referida técnica. Como, no entanto, a execução em micro-computador impõe uma limitação ao número de pontos da série a tratar, programou-se também a técnica descrita em 4.4.5, baseada na decomposição da série original em p séries de menor dimensão, cujas FFT facilmente se obtêm e se relacionam com a FFT final do sinal completo (v. equação (4.63)). Este procedimento só é executado, no entanto, quando o número de valores da série a tratar excede, após a adição de zeros, o limite imposto pela execução em micro-computador.

5 - TRANSFORMADAS DE FOURIER

A construção do espectro de Fourier de um sinal é uma operação corrente na análise de sinais, porque fornece num curto espaço de tempo informação relevante para o conhecimento do sinal. Na implementação realizada, a transformada discreta finita de Fourier de um sinal pode ser opcionalmente obtida no formato amplitude/fase, ou parte real/imaginária. Pode ainda determinar-se a inversa da transformada discreta finita de Fourier.

6 - ESTIMAÇÃO ESPECTRAL

Neste módulo são obtidas estimativas das funções espectrais intervenientes nas relações excitação-resposta descritas no Capítulo 2. Como se viu na secção 4.5, estas estimativas podem ser obtidas por simples discretização das funções a que respeitam, com base nos *estimadores simples*, ou *estimadores de 1ª ordem* (neste texto referenciados por " $\wedge$ "). Podem ainda aplicar-se estimadores mais complexos, que efectuam um "alisamento" das estimativas simples extraídas a partir de um certo número de realizações de um determinado processo estocástico. Estes estimadores são designados por *estimadores espectrais médios*, ou *estimadores de 2ª ordem*, sendo referenciados por " $\sim$ ". Como se viu ainda em 4.5, a aplicação de *estimadores de 2ª ordem* pode ser realizada *em frequência*, ou então por *troços*.

Em ambos os casos é possibilitada opcionalmente a obtenção de diferentes tipos de estimativas espectrais. Com efeito, o objectivo da análise pode ser exclusivamente obter estimativas das densidades espectrais de potência e densidades espectrais de potência cruzadas envolvendo a resposta e a excitação num ponto, ou então obter ainda as estimativas da função de resposta em frequência correspondentes. Se, no entanto, já existirem as funções $\hat{S}_x(f)$, $\hat{S}_y(f)$ e $\hat{S}_{xy}(f)$, ou então $\tilde{S}_x(f)$, $\tilde{S}_y(f)$ e $\tilde{S}_{xy}(f)$, podem obter-se directamente $\hat{H}_1(f)$, $\hat{H}_2(f)$, ou $\tilde{H}_1(f)$ e $\tilde{H}_2(f)$, bem como estimativas das funções de coerência em correspondência, $\hat{\gamma}_{xy}^2(f)$ ou $\tilde{\gamma}_{xy}^2(f)$.

6.1.3 - Módulo de análise excitação-resposta sinusoidal

Este módulo de análise compreende exclusivamente o processamento de séries obtidas utilizando uma excitação sinusoidal aplicada através de um varrimento em frequência.

Como já se disse, admite-se que a amplitude das vibrações forçadas produzidas na estrutura é substancialmente superior à amplitude das oscilações produzidas pelo ruído ambiental, o que torna legítimo o tratamento deste problema como determinístico.

AS	ANÁLISE EXCITAÇÃO-RESPOSTA SINUSOIDAL
	1 - Filtragem digital a 1/3 oitava 2 - Integração / derivação do sinal 3 - Formato

Figura 6.4 - Módulo de análise excitação-resposta sinusoidal.

Cada ponto da função de resposta em frequência é então obtido por análise de uma série de resposta a um harmónico de amplitude e fase conhecidas na frequência pretendida.

Em certos casos, a senoide caracterizadora da resposta permanente apresenta um nível de ruído susceptível de conduzir a uma errada avaliação das suas características, pelo que se pode aplicar opcionalmente um filtro digital de banda muito estreita centrado na frequência do harmónico aplicado (no caso presente, implementou-se um filtro de Butterworth a 1/3 de oitava, de ordem 10 para frequências superiores a 2Hz e 20 para as restantes frequências).

A construção da função de resposta em frequência pode assim realizar-se através dos seguintes passos:

- 1 - Definição de parâmetros pelo utilizador: escolha relativa à aplicação de um filtro digital a 1/3 de oitava, selecção do tipo de função de resposta em frequência pretendida (sinal/força, sinal integrado/força ou sinal derivado/força), escolha do formato final da FRF (amplitude/fase ou parte real/imaginária), nome base das séries contendo a resposta e número de pontos da FRF;
- 2 - Realização de um ciclo estendido ao número de pontos da FRF a estimar, procedendo:
 - à leitura da série caracterizadora da resposta associada à frequência de excitação correspondente;
 - à leitura do vector contendo a frequência, amplitude e fase do harmónico aplicado;
 - à aplicação do filtro digital de Butterworth a 1/3 de oitava (usando o algoritmo FFT e invertendo posteriormente a transformada discreta finita de Fourier do sinal), caso esta opção tenha sido escolhida;
 - à estimativa da amplitude e fase da série caracterizadora da resposta; conforme mencionado em 4.5.7.2, a avaliação da amplitude é feita através da pesquisa e ponderação dos máximos e mínimos da série (note-se que estes extremos são obtidos por interpolação sinusoidal); a fase resulta também de uma ponderação das fases extraídas usando grupos de 2 pontos da série e a expressão (4.119);
 - à determinação do valor da FRF em correspondência com a abcissa f_k , através da expressão (4.117), que aqui se transcreve

$$\hat{H}_{ij}(f_k) = \frac{\hat{Y}_i e^{i\phi_y}}{\hat{X}_j e^{i\phi_x}} ;$$

- 3 - Conversão ao formato escolhido para a FRF e integração ou diferenciação, caso se pretenda exprimi-la através da relação sinal integrado/força, ou sinal diferenciado/força, respectivamente.

Note-se que, na avaliação de cada ponto $\hat{H}_{ij}(f_k)$, se pressupõe o conhecimento da amplitude e fase da excitação em correspondência com cada harmónico.

Acontece no entanto que, dadas as características dos excitadores sinusoidais usados na análise de estruturas de grande porte, há por vezes dificuldade em registar uma série contendo a evolução da força aplicada através da qual se possam extrair as características da amplitude e fase da excitação.

Se a fixação do vibrador for perfeita, o conhecimento das características das massas girantes e do braço permite uma boa aproximação para a amplitude da força aplicada.

Quanto à fase, refere-se que nas situações em que não se disponha de um sensor através do qual esta seja quantificada, é usual a aproximação por zero, o que constitui uma limitação importante do ensaio.

6.2 - PROGRAMAS PARA IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS

Conforme foi referido na introdução ao Capítulo 6, o desenvolvimento dos programas para extracção de parâmetros modais em estruturas foi acompanhado da elaboração de software gráfico, tendo-se recorrido para esse efeito à biblioteca gráfica PLOT88.

Com efeito, considera-se que é fundamental o acompanhamento gráfico interactivo do processo de ajuste dos parâmetros modais já que, embora a identificação se torne mais lenta e exija uma certa sensibilidade e experiência por parte do utilizador, a possibilidade de controlar exteriormente alguns parâmetros do processo, conduz a resultados superiores.

Realça-se no entanto, no que se refere à escolha da biblioteca gráfica PLOT88, que embora não se considere ser esta a mais adequada para implementações gráficas em FORTRAN, em especial pelo elevado espaço em memória que a sua execução implica e que limita, consequentemente, as capacidades dos programas desenvolvidos, a sua utilização foi preferida face à relativa simplicidade de programação.

Nas secções que se seguem descrevem-se os diferentes programas desenvolvidos no âmbito dos métodos de identificação de 1 grau de liberdade, sendo efectuada a sua aplicação à extracção de parâmetros modais de um pórtico de dois pisos, modelado como uma estrutura "shear-beam", cujas características se apresentam na Figura 6.5.

A aplicação mencionada foi realizada em duas etapas, tendo-se utilizado inicialmente as funções de resposta em frequência teóricas amostradas e, num cálculo posterior, simulado a existência de ruído na resposta, com a finalidade de analisar o funcionamento dos programas desenvolvidos em condições mais próximas das reais.

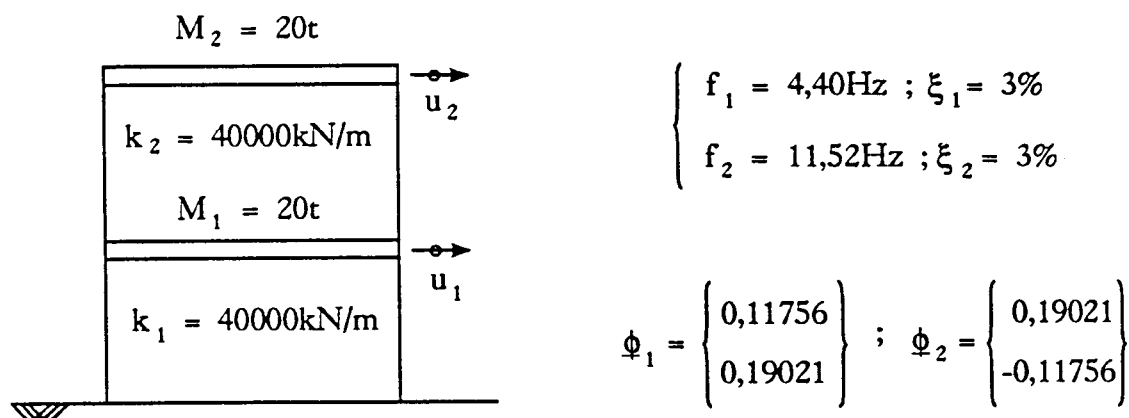


Figura 6.5 - Sistema de 2 graus de liberdade e correspondentes características dinâmicas.

6.2.1 - Programa PEAKAM - método da amplitude de pico

Apresenta-se na Figura 6.6 um fluxograma do programa PEAKAM.

Este programa constitui uma implementação do método da amplitude de pico descrito na secção 5.3.1.1, permitindo, como ilustrado nessa figura, uma visualização da FRF medida ou regenerada em três fases distintas: no início da sua execução, o que permite definir exteriormente o número de modos a ajustar, bem como os intervalos de frequências onde estes se localizam; no final do ajuste de cada modo de vibração, sendo assim possível, por inspecção visual, analisar a qualidade dos parâmetros identificados; após ajuste de todos os modos de vibração, o que fornece uma medida visual da qualidade global do ajuste realizado.

As Figuras 6.7 a 6.10 referem-se à identificação dos parâmetros modais em correspondência com a FRF teórica (receptância), relacionando a saída e entrada do sistema apresentado na Figura 6.5 ao nível do piso 1. A boa resolução em frequência e a separação dos modos de vibração são responsáveis pelos excelentes resultados obtidos, sendo no entanto perceptível, particularmente na análise das Figuras 6.8 e 6.9, a enorme dependência da resolução em frequência adoptada.

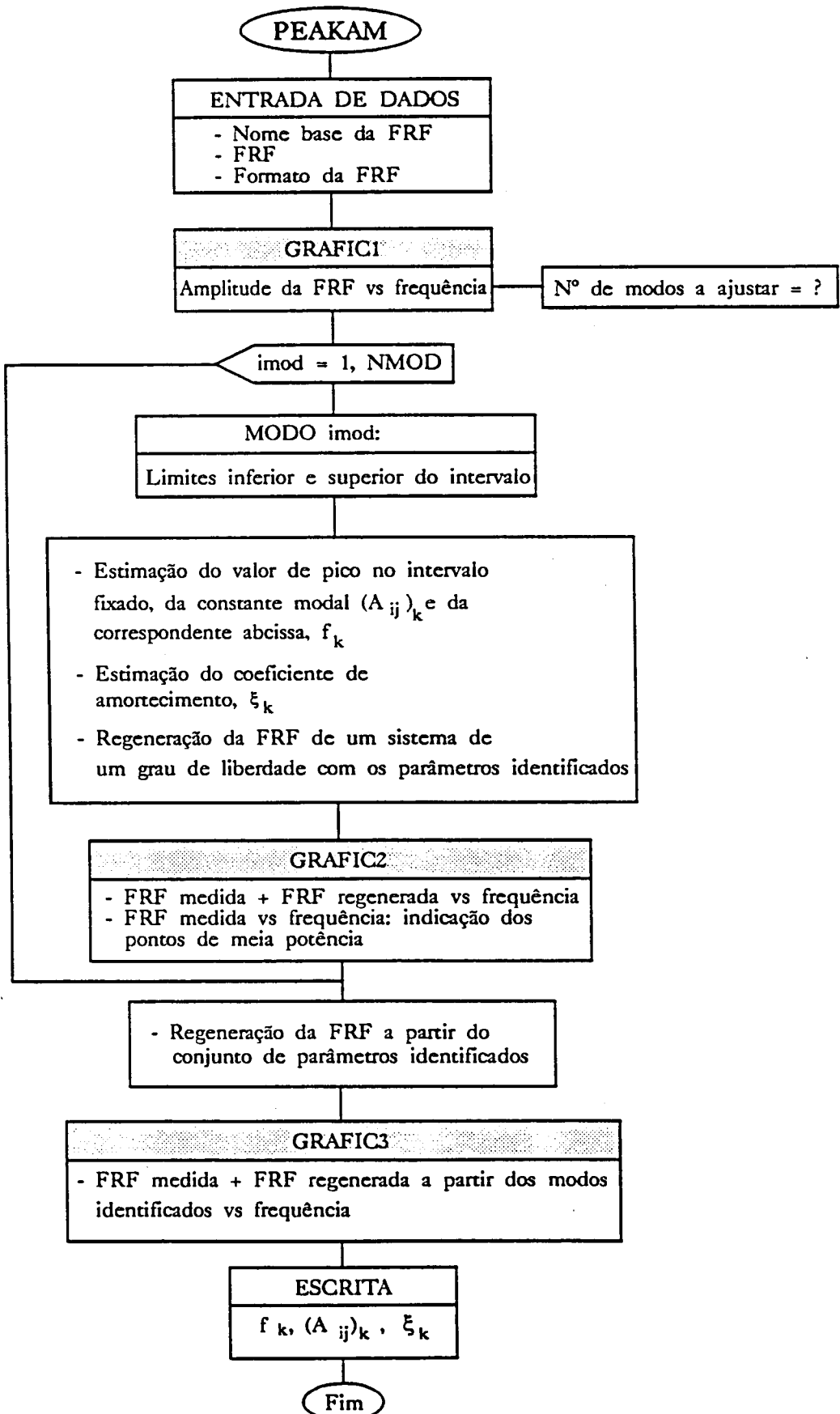


Figura 6.6 - Fluxograma do programa PEAKAM (método da amplitude de pico).

Repetiu-se a aplicação do programa PEAKAM às FRF simuladas com inclusão de um ruído branco de banda limitada na resposta, podendo visualizar-se na Figura 6.11 a estimativa $\hat{H}_{11}(f)$ assim obtida.

Podem observar-se nas Figuras 6.12 a 6.15 os resultados alcançados, que indiciam uma excelente aproximação entre as frequências ajustadas e as frequências reais, sendo no entanto mais elevados os erros nos valores dos coeficientes de amortecimento. No que respeita às componentes dos modos de vibração verificou-se uma aproximação ainda excelente, o que se deveu ao facto de o ruído presente nas FRF não ter introduzido perturbações significativas na zona dos valores de pico, estando-se por outro lado perante uma FRF caracterizada por frequências próprias afastadas e por coeficientes de amortecimento com valores não demasiado elevados ou baixos, condições em que o método da amplitude de pico proporciona melhores resultados.

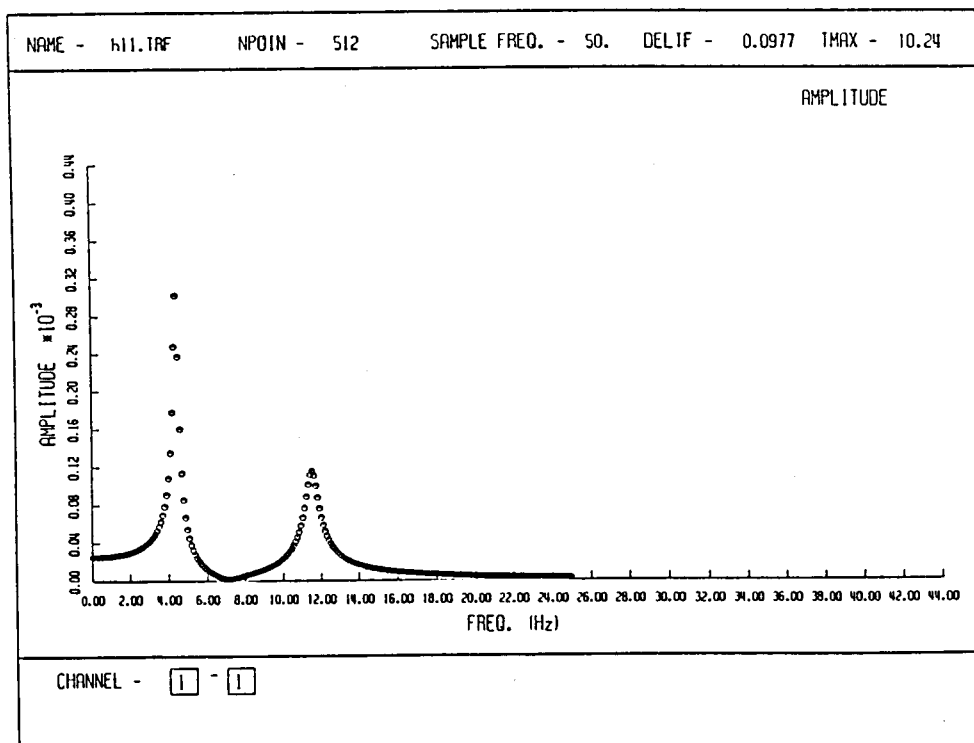


Figura 6.7 - Aplicação de PEAKAM a uma FRF teórica: GRAFIC1.

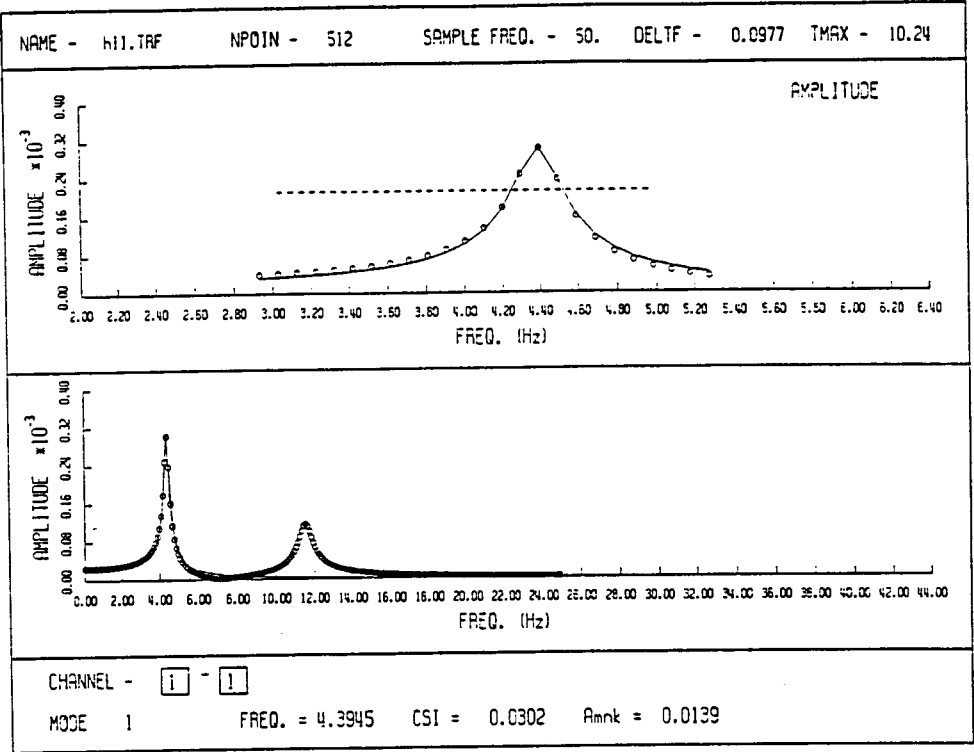


Figura 6.8 - Aplicação de PEAKAM a uma FRF teórica: GRAFIC2 (modo de vibração 1).

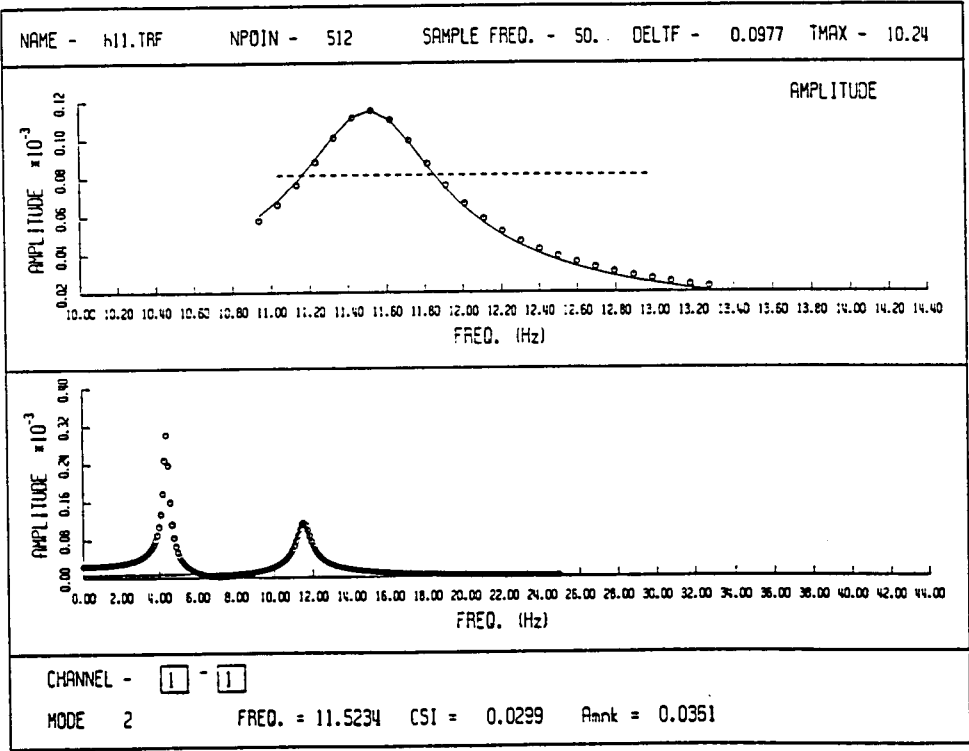


Figura 6.9 - Aplicação de PEAKAM a uma FRF teórica: GRAFIC 2 (modo de vibração 2).

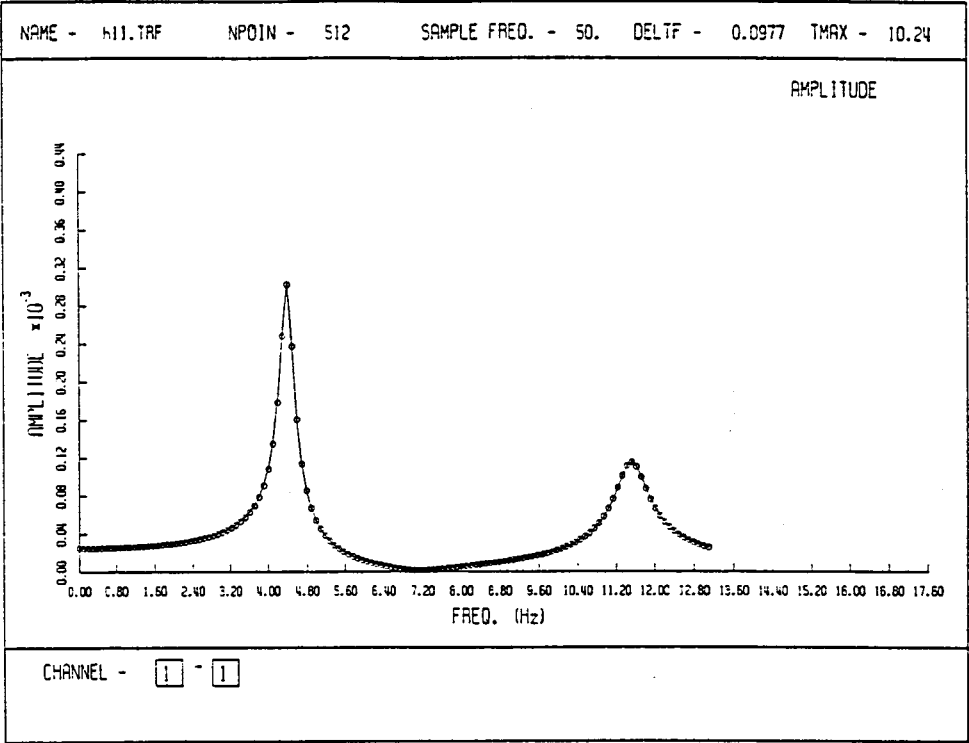


Figura 6.10 - Aplicação de PEAKAM a uma FRF teórica: GRAFIC 3.

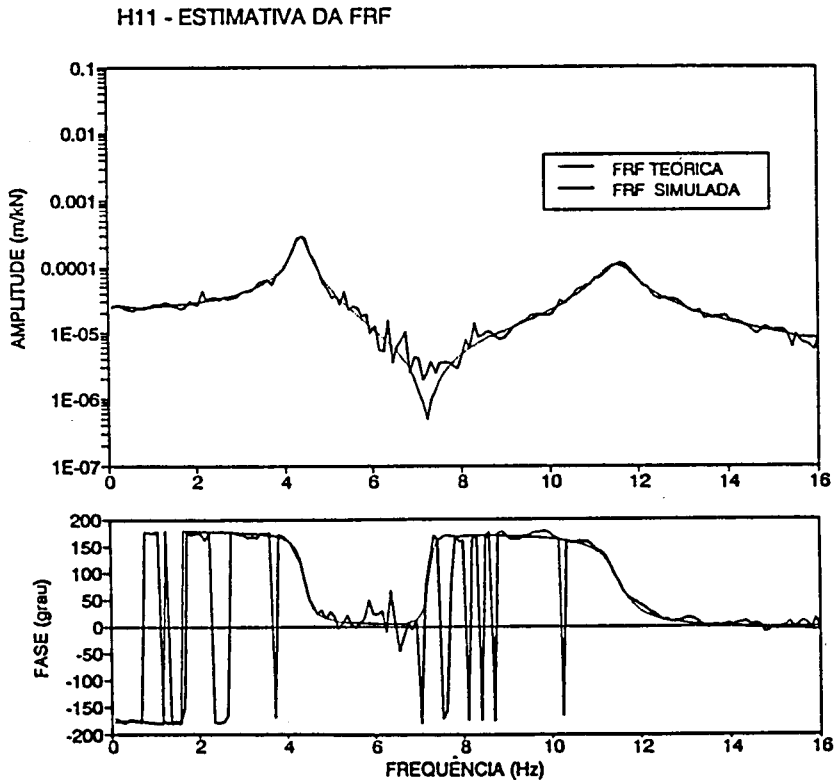


Figura 6.11 - $\hat{H}_{11}(f)$ simulada com inclusão de um ruído branco de banda limitada na entrada do sistema.

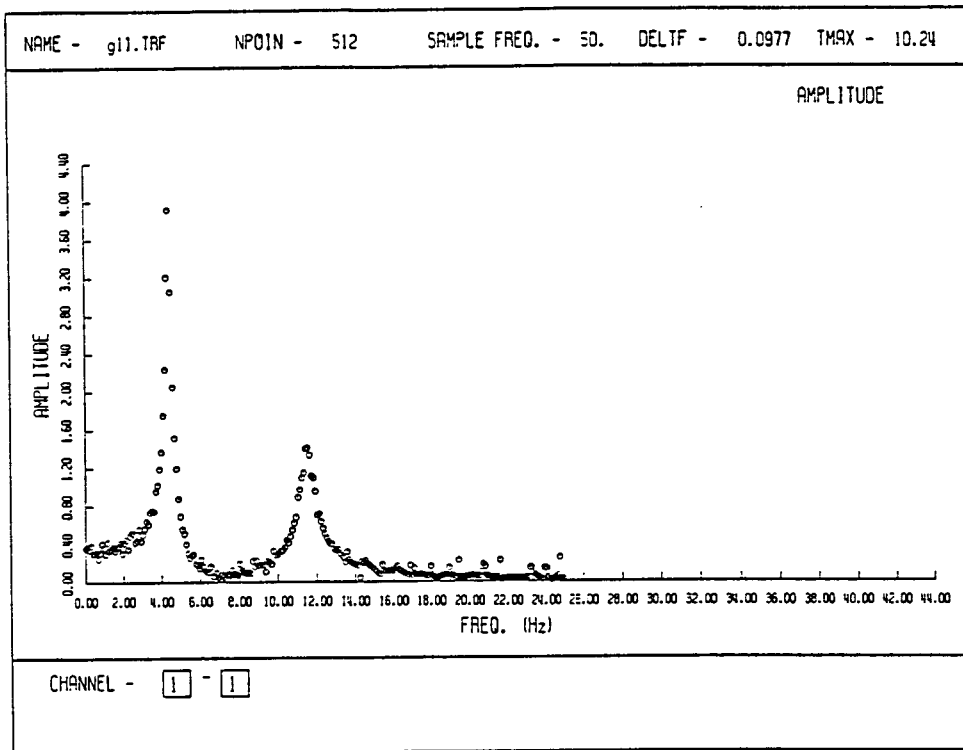


Figura 6.12 - Aplicação de PEAKAM à estimativa $\hat{H}_{11}(f)$ simulada: GRAFIC1.

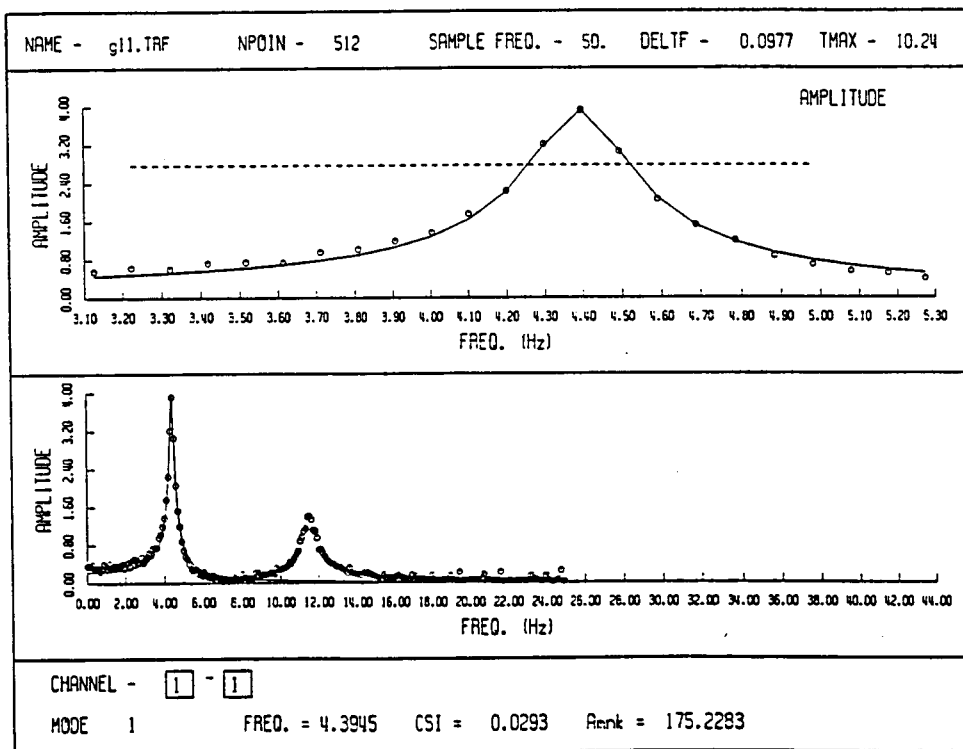


Figura 6.13 - Aplicação de PEAKAM à estimativa $\hat{H}_{11}(f)$ simulada: GRAFIC2 (modo de vibração 1).

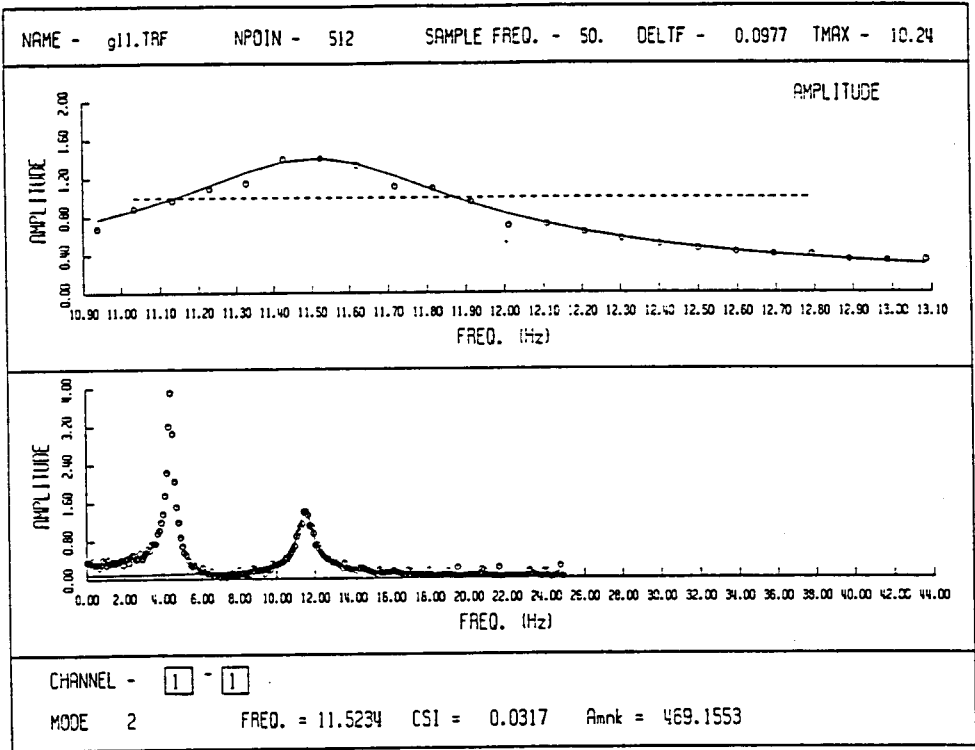


Figura 6.14 - Aplicação de PEAKAM à estimativa $\hat{H}_{11}(f)$ simulada: GRAFIC2 (modo de vibração 2).

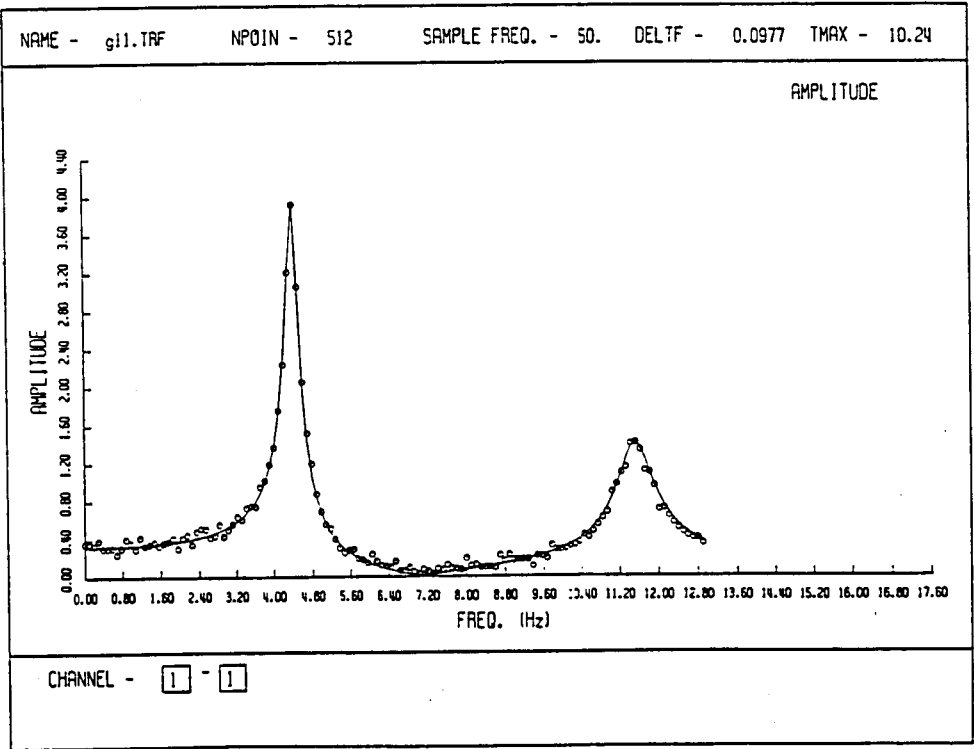


Figura 6.15 - Aplicação de PEAKAM à estimativa $\hat{H}_{11}(f)$ simulada: GRAFIC3.

Resumem-se no Quadro 6.1 os valores dos parâmetros modais reais e dos parâmetros identificados por aplicação de PEAKAM às FRF teóricas e simuladas.

Quadro 6.1 - Parâmetros modais identificados através de PEAKAM vs parâmetros modais reais.

	Frequências próprias (Hz)		Coeficientes de amortecimento (%)		Componentes dos modos de vibração			
	f_1	f_2	ξ_1	ξ_2	$(\phi_1)_1$	$(\phi_2)_1$	$(\phi_1)_2$	$(\phi_2)_2$
Reais	4,40	11,52	3,00	3,00	0,11756	0,19021	0,19021	- 0,11756
PEAKAM - FRF teóricas	4,39	11,52	3,02	2,99	0,11802	0,18948	0,19007	- 0,12316
PEAKAM - FRF simuladas	4,39	11,52	2,93	3,17	0,11610	0,20153	0,18997	- 0,11610

6.2.2 - Programa FITCIR - método do "circle fit"

Na implementação realizada do método descrito em 5.3.1.2, dois aspectos foram tidos em consideração: a interactividade gráfica e a eficiência do ajuste em situações em que o acoplamento modal seja significativo.

O organigrama apresentado na Figura 6.16 diz respeito à estrutura global adoptada para o programa FITCIR. Como se pode constatar, a visualização da FRF é realizada em 6 níveis diferentes ao longo do processo de ajuste dos parâmetros modais. Assim, o gráfico da amplitude da FRF medida e respectiva fase vs frequência no início da execução (GRAFIC1) permitem de imediato a selecção do número de modos a identificar e dos intervalos de frequência onde cada um destes se situa. Posteriormente, após o ajuste da circunferência em correspondência com cada modo de vibração a identificar (a partir do conjunto de pontos da FRF medida situados no intervalo de frequências associado a esse modo), a sobreposição desta curva com os pontos da FRF utilizados no ajuste num gráfico de Nyquist (gráfico $(Re[Y], Im[Y])$) permite de imediato a eliminação de alguns pontos que envolvam erros significativos e o ajuste por nova circunferência (GRAFIC2).

Numa fase seguinte, usando as técnicas descritas em 5.3.1.2, extraem-se os parâmetros modais em correspondência com o modo de vibração considerado, sendo possível visualizar num gráfico $(Re[Y], Im[Y])$ a localização da frequência de ressonância identificada e analisar a qualidade do ajuste num gráfico onde se sobrepõem as curvas amplitude vs frequência da FRF medida e da FRF em correspondência com o modo ajustado (GRAFIC3).

Após ajuste de todos os modos de vibração, apresenta-se um gráfico relativo às curvas amplitude vs frequência e fase vs frequência da FRF medida e da FRF global ajustada (GRAFIC4). A análise deste gráfico permite seleccionar dois pontos para a determinação dos resíduos de massa e de rigidez.

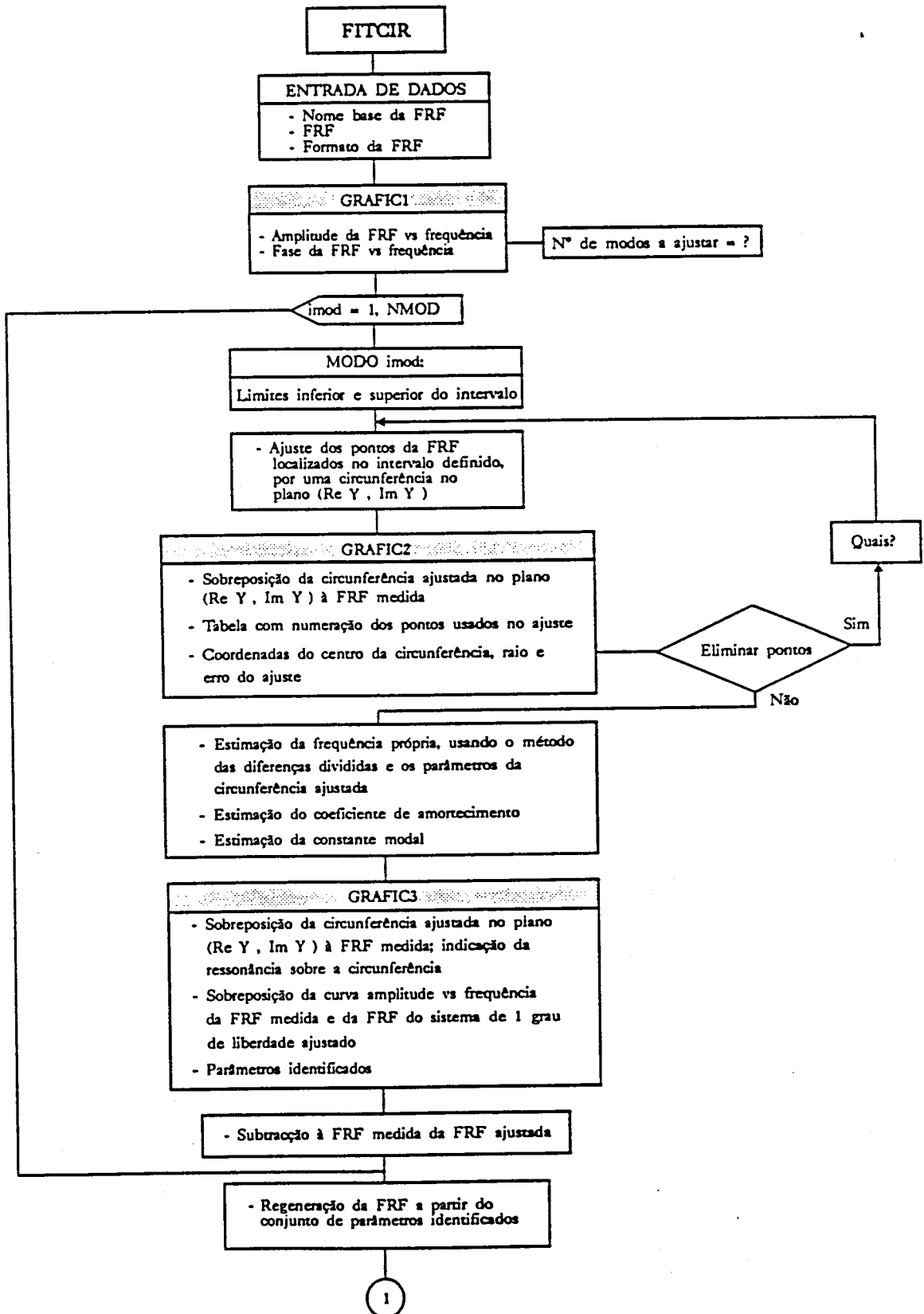


Figura 6.16 - Organograma do programa FITCIR.

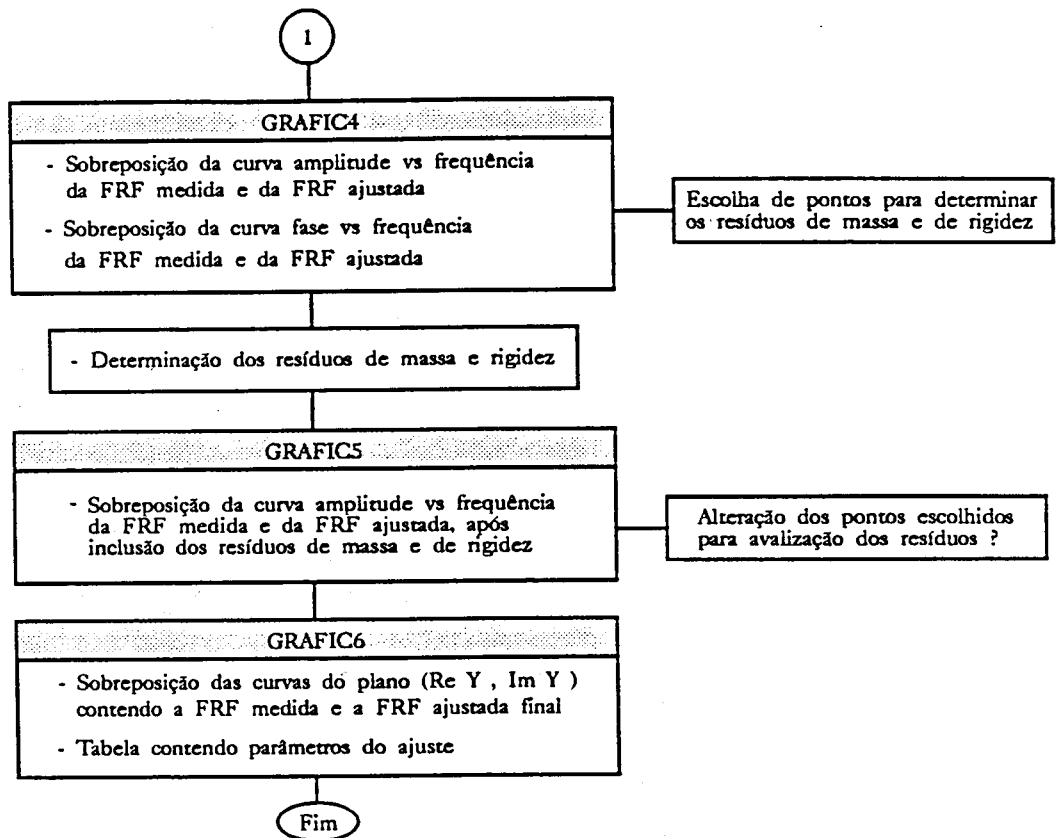


Figura 6.16 (cont.) - Organograma do programa FITCIR.

A determinação dos termos residuais leva a um novo gráfico onde se representam as curvas amplitude e fase versus frequência da FRF medida e da FRF ajustada com inclusão desses termos. A análise deste gráfico (GRAFIC5) pode sugerir a escolha de novos pontos.

A qualidade do ajuste pode finalmente ser avaliada em termos globais num gráfico do tipo $(Re[Y], Im[Y])$ (GRAFIC6).

No que respeita à eficiência desta técnica no ajuste de parâmetros de FRF para as quais não seja desprezável o acoplamento entre modos de vibração, refere-se que a subtracção à FRF medida (numa fase anterior ao ajuste de cada circunferência modal) da soma das FRF regeneradas já identificadas permite eliminar a contribuição de alguns modos de vibração e, como tal, melhorar substancialmente as estimativas dos parâmetros modais relativamente às técnicas que não utilizam este tipo de considerações.

A aplicação do programa FITCIR às FRF teóricas do sistema de dois graus de liberdade representado na Figura 6.5, de que resultaram os gráficos 6.17 a 6.24 e o Quadro 6.2, evidencia algumas particularidades da técnica implementada.

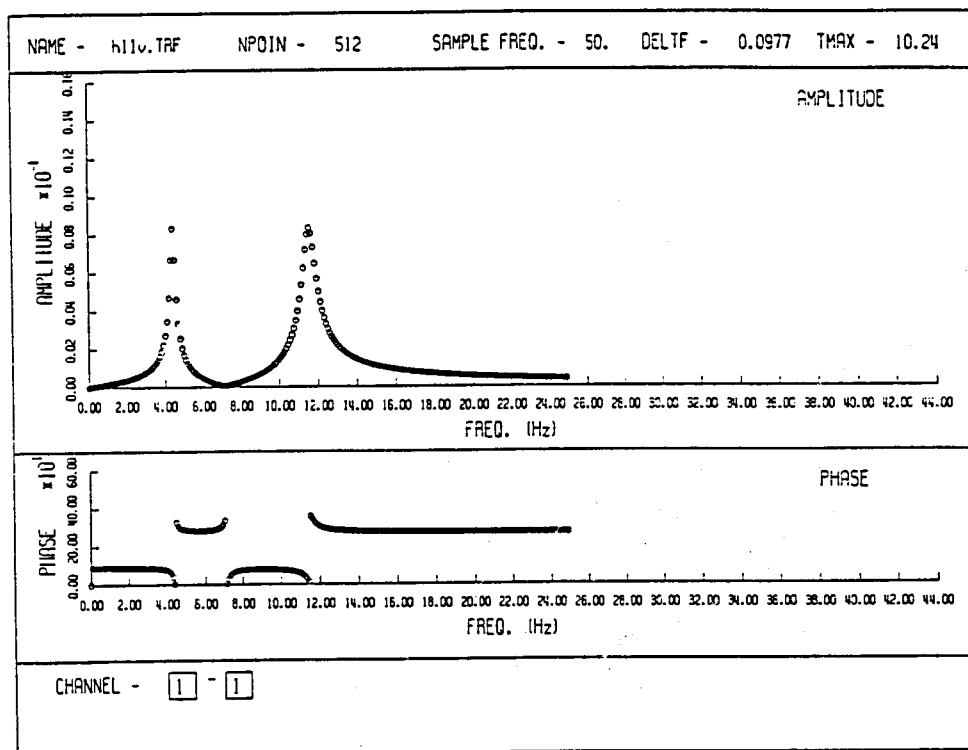


Figura 6.17 - Aplicação de FITCIR à FRF (mobilidade) teórica: GRAFIC1.

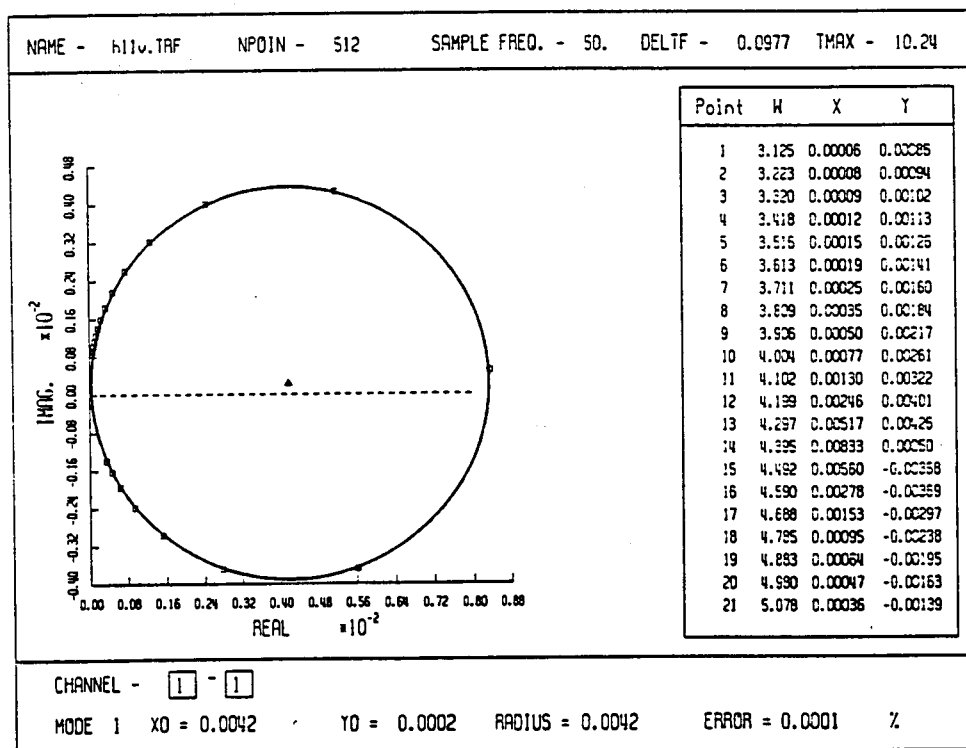


Figura 6.18 - Aplicação de FITCIR à FRF (mobilidade) teórica: GRAFIC2 (modo de vibração 1).

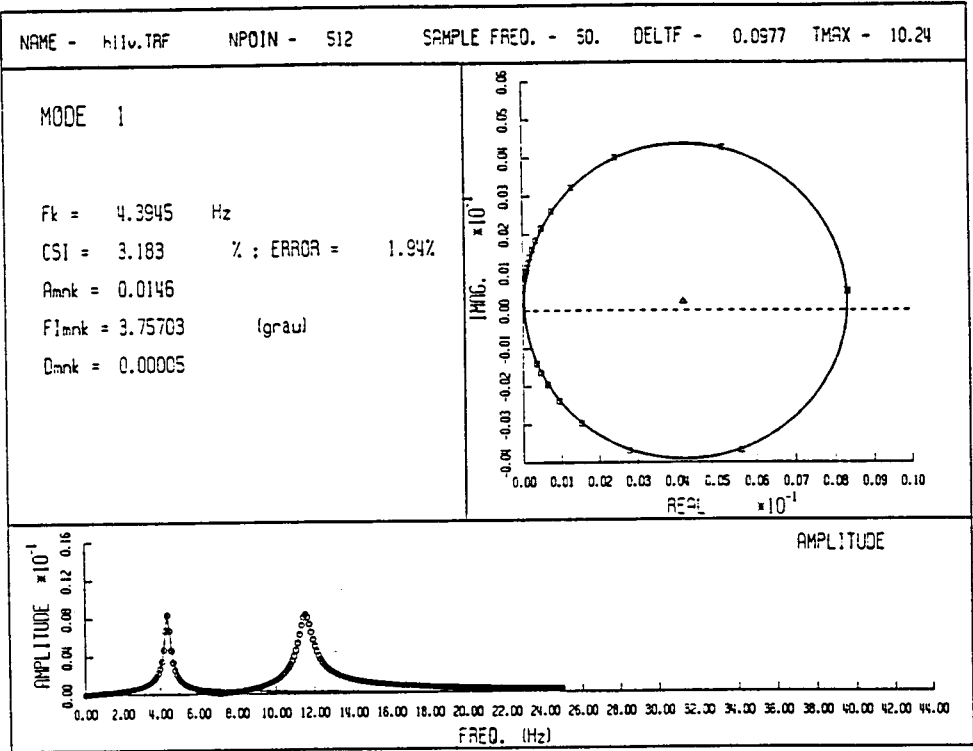


Figura 6.19 - Aplicação de FITCIR à FRF (mobilidade) teórica: GRAFIC3 (modo de vibração 1).

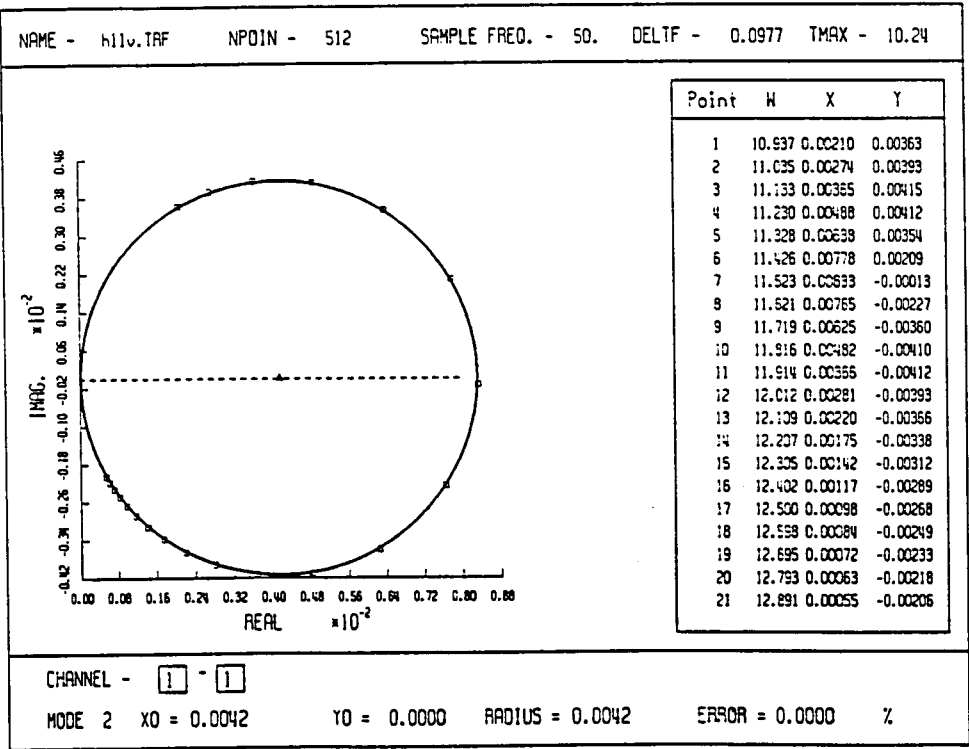


Figura 6.20 - Aplicação de FITCIR à FRF (mobilidade) teórica: GRAFIC2 (modo de vibração 2).

