



UNIVERSIDADE DE COIMBRA
Faculdade de Ciências e Tecnologia

**Métodos de Elementos Finitos para a Modelação
a Uma e Duas Dimensões Horizontais da
Propagação de Ondas de Gravidade em
Engenharia Costeira**

Paulo Alexandre de Avilez Rodrigues de Almeida Valente

Licenciado pela Universidade do Porto
Master of Science by the University of Wales, Swansea

**Tese submetida para obtenção do grau de
Doutor em Engenharia Civil,
especialidade de Hidráulica, Recursos Hídricos e Ambiente**



UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Faculdade de Ciências e Tecnologia

**Métodos de Elementos Finitos para a Modelação
a Uma e Duas Dimensões Horizontais da
Propagação de Ondas de Gravidade em
Engenharia Costeira**

Paulo Alexandre de Avelaz Rodrigues de Almeida Valente

Licenciado pela Universidade do Porto

Master of Science by the University of Wales, Swansea

**Tese submetida para obtenção do grau de
Doutor em Engenharia Civil,
especialidade de Hidráulica, Recursos Hídricos e Ambiente**

UNIVERSIDADE DO PORTO	
Faculdade de Engenharia	
BIBLIOTECA M	
N.º	<u>67174</u>
CDU	
Data	<u>3 1 7</u> / <u>2003</u>

À Paula
Aos meus Pais

Quand on envisage les divers problèmes de Calcul Intégral qui se posent naturellement lorsqu'on veut approfondir les parties les plus différentes de la Physique, il est impossible de n'être pas frappé par des analogies que tous ces problèmes présentent entre eux. Qu'il s'agisse de l'électricité ou de l'hydrodynamique, on est toujours conduit à des équations différentielles de même famille et les conditions aux limites, quoique différents, ne sont pas pourtant sans offrir quelques ressemblances.

Poincaré

Conhecendo portanto o Algoritmo deste cálculo, ao qual chamei Cálculo Diferencial, todas as equações diferenciais podem ser resolvidas por um método comum.

Leibniz

Quando, há já vários anos, vi pela primeira vez um instrumento o qual, quando transportado, regista automaticamente o número de passos caminhados, ocorreu-me imediatamente que toda a aritmética poderia ser sujeita a um processo mecânico similar de forma a que não só a adição e subtração, mas também a multiplicação e a divisão poderiam ser facilmente levadas a cabo por uma máquina para isso preparada, facilmente, rapidamente e com resultados seguros ... Pois que é indigno de homens bons perder horas como escravos na labuta dos cálculos, que poderiam em segurança ser deixados a qualquer um se tal máquina fosse usada ...

Leibniz

Os ventos eram tais que não puderam
Mostrar mais força de ímpeto cruel,
Se para derribar então vieram
A fortíssima Torre de Babel.
Nos altíssimos mares, que cresceram,
A pequena grandura dum batel
Mostra a possante nau, que move espanto,
Vendo que se sustém nas ondas tanto.

...

Agora sobre as nuvens os subiam
As ondas de Neptuno furibundo,
Agora a ver parece que deciam
Às íntimas entranhas do Profundo;
Noto, Austro, Bóreas, Áquilo queriam
Arruinar a máquina do mundo;
A noite negra e feia se alumia
Co'os raios em que o Pólo todo ardia.

Luís Vaz de Camões
in Os Lusíadas (Canto Sexto)

À laia de prefácio e à laia de agradecimentos

É para mim motivo de grande satisfação ter tido como orientadores científicos deste trabalho o Professor Doutor Fernando Seabra Santos e o Professor Doutor Fernando Veloso Gomes. A ambos agradeço a disponibilidade e o interesse demonstrados.

Gostaria de referir que nenhum dos meus dois orientadores me impôs a sua Universidade para submeter esta dissertação. A preferência pela Universidade de Coimbra, sendo a Universidade do Porto a minha *alma mater*, foi da minha responsabilidade e tem duas razões. A primeira deriva do facto de, em minha opinião, a formação do docente universitário e investigador dever ser o mais diversificada possível. A segunda é menos racional e reside no facto de eu ser beirão, da Beira Alta, onde até pensamos ser mais beirões do que os outros, e como tal sentir um certo orgulho em poder ter um grau académico da Universidade de Coimbra.

Outras pessoas há que de uma forma ou de outra me ajudaram a concluir esta tese. A elas também desejo agradecer:

à Paula pelo apoio constante e pelo entusiasmo crítico com que acompanhou o meu trabalho;

aos meus Pais pela confiança que em mim sempre depositaram;

ao meu irmão que nos momentos mais difíceis soube dizer presente;

ao Prof. Manuel Malafaya Baptista pelo encorajamento e pelo entusiasmo com que me apoiou no início da minha carreira universitária;

ao Dr.-Eng. Antunes do Carmo pela disponibilização de resultados de ensaios laboratoriais e pela colaboração prestada ao longo de todo o trabalho;

ao Dr. Maarten W. Dingemans pela disponibilização de resultados de ensaios laboratoriais;

aos colegas e amigos Dr.-Eng. Álvaro Azevedo e Eng. Manuel Pacheco Figueiredo pelo facto de estarem sempre prontos para escutar as minhas dúvidas.

Finalmente, ao Ministério da Educação e à Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto agradeço a concessão de uma bolsa no âmbito do programa PRODEP.

Resumo

Neste trabalho investiga-se a aplicação do método dos elementos finitos à modelação numérica das ondas de superfície dispersivas de origem gravítica. Numa primeira parte é feita a dedução dos modelos de propagação a uma e duas dimensões horizontais de Boussinesq, Madsen & Sørensen, Seabra-Santos e Nadaoka & Beji. É utilizada uma parametrização unificadora dos modelos de águas profundas e pouco profundas. As características lineares de dispersão e de empolamento desses modelos são comparadas. Os requisitos em termos de condições fronteira e iniciais são também analisados. Numa segunda parte um método de elementos finitos tipo Petrov-Galerkin, com precisão de terceira ordem para a solução numérica das equações de Boussinesq a uma e duas dimensões horizontais, é desenvolvido. O mesmo método é válido, exactamente nas mesmas condições, para o modelo de Seabra-Santos. Elementos finitos são usados nos domínios do espaço e do tempo. A correcção da dispersão numérica e um mecanismo de dissipação altamente selectivo são introduzidos por intermédio de termos adicionais do tipo *upwind* e *crosswind* nas funções de peso. As funções de interpolação são trilineares no espaço-tempo, enquanto as funções de peso são bilineares no espaço e quadráticas no tempo. A integração no tempo resulta num esquema implícito a um passo, do tipo predictor-corrector. A análise de precisão é baseada numa expansão local em série de Taylor, resultando na equação diferencial equivalente. É também feita uma análise baseada numa solução linear em série de Fourier. A análise de estabilidade baseia-se no critério de von Neumann. O mesmo tipo de formulação foi desenvolvido para o modelo de Madsen & Sørensen, embora numa forma não consistente, com as mesmas características de precisão e estabilidade. Para o modelo de Nadaoka & Beji, recorreu-se a uma formulação de Bubnov-Galerkin baseada num esquema de interpolação mista no espaço. Os resultados numéricos foram comparados com soluções analíticas e com medições feitas em laboratório e disponíveis na literatura da especialidade. Os resultados mostraram uma boa correlação com as soluções analíticas e com as medições.

Abstract

In this research work the finite element method is applied to the numerical modelling of dispersive gravity surface water waves. Firstly the wave propagation models of Boussinesq, Madsen & Sørensen, Seabra-Santos and Nadaoka & Beji are deduced. A unifying parameterization for the deep and shallow water models is used. The characteristics of linear frequency dispersion and wave linear shoaling are compared for the referred models. The necessary boundary and initial conditions are also analysed. Secondly a Petrov-Galerkin finite element method with third-order accuracy for the numerical solution of the Boussinesq equations in one- and two-horizontal dimensions is presented. The same method, under exactly the same conditions, is equally valid for the discretization of the model by Seabra-Santos. Finite elements are used in both the space and the time domains. Dispersion correction and a highly selective dissipation mechanism are introduced through additional streamline upwind and crosswind terms in the weighting functions. The interpolation functions are trilinear in the space-time domain while the weighting functions are bilinear in space and quadratic in time. An implicit one-step time integration scheme results, which is of the predictor-corrector type. The accuracy analysis is performed by means of local expansion by Taylor series, from which an equivalent differential equation is obtained. An analysis based on a linear Fourier series solution is also done. The stability analysis is based on von Neumann's stability criterion. The same kind of formulation was applied to the model by Madsen & Sørensen, although in a non consistent way, with the same characteristics of accuracy and stability. For the model by Nadaoka & Beji, a Bubnov-Galerkin formulation based on a mixed interpolation scheme on space was used. The numerical results are compared to analytical solutions and to laboratory measurements available in the literature. In both cases a good agreement is shown.

Résumé

L'application de la méthode des éléments finis dans la modélisation numérique des ondes de gravité dispersives est investiguée dans cette thèse. Dans une première partie on présente la dérivation des modèles de propagation, à une ou deux dimensions horizontales, de Boussinesq, Madsen & Sørensen, Seabra-Santos et Nadaoka & Beji. Une paramétrisation unificatrice des modèles en eau profonde et en eau peu profonde est utilisée. Les caractéristiques linéaires de dispersion et d'amplification de ces modèles sont comparées. Les requis en ce qui concerne les conditions frontière et initiales sont aussi analysés. Dans une deuxième partie, une méthode d'éléments finis du type Petrov-Galerkin ayant une précision du troisième ordre pour la solution numérique des équations de Boussinesq en dimension horizontale 1 et 2 est développée. La même méthode est valable, exactement dans les mêmes conditions, pour le modèle de Seabra-Santos. Des éléments finis sont utilisés sur les domaines de l'espace et du temps. La correction de la dispersion numérique et un mécanisme de dissipation très sélectif sont introduits à travers des termes additionnels du genre *upwind* et *crosswind*, dans les fonctions poids. Les fonctions d'interpolation utilisées sont des fonctions trilinéaires, dans le domaine de l'espace-temps, et les fonctions poids sont bilinéaires dans l'espace et quadratiques dans le temps. L'intégration par rapport au temps aboutit dans un schéma implicite à un pas, dans le style prédicteur-correcteur. L'analyse de précision est basée sur un développement local en série de Taylor, résultant en une équation différentielle équivalente. On procède aussi à une analyse basée sur une solution linéaire en série de Fourier. L'analyse de la stabilité repose sur le critère de von Neumann. Une formulation du même genre a été développée pour le modèle de Madsen & Sørensen, bien que dans une forme inconsistante, ayant les mêmes caractéristiques de précision et de stabilité. Pour le modèle de Nadaoka & Beji, on a fait appel à une formulation de Bubnov-Galerkin basée sur un schéma d'interpolation mixte dans l'espace. Les résultats numériques obtenus ont été comparés aux solutions analytiques et à des mesures enregistrées en laboratoire et qui sont disponibles dans la littérature de la spécialité. Ils évaluent l'existence d'une bonne corrélation avec les solutions analytiques, d'une part, et les mesures expérimentales, d'une autre.

Índice

1	Introdução	1
1.1	Evolução da modelação em Engenharia Costeira	1
1.2	Modelos de água profunda a intermédia	2
1.2.1	Modelos de refração	2
1.2.2	Modelos de difracção	5
1.2.3	Modelos de refração-difracção	6
1.3	Modelos de água pouco profunda a intermédia	8
1.3.1	Modelos de propagação	8
1.3.2	Método dos elementos finitos	11
1.4	Organização e estrutura desta dissertação	12
2	Modelos Matemáticos	15
2.1	Teoria linear de Airy	15
2.1.1	Escoamento irrotacional	15
2.1.2	Teoria de ondas de amplitude infinitesimal, em profundidade constante	18
2.1.3	Validade da teoria linear	26
2.2	Modelos de ondas dinâmicas	28
2.2.1	Equações gerais	28
2.2.2	Modelo de Boussinesq	35
2.2.3	Modelo de propagação de Madsen & Sørensen	53
2.2.4	Modelo de propagação de Seabra-Santos	64
2.2.5	Modelo de propagação de Nadaoka & Beji	76
2.3	Modelos de ondas cinemáticas	94
2.3.1	Modelos KdV, RLW e ILW	94
2.3.2	Características de dispersão linear	100
2.3.3	Soluções analíticas	102

3	Condições Iniciais e de Fronteira	109
3.1	Condições de fronteira	109
3.1.1	Equação escalar multidimensional	109
3.1.2	Sistemas de equações	111
3.1.3	Tipos de fronteira	121
3.2	Condições iniciais	131
3.2.1	Modelo de refração-difracção	132
3.2.2	Caso de estudo	132
4	MEF: Esquemas de Bubnov-Galerkin	155
4.1	Introdução	155
4.2	Modelo de Boussinesq	155
4.2.1	Formulação residual de Bubnov-Galerkin	156
4.2.2	Erro local devido à discretização espacial	160
4.2.3	Discretização total	175
4.3	Modelo de Madsen & Sørensen	183
4.3.1	Formulação residual de Bubnov-Galerkin	183
4.3.2	Análise do erro local	185
4.4	Modelos de Seabra-Santos e Nadaoka & Beji	191
4.4.1	Modelo de Nadaoka & Beji	191
5	MEF: Esquemas de Petrov-Galerkin	195
5.1	Modelo RLW	195
5.1.1	Formulação de Petrov-Galerkin	196
5.1.2	Análise de precisão e estabilidade	200
5.1.3	Esquema predictor-corrector	209
5.2	Modelo de Boussinesq a 1DH	212
5.2.1	Formulação de Petrov-Galerkin	212
5.2.2	Análise de precisão e estabilidade	214
5.2.3	Esquema predictor-corrector	226
5.3	Modelo de Seabra-Santos a 1DH	230
5.4	Modelo de Madsen & Sørensen a 1DH	233
5.4.1	Formulação de Petrov-Galerkin	234
5.4.2	Análise de precisão e estabilidade	237
5.4.3	Esquema predictor-corrector não consistente	240
5.5	Modelo de Boussinesq a 2DH	242
5.5.1	Formulação de Petrov-Galerkin	243

5.5.2	Análise de precisão e estabilidade	245
5.5.3	Esquema predictor-corrector	251
6	Casos de Estudo	253
6.1	Ondas cinemáticas	253
6.1.1	Propagação de um solitão	253
6.1.2	Colisão de dois solitões	259
6.2	Modelos de onda dinâmica	260
6.2.1	Propagação de um solitão	260
6.2.2	Propagação de uma onda solitária sobre um talude e reflexão numa parede sólida	272
6.2.3	Propagação de uma onda sobre um quebra-mar submerso . . .	274
6.2.4	Propagação de um solitão ao longo de um canal com um pilar cilíndrico	313
7	Conclusões	325
	Bibliografia	329

Lista de Figuras

2.1	Secção vertical do escoamento e definição de variáveis.	17
2.2	Relação de dispersão linear de Airy.	21
2.3	Celeridade de fase linear de Airy.	21
2.4	Grupo de ondas com espectro de banda estreita.	23
2.5	Celeridade de grupo linear de Airy.	24
2.6	Coeficiente de variação do número de onda, α_k	25
2.7	Coeficiente de empolamento linear, α_s	26
2.8	Comparação das relações de dispersão. Airy e Boussinesq.	44
2.9	Coeficiente da parte imaginária de kh , $\varkappa h$, para o modelo de Boussinesq.	45
2.10	Comparação das celeridades de fase. Airy e Boussinesq.	46
2.11	Comparação das celeridades de grupo. Airy e Boussinesq.	46
2.12	Erro relativo da celeridade de fase do modelo de Boussinesq.	47
2.13	Erro relativo da celeridade de grupo do modelo de Boussinesq.	47
2.14	Coeficiente de variação relativa do número de onda: Boussinesq e Airy.	49
2.15	Coeficiente de empolamento linear: Boussinesq e Airy.	50
2.16	Coeficiente de empolamento linear: Boussinesq e Airy.	52
2.17	Comparação das relações de dispersão. Airy e Madsen & Sørensen.	55
2.18	Comparação das celeridades de fase. Airy e Madsen & Sørensen.	56
2.19	Erro relativo da celeridade de fase do modelo de Madsen & Sørensen.	56
2.20	Comparação das celeridades de grupo. Airy e Madsen & Sørensen.	57
2.21	Erro relativo da celeridade de grupo do modelo de Madsen & Sørensen.	58
2.22	Coeficiente de variação relativa do número de onda: Airy e Madsen & Sørensen.	62
2.23	Coeficiente de empolamento linear, α_s : Airy e Madsen & Sørensen.	63
2.24	Relações de dispersão dos modelos de Airy (—) e de Seabra-Santos para: $(kh)_0 = \pi/2$ (---); $(kh)_0 = \pi$ (---); $(kh)_0 = 2\pi$ (···).	74
2.25	Celeridade de fase dos modelos de Airy (—) e de Seabra-Santos para: $(kh)_0 = \pi/2$ (---); $(kh)_0 = \pi$ (---); $(kh)_0 = 2\pi$ (···).	74

2.26	Erro relativo da celeridade de fase do modelo de Seabra-Santos para: $(kh)_0 = \pi/2$ (—); $(kh)_0 = \pi$ (---); $(kh)_0 = 2\pi$ (···).	75
2.27	Celeridade de grupo dos modelos de Airy (—) e de Seabra-Santos para: $(kh)_0 = \pi/2$ (—); $(kh)_0 = \pi$ (---); $(kh)_0 = 2\pi$ (···).	75
2.28	Erro relativo da celeridade de grupo do modelo de Seabra-Santos para: $(kh)_0 = \pi/2$ (—); $(kh)_0 = \pi$ (---); $(kh)_0 = 2\pi$ (···).	76
2.29	Relações de dispersão dos modelos de Airy (—) e de Nadaoka & Beji para: $k_p h = \pi/2$ (—); $k_p h = \pi$ (---); $k_p h = 2\pi$ (···).	87
2.30	Celeridade de fase dos modelos de Airy (—) e de Nadaoka & Beji para: $k_p h = \pi/2$ (—); $k_p h = \pi$ (---); $k_p h = 2\pi$ (···).	87
2.31	Celeridade de grupo dos modelos de Airy (—) e de Nadaoka & Beji para: $k_p h = \pi/2$ (—); $k_p h = \pi$ (---); $k_p h = 2\pi$ (···).	88
2.32	Erro relativo da celeridade de fase do modelo de Nadaoka & Beji para: $k_p h = \pi/2$ (—); $k_p h = \pi$ (---); $k_p h = 2\pi$ (···).	88
2.33	Erro relativo da celeridade de grupo do modelo de Nadaoka & Beji para: $k_p h = \pi/2$ (—); $k_p h = \pi$ (---); $k_p h = 2\pi$ (···).	89
2.34	Relações de dispersão dos modelos de Airy (—) e de Nadaoka & Beji (o) com três componentes: $(kh)_1 = \pi/4$; $(kh)_2 = \pi$; $(kh)_3 = 3\pi$	91
2.35	Celeridade de fase dos modelos de Airy (—) e de Nadaoka & Beji (o) com três componentes: $(kh)_1 = \pi/4$; $(kh)_2 = \pi$; $(kh)_3 = 3\pi$	91
2.36	Celeridade de grupo dos modelos de Airy (—) e de Nadaoka & Beji (o) com três componentes: $(kh)_1 = \pi/4$; $(kh)_2 = \pi$; $(kh)_3 = 3\pi$	92
2.37	Erro relativo da celeridade de fase do modelo de Nadaoka & Beji (o) com três componentes: $(kh)_1 = \pi/4$; $(kh)_2 = \pi$; $(kh)_3 = 3\pi$	92
2.38	Erro relativo da celeridade de grupo do modelo de Nadaoka & Beji (o) com três componentes: $(kh)_1 = \pi/4$; $(kh)_2 = \pi$; $(kh)_3 = 3\pi$	93
2.39	Relações de dispersão linear dos modelos de onda cinemática	101
2.40	Modelo KdV: Componentes real (—) e imaginária (---) do número de onda, para os dois modos de propagação.	103
2.41	Modelo RLW: Componentes real (—) e imaginária (---) do número de onda, para os dois modos de propagação.	104
2.42	Ondas solitárias solução dos modelos KdV, RLW e ILW.	106
3.1	Fronteira do domínio e trajectórias.	110
3.2	Modos de propagação de uma onda num domínio 2DH.	112
3.3	Domínio de cálculo e profundidade em metros referida ao Z.H. utili- zados para o cálculo do plano de refacção.	125

3.4	Plano de refração e coeficiente de refração para uma onda proveniente do ponto S com período $T = 8$ s.	126
3.5	Domínio de cálculo e profundidade em metros referida ao Z.H. utilizados para a simulação da propagação da ondulação com o modelo de Berkhoff.	127
3.6	Fase da onda entre o ponto S e o Forte do Bugio, de acordo com o modelo de Berkhoff.	128
3.7	Altura da onda, em metros, entre o ponto S e o Forte do Bugio, de acordo com o modelo de Berkhoff.	129
3.8	Vista tridimensional da ondulação na vizinhança do Forte do Bugio. .	130
3.9	Domínio de cálculo.	133
3.10	Localização das sondas numéricas.	133
3.11	Simulação (A) após 8 s.	135
3.12	Simulação (B) após 8 s.	135
3.13	Simulação (A) após 144 s.	136
3.14	Simulação (B) após 120 s.	136
3.15	Séries temporais — sonda 1.	137
3.16	Séries temporais — sonda 2.	137
3.17	Séries temporais — sonda 3.	138
3.18	Séries temporais — sonda 4.	138
3.19	Séries temporais — sonda 5.	139
3.20	Componentes harmónicas da elevação da superfície livre — sonda 1. .	140
3.21	Componentes harmónicas da velocidade u — sonda 1.	141
3.22	Componentes harmónicas da velocidade v — sonda 1.	142
3.23	Componentes harmónicas da elevação da superfície livre — sonda 2. .	143
3.24	Componentes harmónicas da velocidade u — sonda 2.	144
3.25	Componentes harmónicas da velocidade v — sonda 2.	145
3.26	Componentes harmónicas da elevação da superfície livre — sonda 3. .	146
3.27	Componentes harmónicas da velocidade u — sonda 3.	147
3.28	Componentes harmónicas da velocidade v — sonda 3.	148
3.29	Componentes harmónicas da elevação da superfície livre — sonda 4. .	149
3.30	Componentes harmónicas da velocidade u — sonda 4.	150
3.31	Componentes harmónicas da velocidade v — sonda 4.	151
3.32	Componentes harmónicas da elevação da superfície livre — sonda 5. .	152
3.33	Componentes harmónicas da velocidade u — sonda 5.	153
4.1	Funções de interpolação globais.	159

4.2	Funções de forma locais lineares.	160
4.3	Funções de forma locais quadráticas.	160
4.4	Relações de dispersão com elementos lineares de dois nós.	172
4.5	Relações de dispersão com elementos quadráticos de três nós.	173
4.6	Relações de dispersão com interpolação mista — constante em ζ e linear em $\bar{u}$	174
4.7	Relações de dispersão com interpolação mista — linear em ζ e quadrática em u	175
4.8	Variação de $ G $ para $\theta = 2/3$	181
4.9	Variação de $ G $ para $\theta = 1/3$	181
4.10	Relações de dispersão com elementos lineares de dois nós.	190
5.1	Discretização espaço-temporal. 1, 2, 3 e 4: numeração local dos nós do e -ésimo elemento.	197
5.2	Funções de forma espaço-temporais.	197
5.3	Dependência linear em x e quadrática em t das funções de peso.	199
5.4	Bubnov-Galerkin: funções de peso lineares no espaço e quadráticas, com simetria, no tempo.	199
5.5	Petrov-Galerkin: funções de peso lineares no espaço e quadráticas, assimétricas, no tempo.	200
5.6	Malha regular a uma dimensão horizontal e no tempo.	201
5.7	Relações de dispersão dos esquemas numéricos para o modelo RLW, com $n = 2$ e $Cr = 1$: analítico (—); Petrov-Galerkin (—); Bubnov-Galerkin ($\cdots$).	207
5.8	Coeficiente de amplificação do esquema de Petrov-Galerkin aplicado ao modelo RLW: $Cr = 1$ (—); $Cr = 0.8$ (—); $Cr = 0.5$ ($\cdots$).	208
5.9	Coeficiente de amplificação do esquema de Petrov-Galerkin aplicado ao modelo RLW: $Cr = 2$ (—); $Cr = 4$ (—); $Cr = 6$ ($\cdots$).	209
5.10	Relações de dispersão dos esquemas numéricos para o modelo de Boussinesq, com $n = 2$ e $Cr = 0.9$	222
5.11	Relações de dispersão dos esquemas numéricos para o modelo de Boussinesq, com $n = 8$ e $Cr = 0.9$	223
5.12	Relações de dispersão dos esquemas numéricos para o modelo de Boussinesq, com $n = 5$ e $Cr = 1.5$	224
5.13	Coeficiente de propagação do esquema de Bubnov-Galerkin aplicado ao modelo de Boussinesq para $n = 2$ e $Cr = 0.9$. Raiz 1: (+ + +); raiz 2: ($\circ \circ \circ$).	225

5.14	Coeficiente de propagação do esquema de Bubnov-Galerkin aplicado ao modelo de Boussinesq para $n = 8$ e $Cr = 0.9$. Raiz 1: (+ + +); raiz 2: (o o o).	225
5.15	Coeficiente de propagação do esquema de Petrov-Galerkin aplicado ao modelo de Boussinesq para $n = 2$ e $Cr = 0.9$. Raiz 1: (+ + +); raiz 2: (o o o).	226
5.16	Coeficiente de propagação do esquema de Petrov-Galerkin aplicado ao modelo de Boussinesq para $n = 8$ e $Cr = 0.9$. Raiz 1: (+ + +); raiz 2: (o o o).	227
5.17	Coeficiente de propagação do esquema de Petrov-Galerkin aplicado ao modelo de Boussinesq para $n = 5$ e $Cr = 1.5$. Raiz 1: (+ + +); raiz 2: (o o o).	228
5.18	Malha regular de elementos finitos espaço-temporal num domínio 2DH.	244
5.19	Celeridade de fase da formulação de Petrov-Galerkin para o modelo de Boussinesq a 2DH, com $\phi = 45^\circ$, $n = 2$ e $Cr = \sqrt{2}/2$.	249
5.20	Coeficiente de amplificação do esquema de Petrov-Galerkin aplicado ao modelo de Boussinesq com $\phi = 45^\circ$, $n = 2$ e $Cr = \sqrt{2}/2$. Raiz 1: (+ + +); raiz 2: (o o o).	250
6.1	Modelo RLW, propagação de um solitão com $n = h/\Delta x = 2$. Soluções analítica ($\cdots$), PG ($—$) e BG ($--$).	255
6.2	Modelo RLW, propagação de um solitão com $n = h/\Delta x = 2$. Esteira dispersiva. Soluções analítica ($\cdots$), PG ($—$) e BG ($--$).	256
6.3	Modelo RLW. Posição do solitão após $t = 112.5$ s com $n = h/\Delta x = 2$ e 4 iterações.	257
6.4	Modelo RLW. Posição do solitão após $t = 112.5$ s com $n = h/\Delta x = 4$ e 2 iterações.	257
6.5	Modelo RLW. Colisão solitão-solitão.	258
6.6	Modelo RLW. Colisão solitão-solitão, cauda dispersiva.	259
6.7	Modelo de Boussinesq (PG). Propagação de um solitão com $\epsilon = 0.1$.	264
6.8	Modelo de Boussinesq (PG). Propagação de um solitão com $\epsilon = 0.1$. Forma da onda para $t = 200$ s: solução numérica ($—$); solução analítica ($--$).	264
6.9	Modelo de Boussinesq (PG). Propagação de um solitão com $\epsilon = 0.3$.	265
6.10	Modelo de Boussinesq (PG). Propagação de um solitão com $\epsilon = 0.3$. Forma da onda para $t = 160$ s.	266

6.11	Modelo de Boussinesq (PG). Propagação de um solitão com $\epsilon = 0.3$. Comparação dos perfis da onda numérica entre $t = 40$ (—) e $t = 160$ s (—).	266
6.12	Modelo de Boussinesq (PG) com dissipação. Propagação de um so- litão com $\epsilon = 0.3$	267
6.13	Modelo de Boussinesq (PG) com dissipação. Propagação de um so- litão com $\epsilon = 0.3$. Forma da onda para $t = 160$ s.	267
6.14	Modelo de Boussinesq (PG) com dissipação. Propagação de um so- litão com $\epsilon = 0.3$. Comparação dos perfis da onda numérica entre $t = 40$ (—) e $t = 160$ s (—).	268
6.15	Modelo de Madsen & Sørensen (PG). Propagação de um solitão com $\epsilon = 0.1$	269
6.16	Modelo de Madsen & Sørensen (PG). Propagação de um solitão com $\epsilon = 0.1$. Forma da onda para $t = 200$ s.	270
6.17	Modelo de Madsen & Sørensen (PG). Propagação de um solitão com $\epsilon = 0.3$	271
6.18	Modelo de Madsen & Sørensen (PG). Propagação de um solitão com $\epsilon = 0.3$. Forma da onda para $t = 160$ s: solução numérica (—); solução analítica (—).	271
6.19	Modelo de Madsen & Sørensen (PG). Propagação de um solitão com $\epsilon = 0.3$. Comparação dos perfis da onda numérica entre $t = 40$ (—) e $t = 160$ s (—).	272
6.20	Canal com parede reflectora.	273
6.21	Onda solitária reflectida numa parede sólida: série temporal da ele- vação da superfície livre para $x = 72.75$ m.	273
6.22	Caso A: séries temporais — modelo físico.	281
6.23	Caso A: séries temporais — modelo de Boussinesq, esquema de Bub- nov-Galerkin.	282
6.24	Caso A: séries temporais — modelo de Boussinesq, esquema de Pe- trov-Galerkin.	283
6.25	Caso A: séries temporais — modelo de Seabra-Santos, esquema de Petrov-Galerkin.	284
6.26	Caso A: séries temporais — modelo de Madsen & Sørensen, esquema de Bubnov-Galerkin.	285
6.27	Caso A: séries temporais — modelo de Madsen & Sørensen, esquema de Petrov-Galerkin.	286

6.28	Caso A: séries temporais — modelo de Nadaoka & Beji (3 componentes), esquema de Bubnov-Galerkin com interpolação mista.	287
6.29	Caso A: perfis longitudinais — modelo de Boussinesq, esquema de Petrov-Galerkin.	288
6.30	Caso A: perfis longitudinais — modelo de Boussinesq, esquema de Bubnov-Galerkin.	289
6.31	Caso A: perfis longitudinais — modelo de Seabra-Santos, esquema de Petrov-Galerkin.	290
6.32	Caso A: perfis longitudinais — modelo de Madsen & Sørensen, esquema de Bubnov-Galerkin.	291
6.33	Caso A: perfis longitudinais — modelo de Madsen & Sørensen, esquema de Petrov-Galerkin	292
6.34	Caso A: perfis longitudinais — modelo de Nadaoka & Beji (3 componentes), esquema de Bubnov-Galerkin com interpolação mista.	293
6.35	Caso A: séries temporais — modelo de Boussinesq, esquema de Bubnov-Galerkin. Resultados numéricos e experimentais.	294
6.36	Caso A: séries temporais — modelo de Boussinesq, esquema de Petrov-Galerkin. Resultados numéricos e experimentais.	295
6.37	Caso A: séries temporais — modelo de Seabra-Santos, esquema de Petrov-Galerkin. Resultados numéricos e experimentais.	296
6.38	Caso A: séries temporais — modelo de Madsen & Sørensen, esquema de Bubnov-Galerkin. Resultados numéricos e experimentais.	297
6.39	Caso A: séries temporais — modelo de Madsen & Sørensen, esquema de Petrov-Galerkin. Resultados numéricos e experimentais.	298
6.40	Caso A: séries temporais — modelo de Nadaoka & Beji (3 componentes), esquema de Bubnov-Galerkin com interpolação mista. Resultados numéricos e experimentais.	299
6.41	Caso C: séries temporais — modelo físico.	300
6.42	Caso C: séries temporais — modelo de Boussinesq, esquema de Petrov-Galerkin.	301
6.43	Caso C: séries temporais — modelo de Seabra-Santos, esquema de Petrov-Galerkin.	302
6.44	Caso C: séries temporais — modelo de Madsen & Sørensen, esquema de Petrov-Galerkin.	303
6.45	Caso C: séries temporais — modelo de Nadaoka & Beji (3 componentes), esquema de Bubnov-Galerkin com interpolação mista.	304

6.46	Caso C: perfis longitudinais — modelo de Boussinesq, esquema de Petrov-Galerkin.	305
6.47	Caso C: perfis longitudinais — modelo de Seabra-Santos, esquema de Petrov-Galerkin.	306
6.48	Caso C: perfis longitudinais — modelo de Madsen & Sørensen, esquema de Petrov-Galerkin	307
6.49	Caso C: perfis longitudinais — modelo de Nadaoka & Beji (3 componentes), esquema de Bubnov-Galerkin com interpolação mista.	308
6.50	Caso C: séries temporais — modelo de Boussinesq, esquema de Petrov-Galerkin. Resultados numéricos e experimentais.	309
6.51	Caso C: séries temporais — modelo de Seabra-Santos, esquema de Petrov-Galerkin. Resultados numéricos e experimentais.	310
6.52	Caso C: séries temporais — modelo de Madsen & Sørensen, esquema de Petrov-Galerkin. Resultados numéricos e experimentais.	311
6.53	Caso C: séries temporais — modelo de Nadaoka & Beji (3 componentes), esquema de Bubnov-Galerkin com interpolação mista. Resultados numéricos e experimentais.	312
6.54	Canal de ondas e posição das sondas.	313
6.55	Detalhe da malha de elementos finitos.	314
6.56	Séries temporais numéricas (—) e experimentais (—) para uma onda solitária contornando um cilindro vertical. Modelo de Boussinesq (PG). 316	
6.57	Vista tridimensional da elevação da superfície livre. Modelo de Boussinesq (PG). De cima para baixo: $t = 1.0$ s, $t = 1.5$ s, $t = 2.0$ s e $t = 2.5$ s.	317
6.58	Vista tridimensional da elevação da superfície livre. Modelo de Boussinesq (PG). De cima para baixo: $t = 3.0$ s, $t = 3.5$ s e $t = 4.0$ s.	318
6.59	Séries temporais numéricas (—) e experimentais (—) para uma onda solitária contornando um cilindro vertical. Modelo de Madsen & Sørensen (BG).	319
6.60	Vista tridimensional da elevação da superfície livre. Modelo de Madsen & Sørensen (BG). De cima para baixo: $t = 1.0$ s, $t = 1.5$ s, $t = 2.0$ s e $t = 2.5$ s.	320
6.61	Vista tridimensional da elevação da superfície livre. Modelo de Madsen & Sørensen (BG). De cima para baixo: $t = 3.0$ s, $t = 3.5$ s e $t = 4.0$ s.	321

6.62 Modelo de Boussinesq (PG). Campo de vorticidade (Hz) e campo de velocidade horizontal.	322
6.63 Modelo de Madsen & Sørensen (BG). Campo de vorticidade (Hz) e campo de velocidade horizontal.	323

Lista de Tabelas

2.1	Características de dispersão linear dos modelos KdV, RLW e ILW. . .	100
2.2	Características das soluções tipo solitão.	105
4.1	Erros de aproximação das celeridades de fase discretas.	170
4.2	Aproximantes de Padé multivariados $[0/2]$ para as celeridades discretas do modelo de Boussinesq.	171
4.3	Aproximantes $[2/2]$ de Padé para as celeridades discretas do modelo de Madsen & Sørensen.	189
6.1	Modelo de Boussinesq (PG). Propagação de um solitão com $\epsilon = 0.3$. .	265
6.2	Modelo de Boussinesq (PG) com dissipação. Propagação de um solitão com $\epsilon = 0.3$	268
6.3	Modelo de Madsen & Sørensen (PG). Propagação de um solitão com $\epsilon = 0.3$	270

Capítulo 1

Introdução

1.1 Evolução da modelação em Engenharia Costeira

O conhecimento das características das ondas em zonas costeiras é de primordial importância para o planeamento, implantação e dimensionamento de estruturas portuárias, de defesa costeira ou de exutores submarinos para a descarga de águas residuais. De igual forma o transporte de sedimentos ao longo da costa e a consequente modificação dos fundos resultam essencialmente da acção da ondulação.

A observação e o registo constante das características da ondulação — elevação da superfície livre, período e direcção de propagação — realizados pelas bóias instaladas ao longo das costas são indispensáveis para o conhecimento do clima de agitação de uma determinada área. Não são no entanto suficientes para determinar as consequências da interacção entre a ondulação e qualquer intervenção de protecção ou regularização costeira, nem da interacção entre a ondulação e os fundos, fora do local de implantação da bóia.

As primeiras localizações portuárias terão sido baías e estuários naturais, onde as populações se instalaram devido à simples observação empírica de que tais acidentes geográficos se encontravam protegidos da agitação marítima. As estruturas portuárias com protecção artificial resultaram da pressão económica e militar sobre os primeiros impérios da Antiguidade. O seu dimensionamento era então o resultado de anos de observação local das características da ondulação e de um processo contínuo de aprendizagem empírica, em resultado da destruição ou galgamento das estruturas e sua reconstrução.

A formalização do cálculo diferencial por Leibniz (1646–1716) e Newton (1642–1727), e o seu desenvolvimento no século seguinte por Euler (1707–1783) e Lagrange

(1736–1813) permitiram que, no século XIX, fossem desenvolvidos modelos diferenciais-integrais expressando leis básicas da mecânica dos fluidos: conservação da massa, conservação da quantidade de movimento e conservação da energia. São exemplos disto a equação de Laplace em 1810 e as equações de Navier-Stokes em 1821/1845.

O desenvolvimento de modelos matemáticos para o escoamento dos fluidos e, nomeadamente, para a propagação das ondas permitiu a compreensão dos fenómenos de reflexão, difracção, refracção, empolamento, dissipação da energia e dispersão das ondas. Em domínios de geometria simples e condições de fronteira simples foi então possível determinar soluções analíticas.

Nos casos mais complexos, a solução analítica revelou-se quase impossível de obter e foi portanto necessário recorrer a outras técnicas. As análises fenomenológica e dimensional das equações permitiu identificar os processos físicos dominantes em cada situação e estabelecer relações de escala entre as diversas grandezas cinemáticas e dinâmicas. Estava aberto o caminho à utilização de modelos reduzidos em Engenharia Costeira e, após conveniente simplificação das equações de conservação, à utilização de modelos numéricos para a determinação de soluções aproximadas. A ideia básica num método numérico é a discretização da equação diferencial-integral por forma a obter um sistema de equações algébricas com um número finito de incógnitas. Infelizmente, num método numérico, o erro diminui com o aumento do número de variáveis e, portanto, com o aumento do trabalho necessário para o cálculo da solução. Até aos anos 60–70 do século XX, o custo e a velocidade de cálculo dos computadores limitou a utilização dos modelos numéricos em Engenharia Costeira, enquanto, um pouco por todo o mundo, se desenvolviam modelos reduzidos extremamente complexos — recorde-se o modelo do Canal da Mancha do IMG, Grenoble (FR), instalado sobre uma placa giratória por forma a reproduzir o efeito de Coriolis. Nas duas últimas décadas a tendência inverteu-se. Cada vez mais se recorre aos modelos numéricos para o estudo das condições de implantação de estruturas marítimas, enquanto a utilização dos modelos físicos se confina a situações de laboratório para o estudo específico de determinados fenómenos e/ou para a calibração e validação de modelos numéricos.

1.2 Modelos de água profunda a intermédia

1.2.1 Modelos de refracção

Um trem de ondas monocromáticas, propagando-se sobre uma batimetria com um pequeno gradiente de profundidades ou sobre uma corrente com um gradiente ho-

rizontal de velocidades, sofre uma variação gradual da celeridade de fase. Daqui resulta uma variação na distância entre linhas de igual fase, na sua orientação e na amplitude da onda entre diferentes pontos do domínio, num processo simultâneo de refração e empolamento da onda.

Os primeiros modelos numéricos de propagação da onda do largo até à costa basearam-se nas leis geométricas de Snellius e na premissa de conservação do fluxo de energia entre dois raios de onda (Griswold, 1963, Munk e Arthur, 1952). Skovgaard et al. (1975) introduziram o efeito da dissipação por atrito no fundo nestas equações.

Uma abordagem diferente consiste numa aproximação assintótica (Keller, 1958) baseada na amplitude infinitesimal da onda, com declive $\epsilon = a/\lambda \ll 1$, na sua irrotacionalidade e na expansão do potencial de velocidades em potências de um pequeno parâmetro definido por

$$\mu = \frac{\nabla h}{k h} \ll 1, \quad (1.1)$$

sendo $a(x, y)$ a amplitude local da onda, $\lambda(x, y)$ o comprimento local da onda, $h(x, y)$ a profundidade local medida desde o fundo até ao nível da água em repouso e $k = 2\pi/\lambda$ o número de onda local. Após aplicação às equações fundamentais da hidrodinâmica, resulta uma equação de conservação da acção da onda, E/ω :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E}{\omega} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{E}{\omega} \mathbf{C}_g \right) = 0, \quad (1.2)$$

onde E é a energia da onda por unidade de área, $\mathbf{C}_g$ é o vector celeridade de grupo e $\omega = 2\pi/T$ é a frequência angular da onda, inversamente proporcional ao seu período T , que se relaciona com k através da relação de dispersão

$$\omega^2 = g k \tanh k h. \quad (1.3)$$

Para além da equação (1.2), resultam ainda uma condição de irrotacionalidade do vector número de onda, $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$,

$$\nabla \times \mathbf{k} = 0, \quad (1.4)$$

sendo $k = \|\mathbf{k}\|$, e uma equação de conservação das linhas de igual fase das ondas,

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial t} + \nabla \omega = 0. \quad (1.5)$$

Admitindo que a ondulação é uniforme no tempo, i.e. $\partial \mathbf{k} / \partial t = 0$, de onde se conclui ser ω constante, a equação (1.2) transforma-se na equação de conservação da energia

e portanto os dois métodos são equivalentes. Da equação de conservação da energia determina-se a variação da amplitude da onda ao longo do raio de onda.

Definindo uma função de fase da onda $S = S(x, y, t)$ tal que

$$\omega = \frac{\partial S}{\partial t}, \quad (1.6a)$$

$$\mathbf{k} = \nabla S, \quad (1.6b)$$

obtem-se, do quadrado de (1.6a), a equação eiconal ou do raio de onda:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 = k^2. \quad (1.7)$$

Esta é uma equação hiperbólica e da sua solução resulta a trajectória do raio de onda, também designado por ortogonal por ser uma curva normal em cada ponto às linhas de igual fase. A derivação detalhada destas equações encontra-se em Mei (1994, página 59 e seguintes) e Dingemans (1997a). Mei (1994) inclui ainda a solução analítica para alguns casos interessantes. O processo numérico de cálculo das ortogonais encontra-se descrito com bastante detalhe em Afonso Covas (1981, 1984).

A inclusão da refração por efeito do gradiente horizontal de correntes é extremamente importante no caso de embocaduras de rios ou na entrada de portos. Longuet-Higgins e Stewart (1960, 1961) e Whitham (1962) produziram os primeiros trabalhos nesta área. Peregrine (1976), Mei (1994) e Dingemans (1997a) apresentam uma revisão da teoria. Neste caso admite-se que a presença da corrente afecta a propagação da onda sem ser ela própria afectada por esta. Sendo $\mathbf{U} = (U_x, U_y)$ o vector velocidade da corrente e $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ o vector número de onda, a frequência angular intrínseca da onda, que resulta do efeito de Doppler, define-se como sendo

$$\omega' = \omega - \mathbf{U} \cdot \mathbf{k}, \quad (1.8)$$

obedecendo à relação de dispersão

$$\omega'^2 = g k \tanh k h. \quad (1.9)$$

A equação de conservação da acção da onda é agora

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E}{\omega'} \right) + \nabla \cdot \left[(\mathbf{U} + \mathbf{C}_g) \frac{E}{\omega'} \right] = 0. \quad (1.10)$$

Uma análise dos métodos numéricos desenvolvidos para o cálculo dos raios de onda para a refração sob o efeito de correntes pode ser encontrada em Dingemans (1978) e Afonso Covas (1984). Jonsson e Christoffersen (1984) desenvolveram um modelo que inclui os efeitos simultâneos da refração, devidos à batimetria e à corrente, e da dissipação por atrito no fundo.

Finalmente, estes métodos tornaram-se mais abrangentes ao incluírem ondas irregulares (Abernethy e Gilbert, 1975), recorrendo a esquemas de *backward-tracing* para determinação da orientação e origem das diferentes componentes em águas profundas. Este método obriga ao cálculo de um grande número de raios de onda e limita os resultados a um único ponto.

A vantagem da utilização de técnicas de cálculo da solução sobre os raios de onda resulta do carácter hiperbólico das equações (1.2) e (1.7) e da elevada precisão dos esquemas baseados no método das características. Como desvantagem resulta o facto de a solução só ser conhecida sobre as ortogonais. A integração da equação de irrotacionalidade do número de onda e da equação de conservação da energia sobre uma grelha de diferenças finitas, permite cobrir toda a região de estudo, embora à custa de uma diminuição da precisão da solução (Dalrymple, 1988).

1.2.2 Modelos de difracção

A difracção da onda é um fenómeno resultante da presença de obstáculos, naturais ou artificiais, que perturbam o campo de ondas incidentes dando origem a ondas que irradiam da superfície do obstáculo. A influência de um obstáculo sobre a ondulação depende da razão entre um comprimento característico do obstáculo e o comprimento da onda. Por exemplo, na análise das solicitações exercidas pela ondulação sobre estruturas, é geralmente considerado que o efeito da difracção só se torna importante quando essa razão excede 20% (cf. Tickell, 1993).

Em águas de profundidade constante, a difracção da onda é regida pela equação de Helmholtz

$$\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = 0, \quad (1.11)$$

onde φ é um potencial complexo de velocidades para uma onda monocromática, tal que

$$\mathbf{u} = \Re (\nabla \varphi (\mathbf{x}, t) e^{-i\omega t}), \quad (1.12)$$

sendo $\mathbf{u}$ o vector velocidade, $\mathbf{x}$ o vector posição, i a unidade imaginária e onde $\Re$ representa a parte real. A equação (1.11) é do tipo elíptico e portanto é necessária a definição de condições de fronteira em todos os pontos desta. As condições de frontei-

ra mais simples serão a velocidade nula na direcção normal às fronteiras sólidas, i.e. $\partial\varphi/\partial\mathbf{n} = 0$, e uma condição de radiação nas fronteiras abertas (Sommerfeld, 1958). Desta forma, o fenómeno de reflexão nas fronteiras laterais encontra-se incluído no modelo.

Obviamente a difracção da onda é extremamente importante nas proximidades de estruturas costeiras, influenciando de forma significativa a propagação da ondulação para o interior dos portos e a oscilação no seu interior induzida por ondas de longo período. Mei (1994) apresenta algumas soluções analíticas para a difracção da onda e a oscilação por ela induzida em estruturas com geometria simples: quebra-mares semi-indefinidos, portos rectangulares ou circulares com entradas em costas rectilíneas, etc. Lee (1971) desenvolveu uma técnica analítica para a determinação das oscilações em portos de geometria arbitrária e abertos ao exterior com fronteiras totalmente reflectoras. Embora não apresentada dessa forma, a técnica de Lee é de facto do tipo elementos fronteira.

Dadas as características de elipticidade da equação de Helmholtz e a facilidade da sua formulação em termos variacionais, torna-se bastante atractiva a sua resolução pelo método dos elementos finitos (Bettess et al., 1984, Taylor et al., 1969, Thompson e Pinsky, 1995) ou pelo método dos elementos fronteira, tirando partido da homogeneidade do meio (Afonso Covas, 1991, Doubert e Lebreton, 1965).

1.2.3 Modelos de refracção-difracção

O primeiro modelo matemático com consideração simultânea dos efeitos da difracção e da refracção por fundos suaves, *mild slope equation*, foi desenvolvido por Berkhoff (1972):

$$\nabla \cdot (C C_g \nabla \varphi) + \omega^2 \frac{C_g}{C} \varphi = 0. \quad (1.13)$$

Nesta equação, $C = \omega/k$ é a celeridade de fase e $C_g = d\omega/dk$ é a celeridade de grupo. Sendo uma equação elíptica, facilmente se obtém uma formulação variacional para o problema com a inclusão de uma forma natural das condições fronteira. Assim o potencial φ da onda será tal que minimizará o funcional

$$\Pi = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left(C C_g \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi - \omega^2 \frac{C_g}{C} \varphi^2 \right) d\Omega - \int_{\Gamma} \frac{1}{2} i \omega \alpha C_g \varphi^2 d\Gamma, \quad (1.14)$$

onde α é um coeficiente de reflexão. Vários esquemas de elementos finitos foram desenvolvidos para a resolução da equação (1.14). Berkhoff (1972) utiliza funções de interpolação polinomiais no interior do domínio e elementos de fronteira para definir a condição de radiação no infinito. Bettess e Zienkiewicz (1977) recorrem

a elementos infinitos para impor a condição de radiação. Kawahara e Kashiya (1985) utilizam funções de interpolação trigonométricas no interior do domínio e elementos de fronteira no exterior, o que possibilita o cálculo das variações apenas sobre as fronteiras inter-elementos e exteriores. Embora estes últimos autores tenham aplicado o seu método ao modelo de Helmholtz, nada impede a sua extensão ao modelo de Berkhoff.

Uma formulação de elementos finitos baseada no funcional (1.14), com condições de radiação do tipo amortecedor de primeira e segunda ordem (Bando et al., 1984), foi desenvolvida e aplicada pelo autor em estudos de agitação e ressonância no porto de Leixões (Avilez-Valente, 1996, Avilez-Valente e Veloso-Gomes, 1992). Um esquema semelhante é apresentado por Fortes (1993).

A interacção onda-corrente foi introduzida por Booij (1981), com posterior correcção por Kirby (1983, 1984), incluindo a dissipação de energia por atrito no fundo e devida à rebentação (De Girolamo et al., 1988). Desta formulação resulta, na forma dependente do tempo, a chamada *extended mild slope equation*:

$$\frac{D^2\phi}{Dt^2} - \nabla \cdot (C C_g \nabla \phi) + (\nabla \cdot \mathbf{U}) \frac{D\phi}{Dt} + \left(\omega'^2 - k^2 C C_g \right) = -W \frac{D\phi}{Dt}, \quad (1.15)$$

onde $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{U} \cdot \nabla$ e W é uma função de dissipação de energia. O potencial complexo de velocidades é neste caso tal que

$$\mathbf{u} = \Re(\nabla \phi). \quad (1.16)$$

Na forma harmónica, a equação (1.15) escreve-se

$$\begin{aligned} \mathbf{U} \cdot \nabla (\mathbf{U} \cdot \nabla \varphi) + (\nabla \cdot \mathbf{U}) (\mathbf{U} \cdot \nabla \varphi) - 2i\omega \mathbf{U} \cdot \nabla \varphi - \nabla \cdot (C C_g \nabla \varphi) \\ + \left(\omega'^2 - \omega^2 - k^2 C C_g - i\omega \nabla \cdot \mathbf{U} \right) \varphi = i\omega W \varphi - W \mathbf{U} \cdot \nabla \varphi. \end{aligned} \quad (1.17)$$

A presença da corrente e da dissipação no fundo obriga a um processo iterativo para a obtenção de uma solução para esta equação (Kostense et al., 1986).

Uma derivação completa das equações (1.15) e (1.17) e uma análise das condições fronteira necessárias, assim como das técnicas de cálculo dos diversos termos, foi elaborada por Dingemans (1997a).

Dependendo da grandeza relativa de $\|\mathbf{U}\|^2$ e de CC_g , a equação (1.17) terá carácter hiperbólico, parabólico ou elíptico. Vários métodos de elementos finitos (e.g. Hurdle et al., 1989) e de diferenças finitas (e.g. Panchang et al., 1991) foram desenvolvidos para as equações do tipo elíptico, enquanto que para a forma

hiperbólica sem refração devida à corrente e sem dissipação foram sugeridos esquemas por Copeland (1985) e Madsen e Larsen (1987).

Booij (1983) comparou o coeficiente de reflexão num fundo inclinado, calculado usando o modelo de Berkhoff, com a solução de um modelo tridimensional, concluindo que os resultados são satisfatórios para inclinações até 1:3. Para inclinações superiores, os valores do modelo (1.13) são inferiores aos analíticos. Massel (1993), recorrendo a um método de Galerkin modificado, estendeu o modelo de refração-difração a fundos de inclinação mais elevada, introduziu termos proporcionais à curvatura do fundo e incluiu modos evanescentes entre as soluções possíveis.

A modelação da refração-difração simultânea de ondas irregulares pode ser feita para espectros de banda estreita por intermédio das equações com dependência do tempo (1.15) ou, para qualquer espectro, por sobreposição das soluções para as diversas componentes harmónicas (Avilez-Valente, 1994, 1996).

Os modelos de refração-difração deste tipo só são válidos para ondas de pequeno declive, $\epsilon \ll 1$, e número de Ursell bastante pequeno, $Ur = (ka)/(kh)^3 < 1/3$ (cf. Dean e Dalrymple, 1991, páginas 303 e 304), correspondendo a situações em que os efeitos dispersivos predominam sobre os não lineares. Os resultados deste tipo de modelos podem no entanto ser utilizados como condições fronteira e inicial para modelos não lineares, a aplicar num domínio de área mais reduzida (e.g. Seabra-Santos et al., 1997).

1.3 Modelos de água pouco profunda a intermédia

1.3.1 Modelos de propagação

Os modelos de água pouco profunda são, classicamente, baseados num perfil vertical da velocidade horizontal polinomial em z , sendo z a coordenada espacial vertical. Os três modelos de referência são o de Saint-Venant (1871), não dispersivo e com não linearidade de primeira ordem, o de Boussinesq (1872), com efeitos dispersivos e não lineares de primeira ordem, e o de Serre (1953), igualmente com dispersividade de primeira ordem, mas com efeitos não lineares de ordem superior.

O modelo de Saint-Venant, apesar das suas limitações de validade (cf. Seabra-Santos et al., 1988, Ursell, 1953), constitui o modelo de preferência para a modelação de marés e correntes em zonas costeiras (cf. Massel, 1989, capítulo 8):

O modelo de Boussinesq para profundidades variáveis (Peregrine, 1967) tem demonstrado ser capaz de descrever a propagação de ondas em zonas costeiras. Nomeadamente, Freilich e Guza (1984) e Elgar e Guza (1985), recorrendo a uma

formulação deste modelo no domínio da frequência, mostraram que a propagação do espectro de um trem de ondas de incidência normal é correctamente simulada, enquanto que Elgar e Guza (1986) e Elgar et al. (1990) provaram que o mesmo acontece para o bi-espectro e para o momento de terceira ordem da elevação da superfície livre. A capacidade de modelação combinada dos efeitos de refração e de difracção é sublinhada nos trabalhos de Liu et al. (1985) e Rygg (1988).

O modelo de Serre é de utilização menos comum, devido aos problemas acrescidos com o tratamento dos termos não lineares. Uma formulação para batimetrias variáveis foi desenvolvida por Seabra-Santos (1985) e aplicada via um esquema implícito de diferenças finitas (Antunes do Carmo et al., 1993a). Drago (1992) derivou também este modelo para batimetrias variáveis, recorrendo a um método de elementos finitos para a sua aplicação (Brocchini et al., 1992, 1994).

O modelo de Boussinesq derivado por Peregrine (1967) apresenta características de dispersão linear que limitam a sua aplicação a zonas de pequena profundidade relativa, i.e. $kh < \pi/2$. De facto, o quadrado da celeridade de fase deste modelo é igual ao aproximante $[0/2]$ de Padé do quadrado da celeridade de fase da teoria linear de Airy:

$$\frac{1}{gh} [0/2] C_{\text{Airy}}^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{3} (kh)^2}. \quad (1.18)$$

Madsen e Sørensen (1992) melhoraram as propriedades dispersivas deste modelo através da introdução de uma perturbação de ordem superior no termo dispersivo. Desta forma, o quadrado da celeridade de fase do novo modelo é igual ao aproximante $[2/2]$ de Padé do quadrado da celeridade de fase da teoria linear de Airy:

$$\frac{1}{gh} [2/2] C_{\text{Airy}}^2 = \frac{1 + \frac{1}{15} (kh)^2}{1 + \frac{2}{5} (kh)^2}. \quad (1.19)$$

Nwogu (1993), utilizando como variáveis a elevação da superfície livre e a velocidade horizontal a uma profundidade arbitrária, z_α , obteve um modelo cujas características dispersivas podem ser optimizadas em função da gama de profundidades relativas desejada:

$$\frac{C_{\text{Nwogu}}^2}{gh} = \frac{1 - \left(\alpha + \frac{1}{3}\right) (kh)^2}{1 - \alpha (kh)^2}, \quad (1.20a)$$

sendo

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{z_\alpha}{h}\right)^2 + \frac{z_\alpha}{h}. \quad (1.20b)$$

Seabra-Santos (1994), com base no método das perturbações, derivou um modelo com características dispersivas exactas para uma profundidade relativa de referência, $(kh)_0$:

$$\frac{C_{\text{Seabra}}^2}{gh} = \frac{1}{1 + \check{\beta}(kh)^2}, \quad (1.21a)$$

com

$$\check{\beta} = \frac{1}{(kh)_0^2} \left(\frac{(kh)_0}{\tanh(kh)_0} - 1 \right). \quad (1.21b)$$

Qualquer um destes modelos com características dispersivas melhoradas (Madsen e Sørensen, 1992, Nwogu, 1993, Seabra-Santos, 1994) recorre, no máximo, à terceira derivada, constituindo uma aproximação de ordem $\mathcal{O}(\epsilon^2, \epsilon(kh)^2, (kh)^4)$ das equações gerais da Mecânica dos Fluidos. Incluindo derivadas de quinta ordem, Schröter et al. (1994) obtiveram formulações cujo quadrado da celeridade de fase é igual ao aproximante $[4/4]$ do quadrado da celeridade de fase de Airy. Recorrendo a uma técnica semelhante Seabra-Santos (1995) optimizou o seu modelo anterior (Seabra-Santos, 1994), por forma a ter características de dispersão exactas para uma profundidade relativa de referência, $(kh)_0$, enquanto que no limite, quando $(kh)_0 \rightarrow 0$, o quadrado da celeridade de fase é igual ao aproximante $[4/4]$ do quadrado da celeridade de fase de Airy.

Schäffer e Madsen (1995), por perturbação dos termos dispersivos nas equações de Boussinesq, obtiveram um modelo com apenas terceiras derivadas mas com um aproximante $[4/4]$ de Padé do quadrado da celeridade de fase. Merckelbach (1995), cujo trabalho é descrito em Dingemans (1997b, página 559 e seguintes), recorre à correspondência entre os operadores diferenciação e multiplicação nos espaços físico e de Fourier, respectivamente, para obter um modelo com apenas terceiras derivadas, mas com características dispersivas semelhantes e com características de empolamento linear optimizadas.

Os modelos acima citados permitem modelar a propagação da agitação até águas relativamente profundas. No entanto isto não significa que apresentem elevada precisão na modelação das características cinemáticas do movimento. Não é possível, recorrendo a expansões polinomiais em z do perfil vertical de velocidades, obter uma boa representação deste perfil em águas profundas. Nadaoka et al. (1997) ultrapassam esse problema introduzindo funções de distribuição vertical das velocidades horizontais do tipo co-seno hiperbólico, por analogia com a teoria linear de Airy, e aplicando a formulação de Galerkin às equações de conservação da quantidade de movimento. Com um número reduzido de componentes na função de distribuição vertical de velocidades, aqueles autores conseguem obter características de dispersão

linear ótimas numa gama extremamente larga de profundidades relativas.

1.3.2 Método dos elementos finitos

As primeiras aplicações do método dos elementos finitos aos modelos de ondas longas (modelo de Saint-Venant) devem-se a Grotkop (1973) e a Taylor e Davis (1975). Os resultados obtidos revelaram-se no entanto demasiado distorcidos por dissipação numérica excessiva, no primeiro caso, e por sobre-especificação das condições de fronteira, no segundo. Também bastante cedo se reconheceu (Gray e Lynch, 1977) que os esquemas de Bubnov-Galerkin aplicados às equações de Saint-Venant na sua forma primitiva dão origem a oscilações com comprimento de onda $\lambda = 2\ell$, sendo ℓ a distância característica entre dois pontos da malha. Este tipo de problemas é evitado na discretização por diferenças finitas recorrendo ao cálculo das diferentes variáveis computacionais em diferentes pontos da malha (Batteen e Han, 1981). No caso da discretização por elementos finitos, três métodos revelaram-se eficazes para a eliminação destas oscilações: a utilização de uma equação de onda em vez da equação da continuidade (Lynch e Gray, 1979); formulações de Taylor-Galerkin (Peraire et al., 1986, Teixeira, 1994); formulações de Petrov-Galerkin (Bova e Carey, 1996, Katopodes, 1984a,b).

As aplicações numéricas dos modelos de ondas dispersivas têm sido historicamente baseadas no método das diferenças finitas (e.g. Abbott et al., 1984, 1978, Antunes do Carmo et al., 1993a, Wei e Kirby, 1995). Aplicações a modelos de ondas dispersivas baseadas no método dos elementos finitos encontram-se usualmente em modelos de onda cinemática: KdV e RLW (e.g. Alexander e Morris, 1979, Carey e Shen, 1991, Gardner e Gardner, 1990, Sanz-Serna e Christie, 1981). De entre as aplicações de elementos finitos a ondas dinâmicas, modeladas pelas equações de Boussinesq, citam-se os trabalhos de Katopodes e Wu (1984, 1987), com formulações de Petrov-Galerkin e de Taylor-Galerkin, respectivamente, a uma dimensão horizontal, e de Antunes do Carmo e colaboradores (Antunes do Carmo e Seabra-Santos, 1996, Antunes do Carmo et al., 1993b), a duas dimensões horizontais com uma formulação de Bubnov-Galerkin. No que concerne a modelos tipo Boussinesq com dispersão de frequência melhorada, há que citar o trabalho recente de Walkley e Berzins (1999) para as equações de Nwogu (1993) com uma formulação de Bubnov-Galerkin a uma dimensão horizontal. Nas aplicações ao modelo de Serre, a única referência conhecida são os trabalhos já citados (Brocchini et al., 1992, 1994) em que não se explicita a formulação utilizada.

As formulações de Bubnov-Galerkin para modelos de ondas dispersivas apresen-

tam problemas de instabilidade numérica (Avilez-Valente e Seabra-Santos, 1997) e baixa precisão. Esse tipo de problemas pode ser ultrapassado pelo recurso a uma formulação de Petrov-Galerkin. Um dos trabalhos pioneiros na aplicação de esquemas de Petrov-Galerkin em elementos finitos deve-se a Christie et al. (1976), que o aplicaram à solução numérica do escoamento permanente de fluidos incompressíveis. Aqueles autores mostraram que, desta forma, era possível, não só obter soluções livres de oscilações de origem numérica através da introdução de um termo dissipativo de elevada ordem, como também aumentar a precisão por diminuição do erro de dispersão numérica. Posteriormente um imenso trabalho foi desenvolvido por diversos autores, dos quais se destacam Hughes e colaboradores (Brooks e Hughes, 1982, Hughes, 1978, Hughes e Franca, 1987, Hughes et al., 1986a, 1987, Hughes e Mallet, 1986a,b, Hughes et al., 1986b, Hughes e Tezduyer, 1984, Mizukami e Hughes, 1985) e Johnson e colaboradores (Johnson et al., 1984, Johnson e Szepessy, 1986), na aplicação do método às equações de Euler e de Navier-Stokes para escoamentos compressíveis e incompressíveis. Extremamente interessante é o trabalho de Yu e Heinrich (1986, 1987), desenvolvido para problemas de advecção-difusão, pela possibilidade de obter soluções com elevada precisão. No campo dos escoamentos com superfície livre referem-se os já citados trabalhos de Katopodes (1984a,b) e Bova e Carey (1996). Esta formulação tem sido bastante utilizada na solução numérica das equações de ondas cinemáticas dispersivas (e.g. Alexander e Morris, 1979, Sanz-Serna e Christie, 1981), embora recorrendo a técnicas de difícil extensão a problemas de ondas dinâmicas em domínios 2DH, nomeadamente pelo recurso a funções de interpolação ou de peso com continuidade C^1 . No caso do modelo de Boussinesq, o esquema de Katopodes e Wu (1984), de terceira ordem após discretização no espaço, tem apenas precisão de primeira ordem após a discretização temporal.

1.4 Organização e estrutura desta dissertação

O fosso nos domínios de aplicação dos modelos matemáticos de água profunda (ondas curtas) e de água pouco profunda (ondas longas) foi consideravelmente reduzido pelo aparecimento de resultados da investigação realizada na última década (cf. §1.3.1), nomeadamente como resultado dos programas MAST da União Europeia. As dificuldades inerentes às diferentes parametrizações da não linearidade utilizadas pelos modelos de tipo *mild-slope equation* e pelos modelos de tipo Boussinesq foram ultrapassadas pela introdução de uma nova definição para esse parâmetro (Beji, 1995).

As aplicações numéricas, de alguns dos modelos referidos, baseadas no método das diferenças finitas, são agora cada vez mais frequentes. Por outro lado as aplicações baseadas no método dos elementos finitos são ainda bastante limitadas. Este método apresenta no entanto vantagens inerentes à sua própria formulação que o tornam bastante atractivo: fácil discretização de geometrias complexas; adaptatividade da malha de cálculo em função da própria solução; elegante formalismo matemático. O objectivo último deste trabalho de investigação é o desenvolvimento de uma formulação de Petrov-Galerkin do método dos elementos finitos, simultaneamente estável e de elevada precisão para os modelos de tipo Boussinesq.

No Capítulo 2 desta dissertação, as equações adimensionais para os escoamentos em superfície livre são deduzidas com recurso ao método das perturbações e ao parâmetro de não linearidade de Beji (1995). Daqui resulta também uma nova definição para o parâmetro de dispersão. Estabelecem-se então as equações dos modelos dispersivos não lineares de Boussinesq (Peregrine, 1967), Madsen e Sørensen (1992), Seabra-Santos (1994) e Nadaoka et al. (1997) para ondas dinâmicas a uma e duas dimensões horizontais. As características lineares de dispersão de frequência e de empolamento são comparadas com as da teoria de Stokes de primeira ordem (teoria de Airy). Finalmente, o estudo refere ainda alguns modelos para a propagação de ondas cinemáticas, cuja propagação se faz num só sentido e que possuem soluções analíticas. É o caso do modelo de Korteweg-de Vries (KdV), do modelo *Regularized Long Wave* (RLW), e do modelo desenvolvido separadamente por Beji e Nadaoka (1996) e por Dingemans (1997b), que se designará por *Improved Long Wave* (ILW).

O Capítulo 3 contém uma análise das condições de fronteira e iniciais necessárias e/ou suficientes para a modelação da propagação de ondas de gravidade dispersivas. Recorrendo ao estudo das características, comparam-se as condições de fronteira para os modelos de Saint-Venant, Boussinesq e Madsen & Sørensen. No que concerne às condições iniciais, estuda-se a possibilidade de aplicação de uma solução do modelo linear de Berkhoff (cf. §1.2.3) como condição inicial para o modelo de Boussinesq.

No Capítulo 4 faz-se uma análise das características dispersivas de vários esquemas de Bubnov-Galerkin de elementos finitos, aplicados às equações do tipo Boussinesq para a propagação de ondas de gravidade dispersivas em águas pouco profundas. Procede-se a uma análise de Fourier das equações linearizadas para determinar as relações de dispersão, incluindo as celeridades de fase e de grupo, dos diversos esquemas. A sua precisão é investigada recorrendo à equação diferencial equivalente. Abordam-se quatro esquemas de Bubnov-Galerkin, com diferentes graus de interpolação. Conclui-se que os esquemas baseados nas equações primiti-

vas exibem oscilações numéricas associadas à não propagação de ondas com comprimento igual a duas vezes a distância entre nós da malha, sendo que, no caso das interpolações de ordem mais elevada, se introduzem termos dispersivos numéricos que, em zonas de pequena profundidade, são da mesma ordem de grandeza do termo dispersivo analítico. Conclui-se pela necessidade de desenvolver um esquema de tipo Petrov-Galerkin que garanta a coerência da formulação e a estabilidade e precisão da solução numérica.

Seguidamente, no Capítulo 5, é desenvolvido um método de elementos finitos baseado num esquema de Petrov-Galerkin, com discretização completa no espaço e no tempo. Trata-se de uma extensão do esquema apresentado por Yu e Heinrich (1986, 1987). Inicialmente o método é aplicado a equações dispersivas de ondas cinemáticas regidas pelo modelo RLW. Posteriormente desenvolve-se o esquema para as equações de Boussinesq a uma e duas dimensões horizontais. São utilizadas funções de interpolação lineares no espaço e no tempo e funções de peso lineares no espaço e quadráticas no tempo. O sistema resultante é implícito mas de passo único no tempo. O estudo da sua estabilidade será realizado por aplicação do critério de von Neumann após expansão em série de Fourier, enquanto que, para a análise de precisão, recorre-se aos desenvolvimentos em séries de Fourier e de Taylor. Verifica-se serem introduzidos termos de correcção da dispersão numérica, por forma a obter uma aproximação de quarta ordem da celeridade de fase, e termos dissipativos de terceira ordem. Conclui-se que o método é estável e de elevada precisão, graças ao carácter extremamente selectivo do mecanismo de dissipação numérica. Um esquema semelhante, embora não consistente, é desenvolvido para o modelo de Madsen & Sørensen.

No Capítulo 6 procede-se à descrição dos diversos ensaios numéricos realizados a uma e duas dimensões horizontais. Estes resultados são comparados entre si e com resultados experimentais e analíticos, para avaliação da precisão dos diferentes modelos de propagação apresentados no Capítulo 2 e dos esquemas numéricos descritos e desenvolvidos nos Capítulos 4 e 5.

Finalmente no Capítulo 7 são sumariadas as conclusões do trabalho de investigação realizado e são indicados alguns temas para futuro trabalho nesta área.

Capítulo 2

Modelos Matemáticos

2.1 Teoria linear de Airy

A propagação de ondas gravíticas de superfície é regida pelas equações de Navier-Stokes para a conservação da massa e da quantidade de movimento. Excluiremos do presente estudo os casos extremos de ondas acústicas e de capilaridade em que a escala de tempo é muito pequena, $T \sim 10^{-2}$ – 10^{-5} s e $T < 10^{-1}$ s, respectivamente, e das ondas com grande escala de tempo, $T > 1$ h, em que o efeito da rotação da Terra é importante.

Obtêm-se então as seguintes equações para a conservação da massa e da quantidade de movimento:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.1a)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + g z \right) + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (2.1b)$$

onde $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u, v, w)$ é o vector velocidade, $p(\mathbf{x}, t)$ a pressão no ponto $\mathbf{x}$ e no instante t , ρ a massa volúmica, g a aceleração da gravidade e ν a viscosidade cinemática, sendo $\mathbf{x} = (x, y, z)$ o vector posição. Considera-se um referencial ortonormado directo, sendo o eixo OZ orientado verticalmente e com sentido contrário à aceleração da gravidade.

2.1.1 Escoamento irrotacional

Calculando o rotacional de ambos os membros da equação (2.1b), pode-se mostrar que

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\Omega}, \quad (2.2)$$

em que $\Omega(\mathbf{x}, t)$ é o vector vorticidade definido como

$$\Omega = \nabla \times \mathbf{u}, \quad (2.3)$$

sendo igual a duas vezes a velocidade de rotação local. No caso dos fluidos não viscosos, $\nu = 0$, o produto escalar de ambos os membros da equação (2.2) pela vorticidade conduz a

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\Omega^2}{2} \right) = \Omega^2 [\mathbf{e}_\Omega \cdot (\mathbf{e}_\Omega \cdot \nabla) \mathbf{u}],$$

onde $\mathbf{e}_\Omega$ é o versor da direcção de Ω . Uma vez que, em qualquer movimento fisicamente realizável, o gradiente de velocidades é finito, o valor máximo de $\mathbf{e}_\Omega \cdot (\mathbf{e}_\Omega \cdot \nabla) \mathbf{u}$ deverá também ser um valor finito. Seja esse valor $M/2$. Daqui resulta que, para qualquer partícula fluida, se tem a majoração

$$\Omega^2(\mathbf{x}, t) \leq \Omega^2(\mathbf{x}, 0) e^{Mt}. \quad (2.4)$$

Sendo assim, se para $t = 0$ e na ausência de viscosidade, o escoamento é irrotacional em qualquer ponto do domínio, este irá permanecer irrotacional para qualquer instante subsequente. Este resultado é conhecido como Teorema de Lagrange.

É possível mostrar que, no caso do rotacional de um vector ser nulo, existe uma função escalar $\phi(\mathbf{x}, t)$ tal que

$$\mathbf{u} = \nabla \phi, \quad (2.5)$$

dita função potencial de velocidades.

As equações de Navier-Stokes (2.1) podem, à custa desta função potencial, ser reescritas para o caso do escoamento irrotacional de um fluido não viscoso, como sendo

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad (2.6a)$$

$$\nabla \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi \right] = - \nabla \left(\frac{p}{\rho} + g z \right). \quad (2.6b)$$

Integrando a equação (2.6b) no espaço, obtém-se a equação de Bernoulli, a qual relaciona o campo de velocidades com o campo de pressões no interior da massa fluida:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi = - \left(\frac{p}{\rho} + g z \right) + C(t), \quad (2.7)$$

onde $C(t)$ é uma função arbitrária de t , que pode ser tomada como identicamente

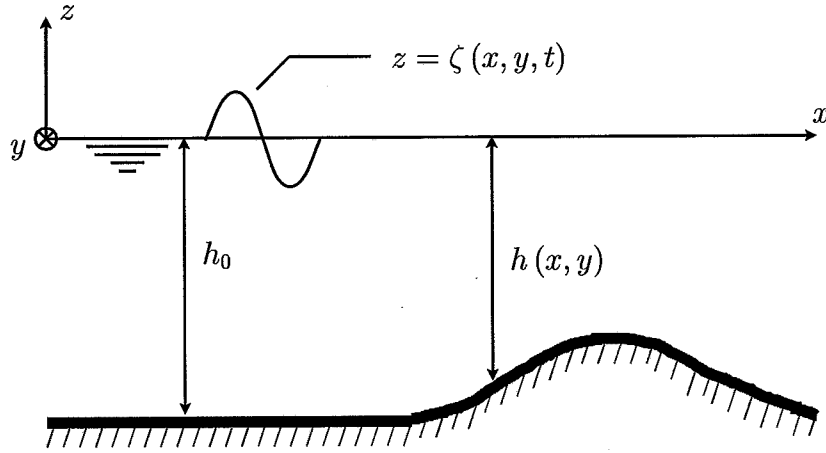


Figura 2.1: Seção vertical do escoamento e definição de variáveis.

nula, redefinindo o potencial ϕ sem afectar o campo de velocidades. Ter-se-á então a seguinte igualdade:

$$\frac{p}{\rho} = -gz - \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi \right). \quad (2.8)$$

Fica bem patente nesta expressão que a pressão total, p , resulta da contribuição de um termo hidrostático, $\rho g z$, e de um termo hidrodinâmico.

Analisar-se-ão agora as condições de fronteira a considerar neste modelo.

Condições de fronteira

No caso da propagação de ondas de superfície, interessa considerar duas fronteiras: a superfície livre com o interface água-ar e a fronteira sólida no fundo (cf. Figura 2.1). As condições fronteira deste problema são definidas da seguinte maneira:

- na superfície livre, $z = \zeta(x, y, t)$, tem-se
 - uma condição cinemática (a velocidade é tangente à superfície livre):

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial z}; \quad (2.9)$$

- uma condição dinâmica:

$$p = 0; \quad (2.10)$$

- no fundo, $z = -h(x, y)$,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0. \quad (2.11)$$

Na definição das condições fronteira acima referidas foi ignorada a possibilidade de existência de tensões superficiais à superfície livre e/ou atrito no fundo.

Note-se que as duas condições fronteira à superfície, (2.9) e (2.10), podem ser transformadas numa única condição, por substituição na equação de Bernoulli (2.8). De facto, procedendo à referida substituição, obtém-se a seguinte equação em ζ e ϕ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi \cdot \nabla \phi) + g \zeta = 0, \quad \text{para } z = \zeta(x, y, t). \quad (2.12)$$

Esta é uma equação não linear em ϕ , que apresenta a dificuldade suplementar de a posição da superfície livre ser também uma incógnita. A determinação de uma solução analítica para a propagação de ondas de superfície, para domínios de configuração arbitrária, é portanto praticamente impossível.

2.1.2 Teoria de ondas de amplitude infinitesimal, em profundidade constante

Considere-se o caso em que a amplitude da onda e as velocidades por ela induzidas são muito pequenas, i.e. $a \ll 1$ e $\|\mathbf{u}\| \ll 1$. Suponha-se ainda que o gradiente do fundo é também muito pequeno, i.e. $\partial h / \partial x \ll 1$ e $\partial h / \partial y \ll 1$. Mantendo apenas os termos lineares, tem-se que

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad \text{se } -h < z < 0, \quad (2.13a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g \zeta = 0, \quad \text{se } z = 0, \quad (2.13b)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad \text{se } z = 0, \quad (2.13c)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad \text{se } z = -h. \quad (2.13d)$$

Admitindo que ζ é uma função para a qual existe um desenvolvimento em série de Fourier, a solução geral para ζ é do tipo

$$\zeta(\mathbf{x}, t) = \Re \left(\int_{-\infty}^{+\infty} A(k) \cdot e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega(k)t)} dk \right),$$

onde i é a unidade imaginária, $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ é o vector número de onda, sendo $k = \|\mathbf{k}\|$, $A(k)$ é a função densidade espectral, ω é a frequência angular da onda e $\mathbf{x} = (x, y)$ é o vector posição no plano horizontal. Em virtude das propriedades das séries de Fourier, cada termo dessa série é também solução do problema linear. Seja

pois a seguinte solução particular para ζ :

$$\zeta(\mathbf{x}, t) = \Re(a e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}) , \quad (2.14)$$

onde a é a amplitude da onda. Por conveniência de escrita, o símbolo $\Re$, que designa a parte real, será doravante suprimido. Nestas condições, e dada a linearidade do problema (2.13), o movimento resultante será harmónico simples, i.e.

$$\zeta(x, y, t) = \tilde{\zeta}(x, y) e^{-i\omega t} ,$$

e portanto o potencial de velocidades poder-se-á escrever como

$$\phi(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z) e^{-i\omega t} ,$$

em que φ designa uma nova função potencial, independente do tempo, que contém a informação respeitante à amplitude e fase locais da onda.

Substituindo a solução (2.14) nas equações lineares (2.13) e dividindo todos os termos por $e^{-i\omega t}$ obtém-se

$$\nabla^2 \varphi = 0 , \quad \text{se } -h < z < 0 , \quad (2.15a)$$

$$g \tilde{\zeta} - i \omega \varphi = 0 , \quad \text{se } z = 0 , \quad (2.15b)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} + i \omega \tilde{\zeta} = 0 , \quad \text{se } z = 0 , \quad (2.15c)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 , \quad \text{se } z = -h . \quad (2.15d)$$

Considerando uma onda propagando-se segundo o sentido positivo do eixo OX , para a qual se tem

$$\tilde{\zeta} = a e^{i k x} , \quad (2.16)$$

a solução para o potencial φ , satisfazendo simultaneamente as condições de campo (2.15a) e de fronteira no fundo (2.15d), é

$$\varphi = b \cosh[k(z + h)] e^{i k x} .$$

Por outro lado, para satisfazer as condições fronteira na superfície livre, (2.15b) e (2.15c), será necessário que

$$b = -i \frac{g a}{\omega} \frac{1}{\cosh kh}$$

obedecendo ω e k à relação de dispersão:

$$\omega^2 = g k \tanh kh. \quad (2.17)$$

Reunidas estas condições, obtém-se a seguinte expressão para o potencial de velocidades:

$$\varphi = -i \frac{g a}{\omega} \frac{\cosh[k(z+h)]}{\cosh kh} e^{ikx}. \quad (2.18)$$

Consequentemente, para as velocidades u e w , tem-se:

$$u = k \frac{g a}{\omega} \frac{\cosh[k(z+h)]}{\cosh kh} e^{ikx} e^{-i\omega t}, \quad (2.19)$$

$$w = -i k \frac{g a}{\omega} \frac{\sinh[k(z+h)]}{\cosh kh} e^{ikx} e^{-i\omega t}. \quad (2.20)$$

Características dispersivas

Relação de dispersão: como se referiu anteriormente, as ondas de amplitude infinitesimal obedecem à relação de dispersão (2.17), a qual, na forma adimensional, se escreve

$$\frac{\omega}{\sqrt{g/h}} = \sqrt{kh \tanh kh}. \quad (2.21)$$

Celeridade de fase: a celeridade de fase, $C = \omega/k$, corresponde à velocidade de propagação da crista da onda e é dada por

$$C = \sqrt{gh \frac{\tanh kh}{kh}}, \quad (2.22)$$

ou, na forma adimensional, por

$$\frac{C}{\sqrt{gh}} = \sqrt{\frac{\tanh kh}{kh}}. \quad (2.23)$$

Um meio diz-se dispersivo quando a celeridade da onda depende não só das características do meio, i.e. no caso de ondas superficiais na água, da profundidade h , mas também do seu número de onda, k . As relações de dispersão, (2.21) e (2.23), da teoria linear, conhecida como Teoria de Airy ou Teoria de 1ª ordem de Stokes, estão representadas graficamente nas Figuras 2.2 e 2.3.

Note-se que kh é de facto uma razão entre a profundidade e o comprimento de onda. Assim encontram-se, na prática, para $kh \ll 1$ as designações de onda longa e/ou água pouco profunda e para $kh \gg 1$ as designações de onda curta e/ou água

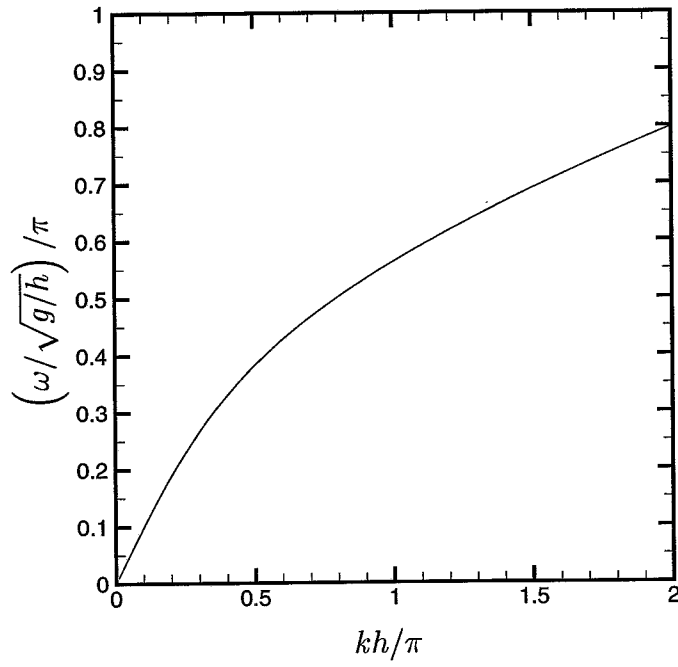


Figura 2.2: Relação de dispersão linear de Airy.

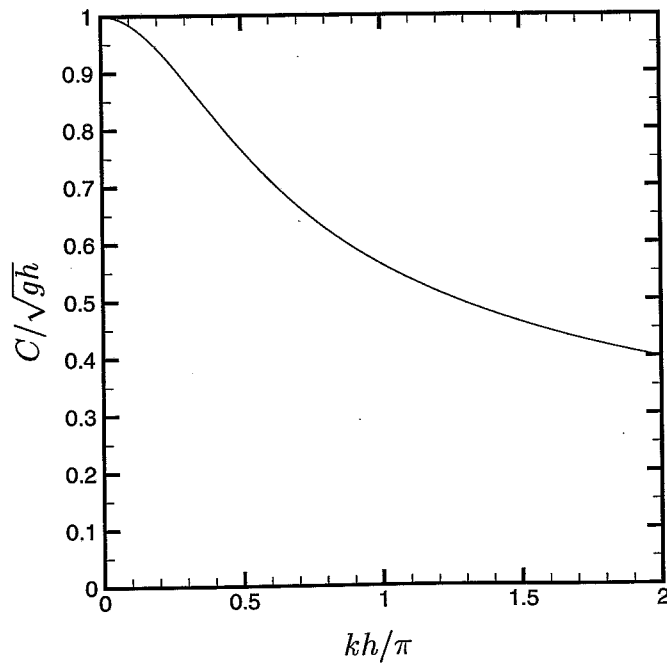


Figura 2.3: Celeridade de fase linear de Airy.

profunda.

Os valores assintóticos da celeridade de fase, para águas pouco profundas e para águas profundas, são, respectivamente,

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{gh} \quad , \quad \text{para } kh \ll 1, \\ C &= \sqrt{g/k} \quad , \quad \text{para } kh \gg 1. \end{aligned}$$

Celeridade de grupo: a celeridade de grupo, $C_g = d\omega/dk$, corresponde à velocidade de propagação da onda envolvente de um grupo de ondas sinusoidais com um espectro de banda estreita, centrada no número de onda $k = k_0$ e com a largura $2\Delta k$ com $\Delta k/k_0 \ll 1$. Nestas condições, a solução do problema (2.13) para a função ζ , elevação da superfície livre, pode ser escrita na seguinte forma:

$$\zeta = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} A(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk. \quad (2.24)$$

Desenvolvendo $\omega(k)$ e $A(k)$ em série de Taylor em torno de k_0 resulta:

$$\begin{aligned} \omega(k_0 + (k - k_0)) &= \omega(k_0) + (k - k_0) \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} + \mathcal{O}((k - k_0)^2), \\ A(k_0 + (k - k_0)) &= A(k_0) + (k - k_0) \left. \frac{dA}{dk} \right|_{k_0} + \mathcal{O}((k - k_0)^2). \end{aligned}$$

Definindo

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \omega(k_0), \\ (C_g)_0 &= \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0}, \\ \kappa &= \frac{k - k_0}{k_0}, \end{aligned}$$

vem que

$$\begin{aligned} \zeta &= A(k_0) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{-\Delta k/k_0}^{\Delta k/k_0} k_0 e^{i k_0 \kappa (x - (C_g)_0 t)} d\kappa + \mathcal{O}(\kappa) \\ &= 2 A(k_0) \frac{\sin[\Delta k (x - (C_g)_0 t)]}{x - (C_g)_0 t} e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} + \mathcal{O}(\kappa) \\ &= \tilde{A}(k_0) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} + \mathcal{O}(\kappa), \end{aligned} \quad (2.25)$$

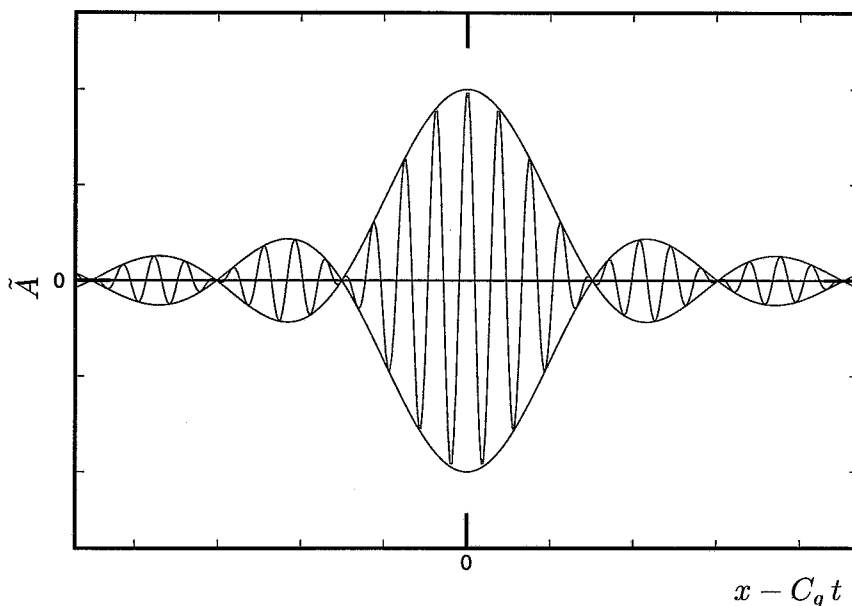


Figura 2.4: Grupo de ondas com espectro de banda estreita.

com

$$\tilde{A} = 2 A(k_0) \frac{\sin[\Delta k (x - (C_g)_0 t)]}{x - (C_g)_0 t}. \quad (2.26)$$

Da equação (2.25) pode-se concluir que ζ é a elevação da superfície livre devida à propagação de uma onda localmente sinusoidal, de número de onda k_0 e com uma modulação de amplitude $\tilde{A}$. A onda envolvente, dada pela expressão (2.26), define um grupo de ondas e propaga-se com uma celeridade $(C_g)_0$. A onda envolvente tem um número de onda igual a Δk , logo uma distância entre dois zeros consecutivos, nodos, de $\pi/\Delta k$. Isto significa que a onda envolvente é bastante mais longa do que as ondas constituintes cujo comprimento de onda é da ordem de $2\pi/k_0$ (cf. Figura 2.4).

A celeridade de grupo, no caso de ondas lineares em água de profundidade constante, é então

$$C_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) C, \quad (2.27)$$

e, na forma adimensional,

$$\frac{C_g}{\sqrt{gh}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \sqrt{\frac{\tanh kh}{kh}}. \quad (2.28)$$

Esta celeridade de grupo adimensional encontra-se representada graficamente na

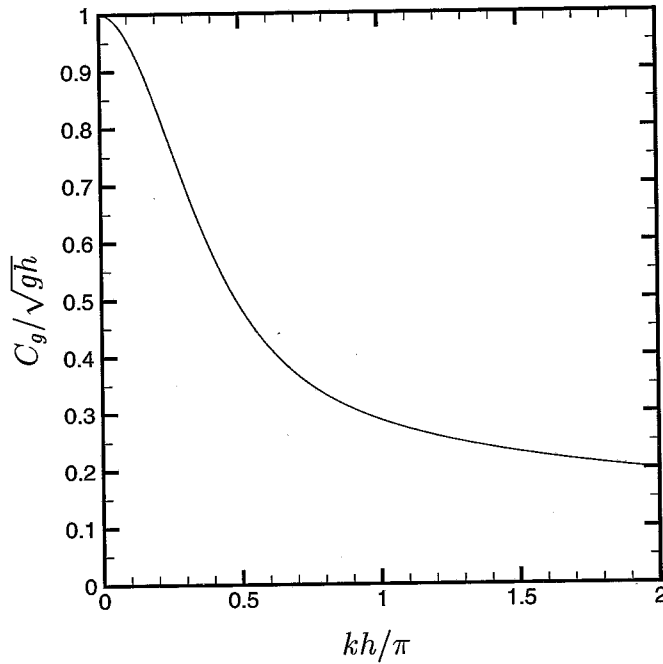


Figura 2.5: Celeridade de grupo linear de Airy.

Figura 2.5.

Pode-se também provar (cf. Lighthill, 1978, Mei, 1994) que a celeridade de grupo corresponde à velocidade de transporte da energia da onda, dando-lhe assim um significado dinâmico ausente no conceito de celeridade de fase.

Características de empolamento

Considere-se o caso de uma onda sinusoidal, propagando-se na direcção OX , em fundos de variação suave, i.e. $|dh/dx|/(kh) \ll 1$. Pode-se provar (cf. Dingemans, 1997a, página 63) que a conservação do fluxo da energia da onda é equivalente a

$$\frac{\partial}{\partial x} (C_g a^2) = 0, \quad (2.29)$$

onde a é a amplitude da onda.

Define-se o coeficiente de empolamento linear, α_s , como sendo o simétrico da razão entre a a variação relativa da amplitude e a variação relativa da profundidade, i.e.

$$\frac{a_x}{a} = -\alpha_s \frac{h_x}{h}, \quad (2.30)$$

onde o índice x representa a derivada parcial em ordem ao espaço. Recorrendo à

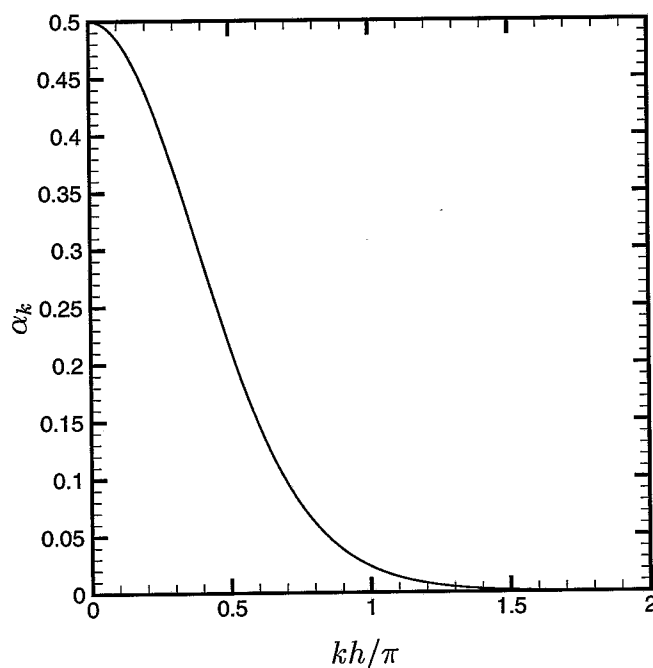


Figura 2.6: Coeficiente de variação do número de onda, α_k .

equação (2.29), facilmente se mostra que

$$\frac{a_x}{a} = -\frac{1}{2} \frac{(C_g)_x}{C_g}.$$

Tendo em conta a definição da celeridade de fase, C , conclui-se que

$$\frac{C_x}{C} = -\frac{k_x}{k}$$

e definindo a função

$$G = \frac{2kh}{\sinh 2kh}$$

resulta que

$$\frac{a_x}{a} = -\frac{1}{2} \left(\frac{k_x}{k} - \frac{G_x}{1+G} \right),$$

sendo

$$G_x = -(1 - G \cosh 2kh) \frac{k_x}{k}.$$

Diferenciando a relação de dispersão (2.17) obtém-se a seguinte expressão para

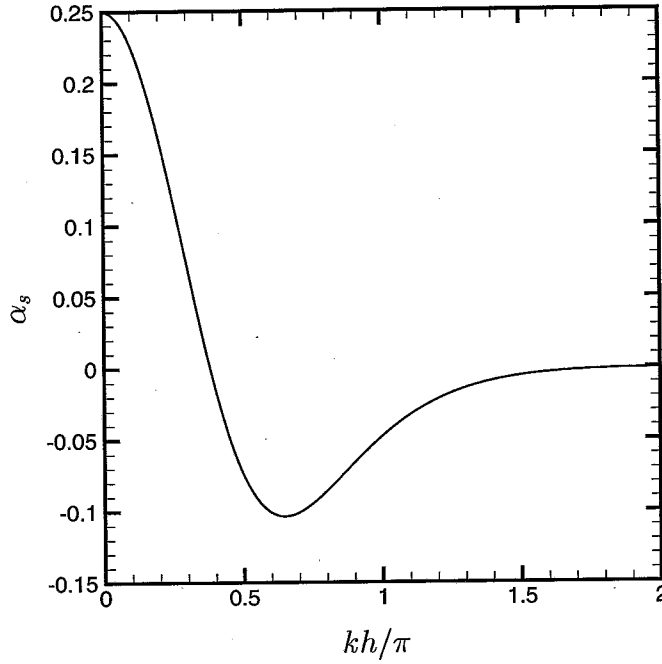


Figura 2.7: Coeficiente de empolamento linear, α_s .

o coeficiente de variação relativa do número de onda com a profundidade, α_k :

$$\alpha_k = \frac{G}{1 + G}. \quad (2.31)$$

Este coeficiente é tal que:

$$\frac{k_x}{k} = -\alpha_k \frac{h_x}{h}.$$

Finalmente, após alguma manipulação algébrica, resulta para o coeficiente de empolamento linear, α_s , a expressão:

$$\alpha_s = \frac{G}{(1 + G)^2} \left[1 + \frac{G}{2} (1 - \cosh 2kh) \right]. \quad (2.32)$$

Os dois coeficientes, α_k e α_s , encontram-se representados nas Figuras 2.6 e 2.7, respectivamente.

2.1.3 Validade da teoria linear

Admitiu-se na dedução da teoria linear (cf. §2.1.2) que os termos não lineares das equações que regem a propagação da onda são de ordem superior a $\mathcal{O}(1)$. Pode-se

agora verificar a correcção dessa hipótese. De facto, das soluções do problema linear, equação (2.16) e equações (2.18) a (2.20), pode-se concluir que, à superfície, se tem

$$\begin{aligned} \zeta &\sim a, & \phi &\sim \frac{ga}{\omega}, \\ u &\sim k \frac{ga}{\omega}, & w &\sim k \frac{ga}{\omega} \tanh kh. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Assim sendo, uma adimensionalização coerente das variáveis, tendo em conta a relação de dispersão (2.17), será

$$\begin{aligned} \zeta &= a \zeta', & \phi &= \frac{ga}{\omega} \phi', & u &= k \frac{ga}{\omega} u', & v &= k \frac{ga}{\omega} v', & w &= a \omega w', \\ x &= \frac{x'}{k}, & y &= \frac{y'}{k}, & z &= \frac{g}{\omega^2} z', & t &= \frac{t'}{\omega}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

onde as variáveis ζ' , ϕ' , u' , v' , w' , x' , y' , z' e t' são adimensionais e de ordem de grandeza igual a $\mathcal{O}(1)$. Note-se que nada se impõe quanto à ordem de grandeza da profundidade relativa kh . Substituindo as relações (2.34) nas equações (2.9) e (2.12) obtém-se, respectivamente,

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t'} + \epsilon \frac{\partial \phi'}{\partial x'} \frac{\partial \zeta'}{\partial x'} + \epsilon \frac{\partial \phi'}{\partial y'} \frac{\partial \zeta'}{\partial y'} = \frac{\partial \phi'}{\partial z'}, \quad \text{para } z' = \frac{\omega^2 a}{g} \zeta'(\mathbf{x}', t'), \quad (2.35)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi'}{\partial t'^2} + \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial}{\partial t'} (\nabla' \phi' \cdot \nabla' \phi') + \frac{\partial \phi'}{\partial z'} - \epsilon \left(\frac{\partial \phi'}{\partial x'} \frac{\partial \zeta'}{\partial x'} + \frac{\partial \phi'}{\partial y'} \frac{\partial \zeta'}{\partial y'} \right) &= 0, \\ \text{para } z' &= \frac{\omega^2 a}{g} \zeta'(\mathbf{x}', t'), \end{aligned} \quad (2.36)$$

em que $\epsilon = ga/C^2$ é uma medida de não linearidade da onda, válida para qualquer profundidade (cf. Beji, 1995). C é a celeridade de fase de Airy dada pela expressão (2.22).

Comparando estas equações com as suas congéneres dimensionais, verifica-se que a teoria linear de Airy é válida quando $\epsilon \ll 1$, o que nos casos extremos de águas profundas e de águas pouco profundas corresponde, respectivamente, a

$$\begin{aligned} \epsilon &= ka \ll 1, & \text{para } kh &\gg 1, \\ \epsilon &= \frac{a}{h} \ll 1, & \text{para } kh &\ll 1. \end{aligned}$$

2.2 Modelos de ondas dinâmicas

Os modelos do tipo Boussinesq têm sido tradicionalmente desenvolvidos para águas pouco profundas em virtude da utilização de diferentes parâmetros de não linearidade para diferentes profundidades relativas. Estes modelos têm de facto uma validade mais alargada como se irá verificar da sua dedução com base no parâmetro de não linearidade proposto por Beji (1995). Dois modelos recentemente apresentados (Nadaka et al., 1997, Seabra-Santos, 1994) são também deduzidos com base no mesmo parâmetro.

Qualquer um destes modelos implica a consideração de vorticidade nula segundo as direcções dos eixos coordenados horizontais OX e OY . A consideração da existência de vorticidade vertical não nula é no entanto fundamental tanto do ponto de vista físico como numérico. Por um lado, ondas irrotacionais geram vorticidade ao rebentar (Peregrine, 1998); por outro, a existência de alguma dissipação numérica, necessária para garantir a estabilidade dos algoritmos, pode também ela gerar vorticidade vertical.

2.2.1 Equações gerais

Considere-se o parâmetro de não linearidade ϵ tal que

$$\epsilon = \frac{ga}{C^2}, \quad (2.37)$$

em que C é a celeridade de fase linear de Airy (2.22) e a é uma amplitude característica da onda. Como referido anteriormente, este parâmetro converge para os habituais parâmetros de não linearidade para água profunda, ka , e água pouco profunda, a/h_0 conforme kh_0 tende para infinito ou kh_0 tende para 0, sendo h_0 uma profundidade de referência.

Também um novo parâmetro de dispersividade, σ , pode ser definido como

$$\sigma = \tanh kh_0, \quad (2.38)$$

sendo que

$$\begin{aligned} \sigma \rightarrow kh_0 \rightarrow 0, & \quad \text{para águas pouco profundas,} \\ \sigma \rightarrow 1, & \quad \text{para águas profundas.} \end{aligned}$$

O parâmetro de não linearidade ϵ pode ainda ser definido de forma equivalente por

intermédio da expressão

$$\epsilon = \frac{k a}{\sigma}. \quad (2.39)$$

Variáveis adimensionais

Recorde-se que, tendo em conta a solução do problema linear (2.16) e (2.18) a (2.20), concluiu-se que, à superfície livre,

$$\begin{aligned} \zeta &\sim a, & \phi &\sim \frac{g a}{\omega}, \\ u &\sim k \frac{g a}{\omega}, & w &\sim k \frac{g a}{\omega} \sigma. \end{aligned}$$

Dado que por definição a celeridade de fase é $C = \omega/k$, uma adimensionalização coerente das variáveis é:

$$\begin{aligned} \zeta &= a \zeta' & u &= k \frac{g a}{\omega} u' = \epsilon C u' \\ v &= k \frac{g a}{\omega} v' = \epsilon C v' & w &= k \frac{g a}{\omega} \sigma w' = \epsilon C \sigma w' \\ t &= \frac{t'}{\omega} = \frac{t'}{k C} & x &= \frac{x'}{k} \\ y &= \frac{y'}{k} & z &= \frac{\sigma}{k} z' \\ p &= \rho g \frac{\sigma}{k} p' & h &= \frac{\sigma}{k} h' \end{aligned}$$

As variáveis ζ' , u' , v' , w' , t' , x' , y' , z' , p' e h' são adimensionais e de ordem igual a $\mathcal{O}(1)$.

A introdução do novo parâmetro de dispersividade, σ , permite-nos uma adimensionalização tal que

$$\begin{aligned} z &\sim h & \text{para águas pouco profundas,} \\ z &\sim \frac{1}{k} & \text{para águas profundas,} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} w &\rightarrow 0 & \text{para águas pouco profundas,} \\ w &\sim u \sim v & \text{para águas profundas.} \end{aligned}$$

Note-se que a escala de z não resulta directamente das relações de ordem (2.33). De acordo com aquelas relações, $\phi = (\epsilon C/k) \phi'$, o que conduz a $z = z' / (\sigma k)$, pelo

que para pequenas profundidades a influência da onda na vertical se estenderia a uma distância superior à própria profundidade. Por outro lado, a adimensionalização dificulta a utilização da formulação potencial para a derivação das equações para a propagação de ondas longas, dado que com ela se obtém

$$\frac{\partial \phi'}{\partial z'} = \sigma^2 w'.$$

De facto, a condição de irrotacionalidade, e com ela a utilização da função potencial de velocidades, deverá ser abandonada, dada a possibilidade de existência de dissipação turbulenta na zona de rebentação e de atrito no fundo.

Equações de Navier-Stokes

As equações de conservação da massa e de conservação da quantidade de movimento, para o escoamento incompressível de um fluido viscoso, na sua forma mais geral, escrevem-se

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.40a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right), \quad (2.40b)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right), \quad (2.40c)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) - g, \quad (2.40d)$$

onde ρ representa a massa volúmica do fluido, p a pressão e τ_{xx} , τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yx} , τ_{yy} , τ_{yz} , τ_{zx} , τ_{zy} e τ_{zz} são as componentes de desvio dos tensor das tensões. Admitindo as hipóteses de Navier as tensões de desvio são dadas por

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \rho \nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (2.41a)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \rho \nu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad (2.41b)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \rho \nu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad (2.41c)$$

$$\tau_{xx} = \rho \nu 2 \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.41d)$$

$$\tau_{yy} = \rho \nu 2 \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (2.41e)$$

$$\tau_{zz} = \rho \nu 2 \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (2.41f)$$

sendo ν a viscosidade cinemática do fluido. As componentes do vector vorticidade são

$$\Omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad (2.42a)$$

$$\Omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (2.42b)$$

$$\Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.42c)$$

Condições de fronteira

As condições de fronteira, admitindo a existência de atrito no fundo e de tensões superficiais, são:

- na superfície livre, $z = \zeta(x, y, t)$,

– condição cinemática

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = w, \quad (2.43)$$

– condições dinâmicas

$$-\tau_{xx} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \tau_{xy} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \tau_{xz} = \tau_{sx(\zeta)}, \quad (2.44a)$$

$$-\tau_{yx} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \tau_{yy} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \tau_{yz} = \tau_{sy(\zeta)}, \quad (2.44b)$$

$$p = 0; \quad (2.44c)$$

- no fundo, $z = -h(x, y, t)$,

– condição cinemática

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + w = 0, \quad (2.45)$$

– condições dinâmicas

$$\tau_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial h}{\partial y} + \tau_{xz} = \tau_{fx}(-h), \quad (2.46a)$$

$$\tau_{yx} \frac{\partial h}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} + \tau_{yz} = \tau_{fy}(-h). \quad (2.46b)$$

A possibilidade de evolução do fundo, $\partial h / \partial t$, permite a simulação de ondas provocadas por deslizamentos da crosta terrestre, ou a variação da batimetria devida ao arrastamento e/ou deposição de sedimentos.

Adimensionalização das tensões

Definindo o número adimensional de Reynolds da onda, Re , como

$$Re = \frac{C a}{\nu} \quad (2.47)$$

resulta a seguinte adimensionalização para os elementos de desvio do tensor das tensões:

$$\tau_{xx} = \rho C^2 \frac{\epsilon^2 \sigma}{Re} \tau'_{xx}, \quad \tau_{xy} = \rho C^2 \frac{\epsilon^2 \sigma}{Re} \tau'_{xy}, \quad \tau_{xz} = \rho C^2 \frac{\epsilon^2 \sigma}{Re} \tau'_{xz}, \quad (2.48a)$$

$$\tau_{yx} = \rho C^2 \frac{\epsilon^2 \sigma}{Re} \tau'_{yx}, \quad \tau_{yy} = \rho C^2 \frac{\epsilon^2 \sigma}{Re} \tau'_{yy}, \quad \tau_{yz} = \rho C^2 \frac{\epsilon^2 \sigma}{Re} \tau'_{yz}, \quad (2.48b)$$

$$\tau_{zx} = \rho C^2 \frac{\epsilon^2 \sigma}{Re} \tau'_{zx}, \quad \tau_{zy} = \rho C^2 \frac{\epsilon^2 \sigma}{Re} \tau'_{zy}, \quad \tau_{zz} = \rho C^2 \frac{\epsilon^2 \sigma}{Re} \tau'_{zz}. \quad (2.48c)$$

As hipóteses de Navier adimensionalizadas são então:

$$\tau'_{xy} = \tau'_{yx} = \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right), \quad (2.49a)$$

$$\tau'_{xz} = \tau'_{zx} = \left(\frac{\partial u'}{\partial z'} + \sigma^2 \frac{\partial w'}{\partial x'} \right), \quad (2.49b)$$

$$\tau'_{yz} = \tau'_{zy} = \left(\frac{\partial v'}{\partial z'} + \sigma^2 \frac{\partial w'}{\partial y'} \right), \quad (2.49c)$$

$$\tau'_{xx} = 2 \frac{\partial u'}{\partial x'}, \quad (2.49d)$$

$$\tau'_{yy} = 2 \frac{\partial v'}{\partial y'}, \quad (2.49e)$$

$$\tau'_{zz} = 2 \frac{\partial w'}{\partial z'}. \quad (2.49f)$$

Admitindo que as tensões superficiais e o atrito no fundo são de origem turbulenta, os seus valores médios serão por definição do tipo

$$\bar{\tau}_{ij} = -\rho \overline{V'_i V'_j}, \quad (2.50)$$

onde $\rho \overline{V'_i V'_j}$ são valores médios das tensões de Reynolds, sendo V_i , $i = 1, 2, 3$, as médias temporais das componentes da velocidade e V'_i os respectivos desvios, i.e. $u_i = V_i + V'_i$. Admita-se também a hipótese de Boussinesq (1877), segundo a qual as tensões de Reynolds são proporcionais aos gradientes das médias temporais da velocidade, i.e.

$$-\rho \overline{V'_i V'_j} = \rho \nu_t \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \rho K \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.51)$$

em que δ_{ij} é o símbolo de Kronecker e K é a energia cinética turbulenta por unidade de massa, dada por

$$K = \frac{1}{2} \left(\overline{V_1'^2} + \overline{V_2'^2} + \overline{V_3'^2} \right),$$

e ν_t é o coeficiente de viscosidade turbulenta, o qual é uma característica do escoamento. Daqui resulta que

$$\tau_{sx}(\zeta) = \rho C^2 \frac{\epsilon^2}{Re_t} \tau'_{sx}(\epsilon \zeta'), \quad (2.52a)$$

$$\tau_{sy}(\zeta) = \rho C^2 \frac{\epsilon^2}{Re_t} \tau'_{sy}(\epsilon \zeta'), \quad (2.52b)$$

$$\tau_{fx}(-h) = \rho C^2 \frac{\epsilon^2}{Re_t} \tau'_{fx}(-h'), \quad (2.52c)$$

$$\tau_{fy}(-h) = \rho C^2 \frac{\epsilon^2}{Re_t} \tau'_{fy}(-h'). \quad (2.52d)$$

onde Re_t é um número de Reynolds turbulento:

$$Re_t = \frac{C a}{\nu_t}. \quad (2.53)$$

Equações de Navier-Stokes adimensionais

As equações de Navier-Stokes podem agora ser escritas na forma adimensional, tendo em conta a escala de cada grandeza, como:

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} = 0, \quad (2.54a)$$

$$\begin{aligned} \epsilon \sigma \frac{\partial u'}{\partial t'} + \epsilon^2 \sigma u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + \epsilon^2 \sigma v' \frac{\partial u'}{\partial y'} + \epsilon^2 \sigma w' \frac{\partial u'}{\partial z'} \\ = -\sigma \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\epsilon^2 \sigma^2}{Re} \frac{\partial \tau'_{xx}}{\partial x'} + \frac{\epsilon^2 \sigma^2}{Re} \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y'} + \frac{\epsilon^2}{Re} \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial z'}, \end{aligned} \quad (2.54b)$$

$$\begin{aligned} \epsilon \sigma \frac{\partial v'}{\partial t'} + \epsilon^2 \sigma u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + \epsilon^2 \sigma v' \frac{\partial v'}{\partial y'} + \epsilon^2 \sigma w' \frac{\partial v'}{\partial z'} \\ = -\sigma \frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{\epsilon^2 \sigma^2}{Re} \frac{\partial \tau'_{yx}}{\partial x'} + \frac{\epsilon^2 \sigma^2}{Re} \frac{\partial \tau'_{yy}}{\partial y'} + \frac{\epsilon^2}{Re} \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial z'}, \end{aligned} \quad (2.54c)$$

$$\begin{aligned} \epsilon \sigma^2 \frac{\partial w'}{\partial t'} + \epsilon^2 \sigma^2 u' \frac{\partial w'}{\partial x'} + \epsilon^2 \sigma^2 v' \frac{\partial w'}{\partial y'} + \epsilon^2 \sigma^2 w' \frac{\partial w'}{\partial z'} \\ = -\frac{\partial p'}{\partial z'} + \frac{\epsilon^2 \sigma}{Re} \frac{\partial \tau'_{zx}}{\partial x'} + \frac{\epsilon^2 \sigma}{Re} \frac{\partial \tau'_{zy}}{\partial y'} + \frac{\epsilon^2 \sigma}{Re} \frac{\partial \tau'_{zz}}{\partial z'} - 1. \end{aligned} \quad (2.54d)$$

Condições de fronteira adimensionais

Considere-se uma escala temporal lenta, β_t , tal que $t^* = \beta_t t'$, com $\beta_t \sim \epsilon$, e seja $h' = h'(x', y', \beta_t t')$. Desta forma tem-se que

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \sigma C \frac{\partial h'}{\partial t'} \quad \text{e} \quad \frac{\partial h'}{\partial t'} = \beta_t \frac{\partial h'}{\partial t^*}.$$

As condições de fronteira após adimensionalização, escrevem-se:

- na superfície livre, $z' = \epsilon \zeta'(x', y', t')$,

– condição cinemática

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t'} + \epsilon u' \frac{\partial \zeta'}{\partial x'} + \epsilon v' \frac{\partial \zeta'}{\partial y'} = w', \quad (2.55)$$

– condições dinâmicas

$$-\epsilon \sigma^2 \tau'_{xx} \frac{\partial \zeta'}{\partial x'} - \epsilon \sigma^2 \tau'_{xy} \frac{\partial \zeta'}{\partial y'} + \tau'_{xz} = \frac{Re}{Re_t} \tau'_{sx(\epsilon \zeta')}, \quad (2.56a)$$

$$-\epsilon \sigma^2 \tau'_{yx} \frac{\partial \zeta'}{\partial x'} - \epsilon \sigma^2 \tau'_{yy} \frac{\partial \zeta'}{\partial y'} + \tau'_{yz} = \frac{Re}{Re_t} \tau'_{sy(\epsilon \zeta')}, \quad (2.56b)$$

$$p' = 0; \quad (2.56c)$$

- no fundo, $z' = -h'(x', y', t')$,

– condição cinemática

$$\frac{\beta_t}{\epsilon} \frac{\partial h'}{\partial t^*} + u' \frac{\partial h'}{\partial x'} + v' \frac{\partial h'}{\partial y'} + w' = 0, \quad (2.57)$$

– condições dinâmicas

$$\sigma^2 \tau'_{xx} \frac{\partial h'}{\partial x'} + \sigma^2 \tau'_{xy} \frac{\partial h'}{\partial y'} + \tau'_{xz} = \frac{Re}{Re_t} \tau'_{fx(-h')}, \quad (2.58a)$$

$$\sigma^2 \tau'_{yx} \frac{\partial h'}{\partial x'} + \sigma^2 \tau'_{yy} \frac{\partial h'}{\partial y'} + \tau'_{yz} = \frac{Re}{Re_t} \tau'_{fy(-h')}. \quad (2.58b)$$

Finalmente as componentes do vector vorticidade são

$$\Omega'_x = \sigma^2 \frac{\partial w'}{\partial y'} - \frac{\partial v'}{\partial z'}, \quad (2.59a)$$

$$\Omega'_y = \frac{\partial u'}{\partial z'} - \sigma^2 \frac{\partial w'}{\partial x'}, \quad (2.59b)$$

$$\Omega'_z = \frac{\partial v'}{\partial x'} - \frac{\partial u'}{\partial y'}. \quad (2.59c)$$

2.2.2 Modelo de Boussinesq

A derivação das equações do tipo Boussinesq (Boussinesq, 1872) para a propagação de ondas fracamente não lineares será feita utilizando o método das perturbações.

As seguintes hipóteses são assumidas:

- ondas fracamente não lineares, i.e. $\epsilon^2 \ll 1$;
- efeitos dispersivos importantes, i.e. $\sigma^2 \sim \epsilon$.

Para aplicação do método das perturbações, considera-se que as variáveis ζ' , u' , v' , w' , p' e Γ' podem ser escritas como

$$\zeta' = \zeta_1 + \epsilon \zeta_2 + \epsilon^2 \zeta_3 + \dots, \quad ,$$

$$u' = u_1 + \epsilon u_2 + \epsilon^2 u_3 + \dots, \quad ,$$

$$v' = v_1 + \epsilon v_2 + \epsilon^2 v_3 + \dots, \quad ,$$

$$w' = w_1 + \epsilon w_2 + \epsilon^2 w_3 + \dots, \quad ,$$

$$p' = p_0 + \epsilon p_1 + \epsilon^2 p_2 + \dots, \quad ,$$

$$\Gamma' = \Gamma_1 + \epsilon \Gamma_2 + \epsilon^2 \Gamma_3 + \dots, \quad ,$$

onde os coeficientes das potências de ϵ , i.e. $\zeta_i, u_i, v_i, w_i, p_i, \Gamma_i$, são de ordem $\mathcal{O}(1)$, e Γ é a aceleração vertical. Note-se que à ordem $\mathcal{O}(1)$ o fluido está em repouso.

Por comodidade de escrita e sempre que não seja susceptível de confusão, os apóstrofes referentes às quantidades adimensionais, ($'$), serão omitidos nos cálculos que se seguem.

Cálculo da aceleração vertical

Considere-se a equação da continuidade (2.54a). Da sua integração entre o fundo, $z = -h(x, y, t)$, e uma profundidade genérica z , tendo em conta as condições de fronteira cinemáticas no fundo (2.57), obtém-se, para a componente vertical da velocidade, a expressão:

$$w = -\frac{\beta_t}{\epsilon} \frac{\partial h}{\partial t^*} - \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^z u \, dz - \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^z v \, dz, \quad (2.60)$$

a qual à ordem $\mathcal{O}(\epsilon)$ se escreve

$$w_1 = -\frac{\beta_t}{\epsilon} \frac{\partial h}{\partial t^*} - \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^z u_1 \, dz - \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^z v_1 \, dz. \quad (2.61)$$

De (2.60) resulta para a componente local da aceleração vertical:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\beta_t^2}{\epsilon} \frac{\partial^2 h}{\partial (t^*)^2} - \nabla \cdot \left(\int_{-h}^z \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \, dz \right) - \nabla \cdot \left(\beta_t \mathbf{u}|_{-h} \frac{\partial h}{\partial t^*} \right) \quad (2.62)$$

em que $\mathbf{u} = (u, v)$ é o vector velocidade horizontal instantânea.

Por outro lado, a aceleração vertical total é, por definição, $\Gamma = dw/dt$, i.e.

$$\Gamma = \frac{\partial w}{\partial t} + \epsilon \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad (2.63)$$

e portanto as suas componentes de ordem $\mathcal{O}(\epsilon)$ e de ordem $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ são respectivamente

$$\Gamma_1 = -\nabla \cdot \left(\int_{-h}^z \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} \, dz \right), \quad (2.64)$$

e

$$\begin{aligned} \Gamma_2 = & -\frac{\beta_t^2}{\epsilon^2} \frac{\partial h}{\partial t^{*2}} - \nabla \cdot \left(\int_{-h}^z \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} \, dz \right) - \frac{\beta_t}{\epsilon} \nabla \cdot \left(\mathbf{u}_1|_{-h} \frac{\partial h}{\partial t^*} \right) \\ & + \left(u_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial w_1}{\partial y} + w_1 \frac{\partial w_1}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (2.65)$$

Cálculo da pressão

Admitindo um escoamento quase irrotacional segundo as direcções horizontais, i.e. $\Omega_x \sim \Omega_y \sim \epsilon$ — note-se que esta condição é menos restritiva do que a de outros autores (e.g. Antunes do Carmo, 1995) — vem que

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \mathcal{O}(\epsilon, \sigma^2) \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \mathcal{O}(\epsilon, \sigma^2),$$

de onde, para a primeira ordem, resulta

$$\frac{\partial u_1}{\partial z} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial v_1}{\partial z} = 0, \quad (2.66)$$

concluindo-se que

$$u_1 = U_1(x, y, t) \quad \text{e} \quad v_1 = V_1(x, y, t). \quad (2.67)$$

Portanto, à ordem $\mathcal{O}(\epsilon)$, a velocidade horizontal é constante ao longo da profundidade, podendo-se definir o vector $\mathbf{U}_1 = (U_1, V_1)$.

Por outro lado, tendo em conta a referida quase irrotacionalidade, a hipótese de Navier (2.49) e a equação da continuidade (2.54a), a equação de conservação da quantidade de movimento segundo OZ (2.54d) simplifica-se, escrevendo-se:

$$\epsilon \sigma^2 \Gamma = -\frac{\partial p}{\partial z} - 1. \quad (2.68)$$

Após integração entre a profundidade genérica z e a superfície livre, $z = \epsilon \zeta$, tendo em consideração a condição de fronteira dinâmica à superfície (2.56c), obtêm-se as seguintes expressões para os coeficientes p_0 , p_1 e p_2 :

$$p_0 = \int_z^0 dz = -z, \quad (2.69a)$$

$$p_1 = \frac{1}{\epsilon} \int_0^{\epsilon \zeta_1} dz = \zeta_1, \quad (2.69b)$$

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\epsilon \zeta_1}^{\epsilon \zeta_1 + \epsilon^2 \zeta_2} dz + \frac{\sigma^2}{\epsilon} \int_z^0 \Gamma_1 dz \\ &= \zeta_2 - \frac{\sigma^2}{\epsilon} \int_z^0 \nabla \cdot \left(\int_{-h}^z \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial t} dz \right) dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_2 &= \zeta_2 - \frac{\sigma^2}{\epsilon} \int_z^0 \nabla \cdot \left[(z+h) \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial t} \right] dz \\
&= \zeta_2 + \frac{\sigma^2}{\epsilon} \nabla \cdot \left[\left(\frac{z^2}{2} + hz \right) \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial t} \right] \\
&= \zeta_2 + \frac{\sigma^2}{\epsilon} \left[\left(\frac{z^2}{2} + hz \right) \frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial t} + z \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial U_1}{\partial t} + \left(\frac{z^2}{2} + hz \right) \frac{\partial^2 V_1}{\partial y \partial t} + z \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial V_1}{\partial t} \right].
\end{aligned} \tag{2.69c}$$

Equação da continuidade

Integrando a equação da continuidade local (2.54a) entre o fundo e a superfície livre, tendo em consideração as condições de fronteira cinemáticas (2.57) e (2.55) e ainda a definição de valor médio, obtém-se a equação integral de conservação da massa:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\beta_t}{\epsilon} \frac{\partial h}{\partial t^*} + \nabla \cdot [(h + \epsilon \zeta) \bar{\mathbf{u}}] = 0, \tag{2.70}$$

sendo $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}, \bar{v})$ o vector das componentes horizontais da média vertical instantânea da velocidade. Escrita desta forma, esta equação é exacta.

Equação da quantidade de movimento à ordem $\mathcal{O}(\epsilon)$

A equação de conservação da quantidade de movimento horizontal, na forma vectorial, escreve-se à ordem $\mathcal{O}(\epsilon)$:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -\nabla p_1.$$

Sendo assim, e tendo em conta os resultados (2.69b) e (2.66), é possível obter

$$\frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial t} + \nabla \zeta_1 = 0. \tag{2.71}$$

Finalmente a aceleração vertical a esta ordem é

$$w_1 = -\frac{\beta_t}{\epsilon} \frac{\partial h}{\partial t^*} - \frac{\partial}{\partial x} [(h+z) U_1] - \frac{\partial}{\partial y} [(h+z) V_1]. \tag{2.72}$$

Equação da quantidade de movimento à ordem $\mathcal{O}(\epsilon^2)$

Para tornar a equação da quantidade de movimento segundo a horizontal independente da coordenada vertical, z , proceder-se-á à sua integração termo a termo entre o fundo, $z = -h$, e a superfície livre, $z = \epsilon \zeta$.

Aceleração local: à segunda ordem e atendendo às propriedades do valor médio, ter-se-á para este termo a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
 \int_{-h}^{\epsilon\zeta} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dz &= \int_{-h}^{\epsilon\zeta} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{U}_1 + \epsilon \mathbf{u}_2) dz + \mathcal{O}(\epsilon^2, \epsilon \beta_t) \\
 &= (\epsilon \zeta + h) \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} [(\epsilon \zeta + h) \bar{\mathbf{u}}_2] + \mathcal{O}(\epsilon^2, \epsilon \beta_t) \\
 &= (\epsilon \zeta + h) \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \mathcal{O}(\epsilon^2, \epsilon \beta_t) .
 \end{aligned} \tag{2.73}$$

Aceleração convectiva: do integral segundo a vertical da componente segundo OX deste termo resulta:

$$\begin{aligned}
 \int_{-h}^{\epsilon\zeta} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) dz &= \int_{-h}^{\epsilon\zeta} \left(U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + V_1 \frac{\partial U_1}{\partial y} \right) dz + \mathcal{O}(\epsilon) \\
 &= (\epsilon \zeta + h) \left(U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + V_1 \frac{\partial U_1}{\partial y} \right) + \mathcal{O}(\epsilon) ,
 \end{aligned} \tag{2.74a}$$

e segundo OY :

$$\begin{aligned}
 \int_{-h}^{\epsilon\zeta} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) dz &= \int_{-h}^{\epsilon\zeta} \left(U_1 \frac{\partial V_1}{\partial x} + V_1 \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) dz + \mathcal{O}(\epsilon) \\
 &= (\epsilon \zeta + h) \left(U_1 \frac{\partial V_1}{\partial x} + V_1 \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) + \mathcal{O}(\epsilon) .
 \end{aligned} \tag{2.74b}$$

Pressão: recordando que

$$\int_{-h}^{\epsilon\zeta} \nabla p dz = \int_{-h}^{\epsilon\zeta} \nabla (p_0 + \epsilon p_1 + \epsilon^2 p_2) dz ,$$

e os resultados anteriormente obtidos (2.69) resulta

$$\begin{aligned}
 \int_{-h}^{\epsilon\zeta} \frac{\partial p}{\partial x} dz &= (\epsilon \zeta + h) \frac{\partial}{\partial x} (\epsilon \zeta_1 + \epsilon^2 \zeta_2) \\
 &\quad - \epsilon \sigma^2 \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{h^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (h U_1) - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (h V_1) - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^2 V_1}{\partial x \partial y} \right] \\
 &\quad + \mathcal{O}(\epsilon^3, \epsilon^2 \sigma^2, \epsilon \sigma^2 \beta_t)
 \end{aligned} \tag{2.75a}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_{-h}^{\epsilon\zeta} \frac{\partial p}{\partial y} dz &= (\epsilon\zeta + h) \frac{\partial}{\partial y} (\epsilon\zeta_1 + \epsilon^2\zeta_2) \\
&\quad - \epsilon\sigma^2 \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{h^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (hU_1) - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial y} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (hV_1) - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} \right] \\
&\quad + \mathcal{O}(\epsilon^3, \epsilon^2\sigma^2, \epsilon\sigma^2\beta_t) .
\end{aligned} \tag{2.75b}$$

Tensões: o cálculo completa-se com a integração dos gradientes dos termos das tensões de desvio, tendo em conta as condições de fronteira dinâmicas na superfície livre (2.56) e no fundo (2.58) e as hipóteses de Navier (2.49). Segundo OX resulta:

$$\begin{aligned}
&\int_{-h}^{\epsilon\zeta} \left(\sigma^2 \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \sigma^2 \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) dz \\
&= \frac{Re}{Re_t} \tau_{sx(\epsilon\zeta)} - \frac{Re}{Re_t} \tau_{fx(-h)} + \sigma^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(2h \frac{\partial U_1}{\partial x} \right) + \sigma^2 \frac{\partial}{\partial y} \left[h \left(\frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial V_1}{\partial x} \right) \right] \\
&\quad + \mathcal{O}(\epsilon\sigma^2) , \tag{2.76a}
\end{aligned}$$

e segundo OY :

$$\begin{aligned}
&\int_{-h}^{\epsilon\zeta} \left(\sigma^2 \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \sigma^2 \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) dz \\
&= \frac{Re}{Re_t} \tau_{sy(\epsilon\zeta)} - \frac{Re}{Re_t} \tau_{fy(-h)} + \sigma^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[h \left(\frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial V_1}{\partial x} \right) \right] + \sigma^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(2h \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) \\
&\quad + \mathcal{O}(\epsilon\sigma^2) . \tag{2.76b}
\end{aligned}$$

Equação da quantidade de movimento adimensional: somando as contribuições dos diferentes termos e dividindo o resultado por $\epsilon\zeta + h$, obtém-se por fim, segundo OX :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \epsilon \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\
&= \sigma^2 \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{h}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (h\bar{u}) - \frac{h^2}{6} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (h\bar{v}) - \frac{h^2}{6} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x \partial y} \right] + \\
&\quad \frac{\epsilon}{\sigma Re_t} \left(\frac{\tau_{sx(\epsilon\zeta)}}{h} - \frac{\tau_{fx(-h)}}{h} \right) + \tag{2.77a}
\end{aligned}$$

$$\frac{\epsilon \sigma}{Re} \frac{2}{h} \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \frac{\epsilon \sigma}{Re} \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial y} \left[h \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right] +$$

$$\mathcal{O} \left(\epsilon^2, \epsilon \sigma^2, \epsilon \beta_t, \sigma^2 \beta_t, \frac{\epsilon^2 \sigma}{Re} \right),$$

e segundo OY:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \epsilon \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ &= \sigma^2 \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{h}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (h \bar{u}) - \frac{h^2}{6} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (h \bar{v}) - \frac{h^2}{6} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right] + \\ & \quad \frac{\epsilon}{\sigma Re_t} \left(\frac{\tau_{sy}(\epsilon \zeta)}{h} - \frac{\tau_{fy}(-h)}{h} \right) + \\ & \quad \frac{\epsilon \sigma}{Re} \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} \left[h \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right] + \frac{\epsilon \sigma}{Re} \frac{2}{h} \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) + \\ & \quad \mathcal{O} \left(\epsilon^2, \epsilon \sigma^2, \epsilon \beta_t, \sigma^2 \beta_t, \frac{\epsilon^2 \sigma}{Re} \right). \end{aligned} \quad (2.77b)$$

Equações de Boussinesq dimensionais

Equação de conservação da massa ou equação da continuidade:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot \left[(h + \zeta) \bar{\mathbf{u}} \right] = 0. \quad (2.78a)$$

Equações de conservação da quantidade de movimento nas direcções horizontais:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{h}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (h \bar{u}) - \frac{h^2}{6} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (h \bar{v}) - \frac{h^2}{6} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x \partial y} \right] \\ & \quad + \frac{\tau_{sx}(\zeta)}{\rho h} - \frac{\tau_{fx}(-h)}{\rho h} + 2 \frac{\nu}{h} \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \frac{\nu}{h} \frac{\partial}{\partial y} \left[h \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.78b)$$

e

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{h}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (h \bar{u}) - \frac{h^2}{6} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (h \bar{v}) - \frac{h^2}{6} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right] \\ & \quad + \frac{\tau_{sy}(\zeta)}{\rho h} - \frac{\tau_{fy}(-h)}{\rho h} + \frac{\nu}{h} \frac{\partial}{\partial x} \left[h \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right] + 2 \frac{\nu}{h} \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (2.78c)$$

Equações de Boussinesq para fundos de variação suave

As equações de Boussinesq podem ser simplificadas para o caso de fundos de variação suave. Considere-se uma escala espacial lenta, β_ℓ , tal que $(x^*, y^*) = \beta_\ell (x, y)$ com $\beta_\ell \sim \epsilon \sim \sigma^2$, e seja $h = h(\beta_\ell x, \beta_\ell y)$. Tem-se assim, em variáveis adimensionais, que

$$\nabla h = \beta_\ell \nabla^* h$$

com $\nabla^* = (\partial/\partial x^*, \partial/\partial y^*)$, sendo $\nabla^* h \sim 1$.

