

FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DO PORTO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA



JOGOS DE PARTILHA

MARIA EDUARDA PAIVA PEIXOTO

2004

FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DO PORTO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA



JOGOS DE PARTILHA

Tese submetida à Faculdade de Ciências da
Universidade do Porto para obtenção do grau de mestre em
Ensino da Matemática

MARIA EDUARDA PAIVA PEIXOTO

2004

Introdução

O assunto desta dissertação foi inspirado pela reforma recente dos programas de Matemática no Ensino Secundário, que passaram a incluir capítulos adicionais com conteúdo que é frequentemente designado por “Matemática aplicada à realidade”. Deles seleccionámos o tema “Partilhas” por envolver uso relevante de análise e se adaptar com sucesso à sequência de conhecimentos em Matemática previstos para o 3º Ciclo do Ensino Básico.

Neste âmbito, que é vasto, houve que fazer escolhas. Para isso, traçámos um percurso que nos conduzisse ao Teorema de Borsuk-Ulam sobre a bissecção simultânea no espaço, por um plano, de três objectos com volume positivo. Por comparação, detivemo-nos pelo caminho em estratégias de divisão de um só objecto por mais do que dois interessados de modo que cada um fique satisfeito com a porção que lhe caiba.

O primeiro capítulo trata precisamente da partilha de um bolo homogéneo por n pessoas, $n \geq 2$, que podem ter modos distintos de avaliar as fracções do bolo, cumprindo-se certo objectivo na divisão. Alguns argumentos desta secção não são elementares ou por não serem construtivos, ou porque a divisão do bolo pode não ser executável com uma faca usual ou ainda por se utilizar o Axioma da Escolha. Mas, globalmente, o conteúdo deste capítulo é aplicação interessante e acessível de Álgebra de Matrizes e Probabilidades.

O segundo capítulo é dedicado ao Teorema de Borsuk-Ulam. Em termos simples, trata-se de bissectar com uma faca uma sanduíche com três camadas (pão, queijo e fiambre, por exemplo) de modo que cada porção fique com metade de cada um destes três constituintes. A demonstração que aqui apresentamos é consequência de uma generalização do Teorema do Valor Intermédio (de funções reais contínuas de variável real) para aplicações contínuas e anti-simétricas definidas numa circunferência ou numa esfera. Da versão no plano do argumento explicitado neste capítulo foi elaborada uma rotina usando o programa de geometria dinâmica *The Geometer's Sketchpad*, que exhibe bem o carácter geométrico da bissecção simultânea com uma recta de dois objectos um $\mathbb{R}^2$. Os detalhes desta rotina estão explicados no 3º Apêndice e contaram com a orientação do Professor Doutor Arala Chaves, da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

O Teorema de Borsuk-Ulam admite um enunciado mais geral: em $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, é possível bissectar simultaneamente, com um hiperplano, n objectos com

medida exterior de Lebesgue finita. Esta generalização, de carácter muito menos elementar que o enunciado do Capítulo 2, está detalhada em [S,T].

Este texto segue de perto as referências [H], [D,S] e [C,S]. A bibliografia contém ainda sugestões de leitura complementar.

Capítulo 1

Divisão de um bolo por n pessoas

1.1 Introdução

Neste capítulo analisaremos vários algoritmos de partilha de um objecto por alguns (pelo menos dois) interessados de modo que cada pessoa julgue receber o que considera ser uma parte justa. Naturalmente a avaliação de cada participante na divisão sobre uma fracção do objecto é subjectiva, mas terá de ser formulável matematicamente. Estas avaliações podem diferir umas das outras, daí a necessidade de um procedimento imparcial e eficaz de divisão.

Para prosseguirmos teremos de ditar algumas regras acerca do bolo, da faca e dos participantes.

1. a) O **bolo** é homogéneo e dele pode retirar-se uma fracção exacta.
b) O bolo inteiro vale o mesmo para todos, um, e a ausência de bolo vale zero.
c) Um pedaço de bolo cortado em fatias vale o mesmo que quando estava inteiro, isto é, não é razoável que se diga: “Aquele pedaço não é suficiente, mas se o cortar a meio já é!”.
d) Se a um pedaço retirarmos um bocado, todos têm que concordar que este representa uma fracção de bolo menor que o pedaço inicial.
e) Uma vez dividido em fatias o que sobra se se retirar alguma ou algumas fatias, pode ser reunido num novo bolo (propriedade que um bolo real, que se esfarela, não verifica).
2. A **faca** é também matemática e consegue cortar o bolo em tantos pedaços quantos se queira e de uma forma exacta, ainda que as fatias possam não ter um formato canónico.
3. Cada **participante** pode medir as fracções do bolo de forma diferente, mas é necessário que seja razoável: que tenha opinião sobre cada fatia; que

alguma lhe agrade; que o valor que atribui a cada fatia não se altere se ela for subdividida.

No que se segue a divisão do bolo deverá cumprir o objectivo de satisfazer os n participantes na divisão de acordo com certo critério, que será descrito em cada secção.

1.2 Objectivo: Obter pelo menos $\frac{1}{n}$ do bolo

Pretende-se dividir um bolo entre n participantes ($n \geq 2$) de forma que cada participante acredite que obteve pelo menos $\frac{1}{n}$ do bolo, de acordo com a sua maneira de medir.

1.2.1 1º Processo: Generalização de “Um corta, outro escolhe!”

(A) $n = 2$

Vejamos como se processa a divisão no caso de n ser igual a 2. Escolhe-se aleatoriamente uma pessoa para cortar o bolo a meio; à outra pessoa resta-lhe escolher uma das duas fatias em que ficou dividido o bolo. Como a pessoa que corta é a última a escolher, ou melhor, fica com a fatia não escolhida pelo outro participante, é conveniente para ela que corte o bolo exactamente ao meio, segundo o seu modo de medir, pois qualquer um dos pedaços pode vir a ser o seu. Como já foi referido, tanto o bolo como a faca que usamos o permitem.

Quem corta produz duas fatias cada uma das quais vale, para si, exactamente metade do bolo (supomos que é possível fazer um tal corte); e portanto qualquer um dos pedaços satisfaz o cortador. Por outro lado, o outro participante ou é da mesma opinião do cortador, sendo-lhe indiferente qualquer uma das fatias e, neste caso, qualquer que seja a distribuição ambos ficam satisfeitos; ou, pelo contrário, vê uma das fatias menor que metade do bolo e a outra, claro, maior que metade (a razoabilidade que descrevemos anteriormente não permite ver um bolo cortado em duas fatias ambas menores que metade do bolo). Neste caso, será de esperar que escolha a maior fatia, achando portanto que recebe mais do que metade do bolo. O cortador, como cortou exactamente a meio fica satisfeito com a fatia que sobra, cumprindo-se assim o objectivo proposto

Este processo é mais vantajoso para quem escolhe do que para quem corta, uma vez que quem escolhe tem a oportunidade de receber uma fatia que, a seus olhos, representa mais de metade do bolo; quem corta assegura para si exactamente metade do bolo. Para que o processo seja justo, quem corta deve ser seleccionado à sorte.

(B) $n = 3$

Estudemos agora o caso de $n = 3$, ou seja, como dividir um bolo por 3 pessoas de forma a que todos achem que receberam pelo menos $\frac{1}{3}$ do bolo.

Sejam P_1 , P_2 e P_3 os três participantes pelos quais se irá dividir o bolo. Um deles, digamos P_1 , é escolhido aleatoriamente para cortar o bolo em 3 fatias, F_1 , F_2 e F_3 , onde cada uma representa para si exactamente $\frac{1}{3}$ do bolo, pois sabe que não é ele a escolher e pode ficar com qualquer uma delas. Para se proceder à distribuição das 3 fatias pelos 3 participantes, cada um deles opina sobre cada uma das fatias, atribuindo-lhe valor 1 no caso de a fatia em questão representar, segundo ele, pelo menos $\frac{1}{3}$ do bolo, e valor 0, se pelo contrário, a fatia representa menos que $\frac{1}{3}$ do bolo. Coleccionemos as opiniões dos 3 participantes, ordenando-os numa matriz 3×3 . A primeira linha da matriz, correspondente ao participante P_1 , só contém 1's. Além disso, cada um dos outros dois participantes considera pelo menos uma das fatias maior ou igual a $\frac{1}{3}$ do bolo, logo em cada linha existe pelo menos uma entrada igual a 1 (se todas as fatias representassem menos que $\frac{1}{3}$, o bolo todo valeria menos que 1, o que não é considerado razoável).

Por exemplo, a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ pode descrever a situação e, neste caso,

a única forma de distribuir os 3 pedaços de modo a satisfazer simultaneamente os 3 participantes é dar a fatia F_1 a P_2 , F_2 a P_3 e a fatia F_3 a P_1 .

Se a matriz é $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ há duas distribuições possíveis: F_1 a P_2 , F_2 a P_3 e F_3 a P_1 ou F_1 a P_3 , F_2 a P_2 e F_3 a P_1 .

Mas a matriz pode também ser $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. De que forma podemos nós

agora proceder à distribuição? Neste caso, a distribuição *destas* três fatias pelas três pessoas não é possível, porque tanto P_2 como P_3 consideram que apenas uma fatia lhes agrada e a mesma, F_2 . O que fazer? Atribuimos a fatia F_1 ao cortador P_1 porque ela não agrada nem a P_2 nem a P_3 . Aos olhos do cortador qualquer uma das fatias vale $\frac{1}{3}$ do bolo, portanto F_1 satisfá-lo. Como esse pedaço é rejeitado tanto por P_2 como por P_3 , para ambos vale menos que $\frac{1}{3}$, portanto as outras duas fatias, $F_2 \cup F_3$, representam conjuntamente, para ambos os participantes, P_2 e P_3 , mais do que $\frac{2}{3}$ do bolo. Assim o que há a fazer é reagrupar estas duas fatias, F_2 e F_3 , e fazer uma nova divisão e distribuição entre os participantes P_2 e P_3 . Tal pode ser feito usando o processo "Um corta, outro escolhe" que, como já se mostrou, permite distribuir o *novo* bolo de forma a satisfazer os dois participantes.

Este procedimento exige que o novo bolo possa ser construído depois de retirada uma fatia e dividido segunda vez. É este o aspecto não imediato deste processo. E de todas as matrizes de opiniões 3×3 quais as que precisam de tratamento análogo? Será que este é o exemplo mais complicado? E que outros casos têm o mesmo grau de dificuldade?

Ora, por construção, a 1.^a linha de todas as matrizes de opiniões só tem entradas iguais a 1, uma vez que ao participante que cortou agradam-lhe todas as fatias, não trazendo, portanto, problemas à divisão. Consideremos os outros dois participantes. Nós temos problemas a distribuir as fatias se e só se a ambos agradar apenas uma das fatias e a mesma para ambos. De facto, se, pelo contrário, a um deles agradar pelo menos duas fatias, então a distribuição pode ser feita dando ao participante mais exigente a que escolheu, depois ao 2.^o mais exigente damos a outra fatia que lhe agrada e ao 1.^o a que sobra. Assim a divisão é mais complicada para as matrizes 3×3 tais que em cada uma das duas últimas linhas só aparece um 1 (tem que aparecer algum 1) e ambos na mesma coluna. Mas quantas são estas matrizes? Uma vez que a 1.^a linha destas matrizes tem as entradas todas iguais a 1, na 1.^a linha não temos escolhas a fazer. Nas outras duas linhas só somos obrigados a colocar pelo menos um 1, isto é, das 8 possibilidades de colocar 0/s e 1/s em cada linha, nomeadamente (111, 101, 110, 011, 100, 010, 001, 000), só temos de excluir 000. Quantas destas matrizes com entradas 0 ou 1, têm na 2.^a e 3.^a linhas só um 1 e ambos na mesma coluna? Ora há 3 maneiras de colocar dois 1/s alinhados na mesma coluna, pois para tal basta-nos escolher a coluna em que vão aparecer os dois 1/s e temos apenas 3 colunas, é essa exactamente a maneira de as escolher. Essas matrizes são exactamente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad [1]$$

Logo há 7×7 matrizes de opiniões possíveis, em 46 das quais podemos escolher uma entrada igual a 1 em cada linha de modo a não repetir a coluna onde se escolhe. O que fornece uma maneira de distribuir as fatias: a escolha de 3 entradas iguais a 1 tais que não há duas na mesma linha ou coluna corresponde a distribuir a cada uma das 3 pessoas uma fatia que lhes agrada.

No caso das outras 3, com muitos 0/s, começamos por dar ao 1.^o participante uma fatia que aos olhos dos outros dois participantes vale menos de um terço; logo eliminada essa fatia o que sobra vale, para esses dois participantes, mais do que $\frac{2}{3}$ do bolo; reunindo estas duas fatias num novo bolo, a divisão é possível pela estratégia "Um corta, outro escolhe!".

Repare-se que procurámos na matriz um conjunto de 3 entradas iguais a 1, das quais nenhum par está na mesma linha ou coluna: se existir, cada entrada 1 corresponde a uma fatia atribuída a um participante que fica satisfeito com ela. Um tal conjunto de três entradas designa-se por *diagonal generalizada*. É este

procedimento que iremos generalizar nas matrizes $n \times n$ de 0's e 1's que descrevem as opiniões de n participantes acerca de n fatias em que um deles cortou o bolo.

(C) $n > 3$

Fixemos n natural maior do que 3. Tal como anteriormente, um dos participantes, digamos P_1 , corta o bolo em n fatias tais que, a seus olhos, cada uma representa $\frac{1}{n}$ do bolo. Deste modo, qualquer destas fatias o satisfaz. Os outros participantes dão as suas opiniões sobre as fatias, recolhendo-se essas opiniões numa matriz $n \times n$ de entradas 0 ou 1.

Suponhamos, por indução, que para $k < n$ a divisão é possível de modo que cada participante receba o que considera ser $\frac{1}{k}$ do bolo. No caso de encontrarmos uma diagonal generalizada da matriz de opiniões só com 1's, a distribuição é imediata. Se, pelo contrário, uma tal diagonal não existir, deduzimos que a matriz tem muitos zeros e podemos argumentar, a partir de uma submatriz de 0's como no caso das 3 matrizes apresentadas em [1] para $n = 3$. A existência de uma tal submatriz de 0's é o que afirma o teorema seguinte:

Teorema 1 (Frobenius-König) *Uma matriz $(n \times n)$ com entradas iguais a 0 ou a 1 não tem uma diagonal generalizada só de 1's se e só se essa matriz contém uma submatriz $r \times s$ de 0's com $r + s = n + 1$.*

Uma demonstração pode ser lida em [L,W] e uma cópia encontra-se no 2º Apêndice.

Uma submatriz $r \times s$ de 0's é um bloco rectangular de 0's com r linhas e s colunas. Por exemplo, na matriz 5×5

$$M = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & |0 & 0| \\ 1 & 0 & 0 & |0 & 0| \\ 0 & 0 & 1 & |0 & 0| \\ 0 & 0 & 1 & |0 & 0| \end{array} \right)$$

temos uma submatriz 4×2 de 0's formada pelas quatro últimas linhas das 4ª e 5ª colunas.

Já vimos que qualquer diagonal generalizada da matriz de opiniões com todas as entradas iguais a 1 corresponde a um modo aceitável de distribuição dos n pedaços de bolo. As dificuldades surgem só se todas as diagonais generalizadas contiverem um zero. Neste caso, o Teorema de Frobenius-König garante a existência de uma submatriz $r \times s$ de 0's com $r + s = n + 1$. Começemos por seleccionar uma destas submatrizes que tenha r máximo (existe, uma vez que r é um número natural entre 1 e n , logo tem finitas possibilidades); designemo-la por $\mathcal{M}$. Uma vez que a 1ª linha só contém entradas iguais a 1, a submatriz a que nos referimos tem r linhas com $r < n$, ou seja, $r \leq n - 1$.

Suponhamos que essa submatriz $\mathcal{M}$ tem exactamente $r = n - 1$ linhas. Sendo $r + s = n + 1$, então $s = n + 1 - r = n + 1 - (n - 1) = n + 1 - n + 1 = 2$. Assim, reetiquetando as fatias de bolo se necessário, a matriz pode ficar com a configuração seguinte:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

onde $* \in \{0, 1\}$. Ora, como todos os participantes, excepto o cortador, acham que o 1º pedaço vale menos que $\frac{1}{n}$ do bolo, então para eles o *resto do bolo*, isto é, o *bolo* menos o 1º pedaço, é maior que o *bolo* menos $\frac{1}{n}$ do bolo, ou seja, maior que $\frac{n-1}{n}$ do bolo. Por hipótese de indução, estes $n - 1$ participantes podem agora reconstruir o bolo e dividir entre si as $n - 1$ fatias que sobraram, garantindo que cada um recebe pelo menos $\frac{\frac{n-1}{n}}{n-1} = \frac{1}{n}$ do bolo.