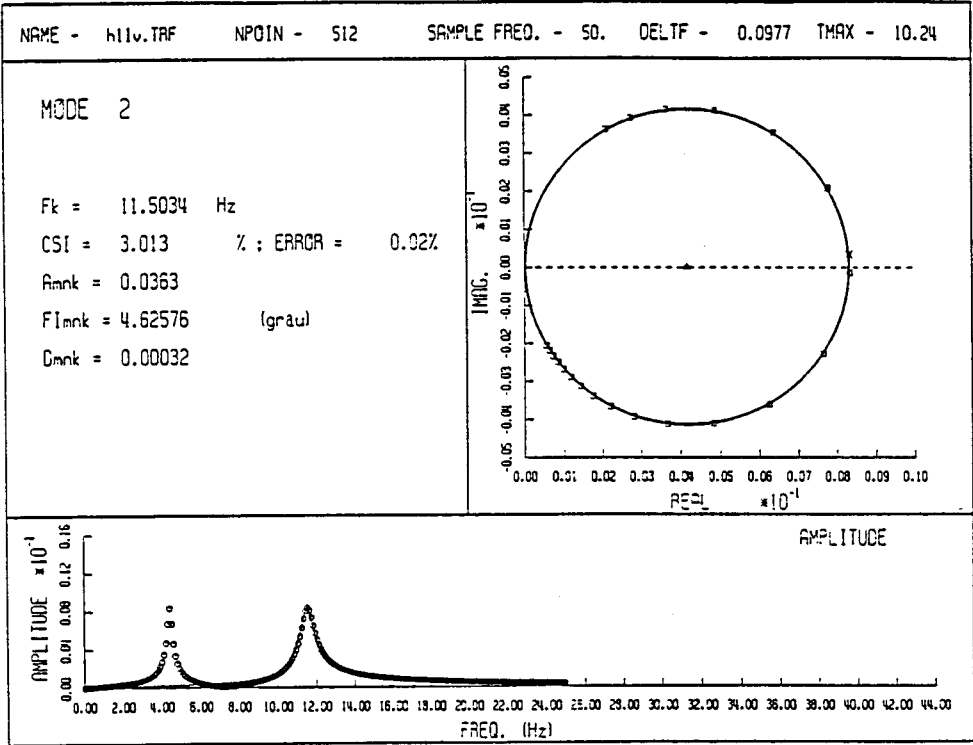


Figura 6.21 - Aplicação de FITCIR à FRF (mobilidade) teórica: GRAFIC3 (modo de vibração 2).

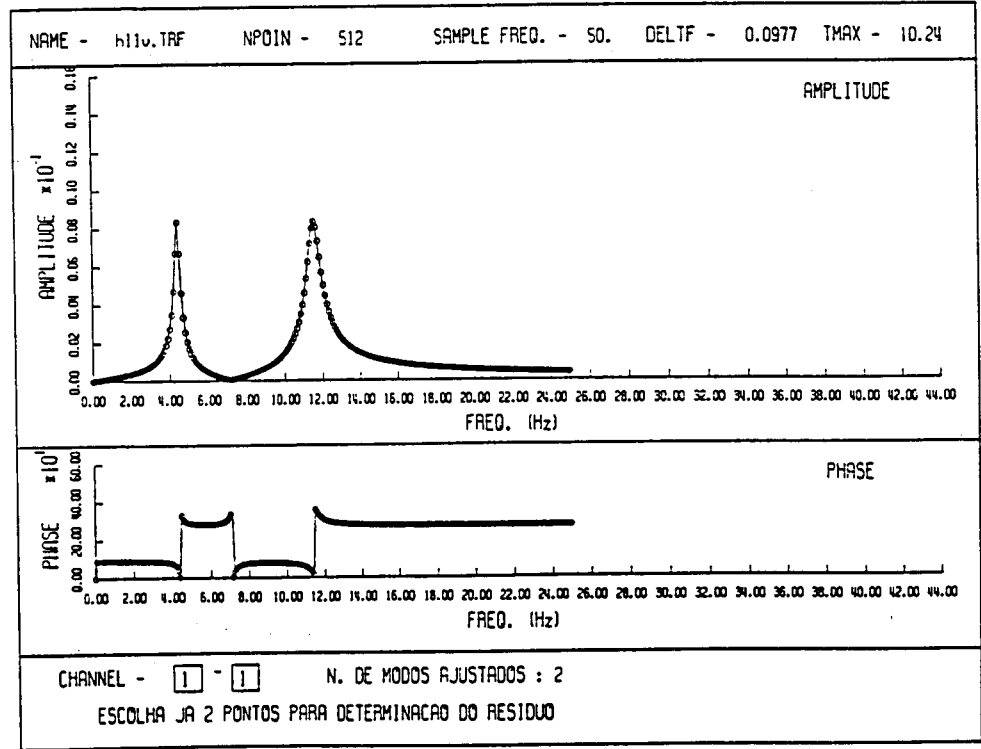


Figura 6.22 - Aplicação de FITCIR à FRF (mobilidade) teórica: GRAFIC4.

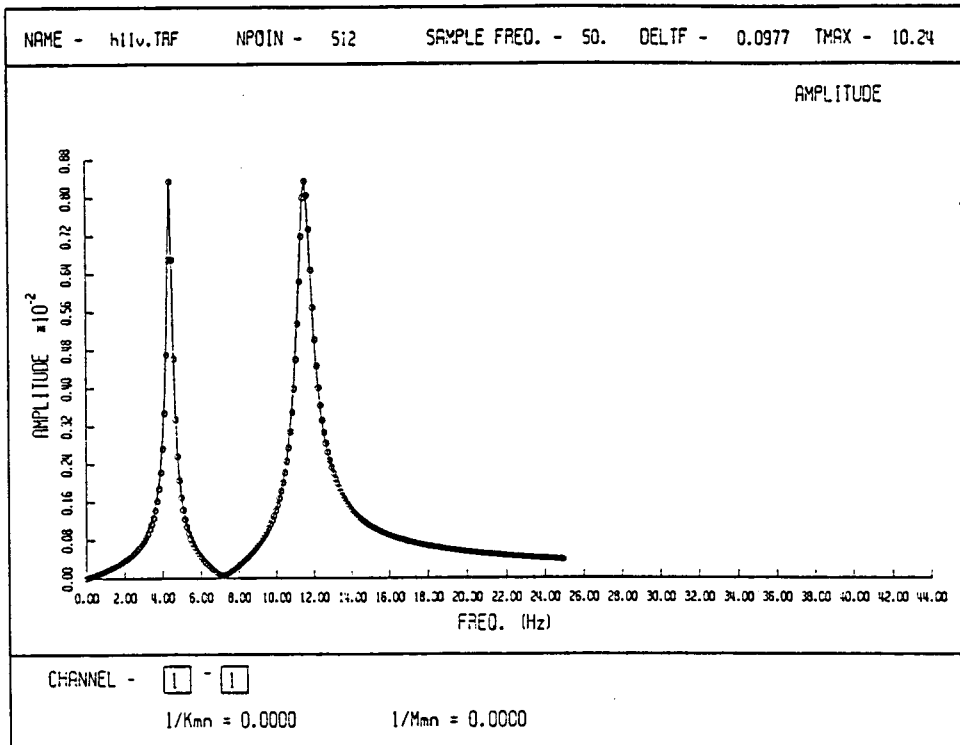


Figura 6.23 - Aplicação de FITCIR à FRF (mobilidade) teórica: GRAFIC5.

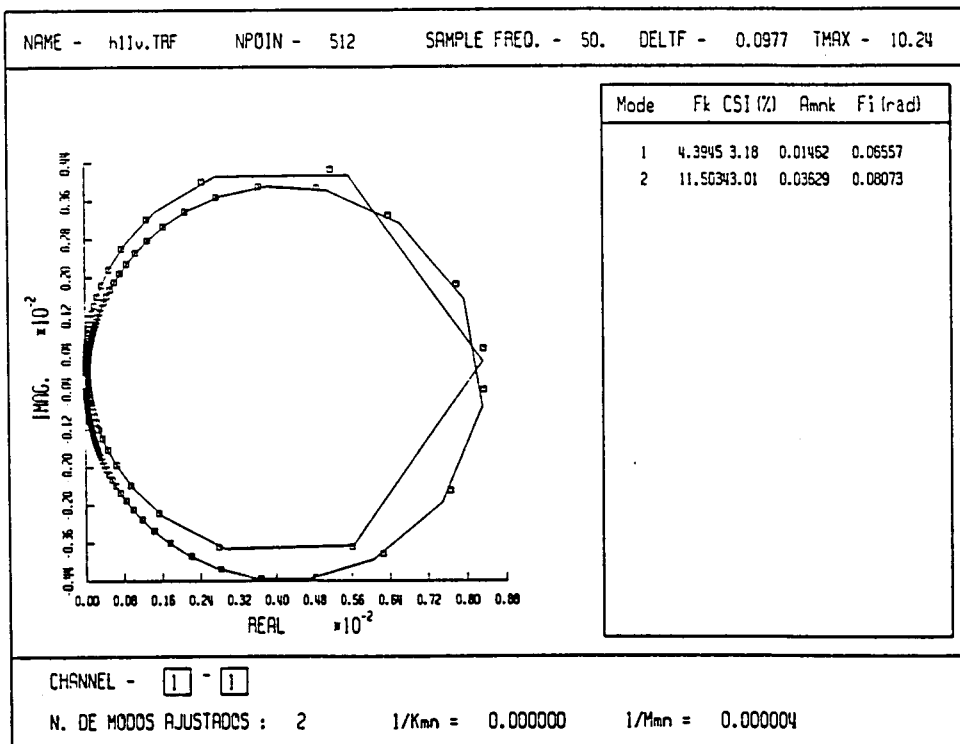


Figura 6.24 - Aplicação de FITCIR à FRF (mobilidade) teórica: GRAFIC6.

Um primeiro aspecto a salientar é a importância de usar uma boa resolução em frequência na proximidade das ressonâncias. Na verdade, foi referido na secção 5.3.1.2 que, na determinação das frequências de ressonância, o método do "circle fit" utiliza a propriedade de a taxa de variação do ângulo ao centro dos pontos representativos da mobilidade ser aproximadamente máxima em correspondência com as frequências próprias do sistema.

Se a resolução em frequência for baixa, o afastamento entre pontos sucessivos da FRF na proximidade de cada ressonância torna-se muito grande, contribuindo para que a sua estimação possa vir afectada por erros de alguma importância. Este aspecto vem evidenciado nas Figuras 6.18 e 6.20: o maior ângulo ao centro associado a pontos consecutivos da FRF na vizinhança da primeira ressonância do sistema é responsável por um erro na estimação da frequência própria em correspondência superior ao erro associado à estimação da segunda frequência natural (v. Figuras 6.19 e 6.21). Mas, mais importante do que o erro na frequência própria, é o erro na sua localização sobre a circunferência modal, que se repercute fortemente nos valores dos coeficientes de amortecimento identificados e, consequentemente, das constantes modais em correspondência.

Por outro lado, o carácter complexo da constante modal A_{mnk} identificada constitui um indicador possível da adequação do método utilizado à identificação dos parâmetros modais tomando por base a FRF em análise. Na verdade, a existência de um nível de ruído elevado no sinal, ou a existência de amortecimento não-proporcional originam constantes modais complexas (e, consequentemente, modos complexos) com um carácter tanto mais acentuado, quanto maior o desvio em relação às hipóteses do modelo utilizado na definição da FRF.

As Figuras 6.25 a 6.32 referem-se à aplicação de FITCIR à estimativa da função de resposta em frequência relacionando forças e velocidades ao nível do piso 1, onde se simulou a existência de um ruído branco de banda limitada misturado com a resposta estrutural.

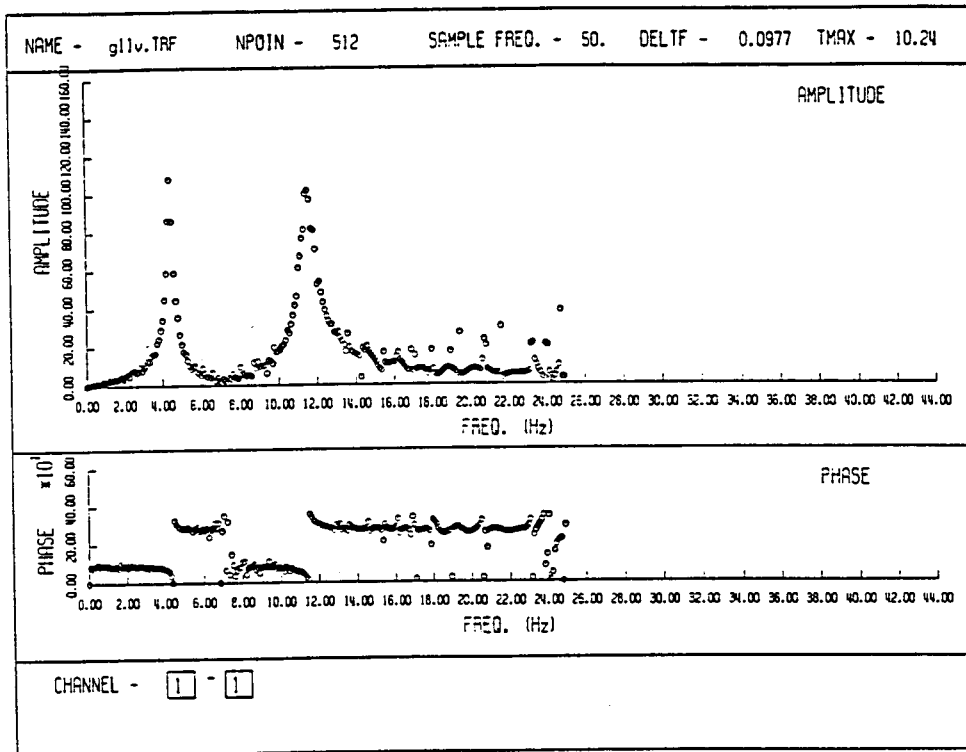


Figura 6.25 - Aplicação de FITCIR à estimativa $\hat{Y}_{11}(f)$ simulada: GRAFIC1.

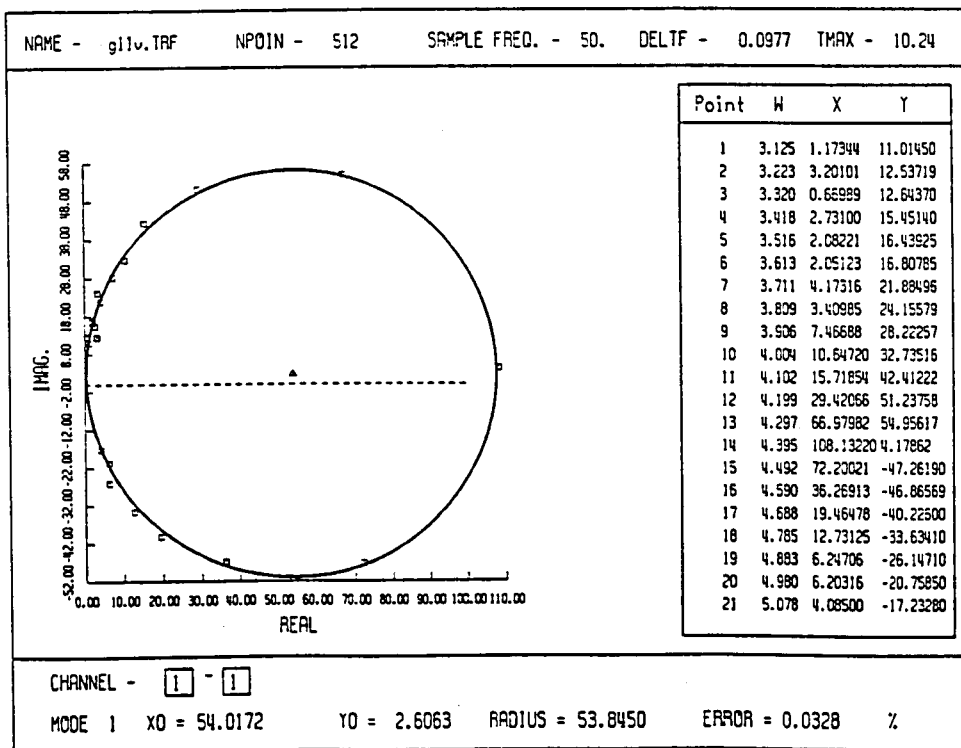


Figura 6.26 - Aplicação de FITCIR à estimativa $\hat{Y}_{11}(f)$ simulada: GRAFIC2 (modo de vibração 1).

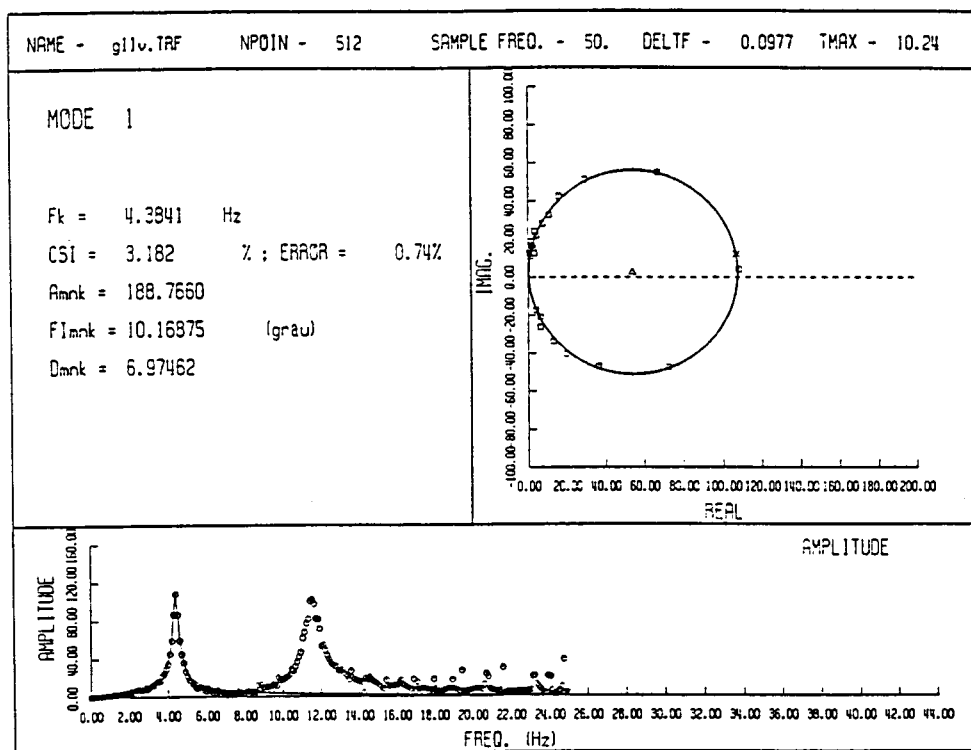


Figura 6.27 - Aplicação de FITCIR à estimativa $\hat{Y}_{11}(f)$ simulada: GRAFIC3 (modo de vibração 1).

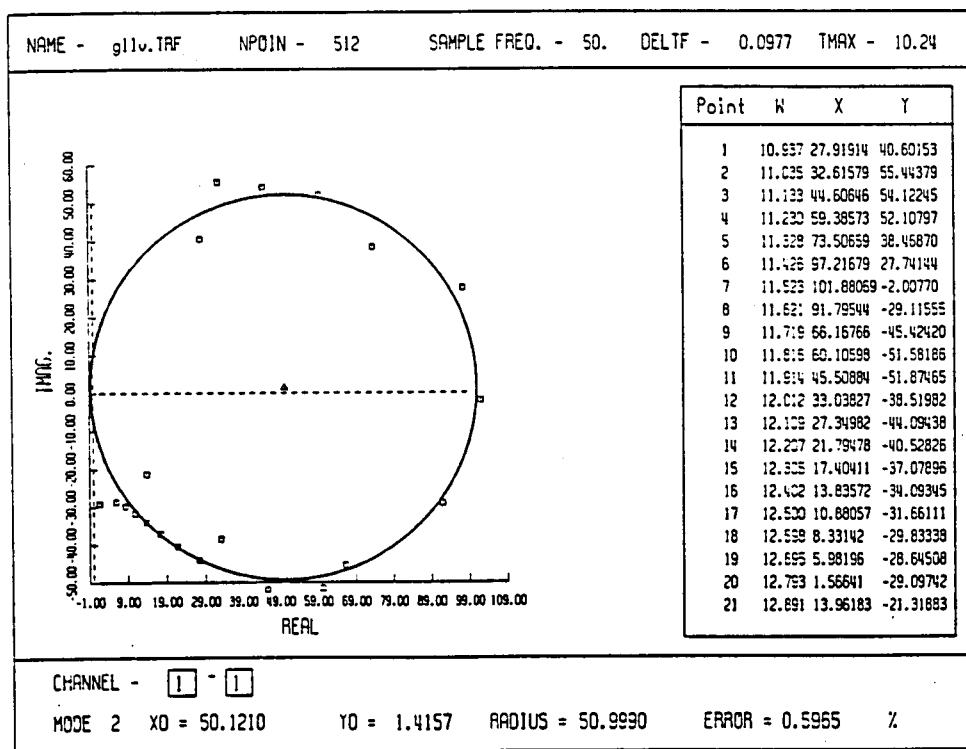


Figura 6.28 - Aplicação de FITCIR à estimativa $\hat{Y}_{11}(f)$ simulada: GRAFIC2 (modo de vibração 2).

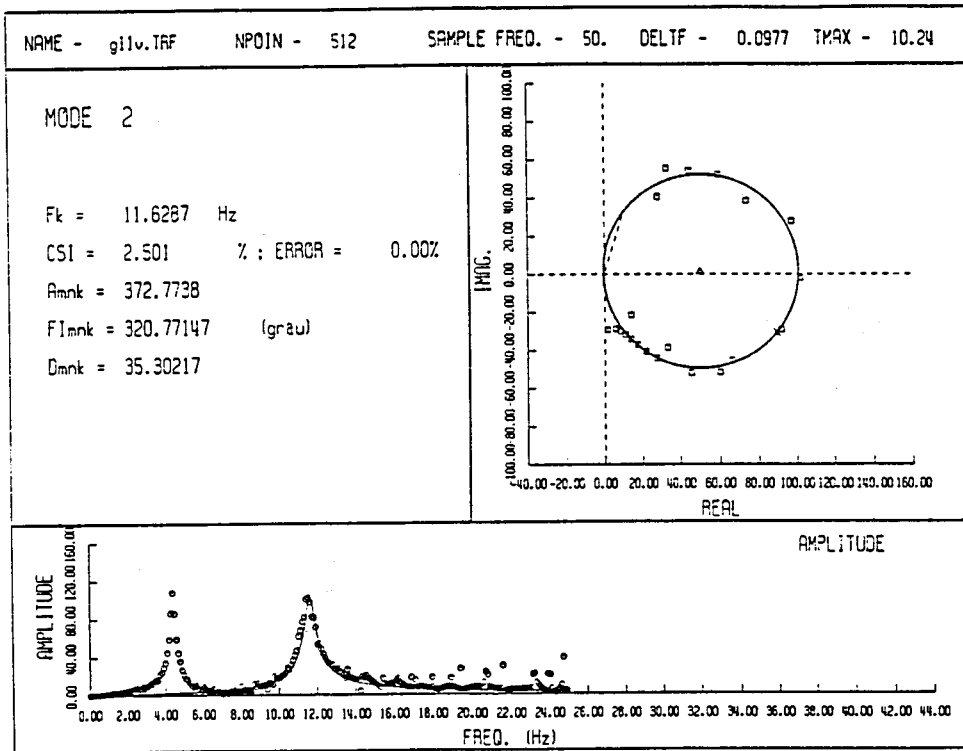


Figura 6.29 - Aplicação de FITCIR à estimativa $\hat{Y}_{11}(f)$ simulada: GRAFIC3 (modo de vibração 2).

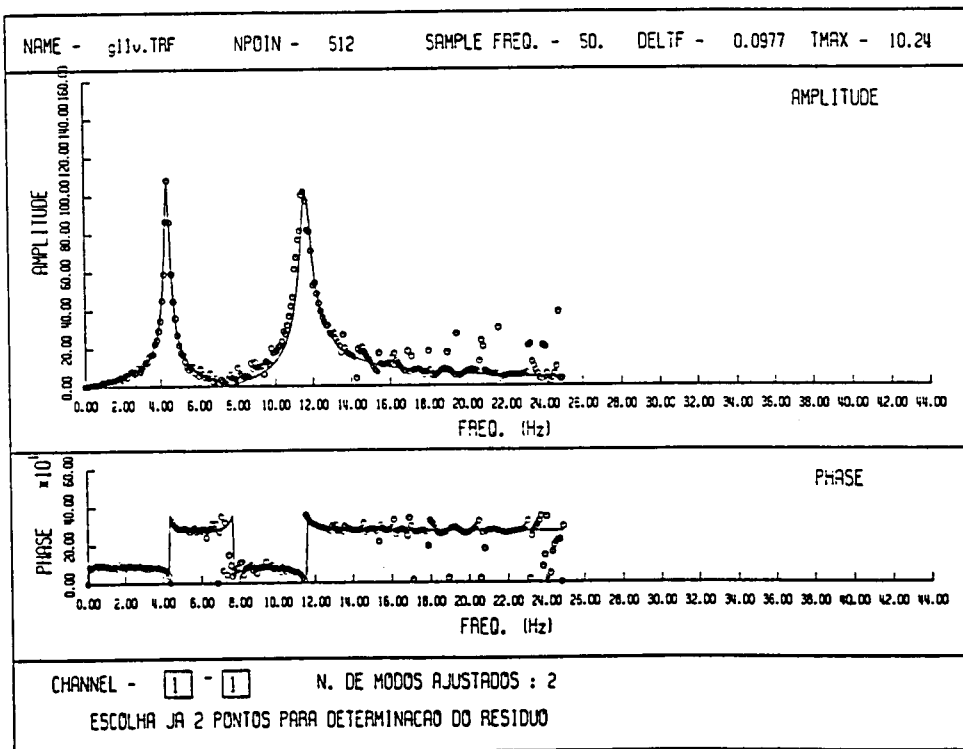


Figura 6.30 - Aplicação de FITCIR à estimativa $\hat{Y}_{11}(f)$ simulada: GRAFIC4.

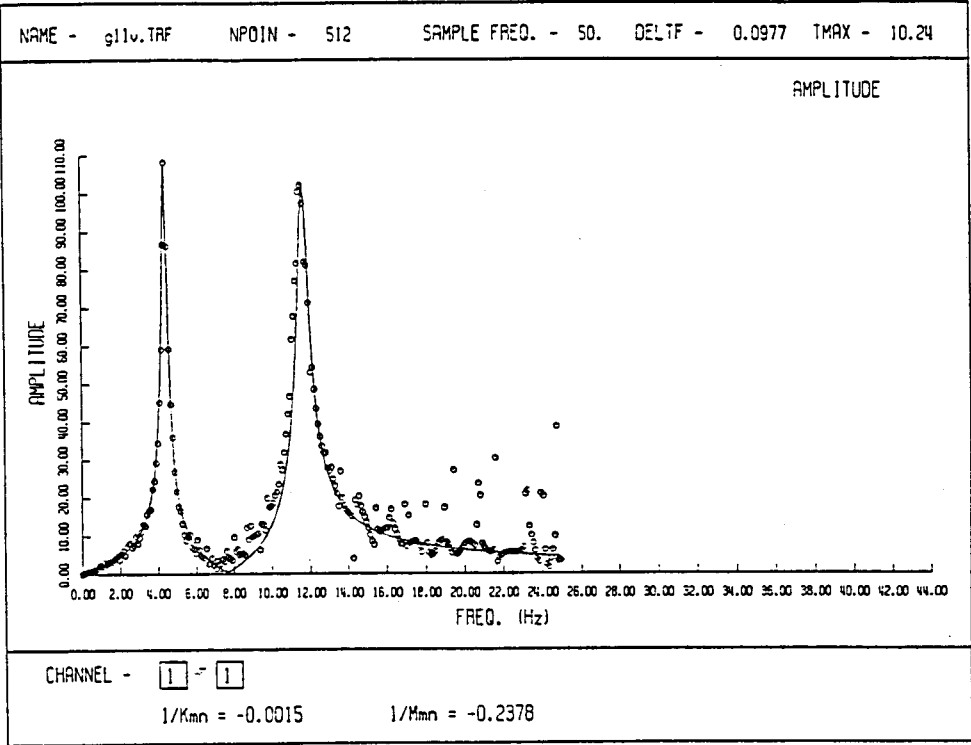


Figura 6.31 - Aplicação de FITCIR à estimativa $\hat{Y}_{11}(f)$ simulada: GRAFIC5.

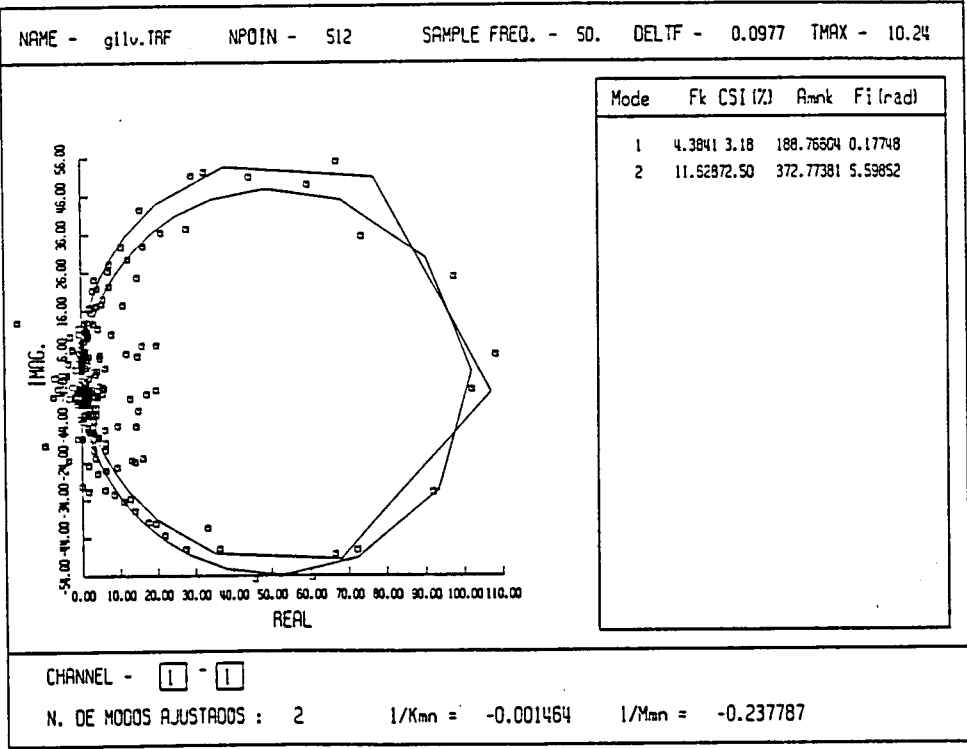


Figura 6.32 - Aplicação de FITCIR à estimativa $\hat{Y}_{11}(f)$ simulada: GRAFIC6.

Como se pode verificar, a presença de ruído afecta essencialmente os valores dos coeficientes de amortecimento e dos modos de vibração, conduzindo a um maior carácter complexo das constantes modais (a fase da constante modal é nesses gráficos designada por *finnk*) do que no caso em que a FRF não contém ruído. Os valores apresentados no Quadro 6.2 evidenciam todavia erros superiores aos obtidos por aplicação do método da amplitude de pico, facto que normalmente não ocorre na prática e se deve exclusivamente à pequena perturbação introduzida no valor de pico pelo ruído.

Quadro 6.2 - Parâmetros modais identificados através de FITCIR vs parâmetros modais reais.

	Frequências próprias (Hz)		Coeficientes de amortecimento (%)		Componentes dos modos de vibração			
	f_1	f_2	ξ_1	ξ_2	$(\phi_1)_1$	$(\phi_2)_1$	$(\phi_1)_2$	$(\phi_2)_2$
Reais	4,40	11,52	3,00	3,00	0,11756	0,19021	0,19021	- 0,11756
FITCIR - FRF teóricas	4,39	11,50	3,18	3,01	0,12090	0,19162	0,19050	- 0,11783
FITCIR - FRF simuladas	4,38	11,36	2,46	2,53	0,12050	0,16006	0,16934	- 0,12193

6.2.3 - Programa DOBSON - método de Dobson

O fluxograma apresentado na Figura 6.33 refere-se à estrutura global adoptada na implementação do método de Dobson.

Como aí se pode constatar, o utilizador escolhe o número de modos que pretende ajustar mediante a visualização do gráfico de Bode da função de resposta em frequência (GRAFIC1), definindo para cada um o intervalo de frequências correspondente.

A técnica de ajuste descrita na secção 5.3.1.4 do Capítulo 5 é então aplicada para cada modo de vibração, passando:

- pelo ajuste inicial da parte real e da parte imaginária da função Δ , definida pela equação (5.50) e caracterizada por funções lineares na variável independente w^2 , para cada um dos valores Ω_m localizados no intervalo de frequências seleccionado na análise;
- pela visualização dos feixes de rectas ajustados, com indicação dos coeficientes de correlação do ajuste realizado $r(Re)$ e $r(Im)$, o que permite de imediato extrair conclusões quanto ao carácter complexo da constante modal e, portanto, à adequação do método para caracterizar o sistema em análise (GRAFIC2);

- pelo ajuste do conjunto de declives dos feixes de rectas obtidos por duas rectas, uma em correspondência com a parte real de Δ e outra com a parte imaginária desta função;
- pela extracção dos parâmetros modais e visualização das rectas ajustadas; o maior ou menor desvio do conjunto de pontos utilizados em relação à recta ajustada fornece indicações relativas à existência de ruído na FRF, à adequação do intervalo de frequências seleccionado para o ajuste (se for demasiado largo, de forma a que a contribuição residual dos modos "laterais" não possa ser aproximada por uma constante, o afastamento dos pontos seleccionados aumenta na direcção dos extremos do intervalo), ou à possibilidade de o comportamento do sistema ser não-linear, situação em que o conjunto de pontos resultantes da medição apresenta uma tendência não linear na variação com w^2 .

A visualização final do gráfico ($Re[H]$, $Im[H]$), em que se sobrepõem os pontos da FRF medida à curva regenerada através dos parâmetros identificados, permite analisar a qualidade da identificação realizada.

Para ilustrar a aplicação deste método, procedeu-se uma vez mais à identificação dos parâmetros modais em correspondência com o sistema apresentado na Figura 6.5.

As Figuras 6.34 a 6.39 referem-se aos resultados da aplicação à FRF teórica amostrada relacionando deslocamentos e forças ao nível do grau de liberdade 1, enquanto que as Figuras 6.40 a 6.45 dizem respeito à estimativa da mesma FRF simulada com a presença de um ruído branco de banda limitada na saída. Resumem-se no Quadro 6.3 os parâmetros modais identificados nessas situações, podendo verificar-se por análise das figuras mencionadas e deste quadro a excelente qualidade do ajuste realizado em ambos os casos, particularmente para o nível de ruído presente na FRF simulada.

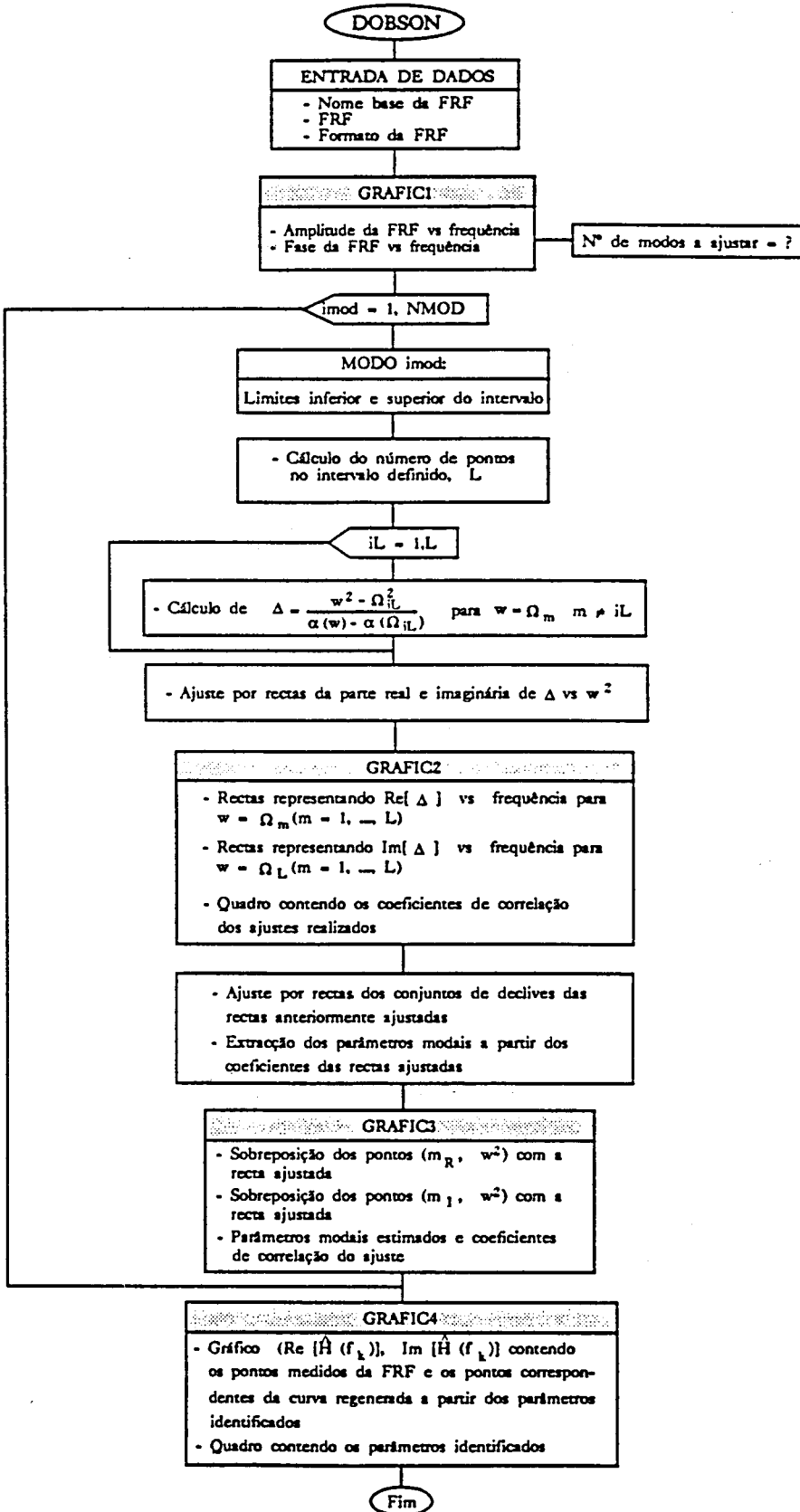


Figura 6.33 - Fluxograma do programa DOBSON (método de Dobson).

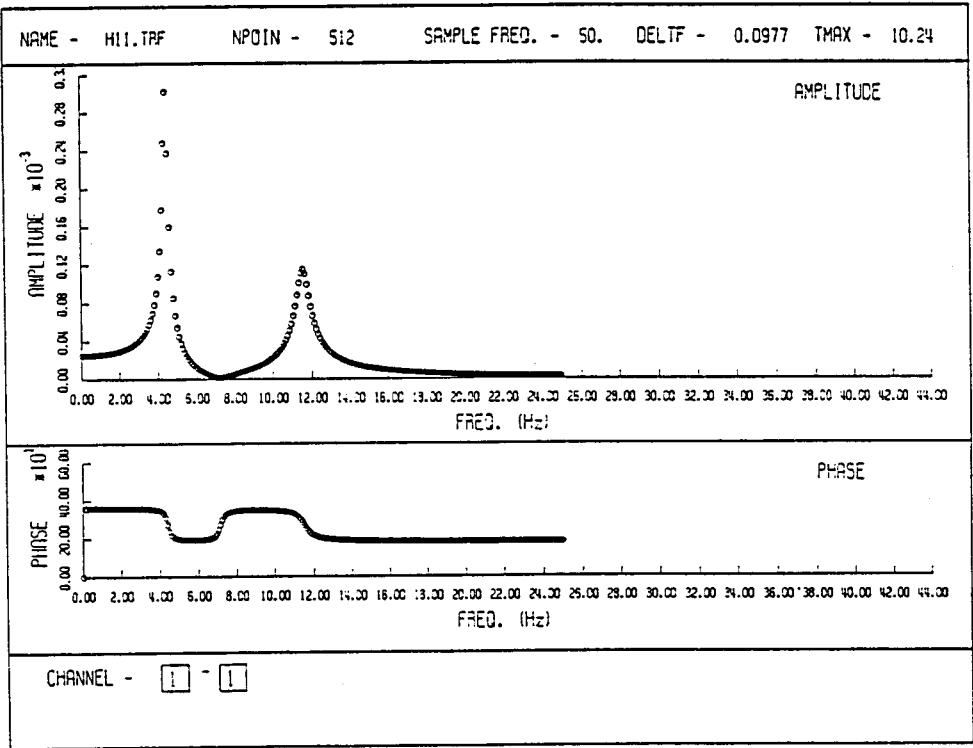


Figura 6.34 - Aplicação de DOBSON à FRF teórica: GRAFIC1.

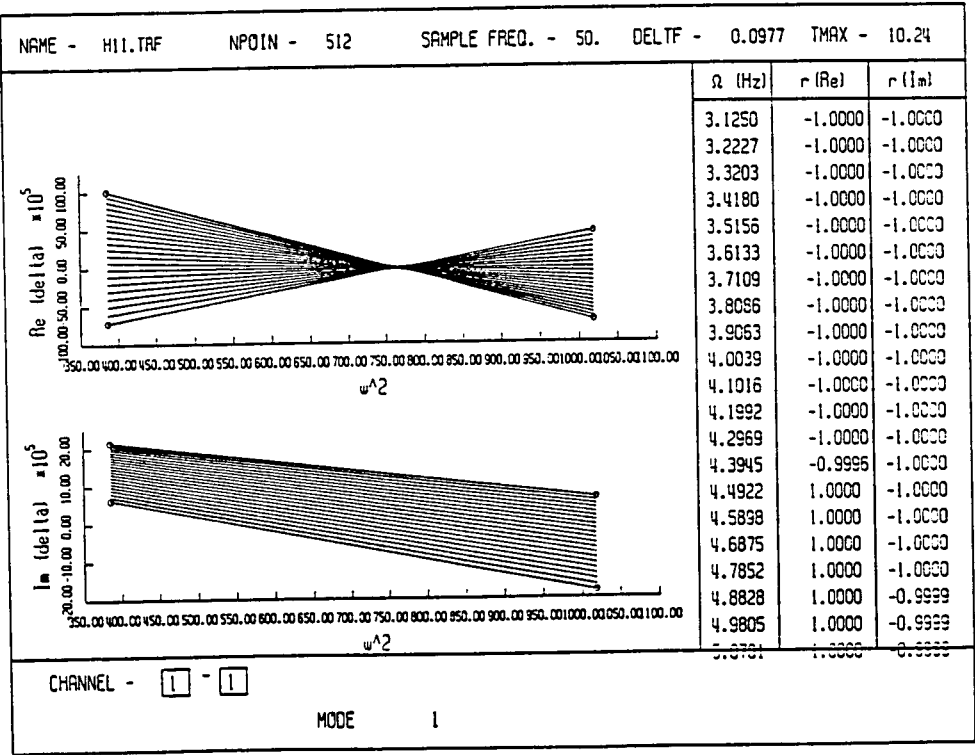


Figura 6.35 - Aplicação de DOBSON à FRF teórica: GRAFIC2 (modo de vibração 1).

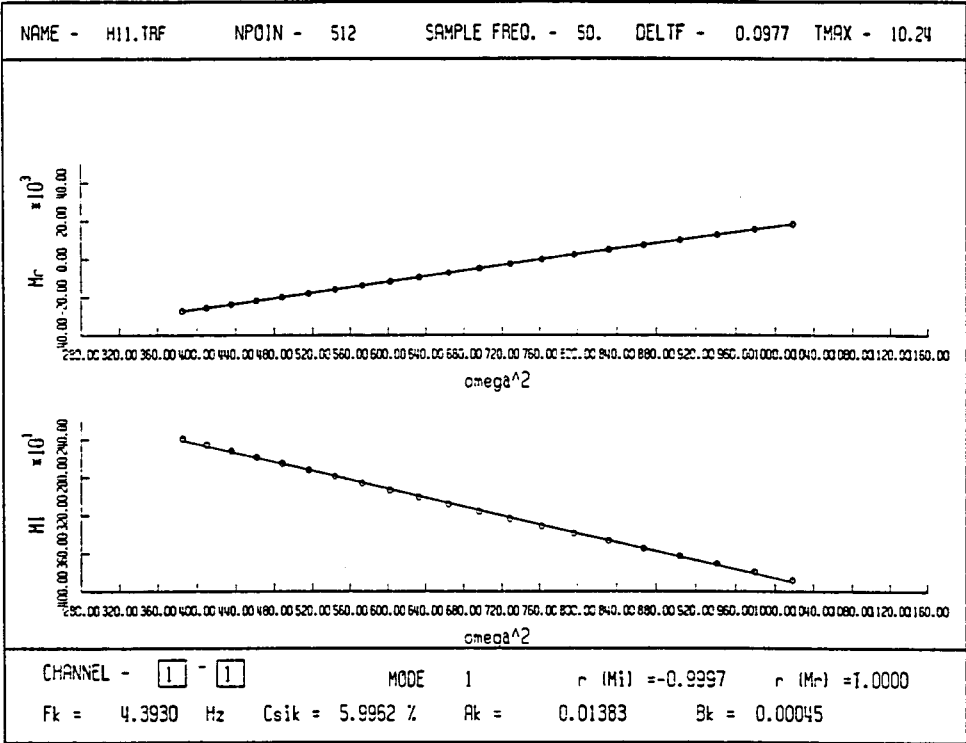


Figura 6.36 - Aplicação de DOBSON à FRF teórica: GRAFIC3 (modo de vibração 1).

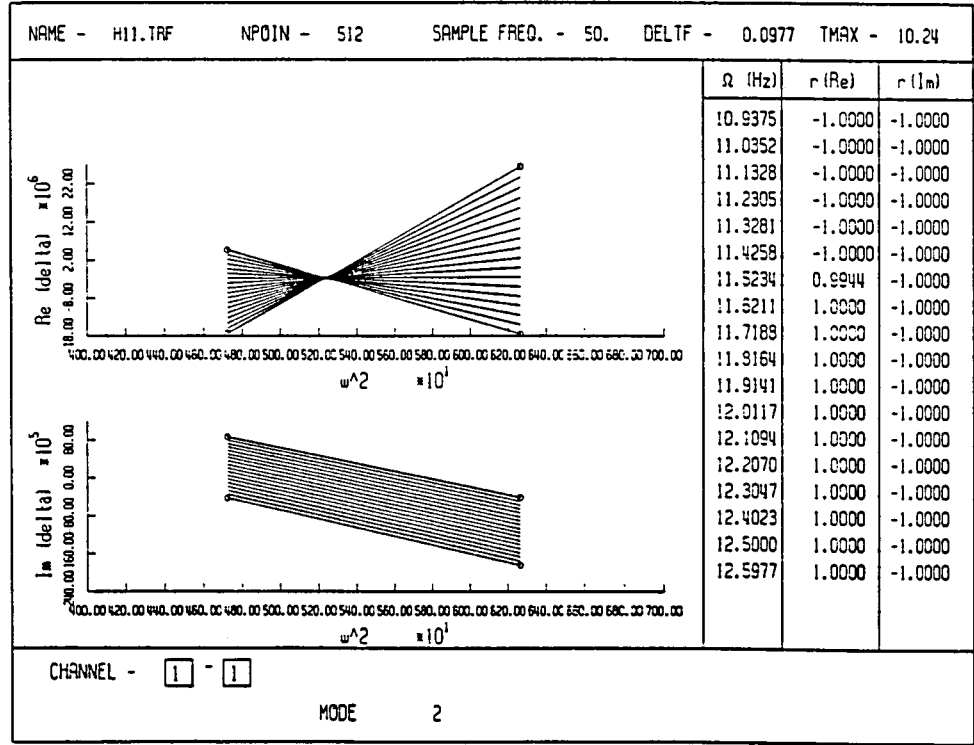


Figura 6.37 - Aplicação de DOBSON à FRF teórica: GRAFIC2 (modo de vibração 2).

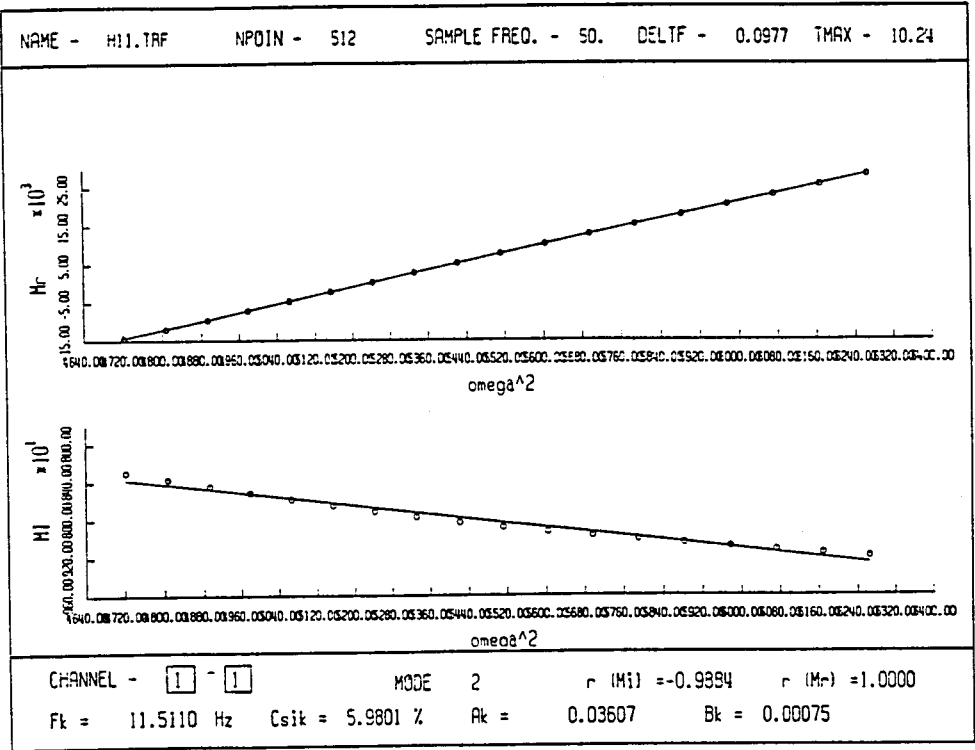


Figura 6.38 - Aplicação de DOBSON à FRF teórica: GRAFIC3 (modo de vibração 2).

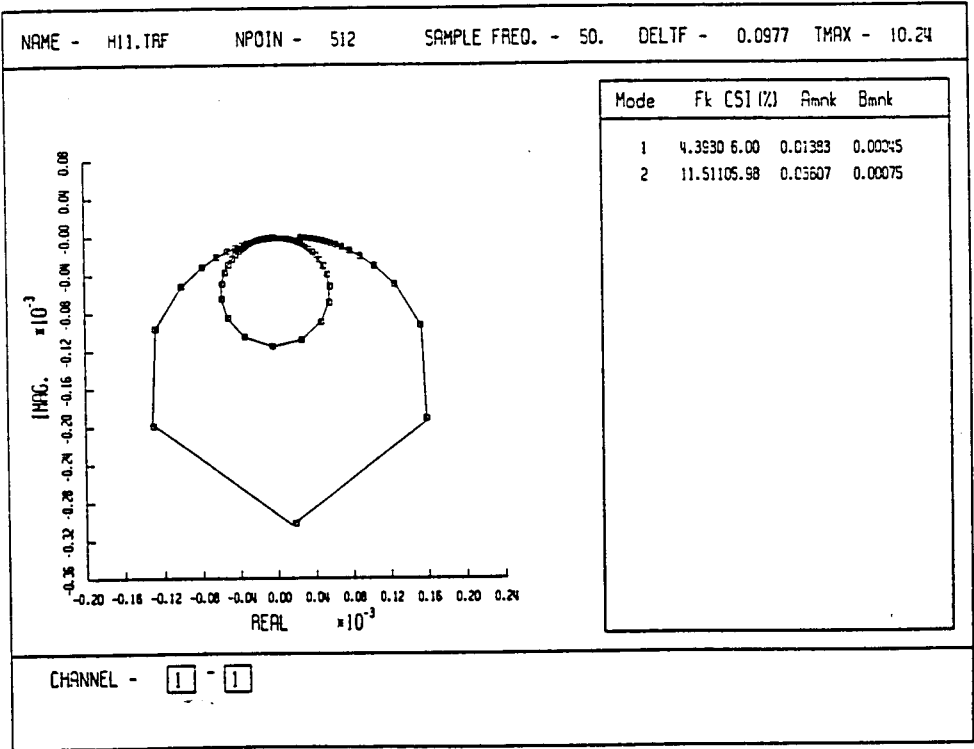


Figura 6.39 - Aplicação de DOBSON à FRF teórica: GRAFIC4.

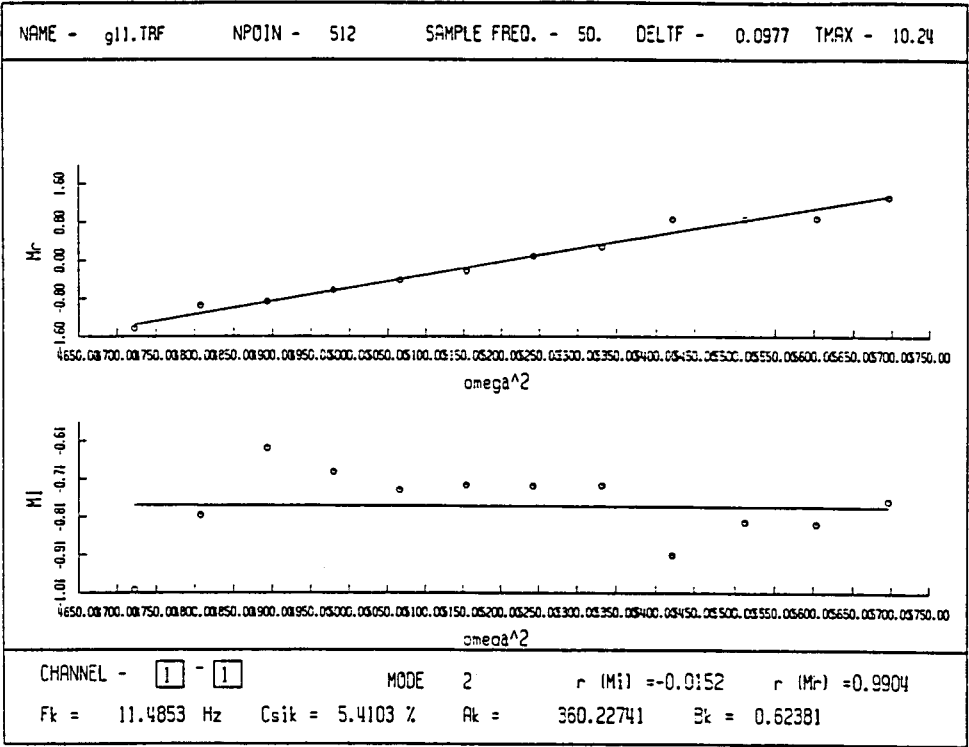


Figura 6.44 - Aplicação de DOBSON à FRF teórica: GRAFIC3 (modo de vibração 2).

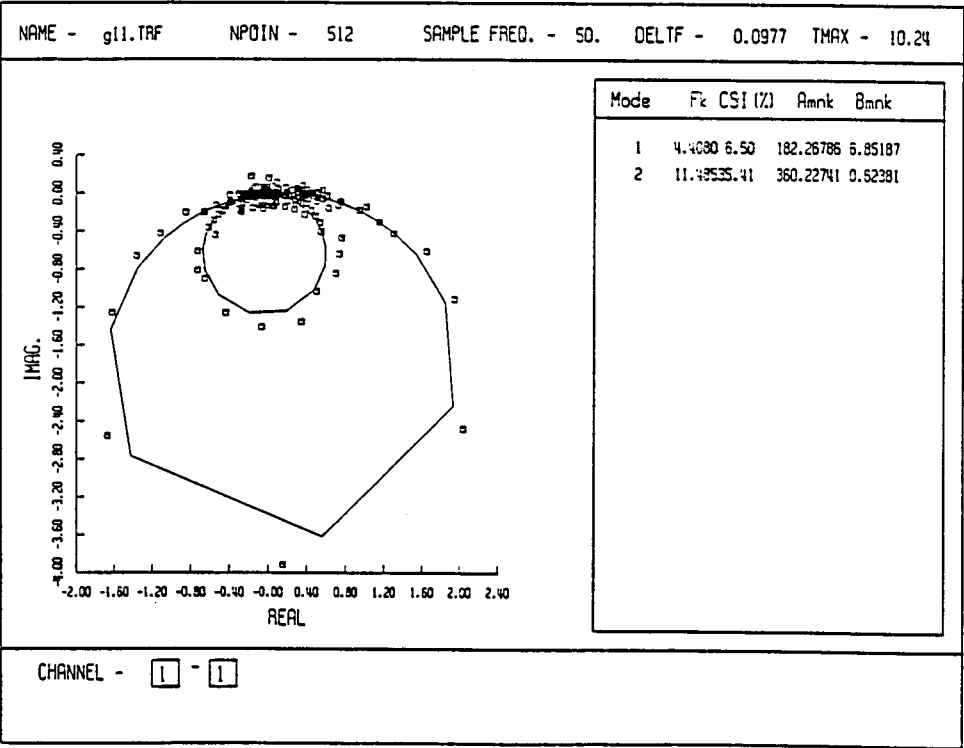


Figura 6.45 - Aplicação de DOBSON à FRF teórica: GRAFIC4.

Quadro 6.3 - Parâmetros modais identificados através de DOBSON vs parâmetros modais reais.