As equações adimensionais de Boussinesq para fundos de variação suave têm várias formas possíveis. A mais conveniente para a discretização pelo método dos elementos finitos é

Forma adimensional:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\beta_t}{\epsilon} \frac{\partial h}{\partial t^*} + \nabla \cdot [(\epsilon \zeta + h) \bar{\mathbf{u}}] = 0, \quad (2.79a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \epsilon \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ &= \sigma^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{h^2}{3} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y \partial t} \right) \right] \\ &+ \frac{\epsilon}{Re_t \sigma} \left(\frac{\tau_{sx}(\epsilon \zeta)}{h} - \frac{\tau_{fx}(-h)}{h} \right) + 2 \frac{\epsilon \sigma}{Re} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\epsilon \sigma}{Re} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x \partial y} \right) \\ &+ \mathcal{O} \left(\epsilon^2, \epsilon \sigma^2, \epsilon \beta_t, \sigma^2 \beta_t, \frac{\epsilon^2 \sigma}{Re}, \sigma^2 \beta_\ell, \frac{\epsilon \sigma \beta_\ell}{Re} \right) \end{aligned} \quad (2.79b)$$

e

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \epsilon \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ &= \sigma^2 \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{h^2}{3} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y \partial t} \right) \right] \\ &+ \frac{\epsilon}{Re_t \sigma} \left(\frac{\tau_{sy}(\epsilon \zeta)}{h} - \frac{\tau_{fy}(-h)}{h} \right) + \frac{\epsilon \sigma}{Re} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \right) + 2 \frac{\epsilon \sigma}{Re} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \\ &+ \mathcal{O} \left(\epsilon^2, \epsilon \sigma^2, \epsilon \beta_t, \sigma^2 \beta_t, \frac{\epsilon^2 \sigma}{Re}, \sigma^2 \beta_\ell, \frac{\epsilon \sigma \beta_\ell}{Re} \right). \end{aligned} \quad (2.79c)$$

Forma dimensional:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot [(h + \zeta) \bar{\mathbf{u}}] = 0, \quad (2.80a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{h^2}{3} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y \partial t} \right) \right] \\ + \frac{\tau_{sx}(\zeta)}{\rho h} - \frac{\tau_{fx}(-h)}{\rho h} + 2\nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x \partial y} \right), \end{aligned} \quad (2.80b)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{h^2}{3} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y \partial t} \right) \right] \\ + \frac{\tau_{sy}(\zeta)}{\rho h} - \frac{\tau_{fy}(-h)}{\rho h} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \right) + 2\nu \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (2.80c)$$

Características de dispersão linear

As relações de dispersão lineares do sistema de equações de Boussinesq são obtidas considerando a hipótese de fluido perfeito, profundidade constante e a linearidade do fenómeno, i.e. $\epsilon = 0$. As equações dimensionais são então, para o caso da propagação de uma onda segundo a direcção OX :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + h \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^2 \partial t} &= 0. \end{aligned}$$

Para soluções do tipo $e^{i(kx - \omega t)}$ e tendo em conta as relações existentes entre os operadores diferenciação e multiplicação nos espaços físico e de Fourier, $\partial/\partial t \rightarrow -i\omega$ e $\partial/\partial x \rightarrow ik$, o sistema pode ser reescrito na forma

$$\begin{bmatrix} -\omega & kh \\ gk & -\omega \left(1 + \frac{1}{3} (kh)^2 \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.81)$$

onde E e U são as amplitudes complexas de ζ e $\bar{u}$, i.e. $\zeta = \Re \{ E \exp [i(kx - \omega t)] \}$ e $\bar{u} = \Re \{ U \exp [i(kx - \omega t)] \}$.

As soluções não triviais do sistema (2.81) obtêm-se quando o determinante da respectiva matriz é nulo, resultando do polinómio característico a relação de dispersão:

$$\frac{\omega^2}{g/h} = \frac{(kh)^2}{1 + \frac{1}{3} (kh)^2}, \quad (2.82)$$

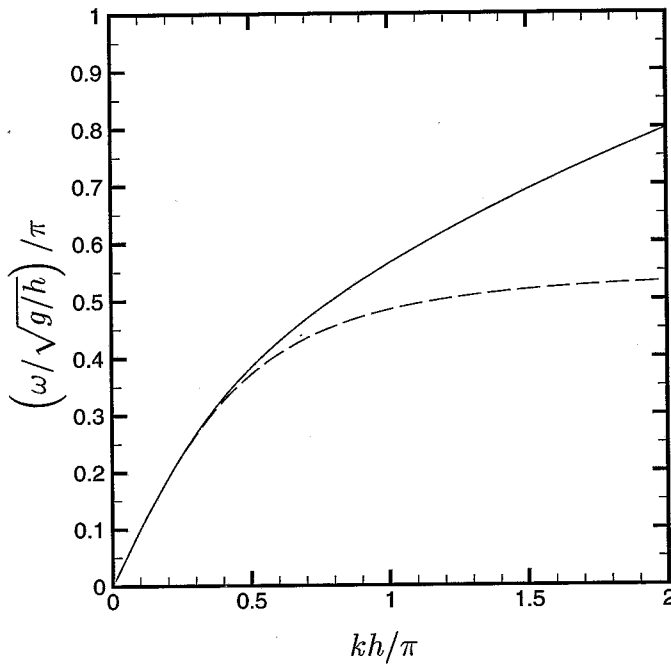


Figura 2.8: Comparação das relações de dispersão. Airy: (—); Boussinesq: (---).

e a celeridade de fase:

$$\frac{C^2}{gh} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3} (kh)^2}. \quad (2.83)$$

Na Figura 2.8 comparam-se a relação de dispersão para o modelo de Boussinesq (2.82) e a relação de dispersão linear exacta (2.17). É evidente que para águas pouco profundas, $kh < \pi/2$, a relação de dispersão linear do modelo de Boussinesq é uma boa aproximação da relação exacta, enquanto que para águas profundas, $kh > \pi$, se afasta bastante dos valores exactos.

Note-se que quando $kh \rightarrow \infty$ se tem que $\omega_{\text{Airy}} \rightarrow \infty$, enquanto o modelo de Boussinesq apresenta o valor assintótico limite $\sqrt{3g/h}$. Este facto impossibilita a propagação de perturbações com elevada frequência. No entanto, é sempre possível que numa simulação tais perturbações sejam geradas na fronteira (por deficiência das condições fronteira) ou no interior do domínio (devido a variações do fundo). Reescrevendo a relação de dispersão de Boussinesq (2.82) em função de ω , resulta que

$$kh = \pm \frac{\omega/\sqrt{g/h}}{\sqrt{1 - \frac{1}{3} \frac{\omega^2}{g/h}}}.$$

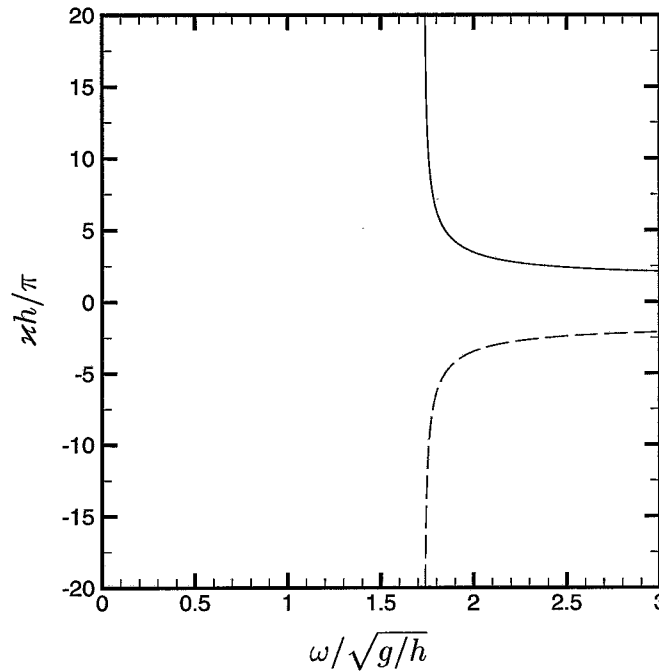


Figura 2.9: Coeficiente da parte imaginária de kh , κh , para o modelo de Boussinesq.

É fácil verificar que para $\omega > \sqrt{3g/h}$ o número de onda é um imaginário puro: $k = i\kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$, correspondendo portanto a uma onda estacionária, do tipo $e^{-\kappa x} e^{-i\omega t}$. A amplitude desta onda diminui ou aumenta com a distância à origem da perturbação, conforme κ é positivo ou negativo, sendo que as duas soluções são possíveis. O coeficiente κh é representado graficamente na Figura 2.9. Na Figura 2.10 comparam-se as celeridades de fase para o modelos de Airy e de Boussinesq.

A celeridade de grupo pode ser facilmente obtida tendo em conta que

$$C_g = \frac{d\omega}{dk} = C + k \frac{dC}{dk} = C \left(1 + \frac{k}{2C^2} \frac{dC^2}{dk} \right),$$

e portanto (cf. Figura 2.11)

$$C_g = C \left(1 - \frac{\frac{1}{3} (kh)^2}{1 + \frac{1}{3} (kh)^2} \right). \quad (2.84)$$

Os erros relativos entre as celeridades do modelo de Boussinesq (2.83) e (2.84) e as celeridades lineares exactas (2.22) e (2.27) são dados respectivamente (cf. Figuras

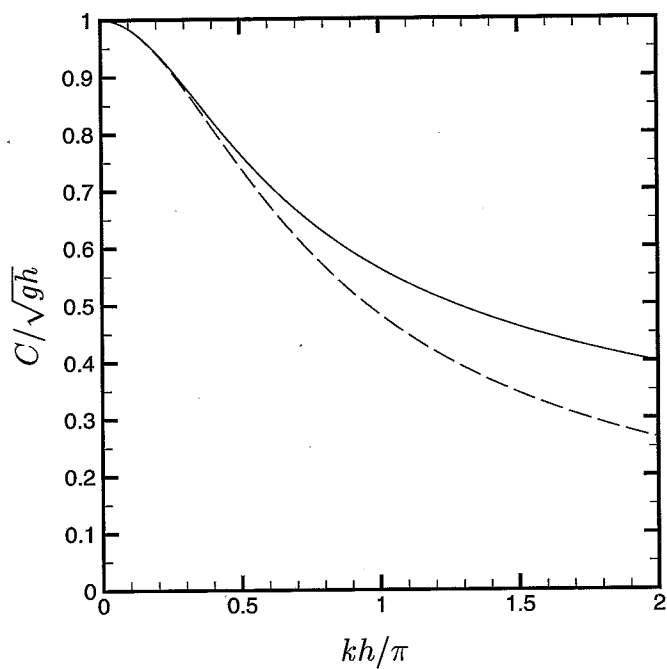


Figura 2.10: Comparação das celeridades de fase. Airy: (—); Boussinesq: (—).

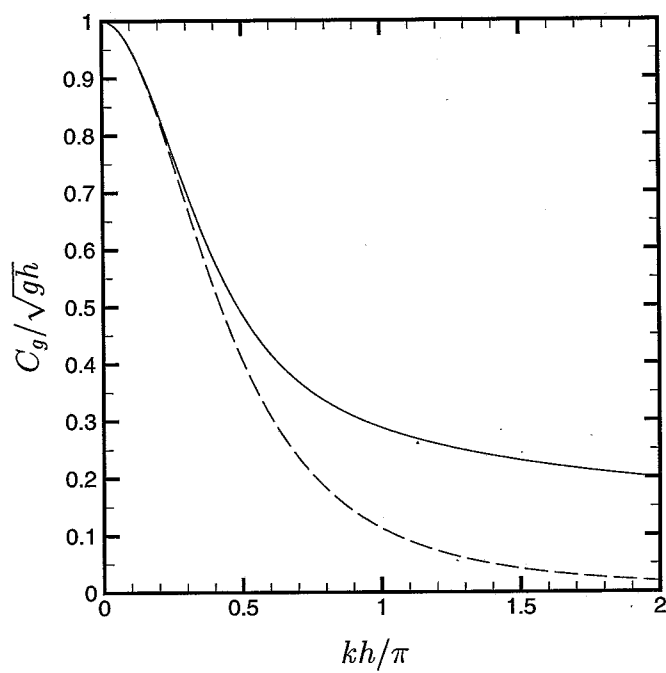


Figura 2.11: Comparação das celeridades de grupo. Airy: (—); Boussinesq: (—).

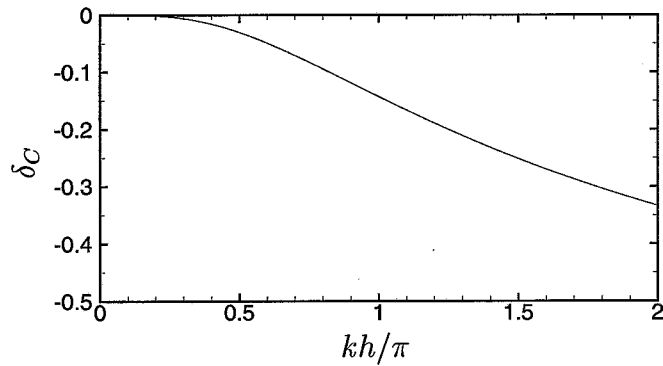


Figura 2.12: Erro relativo da celeridade de fase do modelo de Boussinesq.

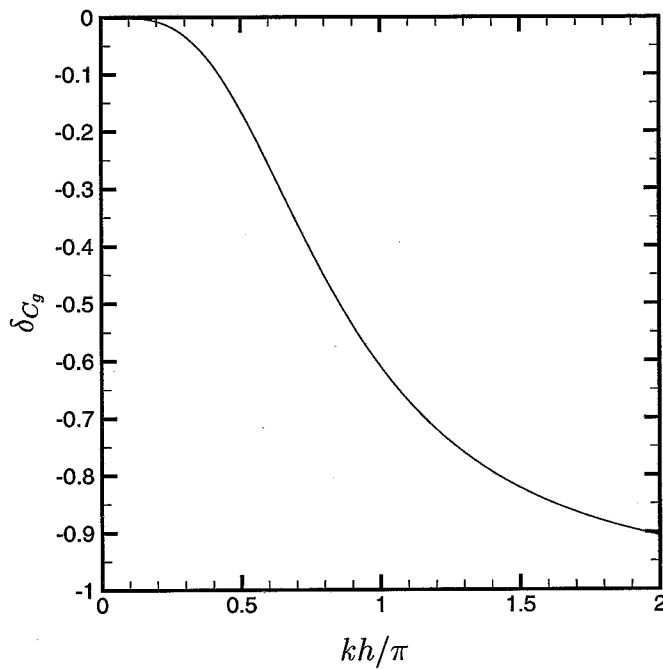


Figura 2.13: Erro relativo da celeridade de grupo do modelo de Boussinesq.

2.12 e 2.13) por:

$$\delta_C = \frac{C_{\text{Bouss}} - C_{\text{Airy}}}{C_{\text{Airy}}} \quad \text{e} \quad \delta_{C_g} = \frac{(C_g)_{\text{Bouss}} - (C_g)_{\text{Airy}}}{(C_g)_{\text{Airy}}}.$$

Note-se que para águas profundas a celeridade de fase do modelo de Boussinesq tem um erro superior a 15% da celeridade de fase exacta, enquanto nas mesmas condições de profundidade relativa o erro na celeridade de grupo é superior a 60%.

Características de empolamento linear

As características de empolamento linear dos modelos tipo Boussinesq podem ser estudadas para fundos de variação suave (cf. Madsen e Sørensen, 1992). Seja novamente $\beta_\ell \ll 1$ uma escala espacial lenta e seja $x^* = \beta_\ell x$. Os fundos serão fixos e definidos por $h = h(x^*)$. As soluções deverão ser do tipo

$$\zeta = a(x^*) \exp \left(-i\omega t + \frac{i}{\beta_\ell} S(x^*) \right), \quad (2.85)$$

em que a é a amplitude da onda e S é uma função de fase tal que $\partial S / \partial x^* = k(x^*)$. Analisar-se-á primeiro o modelo para fundos de variação suave (2.80) e posteriormente o modelo mais geral (2.78).

Fundos de variação suave: considere-se a propagação de uma onda na direcção do eixo OX , com fundos fixos e na ausência de atrito no fundo. O modelo definido pelas equações (2.80) pode ser simplificado obtendo-se na forma linear

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (h \bar{u}) = 0, \quad (2.86a)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^2}{3} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t} \right). \quad (2.86b)$$

O procedimento consiste em eliminar $\bar{u}$ das equações, sem alterar a sua ordem de aproximação. Derivando a equação da continuidade em ordem a t e substituindo no lado esquerdo da equação da quantidade de movimento após multiplicação desta por h e derivação em ordem a x , vem:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(gh \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[h \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^2}{3} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t} \right) \right].$$

Esta equação, desprezando termos de ordem $\mathcal{O}(\beta_\ell^2)$, é equivalente a

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(gh \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{h^2}{3} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} (h \bar{u}) \right].$$

Diferenciando a equação da continuidade em ordem a x , obtém-se que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (h \bar{u}) = -\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial t},$$

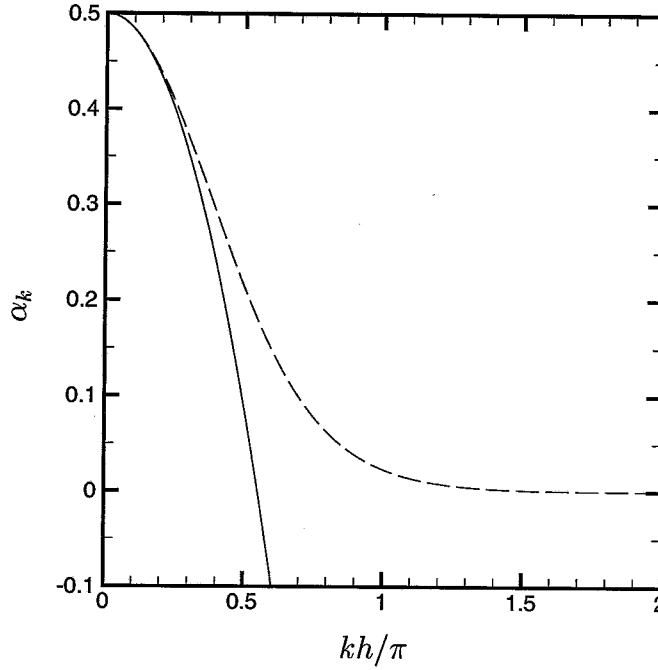


Figura 2.14: Coeficiente de variação relativa do número de onda, α_k : Boussinesq fundos suaves (—); Airy (— —).

pelo que, por fim, a equação de onda para fundos de variação suave se pode escrever:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(gh \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x \partial t^2} \right] = 0. \quad (2.87)$$

Substituindo na equação (2.87) a função ζ por uma solução do tipo (2.85), resulta uma equação cujos termos de ordem $\mathcal{O}(1)$ conduzem à relação de dispersão (2.82), enquanto os termos de ordem $\mathcal{O}(\beta_\ell)$ conduzem a uma expressão para a variação relativa de amplitude em função da variação relativa do número de onda e da variação relativa da profundidade:

$$\frac{a_x}{a} = -\frac{1}{2} \frac{k_x}{k} - \frac{1}{2} \left[1 - \frac{(kh)^2}{3} \right] \frac{h_x}{h}, \quad (2.88)$$

onde a_x , h_x e k_x representam derivadas em ordem a x . O coeficiente de variação relativa do número de onda, α_k tal que

$$\frac{k_x}{k} = -\alpha_k \frac{h_x}{h},$$

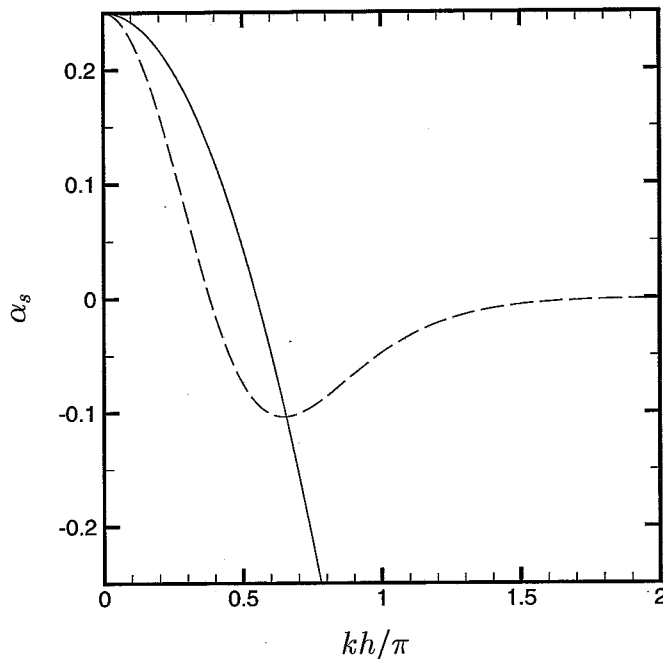


Figura 2.15: Coeficiente de empolamento linear, α_s : Boussinesq fundos suaves (—); Airy (---).

é obtido por diferenciação da relação de dispersão (2.82), tendo em conta que ω é constante (cf. §1.2.1, página 3), resultando

$$\alpha_k = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{(kh)^2}{3} \right]. \quad (2.89)$$

Finalmente tem-se que

$$\frac{a_x}{a} = -\alpha_s \frac{h_x}{h} \quad (2.90)$$

com

$$\alpha_s = \frac{1}{4} \left[1 - \frac{(kh)^2}{3} \right]. \quad (2.91)$$

Os coeficientes α_k e α_s estão representados graficamente nas Figuras 2.14 e 2.15, onde são comparados com as relações exactas obtidas para o modelo de Airy, (2.31) e (2.32). É evidente o mau comportamento de ambos os coeficientes ainda em água pouco profunda, $kh < \pi/2$, sendo totalmente divergente para águas profundas. De facto, em águas profundas, o modelo de Boussinesq tenderá a produzir ondas de amplitude infinita face a um aumento de profundidade. Note-se que, de acordo com a teoria linear de Airy, em condições de águas profundas as características da onda

deveriam ser praticamente insensíveis à variação dos fundos.

Fundos usuais: considere-se a propagação de uma onda unidireccional, com fundos fixos e sem atrito no fundo. Nestas condições, o modelo de Boussinesq na sua forma linear escreve-se

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (h \bar{u}) = 0, \quad (2.92a)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{h}{2} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} (h \bar{u}) - \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^2 \partial t}. \quad (2.92b)$$

Tendo em conta que, à ordem de aproximação desejada,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (h \bar{u}) = h \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \mathcal{O}(\beta_\ell^2),$$

a equação da quantidade de movimento pode ser reescrita como

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} (h \bar{u}) + \frac{h}{3} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t}. \quad (2.93)$$

Para eliminar $\bar{u}$ desta equação, recorre-se à equação da continuidade de onde se obtém

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} (h \bar{u}) = -\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}$$

e

$$h \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \mathcal{O}(\beta_\ell).$$

Multiplicando a equação (2.93) por h , diferenciando-a em ordem a x e finalmente procedendo à substituição destas igualdades, resulta a equação em ζ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(gh \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x \partial t^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h}{3} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \right) = 0. \quad (2.94)$$

Substituindo em (2.94) a função ζ por uma solução do tipo (2.85) obtém-se uma equação cujos termos de ordem $\mathcal{O}(1)$ conduzem à relação de dispersão (2.82), enquanto os termos de ordem $\mathcal{O}(\beta_\ell)$ conduzem a

$$\frac{a_x}{a} = -\frac{1}{2} \frac{k_x}{k} - \frac{1}{2} \left[1 - \frac{(kh)^2}{6} \right] \frac{h_x}{h}. \quad (2.95)$$

O coeficiente de variação do número de onda, α_k , resulta da relação de dispersão e portanto é igual ao obtido para o caso de fundos muito suaves (2.89), pelo que o

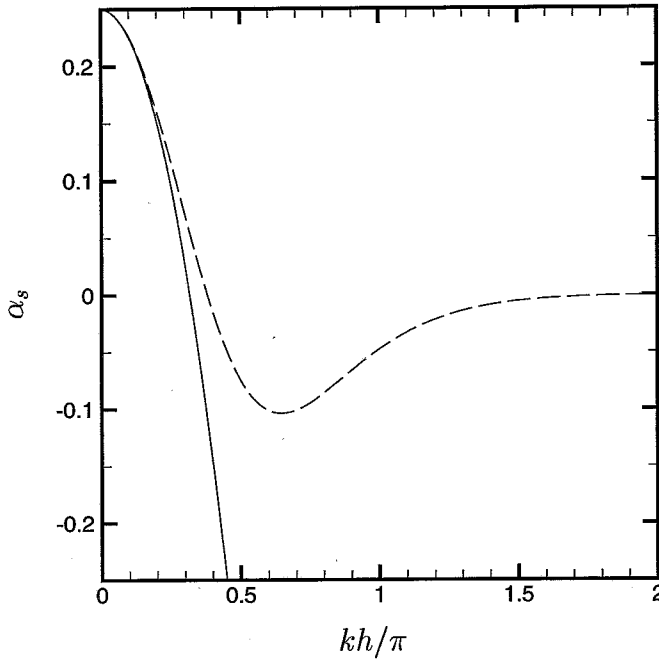


Figura 2.16: Coeficiente de empolamento linear, α_s : Boussinesq (—); Airy (—).

coeficiente de empolamento linear, α_s , resulta agora

$$\alpha_s = \frac{1}{4} [1 - (kh)^2]. \quad (2.96)$$

Embora a expressão (2.96) coincida com a expansão de Taylor de ordem $\mathcal{O}((kh)^4)$ do coeficiente de empolamento linear exacto (2.32), a inclusão dos termos de gradiente de fundos nas equações de Boussinesq limitam ainda mais o seu campo de aplicação. O comportamento de α_s torna-se divergente para $kh > 4\pi/10$ (cf. Figura 2.16), enquanto que para o modelo de fundos suaves tal só se verifica para $kh > 6\pi/10$ (cf. Figura 2.15).

Conclusões sobre as limitações do modelo de Boussinesq

O modelo de Boussinesq apresenta problemas de três tipos:

- devido às características assintóticas da sua relação de dispersão, não permite a simulação de ondas de elevada frequência. O valor limite será $\omega = \sqrt{3g/h}$;
- o erro relativo das celeridades de fase e de grupo é bastante elevado;
- as características de empolamento linear do modelo têm um comportamento

aberrante para profundidades relativas superiores a aproximadamente $kh = \pi/2$.

2.2.3 Modelo de propagação de Madsen & Sørensen

Para ultrapassar as limitações encontradas no modelo de Boussinesq (cf. §2.2.2), Madsen e colaboradores (Madsen et al., 1991, Madsen e Sørensen, 1992), com base no trabalho de Witting (1984), desenvolveram um modelo do tipo Boussinesq com melhores características de dispersão linear. Posteriormente, Beji e Nadaoka (1996) mostraram que aquele modelo não conserva o fluxo da energia da onda para declives suaves do fundo, propondo uma nova formulação, conservativa. Nesta secção deriva-se o modelo de Madsen & Sørensen de uma forma mais genérica, resultando a formulação original e a formulação conservativa como casos particulares. Conclui-se que a formulação original, embora não consistente, possui melhores características de empolamento linear. Propõe-se ainda uma outra formulação por forma a evitar possíveis problemas numéricos. O modelo original de Madsen & Sørensen é baseado numa formulação em termos de fluxos, enquanto neste trabalho se manterá a formulação em termos das médias verticais instantâneas das componentes horizontais da velocidade.

Equações de Madsen & Sørensen

As equações de Boussinesq adimensionais para a propagação de uma onda unidimensional na ausência de atrito no fundo e de viscosidade são

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(\epsilon \zeta + h) \bar{u}] = 0, \quad (2.97a)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \epsilon \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \sigma^2 \frac{h}{2} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} (h \bar{u}) - \sigma^2 \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^2 \partial t}. \quad (2.97b)$$

Recorrendo a uma aproximação de ordem $\mathcal{O}(\epsilon, \sigma^2)$ da equação da quantidade de movimento (2.97b),

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \mathcal{O}(\epsilon, \sigma^2),$$

a equação da quantidade de movimento pode ser reescrita (Peregrine, 1967), introduzindo apenas termos de ordem superior, $\mathcal{O}(\epsilon \sigma^2, \sigma^4)$, como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \epsilon \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \sigma^2 \left[\left(\frac{1}{2} + B \right) h \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} (h \bar{u}) - \left(\frac{1}{6} + A \right) h^2 \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^2 \partial t} \right. \\ \left. + B h \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(h \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) - A h^2 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2, \epsilon \sigma^2), \end{aligned}$$

o que na forma dimensional é

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \left(\frac{1}{2} + B \right) h \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} (h \bar{u}) - \left(\frac{1}{6} + A \right) h^2 \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^2 \partial t} \\ + B g h \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(h \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) - A g h^2 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3}. \quad (2.98) \end{aligned}$$

Características de dispersão linear

As relações de dispersão linear do novo modelo obtêm-se por análise das formas dimensionais linearizadas e para fundo plano da equação da continuidade e da nova equação da quantidade de movimento (2.98):

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + h \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0, \quad (2.99a)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \left[\frac{1}{3} + (B - A) \right] h^2 \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^2 \partial t} + (B - A) g h^2 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3}. \quad (2.99b)$$

Daqui resulta imediatamente que o comportamento dispersivo deste modelo depende apenas do valor da diferença dos dois coeficientes A e B e não do valor destes. Para soluções do tipo $e^{i(kx - \omega t)}$ e tendo em conta as relações existentes entre os operadores diferenciação e multiplicação nos espaços físico e de Fourier, $\partial/\partial t \rightarrow -i\omega$ e $\partial/\partial x \rightarrow ik$, o sistema (2.99) pode ser reescrito na forma

$$\begin{bmatrix} -\omega & kh \\ gk \{1 + b(kh)^2\} & -\omega \left\{ 1 + \left(\frac{1}{3} + b \right) (kh)^2 \right\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.100)$$

onde $b = B - A$. E e U são as amplitudes complexas de ζ e $\bar{u}$, i.e. $\zeta = \Re(E e^{i(kx - \omega t)})$ e $\bar{u} = \Re(U e^{i(kx - \omega t)})$.

As soluções não triviais do sistema (2.100) são obtidas quando o determinante da respectiva matriz é nulo, resultando do polinómio característico a relação de

dispersão:

$$\frac{\omega^2}{g/h} = (kh)^2 \frac{1 + b (kh)^2}{1 + \left(\frac{1}{3} + b\right) (kh)^2}, \quad (2.101)$$

e a celeridade de fase:

$$\frac{C^2}{gh} = \frac{1 + b (kh)^2}{1 + \left(\frac{1}{3} + b\right) (kh)^2}. \quad (2.102)$$

Comparando a equação (2.102) com o aproximante de Padé de ordem [2/2] do quadrado da celeridade de fase exacta (2.22), o qual é:

$$\frac{1}{gh} [2/2] C_{\text{Airy}}^2 = \frac{1 + \frac{1}{15} (kh)^2}{1 + \frac{2}{5} (kh)^2},$$

imediatamente se conclui ser

$$b = B - A = \frac{1}{15}$$

a combinação dos coeficientes A e B que conduz a uma melhor aproximação da

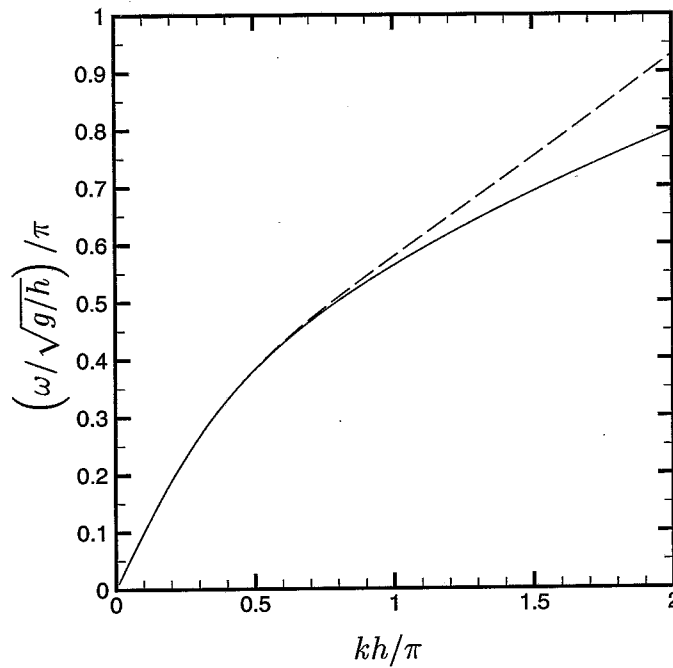


Figura 2.17: Comparação das relações de dispersão. Airy: (—); Madsen & Sørensen: (---).

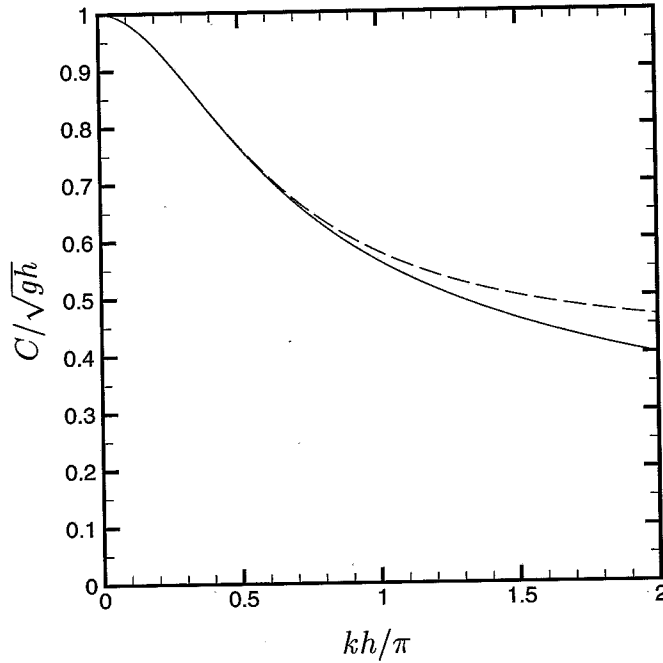


Figura 2.18: Comparação das celeridades de fase. Airy: (—); Madsen & Sørensen: (---).

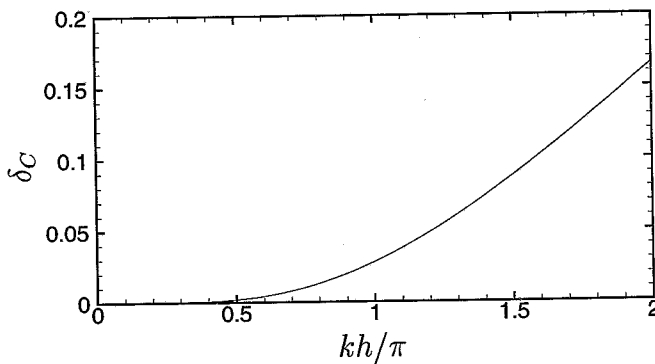


Figura 2.19: Erro relativo da celeridade de fase do modelo de Madsen & Sørensen.

celeridade de fase linear exacta. Não é possível pela análise dos parâmetros de dispersão tirar qualquer conclusão acerca dos valores relativos de A e B . Apenas o estudo das características de empolamento linear do modelo permitirá quantificar estes coeficientes.

Nas Figuras 2.17 e 2.18 comparam-se as expressões para a relação de dispersão e para a celeridade de fase do modelo de Madsen & Sørensen ($b = 1/15$) com as expressões exactas de Airy. A melhoria relativamente ao modelo de Boussinesq é

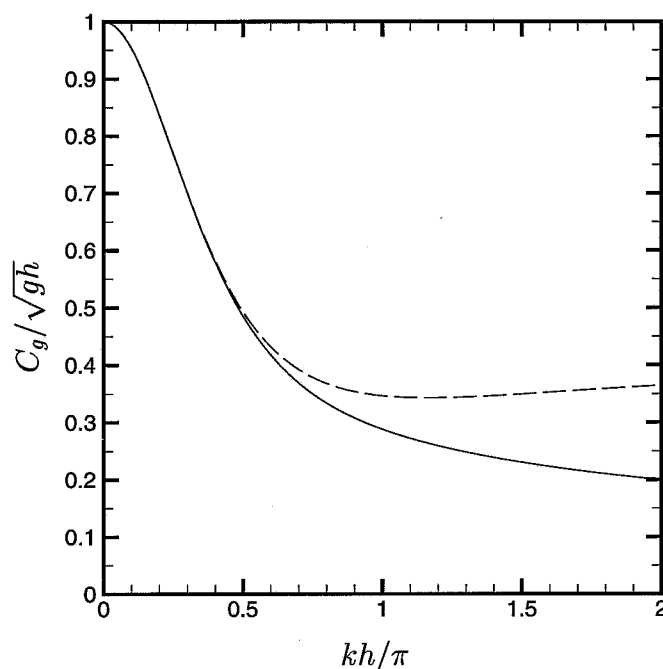


Figura 2.20: Comparação das celeridades de grupo. Airy: (—); Madsen & Sørensen: (---).

evidente, nomeadamente no facto de a relação de dispersão linear do modelo de Madsen & Sørensen não tender assintoticamente para um valor finito, no que tem um comportamento semelhante à relação exacta. No que concerne à celeridade de fase, o erro relativo é agora muito menor. É inferior a 3% já no limite de água profunda, i.e. $kh = \pi$, divergindo mais acentuadamente com o aumento da profundidade relativa, sendo de cerca de 16% para $kh = 2\pi$ (cf. Figura 2.19).

A celeridade de grupo linear do modelo de Madsen & Sørensen, obtida a partir de

$$C_g = \frac{d\omega}{dk} = C + k \frac{dC}{dk} = C \left(1 + \frac{k}{2C^2} \frac{dC^2}{dk} \right),$$

é

$$C_g = C \left[1 - \frac{\frac{1}{3} (kh)^2}{\left(1 + \frac{2}{5} (kh)^2 \right) \left(1 + \frac{1}{15} (kh)^2 \right)} \right]. \quad (2.103)$$

Nas Figuras 2.20 e 2.21 representam-se respectivamente a celeridade de grupo linear deste modelo e o seu erro relativo em relação à celeridade de grupo linear exacta. É notória a melhoria conseguida pelo modelo de Madsen & Sørensen quando comparado com o modelo de Boussinesq, sem que no entanto se atinjam resultados

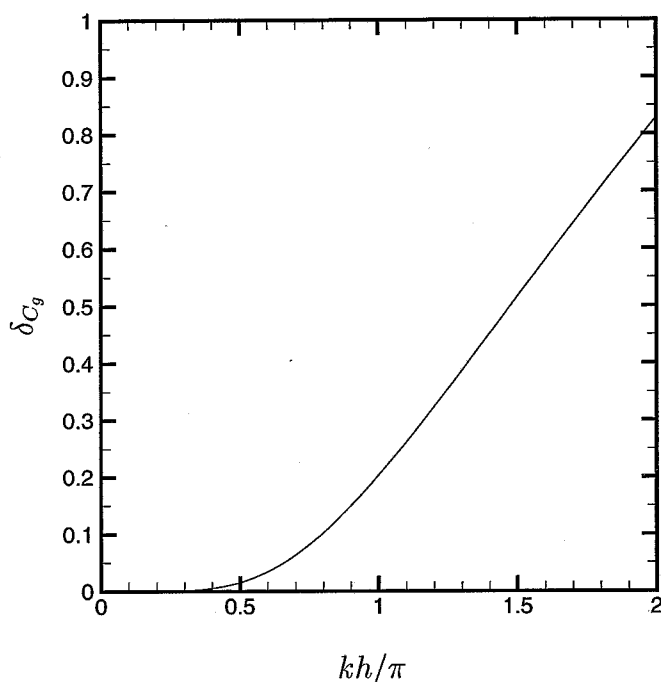


Figura 2.21: Erro relativo da celeridade de grupo do modelo de Madsen & Sørensen.

brilhantes. Para o limite de águas profundas, $kh = \pi$, o erro na celeridade de grupo diminui de cerca de 50% para 20%, enquanto que, por exemplo, para $kh = 2\pi$ a variação é de 90% para cerca de 80%.

Características de empolamento linear

Considere-se novamente a propagação de uma onda sobre fundos com suave variação espacial, definida pela escala espacial $\beta_\ell \ll 1$ com $x^* = \beta_\ell x$. Os fundos serão definidos por $h = h(x^*)$. As soluções serão do tipo (2.85), i.e.

$$\zeta = a(x^*) \exp \left(-i\omega t + \frac{i}{\beta_\ell} S(x^*) \right),$$

em que a é a amplitude da onda e S é uma função de fase tal que $\partial S / \partial x^* = k(x^*)$.

O modelo unidimensional linear de Madsen & Sørensen é

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (h \bar{u}) = 0, \quad (2.104a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = & \left(\frac{1}{2} + B \right) h \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} (h \bar{u}) - \left(\frac{1}{6} + A \right) h^2 \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^2 \partial t} \\ & + B g h \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(h \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) - A g h^2 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3}. \end{aligned} \quad (2.104b)$$

A equação da quantidade de movimento, após multiplicação por h e diferenciação em ordem a x , pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} (h \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial x} \left(g h \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) = & \left(\frac{1}{2} + B \right) \frac{\partial}{\partial x} \left[h^2 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} (h \bar{u}) \right] \\ & - \left(\frac{1}{6} + A \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^2 \partial t} \right) + B \frac{\partial}{\partial x} \left[g h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(h \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \right] - A \frac{\partial}{\partial x} \left(g h^3 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} \right). \end{aligned} \quad (2.105)$$

Recordando que da equação da continuidade resulta

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} (h \bar{u}) = - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}$$

e que

$$h^2 \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^2 \partial t} = - h \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x \partial t^2} + 2 \beta_\ell \frac{\partial h}{\partial x^*} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \mathcal{O}(\beta_\ell^2),$$

é possível eliminar $\bar{u}$ da equação (2.105), obtendo-se à ordem $\mathcal{O}(\beta_\ell^2)$

$$\begin{aligned} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(g h \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) = & - \left(\frac{1}{3} + B - A \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(h^2 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x \partial t^2} \right) \\ & - \left(\frac{1}{6} + A \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(2 \beta_\ell h \frac{\partial h}{\partial x^*} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \right) \\ & + B \frac{\partial}{\partial x} \left[g h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(h \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \right] - A \frac{\partial}{\partial x} \left(g h^3 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} \right). \end{aligned} \quad (2.106)$$

Substituindo em (2.106) a função ζ por uma solução do tipo (2.85), obtém-se uma equação cujos termos de ordem $\mathcal{O}(1)$ conduzem à relação de dispersão (2.103), enquanto os termos de ordem $\mathcal{O}(\beta)$ conduzem a

$$\alpha_1 \frac{a_x}{a} + \alpha_2 \frac{k_x}{k} + \alpha_3 \frac{h_x}{h} = 0, \quad (2.107)$$

com

$$\alpha_1 = 2 \left\{ 1 + 2 (B - A) (kh)^2 + (B - A) \left[(B - A) + \frac{1}{3} \right] (kh)^4 \right\},$$

$$\alpha_2 = 1 + 6 (B - A) (kh)^2 + 5 (B - A) \left[(B - A) + \frac{1}{3} \right] (kh)^4,$$

$$\alpha_3 = 1 + \left[4 (B - A) - \frac{2}{3} \right] (kh)^2 + \left[3 (B - A)^2 + \frac{2}{3} (B - A) + \frac{2}{3} A \right] (kh)^4.$$

O coeficiente de variação do número de onda, α_k , tal que

$$\frac{k_x}{k} = -\alpha_k \frac{h_x}{h},$$

resulta da relação de dispersão por diferenciação em ordem a x , atendendo a que ω é constante (cf. §1.2.1, página 3), e é

$$\alpha_k = \frac{1}{2} \frac{1 + (2b - \frac{1}{3}) (kh)^2 + b (b + \frac{1}{3}) (kh)^4}{1 + 2b (kh)^2 + b (b + \frac{1}{3}) (kh)^4}. \quad (2.108)$$

Desta forma, o coeficiente de empolamento linear, α_s , definido por

$$\frac{a_x}{a} = -\alpha_s \frac{h_x}{h},$$

é dado por

$$\alpha_s = \frac{\alpha_3 - \alpha_2 \alpha_k}{\alpha_1}. \quad (2.109)$$

Por outro lado, uma formulação linear deverá garantir a conservação do fluxo de energia da onda, i.e.

$$\frac{\partial}{\partial x} (C_g a^2) = 0, \quad (2.110)$$

onde C_g é a celeridade de grupo do modelo de Madsen & Sørensen. Daqui resulta que

$$\frac{a_x}{a} = -\frac{1}{2} \frac{(C_g)_x}{C_g}. \quad (2.111)$$

Sendo

$$\frac{dC_g}{dx} = \frac{\partial C_g}{\partial k} \frac{dk}{dx} + \frac{\partial C_g}{\partial h} \frac{dh}{dx},$$

e para uma formulação consistente, α_s deverá ser

$$\alpha_s = \frac{1}{4} \frac{1 + c_2 (kh)^2 + c_4 (kh)^4 + c_6 (kh)^6 + c_8 (kh)^8}{\left[1 + 2b (kh)^2 + b \left(b + \frac{1}{3} \right) (kh)^4 \right]^2}, \quad (2.112)$$

com

$$c_2 = 4b - 1,$$

$$\begin{aligned}
c_4 &= 6b^2, \\
c_6 &= b \left(4b^2 + \frac{5}{3}b + \frac{1}{9} \right), \\
c_8 &= b^2 \left(b^2 + \frac{2}{3}b + \frac{1}{9} \right).
\end{aligned}$$

Pode-se provar (Beji e Nadaoka, 1996) que as duas formulações (2.109) e (2.112) são equivalentes quando

$$B = \frac{1}{10} \quad \text{e} \quad A = \frac{1}{30}. \quad (2.113a)$$

Da análise do gráfico da evolução do coeficiente de empolamento, α_s , para as duas combinações (cf. Figura 2.23), conclui-se que embora não conservando o fluxo da energia da onda, a combinação original (Madsen e Sørensen, 1992) dos coeficientes A e B conduz a uma melhor aproximação das condições reais de empolamento linear para profundidades relativas intermédias. Em condições de água profunda, ambas as formulações apresentam mau comportamento. A formulação conservativa (Beji e Nadaoka, 1996) conduz a um coeficiente de empolamento linear que tende para o valor de água pouco profunda, $\alpha_s = 1/4$, quando kh tende para infinito. A formulação original (Madsen e Sørensen, 1992), não conservativa, tende assintoticamente para um valor negativo: $\alpha_s = -1/6$. Estes comportamentos, sem significado físico, das duas formulações em condições de água profunda e/ou ondas curtas têm duas consequências adversas. Do ponto de vista analítico, comprometem a validade das soluções a que eventualmente conduzam. Do ponto de vista numérico, são origem de instabilidade por serem susceptíveis de provocar a amplificação de qualquer tipo de ruído numérico, o qual é caracterizado pelo seu curto comprimento de onda.

Para obviar a eventuais problemas de origem numérica, é ainda possível uma terceira formulação tal que

$$\lim_{kh \rightarrow \infty} \alpha_s = 0.$$

Desta condição resultam os coeficientes

$$B = \frac{2}{25} \quad \text{e} \quad A = \frac{1}{75}. \quad (2.113b)$$

A formulação agora proposta, não conservativa do fluxo da energia da onda, apresenta um comportamento pior do que o da formulação original para profundidades intermédias. No entanto, para águas profundas, o seu comportamento é superior ao das duas outras formulações, sendo de esperar uma maior estabilidade em eventuais

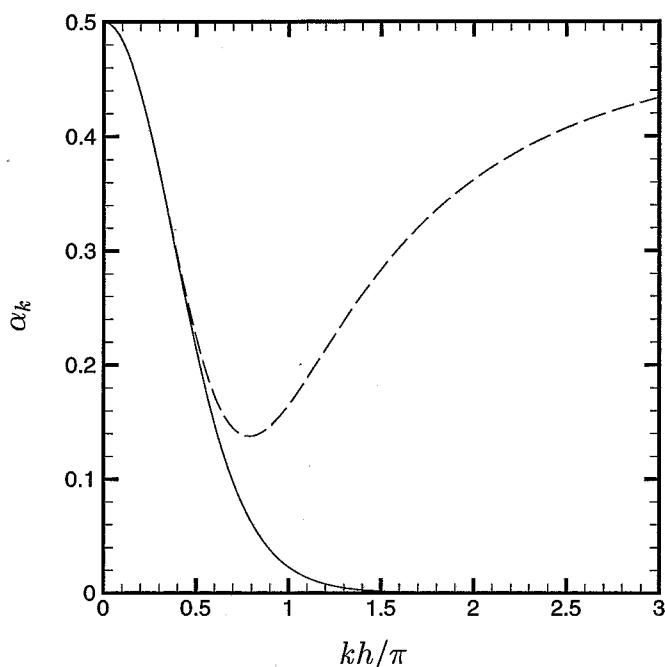


Figura 2.22: Coeficiente de variação relativa do número de onda, α_k : Airy (—); Madsen & Sørensen (---).

simulações numéricas.

Na Figura 2.22 compara-se o coeficiente de variação relativa do número de onda, α_k , do modelo de Madsen & Sørensen, $b = B - A = 1/15$, com o mesmo coeficiente dado pelo modelo linear de Airy. Os dois modelos são claramente divergentes para $kh > \pi/2$. De facto, enquanto no modelo de Airy este coeficiente tende assintoticamente para zero, com o aumento da profundidade relativa, no modelo de Madsen & Sørensen e nas mesmas condições de profundidade, α_k tende assintoticamente para o valor de pequenas profundidades, $\alpha_k = 1/2$.

É evidente que só com uma melhor formulação do carácter dispersivo dos modelos, nomeadamente da celeridade de grupo, C_g , será possível obter simultaneamente a conservação do fluxo da energia da onda e uma boa reprodução do fenómeno de empolamento linear, para uma mais vasta gama de profundidades relativas.

Modelo de Madsen & Sørensen a duas dimensões horizontais

A extensão do presente modelo a duas dimensões horizontais é imediata e as equações completas, incluindo termos devido a elevados gradientes do fundo e fundos não fixos são:

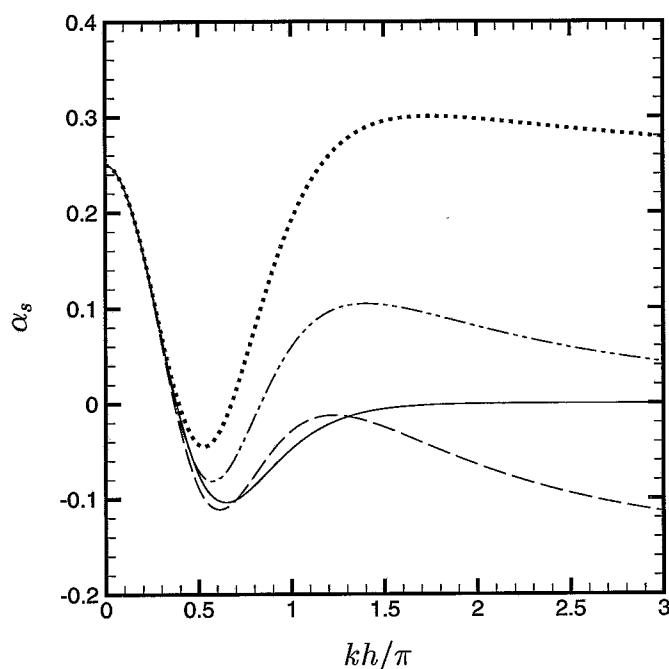


Figura 2.23: Coeficiente de empolamento linear, α_s : Airy (—); Madsen & Sørensen original $B = 1/15$ e $A = 0$ (---); Madsen & Sørensen conservativo $B = 1/10$ e $A = 1/30$ (···); Madsen & Sørensen proposto $B = 2/25$ e $A = 1/75$ (- · - ·).

- equação da continuidade

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(\zeta + h) \bar{u}] + \frac{\partial}{\partial y} [(\zeta + h) \bar{v}] = 0; \quad (2.114a)$$

- equação de conservação da quantidade de movimento segundo OX

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{1}{2} + B \right) h \frac{\partial^2}{\partial x^2} (h \bar{u}) - \left(\frac{1}{6} + A \right) h^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2} + B \right) h \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (h \bar{v}) - \left(\frac{1}{6} + A \right) h^2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x \partial y} \right] \\ + B g h \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \right] - A g h^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \\ + \frac{\tau_{sx}(\zeta)}{\rho h} - \frac{\tau_{fx}(-h)}{\rho h} + 2 \frac{\nu}{h} \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \frac{\nu}{h} \frac{\partial}{\partial y} \left[h \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right]; \end{aligned} \quad (2.114b)$$

- equação de conservação da quantidade de movimento segundo OY

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \\
& \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{1}{2} + B \right) h \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (h \bar{u}) - \left(\frac{1}{6} + A \right) h^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{1}{2} + B \right) h \frac{\partial^2}{\partial y^2} (h \bar{v}) - \left(\frac{1}{6} + A \right) h^2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right] \\
& + B g h \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \right] - A g h^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \\
& + \frac{\tau_{sy}(\zeta)}{\rho h} - \frac{\tau_{fy}(-h)}{\rho h} + \frac{\nu}{h} \frac{\partial}{\partial x} \left[h \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right] + 2 \frac{\nu}{h} \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) .
\end{aligned} \tag{2.114c}$$

2.2.4 Modelo de propagação de Seabra-Santos

Recorrendo ao método das perturbações, mas não estabelecendo nenhuma relação de grandeza *a priori* entre os parâmetros de não linearidade, ϵ , e de dispersão, σ , Seabra-Santos (1994) propôs um modelo de propagação a uma dimensão horizontal válido para ondas monocromáticas e para agitação irregular com espectro de banda estreita. Nesta secção estende-se este modelo a duas dimensões horizontais e incluem-se termos de dissipação por atrito e por difusão tipo viscosa.

Para aplicação do método das perturbações, as variáveis ζ' , u' , v' , w' , p' e Γ' são tais que

$$\begin{aligned}
\zeta' &= \zeta_1 + \epsilon \zeta_2 + \epsilon^2 \zeta_3 + \dots, \\
u' &= u_1 + \epsilon u_2 + \epsilon^2 u_3 + \dots, \\
v' &= v_1 + \epsilon v_2 + \epsilon^2 v_3 + \dots, \\
w' &= w_1 + \epsilon w_2 + \epsilon^2 w_3 + \dots, \\
p' &= p_0 + \epsilon p_1 + \epsilon^2 p_2 + \dots, \\
\Gamma' &= \Gamma_1 + \epsilon \Gamma_2 + \epsilon^2 \Gamma_3 + \dots,
\end{aligned}$$

onde os coeficientes das potências de ϵ , i.e. ζ_i , u_i , v_i , w_i , p_i , Γ_i , são de ordem $\mathcal{O}(1)$, e Γ é a aceleração vertical. Note-se que à ordem $\mathcal{O}(1)$ o fluido está em repouso.

Por comodidade de escrita e sempre que não seja susceptível de confusão, os apóstrofes referentes às quantidades adimensionais, $(')$, serão omitidos nos cálculos

que se seguem.

Cálculo da aceleração vertical

Considere-se a equação da continuidade (2.54a). Da sua integração entre o fundo, $z = -h(x, y, t)$, e uma profundidade genérica z , tendo em conta a condição de fronteira cinemática no fundo (2.57), obtém-se, para a componente vertical da velocidade, a seguinte expressão:

$$w = -\frac{\beta_t}{\epsilon} \frac{\partial h}{\partial t^*} - \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^z u \, dz - \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^z v \, dz, \quad (2.115)$$

a qual à ordem $\mathcal{O}(\epsilon)$ se escreve

$$w_1 = -\frac{\beta_t}{\epsilon} \frac{\partial h}{\partial t^*} - \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^z u_1 \, dz - \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^z v_1 \, dz. \quad (2.116)$$

De (2.115) resulta para a componente local da aceleração vertical:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\beta_t^2}{\epsilon} \frac{\partial^2 h}{\partial (t^*)^2} - \nabla \cdot \left(\int_{-h}^z \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \, dz \right) - \nabla \cdot \left(\beta_t \mathbf{u}|_{-h} \frac{\partial h}{\partial t^*} \right) \quad (2.117)$$

em que $\mathbf{u} = (u, v)$ é a componente horizontal da velocidade.

Por outro lado, a aceleração vertical total é, por definição, $\Gamma = dw/dt$, i.e.

$$\Gamma = \frac{\partial w}{\partial t} + \epsilon \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad (2.118)$$

e portanto pode ser escrita à ordem $\mathcal{O}(\epsilon)$ como

$$\Gamma_1 = -\nabla \cdot \left(\int_{-h}^z \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} \, dz \right), \quad (2.119)$$

e à ordem $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ adicionando-lhe

$$\begin{aligned} \Gamma_2 = & -\frac{\beta_t^2}{\epsilon^2} \frac{\partial h}{\partial t^{*2}} - \nabla \cdot \left(\int_{-h}^z \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} \, dz \right) - \frac{\beta_t}{\epsilon} \nabla \cdot \left(\mathbf{u}_1|_{-h} \frac{\partial h}{\partial t^*} \right) \\ & + \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (2.120)$$

Cálculo da pressão

Admitindo um escoamento quase irrotacional segundo as direcções horizontais, i.e. $\Omega_x \sim \Omega_y \sim \epsilon$, e tendo em conta a hipótese de Navier (2.49) e a equação da continui-

dade (2.54a), a equação de conservação da quantidade de movimento segundo OZ (2.54d) simplifica-se, escrevendo-se:

$$\epsilon \sigma^2 \Gamma = -\frac{\partial p}{\partial z} - 1, \quad (2.121)$$

Após integração entre a profundidade genérica z e a superfície livre, $z = \epsilon \zeta$, tendo em consideração a condição de fronteira dinâmica à superfície (2.56c), obtêm-se as seguintes expressões para os coeficientes p_0 , p_1 e p_2 :

$$p_0 = \int_z^0 dz = -z, \quad (2.122a)$$

$$\begin{aligned} p_1 &= \int_z^0 \sigma^2 \Gamma_1 dz + \frac{1}{\epsilon} \int_0^{\epsilon \zeta_1} dz \\ &= \zeta_1 + \sigma^2 \int_z^0 \Gamma_1 dz, \end{aligned} \quad (2.122b)$$

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\epsilon \zeta_1}^{\epsilon \zeta_1 + \epsilon^2 \zeta_2} dz + \sigma^2 \int_z^0 \Gamma_2 dz + \frac{\sigma^2}{\epsilon} \int_0^{\epsilon \zeta_1} \Gamma_1 dz \\ &= \zeta_2 + \sigma^2 \int_z^0 \Gamma_2 dz + \frac{\sigma^2}{\epsilon} \int_0^{\epsilon \zeta_1} \Gamma_1 dz. \end{aligned} \quad (2.122c)$$

Equação da continuidade

Integrando a equação da continuidade local (2.54a) entre o fundo e a superfície livre, tendo em consideração as condições de fronteira cinemáticas (2.57) e (2.55) e ainda a definição de valor médio, obtém-se a equação integral de conservação da massa:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\beta_t}{\epsilon} \frac{\partial h}{\partial t^*} + \nabla \cdot \left[(h + \epsilon \zeta) \bar{\mathbf{u}} \right] = 0, \quad (2.123)$$

sendo $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}, \bar{v})$ o vector das componentes horizontais da média vertical instantânea da velocidade.

Solução à ordem $\mathcal{O}(\epsilon)$

A equação de conservação da quantidade de movimento horizontal, na forma vectorial, escreve-se à ordem $\mathcal{O}(\epsilon)$:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -\nabla p_1.$$

Sendo assim, e tendo em conta o resultado (2.122b), é possível obter

$$\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \nabla \zeta_1 - \sigma^2 \int_z^0 \nabla \left(\nabla \cdot \int_{-h}^z \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} dz \right) dz = 0. \quad (2.124)$$

Escrevendo a equação (2.124) para $z = 0$, obtém-se um resultado equivalente ao da teoria de ondas de amplitude infinitesimal,

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}_1|_{z=0} + \nabla \zeta_1 = 0. \quad (2.125)$$

Esta equação admite a solução de onda progressiva dada por

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\cosh [k(h+z)]}{\cosh kh} \mathbf{u}_1|_{z=0},$$

ou, utilizando a média vertical instantânea da velocidade,

$$\mathbf{u}_1 = kh \frac{\cosh [k(h+z)]}{\sinh kh} \bar{\mathbf{u}}_1 + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (2.126)$$

Por outro lado, integrando a equação (2.124) entre o fundo, $z = -h$, e a superfície livre, $z = \epsilon \zeta$, e atendendo às condições de fronteira cinemáticas (2.55) e (2.57) e à definição de valor médio, vem que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [(\epsilon \zeta_1 + h) \bar{\mathbf{u}}_1] - \epsilon \mathbf{u}_1|_{\epsilon \zeta} \frac{\partial \zeta_1}{\partial t} - \beta_t \mathbf{u}_1|_{-h} \frac{\partial h}{\partial t^*} + (\epsilon \zeta_1 + h) \nabla \zeta_1 \\ - \sigma^2 \int_{-h}^{\epsilon \zeta} \int_z^0 \nabla \left(\nabla \cdot \int_{-h}^z \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} dz \right) dz dz = 0, \end{aligned}$$

de onde finalmente resulta

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_1}{\partial t} + \nabla \zeta_1 - \frac{\sigma^2}{h} \int_{-h}^0 \int_z^0 \nabla \left(\nabla \cdot \int_{-h}^z \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} dz \right) dz dz dz = \mathcal{O}(\epsilon, \beta_t). \quad (2.127)$$

Subtraindo membro a membro as equações (2.127) e (2.125) é fácil compreender o significado do terceiro termo de (2.127):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\mathbf{u}}_1 - \mathbf{u}_1|_{z=0}) = \frac{\sigma^2}{h} \int_{-h}^0 \int_z^0 \nabla \left(\nabla \cdot \int_{-h}^z \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} dz \right) dz + \mathcal{O}(\epsilon, \beta_t).$$

Para a integração deste termo considerar-se-á a existência de fundos de variação suave. Seja β_ℓ uma escala espacial lenta tal que $(x^*, y^*) = \beta_\ell(x, y)$, com $\beta_\ell \sim \epsilon$.

Desta forma tem-se que

$$\nabla h = \beta_\ell \nabla^* h \quad \text{com} \quad \nabla^* = \left(\frac{\partial}{\partial x^*}, \frac{\partial}{\partial y^*} \right).$$

Substituindo (2.126) em (2.127) e após alguma manipulação algébrica, resulta finalmente:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2}{h} \int_{-h}^0 \int_z^0 \nabla \left(\nabla \cdot \int_{-h}^z \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} dz \right) dz = \\ \sigma^2 \nabla \left[\frac{h^2}{(kh)^2} \left(\frac{kh}{\tanh kh} - 1 \right) \nabla \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_1}{\partial t} \right] + \mathcal{O}(\sigma^2 \beta_t, \sigma^2 \beta_\ell). \end{aligned} \quad (2.128)$$

Equação da quantidade de movimento à ordem $\mathcal{O}(\epsilon^2)$

Para tornar a equação de conservação da quantidade de movimento segundo a horizontal independente da coordenada vertical, z , proceder-se-á à sua integração termo a termo desde o fundo até à superfície livre, tendo em conta as condições de fronteira naquelas superfícies, a solução de primeira ordem (2.126) e a igualdade (2.128).

Aceleração local: da integração deste termo resulta

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{\epsilon \zeta} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dz &= \frac{\partial}{\partial t} \left[(\epsilon \zeta + h) \bar{\mathbf{u}} \right] - \epsilon \mathbf{u}_1|_{\epsilon \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \beta_t \mathbf{u}_1|_{-h} \frac{\partial h}{\partial t^*} + \mathcal{O}(\epsilon^2, \epsilon \beta_t) \\ &= (\epsilon \zeta + h) \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \epsilon \left(1 - \frac{kh}{\tanh kh} \right) \bar{\mathbf{u}}_1 \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \beta_t \left(1 - \frac{kh}{\sinh kh} \right) \bar{\mathbf{u}}_1 \frac{\partial h}{\partial t^*} \\ &\quad + \mathcal{O}(\epsilon^2, \epsilon \beta_t) \\ &= (\epsilon \zeta + h) \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} - \epsilon \left(1 - \frac{kh}{\tanh kh} \right) \bar{\mathbf{u}}_1 \left[\frac{\beta_t}{\epsilon} \frac{\partial h}{\partial t^*} + \nabla \cdot (\epsilon \zeta + h) \bar{\mathbf{u}} \right] \\ &\quad + \beta_t \left(1 - \frac{kh}{\sinh kh} \right) \bar{\mathbf{u}}_1 \frac{\partial h}{\partial t^*} + \mathcal{O}(\epsilon^2, \epsilon \beta_t) \\ &= (\epsilon \zeta + h) \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \epsilon (\epsilon \zeta + h) \left(\frac{kh}{\tanh kh} - 1 \right) \bar{\mathbf{u}} (\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) \\ &\quad + \beta_t \left(\frac{kh}{\tanh kh} - \frac{kh}{\sinh kh} \right) \bar{\mathbf{u}} \frac{\partial h}{\partial t^*} + \mathcal{O}(\epsilon^2, \epsilon \beta_t, \epsilon \beta_\ell). \end{aligned} \quad (2.129)$$

Aceleração convectiva: substituindo (2.126) em (2.116) obtém-se uma nova expressão para a velocidade vertical à primeira ordem,

$$w_1 = -\frac{\beta_t}{\epsilon} \frac{\partial h}{\partial t^*} - h \frac{\sinh[k(h+z)]}{\sinh kh} \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial y} \right) + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (2.130)$$

a qual será utilizada na integração do termo convectivo da equação de conservação da quantidade de movimento segundo OX :

$$\begin{aligned} & \int_{-h}^{\epsilon\zeta} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) dz \\ &= \int_{-h}^{\epsilon\zeta} \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + w_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) dz + \mathcal{O}(\epsilon) \\ &= \int_{-h}^{\epsilon\zeta} \left[\left(kh \frac{\cosh[k(h+z)]}{\sinh kh} \right)^2 \left(\bar{u}_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} + \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial y} \right) \right. \\ & \quad \left. - \left(kh \frac{\sinh[k(h+z)]}{\sinh kh} \right)^2 \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial y} \right) \bar{u}_1 - \frac{\beta_t}{\epsilon} \frac{\partial h}{\partial t^*} \frac{\partial u_1}{\partial z} \right] dz + \mathcal{O}(\epsilon, \beta_t, \beta_\ell), \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} & \int_{-h}^{\epsilon\zeta} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) dz \\ &= \frac{h}{2} \left[\frac{kh}{\tanh kh} + \left(\frac{kh}{\sinh kh} \right)^2 \right] \left(\bar{u}_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} + \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial y} \right) \\ & \quad - \frac{h}{2} \left[\frac{kh}{\tanh kh} - \left(\frac{kh}{\sinh kh} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial y} \right) \bar{u}_1 \\ & \quad - \frac{\beta_t}{\epsilon} \left(\frac{kh}{\tanh kh} - \frac{kh}{\sinh kh} \right) \frac{\partial h}{\partial t^*} \bar{u}_1 + \mathcal{O}(\epsilon, \beta_t, \beta_\ell) \quad (2.131a) \\ &= (\epsilon\zeta + h) \frac{1}{2} \left[\frac{kh}{\tanh kh} + \left(\frac{kh}{\sinh kh} \right)^2 \right] \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \\ & \quad - (\epsilon\zeta + h) \frac{1}{2} \left[\frac{kh}{\tanh kh} - \left(\frac{kh}{\sinh kh} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \bar{u} \\ & \quad - \frac{\beta_t}{\epsilon} \left(\frac{kh}{\tanh kh} - \frac{kh}{\sinh kh} \right) \frac{\partial h}{\partial t^*} \bar{u} + \mathcal{O}(\epsilon, \beta_t, \beta_\ell), \end{aligned}$$

e de forma similar segundo OY :

$$\begin{aligned}
 & \int_{-h}^{\epsilon\zeta} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) dz \\
 &= (\epsilon\zeta + h) \frac{1}{2} \left[\frac{kh}{\tanh kh} + \left(\frac{kh}{\sinh kh} \right)^2 \right] \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \\
 &\quad - (\epsilon\zeta + h) \frac{1}{2} \left[\frac{kh}{\tanh kh} - \left(\frac{kh}{\sinh kh} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \bar{v} \\
 &\quad - \frac{\beta_t}{\epsilon} \left(\frac{kh}{\tanh kh} - \frac{kh}{\sinh kh} \right) \frac{\partial h}{\partial t^*} \bar{v} + \mathcal{O}(\epsilon, \beta_t, \beta_\ell).
 \end{aligned} \tag{2.131b}$$

Finalmente, somando os termos de aceleração local e convectiva e dividindo por $(\epsilon\zeta + h)$ obtém-se segundo OX , e após alguma manipulação algébrica:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \epsilon \check{\alpha} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2) - \epsilon \check{\alpha} \bar{v} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) + \epsilon (\check{\alpha} - 1) \bar{u} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right); \tag{2.132a}$$

e segundo OY :

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \epsilon \check{\alpha} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2) + \epsilon \check{\alpha} \bar{u} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) + \epsilon (\check{\alpha} - 1) \bar{v} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right). \tag{2.132b}$$

Nestas expressões, $\check{\alpha}$ é dado por

$$\check{\alpha} = \frac{1}{2} \left[\frac{kh}{\tanh kh} + \left(\frac{kh}{\sinh kh} \right)^2 \right]. \tag{2.133}$$

Pressão: o termo devido ao gradiente de pressão é integrado recorrendo aos desenvolvimentos (2.122) e assumindo que $\sigma^2 \sim \epsilon$:

$$\frac{1}{\epsilon} \int_{-h}^{\epsilon\zeta} \nabla p \, dz = \int_{-h}^{\epsilon\zeta} \nabla \zeta \, dz + \sigma^2 \int_{-h}^{\epsilon\zeta} \nabla \left(\int_z^0 \Gamma_1 \, dz \right) dz + \mathcal{O}(\epsilon \sigma^2). \tag{2.134}$$

Daqui resulta, recordando o resultado (2.128), que

$$\frac{1}{\epsilon} \nabla p = \nabla \zeta - \sigma^2 \nabla \left[\frac{h^2}{(kh)^2} \left(\frac{kh}{\tanh kh} - 1 \right) \nabla \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} \right] + \mathcal{O}(\epsilon \sigma^2, \sigma^2 \beta_t, \sigma^2 \beta_\ell). \tag{2.135}$$

Tensões: finalmente os termos dissipativos serão, após integração desde o fundo, $z = -h$, até à superfície livre, $z = \epsilon\zeta$, atendendo às respectivas condições de

fronteira dinâmicas, e subsequente divisão por $\epsilon \zeta + h$, segundo OX :

$$\begin{aligned} \dots = \frac{\epsilon \sigma}{Re} \left[2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right] + \frac{\epsilon}{Re_t \sigma} \left(\frac{\tau_{sx}(\epsilon \zeta)}{h} - \frac{\tau_{fx}(-h)}{h} \right) \\ + \mathcal{O} \left(\frac{\epsilon^2 \sigma}{Re}, \frac{\epsilon \sigma \beta_\ell}{Re}, \frac{\epsilon^2}{Re_t \sigma} \right); \end{aligned} \quad (2.136a)$$

e segundo OY :

$$\begin{aligned} \dots = \frac{\epsilon \sigma}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right] + \frac{\epsilon}{Re_t \sigma} \left(\frac{\tau_{sy}(\epsilon \zeta)}{h} - \frac{\tau_{fy}(-h)}{h} \right) \\ + \mathcal{O} \left(\frac{\epsilon^2 \sigma}{Re}, \frac{\epsilon \sigma \beta_\ell}{Re}, \frac{\epsilon^2}{Re_t \sigma} \right). \end{aligned} \quad (2.136b)$$

Equações de Seabra-Santos dimensionais

As equações dimensionais do modelo de Seabra-Santos a duas dimensões horizontais são:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot [(h + \zeta) \bar{\mathbf{u}}] = 0, \quad (2.137a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \check{\alpha} \nabla \left(\frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{u}} \right) + (\check{\alpha} - 1) (\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) \bar{\mathbf{u}} - (\nabla \times \bar{\mathbf{u}}) \times \bar{\mathbf{u}} + g \nabla \zeta \\ = \nabla \left(\check{\beta} h^2 \nabla \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} \right) + \frac{1}{\rho h} (\tau_{sx}(\epsilon \zeta) - \tau_{fx}(-h)) + \nu [\nabla^2 \bar{\mathbf{u}} + \nabla (\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}})], \end{aligned} \quad (2.137b)$$

com

$$\tau_{s(\epsilon \zeta)} = (\tau_{sx}(\epsilon \zeta), \tau_{sy}(\epsilon \zeta)) \quad \text{e} \quad \tau_{f(-h)} = (\tau_{fx}(-h), \tau_{fy}(-h))$$

e onde os coeficientes $\check{\alpha}$ e $\check{\beta}$ são respectivamente

$$\check{\alpha} = \frac{1}{2} \left[\frac{(kh)_0}{\tanh(kh)_0} + \left(\frac{(kh)_0}{\sinh(kh)_0} \right)^2 \right], \quad (2.138a)$$

$$\check{\beta} = \frac{1}{(kh)_0^2} \left(\frac{(kh)_0}{\tanh(kh)_0} - 1 \right). \quad (2.138b)$$

Nas expressões (2.138), $(kh)_0$ corresponde a uma profundidade relativa local de referência, calculada recorrendo à relação de dispersão de Airy, para uma onda monocromática com frequência angular igual à frequência angular de pico do espectro da agitação.

Características dispersivas

As equações de Seabra-Santos (2.137), na forma linear, para uma onda propagando-se na direcção OX , num fluido perfeito e em fundo horizontal, escrevem-se:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + h \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0, \quad (2.139a)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \check{\beta} h^2 \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^2 \partial t}. \quad (2.139b)$$

Para estudo das características dispersivas destas equações, estudar-se-á o comportamento de soluções do tipo $e^{i(kx-\omega t)}$. Tendo em atenção as relações entre os operadores diferenciação e multiplicação nos espaços físico e de Fourier, $\partial/\partial t \rightarrow -i\omega$ e $\partial/\partial x \rightarrow ik$, o sistema (2.139) é equivalente a

$$\begin{bmatrix} -\omega & kh \\ gk & -\omega(1 + \check{\beta}(kh)^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.140)$$

onde E e U são respectivamente as amplitudes complexas de ζ e $\bar{u}$, i.e.

$$\zeta = \Re(E e^{i(kx-\omega t)}) \quad \text{e} \quad \bar{u} = \Re(U e^{i(kx-\omega t)}).$$

A relação de dispersão do modelo obtém-se do polinómio característico do determinante da matriz do sistema (2.140), resultando a frequência angular adimensional

$$\frac{\omega^2}{g/h} = \frac{(kh)^2}{1 + \check{\beta}(kh)^2} \quad (2.141)$$

e a celeridade de fase adimensional

$$\frac{C^2}{gh} = \frac{1}{1 + \check{\beta}(kh)^2}. \quad (2.142)$$

Facilmente se verifica serem estas relações exactas quando o comprimento de onda é igual ao comprimento de onda de referência, i.e. quando $kh = (kh)_0$. Por outro lado, definindo

$$\Delta = kh - (kh)_0,$$

é possível mostrar que

$$\frac{1}{gh} C_{\text{Seabra}}^2 - \frac{1}{gh} C_{\text{Airy}}^2 = -\frac{2}{3} \Delta (kh)_0 - \frac{1}{3} \Delta^2 + \mathcal{O}((kh)_0^3 \Delta, (kh)_0^2 \Delta^2, (kh)_0 \Delta^3, \Delta^4).$$

Deste resultado, conclui-se que de facto o modelo só é capaz de reproduzir com precisão o comportamento dispersivo de ondulação com um espectro de banda bastante estreita, $\mathcal{O}(\Delta)$. Os melhores resultados serão obtidos quando $(kh)_0 \rightarrow 0$, nesse caso o erro no quadrado da celeridade de fase será de ordem $\mathcal{O}(\Delta^2, (kh)_0 \Delta)$.

A celeridade de grupo do modelo, obtida através de

$$C_g = \frac{d\omega}{dk} = C \left(1 + \frac{kh}{2C^2} \frac{dC^2}{d(kh)} \right),$$

é

$$\frac{C_g}{\sqrt{gh}} = C \left(1 - \beta \frac{(kh)^2}{gh} C^2 \right). \quad (2.143)$$

Expandindo o erro absoluto da celeridade de grupo em série de Taylor, verifica-se ser esta série divergente, devido à presença de coeficientes de módulo superior à unidade:

$$\begin{aligned} \frac{1}{gh} (C_g)_{\text{Seabra}}^2 - \frac{1}{gh} (C_g)_{\text{Airy}}^2 &= -(kh)_0 \Delta - \frac{1}{2} \Delta \\ &- \frac{1}{45} (kh)_0^4 + \frac{9}{10} (kh)_0^3 \Delta + \frac{77}{60} (kh)_0^2 \Delta^2 + \frac{5}{6} (kh)_0 \Delta^3 + \frac{5}{24} \Delta^4 + \dots \end{aligned} \quad (2.144)$$

Dada a presença do termo em $(kh)_0^4$, pode-se também concluir que em nenhum caso a celeridade de grupo do modelo de Seabra-Santos toma o valor exacto (excepto no caso trivial, para o qual $kh = (kh)_0 = 0$).

Comparando os gráficos das relações de dispersão linear de frequência do modelo de Seabra-Santos para três profundidades relativas de referência, $(kh)_0 = \pi/2$, $(kh)_0 = \pi$, $(kh)_0 = 2\pi$, com os gráficos das relações de dispersão linear exactas (cf. Figuras 2.24 e 2.25) é possível concluir que este modelo reproduz bastante bem a relação de dispersão e a celeridade de fase linear em águas pouco profundas. Para profundidades médias e grandes, apresenta ainda bons resultados, mas restringidos a uma banda relativamente estreita de comprimentos de onda em torno do comprimento de onda de referência. No que concerne à celeridade de grupo os resultados são de qualidade bastante inferior, com apreciável erro relativo em toda a banda do espectro em torno do comprimento de onda de referência e incluindo este comprimento de onda (cf. Figura 2.27). O erro relativo nas celeridades de fase e de grupo encontra-se representado nas Figuras 2.26 e 2.28, respectivamente.

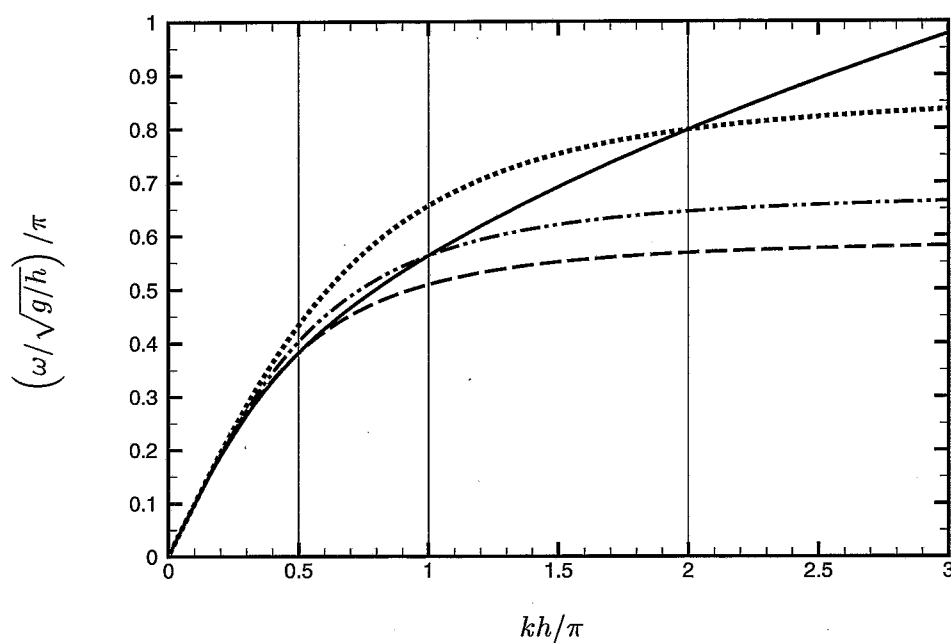


Figura 2.24: Relações de dispersão dos modelos de Airy (—) e de Seabra-Santos para: $(kh)_0 = \pi/2$ (---); $(kh)_0 = \pi$ (-·-·-); $(kh)_0 = 2\pi$ (···).

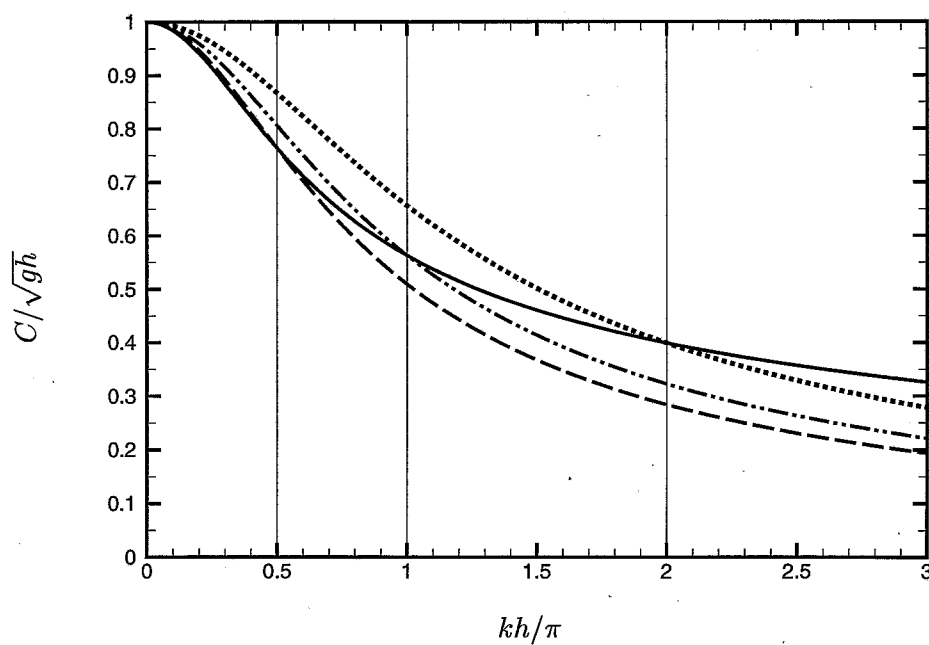


Figura 2.25: Celeridade de fase dos modelos de Airy (—) e de Seabra-Santos para: $(kh)_0 = \pi/2$ (---); $(kh)_0 = \pi$ (-·-·-); $(kh)_0 = 2\pi$ (···).

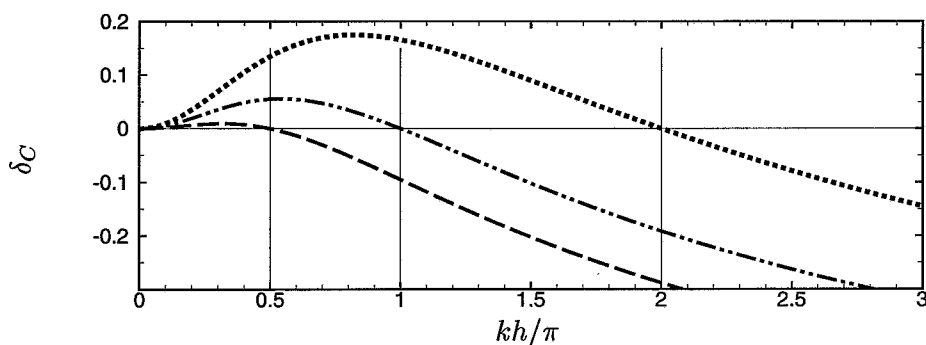


Figura 2.26: Erro relativo da celeridade de fase do modelo de Seabra-Santos para: $(kh)_0 = \pi/2$ (---); $(kh)_0 = \pi$ (-.-.); $(kh)_0 = 2\pi$ (···).

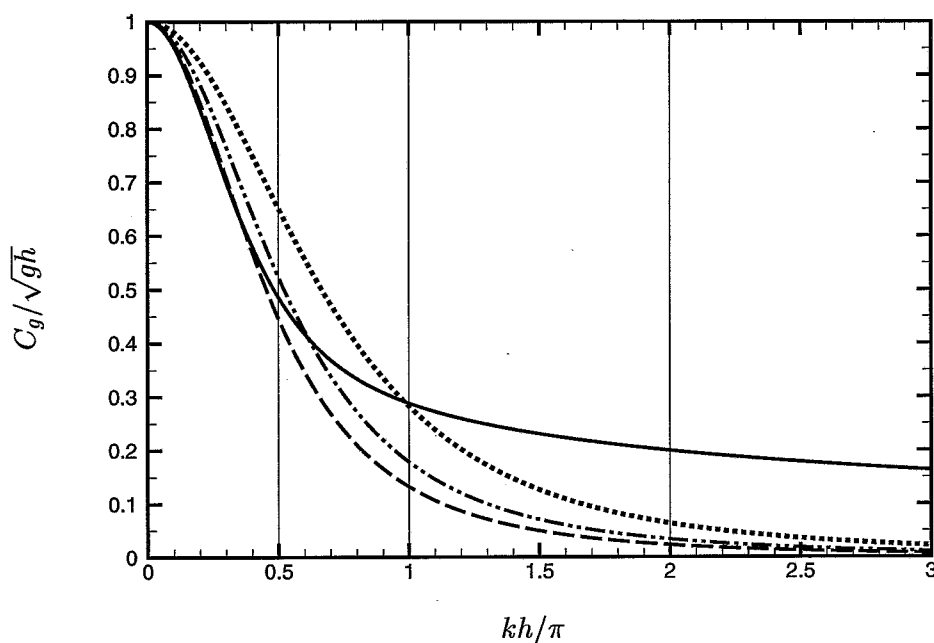


Figura 2.27: Celeridade de grupo dos modelos de Airy (—) e de Seabra-Santos para: $(kh)_0 = \pi/2$ (---); $(kh)_0 = \pi$ (-.-.); $(kh)_0 = 2\pi$ (···).

Empolamento linear

Embora não se tenha efectuado a análise do comportamento do modelo de Seabra-Santos face a condições conducentes ao fenómeno de empolamento linear, é possível, das características das relações de dispersão, tirar algumas conclusões prévias. De facto, devido ao elevado erro registado na celeridade de grupo, é de esperar que o modelo não seja fisicamente consistente do ponto de vista do empolamento, i.e. que não conserve o fluxo energético, quando simultaneamente se procura aproximar a relação de empolamento linear de Airy.

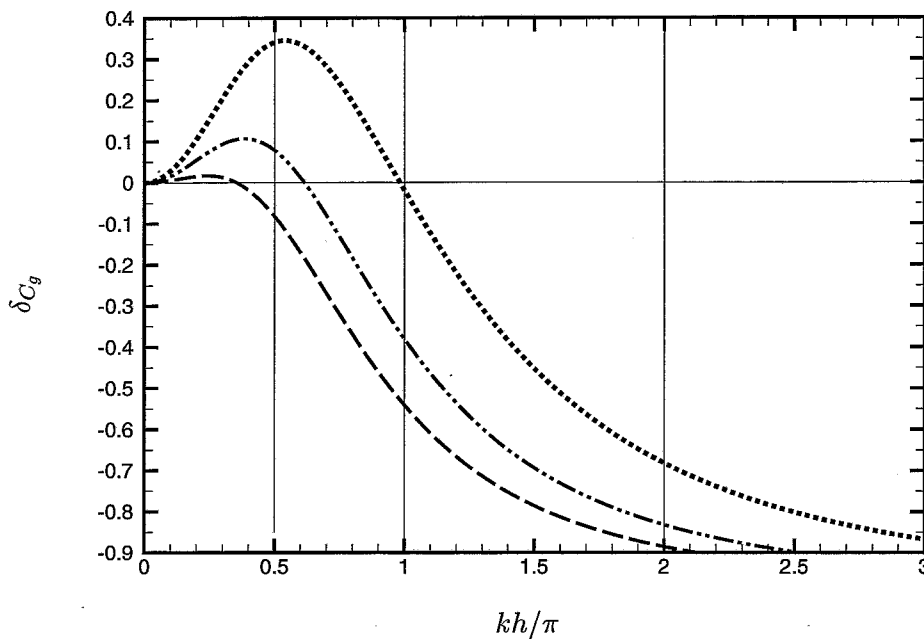


Figura 2.28: Erro relativo da celeridade de grupo do modelo de Seabra-Santos para: $(kh)_0 = \pi/2$ (---); $(kh)_0 = \pi$ (-.-.-); $(kh)_0 = 2\pi$ (···).

2.2.5 Modelo de propagação de Nadaoka & Beji

Num trabalho recente, Nadaoka et al. (1997) propuseram-se ultrapassar as limitações dos modelos do tipo de Boussinesq no tocante à dispersividade e até certo ponto à não linearidade. Para tal, é assumida uma função de distribuição vertical das velocidades baseada na solução geral da equação de Laplace para fundos planos. Nesta secção será feita a derivação deste modelo, explicitando-se a ordem do erro das equações e estendendo-se o modelo a fluidos viscosos com atrito no fundo e à superfície, duas situações não contempladas no trabalho daqueles autores. Serão utilizadas as variáveis adimensionais e os parâmetros de não linearidade, ϵ , e de dispersão, σ , anteriormente definidos (cf. §2.2.1). Neste modelo utilizar-se-ão a elevação da superfície livre e a velocidade horizontal para $z = 0$ como variáveis computacionais.

Nos cálculos apresentados e sempre que não haja risco de confusão, os apóstrofes referentes a quantidades adimensionais, ($'$), serão omitidos.

Função de dependência vertical

A integração analítica das equações de Navier-Stokes (2.40) segundo a vertical obriga ao conhecimento da variação vertical das componentes horizontais da velocidade, u

e v . Inspirando-se na solução geral da equação de Laplace para fundos horizontais,

$$\phi(x, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k, t) \frac{\cosh[k(h+z)]}{\cosh kh} e^{ikx} dk, \quad (2.145)$$

Nadaoka et al. (1997) propõem que o vector velocidade horizontal $\mathbf{u} = (u, v)$ seja escrito como uma combinação linear de N funções vectoriais $\mathbf{U}_m = (U_m, V_m)$ definidas para o nível de repouso $z = 0$, com os coeficientes funcionais $F_m = F_m(z, k_m h)$ para definir a dependência vertical. Tem-se então que

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \sum_{m=1}^N F_m(z, k_m h) \mathbf{U}_m(x, y, t), \quad (2.146)$$

com

$$F_m(z, k_m h) = \frac{\cosh[k_m(h+z)]}{\cosh k_m h}. \quad (2.147)$$

Note-se que para o nível de repouso vem

$$\mathbf{u}_0 = (u_0, v_0) = \sum_{m=1}^N \mathbf{U}_m. \quad (2.148)$$

Aqueles autores chamam ainda a atenção para o facto de a solução (2.145) só ser exacta quando k e h são independentes das coordenadas espaciais x e y . No entanto, e tendo em conta os resultados obtidos para o modelo de Berkhoff (1972), é de esperar que, no caso de dependência lenta do espaço, a expressão (2.145) seja ainda uma boa solução quando k e h são referidos aos seus valores locais. Por outro lado, e embora se trate da solução de um problema linear, (2.145) é aplicável a problemas não lineares, dado que só depende das características do fundo, enquanto a não linearidade do fenómeno reside nas condições de fronteira na superfície livre.

O problema encontra-se agora definido a $2N + 1$ variáveis: elevação da superfície livre, $\zeta(x, y, t)$, e $2N$ componentes, $\mathbf{U}_m(x, y, t)$, $m = 1 \dots N$, do vector velocidade horizontal para $z = 0$. No entanto, como se mostrará mais adiante, um reduzido número de componentes é suficiente para obter uma boa descrição do campo de velocidades, com excelentes características de dispersão linear de frequência.

Equação da continuidade

Integrando a equação da continuidade (2.54a) entre o fundo, $z = -h$, e a superfície livre, $z = \epsilon \zeta$, e tendo em conta as condições de fronteira cinemáticas, obtém-se a

equação da continuidade integral exacta:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{-h}^{\epsilon \zeta} u \, dz \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{-h}^{\epsilon \zeta} v \, dz \right) = 0.$$

Desenvolvendo u e v em série de Taylor em torno do nível de repouso, $z = 0$, esta equação reescreve-se:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{-h}^0 u \, dz + \epsilon \zeta u_0 \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{-h}^0 v \, dz + \epsilon \zeta v_0 \right) = \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

onde $u_0(x, y, t)$ e $v_0(x, y, t)$ são as componentes horizontais da velocidade para $z = 0$, nas direcções OX e OY respectivamente.

Finalmente, substituindo nesta última equação a relação de dependência vertical das velocidades (2.146), obtém-se a equação da continuidade do novo modelo

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \sum_{m=1}^N \nabla \cdot \left[\left(\frac{\omega_m^2}{g k_m^2} + \epsilon \zeta \right) \mathbf{U}_m \right] = \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (2.149)$$

onde ω_m se define recorrendo à relação de dispersão linear de Airy:

$$\omega_m^2 = g k_m \tanh k_m h. \quad (2.150)$$

Um processo semelhante, mas em que a integração da condição de continuidade local (2.54a) é feita entre o fundo, $z = -h$, e a profundidade genérica z , conduz, após aplicação da condição de fronteira cinemática no fundo, à expressão da velocidade vertical à profundidade genérica z :

$$w(x, y, z, t) = - \sum_{m=1}^N \nabla \cdot \left[\frac{\sinh[k_m(h+z)]}{k_m \cosh k_m h} \mathbf{U}_m(x, y, t) \right]. \quad (2.151)$$

Equações de conservação da quantidade de movimento

Para a integração das equações de conservação da quantidade de movimento (2.54b), (2.54c) e (2.54d), será necessário admitir a quase irrotacionalidade do escoamento nas direcções horizontais¹, i.e.

$$\Omega_x = \sigma^2 \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = \mathcal{O}(\epsilon), \quad (2.152a)$$

¹Note-se que a formulação original de Nadaoka e colaboradores é mais restritiva ao impôr ainda que $\Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \mathcal{O}(\epsilon)$.

$$\Omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \sigma^2 \frac{\partial w}{\partial x} = \mathcal{O}(\epsilon) . \quad (2.152b)$$

As equações de conservação da quantidade de movimento podem agora ser reescritas como:

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} (u^2 + v^2 + \sigma^2 w^2) - \epsilon^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) v \\ = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\epsilon^2 \sigma}{Re} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^3) , \end{aligned} \quad (2.153a)$$

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial y} (u^2 + v^2 + \sigma^2 w^2) + \epsilon^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) u \\ = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\epsilon^2 \sigma}{Re} \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^3) , \end{aligned} \quad (2.153b)$$

$$\begin{aligned} \epsilon \sigma^2 \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2} \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial z} (u^2 + v^2 + \sigma^2 w^2) \\ = - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\epsilon^2 \sigma}{Re} \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) - 1 + \mathcal{O}(\epsilon^3) . \end{aligned} \quad (2.153c)$$

A equação de conservação da quantidade de movimento na direcção vertical pode ainda ser simplificada se consecutivamente: se admitir as hipóteses de Navier (2.49); se aplicar as relações resultantes da hipótese de quase irrotacionalidade (2.152); se tiver em atenção a equação da continuidade na sua forma local (2.54a). Desta sequência de operações resulta que

$$\epsilon \sigma^2 \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2} \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial z} (u^2 + v^2 + \sigma^2 w^2) = - \frac{\partial p}{\partial z} - 1 + \mathcal{O} \left(\epsilon^3, \frac{\epsilon^3 \sigma}{Re} \right) . \quad (2.154)$$

Cálculo da pressão: o cálculo do valor da pressão, p , à profundidade genérica z , faz-se por integração da equação (2.154) entre a profundidade genérica z e a superfície livre. Resulta desta integração, tendo em consideração a condição de fronteira dinâmica na superfície livre, a seguinte expressão para a pressão:

$$\begin{aligned} p = \epsilon \sigma^2 \int_z^{\epsilon \zeta} \frac{\partial w}{\partial t} dz \\ + \frac{\epsilon^2}{2} \left[(u^2|_{\epsilon \zeta} + v^2|_{\epsilon \zeta} + \sigma^2 w^2|_{\epsilon \zeta}) - (u^2 + v^2 + \sigma^2 w^2) \right] + (\epsilon \zeta - z) \\ + \mathcal{O} \left(\epsilon^3, \frac{\epsilon^3 \sigma}{Re} \right) . \end{aligned} \quad (2.155)$$

Por substituição de (2.155) nas equações (2.153a) e (2.153b), obtêm-se novas

formas para as equações de conservação da quantidade de movimento horizontal:

$$\begin{aligned} & \epsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} (u^2|_{\epsilon\zeta} + v^2|_{\epsilon\zeta} + \sigma^2 w^2|_{\epsilon\zeta}) - \epsilon^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) v \\ & + \epsilon \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \epsilon \sigma^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_z^{\epsilon\zeta} \frac{\partial w}{\partial t} dz = \frac{\epsilon^2 \sigma}{Re} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) + \mathcal{O} \left(\epsilon^3, \frac{\epsilon^3 \sigma}{Re} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \epsilon \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial y} (u^2|_{\epsilon\zeta} + v^2|_{\epsilon\zeta} + \sigma^2 w^2|_{\epsilon\zeta}) + \epsilon^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) u \\ & + \epsilon \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \epsilon \sigma^2 \frac{\partial}{\partial y} \int_z^{\epsilon\zeta} \frac{\partial w}{\partial t} dz = \frac{\epsilon^2 \sigma}{Re} \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) + \mathcal{O} \left(\epsilon^3, \frac{\epsilon^3 \sigma}{Re} \right). \end{aligned}$$

Após desenvolvimento de u , v e w em série de Taylor em torno do nível de repouso, $z = 0$, resulta por fim que:

$$\begin{aligned} & \epsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} (u_0^2 + v_0^2 + \sigma^2 w_0^2) - \epsilon^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) v + \epsilon \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ & + \epsilon \sigma^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_z^0 \frac{\partial w}{\partial t} dz + \epsilon \zeta \frac{\partial w_0}{\partial t} \right) = \frac{\epsilon^2 \sigma}{Re} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) + \mathcal{O} \left(\epsilon^3, \frac{\epsilon^3 \sigma}{Re} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \epsilon \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial y} (u_0^2 + v_0^2 + \sigma^2 w_0^2) + \epsilon^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) u + \epsilon \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ & + \epsilon \sigma^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_z^0 \frac{\partial w}{\partial t} dz + \epsilon \zeta \frac{\partial w_0}{\partial t} \right) = \frac{\epsilon^2 \sigma}{Re} \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) + \mathcal{O} \left(\epsilon^3, \frac{\epsilon^3 \sigma}{Re} \right). \end{aligned}$$

Recorrendo à equação (2.151), resulta para a componente local da aceleração vertical:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = - \sum_{m=1}^N \nabla \cdot \left(\frac{\sinh [k_m (h + z)]}{k_m \cosh k_m h} \frac{\partial \mathbf{U}_m}{\partial t} \right).$$

Com base nesta relação e na relação de dependência vertical (2.146) das componentes horizontais do vector velocidade u e v , as equações de conservação das componentes

horizontais da quantidade de movimento são:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=1}^N F_m \frac{\partial U_m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\epsilon}{2} (u_0^2 + v_0^2 + \sigma^2 w_0^2) + \zeta \right] \\
 & - \epsilon \sum_{m=1}^N F_m \left(\frac{\partial V_m}{\partial x} - \frac{\partial U_m}{\partial y} \right) \sum_{m=1}^N F_m V_m + \epsilon \sigma^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\zeta \frac{\partial w_0}{\partial t} \right) \\
 & = \sigma^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\nabla \cdot \left(\frac{1 - F_m}{k_m^2} \frac{\partial \mathbf{U}_m}{\partial t} \right) \right] + \frac{\epsilon \sigma}{Re} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \\
 & + \mathcal{O} \left(\epsilon^2, \frac{\epsilon^2 \sigma}{Re} \right), \tag{2.156a}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=1}^N F_m \frac{\partial V_m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\epsilon}{2} (u_0^2 + v_0^2 + \sigma^2 w_0^2) + \zeta \right] \\
 & + \epsilon \sum_{m=1}^N F_m \left(\frac{\partial V_m}{\partial x} - \frac{\partial U_m}{\partial y} \right) \sum_{m=1}^N F_m U_m + \epsilon \sigma^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\zeta \frac{\partial w_0}{\partial t} \right) \\
 & = \sigma^2 \frac{\partial}{\partial y} \left[\nabla \cdot \left(\frac{1 - F_m}{k_m^2} \frac{\partial \mathbf{U}_m}{\partial t} \right) \right] + \frac{\epsilon \sigma}{Re} \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \\
 & + \mathcal{O} \left(\epsilon^2, \frac{\epsilon^2 \sigma}{Re} \right). \tag{2.156b}
 \end{aligned}$$

A obtenção de equações de conservação da quantidade de movimento independentes da profundidade z seria agora possível por simples integração desde o fundo até à superfície. No entanto desta forma, apenas duas equações são obtidas para $2N$ variáveis U_m e V_m .

Formulação de Galerkin: o problema da obtenção de $2N$ equações é ultrapassado pelo recurso a uma formulação de Galerkin. Neste tipo de formulações, a equação a resolver é multiplicada por uma função do mesmo espaço funcional² da solução pretendida, após o que se procede à sua integração sobre todo o domínio, $-h \leq z \leq \epsilon \zeta$. Neste caso particular, e como as funções vectoriais (2.146), solução da equação, têm N modos com coeficientes $F_n(z, k_n h)$, dados por (2.147), resulta um total de N equações vectoriais ($2N$ funções escalares).

Deste procedimento e após aplicação das hipóteses de Navier (2.49), das condições de fronteira dinâmicas no fundo, (2.58a) e (2.58b), e das condições de fronteira dinâmicas à superfície livre, (2.56a) e (2.56b), vem finalmente, tendo em conta

²De facto, neste caso, a designação correcta é a de formulação de Bubnov-Galerkin.

a condição de quase irrotacionalidade (2.152):

$$\begin{aligned}
& \int_{-h}^0 F_n \left\{ \sum_{m=1}^N F_m \frac{\partial U_m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\epsilon}{2} (u_0^2 + v_0^2 + \sigma^2 w_0^2) + \zeta \right] \right. \\
& \quad \left. - \epsilon \sum_{m=1}^N \left(\frac{\partial V_m}{\partial x} - \frac{\partial U_m}{\partial y} \right) \sum_{m=1}^N F_m V_m + \epsilon \sigma^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\zeta \frac{\partial w_0}{\partial t} \right) \right\} dz \\
& = \sigma^2 \int_{-h}^0 F_n \sum_{m=1}^N \frac{\partial}{\partial x} \left[\nabla \cdot \left(\frac{1 - F_m}{k_m^2} \frac{\partial \mathbf{U}_m}{\partial t} \right) \right] dz \\
& \quad + \frac{\epsilon \sigma}{Re} \left[2 \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^0 F_n \frac{\partial u}{\partial x} dz - 2 \int_{-h}^0 \frac{\partial F_n}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dz \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^0 F_n \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dz - \int_{-h}^0 \frac{\partial F_n}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dz - \int_{-h}^0 \frac{\partial F_n}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} dz \right] \\
& \quad + \frac{\epsilon}{Re_t \sigma} \tau_{sx(\epsilon \zeta)} - \frac{\epsilon}{Re_t \sigma} \frac{1}{\cosh k_n h} \tau_{fx(-h)} \\
& \quad + \mathcal{O} \left(\epsilon^2, \frac{\epsilon^2 \sigma}{Re} \right), \quad \text{para } n = 1 \dots N, \\
& \int_{-h}^0 F_n \left\{ \sum_{m=1}^N F_m \frac{\partial V_m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\epsilon}{2} (u_0^2 + v_0^2 + \sigma^2 w_0^2) + \zeta \right] \right. \\
& \quad \left. + \epsilon \sum_{m=1}^N \left(\frac{\partial V_m}{\partial x} - \frac{\partial U_m}{\partial y} \right) \sum_{m=1}^N F_m U_m + \epsilon \sigma^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\zeta \frac{\partial w_0}{\partial t} \right) \right\} dz \\
& = \sigma^2 \int_{-h}^0 F_n \sum_{m=1}^N \frac{\partial}{\partial y} \left[\nabla \cdot \left(\frac{1 - F_m}{k_m^2} \frac{\partial \mathbf{U}_m}{\partial t} \right) \right] dz \\
& \quad + \frac{\epsilon \sigma}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^0 F_n \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dz - \int_{-h}^0 \frac{\partial F_n}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dz \right. \\
& \quad \left. + 2 \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^0 F_n \frac{\partial v}{\partial y} dz - 2 \int_{-h}^0 \frac{\partial F_n}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} dz - \int_{-h}^0 \frac{\partial F_n}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} dz \right] \\
& \quad + \frac{\epsilon}{Re_t \sigma} \tau_{sy(\epsilon \zeta)} - \frac{\epsilon}{Re_t \sigma} \frac{1}{\cosh k_n h} \tau_{fy(-h)} \\
& \quad + \mathcal{O} \left(\epsilon^2, \frac{\epsilon^2 \sigma}{Re} \right), \quad \text{para } n = 1 \dots N.
\end{aligned}$$

O cálculo dos integrais presentes nestas equações efectua-se assumindo uma variação suave dos fundos. Considere-se uma escala espacial lenta β_ℓ , tal que $(x^*, y^*) = \beta_\ell (x, y)$, com $\beta_\ell \sim \epsilon$, e seja $h = h(\beta_\ell x, \beta_\ell y)$. Nestas condições resulta,

em variáveis adimensionais, que

$$\nabla h = \beta_\ell \nabla^* h$$

com $\nabla^* = (\partial/\partial x^*, \partial/\partial y^*)$, sendo $\nabla^* h \sim 1$.

As equações de conservação da quantidade de movimento, obtidas após cálculo dos integrais e desprezando os termos de ordem superior, são:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^N A_{nm} \frac{\partial \mathbf{U}_m}{\partial t} + B_n \nabla \left[\frac{\epsilon}{2} (u_0^2 + v_0^2 + \sigma^2 w_0^2) + \zeta + \epsilon \sigma^2 \left(\zeta \frac{\partial w_0}{\partial t} \right) \right] \\ & + \epsilon \sum_{m=1}^N \sum_{\ell=1}^N J_{n\ell m} (\nabla \times \mathbf{U}_\ell) \times \mathbf{U}_m \\ & = \sum_{m=1}^N \sigma^2 \left[\nabla \left(C_{nm} \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{U}_m}{\partial t} \right) + \mathbf{D}_{nm} \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{U}_m}{\partial t} - \nabla C_{nm} \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{U}_m}{\partial t} \right] \\ & + \sum_{m=1}^N \frac{\epsilon \sigma}{Re} [(2 \nabla \cdot A_{nm} \nabla) \mathbf{U}_m - (2 \mathbf{H}_{nm} \cdot \nabla) \mathbf{U}_m - E_{nm} \mathbf{U}_m] \\ & + \frac{\epsilon \sigma}{Re_t} (g \boldsymbol{\tau}_{s(\epsilon\zeta)} - I_n \boldsymbol{\tau}_{f(-h)}) \\ & + \mathcal{O} \left(\epsilon^2, \frac{\epsilon^2 \sigma}{Re}, \beta_\ell^2 \sigma^2 \right), \quad \text{para } n = 1 \dots N, \end{aligned} \tag{2.157}$$

com

$$\boldsymbol{\tau}_{s(\epsilon\zeta)} = (\tau_{sx(\epsilon\zeta)}, \tau_{sy(\epsilon\zeta)}) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\tau}_{f(-h)} = (\tau_{fx(-h)}, \tau_{fy(-h)}) .$$

Cálculo dos coeficientes: alguns dos coeficientes da equação (2.157) foram já determinados e apresentados em Nadaoka et al. (1997). Para um deles, A_{nn} , apresenta-se agora uma formulação diferente. Além disso, são também apresentados os coeficientes para os termos rotacionais, difusivos e de atrito não incluídos no trabalho daqueles autores:

$$B_n = g \int_{-h}^0 F_n dz = \frac{\omega_n^2}{k_n^2} = C_n^2; \tag{2.158a}$$

$$A_{nm} = g \int_{-h}^0 F_n F_m dz = \frac{\omega_n^2 - \omega_m^2}{k_n^2 - k_m^2}; \tag{2.158b}$$

$$A_{nn} = g \int_{-h}^0 F_n^2 dz = \frac{1}{2} (B_n + gh - B_n k_n h \tanh k_n h); \tag{2.158c}$$

$$C_{nm} = g \int_{-h}^0 F_n \frac{1 - F_m}{k_m^2} dz = \frac{B_n - A_{nm}}{k_m^2}; \quad (2.158d)$$

$$C_{nn} = g \int_{-h}^0 F_n \frac{1 - F_n}{k_n^2} dz = \frac{B_n - A_{nn}}{k_n^2}; \quad (2.158e)$$

$$\begin{aligned} D_{nm} &= 2g \int_{-h}^0 F_n \nabla \left(\frac{1 - F_m}{k_m^2} \right) dz \\ &= - \frac{4}{k_n^2 - k_m^2} \frac{\nabla k_m}{k_m} [A_{nm} + (k_n^2 - k_m^2) C_{nm}] \end{aligned} \quad (2.158f)$$

$$- \frac{4}{k_n^2 - k_m^2} \frac{\nabla h}{h} \sqrt{\left(A_{nn} - \frac{1}{2} B_n \right) \left(A_{mm} - \frac{1}{2} B_m \right)};$$

$$D_{nn} = 2g \int_{-h}^0 F_n \nabla \left(\frac{1 - F_n}{k_n^2} \right) dz = \nabla C_{nn}; \quad (2.158g)$$

$$E_{nm} = g \int_{-h}^0 \frac{\partial F_n}{\partial z} \frac{\partial F_m}{\partial z} dz = k_n k_m A_{nm}; \quad (2.158h)$$

$$E_{nn} = g \int_{-h}^0 \left(\frac{\partial F_n}{\partial z} \right)^2 dz = k_n^2 A_{nn}; \quad (2.158i)$$

$$\begin{aligned} H_{nm} &= g \int_{-h}^0 (\nabla F_n) F_m dz \\ &= \frac{2 k_n^2}{k_n^2 - k_m^2} \left[\left(A_{nn} - \frac{1}{2} B_n \right) - \sqrt{\left(A_{nn} - \frac{1}{2} B_n \right) \left(A_{mm} - \frac{1}{2} B_m \right)} \right] \frac{\nabla h}{h} \\ &\quad + \left[- \frac{k_n^2 + k_m^2}{(k_n^2 - k_m^2)^2} w_n^2 \sqrt{1 - \frac{w_m^4}{g^2 k_m^2}} + \frac{2 k_n^2}{k_n^2 - k_m^2} \left(A_{nn} - \frac{1}{2} B_n \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2 k_n^2}{(k_n^2 - k_m^2)^2} \omega_m^2 \right] \frac{\nabla k_n}{k_n}; \end{aligned} \quad (2.158j)$$

$$\begin{aligned} H_{nn} &= g \int_{-h}^0 (\nabla F_n) F_n dz \\ &= - \frac{h}{g} \omega_n^2 \left(A_{nn} - \frac{1}{2} B_n \right) \frac{\nabla h}{h} \\ &\quad + \left[\frac{1}{2} (A_{nn} - B_n) - \frac{h}{g} \omega_n^2 \left(A_{nn} - \frac{1}{2} B_n \right) \right] \frac{\nabla k_n}{k_n}; \end{aligned} \quad (2.158k)$$

$$I_n = \frac{g}{\cosh k_n h} = \sqrt{g^2 - k_n^2 B_n^2}; \quad (2.158l)$$

$$\begin{aligned}
J_{n\ell m} &= g \int_{-h}^0 F_n F_\ell F_m dz \\
&= \frac{1}{4g} \frac{k_n B_n^2 + k_\ell B_\ell^2 + k_m B_m^2 + \frac{1}{g^2} k_n k_\ell k_m B_n^2 B_\ell^2 B_m^2}{k_n + k_\ell + k_m} \\
&\quad + \frac{1}{4g} \frac{k_n B_n^2 + k_\ell B_\ell^2 - k_m B_m^2 - \frac{1}{g^2} k_n k_\ell k_m B_n^2 B_\ell^2 B_m^2}{k_n + k_\ell - k_m} \\
&\quad + \frac{1}{4g} \frac{k_n B_n^2 - k_\ell B_\ell^2 + k_m B_m^2 - \frac{1}{g^2} k_n k_\ell k_m B_n^2 B_\ell^2 B_m^2}{k_n - k_\ell + k_m} \\
&\quad + \frac{1}{4g} \frac{k_n B_n^2 - k_\ell B_\ell^2 - k_m B_m^2 + \frac{1}{g^2} k_n k_\ell k_m B_n^2 B_\ell^2 B_m^2}{k_n - k_\ell - k_m}.
\end{aligned} \tag{2.158m}$$

Características dispersivas

Considere-se uma restrição da equação (2.157) à propagação de ondas unidimensionais, de amplitude infinitesimal (problema linear), num fluido perfeito e em fundo horizontal:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \sum_{m=1}^N \frac{\omega_m^2}{g k_m^2} \frac{\partial U_m}{\partial x} = 0, \tag{2.159a}$$

$$\sum_{m=1}^N A_{nm} \frac{\partial U_m}{\partial t} + g B_n \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \sum_{m=1}^N C_{nm} \frac{\partial^3 U_m}{\partial x^2 \partial t}, \quad \text{para } n = 1 \dots N. \tag{2.159b}$$

No caso de agitação caracterizada por um espectro de banda estreita, será possível utilizar apenas a frequência de pico para definição da função de dependência vertical, com $N = 1$. Nesse caso as equações (2.159) simplificam-se como

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{C_p^2}{g} \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0, \tag{2.160a}$$

$$C_p (C_g)_p \frac{\partial u_0}{\partial t} + g C_p^2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{C_p (C_p - (C_g)_p)}{k_p^2} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial t}, \tag{2.160b}$$

onde $u_0 = U_1$ é a velocidade horizontal para $z = 0$ e C_p , $(C_g)_p$ e k_p são respectivamente a celeridade de fase, a celeridade de grupo e o número de onda correspondentes à frequência de pico do espectro e calculados de acordo com a teoria linear de Airy (cf. §2.1.2).

Restringindo a análise ao comportamento de soluções do tipo $e^{i(kx-\omega t)}$ e tendo em consideração a correspondência entre os operadores diferenciação e multiplicação nos espaços físico e de Fourier, $\partial/\partial t \rightarrow -i\omega$ e $\partial/\partial x \rightarrow ik$, o sistema (2.160) é equivalente a

$$\begin{bmatrix} -\omega & \frac{C_p^2}{g} k \\ g C_p^2 k & -\omega \left(C_p (C_g)_p + \frac{C_p (C_p - (C_g)_p)}{k_p^2} k^2 \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.161)$$

onde E e U são respectivamente as amplitudes complexas de ζ e u_0 , i.e. $\zeta = \Re(E e^{i(kx-\omega t)})$ e $u_0 = \Re(U e^{i(kx-\omega t)})$. A relação de dispersão do modelo de Nadaoka & Beji de banda estreita obtém-se do polinómio característico do determinante da matriz do sistema (2.161). Facilmente se mostra que a frequência angular, ω , é tal que

$$\omega^2 = k^2 \frac{C_p^3}{(C_g)_p - (C_p - (C_g)_p) \frac{(kh)^2}{(k_p h)^2}}, \quad (2.162)$$

enquanto a celeridade de fase, C , e a celeridade de grupo, C_g , são:

$$C^2 = \frac{C_p^3}{(C_g)_p - (C_p - (C_g)_p) \frac{(kh)^2}{(k_p h)^2}}, \quad (2.163)$$

$$C_g = C \left(1 + C^2 \frac{C_p - (C_g)_p}{C_p^3} \frac{(kh)^2}{(k_p h)^2} \right). \quad (2.164)$$

Os erros relativos destas relações quando comparadas com as expressões da teoria linear de Airy são dados por

$$\delta_C = \frac{C_{\text{Beji}} - C_{\text{Airy}}}{C_{\text{Airy}}} \quad \text{e} \quad \delta_{C_g} = \frac{(C_g)_{\text{Beji}} - (C_g)_{\text{Airy}}}{(C_g)_{\text{Airy}}}.$$

É de salientar o facto de as curvas de dispersão e as curvas da celeridade de fase (cf. Figuras 2.29 e 2.30) serem tangentes às correspondentes curvas resultantes da teoria linear de Airy, para o comprimento de onda de referência. Por outro lado o erro relativo da celeridade de fase mantém-se inferior a 5% para uma largura de banda da ordem de $\mathcal{O}(k_p h)$ (cf. Figura 2.32). O modelo apresenta portanto excelentes características de dispersão de frequência para espectros de pequena largura

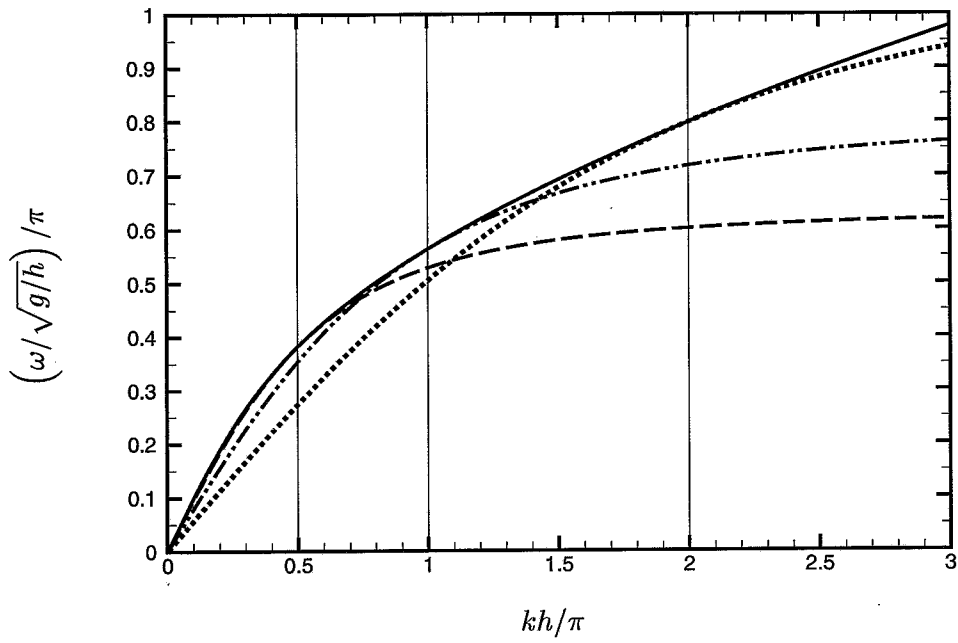


Figura 2.29: Relações de dispersão dos modelos de Airy (—) e de Nadaoka & Beji para: $k_p h = \pi/2$ (---); $k_p h = \pi$ (-·-·-); $k_p h = 2\pi$ (···).

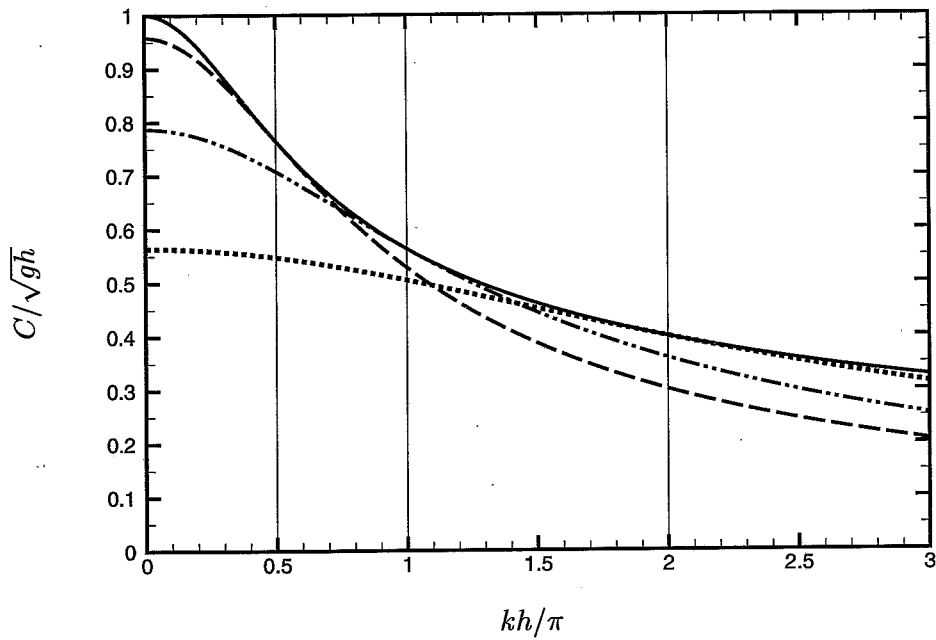


Figura 2.30: Celeridade de fase dos modelos de Airy (—) e de Nadaoka & Beji para: $k_p h = \pi/2$ (---); $k_p h = \pi$ (-·-·-); $k_p h = 2\pi$ (···).

de banda.

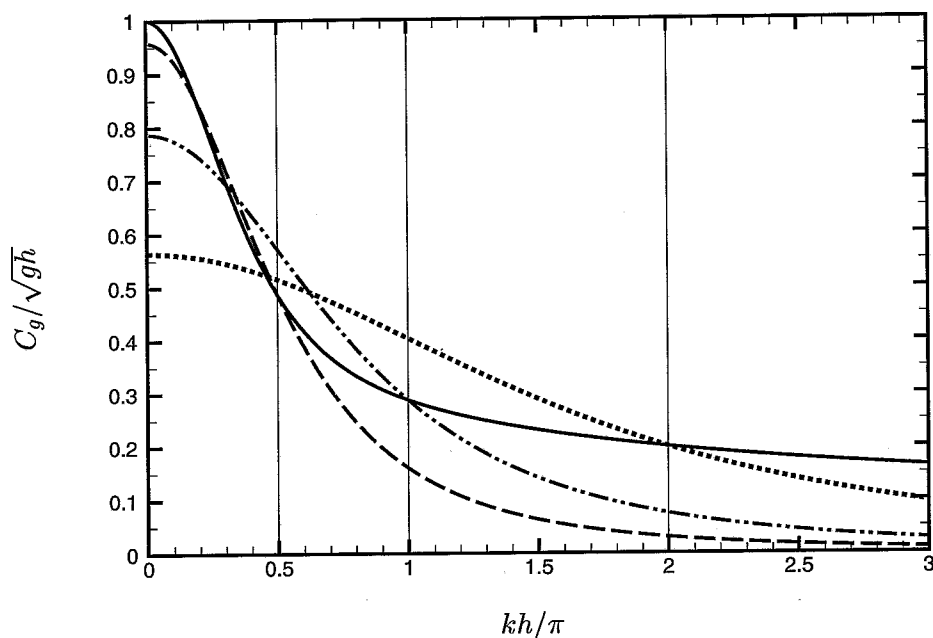


Figura 2.31: Celeridade de grupo dos modelos de Airy (—) e de Nadaoka & Beji para: $k_ph = \pi/2$ (---); $k_ph = \pi$ (— · —); $k_ph = 2\pi$ (···).

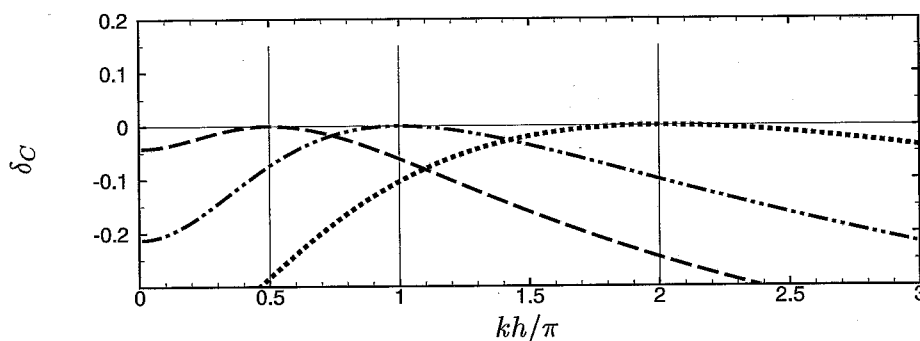


Figura 2.32: Erro relativo da celeridade de fase do modelo de Nadaoka & Beji para: $k_ph = \pi/2$ (---); $k_ph = \pi$ (— · —); $k_ph = 2\pi$ (···).