No caso de o valor máximo de r ser estritamente menor que $n - 1$, reordenamos os participantes e as fatias se necessário para reescrever a matriz de forma a colocar a submatriz $r \times s$ de 0's no canto inferior esquerdo (ocupando as primeiras s colunas e as últimas r linhas), como se pode ver no esquema abaixo:

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ [* & \cdots & *] & \cdots & * \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} & \cdots & * \end{pmatrix}$$

Uma vez que $r + s = n + 1$, ou seja, $r + s - 1 = n$, o número de linhas acima das desta submatriz é $s - 1$. Reparemos que $s - 1 \geq 2$, pois, como $r < n - 1$, temos $s = n + 1 - r > n + 1 - (n - 1) = n + 1 - n + 1 = 2$. Assim a matriz tem o seguinte aspecto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & A & & & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

onde A tem $s - 2$ linhas, logo pelo menos uma linha.

Note-se que esta matriz indica que, para os r últimos participantes, cada uma das $s - 1$ primeiras fatias vale menos de $\frac{1}{n}$; ou seja, em conjunto, menos que

$(s-1) \times \frac{1}{n} = \frac{s-1}{n}$ do bolo. Portanto, se aos $s-1$ primeiros participantes as $s-1$ primeiras fatias agradarem, os restantes r participantes ficam satisfeitos, uma vez que para eles sobrou mais do que

$$1 - \frac{s-1}{n} = \frac{n-s+1}{n} = \frac{r}{n}$$

$s+r=n+1 \Leftrightarrow r=n+1-s$

do bolo, isto é, mais do que $\frac{r}{r} = \frac{1}{n}$ para cada um deles. Mas para isso é necessário que a submatriz $B = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & A & \end{pmatrix}$ constituída pelas $s-1$ primeiras linhas e $s-1$ primeiras colunas contenha uma diagonal generalizada só com entradas iguais a 1.

Suponhamos que existe uma submatriz $\mathcal{C}$ de B só com entradas iguais a 0, de dimensões $p \times q$, $p, q \in \mathbb{N}$. Combinando esta submatriz $\mathcal{C}$ com a submatriz $\mathcal{M}$, obtemos uma nova submatriz $\mathcal{D}$ de 0's, de dimensões $(r+p) \times q$. Ora $(r+p) + q < n+1$, pois, se $(r+p) + q \geq n+1$, então podemos retirar da junção das matrizes $\mathcal{M}$ e $\mathcal{C}$ uma submatriz de 0's de dimensões $(r+p) \times q'$, onde $q' \leq q$ é tal que $(r+p) + q' = n+1$, e tem maior número de linhas que a submatriz $\mathcal{M}$, contrariando a maximalidade de r . Assim $p+q < n+1-r = s$. Em particular, concluimos que a matriz B , de dimensões $(s-1) \times (s-1)$, não contém uma submatriz de 0's de dimensões $p \times q$ tais que $p+q = (s-1)+1$. Podemos portanto concluir, pelo *Teorema de Frobenius-König*, que existe em B uma diagonal generalizada constituída somente por 1's, ou seja, existe uma forma de distribuir as $s-1$ primeiras fatias pelos $s-1$ primeiros participantes de forma a satisfazer todos.

1.2.2 2º Processo: “A faca move-se e corta”

O processo descrito anteriormente tem a desvantagem de precisarmos de reunir sistematicamente as opiniões de todos os participantes sobre todas as fatias do bolo (o que, se n é grande, é pelo menos moroso) e, uma vez que utiliza indução, exigir que se reconstrua o bolo, o que é pouco natural.

Na prática podemos seguir outro procedimento que embora não generalize o método “Um corta, outro escolhe”, tem a vantagem de produzir fatias elementares e de modo mais expedito que o anterior.

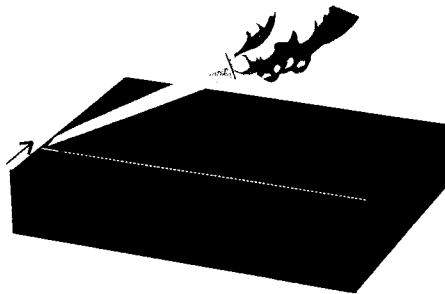
Para visualizar melhor o processamento deste método, podemos imaginar que o bolo é um paralelepípedo rectângulo. Começamos por pousar a faca sob um dos lados do bordo do bolo; de seguida fazemo-la deslizar suave e uniformemente ao longo da sua superfície do bolo, paralelamente a esse lado. Quando algum dos participantes acha que a faca atravessou $\frac{1}{n}$ do bolo pede que a faca pare; é cortada uma fatia desde o lado em que o movimento da faca se iniciou, e esse

bocado é-lhe atribuído. No caso de duas pessoas terem a mesma opinião, escolhe-se aleatoriamente o candidato a quem se deve atribuir essa fatia.

Como nenhum outro participante pediu que a faca parasse antes, todos eles acreditam que a fatia não vale mais do que $\frac{1}{n}$, logo o que sobrou é, a seus olhos, pelo menos $1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$ do bolo. A faca recomeça a cortar e só pára quando uma outra pessoa assim o sugerir. Essa nova fatia será atribuída a esse participante. Novamente, os restantes $n - 2$ participantes perderam a oportunidade de parar a faca antes, logo necessariamente todos concordam que o que sobrou vale pelo menos $\frac{n-2}{n}$. Deste modo a divisão é feita de forma a que cada um receba pelo menos $\frac{1}{n}$ do bolo.

É claro que se alguém guloso tentar obter mais do que $\frac{1}{n}$ adiando o momento de parar a faca, corre o risco de que alguém peça antes para a faca parar, e portanto de ficar com uma fatia que a seus olhos tem valor inferior a $\frac{1}{n}$.

Repare-se que este modo construtivo de dividir o bolo não recorre a nenhuma matemática sofisticada (indução), sendo bastante mais realista, uma vez que não é necessário nenhum reagrupamento nem novo corte, que poderia esfarelar um qualquer bolo real. Além disso, as fatias produzidas têm formato elementar e como neste processo só é cortada uma fatia de cada vez, evita-se que os participantes opinem sobre muitas fatias.



1.3 Objectivo: Obter exactamente $\frac{1}{n}$ do bolo

As duas formas de dividir um bolo descritas atrás não impedem que algum participante possa dizer: “Desculpe, eu consegui pelo menos $\frac{1}{n}$ do bolo, mas o pedaço dele é maior que o meu”. Para evitar esta queixa pretende-se dividir o bolo entre n participantes ($n \geq 2$) de forma que cada participante acredite que todos os participantes obtiveram exactamente $\frac{1}{n}$ do bolo, de acordo com o seu modo de medir.

Uma vez que o bolo seja cortado em n fatias, cada indivíduo pode, apesar de achar que uma certa fatia o satisfaz (vale pelo menos $\frac{1}{n}$), compará-la com as outras. Ainda que duas ou mais lhe agradem, atribuindo a ambas valor 1, ele pode associar a cada fatia um peso distinto, correspondente à proporção do bolo que essa fatia representa aos seus olhos. As opiniões mais detalhadas, não

apenas 0 ou 1, de cada participante podem ser de novo ordenadas numa matriz de entradas reais m_{ij} entre 0 e 1, onde m_{ij} é a fracção do bolo que o $i^{\text{ésimo}}$ participante acha que a $j^{\text{ésima}}$ fatia representa. O conjunto de todas as fatias, o bolo todo, representa 1. Cada linha da matriz representa as opiniões de um dos participantes sobre todas as fatias; assim, 0 significa nenhuma fatia, e no total, têm que somar 1, porque a união das fatias é o bolo todo. Cada coluna representa as opiniões diversas de todos os participantes sobre uma mesma fatia.

Deste modo, toda a divisão de um bolo em n pedaços produz uma matriz $n \times n$ com entradas entre 0 e 1. O conjunto de tais matrizes, que ocorrem considerando todas as opiniões sobre todas as partições possíveis em n bocados, será denotado por Ω . Note-se que de acordo com o que foi referido acima, em Ω só estão matrizes de entradas não negativas e tais que em cada linha a soma das entradas é 1.

O teorema seguinte afirma que Ω é um conjunto convexo.

Teorema 2 (Lyapunov) *Se $M_1, M_2, \dots, M_k$, são matrizes $n \times n$ de Ω e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ são números reais não negativos tais que $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 1$, então a matriz $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \dots + \lambda_k M_k$ também está em Ω .*

É fácil verificar que, se $M_1, M_2, \dots, M_k \in \Omega$ e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in [0, 1]$ com $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 1$, então a matriz $M = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \dots + \lambda_k M_k$ é uma matriz com todas as entradas não negativas e cujo somatório de cada uma das linhas é igual a 1. De facto, na entrada (i, j) da matriz M está o real $\lambda_1 m_{i,j}^1 + \lambda_2 m_{i,j}^2 + \dots + \lambda_k m_{i,j}^k$, onde $m_{i,j}^l$ é a entrada da matriz M_l na linha i e coluna j , que sabemos ser um número entre 0 e 1. Portanto, e uma vez que λ_l é não negativo para todo o $l \in \{1, \dots, k\}$, $\lambda_l m_{i,j}^l \geq 0$, logo $\lambda_1 m_{i,j}^1 + \lambda_2 m_{i,j}^2 + \dots + \lambda_k m_{i,j}^k \geq 0 + 0 + \dots + 0 = 0$. Por outro lado, na linha i da matriz M a soma das suas entradas é

$$(\lambda_1 m_{i,1}^1 + \lambda_2 m_{i,1}^2 + \dots + \lambda_k m_{i,1}^k) + (\lambda_1 m_{i,2}^1 + \lambda_2 m_{i,2}^2 + \dots + \lambda_k m_{i,2}^k) + \dots$$

$$+ (\lambda_1 m_{i,n}^1 + \lambda_2 m_{i,n}^2 + \dots + \lambda_k m_{i,n}^k)$$

$$= \underbrace{\lambda_1 (m_{i,1}^1 + m_{i,2}^1 + \dots + m_{i,n}^1)}_{\parallel 1,}$$

porque esta é a soma das entradas
da $i^{\text{ésima}}$ linha da matriz M_1

$$+ \lambda_2 (m_{i,1}^2 + m_{i,2}^2 + \dots + m_{i,n}^2) + \dots$$

$$+ \lambda_k (m_{i,1}^k + m_{i,2}^k + \dots + m_{i,n}^k)$$

$$= \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 1.$$

Além disso, sendo todas as entradas não negativas com soma igual a 1, é claro que cada uma das entradas é menor que 1: Se existissem $i \in \{1, \dots, n\}$ e $j \in \{1, \dots, n\}$ tais que $m_{ij} > 1$, então $m_{i1} + m_{i2} + \dots + m_{ij} + m_{i,j+1} + \dots + m_{in} \geq m_{ij} > 1$.

Para obter o teorema é preciso ainda demonstrar que existe uma partição do bolo sobre a qual os n participantes opinam de acordo com a matriz $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \dots + \lambda_k M_k$. Esta é a parte difícil do argumento, porque introduz nesta secção um ingrediente não trivial que reduz o carácter prático aos procedimentos que descrevemos: trata-se do Axioma da Escolha, que nos permite afirmar que “existe certa partição do bolo a que corresponde a matriz de opiniões fixada”, não revelando, no entanto, como uma tal partição se pode obter. Uma prova deste teorema pode ser lida em [D,S] e encontra-se uma cópia no 2º Apêndice.

Uma das formas de partir o bolo é não o partir e deixar que o 1º pedaço seja o bolo inteiro e os outros $n - 1$ pedaços sejam “pedaços vazios”. A matriz de opiniões neste caso terá que ser obrigatoriamente

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto M_1 é uma matriz de Ω . É claro que o bolo todo poderia ser não o 1º pedaço, mas o 2º e sendo assim a matriz de opiniões é

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

E em geral, a partição que tem como $k^{\text{ésimo}}$ pedaço o bolo inteiro e todos os outros pedaços vazios, dá origem à matriz M_k cuja $k^{\text{ésima}}$ coluna é constituída por 1's e todas as outras entradas são 0, que é também elemento de Ω .

Assim, pelo Teorema de Lyapunov, $\frac{1}{n}M_1 + \frac{1}{n}M_2 + \dots + \frac{1}{n}M_n$ também está em Ω , o que significando isto que existe uma partição do bolo que dá origem à matriz

$$\text{de opiniões } \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}, \text{ que representa a distribuição a cada participante}$$

de uma fatia que a seus olhos e aos dos outros vale exactamente $\frac{1}{n}$.

Este não é um modo construtivo de fazer a distribuição do bolo: mostra-se apenas que é possível dividi-lo, mas não se explica de que forma é que se poderá fazê-lo. Além disso, o Teorema de Lyapunov não nos esclarece sobre a forma das fatias, podendo estas ser subconjuntos bizarros do bolo, e portanto não existir uma faca (real) capaz de cortar tais fatias.

1.4 Objectivo: Obter mais do que $\frac{1}{n}$ do bolo

Pretende-se dividir um bolo entre n participantes ($n \geq 2$) de forma que cada participante acredite que obteve estritamente mais do que $\frac{1}{n}$ do bolo, de acordo com o seu modo de medir. Vejamos dois argumentos que no entanto dependem de uma hipótese adicional sobre os participantes e o bolo.

1.4.1 1º Procedimento

Utilizando o Teorema de Lyapunov e a hipótese adicional de que existe um pedaço de bolo, digamos P , sobre cujo valor dois dos participantes não estão de acordo, podemos garantir que é possível dividir o bolo de modo a satisfazer este critério.

Isto é algo de extraordinário: conseguir dividir o bolo de forma a que as fatias obtidas sejam vistas de modo tão diferente pelos participantes. A razoabilidade impede que se possa dividir o bolo em n pedaços que todos achem serem maiores que $\frac{1}{n}$. Se uma das fatias é maior que $\frac{1}{n}$, uma das restantes terá que ser menor que $\frac{1}{n}$, pois as n fatias reunidas, qualquer que seja a forma de cortar o bolo, valem 1.

Designemos por Q o complementar no bolo de P . Uma forma de partir o bolo seria deixar o 1º pedaço ser P , o 2º ser Q e todos os outros pedaços vazios. Supondo que as duas pessoas que não têm a mesma opinião sobre o valor de P são a primeira e a segunda, esta divisão dá origem à matriz de opiniões:

$$M_1 = \begin{pmatrix} m_1(P) & m_1(Q) & 0 & \cdots & 0 \\ m_2(P) & m_2(Q) & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

onde $m_1(P)$ e $m_1(Q)$ denotam as avaliações dos pedaços P e Q feitas pela 1ª pessoa e $m_2(P)$ e $m_2(Q)$ as da 2ª pessoa.

Note-se que, uma vez que sobre o bolo todo ou o vazio todos os participantes estão de acordo, devemos ter $1 > m_i(P) > 0$ para $i = 1, 2$; além disso, $m_1(P) + m_1(Q) = 1$ e $m_2(P) + m_2(Q) = 1$.

Podemos também, tal como no caso anterior, deixar que o bolo todo seja o 2º pedaço e todos os outros pedaços (1º, 3º, 4º, ...) sejam vazios. Assim

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Procedendo do mesmo modo, para $k = 3, 4, \dots, n$, a matriz M_k originada pela partição que faz o bolo inteiro ser o $k^{\text{ésimo}}$ pedaço é

$$M_k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

$\uparrow$
 $k^{\text{ésima}} \text{ coluna}$

Uma vez que as matrizes $M_1, M_2, \dots, M_n$ estão em Ω , então, pelo Teorema de Lyapunov, sabemos que a matriz $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \dots + \lambda_n M_n$ também está em Ω , para qualquer colecção de números não negativos $\{\lambda_k\}$ com soma 1. Suponhamos que $m_1(P) > m_2(P)$ e que $m_1(P) \geq m_2(Q)$; se não for o caso, podemos simplesmente renumerar os 2 participantes e trocar os papéis de P e Q . Sejam

$$\lambda_1 = \frac{\alpha}{n \cdot m_1(P)}$$

$$\lambda_2 = \frac{\alpha}{n \cdot m_1(P)} \cdot (m_1(P) - m_2(Q))$$

$$\lambda_k = \frac{\alpha}{n}, \text{ para } k = 3, 4, \dots, n$$

$$\text{onde } \alpha = \frac{n \cdot m_1(P)}{n \cdot m_1(P) + 1 - m_2(Q) - m_1(P)}.$$

Lema 1

a) O denominador de α é positivo.

b) Para $i = 1, \dots, n$ temos $\lambda_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Prova. Por hipótese, as duas pessoas têm opiniões diferentes sobre P , logo $m_1(P) \neq m_2(P)$. Além disso, $m_1(P) \geq m_2(Q) > m_1(Q)$, donde se conclui que

$m_1(P) > \frac{1}{2}$, uma vez que $1 = m_1(P) + m_1(Q) < m_1(P) + m_1(P) = 2.m_1(P)$. Como $n \geq 2$, $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{n}$. Logo, $m_1(P) > \frac{1}{n}$, ou seja, $n.m_1(P) > 1$.