	Frequências próprias (Hz)		Coeficientes de amortecimento (%)		Componentes dos modos de vibração			
	f_1	f_2	ξ_1	ξ_2	$(\phi_1)_1$	$(\phi_2)_1$	$(\phi_1)_2$	$(\phi_2)_2$
Reais	4,40	11,52	3,00	3,00	0,11756	0,19021	0,19021	- 0,11756
DOBSON - FRF teóricas	4,39	11,51	3,00	2,99	0,11761	0,19021	0,18993	- 0,11869
DOBSON - FRF simuladas	4,41	11,49	3,25	2,71	0,11845	0,19064	0,16646	- 0,10628

Note-se que usando este método simplificações do mesmo nível das utilizadas pelo método do "circle fit", os resultados obtidos foram claramente superiores aos alcançados através deste último, não podendo no entanto concluir-se daqui ser o método de Dobson superior ao método do "circle fit", já que o funcionamento de qualquer dos métodos depende significativa e diferentemente das características da FRF em análise.

Chama-se ainda atenção para as Figuras 6.41 a 6.44 onde, por comparação com os gráficos 6.35 a 6.38, se pode observar o efeito da existência de ruído na configuração dos feixes de rectas e rectas ajustadas.

Realça-se também que o modelo de amortecimento em que se baseia o método DOBSON é o modelo de amortecimento proporcional estrutural, em que o coeficiente de amortecimento η_k associado ao modo de vibração k assume valor duplo do coeficiente de amortecimento ξ_k sobre a frequência de ressonância f_k , assim se explicando os valores designados por "csi" que surgem nas Figuras 6.39 e 6.44.

6.2.4 - Programa SMSMET - método de Mau

Conforme foi visto na secção 5.3.1.5 do Capítulo 5, o método de Mau constitui uma técnica de grande simplicidade, baseando-se na mesma hipótese do método da amplitude de pico, em que se admite ser nula a contribuição dos modos não-ressonantes na vizinhança de cada frequência própria, mas usando no entanto um número superior de pontos (a definir pelo utilizador) para identificar cada modo de vibração.

A Figura 6.46 representa um fluxograma do programa implementado.

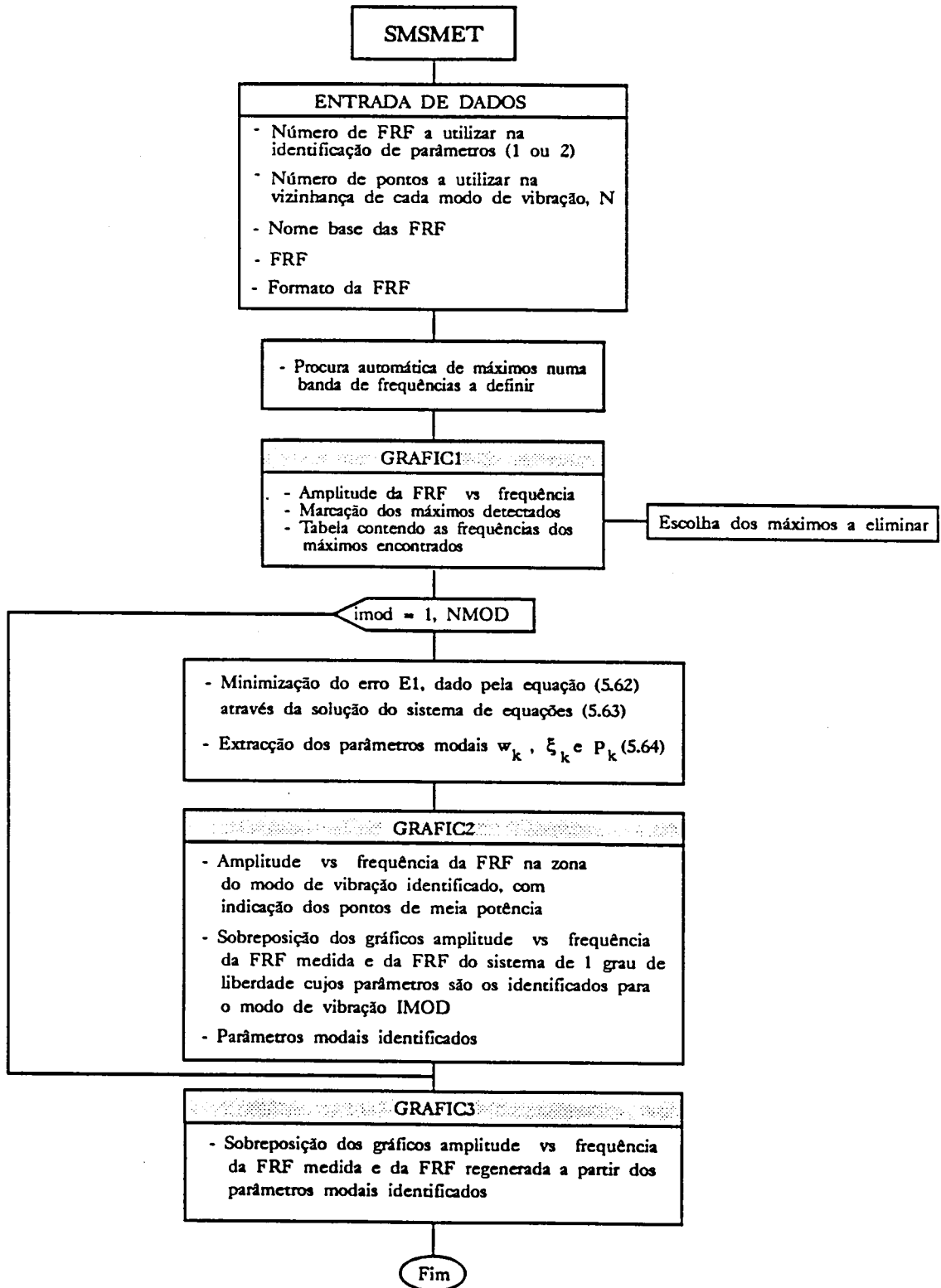


Figura 6.46 - Fluxograma do programa SMSMET: Método de Mau.

Neste programa optou-se por simplificar a tarefa do utilizador, procedendo-se a uma busca automática dos máximos da FRF num intervalo de frequências definido exteriormente, sendo possível depois eliminar no ajuste aqueles que efectivamente não correspondam a modos de vibração do sistema, o que se pode concluir após visualização do gráfico amplitude versus frequência (GRAFIC1).

Pode então proceder-se ao ajuste dos parâmetros modais, minimizando através da técnica de mínimos quadrados a função de erro expressa pela equação (5.62), o que leva à solução do sistema de 4 ou 3 equações lineares a 4 ou 3 incógnitas, respectivamente, conforme se tenha optado pelo ajuste em simultâneo dos parâmetros modais de 2 FRF, ou apenas de uma.

Pode visualizar-se, no decurso da identificação dos parâmetros em correspondência com cada modo de vibração, o gráfico onde se sobrepõem as amplitudes da FRF medida e da FRF regenerada, representando-se igualmente os pontos de meia potência usados na estimação do coeficiente de amortecimento (GRAFIC2).

Finalmente, após identificação de todos os modos de vibração, a sobreposição das amplitudes da FRF medida e da FRF regenerada a partir do conjunto de parâmetros identificados (GRAFIC3) permite avaliar a qualidade global do ajuste realizado.

As Figuras 6.47 a 6.50 e 6.51 a 6.54 dizem respeito mais uma vez à aplicação à FRF teórica amostrada e à correspondente estimativa simulada com introdução de um ruído branco de banda limitada, relacionando deslocamentos e forças ao nível do grau de liberdade 1 do sistema representado na Figura 6.5. Nestes exemplos seleccionou-se a utilização de 5 pontos centrados em torno de cada frequência de ressonância, com vista à sua localização.

O Quadro 6.4 resume o conjunto de parâmetros modais identificados, podendo em geral verificar-se ser superior a qualidade destes últimos face aos correspondentes valores obtidos através do método da amplitude de pico, como seria de esperar, atendendo ao facto de serem usados vários pontos na localização de cada ressonância.

Quadro 6.4 - Parâmetros modais identificados através de SMSMET vs parâmetros modais reais.

	Frequências próprias (Hz)		Coeficientes de amortecimento (%)		Componentes dos modos de vibração			
	f_1	f_2	ξ_1	ξ_2	$(\phi_1)_1$	$(\phi_2)_1$	$(\phi_1)_2$	$(\phi_2)_2$
Reais	4,40	11,52	3,00	3,00	0,11756	0,19021	0,19021	- 0,11756
MAU - FRF teóricas	4,39	11,53	2,97	3,00	0,11722	0,19078	0,19041	- 0,11683
MAU - FRF simuladas	4,39	11,52	2,87	2,12	0,11534	0,19556	0,15734	- 0,11891

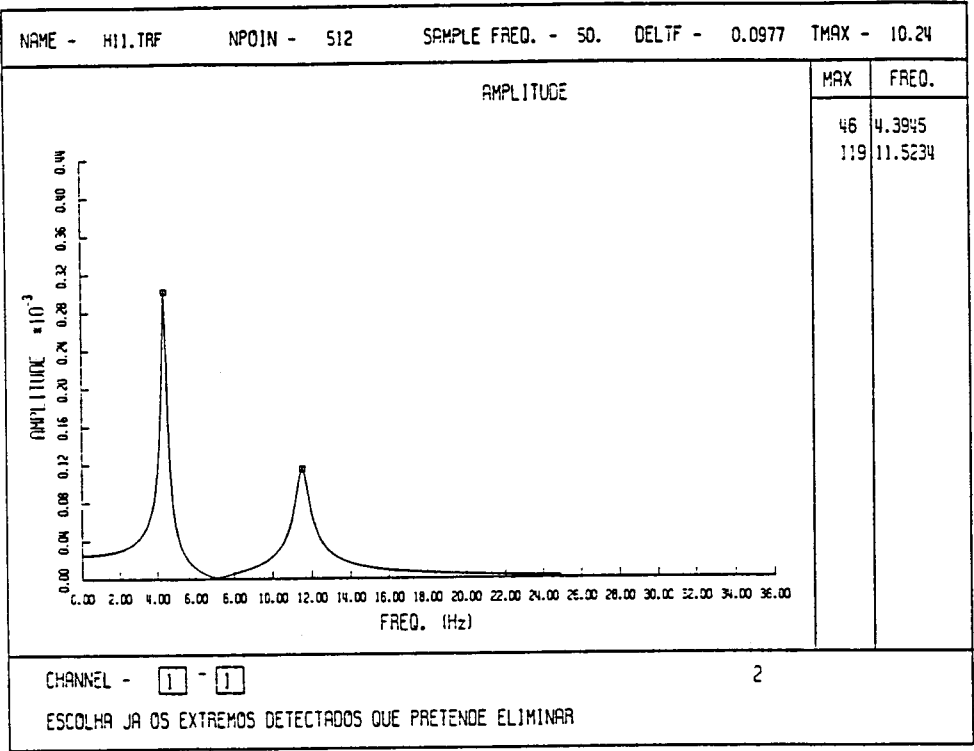


Figura 6.47 - Aplicação de SMSMET à FRF teórica: GRAFIC1.

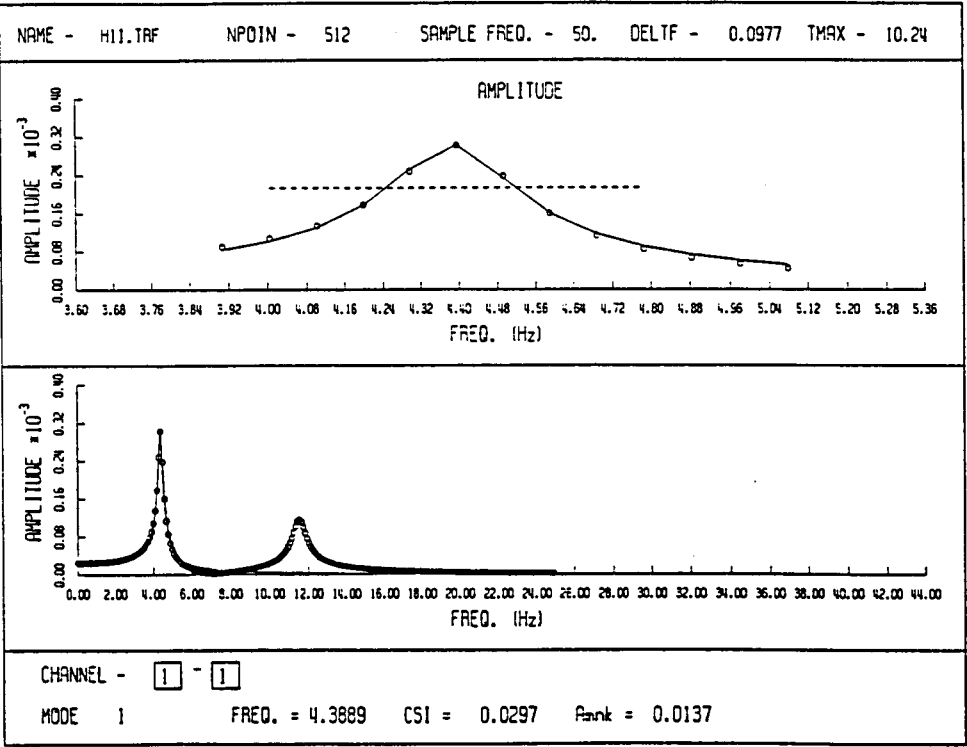


Figura 6.48 - Aplicação de SMSMET à FRF teórica: GRAFIC2 (modo de vibração 1).

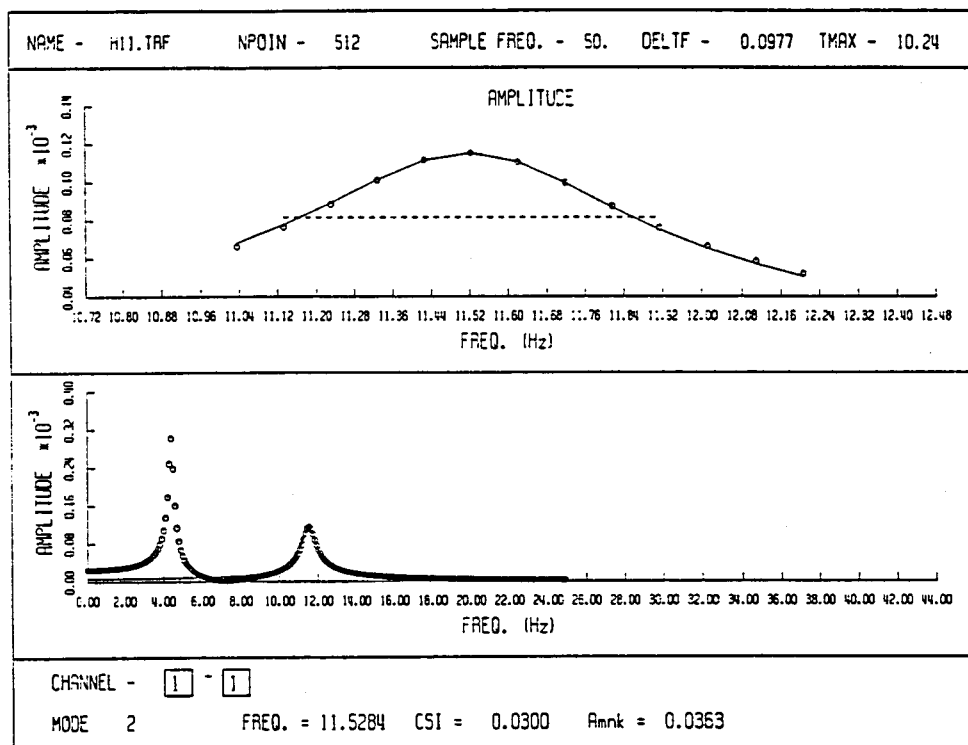


Figura 6.49 - Aplicação de SMSMET à FRF teórica: GRAFIC2 (modo de vibração 2).

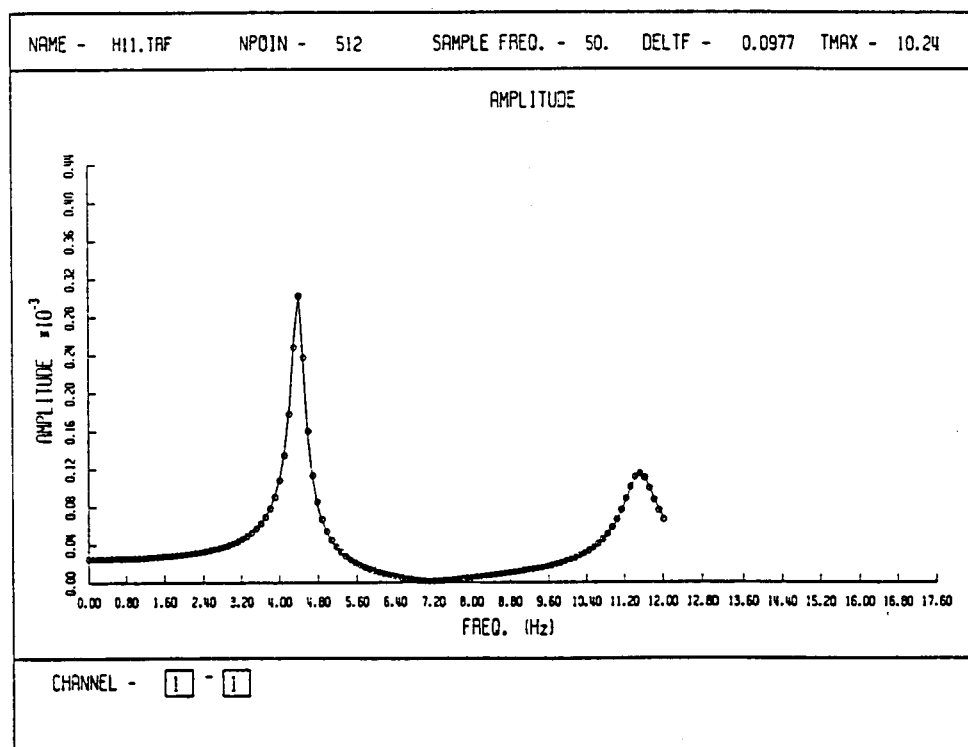


Figura 6.50 - Aplicação de SMSMET à FRF teórica: GRAFIC3.

Capítulo 6

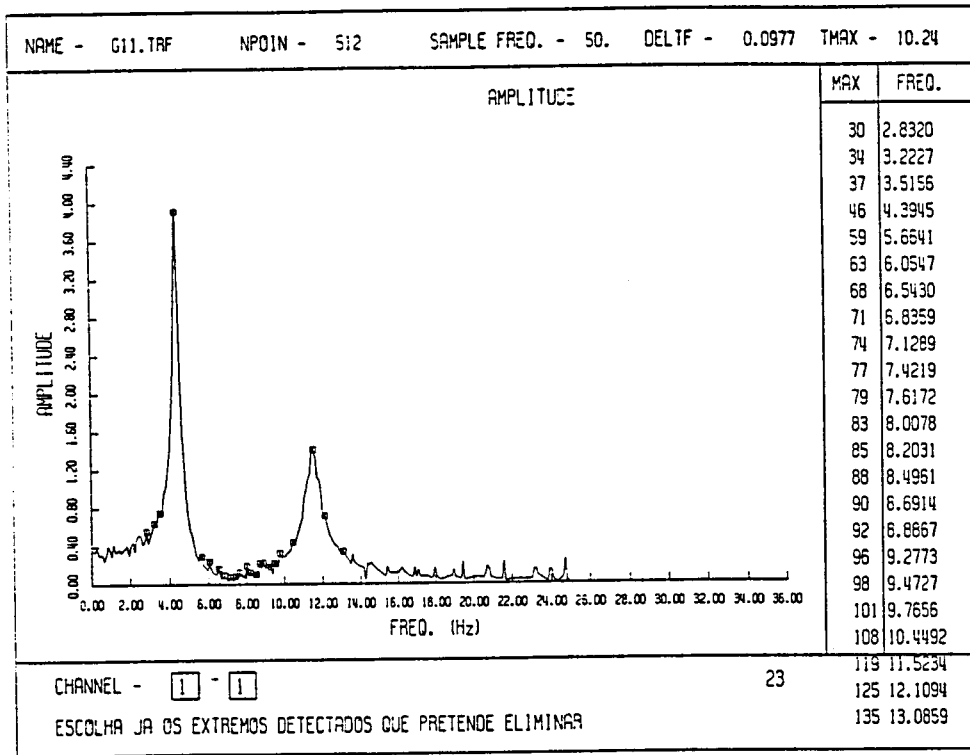


Figura 6.51 - Aplicação de SMSMET à estimativa $\hat{H}_{11}(f)$ simulada: GRAFIC1.

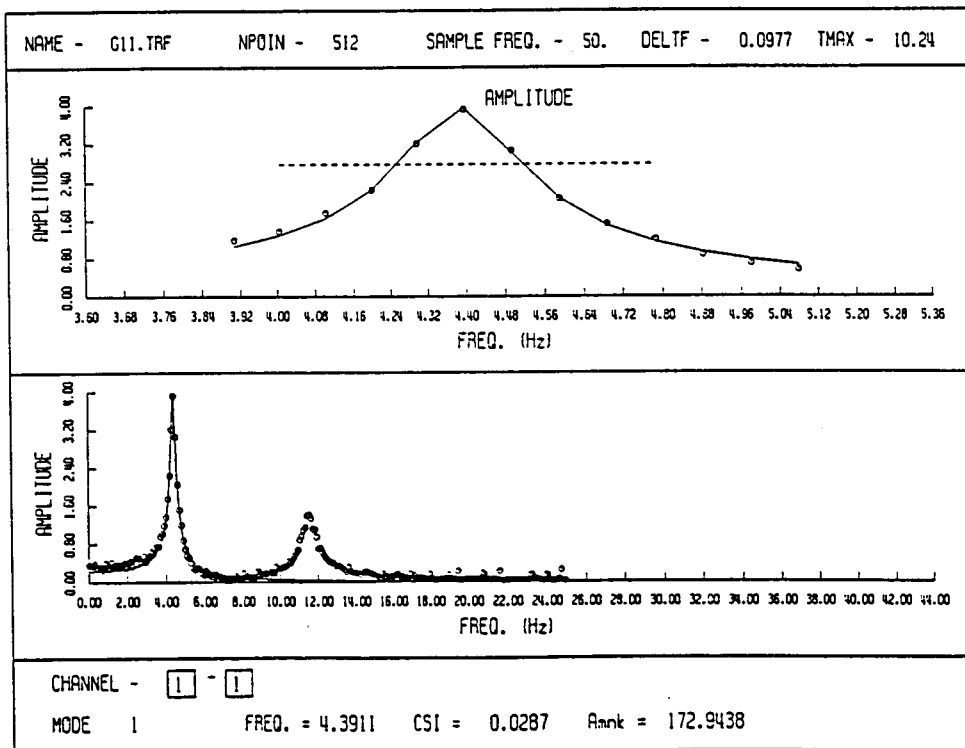


Figura 6.52 - Aplicação de SMSMET à estimativa $\hat{H}_{11}(f)$ simulada: GRAFIC2 (modo de vibração 1).

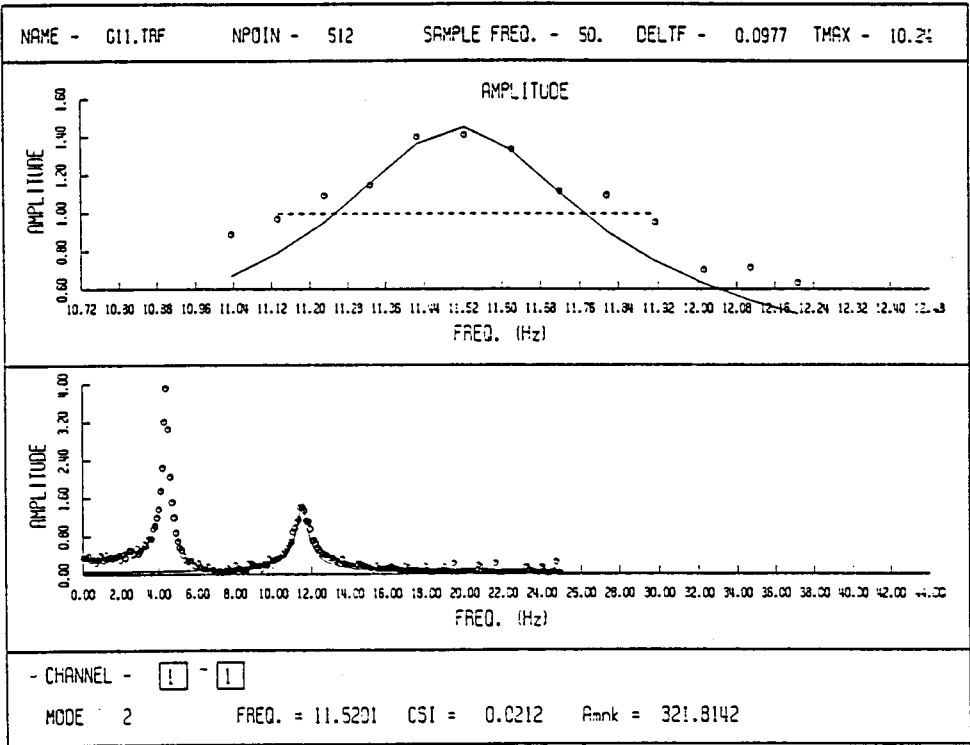


Figura 6.53 - Aplicação de SMSMET à estimativa $\hat{H}_{11}(f)$ simulada: GRAFIC2 (modo de vibração 2).

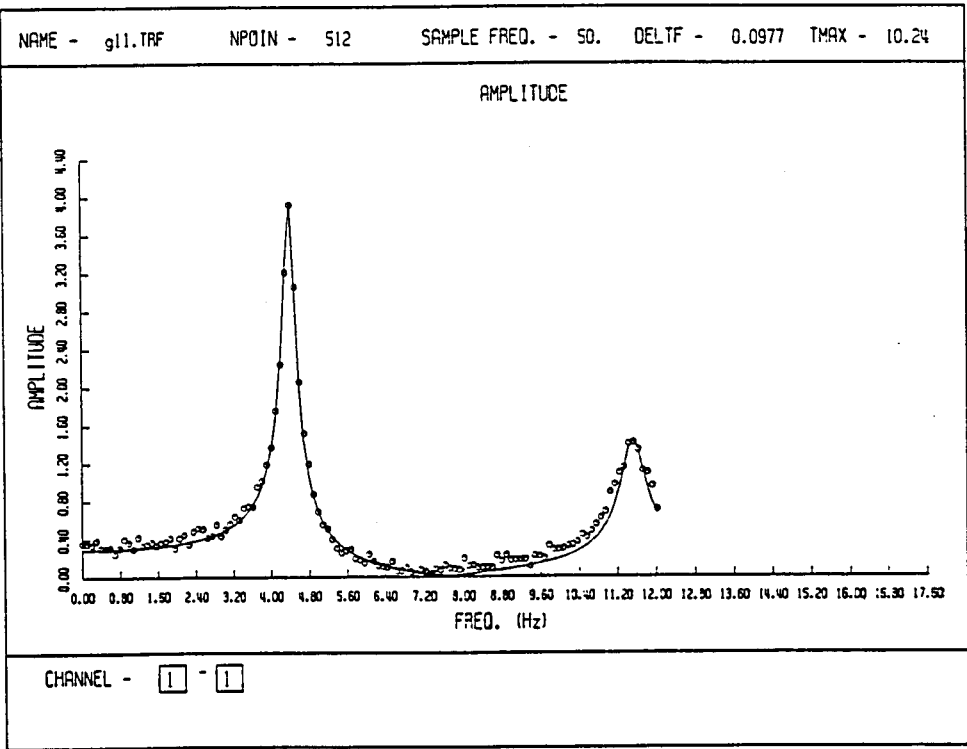


Figura 6.54 - Aplicação de SMSMET à estimativa $\hat{H}_{11}(f)$ simulada: GRAFIC3.

CAPÍTULO 7

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

INTRODUÇÃO

Na curta experiência do Departamento de Engenharia Civil da Faculdade de Engenharia do Porto na área de Identificação Experimental de Parâmetros Dinâmicos em Estruturas, iniciada em 1987 com a aquisição de parte do equipamento descrito em 3.3, foi possível montar um sistema de medição e desenvolver um conjunto de programas de processamento de sinal e de identificação de parâmetros dinâmicos em estruturas, cuja eficiência tem sido comprovada em variados ensaios realizados ao longo deste período, quer em resposta a solicitações de algumas empresas de que as referências [33, 34] são exemplo, quer com o objectivo específico de testar alguma componente do próprio equipamento.

Na fase actual de desenvolvimento deste trabalho, pode dizer-se que se dispõe de um sistema plenamente testado, que se prevê possa ser correntemente utilizado no futuro na observação de estruturas diversas, contribuindo para a solução de numerosos problemas que frequentemente se colocam, quer no decorrer da sua construção, quer ao longo da sua vida útil.

Para apresentação neste trabalho, e em resultado da aplicação de programas de cálculo e metodologias descritos nos Capítulos 5 e 6, seleccionaram-se os seguintes exemplos:

- 1 - Ensaio laboratorial de uma viga metálica de pequena dimensão sujeita a acções transientes produzidas por um martelo de impulsos;
- 2 - Ensaio de uma laje quadrada de betão armado apoiada em 4 pilares, sujeita a acções transientes produzidas por um martelo de impulsos;

Com estes exemplos, pretendeu-se ilustrar a aplicabilidade e eficiência das técnicas descritas ao longo deste trabalho em situações práticas reais e transmitir alguma da experiência e sensibilidade adquiridas neste domínio decorrentes de certos problemas experimentados, quer na medição de sinais, quer na comparação dos resultados experimentais com os obtidos por via numérica ou, finalmente, na aplicação das formulações teóricas que estão na base dos referidos modelos.

7.1 - ENSAIO LABORATORIAL DE UMA VIGA METÁLICA DE PEQUENA DIMENSÃO SUJEITA A ACÇÕES TRANSIENTES PRODUZIDAS POR UM MARTELO DE IMPULSOS

A aplicação que se descreve nesta secção consistiu na identificação das propriedades dinâmicas de uma viga em alumínio, de dimensões $7,62 \times 0,635 \times 139,7 \text{ cm}^3$ (3"x0,25"x55"), cuja ligação ao exterior, idealizada como inexistente, se materializou pelo apoio em placas onduladas de esponja (Figura 7.1).

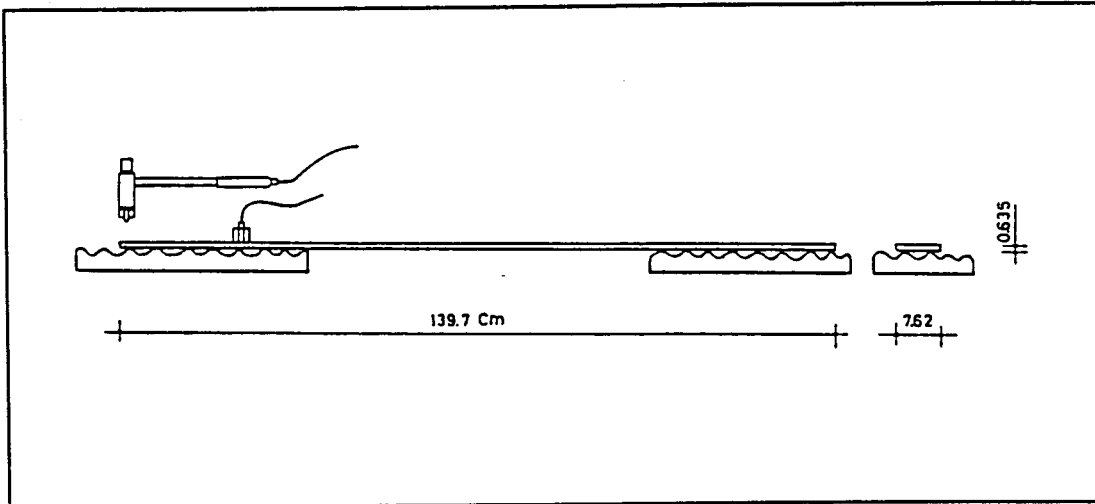


Figura 7.1 - Viga de alumínio.

Embora esta estrutura não seja representativa de qualquer sistema correntemente estudado no âmbito da Engenharia Civil, tanto pela escala, como ainda pela gama de frequências naturais (com início nas dezenas de Hertz), pelas condições de ensaio (laboratoriais) e pela forma de ligação ao exterior, justifica-se a apresentação deste estudo no presente trabalho pelas seguintes razões:

- Trata-se de uma estrutura cuja modelação teórica é amplamente conhecida, o que muito facilita a comparação dos parâmetros obtidos experimentalmente com os correspondentes parâmetros do modelo teórico, permitindo então de forma simples validar as técnicas experimentais utilizadas;
- A realização de ensaios em laboratório propicia excelentes condições para minorar eventuais perturbações indesejáveis, cujos efeitos nem sempre são facilmente identificáveis quando o ensaio é realizado "in situ";
- Este exemplo constituiu a primeira experiência pessoal da utilização de um analisador de Fourier. A possibilidade de analisar a estrutura em tempo real, através da visualização da estimativa da FRF e da função de coerência associada logo após a aplicação do impulso e, eventualmente, da aplicação de janelas de dados, filtros ou outras funções programadas, contribuiu para adquirir sensibilidade no que respeita, quer à forma de aplicação da excitação com o martelo de impulsos, quer ao número de séries necessárias para a obtenção de uma boa estimativa da FRF, quer ainda à própria rotina de ensaio e de interpretação de resultados.

7.1.1 - Modelação numérica

A solução clássica fornecida pela teoria de Euler-Bernoulli para as frequências naturais de uma viga de secção constante com extremidades livres em vibração lateral [133], obtida para a hipótese de a deformação ocorrer segundo um dos planos principais de flexão da barra e de a sua secção transversal possuir dimensões reduzidas em relação ao comprimento, é dada por

$$f_i = \frac{k_i^2 \alpha}{2\pi}, \quad \text{com} \quad \alpha = \sqrt{\frac{EIg}{A\gamma}} \quad (7.1)$$

sendo EI a rigidez em flexão da secção, g a aceleração da gravidade, A a área da secção transversal e γ o peso volúmico do material.

Os valores das constantes k_i podem obter-se da tabela 7.1, onde l representa o comprimento da viga.

Tabela 7.1 - Constantes k_i referentes à expressão (7.1).

$k_1 l$	$k_2 l$	$k_3 l$	$k_4 l$	$k_5 l$	$k_6 l$	$k_7 l \dots$
0	4,730	7,853	10,996	14,137	17,279	20,420 ...

A configuração dos modos de vibração pode ser obtida por uma expressão do tipo

$$\phi_i(x) = C_1 [\cos(k_i x) + \cosh(k_i x)] + C_3 [\sin(k_i x) + \sinh(k_i x)] \quad (7.2)$$

em que as constantes C_1 e C_3 satisfazem a equação

$$C_1 [-\cos(k_i l) + \cosh(k_i l)] + C_3 [-\sin(k_i l) + \sinh(k_i l)] = 0 \quad (7.3)$$

Tendo em conta as propriedades do material constituinte da secção ($E = 73,82 \text{ GPa}$; $\nu = 0,3$; $\gamma = 27,15 \text{ kN/m}^3$) e as características geométricas desta última ($A = 4,8387 \times 10^{-4} \text{ m}^2$; $I = 1,6259 \times 10^{-9} \text{ m}^4$), calcularam-se as primeiras 5 frequências naturais e respectivos modos de vibração. Sumarizam-se no Quadro 7.1 os valores obtidos das frequências naturais, enquanto que as configurações dos modos de vibração são representadas na Figura 7.2.

Quadro 7.1 - Frequências naturais dos primeiros 5 modos de vibração.

Modo nº	Frequência (Hz) (Euler-Bernoulli)
1	17,3
2	47,6
3	93,3
4	154,3
5	230,5

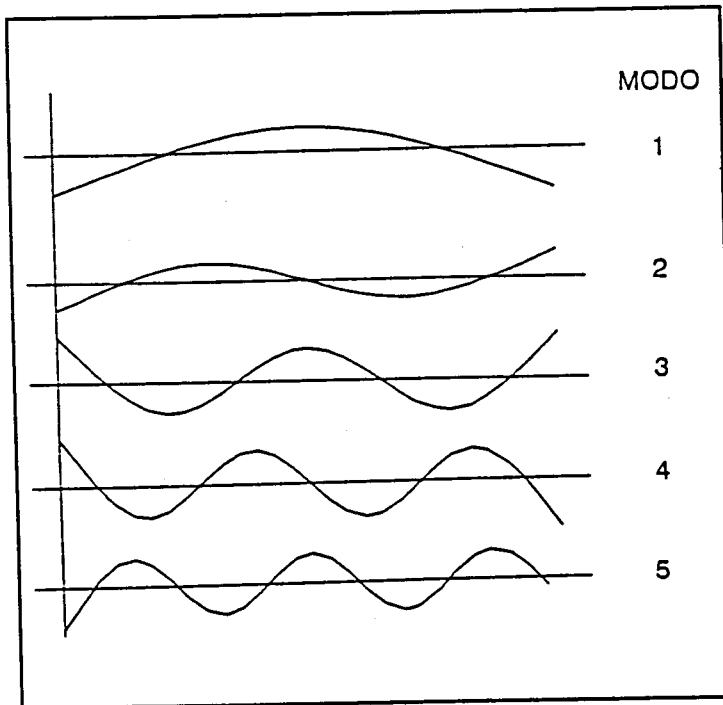


Figura 7.2 - Configurações dos primeiros 5 modos de vibração.

7.1.2 - Ensaios realizados. Processamento de sinal

Os ensaios da viga descrita em 7.1.1, realizados no Laboratório de Análise Modal do Departamento de Engenharia Mecânica da Virginia Polytechnic Institute and State University (VATECH) no decorrer de um estágio efectuado nessa Universidade, foram desenvolvidos com base na utilização do seguinte equipamento:

- 1 martelo de impulsos PCB, modelo 086B03, com possibilidade de aplicação de um impulso na gama de 0 a 2,2kN;
- 1 acelerómetro PCB, modelo 383A02 com sensibilidade de 10mV/g;
- 2 amplificadores de sinal PCB, modelo 480D06;
- 1 analisador de Fourier Zonic, modelo 6080.

Na montagem realizada, utilizaram-se 2 dos 4 canais disponíveis do analisador de Fourier, o primeiro dos quais foi ligado ao sensor de força do martelo e o segundo ao acelerómetro, em ambos os casos com interposição de um amplificador de sinal. A fixação do acelerómetro foi efectuada com cera de abelha.

A técnica de ensaio consistiu, basicamente, em aplicar uma série de 5 impulsos com o martelo numa posição fixa (coincidindo, neste caso, com uma das extremidades da viga) e percorrer 15 marcas igualmente espaçadas ao longo do eixo da barra com o acelerómetro, obtendo assim estimativas das funções de resposta em frequência e correspondentes funções de coerência entre a resposta medida em cada uma dessas marcas e a força aplicada na extremidade da viga.

A obtenção de uma linha ou coluna da matriz de funções de resposta em frequência da estrutura constitui, teoricamente, uma condição necessária e suficiente para a estimação de todos os parâmetros modais necessários. No entanto, é usual a obtenção adicional de todos os elementos da diagonal principal da matriz de FRF, pelo facto de lhes estarem associadas normalmente coerências mais elevadas [43]. Desta forma, realizou-se uma segunda série de testes, em que se obtiveram estimativas das FRF entre a resposta medida numa dada marca e a força aplicada nessa mesma posição.

Apresenta-se na Figura 7.3 um exemplo tipo do impulso aplicado e da resposta medida, respectivamente, constituindo registos de 1024 valores amostrados a 640Hz, com uma duração de 1,6s.

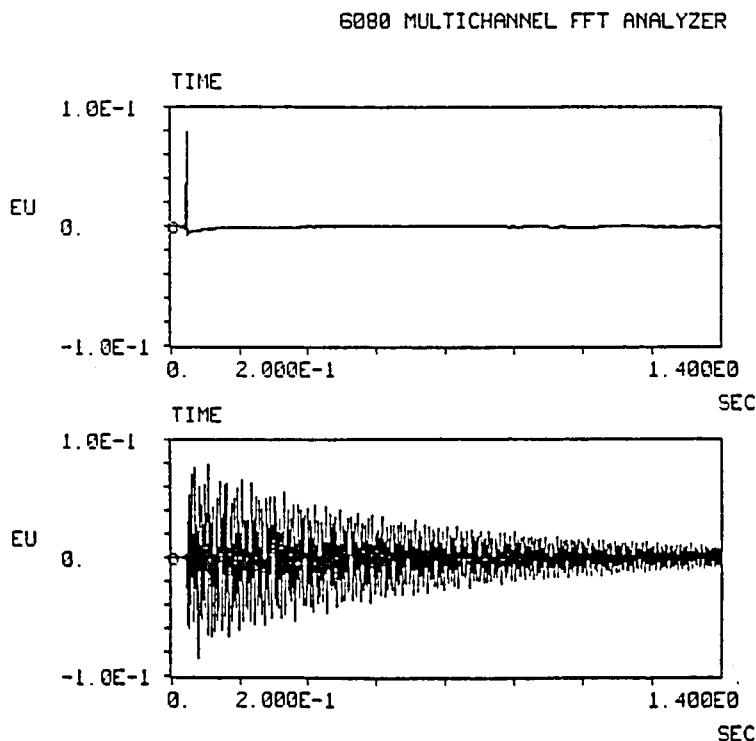


Figura 7.3 - Impulso e resposta no ponto 1.

Pelo facto de o amortecimento da estrutura ser muito baixo, a atenuação do sinal caracterizador da resposta não é completa dentro da janela de observação utilizada. Aplicou-se por isso uma janela de dados exponencial aos sinais de entrada e saída, de forma a reduzir o efeito de "leakage".

Como se pode observar na Figura 7.4, onde se apresenta uma estimativa da função densidade espectral de potência do impulso aplicado no ponto 2, as ordenadas espectrais são significativas em toda a gama de frequências analisadas, de 0 a 250Hz, o que significa serem mobilizados os modos estruturais existentes nessa gama.

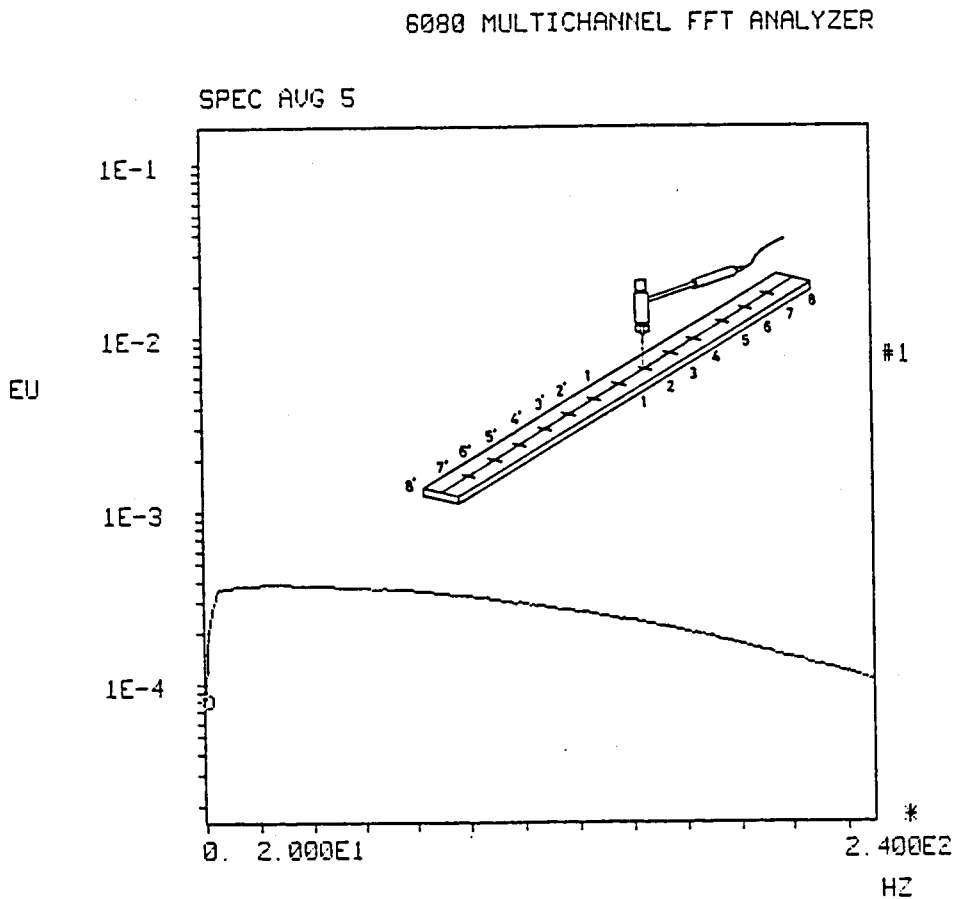


Figura 7.4 - Estimativa da função densidade espectral de potência da entrada no ponto 2.

Nas Figuras 7.5 a 7.8 apresentam-se as estimativas de duas FRF (Inertâncias) e das correspondentes funções de coerência, sendo as primeiras expressas quer em amplitude e fase (Figuras 7.5 e 7.7), quer em parte real e imaginária (Figura 7.6 e 7.8). Estas funções foram obtidas no decorrer do ensaio, usando o analisador de Fourier.

Como se pode observar nessas figuras, a coerência é excelente junto das ressonâncias, estando as frequências naturais bem separadas e definidas.

Para a FRF2'-2' (Figuras 7.5 e 7.6), verifica-se um abaixamento da coerência junto das anti-ressonâncias, facto que facilmente se explica por ser muito baixa a relação sinal/ruído junto desses pontos, tanto mais que se trata de uma FRF que envolve o mesmo ponto na entrada do sistema e na sua saída.

Acentua-se no entanto que a obtenção de boas coerências nas estimativas das FRF, está fortemente condicionada pela forma como o impulso é aplicado. Na verdade, qualquer pequeno batimento do martelo após a pancada, ou um desvio da verticalidade no instante da sua aplicação, são suficientes para que a função de coerência assuma valores muito baixos.

A este propósito é de realçar que a vantagem proporcionada pelos analisadores de Fourier no que se refere à análise em tempo real, através da qual é possível visualizar em escassos segundos as estimativas das FRF e das respectivas funções de coerência, se afigura como de extrema utilidade, já que através deste procedimento se evita o armazenamento de uma quantidade considerável de informação inútil e, principalmente, uma desgastante operação de análise e posterior selecção entre todas as séries colhidas, como acontece quando a aquisição é realizada através de computadores pessoais.

No que respeita às frequências naturais, é comprovada para a FRF2'-2' a existência de cinco modos na gama de 0 a 250Hz. Todavia, no caso da FRF1-8' (Figuras 7.7 e 7.8), apenas 3 modos são claramente identificados, o que se deve ao facto de o ponto 1, onde é medida a resposta, corresponder aproximadamente a um nodo dos restantes dois modos. Este mesmo aspecto é evidenciado junto das frequências 52Hz e 158Hz, onde uma ligeira queda da fase é esboçada, acompanhada de uma alteração súbita da amplitude. Um terceiro nodo é encontrado na frequência de 200Hz, correspondendo a um modo de torção da barra que só acidentalmente aparece na FRF, em resultado de o acelerómetro ser fixo com um ligeiro desvio em relação ao eixo da barra, sendo também o impulso aplicado com alguma excentricidade.

6080 MULTICHANNEL FFT ANALYZER

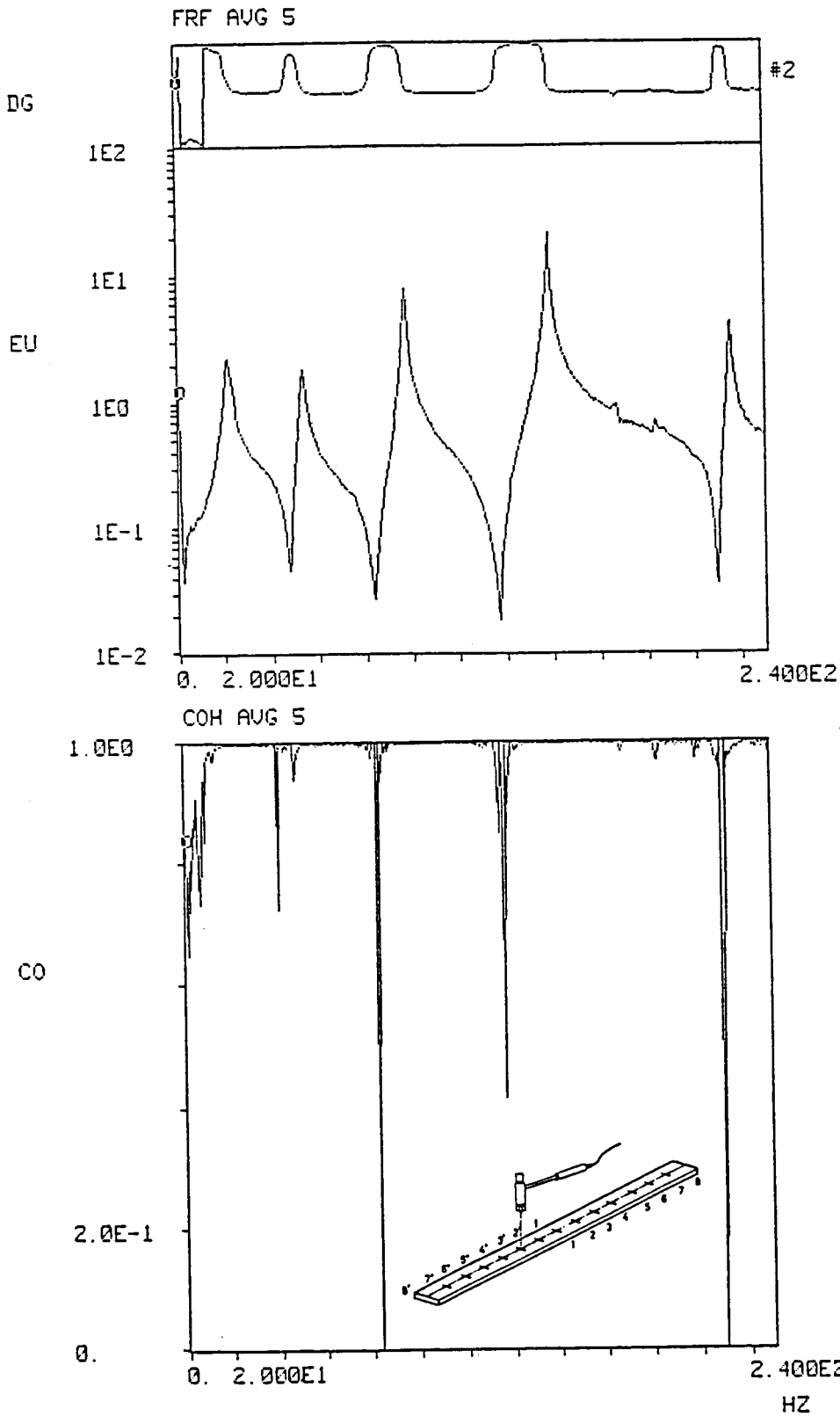


Figura 7.5 - Estimativa da FRF relacionando acelerações medidas e forças aplicadas em 2':
a) Amplitude e fase; b) Coerência.

6080 MULTICHANNEL FFT ANALYZER

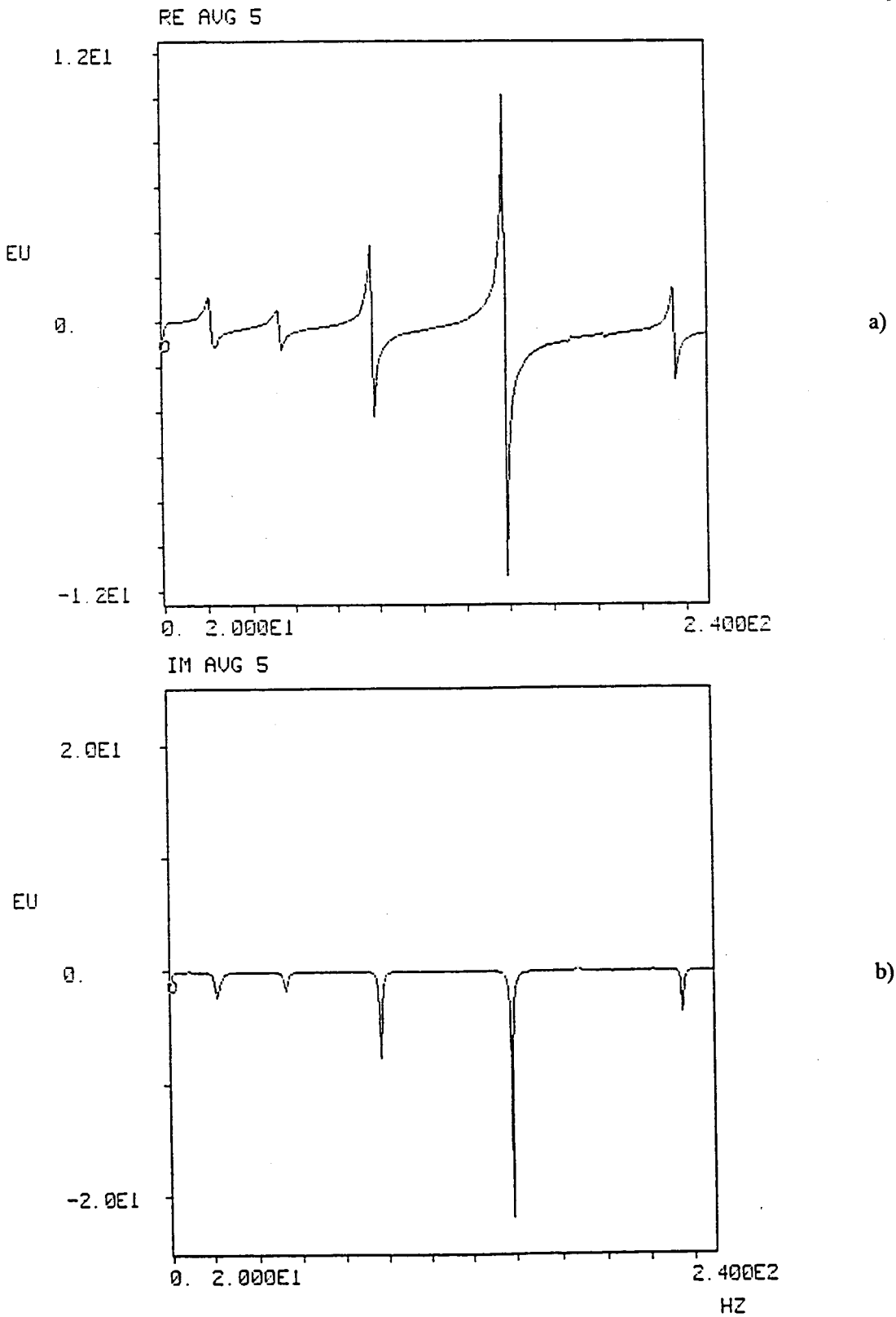


Figura 7.6 - Estimativa da FRF relacionando acelerações medidas e forças aplicadas em 2':
a) Parte real; b) Parte imaginária.

6080 MULTICHANNEL FFT ANALYZER

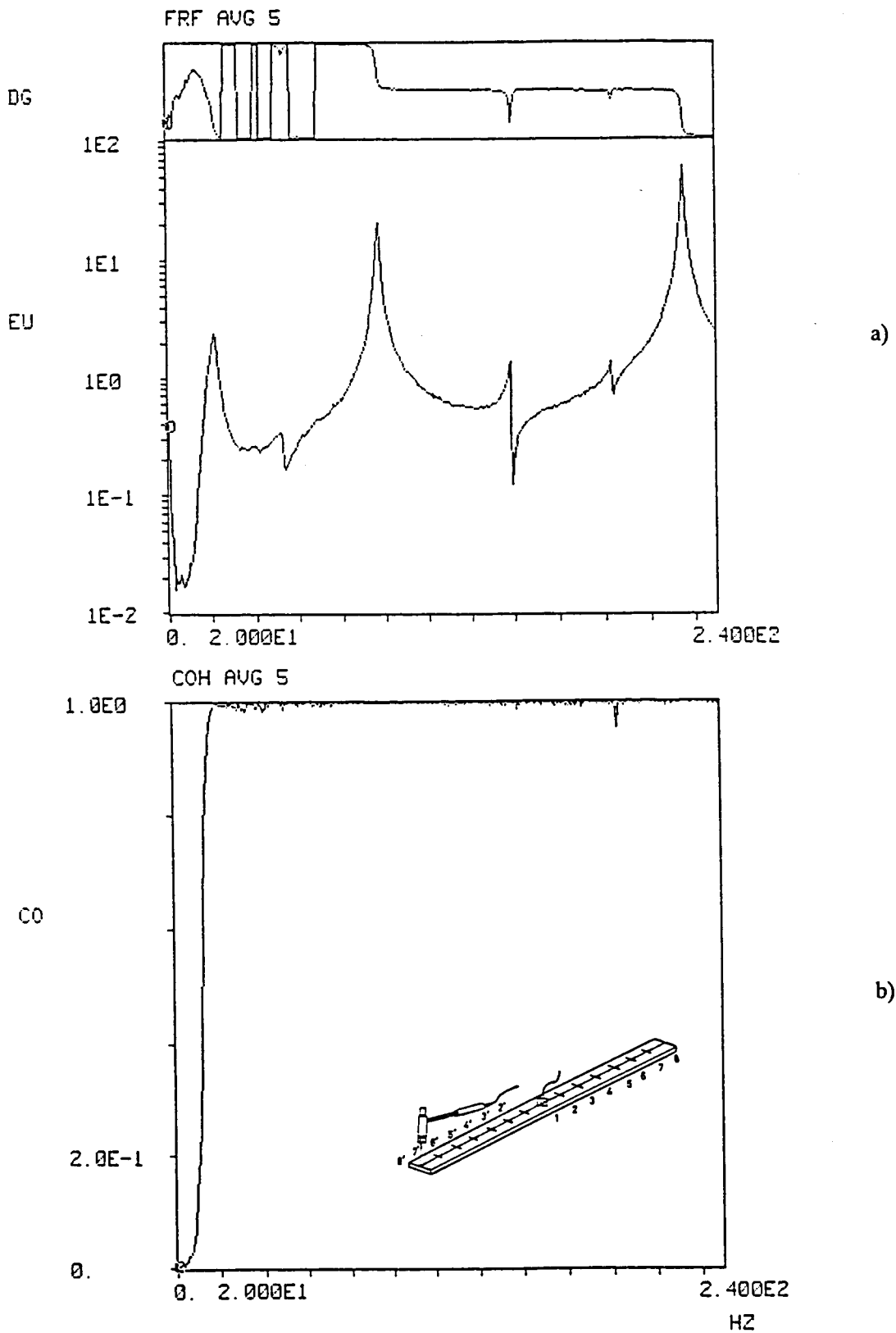


Figura 7.7 - Estimativa da FRF relacionando acelerações medidas em 1 e forças aplicadas em 8':
a) Amplitude e fase; b) Coerência.