Também a celeridade de grupo apresenta valores exactos para o comprimento de onda de referência (cf. Figura 2.31). Infelizmente isto não se deve à tangência das curvas mas à sua intersecção. Deste comportamento resulta uma banda bastante mais apertada para que o erro relativo da celeridade de fase se conserve inferior a 5% (cf. Figura 2.33). Por outro lado, não tendo a celeridades de grupo do modelo de banda estreita de Nadaoka & Beji a mesma variação com kh do modelo linear de Airy, é de esperar tal como para o modelo de Seabra-Santos que este modelo não apresente características óptimas de empolamento linear.

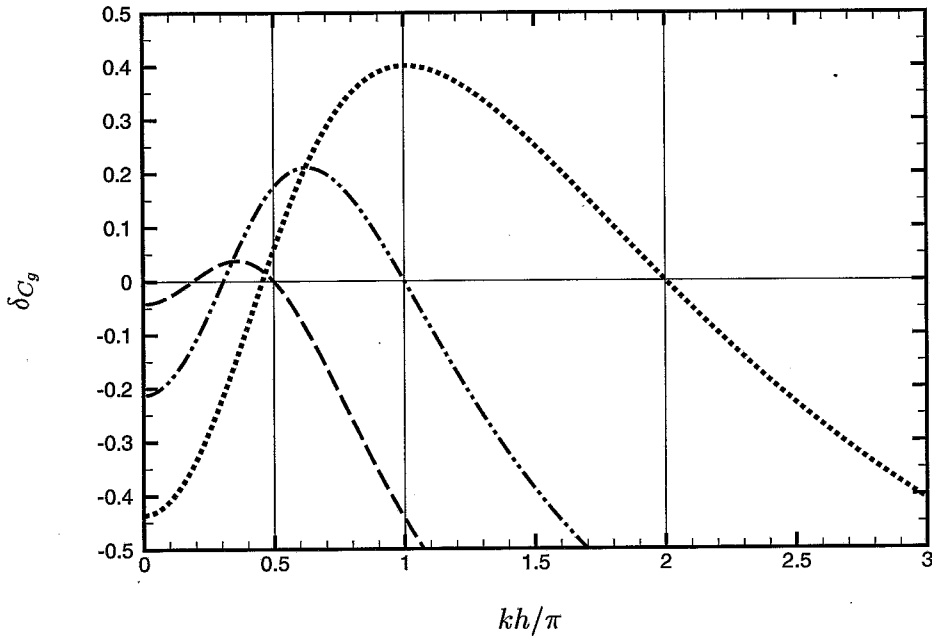


Figura 2.33: Erro relativo da celeridade de grupo do modelo de Nadaoka & Beji para: $k_p h = \pi/2$ (---); $k_p h = \pi$ (— · —); $k_p h = 2\pi$ (···).

Quando a função de dependência vertical da velocidade tem um número de componentes superior a um é possível otimizar as características dispersivas do modelo de Nadaoka & Beji por forma a cobrir um espectro de banda larga. Nadaoka et al. (1997) mostraram que três componentes, $(kh)_1 = \pi/4$, $(kh)_2 = \pi$ e $(kh)_3 = 3\pi$ são suficientes para cobrir a gama de números de onda de $kh = 0$ a $kh = 5\pi$.

No caso de N componentes, o sistema (2.159), para soluções do tipo $e^{i(kx - \omega t)}$, é equivalente a

$$\begin{bmatrix} -\omega & \frac{B_1}{g} k & \dots & \frac{B_N}{g} k \\ g B_1 k & -\omega (A_{11} + C_{11} k^2) & \dots & -\omega (A_{1N} + C_{1N} k^2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g B_N k & -\omega (A_{N1} + C_{N1} k^2) & \dots & -\omega (A_{NN} + C_{NN} k^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ U_1 \\ \vdots \\ U_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.165)$$

A relação de dispersão deste modelo resulta do polinómio característico do determinante da matriz do sistema (2.165).

Restringindo o número de componentes a três, obtém-se a seguinte relação de

dispersão para o modelo de banda larga:

$$C^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = - \frac{b_0 + b_1 k^2 + b_2 k^4}{d_0 + d_1 k^2 + d_2 k^4 + d_3 k^6} \quad (2.166)$$

e

$$C_g = \frac{d\omega}{dk} = C \left[1 + k^2 \left(\frac{b_1 + 2 b_2 k^2}{b_0 + b_1 k^2 + b_2 k^4} - \frac{d_1 + 2 d_2 k^2 + 3 d_3 k^4}{d_0 + d_1 k^2 + d_2 k^4 + d_3 k^6} \right) \right] \quad (2.167)$$

com

$$\begin{aligned} b_0 &= (A_{23}^2 - A_{22} A_{33}) B_1^2 + (2 A_{12} A_{33} - 2 A_{13} A_{23}) B_1 B_2 \\ &\quad + (2 A_{13} A_{22} - 2 A_{12} A_{23}) B_1 B_3 + (A_{13}^2 - A_{11} A_{33}) B_2^2 \\ &\quad + (2 A_{11} A_{23} - 2 A_{13} A_{12}) B_2 B_3 + (A_{12}^2 - A_{11} A_{22}) B_3^2, \\ b_1 &= (2 A_{23} C_{23} - A_{22} C_{33} - C_{22} A_{33}) B_1^2 \\ &\quad + (2 C_{12} A_{33} - 2 A_{13} C_{23} + 2 A_{12} C_{33} - 2 C_{13} A_{23}) B_1 B_2 \\ &\quad + (2 C_{13} A_{22} + 2 A_{13} C_{22} - 2 A_{12} C_{23} - 2 C_{12} A_{23}) B_1 B_3 \\ &\quad + (2 A_{13} C_{13} - A_{11} C_{33} - C_{11} A_{33}) B_2^2 \\ &\quad + (2 A_{11} C_{23} + 2 C_{11} A_{23} - 2 C_{13} A_{12} - 2 A_{13} C_{12}) B_2 B_3 \\ &\quad + (2 A_{12} C_{12} - C_{11} A_{22} - A_{11} C_{22}) B_3^2, \\ b_2 &= (C_{23}^2 - C_{22} C_{33}) B_1^2 + (2 C_{12} C_{33} - 2 C_{13} C_{23}) B_1 B_2 \\ &\quad + (2 C_{13} C_{22} - 2 C_{12} C_{23}) B_1 B_3 + (C_{13}^2 - C_{11} C_{33}) B_2^2 \\ &\quad + (2 C_{11} C_{23} - 2 C_{13} C_{12}) B_2 B_3 + (C_{12}^2 - C_{11} C_{22}) B_3^2, \\ d_0 &= (A_{22} A_{33} - A_{23}^2) A_{11} - A_{13}^2 A_{22} - A_{12}^2 A_{33} + 2 A_{12} A_{13} A_{23}, \\ d_1 &= (C_{22} A_{33} + A_{22} C_{33} - 2 A_{23} C_{23}) A_{11} \\ &\quad + (2 A_{13} C_{23} + 2 C_{13} A_{23} - 2 C_{12} A_{33} - A_{12} C_{33}) A_{12} \\ &\quad + (2 C_{12} A_{23} - 2 C_{13} A_{22} - A_{13} C_{22}) A_{13} + (A_{22} A_{33} - A_{23}^2) C_{11}, \\ d_2 &= (C_{22} C_{33} - C_{23}^2) A_{11} + (C_{22} A_{33} + A_{22} C_{33} - 2 A_{23} C_{23}) C_{11} \\ &\quad + (2 C_{13} A_{23} + 2 A_{13} C_{23} - 2 A_{12} C_{33} - C_{12} A_{33}) C_{12} \\ &\quad + (2 A_{12} C_{23} - 2 A_{13} C_{22} - C_{13} A_{22}) C_{13}, \\ d_3 &= (C_{22} C_{33} - C_{23}^2) C_{11} - C_{12}^2 C_{33} + 2 C_{12} C_{13} C_{23} - C_{13}^2 C_{22}. \end{aligned}$$

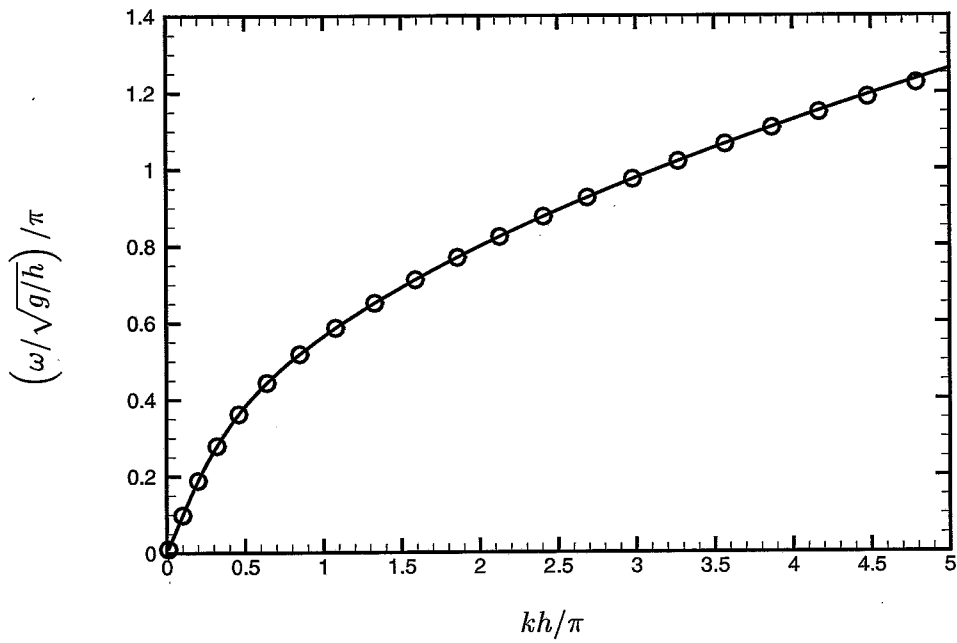


Figura 2.34: Relações de dispersão dos modelos de Airy (—) e de Nadaoka & Beji (o) com três componentes: $(kh)_1 = \pi/4$; $(kh)_2 = \pi$; $(kh)_3 = 3\pi$.

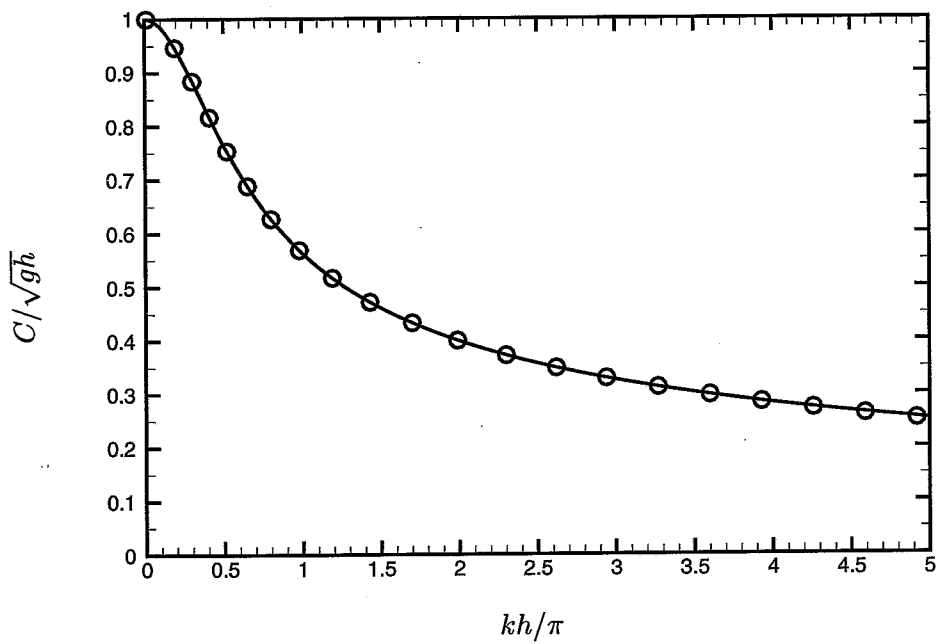


Figura 2.35: Celeridade de fase dos modelos de Airy (—) e de Nadaoka & Beji (o) com três componentes: $(kh)_1 = \pi/4$; $(kh)_2 = \pi$; $(kh)_3 = 3\pi$.

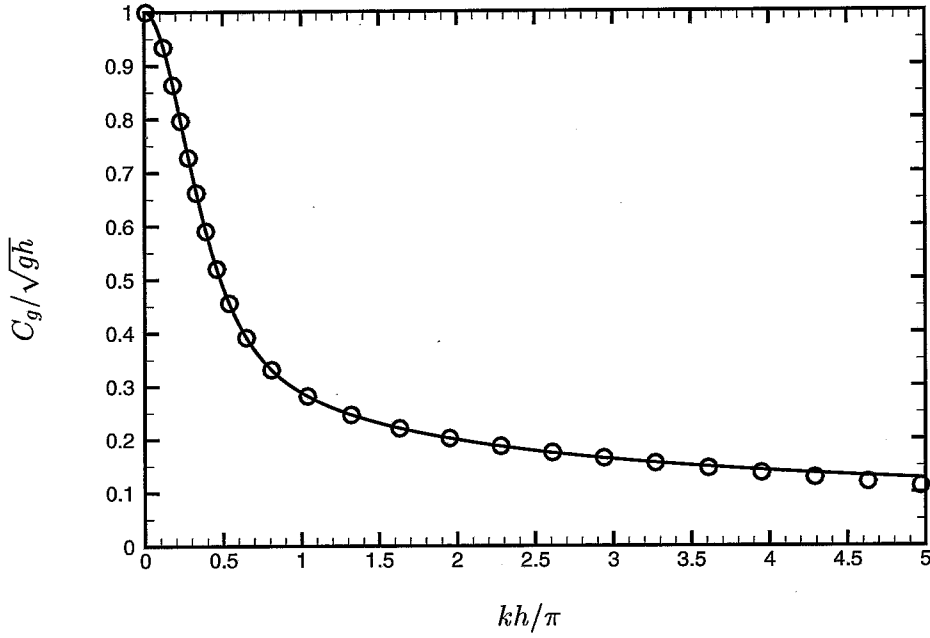


Figura 2.36: Celeridade de grupo dos modelos de Airy (—) e de Nadaoka & Beji (○) com três componentes: $(kh)_1 = \pi/4$; $(kh)_2 = \pi$; $(kh)_3 = 3\pi$.

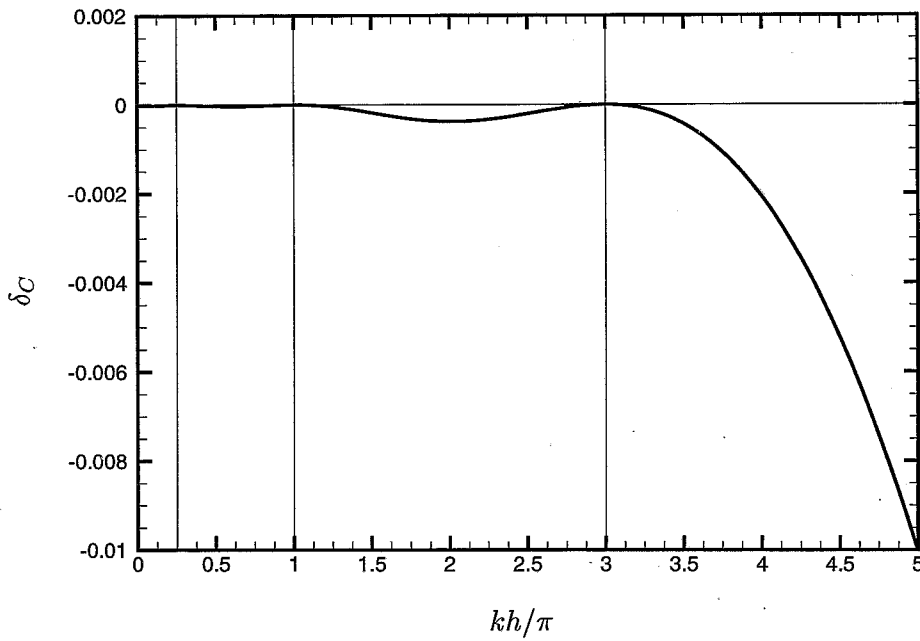


Figura 2.37: Erro relativo da celeridade de fase do modelo de Nadaoka & Beji (○) com três componentes: $(kh)_1 = \pi/4$; $(kh)_2 = \pi$; $(kh)_3 = 3\pi$.

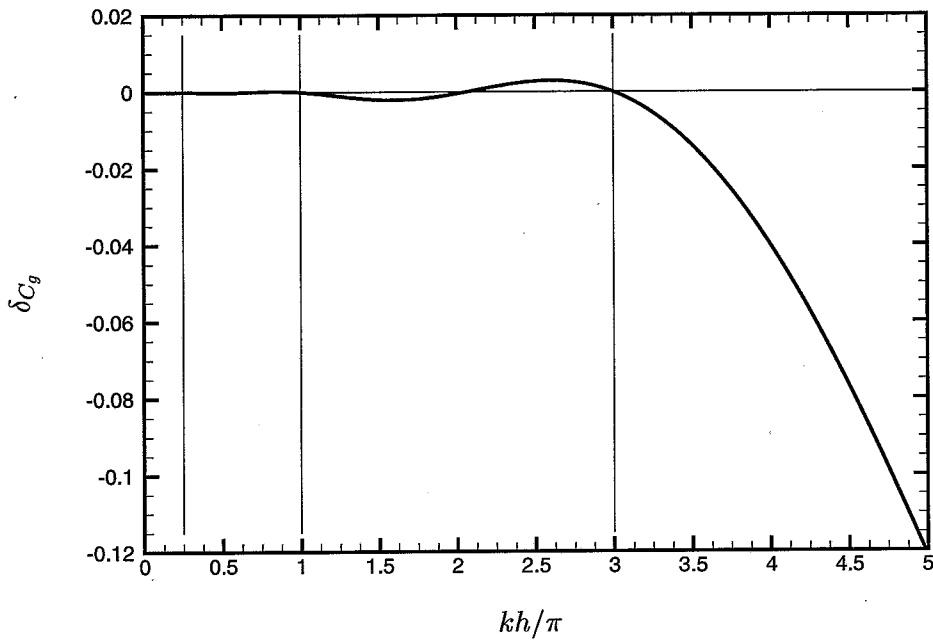


Figura 2.38: Erro relativo da celeridade de grupo do modelo de Nadaoka & Beji ($\circ$) com três componentes: $(kh)_1 = \pi/4$; $(kh)_2 = \pi$; $(kh)_3 = 3\pi$.

Nas Figuras 2.34, 2.35 e 2.36, comparam-se as relações de dispersão deste modelo com as correspondentes relações do modelo linear de Airy. As profundidades relativas de referência adoptadas foram $(kh)_1 = \pi/4$, $(kh)_2 = \pi$, e $(kh)_3 = 3\pi$. É evidente o excelente comportamento das celeridades de fase e de grupo no intervalo $kh \in]0, 5\pi[$. Os erros relativos das celeridades de fase e de grupo,

$$\delta_C = \frac{C_{\text{Beji}} - C_{\text{Airy}}}{C_{\text{Airy}}} \quad \text{e} \quad \delta_{C_g} = \frac{(C_g)_{\text{Beji}} - (C_g)_{\text{Airy}}}{(C_g)_{\text{Airy}}},$$

são extremamente reduzidos: $\delta_C < 1\%$ (cf. Figura 2.37); $\delta_{C_g} < 12\%$, sendo inferior a 5% no intervalo $kh \in]0, 4\pi]$ (cf. Figura 2.38).

Embora não tenha sido efectuada a análise do comportamento deste modelo face ao fenómeno de empolamento linear, é de esperar, dado o excelente comportamento das relações de dispersão linear, que apresente boas características de empolamento linear.

2.3 Modelos de ondas cinemáticas

O modelo mais conhecido de ondas dispersivas cinemáticas é representado pela equação de Korteweg-de Vries (KdV), derivada por Korteweg e de Vries (1895). A equação KdV admite soluções do tipo onda solitária e soluções periódicas do tipo onda cnoidal. Esta equação pode ser derivada a partir das equações de Boussinesq expressas em termos da velocidade horizontal para $z = 0$, considerando uma onda de forma permanente, propagando-se apenas num sentido. É o que se fará mais à frente.

O segundo modelo considerado, conhecido por *Regularized Long Wave* (RLW) na literatura anglo-saxónica, foi desenvolvido por Benjamin et al. (1972). Será apresentada a sua derivação a partir das equações de Boussinesq expressas em termos da média vertical da velocidade horizontal instantânea. As soluções tipo onda solitária e tipo onda cnoidal serão apresentadas nessa altura.

Beji e Nadaoka (1996) e Dingemans (1997b), recorrendo a uma técnica semelhante à utilizada por Madsen e Sørensen (1992), desenvolveram separadamente uma equação de onda cinemática com características dispersivas melhoradas, designada nesta dissertação por *Improved Long Wave* (ILW). A sua derivação e as suas soluções dos tipos já mencionados serão apresentadas.

Na derivação dos três modelos segue-se de perto a metodologia de Dingemans (1997b).

2.3.1 Modelos KdV, RLW e ILW

Modelo KdV

Considere-se a restrição a uma dimensão das equações de Boussinesq para fundos horizontais (2.79). Estas equações admitem a propagação de ondas nos dois sentidos (x positivo e x negativo). Pretende-se obter um modelo cujas soluções sejam ondas de forma quase permanente. Isto significa que a elevação da superfície livre, ζ , e a velocidade horizontal, u , para ondas propagando-se no sentido positivo do eixo OX , dependem apenas de

$$\xi = x - ct \quad \text{e} \quad \tau = \beta_t t, \quad (2.168)$$

onde c é a celeridade da onda e β_t é um factor de escala de tempo tal que

$$\beta_t \sim \epsilon \sim \sigma^2. \quad (2.169)$$

No referencial móvel $[\xi, \tau]$, referencial este que acompanha a onda, as derivadas

escrever-se-ão:

$$\frac{\partial}{\partial x} \equiv \frac{\partial}{\partial \xi} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial t} \equiv -c \frac{\partial}{\partial \xi} + \beta_t \frac{\partial}{\partial \tau}. \quad (2.170)$$

Após aplicação à forma adimensional das equações de Boussinesq para fundo horizontal (2.79), considerando a celeridade adimensional tal que

$$c = 1 + \epsilon c_1 \quad \text{com} \quad c_1 \sim \mathcal{O}(1), \quad (2.171)$$

tem-se

$$\beta_t \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} - (1 + \epsilon c_1) \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \xi} (u \zeta) + \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \quad (2.172a)$$

$$\beta_t \frac{\partial u}{\partial \tau} - (1 + \epsilon c_1) \frac{\partial u}{\partial \xi} + \epsilon u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = -\frac{1}{3} \sigma^2 \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} + \mathcal{O}(\epsilon^2, \epsilon \sigma^2, \sigma^2 \beta_t, \sigma^4). \quad (2.172b)$$

Da primeira equação resulta a expressão assintótica

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + \mathcal{O}(\epsilon, \beta_t), \quad (2.173)$$

a qual, após integração e supondo que se verificam as condições

$$u = 0 \quad \text{para} \quad \zeta = 0 \quad \text{ou} \quad \zeta, u \rightarrow 0 \quad \text{para} \quad \xi \rightarrow \pm\infty,$$

conduz a

$$u = \zeta + \mathcal{O}(\epsilon, \beta_t). \quad (2.174)$$

Adicionando termo a termo as duas equações (2.172) resulta a expressão

$$\begin{aligned} \beta_t \frac{\partial}{\partial \tau} (\zeta + u) - \epsilon c_1 \frac{\partial}{\partial \xi} (\zeta + u) + \epsilon \frac{\partial}{\partial \xi} \left(u \zeta + \frac{u^2}{2} \right) &= -\frac{1}{3} \sigma^2 \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} \\ &+ \mathcal{O}(\epsilon^2, \epsilon \sigma^2, \sigma^2 \beta_t, \sigma^4), \end{aligned}$$

de onde, após substituição de (2.173) e (2.174), se obtém que

$$\beta_t \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} - \epsilon c_1 \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + \frac{3}{2} \epsilon \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = -\frac{1}{6} \sigma^2 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial \xi^3} + \mathcal{O}(\epsilon^2, \epsilon \sigma^2, \sigma^4, \epsilon \beta_t, \sigma^2 \beta_t, \beta_t^2).$$

Regressando ao referencial de inércia, revertendo as relações (2.168) e (2.170), resulta a equação KdV adimensional para a propagação de ondas unidimensionais de forma

quase permanente:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{3}{2} \epsilon \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{6} \sigma^2 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} = \mathcal{O}(\epsilon^2, \epsilon \sigma^2, \sigma^4, \epsilon \beta_t, \sigma^2 \beta_t, \beta_t^2). \quad (2.175)$$

Na forma dimensional, e em termos da elevação da superfície livre, a equação KdV escreve-se:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \sqrt{gh} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{6} h^2 \sqrt{gh} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} = 0. \quad (2.176)$$

Relação de dispersão linear: a relação de dispersão para a equação de KdV obtém-se a partir da sua forma linearizada,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \sqrt{gh} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{6} h^2 \sqrt{gh} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} = 0, \quad (2.177)$$

da seguinte maneira: supondo que ζ é uma função que admite um desenvolvimento em série de Fourier, então, pelas propriedades destas séries, ζ é uma solução da equação anterior se e só se cada termo da série $\zeta = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tilde{\zeta}_j e^{i(k_j x - \omega_j t)}$ o for. Substituindo ζ pelo termo genérico da série na equação (2.177) resulta que

$$\omega = k \left[1 - \frac{1}{6} (kh)^2 \right] \sqrt{gh}, \quad (2.178)$$

e a celeridade de fase linear, $c = \omega/k$, é dada por:

$$c = \left[1 - \frac{1}{6} (kh)^2 \right] \sqrt{gh}. \quad (2.179)$$

Facilmente se verifica que a celeridade de fase linear do modelo KdV é igual a uma aproximação de segunda ordem da celeridade de fase linear de Airy:

$$\frac{C_{\text{Airy}}}{\sqrt{gh}} = \sqrt{\frac{\tanh(kh)}{kh}}. \quad (2.180)$$

Modelo RLW

Um processo semelhante ao utilizado na derivação da equação KdV pode ser aplicado para a obtenção da equação RLW. Considere-se novamente a restrição unidimensional das equações de Boussinesq para fundos horizontais (2.79), a transformação de coordenadas (2.168) e a correspondente transformação de derivadas (2.170). Considere-se no entanto, para a escala de tempos, uma ordem de grandeza ligeiramente

inferior à usada no modelo KdV,

$$\beta_t \sim \sigma^{3/2} \sim \epsilon^{3/4}, \quad (2.181)$$

a qual permitirá, em termos do comportamento da onda ao longo do tempo, uma flexibilidade um pouco maior na forma quase permanente das soluções. Nestas condições, das equações de Boussinesq na sua forma adimensional (2.79) resulta o seguinte sistema de equações:

$$\beta_t \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} - (1 + \epsilon c_1) \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \xi} (u \zeta) + \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0 \quad (2.182a)$$

$$\begin{aligned} \beta_t \frac{\partial u}{\partial \tau} - (1 + \epsilon c_1) \frac{\partial u}{\partial \xi} + \epsilon u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = & -\frac{1}{3} \sigma^2 \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} + \frac{1}{3} \sigma^2 \beta_t \frac{\partial^3 u}{\partial \tau \partial \xi^2} \\ & + \mathcal{O}(\epsilon^2, \epsilon \sigma^2, \sigma^4). \end{aligned} \quad (2.182b)$$

Adicionando membro a membro as duas equações (2.182) obtém-se

$$\begin{aligned} \beta_t \frac{\partial}{\partial \tau} (u + \zeta) - \epsilon c_1 \frac{\partial}{\partial \xi} (u + \zeta) + \epsilon \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{u^2}{2} + u \zeta \right) = & \frac{1}{3} \sigma^2 \left(-\frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} + \beta_t \frac{\partial^3 u}{\partial \tau \partial \xi^2} \right) \\ & + \mathcal{O}(\epsilon^2, \epsilon \sigma^2, \sigma^4). \end{aligned}$$

Por fim, recorrendo às expressões assintóticas (2.173) e (2.174), e admitindo que $u = 0$ para $\zeta = 0$ ou $\zeta, u \rightarrow 0$ para $\xi \rightarrow \pm\infty$, obtém-se a equação RLW adimensional no referencial móvel:

$$\beta_t \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} - \epsilon c_1 \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + \frac{3}{2} \epsilon \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = \frac{1}{6} \sigma^2 \left(-\frac{\partial^3 \zeta}{\partial \xi^3} + \beta_t \frac{\partial^3 \zeta}{\partial \tau \partial \xi^2} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2, \epsilon \sigma^2, \sigma^4, \epsilon \beta_t, \sigma^2 \beta_t, \beta_t^2).$$

Invertendo a transformação de coordenadas à custa de (2.174) e (2.173), resulta a equação RLW adimensional para a propagação de ondas unidireccionais quase permanentes no referencial de inércia:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{3}{2} \epsilon \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{1}{6} \sigma^2 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial t \partial x^2} = \mathcal{O}(\epsilon^2, \epsilon \sigma^2, \sigma^4, \epsilon \beta_t, \sigma^2 \beta_t, \beta_t^2). \quad (2.183)$$

Finalmente, na forma dimensional, a equação RLW em termos da superfície livre vem:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \sqrt{gh} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{1}{6} h^2 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial t \partial x^2} = 0. \quad (2.184)$$

Relação de dispersão linear: consequentemente, a relação de dispersão linear da equação RLW é

$$\omega = \frac{k}{1 + \frac{1}{6}(kh)^2} \sqrt{gh}, \quad (2.185)$$

com a celeridade linear de fase dada por

$$c = \frac{1}{1 + \frac{1}{6}(kh)^2} \sqrt{gh}. \quad (2.186)$$

Neste caso, a celeridade de fase corresponde a um aproximante de Padé de ordem $[0/2]$ da celeridade de fase linear de Airy. Daqui resulta que, comparativamente ao modelo KdV, o modelo RLW conduz a uma melhor representação das características dispersivas de ondas curtas, ou, o que é equivalente, a uma melhor modelação da propagação de ondas em águas mais profundas.

Modelo ILW

O procedimento a seguir para a obtenção deste modelo pode ser, nos seus traços mais gerais, descrito como se segue. Considere-se o modelo de Madsen & Sørensen unidimensional para fundos horizontais na sua forma adimensional, com o coeficiente b . Aplique-se-lhe a transformação de coordenadas (2.174) e (2.173), com a escala temporal $\beta_t \sim \sigma^{3/2} \sim \epsilon^{3/4}$. As equações resultantes são:

$$\beta_t \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} - (1 + \epsilon c_1) \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \xi} (u \zeta) + \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \quad (2.187a)$$

$$\begin{aligned} \beta_t \frac{\partial u}{\partial \tau} - (1 + \epsilon c_1) \frac{\partial u}{\partial \xi} + \epsilon u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} &= \left(\frac{1}{3} + b \right) \sigma^2 \left(\beta_t \frac{\partial^3 u}{\partial \tau \partial \xi^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} \right) \\ &+ \sigma^2 b \frac{\partial^3 \zeta}{\partial \xi^3} + \mathcal{O}(\epsilon^2, \epsilon \sigma^2, \sigma^4). \end{aligned} \quad (2.187b)$$

Adicionando estas duas equações membro-a-membro obtém-se

$$\begin{aligned} \beta_t \frac{\partial}{\partial \tau} (u + \zeta) - \epsilon c_1 \frac{\partial}{\partial \xi} (u + \zeta) + \epsilon \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{u^2}{2} + u \zeta \right) \\ = \sigma^2 \left(\frac{1}{3} + b \right) \left(\beta_t \frac{\partial^3 u}{\partial \tau \partial \xi^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} \right) + \sigma^2 b \frac{\partial^3 \zeta}{\partial \xi^3} + \mathcal{O}(\epsilon^2, \epsilon \sigma^2, \sigma^4). \end{aligned}$$

Recorrendo às relações (2.173) e (2.174), com as condições $u = 0$ para $\zeta = 0$ ou ζ , $u \rightarrow 0$ para $\xi \rightarrow \pm\infty$, resulta o modelo ILW adimensional no referencial móvel:

$$\beta_t \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} - \epsilon c_1 \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + \frac{3}{2} \epsilon \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \sigma^2 \left(\frac{1}{3} + b \right) \left(\beta_t \frac{\partial^3 \zeta}{\partial \tau \partial \xi^2} - \frac{\partial^3 \zeta}{\partial \xi^3} \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 b \frac{\partial^3 \zeta}{\partial \xi^3} + \mathcal{O}(\epsilon^2, \epsilon \sigma^2, \sigma^4, \epsilon \beta_t, \sigma^2 \beta_t, \beta_t^2).$$

Regressando às coordenadas de inércia, obtém-se a equação ILW adimensional para ondas unidireccionais de forma quase permanente:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{3}{2} \epsilon \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{1}{2} \sigma^2 \left(\frac{1}{3} + b \right) \frac{\partial^3 \zeta}{\partial t \partial x^2} + \frac{1}{2} \sigma^2 b \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} + \mathcal{O}(\epsilon^2, \epsilon \sigma^2, \sigma^4, \epsilon \beta_t, \sigma^2 \beta_t, \beta_t^2). \quad (2.188)$$

Finalmente, para as variáveis dimensionais, a equação ILW referida à superfície livre vem:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \sqrt{gh} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + b \right) h^2 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial t \partial x^2} + \frac{1}{2} b h^2 \sqrt{gh} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3}. \quad (2.189)$$

Relação de dispersão linear: calculando a relação de dispersão linear obtemos a expressão

$$\frac{\omega}{k} = \frac{1 + \frac{1}{2} b (kh)^2}{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + b \right) (kh)^2} \sqrt{gh}.$$

Por comparação com o aproximante $[2/2]$ de Padé da celeridade de fase de Airy, $[2/2] C_{\text{Airy}}$ tal que

$$\frac{1}{\sqrt{gh}} [2/2] C_{\text{Airy}} = \frac{1 + \frac{3}{20} (kh)^2}{1 + \frac{19}{60} (kh)^2}, \quad (2.190)$$

conclui-se que a relação de dispersão óptima ocorre para

$$b = \frac{3}{10}.$$

O modelo ILW corresponde precisamente à equação (2.189) para este valor de b :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \sqrt{gh} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{19}{60} h^2 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial t \partial x^2} + \frac{3}{20} h^2 \sqrt{gh} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3}. \quad (2.191)$$

Repare-se que os modelos KdV — equação (2.176) — e RLW — equação (2.184) — se podem obter também a partir da equação (2.189) fazendo $b = -1/3$ e $b = 0$, respectivamente, i.e. o modelo (2.189) admite como casos particulares os três modelos apresentados.

2.3.2 Características de dispersão linear

Como foi anteriormente referido, os três modelos descritos apresentam diferentes características de dispersão linear. Os resultados encontram-se resumidos na Tabela 2.1 e na Figura 2.39.

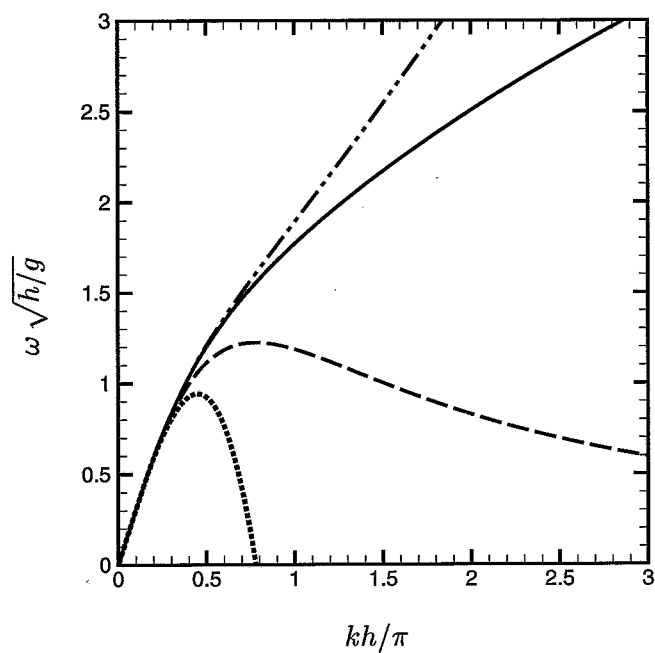
É evidente da inspecção da Figura 2.39 o mau comportamento do modelo KdV linearizado. Melhor dizendo, para $\epsilon \approx 0$ observa-se que:

- ondas de pequeno comprimento de onda — número de onda adimensional, kh , superior a $\sqrt{6}$ — apresentam celeridade negativa, não podendo portanto ser consideradas como ondas físicas, uma vez que a sua existência contraria a hipótese de desenvolvimento do modelo;
- para cada período da onda existem sempre duas soluções possíveis com diferentes comprimentos de onda.

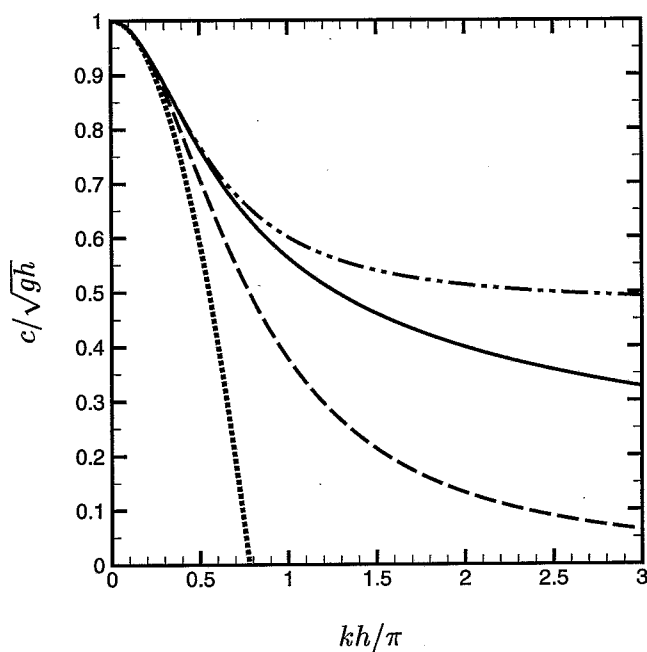
Esta última característica é, de facto, comum aos modelos KdV e RLW. A curva de dispersão do modelo KdV tem o seu ponto de inflexão para $kh = \sqrt{2}$, enquanto a inflexão da curva de dispersão do modelo RLW se verifica para $kh = \sqrt{6}$. Isto significa que, no primeiro caso, é impossível simular ondas com período adimensional inferior a $T/\sqrt{h/g} = (3/2)\sqrt{2}\pi$ e, no segundo caso, para valores inferiores a $T/\sqrt{h/g} = (3/2)\sqrt{6}\pi$.

Tabela 2.1: Características de dispersão linear dos modelos KdV, RLW e ILW.

	$\omega\sqrt{\frac{h}{g}}$	$c/\sqrt{gh}$
KdV:	$kh \left[1 - \frac{1}{6}(kh)^2 \right]$	$1 - \frac{1}{6}(kh)^2$
RLW:	$kh / \left[1 + \frac{1}{6}(kh)^2 \right]$	$1 / \left[1 + \frac{1}{6}(kh)^2 \right]$
ILW:	$kh \left[1 + \frac{3}{20}(kh)^2 \right] / \left[1 + \frac{19}{60}(kh)^2 \right]$	$\left[1 + \frac{3}{20}(kh)^2 \right] / \left[1 + \frac{19}{60}(kh)^2 \right]$



(a) Frequência angular.



(b) Celeridade de fase.

Figura 2.39: Relações de dispersão linear dos modelos KdV ($\cdots$), RLW ($---$) e ILW ($- \cdots -$). Comparação com as relações de dispersão de Airy ($—$).

Será interessante analisar o comportamento da parte imaginária de kh para valores de $\omega\sqrt{h/g}$ superiores aos valores limites de cada modelo.

Modelo KdV: invertendo a relação de dispersão do modelo KdV, verificamos a existência de dois modos de propagação possíveis (cf. Figura 2.40) para um mesmo comprimento de onda. No caso de perturbações com frequência angular elevada, i.e. $\omega\sqrt{h/g} > (2/3)\sqrt{2}$, poderá haver origem a ondas com um carácter dissipativo — parte imaginária de kh positiva — ou um carácter instável — parte imaginária de kh negativa.

Modelo RLW: o mesmo comportamento dissipativo/instável pode ser encontrado no modelo RLW (cf. Figura 2.41), para ondas com frequências angulares superiores a $\omega\sqrt{h/g} = \sqrt{6}/2$. Perturbações de elevada frequência poderão, numa simulação numérica, ser geradas por condições fronteira deficientes. Nessas circunstâncias, o comportamento dissipativo seria bastante conveniente, ao passo que a propagação de um modo instável destruiria a simulação. Este tipo de comportamento foi em parte analisado por Katopodes et al. (1998) para o modelo RLW. No entanto estes autores não identificaram a possibilidade de existência de um modo instável para as frequências elevadas.

2.3.3 Soluções analíticas

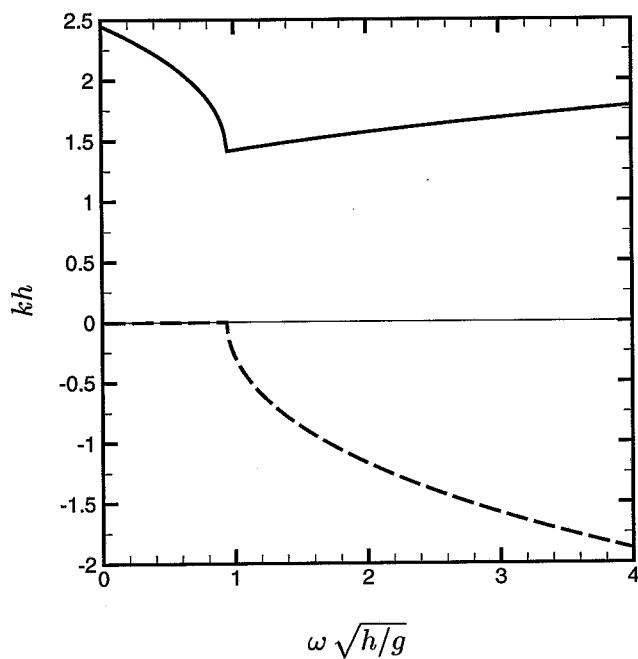
Os modelos de propagação de ondas cinemáticas possuem soluções analíticas não periódicas do tipo onda solitária e soluções periódicas do tipo onda cnoidal. A sua determinação é apresentada de uma forma bastante concisa em Mei (1994) e Dingemans (1997b).

Ondas solitárias

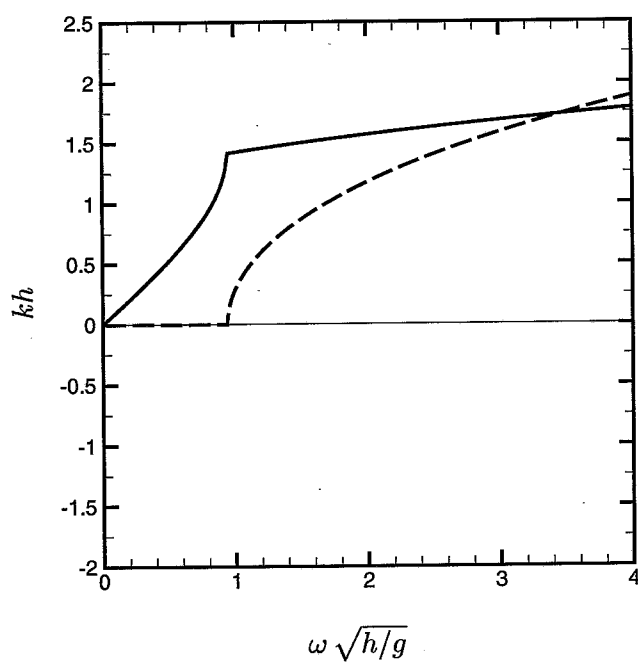
Ondas solitárias são perturbações — grupos de ondas ou impulsos — que devido a um equilíbrio dinâmico entre o termo não linear e o termo dispersivo mantêm uma forma de onda estável durante a sua propagação. A primeira observação documentada de uma onda solitária, tipo intumescência, na Natureza, deve-se a Russel (1838).

Os modelos KdV, RLW e ILW admitem solitões como solução analítica. Um solitão é um tipo especial de onda solitária que mantém a sua forma após colisão com outros solitões.



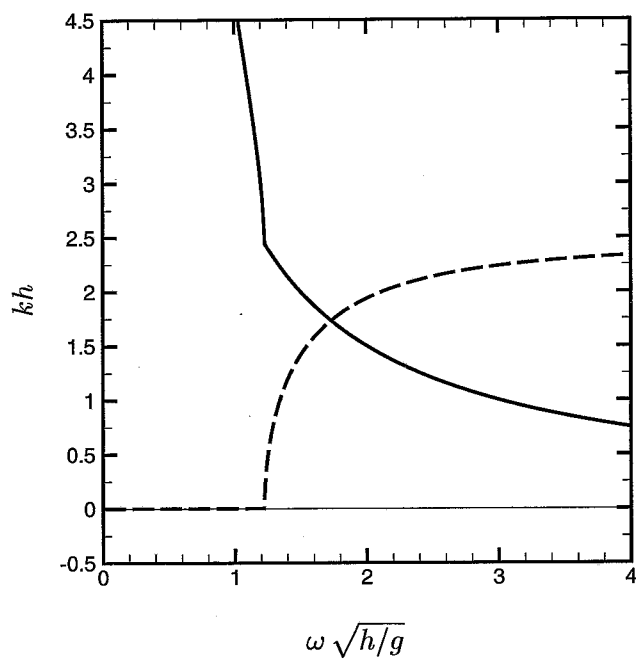


(a) Modo 1.

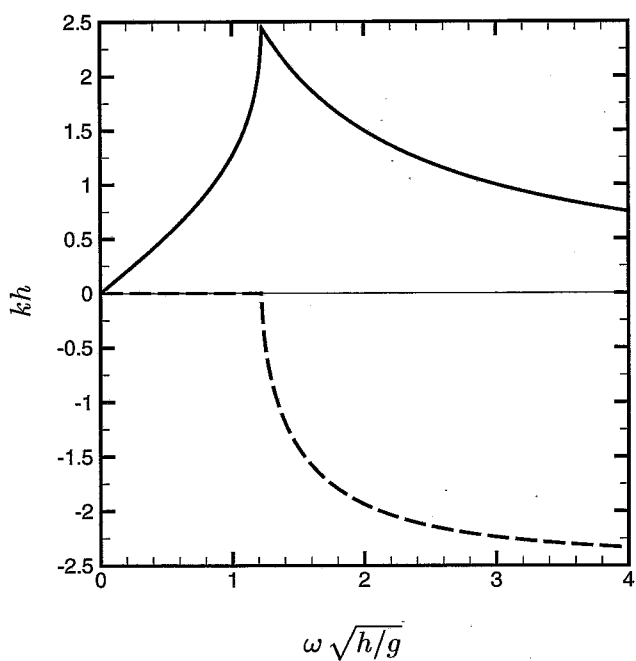


(b) Modo 2.

Figura 2.40: Modelo KdV: Componentes real (—) e imaginária (---) do número de onda, para os dois modos de propagação.



(a) Modo 1.



(b) Modo 2.

Figura 2.41: Modelo RLW: Componentes real (—) e imaginária (---) do número de onda, para os dois modos de propagação.

Tabela 2.2: Características das soluções tipo solitão.

KdV:	$b = -\frac{1}{3}$	$c = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{a}{h}\right) \sqrt{gh}$	$\frac{1}{\kappa} = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{h^3}{a}}$
RLW:	$b = 0$	$c = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{a}{h}\right) \sqrt{gh}$	$\frac{1}{\kappa} = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{h^3}{a} \frac{c}{\sqrt{gh}}}$
ILW:	$b = \frac{3}{10}$	$c = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{a}{h}\right) \sqrt{gh}$	$\frac{1}{\kappa} = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{h^3}{a} \left(\frac{19}{10} \frac{c}{\sqrt{gh}} - \frac{9}{10}\right)}$

Em variáveis dimensionais, a equação do solitão solução do modelo genérico (2.189) é:

$$\zeta(x - ct) = a \operatorname{sech}^2[\kappa(x - ct) - \kappa d], \quad (2.192)$$

com

$$c = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{a}{h}\right) \sqrt{gh} \quad \text{e} \quad \frac{1}{\kappa} = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{h^3}{a} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{a}{h} (1 + 3b)\right]},$$

sendo d a ordenada da crista da onda no instante $t = 0$.

Em variáveis adimensionais, a solução é

$$\zeta(\xi) = \operatorname{sech}^2\left(\frac{\kappa h}{\sigma} \xi\right), \quad (2.193)$$

onde

$$\frac{1}{\kappa h} = \sqrt{\frac{4}{3\epsilon} \left[1 + \frac{1}{2} \epsilon (1 + 3b)\right]}.$$

De notar que a celeridade c não depende do coeficiente b , sendo portanto igual para os três modelos. Por outro lado, o inverso do parâmetro κ , que pode ser interpretado como uma medida do comprimento da onda, indica ser a onda solução do modelo KdV a mais curta, e a do modelo ILW a mais longa. Um resumo destas características é apresentado na Tabela 2.2.

Na Figura 2.42 comparam-se os perfis de solitões com número de Ursell unitário, i.e. $Ur = \epsilon/\sigma^2 = 1$, e $\epsilon = 0.2$ e $\epsilon = 0.5$ respectivamente. Note-se que o perfil da onda solução do modelo KdV é igual nos dois casos, por depender apenas do número de Ursell.

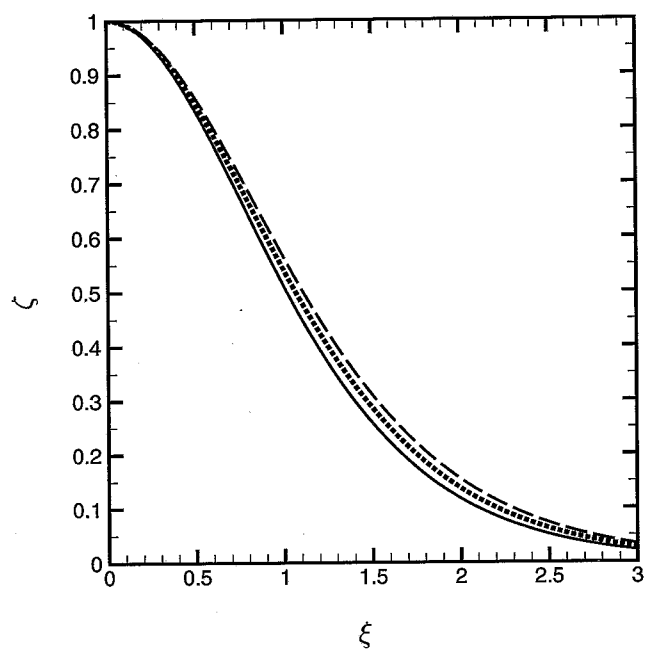
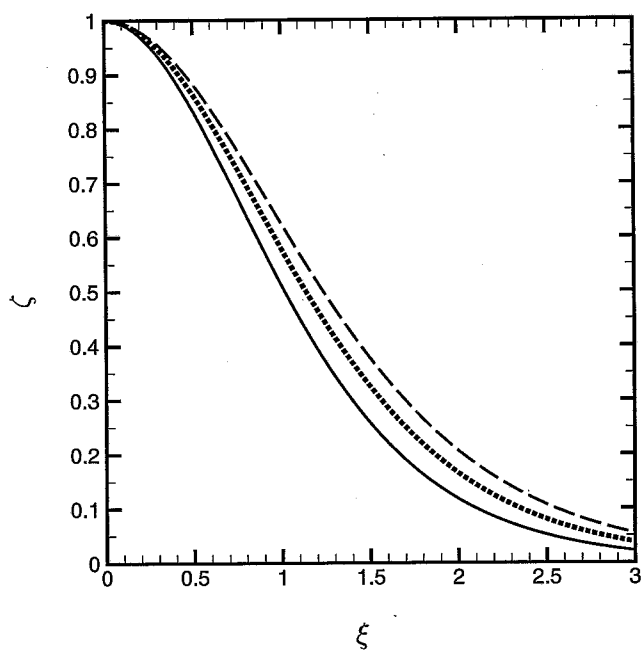
(a) $\epsilon = 0.2$.(b) $\epsilon = 0.5$.

Figura 2.42: Ondas solitárias solução dos modelos KdV (—), RLW ($\cdots$) e ILW (---), para $Ur = \epsilon/\sigma^2 = 1$.

Soluções periódicas

As soluções periódicas dos modelos de propagação KdV, RLW e ILW são funções tipo onda cnoidal. Estas soluções são, na forma dimensional:

$$\zeta(x, t) = -a_c + A \operatorname{cn}^2 \left[\frac{2K(m)}{\lambda} (x - ct) \right], \quad (2.194)$$

com

$$\begin{aligned} a_c &= \frac{A}{m} \left(1 - \frac{E(m)}{K(m)} \right), \quad a_t = A - a_c, \\ T &= \frac{\lambda}{c}, \\ \lambda &= \sqrt{\frac{16}{3} \frac{h^3}{A} m \left[\frac{(1+3b)c}{\sqrt{gh}} - 3b \right]} K(m), \\ c &= \left[1 - \frac{1}{2} \frac{A}{h} + \frac{1}{m} \frac{A}{h} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{E(m)}{K(m)} \right) \right] \sqrt{gh}. \end{aligned}$$

Nestas expressões, a_t é a elevação negativa da cava da onda em relação ao nível da água em repouso, a_c é a elevação da crista da onda em relação ao mesmo nível, A é a altura da onda, medida da cava à crista, λ é o comprimento da onda e T é o seu período. A função K representa o integral elíptico completo do primeiro tipo, a função E é o integral elíptico completo do segundo tipo e m é o parâmetro elíptico.

Note-se que apenas o comprimento de onda, λ , depende directamente do coeficiente b . No entanto, como o valor do parâmetro elíptico m depende do comprimento de onda, todas as outras características da onda serão afectadas por alterações no valor de b .

A expressão do comprimento de onda para cada um dos três casos será então:

$$\begin{aligned} \text{KdV:} \quad \lambda &= \sqrt{\frac{16}{3} \frac{h^3}{A} m} K(m) \\ \text{RLW:} \quad \lambda &= \sqrt{\frac{16}{3} \frac{h^3}{A} m \frac{c}{\sqrt{gh}}} K(m) \\ \text{ILW:} \quad \lambda &= \sqrt{\frac{16}{3} \frac{h^3}{A} m \left(\frac{19}{10} \frac{c}{\sqrt{gh}} - \frac{9}{10} \right)} K(m) \end{aligned}$$

O parâmetro m é determinado por um processo iterativo, uma vez escolhidos os trios de valores (A, h, λ) ou (A, h, T) (para detalhes, ver Dingemans, 1974, 1997b).

Capítulo 3

Condições Iniciais e de Fronteira

3.1 Condições de fronteira

Os sistemas de equações diferenciais apresentados no Capítulo 2 só têm solução se condições iniciais e de fronteira apropriadas forem especificadas. A região ou domínio de interesse encontra-se limitada no plano horizontal por fronteiras laterais, as quais poderão ser linhas de costa, estruturas de defesa costeira, ilhas ou, simplesmente, uma linha imaginária introduzida para limitar a área de cálculo e que traduz uma fronteira aberta no mar. Para a determinação do número e tipo de condições a impor nestes casos, e caso o sistema de equações seja hiperbólico, é extremamente importante a análise do comportamento das características (Courant e Hilbert, 1962).

3.1.1 Equação escalar multidimensional

Considere-se a seguinte equação linear:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi + b \phi = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad (3.1)$$

onde $\mathbf{u}$ e b são funções conhecidas de $\mathbf{x}$.

As trajectórias são curvas que para uma dada partícula e em cada instante t são tangentes ao vector velocidade $\mathbf{u}$. Isto implica que para um dado ponto $\bar{\mathbf{x}}$ e num dado instante $t = t_0$ existe uma só trajectória que passa por $\bar{\mathbf{x}}$. As equações paramétricas para as trajectórias que passam pelo ponto $\bar{\mathbf{x}}$ são:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}, \quad (3.2a)$$

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}, \quad \text{para } t = t_0. \quad (3.2b)$$

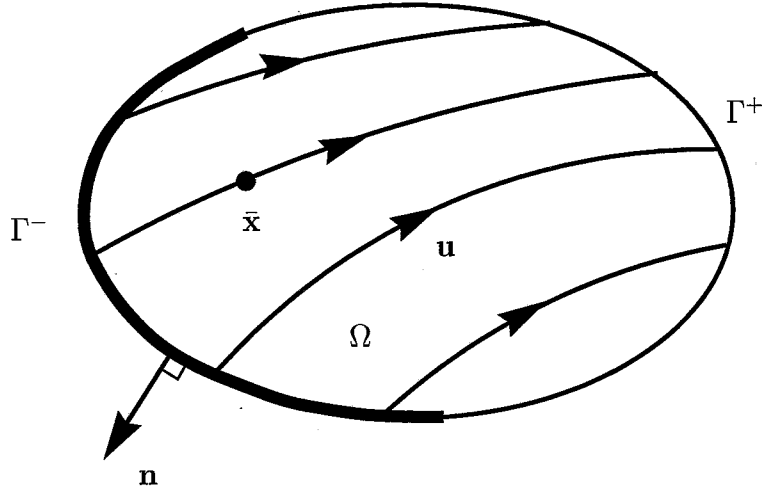


Figura 3.1: Fronteira do domínio e trajectórias.

A variação de ϕ ao longo da trajectória é:

$$\frac{d}{dt}\phi(\mathbf{x}(s)) = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \frac{dx_i}{ds} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\phi, \quad (3.3)$$

a qual aplicada em (3.1) conduz a

$$\frac{d}{dt}\phi(\mathbf{x}(t)) + b\phi(\mathbf{x}(t)) = 0. \quad (3.4)$$

Portanto uma trajectória corresponde a uma curva ao longo da qual a equação diferencial parcial (3.1) se transforma na equação diferencial ordinária (3.4). Uma curva com esta propriedade diz-se uma curva característica. Se o valor do campo escalar é conhecido num dado instante num ponto de uma destas curvas, poderá ser calculado num qualquer ponto da mesma curva por integração de (3.4).

Significa isto que nos problemas do tipo hiperbólico, a informação é transportada ao longo das curvas características e que o valor de ϕ deve ser prescrito no subconjunto Γ^- da fronteira Γ de Ω onde as características entram no domínio (cf. Figura 3.1). Γ^- pode ser definida como:

$$\Gamma^- = \{\mathbf{x} \in \Gamma : \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) \leq 0\}, \quad (3.5)$$

onde $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ é o vector unitário normal a Γ no ponto $\mathbf{x} \in \Gamma$ e dirigido para o exterior do domínio.

3.1.2 Sistemas de equações

Nos sistemas de equações, a informação propaga-se de duas formas distintas:

- ao longo das trajectórias com velocidade $\mathbf{u} = (u, v)$;
- radialmente com a onda com velocidade c , c = celeridade de fase.

Este processo resulta num modo misto de propagação onde as curvas características dos sistemas escalares se tornam superfícies características a duas ou três dimensões (cf. Figura 3.2). Em cada ponto $\bar{\mathbf{x}}$ da fronteira é necessário conhecer quais as superfícies características que entram no domínio. Como se verá, o comportamento de cada modelo é influenciado pelas suas propriedades dispersivas. São analisados e comparados o modelo não dispersivo de Saint-Venant e os modelos dispersivos de Boussinesq e de Madsen & Sørensen.

A profundidade local será considerada constante, dado que condições de fronteira de não reflexão são de mais fácil aplicação neste caso. Por outro lado ter-se-á ainda em conta que, em qualquer região de pequenas dimensões, as ondas bidimensionais comportam-se localmente como ondas planas. Considerar-se-á uma fronteira localmente normal à direcção de propagação da onda. O sistema de eixos é tal que o eixo OX é normal à fronteira e dirigido para o interior do domínio. O vector velocidade será $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}, \bar{v})$.

Modelo de Saint-Venant

As equações de Saint-Venant sem atrito de fundo, dissipação turbulenta e termo de Coriolis escrevem-se

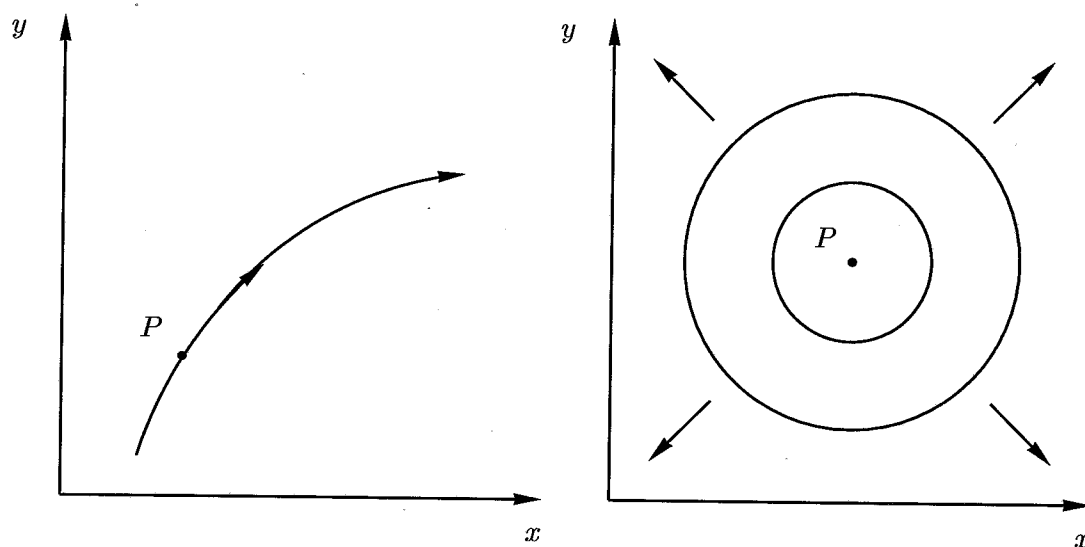
$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + (h + \zeta) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + (h + \zeta) \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0, \quad (3.6a)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \quad (3.6b)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0, \quad (3.6c)$$

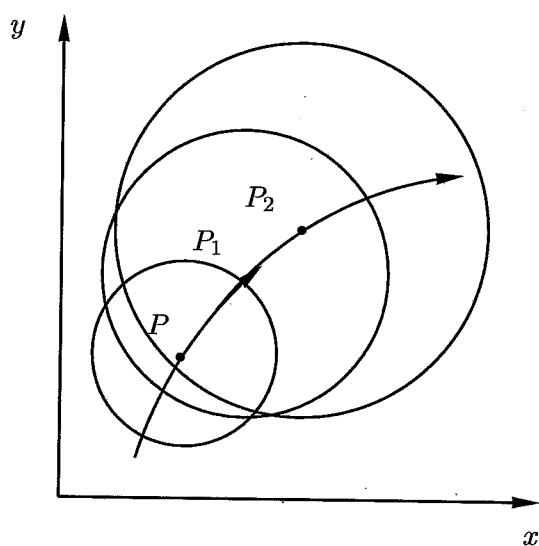
e na forma matricial

$$\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} = \mathbf{0}, \quad (3.7)$$



(a) Modo de propagação linear.

(b) Modo de propagação radial.



(c) Modo de propagação misto.

Figura 3.2: Modos de propagação de uma onda num domínio 2DH.

onde $\mathbf{U} = (\zeta, u, v)^T$ e as matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ são:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bar{u} & h + \zeta & 0 \\ g & \bar{u} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{u} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \bar{v} & 0 & h + \zeta \\ 0 & \bar{v} & 0 \\ g & 0 & \bar{v} \end{bmatrix}.$$

As velocidades características segundo a direcção normal à fronteira, dx/dt , resultam do problema de valores próprios

$$\det \left(\frac{dx}{dt} \mathbf{A} - \mathbf{B} \right) = 0,$$

equivalente a

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^3 - 3 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \bar{u} + [3 \bar{u}^2 - g(h + \zeta)] \frac{dx}{dt} - \bar{u}^3 + g(h + \zeta) \bar{u} = 0. \quad (3.8)$$

Desta equação obtêm-se:

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)_1 = \bar{u}, \quad (3.9a)$$

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)_2 = \bar{u} + \sqrt{g(h + \zeta)}, \quad (3.9b)$$

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)_3 = \bar{u} - \sqrt{g(h + \zeta)}. \quad (3.9c)$$

Estes valores próprios são reais e distintos, pelo que, na ausência de atrito e de dissipação turbulenta, o modelo de Saint-Venant é puramente hiperbólico. O número de condições a especificar em cada ponto da fronteira deverá ser igual ao número de valores próprios positivos. No caso das velocidades características $(dx/dt)_2$ e $(dx/dt)_3$ conclui-se que

- fronteira de montante, $\bar{u} > 0$, com $\bar{u} > \sqrt{g(h + \zeta)}$ — devem ser impostas duas condições de fronteira;
- fronteira de montante, $\bar{u} > 0$, com $\bar{u} < \sqrt{g(h + \zeta)}$ — deve ser imposta uma condição de fronteira;
- fronteira de jusante, $\bar{u} < 0$, com $\bar{u} < -\sqrt{g(h + \zeta)}$ — nenhuma condição deve ser imposta;
- fronteira de jusante, $\bar{u} < 0$, com $\bar{u} > -\sqrt{g(h + \zeta)}$ — deve ser imposta uma

condição de fronteira.

Estas duas velocidades características dizem respeito a ondas gravíticas e as condições de fronteira a impor poderão ser

$$\zeta = \zeta_0(\mathbf{x}, t) \quad (3.10)$$

ou

$$\bar{u} = \bar{u}_0(\mathbf{x}, t), \quad (3.11)$$

ou ainda uma combinação de ambas como o caudal por unidade de comprimento da fronteira:

$$(h + \zeta) \bar{u} = q_0(\mathbf{x}, t). \quad (3.12)$$

Oliger e Sundström (1978), com base na teoria de Kreiss (1970), concluíram que a imposição da elevação da superfície livre (3.10) em fronteiras de montante não é conveniente por conduzir a soluções instáveis.

A velocidade característica $(dx/dt)_1$ não se encontra em problemas unidimensionais e pode-se mostrar (cf. Vreugdenhil, 1994, página 67) corresponder a uma onda transversal em que a quantidade transportada é a vorticidade potencial, Π , a qual se define como

$$\Pi = \frac{\Omega_z}{h}. \quad (3.13)$$

A condição de fronteira a impor seria, no caso de $\bar{u} > 0$:

$$\Pi = \Pi_0(\mathbf{x}, t). \quad (3.14)$$

A imposição do valor da vorticidade potencial apresenta dois problemas: o primeiro reside na dificuldade da sua medição para posterior aplicação; o segundo resulta da dificuldade da sua introdução no próprio modelo quando este se encontra formulado em termos das variáveis primitivas ζ , $\bar{u}$ e $\bar{v}$. Esta segunda dificuldade pode ser ultrapassada em formulações residuais ou variacionais, como o método dos elementos finitos, através da introdução de multiplicadores de Lagrange. Outra hipótese é a imposição de condições de fronteira alternativas: Oliger e Sundström (1978) propõem a utilização do valor da componente tangencial da velocidade como condição de fronteira:

$$\bar{v} = \bar{v}_0(\mathbf{x}, t), \quad (3.15)$$

enquanto Vreugdenhil (1994) sugere a imposição da direcção da velocidade.

Finalmente no caso de uma fronteira sólida sem reflexão, $\bar{u} = 0$, a única condição de fronteira a impor será precisamente velocidade normal nula:

$$\bar{u} = 0. \quad (3.16)$$

Com dissipação turbulenta: após adição dos termos devidos à dissipação turbulenta, as equações de Saint-Venant passam a ser:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + (h + \zeta) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + (h + \zeta) \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0, \quad (3.17a)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - 2\nu_t \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} - \nu_t \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) = 0, \quad (3.17b)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} - 2\nu_t \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} - \nu_t \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) = 0. \quad (3.17c)$$

Introduzindo três variáveis auxiliares, r , s e q , tais que

$$r = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \quad s = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \quad \text{e} \quad q = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x},$$

este sistema pode ser escrito na forma matricial,

$$\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} + \mathbf{D} \mathbf{U} = \mathbf{0}, \quad (3.18)$$

onde $\mathbf{U} = (\zeta, \bar{u}, \bar{v}, q, r, s)^T$ e as matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ são

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bar{u} & h + \zeta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g & \bar{u} & 0 & 0 & -2\nu_t & 0 \\ 0 & 0 & \bar{u} & -\nu_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \bar{v} & 0 & h + \zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{v} & 0 & -\nu_t & 0 & 0 \\ g & 0 & \bar{v} & 0 & 0 & -2\nu_t \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A equação característica deste sistema é

$$\det \left(\frac{dx}{dt} \mathbf{A}^* - \mathbf{B}^* \right) = 0$$

onde $\mathbf{A}^*$ e $\mathbf{B}^*$ são as matrizes constituídas pelas cinco primeiras linhas e cinco primeiras colunas de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ respectivamente. Esta equação é equivalente a

$$2 \left(\frac{dx}{dt} - \bar{u} \right) \nu_t^2 = 0, \quad (3.19)$$

de onde resulta a velocidade característica:

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)_1 = \bar{u}.$$

Apenas uma velocidade característica foi determinada, quando o sistema reduzido de que resultaram as matrizes $\mathbf{A}^*$ e $\mathbf{B}^*$ é constituído por cinco equações diferenciais de primeira ordem. Nestas circunstâncias, é necessário estudar as curvas definidas pelas velocidades características dt/dx , as quais resultam da equação característica

$$\det \left(\frac{dt}{dx} \mathbf{B}^* - \mathbf{A}^* \right) = 0.$$

Esta equação é equivalente a

$$2 \left(\frac{dt}{dx} \bar{u} - 1 \right) \left(\frac{dt}{dx} \right)^4 \nu_t^2 = 0, \quad (3.20)$$

de onde se obtêm cinco velocidades características:

$$\left(\frac{dt}{dx} \right)_1 = \frac{1}{\bar{u}}, \quad \left(\frac{dt}{dx} \right)_2 = 0, \quad \left(\frac{dt}{dx} \right)_3 = 0, \quad \left(\frac{dt}{dx} \right)_4 = 0 \quad \text{e} \quad \left(\frac{dt}{dx} \right)_5 = 0.$$

As variáveis dt/dx são o inverso das variáveis dx/dt , pelo que teremos:

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)_1 = \bar{u}, \quad \left(\frac{dx}{dt} \right)_2 = \infty, \quad \left(\frac{dx}{dt} \right)_3 = \infty, \quad \left(\frac{dx}{dt} \right)_4 = \infty \quad \text{e} \quad \left(\frac{dx}{dt} \right)_5 = \infty. \quad (3.21)$$

Velocidades características infinitas são típicas de sistemas elípticos. O modelo de Saint-Venant na presença de dissipação turbulenta tem um carácter misto, tipo parabólico. É prática habitual na aplicação deste modelo, em que os termos de difusão são de ordem superior, considerá-lo como essencialmente hiperbólico, recorrendo à especificação de condições de fronteira do modelo hiperbólico puro.

Modelo de Boussinesq

As equações de Boussinesq para profundidade constante são

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + (h + \zeta) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + (h + \zeta) \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0, \quad (3.22a)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{h^2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y \partial t} \right) = 0, \quad (3.22b)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{h^2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y \partial t} \right) = 0. \quad (3.22c)$$

Estas podem ser reescritas na forma de um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, após introdução de duas variáveis auxiliares, q e r , tais que:

$$q = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \quad \text{e} \quad r = \frac{\partial q}{\partial t}.$$

O sistema é então

$$\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} + \mathbf{D} \mathbf{U} = \mathbf{0}, \quad (3.23)$$

onde $\mathbf{U} = (\zeta, \bar{u}, \bar{v}, q, r)^T$ e as matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ são

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bar{u} & h + \zeta & 0 & 0 & 0 \\ g & \bar{u} & 0 & 0 & -\frac{h^2}{3} \\ 0 & 0 & \bar{u} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \bar{v} & 0 & h + \zeta & 0 & 0 \\ 0 & \bar{v} & 0 & 0 & 0 \\ g & 0 & \bar{v} & 0 & -\frac{h^2}{3} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A equação característica

$$\det \left(\frac{dx}{dt} \mathbf{A} - \mathbf{B} \right) = 0$$

conduz a

$$\left(\frac{dx}{dt} - \bar{u} \right)^2 \frac{dx}{dt} \frac{h^2}{3} = 0, \quad (3.24)$$

de onde resultam as velocidades características:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_1 = \bar{u}, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_2 = \bar{u} \quad \text{e} \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_3 = 0.$$

Apenas três velocidades foram encontradas quando o sistema é constituído por cinco equações diferenciais de primeira ordem. É necessário estudar as curvas definidas por dt/dx . Estas resultam da equação característica

$$\det \left(\frac{dt}{dx} \mathbf{B} - \mathbf{A} \right) = 0,$$

equivalente a

$$\left(\bar{u} \frac{dt}{dx} - 1 \right)^2 \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 \frac{h^2}{3} = 0, \quad (3.25)$$

de onde se obtêm quatro velocidades características:

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)_1 = \frac{1}{\bar{u}}, \quad \left(\frac{dt}{dx}\right)_2 = \frac{1}{\bar{u}}, \quad \left(\frac{dt}{dx}\right)_4 = 0 \quad \text{e} \quad \left(\frac{dt}{dx}\right)_5 = 0.$$

É evidente que as variáveis dt/dx são o inverso das variáveis dx/dt e portanto

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_1 = \bar{u}, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_2 = \bar{u}, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_3 = 0, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_4 = \infty \quad \text{e} \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_5 = \infty. \quad (3.26)$$

A existência de duas velocidades características infinitas revela o facto de as equações de Boussinesq terem algum carácter elíptico. Por outro lado os valores próprios reais determinados não são todos distintos. Dingemans (1997b), no caso unidimensional, propõe a imposição de três condições em todas as fronteiras. No presente trabalho verificou-se no entanto que, para o mesmo caso, a imposição de mais do que uma condição tanto na fronteira de barlamar como na de sotamar introduz perturbações no interior do domínio.

Modelo de Madsen & Sørensen

As equações de Madsen & Sørensen para profundidade constante são

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + (h + \zeta) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + (h + \zeta) \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0, \quad (3.27a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ - \left(\frac{1}{3} + b \right) h^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y \partial t} \right) - b g h^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.27b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ - \left(\frac{1}{3} + b \right) h^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y \partial t} \right) - b g h^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.27c)$$

Para reescrever as equações (3.27) como um sistema de equações de primeira ordem, introduzem-se as variáveis auxiliares r e q , definidas por

$$r = - \left(\frac{1}{3} + b \right) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \right) - b g \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \quad \text{e} \quad q = \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y}.$$

O sistema é então escrito na forma

$$\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} + \mathbf{D} \mathbf{U} = \mathbf{0}, \quad (3.28)$$

onde $\mathbf{U} = (\zeta, \bar{u}, \bar{v}, q, r)^T$ e as matrizes $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ são

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{3} + b) & (\frac{1}{3} + b) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bar{u} & (h + \zeta) & 0 & 0 & 0 \\ g & \bar{u} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \bar{u} & 0 & 0 \\ b g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \bar{v} & 0 & (h + \zeta) & 0 & 0 \\ 0 & \bar{v} & 0 & 0 & 0 \\ g & 0 & \bar{v} & 0 & 1 \\ b g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

As velocidades características dx/dt resultam das soluções não triviais da equação

$$\det \left(\frac{dx}{dt} \mathbf{A} - \mathbf{B} \right) = 0,$$

equivalente a

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3} + b\right) \left(\frac{dx}{dt}\right)^3 - 2 \left(\frac{1}{3} + b\right) \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \bar{u} \\ + \left(\frac{1}{3} + b\right) \left(\frac{dx}{dt}\right) \bar{u}^2 - b g (h + \zeta) \left(\frac{dx}{dt} - \bar{u}\right) = 0, \quad (3.29) \end{aligned}$$

de onde para $b = 1/15$ se obtém

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt}\right)_1 = \frac{1}{2} \bar{u} + \frac{1}{6} \sqrt{9 \bar{u}^2 + 6 g (h + \zeta)}, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_2 = \frac{1}{2} \bar{u} - \frac{1}{6} \sqrt{9 \bar{u}^2 + 6 g (h + \zeta)} \quad \text{e} \\ \left(\frac{dx}{dt}\right)_3 = \bar{u}. \end{aligned}$$

Recorrendo novamente à determinação das velocidades características inversas, por resolução do problema de valores próprios

$$\det \left(\frac{dt}{dx} \mathbf{B} - \mathbf{A} \right) = 0,$$

resulta

$$\begin{aligned} \left(\frac{dt}{dx}\right)_1 = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dt}\right)_1}, \quad \left(\frac{dt}{dx}\right)_2 = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dt}\right)_2}, \quad \left(\frac{dt}{dx}\right)_3 = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dt}\right)_3}, \\ \left(\frac{dt}{dx}\right)_4 = 0 \quad \text{e} \quad \left(\frac{dt}{dx}\right)_5 = 0. \end{aligned}$$

Concluimos assim que

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt}\right)_1 = \frac{1}{2} \bar{u} + \frac{1}{6} \sqrt{9 \bar{u}^2 + 6 g (h + \zeta)}, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_2 = \frac{1}{2} \bar{u} - \frac{1}{6} \sqrt{9 \bar{u}^2 + 6 g (h + \zeta)}, \\ \left(\frac{dx}{dt}\right)_3 = \bar{u}, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_4 = \infty \quad \text{e} \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_5 = \infty. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Neste caso temos claramente um conjunto de três valores próprios reais e distintos, característicos dos sistemas hiperbólicos, e um outro conjunto de dois valores próprios infinitos, indicadores de um comportamento elíptico.

O ponto mais interessante é o facto de as velocidades características de cariz hiperbólico deste modelo serem essencialmente do mesmo tipo das velocidades ca-

racterísticas do modelo de Saint-Venant sem dissipação, as quais correspondem à sobreposição de uma onda gravítica e de uma corrente. O modelo de Boussinesq por outro lado, parece estar mais próximo do modelo de Saint-Venant com dissipação. As consequências destas similitudes deverão merecer um estudo mais aprofundado.

Por analogia com a prática habitual no tratamento do modelo de Saint-Venant com termos dissipativos de ordem superior, os termos dispersivos nas equações de Boussinesq e de Madsen & Sørensen são considerados pequenas correcções e os modelos tratados como essencialmente hiperbólicos. Por outro lado, nos modelos estudados, a velocidade $\bar{u}$ é sempre uma grandeza de ordem superior e portanto de módulo inferior à celeridade da onda. Desta forma todas as fronteiras abertas com entrada da onda no domínio são simultaneamente fronteiras de geração e radiação.

3.1.3 Tipos de fronteira

As fronteiras do domínio de cálculo em problemas de engenharia costeira são essencialmente de quatro tipos:

- fronteira de geração-radiação, localizada a barlar e por onde se verifica a entrada da onda no domínio;
- fronteira de radiação, localizada a sotamar e por onde se dá a saída da onda do domínio;
- fronteira sólida parcial ou totalmente reflectora;
- fronteira lateral, sensivelmente paralela aos raios de onda.

Fronteira de geração-radiação

Nas fronteiras de geração-radiação, geralmente ao largo, duas ondas coexistem: uma onda incidente de características conhecidas e uma onda reflectida produzida no interior do domínio e de características desconhecidas. Admitindo a linearidade destas duas ondas, a elevação total da superfície livre é

$$\zeta = \zeta_I + \zeta_R, \quad (3.31)$$

sendo ζ_I a amplitude da onda incidente e ζ_R a amplitude da onda reflectida. Admitindo que estas duas ondas são progressivas, elas serão tais que

$$\frac{\partial \zeta_I}{\partial t} + C_I \nabla \zeta_I \cdot \mathbf{n}_I = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \zeta_R}{\partial t} + C_R \nabla \zeta_I \cdot \mathbf{n}_R = 0,$$

com $\mathbf{n}_I$ e $\mathbf{n}_R$ sendo os versores das direcções de propagação das ondas incidente e reflectida e C_I e C_R as suas celeridades, respectivamente. Daqui resulta que

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + C_I \mathbf{n}_I \cdot \nabla \zeta_I + C_R \mathbf{n}_R \cdot \nabla \zeta_R = 0. \quad (3.32)$$

Atendendo a (3.31), a (3.32) e à equação de continuidade local,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla[(h + \zeta) \bar{\mathbf{u}}] = 0,$$

pode-se concluir que o vector velocidade na fronteira é tal que

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{C_I}{h + \zeta} \zeta_I \mathbf{n}_I + \frac{C_R}{h + \zeta} (\zeta - \zeta_I) \mathbf{n}_R.$$

Obviamente, a celeridade da onda reflectida, C_R , e a sua direcção de propagação, $\mathbf{n}_R$, não são conhecidas *a priori*. O procedimento adoptado é o de otimizar a radiação da componente da onda reflectida com o mesmo comprimento de onda da onda incidente, pelo que se toma $C_R = C_I$. Por outro lado, a fronteira do domínio é sempre definida longe da origem de qualquer perturbação localizada no interior deste. Desta forma é razoável admitir que a onda reflectida é uma onda plana que irradia na direcção normal à fronteira, pelo que $\mathbf{n}_R \approx \mathbf{n}$, sendo $\mathbf{n}$ o versor exterior da direcção normal à fronteira. Assim teremos finalmente a condição de fronteira de radiação-geração:

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{C_I}{h + \zeta} \zeta_I \mathbf{n}_I + \frac{C_I}{h + \zeta} (\zeta - \zeta_I) \mathbf{n}. \quad (3.33)$$

Fronteira de radiação

As fronteiras de radiação são um caso particular das fronteiras de radiação-geração, em que apenas existe a onda que sai do domínio. Admitindo que uma escolha criteriosa da localização desta fronteira a situa numa zona de pequena profundidade relativa, é razoável admitir que $C_R = \sqrt{g h}$. Quanto à direcção de propagação desta onda recorre-se a um processo iterativo, fazendo:

$$\mathbf{n}_R = \pm \frac{1}{\|\bar{\mathbf{u}}\|} \bar{\mathbf{u}}, \quad (3.34)$$

utilizando o vector velocidade calculado na iteração anterior. Os sinais + e - serão utilizados conforme a onda estiver em fluxo ou refluxo. A condição de fronteira é

então

$$\bar{\mathbf{u}} = C_R \frac{\zeta}{h + \zeta} \mathbf{n}_R. \quad (3.35)$$

Fronteira sólida

As fronteiras sólidas correspondem à existência de linhas de costa, estruturas de defesa costeira ou obras portuárias. Uma outra possibilidade é a existência de eixos de simetria. Estas fronteiras poderão permitir uma maior ou menor reflexão da energia das ondas incidentes, a qual é definida por intermédio de um coeficiente de reflexão dado pela razão entre a altura da onda reflectida, H_R , e a altura da onda incidente, H_I :

$$Kr = \frac{H_R}{H_I}.$$

Expressões para Kr em função do tipo de estrutura — geometria e material constituinte — e das características da agitação podem ser encontrados em várias publicações (Allsop, 1990, Allsop e Hettiarachchi, 1988, Seelig, 1983, Taveira-Pinto et al., 1998a,b). Uma condição aproximada para este tipo de fronteiras é

$$\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} = (1 - Kr) C \frac{\zeta}{h + \zeta} \mathbf{n}_R \cdot \mathbf{n}, \quad (3.36)$$

a qual deve ser incluída num processo iterativo em que $\mathbf{n}_R$ é calculado recorrendo à expressão (3.34). É habitual admitir que $\mathbf{n}_R \approx \mathbf{n}$. Em (3.36) a celeridade da onda, C , poderá ser: $C = \sqrt{g h}$ no caso de zonas de pequena profundidade; a celeridade local de uma onda com a frequência da onda incidente na fronteira de barlamar, calculada de acordo com a teoria linear de Airy (2.22); a celeridade local de uma onda com a frequência de pico do espectro, calculada também por recurso à teoria de Airy, no caso de agitação irregular.

Fronteira lateral

As fronteiras laterais correspondem a fronteiras fictícias utilizadas para limitar o domínio de cálculo em zonas que não são nem de barlamar nem de sotamar. São especialmente necessárias quando se pretende modelar a propagação da agitação desde alto-mar até a uma zona próxima da costa. Usualmente não se recorreria a modelos do tipo refração-difração e/ou do tipo Boussinesq para este tipo de simulação. A expansão dos domínios de aplicabilidade dos modelos deste último tipo (cf. Capítulo 2) e a sua maior precisão tornam no entanto possível e apelativa essa simulação.

Uma fronteira lateral de geometria arbitrária é, em princípio, uma fronteira do tipo geração-radiação. No entanto, ao longo da fronteira lateral, as características da onda incidente são desconhecidas, enquanto que a onda radiante poderá ser quase paralela à fronteira, perturbando o esquema iterativo destinado a determinar a sua direcção, ou, quando de incidência oblíqua, dando origem a reflexões sem qualquer sentido físico.

Uma forma simples de contornar este problema, no caso de ondas monocromáticas, consiste em fazer coincidir o traçado da fronteira lateral com a trajectória de um raio de onda. O facto de, neste tipo de problemas, o processo de propagação da onda ser praticamente dominado pelo fenómeno de refacção, possibilita a utilização de modelos de refacção pura (cf. §1.2.1) para determinar o traçado de um ou mais raios de onda que possam funcionar como fronteiras laterais. As trajectórias destes raios deverão estar suficientemente afastadas de zonas de difracção ou reflexão bem como não incluir nenhuma cáustica nem ser atravessadas por outros raios de onda. Uma vez definidos desta forma estes limites naturais para o domínio de cálculo, as fronteiras laterais deverão ser tratadas como fronteiras sólidas com reflexão total.

Um esquema deste tipo foi aplicado com sucesso no estudo hidrodinâmico realizado no âmbito dos trabalhos de protecção do Forte do Bugio, situado no estuário do Tejo (Seabra-Santos et al., 1997).

Descrição da aplicação ao Forte do Bugio: a ondulação junto ao Forte do Bugio, proveniente de rumos de WNW, tem que contornar a costa ao largo de Cascais e passar por sucessivas variações de profundidade, incluindo o atravessamento oblíquo do canal de navegação antes de chegar à zona do forte. Foi decidido estudar a propagação da ondulação com um período de 8 s e rumo 280° entre um ponto S situado a cerca de 5 km do forte e o próprio forte. No ponto S esta onda teria uma altura $H = 1.5$ m, correspondendo a uma altura ao largo de 2 m. Foi primeiro elaborado um plano de refacção entre o ponto S e o forte, num domínio rectangular com 1 km de largura e um pouco mais de 5 km de comprimento (cf. Figura 3.3). Este plano (cf. Figura 3.4) mostra que as ortogonais sofrem uma grande divergência após o atravessamento do canal de navegação, com uma considerável diminuição da amplitude da onda a sotamar deste. Posteriormente estudou-se a propagação da mesma onda entre o ponto S e o forte, recorrendo-se a um modelo de refacção-difracção baseado na equação elíptica de Berkhoff (cf. §1.2.3) e limitado a Sul e a Norte por duas ortogonais não perturbadas do plano de refacção (cf. Figura 3.5). Desta forma as condições de fronteira a Sul e a Norte correspondem a paredes sólidas com reflexão total. Junto ao forte, as fronteiras sólidas apenas reflectem parcialmente

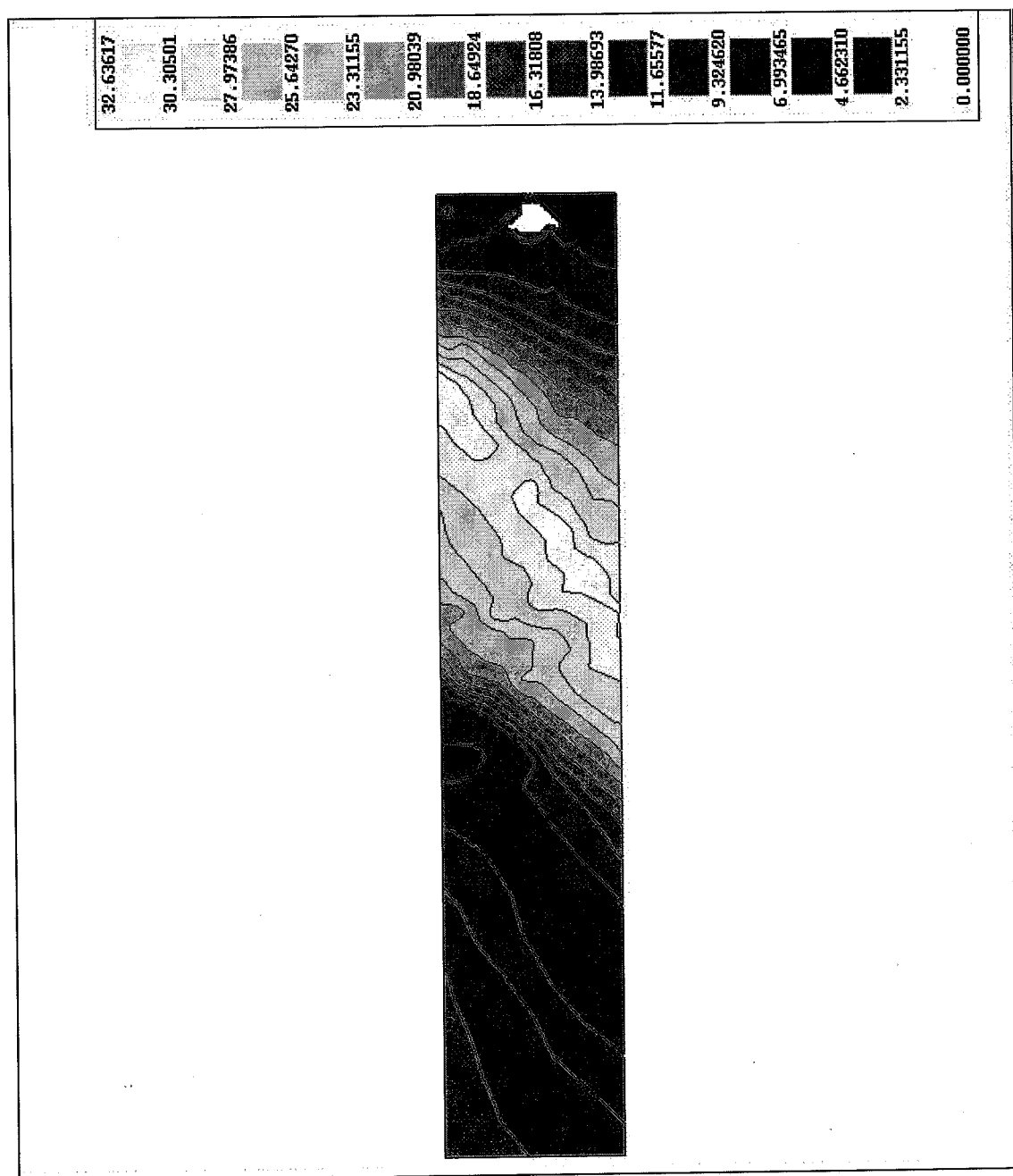


Figura 3.3: Domínio de cálculo e profundidade em metros referida ao Z.H. utilizados para o cálculo do plano de refração.

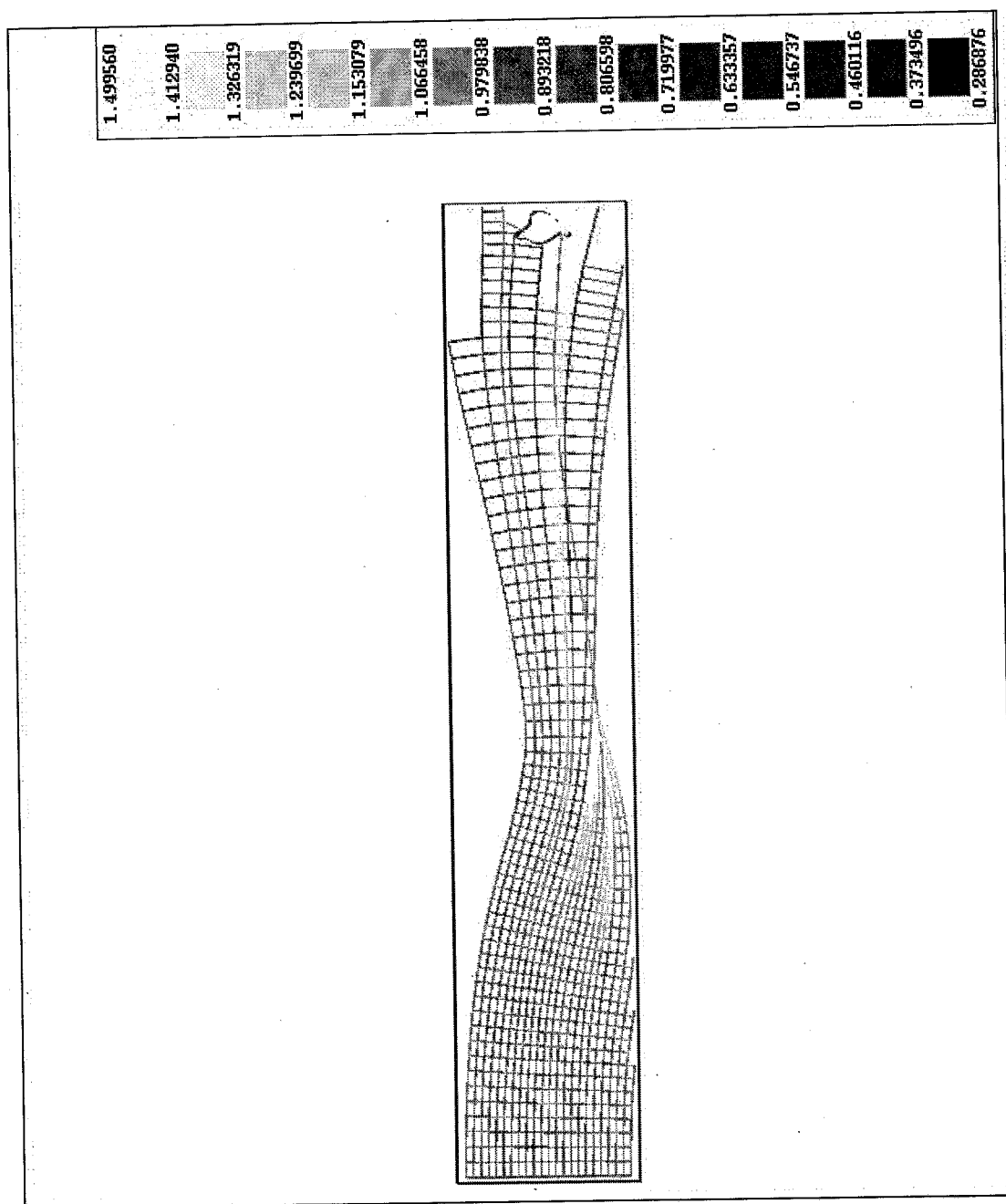


Figura 3.4: Plano de refração e coeficiente de refração para uma onda proveniente do ponto S com período $T = 8$ s.

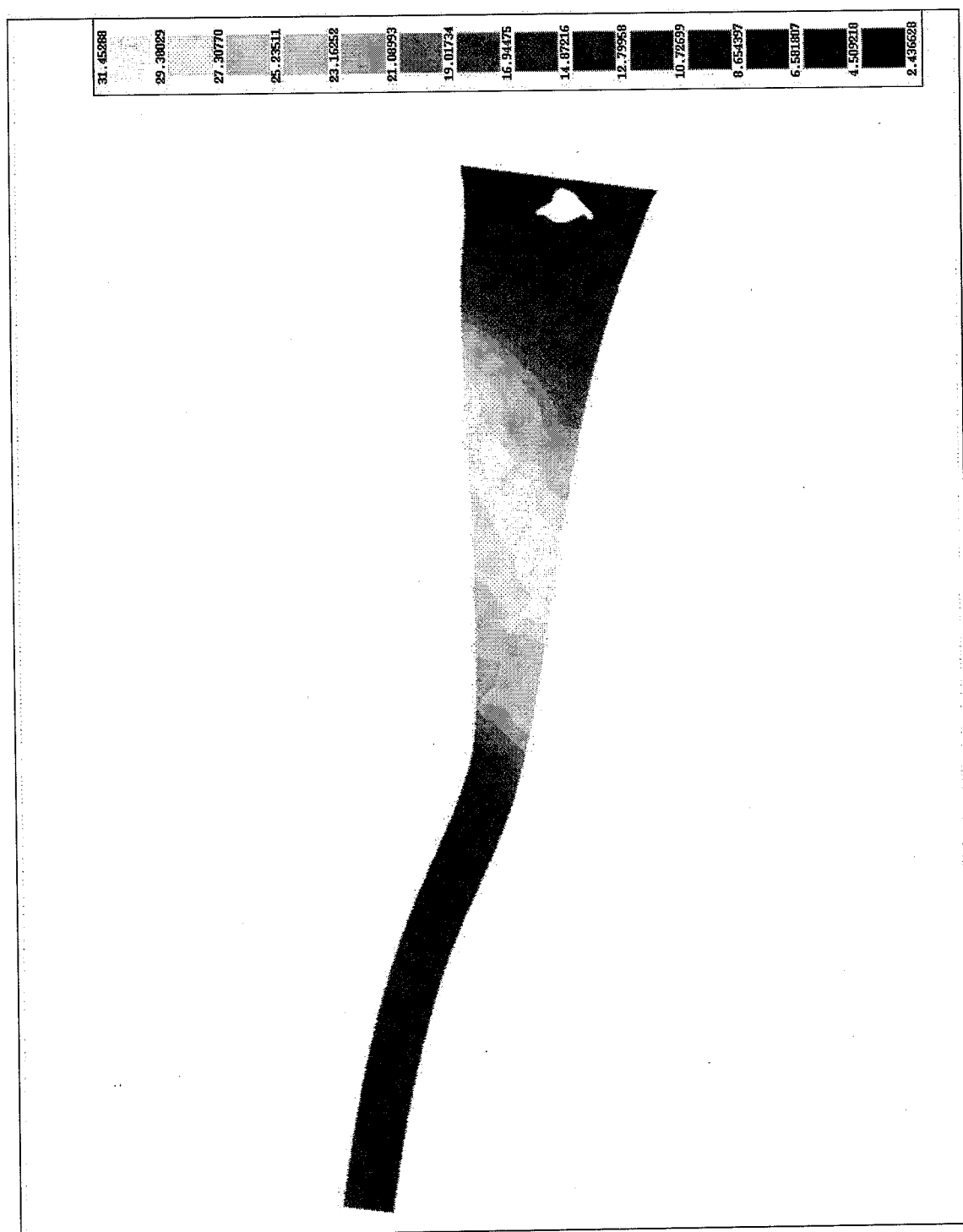


Figura 3.5: Domínio de cálculo e profundidade em metros referida ao Z.H. utilizados para a simulação da propagação da ondulação com o modelo de Berkhoff.

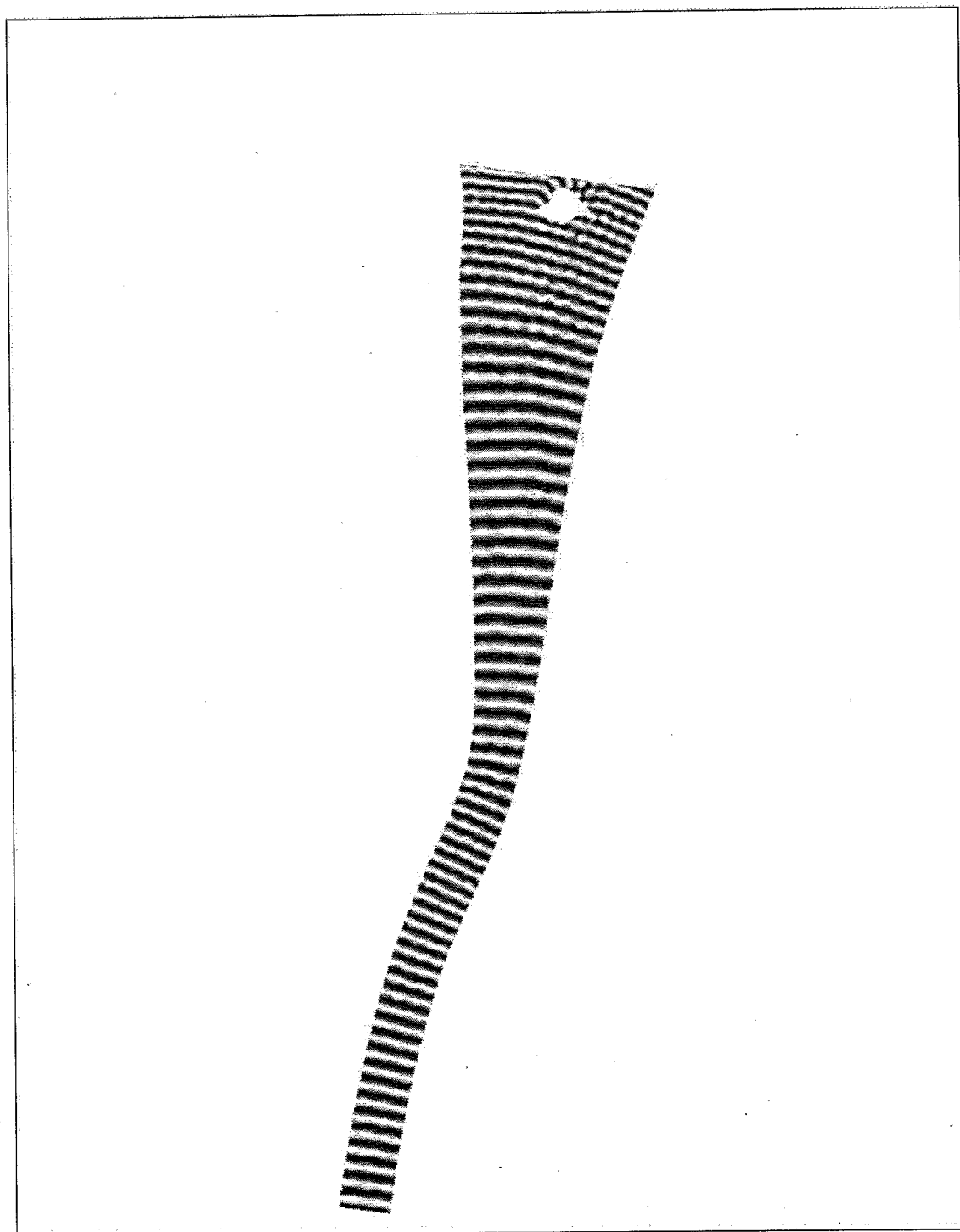


Figura 3.6: Fase da onda entre o ponto S e o Forte do Bugio, de acordo com o modelo de Berkhoff.



Figura 3.7: Altura da onda, em metros, entre o ponto *S* e o Forte do Bugio, de acordo com o modelo de Berkhoff.

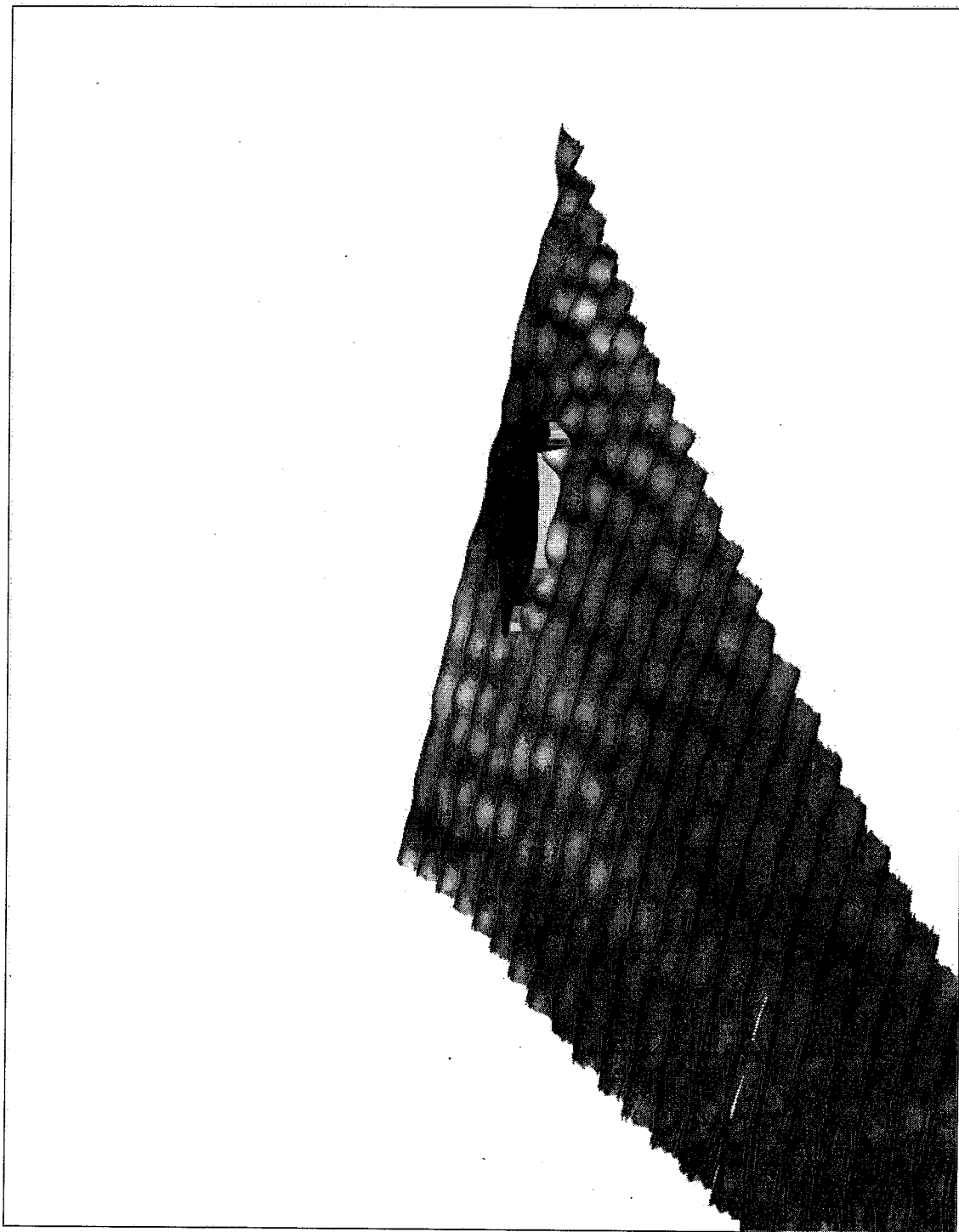


Figura 3.8: Vista tridimensional da ondulação na vizinhança do Forte do Bugio.

a energia da onda incidente. O plano de fase da onda assim simulada encontra-se representado na Figura 3.6. A evolução da altura da onda é representada na Figura 3.7, enquanto na Figura 3.8 se apresenta um aspecto da superfície livre na vizinhança do Forte do Bugio. Concluiu-se que nas proximidades do Forte do Bugio a ondulação anteriormente referida tem rumo 290° e altura 0.8 m.

3.2 Condições iniciais

Os modelos de propagação da ondulação requerem, para além da formulação e imposição de condições de fronteira, a formulação e imposição de condições iniciais. As condições iniciais deverão, em princípio, corresponder a uma solução do problema físico, pois quando tal não acontece existe o risco de não convergência da solução numérica.

Por forma a evitar o surgimento de perturbações numéricas e de soluções sem significado físico, é usual recorrer à situação de repouso, $\zeta = 0$, $\bar{u} = 0$ e $\bar{v} = 0$, $\forall (x, y) \in \Omega$ e $t = 0$, como condição inicial. Dado que a resolução numérica das equações que regem a propagação da agitação requer uma discretização muito fina do domínio espacial e do tempo e dado que os domínios em estudo são em regra bastante extensos, a iniciação a partir do repouso exige simulações muitíssimo longas.

O arranque a partir do repouso é a abordagem mais conveniente quando se pretende a reprodução de situações de laboratório: os ensaios físicos em canais e tanques de ondas partem precisamente dessa situação. No entanto, uma simulação demasiado longa conduz geralmente à viciação da solução numérica por perturbações resultantes da acumulação de ondas reflectidas em fronteiras com deficientes condições de radiação e/ou por acumulação de erros de truncatura.

Como alternativa, pode-se recorrer à solução linear de um modelo de refração-difracção do tipo de Berkhoff (1972) como condição inicial. A principal vantagem deste esquema é a sua mais rápida convergência para uma situação quase-periódica (cf. Avilez-Valente et al., 1997). Por outro lado, introduz-se na simulação uma perturbação de segunda ordem, traduzida numa onda que é necessário extrair do domínio ou dissipar no seu interior.

No caso de problemas a duas dimensões horizontais, e dada a existência de vorticidade no plano horizontal, as duas opções indicadas não convergirão obrigatoriamente para a mesma solução. Seguidamente, em §3.2.1, faz-se uma breve descrição do modelo linear de Berkhoff, após o que se procede, em §3.2.2, à análise de um caso de estudo em que se comparam as duas metodologias sugeridas para estabelecimento das condições iniciais.

3.2.1 Modelo de refração-difracção

Uma aproximação linear da elevação da superfície livre, causada pela propagação de uma onda sinusoidal de amplitude infinitesimal, $\zeta = \Re(\tilde{\zeta} e^{-i\omega t})$, é obtida por solução da equação elíptica de *mild-slope* melhorada (Berkhoff, 1972, Booij, 1981, De Girolamo et al., 1988):

$$\nabla \cdot (C C_g \nabla \tilde{\zeta}) + \frac{C_g}{C} \omega^2 \tilde{\zeta} + i \omega W \tilde{\zeta} = 0, \quad (3.37)$$

onde $\tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}(x, y)$ é uma função complexa que descreve a amplitude e a fase da elevação da superfície livre, C e C_g são as celeridades de fase e de grupo locais, de acordo com a teoria linear de Airy, e ω é a frequência angular da onda. W é a razão entre a energia dissipada por unidade de área superficial e por unidade de tempo e a energia por unidade de área superficial. Seguidamente, uma aproximação linear do campo de velocidades à superfície é calculada como

$$\mathbf{u}_s = \Re\left(-i \frac{g}{\omega} \nabla \tilde{\zeta} e^{-i\omega t}\right). \quad (3.38)$$

A formulação residual do modelo (3.37), após discretização pelo método dos elementos finitos, é: encontrar $\hat{\zeta} \in \mathcal{W}^0$ tal que

$$\int_{\Omega} \left[C C_g \nabla \hat{\varphi} \cdot \nabla \hat{\zeta} - \frac{C_g}{C} \omega^2 \hat{\varphi} \hat{\zeta} - i \omega W \hat{\varphi} \hat{\zeta} \right] d\Omega = \oint_{\Gamma} C C_g \hat{\varphi} \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma, \quad \forall \hat{\varphi} \in \mathcal{W}^0. \quad (3.39)$$

Na equação (3.39), $\mathcal{W}^0 = \mathcal{V}^0 + i \mathcal{V}^0$, sendo $\mathcal{V}^0$ o espaço de funções de interpolação lineares ou bilineares com continuidade C^0 usuais em elementos finitos (cf. Zienkiewicz, 1977). Detalhes da implementação deste modelo e extensão a agitação irregular encontram-se descritos em Avilez-Valente (1996).

3.2.2 Caso de estudo

As duas metodologias anteriormente propostas para a definição das condições iniciais são aplicadas a um caso de estudo: a propagação e rebentação de uma onda sinusoidal, com período $T = 8$ s e altura $H = 2$ m à profundidade constante de 10 m, sobre um domínio rectangular com 500 m de comprimento, 900 m de largura e profundidade variável. O fundo é formado por um talude com uma inclinação de 2% nos primeiros 450 m e uma plataforma horizontal com 50 m de comprimento junto à linha de costa. Um quebra-mar destacado, com 300 m de comprimento e 20 m de largura, está colocado em posição paralela à costa a 220 m de distância

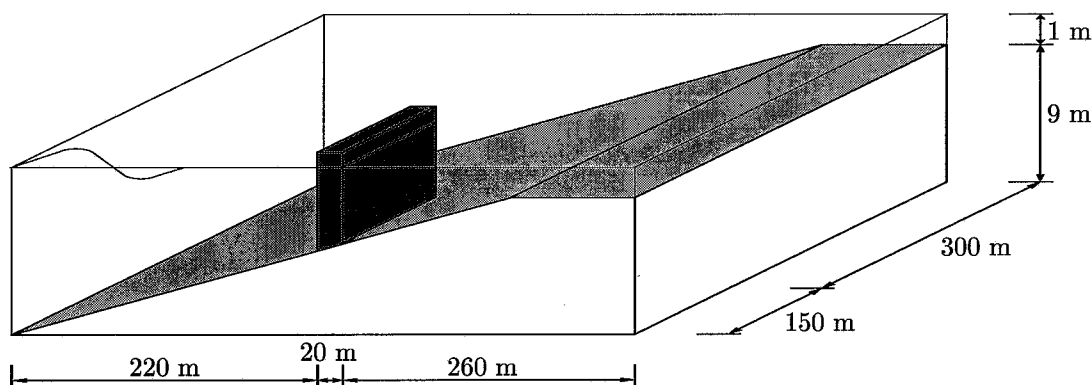


Figura 3.9: Domínio de cálculo.

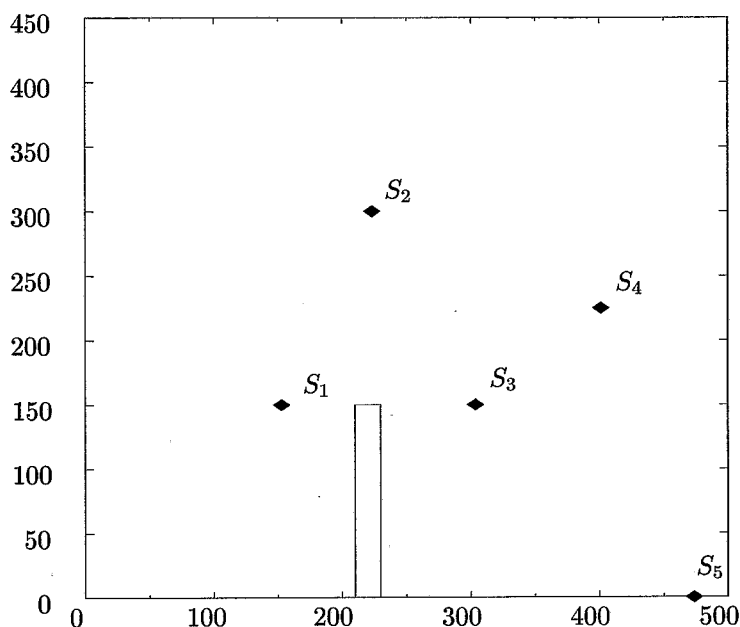


Figura 3.10: Localização das sondas numéricas.

da fronteira de barlar. As ondas propagam-se no sentido positivo do eixo OX . Graças à simetria do problema, apenas se considera metade do domínio (cf. Figura 3.9).

A modelação foi efectuada recorrendo a uma formulação não consistente do modelo de propagação de Seabra-Santos (cf. §2.2.4), tomando o coeficiente α do termo não linear igual à unidade e desprezando o termo devido à vorticidade. O termo de atrito no fundo foi calculado recorrendo ao coeficiente de Manning-Strickler igual a $0.025 \text{ s/m}^{1/3}$. A rebentação foi modelada recorrendo ao modelo de Antunes do Carmo e Seabra-Santos (1996). As condições de fronteira foram de reflexão total nas paredes sólidas e na fronteira de simetria e uma absorção de 25% da energia da onda ($Kr = 0.866$) na linha de costa. Na fronteira de barlar foi considerada

uma condição de geração-irradiação. A malha de elementos finitos consistiu em 12720 elementos bilineares de 4 nós com um total de 12984 nós de cálculo. Foram efectuadas duas simulações com diferentes condições iniciais: simulação (A), situação de repouso — $\zeta_0 = 0$, $\bar{u}_0 = 0$ e $\bar{v}_0 = 0$; simulação (B), solução linear obtida pelo modelo (3.39).

Consideraram-se cinco sondas numéricas, cuja localização se assinala na Figura 3.10, para registo e análise de séries temporais da elevação da superfície livre e das componentes cartesianas da velocidade. A sonda 1 é afectada por empolamento e pela reflexão da onda no quebra-mar destacado. A sonda 2 é essencialmente afectada pelo empolamento. Na sonda 3 é evidente o efeito conjugado da difracção e da rebentação da onda. A sonda 4 é principalmente afectada pela rebentação e pela reflexão da ondulação na praia. Finalmente a sonda 5 é importante devido à sua localização numa zona simultaneamente protegida e afastada da fronteira de barlamar.

Resultados

As Figuras 3.11, 3.12, 3.13 e 3.14 permitem comparar as duas simulações, numa fase inicial, após 8 s de simulação, e após cerca de 2 minutos de simulação: 144 s para a simulação (A) e 120 s para a simulação (B). As séries temporais para a elevação da superfície livre, ζ , e das componentes cartesianas da velocidade, $\bar{u}$ e $\bar{v}$, foram comparadas para as simulações (A) e (B), por inspecção visual, pela análise da evolução temporal das suas componentes harmónicas e através da análise no espaço de fase. Nas figuras apresentadas, a simulação (A) é representada por uma linha pontuada, enquanto a simulação (B) é representada por um traço contínuo.

Análise no domínio do tempo: nas Figuras 3.15 a 3.19 representam-se os valores registados pelas sondas. As séries $\zeta(t)$ e $\bar{u}(t)$ para (A) e (B) são bastante semelhantes nas sondas 1 e 2. Nas sondas 3 e 4, as referidas séries para (B) têm uma amplitude ligeiramente inferior à registada para (A), enquanto o erro de fase é praticamente insignificante. Por outro lado na sonda 5 é evidente uma muito menor amplitude nos valores registados para ζ e $\bar{u}$ na simulação (B) e um evidente atraso de fase. As diferenças nas séries registadas para $\bar{v}$ são evidentes em todas as sondas, à excepção da sonda 5, na qual $\bar{v}$ é identicamente nula.

Análise no domínio da frequência: a evolução das componentes harmónicas das séries temporais foi estudada recorrendo a uma análise de Fourier tipo FFT com uma janela temporal de $\Delta T = 16$ s. A utilização de uma janela de observação com



Figura 3.11: Simulação (A) após 8 s.

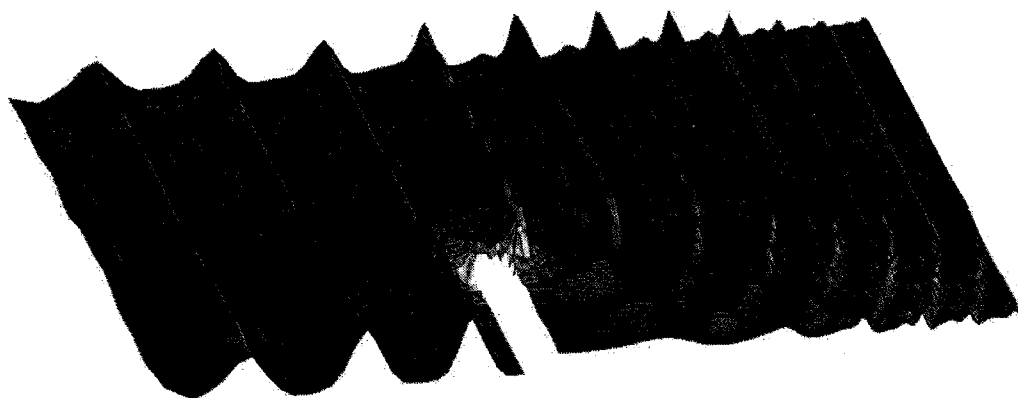


Figura 3.12: Simulação (B) após 8 s.

uma largura igual a duas vezes o período da onda incidente deve-se à necessidade de identificar a fase transitória do fenómeno. Desta forma, e dado que os termos não lineares conduzem a harmónicas da onda incidente, todas as componentes de índice ímpar corresponderão ao escoamento transitório, pelo que deverão tender para zero com o tempo.

Assumiui-se que as harmónicas de muito baixa frequência eventualmente geradas (cf. Dingemans, 1997b, capítulo 7) têm amplitude desprezável. As séries $E_0 = E_0(t)$, $U_0 = U_0(t)$ e $V_0 = V_0(t)$ correspondem ao valor médio da elevação da superfície livre e das componentes da velocidade no intervalo de tempo $[t - \Delta t, t]$. Devido ao declive e à rebentação, é de esperar uma situação de *wave set-up* junto à praia, i.e. um

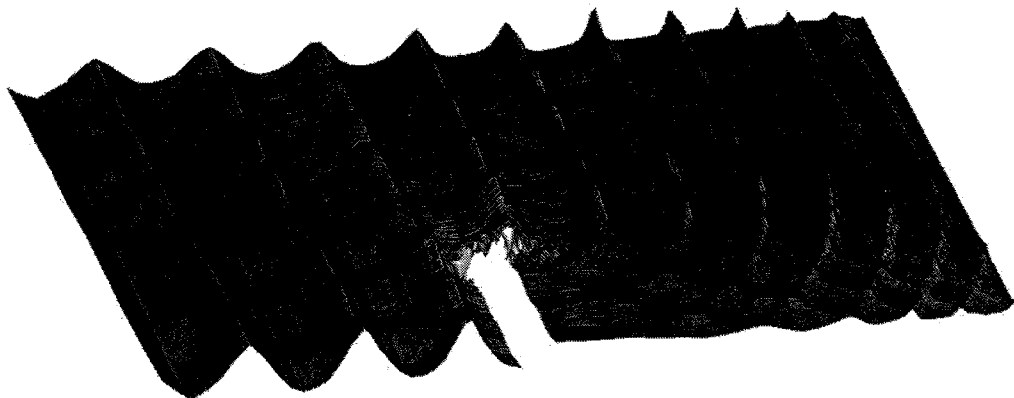


Figura 3.13: Simulação (A) após 144 s.

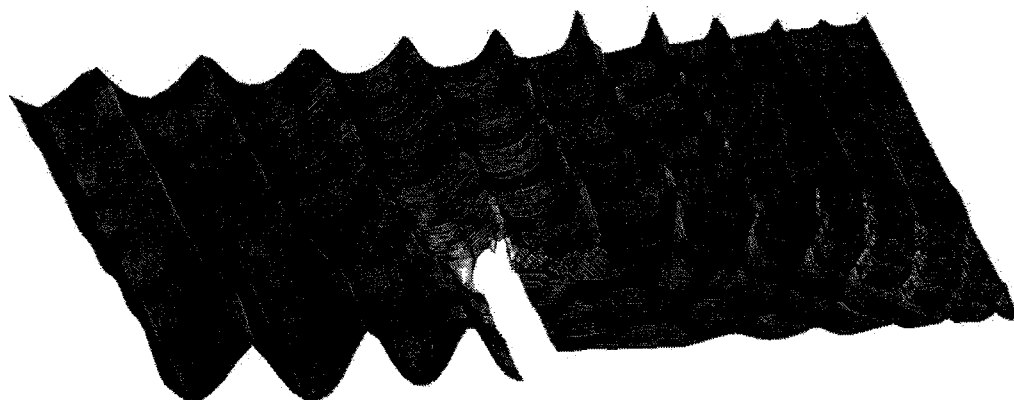


Figura 3.14: Simulação (B) após 120 s.

aumento do nível médio do mar. A situação estacionária, neste caso periódica, é atingida quando as harmônicas de ordem par estabilizam e as componentes ímpares tendem para zero.

A análise dos gráficos (cf. Figuras 3.20 a 3.33) mostra uma mais rápida convergência da simulação (B). Mesmo no caso das séries de $\bar{v}$, a simulação (B) apresenta amplitudes com menores perturbações e com valores médios, V_0 , mais estáveis. O fenómeno de *wave set-up* é visível em todas as sondas e em ambas as simulações. O comportamento algo diferente de (A) e (B) nas sondas 3 e 4 é provavelmente devido à sua localização na zona de rebentação. Da análise harmónica das séries obtidas para estas duas sondas (cf. Figuras 3.26 a 3.31) é evidente que a simulação (B) converge

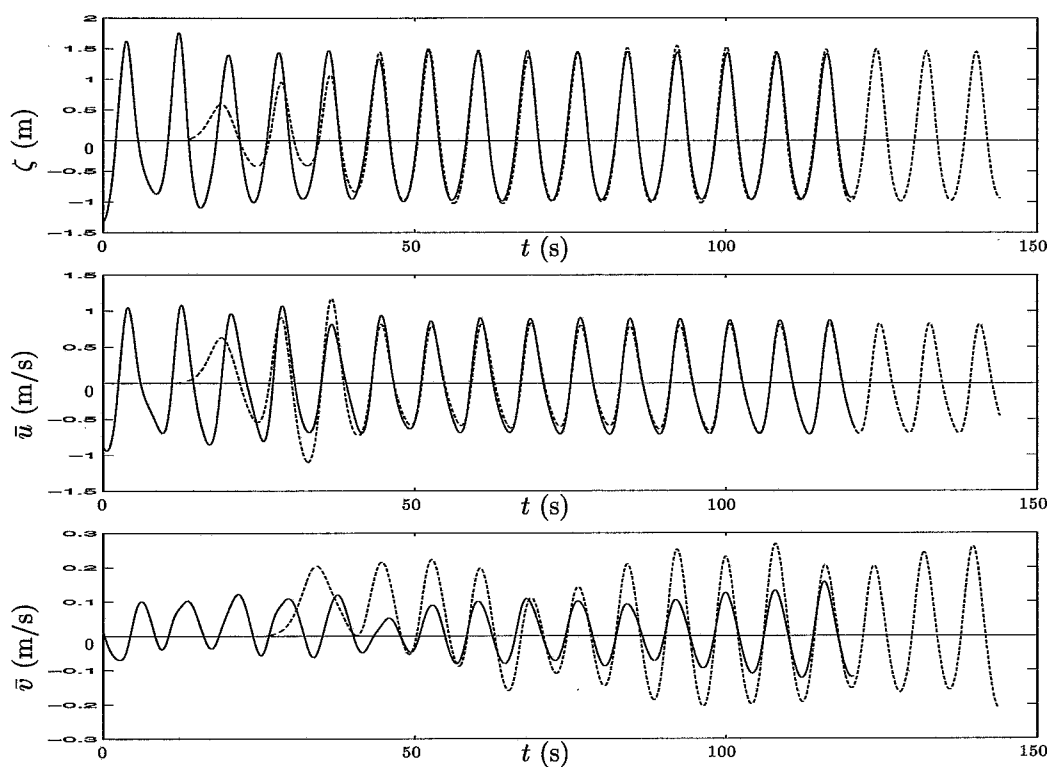


Figura 3.15: Séries temporais — sonda 1.

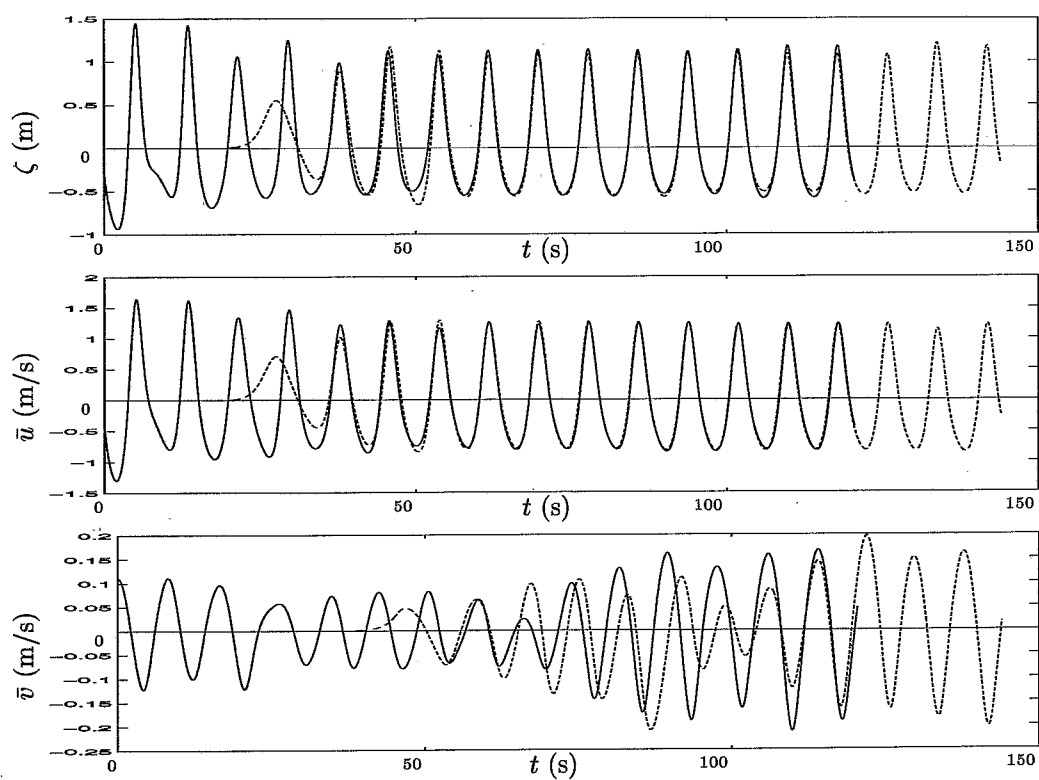


Figura 3.16: Séries temporais — sonda 2.