Daqui resulta que o denominador de α é positivo: como $m_1(P)$ e $m_2(Q)$ são menores que 1, temos

$$\begin{aligned} & n.m_1(P) + 1 - m_2(Q) - m_1(P) \\ & > n.m_1(P) + 1 - 1 - 1 \\ & = n.m_1(P) - 1 \\ & > 1 - 1 \\ & = 0. \end{aligned}$$

Além disso, o numerador de α é estritamente maior que o seu denominador, porque $1 = m_2(P) + m_2(Q) < m_1(P) + m_2(Q)$, logo

$$-n.m_1(P) + 1 < -n.m_1(P) + [m_1(P) + m_2(Q)]$$

$$n.m_1(P) > n.m_1(P) + 1 - m_1(P) - m_2(Q)$$

$$\frac{n.m_1(P)}{n.m_1(P)+1-m_2(Q)-m_1(P)} > 1$$

Assim,

- $\lambda_1 = \frac{\alpha}{n.m_1(P)} > 0$ uma vez que α e $n.m_1(P)$ são positivos (até são maiores que 1).
- $\lambda_2 = \frac{\alpha}{n.m_1(P)} \cdot (m_1(P) - m_2(Q)) \geq 0$, pois $\frac{\alpha}{n.m_1(P)} > 0$ e $m_1(P) - m_2(Q) \geq 0$, por hipótese.
- $\lambda_k = \frac{\alpha}{n} > 0$, uma vez que quer o dividendo, α , quer o divisor, n , são positivos.

Finalmente,

$$\begin{aligned} & \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \\ & = \frac{\alpha}{n.m_1(P)} + \frac{\alpha}{n.m_1(P)} \cdot [m_1(P) - m_2(Q)] + \underbrace{\frac{\alpha}{n} + \dots + \frac{\alpha}{n}}_{n-2 \text{ vezes}} \\ & = \frac{\alpha + \alpha.[m_1(P) - m_2(Q)] + \alpha.(n-2).m_1(P)}{n.m_1(P)} \\ & = \frac{\alpha[(n-1)m_1(P) + 1 - m_2(Q)]}{n.m_1(P)} \\ & = \frac{\alpha[n.m_1(P) + 1 - m_2(Q) - m_1(P)]}{n.m_1(P)} \\ & = 1. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Precisamos ainda provar que a matriz $M^* = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \dots + \lambda_n M_n$ elemento de Ω , fornece um procedimento de divisão do bolo de tal forma que todos os participantes acreditem que obtiveram estritamente mais do que $\frac{1}{n}$ do bolo, de acordo com a sua própria medição. Ora

$$\begin{aligned}
M^* &= \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \dots + \lambda_n M_n = \\
&= \lambda_1 \begin{pmatrix} m_1(P) & m_1(Q) & 0 & \dots & 0 \\ m_2(P) & m_2(Q) & 0 & \dots & 0 \\ * & * & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \\
&+ \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1.m_1(P) & \lambda_1.m_1(Q) & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_1.m_2(P) & \lambda_1.m_2(Q) & 0 & \dots & 0 \\ * & * & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1.m_1(P)}{\lambda_1.m_2(P)} & \frac{\lambda_1.m_1(Q) + \lambda_2}{\lambda_1.m_2(Q) + \lambda_2} & \lambda_3 & \lambda_4 & \dots & \lambda_n \\ * & * + \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * + \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = (m_{ij}^*)_{i,j=1,\dots,n}
\end{aligned}$$

onde

$$m_{11}^* = \lambda_1.m_1(P) = \frac{\alpha}{n.m_1(P)}.m_1(P) = \frac{\alpha}{n}$$

$$m_{22}^* = \lambda_1.m_2(Q) + \lambda_2 = \frac{\alpha}{n.m_1(P)}.m_2(Q) + \frac{\alpha}{n.m_1(P)}.(m_1(P) - m_2(Q))$$

$$= \frac{\alpha}{n \cdot m_1(P)} \cdot m_1(P) = \frac{\alpha}{n}$$

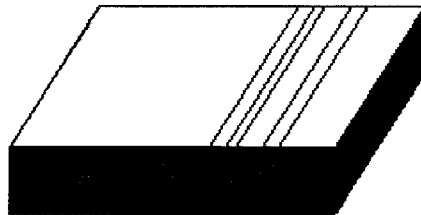
$$m_{kk}^* = \lambda_k = \frac{\alpha}{n}, \text{ para } 3 \leq k \leq n.$$

Assim, a matriz M^* tem na diagonal principal entradas todas iguais a $\frac{\alpha}{n}$. Uma vez que $\alpha > 1$, temos $\frac{\alpha}{n} > \frac{1}{n}$, e portanto sabemos ser possível partir o nosso bolo em n pedaços e distribuí-los de forma a que cada um considere que recebe mais do que $\frac{1}{n}$ do bolo: basta dar o pedaço 1 à pessoa 1, o pedaço 2 à pessoa 2 e assim sucessivamente.

Na prática, a situação não é tão simples, pois não sabemos como são os pedaços 1, 2, 3, ..., n , nem um algoritmo que os corte; sabemos simplesmente que uma tal partição existe.

1.4.2 2º Procedimento

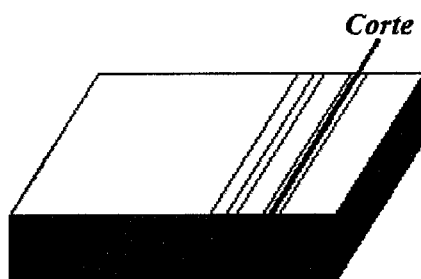
Sob a condição adicional de que não há concordância entre dois quaisquer participantes sobre qualquer pedaço do bolo, conseguimos um método construtivo, e praticável num bolo real, de o dividir de modo a que cada participante receba o que acha ser mais do que $\frac{1}{n}$ do bolo.



Imagine-se um paralelepípedo de bolo e consideremos um dos seus bordos. Cada participante assinala, com um segmento, a partir dessa margem fixada, o termo de uma fatia de topo rectangular que, a seus olhos, mede exactamente $\frac{1}{n}$ do bolo. Como todas as opiniões dos participantes diferem entre si, nenhuma das marcas coincidem; e portanto existe uma primeira (mais perto do bordo) e uma segunda marca a contar do bordo (recordemos que o número de participantes é finito). Corte-se uma fatia algures entre estas duas primeiras marcas e dê-se essa fatia à pessoa que fez a primeira marca. Assim essa pessoa acha que recebe mais do que $\frac{1}{n}$ pois uma fatia valendo exactamente $\frac{1}{n}$ do bolo deveria, segundo ela, ser cortada um pouco antes; e os restantes participantes acham que perderam menos do que $\frac{1}{n}$ do bolo pois as suas marcas estavam todas um pouco mais à frente da primeira.

Procedendo do mesmo modo para os $n - 1$ participantes que ainda não obtiveram uma fatia, conseguimos realmente dividir o bolo em fatias que têm uma forma simples, que agradam a quem as recebe e sem precisar, no uso da indução, de refazer o bolo. O que mostra que a discordância total entre os participantes

não impede que o bolo possa ser dividido de modo a que cada participante receba o que considera ser mais que $\frac{1}{n}$ do bolo.



Capítulo 2

Bissecção com uma faca

2.1 Introdução

No capítulo anterior estudámos modos de cortar de um bolo homogéneo em n partes satisfazendo certas exigências, mas a divisão podia produzir fatias não triviais, não destacáveis por uma faca usual. Neste capítulo a questão a resolver é um pouco diferente. Agora temos um bolo com vários recheios e queremos com um só corte, de uma faca usual, bissectá-lo de forma a que todos os recheios sejam simultaneamente bissectados. Isto é, queremos dividir o bolo ao meio de modo a que cada uma das partes fique exactamente com a mesma quantidade de bolo e com a mesma quantidade de cada um dos recheios.

Matematicamente, o problema pode ser colocado de outra forma: temos n objectos, que ocupam uma determinada posição no espaço, e com um único hiperplano queremos bissectá-los a todos simultaneamente.

Será sempre possível bissectar com um só corte? Não nos esqueçamos que o bolo não é homogéneo nem tem necessariamente formato circular ou de um poliedro com um ou mais eixos de simetria. Além disso, há ainda que não esquecer que pretendemos que o recheio também fique bissectado.

Neste capítulo vamos ver que é possível bissectar um bolo com uma, duas ou três camadas e explicitaremos um método elucidativo que nos permite encontrar geometricamente esse corte. Mas se a este bolo com três camadas acrescentarmos uma quarta camada, este corte pode não existir.

Repare-se que comparando este problema com o do capítulo anterior, apesar de agora só obtermos divisão em duas partes, ganhou-se pelo facto de não se exigir ao bolo que seja homogéneo, pode ter até 3 camadas, e ainda porque agora se pode utilizar uma faca (real) para proceder ao corte. De qualquer modo, o argumento que aqui será explicitado também não é construtivo, indica que existe um tal corte, mas na prática não sabemos onde o fazer.

Começaremos pelo problema análogo no plano e com apenas um objecto. Veremos que bissectar uma área é consequência imediata do Teorema do Valor

Intermédio sobre funções contínuas reais de variável real. De seguida, consideraremos duas figuras com área e a sua bissecção simultânea. Estes argumentos generalizam-se facilmente para duas figuras com volume no espaço, mas não para três. E portanto, a estratégia no espaço para três figuras, ainda que se inspire no caso plano, envolverá dificuldades adicionais.

2.2 Bissecção em $\mathbb{R}^2$

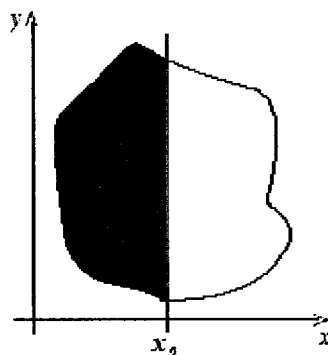
2.2.1 Um objecto

Consideremos uma fatia de fiambre com uma forma qualquer (rectangular, estrelada ou mesmo como uma amiba) onde a única exigência é que seja uma fatia no sentido habitual: constitua uma região limitada e conexa do plano, com área positiva. Procuramos uma recta vertical que divida o pedaço de fiambre exactamente ao meio, ou seja, em dois pedaços com a mesma área.

Dada uma qualquer recta vertical, ela divide o plano em duas regiões: a região à sua esquerda e a que está à sua direita. Consideremos a área da porção da fatia de fiambre que se encontra na região à esquerda e a área da porção de fiambre na região à direita da recta; o que se pretende é encontrar uma recta para a qual estas áreas sejam iguais. No referencial cartesiano usual, em que o eixo dos yy toma a posição vertical e o eixo dos xx a posição horizontal, e supondo que a fatia de fiambre tem área total igual a 1, o problema é equivalente a encontrar uma recta da forma $x = k$, para a qual a área do fiambre à esquerda dela (ou à direita) é igual a $\frac{1}{2}$.

Comecemos por considerar a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada valor de x_0 associa a área da porção da fatia de fiambre que está à esquerda da recta vertical $x = x_0$. A função f está bem definida, uma vez que, se a região considerada tem área, a partição dela por uma recta produz duas porções ainda mensuráveis.

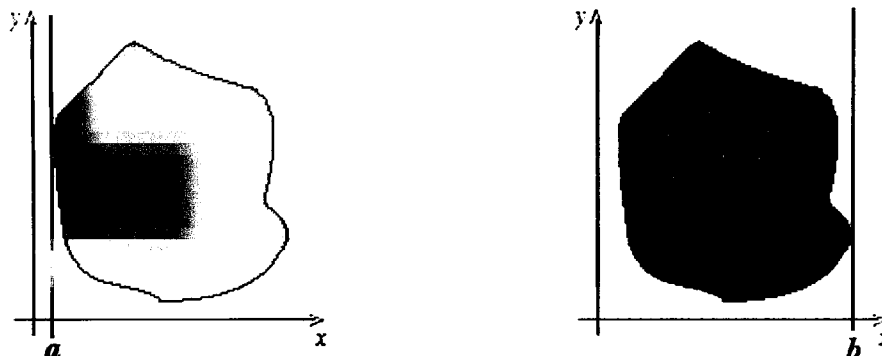
Por exemplo, na figura seguinte, $f(x_0)$ é a área da região do fiambre sombreada.



Note-se que como a fatia é limitada, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que, se $x_0 \leq a$, então a recta vertical $x = x_0$ está totalmente à esquerda do fiambre; logo $f(x_0) = 0$.

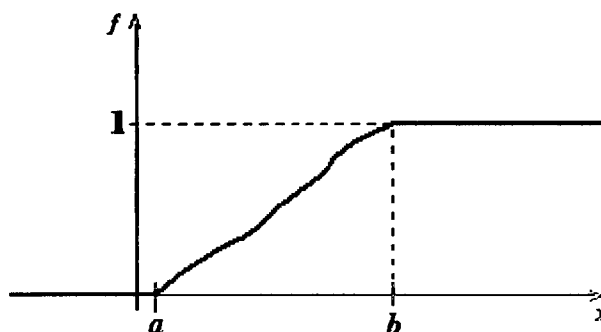
Analogamente, existe $b \in \mathbb{R}$ para o qual o fiambre está inteiramente à esquerda da recta vertical $x = b$; e portanto, se $x_0 \geq b$, $f(x_0) = 1$.

Imaginemos que a recta $x = a$ inicia uma translação até atingir a recta $x = b$.



Com a fatia fixa, ao *translatarmos* a recta vertical $x = a$, a área, que f mede, cresce de 0 a 1.

Por exemplo, para a figura representada anteriormente, o gráfico de f é aproximadamente o seguinte:



Além disso, uma variação pequena no valor de x_0 aumenta pouco a área do que fica à esquerda da recta vertical. Isto significa intuitivamente que f , além de monótona, não muda repentinamente de valor (isto é, não tem descontinuidades). Que se trata de facto de uma função contínua resulta das propriedades da função área que estão delineadas no 1º Apêndice, como provaremos de seguida.

Proposição 3 *A função f é contínua.*

Prova. Recorde-se que uma função real de variável real diz-se contínua se dado $x_0 \in \mathbb{R}$ existe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ e esse limite é igual a $f(x_0)$. Reparemos que:

1. f é monótona crescente.

Sejam x_1 e x_2 números reais tais que $x_1 < x_2$. Por construção, $f(x_1)$ é a área da porção da fatia de fiambre que se encontra à esquerda da recta vertical

$x = x_1$ e $f(x_2)$ é a área da porção da fatia de fiambre que se encontra à esquerda da recta vertical $x = x_2$. Como $x_1 < x_2$, a porção da fatia de fiambre que está à esquerda da recta $x = x_1$ também está à esquerda da recta $x = x_2$. Portanto, e pela monotonia da função área (ver 1º Apêndice, página 40, propriedade 2), a área da primeira porção é menor ou igual à área da segunda porção, isto é, $f(x_1) \leq f(x_2)$.

2. Para qualquer real x_0 , existem os limites laterais de f em x_0 .

Consideremos $x_0 \in \mathbb{R}$ fixo e os conjuntos

$$A_{x_0} = \{f(x) : x < x_0\} \text{ e}$$

$$B_{x_0} = \{f(x) : x > x_0\}.$$

Uma vez que f tem domínio $\mathbb{R}$, A_{x_0} e B_{x_0} são conjuntos não vazios. Por outro lado, A_{x_0} e B_{x_0} são conjuntos majorado e minorado, respectivamente. De facto, como f é crescente, para todo o $x \in \mathbb{R}$ tal que $x < x_0$, temos $f(x) \leq f(x_0)$, e portanto, $f(x_0)$ é majorante de A_{x_0} . Analogamente, $f(x_0)$ é minorante de B_{x_0} .

Podemos assim, pelo Axioma do Supremo¹, concluir que A_{x_0} tem supremo - chamemos-lhe s_{x_0} - e B_{x_0} tem ínfimo - chamemos-lhe i_{x_0} . Além disso, e uma vez que f é crescente, temos $s_{x_0} \leq f(x_0) \leq i_{x_0}$.

Provaremos que $s_{x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ e $i_{x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$. Por s_{x_0} ser o menor supremo de A_{x_0} , considerando $\varepsilon > 0$, $s_{x_0} - \varepsilon$ não é um majorante de A_{x_0} , logo existe $a \in A_{x_0}$, $a = f(z_0)$ para algum $z_0 < x_0$, tal que $s_{x_0} - \varepsilon < f(z_0) \leq s_{x_0}$. Uma vez que f é crescente, para $x_0 > x \geq z_0$ tem-se $f(x) \geq f(z_0)$, logo $s_{x_0} - \varepsilon < f(z_0) \leq f(x) \leq s_{x_0}$. Assim, para x tal que $z_0 \leq x < x_0$, tem-se $f(x) \in]s_{x_0} - \varepsilon, s_{x_0}] \subset]s_{x_0} - \varepsilon, s_{x_0} + \varepsilon[$, ou seja, $s_{x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.