6030 MULTICHANNEL FFT ANALYZER

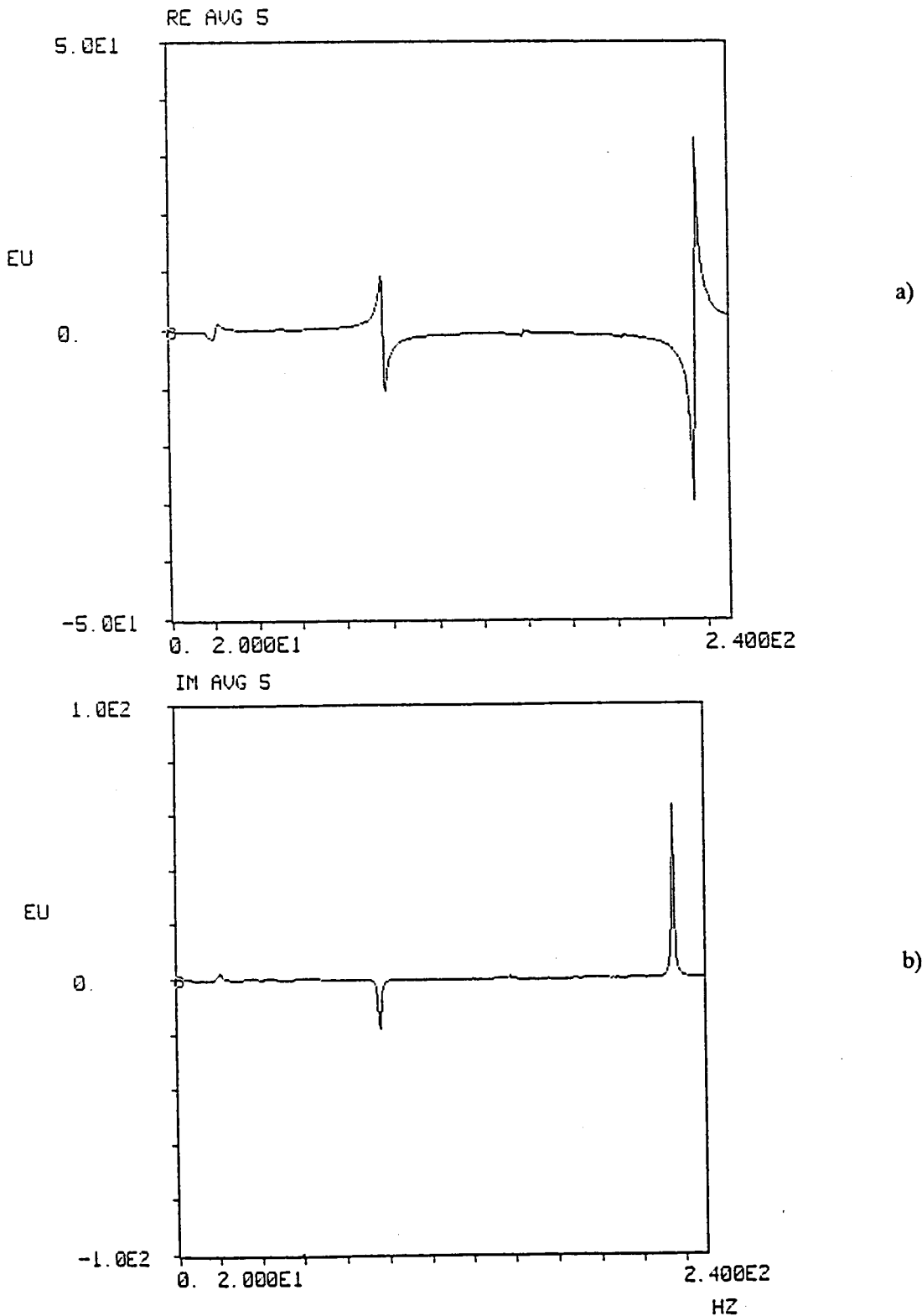


Figura 7.8 - Estimativa da FRF relacionando acelerações medidas em 1 e forças aplicadas em 8':
a) Parte real; b) Parte imaginária.

7.1.3 - Identificação de parâmetros modais. Comparação com os resultados teóricos

Atendendo à separação das frequências naturais e à excelente qualidade das estimativas obtidas para as FRF, considerou-se suficiente a utilização do método da amplitude de pico para a extracção das frequências próprias.

O procedimento consistiu então em seleccionar os máximos da amplitude das FRF estimadas. As abcissas destes pontos correspondem às frequências naturais, tendo-se verificado ser muito pequena a variação registada nos valores extraídos para o conjunto das FRF medidas.

Apresentam-se no Quadro 7.2 os resultados obtidos através do modelo teórico e dos ensaios realizados.

Quadro 7.2 - Frequências teóricas vs frequências calculadas.

Modo	1	2	3	4	5
Frequência teórica (Hz)	17,3	47,6	93,3	154,3	230,5
Frequência medida (Hz)	21,2	51,9	96,2	157,5	235,0

A Figura 7.9 ilustra a excelente correlação entre os valores experimentais e os valores previstos das frequências próprias do sistema.

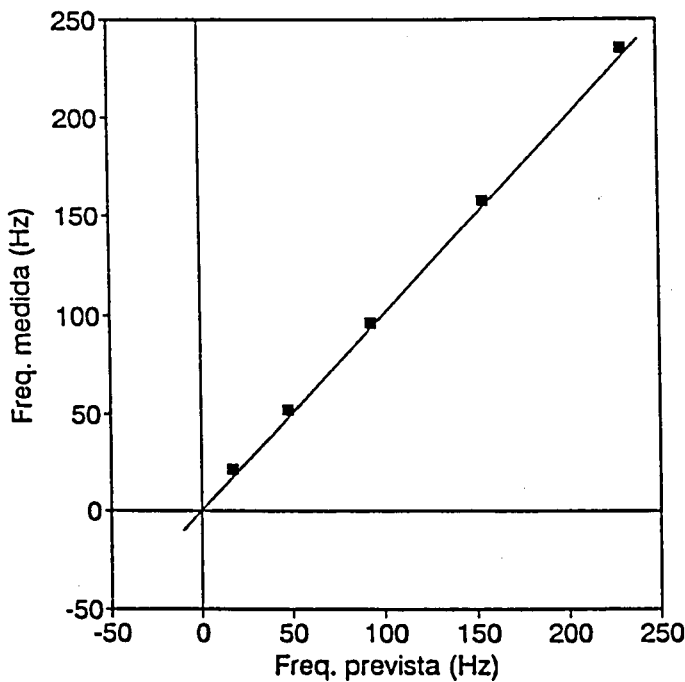


Figura 7.9 - Frequências naturais medidas vs previstas.

No que respeita à determinação das componentes dos modos de vibração, utilizou-se uma técnica expedita baseada no método da máxima componente em quadratura, referido na secção 5.3.1.2 do Capítulo 5.

Como então foi afirmado, este método baseia-se no facto de que, quando as frequências naturais do sistema se encontram bem separadas, a interferência modal é reduzida, o que legitima a consideração de que na vizinhança de cada ressonância a contribuição dos modos não-ressonantes é nula, sendo assim a expressão (5.1) da FRF, quando expressa em termos de acelerações, dada aproximadamente por

$$H_{ij}(w) \cong \frac{-w^2 (A_{ij})_k}{(w_k^2 - w^2) + i(2\xi_k w_k w)} \quad (7.4)$$

Sobre a ressonância, ou seja, quando $w = w_k$, virá então

$$H_{ij}(w_k) \cong \frac{-(A_{ij})_k}{i2\xi_k} \quad (7.5)$$

De (7.5) pode constatar-se ser a FRF um imaginário puro para $w = w_k$ e então, atendendo a que $(A_{ij})_k = (\phi_i)_k \cdot (\phi_j)_k$, tem-se que

$$H_{ij}(w_k) \cong iC(\phi_i)_k \cdot (\phi_j)_k \quad (7.6)$$

sendo C uma constante desconhecida.

Utilizando este resultado para o conjunto de FRF medidas e aplicando-o à determinação de cada modo de vibração, é possível extrair sucessivamente todas as suas componentes.

Considere-se, por exemplo, o primeiro modo de vibração, correspondente à frequência $f_1 = 21,2 \text{ Hz}$. Fazendo $i = j = 1$, vem $|H_{11}(w_1)| \cong (\phi_1)_1 \cdot (\phi_1)_1 \cdot C$, de onde se obtém

$$(\phi_1)_1 \cong \sqrt{\frac{|H_{11}(w_1)|}{C}}$$

Para $i = 1$ e $j = 2$, $\text{Im}[H_{12}(w_1)] \cong (\phi_1)_1 \cdot (\phi_2)_1 \cdot C$, ou seja,

$$(\phi_2)_1 \cong \frac{\text{Im}[H_{12}(w_1)]}{(\phi_1)_1 \cdot C}$$

Arbitrando para C um valor qualquer, todas as componentes do modo 1 ficarão determinadas. Genericamente, a componente $(\phi_k)_k$ poderá obter-se por

$$(\phi_k)_k \cong \sqrt{\frac{|H_{kk}(w_k)|}{C}} \quad (7.7)$$

enquanto que uma componente $(\phi_i)_k$ será dada por

$$(\phi_i)_k \cong \frac{\text{Im}[H_{ik}(w_k)]}{(\phi_k)_k \cdot C} \quad (7.8)$$

Procedendo desta forma, foi então possível extrair as componentes dos cinco modos de vibração identificados, apresentando-se na Figura 7.10 o resultado da comparação com as correspondentes componentes teóricas e, na Figura 7.11, as configurações modais obtidas.

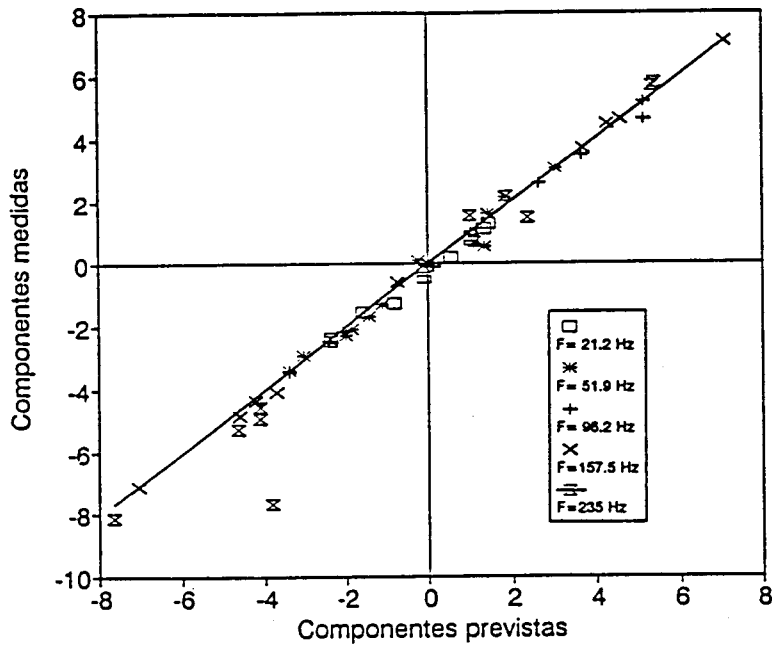


Figura 7.10 - Modos de vibração: componentes previstas vs componentes medidas.

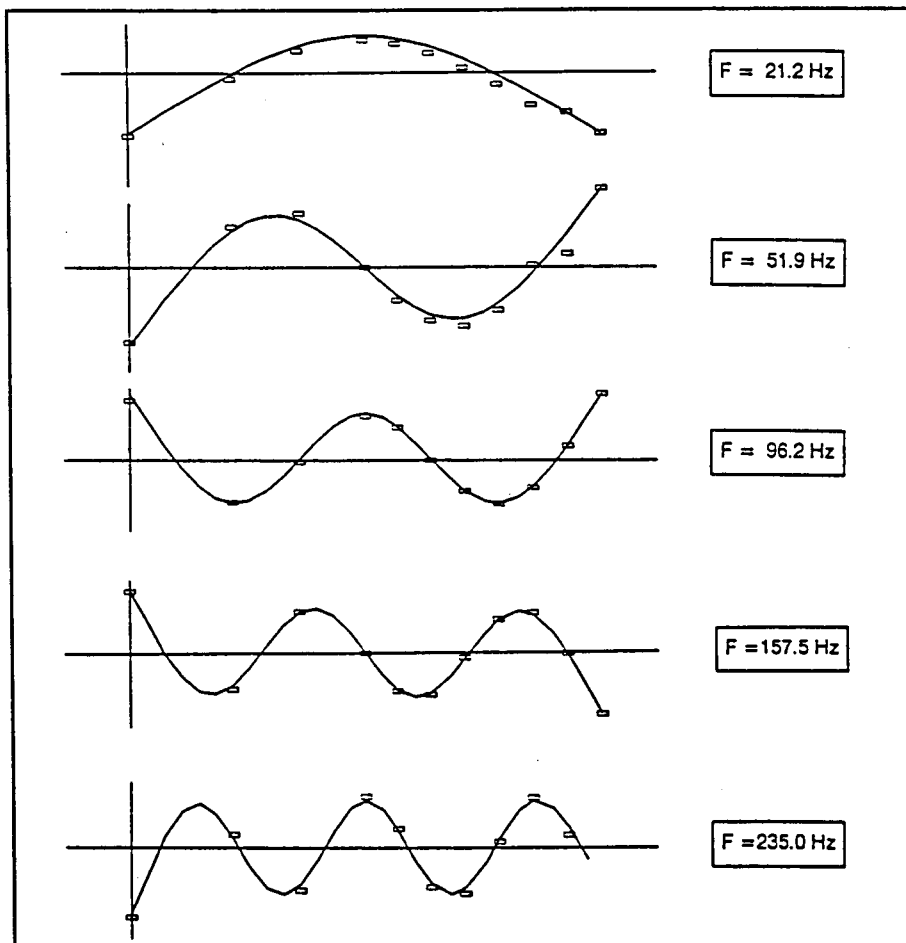


Figura 7.11 - Configurações teóricas e experimentais dos primeiros 5 modos de vibração identificados.

A análise destas figuras permite concluir que, genericamente, a qualidade dos parâmetros identificados é excelente, especialmente tendo em conta as limitações da técnica utilizada. As maiores discrepâncias encontradas são as que se referem ao primeiro modo de vibração, o que possivelmente resulta da existência de um modo de torção com uma frequência próxima da correspondente a este modo de flexão, facto melhor evidenciado noutras FRF obtidas. Outro aspecto que será de ter em consideração é o de uma eventual perturbação induzida pelas condições de apoio realmente existentes sobre a configuração da deformada e, implicitamente, sobre as configurações modais, aspecto a que são mais sensíveis as configurações de mais baixas frequências pelo facto de lhes estarem associadas maiores amplitudes, mobilizando assim em maior grau o apoio elástico unilateral introduzido.

Finalmente, no que respeita à identificação dos coeficientes de amortecimento em correspondência com os modos de vibração, utilizou-se uma técnica bastante expedita baseada no facto de as abcissas $(w_a)_k$ e $(w_b)_k$ dos extremos de sinais contrários da parte real da FRF situados imediatamente antes e depois, respectivamente, de cada frequência de ressonância w_k , coincidirem aproximadamente com as abcissas dos pontos de meia potência da FRF associados ao modo de vibração correspondente. Pode assim dizer-se que

$$\xi_k \cong \frac{(w_b)_k - (w_a)_k}{2w_k} \quad (7.9)$$

O procedimento consistiu então em extrair da parte real de cada FRF as abcissas $(w_a)_k$ e $(w_b)_k$, correspondentes aos extremos na vizinhança de cada ressonância w_k , obtendo-se de seguida uma estimativa para o valor de ξ_k através da equação (7.9). Os valores finais apresentados no Quadro 7.3 resultaram de uma média ponderada dos coeficientes extraídos do conjunto das FRF medidas.

Quadro 7.3 - Coeficientes de amortecimento medidos e erros associados.

Modo	1	2	3	4	5
$\xi_k(\%)$	2,86	1,19	0,65	0,38	0,51
Erro absoluto	2,94	1,20	0,65	0,41	0,27

Note-se que, apesar de quase sistematicamente as abcissas $(w_a)_k$ e $(w_b)_k$ terem o mesmo valor em todas as FRF analisadas, o erro cometido neste tipo de aproximação depende da resolução em frequência utilizada, podendo assumir valores inadmissíveis.

No caso presente, em que $\Delta f = 0,625 Hz$, o "escorregamento" dos extremos para as abcissas laterais origina um erro absoluto máximo de 2,9%, ou seja, um erro relativo da ordem de 100% no valor do coeficiente de amortecimento em correspondência com o primeiro modo de vibração. E, como se pode constatar do Quadro 7.3, o erro relativo para os restantes modos é também da ordem dos 100%.

Deste modo, pelo seu carácter expedito, esta técnica apenas permite obter valores indicativos da ordem de grandeza dos coeficientes de amortecimento em fase de ensaio. Pretendendo-se um pouco mais de precisão nos resultados obtidos, poderá naturalmente aplicar-se com facilidade o método da meia potência, mediante uma adequada técnica de interpolação.

7.2 - ENSAIO DE UMA LAJE QUADRADA DE BETÃO ARMADO SUJEITA A ACÇÕES TRANSIENTES PRODUZIDAS POR UM MARTELO DE IMPULSOS

7.2.1 - Descrição e modelação numérica

Como segundo exemplo foi considerada uma estrutura de médio porte, constituída por uma laje quadrada com largura da ordem de 6,6m, apoiada em 4 pilares espaçados de cerca de 4,3m, tendo espessura variável entre 7,5cm e 22,5cm (v. Figura 7.12).

Esta estrutura constitui a cobertura, em betão armado, de um tanque de ensaio localizado num dos edifícios da Faculdade de Engenharia.

O motivo por que foi realizado este ensaio prende-se com o interesse em avaliar a eficiência da utilização da excitação transiente produzida por um martelo de impulsos numa estrutura real de dimensões médias.

Com vista a uma posterior comparação dos resultados obtidos experimentalmente com os alcançados por via numérica, efectuou-se uma discretização de 1/4 da estrutura, numa malha de elementos finitos, de acordo com a representação indicada na Figura 7.13, para o que foi usado o elemento finito de casca de Ahmad [4]. Utilizando um programa de análise dinâmica de estruturas modeladas com este tipo de elemento, foi possível obter três conjuntos das primeiras 6 frequências naturais e modos de vibração associados em correspondência com as três seguintes condições: simulando simetria em torno dos dois eixos de simetria que passam pelas medianas, simulando anti-simetria em torno desses eixos, ou simulando simetria segundo um dos eixos e anti-simetria segundo o outro, condição que por simplicidade se passará a designar por "não-simetria".

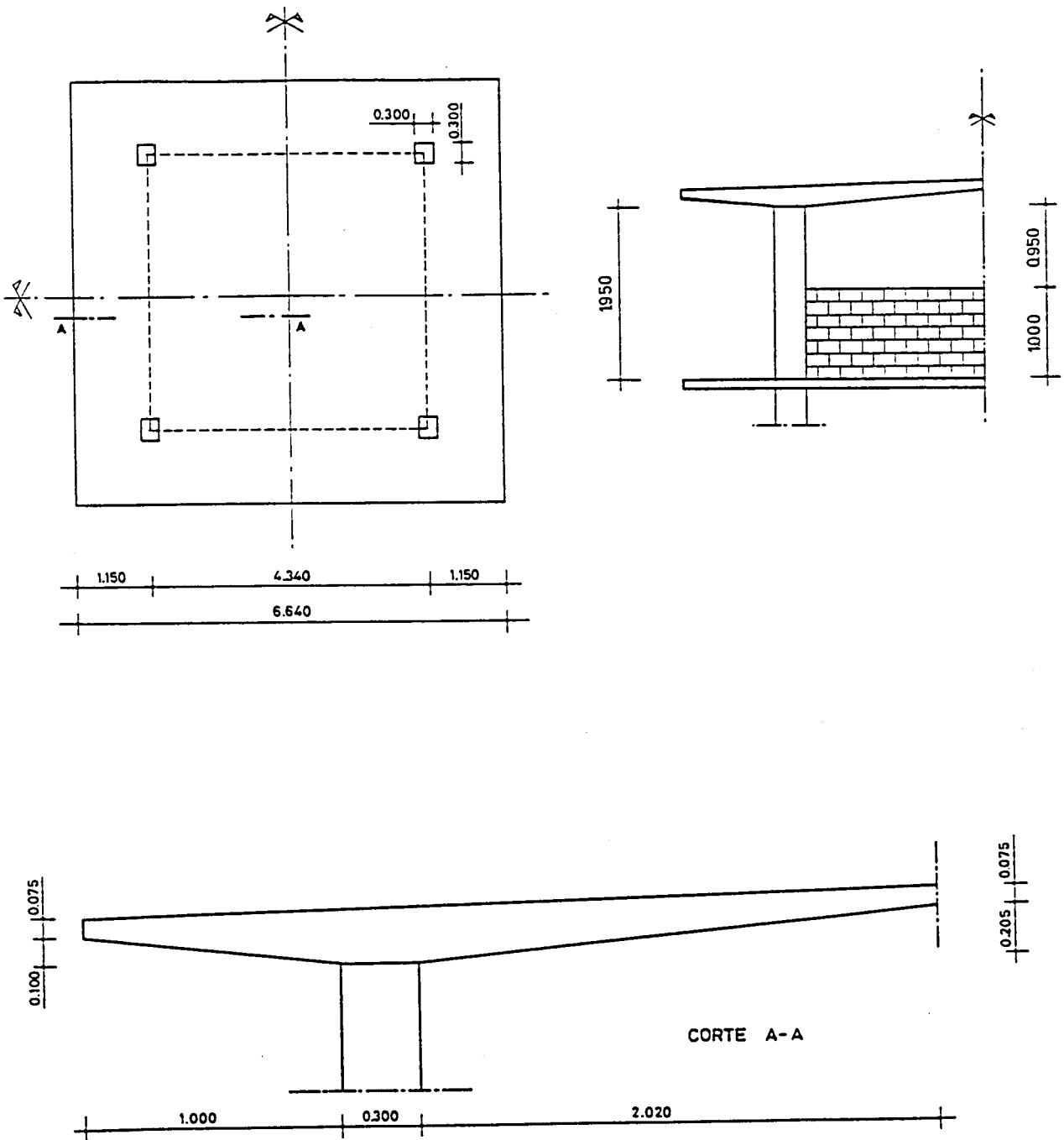


Figura 7.12 - Representação esquemática da laje ensaiada.

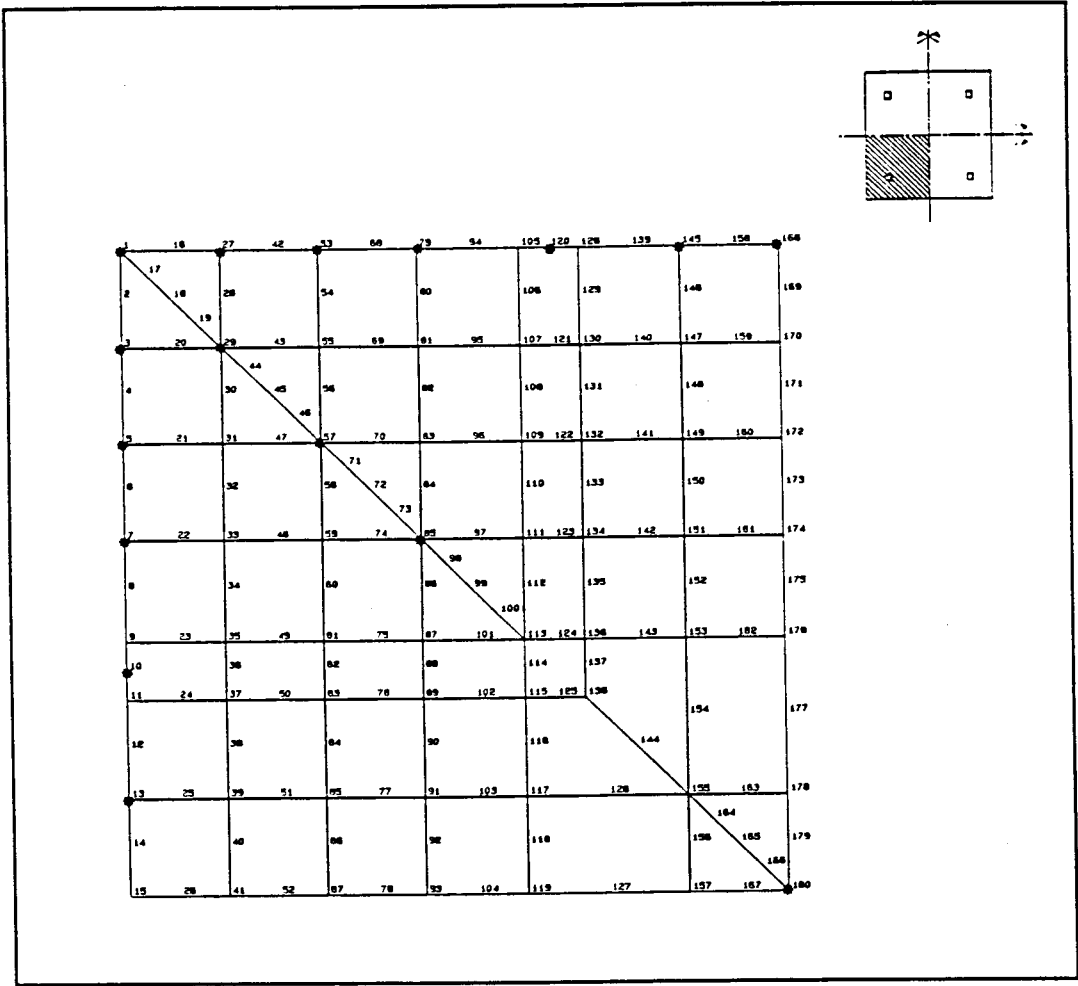


Figura 7.13 - Discretização de 1/4 da estrutura numa malha de elementos finitos de casca.

Os valores das frequências naturais que se sumarizam no quadro 7.4 são já o resultado de ajustes sucessivos das condições de apoio do pilar e do módulo de elasticidade do betão, de forma a tomar aceitáveis os desvios entre a primeira frequência natural medida e calculada.

Quadro 7.4 - Frequências calculadas (Hz) dos primeiros 6 modos em correspondência com as três condições de apoio possíveis.

Condições de apoio Frequência	Simetria	Não-simetria	Anti-simetria
1ª	17,97	26,45	4,824
2ª	21,41	39,93	40,13
3ª	46,68	49,98	48,19
4ª	62,02	65,23	56,94
5ª	89,16	76,02	59,13
6ª	111,19	110,23	75,86

As configurações dos modos de vibração correspondentes são apresentadas nas Figuras 7.14 a 7.19.

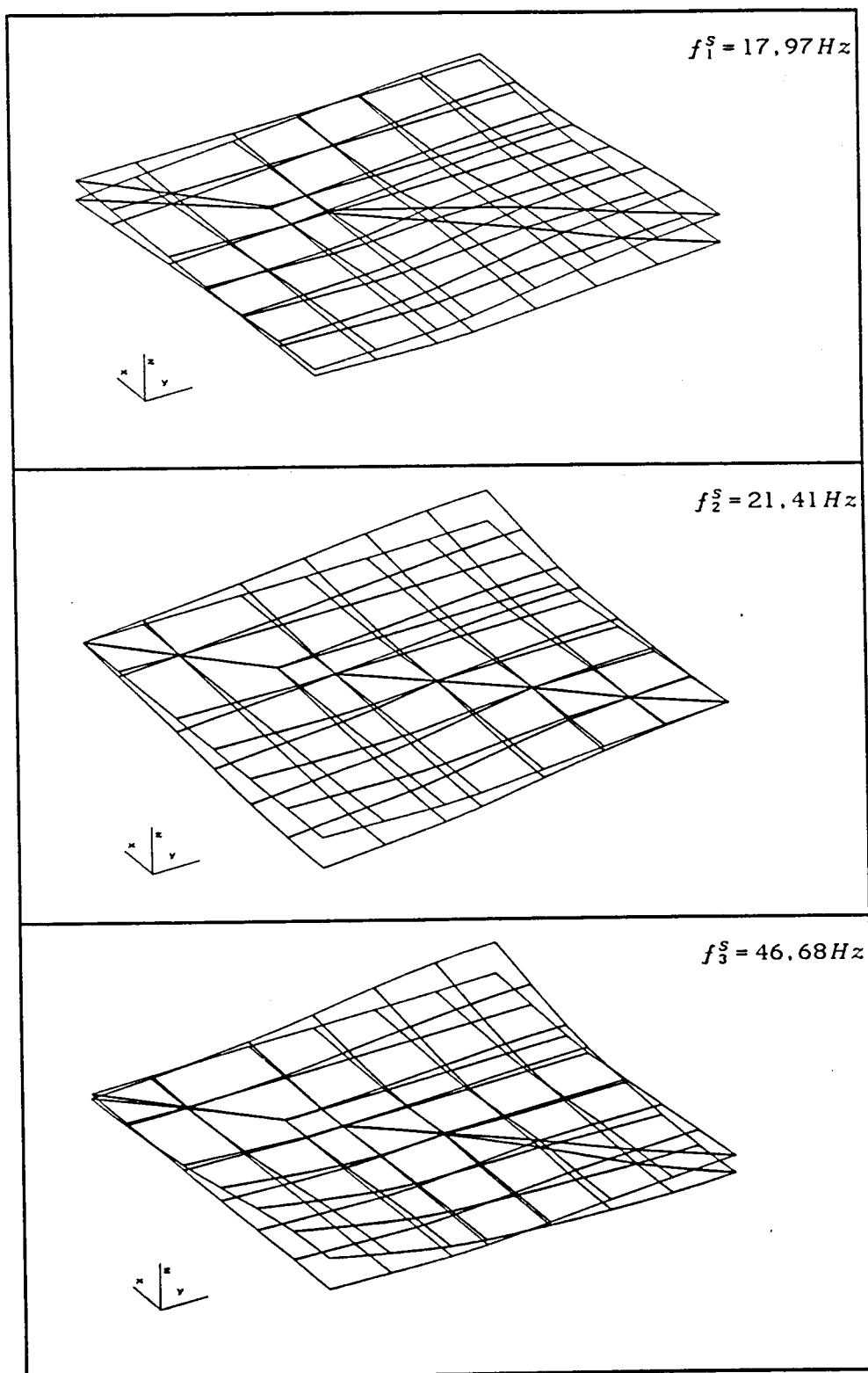


Figura 7.14 - 1º, 2º e 3º modos de vibração simétricos.

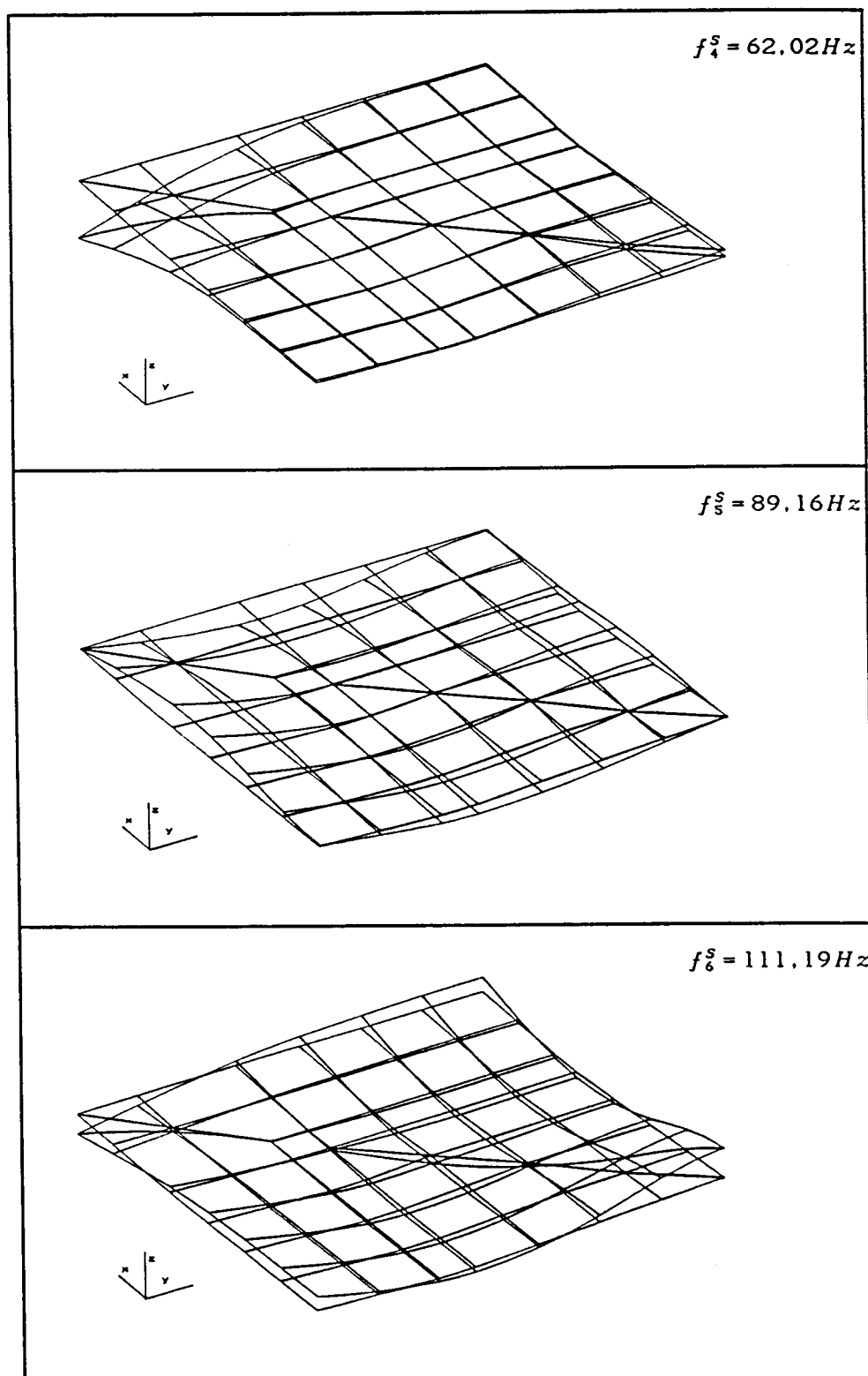


Figura 7.15 - 4º, 5º e 6º modos de vibração simétricos.

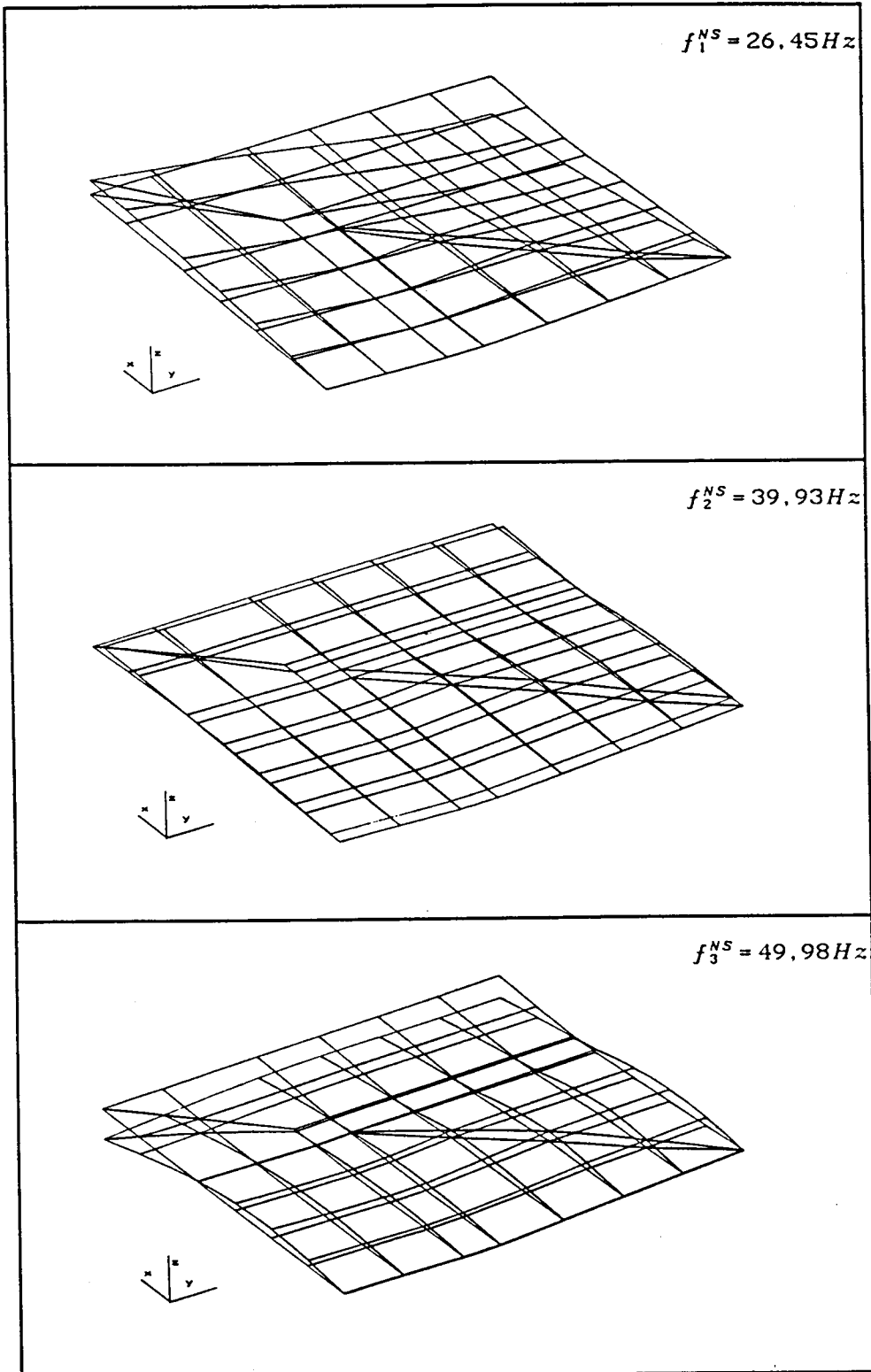


Figura 7.16 - 1º, 2º e 3º modos de vibração não-simétricos.

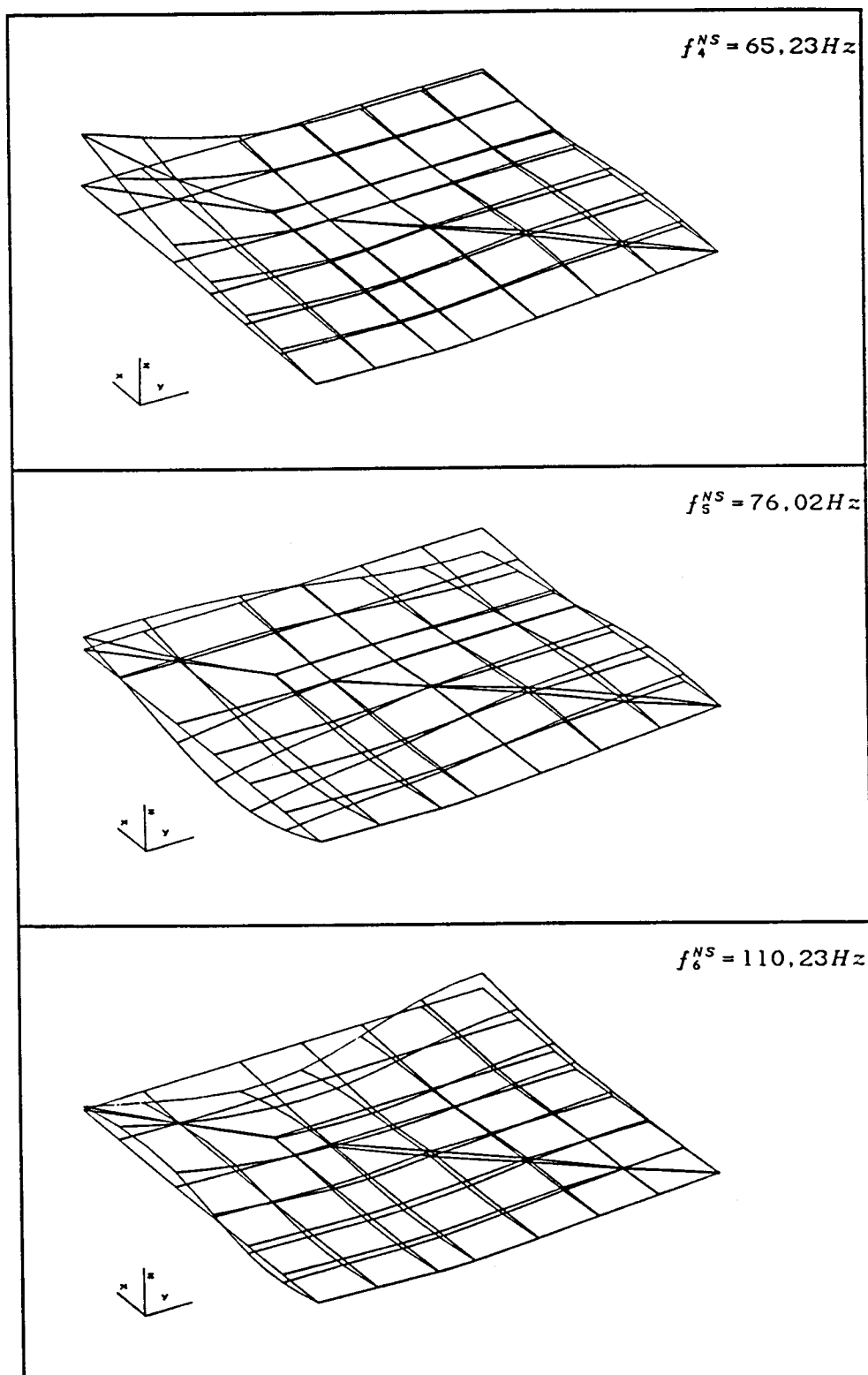


Figura 7.17 - 4º, 5º e 6º modos de vibração não-simétricos.

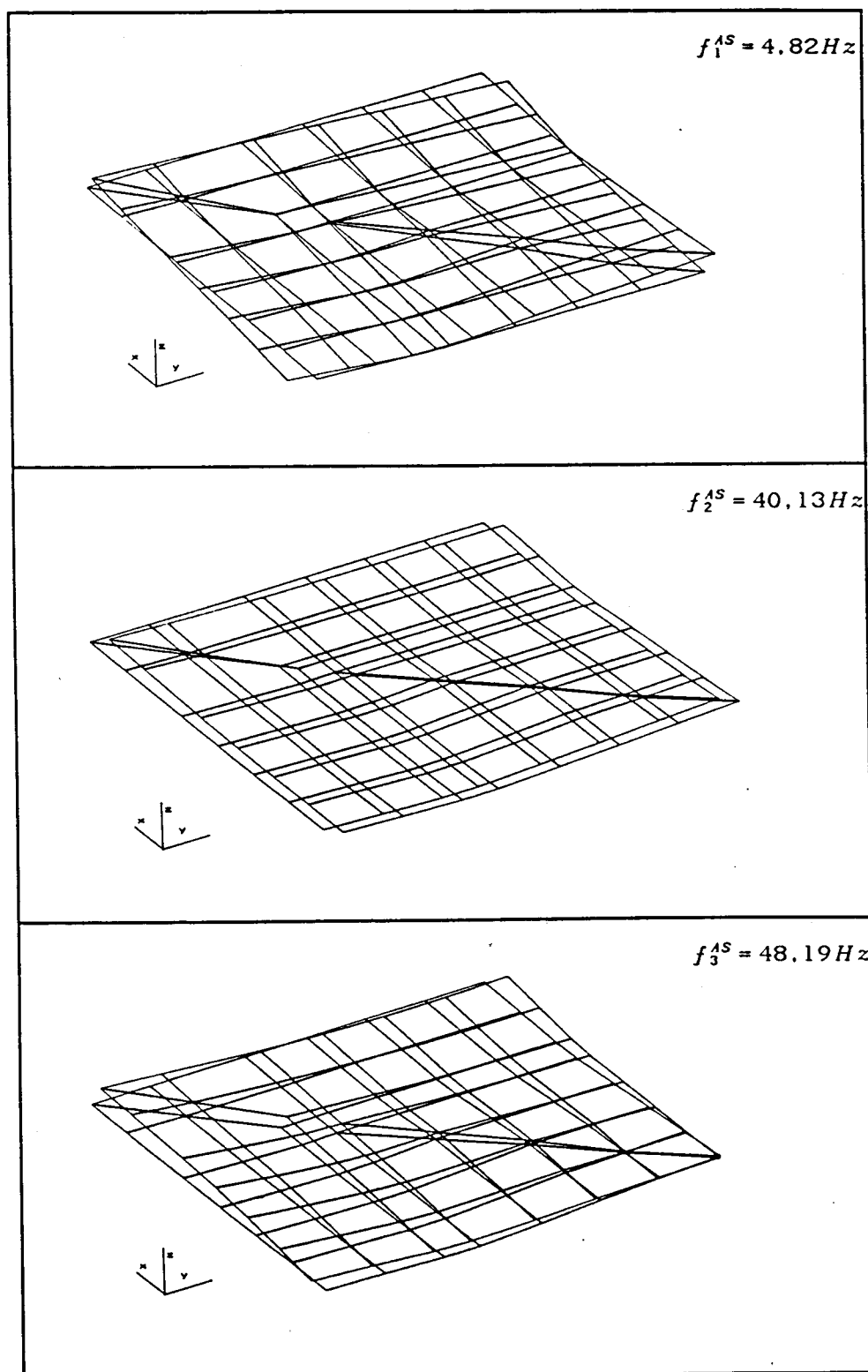


Figura 7.18 - 1º, 2º e 3º modos de vibração anti-simétricos.

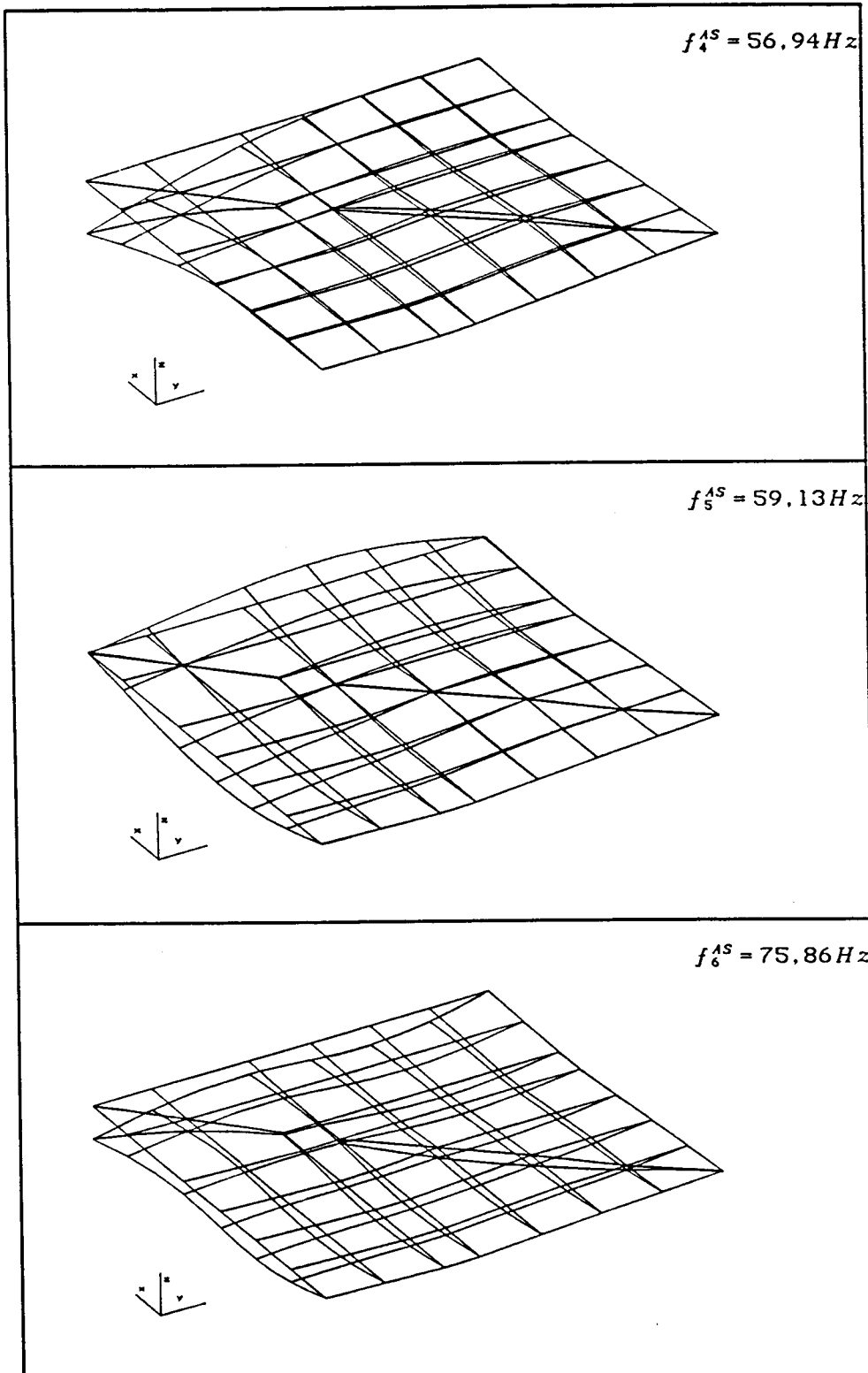


Figura 7.19 - 4º, 5º e 6º modos de vibração anti-simétricos.

7.2.2 - Ensaios realizados

Atendendo a que os primeiros modos de vibração da estrutura são essencialmente modos simétricos em relação a um ou aos dois eixos de simetria da laje que passam pelas suas medianas (note-se que os primeiros modos de vibração anti-simétricos representam praticamente movimentos horizontais de corpo rígido), foram seleccionados como pontos a instrumentar os representados em 7.20.

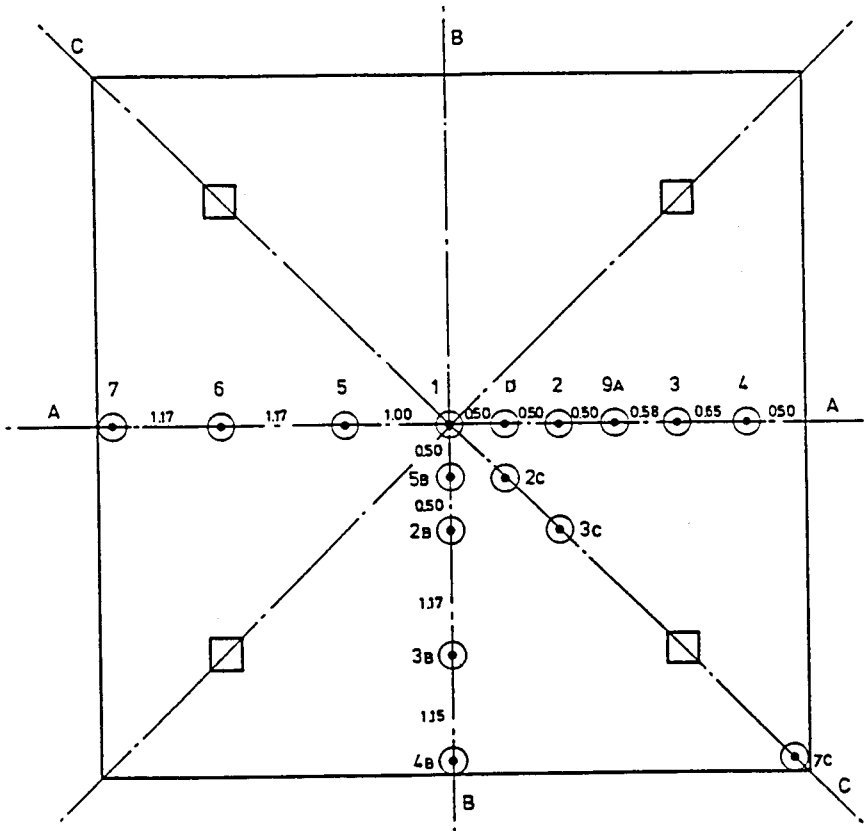


Figura 7.20 - Caracterização dos pontos de medida.

Note-se que estes pontos coincidem com nós da malha de elementos finitos utilizada (assinalados com "*" na malha da Figura 7.13).

O equipamento utilizado neste ensaio constou de:

- Um computador pessoal (Toshiba, modelo T5200/100);
- Uma placa de aquisição de dados DT2801A instalada em slot disponível;
- Um martelo de impulsos (PCB, modelo 086B50), com ponta mole;
- Sete acelerómetros (PCB, modelo 393C) e respectivos amplificadores (PCB, modelo 480D06).

Na montagem realizada, em que apenas se dispunha de 8 canais para aquisição em simultâneo, o primeiro canal foi ligado ao sensor de força do martelo, 6 dos canais foram ligados aos acelerómetros 1 a 6 da direcção AA (Figura 7.20) e o restante foi ligado a um último acelerómetro que percorreu todos os outros pontos ao longo do ensaio.

Os 6 acelerómetros que se mantiveram fixos ao longo do ensaio foram aparafusados a cubos ou chapas de aço colados à superfície da laje por intermédio de um betume de ferro, de forma a garantir uma adequada ligação dos transdutores à estrutura.

Após teste de todo o equipamento, e dado que não se dispunha de filtros anti-aliasing, fizeram-se várias amostragens com frequências elevadas variadas, da ordem de 1000 a 2000Hz (com e sem a actuação do martelo de impulsos), para detectar a eventual presença de algumas componentes da resposta nessa gama de frequências.

Tendo-se constatado serem desprezáveis os contributos das frequências superiores a 100Hz na composição espectral dos sinais, mesmo no caso da actuação do martelo de impulsos, decidiu adoptar-se uma frequência de amostragem de 400Hz.

O ensaio consistiu então em aplicar uma série de 5 a 10 impulsos sucessivamente em cada um dos pontos instrumentados, recolhendo para cada caso um conjunto de amostras de 1024 valores, contendo o sinal de entrada e a resposta em 7 canais.

Obteve-se um total de cerca de 170 conjuntos de registos (um conjunto por pancada), o que corresponde à medição de cerca de 1200 respostas, podendo visualizar-se na Figura 7.21 um exemplo relativo a um registo da força aplicada e da resposta correspondente num dos canais instrumentados.

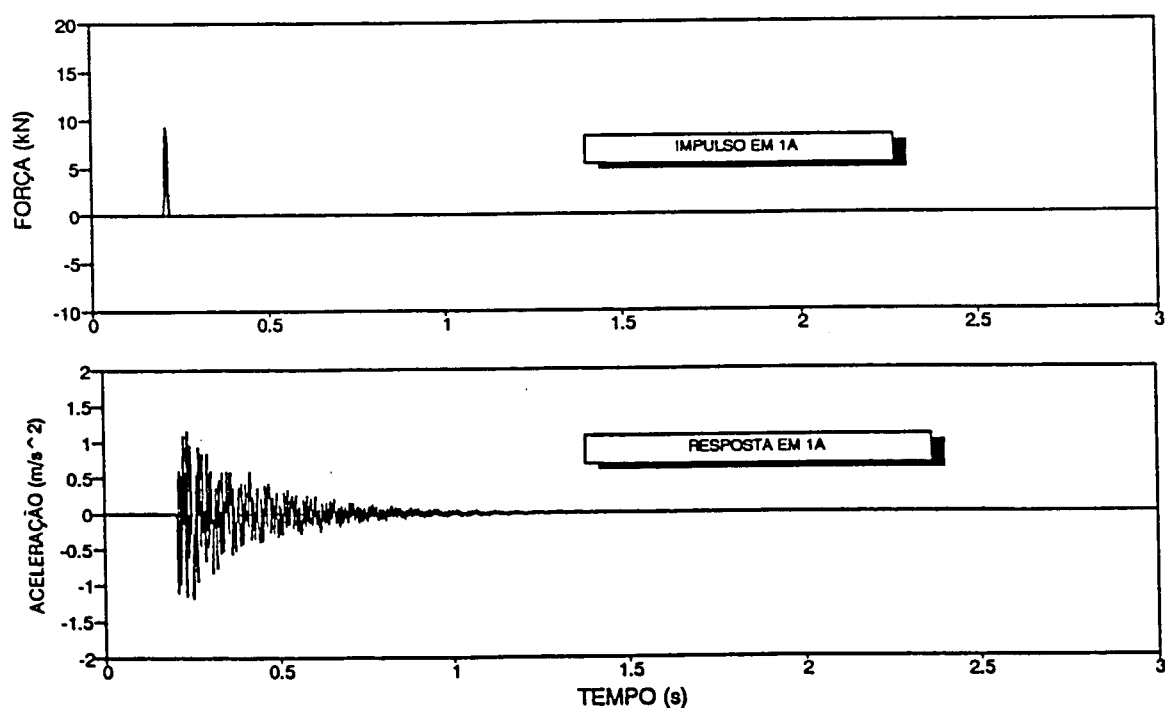


Figura 7.21 - Impulso e resposta sobre a marca 1A.