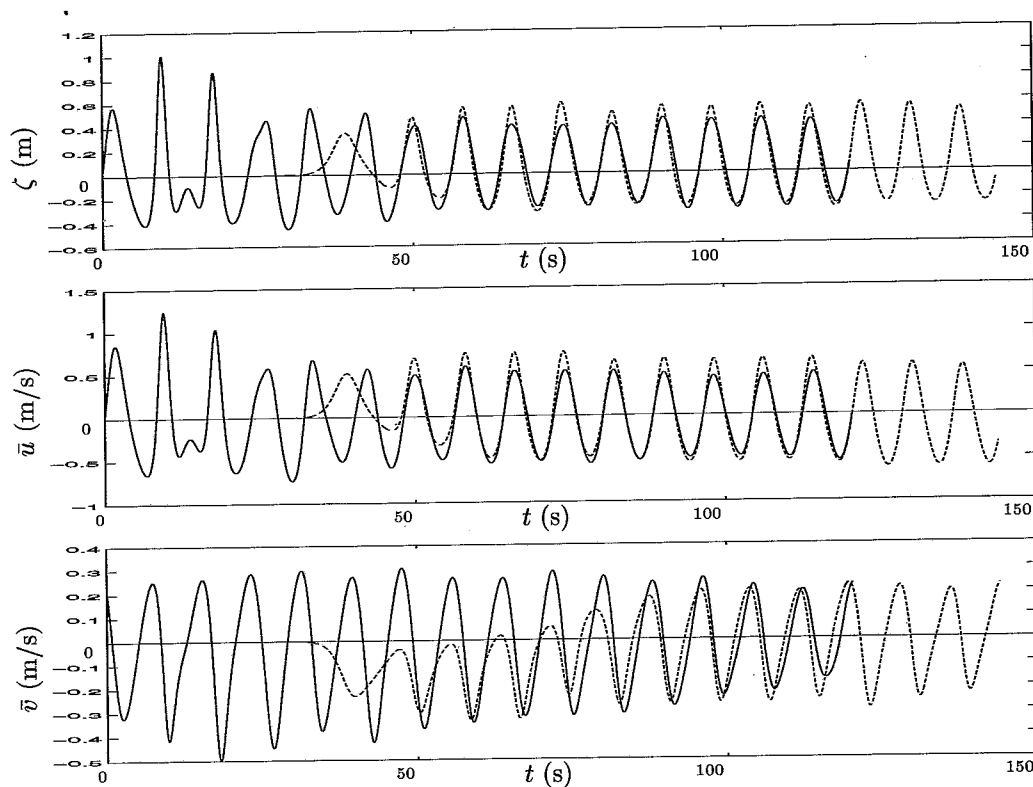


Figura 3.17: Séries temporais — sonda 3.

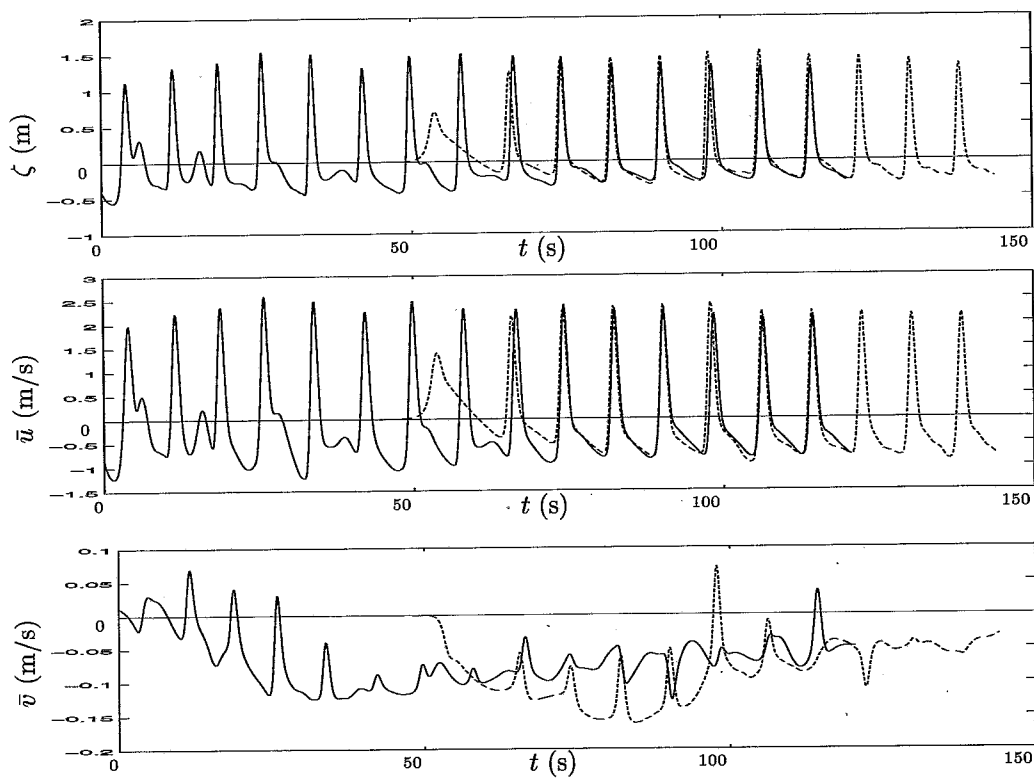


Figura 3.18: Séries temporais — sonda 4.

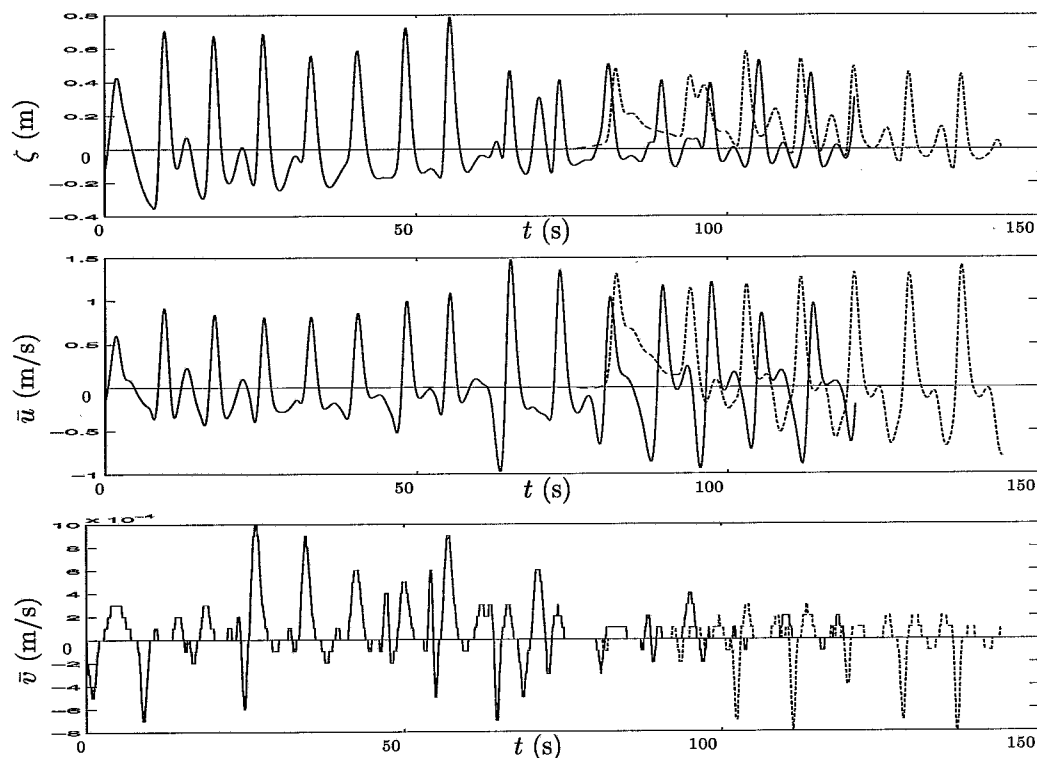


Figura 3.19: Séries temporais — sonda 5.

rapidamente, enquanto na simulação (A) persistem as harmônicas ímpares. Este transiente bastante longo na simulação (A) é muito provavelmente devido à longa distância que as ondas têm de viajar desde a fronteira de geração. Os resultados para a sonda 5 (cf. Figuras 3.32 e 3.33) parecem confirmar estas conclusões, pese embora as fortes oscilações registadas para esta sonda e para a simulação (B) entre $t = 50$ s e $t = 75$ s. Estas oscilações são talvez resultado de uma má reprodução de alguns dos principais fenómenos, nomeadamente a rebentação, pelo modelo de Berkhoff.

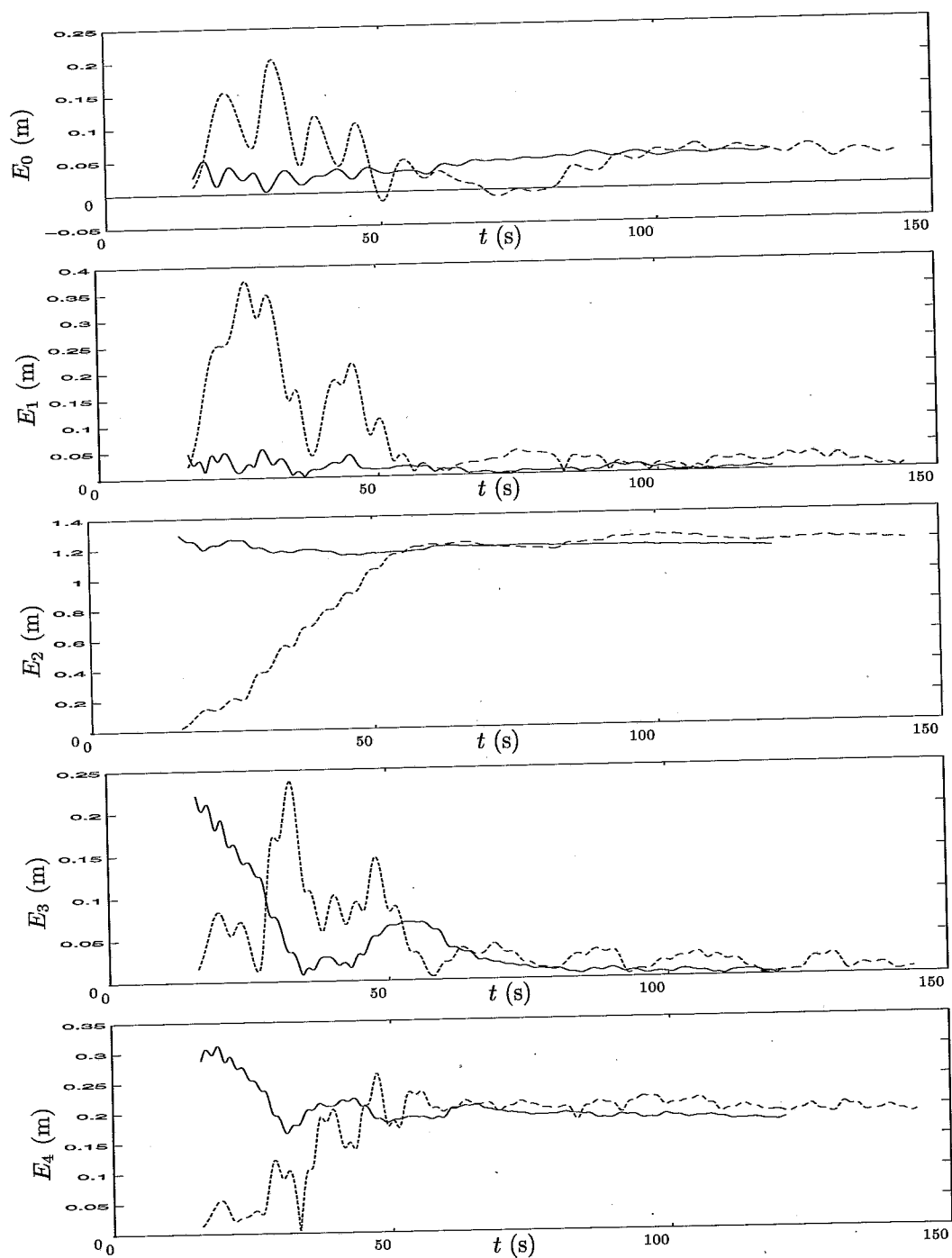
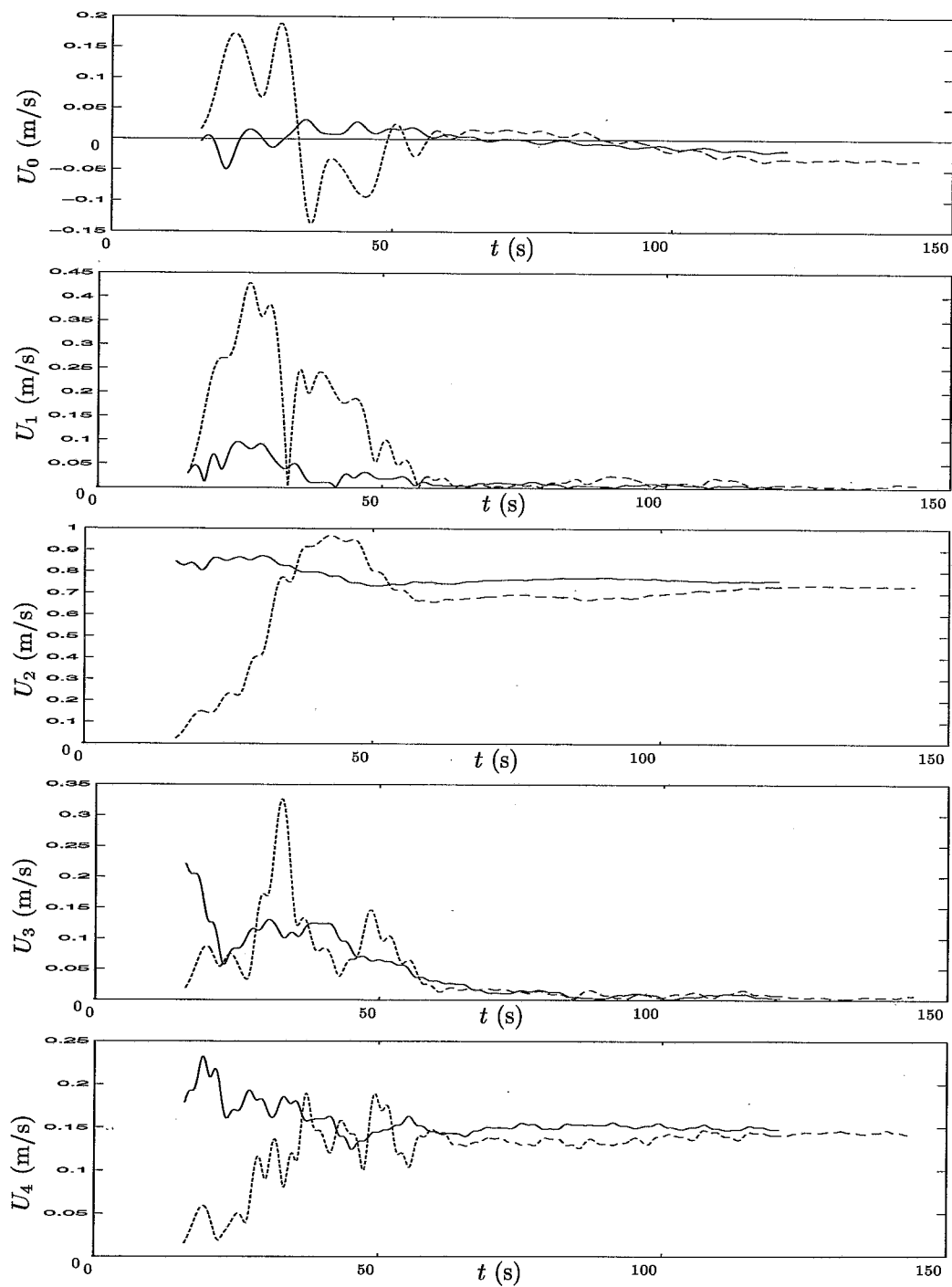


Figura 3.20: Componentes harmônicas da elevação da superfície livre — sonda 1.

Figura 3.21: Componentes harmônicas da velocidade $\bar{u}$ — sonda 1.

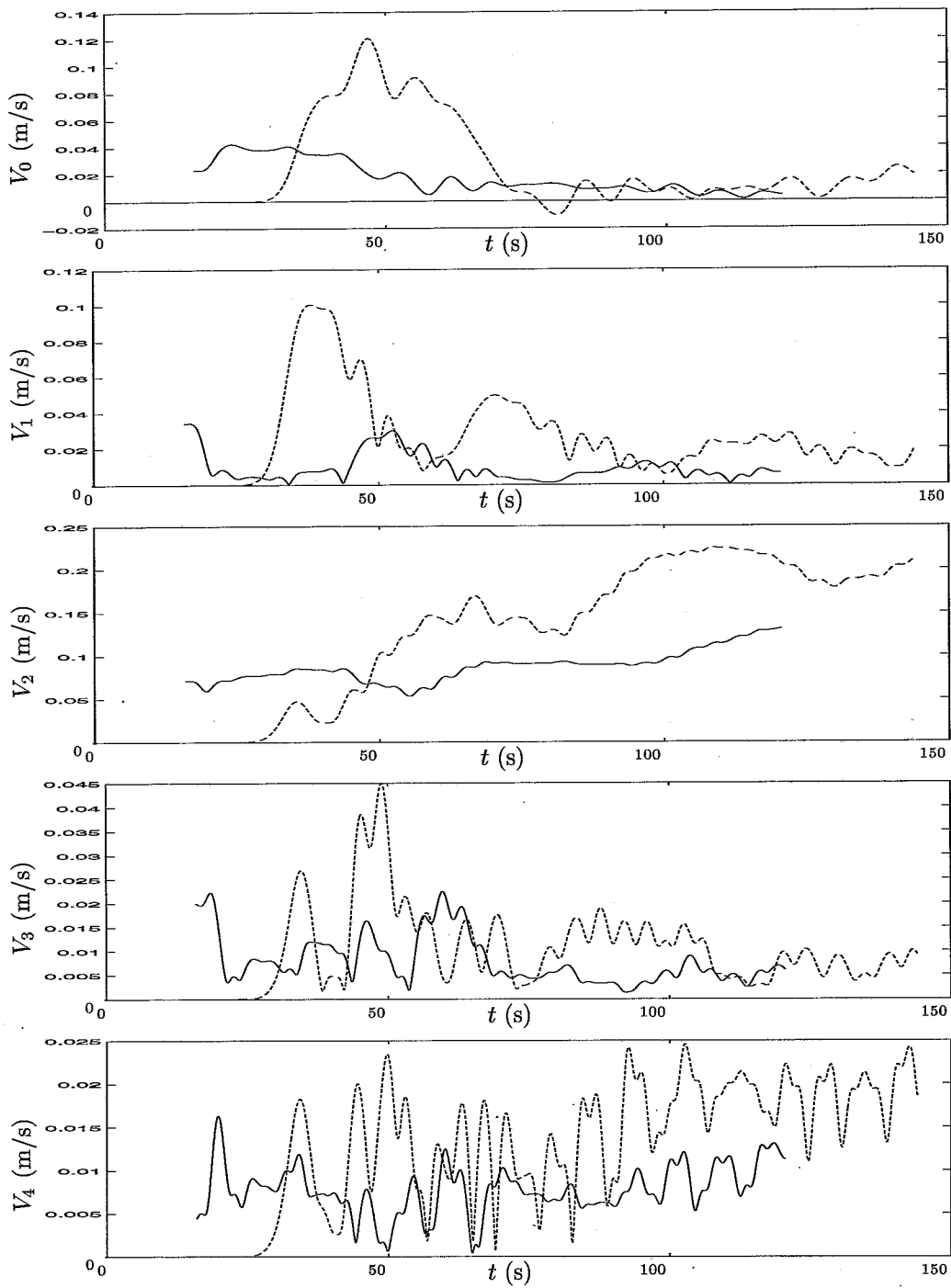


Figura 3.22: Componentes harmônicas da velocidade $\bar{v}$ — sonda 1.

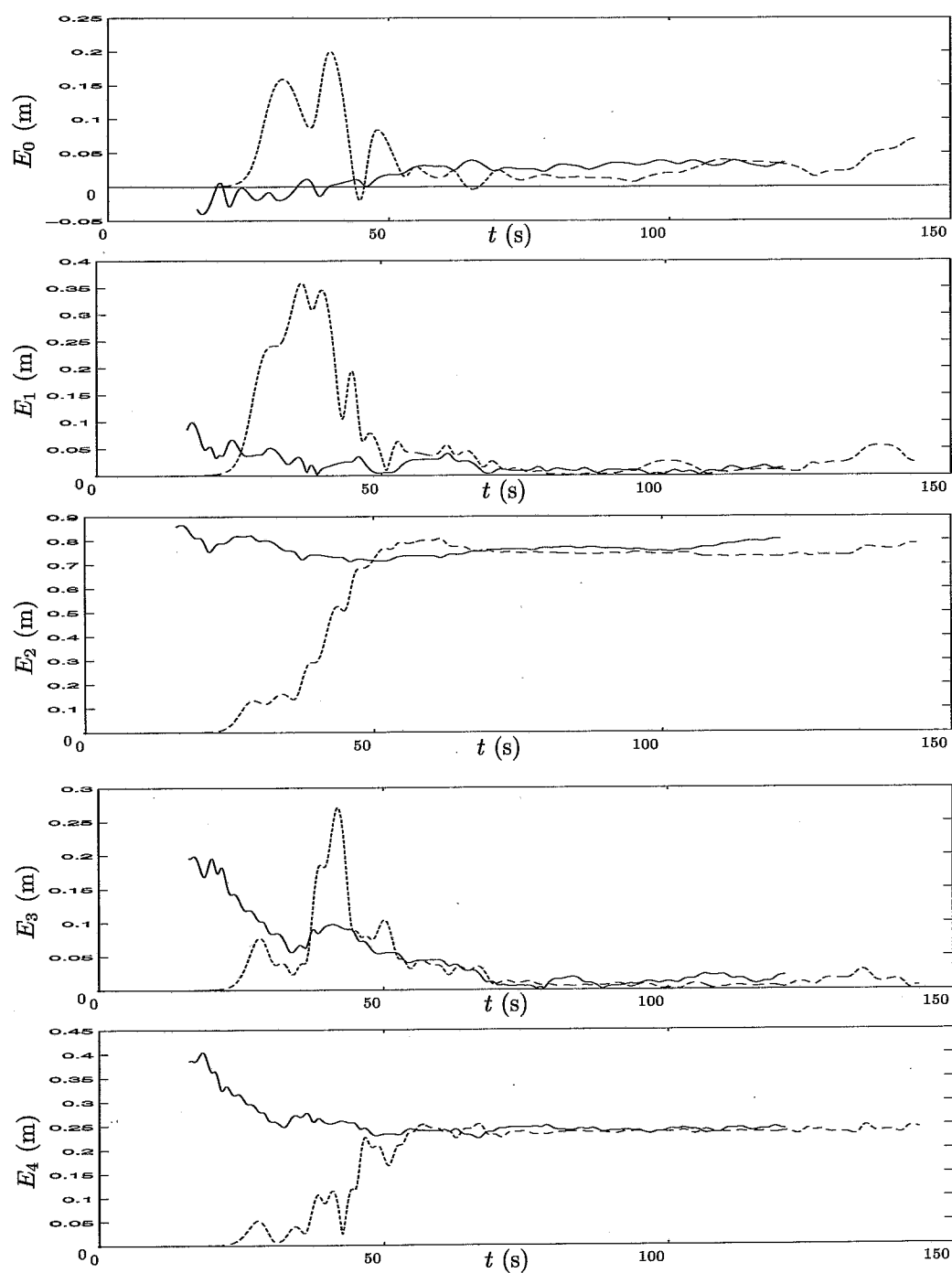


Figura 3.23: Componentes harmônicas da elevação da superfície livre — sonda 2.

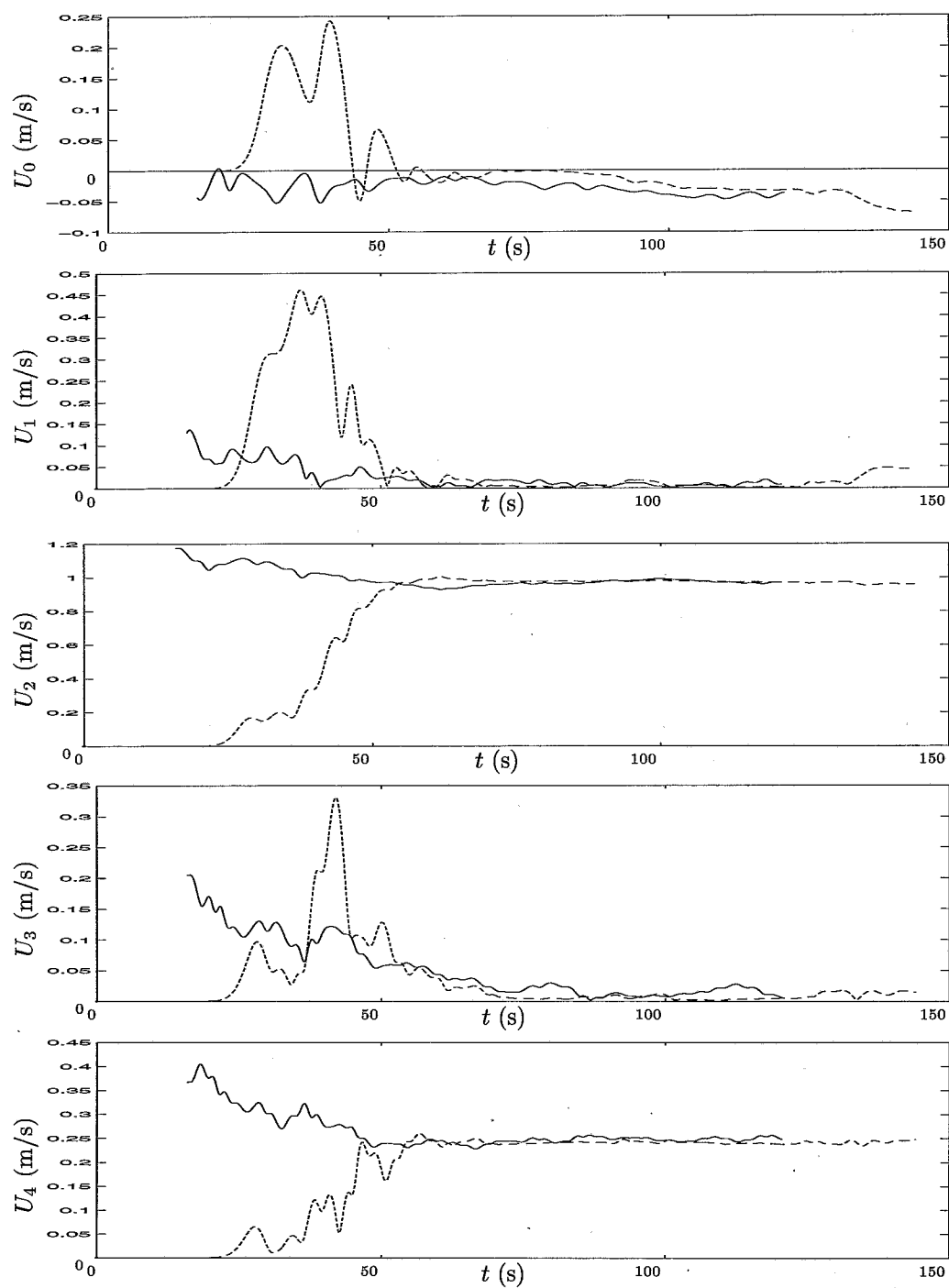
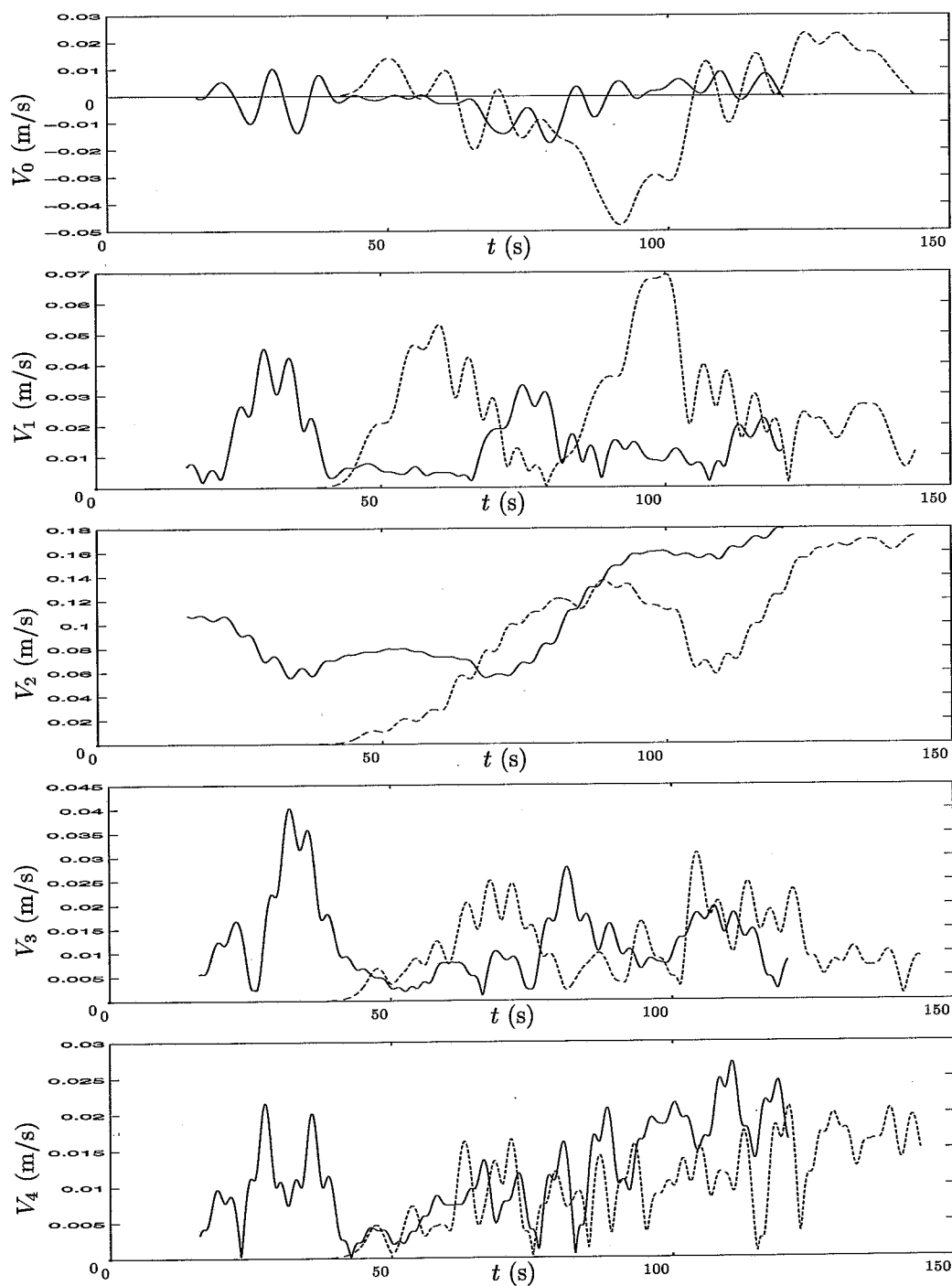


Figura 3.24: Componentes harmônicas da velocidade $\bar{u}$ — sonda 2.

Figura 3.25: Componentes harmônicas da velocidade $\bar{v}$ — sonda 2.

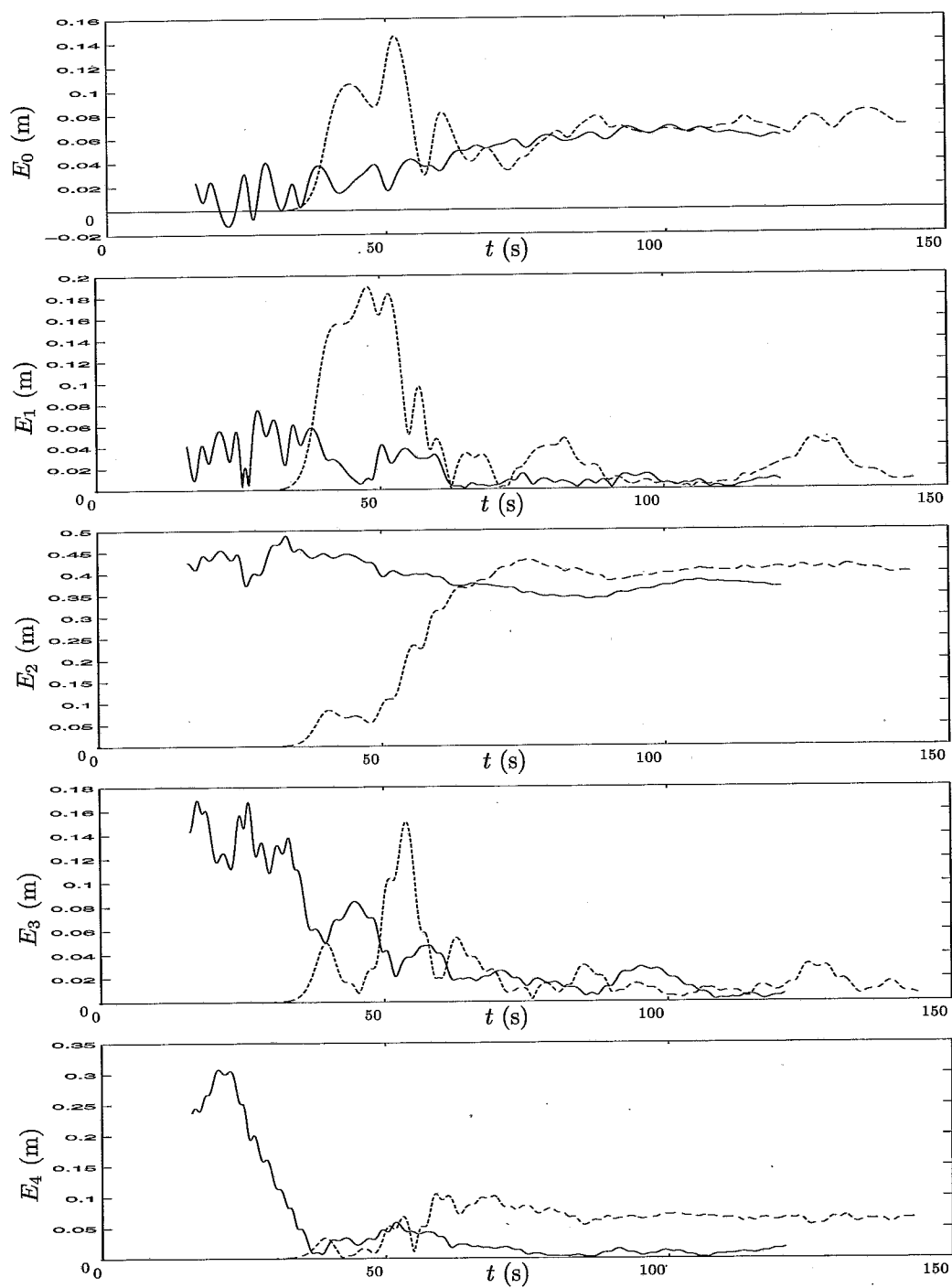


Figura 3.26: Componentes harmônicas da elevação da superfície livre — sonda 3.

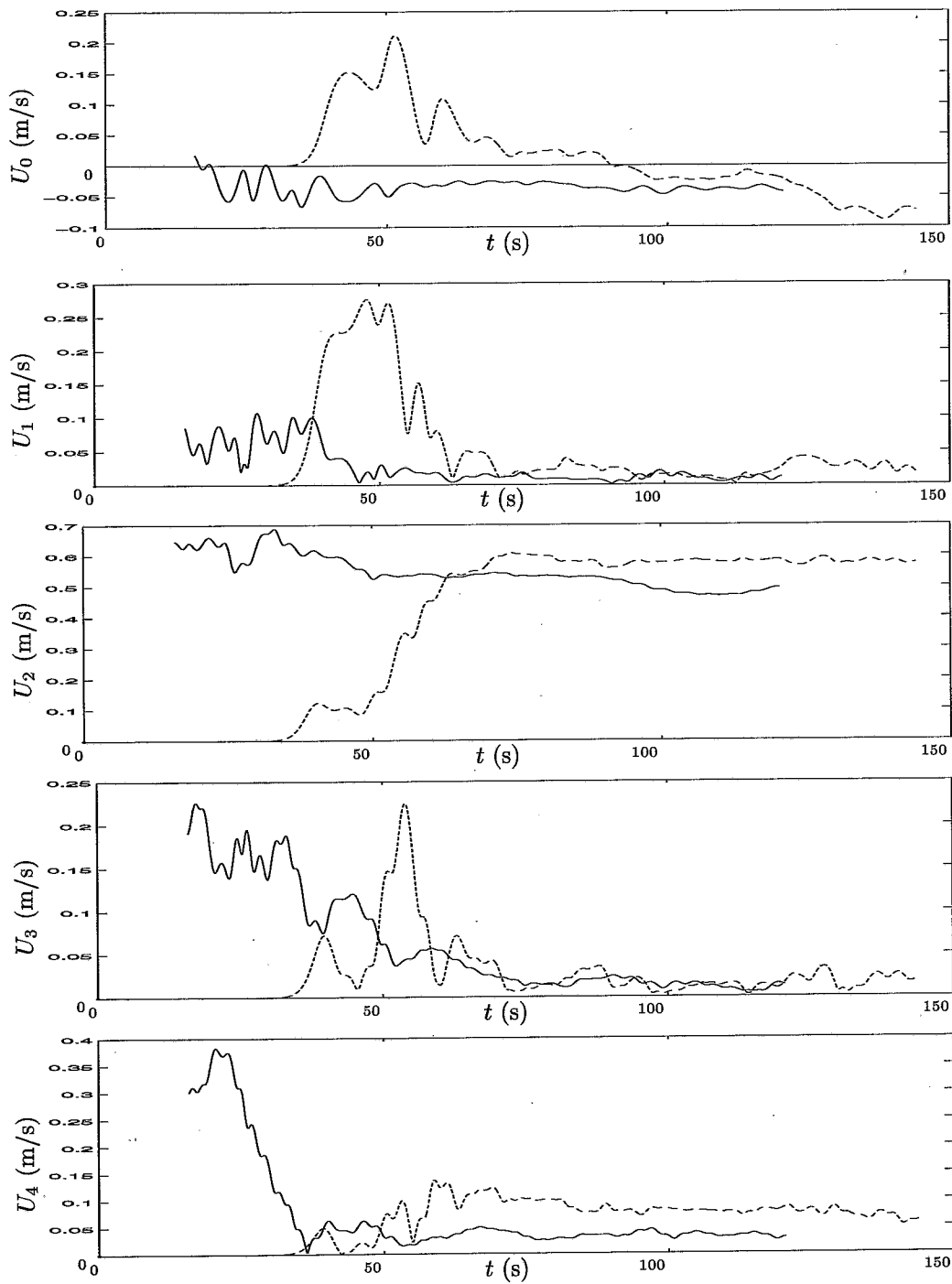
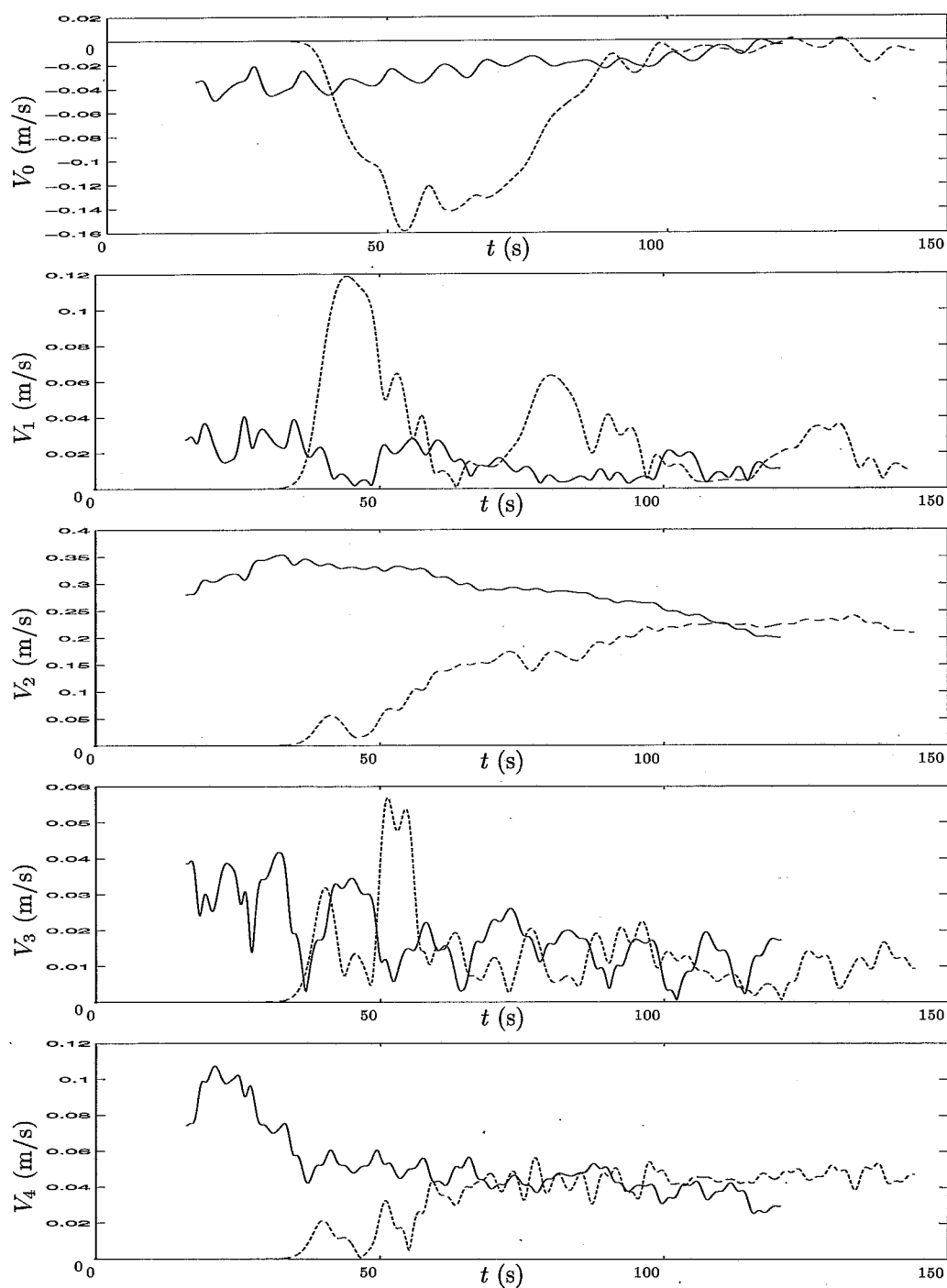


Figura 3.27: Componentes harmônicas da velocidade $\bar{u}$ — sonda 3.

Figura 3.28: Componentes harmônicas da velocidade $\bar{v}$ — sonda 3.

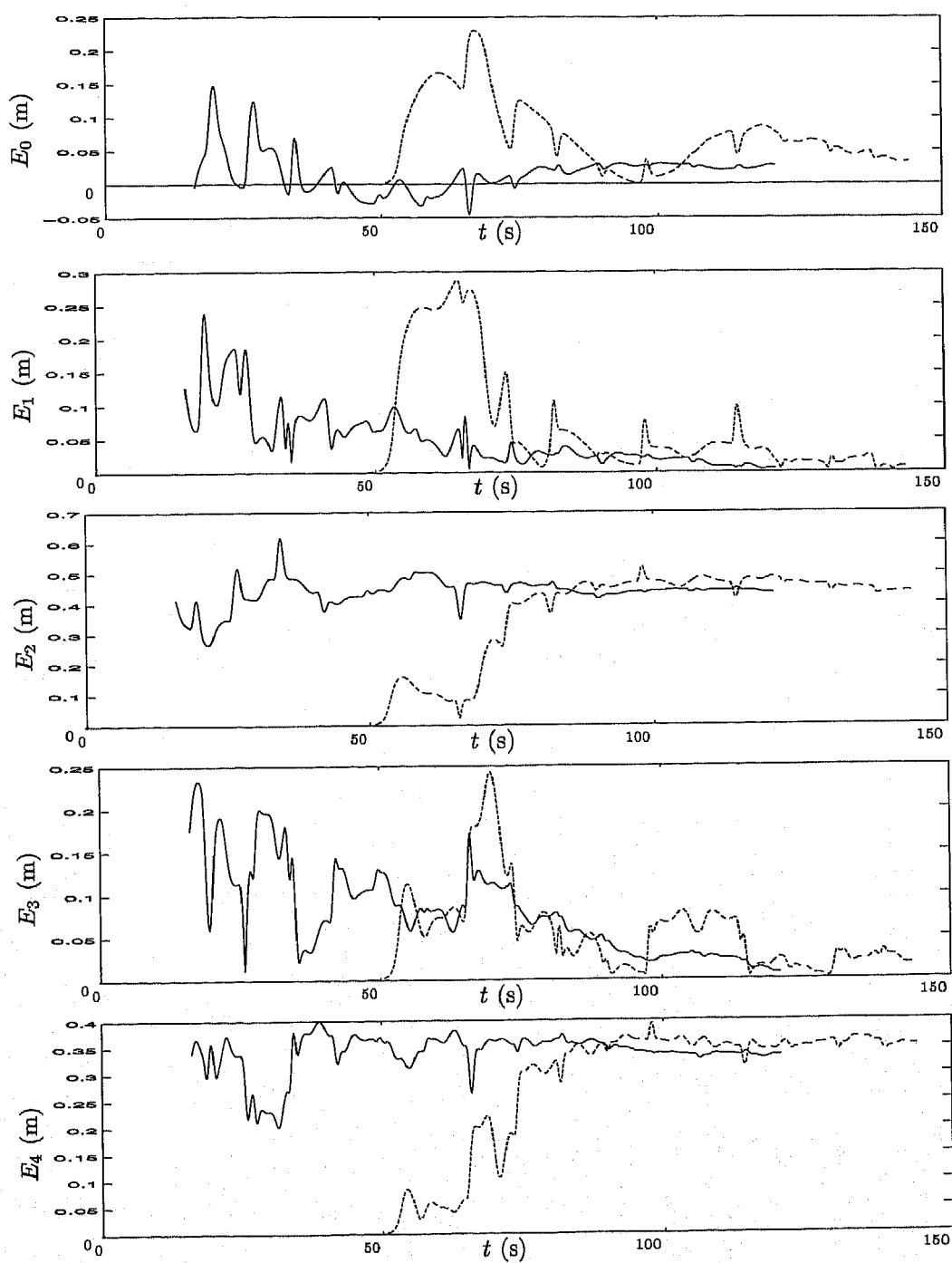


Figura 3.29: Componentes harmônicas da elevação da superfície livre — sonda 4.

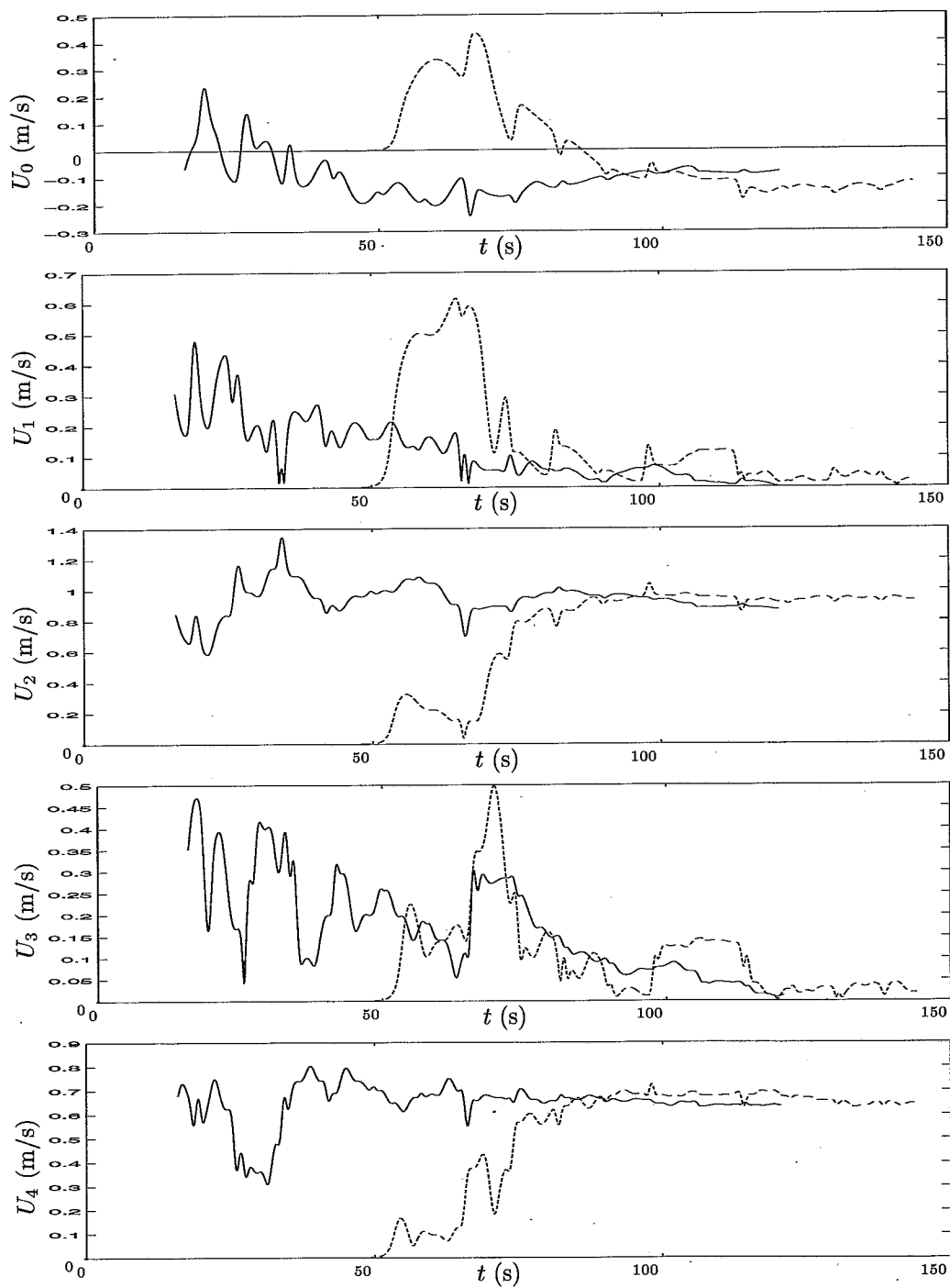


Figura 3.30: Componentes harmônicas da velocidade $\bar{u}$ — sonda 4.

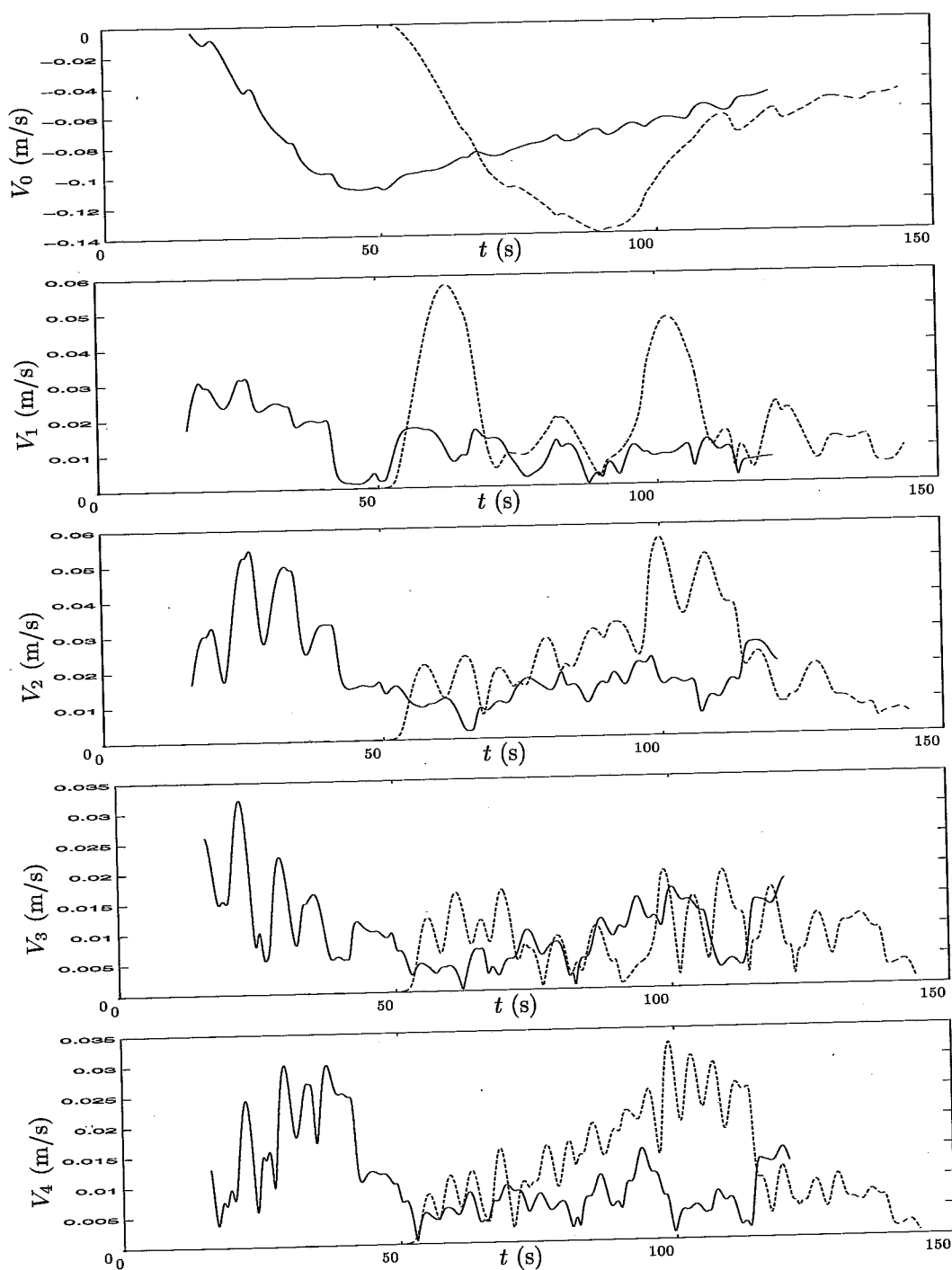


Figura 3.31: Componentes harmônicas da velocidade $\bar{v}$ — sonda 4.

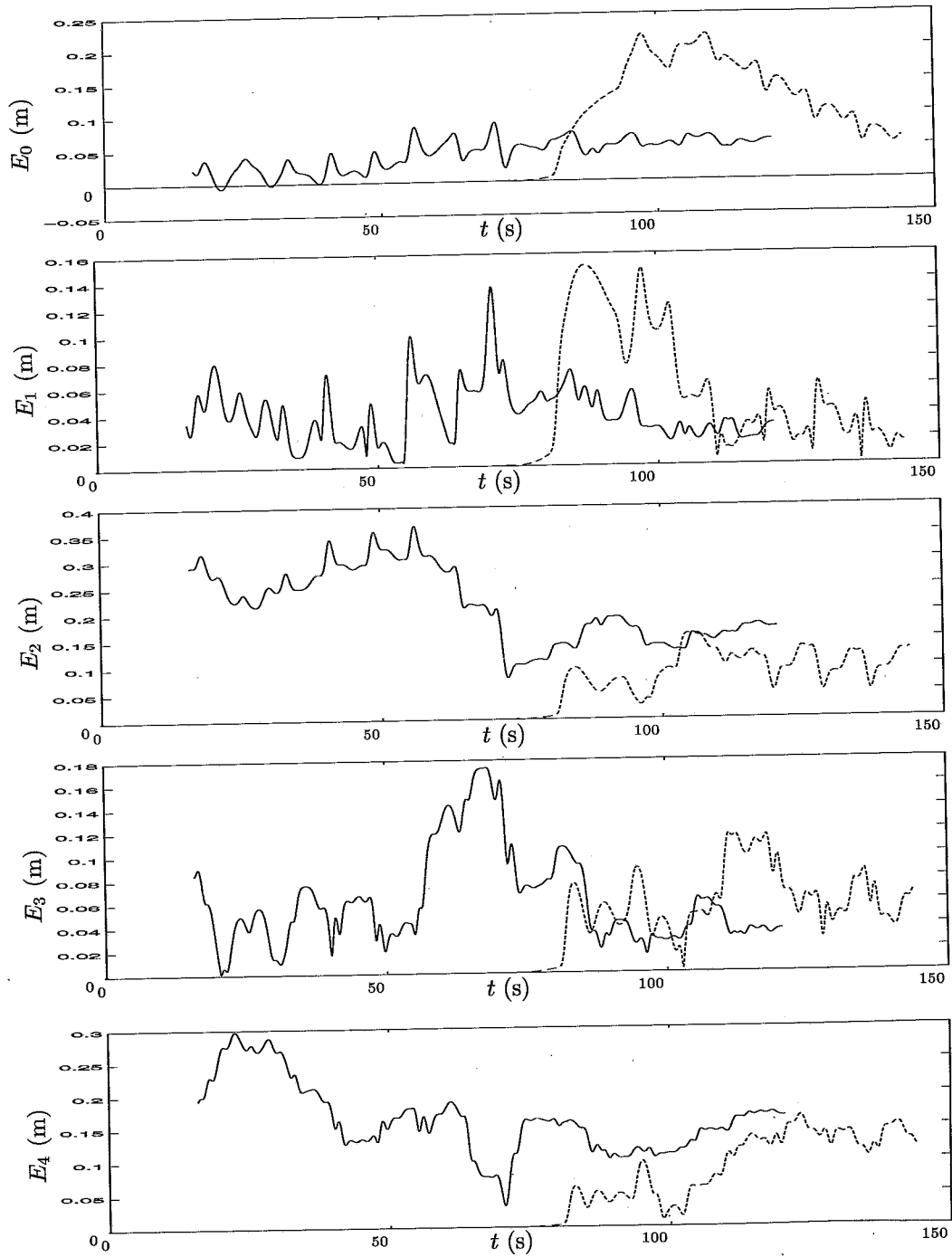


Figura 3.32: Componentes harmônicas da elevação da superfície livre — sonda 5.

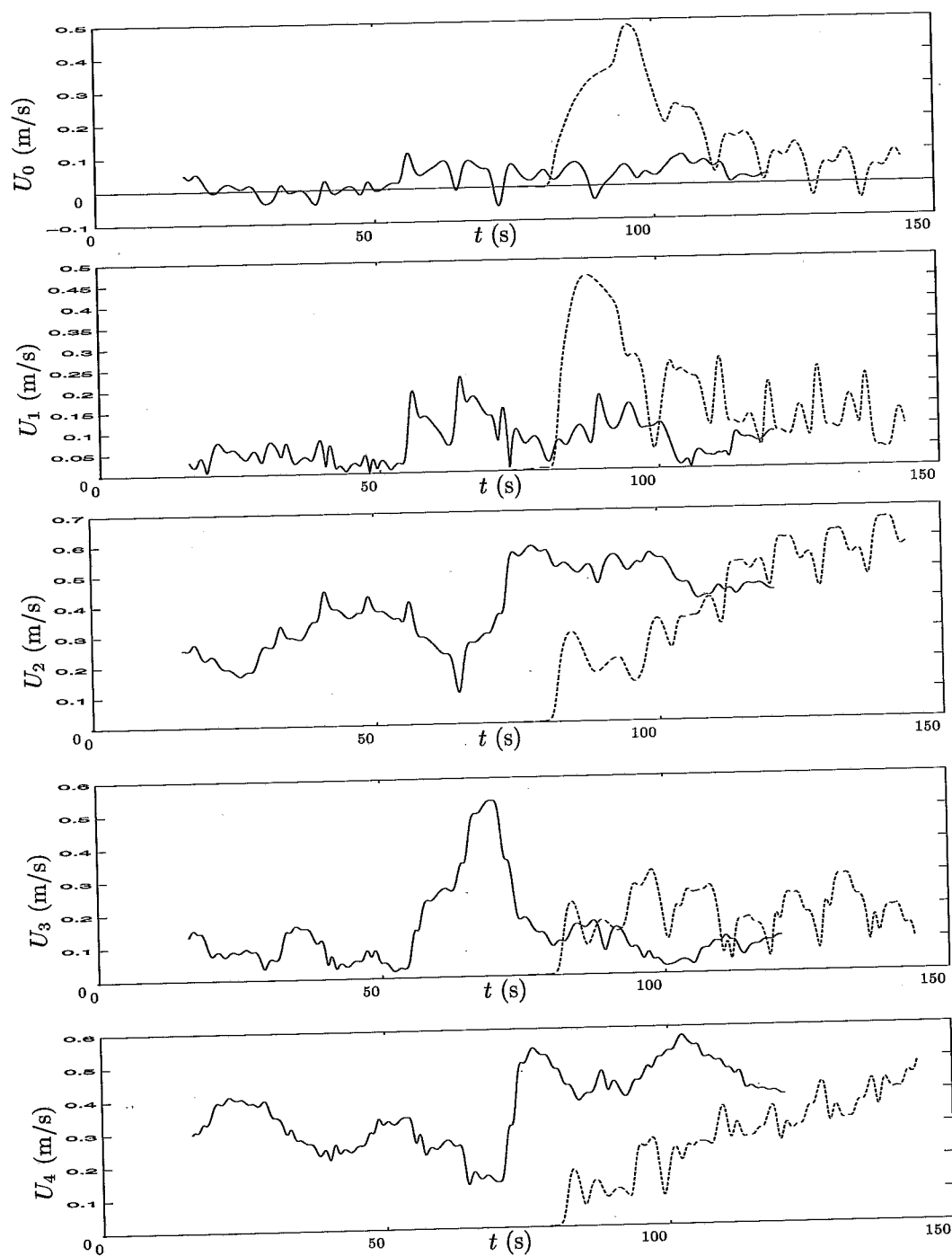


Figura 3.33: Componentes harmônicas da velocidade $\bar{u}$ — sonda 5.

Capítulo 4

Método dos Elementos Finitos: Esquemas de Bubnov-Galerkin

4.1 Introdução

As características dispersivas de várias formulações de Bubnov-Galerkin de elementos finitos, aplicadas às equações de Boussinesq para a propagação de ondas de gravidade dispersivas em águas pouco profundas, são estudadas. Procede-se a uma análise de Fourier das equações linearizadas para determinar as relações de dispersão, incluindo as celeridades de fase e de grupo, dos diversos esquemas. A sua precisão é investigada recorrendo à equação diferencial equivalente. Abordam-se quatro esquemas de Bubnov-Galerkin com diferentes graus de interpolação. Verifica-se a existência de modos de propagação com celeridade de fase nula para comprimentos de onda correspondentes a duas vezes a distância entre nós. A geração de harmónicas com um tal comprimento de onda pode ter uma origem física na cascata de energia associada ao termo não linear ou uma origem numérica associada à não monotonia da curva de dispersão. Esta última pode conduzir a fenómenos de *aliasing* entre diferentes comprimentos de onda na presença de uma súbita variação de profundidade ou na vizinhança de elementos de dimensões muito diferentes. Em qualquer caso sendo o esquema não dissipativo estes modos não propagantes poderão contaminar a solução.

4.2 Modelo de Boussinesq

A análise da aplicação de formulações de Bubnov-Galerkin às equações de Boussinesq restringir-se-á a situações a uma dimensão horizontal, sem qualquer dissipação de

energia de origem física. Os fundos são supostos fixos e de variação muito suave no espaço. Nestas circunstâncias, a formulação clássica do problema de propagação de uma onda dispersiva consiste em determinar as funções $\zeta(x, t)$ e $\bar{u}(x, t)$ tais que:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (4.1a)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^2 \partial t}, \quad (4.1b)$$

com as condições iniciais:

$$\begin{cases} \bar{u} = \bar{u}_0(x) \\ \zeta = \zeta_0(x) \end{cases} \quad \text{para } t = 0. \quad (4.1c)$$

O tipo e número de condições de fronteira a considerar foram discutidos no Capítulo 3. No problema (4.1), as funções q e p são, respectivamente, a energia e a quantidade de movimento locais do escoamento:

$$q = \frac{1}{2} \bar{u}^2 + g \zeta,$$

$$p = (h + \zeta) \bar{u}.$$

4.2.1 Formulação residual de Bubnov-Galerkin

A formulação residual fraca de Bubnov-Galerkin, com possibilidade de interpolação mista, para o problema (4.1) consiste em determinar as funções $\hat{\zeta} \in \mathcal{V}_\alpha$ e $\hat{u} \in \mathcal{V}_\beta$, no domínio $[0, \ell] \times [0, +\infty[$, tais que

$$\int_0^\ell \hat{\varphi} \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial t} dx + \int_0^\ell \hat{\varphi} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} dx = 0, \quad (4.2a)$$

$$\int_0^\ell \hat{\psi} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} dx + \int_0^\ell \hat{\psi} \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} dx + \int_0^\ell \frac{h^2}{3} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x \partial t} dx - \left[\hat{\psi} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x \partial t} \right]_0^\ell = 0, \quad (4.2b)$$

$$\forall \hat{\varphi} \in \mathcal{V}_\alpha, \hat{\psi} \in \mathcal{V}_\beta,$$

sendo $\mathcal{V}_\alpha$ e $\mathcal{V}_\beta$ os espaços de funções polinomiais de graus α e β , respectivamente, e continuidade C^0 , usuais no método dos elementos finitos¹ (cf. Zienkiewicz, 1977).

As funções $\hat{q}$ e $\hat{p}$ são tais que $\hat{q} \in \mathcal{V}_\alpha$ e $\hat{p} \in \mathcal{V}_\beta$.

Considerem-se quatro tipos de interpolação:

(a) interpolação linear, $\alpha = 1$, $\beta = 1$;

¹No caso das funções polinomiais de grau zero, a continuidade é do tipo C^{-1} .

- (b) interpolação quadrática, $\alpha = 2$, $\beta = 2$;
- (c) interpolação mista, $\alpha = 0$, $\beta = 1$;
- (d) interpolação mista, $\alpha = 1$, $\beta = 2$.

Para a interpolação do tipo (c), é necessário devido à descontinuidade das funções de interpolação, recorrer a uma formulação conservativa, utilizando ζ e p como variáveis computacionais. De acordo com Dingemans (cf. 1997b, página 513), e após alguma manipulação algébrica, o problema (4.1) consiste, neste caso, em determinar as funções $\zeta(x, t)$ e $p(x, t)$ tais que:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (4.3a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} - g \frac{\partial h}{\partial x} \zeta = \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 p}{\partial x^2 \partial t}, \quad (4.3b)$$

com as condições iniciais:

$$\begin{cases} p = p_0(x) \\ \zeta = \zeta_0(x) \end{cases} \quad \text{para } t = 0. \quad (4.3c)$$

No problema (4.3) a função $q \in \mathcal{V}_0$ é dada por

$$q = \frac{p^2}{h + \zeta} + g h \zeta.$$

A formulação variacional de Bubnov-Galerkin do problema (4.3) consiste na determinação das funções $\hat{\zeta} \in \mathcal{V}_0$ e $\hat{p} \in \mathcal{V}_1$, no domínio $[0, \ell] \times [0, +\infty[$, tais que

$$\int_0^\ell \hat{\varphi} \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial t} dx + \int_0^\ell \hat{\varphi} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} dx = 0, \quad (4.4a)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\ell \hat{\psi} \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} dx - \int_0^\ell \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} \hat{q} dx - \int_0^\ell g \frac{\partial h}{\partial x} \hat{\psi} \zeta dx + \int_0^\ell \frac{h^2}{3} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x \partial t} dx \\ = - \left[\hat{\psi} \left(\hat{q} - \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x \partial t} \right) \right]_0^\ell, \forall \hat{\varphi} \in \mathcal{V}_0, \hat{\psi} \in \mathcal{V}_1. \end{aligned} \quad (4.4b)$$

Considere-se o domínio espacial $[0, \ell]$ dividido em n_e elementos finitos de comprimento Δx . Sejam $\hat{\zeta}_i(t)$, $\hat{u}_i(t)$, $\hat{p}_i$ e h_i os valores calculados ou conhecidos das funções $\hat{\zeta}(x, t)$, $\hat{u}(x, t)$, $\hat{p}(x, t)$ e $h(x)$ nos nós da malha de elementos finitos. As funções de aproximação, ou funções teste, são:

(a) interpolação linear, $\alpha = 1$, $\beta = 1$

$$\begin{aligned}\hat{\zeta}(x, t) &= \sum_{i=1}^{n_e+1} N_i(x) \hat{\zeta}_i(t), \\ \hat{u}(x, t) &= \sum_{i=1}^{n_e+1} N_i(x) \hat{u}_i(t), \\ \hat{p}(x, t) &= \sum_{i=1}^{n_e+1} N_i(x) \left(h_i + \hat{\zeta}_i(t) \right) \hat{u}_i(t), \\ \hat{q}(x, t) &= \sum_{i=1}^{n_e+1} N_i(x, t) \left(\frac{1}{2} (\hat{u}_i(t))^2 + g \hat{\zeta}_i(t) \right); \end{aligned}$$

(b) interpolação quadrática, $\alpha = 2$, $\beta = 2$

$$\begin{aligned}\hat{\zeta}(x, t) &= \sum_{i=1}^{2n_e+1} M_i(x) \hat{\zeta}_i(t), \\ \hat{u}(x, t) &= \sum_{i=1}^{2n_e+1} M_i(x) \hat{u}_i(t), \\ \hat{p}(x, t) &= \sum_{i=1}^{2n_e+1} M_i(x) \left(h_i + \hat{\zeta}_i(t) \right) \hat{u}_i(t), \\ \hat{q}(x, t) &= \sum_{i=1}^{2n_e+1} M_i(x, t) \left(\frac{1}{2} (\hat{u}_i(t))^2 + g \hat{\zeta}_i(t) \right); \end{aligned}$$

(c) interpolação mista, $\alpha = 0$, $\beta = 1$

$$\begin{aligned}\hat{\zeta}(x, t) &= \hat{\zeta}_i(t), \quad \text{para } x \in]x_i, x_{i+1}[, \\ \hat{p}(x, t) &= \sum_{i=1}^{n_e+1} N_i(x) \hat{p}_i(t), \\ \hat{q}(x, t) &= \left(\frac{1}{2} \frac{(\hat{p}_i(t) + \hat{p}_{i+1}(t))^2}{h_i + \hat{\zeta}_i(t)} + g h_i \hat{\zeta}_i(t) \right), \quad \text{para } x \in]x_i, x_{i+1}[; \end{aligned}$$

(d) interpolação mista, $\alpha = 1$, $\beta = 2$

$$\hat{\zeta}(x, t) = \sum_{i=1}^{n_e+1} N_i(x) \hat{\zeta}_i(t),$$

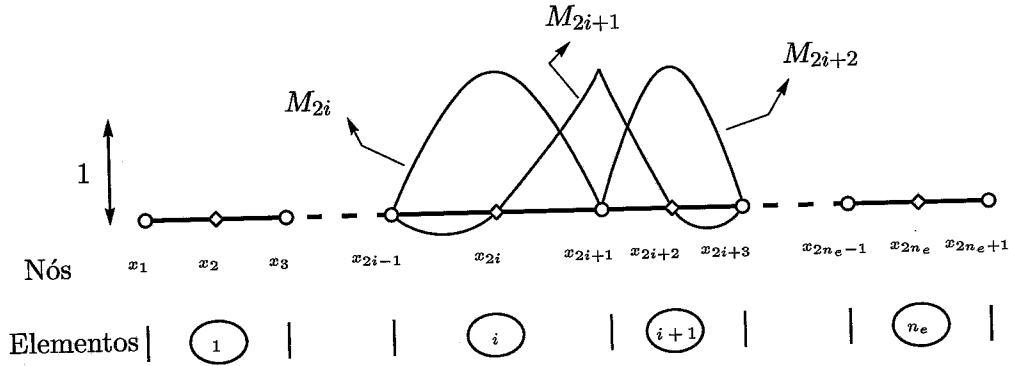
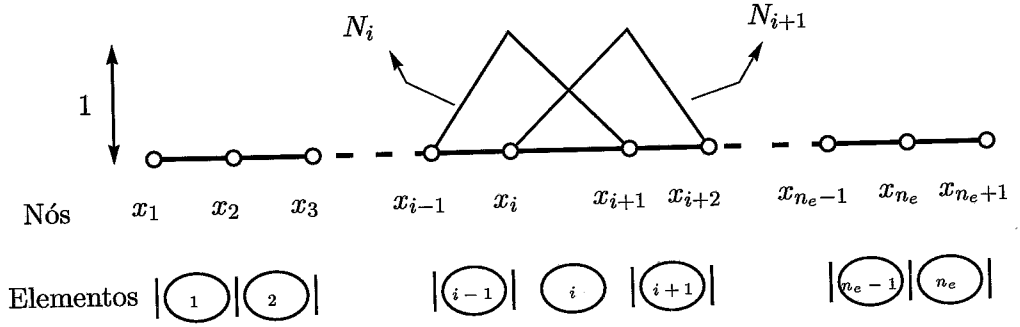


Figura 4.1: Funções de interpolação globais.

$$\hat{u}(x, t) = \sum_{j=1}^{2n_e+1} M_j(x) \hat{u}_j(t),$$

$$\hat{p}(x, t) = \sum_{j=1}^{2n_e+1} M_j(x) \left(h_j + \hat{\zeta}(x_j, t) \right) \hat{u}_j(t),$$

$$\hat{q}(x, t) = \sum_{i=1}^{n_e+1} N_i(x, t) \left(\frac{1}{2} (\hat{u}(x_i, t))^2 + g \hat{\zeta}_i(t) \right).$$

Como é habitual nos esquemas de elementos finitos, as funções de interpolação globais, $N_i, i = 1, \dots, n_e + 1$, e $M_j, j = 1, \dots, 2n_e + 1$ (cf. Figura 4.1), não são explicitamente definidas. Os integrais nas equações (4.2) e (4.4) são calculados por integração sobre cada elemento e as equações discretas são obtidas somando a contribuição em cada nó (para detalhes, ver Zienkiewicz e Morgan, 1983, páginas 108 e seguintes). A integração é realizada recorrendo às funções de interpolação elementares (funções de forma) $N_i^e, i = 1, 2$ e $M_j^e, j = 1, 2, 3$ (cf. Figuras 4.2 e 4.3) que a seguir se apresentam.

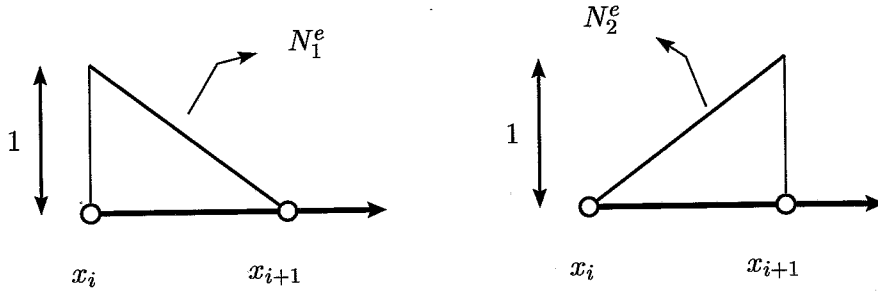


Figura 4.2: Funções de forma locais lineares.

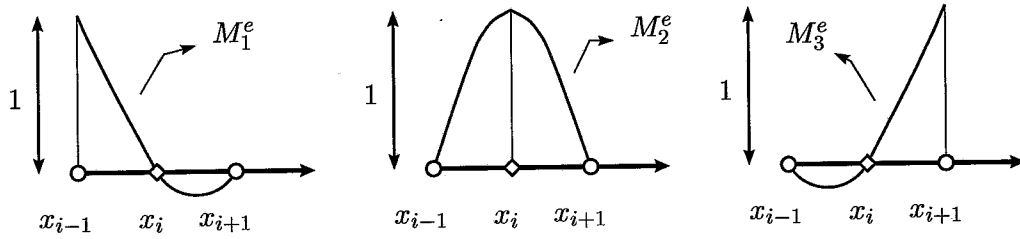


Figura 4.3: Funções de forma locais quadráticas.

- Funções de forma lineares:

$$N_1^e = \frac{\Delta x - \bar{x}}{\Delta x}; \quad (4.5a)$$

$$N_2^e = \frac{\bar{x}}{\Delta x}, \quad (4.5b)$$

com $\bar{x} = x - x_e$ e $\Delta x = x_{e+1} - x_e$.

- Funções de interpolação quadráticas:

$$M_1^e = 2 \left(\frac{\bar{x}}{\Delta x} \right)^2 - 3 \frac{\bar{x}}{\Delta x} + 1; \quad (4.6a)$$

$$M_2^e = -4 \frac{\bar{x}}{\Delta x} \left(\frac{\bar{x}}{\Delta x} - 1 \right); \quad (4.6b)$$

$$M_3^e = \frac{\bar{x}}{\Delta x} \left(2 \frac{\bar{x}}{\Delta x} - 1 \right), \quad (4.6c)$$

com $\bar{x} = x - x_{2e-1}$ e $\Delta x = x_{2e+1} - x_{2e-1}$.

4.2.2 Erro local devido à discretização espacial

Dois tipos de erro local são examinados neste ponto: o erro na solução, restringido à análise da forma linear das equações em fundo horizontal; o erro de truncatura da equação diferencial equivalente, passível de aplicação à formulação completa das

equações mas restringido, no presente trabalho, às equações para fundo horizontal. Neste tipo de análise é ignorado o efeito das condições de fronteira e das condições iniciais.

Equações discretas

Os esquemas de discretização referidos conduzem a diferentes equações algébricas para o j -ésimo nó. No caso dos elementos de três nós consideram-se as equações discretas associadas ao nó extremo do elemento e as equações associadas ao nó interno. Na sua forma adimensional, obtêm-se as seguintes equações discretas para fundo horizontal, onde o índice t significa "derivada em ordem ao tempo":

(a) interpolação linear: $\alpha = 1$ e $\beta = 1$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x}{6} \left[(\hat{\zeta}_{j+1})_t + 4 (\hat{\zeta}_j)_t + (\hat{\zeta}_{j-1})_t \right] + \frac{h}{2} [\hat{u}_{j+1} - \hat{u}_{j-1}] \\ + \frac{\epsilon}{2} [\hat{\zeta}_{j+1} \hat{u}_{j+1} - \hat{\zeta}_{j-1} \hat{u}_{j-1}] = 0, \end{aligned} \quad (4.7a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x}{6} [(\hat{u}_{j+1})_t + 4 (\hat{u}_j)_t + (\hat{u}_{j-1})_t] + \frac{\epsilon}{4} [(\hat{u}_{j+1})^2 - (\hat{u}_{j-1})^2] + \frac{1}{2} [\hat{\zeta}_{j+1} - \hat{\zeta}_{j-1}] \\ - \sigma^2 \frac{h^2}{3 \Delta x} [(\hat{u}_{j+1})_t - 2 (\hat{u}_j)_t + (\hat{u}_{j-1})_t] = 0; \end{aligned} \quad (4.7b)$$

(b) interpolação quadrática: $\alpha = 2$ e $\beta = 2$

i. nó extremo

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x}{30} \left[-(\hat{\zeta}_{j+2})_t + 2 (\hat{\zeta}_{j+1})_t + 8 (\hat{\zeta}_j)_t + 2 (\hat{\zeta}_{j-1})_t - (\hat{\zeta}_{j-2})_t \right] \\ + \frac{h}{6} [-\hat{u}_{j+2} + 4 \hat{u}_{j+1} - 4 \hat{u}_{j-1} + \hat{u}_{j-2}] \\ + \frac{\epsilon}{6} [-\hat{\zeta}_{j+2} \hat{u}_{j+2} + 4 \hat{\zeta}_{j+1} \hat{u}_{j+1} - 4 \hat{\zeta}_{j-1} \hat{u}_{j-1} + \hat{\zeta}_{j-2} \hat{u}_{j-2}] = 0, \end{aligned} \quad (4.8a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x}{30} [-(\hat{u}_{j+2})_t + 2 (\hat{u}_{j+1})_t + 8 (\hat{u}_j)_t + 2 (\hat{u}_{j-1})_t - (\hat{u}_{j-2})_t] \\ + \frac{\epsilon}{12} [-(\hat{u}_{j+2})^2 + 4 (\hat{u}_{j+1})^2 - 4 (\hat{u}_{j-1})^2 + (\hat{u}_{j-2})^2] \\ + \frac{1}{6} [-\hat{\zeta}_{j+2} + 4 \hat{\zeta}_{j+1} - 4 \hat{\zeta}_{j-1} + \hat{\zeta}_{j-2}] \\ - \sigma^2 \frac{h^2}{9 \Delta x} [-(\hat{u}_{j+2})_t + 8 (\hat{u}_{j+1})_t - 14 (\hat{u}_j)_t + 8 (\hat{u}_{j-1})_t - (\hat{u}_{j-2})_t] = 0; \end{aligned} \quad (4.8b)$$

ii. nó interno

$$\frac{\Delta x}{15} \left[\left(\hat{\zeta}_{j+1} \right)_t + 8 \left(\hat{\zeta}_j \right)_t + \left(\hat{\zeta}_{j-1} \right)_t \right] \quad (4.9a)$$

$$+ \frac{2}{3} h \left[\hat{u}_{j+1} - \hat{u}_{j-1} \right] + \frac{2}{3} \epsilon \left[\hat{\zeta}_{j+1} \hat{u}_{j+1} - \hat{\zeta}_{j-1} \hat{u}_{j-1} \right] = 0,$$

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta x}{15} \left[\left(\hat{u}_{j+1} \right)_t + 8 \left(\hat{u}_j \right)_t + \left(\hat{u}_{j-1} \right)_t \right] + \frac{1}{3} \epsilon \left[\left(\hat{u}_{j+1} \right)^2 - \left(\hat{u}_{j-1} \right)^2 \right] \\ & + \frac{2}{3} \left[\hat{\zeta}_{j+1} - \hat{\zeta}_{j-1} \right] - \sigma^2 h^2 \frac{8}{9 \Delta x} \left[\left(\hat{u}_{j+1} \right)_t - 2 \left(\hat{u}_j \right)_t + \left(\hat{u}_{j-1} \right)_t \right] = 0; \end{aligned} \quad (4.9b)$$

(c) interpolação mista: $\alpha = 0$ e $\beta = 1^2$

$$\Delta x \left[\left(\hat{\zeta}_{j+1/2} \right)_t + \left(\hat{\zeta}_{j-1/2} \right)_t \right] + \left[\hat{p}_{j+1} - \hat{p}_{j-1} \right] = 0, \quad (4.10a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta x}{6} \left[\left(\hat{p}_{j+1} \right)_t + 4 \left(\hat{p}_j \right)_t + \left(\hat{p}_{j-1} \right)_t \right] + h \left[\hat{\zeta}_{j+1/2} - \hat{\zeta}_{j-1/2} \right] \\ & + \frac{\epsilon}{4 \left(h + \hat{\zeta}_{j+1/2} \right)} \left[\left(\hat{p}_{j+1} + \hat{p}_j \right)^2 \right] + \frac{\epsilon}{4 \left(h + \hat{\zeta}_{j-1/2} \right)} \left[\left(\hat{p}_j + \hat{p}_{j-1} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (4.10b)$$

$$- \sigma^2 \frac{h^2}{3 \Delta x} \left[\left(\hat{p}_{j+1} \right)_t - 2 \left(\hat{p}_j \right)_t + \left(\hat{p}_{j-1} \right)_t \right] = 0;$$

(d) interpolação mista: $\alpha = 1$ e $\beta = 2$

i. nó extremo

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta x}{6} \left[\left(\hat{\zeta}_{j+2} \right)_t + 4 \left(\hat{\zeta}_j \right)_t + \left(\hat{\zeta}_{j-2} \right)_t \right] \\ & + \frac{h}{6} \left[\hat{u}_{j+2} + 4 \hat{u}_{j+1} - 4 \hat{u}_{j-1} - \hat{u}_{j-2} \right] \end{aligned} \quad (4.11a)$$

$$+ \frac{\epsilon}{6} \left[\hat{\zeta}_{j+2} \hat{u}_{j+2} + 2 \left(\hat{\zeta}_{j+2} + \hat{\zeta}_j \right) \hat{u}_{j+1} - 2 \left(\hat{\zeta}_j + \hat{\zeta}_{j-2} \right) \hat{u}_{j-1} - \hat{\zeta}_{j-2} \hat{u}_{j-2} \right] = 0,$$

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta x}{30} \left[- \left(\hat{u}_{j+2} \right)_t + 2 \left(\hat{u}_{j+1} \right)_t + 8 \left(\hat{u}_j \right)_t + 2 \left(\hat{u}_{j-1} \right)_t - \left(\hat{u}_{j-2} \right)_t \right] \\ & + \frac{\epsilon}{12} \left[\left(\hat{u}_{j+2} \right)^2 - \left(\hat{u}_{j-2} \right)^2 \right] + \frac{1}{6} \left[\hat{\zeta}_{j+2} - \hat{\zeta}_{j-2} \right] \end{aligned} \quad (4.11b)$$

$$- \sigma^2 \frac{h^2}{9 \Delta x} \left[- \left(\hat{u}_{j+2} \right)_t + 8 \left(\hat{u}_{j+1} \right)_t - 14 \left(\hat{u}_j \right)_t + 8 \left(\hat{u}_{j-1} \right)_t - \left(\hat{u}_{j-2} \right)_t \right] = 0;$$

²A equação discreta da continuidade foi obtida por soma das equações para dois elementos contíguos.

ii. nó interno³

$$\begin{aligned}
& \frac{\Delta x}{6} \left[\left(\hat{\zeta}_{j+3} \right)_t + 5 \left(\hat{\zeta}_{j+1} \right)_t + 5 \left(\hat{\zeta}_{j-1} \right)_t + \left(\hat{\zeta}_{j-3} \right)_t \right] \\
& + \frac{h}{6} \left[\hat{u}_{j+3} + 4 \hat{u}_{j+2} + \hat{u}_{j+1} - \hat{u}_{j-1} - 4 \hat{u}_{j-2} - \hat{u}_{j-3} \right] \\
& + \frac{\epsilon}{6} \left[\hat{\zeta}_{j+3} \hat{u}_{j+3} + 2 \left(\hat{\zeta}_{j+3} + \hat{\zeta}_{j+1} \right) \hat{u}_{j+2} + \hat{\zeta}_{j+1} \hat{u}_{j+1} \right. \\
& \quad \left. - \hat{\zeta}_{j-1} \hat{u}_{j-1} - 2 \left(\hat{\zeta}_{j-1} + \hat{\zeta}_{j-3} \right) \hat{u}_{j-2} - \hat{\zeta}_{j-3} \hat{u}_{j-3} \right] = 0,
\end{aligned} \tag{4.12a}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\Delta x}{15} \left[\left(\hat{u}_{j+1} \right)_t + 8 \left(\hat{u}_j \right)_t + \left(\hat{u}_{j-1} \right)_t \right] \\
& + \frac{\epsilon}{3} \left[\left(\hat{u}_{j+1} \right)^2 - \left(\hat{u}_{j-1} \right)^2 \right] + \frac{2}{3} \left[\hat{\zeta}_{j+1} - \hat{\zeta}_{j-1} \right] \\
& - \sigma^2 \frac{h^2}{27 \Delta x} \left[8 \left(\hat{u}_{j+1} \right)_t - 16 \left(\hat{u}_j \right)_t + 8 \left(\hat{u}_{j-1} \right)_t \right] = 0.
\end{aligned} \tag{4.12b}$$

Equações diferenciais equivalentes

A análise do erro de truncatura cometido na discretização dos problemas (4.1) e (4.3) foi efectuada recorrendo às equações diferenciais equivalentes dos esquemas numéricos. Estas equações são obtidas por substituição, nas equações discretas, dos valores de $\hat{\zeta}_{j\pm 3}$, $\hat{\zeta}_{j\pm 2}$, $\hat{\zeta}_{j\pm 1}$, $\hat{\zeta}_{j\pm 1/2}$, $\hat{u}_{j\pm 3}$, $\hat{u}_{j\pm 2}$ e $\hat{u}_{j\pm 1}$ pelas suas expansões em série de Taylor centradas em $x = x_j$. Como se pode constatar da inspecção das equações diferenciais equivalentes, a discretização corresponde sempre à resolução de um problema modificado pela introdução de termos dispersivos e não lineares de origem puramente numérica. A ordem de grandeza destes termos é função do comprimento adimensionalizado do elemento finito, $k\Delta x$. Nenhum dos esquemas introduz termos dissipativos. Qualquer dissipação numérica, fundamental para a estabilidade do esquema, terá de ser obtida via integração no tempo.

No que respeita à precisão dos métodos, o esquema de elementos lineares de dois nós é o mais preciso. Os termos dispersivos numéricos são, neste caso, de ordem $\mathcal{O}(\sigma^2 (k\Delta x)^2, (k\Delta x)^4)$, afectando essencialmente os grandes números de onda, devido a estarem associados a derivadas do quinto grau. Todos os restantes esquemas são de ordem $\mathcal{O}((k\Delta x)^2)$, com termos dispersivos numéricos semelhantes ao analítico, visto estarem associados a derivadas do terceiro grau. Neste último caso, e em águas muito pouco profundas, quando $\Delta x \approx h$, os termos dispersivos analítico e numérico poderão ter ordens de grandeza muito semelhantes, de onde resultam esquemas de fraca precisão.

³A equação discreta da continuidade foi obtida por soma das equações para os nós $j-1$ e $j+1$.

Apresentam-se de seguida as equações diferenciais equivalentes para os diferentes tipos de discretização:

(a) interpolação linear: $\alpha = 1, \beta = 1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} &= \frac{(k\Delta x)^4}{180} \left[\left(h + \epsilon \hat{\zeta} \right) \frac{\partial^5 \hat{u}}{\partial x^5} + \epsilon \hat{u} \frac{\partial^5 \hat{\zeta}}{\partial x^5} + 5\epsilon \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial x} \frac{\partial^4 \hat{u}}{\partial x^4} \right. \\ &\quad \left. + 5\epsilon \frac{\partial^4 \hat{\zeta}}{\partial x^4} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + 10\epsilon \frac{\partial^2 \hat{\zeta}}{\partial x^2} \frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial x^3} + 10\epsilon \frac{\partial^3 \hat{\zeta}}{\partial x^3} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} \right] \\ &\quad + \mathcal{O}((k\Delta x)^6), \end{aligned} \quad (4.13a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} - \sigma^2 \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial x^2 \partial t} &= \sigma^2 \frac{(k\Delta x)^2}{36} h^2 \frac{\partial^5 \hat{\zeta}}{\partial x^5} - \sigma^4 h^4 \frac{(k\Delta x)^2}{108} \frac{\partial^7 \hat{u}}{\partial x^6 \partial t} \\ &\quad + \epsilon \sigma^2 h^2 \frac{(k\Delta x)^2}{36} \left[\hat{u} \frac{\partial^5 \hat{u}}{\partial x^5} + 5 \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \frac{\partial^4 \hat{u}}{\partial x^4} + 10 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} \frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial x^3} \right] \\ &\quad + \mathcal{O}((k\Delta x)^4); \end{aligned} \quad (4.13b)$$

(b) interpolação quadrática: $\alpha = 2, \beta = 2$

i. nó extremo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} &= \frac{(k\Delta x)^2}{30} \left(h + \epsilon \hat{\zeta} \right) \frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial x^3} \\ &\quad + \epsilon \frac{(k\Delta x)^2}{30} \left[\hat{u} \frac{\partial^3 \hat{\zeta}}{\partial x^3} + 3 \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial x} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 \hat{\zeta}}{\partial x^2} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right] \\ &\quad + \mathcal{O}((k\Delta x)^6), \end{aligned} \quad (4.14a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} - \sigma^2 \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial x^2 \partial t} &= \frac{(k\Delta x)^2}{30} \frac{\partial^3 \hat{\zeta}}{\partial x^3} + \sigma^2 h^2 \frac{(k\Delta x)^2}{360} \frac{\partial^5 \hat{u}}{\partial x^4 \partial t} \\ &\quad + \epsilon \frac{(k\Delta x)^2}{30} \left[\hat{u} \frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial x^3} + 3 \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} \right] \\ &\quad + \mathcal{O}(\sigma^2 (k\Delta x)^4, (k\Delta x)^6); \end{aligned} \quad (4.14b)$$

ii. nó interno

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} = & -\frac{(k\Delta x)^2}{60} \left(h + \epsilon \hat{\zeta} \right) \frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial x^3} + \\ & -\epsilon \frac{(k\Delta x)^2}{60} \left[\hat{u} \frac{\partial^3 \hat{\zeta}}{\partial x^3} + 3 \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial x} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 \hat{\zeta}}{\partial x^2} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right] \\ & + \mathcal{O}((k\Delta x)^6), \end{aligned} \quad (4.15a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} - \sigma^2 \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial x^2 \partial t} = & -\frac{(k\Delta x)^2}{60} \frac{\partial^3 \hat{\zeta}}{\partial x^3} - \sigma^2 h^2 \frac{(k\Delta x)^2}{720} \frac{\partial^5 \hat{u}}{\partial x^4 \partial t} \\ & -\epsilon \frac{(k\Delta x)^2}{60} \left[\hat{u} \frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial x^3} + 3 \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} \right] \\ & + \mathcal{O}(\sigma^2 (k\Delta x)^4, (k\Delta x)^6); \end{aligned} \quad (4.15b)$$

(c) interpolação mista: $\alpha = 0, \beta = 1$

$$\frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} = -\frac{(k\Delta x)^2}{24} \frac{\partial^3 \hat{p}}{\partial x^3} + \mathcal{O}((k\Delta x)^4), \quad (4.16a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} - \sigma^2 \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial x^2 \partial t} = & \frac{(k\Delta x)^2}{8} h \frac{\partial^3 \hat{\zeta}}{\partial x^3} + \sigma^2 \frac{(k\Delta x)^2}{12} h^2 \frac{\partial^5 \hat{p}}{\partial x^4 \partial t} \\ & + \mathcal{O}(\epsilon (k\Delta x)^2, (k\Delta x)^4); \end{aligned} \quad (4.16b)$$

(d) interpolação mista: $\alpha = 1, \beta = 2$

i. nó extremo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} = & \frac{(k\Delta x)^2}{12} \left(h + \epsilon \hat{\zeta} \right) \frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial x^3} \\ & + \epsilon \frac{(k\Delta x)^2}{12} \left[3 \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial x} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \hat{\zeta}}{\partial x^2} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right] \\ & + \mathcal{O}((k\Delta x)^4), \end{aligned} \quad (4.17a)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} - \sigma^2 \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial x^2 \partial t} = & -\frac{13}{60} (k\Delta x)^2 \frac{\partial^3 \hat{\zeta}}{\partial x^3} \\
& - \epsilon \frac{13}{60} (k\Delta x)^2 \left[\hat{u} \frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial x^3} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} \right] \\
& - \sigma^2 \frac{(k\Delta x)^2}{360} h^2 \frac{\partial^5 \hat{\zeta}}{\partial x^4 \partial t} + \mathcal{O}((k\Delta x)^4);
\end{aligned} \tag{4.17b}$$

ii. nó interno

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} = & \frac{(k\Delta x)^2}{12} \left(h + \epsilon \hat{\zeta} \right) \frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial x^3} \\
& + \epsilon \frac{(k\Delta x)^2}{12} \left[3 \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial x} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \hat{\zeta}}{\partial x^2} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right] \\
& + \mathcal{O}((k\Delta x)^4),
\end{aligned} \tag{4.18a}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} - \sigma^2 \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial x^2 \partial t} = & -\frac{(k\Delta x)^2}{60} \frac{\partial^3 \hat{\zeta}}{\partial x^3} \\
& - \epsilon \frac{(k\Delta x)^2}{60} \left[\hat{u} \frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial x^3} + 3 \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} \right] \\
& - \sigma^2 \frac{(k\Delta x)^2}{720} h^2 \frac{\partial^5 \hat{\zeta}}{\partial x^4 \partial t} + \mathcal{O}((k\Delta x)^4).
\end{aligned} \tag{4.18b}$$

Relações de dispersão discretas

A análise do erro local da própria solução é feita recorrendo às relações de dispersão linear dos problemas discretos (4.1) e (4.3).

Admitindo a linearidade das equações de Boussinesq, i.e. com $\epsilon = 0$, e supondo que ζ e $\bar{u}$ são funções que admitem desenvolvimentos em série de Fourier, tem-se como soluções gerais as funções:

$$\zeta(x, t) = \Re \left(\int_{-\infty}^{+\infty} A_{\zeta}(k) e^{i[kx - \omega(k)t]} e^{-s(k)t} dk \right), \tag{4.19a}$$

$$\bar{u}(x, t) = \Re \left(\int_{-\infty}^{+\infty} A_u(k) e^{i[kx - \omega(k)t]} e^{-s(k)t} dk \right), \tag{4.19b}$$

onde i é a unidade imaginária, k é o número de onda, $A_{\zeta}(k)$ e $A_u(k)$ são as funções densidade espectral, ω é a frequência angular da onda e s é o coeficiente de amortecimento. Note-se que no caso da solução analítica tem-se $s = 0$. Em virtude

das propriedades das séries de Fourier, cada termo dessa série é também solução do problema linear. Por conveniência de escrita, o símbolo $\Re$, que designa a parte real, será doravante suprimido.

As relações de dispersão dos problemas discretos:

$$\omega = \omega(kh, k\Delta x), \quad (4.20a)$$

$$C = C(kh, k\Delta x), \quad (4.20b)$$

$$C_g = C_g(kh, k\Delta x), \quad (4.20c)$$

são obtidas por substituição das soluções particulares:

$$\left(\hat{\zeta}_{j\pm n}\right)_t = -i(\omega - is)\hat{\zeta}_j e^{\pm in k\Delta x}, \quad (4.21a)$$

$$\left(\hat{u}_{j\pm n}\right)_t = -i(\omega - is)\hat{u}_j e^{\pm in k\Delta x}, \quad (4.21b)$$

$$\hat{\zeta}_{j\pm n} = \hat{\zeta}_j e^{\pm in k\Delta x}, \quad (4.21c)$$

$$u_{j\pm n} = \hat{u}_j e^{\pm in k\Delta x}, \quad (4.21d)$$

nas formas linearizadas, i.e. tomando $\epsilon = 0$, das equações discretas (4.7) a (4.12) e posterior resolução destas em ordem a $\omega - is$, para uma solução não trivial. Deste procedimento, verifica-se que: $s = 0$ para estes esquemas numéricos, que portanto são não dissipativos; os quadrados das celeridades de fase têm expressões do seguinte tipo:

$$\frac{C^2}{gh} = \frac{A}{B(D(kh)^2 + E(k\Delta x)^2)}, \quad (4.22)$$

onde os coeficientes A , B , D e E dependem do tipo de esquema utilizado.

(a) Interpolação linear: $\alpha = 1$, $\beta = 1$

$$A = 9 \sin^2 k\Delta x,$$

$$B = 2 + \cos k\Delta x,$$

$$D = 2 - 2 \cos k\Delta x,$$

$$E = 2 + \cos k\Delta x.$$

(b) Interpolação quadrática: $\alpha = 2$, $\beta = 2$

i. nó extremo

$$A = 75 \left[\sin k\Delta x - 4 \sin \left(\frac{1}{2} k\Delta x \right) \right]^2,$$

$$B = 4 - \cos k\Delta x + 2 \cos \left(\frac{1}{2} k\Delta x \right),$$

$$D = 70 + 10 \cos k\Delta x - 80 \cos \left(\frac{1}{2} k\Delta x \right),$$

$$E = 12 - 3 \cos k\Delta x + 6 \cos \left(\frac{1}{2} k\Delta x \right);$$

ii. nó interno

$$A = 300 \sin^2 \left(\frac{1}{2} k\Delta x \right),$$

$$B = 4 + \cos \left(\frac{1}{2} k\Delta x \right),$$

$$D = 40 - 40 \cos \left(\frac{1}{2} k\Delta x \right),$$

$$E = 12 + 3 \cos \left(\frac{1}{2} k\Delta x \right).$$

(c) Interpolação mista: $\alpha = 0, \beta = 1$

$$A = 6 \sin k\Delta x \sin \left(\frac{1}{2} k\Delta x \right),$$

$$B = \cos \left(\frac{1}{2} k\Delta x \right),$$

$$D = 2 - 2 \cos k\Delta x,$$

$$E = 2 + 2 \cos k\Delta x.$$

(d) Interpolação mista: $\alpha = 1, \beta = 2$

i. nó extremo

$$A = 15 \sin k\Delta x \left[\sin k\Delta x + 4 \sin \left(\frac{1}{2} k\Delta x \right) \right],$$

$$B = 2 + \cos k\Delta x,$$

$$D = 70 + 10 \cos k\Delta x - 80 \cos \left(\frac{1}{2} k\Delta x \right),$$

$$E = 12 - 3 \cos k\Delta x + 6 \cos \left(\frac{1}{2} k\Delta x \right);$$

ii. nó interno

$$A = 30 \sin k\Delta x \left[\sin \left(\frac{3}{2} k\Delta x \right) + 4 \sin k\Delta x + \sin \left(\frac{1}{2} k\Delta x \right) \right],$$

$$B = \cos \left(\frac{3}{2} k\Delta x \right) + 5 \cos \left(\frac{1}{2} k\Delta x \right),$$

$$D = 40 - 40 \cos \left(\frac{1}{2} k\Delta x \right),$$

$$E = 12 + 3 \cos \left(\frac{1}{2} k\Delta x \right).$$

A relação de dispersão (4.20a) e a celeridade de grupo (4.20c) para os diferentes esquemas de elementos finitos podem facilmente ser obtidas a partir das expressões para a celeridade de fase:

$$\frac{\omega}{\sqrt{g/h}} = kh \frac{C}{\sqrt{gh}}, \quad (4.23a)$$

$$C_g = C \left(1 + \frac{kh}{2C^2} \frac{\partial C^2}{\partial (kh)} + \frac{k\Delta x}{2C^2} \frac{\partial C^2}{\partial (k\Delta x)} \right). \quad (4.23b)$$

Desenvolvendo o quadrado da celeridade de fase e a celeridade de grupo do modelo de Boussinesq, em série de Taylor em torno de $kh = 0$, obtém-se:

$$\frac{C_{\text{Bouss}}^2}{gh} = 1 - \frac{1}{3} (kh)^2 + \frac{1}{9} (kh)^4 + \mathcal{O}((kh)^6), \quad (4.24a)$$

$$\frac{(C_g)_{\text{Bouss}}}{\sqrt{gh}} = 1 - \frac{1}{2} (kh)^2 + \frac{5}{24} (kh)^4 + \mathcal{O}((kh)^6). \quad (4.24b)$$

Estes resultados podem ser comparados com os obtidos usando as expansões das celeridades dos esquemas discretos em série de Taylor em torno de $kh = 0$ e $k\Delta x = 0$, os quais são do tipo:

$$\frac{C^2}{gh} = 1 - \frac{1}{3} (kh)^2 + \frac{1}{9} (kh)^4 + \text{Erro}_1 \quad (4.25a)$$

$$+ \mathcal{O}((kh)^6, (k\Delta x)^2 (kh)^4, (k\Delta x)^4 (kh)^2, (k\Delta x)^6),$$

$$\frac{C_g}{\sqrt{gh}} = 1 - \frac{1}{2}(kh)^2 + \frac{5}{24}(kh)^4 + \text{Erro}_2 \quad (4.25b)$$

$$+ \mathcal{O}((kh)^6, (k\Delta x)^2(kh)^4, (k\Delta x)^4(kh)^2, (k\Delta x)^6).$$

Os termos de erro numérico de ordem mais baixa, Erro_1 e Erro_2 , são apresentados na Tabela 4.1 para os vários esquemas de discretização espacial.

É evidente da inspecção da Tabela 4.1 que os erros numéricos dominantes são de ordem $\mathcal{O}((k\Delta x)^2)$ — ordem presente em todos os casos excepto na discretização linear de igual ordem ($\alpha = 1$ e $\beta = 1$) — e de ordem $\mathcal{O}((k\Delta x)^2(kh)^2)$ — ordem presente em todos os caso sem excepção.

Para pequenas profundidades relativas (e a expansão em série de Taylor assume essa hipótese) verifica-se em geral que $h \sim \Delta x$, nomeadamente por constrangimentos

Tabela 4.1: Erros de aproximação das celeridades de fase discretas ($e \equiv$ nó extremo, $i \equiv$ nó interno).

$\alpha = 1$		$\text{Erro}_1 = -\frac{1}{36}(k\Delta x)^2(kh)^2 - \frac{1}{90}(k\Delta x)^4$
$\beta = 1$		$\text{Erro}_2 = -\frac{5}{72}(k\Delta x)^2(kh)^2 - \frac{1}{36}(k\Delta x)^4$
$\alpha = 2$	e	$\text{Erro}_1 = +\frac{1}{15}(k\Delta x)^2 - \frac{7}{360}(k\Delta x)^2(kh)^2 - \frac{1}{450}(k\Delta x)^4$
$\beta = 2$	e	$\text{Erro}_2 = -\frac{1}{10}(k\Delta x)^2 - \frac{1}{48}(k\Delta x)^2(kh)^2 - \frac{1}{120}(k\Delta x)^4$
$\alpha = 2$	i	$\text{Erro}_1 = -\frac{1}{30}(k\Delta x)^2 + \frac{7}{720}(k\Delta x)^2(kh)^2 - \frac{1}{1800}(k\Delta x)^4$
$\beta = 2$	i	$\text{Erro}_2 = -\frac{1}{20}(k\Delta x)^2 + \frac{1}{96}(k\Delta x)^2(kh)^2 - \frac{1}{480}(k\Delta x)^4$
$\alpha = 0$		$\text{Erro}_1 = +\frac{1}{12}(k\Delta x)^2 - \frac{1}{18}(k\Delta x)^2(kh)^2 + \frac{1}{360}(k\Delta x)^4$
$\beta = 1$		$\text{Erro}_2 = +\frac{1}{8}(k\Delta x)^2 - \frac{5}{48}(k\Delta x)^2(kh)^2 + \frac{1}{384}(k\Delta x)^4$
$\alpha = 1$	e	$\text{Erro}_1 = -\frac{2}{15}(k\Delta x)^2 - \frac{17}{360}(k\Delta x)^2(kh)^2 + \frac{83}{7200}(k\Delta x)^4$
$\beta = 2$	e	$\text{Erro}_2 = -\frac{1}{5}(k\Delta x)^2 + \frac{1}{16}(k\Delta x)^2(kh)^2 + \frac{17}{960}(k\Delta x)^4$
$\alpha = 1$	i	$\text{Erro}_1 = +\frac{1}{15}(k\Delta x)^2 - \frac{17}{720}(k\Delta x)^2(kh)^2 + \frac{19}{14400}(k\Delta x)^4$
$\beta = 2$	i	$\text{Erro}_2 = +\frac{1}{10}(k\Delta x)^2 - \frac{1}{32}(k\Delta x)^2(kh)^2 + \frac{1}{1920}(k\Delta x)^4$

de memória e velocidade de cálculo. Nestas condições, é legítimo afirmar que o esquema de interpolação linear de igual grau é de quarta ordem, enquanto que os restantes são de segunda ordem. Por outro lado, o cálculo do aproximante de Padé multivariado (em kh e $k\Delta x$) de ordem $[0/2]$ dos quadrados das celeridades de fase e de grupo numéricas (cf. Tabela 4.2), confirma que, de facto, só a interpolação linear conduz a resultados iguais aos da celeridade de fase e da celeridade de grupo do modelo de Boussinesq.

As curvas de dispersão, para discretizações tais que $\Delta x = h/2$, são reproduzidas nas Figuras 4.4 a 4.7, na sua forma adimensional: $\omega/\sqrt{g/h}$, $C/\sqrt{gh}$ e $C_g/\sqrt{gh}$. Nestas figuras, a linha tracejada corresponde ao modo de propagação analítico, a linha contínua ao modo numérico associado aos nós extremos dos elementos e a

Tabela 4.2: Aproximantes de Padé multivariados $[0/2]$ para as celeridades discretas do modelo de Boussinesq (e $\equiv$ nó extremo, i $\equiv$ nó interno).

Esquema		$\frac{1}{gh} [0/2] C^2$	$\frac{1}{gh} [0/2] (C_g)^2$
Airy		$\frac{1}{1 + \frac{1}{3} (kh)^2}$	$\frac{1}{1 + (kh)^2}$
Boussinesq		$\frac{1}{1 + \frac{1}{3} (kh)^2}$ (exacto)	$\frac{1}{1 + (kh)^2}$
$\alpha = 1, \beta = 1$		$\frac{1}{1 + \frac{1}{3} (kh)^2}$	$\frac{1}{1 + (kh)^2}$
$\alpha = 2, \beta = 2$	e	$\frac{1}{1 + \frac{1}{3} (kh)^2 - \frac{1}{15} (k\Delta x)^2}$	$\frac{1}{1 + (kh)^2 - \frac{1}{5} (k\Delta x)^2}$
$\alpha = 2, \beta = 2$	i	$\frac{1}{1 + \frac{1}{3} (kh)^2 + \frac{1}{30} (k\Delta x)^2}$	$\frac{1}{1 + (kh)^2 + \frac{1}{10} (k\Delta x)^2}$
$\alpha = 0, \beta = 1$		$\frac{1}{1 + \frac{1}{3} (kh)^2 - \frac{1}{12} (k\Delta x)^2}$	$\frac{1}{1 + (kh)^2 - \frac{1}{4} (k\Delta x)^2}$
$\alpha = 1, \beta = 2$	e	$\frac{1}{1 + \frac{1}{3} (kh)^2 + \frac{2}{15} (k\Delta x)^2}$	$\frac{1}{1 + (kh)^2 + \frac{2}{5} (k\Delta x)^2}$
$\alpha = 1, \beta = 2$	i	$\frac{1}{1 + \frac{1}{3} (kh)^2 - \frac{1}{15} (k\Delta x)^2}$	$\frac{1}{1 + (kh)^2 - \frac{1}{5} (k\Delta x)^2}$

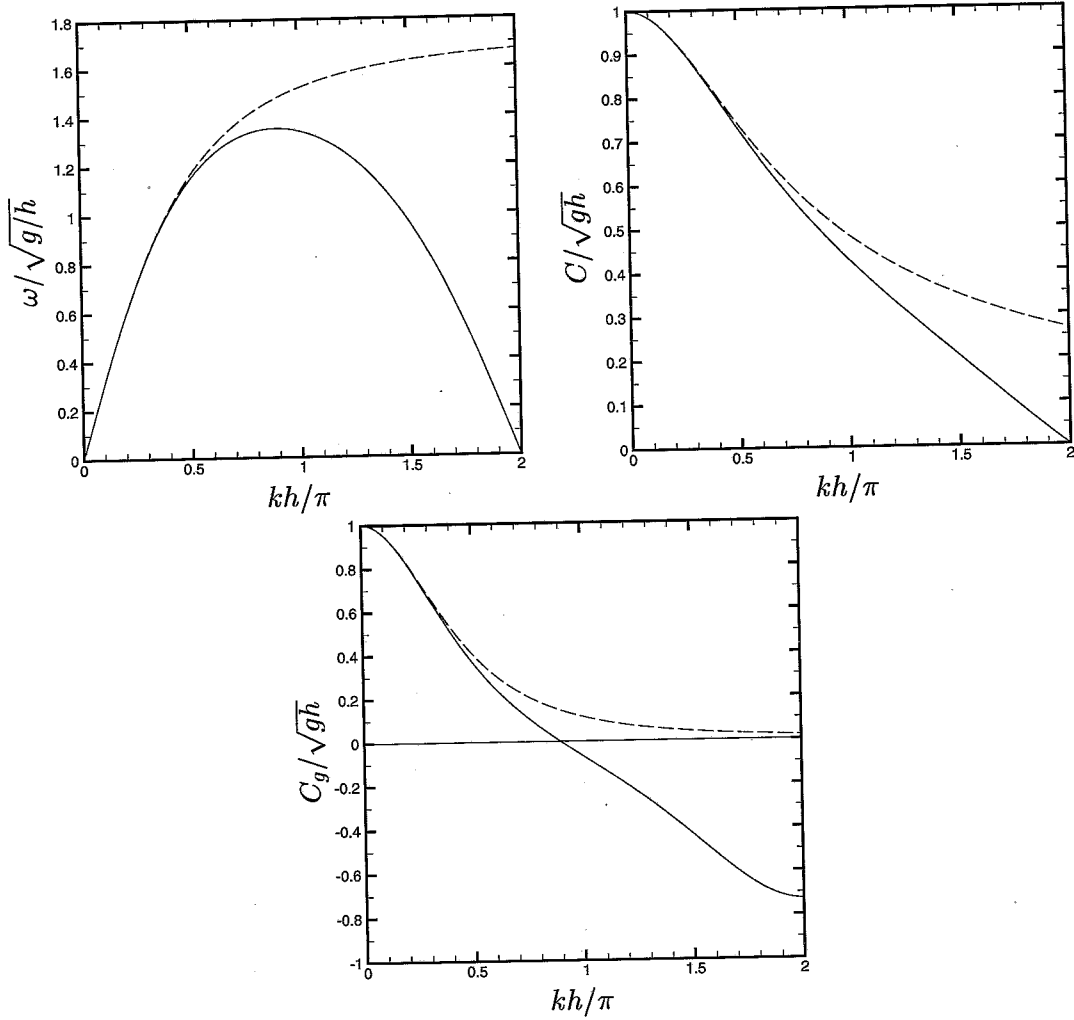


Figura 4.4: Relações de dispersão com elementos lineares de dois nós. Solução analítica (---) e solução numérica (—).

marcação traço-ponto ao modo de propagação numérico associado ao ponto interno do elemento, quando este existe ($\alpha = 2$ ou $\beta = 2$).

Da inspecção das curvas de dispersão, pode-se concluir que a utilização das formulações com interpolação de igual ordem implica a não propagação das ondas com comprimento $\lambda = 2 \Delta x$ ($\lambda = \Delta x$ no caso de elementos de três nós), ao qual corresponde $kh = n\pi$ ($kh = 2n\pi$ no caso dos elementos de três nós) com $n = h/\Delta x$. Ondas com este comprimento estarão sempre presentes em problemas não lineares, geradas pela cascata energética devida ao termo $\bar{u} \partial \bar{u} / \partial x$. Além disso, a existência de dois comprimentos de onda possíveis para cada frequência excitadora, faz com que, mesmo em problemas lineares, a existência de singularidades no domínio — variações bruscas da profundidade ou elementos finitos vizinhos de dimensões muito diferentes — provoque o aparecimento de ondas de comprimento muito pequeno. Por outro

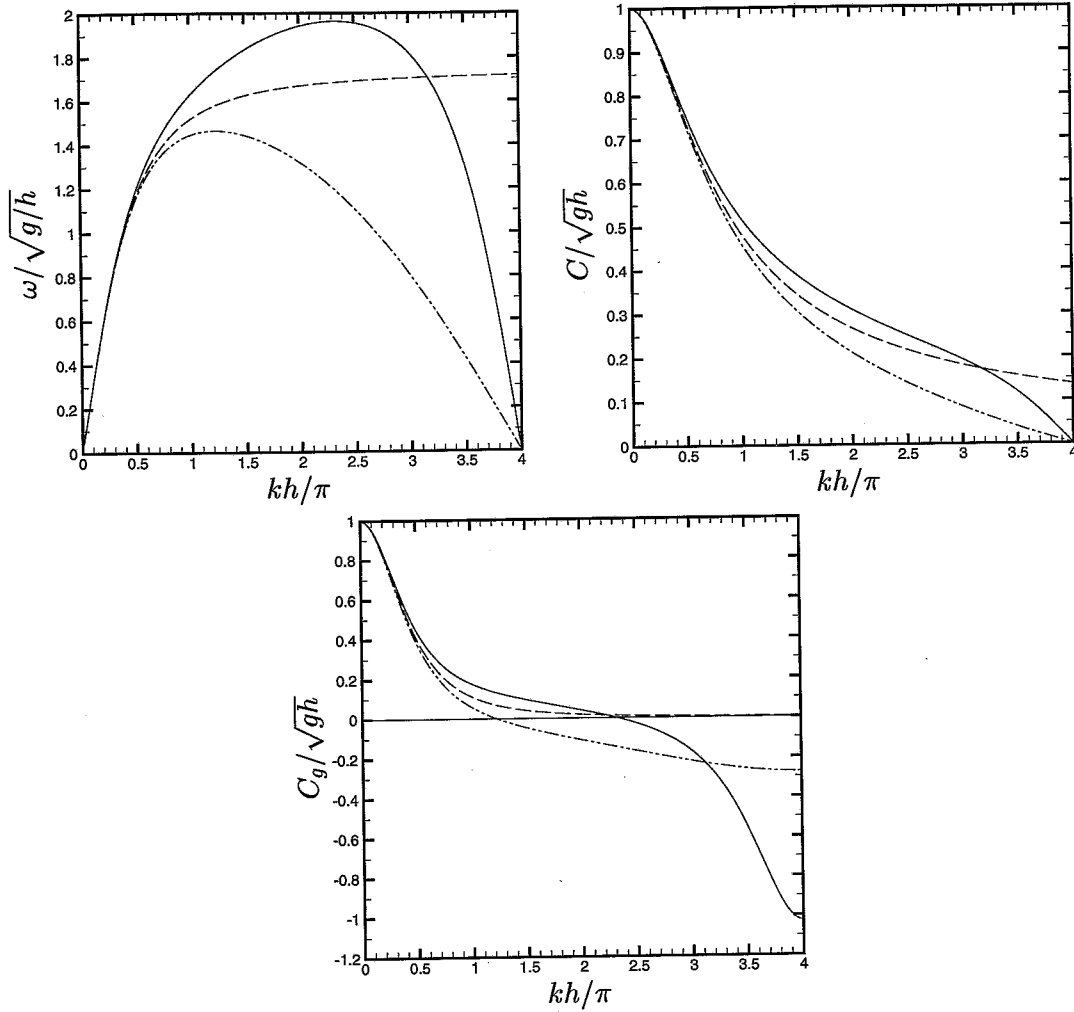


Figura 4.5: Relações de dispersão com elementos quadráticos de três nós. Solução analítica (---) e soluções numéricas: nó extremo (—), nó interno (— · —).

lado, a celeridade de grupo para os mais pequenos comprimentos de onda possíveis é de sentido contrário ao da celeridade de fase e de maior valor absoluto. Sendo que as perturbações, de origem numérica ou física, tendem a agrupar-se e a propagar-se com a celeridade de grupo, nos casos em que esta celeridade é muito elevada (interpolação mista, linear em ζ e quadrática em $\bar{u}$), poderão rapidamente alcançar as fronteiras do domínio, antes mesmo de, por interacção não linear, toda a energia ser transferida para o número de onda não propagante. Será pois conveniente que todas as fronteiras, incluindo as fisicamente reflectoras (e.g. quebra-mares), sejam transparentes para os comprimentos de onda mais curtos.

As duas interpolações mistas são bastante diferentes entre si. O caso mais simples, $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ (cf. Figura 4.6), elimina o problema dos modos não propagantes para ondas que se deslocam segundo os eixos coordenados. No entanto, estes modos

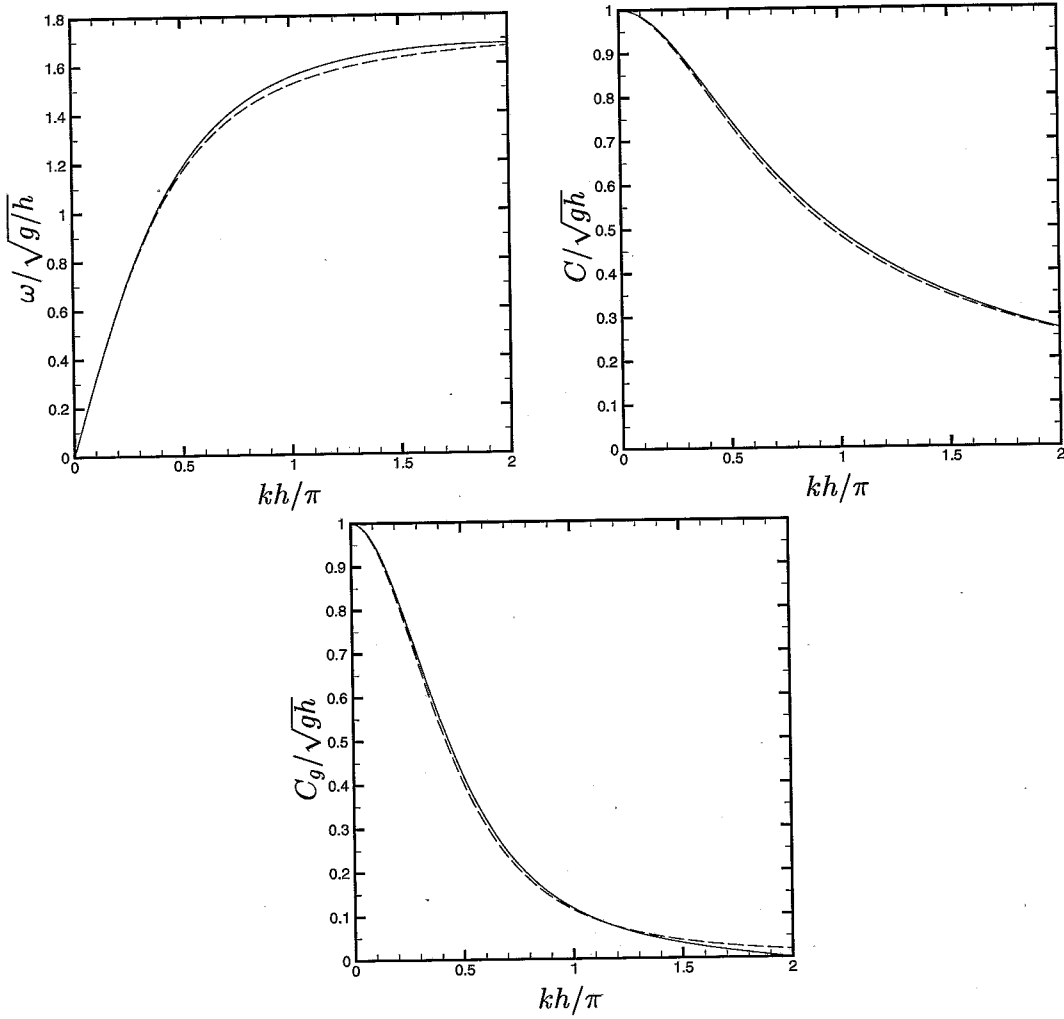


Figura 4.6: Relações de dispersão com interpolação mista — constante em ζ e linear em $\bar{u}$. Solução analítica (---) e solução numérica (—).

voltam a aparecer em domínios bidimensionais para ondas que se propagam fazendo um ângulo de 45° com os lados da malha (caso estudado mas não apresentado de malhas regulares de quadrados). O caso $\alpha = 1$, $\beta = 2$ (cf. Figura 4.7) é bastante interessante. Existem dois modos de propagação distintos sendo que, no modo associado ao nós inter-elementos, se repetem os problemas já referidos para os elementos lineares e quadráticos, enquanto que o modo associado ao nó interno de cada elemento apresenta celeridade não nula para qualquer comprimento de onda⁴. No

⁴Num trabalho anterior (Avilez-Valente e Seabra-Santos, 1997), os resultados relativos a este modo eram diferentes. Nesse trabalho, a equação da continuidade discreta era obtida considerando um elemento finito isolado. A equação da continuidade a que se recorre nesta dissertação, pelo contrário, é obtida somando as equações discretas da continuidade para os dois nós extremos do elemento. Este procedimento justifica-se por ser análogo às combinações lineares utilizadas na resolução de sistemas de equações algébricas.

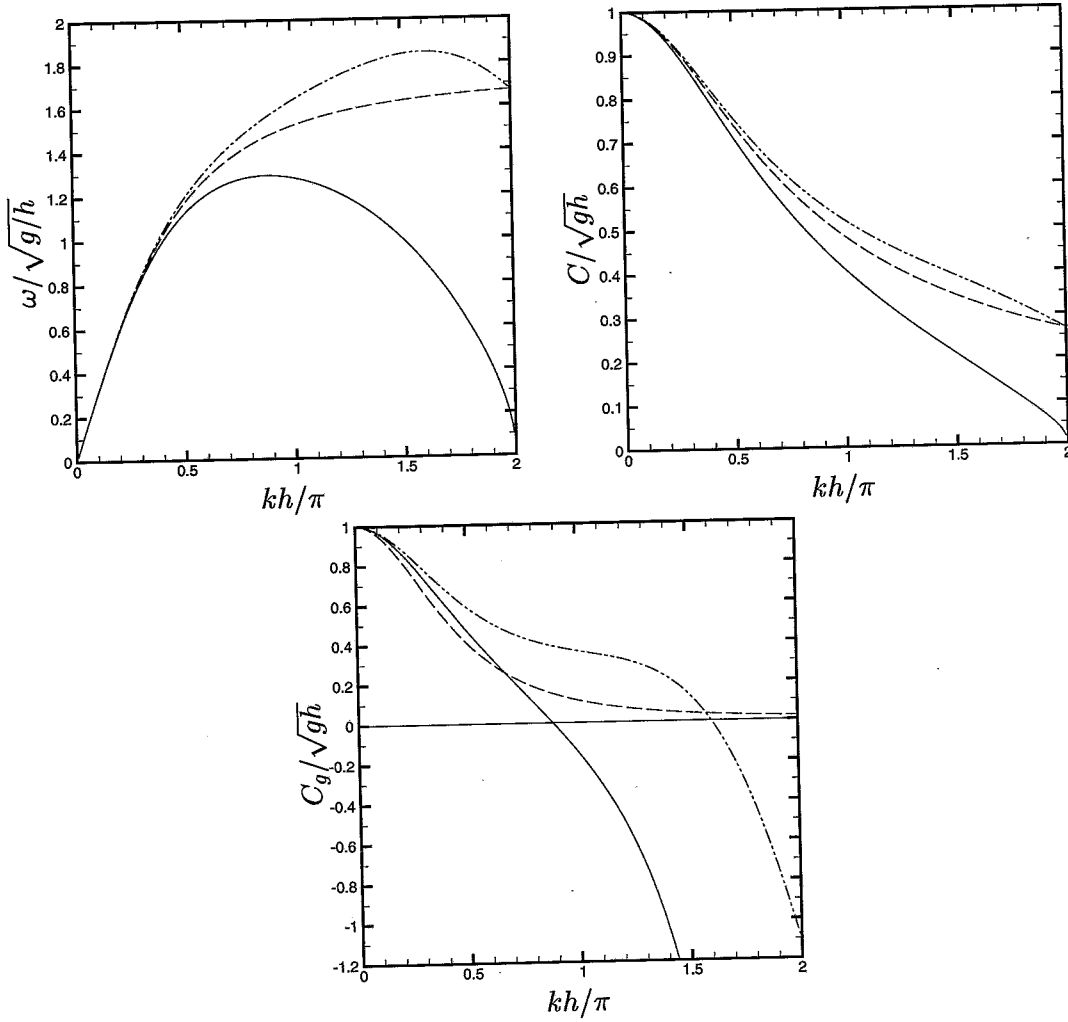


Figura 4.7: Relações de dispersão com interpolação mista — linear em ζ e quadrática em u . Solução analítica (---) e soluções numéricas: nó extremo (—), nó interno (— · —).

entanto, em ambos os modos, a celeridade de grupo associada aos mais pequenos comprimentos de onda, $\lambda = 2 \Delta x$, tende para infinito. No caso de condições de fronteira transparentes há portanto a possibilidade de, rapidamente, extrair qualquer perturbação do domínio.