Analogamente se prova que $i_{x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

3. Se f , que é crescente, for descontínua em x_0 , devemos ter

$$\underbrace{\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)}_{\text{existe e é finito}} \leq f(x_0) \leq \underbrace{\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)}_{\text{existe e é finito}} \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x),$$

caso contrário, estes limites são iguais, e portanto $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) =$

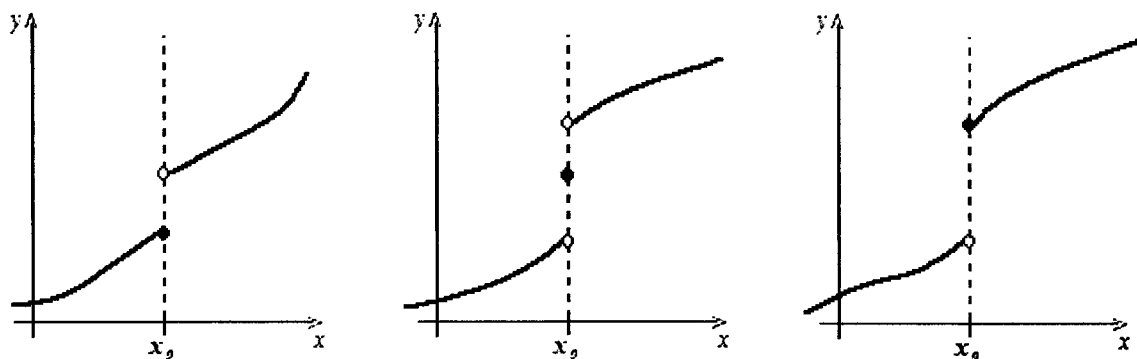
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, ou seja, f seria contínua em x_0 .

4. Vejamos finalmente que f é contínua em $\mathbb{R}$.

¹**Axioma do Supremo** *Todo o subconjunto não-vazio e majorado de $\mathbb{R}$ tem um menor majorante.*

Suponhamos que f é descontínua em x_0 . Sabemos que $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

e $f(x_0) \in \left[\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \right]$. Ou seja, temos, localmente, um dos três casos seguintes:



Qualquer um destes casos significa que a intersecção da fatia de fiambre com a recta $x = x_0$ tem área positiva, o que não é possível, uma vez que esta intersecção é um segmento de recta de área zero (ver 1º Apêndice, página 41). ■

Corolário 4 *Existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = \frac{1}{2}$, isto é, a recta $x = c$ bissecta o fiambre.*

Prova. Pelo Teorema do Valor Intermédio, como f é contínua, $f(a) = 0$ e $f(b) = 1$, existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = \frac{1}{2}$. ■

Note-se, contudo, que não sabemos quem é este valor c .

No argumento anterior, o referencial usado não teve um papel especial. Podemos utilizar outro par de eixos ortogonais e seguir a mesma estratégia para este sistema. Deste modo, provamos que:

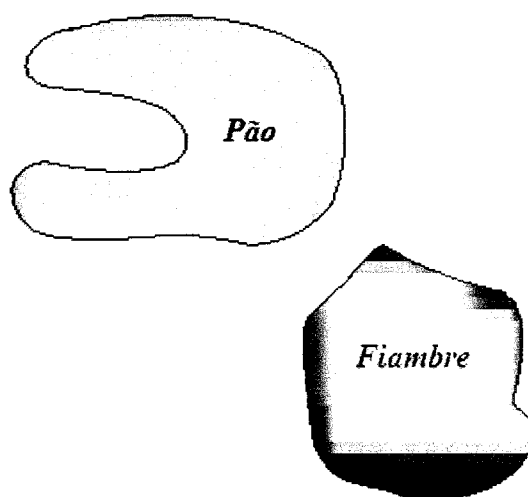
Para toda a direcção no plano existe uma recta perpendicular a ela que bissecta o fiambre.

Este argumento é generalizável a uma figura em $\mathbb{R}^3$ com volume $v > 0$. Se no argumento anterior substituírmos rectas perpendiculares a uma direcção fixada por planos perpendiculares a essa direcção, e considerarmos a função que, para cada um destes planos, dá o volume da porção da figura que fica acima do plano obtemos uma função contínua cuja imagem contém 0 e v , e portanto $\frac{v}{2}$. Ou seja, *para toda a direcção do espaço existe um plano perpendicular a essa direcção que bissecta o volume da figura tridimensional.*

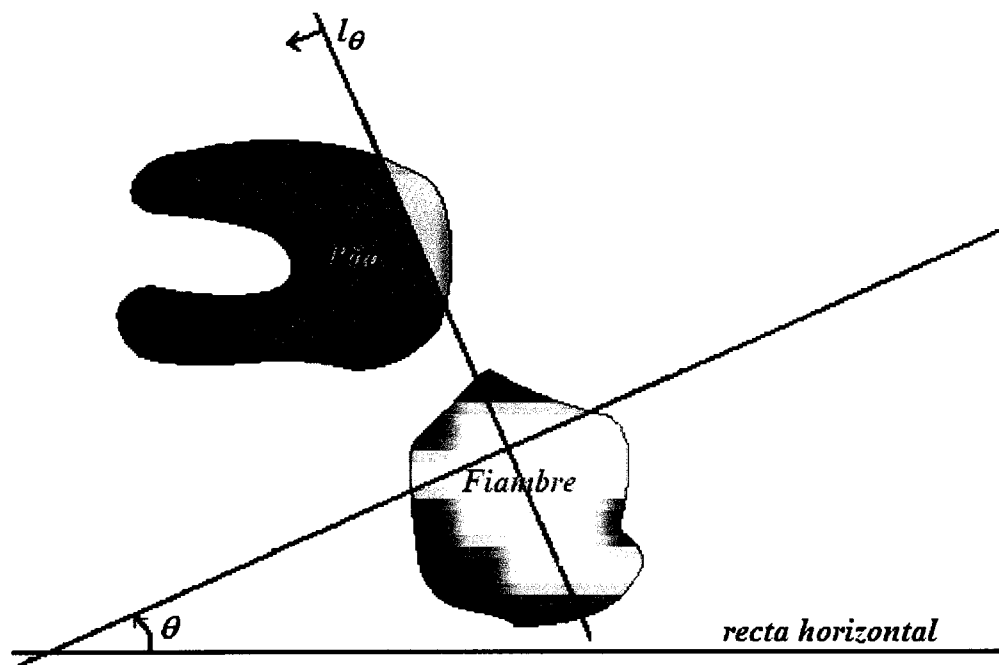
2.2.2 Dois objectos

Consideremos agora duas fatias (limitadas, conexas e mensuráveis), uma de pão e outra de fiambre, ainda no plano. Vejamos um algoritmo que permite bissectar simultaneamente o pão e o fiambre.

Para exemplificar, comecemos pela configuração particular de pão e fiambre apresentada na figura seguinte:

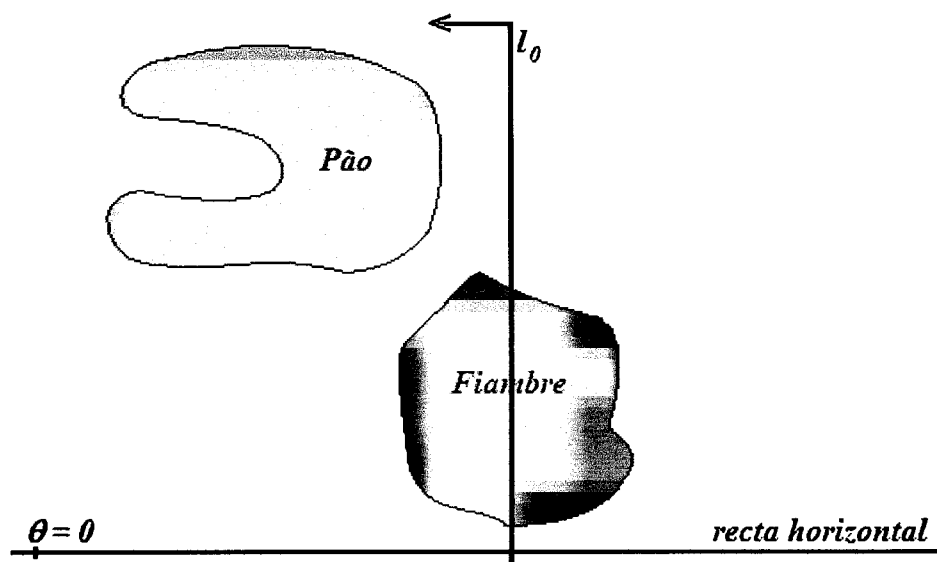


Já sabemos que, dada uma direcção no plano (caracterizada por um ângulo θ relativamente à horizontal) existe uma recta l_θ perpendicular a essa direcção que bissecta a área do fiambre. Imaginemos agora θ a variar, e portanto l_θ a rodar, e calculemos a área da porção de pão que está à esquerda de l_θ .

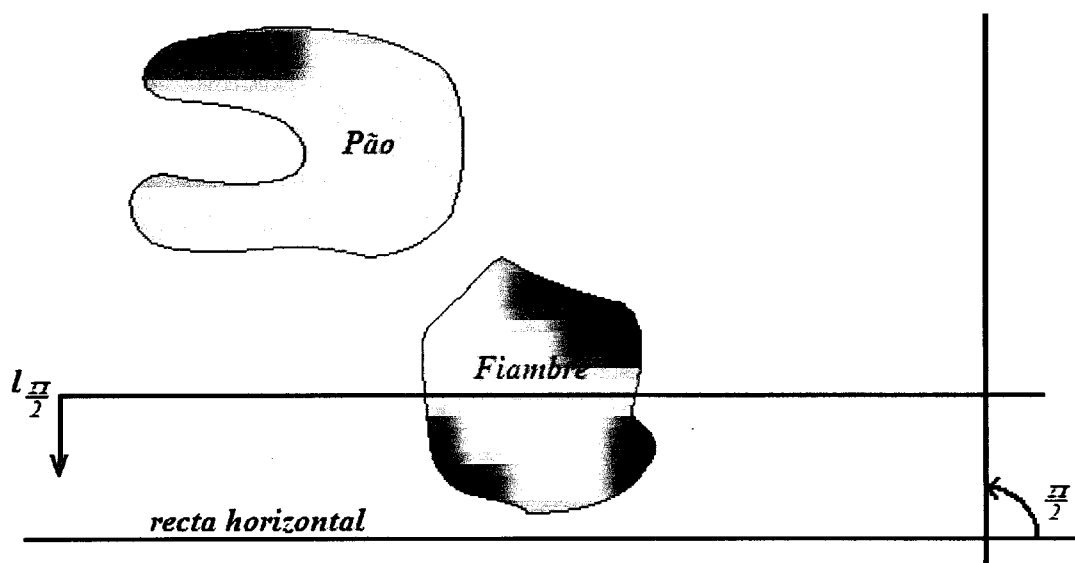


Consideremos a função g que a cada ângulo θ associa a área de pão que está à esquerda da recta l_θ . Por exemplo, na figura anterior $g(\theta)$ é a área da zona representada a mais escuro. Esta função é contínua, tal como a função f descrita na secção anterior.

Suponhamos que o fiambre ocupa área 1 e que o pão tem área a (sendo a um qualquer número real positivo). Reparemos na figura que, se $\theta = 0$, todo o pão está à esquerda da recta l_0 , recta perpendicular à recta horizontal e que bissecta o fiambre; ou seja, $g(0) = a$.



Do mesmo modo, na figura, quando $\theta = \frac{\pi}{2}$, nenhuma fracção de pão está acima da recta $l_{\frac{\pi}{2}}$ e portanto $g(\frac{\pi}{2}) = 0$.

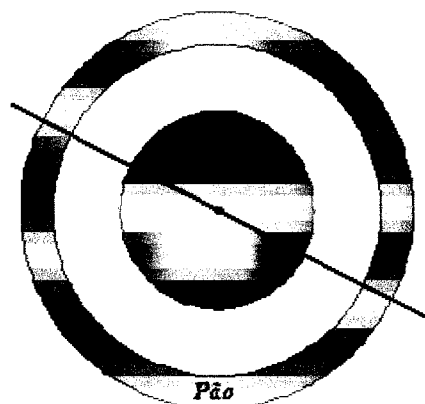


Portanto, pelo Teorema do Valor Intermédio, existe $\eta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tal que $g(\eta) = \frac{a}{2}$. Logo, l_η , além de bissectar a fatia de fiambre, por definição de l_η , também bissecta a fatia de pão.

Note-se que, no espaço, dadas duas figuras com volumes positivos em configuração idêntica a esta que analisámos, podemos argumentar do mesmo modo substituindo rectas perpendiculares a uma dada direcção por planos perpendiculares a uma direcção fixada.

Ora este argumento serve para duas figuras numa qualquer configuração, desde que exista um valor de θ , θ_0 , para o qual o valor de g seja menor que $\frac{a}{2}$ e outro, θ_1 , cujo valor por g seja maior que $\frac{a}{2}$. Assim, aplicando o Teorema do Valor Intermédio, garantimos a existência de η entre θ_0 e θ_1 tal que $g(\eta) = \frac{a}{2}$, confirmando-se que l_η bissecta simultaneamente o fiambre e o pão. Mas será que existem sempre estes valores de θ ?

Por exemplo, se a fatia de fiambre tiver forma circular e a de pão for uma coroa também circular concêntrica, qualquer recta que passe pelo centro bissecta as duas fatias.

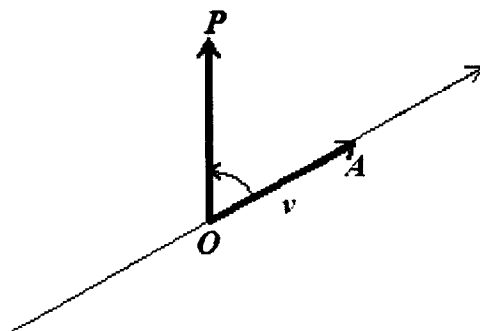


De facto, para que uma recta bissecte a fatia circular de fiambre tem que passar necessariamente pelo centro da coroa. Deste modo, essa mesma recta bissecta a rodela de pão, não existindo contudo $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ tal que $g(\theta_0) < \frac{a}{2}$ e $\theta_1 \in [0, 2\pi]$ tal que $g(\theta_1) > \frac{a}{2}$. (De qualquer modo, este inconveniente desta configuração é também a maneira fácil de bissectar as duas coroas e por isso o nosso problema, encontrar uma recta que bissecta as duas fatias, é facilmente resolvido.)

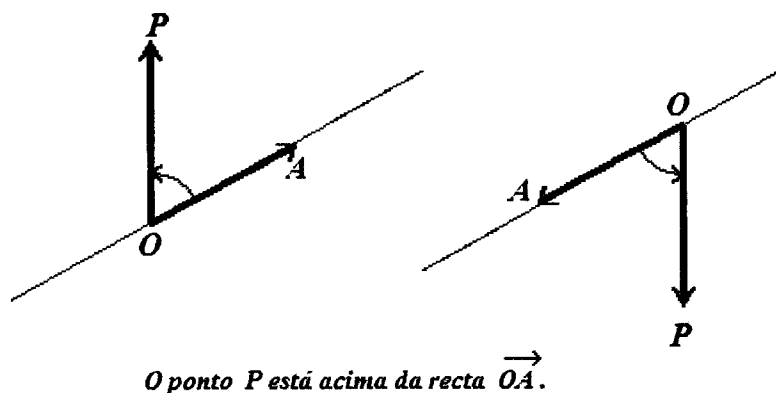
2.2.3 Orientação da faca

Aproveitemos o exemplo anterior para escrever um argumento geral de bissecção de duas figuras planas que, como veremos, se estende de imediato a duas ou três figuras no espaço.