7.2.3 - Processamento de sinal

Para obter estimativas das funções de resposta em frequência (FRF), expressas em termos da relação aceleração num dos pontos instrumentados - força no ponto onde esta foi aplicada, utilizou-se o programa PSINAL, descrito no Capítulo 6.

O procedimento utilizado correspondeu à realização das seguintes operações:

- *Análise no domínio do tempo:*
 - Conversão de escala;
 - Eliminação da tendência (suposta constante);
- *Análise no domínio da frequência:*
 - Obtenção de todas as estimativas individuais possíveis da função densidade espectral de potência do sinal de entrada e da resposta, bem como das estimativas simples da função densidade espectral de potência cruzada entre o sinal de entrada e os sinais de saída;
 - Com as estimativas anteriores, obtiveram-se posteriormente estimativas finais das FRF, bem como das funções densidade espectral de potência e densidade espectral de potência cruzada, aplicando o estimador médio ao conjunto das 5 a 10 estimativas determinadas para cada par de pontos excitação-resposta. Estas estimativas foram obtidas por intermédio do estimador H1 (atendendo a que neste tipo de ensaios o ruído aparece essencialmente na resposta medida e ao facto de que, nestas circunstâncias, este estimador é não enviesado, contanto que o ruído seja não correlacionado, facto que no presente estudo se pode considerar admissível);
 - Finalmente, usando estas novas estimativas, foi possível estimar ainda a função de coerência associada a cada FRF.

Note-se que não foram aplicadas janelas de dados no tratamento destas séries, o que se deveu ao facto de o sinal amortecer rapidamente dentro da janela de observação, tornando o efeito de "leakage" praticamente nulo.

Na Figura 7.22 apresenta-se uma das estimativas obtidas para a função densidade espectral de potência da entrada (neste caso, correspondente a um impulso aplicado no ponto 2, segundo a direcção A-A, com recurso a médias sobre 12 séries amostradas).

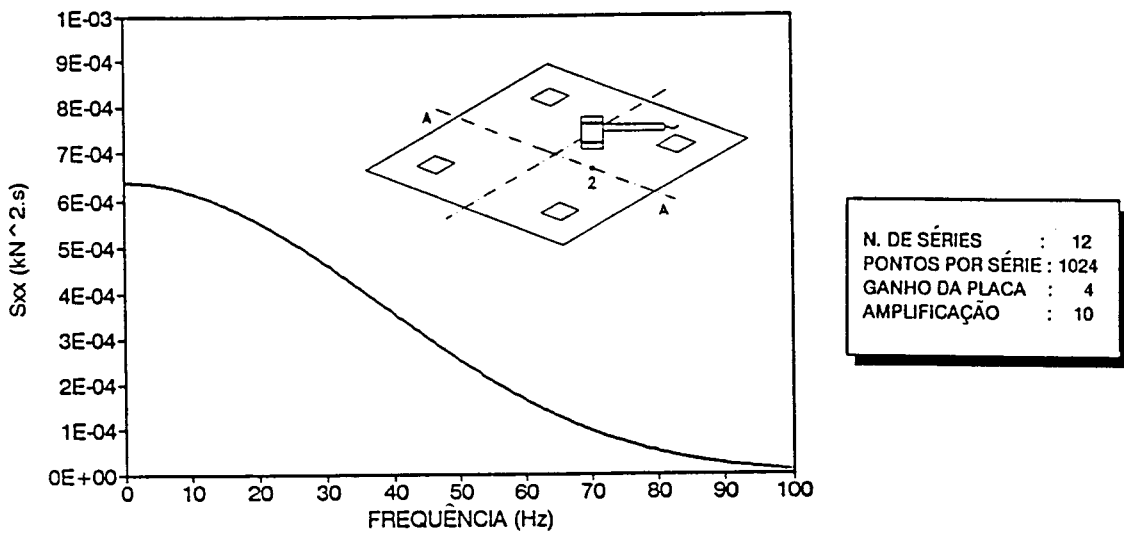


Figura 7.22 - Estimativa da função densidade espectral de potência da entrada, correspondente a um impulso aplicado em 2A.

Como se pode observar, o impulso aplicado mobiliza frequências essencialmente numa gama inferior a 100Hz, o que resulta do tipo de ponta utilizada. Desta forma, só fará sentido analisar frequências próprias inferiores a 100Hz.

Finalmente, apresentam-se nas Figuras 7.23 a 7.38 algumas das estimativas obtidas para as FRF e para as funções de coerência que lhes estão associadas. Uma análise sumária destes gráficos permite desde já extrair as seguintes conclusões:

- a) - De um modo geral, as funções de coerência apresentam valores elevados, excepto em certas gamas de frequências localizadas, o que revela uma boa relação sinal/ruído e, portanto, assegura serem boas as estimativas das FRF correspondentes.

Note-se que os valores mais baixos das funções de coerência ocorrem para frequências baixas (na gama dos 0-10 Hz), o que se deve à presença de ruído num sinal de muito baixa amplitude. Outras frequências onde a coerência baixa são aquelas em que a FRF apresenta anti-ressonâncias ou então, em alguns casos, as situadas na proximidade dos 100Hz (CAD-3, CAD-4), o que se deve, da mesma forma, a uma menor relação sinal/ruído, facto que resulta da quase inexistência de acção com contributo significativo nessa gama de frequências. Na vizinhança das frequências de ressonância, pelo contrário, a coerência assume valores muito

próximos da unidade, o que naturalmente resulta da mais elevada relação sinal/ruído aí existente;

- b) - De um modo geral, no que respeita à identificação das frequências naturais da estrutura, a evolução da fase constitui um indicador superior ao fornecido pela evolução da amplitude, já que a presença de ruído afecta essencialmente este parâmetro. Este aspecto foi aliás referido na secção 4.5.6 do Capítulo 4 deste trabalho, constatando-se efectivamente nas FRF apresentadas uma suave transição da fase junto das frequências de ressonância, como acontece por exemplo no caso do registo CA1-1 apresentado na Figura 7.23, na vizinhança das frequências 16,9Hz, 36,4Hz, 41,0Hz e 90,1Hz. Utilizando este facto, é possível, por análise da representação da fase versus frequência, confirmar a existência de um dado modo de vibração em relação ao qual a representação amplitude versus frequência não seja clara. Por exemplo no caso do registo CA2-3, apresentado na Figura 7.29, a análise da variação da fase no intervalo de frequências 20-27Hz permite confirmar a existência de dois modos de vibração muito próximos, embora a análise do gráfico amplitude versus frequência não seja perfeitamente conclusiva em relação a este aspecto. O mesmo se verifica na gama de frequências de 62 a 68Hz para a mesma FRF.

Por outro lado, a evolução da fase fornece também indicações relativamente à natureza complexa dos modos de vibração. De facto, se um modo for real a fase da correspondente FRF determinada pela relação aceleração/força, deverá variar de 180° para 0° , ou de 0° para -180° . Assim acontece, de facto, para o primeiro modo, à frequência de 16,9Hz no registo CA1-1, onde a componente imaginária é praticamente desprezável. Em contrapartida, no caso dos registos CA2-2, CA2-3, CA2-5 E CA2-6, é já evidente que, por exemplo, o modo relativo à frequência de 73,7Hz exhibe carácter complexo. Este mesmo facto verifica-se também para o modo de frequência 89,6Hz nos registos CA2-3 e CAD-3;

- c) - Pelo facto da resposta no ponto 1 motivada pela aplicação de um impulso nesse ponto só poder conter a contribuição de modos de vibração simétricos, será legítimo admitir que os 4 modos identificáveis através do registo CA1-1 só poderão ser desse tipo;
- d) - O número de frequências naturais contidas no intervalo de análise 0-100Hz é bastante elevado, como se pode constatar, por exemplo, mediante a observação do registo CA2-2, correspondente a uma situação em que apenas se mobilizaram modos de vibração simétricos e não-simétricos.

Este aspecto foi aliás confirmado pelos resultados obtidos através do modelo numérico desenvolvido para a estrutura.

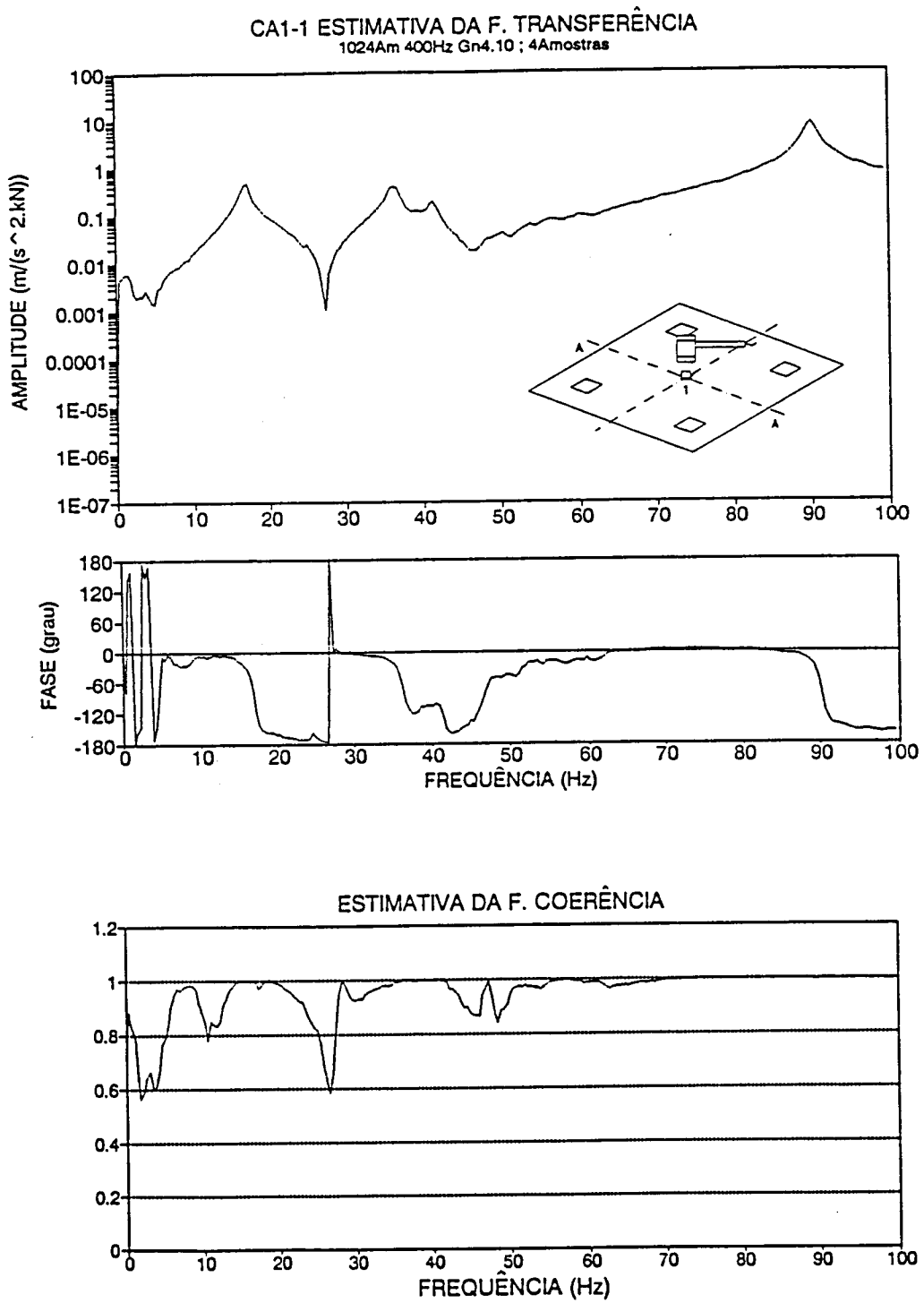


Figura 7.23 - Estimativa da FRF relacionando a resposta em 1 com forças aplicadas em 1; estimativa da função de coerência associada.

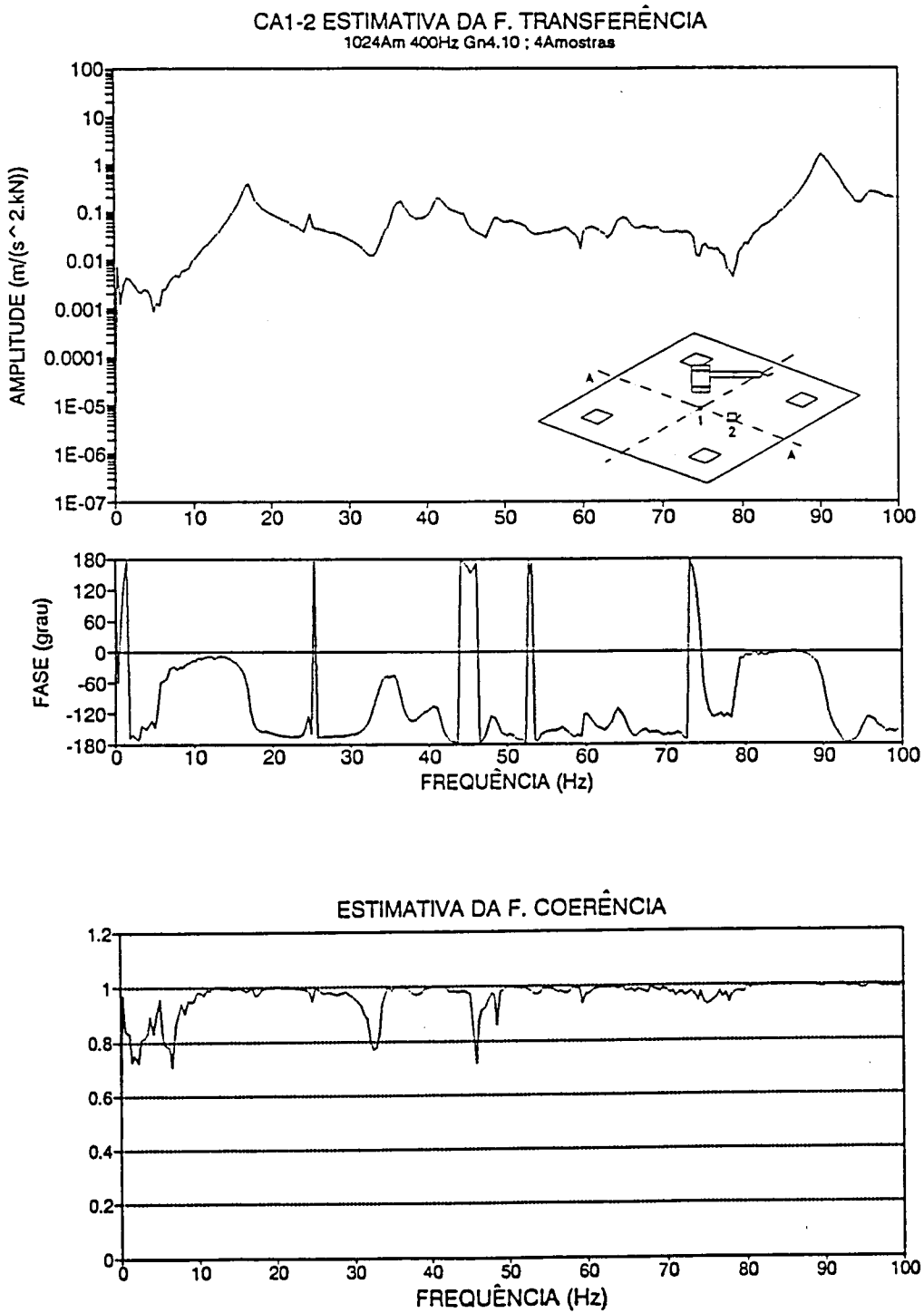


Figura 7.24 - Estimativa da FRF relacionando a resposta em 2 com forças aplicadas em 1; estimativa da função de coerência associada.

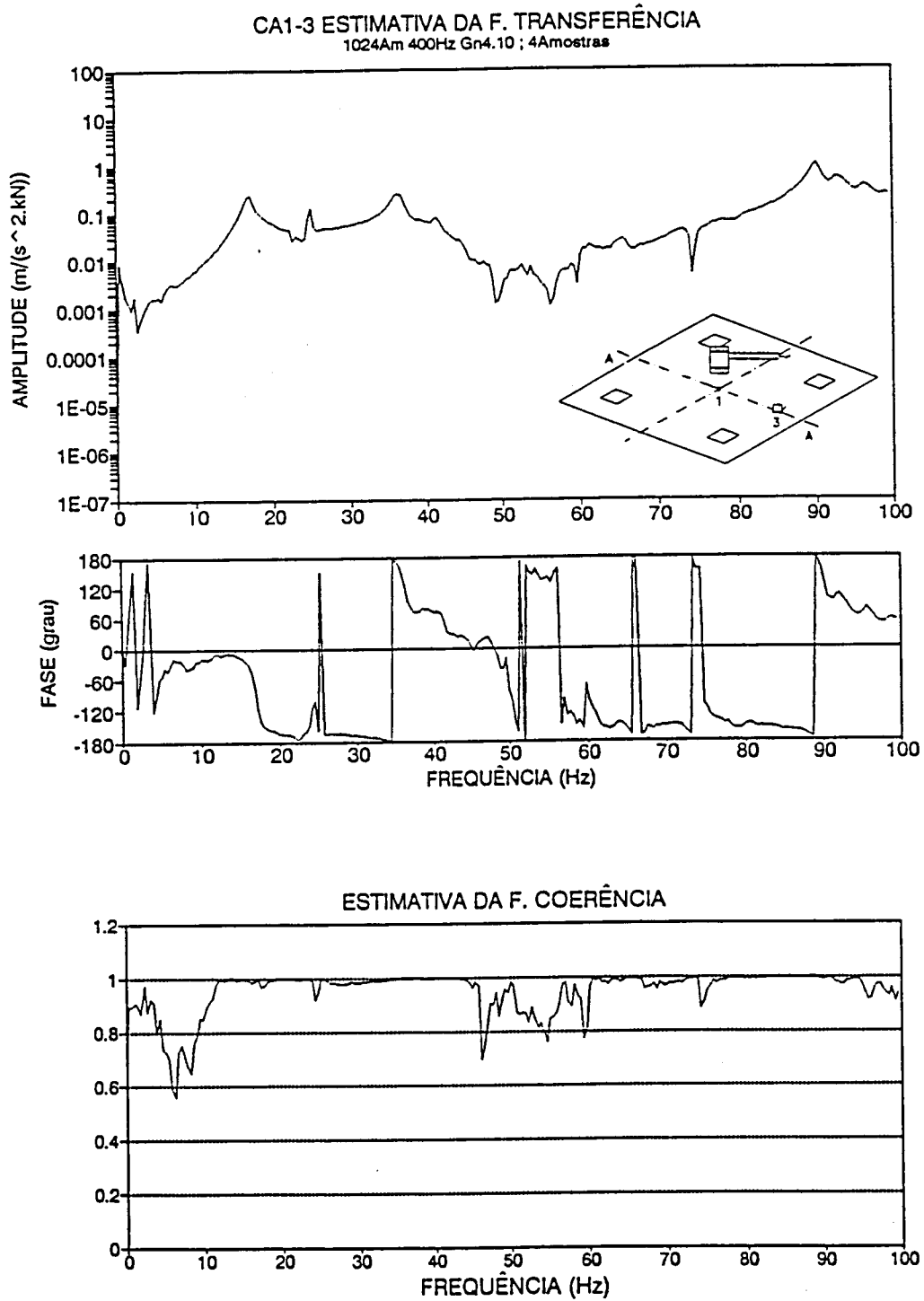


Figura 7.25 - Estimativa da FRF relacionando a resposta em 3 com forças aplicadas em 1; estimativa da função de coerência associada.

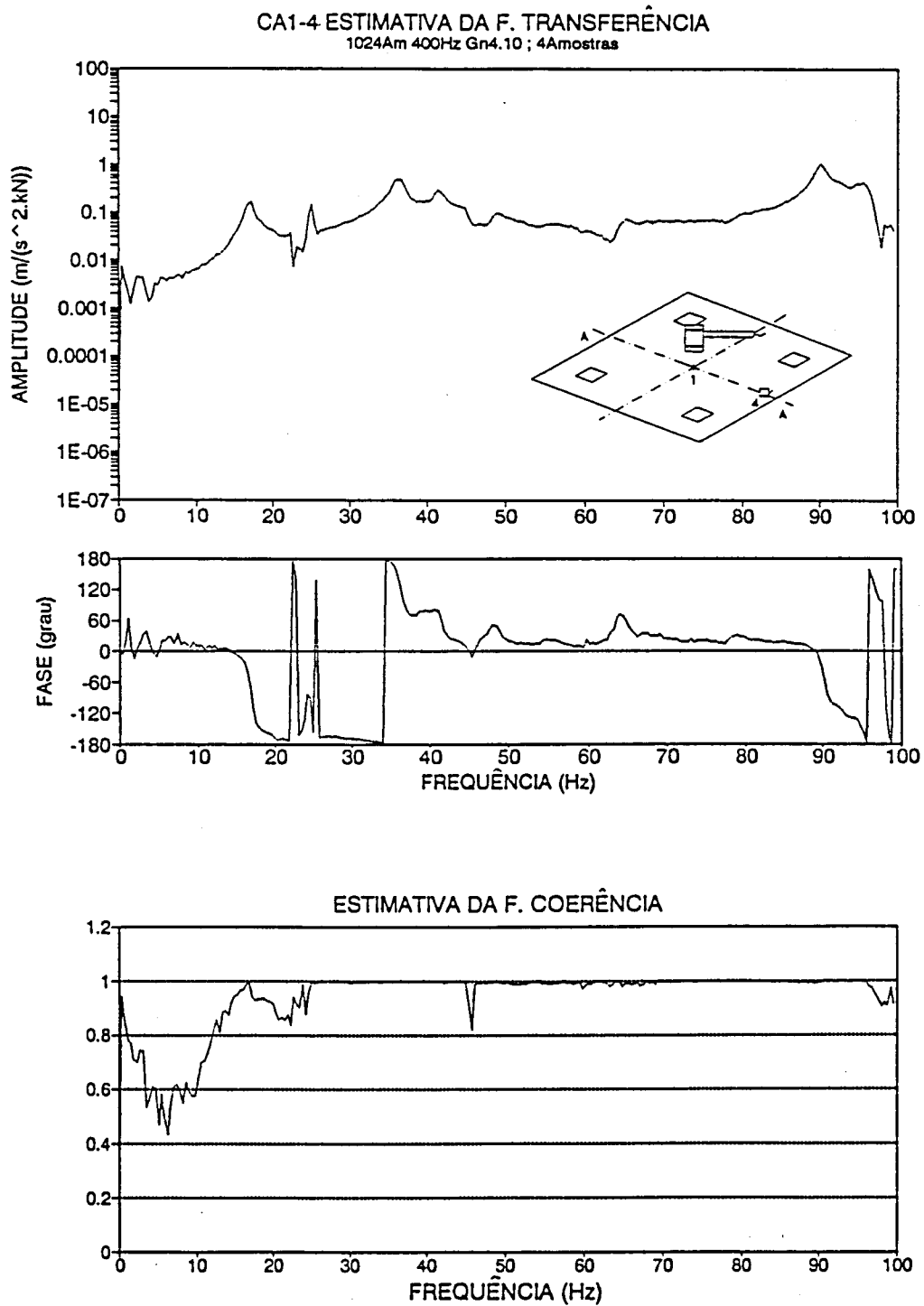


Figura 7.26 - Estimativa da FRF relacionando a resposta em 4 com forças aplicadas em 1; estimativa da função de coerência associada.

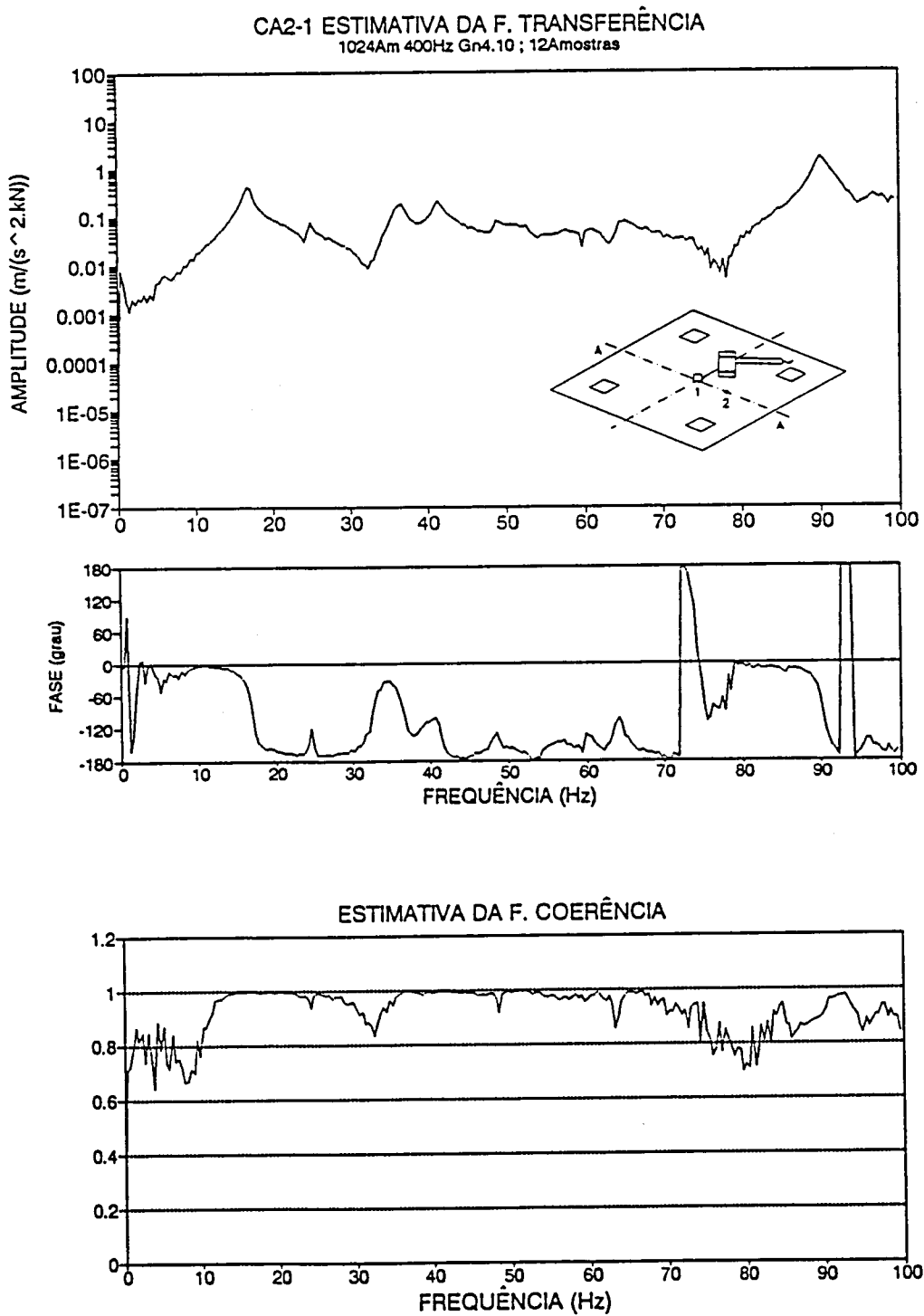


Figura 7.27 - Estimativa da FRF relacionando a resposta em 1 com forças aplicadas em 2; estimativa da função de coerência associada.

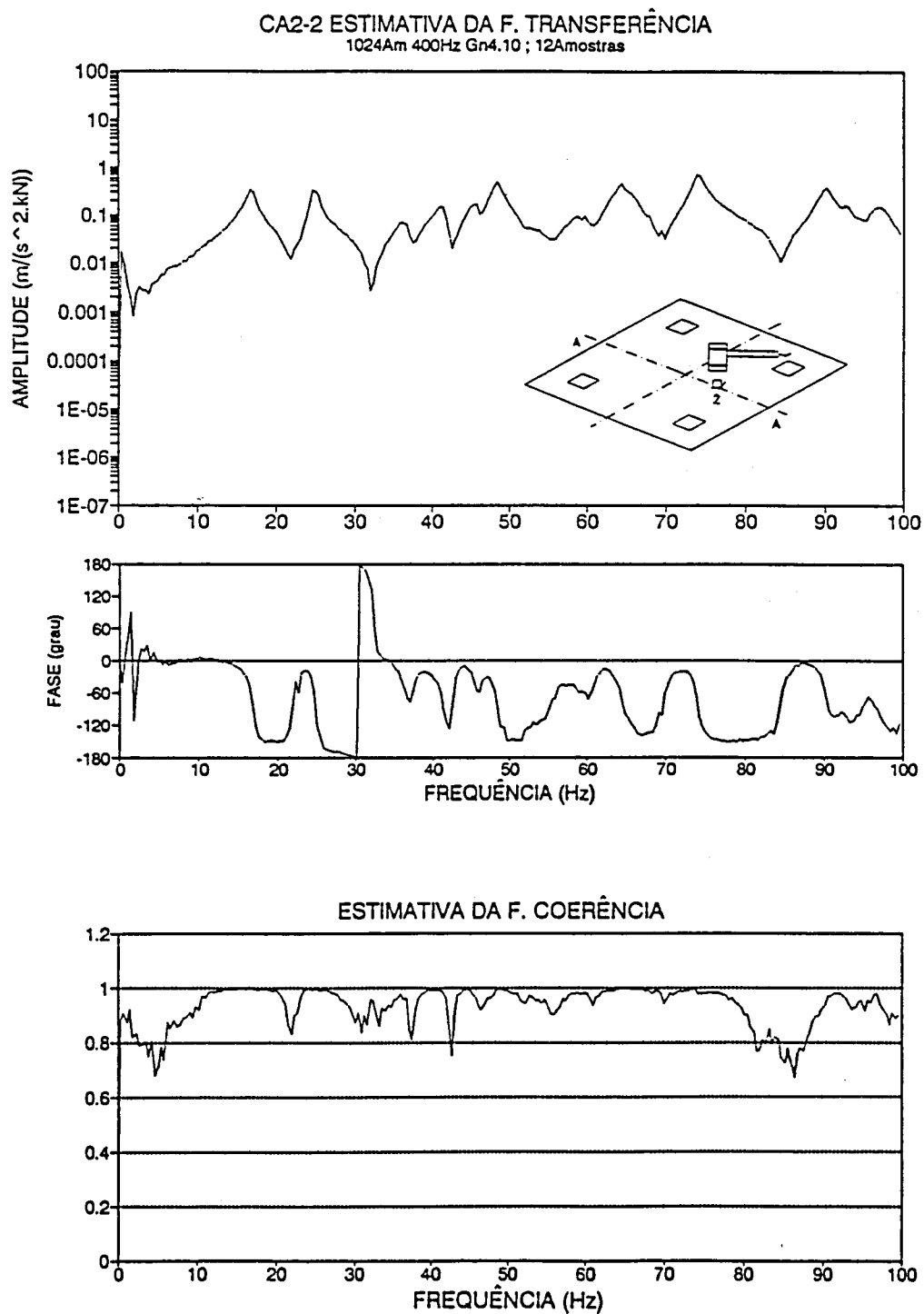


Figura 7.28 - Estimativa da FRF relacionando a resposta em 2 com forças aplicadas em 2; estimativa da função de coerência associada.

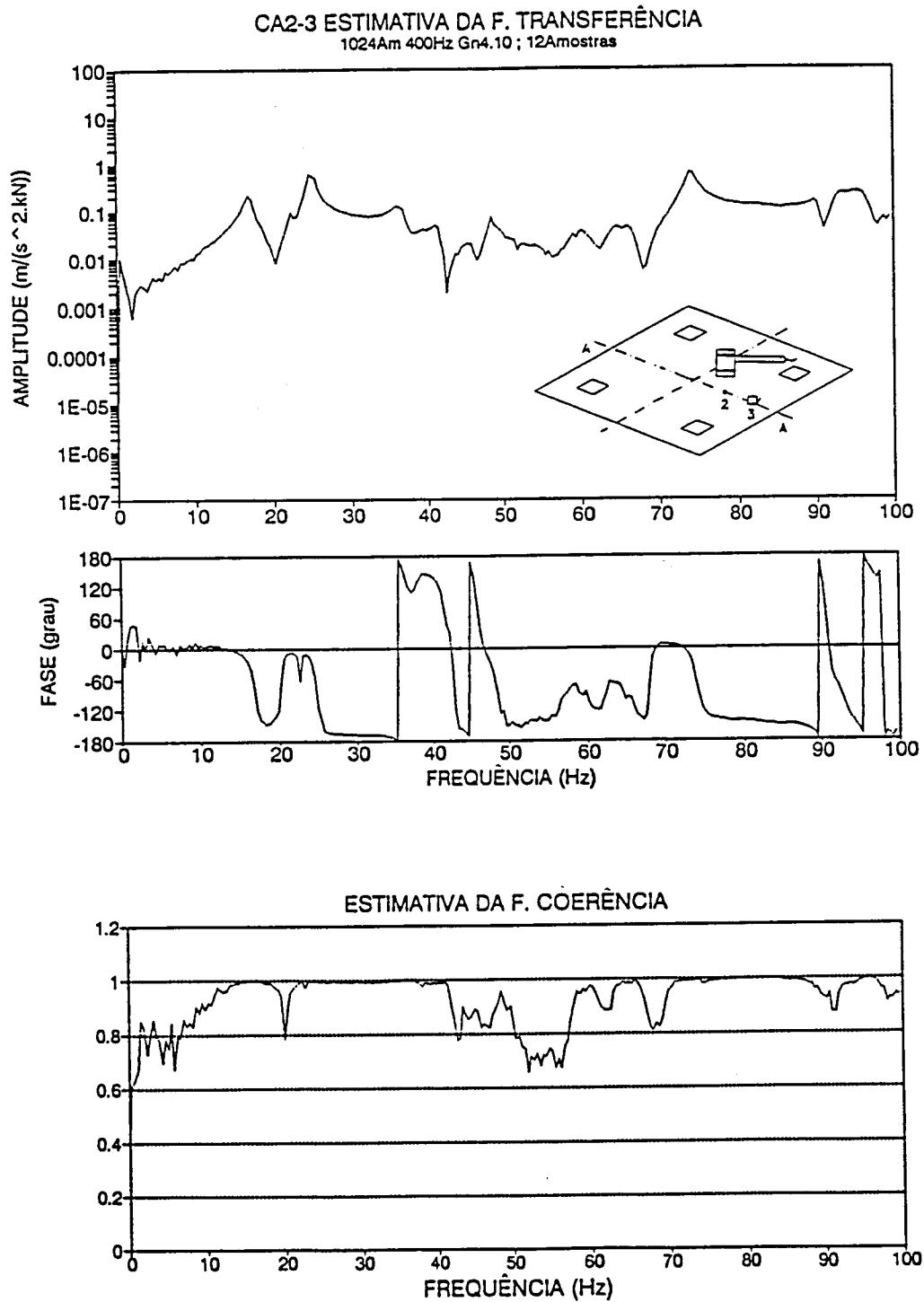


Figura 7.29 - Estimativa da FRF relacionando a resposta em 3 com forças aplicadas em 2; estimativa da função de coerência associada.

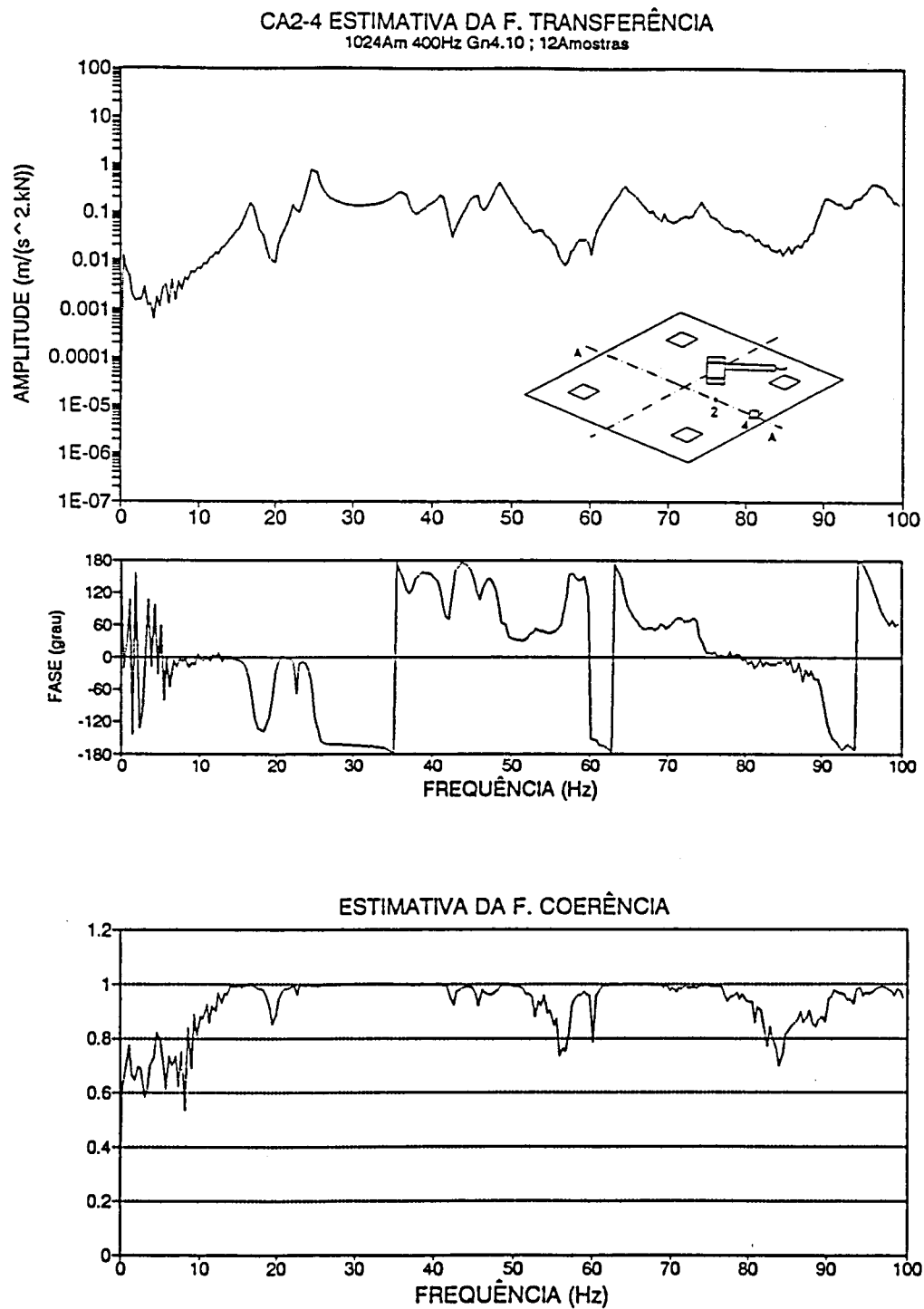


Figura 7.30 - Estimativa da FRF relacionando a resposta em 4 com forças aplicadas em 2; estimativa da função de coerência associada.

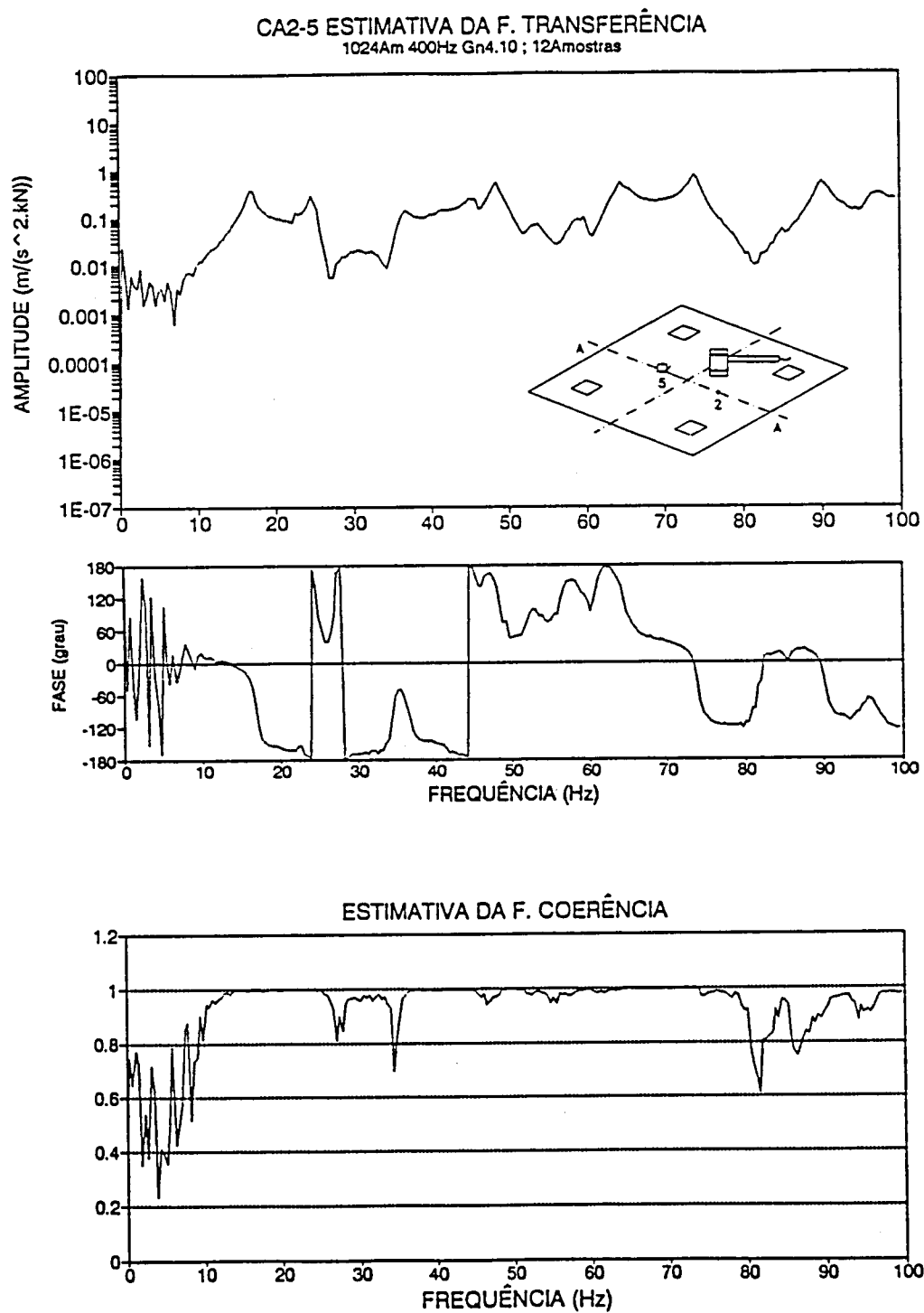


Figura 7.31 - Estimativa da FRF relacionando a resposta em 5 com forças aplicadas em 2; estimativa da função de coerência associada.

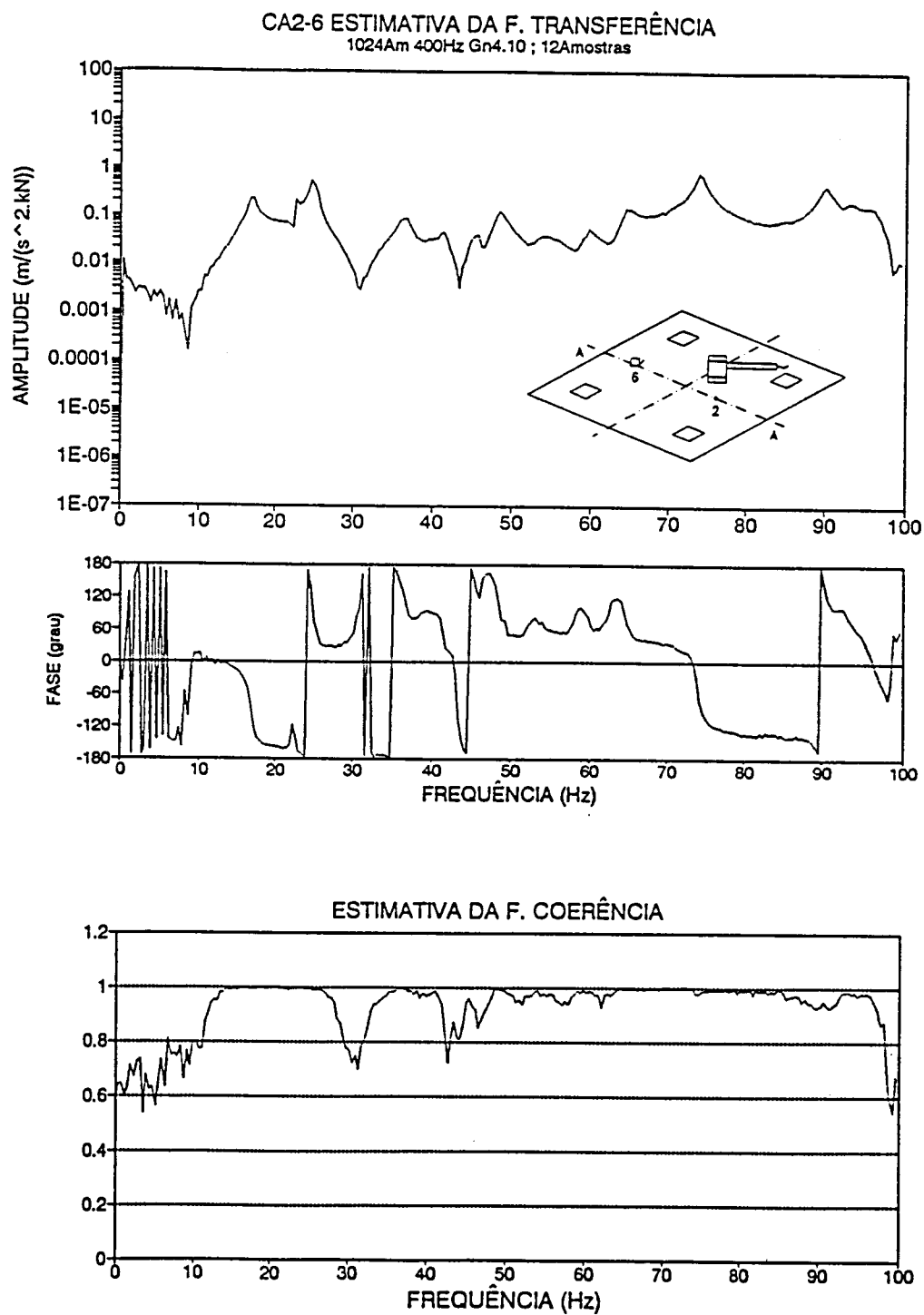


Figura 7.32 - Estimativa da FRF relacionando a resposta em 6 com forças aplicadas em 2; estimativa da função de coerência associada.

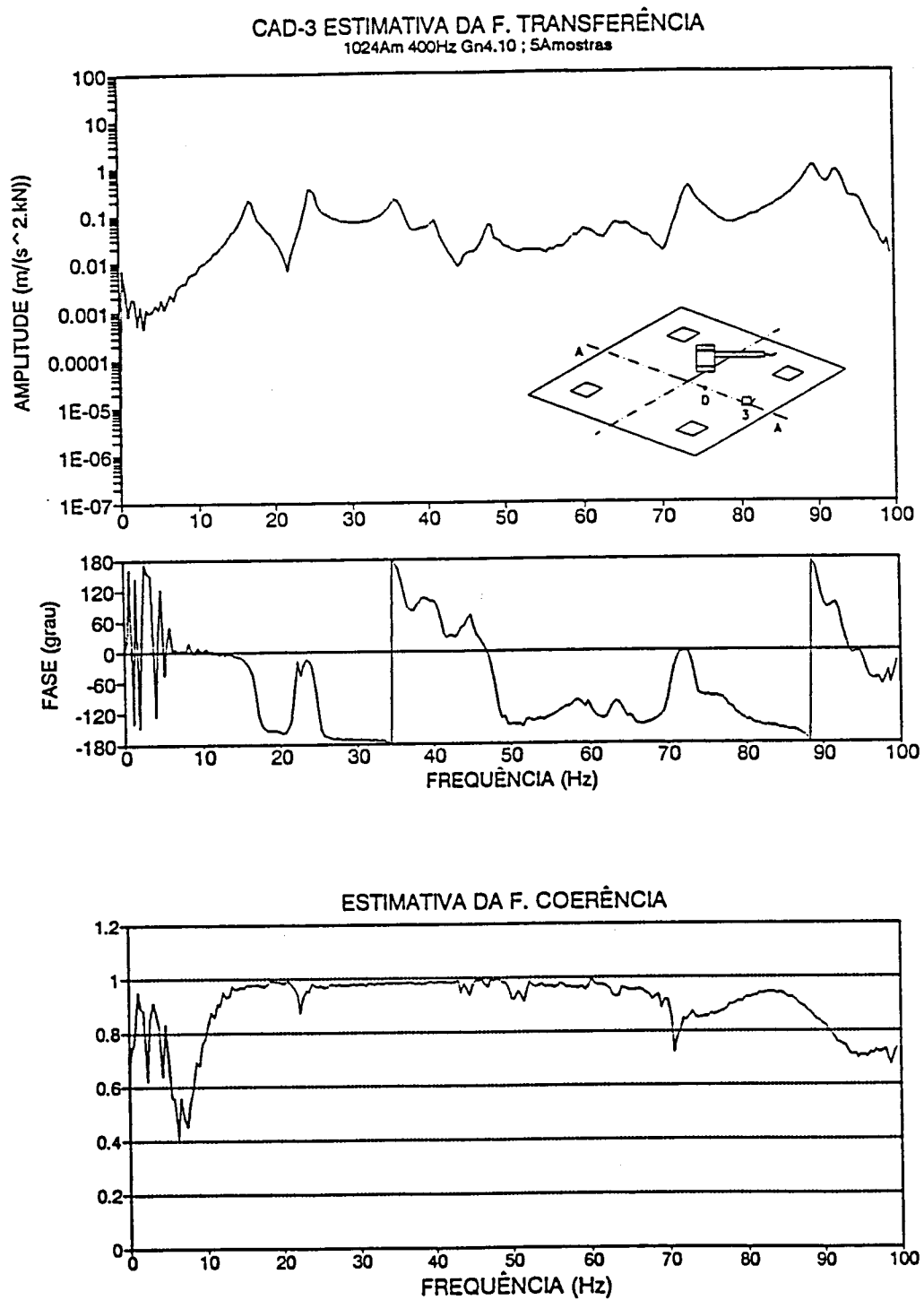


Figura 7.33 - Estimativa da FRF relacionando a resposta em 3 com forças aplicadas em D; estimativa da função de coerência associada.

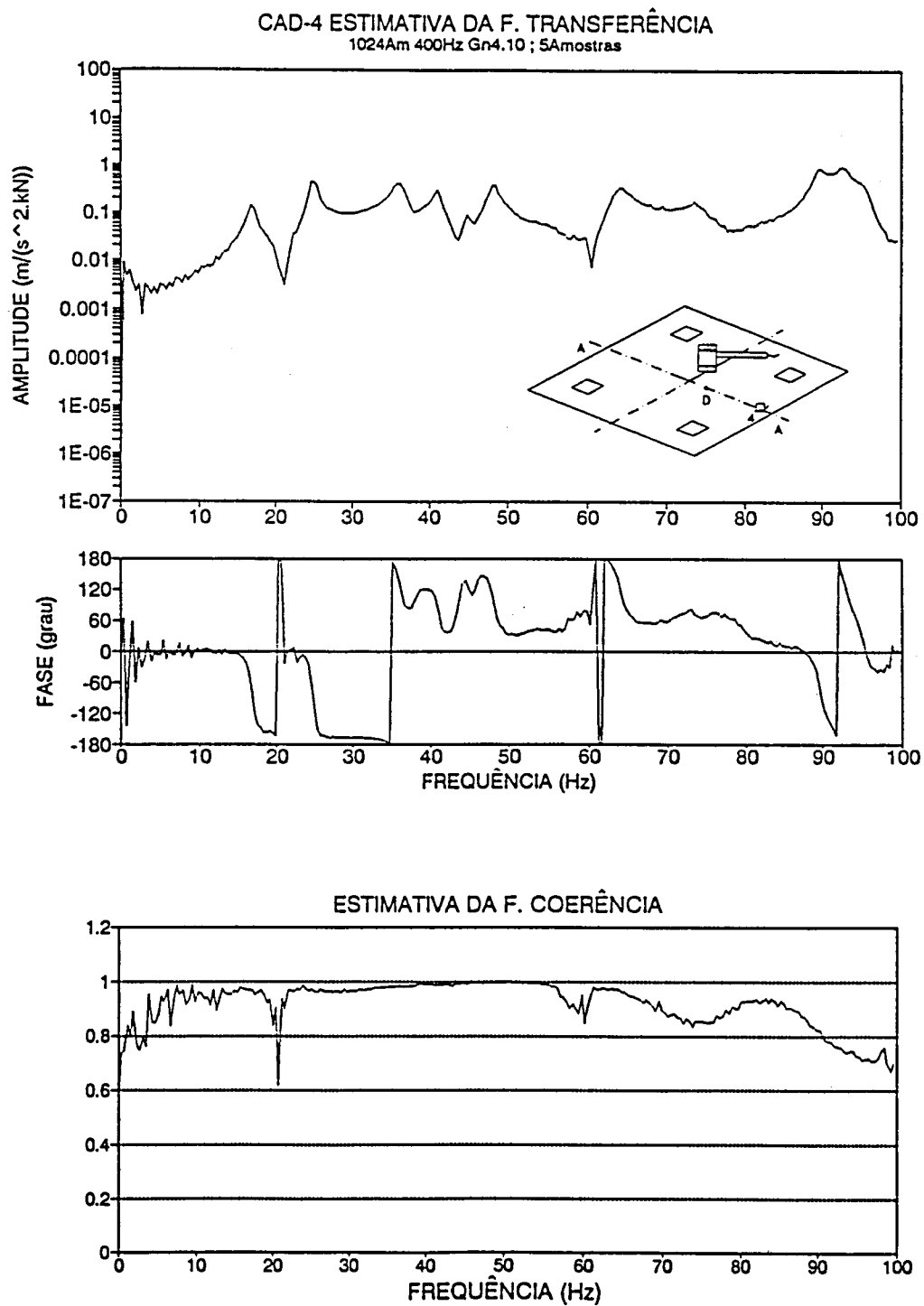


Figura 7.34 - Estimativa da FRF relacionando a resposta em 4 com forças aplicadas em D; estimativa da função de coerência associada.

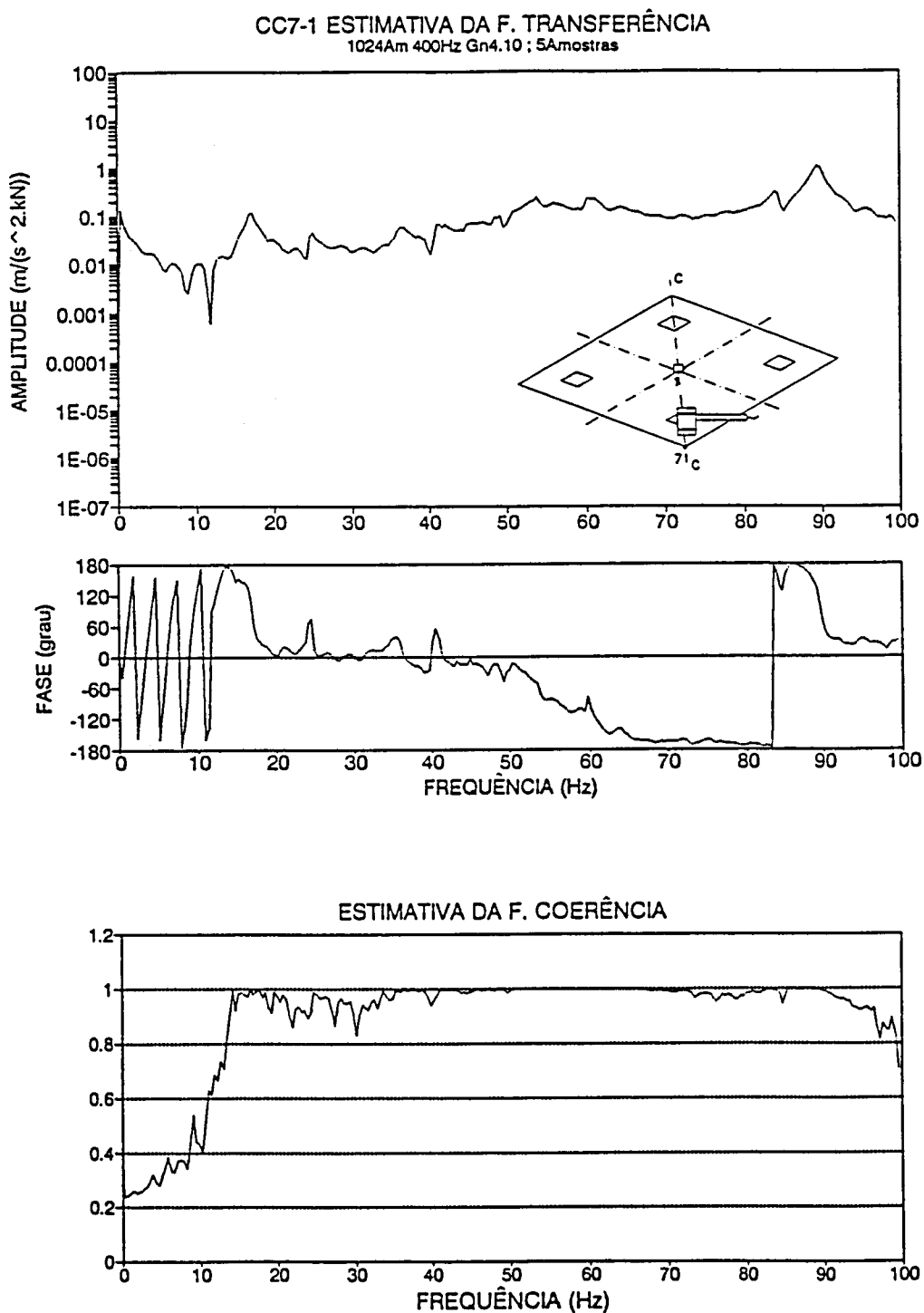


Figura 7.35 - Estimativa da FRF relacionando a resposta em 1 com forças aplicadas em 7C; estimativa da função de coerência associada.