4.2.3 Discretização total

A análise da discretização total, no espaço e no tempo, será efectuada apenas para a interpolação espacial baseada em elementos lineares de dois nós. A discretização temporal será baseada em esquemas de diferenças finitas a um passo, envolvendo dois instantes no tempo (para outros esquemas, ver Coimbra, 1992, Dahlquist e Björck, 1974).

Dada uma função $f(t)$, expandindo-a em série de Taylor em torno de $t = t_n + \theta \Delta t$, com $\theta \in [0, 1]$ e sendo $t_{n+1} = t_n + \Delta t$, resulta

$$f(t_n) = f(t_n + \theta \Delta t) - \theta \Delta t \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{t=t_n+\theta \Delta t} + \mathcal{O}((\Delta t)^2), \quad (4.26a)$$

$$f(t_{n+1}) = f(t_n + \theta \Delta t) + (1 - \theta) \Delta t \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{t=t_n+\theta \Delta t} + \mathcal{O}((\Delta t)^2). \quad (4.26b)$$

Combinando estas duas expansões, obtém-se o esquema pretendido:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{t=t_n+\theta \Delta t} = \frac{f(t_{n+1}) - f(t_n)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t), \quad (4.27a)$$

$$f(t_n + \theta \Delta t) = \theta f(t_{n+1}) + (1 - \theta) f(t_n) + \mathcal{O}((\Delta t)^2). \quad (4.27b)$$

Equações discretas

As equações discretas do esquema com discretização total são então:

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta x}{6 \Delta t} \left[\left(\hat{\zeta}_{j+1}^{n+1} + 4 \hat{\zeta}_j^{n+1} + \hat{\zeta}_{j-1}^{n+1} \right) - \left(\hat{\zeta}_{j+1}^n + 4 \hat{\zeta}_j^n + \hat{\zeta}_{j-1}^n \right) \right] \\ & + \frac{h}{2} \left[\theta \left(\hat{u}_{j+1}^{n+1} - \hat{u}_{j-1}^{n+1} \right) + (1 - \theta) \left(\hat{u}_{j+1}^n - \hat{u}_{j-1}^n \right) \right] \\ & + \frac{\epsilon}{2} \left[\hat{\zeta}_{j+1} \hat{u}_{j+1} - \hat{\zeta}_{j-1} \hat{u}_{j-1} \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.28a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta x}{6 \Delta t} \left[\left(\hat{u}_{j+1}^{n+1} + 4 \hat{u}_j^{n+1} + \hat{u}_{j-1}^{n+1} \right) - \left(\hat{u}_{j+1}^n + 4 \hat{u}_j^n + \hat{u}_{j-1}^n \right) \right] \\ & + \frac{\epsilon}{4} \left\{ \theta \left[\left(\hat{u}_{j+1}^{n+1} \right)^2 - \left(\hat{u}_{j-1}^{n+1} \right)^2 \right] + (1 - \theta) \left[\left(\hat{u}_{j+1}^n \right)^2 - \left(\hat{u}_{j-1}^n \right)^2 \right] \right\} \\ & + \frac{1}{2} \left[\theta \left(\hat{\zeta}_{j+1}^{n+1} - \hat{\zeta}_{j-1}^{n+1} \right) + (1 - \theta) \left(\hat{\zeta}_{j+1}^n - \hat{\zeta}_{j-1}^n \right) \right] \\ & - \sigma^2 \frac{h^2}{3 \Delta x \Delta t} \left[\left(\hat{u}_{j+1}^{n+1} - 2 \hat{u}_j^{n+1} + \hat{u}_{j-1}^{n+1} \right) - \left(\hat{u}_{j+1}^n - 2 \hat{u}_j^n + \hat{u}_{j-1}^n \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.28b)$$

onde, como é habitual, o índice n identifica as variáveis calculadas para o instante t_n e o índice $n + 1$ identifica as variáveis calculadas para o instante $t_{n+1} = t_n + \Delta t$.

Equações diferenciais equivalentes

Substituindo nas equações discretas (4.28) $\hat{\zeta}_{j\pm 1}^n$ e $\hat{u}_{j\pm 1}^n$ pelas respectivas expansões de Taylor em torno de $x = x_j$ e $t = t_{n+1}$ e aplicando recursivamente a equação dife-

rencial (4.1) para simplificar as derivadas de ordem superior, obtêm-se as equações diferenciais equivalentes do esquema numérico. Resulta assim:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} = & \Delta t \left(\theta - \frac{1}{2} \right) h \frac{\partial^2 \hat{\zeta}}{\partial x^2} - \frac{\Delta t}{3} \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \sigma^2 h^3 \frac{\partial^4 \hat{\zeta}}{\partial x^4} \\
 & + (\Delta t)^2 \left(\frac{1}{6} + \theta^2 - \theta \right) h \frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial x^3} \\
 & - (\Delta t)^3 \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{3} \theta + \frac{3}{4} \theta^2 - \frac{1}{2} \theta^3 \right) h^2 \frac{\partial^4 \hat{\zeta}}{\partial x^4} \\
 & - \frac{1}{6} (\Delta t) (\Delta x)^2 \left(\frac{1}{2} - \theta \right) h \frac{\partial^4 \hat{\zeta}}{\partial x^4} \\
 & + \mathcal{O} \left((\Delta t)^2 \sigma^2, (\Delta t)^2 (\Delta x)^2, (\Delta t)^4, (\Delta x)^4, \right. \\
 & \left. (\Delta t)^3 \epsilon^2, (\Delta x) (\Delta t)^2 \epsilon^2 \right),
 \end{aligned} \tag{4.29a}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} - \sigma^2 \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial x^2 \partial t} = & \Delta t \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + (\Delta t)^2 \left(\frac{1}{6} + \theta^2 - \theta \right) \frac{\partial^3 \hat{\zeta}}{\partial x^3} \\
 & - (\Delta t)^3 \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{3} \theta + \frac{3}{4} \theta^2 - \frac{1}{2} \theta^3 \right) \frac{\partial^4 \hat{u}}{\partial x^4} \\
 & - \frac{1}{6} (\Delta t) (\Delta x)^2 \left(\frac{1}{2} - \theta \right) h \frac{\partial^4 \hat{u}}{\partial x^4} \\
 & + \mathcal{O} \left((\Delta t)^2 \sigma^2, (\Delta t)^2 (\Delta x)^2, (\Delta t)^4, (\Delta x)^4, (\Delta x)^2 \sigma^2, \right. \\
 & \left. (\Delta t)^3 \epsilon^2, (\Delta x) (\Delta t)^2 \epsilon^2 \right).
 \end{aligned} \tag{4.29b}$$

Da inspecção das equações (4.29) e admitindo que $\Delta t \sim \Delta x \sim \sigma \sim \epsilon$, pode-se concluir que três casos são possíveis:

- $\theta = \frac{1}{2}$: obtém-se o esquema de Crank-Nicholson. Esquema não dissipativo e com erro de dispersão de segunda ordem;
- $\theta > \frac{1}{2}$: obtém-se um esquema estável com dissipação de primeira ordem;
- $\theta < \frac{1}{2}$: obtém-se um esquema instável com erro de primeira ordem.

A análise das relações de dispersão discretas permitirá confirmar estes resultados, como se verá de seguida.

Relações de dispersão discretas

A análise do erro local da solução é feita recorrendo às relações de dispersão linear dos problemas (4.1) e (4.3), após discretização no espaço e no tempo.

Tal como para a análise da discretização espacial, supõe-se que as funções ζ e $\bar{u}$, soluções da forma linearizada das equações de Boussinesq, admitem desenvolvimentos em série de Fourier, dados pelas expressões (4.19). As soluções particulares, para um número de onda genérico, k , são então:

$$\hat{\zeta}_{j\pm 1}^n = \hat{\zeta}_j^n e^{\pm i k \Delta x}, \quad (4.30a)$$

$$\hat{u}_{j\pm 1}^n = \hat{u}_j^n e^{\pm i k \Delta x}, \quad (4.30b)$$

$$\hat{\zeta}_{j\pm 1}^{n+1} = G \hat{\zeta}_j^n e^{\pm i k \Delta x}, \quad (4.30c)$$

$$u_{j\pm 1}^{n+1} = G \hat{u}_j^n e^{\pm i k \Delta x}. \quad (4.30d)$$

onde G é o coeficiente de propagação, dado por

$$G = e^{-i(\omega - i s)\Delta t}. \quad (4.31)$$

Substituindo as expressões (4.30) nas formas linearizadas, i.e. tomando $\epsilon = 0$, das equações discretas (4.28), obtém-se uma expressão para G , o qual é raiz do polinómio característico da matriz do sistema.

As relações de dispersão do problemas discreto:

$$\omega = \omega(kh, k\Delta x, Cr, \theta), \quad (4.32a)$$

$$C = C(kh, k\Delta x, Cr, \theta), \quad (4.32b)$$

$$C_g = C_g(kh, k\Delta x, Cr, \theta), \quad (4.32c)$$

onde Cr , número de Courant, é dado por

$$Cr = \sqrt{gh} \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad (4.33)$$

relacionam-se com o coeficiente de propagação G .

Definindo uma celeridade de fase complexa, $C = (\omega/k) - i(s/k)$, cuja parte real está associada à propagação da onda e cuja parte imaginária está relacionada com

a sua dissipação, teremos para C a expressão:

$$\frac{C}{\sqrt{gh}} = i \frac{1}{Cr k \Delta x} \log G. \quad (4.34)$$

Por seu turno, a relação de dispersão (4.32a) e a celeridade de grupo (4.32c) podem ser obtidas por intermédio da expressão para a celeridade de fase:

$$\frac{\omega}{\sqrt{g/h}} = \Re \left(kh \frac{C}{\sqrt{gh}} \right), \quad (4.35a)$$

$$C_g = C \left(1 + \frac{kh}{2C^2} \frac{\partial C^2}{\partial (kh)} + \frac{k\Delta x}{2C^2} \frac{\partial C^2}{\partial (k\Delta x)} \right). \quad (4.35b)$$

Desenvolvendo os quadrados da celeridade de fase e da celeridade de grupo do esquema numérico em série de Taylor, em torno de $kh = 0$ e $k\Delta x = 0$, resulta

$$\begin{aligned} \frac{C^2}{gh} &= 1 - i \frac{1}{4} \left(\theta - \frac{1}{2} \right) Cr (k\Delta x) \\ &\quad - \frac{1}{3} (kh)^2 + \left[3\theta(1-\theta) - \frac{11}{12} \right] Cr^2 (k\Delta x)^2 \\ &\quad + i \left(\theta - \frac{1}{2} \right) Cr (k\Delta x) (kh)^2 + i \frac{1}{3} \left(\theta - \frac{1}{2} \right) [5 - 12\theta(1-\theta)] Cr^3 (k\Delta x)^3 \\ &\quad + \mathcal{O}((kh)^4, (kh)^2(k\Delta x)^2, (k\Delta x)^4), \end{aligned} \quad (4.36a)$$

$$\begin{aligned} \frac{(C_g)^2}{gh} &= 1 + i 4 \left(\theta - \frac{1}{2} \right) Cr (k\Delta x) - (kh)^2 + [10\theta(1-\theta) - 3] (k\Delta x)^2 \\ &\quad + i \frac{7}{3} \left(\theta - \frac{1}{2} \right) Cr (k\Delta x) (kh)^2 + i [10\theta(1-\theta) - 4] \left(\theta - \frac{1}{2} \right) Cr^3 (k\Delta x)^3 \\ &\quad + \mathcal{O}((kh)^4, (kh)^2(k\Delta x)^2, (k\Delta x)^4). \end{aligned} \quad (4.36b)$$

Nestas expressões, a componente imaginária corresponde a termos dissipativos de origem puramente numérica e de primeira ordem, i.e. $\mathcal{O}(k\Delta x)$, enquanto que a componente real corresponde à dispersão de frequência, com um erro numérico de segunda ordem, i.e. $\mathcal{O}((k\Delta x)^2)$. Note-se que para $\theta = 1/2$, as componentes imaginárias das celeridades são nulas, logo $s = 0$, pelo que o esquema se diz neutralmente estável. Por outro lado, e caso os termos de ordem mais baixa sejam de facto dominantes, para $\theta > 1/2$, o esquema é dissipativo e portanto estável, enquanto que, para $\theta < 1/2$, o esquema é instável.

Para o caso neutralmente estável ($\theta = 1/2$), admitindo que $k\Delta x = kh/n$, os aproximantes de Padé de ordem $[0/2]$ dos quadrados das celeridades numéricas são, para a discretização total:

$$\frac{1}{gh} [0/2] C^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{3} + \frac{Cr^2}{6n^2} \right) (kh)^2}, \quad (4.37a)$$

$$\frac{1}{gh} [0/2] (C_g)^2 = \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{Cr^2}{2n^2} \right) (kh)^2}. \quad (4.37b)$$

Estas expressões, as quais incluem termos de origem numérica, mostram que a precisão da formulação de Bubnov-Galerkin aplicada às equações de Boussinesq e associada a um esquema de diferenças finitas a um passo para a integração no tempo, não é óptima.

Análise de estabilidade

Um esquema de cálculo diz-se estável se a amplitude da solução, na ausência de uma fonte excitadora, decrescer monotonamente no tempo. O critério de estabilidade de von Neumann diz que, num problema linear, tal acontece se e só se o módulo do coeficiente de propagação for menor ou igual à unidade, i.e.

$$|G| \leq 1. \quad (4.38)$$

A inspecção dos coeficientes dos termos de erro nas equações diferenciais equivalentes e a inspecção da componente imaginária da celeridade de fase numérica permitiram desde logo classificar o esquema de cálculo no tocante à sua estabilidade. No entanto, tratando-se em ambos os casos de expansões em série de Taylor em torno de $kh = 0$ e $k\Delta x = 0$, o comportamento da solução para todos os comprimentos de onda possíveis não foi explicitado. A análise do módulo de G , embora válida somente para o caso linear, permite avaliar o grau de dissipação em toda a gama de números de onda. Nas Figuras 4.8 e 4.9 está representada a variação de $|G|$ com o número de onda adimensional kh , para duas malhas de elementos finitos com diferentes discretizações, $n = h/\Delta x = 2$ e $n = h/\Delta x = 8$, e para dois valores distintos do parâmetro θ de integração no tempo: $\theta = 2/3 > 1/2$ e $\theta = 1/3 < 1/2$.

É evidente que o esquema é incondicionalmente estável ($|G| < 1$) para os casos em que $\theta > 1/2$ e incondicionalmente instável ($|G| > 1$) para os casos em que $\theta < 1/2$. Por outro lado, pode-se constatar que o mecanismo de dissipação/amplificação não

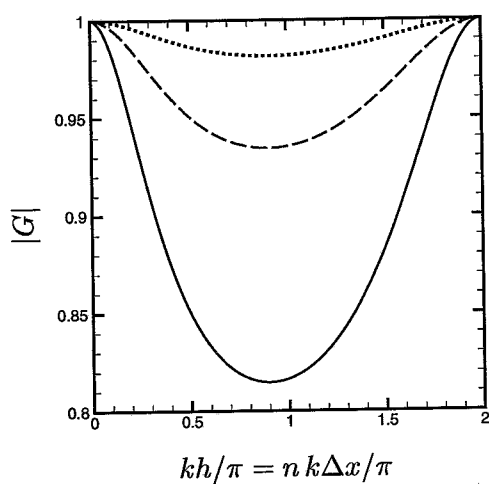
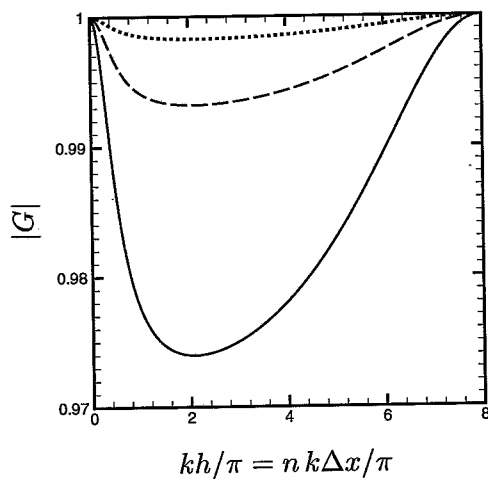
(a) $n = h/\Delta x = 2$.(b) $n = h/\Delta x = 8$.

Figura 4.8: Variação de $|G|$ para $\theta = 2/3$ com $Cr = 2$ (—), $Cr = 1$ (---), $Cr = 0.5$ (····).

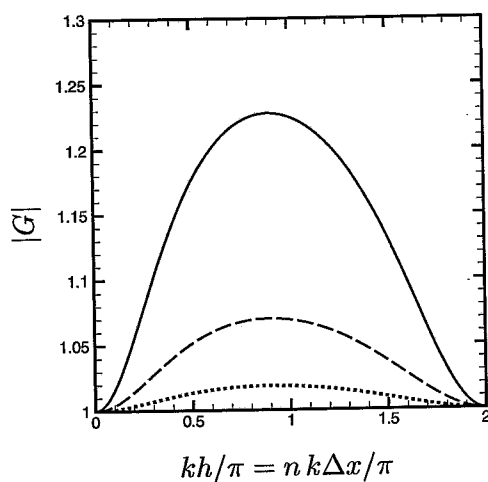
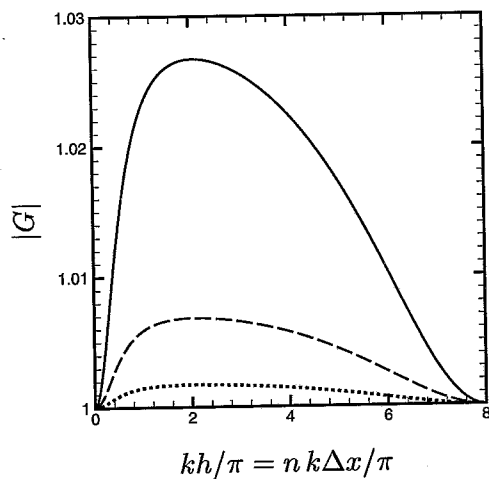
(a) $n = h/\Delta x = 2$.(b) $n = h/\Delta x = 8$.

Figura 4.9: Variação de $|G|$ para $\theta = 1/3$ com $Cr = 2$ (—), $Cr = 1$ (---), $Cr = 0.5$ (····).

é selectivo, dado não privilegiar os pequenos comprimentos de onda. Um comportamento óptimo de $|G|$ implicaria um decréscimo monótono deste com kh (ou $k\Delta x$). É também evidente que tanto uma maior discretização espacial (maior n), como

uma maior discretização temporal (menor Cr), têm como resultado uma diminuição do módulo do coeficiente de propagação. Note-se, no entanto, que o refinamento da malha espacial conduz a um comportamento ainda menos selectivo do mecanismo de dissipação.

Conclusões

De facto, nenhum dos casos acima considerados é óptimo. Abbott et al. (1984) demonstraram a necessidade da utilização de esquemas de terceira ordem na resolução numérica das equações de Boussinesq, por forma a garantir a precisão da solução. Por outro lado, durante uma simulação, e conforme o tempo computacional avança, o termo convectivo não linear, $\bar{u} \partial \bar{u} / \partial x$ a uma dimensão horizontal, produz harmónicas de ordem superior, transferindo a energia das ondas de maior comprimento para as ondas de menor comprimento. Este processo físico dá origem à turbulência e à dissipação de energia por processos viscosos. O coeficiente de viscosidade da água é no entanto muito pequeno, pelo que usualmente o termo que lhe está associado nem sequer é incluído no modelo numérico. Desta forma, na simulação de um escoamento laminar, toda a energia é transferida dos pequenos números de onda para os grandes números de onda, acumulando-se finalmente no maior número de onda definido pela malha de elementos finitos: $k_{\text{máx}} = \pi / \Delta x$ para elementos lineares. Como se viu, as ondas com este número de onda, correspondente ao comprimento de onda mínimo, $\lambda_{\text{mín}} = 2 \Delta x$ para elementos lineares, têm celeridade de fase nula. Produz-se assim uma oscilação numérica com amplitude crescente no tempo e estacionária no espaço. Nas experiências numéricas efectuadas (cf. Capítulo 6), estas características estão perfeitamente documentadas pela existência, nos registos espaciais, de uma oscilação de comprimento $\lambda = \lambda_{\text{mín}}$, a qual é invisível nos registos temporais.

Um bom método numérico para as equações do tipo Boussinesq deverá portanto ter, no mínimo, precisão de terceira ordem e incluir um termo dissipativo numérico. Este termo dissipativo deverá ser ele próprio de terceira ordem, por forma a não comprometer a precisão da solução, e deverá estar associado a uma quarta derivada, para que actue essencialmente sobre os comprimentos de onda mais curtos, sem praticamente afectar as harmónicas principais. No método dos elementos finitos, um esquema com estas características pode ser obtido recorrendo a uma formulação de Petrov-Galerkin (cf. Capítulo 5).

4.3 Modelo de Madsen & Sørensen

A análise que a seguir se inclui da aplicação de formulações de Bubnov-Galerkin às equações de Madsen & Sørensen restringir-se-á também à formulação para fundos fixos, com variação espacial muito suave, e a uma dimensão horizontal. Tendo em conta os resultados obtidos para as equações de Boussinesq, o estudo incidirá apenas sobre a interpolação linear de igual ordem. Neste caso, a formulação clássica do problema da propagação de uma onda dispersiva consiste em determinar as funções $\zeta(x, t)$ e $\bar{u}(x, t)$ tais que:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (4.39a)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{2}{5} h^2 \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^2 \partial t} + \frac{1}{15} g h^2 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3}, \quad (4.39b)$$

com as condições iniciais:

$$\begin{cases} \bar{u} = \bar{u}_0(x) \\ \zeta = \zeta_0(x) \end{cases} \quad \text{para } t = 0. \quad (4.39c)$$

O tipo e número de condições de fronteira a considerar foram discutidos no Capítulo 3. No problema (4.39), as funções q e p são, respectivamente, a energia e a quantidade de movimento locais do escoamento:

$$q = \frac{1}{2} \bar{u}^2 + g \zeta,$$

$$p = (h + \zeta) \bar{u}.$$

4.3.1 Formulação residual de Bubnov-Galerkin

Devido à presença de uma derivada de terceira ordem e para que se possam utilizar funções de aproximação lineares com continuidade C^0 , é necessária a introdução de uma variável adicional, $r(x, t)$ no problema a uma dimensão horizontal, ou $r_2(x, y, t)$ no problema a duas dimensões horizontais, tal que

$$r = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \quad (4.40a)$$

$$r_2 = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}. \quad (4.40b)$$

Desta forma, as equações diferenciais do problema (4.39) reescrevem-se como:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (4.41a)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{2}{5} h^2 \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^2 \partial t} + \frac{1}{15} g h^2 \frac{\partial r}{\partial x}. \quad (4.41b)$$

A formulação residual fraca de Bubnov-Galerkin para este problema, com interpolação de igual ordem, consiste em determinar as funções $\hat{\zeta}, \hat{u} \in \mathcal{V}_1$, no domínio $[0, \ell] \times [0, +\infty[$, tais que

$$\int_0^\ell \hat{\varphi} \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial t} dx + \int_0^\ell \hat{\varphi} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} dx = 0, \quad (4.42a)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\ell \hat{\varphi} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} dx + \int_0^\ell \hat{\varphi} \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} dx = & - \int_0^\ell \frac{2}{5} h^2 \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x \partial t} dx + \int_0^\ell \frac{1}{15} g h^2 \hat{\varphi} \frac{\partial \hat{r}}{\partial x} dx \\ & + \left[\hat{\varphi} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x \partial t} \right]_0^\ell, \quad \forall \hat{\varphi} \in \mathcal{V}_1. \end{aligned} \quad (4.42b)$$

A função $\hat{r} \in \mathcal{V}_1$ é calculada recorrendo também a uma formulação residual:

$$\int_0^\ell \hat{\varphi} \hat{r} dx = - \int_0^\ell \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x} \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial x} dx + \left[\hat{\varphi} \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial x} \right]_0^\ell, \quad \forall \hat{\varphi} \in \mathcal{V}_1. \quad (4.42c)$$

O conjunto $\mathcal{V}_1$ é o espaço de funções polinomiais de grau 1 e continuidade C^0 , usual no método dos elementos finitos (cf. Zienkiewicz, 1977), sendo

$$\hat{\zeta}(x, t) = \sum_{i=1}^{n_e+1} N_i(x) \hat{\zeta}_i(t), \quad (4.43a)$$

$$\hat{u}(x, t) = \sum_{i=1}^{n_e+1} N_i(x) \hat{u}_i(t), \quad (4.43b)$$

$$\hat{p}(x, t) = \sum_{i=1}^{n_e+1} N_i(x) \left(h_i + \hat{\zeta}_i(t) \right) \hat{u}_i(t), \quad (4.43c)$$

$$\hat{q}(x, t) = \sum_{i=1}^{n_e+1} N_i(x, t) \left(\frac{1}{2} (\hat{u}_i(t))^2 + g \hat{\zeta}_i(t) \right), \quad (4.43d)$$

$$\hat{r}(x, t) = \sum_{i=1}^{n_e+1} N_i(x) \hat{r}_i(t). \quad (4.43e)$$

Tal como foi anteriormente referido para o modelo de Boussinesq, as funções de interpolação globais $N_i, i = 1, \dots, n_e + 1$, onde n_e é o número de elementos finitos no domínio (cf. Figura 4.1(a)), não são explicitamente definidas. Os integrais nas equações (4.42) são calculados por integração sobre cada elemento e as equações discretas são obtidas somando a contribuição em cada nó. A integração é realizada recorrendo às funções de interpolação elementares $N_i^e, i = 1, 2$ dadas por (4.5).

4.3.2 Análise do erro local

Seguindo o procedimento adoptado anteriormente para o modelo de Boussinesq, procede-se primeiro à análise do erro de truncatura da equação diferencial equivalente, incluindo os termos não lineares. Posteriormente é analisado o erro na solução sendo que, neste caso, apenas se considera a solução linear.

Equações discretas

O esquema de discretização espacial adoptado, elementos lineares de dois nós, conduz às seguintes equações diferenciais ordinárias (forma adimensional) onde, novamente, o índice t significa “derivada em ordem ao tempo”:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x}{6} \left[(\hat{\zeta}_{j+1})_t + 4 (\hat{\zeta}_j)_t + (\hat{\zeta}_{j-1})_t \right] + \frac{h}{2} [\hat{u}_{j+1} - \hat{u}_{j-1}] + \frac{\epsilon}{2} [\hat{\zeta}_{j+1} \hat{u}_{j+1} - \hat{\zeta}_{j-1} \hat{u}_{j-1}] \\ = 0, \end{aligned} \quad (4.44a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x}{6} [(\hat{u}_{j+1})_t + 4 (\hat{u}_j)_t + (\hat{u}_{j-1})_t] + \frac{\epsilon}{4} [(\hat{u}_{j+1})^2 - (\hat{u}_{j-1})^2] + \frac{1}{2} [\hat{\zeta}_{j+1} - \hat{\zeta}_{j-1}] \\ - \sigma^2 \frac{2h^2}{5\Delta x} [(\hat{u}_{j+1})_t - 2 (\hat{u}_j)_t + (\hat{u}_{j-1})_t] - \sigma^2 \frac{gh^2}{30} [\hat{r}_{j+1} - \hat{r}_{j-1}] \\ = 0, \end{aligned} \quad (4.44b)$$

$$\frac{\Delta x}{6} [\hat{r}_{j+1} + 4 \hat{r}_j + \hat{r}_{j-1}] - \frac{1}{\Delta x} [\hat{\zeta}_{j+1} - 2 \hat{\zeta}_j + \hat{\zeta}_{j-1}] = 0. \quad (4.44c)$$

O facto da equação (4.44c) ser também implícita representa uma desvantagem do método dos elementos finitos em relação aos esquemas baseados em diferenças finitas. Com alguma perda de precisão, é possível ultrapassar este problema diagonalizando a matriz do sistema resultante para esta equação. A forma mais simples consiste na substituição da matriz do sistema por uma matriz diagonal em que o j -ésimo elemento da diagonal é igual à soma dos elementos da j -ésima linha da matriz

original (para mais detalhes sobre métodos de diagonalização da matriz de massa, ver Zienkiewicz, 1977, páginas 535–539). A equação (4.44c) é então substituída por

$$\hat{r}_j = \frac{1}{(\Delta x)^2} [\hat{\zeta}_{j+1} - 2\hat{\zeta}_j + \hat{\zeta}_{j-1}] . \quad (4.44d)$$

A diagonalização é no entanto necessária para a análise do erro local que se segue.

Equações diferenciais equivalentes

A análise do erro cometido na discretização do problema (4.42) foi efectuada recorrendo às equações diferenciais equivalentes dos esquemas numéricos. Estas equações são obtidas por substituição nas equações discretas (4.44a), (4.44b) e (4.44d), dos valores de $\hat{\zeta}_{j\pm 1}$, $\hat{u}_{j\pm 1}$ e $\hat{r}_{j\pm 1}$, pelas suas expansões em séries de Taylor centradas em x_j . Posteriormente faz-se uso das equações diferenciais (4.39) para rearranjo das derivadas de ordem superior, resultando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} &= \frac{(k\Delta x)^4}{180} \left[\left(h + \epsilon \hat{\zeta} \right) \frac{\partial^5 \hat{u}}{\partial x^5} + \epsilon \hat{u} \frac{\partial^5 \hat{\zeta}}{\partial x^5} \right. \\ &\quad \left. + 5\epsilon \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial x} \frac{\partial^4 \hat{u}}{\partial x^4} + 5\epsilon \frac{\partial^4 \hat{\zeta}}{\partial x^4} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + 10\epsilon \frac{\partial^2 \hat{\zeta}}{\partial x^2} \frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial x^3} + 10\epsilon \frac{\partial^3 \hat{\zeta}}{\partial x^3} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} \right] \\ &\quad + \mathcal{O}((k\Delta x)^6) , \end{aligned} \quad (4.45a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} &- \sigma^2 \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial x^2 \partial t} - \sigma^2 \frac{g h^2}{15} \frac{\partial^3 \hat{\zeta}}{\partial x^3} \\ &= - \frac{(k\Delta x)^2}{6} \frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial x^2 \partial t} - \frac{(k\Delta x)^2}{6} \frac{\partial^3 \hat{\zeta}}{\partial x^3} \\ &\quad - \sigma^2 \frac{(k\Delta x)^2}{60} h^2 \frac{\partial^5 \hat{\zeta}}{\partial x^5} - \sigma^4 h^4 \frac{(k\Delta x)^2}{90} \frac{\partial^7 \hat{\zeta}}{\partial x^7} \\ &\quad - \epsilon \frac{1}{6} \left[\hat{u} \frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial x^3} + 3 \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} \right] \\ &\quad - \epsilon \sigma^2 h^2 \frac{(k\Delta x)^2}{30} \left[\hat{u} \frac{\partial^5 \hat{u}}{\partial x^5} + 5 \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \frac{\partial^4 \hat{u}}{\partial x^4} + 10 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} \frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial x^3} \right] \\ &\quad + \sigma^6 \frac{2}{375} (k\Delta x)^2 h^2 \frac{\partial^9 \hat{u}}{\partial x^8 \partial t} + \sigma^6 \frac{(k\Delta x)^2}{1125} h^2 \frac{\partial^9 \hat{\zeta}}{\partial x^9} \\ &\quad + \mathcal{O}((k\Delta x)^4) . \end{aligned} \quad (4.45b)$$

A mera aplicação recursiva da equação diferencial original teria obviamente eliminado os termos de erro de ordem $\mathcal{O}((k\Delta x)^2)$. No entanto, como se viu no Capítulo

2, o diferente comportamento dispersivo das equações de Boussinesq e de Madsen & Sørensen deve-se precisamente à presença simultânea das terceiras derivadas em x e de derivadas cruzadas em x e t . Uma análise prudente alerta portanto para a possibilidade de erros de ordem inferior à das equações analíticas na dispersão de frequência.

Note-se que nenhum dos termos numéricos é de tipo dissipativo. Qualquer dissipação numérica, fundamental para a estabilidade do esquema, terá de ser obtida via integração no tempo.

Relações de dispersão discretas

Para análise do erro local da solução recorre-se às relações de dispersão linear do problema (4.42) na sua forma discreta. Supondo que as soluções ζ e $\bar{u}$ das equações de Madsen & Sørensen linearizadas, i.e. com $\epsilon = 0$, admitem desenvolvimentos em série de Fourier, cujas expressões gerais são dadas por (4.19), as soluções particulares, para uma onda sinusoidal com número de onda k , são:

$$\left(\hat{\zeta}_{j\pm 1}\right)_t = -i (\omega - i s) \hat{\zeta}_j e^{\pm i k \Delta x}, \quad (4.46a)$$

$$(\hat{u}_{j\pm 1})_t = -i (\omega - i s) \hat{u}_j e^{\pm i k \Delta x}, \quad (4.46b)$$

$$\hat{\zeta}_{j\pm 1} = \hat{\zeta}_j e^{\pm i k \Delta x}, \quad (4.46c)$$

$$\hat{u}_{j\pm 1} = \hat{u}_j e^{\pm i k \Delta x}. \quad (4.46d)$$

Substituindo estas expressões nas equações discretas (4.44a), (4.44b) e (4.44d), com $\epsilon = 0$, e resolvendo o problema de valores próprios, que daí resulta, em ordem a $\omega - i s$, verifica-se que $s = 0$, esquema numérico não dissipativo, e obtêm-se as relações de dispersão do problema discreto:

$$\omega = \omega(kh, k\Delta x), \quad (4.47a)$$

$$C = C(kh, k\Delta x), \quad (4.47b)$$

$$C_g = C_g(kh, k\Delta x). \quad (4.47c)$$

A expressão para o quadrado da celeridade de fase é então do tipo:

$$\frac{C^2}{gh} = \frac{A}{B (D (kh)^2 + E (k\Delta x)^2)}. \quad (4.48)$$

Os coeficientes A , B , D e E são dados por:

$$A = 3 \sin^2 k\Delta x [15 (k\Delta x)^2 - 2 (kh)^2 \cos k\Delta x + 2 (kh)^2];$$

$$B = (k\Delta x)^2 (2 + \cos k\Delta x);$$

$$D = 12 - 12 \cos k\Delta x;$$

$$E = 10 + 5 \cos k\Delta x.$$

A relação de dispersão (4.47a) e a celeridade de grupo (4.47c) podem facilmente ser obtidas a partir da expressão para a celeridade de fase (4.48):

$$\frac{\omega}{\sqrt{g/h}} = kh \frac{C}{\sqrt{gh}}, \quad (4.49a)$$

$$C_g = C \left(1 + \frac{kh}{2C^2} \frac{\partial C^2}{\partial (kh)} + \frac{k\Delta x}{2C^2} \frac{\partial C^2}{\partial (k\Delta x)} \right). \quad (4.49b)$$

Desenvolvendo o quadrado das celeridades de fase e de grupo adimensionais do modelo de Madsen & Sørensen em série de Taylor em torno de $kh = 0$, obtém-se:

$$\frac{C_{\text{Mads}}^2}{gh} = 1 - \frac{1}{3} (kh)^2 + \frac{2}{15} (kh)^4 + \mathcal{O}((kh)^6), \quad (4.50a)$$

$$\frac{(C_g)_{\text{Mads}}}{\sqrt{gh}} = 1 - \frac{1}{2} (kh)^2 + \frac{19}{72} (kh)^4 + \mathcal{O}((kh)^6). \quad (4.50b)$$

Estes resultados podem ser comparados com os obtidos usando a expansão das celeridades do esquema discreto em série de Taylor em torno de $kh = 0$ e $k\Delta x = 0$, a saber:

$$\begin{aligned} \frac{C^2}{gh} = & 1 - \frac{1}{3} (kh)^2 + \frac{2}{15} (kh)^4 - \frac{7}{180} (k\Delta x)^2 (kh)^2 - \frac{1}{90} (k\Delta x)^4 \\ & + \mathcal{O}((kh)^6, (k\Delta x)^2 (kh)^4, (k\Delta x)^4 (kh)^2, (k\Delta x)^6), \end{aligned} \quad (4.51a)$$

$$\begin{aligned} \frac{C_g}{\sqrt{gh}} = & 1 - \frac{1}{2} (kh)^2 + \frac{19}{72} (kh)^4 - \frac{7}{72} (k\Delta x)^2 (kh)^2 - \frac{1}{36} (k\Delta x)^4 \\ & + \mathcal{O}((kh)^6, (k\Delta x)^2 (kh)^4, (k\Delta x)^4 (kh)^2, (k\Delta x)^6). \end{aligned} \quad (4.51b)$$

Torna-se evidente, da inspeção das expressões (4.51), que os erros numéricos dominantes são de ordem $\mathcal{O}((k\Delta x)^4)$ e de ordem $\mathcal{O}((k\Delta x)^2 (kh)^2)$. Note-se que para pequenas profundidades relativas, e a expansão em série de Taylor assume essa hipótese, tem-se em geral que $h \sim \Delta x$, nomeadamente por constrangimen-

Tabela 4.3: Aproximantes $[2/2]$ de Padé para as celeridades discretas do modelo de Madsen & Sørensen com $n = h/\Delta x$.

Esquema	$\frac{1}{gh} [2/2] C^2$	$\frac{1}{gh} [2/2] (C_g)^2$
Airy	$\frac{1 + \frac{1}{15} (kh)^2}{1 + \frac{2}{5} (kh)^2}$	$\frac{1 - \frac{2}{9} (kh)^2}{1 + \frac{7}{9} (kh)^2}$
Madsen	$\frac{1 + \frac{1}{15} (kh)^2}{1 + \frac{2}{5} (kh)^2}$ (exacto)	$\frac{1 - \frac{2}{9} (kh)^2}{1 + \frac{7}{9} (kh)^2}$
$\alpha = 1, \beta = 1$	$\frac{1 + \left(\frac{1}{15} - \frac{7}{60n^2} - \frac{1}{30n^4}\right) (kh)^2}{1 + \left(\frac{2}{5} - \frac{7}{60n^2} - \frac{1}{30n^4}\right) (kh)^2}$	$\frac{1 + \left(\frac{2}{9} - \frac{7}{36n^2} - \frac{1}{18n^4}\right) (kh)^2}{1 + \left(\frac{7}{9} - \frac{7}{36n^2} - \frac{1}{18n^4}\right) (kh)^2}$

tos de memória e velocidade de cálculo. Nestas condições, é legítimo afirmar que o esquema de interpolação linear é de quarta ordem. Por outro lado, para que eventuais aproximantes de Padé multivariados (em kh e $k\Delta x$) de ordem $[2/2]$ dos quadrados das celeridades numéricas fossem iguais aos quadrados das celeridades analíticas, seria necessário que o erro numérico nas expansões (4.51) fosse de ordem $\mathcal{O}((k\Delta x)^6, (kh)^2(k\Delta x)^4, (kh)^4(k\Delta x)^2)$. Como tal não acontece, é legítimo considerar que a precisão do esquema proposto não é suficiente para o modelo de propagação de Madsen & Sørensen. De facto, admitindo que $h = n\Delta x$, os aproximantes $[2/2]$ de Padé, em torno de $kh = 0$, para os quadrados das celeridades de grupo e de fase são os que constam na Tabela 4.3.

As curvas de dispersão, para discretizações tais que $\Delta x = h/2$ e $\Delta x = h/8$, são reproduzidas nas Figuras 4.10(a) e 4.10(b), respectivamente, na sua forma adimensional: $\omega/\sqrt{g/h}$, $C/\sqrt{gh}$ e $C_g/\sqrt{gh}$. Nestes gráficos, a linha tracejada corresponde ao modo de propagação analítico e a linha contínua ao modo de propagação numérico. Da inspecção destas curvas, pode-se concluir que, tal como para o caso do modelo de Boussinesq, também no modelo de Madsen & Sørensen a utilização da interpolação linear implica a não propagação das ondas com comprimento $\lambda = 2\Delta x$ (ao qual corresponde $kh = n\pi$, sendo $n = h/\Delta x$). Pelos motivos anteriormente apontados (cf. §4.2.2) é de esperar a presença de ruído numérico numa simulação baseada neste esquema de elementos finitos.

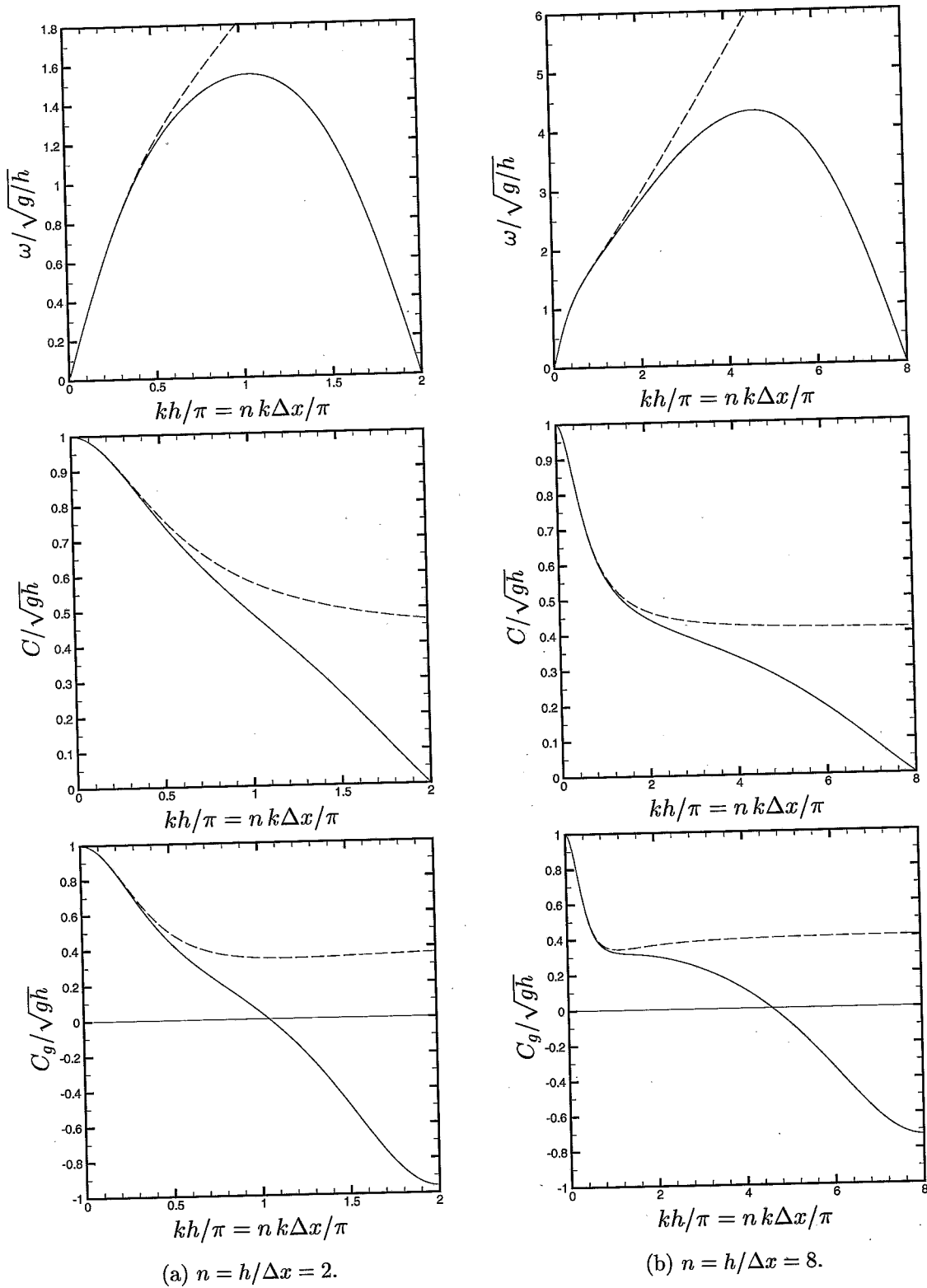


Figura 4.10: Relações de dispersão com elementos lineares de dois nós. Solução analítica (---) e solução numérica (—).

4.4 Modelos de Seabra-Santos e Nadaoka & Beji

O erro de dispersão de segunda ordem, que a aplicação da formulação de Bubnov-Galerkin do método dos elementos finitos aos modelos de Boussinesq e de Madsen & Sørensen origina, após discretização no tempo, é devido à discretização dos termos convectivos lineares. Os efeitos devidos a erros na discretização dos termos dispersivos ou dos termos não lineares são de ordem superior, pelo que apenas afectam de forma significativa o modelo de Madsen & Sørensen.

Os dois outros modelos analisados no Capítulo 2, o modelo de Seabra-Santos e o modelo de Nadaoka & Beji são, no que concerne às derivadas presentes nos seus termos dispersivos, do mesmo tipo do modelo de Boussinesq, i.e. as derivadas de terceira ordem são cruzadas no tempo e no espaço. Portanto, a precisão dos esquemas analisados deve ser, para estes modelos, da ordem de grandeza da precisão para o modelo de Boussinesq. Seguindo este raciocínio, apenas se indica qual o esquema de cálculo para a discretização do modelo de Nadaoka & Beji, para o qual se optou por uma formulação de Bubnov-Galerkin com interpolação mista ($\alpha = 1$, $\beta = 2$), sem que se proceda à sua análise em termos de precisão e/ou estabilidade. No que concerne ao modelo de Seabra-Santos, o único esquema descrito será o de Petrov-Galerkin (cf. §5.3), podendo o esquema de Bubnov-Galerkin ser considerado como um caso particular daquele.

4.4.1 Modelo de Nadaoka & Beji

As equações do modelo de Nadaoka & Beji, para escoamentos a uma dimensão horizontal, sem dissipação e com não linearidade de primeira ordem, são:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \sum_{m=1}^N \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{B_m}{g} + \zeta \right) U_m \right] = 0, \quad (4.52a)$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^N A_{nm} \frac{\partial U_m}{\partial t} + B_n \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_0^2}{2} + g \zeta \right) = \\ \sum_{m=1}^N \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(C_{nm} \frac{\partial^2 U_m}{\partial x \partial t} \right) + \left(D_{nm} - \frac{\partial C_{nm}}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 U_m}{\partial x \partial t} \right], \quad \text{para } n = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.52b)$$

Os coeficientes A_{nm} , B_m , C_{nm} e D_{nm} , bem assim como as variáveis ζ , U_m e u_0 encontram-se definidos em §2.2.5. N é o número de componentes hiperbólicas do perfil vertical de velocidades (2.146).

As variáveis ζ e U_m são aproximadas recorrendo a funções de interpolação, como é usual nas formulações de elementos finitos com interpolação mista, i.e.

$$\hat{\zeta}(x) = \sum_{i=1}^{n_e+1} N_i(x) \hat{\zeta}_i, \quad (4.53a)$$

$$\hat{U}_m(x) = \sum_{j=1}^{2n_e+1} M_j(x) \left(\hat{U}_m \right)_j, \quad (4.53b)$$

sendo n_e o número total de elementos finitos e $N_i, i = 1, \dots, n_e + 1$ e $M_j, j = 1, \dots, 2n_e + 1$ as funções globais de interpolação lineares e quadráticas, respectivamente (cf. Figura 4.1). Sendo uma função da profundidade, os coeficientes A_{nm} , B_m , C_{nm} e D_{nm} foram aproximados recorrendo à interpolação linear entre os nós extremos dos elementos:

$$\hat{A}_{nm}(x) = \sum_{i=1}^{n_e+1} N_i(x) A_{nm}(x_i), \quad (4.54a)$$

$$\hat{B}_m(x) = \sum_{i=1}^{n_e+1} N_i(x) B_m(x_i), \quad (4.54b)$$

$$\hat{C}_{nm}(x) = \sum_{i=1}^{n_e+1} N_i(x) C_{nm}(x_i), \quad (4.54c)$$

$$\hat{D}_{nm}(x) = \sum_{i=1}^{n_e+1} N_i(x) D_{nm}(x_i). \quad (4.54d)$$

As variáveis auxiliares $\hat{p}$ e $\hat{q}$, respectivamente a quantidade de movimento específica e a energia específica computacionais, são definidas como:

$$\hat{p}(x) = \sum_{j=1}^{2n_e+1} \sum_{m=1}^N M_j(x) \left(\frac{\hat{B}_m(x_j)}{g} + \hat{\zeta}(x_j) \right) \left(\hat{U}_m \right)_j, \quad (4.55a)$$

$$\hat{q}(x) = \sum_{i=1}^{n_e+1} N_i(x) \left[\frac{1}{2} \left(\sum_{m=1}^N \hat{U}_m(x_i) \right)^2 + g \hat{\zeta}_i \right]. \quad (4.55b)$$

A formulação de Bubnov-Galerkin do método dos elementos finitos resulta então nos seguintes sistemas de equações:

$$\mathbf{N} \Delta \zeta = -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C} \left[\theta \mathbf{p}^{(n+1)*} + (1 - \theta) \mathbf{p}^n \right], \quad (4.56a)$$

$$(\mathbf{M} + \mathbf{K}) \Delta \mathbf{u} = -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{D} \left[\theta \mathbf{q}^{(n+1)*} + (1 - \theta) \mathbf{q}^n \right] + \mathbf{E} \Delta \mathbf{u}^* + \mathbf{F} \Delta \mathbf{u}^*. \quad (4.56b)$$

Nestes dois sistemas, θ é o coeficiente do esquema (4.27) de integração no tempo. A sua resolução recorre a um esquema tipo predictor-corrector, sendo que as grandezas denotadas com um asterisco, $()^*$, correspondem ao valor calculado no passo predictor, ou na iteração anterior do passo corrector. No passo predictor toma-se $\theta = 0$.

Os vectores $\boldsymbol{\zeta}^n$, $\mathbf{u}^n$, $\boldsymbol{\zeta}^{n+1}$ e $\mathbf{u}^{n+1}$ são os vectores dos valores nodais das funções $\hat{\zeta}$ e $\hat{U}_m$ nos instantes $t_n = n \Delta t$ e $t_{n+1} = (n+1) \Delta t$, respectivamente. Os vectores $\mathbf{p}^n$, $\mathbf{q}^n$, $\mathbf{p}^{n+1}$ e $\mathbf{q}^{n+1}$ são os vectores dos valores nodais, nos mesmos instantes, da quantidade de movimento específica e da energia específica definidas pelas expressões (4.55). Finalmente $\Delta \boldsymbol{\zeta}$, $\Delta \mathbf{u}$, $\Delta \mathbf{p}$ e $\Delta \mathbf{q}$ são os valores dos incrementos nodais daquelas grandezas no intervalo de tempo entre os instantes t_n e t_{n+1} , i.e.

$$\Delta \boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}^{n+1} - \boldsymbol{\zeta}^n,$$

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n,$$

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}^{n+1} - \mathbf{p}^n,$$

$$\Delta \mathbf{q} = \mathbf{q}^{n+1} - \mathbf{q}^n.$$

O vector $\mathbf{u}$, num instante genérico, é:

$$\mathbf{u} = ((U_1)_1, \dots, (U_N)_1, (U_1)_2, \dots, (U_N)_2, \dots, (U_1)_{2n_e+1}, \dots, (U_N)_{2n_e+1})^T. \quad (4.57)$$

As matrizes $\mathbf{N}$ e $\mathbf{C}$ têm dimensões $(n_e + 1) \times (n_e + 1)$ e $(n_e + 1) \times (2n_e + 1)$, respectivamente, enquanto $\mathbf{M}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{E}$ e $\mathbf{F}$ são matrizes por blocos com $(2n_e + 1) \times (2n_e + 1)$ blocos de dimensão $N \times N$. $\mathbf{D}$ é uma matriz por blocos com $(2n_e + 1) \times (n_e + 1)$ blocos de dimensão $N \times 1$. A matriz $\mathbf{F}$ corresponde ao termo de fronteira resultando, em conjunto com a matriz $\mathbf{K}$, da integração por partes do primeiro termo do membro da direita da equação (4.52b). Os elementos destas matrizes são respectivamente

$$\tilde{N}_{ij} = \int_0^\ell N_i N_j dx, \quad (4.58a)$$

$$\tilde{C}_{ij} = \int_0^\ell N_i \frac{dM_j}{dx} dx, \quad (4.58b)$$

$$\tilde{M}_{ijnm} = \int_0^\ell \hat{A}_{nm} M_i M_j dx, \quad (4.58c)$$

$$\tilde{K}_{ijmn} = \int_0^\ell \hat{C}_{nm} \frac{dM_i}{dx} \frac{dM_j}{dx} dx, \quad (4.58d)$$

$$\tilde{E}_{ijmn} = \int_0^\ell \left(\hat{D}_{nm} - \frac{d\hat{C}_{nm}}{dx} \right) M_i \frac{dM_j}{dx} dx. \quad (4.58e)$$

$$\tilde{F}_{ijmn} = \left(\hat{C}_{nm} M_i \frac{dM_j}{dx} \right)_{x=\ell} - \left(\hat{C}_{nm} M_i \frac{dM_j}{dx} \right)_{x=0}, \quad (4.58f)$$

$$\tilde{D}_{ijn1} = \int_0^\ell \hat{B}_n M_i \frac{dN_j}{dx} dx. \quad (4.58g)$$

Os índices $ijmn$ referem-se ao elemento de índices mn do bloco ij da matriz em causa.

Capítulo 5

Método dos Elementos Finitos: Esquemas de Petrov-Galerkin

5.1 Modelo RLW

Considere-se o modelo RLW apresentado no Capítulo 2. O problema clássico consiste em encontrar a função $\zeta = \zeta(x, t)$ que verifica a equação

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \sqrt{gh} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{3}{4} \sqrt{\frac{g}{h}} \frac{\partial \zeta^2}{\partial x} = \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial t \partial x^2}, \quad (5.1)$$

para $x \in [0, L]$ e $t \in [0, +\infty[$, com a condição inicial: $\zeta(x, 0) = \zeta_0(x)$, e as condições de fronteira: valor da função conhecido na fronteira de montante, $\zeta(0, t) = \zeta_1(t)$; condição de radiação na fronteira de jusante, $\partial \zeta(L, t) / \partial t = -C \partial \zeta(L, t) / \partial x$, sendo C a celeridade da perturbação.

Numa formulação de Galerkin, baseada numa discretização total de elementos finitos no espaço e no tempo, o problema será encontrar a solução aproximada no instante $t_{n+1} = (n+1) \Delta t$, suposta conhecida a solução no instante $t_n = n \Delta t$ e sendo Δt o intervalo de integração no tempo — vulgo passo de tempo. Nesse sentido considere-se o espaço $\mathcal{V}_0^k$ das funções polinomiais por bocados, de grau k e de classe C^0 , tal como é habitual em resoluções via elementos finitos (cf. Zienkiewicz, 1977). Pretende-se determinar a função $\hat{\zeta} \in \mathcal{V}_0^k \times \mathcal{V}_0^k$, definida em $]0, L[\times]t_n, t_{n+1}[$, que

satisfaz

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_0^L \left(\hat{w} \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial t} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \frac{\partial^2 \hat{\zeta}}{\partial x \partial t} \right) dx dt + \sqrt{gh} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_0^L \hat{w} \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial x} dx dt \\ + \frac{3}{4} \sqrt{\frac{g}{h}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_0^L \hat{w} \frac{\partial \hat{\zeta}^2}{\partial x} dx dt = \frac{h^2}{6} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\hat{w} \frac{\partial^2 \hat{\zeta}}{\partial x \partial t} \right]_0^L dt, \quad \forall \hat{w}(x, t). \end{aligned} \quad (5.2)$$

O termo de fronteira resultou da integração por partes do termo dispersivo. O termo não linear será discretizado de uma forma conservativa, pelo que $\hat{\zeta}^2$ é também uma função do espaço funcional $\mathcal{V}_0^k$.

5.1.1 Formulação de Petrov-Galerkin

Consoante a função peso $\hat{w}(x, t)$ pertença ao mesmo espaço funcional da função de aproximação $\hat{\zeta}(x, t)$ ou a outro espaço, a formulação residual (5.2) designa-se por formulação de Bubnov-Galerkin ou de Petrov-Galerkin.

No presente trabalho recorre-se ao esquema apresentado por Yu e Heinrich (1986, 1987), originalmente desenvolvido para problemas de advecção-difusão. Este esquema permite controlar separadamente a correcção do erro de dispersão e a introdução de um termo dissipativo de ordem elevada. Isto é obtido com uma formulação de Petrov-Galerkin em que as funções de peso são função da discretização espacial e temporal. Assim, a função peso será tal que:

- Bubnov-Galerkin:

$$\hat{w} = \hat{\varphi}, \quad \text{para } \hat{\varphi} \in \mathcal{V}_0^k \times \mathcal{V}_0^k;$$

- Petrov-Galerkin:

$$\hat{w} = \hat{\varphi} + \alpha \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x} + \beta \frac{\Delta x \Delta t}{4} \frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial x \partial t}, \quad \text{para } \hat{\varphi} \in \mathcal{V}_0^1 \times \mathcal{V}_0^2.$$

Como consequência desta definição, as funções de peso são descontínuas no espaço e no tempo.

Funções de interpolação

As funções de interpolação utilizadas são do tipo bilinear no espaço-tempo. Assim para o ponto no interior do e -ésimo elemento, de coordenadas (x, t) tais que

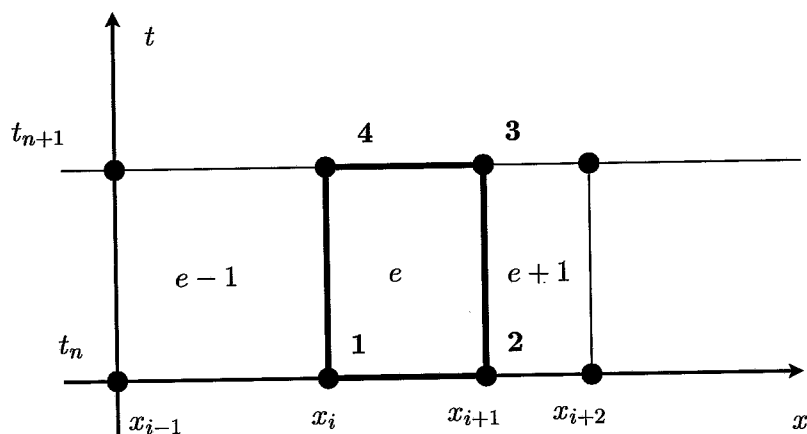


Figura 5.1: Discretização espaço-temporal. 1, 2, 3 e 4: numeração local dos nós do e -ésimo elemento.

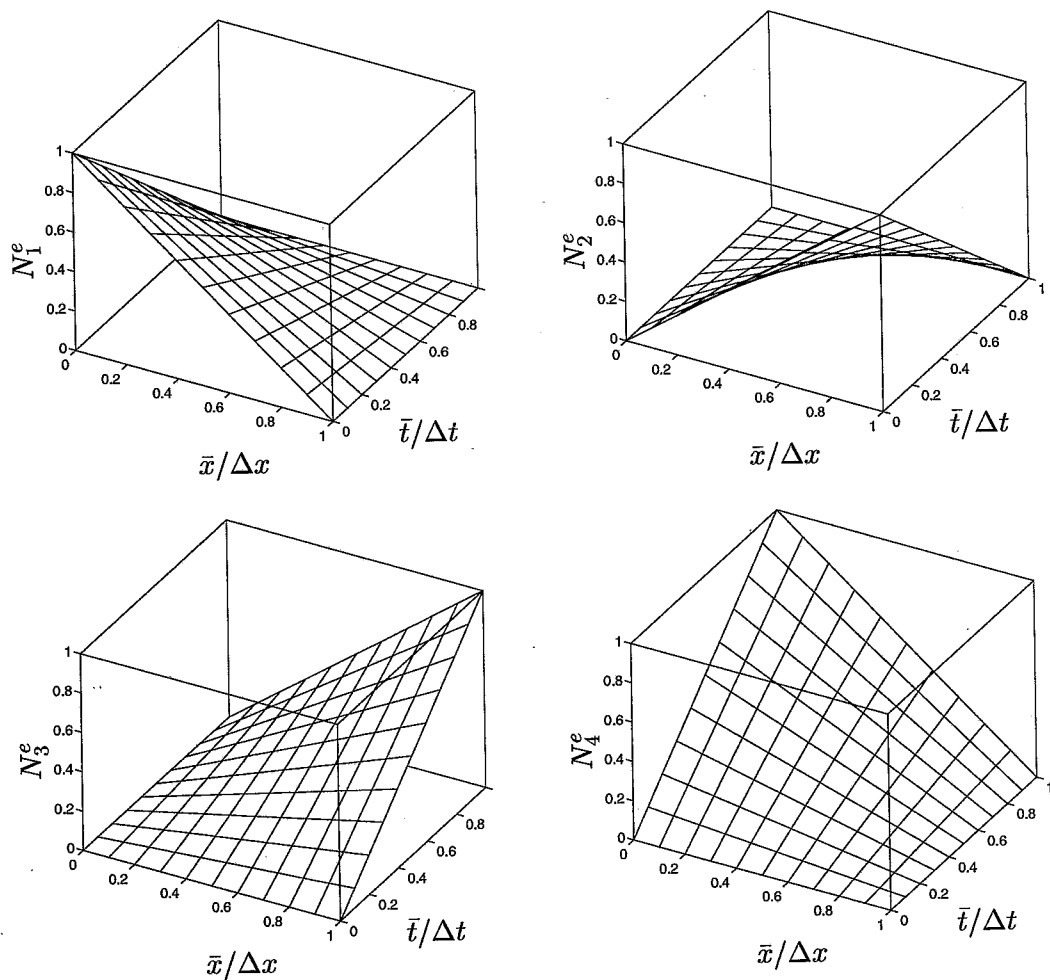


Figura 5.2: Funções de forma espaço-temporais.

(cf. Figura 5.1):

$$x = x_i + \bar{x} \quad , \quad t = t_n + \bar{t} \quad \text{com} \quad 0 \leq \bar{x} \leq \Delta x \quad \text{e} \quad 0 \leq \bar{t} \leq \Delta t,$$

tem-se que:

$$\hat{\zeta}(x, t) = N_1^e(\bar{x}, \bar{t}) \hat{\zeta}_i^n + N_2^e(\bar{x}, \bar{t}) \hat{\zeta}_{i+1}^n + N_3^e(\bar{x}, \bar{t}) \hat{\zeta}_{i+1}^{n+1} + N_4^e(\bar{x}, \bar{t}) \hat{\zeta}_i^{n+1}.$$

As funções de forma N_i^e , $i = 1, 2, 3, 4$, são o produto cartesiano de funções lineares do tipo (4.5) no espaço por funções do mesmo tipo definidas no tempo (cf. Figura 5.2):

$$N_1^e = \left(1 - \frac{\bar{x}}{\Delta x}\right) \left(1 - \frac{\bar{t}}{\Delta t}\right), \quad (5.3a)$$

$$N_2^e = \frac{\bar{x}}{\Delta x} \left(1 - \frac{\bar{t}}{\Delta t}\right), \quad (5.3b)$$

$$N_3^e = \frac{\bar{x}}{\Delta x} \frac{\bar{t}}{\Delta t}, \quad (5.3c)$$

$$N_4^e = \left(1 - \frac{\bar{x}}{\Delta x}\right) \frac{\bar{t}}{\Delta t}, \quad (5.3d)$$

em que Δt é o intervalo de integração no tempo, constante no espaço, e $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ é o comprimento do e -ésimo elemento.

Funções de peso

A componente $\hat{\varphi}$ das funções de peso resulta do produto cartesiano de uma função linear no espaço por uma função quadrática simétrica no tempo (cf. Figura 5.3), obtendo-se, respectivamente para os nós 3 e 4:

$$P_3^e(x, t) = 6 \frac{\bar{x}}{\Delta x} \frac{\bar{t}}{\Delta t} \left(1 - \frac{\bar{t}}{\Delta t}\right), \quad (5.4a)$$

$$P_4^e(x, t) = 6 \left(1 - \frac{\bar{x}}{\Delta x}\right) \frac{\bar{t}}{\Delta t} \left(1 - \frac{\bar{t}}{\Delta t}\right). \quad (5.4b)$$

Bubnov-Galerkin: as funções de peso da formulação de Bubnov-Galerkin para os nós 3 e 4 são, respectivamente (cf. Figura 5.4):

$$W_3^e(x, t) = P_3^e(x, t),$$

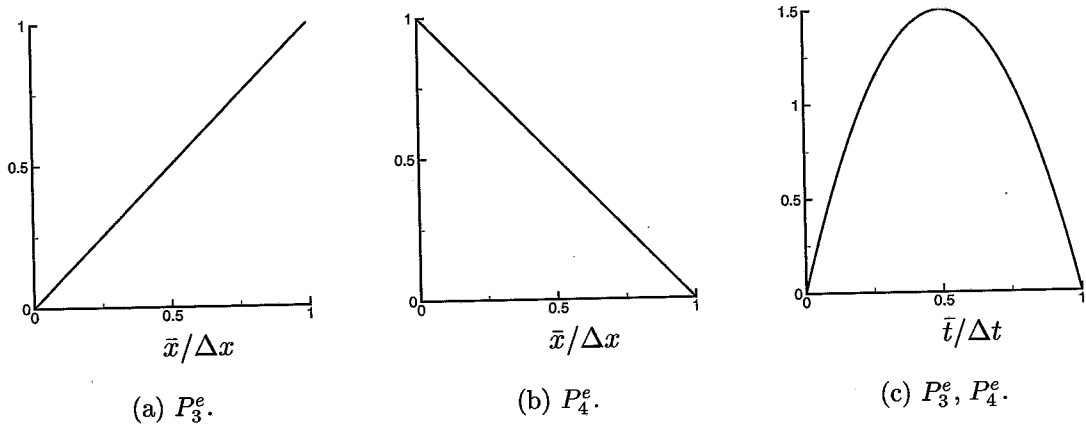


Figura 5.3: Dependência linear em x e quadrática em t das funções de peso.

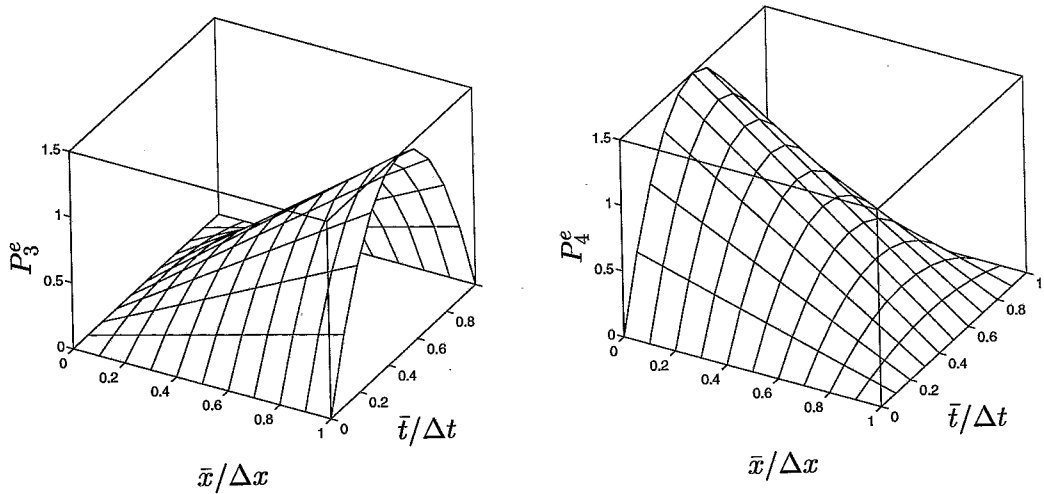


Figura 5.4: Bubnov-Galerkin: funções de peso lineares no espaço e quadráticas, com simetria, no tempo.

$$W_4^e(x, t) = P_4^e(x, t) .$$

É interessante verificar que no caso de um problema linear com uma malha regular, este esquema é equivalente a uma formulação de diferenças finitas centradas no espaço com um esquema tipo Crank-Nicholson de discretização no tempo (cf. Zienkiewicz e Morgan, 1983). De forma análoga, a precisão do esquema é apenas de segunda ordem, com um erro de dispersão numérica da mesma ordem do termo dispersivo analítico (cf. Capítulo 4).

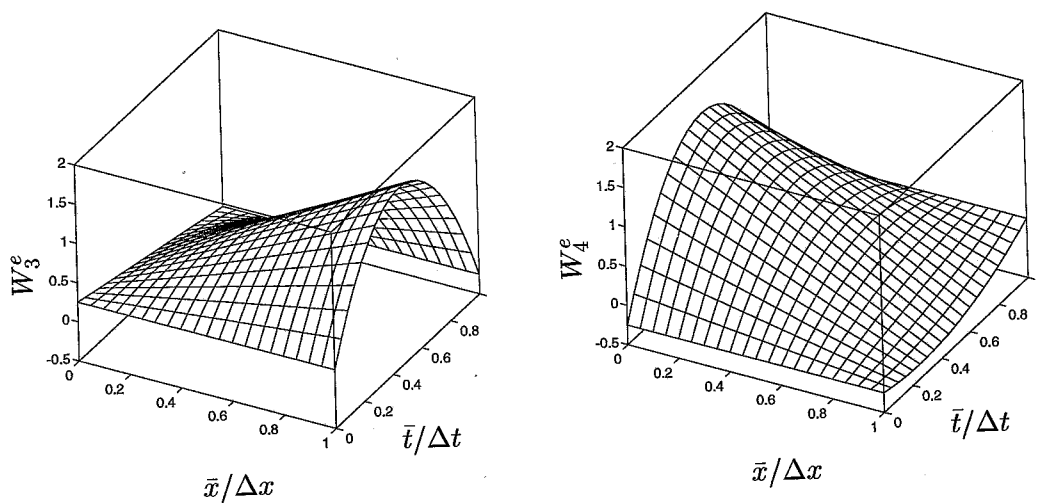


Figura 5.5: Petrov-Galerkin: funções de peso lineares no espaço e quadráticas, assimétricas, no tempo.

Petrov-Galerkin: neste caso as funções de peso nodais são mais elaboradas, sendo para os nós 3 e 4, respectivamente (cf. Figura 5.5):

$$W_3^e(x, t) = P_3^e(x, t) + \alpha \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial}{\partial x} P_3^e(x, t) + \beta \frac{\Delta x \Delta t}{4} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} P_3^e(x, t), \quad (5.5a)$$

$$W_4^e(x, t) = P_4^e(x, t) + \alpha \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial}{\partial x} P_4^e(x, t) + \beta \frac{\Delta x \Delta t}{4} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} P_4^e(x, t). \quad (5.5b)$$

Como se mostrará na secção seguinte, estas funções de peso introduzem termos em β que permitirão anular o erro numérico dispersivo de segunda ordem, enquanto o termo em α introduz dissipação numérica de terceira ordem.

5.1.2 Análise de precisão e estabilidade

Por um processo idêntico ao utilizado para as formulações de Bubnov-Galerkin aplicadas às equações do tipo Boussinesq no capítulo anterior, fazer-se-á a análise da precisão e da estabilidade do esquema numérico resultante da formulação de Petrov-Galerkin do modelo RLW (5.2). Este estudo é restringido a pequenas profundidades relativas, para as quais $\sigma \approx kh$.

Equação discreta

A discretização da equação (5.2) utilizando as funções de forma (5.3) e as funções de peso (5.5) sobre uma malha regular de elementos finitos, i.e. Δx constante (cf. Figura 5.6), conduz à seguinte equação discreta para o i -ésimo nó e para o $(n + 1)$ -ésimo

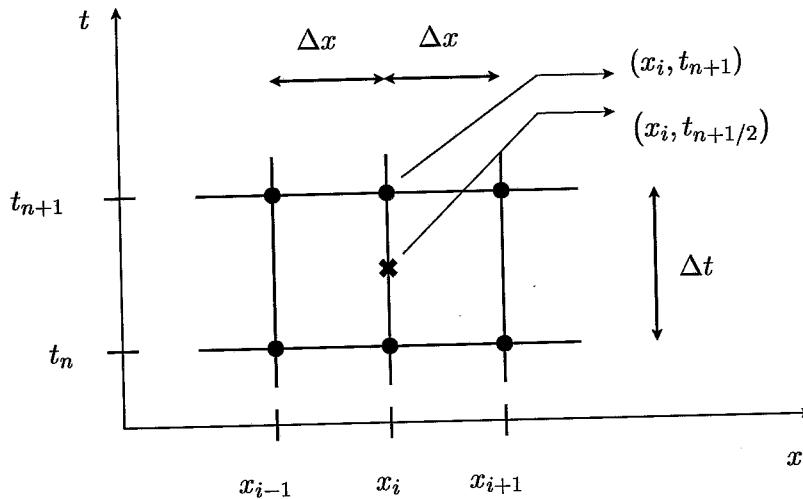


Figura 5.6: Malha regular a uma dimensão horizontal e no tempo.

instante:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{6 \Delta t} \left[\left(\hat{\zeta}_{i+1}^{n+1} + 4 \hat{\zeta}_i^{n+1} + \hat{\zeta}_{i-1}^{n+1} \right) - \left(\hat{\zeta}_{i+1}^n + 4 \hat{\zeta}_i^n + \hat{\zeta}_{i-1}^n \right) \right] \\
 & + \frac{3}{16} \frac{C_0}{h \Delta x} \left\{ \left[\left(\hat{\zeta}_{i+1}^{n+1} \right)^2 - \left(\hat{\zeta}_{i-1}^{n+1} \right)^2 \right] + \left[\left(\hat{\zeta}_{i+1}^n \right)^2 - \left(\hat{\zeta}_{i-1}^n \right)^2 \right] \right\} \\
 & + \frac{1}{4} \frac{C_0}{\Delta x} \left[\left(\hat{\zeta}_{i+1}^{n+1} - \hat{\zeta}_{i-1}^{n+1} \right) - \left(\hat{\zeta}_{i+1}^n - \hat{\zeta}_{i-1}^n \right) \right] \\
 & - \frac{1}{6} \frac{1}{\Delta t} \frac{h^2}{\Delta x^2} \left[\left(\hat{\zeta}_{i+1}^{n+1} - 2 \hat{\zeta}_i^{n+1} + \hat{\zeta}_{i-1}^{n+1} \right) - \left(\hat{\zeta}_{i+1}^n - 2 \hat{\zeta}_i^n + \hat{\zeta}_{i-1}^n \right) \right] \\
 & - \frac{1}{4} \frac{\alpha}{\Delta t} \left[\left(\hat{\zeta}_{i+1}^{n+1} - \hat{\zeta}_{i-1}^{n+1} \right) - \left(\hat{\zeta}_{i+1}^n - \hat{\zeta}_{i-1}^n \right) \right] \\
 & + \frac{\beta}{4} \frac{C_0}{\Delta x} \left[\left(\hat{\zeta}_{i+1}^{n+1} - 2 \hat{\zeta}_i^{n+1} + \hat{\zeta}_{i-1}^{n+1} \right) - \left(\hat{\zeta}_{i+1}^n - 2 \hat{\zeta}_i^n + \hat{\zeta}_{i-1}^n \right) \right] \\
 & + \frac{\alpha}{4} \frac{C_0}{\Delta x} \left[\left(\hat{\zeta}_{i+1}^{n+1} - 2 \hat{\zeta}_i^{n+1} + \hat{\zeta}_{i-1}^{n+1} \right) + \left(\hat{\zeta}_{i+1}^n - 2 \hat{\zeta}_i^n + \hat{\zeta}_{i-1}^n \right) \right] \\
 & + \frac{3}{16} \frac{\beta}{h^2} \frac{C_0}{\Delta x} \left\{ \left[\left(\hat{\zeta}_{i+1}^{n+1} \right)^2 - \left(\hat{\zeta}_i^{n+1} \right)^2 + \left(\hat{\zeta}_{i-1}^{n+1} \right)^2 \right] - \left[\left(\hat{\zeta}_{i+1}^n \right)^2 - \left(\hat{\zeta}_i^n \right)^2 + \left(\hat{\zeta}_{i-1}^n \right)^2 \right] \right\} \\
 & - \frac{3}{16} \frac{\alpha}{h^2} \frac{C_0}{\Delta x} \left\{ \left[\left(\hat{\zeta}_{i+1}^{n+1} \right)^2 - \left(\hat{\zeta}_i^{n+1} \right)^2 + \left(\hat{\zeta}_{i-1}^{n+1} \right)^2 \right] + \left[\left(\hat{\zeta}_{i+1}^n \right)^2 - \left(\hat{\zeta}_i^n \right)^2 + \left(\hat{\zeta}_{i-1}^n \right)^2 \right] \right\} \\
 & = 0,
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

onde $\hat{\zeta}_i^n = \hat{\zeta}(x_i, t_n)$ e $C_0 = \sqrt{gh}$ é o valor assintótico da celeridade para ondas longas.

Equação diferencial equivalente

Desenvolvendo $\hat{\zeta}_{i+\ell}^{n+1/2+m}$, para $m = -1/2, +1/2$ e $\ell = -1, 0, 1$, como uma série de Taylor em torno de $\hat{\zeta}_i^{n+1/2}$, i.e.

$$\begin{aligned}
 \hat{\zeta}_{i+\ell}^{n+1/2+m} = & \hat{\zeta}_i^{n+1/2} + (\ell \Delta x) \left(\frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial x} \right)_i^{n+1/2} + (m \Delta t) \left(\frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial t} \right)_i^{n+1/2} + \frac{(\ell \Delta x)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \hat{\zeta}}{\partial x^2} \right)_i^{n+1/2} \\
 & + (\ell \Delta x m \Delta t) \left(\frac{\partial^2 \hat{\zeta}}{\partial x \partial t} \right)_i^{n+1/2} + \frac{(m \Delta t)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \hat{\zeta}}{\partial t^2} \right)_i^{n+1/2} + \frac{(\ell \Delta x)^3}{6} \left(\frac{\partial^3 \hat{\zeta}}{\partial x^3} \right)_i^{n+1/2} \\
 & + \frac{(\ell \Delta x)^2 m \Delta t}{2} \left(\frac{\partial^3 \hat{\zeta}}{\partial x^2 \partial t} \right)_i^{n+1/2} + \frac{\ell \Delta x (m \Delta t)^2}{2} \left(\frac{\partial^3 \hat{\zeta}}{\partial x \partial t^2} \right)_i^{n+1/2} \\
 & + \frac{(m \Delta t)^3}{6} \left(\frac{\partial^3 \hat{\zeta}}{\partial t^3} \right)_i^{n+1/2} + \frac{(\ell \Delta x)^4}{24} \left(\frac{\partial^4 \hat{\zeta}}{\partial x^4} \right)_i^{n+1/2} + \frac{(\ell \Delta x)^3 m \Delta t}{6} \left(\frac{\partial^4 \hat{\zeta}}{\partial x^3 \partial t} \right)_i^{n+1/2} \\
 & + \frac{(\ell \Delta x)^2 (m \Delta t)^2}{2} \left(\frac{\partial^4 \hat{\zeta}}{\partial x^2 \partial t^2} \right)_i^{n+1/2} + \frac{\ell \Delta x (m \Delta t)^3}{6} \left(\frac{\partial^4 \hat{\zeta}}{\partial x \partial t^3} \right)_i^{n+1/2} \\
 & + \frac{(m \Delta t)^4}{24} \left(\frac{\partial^4 \hat{\zeta}}{\partial t^4} \right)_i^{n+1/2} \\
 & + \mathcal{O}((\Delta x)^5, (\Delta x)^4 \Delta t, (\Delta x)^3 (\Delta t)^2, (\Delta x)^2 (\Delta t)^3, \Delta x (\Delta t)^4, (\Delta t)^5),
 \end{aligned}$$

e após alguma manipulação algébrica com aplicação recursiva da equação (5.1) para rearranjo das derivadas, a equação às diferenças (5.6) pode ser reescrita como uma equação diferencial equivalente para o ponto $(x_i, t_{n+1/2})$ (cf. Figura 5.6), que na sua forma adimensional é:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial t} \right)_i^{n+1/2} + \left(\frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial x} \right)_i^{n+1/2} + \frac{3}{4} \epsilon \left(\frac{\partial \hat{\zeta}^2}{\partial x} \right)_i^{n+1/2} = & \frac{(kh)^2}{6} \left(\frac{\partial^3 \hat{\zeta}}{\partial x^2 \partial t} \right)_i^{n+1/2} \\
 & + \left(-\frac{1}{4} \beta + \frac{1}{12} Cr \right) (k\Delta x)^2 Cr \left(\frac{\partial^3 \hat{\zeta}}{\partial x^2 \partial t} \right)_i^{n+1/2} \\
 & + \alpha \left(\frac{(k\Delta x)^3}{4} Cr^2 - \frac{(k\Delta x)^3}{24} - \frac{k\Delta x}{12} (kh)^2 \right) \left(\frac{\partial^4 \hat{\zeta}}{\partial x^4} \right)_i^{n+1/2} \\
 & + \mathcal{O}(\epsilon^2, \epsilon (kh)^2, Cr^2 \epsilon (k\Delta x)^2, (k\Delta x)^2 (kh)^2, (k\Delta x)^4).
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Note-se que um resultado semelhante teria sido obtido, caso se tivesse optado pelo ponto (x_i, t_{n+1}) como centro do desenvolvimento em série de Taylor.

Na equação (5.7),

$$Cr = \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

é o número de Courant computacional expresso em variáveis adimensionais.

Facilmente se verifica, por comparação das equações (5.1) e (5.7), que para $\beta = 0$ e $\alpha = 0$, i.e. esquema tipo Bubnov-Galerkin, a formulação de elementos finitos apresenta um termo dispersivo numérico de ordem $\mathcal{O}((k\Delta x)^2)$ que em condições de pequena profundidade, onde por motivo de limitações de capacidade de cálculo $\Delta x \sim h$, terá a mesma ordem de grandeza do termo analítico. Nestas circunstâncias o esquema é também não dissipativo dado a sua equação diferencial equivalente não incluir derivadas de ordem par.

O erro de dispersão numérica pode ser corrigido fazendo na formulação de Petrov-Galerkin

$$\beta = \frac{Cr}{3}. \quad (5.8)$$

Por outro lado, é possível garantir a estabilidade do esquema numérico, sem comprometer a sua precisão, através da introdução de um termo dissipativo de terceira ordem, associado a uma derivada de quarta ordem. Para tal, o coeficiente α deverá ser dado por

$$\alpha = \frac{Cr^2}{1 - Cr^2 + 2 \left(\frac{h}{\Delta x} \right)^2}. \quad (5.9)$$

Substituindo (5.8) e (5.9) na equação diferencial equivalente (5.7), obtém-se:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial t} \right)_i^{n+\frac{1}{2}} + \left(\frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial x} \right)_i^{n+\frac{1}{2}} + \frac{3}{4} \epsilon \left(\frac{\partial^2 \hat{\zeta}}{\partial x^2} \right)_i^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{(kh)^2}{6} \left(\frac{\partial^3 \hat{\zeta}}{\partial x^2 \partial t} \right)_i^{n+\frac{1}{2}} \\ &- \frac{1}{24} Cr^2 (k\Delta x)^3 \left(\frac{\partial^4 \hat{\zeta}}{\partial x^4} \right)_i^{n+\frac{1}{2}} \\ &+ \mathcal{O}(\epsilon^2, \epsilon (kh)^2, Cr^2 \epsilon (k\Delta x)^2, (k\Delta x)^2 (kh)^2, (k\Delta x)^4). \end{aligned}$$

Características dispersivas do esquema numérico

Desprezando os termos não lineares da equação RLW, i.e. $\epsilon \approx 0$, e supondo que ζ é uma função que admite um desenvolvimento em série de Fourier, ter-se-á que a

solução geral para ζ é do tipo

$$\zeta(x, t) = \Re \left(\int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i[kx - \omega(k)t]} e^{-s(k)t} dk \right), \quad (5.10)$$

onde i é a unidade imaginária, $k = 2\pi/\lambda$ é o número de onda, sendo λ o comprimento de onda, $A(k)$ é a função densidade espectral, $\omega(k)$ é a frequência angular da onda. e $s(k)$ é o coeficiente de amortecimento. Em virtude das propriedades das séries de Fourier, cada termo dessa série é também solução do problema linear. Tome-se pois a seguinte solução particular para ζ :

$$\zeta(x, t) = \Re(a e^{i(kx - \omega t)} e^{-s t}), \quad (5.11)$$

onde a é a amplitude da onda. Fazendo coincidir o i -ésimo nó com $x = 0$ e o nível n com $t = 0$, tem-se sem perda de generalidade que:

$$\hat{\zeta}_{i-1}^n = \Re(a e^{-i k \Delta x}), \quad (5.12a)$$

$$\hat{\zeta}_i^n = \Re(a), \quad (5.12b)$$

$$\hat{\zeta}_{i+1}^n = \Re(a e^{i k \Delta x}), \quad (5.12c)$$

$$\hat{\zeta}_{i-1}^{n+1} = \Re(G a e^{-i k \Delta x}), \quad (5.12d)$$

$$\hat{\zeta}_i^{n+1} = \Re(G a), \quad (5.12e)$$

$$\hat{\zeta}_{i+1}^{n+1} = \Re(G a e^{i k \Delta x}), \quad (5.12f)$$

sendo G o coeficiente de propagação, dado por

$$G = e^{-i(\omega - i s)\Delta t}.$$

Por conveniência de escrita, o símbolo $\Re$, que designa a parte real, será doravante suprimido.

Substituindo a solução particular (5.12) na equação discreta (5.6) e resolvendo a equação resultante para o coeficiente de propagação G , obtém-se:

$$G = \frac{A(kh)^2 + (B + D\beta + E\alpha)(k\Delta x)^2}{A(kh)^2 + (\bar{B} + D\beta - \bar{E}\alpha)(k\Delta x)^2} \quad (5.13)$$

com

$$\begin{aligned} A &= -2 \left[1 - \cos(k\Delta x) \right], \\ B &= -4 - 2 \cos(k\Delta x) + i 3 Cr \sin(k\Delta x), \\ D &= 3 Cr \left[1 - \cos(k\Delta x) \right], \\ E &= 3 Cr \left[1 - \cos(k\Delta x) \right] + i 3 Cr \sin(k\Delta x). \end{aligned}$$

Os símbolos $\bar{B}$ e $\bar{E}$ representam os complexos conjugados de B e E respectivamente.

As relações de dispersão e de dissipação numéricas,

$$\omega = \omega(kh, k\Delta x, Cr, \beta, \alpha),$$

$$C = C(kh, k\Delta x, Cr, \beta, \alpha),$$

$$s = s(kh, k\Delta x, Cr, \beta, \alpha),$$

onde, recorda-se, $Cr = \sqrt{gh} \Delta t / \Delta x$ é o número de Courant, são dadas por:

$$\frac{\omega}{\sqrt{g/h}} = \Re \left[i \frac{h}{Cr \Delta x} \log G \right], \quad (5.14a)$$

$$\frac{C}{\sqrt{gh}} = \Re \left[i \frac{1}{Cr k \Delta x} \log G \right], \quad (5.14b)$$

$$\frac{1}{\sqrt{gh}} \frac{s}{k} = \Im \left[-i \frac{1}{Cr k \Delta x} \log G \right], \quad (5.14c)$$

onde $\Im$ designa a parte imaginária.

Recorde-se que a celeridade de fase do modelo RLW é dada por:

$$\frac{C_{RLW}}{\sqrt{gh}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{6} (kh)^2}, \quad (5.15)$$

e a sua expansão em série de Taylor em torno de $kh = 0$ é:

$$\frac{C_{RLW}}{\sqrt{gh}} = 1 - \frac{1}{6} (kh)^2 + \frac{1}{36} (kh)^4 + \mathcal{O}((kh)^6). \quad (5.16)$$

Além disso, o modelo RLW é não dissipativo.

A expansão em série de Taylor da celeridade e do coeficiente de amortecimento

numéricos, por outro lado, conduz à igualdade

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{gh}} \left(C - i \frac{s}{k} \right) &= 1 - \frac{1}{6} (kh)^2 - \frac{Cr}{4} \left(\frac{Cr}{3} - \beta \right) (k\Delta x)^2 \\
 &\quad - i \alpha \frac{1}{12} \left[(k\Delta x) (kh)^2 + \frac{1}{2} (1 - 3Cr\beta) (k\Delta x)^3 \right] \\
 &\quad + \frac{1}{36} (kh)^4 + \frac{1}{24} \left[\left(\alpha^2 - \frac{1}{3} \right) + (Cr - 2\beta) Cr \right] (k\Delta x)^2 (kh)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{4} \left[\frac{\alpha^2}{12} + \frac{Cr^2}{20} + \frac{Cr}{4} \beta \left(\frac{1}{3} - \alpha^2 - Cr^2 \right) \right] (k\Delta x)^4 \\
 &\quad + \mathcal{O} \left((k\Delta x)^5, (k\Delta x) (kh)^4, (k\Delta x)^3 (kh)^2, \right. \\
 &\quad \left. (k\Delta x)^6, (k\Delta x)^2 (kh)^4, (kh)^6 \right).
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

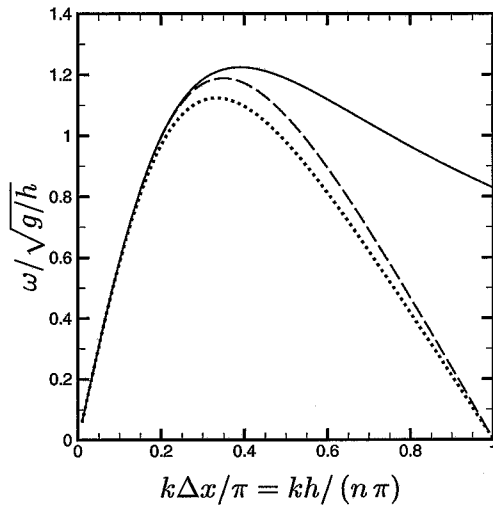
Por inspecção da expansão (5.17), admitindo que $\Delta x \sim h$, é imediato concluir que fazendo $\beta = Cr/3$ e $\alpha = 0$ o esquema numérico é de quarta ordem. Neste caso ainda, admitindo que $\Delta x = h/n$, é interessante analisar o aproximante de Padé de ordem [0/2] da celeridade de fase numérica da formulação de Petrov-Galerkin (PG):

$$\frac{1}{\sqrt{gh}} [0/2] C_{PG} = \frac{1}{1 + \frac{1}{6} (kh)^2}. \tag{5.18}$$

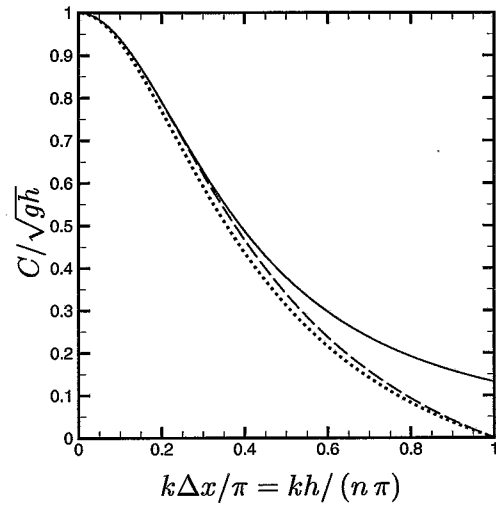
Como se pode verificar, este aproximante é igual à celeridade de fase analítica do modelo RLW. O esquema de Bubnov-Galerkin (BG), para o qual $\alpha = 0$ e $\beta = 0$, por seu lado, introduz um erro no aproximante:

$$\frac{1}{\sqrt{gh}} [0/2] C_{BG} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{6} + \frac{Cr^2}{12n^2} \right) (kh)^2}. \tag{5.19}$$

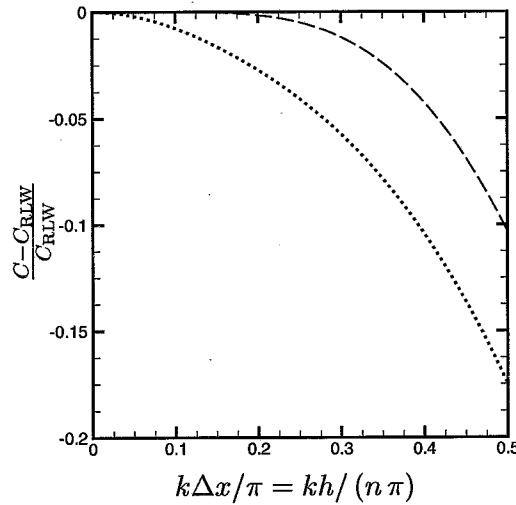
A frequência angular e a celeridade de fase numéricas, para o caso não dissipativo, e o erro relativo da celeridade de fase numérica em relação à celeridade de fase do modelo RLW estão representadas graficamente na Figura 5.7 para $Cr = 1$ e $n = h/\Delta x = 2$. Note-se que para outras combinações de n e Cr , nomeadamente $n \sim 10$ e/ou $Cr \ll 1$ as duas formulações, BG e PG, apresentam relações de dispersão muito próximas. No entanto nesses casos o esforço computacional será muito maior. Além disso, a formulação de Petrov-Galerkin dissipativa, com $\alpha \neq 0$ dado pela expressão (5.9), garante a estabilidade do método, permitindo a obtenção



(a) Frequência angular.



(b) Celeridade de fase.



(c) Erro relativo.

Figura 5.7: Relações de dispersão dos esquemas numéricos para o modelo RLW, com $n = 2$ e $Cr = 1$: analítico (—); Petrov-Galerkin (---); Bubnov-Galerkin (···).

de soluções com precisão de terceira ordem, mesmo para valores de Cr superiores a 1 (cf. Avilez-Valente e Seabra-Santos, 1999).

É evidente da inspeção da Figura 5.7 que, tal como na formulação de Bubnov-Galerkin, também na formulação de Petrov-Galerkin as ondas de comprimento $\lambda = 2\Delta x$ têm celeridade nula, podendo dar origem a oscilações numéricas. Além

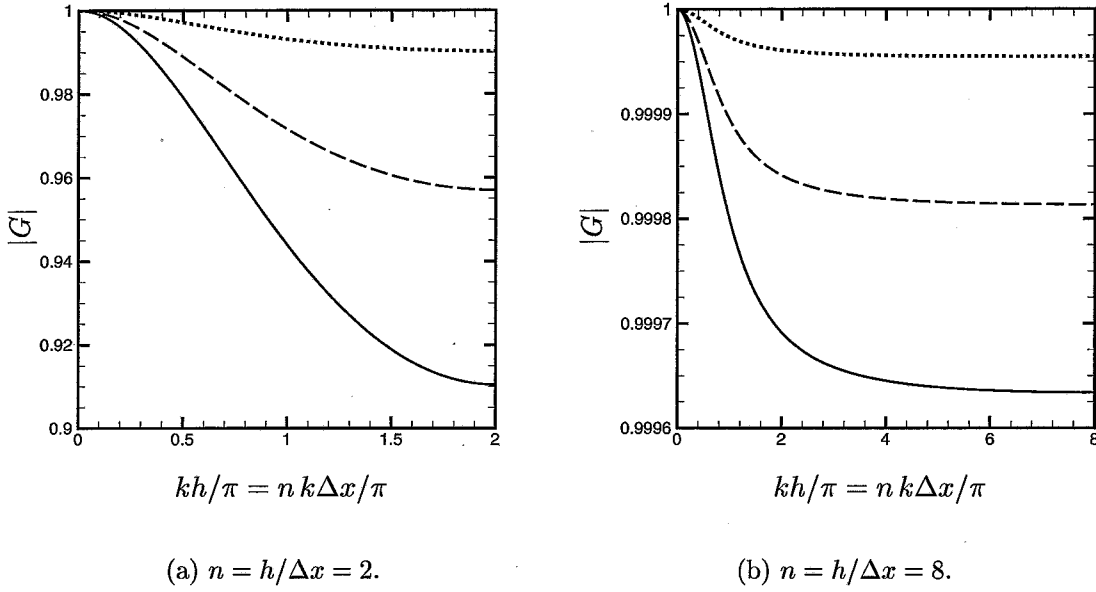


Figura 5.8: Coeficiente de amplificação do esquema de Petrov-Galerkin aplicado ao modelo RLW: $Cr = 1$ (—); $Cr = 0.8$ (---); $Cr = 0.5$ (···).

disso, também a aplicação $\omega \rightarrow k$ não é injectiva, pelo que uma perturbação de baixa frequência pode dar origem a ondas de pequeno comprimento de onda sem qualquer significado físico. O recurso ao termo dissipativo permitirá à formulação PG manter a estabilidade. Nos exemplos apresentados no Capítulo 6, com $\alpha = 0$, esta situação não é em geral aparente pois apenas se estuda a propagação de solitões. Na propagação deste tipo de ondas existe um perfeito balanço entre os termos não linear convectivo e dispersivo. Apenas no caso de um número de Courant bastante grande será evidente a perturbação introduzida pela dispersão numérica.

Estabilidade dos esquemas numéricos

O coeficiente de propagação, G , é igual à razão entre dois valores sucessivos no tempo de $\hat{\zeta}$ no ponto x_i , i.e.

$$G = \frac{\hat{\zeta}_i^{n+1}}{\hat{\zeta}_i^n}.$$

Deste modo, o seu módulo, que designaremos por coeficiente de amplificação, é uma medida do crescimento/decrescimento da amplitude local da onda com o tempo. De acordo com o critério de estabilidade de von Neumann, não existindo uma fonte local de energia, o esquema numérico é estável se e só se $|G| \leq 1$ para qualquer valor do número de onda k .

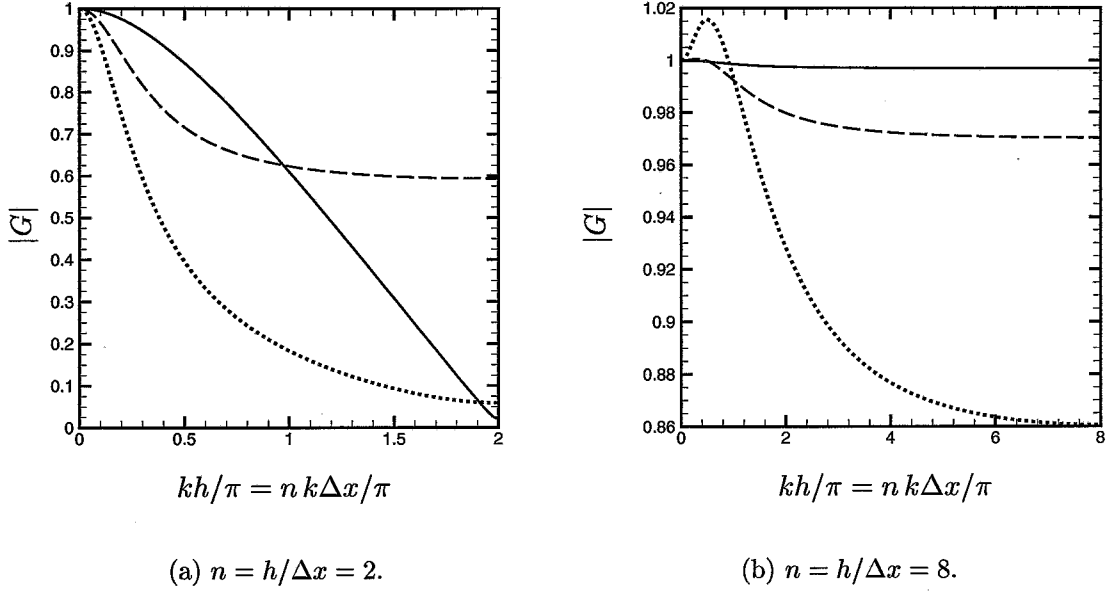


Figura 5.9: Coeficiente de amplificação do esquema de Petrov-Galerkin aplicado ao modelo RLW: $Cr = 2$ (—); $Cr = 4$ (---); $Cr = 6$ (···).

Para $\alpha = 0$, verifica-se que $|G| = 1$ dado que, neste caso, G é igual à razão entre dois números complexos conjugados. Nestas circunstâncias, o esquema é neutralmente estável e não dissipativo. Para $\alpha \neq 0$ e dado pela expressão (5.9) obtém-se um esquema com um grau de dissipação muito pequeno e de elevada precisão, i.e. afectando de forma mais gravosa os pequenos comprimentos de onda, como se pode verificar na Figura 5.8 para $Cr \leq 1$. O esquema é, no entanto, condicionalmente estável e um número de Courant elevado associado a uma malha espacial bastante discretizada pode conduzir a situações de instabilidade, i.e. $|G| > 1$ para alguns comprimentos de onda (cf. Figura 5.9(b), para $Cr = 4$ e $Cr = 6$, com $n = 8$).

5.1.3 Esquema predictor-corrector

A solução numérica é obtida resolvendo um sistema de equações discretas do tipo (5.6). Devido à presença de termos não lineares, é necessário recorrer a algum tipo de iteração. O que se propõe é um esquema tipo predictor-corrector, em que o passo corrector corresponde precisamente à formulação analisada nas secções anteriores.

Ter-se-á então, supondo uma discretização uniforme do domínio:

- passo predictor:

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{M} + \frac{h^2}{6} \mathbf{K} \right) \Delta \zeta = & -\Delta t \left(\sqrt{gh} \mathbf{C} \zeta^n + \frac{3}{4} \sqrt{\frac{g}{h}} \mathbf{C} \zeta_2^n \right) \\ & - \tilde{\alpha} \frac{\Delta x \Delta t}{2} \mathbf{K} \left(\sqrt{gh} \zeta^n + \frac{3}{4} \sqrt{\frac{g}{h}} \zeta_2^n \right); \quad (5.20) \end{aligned}$$

- passo corrector:

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{M} + \frac{h^2}{6} \mathbf{K} \right) \Delta \zeta = & -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C} \left[\sqrt{gh} \left(\zeta^n + \zeta^{(n+1)*} \right) + \frac{3}{4} \sqrt{\frac{g}{h}} \left(\zeta_2^n + \zeta_2^{(n+1)*} \right) \right] \\ & - \left(\alpha \frac{\Delta x}{2} \mathbf{C}^T - \beta \frac{\Delta x \Delta t}{4} \sqrt{gh} \mathbf{K} \right) \Delta \zeta^* + \beta \frac{\Delta x \Delta t}{4} \frac{3}{4} \sqrt{\frac{g}{h}} \mathbf{K} \Delta \zeta_2^* \\ & - \alpha \frac{\Delta x \Delta t}{4} \mathbf{K} \left[\sqrt{gh} \left(\zeta^n + \zeta^{(n+1)*} \right) + \frac{3}{4} \sqrt{\frac{g}{h}} \left(\zeta_2^n + \zeta_2^{(n+1)*} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Nestas duas equações, os vectores ζ^n e ζ^{n+1} são os vectores dos valores nodais da função $\hat{\zeta}$ nos instantes $t_n = n \Delta t$ e $t_{n+1} = (n+1) \Delta t$, respectivamente, enquanto os vectores ζ_2^n e ζ_2^{n+1} correspondem aos quadrados dos mesmos valores. Os vectores $\Delta \zeta$ e $\Delta \zeta_2$ são os vectores dos incrementos dos valores nodais da função $\hat{\zeta}$ e do seu quadrado, respectivamente, entre os instantes t_n e t_{n+1} , i.e.

$$\begin{aligned} \Delta \zeta &= \zeta^{n+1} - \zeta^n, \\ \Delta \zeta_2 &= (\zeta^2)^{n+1} - (\zeta^2)^n. \end{aligned}$$

O coeficiente $\tilde{\alpha}$ é definido por forma a otimizar a precisão do predictor. As matrizes $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{K}$ são

$$\mathbf{M} = \frac{\Delta x}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ & \cdots & & & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ & & & \cdots & \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & \\ & \cdots & & & \\ & & -1 & 0 & 1 \\ & & & \cdots & \\ & & & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{K} = \frac{1}{\Delta x} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ & \cdots & & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & \cdots & & \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

As equações (5.20) e (5.21) terão de ser ligeiramente modificadas para acomodar as condições de fronteira. As quantidades denotadas com um asterisco, $()^*$, correspondem à previsão do passo predictor, ou à iteração anterior do passo corrector.

Precisão do predictor

A precisão do predictor é analisada recorrendo à expansão em série de Taylor da celeridade de fase, C^* , e da dissipação numérica, s^* , da solução linear da equação (5.20). Conclui-se então que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{gh}} \left(C^* - i \frac{s^*}{k} \right) &= 1 - \frac{1}{6} (kh)^2 - i \frac{1}{2} (\tilde{\alpha} - Cr) (k\Delta x) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\tilde{\alpha} - \frac{2}{3} Cr \right) Cr (k\Delta x)^2 - i \frac{1}{6} (Cr - 2\tilde{\alpha}) (k\Delta x) (kh)^2 \\ &- i \frac{1}{24} (\tilde{\alpha} - 12 Cr^2 \tilde{\alpha} + 3 Cr \tilde{\alpha}^2 + 6 Cr^3) (k\Delta x)^3 + TOS, \end{aligned} \quad (5.22)$$

onde TOS são termos de ordem superior.

Da análise da expressão (5.22) é fácil concluir que fazendo

$$\tilde{\alpha} = Cr, \quad (5.23)$$

se obtém um esquema de segunda ordem, $\mathcal{O}((k\Delta x)^2)$, com dissipação de terceira ordem. De facto para $\tilde{\alpha} = Cr$ e fazendo $kh = n k\Delta x$, resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{gh}} \left(C^* - i \frac{s^*}{k} \right) &= 1 - \frac{1}{6} (kh)^2 + \frac{1}{6} Cr^2 (k\Delta x)^2 \\ &- i \frac{1}{24} Cr (2n^2 + 1 - 3Cr^2) (k\Delta x)^3 + TOS. \end{aligned} \quad (5.24)$$

O mecanismo dissipativo é estável e de terceira ordem desde que

$$0 < 2n^2 + 1 - 3Cr^2 < \frac{\pi^3}{24}. \quad (5.25)$$

Pode-se no entanto mostrar que mesmo para uma malha bastante fina, n elevado, o efeito dissipativo é muito reduzido.

5.2 Modelo de Boussinesq a 1DH

Considere-se o modelo de Boussinesq a uma dimensão horizontal para fundos fixos muito suaves, escrito na forma quase linear com variáveis vectoriais. O problema clássico consiste em encontrar a função vectorial $\mathbf{U} = \mathbf{U}(x, t)$ tal que:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial^3 \mathbf{U}}{\partial x^2 \partial t} + \mathbf{C} \mathbf{U} = \mathbf{0}, \quad \forall (x, t) \in [0, L] \times [0, +\infty[\quad (5.26a)$$

com as condições iniciais e de fronteira¹ de Dirichlet:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0, \quad \text{para } (x, 0), \quad (5.26b)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_1, \quad \text{para } (0, t), \quad (5.26c)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_2, \quad \text{para } (L, t). \quad (5.26d)$$

Nas equações do problema (5.26), o vector $\mathbf{U}$ e as matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ são respectivamente

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \zeta \\ \bar{u} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \bar{u} & h + \zeta \\ g & \bar{u} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \frac{h^2}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial h}{\partial x} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5.2.1 Formulação de Petrov-Galerkin

A formulação de Galerkin do mesmo problema, baseada numa discretização em elementos finitos no espaço e no tempo, será encontrar a função vectorial aproximada $\hat{\mathbf{U}}(x, t) \in \mathcal{V}_0^1 \times \mathcal{V}_0^1$ e definida em $]0, L[\times]t_n, t_{n+1}[$, que satisfaz a equação

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_0^L \hat{\mathbf{W}} \cdot \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{U}}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial^3 \hat{\mathbf{U}}}{\partial x^2 \partial t} + \mathbf{C} \hat{\mathbf{U}} \right) dx dt = 0, \quad \forall \hat{\mathbf{W}}(x, t). \quad (5.27)$$

As funções vectoriais de interpolação são funções bilineares no espaço-tempo,

¹Para uma correcta caracterização das condições de fronteira, ver o Capítulo 3.

dadas em cada elemento por

$$\begin{bmatrix} \hat{\zeta} \\ \hat{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\zeta}_1 & \hat{\zeta}_2 & \hat{\zeta}_3 & \hat{\zeta}_4 \\ \hat{u}_1 & \hat{u}_2 & \hat{u}_3 & \hat{u}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1^e \\ N_2^e \\ N_3^e \\ N_4^e \end{bmatrix}, \quad (5.28)$$

onde N_i^e , $i = 1, 2, 3, 4$, são as funções de forma escalares definidas em (5.3). As funções de peso para uma formulação de Petrov-Galerkin semelhante à utilizada para o modelo RLW (cf. §5.1.1) são funções vectoriais, lineares no espaço e quadráticas no tempo, dadas por

$$\mathbf{W}_i^e(x, t) = \mathbf{P}_i^e + \alpha \frac{\Delta x}{2C_0} \mathbf{T}_\alpha (\mathbf{A}^\ell)^T \frac{\partial \mathbf{P}_i^e}{\partial x} + \beta \frac{\Delta x \Delta t}{4C_0} \mathbf{T}_\beta (\mathbf{A}^\ell)^T \frac{\partial^2 \mathbf{P}_i^e}{\partial x \partial t}, \quad (5.29)$$

onde

$$\mathbf{P}_i^e = \begin{bmatrix} P_i^e \\ P_i^e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_\alpha = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{A}^\ell = \begin{bmatrix} 0 & h \\ g & 0 \end{bmatrix},$$

com as funções peso escalares P_3^e e P_4^e definidas pelas expressões (5.4). O tensor $\mathbf{T}_\beta$ destina-se a garantir que os termos de dispersão numérica em $\hat{\zeta}$ e $\hat{u}$ são simultaneamente corrigidos nas equações da continuidade e de conservação da quantidade de movimento. O tensor $\mathbf{T}_\alpha$ introduz um termo dissipativo de terceira ordem na equação de conservação da quantidade de movimento e, consequentemente induz estabilidade, ao mesmo tempo que evita a presença de termos desse tipo na equação da continuidade, por forma a garantir a conservação da massa.

Finalmente, a formulação de Petrov-Galerkin pode ser escrita como um sistema de duas equações escalares, após integração por partes dos termos dispersivos. O problema passa então a ser: encontrar as funções $\hat{\zeta}, \hat{u} \in \mathcal{V}_0^1 \times \mathcal{V}_0^1$ tais que

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_0^L \left(\hat{\varphi} \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial t} + \hat{\varphi} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \right) dx dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_0^L \beta \frac{\Delta x \Delta t}{4C_0} h \frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial x \partial t} \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} dx dt = 0, \quad \forall \hat{\varphi} \in \mathcal{V}_0^1 \times \mathcal{V}_0^2, \quad (5.30a)$$

e

$$\begin{aligned}
& \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_0^L \left(\hat{\varphi} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \hat{\varphi} \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} + \frac{h^2}{3} \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x \partial t} \right) dx dt \\
& + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_0^L \alpha \frac{\Delta x}{C_0} g \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x} \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \right) dx dt \\
& + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_0^L \beta \frac{\Delta x \Delta t}{4 C_0} g \frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial x \partial t} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} dx dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\hat{\varphi} \frac{h^2}{3} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x \partial t} \right]_0^L dt = 0, \\
& \forall \hat{\varphi} \in \mathcal{V}_0^1 \times \mathcal{V}_0^2.
\end{aligned} \tag{5.30b}$$

As variáveis $\hat{p}$ e $\hat{q}$ são definidas em cada nó por

$$\hat{p}_i = (h_i + \hat{\zeta}_i) \hat{u}_i \quad \text{e} \quad \hat{q}_i = \frac{\hat{u}_i^2}{2} + g \hat{\zeta}_i. \tag{5.31}$$

5.2.2 Análise de precisão e estabilidade

Equações discretas

A discretização da equação (5.27), recorrendo às funções de interpolação elementares (5.28) e às funções de peso (5.29), sobre uma malha regular de elementos finitos (cf. Figura 5.6), admitindo uma profundidade, h , constante, conduz às seguintes equações discretas para o i -ésimo nó no instante $t_{n+1} = (n+1) \Delta t$:

$$\begin{aligned}
& \frac{\Delta x}{6} \left[\left(\hat{\zeta}_{i+1}^{n+1} + 4 \hat{\zeta}_i^{n+1} + \hat{\zeta}_{i-1}^{n+1} \right) - \left(\hat{\zeta}_{i+1}^n + 4 \hat{\zeta}_i^n + \hat{\zeta}_{i-1}^n \right) \right] \\
& + \frac{\Delta t}{4} \left\{ \left[\left(h + \hat{\zeta}_{i+1}^{n+1} \right) \hat{u}_{i+1}^{n+1} - \left(h + \hat{\zeta}_{i-1}^{n+1} \right) \hat{u}_{i-1}^{n+1} \right] \right. \\
& \quad \left. + \left[\left(h + \hat{\zeta}_{i+1}^n \right) \hat{u}_{i+1}^n - \left(h + \hat{\zeta}_{i-1}^n \right) \hat{u}_{i-1}^n \right] \right\} \\
& + \beta \frac{\Delta t}{8 C_0} h \left\{ \left[\left(\hat{u}_{i+1}^{n+1} \right)^2 - 2 \left(\hat{u}_i^{n+1} \right)^2 + \left(\hat{u}_{i-1}^{n+1} \right)^2 \right] - \left[\left(\hat{u}_{i+1}^n \right)^2 - 2 \left(\hat{u}_i^n \right)^2 + \left(\hat{u}_{i-1}^n \right)^2 \right] \right\} \\
& + \beta \frac{\Delta t}{4} C_0 \left[\left(\hat{\zeta}_{i+1}^{n+1} - 2 \hat{\zeta}_i^{n+1} + \hat{\zeta}_{i-1}^{n+1} \right) - \left(\hat{\zeta}_{i+1}^n - 2 \hat{\zeta}_i^n + \hat{\zeta}_{i-1}^n \right) \right] = 0
\end{aligned} \tag{5.32a}$$

e

$$\begin{aligned}
& \frac{\Delta x}{6} \left[(\hat{u}_{i+1}^{n+1} + 4\hat{u}_i^{n+1} + \hat{u}_{i-1}^{n+1}) - (\hat{u}_{i+1}^n + 4\hat{u}_i^n + \hat{u}_{i-1}^n) \right] \\
& + \frac{\Delta t}{4} \left[(\hat{u}_{i+1}^{n+1})^2 - (\hat{u}_{i-1}^{n+1})^2 \right] + \left[(\hat{u}_{i+1}^n)^2 - (\hat{u}_{i-1}^n)^2 \right] \\
& + \frac{\Delta t}{4} g \left[(\hat{\zeta}_{i+1}^{n+1} - \hat{\zeta}_{i-1}^{n+1}) + (\hat{\zeta}_{i+1}^n - \hat{\zeta}_{i-1}^n) \right] \\
& - \frac{h^2}{3\Delta x} \left[(\hat{u}_{i+1}^{n+1} - 2\hat{u}_i^{n+1} + \hat{u}_{i-1}^{n+1}) - (\hat{u}_{i+1}^n - 2\hat{u}_i^n + \hat{u}_{i-1}^n) \right] \\
& - \alpha \frac{\Delta x}{2C_0} g \left[(\hat{\zeta}_{i+1}^{n+1} - \hat{\zeta}_{i-1}^{n+1}) - (\hat{\zeta}_{i+1}^n - \hat{\zeta}_{i-1}^n) \right] \\
& - \alpha \frac{\Delta t}{2C_0} g \left\{ \left[(h + \hat{\zeta}_{i+1}^{n+1}) \hat{u}_{i+1}^{n+1} - 2(h + \hat{\zeta}_i^{n+1}) \hat{u}_i^{n+1} + (h + \hat{\zeta}_{i-1}^{n+1}) \hat{u}_{i-1}^{n+1} \right] \right. \\
& \quad \left. + \left[(h + \hat{\zeta}_{i+1}^n) \hat{u}_{i+1}^n - 2(h + \hat{\zeta}_i^n) \hat{u}_i^n + (h + \hat{\zeta}_{i-1}^n) \hat{u}_{i-1}^n \right] \right\} \\
& + \beta \frac{\Delta t}{4C_0} g \left\{ \left[(h + \hat{\zeta}_{i+1}^{n+1}) \hat{u}_{i+1}^{n+1} - 2(h + \hat{\zeta}_i^{n+1}) \hat{u}_i^{n+1} + (h + \hat{\zeta}_{i-1}^{n+1}) \hat{u}_{i-1}^{n+1} \right] \right. \\
& \quad \left. - \left[(h + \hat{\zeta}_{i+1}^n) \hat{u}_{i+1}^n - 2(h + \hat{\zeta}_i^n) \hat{u}_i^n + (h + \hat{\zeta}_{i-1}^n) \hat{u}_{i-1}^n \right] \right\} = 0,
\end{aligned}$$

onde $\hat{\zeta}_i^n = \hat{\zeta}(x_i, t_n)$ e $\hat{u}_i^n = \hat{u}(x_i, t_n)$.

Equações diferenciais equivalentes

Desenvolvendo $\hat{\zeta}_{i+\ell}^{n+1+m}$ e $\hat{u}_{i+\ell}^{n+1+m}$, para $m = -1, 0$ e $\ell = -1, 0, 1$, como séries de Taylor em torno de $\hat{\zeta}_i^{n+1}$ e $\hat{u}_i^{n+1}$, respectivamente, i.e.:

$$\begin{aligned}
\hat{\zeta}_{i+\ell}^{n+1+m} = & \hat{\zeta}_i^{n+1} + (\ell \Delta x) \left(\frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial x} \right)_i^{n+1} + (m \Delta t) \left(\frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial t} \right)_i^{n+1} + \frac{(\ell \Delta x)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \hat{\zeta}}{\partial x^2} \right)_i^{n+1} \\
& + (\ell \Delta x m \Delta t) \left(\frac{\partial^2 \hat{\zeta}}{\partial x \partial t} \right)_i^{n+1} + \frac{(m \Delta t)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \hat{\zeta}}{\partial t^2} \right)_i^{n+1} + \frac{(\ell \Delta x)^3}{6} \left(\frac{\partial^3 \hat{\zeta}}{\partial x^3} \right)_i^{n+1} \\
& + \frac{(\ell \Delta x)^2 m \Delta t}{2} \left(\frac{\partial^3 \hat{\zeta}}{\partial x^2 \partial t} \right)_i^{n+1} + \frac{\ell \Delta x (m \Delta t)^2}{2} \left(\frac{\partial^3 \hat{\zeta}}{\partial x \partial t^2} \right)_i^{n+1} \\
& + \frac{(m \Delta t)^3}{6} \left(\frac{\partial^3 \hat{\zeta}}{\partial t^3} \right)_i^{n+1} + \frac{(\ell \Delta x)^4}{24} \left(\frac{\partial^4 \hat{\zeta}}{\partial x^4} \right)_i^{n+1} + \frac{(\ell \Delta x)^3 m \Delta t}{6} \left(\frac{\partial^4 \hat{\zeta}}{\partial x^3 \partial t} \right)_i^{n+1} \\
& + \frac{(\ell \Delta x)^2 (m \Delta t)^2}{2} \left(\frac{\partial^4 \hat{\zeta}}{\partial x^2 \partial t^2} \right)_i^{n+1} + \frac{\ell \Delta x (m \Delta t)^3}{6} \left(\frac{\partial^4 \hat{\zeta}}{\partial x \partial t^3} \right)_i^{n+1} \\
& + \frac{(m \Delta t)^4}{24} \left(\frac{\partial^4 \hat{\zeta}}{\partial t^4} \right)_i^{n+1} \\
& + \mathcal{O}((\Delta x)^5, (\Delta x)^4 \Delta t, (\Delta x)^3 (\Delta t)^2, (\Delta x)^2 (\Delta t)^3, \Delta x (\Delta t)^4, (\Delta t)^5),
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\hat{u}_{i+\ell}^{n+1+m} = & \hat{u}_i^{n+1} + (\ell \Delta x) \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right)_i^{n+1} + (m \Delta t) \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right)_i^{n+1} + \frac{(\ell \Delta x)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} \right)_i^{n+1} \\
& + (\ell \Delta x m \Delta t) \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x \partial t} \right)_i^{n+1} + \frac{(m \Delta t)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} \right)_i^{n+1} + \frac{(\ell \Delta x)^3}{6} \left(\frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial x^3} \right)_i^{n+1} \\
& + \frac{(\ell \Delta x)^2 m \Delta t}{2} \left(\frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial x^2 \partial t} \right)_i^{n+1} + \frac{\ell \Delta x (m \Delta t)^2}{2} \left(\frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial x \partial t^2} \right)_i^{n+1} \\
& + \frac{(m \Delta t)^3}{6} \left(\frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial t^3} \right)_i^{n+1} + \frac{(\ell \Delta x)^4}{24} \left(\frac{\partial^4 \hat{u}}{\partial x^4} \right)_i^{n+1} + \frac{(\ell \Delta x)^3 m \Delta t}{6} \left(\frac{\partial^4 \hat{u}}{\partial x^3 \partial t} \right)_i^{n+1} \\
& + \frac{(\ell \Delta x)^2 (m \Delta t)^2}{2} \left(\frac{\partial^4 \hat{u}}{\partial x^2 \partial t^2} \right)_i^{n+1} + \frac{\ell \Delta x (m \Delta t)^3}{6} \left(\frac{\partial^4 \hat{u}}{\partial x \partial t^3} \right)_i^{n+1} \\
& + \frac{(m \Delta t)^4}{24} \left(\frac{\partial^4 \hat{u}}{\partial t^4} \right)_i^{n+1} \\
& + \mathcal{O}((\Delta x)^5, (\Delta x)^4 \Delta t, (\Delta x)^3 (\Delta t)^2, (\Delta x)^2 (\Delta t)^3, \Delta x (\Delta t)^4, (\Delta t)^5),
\end{aligned}$$

e substituindo nas equações às diferenças (5.32), obtêm-se as equações diferenciais equivalentes do problema para o ponto (x_i, t_{n+1}) (cf. Figura 5.6). Estas são, após alguma manipulação algébrica com aplicação recursiva da equação (5.26) para rearranjo das derivadas e na forma adimensional:

$$\left(\frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial t}\right)_i^{n+1} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \left[(h + \epsilon \hat{\zeta}) \hat{u} \right]\right)_i^{n+1} = \frac{1}{4} h Cr (\Delta x)^2 \left(\beta - \frac{Cr}{3} \right) \left(\frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial x^3} \right)_i^{n+1} + \mathcal{O}(\epsilon (\Delta x)^2, \epsilon^2 \Delta x, \epsilon \sigma^2 \Delta x, \sigma^2 (\Delta x)^2)$$

e

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}\right)_i^{n+1} + \epsilon \hat{u}_i^{n+1} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x}\right)_i^{n+1} + \left(\frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial x}\right)_i^{n+1} &= \sigma^2 \frac{h^2}{3} \left(\frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial x^2 \partial t} \right)_i^{n+1} \\ &+ \frac{1}{4} Cr (\Delta x)^2 \left(\beta - \frac{Cr}{3} \right) \left(\frac{\partial^3 \hat{\zeta}}{\partial x^3} \right)_i^{n+1} \\ &- \frac{1}{12} \sqrt{h} (\Delta x)^3 \alpha (1 - Cr^2) \left(\frac{\partial^4 \hat{u}}{\partial x^4} \right)_i^{n+1} \\ &+ \mathcal{O}(\epsilon (\Delta x)^2, \epsilon^2 \Delta x, \epsilon \sigma^2 \Delta x, \sigma^2 (\Delta x)^2). \end{aligned}$$

Nestas equações, $Cr = \sqrt{h} \Delta t / \Delta x$ é o número de Courant computacional definido com variáveis adimensionais². Facilmente se verifica que definindo o coeficiente β como

$$\beta = \frac{Cr}{3}, \quad (5.33)$$

o esquema é de terceira ordem. Os termos de terceira ordem, admitindo que $\epsilon \sim \sigma \sim \Delta x$ são de dois tipos:

- não linear, em $\epsilon (\Delta x)^2$ e $\epsilon^2 (\Delta x)$. Estes termos estão presentes na equação da continuidade e na equação de conservação da quantidade de movimento;
- dissipativo, em $(\Delta x)^3$. Um único termo, presente na equação de conservação da quantidade de movimento.

Os resultados obtidos no estudo numérico da propagação de uma onda sobre um quebra-mar submerso (cf. §6.2.3) apontam para a necessidade de dissipação numérica nas zonas onde o número de Courant é mais elevado, pelo que se propõe que o

²De facto, no caso de profundidade constante e pequena, a profundidade adimensional é $h = 1$. Optou-se no entanto pela sua não substituição por coerência com o caso mais geral de profundidade variável. Desta forma ter-se-á ainda que $C_0 = \sqrt{h}$.

coeficiente α seja calculado através da expressão:

$$\alpha = \frac{Cr^2}{1 - Cr^2}. \quad (5.34)$$

Com as definições (5.33) e (5.34) para β e α , resultam as seguintes equações diferenciais equivalentes para o ponto (x_i, t_{n+1}) :

$$\left(\frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial t} \right)_i^{n+1} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \left[(h + \epsilon \hat{\zeta}) \hat{u} \right] \right)_i^{n+1} = \mathcal{O}(\epsilon (\Delta x)^2, \epsilon^2 \Delta x, \epsilon \sigma^2 \Delta x, \sigma^2 (\Delta x)^2), \quad (5.35a)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right)_i^{n+1} + \hat{u}_i^{n+1} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right)_i^{n+1} + \left(\frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial x} \right)_i^{n+1} &= \sigma^2 \frac{h^2}{3} \left(\frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial x^2 \partial t} \right)_i^{n+1} \\ &\quad - \frac{1}{12} C_0 Cr^2 (\Delta x)^3 \left(\frac{\partial^4 \hat{u}}{\partial x^4} \right)_i^{n+1} \\ &\quad + \mathcal{O}(\epsilon (\Delta x)^2, \epsilon^2 \Delta x, \epsilon \sigma^2 \Delta x, \sigma^2 (\Delta x)^2). \end{aligned} \quad (5.35b)$$

Relações de dispersão

Desprezando os termos não lineares presentes na formulação de Petrov-Galerkin do modelo de Boussinesq a uma dimensão horizontal e supondo que ζ e u são funções que admitem desenvolvimentos em série de Fourier, tem-se como soluções gerais as funções

$$\begin{aligned} \zeta(x, t) &= \Re \left(\int_{-\infty}^{+\infty} A_\zeta(k) e^{i[kx - \omega(k)t]} e^{-s(k)t} dk \right), \\ u(x, t) &= \Re \left(\int_{-\infty}^{+\infty} A_u(k) e^{i[kx - \omega(k)t]} e^{-s(k)t} dk \right), \end{aligned}$$

onde i é a unidade imaginária, k é o número de onda, $A_\zeta(k)$ e $A_u(k)$ são as funções densidade espectral, $\omega(k)$ é a frequência angular da onda e $s(k)$ é o coeficiente de amortecimento. Como já foi referido anteriormente, em virtude das propriedades das séries de Fourier, cada termo dessa série é também solução do problema linear.

Seja a seguinte solução particular para ζ e u :

$$\zeta(x, t) = \Re(a_\zeta e^{i(kx - \omega t)} e^{-st}), \quad (5.36a)$$

$$u(x, t) = \Re(a_u e^{i(kx - \omega t)} e^{-st}), \quad (5.36b)$$

onde a_ζ a_u são coeficientes complexos, definindo simultaneamente a amplitude e a fase das ondas para $t = 0$ e $x = 0$.