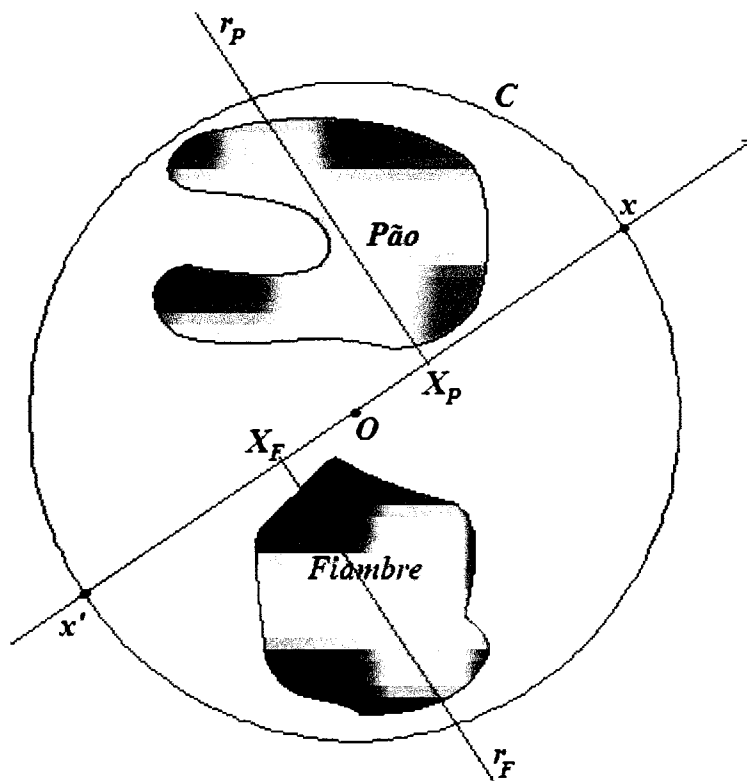
Note-se primeiro que, para indicarmos sem ambiguidades qual a *região acima* de uma recta temos de a orientar; assim, dado o vector director $v = \vec{OA}$



orientado como a recta, de coordenadas (v_1, v_2) um ponto $P = (p_1, p_2)$ do plano está na região acima da recta se e só se P pertence à recta ou o determinante $\begin{vmatrix} v_1 & p_1 \\ v_2 & p_2 \end{vmatrix} > 0$. Vejam-se as figuras seguintes:



Inspirados pelo plano projectivo, podemos indicar como a recta l_θ está orientada usando as suas intersecções com uma circunferência fixada. Vejamos como descrever este procedimento no nosso contexto. Consideremos dois quaisquer pedaços de fiambre e de pão no plano. Como os dois pedaços são limitados existe um círculo, delimitado por circunferência C , que contém os dois pedaços. Sejam x um ponto desta circunferência e seja x' o ponto diametralmente oposto. Consideremos uma recta r_F , perpendicular à recta xx' , que bissecta o fiambre (existe pelo que foi mostrado na secção anterior) e uma recta r_P , perpendicular à recta xx' , que bissecta o pão.



Definam-se, para cada x , o ponto X_F de intersecção de r_F com a recta xx' e a função $g_F(x)$ como a distância de X_F a O , com sinal positivo se X_F está entre O e x , e com sinal negativo se X_F está entre O e x' . Analogamente, seja $g_P(x)$ a distância de X_P a O , com sinal positivo se X_P está entre O e x , e com sinal negativo se X_P está entre O e x' , onde X_P é a intersecção de r_P com a recta xx' . Obter uma direcção xx' e uma recta perpendicular a ela que bissecte simultaneamente o pão e o fiambre corresponde a encontrar x tal que $r_F \equiv r_P$, ou seja, $g_F(x) = g_P(x)$.

Consideremos a função

$$\begin{aligned} h : C &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto g_F(x) - g_P(x) \end{aligned}$$

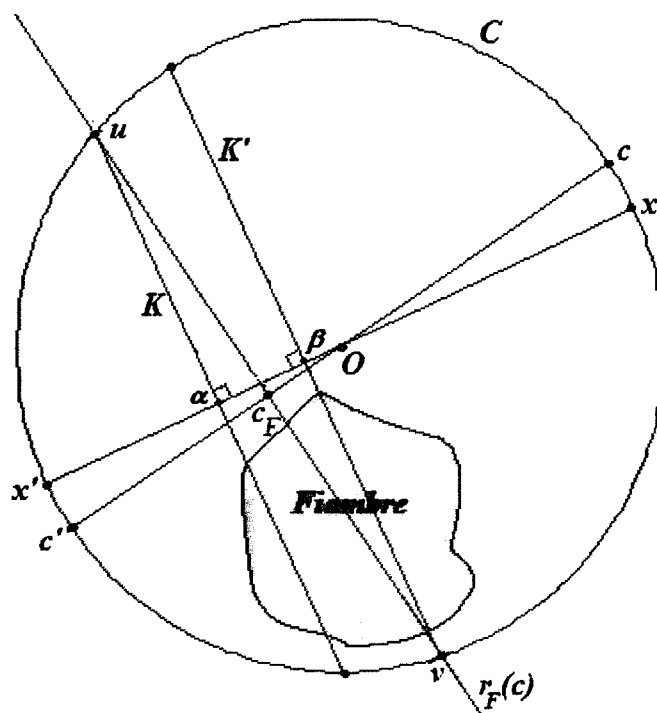
Proposição 5 h é contínua e anti-simétrica.

Prova.

1. g_F é contínua

Seja c um ponto de C no qual queremos mostrar que g_F é contínua. Consideremos o diâmetro D_c , da circunferência C , de extremos c e c' (ponto de C diametralmente oposto a c) e $r_F(c)$ a recta perpendicular a D_c que bissecta o fiambre F . Designemos por c_F o ponto de intersecção de $r_F(c)$ com D_c .

Consideremos x ponto de C próximo de c . Designemos por u e v os pontos de intersecção de $r_F(c)$ com a circunferência C e tracemos as rectas K e K' perpendiculares ao segmento xx' e que passam, respectivamente, por u e v .

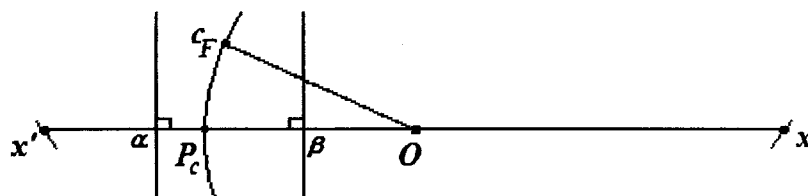


A recta $r_F(c)$ divide o interior de C em duas partes, U e V , e a faixa entre K e K' separa o seu complementar em C em duas partes, U' e V' , tais que $U' \subset U$ e $V' \subset V$.

Assim, U' e V' contêm, cada uma, quando muito metade da área do fiambre F . Logo a recta $r_F(x)$, perpendicular a xx' e que divide o fiambre a meio, está na faixa delimitada por K e K' ; e portanto o ponto X_F , de intersecção da recta $r_F(x)$ e do segmento xx' , também está dentro dessa faixa.

Consideremos a circunferência de centro O e que passa por c_F . Se α e β são pontos de intersecção de K e K' com o segmento xx' , respectivamente, temos $|Oc_F| > |O\beta|$ e $|Oc_F| < |O\alpha|$, porque c_F pertence à faixa delimitada por K e K' .

Daqui resulta que a circunferência de centro O e que passa por c_F intersecta o segmento xx' num ponto P_c dentro da faixa:



Isto implica que

$$|g_F(x) - g_F(c)| < \text{largura da faixa} = L$$

uma vez que

$$|g_F(x) - g_F(c)| =$$

$$||Oc_F| - |OX_F|| =$$

$$||OP_c| - |OX_F|| \stackrel{[1]}{=} |P_cX_F| \stackrel{[2]}{<} L$$

[1] porque P_c e x_F estão ambos no segmento xx' dentro da faixa

[2] este segmento é perpendicular a K e a K' ,

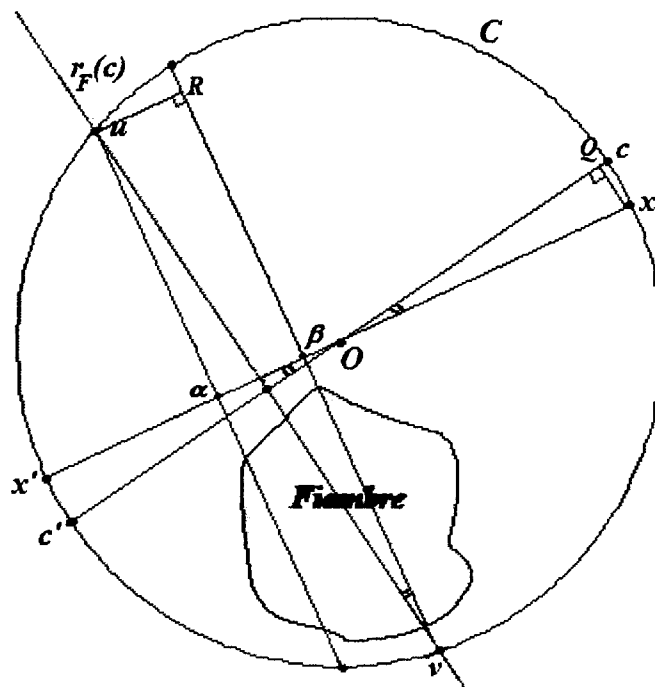
e portanto $|P_cX_F| < |\alpha - \beta| = \text{largura da faixa} = L$.

Para obtermos uma estimativa da largura da faixa, note-se que:

(a) Por semelhança dos triângulos OQx e uvR ,

$$\frac{|uR|}{|uv|} = \frac{|xQ|}{|Ox|},$$

onde Q é o pé da perpendicular de x a D_c e R é o pé da perpendicular de u a K' .



Como $|Ox| = r$ e $|uR| = L$, podemos reescrever a igualdade anterior deste modo: $L = \frac{|xQ||uv|}{r}$.

(b) Como u e v são pontos de C , $|uv| \leq$ diâmetro de $C = 2r$

(c) xQc é triângulo rectângulo em Q , logo $|xQ| < |xc|$.

De (a), (b) e (c) resulta que $L = \frac{|xQ||uv|}{r} \leq 2|xQ| < 2|xc|$

e portanto $|g_F(x) - g_F(c)| \leq 2|xc|$, o que prova a continuidade de g_F em c : dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ tal que se $|xc| < \delta$, $|g_F(x) - g_F(c)| < \varepsilon$.

2. De forma análoga, conclui-se que g_P é contínua. E portanto h , diferença de g_F e g_P , é contínua.

3. h é anti-simétrica, ou seja, para todo o ponto x da circunferência, temos $h(x) = -h(x')$, onde x' é o ponto da circunferência diametralmente oposto a x . Para verificar esta propriedade, basta observar que $g_F(x')$ é positiva se X_F está entre O e x' , e negativa se X_F está entre O e x , e portanto é igual ao simétrico de $g_F(x)$. O mesmo acontece a g_P .

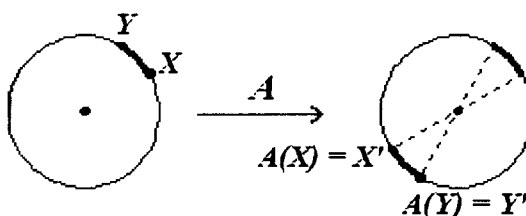
Assim,

$$h(x') = g_F(x') - g_P(x'), \text{ por definição}$$

$$= -g_F(x) - (-g_P(x)) = -(g_F(x) - g_P(x)) = -h(x). \blacksquare$$

Proposição 6 *Sejam C uma circunferência e $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Existe um par de pontos diametralmente opostos que têm a mesma imagem.*

Prova. Sejam $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua da circunferência C em $\mathbb{R}$ e $g : C \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(X) = f(X) - f(X')$, onde X' é o ponto diametralmente oposto a X . Procuramos um zero da função g , uma vez que $g(P) = 0$ se e só se $f(P) - f(P') = 0$, ou seja, $f(P) = f(P')$. A função g é contínua, pois é a diferença de funções contínuas, f e $f \circ \mathcal{A}$, onde $\mathcal{A}(X) = X'$. De facto, consideremos em C a distância induzida pela métrica euclidiana no plano. Esta distância é equivalente à mais intrínseca, àquela em que a distância entre dois pontos é o comprimento do arco que os une no sentido contrário ao ponteiro dos relógios. Usaremos esta versão, digamos d_C , para verificar que $\mathcal{A}$ é contínua.



$d_C(X, Y) =$ comprimento do arco, no sentido
contrário aos ponteiros do relógio,
de X a Y .

Dado $P \in C$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \varepsilon$ tal que $d_C(P, Q) < \delta$ garante que $d_C(\mathcal{A}(P), \mathcal{A}(Q)) = d_C(P', Q') = d_C(P, Q) < \delta = \varepsilon$. Note-se que em notação complexa, utilizando a estrutura algébrica de $\mathbb{R}^2$, a função g é dada por $g(Z) = f(Z) - f(-Z)$ e portanto, neste contexto, a continuidade de g resulta imediatamente da continuidade de f e da função $-Id$.

Ora $g(X) = f(X) - f(X')$ e $g(X') = f(X') - f(X) = -g(X)$. Assim, fixado $P \in C$, ou $g(P)$ e $g(P')$ são ambos nulos, e neste caso P e P' têm a mesma imagem por f ; ou g tem sinais opostos em P e P' . Neste segundo caso, uma vez que g é contínua e anti-simétrica, existe um ponto Q pertencente à referida semi-circunferência tal que $g(Q) = 0$.

Lema 2 Se $G : \hat{C} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, onde $\hat{C}$ é uma semi-circunferência de extremos P e P' , sendo $G(P).G(P') < 0$, então existe $Q \in \hat{C}$ tal que $G(Q) = 0$.

Prova. O lema decorre directamente do Teorema do Valor Intermédio, [S], pois a semi-circunferência é homeomorfa a $[0, 1]$ e este teorema é herdado via homeomorfismo.

Consideremos um homeomorfismo α entre $\hat{C}$ e $[0, 1]$ tal que $\alpha(P') = 0$ e $\alpha(P) = 1$.

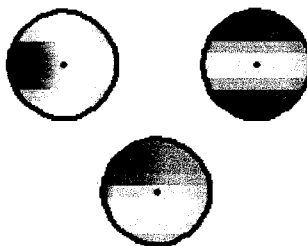
Seja $j : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto G \circ \alpha^{-1}(x)$. A função j é contínua porque é a composta de duas funções contínuas. Além disso, $j(0) = g \circ \alpha^{-1}(0) = g(P')$ e $j(1) = g \circ \alpha^{-1}(1) = g(P)$, logo $j(0).j(1) = g(P').g(P) < 0$. Então, pelo Teorema do Valor Intermédio, existe $0 < c < 1$ tal que $j(c) = 0$. Logo $Q = \alpha^{-1}(c)$ é ponto de $\hat{C}$ tal que $g(Q) = j \circ \alpha(Q) = j \circ \alpha(\alpha^{-1}(c)) = j(c) = 0$. ■ ■

Corolário 7 A função h tem um zero.

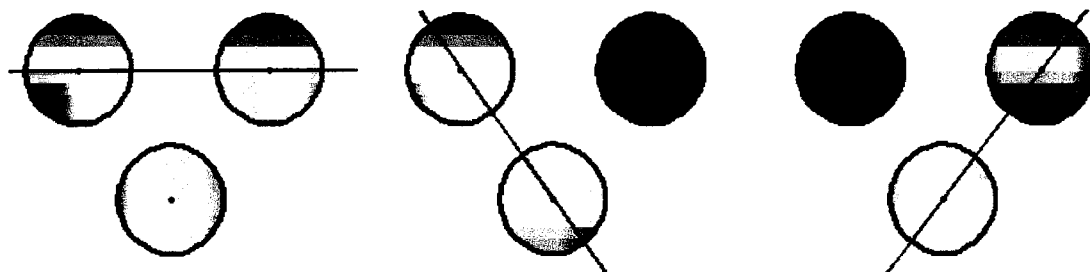
Prova. Uma vez que a função $h : C \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, pela proposição anterior existe um par de pontos diametralmente opostos, x_0 e x'_0 , para os quais se tem $h(x_0) = h(x'_0)$. Como a função h é anti-simétrica, $h(x_0) = -h(x'_0)$; logo $h(x_0) = -h(x_0)$ e portanto $h(x_0) = 0$. ■

2.3 Bissecção em $\mathbb{R}^3$

Não é, em geral, possível bissectar com uma recta 3 figuras do plano. Por exemplo, se três círculos estão na configuração representada abaixo,



qualquer recta que bissecte um deles tem de passar pelo seu centro, mas não existe uma recta que passe simultaneamente pelos três centros se estes não são colineares como na figura, sendo portanto impossível com uma única recta bissectar simultaneamente os três círculos.



Precisamos de um novo argumento no espaço, isto é, que não seja mera adaptação de método no plano para o espaço como fizemos até aqui. Mas parte do argumento da secção anterior pode ser generalizado para 3 figuras no espaço.

Consideremos três figuras A , B e C tridimensionais (regiões conexas, limitadas e com volume positivo) numa qualquer disposição no espaço. Como são limitadas, existe uma esfera $\mathcal{B}$ que os contém. Seja O o centro dessa esfera.

Consideremos um ponto P qualquer da superfície esférica S (fronteira de $\mathcal{B}$) e o seu ponto antípoda P' . Sejam α_A , α_B e α_C os planos perpendiculares à recta PP' que bissectam A , B e C (na subsecção 2.2.1 provámos a existência de tais planos) e x_A , x_B e x_C os pontos de intersecção da recta PP' com os planos α_A , α_B e α_C , respectivamente.