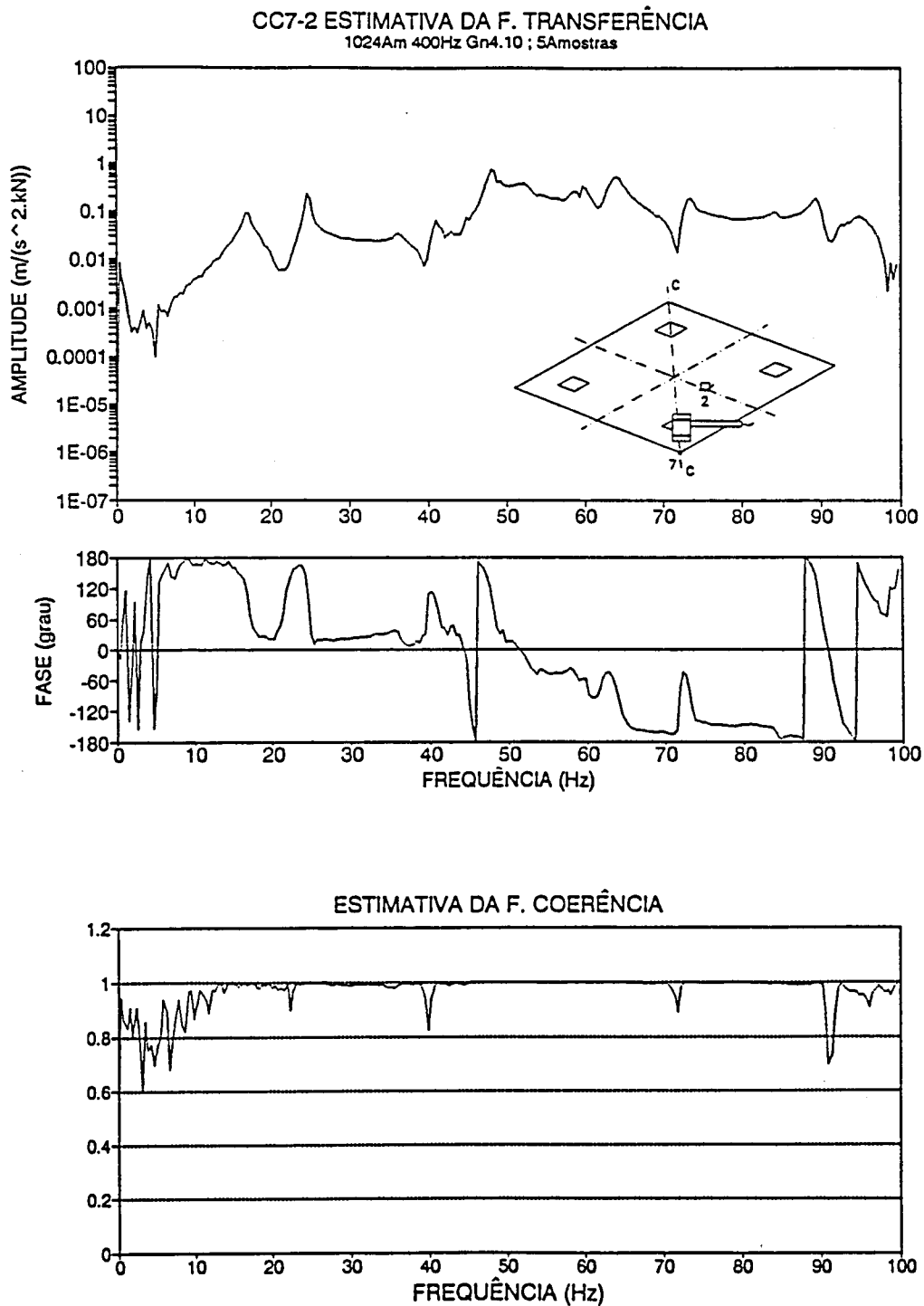


Figura 7.36 - Estimativa da FRF relacionando a resposta em 2 com forças aplicadas em 7C; estimativa da função de coerência associada.

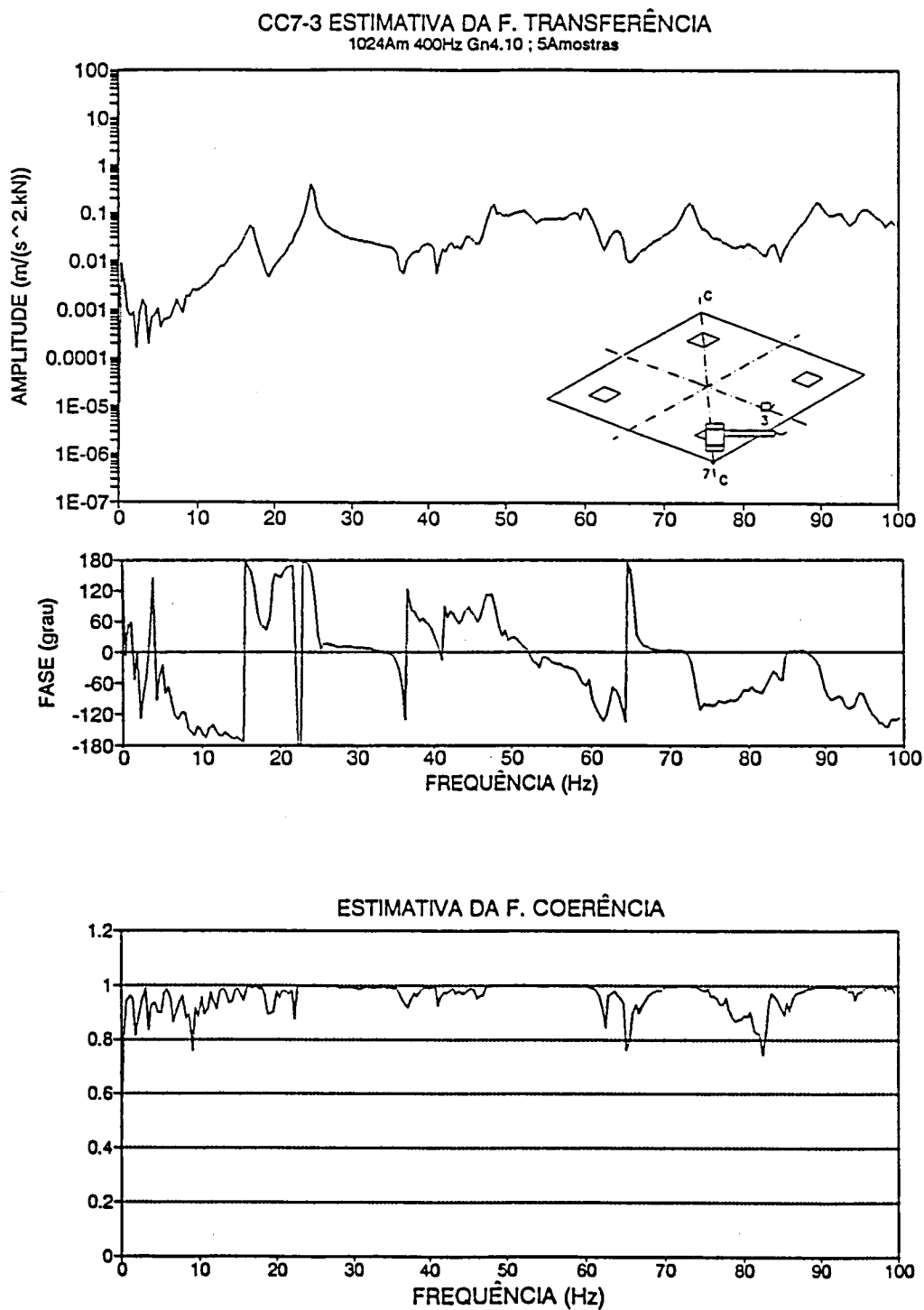


Figura 7.37 - Estimativa da FRF relacionando a resposta em 3 com forças aplicadas em 7C; estimativa da função de coerência associada.

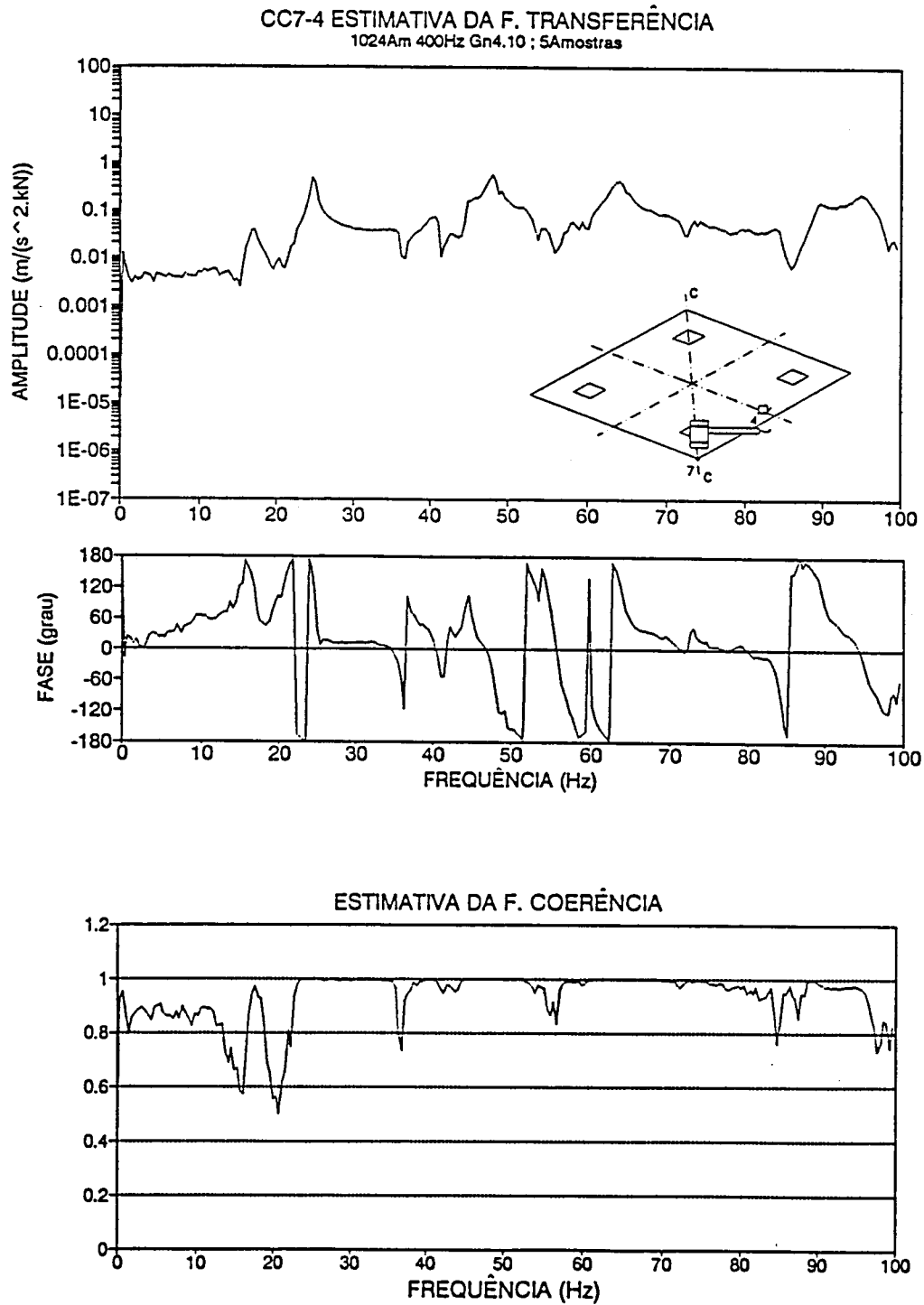


Figura 7.38 - Estimativa da FRF relacionando a resposta em 4 com forças aplicadas em 7C; estimativa da função de coerência associada.

7.2.4 - Identificação de parâmetros dinâmicos

A existência de um elevado número de frequências naturais no intervalo de frequências considerado, detectáveis na generalidade das FRF analisadas, sugere a existência de uma elevada interferência modal e, conseqüentemente, a inadequação das técnicas de 1 grau de liberdade para identificação dos parâmetros modais.

Desta forma, optou-se pela utilização do programa MODHAN, baseado no método de N graus de liberdade RFP descrito no ponto 5.3.2.2. Efectuou-se apesar disso também a aplicação dos métodos do "circle fit" e de Dobson a algumas das FRF estimadas.

Por outro lado, apesar do programa MODHAN permitir o ajuste de várias FRF simultaneamente, considerou-se preferível a sua aplicação individualmente a cada FRF, pelo facto de em certos registos alguns modos terem uma contribuição muito inferior à dos modos laterais, aparecendo eventualmente "mascarados" por estes últimos e podendo conduzir, portanto, a erros significativos quando a identificação é feita em simultâneo.

Nas Figuras 7.39 a 7.54 confrontam-se as FRF estimadas (expressas em termos de receptâncias) com as FRF reconstituídas com base nos parâmetros identificados através do programa MODHAN, podendo observar-se a excelente qualidade do ajuste na generalidade dos casos. Os quadros apresentados nessas figuras resumem os valores das frequências naturais, dos coeficientes de amortecimento e das constantes modais identificadas. De igual forma, apresentam-se nas Figuras 7.55 a 7.59 alguns dos resultados obtidos por aplicação dos métodos do "circle fit" e de Dobson às FRF experimentalmente construídas. Nos gráficos de Nyquist dessas figuras, sobrepõem-se as curvas experimentais às FRF ajustadas, vindo estas expressas em termos de *mobilidades*, no caso em que se utiliza o método do "circle fit" e em termos de receptância, quando se aplica o método de Dobson. Verificou-se que, em geral, os resultados obtidos por aplicação do método do "circle fit" são superiores aos obtidos por aplicação do método de Dobson, embora inferiores aos que derivam da aplicação do método RFP, através do programa MODHAN. Este facto é consequência da inadequação dos métodos de 1 grau de liberdade ao ajuste de FRF em que a interferência modal tenha grande significado (note-se que o método do "circle fit" implementado constitui um método simplificado de N graus de liberdade, na medida em que, antes de proceder ao ajuste de um dado modo de vibração, elimina todas as componentes modais da FRF anteriormente identificadas).

Uma breve análise destes gráficos e quadros permite constatar, em particular, o seguinte:

- As frequências identificadas apresentam de um modo geral variações muito pequenas de registo para registo, o que permite afirmar, por um lado, que representam efectivamente ressonâncias do sistema e, por outro, que a precisão com que são obtidas é bastante boa. Isto é válido também para as aplicações realizadas recorrendo ao método do "circle fit" e, em menor grau, para as que foram efectuadas com recurso ao método de Dobson, sendo de realçar ter-se conseguido uma excelente concordância entre os valores obtidos utilizando estes métodos e o método RFP, através do programa MODHAN;
- Os coeficientes de amortecimento identificados apresentam uma maior variação de registo para registo do que as frequências naturais, o que de alguma forma seria de esperar, já que a interferência modal é muito elevada, podendo induzir erros significativos. Note-se que em alguns registos onde este efeito é menos importante (por exemplo, no designado por CA1-1) os erros cometidos na avaliação dos coeficientes de amortecimento modais são naturalmente mais reduzidos. Chama-se também atenção para a razoável concordância entre os valores dos coeficientes de amortecimento obtidos através dos programas MODHAN e FITCIR nos registos CA1 (Figuras 7.39, 7.40 e 7.42 e 7.55, 7.56 e 7.57), em particular para os modos sujeitos a menores interferências modais. Este mesmo facto não se verifica relativamente aos coeficientes de amortecimento estimados por aplicação do método de Dobson, que assumem por vezes valores sem significado físico quando a interferência modal é importante;
- Verifica-se por outro lado que, apesar de apresentarem valores relativamente baixos, os coeficientes de amortecimento têm uma evolução essencialmente decrescente com a frequência natural, o que contrasta com a hipótese muitas vezes adoptada nas modelações numéricas, segundo a qual o amortecimento obedece a uma lei de comportamento do tipo proporcional em que a fixação dos primeiros dois coeficientes (normalmente com valores iguais) conduz a coeficientes de amortecimento crescentes com as correspondentes frequências naturais para os restantes modos de vibração;
- No que respeita aos valores das constantes modais ajustadas, salienta-se a existência de um importante carácter complexo na generalidade das FRF analisadas (mesmo naquelas que evidenciam um menor número de modos de vibração, como é o caso das FRF associadas aos registos CA1). Esta característica faz-se sentir, tanto nos resultados obtidos através do método RFP, como nos

proporcionados pela aplicação dos métodos do "circle fit" e de Dobson (veja-se por exemplo a Figura 7.57), o que revela ser neste caso inadequada a utilização de algoritmos de identificação de um grau de liberdade baseados na formulação modal clássica.

Em resultado do conjunto de parâmetros modais identificados para cada uma das estimativas das FRF em correspondência com um dado ponto de aplicação do impulso, foram obtidos valores médios das frequências de vibração, coeficientes de amortecimento e os respectivos desvios-padrão.

Estes parâmetros, que se sumarizam nos Quadros 7.5 a 7.8 para alguns dos conjuntos de FRF analisados, são finalmente utilizados na identificação das componentes dos modos de vibração que lhes correspondem. Apresentam-se nos Quadros 7.9 a 7.16 alguns dos resultados obtidos para certos modos de vibração.

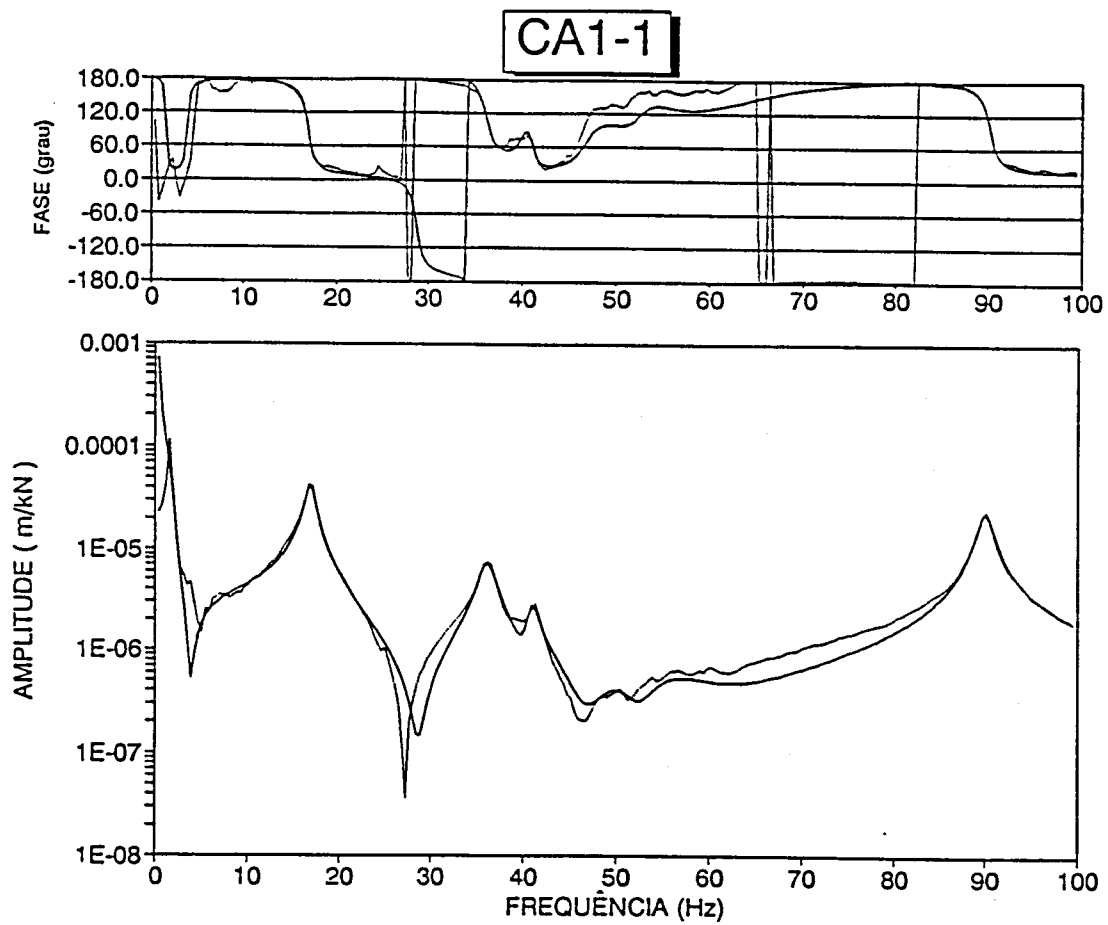
A comparação dos valores destas componentes com os valores numéricos dos modos de vibração correspondentes é realizada no ponto 7.2.5.. Para já, interessa unicamente realçar o carácter complexo das componentes dos modos de vibração identificados, evidenciado em maior ou menor grau conforme o registo utilizado, ou seja, o tipo de FRF. Este assunto será também discutido em 7.2.5.

7.2.5 - Validação do modelo teórico

Neste ponto são comparados os parâmetros modais obtidos experimentalmente com os correspondentes valores determinados através do modelo numérico descrito em 7.2.1.

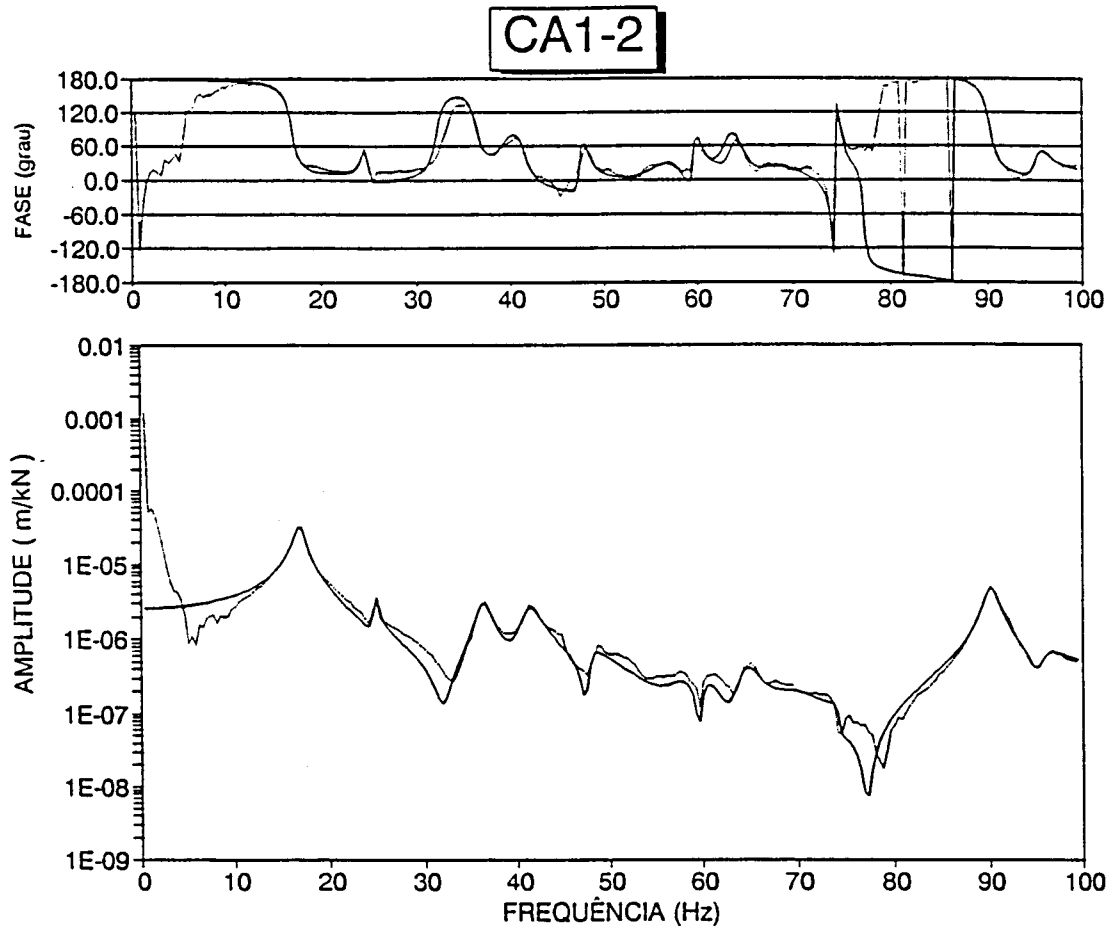
Refere-se contudo que os resultados obtidos numericamente apresentados neste ponto são já o produto de várias iterações de cálculo em que foram usadas conclusões extraídas do modelo experimental, quer com vista à fixação do valor do módulo de elasticidade do betão, quer com a finalidade de caracterizar convenientemente as condições de apoio da laje.

Efectivamente, um problema importante na modelação numérica de uma estrutura de betão armado, como a considerada neste exemplo, é o da fixação do valor do módulo de elasticidade a adoptar.



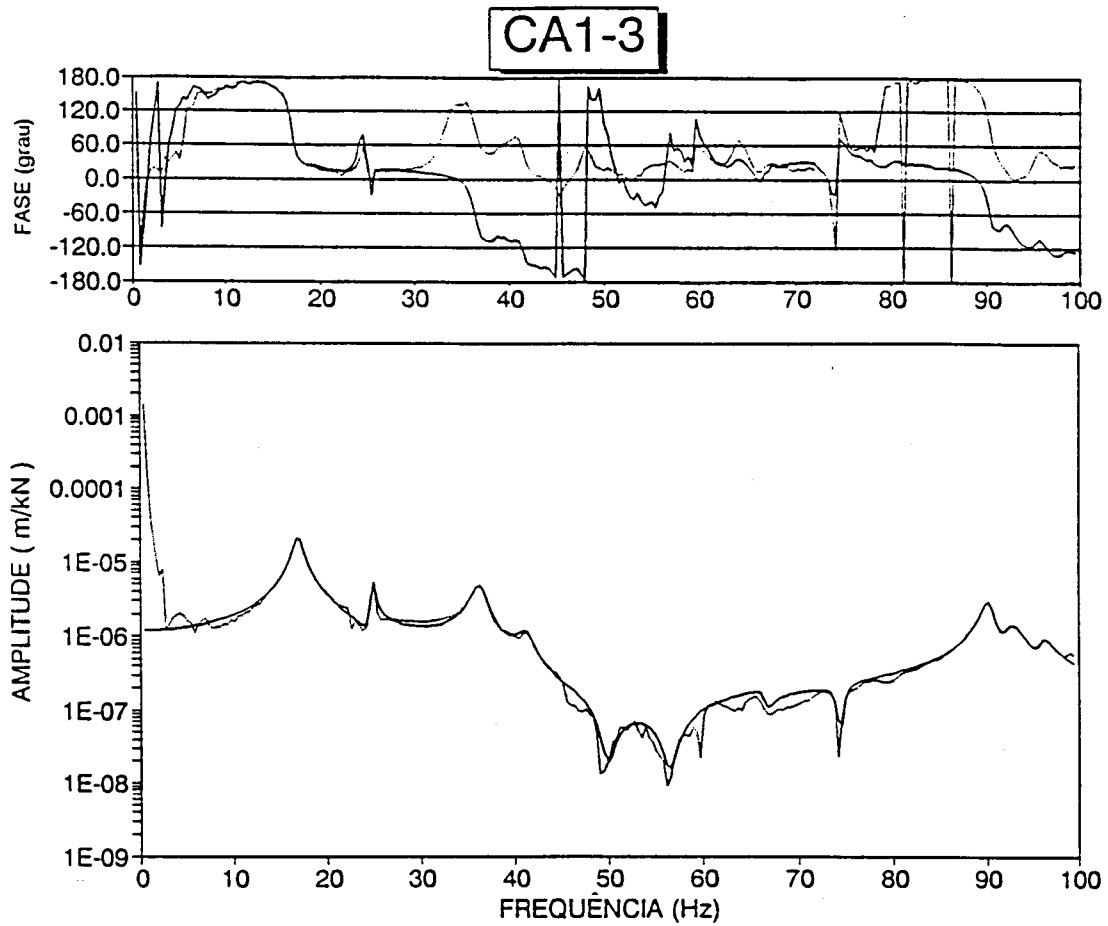
CA1-1				
Ordem	Frequência natural (Hz)	Coeficiente amortecimento (%)	Constante Modal	
			Amplitude	Fase(°)
1	1.597	7.82	0.9101E-4	91.467
2	16.91	3.11	1.4262E-4	90.380
3	36.26	2.21	0.3701E-4	112.53
4	41.00	1.44	0.7491E-5	85.777
5	50.26	7.36	0.1336E-4	99.652
6	53.92	7.90	0.1526E-4	-158.61
7	90.15	0.799	1.0778E-4	100.298

Figura 7.39 - Sobreposição dos gráficos de Bode associados à FRF1-1 experimental (ponteado) e ajustada (traço cheio) usando o programa MODHAN; Parâmetros modais identificados.



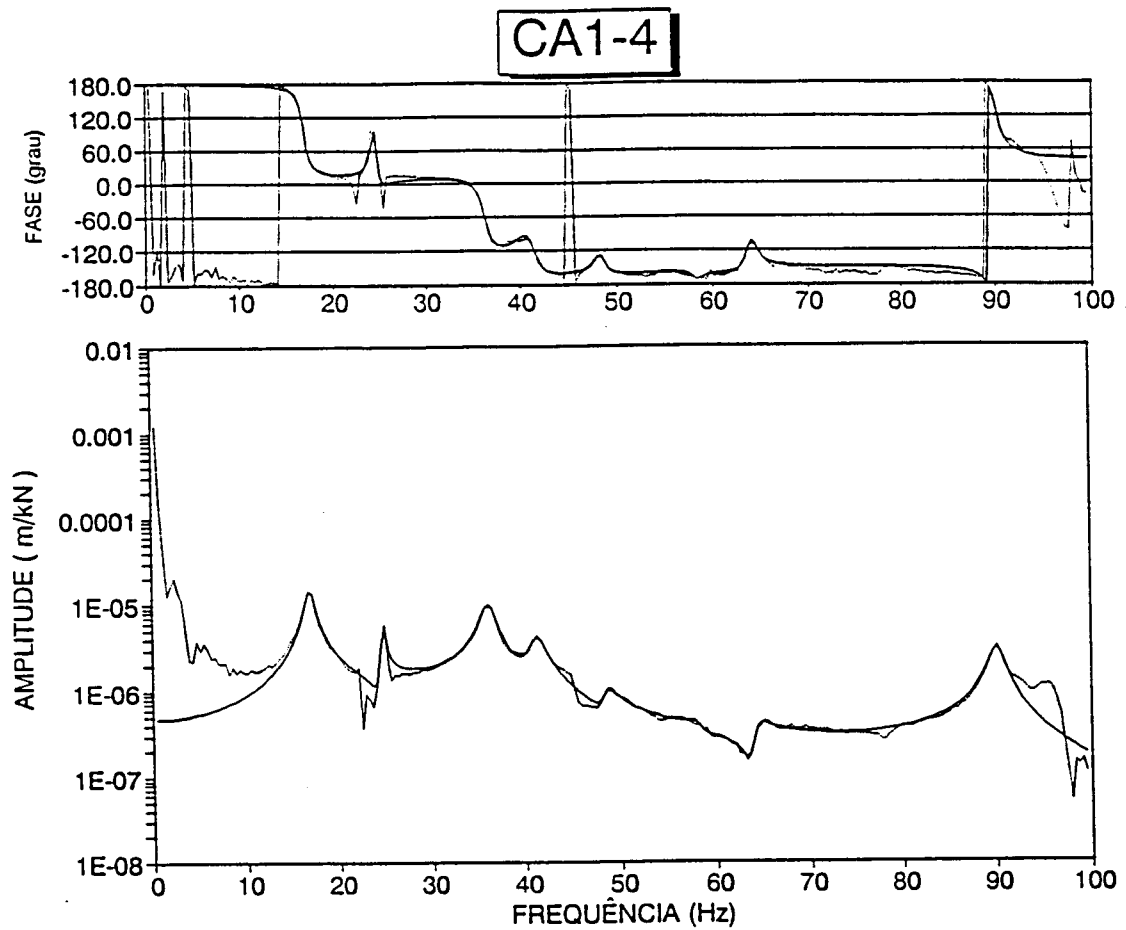
CA1-2				
Ordem	Frequência	Coefficiente	Constante Modal	
	natural (Hz)	amortecimento (%)	Amplitude	Fase(°)
1	16.93	3.30	1.1787E-4	89.285
2	24.89	0.926	0.3581E-5	49.818
3	36.51	2.03	0.1309E-4	91.772
4	41.46	2.20	0.1309E-4	58.711
5	48.12	1.75	0.3265E-5	116.56
6	58.31	4.46	0.5236E-5	43.174
7	60.00	1.54	0.1927E-5	153.03
8	64.71	2.00	0.3379E-5	77.621
9	67.38	4.93	0.4258E-5	142.41
10	74.23	0.531	0.4509E-6	-154.22
11	90.27	0.693	0.1925E-4	95.521
12	95.67	1.29	0.3673E-5	143.74

Figura 7.40 - Sobreposição dos gráficos de Bode associados à FRF2-1 experimental (pontado) e ajustada (traço cheio) usando o programa MODHAN; Parâmetros modais identificados.



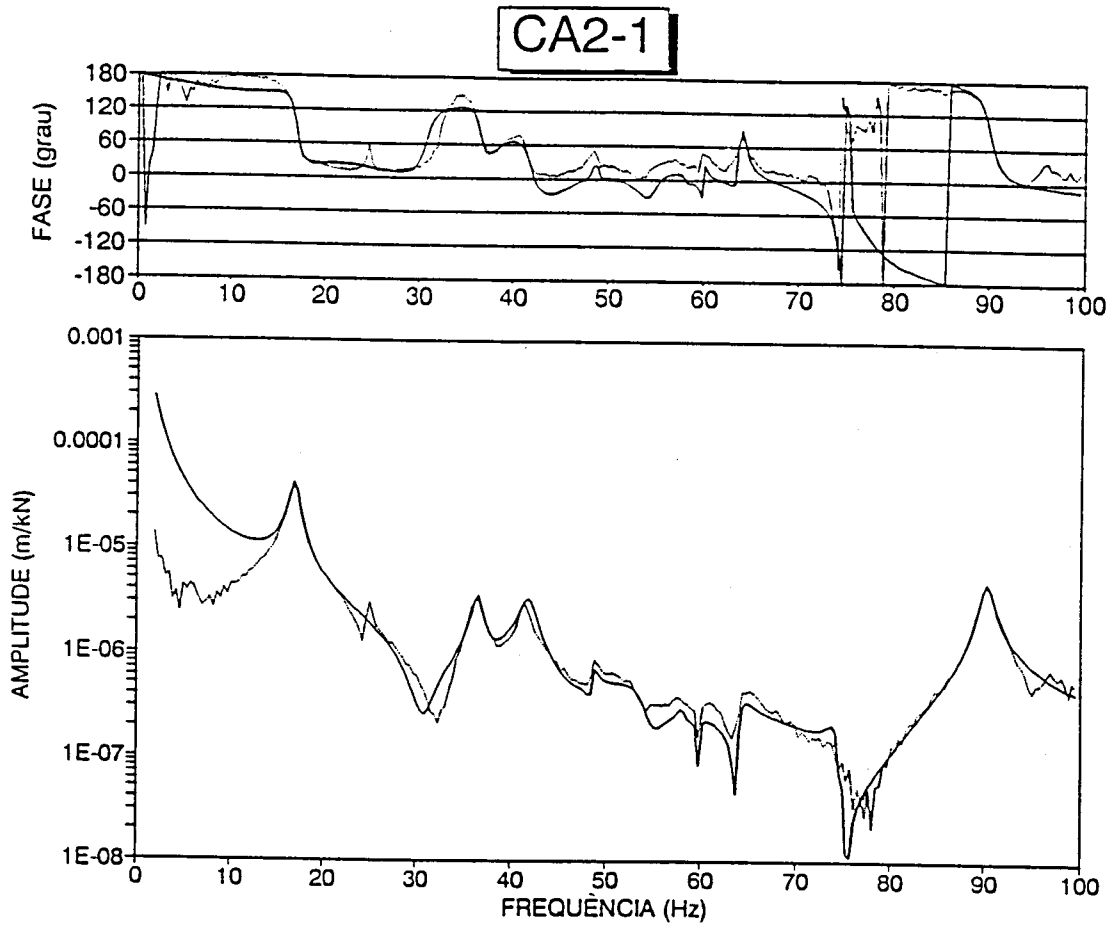
CA1-3				
Ordem	Frequência natural (Hz)	Coeficiente amortecimento (%)	Constante Modal	
			Amplitude	Fase(°)
1	16.95	3.15	0.7342E-4	89.719
2	24.89	0.711	0.5146E-5	54.559
3	36.33	1.96	0.2030E-4	-63.974
4	41.31	2.14	0.4268E-5	-134.662
5	48.99	7.04	0.3830E-5	110.872
6	56.80	8.08	0.4499E-5	-179.776
7	66.48	0.971	0.3359E-6	-110.862
8	74.55	1.04	0.9307E-6	-169.48
9	90.22	0.694	0.1064E-4	-63.01
10	92.73	1.23	0.8026E-5	-66.81
11	96.19	0.860	0.2444E-5	-75.64

Figura 7.41 - Sobreposição dos gráficos de Bode associados à FRF3-1 experimental (ponteado) e ajustada (traço cheio) usando o programa MODHAN; Parâmetros modais identificados.



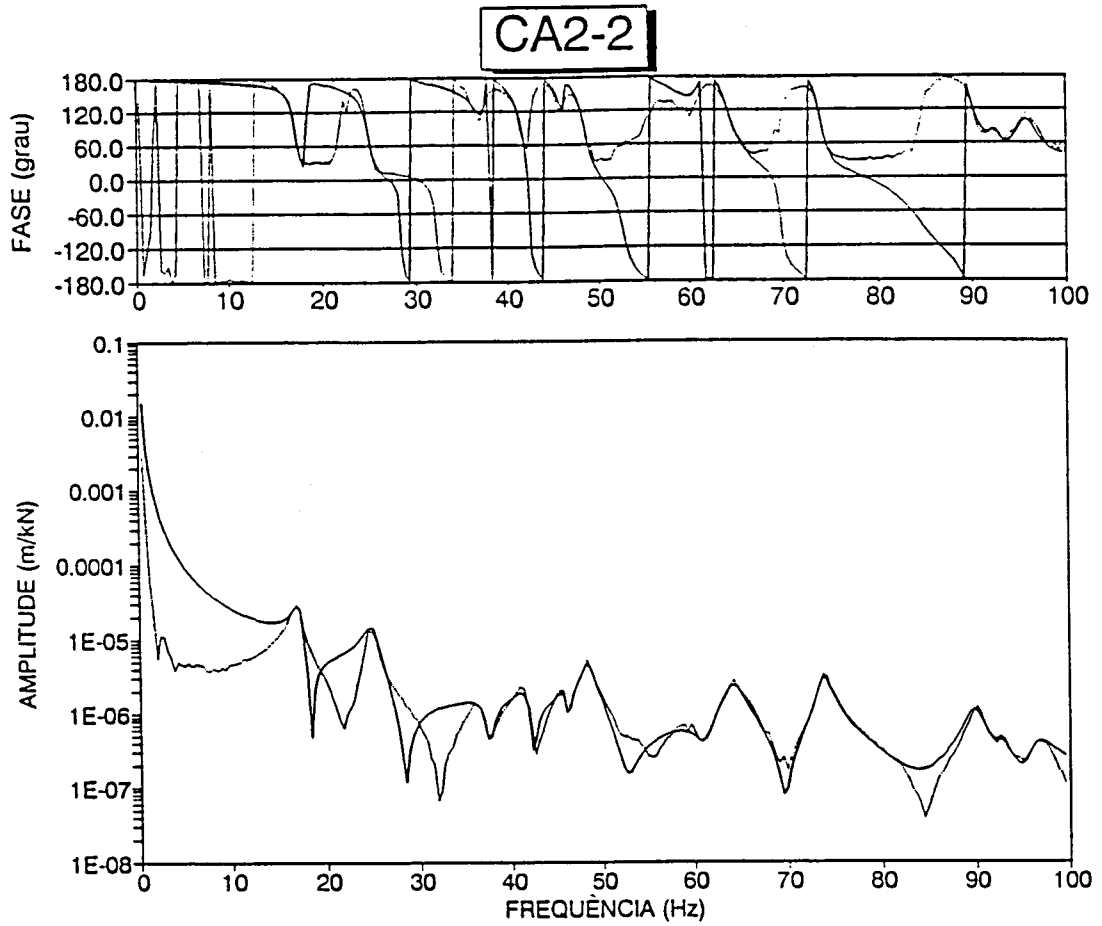
CA1-4				
Ordem	Frequência natural (Hz)	Coeficiente amortecimento (%)	Constante Modal	
			Amplitude	Fase(°)
1	16.99	2.66	0.4195E-4	90.421
2	24.81	0.644	0.5695E-5	67.600
3	36.35	2.22	0.4747E-4	-58.670
4	41.41	1.95	0.1538E-4	-112.20
5	48.78	1.45	0.2161E-5	-104.90
6	56.87	1.22	0.2931E-6	151.65
7	64.51	1.30	0.1310E-5	-59.320
8	72.59	2.26	0.8552E-6	77.950
9	76.08	7.01	0.6013E-5	-166.45
10	78.58	2.14	0.1593E-5	-29.990
11	90.21	0.885	0.1503E-4	126.46
12	95.84	0.744	0.4586E-5	-25.860

Figura 7.42 - Sobreposição dos gráficos de Bode associados à FRF4-1 experimental (pontado) e ajustada (traço cheio) usando o programa MODHAN; Parâmetros modais identificados.



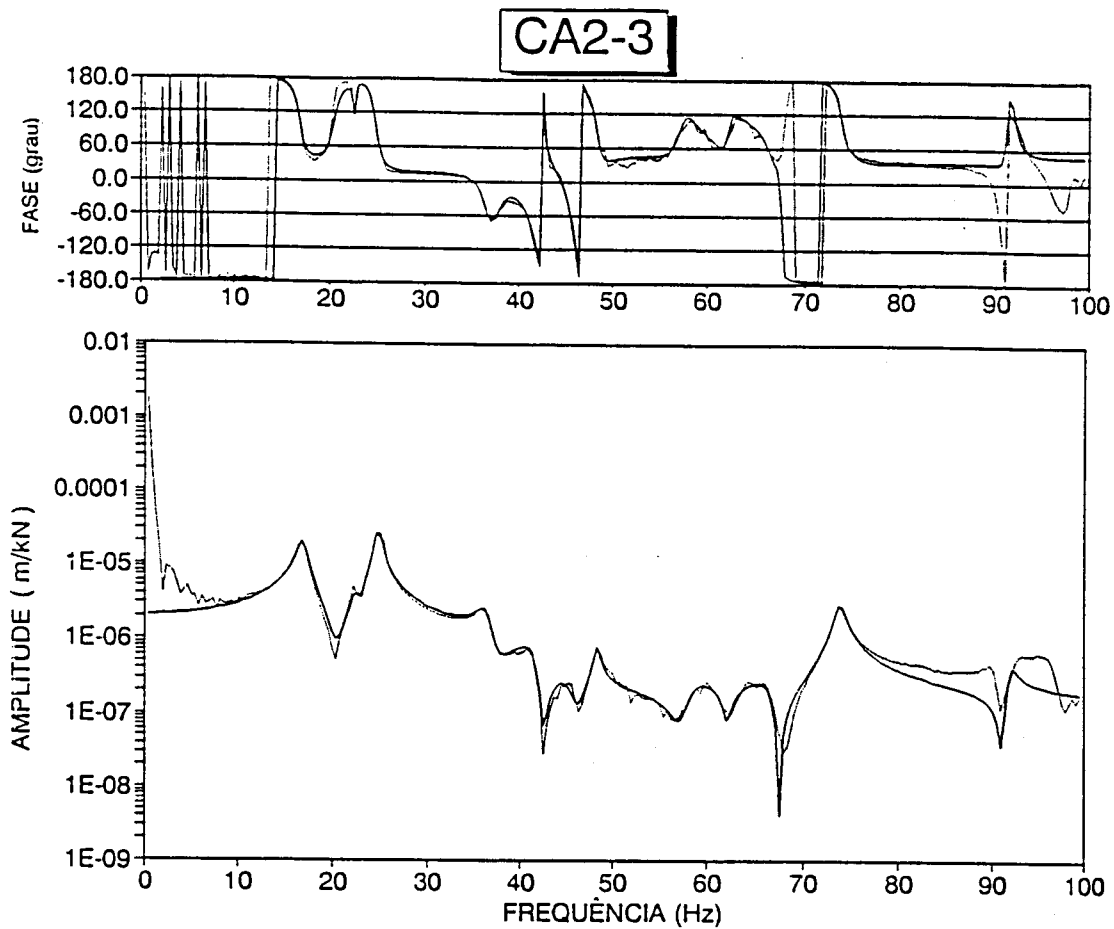
CA2-1				
Ordem	Frequência	Coeficiente amortecimento (%)	Constante Modal	
	natural (Hz)		Amplitude	Fase(°)
1	16.90	3.03	0.1243E-3	86.702
2	28.62	31.5	0.1200E-3	-48.030
3	36.66	1.43	0.9475E-5	74.050
4	41.90	2.11	0.1613E-4	15.420
5	48.76	0.530	0.5328E-6	73.850
6	53.78	3.00	0.2869E-5	-103.82
7	58.03	0.712	0.1797E-6	-25.090
8	59.87	0.295	0.2129E-6	167.08
9	64.80	55.0	0.1701E-3	44.740
10	64.25	0.972	0.1268E-5	128.13
11	74.33	0.745	0.7634E-6	-166.22
12	74.64	-0.382	0.7466E-7	-137.09
13	90.24	0.708	0.2009E-4	88.704

Figura 7.43 - Sobreposição dos gráficos de Bode associados à FRF1-2 experimental (pontado) e ajustada (traço cheio) usando o programa MODHAN; Parâmetros modais identificados.



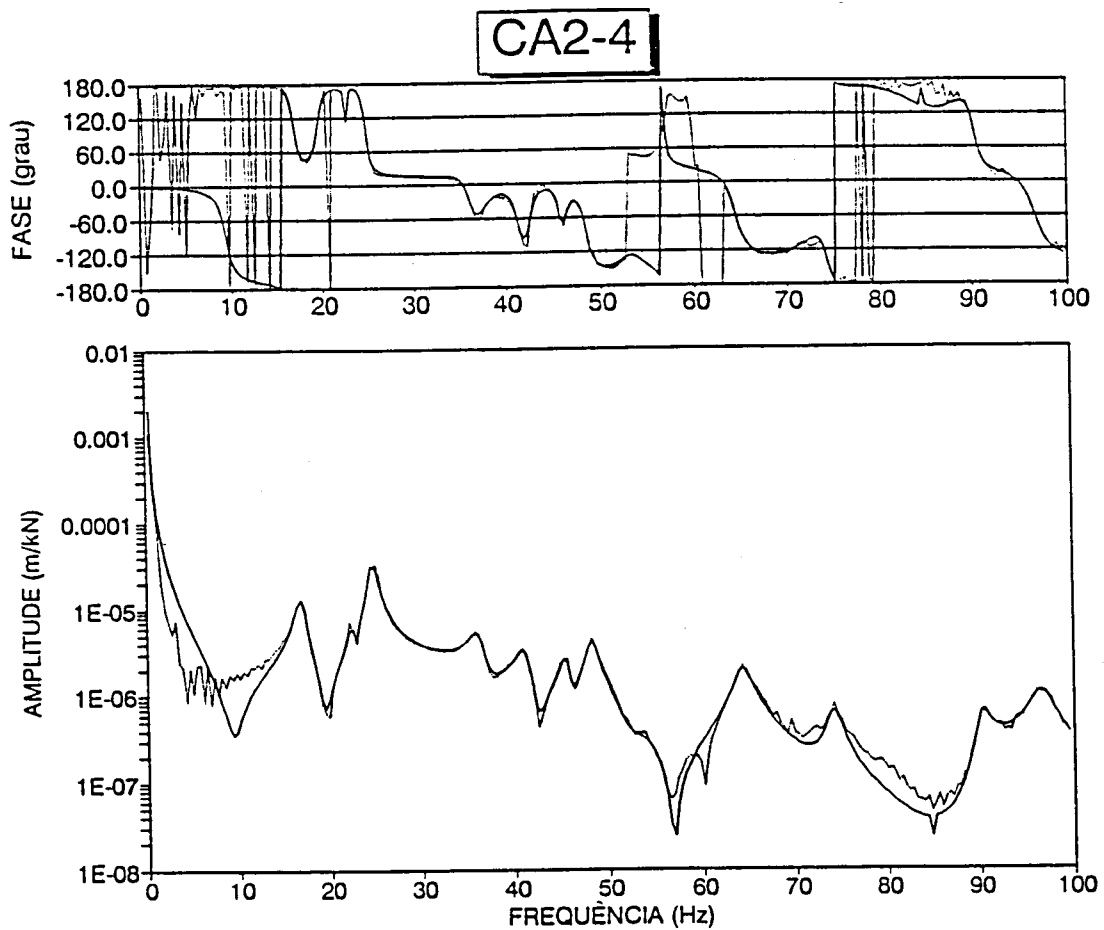
CA2-2				
Ordem	Frequência natural (Hz)	Coeficiente amortecimento (%)	Constante Modal	
			Amplitude	Fase(°)
1	17.12	2.43	0.7597E-4	64.160
2	24.96	2.75	0.6546E-5	69.670
3	37.42	2.86	0.8661E-5	5.910
4	41.71	1.59	0.9649E-5	35.300
5	46.03	0.961	0.4318E-5	29.410
6	48.53	1.489	0.2294E-4	79.440
7	61.13	4.48	0.1573E-4	32.910
8	64.37	1.76	0.2015E-4	115.01
9	73.92	8.20	0.1236E-4	106.40
10	89.86	1.08	0.7268E-5	139.11
11	92.49	0.520	0.5182E-6	138.57
12	96.34	1.29	0.2494E-5	130.77

Figura 7.44 - Sobreposição dos gráficos de Bode associados à FRF2-2 experimental (ponteados) e ajustada (traço cheio) usando o programa MODHAN; Parâmetros modais identificados.



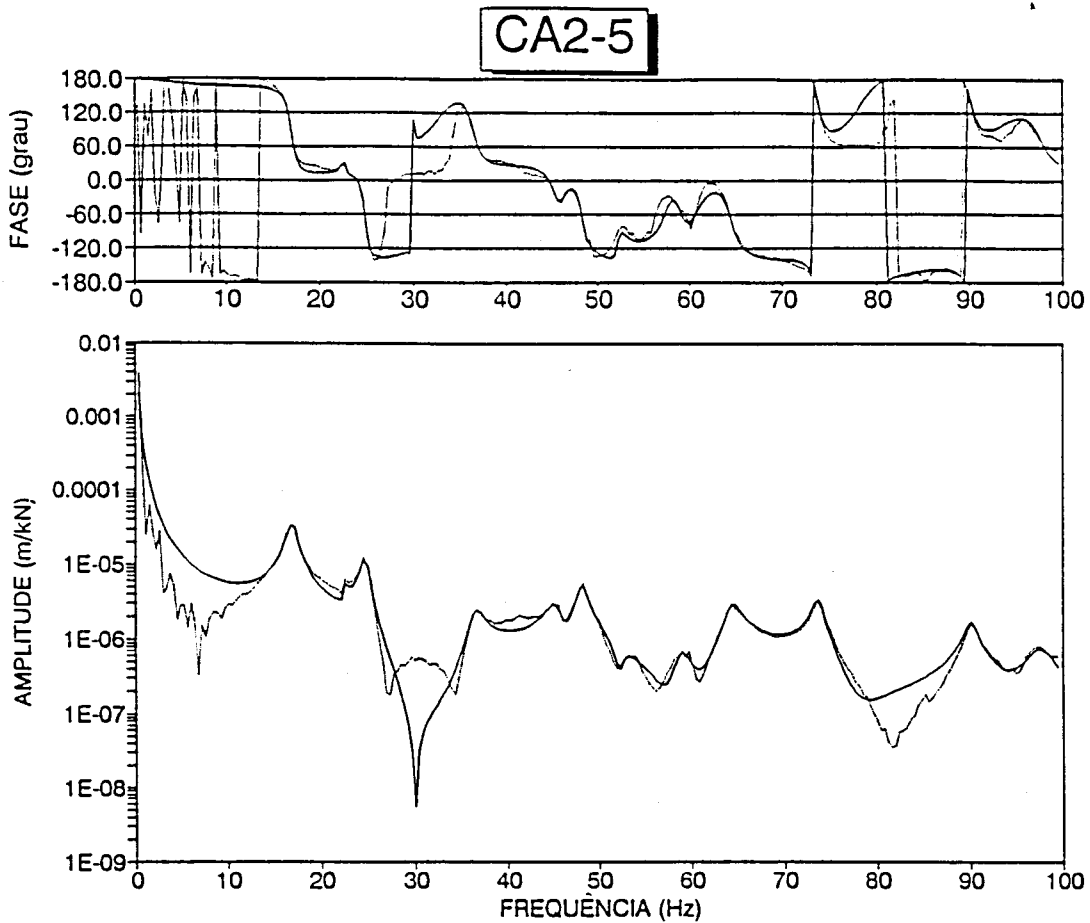
CA2-3				
Ordem	Frequência natural (Hz)	Coeficiente amortecimento (%)	Constante Modal	
			Amplitude	Fase(°)
1	16.81	3.27	0.6771E-4	101.18
2	22.63	0.611	0.3060E-5	71.207
3	24.80	1.49	0.6545E-5	99.781
4	36.49	2.01	0.8810E-5	-77.687
5	41.44	2.65	0.6106E-5	-128.21
6	45.67	3.19	0.3917E-6	-89.267
7	48.50	0.836	0.1676E-6	88.220
8	58.42	2.78	0.1877E-6	174.12
9	62.24	1.68	0.1060E-5	-93.733
10	66.41	1.86	0.1889E-5	13.978
11	73.95	0.786	0.1064E-4	112.34
12	91.98	0.534	0.1236E-5	150.91

Figura 7.45 - Sobreposição dos gráficos de Bode associados à FRF3-2 experimental (ponteados) e ajustada (traço cheio) usando o programa MODHAN; Parâmetros modais identificados.