Sendo $G = e^{-i(\omega - is)\Delta t}$ o coeficiente de propagação do esquema numérico e fazendo coincidir o i -ésimo nó com $x = 0$ e o nível n com $t = 0$, ter-se-á sem perda de generalidade que:

$$\hat{\zeta}_{i-1}^n = \Re(a_\zeta e^{-ik\Delta x}), \quad (5.37a)$$

$$\hat{\zeta}_i^n = \Re(a_\zeta), \quad (5.37b)$$

$$\hat{\zeta}_{i+1}^n = \Re(a_\zeta e^{ik\Delta x}), \quad (5.37c)$$

$$\hat{\zeta}_{i-1}^{n+1} = \Re(G a_\zeta e^{-ik\Delta x}), \quad (5.37d)$$

$$\hat{\zeta}_i^{n+1} = \Re(G a_\zeta), \quad (5.37e)$$

$$\hat{\zeta}_{i+1}^{n+1} = \Re(G a_\zeta e^{ik\Delta x}), \quad (5.37f)$$

$$\hat{u}_{i-1}^n = \Re(a_u e^{-ik\Delta x}), \quad (5.37g)$$

$$\hat{u}_i^n = \Re(a_u), \quad (5.37h)$$

$$\hat{u}_{i+1}^n = \Re(a_u e^{ik\Delta x}), \quad (5.37i)$$

$$\hat{u}_{i-1}^{n+1} = \Re(G a_u e^{-ik\Delta x}), \quad (5.37j)$$

$$\hat{u}_i^{n+1} = \Re(G a_u), \quad (5.37k)$$

$$\hat{u}_{i+1}^{n+1} = \Re(G a_u e^{ik\Delta x}). \quad (5.37l)$$

Por conveniência de escrita, o símbolo $\Re$, que designa a parte real, será doravante suprimido.

Substituindo a solução particular (5.37) no sistema de equações discretas (5.32), obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_\zeta \\ a_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.38)$$

com

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \left\{ \frac{1}{3} \Delta x [\cos(k\Delta x) + 2] + \frac{1}{2} \beta C_0 \Delta t [\cos(k\Delta x) - 1] \right\} (G - 1) , \\
 a_{12} &= i \frac{1}{2} h \Delta t \sin(k\Delta x) (G + 1) , \\
 a_{21} &= i \left\{ \frac{1}{2} g \Delta t \sin(k\Delta x) - \alpha \frac{g \Delta x}{C_0} \sin(k\Delta x) \right\} (G - 1) , \\
 a_{22} &= \left\{ \frac{1}{3} \Delta x [\cos(k\Delta x) + 2] - \frac{h^2}{3} \frac{2}{\Delta x} [\cos(k\Delta x) - 1] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \beta C_0 \Delta t [\cos(k\Delta x) - 1] \right\} (G - 1) - \alpha C_0 \Delta t [\cos(k\Delta x) - 1] (G + 1) .
 \end{aligned}$$

As soluções não triviais do sistema (5.38) correspondem às raízes em G do polinómio característico do mesmo sistema.

São neste caso obtidas duas raízes, G_1 e G_2 , as quais correspondem às duas soluções possíveis: uma onda propagando-se no sentido positivo do eixo OX e uma segunda onda propagando-se no sentido negativo do mesmo eixo. Por serem demasiado extensas, as expressões para G_1 e G_2 não são aqui apresentadas.

Tal como nos casos anteriormente estudados, a relação de dispersão, a celeridade de fase e a celeridade de grupo do esquema numérico, bem assim como o seu coeficiente de amortecimento,

$$\omega = \omega(kh, k\Delta x, Cr) ,$$

$$C = C(kh, k\Delta x, Cr) ,$$

$$C_g = C_g(kh, k\Delta x, Cr) ,$$

$$s = s(kh, k\Delta x, Cr) ,$$

podem ser calculadas a partir de G , da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \frac{C}{\sqrt{gh}} &= \Re \left[i \frac{1}{Cr(k\Delta x)} \log G \right] , \\
 \frac{\omega}{\sqrt{g/h}} &= kh C , \\
 C_g &= C \left(1 + \frac{kh}{2C^2} \frac{\partial C^2}{\partial (kh)} + \frac{k\Delta x}{2C^2} \frac{\partial C^2}{\partial (k\Delta x)} \right) ,
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{gh}} \frac{s}{k} = \Im \left[-i \frac{1}{Cr k \Delta x} \log G \right].$$

Desenvolvendo o quadrado das celeridades de fase e de grupo em séries de Taylor multivariadas, em torno de $kh = 0$ e $k\Delta x = 0$, obtêm-se as expressões:

$$\begin{aligned} \frac{C^2}{gh} = \Re \left[1 - \frac{1}{3} (kh)^2 + \frac{1}{2} Cr \left(\beta - \frac{Cr}{3} \right) (k\Delta x)^2 + i \frac{1}{12} \alpha (1 - 3 Cr \beta) (kh)^3 \right] \\ + \mathcal{O}((kh)^4, (kh)^2 (k\Delta x)^2, (k\Delta x)^4), \end{aligned} \quad (5.39a)$$

$$\begin{aligned} \frac{(C_g)^2}{gh} = \Re \left[1 - (kh)^2 + \frac{3}{2} Cr \left(\beta - \frac{Cr}{3} \right) (k\Delta x)^2 - i \frac{1}{12} \alpha (1 - 3 \beta Cr) (k\Delta x)^3 \right] \\ + \mathcal{O}((kh)^4, (kh)^2 (k\Delta x)^2, (k\Delta x)^4). \end{aligned} \quad (5.39b)$$

Facilmente se conclui ser o erro na solução também de terceira ordem para os valores propostos dos coeficientes β e α , expressões (5.33) e (5.34), respectivamente.

Considere-se a formulação de Petrov-Galerkin, com $\beta = Cr/3$. Os aproximantes $[0/2]$ de Padé multivariados em kh e $k\Delta x$ dos quadrados das celeridades de fase e de grupo do esquema numérico são, neste caso, respectivamente

$$\frac{1}{gh} [0/2] C^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{3} (kh)^2}, \quad (5.40a)$$

$$\frac{1}{gh} [0/2] (C_g)^2 = \frac{1}{1 + (kh)^2}, \quad (5.40b)$$

iguais portanto aos quadrados das mesmas celeridades no modelo analítico.

Nas Figuras 5.10 e 5.11 comparam-se graficamente a relação de dispersão e as celeridades de fase e de grupo para as formulações de Bubnov-Galerkin e de Petrov-Galerkin, esta última com $\alpha = 0$ e α dado pela expressão (5.34). Verifica-se que a correcção da dispersão de frequência através do coeficiente β resulta numa melhoria significativa das características dispersivas do esquema numérico, nomeadamente aumentando em cerca de 15% a gama de frequências reproduzíveis. Isto é particularmente significativo quando a discretização espacial é de baixa resolução, i.e. $\Delta x \sim h$, e quando o valor do coeficiente do número de Courant se aproxima da unidade. A introdução do mecanismo de dissipação associado ao coeficiente α não afecta as harmónicas principais, mas em contrapartida estende a celeridade nula a ondas cujo comprimento pode chegar a cerca de $3 \Delta x$, para valores de Cr próximos

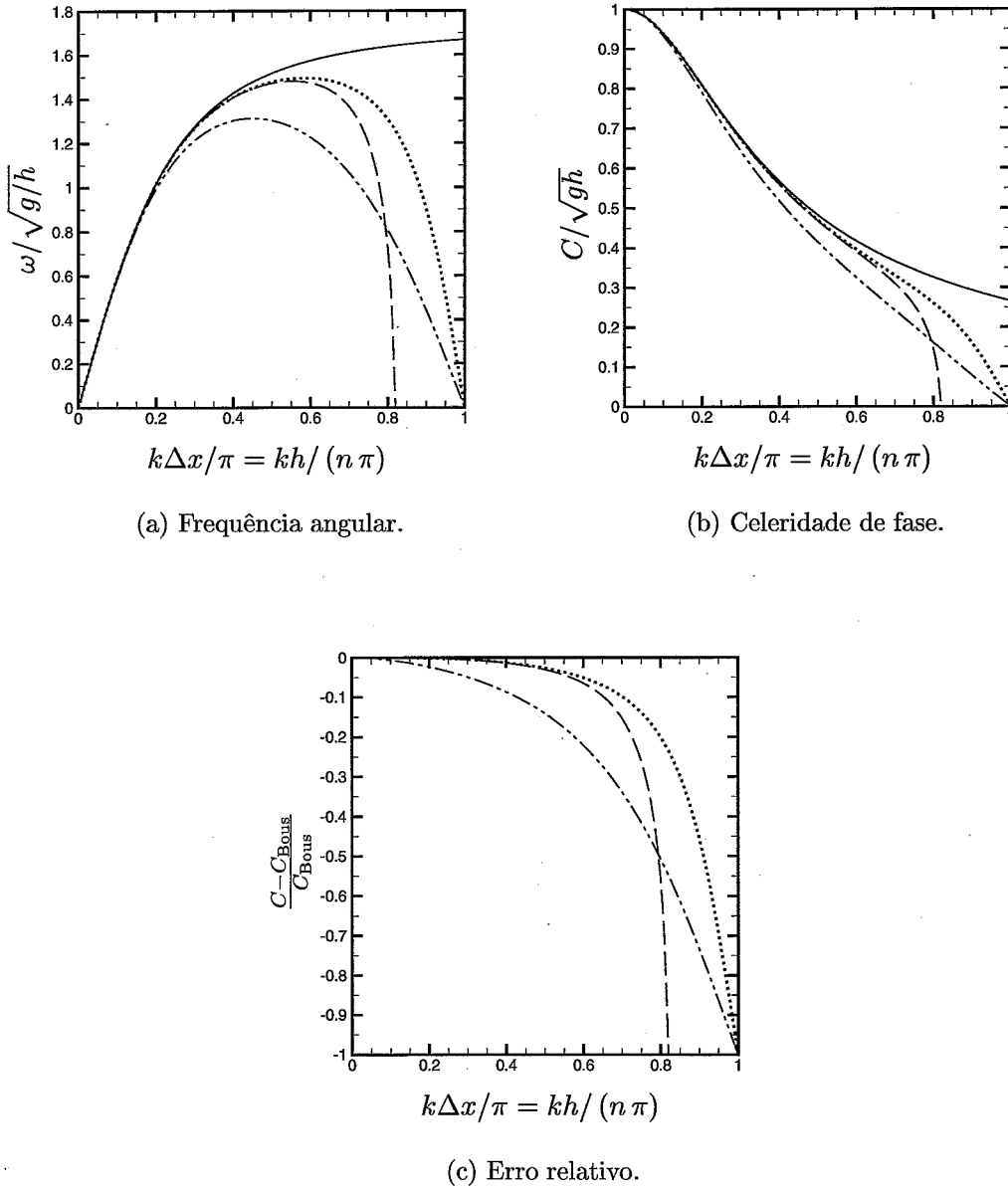
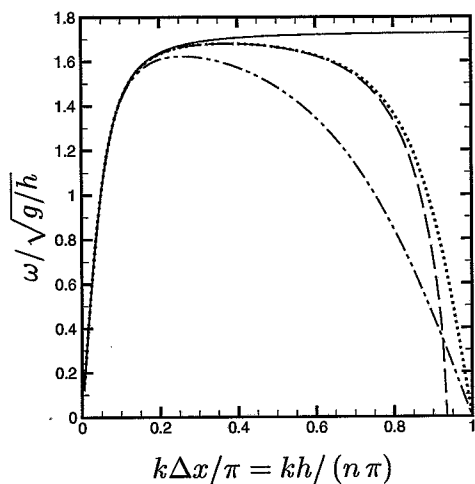


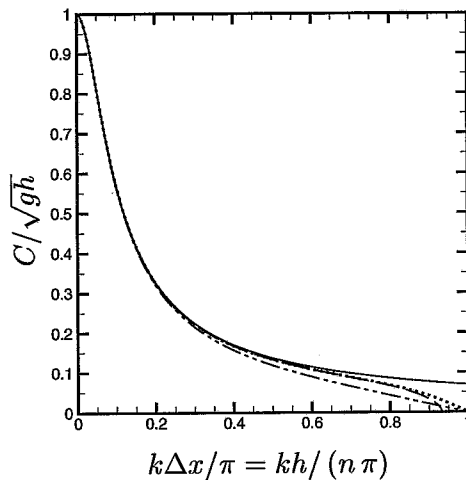
Figura 5.10: Relações de dispersão dos esquemas numéricos para o modelo de Bousinesq, com $n = 2$ e $Cr = 0.9$: analítico (—); Petrov-Galerkin, $\alpha \neq 0$, (---); Petrov-Galerkin, $\alpha = 0$, ($\cdots$); Bubnov-Galerkin ($- \cdots -$).

da unidade. As oscilações a que tal comportamento dará origem, deverão no entanto ser dissipadas.

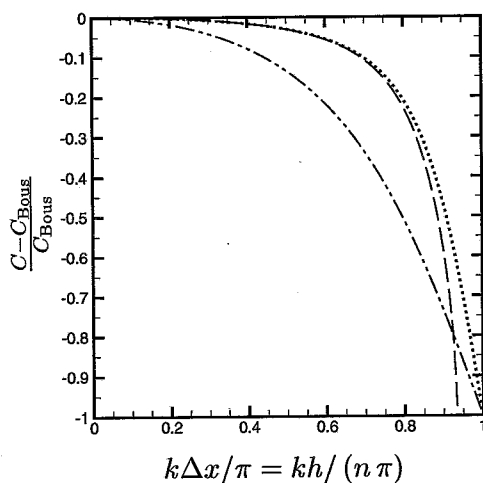
Para $Cr > 1$, as relações de dispersão numéricas da formulação de Petrov-Galerkin apresentam um comportamento divergente quando comparadas com as correspondentes relações analíticas (cf. Figura 5.12).



(a) Frequência angular.



(b) Celeridade de fase.



(c) Erro relativo.

Figura 5.11: Relações de dispersão dos esquemas numéricos para o modelo de Boussinesq, com $n = 8$ e $Cr = 0.9$: analítico (—); Petrov-Galerkin, $\alpha \neq 0$, (---); Petrov-Galerkin, $\alpha = 0$, ($\cdots$); Bubnov-Galerkin ($- \cdots -$).

Análise de estabilidade

A análise das equações diferenciais equivalentes e a análise das relações de dispersão discretas, permitiram já estabelecer coeficientes óptimos para a precisão e estabilidade da formulação de Petrov-Galerkin do modelo de Boussinesq. Para estudar a capacidade selectiva do mecanismo dissipativo responsável pela estabilidade do

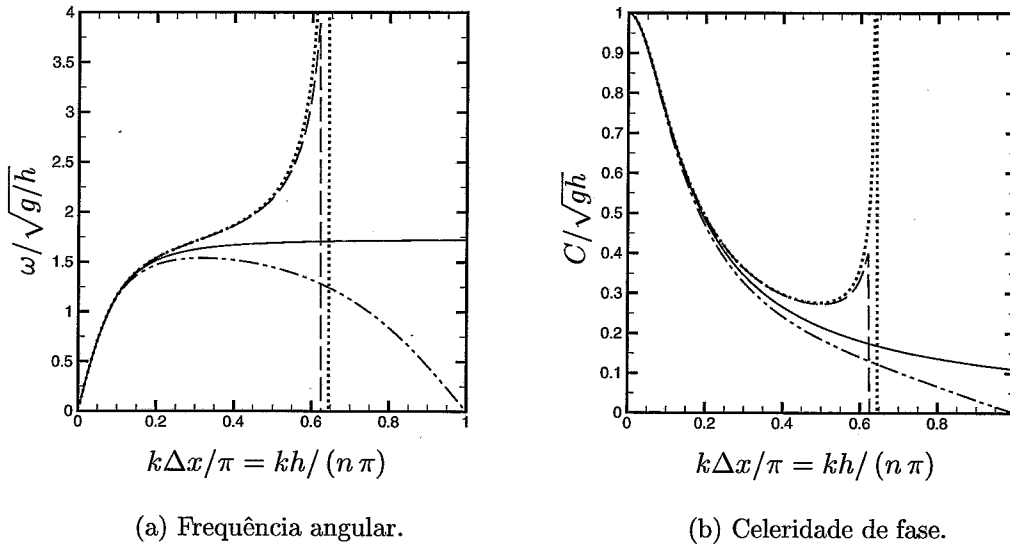


Figura 5.12: Relações de dispersão dos esquemas numéricos para o modelo de Boussinesq, com $n = 5$ e $Cr = 1.5$: analítico (—); Petrov-Galerkin, $\alpha \neq 0$, (---); Petrov-Galerkin, $\alpha = 0$, ($\cdots$); Bubnov-Galerkin ($- \cdots -$).

esquema, é necessário analisar a variação do coeficiente de amplificação, $|G|$, com o número de onda, k .

Como referido anteriormente, de acordo com o critério de estabilidade de von Neumann, o esquema numérico é estável se e só se $|G| \leq 1$ para qualquer valor do número de onda k . No entanto, a raiz para a qual $|G| = 1$ não poderá ter multiplicidade m superior a 1, caso em que a solução numérica divergir³ a uma velocidade $(\Delta t)^{m-1}$. Esta condição relativa à multiplicidade das raízes é conhecida como condição de Dahlquist (cf. Coimbra, 1992).

Facilmente se verifica que o esquema de Bubnov-Galerkin é neutralmente estável, i.e. sem dissipação, dado que $|G_1| = |G_2| = 1$ com G_1 e G_2 duas raízes conjugadas para qualquer $k\Delta x \in]0, \pi[$. No entanto, para $k\Delta x = \pi$, i.e. $\lambda = 2\Delta x$, as duas raízes G_1 e G_2 são iguais entre si e iguais à unidade. Portanto, de acordo com a condição de Dahlquist para o número de onda limite a solução numérica divergir³ a uma velocidade de ordem $\mathcal{O}(\Delta t)$.

O esquema de Petrov-Galerkin é estável e dissipativo para qualquer número de onda com $k\Delta x$ no intervalo $]0, \pi[$, no qual se verifica que $|G_1| < 1$ e $|G_2| < 1$ com $G_1 \neq G_2$. Para o número de onda limite, $k\Delta x = \pi$, verifica-se que a onda que se propaga no sentido positivo do eixo OX tem caracter dissipativo, enquanto a

³Excepto no caso de um par de raízes conjugadas.

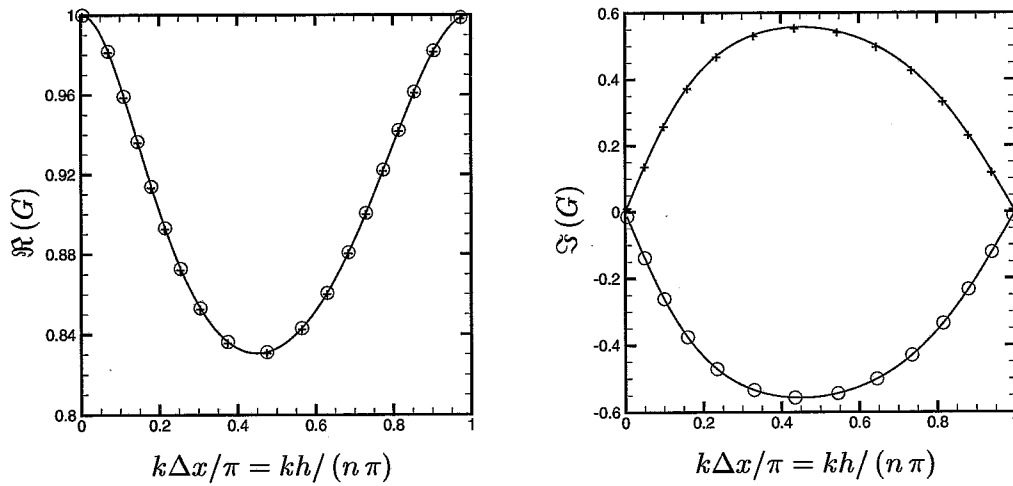


Figura 5.13: Coeficiente de propagação do esquema de Bubnov-Galerkin aplicado ao modelo de Boussinesq para $n = 2$ e $Cr = 0.9$. Raiz 1: (+ + +); raiz 2: (o o o).

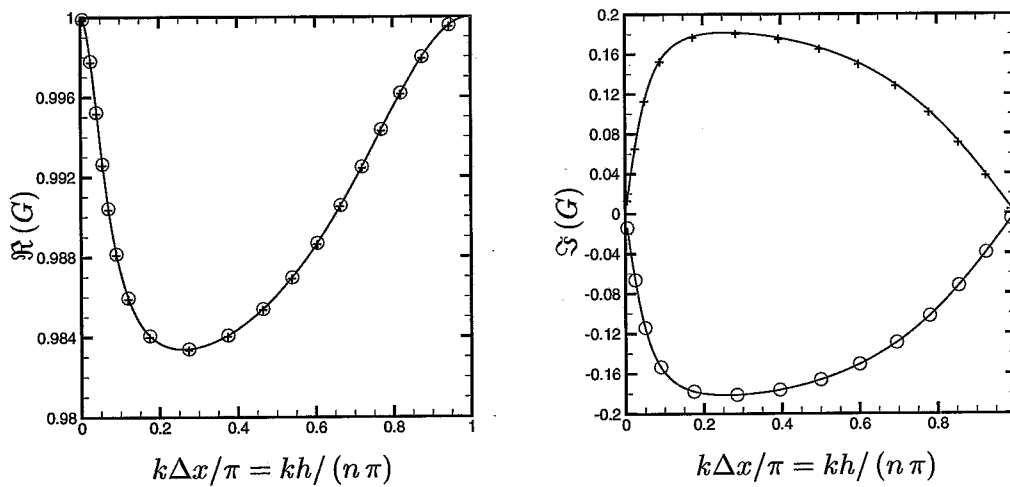


Figura 5.14: Coeficiente de propagação do esquema de Bubnov-Galerkin aplicado ao modelo de Boussinesq para $n = 8$ e $Cr = 0.9$. Raiz 1: (+ + +); raiz 2: (o o o).

onda que se propaga no sentido negativo desse eixo está isenta de dissipação, sendo neutralmente estável, i.e. $|G_1(\pi)| < 1$ e $|G_2(\pi)| = 1$.

Como seria de esperar dada a elevada ordem (terceira) do termo dissipativo, este tem um comportamento altamente selectivo, afectando essencialmente os grandes números de onda (cf. Figuras 5.15 e 5.16). No caso do número de Courant ser superior à unidade, a formulação de Petrov-Galerkin torna-se instável (cf. Figura 5.17).

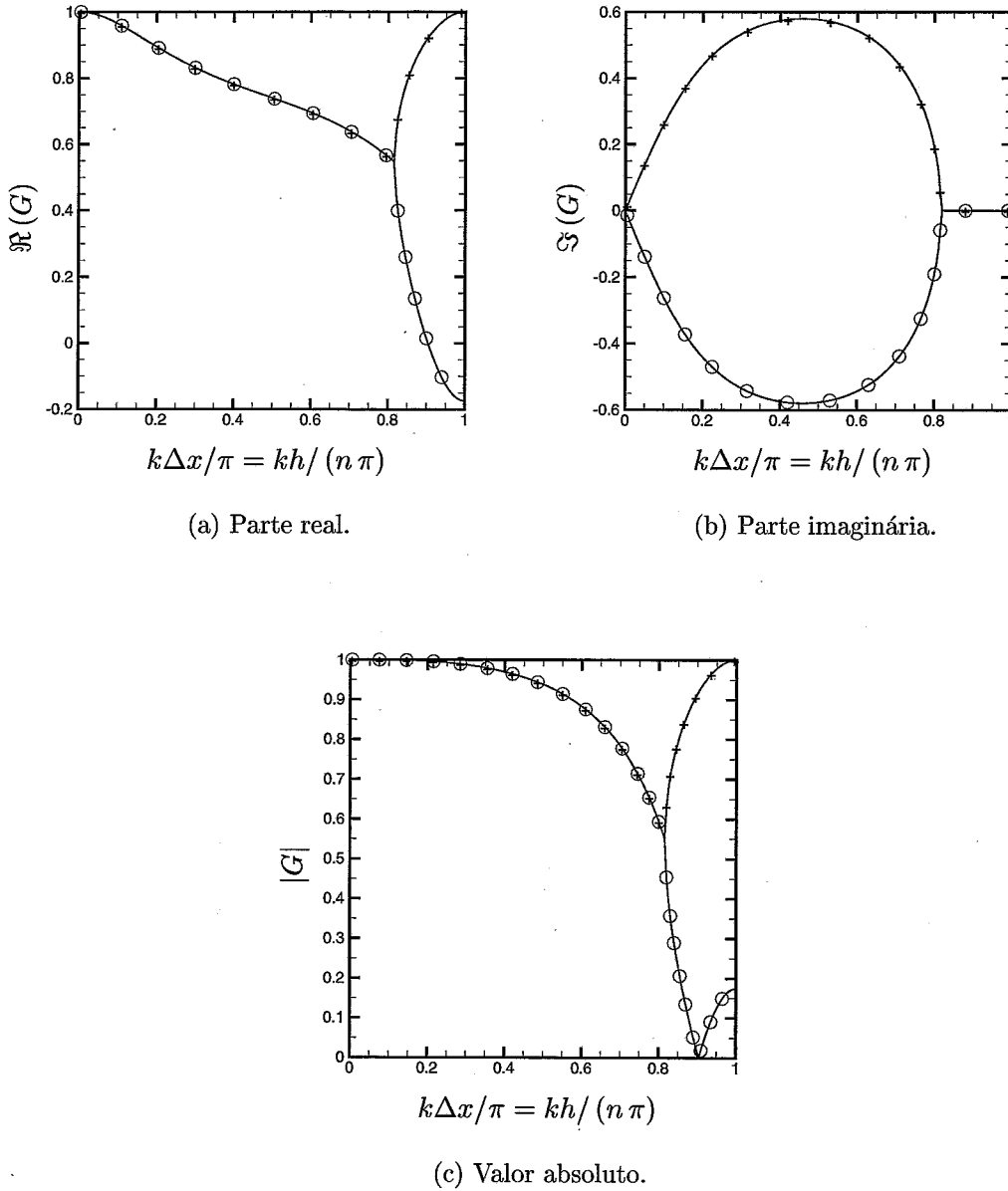


Figura 5.15: Coeficiente de propagação do esquema de Petrov-Galerkin aplicado ao modelo de Boussinesq para $n = 2$ e $Cr = 0.9$. Raiz 1: (+ + +); raiz 2: (o o o).

5.2.3 Esquema predictor-corrector

Tal para o modelo RLW, também aqui a presença de termos não lineares obriga à utilização de um algoritmo iterativo. Novamente a opção foi por um esquema tipo predictor-corrector em que o passo corrector corresponde à formulação de Petrov-Galerkin de terceira ordem analisada.

As equações ao nível de um elemento no interior do domínio, i.e. não afectado

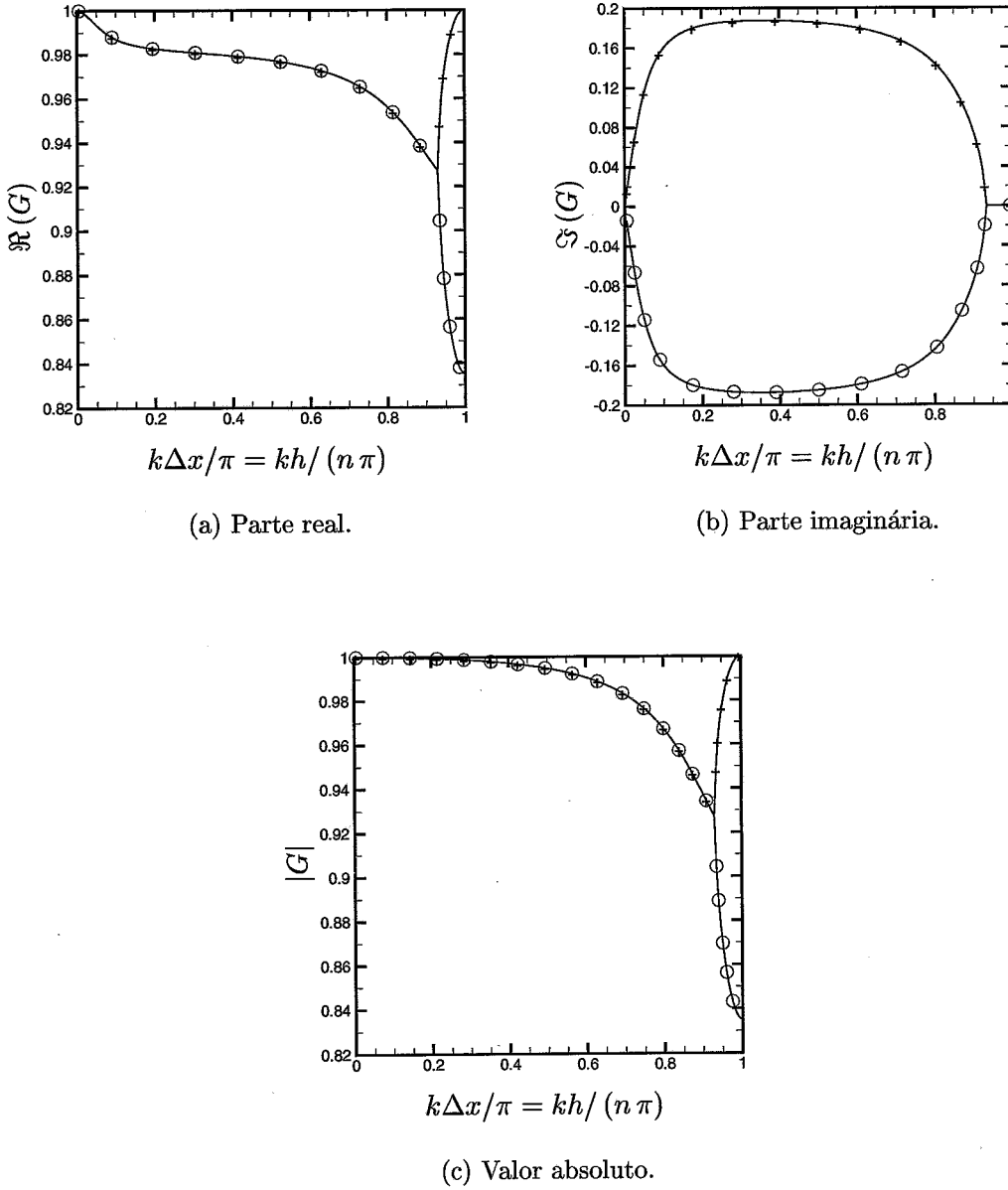


Figura 5.16: Coeficiente de propagação do esquema de Petrov-Galerkin aplicado ao modelo de Boussinesq para $n = 8$ e $Cr = 0.9$. Raiz 1: (+ + +); raiz 2: (o o o).

pela presença de fronteiras exteriores, são:

- passo predictor:

$$\mathbf{M}^e \Delta \dot{\boldsymbol{\zeta}} = -\Delta t \mathbf{C}^e \mathbf{p}^n, \quad (5.41a)$$

$$\left(\mathbf{M}^e + \frac{h^2}{3} \mathbf{K}^e \right) \Delta \mathbf{u} = -\Delta t \left(\mathbf{C}^e \mathbf{q}^n + \tilde{\alpha} \Delta x^e \sqrt{\frac{g}{h}} \mathbf{K}^e \mathbf{p}^n \right); \quad (5.41b)$$

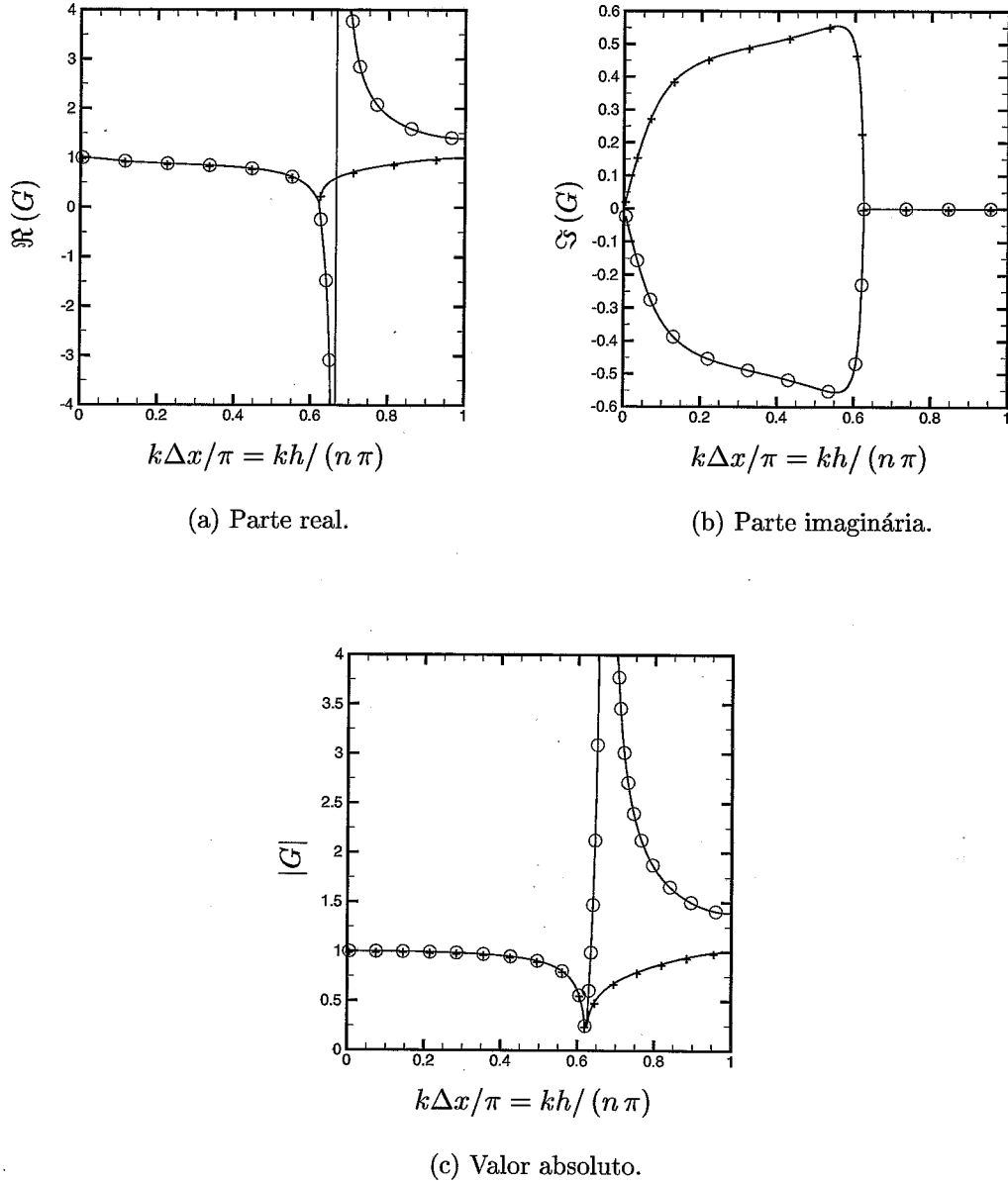


Figura 5.17: Coeficiente de propagação do esquema de Petrov-Galerkin aplicado ao modelo de Boussinesq para $n = 5$ e $Cr = 1.5$. Raiz 1: (+ + +); raiz 2: (o o o).

- passo corrector

$$\mathbf{M}^e \Delta \zeta = -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}^e \left(\mathbf{p}^{(n+1)*} + \mathbf{p}^n \right) + \beta \frac{\Delta t \Delta x^e}{4 \sqrt{g/h}} \mathbf{K}^e \Delta \mathbf{q}^*, \quad (5.42a)$$

$$\begin{aligned}
& \left(\mathbf{M}^e + \frac{h^2}{3} \mathbf{K}^e \right) \Delta \mathbf{u} = \\
& - \frac{\Delta t}{2} \left[\mathbf{C}^e \left(\mathbf{q}^{(n+1)*} + \mathbf{q}^n \right) + \alpha \Delta x^e \sqrt{\frac{g}{h}} \mathbf{K}^e \left(\mathbf{p}^{(n+1)*} + \mathbf{p}^n \right) \right] \\
& - \alpha \Delta x^e \sqrt{\frac{g}{h}} (\mathbf{C}^e)^T \Delta \boldsymbol{\zeta}^* + \beta \frac{\Delta t \Delta x^e}{4} \sqrt{\frac{g}{h}} \mathbf{K}^e \Delta \mathbf{p}^*. \quad (5.42b)
\end{aligned}$$

Nestas equações, os vectores $\boldsymbol{\zeta}^n$, $\mathbf{u}^n$ e $\boldsymbol{\zeta}^{n+1}$, $\mathbf{u}^{n+1}$ são os vectores elementares dos valores nodais das funções $\hat{\zeta}$ e $\hat{u}$ nos instantes $t_n = n \Delta t$ e $t_{n+1} = (n+1) \Delta t$, respectivamente. Os vectores elementares $\mathbf{p}^n$, $\mathbf{q}^n$ e $\mathbf{p}^{n+1}$, $\mathbf{q}^{n+1}$ representam os valores nodais, nos referidos instantes, da quantidade de movimento específica e da energia específica, respectivamente, tal como definidas pelas expressões (5.31). Por outro lado, os vectores $\Delta \boldsymbol{\zeta}$, $\Delta \mathbf{u}$, $\Delta \mathbf{p}$ e $\Delta \mathbf{q}$ são os vectores elementares dos incrementos nodais daquelas grandezas no intervalo de tempo entre os instantes t_n e t_{n+1} , i.e.

$$\Delta \boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}^{n+1} - \boldsymbol{\zeta}^n,$$

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n,$$

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}^{n+1} - \mathbf{p}^n,$$

$$\Delta \mathbf{q} = \mathbf{q}^{n+1} - \mathbf{q}^n.$$

As quantidades denotadas com um asterisco, $()^*$, correspondem à previsão do passo predictor, ou à iteração anterior do passo corrector. Δx^e é o comprimento do e -ésimo elemento numa discretização não uniforme do domínio espacial.

As matrizes elementares $\mathbf{M}^e$, $\mathbf{C}^e$ e $\mathbf{K}^e$ são dadas por

$$\mathbf{M}^e = \frac{\Delta x^e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{K}^e = \frac{1}{\Delta x^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Precisão do predictor

A precisão do predictor é analisada recorrendo à expansão em série de Taylor da celeridade, C^* , e da dissipação numérica, s^* , da solução linear das equações (5.41).

Conclui-se então que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{gh}} \left(C^* - i \frac{s^*}{k} \right) &= 1 - \frac{1}{6} (kh)^2 - i \frac{1}{2} (\tilde{\alpha} - Cr) (k\Delta x) \\ &- \left(\frac{1}{8} \tilde{\alpha}^2 - \frac{1}{2} \tilde{\alpha} Cr + \frac{1}{3} Cr^2 \right) (k\Delta x)^2 - i \frac{1}{6} (Cr - \tilde{\alpha}) (kh)^2 (k\Delta x) \\ &- i \frac{1}{24} (6 Cr \tilde{\alpha}^2 - 12 Cr^2 \tilde{\alpha} + 6 Cr^3 + \tilde{\alpha}) (k\Delta x)^3 + TOS, \end{aligned} \quad (5.43)$$

onde TOS são termos de ordem superior.

A ordem do erro em (5.43) pode ser otimizada fazendo

$$\tilde{\alpha} = Cr. \quad (5.44)$$

Desta forma, obtém-se um esquema de segunda ordem, $\mathcal{O}((k\Delta x)^2)$, com dissipação de terceira ordem, i.e. para $\tilde{\alpha} = Cr$ tem-se que:

$$\frac{1}{\sqrt{gh}} \left(C^* - i \frac{s^*}{k} \right) = 1 - \frac{1}{6} (kh)^2 + \frac{1}{24} Cr^2 (k\Delta x)^2 - i \frac{1}{24} Cr (k\Delta x)^3 + TOS. \quad (5.45)$$

5.3 Modelo de Seabra-Santos a 1DH

O erro de dispersão de segunda ordem, que o esquema de Petrov-Galerkin desenvolvido para o modelo de Boussinesq a 1DH corrige, é devido à discretização dos termos convectivos lineares. Como os termos convectivos lineares do modelo de Seabra-Santos são iguais aos do modelo de Boussinesq e as derivadas presentes no termo dispersivo são em ambos os modelos terceiras derivadas cruzadas no tempo e no espaço, a correcção a introduzir deverá ser do mesmo tipo. Será esse o procedimento a adoptar, não se procedendo a uma análise de precisão e/ou estabilidade.

As equações do modelo de Seabra-Santos, para escoamentos a uma dimensão horizontal, sem dissipação e de fundo fixo são:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \zeta) \bar{u}] = 0, \quad (5.46a)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[(2\tilde{\alpha} - 1) \frac{\bar{u}^2}{2} + g\zeta \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left(\check{\beta} h^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t} \right). \quad (5.46b)$$

Os coeficientes $\tilde{\alpha}$ e $\check{\beta}$ são dados pelas expressões (2.138).

A elevação da superfície livre, ζ , e a média vertical instantânea da velocidade

horizontal, $\bar{u}$, são aproximadas recorrendo a funções de interpolação lineares, i.e.

$$\hat{\zeta}(x) = \sum_{i=1}^{n_e+1} N_i(x) \hat{\zeta}_i, \quad (5.47a)$$

$$\hat{u}(x) = \sum_{i=1}^{n_e+1} N_i(x) \hat{u}_i, \quad (5.47b)$$

sendo n_e o número total de elementos finitos e $N_i, i = 1, \dots, n_e+1$ as funções globais de interpolação lineares (cf. Figura 4.1). O mesmo procedimento foi adoptado para a interpolação dos coeficientes dos termos não linear e dispersivo, $\check{\alpha}$ e $\check{\beta}$:

$$\hat{\alpha}(x) = \sum_{i=1}^{n_e+1} N_i(x) \check{\alpha}(x_i), \quad (5.48a)$$

$$\hat{\beta}(x) = \sum_{i=1}^{n_e+1} N_i(x) \check{\beta}(x_i). \quad (5.48b)$$

As variáveis computacionais auxiliares $\hat{p}$ e $\hat{q}$, respectivamente a quantidade de movimento específica e a energia específica com uma pequena perturbação, são definidas como:

$$\hat{p}(x) = \sum_{i=1}^{n_e+1} N_i(x) \left(h_i + \hat{\zeta}_i \right) \hat{u}_i, \quad (5.49a)$$

$$\hat{q}(x) = \sum_{i=1}^{n_e+1} N_i(x) \left[(2\hat{\alpha}_i - 1) \frac{\hat{u}_i^2}{2} + g \hat{\zeta}_i \right]. \quad (5.49b)$$

A formulação de Petrov-Galerkin do método dos elementos finitos para este modelo consiste então na resolução das seguintes equações:

- passo predictor:

$$\mathbf{M} \Delta \zeta = - \Delta t \mathbf{C} \mathbf{p}^n, \quad (5.50a)$$

$$(\mathbf{M} + \mathbf{K}_h) \Delta \mathbf{u} = - \Delta t (\mathbf{C} \mathbf{q}^n + \mathbf{K}_\alpha \mathbf{p}^n); \quad (5.50b)$$

- passo corrector

$$\mathbf{M} \Delta \boldsymbol{\zeta} = - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C} \left(\mathbf{p}^{(n+1)*} + \mathbf{p}^n \right) + \mathbf{K}_\beta^\zeta \Delta \mathbf{q}^*, \quad (5.51a)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{M} + \mathbf{K}_h) \Delta \mathbf{u} = & - \frac{\Delta t}{2} \left[\mathbf{C} \left(\mathbf{q}^{(n+1)*} + \mathbf{q}^n \right) + \mathbf{K}_\alpha \left(\mathbf{p}^{(n+1)*} + \mathbf{p}^n \right) \right] \\ & + \mathbf{C}_\alpha \Delta \boldsymbol{\zeta}^* + \mathbf{K}_\beta^u \Delta \mathbf{p}^* + \mathbf{F} \Delta \mathbf{u}^*. \end{aligned} \quad (5.51b)$$

As grandezas denotadas com um asterisco, $()^*$, correspondem ao valor calculado no passo predictor, ou na iteração anterior do passo corrector.

Os vectores $\boldsymbol{\zeta}^n$, $\mathbf{u}^n$, $\boldsymbol{\zeta}^{n+1}$ e $\mathbf{u}^{n+1}$ são os vectores dos valores nodais das funções $\hat{\zeta}$ e $\hat{u}$ nos instantes $t_n = n \Delta t$ e $t_{n+1} = (n+1) \Delta t$, respectivamente. Os vectores $\mathbf{p}^n$, $\mathbf{q}^n$, $\mathbf{p}^{n+1}$ e $\mathbf{q}^{n+1}$ são os vectores dos valores nodais, nos mesmos instantes, da quantidade de movimento específica e da energia específica definidas pelas expressões (5.49). Finalmente $\Delta \boldsymbol{\zeta}$, $\Delta \mathbf{u}$, $\Delta \mathbf{p}$ e $\Delta \mathbf{q}$ são os valores dos incrementos nodais daquelas grandezas no intervalo de tempo entre os instantes t_n e t_{n+1} , i.e.

$$\Delta \boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}^{n+1} - \boldsymbol{\zeta}^n,$$

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n,$$

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}^{n+1} - \mathbf{p}^n,$$

$$\Delta \mathbf{q} = \mathbf{q}^{n+1} - \mathbf{q}^n.$$

As matrizes $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{K}_h$, $\mathbf{K}_\alpha$, $\mathbf{K}_\beta^\zeta$, $\mathbf{K}_\beta^u$ e $\mathbf{F}$ têm dimensões $(n_e + 1) \times (n_e + 1)$. A matriz $\mathbf{F}$ corresponde ao termo de fronteira resultando, em conjunto com a matriz $\mathbf{K}_h$, da integração por partes do termo dispersivo da equação (5.46b). Os elementos destas matrizes são respectivamente

$$\tilde{M}_{ij} = \int_0^L N_i N_j \, dx, \quad (5.52a)$$

$$\tilde{C}_{ij} = \int_0^L N_i \frac{dN_j}{dx} \, dx, \quad (5.52b)$$

$$(\tilde{C}_\alpha)_{ij} = \int_0^L \alpha \Delta x^e \sqrt{\frac{g}{h}} \frac{dN_i}{dx} N_j \, dx, \quad (5.52c)$$

$$(\tilde{K}_h)_{ij} = \int_0^L \hat{\beta} \bar{h}^2 \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} \, dx, \quad (5.52d)$$

$$(\tilde{K}_\alpha)_{ij} = \int_0^L \alpha \Delta x^e \sqrt{\frac{g}{h}} \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} \, dx, \quad (5.52e)$$

$$\left(\tilde{K}_\beta^\zeta\right)_{ij} = \int_0^L \beta \frac{\Delta t \Delta x^e}{4 \sqrt{g/h}} \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx, \quad (5.52f)$$

$$\left(\tilde{K}_\beta^u\right)_{ij} = \int_0^L \beta \frac{\Delta t \Delta x^e}{4} \sqrt{\frac{g}{h}} \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx, \quad (5.52g)$$

$$\tilde{F}_{ij} = \left(\hat{\beta} N_i \frac{dN_j}{dx}\right)_{x=L} - \left(\hat{\beta} N_i \frac{dN_j}{dx}\right)_{x=0}. \quad (5.52h)$$

Nestas expressões, $\bar{h}^2$ e $\bar{h}$ são os valores médios em cada elemento finito da grandeza em questão. Os coeficientes α e β são iguais aos definidos para o esquema de Petrov-Galerkin aplicado ao modelo de Boussinesq a 1DH (cf. §5.2). Recorde-se que no passo predictor, o coeficiente α é substituído por $\tilde{\alpha}$ dado por (5.44).

5.4 Modelo de Madsen & Sørensen a 1DH

Considere-se o modelo de Madsen & Sørensen a uma dimensão horizontal para fundos fixos muito suaves, escrito na forma quase linear com variáveis vectoriais. O problema clássico consiste em encontrar a função vectorial $\mathbf{U} = \mathbf{U}(x, t)$ tal que:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial^3 \mathbf{U}}{\partial x^2 \partial t} + \mathbf{C} \mathbf{U} + \mathbf{D} \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x^2} = \mathbf{0}, \quad \forall (x, t) \in [0, L] \times [0, +\infty[\quad (5.53a)$$

com as condições iniciais e de fronteira⁴ de Dirichlet:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0, \quad \text{para } (x, 0), \quad (5.53b)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_1, \quad \text{para } (0, t), \quad (5.53c)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_2, \quad \text{para } (L, t). \quad (5.53d)$$

Nas equações do problema (5.53), o vector $\mathbf{U}$ e as matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ são respectivamente

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \zeta \\ \bar{u} \\ r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \bar{u} & h + \zeta & 0 \\ g & \bar{u} & -g \frac{h^2}{15} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \frac{2}{5} h^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

⁴Para uma correcta caracterização das condições de fronteira, ver o Capítulo 3.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial h}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5.4.1 Formulação de Petrov-Galerkin

A formulação de Galerkin do mesmo problema, baseada numa discretização em elementos finitos no espaço e no tempo, será encontrar a função vectorial aproximada $\hat{\mathbf{U}}(x, t) \in \mathcal{V}_0^1 \times \mathcal{V}_0^1$, e definida em $]0, L[\times]t_n, t_{n+1}[$, que satisfaz a equação

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_0^L \hat{\mathbf{W}} \cdot \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{U}}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial^3 \hat{\mathbf{U}}}{\partial x^2 \partial t} + \mathbf{C} \hat{\mathbf{U}} + \mathbf{D} \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{U}}}{\partial x^2} \right) dx dt = 0, \forall \hat{\mathbf{W}}(x, t). \quad (5.54)$$

As matrizes $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ foram modificadas, sendo agora

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial h}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta t \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\Delta t & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

As funções vectoriais de interpolação são funções bilineares no espaço-tempo, dadas em cada elemento por

$$\begin{bmatrix} \hat{\zeta} \\ \hat{u} \\ \hat{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\zeta}_1 & \hat{\zeta}_2 & \hat{\zeta}_3 & \hat{\zeta}_4 \\ \hat{u}_1 & \hat{u}_2 & \hat{u}_3 & \hat{u}_4 \\ \hat{r}_1 & \hat{r}_2 & \hat{r}_3 & \hat{r}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1^e \\ N_2^e \\ N_3^e \\ N_4^e \end{bmatrix}, \quad (5.55)$$

onde N_i^e , $i = 1, 2, 3, 4$, são as funções de forma escalares definidas em (5.3). As funções de peso para a formulação de Petrov-Galerkin são uma variação das funções (5.29) utilizadas para o modelo de Boussinesq. São funções vectoriais, lineares no espaço e quadráticas no tempo, dadas por

$$\mathbf{W}_i^e(x, t) = \mathbf{P}_i^e + \frac{\Delta x}{2C_0} \mathbf{T}_\alpha (\mathbf{A}^\ell)^T \frac{\partial \mathbf{P}_i^e}{\partial x} + \frac{\Delta x \Delta t}{4C_0} \mathbf{T}_\beta (\mathbf{A}^\ell)^T \frac{\partial^2 \mathbf{P}_i^e}{\partial x \partial t}, \quad (5.56)$$

onde

$$\mathbf{P}_i^e = \begin{bmatrix} P_i^e \\ P_i^e \\ P_i^e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e}$$

$$\mathbf{A}^\ell = \begin{bmatrix} 0 & h & 0 \\ g & 0 & -g \frac{h^2}{15} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

com as funções de peso escalares P_3^e e P_4^e definidas pelas expressões (5.4).

Os elementos dos tensores $\mathbf{T}_\alpha$ e $\mathbf{T}_\beta$ são determinados por forma a otimizar as características dispersivas do esquema numérico, ao mesmo tempo que introduzem um mecanismo dissipativo de ordem superior.

Esquema predictor-corrector

O esquema predictor-corrector para o modelo de Madsen & Sørensen é semelhante ao adoptado para o modelo de Boussinesq, sendo que aqui é necessário o cálculo da variável auxiliar r . As equações ao nível de um elemento no interior do domínio, i.e. não afectado pela presença de fronteiras exteriores, são então:

- passo predictor:

$$\mathbf{M}^e \mathbf{r}^n = -\mathbf{K}^e \boldsymbol{\zeta}^n, \quad (5.57a)$$

$$\mathbf{M}^e \Delta \boldsymbol{\zeta} = -\Delta t \left(\mathbf{C}^e \mathbf{p}^n + \tilde{\alpha}_2 \frac{\Delta x^e}{2 \sqrt{g/h}} \mathbf{K}^e \mathbf{q}^n - \tilde{\alpha}_2 \frac{\Delta x^e}{2} \sqrt{gh} \frac{h^2}{15} \mathbf{K}^e \mathbf{r}^n \right), \quad (5.57b)$$

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{M}^e + \frac{2}{5} h^2 \mathbf{K}^e \right) \Delta \mathbf{u} = & -\Delta t \left(\mathbf{C}^e \mathbf{q}^n - g \frac{h^2}{15} \mathbf{C}^e \mathbf{r}^n + \tilde{\alpha}_1 \frac{\Delta x^e}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \mathbf{K}^e \mathbf{p}^n \right) \\ & + \tilde{\alpha}_3 \frac{\Delta x^e}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \frac{h^2}{15} (\mathbf{C}^e)^T \mathbf{r}^n; \end{aligned} \quad (5.57c)$$

- passo corrector

$$\mathbf{M}^e \mathbf{r}^{(n+1)*} = -\mathbf{K}^e \boldsymbol{\zeta}^{(n+1)*}, \quad (5.58a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^e \Delta \boldsymbol{\zeta} = & -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}^e \left(\mathbf{p}^{(n+1)*} + \mathbf{p}^n \right) - \alpha_2 \frac{\Delta x^e \Delta t}{4 \sqrt{g/h}} \mathbf{K}^e \left(\mathbf{q}^{(n+1)*} + \mathbf{q}^n \right) \\ & - \alpha_2 \frac{\Delta x^e}{2 \sqrt{g/h}} (\mathbf{C}^e)^T \Delta \mathbf{u}^* + \alpha_2 \frac{\Delta x^e \Delta t}{4} \sqrt{gh} \frac{h^2}{15} \mathbf{K}^e \mathbf{K}^e \left(\mathbf{r}^{(n+1)*} + \mathbf{r}^n \right) \\ & + \beta_2 \frac{\Delta t \Delta x^e}{4 \sqrt{g/h}} \mathbf{K}^e \Delta \mathbf{q}^* - \beta_2 \frac{\Delta t \Delta x^e}{4} \sqrt{gh} \frac{h^2}{15} \mathbf{K}^e \Delta \mathbf{r}^*, \end{aligned} \quad (5.58b)$$

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{M}^e + \frac{2}{5} h^2 \mathbf{K}^e \right) \Delta \mathbf{u} = & -\frac{\Delta t}{2} \left[\mathbf{C}^e \left(\mathbf{q}^{(n+1)*} + \mathbf{q}^n \right) - g \frac{h^2}{15} \mathbf{C}^e \left(\mathbf{r}^{(n+1)*} + \mathbf{r}^n \right) \right. \\
& + \alpha_1 \frac{\Delta x^e}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \mathbf{K}^e \left(\mathbf{p}^{(n+1)*} + \mathbf{p}^n \right) - \alpha_3 \frac{\Delta x^e}{2 \Delta t} \sqrt{\frac{g}{h}} \frac{h^2}{15} (\mathbf{C}^e)^T \left(\mathbf{r}^{(n+1)*} + \mathbf{r}^n \right) \Big] \\
& - \alpha_1 \frac{\Delta x^e}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} (\mathbf{C}^e)^T \Delta \boldsymbol{\zeta}^* + \beta_1 \frac{\Delta t \Delta x^e}{4} \sqrt{\frac{g}{h}} \mathbf{K}^e \Delta \mathbf{p}^*. \quad (5.58c)
\end{aligned}$$

Nestas equações, os vectores $\boldsymbol{\zeta}^n$, $\mathbf{u}^n$ e $\boldsymbol{\zeta}^{n+1}$, $\mathbf{u}^{n+1}$ são os vectores elementares dos valores nodais das funções $\hat{\zeta}$ e $\hat{u}$ nos instantes $t_n = n \Delta t$ e $t_{n+1} = (n+1) \Delta t$, respectivamente. Os vectores elementares $\mathbf{p}^n$, $\mathbf{q}^n$, $\mathbf{r}^n$ e $\mathbf{p}^{n+1}$, $\mathbf{q}^{n+1}$, $\mathbf{r}^{n+1}$ representam os valores nodais, nos referidos instantes, da quantidade de movimento específica, da energia específica e da variável adicional $\hat{r}$, respectivamente, tal como definidas em (4.43). Por outro lado, os vectores $\Delta \boldsymbol{\zeta}$, $\Delta \mathbf{u}$, $\Delta \mathbf{p}$, $\Delta \mathbf{q}$ e $\Delta \mathbf{r}$ são os vectores elementares dos incrementos nodais daquelas grandezas no intervalo de tempo entre os instantes t_n e t_{n+1} , i.e.

$$\Delta \boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}^{n+1} - \boldsymbol{\zeta}^n,$$

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n,$$

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}^{n+1} - \mathbf{p}^n,$$

$$\Delta \mathbf{q} = \mathbf{q}^{n+1} - \mathbf{q}^n,$$

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}^{n+1} - \mathbf{r}^n.$$

As quantidades denotadas com um asterisco, $()^*$, correspondem à previsão do passo predictor, ou à iteração anterior do passo corrector. Δx^e é o comprimento do e -ésimo elemento numa discretização não uniforme do domínio espacial.

As matrizes elementares $\mathbf{M}^e$, $\mathbf{C}^e$ e $\mathbf{K}^e$ são dadas por

$$\mathbf{M}^e = \frac{\Delta x^e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{K}^e = \frac{1}{\Delta x^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

sendo $(\mathbf{C}^e)^T$ a transposta da matriz $\mathbf{C}^e$.

Na análise de precisão e estabilidade, a matriz de massa elementar, $\mathbf{M}^e$, nas equações (5.57a) e (5.58a) é substituída por uma matriz de massa diagonalizada,

num procedimento análogo ao seguido em §4.3.2, a qual é:

$$\mathbf{M}_d^e = \frac{\Delta x^e}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.4.2 Análise de precisão e estabilidade

Para este modelo apenas é efectuada uma análise baseada na precisão e estabilidade da solução linear. Supondo que ζ e $\bar{u}$ são funções que admitem desenvolvimentos em série de Fourier, ter-se-ão como soluções gerais as funções

$$\begin{aligned} \zeta(x, t) &= \Re \left(\int_{-\infty}^{+\infty} A_\zeta(k) e^{i[kx - \omega(k)t]} e^{-s(k)t} dk \right), \\ \bar{u}(x, t) &= \Re \left(\int_{-\infty}^{+\infty} A_u(k) e^{i[kx - \omega(k)t]} e^{-s(k)t} dk \right), \end{aligned}$$

onde i é a unidade imaginária, k é o número de onda, $A_\zeta(k)$ e $A_u(k)$ são as funções densidade espectral, $\omega(k)$ é a frequência angular da onda e $s(k)$ é o coeficiente de amortecimento. Como já foi referido anteriormente, em virtude das propriedades das séries de Fourier, cada termo dessa série é também solução do problema linear.

Seja a seguinte solução particular para ζ e $\bar{u}$:

$$\zeta(x, t) = \Re(a_\zeta e^{i(kx - \omega t)} e^{-st}), \quad (5.59a)$$

$$\bar{u}(x, t) = \Re(a_u e^{i(kx - \omega t)} e^{-st}), \quad (5.59b)$$

onde a_ζ e a_u são coeficientes complexos, definindo simultaneamente a amplitude e a fase das ondas para $t = 0$ e $x = 0$.

Sendo $G = e^{-i(\omega - is)\Delta t}$ o coeficiente de propagação do esquema numérico e fazendo coincidir o i -ésimo nó com $x = 0$ e o nível n com $t = 0$, ter-se-á sem perda de generalidade que:

$$\hat{\zeta}_{i-1}^n = \Re(a_\zeta e^{-ik\Delta x}), \quad (5.60a)$$

$$\hat{\zeta}_i^n = \Re(a_\zeta), \quad (5.60b)$$

$$\hat{\zeta}_{i+1}^n = \Re(a_\zeta e^{ik\Delta x}), \quad (5.60c)$$

$$\hat{\zeta}_{i-1}^{n+1} = \Re(G a_\zeta e^{-ik\Delta x}), \quad (5.60d)$$

$$\hat{\zeta}_i^{n+1} = \Re(G a_\zeta), \quad (5.60e)$$

$$\hat{\zeta}_{i+1}^{n+1} = \Re(G a_\zeta e^{ik\Delta x}), \quad (5.60f)$$

$$\hat{u}_{i-1}^n = \Re (a_u e^{-i k \Delta x}) , \quad (5.60g)$$

$$\hat{u}_i^n = \Re (a_u) , \quad (5.60h)$$

$$\hat{u}_{i+1}^n = \Re (a_u e^{i k \Delta x}) , \quad (5.60i)$$

$$\hat{u}_{i-1}^{n+1} = \Re (G a_u e^{-i k \Delta x}) , \quad (5.60j)$$

$$\hat{u}_i^{n+1} = \Re (G a_u) , \quad (5.60k)$$

$$\hat{u}_{i+1}^{n+1} = \Re (G a_u e^{i k \Delta x}) . \quad (5.60l)$$

Por conveniência de escrita, o símbolo $\Re$, que designa a parte real, será doravante suprimido.

Passo corrector de quinta ordem

Substituindo a solução particular (5.60) nas equações globais linearizadas para o i -ésimo nó, obtidas pela soma das contribuições das equações elementares (5.58b) e (5.58c), resulta um sistema homogéneo de duas equações algébricas lineares. As soluções não triviais deste sistema correspondem às raízes em G do seu polinómio característico.

A celeridade de fase e o coeficiente de amortecimento numéricos do esquema são dados por

$$\frac{C}{\sqrt{gh}} = \Re \left[i \frac{1}{Cr (k \Delta x)} \log G \right] , \quad (5.61)$$

$$\frac{1}{\sqrt{gh}} \frac{s}{k} = \Im \left[-i \frac{1}{Cr (k \Delta x)} \log G \right] . \quad (5.62)$$

Sejam

$$\beta_1 = \frac{1}{15} \frac{2 - 17 Cr^4 - 4 n^2 (5 - 8 Cr^2)}{Cr (4 n^2 - 1 - 2 Cr^2)} , \quad (5.63a)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{3 Cr} , \quad (5.63b)$$

$$\alpha_1 = -\frac{2}{n^2} \quad (5.63c)$$

$$\alpha_2 = 0 , \quad (5.63d)$$

$$\alpha_3 = 5 \frac{Cr}{n^2} (1 - Cr^2) , \quad (5.63e)$$

com $n = h/\Delta x$. Desenvolvendo a celeridade de fase e o coeficiente de amortecimento

numéricos em séries de Taylor multivariadas em torno de $kh = 0$ e $k\Delta x = 0$, obtêm-se as expressões

$$\frac{C}{\sqrt{gh}} = 1 - \frac{1}{6} (kh)^2 + \frac{19}{360} (kh)^4 + TOS, \quad (5.64)$$

$$\frac{1}{\sqrt{gh}} \frac{s}{k} = \frac{1}{360} (k\Delta x)^5 + TOS. \quad (5.65)$$

O desenvolvimento de Taylor da celeridade de fase linear do esquema numérico coincide, a menos de um erro de sexta ordem, com a mesma expansão da celeridade de fase do modelo de Madsen & Sørensen. Por outro lado, verifica-se a presença de um termo dissipativo de quinta ordem.

Nos diversos ensaios numéricos efectuados para esta formulação não foi possível obter uma solução estável, em resultado de perturbações de origem numérica junto à fronteira de barlar. Foram ainda ensaiadas algumas variantes com um termo dissipativo de terceira ordem, também sem sucesso.

Passo predictor

Substituindo agora a solução particular (5.60) nas equações globais linearizadas para o i -ésimo nó, obtidas pela soma das contribuições das equações elementares (5.57b) e (5.57c), resulta um novo sistema homogéneo de duas equações algébricas lineares. As soluções não triviais deste sistema correspondem às raízes em G do seu polinómio característico.

Fazendo

$$\tilde{\alpha}_1 = Cr - \frac{\tilde{\alpha}_2}{2}, \quad (5.66a)$$

$$\tilde{\alpha}_2 = \frac{1}{2} Cr \frac{4(n^2 - 1) - 5Cr^2}{7n^2 - 30Cr^2}, \quad (5.66b)$$

$$\tilde{\alpha}_3 = -\frac{5}{2} \frac{Cr}{n^2} (3\tilde{\alpha}_2^2 + 6\tilde{\alpha}_2 Cr - Cr^2), \quad (5.66c)$$

com $n = h/\Delta x$, e desenvolvendo a celeridade de fase e o coeficiente de amortecimento numéricos em séries de Taylor multivariadas em torno de $kh = 0$ e $k\Delta x = 0$, obtêm-se as expressões

$$\frac{C}{\sqrt{gh}} = 1 - \frac{1}{6} (kh)^2 + TOS, \quad (5.67)$$

$$\frac{1}{\sqrt{gh}} \frac{s}{k} = \frac{1}{120} Cr (k\Delta x)^3 + TOS. \quad (5.68)$$

O desenvolvimento de Taylor da celeridade de fase linear do esquema numérico coincide, a menos de um erro de quarta ordem, com a mesma expansão da celeridade de fase do modelo de Madsen & Sørensen. O termo dissipativo é no entanto de terceira ordem.

Este predictor foi utilizado em associação com o corrector de quinta ordem. O esquema numérico resultante revelou-se no entanto bastante instável.

Outros esquemas, resultantes de outras combinações dos elementos dos tensores $\mathbf{T}_\alpha$ e $\mathbf{T}_\beta$ foram ensaiados. Nomeadamente foram testados outros esquemas em que o corrector tinha erro de quarta ordem na celeridade e dissipação de terceira ordem. Verificou-se sempre instabilidade ou dissipação excessiva.

5.4.3 Esquema predictor-corrector não consistente

Um esquema de elementos finitos diz-se não consistente quando, substituída a função de aproximação pela função solução do problema clássico (5.53) na formulação de elementos finitos (5.54), aquela não é solução deste problema.

Verificou-se ser possível obter soluções com elevada precisão e estáveis para vários problemas (cf. Capítulo 6) caso se ignorasse o último termo da equação (5.58b). A influência daquele termo é de quarta ordem na celeridade de fase e de quinta ordem no coeficiente de amortecimento.

O esquema proposto tem precisão de quarta ordem na celeridade, e um mecanismo dissipativo de terceira ordem. Fazendo $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ ter-se-á, então:

- passo predictor:

$$\mathbf{M}^e \mathbf{r}^n = -\mathbf{K}^e \boldsymbol{\zeta}^n, \quad (5.69a)$$

$$\mathbf{M}^e \Delta \boldsymbol{\zeta} = -\Delta t \left(\mathbf{C}^e \mathbf{p}^n + \tilde{\alpha}_2 \frac{\Delta x^e}{2\sqrt{g/h}} \mathbf{K}^e \mathbf{q}^n - \tilde{\alpha}_2 \frac{\Delta x^e}{2} \sqrt{gh} \frac{h^2}{15} \mathbf{K}^e \mathbf{r}^n \right), \quad (5.69b)$$

$$\left(\mathbf{M}^e + \frac{2}{5} h^2 \mathbf{K}^e \right) \Delta \mathbf{u} = -\Delta t \left(\mathbf{C}^e \mathbf{q}^n - g \frac{h^2}{15} \mathbf{C}^e \mathbf{r}^n + \tilde{\alpha}_1 \frac{\Delta x^e}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \mathbf{K}^e \mathbf{p}^n \right); \quad (5.69c)$$

- passo corrector

$$\mathbf{M}^e \mathbf{r}^{(n+1)*} = -\mathbf{K}^e \boldsymbol{\zeta}^{(n+1)*}, \quad (5.70a)$$

$$\mathbf{M}^e \Delta \boldsymbol{\zeta} = -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}^e \left(\mathbf{p}^{(n+1)*} + \mathbf{p}^n \right) + \beta_2 \frac{\Delta t \Delta x^e}{4\sqrt{g/h}} \mathbf{K}^e \Delta \mathbf{q}^*, \quad (5.70b)$$

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{M}^e + \frac{2}{5} h^2 \mathbf{K}^e \right) \Delta \mathbf{u} = & -\frac{\Delta t}{2} \left[\mathbf{C}^e \left(\mathbf{q}^{(n+1)*} + \mathbf{q}^n \right) \right. \\
& - g \frac{h^2}{15} \mathbf{C}^e \left(\mathbf{r}^{(n+1)*} + \mathbf{r}^n \right) + \alpha_1 \frac{\Delta x^e}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \mathbf{K}^e \left(\mathbf{p}^{(n+1)*} + \mathbf{p}^n \right) \Big] \\
& - \alpha_1 \frac{\Delta x^e}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} (\mathbf{C}^e)^T \Delta \boldsymbol{\zeta}^* + \beta_1 \frac{\Delta t \Delta x^e}{4} \sqrt{\frac{g}{h}} \mathbf{K}^e \Delta \mathbf{p}^*. \quad (5.70c)
\end{aligned}$$

Passo corrector: verifica-se que o termo dissipativo é directamente proporcional a α_1 e portanto caso se opte por fazer $\alpha_1 = 0$, o esquema é consistente. A análise da expansão em séries de Taylor multivariadas em kh e $k\Delta x$ da celeridade de fase e do coeficiente de amortecimento mostram que

$$\frac{C}{\sqrt{gh}} = 1 - \frac{1}{6} (kh)^2 + \frac{19}{360} (kh)^4 + \mathcal{O}((k\Delta x)^4, (kh)^2(k\Delta x)^2, (kh)^6) \quad (5.71)$$

$$\frac{1}{\sqrt{gh}} \frac{s}{k} = \frac{1}{24} Cr^2 \alpha_1 (k\Delta x)^3 + TOS. \quad (5.72)$$

Nos casos de estudo apresentados no Capítulo 6 optou-se por utilizar, quando necessário,

$$\alpha_1 = 2 \frac{Cr^2}{1 - Cr^2}. \quad (5.73)$$

Passo predictor: um predictor de segunda ordem semelhante ao utilizado para o modelo de Boussinesq foi utilizado com sucesso em conjunto com o corrector de terceira ordem. Seja

$$\tilde{\alpha}_2 = 0 \quad \text{e} \quad \tilde{\alpha}_1 = Cr. \quad (5.74)$$

Neste caso as expansões em séries de Taylor multivariadas em torno de $kh = 0$ e $k\Delta x = 0$ da celeridade de fase e do coeficiente de amortecimento são:

$$\frac{C}{\sqrt{gh}} = 1 - \frac{1}{6} (kh)^2 + \frac{1}{24} Cr^2 (k\Delta x)^2 + TOS, \quad (5.75)$$

$$\frac{1}{\sqrt{gh}} \frac{s}{k} = \frac{1}{120} Cr (4(kh)^2 - 5(k\Delta x)^2) (k\Delta x) + TOS. \quad (5.76)$$

O predictor não é neste caso estável, o que pode levantar problemas quando utilizado em conjunto com a formulação não dissipativa do corrector, i.e. com $\alpha_1 = 0$.

5.5 Modelo de Boussinesq a 2DH

Considere-se o modelo de Boussinesq a 2DH para fundos de variação suave, na sua forma quase linear, e escrito em notação matricial. O problema clássico consiste em encontrar a função vectorial $\mathbf{U} = \mathbf{U}(x, y, t)$ tal que:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} + \mathbf{B}_{xx} \frac{\partial^3 \mathbf{U}}{\partial x^2 \partial t} + \mathbf{B}_{xy} \frac{\partial^3 \mathbf{U}}{\partial x \partial y \partial t} + \mathbf{B}_{yy} \frac{\partial^3 \mathbf{U}}{\partial y^2 \partial t} + \mathbf{C} \mathbf{U} = \mathbf{0},$$

$$\forall P \in Q, \quad (5.77a)$$

com condições fronteira⁵ e iniciais de Dirichlet:

$$\mathbf{U}(P) = \mathbf{U}_S(P), \quad \forall P \in S, \quad (5.77b)$$

$$\mathbf{U}(P) = \mathbf{U}_0(P), \quad \forall P \in S_0. \quad (5.77c)$$

No problema (5.77), o ponto P é $P \equiv (x, y, t)$ e o domínio Q é definido como $Q = \Omega \times T$, sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $T = [0, +\infty[$. As fronteiras S e S_0 são respectivamente $\Gamma \times T$ e $\Omega \times \{0\}$. O vector $\mathbf{U}$ e as matrizes $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$, $\mathbf{B}_{xx}$, $\mathbf{B}_{xy}$, $\mathbf{B}_{yy}$ e $\mathbf{C}$ são definidos por

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \zeta \\ \bar{u} \\ \bar{v} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_x = \begin{bmatrix} \bar{u} & h + \zeta & 0 \\ g & \bar{u} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{u} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_y = \begin{bmatrix} \bar{v} & 0 & h + \zeta \\ 0 & \bar{v} & 0 \\ g & 0 & \bar{v} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{xx} = \frac{h^2}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{xy} = \frac{h^2}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{yy} = \frac{h^2}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \\ 0 & 0 & -\Omega_z \\ 0 & \Omega_z & 0 \end{bmatrix},$$

sendo Ω_z a componente vertical do vector vorticidade:

$$\Omega_z = \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}.$$

⁵Para uma correcta caracterização das condições de fronteira, ver o Capítulo 3.

5.5.1 Formulação de Petrov-Galerkin

Discretize-se o domínio Q em elementos finitos no espaço e no tempo e seja $\mathcal{V}_0^1$ o espaço de funções vectoriais lineares com continuidade C_0 ao longo das fronteiras dos elementos. A formulação de Galerkin do problema será então: determinar a função $\hat{\mathbf{U}} \in \mathcal{V}_0^1 \times \mathcal{V}_0^1 \times \mathcal{V}_0^1$ tal que

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega} \hat{\mathbf{W}} \cdot \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{U}}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}}{\partial y} + \mathbf{B}_{xx} \frac{\partial^3 \hat{\mathbf{U}}}{\partial x^2 \partial t} + \mathbf{B}_{xy} \frac{\partial^3 \hat{\mathbf{U}}}{\partial x \partial y \partial t} + \mathbf{B}_{yy} \frac{\partial^3 \hat{\mathbf{U}}}{\partial y^2 \partial t} + \mathbf{C} \hat{\mathbf{U}} \right) d\Omega dt = 0, \quad \forall \hat{\mathbf{W}} \in \mathcal{V}_0^1 \times \mathcal{V}_0^1 \times \mathcal{V}_0^2. \quad (5.78)$$

As funções de interpolação são funções vectoriais trilineares no espaço-tempo, dadas num elemento regular (cf. Figura 5.18) por

$$\begin{bmatrix} \hat{\zeta} \\ \hat{u} \\ \hat{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\zeta}_1 & \cdots & \hat{\zeta}_8 \\ \hat{u}_1 & \cdots & \hat{u}_8 \\ \hat{v}_1 & \cdots & \hat{v}_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1^e \\ \vdots \\ N_8^e \end{bmatrix}, \quad (5.79)$$

onde $\hat{\zeta}_1, \dots, \hat{\zeta}_8$, $\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_8$ e $\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_8$ são os valores nodais das variáveis e $N_1^e, \dots, N_8^e$ as funções de forma:

$$\begin{aligned} N_1^e &= \left(1 - \frac{\bar{x}}{\Delta x}\right) \left(1 - \frac{\bar{y}}{\Delta y}\right) \left(1 - \frac{\bar{t}}{\Delta t}\right), \\ N_2^e &= \frac{\bar{x}}{\Delta x} \left(1 - \frac{\bar{y}}{\Delta y}\right) \left(1 - \frac{\bar{t}}{\Delta t}\right), \\ N_3^e &= \frac{\bar{x}}{\Delta x} \frac{\bar{y}}{\Delta y} \left(1 - \frac{\bar{t}}{\Delta t}\right), \\ N_4^e &= \left(1 - \frac{\bar{x}}{\Delta x}\right) \frac{\bar{y}}{\Delta y} \left(1 - \frac{\bar{t}}{\Delta t}\right), \\ N_5^e &= \left(1 - \frac{\bar{x}}{\Delta x}\right) \left(1 - \frac{\bar{y}}{\Delta y}\right) \frac{\bar{t}}{\Delta t}, \\ N_6^e &= \frac{\bar{x}}{\Delta x} \left(1 - \frac{\bar{y}}{\Delta y}\right) \frac{\bar{t}}{\Delta t}, \\ N_7^e &= \frac{\bar{x}}{\Delta x} \frac{\bar{y}}{\Delta y} \frac{\bar{t}}{\Delta t}, \\ N_8^e &= \frac{\bar{x}}{\Delta x} \frac{\bar{y}}{\Delta y} \frac{\bar{t}}{\Delta t}, \end{aligned}$$

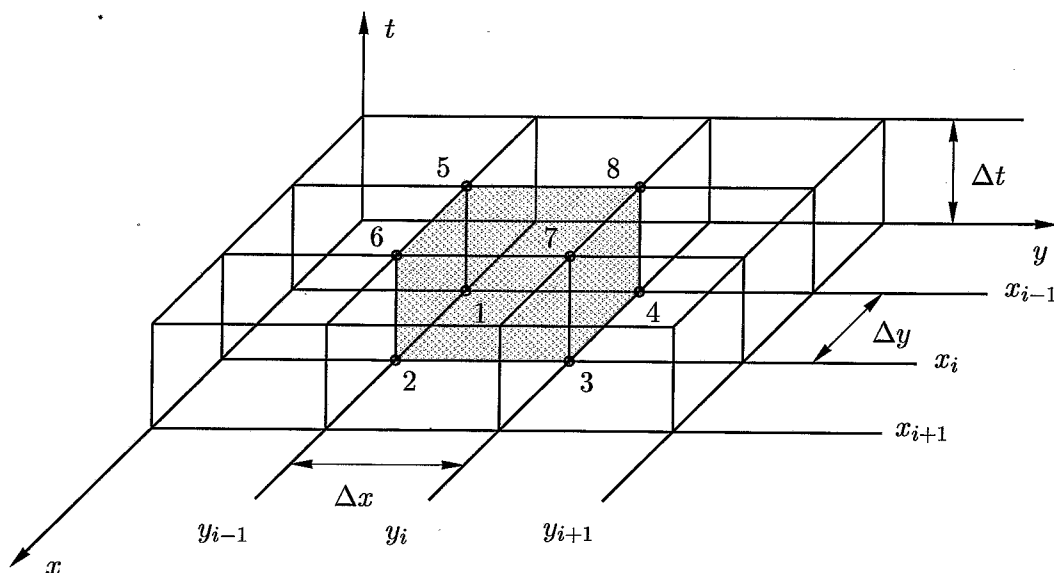


Figura 5.18: Malha regular de elementos finitos espaço-temporal num domínio 2DH.

$$N_8^e = \left(1 - \frac{\bar{x}}{\Delta x}\right) \frac{\bar{y}}{\Delta y} \frac{\bar{t}}{\Delta t}.$$

De forma semelhante ao que foi feito na secção anterior para o caso do modelo de Boussinesq 1DH, é necessário definir uma função peso $\hat{\mathbf{W}}$ tal que:

- seja corrigido qualquer erro dispersivo de segunda ordem, eventualmente presente nas equações diferenciais equivalentes;
- seja introduzido um termo numérico dissipativo de terceira ordem.

Uma formulação análoga para sistemas de convexão-difusão foi estabelecida por Yu e Heinrich (1987). Aqueles autores não estudaram porém o efeito dos termos dissipativos na direcção transversal à propagação, nomeadamente das derivadas cruzadas: $\partial^4 \bar{u} / (\partial x^3 \partial y)$, $\partial^4 \bar{u} / (\partial x^2 \partial y^2)$, $\partial^4 \bar{u} / (\partial x \partial y^3)$, $\partial^4 \bar{v} / (\partial x \partial y^3)$, $\partial^4 \bar{v} / (\partial x^2 \partial y^2)$ e $\partial^4 \bar{v} / (\partial x^3 \partial y)$.

A função peso $\hat{\mathbf{W}}(x, y, t)$ é então uma função vectorial, descontínua nas fronteiras dos elementos, bilinear no espaço e quadrática no tempo, cuja expressão é:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{W}}_i(x, y, t) \equiv & \mathbf{P}_i^e + \alpha_x \frac{\Delta x}{2C_0} \mathbf{T}_\alpha (\mathbf{A}_x^\ell)^T \frac{\partial \mathbf{P}_i^e}{\partial x} + \alpha_y \frac{\Delta y}{2C_0} \mathbf{T}_\alpha (\mathbf{A}_y^\ell)^T \frac{\partial \mathbf{P}_i^e}{\partial y} \\ & + \beta_x \frac{\Delta x \Delta t}{4C_0} \mathbf{T}_\beta (\mathbf{A}_x^\ell)^T \frac{\partial^2 \mathbf{P}_i^e}{\partial x \partial t} + \beta_y \frac{\Delta y \Delta t}{4C_0} \mathbf{T}_\beta (\mathbf{A}_y^\ell)^T \frac{\partial^2 \mathbf{P}_i^e}{\partial y \partial t} \\ & + \frac{\Delta x \Delta y \Delta t}{8h^2/3} \mathbf{T}_\gamma \mathbf{B}_{xy}^T \frac{\partial^3 \mathbf{P}_i^e}{\partial x \partial y \partial t}, \end{aligned} \quad (5.80)$$

sendo o vector $\mathbf{P}_i^e$ e as matrizes $\mathbf{A}_x^\ell$ e $\mathbf{A}_y^\ell$ respectivamente

$$\mathbf{P}_i^e = \begin{bmatrix} P_i^e \\ P_i^e \\ P_i^e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_x^\ell = \begin{bmatrix} 0 & h & 0 \\ g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_y^\ell = \begin{bmatrix} 0 & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

enquanto os tensores $\mathbf{T}_\alpha$, $\mathbf{T}_\beta$ e $\mathbf{T}_\gamma$ são dados por:

$$\mathbf{T}_\alpha = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad e \quad \mathbf{T}_\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{33} \end{bmatrix}.$$

Na expressão (5.80), os termos em α introduzem uma dissipação de terceira ordem do tipo *upwind*, enquanto o termo em γ , também de terceira ordem, controla os termos dissipativos cruzados para o caso da propagação do tipo radial; os termos em β eliminam os termos dispersivos numéricos de segunda ordem.

Os coeficientes escalares da função peso (5.80), α_x , α_y , β_x , β_y , γ_{22} e γ_{33} determinam-se por forma a que as equações diferenciais equivalentes no ponto (x_i, y_i, t_{n+1}) não contenham termos dispersivos de origem numérica de ordem inferior à quarta e que os termos dissipativos de origem numérica sejam de terceira ordem.

5.5.2 Análise de precisão e estabilidade

Equações diferenciais equivalentes

As equações diferenciais equivalentes determinam-se recorrendo a um processo semelhante ao utilizado para o caso unidimensional, mas cujos detalhes por demasiado extensos aqui se omitem:

- as equações discretas às diferenças no ponto (x_i, y_i, t_{n+1}) são obtidas por substituição das funções de peso (5.80) e das funções de interpolação (5.79) na formulação de Galerkin (5.78);
- recorrendo a expansões em série de Taylor em torno do ponto (x_i, y_i, t_{n+1}) , reescrevem-se as equações obtidas no passo (a) em função do valor nodal das variáveis e das suas derivadas no ponto (x_i, y_i, t_{n+1}) ;
- rearranjo das derivadas de ordem superior por aplicação recursiva das equações obtidas no passo (b) sobre si próprias, conduzindo às equações diferenciais equivalentes na forma mais conveniente.

Do procedimento acima descrito resultam as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[(h + \hat{\zeta}) \hat{u} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(h + \hat{\zeta}) \hat{v} \right] \\ = -\frac{1}{12} C_0 \Delta x \Delta t h (Cr_x - 3\beta_x) \left(\frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \hat{v}}{\partial x^2 \partial y} \right) \end{aligned} \quad (5.81a)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{12} C_0 \Delta y \Delta t h (Cr_y - 3\beta_y) \left(\frac{\partial^3 \hat{v}}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial x \partial y^2} \right) + TOS, \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(g \hat{\zeta} + \frac{\hat{u}^2}{2} + \frac{\hat{v}^2}{2} \right) - \frac{h^2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y \partial t} \right) \\ = -\frac{1}{12} C_0 \Delta x^3 (1 - Cr_x^2) \alpha_x \frac{\partial^4 \hat{u}}{\partial x^4} + \frac{1}{12} C_0 \Delta x^3 Cr_x^2 \alpha_x \frac{\partial^4 \hat{v}}{\partial x^3 \partial y} \\ + \frac{1}{12} C_0 \Delta x^3 \left(\frac{3}{2} \frac{\Delta y}{\Delta x} Cr_x \gamma_{33} + Cr_x^2 \alpha_x \right) \left(\frac{\partial^4 \hat{u}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \hat{v}}{\partial x \partial y^3} \right) + TOS, \end{aligned} \quad (5.81b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(g \hat{\zeta} + \frac{\hat{u}^2}{2} + \frac{\hat{v}^2}{2} \right) - \frac{h^2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y \partial t} \right) \\ = -\frac{1}{12} C_0 \Delta y^3 (1 - Cr_y^2) \alpha_y \frac{\partial^4 \hat{v}}{\partial y^4} + \frac{1}{12} C_0 \Delta y^3 Cr_y^2 \alpha_y \frac{\partial^4 \hat{u}}{\partial x \partial y^3} \\ + \frac{1}{12} C_0 \Delta y^3 \left(\frac{3}{2} \frac{\Delta x}{\Delta y} Cr_y \gamma_{22} + Cr_y^2 \alpha_y \right) \left(\frac{\partial^4 \hat{u}}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 \hat{v}}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + TOS. \end{aligned} \quad (5.81c)$$

Nestas equações, C_0 é a celeridade assintótica para uma onda longa e Cr_x e Cr_y são os números de Courant direccionais. As suas definições são respectivamente:

$$C_0 = \sqrt{gh}, \quad Cr_x = C_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad \text{e} \quad Cr_y = C_0 \frac{\Delta t}{\Delta y}.$$

Por outro lado, TOS significa termos de ordem superior, designação que inclui termos não lineares de terceira ordem e outros termos de ordem superior à terceira.

Da inspecção das equações (5.81) é imediato concluir que, para garantir precisão de terceira ordem, basta tomar os coeficientes β_x e β_y tais que:

$$\beta_x = \frac{Cr_x}{3} \quad \text{e} \quad \beta_y = \frac{Cr_y}{3}. \quad (5.82)$$

Por seu turno, os coeficientes α_x , α_y , γ_{22} e γ_{33} são escolhidos por forma a garantir a estabilidade do esquema numérico. Tal é feito heurísticamente, admitindo a hipótese

de escoamento irrotacional, para a qual se verificam as seguintes igualdades:

$$\frac{\partial^4 \hat{v}}{\partial x^3 \partial y} = \frac{\partial^4 \hat{u}}{\partial x^2 \partial y^2}, \quad (5.83a)$$

$$\frac{\partial^4 \hat{v}}{\partial x \partial y^3} = \frac{\partial^4 \hat{u}}{\partial y^4}, \quad (5.83b)$$

$$\frac{\partial^4 \hat{u}}{\partial x^3 \partial y} = \frac{\partial^4 \hat{v}}{\partial x^4}, \quad (5.83c)$$

$$\frac{\partial^4 \hat{u}}{\partial x \partial y^3} = \frac{\partial^4 \hat{v}}{\partial x^2 \partial y^2}. \quad (5.83d)$$

Nestas condições, é possível eliminar as derivadas cruzadas e tornar negativos os coeficientes das derivadas não cruzadas de quarta ordem. Fazendo:

$$\alpha_x = \frac{Cr_x^2}{1 - Cr_x^2} \quad \text{e} \quad \alpha_y = \frac{Cr_y^2}{1 - Cr_y^2}, \quad (5.84)$$

e

$$\gamma_{22} = -\frac{4}{3} Cr_x \alpha_y \quad \text{e} \quad \gamma_{33} = -\frac{4}{3} Cr_y \alpha_x, \quad (5.85)$$

e tendo em conta as expressões (5.82), as equações diferenciais equivalentes, para o escoamento irrotacional, escrevem-se:

$$\frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[(h + \hat{\zeta}) \hat{u} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(h + \hat{\zeta}) \hat{v} \right] = TOS, \quad (5.86a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(g \hat{\zeta} + \frac{\hat{u}^2}{2} + \frac{\hat{v}^2}{2} \right) - \frac{h^2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y \partial t} \right) \\ = -\frac{1}{12} C_0 Cr_x^2 \Delta x^3 \frac{\partial^4 \hat{u}}{\partial x^4} - \frac{1}{12} C_0 \frac{Cr_x^4}{1 - Cr_x^2} \Delta x^3 \frac{\partial^4 \hat{u}}{\partial y^4} + TOS, \end{aligned} \quad (5.86b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(g \hat{\zeta} + \frac{\hat{u}^2}{2} + \frac{\hat{v}^2}{2} \right) - \frac{h^2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y \partial t} \right) \\ = -\frac{1}{12} C_0 \frac{Cr_y^4}{1 - Cr_y^2} \Delta y^3 \frac{\partial^4 \hat{v}}{\partial x^4} - \frac{1}{12} C_0 Cr_y^2 \Delta y^3 \frac{\partial^4 \hat{v}}{\partial y^4} + TOS. \end{aligned} \quad (5.86c)$$

Para que nas equações (5.86b) e (5.86c) os termos de dissipação cruzada permaneçam de terceira ordem é ainda necessário que os coeficientes α_x e α_y sejam tais que:

$$0 \leq \alpha_x = \frac{Cr_x^2}{1 - Cr_x^2} \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq \alpha_y = \frac{Cr_y^2}{1 - Cr_y^2} \leq 1.$$

Destas duas condições resultam os seguintes limites para os números de Courant direccionais:

$$Cr_x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad Cr_y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Relaxando a condição de irrotacionalidade, as equações diferenciais equivalentes na sua forma mais geral são:

$$\frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[(h + \hat{\zeta}) \hat{u} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(h + \hat{\zeta}) \hat{v} \right] = TOS, \quad (5.87a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(g \hat{\zeta} + \frac{\hat{u}^2}{2} + \frac{\hat{v}^2}{2} \right) - \frac{h^2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y \partial t} \right) \\ = -\frac{1}{12} C_0 Cr_x^2 \Delta x^3 \frac{\partial^4 \hat{u}}{\partial x^4} \end{aligned} \quad (5.87b)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{12} C_0 \frac{Cr_x^4}{1 - Cr_x^2} \Delta x^3 \left(\frac{\partial^4 \hat{u}}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{\partial^4 \hat{v}}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 \hat{v}}{\partial x \partial y^3} \right) + TOS, \\ \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(g \hat{\zeta} + \frac{\hat{u}^2}{2} + \frac{\hat{v}^2}{2} \right) - \frac{h^2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y \partial t} \right) \\ = -\frac{1}{12} C_0 Cr_y^2 \Delta y^3 \frac{\partial^4 \hat{v}}{\partial y^4} \end{aligned} \quad (5.87c)$$

$$-\frac{1}{12} C_0 \frac{Cr_y^4}{1 - Cr_y^2} \Delta y^3 \left(\frac{\partial^4 \hat{u}}{\partial x^3 \partial y} - \frac{\partial^4 \hat{u}}{\partial x \partial y^3} + \frac{\partial^4 \hat{v}}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + TOS.$$

Obviamente, as expressões propostas para os coeficientes α_x , α_y , γ_{22} e γ_{33} não são as únicas a satisfazer as condições referidas para o escoamento irrotacional. No entanto, as expressões (5.84) e (5.85) permitiram a obtenção de bons resultados nos ensaios numéricos descritos no Capítulo 6.

Características dispersivas e estabilidade do esquema numérico

Como nos casos anteriores, desprezando os termos não lineares das equações de Boussinesq e supondo que ζ , $\bar{u}$ e $\bar{v}$ são funções que admitem desenvolvimentos em série de Fourier, ter-se-á que as soluções gerais para ζ , $\bar{u}$ e $\bar{v}$ são do tipo:

$$\zeta(x, y, t) = \Re \left(\int_{-\infty}^{+\infty} A_{\zeta}(k) e^{i[k_x x + k_y y - \omega(k)t]} e^{-s(k)t} dk \right), \quad (5.88a)$$

$$\bar{u}(x, y, t) = \Re \left(\int_{-\infty}^{+\infty} A_{\bar{u}}(k) e^{i[k_x x + k_y y - \omega(k)t]} e^{-s(k)t} dk \right), \quad (5.88b)$$

$$\bar{v}(x, y, t) = \Re \left(\int_{-\infty}^{+\infty} A_{\bar{v}}(k) e^{i[k_x x + k_y y - \omega(k)t]} e^{-s(k)t} dk \right). \quad (5.88c)$$

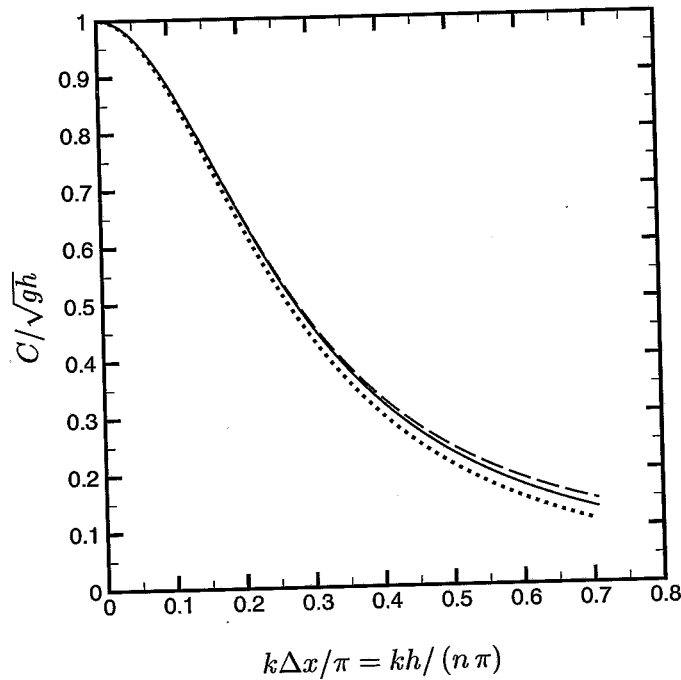


Figura 5.19: Celeridade de fase dos esquemas numéricos para o modelo de Boussinesq a 2DH, com $\phi = 45^\circ$, $n = 2$ e $Cr = \sqrt{2}/2$: analítico (—); Petrov-Galerkin (---); Bubnov-Galerkin (···).

onde $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ é o vector número de onda, $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ é o número de onda, $A_\zeta(k)$ é a função densidade espectral da elevação da superfície livre, $A_{\bar{u}}$ é a função densidade espectral da média vertical instantânea da velocidade segundo o eixo OX e $A_{\bar{v}}$ é a função densidade espectral da média vertical instantânea da velocidade segundo o eixo OY , ω é a frequência angular da onda e s é o seu coeficiente de amortecimento. Tendo em conta as propriedades destas séries, pode-se tomar sem perda de generalidade, a solução particular:

$$\zeta(x, y, t) = \Re(\zeta_0 e^{i[k_x x + k_y y - \omega(k)t]} e^{-s(k)t}), \quad (5.89a)$$

$$\bar{u}(x, y, t) = \Re(\bar{u}_0 e^{i[k_x x + k_y y - \omega(k)t]} e^{-s(k)t}), \quad (5.89b)$$

$$\bar{v}(x, y, t) = \Re(\bar{v}_0 e^{i[k_x x + k_y y - \omega(k)t]} e^{-s(k)t}). \quad (5.89c)$$

Substituindo esta solução particular nas equações discretas (não apresentadas por demasiado extensas) resulta um sistema de equações lineares algébricas. Resolvendo o polinómio característico do determinante desse sistema para o coeficiente

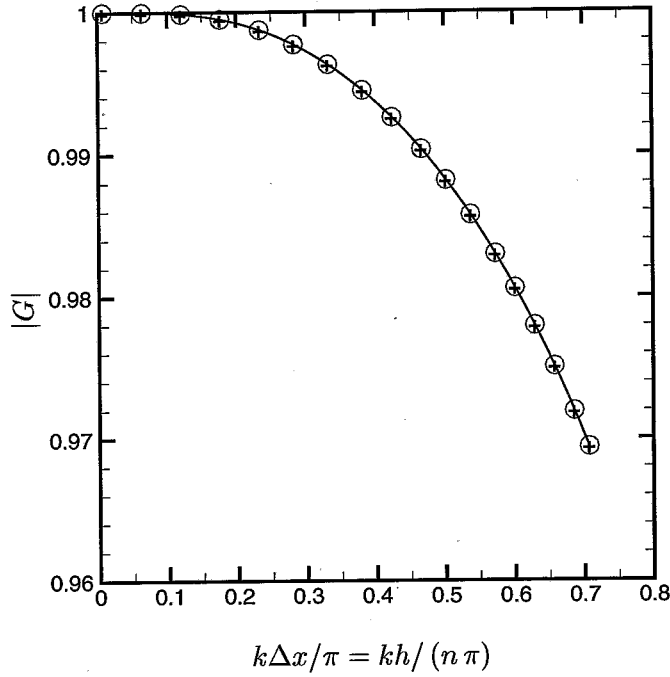


Figura 5.20: Coeficiente de amplificação do esquema de Petrov-Galerkin aplicado ao modelo de Boussinesq com $\phi = 45^\circ$, $n = 2$ e $Cr = \sqrt{2}/2$. Raiz 1: (+ + +); raiz 2: (o o o).

de propagação, G , o qual, recorda-se, é:

$$G = e^{-i(\omega - is)\Delta t},$$

definem-se a celeridade de fase numérica C e o coeficiente de amplificação $|G|$. Supondo uma malha de elementos finitos regular tal que $\ell = \Delta x = \Delta y$, vem que

$$C = \Re \left(i \frac{C_0}{k\ell Cr} \log G \right),$$

sendo o número de Courant dado por $Cr = C_0 \Delta t/\ell$ e $G = G(kh, k\ell, Cr, \phi)$, onde ϕ é a direcção de propagação da onda.

Para ondas propagando-se segundo a direcção de um dos eixos coordenados, o problema reduz-se ao caso 1DH já estudado de uma onda numa malha regular. O outro caso extremo diz respeito a uma onda propagando-se com um ângulo $\phi = 45^\circ$. A celeridade de fase e o coeficiente de amplificação para a simulação de ondas propagando-se com $\phi = 45^\circ$ numa malha de elementos finitos com discretização tal que $n = h/\ell = 2$ e para $Cr = \sqrt{2}/2$, valor limite sugerido, estão representados nas

Figuras 5.19 e 5.20 respectivamente.

5.5.3 Esquema predictor-corrector

Para ultrapassar as dificuldades resultantes da presença dos termos não lineares, recorreu-se a um esquema predictor-corrector semelhante ao utilizado para a formulação a uma dimensão horizontal. A análise da precisão do passo predictor não foi efectuada. No entanto, no ensaio numérico apresentado como caso de estudo (cf. §6.2.4), a utilização de apenas um passo corrector conduziu a soluções estáveis e com razoável precisão.

Capítulo 6

Casos de Estudo

Neste capítulo são descritos vários casos de estudo da propagação de ondas dispersivas. No caso de ondas cinemáticas são comparados os resultados numéricos das formulações de Bubnov-Galerkin e de Petrov-Galerkin do modelo RLW com a solução analítica para propagação de um solitão. São ainda comparados entre si os resultados das duas formulações na simulação da interacção entre dois solitões. Na modelação das ondas dinâmicas, são abordados três casos de estudo a uma dimensão horizontal: propagação de uma onda solitária num canal de profundidade constante; propagação de uma onda solitária sobre um talude e reflexão numa parede vertical; propagação de uma onda monocromática sobre um quebra-mar submerso. Nos dois primeiros casos apenas os modelos de Boussinesq e Madsen & Sørensen são examinados. No terceiro caso são utilizados os modelos de Boussinesq, de Madsen & Sørensen, de Seabra-Santos e de Nadaoka & Beji. Para os três primeiros modelos recorre-se às duas formulações: Bubnov-Galerkin e Petrov-Galerkin; para o último apenas a formulação de Bubnov-Galerkin é usada. Os resultados das simulações numéricas são comparados entre si e com os resultados experimentais divulgados por Dingemans (1994). Finalmente um problema a duas dimensões horizontais, a propagação de uma onda solitária num canal rectangular e em torno de um cilindro vertical, é analisado.

6.1 Ondas cinemáticas

6.1.1 Propagação de um solitão

Nesta secção compara-se a solução tipo solitão do modelo de propagação de ondas cinemáticas, RLW, com as soluções numéricas obtidas por aplicação das formulações de Bubnov-Galerkin (BG) e de Petrov-Galerkin (PG) (cf. Capítulo 5). Dada a

especificidade deste tipo de ondas, para as quais existe um equilíbrio dinâmico entre os termos convectivo e dispersivo, o qual mantendo a forma constante da onda, deverá evitar o surgimento de instabilidades numéricas, optou-se pela utilização de esquemas não dissipativos, i.e.: integração no tempo tipo Crank-Nicholson para a formulação BG; coeficiente $\alpha = 0$ para a formulação PG.

O solitão tem um amplitude $a = 0.2$ m e propaga-se num canal de profundidade $h = 1$ m. O parâmetro de não linearidade é, portanto, $\epsilon = 0.2$. No instante inicial, a onda entra no domínio, coincidindo a crista da onda com o primeiro ponto de cálculo.

De acordo com a Tabela 2.2, o comprimento da onda, λ é dado aproximadamente por

$$\lambda \approx 2\pi \sqrt{\frac{4}{3} \frac{h^2}{a}} = 16.2 \text{ m}.$$

O domínio foi dividido em elementos finitos lineares e uniformes com $\Delta x = 0.5$ m, portanto $\lambda/\Delta x \approx 30$ e $n = h/\Delta x = 2$. O passo de tempo utilizado foi $\Delta t = 0.15$ s. Nestas circunstâncias o número de Courant é $Cr = 0.94$. Em cada intervalo de tempo, foi efectuado um ciclo de predictor mais duas iterações do corrector (um primeiro ensaio com apenas um passo corrector, conduziu a elevados erros de dispersão).

Devido ao baixo valor de n , é de esperar um erro dispersivo relativamente elevado, com a consequente existência de uma esteira dispersiva e o amortecimento da amplitude de pico da onda.

Modelo RLW

A Figura 6.1 representa a onda solitária, solução do modelo RLW, nas condições indicadas, e após 30, 60, 90 e 112.5 s de propagação, respectivamente. A Figura 6.2 mostra a esteira dispersiva propagando-se com celeridade inferior à da onda física.

Como se esperava, as soluções numéricas apresentam uma esteira dispersiva e, consequentemente, uma diminuição da amplitude de pico. A solução obtida pela formulação de Petrov-Galerkin não dissipativa apresenta, após 112.5 s de propagação, um amortecimento da amplitude de 5.8%, com um atraso de fase de cerca de dois elementos, i.e. cerca de 6% do comprimento da onda. A esteira dispersiva tem uma amplitude máxima de cerca de 0.44% da amplitude do solitão. Em contrapartida, o amortecimento da amplitude na formulação de Bubnov-Galerkin foi de 24%, com um atraso de fase de nove elementos, i.e. cerca de 28% do comprimento da onda. A esteira dispersiva tem uma amplitude de 1.7% da amplitude do solitão. No caso do esquema de Petrov-Galerkin, é notável junto à fronteira de montante a presença de uma oscilação parasita com comprimento de onda $\lambda = 2 \Delta x$.

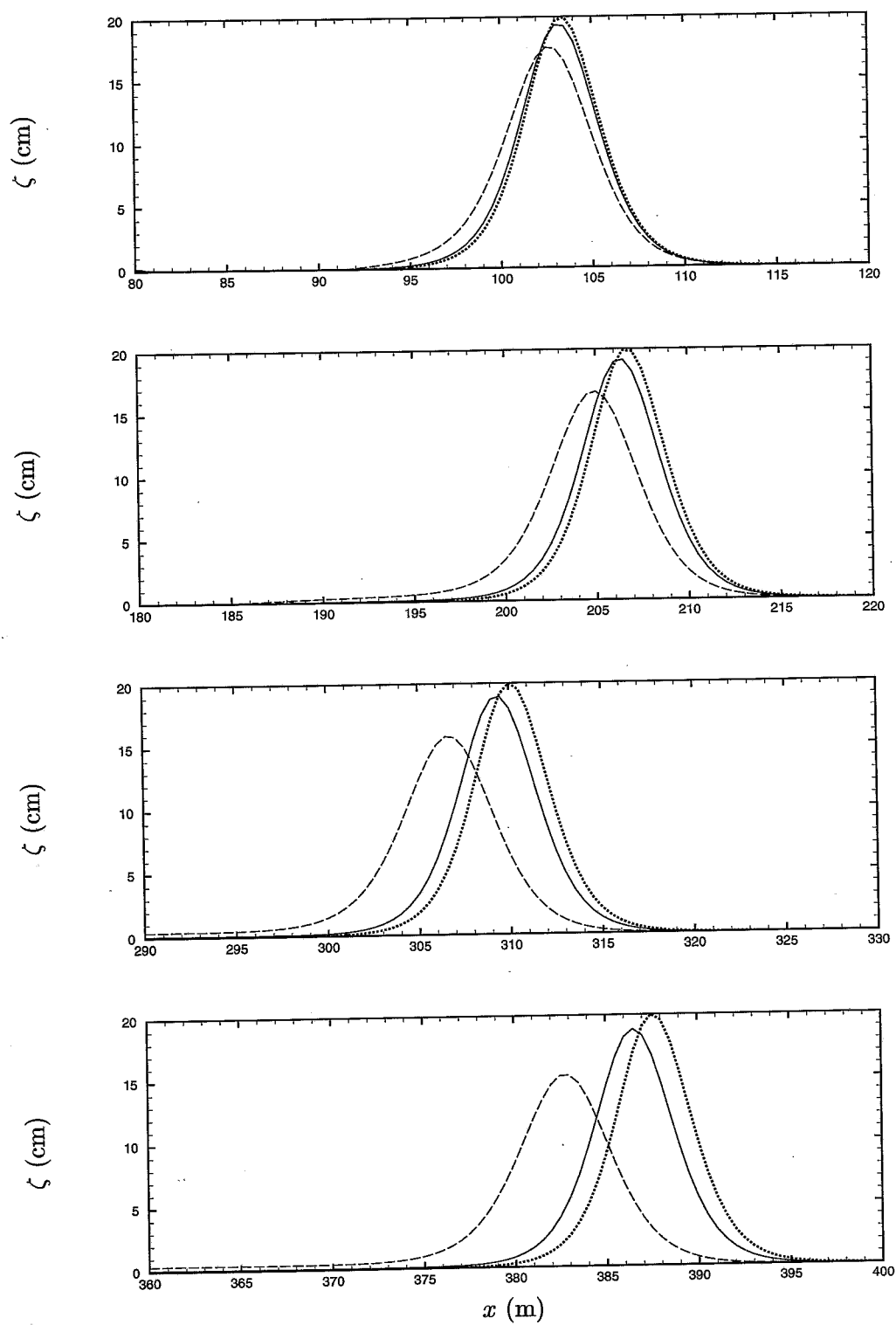


Figura 6.1: Modelo RLW, propagação de um solitão com $n = h/\Delta x = 2$. Soluções analítica ($\cdots$), PG (—) e BG (---). De cima para baixo: $t = 30$ s; $t = 60$ s; $t = 90$ s; $t = 112.5$ s.

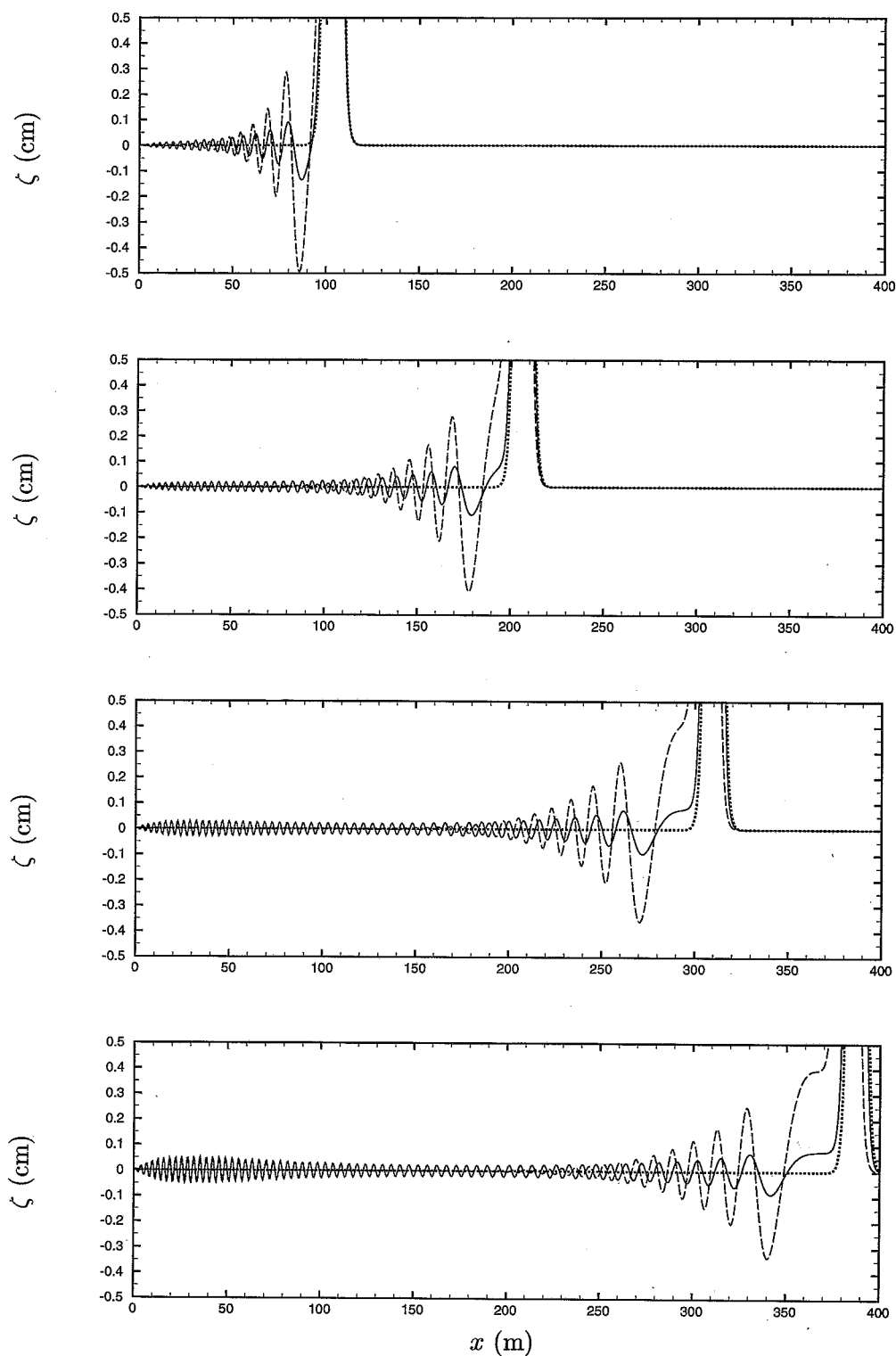


Figura 6.2: Modelo RLW, propagação de um solitão com $n = h/\Delta x = 2$. Esteira dispersiva. Soluções analítica ($\cdots$), PG (—) e BG (---). De cima para baixo: $t = 30$ s; $t = 60$ s; $t = 90$ s; $t = 112.5$ s.

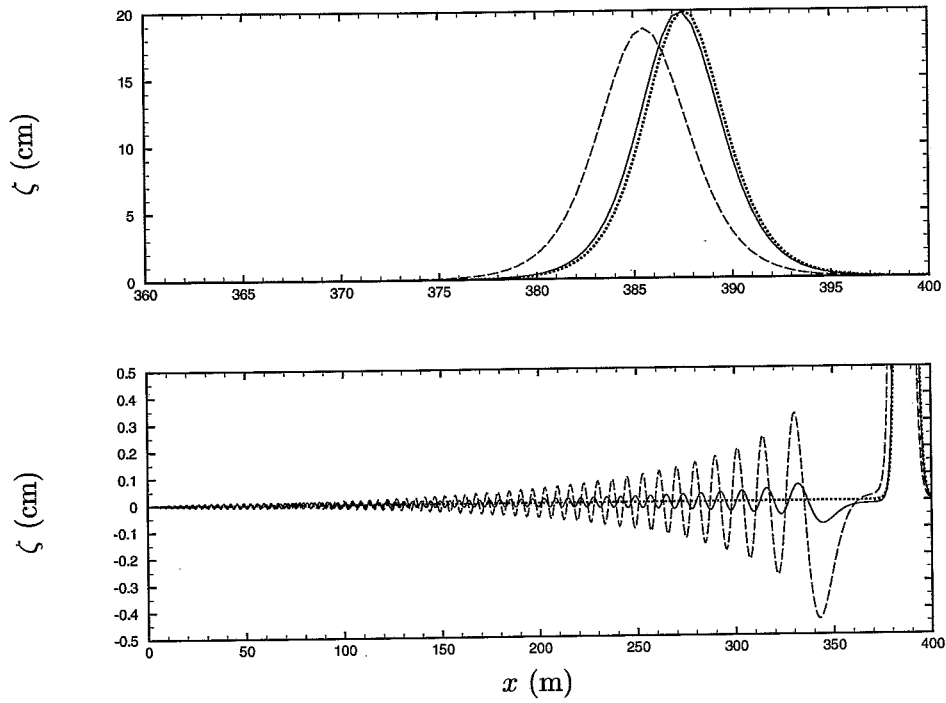


Figura 6.3: Modelo RLW. Posição do solitão após $t = 112.5$ s com $n = h/\Delta x = 2$ e 4 iterações. Soluções analítica ($\cdots$), PG ($—$) e BG ($--$).

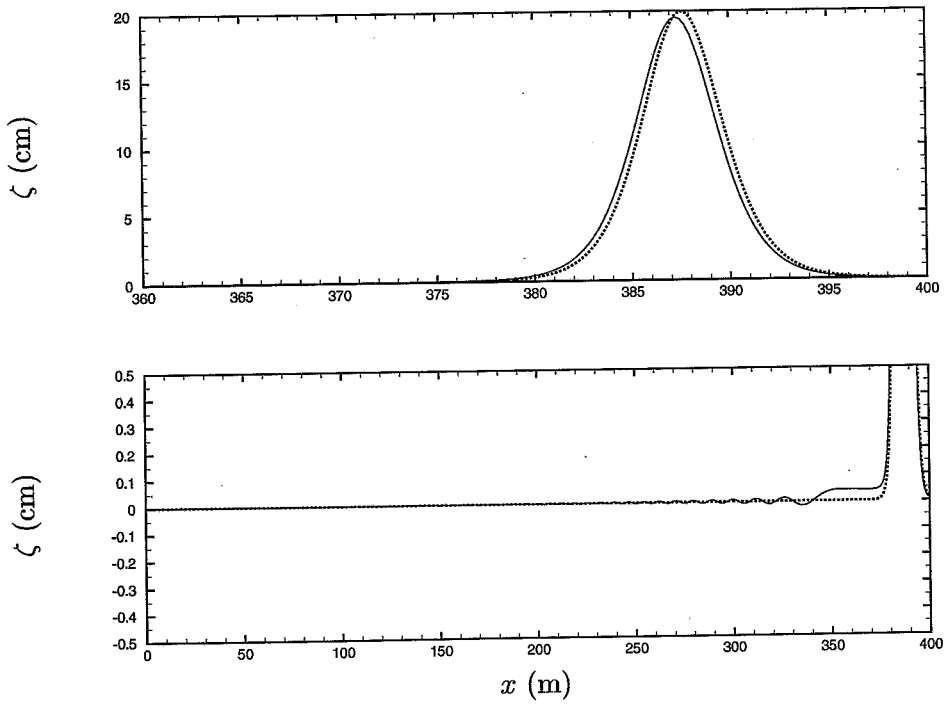


Figura 6.4: Modelo RLW. Posição do solitão após $t = 112.5$ s com $n = h/\Delta x = 4$ e 2 iterações. Soluções analítica ($\cdots$), PG ($—$) e BG ($--$).

Num trabalho recente, Avilez-Valente e Seabra-Santos (1999) verificaram que com o passo predictor mais três iterações do corrector por intervalo de tempo, é possível uma melhoria substancial do resultado obtido com o esquema BG: amortecimento da amplitude de 6.6% e um atraso de fase de quatro elementos, para o mesmo instante $t = 112.5$. O esquema PG aí apresentado era baseado num passo predictor de primeira ordem e quatro iterações por intervalo de tempo. Os resultados foram semelhantes aos aqui descritos para um passo predictor de segunda ordem mais duas iterações do corrector.

Um ensaio com o esquema PG com predictor de segunda ordem e três iterações do corrector, conduz a um amortecimento da amplitude de apenas 0.75% sem qualquer atraso de fase para $t = 112.5$ s (cf. Figura 6.3). Neste caso a oscilação parasita junto à fronteira desaparece. Resultados também bastante precisos podem ser obtidos refinando a malha, $\Delta x = 0.25$ m, e o passo de tempo, $\Delta t = 0.075$ s, mas com apenas um ciclo predictor-corrector por intervalo de tempo (cf. Figura 6.4): amortecimento

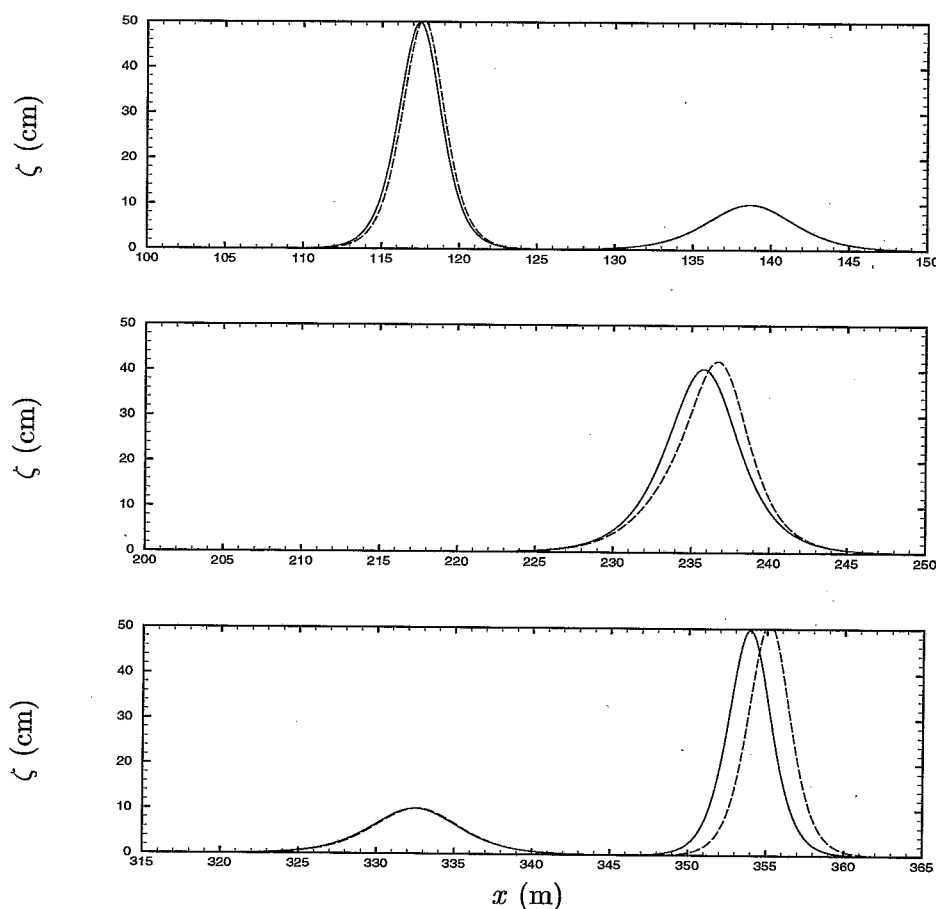


Figura 6.5: Modelo RLW. Colisão solitão-solitão: PG (—); BG (---). De cima para baixo: $t = 30$ s; $t = 60$ s; $t = 90$ s.

da amplitude do solitão inferior a 2.4% e atraso de fase de apenas 1 elemento.

6.1.2 Colisão de dois solitões

Dois solitões propagam-se no sentido positivo do eixo OX num canal com profundidade constante $h = 1$ m. O solitão de maior amplitude, $a_1 = 0.5$ m, e maior celeridade, ultrapassa o de menor amplitude, $a_2 = 0.1$ m, e menor celeridade. Espera-se que, após a interacção, ambos os solitões retomem os seus perfis iniciais. O comprimento aproximado da onda de maior amplitude é $\lambda_1 = 10.3$ m enquanto o comprimento aproximado do solitão de menor amplitude é $\lambda_2 = 22.9$ m. O parâmetro de não linearidade toma o valor $\epsilon = 0.5$.

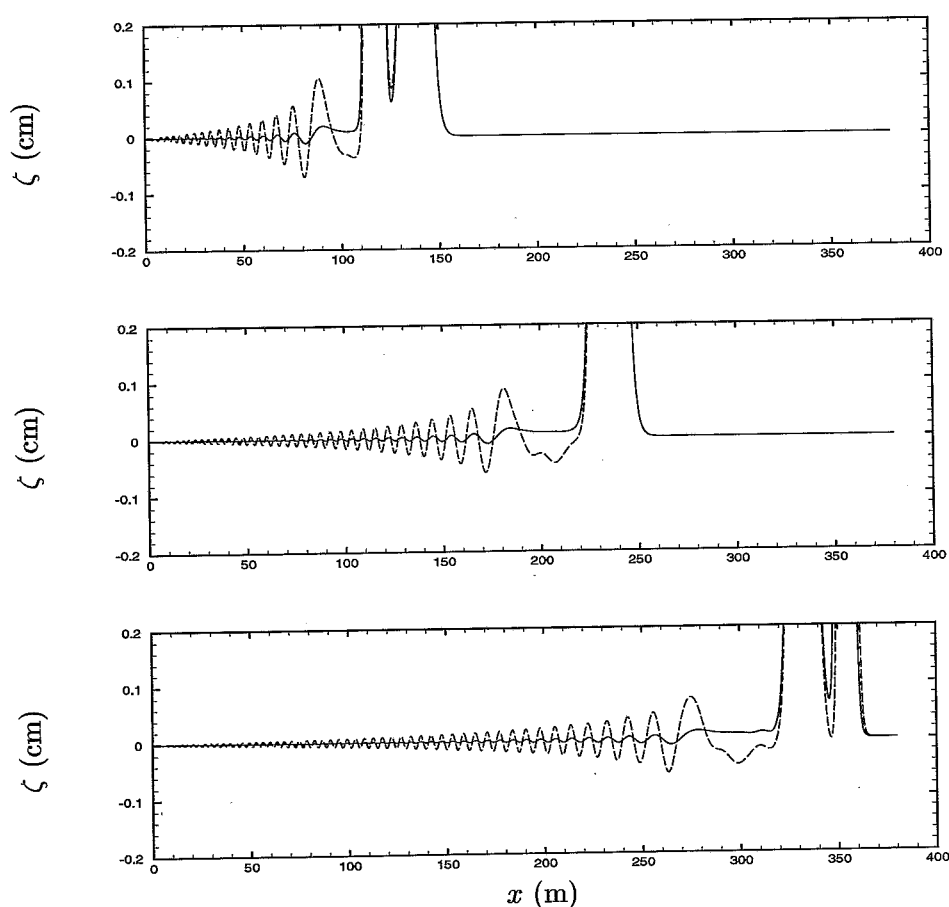


Figura 6.6: Modelo RLW. Colisão solitão-solitão, cauda dispersiva: PG (—); BG (---). De cima para baixo: $t = 30$ s; $t = 60$ s; $t = 90$ s.

Modelo RLW

Para a simulação da colisão entre dois solitões governados pelo modelo RLW, discretizou-se o domínio espacial em elementos finitos de comprimento $\Delta x = 0.1$. O passo de tempo é $\Delta t = 0.03$ s, pelo que o número de Courant é $Cr = 0.94$. Foi realizado um passo predictor e um passo corrector por intervalo de tempo.

Nas Figuras 6.5 e 6.6 comparam-se as soluções numéricas para os dois esquemas numéricos, BG e PG, para os instantes $t = 30$ s, $t = 60$ s e $t = 90$ s. Verifica-se que a formulação PG apresenta maior precisão para a amplitude dos dois solitões antes e após a colisão. Além disso, as esteiras dispersivas têm também uma menor amplitude para o esquema PG.

6.2 Modelos de onda dinâmica

6.2.1 Propagação de um solitão

Os resultados numéricos para os modelos de Boussinesq e de Madsen & Sørensen serão comparados com uma solução aproximada que se propõe. A dedução desta solução segue de perto o procedimento de Wei e Kirby (1995) para a obtenção da solução aproximada do modelo de Nwogu (1993). A ideia original deve-se no entanto a Schember (1982), que a ela recorreu para a dedução de uma solução aproximada para o modelo de Boussinesq:

- das equações do modelo de Madsen & Sørensen para fundo horizontal, obtém-se uma equação diferencial para o potencial de velocidades ϕ , com a mesma precisão das equações originais, i.e. com erro de ordem $\mathcal{O}(\epsilon^2, \epsilon\sigma^2)$;
- a equação em ϕ pode ser escrita como uma equação diferencial ordinária, a qual admite uma solução analítica.

Note-se no entanto que existe uma solução analítica do tipo solitão para as equações de Boussinesq (Teng, 1997). Um esquema algo semelhante foi utilizado por Guibourg (1994) para deduzir uma solução aproximada de ordem mais elevada para o mesmo modelo.