Como anteriormente defina-se g_A como a função que a um dado ponto P da superfície esférica associa a distância de x_A a O , sendo positiva no caso de x_A estar entre O e P e negativa no caso de x_A estar entre O e P' . De forma análoga, definem-se as funções g_B e g_C .

Pretende-se encontrar um plano que bissecte simultaneamente os três pedaços, ou seja, nos termos aqui expostos, desejamos encontrar um ponto Q na superfície esférica para o qual os planos α_A , α_B e α_C , perpendiculares à direcção QQ' e que bissectam A , B e C , respectivamente, coincidam. Assim sendo, x_A , x_B e x_C terão que ser iguais, logo as distâncias a O são as mesmas; ou seja, $g_A(Q) = g_B(Q) = g_C(Q)$.

Tal como na secção 2.2.3, reunamos a informação destas três funções numa só, considerando a função

$$\begin{aligned} h: S &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ P &\mapsto (g_A(P) - g_B(P), g_A(P) - g_C(P)) \end{aligned}$$

Procuramos um ponto Q tal que $h(Q) = (0, 0)$.

Teorema 8 (Borsuk-Ulam) *Sejam $F, G : S \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas definidas numa superfície esférica S . Existe $P_0 \in S$ tal que $F(P_0) = F(P'_0)$ e $G(P_0) = G(P'_0)$.*

Note-se a semelhança deste enunciado com o da Proposição 6: consideremos duas funções contínuas numa superfície esférica e o teorema garante, tal como a Proposição 6 para uma função contínua numa circunferência, a existência de um par de pontos diametralmente opostos com a mesma imagem por ambas as funções.

Resulta deste teorema que se F e G são funções anti-simétricas (ou seja, $F(P) = -F(P')$ e $G(P) = -G(P')$ para todo o $P \in S$), então existe um zero comum a F e a G . De facto, o teorema fornece $P_0 \in S$ tal que $F(P_0) = F(P'_0)$ e $G(P_0) = G(P'_0)$; como $F(P_0) = -F(P'_0)$ e $G(P_0) = -G(P'_0)$ destas igualdades concluímos que $F(P_0) = G(P_0) = 0$.

Apliquemos estas conclusões à função h .

Corolário 9 *A função h tem um zero.*

Prova. Sejam $F(P) = g_A(P) - g_B(P)$ e $G(P) = g_A(P) - g_C(P)$ as duas funções coordenadas de h . São contínuas e anti-simétricas (para ver que F e G são anti-simétricas basta argumentar de modo análogo ao usado para a função h na secção 2.2.3, página 26) e portanto, pelo Teorema de Borsuk-Ulam, existe $P_0 \in S$ tal que $F(P_0) = G(P_0) = 0$. ■

O que significa que existe $P_0 \in S$ tal que $g_A(P_0) = g_B(P_0) = g_C(P_0)$, ou seja, existe uma direcção, definida por $P_0P'_0$, e um plano perpendicular a esta direcção que bissecta simultaneamente as três figuras.

No que se segue provaremos o Teorema de Borsuk-Ulam.

Começemos por observar que o enunciado do Teorema de Borsuk-Ulam é equivalente ao resultado seguinte:

Teorema 10 (do Zero Comum) *Se F e G são funções contínuas e anti-simétricas numa superfície esférica S , então existe um ponto $P_0 \in S$ tal que $F(P_0) = G(P_0) = 0$.*

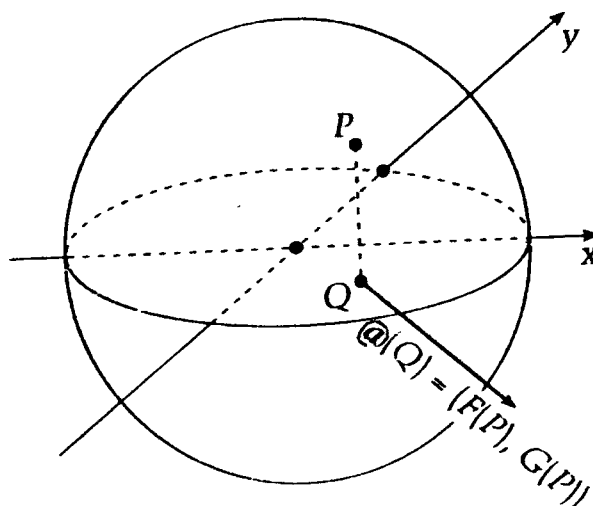
Vejamos que o Teorema 10 implica o Teorema 8. Sejam f e g funções contínuas numa superfície esférica S . Consideremos F e $G : S \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $F(P) = f(P') - f(P)$ e $G(P) = g(P') - g(P)$, onde P' designa o antípoda de P em S . Estas funções F e G são contínuas e anti-simétricas, uma vez que $F(P') = f(P'') - f(P') = f(P) - f(P') = -F(P)$ e $G(P') = g(P'') - g(P') = g(P) - g(P') = -G(P)$. Admitindo provado o Teorema do Zero Comum, existe $P_0 \in S$ tal que $F(P_0) = G(P_0) = 0$, o que significa que $f(P'_0) = f(P_0)$ e $g(P'_0) = g(P_0)$, e que, como se pretende, prova o Teorema de Borsuk-Ulam.

Para ver que o Teorema 8 implica o Teorema 10, sejam F e G funções contínuas e anti-simétricas numa superfície esférica S . O Teorema de Borsuk-Ulam garante que existe $P_0 \in S$ tal que $F(P'_0) = F(P_0)$ e $G(P'_0) = G(P_0)$. Como F e G são anti-simétricas, $F(P'_0) = -F(P_0)$ e $G(P'_0) = -G(P_0)$. Destas quatro igualdades resulta que $F(P_0) = 0 = G(P_0)$, o que significa que encontrámos um zero comum a F e a G .

Note-se a semelhança desta equivalência com o argumento mais frequente para se provar o Teorema do Valor Intermédio (ver [S]).

Repare-se ainda que a função $h : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida atrás pode ser vista como um campo de vectores (isto é, um par ordenado de duas funções reais que a cada ponto Q associa um ponto do plano $(x(Q), y(Q))$) contínuo (ou seja, ambas as funções coordenadas são contínuas; a demonstração deste facto usa argumento idêntico ao da prova da Proposição 5), com funções coordenadas anti-simétricas, definido numa superfície esférica. Assim o que se pretende é encontrar um ponto na superfície esférica onde este campo de vectores se anule.

Consideremos duas funções F e G definidas numa superfície esférica S e com valores em $\mathbb{R}$, contínuas e anti-simétricas. Construamos um plano passando pelo centro O de S . A intersecção deste plano com a esfera é um disco meridiano $\mathcal{K}$, cujo bordo é uma circunferência que designamos por $\mathcal{C}$. Introduzamos um sistema de coordenadas cartesianas no plano cuja origem é o centro O da esfera. A cada ponto Q de $\mathcal{K}$ associemos o vector $@(Q) = (F(P), G(P))$, onde P é o ponto no hemisfério superior de S (relativo ao plano que estamos a considerar) que se projecta em Q . Veja-se a figura seguinte, de [C,S].



$@$ é um campo de vectores contínuo em $\mathcal{K}$ (porque F , G , a projecção e a sua inversa são contínuas). Como F e G são anti-simétricas, o campo de vectores $@$ verifica $@(Q) = -@(Q')$ para todo o ponto Q da circunferência $\mathcal{C}$, uma vez que:

- (i) $@(Q') = (F(R), G(R))$, onde R é o ponto no hemisfério superior de S que se projecta em Q' ;
- (ii) como $Q \in \mathcal{C}$, temos $Q' \in \mathcal{C}$ e portanto $R = Q'$;
- (iii) $@(Q') = (F(Q'), G(Q')) = (-F(Q), -G(Q)) = -(F(Q), G(Q)) = -@(Q)$.

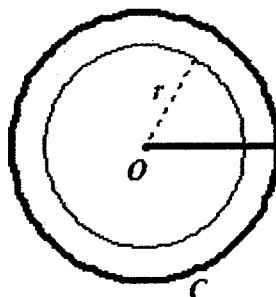
Lema 3 *Se num campo de vectores contínuo, definido num círculo, os vectores correspondentes em quaisquer pontos diametralmente opostos da circunferência, bordo do círculo, têm sentidos opostos, então o campo de vectores anula-se em algum ponto.*

Este resultado é uma versão para a circunferência do Teorema do Valor Inter-médio. A condição de troca de sinal, hipótese do Teorema do Valor Intermédio é aqui substituída pela condição do campo de vectores ter sentidos opostos em pontos antípodas.

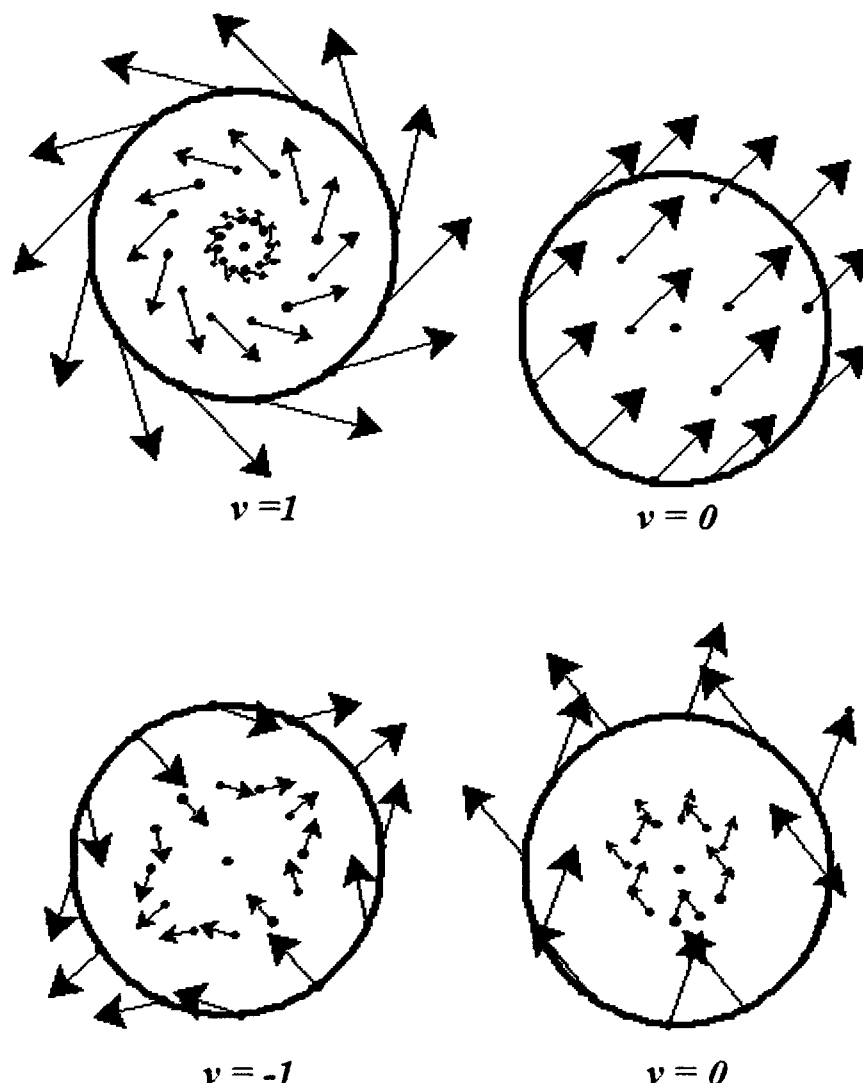
Por este lema, existe um ponto $Q_0 \in \mathcal{K}$ tal que $@(Q_0) = 0$. Logo $F(P_0) = 0 = G(P_0)$, onde P_0 é o ponto do hemisfério superior de S que se projecta em Q_0 .

Para terminar, provemos o Lema 3.

Prova. Sejam O o centro de um círculo K e ρ o seu raio. Designemos a circunferência fronteira de K por C e, para qualquer número $r \leq \rho$, por C_r a circunferência centrada em O e com raio r .



Seja $\mathcal{X}$ um campo de vectores contínuo em K . Fixemos r_0 e suponhamos que $\mathcal{X}(Q) \neq 0$ para todo o Q de C_{r_0} . Denotemos por $v_{\mathcal{X}}(C_{r_0})$ o número de revoluções completas que o vector $\mathcal{X}$ aplicado a um ponto I de C_{r_0} efectua no sentido contrário aos ponteiros do relógio enquanto I percorre no mesmo sentido C_{r_0} . O número inteiro $v_{\mathcal{X}}(C_{r_0})$ pode ser positivo, negativo (se as revoluções se fizeram no sentido horário) ou nulo. Note-se ainda que, se $\mathcal{X}(Q)$ dá algumas voltas no sentido anti-horário e o mesmo número de voltas no sentido horário, estas revoluções anulam-se e $v_{\mathcal{X}}$ é zero.



Note-se ainda que, para definir $v_{\mathcal{X}}$, usámos dois ingredientes: que $\mathcal{X}$ não se anula ao longo da curva C_r e que C_r é uma curva fechada (para contar o número de voltas que $\mathcal{X}$ dá quando o ponto retorna à posição inicial) e simples (isto é, injectiva, que permita movimento ao ponto sobre a curva, sem repetições, com excepção das posições inicial e final).

Seja $@$ um campo de vectores contínuo e anti-simétrico em K .

Suponhamos, por redução ao absurdo, que $@$ não se anula. Assim, em particular, $@(0) \neq 0$. Pela continuidade de $@$, a direcção de todos os vectores $@(Q)$ é próxima da direcção de $@(0)$ se Q está numa vizinhança pequena de 0. Assim, para um $\varepsilon_0 > 0$ pequeno, temos $v(C_{\varepsilon_0}) = 0$, uma vez que a direcção dos vectores em C_{ε_0} é quase a mesma que a direcção de $@(0)$. Vamos agora aumentar ε até ao seu valor extremo ρ . Uma vez que $@(Q) \neq 0$ para todo o Q e C_ε é injectiva

se $\varepsilon > 0$, $v(C_\varepsilon)$ está definido como anteriormente para todos os valores de ε , $0 < \varepsilon \leq \rho$. Isto é, a função v está definida para todo $\varepsilon \in]0, \rho]$.

$$\begin{array}{ccc} v :]0, \rho] & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \varepsilon & \longmapsto & v(C_\varepsilon) \end{array}$$

é contínua (uma prova detalhada pode ler-se em [C,S], páginas 98 e seguintes) e toma somente valores inteiros. Como v é contínua e definida num intervalo, a sua imagem é um intervalo. Como v só toma valores inteiros, v que ser constante. Concluimos assim que $v(C_\varepsilon) = v(C_{\varepsilon_0}) = 0$, para todo o $\varepsilon \in]0, \rho]$, e portanto, em particular, $v(C) = 0$.

Consideremos agora um ponto A na circunferência C e o seu ponto antípoda A' . Uma vez que os sentidos dos vectores $@(A)$ e $@(A')$ são opostos, o vector $@(Q)$ faz um número ímpar de meias voltas quando Q se move de A a A' ao longo do arco $\widehat{AA'}$. Quando Q se move de A' a A ao longo do arco $\widehat{A'A}$, o vector $@(Q)$ dá o mesmo número de voltas no mesmo sentido. Deste modo, $v(C)$ é um número ímpar (o número de voltas completas é igual a metade do número de meias voltas, que, neste caso, é o dobro de um número ímpar), o que contradiz a igualdade $v(C) = 0$. ■

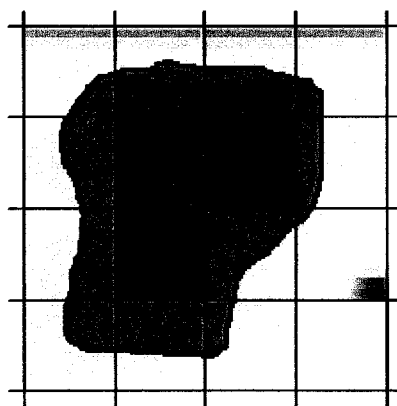
1º Apêndice: Função Área

O conteúdo deste apêndice segue de perto o primeiro capítulo do livro de Boltianski, *The Hilbert's third problem*.

Sendo uma figura uma região limitada do plano, o que é a área de uma figura? Ou o que é que representa a área de uma figura? Se fizermos esta pergunta aos nossos alunos a maioria falará do espaço que a figura ocupa, uma definição pouco esclarecedora e à qual se coloca imediatamente uma nova questão: e qual é o espaço que uma figura ocupa? Como associar a esse espaço um número?