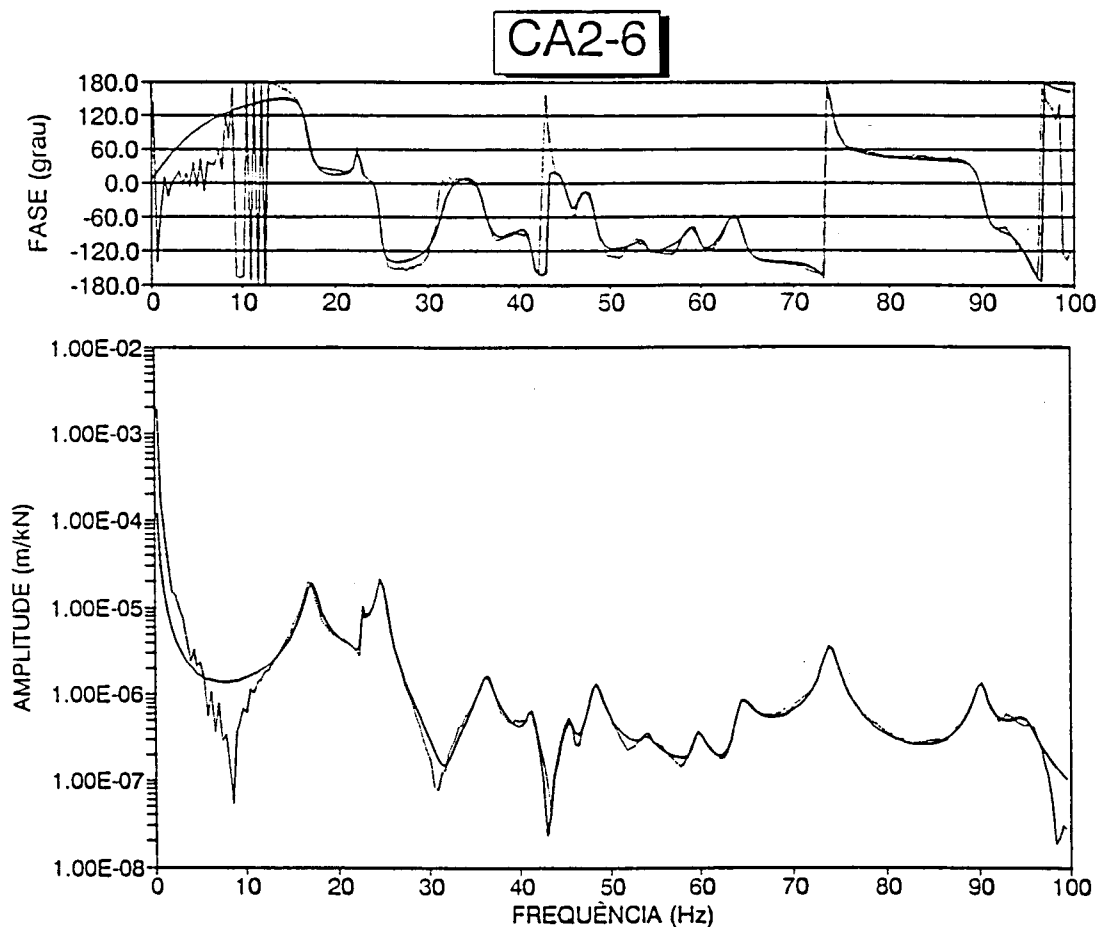
CA2-4				
Ordem	Frequência natural (Hz)	Coeficiente amortecimento (%)	Constante Modal	
			Amplitude	Fase(°)
1	16.80	3.13	0.4384E-4	105.48
2	24.85	1.52	0.8258E-4	96.881
3	36.35	2.05	0.1794E-4	-62.098
4	41.28	1.63	0.1310E-4	-98.537
5	45.54	1.42	0.9089E-5	-72.602
6	48.36	1.34	0.1671E-5	-76.405
7	64.66	1.32	0.1057E-4	-73.648
8	74.17	1.74	0.5323E-5	-136.84
9	90.14	0.680	0.2387E-5	117.78
10	96.85	1.021	0.7538E-5	-81.812

Figura 7.46 - Sobreposição dos gráficos de Bode associados à FRF4-2 experimental (pontado) e ajustada (traço cheio) usando o programa MODHAN; Parâmetros modais identificados.



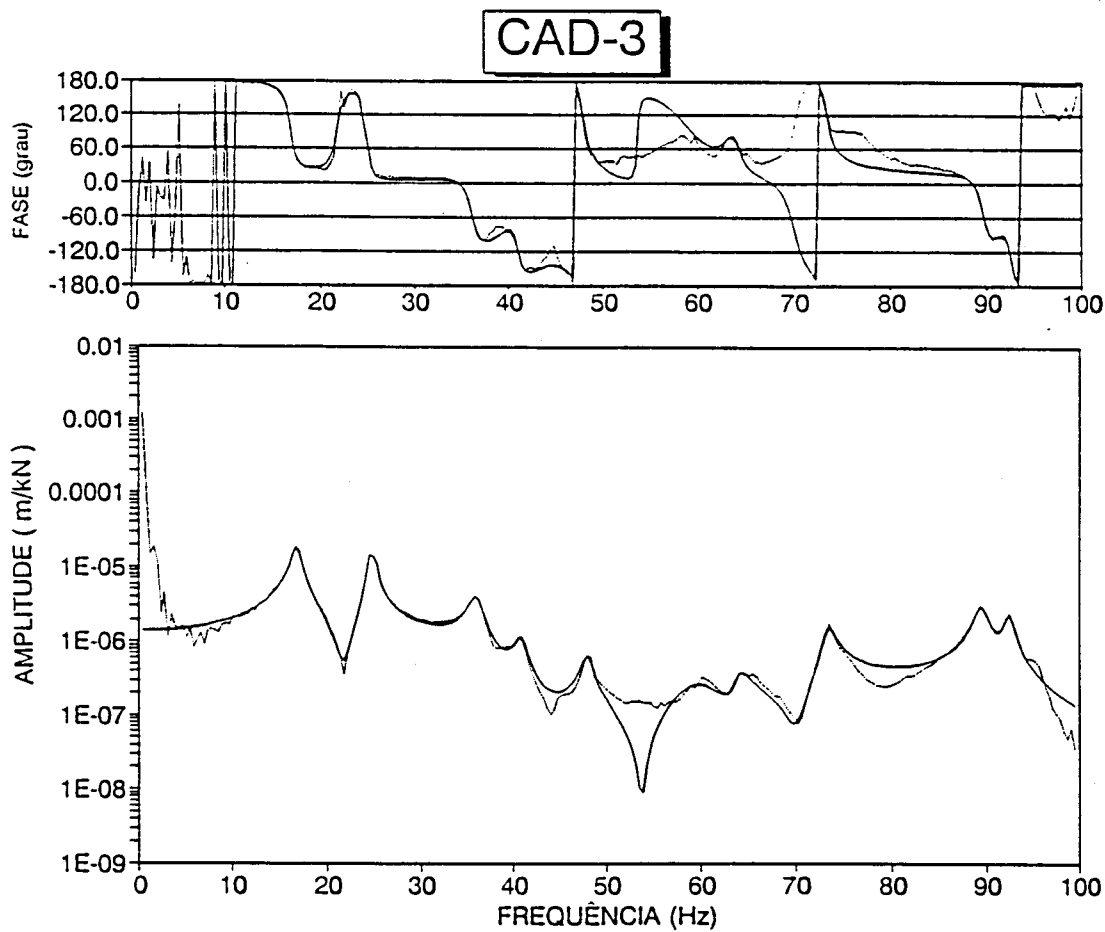
CA2-5				
Ordem	Frequência natural (Hz)	Coeficiente amortecimento (%)	Constante Modal	
			Amplitude	Fase(°)
1	16.90	3.02	0.1115E-3	91.027
2	22.67	0.946	0.3286E-5	54.756
3	24.79	1.27	0.2348E-4	-73.834
4	28.20	17.1	0.1236E-4	64.766
5	36.50	2.04	0.1052E-4	107.18
6	40.65	3.50	0.6468E-5	57.418
7	45.30	1.77	0.1027E-4	-46.609
8	48.34	1.08	0.1681E-4	-65.994
9	50.96	1.41	0.1801E-5	86.617
10	59.19	1.24	0.1747E-5	-64.889
11	64.40	1.26	0.1389E-4	-51.238
12	73.86	0.888	0.1387E-4	136.34
13	86.57	3.71	0.3382E-5	74.062
14	90.20	0.810	0.7153E-5	138.27
15	96.98	1.04	0.4010E-5	94.899

Figura 7.47 - Sobreposição dos gráficos de Bode associados à FRF5-2 experimental (ponteados) e ajustada (traço cheio) usando o programa MODHAN; Parâmetros modais identificados.



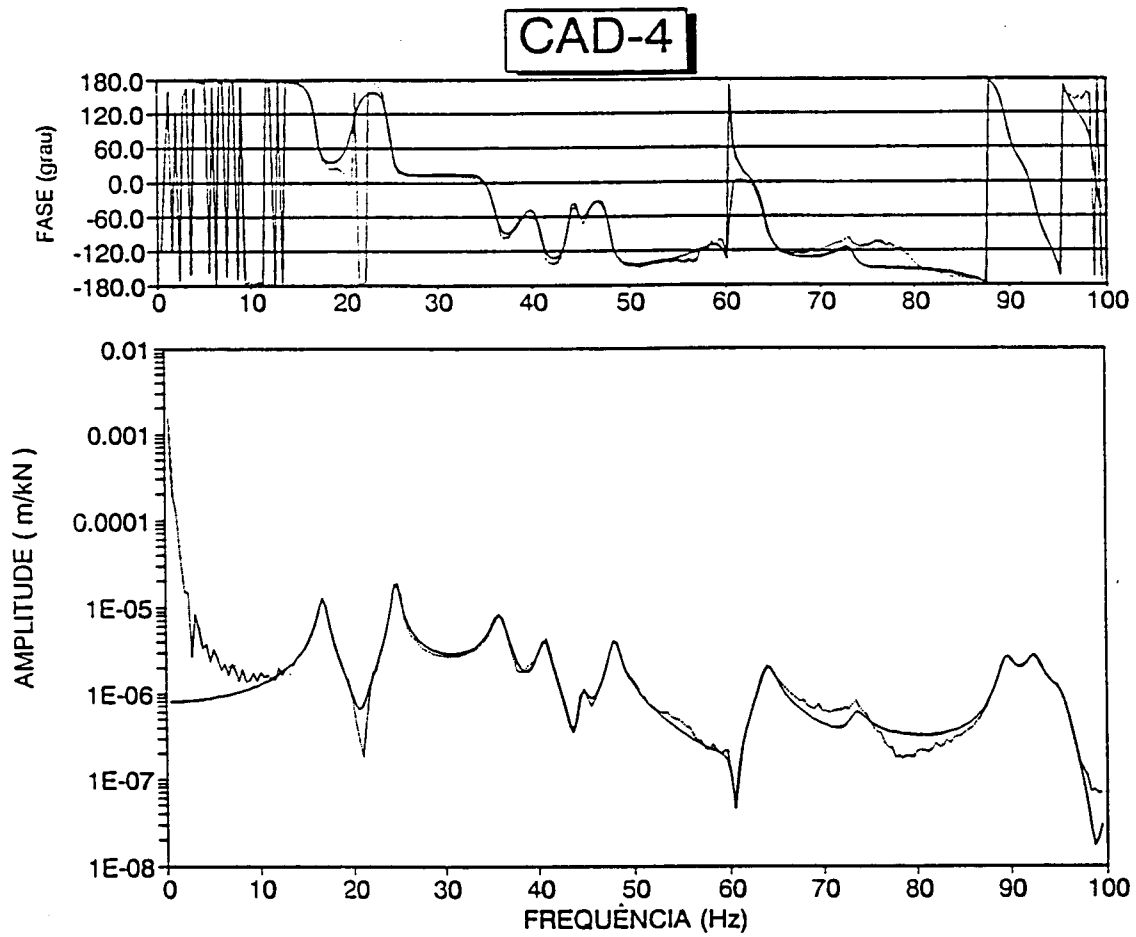
CA2-6				
Ordem	Frequência natural (Hz)	Coeficiente amortecimento (%)	Constante Modal	
			Amplitude	Fase(°)
1	17.13	3.42	0.6789E-4	88.403
2	22.59	0.793	0.8056E-5	86.130
3	24.76	1.25	0.4458E-4	-69.090
4	36.21	2.18	0.7558E-5	-39.500
5	41.40	1.13	0.1146E-5	-131.88
6	45.27	1.34	0.1609E-5	-21.190
7	48.30	1.17	0.4353E-5	-48.730
8	54.11	1.07	0.4648E-6	-95.446
9	59.71	0.908	0.7282E-6	-77.460
10	64.50	1.12	0.3102E-5	-66.420
11	73.95	0.792	0.1344E-4	134.62
12	90.13	0.746	0.5195E-5	-23.390
13	94.96	1.53	0.4084E-6	-143.88

Figura 7.48 - Sobreposição dos gráficos de Bode associados à FRF6-2 experimental (ponteados) e ajustada (traço cheio) usando o programa MODHAN; Parâmetros modais identificados.



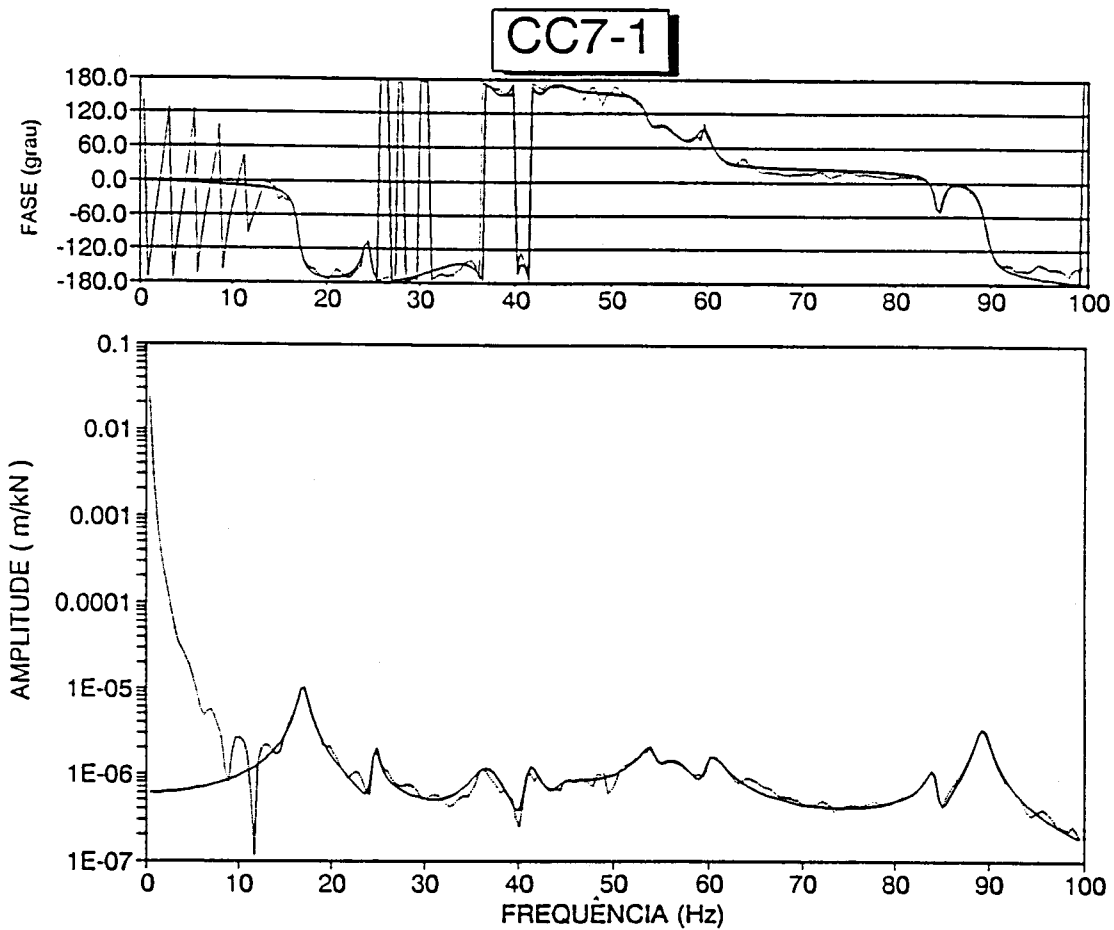
CAD-3				
Ordem	Frequência natural (Hz)	Coeficiente amortecimento (%)	Constante Modal	
			Amplitude	Fase(°)
1	16.84	2.92	0.5865E-4	94.563
2	24.67	1.16	0.2172E-4	103.43
3	25.18	1.13	0.1282E-4	61.310
4	36.11	1.97	0.1643E-4	-62.613
5	41.00	1.55	0.3613E-5	-127.05
6	48.05	1.20	0.2640E-5	116.51
7	59.10	4.91	0.5557E-5	113.25
8	64.20	1.32	0.1492E-5	95.980
9	73.42	0.872	0.6714E-5	131.22
10	89.53	0.730	0.1136E-4	-51.423
11	92.60	0.535	0.6121E-5	-135.96

Figura 7.49 - Sobreposição dos gráficos de Bode associados à FRF3-D experimental (ponteado) e ajustada (traço cheio) usando o programa MODHAN; Parâmetros modais identificados.



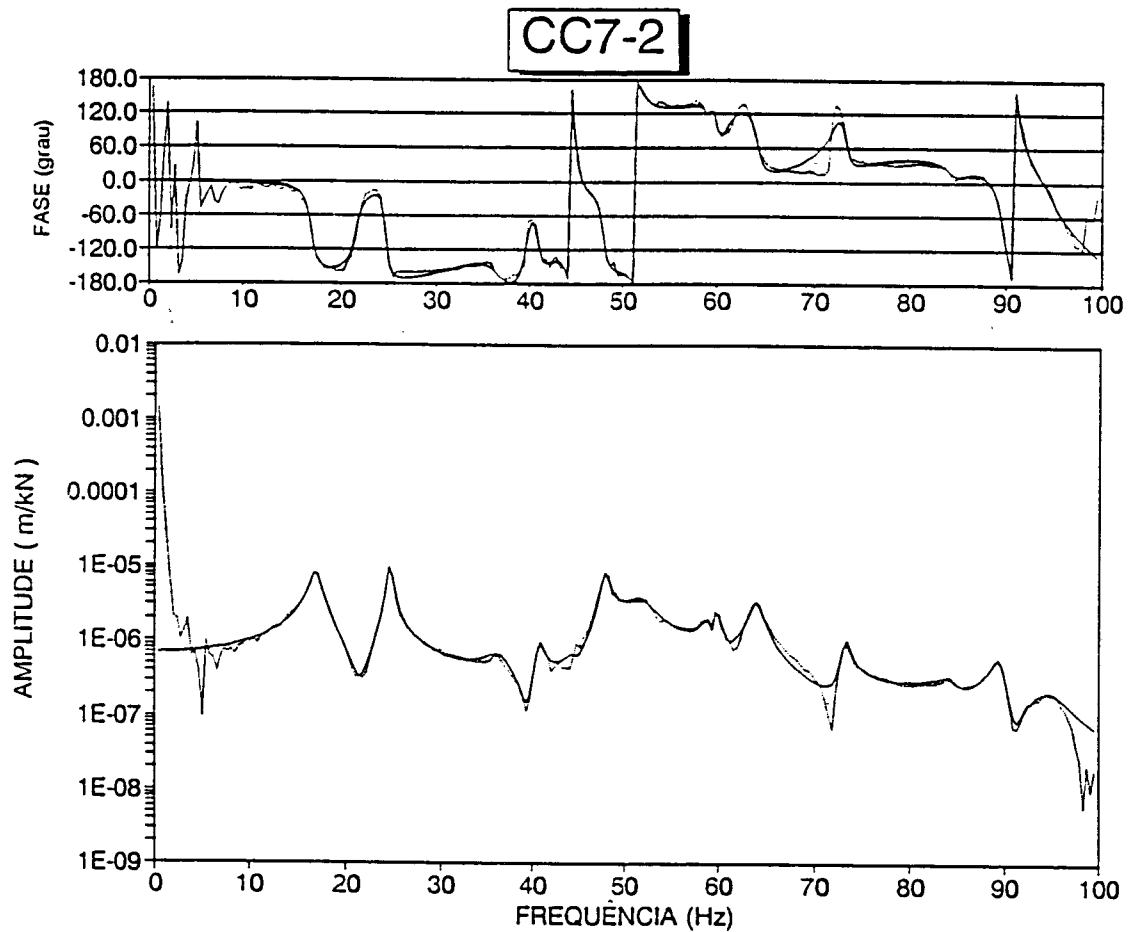
CAD-4				
Ordem	Frequência natural (Hz)	Coeficiente amortecimento (%)	Constante Modal	
			Amplitude	Fase(°)
1	16.84	2.70	0.3612E-4	98.268
2	24.84	1.50	0.4637E-4	92.432
3	36.07	2.06	0.3486E-4	-54.294
4	40.83	1.46	0.1326E-4	-88.762
5	44.67	1.11	0.2212E-5	-25.112
6	48.11	1.11	0.1290E-4	-78.486
7	60.62	2.07	0.2070E-5	169.38
8	64.16	1.27	0.1060E-4	-54.126
9	73.43	1.22	0.1578E-5	-103.20
10	89.64	0.805	0.1174E-4	116.72
11	92.59	0.865	0.1374E-4	-31.678
12	95.42	1.13	0.7158E-5	152.51

Figura 7.50 - Sobreposição dos gráficos de Bode associados à FRF4-D experimental (ponteados) e ajustada (traço cheio) usando o programa MODHAN; Parâmetros modais identificados.



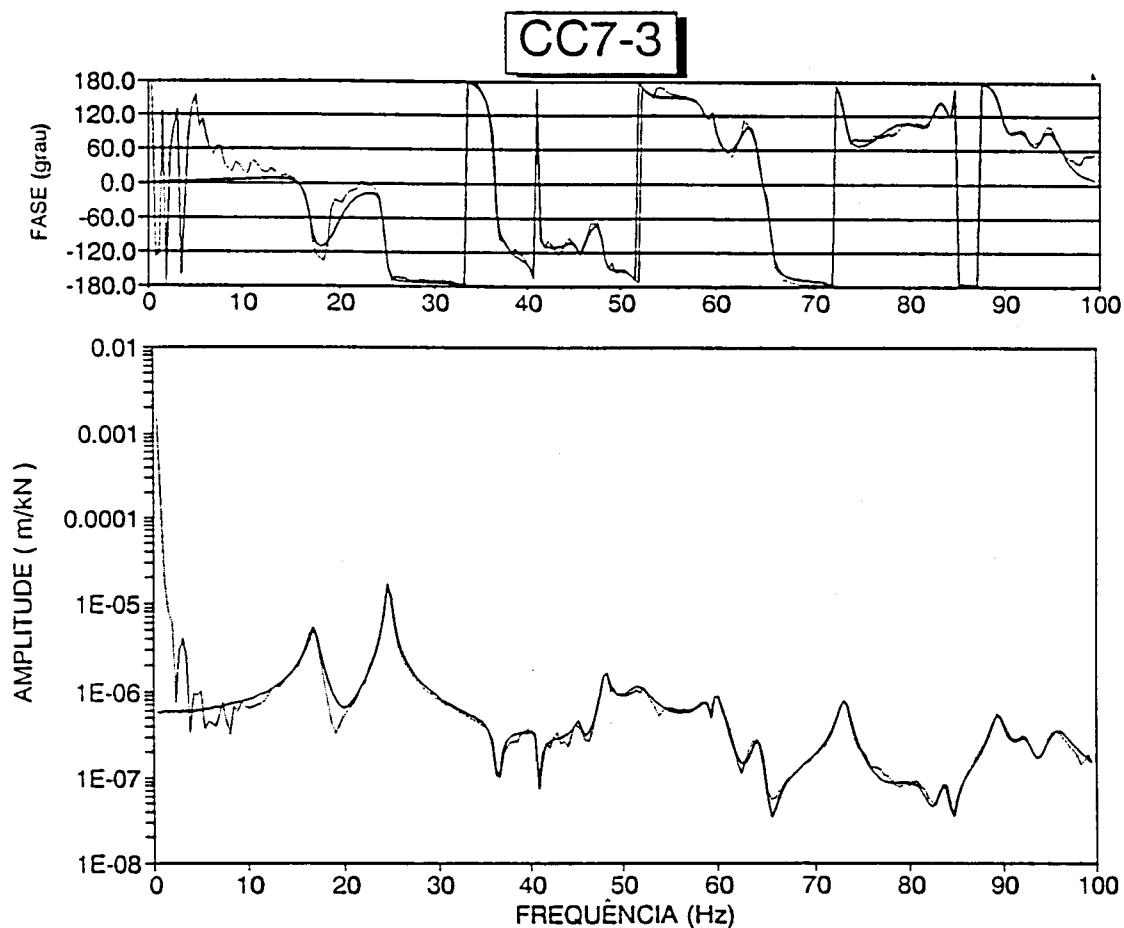
CC7-1				
Ordem	Frequência natural (Hz)	Coeficiente amortecimento (%)	Constante Modal	
			Amplitude	Fase(°)
1	17.00	3.03	0.3407E-4	-95.021
2	24.80	1.15	0.2999E-5	-120.28
3	36.83	4.25	0.8831E-5	-179.30
4	41.28	1.55	0.3887E-5	-140.39
5	44.06	3.52	0.3317E-6	-90.297
6	53.90	1.38	0.5604E-5	78.772
7	56.44	3.94	0.1765E-4	88.005
8	60.24	1.54	0.6691E-5	109.15
9	84.28	0.572	0.2409E-5	-71.770
10	89.48	0.760	0.1448E-4	80.108

Figura 7.51 - Sobreposição dos gráficos de Bode associados à FRF1-7C experimental (pontado) e ajustada (traço cheio) usando o programa MODHAN; Parâmetros modais identificados.



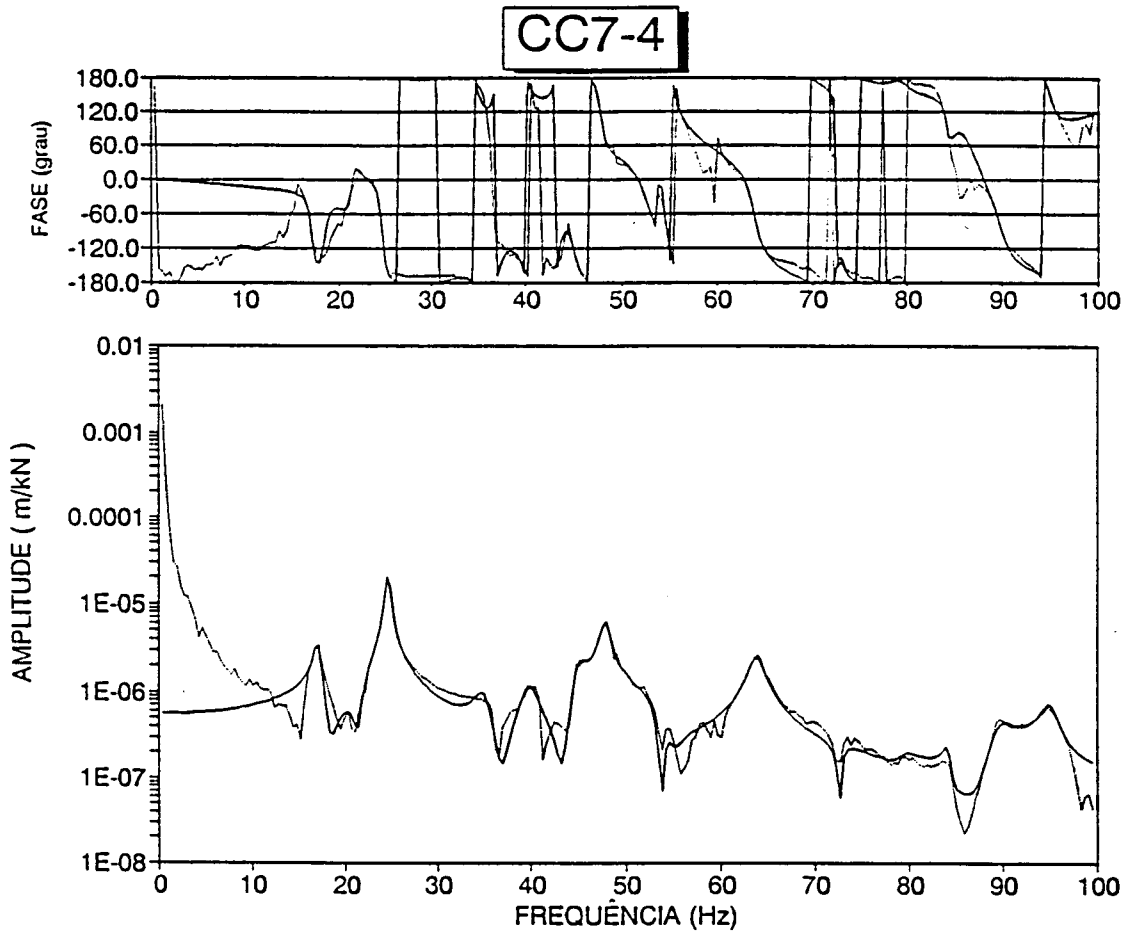
CC7-2				
Ordem	Frequência natural (Hz)	Coeficiente amortecimento (%)	Constante Modal	
			Amplitude	Fase(°)
1	16.95	3.11	0.2673E-4	-87.887
2	24.70	0.921	0.1465E-4	-93.031
3	36.79	4.74	0.4489E-5	172.86
4	40.87	0.981	0.1980E-5	-87.566
5	44.68	1.41	0.4394E-5	124.49
6	48.04	0.848	0.2009E-4	-86.315
7	51.80	3.00	0.2992E-4	164.51
8	59.16	0.445	0.1600E-5	25.249
9	60.00	0.747	0.5191E-5	92.165
10	64.15	1.01	0.1210E-4	69.828
11	73.28	0.604	0.2257E-5	87.461
12	84.63	1.62	0.1130E-5	-45.349
13	89.60	0.743	0.2928E-5	-92.736
14	94.71	2.60	0.4788E-5	-32.111

Figura 7.52 - Sobreposição dos gráficos de Bode associados à FRF2-7C experimental (ponteados) e ajustada (traço cheio) usando o programa MODHAN; Parâmetros modais identificados.



CC7-3				
Ordem	Frequência	Coefficiente	Constante Modal	
	natural (Hz)	amortecimento (%)	Amplitude	Fase(°)
1	16.82	3.23	0.1718E-4	-63.638
2	24.71	0.878	0.2518E-4	-92.261
3	36.43	2.67	0.2942E-5	25.601
4	40.95	0.744	0.5611E-6	79.894
5	45.43	0.871	0.4879E-6	-146.77
6	48.20	0.861	0.3552E-5	-98.983
7	51.72	2.77	0.6558E-5	-171.23
8	59.50	0.561	0.1852E-5	-66.044
9	59.87	1.33	0.6387E-5	86.519
10	64.30	0.749	0.8805E-6	40.587
11	73.15	0.798	0.2762E-6	118.39
12	81.79	2.47	0.9154E-6	13.45
13	84.15	0.743	0.2858E-6	61.05
14	89.60	0.712	0.1736E-5	119.36
15	92.69	1.12	0.1339E-5	45.933
16	95.71	1.52	0.3093E-5	84.925

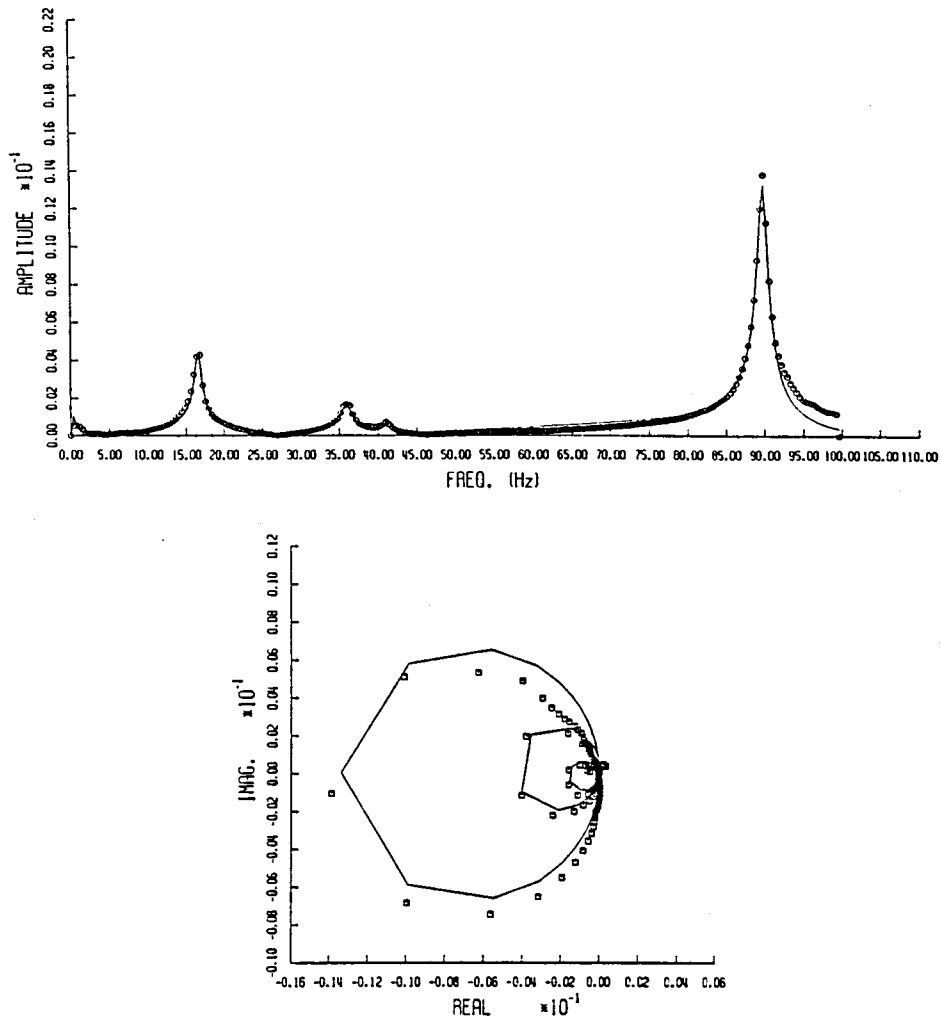
Figura 7.53 - Sobreposição dos gráficos de Bode associados à FRF3-7C experimental (ponteados) e ajustada (traço cheio) usando o programa MODHAN; Parâmetros modais identificados.



CC7-4				
Ordem	Frequência	Coefficiente	Constante Modal	
	natural (Hz)	amortecimento (%)	Amplitude	Fase(°)
1	17.13	1.98	0.7445E-5	-110.50
2	21.61	5.36	0.7632E-5	167.80
3	24.72	0.875	0.3096E-4	-92.801
4	35.12	2.32	0.3884E-5	131.57
5	39.90	2.23	0.6086E-5	-162.16
6	45.13	1.35	0.6711E-5	-100.46
7	47.96	1.00	0.1865E-4	114.49
8	52.96	2.50	0.9663E-5	-108.26
9	54.59	1.08	0.2344E-5	-48.88
10	63.85	1.26	0.1381E-4	-61.679
11	72.69	0.747	0.7135E-6	-19.634
12	79.33	1.40	0.3918E-6	-126.07
13	84.21	0.483	0.4053E-6	64.438
14	89.70	1.40	0.3730E-5	-57.687
15	95.13	0.948	0.3318E-5	142.57

Figura 7.54 - Sobreposição dos gráficos de Bode associados à FRF4-7C experimental (ponteados) e ajustada (traço cheio) usando o programa MODHAN; Parâmetros modais identificados.

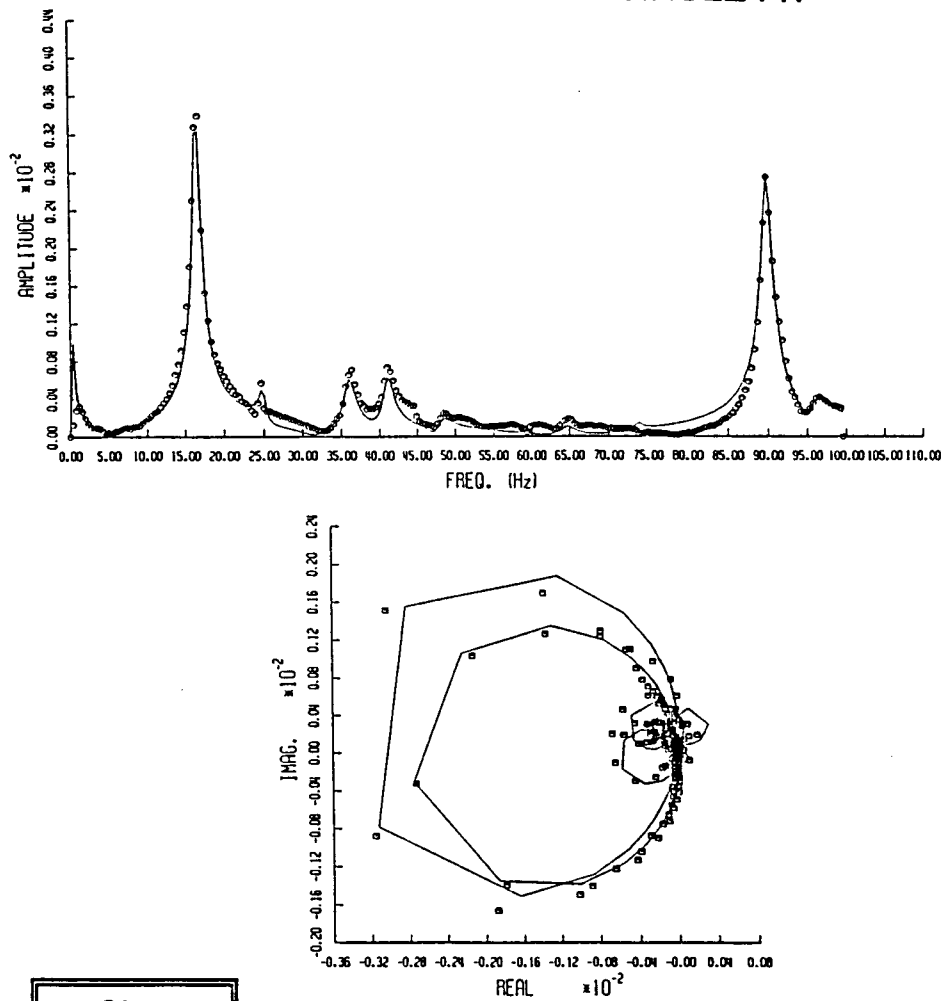
CA1-1 - MÉTODO DO 'CIRCLE FIT'



CA1-1				
Ordem	Frequência natural (Hz)	Coeficiente amortecimento (%)	Constante Modal	
			Amplitude	Fase(°)
1	16.61	2.96	0.2577E-5	346.510
2	36.01	2.00	0.2878E-6	7.342
3	41.07	1.43	0.6140E-7	309.591
4	89.83	0.738	0.3486E-6	0.104

Figura 7.55 - Sobreposição dos gráficos associados à FRF1-1 experimental (□) e ajustada (traço cheio) através do método do "circle fit"; Parâmetros modais identificados.

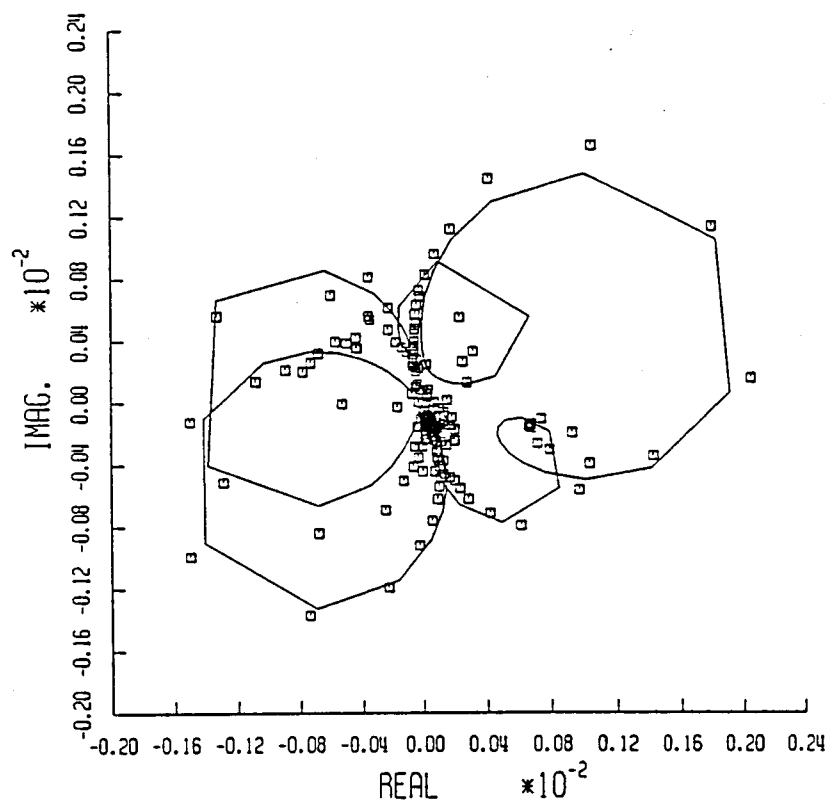
CA1-2 - MÉTODO DO 'CIRCLE FIT'



CA1-2				
Ordem	Frequência natural (Hz)	Coeficiente amortecimento (%)	Constante Modal	
			Amplitude	Fase(°)
1	16.60	2.99	0.2157E-1	171.90
2	24.85	1.71	0.1806E-2	43.979
3	36.02	1.91	0.5184E-2	-167.64
4	41.08	1.51	0.4276E-2	143.57
5	48.17	1.72	0.1633E-2	178.40
6	59.45	0.804	0.4775E-3	-87.706
7	64.70	1.20	0.1163E-2	135.53
8	73.65	0.680	0.5282E-3	-31.052
9	89.90	0.736	0.2330E-1	-177.85
10	95.69	1.13	0.3363E-2	-153.74

Figura 7.56 - Sobreposição dos gráficos associados à FRF1-2 experimental (□) e ajustada (traço cheio) através do método do "circle fit"; Parâmetros modais identificados.

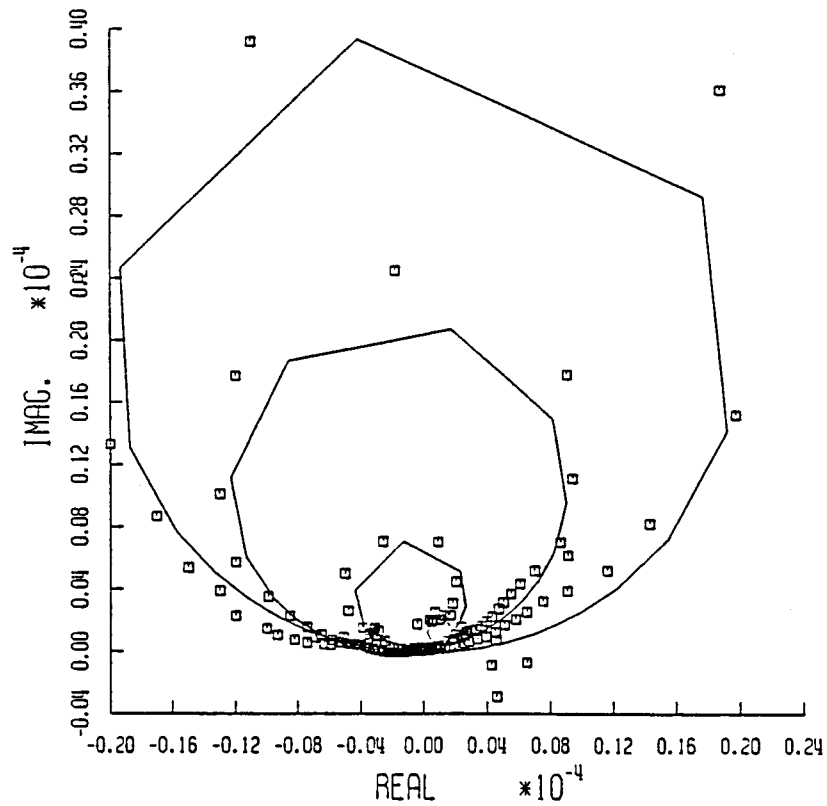
CA1-4- MÉTODO DO 'CIRCLE FIT'



CA1-4				
Ordem	Frequência natural (Hz)	Coeficiente amortecimento (%)	Constante Modal	
			Amplitude	Fase(°)
1	16.60	2.93	0.9423E-2	177.60
2	24.84	1.53	0.3968E-2	48.914
3	36.01	1.97	0.1785E-1	23.078
4	41.08	1.45	0.5548E-2	-32.180
5	48.28	1.72	0.1655E-2	-11.056
6	64.65	1.59	0.1447E-2	-16.038
7	89.82	0.768	0.1441E-1	-147.03

Figura 7.57 - Sobreposição dos gráficos associados à FRF1-4 experimental (□) e ajustada (traço cheio) através do método do "circle fit"; Parâmetros modais identificados.

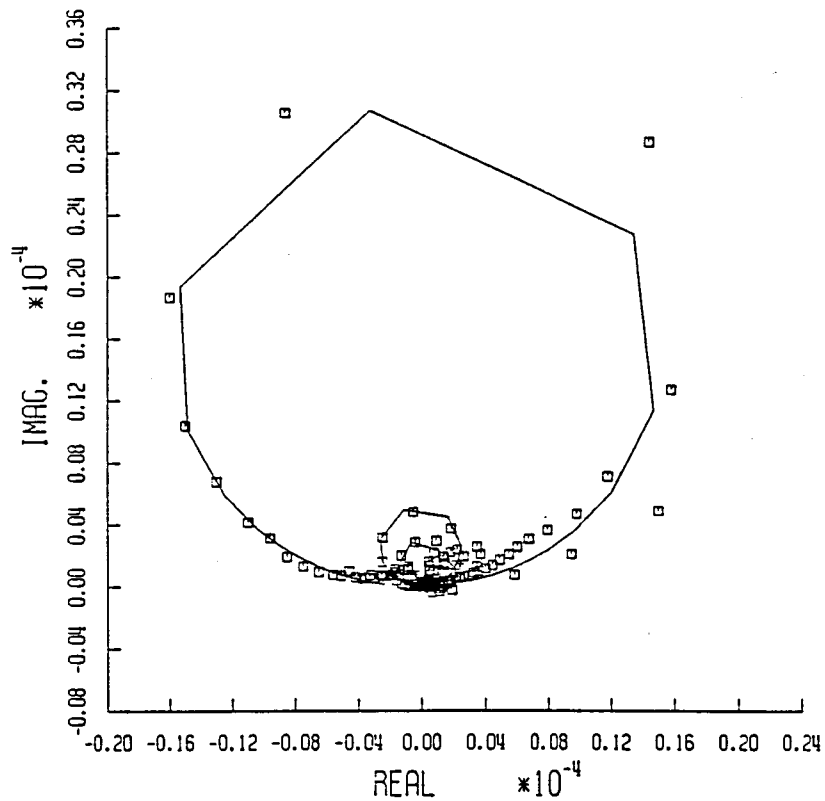
CA1-1 - MÉTODO DE DOBSON



CA1-1				
Ordem	Frequência natural (Hz)	Coeficiente amortecimento (%)	Constante Modal	
			Amplitude	Fase(°)
1	16.48	3.40	0.2913E-1	92.034
2	35.89	1.48	0.1081E-1	-106.69
3	41.18	0.622	0.2285E-2	126.33
4	89.66	0.830	0.1127E0	-99.432

Figura 7.58 - Sobreposição dos gráficos de Nyquist associados à FRF1-1 experimental (□) e ajustada (traço cheio) através do método de Dobson; Parâmetros modais identificados.

CA1-2- MÉTODO DE DOBSON



CA1-2				
Ordem	Frequência natural (Hz)	Coeficiente amortecimento (%)	Constante Modal	
			Amplitude	Fase(°)
1	16.46	3.44	0.2288E-1	89.789
2	24.30	-0.014	0.2851E-4	-91.81
3	35.97	1.34	0.3914E-2	73.230
4	41.17	1.31	0.3755E-2	-55.630
5	47.80	-0.113	0.5781E-4	-93.570
6	59.85	-0.008	0.1020E-4	91.685
7	64.40	0.416	0.4576E-3	-39.830
8	74.17	0.570	0.7249E-4	109.34
9	89.96	0.720	0.2379E-1	86.239
10	96.34	0.464	0.1162E-1	-58.240

Figura 7.59 - Sobreposição dos gráficos de Nyquist associados à FRF1-2 experimental (□) e ajustada (traço cheio) através do método de Dobson; Parâmetros modais identificados.

Quadro 7.5 - Valores médios e desvios-padrão associados para as frequências naturais e coeficientes de amortecimento identificados nos registros CA1, usando o programa MODHAN.

CA1				
MODO Nº	Frequência Natural (Hz)		Coeficiente Amortecimento (%)	
	Média	Desvio-padrão	Média	Desvio-padrão
1	16,96	0,033	3,12	0,243
2	36,41	0,116	2,07	0,119
3	41,02	0,635	3,18	2,080
4	49,34	0,877	4,13	2,917
5	54,19	0,384	7,85	0,070
6	90,22	0,043	0,751	0,078

Quadro 7.6 - Valores médios e desvios-padrão associados para as frequências naturais e coeficientes de amortecimento identificados nos registros CA2, usando o programa MODHAN.

CA2				
MODO Nº	Frequência Natural (Hz)		Coeficiente Amortecimento (%)	
	Média	Desvio-padrão	Média	Desvio-padrão
1	16,94	0,148	3,05	0,340
2	36,60	0,427	2,10	0,456
3	41,40	0,431	2,10	0,859
4	48,47	0,171	1,07	0,348
5	53,95	0,233	2,03	1,37
6	58,84	0,752	1,41	0,939
7	59,66	0,996	1,94	1,69
8	74,03	0,182	0,962	0,384
9	90,42	0,775	0,760	0,182

Quadro 7.7 - Valores médios e desvios-padrão associados para as frequências naturais e coeficientes de amortecimento identificados nos registos CAD, usando o programa MODHAN.

CAD				
MODO Nº	Frequência Natural (Hz)		Coeficiente Amortecimento (%)	
	Média	Desvio-padrão	Média	Desvio-padrão
1	16,86	0,042	3,03	0,246
2	24,77	0,135	1,63	0,461
3	36,08	0,110	2,40	0,560
4	48,05	0,103	1,73	1,04
5	59,81	0,707	3,26	1,80
6	63,76	0,510	1,44	0,308
7	89,60	0,041	0,755	0,035
8	92,72	0,274	0,964	0,295

Quadro 7.8 - Valores médios e desvios-padrão associados para as frequências naturais e coeficientes de amortecimento identificados nos registos CC7, usando o programa MODHAN.

CC7				
MODO Nº	Frequência Natural (Hz)		Coeficiente Amortecimento (%)	
	Média	Desvio-padrão	Média	Desvio-padrão
1	16,98	0,127	2,84	0,577
2	24,74	0,040	1,01	0,167
3	36,29	0,801	3,50	1,18
4	40,75	0,595	1,38	0,663
5	44,82	0,597	1,79	1,18
6	52,94	1,276	2,49	1,28
7	56,73	2,30	1,82	1,86
8	60,23	0,413	1,37	0,476
9	84,19	0,339	0,881	0,456
10	89,63	0,112	0,880	0,290

Quadro 7.9 - Componentes identificadas do 1º modo de vibração simétrico através dos registos CA1, usando o programa MODHAN.

CA1				
Posição	Frequência natural (Hz)	Coeficiente amortecimento (%)	Modo de vibração	
			Amplitude	Fase(°)
1	16,92	3,11	0,17407E0	0,19
2	16,93	3,30	0,14402E0	-0,91
3	16,95	3,15	0,89812E-1	-0,47
4	16,99	2,66	0,51446E-1	0,23
5	16,96	3,14	0,15780E0	5,94
6	17,00	3,35	0,97243E-1	1,08
Média	16,96	3,12		
Desvio-padrão	0,03	0,24		

Quadro 7.10 - Componentes identificadas do 1º modo de vibração simétrico através dos registos CA2, usando o programa MODHAN.

CA2				
Posição	Frequência natural (Hz)	Coeficiente amortecimento (%)	Modo de Vibração	
			Amplitude	Fase(°)
1	16,91	3,03	0,21649E2	9,62
2	17,12	2,43	0,13750E2	-12,92
3	16,81	3,27	0,11592E2	24,10
4	16,81	3,13	0,75026E1	28,40
5	16,90	3,02	0,19397E2	13,95
6	17,13	3,42	0,12309E2	11,33
Média	16,94	3,05		
Desvio-padrão	0,15	0,34		

Quadro 7.11 - Componentes identificadas do 1º modo de vibração simétrico através dos registos CAD, usando o programa MODHAN.

CAD				
Posição	Frequência natural (Hz)	Coeficiente amortecimento (%)	Modo de vibração	
			Amplitude	Fase(°)
1	16,87	2,98	0,16459E0	-3,38
D	16,93	3,25	0,16004E0	-0,30
2	16,84	3,29	0,13785E0	2,84
3	16,84	2,92	0,77500E-1	4,86
4	16,84	2,70	0,47727E-1	8,57
Média	16,86	3,03		
Desvio-padrão	0,04	0,25		

Quadro 7.12 - Componentes identificadas do 1º modo de vibração simétrico através dos registos CA1, usando o programa FITCIR.

CA1				
Posição	Frequência natural (Hz)	Coeficiente amortecimento (%)	Modo de vibração	
			Amplitude	Fase(°)
1	16,61	2,94	0,17407E0	170,01
2	16,60	2,99	0,13699E0	171,90
3	16,61	2,97	0,87557E-1	172,39
4	16,60	2,93	0,59880E-1	177,60
Média	16,60	2,96		
Desvio-padrão	0,01	0,02		

Quadro 7.13 - Componentes identificadas do 1º modo de vibração não-simétrico através dos registos CC7, usando o programa MODHAN.

CC7				
Posição	Frequência natural (Hz)	Coeficiente amortecimento (%)	Modo de vibração	
			Amplitude	Fase(°)
1	24,80	1,15	0,14785E-1	152,27
2	24,70	0,92	0,71938E-1	179,52
3	24,71	0,88	0,12367E0	-179,71
4	24,72	0,87	0,15215E0	179,75
7C	24,75	1,23	0,63212E-1	-2,55
Média	24,74	1,01		
Desvio-padrão	0,04	0,17		

Quadro 7.14 - Componentes identificadas do 3º modo de vibração simétrico através dos registos CAD, usando o programa MODHAN.

CAD				
Posição	Frequência natural (Hz)	Coeficiente amortecimento (%)	Modo de vibração	
			Amplitude	Fase(°)
1	36,07	2,36	0,14534E0	6,13
D	36,23	2,23	0,10050E0	16,10
2	35,92	3,36	0,80302E-1	21,20
3	36,11	1,98	0,74173E-1	-168,72
4	36,07	2,06	0,15717E0	-160,40
Média	36,08	2,40		
Desvio-padrão	0,11	0,56		

Quadro 7.15 - Componentes identificadas do 3º modo de vibração não-simétrico através dos registos CAD, usando o programa MODHAN.

CAD				
Posição	Frequência natural (Hz)	Coeficiente amortecimento (%)	Modo de vibração	
			Amplitude	Fase(°)
1	47,87	3,57	0,35296E-1	24,10
D	48,14	1,55	0,10287E0	15,77
2	48,08	1,20	0,10110E0	-7,44
3	48,05	1,20	0,15493E-1	10,74
4	48,11	1,11	0,75778E-1	175,75
Média	48,05	1,26		
Desvio-padrão	0,10	0,17		

Quadro 7.16 - Componentes identificadas do 6º modo de vibração simétrico através dos registos CA1, usando o programa MODHAN.

CA1				
Posição	Frequência natural (Hz)	Coeficiente amortecimento (%)	Modo de vibração	
			Amplitude	Fase(°)
1	90,14	0,799	0,34941E0	5,15
2	90,26	0,693	0,62480E-1	0,37
3	90,22	0,694	0,34511E-1	-158,16
4	90,21	0,885	0,48754E-1	31,32
5	90,25	0,692	0,92119E-1	35,74
6	90,24	0,742	0,84702E-1	-129,99
Média	90,22	0,751		
Desvio-padrão	0,04	0,078		

Embora esta questão possa ser resolvida através da comparação entre a frequência fundamental medida e calculada, essa via não pode considerar-se, em princípio, como muito adequada. Com efeito, o facto de a frequência variar aproximadamente com a raiz quadrada do módulo de elasticidade, leva a que o erro cometido na avaliação deste último, através da medição de vibrações, possa ser significativo.

Todavia, do ponto de vista da quantificação numérica das frequências naturais, a importância de qualquer eventual erro de avaliação do módulo de elasticidade é atenuada, verificando-se por exemplo, que erros da ordem dos 20% na avaliação do módulo de elasticidade só afectam em cerca de 5% o valor da frequência fundamental da estrutura (valor que se situa na margem de erro tolerável em ensaios desta natureza).

No problema em estudo, a avaliação do módulo de elasticidade foi inicialmente efectuada usando um esclerómetro de Schmidt, tendo-se obtido um valor médio de $E = 32 \text{ GPa}$, com uma dispersão da ordem de 20%.

Mediante algumas tentativas de ajuste entre os valores medidos e calculados da frequência fundamental, adoptou-se na modelação numérica o valor de $E = 34 \text{ GPa}$, tendo-se assim obtido as frequências naturais e modos de vibração apresentados no Quadro 7.4 e nas Figuras 7.14 a 7.19, respectivamente.

O problema que se revelou mais importante do ponto de vista da modelação numérica foi porém o da simulação das condições de apoio.

Efectivamente, apesar da grande simplicidade aparente da laje estudada, verificou-se existir uma grande sensibilidade do seu comportamento dinâmico à forma de idealização das ligações ao exterior na zona de inserção dos pilares.

Pelo facto de o programa de cálculo disponível não permitir simultaneamente a modelação do pilar e da laje, procurou abordar-se o problema através da consideração de diferentes idealizações tendentes a enquadrar as condições reais de ligação da laje ao exterior.

Das diversas hipóteses consideradas, variando desde o encastramento de todos os nós sobre o contorno do pilar à libertação de rotações e translacções, com ou sem inclusão de apoios elásticos, adoptou-se a que consiste na introdução de molas verticais nos nós do contorno do pilar e na libertação de todas as componentes de deslocamento desses nós, tendo as constantes de rigidez das molas sido calculadas a partir das características geométricas e mecânicas do pilar, cujo comprimento livre foi considerado de 1,95m. Obtiveram-se então os resultados apresentados no Quadro 7.4, que sugerem, face aos resultados experimentais obtidos, ser esta a hipótese que melhor permite modelar de forma aproximada as verdadeiras condições de apoio da laje.