As equações de Madsen & Sørensen a uma dimensão horizontal e para fundo horizontal são:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + h \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \zeta \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \quad (6.1a)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \left(\frac{1}{3} + b \right) h^2 \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^2 \partial t} - b g h^2 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} = 0. \quad (6.1b)$$

Substituindo a velocidade $\bar{u}$ pelo gradiente do respectivo potencial ϕ , as equações (6.1) passam a ser, após integração da equação da quantidade de movimento:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + h \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \zeta \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad (6.2a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + g \zeta - \left(\frac{1}{3} + b \right) h^2 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial t} - b g h^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0. \quad (6.2b)$$

Substituindo a variável ζ de (6.2b) em (6.2a), recorrendo ao facto de que

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -h \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (6.3)$$

e desprezando os termos de ordem $\mathcal{O}(\epsilon^2, \epsilon \sigma^2)$, obtém-se a equação diferencial aproximada em termos do potencial de velocidades:

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g h \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{3} + b \right) h^2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial t^2} - b g h^2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} = 0. \quad (6.4)$$

Dado que se pretende uma solução do tipo onda para esta equação, é conveniente proceder a uma mudança de referencial, introduzindo a coordenada ξ , tal que

$$\xi = x - c t,$$

em que c é a celeridade da onda. Obviamente, ter-se-á também a seguinte substituição de operadores:

$$\frac{\partial}{\partial x} \equiv \frac{d}{d\xi} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial t} \equiv -c \frac{d}{d\xi},$$

transformando a equação no potencial de velocidades numa equação diferencial ordinária:

$$(gh - c^2) \frac{d^2 \phi}{d\xi^2} + 3c \frac{d\phi}{d\xi} \frac{d^2 \phi}{d\xi^2} + \left[\left(\frac{1}{3} + b \right) h^2 c^2 - b g h^3 \right] \frac{d^4 \phi}{d\xi^4} = 0.$$

Integrando esta equação uma vez tem-se a seguinte equação intermédia

$$(gh - c^2) \frac{d\phi}{d\xi} + \frac{3}{2} c \left(\frac{d\phi}{d\xi} \right)^2 + \left[\left(\frac{1}{3} + b \right) h^2 c^2 - b g h^3 \right] \frac{d^3 \phi}{d\xi^3} = G_1,$$

que, após multiplicação por $2 d\phi/d\xi$ e integrando novamente, resulta finalmente em:

$$\begin{aligned} (gh - c^2) \left(\frac{d\phi}{d\xi} \right)^2 + c \left(\frac{d\phi}{d\xi} \right)^3 + \left[\left(\frac{1}{3} + b \right) h^2 c^2 - b g h^3 \right] \left(\frac{d^2\phi}{d\xi^2} \right)^2 \\ = 2 G_1 \frac{d\phi}{d\xi} + G_2. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Assumindo que a solução da equação (6.5) é do tipo

$$\bar{u} = \frac{d\phi}{d\xi} = a_0 \operatorname{sech}^2(\kappa \xi), \quad (6.6)$$

as constantes de integração G_1 e G_2 serão zero, dado que nesse caso se tem:

$$\frac{d\phi}{d\xi} = \frac{d^2\phi}{d\xi^2} = \frac{d^3\phi}{d\xi^3} = 0, \quad \text{quando} \quad \xi \rightarrow \pm\infty.$$

Substituindo (6.6) em (6.5), vem que

$$a_0 = \frac{c^2 - gh}{c}, \quad (6.7a)$$

$$\frac{1}{\kappa} = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{h^2}{a_0} \left[(1 + 3b) c - 3b \frac{gh}{c} \right]}. \quad (6.7b)$$

Sendo a função $\bar{u}$ da forma (6.6) e tendo em consideração (6.3), da equação (6.2b) resulta que

$$\zeta(x, t) = a_1 \operatorname{sech}^2(\kappa \xi) + a_2 \operatorname{sech}^4(\kappa \xi). \quad (6.8)$$

com

$$a_1 = a_0 \frac{h}{c} \quad \text{e} \quad a_2 = \frac{a_0^2}{g}.$$

Finalmente, tendo em conta a condição fronteira: $\zeta = a$ para $\xi = 0$, estabelece-se que:

$$c = \sqrt{g(h + a)}, \quad (6.9a)$$

$$a_0 = \frac{ga}{\sqrt{g(h + a)}}, \quad (6.9b)$$

$$a_1 = \frac{ha}{h + a}, \quad (6.9c)$$

$$a_2 = \frac{a^2}{h + a}, \quad (6.9d)$$

$$\frac{1}{\kappa} = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{h^3}{a} \left[1 + (1 + 3b) \frac{a}{h} \right]}. \quad (6.9e)$$

Dados numéricos

O canal numérico tem um comprimento de 500 m, dividido em 5000 elementos finitos uniformes com $\Delta x = 0.1$ m. A profundidade é $h = 0.45$ m, de onde resulta $n = h/\Delta x = 4.5$. O passo de tempo utilizado nos cálculos foi $\Delta t = 0.04$ s, pelo que o número de Courant foi $Cr = \sqrt{gh} \Delta t / \Delta x = 0.840$. A coordenada do primeiro nó é $x = -20$ m e no instante inicial a crista da onda encontra-se em $x = 0$. Desta forma a única condição fronteira considerada para $x = -20$ m foi a radiação de uma onda com a celeridade assintótica das ondas longas por forma a permitir a saída de qualquer perturbação:

$$\hat{u}(x, t) = -\sqrt{gh} \frac{\hat{\zeta}(x, t)}{h + \hat{\zeta}(x, t)}, \quad \text{para } x = -20 \text{ m}.$$

A onda percorre, durante os 200 s da simulação, uma distância aproximadamente igual a 450 m, i.e. 1000 vezes a profundidade. Duas ondas foram ensaiadas, a primeira fracamente não linear, com amplitude $a = 0.045$ m, i.e. $\epsilon = 0.1$. A segunda com amplitude $a = 0.135$ m, i.e. $\epsilon = 0.3$, logo com uma maior influência dos termos não lineares. Para as condições iniciais para $\hat{\zeta}$ e $\hat{u}$ recorreu-se às expressões analíticas (6.6) e (6.8).

Resultados para o modelo de Boussinesq

Utilizou-se a formulação de Petrov-Galerkin com um passo predictor e dois passos correctores. Nas duas fases de correcção tomou-se $\alpha = 0$, pelo que o esquema será não dissipativo e de quarta ordem.

A propagação da onda de amplitude 0.045 m encontra-se representada na Figura 6.7. Verifica-se, após 200 s, um aumento da amplitude da onda numérica de 0.317×10^{-3} m, i.e. cerca de 0.7% da amplitude inicial. O atraso de fase é para o mesmo instante de apenas 1 elemento, i.e. 0.1 m (cf. Figura 6.8). Por outro lado a amplitude da velocidade numérica é 0.2015 m/s, face à amplitude analítica de 0.2003 m/s, i.e. um aumento de cerca de 0.6%, apenas. A cauda dispersiva tem uma amplitude mínima. Estas discrepâncias poderão resultar do facto de a condição inicial ser apenas uma solução aproximada das equações de Boussinesq.

Onda com $\epsilon = 0.3$ sem dissipação: a Figura 6.9 apresenta a evolução do solitão com amplitude $a = 0.135$ m. É evidente a formação de uma importante cauda dis-

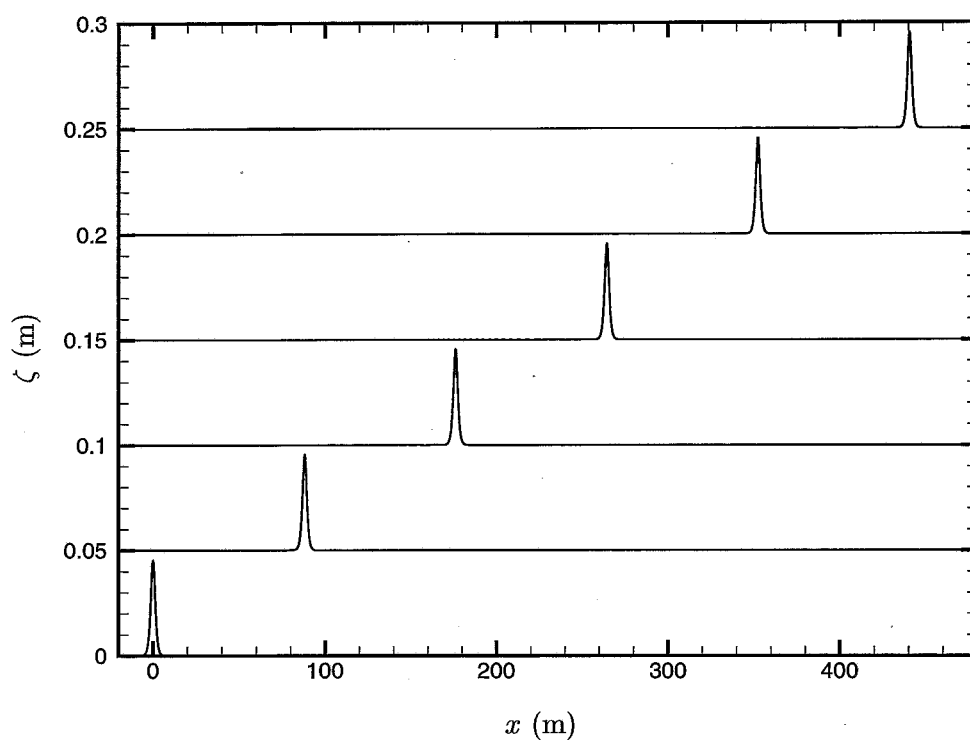


Figura 6.7: Modelo de Boussinesq (PG). Propagação de um solitão com $\epsilon = 0.1$, para $t = 0$ s, $t = 40$ s, $t = 80$ s, $t = 120$ s, $t = 160$ s e $t = 200$ s.

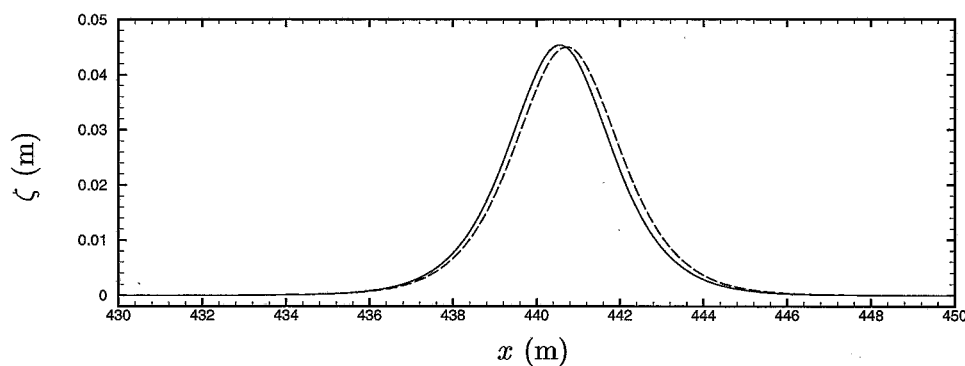


Figura 6.8: Modelo de Boussinesq (PG). Propagação de um solitão com $\epsilon = 0.1$. Forma da onda para $t = 200$ s: solução numérica (—); solução analítica (---).

persiva e um pequeno aumento da amplitude da onda de cerca de 2%. Nos primeiros cem metros forma-se uma perturbação de origem numérica, com comprimento de onda $\lambda = 2 \Delta x$ e com altura inferior a 0.01 m. Note-se que, para $\alpha = 0$, não existe nenhum mecanismo dissipativo capaz de eliminar esta oscilação.

É interessante notar que apesar do erro de fase de 1.1 m após 160 s de propagação

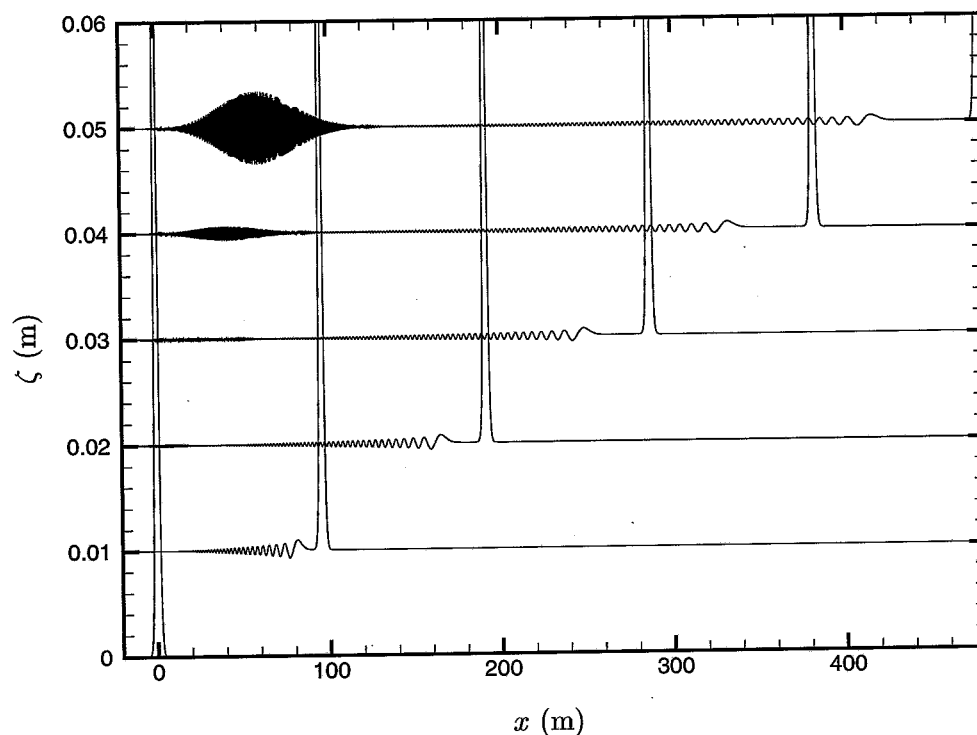


Figura 6.9: Modelo de Boussinesq (PG). Propagação de um solitão com $\epsilon = 0.3$, para $t = 0$ s, $t = 40$ s, $t = 80$ s, $t = 120$ s, $t = 160$ s e $t = 200$ s.

Tabela 6.1: Modelo de Boussinesq (PG). Propagação de um solitão com $\epsilon = 0.3$.

t (s)	a (m)	x (m)	$c_{\text{média}}$ (m/s)	massa (kg/m)	p (kg/m m/s)	energia (J/m)
0	0.1350	0	—	539.2	1282	244.4
40	0.1386	95.6	2.390	538.0	1283	244.5
80	0.1381	191.2	2.390	538.0	1283	243.9
120	0.1382	286.7	2.388	538.0	1283	243.3
160	0.1378	382.2	2.388	538.0	1282	242.7
200	0.1374	477.7	2.388	—	—	—

(cf. Figura 6.10), este não corresponde à incapacidade do esquema numérico para propagar uma onda solitária com $\epsilon = 0.3$. De facto comparando os perfis da onda numérica para $t = 40$ s e $t = 160$ s, verifica-se que estes são praticamente iguais. A posição da crista para diferentes instantes (cf. Tabela 6.1) mostra também que,

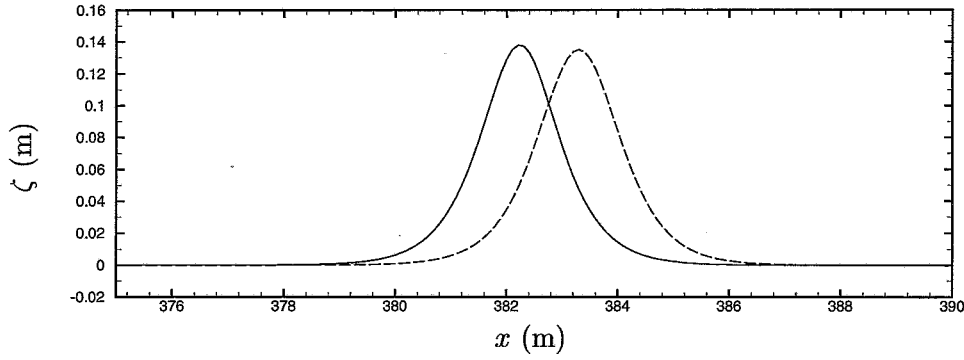


Figura 6.10: Modelo de Boussinesq (PG). Propagação de um solitão com $\epsilon = 0.3$. Forma da onda para $t = 160$ s: solução numérica (—); solução analítica (---).

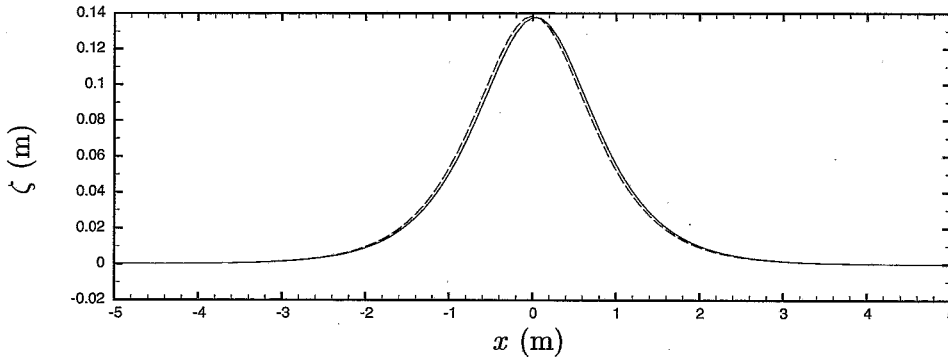


Figura 6.11: Modelo de Boussinesq (PG). Propagação de um solitão com $\epsilon = 0.3$. Comparação dos perfis da onda numérica entre $t = 40$ (—) e $t = 160$ s (---).

após uma adaptação nos primeiros segundos a um novo perfil, a onda se propaga de facto com uma celeridade constante de 2.39 m/s, em vez do valor teórico de 2.396 m/s. Por outro lado, esse ajustamento inicial provoca uma pequena perda de massa (cerca de 0.22% do total) sendo que posteriormente esta é conservada. A quantidade de movimento e a energia não são praticamente afectadas pela mudança de perfil. A quantidade de movimento mantém-se constante durante toda a simulação. Há, no entanto, alguma perda de energia posterior à variação inicial, mas que não atinge sequer 0.74% da energia total.

Onda com $\epsilon = 0.3$ com dissipação numérica: a Figura 6.12 apresenta a evolução do solitão com amplitude $a = 0.135$ m e com $\alpha = Cr^2/(1 - Cr^2)$. A oscilação numérica de comprimento $\lambda = 2 \Delta$ foi completamente dissipada. Em contrapartida regista-se um atraso de fase ligeiramente maior para $t = 160$ s: 1.5 m. Existe ini-

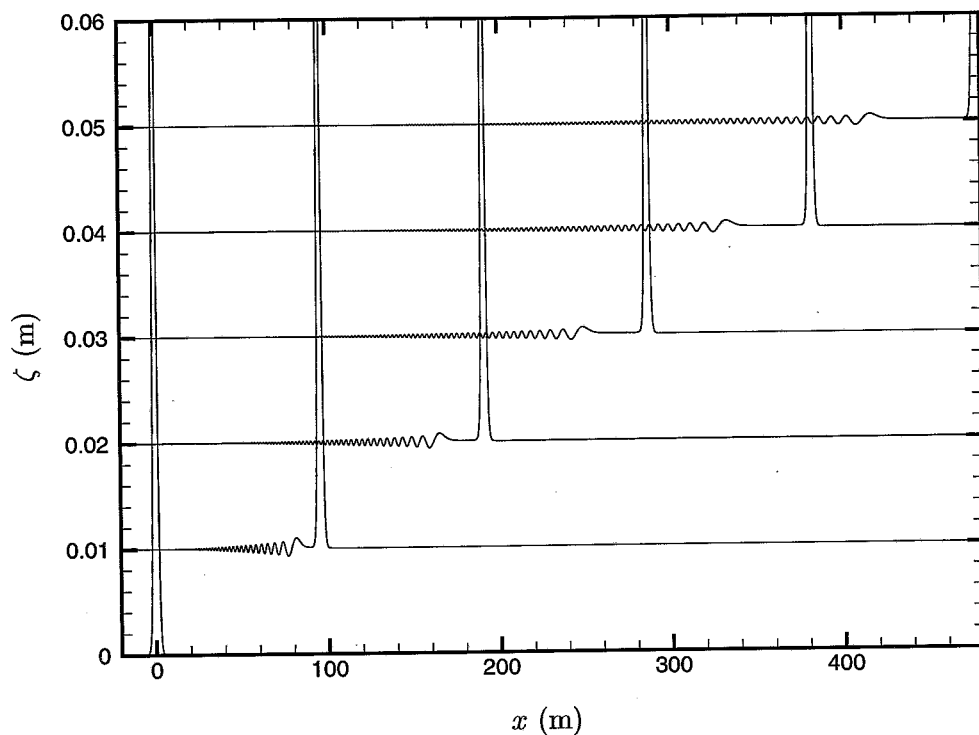


Figura 6.12: Modelo de Boussinesq (PG) com dissipação. Propagação de um solitão com $\epsilon = 0.3$, para $t = 0$ s, $t = 40$ s, $t = 80$ s, $t = 120$ s, $t = 160$ s e $t = 200$ s.

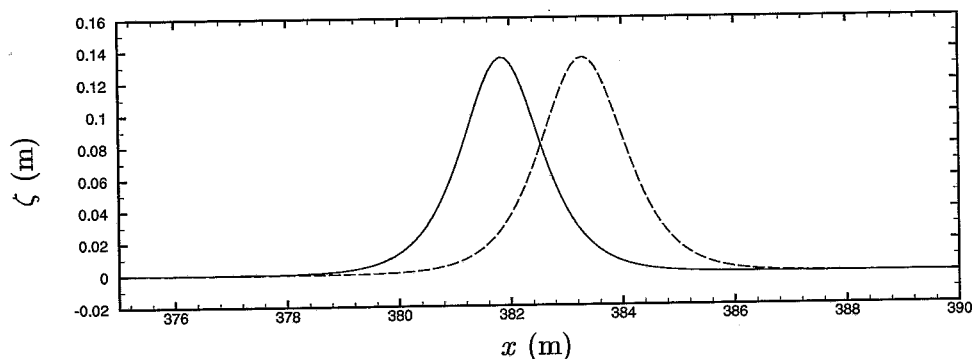


Figura 6.13: Modelo de Boussinesq (PG) com dissipação. Propagação de um solitão com $\epsilon = 0.3$. Forma da onda para $t = 160$ s: solução numérica (—); solução analítica (---).

cialmente um brusco aumento da amplitude da onda, seguido de uma diminuição progressiva em virtude da inclusão da dissipação de terceira ordem. Note-se no entanto que tal corresponde a uma diminuição de 2.6% da amplitude da onda após percorrer uma distância de 381.5 m, i.e. cerca de 848 vezes a profundidade.

Tabela 6.2: Modelo de Boussinesq (PG) com dissipação. Propagação de um solitão com $\epsilon = 0.3$.

t (s)	a (m)	x (m)	$c_{\text{média}}$ (m/s)	massa (kg/m)	p (kg/m m/s)	energia (J/m)
0	0.1350	0	—	539.2	1282	244.4
40	0.1378	95.6	2.390	538.0	1282	242.6
80	0.1368	191.1	2.388	538.0	1280	240.1
120	0.1361	286.5	2.385	537.9	1278	237.7
160	0.1350	381.8	2.382	537.9	1277	235.4
200	0.1342	477.1	2.382	—	—	—

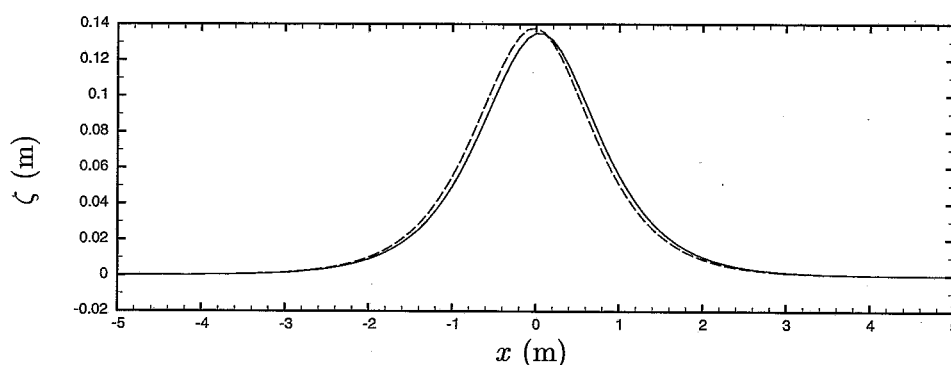


Figura 6.14: Modelo de Boussinesq (PG) com dissipação. Propagação de um solitão com $\epsilon = 0.3$. Comparação dos perfis da onda numérica entre $t = 40$ (—) e $t = 160$ s (---).

No início da simulação regista-se alguma perda de massa, a qual resulta da adaptação do perfil da onda ao modelo (tal como no caso anterior, de 0.22% da massa inicial). Entre $t = 40$ s e $t = 160$ s a quantidade de massa no sistema é praticamente constante (cf. Tabela 6.2). A quantidade de movimento e a energia do sistema não são afectadas pelo ajustamento do perfil. Nestas duas quantidades existe posteriormente um decrescimento monótono com o tempo, a uma velocidade muito pequena, como seria de esperar de um mecanismo dissipativo de terceira ordem.

A propagação de um solitão num sistema dissipativo é fisicamente impossível. O que se pretende mostrar com este exemplo é a extrema precisão do método e o facto de a dissipação introduzida não provocar perda de massa.

Resultados para o modelo de Madsen & Sørensen

Utilizou-se a formulação de Petrov-Galerkin com um passo predictor e duas iterações do corrector, para a onda de menor amplitude e três iterações para a onda de maior amplitude. No passo corrector tomou-se $\alpha_1 = 2Cr^2/(1 - Cr^2)$. Recorde-se que este esquema para o modelo de Madsen & Sørensen é de terceira ordem.

Onda com $\epsilon = 0.1$: a propagação da onda de amplitude 0.045 m encontra-se representada na Figura 6.15. É visível a existência de uma cauda dispersiva. Verifica-se, após 200 s, um aumento da amplitude da onda numérica de 0.317×10^{-3} m, i.e. cerca de 0.7% da amplitude inicial. A onda numérica tem praticamente a celeridade teórica, para $t = 200$ s tem um avanço de apenas 1 elemento em relação à posição esperada, i.e. 0.1 m (cf. Figura 6.16). Por outro lado a amplitude da velocidade numérica é 0.2043 m/s, face à amplitude analítica de 0.2003 m/s, i.e. um aumento de cerca de 2%. O resultado obtido para $t = 200$ s é mais preciso do que o obtido por Walkley e Berzins (1999, Figura 1) para $t = 100$ s, com o modelo de Nwogu (1993), o qual é da mesma ordem do modelo de Madsen & Sørensen. Aliás, aqueles

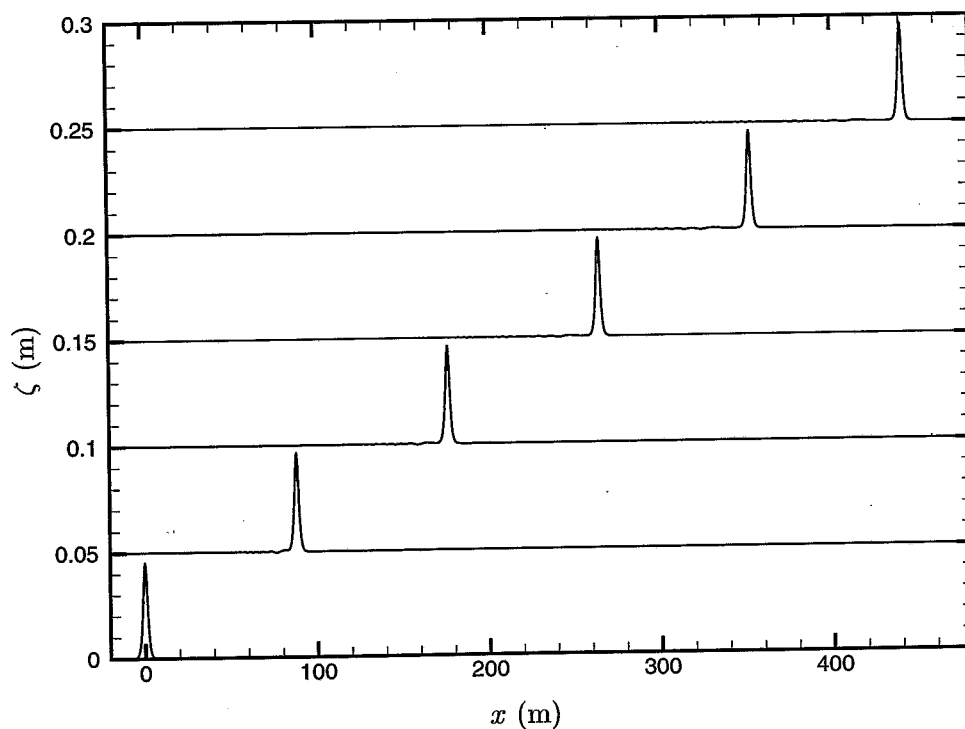


Figura 6.15: Modelo de Madsen & Sørensen (PG). Propagação de um solitão com $\epsilon = 0.1$, para $t = 0$ s, $t = 40$ s, $t = 80$ s, $t = 120$ s, $t = 160$ s e $t = 200$ s.

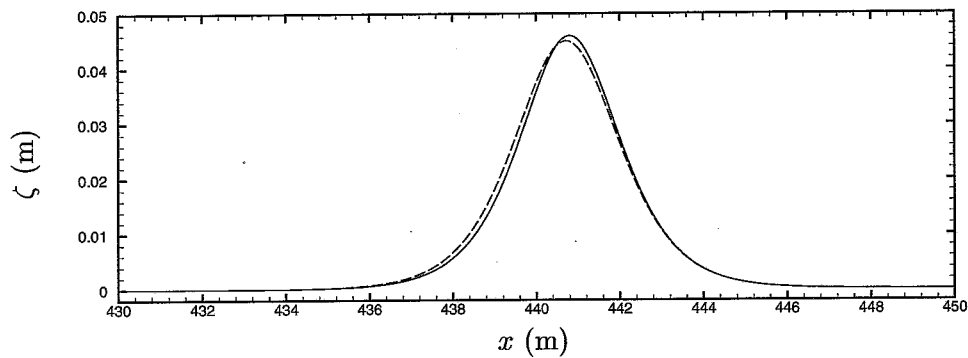


Figura 6.16: Modelo de Madsen & Sørensen (PG). Propagação de um solitão com $\epsilon = 0.1$. Forma da onda para $t = 200$ s: solução numérica (—); solução analítica (---).

autores indicam uma diminuição da amplitude da onda tanto com o método dos elementos finitos (de segunda ordem), como com o método de diferenças finitas de quarta ordem, proposto por Wei e Kirby (1995). Ora estes últimos autores prevêm um aumento da amplitude da onda de quase 2% (Wei e Kirby, 1995).

Onda com $\epsilon = 0.3$: a Figura 6.17 apresenta a evolução do solitão com amplitude $a = 0.135$ m. Verifica-se um aumento de amplitude de cerca de 6%, com a formação de uma cauda dispersiva importante, como resultado do ajustamento do perfil teórico da onda ao modelo numérico. Este ajustamento do perfil é acompanhado de uma ligeira perda de massa e de energia. A celeridade numérica é um pouco inferior à

Tabela 6.3: Modelo de Madsen & Sørensen (PG). Propagação de um solitão com $\epsilon = 0.3$.

t (s)	a (m)	x (m)	$c_{\text{média}}$ (m/s)	massa (kg/m)	p (kg/m m/s)	energia (J/m)
0	0.1350	0	—	551.5	1311	250.0
40	0.1426	95.8	2.395	550.3	1311	247.8
80	0.1417	191.6	2.395	550.2	1308	245.0
120	0.1408	287.2	2.390	550.1	1306	242.2
160	0.1396	382.8	2.390	550.1	1304	239.5
200	0.1384	478.3	2.388	—	—	—

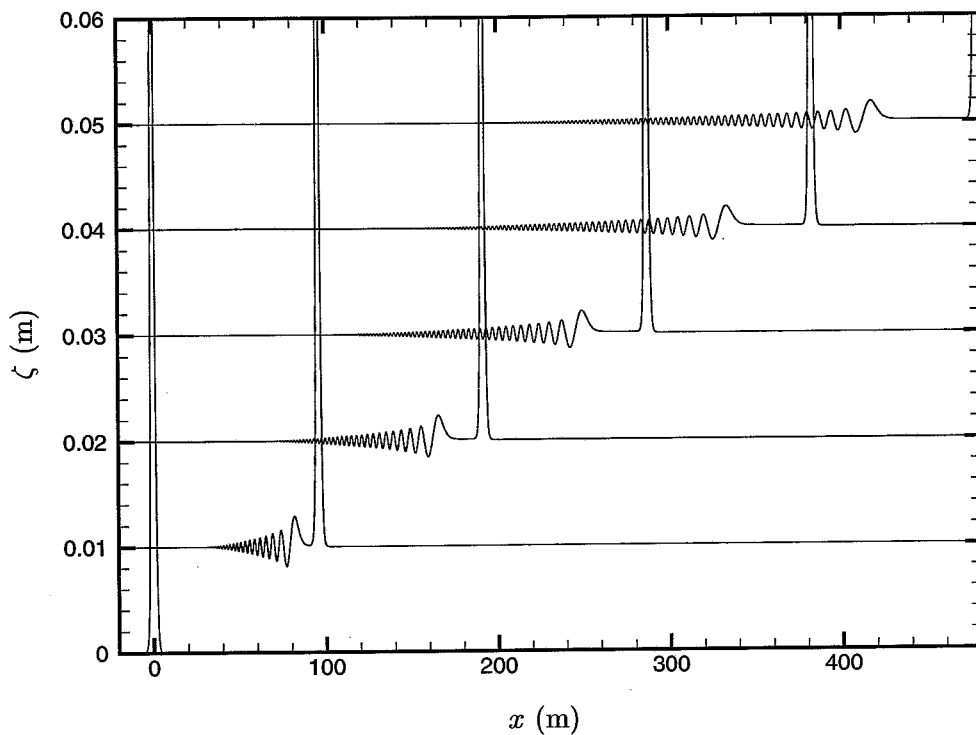


Figura 6.17: Modelo de Madsen & Sørensen (PG). Propagação de um solitão com $\epsilon = 0.3$, para $t = 0$ s, $t = 40$ s, $t = 80$ s, $t = 120$ s, $t = 160$ s e $t = 200$ s.

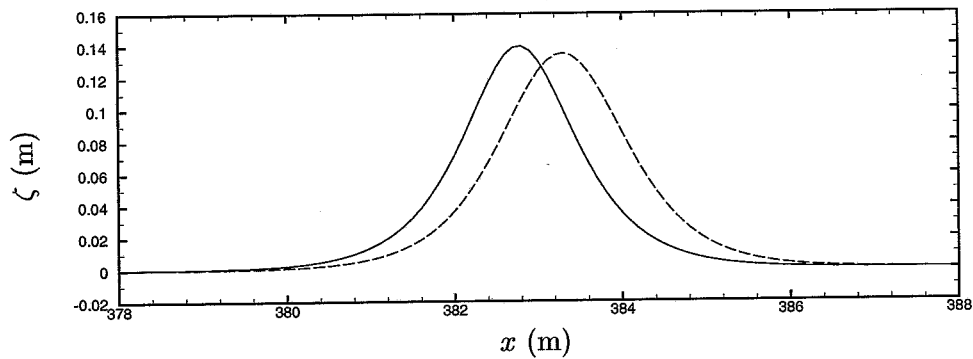


Figura 6.18: Modelo de Madsen & Sørensen (PG). Propagação de um solitão com $\epsilon = 0.3$. Forma da onda para $t = 160$ s: solução numérica (—); solução analítica (---).

teórica, resultando num atraso de fase de 5 m após 160 s de propagação. Conforme se pode verificar na Tabela 6.3, há uma diminuição constante da quantidade de movimento e da energia como seria de esperar dada a introdução de dissipação numérica de terceira ordem. A massa mantém-se praticamente constante, atestando

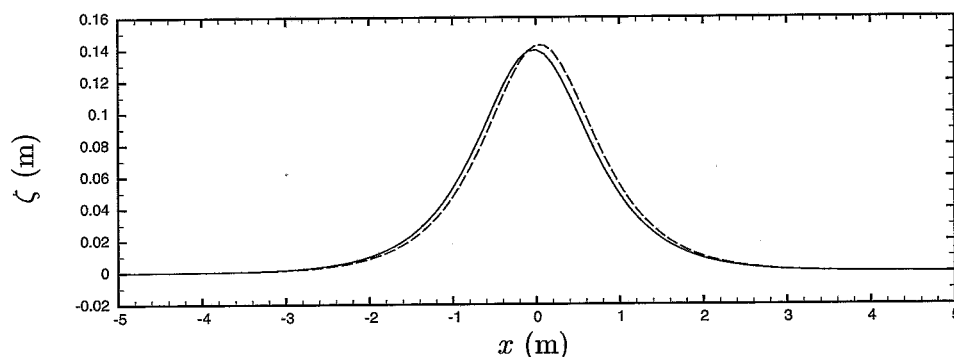


Figura 6.19: Modelo de Madsen & Sørensen (PG). Propagação de um solitão com $\epsilon = 0.3$. Comparação dos perfis da onda numérica entre $t = 40$ (—) e $t = 160$ s (---).

a precisão do esquema numérico. Apesar da impossibilidade da propagação de uma onda solitária num sistema dissipativo, é evidente da inspecção da Figura 6.19 que é mínima a modificação do perfil da onda entre os instante $t = 40$ s e $t = 160$ s.

Um primeiro ensaio com apenas duas iterações por passo de tempo resultou numa solução instável com aumento constante da amplitude, da celeridade, da massa, da quantidade de movimento e da energia. É portanto de esperar, que uma repetição da simulação da onda de amplitude $a = 0.045$ m com três iterações por passo de tempo resulte numa solução com alguma dissipação.

6.2.2 Propagação de uma onda solitária sobre um talude e reflexão numa parede sólida

Uma onda solitária de amplitude $a = 0.07$ m propaga-se num canal rectangular com 75 m de comprimento. Nos primeiros 55 m, a profundidade é constante, $h_1 = 0.7$ m. Nos últimos 20 m um talude de inclinação constante faz a profundidade diminuir até $h_2 = 0.3$ m (cf. Figura 6.20). O domínio foi dividido em 600 elementos finitos uniformes, $\Delta x = 0.125$ m, i.e. $n_{\text{máx}} = h_1/\Delta x = 5.6$ e $n_{\text{mín}} = h_2/\Delta x = 2.4$. Simulou-se a propagação da onda durante 30 s com $\Delta t = 0.04$ s, logo $Cr_{\text{máx}} = 0.839$. As condições de fronteira foram:

- radiação de uma onda com celeridade $\sqrt{gh_1}$, na fronteira de barlar,

$$\hat{u}(0, t) = -\sqrt{gh_1} \frac{\hat{\zeta}(0, t)}{h_1 + \hat{\zeta}(0, t)};$$

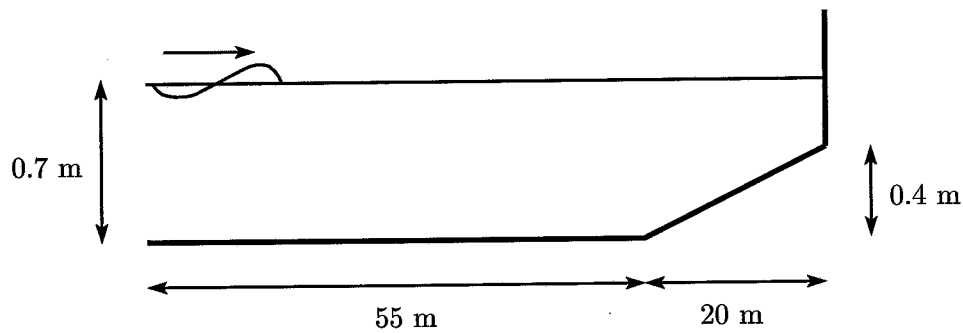
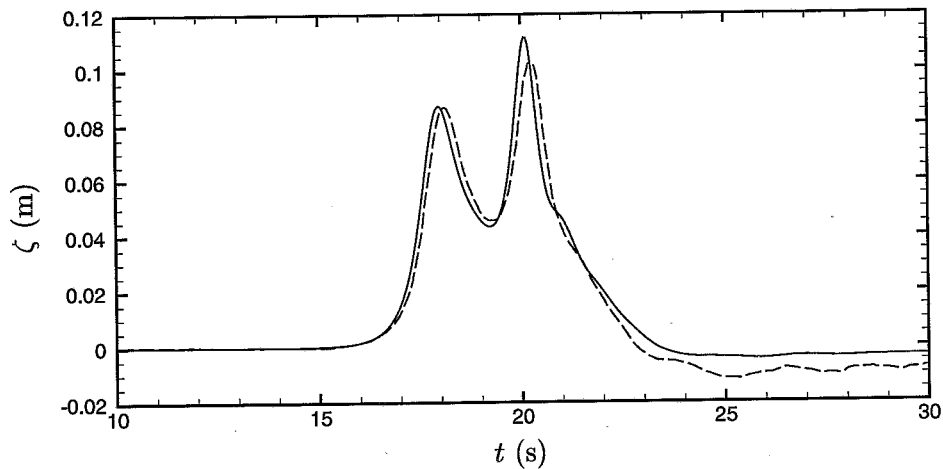


Figura 6.20: Canal com parede reflectora.

Figura 6.21: Onda solitária reflectida numa parede sólida: série temporal da elevação da superfície livre para $x = 72.75$ m. Série numérica (—), série experimental (---).

- reflexão total na fronteira de sotamar, $\hat{u}(75, t) = 0$.

Para $t = 0$ a crista da onda encontrava-se em $x = 20$ m. Na Figura 6.21 comparam-se os resultados numéricos com os resultados experimentais obtidos por Dodd (1998) e reproduzidos de Walkley e Berzins (1999) para uma sonda situada em $x = 72.75$ m. O primeiro pico, correspondente à onda incidente, é bem reproduzido pelo teste numérico, embora com um ligeiro desfasamento, enquanto o segundo pico, devido à onda reflectida, tem uma amplitude superior em cerca de 9% ao valor experimental. Três possíveis razões existem para tal: (a) junto à parede a amplitude da onda praticamente duplica, pelo que o coeficiente de não linearidade é bastante elevado, e portanto fora do domínio de validade das equações de Boussinesq; (b) inexistência de atrito no fundo e/ou dissipação de energia na parede, no modelo numérico; (c) o perfil da onda utilizado como condição inicial, (6.6) e (6.8), não corresponde ao perfil da onda efectivamente propagada pelo esquema numérico,

nem nenhum destes dois é igual ao perfil real da onda física. Um resultado similar foi obtido por Walkley e Berzins (1999) com o modelo de Nwogu (1993).

6.2.3 Propagação de uma onda sobre um quebra-mar submerso

Para comparação dos modelos de onda dinâmica apresentados no Capítulo 2 e das duas formulações de elementos finitos desenvolvidas nos Capítulos 4 e 5, i.e. Bubnov-Galerkin e Petrov-Galerkin, num domínio 1DH, simulou-se a propagação de uma onda regular sem rebentação sobre um quebra-mar submerso. Os resultados experimentais utilizados para comparação foram obtidos por G. Klopman em 1993 no laboratório da Delft Hydraulics e encontram-se disponíveis para utilização pela comunidade científica (Dingemans, 1994). Outros ensaios similares encontram-se descritos na literatura, embora com um factor de escala (Beji e Battjes, 1993, Liberatore e Petti, 1992). Em Dingemans (1994), os resultados de diversos modelos numéricos são comparados com as medições de laboratório. Beji e Battjes (1994) apresentam também uma comparação dos resultados experimentais com resultados numéricos obtidos com o modelo de Madsen & Sørensen discretizado por um esquema de diferenças finitas.

A experiência consiste na propagação de uma onda sinusoidal gerada por um batedor de ondas tipo pistão. A ondulação propaga-se desde águas profundas junto ao batedor, sofre uma diminuição da profundidade relativa no talude de barlamar do quebra-mar, percorre o seu coroamento em condições de água pouco profunda, após o que regressa a águas profundas. No extremo final do canal, um outro batedor do mesmo tipo foi utilizado para absorver a ondulação incidente. Na primeira fase da sua progressão, em profundidade constante, a onda é essencialmente constituída por uma componente harmónica, apenas. Ao atingir-se o talude de barlamar do quebra-mar, e devido à crescente não linearidade, são geradas harmónicas de ordem superior. Sobre o coroamento do quebra-mar, dado o equilíbrio dinâmico existente entre os efeitos não linear e dispersivo em zonas de pequena profundidade relativa, as harmónicas de ordem superior propagam-se em fase com a harmónica principal, dando praticamente origem a uma onda solitária. Sobre o talude de sotamar verifica-se um aumento de profundidade, pelo que o efeito dispersivo se torna dominante fazendo com que as diversas harmónicas se propaguem com diferentes celeridades.

O nível de água em repouso é $h = 0.86$ m junto ao batedor gerador, $h = 0.20$ m sobre o coroamento do quebra-mar e $h = 0.80$ m sobre a berma do quebra-mar. O canal tem 46 m de comprimento.

Foram simuladas duas ondas com diferentes características, referidas em Dingemans (1994) como casos A e C.

- Caso A: onda sinusoidal de período $T = 2.02 \sqrt{2}$ s e amplitude $a = 2$ cm, i.e. 4 cm de altura.
- Caso C: onda sinusoidal de período $T = 1.01 \sqrt{2}$ s e amplitude $a = 4.1$ cm, i.e. 8.2 cm de altura.

Os registos de elevação da superfície livre foram obtidos por onze sondas de profundidade, colocadas às seguintes distâncias do gerador: sonda 1 $\equiv$ 3.04 m; sonda 2 $\equiv$ 7.04 m; sonda 3 $\equiv$ 9.44 m; sonda 4 $\equiv$ 20.04 m; sonda 5 $\equiv$ 24.04 m; sonda 6 $\equiv$ 26.04 m; sonda 7 $\equiv$ 28.04 m; sonda 8 $\equiv$ 30.44 m; sonda 9 $\equiv$ 33.64 m; sonda 10 $\equiv$ 37.04 m; sonda 11 $\equiv$ 41.04 m. Essas medições estão representadas na Figura 6.22.

O domínio numérico é três metros mais curto do que o canal utilizado nas experiências. A fronteira de barlamar coincide com a posição da sonda 1 e o domínio tem 43 metros de comprimento pelo que existe uma diferença de 4 cm na posição do batedor absorvente que se supõe não ser relevante. No que concerne aos parâmetros numéricos, o comprimento dos elementos é fixo, $\Delta x = 0.1$ m, e o passo de tempo é $\Delta t = 1/30$ s. Foram realizados ensaios com os modelos de onda dinâmica apresentados no Capítulo 2: Boussinesq, Madsen & Sørensen, Seabra-Santos e Nadaoka & Beji. Nalguns casos recorreu-se também a diferentes esquemas numéricos. O registo da sonda 1 foi utilizado em todos os ensaios como condição de fronteira de barlamar.

Modelo de Boussinesq

Foram utilizados dois esquemas numéricos para o modelo de Boussinesq: esquema de Bubnov-Galerkin com elementos lineares de dois nós para ambas as variáveis ζ e $\bar{u}$; esquema de Petrov-Galerkin descrito no Capítulo 5. As condições fronteira aplicadas foram, na fronteira de barlamar,

$$\begin{aligned}\hat{\zeta} &= \zeta_0(t), \\ \hat{u} &= c \frac{\zeta_0}{h + \zeta_0},\end{aligned}$$

onde ζ_0 é a elevação da superfície livre medida na sonda 1 e c é a celeridade de uma onda sinusoidal progressiva, com o período da onda incidente, à profundidade $h = 0.86$ m de acordo com a relação de dispersão do modelo de Boussinesq. Na fronteira

de sotamar apenas uma condição foi imposta relacionando os valores calculados da elevação da superfície livre e da velocidade:

$$\hat{u} = c \frac{\hat{\zeta}}{h + \hat{\zeta}},$$

em que c é novamente a celeridade da componente principal da onda à profundidade de 0.86 m.

Caso A: da observação dos perfis longitudinais para a solução obtida pelo esquema de Bubnov-Galerkin (cf. Figura 6.30), é evidente a geração de oscilações numéricas junto à fronteira de barlar. Estas oscilações não são dissipadas permanecendo como ondas não propagantes com comprimento $\lambda = 2 \Delta x$. Esta perturbação regista-se, numa primeira fase, apenas para a elevação da superfície livre, não sendo então afectados os valores da velocidade. Numa fase mais adiantada da simulação a oscilação numérica estende-se a todo o domínio e aos valores da velocidade (resultados não apresentados). Os registos obtidos para as séries temporais (cf. Figuras 6.23 e 6.35) não apresentam vestígios dessa oscilação de alta frequência, confirmando portando a celeridade de fase nula associada a essas ondas. É ainda de notar que este ruído numérico começa por se verificar em zonas onde o escoamento é praticamente linear e computacionalmente caracterizado por elevado número de Courant. Por outro lado, o esquema de Petrov-Galerkin, devido ao seu mecanismo de dissipação altamente selectivo, conduz a uma solução sem oscilações numéricas (cf. Figura 6.29) e em que as harmónicas de maior comprimento de onda não sofrem praticamente nenhuma dissipação.

Comparando os resultados destas simulações com os resultados experimentais (cf. Figuras 6.35 e 6.36) é possível verificar serem os resultados da formulação de Petrov-Galerkin ligeiramente melhores do que os da formulação de Bubnov-Galerkin, nomeadamente na sonda 8, havendo uma melhoria mínima da fase da onda nas sondas subsequentes. De qualquer modo, a forma da onda após o retorno a águas profundas não é bem reproduzido pelo modelo de Boussinesq devido à presença de duas componentes de ordem superior cuja celeridade o modelo é incapaz de reproduzir.

Caso C: o esquema de Bubnov-Galerkin revelou-se demasiado instável, não permitindo simular a propagação da onda durante 50 s. Os resultados apresentados dizem portanto respeito à formulação de Petrov-Galerkin. É de salientar o grande atraso com que a onda chega às últimas sondas (cf. Figuras 6.41 e 6.42), o que

denota tanto um grande erro na celeridade da componente principal como também um grande erro na celeridade de grupo, com que se propaga a frente de onda. Na Figura 6.50 é também visível uma maior amplitude da onda numérica à saída do coroamento do quebra-mar (sondas 5 e 6), sendo que a partir dessa zona a onda numérica nunca consegue reproduzir a segunda harmónica presente na onda física.

Modelo de Seabra-Santos

As condições de fronteira para o modelo de Seabra-Santos, foram exactamente iguais às adoptadas para o modelo de Boussinesq. Apenas a formulação de Petrov-Galerkin com correcção de dispersão e termo dissipativo é apresentada. A formulação de Bubnov-Galerkin padecia dos problemas inerentes à não propagação de perturbações com comprimento $\lambda = 2 \Delta x$.

Caso A: os resultados deste modelo para o caso A são bastante semelhantes ao do modelo de Boussinesq, salvo um ligeiro aumento de precisão da fase na última sonda (cf. Figuras 6.36 e 6.37). Tal facto resulta de a propagação da onda se fazer dentro do domínio de validade do modelo de Boussinesq.

Caso C: neste caso, em que a onda se propaga fora do limite de validade do modelo de Boussinesq, o modelo de Seabra-Santos consegue obter resultados óptimos no que concerne à precisão da componente principal da onda (cf. Figura 6.51) cuja celeridade linear é reproduzida de forma exacta por este modelo (cf. §2.2.4). Por outro lado, a presença das harmónicas superiores em zona profunda (sondas 7 a 11) faz com que o modelo não seja capaz de reproduzir convenientemente a forma da onda.

Modelo de Madsen & Sørensen

As condições de fronteira são iguais às utilizadas nos modelos de Boussinesq e de Seabra-Santos. São apresentados resultados correspondentes à utilização dos esquemas numéricos de Bubnov-Galerkin (BG) — elementos finitos lineares de dois nós — e de Petrov-Galerkin (PG).

Caso A: verifica-se que a formulação de Bubnov-Galerkin apresenta importantes oscilações numéricas associadas a ondas não propagantes com celeridade nula e comprimento $\lambda = 2 \Delta x$. (cf. Figura 6.32). O esquema de Bubnov-Galerkin regista também alguma oscilação numérica de comprimento superior ao mínimo, sobre o

talude de barlamar do quebra-mar. Esta perturbação tem celeridade não nula pois é também registada pelas sondas 3 e 4. A formulação de Petrov-Galerkin apresenta melhores resultados em termos de estabilidade (cf. Figura 6.33), graças ao termo dissipativo introduzido. Esta estabilidade é conseguida sem que se registre qualquer degradação apreciável da amplitude da onda devido a amortecimento das harmónicas principais (cf. Figura 6.39), o que reflecte a elevada precisão do mecanismo de dissipação numérica.

O modelo de Madsen & Sørensen (PG) apresenta uma boa precisão da fase para as duas primeiras harmónicas, traduzindo-se para as sondas 8 e 9 em resultados mais precisos do que os obtidos com os modelos de Boussinesq e de Seabra-Santos. No entanto, reproduz bastante mal uma terceira harmónica presente nos resultados físicos, de onde resulta uma forma errada para a onda nas últimas três sondas¹.

Caso C: apenas se apresentam resultados numéricos obtidos com a formulação de Petrov-Galerkin. O esquema de Bubnov-Galerkin revelou-se demasiado instável. De notar a ausência de oscilações numéricas na solução obtida com o esquema PG (cf. Figura 6.48).

É interessante comparar estes resultados com os obtidos com o modelo de Seabra-Santos. Assim verifica-se que o modelo de Madsen & Sørensen é mais preciso para pequenas profundidades, quando a onda tem uma forma próxima da onda solitária (sondas 5 e 6), mas com o aumento da profundidade relativa o modelo de Seabra-Santos revela-se por vezes superior (sondas 9 e 11) apesar de não ser capaz de capturar as harmónicas superiores (cf. Figuras 6.51 e 6.52). Note-se que o modelo de Seabra-Santos, ao contrário do modelo de Madsen & Sørensen, não apresenta, relativamente ao modelo de Boussinesq, um esforço computacional acrescido.

Modelo de Nadaoka & Beji

Foram experimentadas versões do modelo de Nadaoka & Beji com uma, duas e três componentes. Verificou-se que as versões com uma e duas componentes (resultados não apresentados) não são capazes de reproduzir com precisão as séries temporais experimentais. Os resultados apresentados dizem respeito à versão do modelo com três componentes fixas: $(kh)_1 = \pi/4$, $(kh)_2 = \pi$ e $(kh)_3 = 3\pi$. O esquema numérico adoptado consistiu na formulação de Bubnov-Galerkin com interpolação mista (cf. §4.4.1): linear para a superfície livre ζ ; quadrática para as componentes U_m da velocidade. Embora teoricamente menos precisa do que a interpolação linear de

¹Ensaio realizados para um domínio numérico mais extenso, confirmaram a não existência de reflexão significativa de energia no batedor de sotamar.

igual ordem para as duas variáveis (cf. Capítulo 4), verificou-se experimentalmente que este tipo de interpolação é menos susceptível ao aparecimento de perturbações devidas à não propagação das ondas com comprimento $\lambda = 2 \Delta x$.

As condições de fronteira consistiram em:

- fronteira de barlar:
 - imposição da elevação da superfície livre na fronteira de barlar, igual ao registo experimental da sonda 1, i.e.

$$\hat{\zeta} = \zeta_0(t);$$

- imposição do valor das três componentes da velocidade à superfície, U_1 , U_2 e U_3 , com base na condição:

$$u(z, t) = F_1 U_1 + F_2 U_2 + F_3 U_3 = c \frac{\zeta_0}{h + \zeta_0}, \quad \forall z \in [-h, 0],$$

e numa formulação tipo Galerkin (cf. §2.2.5).

- fronteira de sotamar: apenas a imposição do valor das três componentes da velocidade, tal como na fronteira de barlar.

Nas condições de fronteira referidas, ζ_0 é a elevação da superfície livre medida na sonda 1 e c é a celeridade de uma onda sinusoidal progressiva à profundidade $h = 0.86$ m de acordo com a relação de dispersão linear exacta de Airy. As condições aplicadas às componentes da velocidade à superfície destinam-se a reproduzir os efeitos dos dois batedores tipo pistão. Pressupõe-se que o batedor-gerador se encontra suficientemente próximo da sonda 1, por forma a que o perfil vertical de velocidades tenha aí uma distribuição constante.

Caso A: comparando os dados experimentais com os resultados numéricos (cf. Figura 6.40), é imediato verificar que este modelo é sem dúvida o que melhor reproduz a forma das séries temporais em todas as sondas. É no entanto evidente a partir da sonda 6, inclusive, um pequeno atraso de fase e uma amplitude da onda numérica ligeiramente superior à amplitude real. Estas discrepâncias deverão ser consequências da fraca precisão do esquema numérico utilizado. É provável que uma extensão para o modelo de Nadaoka & Beji do método dos elementos finitos com uma formulação de Petrov-Galerkin do tipo proposto nesta tese (cf. Capítulo 5) mas baseado numa norma de Riemann, permita obter a necessária precisão de fase e amplitude.

Caso C: não foi possível obter para este caso uma solução com precisão de segunda ordem, i.e. esquema de Bubnov-Galerkin com $\theta = 0.5$ (cf. Capítulo 4). A solução apresentada nas Figuras 6.45, 6.49 e 6.53, foi obtida com $\theta = 0.515$. Como seria de esperar, a dissipação é mínima, não impedindo o aparecimento de oscilações numéricas de grande amplitude na entrada do coroamento do quebra-mar e, de menor amplitude, na saída do coroamento (cf. Figura 6.49). No entanto, sendo o mecanismo dissipativo de primeira ordem, afecta de forma inaceitável as harmónicas principais, onde a energia da onda se concentra, conduzindo a uma solução numérica com amplitude bastante abaixo da real (cf. Figura 6.53). Por outro lado, e pese embora o elevado erro de fase e de amplitude, é a única solução numérica em que a diferença de fase entre as harmónicas principais está próxima do valor correcto, como se pode concluir da forma da onda.

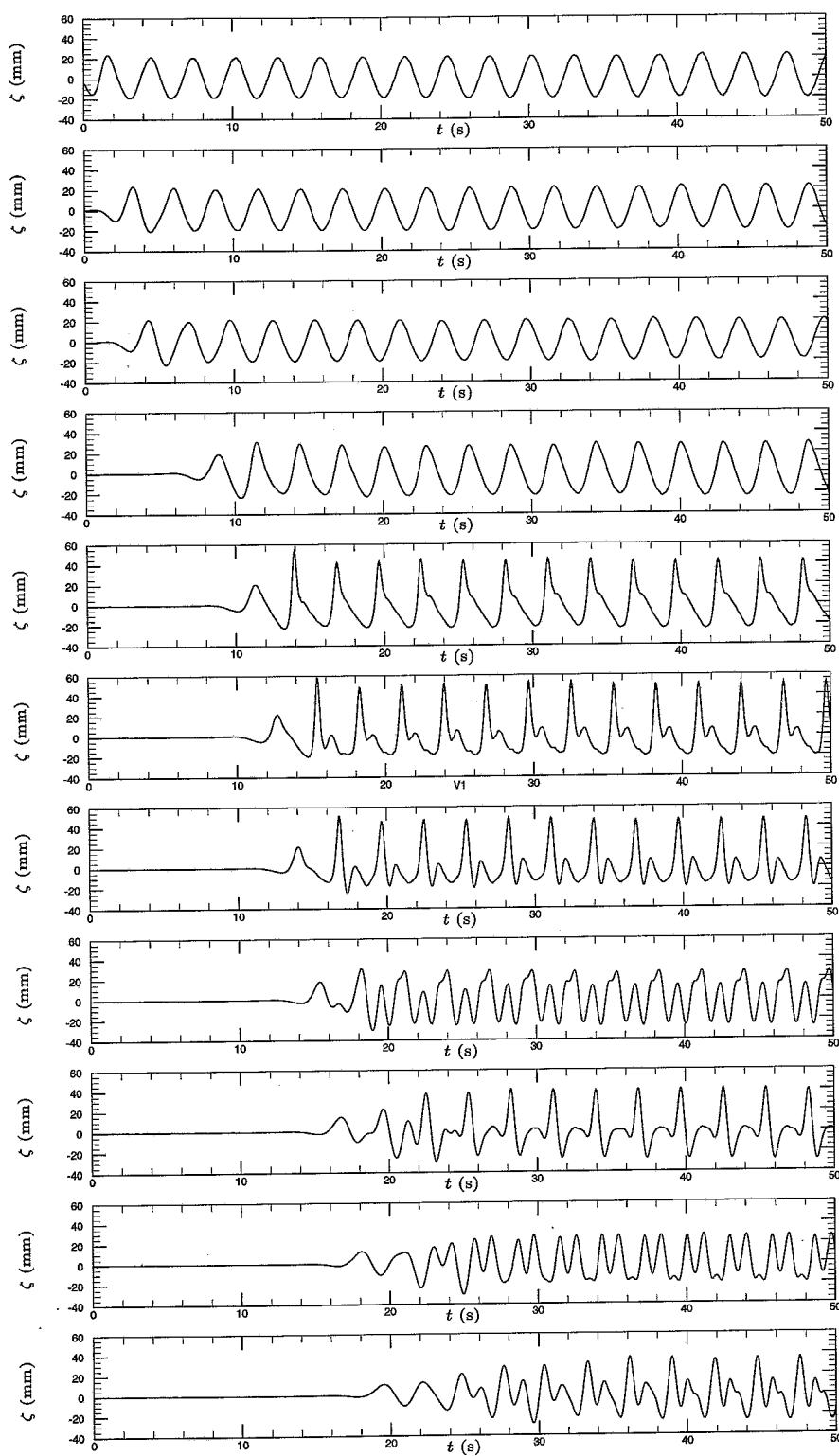


Figura 6.22: Caso A: séries temporais — modelo físico. De cima para baixo, sondas 1 a 11.

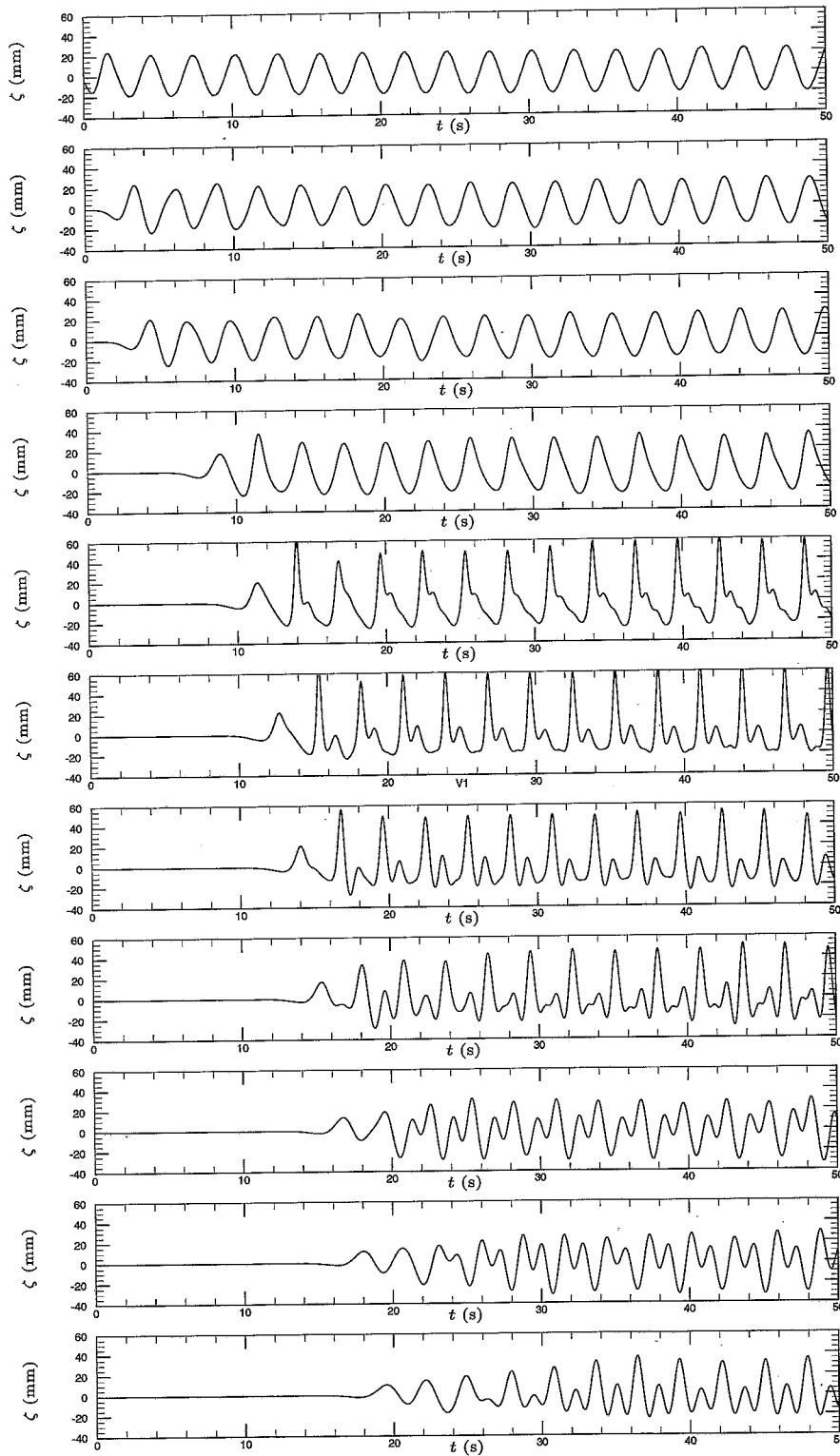


Figura 6.23: Caso A: séries temporais — modelo de Boussinesq, esquema de Bubnov-Galerkin. De cima para baixo, sondas 1 a 11.

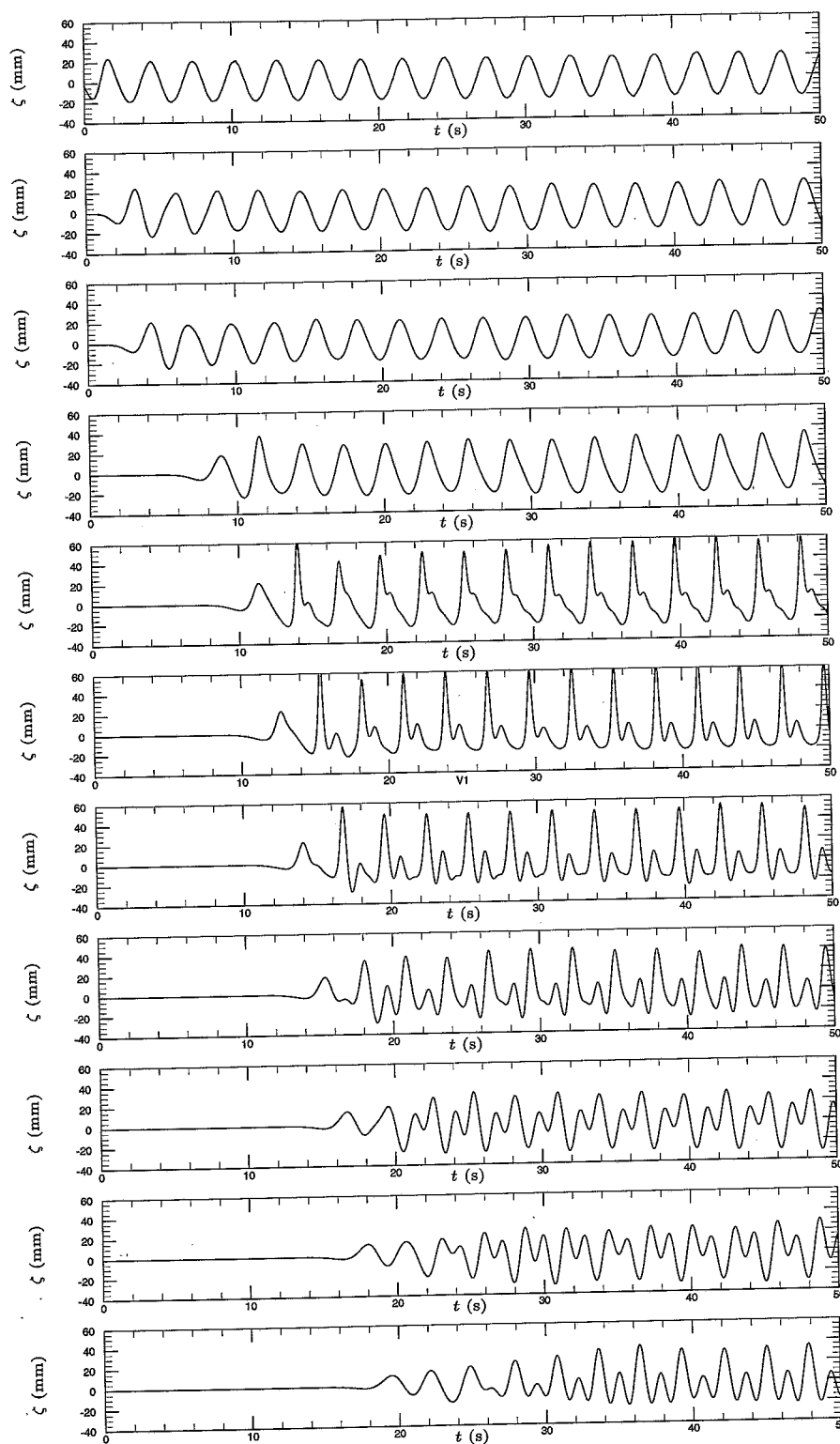


Figura 6.24: Caso A: séries temporais — modelo de Boussinesq, esquema de Petrov-Galerkin. De cima para baixo, sondas 1 a 11.

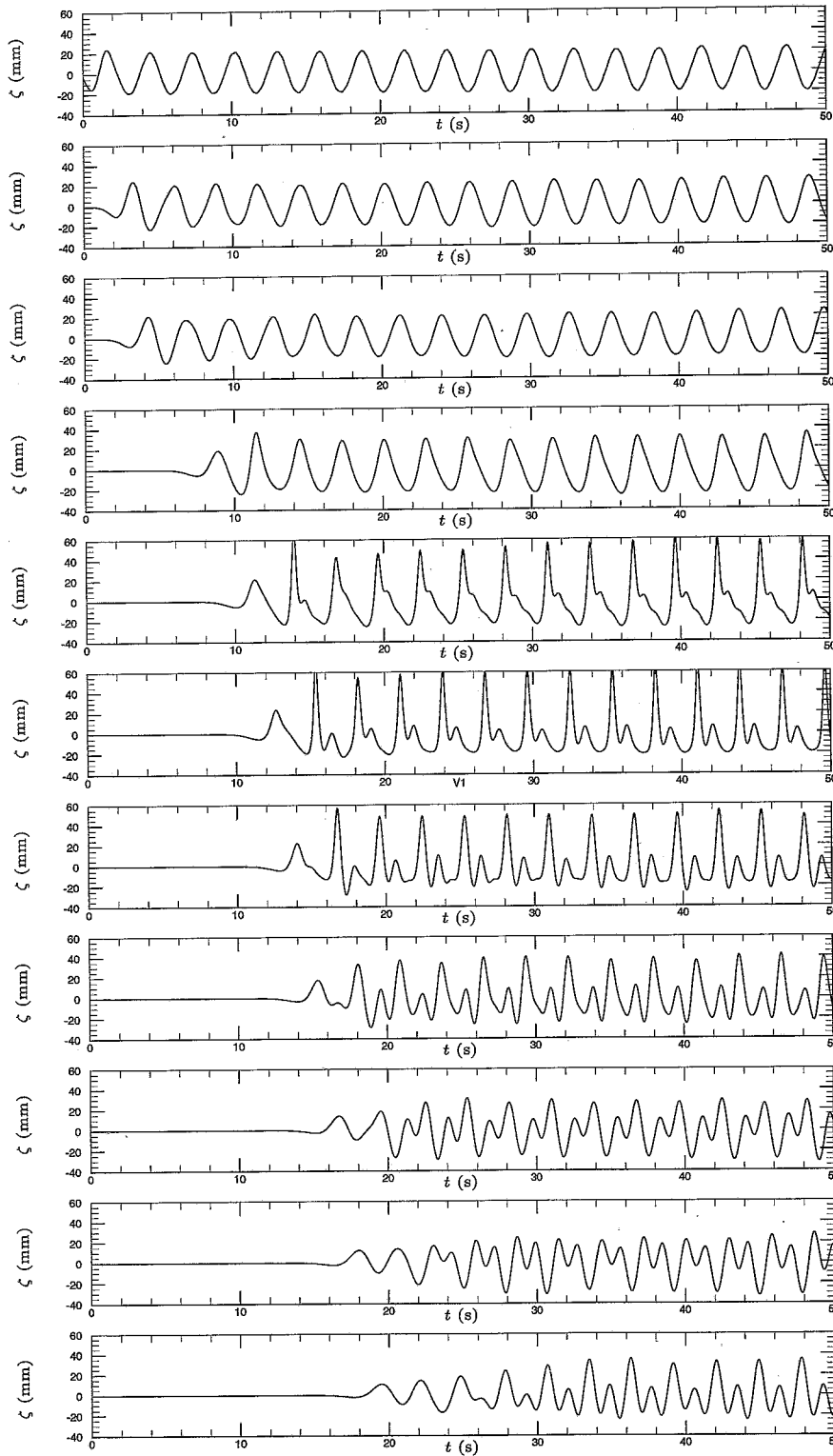


Figura 6.25: Caso A: séries temporais — modelo de Seabra-Santos, esquema de Petrov-Galerkin. De cima para baixo, sondas 1 a 11.

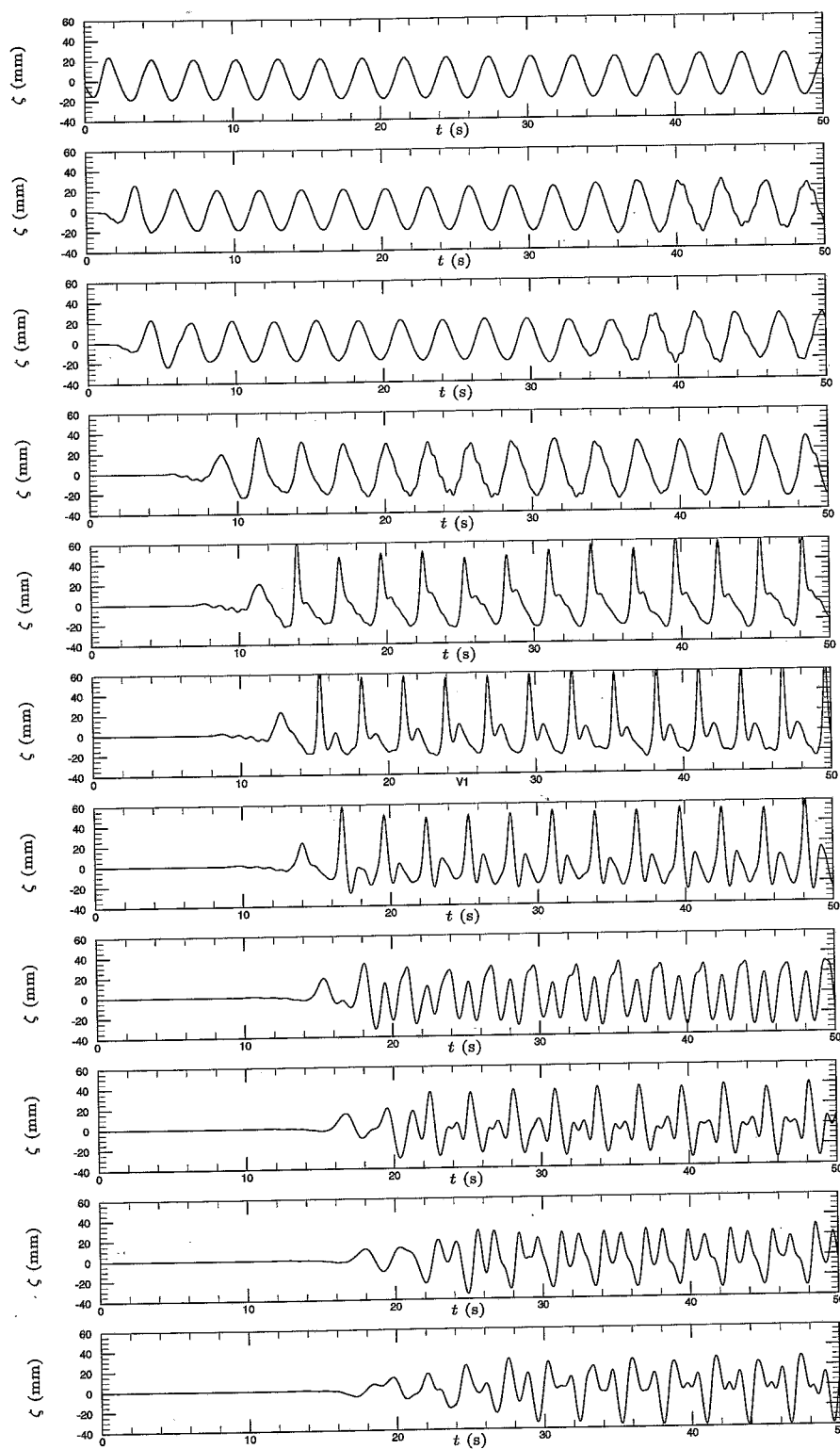


Figura 6.26: Caso A: séries temporais — modelo de Madsen & Sørensen, esquema de Bubnov-Galerkin. De cima para baixo, sondas 1 a 11.

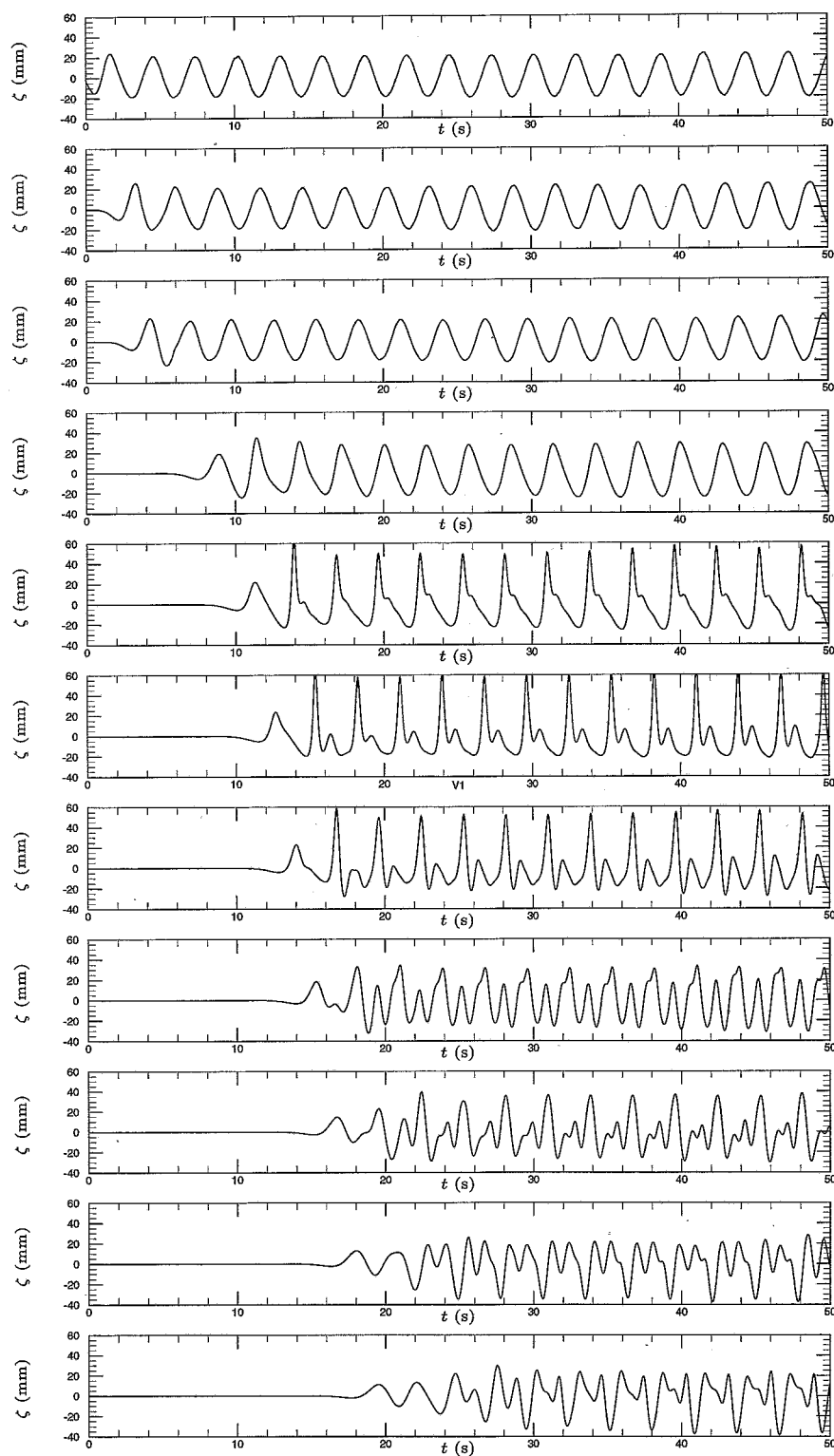


Figura 6.27: Caso A: séries temporais — modelo de Madsen & Sørensen, esquema de Petrov-Galerkin. De cima para baixo, sondas 1 a 11.

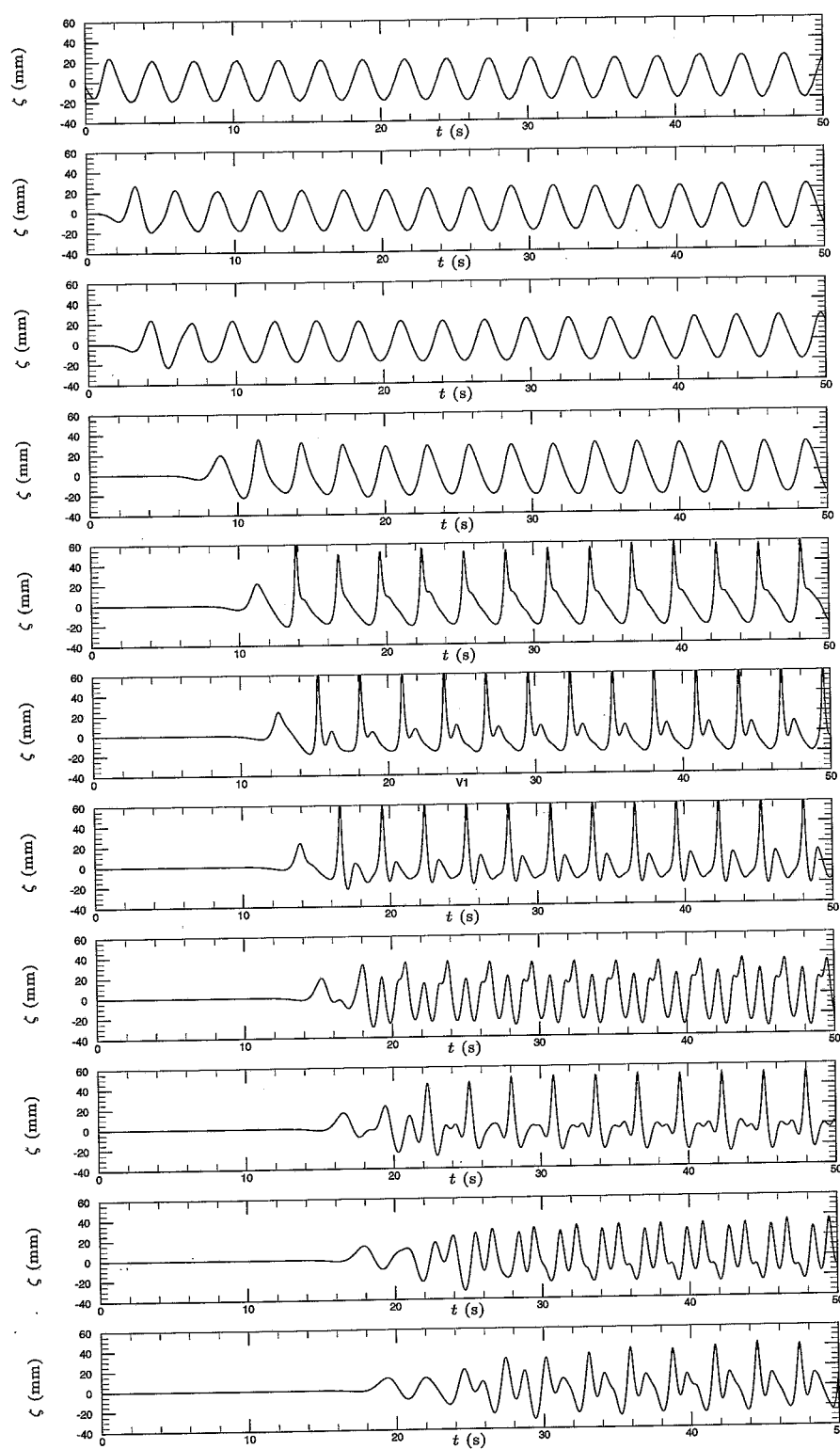


Figura 6.28: Caso A: séries temporais — modelo de Nadaoka & Beji (3 componentes), esquema de Bubnov-Galerkin com interpolação mista. De cima para baixo, sondas 1 a 11.

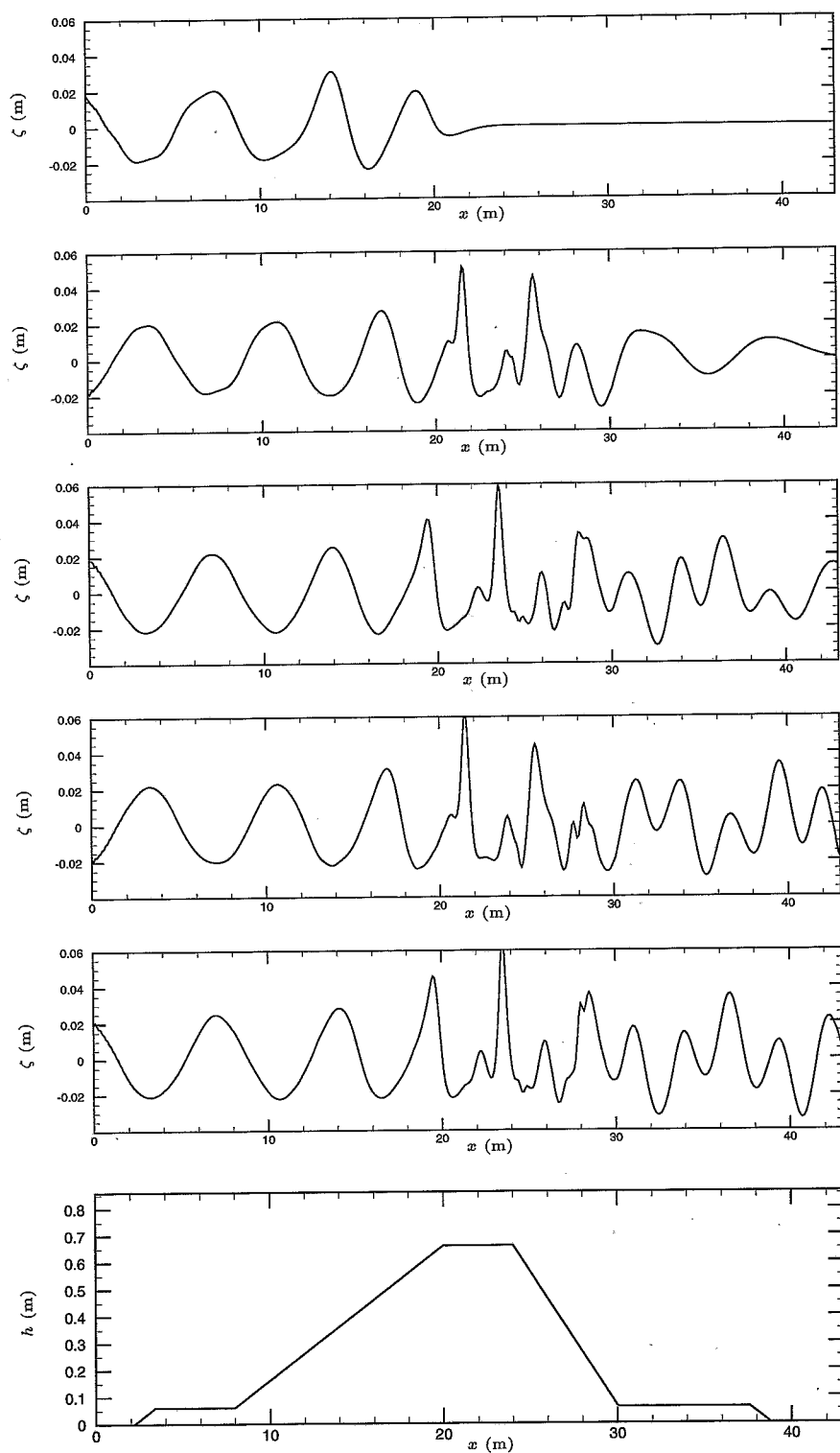


Figura 6.29: Caso A: perfis longitudinais — modelo de Boussinesq, esquema de Petrov-Galerkin. De cima para baixo, $t = 10$ s, $t = 20$ s, $t = 30$ s, $t = 40$ s e $t = 50$ s.

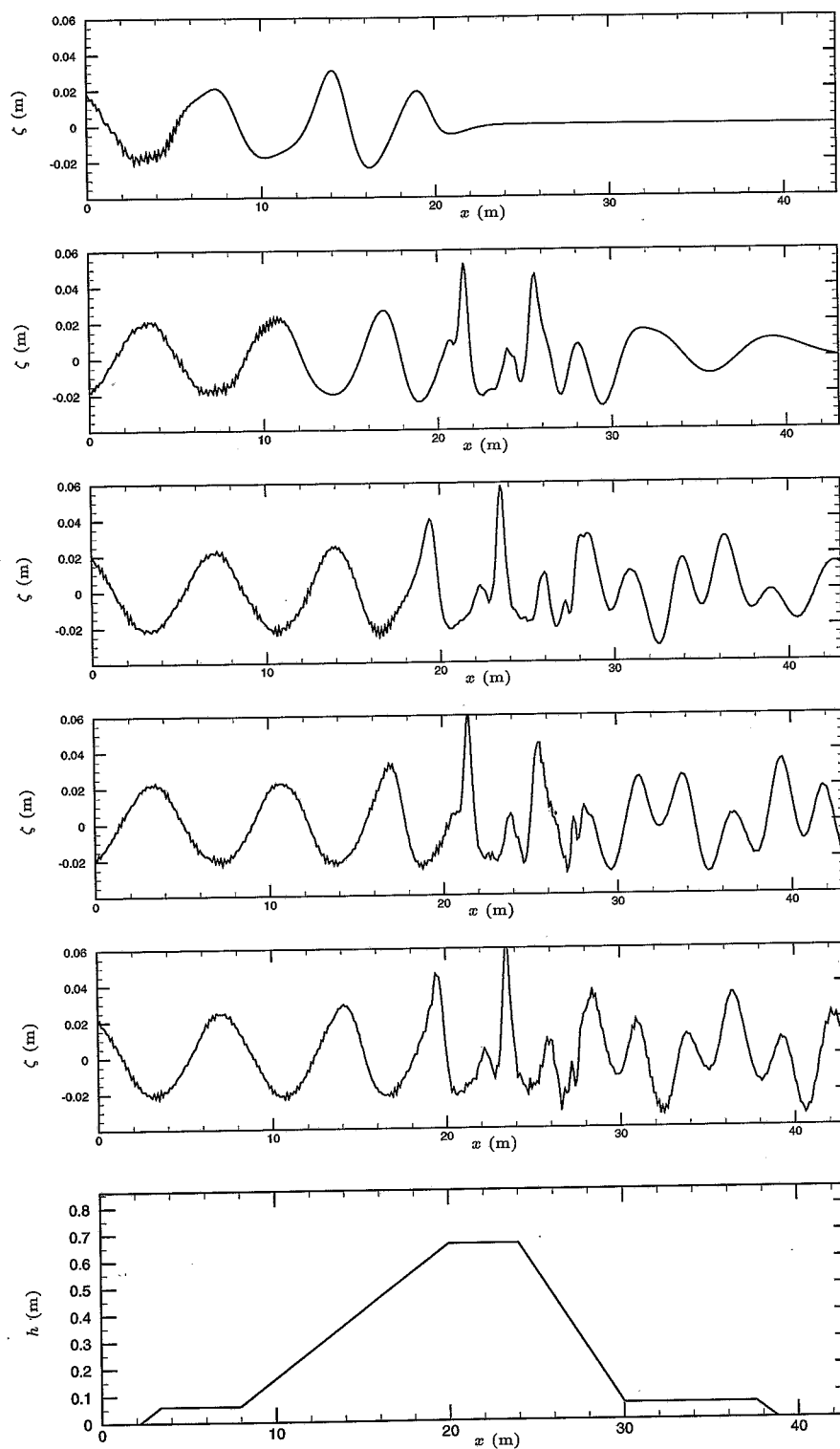


Figura 6.30: Caso A: perfis longitudinais — modelo de Boussinesq, esquema de Bubnov-Galerkin. De cima para baixo, $t = 10$ s, $t = 20$ s, $t = 30$ s, $t = 40$ s e $t = 50$ s.

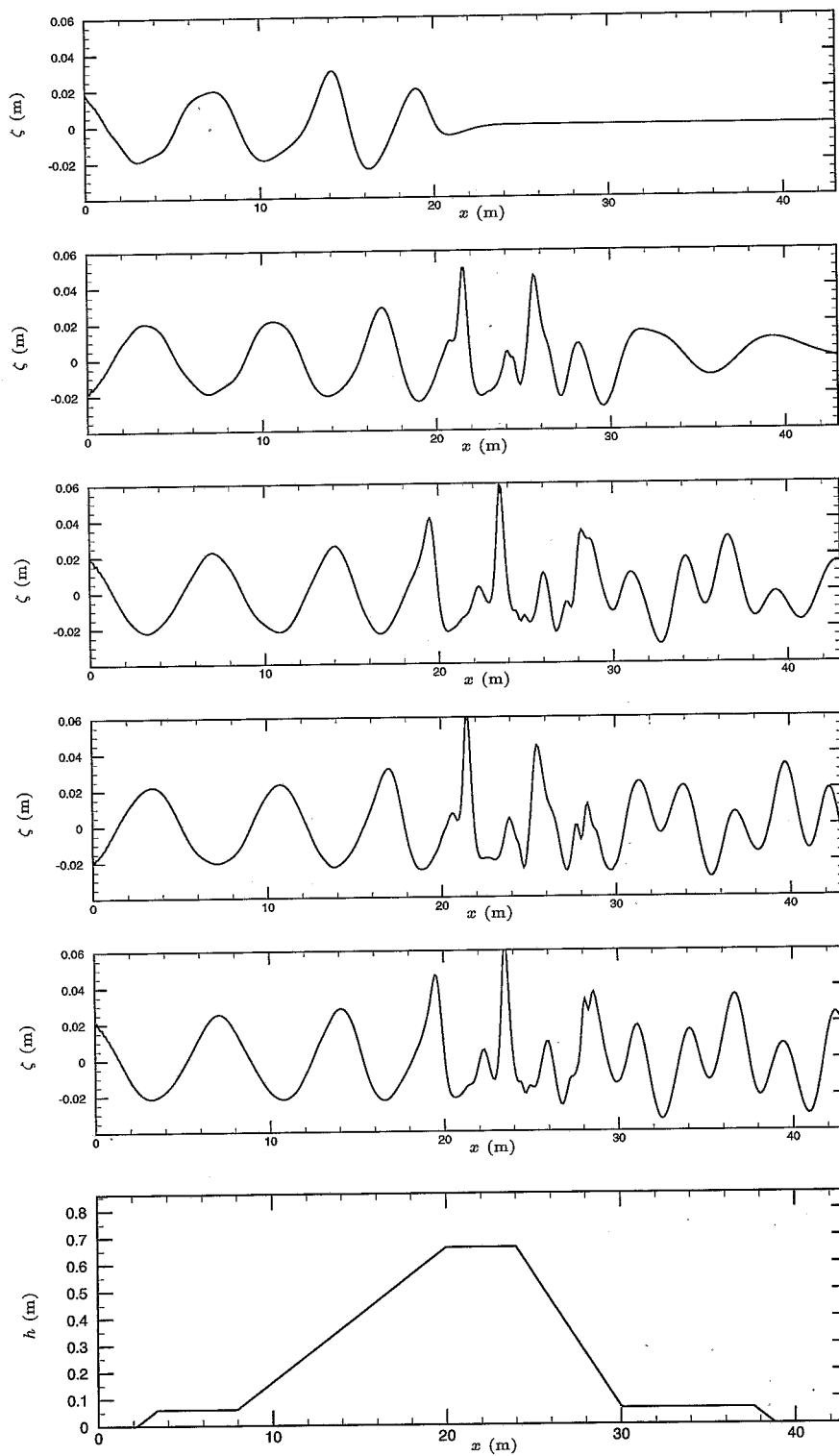


Figura 6.31: Caso A: perfis longitudinais — modelo de Seabra-Santos, esquema de Petrov-Galerkin. De cima para baixo, $t = 10$ s, $t = 20$, $t = 30$ s, $t = 40$ s e $t = 50$ s.

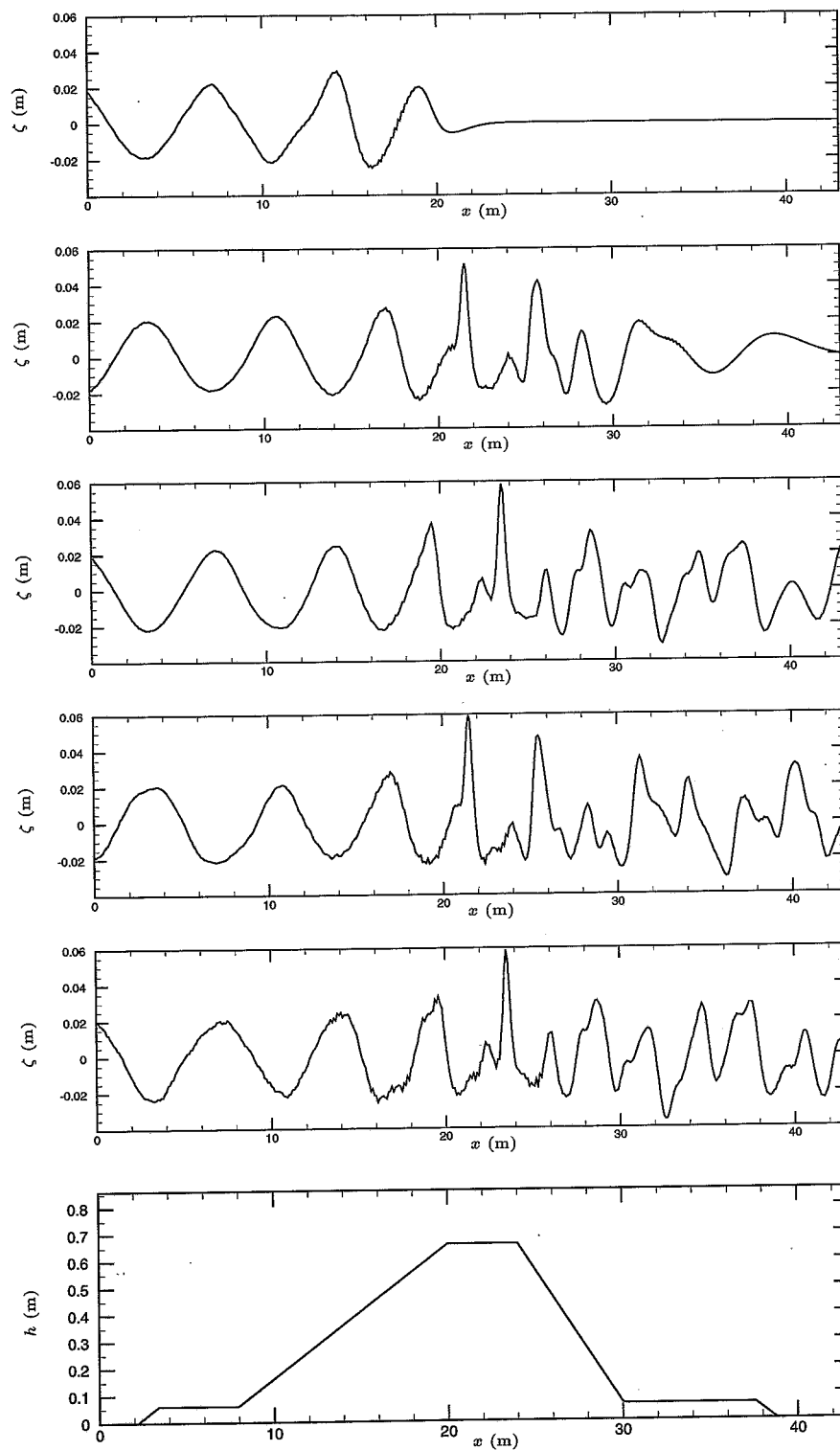


Figura 6.32: Caso A: perfis longitudinais — modelo de Madsen & Sørensen, esquema de Bubnov-Galerkin. De cima para baixo, $t = 10$ s, $t = 20$ s, $t = 30$ s, $t = 40$ s e $t = 50$ s.

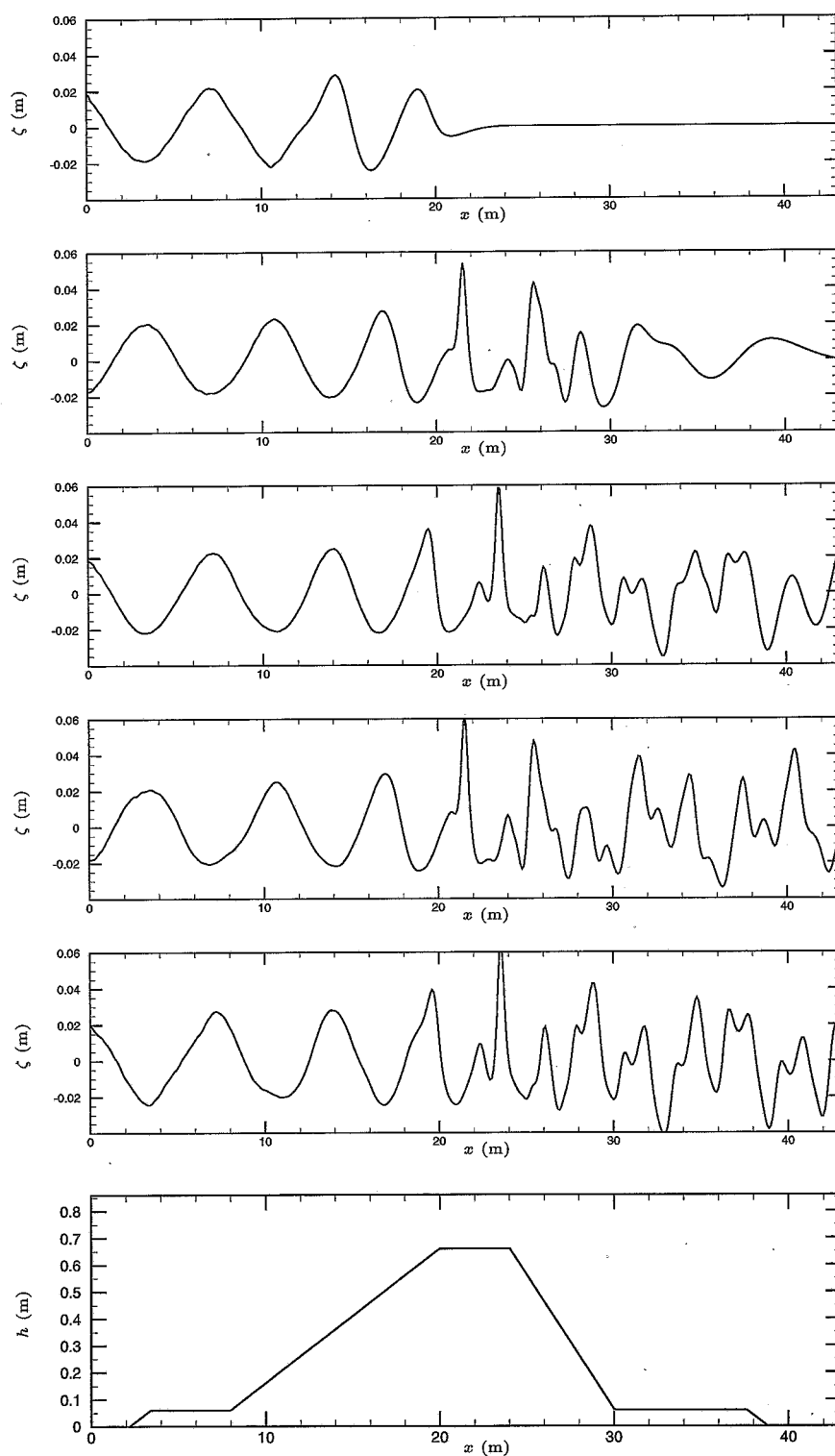


Figura 6.33: Caso A: perfis longitudinais — modelo de Madsen & Sørensen, esquema de Petrov-Galerkin. De cima para baixo, $t = 10$ s, $t = 20$ s, $t = 30$ s, $t = 40$ s e $t = 50$ s.

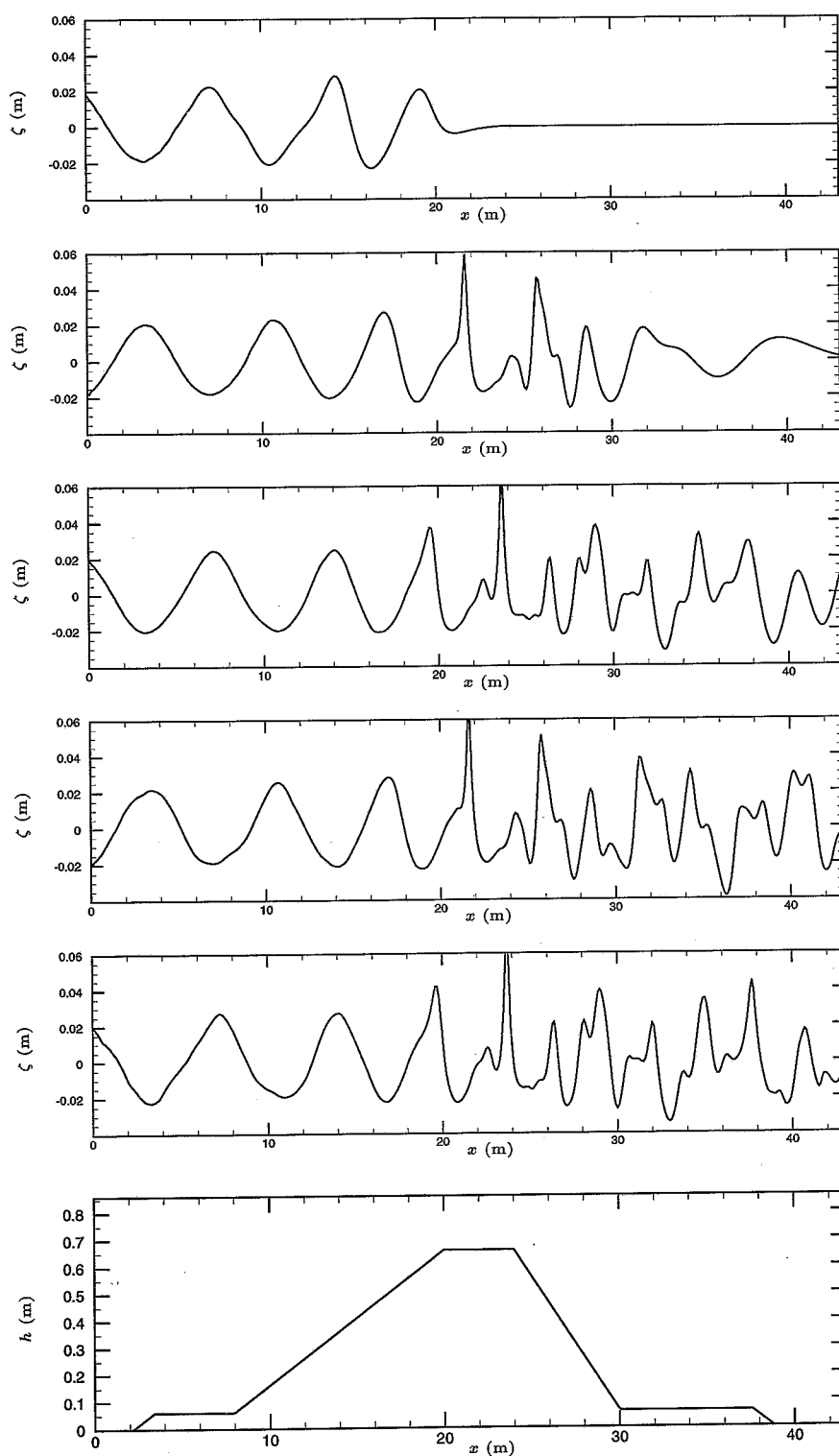


Figura 6.34: Caso A: perfis longitudinais — modelo de Nadaoka & Beji (3 componentes), esquema de Bubnov-Galerkin com interpolação mista. De cima para baixo, $t = 10$ s, $t = 20$ s, $t = 30$ s, $t = 40$ s e $t = 50$ s.

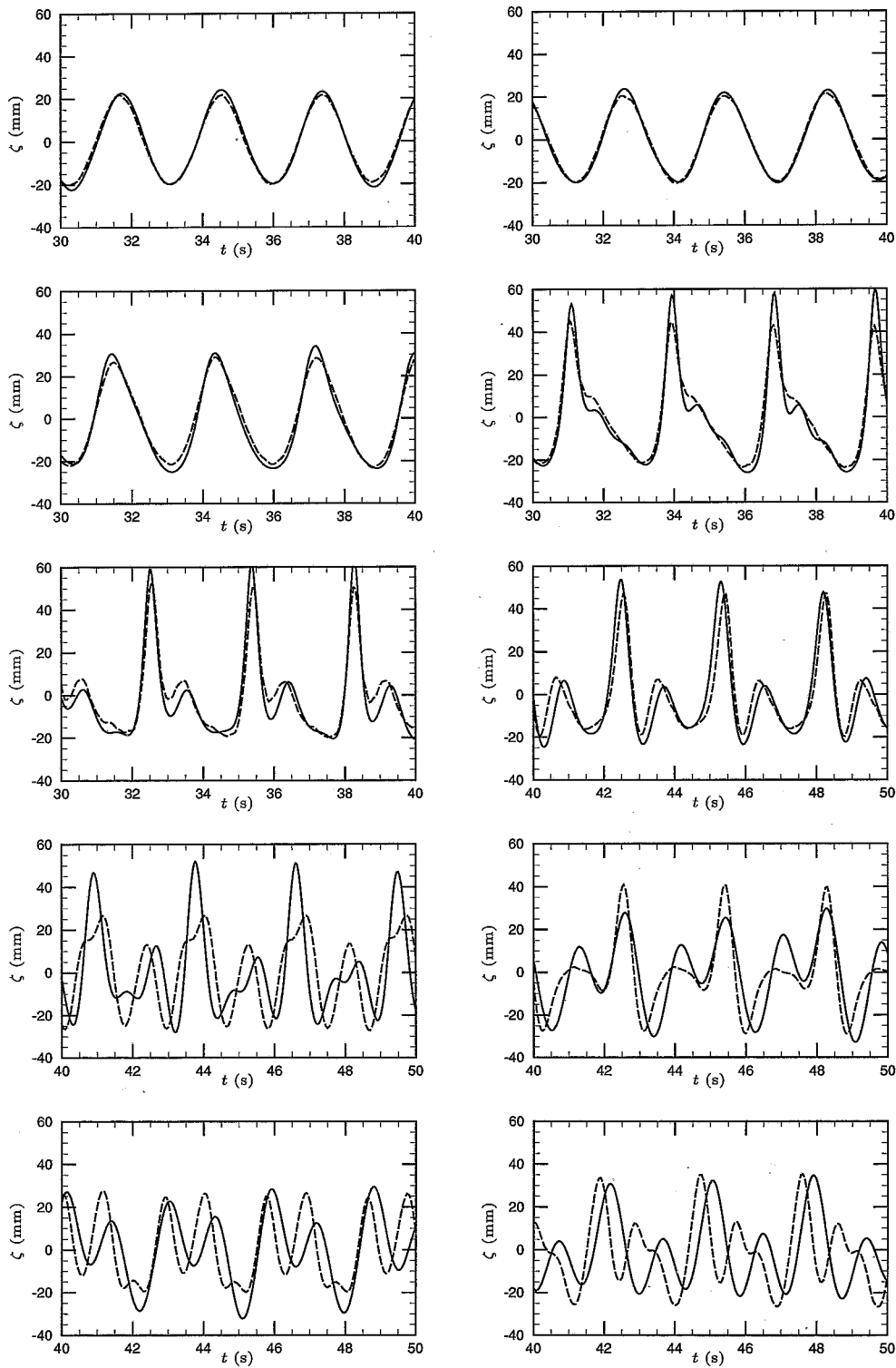


Figura 6.35: Caso A: séries temporais — modelo de Boussinesq, esquema de Bubnov-Galerkin. Resultados numéricos (—) e experimentais (---). Da esquerda para a direita e de cima para baixo, sondas 2 a 11.

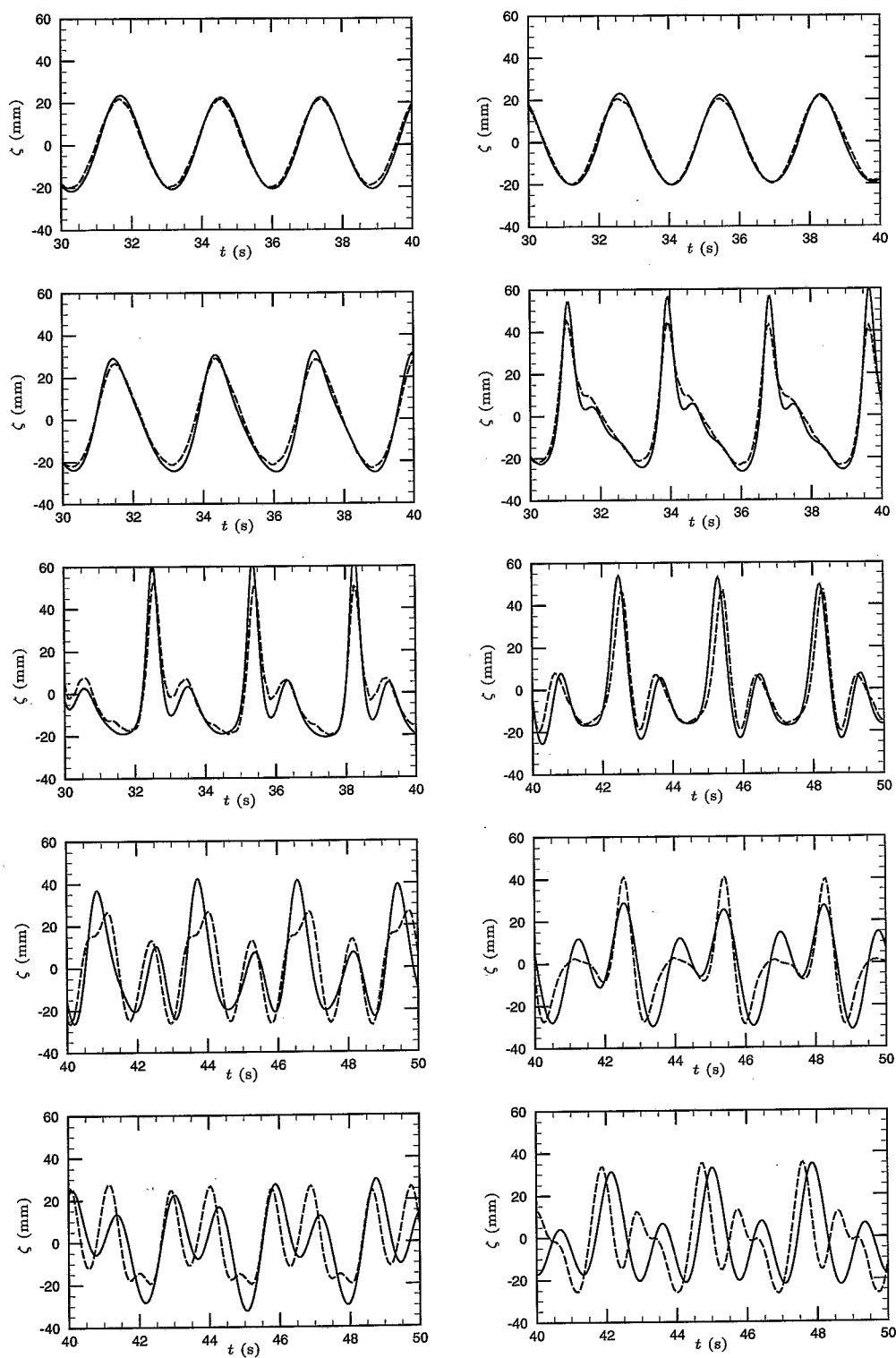


Figura 6.36: Caso A: séries temporais — modelo de Boussinesq, esquema de Petrov-Galerkin. Resultados numéricos (—) e experimentais (---). Da esquerda para a direita e de cima para baixo, sondas 2 a 11.

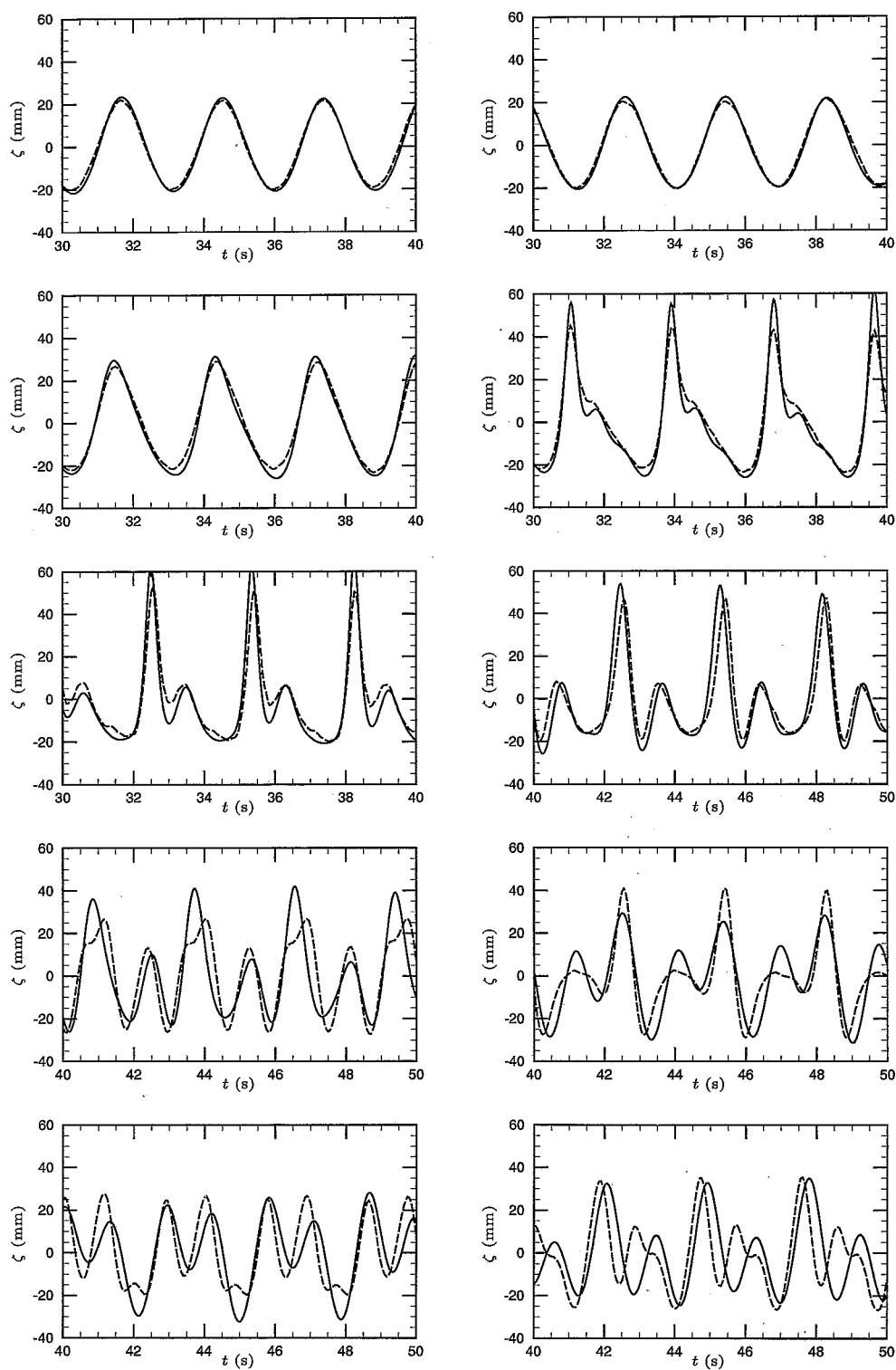


Figura 6.37: Caso A: séries temporais — modelo de Seabra-Santos, esquema de Petrov-Galerkin. Resultados numéricos (—) e experimentais (---). Da esquerda para a direita e de cima para baixo, sondas 2 a 11.

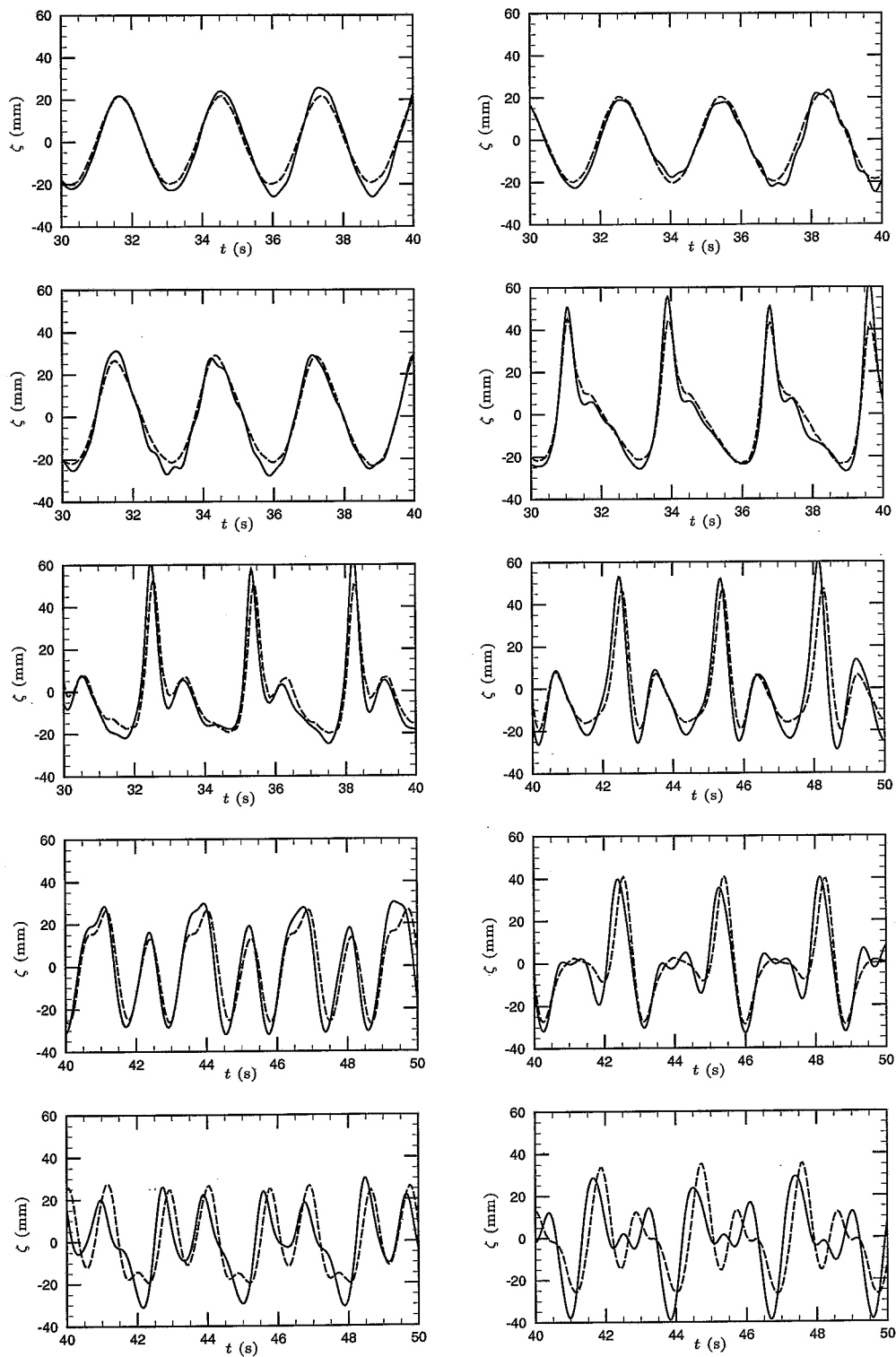


Figura 6.38: Caso A: séries temporais — modelo de Madsen & Sørensen, esquema de Bubnov-Galerkin. Resultados numéricos (—) e experimentais (---). Da esquerda para a direita e de cima para baixo, sondas 2 a 11.

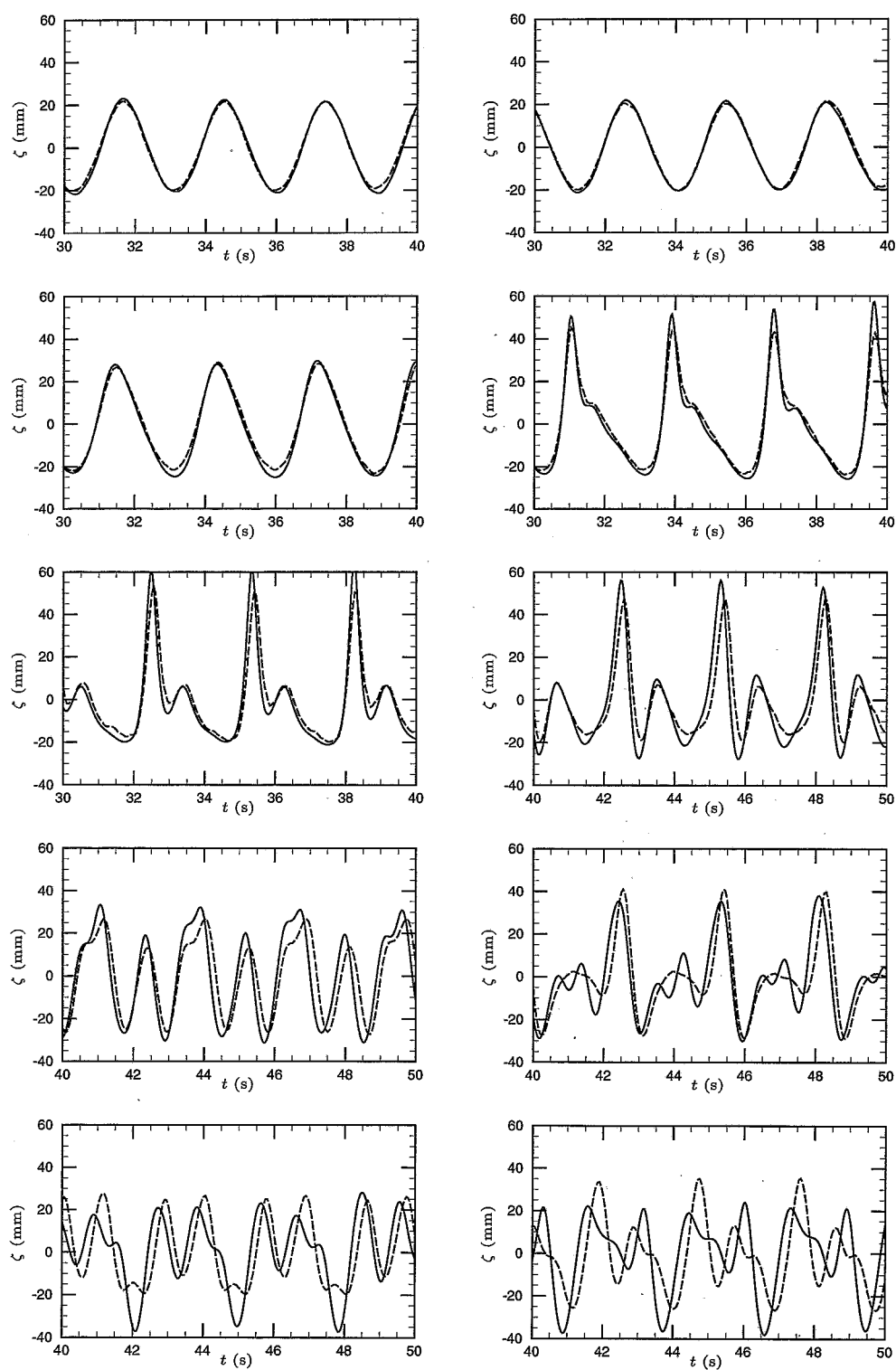


Figura 6.39: Caso A: séries temporais — modelo de Madsen & Sørensen, esquema de Petrov-Galerkin. Resultados numéricos (—) e experimentais (---). Da esquerda para a direita e de cima para baixo, sondas 2 a 11.