Se dissermos aos nossos alunos que a área de uma figura representa o número de unidades de área que constituem essa figura, o conceito de área é facilmente intuído. No entanto, esta descrição não serve como definição matemática se não explicarmos o que é uma unidade de área e de que modo elas constituem figuras. Por exemplo, qual é o número de unidades de área que constituem um círculo? Nem sequer é claro nesta tentativa de definição como se pode obter uma tal partição e esse número neste caso. Para resolver este problema, tenta-se enquadrar a figura entre regiões das quais é mais fácil contar o número de unidades de área que as constituem.

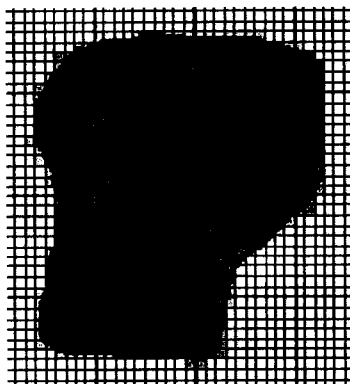
Consideremos a decomposição do plano em quadrados congruentes (não sobrepostos) de lado 1 (unidade de comprimento fixada), formando um mosaico.



A figura A contém três quadrados do mosaico e está contida numa figura constituída por 15 quadrados, logo se tiver área, devemos ter $3 \leq \text{área de } A \leq 15$.

Subdividindo o lado de cada um dos quadrados em 10 partes, podemos construir um novo mosaico em que cada quadrado do mosaico anterior é formado

por 100 quadrados do novo mosaico. Nesta nova subdivisão, a figura A contém 649 quadrados de lado $\frac{1}{10}$ e está contida em 774 quadrados de lado $\frac{1}{10}$; e portanto $\frac{649}{10^2} \leq \text{área de } A \leq \frac{774}{10^2}$. Procedendo de modo análogo, obtemos um melhor enquadramento da figura A, ou seja, um menor intervalo a que pertence o valor da área da figura A.



Designemos por 0-ésimo o mosaico que decompõe o plano em quadrados de lado 1; ao mosaico obtido deste dividindo cada um destes lados em 10 partes, ou seja, em que cada lado tem $\frac{1}{10}$ de comprimento, chamamos o 1º mosaico; e assim sucessivamente: o k -ésimo mosaico é o constituído por quadrados de lado igual a $\frac{1}{10^k}$, onde $k \in \mathbb{N}$.

Considere-se uma figura limitada F e um inteiro não negativo k . Seja a_k o número de quadrados do k -ésimo mosaico contidos na figura F e b_k o número de quadrados do k -ésimo mosaico cuja união contém a figura F . Estes números, a_k e b_k , existem, porque a figura é uma região limitada do plano. Note-se que os a_k quadrados do k -ésimo mosaico são parte dos b_k quadrados deste mosaico, porque a união destes b_k quadrados tem de conter a figura F que contém os a_k quadrados. Logo $\frac{a_k}{10^{2k}} \leq \frac{b_k}{10^{2k}}$, para todo o natural k .

Definição 1 A figura F diz-se *mensurável* se e só se $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{10^{2k}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{b_k}{10^{2k}}$, e nesse caso, a área de F é esse valor comum.

Denotamos $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{10^{2k}}$ por $\underline{s}(F)$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{b_k}{10^{2k}}$ por $\bar{s}(F)$ e a área de F por $s(F)$. Os valores $\frac{a_k}{10^{2k}}$ e $\frac{b_k}{10^{2k}}$ são aproximações ao valor da área da figura por defeito e por excesso, respectivamente.

Por exemplo, um quadrado de lado 1 é uma figura para a qual os valores de $\underline{s}(F)$ e $\bar{s}(F)$ coincidem e são iguais a 1; isto é, o quadrado de lado 1 é uma figura mensurável de área 1.

Para a figura Q constituída pelos pontos do quadrado de lado 1 com ambas as coordenadas racionais, temos:

★ $\underline{s}(F) = 0$, uma vez que tão próximo quanto se queira de um ponto racional existe um irracional, logo, por muito pequeno que seja o quadrado do mosaico

a considerar, ele contém pontos não racionais. Assim, nenhum quadrado de lado positivo está contido em Q .

★ $\bar{s}(F) \geq 1$, pois todos os quadradinhos que intersectam $[0, 1] \times [0, 1]$ contêm um ponto de Q porque Q é denso em $[0, 1]^2$.

E portanto a figura Q , apesar de limitada, não é mensurável.

Temos assim uma função área definida no conjunto das figuras mensuráveis que a cada figura mensurável F associa um número real não-negativo $s(F)$.

Qual o domínio da função área? Esta questão não tem uma resposta simples. Já vimos o que é uma figura mensurável, exibimos até um exemplo. Podemos mesmo provar que todos os polígonos são figuras mensuráveis (veja-se [B]), mas é difícil dar uma descrição exaustiva de todos os elementos deste domínio. De qualquer modo, o que se pretende ao definir a função área $\mathcal{A}$ é que ela cumpra alguns requisitos intuitivos sobre esta noção, nomeadamente os quatro axiomas seguintes:

Axioma 1 A função $\mathcal{A}$ é não negativa, isto é, $\mathcal{A}(F) \geq 0$ qualquer que seja a figura mensurável F .

Axioma 2 A função $\mathcal{A}$ é aditiva, isto é, se F' e F'' são duas figuras mensuráveis, tais que $F' \cap F'' = \emptyset$, então a figura $F' \cup F''$ também é mensurável e $\mathcal{A}(F' \cup F'') = \mathcal{A}(F') + \mathcal{A}(F'')$.

Axioma 3 A função $\mathcal{A}$ é invariante por movimentos rígidos do plano (translações, rotações, reflexões e suas compostas), isto é, se F é uma figura mensurável e F' é a figura obtida por um destes movimentos aplicado a F , então a figura F' é também mensurável e $\mathcal{A}(F') = \mathcal{A}(F)$.

Axioma 4 A função $\mathcal{A}$ é normalizada, isto é, o quadrado com lado de comprimento 1 (unidade) é uma figura mensurável e $\mathcal{A}(Q) = 1$.

A função s , cuja construção usando os mosaicos foi descrita acima verifica estas quatro propriedades. É possível provar que existe uma só função que verifica simultaneamente os 4 axiomas, logo a função s é a função área que pretendemos.

Destes axiomas resultam propriedades como as descritas em seguida.

Proposição 11 Sejam F e F' duas figuras mensuráveis.

1. Se F e F' pertencem ao domínio de s , então os conjuntos $F \setminus F'$, $F \cap F'$ e $F \cup F'$ também pertencem ao domínio de s .
2. A função s é monótona, isto é, se $F' \subseteq F$, então $s(F') \leq s(F)$.

Prova de 1. Começaremos por um critério fácil para testar a mensurabilidade de uma figura sem precisar de calcular o valor da sua área.

Recordemos que um polígono é uma região do plano delimitada por uma curva poligonal fechada (união de segmentos de recta).

Lema 4 *Uma figura F é mensurável se e só se dado $\varepsilon > 0$ existem polígonos G e H tais que $G \subseteq F \subseteq H$ e $s(H) - s(G) < \varepsilon$.*

Prova. Seja F uma figura. Suponhamos que F é mensurável. Sabemos que $\underline{s}(F) = \overline{s}(F)$, ou seja, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{10^{2k}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{b_k}{10^{2k}}$, onde a_k é o número máximo de quadradinhos do k -ésimo mosaico contidos em F e b_k é o número mínimo de quadradinhos do k -ésimo mosaico cuja união contém F . Então, fixado $\varepsilon > 0$, existe um natural $p \in \mathbb{N}$ tal que para $k \geq p$ temos $\frac{a_k}{10^{2k}}, \frac{b_k}{10^{2k}} \in]a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}[$. Isto significa que se $G_p =$ união dos a_p quadrados do p -ésimo mosaico e $H_p =$ união dos b_p quadrados do p -ésimo mosaico, temos $G_p \subseteq F \subseteq H_p$ e $\frac{b_p}{10^{2p}} - \frac{a_p}{10^{2p}} < \varepsilon$, ou seja, $s(H_p) - s(G_p) < \varepsilon$.

Reciprocamente, suponhamos que dado $\varepsilon > 0$ existem polígonos G e H tais que $G \subseteq F \subseteq H$ e $s(H) - s(G) < \varepsilon$.

Como G e H são mensuráveis (pois são polígonos), existem um $k \in \mathbb{N}$ arbitrariamente grande, uma união G_ε de a_k quadradinhos do k -ésimo mosaico tal que $G_\varepsilon \subseteq G$ e $s(G) - s(G_\varepsilon) < \varepsilon$ e uma união H_ε de b_k quadradinhos do k -ésimo mosaico tal que $H \subseteq H_\varepsilon$ e $s(H_\varepsilon) - s(H) < \varepsilon$. Então $G_\varepsilon \subseteq G \subseteq F \subseteq H \subseteq H_\varepsilon$ e $s(H_\varepsilon) - s(G_\varepsilon) = s(H_\varepsilon) - s(H) + s(H) - s(G) + s(G) - s(G_\varepsilon) < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$, isto é, $\frac{b_k}{10^{2k}} - \frac{a_k}{10^{2k}} < 3\varepsilon$. Como ε é arbitrariamente pequeno, deduzimos desta desigualdade que $\lim_{l \rightarrow +\infty} (\frac{b_l}{10^{2l}} - \frac{a_l}{10^{2l}}) \leq 0$, isto é, $\overline{s}(F) \leq \underline{s}(F)$.

Uma vez que $\overline{s}(F)$ é sempre maior ou igual $\underline{s}(F)$, podemos concluir que $\overline{s}(F) = \underline{s}(F)$, e portanto que F é mensurável. ■

Retomemos a prova da propriedade 1. Provaremos primeiro que a diferença entre dois conjuntos mensuráveis é ainda um conjunto mensurável. Daqui resulta que a mensurabilidade é estável para uniões e intersecções finitas, uma vez que se F e F' são duas figuras mensuráveis e M é um polígono que contém ambas (existe porque $F \cup F'$ é conjunto limitado), então:

$$F \cup F' = M \setminus ((M \setminus F) \setminus F')$$

$$F \cap F' = M \setminus ((M \setminus F) \cup (M \setminus F')).$$

Sejam F e F' duas figuras mensuráveis e $\varepsilon > 0$. Pelo lema existem polígonos G, G', H e H' tais que $G \subset F \subset H$, $G' \subset F' \subset H'$, $s(H) - s(G) < \frac{\varepsilon}{4}$ e $s(H') - s(G') < \frac{\varepsilon}{4}$. Usando uma homotetia podemos dilatar H' de modo a que F' esteja contida no interior de H' . Sejam $\mathcal{G} = G \setminus \overset{\circ}{H'}$ e $\mathcal{H} = H \setminus \overset{\circ}{G'}$. $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ são conjuntos fechados, e de facto polígonos, que satisfazem $\mathcal{G} \subseteq F \setminus F' \subseteq \mathcal{H}$. Para terminar a prova bastará provar que $s(\mathcal{H}) - s(\mathcal{G}) < \varepsilon$, o que estará garantido se encontrarmos k suficientemente grande e dois polígonos Q_1 e Q_2 formados por quadradinhos do k -ésimo mosaico tais que $s(Q_1) < \frac{\varepsilon}{2}$, $s(Q_2) < \frac{\varepsilon}{2}$

e $\overline{\mathcal{H} \setminus \mathcal{G}} \subset Q_1 \cup Q_2$; nesse caso, como $\overline{\mathcal{H} \setminus \mathcal{G}}$ é um polígono com bordo de área 0, $s(\overline{\mathcal{H} \setminus \mathcal{G}}) = s(\mathcal{H}) - s(\mathcal{G}) \leq s(Q_1 \cup Q_2) \leq s(Q_1) + s(Q_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

As figuras $\overline{H \setminus G}$ e $\overline{H' \setminus G'}$ são polígonos (logo mensuráveis), e, pelo Axioma 2, verificam $\frac{\varepsilon}{4} > s(\overline{H \setminus G}) = s(H \setminus G) = s(H) - s(G)$ e $\frac{\varepsilon}{4} > s(\overline{H' \setminus G'}) = s(H' \setminus G') = s(H') - s(G')$. Então existe k suficientemente grande e Q_1 e Q_2 uniões de quadradinhos do k -ésimo mosaico tais que $\overline{H \setminus G} \subset Q_1$, $\overline{H' \setminus G'} \subset Q_2$, $s(Q_1) - s(\overline{H \setminus G}) < \frac{\varepsilon}{4}$ e $s(Q_2) - s(\overline{H' \setminus G'}) < \frac{\varepsilon}{4}$. Logo $s(Q_1) < \frac{\varepsilon}{4} + s(\overline{H \setminus G}) < \frac{\varepsilon}{2}$ e $s(Q_2) < \frac{\varepsilon}{4} + s(\overline{H' \setminus G'}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Além disso, $\overline{\mathcal{H} \setminus \mathcal{G}} \subset Q_1 \cup Q_2$ e portanto $s(\overline{\mathcal{H} \setminus \mathcal{G}}) < \varepsilon$. ■

Prova de 2. Sejam F e F' duas figuras mensuráveis tais que $F' \subseteq F$. Sabemos que $F = F' \dot{\cup} (F \setminus F')$ e que, sendo F e F' mensuráveis, $F \setminus F'$ também o é (Propriedade 1). Portanto, pelo Axioma 2, temos $s(F) = s(F') + s(F \setminus F')$. Uma vez que, pelo Axioma 1, $s(F')$ e $s(F \setminus F')$ são não negativos, podemos concluir que $s(F) \geq s(F')$. ■

Nenhuma construção conhecida da função área fornece uma fórmula que dê o valor da área de cada figura mensurável. Mas para algumas regiões poligonais é possível deduzir expressões da área em função de parâmetros (por exemplo, lados) da figura (podem ser lidas deduções em [B]). Por exemplo,

$$\text{área}(\text{rectângulo de lados } a, b) = a \times b$$

$$\text{área}(\text{segmento de comprimento } b) = 0^1$$

$$\text{área}(\text{triângulo de base } b \text{ e altura } h) = \frac{b \times h}{2}$$

$$\text{área}(\text{paralelogramo de lados } a, b) = a \times b$$

$$\text{área}(\text{trapézio de bases } a, b \text{ e altura } h) = (a + b) \times \frac{h}{2}$$

Da construção da função área resulta que, se R é região mensurável e S é um segmento de recta, então $R \setminus S$ é mensurável e união de duas componentes ambas mensuráveis (o argumento é idêntico à prova de que, se uma função limitada é integrável num intervalo $[a, b]$ e $a < c < b$, então é integrável em $[a, c]$ e em $[c, b]$).

¹Um tal segmento está contido num rectângulo de lados b e ε , para todo $\varepsilon > 0$; como a área é função monótona, a área do segmento é menor ou igual a $b \cdot \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$.

2º Apêndice: Teorema de Lyapunov e Teorema de König

Anexam-se de seguida cópias de uma prova do Teorema de König e de uma prova do Teorema de Lyapunov, ambos utilizados no Capítulo 1.

O primeiro teorema é um resultado de Combinatória, consequência do Teorema de Hall sobre matrizes de entradas 0 e 1, e dele podemos deduzir o Teorema de Forbenius-König. Do Teorema de König resulta que, se uma matriz $n \times n$ não tem diagonais generalizadas só com 1's, então o número mínimo de linhas ou colunas contendo todos os 1's da matriz (designadas por $r + s$ no Teorema de Forbenius-König) é inferior a n , uma vez que n é o número máximo de entradas de um diagonal generalizada de uma matriz $n \times n$. Podemos admitir, sem perda de generalidade, que essas são as primeiras r linhas e as primeiras s colunas. Então a matriz contém uma submatriz com todas as entradas iguais 0 e de dimensões $(n - r) \times (n - s)$

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} & r & & & & & \\ & * & \cdots & * & & & \\ & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ s & * & \cdots & * & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & & n-s & \\ & & & & & & n-r \end{array} \right)$$

onde

$$(n-r) + (n-s) = 2n - (r+s) > 2n - n = n$$

ou seja,

$$(n-r) + (n-s) \geq n+1.$$

O Teorema de Lyapunov utiliza a noção de medida sobre uma σ -álgebra de conjuntos mensuráveis e o Lema de Zorn. No nosso contexto, cada linha da matriz representa um modo de medir do respectivo participante. Temos assim uma matriz de medidas. A prova do Teorema de Lyapunov consiste em garantir a existência de uma partição do bolo que, quando avaliado por cada participante conduza à matriz dada.

and therefore we have

$$(m_r - r)_* = 1 \quad \text{if } k \leq r \leq \nu_{k-1},$$

and

$$(m_{\mu_i} - k - i)_* = 1 \quad \text{if } \mu_i \leq \nu_{k-1}.$$

This implies that

$$\begin{aligned} f_k(m_0, \dots, m_{k-1}) &= \prod_{0 \leq i \leq \nu_{k-1}} (m_i - i)_*, \\ f_i(m_{\mu_0} - k, \dots, m_{\mu_{i-1}} - k) &= \prod_{\nu_{k-1} < j < n} (m_j - j)_*, \end{aligned}$$

i.e. the product (5.1) is equal to $F_n(m_0, \dots, m_{n-1})$, which proves the theorem. $\square$

PROBLEM 5B. Show that Theorem 5.3 gives the best lower bound for the number of SDRs of the sets A_i that only involves the numbers $|A_i|$.