Conforme ilustrado na Figura 7.18, os primeiros dois modos de vibração anti-simétricos quase correspondem a movimentos de corpo rígido segundo o plano horizontal, sendo o primeiro praticamente caracterizado por uma rotação e o segundo, por uma translação.

Pode por outro lado verificar-se que as frequências fundamentais próximas correspondem por vezes a configurações modais semelhantes, o que permite compreender, juntamente com a grande proximidade entre frequências sucessivas, a elevada interferência modal evidenciada nas funções de resposta em frequência obtidas experimentalmente. Como exemplos, tomem-se os quartos modos simétrico, anti-simétrico e não-simétrico, com frequências de 62,02, 65,23 e 56,94Hz, ou os segundos modos não-simétrico e anti-simétrico, com frequências de 39,93Hz e 40,13Hz.

O passo seguinte deste trabalho consistiu na comparação entre os resultados obtidos por via numérica e experimental.

A comparação entre as frequências medidas e as frequências naturais calculadas só foi possível para o conjunto de modos cujas configurações foram identificadas, tendo sido efectuada através do gráfico da Figura 7.60.

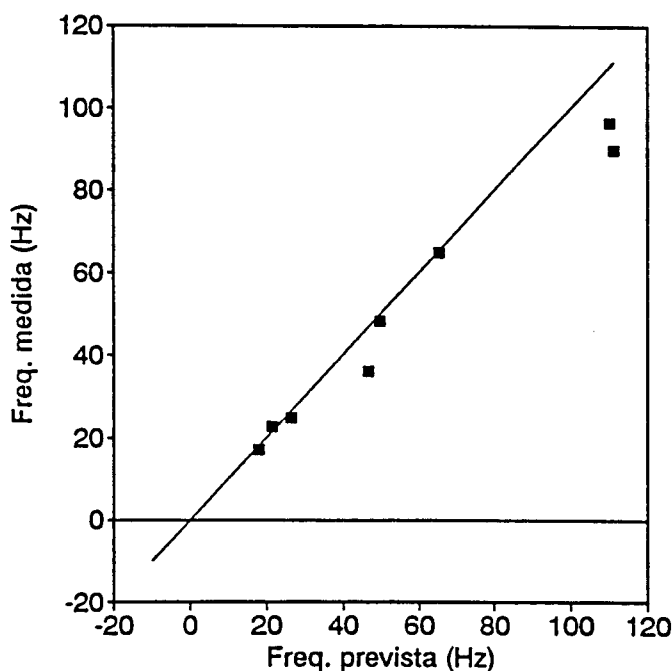


Figura 7.60 - Comparação entre as frequências naturais previstas e as frequências medidas.

Como se pode verificar, é excelente a concordância entre a 1ª, 2ª, 3ª, 5ª e 6ª frequências identificadas e as correspondentes frequências previstas, não sendo tão boa para as restantes

três frequências, que se situam abaixo da recta a 45° , evidenciando assim a maior rigidez do modelo.

Esta discrepância seria de esperar em particular para as frequências mais elevadas, pelo facto de a elas estarem associadas configurações mais sensíveis à forma de ligação da laje ao exterior e à discretização adoptada na malha de elementos finitos.

No que respeita à comparação dos modos de vibração, há a assinalar um aspecto delicado, que se prende com as hipóteses relativas ao modelo de amortecimento utilizadas na modelação numérica do comportamento estrutural.

Como se sabe, é extremamente difícil a caracterização do amortecimento de uma estrutura, porquanto o fenómeno de dissipação de energia é muito complexo, estando condicionado por mecanismos localizados e distribuídos que diferem com o sistema analisado e cuja quantificação rigorosa é irrealizável na prática.

Desta forma, são habitualmente utilizados modelos de dissipação de energia aproximados [43], dos quais se destaca o modelo de amortecimento proporcional. Neste modelo, admite-se que a matriz de amortecimento é uma combinação linear das matrizes de massa e de rigidez da estrutura, situação em que os modos de vibração do sistema, quando estudado sem amortecimento (modos de componentes reais), conduzem a um desacoplamento do sistema de equações diferenciais de segunda ordem que traduz o equilíbrio dinâmico.

Por outro lado, recorrendo a uma formulação de estado, é possível efectuar o desacoplamento do sistema de $2N$ equações diferenciais de primeira ordem caracterizadoras do movimento da estrutura através de um conjunto de modos cujas componentes são complexas, independentemente das características da matriz de amortecimento.

Verifica-se neste caso [80, 107] que, se a matriz de amortecimento for do tipo proporcional, a amplitude dos modos de vibração complexos coincide com a amplitude dos modos reais do sistema não amortecido.

Relativamente às técnicas de identificação usadas para extracção dos parâmetros modais, refere-se que os algoritmos de N graus de liberdade mais conhecidos, em que se enquadra aliás a formulação que constitui o suporte teórico do programa MODHAN utilizado neste trabalho, baseiam-se na definição de uma função de transferência em que intervêm os modos complexos da formulação de estado, não impondo, portanto, condicionamentos ao amortecimento.

Comparar modos complexos, determinados experimentalmente, com modos complexos obtidos através de uma formulação de estado parece, portanto, ser a forma adequada de comparar parâmetros modais experimentais com os correspondentes parâmetros numéricos. E, no caso de o amortecimento ser do tipo proporcional, será de aceitar também comparar as amplitudes dos modos complexos identificados com as correspondentes componentes dos modos reais do sistema não amortecido.

Mas como proceder, quando o amortecimento é claramente de características não proporcionais e não se dispõe de uma formulação de estado para a modelação numérica da estrutura?

E, por outro lado, qual é a importância deste aspecto nos casos práticos estudados no domínio da Engenharia Civil?

A experiência tem mostrado que, quando os coeficientes de amortecimento são baixos ($\xi \leq 5\%$), os modos de vibração identificados têm componentes essencialmente reais, desde que as frequências próprias estejam suficientemente afastadas.

No entanto, quando existe uma interferência modal significativa, ainda que o amortecimento seja baixo, os modos de vibração exibem um carácter complexo por vezes apreciável. Este mesmo facto está claramente patente no conjunto de modos de vibração identificados, apresentados nos Quadros 7.9 a 7.15. Como se pode verificar, o único modo que se encontra relativamente isolado, próximo da frequência de 17Hz, apresenta componentes essencialmente reais, apesar de o respectivo coeficiente de amortecimento ser superior ao dos restantes modos, cujas componentes exibem uma componente imaginária fundamentalmente dependente da interferência dos modos próximos.

Nestas circunstâncias, a comparação das amplitudes das componentes dos modos complexos com as componentes correspondentes dos modos reais do sistema não amortecido pode deixar de conduzir a resultados satisfatórios, razão por que no problema em causa apenas foi possível estabelecer comparações ao nível de quatro dos modos identificados.

Os resultados das comparações numérica vs experimental realizadas para estes modos de vibração são apresentados no Quadro 7.16.

As Figuras 7.61 e 7.62 ilustram a boa concordância entre os modelos experimental e numérico construídos, caracterizada aliás por valores do MAC próximos de 1.

Quadro 7.16 - Modos experimentais vs modos numéricos.

Frequência (Exp./num.)	16,93/17,97Hz		24,74/26,45Hz		36,08/46,68Hz		89,60/111,19Hz	
Nó	Modelo Numérico	Experimental	Modelo Numérico	Experimental	Modelo Numérico	Experimental	Modelo Numérico	Experimental
1	1,000	1,000	0,000	0,093	-0,859	-0,925	1,000	1,000
53	0,864	0,867	0,388	0,414	-0,495	-0,511	0,162	0,197
120	0,524	0,516	0,764	0,780	0,397	0,472	-0,162	-0,109
145	0,336	0,297	1,000	1,000	1,000	1,000	0,208	0,112
168	0,206		1,217		1,527		0,687	
29	0,932	0,842	0,184		-0,666		0,508	
27	0,966	0,972	0,207		-0,755	-0,639	0,695	0,678
180	-0,692		-0,456	-0,465	-0,129		-1,890	
		MAC = 0,998			MAC = 0,995			MAC = 0,991
								MAC = 0,992

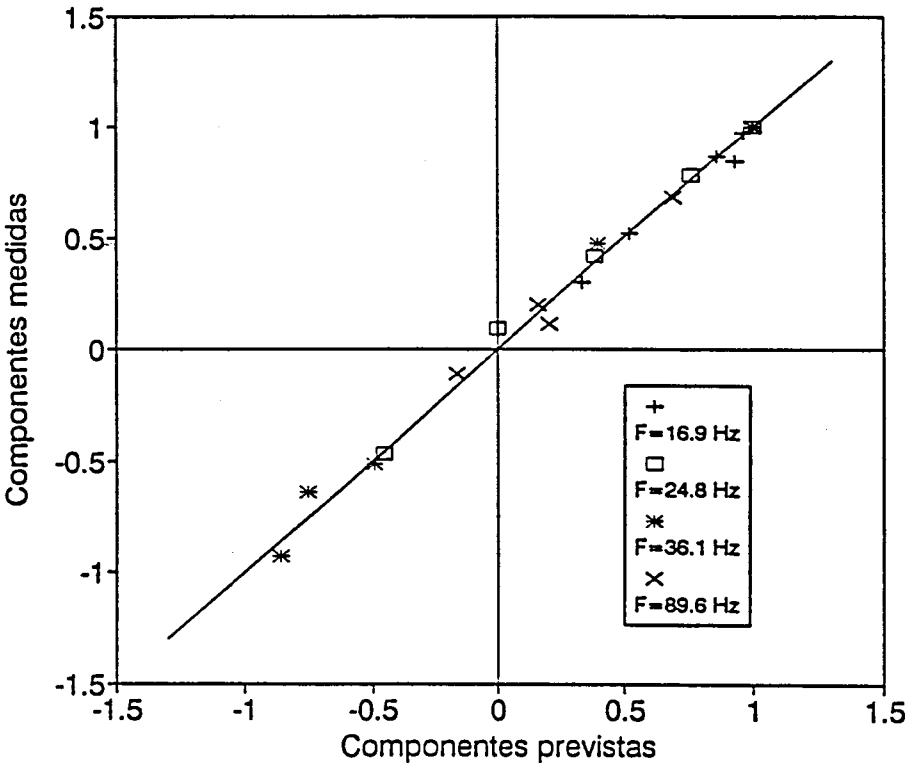


Figura 7.61 - Componentes previstas vs amplitude das componentes experimentais dos modos de vibração.

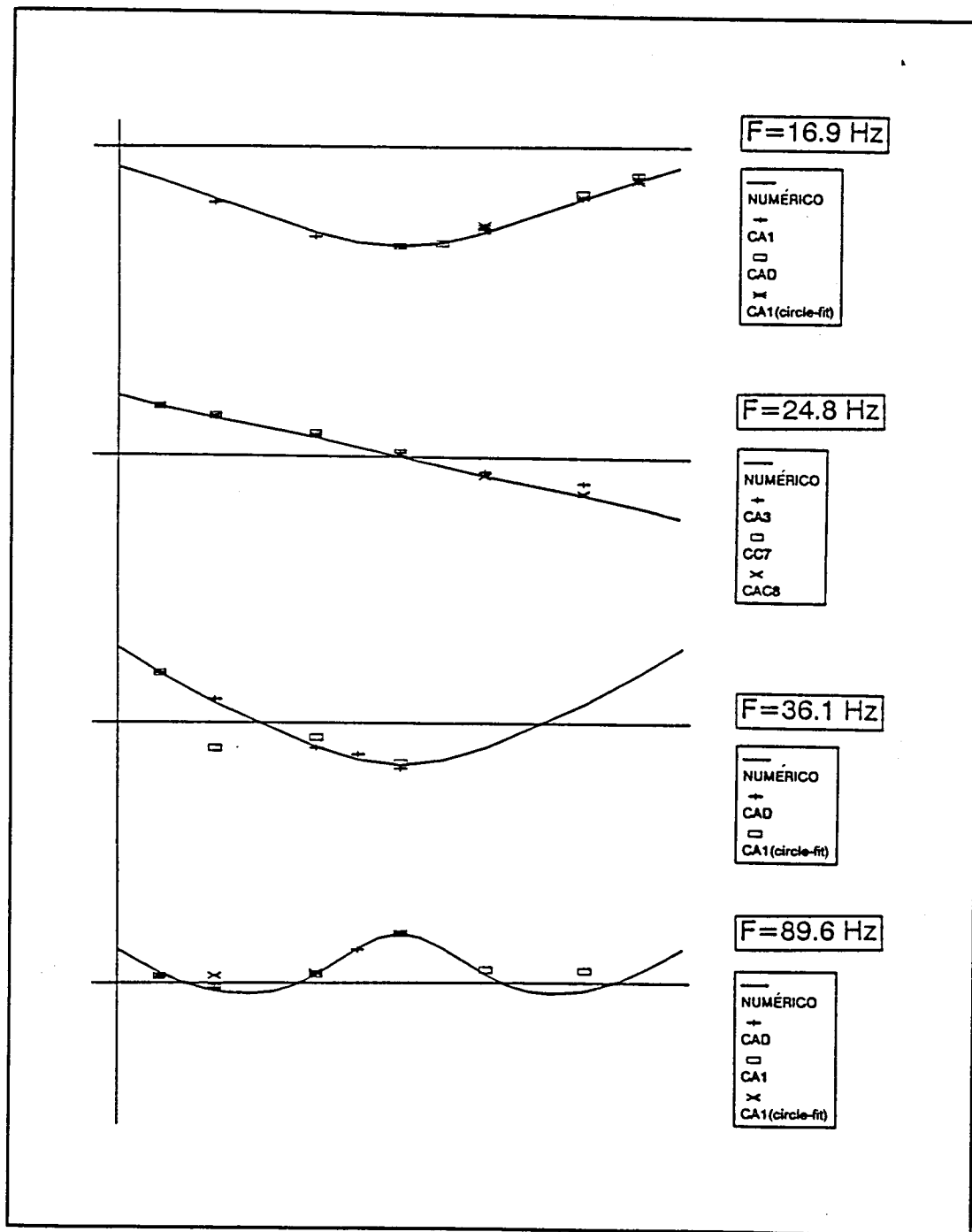


Figura 7.62 - Configurações dos modos de vibração experimentais vs numéricos segundo uma mediana da laje.

CAPÍTULO 8

CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS DE DESENVOLVIMENTO FUTURO

8.1 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

Sendo cada vez mais reconhecida a importância de proceder à caracterização experimental do comportamento dinâmico estrutural e atendendo, por outro lado, à grande flexibilidade e relativo baixo custo dos actuais sistemas de excitação e medição de vibrações em protótipos, começou por ser efectuada neste trabalho uma descrição das componentes fundamentais desses sistemas, referindo-se as principais características, bem como vantagens e inconvenientes da sua utilização tendo em vista a especificidade das aplicações a efectuar, situadas no âmbito da Engenharia Civil. Do que foi dito, pôde concluir-se em particular que:

- Embora os vibradores mecânicos sinusoidais constituam ainda a forma de excitação privilegiada de estruturas de dimensões elevadas (ex: grandes pontes, barragens), outras formas de excitação podem revelar-se interessantes, como a baseada em vibradores electrohídricos ou a excitação ambiental. Em estruturas de menor dimensão, como edifícios, reservatórios ou pontões, podem ainda utilizar-se os excitadores electrodinâmicos ou martelos de impulsos, apesar de se reconhecer que neste último caso os sinais colhidos podem conter um maior nível de ruído;
- Presentemente, a generalidade dos investigadores opta pela utilização de acelerómetros piezoeléctricos como transdutores de medida, em razão da sua elevada sensibilidade, baixo custo relativo e pequenas dimensões;
- No que se refere aos sistemas de aquisição e processamento, existe actualmente a grande preocupação em adquirir equipamentos modulares dotados de uma grande versatilidade, de forma a tornar possível a inclusão de funções especiais ou sequências de operações programadas especificamente pelo utilizador. Diferentes configurações com custos variáveis são assim possíveis, desde as mais simples, que se baseiam na utilização de computadores pessoais munidos de cartas de aquisição e condicionamento analógico, às mais elaboradas, baseadas na utilização de um analisador de Fourier dispondo de um módulo programável, que é controlado por uma workstation onde existe também disponível software de processamento de sinal e de identificação de parâmetros modais.

Tendo a FEUP iniciado o desenvolvimento de um sistema próprio de excitação e medição de vibrações baseado num computador pessoal munido de uma carta de conversão analogico-digital, houve necessidade de desenvolver software para processamento de séries de dados com vista à construção de funções de transferência e, igualmente, software para a estimação dos parâmetros modais associados à estrutura analisada, tendo nesse sentido sido realizado um aprofundamento das questões consideradas fundamentais no domínio da Teoria de Processamento Digital de Sinal e da Identificação de Sistemas.

Na sequência da sistematização dos conhecimentos de base relativos à Teoria de Processamento Digital de Sinal, desenvolveu-se o programa de cálculo automático PSINAL, sendo por seu intermédio possível construir funções de resposta em frequência experimentais associadas a excitações de banda larga ou estreita. De entre as operações e funções implementadas neste programa, salientam-se as janelas de dados, os filtros digitais, o zoom, a decimação e os estimadores espectrais (função densidade espectral de potência e densidade espectral de potência cruzada, função de resposta em frequência e função de coerência associada).

A aplicação do programa PSINAL ao processamento de sinais provenientes de diversos ensaios até aqui realizados permitiu testar a sua eficiência e versatilidade. Apesar das limitações inerentes à velocidade de processamento, pôde concluir-se que a utilização de software de processamento digital em conjugação com sistemas de medição baseados em cartas de conversão analogico-digitais constitui uma simples e excelente alternativa aos analisadores de Fourier.

Também em resultado dos estudos efectuados no âmbito da Identificação de Sistemas, desenvolveram-se programas de cálculo automático contemplando métodos de identificação no domínio da frequência com diferentes níveis de complexidade, ainda que todos eles baseados em técnicas de 1 grau de liberdade: método da amplitude de pico (PEAKAM), método de Mau (SMSMET), método de Dobson (DOBSON) e método do "circle fit" (FITCIR). Todos os programas de identificação foram dotados de facilidades gráficas, possibilitando a visualização e modificação em regime interactivo dos parâmetros de ajuste no processo de identificação de parâmetros modais, tendo a sua eficiência sido testada através de simulações e de ensaios experimentais.

Da investigação teórica efectuada e das aplicações realizadas, foi possível concluir em particular que:

- Embora as condições de ensaio e as características do sistema analisado afectem diferentemente os resultados proporcionados por cada um dos métodos de identificação desenvolvidos, o que dificulta aliás uma comparação dessas técnicas, pode dizer-se que os melhores resultados são usualmente obtidos em todas elas quando as FRF a analisar se referem a sistemas com modos de vibração bem separados e com coeficientes de amortecimento não muito elevados nem demasiado baixos;
- De entre as técnicas de identificação de 1 grau de liberdade, são os métodos da amplitude de pico, da resposta em quadratura e da máxima componente em

- De entre as técnicas de identificação de 1 grau de liberdade, são os métodos da amplitude de pico, da resposta em quadratura e da máxima componente em quadratura os mais vulneráveis em relação à resolução em frequência utilizada, ΔF , por fazerem depender os valores dos parâmetros modais extraídos de um reduzido número de pontos na vizinhança de cada ressonância;
- Comparando entre si as diferentes técnicas implementadas, pode facilmente verificar-se que os métodos de Dobson e do "circle fit", baseados em aproximações de nível superior aos métodos da amplitude de pico e de Mau, levam também a parâmetros modais de qualidade superior aos obtidos pelos últimos. Considerando especificamente os métodos da amplitude de pico e de Mau, é de esperar, em princípio, obter parâmetros de qualidade inferior em resultado da aplicação do primeiro dos métodos, uma vez que o método de Mau utiliza um número de pontos da FRF na vizinhança da ressonância superior ao exigido pelo método da amplitude de pico. Todavia, os erros na vizinhança da ressonância podem afectar mais grosseiramente a sua localização, além de que o critério utilizado por este método na definição do erro quadrático a minimizar engloba uma aproximação, do que resulta não ser possível garantir a superioridade desta última técnica relativamente ao método da amplitude de pico. No que se refere aos métodos de Dobson e do "circle fit", refere-se que os resultados da sua aplicação variam fortemente com as FRF a analisar, não sendo fácil estabelecer uma comparação conclusiva em termos do grau de rigor. No entanto, considera-se ser mais simples a implementação do método de Dobson do que a implementação do método do "circle fit", porquanto este último exige o ajuste por circunferências modais, ao passo que o primeiro se baseia apenas no ajuste por rectas. Em termos práticos, o facto de a extracção dos parâmetros modais pelo método de Dobson ser efectuada mediante dois ajustes sucessivos de rectas (no método do "circle fit" realiza-se apenas o ajuste por uma circunferência), tende a sugerir que os resultados proporcionados por aplicação desta técnica são superiores aos obtidos por aplicação do método do "circle fit";
- As técnicas de identificação de 1 grau de liberdade possuem algumas limitações na análise do comportamento dinâmico de sistemas complexos aos quais estão associadas funções de resposta em frequência caracterizadas por uma elevada interferência modal. Apesar disso, a sua fácil e rápida aplicação proporciona excelentes estimativas iniciais a utilizar como entrada em técnicas mais complexas de N graus de liberdade;

permitiu a extracção de parâmetros modais a partir de algumas das FRF associadas à descrição do comportamento dinâmico da laje de betão armado descrita no Capítulo 7 com razoável qualidade, relativamente aos correspondentes valores proporcionados pela aplicação de um algoritmo de N graus de liberdade. Note-se que, pelo contrário, os valores dos coeficientes de amortecimento obtidos por aplicação do método de Dobson (que se apoia numa simplificação do mesmo nível daquela em que assenta o método do "circle fit") a essas FRF são em alguns casos destituídos de significado;

- Embora a actual tendência dos investigadores que se dedicam à implementação numérica de técnicas de identificação de sistemas seja a de automatizar o mais possível os procedimentos de cálculo, considera-se que é fundamental permitir ao utilizador usar a sua sensibilidade e sentido crítico, no sentido de escolher e modificar parâmetros do ajuste no decorrer da identificação. Embora esta perspectiva torne fundamental a utilização de programas gráficos e se traduza num processo de identificação mais lento, possibilita a eliminação de soluções sem significado físico e uma melhor compreensão do comportamento dinâmico do sistema analisado.

Com vista a melhor ilustrar a eficiência e o interesse da aplicação dos vários métodos de identificação descritos no estudo do comportamento dinâmico de estruturas reais, apresentaram-se ainda neste trabalho os resultados de dois ensaios efectuados, o primeiro dos quais dizendo respeito ao estudo de uma viga metálica de pequenas dimensões sujeita à acção produzida por um martelo de impulsos e com recurso a um analisador de Fourier, enquanto que o segundo se refere a uma laje quadrada de betão armado com cerca de 6m de lado sujeita igualmente à acção de um martelo de impulsos, tendo-se no entanto recorrido ao sistema de medição desenvolvido na FEUP, ao conjunto de programas de cálculo automático realizados e a um programa de identificação de parâmetros dinâmicos mais complexo (MODHAN), baseado num método global de N graus de liberdade que se apoia numa formulação de estado modal.

O exemplo relativo ao ensaio da viga metálica, embora bastante académico, constituiu a primeira experiência pessoal de utilização de um analisador de Fourier. A possibilidade conferida por este aparelho de, em tempo real, obter a função de resposta em frequência e a função de coerência associada, foram determinantes para adquirir sensibilidade em relação a aspectos práticos de ensaio, como por exemplo, à importância da qualidade do impulso aplicado por um martelo de impulsos e ao número de séries necessário para obter estimativas espectrais de qualidade. Por outro lado, a aplicação de técnicas de identificação simples, baseadas nos métodos de 1 grau de liberdade mais grosseiros, a FRF associadas a um sistema

com modos de vibração bem separados e contendo erros muito pequenos (os ensaios foram realizados em laboratório, sendo o nível da excitação aplicada bastante superior ao nível de ruído) provou conduzir a excelentes resultados.

O estudo de identificação experimental das propriedades dinâmicas da laje de betão armado evidenciou as dificuldades que normalmente se levantam no estudo de estruturas no âmbito da Engenharia Civil. Assim, o baixo nível da excitação aplicada relativamente ao nível de ruído presente conduz a maiores erros na avaliação das FRF. Por outro lado, a presença de um elevado número de modos de vibração com frequências próprias muito próximas, gera uma interferência modal significativa, originando um carácter complexo nas estimativas dos parâmetros modais. Daqui resulta o pior funcionamento das técnicas de identificação de 1 grau de liberdade. A aplicação do método RFP, de N graus de liberdade, permitiu no caso presente a extracção dos parâmetros modais associados a alguns dos modos de vibração com apreciável qualidade, o que permitiu calibrar o modelo numérico desenvolvido, tendo-se registado uma excelente concordância entre diversos parâmetros modais identificados e os correspondentes valores obtidos por via numérica.

8.2 - PERSPECTIVAS DE DESENVOLVIMENTO FUTURO

A vastidão das matérias abordadas ao longo deste trabalho e as dificuldades adicionais levantadas pela análise experimental, permitem perspectivar uma série de questões cujo aprofundamento poderá revestir-se de grande interesse na sequência do trabalho até aqui realizado. Assim, apontam-se de seguida algumas das possíveis áreas de investigação agrupadas em duas categorias, a primeira relativa ao desenvolvimento de *técnicas de medição e identificação* e a segunda a *aplicações*.

a) Técnicas de medição e identificação

- Todas as técnicas de identificação até aqui referidas se baseiam em sistemas que se consideram sujeitos a uma entrada única e a uma ou várias saídas (SISO e SIMO). Todavia, nem sempre é esta a situação real de funcionamento das estruturas, porquanto a actuação simultânea de várias fontes de excitação convenientemente distribuídas ao longo da estrutura (MISO ou MIMO) pode contribuir para mobilizar de forma significativa um maior número de modos de vibração de interesse. Este aspecto, que assume particular importância no estudo de estruturas de grande dimensão (ex: grandes pontes e barragens), exige no entanto o desenvolvimento de técnicas específicas para a construção de funções

de transferência e funções de coerência associadas, bem como de técnicas de identificação de parâmetros modais. Estando prevista a construção de um segundo vibrador sinusoidal na FEUP, com vista à actuação sincronizada de dois excitadores no estudo do comportamento dinâmico de grandes barragens, considera-se ter grande interesse a investigação neste domínio;

- Apesar de ser habitual a aplicação quase exclusiva de métodos de identificação no domínio da frequência na resolução de problemas no âmbito da Engenharia Civil, para o que contribui o facto de ser relativamente reduzido o número de modos de vibração de interesse e relativamente estreita a banda de frequências em que estes se situam, julga-se de grande utilidade proceder à implementação de algumas técnicas de identificação no domínio do tempo, com vista a testar a sua eficiência na observação experimental de estruturas de grande porte. Considera-se igualmente importante explorar as chamadas técnicas "híbridas", baseadas em algoritmos que envolvem operações no domínio do tempo e da frequência simultaneamente. Estas técnicas, que só muito recentemente foram introduzidas, têm como principal objectivo reduzir os inconvenientes levantados pela aplicação de técnicas envolvendo exclusivamente operações no domínio do tempo ou da frequência;
- Tendo-se realçado neste trabalho a importância de utilizar a excitação ambiental no estudo de sistemas dinâmicos, considera-se ser também importante o aperfeiçoamento das metodologias de identificação presentemente utilizadas, através da consideração de hipóteses mais elaboradas, como as colocadas por Rytter [124], tendo em atenção o desconhecimento das características reais da excitação actuante e a importância de que se pode revestir a existência de um elevado nível de ruído.
- A necessidade de caracterizar experimentalmente o comportamento dinâmico de sistemas sujeitos a acções cuja intensidade origina a incursão em regime plástico (ex: acção sísmica) torna extremamente importante o desenvolvimento de técnicas de identificação não-lineares. Este assunto pode relacionar-se também com uma questão introduzida por Liu e Yao [85], relativa à quantificação do estado de degradação e da segurança de estruturas.
- Apesar da grande evolução sofrida nos últimos anos pelos sistemas de medição de vibrações, incluindo os próprios transdutores de medida, o número de pontos que presentemente é possível instrumentar é em geral muito pequeno, quando comparado com o número de nós da malha de elementos finitos usada para modelar numericamente a estrutura e, naturalmente, ainda mais reduzido se

comparado com o número de graus de liberdade em geral usados para descrever o movimento na globalidade dos nós. Neste contexto, a observação experimental tem essencialmente por finalidade a validação do modelo teórico. Considera-se no entanto que uma perspectiva diferente poderá surgir nos próximos anos com o advento dos sistemas de medição baseados em tecnologia laser. Embora estes sistemas possam funcionar como simples transdutores de velocidade, eles podem também permitir realizar uma operação de "scanning" da estrutura, que consiste na possibilidade de definir à partida uma malha extremamente fina, mediante uma conveniente escolha da resolução espacial, que pode ser da ordem de milímetros, sendo de seguida efectuado um varrimento laser, fazendo incidir um feixe emitido a partir de uma cabeça móvel sobre cada um dos nós dessa malha, e recolhendo-se em cada um uma medida, que pode consistir num valor da velocidade instantânea, ou numa série de valores amostrados da velocidade. Nestas circunstâncias, julga-se que a utilização destes sistemas poderá vir a permitir a construção de um modelo experimental da estrutura suficientemente fino para que possa ser utilizado no melhoramento das hipóteses que estão na base dos modelos teóricos, pelo que se considera ser de elevado interesse procurar proceder ao desenvolvimento e aplicação deste tipo de técnicas.

b) Aplicações

- Pelo facto de só muito recentemente a FEUP dispor de um vibrador mecânico sinusoidal e de um excitador electrodinâmico, os ensaios até agora realizados têm-se centrado essencialmente em estruturas de médio porte, com recurso à aplicação de um martelo de impulsos, ou de grande porte, tendo por base a excitação ambiental. Considera-se portanto fundamental a realização futura de ensaios em estruturas de maior dimensão e complexidade utilizando os novos sistemas de excitação disponíveis, com vista a adquirir maior experiência e sensibilidade, permitindo dessa forma o desenvolvimento de rotinas de ensaios;
- O aperfeiçoamento das técnicas de ensaios poderá igualmente permitir a realização de ensaios com vista a investigar determinados problemas específicos, como por exemplo, o estudo da importância de elementos não-estruturais ou secundários (ex: painéis de alvenaria, escadas) no comportamento dinâmico global de edifícios, ou o acompanhamento da degradação estrutural em pontes;

- Refere-se finalmente um problema de grande importância, que consiste na caracterização de acções dificilmente modeláveis. Com efeito, a observação do comportamento dinâmico permite validar os modelos numéricos, de forma a caracterizar com grande segurança as características do sistema analisado, criando as condições adequadas à resolução do problema inverso, ou seja, à estimativa da acção aplicada com base na análise da resposta e nas propriedades dinâmicas conhecidas da estrutura. Exemplos interessantes relativos a este problema, são o da caracterização da acção do vento em edifícios e pontes e da acção induzida por descarregadores de cheias em barragens.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ABDEL-GHAFFAR, A.M. e HOUSNER, G.W., "Ambient Vibration Tests of Suspension Bridge", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 104, Nº EM5, pp. 983-999, (1978).
- [2] ABDEL-GHAFFAR, A.M. e SCANLAN, R.H., "Ambient Vibration Studies of Golden Gate Bridge: I. Suspended Structure", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 111, Nº 4, pp. 463-482, (1985).
- [3] ABDEL-GHAFFAR, A.M. e SCANLAN, R.H., "Ambient Vibration Studies of Golden Gate Bridge: II. Pier-Tower Structure", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 111, Nº 4, pp. 483-499, (1985).
- [4] AHMAD, S.; IRONS, B.M. e ZIENKIEWICZ, O.C., "Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements", *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 2, pp. 419-451, (1970).
- [5] ALLEMANG, R.; BROWN, D.L. e ROST, R., "Digital Signal Processing", *Proceedings of the 16th International Seminar on Modal Analysis - Basic Course on Experimental Modal Analysis*, Part 1, (1991).
- [6] ALLEMANG, R.J. e BROWN, D.L., Multiple-Input Experimental Modal Analysis - A Survey', *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, pp. 37-44, (1986).
- [7] ALLEMANG, R.; BROWN, D.L. e ROST, R., "Frequency Response Function Analysis", *Proceedings of the 16th International Seminar on Modal Analysis - Basic Course on Experimental Modal Analysis*, Part I, (1991).
- [8] APOSTOL, T.H., *Cálculo*, Vol. II, Editora Reverté Ltda, Rio de Janeiro, (1981).
- [9] BENDAT, J.S., "Statistical Errors on Measurement of Coherence Functions and Input/Output Quantities", *Journal of Sound and Vibration*, 59(3), pp. 405-421, (1978).
- [10] BENDAT, J.S., *Nonlinear System Analysis and Identification from Random Data*, John Wiley & Sons, (1990).
- [11] BENDAT, J.S. e PIERSOL, A.G., *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*, Wiley-Interscience, (1971).
- [12] BENDAT, J.S. e PIERSOL, A.G., *Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis*, Wiley-Interscience, (1980).
- [13] BENSON, D.J. e HUANG, T.C., "Determination of Modal and System Parameters from Response Transfer Functions", *Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference*, pp. 1142-1149, (1989).
- [14] BRANDON, J.A. e COWLEY, A., "A Weighted Least Squares Method for Circle Fitting to Frequency Response Data", *Journal of Sound and Vibration*, 89(3), pp. 419-424, (1983).
- [15] BRANSTETTER, L.J.; YEONG, G.D.; YAO, J.T.P.; WEN, Y.K. e LIN, Y.K., "Mathematical Modelling of Structural Behaviour during Earthquakes", *Probability Engineering Mechanics*, Vol. 3, Nº 3, pp. 130-145, (1988).
- [16] BRIGHAM, E.O., *The Fast Fourier Transform*, Prentice-Hall, Inc., (1974).

- [17] BROCH, JENS, T., *Mechanical Vibration and Shock Measurements*, Brüel & Kjaer, (1984).
- [18] BROWNJOHN, J.M.W.; DUMANOGLU, A.A.; SEVERN, R.T. e TAYLOR, C.A., "Ambient Vibration Measurements of the Humber Suspension Bridge and Comparison with Calculated Characteristics", *Proc. Instn. Civ. Engrs.*, Part 2, 83, pp. 561-600 (Paper 9173), (1987).
- [19] BROWNJOHN, J.M.; DUMANOGLU, A.A.; SEVERN, R.T. e BLAKEBOROUGH, A., "Ambient Vibration Survey of the Bosphorus Suspension Bridge", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 18, pp. 263-283, (1989).
- [20] BUZDUGAN, G.; MIHAILESCU, E. e RADES, M., *Vibration Measurement*, Martinus Nijhoff Publishers, Romania, (1986).
- [21] CALCIATI, F.; CASTOLDI, A; CIACCI, R. e FANELLI, M., "Experience Gained During In Situ Artificial and Nature Dynamic Excitation on Large Concrete Dams in Italy: Analytic Interpretation of Results", Trezième Congrès des Grand Barrages, pp. 1377-1402, New Delhi, (1979).
- [22] CÂMARA, R. e PORTUGAL, A., "In Situ Dynamic Tests of a Gated Gravity Dam", *Proceedings of International Conference on Earthquake, Blast and Impact*. Manchester, (1991).
- [23] CARVALHAL, F.J. e COSTA, C.O., *Grafic - Conjunto Integrado de Rotinas para Automatizar a Geração de Gráficos*, LNEC, (1989).
- [24] CARVALHAL, F.J.; COSTA, C.O. e AZEVEDO, F.S., *Elementos de Sistemas e de Análise e Processamento de Sinais - Curso de Especialização*, LNEC, (1991).
- [25] CARYDIS, P.; EERI, M. e MOUZAKIS, H.P., "Small Amplitude Vibration Measurements of Buildings Undamaged, Damaged and Repaired After Earthquakes", *Earthquake Spectra*, Vol. 2, Nº 3, pp. 515-535, (1986).
- [26] CAUGHEY, T.K. e O'KELLY, M.E.J., "Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems", *Journal of Applied Mechanics*, pp. 583-588, (1965).
- [27] CHEN, S-J H., *System Identification and Damage Assessment of Existing Structures*, PhD Thesis, Purdue University, US, (1980).
- [28] CLOUGH, R.W.; GHANAAT, Y. e QIU, X.-F., "Dynamic Reservoir Interaction with Monticelo Dam", *Report No. UCB/EER C87/21*, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, CA, (1987).
- [29] CLOUGH, R.W. e PENZIEN, J., *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill International Editions, (1986).
- [30] COOLEY, J.W. e TUKEY, J.W., "An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series", *Mathematics of Computation*, Vol. 19, pp. 297-301, (1965).
- [31] CUNHA, A., *Dinâmica Estrutural Estocástica. Aplicações à Engenharia Sísmica*, Tese de Doutorado em Engenharia Civil, FEUP, (1990).
- [32] CURTIS, A.J., "Dynamic Testing-How Far We've Come - How Much Further To Go", *Shock and Vibration Bulletin*, Nº 50, pp. 39-44, (1980).

- [33] DELGADO, R. e CAETANO, E., *Medição de vibrações do bloco extraível equipado com disjuntor FX11-31.5K4*, Relatório do Instituto da Construção, FEUP, (1992).
- [34] DELGADO, R.; CUNHA, A.; CAETANO, E. e GUEDES, J., *Medição de vibrações provocadas pelo rebentamento de rocha submersa, junto à cabeça Norte da Doca Nº 1 no Porto de Leixões*, Relatório do Instituto da Construção, FEUP, (1990)
- [35] DELGADO, R.; RESTIVO, F.; CUNHA, A. e CAETANO, E., "Measuring Vibrations on Large Structures", *1989 Sem. Spring Conference on Experimental Mechanics, Cambridge, US*, (1989).
- [36] DELGADO, R.; RESTIVO, F.; CUNHA, A. e CAETANO, E., "Um sistema de aquisição e processamento de dados para medição de vibrações em Estruturas", *2^{as} Jornadas Portuguesas de Sismologia e Engenharia Sísmica*, (1989).
- [37] DOBSON, B.J., "A Straight-Line Technique for Extracting Modal Properties from Frequency Response Data", *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1(1), pp. 29-40, (1987).
- [38] DOSSING, O., *Structural Testing - Part 1, 2*, Brüel & Kjaer, (1988).
- [39] DUMANOGLU, A.A. e SEVERN, R.T., "Stochastic Response of Suspension Bridges to Earthquake Forces", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 19, pp. 133-152, (1990).
- [40] EWINS, D.J., "Estimation of Resonant Peak Amplitudes", *Journal of Sound and Vibration*, 43(4), 595-605, (1975).
- [41] EWINS, D.J., "On Predicting Point Mobility Plots from Measurements of other Mobility Parameters", *Journal of Sound and Vibration*, 70(1), pp. 69-75, (1980).
- [42] EWINS, D.J. e GLEESON, P.T., "A Method for Modal Identification of Lightly Damped Structures", *Journal of Sound and Vibrations*, 84(1), pp. 57-79, (1982).
- [43] EWINS, D.J., *Modal Testing: Theory and Practice*, Research Studies Press, (1986).
- [44] EYKHOFF, P., *System Identification - Parameter and State Estimation*, John Wiley and Sons, (1974).
- [45] FARRAR, C.R., "Experimental Modal Analysis of Reinforced Concrete Structures", *Experimental Techniques*, pp. 27-31, (1989).
- [46] FAVOUR, J.D., "Transient Test Techniques for Mechanical Impedance and Modal Survey Testing", *Shock and Vibration Bulletin*, Nº 42, pp. 71-82, (1972).
- [47] FLESCH, R., "A Dynamic Method for the Safety Inspection of Large Prestressed Bridges", CEEC, *Dynamic Actions on Buildings and Structures*, Aachen, (1990).
- [48] FLESCH, R. e EISELMAYER, M., "Dynamic Behaviour of Arch Dams", *Proceedings of the 7th ECEE*, Athens, Vol. 6, (1982).
- [49] FLESCH, R.; GERASCH, W.J. e KERNBICHLER, K., "The Significance of System Identification for Diagnostic Dynamic Testing of Bridges", *Eurodyn'90, European Conference on Structural Dynamics*, Ruhr - University of Bochum, Germany, (1990).

- [50] FLESCH, R. e KERNBICHLER, K., "A Dynamic Method for the Safety Inspection of Large Prestressed Bridges", *NATO US - European Workshop on Bridges*, Baltimore, USA, (1990).
- [51] FLESCH, R. e KERNBICHLER, K., "Diagnostic Dynamic Testing of Bridges on Brenner Motorway", *International Conference on Bridge Management*, University of Surrey, Guildford, UK, (1990).
- [52] FORSYTHE, G.E., "Generation and Use of Orthogonal Polynomials for Data-Fitting with a Digital Computer" *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, Vol. 5(2), pp. 74-88, (1957).
- [53] GADE, S. e HERLUFSEN, H., "Use of Weighting Functions in DFT/FFT Analysis - (Part I, II)", *Technical Review*, Nºs 3,4, Brüel & Kjaer, (1987).
- [54] GAUKROGER, D.R.; SKINGLE, C.W. e HERON, K.H., "Numerical Analysis of Vector Response Loci", *Journal of Sound and Vibration*, 29(3), pp. 341-353, (1973).
- [55] GERSCH, W.; TAOKA, G. e LIU, R., "Structural System Parameter Estimation by Two-Stage Least-Squares Method", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 102, Nº EM5, pp. 883-899, (1976).
- [56] GHIA, J.V., *Modal Parameter Identification for Arch Dams*, M.S. Thesis, Department of Civil Engineering, University of Houston, (1987).
- [57] GOYDER, H.G.D., "Methods and Application of Structural Modelling from Measured Structural Frequency Response Data", *Journal of Sound and Vibration*, 68(2), pp. 209-230, (1980).
- [58] HAMMING, R.W., *Digital Filters*, Prentice-Hall, Inc., (1977).
- [59] HAN, M-C, *Improved Approaches to the Indirect Force Determination Problems via Experimental Modal Analysis*, PhD Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, US, (1991).
- [60] HAN, M-C e WICKS, A.L., "On the Application of Forsythe Orthogonal Polynomials for Global Modal Parameter Estimation", *Proceedings of 7th International Modal Analysis Conference*, pp. 625-630, (1989).
- [61] HE, J. e EWINS, D.J., "Analytical Stiffness Matrix Correction Using Measured Vibrations Modes", *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, pp. 9-14, (1986).
- [62] HEYLEN, W.; BIELEN, P.; SAS, P.; VANHERCK, P., "On Instrumentation for Experimental Modal Analysis", *Proceedings of the 16th International Seminar on Modal Analysis - Basic Course on Experimental Modal Analysis*, Part 1, (1991).
- [63] HEYLEN, W. e SAS, P., "On Digital Signal Processing for System Identification: Basic Theory and Applications", *Proceedings of the 16th International Seminar on Modal Analysis - Basic Course on Experimental Modal Analysis*, Part 1, (1991).
- [64] HEYLEN, W. e SAS, P., "Excitation Considerations for Experimental Modal Analysis", *Proceedings of the 16th International Seminar on Modal Analysis - Basic Course on Experimental Modal Analysis*, Part 2, (1991).

- [65] HODDER, S.B., "Computer Processing of New Zealand Strong-Motion Accelerograms", *Bulletin of the New Zealand National Society for Earthquake Engineering*, Vol. 16, Nº 3, (1983).
- [66] HOERNER, J.B. e JENNINGS, P.C., "Modal Interference in Vibration Tests", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 95, Nº EM4, pp. 827-839, (1969).
- [67] HOLMES, P.J. e WHITE, R.G., "Data Analysis Criteria and Instrumentation Requirements for the Transient Measurement of Mechanical Impedance", *Journal of Sound and Vibration*, 25(2), pp. 217-243, (1972).
- [68] HUDSON, D.E., "Dynamic Tests of Full-Scale Structures", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 143, Nº EM6, pp. 1141-1157, (1977).
- [69] IBRAHIM, S.R., "Dynamic Modeling of Structures from Measured Complex Modes", *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol 21, Nº 6, pp. 898-901, (1983).
- [70] IBRAHIM, S.R., "Future Directions in Modal Analysis", Keynote Address, *Proceedings of the 5th International Modal Analysis Conference*, pp. XV-XX, (1987).
- [71] IGUSA, T.; DER KIUREGHIAN, A. e SACKMAN, J.L., "Modal Decomposition Method for Stationary Response of Non-classically Damped Systems", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Nº 12, pp. 121-136, (1984).
- [72] JENNINGS, P.C.; MATTHIESEN, R.B. e HOERNER, J.B., "Forced Vibration of a Tall Steel-Frame Building", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 1, pp. 107-132, (1972).
- [73] JIYAO, L. e HESHEN, J., "Modal Analysis Using the Fully-Coherent Multi-Point Random Excitation Technique", *Proceedings of the 7th International Modal Analysis*, (1989).
- [74] KEIGHTLEY, W.O., *Vibration Tests of Structures*, PhD Thesis, California Institute of Technology, US, (1964).
- [75] KENNEDY, C.C. e PANCU, C.D.P., "Use of Vectors in Vibration Measurement and Analysis", *Journal of the Aeronautic Sciences*, Vol. 14, Nº 11, pp. 603-625, (1947).
- [76] KLOSTERMAN, A.L., *On the Experimental Determination and Use of Modal Representations of Dynamic Characteristics*, PhD Thesis, (1971).
- [77] KLOSTERMAN, A.L. e LEMON, J.R., "Building Block Approach to Structural Dynamics", *ASME Vibrations Conference, Paper 69VIBR-30*, (1969).
- [78] KOMROWER, J.M.; PAKSTYS, M.P. e WRIGHT, D., "Modal Testing and Operational Vibration Measurements for a Ship Deckhouse Structure", *Experimental Techniques*, pp. 40-42, (1989).
- [79] KUNT, M., *Digital Signal Processing*, Artech House, (1986).
- [80] LANG, G.F., "Modal Testing Principles", *Technical Report Nº 023/87*, Solartron Instruments, (1987).
- [81] LEMBREGTS, F., "Parameter Estimation in Modal Analysis", *Proceedings of the 16th International Seminar on Modal Analysis - Basic Course on Experimental Modal Analysis, Part 2*, (1991).

- [82] LEURIDAN, J.; VAN DER AUWERAER, H. e MERGEAY, M., "Review of Parameter Estimation Techniques", *Proceedings of the 16th International Seminar on Modal Analysis - Basic Course on Experimental Modal Analysis*, Part 2, (1991).
- [83] LI, Y. e MAU, S.T., "A Case Study of MIMO System Identification Applied to Building Seismic Records", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 20, pp. 1045-1064, (1991).
- [84] LIOU, C.Y. e JENG, T.-S., "The Determination of Mode Shapes from Modern Cross-Spectral Estimates", *Mechanical Systems and Signal Processing*, 3(3), pp. 291-303, (1989).
- [85] LIU, S. e YAO, J.T.P., "Structural Identification Concept", *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 104, Nº ST12, pp. 1845-1858, (1978).
- [86] LNEC, *Ensaio Dinâmico da Barragem de Cabril*, Relatório interno, (1962).
- [87] LNEC, *Ensaio Dinâmico da Barragem de Bouçã*, Relatório interno, (1962).
- [88] LNEC, *Vibrador mecânico. Projecto, construção e montagem*, Lisboa (1965).
- [89] LNEC, *Ensaio da Resposta Dinâmica da Barragem de Cahora-Bassa*, (1977).
- [90] LNEC, *Observação do Comportamento de Barragens de Betão Armado Sujeitas a Acções Dinâmicas*, Relatório interno, (1978).
- [91] MAIA, N.M.M., *Extraction of Valid Modal Properties from Measured Data in Structural Vibrations*, PhD Thesis, Imperial College of Science and Technology, UK, (1988).
- [92] MAIA, N.M.M., "Reflections on Some Single-Degree-Of-Freedom (SDOF) Modal Analysis Methods", *The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, 6(2), pp. 69-80, (1991).
- [93] MAIA, N.M.M. e EWINS, D.J., "New Approach for the Modal Identification of Lightly Damped Structures", *Mechanical Systems and Signal Processing*, 3(2), pp. 173-193, (1989).
- [94] MARPLES, V., "The Derivation of Modal Damping Ratios From Complex-Plane Response Plots", *Journal of Sound and Vibration*, 31(1), pp. 105-117, (1973).
- [95] MAU, S.T. e WANG, S., "Arch Dam System Identification Using Vibration Test Data", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Nº 18, pp. 491-505, (1989).
- [96] MERRIT, P.H., *A Method of System Identification with Experimental Investigations of Real Systems*, PhD Thesis, University of New Mexico, US, (1974).
- [97] MITCHELL, L.D., "Signal Processing and the Fast Fourier Transform (FFT) Analyzer - A Survey", *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, (1986).
- [98] MITCHELL, L.D.; COBB, R.E.; DEEL, J.C. e LUK, Y.W., "An Unbiased Frequency Response Function Estimator", *Proceedings of the 5th International Modal Analysis Conference*, Imperial College of Science and Technology, London, (1987).
- [99] MITCHELL, L.D.; COBB, R.E.; DEEL, J.C. e LUK, Y.W., "An Unbiased Frequency Response Function Estimator", *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, pp. 12-19, (1988).

- [100] MOSHREFI, N. e WICKS, A.L., "Estimation o Multiple Input/Output Frequency Response Functions in the Presence of Uncorrelated Noise", *Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference*, pp. 809-816, (1989).
- [101] NEWLAND, D.E., *An Introduction to Random Vibrations and Spectral Analysis*, Longman, (1978).
- [102] NUNEN, J.W.G. e PERSON, A.J., "Investigation of the Vibrational Behaviour of a Cable-Stayed Bridge under Wind Loads", *Engineering and Structures*, Vol. 4, pp. 99-105, (1982).
- [103] OPPENHEIM, A.V. e SHAFER, R.W., *Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, (1973).
- [104] O'ROURKE, M.J.; PARMELEE, R.A. e COROTIS, R.B., "Response of Structures to Random Wind Forces", *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 101, N° ST12, pp. 2557, 2571, (1975).
- [105] OTNES, R.K. e ENOCHSON, L., *Applied Time Series Analysis*, Wiley-Interscience, (1978).
- [106] PAN, T., "Vibration of Pedestrian Overpass", *Journal of Perfomance of Constructed Facilities*, ASCE, Vol. 6, N° 1, pp. 34-45, (1992).
- [107] PANDIT, S.M., *Modal and Spectrum Analysis: Data Dependent Systems in State Space*, John Wiley & Sons, Inc., (1991).
- [108] PAPOULIS, A., *Signal Analysis*, McGraw-Hill Book Company, (1977).
- [109] PAPPA, R.S. e IBRAHIM, S.R., "A Parametric Study of the Ibrahim Time Domain Modal Identification Algorithm", *The Shock and Vibration Bulletin*, 51/3, pp. 43-72, (1981).
- [110] PAQUET, J., "Étude Expérimentale du Comportement Dynamique des Structures en Vraie Grandeur", *Génie Parasismique*, Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, pp. 651-664, (1985).
- [111] PEDRO, J.O.; SILVA, A.F.; PEREIRA, J.; FLORENTINO, C.A.; PINHO, J.S.; CÂMARA, R. e SILVA, H., "Seismic Monitoring of Concrete Dams and Reservoirs. Portuguese Experience", *8th ECEE*, Lisbon, (1986).
- [112] PENG, C.-Y., "Generalized Modal Identification of Linear and Nonlinear Dynamic Systems, *PhD Thesis*, California Institute of Technology, US, (1988).
- [113] PORTUGAL, A., *Caracterização do Comportamento Dinâmico de Barragens de Betão através de Ensaios "In Situ"*, Dissertação de Mestrado, IST, (1990).
- [114] PORTUGAL, A. e CAETANO, E., "Experimental Analysis of the Dynamic Characteristics of Portuguese Dams", *10th World Conference on Earthquake Engineering*, Madrid, (1992).
- [115] PROENÇA, J., *Identificação Dinâmica de Sistemas Estruturais - Técnicas Experimentais e Analíticas*, Dissertação de Mestrado, IST, (1989).
- [116] PROENÇA, J.M. e AZEVEDO, J., "Identificação Dinâmica de Sistemas Estruturais", *2^{as} Jornadas Portuguesas de Engenharia de Estruturas*, Lisboa, LNEC, (1990).
- [117] PROENÇA, J.M.; AZEVEDO, J. e BRANCO, F.A., "Análise de Níveis de Vibração em Monumentos Nacionais", *2^{as} Jornadas Portuguesas de Engenharia de Estruturas*, Lisboa, LNEC, (1990).

- [118] RABINER, L.R. e RADES, C.M., *Digital Signal Processing*, IEEE Press, (1975).
- [119] RANDALL, R.B., *Frequency Analysis*, Brüel & Kjaer, (1987).
- [120] REID, W.H., *A Method of System Identification for Full Scale Structures Described by Complex Computer Models*, Master of Science in Civil Engineering Thesis, University of Nevada, Reno, US, (1984).
- [121] RIBEIRO, A., *Aplicação de Técnicas de Mobilidade a Estruturas de Aeronaves*, Dissertação de Mestrado, IST, (1991).
- [122] RODEMAN, R., *Estimation of Structural Dynamic Modal Parameters from Transient Response Data*, PhD Thesis, Purdue University, US, (1974).
- [123] RÜCKER, W., "Measurement and Evaluation of Random Vibrations", *Proceedings of DMSR*, Vol. 1, pp. 407-421, (1977).
- [124] RYTTER, A., "System Identification from Output Measurements", *Proceedings of the 8th International Modal Analysis Conference*, pp. 809-813, (1990).
- [125] SAGE, A.P. e SELSA, J.L., *System Identification*, Academic Press, (1971).
- [126] SERRIDGE, M. e LICHT, T.R., *Piezoelectric Accelerometer and Vibration Preamplifier Handbook*, Brüel & Kjaer, (1987).
- [127] SILVA, J.M.M. e MAIA, N.M.M., "Single Mode Identification Techniques for Use with Small Micro Computers", *Journal of Sound and Vibration*, 124(1), pp. 13-26, (1988).
- [128] SIMONIAN, S.S., *System Identification in Structural Dynamics: An Application to Wind Force Estimation*, PhD Thesis, University of California, Los Angeles, US, (1979).
- [129] SNOEYS, R.; SAS, P.; HEYLEN, W. e VAN DER AUWERAER, H., "Trends in Experimental Modal Analysis", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 1, Nº 1, pp. 5-27, (1987).
- [130] SNYDER, V.W., "Structural Modification and Modal Analysis - A Survey", *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, pp. 45-52, (1986).
- [131] SOUCY, Y. e DEERING, D.W., "Effects of Data Acquisition Conditions on Modal Testing of a Simple Structure", *Experimental Techniques*, pp. 35-39, (1989).
- [132] SOTOUDEH, V., *Measurement and Analysis of Structural Vibrations*, PhD Thesis, Stanford University, US, (1986).
- [133] TIMOSHENKO, S.P., *Vibration Problems in Engineering*, D. Van Nostrand Company, Inc., New York, N.Y., (1947).
- [134] TOUSSI, S., *System Identification Methods for Damage Evaluation of Existing Structures*, PhD Thesis, Purdue University, US, (1982).
- [135] TRIFUNAC, MIHAILO D., "Comparisons Between Ambient and Forced Vibration Experiments", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 1, 133-150, (1972).

- [136] USHER, M.J., *Sensors and Transducers*, Macmillan, (1990).
- [137] VAN DER AUWEARAER, H. e LEURIDAN, J., "Multiple Input Orthogonal Polynomial Parameter Estimation", *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1(3), pp. 259-272, (1987).
- [138] VAN DER AUWEARAER, H.; VANHERCK, P.; SAS, P. e SNOEYS, R., "Accurate Modal Analysis Measurements with Programmed Sine Wave Excitation", *Mechanical System and Signal Processing*, 1(3), pp. 301-313, (1987).
- [139] WELLSTEAD, P.E., "Techniques and Applications of Spectral Analysis", *Digital Signal Processing*, IEE Control Engineering Series 22, pp. 163-183, (1982).
- [140] WHITE, R.G., "Evaluation of the Dynamic Characteristics of Structures by Transient Testing", *Journal of Sound and Vibration*, 15(2), pp. 147-161, (1971).
- [141] WICKS, A.L. e HAN, M.-C., "The Influence of Frequency Response Function Estimation Method on Modal Parameter Estimators", *Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference*, pp. 817-821, (1989).
- [142] WICKS, A.L. e MITCHELL, L.D., "Methods for the Estimation of Frequency Response Function in the Presence of Uncorrelated Noise, A Review", *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, pp. 109-112, (1987).
- [143] WICKS, A. e VOLD, H., "The Hs Frequency Response Function Estimator", *Proceedings of the 4th International Modal Analysis Conference*, pp. 897-899, (1986).
- [144] WIEGEL, R.L., *Earthquake Engineering*, Prentice-Hall, Inc., (1970).
- [145] WOODCOCK, D.L., "On the Interpretation of the Vector Plots of Forced Vibrations of a Linear System with Viscous Damping", *The Aeronautical Quaterly*, pp. 45-62, (1963).
- [146] WYLIE, C.R. e BARRET, L.C., *Advanced Engineering Mathematics*, McGraw-Hill International Editions, (1985).
- [147] ZAVERI, K., *Modal Analysis of Large Structures - Multiple Exciter Systems*, Brüel & Kjaer, (1985).



FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

BIBLIOTECA



0000005952