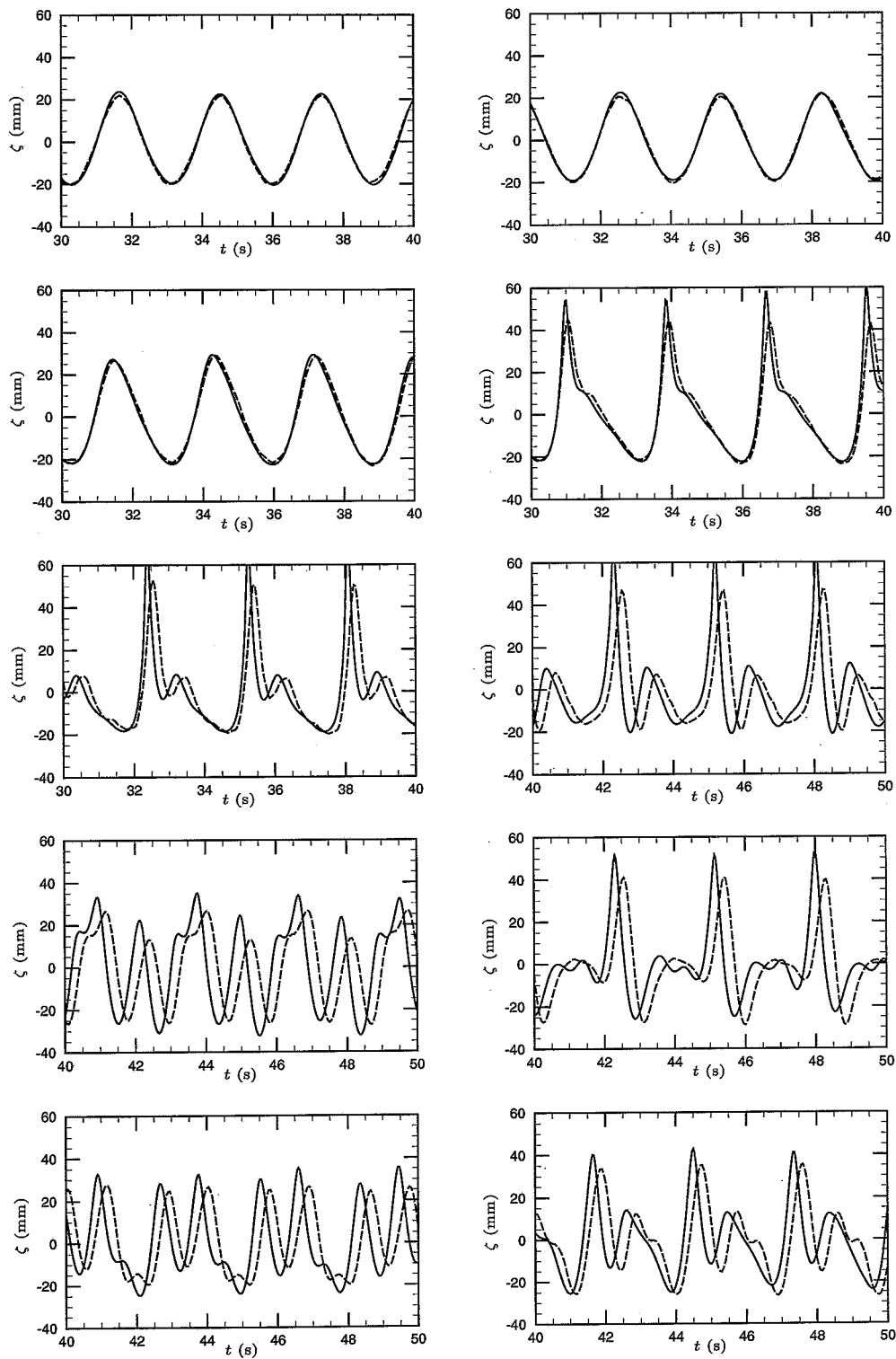


Figura 6.40: Caso A: séries temporais,— modelo de Nadaoka & Beji (3 componentes), esquema de Bubnov-Galerkin com interpolação mista. Resultados numéricos (—) e experimentais (---). Da esquerda para a direita e de cima para baixo, sondas 2 a 11.

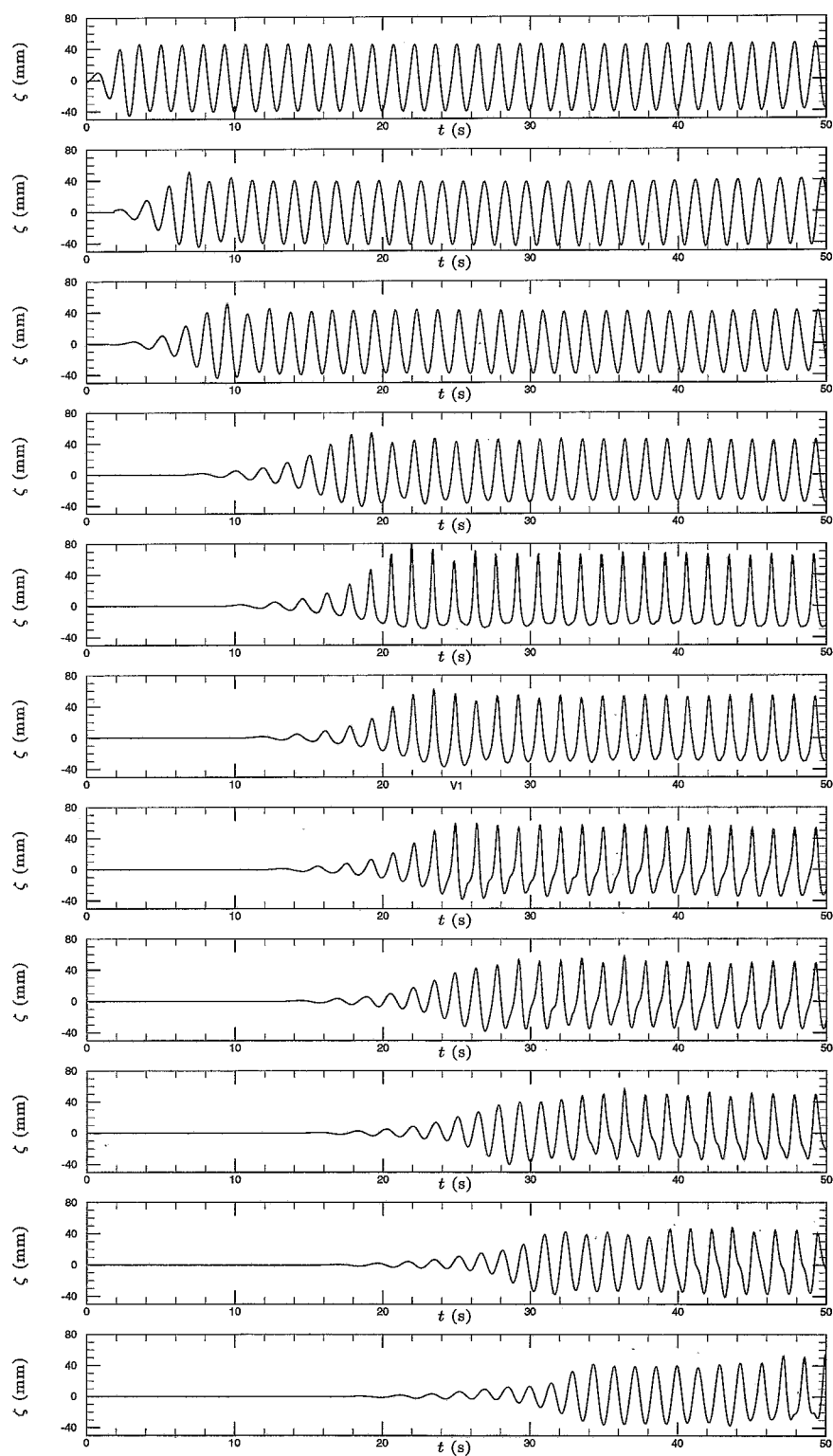


Figura 6.41: Caso C: séries temporais — modelo físico. De cima para baixo, sondas 1 a 11.

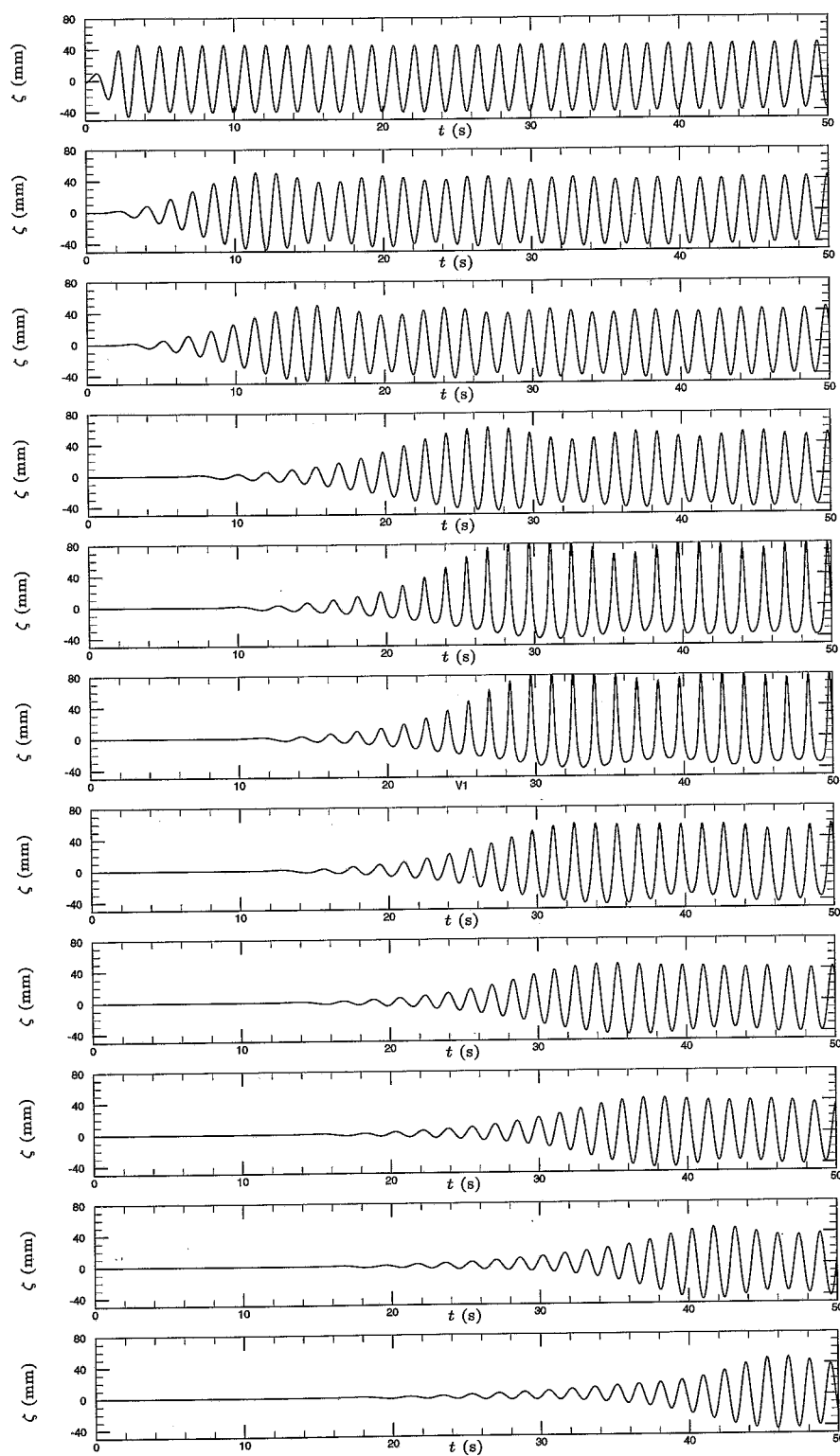


Figura 6.42: Caso C: séries temporais — modelo de Boussinesq, esquema de Petrov-Galerkin. De cima para baixo, sondas 1 a 11.

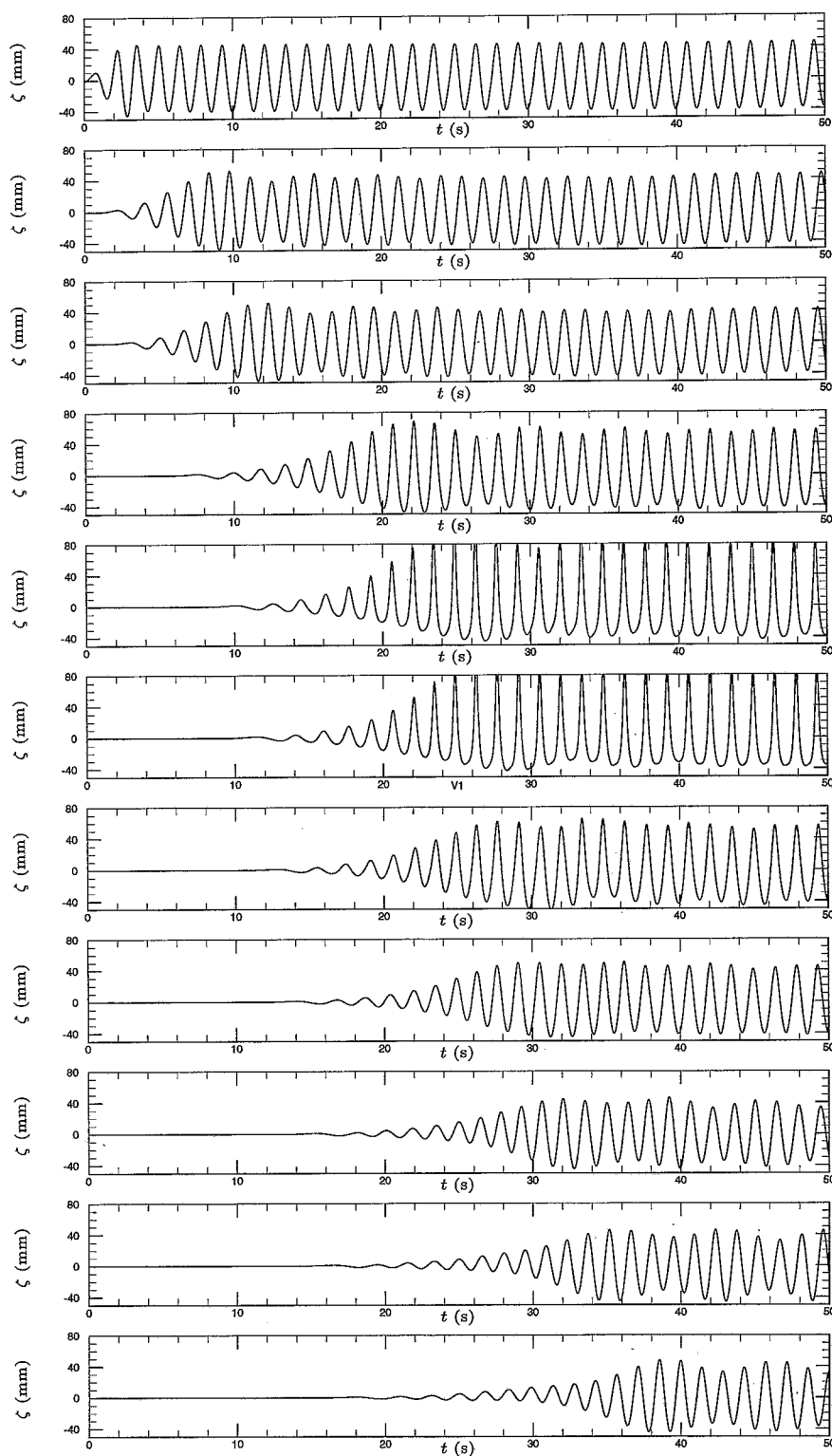


Figura 6.43: Caso C: séries temporais — modelo de Seabra-Santos, esquema de Petrov-Galerkin. De cima para baixo, sondas 1 a 11.

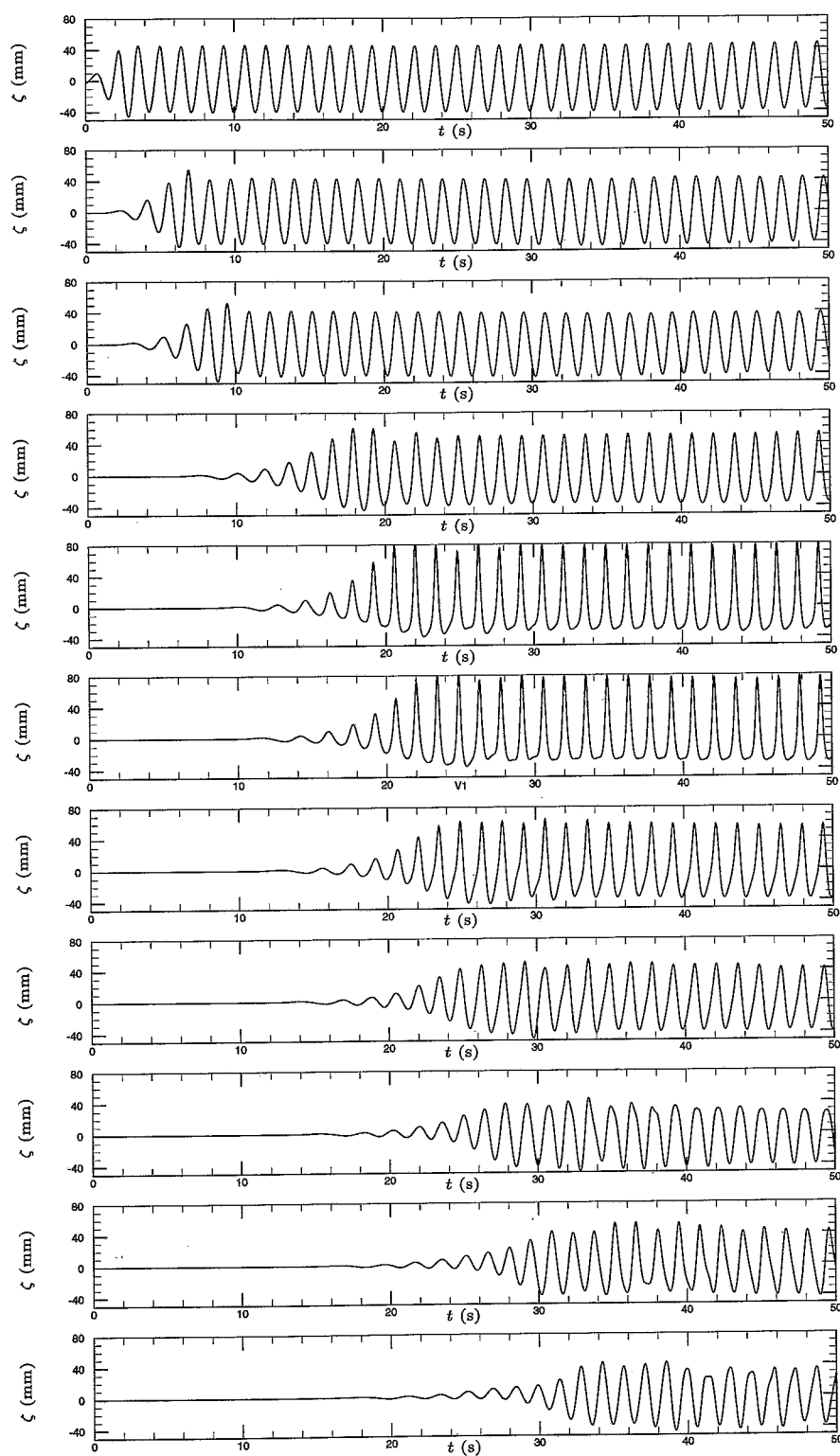


Figura 6.44: Caso C: séries temporais — modelo de Madsen & Sørensen, esquema de Petrov-Galerkin. De cima para baixo, sondas 1 a 11.

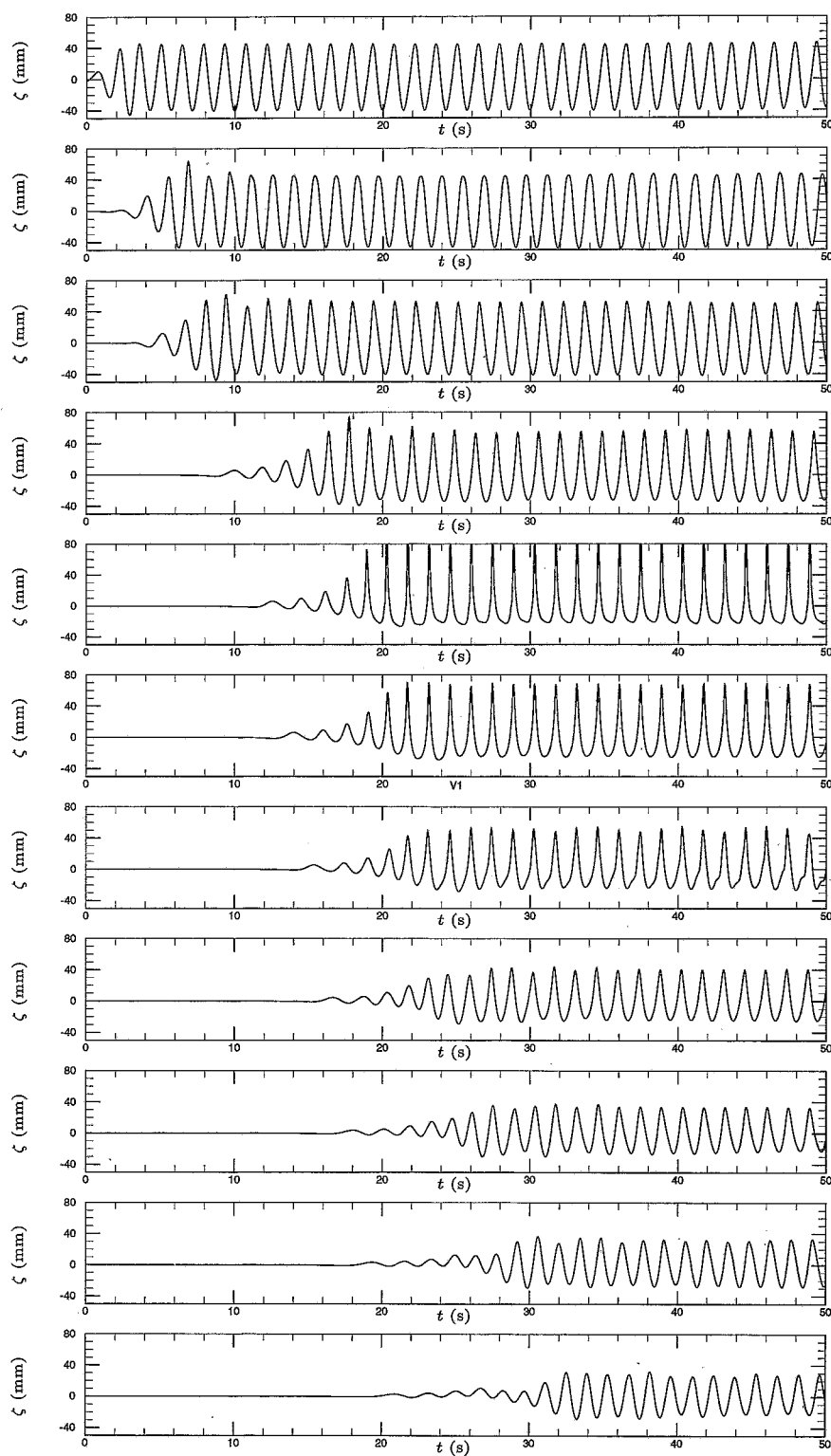


Figura 6.45: Caso C: séries temporais — modelo de Nadaoka & Beji (3 componentes), esquema de Bubnov-Galerkin com interpolação mista. De cima para baixo, sondas 1 a 11.

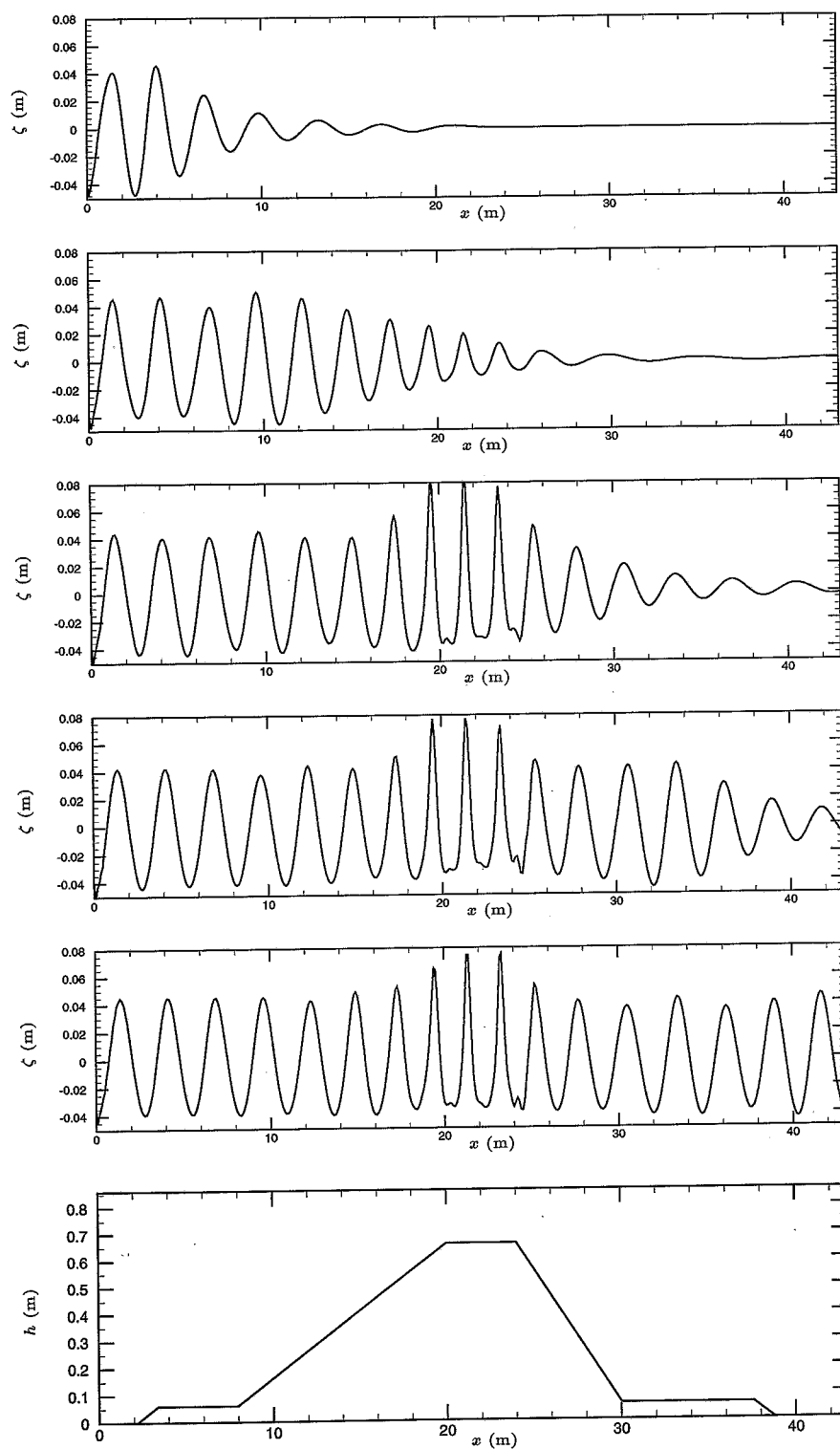


Figura 6.46: Caso C: perfis longitudinais — modelo de Boussinesq, esquema de Petrov-Galerkin. De cima para baixo, $t = 10$ s, $t = 20$ s, $t = 30$ s, $t = 40$ s e $t = 50$ s.

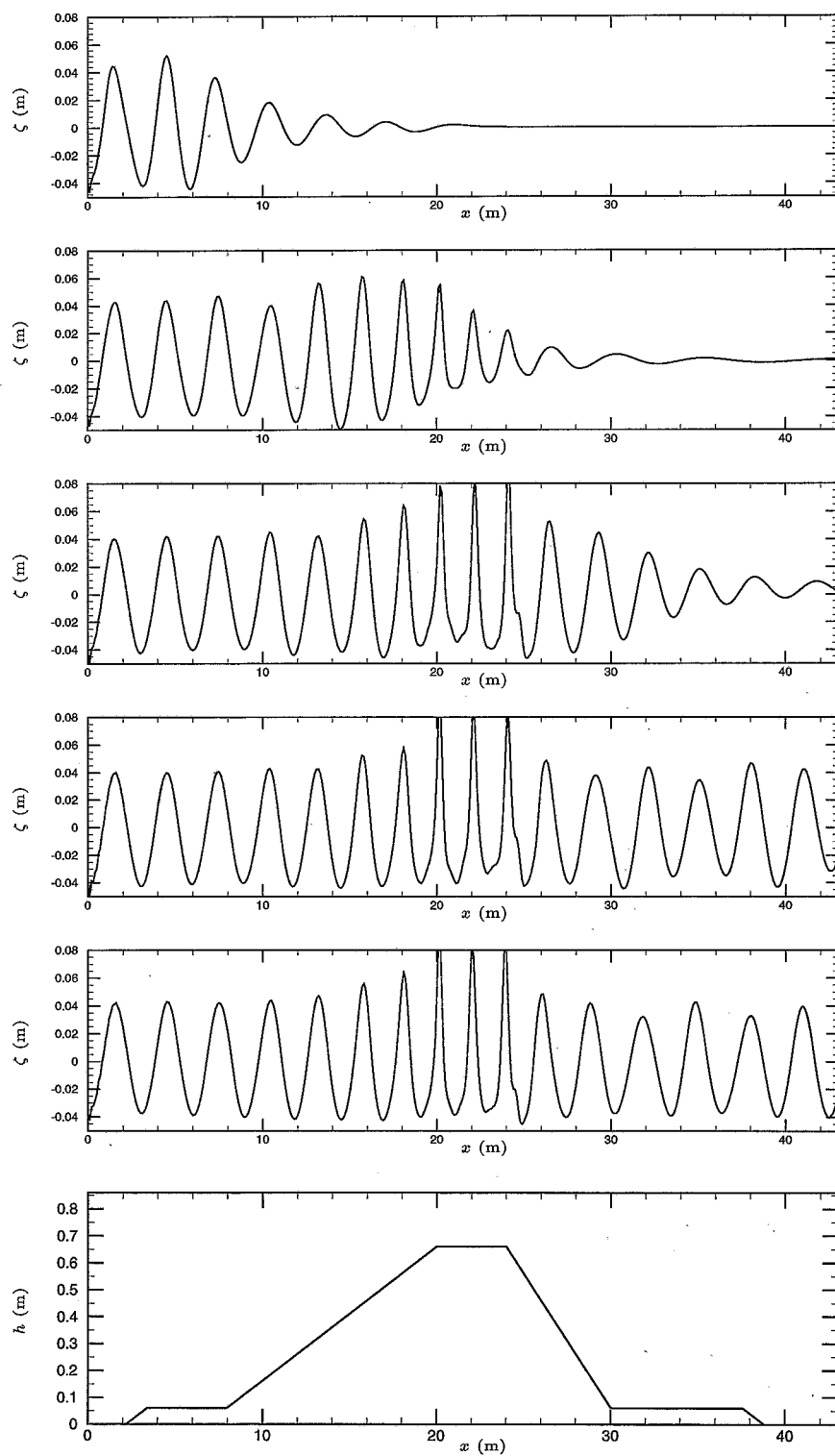


Figura 6.47: Caso C: perfis longitudinais — modelo de Seabra-Santos, esquema de Petrov-Galerkin. De cima para baixo, $t = 10$ s, $t = 20$ s, $t = 30$ s, $t = 40$ s e $t = 50$ s.

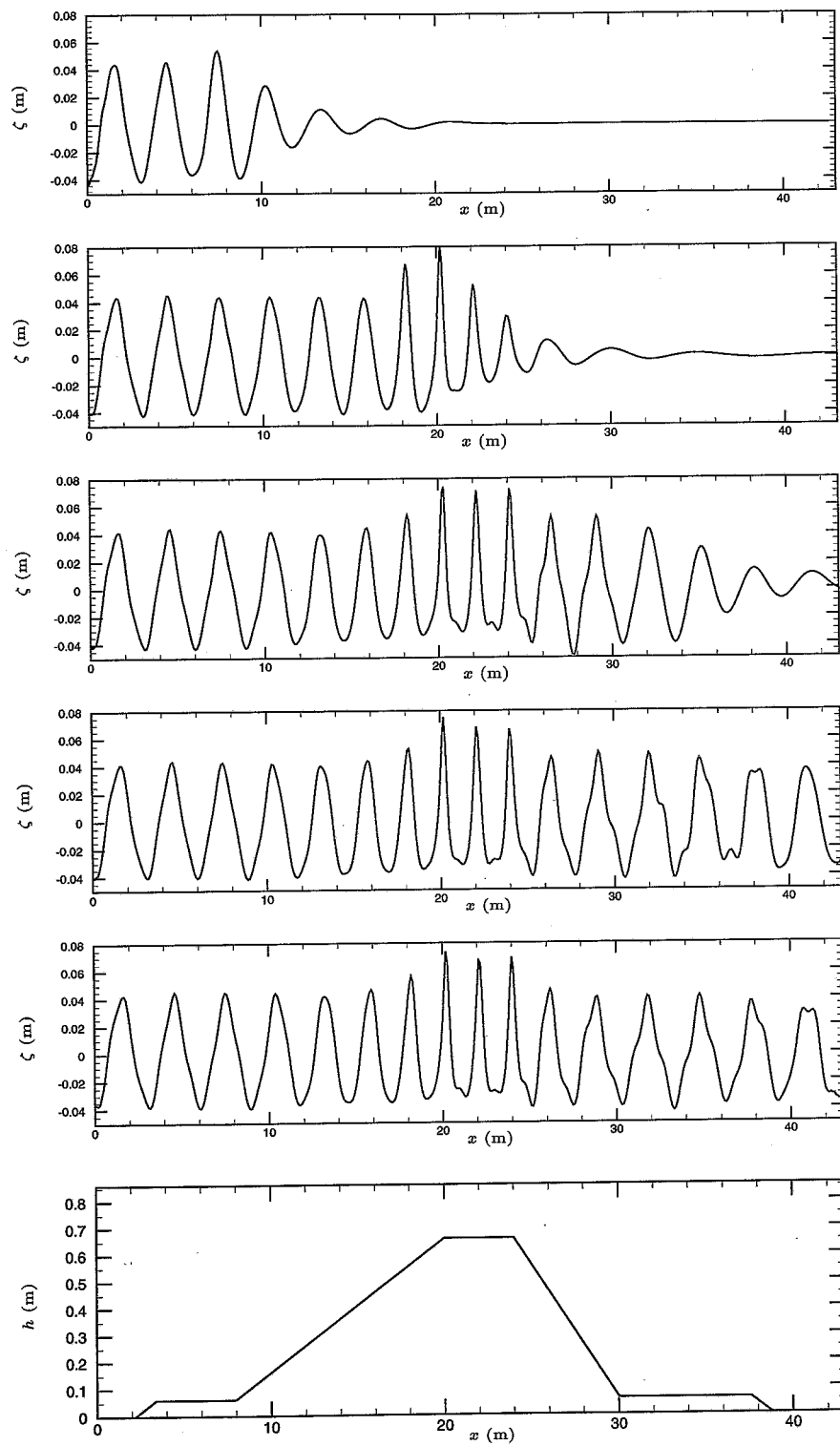


Figura 6.48: Caso C: perfis longitudinais — modelo de Madsen & Sørensen, esquema de Petrov-Galerkin. De cima para baixo, $t = 10$ s, $t = 20$ s, $t = 30$ s, $t = 40$ s e $t = 50$ s.

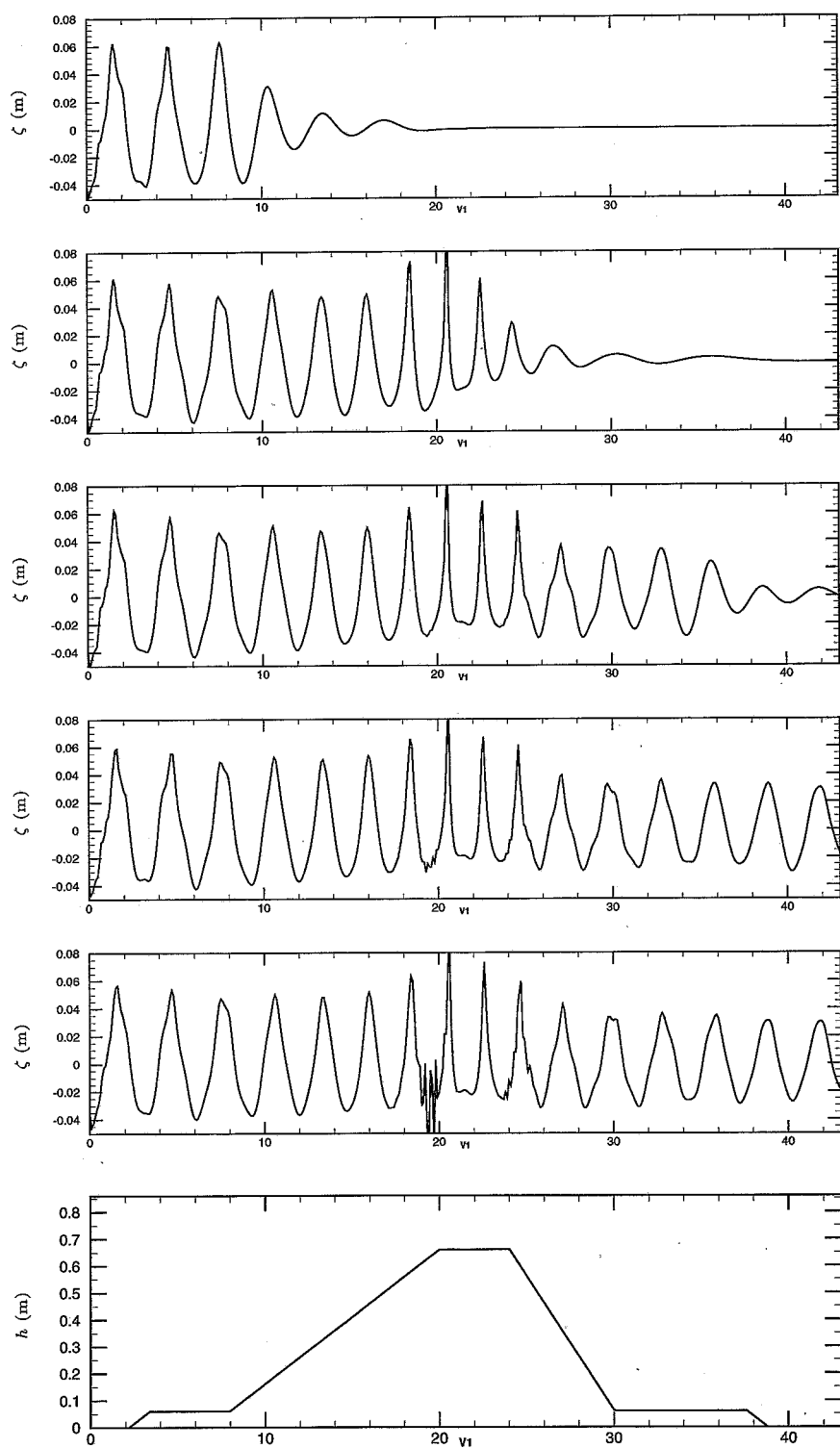


Figura 6.49: Caso C: perfis longitudinais — modelo de Nadaoka & Beji (3 componentes), esquema de Bubnov-Galerkin com interpolação mista. De cima para baixo, $t = 10$ s, $t = 20$ s, $t = 30$ s, $t = 40$ s e $t = 50$ s.

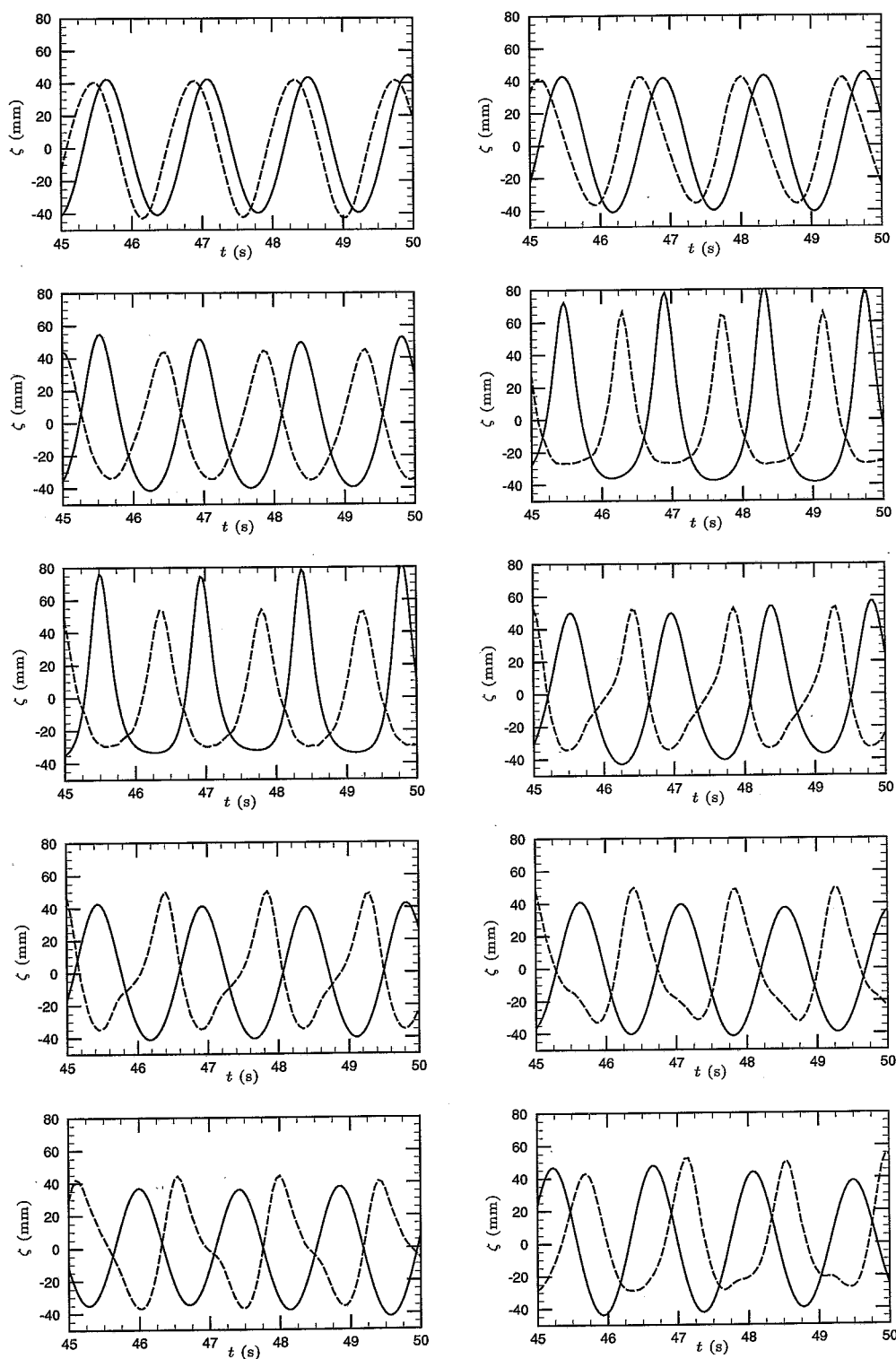


Figura 6.50: Caso C: séries temporais — modelo de Boussinesq, esquema de Petrov-Galerkin. Resultados numéricos (—) e experimentais (---). Da esquerda para a direita e de cima para baixo, sondas 2 a 11.

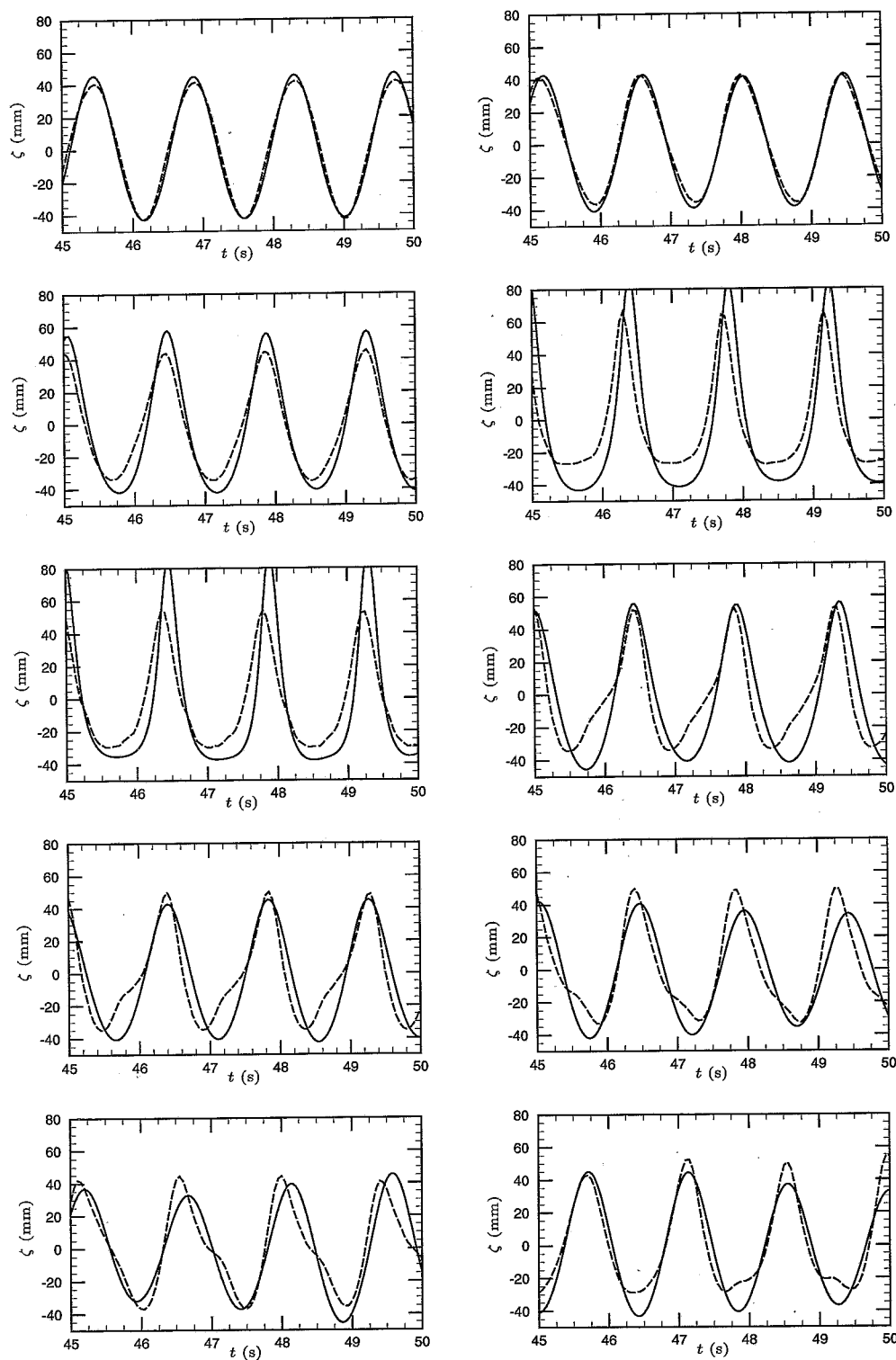


Figura 6.51: Caso C: séries temporais — modelo de Seabra-Santos, esquema de Petrov-Galerkin. Resultados numéricos (—) e experimentais (---). Da esquerda para a direita e de cima para baixo, sondas 2 a 11.

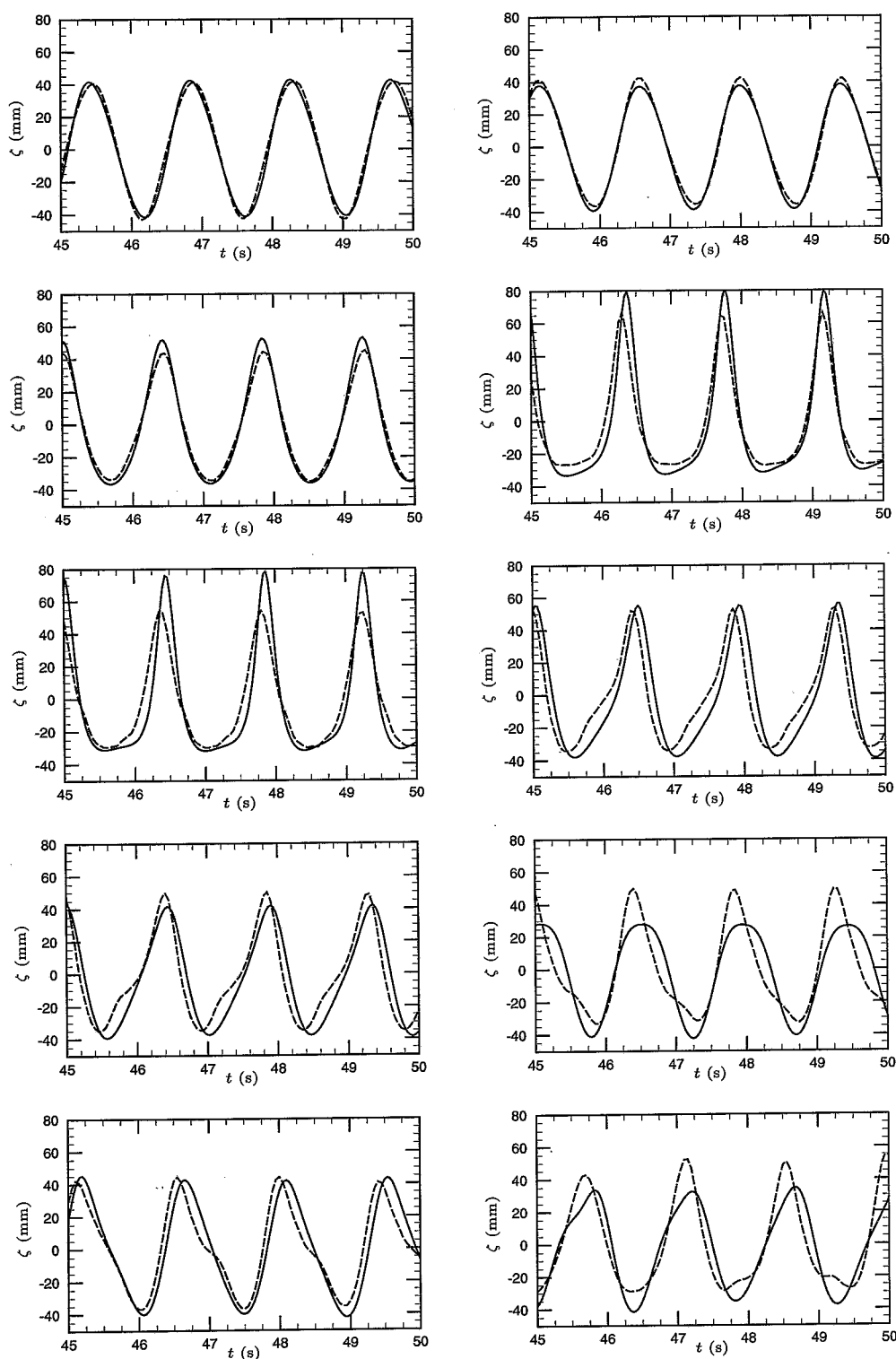


Figura 6.52: Caso C: séries temporais — modelo de Madsen & Sørensen, esquema de Petrov-Galerkin. Resultados numéricos (—) e experimentais (---). Da esquerda para a direita e de cima para baixo, sondas 2 a 11.

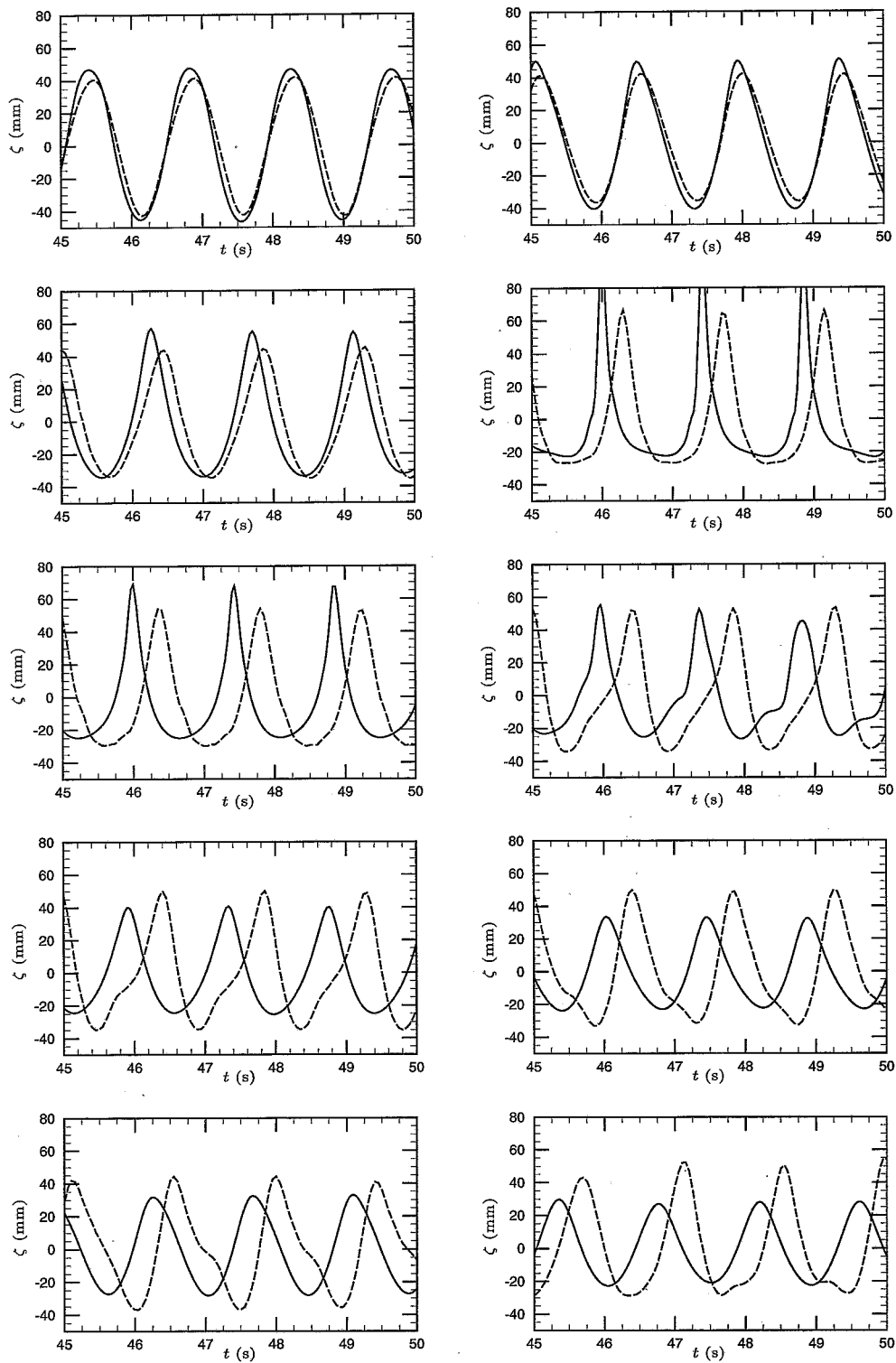


Figura 6.53: Caso C: séries temporais — modelo de Nadaoka & Beji (3 componentes), esquema de Bubnov-Galerkin com interpolação mista. Resultados numéricos (—) e experimentais (---). Da esquerda para a direita e de cima para baixo, sondas 2 a 11.

6.2.4 Propagação de um solitão ao longo de um canal com um pilar cilíndrico

Os esquemas numéricos desenvolvidos nos Capítulos 4 e 5, para os modelos de Boussinesq e de Madsen & Sørensen, a duas dimensões horizontais, são aplicados ao caso de uma onda solitária propagando-se ao longo de um canal rectangular e contornando um cilindro vertical. Os resultados numéricos são comparados com medições obtidas por Antunes do Carmo et al. (1993b) no canal de ondas do Institut de Mécanique de Grenoble, França. O modelo de Madsen & Sørensen revelou ser mais estável do que o modelo de Boussinesq. No caso do primeiro modelo, foi possível obter uma solução numérica para um esquema de Bubnov-Galerkin, enquanto para o modelo de Boussinesq tal só foi possível recorrendo ao esquema de Petrov-Galerkin a 2DH (cf. §5.5).

Instalação e dados experimentais

O canal de ondas tem 15 m de comprimento e 0.55 m de largura. O cilindro de 16 cm de diâmetro foi colocado em posição vertical sobre o eixo longitudinal do canal, intersectando a superfície livre (cf. Figura 6.54). O centro da base do cilindro foi colocado no ponto de coordenadas (4.320, 0.275) m. Os registos de elevação da superfície livre foram obtidos por sete sondas de profundidade colocadas ao longo do canal, nas seguintes posições: sonda 0 $\equiv$ (2.025, 0.275) m; sonda 1 $\equiv$ (4.220, 0.275) m; sonda 2 $\equiv$ (4.320, 0.170) m; sonda 3 $\equiv$ (4.320, 0.045) m; sonda 4 $\equiv$ (4.420, 0.275) m; sonda 5 $\equiv$ (4.795, 0.275) m; sonda 6 $\equiv$ (5.195, 0.275) m. A aquisição do sinal foi

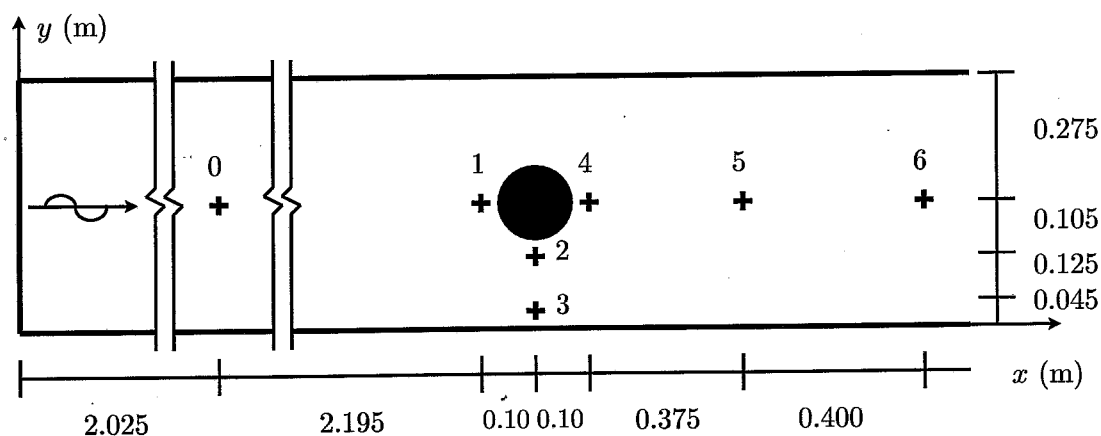


Figura 6.54: Canal de ondas e posição das sondas.

feita a uma frequência de 50 Hz. O nível de água em repouso era $h = 0.15$ m e a amplitude da onda na sonda 0 foi $a = 0.03528$ m, a que corresponde o coeficiente de não linearidade $\epsilon = a/h = 0.235$. O batedor encontra-se situado em $x = 0$, pelo que a onda se propaga no sentido positivo do eixo OX .

Canal numérico e condições de fronteira

O canal numérico tem o comprimento limitado a 4.59 m e 0.55 m de largura, sendo a fronteira de entrada da onda coincidente com a posição da sonda 0. Na fronteira de montante foram impostas condições na elevação da superfície livre e na velocidade:

$$\hat{\zeta}(x, t) = \zeta_0(t), \quad \text{para } x = 0, \quad (6.10a)$$

$$\hat{u}(x, t) = c \frac{\zeta_0(t)}{h + \zeta_0(t)}, \quad \text{para } x = 0, \quad (6.10b)$$

onde ζ_0 é a elevação da superfície livre registada na sonda 0 e $c = \sqrt{g(h + a)}$ é a celeridade de uma onda solitária com amplitude a num canal com profundidade h . Não foi imposta qualquer condição de fronteira para a componente transversal da velocidade computacional, $\hat{v}$.

Os dois modelos, Boussinesq e Madsen & Sørensen, apresentaram comportamentos bastantes diferenciados no que concerne à necessidade de condições de fronteira a jusante. Na simulação com o modelo de Boussinesq não foi necessária a imposição de qualquer condição na fronteira de jusante, tendo a onda saído do domínio com muito pouca reflexão. Na simulação com o modelo de Madsen & Sørensen, foi necessário impor uma condição de radiação, do tipo:

$$\hat{u}(x, t) = c \frac{\hat{\zeta}(x, t)}{h + \hat{\zeta}(x, t)}, \quad \text{para } x = 4.59 \text{ m}. \quad (6.11)$$

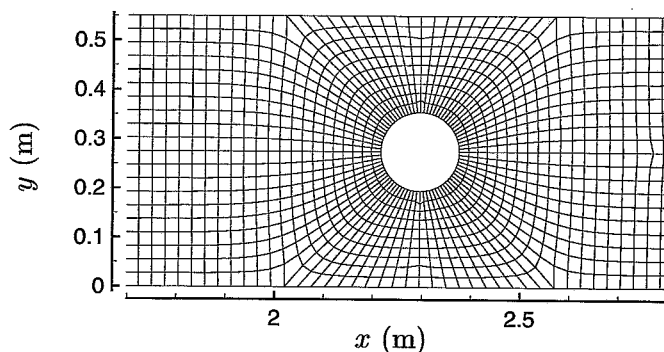


Figura 6.55: Detalhe da malha de elementos finitos.

Um primeiro ensaio para o modelo de Madsen & Sørensen sem imposição desta condição resultou na reflexão total da onda na fronteira de jusante. A possibilidade desta diferença de comportamentos fora já apontada pela análise efectuada no Capítulo 3.

A malha bidimensional é constituída por 3800 elementos bilineares e 4030 nós. Um detalhe da malha de elementos finitos é apresentado na Figura 6.55. Considerou-se que $t = 0$ s no instante em que a crista da onda coincide com a posição da sonda 0. O cálculo iniciou-se para $t = -1.5$ s.

Foi utilizado um incremento temporal de $\Delta t = 0.004$ s, a que corresponde um número de Courant direccional máximo, $Cr_{x\text{máx}}$ ou $Cr_{y\text{máx}}$, igual a 0.746.

Resultados numéricos

Os resultados numéricos foram obtidos para o modelo de Boussinesq com a formulação de Petrov-Galerkin desenvolvida no Capítulo 5 e para o modelo de Madsen & Sørensen com a formulação de Bubnov-Galerkin. Dois outros ensaios produziram resultados de má qualidade: o modelo de Boussinesq com a formulação de Bubnov-Galerkin deu origem a oscilações numéricas de amplitude muito superior à do solitão na fronteira com o cilindro; o modelo de Madsen & Sørensen, com a formulação de Petrov-Galerkin não consistente (cf. §5.4) e termos de difusão cruzada iguais aos da formulação de Boussinesq 2DH (cf. §5.5), deu origem a oscilações numéricas com amplitude da ordem de grandeza da amplitude do solitão na fronteira com o cilindro.

Nas Figuras 6.56 e 6.59 comparam-se as séries temporais obtidas nas experiências numéricas com os resultados experimentais. Nas sondas 5 e 6, bastante afastadas do cilindro, os resultados dos dois ensaios numéricos são muito próximos entre si e reproduzem bastante bem o ensaio físico. Na sonda 4, o modelo de Boussinesq (PG) apresenta o mesmo tipo de oscilação verificado no ensaio experimental, o que demonstra o carácter extremamente selectivo do mecanismo dissipativo implementado. Na mesma sonda, sonda 4, o modelo de Madsen & Sørensen (BG) simplesmente ignora a existência da cauda dispersiva. Na sonda 1 é óbvia uma mais correcta fase do modelo de Madsen & Sørensen (BG) quando comparado com o modelo de Boussinesq (PG), no entanto a cauda dispersiva parece ser melhor descrita por este último. Nas sondas 2 e 3, onde a onda é fortemente influenciada pelas condições de fronteira, os resultados físicos e numéricos são bastante diferentes para ambos os modelos. É evidente nos resultados do modelo de Boussinesq (PG) a presença da segunda harmónica, mais pronunciada no ensaio físico, a qual é praticamente

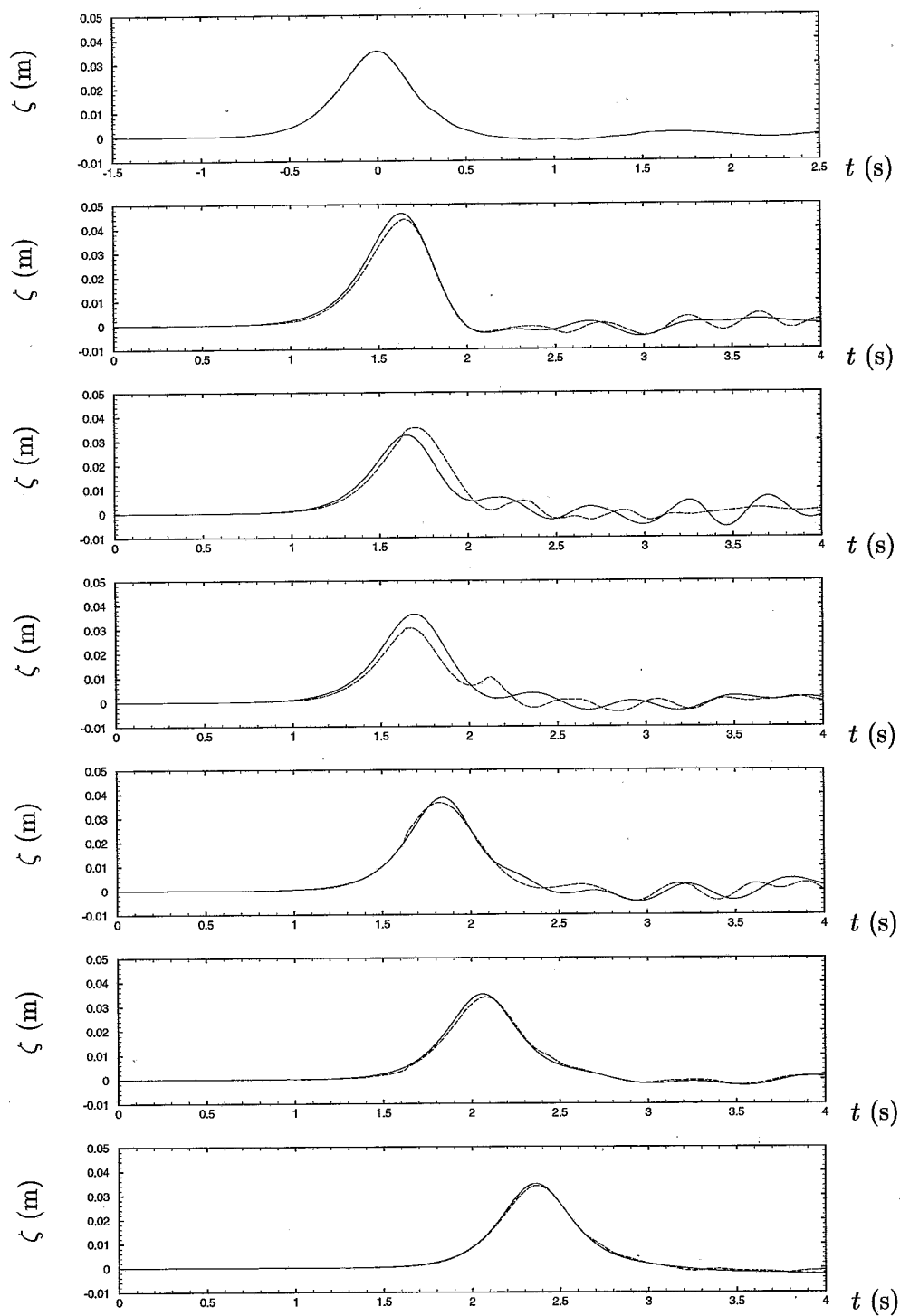


Figura 6.56: Séries temporais numéricas (—) e experimentais (---) para uma onda solitária contornando um cilindro vertical. Modelo de Boussinesq (PG). De cima para baixo: sonda 0, sonda 1, sonda 2, sonda 3, sonda 4, sonda 5 e sonda 6.

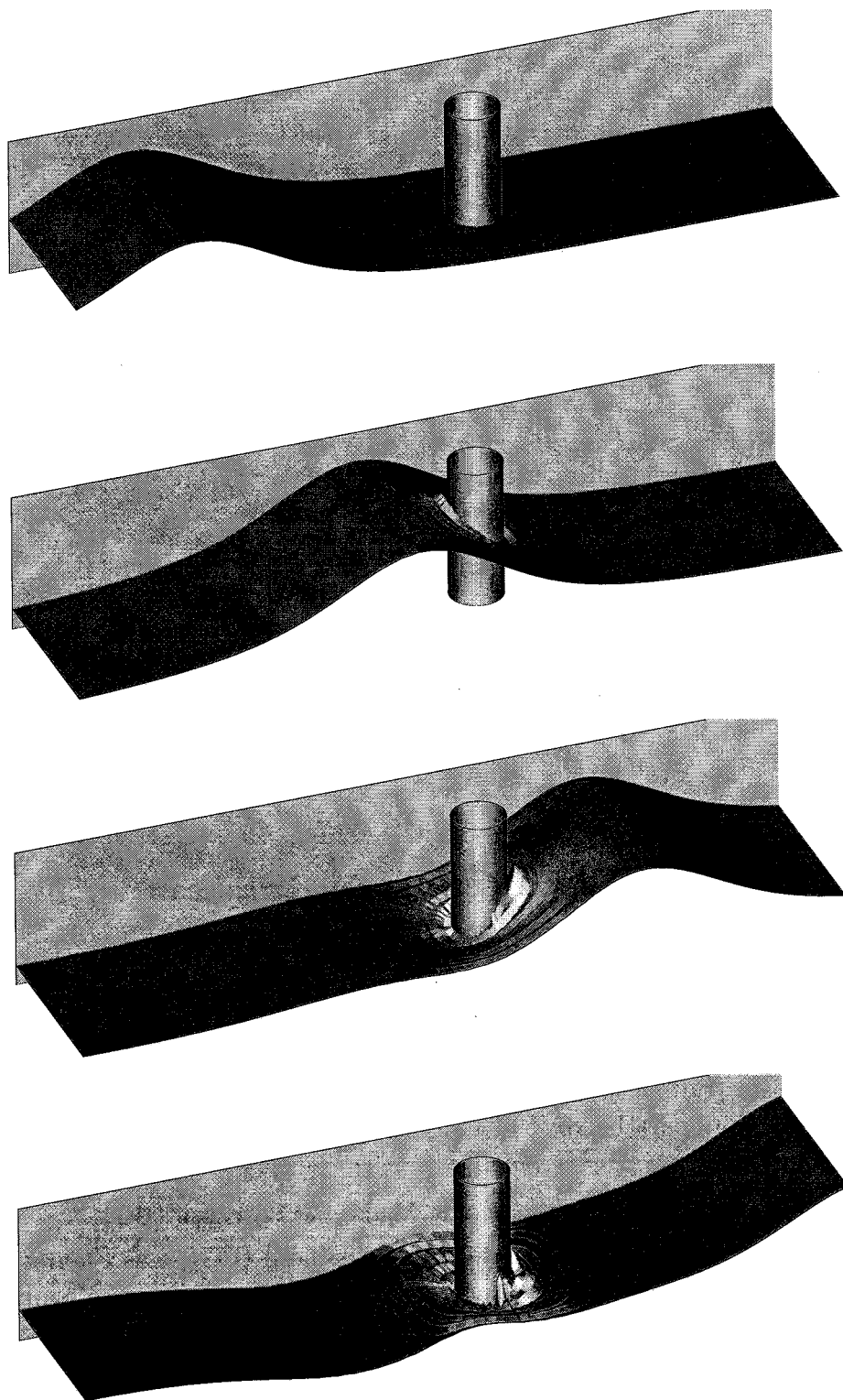


Figura 6.57: Vista tridimensional da elevação da superfície livre. Modelo de Boussinesq (PG). De cima para baixo: $t = 1.0$ s, $t = 1.5$ s, $t = 2.0$ s e $t = 2.5$ s.

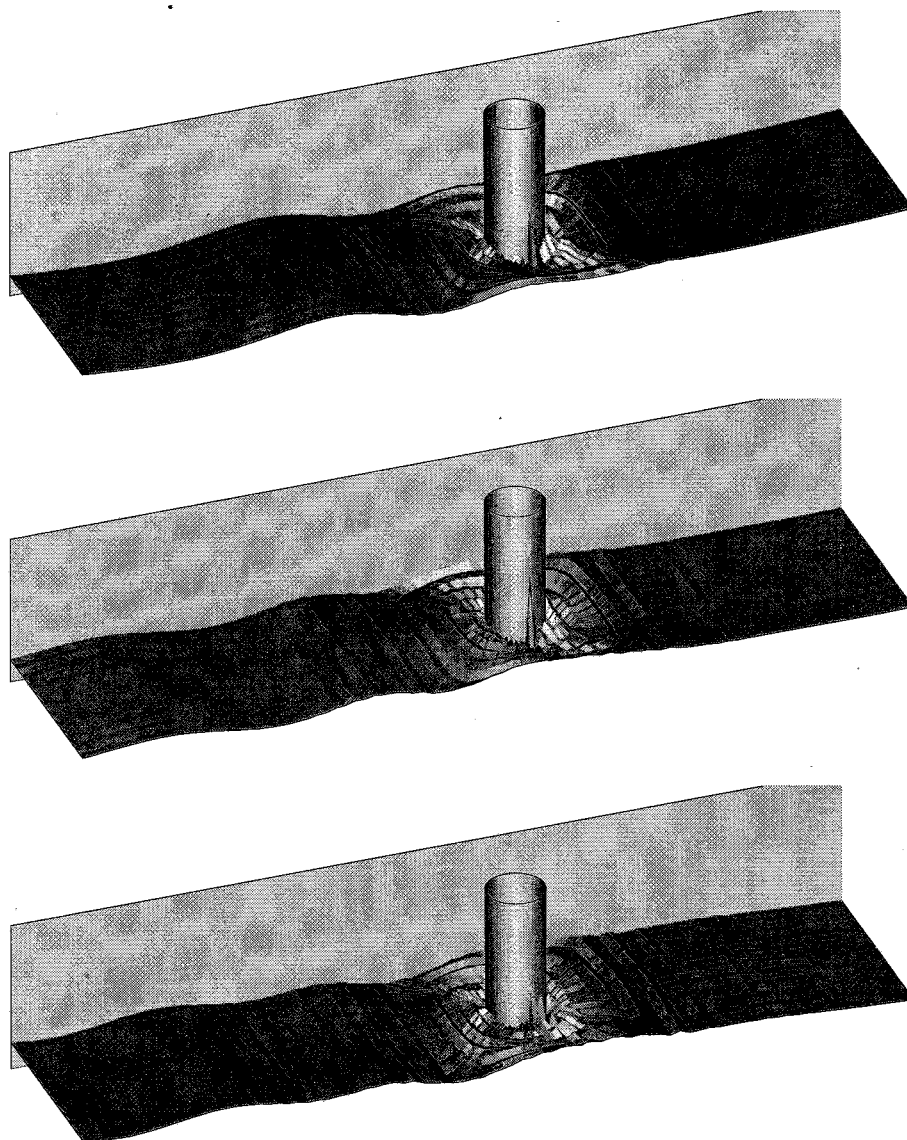


Figura 6.58: Vista tridimensional da elevação da superfície livre. Modelo de Boussinesq (PG). De cima para baixo: $t = 3.0$ s, $t = 3.5$ s e $t = 4.0$ s.

inexistente nos resultados com o modelo de Madsen & Sørensen (BG).

As Figuras 6.57 e 6.58, para o modelo de Boussinesq (PG), e as Figuras 6.60 e 6.61, para o modelo de Madsen & Sørensen (BG), representam uma vista tridimensional da propagação da onda em apenas parte do domínio. É evidente nos resultados do modelo de Boussinesq (PG), para $t \geq 2.5$ s, a existência de alguma oscilação de origem numérica de muito pequeno comprimento de onda (cerca de 2ℓ em que ℓ é o comprimento do lado de um elemento típico) junto à fronteira sólida do cilindro. Alguma oscilação do mesmo tipo verifica-se junto à parede do tanque nos resultados do modelo de Madsen & Sørensen (BG), para $t = 4$ s. Da inspeção das figuras é

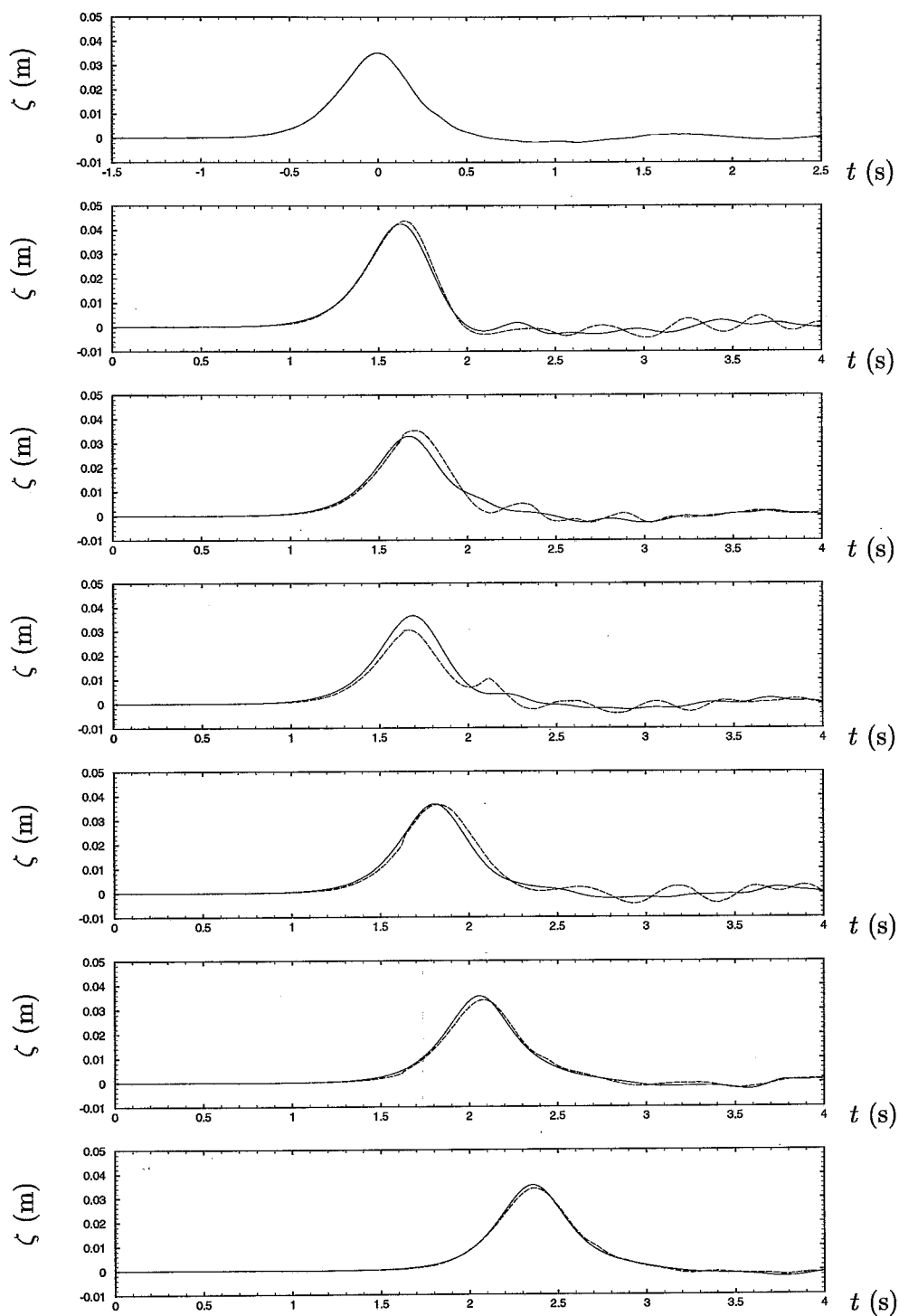


Figura 6.59: Séries temporais numéricas (—) e experimentais (---) para uma onda solitária contornando um cilindro vertical. Modelo de Madsen & Sørensen (BG). De cima para baixo: sonda 0, sonda 1, sonda 2, sonda 3, sonda 4, sonda 5 e sonda 6.

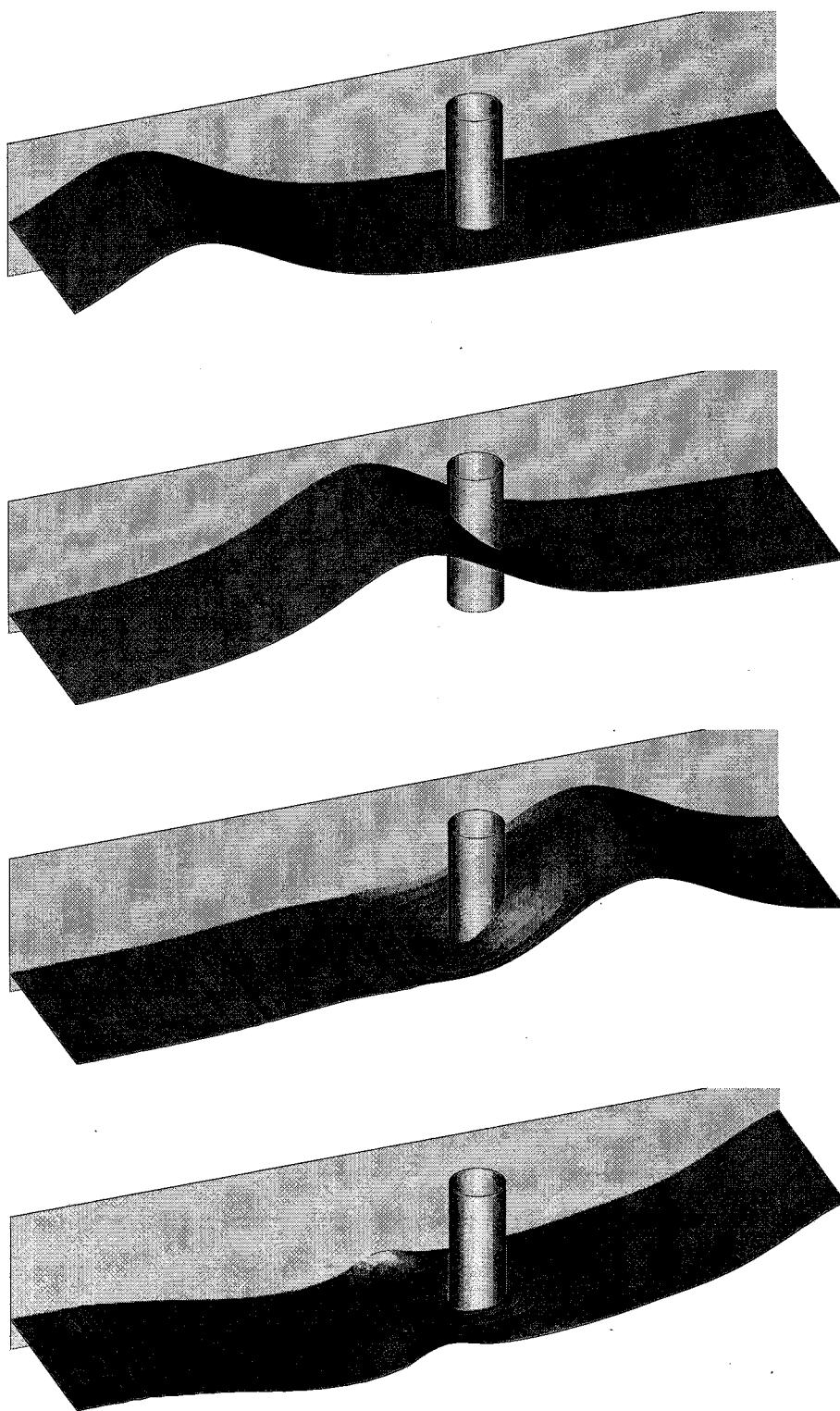


Figura 6.60: Vista tridimensional da elevação da superfície livre. Modelo de Madsen & Sørensen (BG). De cima para baixo: $t = 1.0$ s, $t = 1.5$ s, $t = 2.0$ s e $t = 2.5$ s.

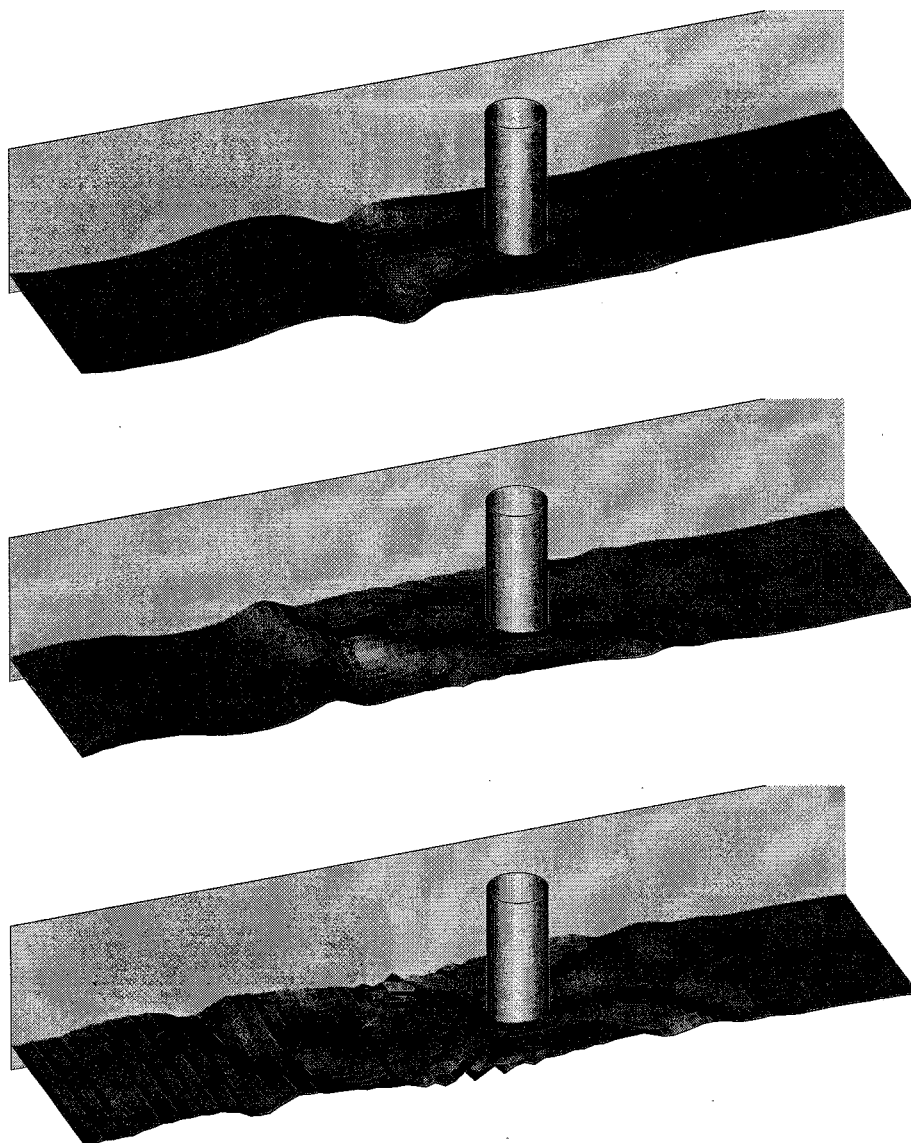


Figura 6.61: Vista tridimensional da elevação da superfície livre. Modelo de Madsen & Sørensen (BG). De cima para baixo: $t = 3.0$ s, $t = 3.5$ s e $t = 4.0$ s.

evidente serem bastante diferentes, para os dois modelos de propagação, os padrões de ondulação residual em torno do cilindro após a passagem da onda, consequência das diferentes propriedades de dispersão de frequência de ambos.

Vorticidade

A hipótese de vorticidade nula segundo os eixos horizontais é necessária para a integração analítica das equações da quantidade de movimento segundo a vertical (cf. Capítulo 2), acabando por ser imposta dado a componente vertical da velocidade

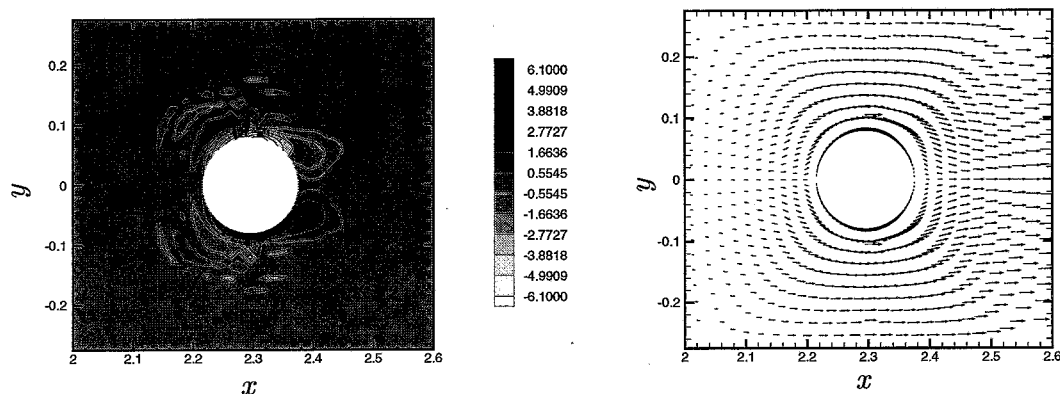
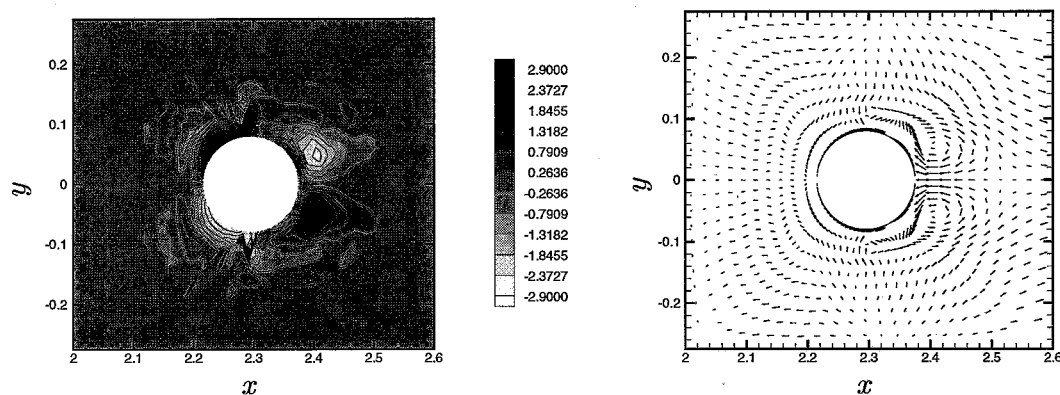
(a) $t = 3.5$ s.(b) $t = 4$ s.

Figura 6.62: Modelo de Boussinesq (PG). Campo de vorticidade (Hz) e campo de velocidade horizontal.

não ser utilizada como variável. O mesmo não acontece com a componente vertical da vorticidade. De facto, a utilização das componentes $\bar{u}$ e $\bar{v}$ da velocidade como variáveis, faz com que a única forma de impor a irrotacionalidade vertical seja através da utilização de multiplicadores de Lagrange numa formulação variacional. Alguns autores por facilidade de tratamento analítico das equações (Nadaoka et al., 1997) ou de tratamento numérico (Antunes do Carmo, 1995, Antunes do Carmo e Seabra-Santos, 1996, Antunes do Carmo et al., 1993b) simplificam os modelos utilizados substituindo $\partial v / \partial x$ por $\partial u / \partial y$ e $\partial u / \partial y$ por $\partial v / \partial x$, respectivamente nas equações de conservação da quantidade de movimento segundo OX e segundo OY . Neste caso é possível que se gere vorticidade dentro do domínio, nomeadamente

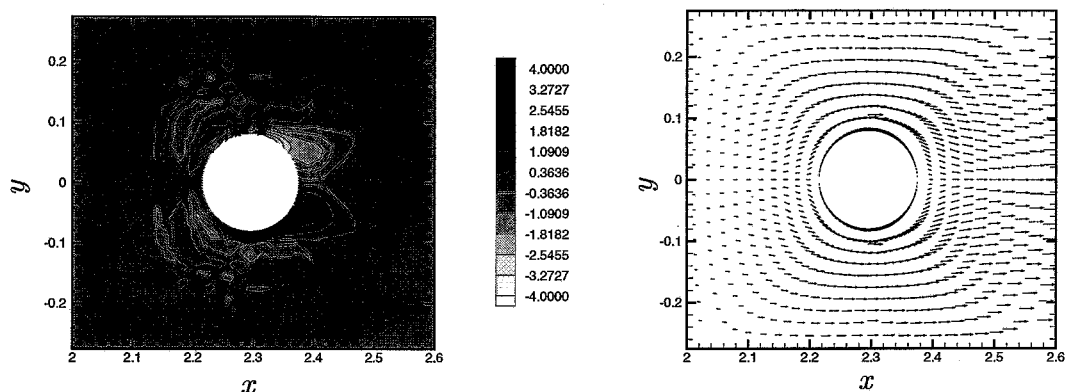
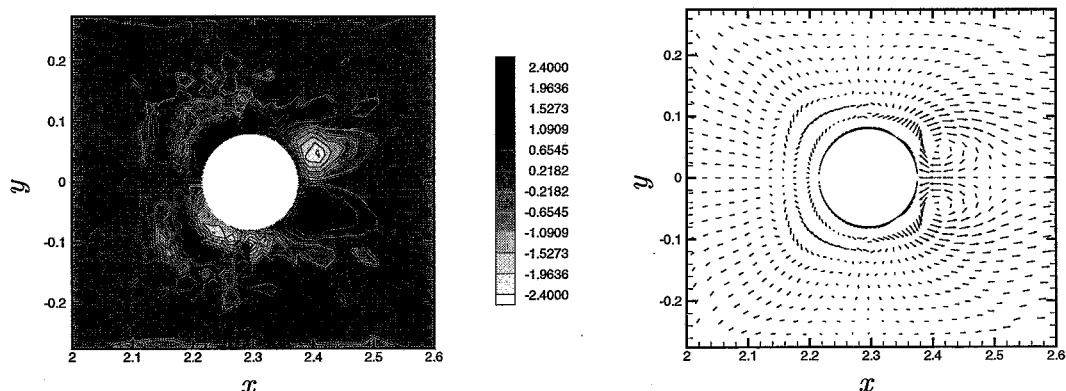
(a) $t = 3.5$ s.(b) $t = 4$ s.

Figura 6.63: Modelo de Madsen & Sørensen (BG). Campo de vorticidade (Hz) e campo de velocidade horizontal.

devido à presença de alguma dissipação de origem numérica. Os modelos devem então ser capazes de lidar com essa vorticidade. No caso de estudo analisado, o escoamento é rotacional na zona próxima do pilar, após a passagem da onda, tanto no ensaio realizado com o esquema dissipativo — modelo de Boussinesq (PG) (cf. Figura 6.62) — como no ensaio realizado com o esquema não dissipativo — modelo de Madsen & Sørensen (BG) (cf. Figura 6.63). A vorticidade é mais elevada no primeiro caso, dada a introdução explícita de termos dissipativos. No segundo caso, a dissipação ou amplificação existente é gerada de forma não controlada pela utilização de uma malha de elementos finitos não uniforme (cf. Walkley e Berzins, 1999).

Capítulo 7

Conclusões

A utilização de uma formulação recente do parâmetro de não linearidade, e consequente redefinição da medida de dispersão, permitiu unificar a parametrização dos modelos de propagação horizontal de ondas de superfície gravíticas e dispersivas. Dessa forma ultrapassou-se o aparente paradoxo da utilização de modelos tipo Boussinesq para valores da profundidade relativa, kh , superiores a 1. Desenvolveu-se a formulação bidimensional do modelo de Seabra-Santos, o qual revelou possuir boas características de dispersão para ondulação caracterizada por um espectro de banda estreita. Verificou-se ser possível estender as formulações dos modelos de Seabra-Santos e de Nadaoka & Beji a situações com dissipação de energia, por atrito ou por efeitos do tipo viscoso. Da análise das características de empolamento linear de vários modelos de propagação, concluiu-se que as formulações que não conservam a acção da onda podem resultar no aumento infinito da amplitude da onda com o aumento de profundidade para profundidades relativas elevadas. Este comportamento foi observado no estudo da propagação de ondas sobre quebra-mares submersos: os esquemas numéricos sem mecanismo de dissipação de energia deram origem a oscilações numéricas na reentrada em águas profundas. Este facto pode comprometer a utilização de alguns modelos na simulação da propagação de ondas sobre quebra-mares submersos ou sobre canais de navegação. Foi proposta uma nova formulação do modelo de Madsen & Sørensen para fundos variáveis que, embora não conservando a acção de onda, deverá evitar a explosão da solução numérica.

No que concerne à identificação das condições fronteira a implementar, verificou-se que a imposição simultânea de condições para a elevação da superfície livre e para a velocidade computacional nas fronteiras de barlamar é, em regra, uma fonte de perturbações numéricas. Por outro lado, o modelo de Boussinesq e o modelo de Madsen & Sørensen têm velocidades características bastante diferentes, o que

se verificou analiticamente, apresentando este último uma maior semelhança com o modelo de Saint-Venant. Também numericamente se verificou, no ensaio a duas dimensões horizontais, não ser necessária a imposição de uma condição de radiação da onda na fronteira de sotamar para o modelo de Boussinesq. O mesmo procedimento, quando adoptado para o modelo de Madsen & Sørensen, resultou na reflexão total da onda naquela fronteira. Os ensaios relativos à utilização de uma solução linear do modelo de Berkhoff como condição inicial para o modelo de Boussinesq indicam alguma diminuição do esforço de cálculo necessário para atingir uma situação de agitação estabelecida.

O método dos elementos finitos apresenta, na sua utilização na modelação da propagação de ondas dispersivas, os mesmos problemas de instabilidade numérica encontrados na classe de modelos de convecção-difusão, nomeadamente nas equações de Saint-Venant. As oscilações numéricas são, neste caso, mitigadas pelo equilíbrio dinâmico entre os efeitos de não linearidade e dispersão, sem formação de ondas de choque, mas conduzem igualmente à corrupção da solução numérica. Analítica e experimentalmente conclui-se que a celeridade de grupo dos esquemas de Bubnov-Galerkin baseados na interpolação mista das equações de conservação pode evitar grande parte do ruído numérico, sem no entanto o eliminar. A análise efectuada mostra, no entanto, que estes esquemas têm uma precisão demasiado baixa, nunca superior à segunda ordem.

O método de elementos finitos, baseado numa formulação de Petrov-Galerkin, desenvolvido para o modelo de Boussinesq e válido nas mesmas condições para o modelo de Seabra-Santos, apresenta excelentes características de precisão, terceira ordem, e estabilidade, conseguidas através da introdução de termos de correcção da dispersão numérica e de um mecanismo de dissipação altamente selectivo, praticamente só actuando sobre as componentes de mais elevado número de onda, sem afectar as harmónicas fundamentais. A discretização simultânea do espaço e do tempo em elementos finitos com funções de interpolação trilineares e funções de peso bilineares no espaço e quadráticas no tempo, permite obter essa elevada precisão mantendo o número de graus de liberdade num nível aceitável, associado a um esquema implícito de integração no tempo a dois níveis.

O mesmo método aplicado ao modelo linearizado de Madsen & Sørensen permite construir um esquema numérico estável, embora numa formulação não consistente. A precisão é também neste último caso de terceira ordem. Note-se que este modelo necessita formalmente de um esquema de ordem superior a quatro para que os erros numéricos não se sobreponham ao fenómeno físico, dentro do domínio de validade do modelo. A construção de uma formulação de Petrov-Galerkin consistente, precisa

e estável para este modelo não é evidente. Por outro lado, qualquer aproximação do tipo Boussinesq é baseada num perfil vertical de velocidades polinomial em z . Para águas profundas esta aproximação não é adequada, pelo que parece ser mais conveniente dirigir os esforços de investigação para o desenvolvimento de métodos numéricos precisos e estáveis para modelos do tipo do modelo de Nadaoka & Beji.

Os resultados numéricos foram comparados com medições laboratoriais amplamente divulgadas na literatura especializada. Concluiu-se que, para espectros de banda muito estreita, o modelo de Seabra-Santos tem um comportamento muito bom. Concluiu-se também que o modelo de propagação de Nadaoka & Beji consegue reproduzir os fenómenos hidrodinâmicos mais importantes mesmo em escoamentos bastante complexos. O método de elementos finitos (formulação de Bubnov-Galerkin) utilizado sobre este modelo não tem no entanto nem a precisão, nem um mecanismo dissipativo adequados para a modelação do escoamento em águas profundas. O esquema numérico do tipo Petrov-Galerkin, desenvolvido e aplicado aos modelos de Boussinesq, Seabra-Santos e Madsen & Sørensen, apresentou um comportamento excelente nas condições hidrodinâmicas em que estes modelos são válidos.

Como investigação futura na aplicação do método dos elementos finitos aos problemas de propagação de ondas de superfície dispersivas sugere-se, por ordem de prioridade:

- a extensão do esquema de Petrov-Galerkin ao modelo de Nadaoka & Beji, recorrendo a uma norma de Riemann para a adimensionalização dos tensores presentes nas funções de peso;
- a reformulação dos tensores do esquema de Petrov-Galerkin por forma a permitir a modelação da dissipação de energia devida ao atrito e à rebentação, sem comprometer a precisão do método. Para tal sugere-se a introdução de uma equação de conservação da energia, tal como proposto recentemente por Karambas (1996), ou, no caso da rebentação apenas, de uma equação de transporte (convecção e difusão) da turbulência gerada pela rebentação (Nwogu, 1993);
- a extensão do esquema de Petrov-Galerkin por forma a otimizar a sua aplicação à forma não linear do modelo de Madsen & Sørensen;
- a extensão do esquema de Petrov-Galerkin à formulação a duas dimensões horizontais do modelo de Madsen & Sørensen.



Bibliografia

- M.B. Abbott, A.D. McCowan, e I.R. Warren. Accuracy of short-wave numerical models. *J. Hydr. Engrg.*, 110(10):1287–1301, 1984. ISSN 0733-9429.
- M.B. Abbott, H.M. Petersen, e O. Skovgaard. On the numerical modelling of short waves in shallow water. *J. Hydr. Res.*, 16(3):173–203, 1978.
- C.L. Abernethy e G. Gilbert. Refraction of wave spectra. Technical Report INT 117, Hydraulics Research, Wallingford, UK, 1975.
- J.M. Afonso Covas. *Modelos Matemáticos para o Estudo da Propagação e Deformação das Ondas de Gravidade*. Memória nº 551, LNEC, Lisboa, PT, 1981.
- J.M. Afonso Covas. *Modelos Matemáticos de Réfracção das Ondas de Engenharia Costeira*. Tese de Doutoramento, Instituto Superior Técnico da Universidade Técnica de Lisboa, PT, 1984.
- J.M. Afonso Covas. Modelo matemático de simulação da agitação e ressonância em portos e zonas abrigadas. Sua aplicação nos estudos relativos ao porto francês de Saint Quay-Portrieux. In *Actas do V Simpósio Luso-Brasileiro de Hidráulica e Recursos Hídricos*, páginas 303–316, 1991.
- M.E. Alexander e J.Ll. Morris. Galerkin methods applied to some model equations for non-linear dispersive waves. *J. Comput. Physics*, 30:428–451, 1979.
- N.W.H. Allsop. Reflection performance of rock armored slopes in random waves. In *Proc. 22nd Int. Conf. on Coastal Eng., Delft*, páginas 1470–1471, New York, NY, 1990. ASCE.
- N.W.H. Allsop e S.S.L. Hettiarachchi. Reflections from coastal structures. In *Proc. 21st Int. Conf. on Coastal Eng., Malaga*, páginas 782–794, New York, NY, 1988. ASCE.

- J.S. Antunes do Carmo. *Contribuição para o Estudo dos Processos Morfodinâmicos em Regiões Costeiras e Estuarinas*. Tese de Doutoramento, Universidade de Coimbra, PT, Abril 1995.
- J.S. Antunes do Carmo e F.J. Seabra-Santos. On breaking waves and wave-current interaction in shallow water: a 2DH finite element model. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 22:429–444, 1996. ISSN 0271-2091.
- J.S. Antunes do Carmo, F.J. Seabra-Santos, e A.B. Almeida. Numerical solution of the generalized Serre equations with the MacCormack finite-difference scheme. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 16:725–738, 1993a.
- J.S. Antunes do Carmo, F.J. Seabra-Santos, e E. Barthélemy. Surface waves propagation in shallow water: a finite element model. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 16:447–459, 1993b.
- P. Avilez-Valente. Numerical modelling of wave group attack on harbours. *Estudos de Engenharia Civil*, 6(Special Issue):295–305, 1994. ISSN 0870-5011.
- P. Avilez-Valente. Wave spectrum transformation in the Leixões harbour — a study case. In M. Doblaré, J.M. Correas, E. Alarcón, L. Gavete, e M. Pastor, editores, *Métodos Numéricos en Ingeniería*, páginas 1232–1241, Barcelona, ES, 1996. SEMNI. ISBN 84-87867-71-5.
- P. Avilez-Valente e F.J. Seabra-Santos. Características dispersivas do método dos elementos finitos aplicado às equações de Boussinesq. In *Actas do V Encontro Nacional de Mecânica Computacional*, 20–22 Out. 1997, Guimarães, PT, páginas 815–823, APMTAC, Lisboa, PT, 1997.
- P. Avilez-Valente e F.J. Seabra-Santos. An accurate numerical method for water wave propagation. In S. Abdalla e E. Özhan, editores, *Proc. of the Int. MEDCOAST Conf. on Wind and Wave Climate of the Mediterranean and Black Sea*, 30 March–2 April 1999, Antalya, TR, páginas 311–325, MEDCOAST, Middle East Technical University, Ankara, TR, 1999. ISBN 975-429-140-3.
- P. Avilez-Valente e F. Veloso-Gomes. Estudos de agitação e ressonância em bacias portuárias pelo método dos elementos finitos — aplicação ao porto de Leixões (Portugal). In M.I.G. Santos, G.J. Creus, A.M. Awruch, e A.G. Groehs, editores, *Anais do XIII Congresso Ibero Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para a Engenharia*, 23–25 Nov. 1992, Porto Alegre, RS, Brasil, páginas 214–223, 1992.

- P. Avilez-Valente, F. Veloso-Gomes, F.J. Seabra-Santos, e J.S. Antunes do Carmo. General wave model for large coastal areas. In *Analyse Multiéchelle et Systèmes Physiques Couplés*, páginas 179–186, Paris, FR, 1997. Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées. ISBN 2-85978-282-6.
- K. Bando, P. Bettess, e C. Emson. The effectiveness of dampers for the analysis of exterior scalar wave diffraction by cylinders and ellipsoids. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 4:599–617, 1984.
- M.L. Batteen e Y.-J. Han. On the computational noise of the finite-difference schemes used in ocean models. *Tellus*, 33:387–396, 1981.
- S. Beji. Note on a nonlinearity parameter of surface waves. *Coastal Engineering*, 25:81–85, 1995.
- S. Beji e J.A. Battjes. Experimental investigation of wave propagation over a bar. *Coastal Engineering*, 19:151–162, 1993. ISSN 0378-3839.
- S. Beji e J.A. Battjes. Numerical simulation of nonlinear wave propagation over a bar. *Coastal Engineering*, 23:1–16, 1994. ISSN 0378-3839.
- S. Beji e K. Nadaoka. A formal derivation and numerical modelling of the improved Boussinesq equations for varying depth. *Ocean Engineering*, 23(8):691–704, 1996.
- T.B. Benjamin, J.L. Bona, e J.J. Mahony. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, A272:47–78, 1972.
- J.C.W. Berkhoff. Computation of combined refraction-diffraction. In *Proc. 13th Int. Conf. on Coastal Eng., Vancouver*, páginas 471–490, New York, NY, 1972. ASCE.
- P. Bettess, S.C. Liang, e J.A. Bettess. Diffraction of waves by semi-infinite breakwater using finite and infinite elements. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 4:813–832, 1984.
- P. Bettess e O.C. Zienkiewicz. Diffraction and refraction of surface waves using finite and infinite elements. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 11:1271–1290, 1977.
- N. Booij. *Gravity Waves on Water with Non-Uniform Depth and Current*. PhD thesis, Technical University of Delft, NL, 1981.
- N. Booij. A note on the accuracy of the mild-slope equation. *Coastal Engineering*, 7:191–203, 1983.

- J. Boussinesq. Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. *J. Math. Pure et Appl.*, 2 (17):55–108, 1872.
- J. Boussinesq. Essai sur la théorie des eaux courants. In *Memoires Présentées par Divers Savants*, Vol. 23, No. 1. Institute de France, Académie des Sciences, Paris, FR, 1877.
- S.W. Bova e G.F. Carey. A symmetric formulation and SUPG scheme for the shallow-water equations. *Adv. Water Resources*, 19(3):123–131, 1996.
- M. Brocchini, M. Drago, e L. Iovenitti. The modelling of short waves in shallow waters: comparison of numerical models based on Boussinesq and Serre equations. In *Proc. 23rd Int. Conf. on Coastal Eng., Venice*, páginas 76–89, New York, NY, 1992. ASCE.
- M. Brocchini, M. Drago, e L. Iovenitti. The modelling of short waves in shallow waters and in the surf zone. *Il Nuovo Cimento*, 17 C:549–563, 1994.
- A.N. Brooks e T.J.R. Hughes. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulation for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, 32:199–259, 1982.
- G.F. Carey e Y. Shen. Approximations of the KdV equation by least squares finite elements. *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, 93:1–11, 1991.
- I. Christie, D.F. Griffiths, A.R. Mitchell, e O.C. Zienkiewicz. Finite element methods for second order differential equations with significant first derivatives. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 10:1389–1396, 1976.
- M.C. Coimbra. *Contractividade e Estabilidade em Métodos de Passo Múltiplo*. Trabalho de síntese para as provas de aptidão pedagógica e científica, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, PT, 1992.
- G.J.M. Copeland. A practical alternative to the mild-slope wave equation. *Coastal Engineering*, 9:125–149, 1985.
- R. Courant e D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics*. Interscience Pub., New York, 1962.

- G. Dahlquist e Å. Björck. *Numerical Methods*. Prentice-Hall Series in Automatic Computation. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1974. ISBN 0-13-627315-7.
- R.A. Dalrymple. A model for refraction of water waves. *J. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engrg.*, 114:423–435, 1988. ISSN 0733-950X.
- P. De Girolamo, J.K. Kostense, e M.W. Dingemans. Inclusion of wave breaking in a mild-slope model. In B.A. Schrefler e O.C. Zienkiewicz, editores, *Proc. Int. Conf. Computer Modelling in Ocean Engineering*, páginas 221–229, 1988.
- R.G. Dean e R.A. Dalrymple. *Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists*. Advanced Series on Ocean Engineering. World Scientific Publishing Co., Singapore, 1991. ISBN 981-02-0421-3.
- M.W. Dingemans. Water waves over an uneven bottom; an investigation into cnoidal-wave properties. Technical Report R729, Part 3, Delft Hydraulics, 1974.
- M.W. Dingemans. Refraction and diffraction of irregular waves, a literature survey. Technical Report W301, Part I, Delft Hydraulics, 1978.
- M.W. Dingemans. Comparison of computations with Boussinesq-like models and laboratory measurements. Technical Report Project 1: Waves, MAST-G8M, Delft Hydraulics, Delft, NL, 1994.
- M.W. Dingemans. *Water Wave Propagation over Uneven Bottoms. Part 1 — Linear Wave Propagation*. Advanced Series on Ocean Engineering. World Scientific Publishing Co., Singapore, 1997a. ISBN 981-02-3994-7.
- M.W. Dingemans. *Water Wave Propagation over Uneven Bottoms. Part 2 — Non-linear Wave Propagation*. Advanced Series on Ocean Engineering. World Scientific Publishing Co., Singapore, 1997b. ISBN 981-02-3996-3.
- N. Dodd. Numerical model of wave run-up, overtopping, and regeneration. *J. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engrg.*, 124(2):73–81, 1998.
- A. Doubert e J.C. Lebreton. Diffraction de la houle sur des obstacles a parois verticales. *La Houille Blanche*, 20(4):337–344, 1965.
- M. Drago. *Modelli Matematici per la Propagazione di Onde Marine nella Zona dei Frangenti*. Tesi di Laurea, Università degli Studi di Bologna, IT, 1992.

- S. Elgar, M.H. Freilich, e R.T. Guza. Model-data comparisons of moments of non-breaking shoaling surface gravity waves. *J. Geophys. Res.*, 95(C9):16055–16063, 1990.
- S. Elgar e R.T. Guza. Shoaling gravity waves: comparisons between field observations, linear theory and a nonlinear model. *J. Fluid Mech.*, 158:47–70, 1985.
- S. Elgar e R.T. Guza. Nonlinear model predictions of bispectra of shoaling surface gravity waves. *J. Fluid Mech.*, 167:1–18, 1986.
- C.J.E.M. Fortes. *Modelação Matemática da Refracção e Difracção Combinadas de Ondas Marítimas. Análise pelo Método dos Elementos Finitos*. Tese de mestrado, Instituto Superior Técnico da Universidade Técnica de Lisboa, PT, 1993.
- M.H. Freilich e R.T. Guza. Nonlinear effects on shoaling surface gravity waves. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, A311:1–41, 1984.
- L.R.T. Gardner e G.A. Gardner. Solitary waves of the regularised long-wave equation. *J. Comput. Physics*, 91:441–459, 1990. ISSN 0021-9991.
- W.G. Gray e D.R. Lynch. Time-stepping schemes for finite element tidal model computations. *Adv. Water Resources*, 1:83, 1977.
- G.M. Griswold. Numerical calculation of wave refraction. *J. Geophys. Res.*, 68:1715–1723, 1963.
- G. Grotkop. Finite element analysis of long-period water waves. *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, 2:147–157, 1973.
- S. Guibourg. *Modelisations Numérique et Experimentale des Houles Bidimensionnelles en Zone Cotière*. Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier — Grenoble I, FR, 1994.
- T.J.R. Hughes. A simple scheme for developing “upwind” finite elements. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 12:1359–1365, 1978.
- T.J.R. Hughes e L.P. Franca. A new finite element formulation for Computational Fluid Dynamics: VII. The Stokes problem with various well-posed boundary conditions: symmetric formulations that converge for all velocity/pressure spaces. *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, 65:85–96, 1987.

- T.J.R. Hughes, L.P. Franca, e M. Mallet. A new finite element formulation for Computational Fluid Dynamics: I. Symmetric forms of the compressible Euler and Navier-Stokes equations and the second law of Thermodynamics. *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, 54:223-234, 1986a.
- T.J.R. Hughes, L.P. Franca, e M. Mallet. A new finite element formulation for Computational Fluid Dynamics: VI. Convergence analysis of the generalized SUPG formulation for linear time-dependent multidimensional advective-diffusive systems. *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, 63:97-112, 1987.
- T.J.R. Hughes e M. Mallet. A new finite element formulation for Computational Fluid Dynamics: III. The generalized streamline operator for multidimensional advective-diffusive systems. *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, 58:305-328, 1986a.
- T.J.R. Hughes e M. Mallet. A new finite element formulation for Computational Fluid Dynamics: IV. A discontinuity-capturing operator for multidimensional advective-diffusive systems. *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, 58:329-336, 1986b.
- T.J.R. Hughes, M. Mallet, e A. Mizukami. A new finite element formulation for Computational Fluid Dynamics: II. Beyond SUPG. *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, 54:341-355, 1986b.
- T.J.R. Hughes e T.Z. Tezduyer. Finite element methods for first-order hyperbolic systems with particular emphasis on the compressible Euler equations. *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, 45:217-284, 1984.
- D.P. Hurdle, J.K. Kostense, e P. van den Bosch. Mild-slope equation for the wave behaviour in and around harbour and coastal structures in areas of variable depth and flow conditions. In M.H. Palmer, editor, *Advances in Water Modelling and Measurement*, páginas 307-324, The Fluid Engineering Centre, Cranfield, UK, 1989. BHRA.
- C. Johnson, U. Nävert, e J. Pitjäranta. Finite element methods for linear hyperbolic problems. *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, 45:285-312, 1984.
- C. Johnson e A. Szepessy. On the convergence of streamline diffusion finite element methods for hyperbolic conservation laws. In *Finite Difference, Element and Volume Techniques, AMD-78*, páginas 75-91, New York, NY, 1986. ASME.

- I.G. Jonsson e J.B. Christoffersen. Current depth refraction of regular waves. In *Proc. 19th Int. Conf. on Coastal Eng., Houston*, páginas 1103–1117, New York, NY, 1984. ASCE.
- Th.V. Karambas. Nonlinear wave energy modelling in the surf zone. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 3:127–134, 1996.
- N.D. Katopodes. A dissipative Galerkin scheme for open-channel flow. *J. Hydr. Engrg.*, 110(4):450–466, 1984a.
- N.D. Katopodes. Fourier analysis of dissipative FEM channel flow model. *J. Hydr. Engrg.*, 110(7):927–943, 1984b.
- N.D. Katopodes, B.F. Sanders, e J.P. Boyd. Short-wave behavior of long-wave equations. *J. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engrg.*, 124(5):238–247, 1998.
- N.D. Katopodes e C.-T. Wu. Shallow-water waves at Ursell numbers of order unity. In *Proc. of the 5th Int. Conf. on Finite Elements in Water Resources, Burlington, Vermont*, páginas 437–446, June 1984.
- N.D. Katopodes e C.-T. Wu. Computation of finite-amplitude dispersive waves. *J. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engrg.*, 113:327–346, 1987.
- M. Kawahara e K. Kashiya. Boundary type finite element method for surface wave motion based on trigonometric function interpolation. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 21:1833–1852, 1985.
- J.B. Keller. Surface waves on water of non-uniform depth. *J. Fluid Mech.*, 4:607–614, 1958.
- J.T. Kirby. *Propagation of Weakly-Nonlinear Surface Water Waves in Regions with Varying Depth and Current*. PhD thesis, University of Delaware, Newark, 1983.
- J.T. Kirby. A note on linear surface wave-current interaction. *J. Geophys. Res.*, 89(C1):745–747, 1984.
- D.J. Korteweg e G. de Vries. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *Phil. Mag. and J. of Science*, 39:422–443, 1895.
- J.K. Kostense, K.L. Meyer, M.W. Dingemans, A.E. Mynett, e P. van den Bosh. Wave energy dissipation in arbitrarily shaped harbours of variable depth. In *Proc.*

- 20th Int. Conf. on Coastal Eng., Taipei, páginas 2002–2016, New York, NY, 1986. ASCE.
- H.-O. Kreiss. Initial boundary value problems for hyperbolic systems. *Comm. Pure Appl. Math.*, 23:277–298, 1970.
- J.-J. Lee. Wave-induced oscillations in harbours of arbitrary geometry. *J. Fluid Mech.*, 45:375–394, 1971.
- G. Liberatore e M. Petti. Wave transformations over a submerged bar: experiments and theoretical interpretations. In *Proc. 23rd Int. Conf. on Coastal Eng., Venice*, páginas 447–459, New York, NY, 1992. ASCE.
- J. Lighthill. *Waves in Fluids*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1978. ISBN 0-521-29233-6.
- P.L.-F. Liu, S.B. Yoon, e J.T. Kirby. Nonlinear refraction-diffraction of waves in shallow water. *J. Fluid Mech.*, 153:185–201, 1985.
- M.S. Longuet-Higgins e R.W. Stewart. Changes in form of short gravity waves on long waves and tidal currents. *J. Fluid Mech.*, 85:565–583, 1960.
- M.S. Longuet-Higgins e R.W. Stewart. The changes in amplitudes of short gravity waves on steady non-uniform currents. *J. Fluid Mech.*, 10:529–549, 1961.
- D.R. Lynch e W.G. Gray. A wave equation model for finite element tidal computations. *Computers and Fluids*, 7:207–228, 1979. ISSN 0045-7930.
- P.A. Madsen e J. Larsen. An efficient finite-difference approach to the mild-slope equation. *Coastal Engineering*, 11:329–351, 1987.
- P.A. Madsen, R. Murray, e O.R. Sørensen. A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. *Coastal Engineering*, 15:371–388, 1991.
- P.A. Madsen e O.R. Sørensen. A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. Part 2. A slowly-varying bathymetry. *Coastal Engineering*, 18:183–204, 1992.
- S.R. Massel. *Hydrodynamics of Coastal Zones*, volume 48 of *Elsevier Oceanography Series*. Elsevier Publishers B.V., Amsterdam, NL, 1989. ISBN 0-444-87375-9.

- S.R. Massel. Extended refraction-diffraction equation for surface waves. *Coastal Engineering*, 19:97–126, 1993.
- C.C. Mei. *The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves*. Advanced Series on Ocean Engineering. World Scientific Publishing Co., Singapore, 1994. ISBN 9971-50-789-7.
- L.M. Merckelbach. Boussinesq modelling with high-order dispersion; derivation and modelling. Master's thesis, Delft University of Technology, NL, 1995.
- A. Mizukami e T.J.R. Hughes. A Petrov-Galerkin finite element method for convection dominated flows: an accurate upwinding technique for satisfying the maximum principle. *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, 50:181–193, 1985.
- W.H. Munk e R.S. Arthur. Wave intensity along a refracted ray. In *Proc. Nat. Bureau of Standards Semicentennial Symposium on Gravity Waves*, páginas 95–109, Washington, 1952. National Bureau of Standards Circular 521.
- K. Nadaoka, S. Beji, e Y. Nakagawa. A fully dispersive weakly nonlinear model for water waves. *Proc. R. Soc. London*, A453:303–318, 1997.
- O. Nwogu. An alternative form of the Boussinesq equations for modelling the propagation of waves from deep to shallow water. *J. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engrg.*, 119:618–638, 1993.
- J. Oliger e A. Sundström. Theoretical and practical aspects of some initial boundary value problems in fluid dynamics. *SIAM J. Appl. Math.*, 35:419–446, 1978. ISSN 0036-1399.
- V.G. Panchang, B.R. Pearce, G. Wei, e B. Cushman-Roisin. Solution of the mild-slope wave problem by iteration. *Applied Ocean Res.*, 13:187–199, 1991.
- J. Peraire, O.C. Zienkiewicz, e K. Morgan. Shallow water problems: a general explicit formulation. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 22:547–574, 1986. ISSN 0029-5981.
- D.H. Peregrine. Long waves on a beach. *J. Fluid Mech.*, 27:815–827, 1967.
- D.H. Peregrine. Interaction of water waves and currents. *Adv. Appl. Math.*, 16:10–117, 1976.
- D.H. Peregrine. Surf zone currents. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, 10:295–309, 1998.

- J.S. Russel. Report of the committee on waves. In *Rep. Meet. Br. Assoc. Adv. Sci. 7th, Liverpool, 1837*, páginas 417–496, London, 1838. John Murray.
- O.B. Rygg. Nonlinear refraction-diffraction of surface waves in intermediate and shallow water. *Coastal Engineering*, 12(3):191–211, 1988.
- A.J.C.B. Saint-Venant. Théorie du mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lits. *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences*, 73:147–154 e 237–240, 1871.
- J.M. Sanz-Serna e I. Christie. Petrov-Galerkin methods for nonlinear dispersive waves. *J. Comput. Physics*, 39:94–102, 1981.
- H.A. Schäffer e P.A. Madsen. Further enhancements of Boussinesq-type equations. *Coastal Engineering*, 26:1–14, 1995.
- H.R. Schember. *A New Model for Three-Dimensional Nonlinear Dispersive Long Waves*. PhD thesis, California Institute of Technology, Pasadena, California, 1982.
- A. Schröter, R. Mayerle, e W. Zielke. Optimized dispersion characteristics of the Boussinesq wave equations. In *International Symposium: Waves — Physical and Numerical Modelling*, páginas 416–425, Vancouver, Canada, August, 21–24 1994. University of British Columbia.
- F.J. Seabra-Santos. *Contribution a l'Étude des Ondes de Gravité Bidimensionnelles en Eau Peu Profonde*. Thèse de Doctorat d'état, L'Université Scientifique et Médicale et L'Institut National Polytechnique de Grenoble, FR, 1985.
- F.J. Seabra-Santos. Modified Boussinesq equations for deep shallow water monochromatic waves. *Estudos de Engenharia Civil*, 6(Special Issue):163–172, 1994. ISSN 0870-5011.
- F.J. Seabra-Santos. Deep and shallow water waves' generation and propagation. Apresentação oral no 1º Encontro de Métodos Numéricos para Equações de Derivadas Parciais, Coimbra, PT, 1995.
- F.J. Seabra-Santos, J.S. Antunes do Carmo, e P. Avilez-Valente. Protecção do Forte do Bugio: Dinâmica dos sedimentos sob a acção conjunta das ondas e das correntes de maré. Relatório Técnico, IMAR — Instituto do Mar, Pólo de Coimbra, PT, 1997.

- F.J. Seabra-Santos, D.J. Renouard, e A.M. Temperville. Étude théorique et expérimentale des domaines de validité des théories d'évolution des ondes en eau peu profonde. *Annales Geophysicæ*, 6:671–680, 1988.
- W.N. Seelig. Wave reflection from coastal structures. In *Proc. Coastal Structures'83*, Arlington, New York, NY, 1983. ASCE.
- F. Serre. Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux. *La Houille Blanche*, 3:374–388 e 830–872, 1953.
- O. Skovgaard, I.G. Jonsson, e J.A. Bertelsen. Computation of wave heights due to refraction and friction. *J. Waterway, Harbor and Coastal Engrg.*, 101:15–32, 1975.
- A. Sommerfeld. *Partielle Differentialgleichungen der Physik*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, DE, 1958.
- F. Taveira-Pinto, F. Veloso-Gomes, e P. Avilez-Valente. Energy dissipation of low-crested breakwaters. In B.L. Edge e J.M. Hemsley, editores, *Ocean Wave Measurements and Analysis*, páginas 600–614, New York, NY, 1998a. ASCE. ISBN 0-7844-0346-5.
- F. Taveira-Pinto, F. Veloso-Gomes, e P. Avilez-Valente. Performance of submerged breakwaters. In H. Kim, S.H. Lee, e S.J. Lee, editores, *Hydrodynamics: Theory and Applications*, páginas 401–406, Seoul, 1998b. UIAM Publishers. ISBN 89-7472-211-9.
- C. Taylor e J.M. Davis. Tidal and long wave propagation: a finite element approach. *Computers and Fluids*, 3:125–148, 1975. ISSN 0045-7930.
- C. Taylor, B.S. Patil, e O.C. Zienkiewicz. Harbour oscillation: a numerical treatment for undamped natural modes. *Proc. Inst. Civ. Engrs.*, 43:141–155, 1969.
- A.T. Teixeira. *Finite Element Modelling of Hydrodynamics in Coastal Zones*. PhD thesis, University College of Swansea, UK, 1994.
- M.H. Teng. Solitary wave solution to Boussinesq equations. *J. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engrg.*, 123:138–141, 1997.
- L.L. Thompson e P.M. Pinsky. A Galerkin least-squares finite element method for the two-dimensional Helmholtz equation. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 38:371–397, 1995. ISSN 0029-5981.

- R.G. Tickell. Wave forces on structures. In M.B. Abbott e W.A. Price, editores, *Coastal, Estuarial and Harbour Engineers' Reference Book*, capítulo 28, páginas 369–380. Chapman & Hall, 2–6 Boundary Row, London, UK, 1993. ISBN 0-419-15430-2.
- F. Ursell. The long wave paradox in the theory of long gravity waves. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 49:685–694, 1953.
- C.B. Vreugdenhil. *Numerical Methods for Shallow-Water Flows*. Kluwer Academic Publishers, P.O. Box 17, 3300 AA Dordrecht, NL, 1994. ISBN 0-7923-3164-8.
- M. Walkley e M. Berzins. A finite element method for the one-dimensional extended Boussinesq equations. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 29:143–157, 1999. ISSN 0271-2091.
- G. Wei e J.T. Kirby. Time-dependent numerical code for extended Boussinesq equations. *J. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engrg.*, 121(5):251–261, 1995.
- G.B. Whitham. Mass, momentum and energy flux in water waves. *J. Fluid Mech.*, 12:135–147, 1962.
- J.M. Witting. A unified model for the evolution of nonlinear water waves. *J. Comput. Physics*, 56:203–236, 1984.
- C.-C. Yu e J.C. Heinrich. Petrov-Galerkin methods for the time-dependent convective transport equation. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 23(5):883–901, 1986. ISSN 0029-5981.
- C.-C. Yu e J.C. Heinrich. Petrov-Galerkin method for multidimensional, time-dependent, convective-diffusion equations. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 24(11):2201–2215, 1987. ISSN 0029-5981.
- O.C. Zienkiewicz. *The Finite Element Method*. McGraw-Hill, 3rd edition, 1977. ISBN 0-07-084072-5.
- O.C. Zienkiewicz e K. Morgan. *Finite Elements and Approximation*. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, 1983. ISBN 0-471-89089-8.



FACULDADE DE ENGENHARIA

UNIVERSIDADE DO PORTO

BIBLIOTECA



0000067174