We now come to a theorem known as König's theorem. It is equivalent (whatever that means) to Hall's theorem. In the theorem, A is a $(0,1)$ -matrix with entries a_{ij} . By a *line*, we mean a row or a column of A .

THEOREM 5.4. The minimum number of lines of A that contain all the 1's of A is equal to the maximum number of 1's in A , no two on a line.

PROOF: Let m be the minimum number of lines of A containing all the 1's of A and let M be the maximum number of 1's, no two on a line. Clearly $m \geq M$. Let the minimum covering by lines consist of r rows and s columns ($r + s = m$). Without loss of generality, these are the first r rows and the first s columns. We now define sets A_i , $1 \leq i \leq r$, by $A_i := \{j > s : a_{ij} = 1\}$. If some k -tuple of the A_i 's contained less than k elements, then we could replace the corresponding k rows by $k - 1$ columns, still covering all the 1's. Since this is impossible, we see that the A_i 's satisfy property H . So the A_i 's have an SDR. This means that there are r 1's, no two on a

THEOREM 5.3. Let $(A_0, \dots, A_{n-1})$ be a sequence of subsets of a set S . Let $m_i := |A_i|$ ($i = 0, \dots, n-1$) and let $m_0 \leq m_1 \leq \dots \leq m_{n-1}$. If the sequence has property H , then

$$N(A_0, \dots, A_{n-1}) \geq F_n(m_0, \dots, m_{n-1}).$$

PROOF: The proof is by induction. Clearly the theorem is true for $n = 1$. We distinguish two cases.

Case 1. There is no critical block. In this case, we choose any element a of A_0 as its representative and then remove a from all the other sets. This yields sets, that we call $A_1(a), \dots, A_{n-1}(a)$, and for these sets property H still holds. By the induction hypothesis and by the lemma, we find

$$\begin{aligned} N(A_0, \dots, A_{n-1}) &\geq \sum_{a \in A_0} f_{n-1}(|A_1(a)|, \dots, |A_{n-1}(a)|) \\ &\geq \sum_{a \in A_0} f_{n-1}(m_1 - 1, \dots, m_{n-1} - 1) \\ &= m_0 f_{n-1}(m_1 - 1, \dots, m_{n-1} - 1) \\ &= F_n(m_0, m_1, \dots, m_{n-1}). \end{aligned}$$

Case 2. There is a critical block $(A_{\nu_0}, \dots, A_{\nu_{k-1}})$ with $\nu_0 < \dots < \nu_{k-1}$ and $0 < k < n$. In this case, we delete all elements of $A_{\nu_0} \cup \dots \cup A_{\nu_{k-1}}$ from all the other sets A_i which produces $A'_{\mu_0}, \dots, A'_{\mu_{l-1}}$, where $\{\nu_0, \dots, \nu_{k-1}, \mu_0, \dots, \mu_{l-1}\} = \{0, 1, \dots, n-1\}$, $k + l = n$.

Now both $(A_{\nu_0}, \dots, A_{\nu_{k-1}})$ and $(A'_{\mu_0}, \dots, A'_{\mu_{l-1}})$ satisfy property H and SDRs of the two sequences are always disjoint. Hence by the induction hypothesis and the lemma, we have

$$\begin{aligned} (5.1) \quad N(A_0, \dots, A_{n-1}) &= N(A_{\nu_0}, \dots, A_{\nu_{k-1}}) N(A'_{\mu_0}, \dots, A'_{\mu_{l-1}}) \\ &\geq f_k(m_{\nu_0}, \dots, m_{\nu_{k-1}}) f_l(|A'_{\mu_0}|, \dots, |A'_{\mu_{l-1}}|) \\ &\geq f_k(m_{\nu_0}, \dots, m_{\nu_{k-1}}) f_l(m_{\mu_0} - k, \dots, m_{\mu_{l-1}} - k) \\ &\geq f_k(m_0, \dots, m_{k-1}) f_l(m_{\mu_0} - k, \dots, m_{\mu_{l-1}} - k). \end{aligned}$$

Now we remark that

$$m_{\nu_{k-1}} \leq |A_{\nu_0} \cup \dots \cup A_{\nu_{k-1}}| = k,$$

line, in the first r rows and not in the first s columns. By the same argument there are s 1's, no two on a line, in the first s columns and not in the first r rows. This shows that $M \geq r + s = m$ and we are done. $\square$

The following theorem of G. Birkhoff is an application of Hall's theorem.

THEOREM 5.5. *Let $A = (a_{ij})$ be an n by n matrix with nonnegative integers as entries, such that every row and column of A has sum l . Then A is the sum of l permutation matrices.*

PROOF: Define A_i , $1 \leq i \leq n$, by $A_i := \{j : a_{ij} > 0\}$. For any k -tuple of the A_i 's, the sum of the corresponding rows of A is kl . Since every column of A has sum l , the nonzero entries in the chosen k rows must be in at least k columns. Hence the A_i 's satisfy property H . An SDR of the A_i 's corresponds to a permutation matrix $P = (p_{ij})$ such that $a_{ij} > 0$ if $p_{ij} = 1$. The theorem now follows by induction on l . $\square$

PROBLEM 5C. In the hypothesis of Theorem 5.5, we replace "integers" by "reals". Show that in this case, A is a nonnegative linear combination of permutation matrices. (Equivalently, every doubly stochastic matrix—see Chapter 11—is a convex combination of permutation matrices.)

PROBLEM 5D. Let S be the set $\{1, 2, \dots, mn\}$. We partition S into m sets $A_1, \dots, A_m$ of size n . Let a second partitioning into m sets of size n be $B_1, \dots, B_m$. Show that the sets A_i can be renumbered in such a way that $A_i \cap B_i \neq \emptyset$.

Notes.

Philip Hall published his result in 1935 (with a rather difficult proof). The proof that we gave is a generalization of ideas of Hallmos and Vaughan, Rado, and M. Hall. The proof is due to Ostrand (1970) and Hautus and Van Lint (1972). See Van Lint (1974). The problem of complete matchings is often referred to as the *marriage problem*.

D. König (1884–1944) was professor at Budapest. He wrote the first comprehensive treatise on graph theory (Theorie der endlichen

und unendlichen Graphen, 1936). König (1916) contains the first proof of (one of the theorems called) König's theorem.

Just before Theorem 5.4, we referred to the "equivalence" of these theorems. This expression is often used when each of two theorems is more or less an immediate consequence of the other.

The theorem by Birkhoff (1946), i.e. Theorem 5.5, is extremely useful and will be applied a number of times in later chapters.

References.

- G. Birkhoff (1946), Tres observaciones sobre el algebra lineal, *Univ. Nac. Tucumán, Rev. Ser. A*, **5**, 147–151.
 P. Hall (1935), On representatives of subsets, *J. London Math. Soc.* **10**, 26–30.
 D. König (1916), Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre, *Math. Annalen* **77**, 453–465.
 J. H. van Lint (1974), *Combinatorial Theory Seminar Eindhoven University of Technology*, Lecture Notes in Mathematics **382**, Springer-Verlag.
 P. Ostrand (1970), Systems of distinct representatives, *J. of Math. Analysis and Applic.* **32**, 1–4.

be the element of $\mathfrak{U}$ corresponding to E (under the isomorphism of the separable subalgebra with $\mathfrak{S}$). Then $u_i(A) = \frac{1}{2}u_i(U)$ for all i , completing the proof.

The next result shows that the solution of the bisection problem can be used to find a one-parameter monotone family of subsets $A(t)$ such that $u(A(t)) = tu(U)$.

LEMMA 5.3. *Let u be a nonatomic vector measure as in (5.2). There exists a function $t \rightarrow A(t)$ mapping the closed unit interval $[0, 1]$ into $\mathfrak{U}$ such that:*

- (1) $u(A(t)) = tu(U)$, (2) $t_1 < t_2 \Rightarrow A(t_1) \subset A(t_2)$.

Proof. Let Q be the collection of functions $t \rightarrow A(t)$ defined on subsets of $[0, 1]$ satisfying (1) and (2) where defined. We define a partial ordering in Q by saying one function is larger than another if its domain of definition is larger and its restriction to the smaller domain equals the smaller function. Zorn's lemma can be applied to Q to prove the existence of a maximal function A . We need only show A is defined on all of $[0, 1]$. Let D be the domain of A . Then if t_i is a monotone sequence in D converging from below (or from above) to a t not in D , we can extend A to $D \cup \{t\}$ by defining $A(t) = \bigcup A(t_i)$ (or $A(t) = \bigcap A(t_i)$). This contradicts the maximality of A . Therefore, monotone sequences in D converge in D so that D is closed.

Now suppose D is not all of $[0, 1]$. Since 0 and 1 are clearly in D (because if not we could extend A by defining $A(0) = \emptyset$ and $A(1) = U$) and D is closed, there exist $t_1, t_2 \in D$ with $t_1 < t_2$ such that no point of the open interval (t_1, t_2) is in D . By (2) we have $A(t_1) \subset A(t_2)$. The restriction of u to the measurable subsets of $A(t_2) - A(t_1)$ satisfies the hypothesis of (5.2) so there exists a measurable subset B of $A(t_2) - A(t_1)$ such that $u(B) = \frac{1}{2}u(A(t_2) - A(t_1))$. We can extend A to $D \cup \{\frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_2\}$ by defining $A(\frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_2) = B \cup A(t_1)$. This contradicts the maximality and therefore $D = [0, 1]$.

It should be noticed that Lemma 5.3 is equivalent to a generalization of an interesting theorem discovered by Neyman [14]. Given any n nonatomic countably additive finite real-valued measures $u_i, i = 1, \dots, n$ defined on a σ -algebra $\mathfrak{U}$ of subsets of a set U , there exists a measurable function f such that $u_i[f^{-1}(-\infty, t)] = tu_i(U)$.

We now show that (5.3) yields a proof of Lyapunov's convexity theorem.

THEOREM 5 (Lyapunov). *The range of a nonatomic vector-valued measure is convex.*

Proof. Let A_1, A_2 be two elements of $\mathfrak{U}$ and let $t_1, t_2 \geq 0$ with $t_1 + t_2 = 1$. Consider the $2n$ -dimensional vector-valued measure m defined on $\mathfrak{U}$ by $m(B) = (u_1(B \cap A_1), u_1(B \cap A_2))$. Lemma 5.3 implies the existence of a set B such that $m(B) = t_1 m(U)$ or, equivalently,

$$u(B \cap A_1) = t_1 u(A_1), \quad u(B \cap A_2) = t_1 u(A_2).$$

Therefore, letting B^c = complement of B in U , we have

$$u(B^c \cap A_2) = u(A_2) - u(B \cap A_2) = (1 - t_1)u(A_2) = t_2 u(A_2).$$

Let $A = (B \cap A_1) \cup (B^c \cap A_2)$. Then

$$u(A) = u(B \cap A_1) + u(B^c \cap A_2) = t_1 u(A_1) + t_2 u(A_2),$$

completing the proof.

COROLLARY 5.4. *For any positive integer k if u is a nonatomic vector-valued measure then the range $R(k)$ of the $n \times k$ matrix-valued function M of k -partitions $P = A_1, \dots, A_k$ defined by $M(P) = (u_i(A_j))$ is convex.*

Proof. Let $A_1, \dots, A_k$ and $A'_1, \dots, A'_k$ be two partitions of U and let $0 < t < 1$. Let m be the $2n \times k$ vector-valued measure determined by the real-valued measures $B \rightarrow (u_i(B \cap A_j), u_i(B \cap A'_j))$ as B ranges over $\mathfrak{U}$. By Theorem 5 there exists a set B such that $u_i(B \cap A_j) = tu_i(A_j)$ and $u_i(B \cap A'_j) = tu_i(A'_j)$. Therefore,

$$u_i(B \cap A_j) = tu_i(A_j), \quad u_i(B^c \cap A'_j) = (1 - t)u_i(A'_j).$$

It follows that if we set $E_j = (B \cap A_j) \cup (B^c \cap A'_j)$, then

$$u_i(E_j) = tu_i(A_j) + (1 - t)u_i(A'_j).$$

The simple verification that $E_1, \dots, E_k$ forms a partition of U completes the proof. (The device of stringing together a number of vector-valued measures is borrowed from Blackwell [2].)

6. Compactness of R . Lyapunov proved not only that the range of a vector-valued measure is convex but also that it is compact. Though the convexity of R was shown to be a simple corollary to Lyapunov's convexity theorem via Blackwell's device, the compactness of R does not follow easily, if at all, from Lyapunov's compactness theorem. Therefore a proof that R is compact will be given here that has the same general pattern as Halmos' presentation of Lyapunov's compactness theorem [10].

Consider first the nonatomic case. We know that R is bounded in the nk -dimensional euclidean space E , and convex by (5.4). For any set R to be closed it of course suffices that $\bar{R} - R$ be empty (where $\bar{R}$ denotes the closure of R). For any convex set R , and any $y \in \bar{R} - R$, there is a supporting hyperplane H of $\bar{R}$ not containing all of R with $y \in H$. To see this let E' be the affine variety generated by R . A standard separation theorem for convex sets implies the existence of a hyperplane of support H' of $\bar{R}$ in E' that contains y . Let H be any hyperplane of E whose intersection with E' is H' . Then H is the desired hyperplane, because $y \in H$, and, since H' is a proper subvariety of E' , there is an $r \in \bar{R}$ not in H' . Certainly $r \in E'$. But $H \cap E' = H'$, so $r \notin H$.

Returning to the general program, it now follows that to show $\bar{R} - R$ is empty, it suffices to show that if H is a supporting hyperplane of $\bar{R}$ not containing all of R , then $\bar{R} \cap H \subset R$. Therefore the proof that R is compact is reduced to establishing the following two propositions

3^o Apêndice: Simulação em Sketchpad

Na tentativa de ilustrar o argumento da bissecção simultânea por uma recta de dois objectos no plano, explicitado na secção 2.2.3, foi elaborado um *sketch* usando o programa de geometria dinâmica *The Geometer's Sketchpad*.

Começamos por programar a bissecção simultânea de dois triângulos, mas muitas foram as dificuldades, à partida inesperadas. Por exemplo, dividir, com uma recta orientada, um triângulo em dois polígonos, colori-los diferentemente e calcular as suas áreas por forma que a variação das figuras se processasse continuamente em função da recta. Note-se que, em particular, a construção deve ser tal que, se a recta rodar 180° em torno de um dos seus pontos, as colorações e as áreas devam, por continuidade, acabar trocadas relativamente à configuração de partida. Estas dificuldades foram sucessivamente resolvidas à custa de múltiplas definições de funções lógicas e construções geométricas elaboradas. Um outro problema foi fazer com que o movimento da recta dependesse de valores de áreas, tendo este sido resolvido recorrendo a uma das limitações do próprio programa: todo e qualquer movimento pára quando surge uma situação de erro.

O *sketch* final resolve o problema proposto: a recta vai-se deslocando até que a solução do problema seja automaticamente encontrada. Nessa posição final, dois triângulos são bissectados (do ponto de vista da área). Se se modificar a forma de um dos triângulos, arrastando um dos seus vértices, a recta entra de novo automaticamente em movimento até encontrar a nova posição de equilíbrio. Nesse movimento, há duas fases (tal como no argumento descrito na secção 2.2.3): uma translação para bissectar um dos triângulos e rotações para bissectar o outro sem desfazer o trabalho anterior.

Para um teste desta rotina utilize-se o *CD* incluído. No caso de se pretenderem detalhes do *sketch* podem consultar-se as descrições de alguns *scripts* elaborados.

Bibliografia

- [B] Boltianski – *The Hilbert's third problem*
Jonh Wiley, N.Y. (1978)
- [C,S] Chinn, Steenrod – *First Concepts of Topology*
Random House, New Mathematical Library (1966)
- [D,S] Dubins, Spanier – *How to cut a cake fairily*
American Mathematical Monthly, 68 (1961) 1-17
- [H] Honsberger – *Mathematical Plums*
Mathematical Association of America (1979)
- [K] Krantz – *Techniques of Problem Solving*
American Mathematical Society (1997)
- [K,N] Krein, Nudelman – *The Borsuk-Ulam Theorem*
Quantum, July/August (2000) 16-20
- [L,W] van Lint, Wilson – *A Course in Combinatorics*
Cambridge University Press (1992)
- [S] Spivak – *Calculus*
Publish or Perish (1994)
- [S,T] Stone, Turkey – *Generalized "Sandwich" Theorems*
Duke Mathematical Journal, Vol. 9 (1942) 356-359

